Латвийский Университет

А. Шостак

ОСНОВЫ ТЕОРИИ НЕЧЕТКИХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Рига 1991

Содержание

Введение

Введенное в 1965 г. Л.Заде [112] понятие нечеткого множества вызвало большой интерес как среди "чистых" математиков, так и среди специалистов, применяющих математические идеи и методы в прикладных задачах. В числе первых, нечеткие множества привлекли внимание топологов. Так, уже в 1968 г. Ц.Чангом была предпринята попытка "привить" понятие нечеткого множества к общей топологии.

Согласно Чангу [16] <u>нечеткое топологическое пространство</u> - это пара $(X, \mathcal{T})$, где X - множество, а $\mathcal{T}$ - семейство его нечетких подмножеств, удовлетворяющее аксиомам: $(1C)$ $0, 1 \in \mathcal{T}$; $(2C)$ если $u, v \in \mathcal{T}$, то $u \wedge v \in \mathcal{T}$ и $(3C)$ если $u_\gamma \in \mathcal{T}$ для всех $\gamma \in \Gamma$, то $\bigvee_\gamma u_\gamma \in \mathcal{T}$.

(Напомним, что нечетким (под)множеством множества X называется отображение $M : X \to I = [0,1]$; при этом число $M(x)$ трактуется как степень принадлежности точки $x \in X$ нечеткому множеству M. Пересечение и объединение нечетких множеств определяются, соответственно, как их инфимум $(\wedge)$ и супремум $(\vee)$. Обычное подмножество $A \subset X$ отождествляется с его характеристической функцией $A : X \to 2 = \{0,1\}$. Постоянное нечеткое множество обозначается той же буквой, что и соответствующая константа. Дополнение нечеткого множества M $(\in I^X)$ определяется равенством $M^c = 1 - M$ $(\in I^X)$.)

Отображение $f : X \to Y$, где $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ - нечеткие топологические пространства, называется непрерывным, если $f^{-1}(V)$ $(:= V \circ f) \in \mathcal{T}_X$ для каждого $V \in \mathcal{T}_Y$. Возникающую в результате категорию обозначаем CFT и называем категорией чанговских нечетких топологических пространств.

Заметив, что во многих ситуациях конкретные свойства интервала оказываются несущественными, а порой и обременительными, Дж.Гоген [35] предложил более общее определение L-нечеткого пространства, где L – произвольная полная ограниченная решетка, получающееся из определения Чанга заменой нечетких множеств на L-нечеткие множества (т.е. на отображения вида $u: X \to L$). Соответствующую категорию обозначаем $CFT(L)$; в частности, $CFT(I) = CFT$.

В настоящее время имеется значительное число публикаций, в которых исследуются L-нечеткие топологические пространства и некоторые близкие к ним объекты. К числу наиболее важных работ этого направления относятся [16], [42]-[49], [15], [66]-[73], [86]-[93], [105]-[108] и др. Однако очерченный выше подход к предмету и задачам нечеткой топологии представляется непоследовательным из-за следующих трех его принципиальных недостатков.

Во-первых, при таком подходе речь идет об обычной структуре τ топологического типа на семействе L^X L-нечетких подмножеств множества X (т.е. $\tau \subset L^X$). Если же быть последовательным, то L-нечеткую топологию на X следует понимать как нечеткую структуру $\mathcal{T}$ топологического типа на L^X (т.е. $\mathcal{T}: L^X \to L$).

Во-вторых, подавляющее большинство авторов ограничивается изучением собственно нечетких топологических пространств, в то время как для нечеткой ситуации принципиальный интерес представляет изучение топологических свойств именно нечетких подмножеств нечетких топологических пространств (в частности, и нечетких подмножеств обычных топологических пространств) – направление, не имеющее содержательного аналога в общей топологии.

Наконец, в-третьих, по аналогии с классической математикой, при описании топологических свойств нечетких топологических пространств, как правило, используется двузначная логика (классификация), в то время как более естественным в данном случае представляется использование L-значных логик (классификаций) (см.напр. [36], [101]).

Развитие новой теории нечетких топологических пространств, свободной от вышеуказанных недостатков и при этом включающей в себя в качестве частных (в известном смысле - четких) случаев и ранее известные подходы к нечеткой топологии, и является основной задачей данной работы.

Предлагаемая теория является результатом синтеза идей и конструкций теории нечетких множеств и предмета общей топологии и в этом смысле она представляет интерес как последовательная, замкнутая в себе и, по-видимому, предельно общая теория.

С точки зрения общей топологии значение работы сводится к следующим моментам. Во-первых, данная теория предлагает новый взгляд на предмет общей топологии, согласно которому общая топология является четким инвариантным ядром развитой здесь теории нечетких топологических пространств. Во-вторых, ряд результатов работы, будучи ограничены на категорию Top топологических пространств, представляет собой альтернативную топологическую теорию для вещественно-значных отображений. В-третьих, данная работа позволяет установить некоторые новые естественные взаимосвязи между общей топологией и другими областями теоретической математики, в частности, теорией линейно-упорядоченных пространств, теорией вероятностей и теорией локалей.

Предлагаемая теория может иметь приложения и в других областях науки. Одному из таких вероятных приложений - а именно, моделированию когнитивных процессов на основе нечетких топологий и нечетких псевдометрик, посвящены работы II4 - II6 , написанные автором данной диссертации совместно с В.Б. Тарасовым (Московский Технический Университет).

Основные результаты работы были изложены на ежегодных научных конференциях Латвийского университета (секция топологии) (I982 - I992 гг.); на ежегодных общемосковских семинарах имени акад. П.С. Александрова (I984-I99I гг.); на Международных Топологических конференциях в Праге (1981 г., 1986 г., 1991 г.), в Ленинграде (1982 г.), в Эгере, Венгрия (1983 г.), в Баку (1987 г.), в Лечче, Италия (1991 г.); на конференции по категорной топологии (Прага, 1988 г.); на международной конференции "Множества и Теоретико-Множественная Топология" (Торонто, Канада, 1987 г.) ; на Восточно-Европейском семинаре по теории категорий и ее приложениям (Предела, Болгария, 1989 г., 1990 г.); на 5 Всесоюзном Тираспольском симпозиуме по общей топологии (1985 г.); на III Международном симпозиуме по нечеткой и интервальной математике (Познань, Польша, 1989 г.); на ежегодном топологическом семинаре Тартаского университета (1984 - 1991 гг.); на математических семинарах Белградского, Загребского и Сараевского университетов, Югославия (1987 г., 1988 г., 1990 г.); на семинаре по алгебре и топологии Бременского университета, Германия (1990 г.); на международном симпозиуме "Приближенные Рассуждения и Нечеткая Математика" в Бехине, Чехословакия (1990г.); на математических семинарах университетов Афин, Патраса и Янины, Греция (1991 г.).

Структура диссертации: Диссертация состоит из введения, главы 0, содержащей предварительные сведения, четырех глав основного текста, списка цитируемой литературы (116 наименований) и списка работ автора по теме диссертации (из 40 работ, включенных в список, 4 написаны в соавторстве).

Переходим к краткому изложению основного содержания диссертации.

Глава 0, подрпзделенная на три параграфа, носит предварительный характер: здесь собраны основные необходимые в дальнейшем определения, конструкции и факты из теории нечетких множеств. Отметим, что большинство результатов § 2, в котором рассматривается отношение $\widetilde{\subset}$ нечеткого включения, и все результаты § 3, в котором вводится понятие нечеткого кардинала и развивается элементарная нечеткая кардинальная арифметика, являются новыми. Приведем здесь определение отношения $\widetilde{\subset}$ и ряд его свойств. Для $M, N \in I^X$ положим $M \widetilde{\subset} N \equiv \inf_x M^c(x) \vee N(x)$ [20]. Если $M, N \in 2^X$, то, очевидно, $M \widetilde{\subset} N = 1 \Leftrightarrow M \subset N$, в противном случае $M \widetilde{\subset} N = 0$. Многие свойства отношения $\widetilde{\subset}$ вполне аналогичны соответствующим свойствам обычного включения. Например, если $M, N, A, B \in I^X$, то $M \vee N \widetilde{\subset} A \vee B \geqslant (M \widetilde{\subset} A) \wedge (N \widetilde{\subset} B)$; для каждого отображения $f: X \to Y$ имеет место неравенство $M \widetilde{\subset} N \leqslant f(M) \widetilde{\subset} f(N)$ и др. Нечеткие кардиналы, необходимые для построения нечеткого аналога теории кардинальных инвариантов, определяются как невозрастающие отображения $\varkappa : K \to I$, где K - класс всех обычных кардиналов, такие, что $\varkappa(0) = 1$ и $\varkappa(\alpha) = 0$ для некоторого $\alpha \in K$; при этом обычный кардинал $\varkappa \in K$ отождествляется с нечетким кардиналом $\widetilde{\varkappa} : K \to I$ таким, что $\widetilde{\varkappa}(\varkappa) = 1$ и $\widetilde{\varkappa}(\varkappa^+) = 0$.

Глава I посвящена общей теории нечетких топологических пространств. В § I вводятся и обсуждаются фундаментальные для работы понятия: нечеткое топологическое пространство и непрерывное отображение нечетких пространств.

Нечеткой топологией на множестве X называется отображение $\mathcal{T} : I^X \to I$, такое, что (I) $\mathcal{T}(0) = \mathcal{T}(1) = 1$; (2) $\mathcal{T}(U \wedge V) \geqslant \mathcal{T}(U) \wedge \mathcal{T}(V)$ для любых $U, V \in I^X$ и (3) $\mathcal{T}(\bigvee_\gamma U_\gamma) \geqslant \bigwedge_\gamma \mathcal{T}(U_\gamma)$ для каждого семейства нечетких множеств $U_\gamma \in I^X$, $\gamma \in \Gamma$. Пара $(X, \mathcal{T})$ называется нечетким [топологическим] пространством. Неравенство $\mathcal{T}(U) \geqslant \alpha$, где $U \in I^X, \alpha \in I$ при этом трактуется как утверждение "степень открытости нечеткого множества U не меньше, чем α ", а неравенство $\mathcal{T}(U^c) \geq \alpha$ – как утверждение "степень замкнутости U не меньше, чем α ".

(В работе в качестве исходного берется определение L-нечеткого пространства, где L – фиксированная полная ограниченная решетка, и значительная часть работы развивается в контексте L-нечетких пространств. Здесь же мы с самого начала ограничиваемся случаем $L = I$, поскольку, с одной стороны, он является основным и наиболее важным, а с другой, тем самым мы избавлены от необходимости накладывать различные дополнительные ограничения на решетку L (как-то: полная дистрибутивность, наличие обращающей порядок инволюции $^c : L \to L$, линейная упорядоченность, сепарабельность и т.п.), которые необходимы для формулировок тех или иных конкретных утверждений в контексте L-нечетких пространств.)

Отображение $f : X \to Y$, где $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ – нечеткие пространства, называется непрерывным, если $\mathcal{T}_X(f^{-1}(V)) \geq \mathcal{T}_Y(V)$ для каждого $V \in I^Y$. Говоря неформально, непрерывными считаются отображения, которые не понижают степени открытости нечетких множеств в сторону прообраза. Нечеткие пространства и их непрерывные отображения образуют категорию FT.

Важный класс образуют ламинированные нечеткие топологические пространства – так мы называем пространства, нечеткая топология которых удовлетворяет следующей более сильной, чем (I) аксиоме

(1^λ) $\mathcal{T}(c) = 1$ для каждой константы $c \in I$.

Полную подкатегорию категории FT, образованную ламинированными пространствами, обозначаем LFT. Важной особенностью ламинированных пространств является то, что все постоянные отображения между такими пространствами непрерывны, и следовательно, множество морфизмов между любыми двумя ламинированными пространствами не пусто.

В § I рассматривается также оператор нечеткого замыкания $\mathcal{C}\ell : I^X \times I \to I^X$ и ряд других фундаментальных для нас понятий.

В § 2 изучаются структурные свойства семейств нечетких топологий. Здесь, в частности, рассматриваются такие конструкции как супремум и инфимум нечетких топологий, переход к инициальной и финальной нечеткой топологиям, а также определяемые с их помощью операции произведения, прямой суммы, перехода к подпространству и факторпространству в нечеткой топологии.

В § 3 изучаются простейшие функторы в категории FT, в т.ч. функтор естественного включения $e : Top \to CFT$ ($\subset FT$), функтор λ-модификации $\lambda : FT \to LFT$ сопоставляющий нечеткому пространству $(X, \mathcal{T})$ нечеткое пространство $(X, \mathcal{T}^\lambda)$, где $\mathcal{T}^\lambda$ - слабейшая ламинированная нечеткая топология, мажорирующая ($\geqslant$) $\mathcal{T}$; функтор ι-модификации, определяемый равенством $\iota(X, \mathcal{T}) = (X, \iota\mathcal{T})$, где $\iota\mathcal{T} = \bigvee_\alpha (\iota\mathcal{T}_\alpha(u) \wedge \alpha)$, $\mathcal{T}_\alpha = \{u^{-1}(\beta, 1] : \beta > 0,\ u \in I^X,\ \mathcal{T}(u) \geqslant \alpha\}$, $\alpha \in (0,1]$ (ι может рассматриваться как функтор $\iota : FT \to FT$, либо как функтор $\iota : FT \to ProTop$); функтор δ-модификации $\delta : Top \to FT$, определяемый равенством $\delta(X, \mathcal{T}) = (X, \delta\mathcal{T})$, где $\delta\mathcal{T}(u) = \bigvee_\alpha (\delta\mathcal{T}_\alpha(u) \wedge \alpha)$, $\delta\mathcal{T}_\alpha(u) = u \,\tilde{=}\, \mathrm{Int}_\alpha u$, $\mathrm{Int}_\alpha u = \vee\{v : v \in I^X,\ v \leqslant u,\ \mathcal{T}(v) \geqslant \alpha\}$ и др. Изучается поведение этих функторов относительно различных операций, в частности, показано, что λ и ι сохраняют операцию произведения. Рассматриваемые в § 3 функторы представляют для нас двойной интерес. Во-первых, будучи ограниченными на те или иные подкатегории категории FT, они устанавливают полезные взаимосвязи между ними. В частности, они осуществляют специального рода вложения Top в FT, позволяя с разных точек зрения рассматривать Top как категорию нечеткой топологии. Во-вторых, эти функторы представляют собой схемы для построения канонических примеров нечетких пространств, а также применяются для доказательства тех или иных фактов нечеткой топологии.

В § 4 исследуются простейшие категорные свойства основных категорий нечеткой топологии. Здесь, в частности, установлена рефлексивность и корефлексивность CFT в FT, а также корефлексивность (но не рефлексивность) категорий LFT, $LCFT$ и $\lambda(Top)$ в FT.

В § 5 описывается локальное строение нечеткого пространства. Существенные отличия нечеткой топологии от классической в этом отношении вызваны отсутствием адекватного аналога понятия точки в нечеткой ситуации. Нечеткая точка, определяемая как отображение вида $x_0^t : X \to I$, где $x_0 \in X$, $t \in (0,1]$ и $x_0^t(x_0) = t$, $x_0^t(x) = 0$ при $x \neq x_0$, по своим свойствам принципиально отличается от обычных точек. Одним из следствий этого является необходимость наряду с отношением принадлежности нечеткой точки нечеткому множеству $x_0^t \tilde{\in} M$ $(:= M(x_0) \geq t)$ рассматривать в известном смысле двойственное к нему отношение q-совпадения нечеткой точки с нечетким множеством $x_0^t q M$ $(:= M(x_0) + t > 1)$ [86]. Центральными в этом параграфе являются теоремы I.5.4, I.5.4$'$, I.5.5, I.5.5$'$, в которых нечеткая топология характеризуется посредством окрестностных и q-окрестностных структур, а также основанное на этих результатах локальное описание оператора замыкания $\mathcal{C}\ell : I^X \times I \to I^X$ (I.5.10).

Теоремы I.5.4$'$, I.5.5$'$. Пусть $(X, \mathcal{T})$ - нечеткое пространство и $\mathcal{X}$ - совокупность всех его нечетких точек. Тогда отображение $Q : \mathcal{X} \times I^X \to I$, определяемое равенством $Q(x_0^t, u) = \sup\{\mathcal{T}(V) : V \leq u, V(x_0) > t^c\}$ (т.н. q-окрестностная структура пространства $(X, \mathcal{T})$) обладает следующими свойствами ($r, p \in \mathcal{X}$, $Q(p,u) := Q_p(u)$):

(1q) если $Q_p(u)>0$, то pqu; (2q) $\sup\{Q_p(u): u\in I^X\} = 1$; (3q) $Q_p(u_1\wedge u_2)\geq Q_p(u_1)\wedge Q_p(u_2)$; (4q) если $u\leq u'$, то $Q_p(u')\geq Q_p(u)$; (5q) $Q_p(u)\leq \sup\limits_{v\leq u} Q_p(v)\wedge(\bigwedge\limits_{rqv} Q_r(v))$. Обратно, если X – множество и отображение $Q : \varkappa\times I^X \to I$ удовлетворяет аксиомам (1q)-(5q), то отображение $\mathcal{T} : I^X\to I$, определенное равенством $\mathcal{T}(u)=\inf\limits_{p\in u} Q_p(u)$, является нечеткой топологией на X, причем соответствующей ей q-окрестностной структурой служит Q.

В § 6 развивается теория сходимости в нечетких пространствах. В основу этой теории положено понятие нечеткой направленности, введенное Пу и Лю [86], и производное понятие структуры сходимости, понимаемой как соответствующим образом определенное отображение $\mathcal{C}_{on}: \mathcal{N}(X)\times I\to I^X$, где $\mathcal{N}(X)$ – класс всех нечетких направленностей пространства X. Центральным результатом этого параграфа является теорема I.6.I4, представляющая собой нечеткий аналог известной теоремы Келли (см., напр., [56] стр.I06-I09).

В § 7 изучается понятие дефекта непрерывности отображения нечетких пространств – существенно нечеткое явление, не имеющее аналогов в классической математике. Дефект непрерывности отображения $f: X\to Y$, где $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ – нечеткие пространства, на уровне $\alpha\in(0,1]$ определяется равенством $cd_\alpha(f)=\sup\limits_{\mathcal{T}_Y(V)\geq\alpha}\sup\limits_{x\in X}(f^{-1}(V)-\mathrm{Int}_\alpha(f^{-1}(V)))(x)$. (В случае отображений обычных топологических пространств для каждого $\alpha\in(0,1]$ дефект непрерывности либо равен нулю – если отображение непрерывно, либо равен единице – в противном случае). Из результатов этого параграфа приведем здесь неравенство $cd_\alpha(g\circ f)\leq cd_\alpha(g)+cd_\alpha(f)$, справедливое для любых отображений $f: X\to Y$, $g: Y\to Z$ (теорема I.7.6), и теорему I.7.8, согласно которой $cd_\alpha(\Delta f_\gamma)=\bigvee\limits_\gamma cd_\alpha(f_\gamma)$, где $\Delta f_\gamma: X\to\prod\limits_\gamma Y_\gamma$ – диагональ семейства отображений $f_\gamma: X\to Y_\gamma$,

$\gamma \in \Gamma$.

Вторая глава диссертации, состоящая из десяти параграфов, посвящена важнейшим конкретным топологическим свойствам нечетких топологических пространств и их нечетких подмножеств. При изложении содержания этой главы мы для простоты предполагаем, что рассматриваемые пространства - чанговские. Изучение топологических свойств произвольного нечеткого пространства ($X, \mathcal{T}$) легко сводится к изучению свойств семейства чанговских пространств $\{(X, \mathcal{T}_\alpha) : \alpha \in (0,1]\}$, где $\mathcal{T}_\alpha = \{u \in I^X : \mathcal{T}(u) \geqslant \alpha\}$. (Техника такого поуровнего представления произвольного нечеткого пространства в виде семейства чанговских пространств разработана в § 2 первой главы.) Кроме того, формулируя определения и результаты главы II, мы, как правило, будем ограничиваться одним частным, но при этом достаточно типичным случаем.

В § I исследуются свойства отделимости в нечетких пространствах. Остановимся здесь на свойствах типа хаусдорфовости. (Линейным) спектром хаусдорфовости нечеткого пространства (X, τ) называется множество $H(X) = \{\beta \in I : \forall x, y \in X, x \neq y, \forall \varepsilon > 0 \ \exists u, v \in \tau$ такие, что $u(x) \geqslant \beta - \varepsilon,\ v(y) \geqslant \beta - \varepsilon,\ u \tilde{\cap} v^c \geqslant \beta - \varepsilon\}$.

<u>Теорема 2.I.8</u>. Если X - произведение нечетких топологических пространств X_i , $i \in \mathcal{J}$, то $\bigcap_i H(X_i) \subset H(X)$.В случае, когда все пространства X_i ламинированы, имеет место равенство $\bigcap_i H(X_i) = H(X)$.

<u>Теорема 2.I.10</u> характеризует спектр хаусдорфовости нечеткого пространства X посредством структуры сходимости $\mathcal{C}on : \mathcal{N}(X) \times I \to I^X$.

<u>Теорема 2.I.I2</u>. Для каждого нечеткого пространства X имеет место равенство $H(X) = Cl(\Delta, X^2)$, где Δ - диагональ в X^2 , а $Cl(M, Y) := \{\beta \in I : \forall \varepsilon > 0 \ \exists w \in \tau_Y$ такое, что $M \tilde{\subset} W^c \geqslant \beta - \varepsilon$ и при этом $W(x) \geqslant \beta - \varepsilon$ как только $M^c(x) \geqslant \beta - \varepsilon\}$ - т.н.

спектр замкнутости нечеткого множества $M \in I^{Y}$ в нечетком пространстве (Y , τ_Y). (По-существу - это нечеткий аналог классической характеристики хаусдорфовых топологических пространств как пространств с замкнутой диагональю.)

Теорема 2.I.I3. Если $f, g : X \to Y$ - непрерывные отображения, то $Cl(E,X) \supset H(X)$, где $E = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$.

В качестве весьма частных случаев результаты этого параграфа содержат в себе теории отделимости, развитые в [86], [87], [88], [9I], [98]-[I00], [6I].

Объектом исследования в § 2 является свойство Е-регулярности. Нечеткое пространство X называется Е-регулярным, где Е - фиксированное нечеткое пространство, если семейство $\hat{C}(X, E)$ всех непрерывных отображений X в E^n ($n \in \mathbb{N}$) разделяет точки и замкнутые нечеткие множества пространства X (т.е. если для любых $x \in X$, $A = \bar{A}$ и $\varepsilon > 0$ найдется $f \in \hat{C}(X, E)$ такое, что $A(x) \geq \geq \overline{f(A)}(f(x) - \varepsilon)$. Показано (следствие 2.2.I9), что X вкладывается в произведение $E^{\varkappa}$, где $\varkappa$ - некоторый кардинал, тогда и только тогда, когда X - Е-регулярное W_0-пространство (т.е. для любых $x, y \in X$, $x \neq y$, найдется $u \in \tau$ такое, что $u(x) \neq u(y)$ - слабейшее условие типа отделимости). Получен ряд характеристик свойства Е-регулярности, в т.ч. и посредством структуры сходимости (теорема 2.2.22). В случае, когда $E = \mathcal{F}(I)$ - нечеткий отрезок (3.I.6), $\mathcal{F}(I)$-регулярность эквивалентна свойству полной регулярности в смысле Хаттона-Катсараса [47], [54] (теорема 2.2.26). Однако концепция Е-регулярности в нечеткой топологии играет значительно большую роль, чем свойство полной регулярности (и чем аналогичное свойство Е-регулярности в общей топологии). Это объясняется, прежде всего, тем, что в нечеткой топологии наряду с нечетким отрезком $\mathcal{F}(I)$ имеется и ряд других "канонических" объектов, в т.ч. нечетко-вероятностный отрезок $\mathcal{M}(I)$ (3.3.I), отрезок Эклунда-Гелера $\mathcal{J}(I)$ [24], отрезок Хеле $\mathcal{H}(I)$ [43] и др., не говоря уже о вариантах этих конструкций в категориях $FT(L)$ (и каждое из этих пространств в соответствующей ситуации может стать "центральным объектом", претендующим на роль пространства E). Отметим также теорему 2.2.30, согласно которой топологическое пространство X E-регулярно ($E \in Top$) тогда и только тогда, когда нечеткое пространство λX λE-регулярно (где λ – функтор λ-модификации).

<u>§ 3</u> посвящен одному из важнейших топологических свойств – свойству компактности. В основу развитой здесь теории положено понятие спектра компактности нечеткого множества M в нечетком пространстве (X, τ). (Линейный) спектр компактности нечеткого множества M может быть определен равенством $C(M) = \{\beta \in I : \forall \mathcal{U} \subset \tau,\ \forall \varepsilon > 0\ ((M \tilde{\le} \vee \mathcal{U} \ge \beta) \Rightarrow (\exists \mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}, |\mathcal{U}_0| < \aleph_0, M \tilde{\le} \vee \mathcal{U}_0 \ge \beta - \varepsilon))\}$. Число $c(M) = \inf(I \setminus C(M))$ называется степенью компактности нечеткого множества M.

<u>Теорема 2.3.6</u>. Пусть X, Y – нечеткие пространства, $M \in I^X$ и $f: X \to Y$ – непрерывно. Тогда $C(M) \subset C(fM)$. (Поведение спектра компактности при отображениях дефекта $\le \alpha$ охарактеризовано в теореме 2.3.6$'$).

<u>Теорема 2.3.7</u>. Пусть $M = \prod_i M_i$ – произведение нечетких подмножеств M_i ($i \in \mathcal{J}$) нечетких топологических пространств X_i. Тогда, если $(\alpha, \beta] \subset \bigcap_i C(M_i)$, то $(\alpha, \beta] \subset C(M)$, а следовательно, $c(M) \ge \inf_i c(M_i)$. Если же при этом все M_i нормированы, то $\bigcap_i C(M_i) \supset C(M)$ и, значит, $c(M) = \inf_i c(M_i)$.

<u>Теорема 2.3.10</u>. Пусть $M, N \in I^X$ и при этом $M^c \in \tau$. Тогда $C(N) \subset C(M \wedge N)$, а следовательно, $c(N) \le c(M \wedge N)$.

<u>Теорема 2.3.18</u>. Пусть $f: X \to Y$ – замкнутое непрерыв-

ное отображение. Тогда $c(f^{-1}(N)) \geqslant c(f) \wedge c(N)$ для каждого $N \in I^Y$, где $c(f) = \inf(I \setminus C(f))$, $C(f) = \bigcap_{y \in Y} C(f^{-1}(y))$.

Предложение 2.3.20. Пусть $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ – замкнутые непрерывные отображения. Тогда $c(g \circ f) \geqslant c(g) \wedge c(f)$.

Теорема 2.3.21. Пусть $M \in I^X$, $\beta \leqslant h(X) \wedge c(M)$, где $h(X) = \sup H(X)$ – степень хаусдорфовости, $y \in X$ и $M(y) \leqslant \beta^c$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся $U, V \in \tau$ такие, что $M \tilde{\subset} U \geqslant \beta - \varepsilon$, $V(y) \geqslant \beta - \varepsilon$ и $U \tilde{\subset} V^c \geqslant \beta - \varepsilon$.

Теорема 2.3.22. Пусть $M, N \in I^X$, $\beta \leqslant h(X) \wedge c(M) \wedge c(N)$ и $M \tilde{\subset} N^c \geqslant \beta$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся $U, V \in \tau$ такие, что $M \tilde{\subset} U \geqslant \beta - \varepsilon$, $N \tilde{\subset} V \geqslant \beta - \varepsilon$ и $U \tilde{\subset} V^c \geqslant \beta - \varepsilon$.

Теорема 2.3.22 и теорема 2.3.26, утверждающая, что при некоторых ограничениях на отделимость пространства X имеет место равенство $ACl(M) \cap (\frac{1}{2}, 1] = C(M) \cap (\frac{1}{2}, 1]$, где $ACl(M) = \{\beta \in I : (Z \supset X,\ \beta \in H(Z)) \Rightarrow \beta \in Cl(M, Z)\}$ – т.н. спектр абсолютной замкнутости нечеткого множества $M \in I^X$, устанавливают "внешний" критерий компактности, использующий связь между свойствами типа компактности данного нечеткого множества и степенью замкнутости его расположения в объемлющем пространстве. При этом данные результаты, как и их хорошо известные четкие прототипы, существенно используют отделимость объемлющего пространства. Однако, особенностью нечеткой топологии является то, что важнейшие нечеткие пространства (часть из которых рассматривается в главе Ш) обладают очень слабыми отделимостными свойствами. Ниже приведены "внешние" характеристики спектра компактности, не использующие никаких свойств отделимости (теоремы 2.3.36, 2.3.37). Предварительно, однако, придется определить понятие спектра относительной замкнутости $RCl(M)$ нечеткого множества M в нечетком пространстве (X, τ):

$RC\ell(M,X)=\{\beta\in I:\ \forall x_0\in X,\ \forall\mathcal{U}\subset\tau, \forall\varepsilon>0, \eta\in(0,\varepsilon]\ ((\bar{M}(x_0)>\beta^c)\ \&$
$\&(M\tilde{\le}\vee\mathcal{U}\ge\beta))\Rightarrow(\exists V\in\tau,\ V(x_0)\ge\beta-\eta,\ \exists\,\mathcal{U}_0\subset\mathcal{U},\ |\mathcal{U}_0|<\aleph_0\ (\forall x$
$(M(x)\ge\beta^c+\varepsilon)\ \&\ (V(x)\ge\beta-\varepsilon)\Rightarrow(\vee\,\mathcal{U}_0(x)\ge\beta-\varepsilon)))\}$.

В работе исследованы свойства спектра $RC\ell(M)$, в частности, получена его характеристика в терминах нечетких направленностей (2.3.29). Важный пример спектра относительной замкнутости установлен в теореме 2.3.34, согласно которой $RC\ell(\mathcal{F}(I),\mathcal{F}(\mathbb{R}))=RC\ell(\mathbb{R},\mathcal{F}(\mathbb{R}))=I$. (Отметим в этой связи, что в нечеткой прямой $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ (3.I.5) вообще нет нетривиальных замкнутых четких подмножеств.)

Теорема 2.3.36. $C(X)\cap RC\ell(M)\subset C(M)\subset RC\ell(M)$, где $M\in I^X$.

Теорема 2.3.37. $\beta\in C(M)$, где $M\in I^X$, тогда и только тогда, когда $\beta\in RC\ell(M,\mathfrak{X})$ для каждого содержащего X нечеткого пространства $\mathfrak{X}$. Таким образом $C(M)=\cap\{RC\ell(M,\mathfrak{X}):\mathfrak{X}\supset X\}$.

В случае, когда исходное пространство X является обычным топологическим, результаты этого параграфа могут интерпретироваться как альтернативная теория компактности для ограниченных вещественнозначных отображений пространства X (ср. [82]). Ключем для такой интерпретации служит:

Теорема 2.3.40. Пусть X – топологическое пространство, $M\in I^X$, $\beta\in I$. Если для всех $\gamma>\beta^c$ множества $M^{-1}[\gamma,1]$ компактны, то $c(M)\ge\beta$. Обратно, если $c(M)\ge\beta$ и M полунепрерывно сверху, то множества $M^{-1}[\gamma,1]$ компактны для всех $\gamma>\beta^c$.

Следствие 2.3.42. Если отображение M совершенно, то $c(M)=1$.

Следствие 2.3.46. Если M полунепрерывно сверху и $c(M)=1$, то множество $M^{-1}(0,1]$ σ-компактно.

В § 4 по аналогии со спектром компактности определяются спектр линделефовости $L(M)$ и спектр счетной компактности $CC(M)$ нечеткого множества M в нечетком пространстве X, а также спектр наследственной линделефовости $HL(X):=\cap\{L(M):M\in I^X\}$

нечеткого пространства $\mathcal{X}$. Из результатов этого параграфа приведем здесь следующие:

<u>Теорема 2.4.7</u>. Пусть $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ – нечеткие пространства, $M \in I^X$, $N \in I^Y$. Тогда $\ell(M \times N) \geq \ell(M) \wedge c(N)$, где $\ell(M) = \inf(I \setminus L(M))$.

<u>Теорема 2.4.20</u>. Пусть (X, τ) – нечеткое пространство и каждое $V \in \tau$ представимо в виде $\bigvee_n M_n = V$, где $M_n^c \in \tau$; тогда $L(X) = HL(X)$. Обратно, если (X, τ) регулярно [2] и $\beta \in HL(X)$, то для каждого $V \in \tau$ такого, что $V \cong V \geq \beta$, найдется последовательность (M_n), где $M_n^c \in \tau$, такая, что $V \cong \bigvee_n M_n \geq \beta$ $(A \cong B := (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A))$.

<u>Теорема 2.4.22</u>. Если X, Y – нечеткие пространства, причем $w(X) \leq \aleph_0$ и $X \neq \emptyset$, то $h\ell(X \times Y) = h\ell(Y)$, где $h\ell(Y) = \inf(I \setminus HL(Y))$.

<u>Теорема 2.4.24</u>. Топологическое пространство (X, τ) наследственно линделефово тогда и только тогда, когда $h\ell(X, \lambda\tau) = [0,1]$.

Отправляясь от характеристики компактов как замкнутых подмножеств тихоновских кубов, Энгелькинг и Мрувка ввели понятие E-компактного топологического пространства, где E – фиксированное T_2-пространство [27]. Изучение нечеткого аналога этого понятия является содержанием первой части <u>§ 5</u>. Отметим, что роль свойства E-компактности в нечеткой топологии отличается от роли ее классического прототипа в общей топологии. В то время, как в общей топологии E-компактность является, прежде всего, интересным обобщением класса компактов (= класса I-компактных пространств), в нечеткой топологии, например, каждый из классов $\mathcal{F}(I)$-компактных, $\mathcal{F}^\lambda(I)$-компактных, $\mathcal{M}(I)$-компактных, наряду со многими другими классами E-компактности, занимает в соответствующей ситуации "центральное" место. Подчеркнем также, что, по сравнению с топологической теорией, теория E-компактности в нечеткой топологии существенно усложняется, в частности, потому, что мы вынуждены отказаться от требования отделимости рассматриваемых пространств.

Нечеткое множество M нечеткого пространства X называется E-компактным, где E - нечеткое пространство, если существует кардинал $\varkappa$ и гомеоморфное вложение $h: X \to E^{\varkappa}$ такие, что $RCl(h(M), E^{\varkappa}) = I$. Пусть K(E) - класс всех E-компактных множеств.

<u>Теорема 2.5.4</u>. Произведение E-компактных множеств E-компактно.

<u>Теорема 2.5.6</u>. Если X - E-регулярное пространство, $w(X) \leq \varkappa$, $\beta \in C(M)$ и пространство E - сильно компактно [32], то существует гомеоморфизм $h: X \to E^{\varkappa}$ такой, что $\beta \in RCl(h(M), E^{\varkappa})$.

<u>Теорема 2.5.9</u>. $K(\mathcal{F}(I)) \cap Top$ есть класс всех компактов; $K(\mathcal{F}(\mathbb{R})) \cap Top$ есть класс всех $\mathbb{R}$-компактных пространств. Если E - сепарабельное метрическое пространство, то $K(\mathcal{M}(E)) \cap Top$ есть класс всех E-компактных топологических пространств.

<u>Теорема 2.5.10</u>. Если X, E - топологические пространства, то $X \in K(E)$ тогда и только тогда, когда $\lambda X \in K(\lambda E)$.

Во второй части § 5 развивается теория E-компактных (в частности, вполне регулярных компактных) расширений нечетких множеств. Основным результатом здесь является конструкция 2.5.14, позволяющая построить все E-компактные расширения данного нечеткого множества M.

В <u>§ 6</u> изучаются свойства типа связности в нечеткой топологии. (Линейным) спектром несвязности нечеткого множества M в нечетком пространстве (X, τ) называется множество $\mathcal{D}(M) := \{\beta \in I: \exists u_1, u_2 \in \tau \ M \tilde{\subset} u_1 < \beta, M \tilde{\subset} u_2 < \beta, M \tilde{\subset} u_1 \vee u_2 \geq \beta; \sup_{M(x)>0} (u_1 \wedge u_2)(x) < \beta\}$; его дополнение $\mathcal{S}(M) = I \setminus \mathcal{D}(M)$ называется спектром связности, а число $s(M) = \inf \mathcal{D}(M)$ - степенью связности нечеткого множества M.

Теорема 2.6.I4. Если $M=\prod_i M_i$ – произведение нечетких множеств M_i, $i\in\mathcal{J}$, то $S(M)\supset\bigcap_i S(M_i)$. Если при этом все M_i нормированы, то $S(M)=\bigcap_i S(M_i)$.

Следствие 2.6.I4. Если X – топологическое пространство и непрерывное отображение $M: X\to I$ монотонно и либо открыто, либо замкнуто, то $S(M)=[0,1]$.

В § 7 вводится понятие нечеткой (псевдо)метрики и изучается проблема метризации нечетких топологий. Нечеткая псевдометрика на множестве X может быть определена как отображение $\rho:\mathfrak{X}\times\mathfrak{X}\to[0,+\infty)$, где $\mathfrak{X}=\{x^t: x\in X, t\in(0,1)\}$, удовлетворяющее условиям

(M0) $\forall x^t\in\mathfrak{X}, \forall\varepsilon>0\quad \exists s>t$ такое, что $\rho(x^t,x^s)<\varepsilon$;

(MI) $\forall x^t\in\mathfrak{X}, \forall s\leq t\quad \rho(x^t,x^s)=0$;

(M2) $\forall x^t,y^s,z^r\in\mathfrak{X}\quad \rho(x^t,z^r)\leq\rho(x^t,y^s)+\rho(y^s,z^r)$ и

(M3) $\forall x^t,y^s\in\mathfrak{X}\quad \rho(x^t,y^s)=\rho(y^s,x^t)$.

Нечеткая псевдометрика ρ, удовлетворяющая аксиоме

(M4) если $x\neq y$ или $t<s$, то $\rho(x^t,y^s)>0$,

называется нечеткой метрикой.

Нечеткая псевдометрика ρ на множестве X порождает на нем нечеткую топологию τ_ρ посредством базы $\mathcal{B}=\{O_\varepsilon(x^t): x^t\in\mathfrak{X}, \varepsilon>0\}$, где $O_\varepsilon(x^t)=\bigvee\{y^s\in\mathfrak{X}:\rho(x^t,y^s)<\varepsilon\}$. Основной результат § 7 – теорема 2.7.I5, содержащая критерий (псевдо)метризуемости нечеткой топологии – своего рода нечеткий аналог метризационного критерия Нагаты–Смирнова.

В § 8 рассматривается класс нечетких кружевных пространств, в известном смысле близкий классу нечетких метризуемых пространств.

В § 9 изучаются кардинальные инварианты нечеткого множества M в нечетком пространстве (X,τ) – такие, как вес w_M, плотность d_M, спред s_M, экстент e_M, число Суслина c_M и число Линделефа ℓ_M. В качестве примера приведем здесь определение веса w_M.

Семейство $\mathcal{B}\subset\mathcal{T}$ называется базой нечеткого множества M, если для каждого $V\in\mathcal{T}$ существуют $\mathcal{B}_V\subset\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}_V\subset\mathcal{B}$ такие, что $M\wedge V=M\wedge(\vee\mathcal{B}_V)$ и $M\wedge V^c=M\wedge(\wedge\mathcal{C}_V^c)$, где $\mathcal{C}_V^c=\{P: P^c\in\mathcal{C}_V\}$. Пусть $w(M)=\min\{\xi\in K:\xi\geqslant\aleph_0\ \exists\,\mathcal{B}\subset\mathcal{T}, |\mathcal{B}|\leqslant\xi$ и $\mathcal{B}$ – база $M\}$. Нечеткий кардинал $w_M: K\to I$, определяемый равенством $w_M(\alpha)=$ $=\sup\{t\in I: w(M\cdot M^{-1}(t,1])\geqslant\alpha\}$, называется весом M. Из результатов этого параграфа отметим следующие:

Теорема 2.9.5. Пусть $M=\prod\limits_i M_i$, $i\in\mathcal{Y}$ – произведение нечетких множеств. Тогда $w_M\leqslant(\bigvee\limits_i w_{M_i})\vee|\mathcal{Y}|$. Если при этом все M_i нормированы, то $\bigvee\limits_i w_{M_i}\leqslant w_M$.

Теоремы 2.9.20, 2.9.27, 2.9.34. Для каждого M справедливы неравенства $w_M\geqslant d_M\geqslant c_M$; $w_M\geqslant l_M$; $w_M\geqslant s_M\geqslant c_M$.

Предложения 2.9.25, 2.9.18. Пусть $M=\prod\limits_i M_i$ – произведение нечетких множеств. Если $c_{\prod\{M_i: i\in\mathcal{Y}_0\}}\leqslant\aleph_0$ для каждого конечного $\mathcal{Y}_0\subset\mathcal{Y}$, то и $c_M\leqslant\aleph_0$. Если при этом все M_i нормированы, то $\bigvee\limits_i c_{M_i}\leqslant c_M$ и $\bigvee\limits_i d_{M_i}\leqslant d_M$.

Несколько особняком стоит последний, десятый параграф главы П. Здесь некоторые топологические свойства нечеткого пространства $(X, \mathcal{T})$ характеризуются как свойства расположения нечеткой топологии $\mathcal{T}$ в тихоновском кубе I^X.

Предложение 2.10.2. Нечеткое пространство $(X,\mathcal{T})$ является T_1-пространством тогда и только тогда, когда $\overline{\mathcal{T}}=I^X$.

Предложение 2.10.4. Если $(X,\mathcal{T})$ – T_1-пространство, то $\mathcal{T}$ открыто в I^X тогда и только тогда, когда $(X,\mathcal{T})$ дискретно.

Предложение 2.1018. Нечеткое пространство $(X,\mathcal{T})$ имеет тесноту $\leqslant\varkappa$ ($\varkappa$ – некоторый кардинал) тогда и только тогда, когда $\mathcal{T}$ замкнуто в пространстве $(I^X, \sup(T_r^{|X|}, T_{l\varkappa}^{|X|}))$, где $T_r^{|X|}$ – произведение $|X|$ копий топологии $T_r=\{(\alpha,1]:\alpha\in I\}\cup\{I\}$, а $T_{l\varkappa}^{|X|}$ –

$\varkappa$-ящичное произведение $|X|$ копий топологии $T_\ell = \{[0,\alpha] : \alpha \in I\} \cup \{\emptyset\}$ на отрезке.

Что следует считать аналогом данного топологического пространства в нечеткой топологии? Определенный ответ на этот вопрос содержится в § 2 первой главы, где были рассмотрены функторы e, λ, δ и др., позволяющие сопоставить топологическому пространству (X, T) нечеткие пространства (X, eT), $(X, \lambda T)$, $(X, \delta T)$. Существенной особенностью этих функторов является то, что они меняют только топологическую структуру, оставляя множество соответствующего пространства неизменным. Однако, будучи определенной копией топологического пространства (X, T), нечеткое пространство вида $(X, \mu T)$ не может, как правило, играть в нечеткой топологии роль, выполняемую пространством (X, T) в Top. В известном смысле объекты вида $(X, \mu T)$ для этого слишком "бедны". Принципиально иной подход к этой проблеме изложен в главе Ш, в которой разрабатываются две общие схемы конструкций нечетких пространств.

<u>Конструкция $\mathcal{F}(X)$ (§ I)</u>. Пусть $(X, <)$ – линейно упорядоченное топологическое пространство и пусть $\mathfrak{X}(X)$ – множество всех невозрастающих функций $\mathfrak{x} : X \to I$ таких, что $\sup \mathfrak{x}(x) = 1$ и $\inf \mathfrak{x}(x) = 0$. Для каждого $x \in X$ положим $\mathfrak{x}(x^-) = \inf\limits_{t<x} \mathfrak{x}(t)$ и $\mathfrak{x}(x^+) = \sup\limits_{t>x} \mathfrak{x}(t)$ введем отношение эквивалентности $\sim$ на $\mathfrak{X}(X)$, положив $\mathfrak{x} \sim \mathfrak{x}' \Leftrightarrow \mathfrak{x}(x^-) = \mathfrak{x}'(x^-)$ и $\mathfrak{x}(x^+) = \mathfrak{x}'(x^+)$ для всех $x \in X$. Пусть $\mathcal{F}(X)$ – множество всех классов эквивалентности $[\mathfrak{x}]$, т.е. $\mathcal{F}(X) = \mathfrak{X}(X)/\sim$. Введем нечеткую топологию σ на $\mathcal{F}(X)$ посредством предбазы $\{r_a, \ell_b : a, b \in \mathbb{R}\}$, где $r_a[\mathfrak{x}] = \mathfrak{x}(a^+)$ и $\ell_b[\mathfrak{x}] = 1 - \mathfrak{x}(b^-)$. Получающееся т.о. нечеткое пространство $(\mathcal{F}(X), \sigma)$ обозначаем $\mathcal{F}(X)$.

Важнейшими примерами использования этой конструкции являются пространства $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ и $\mathcal{F}(I)$, изоморфные, соответственно, нечеткой прямой (3.I.5) и нечеткому отрезку (3.I.6), а также их ламинированные версии $\mathcal{F}^{\lambda}(\mathbb{R})$ и $\mathcal{F}^{\lambda}(I)$. Подчеркнем, что пространства $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ и $\mathcal{F}(I)$ неоднократно использовались в главе II при изучении свойств типа компактности и отделимости нечетких топологических пространств.

Предложение 3.I.7. Отображение $h : X \to \mathcal{F}(X)$, определенное равенством $h(a) = [\dot{x}_a]$, где $x_a = \{x : x \leq a\}$, является гомеоморфным вложением топологического пространства $(X, T_<)$ в нечеткое пространство $\mathcal{F}(X)$.

Пусть $f : (X, <_x) \to (Y, <_y)$ - неубывающее непрерывное отображение. Для каждого $x \in \mathcal{X}(\dot{X})$ определим отображение $f^*(x) = u :$ $Y \to I$ равенством $u(y) = \inf\limits_{f(x) \leq y} x(x)$ и положим $\hat{f}([x]) = [f^*(x)]$.

Теорема 3.I.IO. Для каждого неубывающего отображения $f : X \to Y$ отображения $\hat{f} : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$ и $\hat{f} : \mathcal{F}^{\lambda}(X) \to \mathcal{F}^{\lambda}(Y)$ непрерывны.

Отсюда легко следует, что конструкции $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}^{\lambda}$ могут рассматриваться как функторы из категории Ord линейно-упорядоченных пространств и неубывающих отображений в категорию CFT (теорема 3.I.I3).

В § 2 изучается связь между свойствами пространств $(X, <)$ и $\mathcal{F}(X)$. Приведем здесь некоторые результаты такого типа.

Теорема 3.2.I. $w(\mathcal{F}(X)) = w(X)$. Если при этом $|X| \geq \aleph_0$, то $w(\mathcal{F}^{\lambda}(X)) = w(X)$.

Теорема 3.2.3. Если X ограничено, то пространства $\mathcal{F}(X)$ и $\mathcal{F}^{\lambda}(X)$ сильно компактны. Обратно, если $\mathcal{F}(X)$ или $\mathcal{F}^{\lambda}(X)$ сильно компактно, то X ограничено.

Теорема 3.2.6. Если X неограничено, то $cf(X) = \ell(\mathcal{F}(X)) = \ell(\mathcal{F}^{\lambda}(X))$, где $cf(X) = \min\{|Y| : Y \subset X,\ Y$ неограничено в $X\}$ - конфинальный характер пространства Y. (Следовательно, $\ell(\mathcal{F}(X)) \leq \ell(X)$ и, в частности, пространства $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ и $\mathcal{F}^{\lambda}(\mathbb{R})$ линделефовы.)

Теорема 3.2.I8. Следующие свойства эквивалентны: (I) X метризуемо; (2) $\mathcal{F}(X)$ является кружевным; (3) $\mathcal{F}^{\lambda}(X)$ является кружевным.

Следствие 3.2.19. Если X метризуемо, то пространства $\mathcal{F}(X)$ и $\mathcal{F}^{\lambda}(X)$ совершенно нормальны. В частности, $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ и $\mathcal{F}^{\lambda}(\mathbb{R})$ совершенно нормальны (что является ответом на вопрос Родабауха [93]).

Конструкция $\mathcal{M}_{\xi}(X)$ (§ 3). Пусть (X, T) - топологическое пространство, $\mathcal{B}$ - σ-алгебра его борелевских множеств и $\mathcal{M}$ - множество всех вероятностных мер на X (т.е. σ-аддитивных отображений $p : \mathcal{B} \to I$ таких, что $p(X)=1$). Рассмотрим некоторое семейство ξ полунепрерывных снизу отображений пространства X в I и пусть τ_{ξ} - нечеткая топология на $\mathcal{M}$, порожденная предбазой $\{\delta_u : u \in \xi\} \subset I^{\mathcal{M}}$, где $\delta_u(p) = \int\limits_X u\,dp$. Получающееся при этом нечеткое топологическое пространство обозначаем $\mathcal{M}_{\xi}(X)$ или просто $\mathcal{M}_{\xi}$.

Основными специальными случаями конструкции $\mathcal{M}_{\xi}$ являются $\mathcal{M}_T$ (т.е. $\xi = T$) и $\mathcal{M}_{\lambda T}$ (т.е. $\xi = \lambda T$ - совокупность всех полунепрерывных снизу отображений X в I).

Если отображение $f : (X, T_X) \to (Y, T_Y)$ непрерывно, то, положив $\hat{f}(p)(E) = p(f^{-1}(E))$, где $p \in \mathcal{M}(X)$ и $Y \in \mathcal{B}(Y)$, получаем непрерывные отображения $\hat{f} : \mathcal{M}_{T_X} \to \mathcal{M}_{T_Y}$ и $\hat{f} : \mathcal{M}_{\lambda T_X} \to \mathcal{M}_{\lambda T_Y}$ (теорема 3.2.3), что позволяет рассматривать $\mathcal{M}_T$ и $\mathcal{M}_{\lambda T}$ как функторы из категории Top в категорию CFT.

Теорема 3.3.7. Пусть (X, T) - топологическое T_0-пространство и σ - нечеткая топология на X такая, что $\iota\sigma = T$. Тогда отображение $h : (X, \sigma) \to \mathcal{M}_{\xi}(X)$, определяемое равенством $h(x) = p_x$, где p_x - мера, вырожденная в точке x, является гомеоморфным вложением тогда и только тогда, когда ξ - предбаза нечеткой топологии σ. В частности, отображения $h : (X, T) \to \mathcal{M}_T(X)$ и $h : (X, \lambda T) \to \mathcal{M}_{\lambda T}(X)$ являются гомеоморфными вложениями.

Описана связь между изучаемыми здесь нечеткими топологиями и т.н. слабой топологией, играющей важную роль в теории вероятностных мер [4], [10], [104]. Показано, в частности, что для совершенно нормального пространства (X, T) топологии $\iota\tau_T$ и $\iota\tau_{\lambda T}$ совпадают со слабой топологией на $\mathcal{M}(X)$. При этом, однако, нечеткие топологии вида τ_ξ позволяют значительно тоньше характеризовать $\mathcal{M}(X)$ и его подмножества, чем это возможно сделать при традиционном подходе на основе слабых топологий. Например:

<u>Следствие 3.3.11</u>. Если (X, T) - совершенно нормальное T_1-пространство и $T \subset \xi \subset \lambda T$, то для каждой гладкой меры p имеет место равенство $\bar{\mathfrak{D}}^\xi(p) = \{p\{x\} : x \in X\}$, где $\bar{\mathfrak{D}}^\xi$ - замыкание множества $\mathfrak{D} = \{p_x : x \in X\}$ в $\mathcal{M}_\xi$ (Т.о. значение замыкания $\bar{\mathfrak{D}}^\xi$ в точке p равно максимальному из значений меры p в ее атомах.)

<u>Следствие 3.3.12</u>. Если (X, T) - сепарабельное метрическое пространство, то $\bar{\mathfrak{D}}^\xi(p) = \sup\{p\{x\} : x \in X\}$ для каждой меры p (При традиционном подходе можно утверждать только замкнутость $\mathfrak{D}$ в слабой топологии [10].)

В <u>§ 4</u> изучается связь топологических свойств пространства $\mathcal{M}_\xi(X)$ с топологическими свойствами исходного пространства (X, T).

Приведем основные полученные в этом направлении результаты.

<u>Следствие 3.4.7</u>. Если (X, T) - T_1-пространство и $\xi \subset \lambda T$, то $d(\mathcal{M}_\xi(X)) \leqslant d(X, T)$.

<u>Следствие 3.4.11</u>. Если (X, T) - T_0-пространство и $\xi \subset \lambda T$, то $d(K_\xi(X)) \leqslant d(X, T)$, где $K_\xi(X)$ - подпространство в $\mathcal{M}_\xi(X)$, образованное всеми двузначными мерами.

<u>Теорема 3.4.19</u>. Для каждого нормального пространства (X, T) следующие условия эквивалентны: (1) (X, T) счетно компактно; (2) $\mathcal{M}_T(X)$ счетно компактно; (3) $\mathcal{M}_{\lambda T}(X)$ счетно компактно; (4) $\mathcal{M}_T(X)$ компактно; (5) $\mathcal{M}_{\lambda T}(X)$ компактно.

<u>Теорема 3.4.21, 3.4.23</u>. Если пространство (X, T) совершенно нормально, то нечеткое пространство $\mathcal{M}_{\lambda T}(X)$ (β, β)-хаусдорфово

для всех $\beta > 0$ (т.е. $\forall p, q \in \mathcal{M}(X)\ \exists u, v \in \mathcal{T}_{\lambda T}$ такие, что $u(p) > \beta$, $V(q) > \beta$ и $u \wedge v \leq \beta$). С другой стороны, при $|X| > 1$ $\mathcal{M}_{\lambda T}(X)$ не является $(0,0)$-хаусдорфовым.

Теорема 3.4.24. Если (X, T) - топологическое пространство, $|X| > 1$ и $\xi \subset \lambda T$, то $\mathcal{M}_\xi(X)$ не является даже (γ, β)-T_0-пространством ни при каких $\gamma < \beta$ (т.е. $\forall \beta, \gamma \in I$ $\exists p, q \in \mathcal{M}(X)$ такие, что если $u \in \mathcal{T}$ и $u(p) > \beta$, то $u(q) > \gamma$).

В § 5 исследуется связь между конструкциями $\mathcal{M}_\xi(X)$ и $\mathcal{F}(X)$. Здесь, в частности, установлены следующие факты:

Следствие 3.5.3. Если X - линейно-упорядоченное пространство счетного характера и без изолированных точек, то пространства $\mathcal{F}(X)$ и $\mathcal{M}_\Pi(X)$, где $\Pi = \{\{x : x < b\}, \{x : x > a\} : a, b \in X\}$, гомеоморфны. Аналогично, гомеморфными являются и пространства $\mathcal{F}^\lambda(X)$ и $\mathcal{M}_{\lambda\Pi}(X)$. (Соответствующий гомеоморфизм $\varphi : \mathcal{M}_\Pi(X) \to \mathcal{F}(X)$ может быть задан равенством $\varphi(p) = [\mathfrak{z}_p]$, где $p \in \mathcal{M}(X)$, а $\mathfrak{z}_p : X \to I$ - функция, определяемая равенством $\mathfrak{z}_p(x) = p\{y : y \geq x\}$ - т.е. каждой вероятностной мере сопоставляется соответствующая функция распределения [13].)

Следствие 3.5.4. Если X - линейно-упорядоченное пространство счетного веса и без изолированных точек, то $\mathcal{F}(X)$ и $\mathcal{M}_T(X)$ гомеоморфны. Аналогично, гомеоморфными являются и пространства $\mathcal{F}^\lambda(X)$ и $\mathcal{M}_{\lambda T}(X)$.

Несколько особое место в работе занимает глава IУ. В то время как в остальной части работы мы изучали категорию $FT(L)$ при фиксированной решетке L, нередко ограничиваясь при этом важнейшим частным случаем $L = I$, и ее основные подкатегории (CFT, $LCFT$ и др.), объектом изучения в главе IУ является определяемая в § I т.н. обобщенная категория нечетких пространств GFT, содержащая L-нечеткие пространства для различных L. Точнее, объектами категории GFT служат четверки $(X, L, \mathcal{T}, K)$, где X - множество, L и K - ограниченные sup-полные решетки, а $\mathcal{T}: L^X \to K$ - отображение, удовлетворяющее аксиомам, совершенно аналогичным аксиомам (I)-(3), рассмотренным при изложении содержания главы I. Морфизмами категории GFT служат тройки $(f, \varphi, \psi): (X_1, L_1, \mathcal{T}_1, K_1) \to (X_2, L_2, \mathcal{T}_2, K_2)$, где $f: X_1 \to X_2$, $\varphi: L_2 \to L_1$ и $\psi: K_2 \to K_1$ - отображения, причем φ и ψ сохраняют произвольные супремумы и конечные инфимумы, и $\mathcal{T}_1(\varphi \circ V \circ f) \geq \psi(\mathcal{T}_2(V))$ для каждого $V \in L_2^{X_2}$ (своего рода условие непрерывности). Естественным образом определяется гомеморфизм в GFT.

В § 2 категории нечеткой топологии, изучаемые в главах I-Ш, и некоторые другие (как новые, так и встречающиеся в литературе) категории описываются как подкатегории категории GFT. Например, фундаментальная для нас категория $FT(L)$ может быть охарактеризована как подкатегория $GFT(L, \mathcal{E}_L)$ в GFT, объекты которой имеют вид $(X, L, \mathcal{T}, L)$, а морфизмы имеют вид $(f, \mathcal{E}_L, \mathcal{E}_L): (X_1, L, \mathcal{T}_1, L) \to (X_2, L, \mathcal{T}_2, L)$, где $\mathcal{E}_L: L \to L$ - тождественное отображение. (Подчеркнем, что $FT(L)$ не является полной в GFT). Полную подкатегорию категории GFT, объекты которой имеют вид $(X, L, \mathcal{T}, 2)$, обозначим $GCFT(L)$. Категория $CFT(L)$ чанговских L-нечетких пространств может быть охарактеризована теперь как подкатегория в GFT, являющаяся пересечением категорий $GFT(L, \mathcal{E}_L)$ и $GCFT(L)$. Интерес представляет также полная подкатегория $GHFT$ категории GFT, объекты которой имеют вид $(*, L, \mathcal{T}, K)$, где $*$ - одноточечное множество. Подкатегория категории $GHFT$, объекты $(*, L, \mathcal{T}, 2)$ которой удовлетворяют дополнительному условию $\mathcal{T} \equiv 1$, естественным образом изоморфна категории локалей Loc [50], [5I], - тем самым нечеткая топология может рассматриваться как теория, объединяющая как теоретико-множественную топологию, так и теорию локалей.

В § 3 исследуются основные операции в категории GFT. Подчеркнем, что их определения имеют отличия принципиального характера от определений соответствующих операций в категориях вида $FT(L)$. Для примера приведем здесь определение произведения в GFT.

Пусть $\{L_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ – семейство ограниченных sup-полных решеток, и пусть $L = \otimes L_\gamma$ – множество, элементами которого служат подмножества $a \subset \prod\{L_\gamma^+ : \gamma \in \Gamma\}$ такие, что I) если $t \in a$ и $s \leq t$, то $s \in a$ и 2) если $b \subset L_\gamma$ и $b = \prod_\gamma b_\gamma \subset a$, то и $\beta = (\beta_\gamma)_\gamma \subset a$, где $\beta_\gamma = sup\, b_\gamma$. Отношением $a \leq b \Leftrightarrow a \subset b$, где $a, b \in L$, множество L превращается в ограниченную sup-полную решетку. (Например, если для каждого $\gamma \in \Gamma$ $L_\gamma = 2^{Z_\gamma}$, где Z_γ – некоторое множество, то $\otimes L_\gamma = 2^{\prod Z_\gamma}$.) Равенством $\mathcal{I}_{\gamma_0}(t_{\gamma_0}) = \{s \in \prod L_\gamma^+ : s_{\gamma_0} \leq t_{\gamma_0}\}$ определяется отображение $\mathcal{I}_{\gamma_0} : L_{\gamma_0} \to L$.

Рассмотрим теперь семейство $\{(X_\gamma, L_\gamma, \mathcal{T}_\gamma, K_\gamma) : \gamma \in \Gamma\} \in Ob(GFT)$ и положим $X = \prod_\gamma X_\gamma$, $L = \otimes_\gamma L_\gamma$, $K = \otimes_\gamma K_\gamma$. Пусть $\mathcal{T} : L^X \to K$ – (L, K)-нечеткая топология, инициальная для семейства $(p_\gamma, \mathcal{I}_\gamma, \xi_\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$, где $p_\gamma : X \to X_\gamma$ – отображение проектирования, а $\mathcal{I}_\gamma : L_\gamma \to L$ и $\xi_\gamma : K_\gamma \to K$ определены по аналогии с тем, как в предыдущем абзаце. Получающееся таким образом нечеткое пространство $(X, L, \mathcal{T}, K)$ называется произведением пространств $(X_\gamma, L_\gamma, \mathcal{T}_\gamma, K_\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$.

Важно подчеркнуть, что каждое утверждение о произведении в GFT содержит совершенно иную информацию, чем аналогичное утверждение в категориях вида $FT(L)$. Одной из причин этого является тот факт, что при произведении в GFT происходит изменение решетки. Более того, $\otimes_\gamma L_\gamma \approx L$, где $L_\gamma = L$ для всех $\gamma \in \Gamma$, тогда и только тогда, когда $L = 2$. Отсюда, в частности, следует, что для обычных топологических пространств обычное произведение совпадает с произведением в GFT (а значит, и с произведением в любой ее подкатегории) - одно из проявлений "инвариантности" общей топологии в нечеткой топологии.

В ряде случаев использование операций в категории GFT позволяет получить дополнительную информацию и для категорий вида $FT(L)$. Примером этого служит п.4.3.7, результаты которого позволяют исследовать подпространства L-нечетких пространств (т.е. подпространства объектов категории $FT(L)$) на основе L-нечетких подмножеств.

В §4 изучается проблема алгебраической определимости нечеткого топологического пространства. Ограничиваясь для простоты случаем категории $GCFT$., заметим, что в этой ситуации для объектов можем использовать запись (X, L, τ), а для морфизмов - запись $(f, \mu):(X_1, L_1, \tau_1) \to (X_2, L_2, \tau_2)$. Плоткинской полугруппой пространства (X, L, τ) назовем произведение $P(X, L, \tau) = C(X, L, \tau) \times L^X$, где $C(X, L, \tau)$ - полугруппа эндоморфизмов пространства (X, L, τ), наделенное операцией ".", определяемой равенством $(f_1, \mu_1, u_1)\cdot(f_2, \mu_2, u_2) = (f_2 \circ f_1, \mu_1 \circ \mu_2, u_2 \circ f_1)$, где $(f_1, \mu_1, u_1), (f_2, \mu_2, u_2) \in$ $\in P(X, L, \tau)$. (Впервые полугруппа такого типа рассматривалась Б. Плоткиным в теории алгебраических автоматов [83].) Положив $(f_1, \mu_1, u_1) < (f_2, \mu_2, u_2)$ тогда и только тогда, когда $f_1 = f_2$, $\mu_1 = \mu_2$ и $u_1 \leq u_2$, зададим отношение частичного порядка на $P(X, L, \tau)$. Две полугруппы $P(X_1, L_1, \tau_1)$ и $P(X_2, L_2, \tau_2)$ назовем ω-изоморфными, если существует изоморфизм $\sigma : P(X_1, L_1, \tau_1) \to P(X_2, L_2, \tau_2)$ такой, что $\sigma(C(X_1, L_1, \tau_1) \times \tau_1) = C(X_2, L_2, \tau_2)$ и $(f, \mu, u_1) < (f, \mu, u_2)$ тогда и только тогда, когда $\sigma(f, \mu, u_1) = \sigma(f, \mu, u_2)$.

<u>Теорема 4.4.3</u>. Ламинированные нечеткие пространства (X_1, L_1, τ_1) и (X_2, L_2, τ_2) гомеоморфны тогда и только тогда, когда их плоткинские полугруппы $P(X_1, L_1, \tau_1)$ и $P(X_2, L_2, \tau_2)$ ω-изоморфны.

Развитая здесь теория может быть применена и для исследований в категориях вида $CFT(L)$. Назовем ω-изоморфизм $\sigma : P(X_1, L_1, \tau_1) \to P(X_2, L_2, \tau_2)$ жестким, если $\sigma(\delta_{X_1}, \delta_L, \alpha) = (\delta_{X_2}, \delta_L, \alpha)$ для каждого $\alpha \in L$.

<u>Теорема 4.4.6</u>. Ламинированные L-нечеткие пространства (X_1, L, τ_1) и (X_2, L, τ_2) гомеоморфны тогда и только тогда, когда $P(X_1, L, \tau_1)$ и $P(X_2, L, \tau_2)$ жестко изоморфны.

В последнем, пятом параграфе развивается теория компактности в категориях типа GFT : на этом примере можно проследить некоторые особенности конкретных топологических теорий в категориях типа GFT по сравнению с соответствующими теориями в категориях типа $FT(L)$. В качестве примера приведем следующее утверждение:

<u>Теорема 4.5.9</u>. Пусть $(X, L, \mathcal{T}, K)$ - произведение нечетких пространств $(X_\gamma, L_\gamma, \mathcal{T}_\gamma, K_\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$. Тогда, если $(X, L, \mathcal{T}, K)$ α-компактно для некоторого $\alpha \in K$, то каждое $(X_\gamma, L_\gamma, \mathcal{T}_\gamma, K_\gamma)$ α_γ-компактно для всех $\alpha_\gamma \in K_\gamma$ таких, что $\xi_\gamma(\alpha_\gamma) \geq \alpha$. Обратно, если каждое $(X_\gamma, L_\gamma, \mathcal{T}_\gamma, K_\gamma)$ α_γ-компактно для некоторого $\alpha_\gamma \in K_\gamma$, то $(X, L, \mathcal{T}, K)$ α-компактно для всех $\alpha \geq \bigvee \xi_\gamma(\alpha_\gamma)$.

Глава 0. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

§ I. НЕЧЕТКИЕ МНОЖЕСТВА

(0.I.I) Нечеткие множества. Пусть X – некоторое множество. Следуя Л.Заде [II2], нечетким (под)множеством в X называем отображение $M : X \to I := [0,1]$. При этом значение $M(x)$ интерпретируется как степень принадлежности точки $x \in X$ нечеткому множеству M, а обычное подмножество $A \subset X$ отождествляется со своей характеристической функцией $A = \chi_A : X \to \{0,1\} =: 2$. Совокупность всех нечетких подмножеств множества X обозначаем I^X, а совокупность всех его обычных подмножеств обозначаем 2^X.

(0.I.2) Операции над нечеткими множествами (см., напр., [II2], [34], [8I]). Пусть $\mathcal{M} = \{M_i : i \in \mathcal{J}\} \subset I^X$ – семейство нечетких множеств в X. Под объединением и пересечением этого семейства понимаем, соответственно, его супремум $\vee\mathcal{M} := \vee\{M_i : i \in \mathcal{J}\}$ и инфимум $\wedge\mathcal{M} := \wedge\{M_i : i \in \mathcal{J}\}$. Дополнение нечеткого множества M определяется равенством $M^c := 1 - M$. Для семейства $\mathcal{M} \subset I^X$ положим $\mathcal{M}^c := \{M^c : M \in \mathcal{M}\}$.

Если для каждого $\gamma \in \Gamma$ M_γ – нечеткое подмножество некоторого множества X_γ, то произведением этих нечетких множеств будем называть нечеткое подмножество M множества $X = \prod_\gamma X_\gamma$, определенное равенством $M(x) = \bigwedge_\gamma M_\gamma(x_\gamma)$.

Замечание. Ясно, что, если ограничиться обычными множествами, то введенные выше операции объединения, пересечения, дополнения и произведения сводятся к соответствующим классическим операциям. Ясно также, что приведенные выше определения не являются единственно возможными продолжениями классических определений на нечеткий случай. Так, например, объединение и пересечение двух нечетких множеств $M, N \in I^X$ можно определить также равенствами $\max\{M+N, 1\}$ и $M \cdot N$ соответственно (ясно, что эти определения также индуцируют соответствующие классические определения в случае обычных множеств). В литературе по нечеткой математике и, в особенности, по ее прикладным вопросам используется и ряд других "естественных" определений (см., напр., [I], [55], [59], [60]). Однако, в исследованиях по нечеткой топологии и, в частности, в данной работе, операции над нечеткими множествами понимаются всегда так, как они введены в начале данного пункта. Из числа важных преимуществ этих определений отметим их универсальность, т.е. применимость для любой нечеткой решетки (0.I.5), а также то, что объединение, пересечение и произведение определяются сразу для произвольного семейства нечетких множеств.

<u>Замечание 2</u>. Введенные выше операции связаны многими важными соотношениями, вполне аналогичными фундаментальным соотношениям между теоретико-множественными операциями. Так, например, если $\mathcal{M}, \mathcal{N} \subset I^X$, то $(\vee\mathcal{M})\wedge(\vee\mathcal{N}) = \vee\{M\wedge N : M\in\mathcal{M}, N\in\mathcal{N}\}$, $(\wedge\mathcal{M})\vee(\wedge\mathcal{N}) = \wedge\{M\vee N : M\in\mathcal{M}, N\in\mathcal{N}\}$; (законы бесконечной дистрибутивности); $(\vee\mathcal{M})^c = \wedge\mathcal{M}^c$; $(\wedge\mathcal{M})^c = \vee\mathcal{M}^c$ (законы де Моргана) и т.п.

<u>Замечание 3</u>. Подчеркнем, однако, что дополнение $M \to M^c$ не является "настоящим" дополнением, т.е. дополнением в смысле теории решеток (см., напр., [II]). Действительно, взяв, например, $M = \frac{1}{3}$, имеем $M\vee M^c = \frac{2}{3} \neq 1$, $M\wedge M^c = \frac{1}{3} \neq 0$. Ловен [70] рассматривал различные подходы к определению операции дополнения для нечетких множеств, в т.ч. и аксиоматические, и установил невозможность согласованного (в смысле сохранения важнейших соотношений) продолжения операций объединения, пересечения и дополнения на класс всех нечетких множеств с условием, чтобы продолженное "дополнение" действительно являлось бы дополнением в смысле теории

решеток. Этот факт является, кстати, одной из причин, вызывающих существенные отличия математики нечетких множеств и, в частности, нечеткой топологии, от соответствующих разделов классической математики.

(0.I.3) <u>Образы и прообразы нечетких множеств</u>. Пусть X, Y – множества и $f : X \to Y$ – отображение. Образ $f(M) \in I^Y$ нечеткого множества $M \in I^X$ определяется равенством $f(M)(y) = \sup_{x \in f^{-1}(y)} M(x)$ ($\sup \emptyset := 0$). Прообраз $f^{-1}(N) \in I^X$ нечеткого множества $N \in I^Y$ определяется равенством $f^{-1}(N)(x) = f \circ N(x)$. Свойства образов и прообразов нечетких множеств вполне аналогичны свойствам образов и прообразов обычных множеств. В частности, $f^{-1}(\bigvee_i N_i) = \bigvee_i f^{-1}(N_i)$ и $f^{-1}(\bigwedge_i N_i) = \bigwedge_i f^{-1}(N_i)$ для произвольного семейства нечетких множеств $\{N_i : i \in J\} \subset I^Y$ (см., напр., [106]).

Если $f : X \to Y$ – отображение, то, положив $\hat{f}(M) := f(M)$ для каждого $M \in I^X$, получаем отображение $\hat{f} : I^X \to I^Y$ (это т.н. принцип продолжения Заде [112]).

(0.I.4) <u>L-нечеткие множества</u>. Заметив, что при работе с нечеткими множествами многие свойства отрезка I оказываются несущественными, а порой и обременительными, Гоген [34] ввел понятие L-нечеткого множества, где L – произвольная решетка с минимальным 0 и максимальным I элементами. L-нечетким (под)множеством в X называется отображение $M : X \to L$. В частности, I-нечеткое множество в X – это "классическое" нечеткое множество в X (0.I.I), а 2-нечеткое множество в X – это, по-существу, обычное его подмножество. Совокупность всех L-нечетких подмножеств множества X обозначаем L^X.

(0.I.5) <u>Нечеткие решетки</u>. Хотя определение L-нечеткого множества имеет смысл для произвольной решетки L, в нечеткой топологии, как правило, ограничиваются использованием т.н. нечетких решеток. Следуя Хаттону [48], нечеткой решеткой называем полную вполне дистрибутивную решетку с минимальным 0 и максимальным I элементами, $0 \neq I$, на которой задана обращающая порядок инволюция $\alpha \to \alpha^c$ (т.е. $\alpha, \beta \in L$, $\beta \leq \alpha \Rightarrow \alpha^c \leq \beta^c$). В частности, задав на решетках L и I инволюцию равенством $\alpha^c := 1 - \alpha$ и наделив их естественным порядком, можем рассматривать их как нечеткие решетки. Важным примером нечеткой решетки является также булева алгебра всех подмножеств некоторого непустого множества Z. В дальнейшем через L всегда, если не оговорено противное, обозначаем нечеткую решетку. По аналогии с тем, как это сделано в (0.I.2) и (0.I.3), для L -нечетких множеств определяются операции объединения, пересечения и дополнения, а также операции взятия образа и прообраза. При этом все сказанное в (0.I.2) и (0.I.3) остается верным и для случая L -нечетких множеств, где L - произвольная нечеткая решетка. Подчеркнем, что, если инволюция $\alpha \to \alpha^c$ в нечеткой решетке L является (настоящим) дополнением, или ортодополнением, т.е. $\alpha \vee \alpha^c = 0$ и $\alpha \wedge \alpha^c = 1$ для любого $\alpha \in L$, то и соответствующим образом определенная операция дополнения для L -нечетких множеств является ортодополнением, т.е. $M \wedge M^c = 0$ и $M \vee M^c = 1$ для любого $M \in L^X$.

(0.I.6) <u>L^X как нечеткая решетка</u>. Для произвольной нечеткой решетки L множество L^X, будучи наделенным отношением частичного порядка $\leq$, само, очевидно, можно рассматривать как нечеткую решетку.

Отношение $\leq$ на L^X часто трактуется как <u>отношение включения</u> для L -нечетких множеств: если $M, N \in L^X$, $M \leq N$, то M считается нечетким подмножеством нечеткого множества N.

§ 2. ОТНОШЕНИЕ НЕЧЕТКОГО ВКЛЮЧЕНИЯ

Наряду с отношением включения для нечетких множеств (0.I.6) в нечеткой топологии (как и в некоторых других разделах нечеткой математики) значительную роль играет также отношение нечеткого включения, введенное (независимо) в [20] и в [2I].

(0.2.I) Определение. Для $M, N \in I^X$ положим $M \tilde{\subset} N = \inf_x M^c(x) \vee \vee N(x)$, и пусть $M \cong N = (M \tilde{\subset} N) \wedge (N \tilde{\subset} M)$.

Ясно, что $0 \leqslant M \tilde{\subset} N \leqslant 1$. Число $M \tilde{\subset} N$ трактуется как степень того, насколько нечеткое множество M содержится в нечетком множестве N, а число $M \cong N$ – как степень равенства множеств M и N. Если $M, N \subset X$, то, очевидно, $M \tilde{\subset} N = 1$ тогда и только тогда, когда M является подмножеством N; в противном случае $M \tilde{\subset} N = 0$.

Ниже мы приводим ряд свойств нечеткого отношения $\tilde{\subset} : I^X \times I^X \to I$, которыми неоднократно будем пользоваться в дальнейшем. В частном случае, когда все рассматриваемые множества четкие, приведенные утверждения сводятся к очевидным фактам из элементарной теории множеств. Доказательства этих утверждений состоят в непосредственной проверке, и поэтому мы их опускаем.

(0.2.2) Предложение. Пусть $M, N, A, B \in I^X$, $M \leqslant N$ и $A \geqslant B$. Тогда $M \tilde{\subset} A \geqslant N \tilde{\subset} B$.

(0.2.3) Предложение. Пусть $M, N \in I^X$. Тогда $M \tilde{\subset} N = N^c \tilde{\subset} M^c$.

(0.2.4) Предложение. Для произвольных M, N, A и $B \in I^X$ имеет место неравенство $M \vee N \tilde{\subset} A \vee B \geqslant (M \tilde{\subset} A) \wedge (N \tilde{\subset} B)$.

(0.2.5) Предложение. Пусть $A, B, M \in I^X$. Тогда $A \wedge B \tilde{\subset} M^c = A \tilde{\subset} (M \wedge B)^c$.

(0.2.6) <u>Предложение</u>. Пусть $f: X \to Y$; $M, N \in I^X$. Тогда $M \tilde{\subset} N \leqslant f(M) \tilde{\subset} f(N)$. Другими словами, степень включения образов нечетких множеств не меньше, чем степень включения самих множеств.

(0.2.7) <u>Предложение</u>. Пусть $f: X \to Y$; $M, N \in I^Y$. Тогда $M \tilde{\subset} N \leqslant f^{-1}(M) \tilde{\subset} f^{-1}(N)$. Другими словами, степень включения прообразов нечетких множеств не меньше, чем степень включения самих множеств.

(0.2.8) <u>Предложение</u>. Пусть $f: X \to Y$, $M, N \in I^X$, $D \in I^Y$. Тогда $M \wedge N \tilde{\subset} f^{-1}(D) \geqslant f(M) \wedge f(N) \tilde{\subset} D$.

(0.2.9) <u>Предложение</u>. Пусть $A, B_i \in I^X$, где $i \in \mathcal{J}$. Тогда $A \tilde{\subset} \bigwedge_i B_i \geqslant \bigwedge_i (A \tilde{\subset} B_i)$.

(0.2.10) <u>Предложение</u>. Пусть $A, B, C \in I^X$ и $A \tilde{\subset} B > \frac{1}{2}$, $B \tilde{\subset} C > 1/2$. Тогда $A \tilde{\subset} C \geqslant (A \tilde{\subset} B) \wedge (B \tilde{\subset} C)$.

§ 3. НЕЧЕТКИЕ КАРДИНАЛЫ И МОЩНОСТИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

В последние годы рядом авторов предпринимались попытки сравнения нечетких множеств по мощностям и, соответственно, попытки введения понятия нечеткого кардинала (см., напр., [110], [111]). Однако, серьезным недостатком всех известных нам подходов к этому вопросу является применимость их только в случае нечетких подмножеств <u>конечных</u> множеств. В топологии же, как в обычной, так и в нечеткой, как правило, приходится иметь дело именно с бесконечными множествами. Поэтому возникает необходимость измерения мощности для произвольных нечетких множеств. В данном параграфе мы вводим общее понятие нечеткого кардинала, изучаем основные свойства нечетких кардиналов и применяем их для сравнения нечетких множеств по мощностям.

Пусть X, Y – множества, $M \in I^X$, $N \in I^Y$.

(0.3.1) <u>Определение</u>. Нечеткие множества M и N будем называть равномощными и писать при этом $M \approx N$, если $|M^{-1}(t,1]| = |N^{-1}(t,1]|$ для каждого $t \in [0,1]$.

Ясно, что отношение $\approx$ является эквивалентностью на классе всех нечетких множеств. Легко убедиться в справедливости следующих двух предложений.

(0.3.2) <u>Предложение</u>. $M \approx N$ тогда и только тогда, когда для каждого $t \in (0,1]$ и каждого $s < t$ $|M^{-1}(t,1]| \leq |N^{-1}(s,1]|$ и $|M^{-1}(s,1]| \geq |N^{-1}(t,1]|$.

(0.3.3) <u>Предложение</u>. Пусть для каждого $i \in \mathcal{J}$ X_i и Y_i – множества, $M_i \in I^{X_i}$, $N_i \in I^{Y_i}$ и $M_i \approx N_i$. Тогда, если $X_{i'} \cap X_i = \emptyset$ при $i \neq i'$, то $\bigvee_i M_i \approx \bigvee_i N_i$ и $\prod_i M_i \approx \prod_i N_i$.

Пусть K – класс всех кардиналов, упорядоченных естественным порядком $\leq$.

(0.3.4) <u>Определение</u>. Нечетким кардиналом называется отображение $\varkappa : K \to I$, удовлетворяющее следующим условиям: (I) $\varkappa$ не возрастает; (2) $\varkappa(0)=1$; (3) $\varkappa(\alpha)=0$ для некоторого $\alpha \in K$.

Класс всех нечетких кардиналов обозначим $\mathfrak{K}$. На $\mathfrak{K}$ естественно возникает отношение частичного порядка $\leq$. Нетрудно заметить, что, используя терминологию § I главы Ш с незначительным изменением, класс $\mathfrak{K}$ нечетких кардиналов может быть отождествлен с конструкцией $\mathcal{F}(K)$.

Отождествляя нечеткий кардинал $\varkappa : K \to I$ с некоторым его ограничением вида $\varkappa : K_\alpha \to I$, где α - кардинал такой, что $\varkappa(\alpha)=0$, а K_α - отрезок кардиналов, ограниченный кардиналом α, можем каждый раз считать, что нечеткий кардинал $\varkappa$ задан не на классе всех кардиналов K, а на некотором множестве кардиналов K_α.

Сопоставляя каждому кардиналу $\lambda \in K$ нечеткий кардинал $\widetilde{\lambda} \in K$, определенный равенствами $\widetilde{\lambda}(\mu)=1$ при $\mu \leq \lambda$ и $\widetilde{\lambda}(\mu)=0$ при $\mu > \lambda$, где $\mu \in K$, класс обычных кардиналов K можем рассматривать как подкласс класса всех нечетких кардиналов $\mathfrak{K}$.

Сопоставим каждому нечеткому множеству $M \in I^X$ нечеткий кардинал $\varkappa_M$ ("мощность" нечеткого множества M), определяемый равенством $\varkappa_M(\alpha) = \sup\{t : |M^{-1}(t,1]| \geq \alpha\}$, $\alpha \in K$ $(\sup \emptyset := 0)$.
Легко заметить, что это определение корректно и что имеет место равенство $\varkappa_M(\alpha) = \sup\{t : |M^{-1}[t,1]| \geq \alpha\}$.

(0.3.5) <u>Предложение</u>. $M \approx N$ тогда и только тогда, когда $\varkappa_M = \varkappa_N$.

<u>Доказательство</u>. Если $M \approx N$, то, очевидно, $\varkappa_M = \varkappa_N$. Обратно, предположим, что $M \not\approx N$ и пусть (для определенности) $t \in [0,1)$ таково, что $|M^{-1}(t,1]| =: \alpha < \beta := |N^{-1}(t,1]|$. Если при этом $cf(\beta) \neq \omega_0$, то найдется $t' > t$ такое, что $|N^{-1}(t',1]| = \beta$, а следовательно, $\varkappa_N(\beta) \geq t'$. Поскольку, с другой стороны, $\varkappa_M(\beta) < t$,

то $\varkappa_M \neq \varkappa_N$.

В случае, если $cf(\beta) = \omega_0$, то существует кардинал γ такой, что $\alpha < \gamma < \beta$. Но тогда, как нетрудно заметить, найдется $t' > t$ такое, что $|N^{-1}(t', 1]| \geq \gamma$, а следовательно, $\varkappa_N(\gamma) \geq t'$. Поскольку, с другой стороны, $\varkappa_M(\gamma) < t'$, вновь заключаем, что $\varkappa_M \neq \varkappa_N$.

Нетрудно доказать также следующее утверждение:

(0.3.6) <u>Предложение</u>. Если $M \leq N$, то $\varkappa_M \leq \varkappa_N$.

(0.3.7) <u>Предложение</u>. Для каждого нечеткого кардинала $\varkappa : K \to I$ существует нечеткое множество $M : X \to I$ такое, что $\varkappa_M = \varkappa$.

<u>Доказательство</u>. Представим $\varkappa$ в виде $\varkappa : K_{\aleph_\xi} \to I$, где ξ - некоторый ординал, а $\aleph_\xi$ - соответствующий алеф, и пусть $X := T(\omega_\xi)$ - множество всех ординалов, меньших чем ординал ω_ξ. Определим нечеткое множество $M : X \to I$ следующим образом: $M(0) := \varkappa(0) = 1$, $M(1) := \varkappa(1)$, ..., $M(\omega_\eta) := \varkappa(\aleph_\eta)$ для каждого $\eta < \xi$; если же $\lambda \in K_{\aleph_\xi}$ и $\lambda \neq \omega_\eta$ ни для какого $\eta < \xi$, то рассмотрим ординал $\eta(\lambda) := \min\{\eta : \lambda < \omega_\eta\}$ и положим $M(\lambda) := \varkappa(\omega_{\eta(\lambda)})$. Нетрудно заметить, что для определенного таким образом нечеткого множества M имеем $\varkappa_M = \varkappa$.

<u>Замечание</u>. Пусть $M : X \to I$. Методом, использованным при доказательстве этого предложения, построим нечеткое множество $\hat{\varkappa}_M : T(\omega_\xi) \to I$, соответствующее нечеткому кардиналу $\varkappa_M$. Ясно, что $\hat{\varkappa}_M \approx M$ и $\varkappa_M = \varkappa_{\hat{\varkappa}_M}$. Если $N : Y \to I$ - другое нечеткое множество, то $\varkappa_M \leq \varkappa_N$ тогда и только тогда, когда $\hat{\varkappa}_M \leq \hat{\varkappa}_N$.

(0.3.8) <u>Сумма нечетких кардиналов</u>. Пусть $\varkappa$, λ - нечеткие кардиналы. Определим их сумму $\varkappa \oplus \lambda$ равенством

$$\varkappa \oplus \lambda(\alpha) = \sup\{(\varkappa(\beta) \wedge \lambda(\gamma)),\ \beta + \gamma \geq \alpha\},$$

где α, β, $\gamma \in K$.

Аналогично для произвольного семейства нечетких кардиналов

$\{\varkappa_i : i\in J\}$ определим сумму $\oplus_i \varkappa_i$ равенством

$$\oplus_i \varkappa_i(\alpha) = \sup\{\wedge_i \varkappa_i(\alpha_i) : \Sigma\alpha_i \geqslant \alpha\}.$$

Заметим, что нечеткий кардинал $\tilde{0}$ играет при этом определении роль нуля (т.е. $\varkappa\oplus\tilde{0} = \tilde{0}\oplus\varkappa = \varkappa$ для каждого $\varkappa\in K$). Легко заметить также, что, если $\{\varkappa_i : i\in J\}$ и $\{\lambda_i : i\in J\}$ – два семейства нечетких кардиналов и $\varkappa_i \leqslant \lambda_i$ для каждого $i\in J$, то $\oplus_i \varkappa_i \leqslant \oplus_i \lambda_i$.

(0.3.9) <u>Предложение</u>. Для произвольного семейства (обычных) кардиналов $\{\mu_i : i\in J\}$ имеет место равенство $\widetilde{\sum_i \mu_i} = \oplus_i \tilde{\mu}_i$.

<u>Доказательство</u>. Если $\alpha \leqslant \Sigma\mu_i$, то $\oplus_i \tilde{\mu}_i(\alpha) = \sup\{\wedge_i \tilde{\mu}_i(\alpha_i) : \Sigma\alpha_i \geqslant \alpha\} \geqslant \wedge_i \tilde{\mu}_i(\mu_i) = 1$. Если же $\alpha > \Sigma\mu_i$, то, очевидно, $\oplus_i \tilde{\mu}_i(\alpha) = 0$. Таким образом, в каждом из этих случаев имеет место равенство $\oplus\tilde{\mu}_i(\alpha) = \widetilde{\Sigma\mu_i}(\alpha)$.

(0.3.10) <u>Предложение</u>. Пусть $M_i\in I^{X_i}$ ($i\in J$) и при этом при различных i , i' множества X_i и $X_{i'}$ не пересекаются. Тогда $\varkappa_{\vee M_i} = \oplus_i \varkappa_{M_i}$.

<u>Доказательство</u>.вытекает из следующей цепочки равенств:

$$\varkappa_{\vee M_i}(\alpha) = \sup\{t : |(\vee M_i)^{-1}(t,1]| \geqslant \alpha\} = \sup\{t : |\cup M_i^{-1}(t,1]| \geqslant \alpha\} =$$

$$= \sup_{\Sigma\alpha_i \geqslant \alpha} \sup\{t : |M_i^{-1}(t,1]| \geqslant \alpha_i\} = \sup_{\Sigma\alpha_i \geqslant \alpha} \wedge_i \varkappa_{M_i}(\alpha_i) = \oplus\varkappa_{M_i}(\alpha).$$

Воспользовавшись коммутативностью и ассоциативностью операции суммы для обычных кардиналов, легко устанавливаем коммутативность и ассоциативность операции суммы для нечетких кардиналов. Точнее, имеют место следующие утверждения:

(0.3.11) <u>Предложение</u>. Пусть $\{\varkappa_i : i\in J\}$ – некоторое семейство нечетких кардиналов и $\varphi : J \to J$ – произвольная биекция. Тогда имеет место равенство $\oplus_i \varkappa_i = \oplus_i \varkappa_{\varphi(i)}$. В частности, если $J = \{1,2\}$, то $\varkappa_1\oplus\varkappa_2 = \varkappa_2\oplus\varkappa_1$.

(0.3.12) <u>Предложение</u>. Пусть $\{\varkappa_i : i\in J\}$ – некоторое семейство нечетких множеств и множество $\mathcal{J}$ представлено в виде объединения $\mathcal{J}=\bigcup_{s\in S}\mathcal{J}_s$, где $\mathcal{J}_s\cap\mathcal{J}_{s'}=\emptyset$ при $s\neq s'$. Тогда $\bigoplus_{i\in\mathcal{J}}\varkappa_i = \bigoplus_{s\in S}(\bigoplus_{i\in\mathcal{J}_s}\varkappa_i)$. В частности, при $\mathcal{J}=\{1,2,3\}$ отсюда следует, что

$$(\varkappa_1\oplus\varkappa_2)\oplus\varkappa_3 = \varkappa_1\oplus(\varkappa_2\oplus\varkappa_3).$$

(0.3.13) <u>Произведение нечетких кардиналов</u>. Пусть $\varkappa$, λ – нечеткие кардиналы. Определим их произведение равенством

$$(\varkappa\odot\lambda)(\alpha)=\sup_{\beta\gamma\geqslant\alpha}(\varkappa(\beta)\wedge\lambda(\gamma)) \quad \text{, где } \alpha,\beta,\gamma\in K.$$

Аналогично, для произвольного семейства нечетких кардиналов $\{\varkappa_i : i\in\mathcal{J}\}$ определим произведение $\bigodot_i\varkappa_i$ равенством

$$\bigodot_i\varkappa_i(\alpha)=\sup\{\bigwedge_i\varkappa_i(\alpha_i) : \prod_i\alpha_i\geqslant\alpha\}.$$

Заметим, что нечеткий кардинал $\tilde{1}$ играет при таком определении роль единицы (т.е. $\varkappa\odot\tilde{1}=\tilde{1}\odot\varkappa=\varkappa$ для каждого $\varkappa\in K$). Легко заметить также, что, если $\{\varkappa_i : i\in\mathcal{J}\}$ и $\{\lambda_i : i\in\mathcal{J}\}$ – два семейства нечетких кардиналов и $\varkappa_i\leqslant\lambda_i$ для каждого $i\in\mathcal{J}$, то $\bigodot_i\varkappa_i\leqslant\bigodot_i\lambda_i$.

(0.3.14) <u>Предложение</u>. Для произвольного семейства $\{\mathfrak{M}_i : i\in\mathcal{J}\}$ обычных кардиналов имеет место равенство $\widetilde{\prod_i\mathfrak{M}_i}=\bigodot_i\tilde{\mathfrak{M}}_i$.

<u>Доказательство</u>. Если $\alpha\leqslant\prod\mathfrak{M}_i$, то $\bigodot\tilde{\mathfrak{M}}_i(\alpha)=\sup\{\bigwedge_i\tilde{\mathfrak{M}}_i(\alpha_i) : \prod\alpha_i\geqslant\alpha\}\geqslant\bigwedge_i\tilde{\mathfrak{M}}_i(\mathfrak{M}_i)=1$. Если же $\alpha>\prod\mathfrak{M}_i$, то, очевидно, $\bigodot_i\tilde{\mathfrak{M}}_i(\alpha)=0$.

(0.3.15) <u>Предложение</u>. Пусть для каждого $i\in\mathcal{J}$ $M_i\in I^{X_i}$. Тогда $\varkappa_{\prod_i M_i}=\bigodot_i\varkappa_{M_i}$.

<u>Доказательство</u> вытекает из следующей цепочки равенств:

$$\varkappa_{\prod M_i}(\alpha)=\sup\{t : |(\prod M_i)^{-1}(t,1]|\geqslant\alpha\}=\sup_{\prod\alpha_i\geqslant\alpha}\sup\{t : \forall i\ |M_i^{-1}(t,1]|\geqslant\alpha_i\}=$$
$$=\sup_{\prod\alpha_i\geqslant\alpha}(\bigwedge_i\varkappa_{M_i})(\alpha_i)=\bigodot\varkappa_{M_i}(\alpha).$$

Воспользовавшись коммутативностью и ассоциативностью операции произведения для обычных кардиналов, легко устанавливаем коммутативность операции произведения для нечетких кардиналов. Точнее, имеют место следующие утверждения:

(0.3.16) Предложение. Пусть $\{\varkappa_i : i\in J\}$ – некоторое семейство нечетких кардиналов и $\varphi : J \to J$ – некоторая биекция. Тогда имеет место равенство $\bigodot_i \varkappa_i = \bigodot_i \varkappa_{\varphi(i)}$. В частности, если $J=\{1,2\}$, то $\varkappa_1 \odot \varkappa_2 = \varkappa_2 \odot \varkappa_1$.

(0.3.17) Предложение. Пусть $\{\varkappa_i : i\in J\}$ – некоторое семейство нечетких множеств и множество J представлено в виде объединения $J=\bigcup_{s\in S} J_s$, где $J_s \cap J_{s'} = \emptyset$ при $s\neq s'$. Тогда $\bigodot_{i\in J} \varkappa_i = \bigodot_{s\in S}(\bigodot_{i\in J_s} \varkappa_i)$. При $J=\{1,2,3\}$ отсюда, в частности, следует, что $(\varkappa_1\odot\varkappa_2)\odot\varkappa_3 = \varkappa_1\odot(\varkappa_2\odot\varkappa_3)$.

(0.3.18) Предложение. Пусть $\{\varkappa_i : i\in J\}$ – семейство нечетких кардиналов и λ – нечеткий кардинал. Тогда $(\bigoplus_i \varkappa_i)\odot\lambda = \bigoplus_i(\varkappa_i\odot\lambda)$. В частности, при $J=\{1,2\}$ отсюда следует, что $(\varkappa_1\oplus\varkappa_2)\odot\lambda = (\varkappa_1\odot\lambda)\oplus(\varkappa_2\odot\lambda)$.

Доказательство. Воспользовавшись утверждением (0.3.7), найдем для каждого $i\in J$ нечеткое множество $M_i : X_i \to I$ такое, что $\varkappa_{M_i} = \varkappa_i$ и нечеткое множество $N : Y \to I$ такое, что $\varkappa_N = \lambda$. Согласно (0.3.10) имеем $\varkappa_{\bigvee_i M_i} = \bigoplus_i \varkappa_{M_i}$, а отсюда, согласно (0.3.15), заключаем, что $\varkappa_{(\bigvee M_i)\times N} = (\bigoplus_i \varkappa_i)\odot\lambda$. С другой стороны, действуя аналогично, но применяя сначала (0.3.15), а затем (0.3.10), приходим к равенству $\varkappa_{\bigvee(M_i\times N)} = \bigoplus_i(\varkappa_i\odot\lambda)$. Для завершения доказательства осталось воспользоваться очевидным равенством $(\bigvee_i M_i)\times N = \bigvee_i (M_i\times N)$.

(0.3.19) Операция степени для нечетких кардиналов. Пусть $\varkappa$, λ – нечеткие кардиналы. Определим их степень равенством

$$\varkappa^\lambda(\alpha) = \sup_{\beta^\gamma\geqslant\alpha} (\varkappa(\beta)\wedge\lambda(\gamma)) \qquad (\alpha,\beta,\gamma\in K).$$

Ясно, что, если $\varkappa\leqslant\mu$ и $\lambda\leqslant\gamma$, то $\varkappa^\lambda\leqslant\mu^\gamma$ $(\varkappa,\lambda,\mu,\gamma\in K)$.

(0.3.20) Предложение. Если $\mu, \nu\in K$, то $\widetilde{\mu}^{\widetilde{\nu}} = \widetilde{\mu^\nu}$.

Доказательство. Непосредственно из определений ясно, что

$$\widetilde{\mu}^{\widetilde{\nu}}(\alpha) = \sup_{\beta^\gamma\geqslant\alpha}(\widetilde{\mu}(\beta)\wedge\widetilde{\nu}(\gamma)) \geqslant \widetilde{\mu}(\mu)\wedge\widetilde{\nu}(\nu) = 1 \quad \text{при } \alpha\leqslant\mu^\nu \quad \text{и}$$

$\tilde{\mu}^{\tilde{\nu}}(\alpha) = 0$ при $\alpha > \mu^{\nu}$, откуда и следует доказываемое равенство.

Воспользовавшись известными свойствами операции степени для обычных кардиналов (см., напр., [65], стр.151), нетрудно установить аналогичные свойства операции степени для нечетких кардиналов. Наиболее важные из них собраны в следующем предложении:

(0.3.21) Предложение. Для произвольных нечетких кардиналов $\varkappa, \lambda, \theta$ имеют место равенства:

$$\varkappa^{\lambda \oplus \theta} = \varkappa^{\lambda} \odot \varkappa^{\theta}$$

$$(\varkappa \odot \lambda)^{\theta} = \varkappa^{\theta} \odot \lambda^{\theta}$$

$$(\varkappa^{\lambda})^{\theta} = \varkappa^{\lambda \odot \theta}$$

$$\varkappa^{\tilde{1}} = \varkappa$$

$$\tilde{1}^{\varkappa} = 1$$

(0.3.22) О нечетких ординалах. По аналогии с нечеткими кардиналами могут быть введены и нечеткие ординалы. Точнее, пусть W - класс всех ординалов, наделенный естественным порядком. Нечетким ординалом назовем невозрастающее отображение $\omega : W \to I$ такое, что $\omega(0) = 1$ и $\omega(\alpha) = 0$ для некоторого $\alpha \in W$. Класс всех нечетких ординалов обозначим Ω. Естественным образом W можно (с точностью до изоморфизма) рассматривать как подкласс класса Ω. По аналогии с тем, как это было сделано для нечетких кардиналов, для нечетких ординалов можно определить операции суммы, произведения и возведения в степень, продолжающие соответствующие операции для обычных ординалов и обладающие "естественными" свойствами.

Глава I. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ НЕЧЕТКИХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Введение

(I.0.I) Нечеткие топологические пространства: подход Чанга. Как уже отмечалось, первое определение нечеткого топологического пространства было дано Чангом [I6]. Согласно Чангу, нечеткое топологическое пространство - это пара (X, τ), где X - множество, а τ - нечеткая топология на нем, т.е. некоторое семейство его нечетких подмножеств ($\tau \subset I^X$), удовлетворяющее следующим трем аксиомам:

(I) $0, 1 \in \tau$;

(2) если $U, V \in \tau$, то $U \wedge V \in \tau$;

(3) если $U_i \in \tau$ для всех $i \in \mathcal{J}$, то $\bigvee_i U_i \in \tau$.

Отображение $f: X \to Y$, где (X, τ_X), (Y, τ_Y) - нечеткие топологические пространства, называется непрерывным, если $f^{-1}(V) \in \tau_X$ для каждого $V \in \tau_Y$.

Нечеткие топологические пространства и непрерывные отображения образуют категорию, которую обозначим CFT и будем называть категорией [чанговских] нечетких [топологических] пространств. (Здесь и в дальнейшем в квадратные скобки заключаются слова, которые будут опускаться в случаях, когда это не должно вызвать недоразумения).

Нечеткое подмножество A нечеткого пространства (X, τ) называется замкнутым, если $A^c \in \tau$; положим $\tau^c := \{A^c : A \in \tau\}$ (0.I.2). Легко проверяется, что (I^c) $0, 1 \in \tau^c$; (2^c) если $A, B \in \tau^c$, то $A \vee B \in \tau^c$; (3^c) если $A_i \in \tau^c$ для всех $i \in \mathcal{J}$, то $\bigwedge_i A_i \in \tau^c$. Наименьшее замкнутое нечеткое множество $\bar{M} \in I^X$, содержащее (0.I.6) нечеткое множество $M \in I^X$, называется замыканием M, а наибольшее открытое (т.е. принадлежащее τ) нечеткое множество

$\mathrm{Int}\, M \in I^X$, содержащееся в M , называется внутренностью M . Основные свойства операций замыкания и внутренности в нечетких пространствах совершенно аналогичны соответствующим свойствам замыкания и внутренности в топологических пространствах. Например, $\bar{M} = \wedge\{A: A \in \mathcal{T}^c, A \geq M\}$; $\overline{M \vee N} = \bar{M} \vee \bar{N}$; $\overline{M \wedge N} \leq \bar{M} \wedge \bar{N}$; $\bar{\bar{M}} = \bar{M}$ для любых $M, N \in I^X$ (см., например, [106]).

Семейство $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ называется базой нечеткой топологии $\mathcal{T}$, если каждое $U \in \mathcal{T}$ представимо в виде $U = \vee \mathcal{V}_U$ для некоторого семейства $\mathcal{V}_U \subset \mathcal{B}$ [106]. Семейство $\mathcal{P} \subset \mathcal{T}$ называется предбазой нечеткой топологии $\mathcal{T}$, если совокупность $\mathcal{B}$ всевозможных конечных пересечений нечетких множеств из $\mathcal{P}$ является базой нечеткой топологии $\mathcal{T}$.

(I.0.2) L-нечеткие топологические пространства: подход Гогена. Обобщая определение Чанга, Гоген [35] вводит понятие L-нечеткого топологического пространства:

Пусть L - произвольная (фиксированная) нечеткая решетка (0.I.4). [Чанговским] L-нечетким топологическим пространством называем пару $(X, \mathcal{T})$, где X - множество, а $\mathcal{T}$ - L-нечеткая топология на нем, т.е. некоторое семейство его L-нечетких подмножеств $(\mathcal{T} \subset L^X)$, удовлетворяющее аксиомам (I)-(3) из предыдущего пункта.

L-нечеткие пространства и их непрерывные отображения (а непрерывность понимается здесь так же, как и в (I.0.I)) образуют категорию $CFT(L)$. Ясно, что $CFT(I)$ есть категория CFT , а $CFT(2)$ есть (с точностью до очевидного изоморфизма) категория топологических пространств Top . Все сказанное в (I.0.I) переносится и на случай L-нечетких пространств.

(I.0.3) Ламинированные нечеткие топологические пространства: подход Ловена. В 1976 г. Ловен [66] предложил новое определение нечеткого топологического пространства, отличающееся от определения Чанга тем, что вместо аксиомы (I) в нем используется аксиома

(I^{λ}) τ содержит все константы $c \in I$.

В дальнейшем такие пространства называем <u>ламинированными [чанговскими] нечеткими [топологическими] пространствами</u>. Категорию ламинированных пространств и их непрерывных отображений (а непрерывность Ловен понимает так же, как в (I.0.I)) обозначаем $LCFT$.

Существенная особенность ламинированных нечетких пространств состоит в том, что постоянные отображения таких пространств непрерывны (т.е. являются морфизмами в $LCFT$) [66]. Отметим также, что на одноточечном множестве $*$ существует континуум чанговских нечетких топологий, но только одна из них ламинирована ($\tau = I^*$). Отсюда Ловен и Уитс [74] делают вывод, что $LCFT$, в отличие от CFT, является топологической в смысле Херрлиха [38] категорией.

Чанговское L-нечеткое пространство естественно назвать <u>ламинированным</u>, если его L-нечеткая топология содержит все константы $c \in L$. Нетрудно заметить, что $LCFT(2) = CFT(2)$ и с точностью до изоморфизма - это категория Top.

(I.0.4) <u>Некоторые выводы</u>. Известным недостатком всех рассмотренных выше подходов к определению нечеткой топологии является непоследовательность в использовании идеи нечеткости. В каждом из них нечеткая топология - это <u>обычное подмножество семейства</u> всех <u>нечетких</u> (или <u>L-нечетких</u>) <u>подмножеств</u> данного множества (т.е. $\tau \subset L^X$ или, другими словами, $\tau \in 2^{L^X}$). Нами разработан более последовательный подход к использованию идеи "нечеткости" в топологии, согласно которому под нечеткой топологией понимается уже некоторое L-нечеткое подмножество $\mathcal{T}$ семейства L^X L-нечетких подмножеств множества X (т.е. $\mathcal{T}: L^X \to L$ или, другими словами $\mathcal{T} \in L^{L^X}$). Изложению основ этого подхода и посвящена настоящая глава.

§ I. L-НЕЧЕТКИЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

(I.I.I) <u>L-нечеткая топология и L-нечеткое топологическое пространство</u>. L-нечеткой топологией на множестве X называется отображение $\mathcal{T} : L^X \to L$, удовлетворяющее следующим условиям:

(I) $\mathcal{T}(0) = \mathcal{T}(1) = 1$;

(2) $\mathcal{T}(U \wedge V) \geq \mathcal{T}(U) \wedge \mathcal{T}(V)$ для любых $U, V \in L^X$;

(3) $\mathcal{T}(\bigvee_i U_i) \geq \bigwedge_i \mathcal{T}(U_i)$ для каждого семейства $\{U_i : i \in \mathcal{I}\} \subset L^X$.

Пара $(X, \mathcal{T})$ при этом будет называться L-нечетким [топологическим] пространством.

В случае $L = I$ (который будет представлять для нас основной интерес) мы будем, как правило, опускать префикс I- и говорить просто о нечеткой топологии и нечетком [топологическом] пространстве соответственно.

Неравенство $\mathcal{T}(U) \geq \alpha$, где $U \in L^X$ и $\alpha \in L$ трактуется как утверждение "степень открытости L-нечеткого множества U не меньше, чем α", а неравенство $\mathcal{T}(U^c) \geq \alpha$ - как утверждение "степень замкнутости нечеткого множества U не меньше, чем α".

(I.I.2) <u>Непрерывные отображения</u>. Отображение $f : X \to Y$, где $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ - L-нечеткие пространства, называется непрерывным, если $\mathcal{T}_X(f^{-1}(V)) \geq \mathcal{T}_Y(V)$ для каждого $V \in L^Y$. Говоря неформально, непрерывными считаются отображения, которые в сторону прообраза не понижают степени открытости нечетких множеств.

(I.I.3) <u>Категория $FT(L)$</u>. L-нечеткие пространства и непрерывные отображения между ними, очевидно, образуют категорию; эту категорию будем обозначать $FT(L)$. Категорию $FT(I)$ обозначаем просто FT.

Категория $FT(2)$ - это, с точностью до очевидного изоморфизма, - категория Top топологических пространств.

(I.I.4) Нечеткое пространство (X, $\mathcal{T}$) называется <u>ламинированным</u>, если

(I^{λ}) $\mathcal{T}(c)=1$ для каждой константы $c\in L$.

Полную подкатегорию категории $FT(L)$, образованную ламинированными нечеткими пространствами, обозначаем $LFT(L)$. Ясно, что постоянные отображения ламинированных нечетких пространств (в отличие от отображений произвольных нечетких пространств) заведомо непрерывны.

(I.I.5) Отображение $f: X\to Y$, где (X, $\mathcal{T}_X$), (Y, $\mathcal{T}_Y$) - L-нечеткие пространства называется <u>гомеоморфизмом</u>, если f - биекция и отображения f и f^{-1} непрерывны. Отображение f называется <u>замкнутым</u> (<u>открытым</u>), если $\mathcal{T}_X(U^c)\leqslant\mathcal{T}_Y(f(U^c))$ (соответственно $\mathcal{T}_X(U)\leqslant\mathcal{T}_Y(f(U))$) для каждого $U\in L^X$.

(I.I.6) Рассмотрим множество $\mathfrak{T}$ всех L-нечетких топологий на данном множестве X (Напомним, что здесь, как и везде за исключением главы IУ, L - <u>фиксированная</u> нечеткая решетка). На этом множестве можно рассматривать отношение естественного частичного порядка $\leqslant$: $\mathcal{T}\leqslant\mathcal{T}'\Leftrightarrow\mathcal{T}(M)\leqslant\mathcal{T}'(M)$ для каждого $M\in L^X$. <u>Максимальной</u> относительно этого порядка, очевидно, является L-нечеткая топология $\mathcal{T}_\alpha: L^X\to L$, определяемая равенством $\mathcal{T}_\alpha(M)=1$ для каждого $M\in L^X$ (эту нечеткую топологию называем <u>дискретной</u>), а <u>минимальной</u> - L-нечеткая топология $\mathcal{T}_0: L^X\to L$, определяемая условием $\mathcal{T}(0)=\mathcal{T}(1)=1$ и $\mathcal{T}(M)=0$ при $M\in L^X$, $M\neq 0,1$.
(эту нечеткую топологию называем <u>антидискретной</u>).

(I.I.7) <u>О некоторых взаимосвязях между категориями $CFT(L)$ и $FT(L)$</u>. Отождествляя, как и обычно, подмножества данного множества с соответствующими характеристическими функциями, можем рассматривать $CFT(L)$ как полную подкатегорию категории $FT(L)$. При этом, очевидно, L-нечеткое пространство (X, $\mathcal{T}$) является чанговским, т.е. принадлежит категории $CFT(L)$, тогда и только тогда, когда нечеткая топология $\mathcal{T}$ помимо аксиом (I)-(3) из (I.I.I) удовлетворяет следующей аксиоме:

(4) $\mathcal{T}(L^X) \subset 2 = \{0,1\} \subset L$.

С другой стороны, если $(X, \mathcal{T})$ - произвольное L-нечеткое пространство и $\alpha \in L^+ := L \setminus \{0\}$, то $\mathcal{T}_\alpha := \{U \in L^X : \mathcal{T}(U) \geq \alpha\}$ является чанговской L-нечеткой топологией на X (в дальнейшем $\mathcal{T}_\alpha$ называем [чанговской] L-нечеткой топологией α-уровня [данной нечеткой топологии $\mathcal{T}$]). При этом $\mathcal{T}_\alpha^c := \{U \in L^X : \mathcal{T}(U^c) \geq \alpha\}$ - это в точности семейство всех замкнутых L-нечетких подмножеств чанговского пространства $(X, \mathcal{T}_\alpha)$. Эти наблюдения позволяют свести изучение некоторых свойств нечеткой топологии $\mathcal{T}$ к изучению значительно более простых объектов - соответствующих чанговских нечетких топологий α-уровня $\mathcal{T}_\alpha$. В частности, как нетрудно заметить, непрерывность отображения $f : (X, \mathcal{T}^X) \to (Y, \mathcal{T}^Y)$ равносильна непрерывности отображений $f : (X, \mathcal{T}_\alpha^X) \to (Y, \mathcal{T}_\alpha^Y)$ для всех $\alpha \in L^+$.

(I.I.8) Top как категория нечеткой топологии. Для произвольной нечеткой решетки L категорию Top очевидным образом можно рассматривать как полную подкатегорию категории $CFT(L)$ (а следовательно, и как полную подкатегорию категории $FT(L)$), объекты $(X, \mathcal{T})$ которой (наряду с аксиомами (I)-(4)) удовлетворяют следующей дополнительной аксиоме

(5) $\mathcal{T}(L^X \setminus 2^X) \subset \{0\} (\subset 2 \subset L)$

(Подчеркнем однако, что такая интерпретация категории Top как категории нечеткой топологии не является единственно возможной - о других "естественных" интерпретациях Top как категории нечеткой топологии см., например, в § 3).

(I.I.9) Замкнутая структура L-нечеткой топологии. Пусть $(X, \mathcal{T})$ - L-нечеткое топологическое пространство. Положив для каждого $M\in L^X$ $\mathcal{T}_c(M):=\mathcal{T}(M^c)$, получаем отображение $\mathcal{T}_c\colon L^X\to L$, которое назовем здесь замкнутой структурой L-нечеткой топологии $\mathcal{T}$. Нетрудно заметить, что замкнутая структура L-нечеткой топологии удовлетворяет следующим аксиомам:

(1C) $\mathcal{T}_c(0)=\mathcal{T}_c(1)=1$;

(2C) $\mathcal{T}_c(A\vee B)\geqslant\mathcal{T}_c(A)\wedge\mathcal{T}_c(B)$ для любых $A,B\in L^X$;

(3C) $\mathcal{T}_c(\bigwedge\limits_i A_i)\geqslant\bigwedge\limits_i\mathcal{T}_c(A_i)$ для каждого семейства $\{A_i : i\in\mathcal{J}\}\subset L^X$.

