АКАДЕМИЯ НАУК ЛАТВИЙСКОЙ ССР

ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ ПОЛИМЕРОВ

Лукошевичюс Римвидас - Антанас Стасио

МИНИМИЗАЦИЯ ВЕСА ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ИЗ КОМПОЗИТНОГО МАТЕРИАЛА ПРИ ОСЕВОМ СЖАТИИ И ВНЕШНЕМ ДАВЛЕНИИ

01.02.04 - механика деформируемого твердого тела

Д и с с е р т а ц и я
на соискание ученой степени кандидата
технических наук

Научные руководители — доктор
технических наук, профессор Г.А. ТЕТЕРС,
кандидат технических наук, ст. н. сотр.
Р.Б. РИКАРДС

Рига — 1976

С О Д Е Р Ж А Н И Е

В В Е Д Е Н И Е

Всвязи с нарастающим техническим прогрессом в нашей стране и за рубежом год за годом создаются новые виды конструкций различного назначения: строительные,судостроительные,авиационные,ракетные и др. Одновременно развиваются новые теоретические и практические основы расчета таких конструкций, среди которых важное место занимает проблема оптимизации. Проблема оптимизации,имеющая колоссальное значение для народного хозяйства,в настоящее время исследуется во многих областях науки и техники,в том числе и в механике твердого деформируемого тела. "Считать разработку теории и методов оптимизации одной из важнейших задач в разных разделах механики твердого деформируемого тела" - отмечено в решении Всесоюзной конференции "Проблемы оптимизации в механике твердого деформируемого тела", состоявшейся 4 - 6 июня 1974 г. в Вильнюсе. О внимании к этой проблеме и ее важности можно судить и из следующих фактов. Общее число работ по оптимальному проектированию конструкций уже превышает 3000 и появляется со скоростью 200 - 300 работ в год,составляя около 2-3 % в общем потоке информации по механике твердого деформируемого тела (по реферируемым работам в "Механика. Серия В.Механика твердых деформируемых тел", [115] и [116]). В 1974 г. появился первый новый журнал по инженерным проблемам оптимизации [184] .

В механике твердого деформируемого тела задачи оптимизации ставились и некоторым образом решались гораздо раньше, чем в других областях. Ж.Лагранж поставил вопрос об очертании центрально сжатого стержня,обеспечивающего минимум веса при заданной нагрузке [175] . Эта задача является истоком задач оптимизации с учетом устойчивости. Решение задачи Ж.Лагранжа было получено лишь спустя много лет и принадлежит члену Петербургской Академии Наук Клаузену [173] . В [186] показано, что решение Клаузена для сжатой, шарнирно опертой упругой стойки минимального объема с непрерывным изменением размеров по длине, найденное на основе условия устойчивости является нереальным, так как при этом площади концевых сечений получаются равными нулю. К задаче Лагренжа в различных ее обобщениях (различные поперечные сечения, различные виды нагрузки, арка и т.д.) вернулись и другие авторы ([32] , [111] , [143] , [153]). Эта классическая задача с позиций математического программирования рассмотрена в [10] , где численное решение проведено методом проектируемых градиентов Розена. Позднее оптимальное решение этой задачи в аналитической форме получено методом динамического программирования в работе [152] . Она исследовалась в диссертации [54] способом последовательных приближений, в [124] - методом случайного поиска.

Проблемы оптимизации конструкций характеризуются большой вариантностью в постановке и, как правило, большим объемом вычислительных работ. Поэтому на их решение существенное влияние оказывают математический аппарат и средства вычислительной техники, имеющиеся в распоряжении исследователя. Последние достижения математики и вычислительной техники позволяют сформулировать новые и заново рассмотреть ранее сформулированные в этой области проблемы. В связи с этим, исследования ведутся по двум основным направлениям: по аналитическим методам, основанным на вариационном исчислении, и по методам, основанным на математическом программировании. Настоящая работа принадлежит второму направлению.

Развитие методов математического программирования открыло новые возможности и перспективы для исследования и оптимального проектирования конструкций. Многие задачи оптимизации конструкций могут быть выражены в виде задач математического программирования.

Линейное программирование, возникшее впервые в работе Л.В. Канторовича [63] в 1939 г. и возродившееся в 1949 г. в статье Дж.Б.Данцига [165], впервые для исследования и оптимального проектирования конструкций было использовано в начале пятидесятых годов американскими учеными А.Чарнес и Н.И.Гринберг [163], а также И.Хейман [168], [169].

В СССР метод линейного программирования к расчету строительных конструкций впервые применил А.А.Чирас [155], [156]. Начатые в 1963 году и оформившиеся в дальнейшем в самостоятельное направление работы А.А.Чираса [157] - [159] и др. и его учеников являются ярким примером успешного применения математического программирования к решению новых задач механики твердого деформируемого тела. Также очень успешно методы математического программирования для синтеза упругих оптимальных шарнирно-стержневых и других систем были применены Д.А.Мацюлявичюсом [96] - [99] и др.

Далеко не все задачи оптимизации конструкций можно свести к задачам линейного программирования. Существует очень много задач, для решения которых следует использовать методы нелинейного программирования, получившего свое начало в работе Куна и Таккера [174]. Сегодня уже имеется много монографий и статей советских и зарубежных авторов по математическому программированию и его численным методам, которые могут быть применены для решения проблем оптимизации конструкций различных видов,материалов и назначений.Это монографии Р.Беллмана [II] ,С.И.Зуковицкого и Л.И.Авдеевой [58] , Г.П.Кюнци и В.Крелле [72] ,Г.Ф. Хэдли [I5I] , Д.Б.Юдина [I6I] , Л.А.Растригина [I29] , а также недавно появившиеся на русском языке монографии Р.Даффина, Э.Питерсона и К.Зенера [52] , У.И.Зангвилла [57] , Э.Полака [II9] , Д.Химмельблау [I49] и др. Появление каждого нового направления или метода в математическом программировании,наряду с различными областями его применения в экономике,управлении и других областях, находят свое применение и в оптимальном проектировании конструкций.Ввиду того,что данная работа посвящена вопросам оптимизации цилиндрических оболочек из композитного материала,приведем только примеры применения методов математического программирования и оптимального управления к проблеме оптимизации цилиндрических оболочек (изотропных и подкрепленных) и,в редких случаях,некоторых других конструкций и более детально рассмотрим вопросы оптимизации упругих цилиндрических оболочек из композитных материалов.

Одними из наиболее популярных методов нелинейного программирования для решения задач оптимизации являются градиентные методы в различных модификациях.Примеры применения этих методов в различных их вариантах,можно найти в работах И.Н.Гинзбурга, Б.Я.Кантора,С.Н.Кана и др. [37] - [42] , [62] для оптимизации подкрепленных,трехслойных и гофрированных цилиндрических оболочек.Эти методы также используются и другими авторами [94] , [I40] и др.

Метод случайного поиска применяется Ю.М.Почтманом с соавторами для оптимизации гладких ([I20] , [I22] , [I23]), трехслойных ([I25]),ребристых ([30] , [I2I]) оболочек, а также другими авторами [44] , [61] , [145] и др.

Примеры применения метода динамического программирования для оптимизации безмоментных оболочек вращения можно найти в работах [70] , [71] , [107] и др.

Определение наименьшего веса многослойной пластинки или оболочки,несущей заданную нагрузку,как задача выпуклого программирования сформулирована в [80] , где используется метод отсечений.

Для определения,с точки зрения веса оптимального закона толщины по длине цилиндрической оболочки,нагруженной осесимметрическим внешним давлением с учетом устойчивости,в работе В.И. Моссаковского с соавторами [5] применен обобщенный принцип максимума.Принцип максимума Понтрягина использован в [45] и [95] В [95] получены уравнения системы сопряженных оболочек вращения переменной толщины.В [45] получены уравнения,позволяющие определить оптимальную форму оболочки вращения постоянной толщины. В обеих работах показано,что оптимальными являются поверхности кусочно-постоянной кривизны.Обзору работ,относящихся к применениям принципа максимума Понтрягина к стержням,пластинам и оболочкам,посвящена работа Ю.Р.Лепика [77] .

К одним из первых попыток применить метод геометрического программирования для оптимизации конструкций следует отнести работы [160] и [177] .

Вопросы приложения теории надежности к решению экстремальных задач строительной механики рассматриваются в [60] . Здесь математическая модель задачи проектирования конструкций с оптимальной надежностью формулируется как стохастическая модель нелинейного программирования.

В настоящее время по вопросам оптимизаций конструкций написано немало обзоров,освещающих различные стороны решения этих проблем в различные периоды.К более ранним обзорам по оптимальному проектированию конструкций относятся [130] , [182] и [188] .Общее состояние современной строительной механики,главные проблемы и направления к 1971 г.изложены в книге В.В.Болотина,И.И.Гольденблата и А.Ф.Смирнова [16] , где затрагиваются также и вопросы оптимального проектирования конструкций.Обзор некоторых исследований,опубликованных преимущественно на английском языке,по оптимальному проектированию конструкций дается в [112] . Анализ существующих методов оптимизации приводится в [176] .Подробно рассматривается общая постановка задачи оптимального проектирования.Особое внимание уделяется методам решения задач с использованием штрафных функций. Обзору работ,выполненных на кафедре строительной механики Днепропетровского ИСИ в 1968-1972 гг. и близких к ним работ других авторов,посвящена статья [127] . В [166] дан обзор и обобщение результатов оптимизации некоторых конструкций,опубликованных ранее.Описана методология поиска оптимального решения для случаев непрерывного и дискретного изменения варьируемых параметров проекта по методам штрафных функций и динамического программирования.

Широкое применение тонкостенных конструкций из композитных материалов типа оболочек и пластин,требует всестороннего теоретического и экспериментального рассмотрения различных вопросов расчета таких конструкций.Большую работу в этой области проделали советские ученые С.А.Амбарцумян([2] , [3]),Э.И.Григолюк([46] - [48]),С.Г. Лехницкий([78] , [79]), Х.М.Муштари ([103] -[105]) и др. Сложность проблем и большой объем вычислений требует широкого применения численных методов.Разработке эффективных методов решения широкого класса задач о напряженно-деформированном состоянии тонких многослойных оболочек вращения произвольного очертания с изотропными и анизотропными слоями переменной жесткости при неравномерных силовых и температурных воздействиях посвящены монографии Я.М.Григоренко и др. [49] и [50] . Все эти исследования дают основу для формулировки и решения задач оптимизации,которым в последние годы уделяется все больше внимания.

Конструкции,полученные непрерывной намоткой,представляют собой анизотропные слоистые материалы,в которых,в отличие от природных анизотропных материалов,упругие свойства можно регулировать путем изменения ориентации и взаимного расположения арматуры и связующего,и это как раз создает плодотворную почву для применения методов оптимизации.Наиболее эффективными конструкциями из армированных пластиков будут такие,в которых анизотропия упругих свойств наиболее выгодно соответствует напряженному состоянию оболочки или обеспечивает ее максимальную жесткость по отношению к заданной нагрузке.Исходя из этого,в качестве критериев оптимальности можно принять условие равнопрочности, условие совпадения направлений армирования с траекториями главных напряжений и др.

В настоящее время наиболее исследованы оптимальные схемы армирования безмоментных,осесимметрично нагруженных цилиндрических оболочек.Эти вопросы исследовались в работах В.В.Васильева и А.Н.Елпатьевского [21] - [24] , [26] , [55] и др. В [21] ,где используя в качестве критерия оптимальности условия равнонапряженности,проектируются баллоны давления.В [22] , [23] , [26] в качестве критерия оптимальности армирования цилиндрических оболочек принято условие совпадения направлений армирования с траекториями главных напряжений.Оптимальное проектирование цилиндрических оболочек с днищами рассматривается в [24] ,где показано, что спроектированная конструкция является полностью равнонапряженной,т.е.,напряжение в нитях цилиндрической части и днищах одинаковы,а краевой эффект в месте переходов цилиндра в днище отсутствуют.Оболочка рассматривается как нелинейная система из нитей.В [27] получены оптимальные схемы армирования конструкций, находящихся в условиях плоского напряженного состояния,в кото - рых оптимальная схема армирования определяется из условий совпадения армирующих элементов с траекториями главных напряжений и равнопрочности.В качестве примера рассмотрена цилиндрическая оболочка,образованная методом намотки из однонаправленной стеклоленты и нагруженная внутренним давлением и крутящими моментами.Рациональное армирование ортотропного цилиндра при одновре - менном кручении с растяжением рассмотрено в [56] .Критерий оп - тимальности минимум перемещения.В [I83] исследуется толстостенный полый цилиндр,армированный двумя симметричными относительно образующей системами нитей,находящихся под наружным давле - нием. Установлено,что рациональный угол армирования составляет с образующей угол равный $54^{0}44'$. Обзоры работ,посвященных оп - тимальному проектированию безмоментных цилиндрических оболочек, оболочек вращения,армированных непрерывной намоткой,баллонов давления,цилиндрических оболочек с днищами,проделанных до I97Iг, принадлежат В.В.Васильеву и И.Ф.Образцову [25] , [II3] , [II4] . Привлекает внимание тот факт,что в выше упомянутых работах оптимизация проведена классическими методами без применения ма - тематического программирования.

Центральное место в настоящей диссертационной работе за - нимает оптимальное проектирование цилиндрических оболочек и пластин из композитного материала с учетом устойчивости. Решения этих задач основаны на более общей и сложной моментной теории оболочек. Наиболее полно и на современном уровне вопросы устойчивости цилиндрических оболочек и пластин из композитных материалов исследованы в монографиях А.К.Малмейстера, В.П.Тамужа, Г.А.Тетерса[92], Г.А.Тетерса[148] и Р.Б.Рикардса и Г.А.Тетерса [138].

Рассмотрение вопросов оптимизации конструкций из композитных материалов с учетом устойчивости начнем с прямоугольных пластин, как менее сложных по сравнению с оболочками. Рациональное армирование прямоугольных пластин, состоящих из параллельно и диагонально армированных слоев (под углом $\pm \pi/4$) и сжатых в одном направлении рассмотрено в [66], [67]. В этих работах под рациональной принимается схема армирования, при которой критическая нагрузка на пластину имеет максимальную величину. В [68] пластина представляется состоящей из одинаковых слоев стеклопластика, половина которых направлена под углом φ, а половина под углом $-\varphi$ к направлению действия усилий и исследована зависимость оптимального угла φ от формы потери устойчивости и соотношения размеров пластины. В этих работах применяется модель без учета поперечных сдвигов. Влияние угла укладки волокон и числа слоев на статический прогиб и критическую силу при сжатии в одном и в двух направлениях квадратной пластинки исследовано в [170] и [189]. Вопросы рационального армирования пластин из композитного материала рассматриваются также в [152], [33], [150], [181] и др.

Впервые задача об рациональном армировании цилиндрических оболочек с учетом устойчивости была поставлена В.И.Королевым в монографии [69], где получены выражения критических усилий цилиндрических оболочек,изготовленных косой однозаходной и косой перекрестной намотками при действии осевого сжатия или внешнего давления,в зависимости от угла намотки φ . Оптимальный угол φ численным образом определяется по следующей процедуре. Для каждого значения φ определяется наименьшее значение критической нагрузки в зависимости от целочисленных параметров волнообразия.Из полученных значений оптимальным является тот φ , при котором критическая нагрузка максимальна.Там же рассмотрены оптимальные методы непрерывной намотки безмоментных цилиндрических оболочек из стеклопластиков однонаправленными стеклонаполнителями,стеклотканями и намотка днищ различной геометрической формы.

Основные результаты,полученные в [69] , можно найти также и в [9] . Идейно сходственной по этому вопросу [69] является работа В.И.Микишевой [101] и гораздо позднее появившееся [51] . В [101] , исходя из выражений критических нагрузок,полученных в [69] , при некоторых допущениях, получена приблизительная формула для критического внешнего давления,независящая от параметров волнообразия,которая дает возможность повысить критическую нагрузку за счет изменения угла намотки.Исследуется оптимальная намотка при осевом сжатии.Рассмотрены различные виды намотки - прямая однозаходная,перекрестная,изотропная.Выбор оптимального угла немотки при кручении цилиндрической оболочки с использованием тех же предположений и основных формул,как и в [101] ,рассмотрен в [51] . Исходя из требований максимума критической нагрузки и условия равнопрочности,в [102] рассматриваются цилиндрические оболочки,изготовленные методом спиральной намотки и подкрепленные слоями с продольным или кольцевым армированием. Оболочки оптимальны по структуре к действию внутреннего давления и по максимуму критической нагрузки при осевом сжатии.

Более общие задачи выбора рациональных параметров армирования (интенсивности и углов) исследованы в работах Ю.В. Немировского и В.И.Самсонова [108] - [110] . В [108] рассматривается сжатая вдоль образующей равномерно распределенными по торцам усилиями цилиндрическая оболочка,теряющая устойчивость по осесимметрической и неосесимметрической формам.С помощью процедуры Бубнова - Галеркина разработана методика установления рациональных углов армирования и рационального выбора объемного коэффициента армирования.Определена область изменения отношения толщины к радиусу оболочки,в которой в момент потери устойчивости все элементы деформируются упруго.В [109] и [110] , по той же методике определяются рациональные параметры армирования в случае действия внешнего давления и крутящих моментов и при их совместном действии.В этих работах критерий оптимальности - максимум критической нагрузки. Цилиндрическая оболочка,изготовленная продольно - поперечной намоткой стеклонитью рассматривается в работе И.Я.Амиро и П.Я. Прокопенко [4] . В случаях осесимметрической и неосесимметрической форм потери устойчивости определяются оптимальная структура обоeочки,а также исследуется влияние толщины слоев с продольной и поперечной ориентацией волокон на величину критических напряжений.

Рассмотренные работы в основном посвящены рациональному армированию композитного материала,из которого создается цилиндрическая оболочка.В них в качестве параметров оптимизации принимаются направления армирующих волокон,относительные количества слоев с различным способом армирования,объемный коэффициент армирования.Однако практическое применение конструк -

ций из композитных материалов выдвигает более общие и более сложные задачи оптимизации,в которых учитываются структура материала,условия работы конструкции,время эксплуатации,надежность и др. Учет целого комплекса ограничений,отражающих реальные условия работы конструкции,таких как ограничения на устойчивость (местную и общую),прочность,надежность,геометрические ограничения,ведение оптимизации по многим параметрам, характеризующим материал и конструкцию в целом,с критерием качества проекта - весом конструкции,означало качественно новое направление в оптимальном проектировании цилиндрических оболочек из композитных материалов,начало которому дала работа Р.Б.Рикардса и Г.А.Тетерса [I3I] ,опубликованная в I970 г. В этой работе в качестве параметров оптимизации приняты толщина,радиус и коэффициент армирования цилиндрической оболочки из стеклопластика при продольно-поперечном армировании.Задача сформулирована в виде задачи нелинейного программирования с функцией цели - весом оболочки и ограничениями на прочность,общую и местную устойчивость и решена методом обобщенных множителей Лагранжа [I5I] .

В работах [I32] , [I33] , [I36] , [I79] ,исходя из классической теории оболочек,основанной на гипотезах Кирхгофа - Лява,ведется оптимизация многослойных анизотропных цилиндрических оболочек,подверженных действию статических нагрузок: осевой силы,внешнего давления,крутящего момента.Параметрами оптимизации приняты геометрические размеры оболочки,направления армирующих волокон,относительные количества слоев в каждом направлении и объемный коэффициент армирования.Оптимизация ведется при ограничениях на геометрические размеры, прочность и устойчивость по методу проектируемых градиентов

Розена [180] ,описание алгоритма которого применительно к задачам оптимизации цилиндрических оболочек из композитных материалов приведено в [132] .

Важный теоритический результат получен в [135] ,где доказано,что для ортотропных оболочек средней длины в рамках модели Кирхгофа - Лява,работающих на устойчивость при осевом сжатии,оптимальной по весу является изотропная оболочка.Кроме того,доказано,что оптимальная оболочка может терять устойчивость (момент бифуркации) как по осесимметрической,так и по неосесимметрической формам.Объясняется чувствительность к начальным несовершенствам изотропных оболочек.

Во многих практических применениях очень важно установить чувствительность полученного оптимального решения к малым изменениям исходных данных,т.е.важно получить верхние и нижние оценки изменения критерия качества проекта (функции цели).Эти вопросы,применительно к весовой оптимизации ортотропной цилиндрической оболочки с использованием теории двойственности геометрического программирования,исследуются в [134] .

Современная технология изготовления композитных материалов позволяет создать материалы с неоднородными по координатам упругими и прочностными свойствами.Вопросы оптимизации таких конструкций с применением теории оптимального управления рассматриваются в [137] и [1] .В качестве примера, рассмотрена ортотропная цилиндрическая оболочка,работающая на устойчивость под действием внешнего давления,с переменным по длине модулем.Оптимизация цилиндрической оболочки с вязко-упругим заполнителем при осевом сжатии рассматривается в [139] .К этому направлению относятся [171] и [172] ,в ко -

торых оптимизируется подкрепленная стрингерами и шпангаутами цилиндрическая оболочка из армированного волокнами материала.Решение проводится по методу штрафных функций в форме Фиакко - Мак Кормика.

Метод случайного поиска (покоординатного самообучения с забыванием) использован в [43] ,формулировка проблемы в которой полностью заимствована из [I3I] .

Ввиду сложности,как с теоритической,так и с вычислительной сторон и разнообразностью проблемы оптимизации цилиндрических оболочек из композитных материалов,много вопросов еще нуждается в решении. Укажем на некоторые из них.

Многие задачи оптимизации конструкций сводятся к задачам нелинейного программирования (необязательно выпуклого).К сожалению,единого метода подобного симплекс-методу линейного программирования,который позволял бы находить оптимальные решения во всех нелинейных задачах,пока еще нет.Большинство существующих в настоящее время методов решения таких задач приводят к локальным решениям.Поэтому,должно проводиться качественное исследование полученных результатов по отношению глобальности решения. Для этого должны быть известны общие свойства функции цели и ограничений.Исследование общих свойств при оптимизации цилиндрических оболочек из композитных материалов математически довольно сложная проблема и решение,по-видимому,возможно лишь в некоторых частных случаях.Пока в этом направлении достижения незначительны.

Известно,что при определении критической нагрузки,исходя из уравнений устойчивости,приходиться производить дискретную минимизацию выражения относительно волновых чисел,характеризующих форму потери устойчивости (процедуру такой минимизации можно найти напрм. в [I78]). В подавляющем большинстве работ,посвященных вопросам оптимизации,учет устойчивости ведется по приближенным выражениям критических усилий,в которых,по предварительным предпосылкам,волнообразие фиксировано или не зависит от волновых чисел и,тем самым,отпадает проблема целочисленной минимизации выражения.Применение приближенных формул требует дополнительных ограничений на размеры оболочки и величины действующих усилий,что ограничивает область применения полученных результатов.Решение оптимизационных задач с минимизацией выражения критической нагрузки относительно волновых чисел гораздо усложняет задачу,как в теоретическом,так и в вычислительном отношении.Однако это обязательно,так как в процессе оптимизации при изменении параметров оболочки,меняется и форма потери устойчивости и неучет этих изменений ведет к снижению точности полученных результатов.

До сих пор решения проблем оптимизации цилиндрических оболочек проводились на основании классической теории оболочек,основанной на гипотезах Кирхгофа - Лява без учета поперечных сдвигов.Эта модель в некоторых случаях приводит к довольно большим погрешностям при определении величины критической нагрузки и формы потери устойчивости (см. [6] - [8] , [I38]).Возникает проблема оптимизации с использованием более точной,но и более сложной кинематической модели например модели типа Тимошенко,а также сравнения результатов оптимизации,полученных при использовании различных моделей и определении пределов применения этих моделей в оптимизационных задачах.

В последнее время вопросам устойчивости цилиндрических оболочек из композитных материалов,заполненных упругим заполнителем гораздо меньшей жесткости,уделяется немало внимания ([35] , [64] , [93] , [100] , [106] , [147]).И применение таких конструкций довольно широкое.Однако,вопросы их оптимизации недостаточно освещены.Это также относится и к проблеме оптимизации с учетом прочности оболочек из композитных материалов.

Реальные тонкостенные конструкции типа пластин и оболочек,а тем более конструкции такого типа из композитных материалов не лишены разного рода начальных несовершенств таких, как: начальные прогибы,отклонения фактических размеров толщин в разных местах конструкций от теоретических,наличие самоуравновешенных начальных напряжений,возникающих в процессе изготовления намоточных конструкций,наличие полей макросвойств материала,несовершенства граничных условий и т.п. Уже давно известно,что начальные несовершенства играют важную роль в проблеме устойчивости реальных оболочек.Особенно важную роль в этой проблеме играют несовершенства формы.Большая чувствительность критических усилий к начальным несовершенствам,с одной стороны,и случайный характер этих несовершенств,с другой стороны, приводят к большому разбросу критических усилий.С появлением работы В.В.Болотина [12] и монографий [13] и [15] было осознано,что начальные несовершенства наиболее правильно рассматривать как случайные и при решении задач,связанных с ними,использовать методы математической статистики,теории вероятностей и теории случайных функций.

Применение статистических и вероятностных методов в строительной механике открыло пути к применению теории надежности. Методы оценки надежности конструкций,разработанные в [15] , позволяют определить качество проекта по отношению к малым случайным отклонениям.

Теоретическим и экспериментальным исследованиям устойчивости несовершенных цилиндрических оболочек из изотропного материала (металлические оболочки) посвящены работы В.В.Болотина,Б.П.Макарова,В.М.Лейзераха [12] , [14] , [73] - [75] , [86] - [90] , а также работы других авторов [36] , [167] , [187] и др.Аналогичные проблемы устойчивости для оболочек из композитных материалов рассматривались в работе [17] и в монографии [138] ,где экспериментальная функция прогиба представляется в виде двойного ряда Фурье,коэффициенты которого определяются путем численной обработки экспериментальных данных на ЭВМ.Этой тематике посвящены и работы [59] , [76] , [185] и др. Однако,устойчивость таких оболочек,как с теоретической,так и с экспериментальной точки зрения,еще недостаточно исследована и окончательные выводы,повидимому,можно получить лишь при более широком применении методов теории вероятностей и математической статистики.

Влияние случайных начальных несовершенств на устойчивость оболочек из композитных материалов может быть "нейтрализовано" увеличением толщины оболочки,изменением структуры материала или другими способами.Но в большинстве случаев это ведет к увеличению веса оболочки.Поэтому,естественно,может быть поставлена задача о минимизации веса такой оболочки.Но так как здесь приходится иметь дело с случайными величинами (или даже функциями),что проблема оптимизации ставится гораздо сложнее и для ее решения должны обращаться к стохастическому программированию [161] .

В настоящее время наиболее полно разработаны методы реше -

ния стохастического аналога задач линейного и квадратичного программирования.Но задачи оптимизации цилиндрических оболочек из композитных материалов (с учетом устойчивости и прочности),как правило,формулируются в виде задач с нелинейной функцией цели и ограничениями.Поэтому проблема оптимизации таких оболочек с начальными несовершенстами формы и другими случайными факторами составляют как раз ту область,которой мало коснулись современные достижения теории оболочек и стохастического программирования.В виду актуальности вышеизложенных проб - лем оптимального проектирования цилиндрических оболочек из композитных материалов,в настоящей работе ставятся следующие основные цели:

а) Разработать метод,позволяющий в процессе оптимизации использовать выражения критической нагрузки,зависящие от целочисленных волновых параметров.

б) Применять в решении задач весовой минимизации цилиндрических оболочек и прямоугольных пластин до сих пор неприменяв - шиеся при решении таких задач кинематические модели с учетом поперечных сдвигов.Произвести сравнение результатов,полученных по классической и уточненной теориям.

в) Произвести весовую минимизацию цилиндрических оболочек с упругим заполнителем при комбинированном нагружении с учетом устойчивости и прочности.

г) Сформулировать и решить стохастические задачи устойчи - вости и оптимизации цилиндрических оболочек со случайными начальными несовершенствами формы и со случайными прочностными характеристиками с использованием стохастического программирования.

Решение сформулированных проблем составляет основное со - держание настоящей работы,которая состоит из введения,четырех глав, заключения, списка литературы и приложения.

В первой главе приводятся структурные,деформативные и прочностные соотношения многослойного,армированного композитного материала, физические уравнения и уравнения состояния в матричной форме цилиндрических оболочек с упругим заполнителем в общем случае простого нагружения,с использованием кинематических моделей Кирхгофа-Лява и Тимошенко,приспособленные для решения оптимизационных задач.Сформулирована общая задача минимизации веса цилиндрических оболочек с заполнителем.

Во второй и третьей главах рассмотрены частные случаи решения детерминистических оптимизационных задач.Проведена оптимизация прямоугольных пластин,сжатых в двух перепендикулярных направлениях,и цилиндрических оболочек с упругим заполнителем при осевом сжатии с использованием кинематических моделей Кирхгофа-Лява и Тимошенко. Полученные результаты сравнены.Доказано,что ограничения на устойчивость в пространстве параметров оптимизации не выпуклы, а квазивыпуклы. Проведена весовая минимизация цилиндрических оболочек с учетом общей и местной потери устойчивости и прочности по критерию А.К. Малмейстера при осевом сжатии и комбинированном нагружении.

Четвертая глава посвящена стохастическим задачам устойчивости и оптимизации.Проведен вероятностный анализ устойчивости цилиндрических оболочек со случайными начальными несовершенствами формы при осевом сжатии.Сформулированы и решены с помощью стохастического программирования задачи весовой минимизации цилиндрических оболочек со случайными начальными несовершенствами формы при осевом сжатии и цилиндрических оболочек с упругим заполнителем при комбинированном нагружении с учетом случайных характерных прочностей материала.

Работа выполнена в институте механики полимеров АН Латвийской ССР в 1972 - 1976 гг.

ГЛАВА ПЕРВАЯ

ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С УПРУГИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ ИЗ КОМПОЗИТНОГО МАТЕРИАЛА И ОБЩАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ

§ I.I. Структурные,деформативные и прочностные соотношения многослойного композитного материала и физические уравнения цилиндрических оболочек.

В широком смысле практически всякий современный материал представляет собой композицию,поскольку материалы редко используются в чистом виде.Технология изготовления композитных материалов считается одной из древнейших,так как еще на заре цивилизации первобытный человек делал слоистые луки для их упрочнения,при изготовлении кирпичей перемешивал солому (армирующее волокно) с глиной (связующее) и т.п. Хотя эти материалы, применявшиеся в далеком прошлом можно отнести к классу композиций,трактируемому в широком смысле,тем не менее современная наука о композиционных материалах зародилась совсем недавно. Сейчас применяются два пути построения механики композитных материалов.Первый путь чисто феноменологический,основан на непосредственном использовании известных уравнений для анизотропного тела.Здесь механические постоянные определяются на основе лабораторных испытаний образцов из композитногс материала.Второй путь построения теории деформирования композитов базируется на структурных соображениях.Следуя этому пути,механические характеристики композита выражаются через механические характеристики компонентов, коэффициенты армирования, размеры армирующих элементов и другие структурные параметры. Такой путь предпочтительнее, как с теоретической, так и с практической точки зрения. Он позволяет предсказать механические свойства композитов по механическим характеристикам компонентов. Это как раз дает возможность решать вопросы оптимального проектирования армированных материалов. В данной работе будем следовать по этому пути.

Пусть известны исходные характеристики: E_a и E_c - соответственно модули упругости армирующих волокон и связующего; ν_a и ν_c - соответствующие коэффициенты Пуассона; μ - объемный коэффициент армирования материала. Конструируется однонаправленные армированные элементарные слои, упругие характеристики которых определяется по известным формулам теории армирования [92] :

$$E_1^o = E_c(1-\mu) + E_a\mu,$$

$$E_2^o = \frac{[1+(k_2-1)\mu]E_a}{[\mu+k_2(1-\mu)][1+(k_2-1)\mu]-(k_2\nu_c-\nu_a)^2\mu(1-\mu)},$$

$$G_{12}^o = \frac{k_1(1+\mu)+(1-\mu)}{k_1(1-\mu)+(1+\mu)}G_c, \quad G_c = \frac{E_c}{2(1+\nu_c)}, \qquad \text{(I.I)}$$

$$k_2 = \frac{E_a}{E_c}, \quad k_1 = \frac{G_a}{G_c} = \frac{1+\nu_c}{1+\nu_a}k_2,$$

$$G_{23}^o = \frac{E_a}{2(1+\nu_a)\mu + k_2(1+\nu_c)(1+\mu)}, \quad G_{12}^o = G_{13}^o,$$

$$\nu_{12}^{o} = \nu_{1}^{o} = \nu_{c}(1-\mu) + \nu_{a}\mu, \quad \nu_{12}^{o} = \nu_{2}^{o} = \nu_{1}^{o}\frac{E_{2}^{o}}{E_{1}^{o}}.$$

Здесь E_1^o, E_2^o, G_{12}^o, G_{13}^o, G_{23}^o, ν_{12}^o, ν_{21}^o – жесткостные характеристики ортотропного элементарного слоя в осях $Ox_o^1x_o^2x_o^3$ (рис.I.I).

Принимаем $\sigma_3 = 0$ и выражаем соотношения между деформациями и напряжениями однонаправленного элементарного слоя в системе координат $Ox_o^1x_o^2x_o^3$ в тензорной записи по формулам:

$$\sigma_j = C_{ij}^o \varepsilon_i \qquad (i,j = 1,2),$$

$$\sigma_j = \delta_{ij} C_{ij}^o \varepsilon_i \qquad (i,j = 4,5,6),$$

где C_{ij}^o – элементы матрицы жесткости элементарного слоя, связанные с исходными характеристиками соотношениями

$$C_{ii}^o = \frac{E_i^o}{1-\nu_1^o\nu_2^o} \quad (i=1,2), \quad C_{12}^o = \frac{E_1^o\nu_2^o}{1-\nu_1^o\nu_2^o} = \frac{E_2^o\nu_1^o}{1-\nu_1^o\nu_2^o},$$

$$C_{44}^o = G_{23}^o, \quad C_{55}^o = G_{13}^o, \quad C_{66}^o = G_{12}^o,$$

δ_{ij} – символ Кронекера.

Жесткости повернутого на угол β_k элементарного слоя в осях $Ox^1x^2x^3$, определяются в матричной записи по формулам преобразования [92]:

$$C_{il}^{(k)} = C_{jk}^o g_{ij} g_{lk} \qquad (i,l,j,k = 1,2,\ldots,6), \quad (I.2)$$

где g_{ij} – элементы матрицы преобразования, которая в этом случае имеет следующий вид:

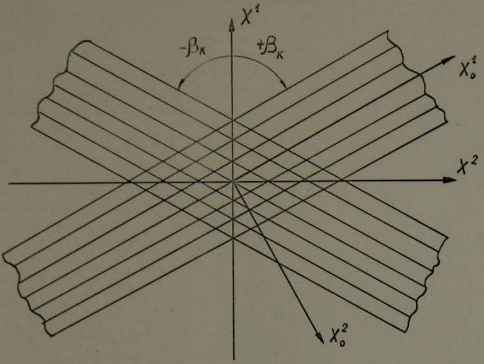

Рис. I.I. Элементарные ортотропные слои материала.

