Sens.

E. Grünbergs.

Par oskulāciju, superoskulāciju un charakteristiskiem punktiem.

Disertācija.

046481

Saturs:

Ievads.

Pieskaršanās un oskulācijas teorija klasiskā diferenciālģeometrijā jau no tās sākumiem ir svarīga nodaļa. Šī nodaļa savā ziņā ir vecāka par pašu diferenciālģeometriju, jo pieskaru konstrukcijas problēmas nodarbināja jau grieķu matēmatiķus. senos

Aplūkojot šīs nodaļas izveidojumu plašākos diferenciālģeometrijas un analīzes traktātos, uzkrīt zināma nevienveidība atsevišķo problēmu iztirzājumā. Kamēr divu līkņu vai līknes un virsas pieskaršanās palaikam tiek aplūkota visai pilnīgi, to pētot arī gadījumiem, kad pieskaršanās punkts ir singulārs, runājot par dota tipa oskulētāju figūru, mēdz aprobežoties ar pieskaršanās kārtas konstatēšanu, kas šo figūru noteic, eventueli pieminot, ka šī kārta var tapt lielāka - t.i., notiek superoskulācija - tikai atsevišķos dotās līknes vai virsas punktos. Pavisam speciālām oskulētājām figūrām, kas ir viennozīmīgi noteiktas: taisnei, riņķim, konikai,u.t.t.,plāksnē; taisnei,plāksnei un lodei telpā laikam līdz šim vienīgajām ir pētīts superoskulācijas gadījums katrā dotas līknes punktā.

Tāpēc radās doma aplūkot arī vispārīgākus gadījumus, kad oskulētāja figūra nav viennozīmīgi noteikta, un kā speciālu piemēru aplūkot telpas līkņu oskulētāju cilindru.

Izrādījās, ka no šāda vispārīgāka viedokļa raugoties, pieminētās oskulētājas figūras atbilst kādam izņēmuma gadījumam, kam piemīt pavisam speciālas īpašības. Reizē arī bija iespējams konstatēt, ka attāluma jēdziens, ko mēdz lietāt pieskaršanās kārtas raksturošanai, nemaz te nav nepieciešams, vismaz tajos gadījumos nē, kad aplūkojumā neietveŗam singulārus punktus. Beidzot atklājās pilnīgs paralēlisms starp problēmām: noteikt dota tipa oskulētāju figūru dotai līknei, un: noteikt viena parametra figūru saimes charakteristisko punktu.

Ka šis parallēlisms nav ticis izlietāts jau agrāk, laikam ir divu apstākļu sekas: pētot charakteristiskus punktus aplūko vienādojumu ar vienu parametru, pēc kā atvasina, un vairākiem nezināmiem - punkta koordinātēm. Oskulētājai figūrai turpretim dod vienādojumu arī ar vairākiem nezināmiem - virsas noteicējiem parametriem - bet vienīgo parametru, no kā šis vienādojums atkarīgs, tanī ietilpina tikai a posteriori, dodot punkta koordinātas kā parametra funkcijas. Pētīt līkni vai virsu, kam vienādojums satur vienu vienīgu koordinātu un vairākus parametrus, liekas esam pasākums bez kādas jēgas, kamēr atbilstošā problēma - pētīt punktus, ko nosakām izlietājot vienu vienādojumu ar vairākām koordinātām un vienu parametru, kā jau teikts, palaikam tiek likta aplieceju teorijas pamatā.

Otrkārt, gadījumā, kad mēdz plašāk reizē aplūkot oskulētājas figūras un charakteristiskus punktus, proti, aplūkojot sakarus starp telpas līknes punktiem un tās oskulētājām plāksnēm, sastopamo pilnīgo parallēlismu laikam vairāk vai mazāk instinktīvi piedēvē projektīvai dualitātei punkta un plāksnes starpā. Īstenībā ne tikai projektīvās transformācijas, un diferencējam
bet vispār nepārtrauktās punktu vai pieskaršanās transformācijas uzglabā otrās kārtas pieskaršanās sakaru līknes un plākšņu saimes pārveidoto figūru starpā. Šis fakts ir zināms sen, bet, liekas, nav ticis pie-

tiekami ievērots.

Šis raksts visumā ieturēts klasiskās diferenciālģeometrijas garā, prasot, lai visām funkcijām eksistētu visi vajadzīgie atvasinājumi, turklāt ar līkumu ejot apkārt singulāriem punktiem. Kamēr pieņēmums par atvasinājumu eksistenci še lietātai metodei ir fundamentāls, izvairīšanās no singulāriem punktiem notiek lietderības labad, lai varētu kaut cik izpētīt, kas notiek vispārīgos gadījumos. Tas darīts jo sevišķi tāpēc, ka singularitāšu pētījumus tā kā tā nevar pilnīgi veikt jau visai vienkāršos gadījumos, piemēram viena parametra plāksnes līkņu saimes apliecējas problēmā. Kaut cik tuvāk nodarbojoties ar singulāriem punktiem raksta apjoms būtu bijis ievērojami jāpaplašina.

Raksta pirmā daļā aplūkojuma pamatā likta n dimensiju visai patvaļīga rakstura telpa. Tiek raksturota virsas un līknes, kā arī divu līkņu pieskaršanās kārta un definēta virsas un līknes oskulācija un superoskulācija; norādīta arī iespēja raksturot divu kaut kādu varietāšu pieskaršanās kārtu un pārbaudīts ka nosakot telpā kādu vispārīga rakstura metriku, iegūtie pieskaršanās kārtas raksturojumi ir ekvivalenti parasti lietātiem. Seko divu šķietami metriskas dabas teorēmu vispārinājumi.

Aplūkojot viena parametra virsu saimes, konstatēts jau pieminētais parallēlisms ar oskulācijas problēmu un aplūkotas charakteristisku punktu ģeometriskās vietas un to īpašības, kā arī noteikts supercharakteristiska punkta un tā kārtas jēdziens.

Trešā paragrafā aplūkots kriterijs vienādojumu sistēmas atrisinājumu kārtas noteikšanai; tas ir vajadzīgs tālākiem slēdzieniem - literātūrā šāda veida kriteriju neizdevās atrast.

Tālāk pētītas dažādās superoskulācijas realizācijas iespējamības, norādīts paņēmiens atrast līknes, kam iespējami augstā galīgā kārtā pieskaras dotas seimes virsses, un sizrādīts uz šis problēmas sakaru ar diferenciālvienādojumu singulāriem atrisinājumiem. Seko vienkāršojumi aprēķinos, pētot īpašības, kas invariantas attiecībā pret kādu dotu transformāciju grupu.

Otrā nodaļā, galvenokārt pirmās nodaļas slēdzienu illustrācijai, aplūkoti daži jautājumi, kas saistīti ar tris dimensiju Euklīda telpas līkņu oskulētājiem cilindriem.

Anniņmuižā, 1943.gada aprīlī.

046486

I. nodaļa.

Vispārīgās oskulācijas un superoskulācijas teorijas elementi.

§1. Par pieskaršanos, oskulāciju, superoskulāciju atsevišķā punktā.

1. Aplūkojuma pamatā ņemsim kādu n dimensiju varietāti T, kuras elementus sauksim par punktiem. Pieņemsim, ka varietātes punktiem var vienviennozīmīgi piesaistīt savstarpīgi neatkarīgas koordinātas x_i ($i=1,2,\ldots,n$), un ka šīs koordinātas var iegūt visas reālās un kompleksās vērtības. Ja divu punktu visu koordinātu starpības tiecas uz 0, mēs teiksim, ka viens punkts tiecas uz otru, jeb arī, ka abi punkti ir bezgalīgi tuvi. Dodot visus x_i kā viena parametra t vienvērtīgas funkcijas

diferencējamas [illegible]

$$(1) \qquad x_i=x_i(t) \qquad i=1,2,\ldots,n \quad ,$$

kas definētas vai nu visām t vērtībām, vai arī kādam t vērtību intervallam, mēs noskām varietātē T ietilpstošu 1 dimensijas punktu saimi, ko sauksim par līkni L. (1) ir šīs līknes parametriskie vienādojumi; punkts, kā koordinātas dabūjam ar sakarībām (1) speciālai t vērtībai, ir līknes punkts.

Dodot vienu sakaru x_i starpā

$$(2) \qquad f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0$$

mēs noskām varietātē T ietilpstošu n-1 dimensijas varietāti V, ko sauksim par virsu. (2) ir šīs virsas vienādojums; punkts, kā koordinātas apmierina virsas vienādojumu, ir virsas punkts; virsa iet caur katru savu punktu; punkti, kā koordinātes apmierina vairāku virsu vienādojumus, ir šo virsu šķelšanās punkti. Ja n=2, virsas jēdziens ir identisks ar līknes jēdzienu. Turpmāk aplūkojot virsu saimes S, kam vispārīgā virsa atkarīga no N būtiskiem neatkarīgiem parametriem a_j (j=1,2,...,N), pieņemsim, ka vispārīgai saimes virsai atbilst tikai viena parametru a_j vērtību sistēma un ka katrai a_j vērtību sistēmai atbilst viena noteikta virsa. Līkne L atrodas virsā V, ja visu līknes punktu koordinātes apmierina virsas vienādojumu.

Piemērs minētiem jēdzieniem: T afīnā n dimensiju telpa, x_i šīs telpas punkta afīnās koordinātes, S otrās kārtas līkņu (ja n=2), virsu (ja n=3), respektīvi hipervirsu (ja n>3) saime.

Augšējie pieņēmumi par sakarības vienviennozīmību punktu un to koordinātu, kā arī virsu un atbilstošo parametru starpā, tāpat arī par iespējamību koordinātēm x_i un parametriem a_j piešķirt patvaļīgas vērtības nav nepieciešami, bet gan tikai noder tālāko slēdzienu vienkāršošanai. Tos atmetot, būtu vai nu formulējumos jāmin zināmi ierobežojumi, vai arī jārīkojas ar citāda tipa vienādojumiem (piem. homogēnu koordinātu gadījumā). Tā kā būtībā aplūkojamā teorija tomēr nemainītos, mēs aprobežosimies ar vienkāršāko un pārskatamāko gadījumu, kad visi pieņēmumi ir spēkā.

Lai turpmākie spriedumi nebūtu jāatkārto, izdarām tos vispārīgajam gadījumam, kad n>2. Ja n=2, tie paliek spēkā, vienīgi izteicieni " virsa V ", " līkne uz virsas V " jāaizvieto ar " līkne V ".

Turpmāk lietāsim šādus apzīmējumus un saīsinātas izteiksmes: punktu, kam koordinātes ir x_i(i=1,2,...,n), sauksim par punktu X, tāpat virsu, kam atbilst parametru vērtības a_j(j=1,2,...,N), par virsu A. Faktu, ka funkcija f ir atkarīga no visiem vai dažiem x_i un no visiem vai dažiem a_j, izteiksim ar rakstību f(x,a). f[x(t),a] un f[x,a(t)] apzīmēs funkcijas, kurās pārvēršas f(x,a) pēc visu x_i, respektīvi visu a_j

aizvietošanas ar kāda parametra t funkcijām $x_i(t)$, respektīvi $a_j(t)$.

Viena parametra t funkcijas f(t) atvasinājumus pēc t apzīmēsim ar parastajiem simboliem $f' = \frac{df}{dt}$, $f^{(k)} = \frac{d^k f}{dt^k}$. Mums nāksies vairākkārt lietāt vienādojumus, kas rodas kāda dota vienādojuma f = 0 kreisās puses atvasinājumus pielīdzinot nullei - šādā gadījumā mēs teiksim, ka atvasinām vienādojumu f = 0. Ja kāds vienādojums ir identiski apmierināts, visi tā atvasinājumi arī ir identiski apmierināti. Visas tālāk sastopamās funkcijas ir vienvērtīgas, ja nav teikts pretējais, un nepārtrauktas; tām eksistē nepārtraukti atvasinājumi visās formulās un spriedumos sastopamās kārtās.

2. Saimes S vispārīgo virsu raksturojam ar

$$(3) \quad f(x, a) = 0.$$

Ar parametriskiem vienādojumiem

$$(4) \quad x_i = x_i(t)$$

nosakām līkni L. Virsa A iet caur līknes L p punktiem $X_1, X_2, \ldots, X_p$, kam atbilst parametru vērtības $t_1, t_2, \ldots, t_p$, ja reizē pastāv sakarības

$$(5) \quad \begin{cases} F(t_1, a) = 0 \\ F(t_2, a) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F(t_p, a) = 0 \end{cases}$$

kur

$$(6) \quad F(t, a) = f[x(t), a].$$

No turpmākā aplūkojuma izslēdzam virsas (3) singulāros punktus, kam visi $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ top par nulli, un līknes L singulāros punktus, kur pazūd visi $\frac{dx_i}{dt}$.

Liekot punktiem $X_1, X_2, \dots, X_p$ pa līkni L tiekties uz vienu no tās punktiem X_o, ko raksturo $t = t_o$, ar parasto šai gadījumā lietāto slēdzienu [1] secinām

$$(7) \quad \begin{cases} F(t_o, a) = 0 \\ F'(t_o, a) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F^{(p-1)}(t_o, a) = 0 \end{cases}$$

Faktu, ka pastāv sakarības (7); un turklāt

$$(8) \quad F^{(p)}(t_o, a) \neq 0$$

mēs izteiksim trīs dažādos ekvivalentos veidos: a) virsa A iet caur līknes L p bezgalīgi tuviem punktiem, kas sakrīt ar punktu X_o; b) virsai A un līknei L punktā X_o ir p - 1-mās kārtas pieskaršanās; c) atrisinot vienādojumu (3) un (4) sistēmu attiecībā pret nezināmiem x_i un t, tieši p atrisinājumu sistēmas sakrīt ar punkta X_o koordinātu un t_o veidoto sistēmu, t.i. šī sistēma ir vienādojumu sistēmas p-kāršs atrisinājums. Pēdējo formulējumu varēsim lietāt arī tad, ja aplūkotā punktā visi $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ top par nulli.

Ja līkne L dota patvaļīgi, tās vispārīgam punktam X maksimālā iespējamā p vērtība ir N. Tiešām, ja p = N, liekot t_o vietā t, sistēma

$$(9) \quad \begin{cases} F(t, a) = 0 \\ F'(t, a) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F^{(N-1)}(t, a) = 0 \end{cases}$$

1) Skat. piem. G. J u l i a, Eléments de Géométrie infinitésimale (Paris, Gauthier-Villars) 1927, 19. un 20.l.p.

sastāv no N vienādojumiem ar N nezināmiem a_j. Ja identiski nepastāv

$$(10) \qquad \frac{D(F, F', \ldots F^{(N-1)})}{D(a_1, a_2, \ldots, a_N)} = 0$$

jebkurām a_j vērtībām, sistēmu (9) var atrisināt attiecībā pret parametriem a_j, tos iegūstot kā t funkcijas. Vispārīgā gadījumā, ja vienādojumi (9) nav visi lineāri attiecībā pret visiem a_j, mēs iegūsim vairākas atrisinājumu sistēmas. Katrai sistēmai atbilstošo virsu A sauksim par līknes L oskulētāju virsu punktā X. Mēs esam nonākuši pie pazīstamā fakta (ja vārdiem punkts, virsa un līkne piešķir to parasto nozīmi): oskulētājai virsai, kam vienādojums atkarīgs no N parametriem, ar vispārīgu līkni tās vispārīgā punktā ir N - 1-mās kārtas pieskaršanās.

Nav grūti redzēt, ka virsas un līknes pieskaršanās nav atkarīga no parametra t izvēles. Precizāk: izsakot t kā kāda cita parametra s apgriežami vienvērtīgu funkciju t(s), kur t vērtībai t_o atbilst $s = s_o$, funkciju F(t, a) aizvieto kāda s funkcija G(s, a):

$$G(s, a) = F[\, t(s), a \,].$$

No sakaru (7) un (8) pastāvēšanas seko tādu pat sakaru pastāvēšana punktā, kur $s = s_o$, funkcijai G un tās atvasinājumiem pēc s, un otrādi; a_j vērtības abos gadījumos būs tās pašas, tā tad arī neatkarīgas no parametra izvēles. Tiešām, funkcijas G h-tais atvasinājums pēc s ir izsakāms kā summa locekļiem, kas satur kā faktorus F atvasinājumus pēc t līdz kārtai h un t atvasinājumus pēc s; vienīgais loceklis, kas satur $F^{(h)}$ ir $F^{(h)}\left(\frac{dt}{ds}\right)^h$. Ja F un $F^{(h)}$, kur h = 1, 2, ..., p-1 ir vienlīdzīgi nullei un $F^{(p)} \neq 0$, kad $t = t_o$, šīs pašas sakarības pastāvēs arī lielumiem G, $G^{(h)}$ un $G^{(p)}$, kad $s = s_o$, un otrādi.

 046491

3. Virsas un līknes pieskaršanās kārtas jēdzienu var paplašināt, vispirms viena vienādojuma (3) vietā ņemot vairākus vienādojumus x_i starpā, skaitā $m < n$:

$$(11) \qquad f_k(x) = 0 \quad k = 1,2,\ldots,m$$

Tie raksturos vispārīgajā gadījumā $n - m$ dimensiju varietāti V'. No aplūkošanas izslēgsim eventuelos singulāros gadījumus, kur V' dimensiju skaits ir lielāks par $n - m$, un V' singulāros punktus, prasot, lai aplūkojamā punktā X_o mātricai

$$(12) \qquad \left\| \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \right\| \quad \begin{array}{l} k = 1,2,\ldots,m \\ i = 1,2,\ldots,n \end{array}$$

rangs ir m. Tad varam teikt: līknei L un varietātei V' ir tieši p-tās kārtas pieskaršanās punktā X_o, ja tai ir vismaz p-tās kārtas pieskaršanās šai punktā ar virsām, ko nosaka katrs no vienādojumiem (11) ņemts atsevišķi, un vismaz vienai no virsām šī pieskaršanās kārta ir tieši p.

It īpaši, ja $m = n - 1$, sistēma

$$(13) \qquad f_k(x) = 0 \quad k = 1,2,\ldots,n-1$$

nosaka kādu līkni L'.

Noteiksim parocīgāku kriteriju divu līkņu p-tās kārtas pieskaršanās raksturošanai. Vajadzības gadījumā pārnummurējot koordinātas, saskaņā ar pieņēmumu par mātricu (12) varam panākt, ka funkcionāldeterminants

$$(14) \qquad \Delta = \frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_{n-1})}{D(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})}$$

nav vienlīdzīgs nullei ne punktā X_o, ne arī tā tuvu-

mā, t.i. punktiem, kam koordinātas pietiekami maz at-
šķiras no X_o koordinātām. Tad sistēmu (13) var atri-
sināt attiecībā pret $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, tos iegūstot
kā x_n vienvērtīgas funkcijas. Izsakot savukārt x_n kā
kāda parametra s apgriežami vienvērtīgu funkciju, si-
stēmas (13) definētai līknei L' iegūstam punkta X_o
tuvumā parametrisku attēlu

$$(15) \quad x_i = \psi_i(s) \quad i = 1,2,\ldots,n$$

turklāt

$$\frac{d\psi_n}{ds} \neq 0$$

punktā X_o un tā tuvumā. Līkni L nosakām ar tipa (4)
vienādojumiem

$$(16) \quad x_i = \varphi_i(t) \quad i = 1,2,\ldots,n$$

Ja līknes L un L' punktā X_o pieskaŗas, tās abas
iet caur šo punktu. Tā tad pastāv tādas noteiktas s
un t vērtības s_o un t_o, ka

$$\psi_i(s_o) = \varphi_i(t_o) = x_{io} \quad i = 1,2,\ldots,n \quad ,$$

kur x_{io} ir punkta X_o koordinātas.

Ja līknei L ar līkni L' punktā X_o ir tieši p-tās
kārtas ($p \geq 1$) pieskaršanās, saskaņā ar mūsu defini-
ciju ir apmierināti vienādojumi

$$(17) \quad f_k[\varphi(t)] = 0 \quad k = 1,2,\ldots,n-1$$

kā arī to atvasinājumi līdz kārtai p, ja $t = t_o$, bet
vismaz vienam k

$$(18) \quad f_k^{(p+1)}[\varphi(t_o)] \neq 0 .$$

Tā kā vienādojumi

$$(19) \quad f_k(\psi) = 0 \quad k = 1,2,\ldots,n-1$$

ir identiski apmierināti, patvaļīga s vērtība, arī $s = s_o$, apmierina to atvasinājumus.

Līknei L ar līkni L' punktā X_o ir vismaz pirmās kārtas pieskaršanās; tā tad pastāv

$$(20) \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \frac{d\varphi_i}{dt} = 0 \quad k=1,2,\ldots,n-1 \quad \text{ja } t=t_o .$$

Atvasinot vienādojumus (19) un liekot $s = s_o$, dabūjam

$$(21) \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \frac{d\psi_i}{ds} = 0 \quad k=1,2,\ldots,n-1 \quad \text{ja } s=s_o .$$

Sistēmas (20) un (21) sastāv no n - 1 lineāra homogēna vienādojuma attiecībā pret φ_i un ψ_i pirmo atvasinājumu vērtībām punktā X_o. Abās sistēmās koeficienti ir tie paši, jo tie ir x_{io} funkcijas. Tā kā šo koeficientu mātricas rangs, sakarā ar pieņēmumu par determinentu (14), ir n - 1, seko, ka punktā X_o funkciju φ un ψ pirmo atvasinājumu vērtības ir proporcionālas un turklāt

$$\frac{d\varphi_n}{dt} \neq 0$$

punktā X_o un tā tuvumā, jo citādi šai punktā pazustu visu φ_i atvasinājumi pēc t un X_o būtu L singulārs punkts. $\varphi_n(t)$ ir tā tad t apgriežami vienvērtīga funkcija $t = t_o$ tuvumā (t.i. pietiekami maziem $|t-t_o|$). Vienādojums

$$\psi_n(s) = \varphi_n(t)$$

nosaka s kā t apgriežami vienvērtīgu funkciju atbilstošo vērtību s_o un t_o tuvumā. Ievietojot šo s vērtību līknes L' parametriskos vienādojumos (15), dabūjam tai jaunu parametrisku attēlu, ko varam rakstīt veidā:

$$(22) \quad x_i = \psi_i(t) \quad ,$$

pie kam

$$\psi_n(t) = \varphi_n(t)$$

un

$$\begin{cases} \psi_i(t_o) = \varphi_i(t_o) \\ \psi'_i(t_o) = \varphi'_i(t_o) \end{cases} \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

jo pēdējā rindā atzīmētie lielumi, kā mēs konstatējām, ir proporcionāli un indeka vērtībai n tie ir vienlīdzīgi. jēdz

Konstatēsim, ka p-tās kārtas pieskaršanās gadījumā

$$(23) \quad \psi_i^{(h)}(t_o) = \varphi_i^{(h)}(t_o) \quad \begin{matrix} i=1,2,\ldots,n \\ h=0,1,2,\ldots,p \end{matrix} \quad \begin{matrix} \psi_i^{(o)} = \psi_i \\ \varphi_i^{(o)} = \varphi_i \end{matrix}$$

$$(24) \quad \psi_i^{(p+1)}(t_o) \neq \varphi_i^{(p+1)}(t_o) \quad \text{vismaz vienam } i.$$

Kā jau redzējām, noteikumi (23) ir izpildīti h vērtībām 0 un 1. Pieņemot, ka tie ir izpildīti, ja $h \leq r$ ($r \leq p-1$), konstatēsim, ka tie ir izpildīti arī, ja $h = r + 1$. Sakarību (22) dotās funkcijas ψ_i identiski apmierina vienādojumus (19). Izsakot, ka $t = t_o$ apmierina vienādojumu (17) un (19) atvasinājumus ar kārtu r + 1, mēs dabūjam divas vienādojumu sistēmas ar veidu

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_{i0}} \varphi_i^{(r+1)}(t_0) + G_k = 0 \qquad k=1,2,\ldots,n-1$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_{i0}} \psi_i^{(r+1)}(t_0) + H_k = 0 \qquad k=1,2,\ldots,n-1 \quad .$$

Lielumi G_k un H_k ir aprēķināmi tādā pat veidā ar funkciju φ_i respektīvi ψ_i atvasinājumu līdz kārtai r vērtībām, ja $t = t_0$, un funkciju f_k parciālo atvasinājumu vērtībām punktā X_0. No otrās sistēmas k-tā vienādojuma atņemot pirmās sistēmas k-to vienādojumu dabūjam

$$(25) \qquad \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial f_k}{\partial x_{i0}} \left[\psi_i^{(r+1)}(t_0) - \varphi_i^{(r+1)}(t_0)\right] = 0 \quad k=1,2,\ldots,n-1$$

jo saskaņā ar mūsu pieņēmumiem visi pārējie locekļi savstarpīgi iznīcinās. Tā kā sistēmas (25) determinants nav vienlīdzīgs nullei, seko, ka (23) ir spēkā arī, ja $h = r + 1$.