С другой стороны, ясно, что каждое отображение $\mathcal{S}\colon L^X\to L$, удовлетворяющее аксиомам (1C)-(3C), однозначно определяет нечеткую топологию $\mathcal{T}\colon L^X\to L$, такую, что $\mathcal{T}_c=\mathcal{S}$.

(1.1.10) <u>L-нечеткое замыкание</u>. Пусть $(X,\mathcal{T})$ - L-нечеткое пространство. Для каждого $M\in L^X$ и каждого $\alpha\in I$ положим $\mathcal{C}\ell(M,\alpha):=\wedge\{N : \mathcal{T}_c(N)\geqslant\alpha,\ N\geqslant M\}$. Тем самым, получаем отображение $\mathcal{C}\ell\colon L^X\times L\to L^X$, которое будем называть оператором L-нечеткого замыкания в L-нечетком пространстве $(X,\mathcal{T})$.

Непосредственно из определений легко проверить, что оператор нечеткого замыкания обладает следующими свойствами $(M,N\in L^X,\ \alpha,\beta\in L)$:

(1 $C\ell$) $\mathcal{C}\ell(M,\alpha)\geqslant M$;

(2 $C\ell$) если $M\leqslant N$, $\alpha\leqslant\beta$, то $\mathcal{C}\ell(M,\alpha)\leqslant\mathcal{C}\ell(N,\beta)$;

(3 $C\ell$) $\mathcal{C}\ell(\mathcal{C}\ell(M,\alpha),\alpha)=\mathcal{C}\ell(M,\alpha)$;

(4 $C\ell$) $\mathcal{C}\ell(M\vee N,\alpha)=\mathcal{C}\ell(M,\alpha)\vee\mathcal{C}\ell(N,\alpha)$;

(5 $C\ell$) $\mathcal{C}\ell(0,\alpha)=0$.

Обратно, для каждого отображения $\mathcal{C}\ell\colon L^X\times L\to L^X$, удовлетворяющего условиям (1 $C\ell$)-(5 $C\ell$), можно построить L-нечеткую топологию, оператором L-нечеткого замыкания которой он является.

Действительно, заметим прежде всего, что для каждого $\alpha\in L^+$ $\mathcal{T}^\alpha:=\{U : \mathcal{C}\ell(U^c,\alpha)=U^c\}$ является чанговской L-нечеткой топологией на X и при этом семейство $\{\mathcal{T}^\alpha : \alpha\in L^+\}$ удовлетворяет условиям предложения (1.2.1). Отсюда заключаем, что равенством

$\mathcal{T}(\mathcal{U}) := \bigvee_{\alpha \in L^+} (\mathcal{T}^{\alpha}(\mathcal{U}) \wedge \alpha)$ определяется L-нечеткая топология $\mathcal{T}$: $L^X \to L$ на X. Для завершения доказательства остается заметить, что для каждого $M \in L^X$ и каждого $\alpha \in I$ имеет место равенство $\bar{M}^{\alpha} = \mathcal{C}\ell(M, \alpha)$, где $\bar{M}^{\alpha} := \wedge \{N : \mathcal{T}_c(N) \geq \alpha,\ N \geq M\}$.

(I.I.II) <u>L-нечеткая внутренность</u>. Пусть $(X, \mathcal{T})$ – L-нечеткое пространство. Для каждого $M \in L^X$ и каждого $\alpha \in L$ положим $\mathrm{Int}(M, \alpha) := \vee \{\mathcal{U} : \mathcal{T}(\mathcal{U}) \geq \alpha,\ \mathcal{U} \leq M\}$. Тем самым получаем отображение $\mathrm{Int} : L^X \times L \to L^X$, называемое оператором L-нечеткой внутренности в L-нечетком пространстве $(X, \mathcal{T})$.

Непосредственно из определений легко проверить, что оператор нечеткой внутренности обладает следующими свойствами ($M, N \in L^X$, $\alpha, \beta \in L$):

(I Int) $\mathrm{Int}(M, \alpha) \leq M$;

(2 Int) если $M \leq N$, $\alpha \geq \beta$, то $\mathrm{Int}(M, \alpha) \leq \mathrm{Int}(N, \beta)$;

(3 Int) $\mathrm{Int}(M \wedge N, \alpha) = \mathrm{Int}(M, \alpha) \wedge \mathrm{Int}(N, \alpha)$;

(4 Int) $\mathrm{Int}(\mathrm{Int}(M, \alpha), \alpha) = \mathrm{Int}(M, \alpha)$;

(5 Int) $\mathrm{Int}(1, \alpha) = 1$.

Обратно, для каждого отображения $\mathrm{Int} : L^X \times L \to L^X$, удовлетворяющего аксиомам (I Int)-(5 Int), можно построить L-нечеткую топологию $\mathcal{T}$, оператором L-нечеткой внутренности которой он является. Это построение нетрудно провести по схеме, аналогичной той, которая была применена в (I.I.I0) для построения L-нечеткой топологии по оператору L-нечеткого замыкания.

§ 2. СТРУКТУРНЫЕ СВОЙСТВА СЕМЕЙСТВА L-НЕЧЕТКИХ ТОПОЛОГИЙ, ИНИЦИАЛЬНЫЕ И ФИНАЛЬНЫЕ L-НЕЧЕТКИЕ ТОПОЛОГИИ. ОПЕРАЦИИ НАД L-НЕЧЕТКИМИ ПРОСТРАНСТВАМИ

А. L-нечеткая топология, порожденная семейством L-нечетких топологий

(I.2.I) Предложение. Пусть $\Sigma = \{\mathcal{T}^\alpha : L^X \to L : \alpha \in L^+\}$ – некоторое убывающее (т.е. $\alpha' \leq \alpha \Rightarrow \mathcal{T}^\alpha \leq \mathcal{T}^{\alpha'}$) семейство L-нечетких топологий на множестве X. Тогда отображение $\mathcal{T} : L^X \to L$, определенное равенством $\mathcal{T}(\mathcal{U}) = \bigvee\limits_\alpha (\mathcal{T}^\alpha(\mathcal{U}) \wedge \alpha)$, где $\mathcal{U} \in L^X$, является L-нечеткой топологией на множестве X.

Доказательство. Равенство $\mathcal{T}(0) = \mathcal{T}(1) = 1$ очевидно. Для доказательства условия (2) определения (I.I.I) предположим, что найдутся $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in L^X$ такие, что $\mathcal{T}(\mathcal{U} \wedge \mathcal{V}) \ngeq \mathcal{T}(\mathcal{U}) \wedge \mathcal{T}(\mathcal{V})$. Тогда $\mathcal{T}^\alpha(\mathcal{U} \wedge \mathcal{V}) \ngeq \mathcal{T}^\alpha(\mathcal{U}) \wedge \mathcal{T}^\alpha(\mathcal{V})$ для некоторого $\alpha \in L^+$, что невозможно, поскольку $\mathcal{T}^\alpha$ является нечеткой топологией. Наконец, для доказательства третьего условия в (I.I.I) предположим, что найдется семейство $\{\mathcal{U}_i : i \in \mathcal{J}\} \subset L^X$ такое, что $\mathcal{T}(\bigvee\limits_i \mathcal{U}_i) \ngeq \bigwedge\limits_i \mathcal{T}(\mathcal{U}_i)$. Тогда $\mathcal{T}^\alpha(\bigvee\limits_i \mathcal{U}_i) \ngeq \bigwedge\limits_i \mathcal{T}^\alpha(\mathcal{U}_i)$ для некоторого $\alpha \in L^+$, что также невозможно, поскольку $\mathcal{T}^\alpha$ является нечеткой топологией.

В дальнейшем L-нечеткую топологию $\mathcal{T} : L^X \to L$, заданную таким образом по убывающему семейству Σ нечетких топологий, будем называть порожденной этим семейством.

Подчеркнем, что даже в случае, когда все $\mathcal{T}^\alpha \in \Sigma$ – чанговские (или даже обычные топологии), порожденная семейством Σ L-нечеткая топология $\mathcal{T}$ не обязана быть чанговской (и, тем более, обычной).

(I.2.2) Предложение. Пусть $\{\mathcal{T}_X^\alpha : L^X \to L : \alpha \in L^+\}$ и $\{\mathcal{T}_Y^\alpha : L^Y \to L : \alpha \in L^+\}$ – убывающие семейства L-нечетких топологий на множествах X и Y соответственно и пусть $\mathcal{T}_X$, $\mathcal{T}_Y$ - порожденные этими семействами L-нечеткие топологии. Если отображения $f:(X,\mathcal{T}_X^\alpha)\to(Y,\mathcal{T}_Y^\alpha)$ непрерывны для всех $\alpha\in L^+$, то и отображение $f:(X,\mathcal{T}_X)\to(Y,\mathcal{T}_Y)$ также непрерывно. Если отображения $f:(X,\mathcal{T}_X^\alpha)\to(Y,\mathcal{T}_Y^\alpha)$ открыты (замкнуты) для всех $\alpha\in L^+$, то и отображение $f:(X,\mathcal{T}_X)\to(Y,\mathcal{T}_Y)$ открыто (соотв. замкнуто).

<u>Доказательство</u>. Если бы отображение f не было непрерывным, то нашлись бы $V\in L^Y$ и $\alpha\in L^+$ такие, что $\mathcal{T}_X(f^{-1}(V))\ngeq\mathcal{T}_Y(V):=\alpha$. Но это бы означало, что $\mathcal{T}_Y^\alpha(V)\geqslant\alpha$, и при этом $\mathcal{T}_X^\alpha(f^{-1}(V))\ngeq\alpha$, что противоречит условию. Доказательство второго утверждения можно провести аналогично.

Непосредственной проверкой легко установить справедливость следующего утверждения:

(I.2.3) <u>Предложение</u>. Пусть L - нечеткая решетка без изолированных элементов, $\Sigma=\{\mathcal{T}^\alpha : L^X\to L : \alpha\in L^+\}$ - убывающее семейство L-нечетких топологий на множестве X и $\mathcal{T}: L^X\to L$ - L-нечеткая топология, порожденная этим семейством. Тогда $\mathcal{T}_\alpha = \bigcap\{\mathcal{T}_{\alpha'}^{\alpha'} : \alpha'<\alpha\}$ для каждого $\alpha\in L^+$.

(I.2.4) <u>Предложение</u>. Пусть L - нечеткая решетка без изолированных элементов и $\{\tau^\alpha : \alpha\in(0,1]\}$ - убывающее семейство чанговских L-нечетких топологий на множестве X, $\mathcal{T}$ - порожденная этим семейством L-нечеткая топология и $\alpha\in L^+$. Тогда равенство $\mathcal{T}_\alpha=\tau^\alpha$ имеет место в том и только в том случае, когда $\tau^\alpha = \bigcap\{\tau^{\alpha'} : \alpha'<\alpha\}$.

<u>Доказательство</u> очевидно, поскольку согласно предыдущему предложению $\mathcal{T}_\alpha=\bigcap\{\tau_{\alpha'}^{\alpha'} : \alpha'<\alpha\}=\bigcap\{\tau^{\alpha'} : \alpha'<\alpha\}$.

Учитывая справедливое для любой решетки L без изолированных элементов равенство $\mathcal{T}_\alpha=\bigcap\{\mathcal{T}_{\alpha'} : \alpha'<\alpha\}$, из (I.2.4) получаем

(I.2.5) <u>Предложение</u>. Пусть L - нечеткая решетка без изолированных элементов, $\mathcal{T}$ - L-нечеткая топология и $\Sigma=\{\mathcal{T}_\alpha : \alpha\in L^+\}$

- семейство ее L-нечетких топологий α-уровней, и пусть $\mathcal{T}'$ - L-нечеткая топология, порожденная семейством Σ. Тогда $\mathcal{T}' = \mathcal{T}$. (Другими словами, семейство α-уровней L-нечеткой топологии $\mathcal{T}$ порождает исходную L-нечеткую топологию $\mathcal{T}$).

Б. Инфимум и супремум семейства нечетких топологий

(I.2.6) Инфимум семейства нечетких топологий. Инфимумом семейства $\Sigma = \{\mathcal{T}^i : i \in \mathcal{J}\}$ L-нечетких топологий на множестве X называется самая сильная L-нечеткая топология $\inf\limits_i \mathcal{T}^i (= \inf \Sigma)$ из всех L-нечетких топологий на множестве X, которые мажорируются (I.I.6) каждой из L-нечетких топологий $\mathcal{T}^i$ семейства Σ.

Каждое семейство $\Sigma = \{\mathcal{T}^i : i \in \mathcal{J}\}$ L-нечетких топологий на множестве X имеет инфимум. Действительно, если $\Sigma = \emptyset$, то в качестве $\inf \Sigma$ следует взять дискретную L-нечеткую топологию (I.I.6). Если же $\Sigma \neq \emptyset$, то определим отображение $\mathcal{T}^* : L^X \to L$ формулой $\mathcal{T}^*(U) = \bigwedge\limits_i \mathcal{T}^i(U)$ для каждого $U \in L^X$. Непосредственно проверяется, что $\mathcal{T}^*$ является L-нечеткой топологией и при этом, очевидно, $\mathcal{T}^*$ - сильнейшая из всех нечетких топологий, мажорируемых каждой из $\mathcal{T}^i \in \Sigma$, а следовательно, действительно $\mathcal{T}^* = \inf\limits_i \mathcal{T}^i$.

Замечание. Из приведенных выше рассуждений ясно, что $(\inf\limits_i \mathcal{T}^i)_\alpha = \bigcap\limits_i \mathcal{T}^i_\alpha$. Учитывая (I.2.2), отсюда заключаем, что, если отображение $f : (X, \mathcal{T}^i) \to (Y, \mathcal{S}^i)$ непрерывно для каждого $i \in \mathcal{J}$, то и отображение $f : (X, \inf\limits_i \mathcal{T}^i) \to (Y, \inf\limits_i \mathcal{S}^i)$ непрерывно.

(I.2.7) Супремум семейства нечетких топологий. Супремумом семейства $\Sigma = \{\mathcal{T}^i : i \in \mathcal{J}\}$ L-нечетких топологий на множестве X называется L-нечеткая топология $\sup\limits_i \mathcal{T}^i (:= \sup \Sigma)$, являющаяся слабейшей из всех L-нечетких топологий, мажорирующих каждую из L-нечетких топологий $\mathcal{T}^i$ семейства Σ.

Каждое семейство Σ L-нечетких топологий на множестве X

имеет супремум. Действительно, пусть $\mathfrak{S}$ – семейство всех L-нечетких топологий на множестве X, мажорирующих каждую L-нечеткую топологию $\mathcal{T}^i \in \Sigma$. Тогда, как нетрудно заметить, в качестве $\sup\limits_i \mathcal{T}^i$ надо взять $\inf \mathfrak{S}$. (При этом, если $\mathfrak{S} = \emptyset$, то в качестве $\sup\limits_i \mathcal{T}^i$ получаем антидискретную L-нечеткую топологию (I.I.6)).

Полезная характеристика супремума L-нечетких топологий содержится в следующем предложении.

(I.2.8) <u>Предложение</u>. Пусть $\Sigma = \{\mathcal{T}^i : i \in \mathcal{I}\}$ – некоторое семейство L-нечетких топологий на множестве X. Тогда для каждого $U \in L^X$ имеет место равенство $\sup\limits_i \mathcal{T}^i(U) = \sup\{\alpha : U \in \sup\limits_i \mathcal{T}^i_\alpha\}$.

<u>Доказательство</u>. Определим отображение $\mathcal{T}^0 : L^X \to L$ равенством $\mathcal{T}^0(U) = \sup\{\alpha : U \in \sup\limits_i \mathcal{T}^i_\alpha\}$. Ясно, что $\mathcal{T}^0 \geq \mathcal{T}^i$ для всех $i \in \mathcal{I}$. С другой стороны, $\mathcal{T}^0 \leq \sup\limits_i \mathcal{T}^i$ (если $\sup\limits_i \mathcal{T}^i(U) \leq \alpha$ для некоторых $U \in L^X$, $\alpha \in L^+$, то $\mathcal{T}^i(U) \leq \alpha$ для всех $i \in \mathcal{I}$ и, значит, $\mathcal{T}^0(U) \leq \alpha$). Следовательно, для доказательства равенства $\mathcal{T}^0 = \sup\limits_i \mathcal{T}^i$ достаточно проверить, что $\mathcal{T}^0$ является нечеткой топологией.

Равенство $\mathcal{T}^0(0) = \mathcal{T}^0(1) = 1$ очевидно. Предположим, что $\mathcal{T}^0(U \wedge V) \ngeq \mathcal{T}^0(U) \wedge \mathcal{T}^0(V)$ для некоторых $U, V \in L^X$. Тогда $U \wedge V \notin \sup\limits_i \mathcal{T}^i_\alpha$ и, значит, либо $U \notin \sup\limits_i \mathcal{T}^i_\alpha$, либо $V \notin \sup\limits_i \mathcal{T}^i_\alpha$. Однако это невозможно, поскольку $\mathcal{T}^0(U) \wedge \mathcal{T}^0(V) = \alpha$. Предположим теперь, что $\mathcal{T}^0(\bigvee\limits_\gamma U_\gamma) \ngeq \bigwedge\limits_\gamma \mathcal{T}^0(U_\gamma) := \alpha$ для некоторого семейства $\{U_\gamma : \gamma \in \Gamma\} \subset L^X$. Тогда $\bigvee\limits_\gamma U_\gamma \notin \sup\limits_i \mathcal{T}^i_\alpha$ и, значит, $U_{\gamma_0} \notin \sup\limits_i \mathcal{T}^i_\alpha$ для некоторого $\gamma_0 \in \Gamma$. Но этого не может быть, поскольку $\alpha = \bigwedge\limits_\gamma \mathcal{T}^0(U_\gamma) \leq \mathcal{T}^0(U_{\gamma_0})$. Полученное противоречие и завершает доказательство.

(I.2.9) <u>Следствие</u>. Для каждого $\alpha \in L$ имеет место равенство $(\sup\limits_i \mathcal{T}^i)_\alpha = \bigcap\limits_{\alpha' < \alpha} \sup\limits_i \mathcal{T}^i_{\alpha'}$. Таким образом, $\sup\limits_i \mathcal{T}^i$ является слабейшей нечеткой топологией, каждый α-уровень которой мажорирует соответствующие α-уровни всех L-нечетких топологий $\mathcal{T}^i$.

(I.2.10) Предложение. Пусть $\{\mathcal{T}_X^i : i \in \mathcal{J}\}$ и $\{\mathcal{T}_Y^i : i \in \mathcal{J}\}$ – семейства L-нечетких топологий на множествах X и Y соответственно. Если отображение $f : (X, \mathcal{T}_X^i) \to (Y, \mathcal{T}_Y^i)$ непрерывно для каждого $i \in \mathcal{J}$, то и отображение $f : (X, \sup_i \mathcal{T}_X^i) \to (Y, \sup_i \mathcal{T}_Y^i)$ непрерывно.

Доказательство. Утверждение легко проверяется в случае, когда все рассматриваемые L-нечеткие топологии – чанговские. Для доказательства общего случая заметим прежде всего, что непрерывность отображения $f : (X, \mathcal{T}_X^i) \to (Y, \mathcal{T}_Y^i)$ влечет непрерывность отображения $f : (X, (\mathcal{T}_X^i)_\alpha) \to (Y, (\mathcal{T}_Y^i)_\alpha)$ для каждого $\alpha \in L^+$, а следовательно, и непрерывность отображения $f : (X, \sup_i (\mathcal{T}_X^i)_\alpha) \to (Y, \sup_i (\mathcal{T}_Y^i)_\alpha)$ для каждого $\alpha \in L^+$. Воспользовавшись (I.2.9), заключаем, что отображение $f : (X, (\sup_i \mathcal{T}_X^i)_\alpha) \to (Y, (\sup_i \mathcal{T}_Y^i)_\alpha)$ непрерывно для каждого $\alpha \in L^+$, а следовательно, согласно (I.I.7), и отображение $f: (X, \sup_i \mathcal{T}_X^i) \to (Y, \sup_i \mathcal{T}_Y^i)$ непрерывно.

В. Инициальная L-нечеткая топология и произведение L-нечетких пространств

(I.2.II) Инициальная L-нечеткая топология. Пусть X – множество, $(Y, \mathcal{S})$ – L-нечеткое пространство и $f : X \to (Y, \mathcal{S})$ – отображение. Слабейшую L-нечеткую топологию $\mathcal{T} := f^{-1}(\mathcal{S})$ на X, относительно которой отображение f непрерывно, назовем инициальной для f.

Воспользовавшись (I.2.I) и (I.2.2), легко заметить, что инициальная L-нечеткая топология определяется формулой $\mathcal{T}(U) = \bigvee_{\alpha \in L^+} (\mathcal{T}^\alpha(U) \wedge \alpha)$, где $U \in L^X$, а $\mathcal{T}^\alpha := \{f^{-1}(V) : V \in L^Y, \mathcal{S}(V) \geq \alpha\}$ (что одновременно доказывает и ее существование).

Пусть теперь для каждого $\gamma \in \Gamma$ $(Y_\gamma, \mathcal{S}_\gamma)$ – L-нечеткое пространство и $f_\gamma : X \to (Y_\gamma, \mathcal{S}_\gamma)$ – отображение. Слабейшую L-нечеткую топологию $\mathcal{T}$ на X, относительно которой все отображения f_γ непрерывны, называем <u>инициальной для этого семейства отображений</u>. Нетрудно заметить, что инициальная для семейства $\{f_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ отображений L-нечеткая топология определяется формулой $\sup\limits_\gamma f_\gamma^{-1}(\mathcal{T}_\gamma)$. При этом, если все $\mathcal{T}_\gamma$ – чанговские (ламинированные), то и инициальная L-нечеткая топология $\sup\limits_\gamma f_\gamma^{-1}(\mathcal{T}_\gamma)$ – чанговская (соответственно ламинированная).

(I.2.I2) <u>Произведение L-нечетких пространств</u>. Пусть $\{(X_\gamma, \mathcal{T}_\gamma) : \gamma \in \Gamma\}$ – семейство L-нечетких пространств. Произведением этого семейства называется пара $(X, \mathcal{T})$, где $X = \prod X_\gamma$ – произведение множеств, а $\mathcal{T}$ – L-нечеткая топология на X, являющаяся инициальной для семейства всех проекций $p_\gamma : X \to (X_\gamma, \mathcal{T}_\gamma), \gamma \in \Gamma$. Нетрудно заметить, что определенная таким образом операция действительно является произведением в $FT(L)$. При этом, если все $(X_\gamma, \mathcal{T}_\gamma)$ – чанговские (ламинированные), то и их произведение будет чанговским (соответственно, ламинированным). (Для чанговских L-нечетких пространств произведение впервые было определено Гогеном [35]).

(I.2.I3) <u>Замечание</u>. Подчеркнем, что в отличие от ситуации в общей топологии, отображения проектирования произведений нечетких пространств (в том числе и чанговских) не обязаны быть открытыми. Другая особенность произведения нечетких пространств состоит в том, что "слой" $X_{\gamma_0} \times \{x_\gamma^0 : \gamma \neq \gamma_0\}$ в произведении $\prod\limits_\gamma X_\gamma$ нечетких пространств, вообще говоря, не гомеоморфен пространству X_{γ_0}. Нетрудно проверить, что достаточным условием открытости проекций и, как следствие, гомеоморфности слоев соответствующим координатным пространствам, является ламинированность всех сомножителей. (И в этом смысле $LFT(L)$ и $LCFT(L)$ "более топологические" категории, чем $FT(L)$ и $CFT(L)$).

(I.2.I4) <u>Подпространства L-нечетких пространств</u>. Пусть

$(X, \mathcal{T})$ – L-нечеткое пространство. Подпространством пространства $(X, \mathcal{T})$ называется L-нечеткое пространство вида $(Y, \mathcal{T}_Y)$, где $Y \subset X$, а $\mathcal{T}_Y$ – L-нечеткая топология, инициальная для отображения естественного включения $e : Y \to (X, \mathcal{T})$.

Нетрудно заметить, что $\mathcal{T}_Y(V) = \sup\{\mathcal{T}(U) : U \wedge Y = V\}$. При этом ясно, что, если пространство $(X, \mathcal{T})$ – чанговское (ламинированное), то и его подпространство $(Y, \mathcal{T}_Y)$ – чанговское (соответственно, ламинированное).

(I.2.15) Замечание. При рассмотрении задачи о переходе к подпространству L-нечеткого топологического пространства возможны две различные постановки: (L-нечеткое) подпространство L-нечеткого пространства $(X, \mathcal{T})$ на основе четкого множества Y и (L-нечеткое) подпространство L-нечеткого пространства $(X, \mathcal{T})$ на основе нечеткого множества $M \in L^X$.

В случае первой постановки (которая, кстати, с категорной точки зрения и является единственно возможной) задача решена в (I.2.14). При второй постановке задача не может быть разумно решена в рассматриваемых категориях; к ней мы вернемся в (4.3.7), после того, как разовьем иную точку зрения на предмет нечеткой топологии.

Г. Финальная L-нечеткая топология и прямая сумма L-нечетких пространств

(I.2.16) Финальная L-нечеткая топология. Пусть $(X, \mathcal{T})$ – L-нечеткая топология и $f : (X, \mathcal{T}) \to Y$ – отображение. Сильнейшую L-нечеткую топологию $\mathcal{S} := f(\mathcal{T})$ на Y, относительно которой отображение f непрерывно, называем финальной для f.

Существование финальной L-нечеткой топологии и одновременно конструктивное ее описание следуют из приведенных ниже рассуждений.

Ограничиваясь сначала случаем, когда пространство (X , $\mathcal{T}$) чанговское, обозначим через $\mathfrak{S}$ семейство всех чанговских L-нечетких топологий на Y , относительно которых f непрерывно. Ясно, что $\mathfrak{S} \neq \emptyset$ (в частности, $\mathcal{T}_a^Y \in \mathfrak{S}$ (I.I.6)). Заметив, что предбазой L-нечеткой чанговской топологии служит семейство $\{U : \exists \mathcal{Y} \in \mathfrak{S}, U \in \mathcal{Y}\}$, легко заключаем, что $\sup \mathfrak{S} \in \mathfrak{S}$, а следовательно, $f(\mathcal{T}) = \sup \mathfrak{S}$.

Переходя теперь к случаю произвольного L-нечеткого пространства (X ; $\mathcal{T}$), для каждого $\alpha \in L^+$ положим $f(\mathcal{T}_\alpha) =: \mathcal{Y}^\alpha$ и пусть $f(\mathcal{T}) = \mathcal{Y}$ - L-нечеткая топология, порожденная (I.2.I) семейством $\{f(\mathcal{T}_\alpha) : \alpha \in L^+\}$. Поскольку отображение $f : (X, \mathcal{T}_\alpha) \to (Y, \mathcal{Y}^\alpha)$ непрерывно для каждого $\alpha \in L^+$, из (I.2.2) и (I.2.5) заключаем, что отображение $f : (X , \mathcal{T}) \to (Y , \mathcal{Y})$ непрерывно, причем, очевидно, $\mathcal{Y}$ является слабейшей L-нечеткой топологией, удовлетворяющей этому требованию.

Пусть теперь (X_γ, $\mathcal{T}^\gamma$), $\gamma \in \Gamma$ - семейство L-нечетких пространств, Y - множество и для каждого $\gamma \in \Gamma$ $f_\gamma : (X_\gamma, \mathcal{T}^\gamma) \to Y$ - отображение. Сильнейшую L-нечеткую топологию на Y , относительно которой все отображения f_γ непрерывны, называем <u>финальной для этого семейства</u>.

Ясно, что финальной для семейства $f_\gamma : (X_\gamma, \mathcal{T}^\gamma) \to Y$ отображений является L-нечеткая топология $\mathcal{Y} := \bigwedge_\gamma f_\gamma(\mathcal{T}^\gamma)$, где $f_\gamma(\mathcal{T}^\gamma)$ - L-нечеткая топология на Y , финальная для отображения f_γ.

(I.2.I7) <u>Прямая сумма L-нечетких пространств</u>. Пусть $(X_\gamma, \mathcal{T}^\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$ - семейство L-нечетких пространств. Прямой суммой этого семейства называется L-нечеткое пространство (X , $\mathcal{T}$), где $X = \oplus X_\gamma$ - дискретное объединение множеств X_γ , а $\mathcal{T}$ - финальная L-нечеткая топология для семейства естественных включений $e_\gamma : X_\gamma \to X$.

Нетрудно заметить, что для каждого $U \in L^X$ имеет место равенство $\mathcal{T}(\mathcal{U}) = \bigwedge_{\gamma} \mathcal{T}^{\gamma}(\mathcal{U}_{\gamma})$, где $\mathcal{U}_{\gamma} = \mathcal{U} \wedge X_{\gamma}$.

Отметим, что определенная выше операция прямой суммы L-нечетких пространств является, очевидно, копроизведением в категории $FT(L)$.

(I.2.I8) <u>Фактор-пространство L-нечеткого пространства</u>. Пусть $(X, \mathcal{T})$ - L-нечеткое пространство и ρ - отношение эквивалентности на множестве X. Фактор-пространством пространства $(X, \mathcal{T})$ по отношению эквивалентности ρ называется L-нечеткое пространство $(Y, \mathcal{S})$, где $Y \equiv X/\rho$ - фактор-множество X по ρ, а $\mathcal{S}$ - финальная L-нечеткая топология для отображения естественного проектирования $\mathcal{T}\!\!\iota : (X, \mathcal{T}) \to Y$.

§ 3. НЕКОТОРЫЕ ФУНКТОРЫ НЕЧЕТКОЙ ТОПОЛОГИИ

В этом параграфе рассмотрим некоторые функторы из категории $FT(L)$ в себя. Особенность рассматриваемых здесь функторов состоит в том, что они меняют лишь структуру нечеткой топологии, оставляя множество-носитель неизменным (функторы иного вида будут рассмотрены в главе Ш). Эта особенность позволяет интерпретировать данные функторы как специального вида модификации соответствующих нечетких топологий.

Изучаемые здесь функторы представляют для нас двойной интерес. Во-первых, будучи ограниченными на те или иные подкатегории категории $FT(L)$, они устанавливают полезные взаимосвязи между этими подкатегориями, а также осуществляют специального вида вложения этих подкатегорий в $FT(L)$. В частности, описанные здесь функторы позволяют с различных точек зрения взглянуть на категорию Top топологических пространств как на категорию нечеткой топологии (ср. также (I.I.8)). Во-вторых, трактуемые как модификации, функторы, рассмотренные здесь, снабжают нас схемами для построения некоторых канонических примеров L-нечетких пространств. Кроме того, они используются для доказательства некоторых общих фактов нечеткой топологии (см., например, (2.6.II), (2.6.I2)).

А. Функтор λ-модификации

(I.3.I) Определение. Пусть $\mathcal{T}$ – L-нечеткая топология на множестве X. Слабейшая ламинированная (I.I.5) нечеткая топология $\lambda\mathcal{T}$ на множестве X, мажорирующая $\mathcal{T}$, называется ламинированной модификацией, или λ-модификацией, нечеткой топологии $\mathcal{T}$.

Для того, чтобы конструктивно описать $\lambda\mathcal{T}$, для каждого $\alpha \in L^+$ положим $\lambda\mathcal{T}_\alpha := \sup\{\mathcal{T}_\alpha, \{c : c \in L\}\}$. (Эквивалентно, $\lambda\mathcal{T}_\alpha$

может быть охарактеризована как чанговская L-нечеткая топология, порожденная базой $\{\mathcal{U}\wedge c : \mathcal{U}\in\mathcal{T}_\alpha,\ c\in L\}$). Семейство $\{\lambda\mathcal{T}_\alpha : \alpha\in L^+\}$ удовлетворяет условию предложения (I.2.I), а следовательно, порождает L-нечеткую топологию, которая, как нетрудно понять, как раз и является λ-модификацией L-нечеткой топологии $\mathcal{T}$. Таким образом, имеем:

(I.3.2) <u>Предложение</u>. Пусть $\mathcal{T}$ – L-нечеткая топология на множестве X. Тогда для каждого $M\in L^X$ имеет место равенство $\lambda\mathcal{T}(M) = \bigvee_{\alpha\in L^+}(\lambda\mathcal{T}_\alpha(M)\wedge\alpha)$, где $\lambda\mathcal{T}_\alpha$ – чанговская L-нечеткая топология, определяемая базой $\{\mathcal{U}\wedge c : \mathcal{U}\in\mathcal{T}_\alpha,\ c\in L\}$.

(I.3.3) <u>Предложение</u>. Если отображение $f : (X, \mathcal{T}^X)\to(Y, \mathcal{T}^Y)$ непрерывно, то и отображение $f : (X, \lambda\mathcal{T}^X)\to(Y, \lambda\mathcal{T}^Y)$ непрерывно.

<u>Доказательство</u>. Из непрерывности отображения $f : (X,\mathcal{T}^X)\to(Y,\mathcal{T}^Y)$ вытекает непрерывность всех отображений $f : (X, \mathcal{T}^X_\alpha)\to(Y, \mathcal{T}^Y_\alpha)$, а следовательно, как легко убедиться, и всех отображений $f : (X, \lambda\mathcal{T}^X_\alpha)\to(Y, \lambda\mathcal{T}^Y_\alpha)$, $\alpha\in L^+$. Воспользовавшись (I.2.2), заключаем, что отображение $f : (X, \lambda\mathcal{T}^X)\to(Y, \lambda\mathcal{T}^Y)$ также непрерывно.

(I.3.4) <u>Функтор $\lambda : FT(L)\to LFT(L)$</u>. Из предыдущего предложения ясно, что λ можно рассматривать как функтор $\lambda : FT(L)\to LFT(L)$. (В случае, когда необходимо уточнить, какая именно нечеткая решетка L имеется в виду, вместо λ будем писать λ_L). Этот функтор каждому L-нечеткому пространству $(X, \mathcal{T})$ сопоставляет его ламинированную модификацию $(X, \lambda\mathcal{T})$, и каждому морфизму – непрерывному отображению $f : (X, \mathcal{T}^X)\to(Y, \mathcal{T}^Y)$, сопоставляет непрерывное отображение $f : (X, \lambda\mathcal{T}^X)\to(Y, \lambda\mathcal{T}^Y)$.

(Подчеркнем, что $Mor((X,\mathcal{T}^X),(Y,\mathcal{T}^Y))\subset Mor((X,\lambda\mathcal{T}^X),(Y,\lambda\mathcal{T}^Y))$ (это следует из (I.3.3)), но равенство $Mor((X,\mathcal{T}^X),(Y,\mathcal{T}^Y)) = Mor((X, \lambda\mathcal{T}^X),(Y,\lambda\mathcal{T}^Y))$, вообще говоря, не имеет места.)

(I.3.5) <u>Функтор $\omega : Top\to LCFT$</u>. Нетрудно заметить, что, ограничивая функтор λ_I на Top, мы получаем функтор $\omega : Top\to LCFT$, введенный Ловеном [67], [68]. Этот функтор сопоставляет каждому топологическому пространству (X, T) нечеткое топологическое пространство $(X, \omega T)$, где ωT – совокупность всех полунепрерывных снизу отображений пространства (X, T) в отрезок I (рассматриваемый как подпространство вещественной прямой $\mathbb{R}$). Образ $\omega(\mathrm{Top})$ категории Top относительно функтора ω является полной подкатегорией категории $LCFT$ (а также полной подкатегорией каждой из категорий CFT, LFT, FT), изоморфной категории Top.

Ловен рассматривает нечеткое топологическое пространство $(X, \omega T)$ как нечеткую копию топологического пространства (X, T) и называет чанговское нечеткое пространство (X, τ) <u>топологически порожденным</u>, если $\tau = \omega T$ для некоторой обычной топологии T на множестве X [68].

Пусть X – множество и $\{(Y_\gamma, \mathcal{T}_\gamma) : \gamma \in \Gamma\}$ – семейство L-нечетких пространств и для каждого $\gamma \in \Gamma$ $f_\gamma : X \to Y_\gamma$ – отображение.

(I.3.6) <u>Теорема</u>. $\lambda \sup_\gamma f_\gamma^{-1}(\mathcal{T}_\gamma) = \sup_\gamma f_\gamma^{-1}(\lambda \mathcal{T}_\gamma)$.

<u>Доказательство</u>. Очевидно, что для каждого γ отображение f_γ: $(X, f_\gamma^{-1}(\mathcal{T}_\gamma)) \to (Y, \mathcal{T}_\gamma)$ непрерывно, следовательно (I.3.3), отображение $f_\gamma : (X, \lambda f_\gamma^{-1}(\mathcal{T}_\gamma)) \to (Y, \mathcal{T}_\gamma)$ также непрерывно, а значит, $\lambda f_\gamma^{-1}(\mathcal{T}_\gamma) \supset f_\gamma^{-1}(\lambda \mathcal{T}_\gamma)$. С другой стороны, очевидно, что $f_\gamma^{-1}(\mathcal{T}_\gamma) \subset$ $\subset f_\gamma^{-1}(\lambda \mathcal{T}_\gamma)$ и нечеткая топология $f_\gamma^{-1}(\lambda \mathcal{T}_\gamma)$ ламинирована; таким образом $\lambda f_\gamma^{-1}(\mathcal{T}_\gamma) \subset f_\gamma^{-1}(\lambda \mathcal{T}_\gamma)$ и, значит, $\lambda f_\gamma^{-1}(\mathcal{T}_\gamma) = f_\gamma^{-1}(\lambda \mathcal{T}_\gamma)$. Для завершения доказательства достаточно показать, что $\lambda \sup_\gamma \mathcal{T}_\gamma =$ $= \sup_\gamma \lambda \mathcal{T}_\gamma$. Поскольку, очевидно, $\sup_\gamma \mathcal{T}_\gamma \leq \sup_\gamma \lambda \mathcal{T}_\gamma$, то $\lambda \sup_\gamma \mathcal{T}_\gamma \leq$ $\leq \sup_\gamma \lambda \mathcal{T}_\gamma$; с другой стороны, для каждого γ $\lambda \mathcal{T}_\gamma \leq \lambda \sup_\gamma \mathcal{T}_\gamma$, откуда $\sup_\gamma \lambda \mathcal{T}_\gamma \leq \lambda \sup_\gamma \mathcal{T}_\gamma$.

(I.3.7) <u>Следствие</u>. Пусть $\{(X_\gamma, \mathcal{T}_\gamma) : \gamma \in \Gamma\}$ – семейство L-нечетких пространств. Тогда $\lambda (\prod_\gamma \mathcal{T}_\gamma) = \prod_\gamma (\lambda \mathcal{T}_\gamma)$.

(Отметим, что для функтора ω утверждения, аналогичные (I.3.6) и (I.3.7), получены Ловеном [67]).

Б. <u>Функтор ι-модификации</u>

Пусть $(X, \mathcal{T})$ – чанговское L-нечеткое пространство; положим $\iota\mathcal{T} := \{U^{-1}(\beta,1], \beta \in L^+, U \in \mathcal{T}\}$. В случае $L = I$ $\iota\mathcal{T}$ является, очевидно, самой слабой топологией на множестве X, относительно которой все отображения $U \in \mathcal{T}$ полунепрерывны снизу.

(I.3.8) <u>Определение</u>. Пусть $\mathcal{T}$ – L-нечеткая топология на множестве X. L-нечеткую топологию $\iota\mathcal{T}$ на множестве X, порожденную семейством $\{\iota\mathcal{T}_\alpha : \alpha \in (0,1]\}$ (обычных) топологий, назовем <u>иота-модификацией</u> L-нечеткой топологии $\mathcal{T}$.

Напомним, что согласно (I.2.I) $\iota\mathcal{T}(U) = \bigvee_\alpha (\iota\mathcal{T}_\alpha(U) \wedge \alpha)$ для каждого $U \in L^X$.

Заметим, что $\iota\mathcal{T}(U) = 0$ для каждого собственно нечеткого множества U (т.е. для $U \in L^X \setminus 2^X$). С другой стороны, для обычного множества U величина $\iota\mathcal{T}(U)$ может принимать, вообще говоря, любое значение между 0 и 1.

Нетрудно заметить, что, если отображение $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ чанговских пространств непрерывно, то и отображение $f : (X, \iota\mathcal{T}_X) \to (Y, \iota\mathcal{T}_Y)$ непрерывно. Отсюда, воспользовавшись (I.2.2), получаем

(I.3.9) <u>Предложение</u>. Если отображение $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ L-нечетких пространств непрерывно, то и отображение $f : (X, \iota\mathcal{T}_X) \to (Y, \iota\mathcal{T}_Y)$ также непрерывно.

(I.3.I0) <u>$\iota : FT(L) \to FT(L)$ как функтор</u>. Предыдущее предложение позволяет для каждой нечеткой решетки L иота-модификацию рассматривать как функтор ι $(:= \iota_L)$ из категории $FT(L)$ в категорию $FT(L)$. Подчеркнем, что образ $\iota(FT(L))$ при этом функторе в известном смысле "ортогонален" категории $FT(L)$ чанговских L-нечетких пространств: здесь обычные множества могут быть открытыми в некоторой степени, в то время как нечеткие множества заведомо не являются открытыми.

(I.3.II) <u>Функтор $\iota: CFT \to Top$</u>. Ограничивая функтор ι_I на CFT, получаем функтор, отображающий категорию CFT на категорию Top. Нетрудно заметить, что $\iota \circ \omega = id$, т.е. ι является левым обратным для функтора ω (I.3.5). Чанговская нечеткая топология τ является топологически порожденной (I.3.5) тогда и только тогда, когда $\tau = \omega \circ \iota(\tau)$.

(I.3.I2) <u>Иота-модификация как функтор $\iota: FT(L) \to Pro(Top)$.</u> Поскольку для каждого $\alpha \in L^+$ $(\iota\mathcal{T})_\alpha$ является, очевидно, обычной топологией и поскольку $(\iota\mathcal{T})_\alpha \supset (\iota\mathcal{T})_{\alpha'}$ при $\alpha < \alpha'$, а следовательно, тождественные отображения $\mathcal{T}_{\alpha\alpha'}: (X, (\iota\mathcal{T})_\alpha) \to (X, (\iota\mathcal{T})_{\alpha'})$ при $\alpha < \alpha'$ непрерывны, ι можем рассматривать также как функтор из категории $FT(L)$ в категорию $Pro(Top)$ прямых спектров топологических пространств, в качестве индексного множества которых фигурирует решетка L^+. (Ясно, что $(L^+, \leq)$ является направленным множеством.) Этот функтор L-нечеткому пространству $(X, \mathcal{T})$ сопоставляет прямой спектр топологических пространств $\{(X, (\iota\mathcal{T})_\alpha): \mathcal{T}_{\alpha\alpha'}; \alpha \in L^+\}$.

(I.3.I3) <u>Теорема</u>. Пусть X - множество и $\{f_\gamma: X \to (Y_\gamma, \mathcal{T}_\gamma)\}$ - семейство отображений. Тогда $\iota(\sup\limits_\gamma f_\gamma^{-1}(\mathcal{T}_\gamma)) = \sup\limits_\gamma f_\gamma^{-1}(\iota\mathcal{T}_\gamma)$.

<u>Доказательство</u>. Рассмотрим сначала случай, когда все $\mathcal{T}_\gamma$ чанговские. Пусть $(Y, \mathcal{T})$ - чанговское L-нечеткое пространство и $f: X \to (Y, \mathcal{T})$ - отображение. Тогда $f: (X, f^{-1}(\mathcal{T})) \to (Y, \iota\mathcal{T})$ непрерывно и, согласно (I.3.9), $f: (X, \iota f^{-1}(\mathcal{T})) \to (Y, \iota\mathcal{T})$ также непрерывно, а значит, $\iota f^{-1}(\mathcal{T}) \supset f^{-1}(\iota\mathcal{T})$. С другой стороны, $f: (X, \lambda f^{-1}(\iota\mathcal{T})) \to (Y, \lambda\iota\mathcal{T})$ также непрерывно, а следовательно (I.3.3), непрерывным является и отображение $f: (X, \lambda f^{-1}(\iota\mathcal{T})) \to (Y, \lambda\iota\mathcal{T})$. Но это означает, что $\lambda f^{-1}(\iota\mathcal{T}) \supset f^{-1}(\lambda\iota\mathcal{T}) \supset f^{-1}(\mathcal{T})$ и, поскольку $f^{-1}(\iota\mathcal{T})$ чанговская, $f^{-1}(\iota\mathcal{T}) = \iota\lambda f^{-1}(\iota\mathcal{T}) \supset \iota f^{-1}(\mathcal{T})$. Таким образом, $\iota f^{-1}(\mathcal{T}) = f^{-1}(\iota\mathcal{T})$.

Если $\{\mathcal{T}_\gamma: \gamma \in \Gamma\}$ - семейство чанговских L-нечетких топологий на X , то, очевидно, $\sup_\gamma(\iota\mathcal{T}_\gamma)\subset\iota(\sup_\gamma\mathcal{T}_\gamma)$. С другой стороны, если $U\in\iota(\sup_\gamma\mathcal{T}_\gamma)$, то $U\in\sup_\gamma(\iota\mathcal{T}_\gamma)$, а следовательно, $\sup_\gamma(\iota\mathcal{T}_\gamma)=$ $=\iota(\sup_\gamma\mathcal{T}_\gamma)$. Из полученных двух равенств легко следует, что (*) если все $\mathcal{T}_\gamma$ чанговские, то $\sup_\gamma(f_\gamma^{-1}(\iota\mathcal{T}_\gamma))=\iota\sup_\gamma(f_\gamma^{-1}(\mathcal{T}_\gamma))$.

Переходим к общему случаю. Применяя (I.2.9) и очевидное соотношение $\bigcap_{\alpha'<\alpha}(f_\gamma^{-1}(\mathcal{T}_\gamma))_{\alpha'}=\bigcap_{\alpha'<\alpha}f_\gamma^{-1}(\mathcal{T}_\gamma)_{\alpha'}$, легко заметить, что $(\sup_\gamma f_\gamma^{-1}(\iota\mathcal{T}_\gamma))_\alpha=$ $=\bigcap_{\alpha'<\alpha}\sup_\gamma(f_\gamma^{-1}(\iota\mathcal{T}_\gamma)_{\alpha'})=\bigcap_{\alpha'<\alpha}\sup_\gamma\bigcap_{\alpha''<\alpha'}(f_\gamma^{-1}(\iota\mathcal{T}_\gamma))_{\alpha''}=\bigcap_{\alpha'<\alpha}\sup_\gamma\bigcap_{\alpha''<\alpha'}(f_\gamma^{-1}(\iota\mathcal{T}_\gamma)_{\alpha''})=$ $=\bigcap_{\alpha'<\alpha}\sup_\gamma(f_\gamma^{-1}(\iota\mathcal{T}_\gamma)_{\alpha'})$ и $(\iota(\sup_\gamma f_\gamma^{-1}(\mathcal{T}_\gamma)))_\alpha=\bigcap_{\alpha'<\alpha}\iota(\sup_\gamma f_\gamma^{-1}(\mathcal{T}_\gamma))_{\alpha'}=$ $=\bigcap_{\alpha'<\alpha}\iota(\sup_\gamma\bigcap_{\alpha''<\alpha'}(f_\gamma^{-1}(\mathcal{T}_\gamma))_{\alpha''})=\bigcap_{\alpha'<\alpha}\iota(\sup_\gamma\bigcap_{\alpha''<\alpha'}f_\gamma^{-1}((\mathcal{T}_\gamma)_{\alpha''})=\bigcap_{\alpha'<\alpha}\iota\sup_\gamma f_\gamma^{-1}((\mathcal{T}_\gamma)_{\alpha'})$.

Отсюда, с учетом (*) и очевидного равенства $(\iota\mathcal{T}_\alpha)=\iota\mathcal{T}_\alpha$, справедливого для произвольной нечеткой топологии $\mathcal{T}$, легко следует доказываемое утверждение.

(I.3.14) <u>Следствие</u>. Пусть $\{(X_\gamma,\mathcal{T}_\gamma):\gamma\in\Gamma\}$ – семейство L-нечетких пространств. Тогда $\iota(\prod_\gamma\mathcal{T}_\gamma)=\prod_\gamma(\iota\mathcal{T}_\gamma)$.

В. Функторы ι_β- и ι_{β^*}-модификации

(I.3.15) <u>ι_β-модификация</u>. Пусть (X,τ) – чанговское L-нечеткое пространство и $\beta\in[0,1)$. Нетрудно заметить, что тогда $\iota_\beta(\tau):=$ $:=\{U^{-1}(\beta,1]:U\in\tau\}$ – обычная топология на множестве X и при этом непрерывность отображения $f:(X,\tau_X)\to(Y,\tau_Y)$ гарантирует непрерывность отображения $f:(X,\iota_\beta\tau_X)\to(Y,\iota_\beta\tau_Y)$.

Пусть теперь $\mathcal{T}$ – произвольная L-нечеткая топология на множестве X . L-нечеткая топология $\iota_\beta\mathcal{T}$, порожденная семейством $\{\iota_\beta\mathcal{T}_\alpha:\alpha\in L^+\}$ обычных топологий на X , называется иота-β-модификацией L-нечеткой топологии $\mathcal{T}$. По аналогии с (I.3.10) легко установить, что для каждой нечеткой решетки L и каждого $\beta\in[0,1)$ иота-β-модификацию можно рассматривать как функтор $\iota_\beta: FT(L)\to FT(L)$.

(I.3.16) <u>ι_{β^*}-модификация</u>. Для чанговского L-нечеткого пространства (X,τ) обозначим через $\iota_{\beta^*}(\tau)$ топологию на множестве

X , порожденную базой $\{\mathcal{U}^{-1}[\beta,1]:\mathcal{U}\in\tau\}$. Легко заметить, что непрерывность отображения $f:(X,\tau_X)\to(Y,\tau_Y)$ гарантирует непрерывность отображения $f:(X,\iota_{\beta*}\tau_X)\to(Y,\iota_{\beta*}\tau_Y)$.

Пусть теперь $\mathcal{T}$ - произвольная L-нечеткая топология на множестве X. L-нечеткую топологию $\iota_{\beta*}\mathcal{T}$, порожденную семейством $\{\iota_{\beta*}\mathcal{T}_\alpha:\alpha\in L^+\}$ обычных топологий, назовем иота$_{\beta*}$-модификацией исходной L-нечеткой топологии. Таким образом, для каждой нечеткой решетки L и каждого $\beta\in(0,1]$ получаем функтор $\iota_{\beta*}:FT(L)\to FT(L)$.

Г. Функтор δ-модификации

Пусть $(X,\mathcal{T})$ - L-нечеткое пространство, $M\in L^X$ и $\alpha\in L^+$. Обозначим через $Int_\alpha M$ внутренность нечеткого множества M в чанговской L-нечеткой топологии $\mathcal{T}_\alpha$, т.е. $Int_\alpha M=\vee\{\mathcal{U}:\mathcal{U}\in\mathcal{T}_\alpha,\mathcal{U}\leq M\}$.

(I.3.I7) Предложение. Отображение $\delta\mathcal{T}_\alpha:L^X\to L$, определенное равенством $\delta\mathcal{T}_\alpha(M)=M\tilde{\in}Int_\alpha M$, является L-нечеткой топологией на X.

Доказательство. Равенство $\delta\mathcal{T}_\alpha(0)=\delta\mathcal{T}_\alpha(1)=1$ очевидно. Пусть $\mathcal{U},\mathcal{V}\in L^X$, тогда, воспользовавшись результатами (0.2.2)-(0.2.9), имеем $\delta\mathcal{T}_\alpha(\mathcal{U}\wedge\mathcal{V})=\mathcal{U}\wedge\mathcal{V}\tilde{\in}Int_\alpha(\mathcal{U}\wedge\mathcal{V})=\mathcal{U}\wedge\mathcal{V}\tilde{\in}Int_\alpha\mathcal{U}\wedge Int_\alpha\mathcal{V}\geq(\mathcal{U}\tilde{\in}Int_\alpha\mathcal{U})\wedge$ $\wedge(\mathcal{V}\tilde{\in}Int_\alpha\mathcal{V})=\delta\mathcal{T}_\alpha(\mathcal{U})\wedge\delta\mathcal{T}_\alpha(\mathcal{V})$. Пусть теперь $\{\mathcal{U}_i:i\in\mathcal{I}\}\subset L^X$. Тогда $\delta\mathcal{T}_\alpha(\bigvee_i\mathcal{U}_i)=\bigvee_i\mathcal{U}_i\tilde{\in}Int_\alpha(\bigvee_i\mathcal{U}_i)\geq\bigvee_i\mathcal{U}_i\tilde{\in}\bigvee_i Int_\alpha\mathcal{U}_i\geq$ $\geq\bigwedge_i(\mathcal{U}_i\tilde{\in}Int_\alpha\mathcal{U}_i)=\bigwedge_i\delta\mathcal{T}_\alpha(\mathcal{U}_i)$.

Согласно предложению (I.2.3), убывающее семейство L-нечетких топологий $\{\delta\mathcal{T}_\alpha:\alpha\in L^+\}$ порождает L-нечеткую топологию $\delta\mathcal{T}:L^X\to L$, которую будем называть δ-модификацией L-нечеткой топологии $\mathcal{T}$. Напомним, что, как следует из (I.2.I), $\delta\mathcal{T}(M)=\bigvee_\alpha(\delta\mathcal{T}_\alpha(M)\wedge\alpha)$.

(I.3.I8) Предложение. Если отображение $f:(X,\mathcal{T}^X)\to(Y,\mathcal{T}^Y)$ непрерывно, то и отображение $f:(X,\delta\mathcal{T}^X)\to(Y,\delta\mathcal{T}^Y)$ непрерывно.

Доказательство. Согласно (I.2.2) достаточно установить непре-

рывность каждого отображения $f:(X,\delta\mathcal{T}_\alpha^X)\to(Y,\delta\mathcal{T}_\alpha^Y)$, $\alpha\in L^+$.
Заметим, прежде всего, что, поскольку $f^{-1}(\mathrm{Int}_\alpha V)\in\mathcal{T}_\alpha^X$ и $f^{-1}(\mathrm{Int}_\alpha V)\leqslant\mathrm{Int}_\alpha f^{-1}(V)$, для каждого $V\in L^X$ имеет место неравенство $f^{-1}(\mathrm{Int}_\alpha V)\leqslant\mathrm{Int}_\alpha f^{-1}(V)$. Воспользовавшись соотношениями (0.2.2)-(0.2.9), заключаем, что $\delta\mathcal{T}_\alpha^Y(V)=V\eqsim\mathrm{Int}_\alpha V\leqslant f^{-1}(V)\eqsim$ $\eqsim f^{-1}(\mathrm{Int}_\alpha V)\leqslant f^{-1}(V)\eqsim\mathrm{Int}_\alpha f^{-1}(V)=\delta\mathcal{T}_\alpha^X(f^{-1}(V))$, откуда и следует доказываемое утверждение.

(I.3.I9) $\delta:FT(L)\to FT(L)$ как функтор. Предыдущее предложение позволяет для данной нечеткой решетки L рассматривать δ-модификацию как функтор $\delta(=\delta_L):FT(L)\to FT(L)$, сопоставляющий каждому нечеткому пространству $(X,\mathcal{T})$ нечеткое пространство $(X,\delta\mathcal{T})$ и каждому морфизму $f:(X,\mathcal{T}_X)\to(Y,\mathcal{T}_Y)$ - морфизм $f:(X,\delta\mathcal{T}_X)\to(Y,\delta\mathcal{T}_Y)$. Обозначим через $\delta FT(L)$ образ категории $FT(L)$ при функторе δ. Нетрудно заметить, что при $L\neq 2$ ни одно чанговское L-нечеткое пространство не принадлежит $\delta FT(L)$.

(I.3.20) Замечание. Нетрудно построить две (чанговские) нечеткие топологии δ_1 и δ_2 на множестве X, $|X|\geqslant 2$ такие, что $\sup\{\delta\mathcal{T}_1,\delta\mathcal{T}_2\}(M)<\delta\sup\{\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2\}(M)$ для некоторого $M\in I^X$. Таким образом, для функтора δ не имеет места аналог утверждений (I.3.6) и (I.3.I3).

Д. Функтор $\natural$-модификации

(I.3.2I) Определение. $\natural$-модификацией L-нечеткой топологии $\mathcal{T}$ называется L-нечеткая топология $\natural\mathcal{T}=\sup\{\mathcal{T},\delta\mathcal{T}\}$.

Заметим, что, как следует из (I.2.8), для каждого $U\in L^X$ имеет место равенство $\natural\mathcal{T}(U)=\sup\{\alpha: U\in\sup\{\mathcal{T}_\alpha,(\delta\mathcal{T})_\alpha\}\}$.

Применяя (I.3.9) и (I.3.I8), получаем

(I.3.22) Предложение. Если отображение $f:(X,\mathcal{T}_X)\to(Y,\mathcal{T}_Y)$

непрерывно, то и отображение $f:(X, \natural\mathcal{T}_X) \to (Y, \natural\mathcal{T}_Y)$ непрерывно.

(I.3.23) $\natural: FT(L) \to FT(L)$ как функтор. Из предыдущего предложения вытекает, что для каждой нечеткой решетки L $\natural$-модификацию можно рассматривать как функтор из категории $FT(L)$ в себя. Этот функтор каждому L-нечеткому пространству $(X, \mathcal{T})$ сопоставляет L-нечеткое пространство $(X, \natural\mathcal{T})$, и каждому морфизму $f:(X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ - морфизм $f:(X, \natural\mathcal{T}_X) \to (Y, \natural\mathcal{T}_Y)$. Дискретное L-нечеткое пространство $(X, \mathcal{T}_d)$, очевидно, принадлежит $\natural FT(L)$.

(I.3.24) Замечание. Нетрудно построить (чанговские) L-нечеткие топологии $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ на множестве X, $|X| \geq 2$, такие, что $\sup\{\natural\mathcal{T}_1, \natural\mathcal{T}_2\}(M) < \natural \sup\{\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2\}(M)$ для некоторого $M \in I^X$ (ср. (I.3.6), (I.3.13) и (I.3.20)).

§ 4. НЕКОТОРЫЕ КАТЕГОРНЫЕ АСПЕКТЫ КАТЕГОРИИ $FT(L)$ И ЕЕ ОСНОВНЫХ ПОДКАТЕГОРИЙ

Отметим прежде всего следующее утверждение, легко вытекающее из соответствующих определений и (I.2.I2):

(I.4.I) Предложение. Категории $LFT(L)$ и $LCFT(L)$ являются топологическими в смысле Херрлиха [38], [39]. При $L \neq 2$ категории $FT(L)$ и $CFT(L)$ не являются топологическими в смысле Херрлиха. (Напомним, что в случае $L=2$ все вышеуказанные категории изоморфны категории Top).

(I.4.2) Теорема. (а) Категория $CFT(L)$ корефлексивна в $FT(L)$; (б) категория $LCFT(L)$ корефлексивна в $CFT(L)$, а следовательно, и в $FT(L)$; (в) категория $LFT(L)$ корефлексивна в $FT(L)$.

Доказательство. (а) Пусть $(X, \mathcal{T}) \in FT(L)$; определим чанговскую L-нечеткую топологию $\tau : L^X \to 2 \subset L$ равенством $\tau(M)=1$ при $\mathcal{T}(M)>0$ и $\tau(M)=0$ при $\mathcal{T}(M)=0$. Непосредственно проверяется, что тождественное отображение $e : (X, \tau) \to (X, \mathcal{T})$ является морфизмом категории $FT(L)$. При этом для каждого $(Y, \sigma) \in CFT(L) =: \mathfrak{A}$ и каждого морфизма $f : (Y, \sigma) \to (X, \mathcal{T})$ существует единственный морфизм $f' : (Y, \sigma) \to (X, \tau)$ такой, что $f = e \circ f'$. Но это и означает, что определенное таким образом отображение $e = e^{\mathfrak{A}}$ задает корефлексию из подкатегории $CFT(L)$ в категорию $FT(L)$ (см. диаграмму):

$$\begin{tikzcd}
X^{\mathfrak{A}} \arrow[r, "e^{\mathfrak{A}}"] & X \in FT(L) \\
Y \in \mathfrak{A} := CFT(L) \arrow[u, dashed, "f'"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

(б) Пусть $(X, \tau) \in CFT(L)$ и пусть $(X, \lambda\tau)$ – его ламинированная модификация (I.3.I). Ясно, что тождественное отображение $e : (X, \lambda\tau) \to (X, \tau)$ является морфизмом в $CFT(L)$ и что отображение $e = e^{LCFT(L)}$ является корефлексией из подкатегории $LCFT(L)$ в категорию $CFT(L)$.

Совершенно аналогично доказывается п.(в).

(I.4.3) <u>Теорема</u>. Категория $CFT(L)$ рефлексивна в $FT(L)$.

<u>Доказательство</u>. Пусть $(X, \mathcal{T}) \in FT(L)$. Определим чанговскую L-нечеткую топологию $\tau : L^X \to 2 \subset L$ равенством $\tau(M) = 1$ при $\mathcal{T}(M) = 1$ и $\tau(M) = 0$ при $\mathcal{T}(M) \neq 1$. Нетрудно проверить, что тождественное отображение $e_{\alpha} : (X, \mathcal{T}) \to (X, \tau)$ является морфизмом категории $FT(L)$ и при этом для каждого $(Y, \sigma) \in CFT(L) := \alpha$ и для каждого морфизма $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ существует единственный морфизм $f' : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \sigma)$ такой, что $f' \circ e_{\alpha} = f$ (см. диаграмму):

$$\begin{tikzcd} CFT(L) \ni X_{\alpha} \arrow[dr, dashed, "f'"'] & X \in FT(L) \arrow[l, "e_{\alpha}"'] \arrow[d, "f"] \\ & Y \in CFT(L) \end{tikzcd}$$

$(X_{\alpha} = (X, \tau),\ X = (X, \mathcal{T}),\ Y = (Y, \sigma))$.

Но это и означает, что так определенное отображение e_{α} задает рефлексию из категории $FT(L)$ в подкатегорию $CFT(L)$.

В следующих утверждениях через $\mathcal{C}$ обозначается любая из категорий $FT(L)$, $CFT(L)$, $LFT(L)$ и $LCFT(L)$.

(I.4.4) <u>Предложение</u>. Если $\mathfrak{A}$ – корефлексивная подкатегория категории $\mathcal{C}$, то $*_d \in \mathfrak{A}$, где $*_d$ – одноточечное множество, наделенное дискретной L-нечеткой топологией $\mathcal{T}_d$.

<u>Доказательство</u>. Пусть $*_d^{\alpha} = (Y, \mathcal{T})$ и $e^{\alpha} : (Y, \mathcal{T}) \to *_d$ – соответствующая корефлексия. Ясно, что $\mathcal{T}(M) = 1$ для всех $M \in L^Y$. Если Y содержит по крайней мере два различных элемента y_1 и y_2, то для отображения $e^{\alpha} : (Y, \mathcal{T}) \to *_d$ имеют место равенства $e^{\alpha} f_1 = e^{\alpha} f_2$, где $f_i : Y \to \{y_i\} \subset Y$, $i = 1, 2$, что противоречит определению корефлексии.

(I.4.5) <u>Предложение</u>. Если $\mathfrak{A}$ – корефлексивная подкатегория категории $\mathcal{C}$, то каждая корефлексия e^{α} биективна.

<u>Доказательство</u>. Пусть $(X, \mathcal{T}) \in \mathcal{C}$ и $e^{\alpha}: (X^{\alpha}, \mathcal{T}^{\alpha}) \to (X, \mathcal{T})$ - корефлексия. Легко заметить, что отображение $f: *_d \to (X, \mathcal{T})$ является морфизмом в $\mathcal{C}$ и, следовательно, e^{α} - сюръекция. Далее, предположив, что $e^{\alpha}(y_1) = e^{\alpha}(y_2) = x$ для некоторых точек $y_1, y_2 \in X^{\alpha}$, рассмотрим отображения $f: *_d \to \{x\} \subset X$, $f_1: *_d \to \{y_1\} \subset X^{\alpha}$ и $f_2: *_d \to \{y_2\} \subset X^{\alpha}$. Ясно, что f является морфизмом категории $\mathcal{C}$ из $*_d$ в $(X, \mathcal{T})$, а f_1 и f_2 - морфизмами категории $\mathcal{C}$ из $*_d$ в $(X^{\alpha}, \mathcal{T}^{\alpha})$ и при этом $e^{\alpha} f_1 = e^{\alpha} f_2 = f$, что противоречит определению корефлексии. Отсюда следует инъективность e^{α}.

(I.4.6) <u>Следствие</u>. Если $\mathcal{O}\!\ell$ корефлексивна в $\mathcal{C}$, то $(X, \mathcal{T}_d) \in \mathcal{O}\!\ell$.

(I.4.7) <u>Следствие</u>. Каждая корефлексивная подкатегория $\mathcal{O}\!\ell$ категории $\mathcal{C}$ является эпи-моно-корефлексивной.

(I.4.8) <u>Предложение</u>. Подкатегория $\mathcal{O}\!\ell$ категории $\mathcal{C}$ корефлексивна тогда и только тогда, когда для каждого $(X, \tau) \in \mathcal{C}$ существует нечеткая топология τ^{α} на X такая, что (I) $\tau^{\alpha} \geqslant \tau$; (2) $(X, \tau^{\alpha}) \in \mathcal{O}\!\ell$; (3) τ^{α} - самая слабая нечеткая топология, удовлетворяющая условиям (I) и (2); (4) для каждого пространства $(Y, \sigma) \in \mathcal{C}$ и каждого морфизма $f: (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ категории $\mathcal{C}$ отображение $f: (X, \tau^{\alpha}) \to (Y, \sigma^{\alpha})$ является морфизмом категории $\mathcal{O}\!\ell$.

<u>Доказательство</u> основывается на предложении (I.4.5) и может быть проведено по аналогии с доказательством теоремы 5 из [40].

По аналогии с доказательством соответствующих утверждений из [40] нетрудно убедиться также в справедливости следующих трех фактов.

(I.4.9) <u>Предложение</u>. Подкатегория $\mathcal{O}\!\ell$ категории $\mathcal{C}$ корефлексивна тогда и только тогда, когда она инвариантна относительно взятия дискретных сумм и перехода к фактор-пространству.

(I.4.I0) <u>Предложение</u>. Отображение $p: (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ в категории FT является факторным тогда и только тогда, когда p - коуравнитель в FT.

(I.4.II) <u>Предложение</u>. Каждая корефлексивная подкатегория $\mathcal{O}\!\ell$

категории $\mathscr{C}$ кополна.

(I.4.I2) <u>Предложение</u>. Для каждой подкатегории $\mathfrak{A}$ категории $\mathscr{C}$ существует минимальная корефлексивная подкатегория $\mathscr{C}(\mathfrak{A})$ категории $\mathscr{C}$, содержащая $\mathfrak{A}$. При этом $\mathscr{C}(\mathfrak{A})$ состоит в точности из всех факторных образов дискретных сумм объектов категории $\mathfrak{A}$.

<u>Доказательство</u> аналогично доказательству теоремы I2 из [40] и опирается на (I.2.I7), (I.4.8) и (I.4.I0).

(I.4.I3) <u>Предложение</u>. $\lambda(Top)$ является корефлексивной подкатегорией категории $LCFT(L)$.

<u>Доказательство</u>. Для каждого $(X,\tau)\in LCFT(L)$ положим $\tilde{\tau}=\lambda\iota(\tau)$. Ясно, что $(X,\tilde{\tau})\in\lambda(Top)$. Непосредственно проверяется, что тождественное отображение $e:(X,\tilde{\tau})\to(X,\tau)$ является корефлексией из $\lambda(Top)$ в $LCFT(L)$.

(I.4.I4) <u>Следствие.</u> Если $\mathfrak{A}$ – корефлексивная подкатегория в Top, то $\lambda(\mathfrak{A})$ – корефлексивная подкатегория в $LCFT(L)$, а следовательно, в $CFT(L)$ и в $FT(L)$.

(I.4.I5) <u>Теорема</u>. Пусть $\mathfrak{A}$ – корефлексивная подкатегория категории Top. Тогда $\Psi(\mathfrak{A})=\{\lambda((\iota X)^{\mathfrak{A}}): X\in CFT(L)\}$ является корефлексивной подкатегорией в $LCFT(L)$ (а следовательно, и в категориях $CFT(L)$ и $FT(L)$).

<u>Доказательство</u>. Пусть $X(=(X,\tau))\in LCFT(L)$; тогда $\iota X(=(X,\iota\tau))\in Top$ и следовательно существуют $(\iota X)^{\mathfrak{A}}(=(X,(\iota\tau)^{\mathfrak{A}})\in\mathfrak{A}$ и корефлексия $e^{\mathfrak{A}}:(\iota X)^{\mathfrak{A}}\to\iota X$ в Top. При этом можем считать, что $e^{\mathfrak{A}}$ – тождественно на X. Пусть $\lambda(\iota X)^{\mathfrak{A}}=(X,\lambda(\iota\tau)^{\mathfrak{A}})$ и $\lambda\iota X=(X,\lambda\iota\tau)$. Тогда $e^{\mathfrak{A}}:\lambda(\iota X)^{\mathfrak{A}}\to\lambda\iota X$ также является морфизмом категории $LCFT(L)$ и, поскольку $\tau\leqslant\lambda\iota\tau$, то и $e^{\Psi(\mathfrak{A})}=e^{\mathfrak{A}}:\lambda(\iota X)^{\mathfrak{A}}\to X$ – морфизм категории $LCFT(L)$. Покажем, что $e^{\Psi(\mathfrak{A})}$ – корефлексия из $\Psi(\mathfrak{A})$ в категорию $LCFT(L)$.

Пусть $Y(=(Y,\sigma))\in\Psi(\mathfrak{A})$. Тогда $Y=\lambda(\iota Z)^{\mathfrak{A}}$ для некоторого

$\mathfrak{X} \in CFT(L)$. Рассмотрим морфизм $f: (Y, \sigma) \to (X, \tau)$ категории $LCFT(L)$, тогда $f: \iota Y = (Y, \iota\sigma) \to \iota X = (X, \iota\tau)$ - морфизм категории Top. Но $\iota \circ \lambda : Top \to Top$ - тождественный функтор, а следовательно, $\iota Y = \iota\lambda(\iota\mathfrak{X})^{\mathfrak{A}} = (\iota\mathfrak{X})^{\mathfrak{A}} \in \mathfrak{A}$, т.е. $f: (\iota\mathfrak{X})^{\mathfrak{A}} \to \iota X$ - морфизм категории Top. Поэтому существует единственный морфизм $f^{\mathfrak{A}}$, замыкающий диаграмму (I). Из коммутативности диаграммы (I) следует коммутативность диаграммы (2), а значит, с учетом неравенства $\tau \leqslant \lambda\iota\tau$, и коммутативность диаграммы (3):

$$\begin{tikzcd} (\iota X)^{\mathfrak{A}} \arrow[rr, "e^{\mathfrak{A}}"] & & \iota X \\ & \iota Y \arrow[ul, dashed, "f^{\mathfrak{A}}"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd} \qquad \text{(I)}$$

$$\begin{tikzcd} \lambda(\iota X)^{\mathfrak{A}} \arrow[rr, "e^{\mathfrak{A}}"] & & \lambda(\iota X) \\ & \lambda\iota Y = Y \arrow[ul, dashed, "f^{\mathfrak{A}}"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd} \qquad (2)$$

$$\begin{tikzcd} \lambda(\iota X)^{\mathfrak{A}} \arrow[rr, "e^{\psi(\mathfrak{A})}"] & & X \\ & Y \arrow[ul, dashed, "f^{\mathfrak{A}}"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd} \qquad (3)$$

Для завершения доказательства осталось показать, что морфизм $f^{\mathfrak{A}}$, замыкающий диаграмму (3), - единственный. Пусть $f_1^{\mathfrak{A}}$ и $f_2^{\mathfrak{A}}$ - два различных морфизма, замыкающих диаграмму (3). Тогда, очевидно, $f_1^{\mathfrak{A}}, f_2^{\mathfrak{A}}: \iota(Y) \to \lambda(\iota X)^{\mathfrak{A}} = (\iota X)^{\mathfrak{A}}$ - два различных морфизма, замыкающих диаграмму (I), что противоречит определению $e^{\mathfrak{A}}$ как корефлексии.

§ 5. ЛОКАЛЬНАЯ СТРУКТУРА L-НЕЧЕТКОГО ТОПОЛОГИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

(I.5.I) К понятию L-нечеткой точки. В общей топологии, как и во многих других областях теоретической математики, фундаментальную роль играет понятие точки. Точка является "атомарным" в смысле отношения принадлежности $\in$ элементом: она либо принадлежит, либо не принадлежит множеству, в то время как ничто не может принадлежать точке. Одним из принципиальных отличий математики нечетких множеств и, в частности, нечеткой топологии является отсутствие таких "атомарных" предметов. Вызванный этим отсутствием пробел удается в некоторой степени восполнить с помощью своего рода "суррогата" точки – т.н. нечеткой точки. Впервые нечеткие точки были определены в работах Пу и Лю [86], [87], Саркар [94], [95], Сривастав и Лала [98], Де Митру и Паскали [18]. (Данные независимо этими авторами определения нечеткой точки и соответственно, отношения принадлежности $\widetilde{\in}$ нечеткой точки нечеткому множеству весьма схожи, хотя и различаются некоторыми частностями.) Приведем здесь основные определения и факты, связанные с понятием нечеткой точки. При этом, следуя в целом работам [86], [87], мы распространяем соответствующие понятия на случай L-нечетких пространств для произвольной нечеткой решетки L.

L-нечеткая точка множества X – это отображение $p := x_0^t : X \to L$, где $x_0 \in X$ и $t \in L^+ := L \setminus \{0\}$, определенное равенством $p(x_0) = t$ и $p(x) = 0$ при $x \neq x_0$; при этом x_0 называется носителем нечеткой точки p, а t – ее значением. Обычная точка $x_0 \in X$ при этом трактуется как нечеткая точка x_0^1. L-нечеткая точка $p = x_0^t$ принадлежит нечеткому множеству M ($p \widetilde{\in} M$), если $t \leq M(x_0)$. L-нечеткая точка p строго принадлежит M ($p \widetilde{\in}_s M$), если $t < M(x_0)$.

Наряду с отношением принадлежности $\tilde{\in}$ иногда полезно рассматривать отношение q т.н. <u>квазисовпадения</u>, или <u>q-совпадения</u>:

L-нечеткая точка $p := x_0^t$ q-совпадает с нечетким множеством M (pqM), если $M(x_0) > t^c$. В случае $L=I$ q-совпадение нечеткой точки p с нечетким множеством M может быть, очевидно, охарактеризовано неравенством $M(x_0)+t>1$.

В последующем нам потребуется также отношение q-совпадения для двух L-нечетких множеств. Будем говорить, что L-нечеткие множества M, N q-совпадают (MqN), если $M \nleq N^c$. В случае $L=I$ q-совпадение нечетких множеств M и N означает, что для некоторой точки $x \in X$ имеет место неравенство $M(x)+N(x)>1$.

По отношению к операциям пересечения и объединения для семейства $\{U_i : i \in \mathcal{I}\}$ нечетких множеств в поведении $\tilde{\in}$ и q имеются как аналогии с поведением отношения $\in$, так и отличия от него:

$p\tilde{\in}\bigwedge_i U_i \Leftrightarrow \forall i\ p\tilde{\in}U_i$; $pq(\bigwedge_i U_i) \not\Leftrightarrow \forall i\ pqU_i$ $(pq(U_1 \wedge U_2) \Leftrightarrow pqU_i,\ i=1,2)$;

$p\tilde{\in}\bigvee_i U_i \not\Leftrightarrow \exists i\ p\tilde{\in}U_i$; $pq(\bigvee_i U_i) \Leftrightarrow \exists i\ pqU_i$ $(p\tilde{\in}U_1 \vee U_2 \Leftrightarrow p\tilde{\in}U_1$ или $p\tilde{\in}U_2)$.

L-нечеткая точка не является, вообще говоря, атомарным объектом ни по отношению к $\tilde{\in}$, ни по отношению к q: например, в случае $L=I$, выбрав $s\in(0,t)$ и $r\in(1-t,1)$ для данного $t\in(0,1]$, имеем $x_0^s \tilde{\in} x_0^t$ и $x_0^r q x_0^t$.

В общей топологии большое значение имеет исследование локальной структуры топологических пространств, а также локальное описание топологии, т.е. описание топологии посредством систем окрестностей точек. Основной целью данного параграфа является исследование нечеткой окрестностной и q-окрестностной структуры в L-нечетком пространстве и локальное описание L-нечеткой топологии посредством таких структур. Однако, оказывается, что локальную теорию удобнее (и, по-видимому, более естественно) развивать не для L-нечетких топологических пространств, а в несколько более общем контексте - для т.н. L-нечетких предтопологических пространств, определяемых ниже.

(I.5.2) <u>L-нечеткое предтопологическое пространство</u>. Отображение $\mathcal{T} : L^X \to L$ такое, что

(I) $\mathcal{T}(0) = \mathcal{T}(1) = 1$ и

(2) $\mathcal{T}(U \wedge V) \geq \mathcal{T}(U) \wedge \mathcal{T}(V)$ для любых $U, V \in L^X$,

будем называть <u>L-нечеткой предтопологией</u> на множестве X, а пару $(X, \mathcal{T})$ - <u>L-нечетким предтопологическим пространством</u>.

<u>Замечание</u>. "Чанговская" L-нечеткая предтопология, т.е. отображение $\mathcal{T} : L^X \to 2$, удовлетвряющее условиям (I) и (2), естественным образом порождает чанговскую нечеткую топологию $\tau : L^X \to 2$, для которой $\mathcal{T}$ является базой. Поэтому при рассмотрении чанговских L-нечетких топологий (и тем более, при рассмотрении обычных топологий) понятие (L-нечеткой) предтопологии (в определенном выше смысле) представляется излишним: всегда можно свести дело к изучению L-нечетких топологий. В случае произвольных L-нечетких топологий ситуация существенно иная. В частности, локальную теорию в нечеткой топологии нам представляется естественным развивать именно в контексте L-нечетких предтопологических пространств.

Пусть $(X, \mathcal{T})$ - L-нечеткое предтопологическое пространство и $\mathcal{X}$ - совокупность всех его L-нечетких точек.

(I.5.3) <u>Окрестностной структурой</u> L-нечеткого предтопологического пространства $(X, \mathcal{T})$ называется отображение $\mathcal{N} : \mathcal{X} \times L^X \to L$, определенное равенством $\mathcal{N}(x_0^t, U) = \sup\{\mathcal{T}(V) : V \leq U,\ V(x_0) \geq t\}$.

(I.5.3) <u>Q-окрестностной структурой</u> L-нечеткого предтопологического пространства $(X, \mathcal{T})$ называется отображение $Q : \mathcal{X} \times L^X \to L$, определяемое равенством $Q(x_0^t, U) = \sup\{\mathcal{T}(V) : V \leq U,\ V(x_0) > t^c\}$.

В дальнейшем мы, наряду с записью $\mathcal{N}(p, U)$ и $Q(p, U)$, где $p \in \mathcal{X}$, используем также запись $\mathcal{N}_p(U)$ и $Q_p(U)$ соответственно.

(I.5.4) <u>Теорема</u>. Окрестностная структура $\mathcal{N}$ произвольного L-нечеткого предтопологического пространства $(X, \mathcal{T})$ удовлетворяет следующим условиям (p - произвольная L-нечеткая точка множества X):

(I N) если $\mathcal{N}_p(\mathcal{U}) > 0$, то $p \mathrel{\tilde{\in}} \mathcal{U}$;

(2 N) $\sup\limits_{\mathcal{U} \in L^X} \mathcal{N}_p(\mathcal{U}) = 1$;

(3 N) $\mathcal{N}_p(\mathcal{U}_1 \wedge \mathcal{U}_2) \geqslant \mathcal{N}_p(\mathcal{U}_1) \wedge \mathcal{N}_p(\mathcal{U}_2)$ для любых $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in L^X$;

(4 N) если $\mathcal{U} \leqslant \mathcal{U}'$ ($\mathcal{U}, \mathcal{U}' \in L^X$), то $\mathcal{N}_p(\mathcal{U}') \geqslant \mathcal{N}_p(\mathcal{U})$;

(5 N) $\mathcal{N}_p(\mathcal{U}) \leqslant \sup\limits_{\substack{\mathcal{V} \leqslant \mathcal{U} \\ \mathcal{V} \in L^X}} \mathcal{N}_p(\mathcal{V}) \wedge \Big(\bigwedge\limits_{\substack{r \tilde{\in} \mathcal{V} \\ r \in \mathfrak{X}}} \mathcal{N}_r(\mathcal{V})\Big)$ для каждого $\mathcal{U} \in L^X$.

(в действительности в (5 N) имеет место равенство).

<u>Доказательство</u>. Свойства (I N), (2 N) и (4 N) очевидны. Свойство (3 N) вытекает из следующей цепочки неравенств: $\mathcal{N}_p(\mathcal{U}_1 \wedge \mathcal{U}_2) = \sup\{\mathcal{T}(\mathcal{V}) : \mathcal{V} \leqslant \mathcal{U}_1 \wedge \mathcal{U}_2;\ \mathcal{V}(x_0) \geqslant t\} = \sup\{\mathcal{T}(\mathcal{V}_1 \wedge \mathcal{V}_2) : \mathcal{V}_i \leqslant \mathcal{U}_i,\ \mathcal{V}_i(x_0) \geqslant t,\ i = 1,2\} \geqslant \sup\{\mathcal{T}(\mathcal{V}_1) \wedge \mathcal{T}(\mathcal{V}_2) : \mathcal{V}_i \leqslant \mathcal{U}_i,\ \mathcal{V}_i(x_0) \geqslant t,\ i = 1,2\} = \sup\{\mathcal{T}(\mathcal{V}_1) : \mathcal{V}_1 \leqslant \mathcal{U}_1,\ \mathcal{V}_1(x_0) \geqslant t\} \wedge \sup\{\mathcal{T}(\mathcal{V}_2) : \mathcal{V}_2 \leqslant \mathcal{U}_2,\ \mathcal{V}_2(x_0) \geqslant t\} \geqslant \mathcal{N}_p(\mathcal{U}_1) \wedge \mathcal{N}_p(\mathcal{U}_2)$.

Для доказательства (5 N) предположим, что $\mathcal{N}_p(\mathcal{U}) = \alpha$; тогда согласно определению $\mathcal{N}_p(\mathcal{U})$ найдется $\mathcal{A} \subset L$ такое, что $\sup \mathcal{A} = \alpha$, и для каждого $\beta \in \mathcal{A}$ существует $\mathcal{V}^\beta$ такое, что $\mathcal{V}^\beta \leqslant \mathcal{U}$, $\mathcal{V}^\beta(x_0) \geqslant t$ и $\mathcal{T}(\mathcal{V}^\beta) \geqslant \beta$. Но это означает, что для каждого $r \mathrel{\tilde{\in}} \mathcal{V}^\beta$ $\mathcal{N}_r(\mathcal{V}^\beta) \geqslant \mathcal{T}(\mathcal{V}^\beta) \geqslant \beta$ и, в частности, $\mathcal{N}_p(\mathcal{V}^\beta) \geqslant \beta$. Для завершения доказательства остается заметить, что, ввиду произвольности $\beta \in \mathcal{A}$ и условия $\sup \mathcal{A} = \alpha$, отсюда следует $\sup\limits_{\mathcal{V} \leqslant \mathcal{U}} \mathcal{N}_p(\mathcal{V}) \wedge \Big(\bigwedge\limits_{r \tilde{\in} \mathcal{V}} \mathcal{N}_r(\mathcal{V})\Big) \geqslant \alpha$.

Совершенно аналогично можно доказать следующее утверждение:

(I.5.4′) <u>Теорема</u>. q-окрестностная структура $\mathcal{Q}$ произвольного L-нечеткого предтопологического пространства $(X, \mathcal{T})$ удовлетворяет следующим условиям:

(I Q) если $\mathcal{Q}_p(\mathcal{U}) > 0$, то $p q \mathcal{U}$;

(2 Q) $\sup\limits_{\mathcal{U} \in L^X} \mathcal{Q}_p(\mathcal{U}) = 1$;

(3 Q) $Q_p(U_1 \wedge U_2) \geq Q_p(U_1) \wedge Q_p(U_2)$ для любых $U_1, U_2 \in L^X$;

(4 Q) если $U \leq U'$ ($U, U' \in L^X$), то $Q_p(U') \geq Q_p(U)$;

(5 Q) $Q_p(U) \leq \sup\limits_{\substack{V \leq U \\ V \in L^X}} Q_p(V) \wedge (\bigwedge\limits_{\substack{r \tilde{q} V \\ r \in \mathfrak{X}}} Q_r(V))$ для каждого $U \in L^X$

(в действительности в (5 Q) имеет место равенство).

(I.5.5) <u>Теорема</u>. Пусть X – множество, $\mathfrak{X}$ – семейство всех его L-нечетких точек и пусть отображение $\mathcal{N} : \mathfrak{X} \times L^X \to L$ удовлетворяет аксиомам (I N)–(5 N). Тогда отображение $\mathcal{T}: L^X \to L$, определенное равенством $\mathcal{T}(U) = \inf\limits_{p \tilde{\in} U} \mathcal{N}_p(U)$, является L-нечеткой предтопологией на множестве X. При этом $\mathcal{N}$ в точности оказывается окрестностной структурой L-нечеткого предтопологического пространства (X, $\mathcal{T}$).

<u>Доказательство</u>. Очевидно, что $\mathcal{T}(0) = \inf \emptyset = 1$. Из (2 N) и (4 N) легко следует, что $\mathcal{N}_p(1) = 1$ для каждого $p \in \mathfrak{X}$ и, следовательно, $\mathcal{T}(1) = \inf\limits_{p \tilde{\in} 1} \mathcal{N}_p(1) = 1$.

Пусть $U_1, U_2 \in L^X$. Тогда, применяя (3 N) и свойства отношения $\tilde{\in}$ (I.5.I), замечаем, что $\mathcal{T}(U_1 \wedge U_2) = \inf\{\mathcal{N}_p(U_1 \wedge U_2) : p \tilde{\in} U_1 \wedge U_2\} \geq$
$\geq \inf\{\mathcal{N}_p(U_1) \wedge \mathcal{N}_p(U_2) : p \tilde{\in} U_1, p \tilde{\in} U_2\} \geq \inf\{\mathcal{N}_p(U_1) : p \tilde{\in} U_1\} \wedge$
$\wedge \inf\{\mathcal{N}_p(U_2) : p \tilde{\in} U_2\} = \mathcal{T}(U_1) \wedge \mathcal{T}(U_2)$.

Пусть теперь $\mathcal{N}_{\mathcal{T}}$ обозначает окрестностную структуру L-нечеткого предтопологического пространства (X, $\mathcal{T}$). Зафиксируем L-нечеткую точку $p = x_0^t \in \mathfrak{X}$ и L-нечеткое множество U. Применяя (5 N), имеем $\mathcal{N}_{\mathcal{T}}(p, U) = \sup\{\mathcal{T}(V) : V \leq U, V(x_0) \geq t\} = \sup\{\inf \mathcal{N}_r(V) : V \leq U, V(x_0) \geq t\} \leq \mathcal{N}_p(U) \leq \sup\limits_{V \leq U} \mathcal{N}_p(V) \wedge (\bigwedge\limits_{r \tilde{\in} V} \mathcal{N}_r(V)) = \sup\{\inf\limits_{r \tilde{\in} V} \mathcal{N}_r(V) : V \leq U, p \tilde{\in} V\} = \mathcal{N}_{\mathcal{T}}(p, U)$, а следовательно, $\mathcal{N}_{\mathcal{T}} = \mathcal{N}$.

Заметим, что, как следует из приведенного ниже примера, определенная в доказательстве этой теоремы L-нечеткая предтопология $\mathcal{T}$ не обязана быть L-нечеткой топологией даже в чанговской ситуации.

(I.5.6). <u>Пример</u>. Пусть X – множество и $\alpha \in (0, 1)$. Для каждого

$t\in(0,\alpha)$ и каждого $x\in X$ определим окрестностную структуру нечеткой точки $p=x_0^t$ равенством $\mathcal{N}_p(U)=1$ при $U\geqslant t$ и $\mathcal{N}_p(U)=0$ в противном случае. Далее, для каждого $t\in(\alpha,1]$ и каждого $x\in X$ определим окрестностную структуру в нечеткой точке $p:=x_0^t$, положив $\mathcal{N}_p(1)=1$ и $\mathcal{N}_p(U)=0$ при $U\neq 1$. Очевидно, определенное таким образом отображение $\mathcal{N}:\mathcal{X}\times I^X\to I$ является окрестностной структурой. Пусть $\mathcal{T}$ – соответствующая нечеткая предтопология. Тогда, полагая $U_c(x)=c$ для каждого $x\in X$, где $c\in(0,\alpha)$, мы приходим к семейству нечетких множеств такому, что $\mathcal{T}(\bigvee\limits_{c<\alpha}U_c)=0$, в то время как $\mathcal{T}(U_c)=1$ для каждого $c\in(0,\alpha)$, а следовательно, $\mathcal{T}$ не является нечеткой топологией.

(I.5.5′) <u>Теорема</u>. Пусть X – множество, $\mathcal{X}$ – семейство всех его L-нечетких точек и отображение $Q:\mathcal{X}\times L^X\to L^X$ удовлетворяет условиям (IQ)-(5Q). Тогда отображение $\mathcal{T}:L^X\to L$, определяемое равенством $\mathcal{T}(U)=\inf\limits_{pqU}Q_p(U)$, является L-нечеткой <u>топологией</u> на X. При этом Q в точности является q-окрестностной структурой L-нечеткого топологического пространства (X, $\mathcal{T}$).

<u>Доказательство</u>. Очевидно, $\mathcal{T}(0)=\inf\varnothing=1$. Из (2$Q$) и (4$Q$) легко следует, что $Q_p(1)=1$ для каждого $p\in\mathcal{X}$, а следовательно, $\mathcal{T}(1)=\inf\limits_{pq1}Q_p(1)=1$. Пусть теперь $U_1,U_2\in L^X$. Тогда, применяя (3Q) и воспользовавшись свойствами отношения q (I.5.I), имеем: $\mathcal{T}(U_1\wedge U_2)=\inf\{Q_p(U_1\wedge U_2):pq(U_1\wedge U_2)\}\geqslant\inf\{Q_p(U_1)\wedge Q_p(U_2):pqU_1,\,pqU_2\}\geqslant\inf\{Q_p(U_1):pqU_1\}\wedge\inf\{Q_p(U_2):pqU_2\}=\mathcal{T}(U_1)\wedge\mathcal{T}(U_2)$.

Пусть теперь $\{U_i:i\in\mathcal{I}\}\subset L^X$. Применяя (4$Q$) и воспользовавшись свойствами отношения q (I.5.I), приходим к цепочке неравенств $\mathcal{T}(\bigvee\limits_i U_i)=\inf\{Q_p(\bigvee\limits_i U_i):pq(\bigvee\limits_i U_i)\}=\inf\{Q_p(\bigvee\limits_i U_i):\exists i_0\in\mathcal{I};\,pqU_{i_0}\}\geqslant\inf\{Q_p(U_{i_0}):pqU_{i_0}\}=\mathcal{T}(U_{i_0})$,
а следовательно, $\mathcal{T}(\bigvee\limits_i U_i)\geqslant\bigwedge\limits_i\mathcal{T}(U_i)$. Таким образом, $\mathcal{T}$ является L-нечеткой топологией.

Пусть $Q_{\mathcal{T}}$ – q-окрестностная структура L-нечеткого топологического пространства $(X, \mathcal{T})$. Зафиксировав L-нечеткую точку $p = x_0^t \in \mathcal{X}$ и L-нечеткое множество $U \in L^X$ и воспользовавшись $(5\,Q)$, имеем $Q_{\mathcal{T}}(p, U) = \sup\{\mathcal{T}(V) : V \leq U, V(x_0) > t^c\} = \sup\{\inf_{rqV} Q_r(V) : V \leq U, V(x_0) > t^c\} \leq Q_p(U) \leq \sup_{V \leq U} Q_p(V) \wedge (\bigwedge_{rqV} Q_r(V)) = \sup\{\inf_{rqV} Q_r(V) : V \leq U,\ pqV\} = Q_{\mathcal{T}}(p, U)$. Таким образом, $Q_{\mathcal{T}} = Q$.

Для L-нечеткой окрестностной структуры $\mathcal{N} : \mathcal{X} \times L^X \to L$ обозначим через $\mathcal{T}_{\mathcal{N}} : L^X \to L$ соответствующую L-нечеткую предтопологию, построенную в доказательстве теоремы (I.5.5). Для L-нечеткой предтопологии $\mathcal{T} : L^X \to L$ обозначим через $\mathcal{N}_{\mathcal{T}} : \mathcal{X} \times L^X \to L$ соответствующую L-нечеткую окрестностную структуру, определенную в (I.5.3). Аналогичный смысл придается обозначениям $\mathcal{T}_Q$ и $Q_{\mathcal{T}}$. Теоремы (I.5.5) и (I.5.5′) утверждают, по существу, справедливость равенств $Q_{\mathcal{T}_Q} = Q$ и $\mathcal{N}_{\mathcal{T}_{\mathcal{N}}} = \mathcal{N}$ для произвольных окрестностной структуры $\mathcal{N}$ и q-окрестностной структуры Q. Доказываемые ниже утверждения (I.5.7) и (I.5.7′) дополняют эти результаты.

(I.5.7) <u>Теорема</u>. Для каждой L-нечеткой предтопологии $\mathcal{T}$ имеет место неравенство $\mathcal{T}_{\mathcal{N}_{\mathcal{T}}} \geq \mathcal{T}$. Если $\mathcal{T}$ является L-нечеткой топологией и L – линейно упорядочено, то $\mathcal{T}_{\mathcal{N}_{\mathcal{T}}} = \mathcal{T}$.

<u>Доказательство</u>. Из определений следует, что

$$\mathcal{T}_{\mathcal{N}_{\mathcal{T}}}(U) = \inf_{p \tilde{\in} U} \mathcal{N}_{\mathcal{T}}(p, U) = \inf_{p \tilde{\in} U} \sup\{\mathcal{T}(V) : V \leq U, V(x_0) \geq t\} \geq \mathcal{T}(U)$$

для каждого $U \in L^X$ и, следовательно, $\mathcal{T}_{\mathcal{N}_{\mathcal{T}}} \geq \mathcal{T}$.

Предположим теперь, что $\mathcal{T}$ – L-нечеткая топология, L – линейно упорядочено и пусть существует $U \in L^X$ такое, что $\mathcal{T}(U) < \mathcal{T}_{\mathcal{N}_{\mathcal{T}}}(U) = \inf_{p \tilde{\in} U} \sup\{\mathcal{T}(V) : V \leq U, V(x_0) \geq t\}$. Если интервал $(\mathcal{T}(U), \mathcal{T}_{\mathcal{N}_{\mathcal{T}}}(U))$ не пуст, выберем $a \in (\mathcal{T}(U), \mathcal{T}_{\mathcal{N}_{\mathcal{T}}}(U))$; в противном случае положим $a = \mathcal{T}_{\mathcal{N}_{\mathcal{T}}}(U)$. Для каждого $p \tilde{\in} U$ зафиксируем $V_p \leq U$ так, чтобы $p \tilde{\in} V_p$ и $\mathcal{T}(V_p) \geq a$. Отсюда легко следует, что $U = \bigvee_{p \tilde{\in} U} V_p$ и, поскольку $\mathcal{T}$ является L-нечеткой топологией, то $\mathcal{T}(\mathcal{U}) \geq \bigwedge_{p \tilde{\in} \mathcal{U}} \mathcal{T}(\mathcal{V}_p) \geq a$. Полученное противоречие и означает, что $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathcal{N}_\mathcal{T}}$.

Рассуждая по аналогии с доказательством (I.5.7), нетрудно установить также следующее утверждение:

(I.5.7′) Теорема. Для каждой L-нечеткой предтопологии $\mathcal{T}$ имеет место неравенство $\mathcal{T}_{Q_\mathcal{T}} \geq \mathcal{T}$. Если при этом $\mathcal{T}$ является L-нечеткой топологией и L линейно упорядочено, то $\mathcal{T}_{Q_\mathcal{T}} = \mathcal{T}$.

(I.5.8) Замечание. В случае произвольной нечеткой решетки L равенства $\mathcal{T}_{Q_\mathcal{T}} = \mathcal{T}$ и $\mathcal{T}_{\mathcal{N}_\mathcal{T}} = \mathcal{T}$, вообще говоря, не имеют места. В отношении второго равенства в этом легко убедиться косвенно следующим образом. Пусть $\mathcal{T} : L^X \to L$ – L-нечеткая предтопология, не являющаяся L-нечеткой топологией. Тогда, тем не менее, согласно (I.5.4′), отображение $Q_\mathcal{T} : \mathcal{X} \times L^X \to L$ удовлетворяет условиям (I Q)-(5 Q) и, следовательно, согласно (I.5.5′), соответственное отображение $\mathcal{T}_{Q_\mathcal{T}} : L^X \to L$ является L-нечеткой топологией, т.е. заведомо $\mathcal{T}_{Q_\mathcal{T}} \neq \mathcal{T}$.

(I.5.9) Случай чанговского L-нечеткого пространства. Если в качестве исходного взять чанговское L-нечеткое пространство (X,τ), то соответствующие окрестностная и q-окрестностная структуры также являются двузначными и, следовательно, могут рассматриваться как системы L-нечетких подмножеств множества X :

$$\mathcal{N} = \bigcup_{p \in \mathcal{X}} \mathcal{N}_p = \bigcup_{p \in \mathcal{X}} \{\mathcal{U} : \exists \mathcal{V} \in \tau,\ \mathcal{V} \leq \mathcal{U},\ p \tilde{\in} \mathcal{V}\} \quad \text{и}$$

$$Q = \bigcup_{p \in \mathcal{X}} Q_p = \bigcup_{p \in \mathcal{X}} \{\mathcal{U} : \exists \mathcal{V} \in \tau,\ \mathcal{V} \leq \mathcal{U},\ p q \mathcal{V}\}.$$

В этом случае элементы $\mathcal{U} \in \mathcal{N}_p$ называем L-нечеткими окрестностями, а элементы $\mathcal{U} \in Q_p$ – L-нечеткими q-окрестностями L-нечеткой точки p в пространстве (X, τ). Свойства (IN)-(5N) L-нечеткой окрестностной структуры принимают в этой ситуации следующий вид:

(INC) если $\mathcal{U} \in \mathcal{N}_p$, то $p \tilde{\in} \mathcal{U}$;

(2NC) $\mathcal{N}_p = \emptyset$ для каждого $p \in \mathfrak{X}$;

(3NC) если $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in \mathcal{N}_p$, то $\mathcal{U}_1 \wedge \mathcal{U}_2 \in \mathcal{N}_p$;

(4NC) если $\mathcal{U} \in \mathcal{N}_p$ и $\mathcal{U}' \geqslant \mathcal{U}$, то $\mathcal{U}' \in \mathcal{N}_p$;

(5NC) для каждого $\mathcal{U} \in \mathcal{N}_p$ найдется $\mathcal{V} \in \mathcal{N}_p$ такое, что $\mathcal{V} \leqslant \mathcal{U}$ и $\mathcal{V} \in \mathcal{N}_r$ для каждого $r \tilde{\in} \mathcal{V}$.

Свойства (IQ)-(5Q) L-нечеткой q-окрестностной системы принимают в этой ситуации следующий вид:

(IQC) если $\mathcal{U} \in Q_p$, то $pq\mathcal{U}$;

(2QC) $Q_p \neq \emptyset$ для каждого $p \in \mathfrak{X}$;

(3QC) если $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in Q_p$, то $\mathcal{U}_1 \wedge \mathcal{U}_2 \in Q_p$;

(4QC) если $\mathcal{U} \in Q_p$ и $\mathcal{U}' \geqslant \mathcal{U}$, то $\mathcal{U}' \in Q_p$;

(5QC) для каждого $\mathcal{U} \in Q_p$ существует $\mathcal{V} \in Q_p$ такое, что $\mathcal{V} \leqslant \mathcal{U}$ и $\mathcal{V} \in \mathcal{N}_r$ для каждого $rq\mathcal{V}$.

Применяя утверждения (I.5.4), (I.5.4$'$), (I.5.5), (I.5.5$'$), (I.5.7), (I.5.7$'$) и (I.5.8) в этой ситуации, получаем локальную теорию чанговских L-нечетких пространств.

(I.5.IO) <u>Локальное описание замыкания в чанговских L-нечетких пространствах</u>. Проиллюстрируем некоторые возможности развитого в этом параграфе локального подхода к изучению L-нечетких топологических пространств на примере локальной характеристики замыкания в L-нечетких пространствах. При этом для простоты ограничимся чанговским случаем.

L-нечеткую точку $p \tilde{\in} X$, где (X, τ) - чанговское L-нечеткое пространство, назовем <u>точкой прикосновения</u> L-нечеткого множества M, если каждая q-окрестность нечеткой точки p квазисовпадает с M. Нечеткая точка p называется <u>предельной</u> (для) L-нечеткого множества M, если p является точкой прикосновения M и при этом, если $p \tilde{\in} M$, то каждая ее q-окрестность q-совпадает с M в некоторой точке, отличной от носителя L-нечеткой точки p . Непосредственно из определений нетрудно показать, что замыкание $\bar{M}$ L-нечеткого множества M равно объединению всех его L-нечетких точек прикосновения. Нечеткое множество M замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные L-нечеткие точки. Объединение всех L-нечетких точек, которые предельны для данной L-нечеткой точки p , является замкнутым (ср.[56]).

§ 6. СТРУКТУРЫ СХОДИМОСТИ В НЕЧЕТКОЙ ТОПОЛОГИИ

В данном параграфе развивается теория сходимости в нечетких топологических пространствах. В ее основу положено понятие нечеткой направленности, введенное Пу и Лю [86]. При этом мы ограничиваемся здесь случаем (I-)нечетких пространств. Такое ограничение позволяет существенно упростить изложение, а, с другой стороны, этих рамок вполне достаточно для наших основных целей. Отметим также, что некоторые из доказываемых здесь утверждений (в т.ч. и принципиальная для нас теорема I.6.I4) не могут быть распространены на случай произвольной нечеткой решетки.

(I.6.I) Нечеткие направленности (ср. [86]). Пусть X – множество, $\mathcal{X}$ – совокупность всех его нечетких точек и $(\mathcal{D}, \prec)$ – некоторое направленное множество [56]. Нечеткой направленностью в X называется отображение вида $\mathcal{P}: \mathcal{D} \to \mathcal{X}$. Для нечеткой направленности наряду с записью $\mathcal{P}: \mathcal{D} \to \mathcal{X}$ будем использовать также запись $(p_n)_{n\in\mathcal{D}}$, где $p_n = \mathcal{P}(n)$.

Пусть $\mathcal{P}: \mathcal{D} \to \mathcal{X}$ – нечеткая направленность в X и $M \in I^X$. Будем говорить, что: (I) $\mathcal{P}$ финальна с M, если существует $m \in \mathcal{D}$ такое, что $p_n \tilde{\in} M$ для всех $n \succ m$; (2) $\mathcal{P}$ лежит, или содержится в M, если $p \tilde{\in} M$ для всех $n \in \mathcal{D}$; (3) $\mathcal{P}$ конфинальна с M, если для каждого $m \in \mathcal{D}$ найдется $n \succ m$ такое, что $p_n \tilde{\in} M$; (4) $\mathcal{P}$ q-финальна с M, если существует $m \in \mathcal{D}$ такое, что $p_n q M$ для всех $n \succ m$; (5) $\mathcal{P}$ q-финальна с M, если для каждого $m \in \mathcal{D}$ найдется $n \succ m$ такое, что $p_n q M$.

(I.6.2) Структура сходимости нечетких направленностей. Пусть $\mathcal{N}(X)$ – класс всех нечетких направленностей в нечетком пространстве $(X, \mathcal{T})$. Определим отображение $\mathcal{C}on: \mathcal{N}(X) \times I \to I^X$ равенством ($\mathcal{P} \in \mathcal{N}(X)$, $\alpha \in I$):

$\mathcal{C}on(\mathcal{P},\alpha)(x) = \bigvee\{t\in I : (\forall\, \mathcal{U}\in\mathcal{T}_\alpha,\ x^t q\, \mathcal{U}) \Rightarrow \mathcal{P}$ q-финальна с $\mathcal{U}\}$.

Это же условие можно записать следующим образом. Пусть $p\,\tilde{\in}\, X$. Тогда $p\,\tilde{\in}\,\mathcal{C}on(\mathcal{P},\alpha)$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{P}$ q-финальна с каждой α-q-окрестностью нечеткой точки p.

Определенное таким образом отображение $\mathcal{C}on : \mathcal{N}(X)\times I \longrightarrow I^X$ называется <u>структурой сходимости</u> [<u>нечетких направленностей</u>] <u>нечеткого</u> [<u>топологического</u>] <u>пространства</u> $(X,\mathcal{T})$. Говоря неформально, структура сходимости каждой нечеткой направленности $\mathcal{P}$ и каждому $\alpha\in I$ сопоставляет некоторое нечеткое множество, к которому данная нечеткая направленность считается сходящейся на данном уровне α.

Следующая теорема характеризует оператор нечеткого замыкания (I.I.I0) посредством структуры сходимости:

(I.6.3) <u>Теорема</u>. Пусть $(X,\mathcal{T})$ – нечеткое пространство, $M\in I^X$, $\alpha\in I$ и p – произвольная нечеткая точка. Тогда $p\,\tilde{\in}\,\mathcal{C}l(M,\alpha)$ в том и только в том случае, когда в M найдется нечеткая направленность $\mathcal{P}$ такая, что $p\,\tilde{\in}\,\mathcal{C}on(\mathcal{P},\alpha)$. Следовательно, $\mathcal{C}l(M,\alpha) = \bigvee\{\mathcal{C}on(\mathcal{P},\alpha) : \mathcal{P}\subset M\}$.

<u>Доказательство</u>. Пусть $p\,\tilde{\in}\,\mathcal{C}l(M,\alpha)$. Рассмотрим множество $\mathcal{D} = \{\mathcal{U}\in I^X : \mathcal{T}(\mathcal{U})\geqslant\alpha,\ p\,q\,\mathcal{U}\}$. Ясно, что, полагая $\mathcal{U}<\mathcal{U}'$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{U}'\leqslant\mathcal{U}$, мы превращаем $\mathcal{D}$ в направленное множество. Поскольку $p\,\tilde{\in}\,\mathcal{C}l(M,\alpha)$, из (I.5.I0) следует, что $M q\,\mathcal{U}$ для каждого $\mathcal{U}\in\mathcal{T}_\alpha$ такого, что $p\,q\,\mathcal{U}$. Зафиксировав $\mathcal{U}\in\mathcal{D}$, выберем $x\in X$ и $t\in I$ так, чтобы $M(x)+\mathcal{U}(x)>1$ и $\mathcal{U}^c(x)<t\leqslant M(x)$ и пусть $p_{\mathcal{U}} := x^t$. Таким образом мы приходим к нечеткой направленности $(p_{\mathcal{U}})_{\mathcal{U}\in\mathcal{D}}$, которая лежит в M и q-финальна с каждой α-q-окрестностью $\mathcal{U}$ нечеткой точки p. Следовательно, $p\,\tilde{\in}\,\mathcal{C}on(\mathcal{P},\alpha)$.

Обратно, пусть $\mathcal{P}\subset M$ и $p\,\tilde{\in}\,\mathcal{C}on(\mathcal{P},\alpha)$. Согласно (I.6.2), это означает, что $\mathcal{P}$ q-финальна с каждым $\mathcal{U}\in I^X$ таким, что $\mathcal{U}\in\mathcal{T}_\alpha$

и pqU, а следовательно, для каждого такого U найдется $p_n \in \mathcal{P}$, которая q-совпадает с U. Но поскольку $\mathcal{P} \subset M$, отсюда немедленно заключаем, что нечеткие множества U и M q-совпадают, а следовательно, согласно (I.5.10), $p \in \mathcal{C}\ell(M, \alpha)$.

Поскольку неравенство $\mathcal{J}_c(M) \geqslant \alpha$ эквивалентно условию $M = \mathcal{C}\ell(M, \alpha)$, из предыдущей теоремы немедленно вытекает

(I.6.4) <u>Теорема</u>. Пусть $(X, \mathcal{J})$ – нечеткое пространство, $M \in I^X$ и $\alpha \in I$. Тогда $\mathcal{J}_c(M) \geqslant \alpha$ в том и только в том случае, когда $p \tilde{\in} \mathcal{C}on(\mathcal{P}, \alpha)$ для каждой лежащей в M нечеткой направленности $\mathcal{P}$ и каждого $p \tilde{\notin} M$.

(I.6.5) <u>Теорема о двойном пределе</u>. Пусть $(X, \mathcal{J})$ – нечеткое пространство, $\alpha \in I$, $\mathcal{D}$ и E_m (для каждого $m \in \mathcal{D}$) – направленные множества. Для $m \in \mathcal{D}$ и $\xi \in \prod_m E_m$ положим $R(m, \xi) = (m, \xi(m))$. Пусть для каждой пары $m \in \mathcal{D}$, $n \in E_m$ определена нечеткая точка $\mathcal{P}(m,n) \tilde{\in} X$. Если $p_m \tilde{\in} \mathcal{C}on(\mathcal{P}(m,n)_{n \in E_m}, \alpha)$ для каждого $m \in \mathcal{D}$ и $p_0 \tilde{\in} \mathcal{C}on((p_m)_{m \in \mathcal{D}}, \alpha)$, то $p_0 \tilde{\in} \mathcal{C}on(\mathcal{P} \circ R, \alpha)$.

<u>Доказательство</u>. Заметим прежде всего, что, поскольку произведение $\mathcal{D} \times \prod_m E_m$ естественным образом может рассматриваться как направленное множество, композиция $\mathcal{P} \circ R : \mathcal{D} \times \prod_m E_m \to \mathcal{X}$ является, очевидно, нечеткой направленностью в X.

Пусть $U \in \mathcal{J}_\alpha$ и $p_0 q U$ (т.е. U – произвольная α-q-окрестность нечеткой точки p_0). Поскольку $p_0 \tilde{\in} \mathcal{C}on((p_m)_{m \in \mathcal{D}}, \alpha)$, найдется $m_0 \in \mathcal{D}$ такая, что $p_m q U$ для всех $m \geqslant m_0$. Зафиксировав $m \in \mathcal{D}$ и воспользовавшись условием $p_m \tilde{\in} \mathcal{C}on(\mathcal{P}(m,n)_{n \in E_m}, \alpha)$ и тем, что U, очевидно, является α-q-окрестностью нечеткой точки p_m, выберем $n_m \in E_m$ таким образом, чтобы $\mathcal{P}(m,n) q U$ для всех $n \geqslant n_m$. Определим теперь функцию $\xi : \mathcal{D} \to \prod_m E_m$, положив $\xi(m) = n_m$ при $m \geqslant m_0$ и задав произвольным образом $\xi(m)$ при $m \ngeqslant m_0$. Ясно, что для определенной таким образом функции ξ $(m_0, \xi) \in \mathcal{D} \times \prod_m E_m$

и, если $(m_0,\xi)<(m,\xi)\in\mathcal{D}\times\prod\limits_m E_m$, то нечеткая точка $\mathcal{P}\circ R(m,\xi)= =\mathcal{P}(m,\xi(m))$ q-совпадает с α-q-окрестностью $\mathcal{U}$ нечеткой точки p_0. Но это и означает, что $p_0\tilde{\in}\,\mathcal{C}on\,(\mathcal{P}\circ R,\alpha)$.

