E.Grünbergs.

P a r n dimensiju E i k l ī d a telpas l ī k n ē m.

Habilitācijas darbs,
iesniegts
L. U. Matēm. - Dabzin. Fakultātei
1936.g. 30. oktōbrī.

059867

Priekšvārds.

Šajā darbā aplūkotas līknes n dimensiju telpā, kā arī tādā telpā ietvertās varietātēs, galveno vērību pievēršot liekumiem un oskulējošām lineārām un sfēriskām varietātēm. Absolūtie diferenciālrēķini - pēdējā laikā gandrīz ekskluzīvi lietātā metode n dimensiju diferenciālgeometrijā - ir gan ērti sistēmatiskā ziņā, jo tie dod iespēju ar klasiskiem paņēmieniem noteikt visas diferenciālinvariantes. Tie tomēr ir pasmagi un neparocīgi tīri geometrisku sakarību atrašanai, jo katrs lielums jādefinē ar vairākiem skaitļiem, kas savukārt ir atkarīgi no koordinātu sistēmas izvēles, un atrastās sakarības jāpārvērš atpakaļ geometriskos lielumos. Šī interpretācija, kā arī iepriekšējā koordinātu aprēķināšana prasa diezgan garas un sarežģītas operācijas - tā, piemēram, zemāk minētajā E. E. Levi darbā 43 pirmās lapas puses (no 99!) ir veltītas iepriekšējiem aprēķiniem, un tikai pēc tam autors sāk geometrisku lielumu pētīšanu.

Tā kā esmu centies aplūkot tīri geometriskas īpašības un to sakarības, esmu viscauri lietājis vektoru analizi, gan vienu pašu, gan kopā ar tiešiem geometriskiem slēdzieniem, gan arī kopā ar kartēziskām koordinātām. Literatūrā neatradu ziņas par oskulējošām lodēm, kā arī par liekumu noteikšanu, ja parametrs ir patvaļīgs. Šie un daži citi rezultāti tā tad laikam ir jauni; pārējie minēti lietātās metodes illūstrācijai.

Darbu izstrādājot, blakus klasiskiem diferenciālgeometrijas kursiem, esmu izlietājis šādus darbus:

I. Vektoru teorijā:

G. Bouligand, Géométrie vectorielle (Vuibert, 1924).

G. Julia, Introduction mathématique aux théories quantiques (Cahiers scientifiques XVI, Gauthier-Villars, 1936).

II. n dimensiju telpas diferenciālgeometrijā:

C. Jordan, Sur la théorie des courbes de l'espace à n dimensions (Comptes Rendus T. 79, 1874, 795. l.p.).

C. Guichard, Les courbes de l'espace à n dimensions (Mémorial des Sciences mathématiques, XXIX, Gauthier-Villars, 1928).

K. Kommerell, Die Krümmung der zweidimensionalen Gebilde im ebenen Raum von 4 Dimensionen (Dissertation, Tübingen, 1897).

E.E. Levi, Saggio sulla teoria delle superficie a due dimensioni immerse in un iperspacio (Annali della R. Sc. normale super. di Pisa, Vol. X, 1905, Nr. 2, 1. - 99. l.p.)

J.A. Schouten u. D.J.Struik, Über Krümmungseigenschaften einer m-dimensionalen Mannigfaltigkeit, die in einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit mit beliebiger quadratischer Massbestimmung eingebettet ist (Rendiconti del Circ. mat. di Palermo, T. XLVI, 1922, 165. - 184. l.p.)

Fr. Kämmerer, Zur Flächentheorie im n-fach ausgedehnten Raume (Mitt. des Math. Seminars Giessen, IX. Heft, 1922).

1. n o d a ļ a.

B r ī v u l ī k ņ u t e o r i j a.

Šajā darbā mēs lietāsim šādus apzīmējumus: V_n - n dimensiju varietāte; R_n - lineāra V_n jeb telpa; C_n - sfēriska V_n jeb lode, t.i. kādas R_{n+1} to punktu ģeometriskā vieta, kas atrodas tai pašā attālumā, ko sauksim par radiju, no dota šīs R_{n+1} punkta - centra. Faktu, ka kāda V_p ir ietverta V_n, mēs izteiksim ar simbolu $V_p \subset V_n$ $(p<n)$. Par brīvām līknēm sauksim patvaļīgas līknes, kas ietvertas R_n, pretstatā līknēm uz liektām varietātēm. Mēs aplūkosim tikai reālas varietātes, t.i. šajā nodaļā reālas brīvas līknes, un nākošajā - līknes uz reālām V_p. Tāpat mēs pieņemsim, ka līknes vai varietātes tekošā punkta radijvektora atvasinājumi pēc parametra, resp. parametriem, visās tanīs kārtībās, ko mes lietāsim aprēķinos, ir galīgi (t.i. ar galīgu absolūto vērtību) un nepārtraukti.

Normālās komponentes.

1. Ja noteiktā kārtībā doti p vektori X_i $(i = 1,2,..p)$, tad par vektora X_i normālo komponenti mēs sauksim X_i to komponenti $\overline{X}_i$, kas ir ortogonāla visiem iepriekšējiem X_j $(j=1,2,..,i-1)$. un $\overline{X}_1 = X_1$. Šī komponente ir viennozīmīgi noteikta, ja mēs ņemam $\overline{X}_i = X_i$ gadījumā, kad visi X_j ir nulles.

Vektori X_i ir lineāri neatkarīgi, ja nolīdzinājums

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{p} k_i X_i = 0 \qquad (k_i \text{ - skalāras konstantes})$$

ir apmierināts vienīgi tad, kad visi k_i ir nulles. Ģeometriski tas nozīmē, ka X_i nav visi ietverami kādā R_q ar $q<p$. Šis noteikums ir līdzvērtīgs sekošajam: neviens no $\overline{X}_i$ nedrīkst būt nulle. Tiešām, ja kāds $\overline{X}_i$ ir nulle, X_i ir nulle vai iepriekšējo X_j lineāra kombinācija, un starp pirmiem i vektoriem pastāv (1) tipa sakarība; no otras puses, ja (1) ir iespējams, kad visi k_i nav nulles, pēdējais vektors X, kā koeficients nav nulle, ir nulle vai ir izsakāms kā iepriekšējo vektoru lineāra kombinācija, un tā tad tā normālā komponente ir nulle.

2. Kārtībā doto p vektoru X_i izveidoto figūru mēs sauksim par p-vektoru un par šī p-vektora tilpumu - rekurenti definēto lielumu

$$(2) \qquad T_p = T(X_1 X_2 \ldots X_p) = T_{p-1} \cdot |\overline{X}_p| \quad ,$$

$$\text{t.i.} \quad (2_1) \qquad T_p = |\overline{X}_1| \cdot |\overline{X}_2| \ldots |\overline{X}_p|$$

Šādi definētais p-vektora tilpums ir identisks ar paralēlotopa, kam šķautnes ir ekvipollentas vektoriem X_i, tilpumu[1]. Divvektora tilpums tātad būs vienāds ar attiecīgā paralēlogramma laukumu, un trijvektora tilpums - ar attiecīgā paralēlepipeda tilpumu. Formula (2_1) rāda, ka T_p ir

1) Skat. piem. P.H.Schoute, Mehrdimensionale Geometrie(Leipzig, 1905), II, 4, Nr.33, vai D.M.Y.Sommerville, An introduction to the geometry of n dimensions (London, 1929), VIII, 3. Kā var sagaidīt, šo autoru dotām gala formulām ir citāds izskats kā manējām, bet tās viegli reducējamas viena uz otru.

nulle, kad vektori X_i nav lîneāri neatkarīgi.

T_p aprēķināšanai, ņemsim speciālu Dekarta koordinātu sistēmu, kam x_1 ass iet pa taisni, kas nes $\overline{X}_1$. Šī sistēma tad būs ortogonāla. Tad, ja vektora X_i gala punkta koordinātas ir x_{ij} ($j = 1,2,\ldots p$)

$$|\overline{X}_1| = |x_{11}| \qquad \text{un } x_{ij} = 0 \quad \text{ja} \quad j > i.$$

Tā tad $$T_p = |x_{11}x_{22}x_{33}\ldots x_{pp}|,$$

vai arī

$$T_p = \pm \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{p1} & x_{p2} & \cdots & x_{pp} \end{vmatrix} = \big|\, \|x_{ij}\| \,\big| ,$$

jo visi locekļi virs galvenās diagonāles ir nulles. Ja nu mēs šo determinantu paceļam kvadrātā, kombinējot rindiņas ar rindiņām, mēs dabūjam

$$(3) \qquad (T_p)^2 = \|A_{ij}\| , \text{ kur } A_{ij} = A_{ji} = X_i X_j ,$$

t. i. šo abu vektoru skalārais reizinājums. Šī formula acīmredzot ir neatkarīga no izvēlētās koordinātu sistēmas, jo lielumi A_{ij} ir intrinseki saistīti ar vektoriem X_i. Sakarība (3), kaut gan pierādīta tikai lîneāri neatkarīgiem X_i, ir derīga arī vispārīgā gadījumā: determinanta A_{ij} vērtība ir nulle, kad ir iespējama sakarība

(1), jo tad pastāv tā pati sakarība starp determinanta rindiņām vai kolonnām. (3) vēl rāda, ka T_p ir neatkarīgs no vektoru X_i kārtības. Apzīmējot

$$D_p = (T_p)^2 = \| A_{ij} \| \quad ,$$

sakarība (2) dod

$$(4) \qquad X_p^2 = \frac{D_p}{D_{p-1}} \quad .$$

Loka garums. Regulārie punkti.

3. Aplūkojamo līkni (L) n dimensiju telpā R_n mēs noteiksim, dodot tekošā punkta M radijvektoru X kā viena parametra t funkciju $X(t)$. Uzskatot t par kāda cita parametra u patvaļīgu funkciju, mums rodas bezgalīgi daudzas iespējamības parametrēt (L). Apzīmēsim

$$\frac{d^{(k)} M}{dt^k} = \frac{d^{(k)} X}{dt^k} = X_k \text{ 2)} \quad .$$

Loka elementu ds dod $ds^2 = X_1^2 dt^2$; līklīnijas abscisa ir $\int ds$. Ja mazām $t-t_o$ nozīmēm pastāv izvirzījums

$$(5) \qquad X(t) = X(t_o) + \sum_{i=1}^{\infty} X_i (t-t_o)^i \frac{1}{i!} \quad ,$$

līkne (L) punktā $M(t)$ ir analītiska attiecībā pret parametru t; tā ir vispār analītiska punktā M, ja ir iespē-

---

2) Lūdzu ievērot, ka pie visiem citiem burtiem, izņemot vienīgi V, R, C, X, apakšējie indeki patur savu parasto nozīmi, tos vienīgi atšķiŗot vienu no otra.

jams atrast kādu parametru, attiecībā pret kuŗu tā šai punktā būtu analītiska. Beidzot, ja s ir M līklīnijas abscisa, kas mērīta pa (L), punkts M ir regulārs līknes (L) punkts, ja (L) tanī ir analītiska attiecībā pret s. Turpmāk mēs aplūkosim vienīgi šādus punktus. Tad mums katrā atsevišķā gadījumā nebūs jānosaka, cik no radijvektora atvasinājumiem pēc s jābūt ar galīgu absolūto vērtību, kas neradītu ne mazākās grūtības, bet tikai bez vajadzības pagarinātu tekstu.