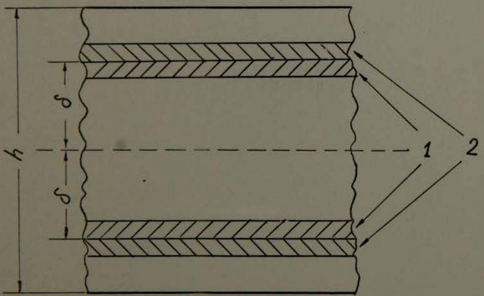

Рис. I.2. Расположение элементарных слоев относительно срединной поверхности оболочки. I - слой с арматурой под углом $+\beta_к$; 2 - слой с арматурой под углом $-\beta_к$.

$$
\left[g_{ij}\right] = \begin{bmatrix} \cos^2\beta_k & \sin^2\beta_k & 0 & 0 & 0 & \sin 2\beta_k \\ \sin^2\beta_k & \cos^2\beta_k & 0 & 0 & 0 & -\sin 2\beta_k \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\beta_k & -\sin\beta_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\beta_k & \cos\beta_k & 0 \\ -\frac{1}{2}\sin 2\beta_k & \frac{1}{2}\sin 2\beta_k & 0 & 0 & 0 & \cos 2\beta_k \end{bmatrix}. \qquad (I.3)
$$

Несколько элементарных слоев под углами $+\beta_k$ и $-\beta_k$ формируют многослойный пакет с "к" типами слоев. Для всего пакета, образованного из элементарных слоев, расположенных под различными углами β_k, жесткостные характеристики пакета определяются по формуле:

$$
(A_{ij},\ B_{ij},\ D_{ij}) = \int\limits_{-h/2}^{h/2} C_{ij}^{(k)}(1, z, z^2)\,dz. \qquad (I.4)
$$

Здесь A_{ij} - мембранная жесткость пакета; B_{ij} - мембранно-изгибная жесткость пакета; D_{ij} - изгибная жесткость пакета; h - толщина оболочки (пакета).

При данных интенсивностях армирования и расположений слоев пакета по толщине, интегралы известным образом заменяются суммами. Так, например, мембранная жесткость пакета A_{ij} определяется

$$
A_{ij} = h c_{ij} = h \frac{1}{r} \sum_{k=1}^{\ell} n_k C_{ij}^{(k)} = h \sum_{k=1}^{\ell} \theta_k C_{ij}^{(k)}, \qquad (I.5)
$$

$$
C_{ii} = \frac{E_i}{1-\nu_1\nu_2}\ (i=1,2),\ C_{12} = \frac{E_1\nu_2}{1-\nu_1\nu_2} = \frac{E_2\nu_1}{1-\nu_1\nu_2}, \qquad (I.6)
$$

$$
C_{44} = G_{23},\quad C_{55} = G_{13},\quad C_{66} = G_{12}.
$$

Здесь C_{ij} - элементы матрицы жесткостей пакета в системе $Ox^1x^2x^3$; $2r$ - общее количество слоев пакета; n_k - количество слоев, расположенных под углами $+\beta_k$ и $-\beta_k$; ℓ - общее количество различных углов намотки; $\theta = n_k/2r$ - относительное число слоев, расположенных под углом β_k .

Таким образом, элементы матрицы жесткости можем выразить через исходные характеристики материала, и они являются функциями объемного коэффициента армирования μ, относительных чисел слоев и углов армирования, т.е.

$$C_{ij} = C_{ij}(\mu, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\ell, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\ell).$$

Это утверждение действительно также и для мембранной, мембранно-изгибной и изгибной жесткостей всего пакета.

В частном случае, когда используется только три вида слоев, с фиксированными углами намотки, т.е. при $\beta_k = 0, \pm\pi/4, \pm\pi/2$, элементы матрицы жесткостей всего пакета определяются по формулам:

$$\begin{aligned}
C_{11} &= C_{11}^0\theta_1 + C^{**}\theta_2 + C_{22}^0\theta_3, \\
C_{12} &= C_{12}^0\theta_1 + (C^* + C_{12}^0)\theta_2 + C_{12}^0\theta_3, \\
C_{22} &= C_{22}^0\theta_1 + C^{**}\theta_2 + C_{11}^0\theta_3, \\
C_{44} &= C_{44}^0\theta_1 + \frac{1}{2}(C_{44}^0 + C_{55}^0)\theta_2 + C_{55}^0\theta_3, \\
C_{55} &= C_{55}^0\theta_1 + \frac{1}{2}(C_{44}^0 + C_{55}^0)\theta_2 + C_{44}^0\theta_3, \\
C_{66} &= C_{66}^0\theta_1 + (C^* + C_{66}^0)\theta_2 + C_{66}^0\theta_3, \\
C^* &= \frac{1}{4}(C_{11}^0 + C_{22}^0 - 2C_{12}^0 - 4C_{66}^0), \\
C^{**} &= \frac{1}{4}(C_{11}^0 + C_{22}^0 + 2C_{12}^0 + 4C_{66}^0),
\end{aligned} \tag{I.7}$$

где θ_1 , θ_2 и θ_3 - соответственно относительные числа слоев, арматура в которых расположена под углами $0, \pm\pi/4, \pm\pi/2$.

Очевидно, что

$$\sum_{k=1}^{\ell} \theta_k = 1, \qquad (I.8)$$

так как сумма относительных количеств слоев всех типов должна равняться единице. Кроме того, из (I.5) и (I.7) видно, что при $\mu = const$ элементы матрицы жесткости всего пакета C_{ij} есть линейные функции с аргументами относительными количествами слоев θ_k .

Анализ прочностных свойств слоистого композита проведем, исходя из физических уравнений оболочек, которые будут использованы и при решении других вопросов.

Соотношения между усилиями и деформациями многослойной цилиндрической пологой оболочки, составленной из ортотропных элементарных слоев, в матричной форме имеют вид:

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varkappa \end{bmatrix}, \qquad (I.9)$$

где N - матрица усилий; M - матрица моментов; A , B и D - матрицы жесткостей, элементы которых определяются из соотношений (I.4); ε - матрица деформаций; $\varkappa$ - матрица искривлений.

Дальнейшее исследование (I.9) зависит от выбранной кинематической модели оболочки и от способа конструирования многослойного пакета материала оболочки.

В случае модели Тимошенко матрицы усилий, моментов, жесткостей, деформаций, искривлений имеют вид:

$$M = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ H \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ Q_y \\ Q_x \\ S \end{bmatrix}, \quad \varkappa = \begin{bmatrix} \varkappa_x \\ \varkappa_y \\ 2\varkappa_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \gamma_x}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \gamma_y}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \gamma_x}{\partial y} + \dfrac{\partial \gamma_y}{\partial x} \end{bmatrix},$$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{w}{R} \\ \gamma_y + \dfrac{\partial w}{\partial y} \\ \gamma_x + \dfrac{\partial w}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, \tag{I.10}$$

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{21} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}.$$

Здесь N , Q , S , M , H - усилия и моменты в оболочке; R - радиус срединной поверхности оболочки; u - осевое перемещение по оси x ; v - окружное перемещение по оси y ; w - прогиб (перемещение по нормали); γ_x и γ_y - компоненты вектора поворота нормали оболочки в соответствующих плос -

костях.

В случае модели Кирхгофа - Лява некоторые матрицы изменяются и имеют вид:

$$N = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ S \end{bmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, \tag{I.II}$$

$$\varkappa = \begin{bmatrix} \varkappa_x \\ \varkappa_y \\ 2\varkappa_{xy} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{21} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}.$$

Остальные матрицы те же самые, как и в модели Тимошенко (I.I0).

Элементы матрицы B характеризуют влияние изменений кривизны и кручения на тангенциальные силы и влияние деформаций удлинения и сдвига на моменты. В случае однородной и слоистой симметрично собранной относительно срединной поверхности оболочки $B = 0$ и исчезает указанное выше взаимовлияние.

Прочность слоистого композита определяем из анализа прочности каждого однонаправленного армированного слоя с известными прочностными характеристиками. Прочность всего пакета определяется по слою, который разрушается первым. Ясно, что, при различных напряженных состояниях, начальное разрушение начинается в различных слоях. Для установления этого необходимо знать напряжения на каждый "к" - типа элементарный слой при сложном напряженном состоянии на слоистый пакет. Пусть известны нагрузки,действующие на оболочку.Для определения напряжений используем соотношение (I.9). Разрешаем (I.9) относительно деформаций. По формуле Фробениуса [34] , получаем:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varkappa \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K^{-1} & -K^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}B^{T}K^{-1} & D^{-1}+D^{-1}B^{T}K^{-1}BD^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} \qquad (I.12)$$

Здесь $K = A - BD^{-1}B^{T}$.

Из (I.12) определяем средние мембранные деформации слоистого пакета

$$\varepsilon = K^{-1}N - K^{-1}BD^{-1}M. \qquad (I.13)$$

Мембранные напряжения на элементарный слой "к" - того типа определяется из средних мембранных деформаций по формуле

$$\left[\sigma_{M}^{(k)}\right] = \left[C^{(k)}\right]\varepsilon . \qquad (I.14)$$

Деформации изгиба $\left[\varepsilon_{u}^{(k)}\right]$ на элементарный слой "к" - того типа, который расположен на расстоянии z_k от срединной поверхности, определяется из (I.12):

$$\left[\varepsilon_{u}^{(k)}\right] = \left[-(D^{-1}B^{T}K^{-1})N + (D^{-1}+D^{-1}B^{T}K^{-1}BD^{-1})M\right] z_k . \qquad (I.15)$$

Соответствующие изгибные напряжения на слой "к" - того типа равны

$$\left[\sigma_{u}^{(k)}\right] = \left[C^{(k)}\right]\left[\varepsilon_{u}^{(k)}\right]. \qquad (I.16)$$

Из (I.14) и (I.16) суммарные напряжения на слой "к" - того типа определяется из

$$\left[\sigma^{(k)}\right] = \left[\sigma_{M}^{(k)}\right] + \left[\sigma_{u}^{(k)}\right] \qquad (I.17)$$

Подставляя (I.13) в (I.14) , (I.15) в (I.16) и суммарные напряжения в выбранный критерий прочности, получаем систему уравнений,определяющих поверхность прочности многослойного композитного материала оболочки в пространстве усилий и моментов.

В дальнейшем,при решении оптимизационных задач,принимаем, что элементарных слоев очень много,их расположение симметрично относительно срединной поверхности оболочки и относитель - ные количества слоев θ_k меняются непрерывно (см. рис. I.2). При таком способе конструирования получаем ортотропный мате - риал.Поэтому будем пользоваться уравнениями ортотропной ци - линдрической оболочки.

§ I.2. Матричное выражение уравнений равновесия ортотропных цилиндрических оболочек с упругим заполнителем

В этом параграфе приводятся необходимые уравнения для определения устойчивости оболочек и пластин,которые используются везде в дальнейшем для установления ограничений устойчивости в оптимизационных задачах.

Методы исследования устойчивости и оптимального проектирования оболочек из композитных материалов и выбор кинемати - ческой модели зависят от свойств материалов,вида конструкции, способа нагружения, числа параметров оптимизации, требуемой точности расчетов и др. причин.В настоящем параграфе остано - вимся на выборе кинематической модели оптимизируемых оболочек. При решении задач оптимизации,можно идти разными путями и использовать различные кинематические модели оболочек.Выбранная кинематическая модель отражается в уравнениях состояния обо - лочек.

Уравнения равновесия пологой цилиндрической оболочки с упругим заполнителем (рис.I.3) в общем случае статического нагружения имеют следующий вид [I38]:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} + q_x = 0, \qquad (I.18)$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial x} + q_y = 0, \qquad (I.19)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} - Q_x = 0, \qquad (I.20)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial x} - Q_y = 0, \qquad (I.21)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - \frac{1}{R} N_y + N_x^{\circ} \varkappa_x + N_y^{\circ} \varkappa_y + 2N_{xy}^{\circ} \varkappa_{xy} + q_z = 0. \qquad (I.22)$$

Здесь q_x , q_y и q_z - составляющие реакции заполнителя; N_x° , N_y° и $2N_{xy}^{\circ}$ - критические усилия, при которых оболочка теряет устойчивость.

Для преобразования уравнений равновесия (I.18)-(I.22) в уравнения в перемещениях, из уравнений (I.9) при выбранной кинематической модели Кирхгофа-Лява или Тимошенко определяются усилия и моменты и подставляются в (I.18)-(I.22). После элементарных преобразований приходим к уравнениям, которые в матрично-операторной форме могут быть представлены следующим образом:

$$Q\,\mathcal{Y} + q = 0, \qquad (I.23)$$

где Q - симметричная операторная матрица пятого порядка:

$$Q = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & a_{34} & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & a_{35} & a_{45} & a_{55} \end{bmatrix} \qquad (I.24)$$

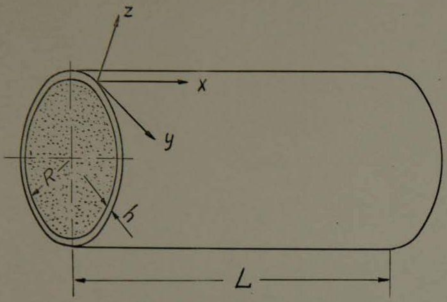

Рис. I.3. Система координат цилиндрической оболочки с упругим заполнителем.

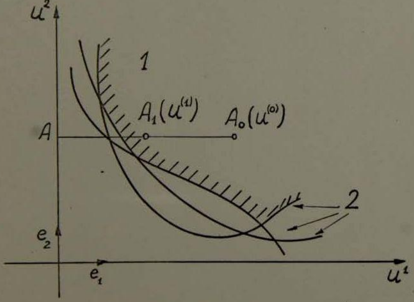

Рис. I.4. Выход на границу допустимой области. I - допустимая область; 2 - ограничения.

с элементами a_{ij}, зависящими от кинематической модели оболочки. $\mathcal{U}$ – вектор функций перемещений, также зависящей от выбора кинематической модели,

$$q^{T} = \frac{1}{h}[q_x, q_y, q_z, 0, 0] \qquad (\text{I}.25)$$

-- вектор реакций упругого заполнителя. Значок "т" означает операцию транспонирования.

Наиболее простая кинематическая модель получается при использовании гипотез Кирхгофа-Лява. Проведенные исследования показывают, что для практических расчетов на устойчивость ортотропных оболочек из стеклопластика в первом приближении может быть использована кинематическая модель, основанная на гипотезах Кирхгофа-Лява (см. работы А.А.Буштыркова [18] - [20]). И при решении некоторых задач оптимизации будем пользоваться этой моделью. В этом случае элементы матрицы Q следующие:

$$a_{11} = C_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + C_{66}\frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad a_{12} = (C_{12} + C_{66})\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y},$$

$$a_{13} = C_{12}\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial x}, \quad a_{22} = C_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + C_{66}\frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

$$a_{23} = C_{22}\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial y}, \quad a_{33} = \frac{h^2}{12}\Big[C_{11}\frac{\partial^4}{\partial x^4} +$$

$$+ 2(C_{12} + 2C_{66})\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} + C_{22}\frac{\partial^4}{\partial y^4}\Big] + C_{22}\frac{1}{R^2} + \qquad (\text{I}.26)$$

$$+ \frac{N_x^\circ}{h}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{N_y^\circ}{h}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2\frac{N_{xy}^\circ}{h}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y},$$

$$a_{ij} = 0 \quad (i = 3, 4, 5;\ j = 4, 5).$$

По классической теории оболочек, нормальное волокно имеет три степени свободы и поэтому

$$y^T = [u, v, w, 0, 0]. \qquad (I.27)$$

В случае исследования цилиндрической оболочки (модель Кирхгофа-Лява), имеющей начальное отклонение от идеальной формы при осевом сжатии, и с учетом того, что начальный прогиб w^o мал по сравнению с толщиной оболочки, меняется только уравнение равновесия (I.22), которое принимает вид:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \frac{1}{R} N_y - N_x^o \frac{\partial^2 (w_1 + w^o)}{\partial x^2} + q_z = 0, \qquad (I.28)$$

где W_1 - дополнительный прогиб. Остальные уравнения равновесия (I.18) -- (I.21) не изменяются.

Уравнения равновесия в перемещениях в этом случае выражаются

$$Qy + q + [y^o] = 0,$$

где

$$[y^o]^T = [0, 0, N_x^o \frac{\partial^2 w^o}{\partial x^2}, 0, 0].$$

Применение классической теории оболочек при решении оптимизационных задач значительно уменьшает объем численных работ. Однако пределы применяемости этой теории в случае композитных материалов должны быть исследованы в каждом конкретном случае. Оценке точности кинематических моделей и пределам применяемости в зависимости от соотношений размеров и упругих постоянных материала в задачах устойчивости цилиндрических оболочек посвящены работы Н.Ю.Бабича, А.Н.Гузья и др. [6] - [8] . В работе [106] показано, что неучет поперечных сдвигов для цилиндрических оболочек с заполнителем дает неверную информацию о форме потери устойчивости оболочки и приводит к существенным погрешностям при определении критической нагрузки.

При решении оптимизационных задач, наряду с классической теорией оболочек, будем использовать уточненную теорию типа Тимошенко, принимая, что в процессе изгиба нормальное волокно, оставаясь прямолинейным, может быть неперпендикулярным к деформированной срединной поверхности, т.е., что нормальное волокно имеет пять степеней свободы. Четвертая и пятая степени свободы соответствуют углам поворота нормального волокна в плоскостях xz и yz и соответственно обозначаются γ_x и γ_y . Общая форма уравнений равновесия в матрично-операторной записи (I.23) не изменяется. Изменяется вектор $\mathcal{Y}$ и некоторые элементы матрицы Q :

$$a_{33}=\frac{C_{22}}{R^2}+\frac{N_x^\circ}{h}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{N_y^\circ}{h}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+2\frac{N_{xy}^\circ}{h}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}-C_{55}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-$$
$$-C_{44}\frac{\partial^2}{\partial y^2},\quad a_{34}=-C_{55}\frac{\partial}{\partial x},\quad a_{35}=-C_{44}\frac{\partial}{\partial y},$$
$$a_{44}=\frac{h^2}{12}\left(C_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+C_{66}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)-C_{55},\quad a_{45}=\frac{h^2}{12}(C_{12}+ \qquad (I.29)$$
$$+C_{66})\frac{\partial^2}{\partial x\partial y},\quad a_{55}=\frac{h^2}{12}\left(C_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+C_{66}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)-C_{44}.$$

Элементы a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{22}, a_{23} такие как в (I.26).
Вектор перемещений с учетом углов поворота равен:

$$\mathcal{Y}^T=[u, v, w, \gamma_x, \gamma_y]. \qquad (I.30)$$

Уравнения равновесия ортотропной прямоугольной пластины, сжатой в двух направлениях можно рассматривать, как частный случай уравнений цилиндрической оболочки (при $R=\infty$). Приняв во внимание и поперечные сдвиги, уравнения равновесия пластины также можно выразить в матрично-операторной форме (I.23) с учетом, что

$$y^T = [0, 0, w, \gamma_x, \gamma_y], \tag{I.31}$$

$$q^T = [0, 0, 0, 0, 0], \tag{I.32}$$

и элементы операторной матрицы Q равны:

$$a_{ij} = 0 \quad (i = 1,2;\ j = 1,2,3),$$

$$a_{33} = -K_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - K_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + N_x^0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + N_y^0 \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$$a_{34} = -K_1 \frac{\partial}{\partial x}, \quad a_{35} = -K_2 \frac{\partial}{\partial y}, \tag{I.33}$$

$$a_{44} = \left(D_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + D_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - K_1 \right),$$

$$a_{45} = (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y},$$

$$a_{55} = D_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + D_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - K_2 .$$

Здесь

$$D_{ij} = \frac{h^3}{12} c_{ij} \quad (i,j = 1,2), \quad D_{66} = \frac{h^3}{12} c_{66}, \tag{I.34}$$

$$K_1 = \frac{5}{6} h\, c_{55}, \quad K_2 = \frac{5}{6} h\, c_{44}, \tag{I.35}$$

h - толщина пластины.

Введенные в этот параграф уравнения будут использованы при решении задач оптимального проектирования, общей формулировке которых посвящается следующий параграф.

§ I.3. Формулировка проблемы минимизации веса цилиндрических оболочек

Теория оптимального проектирования является сравнительно молодой и весьма сложной проблемой. Она рассматривает такие ситуации, в которых скрещиваются противоречивые требования, как, например, минимальная стоимость конструкции и максимальная надежность, минимальный вес и максимальная нагрузка, максимум критической силы и минимальная характерная деформация и др. Поэтому одним из первых трудных вопросов является установление критериев качества проекта. Правильный выбор критерия качества проекта представляет собой сложную технико-экономическую задачу. При решении оптимизационных задач оболочек в качестве критерия качества может быть принята стоимость ([53] , [70] , [164]), суммарная стоимость оболочки и опорной конструкции ([71] , [107]), наибольшая критическая нагрузка ([65] , [101] , [102] , [108] - [110]), максимум отношения критической нагрузки к весу единицы площади конструкции ([29]), минимум отношения веса подкрепленной оболочки к весу гладкой оболочки ([40]), минимум характерной деформации ([154]), равнонапряженность арматуры в композиционном материале ([21] , [69]) и другие. Но в подавляющем большинстве работ критерием качества считают вес оболочки. Важную роль при выборе критерия качества играет технология изготовления конструкции. Технология может не только внести существенную поправку, но и даже потребовать специальных методов расчета. Иногда более легкая конструкция, подсказанная оптимальным проектированием, может быть менее выгодна, чем более тяжелая, но удобная с технологической точки зрения. Поэтому критерий наименьшего веса, конечно, не всегда определяет оптимальность конструкции. Однако, этот критерий тесно связан со стоимостью. В работах [118] и [144] даются аналитические зависимости между затратами на изготовление конструкции и их весом, которые дают возможность обобщить критерий минимума веса, выразив стоимость конструкции в виде некоторой функции от веса. Вес играет одну из главных ролей в самолетостроении и ракетостроении, где в качестве несущих, используются конструкции типа тонкостенных оболочек. Исходя из этих соображений, в данной работе в качестве критерия качества проекта принимается вес конструкции.

В поисках минимального веса, будем варьировать некоторые переменные ($u_1, u_2, \ldots, u_n$), которые обычно называются параметрами оптимизации и рассматриваются как компоненты некоторого вектора u из n - мерного эвклидова пространства E_n .

Здесь при оптимизации цилиндрических оболочек и пластин из композитных материалов, работающих в упругой области, при статическом, кратковременном нагружении в качестве параметров оптимизации в различных формулировках задач принимаются: геометрические размеры оболочек (радиус и толщина) и параметры, характеризующие структуру материала, такие как жесткость упругого заполнителя, объемный коэффициент армирования и относительные количества слоев с арматурой, составляющей различные углы с осью оболочки.

В общем случае, после нормировки некоторых параметров, вектор параметров оптимизации принимает следующий вид:

$$u = (u_1, u_2, u_3, u_4, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\ell), \tag{I.36}$$

$$u_1 = \frac{h - h_1}{h_2 - h_1}, \tag{I.37}$$

$$u_2 = \frac{R - R_1}{R_2 - R_1}, \quad u_3 = \frac{E_0}{E_0^{max}}, \quad u_4 = \mu, \tag{I.38}$$

где h_1 и h_2 - нижняя и верхняя границы изменения толщины оболочки; R_1 и R_2 - нижняя и верхняя границы изменения радиуса срединной поверхности оболочки; E_0 - модуль упругости заполнителя; E_0^{max} - верхняя граница изменения модуля упругости заполнителя; θ_k $(k = 1, 2, \ldots, \ell)$ - относительное количество слоев,арматура в которых направлена под углом β_k к оси оболочки.

С вводом в число параметров оптимизации объемного коэффициента армирования и относительных количеств слоев с различной укладкой арматуры открывается возможность вместе с созданием оптимальной конструкции одновременно оптимизировать и композитный материал,из которого создается конструкция.

Вес конструкции - функция цели в общем случае выражается через параметры оптимизации следующим образом:

$$G(u) = G_1(u) + G_2(u), \tag{I.39}$$

где G_1 - вес оболочки (или пластины); $G_2(u)$ - вес заполнителя. В тех случаях,когда вес заполнителя считается полезной нагрузкой,можно принять,что

$$G_2(u) = 0. \tag{I.40}$$

Пространство E_n содержит и такие проекты, которые не удовлетворяют некоторого множества требований,необходимых для изготовления и пригодности конструкции.Поэтому на изменение параметров оптимизации налагаются ограничения технологического, физического,структурного,геометрического и других характеров. Ограничения можно рассматривать как границы,разделяющие пространство E_n на допустимую и недопустимую области.Очень часто ограничения выражаются в виде ограничений на функционалы и делят пространство лишь неявно. Это как раз вызывает наибольшие трудности в задачах оптимизации при установлении свойств допустимой области, метода оптимизации и оптимальности решения.

В настоящей работе при решении отдельных проблем оптимизации цилиндрических оболочек будут затронуты ограничения, которые можно разделить на следующие группы: а) ограничения по предельным состояниям где входят ограничения на местную устойчивость, общую устойчивость, прочность, надежность относительно устойчивости и прочности, б) ограничения на верхние и нижние границы изменения структурных параметров материала, которые в дальнейшем будем называть структурными, в) геометрические ограничения на верхние и нижние границы изменения геометрических размеров оболочки.

Из всех вышеупомянутых ограничений здесь остановимся на составление ограничений на местную устойчивость, структурных и геометрических, т.к. в дальнейшем эти ограничения входят в каждую, здесь исследуемую оптимизационную задачу.

Для составления ограничений на местную устойчивость при оптимизации цилиндрических оболочек можно использовать различные подходы. Коротко укажем схемы составления этих ограничений, используя статический и энергетический методы, которые применяются в данной работе.

Статический метод. В уравнения равновесия (I.23) подставляются значения вектора перемещений U (функции перемещений), удовлетворяющие граничные условия. В случае конечного числа степеней свободы (Функции перемещений аппроксимируются конечным числом членов), после дифференцирования и элементарных преобразований получается система линейных однородных уравнений.

$$P\left[y^{\circ}\right]=0, \qquad (I.41)$$

где $\left[y^{\circ}\right]$ - вектор,составленный из коэффициентов функций перемещений; P - квадратная, симметричная матрица.Из условия нетривиальности системы (I.41):

$$|P|=0 \qquad (I.42)$$

получаем характеристическое уравнение для определения выражения критической нагрузки N^{*},которое зависит от параметров оптимизации и волновых чисел m , n , т.е.

$$N^{*}=N^{*}(u,m,n).$$

Ограничения устойчивости выражаются неравенствами

$$\varphi_j(u,m,n)=\frac{N^{\circ}}{N^{*}}-1\leq 0, \qquad (I.43)$$

где N° - параметр действующей нагрузки.

<u>Энергетический метод.</u> Из общих теорем механики следует, что равновесие является устойчивым, если потенциальная энергия системы имеет минимальное значение.

Приращение полной потенциальной энергии представляется в виде [31] :

$$\Delta Э=\delta Э+\frac{1}{2}\delta^{2}Э.$$

Для любого равновесного состояния

$$\delta Э=\delta V-\delta T=0, \qquad (I.44)$$

где δV -приращение потенциальной энергии деформации,возникающее при небольшом отклонении оболочки от состояния равновесия;

δT - приращение потенциала внешних сил при отклонении обо - лочки от состояния равновесия.

Равновесие будет устойчивым, если $\delta^2 Э > 0$ и неустойчивым при $\delta^2 Э < 0$. Т.К. верхняя критическая нагрузка соответствует переходу от устойчивых равновесных состояний к неустойчивым, то

$$\delta^2 Э = 0.$$

В практических расчетах используется условие устойчивости

$$\delta V - \delta T \geqslant 0, \tag{I.45}$$

как замкнутое множество точек в пространстве параметров оптимизации.

Для многослойной пологой ортотропной цилиндрической оболочки симметричного строения относительно срединной поверх - ности ($B = 0$) приращение потенциальной энергии деформации выражается:

$$\delta V = \frac{1}{2} \int\limits_0^L \int\limits_0^{2\pi R} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varkappa \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varkappa \end{bmatrix} dx\,dy + \int\limits_0^L \int\limits_0^{2\pi R} p_0 w^2 dx\,dy. \tag{I.46}$$

Второй член в (I.46) дает потенциальную энергию деформа - ции упругого заполнителя с учетом только радиального взаимо - действия оболочки и заполнителя. p_0 - контактное давление между заполнителем и оболочкой, зависящее от нагрузки оболочки. Формула (I.46) может быть использована при определении прира -

щения потенциальной энергии деформации как для кинематичес - кой модели Кирхгофа-Лява, так и для модели Тимошенко. Общий вид формулы не зависит от модели. Изменяются только значения матриц $\mathcal{E}$, $\varkappa$, A, B и D. В первом случае они определяют- ся по формулам (I.II), во втором - по формулам (I.IO). Она может быть использована и при определении приращения потен - циальной энергии деформации прямоугольных пластинок, соответст- венно изменив пределы интегрирования и элементы матриц $\mathcal{E}$ и $\varkappa$.

Приращение потенциала внешних сил, действующих на оболочку в общем случае нагружения имеет вид:

$$\delta T = \frac{1}{2}\int_0^L\int_0^{2\pi R}\left[N_x^\circ\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + N_y^\circ\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + 2N_{xy}^\circ\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right]dx\,dy. \tag{I.47}$$

При заданном векторе перемещений $\mathcal{Y}$, после интегрирова - ния и элементарных преобразований, условие устойчивости (I.45) получается в виде квадратичной формы относительно вектора $[\mathcal{Y}^\circ]$, которая зависит от u, m, n:

$$\Psi(u,m,n) = [\mathcal{Y}^\circ]^T P[\mathcal{Y}^\circ] \geq 0. \tag{I.48}$$

$[\mathcal{Y}^\circ]$ определяется из системы:

$$\frac{\partial\Psi(u,m,n)}{\partial \mathcal{Y}^\circ} = 2P[\mathcal{Y}^\circ] = 0. \tag{I.49}$$

Таким образом, опять приходим к системе (I.4I). При подста - новке $[\mathcal{Y}^\circ]$ в (I.48) получается

$$\Psi_1(u,m,n) = N^* - N^\circ \geq 0 \tag{I.50}$$

и тем самым ограничения устойчивости можно представить в виде (I.43). Выражение ограничений в виде квадратичной формы относи- тельно $[\mathcal{Y}^\circ]$ предпочтительнее при теоретическом исследовании свойств этих ограничений.

Приравнив (I.43) нулю и варьируя числа m и n, для каждой пары (m, n) получаем гиперповерхности в пространстве оптимизируемых параметров u. Точки пространства, в которых для всех пар (m, n) выполняются неравенства (I.43), составляют область устойчивости.

Структурные и геометрические ограничения есть линейные функции относительно параметров оптимизации. Поэтому их объединим в одну систему линейных уравнений и неравенств:

$$\begin{cases} \varphi_i(u) = -u_i \le 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r), \\ \varphi_{i+r}(u) = u_i - 1 \le 0, \\ \varphi_j(u) = -\theta_k \le 0 \; (j = 2r+k;\; k = 1, 2, \dots, \ell), \\ \varphi_{2r+\ell+1}(u) = \sum\limits_{k=1}^{\ell} \theta_k - 1 = 0. \end{cases} \tag{I.51}$$

Составление остальных групп ограничений будет обсуждаться в каждом конкретном случае.

Вектор оптимизируемых параметров u, удовлетворяющий всем ограничениям, т.е. такой, для которого

$$\varphi_i(u) \le 0,$$

называется допустимым вектором. Множество всех допустимых векторов составляет допустимую область, которую обозначим Ω. Оптимизационная задача коротко может быть сформулирована следующим образом: определить u^* такой, что

$$G(u^*) = \min_{\Omega} G(u),$$

где $u^* \in \Omega = \{u \mid \varphi_i(u) \le 0\}$ и $\Omega \subset E_n$.

Следовательно, задача оптимального проектирования оболочек сводится к задаче отыскания условного экстремума при ограничениях в виде равенств и неравенств. Решение, пользуясь класси -

ческими методами анализа,в большинстве случаев,из-за сложности и большого числа параметров оптимизации и ограничений,за - труднительно и приходится применять методы математического программирования.

§ I.4. Метод и особенности численного решения оптимизационных задач цилиндрических оболочек из композитных материалов

В настоящее время методы нелинейного программирования развиваются довольно интенсивно.Однако пока в их основе не так уж много принципиально различных идей и выбор метода оптимизации не очень обширный.Использование того или другого метода зави - сит от конкретной задачи.При выборе численного метода следует учесть следующие моменты: точность вычислений,степень чувствительности к ошибкам и оценить приблизительно объем времени,которое,вероятно,потребуется для решения задачи и главное учесть особенности задачи.Изложение многих современных численных методов можно найти в [II9] , [I28] и [I49] .

Сформулированная в предыдущем параграфе задача оптимиза - ции цилиндрических оболочек из композитного материала имеет свои особенности.В большинстве случаев функция цели сравнительно несложная,но зато ограничения довольно сложны и их много (до нескольких десятков). Кроме того,в некоторых случаях ограничения трудно выразить в аналитической форме (стохасти - ческие задачи).В виду этого не каждый численный метод может оказаться эффективным.

В настоящей работе используется один из методов нелинейного программирования - метод проектируемых градиентов Розена [I80] . Подробное изложение метода можно найти также в [72] и сокращенное изложение в [58] и [151] . Этот метод для решения задач оптимизации цилиндрических оболочек из композитных материалов применен в [132] где описан и алгоритм. Поэтому здесь не будем останавливаться на описании и подробностях этого метода.

Отметим некоторые особенности задач оптимизации оболочек с учетом устойчивости. Методом проектируемых градиентов Розена поиск минимума ведется по направлению антиградиента целевой функции на касательную гиперплоскость к допустимой области и движение к минимуму происходит по границе допустимой области. Таким образом, стартовая точка должна находиться на границе этой области. Для выхода на границу допустимой области существует много различных методов. Здесь используется метод деления отрезка, соединяющего две точки, одна из которых находится в допустимой области, а другая вне ее.

Ввиду того, что не все координаты вектора u одинаково влияют на устойчивость, прочность и др. свойства оболочки, при выходе за границу допустимой области изнутри меняем те координаты u, с уменьшением которых приближаемся к границе допустимой области. Пусть, для определенности, это будут первые "к" координат вектора u , т.е. $u_1, u_2, \ldots, u_k$, Принимаем, что u^0 находятся в допустимой области Ω или на ее границе. Тогда

$$\max_{j,i}\left[\varphi_j(u^0; m,n), \varphi_i(u^0)\right] \leq 0,$$

где $\varphi_j(u^0; m,n)$ - левые части ограничений устойчивости; $\varphi_i(u^0)$ - левые части других ограничений (прочности и др.). Для того, чтобы точка u^0 была в области устойчивости или на ее границе, неравенства

$$\varphi_j(u^\circ; m, n) \leq 0,$$

должны выполняться для каждой пары (m, n).Но при решении численных примеров должны ограничиться некоторыми интервалами изменения m и n ,а именно, $m_1 \leq m \leq m_2$, $n_1 \leq n \leq n_2$. Тогда на каждом шагу оптимизации рассматривается $(m_2-m_1+1)(n_2-n_1+1)$ ограничений устойчивости и j = I,2,..., $(m_2-m_1+1)(n_2-n_1+1)$.