(I.6.6) <u>Поднаправленности нечетких направленностей</u>. Нечеткая направленность $\mathcal{R}:E\to\mathcal{X}$ называется [нечеткой] поднаправленностью нечеткой направленности $\mathcal{P}:\mathcal{D}\to\mathcal{X}$, если существует отображение $\varphi:E\to\mathcal{D}$ такое, что

(I) $\mathcal{R}=\mathcal{P}\circ\varphi$, т.е. $r_m=p_{\varphi(m)}$ для каждого $m\in E$;

(2) для каждого $n\in\mathcal{D}$ существует $m_0\in E$ такое, что $n<\varphi(m)$ для всех $m>m_0$.

(I.6.7) <u>Теорема</u>. Пусть X - множество и $\mathcal{A}$ - некоторое семейство его нечетких подмножеств, инвариантное относительно конечных пересечений. Если нечеткая направленность $\mathcal{P}=(p_n)_{n\in\mathcal{D}}$ q-конфинальна с каждым $A\in\mathcal{A}$, то существует поднаправленность $\mathcal{R}$ направленности $\mathcal{P}$, которая q-финальна с каждым $A\in\mathcal{A}$.

<u>Доказательство</u>. Поскольку $\mathcal{A}$ инвариантно относительно конечных пересечений, то, полагая $A<B$ $(A,B\in\mathcal{A})$ тогда и только тогда, когда $A\geqslant B$, превращаем $\mathcal{A}$ в направленное множество. Пусть E - множество пар (n,A) таких, что $n\in\mathcal{D}$, $A\in\mathcal{A}$ и $p_n q A$. Поскольку направленность $\mathcal{P}$ q-конфинальна с каждым элементом $A\in\mathcal{A}$, то $E\neq\emptyset$ и при этом частичный порядок произведения $\mathcal{D}\times\mathcal{A}$ индуцирует частичный порядок $\prec$ на множестве $E\subset\mathcal{D}\times\mathcal{A}$, превращая E в направленное множество. Действительно, если (n_1,A_1), $(n_2,A_2)\in E$, то найдется $B\leqslant A_1\wedge A_2$ и $n_0>n_1$, $n_0>n_2$ такие, что p_{n_0} q-совпадает с B, а значит $(n_0,B)>(n_1,A)$ и $(n_0,B)>(n_2,A)$. Определим отображение $\varphi:E\to\mathcal{D}$, положив $\varphi(n,A)=n$ и пусть $\mathcal{R}=\mathcal{P}\circ\varphi$. Ясно, что определенное таким образом отображение $\mathcal{R}:E\to\mathcal{X}$ является поднаправленностью нечеткой направленности $\mathcal{P}$ и при этом $\mathcal{R}$ q-финальна с каждым $A\in\mathcal{A}$.

(I.6.8) <u>Предельная структура нечетких направленностей</u>. Пусть

$(X, \mathcal{T})$ – нечеткое пространство, $\mathcal{P} \in \mathcal{N}(X)$ и $\alpha \in I$. Определим отображение $\mathcal{C}lus : \mathcal{N}(X) \times I \to I^X$ равенством

$\mathcal{C}lus(\mathcal{P}, \alpha)(x) = \vee \{t \in I : (\forall \mathcal{U} \in \mathcal{T}_\alpha,\ x^t q \mathcal{U}) \Rightarrow \mathcal{P}$ q-конфинальна с $\mathcal{U}\}$.

Другими словами, $p \tilde{\in} \mathcal{C}lus(\mathcal{P}, \alpha)$ тогда и только тогда, когда нечеткая направленность $\mathcal{P}$ q-конфинальна с каждой α-q-окрестностью нечеткой точки p.

Определенное таким образом отображение $\mathcal{C}lus : \mathcal{N}(X) \times I \to I^X$ называется <u>предельной структурой</u> [<u>нечетких направленностей</u>] <u>нечеткого</u> [<u>топологического</u>] <u>пространства</u> $(X, \mathcal{T})$. Говоря неформально, образом нечеткой направленности $\mathcal{P}$ на уровне $\alpha \in I$ является некоторое нечеткое множество, которое считается предельным для $\mathcal{P}$ на данном уровне.

(I.6.9) <u>Теорема</u>. Пусть $(X, \mathcal{T})$ – нечеткое пространство, $\mathcal{P}$ – нечеткая направленность в нем и $\alpha \in I$. Тогда $p \tilde{\in} \mathcal{C}lus(\mathcal{P}, \alpha)$ в том и только в том случае, когда в $\mathcal{P}$ найдется поднаправленность $\mathcal{P}'$ такая, что $p \tilde{\in} \mathcal{C}on(\mathcal{P}', \alpha)$. Следовательно, $\mathcal{C}lus(\mathcal{P}, \alpha) = \vee\{\mathcal{C}on(\mathcal{P}', \alpha)$: $\mathcal{P}'$ – поднаправленность направленности $\mathcal{P}\}$.

<u>Доказательство</u>. Непосредственно из определений ясно, что если $p \tilde{\in} \mathcal{C}on(\mathcal{P}', \alpha)$ для некоторой поднаправленности $\mathcal{P}'$ нечеткой направленности $\mathcal{P}$, то $p \tilde{\in} \mathcal{C}lus(\mathcal{P}, \alpha)$. Обратно, пусть $p \tilde{\in} \mathcal{C}lus(\mathcal{P}, \alpha)$. Положим $\mathcal{A} := \{\mathcal{U} \in I^X : \mathcal{T}(\mathcal{U}) \geq \alpha,\ p q \mathcal{U}\}$. Тогда, согласно предложению (I.6.7), условию которого, очевидно, удовлетворяют семейство $\mathcal{A}$ и нечеткая направленность $\mathcal{P}$, найдется поднаправленность $\mathcal{P}'$ направленности $\mathcal{P}$, которая q-финальна с каждым $\mathcal{U} \in \mathcal{A}$. Но это и означает, что $p \tilde{\in} \mathcal{C}on(\mathcal{P}', \alpha)$.

(I.6.10) <u>Следствие</u>. Если $\mathcal{P}'$ – поднаправленность нечеткой направленности $\mathcal{P}$, то $\mathcal{C}lus(\mathcal{P}, \alpha) \geq \mathcal{C}lus(\mathcal{P}', \alpha)$.

С предыдущим утверждением полезно сравнить следующий легко устанавливаемый факт:

(I.6.11) <u>Предложение</u>. Если $\mathcal{P}'$ – поднаправленность нечеткой направленности $\mathcal{P}$, то $\mathcal{C}on(\mathcal{P},\alpha) \leq \mathcal{C}on(\mathcal{P}',\alpha)$.

(I.6.12) <u>Теорема</u>. Пусть $\mathcal{P}=(p_n)_{n\in\mathcal{D}}$ – нечеткая направленность в нечетком пространстве X и $\alpha\in I$. Для каждого $m\in\mathcal{D}$ положим $A_m:=\bigvee\{p_n: n\geq m\}$. Тогда $\mathcal{C}lus(\mathcal{P},\alpha)=\bigwedge\limits_{m\in\mathcal{D}}\mathcal{C}l(A_m,\alpha)$.

<u>Доказательство</u>. Пусть $p\in\mathcal{C}lus(\mathcal{P},\alpha)$, тогда $\mathcal{P}$ q-конфинальна с каждой α-q-окрестностью U нечеткой точки p. Но это и означает, что для каждого $m\in\mathcal{D}$ найдется $p_n\tilde{\in}A_m$ такое, что $p_n q U$, а следовательно, $U q A_m$. Из (I.5.10) заключаем, что $p\tilde{\in}\bigwedge\limits_m\mathcal{C}l(A_m,\alpha)$.

Обратно, пусть $p\tilde{\in}\bigwedge\limits_m\mathcal{C}l(A_m,\alpha)$. Тогда, согласно (I.5.10), для каждого $m\in\mathcal{D}$ каждая α-q-окрестность U нечеткой точки p q-совпадает с нечетким множеством A_m, т.е. найдется $x\in X$ такое, что $U(x)+A_m(x)>1$. Но согласно определению A_m это означает, что для некоторого $n\geq m$ нечеткая точка p_n q-совпадает с U, т.е. нечеткая направленность $\mathcal{P}$ q-конфинальна с U, т.е. $p\tilde{\in}\mathcal{C}lus(\mathcal{P},\alpha)$.

(I.6.13) <u>Предложение</u>. Пусть $\mathcal{P}$ – нечеткая направленность в нечетком пространстве X и $p\in\mathcal{X}$. Тогда, если $p\tilde{\notin}\mathcal{C}on(\mathcal{P},\alpha)$, то найдется такая поднаправленность $\mathcal{P}'$ нечеткой направленности $\mathcal{P}$, для каждой поднаправленности $\mathcal{P}''$ которой $p\tilde{\notin}\mathcal{C}on(\mathcal{P}'',\alpha)$.

<u>Доказательство</u>. Поскольку $p\tilde{\notin}\mathcal{C}on(\mathcal{P},\alpha)$, то найдется такая α-q-окрестность U нечеткой точки p, с которой нечеткая направленность $\mathcal{P}=(p_n)_{n\in\mathcal{D}}$ не q-конфинальна. Положим $\mathcal{D}':=\{n\in\mathcal{D}: p_n \bar{q} U\}$. Нетрудно заметить, что тогда $\mathcal{P}'=(p_n)_{n\in\mathcal{D}'}$ является искомой поднаправленностью направленности $\mathcal{P}$.

Следующее утверждение является основным результатом данного параграфа.

(I.6.14) <u>Теорема</u>. Пусть $(X,\mathcal{T})$ – нечеткое пространство. Тогда его структура сходимости $(\varphi(\mathcal{T}):=)\,\mathcal{C}on:\mathcal{N}(X)\times I\to I^X$ удовлетворяет следующим условиям ($\alpha\in I$):

(Con 1) если $p_n = p$ для всех $n \in \mathcal{D}$, то $\mathcal{C}on\,((p_n)_{n\in\mathcal{D}}, \alpha) \,\tilde{\ni}\, p$;

(Con 2) если $\mathcal{P}'$ – поднаправленность нечеткой направленности $\mathcal{P}$, то $\mathcal{C}on\,(\mathcal{P}', \alpha) \geq \mathcal{C}on\,(\mathcal{P}, \alpha)$;

(Con 3) если $p \tilde{\notin} \mathcal{C}on\,(\mathcal{P}, \alpha)$, то существует такая поднаправленность $\mathcal{P}'$ нечеткой направленности $\mathcal{P}$, для каждой поднаправленности $\mathcal{P}''$ которой $p \tilde{\notin} \mathcal{C}on\,(\mathcal{P}'', \alpha)$;

(Con 4) пусть $\mathcal{D}$ и E_m (где $m \in \mathcal{D}$) – направленные множества; $R(m, \xi) := (m, \xi(m))$, где $\xi \in \prod\limits_m E_m$, и для каждой пары $m \in \mathcal{D}, n \in E_m$ выбрана нечеткая точка $\mathcal{P}(m,n) \in \mathcal{X}$. Тогда, если для каждого $m \in \mathcal{D}$ $p_m \tilde{\in} \mathcal{C}on\,(\mathcal{P}(m,n)_{n\in E_m}, \alpha)$ и $p_0 \tilde{\in} \mathcal{C}on\,((p_m)_{m\in\mathcal{D}}, \alpha)$, то $p_0 \tilde{\in} \mathcal{C}on\,(\mathcal{P} \circ \mathcal{R}, \alpha)$;

(Con 5) если $\mathcal{D} \subset_\circ (0,1]$ – направленное отношением $\leq$ множество, $t \leq \sup \mathcal{D}$ и $x_0 \in X$, то $\mathcal{C}on\,((x_0^n)_{n\in\mathcal{D}}, \alpha) \,\tilde{\ni}\, x_0^t$.

Обратно, если X – множество и отображение $\mathcal{C}on : \mathcal{N}(X) \times I \to I^X$ удовлетворяет аксиомам (Con 1)-(Con 5), то отображение $\mathcal{C}l : I^X \times I \to I^X$, заданное равенством $\mathcal{C}l\,(M, \alpha) = \vee \{ \mathcal{C}on\,(\mathcal{P}, \alpha) : \mathcal{P}$ – нечеткая направленность в $M \}$, является оператором замыкания, порождающим некоторую нечеткую топологию $\Psi(\mathcal{C}on)$. При этом $\mathcal{C}\,(\Psi(\mathcal{C}on)) = \mathcal{C}on$.

С другой стороны, для любой нечеткой топологии $\mathcal{T}$ имеет место равенство $\Psi(\mathcal{C}(\mathcal{T})) = \mathcal{T}$, а значит $\mathcal{C}$ и Ψ являются биекциями. При этом если $\mathcal{T}_1 \geq \mathcal{T}_2$, то $\mathcal{C}(\mathcal{T}_1) \leq \mathcal{C}(\mathcal{T}_2)$ и если $\mathcal{C}on_1 \geq \mathcal{C}on_2$, то $\Psi(\mathcal{C}on_1) \leq \Psi(\mathcal{C}on_2)$.

<u>Доказательство</u>. Пусть $(X, \mathcal{T})$ – нечеткое пространство и $\mathcal{C}on : \mathcal{N}(X) \times \mathcal{X} \to I$ – его структура сходимости. Справедливость условия (Con 1) очевидна. Условие (Con 2) следует из (1.6.11). Условие (Con 3) установлено в (1.6.13). Условие (Con 4) – это утверждение теоремы (1.6.5) оддвойном пределе. Наконец, условие (Con 5) легко проверяется непосредственно.

Обратно, пусть X – множество и отображение $\mathcal{C}on : \mathcal{N}(X) \times I \to I^X$ удовлетворяет условиям (Con 1)-(Con 5). Для каждого $M \in I^X$ и каждого $\alpha \in I$ положим $\mathcal{C}l\,(M, \alpha) = \vee \{ \mathcal{C}on\,(\mathcal{P}, \alpha) : \mathcal{P}$ – направленность в

$M\}$ и покажем, что определенное таким образом отображение $\mathcal{C}\ell$: $I^X \times I \to I^X$ является оператором замыкания.

Ясно, что $\mathcal{C}\ell(0,\alpha)=0$, $\mathcal{C}\ell(M,\alpha)\geq M$ и если $\alpha\geq\beta\in I$, $M\leq N\in I^X$, то $\mathcal{C}\ell(M,\alpha)\leq\mathcal{C}\ell(N,\beta)$. Предположим, что $x_0^t\tilde{\in}\mathcal{C}\ell(M\vee N,\alpha)$. Воспользовавшись условиями (Con 4) и (Con 5), легко показать, что в этом случае найдется нечеткая направленность $\mathcal{P}$ в $M\vee N$, такая, что $x_0^t\tilde{\in}\mathcal{C}on(\mathcal{P},\alpha)$. Но тогда нечеткая направленность $\mathcal{P}$, будучи финальной с $M\vee N$, является, как нетрудно заметить, конфинальной либо с M, либо с N. (Подчеркнем, что справедливость последнего факта обеспечивается импликацией $a\leq b\vee c \Rightarrow a\leq b$ или $a\leq c$, которая, очевидно, справедлива для любых $a,b,c\in I$, но не имеет, вообще говоря, места для элементов произвольной нечеткой решетки L.) Следовательно, либо в M, либо в N найдется поднаправленность $\mathcal{P}'$ направленности $\mathcal{P}$.

Но это означает соответственно, что либо $x_0\tilde{\in}\mathcal{C}\ell(M,\alpha)$, либо $x_0\tilde{\in}\mathcal{C}\ell(N,\alpha)$, а следовательно, $\mathcal{C}\ell(M\vee N,\alpha)\leq\mathcal{C}\ell(M,\alpha)\vee\mathcal{C}\ell(N,\alpha)$. Поскольку обратное неравенство очевидно, отсюда получаем, что $\mathcal{C}\ell(M\vee N,\alpha)=\mathcal{C}\ell(M,\alpha)\vee\mathcal{C}\ell(N,\alpha)$.

Для доказательства того, что $\mathcal{C}\ell$ является оператором нечеткого замыкания, остается проверить, что $\mathcal{C}\ell(\mathcal{C}\ell(M,\alpha),\alpha)\leq\mathcal{C}\ell(M,\alpha)$. Пусть $p\tilde{\in}\mathcal{C}\ell(\mathcal{C}\ell(M,\alpha),\alpha)$, тогда в $\mathcal{C}\ell(M,\alpha)$ найдется нечеткая направленность $\mathcal{P}=(p_n)_{n\in\mathcal{D}}$ такая, что $p\tilde{\in}\mathcal{C}on(\mathcal{P},\alpha)$. Построим, исходя из $\mathcal{P}$, нечеткую направленность $\tilde{\mathcal{P}}$ в M так, чтобы $p\tilde{\in}\mathcal{C}on(\tilde{\mathcal{P}},\alpha)$; отсюда будет следовать, что $p\tilde{\in}\mathcal{C}\ell(M,\alpha)$ и, тем самым, доказываемое неравенство.

Зафиксируем $m\in\mathcal{D}$ и пусть $p_m=x_m^t$. Положим $A_m:=\{s:\exists$ нечеткая направленность $\mathcal{P}_m^s$ в M такая, что $x_m^s\tilde{\in}\mathcal{C}on(\mathcal{P}_m^s,\alpha)\}$. Отношение $\leq$ превращает множество A_m в направленное и, при этом, очевидно, $\sup A_m\geq t$. Из условия (Con 5) заключаем, что $x_m^t\tilde{\in}\mathcal{C}on((x_m^s)_{s\in A_m},\alpha)$. С другой стороны из определения A_m следует, что для каждого $s\in A_m$ в M найдется нечеткая направленность $\mathcal{P}_m^s$ такая, что $x_m^s \tilde{\in} \mathcal{C}on(\mathcal{P}_m^s, \alpha)$. Воспользовавшись аксиомой (Con 4), можем теперь построить нечеткую направленность $\tilde{\mathcal{P}}=\mathcal{P}_0 R: \mathcal{D}\times\prod_m A_m \to \mathcal{X}$ такую, что $p_m \tilde{\in} \mathcal{C}on(\tilde{\mathcal{P}}, \alpha)$.

Для доказательства равенства $\mathcal{C}\Psi(\mathcal{C}on) = \mathcal{C}on$ проверим, что для произвольной нечеткой направленности $\mathcal{P}$ $p\tilde{\in}\mathcal{C}on(\mathcal{P},\alpha)$ тогда и только тогда, когда $p\tilde{\in}\mathcal{C}\Psi(\mathcal{C}on)(\mathcal{P},\alpha)$.

Предположим, что $p\tilde{\in}\mathcal{C}on(\mathcal{P},\alpha)$ и при этом $p\tilde{\notin}\mathcal{C}\Psi(\mathcal{C}on)(\mathcal{P},\alpha)$. Тогда существует $\mathcal{U}\in\mathcal{T}_\alpha$ такое, что $pq\mathcal{U}$ и $\mathcal{P}$ не q-финальна с $\mathcal{U}$, а следовательно, $\mathcal{P}$ q-конфинальна с $\mathcal{U}^c$. Пусть $\mathcal{P}'$ – поднаправленность нечеткой направленности $\mathcal{P}$, лежащая в $\mathcal{U}^c$. Согласно аксиоме (Con 2) $p\tilde{\in}\mathcal{C}on(\mathcal{P}', \alpha)$ и, как следует из определения оператора $\mathcal{C}l$, $p\tilde{\in}\mathcal{C}l(\mathcal{U}^c,\alpha)$. Учитывая, что $\mathcal{T}(\mathcal{U})\geqslant\alpha$ и, значит, $\mathcal{U}^c=\mathcal{C}l(\mathcal{U}^c,\alpha)$, заключаем, что $p\tilde{\in}\mathcal{U}^c$, т.е. $p\not{q}\mathcal{U}$. Полученное противоречие означает, что $\mathcal{C}on(\mathcal{P},\alpha)\leqslant\mathcal{C}\Psi(\mathcal{C}on)(\mathcal{P},\alpha)$.

Обратно, предположим, что $p\tilde{\in}\mathcal{C}\Psi(\mathcal{C}on)(\mathcal{P},\alpha)$, но $p\tilde{\notin}\mathcal{C}on(\mathcal{P},\alpha)$. Тогда, согласно (Con 3), найдется поднаправленность $\mathcal{P}'$ нечеткой направленности $\mathcal{P}$, для каждой поднаправленности $\mathcal{P}''$ которой $p\tilde{\notin}\mathcal{C}on(\mathcal{P}'',\alpha)$. С другой стороны, согласно (Con 2), $p\tilde{\in}\mathcal{C}\Psi(\mathcal{C}on)(\mathcal{P}',\alpha)$. Поэтому без ограничения общности мы можем считать, что в роли $\mathcal{P}'$ выступает сама направленность $\mathcal{P}:=(p_n)_{n\in\mathcal{D}}$. Для каждого $m\in\mathcal{D}$ положим $A_m:=\vee\{p_n : n\geqslant m\}$. Из (I.6.I2) легко следует, что $p\tilde{\in}\mathcal{C}l(A_m,\alpha)$ для каждого $m\in\mathcal{D}$. Пусть $p:=x^t$ для каждого $m\in\mathcal{D}$ положим $E_m=\{s$: существует нечеткая направленность $\mathcal{R}^s\subset A_m$ такая, что $x^s\tilde{\in}\mathcal{C}on(\mathcal{R}^s,\alpha)\}\subset I$. Воспользовавшись доказываемой ниже леммой (I.6.I5), без ограничения общности можем считать, что элементами нечеткой направленности $\mathcal{R}^s$ служат нечеткие точки, являющиеся элементами нечеткой направленности $\mathcal{P}=(p_n)_{n\in\mathcal{D}}$ при $n\geqslant m$. При этом очевидно, что $\mathcal{C}l(A_m,\alpha)(x) = \sup E_m\geqslant t$. Согласно (Con 5) $p\tilde{\in}\mathcal{C}on((x^s)_{s\in E_m},\alpha)$, где E_m –

множество, направленное естественным порядком. Воспользовавшись (Con 4) в ситуации, когда в роли направленного множества выступает произведение $\mathcal{D}\times\prod_m E_m$, мы приходим к направленности $\mathcal{P}^m$, элементами которой служат нечеткие точки нечеткой направленности $\mathcal{P}:=(p_n)_{n\in\mathcal{D}}$ при $n\geqslant m$. Обозначим F_m направленное множество, соответствующее нечеткой направленности $\mathcal{P}_m$. Воспользовавшись вновь аксиомой (Con 4) в ситуации, когда в роли направленного множества выступает произведение $\mathcal{D}\times\prod_m F_m$, приходим к нечеткой направленности $\widetilde{\mathcal{P}}$. Заметим, что полученная таким образом направленность $\widetilde{\mathcal{P}}$ является поднаправленностью исходной нечеткой направленности $\mathcal{P}$ (Действительно, если $m_0\in\mathcal{D}$, то при $m\geqslant m_0$ и любом $\xi\in\prod_m F_m$ имеем $\widetilde{\mathcal{P}}(m,\xi)=\mathcal{P}^m(\xi(m))$, т.е. $\widetilde{\mathcal{P}}(m,\xi)=\mathcal{P}(n)$ для некоторого $n\geqslant m\geqslant m_0$). Поскольку по построению $p\,\widetilde{\in}\,\mathcal{C}on\,(\widetilde{\mathcal{P}},\alpha)$, приходим к противоречию, которое и доказывает, что $\mathcal{C}\Psi(\mathcal{C}on)(\mathcal{P},\alpha)=\mathcal{C}on\,(\mathcal{P},\alpha)$.

Равенство $\mathcal{C}\Psi(\mathcal{T})=\mathcal{T}$ для произвольной нечеткой топологии $\mathcal{T}$ легко следует из теоремы (I.6.3) и определений $\mathcal{C}$ и Ψ.

Для завершения доказательства теоремы осталось заметить, что как следует из построения, если $\mathcal{T}_1\geqslant\mathcal{T}_2$, то $\mathcal{C}(\mathcal{T}_1)\leqslant\mathcal{C}(\mathcal{T}_2)$.

(I.6.I5) <u>Лемма</u>. Пусть $(X,\mathcal{T})$ – нечеткое пространство, $\mathcal{Y}\subset\mathcal{X}$ и $A=\vee\mathcal{Y}$. Тогда, если $\mathcal{P}$ – направленность в A и $p\,\widetilde{\in}\,\mathcal{C}on\,(\mathcal{P},\alpha)$, то найдется нечеткая направленность $\mathcal{R}$, образованная принадлежащими $\mathcal{Y}$ нечеткими точками такая, что $p\,\widetilde{\in}\,\mathcal{C}on\,(\mathcal{R},\alpha)$.

<u>Доказательство</u>. Пусть $\mathcal{P}:=(p_n)_{n\in\mathcal{D}}$, где $p=x_n^t$. Зафиксируем некоторое $n\in\mathcal{D}$; тогда, поскольку $x_n^t\in A$, существует последовательность нечетких точек $x_n^{s_i}\in\mathcal{Y}$, $i\in\mathbb{N}$ такая, что $x_n^t\leqslant\bigvee_{i\in\mathbb{N}}x_n^{s_i}$. Положив $E_n=\{s_i : i\in\mathbb{N}\}$, получаем нечеткую направленность $(x_n^{s_i})_{s_i\in E_n}$ (E_n наделено естественным порядком). Поскольку $t\leqslant\sup E_n$, из (Con 5) следует, что $x_n^t\,\widetilde{\in}\,\mathcal{C}on\,((x_n^{s_i})_{s_i\in E_n})$. Для завершения доказательства остается воспользоваться условием (Con 4).

(I.6.16) Теорема. Пусть $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ – нечеткие пространства. Отображение $f: X \to Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда для каждой нечеткой направленности $\mathcal{P}$ и каждого $\alpha \in I$ $f(\mathcal{C}on_X(\mathcal{P}, \alpha)) \leq \mathcal{C}on_Y(f(\mathcal{P}), \alpha)$.

Доказательство. Пусть $f: X \to Y$ непрерывно, $\alpha \in I$ и $p \widetilde{\in} \mathcal{C}on_X(\mathcal{P}, \alpha)$. Покажем, что в этом случае $f(p) \widetilde{\in} \mathcal{C}on_Y(f(\mathcal{P}), \alpha)$. Действительно, пусть $V \in I^Y$, $\mathcal{T}_Y(V) \geq \alpha$ и $f(p) q V$. Положим $U := f^{-1}(V)$. Тогда $\mathcal{T}_X(U) \geq \alpha$ и $p q U$, а следовательно, существует $m \in \mathcal{D}$ такое, что $p_n q U$ для всех $n \geq m$. Отсюда нетрудно заключить, что $f(p_n)$ q-совпадает с V для всех $n \geq m$, т.е. нечеткая направленность $f(\mathcal{P})$ q-финальна с V. Но это и означает, что $f(p) \widetilde{\in} \mathcal{C}on_Y(f(\mathcal{P}), \alpha)$.

Обратно, пусть $f(\mathcal{C}on_X(\mathcal{P}, \alpha)) \leq \mathcal{C}on_Y(f(\mathcal{P}), \alpha)$ для каждой нечеткой направленности $\mathcal{P}$ в X и каждого $\alpha \in I$. Тогда, воспользовавшись теоремой (I.6.3), легко заключаем, что для каждого $M \in I^X$ и каждого $\alpha \in I$ $f(\mathcal{C}l_X(M, \alpha)) \leq \mathcal{C}l_Y(f(M), \alpha)$. Но это означает, что для всех $\alpha \in I$ отображения $f: (X, (\mathcal{T}_X)_\alpha) \to (Y, (\mathcal{T}_Y)_\alpha)$ непрерывны. Для завершения доказательства осталось воспользоваться утверждениями (I.2.2) и (I.2.5).

§ 7. О ПОНЯТИИ ДЕФЕКТА НЕПРЕРЫВНОСТИ ОТОБРАЖЕНИЙ

По аналогии с ситуацией в обычной топологии, отображения L-нечетких топологических пространств, как правило, принято делить на два класса: класс непрерывных отображений - морфизмов категории $FT(L)$ (или некоторой ее подкатегории, в зависимости от контекста) и на класс не непрерывных отображений, т.е. отображений, не являющихся морфизмами в соответствующей категории. Однако, мы полагаем, что такая "четкая", двузначная классификация всех отображений L-нечетких топологических пространств на непрерывные - морфизмы и разрывные - не морфизмы, не всегда представляется естественной в контексте нечеткой топологии и соответствующей "идеологии" нечеткой математики в целом. Для отображений нечетких пространств можно выделить целый спектр свойств, интуитивно воспринимаемых как "степень непрерывности" или "степень разрывности". В данном параграфе рассматривается одно из свойств такого типа: дефект непрерывности $cd(f)$ отображения $f: X \to Y$. При этом для простоты мы ограничиваемся здесь случаем чанговских L-нечетких пространств.

Пусть (X, τ_X), (Y, τ_Y) - чанговские L-нечеткие пространства и $f: X \to Y$ - отображение.

(I.7.I) <u>Определение</u>. Число $cd(f) := \sup\limits_{V \in \tau_Y} \sup\limits_{x \in X} (f^{-1}(V) - Int(f^{-1}(V))(x)$ называется дефектом непрерывности отображения f.

<u>Замечание</u>. Если X, Y - обычные топологические пространства, то $cd(f) = 0$ тогда и только тогда, когда отображение f непрерывно; в противном случае $cd(f)=1$. Совершенно иная ситуация в случае, когда пространство X существенно нечетко: в то время как равенство $cd(f)=0$ означает в точности непрерывность отображения f, дефект непрерывности отображения, не являющегося непрерывным, может быть любой величиной $\alpha \in L^+$; это число характеризует, насколько

данное отображение отличается от непрерывного.

Следующий простой пример показывает, что для каждого $\alpha \in L^+$ существует отображение, дефект непрерывности которого в точности равен α.

(I.7.2) <u>Пример</u>. Пусть T_1 и T_2 – две (обычные) топологии на множестве X, причем $T_1 \subset T_2$ и $T_1 \neq T_2$. Зафиксируем $\alpha \in L^+$ и определим L-нечеткие топологии на X $\tau_2 := T_2$ и $\tau_1 := \alpha^c T_2 \cup T_1$, где $\alpha^c T_2 := \{\alpha^c \mathcal{U} : \mathcal{U} \in T_2\}$. Тогда, как легко заметить, для тождественного отображения $f : (X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$ имеем $cd(f) = \alpha$.

(I.7.3) <u>Теорема</u>. Для каждого отображения $f : X \to Y$ имеют место равенства $cd(f) = cd'(f) = cd''(f)$, где

$$cd'(f) := \sup_{B \in \tau_Y^c} \sup_{x \in X} (\overline{f^{-1}(B)} - f^{-1}(B))(x) \quad \text{и}$$

$$cd''(f) := \sup_{M \in L^X} \sup_{y \in Y} (f(\bar{M}) - \overline{f(M)})(y).$$

<u>Доказательство</u>. Первое равенство очевидно, поскольку $B \in \tau_Y^c$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{U} := B^c \in \tau_Y$ и $\operatorname{Int}(f^{-1}(\mathcal{U})) = 1 - (\overline{1 - f^{-1}(\mathcal{U})})$, $\overline{f^{-1}(B)} = 1 - \operatorname{Int}(1 - f^{-1}(B))$. Для доказательства второго равенства зафиксируем $M \in L^X$ и положим $B' := \overline{f(M)}$. Тогда $\sup\limits_{y \in Y} (f(\bar{M}) - \overline{f(M)})(y) =$
$$= \sup_{y \in Y} (f(\bar{M}) - B')(y) = \sup_{y \in Y} (\sup_{x \in f^{-1}(y)} \bar{M}(x) - B'(y)) = \sup_{\substack{B \in \tau_Y^c \\ B \geq f(M)}} \sup_{y \in Y} (\sup_{x \in f^{-1}(y)} \bar{M}(x) - B(y))$$
и, следовательно,
$$cd''(f) = \sup_{M \in L^X} \sup_{\substack{B \in \tau_Y^c \\ B \geq f(M)}} \sup_{y \in Y} (\sup_{x \in f^{-1}(y)} \bar{M}(x) - B(y)).$$

Далее, пусть $B \in \tau_Y^c$ и $M' := f^{-1}(B)$. Тогда, очевидно, $f(M') \leq B$ и при этом $M \leq M'$ для каждого M, удовлетворяющего неравенству $f(M) \leq B$. Поэтому $\sup\limits_{x \in X} (\overline{f^{-1}(B)} - f^{-1}(B))(x) = \sup\limits_{x \in X} (\bar{M}'(x) - B(f(x))) = \sup\limits_{y \in Y} (\sup\limits_{x \in f^{-1}(y)} (\bar{M}'(x) -$
$$- B(y)) = \sup_{\substack{M \in L^X \\ f(M) \leq B}} \sup_{y \in Y} (\sup_{x \in f^{-1}(y)} \bar{M}(x) - B(y))$$
, а следовательно,
$$cd'(f) = \sup_{B \in \tau_Y^c} \sup_{M \in L^X} (\sup_{y \in Y} (\sup_{x \in f^{-1}(y)} \bar{M}(x) - B(y))).$$

Сравнивая оба полученных выражения, приходим к равенству $cd'(f) = cd''(f)$.

В случае обычных топологических пространств полученный результат приводит к известным характеристикам непрерывности отображений посредством замкнутых множеств и посредством замыкания. Заметим также, что этот результат содержит в себе (при $cd(f)=0$) известные характеристики непрерывности отображений чанговских L-нечетких пространств посредством замкнутых нечетких множеств и посредством замыкания (см., например, [106]).

(I.7.4) <u>Дефектом непрерывности отображения $f: X \to Y$ относительно некоторого семейства $\mathcal{C} \subset \mathcal{T}_Y$</u> назовем величину

$$cd(f, \mathcal{C}) = \sup_{V \in \mathcal{C}} \sup_{x \in X} (f^{-1}(V) - \mathrm{Int} f^{-1}(V))(x).$$

Очевидно, что $cd(f, \mathcal{T}_Y) = cd(f)$.

(I.7.5) <u>Предложение</u>. Если $\mathcal{P}$ - предбаза чанговской L-нечеткой топологии $\mathcal{T}_Y$, то $cd(f, \mathcal{P}) = cd(f)$.

<u>Доказательство</u>. Пусть $\mathcal{B} := \{V := U_1 \wedge \ldots \wedge U_n : U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{P}, n \in \mathbb{N}\}$. Покажем, прежде всего, что $cd(f,\mathcal{P}) = cd(f,\mathcal{B})$. Заметим, что, как следует из известных (и легко проверяемых) свойств оператора внутренности в чанговских L-нечетких пространствах, $f^{-1}(V) - \mathrm{Int} f^{-1}(V) = f^{-1}(U_1 \wedge \ldots \wedge U_n) - \mathrm{Int} f^{-1}(U_1 \wedge \ldots \wedge U_n) = \bigwedge_{i=1}^{n} f^{-1}(U_i) - \mathrm{Int}(\bigwedge_{i=1}^{n} f^{-1}(U_i)) = \bigwedge_{i=1}^{n} f^{-1}(U_i) - \mathrm{Int}(\bigwedge_{i=1}^{n} f^{-1}(U_i)) \leq \bigvee_{i=1}^{n} (f^{-1}(U_i) - \mathrm{Int}(f^{-1}(U_i)))$ для каждого $V \in \mathcal{B}$ и соответствующих $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{P}$. Отсюда следует, что $cd(f,\mathcal{P}) \geqslant cd(f,\mathcal{B})$. Поскольку $\mathcal{P} \subset \mathcal{B}$, обратное неравенство очевидно. Для завершения доказательства остается проверить, что, если $\mathcal{B}$ - база нечеткой топологии $\mathcal{T}_Y$, то $cd(f,\mathcal{B}) = cd(f)$. Пусть $V \in \mathcal{T}_Y$ и $V = \bigvee_i U_i$ для некоторого семейства $\{U_i : i \in \mathcal{I}\} \subset \mathcal{B}$. Тогда $f^{-1}(V) - \mathrm{Int} f^{-1}(V) = \bigvee_i f^{-1}(U_i) - \mathrm{Int}(\bigvee_i f^{-1}(U_i)) \leq \bigvee_i f^{-1}(U_i) - \bigvee_i \mathrm{Int} f^{-1}(U_i) \leq \bigvee_i (f^{-1}(U_i) - \mathrm{Int} f^{-1}(U_i))$ (Первое неравенство следует из известного (и легко проверяемого) свойства оператора внутренности нечеткого множества, а второе вытекает из элементарного числового неравенства). Отсюда следует $cd(f,\mathcal{B}) \geqslant cd(f)$. Обратное неравенство очевидно.

(I.7.6) <u>Теорема</u>. Пусть $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$, $(Z, \mathcal{T}_Z)$ - чанговские нечеткие пространства, $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ - отображения и $h = g \circ f$ - их композиция. Тогда $cd(h) \leq cd(f) + cd(g)$.

Доказательство сводится к следующей цепочке легко проверяемых неравенств: $cd(h) = \sup\limits_{W \in \tau_Z} \sup\limits_{x} (h^{-1}(W) - \mathrm{Int}\, h^{-1}(W))(x) =$

$= \sup\limits_{W \in \tau_Z} \sup\limits_{x} (f^{-1}(g^{-1}(W)) - \mathrm{Int}(f^{-1}(g^{-1}(W))))(x) = \sup\limits_{W \in \tau_Z} \sup\limits_{x} (f^{-1}(g^{-1}(W)) -$

$- f^{-1}(\mathrm{Int}(g^{-1}(W)) + f^{-1}(\mathrm{Int}(g^{-1}(W))) - \mathrm{Int}(f^{-1}(g^{-1}(W))))(x) \leq \sup\limits_{W \in \tau_Z} \sup\limits_{x} (g^{-1}(W) -$

$- \mathrm{Int}\, g^{-1}(W))(f(x)) + \sup\limits_{V \in \tau_Y} \sup\limits_{x} (f^{-1}(V) - \mathrm{Int}\, f^{-1}(V))(x) \leq \sup\limits_{W \in \tau_Z} \sup\limits_{y} (g^{-1}(W) -$

$- \mathrm{Int}\, g^{-1}(W))(y) + cd(f) = cd(g) + cd(f)$.

Замечание. Невозможно дать более точную (нетривиальную) оценку дефекта непрерывности композиции отображений. С одной стороны, нетрудно построить пример, когда $cd(h)$ меньше каждого из дефектов $cd(f)$ и $cd(g)$: достаточно взять топологические пространства X, Y, Z и отображения $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$, не являющиеся непрерывными, но композиция которых непрерывна. С другой стороны, следующий пример показывает, что возможна ситуация, когда $cd(g \circ f) = cd(g) + cd(f)$.

(I.7.7) Пример. Пусть T и T' - две топологии на множестве X, причем $T \subset T'$ и $T \neq T'$, и зафиксируем некоторые числа $\alpha, \beta \in (0,1)$, удовлетворяющие неравенству $\alpha + \beta < 1$. Определим нечеткие топологии τ_1, τ_2 и τ_3 на X равенствами $\tau_1 = T \cup (1-(\alpha+\beta))T'$, $\tau_2 = T \cup (1-\beta)T'$, $\tau_3 = T'$. Тогда, как нетрудно заметить, для тождественных отображений $f: (X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$ и $g: (X, \tau_2) \to (X, \tau_3)$ справедливо $cd(f) = \alpha$, $cd(g) = \beta$ и $cd(g \circ f) = \alpha + \beta$.

В следующих теоремах мы изучаем поведение дефекта непрерывности при некоторых операциях.

(I.7.8) Теорема. Пусть (X, τ) - чанговское нечеткое пространство, $\{(Y_i, \tau_i) : i \in J\}$ - семейство чанговских нечетких пространств и для каждого $i \in J$ $f_i : X \to Y_i$ - отображение. Тогда $cd(\Delta f_i) = \bigvee\limits_i cd(f_i)$, где $\Delta f_i : X \to \mathcal{Y} := \prod_i \mathcal{Y}_i$ – диагональ этих отображений.

Доказательство. Зафиксируем $i \in \mathcal{I}$ и для каждого $\mathcal{U}_i \in \mathcal{T}_i$ рассмотрим нечеткое множество $\mathcal{U}_i \times \hat{\mathcal{Y}}_i$, где $\hat{\mathcal{Y}}_i := \prod\{\mathcal{Y}_{i'} : i' \in \mathcal{I},\ i' \neq i\}$. Легко заметить, что $(\Delta f_i)^{-1}(\mathcal{U}_i \times \hat{\mathcal{Y}}_i) - \operatorname{Int}(\Delta f_i)^{-1}(\mathcal{U}_i \times \hat{\mathcal{Y}}_i) = f_i^{-1}(\mathcal{U}_i) - \operatorname{Int} f_i^{-1}(\mathcal{U}_i)$, и, следовательно, $cd(f, \mathcal{P}_i) = cd(f_i)$, где $\mathcal{P}_i := \{\mathcal{U}_i \times \hat{\mathcal{Y}}_i : \mathcal{U}_i \in \mathcal{T}_i\}$. Поскольку, очевидно, $\mathcal{P} := \bigcup_i \mathcal{P}_i$ является предбазой нечеткой топологии произведения $\mathcal{Y} = \prod_i \mathcal{Y}_i$, применяя (I.7.5), отсюда заключаем, что $cd(\Delta f_i) = \bigvee_i cd(f_i)$.

(I.7.9) Теорема. Пусть $\{(X_i, \sigma_i) : i \in \mathcal{I}\}$ и $\{(\mathcal{Y}_i, \mathcal{T}_i) : i \in \mathcal{I}\}$ – семейства чанговских нечетких пространств и пусть $X = \prod_i X_i$, $\mathcal{Y} = \prod_i \mathcal{Y}_i$ – их произведения. Для каждого $i \in \mathcal{I}$ пусть $f_i : X_i \to \mathcal{Y}_i$ – отображение и $f := \prod f_i : X \to \mathcal{Y}$ – их прямое произведение. Тогда $cd(f) = \bigvee_i cd(f_i)$.

Доказательство. Легко заметить, что $f^{-1}(\mathcal{U}_i \times \hat{\mathcal{Y}}_i) - \operatorname{Int} f^{-1}(\mathcal{U}_i \times \hat{\mathcal{Y}}_i) = f_i^{-1}(\mathcal{U}_i) \times \hat{X}_i - \operatorname{Int} f_i^{-1}(\mathcal{U}_i) \times \hat{X}_i$, где $\mathcal{U}_i \in \mathcal{T}_i$, $\hat{\mathcal{Y}}_i = \prod\{\mathcal{Y}_{i'} : i' \in \mathcal{I},\ i' \neq i\}$ и $\hat{X}_i = \prod\{X_{i'} : i' \in \mathcal{I},\ i' \neq i\}$. Следовательно, обозначив $\mathcal{P}_i = \{\mathcal{U}_i \times \hat{\mathcal{Y}}_i, \mathcal{U}_i \in \mathcal{T}_i\}$, имеем $cd(f, \mathcal{P}_i) = cd(f_i)$. Для завершения доказательства остается заметить, что $\bigcup \mathcal{P}_i$ – предбаза произведения $\mathcal{Y} = \prod_i \mathcal{Y}_i$, и воспользоваться предложением (I.7.5).

(I.7.10) Теорема. Пусть $\{(X_i, \sigma_i) : i \in \mathcal{I}\}$, $\{(\mathcal{Y}_i, \mathcal{T}_i) : i \in \mathcal{I}\}$ – семейства чанговских нечетких пространств и пусть $X = \bigoplus_i X_i$, $\mathcal{Y} = \bigoplus_i \mathcal{Y}_i$ – прямые суммы этих семейств. Для каждого $i \in \mathcal{I}$ рассмотрим отображение $f_i : X_i \to \mathcal{Y}_i$ и пусть $f := \bigoplus_i f_i : X \to \mathcal{Y}$ – прямая сумма этих отображений. Тогда $cd(f) = \bigvee_i cd(f_i)$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{U}$ – открытое нечеткое множество в пространстве $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{U}_i := \mathcal{U} \wedge \mathcal{Y}_i$. Тогда, очевидно, $f^{-1}(\mathcal{U}) = \bigvee_i f_i^{-1}(\mathcal{U}_i)$ и $\operatorname{Int}(f^{-1}(\mathcal{U})) = \bigvee_i (\operatorname{Int} f^{-1}(\mathcal{U}_i))$, где $\operatorname{Int} f^{-1}(\mathcal{U})$ – внутренность $f^{-1}(\mathcal{U})$ в X, а $\operatorname{Int} f^{-1}(\mathcal{U}_i)$ – внутренность $f^{-1}(\mathcal{U}_i)$ в X_i. Отсюда легко следует, что $\sup_x (f^{-1}(\mathcal{U}) - \operatorname{Int} f^{-1}(\mathcal{U}))(x) = \sup_{i \in \mathcal{I}} \sup_{x_i \in X_i} (f_i^{-1}(\mathcal{U}_i) - \operatorname{Int} f_i^{-1}(\mathcal{U}_i))(x_i)$, а следовательно, $cd(f) = \bigvee_i cd(f_i)$.

В заключение параграфа рассмотрим вопрос о том, как влияет на дефект непрерывности переход к той или иной модификации (§ 3) нечеткой топологии в соответствующих нечетких пространствах.

Пусть (X, τ_X), (Y, τ_Y) – L-нечеткие пространства, $f: X \to Y$ – отображение и φ – некоторая модификация L-нечетких топологий. Обозначим через φf отображение f, рассматриваемое как отображение $f: (X, \varphi\tau_X) \to (Y, \varphi\tau_Y)$.

(I.7.II) <u>Теорема</u>.

(I) $cd(f) \geqslant cd(\lambda f)$;

(2) если (X, τ_X), (Y, τ_Y) – топологические пространства, то $cd(f) = cd(\lambda f)$;

(3) если (X, τ_X) и (Y, τ_Y) ламинированы, то $cd(f) \leqslant cd(\iota f)$.

(В (I) и (3) равенство, вообще говоря, не имеет места.)

<u>Доказательство</u>. Неравенство (I) легко следует из (I.7.4). Заметим, что, если нечеткая топология τ_X ламинирована (т.е. $\tau_X = \lambda\tau_X$), то, очевидно, $cd(f) = cd(\lambda f)$. Если же τ_X – обычная антидискретная топология, а τ_Y – ламинирована, то $cd(f) = 1$, но при этом $cd(\lambda f) = 0$.

(2) Поскольку (X, τ_X), (Y, τ_Y) – обычные топологические пространства, то либо $cd(f) = 0$, либо $cd(f) = 1$. В случае, когда $cd(f) = 0$, отображение f непрерывно. Тогда, согласно (I.3.3), отображение λf также непрерывно, т.е. $cd(\lambda f) = 0$. Переходя ко второму случаю, заметим, что внутренность четкого множества в пространстве (X, τ_X) совпадает с его внутренностью в пространстве $(X, \lambda\tau_X)$, а следовательно, из $cd(f) = 1$ следует $cd(\lambda f) = 1$.

(3) Из (2) следует, что $cd(\lambda\iota f) = cd(\iota f)$ и, поскольку (X, τ_X) ламинировано, можем заключить, что $cd(f) \leqslant cd(\iota f)$. С другой стороны, для каждого $\alpha \in L^+$ нетрудно построить ламинированные L-нечеткие чанговские пространства (X, τ_X), (Y, τ_Y) и отображение $f: X \to Y$ такое, что $cd(f) = \alpha$ и $cd(\iota f) = 1$.

Глава II. ОСНОВНЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НЕЧЕТКИХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ И ИХ НЕЧЕТКИХ ПОДМНОЖЕСТВ

В данной главе рассматриваются основные топологические свойства (I-)нечетких топологических пространств и их нечетких подмножеств. Мы ограничиваемся здесь случаем $L=I$ как основным, обращаясь к случаю L-нечетких топологических пространств для произвольной нечеткой решетки L только в иллюстративных целях. Это позволяет нам существенно упростить изложение и сделать его более единообразным. Подчеркнем также, что многие из приведенных здесь результатов не могут быть распространены на случай произвольных L-нечетких пространств, а только лишь для нечетких решеток, удовлетворяющих тем или иным дополнительным требованиям. Наиболее важные из используемых ограничений на нечеткую решетку L – это порядковая сепарабельность, линейная упорядоченность, направленность порядка, наличие ортодополнения. Отметим также, что при подходящих ограничениях на L распространение приведенных в этой главе результатов на случай L-нечетких пространств, как правило, не представляет затруднений.

Вторым ограничением, принимаемым в данной главе, является то, что мы будем рассматривать только чанговские нечеткие топологические пространства. Это ограничение, однако, в отличие от первого, является условным: применяя технику, развитую в § 2 (А) главы I и основывающуюся на представлении произвольной нечеткой топологии посредством ее чанговских нечетких топологий L-уровней (I.2.5), все понятия, конструкции и результаты этой главы могут быть распространены на случай произвольного нечеткого топологического пространства. Итак, в данной главе термин "нечеткое пространство" всегда означает "чанговское нечеткое топологическое пространство".

Отметим одно существенное отличие развиваемой здесь теории от ее классического прототипа. В то время как (обычное) топологическое пространство или его (обычное) подмножество либо обладает, либо не обладает тем или иным топологическим свойством, для нечетких пространств и, тем более, для их нечетких подмножеств такой основанный на двузначной логике подход представляется искусственным и не соответствующим природе нечеткой математики (хотя он и используется, скорее всего, по инерции большинством авторов, работающих в области нечеткой топологии). Альтернативой ему в ряде случаев может служить развиваемой в данной главе т.н. спектральный подход.

Подчеркнем, что большинство полученных здесь результатов являются новыми уже в случае нечетких подмножеств обычных топологических пространств. В этой ситуации предлагаемая нами теория может рассматриваться как альтернативная топологическая теория ограниченных вещественнозначных отображений обычных топологических пространств (ср., например, [82]). В случае же обычных топологических пространств и их обычных подмножеств наша теория содержит в себе классические результаты общей топологии.

(2.0.1) <u>Обозначения</u>. Пусть $A, B \in I^X$, $\beta \in I$. Введем обозначения:

$$A \tilde{\in} B \gtrsim_0 \beta \Leftrightarrow A \tilde{\in} B > \beta;$$

$$A \tilde{\in} B \gtrsim_1 \beta \Leftrightarrow A^c(x) \vee B(x) > \beta \quad \forall x \in X;$$

$$A \tilde{\in} B \gtrsim_2 \beta \Leftrightarrow A \tilde{\in} B \geqslant \beta;$$

$$A \tilde{\in} B \gtrsim_3 \beta \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists B := B_\varepsilon \in I^X \text{ такое, что } A \tilde{\in} B \geqslant \beta - \varepsilon.$$

Ясно, что $A \tilde{\in} B \gtrsim_0 \beta \Rightarrow A \tilde{\in} B \gtrsim_1 \beta \Rightarrow A \tilde{\in} B \gtrsim_2 \beta \Rightarrow A \tilde{\in} B \gtrsim_3 \beta$.

Обратные импликации, вообще говоря, не имеют места.

§ I. ОТДЕЛИМОСТЬ: СВОЙСТВА ТИПА T_0–T_2 И R

A. Спектральная теория хаусдорфовости

(2.I.I) Определение. Пусть (X,τ) – нечеткое пространство и $k,l\in\{0,1,2,3\}$. (k,l)–спектром хаусдорфовости этого пространства называется множество $H_k^l(X)$, определенное равенством

$$H_k^l(X):=\{(\beta,\gamma)\in I^2 : \forall x,y\in X,\ x\neq y,\ \exists\, \mathcal{U},\mathcal{V}\in\tau \text{ такие, что } x\tilde{\in}\,\mathcal{U}\succ_k\beta,\ y\tilde{\in}\,\mathcal{V}\succ_k\beta,\ \mathcal{U}\tilde{\in}\,\mathcal{V}^c\succ_l\gamma\}.$$

В случае $k=l$ будем писать просто $H_k(X)$.

Говоря неформально, принадлежность пары (β,γ) спектру хаусдорфовости означает, что для любых двух различных точек $x,y\in X$ найдутся нечеткие "окрестности" $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$, которые "выше", чем β в соответствующей точке и которые пересекаются "ниже", чем γ^c. При этом "выше" и "ниже" понимаются строго, нестрого или "с точностью до ε", в зависимости от того, какие значения принимают k и l.

Следующее утверждение очевидно:

(2.I.2) Предложение. Если $(\beta,\gamma)\in H_k^l(X)$ и $0\leq\beta'\leq\beta$, $0\leq\gamma'\leq\gamma$, то $(\beta',\gamma')\in H_k^l(X)$.

(2.I.3) Предложение. (I) Если $k\geq k'$ и $l\geq l'$, то $H_k^l(X)\supset H_{k'}^{l'}(X)$.

(2) Множество $H_3(X)$ замкнуто в I^2.

(3) Если $(\beta,\gamma)\in H_3(X)$, $0\leq\beta'<\beta$, $0\leq\gamma'<\gamma$, то $(\beta',\gamma')\in H_0(X)$.

Доказательство. Утверждения (I) и (3) проверяются непосредственно. Для доказательства (2) предположим, что пересечение любой окрестности точки $(\beta,\gamma)\in I^2$ со спектром $H_3(X)$ не пусто. Зафиксировав $\varepsilon>0$, выберем $(\beta',\gamma')\in H_3(X)$ так, чтобы $0\leq\beta-\beta'<\varepsilon$, $0\leq\gamma-\gamma'<\varepsilon$ (без ограничения общности можно считать, что точка (β',γ') лежит не выше и не правее точки (β,γ)). Положим $\delta=\min\{\beta'+\varepsilon-\beta,\gamma'+\varepsilon-\gamma\}$. Тогда найдутся $\mathcal{U},\mathcal{V}\in\tau$ такие, что $\mathcal{U}(x)\geq\beta'-\delta\geq\beta-\varepsilon$, $\mathcal{V}(y)\geq\beta'-\delta\geq\beta-\varepsilon$ и $\mathcal{U}\tilde{\in}\,\mathcal{V}^c\geq\gamma'-\delta\geq\gamma-\varepsilon$. Но это и означает, что $(\beta,\gamma)\in H_3(X)$.

Из предложения (2.I.3) следует, что (κ , ℓ)-спектры хаусдорфовости данного пространства X при различных (κ , ℓ) могут различаться лишь точками на границе. Нетрудно построить примеры, показывающие, что (κ , ℓ)-спектры действительно могут быть различными.

(2.I.4) <u>Замечание</u>. Нетрудно показать, что для каждого нечеткого пространства X и произвольных κ,ℓ $(I\times\{0\})\cup(\{0\}\times I)=:F\subset H_\kappa^\ell(X)$. В случае, если X ламинировано, то $\{(\beta,\gamma): 0\leqslant\beta+\gamma\leqslant 1\}=: G\subset H_3(X)$. Если X - топологическое пространство, то $H_\kappa^\ell(X)=H_\kappa^\ell(\lambda X)=I^2$ тогда и только тогда, когда X хаусдорфово; в противном случае $H_\kappa^\ell(X)=$ $=F$ и $H_2(\lambda X)=H_3(\lambda X)=G$.

(2.I.5) <u>Предложение</u>. Если нечеткое пространство (X , τ_X) уплотняется (т.е. биективно отображается) на нечеткое пространство (Y , τ_Y), то $H_\kappa^\ell(X)\supset H_\kappa^\ell(Y)$. В частности, если τ и τ' - две нечеткие топологии на множестве X и $\tau\subset\tau'$, то $H_\kappa^\ell(X,\tau)\subset H_\kappa^\ell(X,\tau')$.

<u>Доказательство</u> проведем для случая $\kappa=\ell=3$ (остальные случаи могут быть доказаны аналогично). Пусть $f: X\to Y$ - уплотнение и $x_1\neq x_2$. Тогда $y_1=f(x_1)\neq f(x_2)=y_2$. Зафиксируем $(\beta,\gamma)\in H_3(Y)$ и $\varepsilon>0$ и рассмотрим нечеткие множества $V_1,V_2\in\tau_Y$ такие, что $V_1(y_1)\geqslant\beta-\varepsilon$, $V_2(y_2)\geqslant\beta-\varepsilon$ и $V_1\tilde{\subset}V_2^c\geqslant\gamma-\varepsilon$. Положим $U_1:=f^{-1}(V_1)$, $U_2:=f^{-1}(V_2)$. Тогда, как нетрудно заметить, $U_1,U_2\in\tau_X$, $U_1(x_1)\geqslant\beta-\varepsilon$, $U_2(x_2)\geqslant$ $\geqslant\beta-\varepsilon$ и $U_1\tilde{\subset}U_2^c\geqslant\gamma-\varepsilon$, а следовательно, $(\beta,\gamma)\in H_3(X)$.

(2.I.6) <u>Предложение</u>. Если X - нечеткое пространство и Y - его подпространство, то $H_\kappa^\ell(X)\subset H_\kappa^\ell(Y)$.

<u>Доказательство</u> очевидно.

(2.I.7) <u>Предложение</u>. Пусть (X , τ) - нечеткое пространство и (X , $\lambda\tau$) - его ламинированная модификация. Тогда $H_\kappa^\ell(X)\subset H_\kappa^\ell(\lambda X)$ и $H_\kappa^\ell(X)\cap(\frac{1}{2},1]^2=H_\kappa^\ell(\lambda X)\cap(\frac{1}{2},1]^2$.

<u>Доказательство</u>. Ограничимся рассмотрением случая $H_3(X)$. Включение $H_3(X)\subset H_3(\lambda X)$ следует из (2.I.5). Обратно, пусть $(\beta,\gamma)\in H_3(\lambda X)$ и $\gamma>\frac{1}{2}$. Зафиксируем $x,y\in X$, $x\neq y$, $\varepsilon>0$ (при этом без ограни-

чения общности можем считать, что $\gamma-\delta>\frac{1}{2}$) и выберем $U,V\in\lambda\mathcal{T}$ так, чтобы $U(x)\geqslant\beta-\delta$, $V(y)\geqslant\beta-\delta$ и $U\tilde{\wedge}V^c\geqslant\gamma-\delta$. Из определения ламинированной модификации ясно, что U и V могут быть выбраны в виде $U=U_1\wedge a$, $V=V_1\wedge b$, где $a,b\in I$ и $U_1,V_1\in\mathcal{T}$. Поскольку $\beta-\delta>\frac{1}{2}$, то $a^c, b^c<\frac{1}{2}$. Учитывая, что $\frac{1}{2}<\gamma-\delta\leqslant U\tilde{\wedge}V^c\leqslant(U_1^c\vee a^c)\vee(V_1^c\vee b^c)$, отсюда можем заключить, что $\inf\limits_x(U_1^c\vee V_1^c)(x)=U_1\tilde{\wedge}V_1^c\geqslant\gamma-\delta$, а следовательно, $(\beta,\gamma)\in H_3(X)$.

(Равенство $H_k^\ell(X)=H_k^\ell(\lambda X)$, вообще говоря, не имеет места. Действительно, пусть $(X,\mathcal{T}^a)$ – антидискретное нечеткое пространство. Тогда, согласно (2.I.4), $H_3(X)=F$, но $H_3(\lambda X)=G$.)

(2.I.8). <u>Теорема</u>. Пусть $\{(X_i,\mathcal{T}_i): i\in\mathcal{J}\}$ – семейство нечетких пространств и $(X,\mathcal{T})$ – их произведение. Тогда $\bigcap\limits_{i\in\mathcal{J}}H_k^\ell(X_i)\subset H_k^\ell(X)$. Если при этом все $(X,\mathcal{T}_i)$ ламинированы и не пусты, то $\bigcap\limits_{i\in\mathcal{J}}H_k^\ell(X_i)=H_k^\ell(X)$.

<u>Доказательство</u>. Ограничимся случаем $k,\ell=3$. Пусть $(\beta,\gamma)\in H_3(X_i)$, $\forall i$ $\delta>0$. Рассмотрим две различные точки $x=(x_i)_{i\in\mathcal{J}}$, $y=(y_i)_{i\in\mathcal{J}}$ и зафиксируем $j\in\mathcal{J}$ такое, что $x_j\neq y_j$. Поскольку $(\beta,\gamma)\in H_3(X_j)$, найдутся $U_j,V_j\in\mathcal{T}_j$, удовлетворяющие неравенствам $U_j(x_j)\geqslant\beta-\delta$, $V_j(y_j)\geqslant\beta-\delta$ и $U_j\tilde{\wedge}V_j^c\geqslant\gamma-\delta$. Положим $U=\pi_j^{-1}(U_j)$, $V=\pi_j^{-1}(V_j)$, где $\pi_j: X\to X_j$ – отображение проектирования. Тогда, как легко заметить, $U(x)\geqslant\beta-\delta$, $V(y)\geqslant\beta-\delta$ и $U\tilde{\wedge}V^c\geqslant\gamma-\delta$, а значит $(\beta,\gamma)\in H_3(X)$.

Предположим теперь, что все нечеткие пространства $(X_i,\mathcal{T}_i)$ ламинированы. Зафиксируем $j\in\mathcal{J}$ и точку $x_0=(x_i^0)_{i\in\mathcal{J}}\in X$. Тогда произведение $\hat{X}_j=X_j\times\{x_i^0: i\in\mathcal{J},\ i\neq j\}$, рассматриваемое как подпространство в X, гомеоморфно пространству X_j (I.2.I3). Воспользовавшись предложением (2.I.6), отсюда получаем $H_3(X_j)=H_3(\hat{X}_j)\subset H_3(X)$.

(Требование ламинированности сомножителей в условии теоремы является существенным. Убедиться в этом можно, рассмотрев произведение $X=X_1\times X_2$, где X_1 – произвольное ламинированное нечеткое пространство, а X_2 – нехаусдорфово топологическое пространство.)

Из утверждений (2.I.7) и (2.I.8) вытекает:

(2.I.9) <u>Предложение</u>. Пусть $\{(X_i,\tau_i): i\in\mathcal{J}\}$ - семейство непустых нечетких пространств и (X,τ) - их произведение. Тогда $H^{\ell}_{K}(X)\cap(\frac{1}{2},1]^2=\bigcap\limits_{i\in\mathcal{J}} H^{\ell}_{K}(X_i)\cap(\frac{1}{2},1]^2$.

Единственность предела направленности является важным характеристическим свойством хаусдорфовых топологических пространств. Доказываемое ниже утверждение (2.I.10) мы рассматриваем как нечеткий аналог этого факта.

Пусть $\mathcal{P}=(p_n:=x_n^{t_n})_{n\in\mathfrak{D}}$ - нечеткая направленность и $\gamma\in I$; будем говорить, что $\mathcal{P}$ финально ниже, чем γ (соответственно, финально не выше, чем γ), если найдется такое $m\in\mathfrak{D}$, что $t_n<\gamma$ (соответственно, $t_n\leqslant\gamma$) для всех $n\geqslant m$.

(2.I.10) <u>Теорема</u>. Пусть (X,τ) - нечеткое пространство. Тогда $(\beta,\gamma)\in H^2_0(X,\tau)$ в том и только в том случае, когда для каждой нечеткой направленности $\mathcal{P}\subset X$, которая финально ниже, чем γ, из того, что $x^{\beta^c}, y^{\beta^c}\,\tilde{\in}\,\mathcal{C}on(\mathcal{P})$, следует, что $x=y$.

<u>Доказательство</u>. Предположим, что $(\beta,\gamma)\in H^2_0(X,\tau)$, $x\neq y$ и x^{β^c}, $y^{\beta^c}\,\tilde{\in}\,\mathcal{C}on(\mathcal{P})$. Выберем $U,V\in\tau$ так, чтобы $U(x)>\beta$, $V(y)>\beta$ и $U\,\tilde{\subset}\,V^c\geqslant\gamma$. Тогда $x^{\beta^c} q U$, $y^{\beta^c} q V$ и, следовательно, найдется $m\in\mathfrak{D}$ такое, что $x_n^{t_n} q U$, $x_n^{t_n} q V$ и $t_n<\gamma$ для всех $n\geqslant m$. Но это означает, что $U(x_n)+t_n>1$, $V(x_n)+t_n>1$, т.е. $U(x_n)\wedge V(x_n)>t_n^c>\gamma^c$, что противоречит условию $U\,\tilde{\subset}\,V^c\geqslant\gamma$.

Обратно, предположим, что $(\beta,\gamma)\notin H^2_0(X,\tau)$, тогда найдутся $x,y\in X$, $x\neq y$ такие, что, если $U(x)>\beta$, $V(y)>\beta$ ($U,V\in\tau$), то $U\,\tilde{\subset}\,V^c<\gamma$. Зададим порядок $<$ на множестве $\mathfrak{D}:=\{(U,V): U,V\in\tau,\ U(x)>\beta,\ V(y)>\beta\}$, положив $(U,V)<(U',V')$ тогда и только тогда, когда $U\supset U'$, $V\supset V'$, и определим нечеткую направленность $\mathcal{P}:\mathfrak{D}\to\mathfrak{X}$ следующим образом. Для каждого $n=(U,V)\in\mathfrak{D}$ зафиксируем точку $x_n\in X$ и число t_n так, чтобы $U(x_n)\wedge V(x_n)>t_n^c>\gamma^c$, и положим $\mathcal{P}(n):=x_n^{t_n}$. Ясно, что определенная таким образом нечеткая направленность $\mathcal{P}$ финально ниже, чем γ и при этом $x^{\beta^c}, y^{\beta^c} \tilde{\in} \mathcal{C}on(\mathcal{P})$.

Характеристики других спектров хаусдорфовости $H_K^{\ell}(X)$ посредством нечетких направленностей более громоздки, и мы не будем их здесь приводить.

Важным характеристическим свойством хаусдорфова топологического пространства является также замкнутость его диагонали. Для формулировки нечеткого аналога этого утверждения определим нужное и в дальнейшем понятие спектра замкнутости нечеткого множества в нечетком пространстве.

(2.I.II) Определение. (K, ℓ)-спектром замкнутости нечеткого множества M в нечетком пространстве X называется множество $CL_K^{\ell}(M,X)$, образованное парами $(\beta,\gamma)\in I^2$ такими, что (для каждого $\varepsilon>0$) существует $W\in\mathcal{T}$ такое, что $M \tilde{\cap} W^c \geq_{\ell} \gamma$ и при этом $W(x) \geq_K \beta$ как только $M^c(x) \geq_K \beta$.

Подчеркнем, что спектр замкнутости нечеткого множества обобщает понятие замкнутости в принципиально ином направлении, чем это делает определение (I.I.9).

(2.I.I2) Теорема. Для каждого нечеткого пространства $(X, \mathcal{T})$ имеет место равенство $H_K^{\ell}(X) = CL_K^{\ell}(\Delta, X^2)$, где $\Delta = \{(x,x) : x\in X\}$.

Доказательство. Ограничимся случаем $K,\ell=3$ (остальные случаи могут быть доказаны аналогично). Пусть $(\beta,\gamma)\in H_3(X)$ и $\varepsilon>0$. Зафиксировав две различные точки $x,y\in X$, выберем $U_x, V_y\in\mathcal{T}$ так, чтобы $U_x(x)\geq\beta-\varepsilon$, $V_y(y)\geq\beta-\varepsilon$ и $U_x \tilde{\cap} V_y^c \geq \gamma-\varepsilon$. Тогда, очевидно, $(U_x\times V_y)(x,y)\geq\beta-\varepsilon$ и для каждой точки $(z,z)\in\Delta$ $(U_x\times V_y)^c(z,z) = U_x^c(z)\vee V_y^c(z)\geq\gamma-\varepsilon$. Положим $W=\vee\{U_x\times V_y : (x,y)\in X^2\setminus\Delta\}$. Тогда $W\in\mathcal{T}_{X^2}$ и $W(x,y)\geq\beta-\varepsilon$ для всех $(x,y)\notin\Delta$. С другой стороны, $W^c(z,z)=\wedge\{U_x^c(z)\vee V_y^c(z) : (x,y)\notin\Delta\}\geq\gamma-\varepsilon$ для всех $(z,z)\in\Delta$. Но это и означает, что $(\beta,\gamma)\in CL_K^{\ell}(\Delta,X^2)$.

Обратно, пусть $(\beta,\gamma)\in CL_K^{\ell}(\Delta,X^2)$ и $\varepsilon>0$. Тогда, как нетрудно убедиться, найдется $W \in \mathcal{T}_{X^2}$ такое, что $W^c(x,x) \geq \gamma - \varepsilon$ для $(x,x) \in \Delta$ и $W(x,y) \geq \beta$ при $(x,y) \notin \Delta$. Согласно определению топологии произведения, для любых $x, y \in X$, $x \neq y$, найдутся $U_x, V_y \in \mathcal{T}$ такие, что $U_x \times V_y \leq W$ и $(U_x \times V_y)(x,y) \geq \beta - \varepsilon$. Второе неравенство означает, что $U_x(x) \geq \beta - \varepsilon$ и $V_y(y) \geq \beta - \varepsilon$. Из первого же неравенства следует, что $(U_x^c \vee V_y^c)(x) = (U_x \times V_y)^c(x,x) \geq W^c(x,x) \geq \gamma - \varepsilon$ для каждого $x \in X$, т.е. $U_x \overset{c}{\vee} V_y^c \geq \gamma - \varepsilon$. Но это и означает, что $(\beta,\gamma) \in H_5(X)$.

(2.I.I3) <u>Теорема</u>. Пусть X, Y – нечеткие пространства, $f, g: X \to Y$ – непрерывные отображения и $E = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$. Тогда $CL_k^\ell(E, X) \supset H_k^\ell(X)$.

<u>Доказательство</u>. Определим отображение $\varphi: X \to Y^2$ формулой $\varphi(x) = (f(x), g(x))$. Легко заметить, что отображение φ является непрерывным (см. (I.2.I2)). Для завершения доказательства теперь достаточно воспользоваться теоремой (2.I.I2), согласно которой $CL_k^\ell(\Delta_Y, Y^2) = H_k^\ell(Y)$ и следующей леммой, доказательство которой сводится к непосредственной проверке.

(2.I.I4) <u>Лемма</u>. Пусть X, Y – нечеткие пространства, отображение $f: X \to Y$ непрерывно и $N \in I^Y$. Тогда $CL_k^\ell(f^{-1}(N), X) \supset CL_k^\ell(N, Y)$.

В литературе по нечеткой топологии встречается несколько различных подходов к определению свойства хаусдорфовости в нечетких пространствах. Ниже мы рассмотрим некоторые из этих подходов и проиллюстрируем, как они могут быть описаны в рамках спектральной теории.

(2.I.I5) <u>Отделимость на данном уровне: подход С.Родабауха</u>. Нечеткое пространство $(X, \mathcal{T})$ называется α-хаусдорфовым (α^*-хаусдорфовым), если для любых различных точек $x, y \in X$ найдутся U, $V \in \mathcal{T}$ такие, что $U(x) > \alpha$, $V(y) > \alpha$ (соответственно $U(x) \geq \alpha$, $V(y) \geq \alpha$) и $U \wedge V = 0$. Легко заметить, что нечеткое пространство X является α-хаусдорофовым (α^*-хаусдорфовым) тогда и только тогда, когда $(\alpha, 1) \in H_0^2(X)$ (соответственно, когда $(\alpha, 1) \in H_2^2(X)$). Нетрудно заметить также, что α-хаусдорфовость (α^*-хаусдорфовость) нечеткого пространства (X, τ) равносильна хаусдорфовости топологического пространства $(X, \varsigma_\alpha\tau)$ (соответственно $(X, \varsigma_{\alpha^*}\tau)$), где $\varsigma_\alpha, \varsigma_{\alpha^*}$ - функторы α-уровня (I.3.16; I.3.17).

(2.I.16) Отделимость дизъюнктных нечетких точек. Нечеткое пространство (X, τ) Пу и Лю [86] называют хаусдорфовым, если для любых двух его нечетких точек x^t и y^s с различными носителями найдутся $U, V \in \tau$ такие, что $x^t q U$ и $y^s q V$ (т.е. U и V являются q-окрестностями нечетких точек x^t и y^s соответственно) и $U \wedge V = 0$. В работе [98] нечеткое пространство (X, τ) называется хаусдорфовым, если для любых его нечетких точек x^t и y^s таких, что $x \neq y$ и $s, t < 1$, найдутся $U, V \in \tau$ такие, что $x \tilde{\in} U$, $y \tilde{\in} V$ и $U \wedge V = 0$. Нетрудно показать, что оба эти определения равносильны и могут быть охарактеризованы равенством $H_3^2(X) = I^2$. Ослабляя во втором определении условие $U \wedge V = 0$ до условия $U \not{q} V$, где q - отношение квазисовпадения (I.5.I), приходим к понятию слабо хаусдорфового пространства.

(2.I.17) Ультрахаусдорофовость. Пусть P - некоторое (топологическое) свойство топологических пространств. Следуя Ловену [68], будем говорить, что нечеткое пространство (X, τ) является ультра-P-пространством, если топологическое пространство $(X, \iota\tau)$ (I.3.8) обладает свойством P.

Нетрудно показать, что каждое хаусдорфово (2.I.16) нечеткое пространство является ультрахаусдорфовым. С другой стороны, существует ультрахаусдорфово нечеткое пространство, не являющееся хаусдорфовым.

Б. Спектральная теория T_1-отделимости

(2.I.18) Определение. Пусть (X, τ) - нечеткое пространство и $k, \ell \in \{0, I, 2, 3\}$. (k, ℓ)-спектром T_1-отделимости называется множество $T1_k^\ell(X) := \{(\beta,\gamma)\in I^2 :\ \forall x, y\in X,\ x\neq y$ (и $\forall \varepsilon>0$) $\exists\, U\in\tau$ такое, что $U(x) \geqslant_k \beta$ и $U^c(y) \geqslant_\ell \gamma\}$. В случае $k=\ell$ будем писать просто $T1_k(X)$.

Следующие утверждения легко могут быть установлены по аналогии с соответствующими фактами о спектрах хаусдорфовости.

(2.I.19) <u>Предложение</u>. Если $(\beta,\gamma)\in T1_k^\ell(X)$ и $0\leqslant\beta'\leqslant\beta'$, $0\leqslant\gamma'\leqslant\gamma$, то $(\beta',\gamma')\in T1_k^\ell(X)$.

(2.I.20) <u>Предложение</u>. (I) Если $k\geqslant k'$ и $\ell\geqslant\ell'$, то $T1_k^\ell(X)\supset T1_{k'}^{\ell'}(X)$.
(2) Множество $T1_3(X)$ замкнуто в I^2.
(3) Если $(\beta,\gamma)\in T1_3(X)$, $0\leqslant\beta'<\beta$, $0\leqslant\gamma'<\gamma$, то $(\beta',\gamma')\in T1_0(X)$.

(2.I.2I) <u>Замечание</u>. Для каждого нечеткого пространства X $(I\times\{0\})\cup(\{0\}\times I) =: F\subset T1_{k_0}^\ell(X)$. В случае, если X ламинировано, то $\{(\beta,\gamma): 0<\beta+\gamma\leqslant 1\} =: G\subset T1_3(X)$. Если X – топологическое T_1-пространство, то $T1_k^\ell(X)=I^2$ для всех ℓ, k; в противном случае $T1_k^\ell(X)=F$ и $T1_2(\lambda X)=T1_3(\lambda X)=G$.

(2.I.22) <u>Предложение</u>. Если нечеткое пространство X уплотняется на нечеткое пространство Y, то $T1_k^\ell(X)\supset T1_k^\ell(Y)$. В частности, если τ и τ' – две нечеткие топологии на множестве X и $\tau\subset\tau'$, то $T1_k^\ell(X,\tau)\subset T1_k^\ell(X,\tau')$.

(2.I.23) <u>Предложение</u>. Если X – нечеткое пространство и Y – его подпространство, то $T1_k^\ell(X)\subset T1_k^\ell(Y)$.

(2.I.24) <u>Предложение</u>. Пусть X – нечеткое пространство. Тогда $T1_k^\ell(X)\subset T1_k^\ell(\lambda X)$ и $T1_k^\ell(X)\cap(\frac{1}{2},1]^2 = T1_k^\ell(\lambda X)\cap(\frac{1}{2},1]^2$.

(2.I.25) <u>Теорема</u>. Пусть $\{X_i : i\in J\}$ – семейство нечетких пространств и X – их произведение. Тогда $\bigcap_{i\in J} T1_k^\ell(X_i)\subset T1_k^\ell(X)$. Если при этом все X_i ламинированы и не пусты, то $\bigcap_{i\in J} T1_k^\ell(X_i) = T1_k^\ell(X)$.

(2.I.26) <u>Предложение</u>. Пусть $\{X_i : i\in J\}$ – семейство непустых нечетких пространств и X – их произведение. Тогда $T1_k^\ell(X)\cap(\frac{1}{2},1]^2 = \bigcap_{i\in J} T1_k^\ell(X_i)\cap(\frac{1}{2},1]^2$.

Важнейшим характеристическим свойством топологических T_1-пространств является замкнутость его одноточечных подмножеств. Доказываемое ниже утверждение (2.I.27), в основу которого положено понятие спектра замкнутости нечеткого множества (2.I.II), мы рассматриваем как нечеткий аналог этого факта.

(2.I.27) Теорема. Для произвольного нечеткого пространства $(X, \mathcal{T})$ имеет место равенство $T1_k^\ell(X) = \bigcap_{x\in X} CL_k^\ell(x, X)$.

Доказательство. Ограничимся случаем $k, \ell = 3$. Пусть $(\beta,\gamma)\in T1_3(X)$; зафиксировав $x\in X$, $\varepsilon>0$, для каждого $y\in X$, $y\neq x$, построим $U_y\in\mathcal{T}$ такое, что $U_y(y)\geq\beta$ (нетрудно понять, что в данной ситуации условия $U_y(y)\geq\beta$ и $U_y(y)\geq\beta-\varepsilon$ равносильны) и $U_y^c(x)\geq\gamma-\varepsilon$. Положим $\mathcal{U} = \{U_y : y\in X, y\neq x\}$. Ясно, что $\mathcal{U}(y)\geq\beta$ и $\mathcal{U}_y^c(x)\geq\gamma-\varepsilon$, а следовательно $(\beta,\gamma)\in CL_3(x, X)$. Ввиду произвольности выбора $x\in X$ это означает, что $T1_k^\ell(X)\subset\bigcap_{x\in X} CL_k^\ell(x, X)$.

Обратно, пусть $(\beta,\gamma)\in\bigcap_{x\in X} CL_k^\ell(x, X)$. Зафиксируем $x, y\in X$, $\varepsilon>0$ и выберем $\mathcal{U}\in\mathcal{T}$ таким образом, чтобы $\mathcal{U}^c(x)\geq\gamma-\varepsilon$ и $\mathcal{U}(z)\geq\beta$ (что в данном случае эквивалентно условию $\mathcal{U}(z)\geq\beta-\varepsilon$) для всех $z\neq x$ и, в частности, $\mathcal{U}(y)\geq\beta$. Но это и означает, что $(\beta,\gamma)\in T1_k^\ell(X)$.

Рассмотрим теперь связь между спектрами хаусдорфовости и T_1-отделимости.

(2.I.28) Теорема. Для каждого нечеткого пространства $(X, \mathcal{T})$ имеет место включение $T1_k^\ell(X)\supset H_k^\ell(X)\cap(\frac{1}{2}, 1]^2$.

Доказательство. Ограничимся рассмотрением случая $k, \ell = 3$. Пусть $(\beta,\gamma)\in H_k^\ell(X)\cap(\frac{1}{2}, 1]^2$. Зафиксируем $\varepsilon>0$, при этом можем считать, что $\gamma-\varepsilon>\frac{1}{2}$, $\beta-\varepsilon>\frac{1}{2}$. Для точек $x, y\in X$, $x\neq y$, выберем $U, V\in\mathcal{T}$ таким образом, чтобы $U(x)\geq\beta-\varepsilon$, $V(y)\geq\beta-\varepsilon$, $U\tilde{\cup}V^c\geq\gamma-\varepsilon$. Поскольку $U^c(y)\vee V^c(y)\geq\gamma-\varepsilon$ и $V^c(y)\leq\beta^c+\varepsilon<\gamma-\varepsilon$, заключаем, что $U^c(y)\geq\gamma-\varepsilon$, а следовательно, $(\beta,\gamma)\in T1_k^\ell(X)$.

(Для того, чтобы убедиться в существенности требования $\beta,\gamma>\frac{1}{2}$, рассмотрим следующий пример. Пусть $X=\{x, y\}$ и определим $U, V\in I^X$ равенствами $U(x)=\frac{1}{8}$, $U(y)=\frac{1}{4}$, $V(x)=\frac{1}{4}$, $V(y)=1$. Пусть $\mathcal{T}=\{V, U, 1, 0\}$. Тогда $H_3(X)=[0,\frac{1}{4}]\times[0,\frac{3}{4}]$ и $T1_3(X)=[0,\frac{1}{8}]\times[0,3/4]$).

(2.I.29) T_1-отделимость на данном уровне: подход Родабауха. Нечеткое пространство (X,τ) Родабаух называет α-T_1-пространством (α^*-T_1-пространством), где $\alpha\in I$, если для любых двух различных точек $x,y\in X$ найдутся $U,V\in\tau$ такие, что $U(x)>\alpha$, $V(y)>\alpha$ (соответственно $U(x)\geqslant\alpha$ и $V(x)\geqslant\alpha$) и $U\wedge V=0$. Нетрудно заметить, что нечеткое пространство X является α-T_1- (α^*-T_1) в том и только в том случае, когда $(\alpha,1)\in T1_0^2(X)$ (соответственно, когда $(\alpha,1)\in T1_2^2(X)$).

(2.I.30) T_1-отделимость нечетких точек: подход Сривастав и Лала [99]; подход Аднаждевича [2]. В работе [99] нечеткое пространство (X,τ) называется T_1-пространством, если для любых двух нечетких точек x^t, y^s с различными носителями найдутся $U,V\in\tau$ такие, что $x^t\,\tilde{\in}\,U$, $y^s\,\tilde{\notin}\,U$ и $y^s\,\tilde{\in}\,V$, $x^t\,\tilde{\notin}\,V$. Нетрудно заметить, что нечеткое пространство является T_1-пространством в этом смысле тогда и только тогда, когда $H_1^3(X)=I^2$, или, что эквивалентно, когда $H_3^3(X)=I^2$.

Заметим, что, если нечеткое T_1-пространство X ламинировано, то в нем каждая нечеткая точка x^t замкнута. Обратно, нечеткое пространство, в котором каждая нечеткая точка замкнута, является T_1-пространством. С другой стороны, аксиома T_1 "в чистом виде" (т.е. без ламинированности), равно и как и остальные из рассмотренных выше свойств типа T_1 не гарантируют замкнутости нечетких точек. Для того, чтобы выделить это важное и нужное нам в дальнейшем свойство, введем следующее определение:

Нечеткое пространство X, в котором каждая нечеткая точка x^t замкнута, назовем AT_1-пространством (или T_1-пространством в смысле Аднаджевича, ср. [2]). Нечеткое пространство, в котором замкнуты все нечеткие точки вида x^t, где $t<1$, назовем WAT_1-пространством (или слабо T_1-пространством в смысле Аднаджевича).

В. Спектральная теория T_0-отделимости

(2.I.31) Определение. (K , ℓ)-спектром T_0-отделимости нечеткого пространства (X , $\mathcal{T}$) называется множество $TO_K^\ell(X)$, определенное равенством $TO_K^\ell(X) := \{(\beta,\gamma) : \forall x, y \in X, x \neq y, \exists\, U \in \mathcal{T}$ такое, что либо $U(x) \geq_K \beta, U^c(y) \geq_\ell \gamma,$ либо $U(y) \geq_K \beta, U^c(x) \geq_\ell \gamma\}$.

Основные свойства спектров T_0-отделимости вполне аналогичны соответствующим свойствам спектров T_1-отделимости, и мы не будем приводить здесь соответствующие формулировки.

(2.I.32) Предложение. Для каждого нечеткого пространства (X , $\mathcal{T}$) имеют место включения $TO_K(X) \subset T1_K(X)$ и $TO_K(X) \subset H_K(X)$.

Доказательство. Первое включение очевидно. Для доказательства второго включения предположим, что $(\beta,\gamma) \in H_3(X)$ и рассмотрим два возможных случая:

(I) $\beta+\gamma > 1$. Зафиксируем $\varepsilon > 0, y \in X$ и пусть $U, V \in \mathcal{T}$ таковы, что $U(x) \geq \beta - \varepsilon$, $V(y) \geq \beta - \varepsilon$ и $U \tilde{\subset} V^c \geq \gamma - \varepsilon$. Поскольку $V^c(y) \leq \beta^c + \varepsilon < \gamma - \varepsilon$ (без ограничения общности можно считать, что $1-(\beta+\gamma) > 2\varepsilon$) и $U^c \vee V^c \geq \gamma - \varepsilon$, отсюда заключаем, что $U^c(y) \geq \gamma - \varepsilon$.

(2) $\beta+\gamma \leq 1$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$, $x, y \in X$ и пусть $U, V \in \mathcal{T}$ таковы, что $U(x) \geq \beta - \varepsilon$, $V(y) \geq \beta - \varepsilon$ и $U \tilde{\subset} V^c \geq \gamma - \varepsilon$. Последнее условие, в частности, означает, что $U^c(x) \vee V^c(x) \geq \gamma - \varepsilon$ и $U^c(y) \vee V^c(y) \geq \gamma - \varepsilon$.

Если $U^c(y) \geq \gamma - \varepsilon$, то U удовлетворяет требованиям определения (2.I.30). Предположим поэтому, что $U^c(y) < \gamma - \varepsilon$. Тогда $V^c(y) \geq \gamma - \varepsilon$. В случае, если при этом $V(x) \geq \beta - \varepsilon$, то V удовлетворяет требованиям (2.I.30). Если же $V(x) < \beta - \varepsilon$, то $V^c(x) > \beta^c + \varepsilon > \beta^c \geq \gamma$ и при этом $V(y) \geq \beta - \varepsilon$ – и снова V удовлетворяет требованиям (2.I.30). Тем самым доказательство завершено.

Г. Спектральная теория регулярности

(2.I.33) Определение. (κ , ℓ)-спектром регулярности нечеткого пространства (X , τ), где $\kappa, \ell \in \{0, I, 2, 3\}$, называется множество $R_\kappa^\ell(X) := \{(\beta,\gamma) \in I^2$: для всех $x \in X$ и $F \in \tau^c$, удовлетворяющих условию $F^c(x) \underset{\kappa}{<} \beta$ (и каждого $\varepsilon > 0$), найдутся $V, W \in \tau$ такие, что $x \tilde{\in} V \underset{\kappa}{\geq} \beta$, $W \tilde{\in} V^c \underset{\ell}{\geq} \gamma$ и $F \tilde{\in} W \underset{\kappa}{\geq} \beta\}$.

(2.I.34) Замечание. Если $(\beta,\gamma) \in R_\kappa^\ell(X)$ и $\gamma' < \gamma$, то, очевидно, и $(\beta,\gamma') \in R_\kappa^\ell(X)$. Однако, как показывает приведенный ниже пример, аналог утверждения (2.I.2) для спектров регулярности, вообще говоря, не имеет места:

Пример. Пусть X - множество, τ_1 и τ_2 - две обычные топологии на X, причем τ_1 - регулярна, а τ_2 - не регулярна и $\tau_1 \subset \tau_2$. Зафиксируем $a \in (\frac{1}{2}, 1)$ и зададим нечеткую топологию τ на X посредством предбазы $\tau_1 \cup a\tau_2 \cup \{a^c\}$. Тогда $R_3(X) = ([0, a^c] \times I) \cup ((a, 1] \times I)$.

Совершенно аналогично предложению (2.I.3)(2) легко убедиться в справедливости следующего факта:

(2.I.35) Предложение. Если $(\beta,\gamma) \notin R_3(X)$, то $(\beta',\beta] \times (\gamma',\gamma] \cap \cap R_3(X) = \emptyset$ для некоторых $\beta' < \beta$ и $\gamma' < \gamma$.

(Аналоги утверждений (2.I.3)(I) и (2.I.3)(3) для спектра регулярности, вообще говоря, не имеют места.)

(2.I.36) Предложение. Если Y - подпространство нечеткого пространства X, то $R_\kappa^\ell(Y) \supset R_\kappa^\ell(X)$.

Доказательство очевидно.

(2.I.37) Предложение. $(\beta,\gamma) \in R_\kappa^\ell(X)$ тогда и только тогда, когда для любых $x \in X$ и $U \in \tau$, удовлетворяющих условию $U(x) \underset{\kappa}{\geq} \beta$ (и для каждого $\varepsilon > 0$) найдутся $V \in \tau$ и $N \in \tau^c$ такие, что $V(x) \underset{\kappa}{\geq} \beta$, $V \tilde{\in} N \underset{\ell}{\geq} \gamma$ и $N \tilde{\in} U \underset{\kappa}{\geq} \beta$.

Доказательство. Ограничимся случаем $\kappa, \ell = 3$. Обозначим через $R_3'(X)$ множество всех пар $(\beta,\gamma) \in I^2$ таких, что для любых $x \in X, U \in \tau$, удовлетворяющих условию $U(x)\geqslant\beta$ и для каждого $\varepsilon>0$ найдутся $N\in\tau^c$, $V\in\tau$ такие, что $V(x)\geqslant\beta-\varepsilon$, $V\tilde{-}N\geqslant\gamma-\varepsilon$, $N\tilde{-}U\geqslant\beta-\varepsilon$, и покажем, что $R_3(X)=R_3'(X)$.

Пусть $(\beta,\gamma)\in R_3(X)$, $\varepsilon>0$, $x\in X$, $U\in\tau$ и $U(x)\geqslant\beta$. Положим $F=U^c$; поскольку, очевидно, $F(x)\leqslant\beta^c$, можем найти $V,W\in\tau$ такие, что $V(x)\geqslant\beta-\varepsilon$, $W\tilde{-}V^c\geqslant\gamma-\varepsilon$ и $F\tilde{-}W\geqslant\beta-\varepsilon$. Положим $N=W^c$; тогда $V\tilde{-}N=W\tilde{-}V^c\geqslant\gamma-\varepsilon$ и $N\tilde{-}U=F\tilde{-}W\geqslant\beta-\varepsilon$, а значит $(\beta,\gamma)\in R_3'(X)$.

Обратно, пусть $(\beta,\gamma)\in R_3'(X)$, $\varepsilon>0$ и пусть $F\in\tau^c$ таково, что $F(x)\leqslant\beta^c$. Положим $U=F^c$. Тогда $U(x)\geqslant\beta$, а следовательно, найдутся $N\in\tau^c$, $V\in\tau$ такие, что $V(x)\geqslant\beta-\varepsilon$, $V\tilde{-}N\geqslant\gamma-\varepsilon$ и $N\tilde{-}U\geqslant\beta-\varepsilon$. Обозначим $W=N^c$; тогда $W\tilde{-}V^c=V\tilde{-}N\geqslant\gamma-\varepsilon$ и $F\tilde{-}W=N\tilde{-}U\geqslant\beta-\varepsilon$, а следовательно, $(\beta,\gamma)\in R_3(X)$.

Известно, что уже в случае обычных топологических пространств усиление топологии может привести к потере регулярности. Поэтому было бы безнадежно ожидать справедливости утверждения типа (2.I.5) для спектра регулярности. В этой связи интерес представляет:

(2.I.38) <u>Теорема</u>. Для каждого нечеткого пространства (X,τ) $R_k^\ell(X)\subset R_k^\ell(\lambda X)$ и $R_k^\ell(X)\cap(\frac{1}{2},1]^2=R_k^\ell(\lambda X)\cap(\frac{1}{2},1]^2$.

<u>Доказательство</u>. Пусть $(\beta,\gamma)\in R_3(X)$ и $x\in X$, $F\in(\lambda\tau)^c$ таковы, что $F^c(x)\geqslant\beta$. Не ограничивая общности, можем считать, что $F=F_1\vee a$, где $a\in I$, $F_1\in\tau^c$. При этом ясно, что $a^c\geqslant\beta$ и $F_1^c(x)\geqslant\beta$, а следовательно, найдутся $V,W\in\tau\subset\lambda\tau$ такие, что $V(x)\geqslant\beta-\varepsilon$, $W\tilde{-}V^c\geqslant\gamma-\varepsilon$ и $F_1\tilde{-}W\geqslant\beta-\varepsilon$. Заметив, что в этом случае и $F\tilde{-}W\geqslant\beta-\varepsilon$, заключаем что $(\beta,\gamma)\in R_3(\lambda X)$, а следовательно, $R_3(X)\subset R_3(\lambda X)$. Для остальных k, ℓ включения $R_k^\ell(X)\subset R_k^\ell(\lambda X)$ могут быть установлены аналогично.

Пусть теперь $(\beta,\gamma)\in R_3(\lambda X)$ и $\beta,\gamma>\frac{1}{2}$; покажем, что $(\beta,\gamma)\in R_3(X)$. Предположим, что $x\in X$, $F\in\tau^c$ и $F(x)\leqslant\beta^c$. Поскольку $F\in(\lambda\tau)^c$, для каждого $\varepsilon>0$ найдутся $V_0,W_0\in\lambda\tau$ такие, что $V_0(x)\geqslant\beta-\varepsilon$, $W_0\tilde{-}V_0^c\geqslant\gamma-\varepsilon$ и $F\tilde{-}W_0\geqslant\beta-\varepsilon$ (как и обычно в таким случаях, считаем, что $\beta-\varepsilon$, $\gamma-\varepsilon>\frac{1}{2}$). Из определения ламинированной модификации и роли, которую играют нечеткие множества $\mathcal{V}_0, \mathcal{W}_0$, ясно, что без ограничения общности можно считать, что $\mathcal{V}_0 = \mathcal{V} \wedge b$, где $\mathcal{V} \in \mathcal{T}$, $b \in I$ и $\mathcal{W}_0 = \bigvee_{n \in N} (\mathcal{W}_n \wedge a_n)$, где $\mathcal{W}_n \in \mathcal{T}$ и $a_n \in I$ для всех $n \in N$. Заметим сразу, что из условия $\mathcal{V}_0(x) \geqslant \beta - \varepsilon$ следует, что $b^c < \beta - \varepsilon$. Отсюда и из неравенства $\mathcal{W}_0 \tilde{\subset} \mathcal{V}_0^c \geqslant \gamma - \varepsilon$ заключаем, что $\mathcal{W}_0 \tilde{\subset} \mathcal{V}^c \geqslant \gamma - \varepsilon$.

Обозначим через P множество всех $n \in N$ таких, что $a_n \geqslant \beta - \varepsilon$ и положим $\mathcal{W}_* = \bigvee_{n \in P} (\mathcal{W}_n \wedge a_n)$. Ясно, что из условия $F \tilde{\subset} \mathcal{W}_0 \geqslant \beta - \varepsilon$ следует $F \tilde{\subset} \mathcal{W}_* \geqslant \beta - \varepsilon$ и при этом $\mathcal{W}_* \tilde{\subset} \mathcal{V}^c \geqslant \mathcal{W}_0 \tilde{\subset} \mathcal{V}^c \geqslant \gamma - \varepsilon$. Положим $\mathcal{W} = \bigvee_{n \in P} \mathcal{W}_n$, тогда $\mathcal{W} \in \mathcal{T}$, $F \tilde{\subset} \mathcal{W} \geqslant F \tilde{\subset} \mathcal{W}_* \geqslant \beta - \varepsilon$ и при этом, поскольку $a_n^c \leqslant \beta^c + \varepsilon < \gamma - \varepsilon$ для всех $n \in P$, то неравенство $\mathcal{W}_* \tilde{\subset} \mathcal{V}^c \geqslant \gamma - \varepsilon$ равносильно неравенству $\mathcal{W} \tilde{\subset} \mathcal{V}^c \geqslant \gamma - \varepsilon$. Существование таких множеств $\mathcal{W}, \mathcal{V} \in \mathcal{T}$ и завершает доказательство в случае $k = \ell = 3$. Аналогично могут быть рассмотрены остальные случаи.

(2.I.39) <u>Теорема</u>. Пусть $\{(X_i, \mathcal{T}_i) : i \in \mathcal{J}\}$ - семейство нечетких пространств и $(X, \mathcal{T})$ - их произведение. Тогда $\bigcap_i R_k^\ell(X_i) \subset R_k^\ell(X)$. Если же при этом все $(X_i, \mathcal{T}_i)$ ламинированы, то $R_k^\ell(X) = \bigcap_i R_k^\ell(X_i)$.

<u>Доказательство</u>. Ограничимся, как и обычно, случаем $k, \ell = 3$. Пусть $(\beta, \gamma) \in R_3(X_i)$ для всех $i \in \mathcal{J}$. Рассмотрим $(x_i)_{i \in \mathcal{J}} = x \in X$ и $\mathcal{U} \in \mathcal{T}$ такие, что $\mathcal{U}(x) \geqslant \beta$. При этом без ограничения общности можно предполагать, что $\mathcal{U} = \hat{\mathcal{U}}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \hat{\mathcal{U}}_{i_n}$ для некоторых индексов $i_1, \ldots, i_n$, где $\mathcal{U}_{i_k} \in \mathcal{T}_{i_k}$ и $\hat{\mathcal{U}}_{i_k} = \pi_{i_k}^{-1}(\mathcal{U}_{i_k})$; при этом очевидно, что $\mathcal{U}_{i_k}(x_{i_k}) \geqslant \beta$ для всех i_k.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и, воспользовавшись тем, что $(\beta, \gamma) \in R_3(X_{i_k})$ для всех i_k, выберем $\mathcal{V}_{i_k} \in \mathcal{T}_{i_k}$ и $N_{i_k} \in (\mathcal{T}_{i_k})^c$ таким образом, чтобы $\mathcal{V}_{i_k}(x_{i_k}) \geqslant \beta - \varepsilon$, $\mathcal{V}_{i_k} \tilde{\subset} N_{i_k} \geqslant \gamma - \varepsilon$ и $N_{i_k} \tilde{\subset} \mathcal{U}_{i_k} \geqslant \beta - \varepsilon$. Тогда, как нетрудно заметить, $\hat{\mathcal{V}}_{i_k}(x_{i_k}) \geqslant \beta - \varepsilon$, $\hat{\mathcal{V}}_{i_k} \tilde{\subset} \hat{N}_{i_k} \geqslant \gamma - \varepsilon$ и $\hat{N}_{i_k} \tilde{\subset} \hat{\mathcal{U}}_{i_k} \geqslant \beta - \varepsilon$, где $\hat{\mathcal{V}}_{i_k} = \pi_{i_k}^{-1}(\mathcal{V}_{i_k})$ и $\hat{N}_{i_k} = \pi_{i_k}^{-1}(N_{i_k})$. Теперь остается определить множества $\mathcal{V}, N \in I^X$ равенствами $\mathcal{V} = \bigwedge_{k=1}^{n} \hat{\mathcal{V}}_{i_k}$, $N = \bigwedge_{k=1}^{n} \hat{N}_{i_k}$.

Предположим теперь, что все X_i ламинированы. Тогда подпространство $\tilde{X}_j = X_j \times \{\{x_i^\circ\} : i \in \mathcal{J}, i \neq j\}$ произведения X гомеоморфно координатному пространству X_j (I.2.13); и нам остается воспользоваться утверждением (2.I.36).

Нетрудно построить пример, показывающий существенность требования ламинированности во втором утверждении.

(2.I.40) <u>Следствие</u>. Пусть $\{X_i : i\in\mathcal{J}\}$ – семейство непустых нечетких пространств и X – их произведение. Тогда $R^{\ell}_{\kappa}(X)\cap(\frac{1}{2},1]^2 = \bigcap\limits_i R^{\ell}_{\kappa}(X_i)\cap(\frac{1}{2},1]^2$.

(2.I.4I) <u>Теорема</u>. Для каждого нечеткого пространства $(X,\mathcal{T})$

(I) $T1^{\ell}_{\kappa}(X)\cap R^{\ell}_{\kappa}(X)\cap(\frac{1}{2},1]^2\subset H^{\ell}_{\kappa}(X)$.

(2) Если $T1^{\ell}_{\kappa}(X)=I^2$, то $R^{\ell}_{\kappa}(X)\subset H^{\ell}_{\kappa}(X)$.

<u>Доказательство</u>. Ограничимся рассмотрением случая $\kappa,\ell=3$. Пусть $(\beta,\gamma)\in T1_3(X)\cap R_3(X)\cap(\frac{1}{2},1]^2$. Зафиксировав $x,y\in X$ и $\varepsilon>0$, так, чтобы $\beta-\varepsilon,\gamma-\varepsilon>\frac{1}{2}$, выберем $U\in\mathcal{T}$, удовлетворяющее неравенствам $U(x)\geqslant\beta$ и $U^c(y)\geqslant\gamma-\varepsilon$. Положим $F=U^c$; тогда $F^c(x)\geqslant\beta$, а следовательно, найдутся $V,W\in\mathcal{T}$ такие, что $V(x)\geqslant\beta-\varepsilon$, $W\tilde{\in}V^c\geqslant\gamma-\varepsilon$ и $F\tilde{\in}W\geqslant\beta-\varepsilon$. Из последнего неравенства, учитывая, что $F^c(y)=U(y)\leqslant\gamma^c+\varepsilon<\beta-\varepsilon$, заключаем, что $(\beta,\gamma)\in H_3(X)$.

Для доказательства второго утверждения рассмотрим $(\beta,\gamma)\in R_3(X)$ и пусть $x,y\in X$. Зафиксируем $\varepsilon>0$, $\varepsilon<\frac{\beta}{2}$ и выберем $U\in\mathcal{T}$ такое, что $U(x)=1$, $U^c(y)\geqslant 1-\varepsilon$. Положим $F=U^c$; тогда найдутся $V,W\in\mathcal{T}$ такие, что $V(x)\geqslant\beta-\varepsilon$, $W\tilde{\in}V^c\geqslant\gamma-\varepsilon$ и $F\tilde{\in}W\geqslant\beta-\varepsilon$. Из последнего неравенства и условия $F^c(y)\leqslant\varepsilon$ заключаем, что $W(y)\geqslant\beta-\varepsilon$, а следовательно, $(\beta,\gamma)\in H_3(X)$.

В дальнейшем нам потребуется также понятие регулярности в том смысле, который вкладывает в него Адналжевич [2]:

(2.I.42) <u>Определение</u>. Нечеткое пространство $(X,\mathcal{T})$ называется <u>А-регулярным</u>, или регулярным в смысле Адналжевича [2], если для каждого $U\in\mathcal{T}$ и каждой нечеткой точки $x^t\tilde{\in}_s U$ найдется $V\in\mathcal{T}$ такое, что $x^t\in_s V\leqslant\overline{V}\leqslant U$.

Д. Аксиомы $W_0 - W_2$

Имеется ряд свойств типа отделимости нечетких пространств, которые не могут быть описаны в рамках спектральной теории. Наиболее важными из них представляются нам аксиомы группы W_0-W_2 (т.н. "волнистые" аксиомы). Рассмотрим здесь вкратце эти аксиомы (которые, кстати, потребуются нам и в дальнейшем).

(2.I.43) Определение. Нечеткое пространство $(X, \mathcal{T})$ назовем
(I) W_0-пространством, если для любых двух различных точек $x, y \in X$ найдется $U \in \mathcal{T}$ такое, что либо $U(x) > U(y)$, либо $U(y) > U(x)$;
(2) W_1-пространством, если для любых двух различных точек $x, y \in X$ найдутся $U, V \in \mathcal{T}$ такие, что $U(x) > U(y)$ и $V(x) > V(y)$;
(3) $W_{2'}$-пространством, если для любых двух различных точек $x, y \in X$ найдутся $U, V \in \mathcal{T}$ такие, что $U(x) \wedge V(y) > U \wedge V$;
(4) W_2-пространством, если для любых двух различных точек $x, y \in X$ найдутся $U, V \in \mathcal{T}$ такие, что $U(x) \wedge V(y) > \sup_{z \in X} (U \wedge V)(z)$.

Мы не будем подробно рассматривать здесь свойства волнистых аксиом. Отметим только следующие очевидные утверждения.

(2.I.44) $W_2 \Rightarrow W_{2'} \Rightarrow W_1 \Rightarrow W_0$; обратные импликации не имеют места.

(2.I.45) Подпространство Y нечеткого W_i-пространства ($i = 0$, I,2',2) является W_i-пространством ($i = 0$,I,2',2).

(2.I.46) Если нечеткое пространство Y уплотняется на W_i-пространство X, то Y также является W_i-пространством ($i=0$,I,2',2).

(2.I.47) Если $\{X_i : i \in J\}$ – семейство нечетких W_i-пространств то и их произведение X является W_i-пространством ($i = 0$,I,2',2). В случае, если все пространства X_i ламинированы, то верно и обратное: если произведение является W_i-пространством, то и все сомножители – W_i-пространства.

§ 2. НОРМАЛЬНОСТЬ И Е-РЕГУЛЯРНОСТЬ

А. Нормальность.

В отличие от развитой в предыдущем параграфе спектральной теории, предлагаемый здесь подход к понятию нормальности основан на двузначной классификации: каждое нечеткое пространство либо нормально, либо нет. Мы не будем развивать здесь спектральную теорию нормальности (в духе § I), поскольку, во-первых, эта теория, будучи в основных чертах схожа со спектральными теориями низших аксиом отделимости, является по сравнению с ними более громоздкой, а во-вторых, понятие нормальности нас будет интересовать не столько само по себе, сколько в качестве пролога к рассматриваемому ниже свойству Е-регулярности.

(2.2.I) Определение [46]. Нечеткое пространство $(X, \mathcal{T})$ называется нормальным, если для каждой пары его нечетких множеств $A \in \mathcal{T}^c$ и $U \in \mathcal{T}$ таких, что $A \le U$, найдется $V \in \mathcal{T}$, удовлетворяющее неравенствам $A \le V \le \bar{V} \le U$.

Нетрудно проверить, что нечеткое пространство $(X, \mathcal{T})$ нормально тогда и только тогда, когда для каждой пары его q-дизъюнктных (I.5.I) замкнутых нечетких множеств A, B найдутся q-дизъюнктные нечеткие множества $U, V \in \mathcal{T}$ такие, что $A \le U$ и $B \le V$ (см.напр. [77]).

Как и в случае топологических пространств, свойство нормальности не сохраняется при произведениях; при этом, в отличие от ситуации в Top, нормальность произведения не гарантирует нормальности сомножителей. Свойство нормальности наследуется замкнутыми подпространствами. Замкнутый образ нормального нечеткого пространства является нормальным.

(2.2.2) Лемма Урысона-Хаттона [46], [47]. Нечеткое пространство (X, τ) нормально тогда и только тогда, когда для каждой пары его нечетких множеств $A \in \tau^c$ и $U \in \tau$ таких, что $A \leq U$, найдется непрерывное отображение $f: X \to \mathcal{F}(I)$, где $\mathcal{F}(I)$ - нечеткий отрезок (3.I.6), такое, что $A(x) \leq f(x)(1^-) \leq f(x)(0^+) \leq U(x)$ для всех $x \in X$.

(2.2.3) <u>Теорема Титце-Урысона-Кубиака [62].</u> Каждое непрерывное отображение $f: A \to \mathcal{F}(I)$, где A - замкнутое подпространство нормального нечеткого пространства X, имеет непрерывное продолжение $f: X \to \mathcal{F}(I)$.

(2.2.4) <u>Совершенно нормальные пространства [46].</u> Нормальное нечеткое пространство, каждое замкнутое нечеткое множество в котором является инфимумом счетного семейства открытых нечетких множеств, называется совершенно нормальным.

(2.2.5) <u>Теорема Веденисова-Хаттона [46].</u> Нечеткое пространство (X, τ) совершенно нормально тогда и только тогда, когда для каждой пары его нечетких множеств $A \in \tau^c$ и $U \in \tau$, $A \leq U$, найдется непрерывная функция $f: X \to \mathcal{F}(I)$ такая, что $A(x) = f(x)(1^-) \leq$
$\leq f(x)(0^+) = U(x)$ для всех $x \in X$.

(2.2.6) <u>Теорема Титце-Урысона-Кубиака [63].</u> Каждое непрерывное отображение $f: A \to \mathcal{F}(\mathbb{R})$, где A - замкнутое подпространство совершенно нормального пространства X, а $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ - нечеткая прямая (3.I.5), имеет непрерывное продолжение $f: X \to \mathcal{F}(\mathbb{R})$. (Неизвестно, можно ли ослабить требование совершенной нормальности до требования нормальности?).

Б. <u>Е-регулярность</u>

Напомним, что топологическое пространство X называется Е-регулярным, где Е - хаусдорфово топологическое пространство, если X - гомеоморфно подпространству в E^K для некоторого кардинала K [81]. В частности, свойства I-регулярности и $\mathbb{R}$-регулярности топологического пространства, очевидно, равносильны его полной регулярности.

В этом разделе мы рассмотрим нечеткий аналог Е-регулярности. Полагаем, что в нечеткой топологии свойству Е-регулярности следует отвести более важную роль, чем его частному случаю - свойству полной регулярности ($=\mathcal{F}(I)$-регулярности, см. (2.2.4)). Дело в том, что в нечеткой топологии наряду с нечетким отрезком $\mathcal{F}(I)$ имеется и ряд других "канонических" объектов: ламинированный нечеткий отрезок $\mathcal{F}^\lambda(I)$ (3.I.6), нечетко-вероятностный отрезок $\mathcal{M}(I)$ (3.3.2), интервальный отрезок $\mathcal{J}(I)$ [25] и др., не говоря уже о вариантах этих конструкций в категориях $CFT(L)$. Каждое из этих пространств в соответствующей ситуации становится "центральным" объектом, претендующим на роль "отрезка". Вторым существенным отличием ситуации в CFT от ситуации в Top является то, что, в то время как в общей топологии "как правило" встречаются хаусдорфовы пространства, в нечеткой топологии даже аксиома T_1 является весьма ограничительной: уже ей не удовлетворяют пространства $\mathcal{F}(I)$, $\mathcal{F}^\lambda(I)$, $\mathcal{M}(I)$ и $\mathcal{M}^\lambda(I)$ (см. (3.4.23), (3.4.24)). Поэтому нам представляется удобным для нечетких пространств разделить понятия Е-регулярности и Е-тихоновости.

Пусть (E,τ) - фиксированное нечеткое пространство, и (X,τ_X), (Y,τ_Y) - произвольные нечеткие пространства. Обозначим через $C(X,Y)$ совокупность всех непрерывных отображений из X в Y, и пусть $\hat{C}(X,E):=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C(X,E^n)$.

(2.2.7) <u>Определение</u>. Семейство функций $\Phi\subset C(X,Y)$ разделяет точки и замкнутые нечеткие множества пространства X, если для каждой точки $x\in X$, каждого замкнутого нечеткого множества $A\in I^X$ и каждого $\varepsilon>0$ найдется функция $f\in\Phi$ такая, что $A(x)\geq \overline{f(A)}(f(x))-\varepsilon$.

(2.2.8) <u>Замечание</u>. (I) Нетрудно заметить, что $\overline{f(A)}(f(x))\geq$ $\geq f(A)(f(x))\geq A(x)$ для каждой точки $x\in X$, каждого нечеткого множества A и произвольной функции $f: X\to Y$.

(2) Если X и Y – обычные топологические пространства, то семейство $\Phi\subset C(X,Y)$ разделяет точки и замкнутые множества пространства X в смысле предыдущего определения в том и только в том случае, когда оно разделяет точки и замкнутые множества пространства X в "обычном" смысле общей топологии.

(3) Одноэлементное семейство $\{f\}\subset C(X,Y)$ разделяет точки и замкнутые нечеткие множества пространства X в том и только в том случае, когда $A(x)=\overline{f(A)}(f(x))$ для каждого $x\in X$ и каждого замкнутого нечеткого множества A.

(4) Если одноэлементное семейство $\{f\}\subset C(X,Y)$ разделяет точки и замкнутые множества пространства X и при этом отображение f инъективно, то f является гомеоморфным вложением (ср. [26,с.135]).

(2.2.9) Определение. Нечеткое пространство X называется <u>Е-регулярным</u>, если семейство $\hat{C}(X,E)$ разделяет точки и замкнутые нечеткие множества пространства X.

(2.2.10) Определение. Нечеткое пространство X называется <u>Е-тихоновским</u>, если оно гомеоморфно подпространству произведения E^K для некоторого кардинала K.

Для того, чтобы установить связь между понятиями Е-регулярности и Е-тихоновости, нам потребуется следующее определение.

(2.2.11) Определение. Нечеткое пространство X называется <u>Е-хаусдорфовым</u>, если семейство $C(X,E)$ разделяет точки пространства X, т.е. если для любых точек $x,y\in X$ найдется функция $f\in C(X,E)$ такая, что $f(x)\neq f(y)$.

(2.2.12) Предложение. Если пространство X Е-хаусдорфово, то $H_K^\ell(X)\supset H_K^\ell(E)$, где $K,\ell\in\{0,1,2,3\}$.