Noteikumi (23) tā tad ir spēkā visām h vērtībām no 0 līdz p. Ja (24) nebūtu spēkā nevienam i, punktā X_0 visu vienādojumu (17) p + 1-mie atvasinājumi būtu apmierināti, kas nozīmētu vismaz p + 1-mās kārtas pieskaršanos, pretēji hipotezei.

Otrādi, ja noteikumi (23) un (24) ir izpildīti, līkne L pieskaras līknei L' punktā X_0 ar koordinātām

$$x_{i0} = \psi_i(t_0) = \varphi_i(t_0)$$

Tiešām, tad funkcijām $f_k(\varphi)$ un $f_k(\psi)$ līdz ar to atvasi-

nājumiem līdz kārtai p ir tās pašas vērtības, tā tad
[illegible] līdz kārtai p.
pastāv (17). Ja (18) nebūtu spēkā, tad sekotu, ka sistēmu (25) ar r = p apmierina iekavu vērtības, kas nav visas vienlīdzīgas nullei. Bet tas nav iespējams, jo šīs sistēmas determinants nav vienlīdzīgs nullei.

Tā kā noteikumi (23) un (24) ir simmetriski attiecībā pret līkņu L un L' tekošām koordinātēm un parametra t vietā tos varētu formulēt ar s palīdzību, p-tās kārtas pieskaršanās gadījumā abām līknēm ir simmetriska loma: arī līkne L' pieskaŗas līknei L punktā X_0 ar kārtu p, vai citādi izsakoties: līknes L un L' pieskaŗas viena otrai punktā X_0 ar kārtu p.

Sakopojot iepriekšējo, varam teikt:

ja divām līknēm punktā X_0 ir p-tās kārtas pieskaršanās, to parametriskos vienādojumus (16) un (22) var izvēlēties tā, ka tā pati parametra vērtība t_0 raksturo punktu X_0 uz abām līknēm un šai vērtībai ir izpildīti noteikumi (23) un (24), un otrādi.

Pēdējais konstatējums ļauj bez grūtībām konstruēt līknes L', kam ar dotu līkni L tās dotā punktā X_0 ir tieši dotas kārtas p pieskaršanās. Līknes L' tekošās koordinātas varam pat vispārīgā gadījumā ņemt kā parametra t p-tās pakāpes polinomus, un speciālos gadījumos - kad neviens no sakarību (23) noteiktajiem polinomiem neatbilstu noteikumam (24) - kā t p+1-mās pakāpes polinomus.

4. Kā redzējām šī paragrafa otrā daļā, saimes S virsu A, kas punktā X oskulē līkni L, noteica sistēma (9). Ja šīs sistēmas noteiktās a_j vērtības apmierina vēl sakarus

$$(26)\quad \begin{array}{ll} F^{(k)}(t,a) = 0 & k=N,N+1,\dots,N+r-1 \\ F^{(N+r)}(t,a) \neq 0 & \end{array}$$

līknei L ar virsu A ir tieši $N + r - 1$-mās kārtas
pieskaršanās. To raksturosim sakot, ka virsai A
un līknei L punktā X ir r-tās kārtas superoskulā-
cija, jeb arī, ka virsa līkni superoskulē ar kārtu r.

Ievietojot noteikumos (26) sistēmas (9) dotās
a_j vērtības, katra no tiem top par vienu vienādojumu
attiecībā pret t. Tā kā patvaļīgi dotai līknei
pirmā vienādojuma (26) saknes neapmierinās otro vie-
nādojumu, šīm saknēm atbilstošos punktos, notiks
tieši pirmās kārtas superoskulācija; augstākas kārtas
superoskulācija nebūs iespējama.

Ja turpretim līkne L atrodas uz vienas vai vai-
rākām (galīgā skaitā) virsām V, tām atbilstošās
parametru a_j vērtības apmierinās noteikumus (9) un
(26) patvaļīgi augstam k. Šinī gadījumā mēs varam
runāt par bezgalīgi lielu superoskulācijas kārtu.

Nav grūti arī konstruēt piemērus, kur super-
oskulācijas kārta ir galīga un patvaļīgi augsta, vai
nu atsevišķā punktā, ja dota saime S, vai arī ikkatrā
dotas līknes L punktā. Pirmā gadījumā pietiek ņemt
līkni L, kam ir patvaļīgi augstas kārtas p pieskar-
šanās ar kādas virsas V patvaļīgu līkni L'. Otrā
gadījumā vispirms konstruējam katram līknes L punk-
tam X otru līkni L', kam ir tieši p-tās kārtas pie-
skaršanās ar L šai punktā. Velkot caur katru līk-
ni L' patvaļīgu virsu V, tai būs vismaz p-tās kār-
tas pieskaršanās ar līkni L, un varēs vienmēr pa-
nākt, ka šī kārta ir tieši p. Šādā veidā katrai
dotai līknei L varam piesaistīt viena parametra virsu
saimi S, kam atsevišķas virsas katrā L punktā tai
pieskaŗas patvaļīgi augstā galīgā kārtā p. Ņemot
līkņu L saimi, kas atkarīga no $N - 1$ parametra, un
katrai piesaistot nupat aplūkotā veidā viena parame-
tra virsu saimi, dabūjam virsu saimes ar patvaļīgi
lielu parametru skaitu N, kam atsevišķās virsas pat-
vaļīgi augstā kārtā p pieskaŗas līknēm L katrā to
punktā.

Dabiski rodas jautājums: ja dota virsu V saime S, vai ir iespējams atrast tādas līknes L, kam katrā to punktā būtu kārtas r superoskulācija ar kādu no virsām V, pie kam $r > 1$ un ir galīgs. Šai problēmai pievērsīsimies 4. paragrafā, iepriekš tai atrodot kādu citu formulējumu un iegūstamo rezultātu raksturošanai aplūkojot vienādojumu sistēmas atrisinājumu kārtu.

5. Izlietājot līkņu pieskaršanās kārtas jēdzienu, varam vispārīgā veidā raksturot divu varietātē T ietilpstošu kaut kādu dimensiju m un m' varietāšu Q un Q' pieskaršanās kārtu: kopīgā punktā X_0 tā ir tieši p, ja katrai vienas varietātes līknei L caur X_0 var atrast vismaz vienu otrās varietātes līkni L', kam ar L punktā X_0 ir vismaz p-tās kārtas pieskaršanās, un turklāt šajā varietātē eksistē vismaz viena līkne L, kam pieskaršanās kārta ar L' nevar būt augstāka par p. Līdzīgi, kā divu līkņu gadījumā, arī te var abu varietāšu tekošā punkta X koordinātas x_i izteikt kā m, respektīvi m', parametru funkcijas, tā kā visi vienas varietātes punkta noteicēji parametri ietilpst otrās varietātes parametru starpā. p-tās kārtas pieskaršanās gadījumā visiem x_i parciāliem atvasinājumiem pēc kopīgiem parametriem līdz kārtai p punktā X_0 ir tās pašas vērtības, bet no p + 1-mās kārtas atvasinājumiem vismaz viens pāris nav vienlīdzīgi.

Tāpat varētu arī, dodot kādu varietāšu Q saimi S', meklēt šīs saimes varietāti, kas iespējami augstā kārtā pieskaras dotai līknei vai dotai varietātei Q tās punktā X. Pieskaršanās kārtas pieaugšana nav te vairs raksturojama ar vienu noteikumu, kā tas bija līknei un virsai, bet gan ar vairākiem jauniem noteikumiem. Tāpēc vispārīgajā gadījumā te būs bezgalīgi daudz saimes S' varietāšu Q ar maksimālo pieskaršanās kārtu. Lai to starpā raksturotu vienu (vai vairākas, galīgā skaitā), ko varētu saukt par oskulētāju varietāti, būtu jāņem palīgā kādi papildus noteikumi. Šādi gadījumi ir pazīstami jau no klasiskās trīs dimensiju Euklīda telpes diferenciālģeometrijas : pastāv, piemēram, vienkārša bezgalība parasto skrūves līniju, kam ar dotu līkni tās dotā punktā ir otrās kārtas pieskaršanās, kamēr vispārīgajā gadījumā nevienai šī kārta nav trīs.

Ar šiem vispārinājumiem mēs speciāli nenodarbosimies, veltījot galveno uzmanību punktiem, virsām un to viena parametra saimēm.

6. Piesaistot varietātei V kādu ļoti vispārīgu metriku, mēs varam pieskaršanās kārtu raksturot ar bezgalīgi mazu attālumu salīdzināšanu, kā to mēdz darīt metriskās ģeometrijās. Šim nolūkam pietiks par divu bezgalīgi tuvu punktu X ar koordinātēm x_i - mēs rakstīsim X (x_i) - un Y(x_i+dx_i) attālumu ds ņemt kaut kādu x_i un dx_i funkciju, kam vienīgi jāpilda šāds noteikums: ds kārta patvaļīgiem dx_i ir vienlīdzīga ar viemazāko no dx_i kārtām. Citādi šī attālumu raksturotāja funkcija var būt pilnīgi patvaļīga.

Par punkta attālumu no virsas nosauksim tā vismazāko attālumu no virsas tekošā punkta. Noteiksim kārtu punkta Y(y_i) attālumam no virsas

$$(27) \qquad f(x) = 0 \quad ,$$

pieņemot, ka Y atrodas bezgalīgi tuvu virsai. Tad ir atrodami punktam Y bezgalīgi tuvi punkti X(y_i+dy_i), kas atrodas virsā. Ievietojot šāda punkta X koordinātes virsas vienādojumā un izvirzot pēc augošām dy_i pakāpēm, dabūjam

$$(28) \qquad f(y) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dy_i + \ldots = 0,$$

kur parciālo atvasinājumu vērtības jāaprēķina, liekot $x_i = y_i$, un atmestie locekļi ir otrās un augstākas pakāpes attiecībā pret dy_i. Pieņemot, ka punkts Y neatrodas bezgalīgi tuvu virsas singulāram punktam, kur pazūd visi $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, vismaz vienam no šiem lielumiem punktā Y ir galīga vērtība. Līdz ar to visu lielumu dy_i kārta nevar būt augstāka par $f(y)$ kārtu. Savukārt var atrast lielumus dy_i, kam vismazākā kārta ir vienlīdzīga $f(y)$ kārtai, un kas apmierina vienādojumu (28): var, piemēram, visus dy_i, atskaitot vienu, kam koeficients nav vienlīdzīgs nullei, pielīdzināt nullei. Pāri palikušajam dy_i ir tieši $f(y_i)$ kārta. Punkta Y attālumam no virsas ir tā tad tā pati kārta kā lielumam $f(y_i)$.

Aplūkojam līkni L, kam tekošās koordinātas dotas kā parametra t funkcijas

$$(29) \qquad x_i = x_i(t) \qquad ,$$

un tās punktus X_o un X_1, kam atbilst parametra vērtības t_o un $t_o + dt$, kur dt ir pirmās kārtas bezgalīgi mazs lielums. Ja visi $x'_i(t_o)$ nav vienlīdzīgi nullei, punktu X_o un X_1 attālums arī ir pirmās kārtas bezgalīgi mazs lielums. Pieņemot, ka punkts X_o atrodas virsā (27), noteiksim kārtu punkta X_1 attālumam no šīs virsas. To varam panākt, sizvietojot virsas vienādojuma kreisā pusē lielumus x_i ar to izteiksmēm (29) un nosakot kārtu šādi iegūtās t funkcijas $F(t)$ vērtībai, kad $t = t_o + dt$. Tā kā X_o atrodas virsā,

$$F(t_o) = 0$$

un izvirzot $F(t_o + dt)$ pēc augošām dt pakāpēm, šī lieluma kārta p būs vienlīdzīga vismazākam skaitlim k, kam

 046501

$$F^{(k)}(t_0) \neq 0 .$$

Salīdzinot ar līknes un virsas pieskaršanās kārtas raksturojumu, apzīmējot ar X_0 punktu, kas kopīgs līknei L un virsai V un nav singulārs ne vienai, ne otrai, un ar X_1 līknes punktu, kā attālums no X_0 ir pirmās kārtas bezgalīgi mazs lielums, redzam:

ja līknei L punktā X_0 ir p - 1-mās kārtas pieskaršanās ar virsu V, punkta X_1 attālumam no virsas V ir kārta p;

otrādi, ja punkta X_1 attālumam no virsas V ir kārta p, līkne L punktā X_0 pieskaŗas ar kārtu p-1 virsai V.

Tālāk, apzīmējot ar X_0 punktu, kas kopīgs divām līknēm L un L' un nav singulārs nevienai no tām, un ar X_1 punktu, kā attālums no X_0 ir pirmās kārtas bezgalīgi mazs lielums:

ja līknes L un L' punktā X_0 ar kārtu p-1 pieskaŗas viena otrai, katras līknes punktam X_1 attālums no otrās līknes ir p-tās kārtas bezgalīgi mazs lielums;

otrādi, ja vienas līknes punktam X_1, attālums no otrās līknes ir p-tās kārtas bezgalīgi mazs lielums, abām līknēm punktā X_0 ir p - 1-mās kārtas pieskaršanās.

Pirmā īpašība ir tiešas sekas pēdējai divu līkņu pieskaršanās kārtas definīcijai; otrās īpašības sekas ir pirmais L un L' pieskaršanās kārtas raksturojums.

Analogā veidā, salīdzinot bezgalīgi mazu attālumu kārtas, varētu arī raksturot divu kaut kādu varietāšu pieskaršanās kārtu to kopīgā punktā.

Bezgalīgi maza attāluma jēdziens, kā redzams, ļauj raksturot pieskaršanās kārtu tīri ģeometriskā veidā, nelietājot problēmai šķietami svešus analītiskus elementus - parametru un funkciju atvasinājumus pēc tā. Turklāt spriedumi un formulējumi top vienkāršāki. Metrikas lietāšanai tomēr ir savi trūkumi. Ja mēs, piemēram, definējam ds pielīdzinot nullei kādu ds un dx_i homogēnu formu, katrā punktā rodas izotropi virzieni, t.i. ds var tapt par 0 arī tad, ja visi dx_i nav vienlīdzīgi nullei. Lietājot šādu metriku, augšejie formulējumi būs spēkā ar ierobežojumiem, ko rada izotropo virzienu pastāvēšana. Lai raksturotu pieskaršanos arī šajos izņēmuma gadījumos, vienā vai otrā veidā būs jāņem palīgā kāds parametrs. Otrkārt, metrika punktiem piešķir izcilu lomu pārējo ģeometrisko objektu starpā; nelietājot parametriskus attēlus, mēs ģeometriskos objektus dodam savā zīgā globālā veidā. Abi šie apstākļi var apslēpt dažāda veida analoģijas.

Lietājot parametriskus attēlus un neņemot nekādu metriku, mums nav jārūpējas par izotropiem virzieniem, jo tādu nemaz nav. Līkne ir raksturota kā savu punktu ģeometriska vieta, kas mums ļauj, mutatis mutandis, tās īpašības attiecināt arī uz viena parametra virsu saimēm. Šo iemeslu dēļ, aplūkojot pieskaršanos, pamatā likts līknes parametrisks attēls un nevis attāluma jēdziens.

7. Atzīmējams, ka visas aplūkotās īpašības ir invariantas attiecībā pret katru nepārtrauktu vienviennozīmīgu un pietiekami daudzas reizes diferencējamu pamata varietātes T punktu transformāciju, ko raksturo sakari

$$(30) \qquad \bar{x}_i = \bar{x}_i(x_i)$$

starp kāda punkta $X(x_i)$ un pārveidotā punkta $\bar{X}(\bar{x}_i)$ koordinātēm. Tiešām, dodot x_i kā viena parametra t vienvērtīgas funkcijas, arī $\bar{x}_i$ būs t vienvērtīgas funkcijas un otrādi - transformācija (30) līknes pārvērš līknēs un virsas virsās. Lielumu $x_i(t)$ un to atvasinājumu līdz kārtai p vērtības, ja $t = t_0$, noteic lielumu $\bar{x}_i(t)$ un to attiecīgo atvasinājumu vērtības tai pašai parametra vērtībai un otrādi. Ja divām līknēm pirmās serijas lielumi ir vienlīdzīgi, arī pārveidotām līknēm attiecīgie lielumi būs vienlīdzīgi un otrādi; tā tad divu līkņu un tāpēc arī ikkatru divu varietāšu pieskaršanās kārta tiek uzglabāta.

Pieskaršanās ar kārtu p ir tranzitīva īpašība: ja līknēm L un L' ar trešo līkni L'' punktā X ir p-tās kārtas pieskaršanās, līknēm L un L' šai punktā ir vismaz p-tās kārtas pieskaršanās. Tāpēc arī varam pieskaršanās kārtas raksturošanai izlietāt pieskaršanās elementa jēdzienu. To definējam sakot, ka divām līknēm, kam ir p-tās kārtas pieskaršanās punktā X, ir kopīgs p-tās kārtas pieskaršanās elements ar nesēju X. Transformācijas (30) katras kārtas pieskaršanās elementus pārvērš tādas pat kārtas pieskaršanās elementos. Saskaņā ar Kleina Erlangas programmu[2] varam teikt, ka ar pieskaršanās kārtu saistītās īpašības veido pieskaršanās elementu ģeometriju. Šajā ģeometrijā ir spēkā daudzas teorēmas, kam klasiskā Eiklīda diferenciālģeometrijā ir šķietami tīri metriska raksturs. Minēsim divas no tām.

Ja divas līknes kādā m dimensiju varietātē Q tās punktā X, kas nav singulārs, ar kārtu p pieskaras virsām skaitā m - 1, kuņu šķelšanās varietāte nepieskaras varietātei Q punktā X, abām līknēm ir kopīgs p-tās kārtas pieskaršanās elements.

---

2) F. K l e i n, Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen, Erlangen 1872, iespiests Gesammelte Abhandlungen Bd.1 (1921) 460.-497.l.p. un Mathematische Annalen, Bd.43 (1893).

Šādā veidā formulētā teorēma ir divu līkņu p-tās kārtas pieskaršanās definīcijas triviālas sekas, jo hipotezes izveido šīs definīcijas noteikumu speciālu gadījumu. Specializējot Euklīda trīs dimensiju telpai, dabūjam pazīstamo teorēmu, ka divām virsas līknēm, kam tās punktā X sakrīt oskulētājas plāksnes, sakrīt arī liekumi.

Lai kādai virsai V' būtu p + 1-mās kārtas pieskaršanās ar visām dotas virsas V līknēm, kas iet caur punktu X_o un kam šai punktā ir kopīgs p-tās kārtas pieskaršanās elements, virsai V' ir jāpilda p + n noteikumi; citiem vārdiem: katrā p + n parametru virsu saimē vispārīgā gadījumā var atrast vienu vai vairākas (galīgā skaitā) virsas ar prasīto īpašību. Turklāt virsa V' pieskaras virsai V.

Visām līknēm L caur punktu X_o ar kopīgu p-tās kārtas pieskaršanās elementu šai punktā, kā redzējām 3. punktā, var izvēlēties tādus parametriskus attēlus

$$(31) \qquad x_i = x_i(t) ,$$

ka parametra vērtībai t_o, neatkarīgi no līknes izvēles, $x_i(t_o)$ ir punkta X_o koordinātas un visu x_i atvasinājumiem pēc t līdz kārtai p ir tās pašas vērtības. Ja līkne L atrodas dotā virsā V ar vienādojumu

$$(32) \qquad f(x) = 0,$$

aizvietojot vienādojumā (32) lielumus x_i ar funkcijām (31), dabūtais vienādojums un tā atvasinājumi būs apmierināti ikkatrai t vērtībai. It īpaši, ja $t = t_o$, pastāvēs

 046505

$$
(33)\quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{d^{p+1}x_i}{dt^{p+1}} + F_{p+1} = 0 \end{cases}
$$

kur lielumu F_{p+1} nosaka f parciālo atvasinājumu pēc x_i līdz kārtai p + 1 un x_i atvasinājumu pēc t līdz kārtai p vērtības.

No parametriem a_j (j = 1, 2, ..., N) atkarīgo virsu V' raksturojam ar vienādojumu

$$
(34)\quad g(x,a) = 0 \ .
$$

Lai virsai V' ar līkni L būtu p + 1-mās kārtas pieskaršanās, aizvietojot vienādojumā (34) x_i ar funkcijām (31) parametra vērtībai $t = t_o$ jāapmierina dabūtais vienādojums, kā arī tā p + 1 pirmie atvasinājumi:

$$
(35)\quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{d^{p+1}x_i}{dt^{p+1}} + G_{p+1} = 0 \ . \end{cases}
$$

Lielums G_{p+1} nosakāms analogi lielumam F_{p+1} , funkcijas f vietā ņemot funkciju g.

Tā kā visām līknēm L punktā X_o lielumiem x_i un to atvasinājumiem pēc t ir tās pašas vērtības, vienādojums (34) un pirmie p no vienādojumiem (35) katrs dod pa vienam noteikumam lielumiem a_j. Vispārīgā gadījumā šie noteikumi būs savstarpīgi neatkarīgi, jo katrā ietilpst g parciāli atvasinājumi, kas iepriekšejā neietilpst. Pēdējam vienādojumam (35) jābūt apmierinātam visām tām $x_i^{(p+1)}(t_o)$ vērtībām, kas apmierina pēdējo vienādojumu (33), tā tad punktā X_o abu šo vienādojumu koeficientiem jābūt proporcionāliem, kas dod n noteikumus:

$$(36) \qquad \frac{\frac{\partial g}{\partial x_1}}{\frac{\partial f}{\partial x_1}} = \dots = \frac{\frac{\partial g}{\partial x_n}}{\frac{\partial f}{\partial x_n}} = \frac{G_{p+1}}{F_{p+1}} \qquad \text{punktā } X_o \, .$$

Ja šie noteikumi ir izpildīti, pirmo n attiecību vienlīdzība rāda, ka pirmie noteikumi sistēmās (33) un (35) ir viens otra sekas, tāpēc virsas V un V' punktā X_o pieskaņas viena otrai, jo ikkatra līkne, kas pieskaņas vienai no tām, pieskaņas arī otrai. Tā kā visas līknes L apmierina noteikumus (33), virsas V' noteikšenai mums paliek n + p vispārīgā gadījumā neatkarīgi noteikumi: (34), (35), atskaitot pirmo, un (36).

Specializējot Euklīda trīs dimensiju telpai (n = 3), ņemot p = 1, n + p = 4. Par virsu V' varam tā tad ņemt lodi, kam ar katru līkni L ir otrās kārtas pieskaršanās. Lodes šķēlums ar līknes L oskulētāju plākseni punktā X_o ir L oskulētājs riņķis šai punktā, no kā seko Meusnier teorēma.

Blakus pieskaršanās elementiem, kas raksturoja līkņu pieskaršenos, var aplūkot arī tos, ko raksturo divu kaut kādu varietāšu pieskaršanās, šādu elementu varietātes, u.t.t. Ar šiem jautājumiem mēs speciāli nenodarbosimies. Atzīmēsim tikai, ka to teorijai ir ciešs sakars ar S. Lie pieskaršanās transformācijām, kas šādus elementus pārvērš vienu otrā, un diferenciālvienādojumu teoriju. Katrs diferenciālvienādojums vai to sistēma raksturo kādu pieskaršanās elementu varietāti Q. No S. Lie viedokļa integrēt diferenciālvienādojumu nav nekas cits, kā no varietātes Q elementiem izveidot citas varietātes, kas pakļautas speciāliem noteikumiem. [3])

8. Pieskaršanās kārtu virsai V un līknei L punktā X_o varam definēt arī tai gadījumā, ja X_o ir singulārs ar algebriskas singularitātes raksturu, t. i., ja šai punktā vai nu pazūd virsas vienādojuma

$$f(x) = 0$$

kreisās puses visi parciālie atvasinājumi pēc x_i līdz zināmai kārtai, vai arī pazūd visu līknes tekošo koordinātu

$$x_i = x_i(t) \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

atvasinājumi pēc t līdz zināmai kārtai, vai beidzot abi noteikumi ir izpildīti reizē.

Pieņemsim, ka visi virsas punkti nav singulāri un ka punkta X_o tuvumā katram līknes punktam atbilst tikai viena t vērtība. Vienādojumam

$$F(t) = f[\, x(t)\,] = 0$$

$t = t_o$ būs vairākkārtīga sakne, jo funkcijas F(t)

---

3) Skat. piem. F. K l e i n, Vorlesungen über höhere Geometrie (Berlin, Springer), 1926, kur šie sakari aplūkoti vairākkārt. Minēto S. L i e viedokli skat. 275.l.p. turpat.

atvasinājums pēc t punktā X_o ir vienlīdzīgs nullei punkta singularitātes dēļ. Pielīdzinot nullei pirmo F(t) atvasinājumu, kas automatiski nepazūd, ja $t = t_o$, mēs dabūjam noteikumu, lai līknes un virsas pieskaršanās kārta ir vismaz viens. Noteikumus augstākām pieskaršanās kārtām dabūsim pielīdzinot nullei, ja $t = t_o$, tālākos F(t) atvasinājumus.