При выходе на границу допустимой области делится пополам расстояние точки $A_0(u^\circ)$до $n-k$ - мерного многообразия,натянутого на орты e_p $(p=k+1, k+2, \ldots, n)$.При этом получаем точку $A_1(u^{(1)})$ где $u^{(1)}=(u_1^\circ/2, u_2^\circ/2, \ldots, u_{k+1}^\circ, \ldots, u_n^\circ)$ (Рис.I.4). Если в точке A_1 ,

$$\max_{i,j}\left[\varphi_j(u^{(1)}; m, n), \varphi_i(u^{(1)})\right] < 0,$$

то точка A_1 находится в допустимой области и следующим шагом делится пополам отрезок AA_1 , а если

$$\max_{i,j}\left[\varphi_j(u^{(1)}; m, n), \varphi_i(u^{(1)})\right] > 0,$$

то пополам делится отрезок A_1A_0 .

На границе допустимой области

$$\max_{i,j}\left[\varphi_j(u, m, n), \varphi_i(u) = \varphi_{j_0}(u, m_0, n_0) = 0, \qquad (I.52)$$

если граница допустимой области в точке u совпадает с границей области устойчивости.При этом интервалы $[m_1, m_2]$ и $[n_1, n_2]$ должны быть такими,что

$$m_1 < m_0 < m_2, \qquad (I.53)$$

$$n_1 < n_0 < n_2 \qquad (I.54)$$

и $j_0 \in \{j\}$.

При выходе в других местах допустимой области

$$\max_{i,j}[\varphi_j(u,m,n), \varphi_i(u)] = \varphi_{i_0}(u) = 0. \tag{I.55}$$

При вычислениях на ЭВМ имеет смысл замена строгих равенств (I.52) и (I.55) неравенствами

$$|\varphi_{j_0}(u, m_0, n_0)| \leq \varepsilon,$$

$$|\varphi_{i_0}(u)| \leq \varepsilon.$$

При выходе на границу допустимой области или при движении по ней в процессе оптимизации меняются активные ограничения и может наступить момент, когда не выполняется какое-либо из условий (I.53) и (I.54), т.е., может быть, что $m_0 = m_1$ или $m_0 = m_2$ при невыполнении условия (I.53) и $n_0 = n_1$ или $n_0 = n_2$ при невыполнении условия (I.54). В этом случае должны быть изменены интервалы $[m_1, m_2]$ и $[n_1, n_2]$. Геометрически это означает, что должны вводиться новые гиперповерхности, исключив из рассмотрения некоторые старые, непринадлежащие к числу активных. Блок-схема подключения новых ограничений устойчивости с изменением волновых чисел приводится на рис. I.5.

Необходимость изменения ограничений одних другими в процессе оптимизации делает неприемлемыми такие методы, как метод штрафных функций, метод случайного поиска и др. Поэтому одно из преимуществ метода проектируемых градиентов Розена для данного класса задач заключается именно в возможности автоматического отбора опасных форм выпучивания при движении к оптимуму.

В применениях методов оптимизации с использованием производных, как показывает вычислительная практика, обычно вычислительные затруднения возникают при вычислении производных. Здесь ,

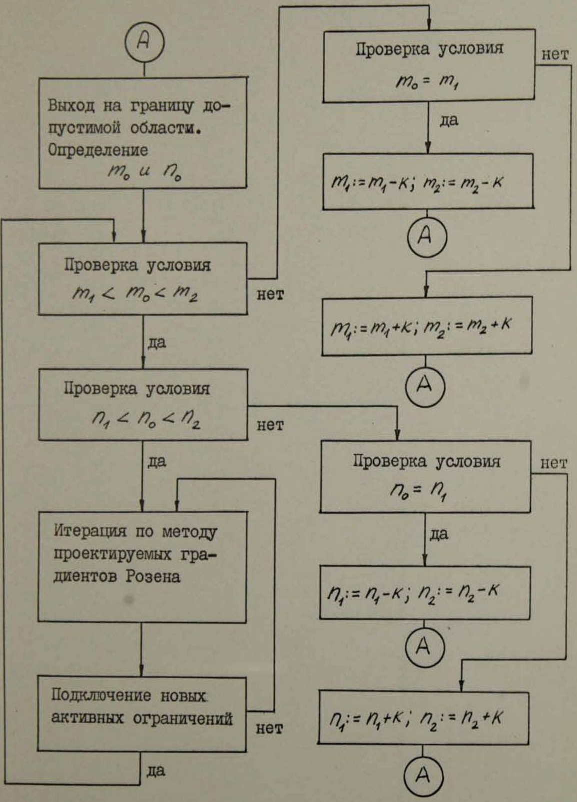

Рис. I.5 Блок-схема подключения новых ограничений, с помощью изменения интервалов $[m_1, m_2]$ и $[n_1, n_2]$;
K – натуральное число.

в большинстве случаев, появляются неточности и ошибки, лимитирующие точность определения оптимальной точки. Это относится и к методу проектируемых градиентов Розена, так как на каждом шагу необходимо определять градиенты ограничений, которые определяются сложными нелинейными функциями. Более подробно остановимся на определении градиента ограничений устойчивости, когда вектор оптимизируемых параметров имеет вид:

$$u = (u_1, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\ell).$$

Тогда градиент ограничений устойчивости в матричном виде выражается

$$\nabla \varphi_j (u, m, n) = G_1 \cdot G_2 ,$$

где

$$G_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial c_{11}}{\partial u_1} & \frac{\partial c_{12}}{\partial u_1} & \frac{\partial c_{22}}{\partial u_1} & \frac{\partial c_{44}}{\partial u_1} & \frac{\partial c_{55}}{\partial u_1} & \frac{\partial c_{66}}{\partial u_1} & \frac{\partial h}{\partial u_1} \\ \frac{\partial c_{11}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial c_{12}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial c_{22}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial c_{44}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial c_{55}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial c_{66}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial h}{\partial \theta_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial c_{11}}{\partial \theta_\ell} & \frac{\partial c_{12}}{\partial \theta_\ell} & \frac{\partial c_{22}}{\partial \theta_\ell} & \frac{\partial c_{44}}{\partial \theta_\ell} & \frac{\partial c_{55}}{\partial \theta_\ell} & \frac{\partial c_{66}}{\partial \theta_\ell} & \frac{\partial h}{\partial \theta_\ell} \end{bmatrix}, \quad (I.56)$$

$$G_2^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_j}{\partial c_{11}} & \frac{\partial \varphi_j}{\partial c_{12}} & \frac{\partial \varphi_j}{\partial c_{22}} & \frac{\partial \varphi_j}{\partial c_{44}} & \frac{\partial \varphi_j}{\partial c_{55}} & \frac{\partial \varphi_j}{\partial c_{66}} & \frac{\partial \varphi_j}{\partial h} \end{bmatrix}.$$

В случае модели Кирхгофа-Лява из G_1 и G_2^T выпадают четвертый и пятый столбцы. Матрица G_1 в процессе оптимизации постоянная в виду линейности функций C_{ij} и h относительно параметров оптимизации.

Известно,что для качественного исследования результатов оптимизации и установления глобального оптимума важно знать общие свойства функции цели и ограничений.Здесь указан общий метод исследований ограничений на выпуклость.

Для того,чтобы фцнкция была выпуклой, ее гессиан должен быть положительно полуопределен (см.напр. [57] , [72]), т.е., все главные миноры,составленные из элементов гессиана,должны быть неотрицательные ([34]).Таким образом,исследование выпуклости сводится к исследованию свойств главных миноров гессиана ограничений устойчивости.

Элементы матрицы жесткостей C_{ij} линейные функции относительно параметров оптимизации (см. (I.5) и (I.7)) и на основании формулы (I.46) входят в ограничения устойчивости в первой степени. Из этого следует,что гессиан имеет следующую форму

$$H_j = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial u_1^2} & \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial u_1 \partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial u_1 \partial \theta_\ell} \\ \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial u_1 \partial \theta_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial u_1 \partial \theta_\ell} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \qquad (I.57)$$

где

$$\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial u_1^2} = f_j(u_1, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\ell)(h_2 - h_1)^2, \qquad (I.58)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial u_1 \partial \theta_i} = f_{ji}(u_1)(h_2 - h_1) \quad (i = 1, 2, \ldots, \ell). \tag{I.59}$$

Из (I.57) следует,что неравны нулю могут быть:

а) только один главный минор первого порядка $M\binom{1}{1} = \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial u_1^2}$

б) главные миноры второго порядка,имеющие форму

$$M\binom{1\ i}{1\ i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial u_1^2} & \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial u_1 \partial \theta_{i-1}} \\ \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial u_1 \partial \theta_{i-1}} & 0 \end{bmatrix} \tag{I.60}$$

$$(i = 2, 3, \ldots, \ell+1).$$

Остальные главные миноры равны нулю.Все это облегчает исследования выпуклости ограничений устойчивости,так как из общего числа главных миноров

$$S = C^1_{\ell+1} + C^2_{\ell+1} + \cdots + C^{\ell+1}_{\ell+1}$$

надо исследовать только $\ell+1$ миноров.

И в заключении несколько слов о численном решении.Для численного решения задач были составлены программы,(пример приводится в приложении).Программы написаны на алгоритмическом языке МАЛГОЛ,который являются модификацией алгоритмического языка АЛГОЛ-60 и служит входным языком для системы автоматического программирования для ЭВМ "Минск-22".Описание МАЛГОЛ"а можно найти в [141] и [142] .С использованием программы "Совместимость",численные примеры решены на ЭВМ " Минск-32" в вычислительном центре Шяуляйского телевизионного завода.

ГЛАВА ВТОРАЯ

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН И ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С УПРУГИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ, РАБОТАЮЩИХ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

Обеспечивание устойчивости - особенно важная задача при проектировании тонкостенных конструкций из армированных пластиков. В данной главе рассматривается синтез оптимальных прямоугольных пластин и цилиндрических оболочек из ортотропного материала с упругим заполнителем. Принимается во внимание потеря устойчивости и некоторые структурные и геометрические ограничения. Также принято, что прочность материала достаточна и не является причиной потери несущей способности конструкции.

Основные положения этой главы были опубликованы в [81] - [83] .

§ 2.I. Оптимизация сжатых в двух направлениях прямоугольных пластин с учетом поперечных сдвигов.

2.I.I. Постановка и свойства задачи. Рассматривается прямоугольная, шарнирно опертая пластина из ориентированно армированного материала, жесткостные характеристики которой определяются по формулам (I.4), (I.5), (I.34) и (I.35). Главные оси анизотропии параллельны сторонам. Пластина сжимается равномерно распределенными по краям усилиями N_x° и N_y° , лежащими в срединной плоскости пластины (рис.2.I).

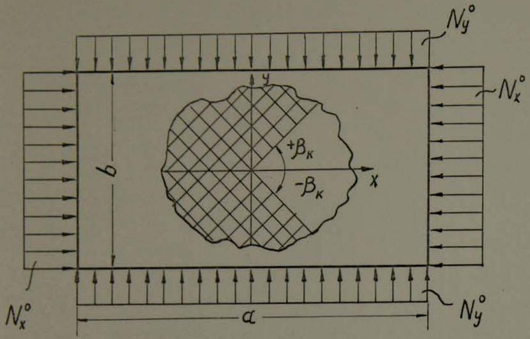

Рис. 2.I. Армированная пластина, сжатая в двух направлениях.

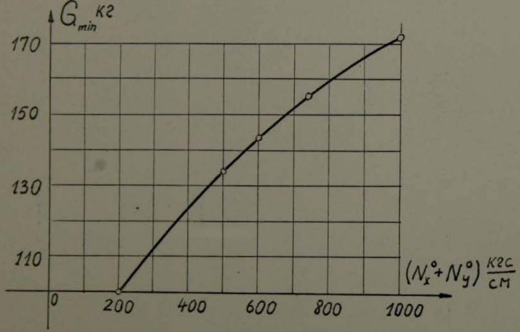

Рис. 2.2. Зависимость минимального веса от нагрузки для квадратной пластины.

В качестве параметров оптимизации принимаются величина, характеризующая толщину пластины, и относительные количества слоев, расположенных под различными углами к оси Ox. Вектор оптимизируемых параметров:

$$u = (u_1, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_\ell).$$

Здесь $u_1 = \dfrac{h - h_1}{h_2 - h_1}$, h_2 и h_1 – соответственно верхняя и нижняя границы изменения толщины пластины.

Критерием качества проекта принимается вес пластины, который выражается через параметры оптимизации следующим образом:

$$G(u) = ab[(h_2 - h_1)u_1 + h_1][(\gamma_a - \gamma_c)\mu + \gamma_c], \tag{2.1}$$

где a и b – длина и высота пластины; γ_a – объемный вес армирующих волокон; γ_c – объемный вес связующего.

Принимаются во внимание структурные и геометрические ограничения на верхние и нижние границы изменения параметров оптимизации, которые выражаются соотношениями (I.5I) с учетом r = I и ограничения на местную устойчивость. Рассматривая пластину как частный случай цилиндрической оболочки ($R = \infty$), для составления этих ограничений используем формулы первой главы. Применим энергетический метод. В случае прямоугольной пластины, координаты вектора перемещений, удовлетворяющие граничные условия, задаются в виде [69] :

$$
\begin{aligned}
u &= 0,\\
v &= 0,\\
w &= w_0 \sin\lambda x \sin\eta y,\\
\gamma_x &= \gamma_{x0} \cos\lambda x \sin\eta y,\\
\gamma_y &= \gamma_{y0} \sin\lambda x \cos\eta y,
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

где $\lambda = \frac{m\pi}{a}$, $\eta = \frac{n\pi}{b}$,

m и n - числа полуволн в направлениях осей Ox и Oy.

Значения функций (2.2) подставляются в (I.IO). Элементы A_{44} и A_{55} матрицы A заменяются соответственно K_1 и K_2 из (I.35). Полученные матрицы $\mathcal{E}$, $\varkappa$, A и $\mathcal{D}$ подставляем в (I.46) и (I.47) с учетом, что $p_0 = 0$ и $N^0_{xy} = 0$. Полученные приращения потенциальной энергии подставляем в (I.45). Проинтегрировав в пределах от 0 до a и от 0 до b получаем квадратную форму относительно вектора $[y^0]$ (I.48), где

$$P = \begin{bmatrix} \lambda^2 K_1 + \eta^2 K_2 - (N_x^0 \lambda^2 + N_y^0 \eta^2) & \lambda K_1 & \eta K_2 \\ \lambda K_1 & \mathcal{D}_{11}\lambda^2 + \mathcal{D}_{66}\eta^2 + K_1 & (\mathcal{D}_{12} + \mathcal{D}_{66})\lambda\eta \\ \eta K_2 & (\mathcal{D}_{12} + \mathcal{D}_{66})\lambda\eta & \mathcal{D}_{22}\eta^2 + \mathcal{D}_{66}\lambda^2 + K_2 \end{bmatrix}$$

$$[y^0]^T = (w_0, \gamma_{x0}, \gamma_{y0}). \tag{2.3}$$

Из (I.48) ограничения устойчивости выражаются

$$\varphi_j(u,m,n) = -\Psi_{m1}(u,m,n) = -[y^0]^T P [y^0] \leq 0 \tag{2.4}$$

или в развернутом виде

$$\varphi_j(u,m,n) = \left[\left(\frac{N_x^0}{h} - \frac{5}{6}c_{55}\right)\lambda^2 + \left(\frac{N_y^0}{h} - \frac{5}{6}c_{44}\right)\eta^2\right] w_0^2 - 2\lambda\frac{5}{6}c_{55} w_0 \gamma_{x0} - \frac{5}{3}c_{44}\eta w_0 \gamma_{y0} - \left(\frac{h^2}{12}c_{11}\lambda^2 + \frac{h^2}{12}c_{66}\eta^2 + \frac{5}{6}c_{55}\right)\gamma_{x0}^2 - \frac{h^2}{6}(c_{12} + c_{66})\lambda\eta\gamma_{x0}\gamma_{y0} - \left[\left(\frac{h^2}{12}\eta^2 c_{22} + \frac{h^2}{12}\lambda^2 c_{66}\right) + \frac{5}{6}c_{44}\right]\gamma_{y0}^2 \leq 0. \tag{2.5}$$

Вектор $[y^\circ]$ определяется из системы уравнений (I.49).

Отметим некоторые свойства ограничений устойчивости, когда материал пластинки, составленный из слоев трех типов, составляющих с осью Ox углы $0, \pm\pi/4, \pm\pi/2$.

I. Справедлива следующая теорема

Теорема. Ограничения местной устойчивости прямоугольной пластины (2.5) в пространстве параметров оптимизации не - выпуклы.

Доказательство. Для доказательства анализируем гессианы ограничений (2.5), общая форма которых представлена в (I.57).

Допустим, что ограничения устойчивости (2.5) выпуклы, т.е. все главные миноры гессиана неотрицательны. Исследуем главный минор второго порядка

$$M\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 \varphi_j}{\partial u_1^2} & \dfrac{\partial^2 \varphi_j}{\partial u_1 \partial \theta_1} \\ \dfrac{\partial^2 \varphi_j}{\partial u_1 \partial \theta_1} & 0 \end{vmatrix},$$

где с учетом формул (I.7) из (2.5) получаем

$$\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial u_1 \partial \theta_1} = (h_2 - h_1) f_{j1}(u_1),$$

$$f_{j1}(u_1) = -\frac{h}{6}\Big[(\lambda^2 c_{11}^\circ + \ell^2 c_{66}^\circ)\gamma_{xo}^2 + 2\ell\lambda(c_{12}^\circ + c_{66}^\circ)\gamma_{xo}\gamma_{yo} + (\ell^2 c_{22}^\circ + \lambda^2 c_{66}^\circ)\gamma_{yo}^2\Big]. \tag{2.6}$$

Из нетривиальности решения системы (I.49) следует, что $\gamma_{xo}^2+\gamma_{yo}^2\neq 0$.
Пусть для определенности $\gamma_{yo}\neq 0$. Тогда

$$\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial u_1\,\partial\theta_1}=-\frac{h}{6}(h_2-h_1)\gamma_{yo}^2\left[(\lambda^2c_{11}^o+\eta^2c_{66}^o)X^2+\right.$$

$$\left.+2\eta\lambda(c_{12}^o+c_{66}^o)X+(\eta^2c_{22}^o+\lambda^2c_{66}^o)\right],$$

$$X=\frac{\gamma_{xo}}{\gamma_{yo}}.$$

Дальше исследуем квадратный трехчлен относительно X:

$$Z=(\lambda^2c_{11}^o+\eta^2c_{66}^o)X^2+2\eta\lambda(c_{12}^o+c_{66}^o)X+(\eta^2c_{22}^o+\lambda^2c_{66}^o),$$

дискриминант которого

$$\Delta=-\eta^2\lambda^2(c_{11}^o c_{22}^o-c_{12}^{o2})-c_{66}^o(\lambda^4c_{11}^o+\eta^4c_{22}^o)+2c_{12}^oc_{66}^o\eta^2\lambda^2. \tag{2.7}$$

Известно, что $c_{12}^o<c_{11}^o$, $c_{12}^o<c_{22}^o$ и для определенности принимаем, что $c_{11}^o\leq c_{22}^o$. При замене во втором и третьем слагаемых (2.7) величин c_{22}^o и c_{12}^o на c_{11}^o, дискриминант только увеличивается и получаем

$$\Delta<-\eta^2\lambda^2(c_{11}^oc_{22}^o-c_{12}^{o2})-c_{66}^oc_{11}^o(\lambda^2-\eta^2)^2<0$$

Из $\lambda^2c_{11}^o+\eta^2c_{66}^o>0$ следует, что при любых X, $Z>0$
и $\dfrac{\partial^2\varphi_j}{\partial u_1\,\partial\theta_1}\neq 0$. Отсюда $M\binom{1\,2}{1\,2}=-\left(\dfrac{\partial^2\varphi_j}{\partial u_1\,\partial\theta_1}\right)^2<0$,

что противоречит начальной предпосылке, и теорема доказана.

2. Ограничения устойчивости (2.5), с большой вероятностью, в пространстве параметров оптимизации квазивыпуклы.

Следуя по [57], функция $\varphi(u)$ называется квазивыпуклой, если для любых $u_1, u_2 \in E_n$ и любого α из $0 \leq \alpha \leq 1$ удовлетворяется неравенство

$$\varphi[\alpha u_1 + (1-\alpha) u_2] \leq \max[\varphi(u_1), \varphi(u_2)].$$

Для численного доказательства этого свойства была составлена программа на алгоритмическом языке МАЛГОЛ и проверено случайно подобранных 10^4 пар точек. Не найдено ни одной пары точек, которые противоречили бы определению квазивыпуклости. Из этого можно, с большой вероятностью, утверждать, что ограничения устойчивости квазивыпуклы.

Таким образом, сформулированная проблема является задачей нелинейного программирования с линейной функцией цели и нелинейными квазивыпуклыми ограничениями.

2.1.2. Результаты вычислений и обсуждения. Исследуется прямоугольная пластинка из материала со следующими характеристиками: $E_a = 4{,}2 \cdot 10^6$ кгс/см^2, $\nu_a = 0{,}21$, $\gamma_a = 2{,}6$ г/см^3 (борные волокна), $E_c = 3{,}5 \cdot 10^4$ кгс/см^2, $\nu_c = 0{,}33$, $\gamma_c = 1{,}2$ г/см^3 (эпоксидное связующее). Коэффициент объемного армирования $\mu = 0{,}6$. Пределы изменения толщины пластины $h_1 = 0{,}1$ см, $h_2 = 5$ см. Вектор оптимизируемых параметров:

$$u = (u_1, \theta_1, \theta_2, \theta_3),$$

где θ_1, θ_2 и θ_3 - относительные количества слоев, арматура в которых расположена соответственно под углами $0, \pm\frac{\pi}{4}, \pm\frac{\pi}{2}$ к оси Ox. Приведем примеры весовой минимизации квадратных и прямоугольных пластин.

А) Квадратная пластинка.

При оптимизации квадратной пластины, сжатой усилиями

$N_x^\circ + N_y^\circ$ = 1000 кгс/см и $a = b$ = 200 см, получено, что оптимальная схема армирования следующая: $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 1$, $\theta_3 = 0$, т.е. оптимальная пластина составлена только из слоев, арматура которых составляет с осью Ox угол $\pm\pi/4$. Матрица жесткостей оптимальной квадратной пластины следующая:

$$[C_{ij}] = \begin{bmatrix} 0,723 & 0,621 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,621 & 0,723 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,042 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,042 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,647 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \text{ кгс/см}^2.$$

Известно [31], что для квадратной, изотропной, сжатой в двух направлениях пластины при потери устойчивости всегда $m = n = 1$. Поэтому и $\lambda = \eta$. Из выражения (2,5) следует, что вес или толщина пластины зависят от суммарной величины усилий $N_x^\circ + N_y^\circ$ и не зависят от соотношения этих усилий по сторонам пластины. Интересно отметить, что это утверждение действительно и для квадратной ортотропной пластины оптимальной структуры. Кроме того, оптимальная схема армирования пластины, работающей на устойчивость, не меняется при изменении размеров, усилий и соотношений усилий, действующих по сторонам пластины и во всех случаях $m = n = 1$.

Толщина и вес оптимальной квадратной пластины зависят от суммарной величины $N_x^\circ + N_y^\circ$. Зависимость G_{min} от $N_x^\circ + N_y^\circ$ показана на рис. 2.2.

Для сравнения в таблице 2.1 приведены результаты из [170], где исследуется квадратная пластина, армированная только слоями, составляющими с осью Ox угол $\pm\beta$ (в наших обоз - начениях). В этой таблице приведены результаты, полученные при сжатии пластины усилием N_x° в одном направлении оси Ox (столбец 2) и при сжатии в двух перпендикулярных направлениях усилиями $\frac{1}{2}N_x^\circ$ т.е. суммарное усилие *также* N_x° (столбец 3), но распределенное по перпендикулярным сторонам пластины. В таблице приведены величины безразмерного параметра критической нагрузки $T_1 = \frac{N_x^\circ a^2}{E_2 h}$.

Таблица 2.I

β°	T_1	
I	2	3
0	35,83I	2I,742
I5	43,760	40,206
30	59,6I9	59,6I8
45	67,548	67,548
60	54,II5	59,6I8
75	25,I29	40,206
90	I3,I23	2I,742

Наибольший параметр критической нагрузки получен при армировании слоями, составляющими с осью Ox угол $\pm\pi/4$, что вполне соответствует оптимальной структуре материала квадратной пластины при весовой минимизации. Кроме того, для пластин неоптимальной структуры соотношение усилий, расп - ределенных по сторонам влияет на форму потери устойчивости и вес пластины.

Б) Прямоугольная пластина.

Оптимальная схема армирования не зависит от абсолютных размеров пластины и абсолютных величин усилий, а зависит от соотношений усилий, приложенных к короткой и длинной сторонам, а также, от соотношения размеров пластины. Численные резуль - таты, полученные при оптимизации пластин, размеры которых $a \cdot b$ = 40000 см^2, а усилия $N_x^\circ + N_y^\circ$ = I000 кгс/см, пред - ставлены на рис. 2.3.

Из приведенных результатов следует, что с увеличением

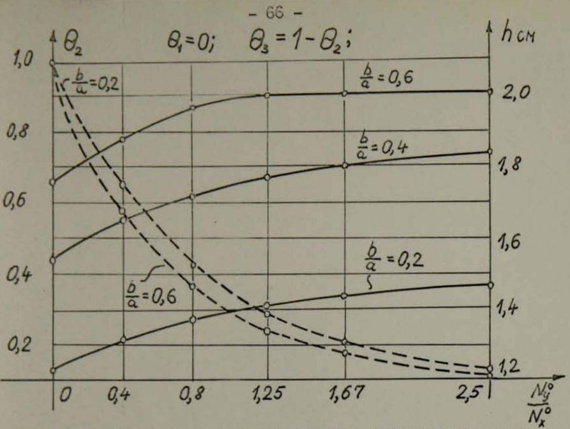

Рис. 2.3. Зависимости толщины пластины минимального веса h /———/ и θ_2 /- - - - -/ от N_y^0/N_x^0 при различных соотношениях a/b.

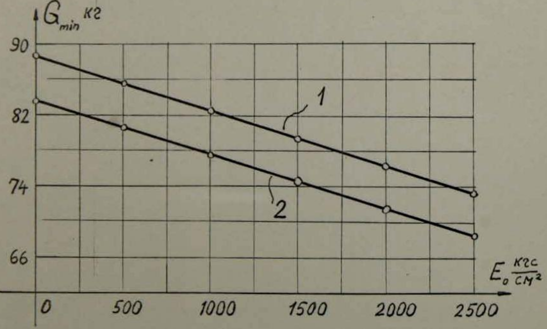

Рис. 2.4. Зависимости минимального веса цилиндрической оболочки от жесткости упругого заполнителя. I – модель Тимошенко; 2 – модель Кирхгофа — Лява.

отношения усилий,приложенных к длинной и короткой сторонам пластины,происходит перераспределение видов армирования. уменьшается относительное количество слоев, в которых арматура расположена под углом $\pm \pi/4$, и увеличивается число слоев, арматура в которых расположена по направлению увеличиваемого усилия. Во всех вариантах отсутствуют слои с арматурой направленной по длинной стороне ($\theta_1 = 0$). При нагружении только длинной стороны пластины,остаются слои, в которых арматура направлена по направлению этого усилия. В этом случае $m = n = 1$. При этом вес пластины увеличивается примерно на 26-27%,по сравнению с нагружением только короткой стороны таким же усилием.

Известно,что метод проектируемых градиентов Розена, в общем случае,ведет к локальному минимуму. В выше решенной задаче функция цели и ограничения - дифференцируемые функции, функция цели - линейная,ограничения на устойчивость, с большой вероятностью,квазивыпуклы. Эти свойства функции цели и ограничений удовлетворяют требованиям теоремы достаточности нелинейного программирования [57] и поэтому,пользуясь этой теоремой,можем,с большой вероятностью,утверждать,что полученные решения есть глобальные минимумы.

§ 2.2. Оптимизация цилиндрических оболочек с упругим заполнителем при осевом сжатии.

Рассмотрим шарнирно опертую по торцам круговую цилиндрическую оболочку,находящуюся под действием равномерно распределенных по торцам осевых сжимающих нагрузок N_x^0 . Материал оболочки конструируется по способу,описанному в § I.I.

Ставится оптимизационная задача,аналогичная оптимизационной задаче прямоугольных пластин, решенной в предыдущем параграфе: определить минимальный вес цилиндрической оболочки с упругим заполнителем, находящейся под действием осевого сжатия, считая параметрами оптимизации величину, характеризующую толщину оболочки и относительные количества слоев, арматура в которых расположена под различными углами β_k , т.е. вектор параметров оптимизации как и в предыдущем параграфе

$$u = (u_1, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_\ell). \tag{2.8}$$

Вес оболочки через параметры оптимизации выражается

$$G(u) = G_1(u) =$$

$$= 2\pi RL[u_1(h_2 - h_1) + h_1][\mu \gamma_a + (1-\mu)\gamma_c]. \tag{2.9}$$

Вес упругого заполнителя считается полезной нагрузкой и в функцию цели не включается, т.е. $G_2(u) = 0$. Характерная особенность функции цели (2.9) та, что она не зависит от некоторых параметров оптимизации, а именно, от относительных количеств слоев с различной укладкой арматуры и является линейной в пространстве параметров оптимизации.

Считая, что $h \ll 2R$, радиус заполнителя не будем отличать от радиуса срединной поверхности оболочки. Для пологих оболочек это всегда имеет место.

Пользуясь результатами, полученными в [100] , в предположении только радиального взаимодействия между оболочкой и заполнителем, а также, принимая во внимание, что потеря устойчивости происходит с образованием большого числа волн по длине оболочки, контактное давление заполнителя может быть выражено в следующей форме:

$$P_0 = \frac{E_0 \lambda}{2R(1-\nu_0^2)}, \qquad (2.10)$$

где E_0 - модуль упругости заполнителя: ν_0 - коэффициент Пуассона для заполнителя.Минимум целевой функции будет определяться при ограничениях: а)на местную устойчивость, б)структурных, в) геометрических.

Структурные и геометрические ограничения выражены соотношениями (I.5I) при r = I.

Ограничения на местную устойчивость зависят от выбранной кинематической мадели оболочки.Оптимизацию будем проводить без учета поперечных сдвигов материала (модель Кирхгофа - Лява) и с учетом поперечных сдвигов (модель Тимошенко). В обеих случаях для составления этих ограничений будет использоваться энергетический метод.

2.2.I. Модель Кирхгофа - Лява. Перемещения,удовлетворяющие граничные условия,принимаются в виде [I38] :

$$\begin{aligned} u &= u_0 \cos\lambda\xi \sin n\varphi, \\ v &= v_0 \sin\lambda\xi \cos n\varphi, \\ w &= w_0 \sin\lambda\xi \sin n\varphi, \end{aligned} \qquad (2.II)$$

$$\xi = \frac{x}{R}, \quad \varphi = \frac{y}{R}, \quad \lambda = \frac{m\pi R}{L},$$

где n - число волн по окружности; $2m$ - число волн вдоль образующей.

Подставляем(2.II)в(I.II).Дальше полученные матрицы $\mathcal{E}$ и $\mathcal{H}$, а также, A и D и значение P_0 из (2.I0) подставляем в (I.46), (2.II) в (I.47), с учетом того, что $N_y^\circ = N_{xy}^\circ = 0$. Полученные выражения приращений потенциальной энергии подставляем в (I.45). Проинтегрировав, условие устойчивости получаем в виде (I.48), где

$$[y^\circ]^T = [u_o, v_o, w_o],$$

$$P = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{12} & b_{22} & b_{23} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{bmatrix}$$

с следующими элементами

$$\begin{gathered} b_{11} = c_{11}\lambda^2 + c_{66}n^2, \qquad b_{12} = (c_{12} + c_{66})\lambda n, \\ b_{22} = c_{22}n^2 + c_{66}\lambda^2, \qquad b_{13} = -c_{12}\lambda,\ b_{23} = -c_{22}n, \\ b_{33} = \frac{1}{R^2}\frac{h^2}{12}\left[c_{11}\lambda^4 + 2(c_{12} + 2c_{66})\lambda^2 n^2 + c_{22}n^4\right] + \\ + c_{22} + \frac{E_o\lambda R}{2h(1-\nu_o^2)} - \frac{N_x^\circ\lambda^2}{h}. \end{gathered} \tag{2.I2}$$

Ограничения на местную устойчивость выражаются

$$\varphi_j(u, m, n) \equiv -\psi(u, m, n) = [y^\circ]^T P [y^\circ] \leq 0, \tag{2.I3}$$

или в развернутом виде

$$\begin{gathered} \varphi_j(u, m, n) = -(c_{11}\lambda^2 + c_{66}n^2)u_o^2 - 2(c_{12} + c_{66})\lambda n u_o v_o + \\ + 2c_{12}\lambda u_o w_o - (c_{22}n^2 + c_{66}\lambda^2)v_o^2 + 2c_{22}n v_o w_o - \\ - \left\{\frac{1}{R^2}\frac{h^2}{12}\left[c_{11}\lambda^4 + 2(c_{12} + 2c_{66})\lambda^2 n^2 + c_{22}n^4\right] + \right. \\ \left. + c_{22} + \frac{E_o\lambda R}{2h(1-\nu_o^2)} - \frac{N_x^\circ\lambda^2}{h}\right\} w_o^2 \leq 0. \end{gathered} \tag{2.I4}$$

Вектор $[y^\circ]$ определяется из системы (I.49).

2.2.2. Численные примеры. Исследуется цилиндрическая оболочка с упругим заполнителем из материала (борные волокна и эпоксидное связующее) со следующиеми исходными механическими характеристиками: E_a = 4,2·10^6 кгс/см^2, ν_a = 0,2I, γ_a = = 2,6 г/см^3, E_c = 3,5·10^4 кгс/см^2, ν_c = 0,33, γ_c = I,2 г/см^3, μ = 0,5, ν_o = 0,5. Размеры оболочки следующие: R = 45 см, L = I00 см, h_2 = 2,5 см, h_1 = 0,I см.На оболочку дейст - вует упругое осевое усилие N_x^o = 2,5 ·I0^4 кгс/см.

Оптимизируемые параметры: u_1 - величина,характеризующая толщину оболочки; θ_1 , θ_2 и θ_3 - относительные коли - чества слоев под углами намотки соответственно равными 0, $\pm\,\pi/4$, $\pm\,\pi/2$. Вектор оптимизируемых параметров:

$$u = (u_1, \theta_1, \theta_2, \theta_3). \tag{2.I5}$$

Результаты численного решения задачи приведены в таблице 2.2. и на рис.2.4.