(2.2.13) Предложение. Если точки и замкнутые нечеткие множества пространства X разделяются семейством $\Phi=\{f_s:s\in S\}\subset\hat{C}(X,E)$, то они разделяются и семейством $\{f\}$, где $f=\Delta\Phi:X\to E^K$ – диагональное отображение.

Доказательство. Пусть $A\in I^X$ – замкнутое нечеткое множество, $x\in X$ и $A(x)=a$; покажем, что $\overline{f(A)}(f(x))\leqslant a$.

Предположим обратное, т.е. что $\overline{f(A)}(f(x))>a+\varepsilon$ для некоторого $\varepsilon>0$, имеем $\pi_s\overline{f(A)}(f_s(x))=\sup\limits_{y\in\pi_s^{-1}(f_s(x))}\overline{f(A)}(y)\geqslant\overline{f(A)}(f(x))>a+\varepsilon$ для всех $s\in S$ ($\pi_s: E^K\to E^n$ обозначает проекцию, соответствующую отображению $f_s: X\to E^n$). С другой стороны, непрерывность проекции π_s позволяет заключить, что $\pi_s(\overline{f(A)})(f_s(x))\leqslant\overline{\pi_s f(A)}(f_s(x))=\overline{f_s(A)}(f_s(x))$, а следовательно, $\overline{f_s(A)}(f_s(x))>a+\varepsilon$ для всех $s\in S$, т.е. Φ не различает A и x. Полученное противоречие и завершает доказательство.

(2.2.14) Предложение. Если даигональное отображение $f:=\Delta\Phi$ семейства $\Phi\subset\hat{C}(X,E)$ разделяет точки и замкнутые нечеткие множества пространства X, то и семейство $\hat{\Phi}:=\{\bigwedge\limits_{i=1}^{n}f_i: f_i\in\Phi, n\in\mathbb{N}\}$ разделяет точки и замкнутые нечеткие множества пространства X.

Доказательство. Ясно, что $\overline{f(A)}=\wedge\{\pi_\sigma^{-1}(\overline{f_\sigma(A)}): f_\sigma\in\hat{\Phi}\}=\wedge\{\pi_\sigma^{-1}(\overline{f_\sigma(A)}): f_\sigma\in\hat{\Phi}\}$ для каждого $A\in I^X$. Отсюда, учитывая замечание (2.2.8)(3), заключаем, что для каждого $\varepsilon>0$ найдется $f_\sigma\in\Phi$ такое, что $\overline{f_\sigma(A)}(f_\sigma(x))-\varepsilon=\pi_\sigma^{-1}(\overline{f_\sigma(A)})(f(x))-\varepsilon\leqslant A(x)$.

(2.2.15) Предложение. Если семейство $\{f\}\subset C(X,Y)$ разделяет точки и замкнутые нечеткие множества пространства X и $f(X)=Y$, то f – замкнутое отображение.

Доказательство. Пусть A – замкнутое нечеткое подмножество в X, $y\in Y$ и $y=f(x)$. Воспользовавшись замечанием (2.2.8)(3) и очевидным неравенством $A(x)\leqslant\overline{f(A)}(y)$, заключаем, что $\overline{f(A)}=f(A)$.

(2.2.16) Теорема. Если семейство $\Phi\subset\hat{C}(X,E)$ разделяет точки и замкнутые нечеткие множества пространства X, то диагональное отображение $\Delta\Phi: X\to E$ является гомеоморфным вложением.

Доказательство. Поскольку семейство Φ разделяет точки, диагональное отображение $\Delta\Phi$ инъективно. С другой стороны, будучи диагональю семейства непрерывных отображений, $\Delta\mathcal{F}$ является непрерывным. Для завершения доказательства остается заметить, что согласно (2.2.15) $\Delta\mathcal{F}$ является замкнутым как отображение пространства X на подпространство $\Delta\mathcal{F}(X)$ произведения E^K.

(2.2.17) <u>Теорема</u>. Нечеткое пространство X является Е-тихоновским тогда и только тогда, когда оно Е-регулярно и Е-хаусдорфово.

<u>Доказательство</u>. Из теоремы (2.2.16) немедленно следует, что каждое Е-регулярное Е-хаусдорфово пространство является Е-тихоновским. Предположим теперь, что нечеткое пространство X является Е-тихоновским. Ясно, что в этом случае X Е-хаусдорфово. Для доказательства Е-регулярности рассмотрим гомеоморфное вложение $f: X \to E^K := \prod\{E_s : s\in S\}$, где $E = E_s$ для всех $s \in S$, $|S| = K$. Пусть $f_s := \pi_s \circ f$. Рассмотрим семейство $\mathcal{F} := \{f_s : s \in S\} \subset C(X, E)$ и положим $\hat{\mathcal{F}} := \{\Delta_{i=1}^{n} f_{s_i} : X \to E^n (:= E_{s_1} \times \ldots \times E_{s_n}) : f_{s_i} \in \mathcal{F},\ n \in \mathbb{N}\}$. Покажем, что $\hat{\mathcal{F}}$ разделяет точки и замкнутые нечеткие множества пространства X.

Пусть Σ – семейство всех конечных подмножеств множества S и для каждого $\sigma \in \Sigma$ $\pi_\sigma : E^K \to E_\sigma := \prod\{E_s : s \in \sigma\}$ обозначает соответствующую проекцию. Предположим, что $\hat{\mathcal{F}}$ не разделяет точки и замкнутые нечеткие множества в X, а точка $x \in X$, замкнутое нечеткое множество $A \in I^X$ и $\varepsilon > 0$ выбраны таким образом, что $\overline{f_\sigma(A)}(f_\sigma(x)) > A(x) + \varepsilon$ для каждого $f_\sigma := \Delta_{s\in\sigma} f_s : X \to E_\sigma$, $\sigma \in \Sigma$. Поскольку, очевидно, $f_\sigma = \pi_\sigma \circ f$, из определения нечеткой топологии произведения легко следует, что $\overline{f(A)} = \wedge\{\pi_\sigma^{-1}(\overline{f_\sigma(A)}) : \sigma \in \Sigma\}$, следовательно, $f(A)(f(x)) = \bigwedge_\sigma (\overline{f_\sigma(A)})(f_\sigma(x)) \geq A(x) + \varepsilon > A(x)$. С другой стороны, согласно (2.2.15), $f(A)(f(x)) = \overline{f(A)}(f(x))$, следовательно, $f(A)(f(x)) > A(x)$. Это противоречит, однако, инъективности отображения f.

Поскольку Е-регулярное W_0-пространство является, как нетрудно заметить, Е-хаусдорфовым, из предыдущей теоремы вытекает

(2.2.18) <u>Следствие</u>. Е-регулярное W_0-пространство является

Е-тихоновским. Если Е – W_0-пространство, то нечеткое пространство X является Е-тихоновским тогда и только тогда, когда X – Е-регулярное W_0-пространство.

(2.2.19) <u>Теорема</u>. Пусть (X, τ_X) – нечеткое пространство и σ_X – некоторая его предбаза. Тогда, если семейство $\mathcal{F} \subset \hat{C}(X,E)$ разделяет точки и нечеткие множества, принадлежащие $\sigma_X^c := \{U^c : U \in \sigma_X\}$, то семейство $\hat{\mathcal{F}} = \{\overset{n}{\underset{i=1}{\Delta}} f_i : f_i \in \mathcal{F}, n \in \mathbb{N}\}$ разделяет точки и замкнутые нечеткие множества пространства X.

<u>Доказательство</u>. Прежде всего заметим, если семейство $\mathcal{F}$ разделяет точку x и нечеткие множества C_1 и C_2, то семейство $\mathcal{F}^2 := \{f_1 \Delta f_2 : f_1, f_2 \in \mathcal{F}\}$ разделяет точку x и нечеткое множество $C_1 \vee C_2$. Действительно, выбрав по заданному $\varepsilon > 0$ функции $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$ так, чтобы $C_i(x) \geqslant \overline{f_i(C_i)}(f_i(x)) - \varepsilon$, $i = 1,2$, имеем, что и $C_i(x) \geqslant \overline{f(C_i)}(f(x)) - \varepsilon$, $i = 1,2$, где $f = f_1 \Delta f_2$. Но тогда и $C(x) \geqslant \overline{f(C)}(f(x)) - \varepsilon$, $i = 1,2$, где $C = C_1 \vee C_2$. Воспользовавшись индукцией, отсюда легко заключаем, что семейство $\hat{\mathcal{F}} \subset \hat{C}(X,E)$ разделяет точки и нечеткие множества, принадлежащие $\hat{\sigma}_X^c = \{\overset{n}{\underset{i=1}{\bigvee}} U_i^c : U_i \in \sigma_X, n \in \mathbb{N}\}$. Заметим, что $\hat{\sigma}_X^c = \beta_X^c$, где $\beta_X = \{U_1 \wedge \ldots \wedge U_n : U_i \in \sigma_X, n \in \mathbb{N}\}$. Поскольку β_X является базой нечеткой топологии τ_X, то для каждого $A \in \tau_X^c$ найдется семейство $\{B_s : s \in S\} \subset \beta_X^c$ такое, что $A = \bigwedge_s B_s$. Зафиксировав $x \in X$ и $\varepsilon > 0$, найдем B_s такое, что $B_s(x) < A(x) + \varepsilon$, а затем согласно установленному выше выберем $f \in \mathcal{F}$ так, чтобы $B_s(x) \geqslant \overline{f(B_s)}(f(x)) - \varepsilon$. Для завершения доказательства осталось заметить, что $A(x) + \varepsilon > B_s(x) \geqslant$ $\geqslant \overline{f(B_s)}(f(x)) - \varepsilon \geqslant \overline{f(A)}(f(x)) - \varepsilon$.

Для характеризации свойства Е-регулярности посредством расходящихся нечетких направленностей полезно ввести следующее

(2.2.20) <u>Определение</u>. Нечеткая точка p в нечетком пространстве X называется <u>собственно предельной</u>, или <u>с-предельной</u> для нечеткой направленности $\mathcal{S}$, если $p \,\bar{\notin}\, Con(\mathcal{S})$ и $p \,\tilde{\in}\, Clus(\mathcal{S})$.

(2.2.21) <u>Теорема</u>. Нечеткое пространство X E-регулярно тогда и только тогда, когда для каждой с-предельной нечеткой точки p нечеткой направленности $\mathcal{P}$ найдется отображение $f \in C(X,E)$ такое, что $f(p)$ с-предельна для нечеткой направленности $f(\mathcal{P})$.

(2.2.22) <u>Лемма</u>. Отображение $f \in C(X,E)$ разделяет точки и замкнутые нечеткие множества тогда и только тогда, когда для каждой с-предельной точки p нечеткой направленности $\mathcal{P}$ нечеткая точка $f(p)$ является с-предельной для нечеткой направленности $f(\mathcal{P})$.

<u>Доказательство.</u> Предположим, что f не разделяет замкнутое нечеткое множество A и точку x. Тогда $A(x)+\varepsilon < \overline{f(A)}(f(x))$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Пусть $y = f(x)$ и $b = A(x)+\varepsilon$; тогда, очевидно, $y^b \in \overline{f(A)}$ и, следовательно (I.6.3), найдется нечеткая направленность $(y_\gamma^{t_\gamma})_{\gamma\in\Gamma} \subset f(A)$, сходящаяся к y^b. При этом можно считать, что $f(A)(y_\gamma) > t_\gamma$. Но тогда и $A(x_\gamma) > t_\gamma$ для некоторого $x_\gamma \in f^{-1}(y_\gamma)$.

Наделим множество $\Delta := \Gamma \times 2$ лексикографическим порядком. Очевидно, что подмножества $\Gamma\times\{0\}$ и $\Gamma\times\{1\}$ изоморфны Γ и конфинальны в Δ. Положим $x_{(\gamma,0)}^{t(\gamma,0)} := x_\gamma^{t_\gamma}$, $x_{(\gamma,1)}^{t(\gamma,1)} := x^b$. Тогда, как нетрудно заметить, x^b является с-предельной для построенной таким образом нечеткой направленности $(x_\delta^{t\delta})_{\delta\in\Delta}$.

Обратно, предположим, что f разделяет точки и замкнутые нечеткие множества в X и пусть p – с-предельная нечеткая точка для нечеткой направленности $\mathcal{P}$. Выбрав q-окрестность $\mathcal{U}$ нечеткой точки p, с которой $\mathcal{P}$ не q-конфинальна, положим $A := \mathcal{U}^c$. Тогда, согласно (2.2.10), $A(x) = \overline{f(A)}(f(x))$ для каждого $x \in X$, а следовательно, $\overline{f(A)}^c$ есть q-окрестность нечеткой точки $f(p)$, с которой $f(\mathcal{P})$ не q-финальна. С другой стороны, из непрерывности f следует, что $f(\mathcal{P})$ q-конфинальна с каждой q-окрестностью нечеткой точки $f(p)$, а значит, $f(p)$ с-предельна для $f(\mathcal{P})$.

Переходим к доказательству теоремы. Предположим, что X не E-регулярно. Тогда, согласно (2.2.15), диагональное отображение

$\varphi := \Delta \hat{C}(X,E) : X \to E^K = \Pi\{E_s : s \in S\}$, где $E_s = E$ для всех $s \in S$ и $|S| = K$, не разделяет точки и замкнутые нечеткие множества в X. Применяя (2.2.23), найдем нечеткую направленность $\mathcal{P}$ в X, имеющую с-предельную точку p такую, что $f(p)$ не является с-предельной для $f(\mathcal{P})$. Поскольку φ непрерывно, это означает, что $\varphi(\mathcal{P})$ сходится к $\varphi(p)$. Следовательно, для каждого $s \in S$ нечеткая направленность $f_s(\mathcal{P})$ сходится к нечеткой точке $f_s(p)$, где $f_s = \pi_s \circ \varphi$. Для завершения доказательства первого утверждения осталось заметить, что каждая $f \in C(X,E)$ имеет вид f_s для некоторого $s \in S$.

Обратно, пусть X Е-регулярно и $\mathcal{P}$ – нечеткая направленность, имеющая с-предельную точку p. Положив $\varphi := \Delta \hat{C}(X,E) : X \to E^K = \{E_s : s \in S\}$ и применяя (2.2.I5) и (2.2.23), заключаем, что $\varphi(p)$ является с-предельной для нечеткой направленности $\varphi(\mathcal{P})$ в E^K. Выберем q-окрестность V нечеткой точки $\varphi(p)$ в E^K, с которой $\varphi(\mathcal{P})$ не q-финальна; при этом без ограничения общности можем считать, что $V = \pi_{s_1}^{-1}(U_{s_1}) \wedge \ldots \wedge \pi_{s_n}^{-1}(U_{s_n})$ для некоторых $s_1, \ldots, s_n$ и некоторых открытых нечетких множеств $U_{s_1}, \ldots, U_{s_n}$ в $E_{s_1}, \ldots, E_{s_n}$ соответственно. Но тогда для некоторого i нечеткая направленность $f(\mathcal{P})$ не q-финальна с $\pi_{s_i}^{-1}(U_{s_i})$, а следовательно, как нетрудно заметить, нечеткая направленность $f_{s_i}(\mathcal{P}) = \pi_{s_i}(\varphi\mathcal{P})$ не q-финальна с U_{s_i}. Поскольку U_{s_i} является q-окрестностью нечеткой точки $f_{s_i}(p)$, отсюда и следует, что $f_{s_i}(p)$ с-предельна для $f_{s_i}(\mathcal{P})$.

(2.2.23) <u>Теорема</u>. (I) Произведение Е-регулярных (Е-тихоновских) нечетких пространств Е-регулярно (соотв. Е-тихоновское).

(2) Прямая сумма Е-регулярных (Е-тихоновских) нечетких пространств Е-регулярна (соотв. Е-тихоновская).

(3) Подпространство Е-регулярного (Е-тихоновского) нечеткого пространства Е-регулярно (соотв. Е-тихоновское).

<u>Доказательство</u>. Утверждения (2) и (3) очевидны. В справедли-

вости утверждения (I) легко убедиться с помощью теоремы (2.2.21) или же непосредственно.

B. Вполне регулярные нечеткие пространства

В этом разделе мы охарактеризуем свойство полной регулярности нечеткого пространства, широко используемое в нечеткой топологии, с помощью понятия E-регулярности. Полная регулярность для нечетких пространств была определена Хаттоном [47] и (независимо) Катсарасом [54]. Хотя определения, данные в [47] и в [54], отличаются по форме, нетрудно показать, что они эквивалентны. Приведем это определение в форме Катсараса:

(2.2.24) Определение [54]. Нечеткое пространство (X, τ_X) называется вполне регулярным, если для каждого $U \in \tau_X$ и каждого $x \in X$ такого, что $U(x) > a$ для некоторого $a \in I$, существует функция $f: X \to \mathcal{F}(I)$ такая, что $f(x)(1^-) > a$ и $f(x)(0^+) \leqslant U(x')$ для всех $x' \in X$.

(2.2.25) Теорема. Нечеткое пространство X вполне регулярно тогда и только тогда, когда оно $\mathcal{F}(I)$-регулярно.

Доказательство. Пусть X – вполне регулярное нечеткое пространство, A – его нечеткое замкнутое подмножество и $x \in X$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и положим $U := A^c$ и $A(x) =: t$. Тогда, очевидно, $U(x) > t^c - \varepsilon$, и, значит, найдется $f \in C(X, \mathcal{F}(I))$ такая, что $f(x)(1^-) > t^c - \varepsilon$ и $f(x')(0^+) \leqslant U(x')$ для всех $x' \in X$.

Пусть $r_0, l_1 \in I^{\mathcal{F}(I)}$ – элементы стандартной предбазы нечеткой топологии на $\mathcal{F}(I)$. Из второго неравенства предыдущего абзаца легко следует, что $f(A) \leqslant 1 - r_0$ и $\overline{f(A)}(f(x)) \leqslant (1 - r_0)(f(x)) \leqslant l_1(f(x)) = 1 - f(x)(1^-) < t + \varepsilon = A(x) + \varepsilon$. Однако это и означает, что X $\mathcal{F}(I)$-регулярно.

Обратно, предположим, что X $\mathcal{F}(I)$-регулярно, и рассмотрим открытое нечеткое множество $U \in I^X$ и точку $x \in X$. Зафиксировав $a < U(x)$, положим $\varepsilon := \mathcal{U}(x) - a$, $A := \mathcal{U}^c$. Поскольку пространство X $\mathcal{F}(I)$-регулярно, найдется функция $f : X \to \mathcal{F}(I)$ такая, что $\overline{f(A)}(f(x)) < A(x) + \varepsilon$, а следовательно, для $y = f(x)$ и $\mathcal{V} := 1 - \overline{f(A)}$ имеет место неравенство $\mathcal{V}(y) = 1 - \overline{f(A)}(y) > 1 - A(x) - \varepsilon = a$.

Известно, что пространство $\mathcal{F}(I)$ вполне регулярно ([54], теорема 4.6), а следовательно, из $\mathcal{V}(y) > a$ легко вытекает, что найдется функция $g : \mathcal{F}(I) \to \mathcal{F}(I)$, удовлетворяющая неравенствам $g(y)(1^-) > a$ и $g(y')(0^+) \leq \mathcal{V}(y')$ для всех $y' \in \mathcal{F}(I)$. Для завершения доказательства остается заметить, что композиция $\varphi := g \circ f : X \to \mathcal{F}(I)$ удовлетворяет необходимым требованиям, а именно: $\varphi(x)(1^-) = g(f(x))(1^-) = g(y)(1^-) > a$ и $\varphi(x')(0^+) = g(f(x'))(0^+) \leq \mathcal{V}(f(x')) = 1 - \overline{f(A)}(f(x')) \leq 1 - f(A)(f(x')) \leq \mathcal{U}(x')$ для каждого $x' \in X$.

(2.2.26) <u>Следствие</u>. Нечеткое пространство является $\mathcal{F}(I)$-тихоновским тогда и только тогда, когда оно вполне регулярно и $\mathcal{F}(I)$-хаусдорфово.

(2.2.26) <u>Следствие</u>. Нечеткое пространство является $\mathcal{F}(I)$-тихоновским тогда и только тогда, когда оно вполне регулярное W_0-пространство.

(2.2.27) <u>Теорема</u>. Ламинированное нечеткое пространство X вполне регулярно тогда и только тогда, когда оно $\mathcal{F}^\lambda(I)$-регулярно.

<u>Доказательство</u> этой теоремы вполне аналогично доказательству (2.2.25). Единственное отличие состоит в том, что вместо теоремы 4.6 из [54] приходится воспользоваться следующим утверждением:

(2.2.28) <u>Лемма</u>. Для каждого открытого нечеткого множества $\mathcal{U}$ нечеткого пространства $\mathcal{F}^\lambda(I)$ и для каждого $x \in \mathcal{F}^\lambda(I)$ имеет место следующее условие:

(*) если $\mathcal{U}(x) > a$ для некоторого $a \in I$, то найдется функция $f \in C(\mathcal{F}^\lambda(I), \mathcal{F}^\lambda(I))$ такая, что $f(x)(1^-) > a$ и $f(x')(0^+) \leq \mathcal{U}(x')$ для всех $x' \in X$.

<u>Доказательство</u>. Достаточно найти предбазу σ нечеткой тополо-

гии пространства $\mathcal{F}^{\lambda}(I)(:=X)$ такую, что для каждого $x\in X$ и каждого $U\in\sigma$, удовлетворяющих неравенству $U(x)>a$, найдется функция $f:X\to\mathcal{F}^{\lambda}(I)$ такая, что $f(x)(1^-)>a$ и $f(x')(0^+)\leqslant U(x')$ для всех $x'\in X$.

Пусть $\sigma=\{l_a, r_b, c: a,b\in I, c\in I\}$ – стандартная предбаза пространства $\mathcal{F}^{\lambda}(I)$. Поскольку случаи $U=l_a$ и $U=r_b$ фактически уже установлены в доказательстве [54, теорема 4.6], нам достаточно рассмотреть здесь случай $U=c$.

Определим отображение $f_c: X\to\mathcal{F}^{\lambda}(I)$ равенством $f_c(x)=[\xi_c]$ для каждого $x\in X$, где $\xi_c(t)=c$ при $0<t\leqslant 1$, $\xi_c(t)=1$ при $t\leqslant 0$ и $\xi_c(t)=0$ при $t>1$. Отображение f_c непрерывно, поскольку пространство $\mathcal{F}^{\lambda}(I)$ ламинировано. Для завершения доказательства остается заметить, что $f_c(x)(0^+)=f_c(x)(1^-)=c$, а следовательно, если $U(x)=$ $=c>a$, то $f_c(x)(1^-)>a$, что и завершает доказательство.

Г. <u>Случай, когда Е – топологическое пространство</u>

(2.2.29) <u>Предложение</u>. Если Е – топологическое пространство и нечеткое пространство X Е-регулярно, то X также является топологическим пространством.

<u>Доказательство</u>. Достаточно проверить, что $\tau_X^c\subset 2^X$. Предположим, найдется замкнутое нечеткое множество A такое, что $0<A(x)<1$ для некоторой точки $x\in X$, и пусть функция $f\in C(X,E)$ удовлетворяет неравенству $\overline{f(A)}(f(x))<A(x)+\varepsilon<1$ для некоторого $\varepsilon>0$. Поскольку множество $\overline{f(A)}$ является четким, последнее неравенство означает, что $\overline{f(A)}(f(x))=0$, следовательно, и $f(A)(f(x))=0$. Последнее, однако, невозможно, поскольку $f(A)(f(x))\geqslant A(x)>0$.

Из этого предложения и теоремы (2.2.17) легко следует, что в случае, когда Е – хаусдорфово топологическое пространство, введенное нами понятие Е-регулярного (=Е-тихоновского) пространства эквивалентно понятию E-(вполне) регулярного топологического пространства, рассматриваемому в работах Мрувки [81], Херрлиха [37] и др.

(2.2.30) <u>Теорема</u>. Пусть E - топологическое пространство. Тогда топологическое пространство X E-регулярно в том и только в том случае, когда нечеткое пространство λX λE-регулярно.

<u>Доказательство</u>. Пусть $\overline{B}$ обозначает замыкание нечеткого множества $B \in I^E$ в топологическом пространстве E, а $\widetilde{B}$ - замыкание нечеткого множества $B \in I^E$ в нечетком пространстве λE.

Предположим, что пространство λX E-регулярно, и пусть $A \in \mathcal{T}_X^c$. Тогда для каждого $x \notin A$ и каждого $\varepsilon > 0$ найдется функция $f \in C(\lambda X, \lambda X)$ такая, что $A(x) \geq \widetilde{f(A)}(f(x)) - \varepsilon$. Поскольку $f(A)$, будучи образом четкого множества, само является четким, нетрудно заметить, что $\widetilde{f(A)} = \overline{f(A)}$. Из последнего неравенства легко следует теперь, что $f(x) \notin \overline{f(A)}$, но это и означает E-регулярность пространства X.

Обратно, пусть X E-регулярно, $A \in (\lambda \mathcal{T}_X)^c$ и $x \in X$. Зафиксировав $\varepsilon > 0$, выберем функцию $f \in C(\lambda X, \lambda E)$ такую, что $A(x) \geq \widetilde{f(A)}(f(x)) - \varepsilon$. Поскольку случай $A(x) = 1$ очевиден, можем предположить, что $A(x) + \varepsilon =: a < 1$. Заметив, что A является полунепрерывным снизу как отображение $A : (X, \mathcal{T}_X) \to I$, заключаем, что множество $M := A^{-1}[a, 1]$ замкнуто в пространстве X; при этом $x \notin M$. Поэтому существует функция $f \in C(X, E)$ такая, что $f(x) \notin \overline{f(M)}$. Нетрудно заметить, что $f(A) \leq f(M) \vee a$, следовательно (поскольку $f(M) \in 2^E$ и λE ламинировано), $\widetilde{f(A)} \leq \widetilde{f(M) \vee a} = \overline{f(M)} \vee a$, и значит, $\widetilde{f(A)}(f(x)) \leq \overline{f(M)}(f(x)) \vee a = a \leq A(x) + \varepsilon$.

Нетрудно заметить, что топологическое пространство является E-хаусдорфовым тогда и только тогда, когда оно λ E-хаусдорфово. Учитывая это, из (2.2.17), (2.2.30) легко выводится

(2.2.31) <u>Следствие</u>. Пусть E - топологическое пространство. Тогда топологическое пространство X является E-тихоновским в том и только в том случае, когда нечеткое пространство λX является λ E-тихоновским.

§ 3. КОМПАКТНОСТЬ

А. Спектральная теория компактности: основные факты

Пусть (X, τ) - нечеткое пространство, $M \in I^X$, $\kappa \in \{0,1,2\}$ и $\ell \in \{0,1,2,3\}$ (см. (2.0.1)).

(2.3.1) Определение. (κ,ℓ)-спектром компактности нечеткого множества M называется множество $\mathscr{C}_\kappa^\ell(M)$, образованное всеми парами $(\beta,\gamma) \in I^2$ такими, что для каждого удовлетворяющего неравенству $M \tilde{\leq} \vee\mathcal{U} \geq_\kappa \beta$ семейства $\mathcal{U} \subset \tau$ (и для каждого $\varepsilon > 0$) найдется конечное подсемейство $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$ такое, что $M \tilde{\leq} \mathcal{U}_0 \geq_\ell \beta$.

Если необходимо указать пространство X, в котором расположено нечеткое множество M, его (κ,ℓ)-спектр компактности будем обозначать $\mathscr{C}_\kappa^\ell(M,X)$. В случае $M=1$ будем писать просто $\mathscr{C}_\kappa^\ell(X)$ и говорить о (κ,ℓ)-спектре компактности нечеткого пространства X.

Замечание. Связь между (κ,ℓ)-спектрами компактности данного нечеткого множества при различных (κ,ℓ) значительно слабее, чем связь между (κ,ℓ)-спектрами отделимости (см., например, 2.1.3). Например, существует нечеткое пространство X такое, что $\mathscr{C}_0^0(X)=\emptyset$, но $\mathscr{C}_2^3(X)=\{(\beta,\gamma):\beta\leq\gamma\}$; с другой стороны, для каждого $\beta\in[0,1)$ существует нечеткое пространство X такое, что $(\beta,\beta)\in\mathscr{C}_0^0(X)$, но $(\beta,\beta)\notin\mathscr{C}_2^3(X)$.

Отметим также, что поведение (κ,ℓ)-спектров компактности при тех или иных операциях для различных (κ,ℓ) имеет принципиальные различия. Основное внимание мы уделим здесь спектру $\mathscr{C}_2^3(M)$, который, во-первых, отражает самые существенные, по нашему мнению, характеристики типа компактности, а во-вторых, обладает наиболее "правильными" свойствами.

Ясно, что каждый (κ,ℓ)-спектр компактности содержится во множестве $\{(x,y): y \leqslant x, 0 \leqslant x, y \leqslant 1\}$. Таким образом, вопрос о принадлежности пары (β, γ) спектру компактности имеет нетривиальный смысл лишь при $\gamma \leqslant \beta$. При этом именно для $\gamma = \beta$ наиболее отчетливо проявляются особенности спектральной теории компактности. С другой стороны, при таком ограничении изложение спектральной теории оказывается наиболее простым, но при этом достаточно репрезентативным. Поэтому мы считаем оправданным ввести понятие линейного спектра компактности и в дальнейшем (за редкими исключениями) развивать спектральную теорию именно для линейных спектров компактности.

(2.3.2) <u>Определение (основное)</u>. [<u>Линейным</u>] <u>(K, ℓ)-спектром компактности</u> нечеткого множества M называем множество
$C^\ell_K(M) := \{\beta \in I : \forall\, \mathcal{U} \subset \tau\ (M \tilde{\subset} \bigvee \mathcal{U} \underset{K}{\geqslant} \beta \Rightarrow \exists\, \mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}, |\mathcal{U}_0| < \aleph_0, M \tilde{\subset} \bigvee \mathcal{U}_0 \underset{\ell}{\geqslant} \beta)\}$.
Линейный (2,3)-спектр компактности будем называть просто [<u>линейным</u>] <u>спектром компактности</u> и обозначать $C(M)$. Ясно, что
$C(M) = \{\beta \in I : \forall\, \mathcal{U} \subset \tau, \forall\, \varepsilon > 0\ (M \tilde{\subset} \bigvee \mathcal{U} \geqslant \beta \Rightarrow \exists\, \mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}, |\mathcal{U}_0| < \aleph_0, M \tilde{\subset} \bigvee \mathcal{U}_0 \geqslant \beta - \varepsilon)\}$.
Эквивалентно, $C(M) = \{\beta \in I : \forall\, \mathcal{U} \subset \tau\ (M \tilde{\subset} \bigvee \mathcal{U} \geqslant \beta \Rightarrow \sup_{\mathcal{U}_0} M \tilde{\subset} \bigvee \mathcal{U}_0 \geqslant \beta)\}$.
(Запись $\sup_{\mathcal{U}_0}$ здесь и в дальнейшем означает, что супремум берется по всевозможным конечным подсемействам $\mathcal{U}_0$ семейства $\mathcal{U}$.)

Число $c(M) = \inf(I \setminus C(M))$ называется <u>степенью компактности</u> нечеткого множества M. (Здесь и в дальнейшем $\inf \emptyset = 1$). Нечеткое множество M называется компактным, если $c(M) = 1$.

Легко убедиться в справедливости следующего предложения:

(2.3.3) <u>Предложение</u>. (a) $0 \in C(M)$ для каждого $M \in I^X$.
(b) Если $\beta \notin C(M)$, то найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $(\beta - \varepsilon, \beta] \cap C(M) = \emptyset$.
В частности, отсюда следует, что $c(M) \in C(M)$.

(2.3.4) <u>Лемма</u>. Пусть $\mathcal{B}$ является базой для нечеткой топологии τ. Тогда $\beta \in C(M)$ в том и только в том случае, когда для каждого $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$ из неравенства $M \tilde{\subset} \bigvee \mathcal{U} \geqslant \beta$ следует $\sup_{\mathcal{U}_0} M \tilde{\subset} \bigvee \mathcal{U}_0 \geqslant \beta$.

Доказательство. Необходимость условия очевидна. Обратно, пусть для каждого $\mathcal{U}\subset\mathcal{B}$ из $M\tilde{\in}V\mathcal{U}\geqslant\beta$ следует $\sup\limits_{\mathcal{U}_0} M\tilde{\in}V\mathcal{U}_0\geqslant\beta$ и пусть $\mathcal{U}\subset\mathcal{T}$ удовлетворяет условию $M\tilde{\in}V\mathcal{U}\geqslant\beta$. Согласно определению базы для каждого $u\in\mathcal{U}$ найдется $\mathcal{V}_u\subset\mathcal{B}$ такое, что $u=V\mathcal{V}_u$. Положим $\mathcal{V}=\cup\{\mathcal{V}_u : u\in\mathcal{U}\}$. Ясно, что $V\mathcal{V}=V\mathcal{U}$ и, следовательно, $M\tilde{\in}V\mathcal{V}\geqslant\beta$. Тогда для каждого $\varepsilon>0$ найдется конечное $\mathcal{V}_0\subset\mathcal{V}$ такое, что $M\tilde{\in}V\mathcal{V}_0\geqslant\beta-\varepsilon$. Пусть $\mathcal{V}_0=\{v_1,\dots,v_n\}$ и $\mathcal{U}_0=\{u_1,\dots,u_n\}\subset\mathcal{U}$ таково, что $v_n\leqslant u_n$. Тогда, очевидно, $M\tilde{\in}V\mathcal{U}_0\geqslant M\tilde{\in}V\mathcal{V}_0$ и, следовательно $\sup\limits_{\mathcal{U}_0} M\tilde{\in}V\mathcal{U}_0\geqslant\beta$, что и завершает доказательство.

Следующее утверждение можно рассматривать как нечеткий аналог леммы Александера о предбазе:

(2.3.5) Лемма. Пусть $\mathcal{S}$ - предбаза для нечеткой топологии $\mathcal{T}$. Тогда $\beta\in C(M)$ в том и только в том случае, когда для каждого $\mathcal{U}\subset\mathcal{S}$ из $M\tilde{\in}V\mathcal{U}\geqslant\beta$ следует $\sup\limits_{\mathcal{U}_0} M\tilde{\in}V\mathcal{U}_0\geqslant\beta$.

Доказательство. Необходимость условия очевидна. Покажем его достаточность. Предположим, что для каждого $\mathcal{U}\subset\mathcal{S}$ из $M\tilde{\in}V\mathcal{U}\geqslant\beta$ следует $\sup M\tilde{\in}V\mathcal{U}_0\geqslant\beta$, но при этом $\beta\notin C(M)$. Тогда найдутся $\varepsilon>0$ и $\mathcal{U}\subset\mathcal{T}$ такие, что $M\tilde{\in}V\mathcal{U}\geqslant\beta$, но $M\tilde{\in}V\mathcal{U}_0<\beta-\varepsilon$ для каждого конечного $\mathcal{U}_0$. Рассмотрим семейство $\mathcal{F}=\{\mathcal{V}: \mathcal{U}\subset\mathcal{V}\subset\mathcal{T}, M\tilde{\in}V\mathcal{V}_0<\beta-\varepsilon$ $\forall\mathcal{V}_0\subset\mathcal{V}, |\mathcal{V}_0|<\aleph_0\}$. Ясно, что $\mathcal{F}$, будучи упорядочено отношением $\subset$, удовлетворяет условию леммы Цорна. Поэтому в $\mathcal{F}$ существует максимальный элемент $\mathcal{D}$. Покажем, что $M\tilde{\in}V\mathcal{D}<\beta$; отсюда будет следовать, что $M\tilde{\in}V\mathcal{U}<\beta$, и тем самым будет получено желаемое противоречие.

Положим $\Delta=\mathcal{D}\cap\mathcal{S}$. Поскольку $\Delta\subset\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}\in\mathcal{F}$, то $M\tilde{\in}V\Delta_0<\beta-\varepsilon$ для каждого конечного $\Delta_0\subset\Delta$. С другой стороны, $\Delta\subset\mathcal{S}$ и поэтому $M\tilde{\in}V\Delta<\beta$.

Покажем, что семейство нечетких множеств $\mathcal{T}\setminus\mathcal{D}$ является фильтром по отношению $\leqslant$. В самом деле, пусть $A\in\mathcal{T}\setminus\mathcal{D}$ и $A\leqslant B$.

Ввиду максимальности $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}\cup\{A\}\notin\mathfrak{F}$, а следовательно $M\widetilde{\subset}(\vee\mathfrak{D}_0\vee A)\geqslant\beta-\varepsilon$ для некоторого конечного $\mathfrak{D}_0\subset\mathfrak{D}$. Тогда тем более $M\widetilde{\subset}(\vee\mathfrak{D}_0\vee B)\geqslant\beta-\varepsilon$, т.е. $B\in\mathcal{T}\setminus\mathfrak{D}$. Далее, пусть $A,B\in\mathcal{T}\setminus\mathfrak{D}$. Тогда найдутся конечные подсемейства $\mathfrak{D}_0^1,\mathfrak{D}_0^2\subset\mathfrak{D}$ такие, что $M\widetilde{\subset}(\vee\mathfrak{D}_0^1\vee A)\geqslant\beta-\varepsilon$ и $M\widetilde{\subset}(\vee\mathfrak{D}_0^2\vee B)\geqslant\beta-\varepsilon$. Как легко видеть, $M\widetilde{\subset}(\vee\mathfrak{D}_0\vee(A\wedge B))\geqslant\beta-\varepsilon$, где $\mathfrak{D}_0=\mathfrak{D}_0^1\cup\mathfrak{D}_0^2$, а следовательно, $A\wedge B\in\mathcal{T}\setminus\mathfrak{D}$. Итак, $\mathcal{T}\setminus\mathfrak{D}$ является фильтром по отношению $\leqslant$. Отсюда с помощью обычных рассуждений легко установить, что если $D\in\mathfrak{D}$, $A_1,\ldots,A_n\in\mathcal{S}$ и $A_1\wedge\ldots\wedge A_n\leqslant D$, то $A_k\in\mathfrak{D}$ для некоторого $k\in\{1,\ldots,n\}$.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству неравенства $M\widetilde{\subset}\vee\mathfrak{D}<\beta$. Пусть $D\in\mathfrak{D}$; поскольку $D\in\mathcal{T}$ и $\mathcal{S}$ – предбаза, то найдутся $U_{j1},\ldots,U_{jn_j}\in\mathcal{S}$, $j\in\mathcal{J}$, такие, что $D=\bigvee_{j\in\mathcal{J}}(U_{j1}\wedge\ldots\wedge U_{jn_j})$. Поскольку $U_{j1}\wedge\ldots\wedge U_{jn_j}\leqslant D$, то для каждого $j\in\mathcal{J}$ найдется номер k_j такой, что $U_{jk_j}\in\mathfrak{D}$. Отсюда следует, что $D\leqslant\bigvee_j U_{jk_j}$, а значит, $\vee\mathfrak{D}\leqslant\vee\Delta$. Обратное неравенство очевидно, следовательно $\vee\mathfrak{D}=\vee\Delta$, откуда $M\widetilde{\subset}\vee\mathfrak{D}=M\widetilde{\subset}\vee\Delta<\beta$.

(2.3.6) <u>Теорема</u>. Пусть $(X,\mathcal{T}_X)$, $(Y,\mathcal{T}_Y)$ – нечеткие пространства, $M\in I^X$ и $f:X\to Y$ – непрерывное отображение. Тогда $C(M)\subset C(f(M))$.

<u>Доказательство</u>. Пусть $\beta\in C(M)$, $\mathcal{V}\subset\mathcal{T}_Y$ и $f(M)\widetilde{\subset}\vee\mathcal{V}\geqslant\beta$. Тогда, как следует из (0.2.2)-(0.2.9), $M\widetilde{\subset}\vee f^{-1}(\mathcal{V})\geqslant f^{-1}f(M)\widetilde{\subset}\vee f^{-1}(\mathcal{V})=f^{-1}(f(M))\widetilde{\subset}\widetilde{\subset}f^{-1}(\vee\mathcal{V})\geqslant M\widetilde{\subset}\vee\mathcal{V}\geqslant\beta$. Поскольку $f^{-1}(\mathcal{V})\subset\mathcal{T}_X$ и $\beta\in C(M)$, то для каждого $\varepsilon>0$ можно найти конечное $\mathcal{V}_0\subset\mathcal{V}$ такое, что $M\widetilde{\subset}\vee f^{-1}(\mathcal{V}_0)\geqslant\beta-\varepsilon$. Отсюда следует $f(M)\widetilde{\subset}\vee\mathcal{V}_0\geqslant\beta-\varepsilon$ и тем самым $\beta\in C(f(M))$.

Аналогичными рассуждениями устанавливается также следующая

(2.3.6′) <u>Теорема</u>. Пусть X, Y – нечеткие пространства, $M\in I^X$, $f:X\to Y$ – отображение и $cd(f)\leqslant\varepsilon$ (I.7.I). Тогда, если $(\beta,\gamma)\in\mathcal{C}_2^3(M)$, то $((\beta+\varepsilon)\wedge 1,\gamma)\in\mathcal{C}_2^3(f(M))$.

(2.3.7) <u>Теорема</u>. Пусть $(X,\mathcal{T})$ – произведение семейства нечетких пространств $\{(X_i,\mathcal{T}_i): i\in\mathcal{J}\}$, $M_i\in I^{X_i}$ и $M=\prod_i M_i\in I^X$. Тогда, если $(\alpha,\beta]\subset\bigcap_i C(M_i)$, то $(\alpha,\beta]\subset C(M)$, а следовательно, $c(M)\geqslant\inf_i c(M_i)$.

Доказательство. Для доказательства первого утверждения достаточно показать, что, если $(\alpha,\beta]\subset C(M_i)$ для всех $i\in\mathcal{J}$, то $\beta\in C(M)$.

Рассмотрим предбазу $S=\{\pi_i^{-1}(O_i):\ O_i\in\tau_i\ ,\ i\in\mathcal{J}\}$ топологии τ_i и предположим, что семейство $\mathcal{U}\subset S$ таково, что $\sup\limits_{\mathcal{U}_0} M\widetilde{\subset}\vee\mathcal{U}_0<\beta$. Выберем $\varepsilon>0$ так, чтобы $M\widetilde{\subset}\vee\mathcal{U}_0<\beta-\varepsilon$ для всех конечных $\mathcal{U}_0\subset\mathcal{U}$. Покажем, что в этом случае $M\widetilde{\subset}\vee\mathcal{U}<\beta$; отсюда согласно лемме (2.3.5) и будет следовать $\beta\in C(M)$.

Зафиксируем $i\in\mathcal{J}$ и рассмотрим $\mathcal{U}_i=\{O\in I^{X_i}:\pi_i^{-1}(O)\in\mathcal{U}\}$. Покажем, что $M_i\widetilde{\subset}\vee\mathcal{U}_i^0<\beta-\varepsilon$ для каждого конечного $\mathcal{U}_i^0=\{O_1,\dots,O_n\}\subset\mathcal{U}_i$. В самом деле, так как $M\widetilde{\subset}\vee\mathcal{U}_0<\beta-\varepsilon$ для каждого конечного $\mathcal{U}_0\subset\mathcal{U}$ и, в частности, для $\mathcal{U}_0=\pi_i^{-1}(\mathcal{U}_i)$, то найдется точка $x=(x_i)_{i\in\mathcal{J}}\in X$ такая, что $M^c(x)\vee(\pi_i^{-1}(O_1)\vee\dots\vee\pi_i^{-1}(O_n))(x)<\beta-\varepsilon$. Учитывая, что $M^c(x)=$ $=(\bigwedge_i M_i(x_i))^c\geqslant M_i^c(x_i)$, $\pi_i^{-1}(O_k)(x)=O_k(x_i)$, имеем $M_i^c(x_i)\vee(\vee\mathcal{U}_i^0)(x_i)<\beta-\varepsilon$, $M_i\widetilde{\subset}\vee\mathcal{U}_i^0<\beta-\varepsilon$ и, следовательно, $\sup\limits_{\mathcal{U}_i^0} M_i\widetilde{\subset}\vee\mathcal{U}_i^0\leqslant\beta-\varepsilon$. Поскольку $(\alpha,\beta]\in C(M_i)$, то без ограничения общности можем считать, что $\beta-\varepsilon\in C(M_i)$, откуда $M_i\widetilde{\subset}\vee\mathcal{U}_i<\beta-\varepsilon/2$. Для каждого $i\in\mathcal{J}$ зафиксируем $x_i^0\in X_i$ так, чтобы $M_i^c(x_i^0)\vee\vee\mathcal{U}_i(x_i^0)<\beta-\varepsilon/2$, и пусть $x^0=(x_i^0)_{i\in\mathcal{J}}\in X$. Для завершения доказательства первой части теоремы достаточно заметить, что $M\widetilde{\subset}\vee\mathcal{U}\leqslant M^c(x^0)\vee(\vee\mathcal{U}(x^0))=\bigvee_i(M_i^c(x_i^0)\vee(\vee\mathcal{U}_i(x_i^0)))\leqslant$ $\leqslant\beta-\varepsilon/2<\beta$. Второе утверждение теоремы следует из неравенства $c(M)\geqslant\inf\limits_i c(M_i)$ и доказываемой ниже леммы.

(2.3.8) Лемма. Если в обозначениях предыдущей теоремы каждое множество M_i нормировано, то $C(M)\subset\bigcap\limits_i C(M_i)$ и, следовательно, $c(M)\leqslant\inf\limits_i c(M_i)$.

Доказательство. Пусть $\beta\in C(M)$. Зафиксируем $i\in\mathcal{J}$ и предположим, что $M_i\widetilde{\subset}\vee\mathcal{U}_i\geqslant\beta$, где $\mathcal{U}_i\subset\tau_i$. Тогда $\pi_i^{-1}(M_i)\widetilde{\subset}\vee\pi_i^{-1}(\mathcal{U}_i)\geqslant\beta$, а следовательно, и $M\widetilde{\subset}\vee\pi_i^{-1}(\mathcal{U}_i)\geqslant\beta$. Из условия $\beta\in C(M)$ заключаем, что для каждого $\varepsilon>0$ найдется такое конечное подсемейство $\pi_i^{-1}(\mathcal{U}_i^0)\subset$ $\subset\pi_i^{-1}(\mathcal{U}_i)$, что $M\widetilde{\subset}\vee\pi_i^{-1}(\mathcal{U}_i^0)\geqslant\beta-\varepsilon/2$. Покажем, что тогда $\pi_i^{-1}(M_i)\widetilde{\subset}$ $\widetilde{\subset}\vee\pi_i^{-1}(\mathcal{U}_i^0)>\beta-\varepsilon$.

Если бы $\pi_i^{-1}(M_i) \tilde{\subset} \vee \pi_i^{-1}(U_i^\circ) \leq \beta - \varepsilon$, то для некоторого $x_i^\circ \in X_i$ имело бы место неравенство $M_i^c(x_i^\circ) \vee (\vee U_i^\circ(x_i^\circ)) < \beta - \varepsilon/2$. Но тогда ввиду нормированности всех M_j можно подобрать для $j \neq i$ точку $x_j^\circ \in X_j$ так, чтобы $M_j^c(x_j^\circ) < \beta - \varepsilon/2$. Положим $x^\circ = (x_j^\circ)_{j \in \mathcal{J}}$. Тогда, очевидно, $M \tilde{\subset} \vee \pi_i^{-1}(U_i^\circ) < \beta - \varepsilon/2$, что противоречит выбору U_i°.

Итак, $\pi_i^{-1}(M_i) \tilde{\subset} \vee \pi_i^{-1}(U_i^\circ) > \beta - \varepsilon$. Отсюда $\pi_i \pi_i^{-1}(M_i) \tilde{\subset} \pi_i \pi_i^{-1}(\vee U_i^\circ) \geq \beta - \varepsilon$, а значит (ввиду равенства $\pi_i \pi_i^{-1}(A) = A$ для $A \in I^{X_i}$), $M_i \tilde{\subset} \vee U_i^\circ > \beta - \varepsilon$. Но это и означает, что $\beta \in C(M_i)$.

<u>Замечание</u>. Условие нормированности всех M_i во второй части теоремы (2.3.7) и в лемме (2.3.8) является существенным. В этом можно убедиться на следующем простом примере. Пусть $X_1 = X_2 = \mathbb{R}$, $M_1 \equiv \frac{1}{2}$, $M_2 \equiv 1/3$. Тогда $c(M_1) = \frac{1}{2}$, $c(M_2) = \frac{2}{3}$, но $M \equiv \frac{1}{3}$ и, следовательно, $c(M) = \frac{2}{3}$.

В случае теоремы Тихонова для обычных топологических пространств "зародышем" условия нормированности является требование непустоты всех сомножителей.

Следующее простое предложение является нечетким аналогом известной характеризации компактных пространств посредством центрированных систем замкнутых множеств.

(2.3.9) <u>Предложение</u>. $\beta \in C(M)$ тогда и только тогда, когда для каждого $\mathcal{F} \subset \tau^c$ из неравенства $\wedge \mathcal{F} \tilde{\subset} M^c \geq \beta$ следует $\sup\limits_{\mathcal{F}_0} \wedge \mathcal{F}_0 \tilde{\subset} M^c \geq \beta$.

(2.3.10) <u>Теорема</u>. Пусть $M \in \tau^c$, $N \in I^X$. Тогда $C(N) \subset C(M \wedge N)$ и, следовательно, $c(N) \leq c(M \wedge N)$.

<u>Доказательство</u>. Пусть $\beta \in C(N)$ и $\mathcal{F} \subset \tau^c$ таково, что $\wedge \mathcal{F} \tilde{\subset} (M \wedge N)^c \geq \beta$. Положим $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \cup \{M\}$. Тогда $\wedge \mathcal{F}' \tilde{\subset} N^c = (\wedge \mathcal{F}) \wedge M \tilde{\subset} N^c = \wedge \mathcal{F} \tilde{\subset} (N \wedge M)^c \geq \beta$, а следовательно, для каждого $\varepsilon > 0$ найдется конечное подсемейство $\mathcal{F}_0' \subset \mathcal{F}'$ такое, что $\wedge \mathcal{F}_0' \tilde{\subset} N^c \geq \beta - \varepsilon$. При этом без ограничения общности можно считать, что $M \in \mathcal{F}_0'$. Тогда $\beta - \varepsilon \leq \wedge \mathcal{F}_0' \tilde{\subset} N^c = \wedge \mathcal{F}_0 \tilde{\subset} (N \wedge M)^c$, а следовательно, $\beta \in C(M \wedge N)$.

(2.3.II) <u>Следствие</u>. Пусть $M\in\mathcal{T}^c$, $K\in I^X$ и $M\leq K$. Тогда $C(K)\subset$ $\subset C(M)$ и, следовательно, $c(K)\leq c(M)$.

(2.3.I2) <u>Теорема</u>. Пусть $M, N\in I^X$. Тогда $C(M\vee N)\supset C(M)\cap C(N)$, а следовательно, $c(M\vee N)\geqslant c(M)\wedge c(N)$.

<u>Доказательство</u>. Пусть $\beta\in C(M)\cap C(N)$ и $\mathcal{U}\subset\mathcal{T}$ таково, что $M\vee N\eqsim$ $\eqsim\vee\mathcal{U}\geqslant\beta$. Зафиксируем $\varepsilon>0$ и выберем конечные семейства $\mathcal{U}_0^1\subset\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}_0^2\subset\mathcal{U}$ такие, что $M\eqsim\vee\mathcal{U}_0^1\geqslant\beta-\varepsilon$ и $N\eqsim\vee\mathcal{U}_0^2\geqslant\beta-\varepsilon$. Положив $\mathcal{U}_0=\mathcal{U}_0^1\cup\mathcal{U}_0^2$, заключаем, что $M\vee N\eqsim\vee\mathcal{U}_0\geqslant\beta-\varepsilon$, а следовательно, $\beta\in C(M\vee N)$.

(2.3.I3) <u>Теорема</u>. Пусть $(X, \mathcal{T})$ - нечеткое пространство и $(X', \mathcal{T}')$ - его подпространство; $M\in I^X$ и $M'\in I^{X'}$ - ограничение нечеткого множества M на X'. Тогда если $M^{-1}(0,1]\subset X'$, то $C(M)=C(M')$.

<u>Доказательство</u>. Пусть $\mathcal{U}\subset I^X$ и $\mathcal{U}'=\{u'=\mathcal{U}|_{X'}: u\in\mathcal{U}\}\subset I^{X'}$. Тогда, как нетрудно заметить, $M\eqsim\vee\mathcal{U}=M'\eqsim\vee\mathcal{U}'$. Из этого наблюдения легко следует утверждение теоремы.

Б. <u>Прообразы нечетких множеств и спектры компактности отображений</u>

В этом разделе исследуются спектры компактности прообразов нечетких множеств при непрерывных отображениях. Прототипом основного утверждения этого раздела (теоремы (2.3.I8)) послужила известная теорема общей топологии о том, что прообраз компактного множества при совершенном отображении компактен. Для формулировки соответствующего "нечеткого" утверждения нам потребуется нечеткий аналог топологического понятия совершенности отображения, основным компонентом которого является понятие спектра компактности отображения.

Пусть $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ - нечеткие пространства и $f: X\to Y$ - непрерывное отображение.

(2.3.I4) <u>Определение</u>. Спектром компактности отображения f называется множество $C(f)=\bigcap_y C(f^{-1}(y))$. Число $c(f):=\inf(I\setminus C(f))$

называется степенью компактности отображения f.

(2.3.15) <u>Предложение</u>. (а) $0 \in C(f)$.

(в) Если $\beta \notin C(f)$, то найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $(\beta-\varepsilon, \beta] \cap C(f) = \emptyset$. В частности, $c(f) \in C(f)$.

<u>Доказательство</u> немедленно следует из (2.3.3).

(2.3.16) <u>Предложение</u>. Пусть $\mathfrak{Z} \subset X, \mathfrak{Z} \in \mathcal{T}_X^c$, $f: X \to Y$ – непрерывное отображение и $g = f|_{\mathfrak{Z}}: \mathfrak{Z} \to Y$ – его ограничение. Тогда $C(f) \subset C(g)$.

<u>Доказательство</u>. Заметим прежде всего, что $f^{-1}(y) \cap \mathfrak{Z} = g^{-1}(y)$, откуда, ввиду (2.3.11) следует $C(g^{-1}(y), X) = C(f^{-1}(y) \cap \mathfrak{Z}, X) \supset C(f^{-1}(y), X)$. Поскольку $g^{-1}(y) \subset \mathfrak{Z}$, из (2.3.13) можем заключить, что $C(g^{-1}(y), X) = C(g^{-1}(y), \mathfrak{Z})$, а следовательно, $C(g^{-1}(y), \mathfrak{Z}) \supset C(f^{-1}(y), X)$. Беря пересечение по всем $y \in Y$, получаем $C(g) \supset C(f)$.

(2.3.17) <u>Предложение</u>. Пусть $f = \prod f_i : X \to Y$, где $X = \prod X_i$, $Y = \prod Y_i$ – произведение непрерывных отображений $f_i : X_i \to Y_i$, $i \in \mathcal{J}$. Тогда $c(f) = \inf_i c(f_i)$.

<u>Доказательство</u>. Воспользовавшись тем, что $f^{-1}(y) = \prod f^{-1}(y_i)$ (здесь $y = (y_i)_{i \in \mathcal{J}}$) и (2.3.7), получаем $c(f) = \inf_y c(f^{-1}(y)) = \inf_y \inf_i c(f_i^{-1}(y_i)) = \inf_i \inf_{y_i} c(f_i^{-1}(y_i)) = \inf_i c(f_i)$.

(2.3.18) <u>Теорема</u>. Пусть $f : X \to Y$ – замкнутое непрерывное отображение и $N \in I^Y$. Тогда $c(f^{-1}(N)) \geqslant c(f) \wedge c(N)$.

<u>Доказательство</u>. Пусть $\beta \leqslant c(f) \wedge c(N)$. Покажем, что тогда $\beta \in C(f^{-1}(N))$; отсюда и будет следовать доказываемое неравенство. Рассмотрим семейство $\mathfrak{F} \subset \mathcal{T}_X^c$ такое, что для некоторого $\varepsilon > 0$ и каждого $\mathfrak{F}_0 \subset \mathfrak{F}$ имеет место неравенство $\wedge \mathfrak{F}_0 \mathrel{\tilde{\subset}} f^{-1}(N)^c < \beta - \varepsilon$. Нам следует установить, что тогда $\wedge \mathfrak{F} \mathrel{\tilde{\subset}} f^{-1}(N)^c < \beta$. При этом без ограничения общности можно считать, что $\mathfrak{F}$ инвариантно относительно взятия конечных инфимумов и что каждое из рассматриваемых конечных подсемейств $\mathfrak{F}_0$ содержит минимальный элемент.

Заметим, что $\wedge f(\mathfrak{F}_0) \mathrel{\tilde{\subset}} N^c \leqslant f^{-1}(\wedge f(\mathfrak{F}_0)) \mathrel{\tilde{\subset}} f^{-1}(N^c) \leqslant f^{-1} f(\mathfrak{F}_0) \mathrel{\tilde{\subset}} f^{-1}(N^c) \leqslant \wedge \mathfrak{F}_0 \mathrel{\tilde{\subset}} f^{-1}(N^c) < \beta - \varepsilon$. Поскольку $\beta \leqslant c(N)$, отсюда следует, что

$\wedge f(\mathcal{F}) \tilde{\subset} N^c < \beta - \varepsilon/2$. Выберем точку $y_* \in Y$ так, чтобы $(\wedge f(\mathcal{F}))^c(y_*) \vee$ $\vee N^c(y_*) < \beta - \frac{\varepsilon}{2}$, и положим $X_* = f^{-1}(y_*)$. Проверим, что для каждого $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ $f(\wedge \mathcal{F}_0) \tilde{\subset} f(X_*^c) < \beta - \frac{\varepsilon}{2}$. Действительно, предположим, что $f(\wedge \mathcal{F}_0) \tilde{\subset} f(X_*^c) \geqslant$ $\geqslant \beta - \frac{\varepsilon}{2}$ для некоторого $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$. Поскольку $\mathcal{F}_0$ содержит минимальный элемент, то $f(\wedge \mathcal{F}_0) = \wedge f(\mathcal{F}_0)$. Отсюда ввиду равенства $f(X_*^c) = y_*^c$ получаем $\wedge f(\mathcal{F}_0) \tilde{\subset} y_*^c \geqslant \beta - \frac{\varepsilon}{2}$ и, следовательно, $(\wedge f(\mathcal{F}_0))^c(y_*) \vee y_*^c(y_*) \geqslant \beta - \varepsilon/2$. Поскольку $y_*^c(y_*) = 0$ и $\wedge f(\mathcal{F}_0) \geqslant \wedge f(\mathcal{F})$, получаем $(\wedge f(\mathcal{F}))^c(y_*) \geqslant \beta - \varepsilon/2$, что противоречит выбору точки y_*.

Из неравенства $\wedge \mathcal{F}_0 \tilde{\subset} X_*^c \leqslant f(\wedge \mathcal{F}_0) \tilde{\subset} y_*^c < \beta - \frac{\varepsilon}{2}$ и условия $\beta \leqslant c(f)$ заключаем, что $\wedge \mathcal{F} \tilde{\subset} X_*^c < \beta$, а значит, $(\wedge \mathcal{F})^c(x) < \beta$ для некоторого $x \in X_*$. Тогда $\wedge \mathcal{F} \tilde{\subset} f^{-1}(N^c) = \inf\limits_x (\wedge \mathcal{F})^c(x) \vee f^{-1}(N^c)(x) = \inf\limits_x (\wedge \mathcal{F})^c(x) \vee N^c f(x) \leqslant$ $\leqslant \inf\limits_{x \in X_*} (\wedge \mathcal{F})^c(x) \vee N^c(y^*) < \beta$, что и завершает доказательство.

(2.3.19) Предложение. Пусть X, Y, Z – нечеткие пространства, $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ – замкнутые непрерывные отображения и $h = g \circ f$. Тогда $c(h) \geqslant c(g) \wedge c(f)$.

Доказательство. Из теоремы (2.3.18) следует, что для каждого $z \in Z$ $c(h^{-1}(z)) = c(f^{-1}(g^{-1}(z))) \geqslant c(g^{-1}(z)) \wedge c(f) \geqslant c(g) \wedge c(f)$; переходя к инфимуму по всем $z \in Z$, отсюда получаем $c(h) \geqslant c(g) \wedge c(f)$.

В. Спектры компактности нечетких множеств в отделимых пространствах

Здесь рассматривается взаимосвязь между спектральными теориями компактности и отделимости. Приведем прежде всего необходимые для этой цели определения из § I в соответствующей форме.

(2.I.I′) [Линейным] спектром хаусдорфовости нечеткого пространства X называем множество $H(X) := \{\beta \in I : \forall x, y \in X, x \neq y, \forall \varepsilon > 0$ $\exists U, V \in \tau$ такие, что $U(x) \geqslant \beta - \varepsilon, V(y) \geqslant \beta - \varepsilon, U \tilde{\subset} V^c \geqslant \beta - \varepsilon\}$. Положим $h(X) = \sup H(X)$.

(2.I.33′) [Линейным] спектром регулярности нечеткого пространства X называем множество $R(X) := \{\beta \in I : \forall x \in X, F \in \tau^c$ таких, что

$F^c(x)\leqslant\beta,\ \exists U,V\in\tau$ такие, что $U(x)\geqslant\beta-\varepsilon,\ V\widetilde{\subset}U^c\geqslant\beta-\varepsilon,\ F\widetilde{\subset}V\geqslant\beta-\varepsilon\}$.

Положим. $r(X):=\inf(I\setminus R(X))$.

(2.I.II′) [Линейным] спектром замкнутости нечеткого множества M в нечетком пространстве X называем множество $CL(M):=\{\beta\in I:\forall\varepsilon>0\ \exists W\in\tau$ такое, что $M\widetilde{\subset}W^c\geqslant\beta-\varepsilon$ и если $M^c(x)\geqslant\beta$, то $W(x)\geqslant\beta\}$.

Докажем прежде всего аналоги известных утверждений об отделимости точек от компактных множеств и об отделимости двух непересекающихся компактных множеств в хаусдорфовом пространстве.

(2.3.20) <u>Теорема</u>. Пусть $M\in I^X$, $\beta\leqslant h(X)\wedge c(M)$, $y\in X$ и $M(y)\leqslant\beta^c$. Тогда для каждого $\varepsilon>0$ найдутся $U,V\in\tau$ такие, что $M\widetilde{\subset}U\geqslant\beta-\varepsilon$, $V(y)\geqslant\beta-\varepsilon$ и $U^c\vee V^c\geqslant\beta-\varepsilon$.

<u>Доказательство</u>. Зафиксировав ε, для каждого $x\in X$ определим U_x и V_x следующим образом. Если $M(x)\leqslant\beta^c$, то положим $U_x=0$, $V_x=1$. Если же $M(x)>\beta^c$, то, воспользовавшись условием $\beta\leqslant h(x)$, выберем $U_x,V_x\in\tau$ так, чтобы $U_x(x)\geqslant\beta-\frac{\varepsilon}{2}$, $V_x(y)\geqslant\beta-\varepsilon$, $U_x^c\vee V_x^c\geqslant\beta-\varepsilon$.

Положим $\mathcal{U}=\{U_x:x\in X\}$. Поскольку по построению $M\widetilde{\subset}\vee\mathcal{U}\geqslant\beta-\varepsilon/2$ и $\beta\leqslant c(M)$, то можно выбрать конечное $\mathcal{U}_0\subset\mathcal{U}$ так, чтобы $M\widetilde{\subset}\mathcal{U}_0>\beta-\varepsilon$. Пусть $\mathcal{U}_0=\{U_{x_1},\dots,U_{x_n}\}$; рассмотрим соответствующее $\mathcal{V}_0=\{V_{x_1},\dots,V_{x_n}\}$ и положим $U=\vee\mathcal{U}_0$ и $V=\wedge\mathcal{V}_0$. Ясно, что U и V удовлетворяют условиям теоремы.

(2.3.2I) <u>Теорема</u>. Пусть $M,N\in I^X$, $\beta\leqslant h(X)\wedge c(M)\wedge c(N)$ и $M^c\vee N^c\geqslant\beta$. Тогда для каждого $\varepsilon>0$ найдутся $U,V\in\tau$ такие, что $M\widetilde{\subset}U\geqslant\beta-\varepsilon$, $N\widetilde{\subset}V\geqslant\beta-\varepsilon$ и $U^c\vee V^c\geqslant\beta-\varepsilon$.

<u>Доказательство</u>. Рассмотрим множество $Y=\{y:y\in X,\ M(y)\leqslant\beta^c\}$ и для каждого $y\in Y$ построим, воспользовавшись предыдущей теоремой, $V_y,U_y\in\tau$ таким образом, чтобы $M\widetilde{\subset}U_y\geqslant\beta-\varepsilon/2$, $U_y^c\vee V_y^c\geqslant\beta-\varepsilon/2$ и $V_y(y)\geqslant\beta-\frac{\varepsilon}{2}$. Положим $\mathcal{V}=\{V_y:y\in Y\}$ и заметим, что $N\widetilde{\subset}\vee\mathcal{V}\geqslant\beta-\frac{\varepsilon}{2}$. Действительно, если $N^c(x)\vee(\vee\mathcal{V})(x)<\beta-\frac{\varepsilon}{2}<\beta$ для некоторой точки $x\in X$, то $N(x)>\beta^c$ и, следовательно, из условия $N^c\vee M^c\geqslant\beta$ получаем $M^c(x)\geqslant\beta$, т.е. $x\in Y$, но тогда $V_x\in\mathcal{V}$, откуда $(\vee\mathcal{V})(x)\geqslant$

$\geqslant \mathcal{V}_x(x) \geqslant \beta - \mathcal{E}/2$.

Поскольку $\beta \leqslant c(N)$, то существует $\mathfrak{V}_0 = \{\mathcal{V}_{y_1}, \ldots, \mathcal{V}_{y_n}\} \subset \mathfrak{V}$ такое, что $N \tilde{\subset} \vee \mathfrak{V}_0 \geqslant \beta - \mathcal{E}$. Рассмотрим соответствующее $\mathfrak{U}_0 = \{\mathcal{U}_{y_1}, \ldots, \mathcal{U}_{y_n}\}$ и положим $V = \vee \mathfrak{V}_0$ и $\mathcal{U} = \wedge \mathfrak{U}_0$. Из построения ясно, что $\mathcal{U}^c \vee V^c \geqslant \beta - \mathcal{E}$ и $M \tilde{\subset} \mathcal{U} \geqslant \beta - \mathcal{E}$, что и завершает доказательство.

Одним из важнейших характеристических свойств компактных пространств в общей топологии является их абсолютная замкнутость в классе регулярных пространств. Наша ближайшая цель состоит в установлении аналогичного свойства в нечеткой топологии.

(2.3.22) Теорема. Для каждого нечеткого множества $M \in I^X$ имеет место включение $C(M) \cap H(X) \cap (\frac{1}{2}, 1] \subset CL(M)$.

Доказательство. Пусть $\beta \in C(M) \cap H(X)$, $\beta > \frac{1}{2}$ и $\mathcal{E} > 0$; при этом без ограничения общности можем считать, что $\beta - \mathcal{E} > \frac{1}{2}$. Для каждого $x \in X$, удовлетворяющего условию $M(x) \leqslant \beta^c$, построим, воспользовавшись теоремой (2.3.20), множества $\mathcal{U}_x, \mathcal{V}_x \in \mathcal{T}$ такие, что $M \tilde{\subset} \mathcal{U}_x \geqslant \beta - \mathcal{E}$, $\mathcal{V}_x(x) \geqslant \beta - \mathcal{E}$, $\mathcal{U}_x^c \vee \mathcal{V}_x^c \geqslant \beta - \mathcal{E}$. Рассмотрим семейство нечетких множеств $\mathfrak{V} = \{\mathcal{V}_x : M(x) \leqslant \beta^c\}$ и положим $V = \vee \mathfrak{V}$. Поскольку $M \tilde{\subset} \mathcal{U}_x \geqslant \beta - \mathcal{E}$, $\mathcal{U}_x \tilde{\subset} \mathcal{V}_x^c \geqslant \beta - \mathcal{E}$ и $\beta - \mathcal{E} > \frac{1}{2}$, то $M \tilde{\subset} \mathcal{V}_x^c \geqslant \beta - \mathcal{E}$, откуда получаем $M \tilde{\subset} V^c \geqslant \beta - \mathcal{E}$. Для проверки второго условия (из определения (2.I.II)) заметим, что если $M^c(x) \geqslant \beta$, то $M(x) \leqslant \beta^c$, откуда из построения следует $\mathcal{V}(x) \geqslant \beta - \mathcal{E}$. Тем самым показано, что $\beta \in CL(M)$.

(2.3.23) Определение. Спектр абсолютной замкнутости $ACL(M)$ нечеткого множества $M \in I^X$ определяем равенством $ACL(M) = \{\beta : ((\mathfrak{X} \supset X, \beta \in H(\mathfrak{X})) \Rightarrow (\beta \in CL(M, \mathfrak{X})))\}$. Подробнее: $ACL(M)$ состоит из всех $\beta \in I$ таких, что для каждого нечеткого пространства $\mathfrak{X}$, содержащего нечеткое пространство X в качестве подпространства и таково, что $\beta \in H(\mathfrak{X})$, следует $\beta \in CL(M, \mathfrak{X})$.

(2.3.24) Замечание. Если $\beta \in ACL(M)$ и $\beta \in H(X)$, то, очевидно, $\beta \in CL(M)$.

(2.3.25) Теорема. Для каждого нечеткого множества $M \in I^X$ имеет место включение $ACL(M) \cap R(X) \cap H(X) \cap (\frac{1}{2}, 1] \subset C(M)$.

Доказательство. Пусть $\beta \in ACL(M) \cap R(X)$, $\beta > \frac{1}{2}$. Предположим, что $\beta \notin C(M)$. Тогда существуют $\varepsilon > 0$ и $\mathcal{U} = \{U_i : i \in \mathcal{I}\} \subset \tau$ такие, что $M \tilde{\subset} \vee \mathcal{U} \geqslant \beta$, но $M \tilde{\subset} \vee \mathcal{U}_0 < \beta - \varepsilon < \frac{1}{2}$ для каждого конечного $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$.

Рассмотрим точку $x \in X$ и предположим, что $M^c(x) < \beta$. Тогда из условия $M \tilde{\subset} \vee \mathcal{U} \geqslant \beta$ получаем, что найдется $U_i \in \mathcal{U}$, для которого $U_i(x) \geqslant \beta - \frac{\varepsilon}{2}$. Положим $U_i = U_x$. Воспользовавшись условием $\beta - \frac{\varepsilon}{2} < \beta \in R(X)$, найдем $N_x \in \tau^c$ и $V_x \in \tau$ такие, что $V_x(x) \geqslant \beta - \varepsilon$, $V_x \tilde{\subset} N_x \geqslant \beta - \varepsilon$ и $N_x \tilde{\subset} U_x \geqslant \beta - \varepsilon$.

Рассмотрим произвольный конечный набор $\mathcal{N} = \{N_{x_1}, \dots, N_{x_n}\}$ и соответствующие ему наборы $\mathcal{V} = \{V_{x_1}, \dots, V_{x_n}\}$, $\mathcal{U} = \{U_{x_1}, \dots, U_{x_n}\}$. Положим $W (= W_{\mathcal{N}}) = (N_{x_1} \vee \dots \vee N_{x_n})^c = N_{x_1}^c \vee \dots \vee N_{x_n}^c$ и обозначим через $\mathcal{W}$ семейство всех построенных таким образом нечетких множеств $W_{\mathcal{N}}$.

Положим $\mathfrak{X} = X \cup \{*\}$, где $*$ – произвольный элемент, не принадлежащий X. Для каждого $W \in \mathcal{W}$ определим нечеткое множество $\tilde{W} \in I^{\mathfrak{X}}$ равенством $\tilde{W} := W \vee 1_*$. Тогда семейство $\{\tilde{W} : W \in \mathcal{W}\} \cup \tau_X$ является предбазой некоторой нечеткой топологии $\tilde{\tau}$ на $\mathfrak{X}$, индуцирующей на X топологию τ.

Покажем, что если $\beta \in H(X)$, то $\beta \in H(\mathfrak{X}, \tilde{\tau})$. Случай, когда $x, y \in X$, очевиден. Рассмотрим поэтому пару точек $x \in X$ и $*$. Пусть $U = U_x$, V_x, N_x определены, как в начале доказательства, и пусть $W = N_x^c$. Тогда $U, \tilde{W} \in \tilde{\tau}$, $U(x) \geqslant \beta - \varepsilon$, $\tilde{W}(*) = 1$ и $U^c \vee W^c = U^c \vee N_x \geqslant U \tilde{\subset} N_x \geqslant \beta - \varepsilon$, а следовательно, $U^c \vee \tilde{W}^c \geqslant \beta - \varepsilon$. Но это и означает, что $\beta \in H(\mathfrak{X})$.

Поскольку $\beta \in ACL(M)$, отсюда следует, что найдется $W = (N_{x_1} \vee \dots \vee N_{x_n})^c$ такое, что $M^c \vee \tilde{W}^c \geqslant \beta - \varepsilon$. Но тогда $M \tilde{\subset} N_{x_1} \vee \dots \vee N_{x_n} = M \tilde{\subset} W^c \geqslant M \tilde{\subset} \tilde{W}^c \geqslant \beta - \varepsilon$. С другой стороны, согласно построению, $N_{x_i} \tilde{\subset} U_{x_i} \geqslant \beta - \varepsilon$ для всех $i = 1, \dots, n$, но тогда $\bigvee_i N_{x_i} \tilde{\subset} \bigvee_i U_i \geqslant \beta - \varepsilon$. Поскольку $\beta - \varepsilon > \frac{1}{2}$, отсюда заключаем, что $M \tilde{\subset} \bigvee_i U_i \geqslant \beta - \varepsilon$. Полученное противоречие и завершает доказательство.

Из теорем (2.3.22) и (2.3.25) выведем

(2.3.26) Следствие. Для каждого $M \in I^X$ имеет место равенство $ACL(M) \cap R(X) \cap H(X) \cap (\frac{1}{2}, 1] = C(M) \cap R(X) \cap H(X) \cap (\frac{1}{2}, 1]$.

Доказательство. Согласно (2.3.25) $ACL(M) \cap R(X) \cap (\frac{1}{2}, 1] \subset C(M)$. Осталось проверить обратное включение. Для этого достаточно показать, что $C(M) \cap H(X) \cap (\frac{1}{2}, 1] \subset ACL(M)$. Предположим, что найдется $\beta \in C(M) \cap H(X)$, $\beta > \frac{1}{2}$, $\beta \notin ACL(M)$. Тогда для некоторого $\mathcal{X}$, содержащего X в качестве подпространства, выполнялось бы $\beta \in H(\mathcal{X})$ и $\beta \notin CL(M, \mathcal{X})$; тем самым $C(M) \cap H(\mathcal{X}) \cap (\frac{1}{2}, 1] \subset CL(M, \mathcal{X})$, что противоречит теореме (2.3.22).

Г. Относительно замкнутые нечеткие множества и внешняя характеристика спектров компактности

В общей топологии важную роль играет "внешний" критерий компактности, согласно которому подмножество M регулярного пространства X компактно тогда и только тогда, когда M замкнуто в каждом содержащем его хаусдорфовом пространстве. Определенный нечеткий аналог этого утверждения приведен в разделе В (см. (2.3.25)). Этот результат, как и его классический прототип, имеет место для пространств, удовлетворяющих определенным условиям отделимости. Однако, как уже отмечалось, существенной особенностью нечеткой топологии является то, что важнейшие нечеткие пространства не обладают достаточными свойствами отделимости. В этом разделе получен альтернативный "внешний" критерий компактности нечеткого множества в нечетком пространстве, не использующий каких-либо условий отделимости (и в этом смысле он является новым уже в случае обычных подмножеств обычных топологических пространств). В основе этого критерия лежит введенное здесь понятие относительной замкнутости, или r-замкнутости нечеткого множества в нечетком пространстве.

это понятие будет использовано нами и в дальнейшем, в частности, при построении компактификаций (2.5.17).

(2.3.27) Определение. Нечеткое множество $M \in I^X$ называется относительно β-замкнутым, или β-r-замкнутым в нечетком пространстве X, если для каждого $x_0 \in X$ такого, что $\overline{M}(x_0) > \beta^c$, каждого $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$, удовлетворяющего неравенству $M \tilde{\le} \vee \mathcal{U} \geq \beta$, и произвольных $\delta > 0$, $\eta \in (0, \delta]$ найдутся $V \in \mathcal{T}$, удовлетворяющее неравенству $V(x_0) > \beta - \eta$, и конечное подсемейство $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$ такие, что, если $M(x) \geq \beta^c + \delta$ и $V(x) > \beta - \delta$, то $\vee \mathcal{U}_0(x) > \beta - \delta$. Множество $RCl(M)$, образованное всеми $\beta \in I$, для которых нечеткое множество M β-r-замкнуто, назовем спектром r-замкнутости множества M. Нечеткое множество M назовем r-замкнутым, если $RCl(M) = [0, 1]$.

(2.3.28) Замечание. (1) Поскольку каждое нечеткое множество 0-r-замкнуто, данное определение представляет интерес при $\beta \neq 0$.

(2) Каждое замкнутое нечеткое множество заведомо r-замкнуто.

(3) Если $(X, \mathcal{T})$ - обычное топологическое пространство (т.е. $\mathcal{T} \subset 2^X$), то, как нетрудно заметить, r-замкнутость его подмножества $M \subset X$ означает, что для каждого $x_0 \in \overline{M}$ и каждого открытого покрытия $\mathcal{U}$ множества M найдется окрестность V точки x_0 такая, что $V \cap M \subset \bigcup \mathcal{U}_0$ для некоторого конечного подсемейства $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$. В частности, если X - хаусдорфово, то M r-замкнуто тогда и только тогда, когда оно замкнуто.

Нередко полезной оказывается следующая характеристика:

(2.3.29) Теорема. Нечеткое множество M β-r-замкнуто тогда и только тогда, когда для каждой нечеткой направленности $(x_\alpha^{\beta^c+\delta})_{\alpha \in A}$, где $\delta > 0$, содержащейся в M и сходящейся к некоторой нечеткой точке $x_0^{\beta^c+\eta}$, где $\eta \in (0, \delta]$, существует предельная нечеткая точка $x^{\beta^c+\delta} \in M$, где $\delta \geq 0$.

Доказательство. Предположим, что M не β-r-замкнуто, и пусть $x_0 \in X$, $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$, $\delta > 0$ и $\eta \in (0, \delta]$ таковы, что $\overline{M}(x_0) > \beta^c$, $M \tilde{\le} \vee \mathcal{U} \geq \beta$, но для каждого $V\in\tau$, удовлетворяющего неравенству $V(x_0)>\beta-\eta$, и для каждого конечного подсемейства $\mathcal{U}_0\subset\mathcal{U}$ найдется точка $x\in X$ такая, что $M(x)\geq\beta^c+\varepsilon$, $V(x)>\beta-\eta$, но при этом $\vee\mathcal{U}_0(x)\leq\beta-\varepsilon$.

Пусть A – множество пар вида $\alpha=(V,\mathcal{U}_0)$, где $V\in\tau$, $V(x_0)>\beta-\eta$, а $\mathcal{U}_0$ – конечное подсемейство семейства $\mathcal{U}$. Введем на множестве A отношение частичного порядка, положив $\alpha>\alpha':=(V',\mathcal{U}'_0)$ тогда и только тогда, когда $V'\geq V$ и $\mathcal{U}_0\supset\mathcal{U}'_0$. Ясно, что при этом A превращается в направленное множество. Построим направленность $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$, выбрав для каждого $\alpha\in A$ точку $x_\alpha\in X$ так, чтобы $M(x_\alpha)\geq\beta^c+\varepsilon$, $V(x_\alpha)>\beta-\eta$, но при этом $\vee\mathcal{U}_0(x_\alpha)\leq\beta-\varepsilon$. Заметим, что нечеткая направленность $(x_\alpha^{\beta^c+\varepsilon})_{\alpha\in A}$ сходится к $x_0^{\beta^c+\varepsilon}$. Действительно, пусть V – произвольная q-окрестность нечеткой точки $x_0^{\beta^c+\varepsilon}$, т.е. $V(x_0)>\beta-\eta$, и пусть $\mathcal{U}_0$ – произвольное конечное подсемейство в $\mathcal{U}$. Положим $\alpha_0:=(V,\mathcal{U}_0)$, тогда для каждого $\alpha>\alpha'_0$ $V(x_\alpha)\geq\beta-\varepsilon$ и, значит, направленность $(x_\alpha^{\beta^c+\varepsilon})$ q-финальна с V. С другой стороны, ни одна нечеткая точка $x^{\beta^c+\delta}\in M$, $\delta>0$, не является предельной для этой направленности. Действительно, пусть $x\in X$ и $\delta>0$ таковы, что $x^{\beta^c+\delta}\in M$ (при этом без ограничения общности можем считать, что $\delta\leq\varepsilon$). Выберем $u\in\mathcal{U}$ так, чтобы $u(x)>\beta-\delta$, т.е. чтобы u была q-окрестностью точки $x^{\beta^c+\delta}$ (ее существование обеспечивается условиями $M\widetilde{\subset}\vee\mathcal{U}\geq\beta$ и $M^c(x)\leq\beta-\varepsilon$) и выберем $V\in\tau$, удовлетворяющее условию $V(x_0)>\beta-\eta$ (например, $V=X$!). Положим $\alpha_0=(V,\{u\})$; тогда $u(x_\alpha)\leq\beta-\varepsilon$ для каждого $\alpha>\alpha_0$, а следовательно, направленность $(x_\alpha^{\beta^c+\varepsilon})$ не является q-финальной с q-окрестностью u нечеткой точки $x^{\beta^c+\delta}$.

Обратно, пусть M β-r-замкнуто и предположим, что для некоторых $\varepsilon>0$ и $\eta\in(0,\varepsilon]$ направленность $(x_\alpha^{\beta^c+\varepsilon})_{\alpha\in A}\subset M$ сходится к нечеткой точке $x_0^{\beta^c+\eta}$, но при этом ни одна нечеткая точка $x^{\beta^c+\delta}\in M$ не является предельной для этой направленности. Тогда у каждой нечеткой точки $x^{\beta^c+\delta}\in M$, $\delta>0$, найдется q-окрестность $u:=u_x^\delta\in\tau$, с которой эта направленность не q-финальна, т.е. найдется $\alpha_0\in A$ такое, что

$U(x_\alpha)\leqslant\beta-\varepsilon$ для всех $\alpha > \alpha_0$. В результате, как нетрудно заметить, получаем семейство $\mathcal{U}=\{u_x^\delta : x^{\beta^c+\delta}\in M\}$ такое, что $M \tilde{\subset} \vee\mathcal{U} \geqslant \beta$.

Поскольку направленность $(x_\alpha^{\beta^c+\varepsilon})\subset M$ сходится к $x_0^{\beta^c+h}$, то $x_0^{\beta^c+h}\in\bar{M}$ и, так как M β-r-замкнуто, найдутся $V\in\tau$, удовлетворяющее неравенству $V(x_0)>\beta-h$, и конечное подсемейство $\mathcal{U}_0\subset\mathcal{U}$ такие, что для каждого $x\in X$, если $M(x)\geqslant\beta^c+\varepsilon$ и $V(x)>\beta-\varepsilon$, то и $\vee\mathcal{U}_0(x)>\beta-\varepsilon$. Поскольку направленность $(x_\alpha^{\beta^c+\varepsilon})$ сходится к $x_0^{\beta^c+h}$ и V – q-окрестность нечеткой точки $x_0^{\beta^c+h}$, то $(x_\alpha^{\beta^c+\varepsilon})_{\alpha\in A}$ q-финальна с V, т.е. существует $\alpha_0\in A$ такое, что $V(x_\alpha)>\beta-\varepsilon$ для всех $\alpha>\alpha_0$. Но тогда $\vee\mathcal{U}_0(x_\alpha)>\beta-\varepsilon$ для всех $\alpha>\alpha_0$, а следовательно, по крайней мере с одним из $u\in\mathcal{U}_0$ нечеткая направленность $(x_\alpha^{\beta^c+\varepsilon})_{\alpha\in A}$ q-конфинальна. Полученное противоречие и завершает доказательство.

Рассмотрим поведение введенных свойств при простейших операциях. Непосредственно из определений вытекает:

(2.3.30) <u>Предложение</u>. Если нечеткие множества $M_1,\dots,M_n$ – β-r-замкнуты, то и их объединение $M=\bigvee_{i=1}^{n} M_i$ β-r-замкнуто.

(2.3.31) <u>Предложение</u>. Пусть X – нечеткое пространство, $Y\subset X$ – его β-r-замкнутое подпространство и $M\in I^Y$ – β-r-замкнутое нечеткое подмножество в Y. Тогда M является β-r-замкнутым и в пространстве X.

<u>Доказательство</u>. Рассмотрим нечеткую направленность $(x_\alpha^{\beta^c+\varepsilon})\subset M$, сходящуюся к $x_0^{\beta^c+h}$, где $h\in(0,\varepsilon]$. Поскольку $(x_\alpha^{\beta^c+\varepsilon})\subset Y$ и Y β-r-замкнуто в X, найдется нечеткая точка $y_0^{\beta^c+h'}$, где $y_0\in Y$, $h'\in(0,\varepsilon]$, предельная для этой нечеткой направленности. Но тогда ввиду β-r-замкнутости нечеткого множества M в пространстве Y, предельной для нее является и некоторая $x^{\beta^c+\delta}\tilde{\in} M$.

(2.3.32) <u>Теорема</u>. Пусть для каждого $i\in J$ M_i – нечеткое подмножество нечеткого пространства X_i и пусть $M=\prod M_i$ – их произведение, рассматриваемое как нечеткое подмножество произведения

$X=\Pi X_i$. Тогда, если $\beta\in RCL(M_i)$ для всех $i\in\mathcal{I}$, то и $\beta\in RCL(M)$ в каждом из следующих случаев:

(I) если $\mathcal{I}$ конечно;

(2) если существует $\beta_0<\beta$ такое, что $(\beta_0,\beta]\subset RCL(M_i)$ для всех $i\in\mathcal{I}$.

Обратно, если все M_i нормированы, то $RCL(M)\subset\bigcap_i RCL(M_i)$.

<u>Доказательство</u>. Предположим, что $\mathcal{I}=\{1,\dots,n\}$ и нечеткая направленность $(x_\alpha^{\beta^c+\delta})_{\alpha\in A}\subset M$ сходится в X к нечеткой точке $x_0^{\beta^c+\eta}$, где $\eta\in(0,\delta]$. Тогда, как нетрудно заметить, для каждого $i\in\mathcal{I}$ соответствующая координатная направленность $({}^i x_\alpha^{\beta^c+\delta})_{\alpha\in A}$ сходится в пространстве X_i к нечеткой точке ${}^i x_0^{\beta^c+\eta}$ и при этом $({}^i x_\alpha^{\beta^c+\delta})\subset M_i$. Поскольку нечеткое множество M_i β-r-замкнуто в соответствующем пространстве X_i, отсюда следует, что найдутся ${}^i x\in X_i$ и $\delta_i>0$ такие, что ${}^i x^{\beta^c+\delta_i}\in M_i$ является предельной нечеткой точкой направленности $({}^i x_\alpha^{\beta^c+\delta})_{\alpha\in A}$. Но тогда, как нетрудно заметить, нечеткая точка $x^{\beta^c+\delta}$, где $x=(x_i)_{i\in\mathcal{I}}\in X$ и $\delta=\min\{\delta_1,\dots,\delta_n\}$, является предельной для исходной направленности $(x_\alpha^{\beta^c+\delta})$ и при этом $x^{\beta^c+\delta}\,\tilde{\in}\, M$.

Во втором случае, рассмотрев направленность $(x_\alpha^{\beta^c+\delta})_{\alpha\in A}\subset M$, сходящуюся к некоторой нечеткой точке $x_0^{\beta^c+\eta}$, выберем γ так, чтобы $\beta_0\wedge(\beta-\eta)<\gamma<\beta$, и положим $\delta':=\beta^c+\delta-\gamma^c$, $\eta':=\beta^c+\eta-\gamma^c$. Тогда, очевидно, $(x_\alpha^{\gamma^c+\delta'})_{\alpha\in A}\to x_0^{\gamma^c+\eta'}$, а следовательно, $({}^i x_\alpha^{\gamma^c+\delta'})_{\alpha\in A}\to {}^i x^{\gamma^c+\eta'}$ и при этом $({}^i x_\alpha^{\gamma^c+\delta'})_{\alpha\in A}\subset M_i$ для каждого $i\in\mathcal{I}$. Рассуждая по аналогии с предыдущим абзацем, устанавливаем, что нечеткая точка $x^{\gamma^c}\,\tilde{\in}\, M$ является предельной для нечеткой направленности $(x_\alpha^{\gamma^c+\delta'})_{\alpha\in A}$. Для завершения доказательства первой части теоремы осталось, положив $\delta=\gamma^c-\beta^c$, заметить, что исходная нечеткая направленность $(x_\alpha^{\beta^c+\delta})_{\alpha\in A}$ сходится к нечеткой точке $x^{\beta^c+\delta}\,\tilde{\in}\, M$.

Обратно, предположим, что $\beta\in RCL(M)$, $j\in\mathcal{I}$ и нечеткая направленность $({}^j x_\alpha^{\beta^c+\delta})_{\alpha\in A}\subset M_j$ сходится к нечеткой точке ${}^j x_0^{\beta^c+\eta}$. При этом без ограничения общности можем считать, что $\beta^c+\eta<1$. Воспользовавшись условием $\sup_{x_i} M_i(x_i)=1$, для каждого $i\neq j$ выберем точку ${}^i x_0\in X_i$ так, чтобы $M_i({}^i x_0)\geqslant \beta^c+\eta$, и для каждого $\alpha\in A$ положим $x_\alpha=({}^i x_\alpha)_i$, где ${}^i x_\alpha:={}^i x_0$ при $i\neq j$, и $x_0=({}^i x_0)_i$. Как нетрудно заметить, нечеткая направленность $(x_\alpha^{\beta^c+\delta})_{\alpha\in A}$ сходится к нечеткой точке $x_0^{\beta^c+\delta}$ и при этом $(x_\alpha^{\beta^c+\delta})_{\alpha\in A}\subset M$. Но тогда и некоторая нечеткая точка ${}^j x^{\beta^c+\delta}\in M_j$ является предельной для $({}^j x_\alpha^{\beta^c+\delta})_{\alpha\in A}$.

(Требование наличия $\beta_0<\beta$ такого, что $(\beta_0,\beta]\subset RCL(M_i)$ для всех $i\in J$ во втором случае является существенным - см. (2.3.35)).

(2.3.33) Следствие. Произведение r-замкнутых нечетких множеств r-замкнуто.

(2.3.34) Пример. Пусть (Y , T) - некомпактное топологическое пространство и $X=Y\cup\{x_0\}\cup\{x_1\}\cup\{x_2\}$, где x_0, x_1 , x_2 - некоторые элементы, не принадлежащие Y. Введем на X нечеткую топологию τ, взяв в качестве базы семейство нечетких множеств $\mathcal{B}:=\{\alpha U:\alpha\in I, U\in T\}\cup\{\alpha x_1:\alpha\leqslant\frac{2}{3}\}\cup\{\alpha x_2:\alpha\leqslant\frac{3}{4}\}\cup\{\alpha x_0:\alpha\leqslant\frac{1}{2}\}\cup\{c:c\in I\}$.
(Нечеткие множества $U\in I^Y$ естественным образом могут трактоваться и как нечеткие подмножества X .)

Положим $M_1=Y\cup\{\frac{1}{2}x_1\}$, $M_2=Y\cup\{\frac{1}{2}x_2\}$. Тогда $\bar M_1=Y\cup\{\frac{1}{2}x_1\}\cup\{\frac{1}{2}x_0\}\cup\{\frac{1}{4}x_2\}$, $\bar M_2=Y\cup\{\frac{1}{3}x_1\}\cup\{\frac{1}{2}x_2\}\cup\{\frac{1}{2}x_0\}$. Отсюда непосредственно легко убедиться, что $RCL(M_1)=[0,\frac{1}{2}]\cup(\frac{2}{3},1]$, $RCL(M_2)=[0,\frac{1}{2}]\cup(\frac{3}{4},1]$.

Пусть $M:=M_1\wedge M_2\,(=Y)$. Тогда $\bar M=Y\cup\{\frac{1}{3}x_1\}\cup\{\frac{1}{4}x_2\}\cup\{\frac{1}{2}x_0\}$ и, как несложно проверить, $RCL(M)=[0,\frac{1}{2}]$.

Таким образом, пересечение двух β-r-замкнутых множеств не обязано быть β-r-замкнутым, а поэтому невозможно говорить об операции β-r-замыкания нечетких множеств.

(2.3.35) Пример. Пусть (Y , T) - некомпактное топологическое пространство и $X=Y\cup\{x_0\}$, где $x_0\notin Y$. Зафиксировав $a\in(0,1]$ и некоторую стремящуюся к нулю последовательность $(\varepsilon_k)_k\subset(0,a)$, положим $a_k=a-\varepsilon_k$. Зададим на X нечеткую топологию $\tau_k=\{\alpha U: U\in T,\alpha\leqslant a_k\}\cup\{c:c\in I\}$, и пусть Y_k - пространство Y , рассматриваемое как подмножество нечеткого пространства $X_K := (X, \mathcal{T}_K)$. Легко проверяется, что $RCL(Y_K) = \{0\} \cup [a_K, 1]$. Рассматривая произведение $Y^o = \prod Y_K$ как подмножество произведения соответствующих нечетких пространств $X^o = \prod_{K \in N} X_K$, имеем $RCL(Y^o) = \{0\} \cup (a, 1]$. Таким образом, хотя каждое Y_K a-r-замкнуто в соответствующем пространстве X_K, их произведение Y^o не является a-r-замкнутым в произведении X^o.

Хорошо известно, что подмножество $\mathbb{R}$ нечеткой прямой $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ не является замкнутым. Более того, как показал Родабаух [89], в $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ вообще нет нетривиальных замкнутых четких подмножеств. В этой связи весьма интересным представляется следующий результат:

(2.3.36) <u>Теорема</u>. Подмножества $\mathbb{R}$ и $\mathcal{F}(I)$ r-замкнуты в нечеткой прямой $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

<u>Доказательство</u>. I. Пусть $(x_\alpha)_{\alpha \in A} \subseteq \mathbb{R}$ – некоторая направленность, $\gamma \in (0,1]$ и $(x_\alpha^\gamma)_{\alpha \in A}$ сходится к x_0^δ для некоторых $x_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, $\delta \leq \gamma$. Покажем, что у направленности (x_α^γ) найдется и нечеткая предельная точка вида x_1^δ, где $x_1 \in \mathbb{R}$. Для этого, очевидно, достаточно показать, что x_1 является предельной точкой направленности (x_α) в $\mathbb{R}$.

Предположим, что $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ не имеет предельных точек в $\mathbb{R}$; при этом можно ограничиться рассмотрением случаев $(x_\alpha) \to +\infty$ и $(x_\alpha) \to -\infty$. Рассмотрим сначала случай $(x_\alpha) \to +\infty$. Так как $\lim\limits_{x \to +\infty} x_0(x) = 0$, то для достаточно большого $a \in \mathbb{R}$ имеет место неравенство $x_0(a^-) (:= \inf\limits_{t<a} x(t)) < \delta$, т.е. $L_a(x_0) = 1 - x_0(a^-) > \delta^c$, где L_a – соответствующий элемент стандартной предбазы $\mathcal{F}(\mathbb{R})$, и, значит, L_a является q-окрестностью нечеткой точки x_0^δ. Поскольку (x_α^γ) сходится к x_0^δ, отсюда легко следует, что найдется $\alpha_0 \in A$ такое, что для каждого $\alpha > \alpha_0$ $L_a(x_\alpha) > \gamma^c$, т.е. $x_\alpha(a^-) < \gamma$. Это, однако, противоречит условию $(x_\alpha) \to +\infty$.

Переходя к случаю $(x_\alpha) \to -\infty$, воспользуемся условием $\lim\limits_{x \to -\infty} x_0(x) = 1$ и выберем $b \in \mathbb{R}$ так, чтобы $x_0(b^+) (:= \sup\limits_{t>b} x(t)) > \delta^c$; тогда соответствующий элемент стандартной предбазы r_b является q-окрестностью нечеткой точки x_0^δ. Отсюда следует, что найдется $\alpha_0 \in A$ такое, что

$r_b(\mathfrak{x}_\alpha)=\mathfrak{x}_\alpha(b^+)>\delta^c$ для всех $\alpha > \alpha_0$. Это, однако, противоречит тому, что $(\mathfrak{x}_\alpha)\to -\infty$ и, следовательно, $r_b(\mathfrak{x}_\alpha)=0$ для каждого b ри для достаточно больших α.

II. Пусть нечеткая направленность $(\mathfrak{x}_\alpha^\gamma)_{\alpha\in A}$, где $(\mathfrak{x}_\alpha)\subset\mathfrak{F}(I)$ и $\gamma\in(0,1]$, сходится к нечеткой точке $\mathfrak{x}_0^\delta$, где $\mathfrak{x}_0\in\mathfrak{F}(\mathbb{R})$, $\delta\leq\gamma$. Нетривиальным, очевидно, является случай $\mathfrak{x}_0\notin\mathfrak{F}(I)$. Определим функцию $\hat{\mathfrak{x}}_0\in\mathfrak{F}(I)$ равенствами $\hat{\mathfrak{x}}_0(x)=\mathfrak{x}_0(x)$ при $x\in(0,1]$; $\hat{\mathfrak{x}}_0(x)=1$ при $x\leq 0$ и $\hat{\mathfrak{x}}_0(x)=0$ при $x>1$. Для завершения доказательства достаточно, рассмотрев следующие шесть типичных случаев, сделать вывод, что из сходимости направленности $(\mathfrak{x}_\alpha^\gamma)$ к $\mathfrak{x}_0^\delta$ следует ее сходимость и к $\hat{\mathfrak{x}}_0^\delta$.

(I) Если $a\in(0,1]$, то $\ell_a(\mathfrak{x}_0)=\ell_a(\hat{\mathfrak{x}}_0)$, а значит ℓ_a является q-окрестностью нечеткой точки $\mathfrak{x}_0^\delta$ тогда и только тогда, когда ℓ_a является q-окрестностью нечеткой точки $\hat{\mathfrak{x}}_0^\delta$. (2) Если $a\leq 0$, то $\ell_a(\mathfrak{x}_0)>\ell_a(\hat{\mathfrak{x}}_0)$ и, следовательно, если ℓ_a является q-окрестностью для $\hat{\mathfrak{x}}_0^\delta$, то ℓ_a заведомо q-окрестность и для $\mathfrak{x}_0^\delta$. (3) Если $a>1$, то $\ell_a(\mathfrak{x})=1$ для всех $\mathfrak{x}\in\mathfrak{F}(I)$, а значит, нечеткая направленность $(\mathfrak{x}_\alpha^\gamma)$ автоматически q-финальна с ℓ_a. (4) Если $a\in[0,1)$, то $r_a(\mathfrak{x}_0)=r_a(\hat{\mathfrak{x}}_0)$, и, следовательно, r_a является q-окрестностью для $\mathfrak{x}_0^\delta$ тогда и только тогда, когда r_a является q-окрестностью для $\hat{\mathfrak{x}}_0^\delta$. (5) Если $a\geq 1$, то $r_a(\mathfrak{x}_0)>r_a(\hat{\mathfrak{x}}_0)$ и, следовательно, если r_a является q-окрестностью для $\hat{\mathfrak{x}}_0^\delta$, то r_a заведомо является q-окрестностью для $\mathfrak{x}_0^\delta$. (6) Если $a<0$, то $r_a(\mathfrak{x})=1$ для каждого $\mathfrak{x}\in\mathfrak{F}(I)$ и, следовательно, направленность $(\mathfrak{x}_\alpha^\gamma)_{\alpha\in A}$ автоматически q-финальна с r_a.

(2.3.37) <u>Следствие</u>. Множество I r-замкнуто в $\mathfrak{F}(I)$.

Переходим к изучению взаимосвязи между спектрами компактности и спектрами r-замкнутости нечетких подмножеств в нечетких пространствах.

(2.3.38) <u>Теорема</u>. Имеют место включения $C(X)\cap RCL(M)\subset C(M)\subset RCL(M)$.

Доказательство. Пусть $\beta\in C(X)\cap RCL(M)$ и $\mathcal{U}\subset\tau$ таково, что $M\cong\vee\mathcal{U}\geqslant\beta$. Зафиксировав $\varepsilon>0$, для каждого $x\in X$ такого, что $\bar{M}(x)>\beta^c$, и каждого $\eta\in(0,\varepsilon]$ найдем $V_x^\eta\in\tau$, удовлетворяющее неравенству $V_x^\eta(x)>\beta-\eta$, и конечное подсемейство $\mathcal{U}_x^\eta\subset\mathcal{U}$ такое, что, если $M(x')\geqslant\beta^c+\varepsilon$ и $V_x^\eta(x')>\beta-\varepsilon$, то $\vee\mathcal{U}_x^\eta(x')>\beta-\varepsilon$. Положим $\mathcal{V}:=\{V_x^\eta : x\in X, \bar{M}(x)>\beta^c, \eta\in(0,\varepsilon]\}$; тогда, очевидно, $\bar{M}\cong\vee\mathcal{V}\geqslant\beta$. Поскольку $\beta\in C(X)$, то и $\beta\in C(\bar{M})$ (2.3.II), а следовательно, найдется конечное подсемейство $\mathcal{V}_0=\{V_1,\dots,V_n\}\subset\mathcal{V}$ такое, что $\bar{M}\cong\vee\mathcal{V}_0>\beta-\varepsilon$. Положим $\mathcal{U}_0=\bigcup_{i=1}^n\mathcal{U}_i$, где для каждого $i=1,\dots,n$ $\mathcal{U}_i$ – конечное подсемейство семейства $\mathcal{U}$, выбранное соответственно множеству V_i. Тогда, как нетрудно заметить, $M\cong\vee\mathcal{U}_0>\beta-\varepsilon$, а значит, $\beta\in C(M)$.

Пусть теперь $\beta\in C(M)$, $\bar{M}(x_0)>\beta^c$ для некоторой точки $x_0\in X$ и $\mathcal{U}\subset\tau$ таково, что $M\cong\vee\mathcal{U}\geqslant\beta$. Зафиксировав $\varepsilon>0$, выберем $\mathcal{U}_0\subset\mathcal{U}$ так, чтобы $M\cong\vee\mathcal{U}_0>\beta-\varepsilon$. Тогда, положив $V=X$, замечаем, что все условия определения имеют место, а значит, $\beta\in RCL(M)$.

(2.3.39) Теорема. $\beta\in C(M)$ в том и только в том случае, когда $\beta\in RCL(M,\mathfrak{X})$ для каждого нечеткого пространства $\mathfrak{X}$, содержащего X.

Доказательство. Поскольку спектр компактности нечеткого множества, очевидно, не зависит от объемлющего пространства, то включение $C(M)\subset RCL(M,\mathfrak{X})$ следует из предыдущей теоремы. Обратно, пусть $\beta\in RCL(M,\mathfrak{X})$ для каждого нечеткого пространства $\mathfrak{X}$, содержащего X. Положим $\mathfrak{X}=X\cup\{x_0\}$, где x_0 – элемент, не принадлежащий X, и введем на $\mathfrak{X}$ нечеткую топологию $\tau_{\mathfrak{X}}=\tau\cup\{1\}$, где τ – исходная нечеткая топология пространства X. Ясно, что $\mathfrak{X}$ содержит X в качестве подпространства и $C(\mathfrak{X})=[0,1]$. В силу теоремы (2.3.38) отсюда следует, что $\beta\in C(M)$.

Обозначим через $HRLC(M)$ пересечение спектров $RCL(M,\mathfrak{X})$ по всем нечетким пространствам $\mathfrak{X}$, содержащим X. По аналогии с терминологией из общей топологии $HRCL(M)$ естественно назвать спектром абсолютной r-замкнутости, или спектром Hr-замкнутости нечеткого множества M. Предыдущая теорема может быть переформулирована теперь таким образом.

(2.3.39') <u>Теорема</u>. Имеет место равенство $C(M) = HRCL(M)$.

Д. Спектр и степень компактности нечетких множеств в топологических пространствах

Здесь рассматриваются спектры компактности нечетких подмножеств обычных топологических пространств. В этом случае удается получить простую и достаточно наглядную характеристику степени компактности (2.3.40). Результаты этого параграфа показывают, как развитая выше спектральная теория компактности в случае обычных топологических пространств может, по-существу, трактоваться как альтернативная теория компактности для ограниченных вещественно-значных функций на топологических пространствах (ср. [82]). Пусть M – нечеткое подмножество топологического пространства X.

(2.3.40) <u>Теорема</u>. Если для каждого $\gamma > \beta^c$ множество $M^{-1}[\gamma, 1]$ компактно, то $c(M) \geq \beta$. Обратно, если $c(M) \geq \beta$ и M полунепрерывно сверху, то для каждого $\gamma > \beta^c$ множество $M^{-1}[\gamma, 1]$ компактно.

<u>Доказательство</u>. Пусть для каждого $\gamma > \beta^c$ множество $M^{-1}[\gamma, 1]$ компактно. Предположим, что $c(M) < \beta$; при этом без ограничения общности можно считать, что $\beta \notin C(M)$ (в противном случае вместо β возьмем $\beta' < \beta$ такое, что $\beta' \notin C(M)$). Выберем $\mathcal{U} \subset T$ и $\varepsilon > 0$ такие, что $M \tilde{\subset} \vee\mathcal{U} \geq \beta$, но $M \tilde{\subset} \vee\mathcal{U}_0 < \beta - \varepsilon$ для каждого конечного $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$. Нетрудно заметить, что условие $M \tilde{\subset} \vee\mathcal{U} \geq \beta$ может быть переписано в виде $M^{-1}(\beta^c, 1] \subset \cup\mathcal{U}$. Но тогда для каждого $\gamma > \beta^c$ $M^{-1}[\gamma, 1] \subset \cup\mathcal{U}$, и поскольку $M^{-1}[\gamma, 1]$ компактно, то $M^{-1}[\gamma, 1] \subset \cup\mathcal{U}_0$ для некоторого конечного $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$. Но это означает, что $M \tilde{\subset} \vee\mathcal{U}_0 \geq \gamma^c$, откуда ввиду произвольности $\gamma > \beta^c$ получаем $\sup_{\mathcal{U}_0} M \tilde{\subset} \vee\mathcal{U}_0 \geq \beta$, что противоречит выбору покрытия $\mathcal{U}$. Полученное противоречие и доказывает, что $c(M) \geq \beta$.

Обратно, пусть M полунепрерывно сверху и $M^{-1}[\gamma,1]$ некомпактно для некоторого $\gamma>\beta^c$. Пусть $\mathcal{U}$ – покрытие множества $M^{-1}[\gamma,1]$, не имеющее конечного подпокрытия. Рассмотрим множество $X\setminus M^{-1}[\gamma,1]=U_\gamma$; ввиду верхней полунепрерывности отображения M множество U_γ открыто, и, следовательно, $\mathcal{U}'=\mathcal{U}\cup\{U_\gamma\}$ является открытым покрытием всего пространства X, откуда заключаем, что $M\widetilde{\subset}\vee\mathcal{U}'=1$.

С другой стороны, для каждого конечного $\mathcal{U}_0'\subset\mathcal{U}'$ $M\widetilde{\subset}\vee\mathcal{U}_0'=\inf_x M^c(x)\vee \vee(\vee\mathcal{U}_0'(x))<\gamma^c$ и, следовательно, $\sup_{\mathcal{U}_0} M\widetilde{\subset}\vee\mathcal{U}_0'\leq\gamma^c<\beta$. Но это означает, что $\beta\notin C(M)$.

В заключение отметим, что требование верхней полунепрерывности существенно (см. по этому поводу (2.3.53)).

(2.3.41) <u>Следствие</u>. Если для каждого $\gamma>0$ множество $M^{-1}[\gamma,1]$ компактно, то $c(M)=1$.

(2.3.42) <u>Следствие</u>. Если отображение M совершенно, то $c(M)=1$.

(2.3.43) <u>Следствие</u>. Если пространство X компактно и отображение M полунепрерывно сверху, то $c(M)=1$.

(2.3.44) <u>Следствие</u>. Если M полунепрерывно сверху, то $C(M)=[0,c(M)]$.

(2.3.45) <u>Следствие</u>. Если M полунепрерывно сверху и $c(M)=1$, то множество $M^{-1}(0,1]$ σ-компактно.

Приведем ряд конкретных примеров, иллюстрирующих понятия спектра и степени компактности для нечетких множеств в топологических пространствах. Все сформулированные в них факты легко получаются непосредственно из определений либо с помощью утверждений (2.3.40) -(2.3.45). Нетрудно заметить, что эти примеры могут быть значительно обобщены. Мы, однако, предпочитаем пожертвовать здесь общностью ради максимальной наглядности.

(2.3.46) <u>Пример</u>. Пусть $X=\mathbb{R}$, $M(x)=a$ для всех $x\in X$, где $a\in I$. Тогда $C(M)=[0,a^c]$, $c(M)=a^c$.

(2.3.47) <u>Пример</u>. Пусть $X=\mathbb{R}$, $M_1(x)=|\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x|$, $M_2(x)=2/3\, M_1(x)$. Тогда $C(M_1)=\{0\}$, $c(M_1)=0$, $C(M_2)=[0,1/3]$, $c(M_2)=1/3$.

(2.3.48) <u>Пример</u>. Пусть $X=\mathbb{R}$, $M_1(x)=1-|\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x|$, $M_2(x)=1-\frac{2}{3}|\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x|$. Тогда $C(M_1)=[0,1]$, $c(M_1)=1$, $C(M_2)=[0,2/3]$, $c(M_2)=2/3$.

(2.3.49) <u>Пример</u>. Пусть пространство $X=\mathbb{R}$ представлено в виде $X=X_1 \cup X_2$, где $X_1 \cap X_2=\emptyset$. Определим $M \in I^X$ равенствами $M(x)=a_1$ при $x \in X_1$ и $M(x)=a_2$ при $x \in X_2$, где $0 \leq a_1 < a_2 \leq 1$. Тогда если X_2 не компактно, то $C(M)=[0,a_2^c]$, $c(M)=a_2^c$. Если X_2 компактно, то $C(M)=[0,a_1^c]$, $c(M)=a_1^c$.

(2.3.50) <u>Пример</u>. Пусть $X=[-1,1]$. Определим $M \in I^X$ равенством $M(x)=a$ для всех $x \in X$. Тогда $C(M)=[0,1]$, $c(M)=1$.

(2.3.51) <u>Пример</u>. Пусть $X=[-1,1]$. Определим $M \in I^X$ равенством $M(x)=0$ при $x \in [-1,0)$ и $M(x)=a$, где $0<a\leq 1$, при $x\in[0,1]$. Тогда $C(M)=[0,1]$, $c(M)=1$.

(2.3.52) <u>Пример</u>. Пусть $X=[-1,1]$. Определим $M \in I^X$ равенством $M(x)=a$, где $0<a\leq 1$, при $x\in[-1,0)$ и $M(x)=0$ при $x \in [0,1]$. Тогда $C(M)=[0,a^c]$, $c(M)=a^c$.

(2.3.53) <u>Пример</u>. Пусть $X=[-1,1]$ представлено в виде $X=X_1 \cup X_2$, где $X_1 \cap X_2=\emptyset$ и множества X_1 и X_2 не замкнуты. Определим $M \in I^X$ равенствами $M(x)=a_1$ при $x \in X_1$ и $M(x)=a_2$ при $x\in X_2$, где $0 \leq a_1 < a_2 \leq 1$. Тогда $C(M)=[0,a_2^c] \cup (a_1^c,1]$, $c(M)=a_2^c$.

Этот пример свидетельствует о том, что требование верхней полунепрерывности отображения M' в следствии (2.3.44) является существенным. (Здесь M, очевидно, не является полунепрерывным.) Более того, если a_1 и a_2 подобрать так, чтобы $a_1 < a_2^c < a_2$, то для каждого $\gamma > a_2^c$ множество $M^{-1}[\gamma,1]=X_1$ не компактно, а следовательно, и в теореме (2.3.40) требование верхней полунепрерывности является существенным.