Cita veida singularitāte rodas, ja to pašu līknes punktu X_o dod dažādas parametra vērtības t_o, t_1, ..., t_k. Šajā gadījumā līknei ir vairāki zari, kas iet caur X_o; katra zara tekošās punkta koordinātas dabūjam, aplūkojot parametra vērtības atsevišķo t_h (h = 0, 1, ..., k) vērtību tuvumā. Tad varam katram atsevišķam zaram noteikt pieskaršanās kārtu ar virsu V, kas iet caur X_o. Vispārīgā gadījumā šīs kārtas var arī nebūt vienlīdzīgas, tāpēc te nevarēs runāt par līknes un virsas pieskaršanās kārtu - pieskaršanās veidu raksturo visu zaru pieskaršanās kārtu kopums.

Abos aplūkotos gadījumos punktā X_o sakritušo virsas un līknes šķelšanās punktu skaits būs vairāk kā par vienu vienību lielāks par pieskaršanās kārtu, respektīvi atsevišķo zaru pieskaršanās kārtām un arī to summu. Lai vienkāršotu spriedumus, mēs arī turpmāk, ja vien nebūs teikts pretējais, no aplūkošanas izslēgsim singulāros punktus.

§2. Par viena parametra virsu saimēm.

1. Aplūkojot līknes L un virsas pieskaršanos, mēs vispirms meklējām noteikumus, lai noteikta virsa ietu caur p bezgalīgi tuviem līknes punktiem. Šim nolūkam saimes S vispārīgās virsas A vienādojumā

$$(37)\qquad f(\, x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_N\,) = 0$$

mēs uzskatījām punkta X koordinātes x_i par viena parametra t funkcijām, piešķīrām argumentam vērtības t_1, t_2, ..., t_p un likām tām tiekties uz vienu vērtību t_o. Tagad rīkosimies otrādi: dosim lielumus a_j kā viena parametra funkcijas:

$$(38)\qquad a_j = a_j(t) \qquad j = 1, 2, \ldots, N$$

Šādejādi noteiktie a_j raksturo viena parametra virsu saimi R. Piešķirot parametram t vērtības t_1, t_2, ..., t_p

$$(39)\qquad \begin{cases} G(x,\, t_1) = 0 \\ G(x,\, t_2) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ G(x,\, t_p) = 0 \end{cases} ,$$

kur

$$(40)\qquad G(\, x,\, t) = f[\, x,\, a(t)\,] \; .$$

Liekam visām vienādojumu (39) raksturotām virsām tiekties uz virsu A_o , ko nosaka $t = t_o$; katrs punkts, kas atrodas visās virsās (39), robežstāvoklī atradīsies arī virsās v

 046510

$$
(41) \quad \begin{cases} G(x, t_o) = 0 \\ G'(x, t_o) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ G^{(p-1)}(x, t_o) = 0 \end{cases}
$$

Pēc analoģijas ar bezgalīgi tuvu punktu jēdzienu , arī virsas, kam parametru a_j starpības ir bezgalīgi mazas, varam saukt par bezgalīgi tuvām virsām. Ja pastāv sakarības (41) un turklāt

$$
(42) \quad G^{(p)}(x, t_o) \neq 0,
$$

mēs varam teikt, ka punkts X atrodas tieši p bezgalīgi tuvās saimes R virsās, kas sakrīt ar virsu A_o.

Vienādojumi (38) līdz (41) savā uzbūvē atbilst iepriekšējā paragrafa vienādojumiem (4) līdz (7), vienīgi lomām ir mainītas abas lielumu serijas x_i un a_j, t.i., punktu X un virsu A raksturotāji skaitļi. Izdarot šādu pat aizvietojumu un apmainot lomām arī skaitļus n un N, kas izteic x_i un a_j skaitu, varētu pārrakstīt visus iepriekšējā paragrafa vienādojumus. Pārveidotie vienādojumi izteiks īpašības, kas rodas no izejas vienādojumiem atbilstošām īpašībām, tur apmainot lomām punktus X un virsas A.

Mēs esam nonākuši pie zināma veida dualitātes principa: vispārīgiem sakariem, kas saista bezgalīgi tuvus punktus un saimes S virsas, atbilst duāli sakari, kur punkti un virsas mainījušies lomām un kas tā tad saista bezgalīgi tuvas virsas un punktus. Ja n = N, šī dualitāte ir pilnīga - punktu varietātēm ar kādu dimensiju m atbildīs virsu varietātes ar tādu pat dimensiju skaitu. Ja turpretim n ≠ N, dažādie veidi, kādos varam raksturot m dimensiju punktu varietāti Q, var tai likt atbilst divām dažāda veida virsu varietātēm. Tiešām, Q varam noteikt, dodot visus x_i kā m neatkarīgu parametru funkcijas, vai arī nosakot

 046511

n - m neatkarīgus sakarus x_i starpā. Aizvietojot x_i ar a_j, pirmā gadījumā dabūsim m parametru virsu varietāti, bet otrā gadījumā - varietāti ar N - n + m parametriem. Pirmais attēlojums var dot triviālus rezultātus, ja $m \geqslant N$, tāpat arī otrais, ja $N-n+m=0$; ja $N - n + m < 0$, otram attēlam vispār nebūs jēgas.

Minētais dualitātes princips būtībā nav nekas jauns. Integrējot Pfaffa vienādojumus, piemēram, ne tikai punkti un virsas, bet vispār katra punktu varietāte uzskatāma par līdzvērtīgu veidojumu [4]. Bet kamēr pieminētā un tam analogos gadījumos mēdz aplūkot kādas noteiktas kārtas pieskaršanās elementus, mēs aplūkojam visas dotās problēmas noteikumos iespējamās pieskaršanās kārtas.

2. Pārveidosim dualistiski dažus jēdzienus, ko sastapām iepriekšējā paragrafa sākumā. Vienkāršākas izteiksmes dēļ virsas A noteicējus parametrus a_j sauksim par tās koordinātām; ja punkta X un virsas A koordinātas ir saistītas ar sakaru (37), mēs teiksim, ka punkts un virsa incidē jeb ir incidenti. Vienai virsai A incidentiem punktiem X duāli atbilst virsas, kas incidē ar vienu punktu X; līknei L kā punktu ģeometriskai vietai atbilst virsu saime R kā virsu ģeometriskā vieta.

No aplūkošanas izslēgtie virsas un līknes singulārie punkti dod: punktam X incidento virsu saimes singulārās virsas, kam pazūd visi $\frac{\partial f}{\partial a_j}$ un saimes R singulārās virsas, kam pazūd visi $\frac{da_j}{dt}$; pēdējās sauksim par stacionārām virsām.
Arī te no aplūkojuma vispār izslēgsim abu veidu singulārās virsas.

Tālāk aplūkosim dažus jēdzienus, ko var saistīt ar saimi R un noteiksim to duālos pārveidojumus. Vi-

---

4) Skat. piem. E. K l e i n, loc. cit. 240.-241.l.p.

sām virsām (41) kopīgos punktus sauksim par virses A_o p - 1-mās kārtas charakteristiskiem punktiem. Šo punktu veidoto varietāti sauksim par virses A_o p-1-mās kārtas charakteristiku; vispārīgā gadījumā tai ir n - p dimensiju, jo to noteic p vienādojumi x_i starpā; dimensiju skaits būs lielāks, ja viens vai vairāki no šiem vienādojumiem ir pārējo sekas. Konstruējot katrai saimes R virsai p - 1-mās kārtas charakteristikas, to kopība vispārīgā gadījumā izveidos n - p + 1 dimensijas varietāti, ko sauksim par p - 1-mās kārtas saimes R aploceēju Q_{p-1}.

Konstatēsim, ka Q_{p-1} pieskaras ar kārtu vismaz p - 1 katrai saimes R virsai katrā tās p - 1-mās kārtas charakteristiskā punktā; šis fakts ir neatkarīgs no Q_{p-1} dimensiju skaita. Lai to pierādītu, pietiks konstatēt, ka katra līkne L varietātē Q_{p-1} caur kādu virses A_o p - 1-mās kārtas charakteristisku punktu pieskaras šai punktā virsai A_o ar kārtu vismaz p - 1. Līknes varietātē Q_{p-1}, kuŗu visiem punktiem atbilst tā pati t_o vērtība, atrodas vienā virsā A_o. Atliek tā tad vienīgi aplūkot līknes, kuŗu dažādiem punktiem atbilst dažādas t_o vērtības. Apzīmējot šīs mainīgās vērtības ar t, varam uzskatīt līknes L tekošā punkta X koordinātas x_i par t funkcijām. Šīs funkcijas, liekot $t = t_o$, katrai t_o vērtībai apmierina vienādojumus (41) - mēs varam uzskatīt, ka tie dabūti no pirmā no tiem, kas atvasināts pē t_o; ir jāpierāda, ka liekot $t = t_o$, ir apmierināti arī pirmā vienādojuma p - 1 pirmie atvasinājumi pēc t. Tā kā mums jāatvasina kā pēc t, tā pēc t_o, vienkāršības labad dosim pēdējam lielumam jaunu apzīmējumu s. Pierādamā īpašība iegūst šādu formulējumu, parciālos atvasinājumus apzīmējot ar attiecīgo argumenta pakāpi indeksā:

ja, liekot t = s, ir identiski apmierināti sakari

$$(42)\quad \begin{cases} G(t, s) = 0 \\ G_s = 0 \\ G_{s^2} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ G_{s^{p-1}} = 0 \end{cases},$$

tā pati t vērtība apmierina arī sistēmu

$$(43)\quad \begin{cases} G = 0 \\ G_t = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ G_{t^{p-1}} = 0 \end{cases}$$

Tiešām, liekot t = s un atvasinot šādā kārtā identiski apmierinātos vienādojumus (42), atskaitot pēdējo, redzam, ka

$$(44)\quad \begin{cases} G_s + G_t = 0 \\ G_{s^2} + G_{st} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ G_{s^{p-1}} + G_{s^{p-2}t} = 0 \end{cases}$$

Tā kā vienādojumi (42) rāda, ka t = s identiski pārvērš par nulli šo vienādojumu kreiso pušu pirmos locekļus, pastāvēs arī identiski

$$(45)\quad \begin{cases} G_t = 0 \\ G_{st} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ G_{s^{p-2}t} = 0 \end{cases}$$

Atvasinot šos ar noteikumu t = s identiski apmierinātos vienādojumus un salīdzinot iegūtos vienādojumus ar (45), redzam, ka identiski top par nulli visi G parciālie atvasinājumi līdz kārtai p - 1, kas rodas divas reizes parciāli atvasinot pēc t, un pārējās - pēc s, u.t.t. Gala rezultātā konstatējam, ka t = s pārvērš identiski par nulli ne tikai vienādojumu (43) kreisos locekļus, bet arī visus funkcijas G parciālos atvasinājumus līdz kārtai p - 1 ieskaitot.

Iegūto rezultātu varam nedaudz vispārināt: ja noteikums t = s padara identiski par nulli funkciju G(s,t) un pa vienam no tās parciāliem atvasinājumiem katrā kārtā līdz p - 1 , tas padara identiski par nulli visus G parciālos atvasinājumus līdz kārtai p - 1. Tiešām, ja p = 2, šī īpašība seko no pirmā vienādojuma (44). Ja tā ir spēkā līdz kārtai p = k, atvasinot visus k - 1-mās kārtas parciālos atvasinājumus, dabūjam k savstarpīgi neatkarīgus vienādojumus, kas izteic, ka divu k-tās kārtas parciālo atvasinājumu summa ir nulle, ja t = s. Tā kā pēc hipotezes pazūd viens no šiem atvasinājumiem, pazūd arī pārējie, no kā seko minētā īpašība.

Iztulkojot ģeometriski sistēmu (42) un (43) ekvivalenci, aplūkosim līkni L ar tekošā punkta X koordinātām $x_i(t)$ un virsu saimi R ar tekošās virsas A koordinātām $a_j(s)$. Saistām kopā punktu X un virsu A, kam t = s. Ja katrs punkts X atrodas p saimes R bezgalīgi tuvās virsās, kas sakrīt ar virsu A, katra virsa A iet caur p līknes L bezgalīgi tuviem punktiem, kas sakrīt ar punktu X.

Līdz ar to ir pierādīta arī agrāk minētā aplieceju īpašība, kas ir tiešas sekas nupat konstatētam faktam.

Duāli pārveidojot, saime R un tās vispārīgā virsa A dod līkni L un tās vispārīgo punktu X. Virses A p-tās kārtas charakteristiskiem punktiem atbilst virsas, ko varam saukt par p-tās kārtas charakteristiskām virsām; tās iet caur p + 1 bezgalīgi tuvu līknes L punktu. Beidzot charakteristikām atbilst charakteristisko virsu saimes. Šo virsu un saimju īpašības varam iegūt duāli pārveidojot charakteristiku īpašības.

Tagad varam dot arī raksturojumu singulārām virsām A, kas incidē ar punktu X_1 un kam tanī pazūd visi $\frac{\partial f}{\partial a_j}$: šīm virsām, neatkarīgi no funkciju $a_j(s)$ izvēles, ir izpildīti abi noteikumi (42) ar $p = 2$: pirmais neizteic neko citu, kā A un X_1 incidenci; otrā pazūd visu a_j atvasinājumu koeficienti. Punkts X_1 tā tad atrodas visās virses A pirmās kārtas charakteristikās. Virsa A šai punktā, ja tas nav singulārs, tāpēc pieskaras katras viena parametra virsu saimes R, kas satur A, pirmās kārtas aplieceējai. Turklāt no $G_s = 0$ seko $G_t = 0$; tā tad katra līkne L, kas sastāv tikai no aplūkotajiem punktiem X_1 katrā savā punktā pieskaras attiecīgai virsai A. Visu X_1 ģeometrisko vietu varam saukt par saimes T kopīgo aplieceēju U, jo šī virsa punktos X_1 pieskaras attiecīgajām virsām A. Šī īpašība izriet no sistēmu (42) un (43), kur $p = 2$, ekvivalences. Kā mēs redzējām, katram punktam X_1 ir izpildīti noteikumi (42). Ņemot viena parametra punktu X_1 saimi, t.i., virsas U līkni, (43) rāda, ka šī līkne pieskaras virsai A. Atsevišķu virsu A singulāriem punktiem X tā tad ar duālu transformāciju atbilst singulāras virsas A, kas aplūkojamā punktā X_1 pieskaras saimes T kopīgai aplieceējai.

3. Ja virsu A saime R dota patvaļīgi, tās charakteristisko punktu maksimālā kārta vispārīgā gadījumā ir $n - 1$. Duāli pārveidojot, atkārtosim iepriekšējā paragrafa Nr.Nr. 2 un 4 slēdzienus. Pārrakstot sistēmu (41) gadījumam $p = n$ un aizvietojot t_0 ar s, dabūtā sistēma

$$(46) \quad \begin{cases} G(x, s) = 0 \\ G'(x, s) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ G^{(n-1)}(x, s) = 0 \end{cases}$$

satur n vienādojumus ar n nezināmiem x_i. Ja identiski nepastāv

$$(47)\qquad \frac{D(G, G', \ldots, G^{(n-1)})}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = 0$$

jebkurām x_i vērtībām, sistēmu (46) varam atrisināt attiecībā pret x_i, tos iegūstot kā s funkcijas. Ja vienādojumi (46) nav visi lineāri attiecībā pret visiem x_i, mēs iegūsim vairākas atrisinājumu sistēmas. Katrai sistēmai atbilstošo punktu X sauksim īsāk par virsas A characteristisko punktu (nevis n - 1-mās kārtas characteristisko punktu); to vispārīgā gadījumā nosaka n bezgalīgi tuvas saimes R virsas. Ja sistēmas (46) noteiktās x_i vērtības apmierina arī vēl sakarus

$$(48)\qquad G^{(h)}(x,s) = 0 \qquad h = n, n+1, \ldots, n+q-1$$
$$G^{(n+q)}(x,s) \neq 0$$

punkts X atrodas tieši n + q bezgalīgi tuvās saimes R virsās A. To raksturosim sakot, ka punkts X ir q-tās kārtas supercharakteristisks punkts.

Ievietojot sistēmas (46) dotās x_i vērtības noteikumos (48), katrs no tiem dos vienu vienādojumu attiecībā pret s. Patvaļīgi dotai saimei R pirmā vienādojuma (48) saknes neapmierinās otro, tāpēc atsevišķām virsām varēs būt pirmās kārtas supercharakteristiski punkti; šāda veida augstākas kārtas punktu vispārīgā gadījumā nebūs.

Ja turpretim visas saimes R virsas A iet caur vienu vai vairākiem (galīgā skaitā) punktiem X, tos varēs uzskatīt par patvaļīgi augstas kārtas supercharakteristiskiem punktiem. Minētā iepriekšējā paragrafa 4. daļas beigu piemērs rāda, ka eksistē viena parametra virsu saimes ar patvaļīgi augstas kārtas super- Jā nu/ (47)

charakteristiskiem punktiem.

Beidzot formulējam turpat minētās problēmas duālo pārveidojumu: ja dota virsu A saime S, vai iespējams tās apvienot viena parametra saimēs, kur katrai virsai ir kārtas q supercharakteristisks punkts, pie kam $q \geq 1$ un galīgs.

Pagaidām atliekot šī jautājuma sīkāku iztirzāšanu, atzīmēsim, ka abām problēmām:

atrast līkni L ar maksimālo superoskulācijas kārtu ar vienu dotas saimes S virsu katrā tās punktā, un

atrast saimē S ietilpstošas viena parametra virsu saimes R, kam eksistē maksimālās kārtas supercharakteristiski punkti

ir tie paši atrisinājumi, ja tie vispār eksistē. Tos dod līknes L un to oskulētāju virsu A saime R. Tiešām, kā rāda jau vairākkārt izlietātā sistēmu (42) un (43) ekvivalence: kādas līknes L pieskaršanās kārta ar oskulētāju virsu A tās tekošā punktā X ir vienlīdzīga punkta X, kā virsu A saimes charakteristiska punkta, kārtai. Ja viens no šiem skaitļiem iegūst vispār iespējamo maksimālo vērtību, arī otrs top maksimālis.

4. Jemsta varietātes T elementus šī darba sākumā, ko ērtības labad mēs nosaucām par punktiem, mēs raksturojām vienīgi ar iespējamību tiem piesaistīt koordinātas x_i. Līdzīgā veidā arī saimes S virsas mēs raksturojām ar koordinātām a_j un punkta X un virsas A incidences noteikumu

$$(49) \quad f(x, a) = 0.$$

Piemēros mēs minējām afīno un Euklīda telpu, vārdiem " punkts " un " virsa " piešķirot parasto nozīmi. Tik pat labi mēs tomēr ar vārdiem " punkts " un " virsa " varētu apzīmēt kaut kādu divu veidu ģeometriskus objektus, ko katru var raksturot ar koordinātēm un kam vienādojums šo koordinātu starpā izteic kādu ģeometrisku īpašību. Tā , piemēram, par " punktu " mēs varētu ņemt Eukilda telpas taisni, par " virsu " - lodi, un ar " virsas vienādojumu " (49) izteikt, ka taisne šķeļ lodi zem kāda noteikta leņķa. Visas atrastās īpašības paliks spēkā, tās izteicot piemērotā veidā.

Šādā kārtā aplūkotie pieskaršanās teorijas elementi paver ceļu būtībā identiskiem, bet formā ļoti dažādiem ģeometrijas pētījumiem.

Pieminēto objektu nosaukuma maiņu mēs būtu varējuši izdarīt arī ta, pārmainot vārdus objektiem, ko nosaucām par punktu un par virsu - ar šādu maiņu mēs būtu panākuši to pašu, kā ar duālās transformācijas lietāšanu - abi pamata objekti būtu mainījušies lomām.

§3. Vienādojumu sistēmas atrisinājuma kārtas noteikšana.

Ja vienādojumam ar vienu nezināmo a

$$(50) \quad f(a) = 0$$

$a = a_0$ ir r-tās kārtas sakne, kā zināms pastāv

$$(51) \quad \begin{gathered} f(a_0)=f'(a_0)=f''(a_0)=\ldots=f^{(r-1)}(a_0)=0, \\ f^{(r)}(a_0)\neq 0 \ . \end{gathered}$$

Izsakot a kā kāda cita lieluma t apgriežami vienvērtīgu funkciju

$$(52) \quad a = \varphi(t),$$

kam $\qquad a_0 = \varphi(t_0) \quad$ un $\quad \varphi'(t_0) \neq 0$,

arī sistēmai, ko veido vienādojumi (50) un (52), ja pastāv (51), $t = t_0$, $a = \varphi(t_0)$ ir r-tās kārtas atrisinājumu sistēma. Uzskatot a par vienas dimensijas varietātes punkta koordinātu, iepriekšējo paragrafu valodā varam teikt, ka virsai (50) un līknei (52) ir r bezgalīgi tuvu kopīgu punktu. Tie sakrīt ar punktu, kam koordināta ir $a_0 = \varphi(t_0)$.

Meklēsim analogu kriteriju, kas ļaus noteikt kārtu lielumu a_j noteicējas vienādojumu sistēmas

$$(53) \quad f_k(\, a_1, a_2, \ldots, a_N \,) = 0 \qquad k=1,2,\ldots,N$$

atrisinājumam $a_j = a_{jo}$.

Pieņemsim, ka pietiekami maziem $|\, a_j - a_{jo} \,|$ ir izpildīti šādi noteikumi:

a) a_{jo} veido vienīgo (53) atrisinājumu sistēmu (šis noteikums ir vienmēr izpildīts, ja (53) atrisinājumu kopskaits ir galīgs);

b) funkciju $f_1, f_2, \ldots, f_{N-1}$ parciālie atvasinājumi pēc visiem a_j veido mātricu ar rangu $N-1$. Ja šis noteikums ir izpildīts, vajadzības gadījumā pārnummurējot lielumus a_j, varēsim vienmēr panākt, ka

$$(54) \qquad (a_j) = \frac{D(f_1,f_2,\ldots,f_{N-1})}{D(a_1,a_2,\ldots,a_{N-1})} \neq 0 \quad .$$

Lai raksturotu atrisinājuma $a_j = a_{jo}$ kārtu, izteiksim visus a_j kā viena parametra t vienvērtīgas funkcijas

$$(55) \qquad a_j = \varphi_j(t) \qquad ,$$

pie kam kādai noteiktai t vērtībai t_o

$$(56) \qquad a_{jo} = \varphi_j(t_o) \qquad \text{visiem } j$$

un

$$(57) \qquad \varphi_j'(t_o) \neq 0 \qquad \text{vismaz vienam } j.$$

Ievietojot a_j vērtības (55) sistēmas (53) vienādojumos, dabūjam vienādojumus, kam visiem ir sakne $t = t_o$. Ja iespējams atrast tādas funkcijas (55), kas apmierina (56) un (57) tā, ka saknes $t = t_o$ kārta katram no vienādojumiem ir vismaz r un vismaz vienam vienādojumam tā ir tieši r, bet nav iespējams atrast šādas funkcijas, kas katra vienādojuma (53) saknei $t = t_o$ piešķir kārtu lielāku par r, mēs teiksim, ka a_{jo} ir sistēmas (53) r-kāršs atrisinājums.

Uzskatot a_j par kādas N dimensiju varietātes punkta A koordinātēm, varam augšējo atrisinājuma kārtas raksturojumu izteikt ģeometriskākā veidā:

ja iespējams atrast līkni, kam punkts A_o ar koordinātām a_{jo} nav singulārs un kam šai punktā sakrīt vismaz r bezgalīgi tuvi šķelšanās punkti ar katru no virsām (53), pie kam vismaz vienai no virsām šis skaits ir tieši r, bet nav iespējams atrast līkni, kam šie noteikumi būtu izpildīti kādam r', kas lielāks par r, a_{jo} ir sistēmas (53) r-tās kārtas atrisinājums.