Oskulējošās telpas un lodes.

4. Turpmākos paragrafos mēs izlietāsim normālās komponentes punkta M radijvektora X atvasinājumiem pēc s. Ja nu X ir dots kā kāda cita parametra t funkcija,

(6) $$Y_k = \frac{d^kX}{ds^k} = X_k\left(\frac{dt}{ds}\right)^k + \sum_{i=1}^{k-1} a_i X_i \quad ,$$

pie kam koeficienti a_i ir i-tās pakāpes polinomi, kas sastādīti ar t atvasinājumiem pēc s līdz k-tai kārtībai, pēdējo ieskaitot. Ja nu šie atvasinājumi visi ir galīgi un $\frac{dt}{ds} \neq 0$, lineārās varietātes, ko noteic pirmie p vektori X_i vai Y_i ir identiskas, un tā tad

(7) $$\overline{Y}_i = \overline{X}_i\left(\frac{dt}{ds}\right)^i \quad .$$

Sakarība

(8) $$\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = \frac{1}{X_1^2}$$

un s pieaugšanas virziena izvēle uz (L) dod t pirmo atvasinājumu pēc loka s(ε = +1 vai -1):

$$\frac{dt}{ds} = \varepsilon \frac{1}{\sqrt{X_1^2}} ,$$

un labās puses izteiksmi tāļāk diferencējot pēc s, mēs dabūjam t tāļākos atvasinājumus pēc s. Tā kā šādā kārtā iegūstam daļas, kam saucējā ir X_1 absolūtās vērtības pakāpe, un skaitītājā vektoru X_i skalāro reizinājumu izveidots polinoms, redzams, ka punkts M ir līknes (L) regulārs punkts, ja (L) tanī ir analītiska attiecībā pret t un $X_1 \neq 0$.

Turpmāk mēs pieņemsim, ka šie noteikumi ir izpildīti. Bezgalīgi mazo lielumu kārtību mēs noteiksim attiecībā pret dt, kas ir ekvivalents ar ds, jo $\frac{dt}{ds}$ nav ne nulle, ne-dz ir bezgalīgi liels.

5. Vispārīgā (L) punktā M pirmie n vektori X_i ir līneāri neatkarīgi, tā tad it īpaši neviens no tiem nav nulle. Caur punktu M velkot pirmos p vektorus X_i, tie noteiks, kamēr $p \leq n$, telpu R_p, ko mēs sauksim par p-to oskultelpu. Tā attēlojama ar parametrisko nolīdzinājumu

$$N = M + \sum_{i=1}^{p} a_i X_i \qquad (9)$$

kur N ir šīs R_p tekošais punkts, un a_i -patvaļīgi parametri. Lai noteiktu līknes (L) saskaršanās kārtību ar R_p, aplūkosim līknes punktu M', kas atbilst parametra nozīmei t+dt:

$$M' = M + \sum_{i=1}^{p} X_i dt^i .$$

Tā kā punkts

$$M'' = M + \sum_{i=1}^{p} X_i dt^i$$

atrodas R_p, un vektora $M'-M''$ galvenā daļa ir $X_{p+1} dt^{p+1}$, vispārīgā gadījumā M' atstatumam no R_p galvenā daļa ir šī vektora iepriekš definētās normālās komponentes absolūtā vērtība, t.i. $p+1$-ās kārtības bezgalīgi mazs lielums; (L) saskaršanās ar R_p ir p-tās kārtības. Citiem vārdiem, R_p iet caur $p+1$ bezgalīgi tuvu (L) punktu. Tā kā $p+1$ telpas R_n punkts ($p<n$) vispārējā gadījumā noteic vienu un tikai vienu R_p, telpa (9) no visām p dimensiju telpām ir tā, kas punktā M vistuvāki pieglaužas līknei (L). To iespējams pierādīt arī otrādā ceļā, meklējot p dimensiju telpu ar šādu īpašību. Tai acīmredzot jāiet caur M. Bez tam tai jāsatur vektori, kas paralēli X_1, X_2, ... X_p. Tiešām, lai pieskaršanās būtu vismaz otrās kārtības, šai telpai jāsatur punkts M_1, kā atstatums no punkta M' ir vismaz otrās kārtības, t.i.

$$\lim_{dt \to 0} \left(\frac{M_1 - M'}{dt} \right) = 0$$

vai, rakstot $M_1 - M' = (M_1 - M) - (M' - M)$,

$$\lim_{dt \to 0} \left(\frac{M_1 - M}{dt} \right) - X_1 = 0 \qquad ,$$

tā tad meklējamā telpa satur vektoru, kas ekvipollents vektoram X_1. Līdzīgā kārtā pierādījums turpināms arī pārējiem vektoriem, un tā kā vispārīgā gadījumā X_{p+1} nav iepriekšējo X_i līneāra kombinācija, sasniegtā p-tās kārtības pieskaršanās ir visaugstākā, kāda iespējama.

6. Ja pirmie n X_i nav līneāri neatkarīgi, aplūkosim vektorus $\overline{X}_1, \overline{X}_2, \ldots \overline{X}_n, \overline{X}_{n+1}, \ldots$ To starpā augstākais n nav nulle; šo vektoru indeki lai ir $k_1(=1)$, $k_2, \ldots k_q$ $(q \leq n)$. Pirmie $k_{p+1}-1$ vektori X_i tad ir ietverti R_p, ko noteic vektori $X_1, X_{k_2}, \ldots X_{k_p}$. Šo telpu mēs atkal sauksim par p-to oskultelpu; līknes (L) saskaršanās kārtība ar R_p punktā M, kā to rāda iepriekšējiem analogi slēdzieni, ir $k_{p+1}-1$.

Ja $q<n$, R_q satur visus X_i, un tā tad arī visu to analītisko (L) loku, uz kuŗa atrodas M, kā to rāda izvirzījums (5).

Iepriekšējos slēdzienos mēs izlietājām faktu, ka kādā (L) punktā starp vektoriem X_i pastāv līneāras sakarības. Līdzīgus rezultātus dabūjam, ja pastāv tikai viena šāda sakarība, bet par to visos (L) punktos. Ja piem. $p<n$ ir vismazākais skaitlis, kam pastāv sakarība

$$\sum_{i=1}^{p} f_i X_i = 0 \qquad ,$$

kur f_i ir kaut kādas t funkcijas, pietiek, ka vektori X_1, $X_2, \ldots X_{p+1}$ ir nepārtrauktas t funkcijas, lai varētu apgalvot, ka līkne (L) ir ietverta p dimensiju telpā. To visvienkāršāk var redzēt, ņemot ortogonālu Dekarta koordinātu sistēmu. Radijvektora X projekcijas uz asīm lai ir $x_1, x_2, \ldots x_{p+1} \ldots x_n$, un vektoru X_i projekcijas - x_{ij} ($j=1,2, \ldots n$). Apzīmēsim ar A_i loceklį a_i saistīto minoru determinantā

$$(10) \qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_{p+1} \\ x_{11} & x_{21} & & x_{p+1,1} \\ x_{12} & x_{22} & & x_{p+1,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{1p} & x_{2p} & & x_{p+1,p} \end{vmatrix}$$

un ar A_i' lieluma A_i atvasinājumu pēc t. Ja nu f_i nav identiski ar nulli, viegli redzams, ka

$$A_i A_j' - A_i' A_j = 0 \qquad ;$$

pieņemot, ka A_{p+1} nav identiski nulle, kas vienmēr panākams ar piemērotu asu izvēli, liekot $i = p+1$ un integrējot pēdējo sakarību, dabūjam

$$(11) \qquad A_j = c_j A_{p+1} \qquad ,$$

kur c_j ir konstantes. Determinantā (10) liekot $a_i = x_{i1}$, dabūjam

$$A_i x_{i1} = 0 \qquad ,$$

kas dod, ievietojot A_i vērtību, dalot ar A_{p+1} un integrējot:

$$(12) \qquad c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_p x_p + x_{p+1} = C$$

($C = \text{const.}$). x_{p+1} vietā determinanta (10) kolonnā ņemot $x_{p+2}, \ldots x_n$, mēs dabūjam n-p sakarības analogas (12), kur x_{p+i} koeficients ikreiz ir viens. (L) tā tad tiešām atrodas p dimensiju telpā, kas ietverta R_n.

7. Telpas R_n p+2 punkti vispārīgā gadījumā noteic vienu un tikai vienu C_p (pierādījums tāds pats, kā lodei C_2 telpā R_3). Oskulējošā R_{p+1} ietilpstošie p+2 (L) bezgalīgi tuvie punkti vispārīgā gadījumā noteiks vienu C_p, ko mēs sauksim par p-to oskullodi; pirmā oskullode tad būs oskulriņķis. Vispārīgā savā punktā M līkne (L) pieskaŗas p-tai oskullodei p+1-mā kārtībā, un tā ir vienīgā C_p ar šādu īpašību. Lai saskaršanās kārtība būtu p+k (k>1), C_p ir jāsatur p+k+1 līknes (L) bezgalīgi tuvs punkts. Šis noteikums ir līdzvērtīgs ar sekojošo: oskulējošai R_{p+1} jāpieskaŗas (L) kārtībā lielākā vai vienādā ar p+k (t.i. pirmo p+k vektoru X_i starpā augstākais p+1 nav nulles) un C_p radija c_p pirmiem k-1 atvasinājumiem pēc parametra t jābūt nullēm.

Oskulložu radijus aprēķināsim vēlāk, kad būsim iepazinušies ar liekumiem un to vērtībām.

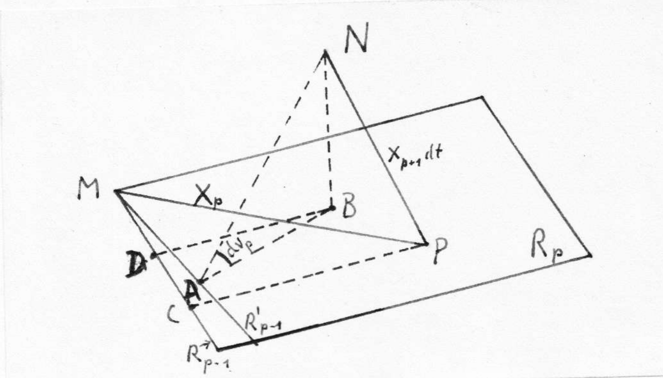
Turpmāk mēs pieņemsim, ka aplūkojamā līkne ir tiešām telpas R_n līkne, t.i. ka to nesatur neviena lineāra telpa ar mazāku dimensiju skaitu.

Liekumi.