(2.3.54) <u>Пример</u>. Пусть $X=[-1,1]$; $M(x)=0$ при $x\neq 0$ и $M(0)=a$. Тогда $C(M)=[0,1]$, $c(M)=1$.

(2.3.55) Пример. Пусть $X=[-1,1]$; $M(x)=1$ при $x\neq 0$ и $M(0)=a$. Тогда $C(M)=\{0\}\cup(a^c,1]$, $c(M)=0$.

(2.3.56) Пример. Пусть $X=[-1,1]$; определим $M\in I^X$ равенствами $M(x)=\frac{2}{3}$ при $x<0$, $M(0)=\frac{1}{2}$ и $M(x)=\frac{1}{3}$ при $x>0$. Тогда $C(M)=$ $=[0,1/3]\cup(1/2,1]$, $c(M)=1/3$.

Е. Различные подходы к понятию компактности в нечеткой топологии с точки зрения спектральной теории

К свойству компактности как к одному из важнейших свойств не только топологии, но и математики в целом, было привлечено внимание многих авторов, работающих в области нечеткой топологии. В настоящее время известен ряд различных определений свойства компактности для нечетких топологических пространств. В этом разделе основные из них описаны в рамках развитого нами спектрального подхода. Доказательства соответствующих утверждений мы опускаем, так как они сводятся к непосредственной проверке.

(2.3.57) α-компактность [32]. Нечеткое пространство X α-компактно, где $\alpha\in I$, тогда и только тогда, когда $(\alpha,\alpha)\in \mathscr{C}_1^1(X)$.

(2.3.58) Сильная компактность [32]. Нечеткое пространство X сильно компактно тогда и только тогда, когда $\mathscr{C}_1^1(X)\supset\Delta$, где Δ – диагональ пространства I^2.

(2.3.59) (Квази)компактность в смысле Чанга-Гогена [16], [35]. Нечеткое пространство (квази)компактно в смысле Чанга-Гогена тогда и только тогда, когда $(1,1)\in \mathscr{C}_2^2(X)$.

(2.3.60) Компактность в смысле Ловена [66], [68]. Нечеткое пространство X является компактным в смысле Ловена тогда и только тогда, когда $\Delta\subset\mathscr{C}(X)$, или, что эквивалентно, когда $I^2=C(X)$.

(2.3.61) Слабая компактность [68]. Нечеткое пространство X слабо компактно в смысле Ловена тогда и только тогда, когда

$(1,1)\in\mathscr{C}(X)$, или, что эквивалентно, когда $1\in C(X)$.

Ж. Некоторые сравнительные замечания о (K , ℓ)-спектрах компактности

Как уже отмечалось, свойства спектров компактности при различных (K , ℓ) могут весьма существенно различаться. Для иллюстрации этого факта рассмотрим поведение спектра $C_2^2(M)$ относительно операции произведения. При этом нам удобно будет вести речь о линейном спектре $C_2^2(M)$ L-нечеткого множества M L-нечеткого пространства, определение которого получается из определения спектра $\mathscr{C}_2^2(M)$ по образцу определения линейного спектра $C_2^3(X)$ (2.3.2) и с одновременной заменой отрезка I на произвольную нечеткую решетку L. Полученные здесь результаты интересны также для оценки классической теоремы Тихонова с точки зрения нечеткой топологии и, точнее, для оценки роли булевой алгебры $\{0,1\}$ в формулировке теоремы Тихонова.

(2.3.62) Определение. Константу $\alpha\in L$ назовем $\varkappa$-изолированной в решетке L, где $\varkappa$ - некоторый кардинал, если из того, что $A\subset L$, $|A|\leqslant\varkappa$ и $a_i<\alpha$ для каждого $a_i\in A$ следует, что $\sup A<\alpha$. Константа α, n-изолированная для каждого $n\in N$, называется конечно-изолированной.

Пример: Каждая константа $\alpha\in I$, $\alpha\neq 0$ является конечно-изолированной, но не является ω_0-изолированной. Константа $1\in\{0,1\}$ является изолированной для каждого $\varkappa$.

(2.3.63) Теорема. Предположим, что константа β $\varkappa$-изолирована в L, $|\mathcal{J}|\leqslant\varkappa$, для каждого $i\in\mathcal{J}$ (X_i,τ_i) - L-нечеткое пространство и $\beta\in\bigcap_{i\in\mathcal{J}} C_2^2(X_i)$. Тогда и $\beta\in C_2^2(X)$, где $X=\prod_{i\in\mathcal{J}} X_i$.

(2.3.64) Лемма. Пусть $\mathcal{P}$ - предбаза L-нечеткого пространства X и $M\in I^X$. Тогда $\beta\in C_2^2(M)$ в том и только в том случае, когда для каждого $\mathcal{U}\subset\mathcal{P}$ такого, что $M\widetilde{\leqslant}\vee\mathcal{U}\geqslant\beta$ найдется конечное $\mathcal{U}_0\subset\mathcal{U}$, такое, что $M\widetilde{\leqslant}\vee\mathcal{U}_0\geqslant\beta$.

<u>Доказательство</u> аналогично доказательству леммы (2.3.5).

Переходим к доказательству теоремы. Пусть $\mathcal{P}=\{\pi_i^{-1}(U_i): U_i\in\tau_i,\ i\in\mathcal{J}\}$. Предположим, что, если $\mathcal{U}\subset\mathcal{P}$ и $X\tilde{\subset}\vee\mathcal{U}_0<\beta$ для каждого конечного $\mathcal{U}_0\subset\mathcal{U}$, то и $X\tilde{\subset}\vee\mathcal{U}<\beta$. Тогда и для каждого конечного подсемейства $\mathcal{U}_0^i$ семейства $\mathcal{U}^i=\{V_i\in\tau_i:\pi_i^{-1}(V_i)\in\mathcal{U}\}$ имеет место $X\tilde{\subset}\vee\mathcal{U}_0^i<\beta$, а значит, $X\tilde{\subset}\vee\mathcal{U}^i<\beta$. Следовательно, для каждого $i\in\mathcal{J}$ можно найти $x_i\in X_i$ такое, что $(\vee\mathcal{U}^i)(x_i)=a_i<\beta$. Положим $x=(x_i)_{i\in\mathcal{J}}$ и $\mathcal{V}^i=\{\pi_i^{-1}(V_i): V_i\in\tau_i\}\cap\mathcal{U}$. Поскольку $\mathcal{U}\subset\mathcal{P}$, то $\mathcal{U}=\bigcup_{i\in\mathcal{J}}\mathcal{V}^i$. Далее, поскольку $(\vee\mathcal{V}^i)(x)=$ $=\vee\{(\pi_i^{-1}(V_i))(x): V_i\in\mathcal{U}^i, \pi_i^{-1}(V_i)\in\mathcal{U}^i\}=\vee\{V_i(\pi_i(x)):\pi_i^{-1}(V_i)\in\mathcal{U}, V_i\in\mathcal{U}^i\}=(\vee\mathcal{U}^i)(x_i)=$ $=a_i<\alpha$ и константа β $\varkappa$-изолирована, отсюда заключаем, что $(\vee\mathcal{U})(x)=\bigvee_{i\in\mathcal{J}}((\vee\mathcal{V}^i)(x))=\bigvee_{i\in\mathcal{J}}a_i<\beta$.

(2.3.65) <u>Теорема</u>. Если константа β не является $\varkappa$-изолированной в L, то найдется семейство нечетких пространств (X_i,τ_i), где $i\in\mathcal{J}$, $|\mathcal{J}|\geqslant\varkappa$, таких, что $\beta\in\bigcap_i C_2^2(X_i)$, но при этом $\beta\notin C_2^2(X)$.

<u>Доказательство</u>. Для каждого $i\in\mathcal{J}$ зафиксируем $a_i\in L$ так, чтобы $a_i<\beta$, но при этом $\bigvee_{i\in\mathcal{J}}a_i=\beta$. Пусть $X_i=\mathbb{R}$, T – обычная топология на $\mathbb{R}$ и для каждого $i\in\mathcal{J}$ определим L-нечеткую топологию τ_i на X_i, положив $\tau_i=\{aU: U\in T, a\leqslant a_i\}\cup\{a\mathbb{R}: a_i<a\leqslant 1\}$. Тогда, очевидно, $\beta\in C_2^2(X_i)$ для всех $i\in\mathcal{J}$, но при этом $\beta\notin C_2^2(X)$.

В заключение отметим основные преимущества спектральной теории. Во-первых, спектральная теория позволяет с единой точки зрения описать большинство из известных теорий компактности. Во-вторых, в отличие от традиционных подходов, в которых свойство компактности трактуется, по-существу, с точки зрения классической математики – оно либо присуще, либо нет данному объекту; в основу спектрального подхода положена количественная характеристика наличия свойства компактности у объекта. Наконец, в-третьих, в отличие от традиционных подходов, спектральная теория применима к нечетким подмножествам нечетких пространств (в том числе и к нечетким подмножествам обычных топологических пространств), а не только к самим нечетким пространствам.

§ 4. ЛИНДЕЛЕФОВОСТЬ И СЧЕТНАЯ КОМПАКТНОСТЬ

Схема разработанной в § 3 спектральной теории компактности может быть распространена для изучения ряда других топологических свойств нечетких множеств. В данном параграфе излагаются основы спектральной теории линделефовости и счетной компактности. При этом мы ограничиваемся рассмотрением случая линейных (2,3)-спектров (ср. (2.3.2)).

А. Спектры линделефовости и счетной компактности нечетких подмножеств нечетких пространств

Пусть, как обычно, (X,τ) – нечеткое пространство и $M \in I^X$.

(2.4.1) Определение. Спектром линделефовости нечеткого множества M называется множество $L(M)$, образованное константами $\beta \in I$ такими, что для каждого $\mathcal{U} \subset \tau$, удовлетворяющего условию $M \tilde{\subset} \vee \mathcal{U} \geq \beta$, имеет место неравенство $\sup\{M \tilde{\subset} \vee \mathcal{U}_0 : |\mathcal{U}_0| \leq \aleph_0, \mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}\} \geq \beta$. Степенью линделефовости нечеткого множества M называется число $l(M) = \inf(I \setminus L(M))$.

Нетрудно заметить, что $\beta \in L(M)$ в том и только в том случае, когда в каждом $\mathcal{U} \subset \tau$, удовлетворяющем условию $M \tilde{\subset} \vee \mathcal{U} \geq \beta$, существует счетное подсемейство $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$ такое, что $M \tilde{\subset} \vee \mathcal{U}_0 \geq \beta$.

(2.4.2) Определение. Спектром счетной компактности нечеткого множества M называется множество $CC(M)$, образованное константами $\beta \in I$ такими, что для каждого счетного $\mathcal{U} \subset \tau$, удовлетворяющего условию $M \tilde{\subset} \vee \mathcal{U} \geq \beta$, имеет место неравенство $\sup\{M \tilde{\subset} \vee \mathcal{U}_0 : |\mathcal{U}_0| < \aleph_0, \mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}\} \geq \beta$. Степенью счетной компактности нечеткого множества M называется число $cc(M) = \inf(I \setminus CC(M))$.

Легко убедиться в справедливости следующих утверждений:

(2.4.3) <u>Предложение</u>. $0 \leq l(M) \in L(M)$; $0 \leq cc(M) \in CC(M)$.

(2.4.4) <u>Предложение</u>. $C(M) = L(M) \cap CC(M)$, а следовательно, $c(M) = l(M) \cap cc(M)$.

(2.4.5) <u>Предложение</u>. Если нечеткая топология τ обладает счетной базой, то $cc(M) = c(M)$.

При изучении введенных понятий нередко удобно использовать следующее несложное

(2.4.6) <u>Предложение</u>. (а) $\beta \in L(M)$ тогда и только тогда, когда для каждого $\mathcal{F} \subset \tau^c$, удовлетворяющего неравенству $\wedge \mathcal{F} \tilde{\in} M^c \geq \beta$, следует, что $\sup\{\wedge \mathcal{F}_0' \tilde{\in} M^c : \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}, |\mathcal{F}_0| \leq \aleph_0\} \geq \beta$;
(в) $\beta \in CC(M)$ тогда и только тогда, когда для каждого счетного $\mathcal{F} \subset \tau^c$, удовлетворяющего неравенству $\wedge \mathcal{F} \tilde{\in} M^c \geq \beta$, следует, что $\sup\{\wedge \mathcal{F}_0 \tilde{\in} M^c : \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}, |\mathcal{F}_0| < \aleph_0\} \geq \beta$;
(в') $\beta \in CC(M)$ тогда и только тогда, когда для каждого счетного $\mathcal{F} = \{F_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \tau^c$ такого, что $F_1 \geq F_2 \geq \ldots$, из неравенства $\wedge \mathcal{F} \tilde{\in} M^c \geq \beta$ следует, что $\sup\{\wedge \mathcal{F}_0 \tilde{\in} M^c : \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}, |\mathcal{F}_0| < \aleph_0\} \geq \beta$.

По аналогии с доказательством (2.3.10), (2.3.11) и (2.3.12) легко установить справедливость следующих утверждений:

(2.4.7) <u>Теорема</u>. Пусть $M \in \tau^c$, $N \in I^X$. Тогда $L(M \wedge N) \supset L(N)$; $CC(M \wedge N) \supset CC(N)$ и, следовательно, $l(M \wedge N) \geq l(N)$, $cc(M \wedge N) \geq cc(N)$.

(2.4.8) <u>Следствие</u>. Пусть $M \in \tau^c$, $M \leq N$ и $N \in I^X$. Тогда $L(M) \supset L(N)$, $CC(M) \supset CC(N)$, а следовательно $l(M) \geq l(N)$, $cc(M) \geq cc(N)$.

(2.4.9) <u>Теорема</u>. Пусть $M_n \in I^X$ для всех $n \in N$. Тогда $L(\bigvee_n M_n) \supset \bigcap_n L(M_n)$ и, следовательно, $l(\bigvee_n M_n) \geq \bigwedge_n l(M_n)$.

(2.4.10) <u>Теорема</u>. Пусть $M_1, M_2 \in I^X$. Тогда $CC(M_1 \vee M_2) \supset CC(M_1) \cap CC(M_2)$ и, следовательно, $cc(M_1 \vee M_2) \geq cc(M_1) \wedge cc(M_2)$.

Хорошо известно, что, хотя произведение двух линделефовых пространств не обязано быть линделефовым, произведения линделефова и компактного пространств всегда является линделефовым. В следующей теореме устанавливается нечеткий аналог этого утверждения.

(2.4.II) Теорема. Пусть (X, τ_X) и (Y, τ_Y) – нечеткие пространства; $M \in I^X$ и $N \in I^Y$. Тогда $\ell(M \times N) \geq \ell(M) \wedge c(N)$.

Доказательство. Пусть $\beta \leq \ell(M)$, $\beta \leq c(N)$, где $\beta \in I$. Для доказательства теоремы достаточно проверить, что $\beta \in L(M \times N)$.

Обозначим произведение (X, τ_X) и (Y, τ_Y) через (Z, τ_Z) и рассмотрим семейство $\mathcal{U} \subset \tau_Z$ такое, что $M \times N \tilde{\subset} V\mathcal{U} \geq \beta$. Положим $Z_0 = \{(x,y) : (M \times N)^c(x,y) < \beta\}$ и $X_0 = \pi_X(Z_0)$, $Y_0 = \pi_Y(Z_0)$, где $\pi_X : Z \to X$ и $\pi_Y : Z \to Y$ – отображения проектирования. Поскольку $(M \times N)^c(x,y) < \beta$ в том и только в том случае, когда $M^c(x) < \beta$ и $N^c(y) < \beta$, то $Z_0 = X_0 \times Y_0$.

Зафиксируем некоторое $\varepsilon > 0$ и для каждого $(x,y) \in Z_0$ выберем $U \in \mathcal{U}$ так, чтобы $U(x,y) \geq \beta - \varepsilon/3$, а затем выберем $V_x^y \in \tau_X$ и $W_y^x \in \tau_Y$ так, чтобы $V_x^y \times W_y^x(x,y) > \beta - \frac{2\varepsilon}{3}$ и $V_x^y \times W_y^x \leq U$. Из определения множеств W_y^x $(x \in X_0)$ ясно, что $N \tilde{\subset} \bigvee_{y \in Y_0} W_y^x \geq \beta - 2\varepsilon/3$. Поскольку $\beta - \frac{2\varepsilon}{3} \in C(N)$, найдутся $y_1, \ldots, y_{k(x)} \in Y_0$ такие, что $N \tilde{\subset} W_{y_1}^x \vee \ldots \vee W_{y_{k(x)}}^x \geq \beta - \varepsilon$. Рассмотрим семейство $\mathcal{W}_x = \{W_{y_1}^x, \ldots, W_{y_{k(x)}}^x\}$ и соответствующее семейство $\mathcal{V}_x = \{V_x^{y_1}, \ldots, V_x^{y_{k(x)}}\}$; положим $V_x = \wedge \mathcal{V}_x$ и пусть $\mathcal{V} = \{V_x : x \in X_0\}$. Согласно выбору окрестностей V_x^y $(x \in X_0, y \in Y_0)$ имеет место неравенство $V_x^y(x) > \beta - 2\varepsilon/3$, откуда $V_x(x) > \beta - 2\varepsilon/3$, а следовательно $M \tilde{\subset} V\mathcal{V} > \beta - 2\varepsilon/3$. Выберем счетное подсемейство $\mathcal{V}' = \{V_{x_1}, \ldots, V_{x_n}, \ldots\}$ такое, что $M \tilde{\subset} V\mathcal{V}' \geq \beta - \varepsilon$, и рассмотрим теперь семейство множеств $\mathcal{D} = \{\cup\{V_{x_n} \times W_{y_i}^{x_n} : i = 1, \ldots, k(x_n)\} : n \in \mathbb{N}\}$. Ясно, что $\mathcal{D}$ счетно, $(M \times N) \tilde{\subset} V\mathcal{D} \geq \beta - \varepsilon$ и при этом для каждого $O_p \in \mathcal{D}$ $(p \in \mathbb{N})$ найдется $U_p \in \mathcal{U}$ такое, что $O_p \leq U_p$. Но тогда, положив $\mathcal{U}' = \{U_1, \ldots, U_p, \ldots\}$, получаем $(M \times N) \tilde{\subset} V\mathcal{U}' \geq \beta - \varepsilon$, а значит $\beta \in L(M \times N)$.

(2.4.I2) Теорема. Если $f : X \to Y$ – непрерывное отображение, то $L(M) \subset L(fM)$ и $CC(M) \subset CC(fM)$.

Доказательство легко провести по образцу (2.3.6).

Определим степени линделефовости и счетной компактности непрерывного отображения $f : X \to Y$ соответственно равенствами $\ell(f) :=$

$:= \inf(I \setminus \bigcap_{y \in Y} L(f^{-1}(y)))$ и $cc(f) := \inf(I \setminus \bigcap_{y \in Y} CC(f^{-1}(y)))$.

(2.4.13) <u>Теорема</u>. Пусть $f: X \to Y$ – замкнутое непрерывное отображение и $N \in I^Y$. Тогда $l(f^{-1}(N)) \geq l(N) \wedge l(f)$ и $cc(f^{-1}(N)) \geq cc(N) \wedge cc(f)$.

<u>Доказательство</u> легко провести по аналогии с доказательством теоремы (2.3.18). При этом для того, чтобы установить первое неравенство, в качестве $\mathfrak{F}_0$ следует взять произвольное счетное подсемейство семейства $\mathfrak{F}$. Для доказательства второго утверждения следует ограничиться рассмотрением счетного семейства $\mathfrak{F} \subset \tau^c$.

В заключение рассмотрим случай, когда M – нечеткое подмножество обычного топологического пространства X. Нетрудно убедиться в справедливости следующих утверждений:

(2.4.14) <u>Теорема</u>. Если для каждого $\gamma > \beta^c$ множество $M^{-1}[\gamma, 1]$ линделефово, то $l(M) \geq \beta$.

(2.4.15) <u>Теорема</u>. Если для каждого $\gamma > \beta^c$ множество $M^{-1}[\gamma, 1]$ счетно компактно, то $cc(M) \geq \beta$.

В случае, когда отображение M полунепрерывно сверху, предыдущие утверждения могут быть усилены следующим образом.

(2.4.16) <u>Следствие</u>. Пусть $M \in I^X$ полунепрерывно сверху. Тогда $l(M) \geq \beta$ в том и только в том случае, когда множество $M^{-1}(\beta^c, 1]$ линделефово.

(2.4.17) <u>Следствие</u>. Пусть $M \in I^X$ полунепрерывно сверху. Тогда $cc(M) \geq \beta$ в том и только в том случае, когда множество $M^{-1}[\gamma, 1]$ для каждого $\gamma > \beta^c$ счетно компактно.

Подчеркнем существенность требования верхней полунепрерывности отображения M. Для (2.4.16) в этом легко убедиться на примере (2.3.53). Для (2.4.17) рассмотрим следующий пример.

(2.4.18) <u>Пример</u>. Пусть линделефово пространство X представимо в виде объединения двух дизъюнктных нелинделефовых подпространств: $X = X_1 \cup X_2$. Определим $M \in I^X$ равенствами $M(x) = a_1$ при $x \in X_1$ и $M(x) = a_2$ при $x \in X_2$, где $0 \leq a_1 < a_2^c < a_2 \leq 1$. Тогда $L(M) = [0, a_2^c] \cup (a_1^c, 1]$, а следовательно, для $\beta\in(a_2^c, a_2]$ множество $X_1=M^{-1}(\beta^c,1]$ не линделефово, но при этом $\ell(M)=a_2^c$.

Б. <u>Спектр наследственной линделефовости нечетких пространств</u>

(2.4.19) <u>Определение</u>. Спектром наследственной линделефовости $HL(X)$ нечеткого пространства $(X, \mathcal{T})$ называется пересечение спектров линделефовости всех нечетких подмножеств данного пространства: $HL(X)=\bigcap\{L(M): M\in I^X\}$. Степень наследственной линделефовости $h\ell(X)$ нечеткого пространства X определяется равенством $h\ell(X)=\inf\{\ell(M): M\in I^X\}$.

Нетрудно показать, что $h\ell(X)=\inf(I\setminus HL(X))$.

Непосредственно из определений легко убедиться в справедливости следующих утверждений:

(2.4.20) <u>Предложение</u>. $HL(X)=\bigcap\{L(M): M\in\mathcal{T}\}$.

(2.4.21) <u>Предложение</u>. Пусть $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ – нечеткие пространства и $f: X\to Y$ – непрерывное сюръективное отображение. Тогда $HL(X)\subset HL(Y)$.

Как известно, регулярное линделефово топологическое пространство является наследственно линделефовым тогда и только тогда, когда оно совершенно нормально (см., напр., [7, с.156]). Приведенные ниже теоремы (2.4.22) и (2.4.23) мы рассматриваем как два варианта нечеткого аналога этого утверждения.

(2.4.22) <u>Теорема</u>. Пусть $(X, \mathcal{T})$ – нечеткое пространство. Тогда, если $\beta\in L(X)$, $\beta>\frac{1}{2}$ и для каждого $V\in\mathcal{T}$ существует последовательность $M_n\in\mathcal{T}^c$, удовлетворяющая условию $V\cong\bigvee_n M_n\geqslant\beta$, то $\beta\in HL(X)$. Обратно, если $\beta\in HL(X)\cap R(X)$, $\beta>\frac{1}{2}$, то для каждого $V\in\mathcal{T}$ такого, что $V\cong V\geqslant\beta$, и каждого $\delta>0$ найдется последовательность $M_n\in\mathcal{T}^c$, удовлетворяющая условию $V\cong\bigvee_n M_n\geqslant\beta$. Если же при этом $U\cong U\geqslant\beta$ для всех $U\in\mathcal{T}$, то последовательность $M_n\in\mathcal{T}^c$ может быть выбрана ~~так, чтобы~~ $V \cong \bigvee_n M_n \geqslant \beta$.

<u>Доказательство</u>. Пусть $V \in \tau$, $\mathcal{U} \subset \tau$ и $V \tilde{\subset} \bigvee \mathcal{U} \geqslant \beta$, где $\beta \in L(X)$, $\beta > 1/2$. Выберем последовательность $M_n \in \tau$ так, чтобы $\bigvee_n M_n \cong V \geqslant \beta$. Отсюда можем заключить, что $M_n \tilde{\subset} \bigvee \mathcal{U} \geqslant \beta$. Поскольку $\beta \in L(M_n)$, то $M_n \tilde{\subset} \bigvee \mathcal{U}_n \geqslant \beta$ для некоторого счетного $\mathcal{U}_n \subset \mathcal{U}$. Но тогда $\bigvee_n M_n \tilde{\subset} \bigvee \mathcal{U}_0 \geqslant \beta$, где $\mathcal{U}_0 = \cup \{\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$. Отсюда следует, что $V \tilde{\subset} \bigvee \mathcal{U} \geqslant \beta$, а это согласно (2.4.20) и означает, что $\beta \in HL(X)$.

Обратно, пусть $\beta \in HL(X) \cap R(X)$, $\beta > \frac{1}{2}$, $\varepsilon > 0$ и $V \in \tau$ таково, что $V \cong V \geqslant \beta$. Воспользовавшись (2.I.37), для каждого $x \in X$ такого, что $V(x) \geqslant \beta$, и каждого $\delta \in (0, \varepsilon]$ выберем $U_x^\delta \in \tau$ и $M_x^\delta \in \tau^c$ так, чтобы $U_x^\delta(x) \geqslant \beta - \delta$, $U_x^\delta \tilde{\subset} M_x^\delta \geqslant \beta - \delta \geqslant \beta - \varepsilon$ и $M_x^\delta \tilde{\subset} V \geqslant \beta - \delta \geqslant \beta - \varepsilon$. Положим $\mathcal{U} = \{U_x^\delta : x \in V^{-1}[\beta, 1], \delta \in (0, \varepsilon]\}$. Тогда $V \tilde{\subset} \bigvee \mathcal{U} \geqslant \beta$, а следовательно, найдется $\mathcal{U}_0 = \{U_1, \dots, U_n, \dots\} \subset \mathcal{U}$ такое, что $V \tilde{\subset} \bigvee \mathcal{U}_0 \geqslant \beta$. Рассмотрим нечеткие множества M_n, соответствующие по построению нечетким множествам $U_n \in \mathcal{U}_0$, т.е. $U_n \tilde{\subset} M_n \geqslant \beta - \varepsilon$ и $M_n \tilde{\subset} V \geqslant \beta - \varepsilon$. Из этих неравенств легко следует, что $\bigvee \mathcal{U}_0 \tilde{\subset} \bigvee_n M_n \geqslant \beta - \varepsilon$ и $\bigvee_n M_n \tilde{\subset} V \geqslant \beta - \varepsilon$. Поскольку можем считать, что $\beta - \varepsilon > \frac{1}{2}$, из первого неравенства заключаем, что $V \tilde{\subset} \bigvee_n M_n \geqslant \beta - \varepsilon$, а следовательно $V \cong \bigvee_n M_n \geqslant \beta - \varepsilon$.

Предположим теперь, что $U \cong U \geqslant \beta$ для каждого $U \in \tau$. Тогда неравенство $M \cong M \geqslant \beta$ имеет место и для каждого $M \in \tau^c$. Но тогда неравенства $U_n \tilde{\subset} M_n \geqslant \beta - \varepsilon$ и $M_n \tilde{\subset} V \geqslant \beta - \varepsilon$, установленные в предыдущей части доказательства, оказываются эквивалентными неравенствам $U_n \tilde{\subset} M_n \geqslant \beta$ и $M_n \tilde{\subset} V \geqslant \beta$ соответственно. Отсюда, рассуждая как и в первой части доказательства, приходим к неравенству $V \cong \bigvee_n M_n \geqslant \beta$.

<u>Замечание</u>. Условие $V \cong V \geqslant \beta$ во второй части теоремы является существенным. Действительно, пусть (X, T) – наследственно линделефово регулярное топологическое пространство и τ – нечеткая топология на X, порожденная семейством $T \cup \{\frac{1}{2}\}$. Тогда $HL(X, \tau) = R(X, \tau) = I$. Однако при $\beta > \frac{1}{2}$ для $V = \frac{1}{2}$ не существует последовательности $M_n \in \tau^c$ такой, что $V \cong \bigvee_n M_n \geqslant \beta - \varepsilon$.

(2.4.23) Теорема. Пусть (X, τ) - нечеткое пространство. Если для каждого $V \in \tau$ найдется последовательность $M_n \in \tau^c$ такая, что $\bigvee_n M_n = V$, то $L(X) = HL(X)$. Обратно, если нечеткое пространство (X, τ) регулярно в смысле Аднаджевича (2.I.42) и $\beta \in HL(X)$, то для каждого $V \in \tau$ такого, что $V \cong V \geq \beta$, найдется последовательность $M_n \in \tau^c$, удовлетворяющая условию $V \cong \bigvee_n M_n \geq \beta$.

Доказательство. Первое утверждение легко проверить по аналогии с доказательством первой части предыдущей теоремы. Обратно, пусть $V \in \tau$. Для каждого $x \in X$ и каждого $\varepsilon > 0$ построим нечеткое множество $U_x^\varepsilon \in \tau$ такое, что $\overline{U}_x^\varepsilon \leq V$ и $U_x^\varepsilon(x) \geq V(x) - \varepsilon$. Положим $\mathcal{U} = \{U_x^\varepsilon : x \in X, \varepsilon > 0\}$. Тогда $V = \bigvee \mathcal{U}$, а следовательно, $V \cong \bigvee \mathcal{U} \geq \beta$. Поскольку $\beta \in HL(X)$, найдется $\mathcal{U}_0 = \{U_1, \ldots, U_n, \ldots\} \subset \mathcal{U}$ такое, что $V \cong \bigvee \mathcal{U}_0 \geq \beta$. Но тогда, тем более, $V \cong \bigvee_n M_n \geq \beta$, где $M_n = \overline{U}_n$, $U_n \in \mathcal{U}$. С другой стороны, поскольку $M_n \leq V$, то $\bigvee_n M_n \leq V$, а следовательно, $\bigvee_n M_n \cong V \geq V \cong V \geq \beta$.

Как известно, свойство наследственной линделефовости топологических пространств легко может быть потеряно при произведении даже двух сомножителей. Тем больший интерес представляет теорема Уилларда [I09] (см. также [26]), согласно которой произведение наследственно линделефова пространства на пространство счетного веса является наследственно линделефовым. Доказываемую ниже теорему мы рассматриваем как нечеткий аналог теоремы Уилларда. Предварительно, однако, докажем следующую лемму, представляющую и самостоятельный интерес.

(2.4.24) Лемма. Пусть (X, τ) - нечеткое пространство и $\beta = hl(X)$. Тогда для каждого $\mathcal{V} \subset \tau$ найдется счетное подсемейство $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$ такое, что $(\bigvee \mathcal{V}') \wedge \beta = (\bigvee \mathcal{V}) \wedge \beta$.

Доказательство. Пусть $[0, \beta] \cap Q = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \ldots\}$; для каждого β_n рассмотрим множество $D^n = \{x : x \in X, \bigvee\{V(x) : V \in \mathcal{V}\} \geq \beta_n\}$. Тогда, как легко заметить, $D^n \cong \bigvee \mathcal{V} \geq \beta_n$, а следовательно, найдется счетное подсемейство $\mathcal{V}_n \subset \mathcal{V}$ такое, что $D^n \widetilde{\in} \vee \mathcal{V}_n \geqslant \beta_n$. Положим $\mathcal{V}' = \cup\{\mathcal{V}_n : n \in N\}$. Тогда $|\mathcal{V}'| \leqslant \aleph_0$ и из построения ясно, что $(\vee \mathcal{V}') \wedge \beta = (\vee \mathcal{V}) \wedge \beta$.

(Отметим, что утверждение этой леммы нельзя обобщить на случай $\beta \in HL(X)$. В самом деле, пусть $(X, \mathcal{T})$ – несчетное наследственно линделефово топологическое пространство и пусть $\mathcal{T}' = \mathcal{T} \cup \{\frac{2}{3}A : A \subset X\}$. Тогда, как легко заметить, $1 \in HL(X, \mathcal{T}')$, но при этом для $\mathcal{V} = \{\frac{2}{3}A : A \subset X\} \subset \mathcal{T}'$ не существует счетного подсемейства $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$ такого, что $\vee \mathcal{V}' = \vee \mathcal{V}$.)

(2.4.25) Теорема. Если $(X, \mathcal{T}_X)$ и $(Y, \mathcal{T}_Y)$ – нечеткие пространства, причем $X \neq \emptyset$ и $w(X) \leqslant \aleph_0$, то $hl(X \times Y) = hl(Y)$.

Доказательство. Установим, прежде всего, неравенство $hl(X \times Y) \geqslant hl(Y)$. Пусть $\beta \leqslant hl(Y)$, $M \in \mathcal{T}^X$, $N \in \mathcal{T}_Y$. Покажем, что $\beta \in L(X \times Y)$. Для этого рассмотрим некоторую счетную базу $\mathcal{V}^X = \{U_1, \ldots, U_n, \ldots\}$ нечеткой топологии $\mathcal{T}_X$ и положим $\mathcal{V} = \{U_n \times V : U_n \in \mathcal{V}^X, V \in \mathcal{T}_Y\}$. Пусть $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$ и $M \times N \widetilde{\in} \vee \mathcal{W} \geqslant \beta$; покажем, что в этом случае $M \times N \widetilde{\in} \vee \mathcal{W}' \geqslant \beta$ и для некоторого счетного подсемейства $\mathcal{W}' \subset \mathcal{W}$; отсюда сразу будет следовать, что $\beta \in L(M \times N)$.

Представим $\mathcal{W}$ в виде $\mathcal{W} = \mathcal{W}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{W}_n \cup \ldots$, где $\mathcal{W}_n = \{U_n \times V_\lambda : \lambda \in \Lambda_n\}$, т.е. $\mathcal{W}_n$ образовано теми нечеткими множествами из $\mathcal{W}$, в качестве первого сомножителя которых фигурирует U_n, и пусть $\mathcal{V}_n = \{V_\lambda : \lambda \in \Lambda_n\}$. Воспользовавшись предыдущей леммой, для каждого $n \in N$ выберем счетное подсемейство $\mathcal{V}_n' \subset \mathcal{V}_n$ так, чтобы $(\vee \mathcal{V}_n') \wedge \beta = (\vee \mathcal{V}_n) \wedge \beta$, и рассмотрим семейство $\mathcal{W}_n' = \{U_n \times V_\lambda' : V_\lambda' \in \mathcal{V}_n'\}$. Тогда $(\vee \mathcal{W}_n') \wedge \beta = (\vee \mathcal{W}_n) \wedge \beta$, а следовательно, и $(\vee \mathcal{W}') \wedge \beta = (\vee \mathcal{W}) \wedge \beta$, где $\mathcal{W}' = \mathcal{W}_1' \cup \ldots \cup \mathcal{W}_n' \cup \ldots$. Поскольку $M \times N \widetilde{\in} \vee \mathcal{W} \geqslant \beta$, отсюда легко следует, что $M \times N \widetilde{\in} \vee \mathcal{W}' \geqslant \beta$, а значит, $\beta \in L(M \times N)$.

Пусть теперь $O \in \mathcal{T}$. Поскольку $w(X) \leqslant \aleph_0$, то $O = \vee\{U_n \times V_n : n \in N\}$ для некоторых $U_n \in \mathcal{V}^X$, $V_n \in \mathcal{T}_Y$. Как мы уже установили, $\beta \in L(U_n \times V_n)$ для всех $n \in N$, а следовательно, $\beta \in L(O)$ (2.4.9). Отсюда, сославшись на теорему (2.4.20), заключаем, что $\beta \in HL(X \times Y)$. Тем самым неравенство $hl(X\times Y)\geqslant hl(Y)$ доказано.

Обратное неравенство немедленно следует из теоремы (2.4.2I).

Отметим, что наше доказательство теоремы (2.4.25) опирается на лемму (2.4.24), и поэтому непосредственно его нельзя обобщить для доказательства равенства $HL(Y)=HL(X\times Y)$.

Оригинальное доказательство (топологической) теоремы Уиллларда [109], [26] использует регулярность рассматриваемых топологических пространств. Поэтому небезынтересно отметить следующее утверждение, вытекающее сразу из теоремы (2.4.25) и доказываемой ниже теоремы (2.4.27), в котором не предполагается отделимость рассматриваемых пространств.

(2.4.26) <u>Следствие</u>. Произведение топологического пространства счетного веса на наследственно линделефово топологическое пространство является наследственно линделефовым.

(2.4.27) <u>Теорема</u>. Для топологического пространства (X, T) следующие условия эквивалентны:

(I) пространство (X, T) наследственно линделефово;

(2) $hl(X,T)>0$; (2′) $hl(X,T)=1$;

(3) $hl(X,\lambda T)>0$; (3′) $hl(X,\lambda T)=1$.

(2.4.28) <u>Лемма</u>. Для каждого топологического пространства (X, T) имеет место равенство $HL(X,T)=HL(X,\lambda T)$.

<u>Доказательство</u>. Включение $HL(X,T)\supset HL(X,\lambda T)$ очевидно. Обратно, пусть $\beta\in HL(X,T)$, $M\in I^X$ и $\mathcal{U}\subset\lambda T$ таковы, что $M\cong V\mathcal{U}\geqslant\beta$. Зафиксируем $\varepsilon>0$ и для каждого $U\in\mathcal{U}$ положим $U^\varepsilon=U^{-1}(\beta-\varepsilon,1]$. Тогда $U^\varepsilon\in T$ и при этом $M^{-1}(\beta^c,1]\subset\cup\{U^\varepsilon: U\in\mathcal{U}\}$. Поскольку $\beta\in HL(X,T)\subset$ $\subset L(M^{-1}(\beta^c,1],T)$, отсюда следует, что найдется некоторое счетное подсемейство $\mathcal{U}'\subset\mathcal{U}$ такое, что $M^{-1}(\beta^c,1]\subset\cup\{U^\varepsilon: U\in\mathcal{U}'\}$, а следовательно, $M\cong V\mathcal{U}'\geqslant\beta-\varepsilon$. Ввиду произвольности $\varepsilon>0$ отсюда заключаем, что $\beta\in L(M,\lambda T)$ и, следовательно, $\beta\in HL(X,\lambda T)$.

Переходим непосредственно к доказательству теоремы.

(I)$\Rightarrow$(2$'$). Согласно теореме (2.4.20) достаточно проверить, что $L(M)=[0,1]$ для каждого $M\in T$. Пусть $\mathcal{U}\subset T$ таково, что $M\tilde{\subset}\bigvee\mathcal{U}\geq\beta$. Поскольку все множества в рассматриваемой ситуации четкие, последнее неравенство равносильно включению $M\subset\bigcup\mathcal{U}$. Ввиду линделефовости множества M найдется счетное подсемейство $\mathcal{U}'\subset\mathcal{U}$ такое, что $M\subset\bigcup\mathcal{U}'$, а следовательно, $M\tilde{\subset}\bigvee\mathcal{U}'\geq\beta$.

Импликация (2$'$)$\Rightarrow$(2) очевидна.

(2)$\Rightarrow$(I). Пусть $hl(X,T)=\beta>0$, $\mathcal{U}$ – открытое покрытие множества $M\subset X$. Тогда $M\dot{\tilde{\subset}}\bigvee\mathcal{U}=1\geq\beta$, а следовательно, для некоторого счетного $\mathcal{U}'\subset\mathcal{U}$ имеет место неравенство $M\tilde{\subset}\bigvee\mathcal{U}'\geq\beta$. Но последнее неравенство означает, что $\mathcal{U}'$ – счетное покрытие множества M, и, следовательно, M линделефово.

Для завершения доказательства остается заметить, что из леммы (2.4.28) вытекает равносильность условий (2) и (3) и соответственно (2$'$) и (3$'$).

§ 5. Е-КОМПАКТНОСТЬ И Е-КОМПАКТНЫЕ РАСШИРЕНИЯ

А. Е-компактные нечеткие множества

Пусть (E, τ_E) - некоторое (фиксированное) нечеткое пространство, (X, τ) - нечеткое пространство, $M \in I^X$ и $\beta \in I$.

(2.5.1) Определение. Нечеткое множество M называется β-Е-компактным, если существует гомеоморфное вложение $h: X \to E^\kappa$, где κ - некоторый кардинал, такое, что $\beta \in RCL(h(M), E^\kappa)$ (2.3.27). Нечеткое множество M, β-Е-компактное при всех $\beta \in I$, называется Е-компактным.

Обозначим через $\mathcal{K}_\beta(E)$ ($\mathcal{K}(E)$) класс всех β-Е-компактных (соответственно Е-компактных) нечетких множеств.

(2.5.2) Замечание. (1) Существование вложения $h: X \to E^\kappa$ означает, что нечеткое пространство X Е-тихоновское. Поэтому, говоря о Е-компактности нечеткого множества M, всегда предполагаем, что соответствующее пространство X является Е-тихоновским.

(2) Говоря о (β-)Е-компактности нечеткого множества $M \in I^X$, мы нередко отождествляем соответствующее нечеткое пространство X и его гомеоморфный образ $h(X)$ в E^κ. В этом смысле можем использовать обозначение $RCL(M, E^\kappa)$.

(3) Из теоремы (2.3.39) следует, что, если $\beta \in C(M)$, то M β-Е-компактно для каждого Е такого, что X Е-тихоновское. В частности, если $C(M) = I$ и X Е-тихоновское, то M Е-компактно.

Из определений и результатов § 3 немедленно вытекает

(2.5.3) Предложение. $\mathcal{K}_\beta(\mathcal{F}(I))$ есть класс всех таких нечетких подмножеств M вполне регулярных W_0-пространств, что $\beta \in C(M)$. В частности, $\mathcal{K}(\mathcal{F}(I))$ есть класс всех компактных нечетких подмножеств вполне регулярных нечетких W_0-пространств.

Нередко полезной оказывается следующая характеристика Е-компактности в терминах расходящихся нечетких направленностей, доказательство которой состоит в непосредственной, но довольно громоздкой проверке, которую мы опускаем.

(2.5.4) Теорема. Пусть семейство отображений $\mathcal{F} \subset C(X,E)$ таково, что соответствующее диагональное отображение $\Delta\mathcal{F} : X \to E^{\kappa}$ является гомеоморфным вложением. Тогда $\beta \in RCL(\Delta\mathcal{F}(M), E^{\kappa})$ в том и только в том случае, когда для каждой нечеткой направленности $(x_{\alpha}^{\beta^c+\varepsilon})_{\alpha\in A} \subset M$, $\varepsilon > 0$, не имеющей ни одной предельной точки вида $x^{\beta^c+\delta} \in M$, $\delta > 0$, и для каждого $\eta \in (0,\varepsilon]$ найдется функция $f \in C(X,E)$ такая, что направленность $((fx_{\alpha})^{\beta^c+\varepsilon})_{\alpha\in A}$ не сходится в E ни к одной нечеткой точке вида $e^{\beta^c+\eta}$.

(2.5.5) Следствие. Нечеткое подмножество M E-тихоновского нечеткого пространства X β-E-компактно тогда и только тогда, когда для каждой нечеткой направленности $(x_{\alpha}^{\beta^c+\varepsilon})_{\alpha\in A} \subset M$, не имеющей предельной точки вида $x^{\beta^c+\delta} \in M$, $\delta > 0$, и для каждого $\eta \in (0,\varepsilon]$ найдется функция $f \in C(X,E)$ такая, что нечеткая направленность $((fx_{\alpha})^{\beta^c+\varepsilon})_{\alpha\in A}$ не сходится в E ни к одной нечеткой точке вида $e^{\beta^c+\eta}$.

(2.5.6) Теорема. Если для каждого $i \in J$ нечеткое подмножество M_i нечеткого пространства X_i β-E-компактно при всех $\beta \in (a,b]$, то и произведение $M = \prod_i M_i$ β-E-компактно при всех $\beta \in (a,b]$. В частности, произведение E-компактных нечетких множеств E-компактно.

Доказательство легко следует из (2.3.32).

В классической топологии большое значение имеют характеристики пространств данного класса и данного веса как замкнутых подпространств некоторого универсального пространства того же веса. Ниже будут установлены некоторые нечеткие аналоги такого рода утверждений.

(2.5.7) Теорема. Пусть X – E-регулярное нечеткое W_0-пространство, $w(X) < \ell$, где ℓ – некоторый кардинал, $\beta \in C(M)$ и пространство E сильно компактно (2.3.58). Тогда существует гомеоморфизм

$h : X \to E^{\ell}$ такой, что нечеткое множество $h(M)$ $\beta - r$-замкнуто в E^{ℓ}.

Предварительно докажем две следующие леммы:

(2.5.8) Лемма. Пусть (X, τ) – W_0-подпространство произведения $E^{\kappa} := \Pi\{E_i : i \in \mathcal{J}\}$, где $|\mathcal{J}| = \kappa$, $E_i = E$ для всех $i \in \mathcal{J}$ и при этом $\omega(X) \leq \ell < \kappa$. Тогда найдется подмножество $\mathcal{F} \subset \mathcal{J}$, $|\mathcal{F}| = \ell$, такое, что ограничение на X проекции $p : E^{\kappa} \to E^{\ell} := \{E_i : i \in \mathcal{F}\}$ является гомеоморфным вложением $p_0 : X \to E^{\ell}$.

Доказательство. Поскольку $X \subset E^{\kappa}$ и $\omega(X) \leq \ell$, то найдется $\mathcal{F} \subset \mathcal{J}$, $|\mathcal{F}| = \ell$, такое, что каждое $V \in \tau$ представимо в виде $V = p^{-1}(\mathcal{U}) \wedge X$, где $\mathcal{U}$ – некоторое открытое в E^{ℓ} множество, а $p : E^{\kappa} \to E^{\ell}$ – проекция. Покажем, что тогда ограничение p_0 проекции p на X является гомеоморфным вложением.

Непрерывность p очевидна. Поскольку X есть W_0-пространство, для любых различных точек $x_1, x_2 \in X$ найдется $V \in \tau$ такое, что $V(x_1) \neq V(x_2)$. Но тогда $\mathcal{U}(p(x_1)) \neq \mathcal{U}(p(x_2))$ для соответствующего открытого в E^{ℓ} нечеткого множества $\mathcal{U}$, и, значит, $p(x_1) \neq p(x_2)$. Наконец, поскольку в τ нет множеств, отличных от множеств вида $p^{-1}(\mathcal{U}) \wedge X$, где $\mathcal{U}$ открыто в E^{ℓ} и $p(p^{-1}(\mathcal{U}) \wedge X) = \mathcal{U} \wedge p(X)$, отображение p_0 открыто.

(2.5.9) Лемма. Пусть пространство E сильно компактно. Тогда, в обозначениях предыдущей леммы, если нечеткая направленность $(x_{\alpha}^{\beta^c+\delta})_{\alpha \in A}$ сходится в E^{ℓ} к нечеткой точке $x_0^{\beta^c+\delta}$, $\delta \in (0, \varepsilon]$, то нечеткая направленность $(y_{\alpha}^{\beta^c+\delta})_{\alpha \in A}$, где $y_{\alpha} = p^{-1}(x_{\alpha})$, имеет предельную нечеткую точку вида $y_0^{\beta^c+\delta}$, где $y_0 \in p^{-1}(x_0)$.

Доказательство. Предположим противное и для каждой нечеткой точки вида $y^{\beta^c+\delta}$, где $y \in p^{-1}(x_0)$, найдем q-окрестность вида $W_y = \mathcal{U}^y \times V^y$, где $\mathcal{U}^y$ открыто в E^{ℓ}, а V^y открыто в $E^* := \Pi\{E_i : i \in \mathcal{J} \setminus \mathcal{F}\}$, которая не q-конфинальна с направленностью $(y_{\alpha}^{\beta^c+\delta})_{\alpha \in A}$. Заметим сразу, что $\mathcal{U}^y(x_0) > \beta - \delta$, а следовательно, $\mathcal{U}^y$ является q-окрестностью нечеткой точки $x_0^{\beta^c+\delta}$. С другой стороны, очевидно, $\vee\{V^y : y \in p^{-1}(x_0)\} > \beta - \delta$. Поскольку пространство E^* сильно компактно как произведение сильно компактных пространств [32], из $\mathcal{V}$ можем выделить конечное подсемейство $\mathcal{V}_0=\{V^{y_1},\dots,V^{y_n}\}$ такое, что $V\mathcal{V}_0>\beta-\delta$. Положим $V:=\bigvee_{i=1}^{n} V^{y_i}$, $U:=\bigwedge_{i=1}^{n} U^{y_i}$, $W:=U\times V$. Ясно, что тогда $U(x_0)>\beta-\delta$ и направленность $(y_\alpha^{\beta^c+\varepsilon})$ не является q-конфинальной с W. Но тогда из условия $V>\beta-\delta\geq\beta-\varepsilon$ следует, что направленность $(x_\alpha^{\beta^c+\varepsilon})$ не является q-финальной с q-окрестностью U нечеткой точки $x_0^{\beta^c+\delta}$, что противоречит условию.

Переходим непосредственно к доказательству теоремы. Поскольку X, будучи Е-регулярным W_0-пространством, является Е-тихоновским и $\beta\in C(M)$, согласно теореме (2.3.39) можем считать, что $X\subset E^K:=\Pi\{E_i : i\in\mathcal{J}\}$ (где $|\mathcal{J}|=K$ и $E_i:=E$ для всех $i\in\mathcal{J}$) и при этом $\beta\in RCL(M,E^K)$. Из леммы (2.5.8) следует, что найдется подмножество $\mathcal{I}\subset\mathcal{J}$ такое, что $|\mathcal{I}|=\ell$, и ограничение на X проекции $p : E^K\to E^\ell:=\Pi\{E_i : i\in\mathcal{I}\}$ является гомеморфным вложением. Для завершения доказательства достаточно установить, что нечеткое множество $N:=p(M)$ $\beta-r$-замкнуто в E^ℓ. Рассмотрим нечеткую направленность $(x_\alpha^{\beta^c+\varepsilon})_{\alpha\in A}\subset N$, сходящуюся в E^ℓ к нечеткой точке $x_0^{\beta^c+\eta}$, где $\eta\in(0,\varepsilon]$, и пусть $y_\alpha=p_0^{-1}(x_\alpha)$. Тогда $(y_\alpha^{\beta^c+\varepsilon})_{\alpha\in A}\subset M$; при этом из леммы (2.5.9) следует, что $(y_\alpha^{\beta^c+\varepsilon})$ сходится к нечеткой точке вида $y_0^{\beta^c+\eta}$, где $p(y_0)=x_0$. Поскольку $\beta\in C(M)$, отсюда следует, что некоторая нечеткая точка $y^{\beta^c+\delta}\in M$ является предельной для этой направленности. Но тогда нечеткая точка $x^{\beta^c+\delta}$, где $x=p(y)$, является предельной для $(x_\alpha^{\beta^c+\varepsilon})$ и при этом $x^{\beta^c+\delta}\in N$, что и завершает доказательство.

(2.5.10) <u>Следствие</u>. Если X - вполне регулярное W_0-пространство, $\omega(X)\leq\ell$, $M\in I^X$ и $\beta\in C(M)$, то существует гомеоморфное вложение $h : X\to(\mathcal{F}(I))^\ell$ такое, что $\beta\in RCL(h(M),\mathcal{F}(I)^\ell)$. Обратно, если существует гомеоморфное вложение $h : X\to\mathcal{F}(I)^\ell$ такое, что $\beta\in RCL(h(M),\mathcal{F}(I)^\ell)$, то $\beta\in C(M)$.

<u>Доказательство</u>. Первое утверждение немедленно следует из теоремы (2.5.7) и результатов § 3. Обратное утверждение вытекает из

теоремы (2.3.38) и компактности пространства $\mathcal{F}(I)^\ell$.

Совершенно аналогично получаем и такое

(2.5.11) <u>Следствие</u>. Если X - вполне регулярное ламинированное нечеткое W_0-пространство, $w(X)<\ell$, $M\in I^X$ и $\beta\in C(M)$, то существует гомеоморфное вложение $h: X\to \mathcal{F}^\lambda(I)^\ell$ такое, что $\beta\in R\mathcal{U}(h(M),\mathcal{F}^\lambda(I)^\ell)$.

В заключение рассмотрим взаимосвязь свойства E-компактности в классической топологии и свойства E-компактности в нечеткой топологии. Заметим, прежде всего, что, если (E,τ_E) - хаусдорфово топологическое пространство, то, как следует из результатов § 3, нечеткое пространство X E-компактно (в смысле определения (2.5.1)) тогда и только тогда, когда X - E-компактное (в смысле [27], [79]) топологическое пространство.

Пусть HC - класс хаусдорфовых компактных топологических пространств, RC - класс полных по Хьюитту [26] топологических пространств, NC - класс N-компактных топологических пространств [79].

(2.5.12) <u>Теорема</u>. Для каждого $\beta\in(0,1]$ имеют место равенства:

$$\mathcal{K}(\mathcal{F}(I))\cap Top = \mathcal{K}_\beta(\mathcal{F}(I))\cap Top = HC;$$

$$\mathcal{K}(\mathcal{F}(\mathbb{R}))\cap Top = \mathcal{K}_\beta(\mathcal{F}(\mathbb{R}))\cap Top = RC;$$

$$\mathcal{K}(\mathcal{F}(\mathbb{N}))\cap Top = \mathcal{K}_\beta(\mathcal{F}(\mathbb{N}))\cap Top = NC.$$

<u>Доказательство</u>. Включения $HC\subset\mathcal{K}(\mathcal{F}(I))\subset\mathcal{K}_\beta(\mathcal{F}(I))$ и $RC\subset\mathcal{K}(\mathcal{F}(\mathbb{R}))\subset$ $\subset\mathcal{K}_\beta(\mathcal{F}(\mathbb{R}))$ легко следуют из теоремы (2.3.36) и известных фактов общей топологии. По аналогии с доказательством теоремы (2.3.36) нетрудно установить также, что $\mathbb{N}$ r-замкнуто в $\mathcal{F}(\mathbb{N})$, откуда легко следует включение $NC\subset\mathcal{K}(\mathcal{F}(\mathbb{N}))\subset\mathcal{K}_\beta(\mathcal{F}(\mathbb{N}))$.

Обратно, если X - топологическое пространство и $h: X\to\mathcal{F}(I)^\kappa$ - гомеоморфное вложение, то $h(X)$ содержится в подпространстве I^κ пространства $\mathcal{F}(I)^\kappa$. (Это гарантируется тем, что для каждой точки $x\in\mathcal{F}(I)^\kappa\setminus I^\kappa$ найдется открытое в $\mathcal{F}(I)^\kappa$ нечеткое множество U такое, что $0<U(x)<1$). Далее, если $h(X)$ β-r-замкнуто в $\mathcal{F}(I)^\kappa$ и содержится в I^κ, то $h(X)$ β-r-замкнуто и в I^κ. Но для подмножеств хаусдорфовых топологических пространств понятия β-r-замкнутости и замкнутости эквивалентны, а следовательно, в этом случае X - хаусдорфово компактное пространство, т.е. $\mathcal{K}_\beta(\mathcal{F}(I))\cap Top\subset HC$. Аналогично устанавливаются включения $\mathcal{K}_\beta(\mathcal{F}(\mathbb{R}))\cap Top\subset RC$ и $\mathcal{K}_\beta(\mathcal{F}(\mathbb{N}))\cap Top\subset NC$.

По аналогии с теоремой (2.5.I2) легко убедиться в справедливости следующего утверждения:

(2.5.I3) Теорема. Если Е - сепарабельное метрическое пространство и $\mathcal{M}(E)$ - соответствующее пространство вероятностных мер (3.3.I), то $\mathcal{K}(\mathcal{M}(E))\cap Top=\mathcal{K}_\beta(\mathcal{M}(E))\cap Top$ есть класс всех Е-компактных топологических пространств.

(Требование сепарабельности и метризуемости пространства Е нужно для того, чтобы гарантировать отсутствие в $\mathcal{M}(E)$ двузначных мер, отличных от вырожденных; этот факт используется нами при доказательстве того, что топологическое пространство, будучи вложенным в $\mathcal{M}(E)^K$, содержится в $E^K\subset\mathcal{M}(E)^K$. Вопрос о справедливости этой теоремы при менее жестких ограничениях на Е остается открытым.)

(2.5.I4) Теорема. Если Е - топологическое пространство, то $X\in\mathcal{K}(E)$ тогда и только тогда, когда $\lambda X\in\mathcal{K}(\lambda E)$.

Доказательство. Непосредственно проверяется, что, если X,Y - топологические пространства и X r-замкнуто в Y, то λX r-замкнуто в λY. С другой стороны, если λX r-замкнуто в λY, то $X=\iota\lambda X$ r-замкнуто в $Y=\iota\lambda Y$. Для завершения доказательства теперь следует воспользоваться равенством $(\lambda E)^K=\lambda E^K$ (I.3.7).

Б. О Е-компактных расширениях нечетких множеств

(2.5.I5) Определение. β-Е-компактным расширением, или β-Е-компактификацией нечеткого множества M называется пара (eM, eX), где eX Е-компактное нечеткое пространство, содержащее пространство X причем так, что $eX\leqslant\overline{X}$, а eM - β-r-замкнутое нечеткое подмножество пространства eX такое, что $M \leq eM \leq \bar{M}$. Пара (eM, eX), являющаяся β-Е-компактификацией нечеткого множества M при всех $\beta \in (0,1]$, называется его <u>Е-компактным расширением</u>, или <u>Е-компактификацией</u>.

В случаях, когда не должно возникнуть недоразумения, наряду с записью (eM, eX) будем использовать запись eM. В дальнейшем мы подробнее остановимся на понятии Е-компактификации; аналогичные факты имеют места и для β-Е-компактификаций.

(2.5.16) <u>Теорема</u>. Нечеткое множество M имеет Е-компактификацию тогда и только тогда, когда соответствующее пространство X Е-тихоновское.

<u>Доказательство</u> легко следует из определений.

Обозначим через $\mathcal{E}(M)$ совокупность всех Е-компактификаций нечеткого множества M. По аналогии с ситуацией в общей топологии (см., напр., [79], [103]), на $\mathcal{E}(M)$ естественным образом могут быть введены следующие два отношения частичного порядка.

Пусть (e_1M, e_1X), $(e_2M, e_2X) \in \mathcal{E}(M)$. Положим <u>$e_1M \leq e_2M$</u>, если существует сюръекция $\varphi: e_2X \to e_1X$ такая, что $\varphi(x) = x$ для каждого $x \in X$ и $e_1M = \varphi(e_2M)$. Положим <u>$e_1M \subseteq e_2M$</u>, если существует инъекция $\psi: e_1X \to e_2X$ такая, что $\psi(x) = x$ для каждого $x \in X$ и $e_2M \circ \psi = e_1M$.

(2.5.17) <u>Конструкция Е-компактификаций</u>. Пусть X – Е-тихоновское нечеткое пространство и $\mathcal{F} \subset \hat{C}(X,E) := \cup C(X, E^n)$ – некоторое множество отображений, разделяющее точки пространства X и разделяющее точки и замкнутые нечеткие множества пространства X. Тогда диагональное отображение $\Delta\mathcal{F}: X \to E^K$ осуществляет гомеоморфное вложение пространства X в E^K. Отождествляя нечеткое множество M и его образ $\Delta\mathcal{F}(M)$, обозначим через $\bar{M}$ замыкание M в E^K, и пусть eM – r-замкнутое нечеткое множество в E^K такое, что $M \leq eM \leq \bar{M}$ и eX – r-замкнутое подпространство в E^K, содержащееся в $\bar{X}$, и такое, что $(eM)^{-1}(0,1] \subset eX$. Тогда, очевидно, (eM, eX) является Е-компактификацией множества M.

Обратно, каждая Е-компактификация нечеткого множества M может быть получена с помощью описанной выше процедуры. Действительно, если $(eM, eX) \in \mathscr{E}(M)$, то пространство eX Е-компактно и, следовательно, может рассматриваться как r-замкнутое подпространство некоторого произведения E^K. Но тогда и X гомеоморфно подпространству в E^K, причем, как явствует из § 3, соответствующий гомеоморфизм может быть представлен в виде диагонального отображения $\Delta\mathcal{F}$ для некоторого семейства $\mathcal{F} \subset \hat{C}(X, E)$, разделяющего точки и разделяющего точки и замкнутые нечеткие множества пространства X. Заметим, наконец, что $M \leq eM \leq \tilde{M} \leq \bar{M}$, где $\bar{M}$ – замыкание нечеткого множества M в E^K, а $\tilde{M}$ – его замыкание в eX, и что eM, будучи r-замкнутым в eX, является r-замкнутым и в E^K.

Применяя описанную выше конструкцию в случае, когда $\mathcal{F} = \hat{C}(X, E)$, и отождествляя пространство X с его образом $\Delta\mathcal{F}(X)$, положим $\mathscr{E}X := \bar{X}$, $\mathscr{E}M := \bar{M}$. Полученная таким образом Е-компактификация $(\mathscr{E}M, \mathscr{E}X)$ обладает некоторыми свойствами, сближающими ее со Стоун-Чеховской компактификацией топологического пространства. В частности, каждое непрерывное отображение $f: X \to E$ имеет непрерывное продолжение $\tilde{f}: \mathscr{E}X \to E$. В следующей теореме устанавливается своего рода максимальность Е-компактификации $(\mathscr{E}M, \mathscr{E}X)$ во множестве $\mathscr{E}(M)$ всех Е-компактификаций.

(2.5.18) <u>Теорема</u>. Пусть E – сильно компактное ламинированное нечеткое пространство, X – Е-тихоновское пространство и $(eM, eX) \in \mathscr{E}(M)$. Тогда найдется такая Е-компактификация (cM, cX), что $eM \subseteq cM \leq \mathscr{E}M$.

Утверждение этой теоремы легко вытекает из следующей леммы:

(2.5.19) <u>Лемма</u>. Если X – ламинированное нечеткое пространство, а нечеткое пространство E сильно компактно, то отображение проектирования $p: X * E \to X$ замкнуто.

<u>Доказательство</u>. Положим $Y=X\times E$ и пусть $M\in I^Y$. Для доказательства леммы достаточно проверить равенство $\overline{p(M)}=p(\bar{M})$.

Неравенство $p(\bar{M})\leq\overline{p(M)}$ очевидно. Предположим, что найдется нечеткая точка $x_0^b\in\overline{p(M)}$ такая, что $x_0^b\notin p(\bar{M})$, и рассмотрим нечеткую направленность $(x_\alpha^{a_\alpha})_{\alpha\in A}\subset p(M)$, сходящуюся к x_0^b. Заметим, что для каждого $\varepsilon>0$ числовая направленность $(a_\alpha)_{\alpha\in A}$ не конфинальна с $[0,b-\varepsilon]$ (в противном случае $U:=b^c+\varepsilon$ является q-окрестностью x_0^b и при этом $U(x_\alpha)+a_\alpha<b-\varepsilon+b^c+\varepsilon=1$ для конфинальной части $(x_\alpha^{a_\alpha})$). Можем считать поэтому, что $a_\alpha\in(b-\varepsilon,1]$ для всех $\alpha\in A$.

На множестве $\Gamma:=A\times N$ введем порядок, положив $\gamma<\gamma'$, где $\gamma=(\alpha,n)$, $\gamma'=(\alpha',n')$, тогда и только тогда, когда $\alpha\leq\alpha'$ и $n\leq n'$. Для каждого $\gamma=(\alpha,n)$ выберем нечеткую точку $y_\gamma^{b_\gamma}\in\bar{M}$ так, чтобы $p(y_\gamma)=x_\alpha=:x_\gamma$ и $a_\gamma-\frac{1}{n}<b_\gamma\leq a_\gamma$. Легко заметить, что полученная таким образом нечеткая направленность $(x_\gamma^{b_\gamma})_{\gamma\in\Gamma}$ сходится к x_0^b, а следовательно, тем более, и к $x_0^{b-\varepsilon}$. Отсюда, рассуждая, как и в доказательстве леммы (2.5.9), нетрудно вывести, что нечеткая направленность $(y_\gamma^{b_\gamma})_{\gamma\in\Gamma}$ сходится к некоторой нечеткой точке $y_0^{b-\varepsilon}$, где $y_0\in p^{-1}(x_0)$, и при этом $(y_\gamma^{b_\gamma})\subset\bar{M}$. Следовательно, $y_0^{b-\varepsilon}\in\bar{M}$ и, значит, $x_0^{b-\varepsilon}\in p(\bar{M})$. Ввиду произвольности $\varepsilon>0$ это означает, что $x_0^b\in p(\bar{M})$. Полученное противоречие и завершает доказательство.

§ 6. СВЯЗНОСТЬ

А. Спектр и степень связности нечетких множеств

(2.6.I) Определение. Спектром несвязности нечеткого множества M в нечетком пространстве (X, τ) называется множество $\mathcal{D}(M)$, образованное числами $\beta \in I$ такими, для которых существуют $U_1, U_2 \in \tau$, удовлетворяющие неравенствам: $M \tilde{\subset} U_1 < \beta$, $M \tilde{\subset} U_2 < \beta$, $M \tilde{\subset} U_1 \vee U_2 \geqslant \beta$ и $\sup\limits_{X_M} (U_1 \wedge U_2)(x) < \beta$ (здесь $X_M := \{x \in X : M(x) > 0\}$). Множество $S(M) := I \setminus \mathcal{D}(M)$ называется спектром связности M, а число $s(M) := \inf \mathcal{D}(M)$ – степенью связности нечеткого множества M в пространстве X.

(2.6.2) Замечание. Естественно, можно рассмотреть и более общее понятие (k, l, m)-спектра связности, где $k, l, m \in \{0, I, 2, 3\}$. А именно, (k, l, m)-спектром несвязности нечеткого множества M в нечетком пространстве (X, τ) назовем подмножество $\mathcal{D}(M)$ куба I^3, образованное тройками (β, γ, δ) такими, что $M \tilde{\subset} U_1 \leq_k \beta$, $M \tilde{\subset} U_2 \leq_k \beta$, $M \tilde{\subset} U_1 \vee U_2 \geq_l \gamma$ и $\sup\limits_{X_M} (U_1 \wedge U_2)(x) \leq_m \delta$ для некоторых $U_1, U_2 \in \tau$. Множество $\mathcal{S}(M) := I^3 \setminus \mathcal{D}(M)$ называется (k, l, m)-спектром связности нечеткого множества M в нечетком пространстве X. Определенный в (2.6.I) спектр (не)связности может интерпретироваться теперь как линейный спектр (0,3,0)-(не)-связности. В дальнейшем, однако, мы ограничимся рассмотрением именно таких линейных спектров (не)связности. Общая спектральная теория связности выглядит значительно сложнее.

Непосредственно из определения легко установить

(2.6.3) Предложение. Пусть X' – подпространство нечеткого пространства X, причем $X_M \subset X'$ и $M' := M|_{X'}$. Тогда $S(M') = S(M)$.

Таким образом, определяя спектры связности нечеткого множества M, можно без ограничения общности считать, что $X = X_M$.

Легко убедиться в справедливости следующих предложений:

(2.6.4) Предложение. Если $\beta \in \mathfrak{A}(M)$, то найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $(\beta-\varepsilon, \beta] \subseteq \mathfrak{A}(M)$.

(2.6.5) Предложение. $S(M) \neq \emptyset$; в частности, $0, s(M) \in S(M)$.

(2.6.6) Предложение. Если $|X_M| = 1$, то $\mathfrak{A}(M) = \emptyset$ и, следовательно, $S(M) = I$ и $s(M) = 1$.

(2.6.7) Предложение. Пусть τ и τ' - нечеткие топологии на X, причем $\tau \leq \tau'$. Тогда $\mathfrak{A}(M, (X,\tau)) \subset \mathfrak{A}(M, (X,\tau'))$.

(2.6.8) Предложение. $\mathfrak{A}(M, (X,\tau)) = \mathfrak{A}(M, (X, \lambda\tau))$ для каждой нечеткой топологии τ .

Следующая теорема может рассматриваться как нечеткий аналог известного утверждения о связности объединения двух пересекающихся связных подмножеств топологического пространства:

(2.6.9) Теорема. Пусть $M, N \in I^X$, $\beta \in S(M) \cap S(N)$ и $M \tilde{\subset} N^c < \beta$. Тогда $\beta \in S(M \vee N)$, а следовательно, $S(M) \cap S(N) \cap (M \tilde{\subset} N^c, 1] \subset S(M \vee N)$. В частности, если $M \tilde{\subset} N^c < s(M) \wedge s(N)$, то $s(M) \wedge s(N) \leq s(M \vee N)$.

Доказательство. Предположим, что $\beta \in \mathfrak{A}(M \vee N)$ и пусть $M \vee N \tilde{\subset} U_1 < \beta$, $M \vee N \tilde{\subset} U_2 < \beta$, $M \vee N \tilde{\subset} U_1 \vee U_2 \geq \beta$ и $\sup_X (U_1 \wedge U_2)(x) < \beta$. (Считаем, что $X = X_{M \vee N}$.) Зафиксируем $x_0 \in X$ так, чтобы $M^c(x_0) \vee N^c(x_0) < \beta$. Поскольку $M \vee N \tilde{\subset} U_1 \vee U_2 \geq \beta$, имеем $(M^c(x_0) \wedge N^c(x_0)) \vee (U_1 \vee U_2)(x_0) \geq \beta$. Для определенности пусть $U_1(x_0) \geq \beta$; тогда из условия $U_1(x_0) \wedge U_2(x_0) < \beta$ заключаем, что $U_2(x_0) < \beta$. Отсюда следует $N \tilde{\subset} U_2 < \beta$, $M \tilde{\subset} U_2 < \beta$. Поскольку $M \vee N \tilde{\subset} U_1 \vee U_2 \geq \beta$ и $\beta \in S(N)$, то $N \tilde{\subset} U_1 \geq \beta$ и $M \tilde{\subset} U_1 \geq \beta$. Но тогда $M \vee N \tilde{\subset} U_1 \geq \beta$, что противоречит выбору множества U_1 .

(2.6.10) Теорема. Пусть X , Y - нечеткие пространства, $M \in I^X$ и $f : X \to Y$ - непрерывное отображение. Тогда $S(M) \subset S(f(M))$ и, следовательно, $s(M) \leq s(f(M))$.

Доказательство состоит в непосредственной проверке.

Хорошо известно, что произведение непустых топологических пространств связно тогда и только тогда, когда каждый сомножитель связен. Доказываемая ниже теорема (2.6.14) может рассматриваться как нечеткий аналог этого факта. Предварительно установим ряд вспомогательных утверждений.

(2.6.II) Предложение. Пусть (X, τ_X), (Y, τ_Y) – нечеткие пространства; $M \in I^X$, $N \in I^Y$ и $M\times N \in I^{X\times Y}$. Тогда $S(M)\cap S(N) \subset S(M\times N)$ и, следовательно, $s(M)\wedge s(N) \leqslant s(M\times N)$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{Z} = X\times Y$. Как и обычно, считаем, что $X = X_M$, $Y = Y_N$. Предположим, что $\beta \in \mathfrak{A}(M\times N)$. Тогда найдутся $W_1, W_2 \in \tau_{\mathcal{Z}}$, удовлетворяющие неравенствам $M\times N \eqsim W_1 < \beta$, $M\times N \eqsim W_2 < \beta$, $M\times N \eqsim W_1 \vee W_2 \geqslant \beta$ и $\sup_z (W_1\wedge W_2)(z) < \beta$. Зафиксируем точку $(x_2, y_2)\in X\times Y$ так, чтобы $M^c(x_2)\vee N^c(y_2)\vee W_1(x_2,y_2) < \beta$, и точку $(x_1,y_1)\in X\times Y$, для которой выполнено неравенство $M^c(x_1)\vee N^c(y_1)\vee W_2(x_1,y_1) < \beta$. Определим нечеткие множества $\bar M, \bar N \in I^{\mathcal{Z}}$ равенствами

$$\bar M(x,y) = \begin{cases} M(x)\wedge N(y_1) & \text{при } y = y_1 \\ 0 & \text{при } y \neq y_1 \end{cases}; \quad \bar N(x,y) = \begin{cases} M(x_2)\wedge N(y) & \text{при } x = x_2 \\ 0 & \text{при } x \neq x_2. \end{cases}$$

Заметим, что $\bar M \eqsim \bar N^c = \inf_{X\times Y} \bar M^c(x,y)\vee \bar N^c(x,y) \leqslant \bar M^c(x_2,y_1)\vee \bar N^c(x_2,y_1) = (M(x_2)\wedge N(y_1))^c \vee (M(x_2)\wedge N(y_1))^c = M^c(x_2)\vee N^c(y_1) < \beta$.

Поскольку, очевидно, $\bar M \vee \bar N \leqslant M\times N$ и $M\times N \eqsim W_1\vee W_2 \geqslant \beta$, то $\bar M\vee \bar N \eqsim W_1\vee W_2 \geqslant \beta$. С другой стороны, $\bar M\vee \bar N \eqsim W_2 \leqslant \bar M \eqsim W_2 = \inf_{X\times Y} \bar M^c(x,y)\vee W_2(x,y) \leqslant \bar M^c(x_1,y_1)\vee W_2(x_1,y_1) = M^c(x_1)\vee N^c(y_1)\vee W_2(x_1,y_1) < \beta$.
Аналогично устанавливаем, что $\bar M\vee \bar N \eqsim W_1 < \beta$.

Из полученных неравенств следует, что $\beta \in \mathfrak{A}(\bar M\vee \bar N)$. Но тогда, согласно (2.6.9), либо $\beta\in\mathfrak{A}(\bar M)$, либо $\beta \in \mathfrak{A}(\bar N)$. Положив для определенности $\beta\in \mathfrak{A}(\bar M) = \mathfrak{A}(\bar M, X\times Y)$ и воспользовавшись предложением (2.6.7), заключаем отсюда, что $\beta\in \mathfrak{A}(M, \lambda X\times Y)$. Но тогда, согласно доказываемой ниже лемме (2.6.I2), $\beta \in \mathfrak{A}(M,\lambda X)$, а следовательно, ввиду (2.6.8) $\beta \in \mathfrak{A}(M,\lambda X) = \mathfrak{A}(M,X)$, что и завершает доказательство.

(2.6.I2) Лемма. В обозначениях предыдущего предложения имеет место равенство $\mathfrak{A}(\bar M, \lambda X\times \{y_1\}) = \mathfrak{A}(M,X)$.

Доказательство. Положим $X' = \lambda X\times \{y_1\}$. Тогда, поскольку вне множества X' функция $\bar M$ обращается в нуль, имеет место равенство

$\mathfrak{D}(\bar{M}, \lambda X \times Y) = \mathfrak{D}(M', X')$, где $M' = \bar{M}|_{X'}$ (2.6.4).

Пусть $\beta \in \mathfrak{D}(M', X')$, тогда найдутся $U_1', U_2' \in \mathcal{T}_{X'}$ такие, что $M' \tilde{\subset} U_1' < \beta$, $M' \tilde{\subset} U_2' < \beta$, $M' \tilde{\subset} U_1' \vee U_2' \geq \beta$ и $\sup\limits_X (U_1' \wedge U_2')(x, y_1) < \beta$. Отображение $\mathfrak{I}$: $X' \to \lambda X$, задаваемое равенством $\mathfrak{I}(x, y_1) = x$, осуществляет гомеоморфизм пространств X' и λX (I.2.I3), и поэтому найдутся $U_1, U_2 \in \mathcal{T}_X$ такие, что $U_1'(x, y_1) = U_1(x)$ и $U_2'(x, y_2) = U_2(x)$. Поскольку $N^c(y_1) < \beta$, неравенство $\beta \leq M' \tilde{\subset} U_1' \vee U_2'$ равносильно неравенству $\beta \leq M \tilde{\subset} U_1 \vee U_2$, а неравенства $M' \tilde{\subset} U_i' < \beta$ равносильны неравенствам $M \tilde{\subset} U_i < \beta$ $(i = \mathrm{I}, 2)$. Поскольку $(U_1' \wedge U_2')(x, y_1) = (U_1 \wedge U_2)(x)$, отсюда следует, что $\beta \in \mathfrak{D}(M, \lambda X)$, а значит, $\mathfrak{D}(M', X') \subset \mathfrak{D}(M, \lambda X)$.

Обратное включение доказывается совершенно аналогично.

(2.6.I3) <u>Следствие</u>. Пусть $(X, \mathcal{T})$ – произведение конечного семейства $\{(X_i, \mathcal{T}_i) : i = 1, \dots, n\}$ нечетких пространств и пусть $M = \prod M_i$ – произведение нечетких множеств $M_i \in I^{X_i}$. Тогда $S(M) \supset \bigcap\limits_i S(M_i)$ и, следовательно, $s(M) \geq \bigwedge\limits_i s(M_i)$.

(2.6.I4) <u>Теорема</u>. Пусть $\{(X_i, \mathcal{T}_i) : i \in \mathcal{J}\}$ – семейство нечетких пространств и $(X, \mathcal{T})$ – их произведение. Далее, пусть $M = \prod M_i \in I^X$ – произведение нечетких множеств $M_i \in I^{X_i}$. Тогда $S(M) \supset \bigcap\limits_{i \in \mathcal{J}} S(M_i)$ и, следовательно, $s(M) \geq \bigwedge\limits_{i \in \mathcal{J}} s(M_i)$. Если при этом все M_i нормированны, то $S(M) = \bigcap\limits_{i \in \mathcal{J}} S(M_i)$ и, следовательно, $s(M) = \bigwedge\limits_{i \in \mathcal{J}} s(M_i)$.

<u>Доказательство</u>. Для доказательства первого утверждения предположим, что $\beta \in \mathfrak{D}(M)$. Тогда найдутся $W_1, W_2 \in \mathcal{T}$ такие, что $M \tilde{\subset} W_1 < \beta$, $M \tilde{\subset} W_2 < \beta$, $M \tilde{\subset} W_1 \vee W_2 \geq \beta$ и $\sup\limits_X (W_1 \wedge W_2)(x) = \gamma_0 < \beta$. Выберем точки $y, z \in X$ так, чтобы $M^c(y) \vee W_1(y) = \gamma_1 < \beta$, $M^c(z) \vee W_2(z) = \gamma_2 < \beta$, и положим $\gamma = \max\{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2\}$.

Поскольку $M \tilde{\subset} W_1 \vee W_2 \geq \beta$, то $W_2(y) \geq \beta$, а следовательно, найдутся $U_{i_k} \in \mathcal{T}_{i_k}$, $k = 1, \dots, n$, такие, что $U = U_{i_1} \times \dots \times U_{i_n} \times X^* \leq W_2$ и $U(y) > \beta$; здесь $X^* = \prod\{X_i : i \in \mathcal{J}^*\}$, где $\mathcal{J}^* = \mathcal{J} \setminus \{i_1, \dots, i_n\}$. Рассмотрим точку $t = (t_i)_{i \in \mathcal{J}} \in X$ такую, что $t_{i_1} = y_{i_1}, \dots, t_{i_n} = y_{i_n}$ и $t_i = z_i$ при $i \in \mathcal{J}^*$. Тогда $U(t) = U(y) > \gamma$, а следовательно, $W_2(t) > \gamma$, и, значит, $W_1(t) \leq \gamma < \beta$. С другой стороны, $M^c(t)=((\bigwedge\limits_{i=i_k} M_i(y_i))\wedge(\bigwedge\limits_{i\neq i_k} M_i(\mathfrak{x}_i))^c \leqslant \gamma < \beta$, а следовательно, $M^c(t)\vee W_1(t)<\beta$.

Рассмотрим точку $\mathfrak{x}^*=(\mathfrak{x}_i)_{i\in J^*}\in X^*$ и определим нечеткое множество $M^*\in I^{X^*}$ равенством

$$M^*(x^*)=\begin{cases}\bigwedge\limits_{i\neq i_k} M_i(\mathfrak{x}_i), & \text{если } x^*=\mathfrak{x}^*,\\ 0, & \text{если } x^*\neq\mathfrak{x}^*.\end{cases}$$

Положим $N=M_{i_1}\times\ldots\times M_{i_n}\times M^*$ и убедимся, что $\beta\in\mathfrak{A}(N)$.

В самом деле, поскольку $N\leqslant M$, то $N\tilde{\subset} W_1\vee W_2\geqslant\beta$. Далее, нетрудно заметить, что $N\tilde{\subset} W_1\leqslant N^c(t)\vee W_1(t)=M^c(t)\vee W_1(t)<\beta$ и $N\tilde{\subset} W_2\leqslant$ $\leqslant N^c(\mathfrak{x})\vee W_2(\mathfrak{x})=M^c(\mathfrak{x})\vee W_2(\mathfrak{x})<\beta$. Наконец, $\sup\limits_{X_N}(W_1\wedge W_2)(x)\leqslant\sup\limits_{X}(W_1\wedge W_2)(x)<\beta$. Итак, $\beta\in\mathfrak{A}(N)$. Согласно (2.6.13) и (2.6.6), $\mathfrak{A}(N)\subset\bigcup\limits_{k=1}^{n}\mathfrak{A}(M_{i_k})\cup\mathfrak{A}(M^*)=\bigcup\limits_{k=1}^{n}\mathfrak{A}(M_{i_k})$, а следовательно, $\beta\in\mathfrak{A}(M_{i_k})$ для некоторого k.

Для доказательства второго утверждения достаточно проверить, что в случае нормирования нечетких множеств $\mathfrak{A}(M_i)\subset\mathfrak{A}(M)$ для всех $i\in J$.

Пусть $\beta\in\mathfrak{A}(M_i)$, тогда найдутся $U_i,V_i\in\mathcal{T}_i$ такие, что $M_i\tilde{\subset} U_i<\beta$, $M_i\tilde{\subset} V_i<\beta$, $M_i\tilde{\subset} U_i\vee V_i\geqslant\beta$ и $\sup\limits_{X_i}(U_i\wedge V_i)(x_i)<\beta$. Тогда $U=\pi_i^{-1}(U_i)$, $V=$ $=\pi_i^{-1}(V_i)\in\mathcal{T}$, и при этом $M\tilde{\subset} U<\beta$, $M\tilde{\subset} V<\beta$ ввиду нормированности всех нечетких множеств M_j, $j\in J$. Далее, поскольку $M\leqslant\pi_i^{-1}(M_i)$ и $\pi_i^{-1}(M_i)\tilde{\subset} U\vee V\geqslant\beta$, то $M\tilde{\subset} V\vee U\geqslant\beta$. Отсюда, с учетом равенства $\sup\limits_{X}(U\wedge V)(x)=\sup\limits_{X_i}(U_i\wedge V_i)(x_i)$ и следует, что $\beta\in\mathfrak{A}(M)$.

(2.6.15) <u>Замечание</u>. Требование нормированности всех сомножителей является существенным для второй части теоремы. Действительно, пусть $X_1=X_2=\mathbb{N}$ – счетное дискретное топологическое пространство; $M_1\equiv\frac{1}{3}$, $M_2\equiv\frac{1}{2}$. Тогда $S_1(M_1)=[0,\frac{2}{3}]$, $S_1(M_2)=[0,\frac{1}{2}]$, но при этом $M=$ $=M_1\times M_2\equiv\frac{1}{3}$ и, следовательно, $S_1(M)=[0,\frac{2}{3}]$. "Рудиментом" условия нормированности в "четком" прототипе этой теоремы является требование непустоты всех сомножителей.

Б. Степень связности отображений

Хорошо известно, что прообраз связного множества при монотонном открытом отображении связен. Доказываемую ниже теорему (2.6.22) мы рассматриваем как нечеткий аналог этого утверждения. Предварительно нам потребуется распространить понятие спектра и степени связности на случай отображений нечетких пространств.

Пусть (X, τ_X), (Y, τ_Y) – нечеткие пространства, $f: X \to Y$ – непрерывное отображение.

(2.6.16) Определение. Множество $S(f) = \bigcap_y S(f^{-1}(y))$ называется спектром связности, а его дополнение $\mathcal{D}(f) = \bigcup_y \mathcal{D}(f^{-1}(y))$ – спектром несвязности отображения f. Степенью связности отображения f называется число $s(f) = \inf \mathcal{D}(f)$.

(2.6.17) Предложение. Если $p \in \mathcal{D}(f)$, то $(p-\varepsilon, p] \subset \mathcal{D}(f)$ для некоторого $\varepsilon > 0$.

(2.6.18) Предложение. $S(f) \neq \emptyset$; в частности, $0 \in S(f)$ и $s(f) \in S(f)$.

(2.6.19) Теорема. Для каждого $i \in \mathcal{J}$ рассмотрим непрерывное отображение $f_i: X_i \to Y_i$ (X_i, Y_i – нечеткие пространства) и пусть $f = \prod f_i : \prod X_i \to \prod Y_i$ – их произведение. Тогда $S(f) = \bigcap_i S(f_i)$ и, следовательно, $s(f) = \bigwedge_i s(f_i)$.

Доказательство. Воспользовавшись тем, что $f^{-1}(y) = \prod f_i^{-1}(y_i)$ (здесь $y = (y_i)_{i \in \mathcal{J}}$), и теоремой (2.6.14), получаем $S(f) = \bigcap_y S(f^{-1}(y)) = \bigcap_i \bigcap_y S(f_i^{-1}(y_i)) = \bigcap_i S(f_i)$.

В справедливости следующего утверждения легко убедиться непосредственной проверкой.

(2.6.20) Лемма. Пусть $X_0 \subset X$, $\alpha \in I$. Тогда $\mathcal{D}(\alpha X_0) \subset \mathcal{D}(X_0)$ и, следовательно, $S(\alpha X_0) \supset S(X_0)$.

(2.6.21) Следствие. Пусть $X_0 \subset X$. Тогда $\mathcal{D}(X_0) = \bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{D}(\alpha X_0)$, $S(X_0) = \bigcap_{\alpha \in I} S(\alpha X_0)$.

(2.6.22) Теорема. Пусть $f: X \to Y$ – открытое непрерывное отображение и $N \in I^Y$. Тогда, если $\beta \in S(f) \cap S(N)$ и $N \geq_{Y_N} \beta^c$, то $\beta \in S(f^{-1}(N))$. В частности, если $N \geq_{Y_N} (s(f) \wedge s(N))^c$, то $s(f^{-1}(N)) \geq s(N) \wedge s(f)$. (Запись $N \geq_{Y_N} a$ означает, что $N(y) > a$ для каждого $y \in N^{-1}(0,1]$).

Доказательство. Предположим, что $\beta \in S(N) \cap S(f)$ и при этом $\beta \in \mathfrak{D}(f^{-1}(N))$. Пусть $U_1, U_2 \in \tau_X$ таковы, что $f^{-1}(N) \tilde{\subset} U_1 = \gamma_1 < \beta$, $f^{-1}(N) \tilde{\subset} U_2 = \gamma_2 < \beta$, $f^{-1}(N) \tilde{\subset} U_1 \vee U_2 \geq \beta$ и $\sup_X (U_1 \wedge U_2)(x) = \gamma_3 < \beta$ (не ограничивая общности, мы предполагаем, что $Y = Y_N$, $X = X_{f^{-1}(N)}$) и пусть $\gamma = \max\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$.

Покажем, прежде всего, что $N \tilde{\subset} f(U_1) < \beta$. Действительно, в противном случае $N^c(y) \vee f(U_1) \geq \beta$ для всех $y \in Y$. Но, с другой стороны, поскольку $f^{-1}(N) \tilde{\subset} U_1 < \beta$, для некоторой точки $x_0 \in X$ имеем $Nf(x_0) \vee U_1(x_0) < \beta$. Пусть $X_0 = f^{-1}(f(x_0))$ и $A = (Nf(x_0)) X_0$. Тогда $A \tilde{\subset} U_1 < \beta$. Отсюда заключаем, что $f(U_1)(f(x_0)) \geq \beta$ и, следовательно, $U_1(x^*) > \gamma$ для некоторой точки $x^* \in X_0$. Но тогда $U_2(x^*) \leq \gamma_3 < \beta$, а следовательно, $A \tilde{\subset} U_2 \leq A^c(x^*) \vee U_2(x^*) < \beta$. Наконец, $A \tilde{\subset} U_1 \vee U_2 \geq \inf_X f^{-1}(N)^c(x) \vee U_1(x) \vee U_2(x) = f^{-1}(N) \tilde{\subset} U_1 \vee U_2 \geq \beta$. Отсюда легко заключить, что $\beta \in \mathfrak{D}(A)$, а значит (2.6.20), $\beta \in \mathfrak{D}(X_0) \subset \mathfrak{D}(f)$, что противоречит предположению.

Совершенно аналогично устанавливаем неравенство $N \tilde{\subset} f(U_2) < \beta$. Далее, $N \tilde{\subset} f(U_1) \vee f(U_2) \geq ff^{-1}(N) \tilde{\subset} f(U_1 \vee U_2) \geq f^{-1}(N) \tilde{\subset} U_1 \vee U_2 \geq \beta$. Для завершения доказательства осталось проверить, что $\sup_Y (f(U_1) \wedge f(U_2))(y) < \beta$.

Предположим, что $(f(U_1) \wedge f(U_2))y' > \gamma$ и пусть $X' = f^{-1}(y')$, $A' = N(y') \cdot X'$. Тогда $\sup_{X'} U_1(x) > \gamma$, $\sup_{X'} U_2(x) > \gamma$. Поскольку $\sup_X (U_1 \wedge U_2)(x) \leq \gamma$, отсюда можем заключить, что $U_1(x_1) < \beta$, $U_2(x_2) < \beta$ для некоторых точек $x_1, x_2 \in X'$. Воспользовавшись условием $N \geq_{Y_N} \beta^c$, получаем $A \tilde{\subset} U_1 < \beta$, $A \tilde{\subset} U_2 < \beta$. С другой стороны, $A \tilde{\subset} U_1 \vee U_2 \geq f^{-1}(N) \tilde{\subset} U_1 \vee U_2 \geq \beta$, откуда $\beta \in \mathfrak{D}(A) \subset \mathfrak{D}(X') \subset \mathfrak{D}(f)$. Полученное противоречие и завершает доказательство.

(2.6.23) Предложение. Пусть $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ – открытые непрерывные отображения нечетких пространств и $h = g \circ f$. Тогда $S(h) \supset S(f) \cap S(g)$ и, следовательно, $s(h) \geq s(f) \wedge s(g)$.

Доказательство. Из теоремы (2.6.22) следует, что для каждой точки $x \in \mathfrak{X}$ $\mathcal{S}(h^{-1}(x)) = \mathcal{S}(f^{-1}(g^{-1}(x))) \supset \mathcal{S}(f) \cap \mathcal{S}(g^{-1}(x))$.

В. Спектр и степень связности нечетких множеств в топологических пространствах

Пусть (X, T) – топологическое пространство и $M \in I^X$. Для формулировки основного утверждения (теоремы (2.6.24)) нам удобно будет воспользоваться следующим определением связности множеств в топологическом пространстве (подчеркнем, что оно несколько отличается от стандартного (ср., напр., [26])). Подмножество $A \subset X$ будем называть несвязным в пространстве X, если существуют $U_1, U_2 \in T$ такие, что $A \not\subset U_1$, $A \not\subset U_2$, $A \subset U_1 \cup U_2$ и $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. В противном случае A будем называть связным в пространстве X.

(2.6.24) Теорема. Спектр $\mathcal{S}(M)$ состоит из всех таких констант $\beta \in I$, для которых множество $M^{-1}(\beta^c, 1]$ связно в пространстве X_M.

Доказательство. Заметим прежде всего, что для $U \in 2^X$ условие $M \tilde{\subset} U < \beta$ означает, что $M^{-1}(\beta^c, 1] \not\subset U$, и, следовательно, неравенство $M \tilde{\subset} U \geqslant \beta$ равносильно включению $M^{-1}(\beta^c, 1] \subset U$.

Если $\beta \notin \mathcal{S}(M)$, то найдутся $U_1, U_2 \in T$ такие, что $M \tilde{\subset} U_1 < \beta$, $M \tilde{\subset} U_2 < \beta$, $M \tilde{\subset} U_1 \vee U_2 \geqslant \beta$ и $U_1 \wedge U_2 \wedge X_M = \emptyset$. Переписав эти условия в виде $M^{-1}(\beta^c, 1] \not\subset U_1$, $M^{-1}(\beta^c, 1] \not\subset U_2$, $M^{-1}(\beta^c, 1] \subset U_1 \cup U_2$ и $U_1 \cap U_2 \cap X_M = \emptyset$, видим, что множество $M^{-1}(\beta^c, 1]$ несвязно в пространстве X_M. Обратно, предположив, что $M^{-1}(\beta^c, 1]$ несвязно в X_M, легко приходим к условию $\beta \notin \mathcal{S}(M)$.

(2.6.25) Следствие. $\mathcal{S}(M) = 1$ тогда и только тогда, когда для каждого $\gamma > 0$ множество $M^{-1}(\gamma, 1]$ связно в пространстве X_M.

(2.6.26) Следствие. Если $\mathcal{S}(M) = 1$, то пространство X_M связно.

Отсюда и из теоремы 6.I.29 [26] вытекает

(2.6.27) Следствие. Если непрерывное отображение $M : X \to I$ монотонно и либо открыто, либо замкнуто, то $\mathcal{S}(M) = 1$.

(2.6.28) <u>Предложение</u>. Пусть X – наследственно несвязно (т.е. связными в X являются только одноточечные подмножества) и $\sup_x M(x) = a$. Если $|M^{-1}(a)| > 1$, то $S(M) = [0, a^c]$. Если же $M^{-1}(a) = \{x_0\}$, то $S(M) = [0, b^c]$, где $b = \sup_{x \neq x_0} M(x)$.

<u>Доказательство</u>. Если $M^{-1}(a)$ не одноточечно, то для каждого $\varepsilon > 0$ прообраз $M^{-1}(a-\varepsilon, 1]$ несвязен как подмножество пространства X, а тем более, и как подмножество пространства X_M. Следовательно, $a^c + \varepsilon \notin S(M)$. С другой стороны, поскольку $M^{-1}(a, 1] = \emptyset$, то $[0, a^c] \subset S(M)$, а значит, $S(M) = [0, a^c]$.

Предположим теперь, что $M^{-1}(a) = \{x_0\}$ и пусть $b = \sup_{x \neq x_0} M(x)$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ $|M^{-1}(\beta - \varepsilon, 1]| > 1$. Рассуждая как и в первом случае, получаем $b^c + \varepsilon \notin S(M)$. С другой стороны, в этом случае $|M^{-1}(b, 1]| \leq 1$, а следовательно, $[0, b^c] \subset S(M)$. Тем самым равенство $[0, b^c] = S(M)$ установлено.

§ 7. НЕЧЕТКИЕ ПСЕВДОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА. ПСЕВДОМЕТРИЗАЦИЯ НЕЧЕТКИХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

А. Нечеткие псевдометрические пространства

Пусть X – множество, $\mathfrak{X}=\{x^\alpha : x\in X, \alpha\in(0,1]\}$ – совокупность всех его нечетких точек (I.5.I), и пусть $\mathfrak{X}_*:=\mathfrak{X}\cup\{x^0 : x\in X\}$, где $x^0(y)=0$ для всех $y\in X$ (элементы множества $\mathfrak{X}_*$ мы трактуем как обобщенные нечеткие точки множества X).

(2.7.I) Определение. Нечеткой квазиметрикой на множестве называется отображение $\rho : \mathfrak{X}_*\times\mathfrak{X}_*\to[0,+\infty)$, удовлетворяющее следующим трем аксиомам:

(M0) для каждой $x^\alpha\in\mathfrak{X}$ и каждого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что $\rho(x^\alpha, x^\beta)<\varepsilon$ при $\beta\in(\alpha,\alpha+\delta]\cap I$;

(MI) если $\beta\leqslant\alpha$, то $\rho(x^\alpha, x^\beta)=0$;

(M2) $\rho(x^\alpha,z^\gamma)\leqslant\rho(x^\alpha,y^\beta)+\rho(y^\beta,z^\gamma)$ для любых $x,y,z\in X$, $\alpha,\beta,\gamma\in I$.

Нечеткая квазиметрика ρ, удовлетворяющая аксиоме

(M3) $\rho(x^\alpha,y^\beta)=\rho(y^{\beta^c},x^{\alpha^c})$ для любых $x,y\in X$,

называется нечеткой псевдометрикой.

Нечеткая псевдометрика ρ, удовлетворяющая аксиоме

(M4) если $x\neq y$ и $\beta>\alpha$, то $\rho(x^\alpha, y^\beta)>0$,

называется нечеткой метрикой.

Пара (X,ρ) называется, соответственно, нечетким (квази)-(псевдо)метрическим пространством.

(2.7.2) Нечеткая топология, индуцированная нечеткой квазиметрикой. Пусть (X,ρ) – нечеткое квазиметрическое пространство, $x^\alpha\in\mathfrak{X}_*$ и $\varepsilon>0$. Множества $O_\varepsilon(x^\alpha):=\vee\{y^\beta : \rho(x^\alpha,y^\beta)<\varepsilon\}$ и $B_\varepsilon(x^\alpha):=\vee\{y^\beta : \rho(x^\alpha,y^\beta)\leqslant\varepsilon\}$ называем, соответственно, открытой и замкнутой ε-окрестностями нечеткой точки $x^\alpha\in\mathfrak{X}_*$. Нетрудно заметить, что $\mathcal{O}:=\{O_\varepsilon(x^\alpha) : x\in\mathfrak{X}, \varepsilon>0\}$ является базой некоторой нечеткой топологии τ_ρ на X. Будем говорить, что нечеткая топология τ_ρ <u>индуцирована</u> нечеткой квазиметрикой ρ; соответствующее нечеткое топологическое пространство (X,τ_ρ) называем (квази)(псевдо)метризуемым.

(2.7.3) <u>Предложение</u>. Пусть (X,ρ) - нечеткое квазиметрическое пространство и $x^\alpha\in\mathcal{X}$. Тогда для каждого $\varepsilon>0$ нечеткое множество $O_\varepsilon(x^\alpha)$ является s-окрестностью нечеткой точки x^α (т.е. $O_\varepsilon(x^\alpha)(x)>\alpha$ при $\alpha<1$ и $O_\varepsilon(x^1)=1$).

<u>Доказательство</u>. Из (MI) следует равенство $\rho(x^1,x^1)=1$, а следовательно, $O_\varepsilon(x^1)(x)=1$. Если же $0<\alpha<1$, то, согласно (M0), найдется $\beta>\alpha$ такое, что $\rho(x^\alpha,x^\beta)<\varepsilon$, а следовательно, $O_\varepsilon(x^\alpha)(x)\geq\beta>\alpha$.

(2.7.4) <u>Предложение</u>. Если (X,ρ) - нечеткое псевдометрическое пространство, $O_\varepsilon(x^\alpha)(y)=\beta$ и $0<\beta<1$, то $\rho(x^\alpha,y^\beta)=\varepsilon$.

<u>Доказательство</u>. Пусть $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - строго возрастающая последовательность, сходящаяся к β. Из (M2) и (MI) следует, что при $n<m$ $\rho(x^\alpha,y^{\beta_n})\leq\rho(x^\alpha,y^{\beta_m})\leq\varepsilon$, а следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}(x^\alpha,y^{\beta_n})=:\varepsilon'\leq\varepsilon$.

Заметив, что согласно (M2) $\rho(x^\alpha,y^{\beta_n})\leq\rho(x^\alpha,y^\beta)\leq\rho(x^\alpha,y^{\beta_n})+\rho(y^{\beta_n},y^\beta)$, и воспользовавшись тем, что, как следует из (M0) и (M3), $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(y^{\beta_n},y^\beta)=0$, приходим к равенству $\rho(x^\alpha,y^\beta)=\varepsilon'$. Для завершения доказательства остается проверить, что $\varepsilon'=\varepsilon$. Предположив, что $\varepsilon'<\varepsilon$, и воспользовавшись условием (M0), выберем $\gamma>\beta$ так, чтобы $\rho(y^\beta,y^\gamma)<\varepsilon-\varepsilon'$. Но тогда $\rho(x^\alpha,y^\gamma)\leq\rho(x^\alpha,y^\beta)+\rho(y^\beta,y^\gamma)<\varepsilon$, т.е. $y^\gamma\in O_\varepsilon(x^\alpha)$, что противоречит определению β.

(2.7.5) <u>Предложение</u>. Пусть (X,ρ) - нечеткое псевдометрическое пространство и $\alpha=\bigvee_n\alpha_n$. Тогда для каждого $\varepsilon>0$ имеет место равенство $O_\varepsilon(x^\alpha)=\bigvee_{n\in\mathbb{N}}O_\varepsilon(x^{\alpha_n})$.

<u>Доказательство</u>. Пусть $y\in X$ и $\beta:=O_\varepsilon(x^\alpha)(y)$, $\beta_n:=O_\varepsilon(x^{\alpha_n})(y)$, $n\in\mathbb{N}$. Для доказательства предложения нам достаточно установить неравенство $\beta\leq\sup\limits_n\beta_n:=\gamma$. Предположим, что $\gamma<\beta$; тогда $\rho(x^\alpha,y^\gamma)<\varepsilon$. С другой стороны, воспользовавшись (M2) и (MI), получаем, что $\rho(x^{\alpha_n},y^{\beta_n})-$

$-\rho(x^{\alpha_n}, x^{\alpha}) < \rho(x^{\alpha}, y^{\beta_n}) \leq \rho(x^{\alpha}, y^{\delta})$. Учитывая, что, согласно (MO) и (M3), $\inf \rho(x^{\alpha_n}, x^{\alpha}) = 0$, и воспользовавшись (2.7.4), отсюда заключаем, что $\rho(x^{\alpha}, y^{\delta}) \geq \sup\limits_{n} \rho(x^{\alpha_n}, y^{\beta_n}) = \varepsilon$. Полученное противоречие и завершает доказательство.

(2.7.6) <u>Предложение</u>. Пусть (X, ρ) – нечеткое псевдометрическое пространство, $x^{\alpha} \in \mathcal{X}$ и $\varepsilon' > \varepsilon > 0$. Тогда $\overline{O_{\varepsilon}(x^{\alpha})} \leq O_{\varepsilon'}(x^{\alpha})$.

<u>Доказательство</u>. Пусть $x^{\gamma} \tilde{\in} \overline{O_{\varepsilon}(x^{\alpha})}$; тогда каждая q-окрестность нечеткой точки x^{γ} q-совпадает с $O_{\varepsilon}(x^{\alpha})$, а следовательно (2.7.3) нечеткие множества $O_{\delta}(x^{\gamma^c})$ и $O_{\varepsilon}(x^{\alpha})$ q-совпадают. (Без ограничения общности мы здесь можем предполагать, что $0 < \gamma < 1$.) Но это и означает, что найдутся $y \in X$ и $\beta \in I$ такие, что $O_{\delta}(x^{\gamma^c})(y) > \beta$ и $O_{\varepsilon}(x^{\alpha})(y) > \beta^c$. Отсюда, с учетом (M3), заключаем, что $\rho(x^{\gamma^c}, y^{\beta}) < \delta$ и $\rho(y^{\beta}, x^{\alpha^c}) = \rho(x^{\alpha}, y^{\beta^c}) < \varepsilon$, а следовательно, $\rho(x^{\alpha}, x^{\gamma}) = \rho(x^{\gamma^c}, x^{\alpha^c}) \leq \rho(x^{\gamma^c}, y^{\beta}) + \rho(y^{\beta}, x^{\alpha^c}) < \varepsilon + \delta$. Но это, ввиду произвольности $\delta > 0$, означает, что $\rho(x^{\alpha}, x^{\gamma}) \leq \varepsilon < \varepsilon'$, т.е. $x^{\gamma} \in O_{\varepsilon'}(x^{\alpha})$.

(2.7.7) <u>Предложение</u>. Пусть (X, ρ) – нечеткое псевдометрическое пространство. Тогда $B_{\varepsilon}(x^{\alpha})$ – замкнутое нечеткое множество, причем $B_{\varepsilon}(x^{\alpha}) = \bigcap\limits_{\varepsilon' > \varepsilon} O_{\varepsilon'}(x^{\alpha})$.

<u>Доказательство</u>. Включение $B_{\varepsilon}(x^{\alpha}) \subset \bigcap\limits_{\varepsilon' > \varepsilon} O_{\varepsilon'}(x^{\alpha})$ очевидно. Обратно, пусть $y^{\beta} \in \bigcap\limits_{\varepsilon' > \varepsilon} O_{\varepsilon'}(x^{\alpha})$, тогда $\rho(x^{\alpha}, y^{\beta}) < \varepsilon'$ для каждого $\varepsilon' > \varepsilon$, т.е. $\rho(x^{\alpha}, y^{\beta}) \leq \varepsilon$, а следовательно, $B_{\varepsilon}(x^{\alpha}) \supset \bigcap\limits_{\varepsilon' > \varepsilon} O_{\varepsilon'}(x^{\alpha})$. Для завершения доказательства осталось, воспользовавшись (2.7.6), заметить, что $\bigcap\limits_{\varepsilon' > \varepsilon} O_{\varepsilon'}(x^{\alpha}) = \bigcap\limits_{\varepsilon' > \varepsilon} \overline{O_{\varepsilon'}(x^{\alpha})}$.

(2.7.8) <u>Теорема</u>. Каждое нечеткое псевдометрическое пространство (X, ρ) A-регулярно (2.I.42).

<u>Доказательство</u>. Пусть $U \in \mathcal{T}_{\rho}$ и $x^{\alpha} \tilde{\in}_s U$. Тогда, согласно предложениям (2.7.3) и (2.7.6), $x^{\alpha} \tilde{\in}_s O_{\varepsilon/2}(x^{\alpha}) \leq \overline{O_{\varepsilon/2}(x^{\alpha})} \leq O_{\varepsilon}(x^{\alpha}) \leq U$ для некоторого $\varepsilon > 0$, что и означает регулярность пространства (X, ρ).

(2.7.9) <u>Теорема</u>. Каждое нечеткое псевдометрическое пространство (X, ρ) нормально.

Доказательство. Пусть $A \leq U$, где $A \in \tau_\rho^c$ и $U \in \tau$. Для каждого $x^\alpha \tilde{\in}_s A$ зафиксируем $\delta := \delta_{x^\alpha}$ так, чтобы $O_\delta(x^\alpha) \leq U$ и пусть $V = \vee\{O_{\delta/2}(x^\alpha) : x^\alpha \tilde{\in}_s A,\ \delta = \delta_{x^\alpha}\}$. Ясно, что $A \leq V \leq U$. Аналогично, поскольку $U^c \leq A^c$, для каждого $y^\alpha \tilde{\in}_s U^c$ можем зафиксировать $\delta = \delta_{y^\alpha}$ так, чтобы $O_\delta(y^\alpha) \leq A^c$. Положив теперь $W = \vee\{O_{\frac{\delta}{2}}(y^\alpha) : y^\alpha \tilde{\in}_s U^c,\ \delta = \delta_{y^\alpha}\}$, имеем $U^c \leq W \leq A^c$.

Покажем, что построенные таким образом нечеткие множества V и W q-дизъюнктны. Действительно, если бы V и W q-совпадали, то q-совпадали бы и некоторые входящие в определение V и W множества $O_{\frac{\delta}{2}}(x^\alpha)$ и $O_{\delta/2}(y^\beta)$ соответственно. Но это означало бы, что для некоторой нечеткой точки z^γ $\rho(x^\alpha, z^\gamma) < \frac{\delta_{x^\alpha}}{2}$ и $\rho(y^\beta, z^{\gamma c}) < \frac{\delta_{y^\beta}}{2}$, откуда, с учетом (M2) и (M3), вытекало бы, что $\rho(x^\alpha, y^{\beta c}) \leq \rho(x^\alpha, z^\gamma) + \rho(z^\gamma, y^{\beta c}) < max\,(\delta_{x^\alpha}, \delta_{y^\beta})$.

С другой стороны, поскольку $x^\alpha \tilde{\in}_s A$ и $y^\beta \tilde{\in}_s U^c$ (т.е. $U(y) < \beta^c$) и при этом $O_\delta(x^\alpha) \leq U$ и $O_\delta(y^\beta) \leq A^c$, то $\rho(x^\alpha, y^{\beta c}) > \delta_{x^\alpha}$, $\rho(y^\beta, x^{\alpha c}) \geq \delta_{y^\beta}$, а следовательно, $\rho(x^\alpha, y^{\beta c}) \geq max\,(\delta_{x^\alpha}, \delta_{y^\beta})$. Полученное противоречие и доказывает, что $V \leq W^c$. Отсюда легко следует, что $A \leq V \leq \bar{V} \leq U$, т.е. пространство (X, τ_ρ) является нормальным.

(2.7.10) Теорема. Если (X, ρ) – нечеткое псевдометрическое пространство, то топологическое пространство $(X, \iota\tau_\rho)$ псевдометризуемо.

Доказательство. Для каждого $\alpha \in (0,1)$ определим на X псевдометрику $d_\alpha : X \times X \to [0, +\infty)$ равенством $d_\alpha(x,y) := \rho(x^\alpha, y^\alpha) + \rho(x^{\alpha c}, y^{\alpha c})$. Пусть $\{\alpha_i : i \in \mathbb{J}\}$ – некоторое счетное плотное подмножество в I и пусть T_i – топология на X, порожденная псевдометрикой d_{α_i}. Положим $T = \sup_{i \in N} T_i$. Поскольку супремум псевдометризуемых топологий, как известно, псевдометризуем, для доказательства теоремы достаточно проверить равенство $\iota\tau_\rho = \sup_{i \in N} T_i$.

Положим $U_i(x, \delta) := \{y : d_{\alpha_i}(x,y) < \delta\}$. Тогда, как нетрудно установить, непосредственной проверкой, имеют место следующие включения:

$U_i(x,\delta) \subset O_\delta(x^{\alpha_i})^{-1}(\alpha_i, 1] \cap O_\delta(x^{\alpha_i^c})^{-1}(\alpha_i^c, 1]$ и

$$U_i(x,\varepsilon) \supset O_{\varepsilon/2}(x^{\alpha_i})^{-1}(\alpha_i,1] \cap O_{\varepsilon/2}(x^{\alpha_i^c})^{-1}(\alpha_i^c,1].$$

Остается заметить, что семейство $\mathcal{U}=\{U_i(x,\varepsilon): x\in X, \varepsilon>0, i\in\mathbb{N}\}$ является предбазой топологии $\sup\limits_{i\in N} T_i$, а семейство $\mathcal{O}=\{O_\varepsilon(x^{\alpha_i})^{-1}(\alpha_i,1]\cap$ $\cap O_\varepsilon(x^{\alpha_i^c})^{-1}(\alpha_i^c,1]\}$ служит предбазой топологии $\iota\tau_\rho$.

(2.7.II) Теорема. Нечеткое метризуемое пространство (X , $\mathcal{T}_\rho$) является AT_1-пространством (2.I.30).

Доказательство. Зафиксировав нечеткую точку y^β, положим $A:=$ $:=(y^\beta)^c$. Для каждой нечеткой точки $x^\alpha \tilde{\in} A$ имеет место неравенство $y^{\beta^c} \not\leq x^\alpha$, а следовательно, согласно (M4), $\rho(x^\alpha, y^{\beta^c})>0$. Но тогда можно указать такое $\varepsilon>0$, что $y^{\beta^c} \tilde{\notin} O_\varepsilon(x^\alpha)$, откуда $A=\vee\{O_\varepsilon(x^\alpha): x^\alpha\tilde{\in} A\}$. Но это означает, что A – открытое нечеткое множество, а следовательно, нечеткая точка y^β замкнута.

Б. Псевдометризация нечетких пространств

Целью этого раздела является формулировка и доказательство нечеткого аналога классической метризационной теоремы Нагата-Смирнова [80], [98].

(2.7.I2) Определение. Семейство $\mathcal{A}$ нечетких подмножеств нечеткого топологического пространства (X , τ) назовем локально конечным, если для каждого $x^\alpha\in\mathcal{X}$ найдется s-окрестность $U\in\tau$, которая q-совпадает не более чем с конечным числом элементов семейства $\mathcal{A}$. Семейство $\mathcal{A}$ нечетких подмножеств, представимое в виде счетного объединения локально конечных подсемейств, называется σ-локально конечным.

(2.7.I3) Предложение. Если $\mathcal{A}=\{A_i : i\in J\}$ – локально конечное семейство в нечетком пространстве (X , τ), то $\overline{\bigvee_{i\in J} A_i} = \bigvee_{i\in J}\overline{A_i}$.