Pateicoties noteikumam (54) par līkni, kas dod maksimālo iespējamo r vērtību, varam ņemt pirmo N-1 virsu (53), ko sauksim par virsām V, šķelšanās līkni L. Tiešām, (54) rāda, ka šo virsu vienādojumu veidoto sistēmu var atrisināt attiecībā uz a_1, a_2, ..., a_{N-1} tos iegūstot pietiekami maziem $| a_j-a_{jo} |$ kā a_N viennozīmīgas funkcijas, kas top par a_{jo} ($j = 1, 2, ..., N-1$), kad $a_N = a_{No}$. Izsakot a_N kā parametra t patvaļīgu apgriežami vienvērtīgu funkciju $\varphi_N(t)$, kam izpildīti noteikumi (56) un (57), iegūstam sistēmu (55) ar prasītām īpašībām (56).

Iegūtās a_j vērtības identiski apmierina visus vienādojumus (53), izņemot pēdējo, kam sakne t_o pēc hipotezes ir izolēta un kas tāpēc nevar būt identiski apmierināts. Tas dod kādu vienādojumu attiecībā pret t

$$(58) \qquad F(t) = 0$$

kur

$$(59) \qquad F(t) = f_N(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_N)$$

Vienādojumam (58) $t=t_o$ ir sakne ar kārtu r, ja pastāv

$$(60) \qquad \begin{cases} F(t_o) = F'(t_o) = F''(t_o) = ... = F^{(r-1)}(t_o) = 0, \\ F^{(r)}(t_o) \neq 0 . \end{cases}$$

Konstatēsim, ka neviena cita līkne L' nevar šķelt katru no virsām (53) vairāk kā r bezgalīgi tuvos punktos, kas sakrīt ar punktu A_o. Pieņemsim pretējo: līkne L' šķeļ katru no virsām (53) vismaz r + 1 bezgalīgi tuvā punktā, kas sakrīt ar A_o. Noteikumu (54) un (57) dēļ punkts A_o nav singulārs ne kādai no virsām V, ne arī līknei L'. Līkne L' tā tad punktā A_o ar kārtu vismaz r pieskarsies katrai no virsām V un tāpēc arī to šķelšanās līknei L. Bet tad, kā redzēts, var izvēlēties tādus līkņu L un L' parametriskus attēlus, ka punktā A_o, kur $t = t_o$, tām visu attiecīgo tekošo koordinātu atvasinājumi pēc parametra līdz kārtai r ir vienlīdzīgi. Tad arī sakarības (59) definētai funkcijai $F(t)$, ja $t = t_o$, līdz ar tās atvasinājumiem līdz kārtai r ir tās pašas vērtības, vienalga, vai mēs to nosakām ar līknes L vai L' parametrisko attēlu palīdzību. Tāpēc arī $F^{(r)}(t_o)$ abām līknēm būs ar to pašu vērtību un līknēm L un L', pretēji pieņēmumam, atbilst tas pats bezgalīgi tuvu ar A_o sakritušu šķelšanās punktu skaits ar pēdējo virsu (53).

Izteiksim tagad noteikumus (60) vienīgi ar funkciju f_k un lielumu a_{jo} palīdzību. Šim nolūkam vispirms aprēķinām kādas a_j funkcijas $H(a_1,a_2,\ldots,a_N)$ atvasinājumu pēc t, ja a_j ir doti ar sakarībām (55), kur $\varphi_N(t)$ ir patvaļīgs un pārējie φ noteikti ar sistēmas (53) pirmo N-1 vienādojumu palīdzību. Atvasinot identiski pastāvošos vienādojumus (53), dabūjam N-1 vienādojumu

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f_k}{\partial a_j}\,\frac{da_j}{dt} = 0 \qquad k = 1,2,\ldots,N-1$$

Atrisinot šo homogēno lineāro vienādojumu sistēmu attiecībā pret visiem $\frac{da_j}{dt}$, dabūjam

$$
\begin{cases}
\dfrac{da_1}{dt} = \rho \dfrac{D(f_1,\, f_2,\, \ldots,\, f_{N-1})}{D(a_2, a_3, \ldots, a_N)} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\dfrac{da_j}{dt} = (-1)^{j+1} \rho \dfrac{D(f_1, f_2, \ldots, f_{N-1})}{D(a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_N)} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\dfrac{da_N}{dt} = (-1)^{N+1} \rho \dfrac{D(f_1, f_2, \ldots, f_{N-1})}{D(a_1, a_2, \ldots, a_{N-1})}
\end{cases}
$$

Proporcionalitātes faktoru ρ noteiks pēdējais vienādojums, jo $\dfrac{da_N}{dt} = \dfrac{d\varphi_N}{dt}$ ir zināms. Vajadzības gadījumā mainot parametru, varēsim panākt, ka $\rho = (-1)^{N-1}$. Tad

$$
\frac{dH}{dt} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial H}{\partial a_j} \frac{da_j}{dt} = \frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_{N-1}, H)}{D(a_1, a_2, \ldots, a_N)}
$$

Apzīmējot

$$
(61) \quad
\begin{cases}
D_1 = \dfrac{D(f_1, f_2, \ldots, f_{N-1}, f_N)}{D(a_1, a_2, \ldots, a_N)} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
D_{i+1} = \dfrac{D(f_1, f_2, \ldots, f_{N-1}, D_i)}{D(a_1, a_2, \ldots, a_N)} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{cases} ,
$$

šīs funkcijas ir vienlīdzīgas ar sakarības (59) definētās funkcijas $F(t)$ atvasinājumiem pēc t:

$$D_i = F^{(i)}(t)$$

Tā tad:

ja izpildīti šī paragrāfa sākuma noteikumi un a_j vērtībām $a_j = a_{jo}$ ir apmierināti kā vienādojumi (53), tā arī noteikumi

$$(62) \qquad D_1 = D_2 = \ldots = D_{r-1} = 0, \qquad D_r \neq 0$$

a_{jo} vērtību sistēma ir vienādojumu (53) r-kāršs atrisinājums.

Noteikumi (62) raksturo r-kāršu atrisinājumu arī, ja A_o ir pēdējās virsas (53) singulārs punkts, jo nekur netika izlietāta pretējā hipoteze.

Šajos noteikumos funkcijām f_k tikai šķietami ir dažāda loma. Katrs noteikums izteic, ka mātricai, kurā ietilpināti visu funkciju f_k un iepriekšējā noteikuma kreisās puses pirmie parciālie atvasinājumi, rangs ir mazāks par N; katram turklāt ir jāizteic jauns noteikums funkciju f koeficientiem un lielumiem a_{jo}. Ja punkts A_o nav singulārs pēdējai virsai (53), par izteiksmi D_{i+1} var ņemt funkcionāldeterminantu, kas aprēķināts aizvietojot D_1 izteiksmē kaut kādu no funkcijām f_k ar D_i, vienīgi pāri palikušo f_k pirmo parciālo atvasinājumu mātricai jābūt ar rangu N-1.

Ja punktā A_o visu f_k pirmo parciālo atvasinājumu mātricai rangs ir mazāks par N-1, mūsu kritērijs protams nav lietājams, jo visiem lielumiem D_i šai punktā ir vērtība nulle. Arī šajā gadījumā ar lietāto paņēmienu varētu atrast derīgus kritērijus, ko mēs tomēr nedarīsim, lai neaizklīstu pārāk tālu no galvenā temata.

Definējot pieskaršanās kārtu ar bezgalīgi maza attāluma palīdzību, kā redzējām, dabūjam to pašu skaitli, kā lietājot atvasinājumus. Tāpēc arī kriterijs (62), ja izpildīti tā derīguma noteikumi, ir līdzvērtīgs sistēmu atrisinājumu daudzkārtības kriterijiem, kas izlietā bezgalīgi mazu attālumu jēdzienu. Tā kā šādā kārtā ir iespējams raksturot algebrisku vienādojumu sistēmu daudzkārtīgās saknes [5], arī mūsu kriterijs ir derīgs algebrisku vienādojumu gadījumā.

Būtu interesanti noskaidrot, vai kriterija (62) un tā vispārinājumu derīgumu algebrisku vienādojumu sistēmām ir iespējams pierādīt tīri algebriskā ceļā, nelietājot nepārtrauktības jēdzienu - domājams, ka atbildei jābūt pozitīvai.

§4. Par superoskulācijas kārtas kriterijiem un superoskulāciju katrā līknes punktā.

1. Meklēsim vispirms noteikumus, lai līknei L ar tās oskulētāju virsu A kādā atsevišķā līknes punktā notiktu galīgas kārtas superoskulācija. Līkni L ar tekošo punktu $X(x_i)$ dodam ar vienādojumiem

$$(63) \qquad x_i = x_i(t) \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

un virsu A, kas atkarīga no parametriem $a_j(j=1,2,\ldots,N)$, ar tās vienādojumu

$$(64) \qquad f_i(x, a) = 0 .$$

Pārrakstām vienādojumus, kas izteic līknes un virsas oskulāciju, izceļot tajos ietilpstošo x_i at-

---

5) Skat. piem. H. G. Z e u t h e n, Lehrbuch der abzählenden Methoden der Geometrie (Leipzig, Teubner), 1914. 30.-31.l.p.

vasinājumu kārtas

$$
(65) \quad \begin{aligned}
&f_1(x,a) &= 0\\
&f_2(x,x',a) &= 0\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&f_N(x,x',\dots,x^{(N-1)},a) &= 0
\end{aligned}
$$

Katru no funkcijām f_k dabūjam iepriekšējo atvasinot pēc t, pie kam uzskatām x_i par (63) definētām funkcijām un a_j par konstantēm. Simboliski to varam izteikt ar

$$
(66) \qquad f_{k+1} = \frac{\partial f_k}{\partial x}\frac{dx}{dt} \qquad k \geqslant 1
$$

Vienādojumi (65) vispārīgā gadījumā dod vienu vai vairākas a_j kā t funkciju vērtību sistēmas. Ņemam vienu no tām. Lai attiecīgai virsai A ar līkni L punktā X būtu vismaz pirmās kārtas superoskulācija, šajā punktā vēl jāpastāv

$$
(67) \qquad f_{N+1}(\, x,x',\dots,x^{(N)},a\,) = 0
$$

Tā kā funkcijas x_i, to atvasinājumi un a_j identiski apmierina sakarības (65), varam tās atvasināt, kas dod, ievērojot (66)

$$
f_{k+1}+\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial f_k}{\partial a_j}\frac{da_j}{dt} = 0 \qquad k=1,2,\dots,N
$$

Tā tad sakarību (65) un (67) dēļ

$$
(68) \qquad \sum_{j=1}^{N}\frac{\partial f_k}{\partial a_j}\frac{da_j}{dt} = 0 \qquad k = 1,2,\dots,N
$$

 046527

N vienādojumu sistēma (68) ir lineāra un homogēna attiecībā pret lielumiem $\frac{da_j}{dt}$. Tā var būt apmierināta divejādā kārtā:

vai nu

$$(69) \qquad \frac{da_j}{dt} = 0 \qquad \text{visiem } j$$

šai gadījumā mēs sakām, ka virsa A ir stacionāra;

vai arī sistēmas (68) determinants ir nulle, ko ar apzīmējumiem (61) izteic:

$$(70) \qquad D_1 = 0 \ .$$

Neklājot noteikumus, lai punktā X notiktu tieši r - 1-mās kārtas superoskulācija, būs jāšķiro divi gadījumi : $D_1 \neq 0$ un $D_1 = 0$.

2. Aplūkosim vispirms gadījumu, kad $D_1 \neq 0$. Bez vienādojumiem (65), ja notiek tieši r - 1-mās kārtas superoskulācija, punktā X vēl jāpastāv

$$(71) \qquad \begin{aligned} &f_{N+1}(x,x',\ldots,x^{(N)},a) = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &f_{N+r-1}(x,x',\ldots,x^{(N+r-2)},a) = 0 \end{aligned}$$

$$(72) \qquad f_{N+r}(x,x',\ldots,x^{(N+r-1)},a) \neq 0 \ .$$

Atvasinot i reizes pēc parametra t identiski apmierinātos vienādojumus (65), iegūstam vienādojumus ar veidu

$$(73) \qquad f_{k+i} + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f_k}{\partial a_j} \frac{d^{i} a_j}{dt^{i}} + F_{ki} = 0, \qquad k=1,2,\ldots,N$$

Funkcijas F_{ki} ir summas monomiem, kas satur kā faktorus a_j atvasinājumus līdz kārtai i - 1 un to reizinājumus. Tā kā $\frac{d^i a_j}{dt^i}$ koeficientu determinants N vienādojumiem (73) ir $D_1 \neq 0$, liekot pēc kārtas $i = 1,2,\ldots,r$ un ievērojot (65) un (71), secinām, ka punktā X

$$(74) \qquad \frac{d^i a_j}{dt^i} = 0 \qquad \begin{array}{l} j = 1,2,\ldots,N \\ i = 1,2,\ldots,r-1 \end{array}$$

un

$$(75) \qquad \frac{d^r a_j}{dt^r} \neq 0 \qquad \text{vismaz vienam } j.$$

Otrādi, ja ir izpildīti noteikumi (65) katrā līknes punktā un turklāt (74) un (75) punktā X, sakarības (73) rāda, ka pastāv (71) un (72). Tā tad:

lai oskulētājai virsai A ar līkni L tās punktā X būtu tieši r - 1-mās kārtas superoskulācija, ir pietiekami, ka pastāv noteikumi (74) un (75), un nepastāv (70).

Ja oskulētājai virsai A ar līkni L katrā tās punktā ir vismaz pirmās kārtas superoskulācija un visur $D_1 \neq 0$, (69) rāda, ka a_j ir konstanti. Šai gadījumā līkne L atrodas uz vienas noteiktas virsas A un superoskulācijas kārta ir bezgalīga.

3. Aplūkosim tagad gadījumu, kad a_j vērtības apmierina (70). Ja mātricai

$$(76) \qquad \left\| \frac{\partial f_k}{\partial a_j} \right\| \qquad \begin{array}{l} k = 1,2,\ldots,N-1 \\ j = 1,2,\ldots,N \end{array}$$

 046529

ir rangs $N - 1$, kā mēs turpmāk pieņemsim, superoskulācijas kārta ir vismaz r, kur r ir skaitlis, kam punktā X pastāv (74) un (75). Tiešām, vienādojumi (73) ar $k = N$ un $i = 1,2,\ldots,r-1$ dod vienādojumus (71). Liekot $i = r$ un $k = 1,2,\ldots,N$, un ievērojot dabūtos vienādojumus (71), iegūstam sakarības

$$(77) \quad \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f_k}{\partial a_j} \frac{d^r a_j}{dt^r} = 0 \quad k = 1,2,\ldots,N-1$$

$$(78) \quad f_{N+r} + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f_N}{\partial a_j} \frac{d^r a_j}{dt^r} = 0$$

Tā kā pastāv $D_1 = 0$ un mātricai (76) ir rangs $N-1$, no vienādojumiem (77) seko

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f_N}{\partial a_j} \frac{d^r a_j}{dt^r} = 0$$

jo šis vienādojums ir vienādojumu (77) lineāra kombinācija, tā tad

$$(79) \quad f_{N+r} = 0$$

Ja superoskulācija notiek līknes L atsevišķā punktā X, noteikumus, kas ļauj konstatēt tās precīzo kārtu, vairs never izteikt vienīgi ar vienādojumu (65) un a_j atvasinājumu palīdzību, bet jāņem palīgā arī vienādojumi (71) un (72), vai analoga tipa vienādojumi. Tāpēc šajā gadījumā paturēsim noteikumus (71) un (72).

4. Interesantāks par visiem iepriekšējiem ir gadījums, kad oskulētāja virse nav stacionāra un tai katrā līknes L punktā ir $r - 1$-mās kārtas superoskulā-

046530

cija. Šajā gadījumā vienādojumu (65) noteiktās a_j vērtības identiski apmierina sakarības (71) un pastāv (72). Aizvietojot funkcijās a_j argūmentu t ar s, vienādojumu (65), (71) un (72) kreisās puses ir funkcija f_1 un tās parciālie atvasinājumi pēc t līdz kārtai $N + r - 1$. Visi šie lielumi, atskaitot pēdējo, identiski pazūd, ja $s = t$. Tad, kā redzējām, 2.paragrafa otrā daļā, visi funkcijas f_1 parciālie atvasinājumi pēc t, s vai abiem argūmentiem līdz kārtai $N + r - 2$ ieskaitot ir vienlīdzīgi nullei, ja $s = t$, bet $N + r - 1$-mās kārtas parciālie atvasinājumi visi atšķiras no nulles. It īpaši vienādojumu (65) kreiso pušu atvasinājumi pēc s līdz kārtai r-1 pazūd, bet $\frac{\partial^r f_N}{\partial s^r} \neq 0$. Iepriekšējā paragrafā redzējām, ka šie noteikumi kopā ar pieņēmumu par mātricas (76) rangu un

$$(80) \qquad \frac{da_j}{ds} \neq 0 \qquad \text{vismaz vienam } j$$

raksturo sistēmas (65) r-kāršu atrisinājumu.

Otrādi, ja a_j ir sistēmas (65) r-kārša atrisinājums, ir spēkā noteikumi par mātricu(76) un nepastāv (69) vismaz vienam j, var secināt, ka pastāv (71) un (72). Tiešām, no (65) seko, ka

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f_k}{\partial a_j} \frac{da_j}{ds} = 0 \qquad \text{ja } k = 1,2,\ldots,N-1$$

un (70) izteic, ka

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f_N}{\partial a_j} \frac{da_j}{ds} = \frac{\partial f_N}{\partial s} = 0$$

ir iepriekšējo vienādojumu sekas, kas savukārt izsauc

$$(81) \qquad \frac{\partial f_N}{\partial t} = f_{N+1} = 0.$$

Lai izteiktu augstākās kārtas superoskulāciju, varam tā tad vienādojumu (81) un tā parciālos atvasinājumus pēc t aizvietot ar vienādojumu (70) un tā atvasinājumiem, jo pastāvot (65), pirmie ir otro sekas. Ja arī

$$(82) \qquad D_2 = 0 ,$$

vai identi?

vienādojuma (70) pirmais atvasinājums ir vienādojumu (65) sekas, tā tad (70) atvasinājumus varam aizstāt ar (82) un tā atvasinājumiem, u.t.t. No

$$D_{r-1} = 0$$

secinām, ka pazūd visu D_i ($i = r-2, r-3, \ldots, 1$) parciālie atvasinājumi ar kārtu $r-i-1$, kas dod

$$f_{N+r-1} = 0 \quad .$$

Reidzot

$$D_r \neq 0$$

kopā ar (80) rāda, ka D_i ($i = r-1, r-2, \ldots, 1$) parciālie atvasinājumi pēc t ar kārtu $r-i$ nepazūd, kas dod

$$f_{N+r} \neq 0 \quad .$$

Tā tad: ja oskulētāja virsa A nav stacionāra un tās parametru vērtībām mātricai (76) ir rangs N-1, lai vispārīgā punktā X notiktu tieši r - 1-mās kārtas superoskulācija, ir nepieciešami un pietiekami,

046532

ka A ir tieši r-kārša oskulētāja virsa, t.i. ka tās parametru vērtības ir sistēmas (65) r-kāršs atrisinājums. Speciālos punktos, kur virsa A top stacionāra vai arī pārstāj vairāk kā r oskulētājas virsas, superoskulācijas kārta vispār palielināsies.

Vispārīgā gadījumā, ja sistēmai (65) var būt r-kārši atrisinājumi, nav sagaidāms, ka attiecīgā virsa A ir nemainīga un ka attiecīgā līkne L vispār atrodas uz kādas nemainīgas virsas A; ar konkretiem šādu gadījumu piemēriem iepazīsimies otrā nodaļā.

5. Ja turpretim sistēmai (65) r-kāršu atrisinājumu nevar būt, prasība pēc superoskulācijas ar kārtu vismaz r - 1 katrā līknes L punktā var būt līdzvērtīga noteikumam, ka līkne L atrodas vienā vai vairākās nemainīgās virsās A.

Aplūkosim vienkāršāko atbilstošo gadījumu, kad virsas A vienādojums ir lineārs attiecībā pret parametriem a_j, kā tas ir visām klasiskām oskulācijas figūrām: taisnei, riņķim, konikai plāksnē, plāksnei un lodei telpā:

$$(83) \qquad \sum_{j=1}^{N} a_j\varphi_j(x) + \varphi_{N+1}(x) = 0 \ .$$

Liekot

$$a_j = \frac{b_j}{b_{N+1}}$$

ar homogēniem parametriem b_h virsas A vienādojums uzrakstāms veidā

$$(84) \qquad \sum_{h=1}^{N+1} b_h\varphi_h(x) = 0 \ .$$

Prasot, lai pastāvētu vismaz pirmās kārtas superoskulācija, bez vienādojuma (84), kur līknes L tekošā punkta koordinātas x_i aizvietotas ar attiecīgajām t funkcijām, jāpastāv vēl vienādojumiem, ko dabūjam (84) k reizes ($k = 1,2,\ldots,N$) atvasinot pēc t. Dabūtās lineārās homogēnās $N + 1$ vienādojums sistēmas attiecībā pret b_j determinantam, kas ir funkciju $\varphi_h[x(t)]$ Vronska determinanta, jābūt vienlīdzīgam nullei. Ja šī determinanta rangs kādam t vērtību intervallam ir N, seko sakars ar veidu

$$(85) \qquad \sum_{h=1}^{N+1} c_h \varphi_h[\, x(t)\,] = 0 \quad ,$$

kam visas konstantes c_h nav vienlīdzīgas nullei; ja rangs ir $N - 1$, seko vairāki tipa (85) sakari, u.t.t. Katrā gadījumā, ja vajadzīgs sadalot parametra t vērtības intervallos, katram intervallam atbildīs vismaz viens sakars (85); atbilstošais līknes L loks atrodas virsā (84), kam

$$b_h = c_h \quad .$$

Ja funkcijas φ un x ir savu argumentu analītiskas funkcijas, katrs sakars (84) pastāv visam t vērtību intervallam, kam šīs funkcijas ir definētas, ja tas pastāv patvaļīgi mazai šī intervalla daļai. Turpretim prasot vienīgi, lai funkcijām x_i eksistētu nepārtraukti atvasinājumi pēc t līdz galīgai, kaut arī patvaļīgi lielai kārtai p, var notikt, ka dažādiem līknes L lokiem atbilst dažādas virsas (84). Kā piemēru varam minēt šādu līkni: trīs dimensiju Euklīda telpā ņemam divas lodes ar kopīgu reālu riņķi C un konstruējam katrā lodē loku, kas tai pašā punktā X_0 ar kārtu p pieskartos riņķim C, turklāt tā, lai punkts X ejot caurī X_0 no viena loka otrā, nemainītu kustības virzienu; abi loki kopā izveido līkni L, kam tekošā punkta X koordinātām eksistē nepārtraukti atvasinājumi līdz kārtai p pēc piemērota parametra, piem. loka garums, un kuŗas loki atrodas divās dažādās nemainīgās lodēs.

Virsu A saimes (83) īpašība, ka katra līkne, kam katrā tās punktā ir vismaz pirmās kārtas superoskulācija ar kādu saimes virsu, visa atrodas uz vienas vai vairākām saimes virsām, protams ir neatkarīga no lietāto parametru un koordinātu izvēles. Ņemot cita tipa koordinātas y_i un parametrus c_j, vienādojuma (83) vietā stāsies kāds vienādojums

$$(86) \quad F(y,c) = 0 \quad .$$

Tā, piemēram, taisnes vienādojums plāksnē polārās koordinātās

$$\rho \cos(\varphi - \alpha) = p$$

nav lineārs attiecībā pret parametru α.

Dabiski rodas jautājums: kādam jābūt vienādojumam (86), lai tas būtu reducējams veidā (83) un ar kādu parametru transformāciju tas panākams; beidzot vēl būtu jāpārbauda, vai iegūtais vienādojums (83) attēlos to pašu saimi kā (86). Ka pēdējais ne vienmēr notiek, rāda triviālais viena parametra saimes piemērs: ja vienādojums (86) satur tikai vienu parametru c_1, to atrisinot attiecībā pret c_1, iegūstam

$$(87) \quad c_1 = f(y) \quad ,$$

kas atbilst veidam (83), bet attēlo cita tipa saimi kā (86): ja pirmās virsām vispārīgā gadījumā ir characteristikas, otrās virsām tādu nekad nav. Starpība vienādojumu (86) un (87) attēlotajās saimēs, kā zināms, rodas tāpēc, ka vispārīgā gadījumā funkcija f pēdējā vienādojumā nav savu argumentu y_i viennozīmīga funkcija.