Первая строка таблицы 2.2, при E_o = 0 (оболочка без заполнителя), носит контрольный характер. В [I35] теоретически было доказано,что при осевом сжатии цилиндрической оболочки без заполнителя (модель Кирхгофа-Лява) структура материала оптимальной оболочки удовлетворяет условие изотропности т.е. $C_{11} = C_{22} = C_{12} + 2C_{66}$ и относительные количества тогда распределены следующим образом: θ_1 = 0,25, θ_2 = 0,50, θ_3 = = 0,25. Имея это в виду, можно судить о точности численного метода,в данном случае о точности метода проектируемых гра - диентов Розена при решении сформулированной задачи.Как видно из первой строки таблицы 2.2, относительная погрешность при

Таблица 2.2.

$E_0 \frac{кгс}{см^2}$	U^{opt}				$C_{ij}\ 10^6$ кгс/см²				m	n
	h см	θ_1	θ_2	θ_3	C_{11}	C_{12}	C_{22}	C_{66}		
0	I,55	0,249	0,499	0,252	0,847	0,27I	0,854	0,289	7 6 4	0 3 5
500	I,50	0,279	0,482	0,239	0,899	0,263	0,8I8	0,280	7 6 6	I 4 3
I000	I,44	0,328	0,465	0,207	0,99I	0,254	0,744	0,27I	7 6 6	I 3 4
I500	I,39	0,334	0,446	0,220	0,994	0,244	0,76I	0,262	7 6	2 4
2000	I,33	0,389	0,405	0,206	I,085	0,224	0,7I0	0,242	7 6	3 4
2500	I,27	0,444	0,364	0,I92	I,I76	0,204	0,660	0,22I	7 7 6	3 4 4

определении параметров оптимизации и элементов матрицы жесткостей сравнительно небольшая и не превышает $\pm$ 0,8 %.

Из полученных результатов (табл.2.2) следует,что с увеличением жесткости заполнителя,уменьшается вес оптимальной оболочки.При этом,уменьшается относительное количество слоев с арматурой,расположенной под углами $\pm \pi/4$ и $\pm \pi/2$. Таким образом,заполнитель воспринимает на себя некоторую часть "обязанностей" слоев с угловым и окружным армированием.

2.2.3. Модель Тимошенко. Перемещения и компоненты вектора поворота нормали цилиндрической оболочки,удовлетворяющие граничным условиям, принимаем в виде [106] :

$$
\begin{aligned}
u &= u_0 \cos\lambda\xi \sin n\varphi, \\
v &= v_0 \sin\lambda\xi \cos n\varphi, \\
w &= w_0 \sin\lambda\xi \sin n\varphi, \\
\gamma_x &= \gamma_{x0} \cos\lambda\xi \sin n\varphi, \\
\gamma_y &= \gamma_{y0} \sin\lambda\xi \cos n\varphi.
\end{aligned}
\qquad (2.16)
$$

После аналогичных преобразований,как и в 2.2.I, с использованием формул (I.10),(I.45),(I.46),(I.47),(2.10) и (2.16) и интегрирования,ограничения на местную устойчивость приобретают вид (2.13),где вектор коэффициентов перемещений и поворотов нормали $[y^\circ]$ равен

$$[y^\circ] = [u_0, v_0, w_0, \gamma_{x0}, \gamma_{y0}]^T,$$

матрица P имеет вид

$$P = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & 0 & 0 \\ b_{12} & b_{22} & b_{23} & 0 & 0 \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} & b_{34} & b_{35} \\ 0 & 0 & b_{34} & b_{44} & b_{45} \\ 0 & 0 & b_{35} & b_{45} & b_{55} \end{bmatrix}$$

где

$$b_{33} = c_{22} + c_{55}\lambda^2 + c_{44}n^2 + \frac{E_0 \lambda R}{2h(1-\nu_0^2)} - \frac{N_x^0}{h}\lambda^2,$$
$$b_{34} = c_{55}R\lambda,\; b_{35} = c_{44}Rn,\; b_{44} = \frac{h^2}{12}(c_{11}\lambda^2 + c_{66}n^2) + c_{55}R^2,\; b_{45} = \frac{h^2}{12}(c_{12} + c_{66})n\lambda, \tag{2.17}$$
$$b_{55} = \frac{h^2}{12}(c_{22}n^2 + c_{66}\lambda^2) + c_{44}R^2.$$

Остальные элементы матрицы P остаются те же самые, как и в модели Кирхгофа-Лява, и представлены соотношениями (2.12). Ограничения на местную устойчивость выражаются:

$$\begin{aligned} \varphi_j(u,m,n) = &-(c_{11}\lambda^2 + c_{66}n^2)u_0^2 - 2(c_{12} + c_{66})\lambda n u_0 v_0 + 2c_{12}\lambda u_0 w_0 - (c_{22}n^2 + c_{66}\lambda^2)v_0^2 + \\ &+ 2c_{22}n v_0 w_0 - \left(c_{22} + c_{55}\lambda^2 + c_{44}n^2 + \frac{E_0\lambda R}{2h(1-\nu_0^2)} - \frac{N_x^0}{h}\lambda^2\right)w_0^2 - 2c_{55}R\lambda w_0\gamma_{x0} - 2c_{44}Rn w_0 \gamma_{y0} - \\ &- \left[\frac{h^2}{12}(c_{11}\lambda^2 + c_{66}n^2) + c_{55}R^2\right]\gamma_{x0}^2 - \frac{h^2}{6}(c_{12} + c_{66})n\lambda\gamma_{x0}\gamma_{y0} - \left[\frac{h^2}{12}(c_{22}n^2 + c_{66}\lambda^2) + c_{44}R^2\right]\gamma_{y0}^2 \le 0. \end{aligned} \tag{2.18}$$

И здесь вектор $[\mathcal{Y}^\circ]$ определяется из системы (I.49).

Остановимся на свойстве ограничений устойчивости цилиндрической оболочки, армированной слоями трех типов.

Теорема. Ограничения местной потери устойчивости цилиндрической оболочки (2.I4) и (2.I8) в пространстве параметров оптимизации невыпуклы.

Доказательство. Теорема доказывается по схеме, описанной в § I.4, аналогично 2.I.I, но только с другими функциями f_{j1}

а) Для органичений (2.I4) (модель Кирхгова-Лява)

$$f_{j1}(u_1) = -\frac{1}{R^2}\frac{h}{6}\left[\lambda^4 c_{11}^\circ + 2(c_{12}^\circ + 2c_{66}^\circ)\lambda^2 n^4 + n^4 c_{66}^\circ\right] \neq 0$$

и, тем самым, $M\binom{12}{12} < 0$, откуда и следует невыпуклость ограничений (2.I4).

б) По поводу доказательства теоремы для (2.I8) (модель Тимошенко) ограничимся замечанием, что функция $f_{j1}(u_1)$ получается из соответствующей функции (2.6) путем замены величины ξ на n .

Замечание. В приведенных доказательствах в 2.I.I и выше приведенной теореме, величины главных миноров второго порядка не зависят от нагрузки. Из этого следует, что доказанные свойства действительны для любого способа нагружения осевым сжатием, внешним или внутренним давлением, крутящими моментами.

2.2.4. Численные примеры. Оптимизируется цилиндрическая оболочка с механическими характеристиками арматуры и связующего и размерами, как в 2.2.2.

В таблице 2.3 и на рис.2.5 приведены результаты, полученные при оптимизации цилиндрической оболочки сжатой осевым сжимающим усилием N_x° = 25000 кгс/см. Представлены зависимости оптимальной структуры материала и элементов матрицы жесткостей

Таблица 2.3.

E_0 $\frac{кгс}{см^2}$	U^{opt}				m	n
	h см	θ_1	θ_2	θ_3		
0	I,65	0,285	0,466	0,249	6 7	4 3
300	I,62	0,293	0,45I	0,256	6 7	4 3
500	I,59	0,300	0,440	0,260	6	4
700	I,57	0,325	0,43I	0,244	7	3
I500	I,48	0,434	0,378	0,I88	7	4
2500	I,36	0,464	0,349	0,I87	7 8	4 3
3000	I,3I	0,527	0,30I	0,I72	7 8 8	4 3 4
5000	I,I0	0,796	0,I24	0,080	8 8 9	3 4 4

оболочки от жесткости упругого заполнителя. Из проведенных расчетов можно сделать вывод, что с увеличеним жесткости упругого заполнителя, как и при использовании модели Кирхгофа-Лява, уменьшается относительное количество слоев с арматурой, расположенной под углом $\pm\ \pi/4$ и $\pm\ \pi/2$ и увеличивается число слоев с арматурой, направленной по направлению действия усилия.

Зависимость минимального веса оболочки G_{min} от жесткости упругого заполнителя представлена на рис.2.4 (кривая I). Зависимость получена линейная. После обработки результатов оптимизации методом наименьших квадратов составлена эмпирическая зависимость G_{min} от модуля упругости заполнителя E_0:

$$G_{min} = kE_0 + b,$$

где коэффициенты K и b зависят от механических характеристик арматуры и связующего,размеров оболочки и нагрузки.
Для исследуемой оболочки $K = -0{,}00599$, $b = 88{,}505$. Зависимость дает возможность при любом значении E_0 из интервала $[0;5000]$ определить G_{min} с относительной погрешностью $\pm$ 0,5%.

Зависимость минимального веса и структуры материала оболочки от осевой нагрузки N_x^0 при постоянном модуле упругости заполнителя,равном E_0 =1000 кгс/см^2,представлена на рис.2.6. В исследуемых пределах изменения осевой нагрузки N_x^0, зависимость минимального веса от нагрузки получена почти линейная. При увеличении нагрузки структура материала,а тем самым и элементы матрицы жесткостей,меняются незначительно.

В [135] доказано,что при исследовании ортотропных оболочек (без заполнителя) в рамках модели Кирхгофа-Лява оптимальная оболочка является изотропной и в точке оптимума активными являются ограничения по осесимметричной и неосесимметриянной формам потери устойчивости,т.е. оптимальная оболочка при осевом сжатии может терять устойчивость как по осесимметричной, так и по неосесимметричной формам.

При исследовании оболочек с использованием гипотезы типа Тимошенко получены несколько иные результаты.Материал оптимальной оболочки(без заполнителя) характеризуется соотношениями между компонентами матрицы жесткости,близкими к соотношениям для изотропного материала (это относится лишь к компонентам,характеризующим жесткость в плоскости оболочки). Интересно отметить,что для пустой оболочки активными являются два ограничения по неосесимметричной форме потери устойчивости.Ограничение по осесимметричной форме в точке оптимума становится почти активным, т.е. оптимальная оболочка может терять устойчивость

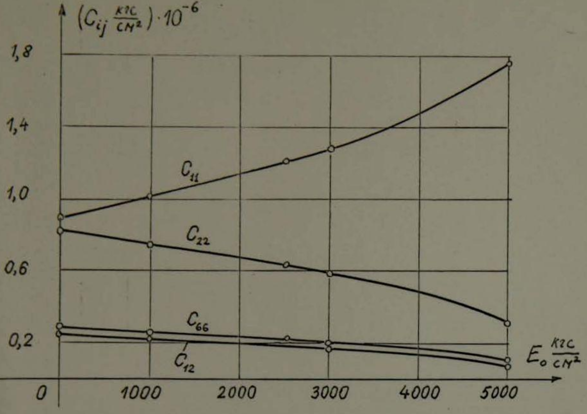

Рис. 2.5. Зависимости элементов матрицы жесткостей оболочек от жесткости упругого заполнителя.

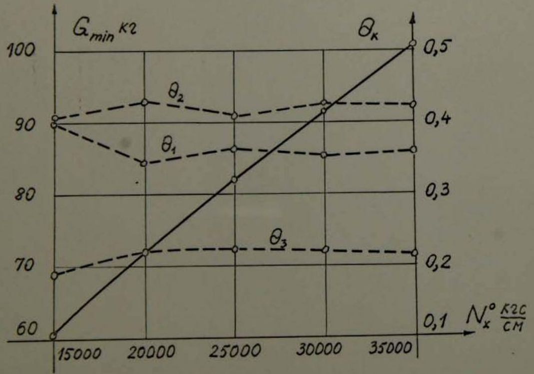

Рис. 2.6. Зависимости минимального веса /———/ и $\theta_к$ от нагрузки N_x^o при E_o = 1000 кгс/см^2.

как по двум неосесимметричным формам, так и по осесимметрич - ной форме.При увеличении жесткости заполнителя анизотропия оболочки увеличивается (Рис.2.5). Модули межслойного сдвига меняются незначительно.В исследованных пределах изменения жесткости заполнителя C_{44} уменьшается от 32000 кгс/см^2 до 28000 кгс/см^2, а C_{55} увеличивается от 33000 кгс/см^2 до 37000 кгс/см^2.

Коротко остановимся на сравнении результатов оптимизации, полученных при использовании гипотез Кирхгофа-Лява и Тимошенко.

На рис. 2.4 (прямая 2) представлена зависимость G_{min} от E_0 для оболочек,исследуемых в рамках модели Кирхгофа-Лява. Неучет поперечных сдвигов дает заниженные значения минималь - ного веса оболочки.Это является следствием того,что теория, основанная на гипотезах Кирхгофа-Лява,формально соответствует теории Тимошенко при $C_{44} = C_{55} \longrightarrow \infty$ ([138]). Эта разница,в нашем случае равна 6 — 7 %.Также имеется некоторая тенденция к уменьшению числа волн образующей при потери ус - тойчивости оптимальной оболочки.

Аналогично 2.I.I была проведена численная проверка квазивыпуклости ограничений устойчивости (2.I4) и (2.I8), где в каждом случае было проверено по I0^6 пар точек,случайно взятых из допустимой области и не найдено ни одной пары,которая не удовлетворяла бы определению квазивыпуклости.На основании аналогичных 2.I.I рассуждений, можно сделать вывод, что получен - ные решения,с большой вероятностью, есть глобальные минимумы.

Г Л А В А   Т Р Е Т Ь Я

МИНИМИЗАЦИЯ ВЕСА ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ИЗ КОМПОЗИТНОГО МАТЕРИАЛА С УПРУГИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ С УЧЕТОМ ПРОЧНОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ.

Некоторые тонкостенные конструкции могут быть изготовлены из материала с высокой прочностью и потеря несущей способности конструкции может произойти только из-за потери устойчивости. В этих случаях при решении оптимизационных задач достаточно принять во внимание ограничения на устойчивость,структурные и геометрические.Эти случаи рассматривались в предыдущей главе. Однако эти условия выполняются не во всех тонкостенных конструкциях.Потеря несущей способности может произойти из-за недостаточной прочности композита.В этих случаях следует рассматривать и ограничения прочности,которые усложняют оптимизационную задачу.Исследованию таких задач посвящена эта глава. Основные результаты опубликованы в [84] .

§ 3.1. Минимизация веса длинных цилиндрических оболочек с упругим заполнителем переменной жесткости при осевом сжатии

Тонкостенные конструкции типа цилиндрических оболочек с заполнителем могут быть различных видов и назначений.В одних из них заполнитель является неотъемлемой частью для функционирования конструкции и можно только в некоторых пределах варьировать его жесткость.В конструкциях другого типа заполнитель ставится в качестве элемента,улучшающего несущую способность конструкции.В таких конструкциях влияние на несущую способ - ность заполнителя может быть заменено повышенной толщиной. Здесь возникает вопрос угодно ли, с весовой точки зрения,заполнять тонкостенную цилиндрическую оболочку легким заполнителем с гораздо меньшей жесткостью,чем сама оболочка или же взять оболочку без заполнителя,но толще.Для хоть частичного ответа на этот вопрос при решении оптимизационной задачи це - лесообразно включить в число параметров оптимизации величину, характеризующую жесткость упругого заполнителя.Кроме того,будем считать, что имеется возможность варьировать величину радиуса оболочки в некотором интервале.Пусть длинная цилиндри - ческая оболочка сжимается осевым усилием N_x . Конструкция материала описана в § I.I. В качестве параметров оптимизации принимаются величины, характеризующие толщину оболочки, мо - дуль упругости заполнителя, радиус оболочки и относительные количества слоев с различной укладкой арматуры.Вектор оптимизируемых параметров выражается:

$$u = (u_1, u_2, u_3, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_\ell), \qquad (3.I.)$$

где u_1 , u_2 и u_3 выражены соответственно (I.37) и (I.38) и изменяются в сегменте [0;I] .

Функция цели выражается (I.39). Остановимся на определе - нии веса упругого заполнителя $G_2(u)$. Известно, что объемный вес некоторым образом зависит от модуля упругости материала. Для заполнителя соответствующую зависимость аппроксимируем функцией

$$\gamma_0 = k E_0^{\frac{2}{3}}, \qquad (3.2)$$

где K - коэффициент пропорциональности, определяемый из эксперимента и зависящий от материала; γ_0 - объемный вес заполнителя. Имея в виду (I.38) и что радиус заполнителя равен

$$r = R - \frac{h}{2},$$

вес упругого заполнителя через параметры оптимизации выражаем:

$$G_2(u) = \pi L\, k\Big[(R_2-R_1)u_2+R_1-\frac{(h_2-h_1)u_1+h_1}{2}\Big]^2\big(E_0^{max}u_3\big)^{\frac{2}{3}}.$$

Функция цели, с учетом веса оболочки $G_1(u)$ по (2.9), выражается через параметры оптимизации следующим образом:

$$G(u) = \pi L\Big\{2\big[(R_2-R_1)u_2+R_1\big]\big[(h_2-h_1)u_1+h_1\big]\big[\mu\gamma_a+(1-\mu)\gamma_c\big]+ + k\Big[(R_2-R_1)u_2+R_1-\frac{(h_2-h_1)u_1+h_1}{2}\Big]^2\big(E_0^{max}u_3\big)^{\frac{2}{3}}\Big\}. \quad (3.3)$$

Характерная особенность функции цели та, что она не зависит от относительных количеств слоев θ_k. Функция монотонная относительно параметра оптимизации u_2 (в пределах изменения u_2, определенных геометрическими ограничениями). Это означает, что минимум функции цели находится на границе допустимой области.

Оптимизация проводится при следующих ограничениях по предельным состояниям: а) на местную устойчивость, б) на общую устойчивость, в) на прочность. Также принимаются во внимание структурные и геометрические ограничения (I.5I) при $r = 3$.

Ограничения на местную устойчивость составляются с уче - том поперечных сдвигов (модель Тимошенко) аналогично 2.2.3. Радиус заполнителя будем отличать от радиуса срединной поверхности оболочки, вследствие чего в формулах (2.I2) и (2.I7) из -

меняется элемент b_{33} матрицы P, который становится равным:

$$b_{33}=C_{22}+C_{55}\lambda^2+C_{44}n^2+\frac{E_o\lambda(R-\frac{h}{2})}{2h(1-\nu_o^2)}-\frac{N_x\lambda^2}{2\pi Rh}. \tag{3.4}$$

Следовательно, ограничения на местную устойчивость выражаются неравенствами (2.18) с учетом (3.4).

При значениях размеров $R\ll L$, оболочка может терять устойчивость как стержень трубчатого сечения, наполненный упругим заполнителем. Эйлерова критическая нагрузка определяется по формуле:

$$N_э^*=\frac{\pi E_{об} J_{об}}{L^2}+\frac{\pi^2 E_o J_{зп}}{L^2}. \tag{3.5}$$

Здесь первый член выражает критическую нагрузку оболочки как стержня трубчатого сечения, а второй член — критическую нагрузку для заполнителя. Подставляя значения моментов инерции сечений оболочки и заполнителя $J_{об}$ и $J_{зп}$ в (3.5) и принимая приблизительно, что $E_{об}\approx C_{11}$ получаем

$$N_э^*(u)=\frac{\pi^3}{4L^2}\left[(C_{11}+E_o)(R+\frac{h}{2})^4-C_{11}(R-\frac{h}{2})^4\right] \tag{3.6}$$

и тем самым ограничение на общую устойчивость оболочки как стержня трубчатого сечения с заполнителем выражается:

$$\varphi(u)=\frac{N_x}{N_э^*(u)}-1\leq 0. \tag{3.7}$$

Для определения ограничений на прочность используется критерий Малмейстера, предложенный в 1966 г. [91], в котором по -

верхность прочности изображается в шестимерном пространстве напряжений уравнением:

$$P_{\alpha\beta} + P_{\alpha\beta\gamma\delta}\sigma_{\alpha\beta}\sigma_{\gamma\delta} + $$
$$+ P_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta}\sigma_{\alpha\beta}\sigma_{\gamma\delta}\sigma_{\varepsilon\zeta} + \cdots = 1, \tag{3.8}$$

где $P_{\alpha\beta}$, $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$,..... - так называемые тнезоры второго, четвертого и более высоких рангов поверхности прочности.

Рассматривается прочность оболочки при плоском напряженном состоянии. В этом случае, при сохранении и уравнении (3.8) членов первого и второго порядков, получается поверхность (эллипсойд) в трехмерном пространстве напряжений с уравнением

$$P_{11}\sigma'_{11} + P_{22}\sigma'_{22} + 2P_{12}\sigma'_{12} + P_{1111}\sigma'^2_{11} +$$
$$+ P_{2222}\sigma'^2_{22} + 4P_{1212}\sigma'^2_{12} + 2P_{1122}\sigma'_{11}\sigma'_{22} + \tag{3.9}$$
$$+ 4P_{1112}\sigma'_{11}\sigma'_{12} + 4P_{2221}\sigma'_{22}\sigma'_{12} = 1.$$

Для определения коэффициентовуравнения (3.9) надо знать характерные прочности $r_{\alpha\beta\gamma}$,где α = 0,II,$\overline{\text{II}}$; β = 0,22,$\overline{22}$; γ = 0,I2.$\overline{\text{I2}}$. Индекс 0 означает,что данная компонента напряжений отсутствует.Черта над индексом означает наличие сжимаю - щей компоненты.

Пользуясь экспериментально установленными характерными прочностями $r_{\alpha\beta\gamma}$,из системы [92]:

$$P_{11}r_{1100} + P_{1111}r^2_{1100} = 1,$$
$$-P_{11}r_{\overline{11}00} + P_{1111}r^2_{\overline{11}00} = 1, \tag{3.10}$$

$$p_{22} r_{0220} + p_{2222} r^2_{0220} = 1,$$

$$- p_{22} r_{02\bar{2}0} + p_{2222} r^2_{02\bar{2}0} = 1,$$

$$4 p_{1212} r^2_{0012} = 1,$$

$$p_{11} r_{11\bar{2}\bar{2}0} - p_{22} r_{11\bar{2}\bar{2}0} + p_{1111} r^2_{11\bar{2}\bar{2}0} +$$

$$+ p_{2222} r_{11\bar{2}\bar{2}0} - 2 p_{1122} r^2_{11\bar{2}\bar{2}0} = 1,$$

определяются коэффициенты уравнения (3.9) . Из системы получаем

$$p_{11} = \frac{r_{\bar{1}\bar{1}00} - r_{1100}}{r_{1100}\, r_{\bar{1}\bar{1}00}}, \quad p_{22} = \frac{r_{02\bar{2}0} - r_{0220}}{r_{0220}\, r_{02\bar{2}0}},$$

$$p_{1111} = \frac{1}{r_{1100}\, r_{\bar{1}\bar{1}00}}, \; p_{2222} = \frac{1}{r_{0220}\, r_{02\bar{2}0}}, \; 4p_{1212} = \frac{1}{r^2_{0012}}, \qquad (3.II)$$

$$2p_{1122} = \frac{p_{11} - p_{22}}{r_{11\bar{2}\bar{2}0}} + p_{1111} + p_{2222} - \frac{1}{r^2_{11\bar{2}\bar{2}0}}.$$

Для ортотропного материала в осях симметрии $p_{1112} = p_{2221} = 0$. Прочность на срез в этих осях не зависит от знака касательных напряжений, т.е. $r_{001\bar{2}} = r_{0012}$, $p_{12} = 0$.

Напряжения в повернутом на угол β_k элементарном слое определяются по формулам:

$$\sigma'_{ij} = \sigma'^{(k)}_{kl}\, \ell_{ik}\, \ell_{jl}, \qquad (3.I2)$$

где при осевом сжатии $k = \ell = I$; $i, j = I,2$. ℓ_{ij} - элементы матрицы

$$\left[l_{ij} \right] = \begin{bmatrix} \cos\beta_k & -\sin\beta_k \\ \sin\beta_k & \cos\beta_k \end{bmatrix}$$

При подстановке (3.12) в (3.9) получаем уравнения

$$\left[P_{1111}\cos^4\beta_k + P_{2222}\sin^4\beta_k + \left(P_{1212} + \frac{1}{2}P_{1122}\right)\sin^2\beta_k \right] \sigma_{11}^{\prime(k)2} +$$

$$+ \left(P_{11}\cos^2\beta_k + P_{22}\sin^2\beta_k\right)\sigma_{11}^{\prime(k)} - 1 = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, l),$$

из которых определяются предельные напряжения $\sigma_{11}^{\prime(k)}$ на каждый элементарный слой.

Исходя из равенства деформаций заполнителя и всех элементарных слоев, напряжения от нагрузки N_x можно определить для заполнителя по формуле:

$$\sigma_{зп} = \frac{N_x E_0}{F_{зп} E_0 + F_{об} C_{11}},$$

а для каждого элементарного слоя по формулам:

$$\sigma_{11}^{(k)} = \frac{N_x C_{11}^{(k)}}{F_{зп} E_0 + F_{об} C_{11}}.$$

Здесь $\sigma_{зп}$ и $\sigma_{11}^{(k)}$ - напряжения в заполнителе и элементарных слоях от осевого усилия N_x ; $F_{зп}$ - площадь поперечного сечения заполнителя; $F_{об}$ - площадь поперечного сечения оболочки; $C_{11}^{(k)}$ - жесткость повернутого на угол β_k элементарного слоя.

Ограничения на прочность для каждого элементарного слоя и заполнителя выражаются соответственно неравенствам:

$$\varphi_{зп}(u) = \frac{\sigma_{зп}}{\sigma'_{зп}} - 1 \leq 0,$$

$$\varphi_j(u) = \frac{\sigma_{11}^{(j)}}{\sigma_{11}^{\prime(j)}} - 1 \leq 0$$

$$(j = 1, 2, \ldots, l), \qquad (3.13)$$

где $\sigma'_{зп}$ - предельное напряжение для заполнителя.

Несущая способность конструкции считается исчерпанной,если достигнуто предельное напряжение для заполнителя или любого, хотя бы одного, элементарного слоя.

Сформулированная задача имеет нелинейную функцию цели (3.3) линейные ограничения (I.5I)и нелинейные ограничения (2.I8),(3.7), и (3.I3).

3.I.2. Численное решение задачи. Проводилось численное решение задачи для цилиндрической оболочки из стеклопластика с следующими исходными данными E_a = 0,75·I0^6 кгс/см^2, E_c = = 0,035·I0^6 кгс/см^2, ν_c = 0,33, ν_a = 0,2I, γ_a = 2,6 г/см^3, γ_c = I,2 г/см^3. Размеры оболочки следующие: L = 200 см, h_1 = 0,I см, h_2 = 3 см, R_1 = 9 см, R_2 = 40 см. Коэффи - циент объемного армирования μ = 0,5. Для определения P_{ij} и P_{ijkl} из системы (3.I0) используем экспериментально установленные характерные прочности однонаправленного армированного слоя, которые в нашем случае равны: r_{1100} = I0000 кгс/см^2, $r_{\bar{1}\bar{1}00}$ = = 7000 кгс/см^2, r_{0220} = 300 кгс/см^2, $r_{0\bar{2}\bar{2}0}$ = I400 кгс/см^2, r_{0012} = 600 кгс/см^2, $r_{11\bar{2}\bar{2}0}$ = I350 кгс/см^2. Предельное напряжение для заполнителя $\sigma'_{зп}$ = 40 кгс/см^2.

Вектор оптимизируемых параметров в численном решении принят следующий:

$$U=(U_1,U_2,U_3,\theta_1,\theta_2,\theta_3),$$

т.е. принимается,что оболочка составлена только из слоев трех типов,арматура в которых расположена под углами 0, $\pm\pi/4$, $\pm\pi/2$.Мксимальная допустимая жесткость и объемный вес заполнителя соответственно равны E_0^{max} = 1200 кгс/см^2, γ_0 = 0,02 г/см^3, коэффициент Пуассона для заполнителя равен ν_0 = 0,5.

В процессе минимизации по весу, получена оболочка, составленная только из слоев, арматура в которых направлена по направлению осевого усилия, т.е. $\theta_1 = 1$, $\theta_2 = 0$, $\theta_3 = 0$. Изменения остальных параметров оптимизации в зависимости от изменения осевого усилия представлены в таблице 3.I.

Таблица 3.I

$(N_x\ кгс)\cdot 10^{-6}$	G_{min} кг	h см	R см	$E_0\ \frac{кгс}{см^2}$	m	n
0,075	8,553	0,248	I2,44	590	25	5
0,I	I0,964	0,337	I2,39	460	I8	5
0,I25	I3,370	0,426	I2,37	340	I4	5
0,I5	I5,747	0,5I4	I2,35	250	I0	4
0,I75	I8,I26	0,603	I2,34	I00	8	4
0,2	20,360	0,692	I2,33	0		
0,25	25,45I	0,798	I3,35	0		
0,75	76,350	2,I59	I4,8I	0		

Так как во всех случаях структура материала одинакова, то матрица жесткостей оболочки та же самая и равна:

$$[C_{ij}] = \begin{bmatrix} 0,398 & 0,020 & 0 & 0 & 0 \\ 0,020 & 0,075 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,025 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,036 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,036 \end{bmatrix} \cdot 10^6\ кгс/см^2.$$

При изменении осевого усилия N_x от $0{,}075 \cdot 10^6$ кгс до $0{,}175 \cdot 10^6$ кгс, минимальный вес получается в точке пересечения гиперповерхностей ограничений на прочность, общую устойчи - вость и местную устойчивость (волнообразие указано в табл. 3.I). При $N_x = 0{,}2 \cdot 10^6$ кгс, минимальный вес получается при пересечении ограничений на прочность и общую устойчивость. А при $N_x = 0{,}25 \cdot 10^6$ кгс и больших минимальный вес получается только при активном ограничении на прочность. В этом случае, оптимальной является оболочка без заполнителя. Поэтому заполнитель в повышении несущей способности участвует лишь в до - вольно тонких оболочках, т.е. при небольших усилиях.

При весовой минимизации без учета ограничений на прочность результаты получаются иные (таблица 3.2).

Таблица 3.2.

$(N_x\,кгс)\,10^{-6}$	G_{min} кг	h см	R см	E_0 $\frac{кгс}{см^2}$	θ_1	θ_2	θ_3	m	n
0,I25	II,3I9	0,249	I4,62	I200	I	0	0	32	0
0,75	42,437	0,947	I7,2I	I200	0,989	0,0II	0	I0 9	3 4
I,00	52,354	I,I27	I8,03	I200	0,949	0,05I	0	9 8	3 3
I,50	70,20I	I,457	I8,97	I200	0,944	0,056	0	7 6	3 3

При изменении осевого усилия в довольно больших интервалах в оболочке сохраняется заполнитель с максимально допустимой жесткостью.С увеличением усилия меняется структура материала. Появляется незначительное количество слоев,арматура которых расположена под углом $\pm \pi/4$ к направлению осевого усилия. В точке минимума активными становятся ограничения на общую и местную устойчивость.Следовательно, неучет ограничений на прочность в исследуемом случае дает неверную информацию о весе, жесткости и форме потери устойчивости для оболочки минимального веса.

§ 3.2. Минимизация веса цилиндрических оболочек при комбинированном нагружении.

В большинстве работ, посвященных оптимизации ортотропных цилиндрических оболочек из композитного материала,работающих на устойчивость (и в редких случаях на прочность) принимается, что на оболочку действует только или сжимающая сила,или внешнее давление,или крутящие моменты (напр. [51] , [69] , [101] , [108] , [109] , [131] , [135] и др.). Лишь в немногих работах исследуется оптимизация аналогических оболочек при комбинированном нагружении ([110] , [132] - [134] , [136] , [138], [179]). Во всех вышеупомянутых работах рассмотрены оболочки без заполнителя.

В настоящем параграфе проводится весовая минимизация цилиндрической оболочки с упругим заполнителем при комбинированном нагружении. Выбран случай совместного действия осевого сжатия и внешнего давления. Оптимизация при других комбинациях нагружения не представляет принципиальных трудностей.Приведенные в первой главе общие уравнения и метод дают возможность исследовать любой случай статического нагружения.

3.2.1. Минимизация веса цилиндрической оболочки при совместном действии осевого сжатия и внешнего давления.

Рассматривается шарнирно опертая цилиндрическая оболочка с упругим заполнителем,на которую кратковременно действуют статические нагрузки: осевое сжатие и внешнее давление (Рис. 3.1). Конструкция материала оболочки описана в § 1.1. Вектор параметров оптимизации выражен в (2.8), функция цели -- в (2.9). Оптимизация проводится при ограничениях по предельным состояниям: а) на местную устойчивость, б) на прочность. Приняты во внимание структырные и геометрические ограничения (1.51) при $r = 1$.

Коротко остановимся на составлении ограничений на местую устойчивость.Используем статический метод определения критической нагрузки через параметры оптимизации в рамках модели Кирхгофа-Лява.Принимается во внимание только реакция радиального взаимодействия заполнителя и оболочки, т.е. в (1.25) $q_x = q_y = 0$.Реакция радиального взаимодействия приближительно учитывается по формуле [100] :

$$q_z = \frac{E_0 \lambda}{2R(1-\nu_0^2)} w.$$

Поэтому вектор q выражается:

$$q^T = \frac{1}{h}\left[0,\ 0,\ \frac{E_0 \lambda}{2R(1-\nu_0^2)} w\right]. \qquad (3.14)$$

Координаты вектора перемещений U ,удовлетворяющие граничные условия, выражены соотношениями (2.11). Подставляется

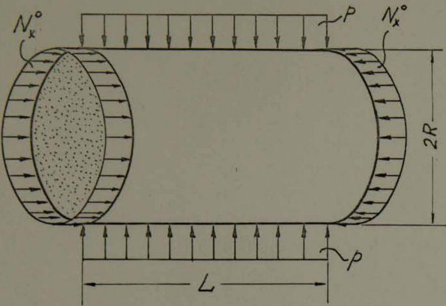

Рис. 3.I. Цилиндрическая оболочка с упругим заполнителем при комбинированном нагружении.

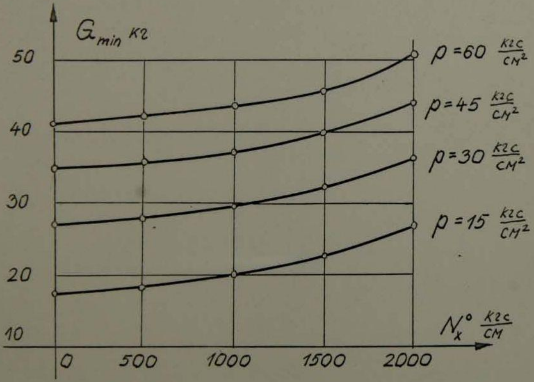

Рис. 3.2. Зависимости минимального веса оболочки от осевой нагрузки при различных интенсивностях внешнего давления p .