Доказательство. Включение $\bigvee_{i\in J}\overline{A_i}\leq\overline{\bigvee_{i\in J}A_i}$ очевидно. Обратно, пусть $x^\alpha\tilde{\in}\overline{\bigvee_{i\in J}A_i}$, тогда, как следует из (I.5.I0), каждая s-окрестность нечеткой точки x^{α^c} q-совпадает с $\bigvee_{i\in J}A_i$ (без ограничения общности можно предполагать, что $\alpha<1$). Выберем конечное подсемейство $\mathcal{A}_0=\{A_{i_1},\dots,A_{i_k}\}\subset\mathcal{A}$ и s-окрестность $U\in\mathcal{T}$ нечеткой точки x^α, которая не q-совпадает ни с одним $A_i\in\mathcal{A}\setminus\mathcal{A}_0$. Но тогда, как нетрудно заметить, $x^\alpha\tilde{\in}\bigvee_{j=1}^{k}A_{i_j}=\bigvee_{j=1}^{k}\overline{A_{i_j}}\leq\bigvee_{i\in J}\overline{A_i}$.

(2.7.14) Предложение. Если $(X,\mathcal{T})$ – регулярное нечеткое пространство с σ-локально конечной базой, то $(X,\mathcal{T})$ нормально.

Доказательство. Пусть $\mathcal{B}=\cup\mathcal{B}_n$ – σ-локально конечная база и M,N – q-дизъюнктные замкнутые нечеткие множества пространства X. Для каждой нечеткой точки $x^\alpha\tilde{\in}_s M$, $\alpha<1$, найдем $m\in\mathbb{N}$ и $O^m_{x^\alpha}\in\mathcal{B}_m$ такие, что $x^\alpha\tilde{\in}_s O^m_{x^\alpha}\leq\overline{O^m_{x^\alpha}}\leq N^c$. Аналогично, для каждой нечеткой точки $y^\beta\tilde{\in}_s N$, $\beta<1$, найдутся $n\in\mathbb{N}$ и $O^n_{y^\beta}\in\mathcal{B}_m$ такие, что $y^\beta\tilde{\in}_s O^n_{y^\beta}\leq\overline{O^n_{y^\beta}}\leq N^c$. Для каждого $k\in\mathbb{N}$ положим $O^k_M:=\bigvee\{O^m_{x^\alpha}: m=k, x^\alpha\tilde{\in}_s M, \alpha<1\}$, $O^k_N:=\bigvee\{O^n_{y^\beta}: n=k, y^\beta\tilde{\in}_s N, \beta<1\}$, и пусть $U^k_M:=O^k_M\wedge\overline{O^1_N}^c\wedge\dots\wedge\overline{O^k_N}^c$; $U^k_N:=O^k_N\wedge\overline{O^1_M}^c\wedge\dots\wedge\overline{O^k_M}^c$. Тогда, как нетрудно заметить, нечеткие множества $U_M:=\bigvee_{k\in\mathbb{N}}U^k_M$ и $U_N:=\bigvee_{k\in\mathbb{N}}U^k_N$ открыты, q-дизъюнктны и $M\leq U_M$, $N\leq U_N$, что и означает нормальность пространства $(X,\mathcal{T})$.

(2.7.15) Теорема. Регулярное нечеткое пространство с σ-локально конечной базой нечетко псевдометризуемо.

Доказательство. Пусть $\mathcal{B}=\cup\mathcal{B}_n$ – σ-локально конечная база пространства X. Зафиксировав $m,n\in\mathbb{N}$ и $U\in\mathcal{B}_n$, положим $V_U:=\bigvee\{O: O\in\mathcal{B}_m, \overline{O}\leq U\}$. Поскольку $\mathcal{B}_m$ локально конечно, $\overline{V}_U\leq U$. Воспользовавшись предложением (2.7.14) и в полной аналогии с тем, как это делается при доказательстве классической леммы Урысона, построим "шкалу" открытых нечетких множеств $\{W_q:=W^U_q: q\in\mathbb{Q}\cap(0,1)\}$ так, чтобы $\overline{V}_U\leq W_q\leq\overline{W_q}\leq W_{q'}\leq U$ при $q<q'$. Определим отображение $f_U:\mathcal{X}_*\to[0,1]$, положив $f_U(x^\alpha):=\inf\{q: x^\alpha\tilde{\in}W_q\}$, и зададим нечеткую квазиметрику $g_U:\mathcal{X}_*\times\mathcal{X}_*\to[0,1]$ равенством $g_U(x^\alpha,y^\beta)=\max(f_U(y^\beta)-f_U(x^\alpha),0)$.

Заметив, что $U^c\leq\overline{V}_U^c$, и что $\{W^*_q: q\in\mathbb{Q}\cap(0,1)\}$, где $W^*_q=\overline{W}^c_{q^c}$, может рассматриваться как соответствующая шкала, можем определить отображения $f^*_U:\mathcal{X}_*\to[0,1]$ и $g^*_U:\mathcal{X}_*\times\mathcal{X}_*\to[0,1]$ равенствами $f^*_U(x^\alpha)=$

$= \inf\{q : x^\alpha \tilde{\in} W_q^*\}$ и $g_u^*(x^\alpha, y^\beta) = \max(f_u^*(y^\beta) - f_u^*(x^\alpha), 0)$. Ясно, что g_u^* также является нечеткой квазиметрикой и при этом $g_u^*(x^\alpha, y^\beta) = g_u(x^{\alpha^c}, y^{\beta^c})$. Но тогда, очевидно, отображение $\rho_u : \mathfrak{X}_* \times \mathfrak{X}_* \to [0,1]$, заданное равенством $\rho_u(x^\alpha, y^\beta) = \frac{1}{2}(g_u(x^\alpha, y^\beta) + g_u^*(x^\alpha, y^\beta))$, является нечеткой псевдометрикой на X . Построим такие нечеткие псевдометрики для всех $U \in \mathcal{B}_n$ (при фиксированном $m \in N$) и положим $\rho_m^n(x^\alpha, y^\beta) = \sup\{\rho_U(x^\alpha, y^\beta) : U \in \mathcal{B}_n\}$. Легко убедиться, что ρ_m^n также является нечеткой псевдометрикой.

Таким образом, получаем семейство $\{\rho_m^n : m, n \in N\}$ нечетких псевдометрик. Пусть τ_m^n – нечеткая топология, индуцированная нечеткой псевдометрикой ρ_m^n. По аналогии с тем, как это делается в общей топологии, нетрудно показать, что нечеткая топология $\sup\limits_{m,n} \tau_m^n$ также индуцируется некоторой нечеткой метрикой ρ, т.е. $\sup\limits_{m,n} \tau_m^n = \tau_\rho$. Для завершения доказательства осталось проверить, что $\tau_\rho = \tau$.

Для доказательства включения $\tau_\rho \subset \tau$ зафиксируем $m, n \in N$ и покажем, что каждая ε-окрестность $O_\varepsilon(x^\alpha)$ является окрестностью нечеткой точки x^α и в нечеткой топологии τ. Из локальной конечности семейства $\mathcal{B}_n$ следует, что лишь для конечного семейства $U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{B}_n$ могут иметь место неравенства $f_{U_1}(x^\alpha) < 1, \ldots, f_{U_k}(x^\alpha) < 1$. Для каждого из этих нечетких множеств U_l , $l = 1, \ldots, k$, выберем $W_{q_l}^{U_l}$ из соответствующей шкалы нечетких множеств так, чтобы для всех $y^\beta \in W_{q_l}^{U_l}$ выполнялось неравенство $g_{U_l}(x^\alpha, y^\beta) < \varepsilon$. С другой стороны, найдется окрестность U нечеткой точки x , которая q-совпадает не более чем с конечным числом элементов семейства $\mathcal{B}_n$. Пусть $U_{k+1}, \ldots, U_{k+j}$ – те из элементов этого семейства, с которыми U q-совпадает, и выберем из соответствующих шкал нечеткие множества $W_{q_{k+l}}^{*U_{k+l}}$, $l = 1, \ldots, j$, $W_{q_{k+l}}^{*U_{k+l}} \leq \bar{U}_{k+j}^c$ так, чтобы $g_{U_{k+l}}^*(x^\alpha, y^\beta) < \varepsilon$ для всех $y^\beta \in W_{q_{k+l}}^{*U_{k+l}}$, $l = 1, \ldots, j$. Положим $N(x^\alpha) := U \wedge W_{q_1}^{U_1} \wedge \ldots \wedge W_{q_k}^{U_k} \wedge W_{q_{k+1}}^{*U_{k+1}} \wedge \ldots \wedge W_{q_{k+j}}^{*U_{k+j}}$. Нетрудно заметить, что $N(x^\alpha)$ является q-окрестностью нечеткой точки x^α и при этом $\rho_m^n(x^\alpha, y^\beta) < \varepsilon$ для каждого $y^\beta \tilde{\in} N(x^\alpha)$. Но это и означает, что $N(x^\alpha) \subset O_\delta(x^\alpha)$, а следовательно, $\tau_\rho \subset \tau$.

Для доказательства обратного включения предположим, что $O \in \tau$ и $x^\alpha \tilde{\in}_s O$. Поскольку пространство (X , τ) регулярно и $\mathcal{B}$ – его база, можем найти $m, n \in N$ и $V \in \mathcal{B}_m$, $U \in \mathcal{B}_n$ такие, что $x^\alpha \tilde{\in}_s V \leqslant \overline{V} \leqslant U \leqslant O$. Легко заметить, что, если $y^\beta \tilde{\in} O$, то для соответствующей функции f_U имеет место равенство $f_U(y^\beta) = 1$, а следовательно, $\rho_m^n(x^\alpha, y^\beta) = 1$. Но это означает, что, если $\rho_m^n(x^\alpha, y^\beta) < 1$, то $y^\beta \tilde{\in} O$, а следовательно, $O_1(x^\alpha) \leqslant O$. Таким образом, $O \in \tau_\rho$, а значит, $\tau \subset \tau_\rho$.

<u>Замечание</u>. Остается невыясненным вопрос о справедливости обратного к (2.7.15) утверждения: верно ли, что каждое нечеткое псевдометризуемое пространство обладает σ-локально конечной базой?

(2.7.16) <u>Теорема</u>. Если (X , τ) – регулярное нечеткое пространство с σ-локально конечной базой, каждая нечеткая точка в котором замкнута, то (X , τ) нечетко метризуемо.

<u>Доказательство</u>. Достаточно проверить, что в этих предположениях нечеткая псевдометрика, построенная в доказательстве (2.7.15), является нечеткой метрикой.

Пусть $x^\alpha, y^\beta \in \mathcal{X}_*$ и либо $x \neq y$, либо $\beta > \alpha$. Воспользовавшись тем, что нечеткая точка y^β замкнута, можем найти $\delta > 0$ такое, что $y^\beta \tilde{\notin} O_\delta(x^\alpha)$. Но это и означает, что $\rho(x^\alpha, y^\beta) > 0$.

Пусть теперь $\alpha = 0$ и $\beta \neq 1$; тогда $\rho(x^0, y^\beta) = \rho(y^{\beta^c}, x^1) > 0$. Наконец, в случае, когда $\alpha = 0$ и $\beta = 1$, зафиксировав произвольным образом $\gamma \in (0,1)$, имеем $\rho(x^0, y^1) = \rho(x^0, y^1) + \rho(y^1, y^\gamma) \geqslant \rho(x^0, y^\gamma) > 0$.

(2.7.18) <u>Замечание</u>. Наряду с нашим подходом в литературе по нечеткой топологии встречается и ряд других подходов к проблеме нечеткой (псевдо)метрики и (псевдо)метризации нечетких топологических пространств. Все известные нам подходы можно разделить на две группы. Первую группу составляют работы, в которых, так же как и при нашем подходе, нечеткая псевдометрика понимается как удовлетворяющая некоторым аксиомам функция, сопоставляющая паре –"нечетких объектов" (в нашем случае – паре обобщенных нечетких точек) некоторое вещественное число. К этому направлению принадлежат работы [8], [18], [49]. Вторую группу образуют работы, в которых нечеткая псевдометрика определяется как удовлетворяющая некоторым аксиомам функция, которая паре объектов (четких или, реже, нечетких) сопоставляет некоторое нечеткое число. Разработке этого направления посвящены работы [28], [43], [25]. Идеи второго подхода используются в Дополнении.

§ 8. НЕЧЕТКИЕ КРУЖЕВНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Класс кружевных пространств, введенный в 1961 г. Сидером и подробно исследованный Ц.Борджесом [12], является одним из наиболее важных классов обобщенных метризуемых пространств (см., напр. [5]). Здесь мы распространяем понятие кружевного пространства на категорию нечетких пространств. Актуальность концепции кружевного нечеткого пространства, наряду с моментами, аналогичными общетопологическим (близость классу (псевдо)метрических пространств, инвариантность относительно важнейших операций и т.п.) объясняется еще и тем, что в определении (нечеткого) кружевного пространства не используются точки (нечеткие или обычные), что является немаловажным преимуществом – как концептуального, так и технического характера, в контексте нечеткой топологии.

(2.8.1) Определение. Нечеткое пространство $(X, \mathcal{T})$ называется кружевным, если каждому $U \in \mathcal{T}$ можно сопоставить последовательность $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}$, причем таким образом, что

(1) $\overline{U}_n \leq U$ для каждого $n \in \mathbb{N}$,

(2) $\bigvee_n V_n = U$,

(3) если $U \leq V \in \mathcal{T}$, то $U_n \leq V_n$ для каждого $n \in \mathbb{N}$.

При этом без ограничения общности можно считать, что $U_n \leq V_n$ для всех $U \in \mathcal{T}$, $n \in \mathbb{N}$.

(2.8.2) Предложение. Подпространство кружевного нечеткого пространства является кружевным.

(2.8.3) Определение. Пусть $(X, \mathcal{T})$ – нечеткое пространство и $\mathcal{N} \subset \mathcal{T} \times I^X$. Тогда $\mathcal{N}$ называется пара-базой пространства $(X, \mathcal{T})$, если для каждого $U \in \mathcal{T}$ найдется подсемейство $\mathcal{N}_U \subset \mathcal{N}$ такое, что $U = \bigvee\{V_1 : (V_1, V_2) \in \mathcal{N}_U\} = \bigvee\{V_2 : (V_1, V_2) \in \mathcal{N}_U\}$. Семейство $\mathcal{N} \subset \mathcal{T} \times I^X$ назовем обрамленным, если $\overline{\bigvee\{V_1 : (V_1, V_2) \in \mathcal{N}'\}} \leq \bigvee\{V_2 : (V_1, V_2) \in \mathcal{N}'\}$

для каждого $\mathcal{N}'\subset\mathcal{N}$. Семейство, представимое в виде счетного объединения обрамленных семейств, назовем σ-обрамленным.

(2.8.4) <u>Предложение</u>. Нечеткое пространство (X,τ) является кружевным тогда и только тогда, когда оно обладает σ-обрамленной пара-базой.

<u>Доказательство</u>. Пусть $\mathcal{N}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\mathcal{N}_k$ – σ-обрамленная пара-база в (X,τ). Для каждого $U\in\tau$ положим $U_n=\vee\{V_1:(V_1,V_2)\in\mathcal{N}_n, V_2\leqslant U\}$. Легко понять, что $U\to(U_n)_{n\in N}$ является кружевом, а следовательно, $\mathcal{N}=\cup\mathcal{N}_n$ – σ-обрамленная пара-база в (X,τ).

Обратно, пусть (X,τ) – кружевное нечеткое пространство. Для каждого $n\in N$ положим $\mathcal{N}_n=\{(U_n,U):U\in\tau\}$. Легко проверяется, что каждое семейство $\mathcal{N}_n$ является обрамленным.

(2.8.5) <u>Лемма</u>. Пусть (X,T) – топологическое пространство, $M\subset X$ и $\alpha\in I$. Тогда замыкание $\widetilde{\alpha M}$ нечеткого множества αM в пространстве $(X,\lambda T)$ совпадает с $\alpha\bar{M}$, где $\bar{M}$ – замыкание M в (X,T).

<u>Доказательство</u>. Заметим прежде всего, что $\alpha\bar{M}$ замкнуто в λT, а следовательно, $\widetilde{\alpha M}\leqslant\alpha\bar{M}$. Предположим, что $\widetilde{\alpha M}\neq\alpha\bar{M}$. Тогда найдется $x\in\bar{M}$ такая, что $\widetilde{\alpha M}(x)<\alpha$, а следовательно, $(1-\widetilde{\alpha M})(x)>1-\alpha$. Но тогда $(1-\widetilde{\alpha M})^{-1}(1-\alpha,1]$ является открытой (в (X,T)) окрестностью точки x , не пересекающейся с M . Полученное противоречие и завершает доказательство.

Из предыдущей леммы легко вытекает

(2.8.6) <u>Лемма</u>. Пусть (X,T) – топологическое пространство, $X=M_0\supset M_1\supset\ldots\supset M_n\supset M_{n+1}=\emptyset$, $0<\alpha_0<\alpha_1<\ldots<\alpha_n\leqslant 1$ и пусть $M\in I^X$ определено равенствами $M(x)=\alpha_i$ при $x\in M_i\setminus M_{i+1}$. Тогда $\widetilde{M}(x)=\alpha_i$ при $x\in\bar{M}_i\setminus\bar{M}_{i+1}$ ($\widetilde{M}$ – замыкание нечеткого множества M в $(X,\lambda T)$).

(2.8.7) <u>Теорема</u>. Топологическое пространство (X,T) является кружевным тогда и только тогда, когда нечеткое пространство $(X,\lambda T)$ является кружевным.

<u>Доказательство</u>. Предположим, что (X,T) – кружевное; при этом

без ограничения общности можем считать, что $\overline{U}_n \subset U_{n+1}$ для всех $U \in T$ и $n \in N$. Зафиксировав $V \in \tau$, рассмотрим для каждого $\kappa = 0,1,\dots,2^m-1$, $m \in N$, открытое множество $V^{(\kappa,m)} = V^{-1}(\kappa \cdot 2^{-m}, 1]$ и пусть $(V_n^{(\kappa,m)})_{n\in N}$ - соответствующее кружево. Положим $V_n = V_n^1 \vee \dots \vee V_n^{2^n}$, где $V_n^\kappa = \kappa \cdot 2^{-n} V_n^{(\kappa,n)}$; тогда, как нетрудно заметить, $V = \bigvee_n V_n$. Применяя лемму (2.8.5) и замечая, что $V^{(\kappa,n)} = V^{(2\kappa,n+1)}$, получаем, что $\widetilde{V}_n^\kappa = \kappa \cdot 2^{-n} \overline{V}_n^{(\kappa,n)} \leq \kappa \cdot 2^{-n} V_{n+1}^{(\kappa,n)} \leq$ $\leq (2\kappa) 2^{-(n+1)} V_{n+1}^{(2\kappa,n+1)} \leq V_{n+1}^{2\kappa} \leq V$ и, следовательно, $\overline{V}_n = \overline{V}_n^1 \vee \dots \vee \overline{V}_n^{2^n} \leq V$. (Здесь, как и в предыдущих леммах, через $\widetilde{A}$ обозначается замыкание множества A в $(X, \lambda T)$, а через $\overline{A}$ - его замыкание в (X, T)). При этом из конструкции ясно, что, если $V \leq U$, то $V_n \leq U_n$ для всех $n \in N$, и, следовательно, $V \to (V_n)_{n\in N}$ действительно является кружевом в $(X, \lambda T)$.

Обратно, предположим, что нечеткое пространство $(X, \lambda T)$ кружевное. Зафиксировав множество $U \in T$, рассмотрим его кружево $(U_n)_{n\in N}$ в пространстве $(X, \lambda T)$ и покажем, что тогда $(V_n = U_n^{-1}(\frac{1}{2}, 1])_{n\in N}$ является кружевом множества U в пространстве (X, T).

Заметим прежде всего, что $\bigcup_n V_n = \bigcup_n (U_n^{-1}(\frac{1}{2}, 1]) = (\bigvee_n U_n)^{-1}(\frac{1}{2}, 1] =$ $= U^{-1}(0,1] = U$. Для доказательства включения $\overline{V}_n \subset U_n$ рассмотрим нечеткое множество $\frac{1}{2} V_n$ и заметим, что, согласно (2.8.5), $\widetilde{\frac{1}{2} V_n} = \frac{1}{2} \overline{V}_n$. С другой стороны, поскольку, очевидно, для каждого $A \in (\lambda T)^c$ множество $A^{-1}(0,1]$ замкнуто в (X, T), получаем $\overline{V}_n = \widetilde{V}_n^{-1}(0,1] \subset \widetilde{U}_n^{-1}(0,1] \subset$ $\subset U^{-1}(0,1] = U$. Наконец, если $U \subset U'$, $U, U' \in T$, то $U_n \leq U_n'$, а следовательно и $V_n = U_n^{-1}(\frac{1}{2}, 1] \subset V_n' = U_n'^{-1}(\frac{1}{2}, 1]$.

(2.8.8) <u>Предложение</u>. Пусть (X, τ) - кружевное нечеткое пространство, $U \in T$ и $A \in \tau^c$. Тогда найдется $U_A \in \tau$ такое, что $U_A \leq U$ и $A \wedge U \leq U_A \leq \overline{U}_A \leq U \vee A$. При этом нечеткие множества U_A могут быть выбраны согласованным образом в том смысле, что, если $U \leq V$ и $A \leq B \in \tau^c$, то $U_A \leq V_B$.

<u>Доказательство</u>. Пусть $U_A = \bigvee_n (U_n \wedge (1 - \overline{(1-A)_n}))$. Ясно, что, если $U \leq V$ и $A \leq B$, то $U_A \leq U_B$. Для доказательства неравенства $A \wedge U \leq U_A$

предположим, что $(A\wedge U)(x) > U_A(x)$ в некоторой точке $x\in X$. Тогда найдется $\varepsilon>0$ такое, что $U(x)-\varepsilon > U_A(x)$ и следовательно, $U_n(x)-\varepsilon > U_A(x)$ для некоторого $n\in\mathbb{N}$. Поскольку $1-\overline{(1-A)_n}\geqslant A$, отсюда следует, что $(U_n\wedge(1-\overline{(1-A)_n}))(x) > U_A(x)$, что противоречит определению U_A.

Для доказательства неравенства $\overline{U}_A\leqslant U\vee A$ предположим, что $\overline{U}_A(x) > (U\vee A)(x)$ при некотором $x\in X$. Тогда найдется $\varepsilon>0$ такое, что $\overline{U}_A(x) > A(x)+\varepsilon$. Зафиксируем $n_0\in\mathbb{N}$ так, чтобы $(1-A)(x) < (1-A)_{n_0}(x)+\varepsilon$, тогда $A(x)+\varepsilon > 1-(1-A)_{n_0}(x)$. Предполагая кружево возрастающим, имеем $1-\overline{(1-A)_n}\leqslant 1-(1-A)_{n_0}$ при $n\geqslant n_0$, а следовательно, $\overline{\bigvee_{n\geqslant n_0}(U_n\wedge(1-\overline{(1-A)_n}))}\leqslant 1-(1-A)_{n_0} < A(x)+\varepsilon$. С другой стороны, $\overline{\bigvee_{n<n_0}(U_n\wedge(1-\overline{(1-A)_n}))} = \bigvee_{n<n_0}\overline{(U_n\wedge(1-\overline{(1-A)_n}))}\leqslant U$. Из полученных неравенств вытекает $\overline{U}_A(x) = \overline{\bigvee_{n}(U_n\wedge(1-\overline{(1-A)_n}))}(x) = \bigvee_{n<n_0}\overline{(U_n\wedge(1-\overline{(1-A)_n}))}(x)\vee\left(\overline{\bigvee_{n\geqslant n_0}(U_n\wedge(1-\overline{(1-A)_n}))}\right)(x)\leqslant (U\vee(A+\varepsilon))(x) < \overline{U}_A(x)$. Полученное противоречие и завершает доказательство.

(2.8.9) <u>Следствие</u>. Пусть (X,τ) - кружевное нечеткое пространство, $U\in\tau$, $A\in\tau^c$, причем $A\leqslant U$. Тогда найдется $U_A\in\tau$, удовлетворяющее неравенству $A\leqslant U_A\leqslant\overline{U}_A\leqslant U$. При этом нечеткие множества U_A могут быть выбраны согласованным образом в том смысле, что, если $U\leqslant V$ и $A\leqslant B$, то $U_A\leqslant V_B$.

(2.8.10) <u>Предложение</u>. Если (X,τ) - кружевное пространство, то кружево может быть выбрано таким образом, что $\overline{U}_n\leqslant U_{n+1}$ для каждого $U\in\tau$ и каждого $n\in\mathbb{N}$.

<u>Доказательство</u>. Пусть $U\to(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - произвольное кружево в (X,τ). Построим по индукции новое кружево $U\to(U'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ следующим образом. Для каждого $U\in\tau$ положим $U_1=U$ и пусть $U'_{n+1}=U_{A_n}$, где $A_n=\overline{U_{n+1}\vee U'_n}$. Нетрудно проверить, что определенное таким образом кружево обладает нужным свойством.

(2.8.11) <u>Предложение</u>. Пусть (X,τ) - кружевное нечеткое пространство и (M,τ^M) - его замкнутое подпространство. Пусть $U^M\to(\varphi_n(U^M))_{n\in\mathbb{N}}$ - кружево в (M,τ^M), где $U\in\tau$ и $U^M=U\wedge M\in\tau^M$. Тогда существует продолжение этого кружева до кружева $U\to(\varphi_n(U))_{n\in\mathbb{N}}$

в пространстве (X, τ) такое, что

(а) $(\varphi_n(U))^M = \varphi_n(U^M)$;

(б) $\overline{(\varphi_n(U))^M} = \overline{\varphi_n(U^M)}$;

(в) если $U \leq V$ и $\varphi_n(U^M) \leq \varphi_n(V^M)$, то $\varphi_n(U) \leq \varphi_n(V)$ для всех $n \in N$.

Доказательство. Пусть $U \in \tau$ и $(U_n)_{n \in N}$ – соответствующее кружево. Нетрудно проверить, что $(U \wedge M^c) \vee \varphi_n(U^M) \in \tau$, а следовательно, $\varphi_n(U)$ может быть определено равенством:

$$\varphi_n(U) = (U \wedge M^c)_n \vee ((U \wedge M^c) \vee \varphi_n(U^M))\, \overline{\varphi_n(U^M)}.$$

Непосредственная проверка показывает, что $(\varphi_n(U))_{n \in N}$ является кружевом в (X, τ), удовлетворяющим условиям (а), (б) и (в).

(2.8.12) Теорема. Пусть (X, τ) и (Y, σ) – нечеткие пространства и $f: X \to Y$ – замкнутая непрерывная сюръекция. Тогда, если пространство (X, τ) кружевно, то и пространство (Y, σ) кружевное.

Доказательство. Для каждого $V \in \sigma$ определим кружево $V \to (V_n)_{n \in N}$ следующим образом. Пусть $U = f^{-1}(V)$ и $U \to (U_n)_{n \in N}$ – соответствующее кружево в (X, τ). Тогда $f^{-1}f(\bar{U}_n) =: A_n$ является замкнутым нечетким множеством в (X, τ). Положим $V_n = 1 - (\overline{1 - f(U_{A_n})})$ и покажем, что $V \to (V_n)_{n \in N}$ является кружевом в (Y, σ). Заметим прежде всего, что, поскольку отображение f замкнуто, то $\overline{V_n} = \overline{1 - (\overline{1 - f(U_{A_n})})} \leq \overline{1 - (1 - f(U_{A_n}))} = \overline{f(U_{A_n})} = f(U_{A_n}) \leq f(U) = V$.

Далее, воспользовавшись тем, что f – замкнутая сюръекция, нетрудно заметить, что $f(A_n) \leq 1 - (\overline{1 - f(U_{A_n})}) = V_n$. Но тогда $\bigvee_n V_n \geq \bigvee_n f(A_n) = f(\bigvee_n A_n) = f(\bigvee_n f^{-1}f(\bar{U}_n)) \geq f(\bigvee_n \bar{U}_n) = f(U) = V$.

Наконец, если $V \leq V' \in \sigma$, то $U = f^{-1}(V) \leq U' = f^{-1}(V')$, а следовательно, $U_n \leq U'_n$ и $A_n \leq A'_n$ для каждого $n \in N$. Но тогда, воспользовавшись предложением (2.8.8), заключаем, что $U_{A_n} \leq U'_{A'_n}$, а следовательно, $f(U_{A_n}) \leq f(U'_{A'_n})$ и, значит, $V_n \leq V'_n$.

(2.8.13) Теорема. Произведение счетного семейства кружевных нечетких пространств является кружевным.

Доказательство. Пусть для каждого $n \in N$ (X_n, τ_n) – кружевное нечеткое пространство, и $(X,\tau)=\prod_n (X_n,\tau_n)$ — их произведение. В каждом пространстве (X_n,τ_n), $n\in\mathbb{N}$, зафиксируем σ-обрамленную пара-базу $\mathcal{N}=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\mathcal{N}_n^k$. Поскольку объединение двух обрамленных семейств, очевидно, является обрамленным, без ограничения общности можем считать, что $\mathcal{N}_n^k\subset\mathcal{N}_n^{k+1}$. Положим $\mathcal{N}^k=\{(V_1=\mathcal{P}_1^{-1}(U_1^{1,k})\wedge\ldots\wedge\mathcal{P}_m^{-1}(U_m^{1,k}),\ V_2=$ $=\mathcal{P}_1^{-1}(U_1^{2,k})\wedge\ldots\wedge\mathcal{P}_m^{-1}(U_m^{2,k}):\ (U_j^{1,k},U_j^{2,k})\in\mathcal{N}_j^k,\ j=1,\ldots,m;\ m\in\mathbb{N}\}$. Непосредственной проверкой нетрудно установить, что $\mathcal{N}$ является пара-базой в пространстве (X,τ) и при этом каждое $\mathcal{N}^k$ является обрамленным, а следовательно (2.8.4), пространство (X,τ) кружевное.

Пусть (X,τ_X), (Y,τ_Y) — нечеткие пространства, $A\in\tau_X^c$ и $f: A\to Y$ — непрерывное отображение. Рассмотрим отношение ρ на $X\oplus Y$, нетривиальными классами эквивалентности которого служат множества $f^{-1}(y)\cup\{y\};\ y\in Y$. Соответствующее фактор-пространство (I.2.I8) $X\oplus Y/\rho$ обозначим через $X\cup_f Y$.

Пусть $i:X\to X\oplus Y$, $e:Y\to X\oplus Y$ — естественные вложения, $q: X\oplus Y\to X\cup_f Y$ — фактор-проекция и $h=q\circ i$, $k=q\circ e$. Легко убедиться в справедливости следующих двух утверждений:

(2.8.I4) <u>Лемма</u>. Нечеткое множество $V\in I^{X\cup_f Y}$ открыто (замкнуто) в $X\cup_f Y$ тогда и только тогда, когда $h^{-1}(V)\in\tau_X$ и $k^{-1}(V)\in\tau_Y$ (соответственно, когда $h^{-1}(V)\in\tau_X^c$ и $k^{-1}(V)\in\tau_Y^c$).

(2.8.I5) <u>Лемма</u>. Если $V\in I^Y$ и $U\in I^X$, то

(а) $h^{-1}(k(V))=f^{-1}(V)$;

(б) $k^{-1}(h(U))=f(U\wedge A)$;

(в) $h^{-1}(h(U))=U\vee f^{-1}f(U\wedge A)$.

(2.8.I6) <u>Теорема</u>. Если (X,τ_X), (Y,τ_Y) — кружевные нечеткие пространства, $A\in\tau_X^c$ и $f:A\to Y$ — непрерывное отображение, то и присоединенное пространство $(X\cup_f Y,\sigma)$ является кружевным.

<u>Доказательство</u>. Для каждого открытого нечеткого множества W пространства $X\cup_f Y$ положим $U=h^{-1}(W)$, $V=k^{-1}(W)$ и $U^A=U\wedge A$; согласно (2.8.I4), $V\in\tau_Y$, $U\in\tau_X$ и $U^A\in\tau_X^A$, где τ_X^A — нечеткая топо-

логия, индуцированная на A. Пусть $V\to(V_n)_{n\in N}$ - кружево в Y; положим $U_n^A=f^{-1}(V_n)$. Легко проверить, что $U^A\to(U_n^A)_{n\in N}$ является кружевом в (A,τ_X^A). Воспользовавшись предложением (2.8.II), можем продолжить его до кружева $U\to(U_n)_{n\in N}$ в пространстве (X,τ_X) причем так, чтобы выполнялись следующие свойства:

(а) $U_n\wedge A=U_n^A$;

(б) $\overline{U}_n\wedge A=\overline{U_n^A}$;

(в) если $W\leqslant W'$, то $U_n\leqslant U_n'$.

Положим $W_n=h(U_n)\vee\kappa(V_n)$ и покажем, что $W\to(W_n)_{n\in N}$ действительно является кружевом в присоединенном пространстве $(X\cup_f Y,\sigma)$.

Для того, чтобы установить, что $W_n\in\sigma$, достаточно, согласно (2.8.I4), проверить, что $h^{-1}(W_n)\in\tau_X$ и $\kappa^{-1}(W_n)\in\tau_Y$. Но это следует из того, что, согласно лемме (2.8.I5), $h^{-1}(W_n)=h^{-1}h(U_n)\vee h^{-1}\kappa(V_n)=U_n\vee$ $\vee f^{-1}f(U_n\wedge A)\vee f^{-1}(V_n)=U_n\vee f^{-1}f(U_n^A)\vee U_n^A=U_n\in\tau_X$ и $\kappa^{-1}(W_n)=\kappa^{-1}h(U_n)\vee\kappa^{-1}\kappa(V_n)=f(U_n^A)\vee W_n=W_n\in\tau_Y$.

Для того, чтобы установить неравенство $\overline{W_n}\leqslant W$, положим $B=$ $=h(\overline{U}_n)\vee\kappa(\overline{V}_n)$. Поскольку, очевидно, $W_n\leqslant B\leqslant W$, достаточно проверить, что B замкнуто в $X\cup_f Y$. Воспользовавшись снова леммой (2.8.I5), имеем $h^{-1}(B)=h^{-1}h(\overline{U}_n)\vee h^{-1}\kappa(V_n)=\overline{U}_n\vee f^{-1}f(U_n^A)\vee f^{-1}(\overline{V}_n)=$ $=f(\overline{U_n^A})\vee\overline{W}_n=\overline{W}_n\in\tau_Y^c$, а следовательно, B замкнуто в $X\cup_f Y$.

Далее, очевидно, что $\bigvee_n W_n=\bigvee_n(h(U_n)\vee\kappa(V_n))=h(\bigvee_n U_n)\vee\kappa(\bigvee_n V_n)=$ $=h(U)\vee\kappa(V)=W$.

Наконец, если $W\leqslant W'$, то $U\leqslant U'$ и $V\leqslant V'$, а следовательно, $W_n=h(\overline{U}_n)\vee\kappa(\overline{V}_n)\leqslant W_n'=h(U_n')\vee\kappa(V_n')$.

§ 9. КАРДИНАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ

В этом параграфе излагаются основы теории кардинальных инвариантов для нечетких подмножеств нечетких топологических пространств. При этом мы здесь ограничиваемся рассмотрением таких кардинальных инвариантов, как вес, плотность, спред, экстент, число Суслина и число Линделефа (последнее понимается в смысле, отличном от того, который был положен в основу определения спектра линделефовости в § 4). Изучаются также основные взаимосвязи между рассматриваемыми кардинальными инвариантами; многие из этих взаимосвязей вполне аналогичны соответствующим классическим прототипам.

Пусть (X, τ) – нечеткое пространство и M – его нечеткое подмножество. В дальнейшем мы часто будем пользоваться следующими обозначениями:

$$M_t(x) = \begin{cases} M(x), & \text{если } M(x) > t, \\ 0, & \text{если } M(x) \leq t, \end{cases} \qquad M_t^*(x) = \begin{cases} M(x), & \text{если } M(x) \geq t, \\ 0, & \text{если } M(x) < t. \end{cases}$$

А. Вес

(2.9.1) Определение. Семейство $\mathcal{B} \subset \tau$ называется базой нечеткого множества M, если для каждого $V \in \tau$

(Б1) существует $\mathcal{B}_V \subset \mathcal{B}$ такое, что $M \wedge V = M \wedge (\vee \mathcal{B}_V)$ и

(Б2) существует $\mathcal{C}_V \subset \mathcal{B}$ такое, что $M \wedge V^c = M \wedge (\wedge \mathcal{C}_V^c)$.

Пусть $\omega(M)$ – минимальная мощность баз нечеткого множества M, т.е. $\omega(M) = \min\{\xi : \xi \geq \aleph_0, \exists \mathcal{B}, |\mathcal{B}| \leq \xi, \mathcal{B}$ база нечеткого множества $M\}$. Нечеткий кардинал $\omega_M : K \to I$, определенный равенством $\omega_M(\alpha) = \sup\{t \in [0,1) : \omega(M_t) \geq \alpha\}$, называется весом нечеткого множества M.

(2.9.2) Замечание. В случае, когда M – четкое, условия (Б1) и (Б2) эквивалентны (всегда можно взять $\mathcal{B}_V = \mathcal{C}_V$), и поэтому база подпространства M топологического пространства X может быть определена как семейство $\mathcal{B}$ открытых подмножеств пространства X, удовлетворяющее (Б1). Однако в случае нечеткого множества M эти условия становятся независимыми и, по нашему мнению, в одинаковой мере существенными для адекватного определения базы. Заметим также, что условие (Б2) может быть переписано в виде

(Б2$'$) существует $\mathcal{C}_V \subset \mathcal{B}$ такое, что $M^c \vee V = M^c \vee (\vee \mathcal{C}_V)$.

(2.9.3) <u>Замечание</u>. Легко заметить, что $\omega_M = \omega_M^*$, где $\omega_M^*(\alpha) := \sup\{t : \omega(M^*) \geq \alpha\}$.

(2.9.4) <u>Предложение</u>. Если $\omega(M) \leq \xi$ и $\mathcal{B}$ – база нечеткого множества M, то существует база $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ такая, что $|\mathcal{B}'| \leq \xi$.

(2.9.5) <u>Теорема</u>. Для каждого $i \in \mathcal{J}$ пусть (X_i, τ_i) – нечеткое пространство, $M_i \in I^{X_i}$ и пусть $M = \prod_{i\in\mathcal{J}} M$ – произведение этих нечетких подмножеств. Тогда $\omega_M \leq (\bigvee_{i\in\mathcal{J}} \omega_{M_i}) \vee \xi$, где $\xi = |\mathcal{J}|$. Если при этом все M_i нормированы, то $\bigvee_{i\in\mathcal{J}} \omega_{M_i} \leq \omega_M$.

<u>Доказательство</u>. Рассмотрим сначала случай двух сомножителей. Предположим, что $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ – базы M_1 и M_2 в X_1 и X_2 соответственно и рассмотрим семейство $\mathcal{B} := \{V_1 \times V_2 : V_1 \in \mathcal{B}_1, V_2 \in \mathcal{B}_2\}$. Пусть $U_i \in \tau_i$, $i = 1,2$, $U = U_1 \times U_2$ и выберем $\mathcal{B}_{U_i} \subset \mathcal{B}$, $\mathcal{C}_{U_i} \subset \mathcal{B}$, $i = 1,2$, так, чтобы $M_i \wedge U_i = M_i \wedge (\vee \mathcal{B}_{U_i})$ и $(M_i^c \vee U_i) = M_i^c \vee (\vee \mathcal{C}_{U_i})$. Легко заметить, что $M \wedge U = (M_1 \times M_2) \wedge (\vee \mathcal{B}_{U_i})$, где $\mathcal{B}_U := \{V_1 \times V_2 : V_1 \in \mathcal{B}_{U_1}, V_2 \in \mathcal{B}_{U_2}\}$ и $M^c \vee U = (M_1^c \vee M_2^c) \vee (\vee \mathcal{C}_U)$, где $\mathcal{C}_U := \{V_1 \times V_2 : V_1 \in \mathcal{C}_{U_1}, V_2 \in \mathcal{C}_{U_2}\}$. Заметив, что $\mathcal{B}$ является базой M в произведении $X_1 \times X_2$, получаем, что $\omega(M) \leq \omega(M_1) \vee \omega(M_2)$. Поскольку $(M_1 \times M_2)_t = (M_1)_t \times (M_2)_t$ для каждого $t \in I$, отсюда легко следует, что $\omega_M \leq \omega_{M_1} \vee \omega_{M_2}$. По индукции отсюда заключаем, что $\omega_M \leq \bigvee_{i\in\mathcal{J}} \omega_{M_i}$ в случае конечного индексного множества $\mathcal{J}$.

Переходя к случаю произвольного множества $\mathcal{J}$, для каждого конечного подмножества $\mathcal{J}_0 \subset \mathcal{J}$ рассмотрим базу $\mathcal{B}(\mathcal{J}_0)$ нечеткого множества $\prod_{i\in\mathcal{J}_0} M_i$ в $\prod_{i\in\mathcal{J}_0} X_i$ такую, что $|\mathcal{B}(\mathcal{J}_0)| \leq \bigvee_{i\in\mathcal{J}_0} \omega(M_i)$ и пусть $\hat{\mathcal{B}}(\mathcal{J}_0) = \{U \times \prod_{i\notin\mathcal{J}_0} X_i : U \in \mathcal{B}(\mathcal{J}_0)\}$. Легко заметить, что семейство $\mathcal{B} = \bigcup\{\hat{\mathcal{B}}(\mathcal{J}_0) : \mathcal{J}_0 \subset \mathcal{J},$

$|\mathcal{J}_0|<\aleph_0\}$ является базой для M и $|\mathcal{B}|=\xi\vee\sup\{|\hat{\mathcal{B}}(\mathcal{J}_0)|:\mathcal{J}_0\subset\mathcal{J},\ |\mathcal{J}_0|<\aleph_0\}\leqslant$ $\leqslant(\bigvee_{i\in\mathcal{J}}\omega(M_i))\vee\xi$, а следовательно, $\omega(M)\leqslant(\bigvee_{i\in\mathcal{J}}\omega(M_i))\vee\xi$. Отсюда, заметив, что $M_t(x)=\prod_{i\in\mathcal{J}}(M_i)_t(x)$ для всех $x\in M_t^{-1}(0,1]$, легко приходим к неравенству $\omega_M\leqslant(\bigvee_{i\in\mathcal{J}}\omega_{M_i})\vee\xi$.

Переходя к доказательству второго утверждения, зафиксируем $i\in\mathcal{J}$ и положим $M_0=\prod\{M_j:j\neq i\}$, $(X_0,\tau_0)=\prod\{(X_j,\tau_j):j\neq i\}$. Пусть $\mathcal{B}$ – база нечеткого множества $M:=M_i\times M_0$ такая, что $\omega(M)=|\mathcal{B}|$; из (2.9.4) следует, что без ограничения общности можно предполагать, что $\mathcal{B}\subset$ $\subset\{U_i\times U_0:U_i\in\tau_i,U_0\in\tau_0\}$. Поскольку M_0, очевидно, нормировано, $\mathcal{B}_i:=$ $:=\{U_i:U_i\times U_0\in\mathcal{B}\}$ является базой для M_i, а следовательно, $\omega(M_i)\leqslant\omega(M)$. Отсюда легко следует, что $\omega((M_i)_t)\leqslant\omega(M_t)$ для каждого $t\in I$ и, значит, $\bigvee_{i\in\mathcal{J}}\omega_{M_i}\leqslant\omega_M$, что и завершает доказательство.

(2.9.6) <u>Следствие</u>. Если $M=\prod_{i\in\mathcal{J}}M_i$ и $|\mathcal{J}|<\aleph_0$, то $\omega_M\leqslant\bigvee_{i\in\mathcal{J}}\omega_{M_i}$. Если при этом все M_i нормированы, то $\omega_M=\bigvee_{i\in\mathcal{J}}\omega_{M_i}$.

Б. <u>Число Линделефа</u>

(2.9.7) <u>Определение</u>. Положим $l(M):=\min\{\xi\geqslant\aleph_0:$ если $\mathcal{U}\subset\tau$, $t\in[0,1)$ и $M_t\leqslant\vee\mathcal{U}$, то существует $\mathcal{U}_0\subset\mathcal{U}$ такое, что $|\mathcal{U}_0|\leqslant\xi$ и $M_t\leqslant\vee\mathcal{U}_0\}$. Нечеткий кардинал l_M, определенный равенством $l_M(\alpha)=\sup\{t:l(M_t)\geqslant\alpha\}$, называется <u>числом Линделефа</u> нечеткого множества M.

Наряду с нечетким кардиналом l_M мы иногда будем использовать также нечеткий кардинал l_M^*, определяемый равенством $l_M^*(\alpha)=\sup\{t:$ $l^*(M_t^*)\geqslant\alpha\}$, где $l^*(M):=\min\{\xi\geqslant\aleph_0:$ если $\mathcal{U}\subset\tau$, $t\in[0,1)$ и $M_t^*\leqslant\vee\mathcal{U}$, то существует $\mathcal{U}_0\subset\mathcal{U}$ такое, что $|\mathcal{U}_0|\leqslant\xi$ и $M_t^*\leqslant\vee\mathcal{U}_0\}$, и нечеткий кардинал l_M^s, определяемый равенством $l_M^s(\alpha)=\sup\{t:l^s(M_t)\geqslant\alpha\}$, где $l^s(M):=\min\{\xi\geqslant\aleph_0:$ если $\mathcal{U}\subset\tau$, $t\in[0,1)$ и $M_t<\vee\mathcal{U}$, то существует $\mathcal{U}_0\subset\mathcal{U}$ такое, что $|\mathcal{U}_0|\leqslant\xi$ и $M_t<\vee\mathcal{U}_0\}$.

(2.9.8) <u>Предложение</u>. $l_M^*\geqslant l_M$ для каждого M.

<u>Доказательство</u>. Достаточно показать, что $l^*(M)\geqslant l(M)$. Предполо-

жим, что $l^*(M)\leq\xi$ и пусть $\mathcal{U}\subset\tau$ таково, что $M_t\leq\bigvee\mathcal{U}$ для некоторого $t\in[0,1)$. Выбрав убывающую последовательность (t_n), сходящуюся к t, заметим, что $M_t=\bigvee_{n=1}^{\infty}M_{t_n}$. Поскольку $l^*(M)\leq\xi$, найдется $\mathcal{U}_n\subset\mathcal{U}$ такое, что $|\mathcal{U}_n|\leq\xi$ и $M^*_{t_n}\leq\bigvee\mathcal{U}_n$. Положим $\mathcal{U}_0=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{U}_n$. Очевидно, что $M_t\leq$ $\leq\bigvee\mathcal{U}_0$, $|\mathcal{U}_0|\leq\xi\cdot\aleph_0=\xi$, а следовательно, $l(M)\leq\xi$.

(2.9.9) Замечание. Нетрудно построить пример, показывающий, что равенство $l^*(M)=l(M)$, вообще говоря, не имеет места.

(2.9.10) Предложение. Пусть $f:(X,\tau_x)\to(Y,\tau_y)$ – непрерывное отображение и $M\in I^X$. Тогда $l_M\geq l_{fM}$.

Доказательство. Пусть $l(M)\geq\xi$ и $(fM)_t\leq\bigvee\mathcal{U}$ для некоторого $t\in$ $\in[0,1)$ и некоторого $\mathcal{U}\subset\tau_y$. Поскольку, очевидно, $fM_t=(fM)_t$, легко можем заключить, что $M_t\leq\bigvee f^{-1}(\mathcal{U})$ и, следовательно, $M_t\leq\bigvee f^{-1}(\mathcal{U}_0)$ для некоторого $\mathcal{U}_0\subset\mathcal{U}$, $|\mathcal{U}_0|\leq\xi$. Но это означает, что $(fM)_t\leq\bigvee\mathcal{U}_0$, а следовательно, $l(fM)\geq\xi$ и, значит, $l_M\geq l_{fM}$.

(2.9.11) Замечание. Нетрудно построить пример, показывающий, что неравенство $l^*_M\geq l^*_{fM}$, вообще говоря, не имеет места.

(2.9.12) Предложение. $\omega_M\geq l^*_M$ и, следовательно, $\omega_M\geq l_M$ для каждого нечеткого множества M.

Доказательство. Поскольку $\omega^*_M=\omega_M$ (2.9.2), достаточно проверить, что $\omega^*_M\geq l^*_M$. Предположим, что $\omega(M^*_t)\leq\xi$ и пусть $M^*_t\leq\bigvee\mathcal{U}$. Тогда для некоторого $\mathcal{U}_0\subset\mathcal{U}$, $|\mathcal{U}_0|\leq\xi$ имеет место неравенство $M^*_t\wedge(\bigvee\mathcal{U})=$ $=M^*_t\wedge(\bigvee\mathcal{U}_0)$, а следовательно, $M^*_t\leq\bigvee\mathcal{U}_0$. Отсюда легко заключаем, что $l^*(M_t)\leq\xi$ и, значит, $l^*_M\leq\omega^*_M$.

В. Плотность

(2.9.13) Определение. Подмножество $A\subset X$ называем плотным в M, если $\overline{A\wedge M_t}\geq M_t$ для всех $t\in[0,1)$. Положим $d(M):=\min\{\xi\geq\aleph_0:\exists A(A\subset X,$ $|A|\leq\xi$ и A плотно в $M)\}$. Нечеткий кардинал $d_M:K\to I$, определенный равенством $d_M(\alpha)=\sup\{t:d(M_t)\geq\alpha\}$, называется плотностью нечеткого множества M.

Наряду с плотностью d_M мы будем рассматривать также нечеткий кардинал $d^*_M : K \to I$, определяемый равенством $d^*_M(\alpha) = \sup\{t : d^*(M^*_t) \geq \alpha\}$, где $d^*(M) = \min\{\xi \geq \aleph_0 : \exists A\ (X \supset A,\ |A| \leq \xi$ и $\overline{A \wedge M^*_t} \geq M^*_t$ для каждого $t \in [0,1))\}$.

(2.9.I4) Предложение. $d^*_M \geq d_M$ для каждого нечеткого множества M.

Доказательство. Достаточно показать, что, если множество A $*$-плотно в M (т.е. $\overline{A \wedge M^*_t} \geq M^*_t$ для всех $t \in [0,1)$), то A плотно в M. Предположив $*$-плотность множества A в M, рассмотрим убывающую последовательность (t_n), сходящуюся к $t \in [0,1)$. Нетрудно заметить, что $M_t = \bigvee_n M^*_{t_n}$ и $\overline{M_t \wedge A} = \overline{\bigvee_n (M^*_{t_n} \wedge A)} \geq \bigvee_n (\overline{M^*_{t_n} \wedge A}) \geq \bigvee_n M^*_{t_n} = M_t$. Но это и означает плотность A в нечетком множестве M.

(2.9.I5) Замечание. Нетрудно построить пример, показывающий, что равенство $d^*_M = d_M$, вообще говоря, не имеет места.

(2.9.I6) Предложение. Если $f : X \to Y$ – непрерывное отображение и $M \in I^X$, то $d_{fM} \leq d_M$.

Доказательство. Пусть множество A плотно в M и $B := f(A)$. Тогда для каждого $t \in [0,1)$ имеет место цепочка $(fM)_t = f(M_t) \leq f(\overline{M_t \wedge A}) \leq \overline{f(M_t \wedge A)} \leq \overline{f(M_t) \wedge f(A)} = \overline{(fM)_t \wedge B}$, откуда легко следует доказываемое утверждение.

(2.9.I7) Замечание. Нетрудно построить пример, показывающий, что неравенство $d^*_{fM} \leq d^*_M$, вообще говоря, не имеет места.

(2.9.I8) Теорема. Для каждого $i \in \mathcal{J}$ пусть $(X_i, \mathcal{T}_i)$ – нечеткое пространство и пусть $M = \prod M_i$ – произведение нечетких множеств $M_i \in I^{X_i}$. Тогда $d^*_M \leq (\bigvee_{i \in \mathcal{J}} d^*_{M_i}) \vee \xi$, где $|\mathcal{J}| = \xi$. Если при этом все M_i нормированы, то и $\bigvee_{i \in \mathcal{J}} d_{M_i} \leq d_M$.

Доказательство. Для каждого $i \in \mathcal{J}$ найдем множество $A_i \subset X_i$ такое, что $|A_i| \leq d^*(M_i)$ и $\overline{A_i \wedge (M^*_i)_t} \geq (M^*_i)_t$. Положив $A = \prod_{i \in \mathcal{J}} A_i$, имеем $|A| \leq \bigvee_{i \in \mathcal{J}} |A_i| \vee \xi$. Нетрудно убедиться, что множество A $*$-плотно в M. Отсюда легко следует, что $d^*(M_t) \leq \bigvee_{i \in \mathcal{J}} d^*(M_i)_t \vee \xi$, а значит, $d^*_M \leq (\bigvee_{i \in \mathcal{J}} d^*_M) \vee \xi$.

Если все M_i нормированы, то для каждого $i \in \mathcal{J}$ справедливо равенство $M_i = \mathcal{I}_i(M)$, где $\mathcal{I}_i : X \to X_i$ - отображение проектирования. Применяя (2.9.16), заключаем отсюда, что для каждого $i \in \mathcal{J}$ $d_M \geqslant d_{M_i}$, а следовательно, $d_M \geqslant \bigvee_{i\in\mathcal{J}} d_{M_i}$.

(2.9.19) <u>Замечание</u>. Остается невыясненным вопрос о справедливости неравенств $d_M \leqslant (\bigvee_{i\in\mathcal{J}} d_{M_i}) \vee \xi$ и $\bigvee_{i\in\mathcal{J}} d^*_{M_i} \leqslant d^*_M$ (второе в случае нормированных нечетких множеств).

(2.9.20) <u>Теорема</u>. $\omega_M \geqslant d_M$ для каждого нечеткого множества M.

<u>Доказательство</u>. Пусть $\mathcal{B}$ - база нечеткого множества M такая, что $|\mathcal{B}| = \omega(M)$. Для каждого $V \in \mathcal{B}$, q-совпадающего с M, зафиксируем $x_V \in X$ так, чтобы $V(x_V) > M^c(x_V)$, и рассмотрим множество $A = \{x_V : V q M, V \in \mathcal{B}\}$. Покажем, что $\overline{A \wedge M} \geqslant M$. Действительно, если бы $\overline{A\wedge M}(x) < M(x)$ для некоторой точки $x \in X$, то выбрав $\alpha \in (\overline{A \wedge M}(x), M(x))$, заметим, что $x^\alpha \in M$, но при этом $x^\alpha \notin \overline{A \wedge M}$. Тогда найдется открытое нечеткое множество U такое, что $U q M$, но при этом $(A \wedge M) \not{q}\, U$. Поскольку $\mathcal{B}$ - база, найдется подсемейство $\mathcal{C}_U \subset \mathcal{B}$ такое, что $M^c \vee U = M^c \vee (\vee \mathcal{C}_U)$. Но тогда, очевидно, $V q M$ и $(A \wedge M) \not{q}\, V$ и для некоторого $V \in \mathcal{C}_U$, что противоречит определению множества A.

Взяв в вышеприведенной конструкции нечеткое множество M_t вместо M и построив соответствующее множество $A_t \subset X$ так, чтобы $\overline{A_t \wedge M_t} \geqslant M_t$, положим $A = \cup\{A_t : t \in \mathbb{Q} \cap [0,1)\}$. Очевидно, что $|A| = \omega(M)$. Для доказательства плотности множества A в M рассмотрим убывающую сходящуюся к $t \in [0,1)$ последовательность $(t_n) \subset \mathbb{Q} \cap [0,1)$. Тогда

$$\overline{A \wedge M_t} = \overline{\bigvee_n (A \wedge M_{t_n})} \geqslant \bigvee_n (\overline{A \wedge M_{t_n}}) \geqslant \bigvee_n (\overline{A_{t_n} \wedge M_{t_n}}) \geqslant \bigvee_n M_{t_n} = M_t,$$

что и завершает доказательство.

Г. <u>Число Суслина</u>

(2.9.21) <u>Определение</u>. Положим $c(M) = \min\{\xi \geqslant \aleph_0 :$ если $t \in [0,1)$, $\mathcal{U} \subset \tau$, $|\mathcal{U}| > \xi$ и $U q M_t$ для каждого $U \in \mathcal{U}$, то $(U_1 \wedge U_2) q M_t$ и для некоторых $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$, $U_1 \neq U_2\}$. Нечеткий кардинал $c_M : K \to I$, определяемый равенством $c_M(\alpha)=\sup\{t\in[0,1): c(M_t)\geqslant\alpha\}$, называется <u>числом Суслина</u> нечеткого множества M.

Наряду с c_M мы рассматриваем нечеткий кардинал $c'_M: K\to I$, определенный равенством $c'_M(\alpha)=\sup\{t\in[0,1): c'(M_t)\geqslant\alpha\}$, где $c'(M)=\min\{\xi\geqslant\aleph_0$: если $t\in[0,1)$, $\mathcal{U}\subset\tau$, $|\mathcal{U}|>\xi$ и $U q M_t$ для каждого $U\in\mathcal{U}$, то $U_1\wedge U_2\wedge M\neq 0$ для некоторых $U_1, U_2\in\mathcal{U}$, $U_1\neq U_2\}$.

(2.9.22) Заметим, что $c(M)>\xi$ тогда и только тогда, когда найдутся $t\in[0,1)$ и $\mathcal{U}\subset\tau$ такие, что $|\mathcal{U}|>\xi$ и $U q M_t$ для каждого $U\in\mathcal{U}$, но при этом $(U_1\wedge U_2)\not{q} M$ для всех $U_1, U_2\in\mathcal{U}$, $U_1\neq U_2$;

$c'(M)>\xi$ тогда и только тогда, когда найдутся $t\in[0,1)$ и $\mathcal{U}\subset\tau$ такие, что $|\mathcal{U}|>\xi$ и $U q M_t$ для каждого $U\in\mathcal{U}$, но при этом $U_1\wedge U_2\wedge\wedge M_t=0$ для всех $U_1, U_2\in\mathcal{U}$, $U_1\neq U_2$.

Нетрудно заметить, что $c'(M)<c(M)$, а следовательно, $c'_M\leqslant c_M$. Непосредственной проверкой устанавливаем также

(2.9.23) <u>Предложение</u>. Если $f: X\to Y$ – непрерывное отображение и $M\in I^X$, то $c_M\geqslant c_{fM}$, $c'_M\geqslant c'_{fM}$.

(2.9.24) <u>Предложение</u>. Пусть для каждого $i\in\mathcal{J}$ M_i – нечеткое подмножество пространства (X_i,τ_i) и $M=\prod\limits_{i\in\mathcal{J}} M_i$ – их произведение. Если $c(\prod\limits_{i\in\mathcal{J}_0} M_i)\leqslant\aleph_0$ ($c'(\prod\limits_{i\in\mathcal{J}_0} M_i)\leqslant\aleph_0$) для каждого конечного $\mathcal{J}_0\subset\mathcal{J}$, то и $c(M)\leqslant\aleph_0$ (соответственно, $c'(M)\leqslant\aleph_0$).

<u>Доказательство</u>. Предположим, что $c(M)>\aleph_0$ и пусть $t\in[0,1)$, $\mathcal{U}\subset\tau$ таковы, что $|\mathcal{U}|>\aleph_0$ и $U q M_t$ для каждого $U\in\mathcal{U}$, но $U_1\wedge U_2\not{q} M_t$ для любых различных $U_1, U_2\in\mathcal{U}$. При этом без ограничения общности можем считать, что все $U\in\mathcal{U}$ принадлежат стандартной базе произведения, т.е. имеют вид $U=(\prod\limits_{i\in\mathcal{J}_U} U_i)\times\prod\limits_{i\notin\mathcal{J}_U} X_i$ для некоторого конечного $\mathcal{J}_U\subset\mathcal{J}$ и некоторых $U_i\in\tau_i$. Отсюда легко заключить, что найдется несчетное подсемейство $\mathcal{U}'\subset\mathcal{U}$ такое, что все $U\in\mathcal{U}'$ имеют вид $U=(\prod\limits_{i\in\mathcal{J}_0} U_i)\times(\prod\limits_{i\notin\mathcal{J}_0} X_i)$. Пусть $\mathcal{V}$ – совокупность прообразов нечетких множеств из $\mathcal{U}'$ при проекции $\mathcal{P}^\circ: X\to\prod\limits_{i\in\mathcal{J}_0} X_i$. Положим $M^\circ=\prod\limits_{i\in\mathcal{J}_0} M_i$ и заметим, что $V q M^\circ_t$ для каждого $V\in\mathcal{V}$, в то время как $(V_1\wedge V_2)\not{q} M^\circ_t$ для любых различных V_1,

$V_2 \in \mathcal{V}$. Но это, однако, противоречит условию $c(M^\circ) \leqslant \aleph_0$.

Второе утверждение может быть доказано совершенно аналогично.

(2.9.25) Следствие. Если $c_{(\prod_{i\in J_0} M_i)} \leqslant \tilde{\aleph}_0$ (соотв. $c'(\prod_{i\in J_0} M_i) \leqslant \tilde{\aleph}_0$) для каждого конечного $J_0 \subset J$, то и $c_M \leqslant \tilde{\aleph}_0$ (соотв. $c'_M \leqslant \tilde{\aleph}_0$).

(2.9.26) Предложение. Для каждого $i \in J$ пусть M_i – нормированное нечеткое подмножество пространства (X_i, τ_i) и пусть $M = \prod_{i\in J} M_i$ – их произведение. Тогда $\bigvee_{i\in J} c_{M_i} \leqslant c_M$ и $\bigvee_{i\in J} c'_{M_i} \leqslant c'_M$.

Доказательство. Предположим, что $c(M_i) > \xi$ для некоторого $i \in J$. Тогда найдутся $t \in [0,1)$ и семейство $\mathcal{U}_i \subset \tau_i$, $|\mathcal{U}_i| > \xi$ такие, что каждое $U_i \in \mathcal{U}_i$ q-совпадает с $(M_i)_t$ в то время как $(U_i \wedge V_i) \not{q} (M_i)_t$ для любых различных $U_i, V_i \in \mathcal{U}_i$. Положим $\mathcal{U} := \pi_i^{-1}(\mathcal{U}_i)$. Поскольку все M_i нормированы, нетрудно заметить, что каждое $U \in \mathcal{U}$ q-совпадает с M_t. С другой стороны, очевидно, что $(U \wedge V) \not{q} M_t$, а следовательно, $c(M) > \xi$. Но это и означает, что $\bigvee_{i\in J} c_{M_i} \leqslant c_M$. Аналогично можно убедиться в справедливости и второго неравенства.

(2.9.27) Теорема. $d_M \geqslant c_M$, а следовательно, $\omega_M \geqslant d_M \geqslant c_M \geqslant c'_M$ для каждого нечеткого множества M.

Доказательство. Предположив, что $d(M) \leqslant \xi < c(M)$, возьмем подмножество $A \subset X$, $|A| \leqslant \xi$, такое, что $\overline{A \wedge M_t} \geqslant M_t$ для всех $t \in [0,1)$. Выберем теперь $\mathcal{U} \subset \tau$, $|\mathcal{U}| > \xi$, и $t \in [0,1)$ таким образом, чтобы $U q M_t$ для каждого $U \in \mathcal{U}$, но при этом $(U_1 \wedge U_2) \not{q} M_t$ для любых различных $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$. Поскольку $|A| \leqslant \xi$ и $|\mathcal{U}| > \xi$, отсюда легко заключить, что $U \not{q} (M_t \wedge A)$ для некоторого $U \in \mathcal{U}$.

С другой стороны, поскольку $U q M_t$, существует точка $x_0 \in X$ такая, что $U(x_0) + M_t(x_0) > 1$, а следовательно, найдется $x_0^\alpha \tilde{\in} M_t$, для которой U является q-окрестностью. Поскольку $M_t \leqslant \overline{M_t \wedge A}$, отсюда следует, что $U q (A \wedge M_t)$. Полученное противоречие и завершает доказательство.

(2.9.28) Замечание. Нетрудно определить " $*$-версии" c_M^* и $c_M'^*$ нечетких кардиналов c_M и c'_M соответственно и доказать для них утверждения, аналогичные утверждениям (2.9.22)-(2.9.27).

Д. Спред и экстент

Для $U\in\mathcal{T}$ и точки $a\in X$ обозначим $\dot{U}_a = U\wedge(X\setminus\{a\})$. При этом в случаях, когда не может возникнуть недоразумения, будем писать $\dot{U}$ вместо $\dot{U}_a$.

(2.9.29) Определение. Точку $a\in X$ назовем изолированной для M, если найдется $U := U_a \in \mathcal{T}$ такое, что $U(a) > M^c(a)$ и $\dot{U} \not\geqslant M$. Пусть $s(M) = \min\{\xi \geqslant \aleph_0:$ если $t\in[0,1)$, $A\subset M^{-1}(t,I)$ и каждая точка $a\in A$ изолирована в $M_t\wedge A$, то $|A|\leqslant\xi\}$. Пусть $e(M) = \min\{\xi\geqslant\aleph_0:$ если $t\in[0,1)$, $A\subset M^{-1}(t,1]$ и A замкнуто в M_t (т.е. $\overline{A\wedge M_t} = A\wedge M_t$) и каждая точка $a\in A$ изолирована в $M_t\wedge A$, то $|A|\leqslant\xi\}$. Нечеткие кардиналы $s_M: K\to I$ и $e_M: K\to I$, определяемые равенствами $s_M(\alpha) = \sup\{t: s(M_t)\geqslant\alpha\}$ и $e_M(\alpha) = \sup\{t: e(M_t)\geqslant\alpha\}$, называем, соответственно, спред и экстент нечеткого множества M.

(2.9.30) Замечание. Очевидно, что $s(M)>\xi$ тогда и только тогда, когда найдется подмножество $A\subset M^{-1}(t,1]$ такое, что $|A|>\xi$ и каждая точка $a\in A$ изолирована в $M_t\wedge A$;

$e(M)>\xi$ тогда и только тогда, когда найдется множество $A\subset M^{-1}(t,1]$, замкнутое в M_t и такое, что $|A|>\xi$ и каждая точка $a\in A$ изолирована в $M_t\wedge A$.

(2.9.31) Предложение. $e_M\leqslant s_M$ для каждого нечеткого множества M.

(2.9.32) Предложение. Если $f:(X,\mathcal{T}_X)\to(Y,\mathcal{T}_Y)$ – непрерывное отображение и $M\in I^X$, то $s_M\geqslant s_{fM}$.

Доказательство. Предположив, что $s(fM)>\xi$, найдем $t\in[0,1)$ и множество $B\subset M^{-1}(t,1]$, $|B|>\xi$, каждая точка которого изолирована в $(fM_t)\wedge\wedge B$. Зафиксируем для каждого $b\in B$ точку $a_b\in f^{-1}(b)$ и положим $A=\{a_b: b\in B\}$. Тогда, очевидно, $A\subset M^{-1}(t,1]$ и $|A|=|B|>\xi$. Для каждого $b\in B$ выберем $V := V_b\in\mathcal{T}_Y$ такое, что $V(b)>(fM_t)^c(b)$ и $\dot{V}\not\geqslant((fM_t)\wedge B)$. Тогда, очевидно, нечеткое множество $(U_{a_b}=)U := f^{-1}(V)$ открыто в X, $U(a_b)>M_t^c(a_b)$ и $\dot{U}\not\geqslant(M_t\wedge$

$\wedge A)$. Следовательно, $s(M) \geqslant s(fM)$ и, значит, $s_M \geqslant s_{fM}$.

(2.9.33) <u>Предложение</u>. Если $f: X \to Y$ – непрерывное отображение, $M \in I^X$ и $TI_1(X) = I^2$ (2.I.18), то $e_M \geqslant e_{fM}$.

<u>Доказательство</u>. Рассуждая так же, как и в доказательстве предложения (2.9.32), но с дополнительным предположением замкнутости множества B в нечетком множестве fM_t, построим множество A. Для завершения доказательства достаточно убедиться, что множество A в этом случае замкнуто в M_t.

Возьмем произвольную нечеткую точку $x_0^s \tilde{\in} M_t$, где $x_0 \in A$ и рассмотрим два возможных случая. Если $y_0 := f(x_0) \notin B$, то, поскольку B замкнуто, в fM_t найдется q-окрестность V нечеткой точки y_0^s в Y такая, что $(B \wedge fM_t) \bar{q} V$. Отсюда следует, что $U := f^{-1}(V)$ является q-окрестностью нечеткой точки x_0^s в X и при этом $(A \wedge M_t) \bar{q} U$, а значит $x_0^s \notin \overline{A \wedge M_t}$. Предположим теперь, что $y_0 \in B$ и выберем V таким образом, чтобы $V(y_0) > (fM_t)^c(y_0)$ и $(B \wedge fM_t) \bar{q} \dot{V}$ и положим $U := f^{-1}(V)$. Возьмем произвольную точку $a \in A \cap f^{-1}(y_0)$. Поскольку $TI_1 = I^2$, найдется $W \in \tau_X$ такое, что $W(x_0) = 1$ и $W(a) = 0$. Нетрудно убедиться, что $(U \wedge W)(x_0) > M_t^c(x_0)$ и $(A \wedge M_t) \bar{q} (U \wedge W)$. Но это, очевидно, означает, что $U \wedge W$ является q-окрестностью нечеткой точки x_0^s, которая не q-совпадает с $A \wedge M_t$, а значит $x_0^s \tilde{\notin} \overline{A \wedge M_t}$. Таким образом, $\overline{A \wedge M_t} = A \wedge M_t$ и, следовательно, A замкнуто в M_t.

Нетрудно убедиться в справедливости следующих утверждений.

(2.9.34) <u>Предложение</u>. $s_M \leqslant w_M$ для каждого нечеткого множества M.

(2.9.35) <u>Предложение</u>. $c_M \leqslant s_M$ для каждого нечеткого множества M.

§ 10. ТЕСНОТА НЕЧЕТКОГО ПРОСТРАНСТВА КАК СВОЙСТВО РАСПОЛОЖЕНИЯ НЕЧЕТКОЙ ТОПОЛОГИИ В ТИХОНОВСКОМ КУБЕ

В этом параграфе предпринимается попытка изучения некоторых взаимосвязей между топологическими свойствами нечеткого пространства (X, τ) и свойствами расположения его нечеткой топологии $\tau \subset I^X$. При этом основное внимание уделяется оценке тесноты нечеткого пространства. Предварительно, однако, укажем некоторые простейшие результаты такого характера. Доказательства сводятся к непосредственной проверке и потому опущены.

(2.I0.I) Предложение. Если $\alpha \in \mathcal{I}_{x_1}(\tau)$ и $\alpha \in \mathcal{I}_{x_2}(\tau)$ для некоторых $x_1, x_2 \in X$ и $\alpha \in I$, и при этом пространство (X, τ) либо ламинировано, либо T_1 (2.I.30), то найдется $U \in \tau$ такое, что $\mathcal{I}_{x_1}(U) = \mathcal{I}_{x_2}(U) = \alpha$ (своего рода утверждение о выпуклости τ в I^X).

(Нетрудно построить пример, показывающий, что для пространств, не являющихся ни ламинированными, ни T_1, это утверждение, вообще говоря, не имеет места.)

(2.I0.2) Предложение. Нечеткое пространство (X, τ) является T_1-пространством тогда и только тогда, когда τ всюду плотно в I^X.

(2.I0.3) Следствие. Топологическое пространство (X, T) является T_1-пространством тогда и только тогда, когда T всюду плотно в 2^X.

(2.I0.4) Предложение. Пусть (X, τ) – AT_1-пространство (2.I.30). Тогда τ замкнута или открыта в I^X в том и только в том случае, когда $\tau = I^X$, т.е. когда (X, τ) дискретно.

(2.I0.5) Следствие. Топология T топологического T_1-пространства замкнута или открыта в канторовом кубе 2^X в том и только в том случае, когда пространство (X, T) дискретно.

(Нетрудно построить примеры, показывающие существенность требования отделимости в этих утверждениях.)

Переходя к основному вопросу этого параграфа - оценке тесноты нечеткого пространства, введем прежде всего следующее

(2.I0.6) <u>Определение</u> (ср. [6]). Для нечеткого пространства (X, τ) и кардинала $\varkappa$ положим $t(X,\tau)\leqslant\varkappa$, если для каждого $A\in I^X$ и каждой нечеткой точки $x^\lambda\tilde{\in}A$ найдется множество $G\subset X$ такое, что $|G|\leqslant\varkappa$ и $x^\lambda\tilde{\in}\overline{A\wedge G}$.

По аналогии с тем, как это делается в общей топологии, нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения:

(2.I0.7) <u>Лемма</u>. Неравенство $t(X,\tau)\leqslant\varkappa$ имеет место в том и только в том случае, когда для каждого незамкнутого $A\in I^X$ найдутся нечеткая точка $x^\lambda\tilde{\notin}A$, $x^\lambda\tilde{\in}\bar{A}$ и множество $G\subset X$, $|G|\leqslant\varkappa$ такие, что $x^\lambda\tilde{\in}\overline{A\wedge G}$.

Для того, чтобы охарактеризовать тесноту нечеткого пространства посредством расположения его нечеткой топологии τ в I^X рассмотрим следующую специальную топологию на тихоновском кубе I^X.

Рассмотрим две топологии T_r и T_ℓ на отрезке I, определяемые равенствами $T_r=\{(a,1]:a\in I\}\cup\{I\}$ и $T_\ell=\{[0,a]:a\in[0,1]\}\cup\{\emptyset\}$. (Таким образом, объединение $T_r\cup T_\ell$ является стандартной предбазой топологии левой стрелки на отрезке I.) Пусть (I^X, T_r^X) - произведение $|X|$ копий пространства (I, T_r) и пусть $(I^X, T_{\ell\varkappa}^X)$ - $\varkappa$-ящичное произведение $|X|$ копий пространства (I, T_ℓ). Супремум топологий T_r^X и $T_{\ell\varkappa}^X$ на пространстве I^X обозначим $T_{t\varkappa}$ и положим $I_{t\varkappa}^X:=(I^X, T_{t\varkappa})$.

(2.I0.8) <u>Теорема</u>. $t(X,\tau)\leqslant\varkappa$ тогда и только тогда, когда τ замкнута в пространстве $I_{t\varkappa}^X$.

<u>Доказательство</u>. Пусть $t(X,\tau)\leqslant\varkappa$ и $B\in I^X$, $B\notin\tau$. Тогда $B^c\neq\bar{B}^c$, а следовательно, найдется нечеткая точка $x^\lambda\tilde{\in}\bar{B}^c$ такая, что $x^\lambda\tilde{\notin}B^c$. Выберем $G\subset X$ так, чтобы $|G|\leqslant\varkappa$ и $x^\lambda\tilde{\in}\overline{B^c\wedge G}$, и положим $\mathcal{N}=:\mathcal{N}(x,\mu,B,G)=:\{U\in I^X: U(x)>\mu, U(y)\leqslant B(y), y\in G\}$, где $\mu=\lambda^c$. Из определения топологии на I^X следует, что $\mathcal{N}$ открыто и при этом из $x^\lambda\tilde{\in}B^c$ сле-

дует, что $B\in\mathcal{N}$.

С другой стороны, $\mathcal{N}\cap\mathcal{T}=\emptyset$. Действительно, если бы нашлось $U\in\mathcal{T}$ такое, что $U\in\mathcal{N}$, то из неравенства $U(x)>\mu$ следовало бы, что U – q-окрестность нечеткой точки x^{λ}, и в то же время $U(y)\leq B(y)$ для всех $y\in G$. Но последнее неравенство означает, что нечеткое множество U не q-совпадает с $B^c\wedge G$, а следовательно, в противоречии с выбором G, $x\not\in\overline{G\wedge B^c}$. Таким образом, $\mathcal{T}$ замкнута в $I^X_{t\varkappa}$.

Обратно, пусть $\mathcal{T}$ замкнуто в пространстве $I^X_{t\varkappa}$ и пусть $A\neq\bar{A}$. Тогда $B:=A^c\notin\mathcal{T}$, а следовательно, найдется окрестность $\mathcal{N}$ точки B в $I^X_{t\varkappa}$ такая, что $\mathcal{N}\cap\mathcal{T}=\emptyset$. Без ограничения общности можем считать, что $\mathcal{N}$ имеет вид $\mathcal{N}=\{U\in I^X: U(x_i)>\mu_i,\ i=1,\dots,n;\ U(y)\leq B(y)\ \forall y\in G\}$ для некоторых $x_i\in X$, $\mu_i\in I$, $i=1,\dots,n$ и $G\subset X$, $|G|\leq\varkappa$. Для каждого $i=1,\dots,n$ положим $\mathcal{N}_i=\{U\in I^X: U(x_i)>\mu_i,\ U(y)\leq B(y)\ \forall y\in G\}$. Тогда по крайней мере для одного i имеет место $\mathcal{N}_i\cap\mathcal{T}=\emptyset$. Действительно, в противном случае, выбрав $U_i\in\mathcal{N}_i\cap\mathcal{T}$ для каждого $i=1,\dots,n$ и положив $U=U_1\cap\dots\cap U_n$, замечаем, что $U\in\mathcal{N}$ и при этом, очевидно, $U\in\mathcal{T}$. Поэтому без ограничения общности можем сразу считать, что $\mathcal{N}$ имеет вид $\mathcal{N}=\{U\in I^X: U(x)>\mu, U(y)\leq B(y)\ \forall y\in G\}$ для некоторой фиксированной точки $x\in X$ и некоторого $G\subset X$, $|G|\leq\varkappa$.

Положив теперь $\lambda=\mu^c$, имеем $B(x)>\mu$, т.е. $x^{\lambda}\not\in A$. С другой стороны, легко заметить, что $x^{\lambda}\tilde{\in}\bar{A}$. Действительно, если бы $x^{\lambda}\not\in\bar{A}$, то $\bar{A}(x)<\lambda$. Тогда, положив $W=\bar{A}^c$ и замечая, что $W\leq B$ и $W(x)=\bar{A}^c(x)>\lambda^c=\mu$, имеем $W\in\mathcal{N}$ и при этом, очевидно, $W\in\mathcal{T}$.

Возьмем теперь произвольную q-окрестность U нечеткой точки x^{λ}. Тогда, поскольку $\mathcal{T}\cap\mathcal{N}=\emptyset$ и $U(x)>\mu$, то найдется $y\in G$ такое, что $U(y)>B(y)$, а следовательно, каждая q-окрестность нечеткой точки x^{λ} q-совпадает с нечетким множеством $B^c\wedge G$. Но это и означает, что $x^{\lambda}\tilde{\in}\overline{A\wedge G}$. Тем самым найдена точка $x^{\lambda}\not\in A$, $x^{\lambda}\tilde{\in}\bar{A}$ такая, что $x^{\lambda}\tilde{\in}\overline{A\wedge G}$ для некоторого $G\subset X$, $|G|\leq\varkappa$. Остается воспользоваться леммой (2.I0.7) и заключить, что $t(X,\tau)\leqslant æ$.

Из предыдущей теоремы легко может быть получено такое следствие для общей топологии:

(2.I0.9) <u>Следствие</u>. Пусть (X, T) - топологическое пространство и $æ$ - некоторый кардинал. Тогда $t(X,T)\leqslant æ$ тогда и только тогда, когда T замкнуто в $I^X_{tæ}$ или, что эквивалентно, когда T замкнуто в пространстве $2^X_{tæ}$ (где $2^X_{tæ}$ - подпространство в $I^X_{tæ}$).

(В явном виде $2^X_{tæ}$ может быть описано следующий образом. Рассмотрим топологии $T_0=\{\{0\},\emptyset,2\}$ и $T_1=\{\{1\},\emptyset,2\}$ на двухточечном множестве $2=\{0,1\}$ и пусть $(2^X, T_1^X)$ обозначает произведение $|X|$ копий пространства $(2, T_1)$, а $(2^X, T^X_{0к})$ - $æ$-ящичное произведение $|X|$ копий пространства $(2, T_0)$. Теперь $2^X_{tæ}$ может быть определено как канторово множество 2^X, наделенное топологией $T^X_{tк}$, являющейся супремумом топологий T_1^X и $T^X_{0к}$.)

ГЛАВА III. УНИВЕРСАЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ В НЕЧЕТКОЙ ТОПОЛОГИИ

Поскольку классическая топология является основным (или, по крайней мере, одним из основных) источником нечеткой топологии, естественно возникает вопрос о соответствии конкретных топологических пространств (всех, или, по крайней мере, наиболее важных) тем или иным объектам нечеткой топологии. Определенный ответ на этот вопрос дан в §3 гл.I, в котором рассмотрены простейшие функторы из категории $\mathcal{Top}$ в категории нечеткой топологии; эти функторы сопоставляют топологическому пространству (X,T) некоторое нечеткое топологическое пространство $(X,\mu T)$, которое может рассматриваться как нечеткая копия исходного пространства. Особенностью этих функторов является то, что они меняют только топологическую структуру, оставляя множество соответствующего пространства, а также множества морфизмов между пространствами неизменными. Однако, будучи определенной копией топологического пространства (X,T), нечеткое пространство вида $(X,\mu T)$ не может, как правило, играть в нечеткой топологии роль, выполняемую пространством (X,T) в категории $\mathcal{Top}$. Можно сказать, что объекты вида $(X,\mu T)$ "слишком бедны" для того, чтобы выполнять в нечеткой топологии функции объекта (X,T) в $\mathcal{Top}$.

В данной главе мы рассмотрим две конструкции, имеющие существенно иную природу и позволяющие по-другому подойти к этой проблеме. Первая из них линейно-упорядоченному пространству X сопоставляет некоторое нечеткое пространство $\mathcal{F}(X)$ – т.н. нечеткое расширение пространства X. Вторая – произвольному топологическому пространству X сопоставляет нечеткое пространство $\mathcal{M}(X)$ – т.н. нечетко-вероятностное расширение пространства X. Исходное пространство X содержится как в $\mathcal{F}(X)$, так и в $\mathcal{M}(X)$ в качестве подпространства, имеющего в некотором смысле характер "четкого ядра". При этом топологические свойства пространств $\mathcal{F}(X)$ и $\mathcal{M}(X)$ в большой мере определяются свойствами исходного пространства X.

§ I. КОНСТРУКЦИЯ НЕЧЕТКОГО РАСШИРЕНИЯ ЛИНЕЙНО-УПОРЯДОЧЕННОГО ПРОСТРАНСТВА

В этом параграфе $(X, <, T)$ – линейно-упорядоченное топологическое пространство; будем использовать также обозначения (X, T), $(X,<)$ и X в случаях, когда это не может привести к недоразумению.

Пусть $Z(X)$ – множество всех невозрастающих функций $z: X \to I$ таких, что $\sup z(x)=1$ и $\inf z(x)=0$. Для каждого $x \in X$ положим

$$z(x^-)=\begin{cases}\inf\limits_{t<x} z(t) & \text{, если } x \neq \min X\\ z(x)=1 & \text{, если } x=\min X\end{cases};$$

$$z(x^+)=\begin{cases}\sup\limits_{t>x} z(t) & \text{, если } x \neq \max X\\ z(x)=0 & \text{, если } x=\max X\end{cases}.$$

Для $z, z' \in Z(X)$ положим $z \sim z'$, если $z(x^-)=z'(x^-)$ и $z(x^+)=z'(x^+)$ для всех $x \in X$. Очевидно, $\sim$ является эквивалентностью на множестве $Z(X)$. Пусть $[z]=\{z' \in Z(X): z \sim z'\}$ и пусть $\mathcal{F}(X)$ – множество классов эквивалентности $[z]$, т.е. $\mathcal{F}(X)=Z(X)/\sim$.

Для всех $a, b \in X$ рассмотрим нечеткие множества $l_b, r_a \in I^{\mathcal{F}(X)}$, определенные равенствами $l_b[z]=1-z(b^-)$, $r_a[z]=z(a^+)$.

(3.I.I) Конструкция $\mathcal{F}(X)$. Нечеткое топологическое пространство $\mathcal{F}(X):=(\mathcal{F}(X),\sigma)$, где σ – нечеткая топология на $\mathcal{F}(X)$, предбазой которой является семейство $\{r_a, l_b : a, b \in X\}$, называется нечетким расширением линейно-упорядоченного пространства X.

(3.I.2) Конструкция $\mathcal{F}^{\lambda}(X)$. Нечеткое топологическое пространство $\mathcal{F}^{\lambda}(X):=(\mathcal{F}(X),\lambda\sigma)$, где λ – функтор, определенный в (I.3.I), называем ламинированным нечетким расширением пространства X.

(3.I.3) Предложение. В каждом классе эквивалентности $[z]$ найдется полунепрерывная слева функция.

Доказательство. Для доказательства достаточно для каждой функции $z \in Z(X)$ построить полунепрерывную слева функцию $z' \in Z(X)$, эквивалентную $\mathfrak{z}$. Пусть $x\in X$. Если $x\in X$ изолирована слева (т.е. $(t,x)=\emptyset$ для некоторого $t\in X$, $t<x$), положим $\mathfrak{z}'(x)=\mathfrak{z}(x)$; в противном случае положим $\mathfrak{z}'(x)=\mathfrak{z}(x^-)$. Ясно, что $\mathfrak{z}'\in\mathfrak{Z}(X)$. Докажем, что $\mathfrak{z}'$ полунепрерывна слева. В случае, когда x изолирована слева, это очевидно. Предположим, что x неизолирована слева. Тогда $\mathfrak{z}'(x)=\mathfrak{z}(x^-)=\lim\limits_{t\to x-0}\mathfrak{z}(t)=\lim\limits_{t\to x-0}\mathfrak{z}(t^-)=\lim\limits_{t\to x-0}\mathfrak{z}'(t)$, что и доказывает полунепрерывность слева функции $\mathfrak{z}'$.

Остается проверить, что $\mathfrak{z}'\sim\mathfrak{z}$. Поскольку, очевидно, $\mathfrak{z}'\geqslant\mathfrak{z}$, то $\mathfrak{z}'(x^+)\geqslant\mathfrak{z}(x^+)$ и $\mathfrak{z}'(x^-)\geqslant\mathfrak{z}(x^-)$ для всех $x\in X$. Предположим, что $\mathfrak{z}'(x^+)>\mathfrak{z}(x^+)$ для некоторого $x\in X$. Если x изолирована справа, т.е. существует точка $t>x$ такая, что $(x,t)=\emptyset$, то $\mathfrak{z}(x^+)=\mathfrak{z}(t)=\mathfrak{z}'(t)$, а значит, $\mathfrak{z}'(x^+)=\mathfrak{z}'(t)=\mathfrak{z}(x^+)$. Если же x неизолирована справа, то, поскольку $(x,t)\neq\emptyset$ для каждого $t>x$, имеем неравенство $\mathfrak{z}'(t)\leqslant\mathfrak{z}(x^+)$, откуда и следует $\mathfrak{z}'(x^+)\leqslant\mathfrak{z}(x^+)$. Предположим теперь, что $\mathfrak{z}'(x^-)>\mathfrak{z}(x^-)$. Если x изолирована слева, то $\mathfrak{z}(t)=\mathfrak{z}(x^-)>\mathfrak{z}'(x^-)=\mathfrak{z}'(t)$, где $t<x$ выбрано так, чтобы $(t,x)=\emptyset$. При этом, поскольку t неизолирована слева (ибо иначе $\mathfrak{z}(t)=\mathfrak{z}'(t)$), то $\mathfrak{z}'(t)=\mathfrak{z}(t^-)$, а следовательно, $\mathfrak{z}(x^-)>\mathfrak{z}(t^-)$, что невозможно. Если же x неизолирована слева, то выбрав $t<x$ так, чтобы $\mathfrak{z}(x^-)\leqslant\mathfrak{z}(t)<\mathfrak{z}'(x^-)$, приходим к противоречию, поскольку $(t,x)\neq\emptyset$, а следовательно, $\mathfrak{z}'(x^-)\leqslant\mathfrak{z}(t)$.

Нельзя утверждать единственность полунепрерывной снизу функции в классе $[\mathfrak{z}]$. Действительно, если $\mathfrak{z}'$ – полунепрерывна слева, $x\in X$ – изолированная слева точка и $\mathfrak{z}'(x^-)<\mathfrak{z}'(x^+)$, то каждая функция $\mathfrak{z}''\in\mathfrak{Z}(X)$, совпадающая с $\mathfrak{z}'$ на $X\setminus\{x\}$ и принимающая любое значение $\mathfrak{z}''(x)\in[\mathfrak{z}'(x^-),\mathfrak{z}'(x^+)]$ в точке x, является полунепрерывной слева и при этом $\mathfrak{z}'\sim\mathfrak{z}''$.

(3.I.4) <u>Конструкция $\mathcal{F}^*(X)$</u>. Из предложения (3.I.3) ясно, что $\mathcal{F}(X)$ можно трактовать как нечеткое пространство на множестве полунепрерывных слева функций $\mathfrak{z}\in\mathfrak{Z}(X)$, выбранных по одной из каждого класса эквивалентности $[\mathfrak{z}]$. С другой стороны, задав аналогичным образом нечеткую топологию $\mathcal{G}$ на множестве всех полунепрерывных слева функций $z \in Z(X)$, приходим к альтернативному нечеткому пространству $\mathcal{F}^*(X)$. При этом такая трактовка пространства $\mathcal{F}(X)$ позволяет рассматривать цепочку включений: $\mathcal{F}(X) \subset \mathcal{F}^*(X) \subset Z(X)$.

Заметим, что, как нетрудно показать, для пространства X, не имеющего изолированных точек, в каждом классе $[z]$ существует в точности одна полунепрерывная слева функция, а следовательно, конструкции $\mathcal{F}(X)$ и $\mathcal{F}^*(X)$ эквивалентны.

(3.I.5) <u>Пример: нечеткая прямая [32]</u>. Взяв в качестве X обычную прямую $\mathbb{R}$, приходим, как нетрудно заметить, к конструкции $\mathcal{F}(\mathbb{R})$, изоморфной нечеткой прямой $\mathbb{R}(I)$, построенной в [32]. Конструкция $\mathcal{F}^\lambda(\mathbb{R})$ в свою очередь изоморфна ламинированной нечеткой прямой $\mathbb{R}^c(I)$, впервые рассмотреной в работе Ловена [71], см. также [92], [93].

(3.I.6) <u>Пример: нечеткий интервал [46]</u>. Пусть $X = I$. Для каждого $z \in Z(X)$ определим отображение $\tilde{z} : \mathbb{R} \to I$ равенством

$$\tilde{z}(x) = \begin{cases} z(x) & : x \in I \\ 0 & : x > 1 \\ 1 & : x < 0 \end{cases}$$

Положив $\varphi([z]) = [\tilde{z}]$ для каждого $z \in Z(I)$, мы определяем биекцию φ пространства $\mathcal{F}(I)$ на Хаттоновский нечеткий интервал $I(I)$ и при этом φ и φ^{-1} непрерывны. Таким образом, пространство $\mathcal{F}(I)$ гомеоморфно хаттоновскому нечеткому интервалу $I(I)$ [46]. Аналогичным образом легко установить, что пространство $\mathcal{F}^\lambda(I)$ гомеоморфно ламинированному хаттоновскому нечеткому интервалу $I^c(I)$.

Для каждого $a \in X$ определим функцию $z_a \in Z(X)$ равенством

$$z_a(x) = \begin{cases} 1 : & x < a \\ 0 : & x \geq a. \end{cases}$$

(3.I.7) <u>Предложение</u>. Равенством $h(a) = [z_a]$, $a \in X$, определяется гомеоморфизм пространства (X, T) на подпространство $\mathcal{F}_0(X) = \{[z_a] : a \in X\}$ пространства $\mathcal{F}(X)$ и гомеоморфизм пространства $(X, \lambda T)$ на подпространство $\mathcal{F}_0^\lambda(X)$ пространства $\mathcal{F}^\lambda(X)$.

Доказательство. Ясно, что h взаимно однозначно. Непрерывность h следует из приведенных ниже равенств:

$$h^{-1}(l_b)(x) = l_b[\mathfrak{z}_x] = 1 - \mathfrak{z}_x(b^-) = (\leftarrow, b)(x)$$ и

$$h^{-1}(r_a)(x) = r_a[\mathfrak{z}_x] = \mathfrak{z}_x(a^+) = (a, \rightarrow)(x).$$

Заметив, что $h(\leftarrow, b) = l_b$ и $h(a, +\infty) = r_a$, заключаем, что отображение $h: (X, T) \rightarrow \mathfrak{F}_0(X)$ открыто. Для завершения доказательства остается заметить, что $h(c) = c$ для каждой константы $c \in I$.

Предложение (3.I.7) показывает, что каждое линейно-упорядоченное топологическое пространство каноническим образом может рассматриваться как подпространство своего нечеткого расширения. Другими словами, конструкция нечеткого расширения в известном смысле "размывает" данное линейно-упорядоченное топологическое пространство X до некоторого нечеткого топологического пространства $\mathfrak{F}(X)$, содержащего X в качестве "четкого ядра".

Пусть $(X, <_x)$, $(Y, <_y)$ – два линейно упорядоченных пространства и $f: X \rightarrow Y$ – неубывающее непрерывное отображение. Для каждого $\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}(X)$ определим отображение $f^*(\mathfrak{z}) = u: Y \rightarrow I$ равенством:

$$u(y) = \begin{cases} \inf\limits_{f(x) \leq y} \mathfrak{z}(x), & \text{если } (\leftarrow, y) \cap f(X) \neq \emptyset, \\ 1, & \text{если } (\leftarrow, y) \cap f(X) = \emptyset. \end{cases}$$

(3.I.8) Предложение. Пусть $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2 \in \mathfrak{Z}(X)$, $u_1 = f^*(\mathfrak{z}_1)$, $u_2 = f^*(\mathfrak{z}_2)$. Тогда, если $\mathfrak{z}_1 \sim \mathfrak{z}_2$ (в $\mathfrak{Z}(X)$), то $u_1 \sim u_2$ (в $\mathfrak{Z}(Y)$).

Доказательство. Пусть $y_0 \in Y$ и $u = f^*(\mathfrak{z}) \in \mathfrak{Z}(Y)$. Для доказательства равенства $u_1(y_0^-) = u_2(y_0^-)$ рассмотрим следующие возможные случаи:

(а) Пусть $f^{-1}(\leftarrow, y_0) \neq \emptyset$ и в $f^{-1}(\leftarrow, y_0)$ нет максимального элемента. Тогда $u(y_0^-) = \inf\limits_{y<y_0} u(y) = \inf\limits_{y<y_0} \inf\limits_{f(x) \leq y} \mathfrak{z}(x) = \inf\limits_{f(x)<y_0} \mathfrak{z}(x) = \inf\limits_{f(x)<y_0} \mathfrak{z}(x^-)$.

(в) Пусть $x_1 = \max f^{-1}(\leftarrow, y_0)$. Положим $y_1 = f(x_1) < y_0$. Тогда, либо x_1 является максимальным элементом в X, а следовательно, $u(y_0^-) = u(y_1) = \mathfrak{z}(x_1) = 0$, либо существует $x_2 \in X$, $x_1 < x_2$, такое, что пара (x_1, x_2) образует скачок в X, а следовательно, $u(y_0^-) = u(y_1) = \mathfrak{z}(x_1) = \mathfrak{z}(x_2^-)$.

(с) Пусть $f^{-1}(\leftarrow, y_0) = \emptyset$. Тогда $u(y) = 1$ для каждого $y < y_0$ и, следовательно, $u(y_0^-)=1$.

Отсюда легко следует, что, если $\varkappa_1\sim\varkappa_2$, то в каждом из рассмотренных случаев $u_1(y_0^-)=u_2(y_0^-)$. Рассуждая аналогично, нетрудно установить, что $u_1(y_0^+)=u_2(y_0^+)$.

(3.I.9) <u>Следствие</u>. Пусть $f:X\to Y$ – неубывающее отображение. Тогда равенством $\hat f[\varkappa]=[f^*(\varkappa)]$, где $[\varkappa]\in\mathcal{F}(X)$, определяется отображение $\hat f:\mathcal{F}(X)\to\mathcal{F}(Y)$.

(3.I.10) <u>Теорема</u>. Для каждого неубывающего отображения $f:X\to Y$ отображение $\hat f:\mathcal{F}(X)\to\mathcal{F}(Y)$ непрерывно.

<u>Доказательство</u>. Пусть $\Pi_X:=\{l_a, r_b: a,b\in X\}$ – стандартная предбаза пространства $\mathcal{F}(X)$ и $\Pi_Y:=\{l'_e, r'_d: e,d\in Y\}$ – аналогичным образом определенная стандартная предбаза пространства $\mathcal{F}(Y)$.

Для доказательства непрерывности отображения $\hat f$ достаточно проверить, что прообразы всех l'_e и r'_d открыты в $\mathcal{F}(X)$. Пусть $[\varkappa]\in\mathcal{F}(X)$; тогда $\hat f^{-1}(l'_e)[\varkappa]=l'_e\hat f[\varkappa]=l'_e[u]=1-u(e^-)$, где $u=f^*(\varkappa)$. Рассмотрим следующие возможные случаи.

(а) Пусть $f^{-1}(\leftarrow,e)=\emptyset$ и при этом в $f^{-1}(\leftarrow,e)$ нет максимального элемента. Тогда $u(e^-)=\inf\limits_{y<e}\inf\limits_{f(x)<y}\varkappa(x)=\inf\limits_{f(x)<e}\varkappa(x)=\inf\limits_{f(x)<e}\varkappa(x^-)$. Следовательно, $\hat f^{-1}(l'_e)[\varkappa]=1-\bigwedge\limits_{f(x)<e}\varkappa(x^-)=\bigvee\limits_{f(x)<e}(1-\varkappa(x^-))=\bigvee\limits_{f(x)<e}l_x[\varkappa]$.

(б) Пусть $x_1=\max f^{-1}(\leftarrow,e)$. Тогда, либо x_1 – максимальный элемент в X, а следовательно, $u(e^-)=\varkappa(x_1)=0$, т.е. $\hat f^{-1}(l_e)[\varkappa]=1$, либо существует $x_2\in X$, $x_1<x_2$, такое, что пара (x_1,x_2) образует скачок в X. Но в этом случае $u(e^-)=\varkappa(x_1)=\varkappa(x_2^-)$, а следовательно, $f^{-1}(l_e)[\varkappa]=1-\varkappa(x_2^-)=l_{x_2}[\varkappa]$.

(в) $f^{-1}(\leftarrow,e)=\emptyset$. Тогда $u(y)=1$ для каждого $y<e$, а следовательно, $u(e^-)=1$ и $\hat f^{-1}(l'_e)=0$.

Итак, в каждом из этих случаев прообраз $\hat f^{-1}(l'_e)$ открыт в $\mathcal{F}(X)$. Рассуждая аналогично, можем установить, что прообраз $\hat f^{-1}(r_d)$ для каждого $d\in Y$ также открыт в $\mathcal{F}(X)$. Но это и означает непрерывность отображения $\hat{f}$.

Аналогичным образом может быть доказана

(3.I.10$^\lambda$) <u>Теорема</u>. Для каждого неубывающего отображения $f: X\to Y$ отображение $\hat{f}: \mathcal{F}^\lambda(X)\to \mathcal{F}^\lambda(Y)$ непрерывно.

(3.I.II) <u>Следствие</u>. Если $f: X\to Y$ – возрастающий изоморфизм линейно упорядоченных пространств, то $\hat{f}: \mathcal{F}(X)\to\mathcal{F}(Y)$ и $\hat{f}: \mathcal{F}^\lambda(X)\to \mathcal{F}^\lambda(Y)$ – гомеоморфизмы соответствующих нечетких расширений.

<u>Доказательство</u>. Достаточно заметить, что в предположениях теоремы отображение $\hat{f}: \mathcal{F}(X)\to\mathcal{F}(Y)$ является биекцией, и применить утверждения (3.I.IO) и (3.I.IO$^\lambda$) к отображениям $f: X\to Y$ и $f^{-1}: Y\to X$.

(3.I.I2) <u>Замечание</u>. Пусть $f: X\to Y$ – неубывающее отображение. Определим отображение $f^*(\alpha)=u: Y\to I$, положив

$$u(y)=\begin{cases}\inf\limits_{f(x)<y}\alpha(x), & \text{если } (\leftarrow,y)\cap f(X)\neq\emptyset;\\ 1, & \text{если } (\leftarrow,y)\cap f(X)=\emptyset.\end{cases}$$

(Это определение не эквивалентно определению (3.I.8)).

Для определенного таким образом отображения $f^*: \mathcal{Z}(X)\to\mathcal{Z}(Y)$ справедлив аналог утверждения (3.I.9). С другой стороны, для соответствующим образом определенного отображения $\hat{f}: \mathcal{F}(X)\to\mathcal{F}(Y)$ аналоги принципиальных для данной теории утверждений (3.I.IO) и (3.I.IO$^\lambda$), вообще говоря, не имеют места. Этот факт в значительной степени обусловил наш выбор конструкции нечеткого расширения для отображения

Пусть Ord – категория линейно упорядоченных топологических пространств и неубывающих непрерывных отображений. Конструкция нечеткого расширения линейно упорядоченных пространств, рассмотренная выше, может быть интерпретирована как функтор $\mathcal{F}: Ord\to CFT$.

(3.I.I3) <u>Теорема</u>. Для каждого объекта X категории Ord пусть $\mathcal{F}(X)$ – его нечеткое расширение (3.I.I) и для каждого морфизма $f: X\to Y$ категории Ord пусть $\mathcal{F}(f)=\hat{f}: \mathcal{F}(X)\to\mathcal{F}(Y)$ – отображение, определенное в (3.I.8). Тогда $\mathcal{F}$ является функтором из категории Ord в категорию CFT.

Доказательство. Пусть $(X, <_X)$, $(Y, <_Y)$, $(T, <_T)$ - линейно упорядоченные пространства и $f: X \to Y$, $g: Y \to T$ - неубывающие отображения. Покажем, что $\mathcal{F}(g \circ f) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f)$.

Обозначим $h = g \circ f$ и пусть $\alpha \in \mathcal{Z}(X)$, $u = f^*(\alpha) \in \mathcal{Z}(Y)$, $v = g^*(u) \in \mathcal{Z}(T)$, $w = h^*(\alpha) \in \mathcal{Z}(T)$. Для доказательства равенства $\mathcal{F}(g \circ f) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f)$ достаточно показать, что $v = w$. Зафиксировав $t \in T$, имеем

$$w(t) = \begin{cases} \inf\limits_{h(x) \leq t} \alpha(x), & \text{если } (\leftarrow, t] \cap h(X) \neq \emptyset, \\ 1, & \text{если } (\leftarrow, t] \cap h(X) = \emptyset, \end{cases}$$

$$v(t) = \begin{cases} \inf\limits_{g(y) \leq t} u(y), & \text{если } (\leftarrow, t] \cap g(Y) \neq \emptyset, \\ 1, & \text{если } (\leftarrow, t] \cap g(Y) = \emptyset. \end{cases}$$

С другой стороны, для каждого $y \in Y$

$$u(y) = \begin{cases} \inf\limits_{f(x) \leq y} \alpha(x), & \text{если } (\leftarrow, y] \cap f(X) \neq \emptyset, \\ 1, & \text{если } (\leftarrow, y] \cap f(X) = \emptyset. \end{cases}$$

Рассмотрим два возможных случая.

а) $(\leftarrow, t] \cap h(X) = \emptyset$. Тогда $w(t) = 1$. Если при этом $(\leftarrow, t] \cap g(Y) = \emptyset$, то и $v(t) = 1$. Если же $(\leftarrow, t] \cap g(Y) \neq \emptyset$, то $(\leftarrow, y] \cap f(X) = \emptyset$ для каждого $y \in g^{-1}(\leftarrow, t]$, а следовательно, $v(t) = \inf\limits_{g(y) \leq t} u(y) = 1$.

б) $(\leftarrow, t] \cap h(X) \neq \emptyset$. В этом случае $w(t) = \inf\limits_{h(x) \leq t} \alpha(x)$. С другой стороны, в этом случае $(\leftarrow, y] \cap f(X) \neq \emptyset$ для некоторого $y \in g^{-1}(\leftarrow, t]$. Отсюда следует, что $v(t) = \inf\limits_{g(y) \leq t} u(y) = \inf\limits_{g(y) \leq t} \inf\limits_{f(x) \leq y} \alpha(x) = \inf\limits_{h(x) \leq t} \alpha(x)$.

Итак, в каждом случае имеет место равенство $v(t) = w(t)$.

Для завершения доказательства остается заметить, что, если $\varepsilon: X \to X$ - тождественное отображение, то $\mathcal{F}(\varepsilon): \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(X)$ - тождественное отображение соответствующего нечеткого пространства.

(3.I.I4) Предложение. Если $f_1, f_2: X \to Y$ - неубывающие отображения и при этом $f_1 \neq f_2$, то $\hat{f}_1 \neq \hat{f}_2$.

Доказательство. Выберем $x_0 \in X$ так, чтобы $f_1(x_0) := y_1 \neq y_2 := f_2(x_0)$. Считая для определенности, что $y_1 < y_2$, определим $\alpha \in \mathcal{Z}(X)$ равенством

$$\chi(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x<x_0\\ 0, & \text{если } x\geq x_0,\end{cases}$$

и положим $u_1=f_1^*(\chi)$, $u_2=f_2^*(\chi)$. Ясно, что $u_1(y_2^-)\leq u_1(y_1)\leq\chi(x_0)=0$, в то время как $u_2(y_2^-)=\inf\limits_{y<y_2}u_2(y)=\inf\limits_{y<y_2}\inf\limits_{f_2(x)\geq y}\chi(x)=1$. Таким образом, $u_1(y_2^-)\neq u_2(y_2^-)$ и, следовательно, $\hat{f}_1\neq\hat{f}_2$.

Из теоремы (3.I.I3) и предложения (3.I.I4) вытекает важное

(3.I.I5) <u>Следствие</u>. $\mathcal{F}:Ord\to\mathcal{F}u\chi$ является функтором вложения.

Совершенно аналогично можно установить ламинированные версии утверждений (3.I.I3) и (3.I.I5).

(3.I.I3$^\lambda$/I5$^\lambda$) <u>Теорема</u>. Для каждого объекта X категории Ord пусть $\mathcal{F}^\lambda(X)$ - ламинированная нечеткая модификация, и для каждого морфизма $f:X\to Y$ категории Ord пусть $\mathcal{F}^\lambda(f)=\hat{f}:\mathcal{F}^\lambda(X)\to\mathcal{F}^\lambda(Y)$ - отображение, определенное в (3.I.9). Тогда $\mathcal{F}^\lambda: Ord\to LCFT$ является функтором вложения.

Для дальнейшего нам потребуется уточнить некоторые терминологические моменты, касающиеся линейно-упорядоченных пространств.

(3.I.I6) Следуя [30], линейно-упорядоченное пространство $(Y,\prec)$ называем упорядоченным расширением линейно-упорядоченного пространства $(X,<)$, если (I) X - плотное подпространство топологического пространства Y и (2) порядок $\prec$ индуцирует на X порядок $<$.

Упорядоченное расширение $(Y,\prec)$ пространства $(X,<)$ называем внутренним, если $Y\setminus X$ не содержит ни минимального, ни максимального элементов Y.

(3.I.I7) Из детального исследования упорядоченных компактификаций, проведенного в [30], можно получить следующее описание внутреннего упорядоченного расширения Y линейно-упорядоченного пространства X. Пусть $(X_g^-,X_g^+)=g$ - щель в X [26]. Тогда в Y ей соответствует одна из следующих трех ситуаций:

(а) точка $y_g \in X$ такая, что $\{y \in Y : y < y_g\} \cap X = X_g^-$, $\{y \in Y : y_g < y\} \cap X = X_g^+$;

(в) пара точек y_g^1 и y_g^2 таких, что $y_g^1 < y_g^2$ и $\{y \in Y : y < y_g^1\} \cap X = X_g^-$, $\{y \in Y : y > y_g^2\} \cap X = X_g^+$;

(с) щель $g' = (Y_g^-, Y_g^+)$, где $Y_g^- = \{y \in Y : y < x \ \forall x \in X_g^+\}$ и $Y_g^+ = \{y \in Y : x < y \ \ \forall x \in X_g^-\}$.

При этом каждая точка $y \in Y \setminus X$ имеет вид y_g или y_g^i, $i = 1, 2$. Наиболее полезными для нас являются внутренние упорядоченные расширения, в которых каждая щель g заменяется в точности одной точкой y_g, т.е. когда имеет место только случай (а). Будем называть такие расширения непрерывными.

(3.I.18) <u>Предложение</u>. Если Y – внутреннее непрерывное упорядоченное расширение пространства X, то $\mathcal{F}^\lambda(X)$ гомеоморфно $\mathcal{F}^\lambda(Y)$ и $\mathcal{F}(X)$ гомеоморфно $\mathcal{F}(Y)$.

<u>Доказательство</u>. Пусть $[\mathfrak{x}'] \in \mathcal{F}(Y)$. Тогда ограничение $\mathfrak{x}'|_X = \mathfrak{x}$ принадлежит $\mathfrak{X}(X)$. При этом очевидно, что класс эквивалентности $[\mathfrak{x}] \in \mathcal{F}(X)$ не зависит от выбора представителя $\mathfrak{x}' \in [\mathfrak{x}'] \in \mathcal{F}(Y)$, а следовательно, положив $\varphi[\mathfrak{x}'] = [\mathfrak{x}]$, получаем отображение $\varphi : \mathcal{F}(Y) \to \mathcal{F}(X)$.

Пусть теперь $[\mathfrak{x}] \in \mathcal{F}(X)$. Для того, чтобы продолжить функцию $\mathfrak{x} \in [\mathfrak{x}]$ на пространство Y, положим $\mathfrak{x}'(y_g) = \inf\{\mathfrak{x}(x) : x \in X_g^-\}$ для каждого $y_g \in Y \setminus X$. Ясно, что получаемое при этом отображение $\mathfrak{x}'$ принадлежит $\mathfrak{X}(Y)$ и что, если $\mathfrak{x}_1 \sim \mathfrak{x}_2$ в $\mathfrak{X}(X)$, то $\mathfrak{x}_1' \sim \mathfrak{x}_2'$ в $\mathfrak{X}(Y)$. Поэтому, полагая $\psi[\mathfrak{x}] = [\mathfrak{x}']$, определяем отображение $\psi : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$. Нетрудно понять, что отображения φ и ψ взаимно-однозначны и при этом ψ является обратным к φ. Непосредственной проверкой легко установить также, что все отображения $\psi : \mathcal{F}^\lambda(X) \to \mathcal{F}^\lambda(Y)$, $\varphi : \mathcal{F}^\lambda(Y) \to \mathcal{F}^\lambda(X)$, $\psi : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$ и $\varphi : \mathcal{F}(Y) \to \mathcal{F}(X)$ непрерывны.

§ 2. ОСНОВНЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НЕЧЕТКОГО РАСШИРЕНИЯ ЛИНЕЙНО-УПОРЯДОЧЕННОГО ПРОСТРАНСТВА

А. Вес

(3.2.1) Теорема. Для каждого линейно-упорядоченного пространства X справедливо равенство $w(\mathcal{F}(X)) = w(X)$. Если при этом X бесконечно, то и $w(\mathcal{F}^\lambda(X)) = w(X)$.

Доказательство. Пусть $w(X) = æ$ и пусть $\mathcal{S} = \{(\leftarrow, b_j), (a_i, \rightarrow) : i, j \in \mathcal{J}\}$ - некоторая предбаза топологии пространства X, мощность которой равна $æ$. Нетрудно заметить, что тогда $\mathcal{B} = \{\ell_{b_j} \wedge r_{a_i} : i, j \in \mathcal{J}\}$ и $\mathcal{B}^\lambda = \{\ell_{b_j} \wedge r_{a_i} \wedge c : i, j \in \mathcal{J}, c \in I \cap \mathbb{Q}\}$ являются базами пространств $\mathcal{F}(X)$ и $\mathcal{F}^\lambda(X)$ соответственно, а следовательно, $w(\mathcal{F}(X)) \leq æ$ и $w(\mathcal{F}^\lambda(X)) \leq æ \cdot \aleph_0$.

Обратно, пусть $w(\mathcal{F}(X)) = æ$. Тогда, согласно (2.9.4), существует база вида $\beta = \{\ell_{b_i} \wedge r_{a_i} : i \in \mathcal{J}\}$ пространства $\mathcal{F}(X)$, где $|\mathcal{J}| \leq æ$. Покажем, что $\mathcal{B} = \{(a_i, b_i) : i \in \mathcal{J}, a_i < b_i\}$ является базой топологии на X; отсюда и будет следовать неравенство $w(X) \leq æ$.

