Kand. darbs

1934. g.

Daži pētijumi

par

telpas ruletēm.

Motto: „Patientia vincet."

Stud. math.

Emanuels Grünbergs

Motto: „Patientia vincet."

Stud. math.

Emanuels Grünbergs

Matr. 14875.

Konkursa darbs, iesniegts L.U. Matēmatikas
nodaļai 1933. g. 14. augustā.

Ievads.

1. Trīs-dimensiju telpā aplūkosim divas figūras (līnijas vai virsmas), no kurām viena lai būtu nekustīga. Liekot otrai figūrai velties pa pirmo, katrs ar to saistīts punkts apraksītis zināmu trajektoriju, ko mēs sauksim par telpas ruleti.

Ir tomēr iespējams vēl otrs ruletes vispārinājums trīs-dimensiju telpā: var aplūkot divas sākumā sakrītošas virsmas, vienu pieņemt par nekustīgu un otrai likt slīdēt pa pirmo, pie kam kāda kustošās virsmas līkā lai veļas pa kādu otru nekustošās virsmas līniju. Katrs otrās virsmas punkts apraksītis nekustošā virsmā zināmu trajektoriju, ko aplūkot divas sākumā sakritošas virsmas, vienu pieņemt par nekustīgu un otrai likt slīdēt pa pirmo, pie kam kāda kustošās virsmas līkā lai neļas pa kādu otru nekustošās virsmas līniju. Katrs otrās virsmas punkts apraksts ne-kustošā virsmā zināmu trajektoriju, ko mēs sauksim par virsmas ruleti. Ka šāda kustība ir iespējama, mums rāda, piemēram, lodes vai plāksnes slīdēšana „pašai pa sevi". Šo pēdējo vispārinājumu mēs aplūkosim vispirms, lai mums vēlāk ar to nebūtu jānodarbojas; tam ar pirmo, plašāko vispārinājumu nav tieša sakara.

Telpās ar vairāk kā trim dimensijām varētu atrast vēl citādus rulešu rašanās veidus; mēs tomēr aplūkosim tikai abus augšā minētos.

2. Šim apcerējumam izlietāto grāmatu saraksts pievienots tā beigās, līdz ar attiecīgiem saīsinātiem

aplūkot divas sākumā sakritošas virsmas, vienu pieņemt par nekustīgu un otrai likt slīdēt pa pirmo, pie kam kāda kustošās virsmas līkā lai velās pa kādu otru nekustošās virsmas līniju. Katrs otrās virsmas punkts apraksta nekustošā virsmā zināmu trajektoriju, ko mēs sauksim par virsmas ruleti. Ka šāda kustība ir iespējama, mums rāda, piemēram, lodes vai plāksnes slīdēšana „pašai pa sevi". Šo pēdējo vispārinājumu mēs aplūkosim vispirms, lai mums vēlāk ar to nebūtu jānodarbojas; tam ar pirmo, plašāko vispārinājumu nav tieša sakara.

Telpās ar vairāk kā trim dimensijām varētu atrast vēl citādus ruletu rašanās veidus; mēs tomēr aplūkosim tikai augšā minētos.

2. Šim apcerējumam izlietoto grāmatu saraksts pievienots tā beigās, līdz ar attiecīgiem saīsinātiem

apzīmējumiem, kas minēti piezīmēs.

Tāpat beigās pievienots speciālo terminu saraksts līdz ar vācu un franču valodas attiecīgiem nosaukumiem. Latviešu valodā diemžēl nav vēl izstrādāta un pieņemta vienota terminoloģija. Dažus terminus, kas nebija sastopami ne Latvijas Universitātē lasītās lekcijās, ne arī latviešu matemātiskajā literātūrā, nācās tulkot un sastādīt.

· ——— ·

·

Virsmu ruletes.

Iespējamības noteikumi.