(3.I4) и (2.II) с учетом (I.26) при $N_{xy}^{\circ} = 0$, в (I.23). После дифференцирования и элементарных преобразований получаем систему однородных линейных уравнений относительно $[y^{\circ}]$:

$$P[y^{\circ}] = 0, \tag{3.15}$$

где $[y^{\circ}]^T = [u_0, v_0, w_0]$.

Элементы матрицы P выражены по формулам (2.I2), кроме b_{33}, который в этом случае имеет вид:

$$b_{33} = b_{33}' + N^{\circ} = \frac{1}{R^2}\frac{h^2}{12}\left[c_{11}\lambda^4 + 2(c_{12}+2c_{66})\lambda^2 n^2 + c_{22}n^4\right] + c_{22} + \frac{E_0 \lambda R}{2h(1-\nu_0^2)} + N^{\circ}, \quad N^{\circ} = \frac{1}{h}\left(N_x^{\circ}\lambda^2 + N_y^{\circ} n^2\right), \quad N_y^{\circ} = pR.$$

Здесь p – интенсивность давления. Из условия нетривиальности решения системы ($|P| = 0$) критическое усилие равно

$$N^* = b_{33}' - \frac{b_{11}b_{23}^2 + b_{22}b_{13}^2 - 2b_{12}b_{13}b_{23}}{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}$$

и ограничения на местную устойчивость выражаются неравенствами:

$$\varphi_j(u,m,n) = \frac{N^{\circ}}{N^*} - 1 \leq 0 \quad (j = 1,2,\ldots,(n_2 - n_1 + 1)). \tag{3.16}$$

Здесь n_2 и n_1 – верхняя и нижняя границы поиска опасных форм выпучивания по окружности, т.к. при действии внешнего давления и осевого сжатия опасная форма выпучивания по обра зую - щей почти всегда имеет одну полуволну, т.е. m = I.

Примечание. Ограничения на местную устойчивость могут быть получены,исходя из энергетического метода,и представлены в виде (2.I3) или (2.I4) с учетом, что $N_y^{\circ} \neq 0$, которые более удобны для исследования общих свойств ограничений на выпуклость, но при численном решении требуют несколько большего объема численных работ. Т.к. общие свойства на выпуклость уже исследованы, применяется выражение, которое требует меньше вычислений.

При определении ограничений на прочность, рассмотрим частный случай, когда прочность оболочки можно оценить по безмоментному состоянию ($M = 0$) и слои расположены симметрично относительно срединной поверхности ($B = 0$). Для определения напряжений используются формулы (I.I3) — (I.I7). При выше принятых условиях из (I.I3), (I.I5) и (I.I6) получаем

$$\mathcal{E} = A^{-1} N, \quad [\mathcal{E}_u^{(k)}] = 0. \tag{3.I8}$$

Поэтому, из (I.I4) и (I.I7) с учетом (3.I8) находим, что

$$[\sigma^{(k)}] = [C^{(k)}] A^{-1} N, \tag{3.I9}$$

где

$$[\sigma^{(k)}] = \begin{bmatrix} \sigma_1^{(k)} \\ \sigma_2^{(k)} \\ \sigma_6^{(k)} \end{bmatrix}, \quad [C^{(k)}] = \begin{bmatrix} C_{11}^{(k)} & C_{12}^{(k)} & 0 \\ C_{12}^{(k)} & C_{22}^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66}^{(k)} \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} N_x^{\circ} \\ pR \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица A представлена в (I.II). После элементарных действий получаем

$$[\sigma^{(k)}] = \frac{1}{(C_{11} C_{22} - C_{12}^2) h} \begin{bmatrix} N_1 C_{11}^{(k)} + N_2 C_{12}^{(k)} \\ N_1 C_{12}^{(k)} + N_2 C_{22}^{(k)} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$N_1 = C_{22} N_x^{\circ} - C_{12} pR, \quad N_2 = -C_{12} N_x^{\circ} + C_{11} pR.$$

Напряжения на элементарный слой, который находится под углом β_k к главным осям оболочки, определяем из

$$\sigma_i'^{(k)} = g_{ij}\,\sigma_j^{(k)} \quad (i,j = 1,2,6), \tag{3.20}$$

где g_{ij} - элементы матрицы преобразования (I.3); $\sigma_j^{(k)}$ - напряжения на "к" - тый слой в осях оболочки.

Пользуясь критерием Малмейстера, ограничения на прочность для каждого типа слоев можно представить в виде

$$\varphi_k(u,\beta_k) = P_i\,\sigma_i'^{(k)} + P_{ij}\,\sigma_i'^{(k)}\sigma_j'^{(k)} - 1 \leq 0$$

$$(\,к = 1,2,\ldots,\ \ell\ ;\ i\,,\ j\ = 1,2,6.).$$

Здесь P_i , P_{ij} - компоненты тензоров прочности, определяемые по формулам (3.II) .

При численном решении основная трудность возникает при определении градиентов к ограничениям прочности, т.к. оптимизируемые параметры входят в эти ограничения довольно сложным образом.Рекомендуется для определения градиентов использовать следующие формулы:

$$\nabla\varphi_k = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\varphi_k}{\partial u_1} \\ \dfrac{\partial\varphi_k}{\partial\theta_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial\varphi_k}{\partial\theta_\ell} \end{bmatrix} = G_1\,G_3\,G_4\,,\ G_3 = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\sigma_1^{(k)}}{\partial c_{11}} & \dfrac{\partial\sigma_2^{(k)}}{\partial c_{11}} \\ \dfrac{\partial\sigma_1^{(k)}}{\partial c_{12}} & \dfrac{\partial\sigma_2^{(k)}}{\partial c_{12}} \\ \dfrac{\partial\sigma_1^{(k)}}{\partial c_{22}} & \dfrac{\partial\sigma_2^{(k)}}{\partial c_{22}} \\ \dfrac{\partial\sigma_1^{(k)}}{\partial c_{66}} & \dfrac{\partial\sigma_2^{(k)}}{\partial c_{66}} \\ \dfrac{\partial\sigma_1^{(k)}}{\partial h} & \dfrac{\partial\sigma_2^{(k)}}{\partial h} \end{bmatrix}$$

$$G_4 = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \varphi_k}{\partial \sigma_1^{(k)}} \\ \dfrac{\partial \varphi_k}{\partial \sigma_2^{(k)}} \end{bmatrix}$$

Матрица G_1 взята из (I.56) .

3.2.2. Результаты численного решения и выводы. Предметом численного исследования является оболочка из стеклопластика с теми же исходными данными для арматуры и связующего как в 3.I.2. Размеры оболочки: R = 50 см и L = 50 см. Характерные прочности r_{ijk} однонаправленного композита в зависимости от объемного коэффициента армирования μ представлены в таблице 3.3. Вектор оптимизируемых параметров дан в (2.I5)

Таблица 3.3.

μ	Характерные прочности $кгс/см^2$					
	r_{1100}	$r_{\bar{1}\bar{1}00}$	r_{0220}	$r_{0\bar{2}\bar{2}0}$	r_{0012}	$r_{11\bar{2}\bar{2}0}$
0,I	2700	3200	600	I350	630	950
0,2	4560	4900	550	I375	6I0	I090
0,3	6320	5950	500	I385	600	II50
0,4	8I00	6640	400	I390	600	I230
0,5	I0000	7000	300	I400	600	I350
0,6	II700	7200	200	I350	540	I280
0,7	I3400	6500	I50	I200	460	I200

В табл.3.4. и на рис.3.2 представлены численные результаты, полученные при оптимизации цилиндрической оболочки с упругим заполнителем, модуль упругости которого E_o = 500

Таблица 3.4.

$p\ \frac{кгс}{см^2}$	$N_x^0\ \frac{кгс}{см}$	$u^{опт}$				n
		h см	θ_1	θ_2	θ_3	
	0	0,58	0	0	I	I2
	500	0,6I	0,058	0	0,942	II *
I5	I000	0,68	0,320	0	0,680	II *
	I500	0,77	0,555	0	0,445	II *
	2000	0,89	0,46I	0,393	0,I46	*
	0	0,9I	0	0	I	9
	500	0,93	0	0	I	8
30	I000	I,00	0,I60	0	0,840	8 *
	I500	I,09	0,307	0,I0I	0,592	8 *
	2000	I,2I	0,38I	0,365	0,254	*
	0	I,I7	0	0	I	7
	500	I,20	0	0	I	7
45	I000	I,25	0,085	0,024	0,89I	7 *
	I500	I,34	0,I00	0,388	0,5I2	7 *
	2000	I,47	0,3II	0,326	0,363	*
	0	I,38	0	0	I	7
	500	I,42	0	0	I	6
60	I000	I,46	0	0,I34	0,866	6 *
	I500	I,53	0	0,522	0,478	6 *
	2000	I,70	0	0,82I	0,I79	*

кгс/см^2 и коэффициент Пуассона ν_o = 0,5. Объемный коэффициент армирования в этих вариантах μ = 0,5.

Из полученных результатов видно, что с увеличением осевого усилия уменьшается относительное количество слоев, арматура которых расположена под углом $\pi/2$ к оси оболочки и увеличивается относительное количество слоев, арматура в которых направлена по образующей и под углом $\pm\ \pi/4$. С увеличением внешнего давления, увеличивается относительное количество слоев с арматурой, расположенной под углами $\pm\ \pi/4$ и $\pm\pi/2$ к оси оболочки. При этом уменьшается число волн по окружности оболочки. При N_x^o = 2000 кгс/см, минимальный вес получается только при активных ограничениях на прочность для слоев, арматура в которых расположена под углом $\pm\ \pi/4$ к оси оболочки. Варианты,в которых активны ограничения на прочность,в таблицах 3.4 и 3.5 отмечены звездочкой.

При N_x^o= 0, т.е. когда на оболочку действует только внешнее давление, минимальный вес получается при активных ограничениях на устойчивость.В этих случаях рациональный проект получается при армировании только слоями, арматура в которых расположена в окружном направлении.

В таблице 3.5 представлены зависимости толщины и других параметров оптимизации и элементов матрицы жесткостей от модуля упругости заполнителя E_o. Численные результаты получены при нагружении оболочки усилиями N_x^o= 1000 кгс/см, p = = 30 кгс/см^2 и при объемном коэффициенте армирования μ = 0,5. В оболочке минимального веса с заполнителем, с увеличением модуля упругости заполнителя, увеличивается жесткость оболочки в направлении образующей и уменьшается жесткость в окружном направлении.Жесткость заполнителя играет существенную роль в распределении относительных количеств слоев с различными углами намотки арматуры. Общая тенденция в исследованных примерах та, что с увеличением жесткости заполнителя, увеличивается число слоев, арматура в которых расположена по направлению образующей оболочки.

В зависимости G_{min} от E_o с увеличением E_o, при заданной комбинации нагрузок, вес оболочки может уменьшаться до некоторого фиксированного значения (см.рис.3.3). А также с увеличением E_o стабилизируется структура материала оболочки.

Таблица 3.5.

E_o $\frac{кгс}{см^2}$	u^{opt}				$C_{ij}\cdot 10^6$ $\frac{кгс}{см^2}$				n
	h см	θ_1	θ_2	θ_3	C_{11}	C_{12}	C_{22}	C_{66}	
0	I,47	0	0,536	0,464	0,I23	0,059	0,272	0,074	5 6
250	I,20	0	0,I7I	0,829	0,090	0,033	0,358	0,036	6 *
500	I,00	0,I60	0	0,840	0,I27	0,020	0,346	0,036	8 *
750	0,90	0,268	0	0,732	0,I6I	0,020	0,3II	0,036	I0*
I000	0,86	0,33I	0,532	I,I97	0,I94	0,03I	0,259	0,045	I2*
I250	0,85	0,27I	0,300	0,428	0,I89	0,042	0,240	0,057	*
I500	0,85	0,27I	0,300	0,428	0,I89	0,042	0,240	0,057	*

Большой интерес представляет задача выбора оптимального соотношения армирующих элементов и связующего. От относительного содержания волокон в композиции зависит ее упругие константы, величина структурных напряжений, возникающих в окрестности

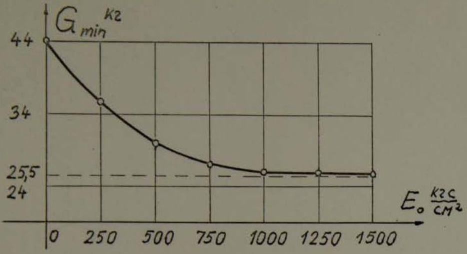

Рис. 3.3. Зависимость минимального веса оболочки от жесткости заполнителя.

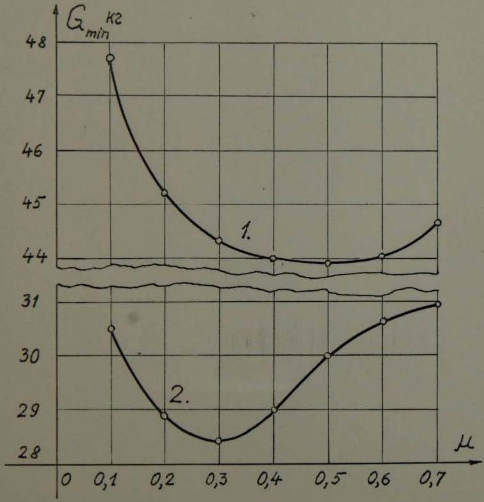

Рис. 3.4. Зависимости минимального веса оболочки от объемного коэффициента армирования. I - оболочка без заполнителя; 2 - оболочка с заполнителем.

волокна при нагружении, а также остаточные напряжения,образующиеся в процессе полимеризации.Увеличение объемного коэффициента армирования приводит к увеличению модулей упругости материала,но в то же время в некоторых случаях уменьшается прочность на сжатие вдоль и поперек волокон,на растяжение поперек волокон,на сдвиг (см.табл.3.3). Поэтому,существует некоторое оптимальное значение коэффициента армирования, при котором достигается минимальное значение веса оболочки.На рисунке 3.4 представлены зависимости G_{min} от объемного коэффициента армирования μ ,при N_x^0 = 1000 кгс/см, p = 30 кгс/см^2.При исследовании оболочки с упругим заполнителем (E_0 = 500 кгс/см^2, кривая 2) оптимум достигается при значении $\mu \approx$ 0,3. При коэффициентах армирования $\mu <$ 0,3, в точках минимума активны только ограничения на устойчивость, а при $\mu >$ 0,3 активны ограничения на устойчивость и на прочность.В точке оптимума происходит подключение к числу активных ограничения прочности. И это естественно, так как при минимизации веса оболочки, не принимая во внимание условий прочности, с увеличением объемного коэффициента армирования происходит только уменьшение веса оболочки.Лишь подключение ограничений прочности к числу активных меняет характер зависимости.Аналогичная зависимость для пустой оболочки ($E_0 = 0$) представлена кривой I. Здесь минимальный вес достигается при $\mu \approx$ 0,5. Из этого следует, что с увеличением жесткости заполнителя,появляется тенденция для оптимальной точки двигаться в сторону уменьшения μ .

И в заключение несколько слов о глобальности полученных минимумов. В 2.2.3 доказано, что ограничения на местную устойчивость невыпуклы,но,с большой вероятностью,квазивыпуклы.Поэтому, в тех варинтах, в которых в процессе оптимизации активны только ограничения на устойчивость, полученные решения, с большой вероятностью, оптимальны.

Численное исследование ограничений на прочность показало, что этиограничения не только невыпуклы, но даже и неквазивыпуклы. Для численной проверки глобальности минимума тех вариантов, в которых активны ограничения на прочность, была составлена программа, основанная на случайном поиске и проверены некоторые варианты. Не найдено ни одного варианта, в котором случайный поиск привел бы к оболочке меньшего веса, чем получено по методу проектируемых градиентов Розена. Это дает некоторое основание полагать, что полученные и в этих вариантах решения близки к глобальному минимуму, хотя вообще вопрос более детального исследования свойств ограничений прочности в пространстве параметров оптимизации остается открытым.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ И ВЕСОВАЯ МИНИМИЗАЦИЯ С УЧЕТОМ НАДЕЖНОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ИЗ КОМПОЗИТНОГО МАТЕРИАЛА

Практически любой композит можно рассматривать как материал со стохастическими свойствами, т.к. свойства компонентов, их размещение, концентрация, неточности форм и др. носят случайный характер. Оптимизационные задачи, решенные в предыдущих главах, можно рассматривать как задачи, в которых использованы осредненные свойства композита. Более общая проблема оптимизации оболочек из композитного материала должна формулироваться с учетом стохастического характера материала и формы оболочки.

Настоящая глава посвящена анализу устойчивости многослойной армированной цилиндрической оболочки со случайными несовершенствами формы, формулировке и решению некоторых задач весовой минимизации оболочек со случайными несовершенствами формы и случайными прочностными характеристиками материала методом стохастического программирования. Основные результаты опубликованы в [85] .

§ 4.I. Устойчивость несовершенных ортотропных цилиндрических оболочек.

Рассматривается многослойная, армированная, шарнирно опертая цилиндрическая оболочка, материал которой конструируется по способу,описанному в § I.I. На оболочку кратковременно действует статическая нагрузка - осевое сжатие N_x^o. Оболочка имеет некотрые начальные отклонения от идеальной формы (см. рис.4.I). Сначала решим детерминистическую задачу устойчивости.Для решения данной задачи используется методика,предложенная в [88] , где решена аналогическая задача для изотропной оболочки.

4.I.I. Детерминистическая задача устойчивости. Уравнения равновесия такой оболочки выражены соотношениями (I.I8) -(I.2I) и (I.28).Рассматривается оболочка без заполнителя, т.е. q_x = q_y = q_z = 0. Уравнение (I.I8) и (I.I9) удовлетворяются при введении функции напряжений φ :

$$N_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad N_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad S = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}. \tag{4.I}$$

исключив из (I.20),(I.2I) и (I.28) поперечные силы Q_x и Q_y получаем

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{1}{R} N_y - N_x^o \frac{\partial^2 (w_1 + w^o)}{\partial x^2} = 0. \tag{4.2}$$

Из (I.9) и (I.II) определяется M . После подстановки значений M в (4.2) и с учетом

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w_1}{R}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \tag{4.3}$$

приходим к уравнению

$$L_1(w_1) = \frac{1}{R}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - N_x^o \frac{\partial^2 (w_1 + w^o)}{\partial x^2}, \tag{4.4}$$

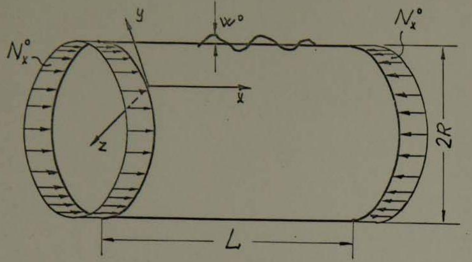

Рис. 4.I. Цилиндрическая оболочка с начальными прогибами.

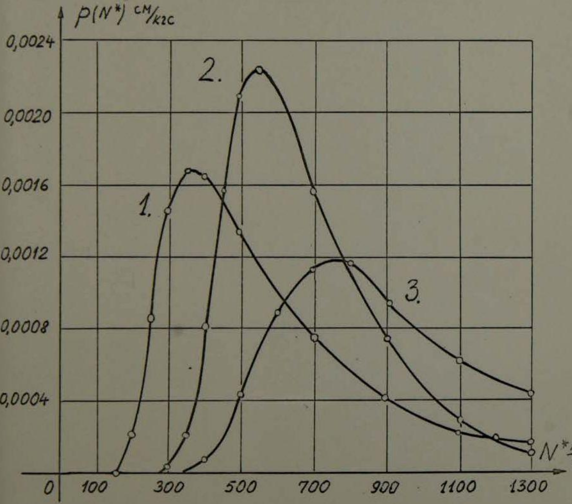

Рис. 4.2. Функции плотности распределения вероятностей критической нагрузки.

где дифференциальный оператор

$$L_1(\ )=D_{11}\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2D_3\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+D_{22}\frac{\partial^4}{\partial y^4},$$

w^0 и w_1 - начальный и дополнительный прогибы (Рис.4.I);

D_{ij} определяется из (I.4); $D_3 = D_{12}+2D_{66}$.

Исключив из выражений (4.3) значения перемещений u и v, получаем уравнение совместимости деформаций

$$L_2(\varphi)=-\frac{1}{R}\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}, \tag{4.5}$$

где дифференциальный оператор

$$L_2(\ )=\delta_2\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2\delta_3\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\delta_1\frac{\partial^4}{\partial y^4},$$

$$\delta_1=\frac{1}{E_1 h},\quad \delta_2=\frac{1}{E_2 h},\quad 2\delta_3=\frac{1}{h}\left(\frac{1}{c_{66}}-\frac{\nu_1}{E_1}-\frac{\nu_2}{E_2}\right).$$

Из уравнений (4.4) и (4.5), после несложных преобразований разрешающее уравнение приобретает вид:

$$L_1L_2(w_1)=-\frac{1}{R^2}\frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4}-N_x^0L_2\left(\frac{\partial^2(w_1+w^0)}{\partial x^2}\right). \tag{4.6}$$

Граничные условия для шарнирного опирания следующие:

$$w_1=0,\quad \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}=0\quad (x=0, L).$$

Поле отклонений срединной поверхности оболочки от идеальной цилиндрической оболочки аппроксимируется разложением в двухмерный ряд Фурье следующим образом[88]:

$$W^{\circ}(x,y) = \sum_{j} a^{\circ}_{j0} \sin\frac{j\pi x}{L} + \sum_{j}\sum_{k} b^{\circ}_{jk} \sin\frac{j\pi x}{L} \sin\frac{ky}{R} +$$

$$+ \sum_{j}\sum_{k} d^{\circ}_{jk} \sin\frac{j\pi x}{L} \cos\frac{ky}{R}, \tag{4.7}$$

где a°_{j0}, b°_{jk} и d°_{jk} - коэффициенты разложения.

Дополнительный прогиб, удовлетворяющий граничным условиям, будем искать также в виде двухмерного ряда Фурье[88]:

$$W_1(x,y) = \sum_{j} a_{j0} \sin\frac{j\pi x}{L} + \sum_{j}\sum_{k} b_{jk} \sin\frac{j\pi x}{L} \sin\frac{ky}{R} +$$

$$+ \sum_{j}\sum_{k} d_{jk} \sin\frac{j\pi x}{L} \cos\frac{ky}{R}. \tag{4.8}$$

Для определения связи между коэффициентами начальных несовершенств a°_{j0}, b°_{jk}, d°_{jk} и коэффициентами дополнительного прогиба a_{j0}, b_{jk}, d_{jk} используется уравнение (4.6). После подстановки (4.7) и (4.8) в (4.6) и приравнивания соответствующих членов, получается

$$[A_{jk}] = \frac{\gamma_{jk}}{1-\gamma_{jk}} [A^{\circ}_{jk}], \tag{4.9}$$

где

$$[A_{jk}] = \begin{bmatrix} a_{j0} \\ b_{jk} \\ d_{jk} \end{bmatrix}, \quad [A^{\circ}_{jk}] = \begin{bmatrix} a^{\circ}_{j0} \\ b^{\circ}_{jk} \\ d^{\circ}_{jk} \end{bmatrix} \quad \gamma_{jk} = \frac{N^{\circ}_x}{N_{jk}}$$

$$N_{jk} = \alpha_{jk} \frac{R^2}{\lambda_j^2} + \frac{1}{R^4} \frac{\lambda_j^2}{\beta_{jk}}, \quad \lambda_j = \frac{j\pi R}{L}, \tag{4.10}$$

$$\begin{cases} \alpha_{jk} = \frac{1}{R^4}\left(D_{11}\lambda_j^4 + 2D_3\lambda_j^2 k^2 + D_{22}k^4\right), \\ \beta_{jk} = \frac{1}{R^4}\left(\delta_2\lambda_j^4 + 2\delta_3\lambda_j^2 k^2 + \delta_1 k^4\right). \end{cases} \qquad (4.11)$$

При определении a_{j0} используется $\gamma_{j0} = \gamma_{jk}|_{k=0}$, $N_{j0} = N_{jk}|_{k=0}$.

Функция напряжений принимается в виде:

$$\varphi(x,y) = \sum_j a_{j0}^1 \sin\frac{j\pi x}{L} + \sum_j \sum_k b_{jk}^1 \sin\frac{j\pi x}{L} \sin\frac{ky}{R} + \sum_j \sum_k d_{jk}^1 \sin\frac{j\pi x}{L} \cos\frac{ky}{R}. \qquad (4.12)$$

Для определения зависимости между коэффициентами функций W_1 и φ, выражения (4.12) и (4.8) подставляя в (4.5) получаем, что

$$[A_{jk}^1] = \frac{1}{R^3}\frac{\lambda_j^2}{\beta_{jk}}[A_{jk}], \quad [A_{jk}^1] = \begin{bmatrix} a_{j0}^1 \\ b_{jk}^1 \\ d_{jk}^1 \end{bmatrix}. \qquad (4.13)$$

Уравнение нейтрального равновесия получается путем линеаризации около невозмущенного равновесия. Будем считать докритические перемещения и начальные отклонения сравнительно малыми по сравнению с отклонениями от невозмущенного равновесия W. Линеаризованное уравнение для отклонения W имеет следующую форму:

$$L_1 L_2(w) + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \\ = L_2\left(N_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right). \qquad (4.14)$$

В правую часть уравнения (4.14) входят усилия, определяемые при помощи функции напряжений по формулам

$$N_{11} = -N_x^\circ + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \; N_{22} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \; N_{12} = N_{21} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}. \qquad (4.15)$$

Докритические напряжения определяются из формул (4.15) с учетом (4.13) и равны:

$$N_{11} = -N_x^\circ - \frac{1}{R^5}\left(\sum_j\sum_k \frac{\lambda_j^2 k^2}{\beta_{jk}} b_{jk}\sin\frac{j\pi x}{L}\sin\frac{ky}{R} + \right. \\ \left. + \sum_j\sum_k \frac{\lambda_j^2 k^2}{\beta_{jk}} d_{jk}\sin\frac{j\pi x}{L}\cos\frac{ky}{R}\right),$$

$$N_{12} = -\frac{1}{R^5}\left(\sum_j\sum_k \frac{\lambda_j^3 k}{\beta_{jk}} b_{jk}\cos\frac{j\pi x}{L}\cos\frac{ky}{R} - \right. \\ \left. - \sum_j\sum_k \frac{\lambda_j^3 k}{\beta_{jk}} d_{jk}\cos\frac{j\pi x}{L}\sin\frac{ky}{R}\right), \qquad (4.16)$$

$$N_{22} = -\frac{1}{R^5}\left(\sum_j \frac{\lambda_j^4}{\beta_{j0}} a_{j0}\sin\frac{j\pi x}{L} + \right. \\ + \sum_j\sum_k \frac{\lambda_j^4}{\beta_{jk}} b_{jk}\sin\frac{j\pi x}{L}\sin\frac{ky}{R} + \\ \left. + \sum_j\sum_k \frac{\lambda_j^4}{\beta_{jk}} d_{jk}\sin\frac{j\pi x}{L}\cos\frac{ky}{R}\right).$$

Функцию W будем искать в виде выражения

$$W = f_1 \sin\frac{m\pi x}{L} \sin\frac{ny}{R} + f_2 \sin\frac{m\pi x}{L} \cos\frac{ny}{R}, \qquad (4.17)$$

где m и n -волновные числа.

Выражения (4.16) и (4.17) подставляем в (4.14) и решаем ее методом Бубнова - Галеркина:

$$\int_0^L\int_0^{2\pi R}\Big[L_1L_2(w) + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - L_2\Big(N_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} + N_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big)\Big]\sin\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{ny}{R}\,dx\,dy = 0, \qquad (4.18)$$

$$\int_0^L\int_0^{2\pi R}\Big[L_1L_2(w) + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - L_2\Big(N_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} + N_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big)\Big]\sin\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{ny}{R}\,dx\,dy = 0.$$

После интегрирования получается система однородных линейных уравнений относительно f_1 и f_2. Из условия нетривиальности решения системы (4.18) (детерминант системы равен нулю) и, принимая во внимание (4.9),(4.10) и (4.11) получаем зависимость критической нагрузки от коэффициентов разложения функции начальных несовершенств:

$$\Big[\frac{N_{mn}}{N_x^\circ} - 1 - K_1\sum_j \frac{a_{j0}^\circ\, P_j}{N_{j0}(1-\gamma_{j0})}\Big]^2 =$$

$$= K_2^2 \left\{ \left[\sum_j \frac{b^o_{jk_*}\, q_j}{\beta_{jk_*} N_{jk_*} (1-\delta_{jk_*})} \right]^2 + \left[\sum_j \frac{d_{jk_*}\, q_j}{\beta_{jk_*} N_{jk_*} (1-\delta_{jk_*})} \right]^2 \right\}. \quad (4.19)$$

Здесь

$$K_1 = \frac{2n^2 m}{\pi R \delta_2 \lambda_m^2 \beta_{mn}}, \quad K_2 = \frac{\pi n^2}{L^2 R^3 m \beta_{mn}}$$

$$p_j = \frac{1}{j} \left(\frac{\beta_{an}}{2m-j} + \frac{\beta_{bn}}{2m+j} \right),$$

$$q_j = j \left[(2m-j)\beta_{an} + (2m+j)\beta_{bn} \right.$$

β_{an} и β_{bn} определяется из (4.II)

$$\beta_{an} = \beta_{jk} \big|_{j=a,\, k=n}; \quad \beta_{bn} = \beta_{jk} \big|_{j=b,\, k=n},$$

где $a = m-j$, $b = m+j$, $k_* = 2n$.

Суммирование в (4.I9) производится при нечетных j .

Принимая, что $\delta_{jo} \ll 1$ и $\delta_{jk_*} \ll 1$, критическая нагрузка выражается в виде:

$$N^* = \min_{m,n} \frac{N_{mn}}{1 + K_1 X_o + K_2 \sqrt{X_1^2 + X_2^2}}, \quad (4.20)$$

где

$$X_0 = \sum_j \frac{a^{\circ}_{j0}}{N_{j0}} p_j , \quad X_1 = \sum_j \frac{b^{\circ}_{jk_*}}{\beta_{jk_*} N_{jk_*}} q_j ,$$

$$X_2 = \sum_j \frac{d^{\circ}_{jk_*}}{\beta_{jk_*} N_{jk_*}} q_j .$$

Следует отметить, что $\min\limits_{m,n} N_{mn}$ - критическое усилие для идеально гладкой ортотропной цилиндрической оболочки.

4.1.2. Вероятностный анализ устойчивости. Известно, что начальные несовершенства наиболее правильно рассматривать как случайные. Переходя к вероятностному анализу устойчивости несовершенных ортотропных цилиндрических оболочек, разложение (4.7) можно рассматривать как спектральное представление случайной функции со случайным спектром $[A^{\circ}_{jk}]$.

В настоящее время нет никаких достоверных сведений о законах распределения параметров начальных несовершенств для оболочек из композитных материалов. На основании экспериментальных данных для цилиндрических оболочек, изготовленных из листовой стали, в работах [73] и [74] показано, что опытные данные не противоречат гипотезе о нормальности распределений коэффициентов начальных несовершенств. Той же самой гипотезы будем придерживаться и в данной работе, исследуя оболочки из композитных материалов. А именно, принимается, что коэффициенты a°_{j0}, b°_{jk} и d°_{jk} образуют системы случайных величин, распределенных по нормальным законам распределения.

Задача очень упрощается, приняв, что функция W_0 является однородной в окружном направлении. Этот случай и будет исследоваться.

Из (4.19) получается, что

$$\frac{N_{mn}}{N^*} = 1 + K_1 X_0 + K_2 \sqrt{2}\, X_1 . \qquad (4.21)$$

Здесь X_0 и X_1 линейные функции от случайных аргументов соответственно a_{j0}^{o} и b_{jk}^{o}, распределенных по нормальному закону распределения. Поэтому X_0, X_1 а также и

$$\frac{N_{mn}}{N^*} \equiv Z = 1 + K_1 X_0 + K_2 \sqrt{2}\, X_1 \qquad (4.22)$$

распределены по нормальному закону распределения вероятностей (напр. [28]):

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_z} \exp\left\{-\frac{\left(z - \langle z\rangle\right)^2}{2\sigma_z^2}\right\}, \qquad (4.23)$$

где $\langle z\rangle$ и σ_z соответственно математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины Z. Для определения этих числовых характеристик должны знать математические ожидания, средние квадратические отклонения и корреляционные матрицы коэффициентов a_{j0}^{o} и b_{jk}^{o}.

Из (4.22) и (4.23) плотность распределений вероятностей критической нагрузки N^* выражается

$$p(N^*) = \frac{c}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_z} \frac{N_{mn}}{(N^*)^2} \exp\left\{-\frac{\left(\frac{N_{mn}}{N^*} - \langle z\rangle\right)^2}{2\sigma_z^2}\right\}. \qquad (4.24)$$

Ввиду того,что $0 < N^* < +\infty$, нормирующий множитель C определяется из уравнения

$$C \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sigma_z} \frac{N_{mn}}{(N^*)^2} \exp\left\{ - \frac{\left(\frac{N_{mn}}{N^*} - \langle z \rangle \right)^2}{2\sigma_z^2} \right\} dN_* = 1.$$

При замене переменной $t = \dfrac{\frac{N_{mn}}{N^*} - \langle z \rangle}{\sigma_z}$ получаем, что

$$C \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\langle z \rangle}{\sigma_z}}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1,$$

откуда

$$C = \frac{1}{1 - \Phi\left(-\frac{\langle z \rangle}{\sigma_z}\right)}, \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \tag{4.25}$$

Обратим внимание на некоторые свойства функции (4.24). Функция (4.24) определена в интервале ($0; +\infty$). В точке $N^* = 0$ функция не определена.Но так как

$$\lim_{N^* \to +0} p(N^*) = \lim_{N^* \to -0} p(N^*) = 0,$$

то можно полагать,что $p(0) = 0$. Функция (4.24) неотрицательна. Нетрудно доказать,что

$$\int_0^{\infty} p(N^*) dN^* = 1.$$

Максимум функции достигается в точке

$$N^* = \frac{N_{mn}}{4\sigma_z^2} \left(-\langle z \rangle + \sqrt{\langle z \rangle^2 + 8\sigma_z^2} \right).$$

Математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение критической нагрузки определяется по формулам:

$$\langle N^* \rangle = \min_{m,n} \int_0^{+\infty} N^* p(N^*) dN^*,$$

$$\sigma_{N^*} = \sqrt{\int_0^{+\infty} (N^* - \langle N^* \rangle)^2 p(N^*) dN^*}.$$

Определение других числовых характеристик N^* при известной функции распределения вероятностей затруднений не вызывает.