Выберем $x, y \in X$, $x < y$, и рассмотрим нечеткое множество $\ell_y \wedge r_x$. Поскольку β - база пространства $\mathcal{F}(X)$, то найдется $\mathcal{J}_0 \subset \mathcal{J}$ такое, что $\vee\{\ell_{b_i} \wedge r_{a_i} : i \in \mathcal{J}_0\} = \ell_y \wedge r_x$. Непосредственной проверкой теперь легко установить, что $(x, y) = \cup\{(a_i, b_i) : i \in \mathcal{J}_0\}$, а значит, $\mathcal{B}$ - база топологии пространства X.

(3.2.2) Следствие. Пространства $\mathcal{F}(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}^\lambda(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}(I)$ и $\mathcal{F}^\lambda(I)$ имеют счетный вес.

Б. Компактность

(3.2.3) Теорема. Если пространство X ограничено, то его нечеткое расширение $\mathcal{F}(X)$ сильно компактно (2.3.59). Обратно, если $\mathcal{F}(X)$ α-компактно (2.3.58) для некоторого $\alpha \in (0, 1]$, то пространство

$(3.2.3^\lambda)$ Теорема. Если пространство X ограничено, то его ламинированное нечеткое расширение $\mathcal{F}^\lambda(X)$ сильно компактно. Обратно, если $\mathcal{F}^\lambda(X)$ α-компактно для некоторого $\alpha\in(0,1]$, то X ограничено.

Приведем доказательство теоремы $(3.2.3^\lambda)$; доказательство теоремы (3.2.3) может быть проведено аналогично с некоторыми очевидными упрощениями.

Доказательство. Предположим, что X ограничено и пусть $m=\min X$, $s=\max X$. Пусть X^* – непрерывная линейно-упорядоченная компактификация пространства X [30]. Поскольку $m,s\in X$, ясно, что X^* – внутреннее непрерывное упорядоченное расширение пространства X, а следовательно (3.I.I8), нечеткие модификации $\mathcal{F}^\lambda(X)$ и $\mathcal{F}^\lambda(X^*)$ гомеоморфны. Поэтому без ограничения общности можем сразу предполагать, что пространство X компактно.

Применяя нечеткую версию леммы Александера (ср., напр., [32]), для доказательства α-компактности пространства $\mathcal{F}^\lambda(X)$ достаточно показать, что для каждого α-покрытия $\mathcal{U}$ элементами предбазы $\Pi=\{l_b, r_a : a,b\in X\}\cup\{c : c\in I\}$ пространства $\mathcal{F}^\lambda(X)$ существует конечное α-подпокрытие $\mathcal{U}_0$ (При этом α-покрытием нечеткого пространства $\mathcal{Y}$ мы называем такое семейство $\mathcal{U}$ его нечетких подмножеств, что $\bigvee\mathcal{U}(x)>\alpha$ $\forall x\in X$). Рассмотрим два возможных случая.

Случай $\alpha\geq 1/2$. Определим функцию $\mathfrak{z}\in\mathcal{Z}(X)$ равенством

$$\mathfrak{z}(x)=\begin{cases} 1 : & x=m \\ 1/2 : & m<x<s \\ 0 : & x=s \end{cases}$$

Поскольку $[\mathfrak{z}]\in\mathcal{F}(X)$ и $\mathcal{U}$ – α-покрытие пространства $\mathcal{F}^\lambda(X)$, существует $U\in\mathcal{U}$ такое, что $U[\mathfrak{z}]>\alpha$. Поскольку, как легко заметить, $l_b[\mathfrak{z}]\leq 1/2$ и $r_a[\mathfrak{z}]\leq\frac{1}{2}$ для всех $a,b\in X$, то $U=c$ для некоторого $c>\frac{1}{2}$. Но тогда, очевидно, $\{U\}$ является искомым α-подпокрытием.

Случай $\alpha<1/2$. $\mathcal{U}$, будучи α-покрытием пространства $\mathcal{F}^\lambda(X)$, является α-покрытием и его подпространства $\mathcal{F}_0^\lambda(X)$ (3.I.7), а следовательно, для каждого $x\in X$ существует $U^x\in\mathcal{U}$ такое, что $U^x[\lambda_x]>\alpha$. Если $U^{x_0}=c$ для некоторого $x_0\in X$ и некоторой константы $c\in(\alpha,1]$, то $\{U^{x_0}\}$ уже является конечным α-подпокрытием. Поэтому предположим, что каждое U^x имеет вид l_b или r_a для некоторых $a,b\in X$. В случае $U^x=r_a$, как нетрудно заметить, $x\in(a,s]$; в случае же $U^x=l_b$ имеет место $x\in[m,b)$. Но тогда $\{[m,b),(a,s]: r_a,l_b\in\mathcal{U}\}=\mathcal{V}$ образует открытое покрытие пространства X. Пусть $\mathcal{V}'=\{[m,b_i),(a_j,s]: 1\leq i\leq n, 1\leq j\leq k\}$ – его конечное подпокрытие, и пусть $a_0=\min\limits_{1\leq i\leq k} a_i$, $b_0=\max\limits_{1\leq j\leq n} b_j$.

Очевидно, $a_0<b_0$, а следовательно, $\{[m,b_0),(a_0,s]\}$ – бинарное подпокрытие покрытия $\mathcal{V}$. Рассмотрим следующие две возможности.

(I) $(a_0,b_0)\neq\emptyset$. Тогда семейство $\{l_{b_0},r_{a_0}\}$ образует α-подпокрытие пространства $\mathcal{F}^\lambda(X)$. Действительно, если $r_{a_0}[\lambda]\leq\alpha$ для некоторого $\lambda\in\mathcal{Z}(X)$, то $l_{b_0}[\lambda]=1-\lambda(b_0^-)\geq 1-\lambda(a_0^+)=1-r_{a_0}[\lambda]>\alpha$.

(2) $(a_0,b_0)=\emptyset$. Пусть λ_{a_0} определено, как и в (3.I.7), и выберем $U\in\mathcal{U}$, удовлетворяющее неравенству $U([\lambda_{a_0}])>\alpha$. В нетривиальном случае либо $U=r_a$, либо $U=l_b$. Если $U=l_b$, то $b>b_0$ (иначе $l_b([\lambda_{a_0}])=0$). Поскольку, очевидно, $(a_0,b)\neq\emptyset$, то, как и в случае (I), нетрудно заметить, что $(l_b\vee r_{a_0})[\lambda]>\alpha$ для каждого $\lambda\in\mathcal{Z}(X)$, а следовательно, $\{l_b,r_{a_0}\}$ – α-покрытие пространства $\mathcal{F}^\lambda(X)$. Совершенно аналогично можно показать, что, если $U=r_a$, то $\{l_{b_0},r_a\}$ является α-покрытием пространства $\mathcal{F}^\lambda(X)$.

Таким образом, $\mathcal{F}^\lambda(X)$ является α-компактным для каждого $\alpha\in(0,1]$, а следовательно, и сильно компактным.

Обратно, предположим, что X не имеет максимального элемента (случай, когда отсутствует минимальный элемент, может быть рассмотрен аналогично). Положим $\mathcal{U}=\{l_b: b\in X\}$. Тогда $(\bigvee\limits_{b\in X} l_b)[\lambda]=1-\bigwedge\limits_{b\in X}\lambda(b^-)=1$ для каждого $[\lambda]\in\mathcal{F}(X)$, а значит, $\mathcal{U}$ является α-покрытием пространства X для каждого $\alpha\in[0,1)$. При этом ясно, что в $\mathcal{U}$ нет конечного α-подпокрытия, а следовательно, $\mathcal{F}^\lambda(X)$ не является α-компактным.

(3.2.4) <u>Следствие</u> [32]. Хаттоновские нечеткие интервалы $\mathcal{F}(I)$

и $\mathcal{F}^\lambda(I)$ сильно компактны.

(3.2.5) Следствие [32]. Нечеткая прямая $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ и ламинированная нечеткая прямая $\mathcal{F}^\lambda(\mathbb{R})$ не являются α-компактными ни для какого $\alpha\in[0,1)$.

В. Число Линделефа

Линейно-упорядоченному пространству X сопоставим кардиналы $cf^+(X)=\inf\{|X_0|: X_0\subset X,\ \forall x\in X\ \exists x_0\in X_0\ x_0\geqslant x\}$ – "положительный конфинальный характер", $cf^-(X)=\inf\{|X_0|: X_0\subset X,\ \forall x\in X\ \exists x_0\in X_0\ x_0\leqslant x\}$ – "отрицательный конфинальный характер" и $cf(X)=\max\{cf^+(X), cf^-(X)\}$ – "конфинальный характер".

В этом разделе мы выясним связь между конфинальным характером пространства X и числом Линделефа (2.9.7) его нечеткого расширения. При этом здесь мы предполагаем, что $cf(X)\geqslant\aleph_0$, т.е. что пространство X неограничено: случай, когда X ограничено, с интересующей нас стороны полностью описан в предыдущем разделе.

(3.2.6) Теорема. Если X – неограниченное линейно-упорядоченное пространство и $\alpha\in[0,1)$, то $\ell^\circ_\alpha(\mathcal{F}^\lambda(X))=\ell^\circ_\alpha(\mathcal{F}(X))=cf(X)$, где $\ell^\circ_\alpha(Y)$ – число строгой линделефовости (2.9.7) константы α в нечетком пространстве Y.

Доказательство. Докажем равенство $\ell^\circ_\alpha(\mathcal{F}^\lambda(X))=cf(X)$; второе равенство можно установить аналогично. Пусть $\alpha\in[0,1)$. Заметим, прежде всего, что, если $X_0=[y_0,x_0]\subset X$, то нечеткое пространство $\tilde{\mathcal{F}}(X_0):=\{[\breve{x}]:[\breve{x}]\in\mathcal{F}(X), \breve{x}(x)=0$ при $x\geqslant x_0, \breve{x}(x)=1$ при $x\leqslant y_0\}$, рассматриваемое как подпространство пространства $\mathcal{F}^\lambda(X)$, гомеоморфно пространству $\mathcal{F}^\lambda(X_0)$. Для доказательства неравенства $\ell^\circ_\alpha(\mathcal{F}^\lambda(X))\leqslant cf(X)$ рассмотрим следующие три возможных случая.

Случай I: $cf(X)=\aleph_0$. Предположим, что $cf^+(X)=\aleph_0$, $cf^-(X)=\aleph_0$, и выберем возрастающую последовательность $(x_n)_{n\in\omega}$ и убывающую последовательность $(y_n)_{n\in\omega_0}$ так, чтобы $\bigcup_{n\in\omega_0} X_n = X$, где $X_n=[y_n,x_n]$. Рассмотрим открытое α-покрытие $\mathcal{U}$ пространства $\mathcal{F}^\lambda(X)$; при этом без ограничения общности можем считать, что все элементы из $\mathcal{U}$ имеют вид $l_b\wedge r_a\wedge c$ для некоторых $a,b\in X$ и $c\in I$. Поскольку $\tilde{\mathcal{F}}^\lambda(X_n)\subset\mathcal{F}^\lambda(X)$ и пространство $\mathcal{F}^\lambda(X_n)$ α-компактно (3.2.3), найдется конечное α-подпокрытие $\mathcal{U}_n\subset\mathcal{U}$ пространства $\tilde{\mathcal{F}}^\lambda(X_n)$. Ясно, что $\mathcal{U}':=\bigcup\mathcal{U}_n$ является счетным α-покрытием множества $\bigcup_{n\in\omega_0}\tilde{\mathcal{F}}^\lambda(X_n)$. Покажем, что в действительности $\mathcal{U}'$ является α-покрытием и для всего $\mathcal{F}^\lambda(X)$.

Зафиксируем $[\mathfrak{z}]\in\mathfrak{F}(X)$ и выберем n так, чтобы $\mathfrak{z}(y_n^+)>\alpha$ и $1-\mathfrak{z}(x_n^-)>$ $>\alpha$. Определим функцию $\tilde{\mathfrak{z}}\in\mathcal{Z}(X)$ равенством

$$\tilde{\mathfrak{z}}(x)=\begin{cases}1: & x\leqslant y_n\\ \mathfrak{z}(x): & x\in(y_n,x_n)\\ 0: & x\geqslant x_n\end{cases}$$

Ясно, что $\tilde{\mathfrak{z}}\in\tilde{\mathcal{F}}(X_n)$, а следовательно, существует $l_b\wedge r_a\wedge c\in\mathcal{U}'$ такое, что $(l_b\wedge r_a\wedge c)[\tilde{\mathfrak{z}}]>\alpha$. Покажем, что в этом случае и $(l_b\wedge r_a\wedge$ $\wedge c)[\mathfrak{z}]>\alpha$.

Заметим, прежде всего, что либо $a\leqslant y_n$, либо $a\in[y_n,x_n]$ (неравенство $a>x_n$ не может иметь места, так как в этом случае было бы $\tilde{\mathfrak{z}}(a^+)=0$). Если $a\leqslant y_n$, то $r_a[\mathfrak{z}]=\mathfrak{z}(a^+)\geqslant\mathfrak{z}(y_n^+)$; если же $a\in[y_n,x_n]$, то $r_a[\mathfrak{z}]=\mathfrak{z}(a^+)=\tilde{\mathfrak{z}}(a^+)>\alpha$. Аналогичным образом устанавливаем, что и $l_b[\mathfrak{z}]>\alpha$, а следовательно, $(l_b\wedge r_a\wedge c)[\mathfrak{z}]>\alpha$. Таким образом, неравенство $l^0_\alpha(\mathcal{F}^\lambda(X))\leqslant\aleph_0$ установлено.

Аналогичным образом могут быть рассмотрены случаи $cf^+(X)=\aleph_0$, $cf^{-1}(X)=1$ и $cf^-(X)=\aleph_0$, $cf^+(X)=1$.

<u>Случай 2</u>: $cf^+(X)>\aleph_0$ и $cf^-(X)\leqslant\aleph_0$ или $cf^+(X)\leqslant\aleph_0$ и $cf^-(X)>\aleph_0$. Предполагая для определенности, что $cf^+(X)=\varkappa>\aleph_0$ и $cf^-(X)\leqslant\aleph_0$, положим $X_\xi=\{x: x\in X,\ x\leqslant x_\xi\}$, где $(x_\xi)_{\xi<\varkappa}$ – возрастающая неограниченная $\varkappa$-последовательность в X. Поскольку $\varkappa>\aleph_0$, нетрудно заметить, что $\mathfrak{F}(X)=\bigcup_{\xi<\varkappa}\tilde{\mathfrak{F}}(X_\xi)$. Каждое X либо ограничено, либо $cf(X_\xi)=\aleph_0$, поэтому, воспользовавшись соответственно (3.2.3) или случаем I, за-

ключаем, что $l^o_\alpha(\mathcal{F}^\lambda(X))\leqslant\aleph_0$, а следовательно, $l^o_\alpha(\tilde{\mathcal{F}}^\lambda(X))\leqslant æ\cdot l^o_\alpha(\tilde{\mathcal{F}}^\lambda(X_\xi))\leqslant æ = cf(X)$.

<u>Случай 3</u>: $cf^+(X) = æ > \aleph_0$ и $cf^-(X) = æ' > \aleph_0$. Рассмотрим убывающую неограниченную $æ'$-последовательность $(y_\xi)_{\xi<æ'}$, и пусть $X_\xi = [y_\xi, \to)$. Как и в случае 2, нетрудно заметить, что $\mathcal{F}(X) = \bigcup\limits_n \tilde{\mathcal{F}}(X_n)$. С другой стороны, согласно рассмотренному в случае 2, $l^o_\alpha(\mathcal{F}^\lambda(X_n))\leqslant æ$ для каждого $\xi<æ'$, а следовательно, $l^o_\alpha(\mathcal{F}^\lambda(X))\leqslant æ'\cdot l^o_\alpha(\tilde{\mathcal{F}}^\lambda(X_\xi))\leqslant æ'\cdot æ = cf(X)$.

Для доказательства неравенства $l^o_\alpha(\mathcal{F}^\lambda(X))\geqslant cf(X)$ предположим, что $l^o_\alpha(\mathcal{F}^\lambda(X)) = æ < cf(X)$, и рассмотрим семейство $\mathcal{U} = \{l_b\wedge r_a : a<b,\ a,b\in X\}$. Ясно, что $\mathcal{U}$ является α-покрытием пространства $\mathcal{F}^\lambda(X)$, а следовательно, в нем существует α-подпокрытие $\mathcal{U}'$ такое, что $|\mathcal{U}'|\leqslant æ$. Нетрудно заметить, что тогда множество $\{b_\xi : l_{b_\xi}\wedge r_a\in\mathcal{U}'$ для некоторого $a\in X\}$ конфинально в X, а следовательно, $cf^+(X)\leqslant æ$. Аналогично показываем, что $cf^-(X)\leqslant æ$, и, значит, $cf(X)\leqslant æ$. Полученное противоречие и завершает доказательство.

Поскольку для каждого линейно-упорядоченного пространства имеет место неравенство $l(X)\geqslant cf(X)$, из теоремы (3.2.6) вытекает

(3.2.7) <u>Следствие</u>. $l^o_\alpha(\mathcal{F}^\lambda(X)) = l^o_\alpha(\mathcal{F}(X))\leqslant l(X)$.

(3.2.8) <u>Следствие</u>. $l^o_\alpha(\mathcal{F}^\lambda(\mathbb{R})) = l^o_\alpha(\mathcal{F}(\mathbb{R})) = \aleph_0$.

Г. <u>Случай метризуемого пространства</u>

(3.2.9) <u>Теорема</u>. Если пространство X метризуемо, то его нечеткие расширения $\mathcal{F}(X)$ и $\mathcal{F}^\lambda(X)$ являются кружевными.

Ограничимся доказательством ламинированного случая.

(3.2.10) <u>Лемма</u>. Пусть X – линейно-упорядоченное пространство, не имеющее скачков (см., напр., [26]) и $a,b\in X$. Тогда $\overline{l_b\wedge r_a} = \bar{l}_b\wedge\bar{r}_a = (1-r_b)\wedge(1-l_a)$; $\bar{l}_b = 1-r_b$; $\bar{r}_a = 1-l_a$.

<u>Доказательство</u>. Неравенства $\bar{l}_b\leqslant 1-r_b$, $\bar{r}_a\leqslant 1-l_a$ и $\overline{l_b\wedge r_a}\leqslant \bar{l}_b\wedge\bar{r}_a$ очевидны. Поэтому для доказательства первого равенства доста-

точно показать, что $(1-r_b)\wedge(1-l_a)\leqslant\overline{l_b\wedge r_a}$.

Предположим, что для некоторого $z_0\in Z(X)$ имеет место $(1-r_b)\wedge\wedge(1-l_a)[z_0]>\overline{\lambda_b\wedge\rho_a}[z_0]$. Тогда $(r_b\vee l_a)[z_0]<1-\overline{l_b\wedge r_a}[z_0]$, а следовательно, существуют $c,d\in X$ такие, что

(I) $(l_c\wedge r_d)[z_0]>(r_b\vee l_a)[z_0]$,

(II) $l_c\wedge r_d\leqslant 1-\overline{l_b\wedge r_a}\leqslant 1-(l_b\wedge r_a)=(1-l_b)\vee(1-r_a)$.

Из первого неравенства легко следует, что $a<c$ и $d<b$. Поэтому для завершения доказательства рассмотрим следующие возможные случаи:

(I) $a<c\leqslant d<b$; (2) $a<d\leqslant c<b$; (3) $a\leqslant d<b\leqslant c$;

(4) $d<b\leqslant a<c$; (5) $d<a\leqslant b<c$; (6) $d\leqslant a<c\leqslant b$.

Воспользовавшись тем, что в пространстве X нет скачков, нетрудно построить функции $z_i\in Z(X)$, $i=1,2,3,4,5,6$, принимающие значения во множестве $\{0,1/2,1\}$ и такие, что в случае (i) имеет место неравенство $(l_c\wedge r_d)[z_i]>(1-l_b)[z_i]\vee(1-r_a)[z_i]$. Поскольку это противоречит установленному выше неравенству (II), отсюда заключаем, что $(1-r_b)\wedge\wedge(1-l_a)\leqslant\overline{l_b\wedge r_a}$.

Аналогично можно установить и оставшиеся два неравенства.

Нетрудно построить пример, показывающий существенность требования отсутствия в X скачков для справедливости этого утверждения.

Введем следующее полезное для работы определение:

(3.2.II) <u>Определение</u>. Семейство подмножеств $\{U_i:i\in J\}$ линейно-упорядоченного пространства X назовем строго дискретным, если оно дискретно в каждом непрерывном расширении пространства X.

(3.2.I2) <u>Лемма</u>. Пусть $\{(a_i,b_i):i\in J\}$ – строго дискретное семейство интервалов в пространстве X. Тогда нечеткие множества $\bigvee_{i\in J}(\overline{l_{b_i}\wedge r_{a_i}})$ и $\bigvee_{i\in J}(\overline{l_{a_i}\wedge r_{b_i}})$ замкнуты.

<u>Доказательство</u>. Согласно (3.2.I0) $\bigvee_{i\in J}(\overline{l_{b_i}\wedge r_{a_i}})=\bigvee_{i\in J}((1-r_{b_i})\wedge(1-l_{a_i})$, а следовательно, $1-\bigvee_{i\in J}(\overline{l_{b_i}\wedge r_{a_i}})=\bigwedge_{i\in J}(r_{b_i}\vee l_{a_i})$.

Поскольку семейство $\{(a_i,b_i):i\in J\}$ сильно дискретно, нетрудно заметить, что нечеткое множество $\bigwedge_{i\in J}(r_{b_i}\wedge l_{a_i})$ открыто, а следовательно, нечеткое множество $\bigvee_{i\in J}(\overline{l_{b_i}\wedge r_{a_i}})$ замкнуто. Замкнутость второго нечеткого множества устанавливается аналогично.

(3.2.13) <u>Следствие</u>. Если $\{(a_i,b_i): i\in J\}$ – строго дискретное семейство интервалов в линейно-упорядоченном пространстве X, не имеющем скачков, то $\overline{\bigvee_{i\in J}(l_{b_i}\wedge r_{a_i})}=\bigvee_{i\in J}(\overline{l}_{b_i}\wedge \overline{r}_{a_i})$ и $\overline{\bigvee_{i\in J}(l_{a_i}\wedge r_{b_i})}=\bigvee_{i\in J}(\overline{l}_{a_i}\wedge \overline{r}_{b_i})$.

Из (3.2.13) и свойств нечеткого замыкания легко вытекает

(3.2.14) <u>Лемма</u>. Если $\{(a_i,b_i): i\in J\}$ – строго дискретное семейство интервалов в линейно-упорядоченном пространстве X, не имеющем скачков, и $c\in I$, то $\overline{\bigvee_{i\in J}(l_{b_i}\wedge r_{a_i}\wedge c)}\leq\bigvee_{i\in J}(\overline{l}_{b_i}\wedge \overline{r}_{a_i})\wedge c$ и $\overline{\bigvee_{i\in J}(l_{a_i}\wedge r_{b_i})\wedge c}\leq \bigvee_{i\in J}(\overline{l}_{a_i}\wedge \overline{r}_{b_i})\wedge c$.

(3.2.15) <u>Лемма</u>. Если X – линейно-упорядоченное метризуемое пространство, не имеющее скачков, то $\mathcal{F}^\lambda(X)$ является кружевным.

<u>Доказательство</u>. Для каждого открытого нечеткого подмножества U пространства $\mathcal{F}^\lambda(X)$ обозначим через $\mathcal{U}_U$ семейство всех нечетких множеств вида $l_b\wedge r_a\wedge c$, содержащихся ($\leq$) в U.

Зафиксировав $n\in\mathbb{N}$, для каждого $i=1,2,\dots,2^{-n}$ обозначим через c_i постоянное нечеткое подмножество в $\mathcal{F}^\lambda(X)$, принимающее значение $c_i=i\cdot 2^{-n}$. Положим

$$V_n^i=\vee\{l_b\wedge r_a\wedge c_i: l_b\wedge r_a\wedge c_i\in\mathcal{U}_U\};\quad \mathcal{V}_n^i=\{l_b\wedge r_a\wedge c_i: l_b\wedge r_a\wedge c_i\in\mathcal{U}_U\}$$

и рассмотрим множества

$$O_n^i=\cup\{(a,b): l_b\wedge r_a\wedge c_i\in \mathcal{V}_n^i\};\quad W_n^i=\cup\{(b,a): l_b\wedge r_a\wedge c_i\in \mathcal{V}_n^i\}.$$

Определим теперь множества $\widetilde{O}_n^i\subset O_n^i$ и $\widetilde{W}_n^i\supset W_n^i$ равенствами $\widetilde{O}_n^i=\{x\in X: \rho(x,X\setminus O_n^i)>2^{-n}\}$; $\widetilde{W}_n^i=\{x\in X: \rho(x,X\setminus O_n^i)<2^{-n}\}$, где ρ – метрика пространства X. Поскольку множества $\widetilde{O}_n^i$ и $\widetilde{W}_n^i$ открыты, они могут быть представлены в виде объединения интервалов (некоторые из этих интервалов могут концами иметь $-\infty$ или $+\infty$): $\widetilde{O}_n^i=\cup\{(a_j,b_j): j\in \mathcal{J}_n^i\}$, $\widetilde{W}_n^i=\cup\{(b_k,a_k): k\in\mathcal{L}_n^i\}$, где $(a_j,b_j)\cap(a_{j'},b_{j'})=\emptyset$ при $j\neq j'$ и $(b_k,a_k)\cap(b_{k'},a_{k'})=\emptyset$ при $k\neq k'$. Более того, из построения ясно, что семейства $\{(a_j,b_j): j\in\mathcal{J}_n^i\}$ и $\{(b_k,a_k): k\in\mathcal{L}_k^i\}$ строго дискретны и $\overline{l}_{b_j}\wedge\overline{r}_{a_j}\leq V_n^i$, $\overline{l}_{b_k}\wedge\overline{r}_{a_k}\leq V_n^i$.

Положим $U_n^i = \bigvee\{\ell_{b_j}\wedge r_{a_j}\wedge c_i : j\in \mathcal{J}_n^i\cup\mathcal{X}_n^i\}$. Согласно лемме (3.2.14) $\overline{U}_n^i = (\bigvee\{\ell_{b_j}\wedge r_{a_j}\wedge c_i : j\in\mathcal{J}_n^i\})\vee(\bigvee\{\ell_{b_j}\wedge r_{a_j}\wedge c_i : j\in\mathcal{X}_n^i\}) \leq \bigvee\{\ell_{b_j}\wedge \bar{r}_{a_j}\wedge c_i : j\in\mathcal{J}_n^i\cup\mathcal{X}_n^i\} \leq V_n^i \leq U$. Построив такие нечеткие множества U_n^i для всех i (при фиксированном n), положим $U_n = \bigvee\{U_n^i : i = 1,\dots,2^n\}$. Тогда, очевидно, $\overline{U}_n = \bigvee\{\overline{U}_n^i : i=1,\dots,2^n\} \leq \bigvee\{V_n^i : i=1,\dots,2^n\}\leq U$.

Построим такие U_n для всех n. Поскольку в X отсутствуют скачки, из построения ясно, что $U = \bigvee_n U_n$, а следовательно, $(U_n)_{n\in\omega_0}$ является кружевом множества U. Более того, из конструкции следует, что, если U, U' – открытые множества пространства $\mathcal{F}^\lambda(X)$ и $U\leq U'$, то $U_n\leq U'_n$ для каждого $n\in N$. Следовательно, пространство $\mathcal{F}^\lambda(X)$ является кружевным.

Утверждение следующей леммы, по-видимому, известно. Однако, поскольку у нас нет соответствующих ссылок, приведем здесь ее с доказательством.

(3.2.16) Лемма. Для каждого метризуемого линейно-упорядоченного пространства $(X, \leq)$ можно указать метризуемое линейно упорядоченное пространство без скачков $(Y, \prec)$ такое, что $X\subset Y$, линейный порядок $\prec$ индуцирует на X линейный порядок $<$ и, если в X не было скачков между x_1 и x_2, то $(Y\setminus X)\cap\{y\in Y : x_1 < y < x_2\} = \emptyset$.

Доказательство. Пусть точки $a_g, b_g\in X$ определяют некоторый скачок в X (т.е. $a_g < b_g$ и $(a_g, b_g) = \emptyset$). Заменим его интервалом $I_g = [0,1]$, отождествляя точку a_g с 0, а точку b_g – с 1 этого интервала. Пусть Y – множество, полученное из пространства X такой заменой всех его скачков. Положим $x\prec x'$, если $x\leq x'$ при $x, x'\in X$; положим $x\prec y$, если $x\leq a_g$ и $y_g\in I_g$ при $x\in X$, $y\notin X$; положим $y\prec x$, если $b_g\leq x$ и $y\in I_g$ при $x\in X$, $y\notin X$; положим $y\prec y'$, если $b_g\leq a_g$, $y\in I_g$, $y'\in I_{g'}$ и $g\neq g'$; наконец, положим $y\prec y'$, если $y, y'\in I_g$ и y меньше или равно y' в смысле естественного порядка на отрезке.

В том, что пространство Y метризуемо, нетрудно убедиться непосредственно.

Переходим к доказательству теоремы (3.2.9). Пусть Y – линейно-упорядоченное пространство, построенное для X в предыдущей лемме. Для каждого $\mathfrak{z}\in\mathcal{Z}(X)$ определим $\tilde{\mathfrak{z}}\in\mathcal{Z}(Y)$, положив $\tilde{\mathfrak{z}}(y)=\mathfrak{z}(y)$ при $y\in X$ и $\tilde{\mathfrak{z}}(y)=\mathfrak{z}(a_g)$ при $y\in I_g\setminus\{b_g\}$. Очевидно, что $\mathfrak{z}_1\sim\mathfrak{z}_2$ в X тогда и только тогда, когда $\tilde{\mathfrak{z}}_1\sim\tilde{\mathfrak{z}}_2$ в Y. Положим $\tilde{\mathcal{F}}(X)=\{[\tilde{\mathfrak{z}}]:\mathfrak{z}\in\mathcal{Z}(X)\}$, где $[\tilde{\mathfrak{z}}]$ – класс эквивалентности функции $\tilde{\mathfrak{z}}$ в $\mathcal{Z}(Y)$. Ясно, что подпространство $\tilde{\mathcal{F}}^\lambda(X)$ $\mathcal{F}^\lambda(Y)$ гомеоморфно $\mathcal{F}^\lambda(X)$. Из леммы (3.2.15) следует, что пространство $\mathcal{F}^\lambda(Y)$ является кружевным. Но тогда и $\mathcal{F}^\lambda(X)$ является кружевным (2.8.2).

(3.2.17) <u>Предложение</u>. Если пространство $\mathcal{F}(X)$ или пространство $\mathcal{F}^\lambda(X)$ кружевное, то исходное пространство X метризуемо.

<u>Доказательство</u>. Пусть $\mathcal{F}_0(X)$ определено как и в (3.1.7). Тогда, поскольку $\mathcal{F}^\lambda(X)\supset\mathcal{F}_0^\lambda(X)$ и $\mathcal{F}_0^\lambda(X)$ гомеоморфно пространству $(X,\lambda T)$, то и $(X,\lambda T)$ кружевное. Воспользовавшись (2.8.7), заключаем, что (X,T) является кружевным, а значит (см., напр., [26]), и метризуемым. Второе утверждение доказывается аналогично.

Из утверждений (3.2.9) и (3.2.17) вытекает

(3.2.18) <u>Теорема</u>. Для линейно-упорядоченного пространства следующие условия эквивалентны: (1) X метризуемо; (2) $\mathcal{F}(X)$ является кружевным; (3) $\mathcal{F}^\lambda(X)$ является кружевным.

Поскольку каждое кружевное нечеткое пространство совершенно нормально (2.8.9), из предыдущей теоремы вытекает

(3.2.19) <u>Следствие</u>. Если X метризуемо, то пространства $\mathcal{F}(X)$ и $\mathcal{F}^\lambda(X)$ совершенно нормальны.

Отсюда, воспользовавшись (3.1.5) и (3.1.6), получаем:

(3.2.20) <u>Следствие</u>. Нечеткая прямая и нечеткий интервал являются кружевными, и, следовательно, совершенно нормальными.

(Это является ответом на вопрос, поставленный Родабаухом [91]).

ностных мер $(\mathcal{M}(X),\tau_T) := \mathcal{M}_T(X)$ называем нечетко-вероятностным расширением пространства (X , T).

(2) Пусть $\xi = \lambda T =: \Lambda$. Соответствующее нечеткое пространство вероятностных мер $(\mathcal{M}(X),\tau_\Lambda) =: \mathcal{M}_\Lambda(X)$ называем ламинированным нечетко-вероятностным расширением пространства (X , T). В случае, когда X - сепарабельное метрическое пространство, конструкция $\mathcal{M}_\Lambda(X)$, как нетрудно заметить, эквивалентна конструкции $\mathfrak{M}(X)$, разработанной Ловеном [72], [73].

Подчеркнем, что, как нетрудно заметить, пространство $(\mathcal{M}(X),\tau_\xi)$ является топологическим (в классическом смысле) только в тривиальном случае - когда $\xi \subset_c \{0,1\}$.

(3.3.3) Теорема. Пусть (X , T_X), (Y , T_Y) - топологические пространства и отображение $f: X \to Y$ непрерывно. Тогда и отображение $\hat{f}: (\mathcal{M}(X),\tau_{T_X}) \to (\mathcal{M}(Y),\tau_{T_Y})$, определяемое равенством $\hat{f}(p)(E) = p(f^{-1}(E))$, где $p \in \mathcal{M}(X)$ и $E \in \mathcal{B}(Y)$, также является непрерывным.

Доказательство. Покажем, прежде всего, что для каждой измеримой (относительно $\mathcal{B}(Y)$) функции $U \in I^Y$ и каждого $p \in \mathcal{M}(X)$ имеет место равенство $\int U d\hat{f}(p) = \int f^{-1}(U) dp$.

Если $U \in \mathcal{B}(Y)$, то $\int U d\hat{f}(p) = \hat{f}(p)(U) = p(f^{-1}(U)) = \int f^{-1}(U) dp$. Случай, когда $U \in I^Y$ - простая (измеримая) функция, легко сводится к предыдущему. Пусть, наконец, $U \in I^Y$ - произвольная измеримая функция. Аппроксимируем ее равномерно сходящейся возрастающей последовательностью простых измеримых функций $U_n: Y \to I$. Тогда $f^{-1}(U_n): X \to I$ - возрастающая последовательность отображений, равномерно сходящаяся к $f^{-1}(U)$. Воспользовавшись теоремой Лебега о предельном переходе (см., напр., [17]), отсюда получаем $\int U d\hat{f}(p) = \int (\lim_{n\to\infty} U_n) d\hat{f}(p) =$
$= \lim_{n\to\infty} \int U_n d\hat{f}(p) = \lim_{n\to\infty} \int f^{-1}(U_n) dp = \int \lim_{n\to\infty} f^{-1}(U_n) dp = \int f^{-1}(U) dp.$

Пусть теперь $U \in T_Y$. Тогда для каждого $p \in \mathcal{M}(X)$ имеет место равенство $\hat{f}^{-1}(\delta_U)(p) = \delta_U \hat{f}(p) = \int U d\hat{f}(p)$. С другой стороны, $\delta_{f^{-1}(U)}(p) =$
$= \int f^{-1}(U) dp$, откуда, согласно доказанному, имеем $\hat{f}^{-1}(\delta_U) = \delta_{f^{-1}(U)}$.

§ 3. КОНСТРУКЦИЯ НЕЧЕТКО-ВЕРОЯТНОСТНОГО РАСШИРЕНИЯ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

Пусть (X, T) – топологическое пространство, $\mathcal{B}$ – борелевская σ-алгебра, порожденная топологией T, и $\mathcal{M}$ – множество всех вероятностных мер на $\mathcal{B}$ (σ-аддитивное отображение $p: \mathcal{B} \to I$ называется вероятностной (борелевской) мерой, если $p(X) = 1$ (см., например, [10], [104])). Мера $p \in \mathcal{M}$ называется регулярной, если для каждого $E \in \mathcal{B}$ и каждого $\varepsilon > 0$ найдутся $U \in T$ и $F \in T^c$ такие, что $F \subset E \subset U$ и $p(U \setminus F) < \varepsilon$ [10]. Совокупность всех регулярных мер обозначим $\mathcal{R}$. Меру $p \in \mathcal{M}$ назовем нормальной, если для каждого $U \in T$ и каждого $\varepsilon > 0$ найдется $G \in T$ такое, что $\bar{G} \subset U$ и $p(U \setminus G) < \varepsilon$. Совокупность всех нормальных мер обозначим $\mathcal{N}$. Легко заметить, что, если пространство (X, T) нормально, то каждая регулярная мера является нормальной, т.е. $\mathcal{R} \subset \mathcal{N}$. Если же пространство (X, T) совершенно нормально, то $\mathcal{M} = \mathcal{R}$ [10], а следовательно, и $\mathcal{M} = \mathcal{N}$. (В необходимых случаях наряду с обозначениями $\mathcal{B}, \mathcal{M}, \mathcal{R}$ и т.п. мы будем использовать также обозначения $\mathcal{B}(X)$, $\mathcal{B}(X,T)$, $\mathcal{M}(X)$, $\mathcal{M}(X,T)$, $\mathcal{R}(X)$, $\mathcal{R}(X,T)$ и т.п.).

(3.3.1) <u>Конструкция $(\mathcal{M}(X), \tau_\xi)$</u>. Пусть ξ – некоторое семейство полунепрерывных снизу отображений пространства (X, T) в I. Для каждого $U \in \xi$ равенством $\delta_U(p) = \int U dp$, где $p \in \mathcal{M}$, определим нечеткое множество $\delta_U \in I^{\mathcal{M}}$. (Интеграл, в котором не указывается область интегрирования, предполагается распространенным на все пространство X). Обозначим через τ_ξ чанговскую нечеткую топологию на $\mathcal{M}(X)$, порожденную предбазой $\{\delta_U : U \in \xi\}$. Получаемое тем самым нечеткое пространство $(\mathcal{M}(X), \tau_\xi) =: \mathcal{M}_\xi(X)$ и является основным объектом исследования в этом и следующих параграфах.

(3.3.2) <u>Основные частные случаи</u>.

(1) Пусть $\xi = T$; соответствующее нечеткое пространство вероят-

Из непрерывности отображения f следует, что $f^{-1}(U)\in T_X$, а значит, $\delta_{f^{-1}(U)}\in\tau_{T_X}$. Так как $\{\delta_U : U\in T_Y\}$ является предбазой для τ_{T_Y}, отсюда и следует, что отображение $f:(\mathcal{M}(X),\tau_{T_X})\to(\mathcal{M}(X),\tau_{T_Y})$ непрерывно.

Поскольку, согласно (I.3.3), непрерывность отображения $f:(X,\tau_X)\to(Y,\tau_Y)$, где (X,τ_X), (Y,τ_Y) - некоторые нечеткие пространства, гарантирует непрерывность отображения $f:(X,\lambda\tau_X)\to(Y,\lambda\tau_Y)$ и поскольку, как нетрудно заметить, $(\mathcal{M}(X),\lambda\tau_T)=(\mathcal{M}(X),\tau_{\lambda T})$, из теоремы (3.3.3) вытекает следующая

(3.3.3$^\lambda$) <u>Теорема</u>. Если отображение $f:(X,T_X)\to(Y,T_Y)$ непрерывно, то и отображение $\hat{f}:(\mathcal{M}(X),\tau_{\Lambda_X})\to(\mathcal{M}(Y),\tau_{\Lambda_Y})$ непрерывно.

(3.3.4) <u>Замечание</u>. Из теоремы (3.3.3) следует, что нечетко-вероятностное расширение можно рассматривать как функтор $\mathcal{M}:\mathrm{Top}\to\mathrm{CFT}$, переводящий каждое топологическое пространство (X,T) в пространство вероятностных мер $(\mathcal{M}(X),\tau_T)$ и сопоставляющий каждому непрерывному отображению $f:(X,T_X)\to(Y,T_Y)$ непрерывное отображение $\hat{f}:(\mathcal{M}(X),\tau_{T_X})\to(\mathcal{M}(Y),\tau_{T_Y})$. Аналогично, теорема (3.3.3$^\lambda$) позволяет ламинированное нечетко-вероятностное расширение рассматривать как функтор $\mathcal{M}_\Lambda:\mathrm{Top}\to\mathrm{LCFT}$.

Пусть (X,T) - топологическое пространство, $Y\in\mathcal{B}(X)$ и T^Y - топология на Y, индуцированная топологией T. Рассмотрим соответствующие пространства вероятностных мер $(\mathcal{M}(X),\tau_T)$ и $(\mathcal{M}(Y),\tau_{T^Y})$. С другой стороны, обозначим через $\mathcal{M}^Y(X)$ подмножество пространства $\mathcal{M}(X)$, образованное всеми $p\in\mathcal{B}(X)$ такими, что $p(Y)=1$, и пусть τ'_T - нечеткая топология на $\mathcal{M}^Y(X)$, индуцированная нечеткой топологией τ_T. Следующая теорема устанавливает, что пространства $(\mathcal{M}^Y(X),\tau'_T)$ и $(\mathcal{M}(Y),\tau_{T^Y})$ гомеоморфны.

(3.3.5) <u>Теорема</u>. Отображение $\varphi:(\mathcal{M}(Y),\tau_{T^Y})\to(\mathcal{M}^Y(X),\tau'_T)$, определяемое равенством $\varphi(p)(E)=p(E\cap Y)$, где $p\in\mathcal{M}(Y)$ и $E\in\mathcal{B}(X)$, является гомеоморфизмом.

<u>Доказательство</u>. Ясно, что отображение φ является биекцией.

Пусть $U\in T$; тогда $U\wedge Y\in T^Y$, $\delta_U\in\tau_T$ и $\delta_U^Y:=\delta_{U\wedge Y}\in\tau_{T^Y}$. Далее, легко понять, что для каждого $p\in\mathcal{M}(Y)$ имеют место равенства $\varphi^{-1}(\delta_U)p=\delta_U(\varphi(p))=\int U d\varphi(p)$ и $\delta_U^Y(p)=\int_Y (U\wedge Y)dp=\int(U\wedge Y)dp$, а следовательно, $\varphi^{-1}(\delta_U)=\delta_U^Y$. Поскольку $\{\delta_U : U\in\tau_T\}$ служит предбазой нечеткой топологии τ_T, а $\{\delta_U^Y : U\in\tau_T\}$ – предбазой нечеткой топологии τ_{T^Y}, отсюда вытекает, что отображение $\varphi:(\mathcal{M}(Y),\tau_{T^Y})\to(\mathcal{M}^Y(X),\tau'_T)$ является гомеоморфизмом.

Из теоремы (3.3.5) (или по аналогии с ее доказательством) легко убедиться в справедливости следующего утверждения.

(3.3.5$^\lambda$) <u>Теорема</u>. Отображение $\varphi:(\mathcal{M}(Y),\tau_{\lambda T^Y})\to(\mathcal{M}^Y(X),\tau'_{\lambda T})$ является гомеоморфизмом.

Для каждого $x\in X$ рассмотрим меру $p_x\in\mathcal{M}$, вырожденную в точке x (т.е. $p_x(E)=1$, где $E\in\mathcal{B}$, тогда и только тогда, когда $x\in E$; в противном случае $p_x(E)=0$). Заметим, что, если X – T_0-пространство (и только в этом случае) из $x_1\neq x_2$ следует, что $p_{x_1}\neq p_{x_2}$. Пусть $\mathcal{D}:=\{p_x : x\in X\}$ – совокупность всех вырожденных мер пространства X.

Исследуем свойства отображения $h:X\to\mathcal{M}(X)$, определяемого равенством $h(x)=p_x$. Основной здесь является приведенная ниже теорема (3.3.7). Однако предварительно отметим следующий используемый в ее доказательстве и в дальнейшем простой (и, по-видимому, хорошо известный) факт:

(3.3.6) Для каждой измеримой функции $U\in I^X$ имеет место равенство $\int U dp_x = U(x)$.

(Действительно, если $U(x)=a$ и $\varepsilon>0$, то, положив $E_\varepsilon=U^{-1}(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$, очевидно, имеем $a-\varepsilon=p(E_\varepsilon)(a-\varepsilon)\leq\int U dp_x\leq p(E_\varepsilon)(a+\varepsilon)=a+\varepsilon$, что, ввиду произвольности $\varepsilon>0$, и доказывает нужное равенство.)

(3.3.7) <u>Теорема</u>. Пусть (X,T) – топологическое T_0-пространство и σ – нечеткая топология на X такая, что $\iota\sigma=T$. Тогда отображение $h:(X,\sigma)\to(\mathcal{M}(X),\tau_\xi)$, определяемое равенством $h(x)=p_x$, является гомеоморфным вложением в том и только в том случае, когда ξ – предбаза нечеткой топологии σ.

Доказательство. Заметим прежде всего, что в силу (3.3.6) для каждого $U \in \mathfrak{S}$ и каждого $x \in X$ имеет место равенство $h^{-1}(\delta_U)(x) = \delta_U(p_x) = \int U dp_x = U(x)$, а следовательно, $h^{-1}(\delta_U) = U$. С другой стороны, поскольку, очевидно, h инъективно, то $h(U)(p_x) = U(x) = \delta_U(p_x)$ и $h(U)(p) = 0$ при $p \notin \mathfrak{D}$, а значит, $h(U) = \delta_U \wedge \mathfrak{D}$.

Предположим, что ξ – предбаза нечеткой топологии $\mathfrak{S}$, и покажем, что $h : (X, \mathfrak{S}) \to (\mathcal{M}(X), \tau_\xi)$ – гомеоморфное вложение. Непрерывность отображения h следует из того, что $h^{-1}(\delta_U) = U$ для каждого $U \in \xi$. Для доказательства открытости отображения h рассмотрим $V \in \mathfrak{S}$, $x \in X$ и пусть $V(x) = a$ и $\varepsilon > 0$. Выберем $U_1, \ldots, U_n \in \xi$ так, чтобы $\bigwedge_{i=1}^{n} U_i \leqslant V$ и $a - \varepsilon \bigwedge_{i=1}^{n} U_i(x)$. Тогда, как легко заметить, $(\bigwedge_{i=1}^{n} \delta_{U_i}) \wedge \mathfrak{D} \leqslant h(V)$ и $a - \varepsilon \leqslant (\bigwedge_{i=1}^{n} \delta_{U_i})(p_x) \wedge \mathfrak{D}(p_x)$, что и означает открытость нечеткого множества $h(V)$ в подпространстве $\mathfrak{D}$ нечеткого пространства $(\mathcal{M}(X), \tau_\xi)$.

Обратно, предположим, что $h : (X, \mathfrak{S}) \to (\mathcal{M}(X), \tau_\xi)$ – гомеоморфное вложение. Пусть $V \in \mathfrak{S}$, $x \in X$ и $V(x) = a > 0$. Тогда $h(V)(p_x) = \delta_V(p_x) = V(x)$ и, поскольку нечеткое множество $h(V)$ открыто в $\mathfrak{D}$, найдутся $U_1, \ldots, U_n \in \xi$ такие, что $(\bigwedge_{i=1}^{n} \delta_{U_i}) \wedge \mathfrak{D} \leqslant h(V)$ и $a - \varepsilon \leqslant (\bigwedge_{i=1}^{n} \delta_{U_i})(p_x) \wedge \mathfrak{D}(p_x)$. Из этих неравенств следует, что $\bigwedge_{i=1}^{n} U_i \leqslant V$ и $a - \varepsilon \leqslant \bigwedge_{i=1}^{n} U_i(x)$, а значит, ξ – предбаза нечеткой топологии $\mathfrak{S}$.

В случаях, когда $\mathfrak{S} = T$ и $\mathfrak{S} = \lambda T$ (которые являются для нас основными) предыдущая теорема принимает наиболее простой вид:

(3.3.7$'$) Теорема. Если (X, T) – T_0-пространство, то отображение $h : (X, T) \to (\mathcal{M}(X), \tau_\xi)$ является гомеоморфным вложением в том и только в том случае, когда ξ – предбаза топологии T.

(3.3.7$''$) Теорема. Если (X, T) – T_0-пространство, то отображение $h : (X, \lambda T) \to (\mathcal{M}(X), \tau_\xi)$ является гомеоморфным вложением в том и только в том случае, когда ξ – предбаза нечеткой топологии λT.

(3.3.8) Замечание. Итак, если мы желаем, чтобы нечеткое пространство $(\mathcal{M}(X), \tau_\xi)$ содержало (в точностью до естественного вложения h) нечеткое пространство $(X, \mathfrak{S})$, необходимо требовать, во-первых, чтобы соответствующее топологическое пространство (X ,$\mathcal{T}$) удовлетворяло T_0-аксиоме отделимости и, во-вторых, чтобы ξ было предбазой нечеткой топологии $\mathcal{T}$. При этом, как нетрудно заметить, даже в простейших случаях возможны неравенства $\bigwedge_i \delta_{u_i} \neq \delta_{\bigwedge_i u_i}$ и $\bigvee_i \delta_{u_i} \neq \delta_{\bigvee_i u_i}$, а следовательно, нечеткая топология τ_ξ будет существенно зависеть от выбора предбазы ξ . Поскольку наиболее естественной (по крайней мере, в случае достаточно общих пространств (X ,$\mathcal{T}$)) предбазой является вся нечеткая топология $\mathcal{T}$, именно этот случай мы рассматриваем как основной.

Множество $\mathcal{D}$ всех вырожденных мер в пространстве $(\mathcal{M}(X),\tau_\xi)$ обладает рядом интересных, специфически нечетких свойств, из которых важнейшие из известных нам отражены в утверждениях (3.3.10), (3.3.10$^\lambda$), (3.3.13), (3.3.14) и (3.4.10). Предварительно мы докажем следующую полезную лемму, характеризующую замыкание $\bar{\mathcal{D}}$ множества $\mathcal{D}$ и его подмножеств в пространстве $(\mathcal{M}(X),\tau_\xi)$.

(3.3.9) <u>Лемма</u>. Пусть (X ,T) – T_0-пространство и $A\subset X$. Тогда замыкание множества $\mathcal{D}_A:=\{p_x : x\in A\}$ в пространстве $(\mathcal{M}(X),\tau_\xi)$ определяется формулой $\bar{\mathcal{D}}_A(p)=\inf\{\bigvee_{i=1}^n \int c_i\,dp : c_i\in\xi_c,\ \bigvee_{i=1}^n c_i \geqslant A\}$.

Действительно, непосредственно из определений ясно, что $\bar{\mathcal{D}}_A(p)=$
$=\inf\{1-\bigwedge_{i=1}^n \delta_{u_i}(p) : u_i\in\xi,\ 1-\bigwedge_{i=1}^n \delta_{u_i}\geqslant \mathcal{D}_A\}=\inf\{1-\bigwedge_{i=1}^n \delta_{u_i}(p) : u_i\in\xi,\ \forall x\in A,\ \wedge\delta_{u_i}(p_x)=0\}=$
$=\inf\{1-\bigwedge_{i=1}^n \int u_i\,dp : u_i\in\xi,\ (\bigwedge_{i=1}^n u_i)\wedge A=0\}=\inf\{\bigvee_{i=1}^n \int c_i\,dp : c_i\in\xi^c,\ \bigvee_{i=1}^n c_i\geqslant A\}$.

(3.3.10) <u>Теорема</u>. Пусть (X ,T) – топологическое T_1-пространство. Тогда для каждой нормальной гладкой меры p имеет место равенство $\bar{\mathcal{D}}(p)=\sup\{p\{x\} : x\in X\}$, где $\bar{\mathcal{D}}$ – замыкание множества $\mathcal{D}$ в нечетком пространстве $(\mathcal{M}(X),\tau_T)$. (Мера $p:\mathcal{B}\to I$ называется гладкой, если $p(\mathcal{Z}_\gamma)\xrightarrow[\gamma]{} 0$ для каждого направленного семейства $\{\mathcal{Z}_\gamma : \gamma\in\Gamma\}\subset\mathcal{B}$ такого, что $\bigcap_\gamma \mathcal{Z}_\gamma=\emptyset$).

<u>Доказательство</u>. Пусть $\{c_i : i=1,2,\dots,n\}\subset\xi^c$ и $\bigvee_{i=1}^n c_i=I$. Тогда $\int c_i\,dp\geqslant$ $\geqslant\sup\{p\{x\} : x\in X_i\}$, а следовательно, и $\bigvee_{i=1}^n \int c_i\,dp=\sup\{p\{x\} : x\in X\}$. В силу леммы (3.3.9) отсюда получаем $\bar{\mathcal{D}}(p)\geqslant\sup\{p\{x\} : x\in X\}$.

Для доказательства обратного включения положим $\hat{X}=\{\{x\}: x\in X\}$. Заметим, что $|p^{-1}(0,1]\cap\hat{X}|\leqslant\aleph_0$, и рассмотрим каждый из трех возможных случаев.

I. $|p^{-1}(0,1]\cap\hat{X}|=\aleph_0$. Представим это пересечение в виде $p^{-1}(0,1]\cap\hat{X}=\{a_1,\dots,a_n,\dots\}$, где $a_n=\{x_n\}$, $x_n\in X$, причем $p(a_1)\geqslant p(a_2)\geqslant\dots$. Обозначим $\beta:=p(a_1)$ и, зафиксировав $\varepsilon>0$, выберем $m\in\mathbb{N}$ так, чтобы $\sum_{n>m}p(a_n)<\frac{\varepsilon}{2}$. Поскольку мера p нормальна, для каждого a_n, где $n=1,\dots,m$, найдется $O_n\in T$ такое, что $p(\bar{O}_n)\leqslant p(a_n)+\varepsilon\leqslant\beta+\varepsilon$. Ясно, что мера p не имеет атомов на множестве $Y=X\setminus\{x_1,x_2,\dots,x_n,\dots\}$, а следовательно, согласно теореме Сакса (см., напр., [17, с.335]), это множество можем представить в виде конечного дизъюнктного объединения $Y=\bigcup_{j=1}^{k}Y_j$, где все Y_j – борелевские, и $p(Y_i)<\beta$. Воспользовавшись еще раз нормальностью меры p, для каждого $j=1,\dots,k$ выберем множества $W_j,Z_j\in T$ так, чтобы $\bar{Z}_j\subset W_j$, $Y_j\subset W_j$, $\{a_1,\dots,a_n\}\cap Z_i=\emptyset$, $p(W_j\setminus Y_j)<\frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$ и $p(W_j\setminus Z_j)<\frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$. Из последних двух неравенств легко заключить, что

$$(*)\quad |p(\bar{Z}_j)-p(Y_j)|<\frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Для завершения доказательства в первом случае положим $A=(\bigcup_{j=1}^{k}\bar{Z}_j)\cup(\bigcup_{n=1}^{m}\bar{O}_n)$ и $B=X\setminus(\bigcup_{j=1}^{k}Z_j)\cup(\bigcup_{n=1}^{m}O_n)$. Тогда, очевидно, $A\cup B=X$ и, следовательно, $\mathcal{D}=\mathcal{D}_A\cup\mathcal{D}_B$ и $\bar{\mathcal{D}}=\bar{\mathcal{D}}_A\cup\bar{\mathcal{D}}_B$. В силу леммы (3.3.9) и неравенства (*) имеем $\bar{\mathcal{D}}_A(p)\leqslant(\bigvee_{j=1}^{k}\int\bar{Z}_j\,dp)\vee(\bigvee_{n=1}^{m}\int\bar{O}_n\,dp)=(\bigvee_{j=1}^{k}p(\bar{Z}_j))\vee(\bigvee_{n=1}^{m}p(\bar{O}_n))<\bigvee_{j=1}^{k}(p(Y_j)+\frac{\varepsilon}{2^{k+1}})\vee\bigvee_{n=1}^{m}(p(a_n)+\varepsilon)\leqslant\beta+\varepsilon$. С другой стороны, $\bar{\mathcal{D}}_B(p)\leqslant\int B\,dp=p(B)=1-p(\bigcup_{j=1}^{k}Z_j)\cup(\bigcup_{n=1}^{m}O_n)\leqslant 1-p(\bigcup_{j=1}^{k}Z_j)-\sum_{n=1}^{m}p(a_n)=p(Y)+\sum_{n=m+1}^{\infty}p(a_n)-p(\bigcup_{j=1}^{k}Z_j)<p(Y)-p(\bigcup_{j=1}^{k}Z_j)+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$. Отсюда вытекает, что $\bar{\mathcal{D}}(p)\leqslant\beta+\varepsilon$, а следовательно, ввиду произвольности $\varepsilon>0$, $\bar{\mathcal{D}}(p)\leqslant\beta$.

2. $0<|p^{-1}(0,1]\cap\hat{X}|<\aleph_0$. Пусть $p^{-1}(0,1]\cap\hat{X}=\{a_1,\dots,a_m\}$. Положив $p(a_n)=0$ при $n>m$ и рассуждая, как и в первом случае, легко устанавливаем неравенство $\bar{\mathcal{D}}(p)\leqslant\beta$.

3. $p^{-1}(0,1]\cap\hat{X}=\emptyset$. Зафиксируем $\beta>0$ и, рассуждая, как и в

доказательстве первого случая, представим X в виде конечного дизъюнктного объединения $X = Y = \bigcup_{j=1}^{k} Y_j$, где все Y_j борелевские и $p(Y_j) < \beta$. Далее, пусть Z_j определены, как и в первом случае. Положим $A = \bigcup_{j=1}^{k} Z_j$, $B = X \setminus \bigcup_{j=1}^{k} Z_j$. Тогда, рассуждая, как и в доказательстве первого случая, но с очевидными упрощениями, устанавливаем, что $\bar{\mathfrak{D}}(p) = \bar{\mathfrak{D}}_A(p) \vee \bar{\mathfrak{D}}_B(p) < \beta$, откуда, ввиду произвольности $\beta > 0$, получаем, что $\bar{\mathfrak{D}}(p) = 0$.

Аналогичный результат справедлив и для пространства $(\mathcal{M}(X), \tau_\lambda)$:

(3.3.10$^\lambda$) <u>Теорема</u>. Пусть (X, T) - топологическое T_1-пространство. Тогда для каждой нормальной гладкой меры p имеет место равенство $\bar{\mathfrak{D}}(p) = \sup\{p\{x\} : x \in X\}$, где $\bar{\mathfrak{D}}$ - замыкание множества $\mathfrak{D}$ в нечетком пространстве $(\mathcal{M}(X), \tau_\lambda)$.

<u>Доказательство</u>. Поскольку $\lambda T \supset T$, то, очевидно, $\bar{\mathfrak{D}}^\lambda \leqslant \bar{\mathfrak{D}}^T$. С другой стороны, воспользовавшись леммой (3.3.9), как и в доказательстве (3.3.10) легко устанавливаем неравенство $\bar{\mathfrak{D}}^\lambda(p) \geqslant \sup\{p\{x\} : x \in X\}$. Из этих двух неравенств и теоремы (3.3.10) сразу вытекает доказываемое утверждение.

Теоремы (3.3.10) и (3.3.10$^\lambda$) могут быть объединены в виде следующего утверждения:

(3.3.10*) <u>Теорема</u>. Пусть (X, T) - топологическое T_1-пространство и $T \subset \xi \subset \lambda T$. Тогда для каждой нормальной гладкой меры p имеет место равенство $\bar{\mathfrak{D}}^\xi(p) = \sup\{p\{x\} : x \in X\}$, где $\bar{\mathfrak{D}}^\xi$ - замыкание множества $\mathfrak{D}$ в пространстве $(\mathcal{M}(X), \tau_\xi)$.

(3.3.11) <u>Следствие</u>. Если (X, T) - совершенно нормальное T_1-пространство и $T \subset \xi \subset \lambda T$, то для каждой гладкой меры p имеет место равенство $\bar{\mathfrak{D}}^\xi(p) = \sup\{p\{x\} : x \in X\}$.

(3.3.12) <u>Следствие</u>. Если (X, T) - сепарабельное метрическое пространство и $T \subset \xi \subset \lambda T$, то $\bar{\mathfrak{D}}^\xi(p) = \sup\{p\{x\} : x \in X\}$ для каждой меры p.

(3.3.13) <u>Предложение</u>. Пусть (X, T) - топологическое T_0-пространство, $\kappa\in I$ и, как обычно, $\xi\subset\lambda T$. Тогда

(I) если $\kappa^c\in\xi$, то $(\overline{\kappa\mathfrak{D}})^{\xi}\leq\kappa\bar{\mathfrak{D}}^{\xi}$;

(2) если для каждого $U\in I^X$ $U\in\xi$ тогда и только тогда, когда $\kappa^c U\in\xi$, то $(\overline{\kappa\mathfrak{D}})^{\xi}=\kappa\bar{\mathfrak{D}}^{\xi}$.

<u>Доказательство</u>. По аналогии с доказательством леммы (3.3.9) легко убедиться в справедливости следующей цепочки, из которой и следует доказываемое утверждение: $\kappa\bar{\mathfrak{D}}(p)=\kappa\inf\{\bigvee_{i=1}^{n}\int B_i\,dp : B_i\in T^c, \bigvee_{i=1}^{n}B_i=1\}=\inf\{\bigvee_{i=1}^{n}\int(\kappa B_i)\,dp : B_i\in T^c, \bigvee_{i=1}^{n}B_i=1\}\geq\inf\{\bigvee_{i=1}^{n}\int C_i\,dp : C_i\in T^c, \bigvee_{i=1}^{n}C_i=\kappa\}=\inf\{\bigvee_{i=1}^{n}\int C_i\,dp : C_i\in T^c, \bigvee_{i=1}^{n}C_i\geq\kappa\}=(\overline{\kappa\mathfrak{D}})(p)$.

(Неравенство в этой цепочке обеспечивается тем, что согласно условию (I), если $B_i\in T^c$, то и $C_i=\kappa B_i\in T^c$. Если же выполнено условие (2), то верно и обратное, и, следовательно, неравенство в этой цепочке может быть заменено на равенство.)

Поскольку для каждого топологического пространства (X,T) и произвольной константы κ условия $U\in\lambda T$ и $\kappa^c U\in\lambda T$ равносильны, из предложения (3.3.I3) вытекает

(3.3.I4) <u>Следствие</u>. Пусть (X,T) - топологическое T_0-пространство и $\kappa\in I$. Тогда $(\overline{\kappa\mathfrak{D}})^{\Lambda}=\kappa\bar{\mathfrak{D}}^{\Lambda}$.

Отметим также следующее простое утверждение.

(3.3.I5) <u>Предложение</u>. Пусть (X,T) - топологическое T_0-пространство, $p,p'\in\mathcal{M}(X)$ и $\kappa\in I$. Тогда

$$\overline{\kappa\{p\}}^{T}(p')=\inf\{\int C\,dp' : C\in T^c, \int C\,dp\geq\kappa\} \quad \text{и}$$
$$\overline{\kappa\{p\}}^{\Lambda}(p')=\inf\{\int C\,dp' : C\in\Lambda, \int C\,dp\geq\kappa\}.$$

В заключение рассмотрим некоторые обычные топологии на пространстве вероятностных мер $\mathcal{M}(X)$ топологического пространства (X,T) в известном смысле напоминающие широко используемую в теории сходимости вероятностных мер т.н. слабую топологию [4], [26]. Как будет показано ниже (см. (3.3.20), (3.3.2I), (3.3.22)), эти топологии весьма тесно связаны с изучаемыми нами нечеткими топологиями и впоследствии будут использованы для исследования некоторых свойств последних.

(3.3.16) <u>Определение</u>. Пусть (X , T) – топологическое пространство и $\xi\subset\lambda T$. Для каждой меры $p\in\mathcal{M}(X)$, каждого $U\in\xi$ и каждого $\varepsilon>0$ положим $\mathcal{N}^+(p,U,\varepsilon):=\{q\in\mathcal{M}:\int U dq>\int U dp-\varepsilon\}$, $\mathcal{N}^-(p,U,\varepsilon):=\{q\in\mathcal{M}:\int U dq<\int U dp+\varepsilon\}$. Топологию на $\mathcal{M}(X)$, порожденную предбазой $\{\mathcal{N}^+(p,U,\varepsilon):p\in\mathcal{M},U\in\xi,\varepsilon>0\}$, будем обозначать $\mathcal{R}_\xi$. Топологию на $\mathcal{M}(X)$, порожденную предбазой $\{\mathcal{N}^+(p,U,\varepsilon),\mathcal{N}^-(p,U,\varepsilon):p\in\mathcal{M},U\in\xi,\varepsilon>0\}$, будем обозначать S_ξ.

Нетрудно заметить, что базой топологии S_ξ служит семейство всевозможных множеств вида $V(p;U_1,\dots,U_n;\varepsilon)=\{q\in\mathcal{M}:|\int U_i d(p-q)|<\varepsilon,\ i=1,\dots,n\}$, где $U_1,\dots,U_n\in\xi$, $p\in\mathcal{M}(X)$ и $\varepsilon>0$.

Наибольший интерес для нас представляют случаи $\xi=T$, $\xi=\lambda T$ $(:=\Lambda)$ и $\xi=cT(:=C)$(cT – семейство всех непрерывных отображений пространства (X , T) в отрезок I).

Отметим, что на подпространстве $\mathfrak{M}(X)$ бэровских мер пространства $\mathcal{M}(X)$ топология S_C , очевидно, индуцирует слабую топологию.

(3.3.17) <u>Предложение</u>. Для каждого топологического пространства (X , T) справедливы равенства $\mathcal{R}_T=\mathcal{R}_\Lambda$ и $S_T=S_\Lambda$.

<u>Доказательство</u>. Поскольку $T\subset\Lambda$, включения $\mathcal{R}_T\subset\mathcal{R}_\Lambda$ и $S_T\subset S_\Lambda$ очевидны. Для доказательства включения $\mathcal{R}_\Lambda\subset\mathcal{R}_T$ достаточно установить, что для произвольных $p\in\mathcal{M}(X)$, $U\in\lambda T$ и $\varepsilon>0$ найдутся $U_i\in T$, $i=0,\dots,k-1$, такие, что $\bigcap_{i=0}^{k-1}\mathcal{N}^+(p,U_i,\frac{\varepsilon}{2})\subset\mathcal{N}^+(p,U,\varepsilon)$. Зафиксировав $U\in\Lambda$ и $\varepsilon>0$, выберем $k\in\mathbb{N}$ так, чтобы $\frac{1}{k}<\frac{\varepsilon}{2}$, и положим $U_i:=U^{-1}(\frac{i}{k},1]$, $i=0,1,\dots,k-1$. Тогда, как легко заметить, $a:=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k-1}\int U_i dp\leqslant\int U dp\leqslant\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}\int U_i dp=:a'$, и, аналогично, $b:=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k-1}\int U_i dq\leqslant\int U dq\leqslant\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}\int U_i dq=:b'$ для произвольной меры $q\in\mathcal{M}(X)$. Теперь, если $q\in\bigcap_{i=0}^{k-1}\mathcal{N}^+(p,U_i,\varepsilon/2)$, то $\int U_i dq>\int U_i dp-\varepsilon/2$ для всех $i=0,1,\dots,k-1$, а значит, $b>a-\varepsilon/2$. В силу очевидного неравенства $a'-a\leqslant\frac{1}{k}<\varepsilon/2$, отсюда получаем $\int U dq\geqslant b>a-\frac{\varepsilon}{2}\geqslant a'-\varepsilon\geqslant\int U dp-\varepsilon$, т.е. $q\in\mathcal{N}^+(p,U,\varepsilon)$ и, значит, $\mathcal{R}_T\supset\mathcal{R}_\Lambda$.

Совершенно аналогично, если $q\in\bigcap_{i=0}^{k-1}\mathcal{N}^-(p,U_i,\frac{\varepsilon}{2})$, то $\int U_i dq<\int U_i dp+\frac{\varepsilon}{2}$ при $i=0,1,\dots,k-1$ и, следовательно, $\int U dq\leqslant b'<a'+\frac{\varepsilon}{2}<a+\varepsilon\leqslant\int U dp+\varepsilon$,

т.е. $q\in\mathcal{N}^-(p,U,\varepsilon)$. Из полученных соотношений легко заключаем, что $\mathcal{S}_T\supset \mathcal{S}_\Lambda$, что и завершает доказательство.

(3.3.18) <u>Предложение</u>. Для каждого топологического пространства (X, T) справедливо $\mathcal{R}_\Lambda\subset \mathcal{S}_C$. При этом, если (X, T) нормально, то на подпространстве $\mathcal{N}(X)$ топологии $\mathcal{R}_\Lambda$ и $\mathcal{S}_C$ совпадают.

<u>Доказательство</u>. Рассмотрим элемент $V(p,f,\varepsilon)$ стандартной предбазы топологии $\mathcal{S}_C$, где $p\in\mathcal{M}(X)$, $f\in C$ и $\varepsilon>0$. Выберем $k\in\mathbb{N}$ так, чтобы $\frac{1}{k}<\varepsilon/3$, и положим $H_i=f^{-1}(\frac{i}{k},1]$, $i=1,\dots,k$. Тогда $\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}p(H_i)\leqslant\int f dp<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}p(H_i)$ и, аналогично, $\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}q(H_i)\leqslant\int f dq<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}q(H_i)$ для каждого $q\in\mathcal{M}(X)$. Отсюда легко следует, что $\int f dq<\int f dp+\varepsilon$, как только $q\in\bigcap_{i=1}^{k}\mathcal{N}^+(p,H_i,\varepsilon/3)$. Аналогично, положив $G_i=g^{-1}(\frac{i}{k},1]$, где $g=1-f$, получаем, что при $q\in\bigcap_{i=1}^{k}\mathcal{N}^+(p,G_i,\varepsilon/3)$ имеет место неравенство $\int g dq<\int g dp+\varepsilon$, и, тем самым, $\int f dq>\int f dp-\varepsilon$. Отсюда легко заметить, что $(\bigcap_{i=1}^{k}\mathcal{N}^+(p,H_i,\frac{\varepsilon}{3}))\cap(\bigcap_{i=1}^{k}\mathcal{N}^+(p,G_i,\varepsilon/3))\subset V(p,f,\varepsilon)$, а следовательно, $\mathcal{R}_\Lambda\subset \mathcal{S}_C$.

Пусть теперь $p\in\mathcal{N}(X)$; рассмотрим окрестность $\mathcal{N}^+(p,U,\varepsilon)$ этой меры в $\mathcal{R}_T=\mathcal{R}_\Lambda$. Выберем $G\in T^c$ так, чтобы $G\subset U$, $p(U\setminus G)<\frac{\varepsilon}{2}$, и, воспользовавшись нормальностью пространства (X, T), выберем $f\in C$ так, чтобы $G\subset f^{-1}(\{1\})$ и $U^c\subset f^{-1}(\{0\})$. Тогда, если $q\in V(p,f,\frac{\varepsilon}{2})$, то $q(U)>\int f dq>\int f dp-\frac{\varepsilon}{2}>p(G)-\frac{\varepsilon}{2}>p(U)-\varepsilon$, т.е. $q\in\mathcal{N}^+(p,U,\varepsilon)$, а следовательно, $V(p,f,\frac{\varepsilon}{2})\subset\mathcal{N}^+(p,U,\varepsilon)$, что и доказывает совпадение топологий $\mathcal{R}_\Lambda$ и $\mathcal{S}_C$ на $\mathcal{N}(X)$.

Если пространство (X, T) совершенно нормально, то, воспользовавшись свойством непрерывности меры, легко установить, что $\mathcal{M}(X)=\mathcal{N}(X)$. Поэтому из предыдущего предложения вытекает такое

(3.3.19) <u>Следствие</u>. Если пространство (X, T) совершенно нормально, то $\mathcal{R}_\Lambda=\mathcal{S}_C$.

(3.3.20) <u>Теорема</u>. Пусть (X, T) - топологическое пространство и $\xi\subset\lambda T$. Тогда $\mathcal{R}_\xi=\iota\mathcal{T}_\xi$.

<u>Доказательство</u>. Пусть $p\in\mathcal{M}(X)$ и $U\in\xi$. Тогда, как легко заметить, $\mathcal{N}^+(p,U,\varepsilon)=\delta_U^{-1}(\int U dp-\varepsilon,1]$. Поскольку $\delta_U\in\mathcal{T}_\xi$, отсюда следует, что $\mathcal{N}^+(p,U,\varepsilon)\in\iota\mathcal{T}_\xi$, а значит, $\mathcal{R}_\xi\subset\iota\mathcal{T}_\xi$.

Для доказательства обратного включения достаточно проверить, что все отображения $\delta_U : (\mathcal{M}(X), \mathcal{R}_\xi) \to I$, где $U \in \xi$, полунепрерывны снизу. Пусть $a \in I$; выбрав $p \in \delta_U^{-1}(0, 1]$, заметим, что при $\varepsilon = \int U dp - a$ имеет место равенство $\delta_U^{-1}(a, 1] = \mathcal{N}^+(p, U, \varepsilon) \in \mathcal{R}_\xi$, что и означает полунепрерывность отображения δ_U .

(3.3.2I) <u>Следствие</u>. Для каждого топологического пространства (X , T) имеют место равенства $\mathcal{R}_T = \iota\mathcal{T}_T$, $\mathcal{R}_C = \iota\mathcal{T}_C$ и $\mathcal{R}_\Lambda = \iota\mathcal{T}_\Lambda$.

Из предыдущего следствия и утверждения (3.3.I9) вытекает

(3.3.22) <u>Следствие</u>. Если (X , T) – совершенно нормальное топологическое пространство, то топология $\iota\mathcal{T}_T = \iota\mathcal{T}_\Lambda$ совпадает со слабой топологией на пространстве вероятностных мер.

§ 4. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НЕЧЕТКО-ВЕРОЯТНОСТНОГО РАСШИРЕНИЯ И НЕКОТОРЫХ ЕГО ПОДПРОСТРАНСТВ

А. Меры с конечным носителем. Плотность пространства $\mathcal{M}(X)$

Пусть, как и обычно, (X, T) – топологическое пространство. Рассмотрим подмножество $\mathcal{M}^o(X)$ пространства $\mathcal{M}(X)$, образованное мерами с конечным носителем. (Мы говорим, что носитель меры $p \in \mathcal{M}(X)$ конечен, если существует такое $A \subset X$, $|A| < \aleph_0$, что $p(E) = 1$ как только $A \subset E \in \mathcal{B}(X)$. Незначительное отличие данного определения от общепринятого (см., напр., [10]) вызвано тем, что мы не накладываем на рассматриваемые пространства никаких условий отделимости.)

(3.4.1) Предложение (ср. [10], [104]). Множество $\mathcal{M}^o(X)$ плотно в пространстве $(\mathcal{M}(X), S_\lambda)$ (а следовательно, и в пространствах $(\mathcal{M}(X), S_c)$, $(\mathcal{M}(X), \mathcal{R}_\lambda)$ и $(\mathcal{M}(X), \mathcal{R}_c)$).

Доказательство. Согласно (3.3.17) достаточно проверить плотность множества $\mathcal{M}^o(X)$ в пространстве $(\mathcal{M}(X), S_T)$. Рассмотрим меру $p \in \mathcal{M}(X)$ и ее окрестность вида $\bigcap_{i=1}^{n} V(p, U_i, \varepsilon)$, где $U_i \in T$. Положим $\Gamma = \bigcup_{k=1}^{n} \{1, \dots, n\}^k \cup \{0\}$ и пусть $\Gamma' \subset \Gamma$ состоит из всех таких $\gamma \in \Gamma$, все координаты которых различны. Определим для каждого $\gamma = (i_1, \dots, i_k) \in \Gamma' \setminus \{0\}$ множество $E_\gamma = (U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_k}) \setminus \bigcup \{U_i : i \neq i_1, \dots, i \neq i_k\}$ и пусть $E_0 = X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. Ясно, что $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} E_\gamma = X$ и $E_{\gamma_1} \cap E_{\gamma_2} = \emptyset$ при $\gamma_1 \neq \gamma_2$. Выберем из каждого непустого E_γ по точке x_γ и определим меру $p_0 : \mathcal{B} \to I$ равенством $p_0(E) = \sum \{p(E_\gamma) : x_\gamma \in E\}$, если $E \cap \{x_\gamma : \gamma \in \Gamma\} \neq \emptyset$ и $p_0(E) = 0$ в противномслучае. Ясно, что определенное таким образом отображение p_0 является мерой с конечным носителем, т.е. $p_0 \in \mathcal{M}^o(X)$ и при этом $p_0 \in \bigcap_{i=1}^{n} V(p, U_i, \varepsilon)$, так как значения p_0 и p равны на каждом U_i. Но это и доказывает плотность множества $\mathcal{M}^o(X)$ в топологии S_T.

(3.4.2) Предложение. Множество $\mathcal{M}^o Q(X)$, образованное мерами с конечными носителями и принимающими только рациональные значения, плотно в пространстве $(\mathcal{M}(X), \mathcal{S}_\lambda)$ (а следовательно, и в пространствах $(\mathcal{M}(X), \mathcal{S}_c)$, $(\mathcal{M}(X), \mathcal{R}_\lambda)$ и $(\mathcal{M}(X), \mathcal{R}_c)$).

<u>Доказательство</u> совершенно аналогично доказательству (3.4.I); единственное отличие состоит в том, что мера p_0 определяется равенством $p_0(E)=\sum\{p_0(E_\gamma): x_\gamma \in E\}$, где для каждого $\gamma\in\Gamma'$ значение $p_0(E_\gamma)$ выбирается рациональным и с условием $|p(E_\gamma)-p_0(E_\gamma)|<\varepsilon$.

Для T_1-пространств предыдущее утверждение может быть усилено:

(3.4.3) <u>Предложение</u>. Пусть (X, T) - T_1-пространство и $B\subset X$ - его плотное подмножество. Тогда множество $\mathcal{M}^0 Q\mathcal{B}(X)$, образованное теми мерами $p\in\mathcal{M}^0 Q(X)$, носители которых лежат в B, плотно в пространстве $(\mathcal{M}(X), \mathcal{S}_\lambda)$ (а следовательно, в $(\mathcal{M}(X), \mathcal{S}_c)$, $(\mathcal{M}(X), \mathcal{R}_\lambda)$ и в $(\mathcal{M}(X), \mathcal{R}_c)$).

<u>Доказательство</u>. Достаточно проверить плотность множества $\mathcal{M}^0 Q\mathcal{B}(X)$ в подпространстве $\mathcal{M}^0 Q(X)$. Зафиксируем меру $p\in\mathcal{M}^0 Q(X)$ и пусть $A=\{a_1,\dots,a_n\}$ - ее носитель. Рассмотрим окрестность вида $\bigcap_{i=1}^{n} V(p, U_i, \varepsilon)$, где $U_i\in T$; при этом без ограничения общности можем считать, что $U_i\cap A=\{a_i\}$ для каждого $i=1,\dots,n$. Поскольку $U_i\cap B\neq\emptyset$, можем выбрать для каждого i точку $x_i\in U_i\cap B$ причем так, чтобы $x_i\neq x_j$ при $i\neq j$. Положим $p_0\{x_i\}=p\{a_i\}$ и определим меру $p_0:\mathcal{B}\to I$ равенством $p_0(E)=\sum\{p_0\{x_i\}: x_i\in E\}$, если $E\cap\{x_1,\dots,x_n\}\neq\emptyset$, и $p_0(E)=0$ в противном случае. Остается заметить, что $p_0\in(\bigcap_{i=1}^{n} V(p, U_i, \varepsilon))\cap\mathcal{M}^0 QB(X)$.

Для вывода из предложения (3.4.3) основных результатов этого раздела - утверждений (3.4.5) и (3.4.6), докажем предварительно следующую простую лемму:

(3.4.4) <u>Лемма</u>. Пусть $(\mathcal{Y}, \sigma)$ - нечеткое пространство, $A\subset\mathcal{Y}$ и A - плотно в пространстве $(\mathcal{Y}, \iota\sigma)$. Тогда A плотно и в $(\mathcal{Y}, \sigma)$.

<u>Доказательство</u>. Обозначив через $\bar{A}$ - замыкание множества A в $(\mathcal{Y}, \sigma)$, а через $\tilde{A}$ - его замыкание в $(\mathcal{Y}, \iota\sigma)$, имеем следующую цепочку неравенств, из которой сразу вытекает доказываемое утверждение: $\bar{A}=\wedge\{B: B\geq A,\ B\in T^c\}\geq\wedge\{B^{-1}\{1\}: B\geq A,\ B\in T^c\}\geq\wedge\{C: C\supset A,\ C\in T^c\}=\tilde{A}$.

(3.4.5) Теорема. Пусть (X, T) - топологическое T_1-пространство и B - его плотное подмножество. Тогда $\mathcal{M}^0 QB(X)$ плотно в пространстве $(\mathcal{M}(X), \tau_\Lambda)$ (а следовательно, и в каждом пространстве вида $(\mathcal{M}(X), \tau_\xi)$, где $\xi \subset \lambda T$).

Доказательство. Согласно (3.3.20) $c\tau_\Lambda = \mathcal{R}_\Lambda$, а следовательно, в силу (3.4.3), $\mathcal{M}^0 QB(X)$ плотно в пространстве $(\mathcal{M}(X), c\tau_\Lambda)$. Ссылкой на лемму (3.4.4) завершаем доказательство.

(3.4.6) Следствие. Если (X, T) - топологическое T_1-пространство, то $d(X,T) \geq d(\mathcal{M}(X), \tau_\Lambda)$, а значит, $d(X,T) \geq d(\mathcal{M}(X), \tau_\xi)$ и для каждой системы $\xi \subset \lambda T$ (d - плотность (2.9.13)).
(Мы не знаем, может ли неравенство в (3.4.6) быть строгим.)

Б. Двузначные меры

Пусть $K(X)$ - подмножество множества $\mathcal{M}(X)$, образованное всеми двузначными мерами. Докажем прежде всего два простых утверждения о подпространстве $K(X)$ пространства $(\mathcal{M}(X), S_\Lambda)$. (Аналогичные утверждения о подпространстве $K(X)$ пространства бэровских мер, наделенном слабой топологией, хорошо известны, см., напр., [104]).

(3.4.7) Предложение. Множество $\mathcal{A}(X)$ плотно в $(K(X), S_\Lambda)$.

Доказательство. Пусть $p \in K(X)$. Превратим семейство множеств $\Gamma = \{\gamma : \gamma \subset X, \gamma \in \mathcal{B}, p(\gamma) = 1\}$ в направленное, положив $\gamma_1 > \gamma_2$ тогда и только тогда, когда $\gamma_1 \subset \gamma_2$. Выберем по точке $x_\gamma \in \gamma$ и рассмотрим меру $p_\gamma := p_{x_\gamma}$, вырожденную в точке x_γ. Покажем, что направленность $(p_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ сходится к p в топологии S_Λ. Согласно (3.3.17) для этого достаточно установить, что для каждого $U \in T$ числовая направленность $p_\gamma(U)$ сходится к $p(U)$. Но в этом легко убедиться непосредственно, рассмотрев два возможных случая: если $p(U) = 1$, то $U \in \Gamma$ и, следовательно, $x_\gamma \in U$ для каждого $\gamma > U$, т.е. $p_\gamma(U) = 1$. Если же $p(U) = 0$, то $p(X \setminus U) = 1$ и $X \setminus U \in \Gamma$, а следовательно, $x_\gamma \notin U$ для каждого $\gamma > X \setminus U$, т.е. $p_\gamma(U) = 0$.

(3.4.8) Предложение. Множество $K(X)$ замкнуто в $(\mathcal{M}(X), S_\Lambda)$.

Действительно, если $p \notin K(X)$, то $0 < p(U) < 1$ для некоторого $U \in T$. Но тогда, выбрав $\varepsilon < \min\{p(U), 1-p(U)\}$, получим $V(p, U, \varepsilon) \cap K(X) = \emptyset$.

Из (3.4.7), (3.4.4) и (3.3.2I) немедленно вытекает

(3.4.9) Теорема. Множество $\mathcal{D}(X)$ плотно в пространстве $(K(X), \mathcal{T}_\Lambda)$ (а следовательно, и в каждом пространстве вида $(K(X), \mathcal{T}_\xi)$, $\xi \subset \lambda T$).

Поскольку для топологического пространства (X, T), как нетрудно заметить, $d(X,T) = d(X, \lambda T)$, воспользовавшись теоремой (3.3.7), из предыдущей теоремы легко получаем такое

(3.4.I0) Следствие. Если (X, T) – T_0-пространство и $\xi \subset \lambda T$, то $d(K(X), \mathcal{T}_\xi) \leq d(K(X), \mathcal{T}_\Lambda) \leq d(X,T)$.

Согласно (3.4.8) множество $K(X)$ замкнуто в $(\mathcal{M}(X), S_\Lambda)$. Более тонкой нам представляется доказываемая ниже теорема (3.4.I2), характеризующая замыкание этого множества в нечетких топологиях. Предварительно с каждом мерой $p \in \mathcal{M}(X)$ мы свяжем множество $G_p := \{t:$ если $U_1, \ldots, U_n \in T$ и $p(U_i) > 1-t$, $i = 1, \ldots, n$, то $U_1 \cap \ldots \cap U_n \neq \emptyset\}$ и положим $t_p := \sup G_p$. Легко заметить, что $0 \in G_p$; если $t' < t$ и $t \in G_p$, то $t' \in G_p$; $t_p \in G_p$.

(3.4.II) Лемма. Пусть (X, T) – топологическое пространство и $t > 0$. Неравенство $\bar{K}(p) \geq t$ (замыкание берется в $(\mathcal{M}(X), \mathcal{T}_T)$) имеет место тогда и только тогда, когда существует направленность $(p_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} \subset K$ такая, что для каждого $V \in T$, удовлетворяющего неравенству $p(V) + t > 1$, найдется $\gamma_0 \in \Gamma$ такое, что $p_\gamma(V) = 1$ для всех $\gamma > \gamma_0$.

Доказательство, приводимое ниже, состоит, по существу, в последовательной "расшифровке" соответствующих понятий.

Согласно (I.6.3) $p^t \in \bar{K}$ тогда и только тогда, когда существует направленность $(p_\gamma^{t_\gamma})_{\gamma \in \Gamma} \subset K$, которая q-сходится к p^t. При этом без ограничения общности можем считать, что $t_\gamma = 1$ для всех $\gamma \in \Gamma$. Условие q-сходимости направленности $(p_\gamma^{t_\gamma})_{\gamma \in \Gamma} \subset K$ к p^t означает, что эта направленность q-финальна с каждой q-окрестностью O нечеткой точки p^t. При этом без ограничения общности можем считать, что

$O=\delta_V$ для некоторого $V\in T$, а следовательно, условие Oqp^t может быть переписано в виде $p(V)+t>1$. Далее, условие q-финальности направленности $(p_\gamma^1)_{\gamma\in\Gamma}$ со множеством O эквивалентно тому, что существует $\gamma_0\in\Gamma$ такое, что $\delta_V(p_\gamma)=p_\gamma(V)>0$ для всех $\gamma\geqslant\gamma_0$. Но в данной ситуации это и означает, что $\delta_V(p_\gamma)=1$ для всех $\gamma\geqslant\gamma_0$.

(3.4.I2) Теорема. Пусть (X,T) – топологическое пространство и $p\in\mathcal{M}(X)$. Тогда $\bar{K}(p)=t_p$ (замыкание берется в $(\mathcal{M}(X),\tau_T)$).

Доказательство. Покажем сначала, что $\bar{K}(p)\geqslant t_p$. Рассмотрим семейство множеств $\mathcal{U}=\{U\in T: p(U)>1-t_p\}$ и положим $\Gamma=\{U_1\cap\ldots\cap U_n: U_i\in\mathcal{U}, n\in\mathbb{N}\}$. Упорядочим Γ по включению, положив $\gamma_1\geqslant\gamma_2$ тогда и только тогда, когда $\gamma_1\subset\gamma_2$, и для каждого $\gamma\in\Gamma$ рассмотрим двузначную меру p_γ такую, что $p_\gamma(\gamma)=1$ (это возможно, т.к. $\gamma\neq\varnothing$). В результате получаем направленность $(p_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$, причем для каждого $V\in T$ такого, что $p(V)+t_p>1$ и для каждого $\gamma\geqslant V$ имеет место равенство $p_\gamma(V)=1$, что, согласно лемме (3.4.I), и доказывает неравенство $\bar{K}(p)\geqslant t_p$.

Обратно, предположим, что $\bar{K}(p)=s>t_p$. Тогда, согласно лемме, существует направленность $(p_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ в K такая, что для каждого $V\in T$, удовлетворяющего условию $p(V)+s>1$, найдется γ_0 такое, что $p_\gamma(V)=1$ для всех $\gamma\geqslant\gamma_0$. С другой стороны, поскольку $s>t_p$, найдутся $U_1,\ldots,U_n\in T$ такие, что $p(U_i)>1-s$ для каждого $i=1,\ldots,n$, но при этом $U_1\cap\ldots\cap U_n=\varnothing$. Выберем γ_i, $i=1,\ldots,n$, так, чтобы $p_\gamma(U_i)=1$ при $\gamma\geqslant\gamma_i$ и пусть γ_0 таково, что $\gamma_0\geqslant\gamma_1,\ldots,\gamma_0\geqslant\gamma_n$. Ясно, что $p_\gamma(U_i)=1$ для всех $i=1,\ldots,n$, как только $\gamma\geqslant\gamma_0$. Но это противоречит условию $U_1\cap\ldots\cap U_n=\varnothing$, согласно которому $p_\gamma(U_1)\leqslant p_\gamma(X\setminus U_2)+\ldots+p_\gamma(X\setminus U_n)=0$.

Аналогичный результат справедлив и для $(\mathcal{M}(X),\tau_\Lambda)$:

(3.4.I2$^\Lambda$) Теорема. Пусть (X,T) – нечеткое пространство и $p\in\mathcal{M}(X)$. Тогда $\bar{K}^\Lambda(p)=t_p$, где $\bar{K}^\Lambda$ – замыкание в пространстве $(\mathcal{M}(X),\tau_\Lambda)$.

Утверждение (3.4.I2) легко следует из теоремы (3.4.I2) и доказываемой ниже леммы:

(3.4.I3) Лемма. Пусть (X,T) – топологическое пространство и $A\in(\lambda T)^c$ таково, что $\int A dp = 1$ для каждой меры $p\in K(X)$. Тогда существует $B\in T^c$, $B\leqslant A$, такое, что $p(B)=1$ для каждой меры $p\in K(X)$.

<u>Доказательство</u>. Поскольку A полунепрерывно сверху, то для каждого $\varepsilon>0$ $A^{\varepsilon}:=A^{-1}[1-\varepsilon, 1]\in T^c$ и при этом $p(A^{\varepsilon})=1$ для каждого $p\in K$ (поскольку $\int A dp = 1$ для каждого $p\in K$). Отсюда, воспользовавшись непрерывностью меры p, заключаем, что $p(B)=1$, где $B:=\bigcap_{\varepsilon>0} A^{\varepsilon}$ и при этом, очевидно, $B\leqslant A$.

В. <u>Компактность</u>

В этом разделе исследуется связь свойств типа компактности топологического пространства (X , T) и его нечетко-вероятностных расширений. Докажем сначала следующее вспомогательное утверждение.

(3.4.14) <u>Предложение</u>. Если пространство (X , T) нормально и счетно-компактно, то пространство $(\mathcal{M}(X), \mathcal{S}_c)$ компактно.

<u>Доказательство</u>. Пусть $\mathfrak{B}$:– σ-алгебра бэровских множеств пространства (X , T) и пусть $\mathfrak{M}(X)$ – множество всех бэровских мер p: $\mathfrak{B}\to I$ (см., напр., [104]). Тогда, поскольку на $\mathfrak{M}(X)$ топология $\mathcal{S}_c$ индуцирует слабую топологию (3.3.16) и (X , T) счетно компактно, можем воспользоваться результатом из [104] и заключить, что $(\mathfrak{M}(X), \mathcal{S}_c)$ компактно.

Рассмотрим отображение $\varphi: \mathcal{M}(X)\to\mathfrak{M}(X)$, сопоставляющее каждой мере $p\in\mathcal{M}(X)$ ее ограничение $\varphi(p):=p/_{\mathfrak{B}}$. Заметим, что это отображение сюръективно. Действительно, поскольку топология T нормальна и счетно-компактна, из теоремы Марека [78] легко следует, что каждая мера $p\in\mathfrak{M}(X)$ имеет продолжение до меры $\tilde{p}\in\mathcal{M}(X)$, а следовательно, $\varphi(\tilde{p})=p$. Поскольку пространство $(\mathfrak{M}(X), \mathcal{S}_c)$ компактно, отображение $\varphi: (\mathcal{M}(X), \mathcal{S}_c)\to(\mathfrak{M}(X), \mathcal{S}_c)$ непрерывно и при этом прообраз каждой точки $p\in\mathfrak{M}(X)$, как нетрудно заметить, антидискретен, отсюда следует компактность пространства $(\mathcal{M}(X), \mathcal{S}_c)$.

(3.4.15) <u>Теорема</u>. Если топологическое пространство (X, T) нормально и счетно-компактно, то нечеткое пространство $(\mathcal{M}(X), \tau_\Lambda)$ компактно (а следовательно, и каждое пространство вида $(\mathcal{M}(X), \tau_\xi)$, где $\xi \subset \lambda T$, компактно).

<u>Доказательство</u>. Из предложений (3.4.14), (3.3.19) и (3.3.21) следует, что в этих предположениях пространство $(\mathcal{M}(X), \tau_\Lambda)$ ультракомпактно. Для завершения доказательства остается воспользоваться теоремой Ловена [68], согласно которой каждое ультракомпактное нечеткое пространство компактно.

В терминах спектральной теории предыдущему утверждению можно придать такой вид:

(3.4.15′) <u>Теорема</u>. Если топологическое пространство (X, T) нормально, то $CC(X,T) \subset C(\mathcal{M}(X), \tau_\Lambda) \subset C(\mathcal{M}(X), \tau_\xi)$, где $\xi \subset \lambda T$.

Перейдем теперь к рассмотрению обратной задачи: в какой степени свойства компактности нечеткого пространства вероятностных мер обеспечивают наличие аналогичных свойств для исходного пространства.

(3.4.16) <u>Теорема</u>. Для каждого топологического пространства (X, T) имеет место включение $CC(\mathcal{M}(X), \tau_T) \subset CC(X, T)$.

<u>Доказательство</u>. Зафиксируем $\beta \in CC(\mathcal{M}(X), \tau_T)$ и пусть $\{A_n : n \in N\} \subset T^c$ таково, что $A_1 \geqslant A_2 \geqslant \ldots$. Предположим, что найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $\sup \bigwedge_{i=1}^{n} A_i(x) \geqslant \beta^c + \varepsilon$ для всех $n \in N$. Пусть $h: X \to \mathcal{M}(X)$ определено как в (3.3.7); рассмотрим последовательность замкнутых в $(\mathcal{M}(X), \tau_T)$ нечетких множеств $\overline{h(A_1)} \geqslant \overline{h(A_2)} \geqslant \ldots$. Очевидно, что для каждого $\varepsilon' < \varepsilon$ и каждого $n \in N$ найдется точка $x_n \in X$ такая, что $A_i(x_n) \geqslant \beta^c + \varepsilon'$ для всех $i = 1, \ldots, n$, а следовательно, $\sup_{p \in \mathcal{M}} \bigwedge_{i=1}^{n} \overline{h(A_i)}(p) \geqslant \sup_{x \in X} \bigwedge_{i=1}^{n} \overline{h(A_i)}(p_x) \geqslant \bigwedge_{i=1}^{n} h(A_i)(p_{x_n}) \geqslant$ $\geqslant \bigwedge_{i=1}^{n} A_i(x_n) \geqslant \beta^c + \varepsilon'$. Ввиду произвольности $\varepsilon' < \varepsilon$ отсюда вытекает, что $\sup_{p \in \mathcal{M}} \bigwedge_{i=1}^{n} \overline{h(A_i)}(p) \geqslant \beta^c + \varepsilon$, а следовательно, в силу (2.4.6), $\sup_{p \in \mathcal{M}} \bigwedge_{n=1}^{\infty} \overline{h(A_n)}(p) \geqslant \beta^c$. Зафиксировав $\alpha < \beta^c$, выберем $p_0 \in \mathcal{M}$ так, чтобы $\bigwedge_{n=1}^{\infty} \overline{h(A_n)}(p_0) > \alpha$. Далее, поскольку, очевидно, $A_n \in T$ и $\delta_{A_n} \geqslant h(A_n)$ для всех $n \in N$, то $\overline{h(A_n)}(p_0) = \inf\{1 - \bigwedge_{i=1}^{k} \delta_{U_i}(p) : U_i \in T, 1 - \bigwedge_{i=1}^{k} \delta_{U_i} \geqslant h(A_n)\} = \inf\{\bigvee_{i=1}^{n} \int C_i dp_0 : C_i \in T^c,$

$\vee \delta_{c_i} \geq h(A_n)\} \leq \int A_n \, dp_o$, и, значит, $\int A_n dp_o > a$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Согласно теореме Лебега (см., напр., [17, с.168]) получаем $\int (\bigwedge_n A_n) \, dp_o \geq a$, а следовательно, $\sup_x (\wedge A_n)(x) \geq a$, откуда, ввиду произвольности выбора $a < \beta^c$, получаем $\sup_x (\wedge A_n)(x) \geq \beta^c$. Воспользовавшись вновь леммой (2.4.6), заключаем, что $\beta \in CC(X,T)$.

Из теорем (3.4.15) и (3.4.16) получаем, что для каждого нормального пространства (X , T) имеют место цепочки включений: $CC(\mathcal{M}(X), \tau_\Lambda) \subset CC(\mathcal{M}(X), \tau_T) \subset CC(X,T) \subset C(\mathcal{M}(X), \tau_\Lambda)$; $C(\mathcal{M}(X), \tau_\Lambda) \subset C(\mathcal{M}(X), \tau_T) \subset$ $\subset CC(X,T)$. Тем самым приходим к следующему результату:

(3.4.17) <u>Теорема</u>. Для каждого нормального пространства (X , T) $CC(\mathcal{M}(X), \tau_\Lambda) = CC(\mathcal{M}(X), \tau_T) = C(\mathcal{M}(X), \tau_\Lambda) = C(\mathcal{M}(X), \tau_T) = CC(X,T)$.

Из теоремы (3.4.17) вытекает

(3.4.18) <u>Теорема</u>. Для каждого нормального топологического пространства следующие условия эквивалентны:

(а) пространство (X , T) счетно компактно;

(б) пространство $(\mathcal{M}(X), \tau_T)$ счетно компактно;

(в) пространство $(\mathcal{M}(X), \tau_\Lambda)$ счетно компактно;

(г) пространство $(\mathcal{M}(X), \tau_T)$ компактно;

(д) пространство $(\mathcal{M}(X), \tau_\Lambda)$ компактно.

Г. <u>Отделимость</u>

Изучаемые нами нечеткие топологии на пространствах вероятностных мер обладают слабыми, но при этом весьма характерными свойствами отделимости. Для описания этих свойств мы, основываясь на схеме, разработанной в § I второй главы, модифицируем терминологию применительно к нашим целям.

Пусть $\beta \in [0,1)$. Скажем, что нечеткое пространство (Y , σ) (β , γ)-хаусдорфово, если $(\beta, \gamma^c) \in H_o^2(Y)$. Скажем, что нечеткое пространство (Y , σ) является (β, γ)-T_o-пространством, если $(\beta, \gamma^c) \in TO_o^2(Y)$ (см.

(2.I.I), (2.I.3I)). "Расшифровывая" эти определения, можем придать им следующую форму. Нечеткое пространство ($\mathcal{Y}$, $\mathcal{G}$) называется <u>(β,γ)-хаусдорфовым</u>, если для любых различных точек $x,y\in\mathcal{Y}$ найдутся $U,V\in\mathcal{G}$ такие, что $U(x)>\beta$, $V(y)>\beta$ и $U\wedge V\leqslant\gamma$. Нечеткое пространство $(\mathcal{Y},\mathcal{G})$ называется <u>(β,γ)-T_0-пространством</u>, если для любых различных точек $x,y\in\mathcal{Y}$ найдется $U\in\mathcal{G}$ такое, что либо $U(x)>\beta$ и $U(y)\leqslant\gamma$, либо $U(y)>\beta$ и $U(x)\leqslant\gamma$.

(3.4.19) <u>Теорема</u>. Для каждого топологического пространства (X, T) нечеткое пространство нормальных вероятностных мер $(\mathcal{N}(X),\tau_\Lambda)$ является (β,β)-хаусдорфовым при всех $\beta>0$.

<u>Доказательство</u>. Пусть $p,q\in\mathcal{N}(X)$, $p\neq q$ и $G\in T$ таково, что $p(G)\neq q(G)$. Положим для определенности $p(G)>q(G)$ и пусть $\varepsilon<\frac{1}{2}(p(G)-q(G))$. Воспользовавшись нормальностью меры p , выберем $H\in T$ так, чтобы $\bar{H}\subset G$ и $p(H)>p(G)-\varepsilon$ (где $\bar{H}$ - замыкание в $(\mathcal{N}(X),\tau_\Lambda)$). Рассмотрим нечеткие множества вида $U=a_1H+a_2H^c$ и $V=b_1\bar{H}^c+b_2\bar{H}$, где a_1, a_2 , b_1 , b_2 выбраны так, чтобы $0\leqslant a_2<a_1\leqslant 1$, $0\leqslant b_2<b_1\leqslant 1$, $\beta-a_2=(p(G)-\varepsilon)(a_1-a_2)$ и $\beta-b_2=(q(\bar{H}^c)-\varepsilon)(b_1-b_2)$ (в возможности такого выбора легко убедиться непосредственно). Нетрудно заметить, что определенные таким образом функции U , V полунепрерывны снизу и при этом $\delta_U(p)=p(H)(a_1-a_2)+a_2>(p(G)-\varepsilon)(a_1-a_2)+a_2=\beta$, $\delta_V(q)=q(\bar{H}^c)(b_1-b_2)+b_2>(q(\bar{H}^c)-\varepsilon)(b_1-b_2)+b_2=\beta$.

Для завершения доказательства остается заметить, что $(\delta_U\wedge\delta_V)(r)\leqslant\beta$ для каждой меры $r\in\mathcal{M}(X)$. Действительно, если $\int U dr=r(H)(a_1-a_2)+a_2>\beta$ и $\int V dr=r(\bar{H}^c)(b_1-b_2)+b_2>\beta$, то $r(H)(a_1-a_2)>(p(G)-\varepsilon)(a_1-a_2)$ и $r(\bar{H}^c)(b_1-b_2)>(q(\bar{H}^c)-\varepsilon)(b_1-b_2)>(q(G^c)-\varepsilon)(b_1-b_2)$, откуда $r(H)+r(\bar{H}^c)>p(G)+q(G^c)-2\varepsilon\geqslant p(G)+1-q(G)-2\varepsilon>1$. Но это невозможно, поскольку $H\cap\bar{H}^c=\varnothing$.

(3.4.20) <u>Следствие</u>. Если (X , T) - совершенно нормальное топологическое пространство, то нечеткое пространство $(\mathcal{M}(X),\tau_\Lambda)$ (β,β)-хаусдорфово для всех $\beta>0$.

(Из анализа доказательства предыдущей теоремы ясно, что фактически установлено более сильное утверждение: для каждого $\beta>0$ и любых $p,q\in\mathcal{N}(X)$ существуют $U,V\in\Lambda$ такие, что $\delta_U(p)>\beta$, $\delta_V(q)>\beta$ и $(\delta_U\wedge\delta_V)(r)\leqslant\beta$ для всех $r\in\mathcal{M}(X)$.)

Условие $\beta>0$ в (3.4.19) и (3.4.20) является существенным:

(3.4.21) Теорема. Если (X,T) - топологическое пространство и $|X|>1$, то пространство $(\mathcal{M}(X),\tau_\Lambda)$ не является $(0,0)$-T_0-пространством (и тем более не является $(0,0)$-хаусдорфовым).

Доказательство. В случае, если (X,T) не является T_0-пространством, доказываемое утверждение очевидно. Предположим, что (X,T) - T_0-пространство и пусть $x,y\in X$. Определим меры $p,q\in\mathcal{M}(X)$ равенствами $(E\in\mathcal{B})$:

$p(E)=t$ при $x\in E$, $y\notin E$, $p(E)=1-t$ при $x\notin E$, $y\in E$;

$q(E)=s$ при $y\in E$, $x\notin E$, $q(E)=1-s$ при $y\notin E$, $x\in E$;

(и, естественно, $p(E)=q(E)=0$ при $x,y\notin E$; $p(E)=q(E)=1$ при $x,y\in E$), где $s,t\in(0,1)$.

Ясно, что, если $\delta_U(p)>0$ для некоторого $U\in\Lambda$, то либо $U(x)>0$, либо $U(y)>0$, но тогда и $\delta_U(q)>0$. Аналогично, если $\delta_U(q)>0$, то и $\delta_U(p)>0$.

(3.4.22) Теорема. Пусть (X,T) - топологическое пространство, $|X|>1$ и $\gamma<\beta$. Тогда пространство $(\mathcal{M}(X),\tau_\Lambda)$ не является (β,γ)-T_0-пространством (и тем более не является (β,γ)-хаусдорфовым).

Доказательство. Представим γ в виде $\gamma=\beta\kappa$, где $0\leqslant\kappa<1$. Зафиксируем некоторое $t>\frac{1-\beta}{1-\beta\kappa}$, $\frac{1}{2}<t<1$, и выберем s так, чтобы $\frac{1}{2}<s<t$, $s\geqslant\frac{1-\beta}{1-\beta\kappa}$, $s\geqslant\frac{t-\beta+\beta\kappa t^c}{1-\beta}$. (Такой выбор возможен,- поскольку, как непосредственно проверяется, $\frac{t-\beta+\beta\kappa t^c}{1-\beta}<t$).

Как и в доказательстве предыдущей теоремы, можем без ограничения общности считать, что (X,T) является T_0-пространством. Зафиксировав точки $x,y\in X$, определим меры $p,q\in\mathcal{M}(X)$ так же, как и в доказательстве теоремы (3.4.21).

Предположим, что $U\in\Lambda$ таково, что $\delta_U(p)>\beta$ и $\delta_U(q)\leqslant\kappa\beta$.

Пусть $U(x)=a$, $U(y)=b$, тогда $\int U dp = ta+(1-t)b>\beta$ и $\int U dq = sa+(1-s)b \leqslant \kappa\beta$. Из этих двух неравенств легко выводим $a>\beta\frac{1-s-\kappa+\kappa t}{t-s}$. Но с другой стороны в силу выбора s получаем, что $\beta\frac{1-s-\kappa+\kappa t}{t-s}\geqslant 1$, т.е. $a>1$. Полученное противоречие позволяет заключить, что, если $\delta_u(p)>\beta$, то $\delta_u(q)>\gamma$.

Предположим теперь, что $U\in\Lambda$ таково, что $\delta_u(q)>\beta$ и $\delta_u(p)\leqslant\kappa\beta$. Тогда $\int U dq = sa+s^c b>\beta$, $\int U dp = ta+t^c b\leqslant\kappa\beta$. Из этих неравенств выводим, что $b>\beta\frac{t-\kappa s}{t-s}\geqslant\frac{1-s}{1-s\kappa}\ \frac{t-s\kappa}{t-s}>1$, что вновь приводит к противоречию, а значит, если $\delta_u(q)>\beta$, то $\delta_u(p)>\gamma$. Но это и означает, что $(\mathcal{M}(X),\tau_\Lambda)$ не является (β,γ)- T_0 - пространством.

Нетрудно заметить, что, в случае нормального пространства (X, T), построенные в доказательстве теоремы (3.4.21) меры нормальны. Это позволяет сформулировать такой вариант предыдущей теоремы:

(3.4.22') Теорема. Пусть (X, T) - нормальное пространство, $|X|>1$ и $\gamma<\beta$. Тогда пространство $(\mathcal{N}(X),\tau_\Lambda)$ не является (β,γ)-T_0-пространством (и тем более не является (β,γ)-хаусдорфовым).

§ 5. СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ КОНСТРУКЦИЙ $\mathcal{F}(X)$ И $\mathcal{M}(X)$

Выше были рассмотрены две универсальные конструкции нечеткой топологии: $\mathcal{F}(X)$, проведенная для линейно-упорядоченного пространства X и конструкция $\mathcal{M}(X)$, проведенная для произвольного топологического пространства X. Хотя на первый взгляд эти конструкции совершенно различны, при более глубоком анализе, которому и посвящен этот параграф, оказывается, что в действительности они весьма тесно связаны, а в отдельных случаях могут рассматриваться как два варианта одной конструкции.

(3.5.1) Конструкция $(\mathcal{M}_\Pi(X), \mathcal{T}_\Pi)$. Пусть $(X, <)$ – линейно-упорядоченное пространство и $\Pi = \{(\leftarrow, b), (a, \rightarrow) : a, b \in X\}$ – стандартная предбаза его топологии T. Обозначим через $\mathcal{B}_\Pi$ σ-алгебру, порожденную семейством Π и пусть $\mathcal{M}_\Pi(X)$ – множество всех вероятностных мер $p: \mathcal{B}_\Pi \to I$. Ясно, что $\mathcal{B}_\Pi \subset \mathcal{B}$, а следовательно, $\mathcal{M}_\Pi \supset \mathcal{M}$. При этом в случае, когда X имеет счетную базу, очевидно, $\mathcal{B}_\Pi = \mathcal{B}$ и, значит, $\mathcal{M}_\Pi = \mathcal{M}$. Воспользовавшись конструкцией (3.3.1), по каждому семейству $\xi \subset \lambda T$ мы определяем топологию $\mathcal{T}_\xi$ на пространстве $\mathcal{M}(X)$, а следовательно, и на его подпространстве $\mathcal{M}_\Pi(X)$. (Мы используем одно и то же обозначение $\mathcal{T}_\xi$ для топологии на пространстве $\mathcal{M}(X)$ и для топологии на его подпространстве $\mathcal{M}_\Pi(X)$).

Особый интерес здесь будет представлять для нас случай $\xi = \Pi$ и $\xi = \lambda\Pi$, где $\lambda\Pi = \{(\leftarrow, b), (a, \rightarrow) : a, b \in X\} \cup \{c : c \in I\}$.

Как установлено в доказываемой ниже теореме, конструкция $(\mathcal{M}_\Pi(X), \mathcal{T}_\Pi) =: \mathcal{M}_\Pi(X)$ для пространств счетного характера эквивалентна описанной в (3.1.4) конструкции $\mathcal{F}^*(X)$.

(3.5.2) Теорема. Если X – линейно-упорядоченное пространство счетного характера, то нечеткие пространства $\mathcal{F}^*(X)$ и $\mathcal{M}_\Pi(X)$ (канонически) гомеоморфны.

<u>Доказательство</u>. Определим отображение $\varphi : \mathcal{M}_\Pi(X) \to \mathcal{F}^*(X)$, положив $\varphi(p)=\chi_p$, где $\chi_p : X \to I$ – функция, заданная равенством $\chi_p(x)=$ $=p[x,\to)$. Ясно, что $\chi_p \in \mathcal{X}(X)$. Пусть t_n – последовательность в X, сходящаяся к точке x слева; тогда из свойств меры ясно, что $\lim\limits_{n\to\infty} \chi_p(t_n) = \lim\limits_{n\to\infty} p[t_n,\to) = p(\bigcap\limits_n [t_n,\to)) = p[x,\to) = \chi_p(x)$. Поскольку характер X счетен, отсюда следует, что $\chi_p \in \mathcal{F}^*(X)$.