Principiāli vienkāršā, bet aprēķinu garuma dēļ praktiski laikam neizpildāmā ceļā kriterijus vienādojuma (86) redukcijai varam iegūt šādi: uzskatot vienādojumā (83) lielumus x_i par konstantēm, tas nosaka sakaru visu a_j starpā, proti viens no lielumiem a_j, piemēram a_N, ir visu pārējo a_j lineāra funkcija. Šo sakaru raksturojam ar sistēmu

$$(88) \qquad \frac{\partial^2 a_N}{\partial a_j \partial a_h} = 0 \qquad j,h = 1,2,\ldots,N-1 \quad ,$$

kas satur $\frac{N(N-1)}{2}$ neatkarīgus vienādojumus. Ja eksistē transformācija

$$(89) \qquad a_j = a_j\,(c) \quad ,$$

kas kopā ar piemērotu pāreju no lielumiem y_i uz x_i, vienādojumu (86) pārveido vienādojumā (83), uzskatot vienu no c_j, piemēram c_N, par pārējo c_j funkciju, noteikumus (88) varam aizvietot ar noteikumiem, kur ietilpst c_N abu pirmo kārtu parciālie atvasinājumi pēc pārējiem c_j un lielumu a_j abu pirmo kārtu parciālie atvasinājumi pēc c_j. Šiem noteikumiem jāraksturo sakars (86) starp lielumiem c_j, t.i. uzskatot šai vienādojumā lielumus y_i par konstantēm, to atvasinot divas reizes pēc visiem c_j un izslēdzot lielumus y_i dabūto vienādojumu starpā, mums jādabū līdzvērtīga noteikumu sistēma. Identificējot abās atrastās sistēmās atbilstošos koeficientus, dabūjam otrās kārtas parciālo diferenciālvienādojumu sistēmu nezināmo funkciju (89) noteikšanai. Šīs sistēmas integrabilitātes noteikumi ir meklētie redukcijas iespējamības kriteriji.

No iepriekšējā apsvēruma iegūstam arī vienu vienkāršāku nepieciešamu noteikumu: izslēdzot lielumus y_i no vienādojuma (86), mums jāiegūst diferenciālvienādojumu sistēma, kam (88) ir sekas. Tā tad lielumi y_i, ja to skaits ir lielāks par N, vienādojumā (86) figurē ar augstākais N neatkarīgu funkciju starpniecību; ja šis noteikums nav izpildīts, pāreja no (86) uz (83) nav iespējama.

Otru nepieciešamu noteikumu dod vienādojumus (88) pārveidojot iegūto vienādojumu forma: tie ir veseli noteikta vienkārša tipa (kas atkarīgs no N vērtības) algebriski vienādojumi attiecībā pret c_N atvasinājumiem. Ja no (86), izslēdzot lielumus y_i, neiegūstam attiecīgā tipa vienādojumus, meklētā redukcija nav iespējama.

Lietājot E. Cartan'a izveidoto Pfaffa formu teoriju, J. Dubourdieu[6] noteicis redukcijas kriterijus gadījumam n = N = 2. Ar šo pašu jautājumu, vai pareizāk problēmu: vienādojumu

$$y'' = f(x, y, y')$$

ar punktu transformāciju pārvērst veidā

$$y'' = 0$$

ir nodarbojies S. Lie [7]. Nemeklējot integrabilitātes noteikumus, viņš ir parādījis, ka redukcija, ja tā vispār iespējama, prasa viena trešās kārtas lineāra parastā diferenciālvienādojuma integrēšanu.

---

6) J. D u b o u r d i e u, Questions topologiques de géométrie différentielle. Mémor.d.Sc.Math. 78 (Paris, Gauthier-Villars) 1936, skat.46-56 l.p.

7) S. L i e, Classification und Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen,etc.III,Archiv for Math.og Naturw.9, 1883 371-458 l.p., arī Gesammelte Abhandlungen 5, 362-427 l.p., skat. pirmo nodaļu.

Lai konstatētu, vai dota virsu saime pieder aplūkojamam tipam, vai nē, praktiski visnoderīgākais līdzeklis šķiet esam oskulētāju virsu noteicējas sistēmas (65) aplūkošana: ja tā, neatkarīgi no līknes L rakstura, noteic vienu vienīgu oskulētāju virsu, kaut arī tai atbilstu vairākas vai pat bezgalīgi daudzas parametru vērtības sistēmas (kā piem. taisnei plāksnē, lietājot polārās koordinātas), saimes vienādojums ir reducējams veidā (83).

6. Mums atlicis aplūkot vēl tikai gadījumu, kad sistēmas(65) dotās a_j vērtības mātricai (76) piešķir rangu mazāku par N - 1. Šajā gadījumā attiecīgai oskulētājai virsai atbilst sistēmas (65) vismaz divkārša atrisinājumu sistēma. Pieskaršanās kārta tomēr ne ikreizes būs lielāka par N - 1; ja arī notiks superoskulācija, tās kārta vispārīgā gadījumā būs vairāk kā par vienu vienību mazāka par (65) atrisinājuma kārtu. Šis gadījums ir analogs līknes šķelšanai ar taisni, ja pēdējā iet caur vairākkārtīgu punktu: ja arī šķelšanās punkts top vairākkārtīgs, ne ikreizes taisne līknei pieskarsies. Precizās eventuelās superoskulācijas kārtas noteikšanai te būs jālietā atkal pamata vienādojumi (71).

7. Duāli pārveidojot šī paragrafa rezultātus, iegūsim attiecīgos rezultātus viena parametra virsu saimei un charakteristiskam punktam X. Ja mātricai (76) atbilstošai mātricai rangs ir N - 1 un charakteristiskais punkts ir stacionārs vai vairākkāršs, tas būs supercharakteristisks punkts. It īpaši, ja ir izpildīts noteikums par mātricu un ja X koordinātas ir to noteicēju sistēmas r-kārša atrisinājums, X būs r - 1-mās kārtas supercharakteristisks punkts. Beidzot šī paragrafa 5.daļā aplūkotām virsu saimēm atbilst punkti virsās, kam vienādojums ir lineārs

attiecībā pret koordinātām. Ņemot x_i par afīnām koordinātām, aplūkotā problēma iegūst šādu formulējumu: noteikt, kad N parametru virsu saimi var ar punktu transformācijām pārvērst par hiperplākšņu saimi. Tas dod vēl jaunu kriteriju šīs pārvēršanas iespējamībai: ir jāpastāv iespējamībai ar virsu šķelšanās līknēm izveidot projektīvās ģeometrijas konfigurācijām topoloģiski līdzvērtīgas figūras.

§5. Par maksimālās kārtas aplieeējām.

1. Pieņemot, ka oskulētāju virsu noteicēja sistēma (65) dod pietiekami lielu šo virsu skaitu, vispārīgā gadījumā varēs atrast līknes, kam katrā punktā ar kādu nestacionāru oskulētāju virsu ir vismaz n - 1-mās kārtas superoskulācija. Tiešām, saskaņā ar mūsu pieņēmumu, sistēmu (65) var atrisināt attiecībā pret a_j, tos dabūjot kā $x_i, x'_i, \ldots, x^{(N-1)}_i$ funkcijas. Ievietojot šīs vērtības vienādojumos

$$D_1 = 0 \quad D_2 = 0 \quad \ldots \quad D_{n-1} = 0$$

dabūjam diferenciālvienādojumu sistēmu, kas nesatur neatkarīgo mainīgo t un ir homogēna attiecībā pret dt. Atbrīvojoties no nenoteiktības parametra izvēlē, varam ņemt vienu no x_i kā patvaļīgu t funkciju. Tad rodas n - 1 vienādojumu sistēma, kas saista n - 1 nezināmo un to atvasinājumu līdz kārtai N + 1 vērtības. Vispārīgajā gadījumā, ja šī sistēma nesatur pretrunas un ja to iespējams atrisināt attiecībā pret visu nezināmo N - 1-mās kārtas atvasinājumiem, tās atvasinājums raksturotā līkne L būs atkarīga no (n-1)(N-1) patvaļīgām konstantēm, piemēram visu nezināmo un to atvasinājumu līdz kārtai N - 2 sākuma vērtībām kādai parametra vērtībai $t = t_0$. Speciālos gadījumos var protams notikt, ka iespējams izslēgt visus N - 1-mās kārtas, eventuelli arī tālākos visu nezināmo atvasinājumus. Līknes L noteicošu konstantu skaits tad pazemināsies, vai pat šādu konstantu nemaz nebūs.

Līknes L, ko dod maksimālais saderīgais nupat aplūkoto vienādojumu skaits, mēs sauksim par virsu saimes S maksimālās kārtas apliecējām. Kā nupat redzējām, tai pieskaršanās kārta vispārīgā gadījumā ir N + n - 2. Līdz ar to tās tekošais punkts X ir oskulētāju virsu saimes R n - 1-mās kārtas supercharakteristisks punkts. Līknes L un saimes R konfigurāciju varētu iegūt arī uzskatot saimes S vienādojumā lielumus x_i par konstantēm, a_j par t funkcijām un atvasinot to n - 1 reizi pēc t. Ja mēs gribam, lai dabūtās sistēmas noteiktie x_i nav konstanti un atbilst n - 1-mās kārtas supercharakteristiskam punktam, tāpat kā iepriekšējā paragrafā mēs konstatētu, ka x_i vērtībām ir jābūt šīs vienādojumu sistēmas N-kāršam atrisinājumam. Izsekot šo īpašību dabūjam vēl N - 1 vienādojumu. No visiem iegūtiem vienādojumiem izslēdzot lielumus x_i, dabūsim N - 1 vienādojumu, kas satur a_j un to atvasinājumus līdz kārtai n - 1. Tie tāpat kā augstāk aplūkotie diferenciālvienādojumi lielumiem x_i, ļauj noteikt, ja tie ir saderīgi, maksimālās kārtas apliecēju L - a_j vērtības tieši nosaka saimes R un līknes L ir šo saimju n - 1-mās kārtas apliecējas. Līknes L tekošais punkts X pārstāj attiecīgās saimes R N sakrītošus charakteristiskus punktus.

Ja sistēmai (65) var būt vairākkārtīgi atrisinājumi, bet to maksimālā iespējamā kārta p ir mazāka par n - 1, vienādojumi skaitā p, kas raksturo šīs maksimālās kārtas realizāciju, dod tikpat daudz diferenciālvienādojumu lielumiem x_i. Šajā gadījumā maksimālās kārtas aplieceēja ir atkarīga ne tikai no patvaļīgām konstantēm, bet arī no patvaļīgām funkcijām.

Vienkāršu piemēru minētam gadījumam, kad turklāt vienreiz eksistē " superelements " un otrreiz nē, dod trīs dimensiju Eiklīda telpas līknes L un tās ložu saime S, kam vispārīgā virsa atkarīga no 4 parametriem. Te n = 3, N =4. Tā kā lodes vienādojumu var padarīt lineāru attiecībā pret a_j, nevienai līknei L nav superoskulējošu nestacionāru ložu. Trīs bezgalīgi tuvas lodes A nosaka 2 charakteristiskus punktus, viena parametra saimes R vispārīgai lodei ir otrās kārtas pieskaršanās ar katru charakteristiskā punkta ģeometrisku vietu. Izvēloties saimi R tā, ka abi charakteristiskie punkti sakrīt vienā supercharakteristiskā punktā, XXXX lodei A ar tā vietu L ir trešās kārtas pieskaršanās. Maksimālā vispār iespējamā charakteristiskā punkta daudzkārtība 4 nav sasniedzama, bet saime R un maksimālās kārtas aplieceēja L ir atkarīgas no divām patvaļīgām funkcijām.

Ar citiem piemēriem iepazīsimies otrā nodaļā.

2. Maksimālās kārtas aplieceēju un vispār superoskulācijas problēmai ir ciešs sakars ar noteikta tipa diferenciālvienādojumu singulāriem atrisinājumiem. Šai rakstā aplūkotiem gadījumiem, kad mainīgie lielumi ir viena parametra funkcijas, attiecīgie vienādojumi būs tie, kas noteic šādas funkcijas, proti parastie (kad n = 2) un kāda speciāla veida Monge's (kad n > 2) diferenciālvienādojumi.

Aplūkosim vispirms gadījumu, kad n = 2. Saime S tad ir N parametru līkņu A saime; katru līkni A raksturo konstantes a_j vērtības, tā tad lielumi x_i, tos uzskatot kā t funkcijas, apmierina vienādojumus (65) un (67). No tiem izslēdzot lielumus a_j , dabūjam N-tās kārtas diferenciālvienādojumu lielumiem x_1, x_2 :

$$(90) \quad g(x, x', \ldots, x^{(N)}) = 0 .$$

Pirmais vienādojums (65), ar konstantiem a_j, dod šī vienādojuma vispārīgo atrisinājumu. Visām līknēm L, kam eksistē nestacionāras superoskulētājas līknes A, tekošās koordinātes arī apmierina vienādojumus (65) un (67), tā tad arī (90). Tā kā šīm līknēm atbilstošie lielumi a_j nav konstanti, tās neietilpst vienādojuma (90) vispārīgā atrisinājumā. Līknes L tā tad attēlo vienādojuma (90) singulārus atrisinājumus. Kā redzējām, vispārīgā gadījumā līknes L veido N - 1 parametru līkņu saimi, kas katrā savā punktā X ar kārtu N pieskaras kādai līknei A.

Līknes L varam noteikt arī, izejot tieši no vienādojuma (90). Tā kā singulārus punktus mēs no aplūkošanas izslēdzām, vajadzības gadījumā mainot koordinātas, varam panākt, ka aplūkojamai līknei L tās aplūkojamā punktā $x'_1(t) \neq 0$; x_1 varam tāpēc ņemt par parametru t, x_2 apzīmēsim ar x. Tad vienādojums (67) ir lineārs attiecībā pret $x^{(N)}$. Sistēmu (65), kur nezināmie ir a_j, un (65) kopā ar (67), kur nezināmie ir a_j un $x^{(N)}$, atbilstošiem atrisinājumiem ir tā pati daudzkārtība. Bet tad arī katrai $x^{(N)}$ vērtībai, kas ietilpst (65) un (67) veidotās sistēmas vairākkārtīgā atrisinājumā, ir jābūt vienādojuma (90) vairākkārtīgai saknei. Pretējā īpašība ne vienmēr būs spēkā: $x^{(N)}$ vērtībai, kas ir (90) vairākkārtīga sakne, var atbilst vairākas dažādas a_j vērtību sistēmas. Drošs ir tikai tas, ka visiem līknes L N-tās kārtas pieskaršanās elementiem atbilstošā $x^{(N)}$ vērtība ir vienādojuma (90) vairākkārtīga sakne. Izsakot ar pārējiem vienādojuma (90) locekļiem noteikumu, kas raksturo vairākkārtīgas saknes $x^{(N)}$ eksistenci, mēs dabūjam N - 1-mās kārtas diferenciālvienādojumu, ko apmierina visi līknes L N - 1-mās kārtas pieskaršanās elementi. Integrējot šo vienādojumu, tā vispārīgais integrālis attēlo N - 1 parametru līkņu saimi. Šis integrālis, kopā ar eventuāliem singulāriem integrāintegrālis, kopā ar eventuāliem singulāriem integrāliem, bez līknēm L var attēlot ģeometriskās vietas punktiem, kas ir singulāri līknēm A, kur dažādām līknēm A ir tā pati $x^{(N)}$ vērtība, u.t.t. Katrā atsevišķā gadījumā jāpārbauda, vai un kāda iegūtās saimes daļa sastāv no līknēm L. Ja vienādojums (90) ir dots patvaļīgi, un nevis iegūts ar konstantu izslēgšanu, kā zināms vispārīgajā gadījumā singulāru integrālu un tā tad arī līkņu L nav [8].

Gadījumā, kad $n > 2$, no vienādojumiem (65) un (67) tāpat kā iepriekš var izslēgt visus lielumus a_j, iegūstot tipa (90) vienādojumu, kas tagad satur $n > 2$ lielumus x_i un to atvasinājumus pēc t, t.i. Monge'a diferenciālvienādojumu. Šim vienādojumam vairāk nav vispārīgā attiecīgā tipa vienādojuma veids, kā tas bija gadījumā $n = 2$, jo vispārīgam Monge'a diferenciālvienādojumam pirmintegrālu nav. Iegūtam vienādojumam (90) turpretim ir N pirmintegrāli, ko dod a_j izteiksmes, kas aprēķinātas no vienādojumiem (65). Turklāt šiem pirmintegrāliem ir speciāls raksturs, jo no tiem var izslēgt visu x_i atvasinājumus, iegūstot pirmo vienādojumu (65).

---

8) Sīkākus pētījumus par iespējamiem singulāro atrisinājumu gadījumiem un piemērus skat.:
В.А. Стеклов, Основы теории интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений (Москва-Ленинград), 1927, 86-97. un 262-265. l.p.
G. M a m m a n a, Sugli inviluppi di ordine superiore dei sistemi di curve piane. Giornale di Matematiche 65, 1927, 1.-20. l.p.

Arī te maksimālās kārtas apliecējas L, ja tās eksistē, varam iegūt ar vienādojuma (90) palīdzību, izlietājot līdzīgus apsvērumus, kā gadījumā $n = 2$. Ja līknei L ar nestacionāru virsu A ir $r - 1$-mās kārtas superoskulācija, līknes $N - 1$-mās kārtas pieskaršanās elementi vienādojumu sistēmas (65) noteikto a_j vērtību sistēmu padara par r-kāršu atrisinājumu. Vienādojums (67) ir lineārs attiecībā pret visiem $x_i^{(N)}$; dodot vēl visus $x_i^{(N)}$ atskaitot vienu, piemēram $x_n^{(N)}$, vienādojumu (65) un (67) veidotai sistēmai attiecīgās a_j un $x_n^{(N)}$ vērtības veidos r-kāršu atrisinājumu. Uzlūkojot vienādojumā (90) $x_n^{(N)}$ par nezināmo, arī šim vienādojumam jābūt vismaz r-kāršai saknei. Tāpat arī ikkatra cita $x_i^{(N)}$ vērtībai jābūt vienādojuma (90) vismaz p-kāršai saknei. Aplūkojamā pieskaršanās elementā tā tad būs

$$(91) \qquad \frac{\partial^k g}{\partial x_i^k} = 0 \qquad \begin{array}{l} k = 1,2,\dots,r \\ i = 1,2,\dots,n \end{array}$$

Noteikumi (91) vispār nebūs neatkarīgi, jo tie ir sekas noteikumiem

$$(92) \qquad D_1 = 0 \quad D_2 = 0 \quad \dots \quad D_r = 0$$

kas arī raksturoja superoskulāciju ar kārtu $r - 1$. Katrā ziņā tomēr būs iespējams vienādojumu (90) un (91) starpā izslēgt visus $x_i^{(N)}$, iegūstot augstākais r neatkarīgus noteikumus, kas saista x_i un to atvasinājumu līdz kārtai $N - 1$ vērtības un ir noteikumu (92) sekas. Uzrakstot noteikumus (91) maksimālai r vērtībai, kam (90) un (91) veido atrisināmu sistēmu un šo sistēmu integrējot, mēs dabūsim līkņu saimi, kas katrā ziņā saturēs visas maksimālās kārtas apliecējas, bet varēs saturēt arī dažādas citas līknes, līdzīgi kā gadījumā $n = 2$. Tāpat kā iepriekš, arī te varietātes, kam katrā punktā pastāv (91) ar $r \geqslant 1$, atbilst vienādojuma (90) singulāriem integrāliem.

Garumejot mēs esam ieguvuši interesantu rezultātu: katru N parametru virsu saimi var raksturot ar Monge'a (respektīvi parastō, ja $n = 2$) diferenciālvienādojumu (90), ko apmierina katras saimes virsas patvaļīgas līknes tekošās koordinātas un to atvasinājumi.

Rodas jautājums: kādi Monge'a vienādojumi (90) raksturo virsu saimes? Neizdarot aprēķinus, minēsim dažus ceļus, kas var dot atbildi. Vispirms ievērosim, ka vienādojumam (90) jābūt homogēnam attiecībā pret visiem $x_i^{(N)}$, jo tas ir līdzvērtīgs šāda veida vienādojumam (67), kur a_j aizvietoti ar savām vērtībām. Atrisinot vienādojumu (90) attiecībā pret vienu no $x_i^{(N)}$, jādabū vienādojums, kas ir lineārs un homogēns attiecībā pret visiem $x_i^{(N)}$ - ja tādu vienādojumu nevaram dabūt, (90) nav aplūkotā tipa. Tālāk jāizteic, ka dabūtam vienādojumam, kur visi locekļi pārnesti kreisā pusē, eksistē N integrētāju faktoru, kas tā kreiso pusi padara par N savstarpīgi neatkarīgu funkciju eksaktu diferenciālu. Beidzot jāizteic, ka no dabūtiem N pirmintegrāliem

$$(93) \qquad G_k(x,x',\dots,x^{(N-1)})=\text{const.} \qquad k=1,2,\dots,N$$

var izslēgt visu x_i atvasinājumus.

Varētu arī uzmeklēt tikai vienu tipa (93) vienādojumu, to padarīt lineāru un homogēnu attiecībā pret $x_i^{(N-1)}$, meklēt pirmintegrālu dabūtam vienādojumam, u.t.t.

Beidzot varētu arī vienādojumu (90) aizvietot ar attiecīgo Pfaffa vienādojumu sistēmu, izteikt, ka no tās dabūjami pirmintegrāliem (93) atbilstošie integrāli, u.t.t.

§6. Aprēķinu vienkāršošana fundamentālas grupas gadījumā.

1. Pamata varietātei T piesaistīsim kādu nepārtrauktu r parametru S. Lie transformāciju grupu, kas ir elementāri tranzitīva, t.i. ļauj pārvērst vienu otrā divus patvaļīgi dotus pieskaršanās elementus, kas raksturojami ar augstākais r skaitļiem. Vispārīgu gadījumu pētīšanai nemainīgās koordinātu sistēmas vietā ir izdevīgi ņemt kādu mainīgu koordinātu sistēmu, kas saistīta ar pētamām figūrām, proti Cartan's kustīgo references sistēmu (" repère mobile ") [9]. Par šādu references sistēmu varam ņemt ikkatru pamata varietātes figūru ar sekojošām īpašībām:

a) to noteic r parametru;

b) grupa ir vienkārši tranzitīva attiecībā uz šīm figūrām;

c) katru figūru F nemainīgu atstāj tikai identiskā transformācija.

Lai pētītu kādu punktu varietāti, katram tās punktam X viennozīmīgā kārtā piesaista kādu references sistēmu F. Raksturojam ar F palīdzību bezgalīgi mazo grupas transformāciju, kas F pārveido punktam X bezgalīgi tuvam punktam X_1 piesaistītā figūrā F_1. Šādi iegūtie skaitļi, ko Cartan's sauc par kustības relātīvām komponentēm, dod aplūkojamās grupas invariantas diferenciālformas un diferenciālinvariantus. Tās ļauj visai vienkāršā veidā izveidot grupai atbilstošo diferenciālģeometriju.

---

9) Kustīgās references sistēmas plašu teoriju satur E. C a r t a n, La théorie des groupes finis et continus et la Géométrie différentielle traitées par la méthode du repère mobile. (Paris, Gauthier-Villars) 1937.

Piemērs: Euklīda trīs dimensiju telpas ģeometrijā par figūru F var ņemt trīs savstarpīgi ortogonālus vienības vektorus ar kopīgu sākuma punktu. Piesaistot iespējami cieši šo figūru līknes L tekošam punktam un nosakot F kustības relātīvās komponentes, dabūjam Frenet triedru un formulas un reizē arī loka elementu un abus līknes zenākos diferenciālinvariantus - liekumu un vērpi.

Aplūkojot dažādus citus ģeometriskus objektus, kas saistīti ar pētamo punktu X varietāti, tos raksturojam ar relātīvām koordinātām attiecībā pret punktam X piesaistīto references sistēmu. Katrs sakars šo relātīvo koordinātu starpā, kas nav nekas cits kā pētamo figūru invarianti, izteiks kādu ģeometrisku īpašību. Šis paņēmiens jau pirms Cartan'a vispārīgās teorijas izveidošanas ir ticis lietāts speciālos gadījumos, piemēram Euklīda telpas un plāksnes diferenciālģeometrijā to plaši izmantojuši Darboux [10] un Cesàro [11]. Pēdējā autora lietātais nekustības noteikumu jēdziens, to attiecīgi vispārinot, ir ļoti noderīgs pētot pieskaršanos un bezgalīgi tuvu varietāšu šķelšanos.

Aplūkosim kritērijus, kas raksturoja p-tās kārtas pieskaršanos, ja koordinātu sistēma bija nemainīga, un noteiksim, kā tie jāpārveido, ja references sistēma mainās. Ir dabiski pieņemt, ka aplūkojamā virsu saime S ir invarianta attiecībā pret fundamentālo grupu; mēs to arī turpmāk darīsim.

Nemainīgu koordinātu gadījumā mēs uzrakstījām punkta $X(x_i)$ un virsas $A(a_j)$ incidences noteikumu un to $p - 1$ reizi atvasinājām, uzskatot x_i par līknes L tekošā punkta koordinātām un a_j par konstantēm, t.i. izlietājot noteikumus

---

10) G. D a r b o u x, Leçons sur la théorie générale des surfaces (Paris,Gauthier-Villars)1887, I-IV,sevišķi I.un II.daļā.