8. Oskulējošās R_p punktos M(t) un M'(t+dt) vispārīgajā gadījumā šķeļas pa R_{p-1}, ja dt→0. Tiešām, p-to oskultelpu punktā M noteic vektori X_1, X_2, . . X_p, un punktā M' - vektori X_1+X_2dt, X_2+X_3dt, . . $X_p+X_{p+1}dt$. Tām ir

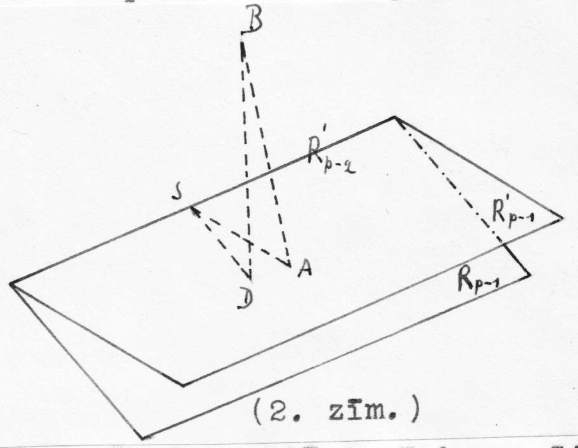
kopēja caur punktu M' vilktā varietāte, ko noteic vektori X_1+X_2dt, X_2+X_3dt, . . $X_{p-1}+X_pdt$, t.i. p-1-mā oskultelpa punktā M', kas top par R_{p-1}, kad $dt \to 0$. Abas sekojošās p-tās oskultelpas tā tad veido " divtelpu kaktu ", kā leņķi dv_p mēs sauksim par p-to liekuma leņķi. Šī leņķa robežattiecība pret loka elementu ds būs p-tais liekums k_p , un tā reciprokais lielums - p-tais liekuma radijs r_p.

Lai noteiktu dv_p, apzīmēsim ar R_{p-1} un R_p attiecīgās (L) oskultelpas punktā M, ar R'_{p-1} un R'_p telpas, kas caur M vilktas parallēli attiecīgām oskultelpām punktā M', un ar P respektīvi N punktus $M+X_p$ un $M+X_p+X_{p+1}dt$.



(1. zīm.)

Projecēsim punktu N punktā A uz R'_{p-1} un punktā B uz R_p. Taisnleņķa trijstūrī NAB leņķis A ir dv_p, un tā galvenā daļa ir $\frac{BN}{AB}$, tā kā BN ir $|\overline{X}_{p+1}|dt$, atliek noteikt AB. Mēs parādīsim, ka AB galvenā daļa ir $|\overline{X}_p|$. Lai to panāktu, projecēsim P punktā C uz R_{p-1}; tad $PC = |\overline{X}_p|$ un atliek pierādīt, ka atstatumi BP un AC ir vismaz pirmās kārtības bezgalīgi mazi lielumi. Ja D ir B projekcija uz R_{p-1}, BP un DC ir $X_{p+1}dt$ projekcijas uz R_p, respektīvi uz R_{p-1}, un tā tad vismaz pirmās kārtības bezgalīgi mazi. Atliek vēl noteikt AD lielumu. R_p ietver R_{p-1}, R'_{p-1} un punktu B, tā tad arī taisnes BA un BD; šīs pēdējās telpā R_p noteic R_{p-1} un R'_{p-1} šķēlumam R'_{p-2} absolūti ortogonālo



(2. zīm.)

plāksni, kas R'_{p-2} šķeļ punktā S. Taisnes SA un SD tad veido leņķi dv_{p-1}, punkti B,D,A,S ir uz riņķa ar diametru BS un

$$AD = BS\sin(dv_{p-1}) \quad ,$$

tā tad arī AD ir vismaz pirmās kārtības bezgalīgi mazs lielums. Līdz ar to ir pierādīts, ka AB ir ekvivalents ar $|\overline{X}_p|$, un tā tad robežgadījumā

$$\left|\frac{dv_p}{dt}\right| = \frac{|\overline{X}_{p+1}|}{|\overline{X}_p|} \quad .$$

Izlietājot sakarības (4) un (8) (7. un 8. l.p.), mēs dabūjam

$$(13) \qquad k_p^{\,2} = \frac{1}{r_p^{\,2}} = \frac{D_{p+1}D_{p-1}}{D_p^{\,2}\,D_1} \quad .$$

Lai šī formula derētu arī k_1 noteikšanai, jāpieņem, ka $D_0 = 1$. Tad katram k_p mēs varam noteikt absolūto vērtību, kamēr to zīmju nosacīšanai būs vajadzīga speciāla noruna. Formula (13) rāda arī interesanto faktu, ka dodot M kartēziskās ortogonālās koordinātas kā t funkcijas vienīgi R_3 līkņu otro liekumu varam izteikt kā racionālu koordinātu atvasinājumu funkciju, kamēr visos citos gadījumos liekumus dod irracionālas izteiksmes.

Serrē- Frenē (Serret - Frenet) n-edrs un formulas.

9. Kā to formula (7) (8. l.p.) rāda, taisnes, kas nes vektorus $\overline{X}_i$, ir neatkarīgas no parametra izvēles. Lai tās orientētu un tādējādi iegūtu punktā M ar (L) viennozīmīgi saistītu ortogonālu n-edru - Serrē - Frenē n-edru, varam rīkoties divējādi:

1) Kādā (L) punktā patvaļīgi izvēlamies asu virzienus un tādi dabūto n-edru pārvietojam gar (L). Liekumi k_i tad būs pozitīvi vai negātīvi, atkarībā no tā, vai $\overline{X}_{i+1}$ iet attiecīgās ass virzienā, vai pretējā. Šis paņēmiens būs derīgs , piemēram, pētot (L) tādu punktu tuvumā, kur viens vai daži no k_i ir nulle.

2) Izvēlamies loka pieaugšanas virzienu uz (L) un tad, ņemot s par parametru, pirmās n-1 asis ņemam attiecīgo $\overline{X}_i$ virzienā, un pēdējo tā, lai n-edram būtu tā pati orientācija, kāda ir kādam pastāvīgam dotam n-edram. Tad k_n zīme, līdzīgi kā augstāk, atkarāsies vienīgi no $\overline{X}_n$ un pēdējās ass virzienu sakrišanas vai nesakrišanas.

Citiem vārdiem, k_{n-1} būs pozitīvs vai negātīvs, atkarībā no tā, vai vektoru $\overline{X}_i$ n-edrs (vai arī vektoru X_i n-edrs, kas orientēts tāpat kā iepriekšējais) ir ar vienādu vai pretēju orientāciju izvēlētam pamata n-edram.

Mēs izvēlēsimies otro determinācijas veidu. Noskaidrosim jautājumu, kad k_{n-1} zīme ir atkarīga no s pieaugšanas virziena uz (L), un kad nē. Ņemot $t = -s$, formula (7) rāda, ka $\overline{X}_i$ ar nepāriem indekiem maina savu virzienu, un ar pāriem - nemaina. Lai salīdzinātu divu n-edru orientāciju, ko izveido asis a_i un a_i', apzīmējot ar c_{ij} asu a_i un a_j' pozitīvo virzienu leņķa kosinu, pietiek aplūkot determinanta $\|c_{ij}\|$ zīmi: ja tā ir +, n-edru orientācijas sakrīt, ja -, tās ir pretējas. Aplūkojamā gadījumā $c_{ii} = (-1)^i$ un visi pārējie c ir nulles, tā tad determinanta vērtība ir $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$. Kā iepriekš redzējām, tieši ar šo skaitli ir jāreizina k_{n-1}, ja mainām pozitīvo virzienu uz (L). Mēs tā tad varam teikt sekošo:

Ja n ir forma 4k+1 vai 4k+2, mainot pozitīvo virzienu uz (L), k_{n-1} maina zīmi.

Ja n ir forma 4k+3 vai 4k, k_{n-1} zīme ir intrinseki saistīta ar (L) un mēs, piemēram, varam runāt par līknēm, kas savērptas pa labi vai pa kreisi.

Jāpiezīmē, ka mūsu noruna par k_{n-1} zīmi ir pretēja tai, ko lietā gandrīz visi autori telpai R_3; Ermits (Hermite) un Biankī (Bianchi) gan lietā to pašu kā mēs, un arī Darbū (Darboux), kaut gan lietādams pretējo, atzīst šo par labāku[3].

10. Lai iegūtu Serrē - Frenē formulas telpai R_n, uz 16. l.p. beigās definētām asīm pozitīvos virzienos atliksim vienības vektorus t_i. Meklējamās formulas dos t_i atvasinājumus pēc s, ko mēs apzīmēsim ar t'_i. Tā kā

$$t_i^2 = 1$$

un $$t_i t_j = 0 \qquad \text{ja } i \neq j \quad ,$$

būs (14) $$t_i t'_i = 0 \quad \text{un} \quad t_i t'_j + t'_i t_j = 0 \quad .$$

Bez tam

$$t_i = \sum_{h=1}^{i} f_h X_h \quad \text{(f-skalāras s funkcijas)},$$

kas diferencējot dod (X parametrs te ir s)

$$t'_i = \sum_{h=1}^{i} f'_h X_h + \sum_{h=1}^{i} f_h X_{h+1} \quad ,$$

tā tad $t'_i t_j = 0$, ja $j-i \geq 2$. (14) rāda, ka tad arī $t_i t'_j = 0$ t.i. $t'_i t_j = 0$, ja $|j-i| \geq 2$. Tā tad

(15) $$t'_i = a_i t_{i-1} + b_i t_{i+1}$$

un atliek noteikt koeficientus a un b. Līdzīgi kā iepriekš

$$X_i = \sum_{h=1}^{i} g_h t_h$$

(g - atkal skalāras s funkcijas). Šī izteiksme, kopā ar tās atvasinājumu pēc s un (15), dod

$$\bar{X}_i = g_i t_i \quad \text{un} \quad \bar{X}_{i+1} = g_i b_i t_{i+1} \quad .$$

---

3) Leçons sur la théor. gén. des surfaces, IV, 428 l.p.

Kamēr $i < n$, asu virziena noteikšanas norunas dēļ, g_i ir visi pozitīvi, un b_i - ar attiecīgā k_i zīmi. Bet tā kā k_i absolūtā vērtība ir $|X_{i+1}|$ un $|X_i|$ attiecība, redzams, ka $b_i = k_i$. Beidzot, otrā formulā (14) liekot $j = i-1$, dabūjam

$$a_i + b_{i-1} = 0 \quad , \text{t.i.} \quad a_i = -k_{i-1} \quad .$$ Tā tad

$$t'_i = -k_{i-1} t_{i-1} + k_i t_{i+1} \quad . \tag{16}$$

Šī formula ir meklēto Serrē - Frenē formulu vispārējā izteiksme. Lai tā būtu derīga arī gadījumiem $i = 1$, un $i = n$, jānosaka, ka

$$k_0 = k_n = 0$$

scheint zu sein

Formulas (16) protams nav jaunas, bet tāda liekas gan esam to pierādīšanas metode. Līdz šim tas ir ticis darīts gan aplūkojot t_i virzienu kosinu determinantu un nosakot tā "rotācijas"[4], gan arī ar tensoru rēķiniem[5].

Ja mums ir doti k_i kā s analītiskas funkcijas, formulas (16) mums dod iespēju noteikt visus X_i ($i = 1,2,\ldots,n,n+1,\ldots$) kā t_i ($i = 1,2,\ldots,n$) lineāras kombinācijas,

---

4) Skat. piem. E.Cesàro, Vorlesungen über natürliche Geometrie, 16. nod., vai arī

M.C.Guichard, Les courbes de l'espace à n dimensions (Mémorial des sciences mathém. XXIX), 14-16 l.p.