Определим теперь обратное к φ отображение $\psi : \mathcal{F}^*(X) \to \mathcal{M}_\Pi(X)$. Для каждого $\chi \in \mathcal{F}^*(X)$ рассмотрим отображение $p_\chi : \{[x,\to) : x \in X\} \to I$, заданное равенством $p_\chi[x,\to) = \chi(x)$. Если $[x,\to) = \bigcap\limits_n [t_n,\to)$, где t_n – возрастающая последовательность, сходящаяся к x, то, ввиду полунепрерывности слева функции χ, имеем $p_\chi[x,\to) = \chi(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \chi(t_n) = \lim\limits_{n\to\infty} p_\chi[t_n,\to)$, а следовательно, функция множества p_χ непрерывна на $\{[x,\to) : x\in X\}$. Из общей теории меры следует, что p_χ единственным образом продолжается на σ-алгебру, порожденную семейством $\{[x,\to) : x \in X\}$, которая, как нетрудно заметить, совпадает с $\mathcal{B}_\Pi$. Эту продолженную меру также будем обозначать p_χ. Положим $\psi(\chi) = p_\chi$. Из определений ясно, что отображения φ и ψ взаимнообратны. Для доказательства теоремы остается проверить непрерывность отображений φ и ψ. Для этого рассмотрим следующие равенства, справедливые для каждой меры $p \in \mathcal{M}_\Pi$: $\varphi^{-1}(R_a)(p) = R_a(\chi_p) = \chi_p(a^+) = \lim\limits_{t_n \to a+0} \chi_p(t_n) = p(\bigcup\limits_n [t_n,\to)) = \delta_{(a,\to)}(p)$, если точка a неизолирована справа; $\varphi^{-1}(R_a)(p) = \chi_p(a^+) = p(a,\to) = \delta_{(a,\to)}(p)$, если точка a изолирована справа; $\varphi^{-1}(R_a)(p) = 0$, если $a = \max X$; $\varphi^{-1}(L_b)(p) =$ $= L_b(\chi_p) = 1 - \chi_p(b^-) = 1 - \lim\limits_{t_n \to b-0} \chi_p(t_n) = 1 - p(\bigcap\limits_n [t_n,\to)) = p(\leftarrow, b) = \delta_{(\leftarrow,b)}(p)$, если точка b неизолирована слева; $\varphi^{-1}(L_b)(p) = 1 - \chi_p(b^-) = 1 - p[t,\to) = p(\leftarrow, t) = \delta_{(\leftarrow,t)}(p)$, если точка b изолирована слева, $t<b$ и $(t,b)=\emptyset$, $\varphi^{-1}(L_b)(p) = 1 - \chi_p(b^-) = 0$, если $b = \min X$.

Итак, прообразы элементов предбазы нечеткой топологии σ на $\mathcal{F}^*(X)$ при отображении φ составляют предбазу нечеткой топологии τ_Π на $\mathcal{M}_\Pi(X)$, а следовательно $\varphi : \mathcal{M}_\Pi(X) \to \mathcal{F}^*(X)$ – гомеоморфизм.

Из теоремы (3.5.2) и (3.I.4) вытекает

(3.5.3) <u>Следствие</u>. Если X – линейно-упорядоченное пространство счетного характера, не имеющее изолированных точек, то нечеткие пространства $\mathcal{F}(X)$ и $\mathcal{M}_{\text{п}}(X)$ гомеоморфны.

Как замечено в (3.5.I), в случае пространства счетного веса σ-алгебры $\mathcal{B}_{\text{п}}$ и $\mathcal{B}$ равны. Это позволяет вывести такое

(3.5.4) <u>Следствие</u>. Если X – линейно-упорядоченное пространство счетного веса, то нечеткие пространства $\mathcal{F}^*(X)$ и $\mathcal{M}_{\text{т}}(X)$ гомеоморфны. Если при этом пространство X не имеет изолированных точек, то пространства $\mathcal{F}(X)$ и $\mathcal{M}_{\text{т}}(X)$ также гомеоморфны.

Совершенно аналогично можно доказать и ламинированные версии предыдущих утверждений:

(3.5.2$^\lambda$) <u>Теорема</u>. Если X – линейно-упорядоченное пространство счетного характера, то $\mathcal{F}^{*\lambda}(X)$ и $\mathcal{M}_{\lambda\text{п}}(X)$ гомеоморфны.

(3.5.3$^\lambda$) <u>Следствие</u>. Если X – линейно-упорядоченное пространство счетного характера, не имеющее изолированных точек, то нечеткие пространства $\mathcal{F}^\lambda(X)$ и $\mathcal{M}_{\lambda\text{п}}(X)$ гомеоморфны.

(3.5.4$^\lambda$) <u>Следствие</u>. Если X – линейно-упорядоченное пространство счетного веса, то нечеткие пространства $\mathcal{F}^{*\lambda}(X)$ и $\mathcal{M}_\lambda(X)$ гомеоморфны. Если при этом X не имеет изолированных точек, то пространства $\mathcal{F}^\lambda(X)$ и $\mathcal{M}_{\text{т}}(X)$ также гомеоморфны.

(3.5.5) <u>Замечание</u>. Пространство $\mathcal{F}^*(X)$ может естественным образом интерпретироваться, как образ пространства $\mathcal{F}(X)$ при фактор-отображении $q: \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}^*(X)$, отождествляющем $\sim$-эквивалентные функции из $\mathcal{F}^*(X)$. При этом, очевидно, прообраз $q^{-1}(\mathscr{x})$ каждой точки $\mathscr{x} \in \mathcal{F}^*(X)$ является антидискретным подмножеством пространства $\mathcal{F}(X)$. Это наблюдение позволяет посредством утверждений (3.5.2), (3.5.3) и (3.5.4) перенести многие результаты § 4 на конструкцию $\mathcal{F}(X)$.

Глава IУ. АЛЬТЕРНАТИВНАЯ ТЕОРИЯ НЕЧЕТКИХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

В (I.I.I) было введено понятие L-нечеткого топологического пространства, а в (I.I.3) определена категория $FT(L)$ L-нечетких топологических пространств. В предыдущих трех главах мы изучали свойства L-нечетких пространств (свойства категории $FT(L)$). При этом каждый раз решетка L считалась фиксированной - иногда фиксированной произвольным образом, чаще же в качестве решетки L брался интервал I. Однако и в тех случаях, когда мы ограничивались интервалом I, соответствующие результаты могут быть распространены на случай решеток достаточно общей природы (или даже на случай произвольных решеток). С другой стороны, для всей излагаемой в предыдущих главах теории существенен тот факт, что решетка L каждый раз была фиксированной. Альтернативный, принципиально отличный подход к предмету нечеткой топологии придется развить, если задаться целью рассматривать L-нечеткие топологические пространства для различных нечетких решеток L одновременно. Более того, в этом случае естественно допустить, что нечеткая топология $\mathcal{T}$ принимает свои значения в решетке K, вообще говоря, отличной от решетки L, определяющей характер нечетких множеств. Целью данной главы и является изложение основ такого подхода.

§ I. КАТЕГОРИЯ GFT

(4.I.I) Определение. Объектами категории GFT являются кортежи вида $(X, L, \mathcal{T}, K)$, где X - множество, L и K - ограниченные $\sup$-полные бесконечно дистрибутивные решетки, а $\mathcal{T}: L^X \to K$ - отображение, удовлетворяющее аксиомам (I) $\mathcal{T}(0) = \mathcal{T}(1) = 1$, (2) $\mathcal{T}(U \wedge V) \geq$

$\geqslant \mathcal{T}(U) \wedge \mathcal{T}(V)$ для любых $U, V \in L^X$ и (3) $\mathcal{T}(\bigvee_i U_i) \geqslant \bigwedge_i \mathcal{T}(U_i)$ для каждого семейства $\{U_i : i \in \mathcal{I}\} \subset L^X$. Отображение $\mathcal{T}$, удовлетворяющее аксиомам (I)-(3), естественно назвать (L, K)-нечеткой топологией на множестве X.

Морфизмами категории GFT служат тройки $(f, \varphi, \psi) : (X_1, L_1, \mathcal{T}_1, K_1) \to$ $\to (X_2, L_2, \mathcal{T}_2, K_2)$, где $f : X_1 \to X_2$, а $\varphi : L_2 \to L_1$ и $\psi : K_2 \to K_1$ – отображения, причем φ и ψ сохраняют произвольные супремумы и конечные инфимумы и $\mathcal{T}_1(\varphi \circ V \circ f) \geqslant \psi(\mathcal{T}_2(V))$ для каждого $V \in L_2^{X_2}$ (своего рода условие непрерывности).

Композиция морфизмов $(f_1, \varphi_1, \psi_1) : (X_1, L_1, \mathcal{T}_1, K_1) \to (X_2, L_2, \mathcal{T}_2, K_2)$ и $(f_2, \varphi_2, \psi_2) : (X_2, L_2, \mathcal{T}_2, K_2) \to (X_3, L_3, \mathcal{T}_3, K_3)$ определяется равенством $(f_2 \circ$ $\circ f_1, \varphi_1 \circ \varphi_2, \psi_1 \circ \psi_2) : (X_1, L_1, \mathcal{T}_1, K_1) \to (X_3, L_3, \mathcal{T}_3, K_3)$. В качестве тождественного выступает морфизм $(\mathcal{E}_X, \mathcal{E}_L, \mathcal{E}_K) : (X, L, \mathcal{T}, K) \to (X, L, \mathcal{T}, K)$, где $\mathcal{E}_X : X \to X$, $\mathcal{E}_L : L \to L$ и $\mathcal{E}_K : K \to K$ – соответствующие тождественные отображения.

(4.I.2) <u>Замечание</u>. Пусть Lat – категория ограниченных sup-полных бесконечно дистрибутивных решеток и отображений таких решеток, которые сохраняют произвольные супремумы и конечные инфимумы (и, в частности, сохраняют 0 и 1); пусть Lat^{op} – обратная к Lat категория.

Используя терминологию Эклунда и Гелера [24], можно сказать, что категория $Set \times Lat^{op} \times Lat^{op}$ является базовой для категории GFT (а категория GFT, в свою очередь, служит топологическим обрамлением (*framing*) категории $Set \times Lat^{op} \times Lat^{op}$). (Для сравнения: для категорий Top, FT, $CFT(L)$, $LCFT(L)$ и т.п. базовой является категория Set; при этом категория Top (и только она) является топологическим обрамлением категории Set).

(4.I.3) <u>Определение</u>. Морфизм $(f, \varphi, \psi) : (X_1, L_1, \mathcal{T}_1, K_1) \to (X_2, L_2, \mathcal{T}_2, K_2)$ категории GFT называется <u>гомеоморфизмом</u>, если $f : X_1 \to X_2$ является биекцией, $\varphi : L_2 \to L_1$ и $\psi : K_2 \to K_1$ являются изоморфизмами в категории Lat и при этом (f,φ,ψ) и $(f,\varphi,\psi)^{-1}:=(f^{-1},\varphi^{-1},\psi^{-1}):(X_2, L_2,\mathcal{T}_2,K_2)\to(X_1,L_1,\mathcal{T}_1,K_1)$ непрерывны (т.е. $\mathcal{T}_1(\varphi\circ V\circ f)\geq\psi(\mathcal{T}_2(V))$ для каждого $V\in L_2^{X_2}$ и $\mathcal{T}_2(\varphi^{-1}\circ U\circ f^{-1})\geq\psi^{-1}(\mathcal{T}_1(U))$ для каждого $U\in L_1^{X_1}$).

Нетрудно заметить, что морфизм (f,φ,ψ) : $(X_1,L_1,\mathcal{T}_1,K_1)\to(X_2, L_2, \mathcal{T}_2,K_2)$ является гомеоморфизмом тогда и только тогда, когда f: $X_1\to X_2$ – биекция, $\varphi:L_2\to L_1$ и $\psi:K_2\to K_1$ – изоморфизмы в Lat и $\mathcal{T}_1(\varphi\circ V\circ f)=\psi(\mathcal{T}_2(V))$ для каждого $V\in L_2^{X_2}$.

Наряду с отношением гомеоморфности нам потребуются два более слабых отношения эквивалентности на GFT.

(4.I.4) <u>Квазигомеоморфизм</u>. Пусть $(X_1,L_1,\mathcal{T}_1,K_1), (X_2,L_2,\mathcal{T}_2,K_2)\in$ $\in Ob(Lat)$ и отображения $f:X_1\to X_2$, $\varphi:L_2\to L_1$ и $\psi:K_2\to K_1$ биективны. Тогда тройка (f,φ,ψ) : $(X_1,L_1,\mathcal{T}_1,K_1)\to(X_2,L_2,\mathcal{T}_2,K_2)$ называется квазигомеоморфизмом, если $\mathcal{T}_1(\varphi\circ V\circ f)=\psi(\mathcal{T}_2(V))$ для каждого $V\in L_2^{X_2}$. (Таким образом, определение квазигомеоморфизма отличается от определения гомеоморфизма тем, что от входящих в него компонент φ и ψ не требуется, чтобы они были морфизмами в Lat ; в частности, квазигомеоморфизм не является, вообще говоря, морфизмом категории GFT .)

Пространства $(X_1,L_1,\mathcal{T}_1,K_1)$ и $(X_2,L_2,\mathcal{T}_2,K_2)$ в этом случае называются квазигомеоморфными.

(4.I.5) <u>Парагомеоморфизм</u>. Для каждого нечеткого пространства $(X,L,\mathcal{T},K)$ рассмотрим нечеткое пространство $(*,L^X,\mathcal{T},K)$, где $*$ – одноточечное множество. (Если $L\in Ob(Lat)$, то L^X, будучи наделено естественным порядком, также является объектом Lat и при этом, если L – нечеткая решетка, то и L^X может быть рассмотрена как нечеткая решетка (0.I.6). Отождествляя естественным образом решетку L^X с решеткой $(L^X)^*$, можем (L,K)-нечеткую топологию $\mathcal{T}$: $L^X\to K$ на множестве X трактовать как (L^X,K)-нечеткую топологию $\mathcal{T}:(L^X)^*\to K$ на множестве $*$.)

Далее, если $f:X_1\to X_2$ и $\varphi:L_2\to L_1$ – отображения, причем φ

является морфизмом в Lat, то и отображение $f^{\varphi}: L_2^{X_2} \to L_1^{X_1}$, определяемое равенством $f^{\varphi}(V) = \varphi \circ V \circ f$, является морфизмом в Lat. Более того, если $(f, \varphi, \psi): (X_1, L_1, \mathcal{T}_1, K_1) \to (X_2, L_2, \mathcal{T}_2, K_2)$ – морфизм (гомеоморфизм) в GFT, то $(\mathcal{E}_*, f^{\varphi}, \psi): (*, L_1^{X_1}, \mathcal{T}_1, K_1) \to (*, L_2^{X_2}, \mathcal{T}_2, K_2)$ является морфизмом (соответственно, гомеоморфизмом) в GFT. Обратное, очевидно, неверно: из гомеоморфности пространств $(*, L_1^{X_1}, \mathcal{T}_1, K_1)$ и $(*, L_2^{X_2}, \mathcal{T}_2, K_2)$, вообще говоря, не следует гомеоморфность пространств $(X_1, L_1^{X_1}, \mathcal{T}_1, K_1)$ и $(X_2, L_2^{X_2}, \mathcal{T}_2, K_2)$. Естественным поэтому представляется

<u>Определение</u>. Нечеткие пространства $(X_1, L_1, \mathcal{T}_1, K_1)$ и $(X_2, L_2, \mathcal{T}_2, K_2)$ называются парагомеоморфными, если соответствующие одноточечные пространства $(*, L_1^{X_1}, \mathcal{T}_1, K_1)$ и $(*, L_2^{X_2}, \mathcal{T}_2, K_2)$ гомеоморфны.

(4.I.6) <u>Категория GFT^*</u>. Нарядусс категорией GFT для нас будет представлять интерес и близкая к ней категория GFT^*. Объектами GFT^* являются те из объектов $(X, L, \mathcal{T}, K)$ категории GFT, у которых L, K являются нечеткими решетками, а морфизмами $(f, \varphi, \psi): (X_1, L_1, \mathcal{T}_1, K_1) \to (X_2, L_2, \mathcal{T}_2, K_2)$ являются те из морфизмов категории GFT, у которых $\varphi: L_2 \to L_1$ и $\psi: K_2 \to K_1$ сохраняют произвольные инфимумы и инволюцию.

(4.I.7) <u>Категории GFT_0 и GFT_0^*</u>. В большинстве представляющих для нас интерес ситуаций можно без ограничения общности считать, что решетки L и K совпадают и что $\varphi = \psi$, или, что эквивалентно, $K \subset L$ и $\varphi|_K = \psi$. Соответствующие подкатегории категорий GFT и GFT^* будем обозначать, соответственно, GFT_0 и GFT_0^*. Ясно, что для объектов и морфизмов этих категорий можно использовать упрощенные обозначения $(X, L, \mathcal{T})$ и (f, φ) соответственно.

§ 2. КАТЕГОРИИ НЕЧЕТКОЙ ТОПОЛОГИИ КАК ПОДКАТЕГОРИИ В GFT

В этом параграфе категории нечеткой топологии, введенные в главе I, и некоторые другие категории (как новые, так и встречающиеся в литературе) описываются как подкатегории категории GFT.

Пусть $L, K \in Ob(Lat)$ и пусть $\varphi : L \to L$, $\psi : K \to K$ – морфизмы категории Lat . Обозначим через $GFT(L,K)$ полную подкатегорию категории GFT , объекты которой имеют вид $(X, L, \mathcal{T}, K)$ для данных L и K. Далее, пусть $GFT(L,\varphi,K,\psi)$ – подкатегория категории $GFT(L,K)$, имеющая те же объекты, что и $GFT(L,K)$,и морфизмы вида (f, φ^n, ψ^m) при данных φ , ψ и некоторых $n, m \in N$ (здесь $\varphi^n = \underbrace{\varphi \circ \ldots \circ \varphi}_{n}$; $\psi^m = \underbrace{\psi \circ \ldots \circ \psi}_{m}$). В случае, если $L = K$ и $\varphi = \psi$ вместо $GFT(L,K)$ и $GFT(L,\varphi,K,\psi)$ используем обозначения $GFT(L)$ и $GFT(L,\varphi)$ соответственно. (Эти категории, очевидно, являются подкатегориями рассмотренной в (4.I.7) категории GFT_0 .) Естественный смысл придается обозначениям $GFT^*(L,\varphi)$ и т.п.

(4.2.I) Категория $FT(L)$, определенная в (I.I.3), может быть охарактеризована как подкатегория $GFT(L, \mathcal{E}_L)$ категории GFT . В частности, категория $FT := FT(I)$ может быть отождествлена с $GFT(I, \mathcal{E}_I)$.

(4.2.2) Категория $LFT(L)$ ламинированных L-нечетких пространств (I.I.4) может быть охарактеризована как полная подкатегория $GLFT(L, \mathcal{E}_L)$ категории $GFT(L, \mathcal{E}_L)$, объекты которой ламинированы.

(4.2.3) Категория $GCFT$ определяется как полная подкатегория категории GFT (или, что эквивалентно, как полная подкатегория категории GFT_0), объекты которой являются чанговскими L-нечеткими пространствами для всевозможных $L \in Ob(Lat)$. При этом для объектов категории $GCFT$ может использоваться запись вида $(X, L, \mathcal{T}, 2)$ либо эквивалентная ей запись $(X, L, \mathcal{T})$ (4.I.7), а для морфизмов этой категории – запись $(f, \varphi, \mathcal{E}_2)$ либо эквивалентная ей запись (f, φ) (4.I.7). Легко заметить, что категория $GCFT^* := GFT^* \cap GCFT$

может быть отождествлена с введенной Родабаухом категорией $\mathfrak{Fuzz}$ [90], см. также [93].

(4.2.4) Категория $CFT(L)$ чанговских L-нечетких пространств (при фиксированной L) (I.0.2) может быть охарактеризована как полная подкатегория категории $GFT(L, \mathcal{E}_L)$, объекты которой являются чанговскими, либо как полная подкатегория $GCFT(L, \mathcal{E}_L)$ категории $GCFT$.

(4.2.5) Категория $GLFT$ определяется как полная подкатегория категории GFT, объекты которой ламинированы. Очевидный смысл придается обозначениям $GLFT^*$, $GLCFT$, $GLCFT^*$ и т.п.

(4.2.6) Пусть $GHFT$ – полная подкатегория категории GFT, объекты которой имеют вид $(X, L, \mathcal{T}, K)$, где $|X| = 1$. Ясно, что в этом случае объекты мы можем рассматривать как тройки $(L, \mathcal{T}, K)$, где $L, K \in Ob(\mathcal{L}at)$, а $\mathcal{T}: L \to K$ – отображение, удовлетворяющее условиям (I) $\mathcal{T}(0) = \mathcal{T}(1) = 1$; (2) $\mathcal{T}(U \wedge V) \geq \mathcal{T}(U) \wedge \mathcal{T}(V)$ для всех $U, V \in L$ и (3) $\mathcal{T}(\bigvee_{i \in \mathcal{I}} U_i) \geq \bigwedge_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{T}(U_i)$ для каждого семейства $\{U_i : i \in \mathcal{I}\} \subset L$. Естественный смысл придается обозначениям $GHFT^*$, $GHFT_0$ и $GHFT_0^*$. Морфизмы из $(L_1, \mathcal{T}_1)$ в $(L_2, \mathcal{T}_2)$ имеют при этом вид пары отображений $\varphi: L_2 \to L_1$ и $\psi: K_2 \to K_1$ таких, что $\mathcal{T}_1(\varphi(V)) \geq \psi \mathcal{T}_2(V)$ для каждого $V \in L_2$.

(4.2.7) Пусть $GHCFT$ – полная подкатегория категории $GHFT$ (или, что эквивалентно, категории $GHFT_0$), объектами которой являются чанговские пространства. Другими словами, $GHCFT$ может быть описана как категория, объектами которой являются пары (L, τ), где L – нечеткая решетка, а $\tau \subset L$, причем (I) $0, 1 \in \tau$; (2) если $U, V \in \tau$, то $U \wedge V \in \tau$ и (3) если $\{U_i : i \in \mathcal{I}\} \subset \tau$, то и $\bigvee_i U_i \in \tau$, а в качестве морфизмов из (L_1, τ_1) в (L_2, τ_2) берутся отображения $\varphi: L_2 \to L_1$ такие, что $\varphi(V) \in \tau_1$ для каждого $V \in \tau_2$.

Категория $GHCFT^*$, определяемая (в духе (4.I.4)) по аналогии с $GHCFT$, по существу, является категорией хаттоновских нечетких пространств [48], [49]. В дальнейшем мы к этой категории будем неоднократно обращаться и использовать для нее также обозначение $\mathcal{H}$.

(4.2.8) Пусть <u>$GOFT^*$</u> – полная подкатегория категории GFT^*, объектами которой служат L-нечеткие пространства вида $(X, L, \mathcal{T}, K)$, где L, K – нечеткие решетки, инволюции в которых являются ортодополнением (инволюция $^c : L \to L$ называется ортодополнением, если она удовлетворяет условиям $U^c \wedge U = 0$ и $U^c \vee U = 1$ для каждого $U \in L$).

Очевидный смысл придается обозначениям $GOCFT^*$, $GOLFT^*$, $GOCFT_o^*$ и.т.п.

(4.2.9) Рассмотренные выше категории позволяют различными способами охарактеризовать категорию <u>Top</u>. Например, Top может быть описана как категория <u>$CFT(2)$</u> или как категория <u>$GCFT(2)$</u> или как категория <u>$GFT(2, \mathcal{E}_2)$</u>. Эта своего рода инвариантность категории <u>Top</u> в категориях нечеткой топологии объясняется тем, что единственным эндоморфизмом решетки $2 = \{0, 1\}$ в категории Lat является тождественное отображение. Если же $|End(L)| \geqslant 2$, то категории $GFT(L)$ и $GFT(L, \mathcal{E}_L)$ заведомо различны. В случае, когда $|L| \geqslant 3$, категории $GCFT(L)$ и $GFT(L)$ также различны.

(4.2.10) <u>Категория локалей Loc</u>. Пусть Loc – категория локалей (см., например, [50], [51]). Нетрудно показать, что Loc может быть охарактеризована как полная подкатегория категории $\mathcal{H}$, объекты которой имеют вид (L, τ), где $\tau = L$.

(Сходным образом может быть охарактеризована и категория алгебр Гейтинга [41], см.также [36]).

(4.2.11) <u>Предложение</u>. (а) Категория $GCFT$ эпирефлексивна и эпикорефлексивна в категории GFT. (б) Категория $GCLFT(L)$ эпирефлексивна и эпикорефлексивна в категории $GCFT(L)$. (в) Категория $GHCFT$ эпирефлексивна и эпикорефлексивна в категории $GHFT$.

<u>Доказательство</u>. (а) Пусть $(X, L, \mathcal{T}, K) \in Ob(GFT)$. Определим чанговские L-нечеткие топологии $\mathcal{T}_1 \subset L^X$ и $\mathcal{T}_0 \subset L^X$ равенствами $\mathcal{T}_1 := \{U \in L^X : \mathcal{T}(U) = 1\}$ и $\mathcal{T}_0 := \{U \in L^X : \exists \{V_i : i \in J\}, \mathcal{T}(V_i) > 0, U = \bigvee V_i\}$.

Тогда, как нетрудно заметить, отображения $(\mathcal{E}_X, \mathcal{E}_L, i_2): (X, L, \mathcal{T}, K) \to$ $\to (X, L, \mathcal{T}_1, 2)$ $(\in Ob(GCFT))$, где $i_2 : 2 \to K$ – отображение включения, и $(\mathcal{E}_X, \mathcal{E}_L, g_K): (X, L, \mathcal{T}_0, 2) \to (X, L, \mathcal{T}, K)$ $((X, L, \mathcal{T}_0, 2) \in Ob(GCFT))$, где $g_K : K \to 2$ определяется равенствами $g_K(1) = 1$ и $g_K(\alpha) = 0$ при $\alpha \neq 1$, являются соответственно эпирефлексией (из GFT в GCFT) и эпикорефлексией (из GCFT в GFT).

Пункты (б) и (в) могут быть доказаны аналогично.

Легко убедиться также в справедливости следующего утверждения:

(4.2.I2) Предложение. (а) Категория GLFT эпикорефлексивна в категории GFT ; (б) категория GLFT(L) эпикорефлексивна в GFT(L); (в) категория GCLFT эпикорефлексивна в GCFT.

(Как следует из доказываемого ниже утверждения (4.3.5), отношение рефлексивности между категориями типа рассмотренных в (4.2.I2) не имеет места.)

§ 3. ОПЕРАЦИИ В GFT

(4.3.I) Инициальные структуры. Пусть X_1, X_2 – множества, $L_1, L_2, K_1, K_2 \in Ob(Lat)$, $\mathcal{T}_2 : L_2^{X_2} \to K_2$ – (L_2, K_2)-нечеткая топология на X_2 и $(f, \varphi, \psi) : (X_1, L_1, K_1) \to (X_2, L_2, K_2)$ – морфизм в $Set \times Lat^{op} \times Lat^{op}$. Слабейшую (L_1, K_1)-нечеткую топологию $\mathcal{T}_1$ на множестве X_1, относительно которой $(f, \varphi, \psi) : (X_1, L_1, \mathcal{T}_1, K_1) \to (X_2, L_2, \mathcal{T}_2, K_2)$ является непрерывным (т.е. морфизмом в GFT), назовем инициальной для (f, φ, ψ). Инициальную (L, K)-нечеткую топологию будем обозначать $(f, \varphi, \psi)^{-1}(\mathcal{T}_2)$.

Нетрудно заметить, что инициальная для (f, φ, ψ) топология может быть задана формулой $\mathcal{T}_1(U) := \bigvee\{\mathcal{T}_1^{\alpha}(U) \wedge \psi^{\alpha} : \alpha \in K_2\}$, где $U \in L_1^{X_1}$, $\mathcal{T}_1^{\alpha} := \{\varphi \circ V \circ f : V \in L_2^{X_2}, \mathcal{T}_2(V) \geq \alpha\}$ (ср. (I.2.I)).

Пусть теперь $\{(X_\gamma, L_\gamma, \mathcal{T}_\gamma, K_\gamma) : \gamma \in \Gamma\}$ – семейство нечетких пространств и $(f_\gamma, \varphi_\gamma, \psi_\gamma) : (X, L, K) \to (X_\gamma, L_\gamma, K_\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$ – семейство морфизмов в $Set \times Lat^{op} \times Lat^{op}$. Слабейшую (L, K)-нечеткую топологию на X, относительно которой все $(f_\gamma, \varphi_\gamma, \psi_\gamma) : (X, L, \mathcal{T}, K) \to (X_\gamma, L_\gamma, \mathcal{T}_\gamma, K_\gamma)$ непрерывны, назовем инициальной для этого семейства.

Легко заметить, что инициальная для семейства $(f_\gamma, \varphi_\gamma, \psi_\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$ (L, K)-нечеткая топология может быть определена равенством $\mathcal{T} = \sup_\gamma (f_\gamma, \varphi_\gamma, \psi_\gamma)^{-1}(\mathcal{T}_\gamma)$ (операция перехода к супремуму определяется в полной аналогии с (I.2.7)).

Для определения произведения в GFT нам потребуется предварительно ввести операцию произведения в Lat^{op}. При этом мы следуем работе Б.Хаттона [48].

(4.3.2) Произведение в Lat^{op} [48]. Пусть $\{L_\gamma : \gamma \in \Gamma\} \subset Ob(Lat)$. Произведение этого семейства в Lat^{op} определим как решетку $L = \otimes L_\gamma$, элементами которой служат подмножества $a \subset \prod\{L_\gamma^+ : \gamma \in \Gamma\}$ ($\prod$ – произведение в Set) такие, что I) если $t \in a$ и $s \leq t$, то $s \in a$ (для $s, t \in \prod L_\gamma^+$ неравенство $s \leq t$ означает, что $s_\gamma \leq t_\gamma$ в L_γ для каждого $\gamma \in \Gamma$)

и 2) если $b_\gamma \subset L_\gamma^+$ и $b = \prod_\gamma b_\gamma \subset a$, то и $\beta := (\beta_\gamma) \in a$, где $\beta_\gamma = \sup b_\gamma$. Отношением $a \leqslant b \Leftrightarrow a \subset b$, где $a, b \in L$, множество L превращается в полную бесконечно дистрибутивную ограниченную решетку, т.е. $L \in Db(Lat)$. Если при этом все L_γ являются нечеткими решетками, т.е. дополнительно снабжены обращающими порядок инволюциями $^{c_\gamma}: L_\gamma \to L_\gamma$, то, положив $b^c := \{x : (\forall y \in b)(\exists \gamma \in \Gamma)(x_\gamma \not= y_\gamma^c)\}$, превращаем L в нечеткую решетку.

Пример. Если для всех $\gamma \in \Gamma$ $L_\gamma = 2^{Z_\gamma}$, где Z_γ – некоторое множество, то, как нетрудно заметить, $\otimes L_\gamma = 2^{\prod Z_\gamma}$.

Равенством $\pi_{\gamma_0}(t_{\gamma_0}) = \{s \in \prod L_\gamma^+ : s_{\gamma_0} \leqslant t_{\gamma_0}\}$ определяется отображение $\pi_{\gamma_0} : L_{\gamma_0} \to L$. Можно показать, что определенная таким образом операция $\otimes L_\gamma$ с проекциями $\pi_\gamma : L_\gamma \to L$ и является произведением в Lat^{op}.

(4.3.3) Произведение в GFT. Рассмотрим семейство $\{(X_\gamma, L_\gamma, \mathcal{T}_\gamma, K_\gamma) : \gamma \in \Gamma\}$ нечетких пространств и положим $X := \prod_\gamma X_\gamma$, $L := \otimes L_\gamma$, $K := \otimes K_\gamma$. Пусть $\mathcal{T} : L^X \to K$ – (L, K)-нечеткая топология на X, инициальная для семейства $(p_\gamma, \pi_\gamma, \rho_\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$, где $p_\gamma : \prod_\gamma X_\gamma \to X_\gamma$ – отображения проектирования в Set, а $\pi_\gamma : L_\gamma \to L$ и $\rho_\gamma : K_\gamma \to K$ – отображения проектирования в Lat^{op}, определенные как и в (4.3.2). Непосредственной проверкой устанавливаем, что нечеткое пространство $(X, L, \mathcal{T}, K)$ является произведением семейства нечетких пространств $(X_\gamma, L_\gamma, \mathcal{T}_\gamma, K_\gamma)$ в GFT.

(4.3.4) Замечание. Важно подчеркнуть, что каждое утверждение о произведении в GFT содержит совершенно иную информацию, чем аналогичное утверждение о произведении в $FT(L)$ или в любой другой категории, рассматриваемой в Главе I. Одной из причин этого является тот факт, что при операции произведения в GFT происходит изменение решетки (это представляется естественным, если вспомнить, что для GFT базовой является категория $Set \times Lat^{op} \times Lat^{op}$, а не Set, как, например, в случае $FT(L)$)). Более того, как установил Эклунд [22], решетка $\otimes L_\gamma$, где $L_\gamma = L$ для всех $\gamma \in \Gamma$, $|\Gamma| \geqslant 2$, изоморфна решетке L тогда и только тогда, когда $L=2$. Отсюда, в частности, следует, что для обычных топологических пространств обычное произведение совпадает с произведением в GFT (а значит, и с произведением в любой ее подкатегории) - одно из проявлений "инвариантности" общей топологии в нечеткой топологии (см. также (4.3.5)).

(4.3.5) <u>О произведении в категориях нечеткой топологии</u>. Поскольку многие из категорий нечеткой топологии, рассматриваемые как подкатегории в GFT, не являются полными, для некоторой интересующей нас подкатегории $\mathscr{C}$ категории GFT может иметь место одна из следующих ситуаций: I) $\mathscr{C}$ замкнута в GFT относительно операции произведения; 2) в $\mathscr{C}$ определено произведение, но это произведение отлично от произведения в категории GFT (точнее: не индуцируется произведением из категории GFT); 3) в $\mathscr{C}$ отсутствует операция произведения. Рассмотрим некоторые из определенных в (4.I.2) категорий с этой точки зрения.

I. Категория $GCFT$ замкнута в GFT относительно произведения. (Это следует из того факта, что $\bigotimes\limits_{\gamma} 2_\gamma = 2$ (4.3.4)).

II. В категории $GLFT$ определено произведение, но это произведение отлично от произведения в категории GFT.

В справедливости первого утверждения легко убедиться по аналогии с тем, как было установлено наличие произведения в GFT. Чтобы убедиться в справедливости второго утверждения, рассмотрим

<u>Пример</u>. Пусть $\{(X_\gamma, L_\gamma, \mathcal{T}_\gamma, 2_\gamma) : \gamma\in\Gamma\}$ - семейство нечетких пространств, $|X_\gamma|\geqslant 1$, $|\Gamma|\geqslant\aleph_0$, $L_\gamma=\{0,\frac{1}{2},1\}$ и $\mathcal{T}_\gamma=\{0,\frac{1}{2},1\}$ для всех $\gamma\in\Gamma$. Ясно, что все эти пространства являются ламинированными, но при этом произведение $(\prod X_\gamma, \otimes L_\gamma, \mathcal{T}, 2)$ не ламинировано: постоянное отображение $\xi : \prod X_\gamma \to \otimes L_\gamma$, определенное равенством $\xi(x)=\{(1/2)_\gamma : \gamma\in\Gamma\}\in\otimes L_\gamma$, $x\in\prod X_\gamma$, не может быть получено как конечное пересечение элементов стандартной предбазы на $\prod X_\gamma$.

В категории $GLCFT$ также определено произведение; это произведение индуцируется произведением из $GLFT$, но не совпадает с произведением в $GCFT$.

III. Нетрудно заметить, что категории $GHFT$ и $GHCFT$ замкнуты в GFT относительно произведений.

IУ. В категориях $GFT(L)$, $GCFT(L)$ (и в других категориях такого типа) произведение отсутствует.

У. В категориях типа $GFT(L,\varphi,K,\psi)$ определено произведение, но это произведение отлично от произведения в категории GFT.

УI. Произведение в Top индуцируется произведением из GFT.

(4.3.6) <u>Переход к подпространству: случай четкого множества</u>. Пусть $(X,L,\mathcal{T},K)$ - нечеткое топологическое пространство, $X'\subset X$, $L',K'\in \in Ob(Lat)$, причем $L'\supset L$, $K'\supset K$ (последние включения понимаются, естественно, в смысле категории Lat). Пусть $i_{X'}:X'\to X$, $i_L:L\to L'$ и $i_K:K\to K'$ - отображения включения и $\mathcal{T}'$ - (L',K')-нечеткая топология на X', инициальная для $(i_{X'},i_L,i_K):(X',L',K')\to(X,L,\mathcal{T},K)$. Тогда нечеткое пространство $(X',L',\mathcal{T}',K')$ называется подпространством нечеткого пространства $(X,L,\mathcal{T},K)$ (на основе (X',L',K')).

Нетрудно заметить, что $\mathcal{T}':L'^{X'}\to K'$ может быть определено равенством $\mathcal{T}'(U)=\bigvee\{\mathcal{T}(V_U):V_U|_{X'}=U,\ V_U\in L^X\}$, где $U\in L'^{X'}$.

Основной интерес для нас представляет случай $L=L'$, $K=K'$; в этой ситуации говорим о подпространстве $(X',L,\mathcal{T}',K)$ нечеткого пространства $(X,L,\mathcal{T},K)$ (на основе подмножества X').

(4.3.7) <u>Переход к подпространству: случай нечеткого множества</u>. Пусть $(X,L,\mathcal{T},K)$ - нечеткое топологическое пространство и $M\in L^X$. Рассмотрим нечеткое пространство $(*,L^X,\mathcal{T},K)$, парагомеоморфное пространству $(X,L,\mathcal{T},K)$ (4.I.5), и положим $\mathcal{L}_M:=\{U\in L^X : U\leq M\}$. Далее, пусть $\mathcal{L}$ и K' - объекты категории Lat такие, что $\mathcal{L}_M\subset\mathcal{L}$, $K\subset \subset K'$, $i_K:K\to K'$ - включение, а $i_M:L^X\to\mathcal{L}$ - отображение, определяемое равенством $i_M(U)=U\wedge M$ для каждого $U\in L^X$. Пусть $\mathcal{T}'$ - $(\mathcal{L},K')$-

нечеткая топология на $*$, инициальная для $(\mathscr{E}_*, i_M, i_K) : (*, \mathscr{L}, K') \to (*, L^X, \mathscr{T}, K)$. Нечеткое пространство $(*, \mathscr{L}, \mathscr{T}, K)$ называется подпространством нечеткого пространства $(X, L, \mathscr{T}, K)$ (на основе $(M, \mathscr{L}, K')$). Подчеркнем, что операцию перехода к подпространству в случае нечеткого множества, очевидно, имеет смысл рассматривать с точностью до отношения парагомеоморфности.

Нетрудно заметить, что нечеткая топология $\mathscr{T}' : \mathscr{L} \to K'$ может быть определена равенством $\mathscr{T}'(U) = \vee\{\mathscr{T}(V_U) : V_U \wedge M = U,\ V_U \in L^X\}$ при $U \in \mathscr{L}_M$ и $\mathscr{T}'(U) = 0$ при $U \in \mathscr{L} \setminus \mathscr{L}_M$.

Основной интерес для нас представляет случай $\mathscr{L} = \mathscr{L}_M$ и $K' = K$; в этой ситуации говорим о подпространстве $(*, \mathscr{L}_M, \mathscr{T}', K)$ (или просто $(\mathscr{L}_M, \mathscr{T}', K)$) нечеткого пространства $(X, L, \mathscr{T}, K)$ (на основе нечеткого подмножества M).

(4.3.8) Финальные структуры. Пусть X_1, X_2 – множества, $L_1, L_2, K_1, K_2 \in Ob(Lat)$, $\mathscr{T}_1 : L_1^{X_1} \to K_1$ – (L_1, K_1)-нечеткая топология на X_1 и $(f, \varphi, \psi) : (X_1, L_1, K_1) \to (X_2, L_2, K_2)$ – морфизм в $Set \times Lat^{op} \times Lat^{op}$. Сильнейшую (L_2, K_2)-нечеткую топологию $\mathscr{T}_2$ на множестве X_2, относительно которой $(f, \varphi, \psi) : (X_1, L_1, \mathscr{T}_1, K_1) \to (X_2, L_2, \mathscr{T}_2, K_2)$ является непрерывным (т.е. морфизмом в GFT) назовем финальной для (f, φ, ψ). Финальную (L_2, K_2)-нечеткую топологию обозначим $(f, \varphi, \psi)(\mathscr{T}_1)$.

Нетрудно заметить, что финальная для (f, φ, ψ) топология может быть задана формулой $\mathscr{T}_2(V) = \vee\{\mathscr{T}_2^\alpha(V) \wedge \sup \psi^{-1}(\alpha) : \alpha \in K_1^+\}$, где $\mathscr{T}_2^\alpha := \{V : \mathscr{T}_1(\varphi \circ V \circ f) \geqslant \alpha\}$. (Отметим в этой связи, что, очевидно, $\sup \psi^{-1}(\alpha) \in \psi^{-1}(\alpha)$).

Пусть теперь $(X_\gamma, L_\gamma, \mathscr{T}_\gamma, K_\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$ – семейство нечетких пространств и $(f_\gamma, \varphi_\gamma, \psi_\gamma) : (X_\gamma, L_\gamma, K_\gamma) \to (X, L, K)$, $\gamma \in \Gamma$ – семейство морфизмов в $Set \times Lat^{op} \times Lat^{op}$. Сильнейшую (L, K)-нечеткую топологию $\mathscr{T}$ на X, относительно которой все $(f_\gamma, \varphi_\gamma, \psi_\gamma) : (X_\gamma, L_\gamma, \mathscr{T}_\gamma, K_\gamma) \to (X, L, \mathscr{T}, K)$ непрерывны, назовем финальной для этого семейства. Легко заметить, что финальная для семейства $(f_\gamma, \varphi_\gamma, \psi_\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$, (L, K)-нечеткая топология может быть определена равенством $\mathcal{T}=\inf\limits_{\gamma}(f_\gamma,\varphi_\gamma,\psi_\gamma)(\mathcal{T}_\gamma)$.

(4.3.9) Копроизведение в $\mathbf{GFT}$. Для определения операции прямой суммы (=копроизведения) в $\mathbf{GFT}$ рассмотрим семейство $(X_\gamma,L_\gamma,\mathcal{T}_\gamma,K_\gamma)$, $\gamma\in\Gamma$, нечетких пространств и положим $X:=\bigoplus\limits_{\gamma}X_\gamma$ (прямая сумма множеств X_γ в $\mathbf{Set}$) и $L=\prod\limits_{\gamma}L_\gamma$, $K=\prod\limits_{\gamma}K_\gamma$ – произведение в $\mathbf{Lat}$ (=копроизведение в $\mathbf{Lat}^{op}$). Для каждого $\gamma\in\Gamma$ пусть $i_\gamma:X_\gamma\to X$ – отображение естественного включения, а $p_\gamma:L\to L_\gamma$, $q_\gamma:K\to K_\gamma$ – естественные проекции. Определим (L,K)-нечеткую топологию $\mathcal{T}$ на множестве X равенством $\mathcal{T}=\inf\limits_{\gamma}(i_\gamma,p_\gamma,q_\gamma)(\mathcal{T}_\gamma)$. Нетрудно заметить, что полученное таким образом нечеткое пространство $(X,L,\mathcal{T},K)$ и является копроизведением семейства $(X_\gamma,L_\gamma,\mathcal{T}_\gamma,K_\gamma)$ в $\mathbf{GFT}$.

§ 4. ПОЛУГРУППЫ ЭНДОМОРФИЗМОВ НЕЧЕТКИХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Известна проблема определимости топологического пространства посредством полугруппы его эндоморфизмов (т.е. непрерывных отображений данного пространства в себя) (см., например, обзоры [75], [113]). Наиболее прозрачным результатом в этом направлении является, по-видимому, теорема Мальцева [76], согласно которой $T_{3,5}$-пространства X и Y, содержащие отрезок I, гомеоморфны тогда и только тогда, когда их полугруппы эндоморфизмов $C(X)$ и $C(Y)$ изоморфны. Здесь мы рассматриваем аналогичную проблему алгебраической определимости для нечетких топологических пространств. При этом для простоты мы ограничимся случаем категории $GCFT_0$ и в дальнейшем в этом параграфе термин "нечеткое топологическое пространство" всегда будет относиться к объектам $GCFT_0$. (Аналогичные результаты имеют место и для общего случая, т.е. для объектов категории GFT, однако формулировки и доказательства результатов в случае GFT значительно более громоздки.) Подчеркнем сразу, что инструмент обычных полугрупп эндоморфизмов оказывается неадекватным в этой ситуации: как показано в (4.4.9), существует много различных "хороших" нечетких топологических пространств, имеющих одинаковые полугруппы эндоморфизмов. Для того, чтобы преодолеть это затруднение, на основе полугруппы эндоморфизмов $C(X)$ мы определим "более богатую" полугруппу $P(X)$.

(4.4.I) Плоткинская полугруппа $P(X)$. Для нечеткого топологического пространства $(X,L,\tau)(\in Ob(GCFT_0))$ обозначим через $C(X,L,\tau)$ (или, просто через $C(X)$) полугруппу всех эндоморфизмов (т.е. полугруппу всех непрерывных отображений пространства (X,L,τ) в себя). Плоткинской полугруппой пространства (X,L,τ) назовем произведение

$P(X,L,\mathcal{T}) = C(X,L,\mathcal{T}) \times L^X$, наделенное операцией "$\cdot$", которая определяется равенством $(f_1, \mu_1, U_1) \cdot (f_2, \mu_2, U_2) = (f_2 \circ f_1, \mu_1 \circ \mu_2, U_2 \circ f_1)$, где $(f_1, \mu_1, U_1), (f_2, \mu_2, U_2) \in P(X,L,\mathcal{T})$. (Для элемента полугруппы $P(X,L,\mathcal{T})$ используется обозначение (f, μ, U) вместо более точного $((f,\mu),U)$, где $(f,\mu) \in C(X,L,\mathcal{T})$ и $U \in L^X$.) Термин "плоткинская полугруппа" вызван тем, что аналогичная полугруппа впервые появилась в работе Плоткина [83], см.также [84], в связи с вопросами теории алгебраических автоматов.

Заметим, что на $P(X,L,\mathcal{T})$ наряду с "$\cdot$" имеются еще две естественные алгебраические структуры: это подмножество $\mathcal{T}$ решетки L^X и отношение $\prec$ естественного частичного порядка на $P(X,L,\mathcal{T})$: $(f_1, \mu_1, U_1) \prec (f_2, \mu_2, U_2) \Leftrightarrow f_1 = f_2, \mu_1 = \mu_2$ и $U_1 \leqslant U_2$. В соответствии с этими структурами будем рассматривать следующие три вида изоморфизма. Будем говорить, что плоткинские полугруппы $P(X_1, L_1, \mathcal{T}_1)$ и $P(X_2, L_2, \mathcal{T}_2)$

I) изоморфны, если они изоморфны в категории полугрупп;

2) $\mathcal{T}$-изоморфны, если существует изоморфизм $\sigma : P(X_1, L_1, \mathcal{T}_1) \to P(X_2, L_2, \mathcal{T}_2)$ такой, что $\sigma(C(X_1) \times \mathcal{T}_1) = C(X_2) \times \mathcal{T}_2$;

3) ω-изоморфны, если существует $\mathcal{T}$-изоморфизм $\sigma : P(X_1, L_1, \mathcal{T}_1) \to P(X_2, L_2, \mathcal{T}_2)$ такой, что $(f, \mu, U_1) \prec (f, \mu, U_2)$ тогда и только тогда, когда $\sigma(f, \mu, U_1) \prec \sigma(f, \mu, U_2)$.

Заметим, что, если σ – ω-изоморфизм и $\sigma(f,\mu,U) = (f',\mu',U')$ для некоторых $(f,\mu) \in C(X_1)$, $(f',\mu') \in C(X_2)$, $U \in L_1^{X_1}$, $U' \in L_2^{X_2}$, то и $\sigma(f,\mu,V) = (f',\mu,V')$ для каждого $V \in L_1^{X_1}$ и соответствующего $V' \in L_2^{X_2}$.

Ясно, что для каждого $(f_2, \mu_2, U_2) \in P(X,L,\mathcal{T})$ и произвольного $U \in L^X$ имеет место равенство $(\mathscr{E}_X, \mathscr{E}_L, U) \cdot (f_2, \mu_2, U_2) = (f_2, \mu_2, U_2)$, а следовательно, $(\mathscr{E}_X, \mathscr{E}_L, U)$ является левой единицей в $P(X,L,\mathcal{T})$. Более того, как нетрудно показать, $\{(\mathscr{E}_X, \mathscr{E}_L, U) : U \in L^X\}$ является в точности множеством всех левых единиц полугруппы $P(X,L,\mathcal{T})$.

Предположим теперь, что рассматриваемое нечеткое пространство $(X,L,\mathcal{T})$ ламинировано, и определим отображение $1_L^\circ : L \to L$ равенствами $1_L^0(\alpha)=1$ при $\alpha\in L^+$ и $1_L^0(0)=0$. Тогда $(x,1_L^0,\alpha_x)\in P(X,L,\tau)$ для каждого $x\in X$ и каждого $\alpha\in L$. При этом $Q(X,L,\tau):=\{(x,1_L^0,\alpha_x):x\in X,\alpha\in L\}$ в точности является множеством всех правых нулей полугруппы $P(X,L,\tau)$.

Продолжая предполагать ламинированность пространства (X,L,τ), определим бинарное отношение на полугруппе $P(X)$ следующим образом: $(f_1,\mathcal{M}_1,U_1)\rho(f_2,\mathcal{M}_2,U_2)\Leftrightarrow(\forall(g,\nu,V)\in P(X))\ (f_1,\mathcal{M}_1,U_1)\cdot(g,\nu,V)=$ $=(f_2,\mathcal{M}_2,U_2)\cdot(g,\nu,V)$. Ясно, что ρ является конгруэнтностью на $P(X)$ и при этом $(f_1,\mathcal{M}_1,U_1)\rho(f_2,\mathcal{M}_2,U_2)$ тогда и только тогда, когда $(f_1,\mathcal{M}_1)=(f_2,\mathcal{M}_2)$. Нетрудно заметить также, что $Q(X)/\rho=\{K_x:x\in X\}$, где $K_x:=\{(x,1_L^0,\alpha_x):\alpha\in L\}$.

Следующие две теоремы являются основными в этом параграфе.

(4.4.2) <u>Теорема</u>. Ламинированные нечеткие пространства (X_1,L_1,τ_1) и (X_2,L_2,τ_2) квазигомеоморфны тогда и только тогда, когда их плоткинские полугруппы $P(X_1,L_1,\tau_1)$ и $P(X_2,L_2,\tau_2)$ τ-изоморфны.

<u>Доказательство</u>. Предположим, что $P_1:=P(X_1,L_1,\tau_1)$ и $P_2:=P(X_2,L_2,\tau_2)$ τ-изоморфны и пусть $\sigma:P_1\to P_2$ – соответствующий τ-изоморфизм. Поскольку $Q_1:=Q(X_1,L_1,\tau_1)$ является множеством всех правых нулей полугруппы P_1, то его образ $\sigma(Q_1)$ является множеством всех правых нулей полугруппы P_2, а следовательно, $\sigma(Q_1)=Q_2$, где $Q_2:=Q(X_2,L_2,\tau_2)$. Поскольку ρ – конгруэнтность на P_1, отсюда следует, что $(f_1,\mathcal{M}_1,U_1)\rho(f_2,\mathcal{M}_2,U_2)$ в том и только в том случае, когда $\sigma(f_1,\mathcal{M}_1,U_1)\rho\,\sigma(f_2,\mathcal{M}_2,U_2)$. Поэтому, полагая $\bar\sigma K_{x_1}=K_{x_2}$ $(x_1\in X_1,\ x_2\in X_2)$ тогда и только тогда, когда $\sigma(K_{x_1})=K_{x_2}$, приходим к биекции $\bar\sigma:Q_1/\rho\to Q_2/\rho$. Положив $\varkappa_i(x_i)=K_{x_i}$ $(x_i\in X_i,\ i=1,2)$, приходим к биективному отображению $\varkappa_i:X_i\to Q_i/\rho$; тогда и отображение $\varphi=\varkappa_2^{-1}\circ\bar\sigma\circ\varkappa_1:X_1\to X_2$ биективно. В дальнейшем будем писать $\bar x:=\varphi(x)$.

Из определения φ следует, что $\sigma(K_x)=K_{\bar x}$ для каждого $x\in X_1$. При этом, поскольку $(x_0,1_{L_1}^0,U)\rho(x_0,1_{L_1}^0,\alpha)$ и ρ – конгруэнция, отсюда вытекает, что $\sigma(x_0,1_{L_1}^0,U)\rho\,\sigma(x_0,1_{L_1}^0,\alpha)$, а следовательно, $\sigma(x_0,1_{L_1}^0,U)\,\rho\,(\bar x_0,1_{L_2}^0,\alpha')$ и, значит, $\sigma(x_0,1_{L_1}^0,U)=(\bar x_0,1_{L_2}^0,V)$. Это наблюдение позволяет, зафиксировав точку $x_0\in X$, определить биективное отображение $\sigma^{x_0}: L_2^{X_2}\to L_1^{X_1}$ следующим образом:

$$(\forall V\in L_2^{X_2})\ (\sigma^{x_0}(V)=U\Leftrightarrow \sigma(x_0, 1^0_{L_1}, U)=(\bar{x}_0, 1^0_{L_2}, V)).$$

Поскольку $Q(X)$ – множество правых нулей, отсюда следует, что ограничение σ^{x_0} на подмножество $L_2\subset L_2^{X_2}$ определяется условием:

$$(\forall \beta\in L_2)(\mu(\beta)=\alpha\Leftrightarrow \sigma(x_0, 1^0_{L_1},\alpha)=(x_0, 1^0_{L_2},\beta)).$$

Поскольку $\varphi: X_1\to X_2$ и $\mu: L_2\to L_1$ биективны, для завершения доказательства достаточно показать, что $\mu\circ V\circ\varphi\in\mathcal{T}_1$ тогда и только тогда, когда $V\in\mathcal{T}_2$. (Это и будет означать, что $(\varphi,\mu):(X_1,L_1,\mathcal{T}_1)\to(X_2, L_2,\mathcal{T}_2)$ является квазигомеоморфизмом.)

Зафиксируем $x\in X$, $V\in\mathcal{T}_2$. Поскольку $\sigma: P_1\to P_2$ – изоморфизм, то $\sigma(K_x\cdot(x_0, 1^0_{L_1},\mu\circ V\circ\varphi))=\sigma(x_0, 1^0_{L_1},\mu\circ V\circ\varphi(x)) - (\bar{x}_0, 1^0_{L_2}, V(\bar{x}))$.

С другой стороны, $\sigma(K_x\cdot(x_0, 1^0_{L_1},\mu\circ V\circ\varphi))=\sigma(K_x)\cdot\sigma(x_0, 1^0_{L_1},\mu\circ V\circ\varphi)=$
$=K_{\bar{x}}\cdot(\bar{x}_0, 1^0_{L_2},(\sigma^{x_0})^{-1}(\mu\circ V\circ\varphi))=(\bar{x}_0, 1^0_{L_1},(\sigma^{x_0})^{-1}(\mu\circ V\circ\varphi)(x))$.

Сравнивая оба полученных выражения, заключаем, что $V=(\sigma^{x_0})^{-1}(\mu\circ V\circ\varphi)$. Поскольку $\sigma: P_1 - P_2$ – $\mathcal{T}$-изоморфизм, то σ^{x_0} отображает $\mathcal{T}_1$ на $\mathcal{T}_2$, а следовательно, $V\in\mathcal{T}_2$ тогда и только тогда, когда $\mu\circ V\circ\varphi\in\mathcal{T}_1$.

Предположим теперь, что $(X_1,L_1,\mathcal{T}_1)$ и $(X_2,L_2,\mathcal{T}_2)$ квазигомеоморфны, и пусть $(\varphi,\mu):(X_1,L_1,\mathcal{T}_1)\to(X_2,L_2,\mathcal{T}_2)$ – соответствующий квазигомеоморфизм. Определим $\mathcal{T}$-изоморфизм соответствующих плоткинских полугрупп $\sigma: P(X_1, L_1,\mathcal{T}_1)\to P(X_2,L_2,\mathcal{T}_2)$ следующим образом.

Для каждого $(f,\lambda)\in C(X_1,L_1,\mathcal{T}_1)$ положим $f^\varphi=\varphi\circ f\circ\varphi^{-1}$ и $\lambda^\mu=\mu^{-1}\circ\lambda\circ\mu$ и покажем, что $(f,\lambda)^\nu:=(f^\varphi,\lambda^\mu)\in C(X_2,L_2,\mathcal{T}_2)$. Зафиксируем $V\in\mathcal{T}_2$; тогда, поскольку (φ,μ) квазигомеоморфизм, $\mu\circ V\circ\varphi=:U\in\mathcal{T}_1$, а следовательно, $\lambda^\mu\circ V\circ f^\varphi=\mu^{-1}\circ\lambda\circ\mu\circ\mu^{-1}\circ U\circ\varphi^{-1}\circ\varphi\circ f\circ\varphi^{-1}=\mu^{-1}\circ(\lambda\circ U\circ f)\circ\varphi^{-1}$.

Отсюда легко заключаем, что $\lambda^\mu\circ V\circ f^\varphi$. Таким образом, определено отображение $\nu: C(X_1,L_1,\mathcal{T}_1)\to C(X_2,L_2,\mathcal{T}_2)$. Ясно, что ν инъективно и при этом $((f_1,\lambda_1)\cdot(f_2,\lambda_2))^\nu=((f_2\circ f_1)^\varphi,(\lambda_1\circ\lambda_2)^\mu)=(f_2^\varphi\circ f_1^\varphi, \lambda_1^\mu\circ\lambda_2^\mu)=(f_1^\varphi,\lambda_1^\mu)\cdot(f_2^\varphi,\lambda_2^\mu)=(f_1,\lambda_1)^\nu\cdot(f_2,\lambda_2)^\nu$ для всех $(f_1,\lambda_1),(f_2,\lambda_2)\in C(X_1,L_1,\mathcal{T}_1)$, а следовательно, ν является гомеоморфизмом.

Полагая $(g,\xi)^{\nu'}=(g^{\varphi^{-1}},\xi^{\mu^{-1}})$ для каждого $(g,\xi)\in C(X_2,L_2,\mathcal{T}_2)$, где $g^{\varphi^{-1}}=\varphi^{-1}\circ g\circ\varphi$, $\xi^{\mu^{-1}}=\mu\circ\xi\circ\mu^{-1}$, приходим к отображению $\nu':C(X_2)\to C(X_1)$. Нетрудно заметить, что ν' является обратным к ν, а следовательно, ν – изоморфизм.

Для каждого $U\in L_1^{X_1}$ пусть $U^{\chi}=\mu^{-1}\circ U\circ\varphi^{-1}$. Очевидно, что получаемое таким образом отображение $\chi:L_1^{X_1}\to L_2^{X_2}$ биективно и при этом $U\in\mathcal{T}_1$ тогда и только тогда, когда $U^{\chi}\in\mathcal{T}_2$.

Определим теперь отображение $\sigma:P(X_1,L_1,\mathcal{T}_1)\to P(X_2,L_2,\mathcal{T}_2)$, полагая $(f,\lambda,U)^{\sigma}=((f,\lambda)^{\nu},U^{\chi})$ для каждого $(f,\lambda,U)\in P(X_1,L_1,\mathcal{T}_1)$. Поскольку $((f_1,\lambda_1,U_1)\cdot(f_2,\lambda_2,U_2))^{\sigma}=(f_2\circ f_1,\lambda_1\circ\lambda_2,U_2\circ f_1)^{\sigma}=((f_2\circ f_1)^{\varphi},(\lambda_1\circ\lambda_2)^{\mu},(U_2\circ f_1)^{\chi})=(\varphi\circ f_2\circ f_1\circ\varphi^{-1},\mu^{-1}\circ\lambda_1\circ\lambda_2\circ\mu,\mu^{-1}\circ U_2\circ f_1\circ\varphi^{-1})=((\varphi\circ f_2\circ\varphi^{-1})\circ(\varphi\circ f_1\circ\varphi^{-1}),(\mu^{-1}\circ\lambda_1\circ\mu)\circ(\mu^{-1}\circ\lambda_2\circ\mu),(\mu^{-1}\circ U_2\circ\varphi^{-1})\circ(\varphi\circ f_1\circ\varphi^{-1}))=(f_2^{\varphi}\circ f_1^{\varphi},\lambda_1^{\mu}\circ\lambda_2^{\mu},U_2^{\chi}\circ f_1^{\varphi})=(f_1^{\varphi},\lambda_1^{\mu},U_1^{\chi})\cdot(f_2^{\varphi},\lambda_2^{\mu},U_2^{\chi})=(f_1,\lambda_1,U_1)^{\sigma}\cdot(f_2,\lambda_2,U_2)^{\sigma}$ для всех $(f_i,\lambda_i,U_i)\in P(X_1,L_1,\mathcal{T}_1)$, $i=1,2$, заключаем, что σ является гомоморфизмом. Для завершения доказательства осталось заметить, что отображение $\sigma':P(X_1,L_1,\mathcal{T}_1)\to P(X_2,L_2,\mathcal{T}_2)$, определяемое равенством $((g,\xi),V)^{\sigma'}=((g,\xi)^{\nu^{-1}},V^{\chi^{-1}})$, где $(g,\xi,V)\in P(X_2,L_2,\mathcal{T}_2)$, является обратным для σ, а следовательно, σ – изоморфизм.

(4.4.3) <u>Теорема</u>. Ламинированные нечеткие пространства $(X_1,L_1,\mathcal{T}_1)$ и $(X_2,L_2,\mathcal{T}_2)$ гомеоморфны тогда и только тогда, когда их плоткинские полугруппы $P(X_1,L_1,\mathcal{T}_1)$ и $P(X_2,L_2,\mathcal{T}_2)$ ω-изоморфны.

Эта теорема может быть доказана аналогично предыдущей. Необходимо только заметить следующие два момента.

Если $\sigma:P(X_1)\to P(X_2)$ – ω-изоморфизм, то отображение $\mu:L_2\to L_1$, построенное в первой части доказательства, равно как и обратное к нему отображение $\mu^{-1}:L_1\to L_2$, изотонны. Но это означает, что μ является структурным изоморфизмом [II], а следовательно, $(\varphi,\mu):(X_1,L_1,\mathcal{T}_1)\to(X_2,L_2,\mathcal{T}_2)$ является гомеоморфизмом.

Приступая к доказательству обратного утверждения, рассмотрим гомеоморфизм $(\varphi,\mu):(X_1,L_1,\mathcal{T}_1)\to(X_2,L_2,\mathcal{T}_2)$. Тогда, если $U,V\in L_1^{X_1}$ и

$U \leqslant V$, то $U^{\chi} \leqslant V^{\chi}$, а следовательно, отображение $\chi : L_1^{X_1} \to L_2^{X_2}$ является изотонным. Но тогда, как легко заметить, построенный τ-изоморфизм $\sigma : P(X_1) \to P(X_2)$ является ω-изоморфизмом.

Техника, развитая при доказательстве предыдущих двух теорем, может быть использована и для характеризации с точностью до гомеоморфизма объектов категории $CFT(L)$ (т.е. фактически для характеризации чанговских L-нечетких пространств (I.I.I), (I.I.3)). Предварительно нам потребуется ввести понятие жесткого изоморфизма плоткинских полугрупп.

(4.4.4) <u>Определение</u>. τ-изоморфизм $\sigma : P(X_1, L, \tau_1) \to P(X_2, L, \tau_2)$ плоткинских полугрупп L-нечетких пространств называется жестким, если $(\varepsilon_{X_1}, \varepsilon_L, \alpha)^{\sigma} = (\varepsilon_{X_2}, \varepsilon_L, \alpha)$ для каждого $\alpha \in L$.

(4.4.5) <u>Предложение</u>. Каждый жесткий изоморфизм $\sigma : P(X_1, L, \tau_1) \to$ $\to P(X_2, L, \tau_2)$ является ω-изоморфизмом.

<u>Доказательство</u>. Заметим сначала, что $(f, \mu, \alpha)^{\sigma} = (f', \mu', \alpha)$ для каждого $\alpha \in L$. Действительно, обозначив $(f, \mu, \alpha)^{\sigma} = (f', \mu', V)$, имеем $(f, \mu, \alpha)^{\sigma} = ((f, \mu, \alpha) \cdot (\varepsilon_{X_1}, \varepsilon_L, \alpha))^{\sigma} = (f', \mu', V) \cdot (\varepsilon_{X_2}, \varepsilon_L, \alpha) = (f', \mu', \alpha)$.

Вторым необходимым нам фактом является справедливость для каждого $x_0 \in X_1$ равенства $(x_0, \varepsilon_L, U)^{\sigma} = (\bar{x}_0, \mu, U')$. Для того, чтобы установить его, положим $(x_0, \varepsilon_L, U)^{\sigma} = (g, \mu, U')$ и заметим, что для каждого $x \in X$ $K_x \cdot (x_0, \varepsilon_L, U) = (x_0, 1_L^0, U(x))$. Действуя на обе части этого равенства изоморфизмом σ и принимая во внимание установленное выше равенство и определение отображения $x \to \bar{x}$, получаем $K_{\bar{x}}(g, \mu, U') = (\bar{x}_0, 1_L^0, U(x))$, а следовательно, $(g(x), 1_L^0, U'(x)) = (\bar{x}_0, 1_L^0, U(x))$. Но это и означает, что $g \equiv \bar{x}_0$.

Покажем теперь, что, если $(f, \mu, U)^{\sigma} = (f', \mu', V)$, то $U(x_0) = V(\bar{x}_0)$ для каждого $x_0 \in X_1$. В самом деле, действуя изоморфизмом σ на обе части равенства $(x_0, \varepsilon_L, W) \cdot (f, \mu, U) = (f(x_0), \mu, U(x_0))$, и воспользовавшись установленными в предыдущих абзацах фактами, приходим к равенству $(\bar{x}_0, \mu_1, W') \cdot (f', \mu', V) = (f'(\bar{x}_0), \mu_1 \circ \mu', V(\bar{x}_0)) = (f''(x_0), \mu'', U(x_0))$, т.е. $U(x_0) = V(\bar{x}_0)$.

Для завершения доказательства заметим, что, если $(f, \mathcal{M}, U_1) \prec (f, \mathcal{M}, U_2)$ и $(f, \mathcal{M}, U_1)^{\sigma} = (f', \mathcal{M}', V_1)$, то $(f, \mathcal{M}, U_2)^{\sigma} = (f', \mathcal{M}', V_2)$ и при этом $V_1(\bar{x}) = U_1(x) \leq U_2(x) = V_2(\bar{x})$ для каждого $x \in X_1$. Однако, это и означает, что σ сохраняет порядок.

(Подчеркнем, что подмножество $\{(\mathcal{E}_X, \mathcal{E}_L, \alpha) : \alpha \in L\}$ полгруппы $P(X, L, \tau)$ не является инвариантным относительно автоморфизмов.)

(4.4.6) <u>Теорема</u>. L-нечеткие пространства (X_1, τ_1) и (X_2, τ_2) гомеоморфны (в смысле (I.I.5)) тогда и только тогда, когда их плоткинские полугруппы жестко изоморфны.

Эта теорема может быть доказана по аналогии с доказательством теоремы (4.4.2), сделав в последнем следующие два изменения.

Исходя из жесткого τ-изоморфизма $\sigma : P(X_1) \to P(X_2)$, определим биекцию $\varphi = \varkappa_2^{-1} \circ \sigma \circ \varkappa_1 : X_1 \to X_2$ таким же образом, как и в доказательстве теоремы (4.4.2). Далее, по образцу доказательства (4.4.2) и, замечая, что $\sigma(x_0, 1_L^0, \alpha) = (\bar{x}_0, 1_L^0, \alpha)$, можем определить биекцию $\mathcal{M}$, которая оказывается в этом случае тождественным отображением. Но это как раз и означает, что квазигомеоморфизм $(\varphi, \mathcal{M}) : (X_1, L, \tau_1) \to (X_2, L, \tau_2)$, построенный в доказательстве (4.4.2), может в данном случае рассматриваться как гомеоморфизм L-нечетких пространств $\varphi : X_1 \to X_2$ (т.е. как гомеоморфизм в $CFT(L)$).

Обратно, предположим, что L-нечеткие пространства (X_1, τ_1) и (X_2, τ_2) гомеоморфны (в $CFT(L)$) и пусть $\varphi : X_1 \to X_2$ - соответствующий гомеоморфизм. Тогда $(\varphi, \mathcal{E}_L) : (X_1, L, \tau_1) \to (X_2, L, \tau_2)$, очевидно, является гомеоморфизмом в $GCFT$. Пусть $\sigma : P(X_1, L, \tau_1) \to P(X_2, L, \tau_2)$ - соответствующий изоморфизм, определенный, как в доказательстве второй части теоремы (4.4.2). Замечая, что $U^{\chi} = \mathcal{E}_L^{-1} \circ U \circ \varphi^{-1} = U \circ \varphi^{-1}$, а следовательно, $\sigma(\mathcal{E}_{X_1}, \mathcal{E}_L, \alpha) = (\varphi \circ \mathcal{E}_{X_1} \circ \varphi^{-1}, \mathcal{E}_L, \alpha \circ \varphi^{-1}) = (\mathcal{E}_{X_2}, \mathcal{E}_L, \alpha)$, приходим к выводу, что σ является жестким τ-изоморфизмом.

Ограничивая утверждение теоремы (4.4.2) на подкатегорию $GCFT(2)$, получаем следствие для случая топологических пространств:

(4.4.7) <u>Теорема</u>. Пусть (X_1, T_1) и (X_2, T_2) – топологические пространства. Плоткинские полугруппы $P(X_1, Z, T_1)$ и $P(X_2, Z, T_2)$ τ-изоморфны тогда и только тогда, когда либо сами пространства (X_1, T_1) и (X_2, T_2) гомеоморфны, либо пространства (X_1, T_1) и (X_2, T_2^c) гомеоморфны.

Замечая, что, если T недискретная T_1-топология, то T^c не может быть топологией, из (4.4.7) получаем такое

(4.4.8) <u>Следствие</u>. Два недискретных T_1-пространства (X_1, T_1) и (X_2, T_2) гомеоморфны тогда и только тогда, когда их плоткинские полугруппы $P(X_1)$ и $P(X_2)$ изоморфны.

(4.4.9) <u>Пример</u>. Пусть (X, T) – топологическое пространство. Для константы $\alpha \in (0,1)$ пусть τ_α – нечеткая топология на X, порожденная предбазой $\mathcal{C}_\alpha = \{\alpha U : U \in T\} \cup \{\alpha_X : \alpha \in I\}$. Нетрудно заметить, что $C(X, I, \tau_\alpha) = C(X, I, \tau_{\alpha'})$ для любых $\alpha, \alpha' \in (0,1)$, в то время как при $\alpha \neq \alpha'$ пространства (X, I, τ_α) и $(X, I, \tau_{\alpha'})$ не гомеоморфны.

Данный пример показывает недостаточность полугрупп эндоморфизмов для характеризации чанговских нечетких топологических пространств (а следовательно, тем более и для характеризации произвольных объектов категории $GCFT$).

(4.4.10) <u>Пример</u>. Пусть (X, T) – топологическое пространство такое, что $C(X, T) = \{\varepsilon_X\} \cup \{x : x \in X\}$. Таким образом, полугруппа непрерывных преобразований пространства X состоит из тождественного отображения и всевозможных констант. (Примеры таких пространств (среди которых имеются и метризуемые) могут быть найдены, например, в [85]).

Зафиксируем константы $\alpha, \beta \in I$, $0 < \alpha < \beta < 1$ и две точки $a, b \in X$. Пусть $\mathcal{M}$ – множество всех изотонных отображений $\mu : I \to I$ таких, что $\mu(0) = 0$, $\mu(\alpha) = \alpha$, $\mu(\beta) = \beta$ и $\mu(1) = 1$. Определим нечеткие множества $U_i : X \to I$, $i = 1, 2$, следующим образом. Положим $U_1(x) = \alpha$

при $x \neq a$ и $\mathcal{U}_1(a)=\beta$ и пусть $\mathcal{U}_2(x)=\alpha$ при $x \neq a, b$ и $\mathcal{U}_2(a)=\mathcal{U}_2(b)=\beta$. Обозначим через τ_i, $i=1,2$, нечеткую топологию на X, порожденную предбазой $T \cup \{\mathcal{U}_i\}$. Нетрудно заметить, что $P(X, I, \tau_1)=\{(\delta_X, \mu, \mathcal{U}): \mu \in \mathcal{M} \cup \cup \{1_I^0\}, \mathcal{U} \in I^X\}$, а следовательно, полугруппы $P(X, I, \tau_1)$ и $P(X, I, \tau_2)$ изоморфны. Более того, легко показать, что они и ω-изоморфны. Соответствующий ω-изоморфизм $\sigma: P(X, I, \tau_1) \to P(X, I, \tau_2)$ может быть определен равенством $\sigma(\delta_X, \mu, \mathcal{U})=(\delta_X, \mu, \mathcal{U}')$ для каждого $\mu \in \mathcal{M}$ и каждого $\mathcal{U} \in I^X$, где $\mathcal{U}'(x)=\mathcal{U}(x)$ при $x \neq b$ и $\mathcal{U}'(b)=g(\mathcal{U}(b))$, где $g: I \to I$ - изотонная биекция такая, что $g(0)=0$, $g(\alpha)=\beta$ и $g(1)=1$.

§ 5. КОМПАКТНОСТЬ В КАТЕГОРИИ GFT^*

Как и следовало ожидать, теории конкретных топологических свойств в категории GFT имеют качественное отличие от соответствующих теорий в категориях типа $FT(L)$, развитых в главе II. Здесь мы ограничимся изложением основных моментов теории компактности в GFT^*. На этом примере явственно проявляются особенности, характерные для топологических теорий в GFT^* в целом. Что же касается использования категории GFT^*, а не более широкой категории GFT, то это имеет принципиальное значение при разработке конкретных топологических теорий. Дело в том, что для объектов GFT, вообще говоря, нельзя разумно определить понятие замкнутости и поэтому в GFT возможно развитие только таких топологических теорий, в которых допускается использование лишь открытых нечетких множеств, что является чрезвычайно сильным ограничением.

(4.5.I) Определение. Пусть $(X,L,\mathcal{T},K)\in Ob(GFT^*)$, $\mathcal{A}\subset L^X$, $\wedge\mathcal{A}\in\mathcal{A}$. $\mathcal{A}$-парафильтром (в $(X,L,\mathcal{T},K)$) назовем пару $(\mathcal{F},\mathcal{U})$, где $\emptyset\neq\mathcal{F}\subset\mathcal{A}$, $\mathcal{U}\subset L^X$, для которой выполнены следующие условия:

(I) $F_1\in\mathcal{F}$, $F_1\leqslant F_2\in\mathcal{A}\Rightarrow F_2\in\mathcal{F}$;

(2) $F_1, F_2\in\mathcal{F}\Rightarrow F_1\wedge F_2\in\mathcal{F}$;

(3) $B_1\in\mathcal{U}^c$, $B_1\leqslant B_2\in\mathcal{A}\Rightarrow B_2\in\mathcal{U}^c$;

(4) $B_1, B_2\in\mathcal{U}^c\Rightarrow B_1\wedge B_2\in\mathcal{U}^c$;

(5) если $F\in\mathcal{F}$, $U\in\mathcal{U}$, то $F\nleqslant U$.

$\mathcal{A}$-парафильтр $(\mathcal{F},\mathcal{U})$ назовем α-парафильтром, где $\alpha\in K$, если $\mathcal{A}=\{A : \mathcal{T}(A^c)\geqslant\alpha\}$. В частности, 0-парафильтр,- это в точности L^X-парафильтр.

(4.5.2) Замечание. При фиксированном $\mathcal{A}$ упорядочим семейство всех $\mathcal{A}$-парафильтров, положив $(\mathcal{F}',\mathcal{U}')\succ(\mathcal{F},\mathcal{U})$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}'\supset\mathcal{F}$ и $\mathcal{U}'\supset\mathcal{U}$. Согласно лемме Цорна каждый $\mathcal{A}$-парафильтр $(\mathcal{F},\mathcal{U})$ содержится в некотором максимальном $\mathcal{A}$-парафильтре $(\mathcal{F}^\circ,\mathcal{U}^\circ)$.

Для каждого $\alpha\in K$ положим $\mathcal{T}_\alpha=\{U\in L^X:\ \mathcal{T}(U)\geq\alpha\}$.

(4.5.3) <u>Определение</u>. Пространство $(X,L,\mathcal{T},K)$ назовем α-компактным, если для каждого $M\in\mathcal{T}_\alpha^c$ и каждого $\mathcal{U}\subset\mathcal{T}_\alpha$, удовлетворяющего неравенству $M\leq\vee\mathcal{U}$, найдется конечное подсемейство $\mathcal{U}_0\subset\mathcal{U}$ такое, что $M\leq\vee\mathcal{U}_0$. Пространство, α-компактное при всех $\alpha\in K^+$, назовем компактным.

Ясно, что, если $(X,L,\mathcal{T},K)$ α-компактно для некоторого $\alpha\in K$, то оно α'-компактно и для каждого $\alpha'\geq\alpha$.

(4.5.4) <u>Предложение</u>. Для нечеткого пространства $(X,L,\mathcal{T},K)$ и $\alpha\in K$ следующие условия эквивалентны:

(I) пространство $(X,L,\mathcal{T},K)$ α-компактно;

(2) для каждого α-парафильтра $(\mathcal{F},\{U\})$, где $U\in\mathcal{T}_\alpha$, имеет место неравенство $\wedge\mathcal{F}\nleq U$;

(3) для каждого α-парафильтра $(\mathcal{F},\mathcal{U})$ имеет место неравенство $\wedge\mathcal{F}\nleq\vee\mathcal{U}$.

(4) для каждого максимального α-парафильтра $(\mathcal{F},\mathcal{U})$ имеет место неравенство $\wedge\mathcal{F}\nleq\vee\mathcal{U}$.

<u>Доказательство</u>. В эквивалентности условий (I) и (2) легко убедиться, положив $M:=U^c$ и рассуждая стандартным образом. Эквивалентность условий (3) и (4) легко следует из (4.5.2). Для того, чтобы доказать импликацию (2)$\Rightarrow$(3), заметим, что, если $(\mathcal{F},\mathcal{U})$ – α-парафильтр, то тем более и для каждого $U\in\mathcal{U}$ $(\mathcal{F},\{U\})$ является α-парафильтром, а следовательно, $\wedge\mathcal{F}\nleq U$, т.е. $(\wedge\mathcal{F})^c\ngeq U^c$. Но это, очевидно, означает, что $(\mathcal{U}^c,\{(\wedge\mathcal{F})^c\})$ – α-парафильтр. Отсюда заключаем, что $(\vee\mathcal{U})^c=\wedge\mathcal{U}^c\ngeq(\wedge\mathcal{F})^c$, а значит, $\wedge\mathcal{F}\nleq\vee\mathcal{U}$. Для завершения доказательства остается заметить очевидную импликацию (3)$\Rightarrow$(2).

(4.5.5) <u>Предложение</u>. Пусть $(X,L,\mathcal{T},K)$, $(X',L',\mathcal{T}',K)\in Ob(GFT^*)$ и $(f,\varphi,\psi):(X,L,\mathcal{T},K)\to(X',L',\mathcal{T}',K')$ – морфизм в GFT, причем $f:X\to X'$ – сюръективно, а $\varphi:L'\to L$ – инъективно. Тогда, если $(X,L,\mathcal{T},K)$ α-компактно для некоторого $\alpha\in K$, то $(X',L',\mathcal{T}',K')$ β-компактно для каждого $\beta\in K'$ такого, что $\mathcal{Y}(\beta)\geqslant\alpha$. В частности, если f сюръективно, φ инъективно и пространство $(X,L,\mathcal{T},K)$ компактно, то и пространство $(X',L',\mathcal{T}',K')$ компактно.

Доказательство. Пусть $M\in(\mathcal{T}'_\beta)^c$, $\mathcal{V}\subset\mathcal{T}'_\beta$, причем $M\leqslant\vee\mathcal{V}$. Поскольку $(f,\varphi,\mathcal{Y})$ непрерывно, для каждого $V\in\mathcal{V}$ имеем $\mathcal{T}(\varphi\circ V\circ f)\geqslant\mathcal{Y}\mathcal{T}'(V)\geqslant\alpha$. Учитывая, что $\varphi:L'\to L$ сохраняет инволюцию, имеем $\varphi\circ M^c\circ f=(\varphi\circ M\circ f)^c$, а следовательно, $\mathcal{T}((\varphi\circ M\circ f)^c)\geqslant\alpha$. Далее, нетрудно проверяется, что $\varphi\circ M\circ f\leqslant\vee\{\varphi\circ V\circ f:V\in\mathcal{V}\}$. Воспользовавшись α-компактностью пространства $(X,L,\mathcal{T},K)$, можем выбрать конечное подсемейство $\mathcal{V}_0\subset\mathcal{V}$ такое, что $\varphi\circ M\circ f\leqslant\vee\{\varphi\circ V\circ f:V\in\mathcal{V}_0\}$. Поскольку отображение инъективно, а значит, строго монотонно, отсюда легко следует, что $M\leqslant\vee\{V:V\in\mathcal{V}_0\}$.

(4.5.6) Лемма. Пусть $(\mathcal{F},\mathcal{U})$ - максимальный $\mathcal{A}$-парафильтр, $F_1,\dots,F_n\in\mathcal{A}$ и $F_1\vee\dots\vee F_n\in\mathcal{F}$. Тогда $F_i\in\mathcal{F}$ для некоторого $i\in\{1,\dots,n\}$.

Доказательство. Пусть $F\in\mathcal{F}$, $U\in\mathcal{U}$, тогда $F\wedge(F_1\wedge\dots\wedge F_n)=\bigvee_{i=1}^{n}(F\wedge F_i)\nleqslant U$, а следовательно, $F\wedge F_i\nleqslant U$ и для некоторого $i\in\{1,\dots,n\}$. Нетрудно заметить, что множество F_i при этом может быть выбрано таким образом, чтобы $F\wedge F_i\nleqslant U$ одновременно для всех $F\in\mathcal{F}$ и всех $U\in\mathcal{U}$. Из максимальности $\mathcal{A}$-парафильтра $(\mathcal{F},\mathcal{U})$ теперь легко следует, что $F_i\in\mathcal{F}$.

(4.5.7) Лемма. Пусть $(X_\gamma,L_\gamma,\mathcal{T}_\gamma,K_\gamma)$, $\gamma\in\Gamma$ - семейство нечетких пространств, $(X,L,\mathcal{T},K)$ - их произведение и $(\mathcal{F},\mathcal{U})$ - максимальный α-парафильтр ($\alpha\in K$) в $(X,L,\mathcal{T},K)$. Тогда $\wedge\mathcal{F}=\wedge\mathcal{F}_0$ и $\vee\mathcal{U}=\vee\mathcal{U}_0$, где $\mathcal{F}_0$ - подсемейство в $\mathcal{F}$, образованное L-нечеткими подмножествами множества X вида $(p_\gamma,\pi_\gamma)^{-1}(F_\gamma)$, а $\mathcal{U}_0$ - подсемейство в $\mathcal{U}$, образованное L-нечеткими подмножествами в X вида $(p_\gamma,\pi_\gamma)^{-1}(U_\gamma^c)^c$, где $F_\gamma,U_\gamma\in L_\gamma^{X_\gamma}$, $\xi_\gamma\mathcal{T}_\gamma(F_\gamma^c)\geqslant\alpha$; $\xi_\gamma\mathcal{T}_\gamma(U_\gamma)\geqslant\alpha$, а $p_\gamma:X\to X_\gamma$, $\pi_\gamma:L_\gamma\to L$ и $\xi_\gamma:K_\gamma\to K$ - соответствующие проекции.

Доказательство. Из определения топологии на $(X,L,\mathcal{T},K)$ следует, что каждое $F\in L^X$, $\mathcal{T}(F^c)\geqslant\alpha$ является инфимумом некоторого семейства нечетких множеств вида $F_1 \vee \ldots \vee F_n$, где каждое F_i имеет вид $(p_\gamma, \mathcal{T}_\gamma)^{-1}(G_i)$ для некоторого $\gamma_i \in \Gamma$ и некоторого $G_i \in L_{\gamma_i}^{X_{\gamma_i}}$, удовлетворяющего неравенству $\xi_\gamma \mathcal{T}_\gamma(G_i^c) \geqslant \alpha$. Согласно предыдущей лемме, если $F \in \mathcal{F}$, то $F_i \in \mathcal{F}$ для некоторого $i \in \{1, \ldots, n\}$. Отсюда легко следует равенство $\wedge \mathcal{F} = \wedge \mathcal{F}_0$. Второе равенство $\vee \mathcal{U} = \vee \mathcal{U}_0$ можно доказать аналогично или из соображений дуальности.

(4.5.8) <u>Лемма</u>. Пусть $(X_\gamma, L_\gamma) \in Db(Set \times Lat^{op})$, $(X, L) = (\prod_\gamma X_\gamma, \bigotimes_\gamma L_\gamma)$, $A_\gamma, B_\gamma \in L_\gamma^{X_\gamma}$, причем $A_\gamma \nleqslant B_\gamma$ для всех $\gamma \in \Gamma$. Тогда $\prod_\gamma A_\gamma \nleqslant (\prod_\gamma B_\gamma^c)^c$.

<u>Доказательство</u>. Предположим, что найдется $x \in X$ такое, что $\prod_\gamma A_\gamma(x) > (\prod_\gamma B_\gamma^c)^c(x)$. Тогда $\bigwedge_\gamma A_\gamma(x) > (\prod_\gamma B_\gamma^c)^c(x) = 1 - \prod_\gamma B_\gamma^c(x) = 1 - \bigwedge_\gamma B_\gamma^c(x) = \bigvee_\gamma B_\gamma^c(x)$, что противоречит предположению.

(4.5.9) <u>Теорема</u>. Пусть $(X, L, \mathcal{T}, K)$ – произведение семейства нечетких пространств $(X_\gamma, L_\gamma, \mathcal{T}_\gamma, K_\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$. Тогда, если $(X, L, \mathcal{T}, K)$ α-компактно, для некоторого $\alpha \in K$, то каждое $(X_\gamma, L_\gamma, \mathcal{T}_\gamma, K_\gamma)$ α_γ-компактно для всех $\alpha_\gamma \in K_\gamma$ таких, что $\xi_\gamma(\alpha_\gamma) \geqslant \alpha$. Обратно, если каждое $(X_\gamma, L_\gamma, \mathcal{T}_\gamma, K_\gamma)$ α_γ-компактно для некоторого $\alpha_\gamma \in K_\gamma$, то $(X, L, \mathcal{T}, K)$ α-компактно для всех $\alpha \geqslant \vee \xi_\gamma(\alpha_\gamma)$.

<u>Доказательство</u>. Пусть $(X, L, \mathcal{T}, K)$ α-компактно и $\alpha_\gamma \in K_\gamma$, $\xi_\gamma(\alpha_\gamma) \geqslant \alpha$. Тогда из (4.5.5) следует, что пространство $(X_\gamma, L_\gamma, \mathcal{T}_\gamma, K_\gamma)$ α_γ-компактно.

Обратно, предположим, что $(\mathcal{F}, \mathcal{U})$ – максимальный α-парафильтр, где $\alpha \in K$ таков , что $\alpha \geqslant \vee \xi_\gamma(\alpha_\gamma)$ для некоторых $\alpha_\gamma \in K_\gamma$, для которых соответствующие пространства $(X_\gamma, L_\gamma, \mathcal{T}_\gamma, K_\gamma)$ α_γ-компактны. Воспользовавшись леммой (4.5.7), заключаем, что $\wedge \mathcal{F} = \wedge \mathcal{F}_0$ и $\vee \mathcal{U} = \vee \mathcal{U}_0$, где $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ образовано L-нечеткими подмножествами множества X, имеющими вид $(p_\gamma, \mathcal{T}_\gamma)^{-1}(F_\gamma)$ для некоторых $F_\gamma \in L_\gamma^{X_\gamma}$ таких, что $\xi_\gamma(\mathcal{T}_\gamma(F_\gamma^c)) \geqslant \alpha$ и аналогично, $\mathcal{U}_0$ образовано L-нечеткими множествами, имеющими вид $(p_\gamma, \mathcal{T}_\gamma)^{-1}(U_\gamma^c)^c$ для некоторых $U_\gamma \in L_\gamma^{X_\gamma}$ таких, что $\xi_\gamma(\mathcal{T}_\gamma(U_\gamma)) \geqslant \alpha$.

Тогда, как нетрудно заметить, для каждого $\gamma\in\Gamma$ пара $(\mathcal{F}_\gamma, \mathcal{U}_\gamma)$, где $\mathcal{F}_\gamma=\{F_\gamma : (p_\gamma, \mathcal{T}_\gamma)^{-1}(F_\gamma)\in\mathcal{F}_0, \xi_\gamma(\mathcal{T}_\gamma(F_\gamma^c))\geqslant\alpha\}$, $\mathcal{U}_\gamma=\{U_\gamma : (p_\gamma, \mathcal{T}_\gamma)^{-1}(U_\gamma)\in\mathcal{U}_0, \xi_\gamma(\mathcal{T}_\gamma(U_\gamma))\geqslant\alpha\}$, является α_γ-парафильтром в $(X_\gamma, L_\gamma, \mathcal{T}_\gamma, K_\gamma)$. Поскольку $(X_\gamma, L_\gamma, \mathcal{T}_\gamma, K_\gamma)$ α_γ-компактно, заключаем, что $\wedge\mathcal{F}_\gamma\nleqslant\vee\mathcal{U}_\gamma$. Воспользовавшись леммой (4.5.8), получаем $\prod_\gamma(\wedge\mathcal{F}_\gamma)\nleqslant(\prod_\gamma(\vee\mathcal{U}_\gamma)^c)^c$. Для завершения доказательства остается заметить, что $\prod_\gamma\wedge\mathcal{F}_\gamma=\wedge\mathcal{F}$ и $(\prod_\gamma(\vee\mathcal{U}_\gamma)^c)^c=\vee\mathcal{U}$.

Литература

I. А.Н.Аверкин, И.З.Батыршин, А.Ф.Блишун, В.Б.Силов, В.В.Тарасов. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта. М.: Мир, 1986.

2. D. Adnadjevic. Separation properties of F-spaces. - Matematički Vesnik, 1982, 6, p. 1 - 8.

3. D. Adnadjevic. Dimension F-ind of F-spaces. - Бакинская международная топологическая конференция. Тезисы. Ч.II. Баку,1987. С.4.

4. А.Д.Александров. Аддитивные функции множества в абстрактных пространствах. - Матем.сб., 1943, 13, с.169-238.

5. А.В.Архангельский. Отображения и пространства. - УМН, 1966, 21, №4, с.133-184.

6. А.В.Архангельский. О бикомпактах, которые удовлетворяют условию Суслина наследственно. Теснота и свободные последовательности. - ДАН СССР, 1971, 199, с.1227-1230.

7. А.В.Архангельский, В.И.Пономарев. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. - М.: Наука, 1974.

8. G. Artico, R. Moresco. On fuzzy metrizability. - J. Math. Anal. Appl., 1985, 107, p. 144 - 147.

9. G. Artico, R. Moresco. a^*-compactness of the fuzzy unit interval. - Fuzzy Sets and Syst., 1988, 25, p. 243 - 249.

10. П.Биллингсли. Сходимость вероятностных мер. - М.: Наука, 1977.

11. Г.Биркгоф. Теория структур. - М.:

12. J.C.L. Borges. On stratifiable spaces. - Pacific J. Math., 1966, 1, p. 1 - 16.

13. А.Боровков. Курс теории вероятностей. - М.: Наука, 1976.

14. Н.Бурбаки. Общая топология. Основные структуры. - М.: Наука, 1968.

15. U. Cerruti. The Stone-Čech compactification in the category of fuzzy spaces. - Fuzzy Sets and Syst., 1981, 6, p 197 - 204.

16. C. Chang. Fuzzy topological spaces. - J. Math. Anal. Appl., 1968, 24, p. 182 - 190.

17. Н.Данфорд, Дж.Т.Шварц. Линейные операторы. Общая теория. - Изд.Иностранной Литературы, М., 1962.

18. C.De Mitri, E.Pascali. Characterization of fuzzy topologies from neighborhoods of fuzzy points. - J. Math. Anal. Appl., 1983, 93, p. 324 - 327.

19. Z.Deng. Fuzzy pseudo-metric spaces. - Math. Anal. Appl., 1982, 86, p. 74 - 95.

20. З.Дискин. Нечеткие предикаты на нечетких пространствах // Топологические пространства и отображения. Рига: ЛГУ, 1985. С. 59-70.

21. Д.Дюбуа, А.Прад. Общий подход к определению индексов сравнения в теории нечетких множеств // Нечеткие множества и теория возможностей (последние достижения). Под ред.Р.Ягера. М.: Радио и связь, 1986, с.9-21.

22. P. Eklund. Category theoretic properties of fuzzy topological spaces. - Fuzzy Sets and Syst., 1984, 1 , p. 303 - 310.

23. P. Eklund. A comparison of lattice theoretic approaches to fuzzy topology.- Fuzzy Sets and Syst., 1986, 19, p. 81-87.

24. P. Eklund, W. Gähler. Basic notions for fuzzy topology. Part I.- Fuzzy Sets and Syst., 1988, 26, 333 - 356.

25. P. Eklund, W. Gähler. Basic notions for fuzzy topology. Part II. - Fuzzy Sets and Syst.,

26. Р.Энгелькинг. Общая топология. М.: Мир, 1986.

27. R. Engelking, S. Mrowka. On E-compact spaces. - Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Math., 1958, 6, p. 429 - 436.

28. M.A. Erceg. Metric spaces in fuzzy set theory. - J. Math. Anal. Appl., 1979, 69, p. 205 - 230.

29. M.A. Erceg. Functions, equivalence relations, quotient spaces and subsets in fuzzy set theory.- Fuzzy Sets Syst.1980,3,75-92.

30. В.В.Федорчук. Некоторые вопросы теории упорядоченных пространств. - Сиб.Матем.Журнал, 1969, 10, с.172-187.

31. L.M. Friedler. Fuzzy closed and fuzzy perfect mappings. - J. Math. Anal. Appl., 1987, 125, p. 451 - 460.

32. T.E.Gantner, R.C.Steinlage, R.Warren. Compactness in fuzzy topological spaces.-J. Math. Anal. Appl.,1978, 62,p. 547-562.

33. R. Goetsheld, W. Voxman, A pseudometric for fuzzy sets and certain related results.- J. Math. Anal. Appl.,1981,81,507-523.

34. J. Goguen. L-fuzzy sets.-J.Math.Anal.Appl.,1967,18,p.145-174.

35. J. Goguen. The fuzzy Tychonoff theorem. - J. Math. Anal. Appl., 1973, 43, p. 734 - 742.

36. Р.Голдблатт. Топосы. Категорны анализ логики. - М.: Мир,1983.

37. H. Herrlich. -kompakte Räume. - Mathematische Zeitschrift, 1967, 96, N 3, S. 228 - 255.

38. H. Herrlich. Cartesian closed topological categories.- Math. Colloq. Univ. Cape Town, 1974, 9, p. 1-16.

39. H. Herrlich, G. Strecker. Category Theory. - Heldermann Verlag, Berlin, 1979.
40. H. Herrlich, G. Strecker. Coreflexive subcategories in General Topology. - Fund. Math., 1972, 73, p. 199-210.
4I. A. Heyting. Intuitionism, 2nd edition. - North Holand,1966.
42. U. Höhle. Probabilistische topologien. - Manuscripta Math., 1978, 26, p. 223 - 245.
43. U. Höhle. Probabilistische Metriken auf der Menge der nicht negativen Verteilungsfunctionen.- Aequat. Math.,1978,18,345-356.
44. U. Höhle. Probabilistische kompakte L-unscharfe Mengen.- Manuscripta Mathematicae, 1979, 26, p. 331 - 347.
45. U. Höhle, Maße auf unscharfen Mengen. - Zeitschrift Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete, 1976, 36, p. 179 - 188.
46. B. Hutton. Normality in fuzzy topological spaces.- J. Math. Anal. Appl., 1975, 50, p.- 74 - 79.
47. B. Hutton. Uniformities on fuzzy topological spaces. - J. Math. Anal. Appl., 1977, 58, p. 559 - 571.
48. B. Hutton. Products of fuzzy topological spaces. - Topology and Appl., 1980, 11, p. 59 - 67.
49. B. Hutton, I. Reilly. Separation axioms in fuzzy topological spaces. - Fuzzy Sets and Syst., 1980, 3, p. 93 - 104.
50. J.R. Isbell. Atomless parts of spaces. - Math. Scand., 1972, 31, p. 5 - 32.
5I. P.T. Johnstone. Stone spaces. - Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1982.
52. O. Kaleva. The completion of fuzzy metric spaces. - J. Math. Anal. Appl., 1985, 109, p. 194 - 198.
53. O. Kaleva, S. Seikkala. On fuzzy metric spaces. - Fuzzy Sets and Syst., 1984, 12, p. 215 - 229.
54. A.K. Katsaras. Fuzzy proximities and fuzzy completely regular spaces. - J. Anal. Şt. Univ. Jaşi, 1980, 26, p. 31 - 41.
55. А.Кофман. Введение в теорию нечетких множеств. - М.: Радио и связь, I982.
56. Дж.Л.Келли. Общая топология. - М.: Наука, I98I.
57. E.E. Kerre, P.L. Ottoy. On the different notions of neighborhood in fuzzy spaces. - Simon Steven, 1987, 61:2, p.131-146.
58. A.J. Klein. Generalizing the L-fuzzy unit interval. - Fuzzy Sets and Syst., 1984, 12, p. 271 - 279.
59. E.P.Klement. Operations on fuzzy sets and fuzzy numbers Proc. 11 Intern. Symp. Multiple-valued logic,Oklahoma,1981,p.218-225.

60. E.P. Klement. Operations on fuzzy sets - an axiomatic approach. - Inform. Sciences, 1982, 27, p. 221 - 232.

61. W. Kotze. Quasi-coincidence and quasi-fuzzy Hausdorff. - J. Math. Anal. Appl., 1986, 116, p. 465 - 472.

62. T. Kubiak. Extending continuous L-real valued functions. - Math. Japonica, 1986, 31:6, p. 875 - 887.

63. T. Kubiak. L-fuzzy normal spaces and Tietze extension theorem. - J. Math. Anal. Appl., 1987, 125, p. 141 - 153.

64. К.Куратовский. Топология. Том I. - М.: Мир, 1966.

65. К.Куратовский, А.Мостовский. Теория множеств. - М.: Мир, 1970.

66. R. Lowen. Fuzzy topological spaces and fuzzy compactness. - J. Math. Anal. Appl., 1976, 56, p. 621 - 633.

67. R. Lowen. Initial and final fuzzy topologies and the fuzzy Tychonoff theorem. - J. Math. Anal. Appl., 1977, 58, p. 11-21.

68. R. Lowen. A comparison of different compactness notions in fuzzy spaces.-J.Math. Anal. Appl., 1978, 64, p. 446-454.

69. R. Lowen. Convergence in fuzzy topological spaces.- General Topol. Appl., 1979, 10, 147 - 160.

70. R. Lowen. On fuzzy complements.- Information Sciences, 1978, 14, p. 107 - 113.

71. R. Lowen. On (R(L),).-Fuzzy Sets and Syst.,1983,10,p.203-209.

72. R. Lowen. On the existence of natural fuzzy topologies on spaces of probability measures.- Math. Nachr.,1984,115,p. 33-57.

73. R. Lowen. The order aspect of the fuzzy real line. Manuscripta Math., 1985, 39, p. 293 - 309.

74. R. Lowen, P. Wuyts. Concerning the constants in fuzzy topology.- J. Math. Anal. Appl., 1988, 129, p. 256 - 268.

75. K.D. Magill. A survey of semigroups of continuous selfmaps. - Semigroup Forum, 1975-76, 11, p. 189 - 282.

76. А.А.Мальцев. Об одном классе топологических пространств. Тезисы кратких научных сообщ.Междунар.Конгресса Математиков, Секция 8. - М., 1966, с.23.

77. S.R. Malghan, S.S. Benchalli, On fuzzy topological spaces. - Glasnik Matematički, 1981, 16, p. 313 - 325

78. Jan Marek. The Baire and Borel measure. - Czechoslovak Math. J. J., 1957, 7, p. 248 - 253.

79. J. Nagata. On a necessary and sufficient condition of metrizability. - J. Inst. Polyt. Osaka City Univ., 1950, 1, p. 93-100.

80. C.L.Negoită D.A. Ralescu. Applications of Fuzzy Sets to Systems Analysis. 1975. Birkhäuser Verlag, Basel. 1974
81. S. Mrowka. Further results on E-compact spaces. - Acta Math., 1968, 120, p. 161 - 185.
82. Б.А.Пасынков. О распространении понятий, касающихся пространств, на отображения. - Отображения и Функторы, изд. МГУ,1984,с.72-102.
83. Б.И.Плоткин. Алгебра автоматов: некоторые проблемы. - Вестник МГУ, сер.матем.и мех., 1980, №4, с.96.
84. Б.И.Плоткин, В.Б.Штейнбук, И.Н.Перанидзе. Автоматы, представления и полугруппы. - Латв.матем.ежегодник, вып.25, 1981, с. 225-236.
85. A. Pultr, V. Trnkova. Combinatorial, algebraic and topological representation of groups, semigroups, categories. Prague,1980.
86. Pu Pao-ming, Liu Ying-ming. Fuzzy topology I. Neighborhood structure of a point.- J. Math. Anal. Appl.,1980,76,p.571-599.
87. Pu Pao-ming, Liu Ying-ming. Fuzzy Topology II. Product and quotient spaces. - J. Math. Anal. Appl., 1980, 77, p. 20 - 37.
88. S.E. Rodabaugh. The Hausdorff separation axiom for fuzzy topological spaces.- Topol. and Appl., 1980, 11, p. 319-334.
89. S.E. Rodabaugh. Suitability in fuzzy topological spaces. - J. Math. Anal. Appl., 1981, 79, p. 273 - 285.
90. S.E. Rodabaugh. A categorical accomodation of various notions of fuzzy topology.- Fuzzy Sets and Syst., 1983, 9, p.241-265.
91. S.E. Rodabaugh. Separation axioms and the fuzzy real lines. - Fuzzy Sets and Syst., 1983, 11, p. 163 - 183.
92. S.E. Rodabaugh. Complete fuzzy topological hyperfields and fuzzy multiplication.- Fuzzy Sets and Syst., 1985,15, 285-310.
93. S.E. Rodabaugh. A theory of fuzzy uniformities with application to fuzzy real lines.- J.Math.Anal.Appl.,1988, 129, p.37-70.
94. M. Sarkar. On fuzzy topological spaces. J. Math. Anal. Appl., 1981, 79, p. 384 - 394.
95. M. Sarkar. On L-fuzzy spaces.-J.Math.Anal.Appl.,1981,84, 431-442.
96. Ю.М.Смирнов. О топологических пространствах, компактных в данном отрезке мощностей. - Изв.АН СССР, сер.матем., 1950, 14, с.155-178.
97. Ю.М.Смирнов. О метризации топологических пространств. - УМН, 1951, 6, №6, с.100-111.
98. R.Srivastava, S.N.Lal, A.K.Srivastava. Fuzzy Hausdorff topological spaces. - J. Math. Anal. Appl., 1981, 81, 497-506.

99. R. Srivastava. Fuzzy T_1-topological spaces. - J. Math. Anal. Appl., 1984, 102, p. 442 - 448.

I00. R. Srivastava, A.K. Srivastava. On fuzzy Hausdorfness concepts. - Fuzzy Sets and Syst., 1985, 17, p. 67 - 71.

I0I. L.N. Stout.Topoi and categories of fuzzy sets. - Fuzzy Sets and Syst., 1984, 12, p. 169 - 184.

I02. А.П.Шостак. О Е-компактных пространствах. - ДАН СССР, I972, 205, с.I3I0-I3I2.

I03. А.П.Шостак. Q -расширения топологических пространств и кольца функций. - ДАН СССР, I976, 226, с.I29I-I294.

I04. В.Варадарайн. Меры на топологических пространствах. - Матем. сб., I96I, 55, с.35-I00.

I05. R.Warren. Boundary of a fuzzy set. - Indiana J. Math., 1977, 26, p. 191 - 197.

I06. R. Warren. Neighborhoods, bases and continuity in fuzzy topological spaces. - Rocky Mount. J. Math., 1978, 8, p. 459-470.

I07. R. Warren. Fuzzy topologies characterized by neighborhood systems. - Rocky Mount. J. Math., 1979, 9, p. 761 - 764.

I08. R. Warren. Convergence in fuzzy topolofy. - Rocky Mount. J. Math., 1983, 13, p. 31 - 36.

I09. S. Willard. Paracompactness in small products. - Canad. Math. Bull., 1971, 14, p. 127.

II0. M. Wygralak. On a new definition of the cardinality of finite fuzzy subsets. - Proc. Polish Symp. Interval and Fuzzy Math., Poznan, 1983, p. 243 - 251.

III. M. Wygralak. Fuzziness measures of fuzzy cardinals.- Proc. Polish Symp. Intarval and Fuzzy Math., Poznan, 1986, 231-241.

II2. L.Zadeh. Fuzzy Sets.- Inform. and Control, 1965,8,p. 338-353.

II3. Е.М. Вечтомов. Вопросы определяемости топологических пространств алгебраическими системами непрерывных функций. - Итоги Науки и Техники. Алгебра, топология, геометрия. 28, I990, с. 3 - 46.

TŠ1 V.B. Tarasov, A.Šostak, On a fuzzy topological model of cognitive processes, Intern. Symp. on Fuzzy Approach to Reasoning and Decision-making (Bechyne, Czechoslovakia), 1990, p. 88.

TŠ2 В.Б. Тарасов, А. Шостак, О нечетко-топологической модели когнитивных процессов // Интеллектуальные системы в задачах проектирования в условиях нечеткой информации. Казань, 1990, с. 117 - 120.

TŠ3 В.Б. Тарасов, А. Шостак, Нечеткая топология в моделировании когнитивных процессов // Нечеткие Системы: Модели и Программные Средства, Тверь, 1991, с. 43-48.

С П И С О К

ПУБЛИКАЦИЙ АВТОРА

по теме диссертации

I. О нечетких кружевных пространствах// Ленинградская Международная Топологическая Конференция, Тезисы. Ленинград, 1982, с. 153.

2. Нечеткие кружевные пространства // Топология и Теория Множеств (Изд. Удмуртского госуниверситета). Ижевск, 1982, с. 71-75.

3. О нечеткой модификации линейно-упорядоченного пространства // Методы Алгебры и Анализа: Труды Конференции Тартуского университета. Тарту, 1983, с. 76-77.

4. Функциональная характеристика нечетких кружевных пространств// Топологические Пространства и Отображения, изд. Латвийского университета, Рига, 1985, с. 158-165.

5. Корефлексивные подкатегории нечетких топологических пространств // 5-й Топол. Симпозиум. Кишинев, изд. "Штиинца", 1985, с.266-268.

6. Корефлексивность в категориях нечетких пространств // Непрерывные Функции на Топологических Пространствах, изд. Латв. университета, Рига, 1986, с. 159-165.

7. Аксиомы отделимости в нечетких пространствах // Топологические Пространства и Отображения, изд. Латвийского университета, Рига, 1987, с. 165-187.

8. О нечетких топологиях на пространствах вероятностных мер // Эргодическая Теория Марковских Процессов (Тезисы). Кызыл, 1987, с. 57

9. Степень компактности нечетких множеств в нечетких топологических пространствах, Латв. Матем. Ежегод. 32 (1988), с. 208-228.

I0. Степень связности нечетких множеств в нечетких топологических пространствах, Математички Весник (Белград) 40 (1988), с.159-171.

II. Об одной категории для нечеткой топологии // Методы Алгебры и Анализа: Труды Конференции Тартуского Университета. Тарту, 1988, с. 126-129.

I2. О степенях линделефовости и счетной компактности нечетких множеств в нечетких топологических пространствах, Латв. Матем. Ежегод. 33 (1989), с. 207-212.

I3. О спектре наследственной линделефовости нечетких топологических пространств, Латвийский матем. ежегодник, 33 (I989), с.2I3-220.

I4. Нечеткие топологии на пространствах вероятностных мер // Топологические Пространства и Отображения, изд. Латвийского университета, Рига, I989, с. I25-I73.

I5. О свойстве E-регулярности в нечеткой топологии //Нечеткие Системы: Моделирование Структуры и Оптимизация, Калинин,I989,с.4-I5.

I6. Нечеткие кардиналы и мощности нечетких множеств //Алгебра и Дискретная Математика, изд. Латв, унив., Рига, I989, с. I37-I44.

I7. Двадцать лет нечеткой топологии: основные идеи, понятия и результаты //Успехи Матем. Наук, 44, №6 (I989), с. 99-I47.
(English translation: Two decades of fuzzy topology: basic ideas, concepts and results, Russian Mathematical Surveys, 44 N 6 (1989), pp. 125-186.)

I8. Корефлексивные подкатегории в категориях нечетких пространств// Теоретические и Прикладные Вопросы Математики III (Тезисы конференции Тартаского университета), Тарту, I985, с. 44-50.

I9. Исследование математических структур на семействах нечетких множеств: некоторые теоретические аспекты // Новости Искусственного Интеллекта (Специальный выпуск), I99I, с. 46-53.

20. A fuzzy modification of a linearly ordered space, Coll. Math. Soc. Janos Bolyai (Topol. and Appl.), 41 (1983), pp. 581-604.

21. A fuzzy modification of the category of linear ordered spaces, Comm. Math. Univ. Carol., 26:3 (1985), pp. 421-442.

22. On a fuzzy topological structure, Suppl. Rend. Circ. Matem. Palermo, Ser. II, N 11 (1985), pp. 89-103.

23. On compactness and connectedness degrees of fuzzy sets in fuzzy topological spaces, General Topology and Relat. to Modern Analysis and Algebra, Heldermann Verlag, Berlin, 1988, pp. 519-532.

24. Lindelöfness and countable compactness degrees of fuzzy sets in fuzzy topological spaces, Proc. II Congress IFSA, Tokyo, 1987, pp. 180-184.

25. On a category for fuzzy topology, Zb. Radova Fil. Fakulteta u Nišu, Ser. Matem. (Niš, Jugoslavia), 2 (1988), pp. 61-67.

26. On some modifications of fuzzy topologies, Matematički Vesnik (Belgrade) 41, N 1 (1989), 20-37.

27. On the concept of E-regularity for fuzzy topology, Matematički Vesnik (Belgrade), 41,N 3 (1989), 189-203.

28. On cardinal functions of fuzzy sets in fuzzy topological spaces, Radovi Matem. 6, N 2 (1990), 249-263.

29. On the neighborhood structure of fuzzy topological spaces, Zb Radova Filoz. Fakulteta u Nišu, Ser. Matem. (Niš, Yugoslavia) 4 (1990), 7-14.
30. On a fuzzy proximity structure, Proc. East European Category Seminar (Predela, Bulgaria), 1989, 42-43.
31. Topological properties of a fuzzy space as location properties of its fuzzy topology in the Tychonoff cube, Acta Univ. Latv. Ser. Math. 552 (1989), 97-104.
32. (with V.Shteinbuk) On semigroups of continuous transformations of fuzzy topological spaces, Intern. Symp. on Fuzzy Approach to Reason. and Desicion-making. Czechoslovakia, Bechyne, 1990, 84-85.
33. On E-regularity and E-compactness in fuzzy topology, V Convegno Intern. di Topologia in Italia, Sunti Delle Conf. e delle Comunicazioni Scientifiche, Lecce, 17-21 Settembre, 1990, Italia.
34. (with Pujate L.) On zero-dimensionality in fuzzy topology, Serdica (Bulg. Math. Publ.) 16 (1990), 285-288.
35. On the concept of fuzzy category, Acta Univ. Latv., Ser. Math. 562 (1991), 85-94.
36. Par fazi-kategorijas koncepciju, Visp. Latv. Zinātņu Kongress, Rīga, 1991, Referāti, Sej. 5.
37. (with V. Shteinbuk) On semigroups of continuous transformations of fuzzily structured sets, Semigroup Forum 43 (1991) 135-145.
38. (with V. Shteinbuk) On endomorphism semigroup of a fuzzily structured set, Suppl. to Kybernetika 28 (1992), 54-57.
39. Fuzzy stratifiable spaces, Math. Bohemica, 2 (117) (1992), 169-184.
40. On the convergence structure of a fuzzy topological space, Second Intern. BUFSA Conference on Fuzzy Sets & Artificial Intelligence, August 1992, 184-187.