11) E. C e s à r o, Vorlesungen über natürliche Geometrie (Leipzig,Teubner) 1926.

$$(94) \qquad \frac{da_j}{dt} = 0 \qquad j = 1,2,\ldots,N$$

Lietājot mainīgu references sistēmu F, kas saistīta ar kādas līknes L' tekošo punktu Y, mēs tāpat $p - 1$ reizi atvasināsim incidences vienādojumu, uzskatot x_i par līknes L tekošā punkta relātīvām koordinātēm. Vienīgi tagad, lai raksturotu, ka virsa A ir nemainīga, nederēs vairs noteikumi (94), bet gan nekustības noteikumi ar veidu

$$(95) \qquad \frac{da_j}{ds} = f_j(a,Y) \qquad j = 1,2,\ldots,N \ .$$

Ar a_j tagad apzīmējam virsas relātīvās koordinātes attiecībā pret mainīgo references sistēmu. Atvasināšanu mēs izdarīsim ne vairs pēc patvaļīga parametra t, bet pēc grupas loka garuma, ko noteic tā diferenciāls - zemākā ar līknes pieskaršanās elementu saistītā diferenciālforma. Beidzot ar rakstību $f_j(a,Y)$ mēs apzīmējam, ka funkcijas f_j ir atkarīgas ne tikai no a_j vērtībām, bet arī no līknes L' diferenciālinvariantiem punktā Y.

Ka nekustīgas virsas relātīvām koordinātām a_j jāpilda (95) tipa noteikumi, rāda šāds apsvērums: a_j un $a_j + da_j$ ir tās pašas virsas A relātīvās koordinātes, kas saistītas ar līknes L' divu bezgalīgi tuvu punktu Y un Y_1 noteiktām references sistēmām F un F_1. Infinitēzimālā transformācija, kas F_1 pārvērš par F, ir pamata grupas infinitēzimāla transformācija (Y). Tā virsu A pārvērš kādā virsā A_1, kam sistēmā F ir tās pašas relātīvās koordinātes b_j, kā virsai A sistēmā F_1. Tā tad

$$b_j = a_j + da_j \qquad j = 1,2,\ldots,N \ .$$

Transformācijai (Y) inversā transformācija (Y_1), kas F pārvērta par F_1, ir raksturota ar kustības relātīvām komponentēm, ko nosaka līknes L' diferenciālinvariantu vērtības punktā Y un tās loka elements ds. Transformāciju (Y) raksturo skaitļi, kas ir pretēji (Y_1) raksturotājiem skaitļiem; to attiecinot uz kādu virsu A ar koordinātām a_j, dabūjam virsu ar koordinātām

$$c_j = a_j + \varphi_j(a,Y)ds \qquad j = 1,2,\ldots,N \quad ,$$

kur simbolam Y kā argumentam ir tā pati nozīme kā iepriekš. Tā kā b_j un c_j raksturo to pašu virsu A_1, seko sakars (95), kur $f_j = \varphi_j$.

Liekot līknei L' sakrist ar līkni L, punkta X koordinātas top konstantes un šī punkta un virsas incidences vienādojums satur vairs tikai virsas relātīvās koordinātes. To atvasinot dabūsim sakarus, kas bez šīm koordinātām saturēs vairs tikai līknes L diferenciālinvariantus, kas ietilpst kustības relātīvās komponentēs, un pēdējo atvasinājumus pēc s. Ir skaidrs, ka šādā veidā iegūtie vienādojumi būs nesalīdzināmi vienkāršāki , kā lietājot nemainīgu koordinātu sistēmu.

Oskulētājas virsas parametrus iegūsim atrisinot sistēmu, ko veido incidences vienādojums un tā N - 1 pirmie atvasinājumi pēc s. Ievietojot dabūtās a_j vērtības tālākos atvasinājumos, dabūsim noteikumus superoskulācijai. Vienādojumi (95), agrāko (94) vietā, raksturos stacionāras virsas. Ja pirmiem N - 1 no vienādojumiem, kas nosaka oskulētāju virsu, kreiso pušu parciālie atvasinājumi pēc a_j veido mātricu ar rangu N - 1, p-tās kārtas superoskulētājai virsai, kas nav stacionāra, atbilst to noteicējas sistēmas p + 1-kārš atrisinājums un otrādi. Atrisinājumu daudzkārtību raksturos noteikumi, kas saista diferenciālinvariantus un to atvasinājumus. Maksimālais šo noteikumu skaits, kas veido atrisināmu sistēmu, noteic augstākās kārtas apliecējas.

Aprēķinus varam vēl saīsināt, neiesākot ar incidences noteikumu, kas izteica, ka virsa A iet caur līknes L punktu X, bet gan ņemot izejai kādu virsu A, kas punktā X jau pieskaras ar kārtu p līknei. Šādai virsai nezināmo patvaļīgo parametru skaits ir mazāks par N, jo pieskaršanās dēļ a_j starpā ir jau realizēta p + 1 sakarība. Izsekot, ka šāda virsa A ir nemainīga bezgalīgi mazā transformācijā, kas F pārvērta par F_1, mēs reizē dabūjam nekustības noteikumus pāri palikušajiem brīviem parametriem un vienu sakaru to starpā, kas raksturo p + 1-mās kārtas pieskaršanos. Šo sakaru atvasinot ar nekustības noteikumu palīdzību, dabūjam noteikumus, lai pieskaršanās kārta ir p + 2, p + 3, u.t.t. Konkretus piemērus šim paņēmienam apskatīsim šī paragrafa beigās.

2. Ja lielumu a_j skaits ir N, izslēdzot a_j no incidences vienādojuma un tā N pirmiem atvasinātiem vienādojumiem, iegūstam Monge'a vienādojumu, kas raksturo virsu saimi S. Kā redzējām 59.l.p., šis vienādojums satur koordinātu atvasinājumus līdz kārtai N - fundamentālas grupas gadījumā tas tā tad saturēs diferenciālinvariantus līdz kārtai N.

Ja saimi S veido visas vienai virsai A kongruentās virsas, t.i. virsas, ko iegūstam no A izdarot visas fundamentālas grupas transformācijas, N maksimālā vērtība ir r. Tā ir tiesi r, ja fundamentālai grupai nav nepārtrauktas apakšgrupas, kas virsas A pārvērš sevī; tā ir r - r', ja eksistē šāda apakšgrupa ar r' parametriem. Aplūkotais vienādojums raksturos līknes, kas atrodas šādā virsā A.

Kā piemēru aplūkosim Euklīda trīs dimensiju telpu. Fundamentālai grupai, kas ir pārvietojumu grupa, r = 6. Līknes diferenciālinvarianti ir: liekums - otrās kārtas - un tā atvasinājumi, vērpe - trešās kārtas - un tās atvasinājumi. Virsas līkņu rakstu-rotājs vienādojums saturēs liekumu un tā atvasinājumus līdz kārtai k + 1, vērpi un tās atvasinājumus - līdz kārtai k, kur k = 3 - r'.

Patvaļīgai virsai k = 3; skrūves virsām, ieskaitot cilindrus un rotācijas virsas, k = 2; rotācijas cilindram k = 1; lodei un plāksnei k = 0. Minētās k vērtības atbilst līknēm, kas atrodas noteiktā virsā un tai kongruentās virsās. Noteikta tipa virsu līknēm šīs vērtības būs protams lielākas: līknei rotācijas konā k = 3, rotācijas cilindrā k = 2, lodē k = 1.

Norādītais paņēmiens principā dod vispārīgu metodi, lai noteiktu aplūkoto vienādojumu, ko var saukt par saimes S līkņu dabisko vienādojumu. Atskaitot gadījumu n = 2 un pašus vienkāršākos gadījumus, ja n > 2 (piem. Euklīda telpas lodei un plāksnei), jau pirms pēdējo a_j izslēgšanas dabūjam visai sarežģītus vienādojumus, tā kā gala rezultātu labākā gadījumā varam dot ne eksplicīti, bet determinanta veidā. Ir tāpēc domājams, ka meklētam vienādojumam arī pašam ir sarežģīts veids.

Ar citādām metodēm, kas arī neļauj iet tālāk par determinantu, respektīvi viena lieluma izslēgšanu divu vienādojumu starpā, šī vienādojuma noteikšana tikusi vairākkārt aplūkota gadījumiem n = 3.

Atrast vienādojumu līknēm rotācijas cilindrā laikam pirmais mēģinājis H. Picciоli [12], izmantojot taisņu momentus. Pēc pareiziem vienādojumiem sākumā, viņš dabū otrās pakāpes vienādojumu attiecībā pret taisnes virziena kosiniem, kam koeficienti

12) H. P i c c i o l i, Sur un procédé pour parvenir à l'équation intrinsèque des lignes du cylindre de révolution, Nouvelles Annales 4e s., 4, 1904, 402.-405.l.p. Atreferējums: Dr. Salkowski, Fortschritte der Mathematik 35, 1904, 643.l.p.

ir dažādu dimensiju locekļu summas. Virziena kosinu eliminēšanai vienādojums esot jāatvasina 6 reizes; dabūtās vienādojumu sistēmas determinants pielīdzināts nullei attēlojot meklēto sakarību, kaut gan pats autors aizrāda, ka tā izteiksmi var vienkāršot, ievērojot, ka tā kolonnu elementi ir lineāri atkarīgi. Ir dīvaini, ka Salkowski's, šo rakstu atreferējot, neatrod nekā ko iebilst.

V. Hlavatý[13], nosakot virsu trīs dimensiju Riemann'a telpā ar tās fundamentāliem tensoriem, ar tensoru rēķinu palīdzību atrod divus vienādojumus, kā starpā jāeliminē viens palīglielums.

E. Cotton's [14], pēc atreferējuma, kas nemin metodi, atrod pareizās k vērtības (pats darbs nebija pieejams).

Euklīda plāksnes gadījumam E. Cesàro [15] līkņu saimi raksturo ar vienādojumu loka garuma s un liekuma radija ρ starpā, kas satur vēl patvaļīgus parametrus:

$$(96) \qquad f(s, \rho, a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}) = 0$$

un apgalvo, ka šādas saimes oskulētāja līkne vispārīgai dotai līknei pieskaras ar kārtu n. Šis apgalvojums ir pareizs tikai tad, ja parametru starpā tieši vai netieši nefigurē patvaļīgā additīvā konstante, kas rodas mainot punktu, no kura sāk skaitīt lokus: vienādojums

13) V. H l a v a t ý, Natürliche Gleichung der Kurven auf einer allgemeinen Fläche im metrischen Raume. Mathematische Zeitschrift 30,1929,470.-480.l.p.

14) E. C o t t o n, Sur les courbes tracées sur une surface. Annales de la Soc. Polonaise de Mathématiques 17, 1938, 32.-41.l.p. Atreferējums: Fortschritte der Mathematik 64_I, 1938,711.l.p.

15) loc.cit. 69.-74.l.p. Vienādojumi (96) līdz (98) rakstīti ar Cesàro apzīmējumiem.

$$(97) \quad f(s+s_0, \rho, s_1, s_2, \ldots, s_{n-2}) = 0$$

raksturo to pašu saimi kā (96). Nav īsti saprotams, vai Cesàro superoskulāciju katrā dotas līknes (M) punktā atzīst par iespējamu, vai nē. Runājot par pieskaršanās kārtu, viņš saka (Kowalewski tulkojumā): " Dies hindert jedoch nicht, dass eine solche Berührung wegen einer der Curve (M) innewohnenden Eigentümlichkeit thatsächlich eintreten kann " - šādas superoskulācijas iespējamība, kā liekas, tiek atzīta. Tālāk turpretim lasām: " ... nur in besonderen Punkten von (M) kann es eintreten, dass die Ordnung der Berührung die Zahl n überschreitet ", kas šādu iespējamību šķiet noliedzam.

Atvasinot n - 1 reizi vienādojumu (96) pēc loka un izslēdzot s un konstantes s_j, Cesàro iegūst sakaru pirmo n liekumu radiju starpā

$$(98) \quad F(\rho, \rho_1, \ldots, \rho_{n-1}) = 0 \quad ,$$

kas raksturojot līkņu saimi (96). Te atkal jāpiezīmē, ka šāda izslēgšana iespējama tikai tad, ja izpildīts noteikums par adDitīvo konstanti. Otrkārt, kā redzējām, vienādojums (98) raksturo ne tikai saimi (96), bet arī visas līknes L, kam katrā punktā eksistē superoskulējoša saimes līkne. Uzrakstot (98) kā diferenciālvienādojumu, saimes vispārīgo līkni dos tā vispārīgais atrisinājums, līknes L - singulārie atrisinājumi.

3. Aplūkojot viena parametra virsu saimes R atsevišķo virsu A charakteristiskos punktus, var aprēķinus iekārtot iepriekšējiem duāli, t.i., lietāt mainīgu references sistēmu, kas saistīta ar saimes vispārīgo virsu A. Lai nebūtu jāmeklē šīs jaunās references sistēmas relātīvās kustības komponentes,

var tomēr arī te lietāt references sistēmu, kas saistīta ar kādas palīga līknes L' tekošo punktu Y. Šādu paņēmienu lietājot vienkāršojas punktu ģeometrisko vietu pētīšana, jo iegūtie rezultāti viegli salīdzināmi ar šī paragrafa sākumā pieminēto pētījumu rezultātiem.

Aprēķinu princips visos gadījumos ir tas pats: uzraksta incidences noteikumu un to atvasina, ievērojot, ka tagad par nekustīgu uzskatāms punkts, tātad punkta X un nevis vairs virsas A koordinātām jāpilda nekustības noteikumi. Ja references sistēma ir tieši saistīta ar virsu A, incidences noteikums ir izsakāms vienīgi ar punkta koordinātām. Saistot turpretim references sistēmu ar punktu Y, incidences noteikums vispārīgā gadījumā saturēs kā punkta X, tā arī virsas A koordinātes.

Analogi kā mēs iepriekš atradām dabisko vienādojumu līknēm, kas atrodas kādā saimes S virsā, var arī te atrast dabisko vienādojumu viena parametra virsu saimēm R, kas iet caur kādu varietātes T punktu. Šis vienādojums saistīs saimes R diferenciālinvariantus līdz kārtai n.

Beidzot atzīmējams viens kustīgās references sistēmas F metodes trūkums: paņēmiens, ar ko vispārīgas varietātes tekošam elementam piesaista noteiktu F, neder speciālām varietātēm, kam vienam vai vairākiem zemāko kārtu diferenciālinvariantiem ir vērtība nulle. Tā, piemēram, Frenet formulas nav derīgas Euklīda telpas izotropām līknēm un līknēm izotropās plāksnēs. Šādu varietāšu aplūkošanai ir jāņem citādi noteiktas references sistēmas F, kam arī kustības relātīvās komponentes izteiksies citādā veidā. Reizēm var tomēr izlīdzēties ar vienreizējiem aprēķiniem, figūru F un relātīvās kustības komponentes izsakot pietiekami vispārīgi, lai ar piemērotu specializāciju gala rezultātus varētu attiecināt uz visiem vai vismaz vairākiem gadījumiem.

4. Minēsim dažus vienkāršus aprēķinu piemērus. Tā kā mēs visceur aplūkojam viena parametra punktu vai virsu saimes, relātīvās kustības komponentes raksturosim ne ar diferenciāliem, kā to dara Cartan's, bet ar atvasinājumiem pēc attiecīgās grupas loka.

a) Euklīda trīs dimensiju telpā aplūkojam līknes, kam spēkā Frenet formulas

$$
(99)\qquad
\begin{aligned}
\vec{X}' &= \vec{t} \\
\vec{t}' &= \qquad \rho\vec{n} \\
\vec{n}' &= -\rho\vec{t} \qquad + \tau\vec{b} \\
\vec{b}' &= \qquad -\tau\vec{n}
\end{aligned}
$$

pieņemot, ka $\rho \neq 0$. X apzīmē tekošo punktu, $\vec{t}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$ attiecīgi pieskares, galvenās normāles un binormāles vienības vektorus.

Lai atrastu lodi, kas līkni oskulē, ņemam lodi, kas līknei pieskaras. Ja šīs lodes radijs ir a, tās centru C dod

$$C = X + a[\cos\varphi\,\vec{n} + \sin\varphi\,\vec{b}\,],$$

kur φ, leņķis starp vektoriem $\vec{n}$ un $\vec{XC}$, ir otrs parametrs, kas noteic lodi. Lai lode būtu nemainīga, a un C jābūt nemainīgiem, kas dod nekustības noteikumus

$$
\begin{aligned}
a' &= 0 \\
\varphi' &= -\tau
\end{aligned}
$$

un noteikumu, lai būtu otrās kārtas pieskaršanās

$$(100)\qquad 1 - a\rho\cos\varphi = 0$$

Reizinot ar liekuma radiju $R = \frac{1}{\rho}$ un atvasinot, dabūjam

$$(101)\qquad R' - a\tau\sin\varphi = 0\,.$$

Noteikumi (100) un (101) viennozīmīgi noteic oskulētāju lodi. Reizinot (101) ar vērpes radiju $T = \frac{1}{\tau}$ un atvasinot, dabūjam superoskulācijas noteikumu

$$(TR')' + a\tau \cos \varphi = 0 \quad .$$

Izslēdzot a un φ, dabūjam lodes līkņu dabisko vienādojumu

$$(102) \qquad (TR')' + \frac{R}{T} = 0 \quad .$$

Ja lodes radijs a ir dots, (100) nosaka oskulētāju lodi, izslēdzot φ (100) un (101) starpā dabūjam dabisko vienādojumu līknēm lodē ar radiju a:

$$(103) \qquad (R'T)^2 + R^2 = a^2 \quad .$$

Vienādojumam (102) singulāru atrisinājumu nav, vienādojumam (103) tos dod

$$R = a,$$

kas raksturo maksimālās kārtas apliecējas lodēm ar radiju a.

b) Tai pašā telpā aplūkojam viena parametra ložu saimi. Par references sistēmu ņemot lodes centra Y ģeometriskās vietas L Frenet triedru, lodei ar radiju a un tekošo punktu X ir vienādojums

$$(104) \qquad (X-Y)^2 = a^2 \quad .$$

Punkta X nekustības noteikums ir $\vec{X}' = 0$. Atvasinot (104) un ievērojot šo noteikumu, dabūjam

$$-\vec{t}(X-Y) = aa'$$

$$-\rho\vec{n}(X-Y) + 1 = (aa')'$$

Šie vienādojumi kopā ar (104) nosaka divus charakteristiskus punktus X, kas simmetriski attiecībā pret L oskulētāju plāksni punktā Y. Supercharakteristisku punktu dabūsim, liekot abiem šiem punktiem sakrist, t.i. izsakot, ka punkts X atrodas oskulētājā plāksnē:

$$(105) \qquad (aa')^2 + R^2[(aa')' - 1]^2 = a^2 \quad .$$

Atvasinot vēlreiz punkta X noteicēju vienādojumu un izslēdzot vektora X-Y komponentes, dabūjam dabisko vienādojumu lodēm caur vienu punktu

$$(aa')^2 + R^2[(aa')' - 1]^2 + \frac{T^2}{R^2}\left\{RR'[(aa')' - 1] + R^2(aa')'' + aa'\right\}^2 = a^2$$

(105) ir šī vienādojuma singulārs atrisinājums.

Noteikumu (105) un tā interpretāciju viegli dabūt, atvasinot iepriekšējās lappuses pēdējos trīs vienādojumus, pie kam par mainīgu uzskatām vienīgi X (28. un 29.l.p. aplūkotā parciālā atvasināšana pēc t):

$$(106) \qquad \begin{aligned} \vec{X}'(X-Y) &= 0 \\ \vec{X}'\vec{t} &= 0 \\ \vec{X}'\vec{n} &= 0 \end{aligned}$$

Abi pēdējie noteikumi ir neatkarīgi. Lai punkts X nebūtu nekustīgs, vektoram X-Y jābūt koplanāram ar $\vec{t}$ un $\vec{n}$, t.i., punktam X jābūt oskulētājā plāksnē. Pārveidojot ložu saimi tā, ka ne a, ne ρ nemainās, bet līkne L top plakana, abi pēdējie noteikumi (106) rāda, ka punkts X top nekustīgs [16].

Te mēs sastopamies arī ar singulārā gadījuma piemēru, ko no vispārīgā aplūkojuma izslēdzām, proti,

---

16) Šo interpretāciju dod jau Cesàro, loc.cit. 185.l.p., minot, ka problēmu: atrast viena parametra ložu saimi, kam dota centru ģeometriskā vieta un kas oskulē kādu līkni, formulējis Jamet.

kad abi pirmie vienādojumi (106) nav neatkarīgi, t.i., $X-Y$ un $\vec{t}$ ir kollīneāri. Tad izejas vienādojumi dod

$$X = Y + a\vec{t}$$
$$-1 = a'$$

Tā tad punkts X apraksta līknes L filārevolventi. X nav supercharakteristisks punkts, ķaut arī tas pārstāj divus sakritušus charakteristiskus punktus, jo pēdējais vienādojums (106) ir apmierināts tikai triviālā gadījumā, kad L ir taisne un X - nekustīgs šīs taisnes punkts.

c) Euklīda plāksnē meklējam līknes L oskulētāju koniku, par references sistēmas asīm ņemot L pieskari un normāli tās tekošā punktā X. Katru punktu Y varam izteikt veidā

$$Y = X + x\vec{t} + y\vec{n} .$$

Izsakot, ka $\vec{Y}' = 0$, ar Frenet formulu (kur $\tau = 0$) palīdzību dabujam nekustības noteikumus

$$\begin{aligned} x' &= -1 \qquad + \varrho y \\ y' &= \qquad -\varrho x \end{aligned}$$

Koniku, kas pieskaŗas līknei L punktā X varam dot ar vienādojumu

$$(107) \qquad ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2y = 0 \quad .$$

Meklējam tās koordinātu a,b,c, kas mainās punktam X pārvietojoties pa L, nekustības noteikumus. To panākam, atvasinot konikas vienādojumu, ievērojot punktu nekustības noteikumus un izsakot, ka dabūtais vienādojums

$$(a'-2b\varrho)x^2+2(b'+a\varrho-c\varrho)xy +(c'+2b\varrho)y^2-2(a+\varrho)x-2by = 0$$

ir konikas vienādojuma (107) sekas. Tas dod

$$a' = -ab + 2b\rho$$
$$b' = -b^2 + (c-a)\rho$$
$$c' = -bc - 2b\rho$$

un noteikumu, lai pieskaršanās ir otrās kārtas

$$a + \rho = 0.$$

Ievietojot šādi iegūto a vērtību augšējos nekustības noteikumos, dabūjam nekustības noteikumus konikai ar otrās kārtas pieskaršanos:

$$b' = -b^2 + c\rho + \rho^2$$
$$c' = -bc - 2b\rho$$

un noteikumu

$$-\rho' = 3b\rho \quad ,$$

lai pieskaršanās kārta ir trīs. Aizvietojot b ar šādi noteikto vērtību, dabujam ceturtās kārtas pieskaršanās noteikumu

$$9c\rho^3 = -3\rho\rho'' + 4\rho'^2 - 9\rho^4 \quad ,$$

kas ļauj viennozīmīgi noteikt c un tā tad arī oskulētāju koniku. Izsakot, ka arī c pilda nekustības noteikumu, dabūjam koniku dabisko vienādojumu

$$9\rho^2\rho''' - 45\rho\rho'\rho'' + 40\rho'^3 + 36\rho^4\rho' = 0 \quad .$$

z

II. nodaļa.

Par telpas līkņu oskulētājiem rotācijas cilindriem.

§1. Pamata vienādojumi.

Dažu speciālu gadījumu diskusija.

1. Eiklīda trīs dimensiju telpā rotācijas cilindru(turpmāk teiksim vienkārši " cilindrs ") varam noteikt, dodot kādu tā ass punktu C, ass vienības vektoru $\vec{u}$ un radiju a; turpmāk pieņemsim, ka $a \neq 0$. Ja cilindra tekošais punkts ir X, tā vienādojums ir

$$(108) \quad (X-C)^2-[\vec{u}(X-C)]^2 = a^2 . \qquad x)$$

Vienādojums (108) ir punkta X un cilindra incidences vienādojums. Uzskatot X par kādas līknes L tekošo punktu un pārējos vienādojuma (108) elementus par konstantiem, šo vienādojumu atvasinot pēc L loka s, varētu iegūt līknes un cilindra pirmās un tālāko kārtu pieskaršanās noteikumus. Tā kā cilindru telpā nosaka 5 neatkarīgi parametri, oskulētājam cilindram būs ceturtās kārtas pieskaršanās.