5) Skat. piem. A.Duschek - W.Mayer, Lehrbuch der Differentialgeometrie, II,74. l.p., vai

L.P. Eisenhart, Riemannian Geometry 103-106 l.p.

Kā pirmais šīs formulas laikam ir devis (gan bez pierādījuma) C. Jordan (Sur la théorie...)

pie kam koeficienti ir polinomi, kas sastādīti ar k_i un to atvasinājumiem. Mēs tā tad varam iegūt (5) (7. l.p.) tipa izvirzījumu radijvektoram. Pieņemot, ka šis izvirzījums ir savirzāms, mums ir šāds rezultāts:

Divas līknes, kam ir tie paši k_i, ir kongruentas; tās pāriet viena otrā ar to pašu pārvietojumu, kas pārvieto vienu otrā vektoru t_i n-edrus divos saderīgos, bet citādi patvaļīgos punktos.

11. Serrē - Frenē formulas ir it īpaši izdevīgas jautājumiem, kur izlietājama vairākkārtīga atvasināšana, vai arī kur mūs interesē kāda vektora projekcijas uz Serrē - Frenē n-edra asīm, pie tam katra atsevišķi. Citos jautājumos tām tomēr ir vispārējais koordinātu metodu trūkums: katra geometriska īpašība izteicas vairākās sakarībās. Tāpēc tiešā geometriskā metode bieži ir izdevīgāka. Kā illūstrāciju visiem šiem gadījumiem mēs aplūkosim: augšminētā X izvirzījuma pirmos locekļus, oskulložu radiju noteikšanu un evolūtas. Par parametru mēs viscaur ņemsim s un ar akcentiem apzīmēsim atvasinājumus pēc s.

X izvirzījums.

12. Pakāpeniski diferencējot, dabūjam šādus 4 pirmos X atvasinājumus:

$$X_1 = t_1 \qquad (\text{jo } X_1^2 = 1)$$

$$X_2 = k_1 t_2$$

$$X_3 = -k_1^2 t_1 + k_1' t_2 + k_1 k_2 t_3$$

$$X_4 = -3k_1 k_1' t_1 + (k_1'' - k_1^3 - k_1 k_2^2) t_2 + (2k_1' k_2 + k_1 k_2') t_3 + k_1 k_2 k_3 t_4$$

un vispār redzams, ka $X_i t_i = k_1 k_2 k_3 \cdot \, . \, k_{i-1}$. Ņemot

$$M = M(0) \quad , \quad X(0) = 0 \qquad \text{un liekot}$$

$$Xt_i = x_i \quad ,$$

mēs dabūjam izvirzījumu lokam s atbilstošā tekošā punkta ortogonālām koordinātām attiecībā pret Serrē - Frenē n-edru

$$x_1 = s - \frac{s^3}{6} k_1^2 - \frac{s^4}{8} k_1 k_1' + \cdots$$

$$x_2 = \frac{s^2}{2} k_1 + \frac{s^3}{6} k_1' + \frac{s^4}{24} (k_1'' - k_1^3 - k_1 k_2^2) + \cdots$$

$$x_3 = \frac{s^3}{6} k_1 k_2 + \frac{s^4}{24} (2k_1' k_2 + k_1 k_2') + \cdots$$

$$x_4 = \frac{s^4}{24} k_1 k_2 k_3 + \cdots$$

$$x_i = \frac{s^i}{i!} k_1 k_2 k_3 \ldots k_{i-1} + \cdots$$

Šīs izteiksmes dod iespēju noteikt galveno daļu dažādiem bezgalīgi maziem lielumiem, kā arī, piemēram, dot citu interpretāciju liekumiem un noteikt (L) projekciju izskatu punktā M, ja (L) projecējam uz kādu R_k, kas iet caur M (un it īpaši tādu, ko noteic daži no t_i). Tā redzam, ka bezgalīgi mazs loks un attiecīgā chorda ir ekvivalenti lielumi; to starpības galvenā daļa ir $\frac{s^3}{24} k_1^2$. Liekumiem mums ir:

$$k_{i-1} = \lim_{s \to 0} \frac{i.x_i}{s.x_{i-1}}$$

t.i. k_{i-1} ir dabūjams, punktam M bezgalīgi tuvo līknes (L) punktu projecējot punktā M' uz t_{i-1} un t_i noteikto R_2, un ņemot i reiz robežu MM' un t_{i-1} leņķa attiecībai pret attiecīgo (L) loku s.

<u>Oskullodžu radiji.</u>

13. Serrē - Frenē asīm ir acīmredzama geometriska interpretācija: $t_1$nesošā ass ir orientētā tangente, un t_i nesošā - i-tā oskultelpā caur M vilktā normāle i-1-mai oskultelpai. Šo viedokli mēs zemāk varēsim izlietāt.

Aplūkosim p-to oskullodi ar centru A_p; tā atrodas oskultelpā R_{p+1}. Punkts A_p ir vienādā attālumā no p+2 bezgalīgi tuviem (L) punktiem, kas visi ietverti oskulējošā R_{p+1}. Ja nu mēs projecējam A_p punktā A_{p-1} uz oskulējošo R_p, taisne $A_{p-1}A_p$ būs parallēla t_{p+1} un punkts A_{p-1} būs vienādā attālumā no p+1 bezgalīgi tuviem (L) punktiem, kas ietverti oskulējošā R_p, citiem vārdiem tas ir oskullodes C_{p-1} centrs. Tā tad, ja

$$A_p = M + \sum_{i=1}^{p+1} d_i t_i \quad , \quad \text{tad}$$

$$A_{p-1} = M + \sum_{i=1}^{p} d_i t_i \quad ,$$

pie kam abos gadījumos d_i ir tie paši un līdzinājas

$$d_i = (A_p - M)t_i = (A_{p-1} - M)t_i \ , \quad (i \leq p)$$

un ņemot A_{p+1} u.t.t. dabūjam:

$$d_i = (A_{n-1} - M)t_i \quad .$$

No otrās puses, lai dabūtu A_{n-1}, ko mēs īsuma pēc apzīmēsim ar A, mums jāraksta

$$(A-M)^2 = c_{n-1}^2 \tag{17}$$

un šī sakarība n reizes jādiferencē, uzskatot A un c_{n-1} par konstantēm. Pirmā atvasināšana dod:

$$(A-M)t_1 = 0 \quad , \tag{18}$$

kas izteic, ka A atrodas (L) galvenā normāltelpā punktā M, t.i. telpā R_{n-1}, kas iet caur M un ir normāla tangentei. Tā kā (18) jādiferencē vēl n-1 reizi, A atrodas n bezgalīgi tuvās normāltelpās.

Diferencēšanai ievērosim sekošo: ja mums ir nolīdzinājumu sistēma $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, . . $F_i = 0$, $F_{i+1} = 0$, kur katrs nolīdzinājums dabūts iepriekšējo atvasinot pēc kāda parametra, lai iegūtu ekvivalentu sistēmu, mēs varam F_i vietā atvasināt tā un iepriekšējo F_j līneāru kombināciju G_i, kur F_j koeficienti ir galīgas parametra funkcijas ar galīgiem pirmiem atvasinājumiem un F_i koeficients nav identiski nulle. Šo paņēmienu izlietājot redzam, ka par G_i varam ņemt $(A-M)t_i$ un tā dabūjam:

$$(A-M)t_1 = 0 = d_1$$

$$(A-M)t_2 = r_1 = d_2$$

$$(A-M)t_3 = r_1' r_2 = d_3 \quad .$$

Turpmākiem d izteiksmes top ātri sarežģītas, tāpēc mēs noteiksim divas formulas, kas saista d_i un iepriekšējos d, r resp. k un c.

Ja mēs esam noteikuši

$$(A-M)t_j = d_j(s) \qquad (j = 1,2,\ldots,i)$$

tad, diferencējot sakarību, kam $j = i$, vienīgi A ir jāuzskata par konstanti, kas dod

$$(A-M)(-k_{i-1}t_{i-1} + k_i t_{i+1}) = d_i' \quad , \text{ t.i.}$$

(19) $$d_{i+1} = r_i(d_i' + k_{i-1}d_{i-1}) \quad .$$

Mēs tad nu varam rekurrentā kārtā aprēķināt visus d_i un tad

$$c_p^2 = \sum_{i=1}^{p+1} d_i^2 \qquad (\text{protams } p \leq n-1).$$

Otro augstāk minēto formulu mēs noteiksim vispārīgam gadījumam, kad parametrs t ir patvaļīgs. Izteiksim, ka A_{i-1} atrodas i bezgalīgi tuvās normāltelpās:

$$(A_{i-1} - M)X_1 = 0$$

(20) $$(A_{i-1} - M)X_2 = X_1^2 \qquad \text{un vispār}$$

$$(A_{i-1} - M)X_j = f_j \qquad (j = 1,2,\ldots i)$$

Viegli redzēt, ka f_j var attēlot simboliskā formā

$$f_j = XX_1\left(\frac{d}{dt} + \frac{d}{dt}\right)^{j-1} - XX_j \quad ,$$

pie kam iekavu pirmais loceklis attiecināms uz priekšā stāvošo X, un otrs - uz X_1. Kā redzams, f_j satur vienīgi $j-1$ pirmos X_h, bet nesatur X_j.

Uzrakstot sistēmu (20) punktam $A_i = d_{i+1}t_{i+1}+A_{i-1}$, un no otrās puses atvasinot pēdējo no nolīdzinājumiem (20), redzam, ka

$$A'_{i-1}X_i = d_{i+1}t_{i+1}X_{i+1} \quad .$$

Atvasinot pirmos $i-1$ nolīdzinājumus (20) redzams, ka A'_{i-1} ir ortogonāls vektoriem X_1, X_2, . . X_{i-1}, tā tad

$$A'_{i-1}X_i = A'_{i-1}\overline{X}_i = A'_{i-1}|\overline{X}_i|t_i \qquad (i \leq n-1).$$

Bet
$$c_{i-1}c'_{i-1} = A'_{i-1}(A_{i-1} - M)$$
$$= d_iA'_{i-1}t_i \quad .$$

Ievērojot vēl to, ka

$$\frac{t_{i+1}X_{i+1}}{|\overline{X}_i|} = k_i\left|\frac{ds}{dt}\right|$$

mūsu pieņemtās k_i zīmes norunas dēļ,

$$c_{i-1}c'_{i-1} = d_id_{i+1}k_i\left|\frac{ds}{dt}\right| \qquad \text{un}$$

(21) $$d_{i+1} = r_i\frac{c_{i-1}c'_{i-1}}{d_i}\cdot\left|\frac{dt}{ds}\right|$$

Mēs jau aizrādījām, ka dodot liekumus kā loka s funkcijas, ir pilnīgi noteikta līknes forma (ja tikai X izvirzījums pēc s augošām pakāpēm ir savirzāms). Ja tiek doti c_i, tie noteic r_i absolūtās vērtības, tā tad pirmie n-2 k_i ir viennozīmīgi noteikti, kamēr k_{n-1} var būt pozitīvs vai negātīvs. X izvirzījumā redzams, ka x_n ir k_{n-1} nepāra funkcija, bet visi citi x_j - tā pāras funkcijas. Divas līknes, kam kādā punktā ir kopīgs Serrē-Frenē n-edrs, un kas atšķiŗas tikai ar k_{n-1} zīmi, ir simmetriskas attiecībā pret to kopīgo n-1-mo oskultelpu. Tā tad divām (telpas R_n) līknēm, kam ir tie paši c_i, var likt kongruēt ar pārvietojumu, kam eventueli jāpievieno simmetrija.