4.I.3. Численные примеры. Исследуются ортотропные цилиндрические оболочки с начальными прогибами и со следующими механическими характеристиками для арматуры и связующего: модули упругости $E_a = 0.75 \cdot 10^6$ кгс/см^2, $E_c = 0{,}035 \cdot 10^6$ кгс/ /см^2; коэффициенты Пуассона $\nu_a = 0.2I$ и $\nu_c = 0{,}33$; объемные весы $\gamma_a = 2{,}6$ г/см^3, $\gamma_c = 1{,}2$ г/см^3; коэффициент объемного армирования $\mu = 0{,}5$. Размеры оболочки $R = 25$ см, $L = $I00см. На оболочку действует упругое осевое усилие $N_x^0 = 600$ кгс/см.

Материал оболочки составленный из трех типов слоев,арматура в которых расположена под углами 0, $\pm\,\pi/4$ и $\pm\,\pi/2$ к оси оболочки, относительные количества которых обозначены соответственно θ_1, θ_2 и θ_3.

При решении численных примеров было принято,что математические ожидания и средние квадратические отклонения коэффициентов a_{j0}^0 и b_{jk}^0 равны между собой при всех исследуемых j. Обозначим $\langle a_{j0}^0 \rangle$ и $\langle b_{jk}^0 \rangle$ - математические ожидания коэффициентов a_{j0}^0 и b_{jk}^0; σ_a и σ_b - средние квадратические отклонения этих коэффициентов.Тогда статистические характеристики начальных несовершенств можно выразить вектором:

$$\mathcal{E} = \left(\langle a^{\circ}_{j0}\rangle, \langle b^{\circ}_{jk}\rangle, \sigma_a, \sigma_b\right).$$

В таблице 4.I. приведены результаты вычислений математического ожидания критической нагрузки $\langle N^* \rangle$ в зависимости от структуры материала оболочки. В рассмотренном случае толщины оболочек h = =0,507 см, а вектор начальных несовершенств $\mathcal{E}$=(0,004;0,004;0,4;0,4). Из табл.4.I можно сделать вывод, что $\langle N^* \rangle$ увеличивается с увеличением числа слоев с продольным армированием. Критическая нагрузка для идеально гладкой изотропной оболочки (θ_1 = 0,25; θ_2 = 0,5; θ_3 = 0,25) такой же толщины равна N^* = II50кгс/см.

Таблица 4.I.

θ_1	θ_2	θ_3	$\langle N^* \rangle \frac{кгс}{см}$
0	0	I	64I
0,25	0,5	0,25	835
0,333	0,333	0,333	876
0,5	0,5	0	885
I	0	0	970

На рис.4.2 представлены графики функций плотности распределения вероятностей критической нагрузки в зависимости от различных значений статистических характеристик начальных несовершенств. Кривая I получена при начальных несовершенствах, заданных вектором $\mathcal{E}$ = (0,0I; 0,0I; 0,2; 0,2), кривая 2 при $\mathcal{E}$ = (0,0I; 0,0I; 0,08; 0,08) и кривая 3 при $\mathcal{E}$= (0;0;0,08; 0,08).

§ 4.2. Минимизация веса цилиндрических оболочек с учетом надежности относительно устойчивости и прочности.

4.2.1. Стохастическая формулировка оптимизационной задачи.

Пусть цилиндрическая оболочка имеет некоторые случайные начальные несовершенства формы. Влияние этих несовершенств на устойчивость оболочки в случае осевого сжатия исследовано в предыдущем параграфе. Кроме того, характерные прочности элементарного слоя композита являются случайными величинами с известными законами распределения вероятностей. Ставится следующая задача: определить толщину оболочки h и относительные количества слоев θ_k, в которых арматура расположена под углом β_k к оси оболочки (к = 1,2,..., ℓ), таких, что с вероятностью неменьшей P_y^* параметр критической нагрузки N^* был неменьшим параметра заданной нагрузки N^0, прочность оболочки при заданной нагрузки была бы достаточна с вероятностью неменьшей P_{np}^* и при этом математическое ожидание веса оболочки было минимальным. Следуя [161], задачу сформулируем в виде М-модели стохастического программирования. Вектор параметров оптимизации

$$u = (u_1, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_\ell),$$

где u_1 выражен в (1.37).

Надо определить минимум функции цели

$$\min \langle G(u) \rangle, \tag{4.26}$$

где $\langle G(u) \rangle$ – математическое ожидание веса оболочки. Принимаются следующие группы ограничений:

а) на надежность относительно устойчивости оболочки

$$P_i \equiv P\{N^* \geq N^0\} \geq P_y^*. \tag{4.27}$$

Здесь N^* - выражение критической нагрузки, зависящее от случайных параметров начальных несовершенств формы, от u и от формы потери устойчивости:

$$N^* = N^*(u, m, n),$$

где m и n - волновые числа. Требуется, чтобы ограничения (4.27) выполнялись при любых n и m. Для численного решения, как и в детерминистических задачах, m и n должны ограничиваться некоторыми интервалами изменения (m_1, m_2) и (n_1, n_2). Таким образом, имеем группу ограничений надежности относительно устойчивости и $i = 1, 2, \dots, (m_2 - m_1 + 1)(n_2 - n_1 + 1)$.

б) на надежность относительно прочности

$$P_{пр} \equiv P(A) \geq P_{пр}^*, \tag{4.28}$$

где A - случайное событие того, что несущая способность относительно прочности не исчерпана; $P(A)$ - вероятность этого события.

в) структурные и геометрические ограничения на верхние и нижние границы изменения параметров оптимизации

$$P \equiv P\{ Fu^T - B \geq 0 \} \geq \beta, \tag{4.29}$$

где F и B - характеристики структурных и геометрических ограничений; β - заданная вероятность.

Выбор надежностей P_y^*, $P_{пр}^*$ и β представляют собой также оптимизационную задачу, зависящую от многих факторов: затрат на изготовление конструкции, польза от эксплуатации, ущерб,нанесенный при разрушении,моральный ущерб и др.Экономически - оптимальное значение надежности может быть определено после проведения экономического анализа. Здесь не будем останавливаться на этих проблемах,а лишь укажем, что примеры определения оптимальной надежности можно найти в [92] и [II7] .

Задача оптимизации упрощается в случае детерминированного вектора оптимизируемых параметров.Этот случай в дальнейшем и будем рассматривать. В функцию цели входят только детерминированные величины и она выражается

$$\langle G(u)\rangle = G(u) = 2\pi RL[\mu\gamma_a + (1-\mu)\gamma_c][u_1(h_2-h_1)+h_1]. \tag{4.30}$$

Структурные и геометрические ограничения при этом детерминированы и выражаются (I.5I) при Γ = I.

Рассмотрим частные случаи сформулированной задачи.

4.2.2. Весовая минимизация цилиндрической оболочки со случайными начальными несовершенствами формы при осевом сжатии.

Пусть цилиндрическая оболочка со случайными начальными несовершенствами формы сжимается осевой сжимающей нагрузкой N_x^0 (т.е. $N^0 = N_x^0$),равномерно распределенной по торцам.Будем считать, что прочность материала достаточна и не является причиной потери несущей способности оболочки.

Надежность относительно устойчивости,т.е. вероятность того,что критическая нагрузка не меньше данной нагрузки, при известной функции плотности распределения критической нагрузки $p(N^*)$равна (рис.4.3):

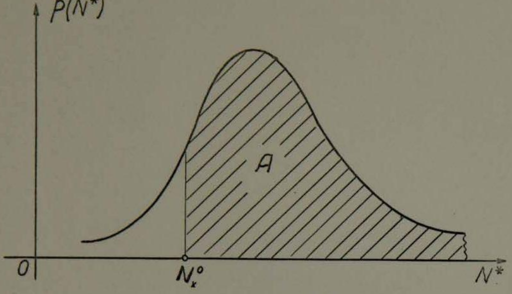

Рис. 4.3. Определение вероятности $P\{N^* \geq N_x^o\}$ /площадь A /.

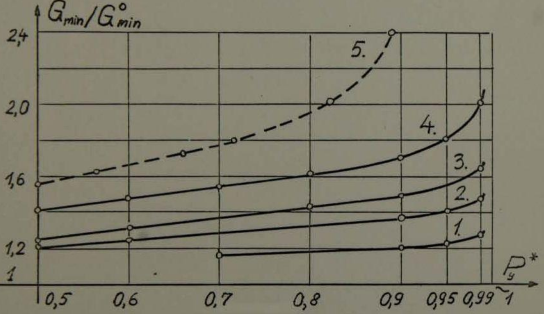

Рис. 4.4. Зависимости отношения G_{min}/G^o_{min} от надежности P_y^*. I - $\mathcal{E}$ = (0,004; 0,004; 0,04; 0,04); 2 - $\mathcal{E}$ = (0,0I; 0,0I; 0,08; 0,08); 3 - $\mathcal{E}$ = (0,004; 0,004; 0,2; 0,2); 4 -- $\mathcal{E}$ = (0,004; 0,004; 0,4; 0,4); 5 - зависимость отношения G_{min}/G^o_{min} от надежности P_y^* для изотропной оболочки при $\mathcal{E}$ = (0,004; 0,004; 0,4; 0,4).

$$P\{N^* \geq N_x^\circ\} = \int\limits_{N_x^\circ}^{+\infty} p(N^*)\,dN^*. \qquad (4.31)$$

После подстановки $p(N^*)$ из (4.24) в (4.31) и некоторых преобразований получаем, что

$$P\{N^* \geq N_x^\circ\} = \frac{\phi\left(\dfrac{\frac{N_{mn}}{N_x^\circ} - \langle z\rangle}{\sigma_z}\right) - \phi\left(-\dfrac{\langle z\rangle}{\sigma_z}\right)}{1 - \phi\left(-\dfrac{\langle z\rangle}{\sigma_z}\right)} \qquad (4.32)$$

Из (4.32) и (4.27) ограничения надежности выражаются

$$\varphi_i(u,m,n) = P_y^* - \frac{\phi\left(\dfrac{\frac{N_{mn}}{N_x^\circ} - \langle z\rangle}{\sigma_z}\right) - \phi\left(-\dfrac{\langle z\rangle}{\sigma_z}\right)}{1 - \phi\left(-\dfrac{\langle z\rangle}{\sigma_z}\right)} \leq 0. \qquad (4.33)$$

Таким образом, в случае детерминированного вектора u, задача стохастического программирования (4.26),(4.27),(4.29) может быть заменена ее детерминированным эквивалентом (4.30), (I.5I) и (4.33) с линейной функцией цели (4.30), линейными геометрическими ограничениями (I.5I) и нелинейными ограничениями надежности (4.33).

4.2.3. Численные примеры оптимизации. Для численного исследования использовались математические модели цилиндрических с начальными несовершенствами и с исходными механическими характеристиками и размерами такими, как и в 4.I.3. Вектор параметров оптимизации выражен в (2.Т5).

Для сравнения и проверки результатов была произведена весовая оптимизация идеально гладкой ортотропной цилиндрической оболочки с такими же механическими характеристиками и размерами при той же нагрузке (N_x° = 600 кгс/см) с учетом устойчивости оболочки. Получены следующие результаты: минимальный вес

G^{o}_{min} = 10,979 кг, оптимальное решение

$$u^{opt} = (0,368;\ 0,25;\ 0,5;\ 0,25).$$

На рис.4.4. представлены графики зависимости отношения минимального веса несовершенных оболочек к минимальному весу идеально гладкой оболочки от надежности P^{*}_{y}. Как и следовало ожидать, с увеличением надежности P^{*}_{y}, увеличивается отношение G_{min}/G^{o}_{min}, асимптотически приближаясь к прямой P^{*}_{y}=1. На характер изменения зависимости G_{min}/G^{o}_{min} от P^{*}_{y}, решающее значение имеют средние квадратические отклонения начальных прогибов. При небольших средних квадратических отклонениях начальных прогибов, с увеличением надежности вес оболочки увеличивается незначительно до довольно большой надежности (кривая 1). При больших средних квадратических отклонениях заметное увеличение веса начинается уже при довольно низких надежностях (кривая 4).

В таблице 4.2 приведены результаты,показывающие зависимость минимального веса,компонент вектора u^{opt} и элементов матрицы жесткостей $[C_{ij}]$ от изменения величины средних квадратических отклонений начальных прогибов при заданной надежности P^{*}_{y} = = 0,99 и математических ожиданий $\langle q^{o}_{o}\rangle = \langle b^{o}_{jk}\rangle$ = 0,004. С изменением средних квадратических отклонений меняется не только минимальный вес оболочки,но и структура материала. С увеличением средних квадратических отклонений уменьшается относительное количество слоев,арматура в которых расположена под углом $\pm\pi/4$ и увеличивается число слоев с продольным армированием. При больших средних квадратических отклонениях остаются только слои с арматурой,расположенной по направлению образующей оболочки. Во всех случаях нет слоев,арматура в которых расположена в окружном направлении.

Таблица 4.2

G_a	G_b	G_{min} кг	u^{opt}				$C_{ij}\ 10^6\ \frac{кгс}{см^2}$			
			h см	θ_1	θ_2	θ_3	C_{11}	C_{12}	C_{22}	C_{66}
0,0I	0,0I	I2,46	0,42	0,2I	0,79	0	0,2I4	0,080	0,I40	0,095
0,02	0,02	I3,I3	0,44	0,27	0,73	0	0,228	0,075	0,I34	0,09I
0,04	0,04	I4,I5	0,47	0,36	0,64	0	0,250	0,068	0,I26	0,084
0,2	0,2	I8,I3	0,6I	0,94	0,06	0	0,385	0,026	0,074	0,040
0,4	0,4	22,I3	0,74	I	0	0	0,400	0,022	0,069	0,037
0,8	0,8	34,02	I,I4	I	0	0	0,400	0,022	0,069	0,037

Зависимость надежности от структуры материала для оболочек с одинаковыми числовыми характеристиками начальных прогибов и одинаковыми весами даны в таблице 4.3, где $\mathcal{E}$ =(0,004;0,004;0,4;0,4), G = 18,855 кг, h =0,661см. Наибольшая надежность P_y^* = =0,9 достигается при армировании оболочки слоями с арматурой, направленной по направлению образующей оболочки. Наименьшая надежность получается при армировании оболочки слоями, арматура в которых расположена в окружном направлении. Таким образом, при больших средних квадратических отклонений начальных прогибов, способ армирования материала имеет большое значение для надежности оболочки.

Таблица 4.3

θ_1	θ_2	θ_3	P_y^*
0	0	1	0,517
0	1	0	0,550
0,25	0,50	0,25	0,661
0,333	0,333	0,333	0,698
1	0	0	0,900

Изменение веса оболочки, структуры материала и элементов матрицы жесткостей в зависимости от надежности приведено в таблице 4.4. С изменением надежности, при тех же статистических характеристиках начальных прогибов, меняется не только вес, но и структура материала оболочки. Во всех случаях с увеличением надежности увеличивается относительное количество слоев, арматура в которых расположена по направлению образующей оболочки.

Интересные результаты получаются при сравнении надежностей оболочки с оптимальной структурой с надежностью оболочки из изотропного материала такого же веса (толщины) P_{iz} . Во всех случаях получено, что надежность оболочки оптимальной струк -

Таблица 4.4

P^*	P_{izt}	G_{min} кг	u^{opt}				$C_{ij}\,10^6\,\frac{кгс}{см^2}$			
			h см	θ_1	θ_2	θ_3	c_{11}	c_{12}	c_{22}	c_{66}
$\mathcal{E}$ = (0,0I; 0,0I; 0,08; 0,08)										
0,5		I3,32	0,45	0,3I	0,69	0	0,237	0,072	0,I3I	0,088
0,6	0,530	I3,77	0,46	0,34	0,66	0	0,246	0,070	0,I28	0,085
0,9	0,843	I5,I5	0,5I	0,46	0,54	0	0,274	0,06I	0,II7	0,076
0,95	0,907	I5,50	0,52	0,50	0,50	0	0,283	0,058	0,II4	0,074
0,99	0,97I	I6,I5	0,54	0,56	0,44	0	0,297	0,054	0,I08	0,069
$\mathcal{E}$ = (0,004; 0,004; 0,4; 0,4)										
0,4	0,294	I4,55	0,49	0,94	0,03	0,03	0,384	0,024	0,08I	0,039
0,5	0,364	I5,50	0,52	0,97	0,02	0,0I	0,393	0,024	0,073	0,039
0,6	0,433	I6,30	0,55	I	0	0	0,400	0,022	0,069	0,037
0,7	0,502	I7,06	0,57	"	"	"	"	"	"	"
0,9	0,66I	I8,85	0,63	"	"	"	"	"	"	"
0,95	0,72I	I9,66	0,66	"	"	"	"	"	"	"
0,999	0,823	26,38	0,88	"	"	"	"	"	"	"

туры больше надежности изотропной оболочки. На рис.4.4 пунктирной линией показана зависимость G_{min}/G^{o}_{min} от надежности для изотропной оболочки при $\mathcal{E}$=(0,004;0,004;0,4;0,4), т.е.при довольно больших средних квадратических отклонениях начальных прогибов. С увеличением надежности разница между весом оптимальной и изотропной оболочки при той же надежности очень увеличивается. Эта разница уменьшается с уменьшением средних квадратических отклонений. При небольших средних квадратических отклонениях (Табл.4.4 $\mathcal{E}$= (0,0I;0,0I; 0,08;0,08)) надежность оптимальной и изотропной оболочки отличается незначительно,хотя структура оптимальной оболочки отличается от изотропной. Поэтому можно ожидать,что при незначительных средних квадратических отклонениях оптимальной при ограничении надежности будет изотропная оболочка.

<u>4.2.4. Весовая минимизация цилиндрических оболочек с упругим заполнителем при комбинированном нагружении с учетом случайных характерных прочностей</u>. Формулируемая в этом параграфе задача является непосредственным обобщением детерминистической задачи, решенной в параграфе 3.2.

Рассмотрим математическую модель идеально гладкой цилиндрической оболочки с упругим заполнителем, на которую действует осевое сжимающее усилие N_x^o, равномерно распределенное по торцам оболочки и равномерное внешнее давление $N_y^o = pR$, где p - интенсивность давления. Ввиду идеальной гладкости оболочки, принимаем, что ограничения на местную устойчивость детермированы и выражаются (3.I6).

Как и в 3.2, для определения прочности элементарных слоев используем критерий Малмейстера, ограничиваясь сохранением членов первого и второго порядков:

$$X_k \equiv p_i \sigma_i^{'(k)} + p_{ij} \sigma_i^{'(k)} \sigma_j^{'(k)} \leq 1 \qquad (i,j = 1,2,6). \tag{4.34}$$

Принимаем, что r_{ijk} независимые случайные величины, распределенные по нормальным законам распределения вероятностей. Тогда p_i и p_{ij} функции от случайных аргументов, выраженные по формулам (3.II), в общем случае, законы распределения которых отличные от нормальных. В дальнейшем, для упрощения записей, будем пользоваться следующими обозначениями

$$p_1 = x_1, \quad p_2 = x_2, \quad p_{11} = x_3,$$

$$p_{22} = x_4, \quad p_{12} = x_5, \quad p_{66} = x_6.$$

В работе [I46] показано, что при коэффициентах вариаций характерных прочностей меньших I0 %, распределения x_i могут быть аппроксимированы нормальными законами. В дальнейшем будем придерживаться этой предпосылки. Пусть известные статистические характеристики -- $\langle r_{ijk} \rangle$ и σ_{ijk} - математические ожидания и средние квадратические отклонения характерных прочностей. Определить соответствующие статистические характеристики $\langle x_i \rangle$ и s_i случайных величин x_i можно по известным формулам теории вероятностей [28] :

$$\langle \varphi(z_1, z_2, \dots, z_n) \rangle = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty}}_{n\text{-раз}} \varphi(z_1, z_2, \dots, z_n) f(z_1, z_2, \dots z_n) \, dz_1 dz_2 \dots dz_n ,$$

$$\sigma_\varphi = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} [\varphi(z_1, z_2, \dots, z_n)]^2 f(z_1, z_2, \dots, z_n) \, dz_1 dz_2 \dots dz_n - \langle \varphi(z_1 z_2, \dots, z_n) \rangle^2} ,$$

где $\varphi(z_1, z_2, \dots, z_n)$ - функция, аргументы которой случайные величины $z_1, z_2, \dots, z_n$; $f(z_1, z_2, \dots, z_n)$ - плотность распределения системы случайных величин $z_1, z_2, \dots, z_n$.

Из (3.II) следует, что некоторые из x_i находятся в функциональной зависимости. Учитывая только эти зависимости, корреляционную матрицу приблизительно можно представить в виде

$$[r_{ij}] = \begin{bmatrix} I & 0 & I & 0 & I & 0 \\ 0 & I & 0 & I & I & 0 \\ I & 0 & I & 0 & I & 0 \\ 0 & I & 0 & I & I & 0 \\ I & I & I & I & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

где r_{ij} - коэффициент корреляции случайных величин x_i и x_j . Из (4.34) следует, что X_k является линейной функцией от случайных аргументов x_i . Поэтому закон распределения ее вероятностей также нормальный со следующими числовыми характеристиками: математическим ожиданием

$$\langle X_k \rangle = \langle x_1 \rangle \sigma_1^{\prime(k)} + \langle x_2 \rangle \sigma_2^{\prime(k)} + \langle x_3 \rangle (\sigma_1^{\prime(k)})^2 + \langle x_4 \rangle (\sigma_2^{\prime(k)})^2 + 2 \langle x_5 \rangle \sigma_1^{\prime(k)} \sigma_2^{\prime(k)} + 4 \langle x_6 \rangle (\sigma_6^{\prime(k)})^2 \tag{4.35}$$

и средним квадратическим отклонением

$$\sigma_k = \sqrt{[S_k]^T [r_{ij}] [S_k]} \tag{4.36}$$

где $[S_k]^T = [s_1 \sigma_1^{\prime(k)},\ s_2 \sigma_2^{\prime(k)},\ s_3 (\sigma_1^{\prime(k)})^2,\ s_4 (\sigma_2^{\prime(k)})^2,$

$$2 s_5 \sigma_1^{\prime(k)} \sigma_2^{\prime(k)},\ 4 s_6 (\sigma_6^{\prime(k)})^2].$$

Здесь $\sigma_i^{\prime(k)}$ определяется по формулам (3.20).

Неразрушение слоя "к"-того типа обозначим событием A_k. Вероятность осуществления этого события тождественная вероятности выполнения неравенства $X_k \leq 1$:

$$P(A_k) \equiv P\{X_k \leq 1\}.$$

Т.к. X_k распределена по нормальному закону распределения вероятностей, то

$$P(A_k) \equiv P\{X_k \leq 1\} = \phi\left(\frac{1 - \langle X_k \rangle}{\sigma_k}\right), \tag{4.37}$$

где $\phi(x)$ определена в (4.25).

Разрушение какого-либо типа элементарных слоев еще неисчерпывает несущей способности оболочки относительно прочности. Будем считать, что оболочка может выполнять свои функции, если не разрушается не меньше t типов слоев $(1 \leq t \leq \ell)$. Вероятность неразрушения не менее t типов слоев будем считать надежностью относительно прочности.

Таким образом, надежность относительно прочности может быть определена по известным формулам теории вероятностей:

$$P(A) = \sum_{j=t}^{\ell} (-1)^{j-t} C_{j-1}^{t-1} R_j, \tag{4.38}$$

где

$$R_1 = \sum_{i=1}^{\ell} P(A_i),\ R_2 = \sum_{i<k}\sum P(A_i A_k), \tag{4.39}$$

$$\ldots,\ R_\ell = P(A_1 A_2 \ldots A_\ell),\quad t = 1, 2, \ldots, \ell.$$

Разрушение какого-либо типа слоев влияет на вероятности разрушения других слоев, т.е. события A_k , в общем случае, зависимы. Формулы (4.38) и (4.39) и в этом случае остаются в силе.

Ограничения надежности относительно прочности выражаются

$$\varphi(u) = P^*_{np} - \sum_{j=t}^{\ell} (-1)^{j-t} C_{j-1}^{t-1} P_j \leq 0. \qquad (4.40)$$

Параметры оптимизации довольно сложным образом входят в (4.40) через выражения числовых характеристик (4.35) и (4.36) и формулы (4.37) и (4.39).

Таким образом, стохастическую задачу оптимизации (4.26)-(4.29) можно заменить ее детерминистическим эквивалентом (4.30),(I.5I),(3.I6) и (4.40).

<u>4.2.5. Численные примеры.</u> Проводится весовая минимизация математической модели цилиндрической оболочки с упругим заполнителем с исходными механическими характеристиками для арматуры и связующего такими как в § 4.I.3. Размеры оболочки R = 50 см, L = 50 см. Объемный коэффициент армирования μ = 0,5. Вектор параметров оптимизации выражен (2.I5).

Числовые характеристики (математические ожидания и средние квадратические отклонения) характерных прочностей приведены в таблице 4.5. Т.к. будет исследоваться влияние различных значений средних квадратических отклонений на величины минимального веса и параметров оптимизации, приведены два варианта средних квадратических отклонений при тех же математических ожиданиях.

Из экспериментальных исследований известно, что, в

Таблица 4.5

r_{ijk}	$\langle r_{ijk} \rangle$	$G^{(1)}_{ijk}$	$G^{(2)}_{ijk}$
r_{1100}	10000	3000	2000
$r_{\bar{1}100}$	7000	450	300
r_{0220}	300	90	60
$r_{0\bar{2}20}$	1400	180	120
r_{0012}	600	60	40

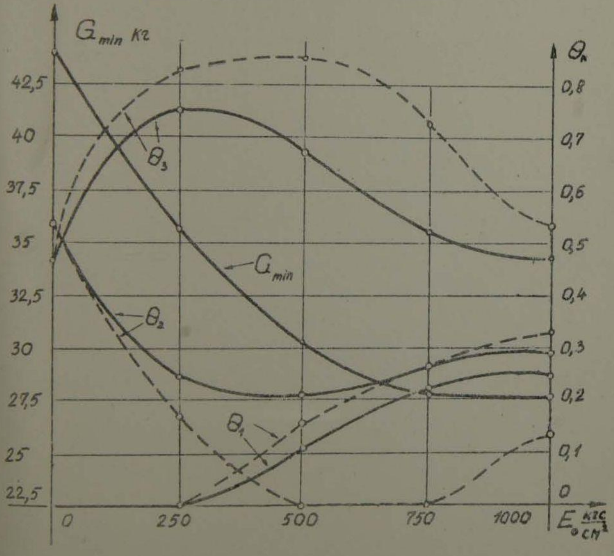

Рис. 4.5. Зависимости минимального веса и относительных количеств слоев от жесткости упругого заполнителя. Пунктиром показаны решения детерминистической задачи.

большинстве случаев, ρ_{12} мало отличается от нуля. Поэтому здесь принято, что ρ_{12} =0 и на основании этого предположения в табл. 4.5 отсутствуют числовые характеристики $r_{11\bar{2}20}$.

В исследуемых числовых примерах ℓ =3. (материал оболочки состоит из трех типов элементарных слоев). Надежность относительно прочности определяется по формулам (4.38) и (4.39) при t =3, т.е. принимается,что несущая способность относительно прочности исчерпана если разрушается хотя бы один тип элементарных слоев. Эту модель определения надежности относительно прочности обозначим моделью А.

В тех случаях,где нет оговорки относительно средних квадратических отклонений σ_{ijk} , оптимизация проведена при значениях $\sigma_{ijk}^{(1)}$.

Зависимость минимального веса и параметров оптимизации от жесткости упругого заполнителя E_o при фиксированной нагрузке приведены на рис. 4.5. Здесь исследована математическая модель цилиндрической оболочки, на которую действуют нагрузки N_x^o = 1000 кгс/см и p = 30 кгс/см^2. Надежность на прочность $P_{пр}^*$ = 0,9.

При E_o = 0 результат минимизации получается такой как и в § 3.2.2 (табл.3.5). Этот результат носит контрольный характер. Здесь активны только ограничения на устойчивость. При изменении E_o = 250 - 750 кгс/см^2, в точке минимума активны ограничения на устойчивость и на надежность относительно прочности. Изменение E_o в указанных пределах имеет большое значение для распределения относительных количеств слоев с различной укладкой арматуры. С увеличением E_o увеличивается число слоев с арматурой, направленной по образующей оболочки. Относительные количества слоев с другими углами укладки арматуры изменяются более сложным образом. Меняется и форма потери устойчивости: увеличивается число волн в окружном направлении от 6 до 10. При увеличении E_0 минимальный вес уменьшается до некоторого фиксированного значения (в нашем случае до G_{min}= 27,607 кг).Это является следствием того,что в исследуемой математической модели упругий заполнитель влияет только на устойчивость оболочки, т.е.при активных ограничениях на устойчивость. При $E_0 \geqslant$ 1000 кгс/см^2, активными становятся только ограничения на надежность относительно прочности и дальнейшее увеличение жесткости упругого заполнителя не влияет на минимальный вес и параметры оптимизации.Аналогичные вычисления велись и при больших значениях $P^*_{пр}$. Получено, что при $P^*_{пр}$ = 0,999 при любых значениях E_0 в точке минимума активно только ограничение на надежность и в этих случаях изменение E_0 не влияет на минимальный вес и параметры оптимизации (см. табл. 4.6).Отсюда следует, что заполнитель влияет на вес оболочки и структуру материала только при сравнительно небольших надежностях относительно прочности.

В табл. 4.6 приведены результаты оптимизации при различных комбинациях нагрузок в случае E_0 = 500 кгс/см^2.

При $P^*_{пр}$ = 0,9 во всех вариантах в точке минимума ак - тивны ограничения на устойчивость и на надежность относительно прочности (во всех таблицах,варианты в которых активны, ограничения на надежность относительно прочности отмечены звездочкой). При $P^*_{пр}$ = 0,999 в точке минимума активны только ограничения надежности относительно прочности.Увеличение надежности от 0,9 до 0,999 значительно увеличивает вес оптимальной оболочки.Отношения весов в соответствующих вариантах

Таблица 4.6

$p\ \frac{кгс}{см^2}$	$N_x^{\circ}\ \frac{кгс}{см}$	G_{min} кг	u^{opt}				n
			h см	θ_1	θ_2	θ_3	
$P_{пр}^* = 0,9$							
30	1000	30,382	1,018	0,115	0,217	0,668	8 *
	1500	33,626	1,127	0,300	0,315	0,385	8 *
45	1000	37,802	1,267	0,048	0,212	0,740	7 *
	1500	41,382	1,382	0,260	0,300	0,440	7 *
$P_{пр}^* = 0,999$							
30	1000	52,683	1,765	0,246	0,285	0,469	*
	1500	63,824	2,139	0,334	0,332	0,334	*
45	1000	66,643	2,233	0,171	0,259	0,590	*
	1500	82,006	2,748	0,329	0,329	0,342	*

колеблются в пределах 1,73 - 1,99. Структура материала меняется не столь значительно. Во всех исследованных случаях нагружения увеличивается относительное количество слоев с арматурой, расположенной по образующей оболочки и под углом $\pm\ \pi/4$, и уменьшается число слоев с арматурой, расположенной в окружном направлении.

Большой интерес представляет выяснение влияния величин средних квадратических отклонений характерных прочностей на минимальный вес и параметры оптимизации оболочки, при различных надежностях на прочность.

Исследования при N_x^o = 1500 кгс/см, p = 45 кгс/см^2, E_o = 500 кгс/см^2 и двух вариантах G_{ijk} приведены в табл. 4.7. При небольших надежностях ($P_{пр}^* < 0,9$) влияние величины

Таблица 4.7

$P^*_{пр}$	σ_{ijk}	G_{min} кг	θ_1	θ_2	θ_3	n
0,5	$\sigma^{(1)}_{ijk}$	40,785	0,226	0,285	0,489	7 *
	$\sigma^{(2)}_{ijk}$	40,524	0,206	0,277	0,517	7 *
0,7	$\sigma^{(1)}_{ijk}$	40,979	0,240	0,292	0,468	7 *
	$\sigma^{(2)}_{ijk}$	40,589	0,211	0,279	0,510	7 *
0,9	$\sigma^{(1)}_{ijk}$	41,382	0,260	0,300	0,440	7 *
	$\sigma^{(2)}_{ijk}$	40,647	0,215	0,281	0,503	7 *
0,99	$\sigma^{(1)}_{ijk}$	41,607	0,233	0,362	0,405	*
	$\sigma^{(2)}_{ijk}$	40,808	0,228	0,286	0,486	7 *
0,999	$\sigma^{(1)}_{ijk}$	82,006	0,329	0,329	0,342	*
	$\sigma^{(2)}_{ijk}$	41,321	0,264	0,302	0,433	7 *

средних квадратических отклонений σ_{ijk} в исследуемых вариантах на минимальный вес оболочки незначительное. Однако при больших $P^*_{пр}$ величины средних квадратических отклонений характерных прочностей имеют существенное значение.

Из сравнения с соответствующими результатами оптимизации при детерминистической формулировке задачи (табл. 3.4) можно сделать некоторые выводы. При надежности $P^*_{пр} = 0,9$ во всех случаях форма потери устойчивости такая, как и в соответствующих вариантах детерминистической задачи. Минимальные веса оболочек, полученные при оптимизации с учетом надежности, выше соответствующих весов, полученных при оптимизации с учетом прочности на 1 – 3,5 %. Более значительно отличается структура материала. Если в решениях детерминистических задач при небольших нагрузках относительные количества слоев с арматурой, расположенной под углом $\pm \pi/4$, незначительны, то в решениях стохастических задач при соответствующих нагрузках эти количества довольно большие. Во всех исследованных случаях в решениях детерминистических задач относительные количества слоев с арматурой, расположенной в окружном направлении, больше, чем в соответствующих решениях стохастических задач. Увеличение надежности значительно увеличивает вес и изменяет структуру оболочки. В этих случаях результаты оптимизации детерминистической и стохастической задач становятся несравнимыми. С уменьшением надежности $P_{пр}^{*}$ и средних квадратических отклонений σ_{ijk} (табл.4.7) результаты оптимизации стохастической задачи приближаются к результатам оптимизации детерминистической задачи. Таким образом, детерминистической формулировкой можно пользоваться в тех случаях, когда средние квадратические отклонения небольшие. Тогда до довольно большой надежности разница в весе незначительная. При больших средних квадратических отклонениях и больших надежностях предпочтительнее пользоваться стохастической формулировкой оптимизационной задачи.