3. Meklēsim noteikumus, kam jābūt izpildītiem, lai būtu iespējama virsmas brīva slīdēšana pašai pa sevi.

Iedomāsimies kādu materializētu virsmu (V) un uz tās uzstieptu lokamu bet neizstiepjamu gabalu (G), kas tai cieši piegulētu visos savos punktos. Mēs gribam atrast noteikumus, kuriem izpildītiem esot, šo gabalu (G) varētu pārvietot tā, ka tas visos savos punktos vienmēr piegulētu virsmai (V), un ka tas, vismaz kādā noteiktā (V) daļā (kas nesaturētu piem. īpatnējus punktus), varētu ieņemt ikkuru stāvokli. Šis pēdējais noteikums rāda, ka (G) stāvoklis būs noteikts ar 3 parametriem-jā piem. uz (V) ir konstruēta līklīniju koordinātu sistēma, (G) stāvokli noteiks kāda viņa punkta A līklīnijas koordinātes un lenķis, ko veidos kāds no A izejošs un ar (G) nekustīgi saistīts virziens ar vienas no-stāvokli. Šis pēdējais noteikums rāda, ka (G) stāvoklis būs noteikts ar 3 parametriem - jā piem. uz (V) ir konstruēta līklīniju koordinātu sistēma, (G) stāvokli noteiks kāda viņa punkta A līklīnijas koordinātes un leņķis, ko veidos kāds no A izejošs uz (G) nekustīgi saistīts virziens ar vienas noteiktas parametra līnijas pozitīvo virzienu.

Virsmas gabalam (G) pārvietojoties, katrā viņa punktā P, tā pilnīgā liece nemainas. Ja nu šis punkts P var sakrist ar ikkatru virsmas (V) punktu, vismaz kādā noteiktā (V) apvidū, visos šī apvidū punktos (V) jābūt ar pastāvīgu pilnīgo lieci.

No otras puses ir zināms, ka virsmas ar pastāvīgu pilnīgo lieci K ir ∞^3 daudz veidos pašas sev uztinamas, kā arī ∞^3 daudz veidos uztinamas rotācijas virsmai ar to pašu pilnīgo lieci K.[1] Ja K = 0, šī rotācijas virsma ir plāksne; ja K > 0, tā ir lode, ja K < 0 - tā ir Beltrami pseidolode.

---

[1] Scheffers II, 382. l.p.

4. Lai izpētītu rulletes uz virsmas ar pastāvīgu K, pietiek tā tad to uztīt uz attiecīgo rotācijas virsmu, tur noskaidrot vajadzīgos jautājumus un iznest vajadzīgās konstrukcijas un tad to attīt atpakaļ uz doto virsmu. Līdz ar to gadījumos, kur $K>0$ un $K=0$, problēma ir novesta uz sfēriskō un plāksnes rulletu jautājumu, kas ir jau sen ticis plaši un gandrīz izsmeļoši apstrādāts. Kā plašākos un sistēmatiskākos rakstus varētu minēt šādus (no tiem kas bija pieejami):

1) Haton de la Goupillière, „Étude géométrique et dynamique des roulettes planes ou sphériques". Šai apcerējumā, kas ievētots „Journal de l'École Polytechnique" 1911. g sējumā, plāksnes un lodes rulletes izpētītas ar diferenciālģeometrijas un kinemātiskas metodēm, pievienojot vēl dinamiskus pētījumus par spēkiem, kas radītu attiecīgās kustības.

2) E. Cesàro, „Remarques sur la théorie des

de l'Ecole Polytechnique" 1911. g sējumā, plāksnes un lodes ruletes izpētītas ar diferenciālģeometrijas un kinemātiskas metodēm, pievienojot vēl dinamiskus pētījumus par spēkiem, kas radītu attiecīgās kustības.

2) E. Cesàro, „Remarques sur la théorie des roulettes". Šis apcerējums atrodas „Nouvelles Annales de Mathématiques" 1888. g. sējumā un viņa autors ar savas naturālās ģeometrijas metodēm plaši izpēta plāksnes ruletes.

Ruletes uz pseidosfēras, kā liekas, nav tikušas pētītas, laikam gan tāpēc, ka mūsu ruletes definicija ar loskanā virsmas gabala pa-lidzību ir savā ziņā mākslota. Tomēr šo definiciju var attaisnot no kāda cita viedokļa: kā zināms lodes virsmas ģeometrija ir analoga ģeometrijai Riemann'a plāksnē, kamēr ģeometrija uz pseidolodes ir analoga ģeometrijai Lobačevska plāksnē. Tā tad arī ruletes problēma uz lodes vai pseidolodes būs analoga tai pašai problēmai Rīmaņa vai Lobačevska plāksnē. Mēs tomēr ar šo interesanto jautājumu vairāk nenodarbosimies, bet tikai kā illūstrāciju šī veida ruletēm apskatīsim attinamo virsmu gadījumu.

Attinamās virsmas.