Polārā līkne.

14. Punkta A_{n-1}, ko mēs turpmāk apzīmēsim ar A, geometrisko vietu (L_1) var dažādi interpretēt. No vienas puses tā ir saistīta ar (L) normāltelpām, kas izveido (L_1) n-1-mo oskultelpu saimi. Par šo saimi mēs minēsim dažus vārdus nākošā paragrafā.

No otrās puses (L_1) var ērti atrast dažas interesantas īpašības, no kuŗām mēs aplūkosim tikai Serrē - Frenē n-edru un liekumus, lietājot tās tekošā punkta A izteiksmi

$$A = M + \sum_{i=2}^{n} d_i t_i \quad . \tag{22}$$

To atvasinot pēc s, dabūjam

$$A' = (d_n' + d_{n-1}k_{n-1})t_n \quad .$$

Šī sakarība rāda, ka (L_1) tangente punktā A sakrīt ar taisni $A_{n-1}A_{n-2}$, kas tā tad rada attinamu V_2, punktam M pārvietojoties pa (L).

Ja pozitīvie virzieni uz (L) un (L_1) viens otram atbilst, (L_1) loka s_1 atvasinājums pēc s ir

$$f(s) = \frac{ds_1}{ds} = |d_n' + d_{n-1}k_{n-1}|$$

Līknes (L_1) orientētās tangentes vienības vektors T_1 ir

$$T_1 = e_1 t_n \qquad (23)$$

pie kam $|e_1| = 1$, un e_1 ir $d_n' + d_{n-1}k_{n-1}$ zīme.

Apzīmējot ar K_i līknes (L_1) liekumus, ar T_i tās Serrē - Frenē n-edra vienības vektorus un liekot

$$k_{n-1} = e|k_{n-1}| \quad , \quad K_{n-1} = E|K_{n-1}| \quad ,$$

pakāpeniska (23) diferencēšana pēc s dod sakarības

$$f(s)|K_i| = |k_{n-i}| \qquad \text{un}$$

$$T_i = e_i t_{n+1-i}$$

Atsevišķos e_i, sākot ar e_2, noteic sakarības

$$e_i = (-1)^{i-1} e_1 e \qquad (2 \leq i \leq n-1),$$

$$e_n = (-1)^{n-1} e_1 e E \quad .$$

Tās dod iespēju noteikt visus e_i, izņemot e_n, jo pēdējā ietilpst nezināmie E un e_n. E ir nosakāms ar noteikumu, ka n-edram T_i jābūt ar to pašu orientāciju, kāda ir n-edram t_1, tas ir 17. l.p. minētā kosinu determinanta vērtībai jābūt +1. Aplūkojamā gadījumā šī determinanta otrās diagonāles locekļi ir e_1, kamēr visi pārējie ir nulles, tā ka galā dabūjam

$$E = (-1)^{1+\frac{n(n-1)}{2}} e_1^n e^{n-1} \qquad \text{un tā tad}$$

$$e_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} e_1^{n-1} e^n \quad .$$

<u>Filārevolūtas.</u>

15. Lai atrastu līknes (L'), kam (L) ir tangentu ortogonāla trajektorija, t.i. līknes (L) filārevolūtas, jānoteic (L) normāles (T), kas rada attinamu V_2, ja to šķelpunkts M ar (L) pārvietojas pa (L). N lai ir normāles (T) charakteristiskais punkts, t.i. (L') tekošais punkts, U vienības vektors uz (T) un a orientētais attālums N-M:

$$N = M + aU \quad . \tag{24}$$

Lai normāle (T) radītu attinamu V_2, ir nepieciešami un pietiekoši, ka (T) sakrīt ar (E) tangenti punktā N, t.i.

$$t_1 + a'U + a.U' = hU \quad ,$$

kur h ir pagaidām nenoteikta s skalāra funkcija. Reizinot ar U, dabūjam

$$a' = h \quad ,$$

kas noteic h atkarībā no a, un tad paliek pāri noteikums

$$t_1 + aU' = 0 \quad . \tag{25}$$

Šis nolīdzinājums rāda sekošo: ja U un W ir divu meklēto normāļu vienības vektori, šo normāļu pozitīvo virzienu leņķis ir konstants. Tiešām, tā kosinus ir UW un (25) dēļ $UW' = WU' = 0$, tā tad UW ir konstants. Mēs vēlāk redzēsim, ka ir iespējams atrast n-1 normāli (T_i) ar lineāri neatkarīgiem U_i. Katra tālākā normāle (T) tad paturēs nemainīgu stāvokli attiecībā pret (T_i) izveidoto n-1-edru.

Nolīdzinājuma (25) atrisinājumus var noteikt, izsakot U kā vektoru t_i ($i = 2,3,..,n$) lineāru kombināciju. Dabūtā diferenciālnolīdzinājumu sistēma rāda, ka vispārīgais integrāls ir atkarīgs no n-2 parametriem, tā tad, piemēram, punktā M var normāltelpā ņemt patvaļīgu U, līdz ar ko tiek noteikts a un attiecīgais U ikkatrā citā (L) punktā. 6) Mēs tomēr lietāsim tiešāku geometrisku metodi, kas mums bez pūlēm dos arī citas (L') īpašības.

Līknes (L) normāltelpas R_{n-1} un R'_{n-1} divos bezgalīgi tuvos punktos M un M' šķeļas pa R_{n-2}, ko mēs sauksim par (L) polāro telpu punktā M. Tā ir absolūti ortogonāla oskulējošai R_2 un šķeļ šo pēdējo punktā A_1. Tiešām, neievērojot otrās un augstāku kārtību bezgalīgi mazus lielumus, R_{n-1} respektīvi R'_{n-1} šķeļ R_2 pa taisnēm, kas ir divas bezgalīgi tuvas normāles (L) projekcijai telpā

6) Šo paņēmienu izlietā C.Guichard (aprēķinot gan tikai konkrēto gadījumu, kad $n = 5$) un atrod arī augstāk minēto normāļu (T) īpašību (loc. cit. 20.- 22. l.p.).
Tālāk minētā evolūtu īpašība būt polārās V_{n-1} geodētiskām līnijām šķiet esam jauna.

R_2, un tā tad šķeļas punktā A_1. Tā kā R_{n-1} un R'_{n-1} veido to pašu leņķi $dv = dv_1$, kā tiem ortogonālās tangentes punktos M un M', redzams, ka R'_{n-1} dabūjams, pagriežot R_{n-1} ap polārtelpu R_{n-2} par leņķi dv pozitīvajā virzienā, t.i. virzienā, kurā griežot par $+\frac{\pi}{2}$, t_1 pāriet t_2 stāvoklī. Velkot caur A_1 vektorus, kas ekvipollenti punktiem M un M' atbilstošiem vektoriem U un $U+dU$, (25) dod

$$a.dU = -t_1 ds \qquad (26)$$

tā tad vektors dU ir ortogonāls polārtelpai. Tā kā U nemaina savu garumu, redzams, ka $U+dU$ ir dabūjams, liekot U sekot nupat aplūkotai rotācijai. Bet tad

$$dU = -(Ut_2).t_1 dv \quad .$$

Salīdzinot šo sakarību ar augšējo, redzam, ka

$$aUt_2 = r_1 \qquad (27)$$

kas izteic, ka punkts $N = M+aU$ atrodas polārā telpā. Citu ierobežotāju noteikumu punktam N nav un sakarības (26) un (27) dod iespēju pa punktiem konstruēt (L'), kas atbilst patvaļīgam polārtelpas izejas punktam N.

Interpretējot iepriekšējās formulas, vai arī tieši izlietājot to faktu, ka punkts N atrodas attiecīgā (L) punkta polārtelpā, dabūjama vēl šāda tīri geometriska (L') konstrukcija pa tās elementiem: uz (L) izvēlamies vienu otram sekojošus un bezgalīgi tuvus punktus M, M_1, M_2, . . . To polārtelpas lai ir P, P_1, P_2, . . .

Uzskatot (L) normāltelpas kā polārās līknes (L_1) n-l-mās oskultelpas, redzam, ka punktu M un M_1 normāltelpas šķeļas pa P_1.[7)] Punkta M normāltelpa tā tad satur P un P_1, un M_i normāltelpa - P_i un P_{i+1}.

(L') konstruēšanai patvaļīgi izvēlamies punktu $N \subset P$. Taisne MN šķeļ P_1 punktā N_1, taisne M_1N_1 šķeļ P_2 punktā N_2 u.t.t. Bezgalīgi mazie nogriežņi NN_1, N_1N_2,... ir (L') sekojoši elementi. Šī konstrukcija rāda, ka (L') oskulplāksne punktā N, kas ir plāksnes NMM_1 robežstāvoklis, satur (L) tangenti punktā M, un tā tad ir ortogonāla (L) normāltelpai.

Ja mēs aplūkojam līknes (L) normāltelpu saimi, tad redzam, ka tās ietin polāro telpu izveidotu V_{n-1}, pie kam katra normāltelpa tai pieskaras visos attiecīgās polārās telpas punktos. Šī V_{n-1}, ko mēs sauksim par (L) polāro varietāti, ir attinama, t.i. tanī ir spēkā Eiklīda metrika. Pilnīgi analogi, kā tas ir ar attinamām $V_2 \subset R_3$, polārā varietāte ir pārveidojama R_{n-1} (vai šādas telpas daļā), griežot katru tās "planāro" elementu, t.i. starp divām bezgalīgi tuvām polārtelpām atrodošos R_{n-1} daļu, ap polārtelpu, kas tam kopēja ar iepriekšējo elementu, līdz abi šie elementi nonāk vienā kopējā R_{n-1}, katrs savā pusē

7) Šķietamā pretruna ar slēdzieniem, kas mums deva (26) un (27), ir pilnīgi dabīga: starpība otrās kārtības bezgalīgi mazajos lielumos, noteicot R'_{n-1} rada pirmās kārtības starpību šķēluma telpu nosakot. Iepriekšējie slēdzieni šī apstākļa dēļ protams nav jāgroza, jo rotācijas par to pašu leņķi dv ap P vai P_1 atšķiras augstākais par otrās kārtības bezgalīgi maziem lielumiem.

kopējai polārtelpai. Kā tas aizrādīts iepriekšējās lappuses piezīmē, rotācija, kas vektoru U pārveidoja vektorā U+dU, augstākais par otrās kārtības bezgalīgi maziem lielumiem atšķirsies no rotācijas inversas tai, kas liek nonākt vienā R_{n-1} punktu M un M_1 normāltelpās esošām V_{n-1} elementārām daļām. Uztinot tā tad polāro V_{n-1} uz R_{n-1}, līknes (L') transformētai līknei (L") tangentes vienības vektori divos bezgalīgi tuvos punktos atšķirsies augstākais par otrās kārtības bezgalīgi maziem lielumiem. Katrs (L") punkts tad būs infleksijas punkts, kas var būt tikai tad, kad (L") ir taisne. Līdz ar to mēs esam pierādījuši, ka regulārā un pietiekoši mazā polārās varietātes apgabalā, līknes (L") dod īsāko ceļu starp diviem to punktiem, kas iet pa V_{n-1}.