Aprēķini top vienkāršāki, ja ņemam cilindru, kas jau pieskaras līknei un to nosakām ar piemērotām koordinātām.

Ja cilindrs līknei pieskaras punktā X, cilindra normāle šai punktā ir arī līknes normāle. Novietojot C tās šķelšanās punktā ar cilindra asi, būs

$$(109) \quad C = X + a(\cos\varphi\,\vec{n} + \sin\varphi\,\vec{b}),$$

kur φ ir leņķis starp vektoriem $\vec{n}$ un C-X. Ass vienības vektors ir perpendikulārs vektoram C-X, kas iet pa cilindra normāli, tā tad to var izteikt veidā

---

x) Divu vektoru skalāru reizinājumu apzīmēsim, rakstot vektorus vienu otram blakus, vajadzības gadījumā arī iekavās.

$$(110)\quad \vec{u} = \cos\psi\,\vec{t} - \sin\varphi\,\sin\psi\,\vec{n} + \cos\varphi\,\sin\psi\,\vec{b}\,,$$

kur ψ ir leņķis starp vektoriem $\vec{u}$ un $\vec{t}$.

Lai šādi noteiktais cilindrs būtu nekustīgs, a jābūt nemainīgam, vektoram $\vec{C}'$ jābūt kollineāram ar $\vec{u}$ un vektoram $\vec{u}$ jābūt nemainīgam. Atvasinot sakarības (109) un (110) pēc loka ar Frenet formulu palīdzību un izsakot minētos noteikumus, dabūjam nekustības noteikumus

$$(111)\quad \begin{cases} a' = 0 \\ \psi' = \rho\sin\varphi \\ \varphi' = -\tau + \dfrac{\sin\psi\cos\psi}{a} \end{cases}$$

un noteikumu, lai pieskaršanās kārta būtu divi:

$$(112)\quad a\,\rho\cos\varphi = \sin^2\psi$$

Atvasinot šo vienādojumu ar noteikumu (111) palīdzību, dabūjam

$$(113)\quad a(\rho'\cos\varphi + \rho\tau\sin\varphi) = 3\rho\sin\varphi\,\sin\psi\cos\psi$$

Vēlreiz atvasinot, ievērojot arī sakarību (112), iegūstam

$$(114)\quad a[(\rho''-\rho\tau^2)\cos\varphi+(2\rho'\tau+\rho\tau')\sin\varphi] = 3\rho^2\cos^2\psi - \\ -3\rho^2\sin^2\varphi\,\sin^2\psi + 4(\rho'\sin\varphi-\rho\tau\cos\varphi)\sin\psi\cos\psi\,.$$

Tieši šos pašus vienādojumus mēs būtu arī ieguvuši, atvasinot (108) un ievietojot izteiksmes (109) un (110). a, φ un ψ vērtības, kas apmierina pirmo, abus pirmos vai visus trīs vienādojumus (112) līdz (114), raksturo cilindru, kam ir attiecīgi otrās, trešās un ceturtās kārtas pieskaršanās punktā X ar līkni L.

[illegible] (114) [illegible]

$$a\left[(\rho''' - 3\rho'\tau^2 - 3\rho\tau\tau')\cos\varphi + (3\rho''\tau + 3\rho'\tau' + \rho\tau'' - \rho\tau^3)\sin\varphi\right] =$$

$$= 10\rho\rho'\cos^2\varphi + \sin\varphi\cos\varphi\left\{(-10\rho'\tau - 5\rho\tau')\cos\varphi + (5\rho'' - 5\rho\tau^2 - 12\rho^3)\sin\varphi\right\} + (-10\rho\rho'\sin^2\varphi + 10\rho^2\tau\sin\varphi\cos\varphi)\sin^2\varphi$$

046560

Pēdējo paņēmienu lietā A. Tamerl's 17), kas laikam vienīgais līdz šim plašāk pētījis rotācijas cilindrus, kam ir augstākas kārtas pieskaršanās ar telpas līknēm. Viņš galvenokārt pēta dažas cilindru asu konfigurācijas, punkta C ģeometrisko vietu, ja pieskaršanās kārta ir trīs, un dažus speciālus gadījumus, nosakot dažādo oskulētāju cilindru skaitu, bet nepēta ne to daudzkārtību, nedz arī ievēro deģenerētos cilindrus. Ciktāl iegūstamie rezultāti atrodami jau Tamerl'a rakstā, atzīmēts šīs nodaļas beigās.

Vienādojumus (112) un (113) var atrisināt attiecībā pret a un ψ, iegūstot

$$(115)\qquad a = \frac{9\varrho^3\sin^2\varphi\cos\varphi}{(\varrho'\cos\varphi+\varrho\tau\sin\varphi)^2+9\varrho^4\sin^2\varphi\cos^2\varphi}$$

$$(116)\qquad \operatorname{tg}\psi = \frac{3\varrho^2\cos\varphi\sin\varphi}{\varrho'\cos\varphi+\varrho\tau\sin\varphi}$$

Šīs sakarības viennozīmīgi nosaka a un $\operatorname{tg}\psi$, ja vismaz viens no noteikumiem

$$(117)\qquad \begin{cases} \varrho\sin\varphi\cos\varphi \neq 0 \\ \varrho'\cos\varphi+\varrho\tau\sin\varphi \neq 0 \end{cases}$$

ir izpildīts. Ievietojot a un $\operatorname{tg}\psi$ vērtības vienādojumā (114), iegūstam sestās pakāpes vienādojumu attiecībā pret $t = \operatorname{tg}\varphi$:

$$(118)\qquad [\varrho^2\tau^2t^4-3\varrho^2\tau't^3+(5\varrho'^2-3\varrho\varrho'')t^2-2\varrho\varrho'\tau t+\varrho'^2](t^2+1)- \\ -9\varrho^4t^4 = 0\,.$$

Vispārīgā gadījumā (118) noteiktās t vērtības ir dažādas un to dotie φ apmierina abus noteikumus (117); katrai no šīm t vērtībām atbilst viens punkts C un divi pretēji vektori $\vec{u}$, kas raksturo tikai vienu noteiktu cilindru. Tā tad vispārīgai telpas līk-

17) A. Tamerl, Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften in Wien, 140,1931,1.-10.1.p.

nei tās vispārīgā punktā ir seši dažādi oskulētāji cilindri.

Neizdarot pilnīgu vienādojuma (118) diskusiju, atzīmēsim dažas tā īpašības.

Vienādojuma (118) viena sakne neapmierina nevienu no noteikumiem (117) vienīgi tad, ja viens no lielumiem ρ, ρ', τ ir nulle. Šos izņēmuma gadījumus aplūkosim vēlāk, pagaidām pieņemot, ka visi minētie lielumi atšķiras no nulles.

Ir iespējams atsevišķā līknes punktā, un līdz ar to pietiekami mazam līknes lokam, izvēlēties reālas liekumu un to atvasinājumu vērtības tā, ka vienādojumam (118) visas saknes ir dažādas un turklāt reālo sakņu skaits ir 6, 4, 2 vai 0. Tā tad ir iespējamas reālas līknes, kam visi oskulētāji cilindri ir imaginäri.

Vienādojuma (118) noteikto leņķu φ_i summa ir vienlīdzīga ar veselu skaitu reiz π. Tiešām,

$$tg(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_6) = \frac{s_1-s_3+s_5}{1-s_2+s_4-s_6},$$

kur s_j apzīmē summu visiem tg φ_i reizinājumiem pa j. Aprēķinot labās puses izteiksmi ar vienādojuma (118) koeficientu palīdzību, ~~saucējs~~ skaitītājs ir vienlīdzīgs nullei un ~~skaitītājs~~ saucējs vispārīgā gadījumā atšķiras no nulles.

Vienādojuma (118) koeficienti ir atkarīgi no lielumiem ρ un τ, kas var būt patvaļīgas s funkcijas. Šos koeficientus ir tāpēc iespējams pakļaut diviem noteikumiem, kas ir izpildīti visos līknes L punktos, piemēram, varam prasīt, lai vienādojumam (118) viscaur būtu viena trīskārša vai divas divkāršas saknes, tāpat varam prasīt, lai kādam oskulētājam cilindram divi no lielumiem a, φ, ψ ir dotas s funkcijas, respektīvi ir konstanti, u.t.t. Ja ar šādu noteikumu palīdzību iegūtām līknēm katram no oskulētājiem cilindriem vismaz viens no lielumiem a, φ un ψ neapmierina nekustības noteikumus, līkne neatradīsies uz nemainīga cilindra. Dažas šādas līknes, kam oskulētāji cilindri pilda zināmus noteikumus, aplūkosim nākošā paragrafā.

2. Aplūkosim tagad izņēmuma gadījumus, kad vismaz viens no lielumiem ρ, ρ', τ top par nulli atsevišķā punktā X.

a) Ja $\rho = 0$, (112) dod $\psi = 0$: cilindra ass ir parallēla pieskarei punktā X. (113) un (114) top par

$$a\,\rho' \cos\varphi = 0$$

$$a[\rho'' \cos\varphi + 2\,\rho'\tau \sin\varphi] = 0$$

Ja $\rho'\tau \neq 0$, vienīgais atrisinājums ir $a = 0$, t.i., visi oskulētāji cilindri ir pārvērtušies L pieskarē punktā X. Ja $\tau = 0$, oskulētājs cilindrs top nenoteikts: tā ass var būt ikkatra parallēle pieskarei, ja $\rho' = \rho'' = 0$, vai arī patvaļīga parallēle pieskarei, kas atrodas rektificētājā plaknē, ja viens no lielumiem ρ', ρ'' nav nulle.

Šrī palikušajiem izņēmuma gadījumiem varam pieņemt, ka $\rho \neq 0$.

b) Ja $\rho' = 0$, vienādojums (113) ir apmierināms divējādā veidā: vai nu

$$\sin\varphi = 0$$

vai arī

$$a\,\tau = 3 \sin\psi \cos\psi$$

Pirmā gadījumā varam ņemt $\cos\varphi = +1$, (112) dod

$$a\,\rho = \sin^2\psi$$

un šo vērtību ievietojot vienādojumā (114), tas dod

$$(119)\quad \frac{\rho''}{\rho}\sin^2\psi = (3\rho\cos\psi-\tau\sin\psi)(\rho\cos\psi-\tau\sin\psi)$$

Šai φ vērtībai, kā rāda (119), atbilst divi vispārīgā gadījumā dažādi oskulētāji cilindri. Ja $\rho'' = 0$ un $\tau \neq 0$, tie droši ir dažādi, jo tos raksturo

$$(120)\quad \operatorname{tg}\psi = \frac{\rho}{\tau} \quad \text{un} \quad \operatorname{tg}\psi = 3\frac{\rho}{\tau}$$

Otrā iespējamība apmierināt (113) dod četrus vispārīgā gadījumā dažādus cilindrus, kam atbilst (118) saknes $t_1 \neq 0$ un kam formulas (115) un (116) ir derīgas.

ja $\rho\neq 0, \rho'=\rho''=0$?

c) Ja $\rho\rho' \neq 0$, $\tau = 0$, $\tau' \neq 0$, vienādojumiem (112) līdz (114) ir atrisinājums

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \qquad \psi = 0, \qquad a\tau' = 3\rho,$$

kas atbilst vienādojuma (118) vienīgai bezgalīgi lielai saknei. Citām saknēm atkal der (115) un (116).

Ja $\tau = \tau' = 0$, vienādojuma (118) divas saknes ir bezgalīgi lielas, pārējās četras ir galīgas un tām der (115) un (116). Šajā gadījumā bezgalīgi lielajām (118) saknēm atbilst arī bezgalīgas a vērtības, t.i., divi oskulētāji cilindri ir pārvērtušies līknes L oskulētājā plāksnē punktā X. Līknei ar šo plāksni ir kopīgi pieci bezgalīgi tuvi punkti, tā tad eksistē arī konika šai plāksnē, kam ir ceturtās kārtas pieskaršanās ar līkni. Visi oskulētāji cilindri, kas ik pa divi ir simmetriski attiecībā uz oskulētāju plāksni, iet caur šo koniku, jo konikai ar katru no tiem ir kopīgi pieci punkti. No četriem oskulētājiem cilindriem, kas nesakrīt ar oskulētāju plāksni, reālām līknēm divi vispārīgā gadījumā ir imagināri; pārējie divi ir imagināri, sakrīt ar oskulētāju plāksni vai ir reāli, atkarībā no tā, vai konika ir hiperbola, parabola vai ellipse. Riņķa gadījumā visi šie četri oskulētāji cilindri sakrīt ar cilindru, kam riņķis ir taisns šķēlums.

Ja gribam, lai katrā līknes punktā viens no lielumiem ρ, ρ', τ būtu vienlīdzīgs nullei, $\rho = 0$ dod triviālo taisnes gadījumu, $\tau = 0$ dod plakanas līknes, kam katrā punktā eksistē oskulētāja konika ar pieskaršanās kārtu četri un kam tā tad ir spēkā visi punkta c) slēdzieni. Atliek vienīgi vēl aplūkot interesanto gadījumu $\rho' = 0$, t.i., šķērsus riņķus - līknes ar pastāvīgu liekuma radiju. Lai vieglāk varētu raksturot to sakrītošo oskulētāju cilindru daudzkārtību, noteiksim vienādojumiem (112) līdz (114) līdzvērtīgus vienādojumus pietiekami vispārīgā veidā, lai tie derētu arī citos gadījumos, piemēram izotropām līknēm.

Līdzīgā veidā kā iepriekš, varētu aplūkot arī singulāru punktu X gadījumus, kam kāds no vienādojuma (118) koeficientiem top bezgalīgs, ko mēs te nederīsim.

3. Frenet formulu vietā ņemam atvasināšanas formulu

$$(121) \qquad \vec{X}^{IV} = p\vec{X}' + q\vec{X}'' + r\vec{X}''' \quad ,$$

ko varam lietāt ikvienā telpas līknes punktā, kur vien $\vec{X}'$, $\vec{X}''$ un $\vec{X}'''$ nav koplanāri. Tā kā attiecīgais gadījums līknēm, kam der Frenet formulas, ir jau aplūkots, varam pieņemt, ka šis noteikums ir izpildīts.

Lai sakarību (108) izteiktu parocīgākā veidā, definēsim palīga vektoru $\vec{Z}$ ar sakaru

$$(122) \qquad \vec{Z} = X - C - \vec{u}\,[\,\vec{u}(X-C)]\,.$$

Tā kā $\vec{u}$ ir vienības vektors,

(123) $\quad \vec{u}^2 = 1$

un vektori $\vec{u}$ un $\vec{Z}$ ir perpendikulāri

(124) $\quad \vec{u}\vec{Z} = 0$

Atvasinot sakarības, kur ietilpst vektors $\vec{Z}$, ja $\vec{u}$ un C ir nemainīgi, ir jāliek

(125) $\quad \vec{Z}' = \vec{X}' - \vec{u}(\vec{u}\vec{X}')$.

Izsakot vienādojumu (108) ar vektora $\vec{Z}$ palīdzību, dabūjam

(126) $\quad \vec{Z}^2 = a^2$.

Lai raksturotu oskulētāju cilindru, šis vienādojums jāatvasina četras reizes, ievērojot atvasināšanas noteikumus (125) un (121), uzskatot a par konstanti. Pirmo reizi atvasinot, dabūjam

$$\vec{Z}\vec{X}' - (\vec{u}\vec{Z})(\vec{u}\vec{X}') = 0$$

Ievērosim, ka pēdējo locekli varam atmest: (124) rāda, ka tā vērtība ir nulle, un (125), ka to atvasinot identiski pazūd $\vec{u}\vec{Z}$ atvasinājums, tā tad arī visi šī locekļa atvasinājumi satur faktoru $\vec{u}\vec{Z}$ un ir vienlīdzīgi nullei. Četrreiz atvasinot, dabūjam

$$\vec{Z}\vec{X}' = 0$$

$$(127)\qquad \vec{Z}\vec{X}'' - (\vec{u}\vec{X}')^2 + \vec{X}'^2 = 0$$

$$\vec{Z}\vec{X}''' - 3(\vec{u}\vec{X}')(\vec{u}\vec{X}'') + 3\vec{X}'\vec{X}'' = 0$$

$$\vec{Z}(p\vec{X}' + q\vec{X}'' + r\vec{X}''') - 4(\vec{u}\vec{X}')(\vec{u}\vec{X}''') - 3(\vec{u}\vec{X}'')^2 + 4\vec{X}'\vec{X}''' + 3\vec{X}''^2 = 0$$

Pirmie trīs vienādojumi viennozīmīgi noseka vektoru $\vec{Z}$, ja zināms $\vec{u}$, jo pēc pieņēmuma $\vec{X}', \vec{X}'', \vec{X}'''$ nav komplanāri. Vienādojums (126), zinot $\vec{Z}$, dod a. Vektora $\vec{u}$ noteikšanai izlietāsim vienādojumu (123) un abus vienādojumus, ko dabūjam izslēdzot $\vec{Z}$ no (124) un (127). Liekot

$$\vec{u} = x\vec{X}' + y\vec{X}'' + z\vec{X}'''$$

$\vec{Z}$ izslēgšanu no (124) un (127) varam izdarīt, saskaitot šos vienādojumus, tos iepriekš reizinot attiecīgi ar: 1) $+1, -x, -y, -z, 0$ un 2) $0, p, q, r-1$. jābūt $r, -1$.
Kopā ar (123), iegūtie vienādojumi $\vec{u}$ noteikšanai dod sistēmu

$$(128)\quad \begin{cases} (x\vec{X}' + y\vec{X}'' + z\vec{X}''')^2 = 1 \\ 3z(\vec{u}\vec{X}')(\vec{u}\vec{X}'') + y(\vec{u}\vec{X}')^2 - 3z\vec{X}'\vec{X}'' - y\vec{X}'^2 = 0 \\ 4(\vec{u}\vec{X}')(\vec{u}\vec{X}''') + 3(\vec{u}\vec{X}'')^2 - 3r(\vec{u}\vec{X}')(\vec{u}\vec{X}'') - q(\vec{u}\vec{X}')^2 - \\ \qquad -4\vec{X}'\vec{X}''' - 3\vec{X}''^2 + 3r\vec{X}'\vec{X}'' + q\vec{X}'^2 = 0. \end{cases}$$

Šī sistēma, kam vienādojumi ir attiecīgi otrās, trešās un otrās pakāpes attiecībā pret $\vec{u}$ komponentēm, noseka divpadsmit vektorus $\vec{u}$, kas ik pa diviem ir pretēji. Tā kā divi pretēji vektori $\vec{u}$ noseka to pašu cilindru, redzam, ka visos gadījumos, kad var lietāt formulu (121), vispārīgi eksistē seši oskulētāji cilindri. Šķietamos izņēmuma gadījumus, kad sistēmai (128) visas atrisinājumu sistēmas nedod galīgas $\vec{u}$ komponentu vērtības, varēs interpretēt kā deģenerētu cilindru gadījumus. Katrā gadījumā reizinot pirmo vienādojumu (128) ar piemērotiem faktoriem un to pieskaitot abiem pēdējiem, iegūstam divus homogēnus vienādojumus, kas vienmēr noteiks sešas x,y un z attiecību sistēmas.

Šķērsa riņķa gadījumā varam izvēlēties garuma vienību (vai izdarīt homotēciju) tā, lai $\rho = 1$. Tad, atmetot parastā riņķa gadījumu $\tau = 0$,

$$\begin{aligned}
\vec{X}' &= \vec{t} \\
\vec{X}'' &= \qquad\quad \vec{n} \\
\vec{X}''' &= -\vec{t} \qquad\qquad\quad +\tau\vec{b} \\
\vec{X}^{IV} &= \qquad -(1+\tau^2)\vec{n} \ +\tau'\vec{b}
\end{aligned}$$

tā tad $q = -1-\tau^2$, $r = \frac{\tau'}{\tau}$. Liekot vēl $x = b+z$, (128) b,y un z noteikšanai, padarot pieminētā veidā abus pēdējos vienādojumus homogēnus, dod

$$(129)\quad \begin{cases} b^2 + y^2 + \tau^2 z^2 = 1 \\ y[\, 3bz - y^2 - \tau^2 z^2 \,] = 0 \\ -3b^2+y^2(3-\tau^2)-3\frac{\tau'}{\tau}by+4bz\tau^2-\tau^4 z^2 = 0 \end{cases} .$$

Abi veidi, kādos varam apmierināt otro vienādojumu, atbilst jau 78.l.p. beigās minētiem gadījumiem. Abi pēdējie vienādojumi (129) ir apmierināti, ja

$$(130)\quad \begin{cases} y = 0 \\ (3b - \tau^2 z)(b - \tau^2 z) = 0 \end{cases}$$

vai arī

$$(131)\quad \begin{cases} y^2 = 3bz - \tau^2 z^2 \\ 3\frac{\tau'}{\tau}by + (\, 3b - \tau^2 z)(\, b - 3z) = 0 \end{cases} ,$$

kas rāda, ka atrisinājums

$$(132)\quad \begin{cases} y = 0 \\ 3b - \tau^2 z = 0 \end{cases}$$

vienmēr ir divkāršs. Šīm b,y,z vērtībām abu pirmo vienādojumu (129) parciālie atvasinājumi pēc b,y,z ir proporcionāli - esam atkal nonākuši pie gadījuma, kad nav izpildīts noteikums par parciālo atvasinājumu vērtību mātricu. Tāpēc arī attiecīgais cilindrs vispārīgā gadījumā nav superoskulētājs cilindrs. To varam redzēt, vēlreiz atvasinot kādu no ceturtās kārtas oskulācijas noteikumiem, piemēram (114), kur liekam $\varrho' = 0$ un ievērojam (111). Vērtības

$$(133)\quad \begin{cases} a = \dfrac{9\varrho}{9\varrho^2 + \tau^2} \\ \varphi = 0 \\ \operatorname{tg}\psi = \dfrac{3\varrho}{\tau} \end{cases},$$

kas atbilst atrisnājumam (132), ja ϱ ir patvaļīgs un konstants, apmierina piektās kārtas pieskaršanās noteikumu(kur jau likts $\varphi = 0$)

$$(134)\quad \varrho\tau'[-3a\tau + 5\sin\psi\cos\psi] = 0$$

tikai, ja $\tau' = 0$ (pieņemot $\varrho \neq 0$). (133) raksturotais cilindrs tā tad superoskulē līkni L tikai punktos, kur $\tau' = 0$. Ja gribam, lai superoskulācija notiktu katrā līknes L punktā, arī τ jābūt konstantam, tā tad līknei jābūt parastai skrūves līnijai.

Ja līkne L ir parastā skrūves līnija, cilindrs, uz kuŗa tā atrodas un ko raksturo

$$a = \frac{\varrho}{\varrho^2+\tau^2}$$

(135) $$\varphi = 0$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\varrho}{\tau}$$

sastopama (132) atrisinājumu starpā vienu vienīgu reizi, kamēr cilindrs, kam atbilst (133) ir trīskāršs vispārīgā gadījumā un pieckārss, ja $\tau = 3\varrho$. Parastās skrūves līnijas ar $\tau = 3\varrho$ ir cilindru maksimālās kārtas aplieсējas; superoskulācijas kārta tām ir 3 un nevis 4, kā varētu sagaidīt pēc sakrītošā cilindru skaita, jau pieminētās parciālo atrisinājumu īpašības dēļ.

Precīzās pieskaršanās kārtas konstatēšanai un iegūto rezultātu pārbaudei, ņemsim šādu parasto skrūves līniju L uz cilindra ar radiju 1. Apzīmējot ar x,y,z līknes tekošā punkta koordinātas nemainīgā ortogonālā koordinātu sistēmā, varam ņemt

$$x = \cos t$$
$$y = \sin t$$
$$z = 3\,t \quad .$$

Šai līknei $\varrho = \frac{1}{10}$, $\tau = \frac{3}{10}$ un (133) dod $a = 5$, $\operatorname{tg}\psi = 1$. Attiecīgajam cilindram, kas oskulē L sākuma punktā, ir vienādojums

$$40(\, x-1 \,) + 5z^2 - (\, y-2z \,)^2 = 0 \,.$$

Ievietojot šī vienādojuma kreisās puses izteiksmē L tekošo koordinātu vērtības un izvirzot pēc t augošām pakāpēm, dabūjam

$$40(\cos t-1\,)+45\,t^2-(\sin t-6\,t)^2 = \frac{9}{7!}\,t^8 + \ldots$$

Līknei L ar cilindru ir kopīgi astoņi bezgalīgi tuvi punkti un nevis pieci, kā vispārīgā gadījumā, tā tad superoskulācijas kārta ir tieši trīs.