5. Attinamās virsmas mēs varam šķirot trīs grupās: kōnos, cilindros un tangentu virsmās (t. i. virsmās, ko veido tangentes telpas līknai). Uz šīs virsmas (V) lai būtu dota kāda līknā (L_1), vai nu ortogonālās Dekarta, vai arī līklinijas koordinātās un otra līknā (L_2) ģeodētiskās polārkoordinātās. Jāatrod kāda ar (L_2) saistīta punkta O_2 rulete, jā (L_2) veļas pa (L_1) un virsmas gabals (G), kas satur kā (L_2) tā O_2, katrā savā stāvoklī visos savos punktos sakrīt ar pamatvirsmu. Vienkāršības pēc šo punktu O_2 mēs visu pieņemsim kā ar (G) saistītās ģeodētiskās polār-

un otra līknā (L_2) ģeodētiskās polārkoordinātās. Jāatrod kāda ar (L_2) saistīta punkta O_2 mlete, jā (L_2) veļas pa (L_1) un virsmas gabals (G), kas satur kā (L_2) tā O_2, katrā savā stāvoklī visos savos punktos sakrīt ar pamatvirsmu. Vienkāršības pēc šo punktu O_2 mēs visur pieņemsim kā ar (G) saistītās ģeodētiskās polārkoordinātu sistēmas polu.

Realizēšana. 6. Nebūs varbūt lieki parādīt nupat minētās kustības fizisko realizēšanu. To varēs panākt, ņemot divas virsmai (V) paralēlas un savstarpēji ļoti tuvas virsmas, starp tām ierīkojot sliedi (L_1) formā un liekot pa to velties lokanam (piem. papīra) virsmas gabalam (G), ko ierobežo līknā (L_2). Vēl vienkāršāki to varēsim realizēt, ņemot pašu materializēto virsmu (V), tai piestiprinot sliedi (L_1) formā un liekot pa (L_1) velties iepriekš minētam papīra gabalam (G), to pie tam vienmēr turot cieši piegulošu virsmai (V). Skaidrs, ka līdzīgi realizēšanas veidi iespējami arī tajos gadījumos, kur (V) nav attināma, tikai tur arī (6) vairs nevarēs būt lokams plāksnes gabals, bet gan tam vajadzēs būt vai nu lodes, vai arī pseidolodes gabalam.

Aplūkosim tagad atsevišķo attināmo virsmu tipus un meklēsim formulas, ar kuru palīdzību tās varēs uztīt uz plāksnes un, atkal otrādi, uztīt plāksni uz aplūkojamām virsmām.

Kōns. 7. Kōna (V) nolīdzinājums lai ir dots šādā formā, ņemot koordinātu sākumu O kōna virsotnē:

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{y}{x} = \varphi(t) \\[2ex] \dfrac{z}{x} = \psi(t) \end{cases}$$

Līniju (L_1) dos kōna (V) šķēlums ar virsmu

$$(2)\qquad F(x, y, z) = 0$$

Beidzot līnija (L_2) būs dota geodētiskās polārkoordinātās

$$(3)\qquad f(\rho, \varphi) = 0$$

punkta C koordinātas (B un C ir divi ∞ tuvi ~~tekoši~~ punkti)

$$(4)\begin{cases} OB = r = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \\ BC = ds = \sqrt{dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2} \end{cases}$$

Bet nu x, atrisinot kopā (1) un (2), mēs varam dabūt x, y un z kā t funkcijas. Tiešām, (1) rāda, ka

$$y = x \cdot \varphi(t) \qquad z = x \cdot \psi(t)$$

un šīs vērtības ievietotas (2) dod

$$F(x, x\cdot\varphi, x\cdot\psi) = 0$$

ko atrisinot attiecībā uz x dabūjam

$$x = x_1(t)$$

tad

$$y = x_1 \cdot \varphi = y_1(t)$$
$$z = x_1 \cdot \psi = z_1(t)$$

Tad nu mēs arī augšējos lielumus (4): r un ds varam aprēķināt kā (t) funkcijas. Lai atrastu (L_1') polāro nolīdzinājumu, t.i. sakaru starp r un <u>amplitūdi</u> θ, skaitītu attiecībā uz asi O_1x_1, izlietājam pazīstamo formulu

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$$

t.i.

$$\frac{ds^2 - dr^2}{r^2} = d\theta^2$$

Tad nu mēs arī angšējos lielumus (4) : r un ds varam aprēķināt kā (t) funkcijas. Lai atrastu (L_1') polāro nolīdzinājumu, t. i. sakaru starp r un amplitūdi θ, skaitītu attiecībā uz asi O_1x_1, izlietājam pazīstamo formulu