Nākošā nodaļā mēs nosauksim pa kādas varietātes V geodētiskām līnijām tās līknes, kam oskulplāksne ir ortogonāla V tangenttelpai. Līknes (L') tā tad ir polārās varietātes geodētiskās līnijas. Bez tam mēs redzējām, ka tām piemīt īsākā ceļa īpašība (izlietājot par pierādītu pieņemto faktu, ka telpā R_i īsākā ceļa īpašība piemīt tikai taisnēm); vispārīgā gadījumā turpretim šīs geodētisko līniju īpašības pierādīšanai ir nepieciešami variāciju rēķini.

2. n o d a ļ a.

L ī k n e s u z v a r i e t ā t ē m.

16. Līdzīgi kā iepriekš, aplūkojamo m dimensiju varietāti V_m n dimensiju telpā mēs noteiksim, dodot tās tekošā punkta M radijvektoru X kā m būtisku parametru u_i funkciju. Lai u_i būtu būtiski, ir nepieciešami un pietiekoši, ka vektora X pirmie parciālie atvasinājumi pēc u_i nav visos V_m punktos lineāri atkarīgi. Ja mums šādā veidā dots V_m, mēs dabūjam bezgalīgi daudz citu V_m parametrisku attēlu, aizvietojot katru u_i ar patvaļīgu m citu parametru v_i funkciju; vienīgais noteikums, kas šīm funkcijām ir jāpilda, ir tas, ka to funkcionāldeterminants nedrīkst būt nulle.

Līkni (L) uz V_m mēs noteiksim, izsakot katru u_i kā viena parametra t skalāru funkciju; līdz ar to, X top par t vektoriālu funkciju X(t). Vektori X_i paturēs jau iepriekš lietāto nozīmi; ar akcentiem mēs apzīmēsim skalāro funkciju atvasinājumus pēc t, kamēr vektori Y_i, Y_i^2, Y_{ij} apzīmēs X parciālos atvasinājumus: pirmo pēc u_i, otro pēc u_i, ~~un~~ otro pēc u_i un u_j, u.t.t. Līknes, ko dabūjam, ja visi u_j, izņemot u_i, ir konstantes, mēs sauksim par i-līknēm.

Viscaur mēs pieņemsim, ka neviens no ikreiz lietājamiem atvasinājumu vektoriem nav ar bezgalīgu absolūto vērtību, kā arī, ka vektori Y_i aplūkojamā V_m punktā M ir lineāri neatkarīgi.

Tangenttelpa un liekumu telpas.

17. Līknes (L) tangente punktā M ir taisne, kas nes vektoru

$$X_1 = \sum_{i=1}^{m} f_i' Y_i \quad (27)$$

ja

$$u_i = f_i(t) \quad .$$

Visām V_m līknēm, kas iet caur M, tangentes tā tad atrodas vektoru Y_i noteiktā caur M ejošā R_m, ko mēs sauksim par tangenttelpu. Vēlreiz atvasinot (27) pēc t, mums ir

$$X_2 = \sum_{i=1}^{m} f_i'' Y_i + \sum_{i,j=1}^{m} f_i' f_j' Y_{ij} \quad (28)$$

Vektori X_1 un X_2 kopā noteic oskulējošo R_2, kā arī k_1. Viss, kas attiecas uz pirmo (L) liekumu, kā redzams norisinas vektoru Y_i un Y_{ij} noteiktā telpā , ko mēs tāpēc sauksim par pirmo liekuma telpu.[7] Tā kā $Y_{ij} = Y_{ji}$, vektoru Y_{ij} skaits ir $\frac{1}{2}(m+1)m$, vipārīgākajā gadījumā, kad (28) labās puses vektori visi ir lineāri neatkarīgi, pirmai liekuma telpai ir $m + \frac{m(m+1)}{2}$ dimensijas. Šādā kārtā turpinot, redzam, ka vispārīgākajā gadījumā k_i noteiks vektori, kas atrodas i-tā liekuma telpā ar dimensiju skaitu

---

7) J.A.Schouten un D.J.Struik šo telpu sauc par liekuma apvidu (Krümmungsgebiet), par tālākiem liekumiem neinteresēdamies(loc. cit. 171. - 173. l.p.).

$$m + \frac{m(m+1)}{2} + \frac{m(m+1)(m+2)}{3!} + \ldots + \frac{m(m+1)(m+2)\ldots(m+i-1)}{i!} = \frac{(m+i)!}{m!\,i!} - 1$$

Šis skaitlis ir augšējā i-tās liekuma telpas dimensiju robeža. Otra robeža ir n, tā kā pie dota n, sākot ar kādu liekuma telpu, visām turpmākām liekuma telpām ir tas pats dimensiju skaits, caur ko attiecīgo liekumu likumība taps vienkāršāka. Tā, piemēram, ja aplūkojam $V_2 \subset R_3$, tās Dipēna indikatrise sastāv no divām saistītām konikām, kamēr $V_2 \subset R_n$ ar $n \geq 5$ tā ir vispārīgāka ~~ceturtās~~ pakāpes līkne.

Var protams arī notikt, ka aplūkojamie vektori Y nav visi lineāri neatkarīgi, kaut gan n ir pietiekoši liels. V_2, piemēram, var būt punkti, kur pirmai liekuma telpai ir 3 vai 4 dimensijas (aksiāli resp. planāri punkti). Šādus punktus tuvāk aplūko E.E.Levi 3. l.p. minētā darbā. Mēs turpretim turpmāk pieņemsim, ka aplūkojamie vektori Y ir lineāri neatkarīgi.

Menjē (Meusnier) teorēma.

18. Liekot $u_1 = t$, un pieņemot, ka punktā M visu pārējo u_i pirmie p atvasinājumi pēc t ir nulles, un p+1-mais ir a_i, mēs dabūjam līkņu saimi, kur visām līknēm ir kopīgi vektori $X_1, X_2, \ldots X_p$, tā tad arī Serrē - Frenē pirmie p vektori t_i un p-1 pirmie liekumi un oskulložu radiji ir kopīgi. Ikkatrām divām saimes līknēm ir vismaz p-tās kārtības saskaršanās punktā M.

Otrādi, dodot līkņu saimi ar šādu īpašību kādā V_m, ņemot vienu no tām par 1-līkni un liekot $t = u_1$, redzam, ka pārējo u p pirmiem atvasinājumiem punktā M ir jābūt nullēm.

Vektoru $t_1, t_2, \dots t_p$ neorientēto asu kopību mēs sauksim par p-virzienu. Kā redzams, augšā aplūkotā līkņu saime noteic tai saistītu p-virzienu. Arī otrādi, p-virziens noteic šādu saimi, vienīgi vektorus t_i mēs nevaram ņemt pilnīgi patvaļīgus, ja ir dota V_m. t_1 ir jāizvēlas tangenttelpā, līdz ar ko ir noteiktās f_i' vērtībām šai punktā proporcionāli lielumi. Lai f_i' noteiktu viennozīmīgi, mēs varam uzlikt kādu noteikumu parametram t, piemēram prasot, lai tas būtu loks vienai no meklējamās saimes līknēm. Kā to rāda (28), t_2 ass tad ir jāizvēlas telpā R_{m+1}, ko noteic tangenttelpa un vektors

$$A = \sum_{i,j=1}^{m} f_i' f_j' Y_{ij} \quad ,$$

kas dod f_i'' u.t.t., tā ka beidzot ir noteikti visi f_i atvasinājumi, līdz p-tai kārtībai, ieskaitot. p-virzienam atbilstošām līknēm tā tad ir vismaz p-tās kārtības saskaršanās, tās ņemot pa divi.

19. Atgriežoties pie iepriekšējā paragrafa sākumā minētā parametra, apzīmēsim ar Z vektora X p+1-mo parciālo atvasinājumu pēc u_1. Tad

$$X_{p+1} = Z + \sum_{i=1}^{m} a_i Y_i \quad .$$

Ja $\bar{Z}$ resp. $\bar{Y}_i$ ir attiecīgo vektoru komponentes, kas ortogonālas vektoru $t_1, t_2, \dots t_p$ noteiktai telpai R_p, un kas mūsu norunas dēļ nav neviena nulle un ir lineāri neatkarīgas, tad

$$\overline{X}_{p+1} = \overline{Z} + \sum_{i=q}^{m} a_i \overline{Y}_i$$ 059903

Šī sakarība izteic, ka vektora $\overline{X}_{p+1}$ gala punkts var sakrist ar visiem galīgā attālumā esošiem punktiem (jo a_i ir patvaļīgi, bet ar galīgu nozīmi), kas atrodas telpā R_{m-1}, kuŗa iet caur punktu $M+\overline{Z}$ un satur vektoru $\overline{Y}_i$ paralēles. Šī telpa acīmredzot ir neatkarīga no vektoru $\overline{Y}_i$, resp. attiecīgo līkņu izvēles. Ja nu N ir M projekcija šai telpā,

$$(N-M)\overline{Y}_i = 0 \qquad \text{un}$$

$$\overline{X}_{p+1}(N-M) = (N-M)^2$$

Apzīmējot ar φ leņķi starp N-M un $\overline{X}_{p+1}$ pozitīviem virzieniem, redzams, ka $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$ un

$$|\overline{X}_{p+1}| \cos\varphi = |N-M| \quad .$$

Ja (L_o) ir saimes līkne, kam $\overline{X}_{p+1} = N-M$, un kādai citai līknei šis vektors ir kaut kāds, φ būs šo abu līkņu p+1-mo oskultelpu leņķis. No otras puses, katrai saimes līknei p-tais liekums ir proporcionāls $|\overline{X}_{p+1}|$, jo $|\overline{X}_p|$ visām ir tas pats. Tā tad, apzīmējot ar $\overline{k}_p$ un $\overline{r}_p$ p-to liekumu un liekuma radiju līknei (L_o), katrai citai saimes līknei tie būs

$$k_p = \frac{\overline{k}_p}{\cos\varphi} \qquad \text{un}$$

$$r_p = \overline{r}_p \cos\varphi \quad ,$$

kas ir Menjē teorēmas vispārinājums.[8] Tā mums rāda sekošo: ja ar katru saimes līkni saistām punktus

$$K = M + t_{p+1}k_p \quad \text{un}$$

$$P = M + t_{p+1}r_p \quad ,$$

K geometriskā vieta ir m-1 dimensiju telpa, kas homotētiska ar $\overline{X}_{p+1}$ gala punkta geometrisko vietu, un P vieta ir K vietas inversā lode attiecībā pret centru M un pakāpi +1.

Ņemsim tagad $p = 1$, un pārējās parametru līknes izvēlēsimies tā, lai Y_i izveidotu ortogonālu m-edru. Tad

$$X_1 = Y_1 \quad \text{un} \quad \overline{Y}_i = Y_i \quad (i = 2,3,..m).$$

Līkne (L_o) ar vismazāko pirmo liekumu te būs tā, kam t_2 ir perpendikulārs pret visiem Y_i, tā tad perpendikulārs pret tangenttelpu. V_m līknes, kam šāda īpašība piemīt katrā punktā, sauc par geodētiskām. Ar variāciju rēķinu palīdzību var pierādīt, ka ar zināmiem ierobežojošiem noteikumiem geodētiskās līnijas ir īsākās V_m līkņu starpā, kas savieno divus to punktus.[9] Attinamām $V_m \subset R_{m+1}$ turpretī, papildinot mūsu spriedumus par filārevolūtām, šo geodētisko līniju īpašību var pierādīt arī elementārā kārtā, gan postulējot īsākās līnijas īpašību telpas R_m taisnēm.