Формулы (4.38) и (4.39) дают возможность использовать и другие математические модели определения надежности относительно прочности. Будем считать, что несущая способность оболочки исчерпана, если разрушается больше, чем один тип элементарных слоев. В этом случае $t = 2$. Эту модель обозначим моделью Б. Сравнение результатов, полученных при оптимизации с использованием моделей А и Б при средних квадратических отклонениях $\sigma_{ijk}^{(1)}$, нагрузках N_x^{o} = 1500 кгс/см, p = 45 кгс/см^2

Таблица 4.8

$P^*_{пр}$	Модель А				Модель Б					
	$P(A_1)$	$P(A_2)$	$P(A_3)$	n	G_{min} кг	$P(A_1)$	$P(A_2)$	$P(A_3)$	$P_{пр}$	n
0,5	0,9990	0,5009	0,9990	7 *	37,593	0,97I4	0,0I00	0,9993	0,97I0	7
0,7	0,9990	0,70I3	0,999I	7 *	"	"	"	"	"	"
0,9	0,9990	0,90I6	0,9992	7 *	"	"	"	"	"	"
0,99	0,999I	0,99I7	0,9992	*	38,060	0,992I	0,0II2	0,9978	0,9900	7 *
0,999	I	0,9990	I	*	40,596	0,9990	0,4835	0,9990	0,9990	7 *

и жесткости заполнителя E_0 = 500 кгс/см^2 приведено в таблице 4.8. Здесь $P(A_1)$, $P(A_2)$, $P(A_3)$ – означают вероятности неразрушения элементарных слоев с арматурой, расположенной соответственно под углами 0, $\pm\pi/4$, $\pi/2$ к оси для оболочек с минимальным весом. $P_{пр}$ – надежность оболочки минимального веса относительно прочности. Т.к. в модели Б разрешено разрушение одного типа элементарных слоев, то в некоторых случаях вероятность неразрушения слоев с арматурой под углом $\pm\pi/4$ очень маленькая, однако надежность всей конструкции довольно большая. Во всех случаях самая большая вероятность разрушения для слоев с арматурой под углом $\pm\pi/4$.

В заключении заметим, что данные исследования можно рассматривать лишь как одну из первых попыток применить стохастическое программирование для оптимизации математических моделей многослойных цилиндрических оболочек.

З А К Л Ю Ч Е Н И Е

Существующие методы расчета конструкций из композитных материалов, а также, методы определения устойчивости и прочности этих конструкций развивались преимущественно для целей анализа. Так как задачи оптимального проектирования являются задачами синтеза, то приходится приспосабливать существующие методы решения и для этих задач. В связи с этим, работа начинается с главы, в которой вводятся основные соотношения устойчивости и прочности многослойной цилиндрической оболочки с упругим заполнителем (и пластины), выраженные в форме, удобной для решения оптимизационных задач. Матричная запись соотношений между усилиями и деформациями многослойной цилиндрической оболочки позволяет независимо от выбранной кинематической модели и способа конструирования материала оболочки произвести анализ прочности слоистого композита, составить уравнения равновесия в перемещениях и, используя энергетический принцип, вариационное уравнение устойчивости цилиндрической оболочки с упругим заполнителем в матричном виде и в общем случае нагружения осевой сжимающей силой, внешним давлением и крутящими моментами. Формулы и методы, приведенные в первой главе, составляют исходную точку для решения всех дальнейших проблем. Задачи, решенные во второй и третьей главах, являются конкретными примерами применения полученных общих зависимостей, возможности которых этими задачами не исчерпываются.

Если современное развитие теории устойчивости многослойных ортотропных идеально гладких цилиндрических оболочек составляет достаточную базу для решения оптимизационных задач с учетом устойчивости, то этого нельзя сказать о теории устойчивости таких же оболочек со случайными несовершенствами формы. И поэтому, прежде чем перейти к вопросам оптимизации таких оболочек, следует произвести анализ их устойчивости. Некоторые вопросы устойчивости ортотропных цилиндрических оболочек со случайными несовершенствами формы затронуты в § 4.I. На основе полученных соотношений сформулирована и решена оптимизационная задача.

Результаты выполненных исследований сводятся к следующему:

I. Разработан общий метод учета устойчивости в оптимизационных задачах, независящий от кинематической модели оболочки в общем случае нагружения, позволяющий использовать выражения критических нагрузок, зависящие от целочисленных волновых параметров.

2. Исследованы некоторые общие свойства ограничений на устойчивость и прочность цилиндрических оболочек в пространстве исследуемых параметров оптимизации.Доказана невыпуклость ограничений на устойчивость цилиндрических оболочек (модели Кирхгофа-Лява и Тимошенко) с упругим заполнителем в общем случае нагружения. Численными методами установлено, что ограничения на устойчивость с большой вероятностью квазивыпуклы,а ограничения на прочность неквазивыпуклы.

3. Получена детерминистическая зависимость критической нагрузки ортотропной цилиндрической оболочки с начальными несовершенствами формы при осевом сжатии от параметров начальных несовершенств. При случайных начальных несовершенствах

формы получена плотность распределения вероятностей крити - ческой нагрузки, зависящая от статистических числовых характеристик начальных несовершенств.

4. Решены следующие задачи весовой минимизации много - слойных ортотропных прямоугольных пластин и цилиндрических оболочек:

а) сжатых в двух направлениях прямоугольных пластин с учетом поперечных сдвигов и работающих на устойчивость.

б) цилиндрических оболочек с упругим заполнителем при осевом сжатии с использованием кинематических моделей Кирхгофа-Лява и Тимошенко, работающих на устойчивость. Проведено сравнение полученных результатов.

в) длинных цилиндрических оболочек,работающих на прочность и устойчивость при осевом сжатии с жесткостью упругого заполнителя в качестве параметра оптимизации.

г) цилиндрических оболочек с упругим заполнителем при комбинированном нагружении (осевое сжатие и внешнее давление), работающих на устойчивость и прочность. В численных примерах исследованы: оптимальная структура материала оболочки при различных величинах внешних нагрузок, зависимости минимального веса от жесткости упругого заполнителя и объемного коэффициента армирования.

д) ортотропных цилиндрических оболочек со случайными начальными несовершенствами формы при осевом сжатии с учетом надежности относительно устойчивости методом стохастического программирования.При численном решении задачи получены зависимости минимального веса и параметров оптимизации от статистических характеристик начальных несовершенств и надежности.

е) цилиндрических оболочек с упругим заполнителем при комбинированном нагружении с учетом случайных характерных прочностей композита. Установлено, что при уменьшении средних квадратических отклонений характерных прочностей происходит конвергенция решений стохастической задачи к решениям детерминистической задачи при довольно больших надежностях относительно прочности.

5. На алгоритмическом языке МАЛГОЛ составлены универсальные программы, предназначенные для решения широкого класса оптимизационных задач цилиндрических оболочек из композитных материалов.

Представленные в данной работе соотношения и методы дают возможность решать и некоторые другие оптимизационные задачи, непосредственно связанные с исследованными.

В работе детально рассмотрен случай весовой минимизации цилиндрической оболочки при совместном действии осевого сжатия и внешнего давления.Приведенные соотношения для определения устойчивости и прочности дают возможность исследовать и другие комбинации нагружения с включением крутящих моментов.

Методика исследования устойчивости ортотропных цилиндрических оболочек с начальными несовершенствами формы при осевом сжатии может быть использована для анализа устойчивости и при других способах нагружения. Кроме того, при вероятностном анализе устойчивости законы распределения случайных величин, характеризующих начальные несовершенства формы,могут быть другие напр. законы равномерного распределения .

Нуждаются в решении аналогические задачи оптимизации цилиндрических оболочек из композитных материалов находящихся под действием случайных нагрузок.

Эти проблемы ведут к новым оптимизационным задачам.

Приложение

П Р О Г Р А М М А

ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ИЗ КОМПОЗИТНОГО МАТЕРИАЛА С УЧЕТОМ УСТОЙЧИВОСТИ И НАДЕЖНОСТИ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОЧНОСТИ МЕТОДОМ ПРОЕКТИРУЕМЫХ ГРАДИЕНТОВ РОЗЕНА

```
MALGOL-22(32)      PROGRAM 03

COMMENT' S T O C H - 2A.76.03.15.;

PROCED'MATRIC('M.,I1,I2,J1,J2);
BEGIN' SUBROU'LINI;
BEGIN' OUTPUT'(1);
FOR'I:=0 STEP'1 UNTIL'127 DO'
TEXTP1'('-'); OUTPUT'(1);
END';
SUBROU'LENT;
BEGIN'IF'RR:)6.3 THEN'L:=9 ELSE'L:=6+TT;
FOR'I:=K1 STEP'1 UNTIL'K2 DO'
BEGIN'ADDRESS'(FIX'L);TEXTP1'(3,0,I);L:=L+D;
END';OUTPUT'(1);IF'BUL THEN'BEGIN'I:=1;GOTO'LL;
END';
FOR'I:=II1 STEP'1 UNTIL'II2 DO'
BEGIN'LL:TEXTR1'(3,0,I,'  ');
FOR'J:=K1 STEP'1 UNTIL'K2 DO'
IF'BUL THEN'TEXTP1'(TT,RR,M.(J).) ELSE'
TEXTP1'(TT,RR,M.(I,J).);OUTPUT'(1);
END' END';
AA: II1:=I1; II2:=I2; JJ1:=J1; JJ2:=J2;
COPY'(TM.,M.);
MAX'(M.,T1,TT1,T2,TT2);
IF'ABS'T2:)ABS'T1 THEN' T1:=ABS'T2 ELSE' T1:=ABS'T1;
SCALE'(T1,TT,RR);
IF'II1=1*,II2=1 THEN'BUL:=TRUE' ELSE'BUL:=FALSE';
IF'RR:)6.3 THEN'D:=3+RR ELSE'
D:=TT+RR+2;N:=ENTIER'(121/D);LINI;K1:=JJ1;
BB:K2:=K1+N-1;IF'K1:)JJ2 THEN'GOTO'CC;
IF'K2:)JJ2 THEN'K2:=JJ2;
LENT;LINI;K1:=K2+1;GOTO'BB;
CC: END';


SUBROU'SPX;BEGIN'
OUTPUT'(0);PRINT2'(X.(1).,X.(2).,X.(3).);
OUTPUT'(2)  END';


PROCED'SUB(TX.,TY.,TZ.,TN);BEGIN'
COPY'(TX.,X.);COPY'(TY.,Y.);COPY'(TZ.,Z.);N:=TN;
FOR'J:=1 STEP'1 UNTIL'N DO'Z.(J).:=X.(J).-Y.(J).;
 END';


SUBROU'NORMA; BEGIN'NRM:=0;
FOR'J:=1 STEP'1 UNTIL'N DO'
BEGIN'FJ:=G.(J).; NRM:=NRM+FJ*FJ END'; NRM:=SQRT'NRM END';


SUBROU'F; BEGIN'FX:=0;
FX:=K6*K12*(K4*X.( ).+H0);
IF'KEY2'(F;X'0) THEN'GOTO'LE44;
OUTPUT'(0);PRINT2'(FX);OUTPUT'(1);
LE44:  END';


SUBROU'GF; BEGIN'
G.(1).:=K6*K12*K4;
G.(2).:=0;G.(3).:=0 END';
```

```
SUBROU'W;BEGIN'I1:=0;
FOR'MM:=M1 STEP'1 UNTIL'M2 DO'
FOR'NN:=0,N1 STEP'1 UNTIL'N2 DO'
BEGIN'I1:=I1+1;KOEF2;FORMA;
KVF:=Q11*V1*V1+2*Q12*V1*V2
+2*Q13*V1+Q22*V2*V2+2*Q23*V2
+Q33;
FI.(I1).:=KVF;FI2.(I1).:=KVF;
M3.(I1).:=MM;N3.(I1).:=NN;
 END';
KOEF2;KOEF3;I1:=I1+1;
FIST:=PZV-PAT;
FI.(I1).:=FIST;FI2.(I1).:=FIST;
M3.(I1).:=2222222;
FI.(M4+2).:=-X.(1).;
FI.(M4+3).:=-X.(2).;
FI.(M4+4).:=-X.(3).;
FI.(M4+5).:=X.(1).-1;
FI.(M4+6).:=X.(2).+X.(3).-1;
 END';
SUBROU'GW;BEGIN'I1:=0;I:=0;
NULL'(Z.);FOR'MM:=M1 STEP'1 UNTIL'M2 DO'
FOR'NN:=0,N1 STEP'1 UNTIL'N2 DO'
BEGIN'I1:=I1+1;
IF'K.(I1).=1 THEN'BEGIN'I:=I+1;
KOEF2;FORMA;
G2.(1).:=-LM2*(V1*V1+RH2*LM2);
G2.(2).:=2*LEM*V1*(1-NM*V2)-2*RH2*LM2*NN2;
G2.(3).:=-(NN*V2-1)*(NN*V2-1)-RH2*NN2*NN2;
G2.(4).:=-(NN*V1+LEM*V2)*(NN*V1+LEM*V2)-4*RH2*LM2*NN2;
G2.(5).:=(2*Q133-TT+CEQ)/H;
MULTV'(G1.,G2.,GFI.);
Z.(1,I).:=GFI.(1).;Z.(2,I).:=GFI.(2).;
Z.(3,I).:=GFI.(3).;
 END';
 END';
TRANS'(X.,X2.)' I1:=I1+1;
IF'K.(I1).=1 THEN'BEGIN'I:=I+1;
FOR'I6:=1,2,3 DO'BEGIN'
X.(I6).:=X2.(I6).-DH;
KOEF2;KOEF3;
V11:=PZV-PAT;
X.(I6).:=X2.(I6).+DH;
KOEF2;KOEF3;V22:=PZV-PAT;
Z.(I6,I).:=(V22-V11)/(2*DH);
TRANS'(X2.,X.); END';
 END';
TRANS'(X2.,X.)'
IF'K.(M4+2).=1 THEN'BEGIN'I:=I+1;
Z.(1,I).:=-1; END';
IF'K.(M4+3).=1 THEN'BEGIN'I:=I+1;
Z.(2,I).:=-1; END';
IF'K.(M4+4).=1 THEN'BEGIN'I:=I+1;
Z.(3,I).:=-1; END';
IF'K.(M4+5).=1 THEN' BEGIN'I:=I+1;
Z.(1,I).:=1 END';
```

```
AK33:=A033+AZV*S22P;
 END';

SUBROU'ITEMP;BEGIN'
DE2:=(A11*A22-A12*A12)*H;
NX0:=-NX0;K17:=-K17;KK1:=A22*NX0-A12*K17;
KK2:=-A12*NX0+A11*K17;
KK3:=KK1*AK11+KK2*AK12;
KK4:=KK1*AK12+KK2*AK22;
SIK11:=KK3/DE2;SIK22:=KK4/DE2;
SI11:=SIK11*C2P+SIK22*S2P;
SI12:=(SIK22-SIK11)*S2PK/2;
SI22:=SIK11*S2P+SIK22*C2P;
SI.(1).:=SI11;SI.(2).:=SI22;
SI.(3).:=SI11*SI11;SI.(4).:=SI22*SI22;
SI.(5).:=2*SI11*SI22;
SI.(6).:=4*SI12*SI12;
NX0:=-NX0;K17:=-K17; END';

SUBROU'KOEF3;BEGIN'
J6:=0;
FOR'BK:=0,PI'/4,PI'/2 DO'BEGIN'
SINCOS;STAND;ITEMP;
J6:=J6+1;MXK:=0;
FOR'J5:=1 STEP'1 UNTIL'6 DO'
MXK:=MXK+MP.(J5).*SI.(J5).;
NULL'(SK.);
FOR'J5:=1 STEP'1 UNTIL'6 DO'
SK.(1,J5).:=SP.(J5).*SI.(J5).;
MULT'(SK.,RIJ.,SK1.);TRANSP'(SK.,SKT.);
MULT'(SK1.,SKT.,SK2.);
SIK1:=SK2.(1,1).;SIK:=SQRT'(SIK1);
PA.(J6).:=DISTRF'((1-MXK)/SIK);
 END';

PA1:=PA.(1).;PA2:=PA.(2).;PA3:=PA.(3).;
PA11:=1-PA1;PA21:=1-PA2;PA31:=1-PA3;
IF'KEY2'(FIX'5) THEN'BEGIN'
PAT:=1 PA11*PA21*PA31;GOTO'LE2; END';
IF'KEY2'(FIX'6) THEN'BEGIN'
PAT:=PA1*PA2*PA31+PA1*PA21*PA3+
PA11*PA2*PA3+PA1*PA2*PA3;GOTO'LE2;  END';
IF'KEY2'(FIX'7) THEN'BEGIN'
PAT:=PA1*PA2*PA3; END';
LE2:  END';

SUBROU'STR; BEGIN'T:=T/NRM;
FOR'J:=1 STEP'1 UNTIL'N DO'X.(J).:=T*G.(J).; ADD'(X1.,X.,X.)
 END';


SUBROU'INT; BEGIN'MF:=-1@18; T:=TAU;
FOR'J:=1 STEP'1 UNTIL'M DO'IF'K.(J).=0 THEN'
BEGIN'FJ:=FI.(J).; IF'FJ:)MF THEN'BEGIN'MF:=FJ; J1:=J END' END';
IF'MF:)DELTA THEN'BEGIN'T:=TAU*FI1.(J1)./(FI1.(J1).-FI.(J1).)
 END' END';


SUBROU'FORMA;BEGIN'
DE1:=Q11*Q22-Q12*Q12;V3:=1;
V1:=(Q23*Q12-Q22*Q13)/DE1;
V2:=(Q12*Q13-Q11*Q23)/DE1;
END';
```

```

SUBROU'RIBA;BEGIN'
LE9:PZA:=FALSE';X2:=0;X0:=X.(1).;
WIMAX'(FI2.,F1,15);
IF'ABS'F1(=DELTA THEN'GOTO'LE16;
IF'F1:)0 THEN'BEGIN'
IF'X0:)1 THEN'BEGIN'LE5: STOP' END' ELSE'
BEGIN'X.(1).:=X.(1).+0.05;
SPX;GOTO'LE9 END' END';

LE14:X.(1).:=(X2+X0)/2;
WIMAX'(FI2.,F1,15);
IF'ABS'F1(=DELTA THEN'GOTO'LE16;
IF'F1(:0 THEN'BEGIN'
X0:=X.(1).;GOTO'LE14 END';
X2:=X.(1).;
GOTO'LE14;
LE16:M0:=M3.(15).;N0:=N3.(15).;
OUTPUT'(0);PRINT2'(F1,I5,M0,N0);OUTPUT'(2);
SPX;
TMN;IF'PZ4 THEN'GOTO'LE9;
LE18: END';


SUBROU'JUNGM;BEGIN'
IF'M0=M1 THEN'BEGIN'M1:=M1 2;M2:=M2-2 END' ELSE'
BEGIN'M2:=M2+2;M1:=M1+2 END'
 END';


SUBROU'JUNGN;BEGIN'
IF'N0=N1 THEN'BEGIN'N1:=N1 2;N2:=N2-2 END' ELSE'
BEGIN'N2:=N2+2;N1:=N1+2 END'
 END';


SUBROU'TMN;BEGIN'PZ4:=FALSE';
IF'M0=1+.M0=0 THEN'GOTO'LE30;
IF'M0=M1+.M0=M2 THEN'BEGIN'JUNGM;PZ4:=TRUE' END';
LE30:IF'N0=1+.N0=0 THEN'GOTO'LE31;
IF'N0=N1+.N0=N2 THEN'BEGIN'JUNGN;PZ4:=TRUE' END';
LE31: END';

PR;
IF'KEY2'(FIX'5) THEN'BEGIN'OUTPUT'(10);
PRINT2'(55555555);OUTPUT'(2);GOTO'LE4 END';
IF'KEY2'(FIX'6) THEN'BEGIN'OUTPUT'(10);
PRINT2'(66666666);OUTPUT'(2);GOTO'LE4 END';
IF'KEY2'(FIX'7) THEN'BEGIN'OUTPUT'(10);
PRINT2'(77777777);OUTPUT'(2); END';
LE4:
READ1'(N,TAU1,TAUM,DELTA,EPS);TAU:=-TAU1;
OUTPUT'(3);PRINT2'(N,TAU1,TAUM,DELTA,EPS);OUTPUT'(2);
MI:=0.5;
READ1'(EA,EC,NIA,NIC,GA,GC);
OUTPUT'(0);PRINT2'(EA,EC,NIA,NIC,GA,GC);
OUTPUT'(2);
READ1'(R,L,HV,HA,MI,M1,M2,N1,N2);OUTPUT'(0);
PRINT2'(R,L,HV,HA,MI,M1,M2,N1,N2);OUTPUT'(2);

ARRAY'MP.(1:6).,SP.(1:6).,CIJ.(1:6,1:6).,
SI.(1:6).,SK.(1:1,1:6).,SK1.(1:6,1:1).,
SK1.(1:1,1:6).,SK2.(1:1,1:1).,PA.(1:5).,
X.(1:N).,X2.(1:N).;
```

```
READAR'(RIJ.,MP.,SP.,X.);
MATRIC(RIJ.,1,6,1,6);
MATRIC(MP.,1,1,1,6);
MATRIC(SP.,1,1,1,6);
SPX;
READ1'(E0,MI0,NX0,NY0,PZV,PH);
OUTPUT'(0);PRINT2'(E0,MI0,NX0,NY0,PZV,PH);
OUTPUT'(5);
M4:=(M2-M1+1)×(N2-N1+2);M:=M4+6;
ARRAY'GFI.(1:N).,G1.(1:5,1:N).,G2.(1:5).,
M3.(1:M).,N3.(1:M).,
X.(1:N).,X1.(1:N).,FI.(1:M).,
FI1.(1:M).,FI2.(1:M4+1).,
C.(1:N).,P.(1:N).,K.(1:M).;
LE1:KOFF1;M17:=NY0×R;
LE17:RIBA;PZ4:=FALSE';
OUTPUT'(0);PRINT2'(M1,M2,N1,N2);OUTPUT'(2);
LE3:F;W;PZ:=0;FX1:=FX;SPX;MATRIC(FI.,1,1,1,M);
OUTPUT'(0);PRINT2' A11,A12,A22,A33,PA1,PA2,PA3,PA1;
OUTPUT'(2);
A5:TRANS'(X.,X1.); TRANS'(FI.,FI1.);GF;NORMA;
T:=TAU;PZ:=PZ+1;IF'PZ=1 THEN'GOTO'A;
A6:STP;W;INT;IF'T=/TAU THEN'GOTO'A6;
A:Q:=0;FOR'J:=1 STEP'1 UNTIL'M DO'
IF'ABS'FI.(J).(=DELTA THEN'
BEGIN'K.(J).:=1;Q:=Q+1 END' ELSE'K.(J).:=0;
A1: IF'Q=0 THEN'GOTO'A5;
ARRAY'Z.(1:N,1:Q).,ZT.(1:Q,1:N).,V.(1:Q,1:Q).,
S.(1:Q).,S1.(1:Q).;
SPX;
B: GM; TRANSP'(Z.,ZT.);
MULT'(ZT.,Z.,V.); INVERS'(V.);
F; IF'FX:)FX1 THEN'GOTO'C;
GF;
MULTV'(Z.,C.,S.);MULTV'(V.,S.,S1.);MULTV'(ZT.,S1.,P.);
SUP(C.,P.,C.,N); NORMA;
I:=0;FOR'J:=1 STEP'1 UNTIL'M DO'IF'K.(J).=1 THEN'
BEGIN'I:=I+1;IF'-S1.(I). THEN'
BEGIN'K.(J).:=0;Q:=Q-1;
PZ1:=1111111;M01:=M3.(J).;N01:=N3.(J).;
OUTPUT'(0);PRINT2'(PZ1,M01,N01);OUTPUT'(2);
GOTO'B4 END' END';
IF'NRM×TAU)(=EPS THEN'GOTO'D;
FX1:=FX; TRANS'(FI.,FI1.); TRANS'(X.,X1.);T:=TAU; B2:  STP;
B3:
IF'KEY2'(FIX'1) THEN'GOTO'C;
IF'KEY2'(FIX'10) THEN'GOTO'E;
W;I:=0;AL:=FALSE';
FOR'J:=1 STEP'1 UNTIL'M DO'IF'K.(J).=1 THEN'
BEGIN'I:=I+1; FJ:=FI.(J).; S1.(I).:=FJ;
IF'ABS'FJ:)DELTA THEN'AL:=TRUE' END';
IF'AL THEN'BEGIN'MULTV'(V.,S.,S1.); MULTV'(ZT.,S1.,P.);
SUP(X.,P.,X.,N); GOTO'B3 END';
INT; IF'T=/TAU THEN'GOTO'B2;
IF'MF=)-DELTA THEN'BEGIN'K.(J1).:=1;Q:=Q+1;
M0:=M3.(J1).;N0:=N3.(J1).
END' ELSE'GOTO'D;
OUTPUT'(0);PRINT2'(M0,N0);OUTPUT'(2);
```

Описание программы

Программа предназначена для весовой минимизации цилиндрических оболочек из композитного материала с упругим заполнителем при комбинированном нагружении (осевое сжатие и внешнее давление), заменив стохастическую задачу оптимизации (4.26) - (4.29) ее детерминистическим эквивалентом. Для оптимизации использован метод проектируемых градиентов Розена. Вектор параметров оптимизации выражен (2.15), функция цели - (4.30). Приняты во внимание ограничения трех групп: а) ограничения на устойчивость (3.16);б) ограничение надежности относительно прочности (4.40); в) структурные и геометрические ограничения (1.51). Программа предусмотрена для решения оптимизационных задач цилиндрических оболочек,материал которых составлен из элементарных слоев трех типов: с арматурой,расположенной по направлению образующей оболочки, и под углами 0 $\pm \pi/4$ и $\pi/2$ к образующей. Используя соотношение (1.8), элиминирован параметр оптимизации θ_3. Расчет ведется по кинематической модели Кирхгофа-Лява. Для определения надежности относительно прочности использованы формулы (4.38) и (4.39), допускающие построение различных математических моделей определения надежности относительно прочности в зависимости от значения t. В программе предусмотрена возможность исследования трех математических моделей, в зависимости от № включенной перед пуском ЭВМ клавиши из группы "Набор кода" на пульте управления ЭВМ Минск-22 или на пульте инженера ЭВМ Минск-32. При включенной клавише под № 5, перед расчетом АЦПУ печатает признак модели "55555555", и осуществляет расчет надежности относительно прочности при t =1/ ℓ = 3 для всех вариантов/. При включенной клавише № 6 соответственно печатается "66666666" и надежность относительно прочности определяется при $t = 2$. При включенной клавише под № 7 печатается "77777777" и расчет ведется при $t = 3$.

Программа состоит из ряда процедур подпрограмм и ведущей части. Здесь не будем останавливаться на описании стандартных процедур транслятора МАЛГОЛ, использованных в программе и на технических вопросах работы с приведенной программой. Эти вопросы рассмотрены в [141] и [142] . Коротко опишем назначение нестандартных процедур и подпрограмм, исходную информацию, необходимую для решения задачи на ЭВМ и информацию, выводимую по окончанию процесса оптимизации.

Нестандартная процедура *MATRIC* производит печатание на АЦПУ одномерных и двухмерных массивов. Подпрограмма *SPX* производит печатание вектора параметров оптимизации. *KOEF1* производит расчет величин, постоянных в процессе оптимизации, среди которых есть упругие характеристики однонаправленного элементарного слоя, определимые по формулам (1.1), а также элементы матрицы G_1 (формула (1.56)). *KOEF2* вычисляет жесткости всего пакета материала оболочки C_{ij} , обозначенные идентификаторами *A11* , *A12* , *A22* и *A33* и другие выражения, необходимые для определения критической нагрузки. *FORMA* вычисляет коэффициенты формы потери устойчивости U_0 , V_0 и W_0 , обозначенные идентификаторами *Y1* , *Y2* и *Y3* .

Подпрограммы *SINCOS* , *STAND* , *ITEMP* и *KOEF3* предназначены для вычисления значений надежности относительно прочности: *SINCOS* вычисляет синусы и косинусы различных углов и степеней; *STAND* вычисляет жесткости элементарного слоя, составляющего с образующей оболочки угол β_k ; *ITEMP* – напряжения

$\sigma_j^{(k)}$ и $\sigma_i^{\prime(k)}$ (формула (3.20)) и формирует массив коэффициентов, содержащих значения напряжений и используемых в (4.35) и (4.36); *KOEF3* вычисляет по формуле (4.35) математическое ожидание $\langle X_k \rangle$, обозначенное идентификатором *MXK*, среднее квадратическое отклонение σ_k по формуле (4.36), вероятности неразрушения элементарных слоев $P(A_k)$ по формулам (4.37) и надежность относительно прочности $P(A)$ (идентификатор *PAT*) в зависимости от выбранной математической модели.

Подпрограммы *JUNGM*, *JUNGN* и *TMN* осуществляет автоматический отбор опасных форм выпучивания. Исключает из группы ограничений по устойчивости, путем изменения интервалов (m_1 , m_2) и (n_1 , n_2), неактивные и подключает в рассмотрение новые ограничения, т.е. реализует схему, приведенную на рис.I.5.

Остальные процедуры и подпрограммы непосредственно связаны с методом проектируемых градиентов Розена. Процедура *SUB* производит вычитание векторов, *NORMA* вычисляет нормы вектора, *STP* совершает шаг в пространстве оптимизируемых параметров, *INT* предназначена для выхода на вновь нарушенное ограничение путем интерполяции. Эти процедуры и подпрограммы имеют служебный характер.

Подпрограмма *F* вычисляет значение функции цели *FX* на каждом шагу оптимизации, *GF* - градиент функции цели, *W* - значения ограничений и формирует массив этих значений *FI*., *GW* - градиенты активных ограничений и формирует соответствующую матрицу, *RIBA* - осуществляет выход на границу допустимой области из любой точки пространства параметров оптимизации по методу, описанному в § I.4.

Ведущая программа начинается с метки *PR*. Часть программы до метки $LE1$ производит ввод и печать исходных данных, определяет число ограничений и производит описание массивов. Должны быть введены следующие исходные данные, для обозначения которых использованы идентификаторы: N – размерность вектора параметров оптимизации; $TAU1$ – начальная длина шага; $TAUM$ – минимальная длина шага, после достижения которой полученное решение считается оптимальным; $DELTA$ – допустимое отклонение точки от гиперповерхности активного ограничения; EPS – мера достижения оптимальной точки; EA и EC – модули упругости арматуры и связующего; NIA и NIC – коэффициенты Пуассона для арматуры и связующего; GA и GC – объёмные весы арматуры и связующего; R и L – радиус и длина оболочки; HV и HA – верхний и нижний пределы изменения толщины оболочки; $M1$ и $M2$ – границы начального интервала изменения волновых чисел вдоль образующей оболочки; $N1$ и $N2$ – границы начального интервала изменения волновых чисел по окружности оболочки; RIJ – корреляционная матрица случайных компонент тензоров прочности; MP и SP – массивы математических ожиданий и средних квадратических отклонений компонент тензоров прочности; X – вектор параметров оптимизации; $E0$ – модуль упругости заполнителя; $NI0$ – коэффициент Пуассона для заполнителя; $NX0$ – осевое сжимающее усилие N_x^0; $NY0$ – интенсивность внешнего давления p; PZV – нижний предел надежности относительно прочности $P_{пр}^*$; DH – половина шага численного дифференцирования.

Часть программы до метки $A5$ осуществляет выход на границу допустимой области и печать значений основных параметров, полученных на границе допустимой области.

Основная часть метода проектируемых градиентов Розена находится между метками $A5$ и $\mathcal{D}$. Здесь также предвидено автоматическое изменение шага оптимизации. При кратковременном включении клавиши под № I из группы "Набор кода" осуществляется уменьшение шага, при кратковременном включении клавиши № IO происходит увеличение шага. В ходе оптимизации на АЦПУ выводится следующая информация: при изменении шага оптимизации печатается величина нового шага, информация о включении новых ограничений к числу активных и исключении неактивных ограничений. В этих случаях каждый раз печатаются значения параметров оптимизации. Кроме того, на каждом шагу оптимизации в зависимости от включения или невключения клавиши № 0 из группы "Набор кода", может печататься значение функции цели.

Часть программы от метки $\mathcal{D}$ по окончанию оптимизации производит вывод результатов. Выводится следующая информация: FX - значение функции цели; H - толщина оболочки; $TE1$, $TE2$ и $TE3$ - соответственно относительные количества слоев θ_1, θ_2 и θ_3; $A11$, $A12$, $A22$ и $A33$ - жесткости материала оболочки; $PA1$, $PA2$, $PA3$ и PAT - вероятности неразрушения элементарных слоев и надежность относительно прочности; FI - массив значений ограничений в оптимальной точке.

При помощи этой программы были решены численные примеры § 4.2.5.

Л И Т Е Р А Т У Р А

I. А д а м о в и ч И.С., Р и к а р д с Р.Б. Оптимизация сжатых цилиндрических оболочек с переменными по длине упругими свойствами. Механика полимеров, 1975, № 5, с.816 - 821.

2. А м б а р ц у м я н С.А. Теория анизотропных пластин. М.,1967.

3. А м б а р ц у м я н С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М.,1974, с. 448.

4. А м и р о И.Я., П р о к о п е н к о Н.Я. Устойчивость многослойной цилиндрической оболочки при осевом сжатии. — В кн.: Сопротивление материалов и теория сооружений. Респ. межвед. науч.- техн. сб. 1971,вып.15, с.46 - 54.

5. А н д р е е в Л.В., М о с с а к о в с к и й В.И., О б о д а н Н.И. Об оптимальной толщине цилиндрической оболочки нагруженной внешним давлением. — Приклад.мат. и мех.,1972, 36, № 4, с. 717 - 725.

6. Б а б и ч И.Ю. Исследование устойчивости стержней,пластин и оболочек из композитных материалов и пределы применимости различных прикладных теорий. - В кн.: 4-я Всес.конф. по пробл. устойчивости в строит. мех. Тезисы докл., М., 1972, с. 72 - 73.

7. Б а б и ч Н.Ю., Г у з ь А.Н., Ч е р н у ш е н к о И.И., Ш у л ь г а А.Н. Об оценке точности теории устойчивости цилиндрических оболочек при внешнем давлении. - Приклад-

ная механика, Киев, 1974, т.10, вып. 10, с. 16-21.

8. Бабич И.Ю., Шульга Н.А., Чернушенко И.И. Сравнительный анализ прикладных теорий устойчивости пластин и цилиндрических оболочек из композитных материалов. - Сопротивление материалов и теория сооружений.Респ. межвед. науч. - техн. сб.,1975, вып. 25, с. 22 - 26.

9. Бажанов В.Л., Гольденблат И.И., Копнов В.А., Поспелов А.Д., Синюков А.М. Пластинки и оболочки из стеклопластиков. М.,1970, с. 408.

10. Баублис П.С., Цыпинас И.К. Применение метода проектируемых градиентов для оптимизации упругих систем, подверженных потере устойчивости. -- Литовский механический сборник, 1969, № 1/4/, с. 70 - 81.

11. Беллман Р. Динамическое программирование.М., 1960.

12. Болотин В.В. Статистические методы в нелинейной теории упругих оболочек. -- Известия АН СССР. ОТН, 1958, № 3, с. 33 - 41.

13. Болотин В.В. Статистические методы в строительной механике. 2-е изд. М., 1965, с.280.

14. Болотин В.В., Макаров Б.П. Корреляционная теория докритических деформаций тонких упругих оболочек. -- Прикладная математика и механика,М., 1968, т.32, вып. 3, с.428 - 434.

15. Б о л о т и н В.В. Применение методов теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. М., 1971, с. 256.

16. Б о л о т и н В.В., Г о л ь д е н б л а т И.И., С м и р н о в А.Ф. Строительная механика. Современное состояние и перспективы развития. 2-е изд. М., 1972, с. 192.