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$$

t. i. $$\frac{ds^2 - dr^2}{r^2} = d\theta^2$$

Sastādam kreiso pusi ar (4) palīdzību:

$$(4') \qquad r\,dr = x_1 dx_1 + y_1 dy_1 + z_1 dz_1$$

$$dr^2 = \frac{(\mathrm{S}\, x_1 dx_1)^2}{\mathrm{S}\, x_1^2}$$

un $$\frac{ds^2 - dr^2}{r^2} = \frac{\mathrm{S}\, dx_1^2 - \frac{(\mathrm{S}\, x_1 dx_1)^2}{\mathrm{S}\, x_1^2}}{\mathrm{S}\, x_1^2}$$

$$= \frac{\mathrm{S}\, dx_1^2\, \mathrm{S}\, x_1^2 - (\mathrm{S}\, x_1 dx_1)^2}{(\mathrm{S}\, x_1^2)^2}$$

Aprēķinam skaitītāju

$$\mathrm{S}\, dx_1^2\, \mathrm{S}\, x_1^2 - (\mathrm{S}\, x_1 dx_1)^2 = x_1^2(dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2) + y_1^2(dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2) + z_1^2(dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2) -$$

$$- (x_1^2 dx_1^2 + y_1^2 dy_1^2 + z_1^2 dz_1^2 + 2x_1y_1dx_1dy_1 + 2y_1z_1dy_1dz_1 + 2z_1x_1dz_1dx_1)$$

$$= (x_1dy_1 - y_1dx_1)^2 + (y_1dz_1 - z_1dy_1)^2 + (z_1dx_1 - x_1dz_1)^2$$

Mums tā tad galu galā ir nolīdzinājumi

$$(5) \qquad r^2 = \int^1 x_1^2$$

$$(6) \qquad d\theta^2 = \frac{\int^1 (x_1 dy_1 - y_1 dx_1)^2}{r^4}$$

pi kam x_1, y_1, z_1 ir zināmas t funkcijas. No (4') un (6) eliminējam dt, tad no iznākuma un (5) eliminējam t un tādi dabūjam (L_1') polārkoordinātu diferenciālnolīdzinājumu

$$\Phi(r, dr, d\varphi) = 0$$

kas dod

$$d\theta = \Phi_1(r)dr$$

$$\theta = \int \Phi_1(r)dr + \theta_0$$

Konstanti θ_0 noteiks sākuma radiusa vektora amplitude. Izvedot integrāciju un atrisinot attiecībā uz r dabūsim (L_1') nolīdzinājumu parastā veidā

$$(7) \qquad r = r(\theta)$$

Uztinot virsmas gabalu (6) uz plākni, tā ģeodētiskās līkās taps par taisnēm un (L_2) uztinuma (L_2') nolīdzinājums polārkoorvektora amplitude. Izvedot integrāciju un atrisinot attiecībā uz r dabūsim (L_1') nolīdzinājumu parastā veidā

$$(7) \qquad r = r(\theta)$$

Ustinot virsmas gabalu (6) uz plāksni, tā ģeodētiskās līnijas taps par taisnēm un (L_2) ustinuma (L_2') nolīdzinājums polārkoordinātās ρ_2, φ_2 būs identisks ar (L_2) nolīdzinājumu (3), pie kam centrs O_3 un ass O_3A ir O_2 un O_2A nolikums

$$(8) \qquad f(\rho_2, \varphi_2) = 0$$

Jau minētais H. de la Goupillière'a darbs O_3 ruletes (L_3) atrašanai dod šādas formulas: ja ϑ, R ir O_3 polārkoordinātas sistēmā ar polu O_1 un polāro asi O_1x_1

$$(9) \quad \begin{cases} \int d\theta \sqrt{r^2 + r'^2} = \int d\varphi_2 \sqrt{\rho_2^2 + \rho_2'^2} \\ R^2 = r^2 + \rho_2^2 + \dfrac{2r\rho_2(r\rho_2 - r'\rho_2')}{\sqrt{(r^2 + r'^2)(\rho_2^2 + \rho_2'^2)}} \\ \vartheta = \theta - \operatorname{arc\,tang} \dfrac{(r\rho_2' + r'\rho_2)(R^2 - \rho_2^2 - r^2)}{(r\rho_2 - r'\rho_2')(R^2 - \rho_2^2 + r^2)} \end{cases}$$

Eliminējot starp šiem trim nolīdzinājumiem

φ_2 un θ, mēs dabūsim (L_3') nolīdzinājumu

$$(10) \qquad f_1(R, \vartheta) = 0$$

Integrēšanas konstanti noteiks (L_2') sākuma stāvoklis.