8) Šo labi pazīstamo sakarību pierāda piem. E.E.Levi, Saggio sulla Teoria ... 38. - 55. l.p.

9) Skat. piem. T.Levi-Civita, Der absolute Differentialkalkül (Springer, 1928) 23 (56. - 61. l.p.)

Ņemot $t = u1$ un izsakot, ka vektors $\overline{X}_2$ ir ortogonāls pret Y_i $(i = 2,3,..m)$, mēs dabūjam m-1 otrās kārtības diferenciālnolīdzinājumu funkcijām f_i. To vispārējais integrāls saturēs 2(m-1) konstantes. Vispārīgā gadījumā geodētiskās līnijas kādā varietātē ir noteicamas, liekot tai iet caur diviem dotiem punktiem, vai arī dotā punktā iet dotā virzienā.

Punktā M dotā virzienā ejošas geodētiskās līknes liekumu, mēs sauksim par V_m geodētisko liekumu dotā virzienā. Šī liekuma atkarību no virziena mēs aplūkosim nedaudz vēlāk.

Varietātes p-virziena oskullode.

20. Kā mēs jau aizrādījām, visām p-virziena punktā M noteiktās saimes līknēm (L) pirmās p-1 oskullodes ir tās pašas. Meklēsim p-tās oskullodes centra A geometrisko vietu. 24. l.p. formulā (20) liekot $i = j = p+1$, dabūjam

$$(29) \qquad (A-M)X_{p+1} = f_{p+1} \quad .$$

Pie tam visām (L) f_{p+1} ir tas pats, jo tanī ieiet tikai X_i, kam $i \leq p$. Apzīmējot d_{p+1} ar d, aizvietojot A ar

$$A = A_{p-1} + dt_{p+1} \quad ,$$

X_{p+1} ar tā nozīmi un ievērojot vēl to, ka $p+1<n$, un tā tad $t_{p+1}X_{p+1} = |X_{p+1}|$, (29) dod

$$(30) \qquad d\left|\overline{Z} + \sum_{i=2}^{m} a_i\overline{Y}_i\right| = b + \sum_{i=2}^{m} a_i b_i \quad ,$$

kur $$b = f_{p+1} - (A_{p-1} - M)Z \qquad \text{un}$$

$$b_i = - (A_{p-1} - M)Y_i \quad .$$

Formula (30) dod d kā parametru a funkciju. Izdarīsim tagad inversiju ar centru A_{p-1} un pakāpi +1. A inversais punkts A' ir

$$A' = A_{p-1} + \frac{\overline{Z} + \sum_{i=2}^{m} a_i \overline{Y}_i}{b + \sum_{i=2} a_i b_i} \quad .$$

Ja A_o ir A' stāvoklis, kas atbilst $a_i = 0$,

$$A' = A_o + \frac{\sum_{i=2}^{m} a_i(b\overline{Y}_i - b_i\overline{Z})}{b(b + \sum_{i=2}^{m} a_i b_i)}$$

A' tā tad atrodas telpā R_{m-1}, kas caur A_o vilkta paralēli vektoriem $b\overline{Y}_i - b_i\overline{Z}$, un A atrodas šīs telpas inversā lodē C_{m-1}, kas iet caur A_{p-1}. Ja A" ir A_{p-1} diametrāli pretējais punkts un (L") saimes līkne, kam A = A" un tā tad $d = d" = (A" - A_{p-1})t_{p+1}$, katrai citai saimes līknei

$$d = d"\cos\varphi \quad ,$$

kur φ ir leņķis, ko veido attiecīgās līknes t_{p+1} ar taisni $A_{p-1}A"$. Citiem vārdiem, A ir A" projekcija uz taisni paralēlu t_{p+1} caur A_{p-1}. Ja nu S ir kādas saimes līknes (L) patvaļīgs p-tās oskullodes punkts, tā kā taisne AA" ir ortogonāla pret attiecīgo p+1-mo oskultelpu,

$$(S - A'')^2 = (S - A_{p-1})^2 + (A_{p-1} - A)^2 + (A - A'')^2$$
$$= c_{p-1}^2 + d''^2$$

Visi p-to oskulložu punkti tā tad atrodas uz $C_{m+p-1} \subset R_{m+p}$, ko noteic caur M ejošie vektori X_i ($i = 1,2,..p$), Z un Y_j ($j = 2,3,..m$). Arī otrādi, šo lodi šķeļot ar kādas (L) p+1-mo oskultelpu, mēs dabūjam attiecīgo p-to oskullodi. šī iemesla dēļ ir dabīgi nosaukt lodi C_{m+p-1} par varietātes V_m p-virziena oskullodi.

Ģeodētiskie liekumi.

21. Kā mēs redzējām 36. l.p., ar diferencēšanu un līneāru nolīdzinājumu atrisināšanu ir iespējams atrast dotam varietātes p-virzienam saistīto līkņu saimi.

Ģeodētisko liekumu noteikšanai būs izdevīgā šāda 2-virzienu sistēma: tangenttelpā ņemsim p savstarpēji ortogonālus vektorus t_{1i}, un par t_{2i} ņemsim attiecīgās normāles pret tangenttelpu. Katram 2-virzienam atbilstošā saimē izvēlēsimies pa līknei (L_i); šīs m līknes mēs ņemsim par parametru līknēm, un par parametriem - to lokus. Šādā kārtā mēs iegūstam punktā M ortogonālu lokāli ģeodētisku parametra līniju sistēmu.

Ja nu (L) ir patvaļīga līkne caur M, un t tās loks, attiecīgie $f_i^!$ būs tās tangentes virziena kosini c_i attiecībā uz m-edru t_{1i}. Lai dabūtu (L) virziena (c_i) noteikto ģeodētisko liekumu, (28) formulas dotam vektoram X_2, kas ir ortogonāls pret X_1, jābūt arī ortogonālam pret varietātes tangenttelpu, kas rāda, ka visi $f'' = 0$. Ģeodētiskais liekums, kas saistīts ar virzienu (c_i), būs tā tad vektora

$$G = \sum_{i,j=1}^{m} c_i c_j Y_{ij} \tag{31}$$

absolūtā vērtība. Punkta $M + G$ geometrisko vietu (G) dažādiem m un n ir aplūkojuši vairāki no ievadā minētiem pētniekiem.[10] Tāpēc mēs arī ar šo jautājumu vispārīgajā gadījumā tuvāk nenodarbosimies.

Mēs vienīgi īsumā aplūkosim speciālo gadījumu $m = 2$ $(n \geq 5)$, kur noskaidrosim līdz šim, kā liekas, vēl neatrisinātu jautājumu: noteikt divu dimensiju varietātēm reālo līkņu geodētisko liekumu ekstrēmu skaitu.

Ja $m = 2$, un φ ir līkņu (L_1) un (L) pozitīvo virzienu leņķis,

$$c_1 = \cos\varphi \qquad\qquad c_2 = \sin\varphi$$

un formula (31) top

$$G = Y_{11}\cos^2\varphi + 2Y_{12}\cos\varphi\sin\varphi + Y_{22}\sin^2\varphi \quad . \tag{32}$$

Liekot $\quad Y_{11} = P+S, \quad Y_{12} = Q\ , \quad Y_{22} = P-S,$

formula (32) pārvēršas sekošajā:

---

10) Skat. it īpaši J.A.Schouten u. D.J.Struik, Über Krümmungseigenschaften..., pēdējos paragrafus, kur atrodami arī norādījumi uz (G) sakariem ar citām konfigurācijām, ko var izlietāt geodētisko liekumu pētīšanai.

(33) $$G(\varphi) = P + S\cos 2\varphi + Q\sin 2\varphi \quad .$$

Punkts M+G tā tad atrodas plāksnē, kas caur punktu M+P vilkta parallēli vektoriem S un Q, un tur apraksta elipsi (E) ar centru M+P. Diviem ortogonāliem virzieniem V_2 tangentplāksnē atbilst diametrāli pretēji (E) punkti. Mēs tā tad varam izvēlēties (L_1) un (L_2) tā, lai tām atbilstu (E) vienas ass gala punkti. Tā kā formulas (33) forma paliek tā pati, vektoru S un Q virzieni un absolūtās vērtības būs (E) asu virzieni un pusasu garumi a un b. Ja par pamata virzieniem ņemam iepriekšējo bisektrises, (L_1) un (L_2) atbilst otrās (E) ass gala punkti, t. i. S un Q apmainās vietām.

G absolūtā vērtība ir ekstremāla, kad G iet pa vienu no vienkāršām normālēm, kas no M vilktas uz (E). To pēdas uz (E) ir arī to normāļu pēdas, kas no punkta M' - M projekcijas (E) plāksnē - ir vilktas pret (E). Meklētais reālo līkņu geodētisko liekumu ekstrēmu skaits būs tā tad 4, ja M' ir (E) evolūtas iekšpusē, t.i. ja

(34) $$(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} - (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}} < 0$$

un 2, ja kreisās puses izteiksme ir pozitīva vai nulle. x un y te ir M' ortogonālās koordinātas, mērītas pa (E) asīm, kam atbilst pusasis a un b. Mūsu gadījumā $ax = PS$, $by = PQ$, tā tad noteikums (34) top

$$(PS)^{\frac{2}{3}} + (PQ)^{\frac{2}{3}} - (S^2 - Q^2)^{\frac{2}{3}} < 0 \quad .$$

Kā tas bija sagaidāms, kreisās puses izteiksme ir simmetriska attiecībā pret S un Q, tā tad neatkarīga no (E) ass izvēles, kas noteica (L_1) un (L_2). Vienīgais izņēmuma gadījums ir tad, kad (E) ir riņķis un M atrodas uz tā ass. Tad $|G|$ ir neatkarīgs no φ; šādus punktus var saukt par nabas punktiem (ombilic, Nabelpunkt), jo caur tiem ejošām līknēm visām ir tās pašas geodētiskā liekuma īpašības.

22. Formulas (32) un (33) viegli dod dažādas geodētiskā liekuma vektora G īpašības. Tā piemēram, liekot $G_i = G(i\frac{\pi}{4})$, $(i = 0,1,2,3)$, G_i ir (E) virsotņu radijvektori un katrs cits G ir izsakāms simmetriskā veidā

$$(35) \qquad G(\varphi) = \sum_{i=0}^{3} G_i[\cos^2(\varphi - i\tfrac{\pi}{4}) - \tfrac{1}{4}] \quad .$$

Tā kā G_i nav lineāri neatkarīgi, vienu no tiem var izteikt ar pārējiem, bet tad zūd formulas (35) simmetrija. Šķiet, ka formula (35) drīzāk uzskatāma par Eilera teorēmas vispārinājumu, kā formula

$$\frac{1}{R^2} = \frac{\sin^4\varphi_1}{R_{II}^2} + \frac{\sin^4\varphi_2}{R_I^2} + C\sin^2\varphi_1 \sin^2\varphi_2 \quad ,$$

ko dod F.Kemerers.[11] Šajā pēdējā indeki 1 un 2 attiecas uz Dipēna indikatrisas (afīno) asu virzieniem; nākošā paragrafā mēs redzēsim, ka vispārējā gadījumā ir divi šādu asu pāri (aksiāliem punktiem to ir pat bezgalīgi daudz), ko saista sarežģīta sakarība, tā kā F.Kemerera formulas kon-

---

11) F.Kämmerer, Zur Flächentheorie..., 13. l.p.