4. Aplūkosim vēl formulu (128) izlietāšanu minimālu līkņu gadījumā. Šīm līknēm Frenet formulas aizvieto [18])

$$\begin{array}{lll}
\vec{X}' = \vec{I}_1 & & \\
\vec{I}_1' = & \vec{I}_2 & \\
\vec{I}_2' = k\vec{I}_1 & & -\vec{I}_3 \\
\vec{I}_3' = & -k\vec{I}_2 &
\end{array}$$

pie kam

$$\vec{I}_1\vec{I}_3 = 1 \quad , \quad \vec{I}_2^{\,2} = 1$$

un pārējie šo vektoru kvadrāti un skalārie reizinājumi ir vienlīdzīgi nullei. Ar šo formulu palīdzību dabūjam

$$p = k' \quad , \quad q = 2k \quad , \quad r = 0$$

un no X pirmo trīs atvasinājumu kvadrātiem un skalāriem reizinājumiem no nulles atšķiras tikai

$$\vec{X}''^2 = 1 \qquad \vec{X}'\vec{X}''' = -1 \qquad \vec{X}'''^2 = -2k$$

Ievietojot sistēmā (128), un pieskaitot pēdējam vienādojumam pirmo, dabūjam

$$\begin{aligned}
-2xz + y^2 - 2kz^2 &= 1 \\
yz^2 &= 0 \\
2xz + 4y^2 + 4kz^2 &= 0
\end{aligned}$$

---

18) E. C a r t a n, loc. cit., skat. 34.l.p.

 U46571

Abi pēdējie vienādojumi dod: pieckārt $y = z = 0$ un vienu reizi $y = x + 2kz = 0$. Pirmā vērtību sistēma izteic, ka vektors $\vec{u}$ ir kollīneārs ar izotropo vektoru $\vec{X}'$. Tam tā tad nevar būt garums 1; lai tomēr iegūtu interpretāciju šādam vektoram, varam iedomāties, ka izotropā līkne radusies deformējot kādu līkni, kas nav izotropa, un šai deformējamai līknei atbilstošā cilindra vienādojumā (108) aizvietot $\vec{u}$ ar $\frac{\vec{u}}{d}$, kur d ir garums vektoram $\vec{u}$, kas iet pa cilindra asi. Reizinot (108) ar d^2 un robežgadījumā, kad par $\vec{u}$ var ņemt $\vec{X}'$, liekot $d = 0$, dabūjam kā deģenerētā pieckāršā oskulētāja cilindra vienādojumu

$$[\vec{X}'(X-C)]^2 = 0 \quad ,$$

kas raksturo divkārši ņemto līknes oskulētāju plāksni. Šī interpretācija ir saskaņā arī ar divkāršās plāksnes un līknes kopīgo bezgalīgi tuvo punktu skaitu, kas ir seši, tā tad pat par vienu vairāk, kā jāsatur oskulētājam cilindram.

Pāri palikušajam vienīgajam nedeģenerētam cilindram

$$\vec{u} = z[-2k\vec{X}' + \vec{X}'''] \text{ , kur } z^2 = \frac{1}{2k}$$

$$\text{un} \qquad \vec{Z} = z^2\vec{X}'' \quad ,$$

$$\text{tā tad} \qquad a = z^2 = \frac{1}{2k} \quad .$$

Cilindra radijs tā tad vienlīdzīgs ar pusi no zemākā diferenciālinvarianta k inversā lieluma. Šo interpretāciju invariantam bez pierādījuma dod jau Scheffers [19], vienīgi viņa lietātais diferenciālinvariants ir 16 k un pārskatīšanās vai iespieduma

19) G. S c h e f f e r s, Besondere transcendente Kurven, Enzykl.der Math.Wissenschaften III D 4,1903,256.l.p.

kļūdas dēļ ir rakstīts par trešās kārtas ("vierpunktig"), ne par ceturtās kārtas pieskaršanos.

E. Cartan's [20] konstatē, ka minimālās līknes ar nemainīgu $k \neq 0$ ir minimālas parastās skrūves līnijas; atbilstīgi minimālai līknei L katrā tās punktā X, kur $k \neq 0$, eksistē šāda skrūves līnija, kas tai pieskaras ar kārtu 4; šai skrūves līnijai liekums k ir tas pats, kā līknei L punktā X.

E. Cartan's pirmo rezultātu var iegūt arī no mūsu vienādojumiem, izsakot, ka notiek superoskulācija, kas dod $k' = 0$. Tā kā nedeģenerētais oskulētājs cilindrs ir vienīgs, superoskulācija katrā punktā X var notikt vienīgi tad, ja līkne L atrodas uz cilindra. E. Cartan'a aplūkotā oskulētāja skrūves līnija atrodas uz oskulētāja cilindra.

5. No šai paragrafā iegūtiem rezultātiem Tameri's, aplūkojot vienīgi līknes, kam spēkā Frenet formulas un ignorējot imaginārus cilindrus, 76.l.p. citētā darbā min: ka eksistē augstākais seši oskulētāji cilindri, nedodot tomēr eksplicitus vienādojumus to noteikšanai; ka gadījumā, ja $\rho' = \rho'' = 0$, eksistē 2 līdz 5 oskulētāji cilindri; ka $\tau' = 0$, tad ir nepieciešams noteikums, lai notiktu superoskulācija, kas ir pietiekams parastajām skrūves līnijām, kam ir 2 vai 4 oskulētāji cilindri, ieskaitot cilindru, uz kura tās atrodas.

---

20) loc.cit.42.l.p.

§2. Par līknēm, kam oskulētāji cilindri pakļauti dotiem noteikumiem.

1. Kā jau aizrādīts 77.l.p., telpas līknes L oskulētāju cilindru varam pakļaut diviem dotiem noteikumiem, jo piecas loka s funkcijas a, $\varphi, \psi, \rho, \tau$, kas raksturo līkni un tās oskulētāju cilindru saimi, ir saistītas tikai trim sakarībām (112) līdz (114). Dodot vēl divus noteikumus, kas saista šos lielumus un to atvasinājumus, mēs dabūsim kopskaitā piecus diferenciālvienādojumus ar pieciem nezināmiem. Ja vienādojumi nebūs nesaderīgi, to atrisinājumi vispārīgā gadījumā būs atkarīgi no patvaļīgām konstantēm. Ir, protams, arī iespējami gadījumi, kad vienādojumiem ir kopīgs atrisinājums, kas atkarīgs no patvaļīgām funkcijām. Prasot, piemēram, lai cilindra ass būtu pieskare punkta C - līknes L tekošā punkta X projekcijas uz cilindra asi - ģeometriskai vietai, acīmredzot visas līknes uz kāda nemainīga cilindra dod atrisinājumu.

Atkarībā no dotiem noteikumiem, var būt izdevīgi eliminēt (112) līdz (114) starpā nevis a un ψ, lai iegūtu sakarību (118) t, ρ, τ un abu pēdējo atvasinājumu starpā, bet kādus citus divus lielumus, vai vispār izteikt a, $\varphi, \psi, \rho, \tau$ ar palīglielumu palīdzību. Aplūkosim vienu šādu redukciju, ar ko iespējams vairākos gadījumos aplūkojamās problēmas atrisināšanu reducēt uz viena pirmās kārtas diferenciālvienādojuma atrisināšanu līdz ar sekojošām kvadrātūrām. Pieņemot, ka $\rho\tau \neq 0$, liekam

$$(136)\quad A = -\frac{\rho'}{\rho\tau}, \quad B = -3\frac{\tau'}{\tau^2}, \quad D = 3\frac{\rho}{\tau}, \quad E = \frac{5\rho'^2 - 3\rho\rho''}{\rho^2\tau^2}$$

Tad vienādojums (118) iegūst veidu

(137) $[t^4 + Bt^3 + Et^2 + 2At + A^2](t^2+1) - D^2t^4 = 0$.

Lielumi A,B,D,E savā starpā saistīti ar sakaru

(138) $$(B - 3A)dA = (AB + E - 2A^2)\frac{dD}{D}$$

Ja A,B,D,E ir iegūti kā viena parametra funkcijas, kas apmierina šo vienādojumu, līknes liekumu, vērpi un loku s iegūstam ar divām kvadrātūrām, jo

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = \frac{3AdD}{(3A-B)D} = \frac{3AdA}{-2A^2+AB+E},$$

kas dod liekumu. Vērpi dod

$$\tau = 3\frac{\varrho}{D}$$

un loku

$$ds = \frac{dD}{\varrho(B-3A)} = \frac{\varrho dD-Dd\varrho}{\varrho^2 B}.$$

Abas $\frac{d\varrho}{\varrho}$ un ds izteiksmes dod tās pašas vērtības.

Patvaļīgā konstante, kas rodas nosakot ϱ, ir dimensijas konstante - to mainot, mēs iegūstam līknes, kas viena otrai līdzīgas. Konstante, kas rodas nosakot s, vienīgi noteic līknes punktu, no kura sākam skaitīt lokus.

Ievērosim vēl speciālās lielumu A,B,D,E vērtības speciālām līknēm. Vispārīgām skrūves līnijām D ir konstanta un B = 3A; ϱ un s noteikšanai jāņem pēdējās diferenciālu izteiksmes, jo pirmās ir nenoteiktas. Cilindrokoniskām skrūves līnijām visi četri lielumi ir konstanti un turklāt

(139) $B = 3A$, $E = -A^2$.

Iepriekšējās formulas ϱ un s noteikšanai, protams, te neder, bet ja doti B un D, ar vienu kvadrātūru dabūjam τ un ϱ kā s funkciju. Beidzot parastām skrūves līnijām D ir patvaļīga konstante, A= B= E= 0.

2. Meklēsim līknes L, kam eksistē trīskāršs oskulētājs cilindrs. Izsakot, ka t ir vienādojuma (137) trīskāršs sakne un eliminējot no dabūtiem trim vienādojumiem lielumus B,D,E ik pa divi, dabūjam

$$(140)\begin{cases} B(3t^5-t^3) = -8A^2+2A(t^3-3t)-8t^6 \\ D^2(3t^6-t^4) = -(t^2+1)^3(3A^2+2At+t^4) \\ E(3t^4-t^2) = A^2(-3t^4-9t^2+6)+2A(-t^5-6t^3+3t)-t^8+3t^6 \end{cases}$$

Meklēsim vispirms vai problēmas atrisinājumu starpā nav vispārīgas skrūves līnijas. Tām, kā minēts, D ir konstants un B = 3A. Ievietojot pēdējo noteikumu pirmā vienādojumā (140), dabūjam

$$8A^2 + A(9t^5-5t^3+6t) + 8t^6 = 0 \quad .$$

Kopā ar otro vienādojumu (140) mums ir divi vienādojumi ar konstantiem koeficientiem, kas saista A un t vērtības. Var pārbaudīt, ka šie vienādojumi ir nestkarīgi; tie tā tad nosaka konstantus A un t. Bet tad līkne ir cilindrokoniska skrūves līnija vai parastā skrūves līnija. Tā kā pēdējai mūsu problēma jau ir aplūkota, paliek vēl cilindrokoniskas skrūves līnijas gadījums. Tad noteikums $E = -A^2$ dod otru vienādojumu vienīgi A un t starpā

$$A^2(-10t^2+6)+2A(-t^5-6t^3+3t)-t^8+3t^6 = 0$$

Izslēdzot A abu pēdejo vienādojumu starpā, dabūjam

$$10t^4(3t^2-1)^2(t^2+1)(t^2-2)(t^4-5t^2-2) = 0 \quad .$$

Sakne $t = 0$ dod jau aplūkoto gadījumu $\rho' = 0$. $3t^2-1 = 0$ dod gadījumu, kad (140) gan ir apmierināti, bet šie noteikumi nav līdzvērtīgi ar trīskāršas saknes eksistences noteikumiem, kas visi nav apmierināmi. $t^2+1 = 0$ dod $\rho = 0$. Pāri palikušās sešas t vērtības dod imagināras cilindrokoniskas skrūves līnijas, kas ir problēmas atrisinājumi.

Pārējās līknes, kam katrā punktā eksistē trīskāršs oskulētājs cilindrs, dabūjam pieņemot, ka $t(3t^2-1) \neq 0$, izsakot B,D,E ar formulu (140) palīdzību kā A un t funkcijas un ievietojot dabūtās izteiksmes vienādojumā (138), kas dod

$$(141) \quad t^2(t^2+1)(3t^2-1)M\,dA + 3(2A-t^3+t)[A(5t^2-1)+2t^5]N\,dt = 0 \; ,$$

kur

$$M = A^3(-30t^2+26) + A^2(3t^5-43t^3+30t) + A(6t^8+10t^6-6t^4+6t^2) + 7t^9 + 3t^7$$

$$N = 8A^3 + A^2(9t^5+5t^3) + A(10t^6+12t^4-6t^2)+t^9-3t^7$$

(141) integrāli, kam $dA \neq 0$, $dt \neq 0$ dod līknes, kas nav skrūves līnijas un kam katrā punktā eksistē trīskāršs oskulētājs cilindrs ar superoskulācijas kārtu 2. Šādus integrālus neizdevās atrast. Atrisinājumi, ko dod MdA koeficienta pielīdzināšana nullei, tikko kā aplūkoti.

Analogā veidā kā iepriekš, varam arī meklēt līknes L, kam katrā punktā eksistē divi divkārši oskulētāji cilindri. Te var izteikt A,B,D,E kā abiem cilindriem atbilstošo t vērtību funkcijas. Atrisinājumu starpā atkal ir kā cilindrokoniskas skrūves līnijas, tā līknes, kas nav skrūves līnijas un kas noteicamas integrējot vienu pirmās kārtas un pirmās pakāpes algebrisku diferenciālvienādojumu.

Atzīmēsim vēl, ka prasība, lai vismaz trīs vienādojuma (137) saknes būtu konstantes, raksturo parastās un cilindrokoniskās skrūves līnijas, kam visas saknes ir konstantes. Cilindrokoniskām skrūves līnijām vienādojums (137), to izrakstot, iegūst veidu:

$$t^6 + 3At^5 + (1-A^2-D^2)t^4 + 5At^3 + 2At + A^2 = 0 .$$

Tā kā trūkst kvadrātiskā locekļa, kā arī t^3 un t koeficientiem, ja A un D ir reāli, ir tā pati zīme, secinām, ka vismaz viens sakņu pāris ir imagināras. Tā tad reālām cilindrokoniskām skrūves līnijām vismaz divi oskulētāji cilindri ir imagināri.

3. Ja dotie noteikumi saista lielumus a, φ, ψ, ir parocīgi ņemt tos pašus par pamata mainīgiem, lai varētu viegli interpretēt dabūtās sakarības. Izteiksmju vienkāršošanai ņemam apzīmējumus

$$p = \sin\varphi \qquad x = \sin\psi$$
$$q = \cos\varphi \qquad y = \cos\psi$$

Nekustības noteikumus (111) tad varam rakstīt veidā

$$\begin{cases} a' = 0 \\ \psi' = \dfrac{px^2}{aq} \\ \varphi' = -\tau + \dfrac{xy}{a} \end{cases} .$$

Noteikumi, kas faktiski raksturo cilindra nekustību, ir abi pirmie. φ' izteiksme ir to sekas identiski pastāvošo sakarību (112) un (113) dēļ.

Vienam oskulētājam cilindram atbilstošos lielumus a, φ, ψ un to atvasinājumus pēc līknes loka saista sakarība

$$(142)\qquad \frac{a'^2 q}{ap^2} + a'\left[-2\psi' \frac{qy}{p^2 x} - \frac{\varphi'}{p} + 3\frac{pxy}{a}\right] + \left(\psi' - \frac{px^2}{aq}\right) - 2\frac{a'qy}{p^2x} + 4\psi'\frac{aqy^2}{p^2x^2} + 2\varphi'\frac{ay}{px} + 3p(x^2-y^2) = 0 .$$

Tā rāda, ka prasību, lai oskulētājam cilindram radijs a ir konstants, var izpildīt divejādā veidā: vai nu liekot

$$(143)\qquad \psi' - \frac{px^2}{aq} = 0,$$

tad līkne atradīsies uz nemainīga cilindra, vai arī liekot

$$(144)\qquad 4\psi'\frac{aqy^2}{p^2x^2} + 2\varphi'\frac{ay}{px} + 3p(x^2-y^2) = 0 .$$

Līknes, kam pastāv šī sakarība, vispār neatradīsies uz cilindra, jo (144) un (143) acīmredzot nav līdzvērtīgi. Prasot, lai pastāv reizē (143) un (144), mēs raksturojam noteikta tipa līknes, ko varētu atrast integrējot diferenciālvienādojumu

$$(145)\qquad 2c(1+c)db + (3bc+b+4)dc = 0 ,$$

kas rodas $b = tg^2\varphi$ un $c = tg^2\psi$ starpā, eliminējot loku s no sakarībām (143) un (144). Integrēšanu un tai sekojošo līknes noteikšanu var atvietot ar ģeometriskiem apsvērumiem. Ja cilindram V, uz kura atrodas līkne L, ir izpildīts noteikums (144), to var uzskatīt par robežstāvokli kādam mainīgam oskulētājam cilindrem ar rādiju a_1, kam robežgadījumā $a_1 = a$ un $a_1' = 0$. Līknēm L tā tad jābūt charakteristiskām līknēm viena parametra pastāvīga rādija a cilindru saimes atsevišķām virsām V.

Atvasinot šādas saimes vispārīgā cilindra vienādojumu (108), kur par mainīgiem uzskatām vienīgi C un $\vec{u}$, dabūjam

$$(146) \qquad \vec{C}'(X-C) + [\vec{u}(X-C)][\vec{u}'(X-C) - \vec{u}\,\vec{C}'] = 0 \ .$$

Lai iespējami vienkārši raksturotu vienādojumu (108) un (146) noteikto līkni L, ņemam par punktu C cilindra (108) ass centrālo punktu, šo asi uzskatot kā asu virsas veidotāju. Tad

$$\vec{C}'\vec{u}' = 0.$$

Ņemot ortogonālu koordinātu sistēmu, kam sākuma punkts ir C, x un z ass iet attiecīgi vektoru $\vec{u}'$ un $\vec{u}$ virzienos, ar parametra λ palīdzību izsakām līknes L tekošā punkta koordinātas veidā

$$X(a \cos\lambda,\ a \sin\lambda,\ k \operatorname{tg}\lambda),$$

kur k ir $\vec{C}'$ komponente, kas paralēla y asij. Aprēķinot šai līknei un nemainīgajam cilindram atbilstošās b un c izteiksmes, atrodam

$$b = \frac{4k^2 \operatorname{tg}^2\lambda}{a^2\cos^4\lambda + k^2} \qquad c = \frac{a^2}{k^2}\cos^4\lambda$$

Izslēdzot λ, dabūjam

$$c(bc+b+4)^2 = 16\,\frac{a^2}{k^2} = \text{const.},$$

kas ir (145) vispārīgais integrāls.

Atrastās līknes ir tā saucamās horoptra līknes[21].

4. Par dabisko vienādojumu līknēm uz cilindra ar radiju a var uzskatīt vienādojumu (143) vai ikvienu no abiem pēdējiem vienādojumiem (111), ja φ un ψ ir vienādojumu (112) un (113) noteiktās ϱ, ϱ' un τ funkcijas. Lai šo vienādojumu izteiktu vienīgi ar ϱ, τ un to atvasinājumu palīdzību, būtu jāizslēdz φ vienādojumu (115) un (118) starpā. Nav grūti uzrakstīt dabujamo vienādojumu, pielīdzinot kādu sestās kārtas determinantu nullei, bet tā vērtība ir niecīga: lai pārbaudītu, vai kāda līkne L atrodas uz rotācijas cilindra, ir katrreiz jāpārbauda, vai attiecīgais determinants tai ir, vai nav identiski vienlīdzīgs nullei. Šo paņēmienu praktiski vēl var lietāt, ja līkne L ir dota, jo tad pietiek konstatēt, ka diviem dažādiem L punktiem atbilstošiem sestās pakāpes vienādojumiem attiecībā pret a, ko dabūjam determinantu pielīdzinot nullei, nav kopīgu sakņu, lai secinātu, ka līkne uz cilindra neatrodas; ja turpretim līknes L dabiskais vienādojums satur vēl kādus brīvi nosakāmus parametrus, arī šis paņēmiens negātīvas atbildes iegūšanai nav praktiski izpildāms. Tāpēc arī šo vienādojumu neminēsim. Praktiski derīgāks, kaut gan arī gars, ir šāds paņēmiens: izlietājot sakarības (112) un (113), izteic ϱ un τ un to atvasinājumus kā konstanta a un mainīgu φ, ψ un to atvasinajumu funkcijas. Tad pārbauda, vai sakarus, kas raksturo doto līkni un (143) var ar šādām a, φ, un ψ vērtībām apmierināt. Ja tas ir iespējams un lielumi s, φ, ψ noteikti kā viena parametra funkcijas, līknes vienādojums galīgā veidā ir iegūstams ar divām kvadrā-

---

21) Diezgan plašu to aplūkojumu līdz ar literātūras norādijumiem dod G. L o r i a, Curve sghembe speciali, I (Bologna, Nicola Zanichelli), 1925, 169.-173.l.p.

tūrām, jo ir zināms pieskares un nemainīgā ass vienības vektora leņķis; ja šādas a, φ, ψ vērtības neeksistē, līkne uz cilindra neatrodas.

Tā kā oskulētājus cilindrus aplūkojām galvenokārt pirmās nodaļas vispārīgo rezultātu illustrācijai, lai šo darbu pārāk nepagarinātu, neaplūkosim arī dažādas citas interesantas īpašības, ko nosaka cilindru un līkņu pieskaršanās, cerot pie tām atgriezties kādā turpmākā rakstā.

Citētās literatūras saraksts:

1. E. C a r t a n, La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle traitées par la méthode du repère mobile.(Paris, Gauthier-Villars)1937.
2. E. C e s à r o, Vorlesungen über natürliche Geometrie. (Leipzig,Teubner)1926.
3. E. C o t t o n, Sur les courbes tracées sur une surface. Annales de la Soc.Polonaise de Mathématiques 17,1938,32.-41.l.p.
4. G. D a r b o u x, Leçons sur la théorie générale des surfaces (Paris,Gauthier-Villars)1887.
5. J. D u b o u r d i e u, Questions topologiques de géométrie différentielle.Mémor.d.Sc. Math.78(Paris,Gauthier-Villars)1936.
6. V. H l a v a t y, Natürliche Gleichung der Kurven auf einer allgemeinen Fläche im metrischen Raume. Math.Zeitschrift 30,1929, 470.-480.l.p.
7. G. J u l i a, Eléments de Géométrie infinitésimale. (Paris,Gauthier-Villars)1927.
8. F. K l e i n, Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen,Erlangen 1872 = Gesammelte Abhandlungen Bd.1 (1921),460.-497.l.p. = Mathematische Annalen Bd.43,1893.
9. F. K l e i n, Vorlesungen über höhere Geometrie. (Berlin,Springer)1926.
10. S. L i e, Classification und Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen, etc. III,Archiv for Math.og Naturw. 9,1883,371.-458.l.p. = Gesammelte Abhandlungen 5,362.-427.l.p.

11. G. L o r i a, Curve sghembe speciali, I(Bologna, Nicola Zanichelli), 1925.
12. G. M a m m a n a, Sugli inviluppi di ordine superiore dei sistemi di curve piane. Giornale di Matematiche 65, 1927, 1.-20.1.p.
13. H. P i c c i o l i, Sur un procédé pour parvenir à l'équation intrinsèque des lignes du cylindre de révolution, Nouvelles Annales 4^e s.4, 1904, 402.-405.1.p.
14. G. S c h e f f e r s, Besondere transcendente Kurven, Enzykl. der Math. Wissenschaften III D 4, 1903.
15. В. А. Стеклов, Основы теории интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений (Москва-Ленинград), 1927.
16. A. T a m e r l, Über die oskulierenden Drehzylinder einer gegebenen Raumkurve. Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften in Wien, 140, 1931, 1.-10.1.p.
17. H. G. Z e u t h e n, Lehrbuch der abzählenden Methoden der Geometrie(Leipzig, Teubner), 1914.

Ahuasinol (114) dabu

$$a\left[(\rho''' - 3\rho'\tau^2 - 3\rho\tau\tau')\cos\varphi + (3\rho''\tau + 3\rho'\tau' + \rho\tau'' - \rho\tau^3)\sin\varphi\right] =$$

$$= 10\rho\rho'\cos^2\varphi + \sin\varphi\cos\varphi\left\{(-10\rho'\tau - 5\rho\tau')\cos\varphi + (5\rho'' - 5\rho\tau^2 - 12\rho^3)\sin\varphi\right\} + (-10\rho\rho'\sin^2\varphi + 10\rho^2\tau\sin\varphi\cos\varphi)\sin^2\varphi$$