17. Б р а у н с Я.А., Р и к а р д с Р.Б., Т е т е р с Г.А. Исследование начальных несовершенств и форм выпучивания стеклопластиковых оболочек при длительном нагружении. - В кн.: Теория оболочек и пластин. М., 1973, с. 99- 104.

18. Б у ш т ы р к о в А.А. Применение метода множителей Лагранжа для исследования устойчивости пластин и оболочек. -- В кн.: Тр. 4-ой Всес.конф. по теории оболочек и пластин. Ереван, 1964.

19. Б у ш т ы р к о в А.А. Устойчивость ортотропной цилиндрической оболочки с начальными неправильностями при осевом сжатии, поперечном давлении и кручении. - В кн.: 5-ая Всес.конф. по теории пластин и оболочек. М., 1965.

20. Б у ш т ы р к о в А.А. Нелинейная задача устойчивости цилиндрической ортотропной оболочки при осевом сжатии и поперечном давлении. -- В кн.: Проблемы устойчивости в строительной механике. М., 1965, с. 193 - 202.

21. В а с и л ь е в В.В. Исследование напряженного состояния цилиндрических оболочек из стеклопластика. -- Автореф. канд. диссерт., МАИ, 1964.

22. В а с и л ь е в В.В. Изгиб и кручение цилиндрических оболочек из стеклопластика при действии внутреннего давления. — В кн.: Прочность и устойчивость элементов тонкостенных конструкций. М., 1967.

23. В а с и л ь е в В.В., Е л п а т ь е в с к и й А.Н. Об особенностях деформирования цилиндрических оболочек, намотанных из однонаправленной стеклоленты при действии внутреннего давления. -- Механика полимеров, 1967, № 5.

24. В а с и л ь е в В.В., Е л п а т ь е в с к и й А.Н. Нелинейные деформации оболочек вращения из упругих нитей при действии внутреннего давления. -- В кн.: Расчеты на прочность. Вып. 13, М., 1968.

25. В а с и л ь е в В.В. Оптимальное проектирование пластинок и оболочек. -- В кн.: Тр. 7-ой Всес. конф. по теории оболочек и пластинок, 1969. М., 1970, с. 722 - 735.

26. В а с и л ь е в В.В., Е л п а т ь е в с к и й А.Н. Оптимальная форма оболочки вращения, изготовленной из стеклопластика методом непрерывной намотки. - В кн.: Тр.Моск. авиац. ин-та,1971,вып.180,с. 220-228.

27. В а с и л ь е в В.В., М а р ц ы н о в с к и й В.В. Об

одном классе оптимальных тонкостенных конструкций из армированных материалов. - В кн.: Проектирование оптимальных конструкций. Межвузовский сборник, вып. I, Куйбышевский авиационный институт, 1973.

28. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. 4-е изд. М., 1969. с. 572.

29. Власов Н.В. Выбор оптимальных параметров трехслойных пластин и оболочек при сжатии. — Тр. Куйбышев. авиационного ин-та, 1971, вып. 54, с. 16 - 23.

30. Волынский М.И., Палчевский А.С., Почтман Ю.М. Оптимальное проектирование ребристых цилиндрических оболочек с большими вырезами при осевом сжатии. — Прикладная механика, Киев, 1975, II, № 5, с. II8 - I2I.

3I. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. М., 1963, с. 880.

32. Воробьев Л.Н. Некоторые случаи устойчивости колон, объем которых минимум для заданной нагрузки. — Известия Новочеркасского индустриального института, т.4, № I8, 1938.

33. Вохмянин И.Т., Немировский Ю.В. О рациональном армировании пластин, теряющих устойчивость. — Прикладная механика, Киев, 1971, 7, № II, с. 70 - 77.

34. Г а н т м а х е р Ф.Р. Теория матриц. 2-е изд. М.,1966, с. 576.

35. Г а т а у л л и н М.З., И в а н о в В.А. Устойчивость ортотропной цилиндрической оболочки,связанной с упругим заполнителем. -- Механика твердого тела, 1975, № 1, с. 154 - 159.

36. Г е й з е н Р.Е. О методах оценки влияния начальных прогибов на устойчивость цилиндрических оболочек. - В кн.: Вопр. оптимальн. использ. ЭЦВМ в расчете сложн. конструкций. Казань, Казан. ун-тет, 1973, с. 43 - 51.

37. Г и н з б у р г И.Н., К а н С.Н. Выбор оптимальных параметров эксцентрично подкрепленной стрингерами цилиндрической оболочки при осевом сжатии. --В кн.: Теория пластин и оболочек. М., 1971, с.55 - 59.

38. Г и н з б у р г И.Н., К а н т о р Б.Я. Выбор оптимальных параметров гофрированных оболочек при осевом сжатии. -- В кн.: Теория оболочек и пластин. Тр. 8-ой Всес. конф. по теории оболочек и пластин, М., 1973, с. 652 - 656.

39. Г и н з б у р г И.Н., К а н т о р Б.Я., Ш е л у д ь к о Г.А. Подкрепленные цилиндрические оболочки минимального веса, сжатые в осевом направлении. -- В кн.: 9-ая Всес. конф. по теории оболочек и пластин, 1973. Аннотации докл. Л., 1973, с. 18.

40. Г и н з б у р г И.Н., К а н т о р Б.Я. Оптимизация по весу подкрепленных цилиндрических оболочек, сжатых в осевом направлении. — Изв. высших учебных заведений. Авиац. техн., 1974, № 1, с. 51 - 54.

41. Г и н з б у р г И.Н., К а н т о р Б.Я., Х о д о в а А.Е. Оптимальные по весу трехслойные цилиндрические оболочки. — Изв. высших учебных заведений.Авиац. техн., 1974, № 2, с. 48 - 51.

42. Г и н з б у р г И.Н., К а н т о р Б.Я., Р е к у т а Л.Ф. Выбор оптимальных параметров подкрепленных оболочек, сжатых в осевом направлении. — Динамика и прочность машин. Респ. межвед. темат. науч. -техн. сб., 1974, вып.19, с. 20 - 26.

43. Г о д е с Я.Ю., П о ч т м а н Ю.М. К вопросу о выборе оптимальных параметров цилиндрической стеклопластиковой оболочки при осевом сжатии. — Механика полиметров, 1972, № 5, с. 945 - 946.

44. Г о д е с Я.Ю., П о ч т м а н Ю.М. Расчет трехслойных панелей минимального веса как задача математического программирования. — Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1973, № 3, с. 134 - 140.

45. Г о н ч а р о в А.А., М а т в е е в В.Е. О выборе оптимальной формы оболочек вращения. — Оптимальное проектирование авиац.конструкций, Куйбышев, 1973 , вып.1, с.37-42.

46. Г р и г о л ю к Э.И. Тонкие биметаллические оболочки и пластины. - Инж. сборник,I953, I7.

47. Г р и г о л ю к Э.И. Уравнения осесимметрических биметаллических упругих оболочек. - Инж. сборник, I954, I8.

48. Г р и г о л ю к Э.И. О выборе исходной поверхности в теории изотропных оболочек. -- Изв. АН СССР, ОТН, I956, 8.

49. Г р и г о р е н к о Я.М. Изотропные и анизотропные слоистые оболочки вращения переменной жесткости. Киев, I973, с. 228.

50. Г р и г о р е н к о Я.М., В а с и л е н к о Е.И., Б е с п а л о в а и др. Численное решение задач статики орто - тропных оболочек с переменными параметрами.Киев, I975,

5I. Г р и щ а к В.З., К о с т ю ч е н к о И.Н. О выборе оптимального угла намотки стеклотканью цилиндрических оболочек при кружении. -- Гидроаэромеханика и теория упругости.Всес. межвузовский научный сборник, I975, вып. I9, с. I26 - I33.

52. Д а ф ф и н Р., П и т е р с о н Э., З е н е р К. Геометрическое программирование. М., I972, с. 3I2.

53. Д е х т я р А.С., М и х а й л е н к о В.Э. Оптимизация геометрических параметров пологих оболочек. -- Допов. АН УРСР, I972, А, № I, с. 63 - 65.

54. Е л и з а р о в А.Ф. Оптимальное проектирование стержней и стержневых систем, подверженных потере устойчивости, методом последовательных приближений. Автореферат канд. дисс., Новосибирск, 1972.

55. Е л п а т ь е в с к и й А.Н., В а с и л ь е в В.В. Прочность цилиндрических оболочек из армированных материалов, М., 1972, с. 168.

56. З а й ц е в Г.П., М а х о в Л.С. Оптимизация по жесткости тонкостенного ортотропного цилиндра, работающего на кручение с растяжением. — Механика полимеров, 1973, № 6, с. 1121 - 1123.

57. З а н г в и л л У.И. Нелинейное программирование. Единый подход. М., 1973, с. 312.

58. З у х о в и ц к и й С.И., А в д е е в а Л.И. Линейное и выпуклое программирование. М., 2-е изд., 1967, с. 460.

59. И г н а т о в И.В. Вероятностные характеристики параметров деформированного состояния безмоментной оболочки. — Сопротивл. материалов и теория сооружений. Респ. межвед. науч. - техн. сб., 1975, вып. 25, с. 15 - 21.

60. И е г и Э.М. Общая постановка задачи проектирования конструкции с оптимальной надежностью. — Тр. Таллин. Политехн. ин-та, 1975, № 375, с. 3 - 18.

61. К а в а л е р ч и к Б.Я. Оптимальное проектирование трехслойных оболочек. — Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1973, № 3, с. 167 - 169.

62. К а н т о р Б.Я., Х о д о в а А.Е., Ш е л у д ь к о Г.А. К расчету оптимальных трехслойных цилиндрических оболочек несимметричного строения. — В кн.: Расчет пространств. сист. в строит. мех. Саратовский университет. Саратов, 1972, с. 76 - 78.

63. К а н т о р о в и ч Л.В. Математические методы организации и планирования производства. Ленинград, ЛГУ, 1939. (Перепечатано в сборнике Применение математики в экономических исследованиях. М., 1959, Соцэкгиз.).

64. К а р а с е в А.В., М а л ю т и н И.С. Устойчивость стеклопластиковой цилиндрической оболочки с упругим заполнителем при кручении. — Механика полимеров, 1970, № 6, с. 1082 - 1086.

65. К о л о д я ж н ы й А.П. Выбор рациональных параметров стрингерной оболочки, нагруженной изгибающим моментом и осевой силой. — В кн.: Решение некоторых физ. - техн. задач, Днепропетровск, 1972, с. 44 - 48.

66. К о м и н а р В.А. Об устойчивости прямоугольной пластинки из стеклопластика. — Вестник ВНИИЖТ, М., 1967, 2 с.35 - 38.

67. К о м и н а р В.А. Влияние схемы армирования на устой-

чивость прямоугольной пластинки из стеклопластика. -- Механика полимеров, 1967, № 6, с. 1136 - 1139.

68. К о м и н а р В.А. Об оптимальном армировании пластинки из стеклопластика. - Механика полимеров, 1969, № 4, с.741-744.

69. К о р о л е в В.И. Слоистые анизотропные пластинки и оболочки из армированных пластмасс. М., 1965, с. 272.

70. К у з н е ц о в Э.Н., О с т р о в с к и й А.Ю. Об оптимальном проектировании безмоментных оболочек. -- В кн.: Тр. 7-ой Всес. конф. по теории оболочек и пластинок, 1969. М., 1970, с. 328 - 330.

71. К у з н е ц о в Э.Н., О с т р о в с к и й А.Ю. Оптимизация формы безмоментной оболочки вращения. -- В кн.: Новые методы расчета строительных конструкций. М., 1971, с.149-156.

72. К ю н ц и Г.П.,К р е л л е В. Нелинейное программирование. М., 1965, с. 304.

73. Л е й з е р а х В.М. Статистический анализ случайных неправильностей в цилиндрических оболочках при помощи ЭВМ. -- В кн.: Докл. научно-техн. конф. по итогам научно-исследовательских работ за 1968-1969 гг. МЭИ. Секц.Энергомашиностроительная, подсекция динамики и прочности машин. М., 1969, с. 45 - 55.

74. Л е й з е р а х В.М. О статистических свойствах поля начальных неправильностей в тонких цилиндрических оболочках. — Изв. высших учебн. заведений. Машиностроение, 1970, № 12, с. 12 - 16.

75. Л е й з е р а х В.М., М а к а р о в Б.П. Корреляционный статистический анализ деформаций сжатых оболочек с начальными неправильностями. — В кн.: Теория оболочек и пластин. Тр. 8-ой Всес. конф. по теории оболочек и пластин,М., 1973, с. 320 - 324.

76. Л е й з е р а х В.М. Экспериментальное исследование устойчивости стеклопластиковых цилиндрических оболочек под действием осевого сжатия при длительном нагружении. — Механика полимеров, 1973, № 4, с. 710 - 713.

77. Л е п и к Ю.Р. Применение принципа максимума Понтрягина в задачах прочности,устойчивости и колебаний тонкостенных конструкций (Обзор). - Механика.Периодический сб. пер. ин. статей, 1974, № 6, с. 126 - 141.

78. Л е х н и ц к и й С.Г. Теория упругости анизотропного тела.М., 1950.

79. Л е х н и ц к и й С.Г. Анизотропные пластинки. М.,1957,

80. Л и т в и н о в В.Г. Некоторые вопросы оптимизации пластин и оболочек. — Прикладная механика, 1972, 8, № 11, 33 - 42.

8I. Л у к о ш е в и ч ю с Р.С. Синтез прямоугольных пластинок минимального веса из композитного материала методом проектируемых градиентов Розена. - В кн.:Mokymo ir auklėjimo problemos. Rrespublikinės konferencijos tezės, Šiauliai, 1973, p. III.

82. Л у к о ш е в и ч ю с Р.С. Синтез прямоугольных пластинок минимального веса из композитного материала,подверженных потере устойчивости. - В кн.: Физико-механические свойства тонких пленок. Тезисы докл.конф. по развитию технических наук в республике и использованию их результатов,Каунас, 1974,с. 20 - 22.

83. Л у к о ш е в и ч ю с Р.С.,Р и к а р д с Р.Б.,Т е т е р с Г.А.,Ц ы п и н а с И.К. Синтез оптимальных цилиндрических оболочек из армированных пластиков с упругим заполнителем работающих на устойчивость. - Механика полимеров, 1975,№ 2,с. 285 - 293.

84. Л у к о ш е в и ч ю с Р.С.,Р и к а р д с Р.Б., Т е т е р с Г.А. Минимизация массы цилиндрических оболочек из композитного материала с упругим заполнителем при комбинированном нагружении,работающих на прочность и устойчивость. - Механика полимеров, 1976, № 2. с. 289 - 297.

85. Л у к о ш е в и ч ю с Р.С. Стохастические задачи оптимизации цилиндрических оболочек из композитного материала с учетом устойчивости и прочности.Депонированная в ВИНИТИ рукопись под № 688 - Деп. от 9.03.76 г., с. I7.

86. М а к а р о в Б.П. Анализ нелинейных задач устойчи - вости оболочек при помощи статистического метода.-Инженерный журнал, 1963, т. 3, вып. I, с. 100 - 106.

87. М а к а р о в Б.П., Л е й з е р а х В.М. К вопросу об устойчивости цилиндрических оболочек со случайными начальными неправильностями. - В кн.: Докл.научно-техн. конф. по итогам научно - исследовательских работ за 1968 - 1969 гг. МЭИ. Секц. энергомашиностроительная, подсекция динамики и прочности машин, М., 1969, с. 35 - 44.

88. М а к а р о в Б.П. Статистический анализ устойчивости несовершенных цилиндрических оболочек. - В кн.: Материалы 7-ой Всес. конф. по теории оболочек и пластинок, Днепропетровск, 1969. М., 1970, с. 387 - 391.

89. М а к а р о в Б.П. Статистический анализ деформаций несовершенных цилиндрических оболочек. - Расчеты на прочность, М., 1971, вып. 15, с. 240-256.

90. М а к а р о в Б.П., Л е й з е р а х В.М., С у д а - к о в а Н.И. Статистическое исследование начальных несовершенств цилиндрических оболочек. - В кн.: Проблемы надежности в строительной механике, Вильнюс, 1968, с. 175 - 181.

91. М а л м е й с т е р А.К. Геометрия теории прочности.- Механика полимеров, 1966, № 4.

92. Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. Сопротивление жестких полимерных материалов.2-е изд.Рига, 1972, с. 500.

93. Малютин И.С.,Карасев А.В. Устойчивость подкрепленной ребрами цилиндрической оболочки с упругим заполнителем.- В кн.: Теория пластин и оболочек, М., 1971, с. 173 - 178.

94. Маневич А.И.,Зайденберг А.М. К весовой оптимизации конструктивно - ортотропных цилиндрических оболочек. - В кн.: 9-ая Всес. конф. по теории оболочек и пластин, 1973. Аннотации докл., Л., 1973, с. 49.

95. Матвеев В.Е., Матвеева Ф.А. К решению задачи оптимального сопряжения оболочек вращения. - Оптимальное проектирование авиационных конструкций, Куйбышев, 1973, вып. I, с. 137 - 142.

96. Мацюлевичюс Д.А. Алгоритмы линейного программирования для синтеза стержневых статически определимых конструкций минимального веса. - В кн.: Строительная механика и конструкции, Вильнюс, 1964.

97. Мацюлевичюс Д.А. Некоторые особенности конфигурации стрежневых упругих статически определимых конструкций минимального веса. - В кн.: Строительная механика и конструкции. Вильнюс, 1964.

98. М а ц ю л е в и ч ю с Д.А. Алгоритм выпуклого программирования для синтеза упругой шарнирно - стержневой конструкции минимального веса в случае многих загружений. -- В кн.: Строительная механика. Вильнюс, I966.

99. М а ц ю л е в и ч ю с Д.А. Алгоритм поисковых гипотез в задачах оптимизации конструкций. Материалы Всес. конф. "Проблемы оптимизации в механике твердого деформируемого тела" (Вильнюс, 4 - 6 июня I974 г.), Вильнюс, I974.

I00. М и к и ш е в а В.И. О влиянии жесткости упругого заполнителя на форму потери устойчивости и величину критической нагрузки цилиндрических оболочек из стеклопластика при осевом сжатии. -- Механика полимеров, I97I, № 5, с. 93I - 939.

I0I. М и к и ш е в а В.И. Оптимальная намотка оболочек из стеклопластика работающих на устойчивость под внешним давлением или осевым сжатием. -- Механика полимеров,I968, № 5, с. 864 - 875.

I02. М и т к е в и ч А.Б., П р о т а с о в В.Д. Оптимизация оболочек давления к устойчивости от осевого сжатия. -- Механика полимеров, I973, № 6, с. II23 - II26.

I03. М у ш т а р и Х.М., Г а л и м о в К.З. Нелинейная теория упругих оболочек. Казань, I957.

I04. М у ш т а р и Х.М. К теории изгиба оптимальных по весу пластин из композитного материала. -- Прикладная механика, 1967, 3, № 4.

105. М у ш т а р и Х.М. Теория изгиба пластинок минимального веса из композитного материала. — Прикладная механика, 1967, 3, № 4.

106. Н а р у с б е р г В.Л., Р и к а р д с Р.Б. Влияние поперечного сдвига на устойчивость ортотропной цилиндрической оболочки с упругим заполнителем при осевом сжатии. — Механика полимеров, 1973, № 2, с. 267 - 273.

107. Н е к р у т м а н А.Б. Определение оптимальной формы безмоментной оболочки вращения при произвольном загружении. — В кн.: Автоматизация проектирования строительных конструкций на ЭЦВМ. М., 1971, с. 123 - 131.

108. Н е м и р о в с к и й Ю.В., С а м с о н о в В.И. О рациональном армировании цилиндрических оболочек, сжимаемых осевой силой. — Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1974, № 1, с. 103 - 112.

109. Н е м и р о в с к и й Ю.В., С а м с о н о в В.И. Цилиндрические армированные оболочки, наиболее устойчивые при всестороннем внешнем давлении. — Механика полимеров, 1974, № 1, с. 75 - 83.

110. Н е м и р о в с к и й Ю.В., С а м с о н о в В.И. О рациональном армировании цилиндрических оболочек теряющих устойчивость под действием крутящих моментов. — Прикладная механика, 1974, т. 10, вып. 5, с. 63 - 71.

III. Н и к о л а и Е.Л. Задача Лагранжа о наивыгоднейшем очертании колонны. — Тр. по механике, М., I955 .

II2. Н и о р д с о н Ф.И., П е д е р с е н П. Обзор исследований по оптимальному проектированию конструкций. — Механика. Периодический сб. пер. ин. статей, I973, № 2, с. I36 - I57.

II3. О б р а з ц о в И.Ф., В а с и л ь е в В.В. Некоторые вопросы расчета и проектирования оптимальных конструкций из ориентированных стеклопластиков. — Тр. Московс. авиац. ин-та. М., I97I, вып. I80, с. 20I - 2I6.

II4. О б р а з ц о в И.Ф., В а с и л ь е в В.В. Оптимальное проектирование пластинок и оболочек из армированных пластмасс. — В кн.: Теория пластин и оболочек, М.,I97I, с. 204 - 2I5.

II5. Оптимальное проектирование конструкций. Библиографический указатель отечественной и иностранной литературы за I948 - I974 гг. Часть I, Новосибирск, I975, с. 222.

II6. Оптимальное проектирование конструкций. Библиографический указатель отечественной и иностранной литературы за I948 - I974 гг. Часть П, Новосибирск, I975, с. 474.

II7. Оптимальные задачи надежности. Сб. статей под ред. И.А. У ш а к о в а, М., I968, с. 292.

118. Пастернак П.Л. и др. Железобетонные конструкции. М., 1961.

119. Полак Э. Численные методы оптимизации. Единый подход. М., 1974, с. 376.

120. Почтман Ю.М., Филатов Г.В. Проектирование цилиндрических оболочек минимальной массы с помощью метода случайного поиска. -- Реферативный сборник ЦИНИС Госстроя СССР "Межотраслевые вопросы строительства (отечественный опыт)". 1970, № 7.

121. Почтман Ю.М., Филатов Г.В. Оптимальное проектирование ребристых цилиндрических оболочек при совместном осевом сжатии и внутреннем давлении методом случайного поиска на ЭЦВМ. — В кн.: Тезисы докл. 6-ой Всес.конф. по применению ЭЦВМ в строительной механике (секция 5), Ленинград, 1971.

122. Почтман Ю.М., Филатов Г.В. Розрахунок циліндричних оболонок мінімальноі ваги методом випадкового пошуку з самонавчанням. -- Доповіди АН УССР, 1971, А, № 2, с. 163 - 166.

123. Почтман Ю.М., Филатов Г.В. Применение метода случайного поиска при оптимальном проектировании цилиндрических оболочек. -- Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1971, № 5, с. 199 - 201.

124. П о ч т м а н Ю.М. Проектирование сжатых стержней наименьшего объема методом случайного поиска. —Реферативная информация о законченных научно - исследовательских работах в вузах УССР (Строительная механика и расчет сооружений). Киев, 1972, вып. 3.

125. П о ч т м а н Ю.М. Выбор оптимальных параметров трех - слойных оболочек как задача математического программи - рования. — Сопротивление материалов и теория сооружений, 1972, вып. 16, с. 36 - 38.

126. П о ч т м а н Ю.М., Ф и л а т о в Г.В. Оптимизация методом случайного поиска параметров подкрепленных цилин - дрических оболочек. — Прикладная механика, 1973, 9, № 5, с. 38 - 43.

127. П о ч т м а н Ю.М. Оптимальное проектирование методами математического программирования некоторых стержневых и континуальных систем с учетом потери устойчивости, — Гидроаеромеханика и теория упругости. Всес. межвузовский сб. 1975, вып. 19, с. 107 - 114.

128. П ш е н и ч н ы й Б.Н., Да н и л и н Ю.М. Численные методы в экстремальных задачах. М., 1975, с. 320.

129. Р а с т р и г и н Л.А. Статистические методы поиска. М., 1968.

130. Р е й т м а н М.И. Оптимальное проектирование констукций методами математического программирования. — Строи-

тельная механика и расчет сооружений, 1969, № 3, с. 54 - 62.

131. Р и к а р д с Р.Б., Т е т е р с Г.А. О выборе опти - мальных параметров цилиндрической стеклопластиковой оболочки при осевом сжатии. -- Механика полимеров, 1970, № 6, с. 1132 - 1134.

132. Р и к а р д с Р.Б., Т е т е р с Г.А., Ц ы п и н а с И.К. Синтез оптимальных цилиндрических оболочек из армированных пластиков при внешнем давлении и осевом сжатии. -- Механика полимеров, 1972, № 2, с. 301 - 309.

133. Р и к а р д с Р.Б., Т е т е р с Г.А. Синтез цилиндри - ческих оболочек минимального веса из композитного мате - риала при статических нагрузках. -- В кн.: Тезисы докл. 4-я Всес. конф. по проблемам устойчивости в строительной механике, Харьков, 12-15 сентября 1972 г., М., 1972, с. 102 - 103.

134. Р и к а р д с Р.Б. Двойственная задача оптимизации ор - тотропной цилиндрической оболочки. -- Механика полимеров, 1973, № 5, с. 865 - 871.

135. Р и к а р д с Р.Б. Об оптимальной сжатой круговой цилиндрической оболочке. -- Механика полимеров, 1973, № 5, с. 944 - 947.

136. Р и к а р д с Р.Б., Т е т е р с Г.А. Оптимизация цилиндрических оболочек из композитного материала при комби -

нированном нагружении. -- В кн.: Материалы Всес. конф. "Проблемы оптимизации в механике твердого деформируемого тела". Тезисы докл. Вып. 2, Вильнюс, 1974, с. 38-39.

137. Р и к а р д с Р.Б. Управление упругими свойствами оболочки, работающей на устойчивость. -- Механика полимеров, 1974, № 1, с. 93 - 100.

138. Р и к а р д с Р.Б., Т е т е р с Г.А. Устойчивость оболочек из композитных материалов. Рига, 1974, с. 310.

139. Р и к а р д с Р.Б., Т е т е р с Г.А. Оптимизация цилиндрической оболочки из композитного материала с вязкоупругим заполнителем при осевом сжатии. -- Механика полимеров, 1975, № 3, с. 442 - 446.

140. Р я б ч е н к о в В.М. Вопросы расчета безмоментных подкрепленных оболочек минимального веса. -- Тр. 7-ой Всес. конф. по теории оболочек и пластинок, Днепропетровск, 1969. М., 1970, с. 679 - 683.

141, Система автоматического программирования для ЭВМ "Минск-22". Вычислительный центр ЭРСПО. Таллин, 1969, с. 150.

142. Система стандартных программ алгоритмического языка "МАЛГОЛ". Таллинский политехнический институт, кафедра вычислительной математики. Таллин, 1972, с. 108.

143. С м и р н о в А.Ф. Стержни и арки наименьшего веса при

продольном изгибе. -- Тр. МИИТ, I950, вып. 74.

I44. С т р е л е ц к и й Н.С. и др. Металлические конструкции, М., I96I.

I45. С т р е л к о в В.В. Метод случайного поиска в задаче весовой оптимизации вафельной цилиндрической оболочки.-- Строительная механика и расчет сооружений, I972, № 4, с. I0 - I2.

I46. С т р е л я е в В.С. Статистические закономерности разрушения композиций на основе минеральных волокон и полимерных матриц при квазистатическом нагружении. Докт. дис. М., I97I.

I47. С у х и н и н С.Н., М и к и ш е в а В.И. Устойчивость цилиндрических оболочек из стеклопластика с упругим заполнителем при действии осевого сжатия, внешнего давления и кручения. -- Механика полимеров, I974, № 3, с 484 - 489.

I48. Т е т е р с Г.А. Сложное нагружение и устойчивость оболочек из полимерных материалов. Рига, I969, с. 336.

I49. Х и м м е л ь б л а у Д. Прикладное и нелинейное программирование. М., I975, с. 536.

I50. Х и т р о в В.В. Влияние схемы армирования на устойчивость прямоугольных пластин из армированного материала. — Вопросы динамики и прочности. Рига, вып.22,I972, с.

145 - 157.

151. Х э д л и Г.Ф. Нелинейное и динамическое программи - рование. М., 1967.

152. Ц ы п и н а с И.К., Л у к о ш е в и ч ю с Р.С. Применение динамического программирования для оптимизации центрально сжатых стержней. — В кн.: Mokslinės konferencijos, skirtos TSRS 50-mečiui, pranešimų tezės, Šiauliai, 1972, pus. 133 - 135.

153. Ч е н ц о в Н.Г. Стойки наименьшего веса. — Труды Ц А Г И, 1936, вып. 265.

154. Ч и г и р и н с к и й А.В. К задаче выбора оптимальной структуры стеклопластика в упругих тонких оболочках вращения. — Прикладная механика, 1967, № 9.

155. Ч и р а с А.А. Применение методов линейного программирования к расчету статически неопределимых конструкций. — Тр. Вузов Лит. ССР, Стр-во и арх-ра, Вильнюс, 1963, т.3, № 2.

156. Ч и р а с А.А. Кинематическая формулировка расчета упруго - пластических одномерных систем в терминах линейного программирования. — В кн.: Строительная механика и конструкции. Вильнюс, 1964.

157. Ч и р а с А.А. Методы линейного программирования при

расчете упруго - пластических систем. Ленинград, I969, с. I98.

I58. Ч и р а с А.А. Теория оптимизации в предельном анализе твердого деформируемого тела. Вильнюс, I97I, с. I24.

I59. Ч и р а с А.А.,Б а р к а у с к а с А.Э.,К а р к а у с к а с Р.П.Л. Теория и методы оптимизации упруго - пластических систем. Ленинград, I974, с. 280.

I60. Ш а й к е в и ч В.Д. Синтез оптимальных систем методом геометрического программирования. -- Строительная механика и расчет сооружений, I972, № 4, с. I5 - 20.

I6I. Ю д и н Д.Б. Математические модели управления в усло - виях неполной информации (Задачи и методы стохастического программирования). М., I974, с. 400.

I62. B u s h H a r o l d G. Analytical design method for strength optimization of composite orthotropic laminates. -"Compos. Mater. Eng. Des. Proc. 6th Symp., St Luois, I972." Metals Park Ohio, I973, pp. 39I - 40I.

I63. C h a r n e s A., G r e e b e r g H.J. Plastic collapse and linear programming.- Prelеminary report, Bull Amer. Math. Soc., I95I, 57, N 6.

I64. Č y r a s A., K a l a n t a S. Optimal design of cylindrical shells by the finite element technique. - Mech. Res. Communs, I974, I, N 3, pp. I25 - I30.

165. Dantzig G. B. Programming of Interdependent activities, Mathematical model. - Econometrica, 17, 1949.

166. Goble George G., Moses Fred. Practical applications of structural optimization. - J. Struct. Div. Proc. Amer. Soc. Civ. Eng, 1975, 101, N 4, 635-648.

167. Hansen Jorn. Influence of general imperfetions in axially loaded cylindrical shells. - Rept Dan. Cent. Appl. Math. and Mech., 1974, N 76, 25 pp.

168. Heyman J. Plastic design of Beams and Plane Frames for Minimum Weight.-Stuct. Eng., 5, N 31, 1953.

169. Heyman J. Plastic design of Beams and Plane frames for Minimum Material Consumption, Quart. Appl. Math., 1951, 8, N 4.

170. Jones R.M., Morgan H.S., Whitney J.M. Buckling and vibration of antisymmetrically laminated angle-ply rectangular plates. - Tranactions of the ASME, 1973, E 40, N 4, 1143- 1144.

171. Kicher Thomas P., Chao Tung-Lai, Minimum weight design of stiffened fiber composite cylinders. - AIAA/ASME 11th struct., Struct. Dyn. and Mater. conf., Denver, Colo, 1970. Bound vol techn. pap struct. New York, N.Y., s.a., 129-145.

I72. K i c h e r T.P., C h o T u n g - L a i. Minimum vveight design of stiffened fiber compositel cylinders. - J. Aircraft, I97I, 8, N 7, pp. 562 - 569.

I73. K l a u s e n. Über die Form architektonischer Säulen, Bulletin physico - math. de l' Academie de St. - Petersbourgh, 9, I85I, pp. 368 - 379.

I74. K u h n H.VV., T u c k e r A.VV. Nonlinear programming, Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probabilėty, Univ. of California Press, Berkeley and Los Angeles, California, I95I.

I75. L a g r a n g e J. Sur la figure des colonnes. - Miscellanea Tauriniensia, t. V, pp. I770 - I773.

I76. M o e J. Fundamentals of optimization. - Computers and Structures, I974, vol 4, pp. 95 - II3.

I77. M o r r i s A.J.Structural optimization by geometric programming. - Int. J. Solids. and Struct, I972, 8, N 7, pp. 847 - 864.

I78. P a p a s M., A m b a - R a o C h i n t a k i n d i L. A discrete search procedure for the minimization of stiffend cylindrical shell stability equations. - AIAA J.I970, 8, N II, pp. 2093 - 2094.

I79. R i k a r d s R.B., T e t e r s G.A. Optimale Projektierung von Zylinder-mänteln aus Verbundvverkstoffen bei kombinierter Belastung. - Plaste und Kautschuk, I975 , 8, s. 629 - 632.

I80. R o s s e n J.B. The gradient projection method for nonlinear programming. Part II. Nonlinear constraints. - J. Soc.Indust. and Appl. Math., I96I, 9, N 4, pp. 5I4.

I8I. S c h m i t L.A., F a r s h i B. Optimum laminate design for strength and stiffnes. - Int.J. Numer. Math. Eng., I973, vol. 7, pp. 5I9 - 536.

I82. S h e u C.Y., P r a g e r VV. Recent development in optimal structural design. - Appl. Mech.Rev., 2I, I968, I0.

I83. S p e n c e r A.J.M., R o g e r s T.G., M o s s R.L. An optimal angle of vvinding for pressurized fiber-reinforced cylinders.- Mech. Res Communs,I974,N I,pp.27 - 32.

I84. T e m p l e m a n A.B. Engineuring optimization - scope and aims.- Eng.Optim, I974, I, N I, pp. I - 3.

I85. T e n n y s o n R.C., C h a n K.H., M u g g e r i d g e D. B. The effect of axisymmetric shape imperfections on the buckling of laminated anisotropic cirkular cylinders. - CASI Trans., I97I, 4, N 2, pp. I3I - I39.

I86. T r a h a i r N.S., B o o k e r J.R. Optimum elastic colummns. - Int. J. Mech. Sci. I970, I2, N II, 973 - 983.

I87. V a n S l o o t e n R.A., S o o n g T.T. Buckling of a long axially compressed thin cylindrical shell vvith random initial imperfections. - Trans. ASME, I972, E 39, N 4, pp. I066 - I07I.

I88. VV a s i u t i n s k i Z., B r a n d A. The present state of knovvledge on the field optimum design of structures. -Appl. Mech. Rev., I6, I963, c. 34I - 350.

I89. VV h i t n e y J.M., L e i s s a A.VV. Analysis of heterogeneous anisotropic plates. - Transaction of the ASME, I969, E 36, N 2, 26I - 266.