0599111

stantēm var būt divas (vai bezgalīgi daudzas) dažādas vērtību sistēmas. Formulā (35) turpretim iespējama tikai G_1 permutācija, un aksiāliem punktiem, kur divi no G_1 sakrīt ar P, ar elementāru transformāciju tā ir pārvēršama klasiskajā Eilera formulā.

Formula (33) starp citu tieši rāda, ka uzskatot φ par līneāru laika funkciju, punkts M+G kustas tā, it kā (E) centrs to pievilktu ar kvazi-elastisku spēku.[12)]

Dipēna indikatrise.

23. Varietātes V_m Dipēna indikatrisi (D) punktā M mēs dabūjam, uz katra virziena tangenttelpā punktā M atliekot attiecīgā geodētiskā liekuma radija kvadrātsakni. Ja r ir (D) tekošā punkta radijvektors, (D) nolīdzinājums polārās koordinātās būs

$$r^4G^2 = 1 \quad ,$$

kur G vērtību dod (31). Ņemot t_i par Dekarta koordinātu x_i asīm, $re_i = x_i$, un (D) nolīdzinājums šajās koordinātās ir

$$(36) \qquad \left(\sum_{i,j=1}^{m} x_i x_j X_{ij}\right)^2 = 1 \quad .$$

(D) ir dabūjams arī citādā ceļā: nosaka geometrisko vietu tiem V_m punktiem M tuvumā, kuŗu attālums no M tangenttelpas ir $\frac{\varepsilon^2}{2}$, to projecē tangenttelpā, izdara homotēciju ar centru M attiecībā $\frac{1}{\varepsilon}$ un liek ε tiekties uz nulli. Tas viegli izdarāms, ņemot koordinātu asis x_1, x_2, ...,x_m

12) Skat. F.Kämmerer, loc. cit. 22. l.p., kur šī fakta pierādīšanai lietāti, kaut arī īsi, aprēķini.

tangenttelpā (piem. pa t_1), pārējās tai perpendikulārā telpā un beidzot x_i $(i = 1,2,..,m)$ par parametriem u_i. Regulārā V_m punktā M mazām x_i nozīmēm būs spēkā izvirzījums

$$x_j = \frac{1}{2} f_j(x_1,...,x_m) + g_j \qquad (j = m+1, m+2,..,n),$$

kur f_j ir otrās pakāpes homogenas formas, un g_j - veselas rindas, kas sākas ar trešās pakāpes locekļiem. Izdarot augšā minētās operācijas, dabūjam (D) nolīdzinājumu

$$(37) \qquad \sum_{j=m+1}^{n} f_j^2 = 1 \quad .$$

Bet tā kā $x_i x_k$ koeficients formā f_j ir Y_{ik} komponente pa x_j asi, nolīdzinājums (37) ir tas pats (36), tikai pārrakstīts skalārā formā.

Abi (D) nolīdzinājumi viegli dod dažas tās īpašības. Vispirms (D) ir ceturtās pakāpes V_{m-1}, kas ietverta tangenttelpā, un kam M ir simmetrijas centrs. Katra tangenttelpas taisne caur M šķeļ (D) divos reālos punktos; (D) reālā daļa, kas atbilst reālām līknēm uz pamata V_m, ir tā tad slēgta V_{m-1}, kas tomēr ne vienmēr ir konveksa - tā, ja $m = 2$, (D) var sastāvēt no divām saistītām hiperbolām.

Velkot (D) sekantes parallēli kādam pastāvīgam virzienam, četru šķelšanās punktu smaguma centra geometriskā vieta ir reāla R_{m-1} caur M. (D) tipa varietātēm, līdzīgi kā otrās pakāpes varietātēm, varētu izstrādāt "diametru" un "diametrālo telpu" teoriju. Šādu un līdzīgu jautājumu iztirzāšana tomēr neietilpst šī darba apjomā.

Mēs vienīgi aplūkosim vēl vienu jautājumu, kur daži geometrijas slēdzieni atļauj izvairīties no gaŗiem aprēķiniem, proti (D) afīno simmetrijas asu noteikšanu, kad m=2. Šajā gadījumā (36) top, liekot $x = x_1$, $y = x_2$,

$$(38) \qquad (Y_{11}x^2 + 2Y_{12}xy + Y_{22}y^2)^2 = 1 \quad .$$

Ja φ_1 un φ_2 ir afīno koordinātu ξ un η asu (ξ) un (η) pozitīvo virzienu leņķis ar x asā pozitīvo virzienu,

$$x = \xi\cos\varphi_1 + \eta\cos\varphi_2$$
$$y = \xi\sin\varphi_1 + \eta\sin\varphi_2 \quad .$$

Aizvietojot x un y ar šīm vērtībām, sakarība (38) top

$$(39) \qquad (A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2)^2 = 1 \quad , \text{kur}$$

$$A = G(\varphi_1) \quad , \quad C = G(\varphi_2) \quad ,$$

$$B = Y_{11}\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + Y_{12}(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2) + Y_{22}\sin\varphi_1\sin\varphi_2 \; .$$

Lai (ξ) būtu afīna simmetrijas ass virzienam (η), ir nepieciešami un pietiekoši, ka formulas (39) kreisā pusē pazūd locekļu $\xi^3\eta$ un $\xi\eta^3$ koeficienti, iekavas paceļot kvadrātā, tad arī (η) būs simmetrijas ass virzienam (ξ), t.i. (ξ) un (η) būs saistīts afīnu simmetrijas asu pāris. Abu koeficientu izzušanas noteikums nozīmē to, ka B ir perpendikulārs pret A un C, t.i.pret to plāksni, jo vispārīgā gadījumā B nevar būt nulle.

Ja nu mēs konstruējam konu (K) ar virsotni M un vadītāju (E), un vektorus A, B un C velkam caur M, A un C ies pa (K) veidotājām (A) un (C), bet B - pa A un C noteiktās plāksnes polāri attiecībā pret (K). Tiešām, ja ar $F(\varphi)$ apzīmējam vektora G pirmo atvasinājumu pec φ, attiecīgos G un F lineāri kombinējot, mēs dabūjam visus vektorus, kas atrodas (K) tangentplāksnē gar veidotāju (G). Tā kā

$$B = \cos(\varphi_2 - \varphi_1)G(\varphi_1) + \frac{1}{2}\sin(\varphi_2 - \varphi_1)F(\varphi_1) \quad ,$$

B atrodas (K) tangentplāksnē gar (A). Tādā pat kārtā redzams, ka B atrodas arī (K) tangentplāksnē gar (C), līdz ar ko mūsu apgalvojums ir pierādīts.

B būs perpendikulārs pret A un C plāksni tad, un vienīgi tad, kad tas ies pa vienu no (K) galvenām asīm. Attiecīgo A un C gala punktus mēs dabūsim, šķeļot (E) ar (K) galvenām plāksnēm. Vispārīgā gadījumā, kad (K) nav revolūcijas kōns, šādu plākšņu ir trīs; divas no tām dod reālus A un C, trešā - kompleksus. Tā kā pārmainot A un C mēs dabūjam to pašu (ξ), (η) pāri, vispārīgā gadījumā V_2 Dipēna indikatrisei ir divi reāli saistītu afīnu simmetrijas asu pāŗi, un viens komplekss. Ja (K) ir revolūcijas kōns, t.i. M atrodas uz (E) fokālās hiperbolas, afīno asu ir bezgalīgi daudz. (D) šajā gadījumā ir jāsadalās divās konikās, un, kā to viegli pārbaudīt, tās ir divas saistītas ellipses. Blakus lineāriem, planāriem un nabas punktiem, reālām V_2 var tā tad būt vēl ceturtais īpatnēju punktu veids - punkti ar revolūcijas (K), kas ir nabas punktu vispārinājums.

Līdzīgi rezultāti dabūjami planāriem M. Izņēmuma gadījumi tad ir: M uz (E) - (G) ir tikai viens reālu afīnu asu pāris, un M (E) fokū - (G) atkal sadalās divās saistītās ellīpsēs. Beidzot aksiāliem punktiem, kā sagaidāms, rezultāti ir tie paši, kā triju dimensiju telpas virsām.

Pēdējo divu paragrafu rezultāti rāda, ka uz reālām $V_2 \subset R_n$ to vispārīgā punktā M ir šādi īpatnēji reāli virzieni: četri, kas atbilst (E) virsotnēm (katrai asij atbilstošais pāris ir ortogonāls un bisecē otro pāri),

četri, kas atbilst (D) afīnām simmetrijas asīm (tie izveido harmonisku šķipsnu) un

četri vai divi, kas atbilst ekstremāliem geodētiskiem liekumiem (pēdējā gadījumā var pievienoties vēl viens virziens, kas atbilst stacionāram geodētiskam liekumam, kas nav tomēr ekstremāls).

- - - - - -

Ar to mēs arī šo rakstu beigsim cerībā, ka, neraugoties uz dažiem pasmagiem pierādījumiem, neveiklo redakciju un eventuelām nejaušām kļūdām, minētie piemēri tomēr pietiekoši pierāda iespējamību n dimensiju telpas diferenciālgeometrijā absolūtos diferenciālrēķinus aizvietot ar še lietātām elementārām metodēm. Tās mums deva kā pazīstamas īpašības, tā arī atļāva atrast jaunas. Tāpēc autoram ir arī nodoms šīs metodes izlietāt kādā turpmākā sistemātiskā darbā, lai plašāki aplūkotu še īsumā skartos jautājumus, kā arī citus, kas no tiem izriet.

- -

S a t u r a   r ā d ī t ā j s.

----

divejāds zweierlei
gūt erhalten, bekommen
saistīt binden
rīkot ordnen, verfügen
garš lang, entlang
tuvumā in der Nähe
gandrīz beinahe
norunāt verabreden
sakrist zusammenfallen
kamēr während, bis, seit
izveidot ausgestalten
sakrist zusammenfallen
attīt loswickeln
attīnamis abwickelbar
meklēt suchen
paturēt behalten
tiek soviel
būtisks wesentlich
notikt sich ereignen

aplūkot betrachten
ietvert einschließen
ērts bequem
parocīgs handlich
sakarība Beziehung
patvaļīgs willkürlich
liekt krümmen, biegen
drīkstēt dürfen, können
jo denn, ja wenn
garums Länge
loks Bogen
paturēt behalten
parasts gewohnt, gewöhnlich
atšķirt absondern, unterscheiden
tanī
nosacīt, bezeichnen, bestimmen, entscheiden
saskarties sich berühren
tad dann
atkal wieder, wiederum
izlietot verwenden
līdzīgs ähnlich
apgalvot behaupten
tā ka; tā kā weil, da, so daß; tā tad folglich, also
it recht, sehr
īpaši insbesondere
šķelt spalten
attiecīgs bezüglich