Uztinot tagad plāksni atpakaļ uz konu tā, lai (L_1') uztinums būtu (L_1), (L_3') uztinumam (L_3) būs ģeodētiskās polārkoordinātās ar polu O tas pats nolīdzinājums (10) kā (L_3'). Lai atrastu šī uztinuma, kā arī vispār katras polārkoordinātu sistēmā (O_1, O_1x_1) dotās līknes uztinuma nolīdzinājumu Dekarta koordinātās, var rīkoties šādi: šķelsim mūsu konu ar lodi, kam centrs ir punktā O un radijs garuma vienība. Šķēluma līknē (L_4) būs acīmredzot kona veidulņu ortogonālā trajektorija un šīs līknes loks, starp diviem veidulim būs leņķis, ko veido viņu attinumi uz plāksnes.

(L_4) nolīdzinājumu no (1) kopā ar

lode, kam centrs ir punktā O un radijs garuma vienība. Šķēluma līknē (L_4) būs acīmredzot konu veiduļu ortogonālā trajektorija un šīs līknes loks, starp divām veidulēm būs leņķis, ko veido viņu attēlumi uz plāksnes.

(L_4) nolīdzinājumu dos (1) kopā ar

$$x^2+y^2+z^2=1$$

(izsvītrojot y un z ar to vērtībām, dabūjam

$$x^2=\frac{1}{1+\varphi^2(t)+\psi^2(t)}$$

t.i., ja (L_4) tekošā punkta koordinātas ir x_4, y_4, z_4:

$$(11)\quad\begin{cases} x_4 = +\dfrac{1}{\sqrt{1+\varphi^2+\psi^2}} \\[2ex] y_4 = \dfrac{\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2+\psi^2}} \\[2ex] z_4 = \dfrac{\psi}{\sqrt{1+\varphi^2+\psi^2}} \end{cases}$$

Ņemot x_4 pozitīvu, mēs aplūkojam tikai to (L_4) daļu, kas atrodas pozitīvo x pusē attiecībā uz yOz plāksni; otrā (L_4) daļa ir, acīmredzot, šai simmetriska. Bez tam ir skaidrs, ka x_4, y_4 un z_4 ir attiecīgās konu veidules virziena

Kosini. Saskaitām

$$ds_4^2 = dx_4^2 + dy_4^2 + dz_4^2$$

$$dx_4 = -\frac{(\varphi\varphi' + \psi\cdot\psi')\,dt}{(1+\varphi^2+\psi^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$dy_4 = \frac{[1+\varphi^2+\psi^2)\varphi' - \varphi(\varphi\varphi'+\psi\psi')}{(1+\varphi^2+\psi^2)^{\frac{3}{2}}}\,dt$$

$$dz_4 = \frac{(1+\varphi^2+\psi^2)\psi' - \psi(\varphi\varphi'+\psi\psi')}{(1+\varphi^2+\psi^2)^{\frac{3}{2}}}\,dt$$

Saskaitot šo izteiksmju kvadrātus, mēs dabūsim ds_4^2. Tomēr aprēķinus var vienkāršot, ievērojot to, ka (1) dod

$$y_4 = x_4\varphi \qquad z_4 = x_4\psi$$

Tā tad $dy_4 = dx_4\varphi + x_4 d\varphi \qquad dz_4 = dx_4\psi + x_4 d\psi$

un

$$ds_4^2 = dx_4^2(1+\varphi^2+\psi^2) + 2x_4 dx_4(\varphi d\varphi + \psi d\psi) + x_4^2(d\varphi^2 + d\psi^2)$$

Ievērojot attiecīgās nozīmes, mēs dabūjam

$$ds_4^2 = \frac{(\varphi\varphi'+\psi\psi')^2}{(1+\varphi^2+\psi^2)^2}dt^2 - \frac{2(\varphi\varphi'+\psi\psi')^2}{(1+\varphi^2+\psi^2)^2}dt^2 + \frac{(\varphi'^2+\psi'^2)}{1+\varphi^2+\psi^2}dt^2$$

$$= \frac{-\varphi^2\varphi'^2 - 2\varphi\psi\varphi'\psi' - \psi^2\psi'^2 + \varphi'^2 + \psi'^2 + \varphi^2\varphi'^2 + \varphi^2\psi'^2 + \psi^2\varphi'^2 + \psi^2\psi'^2}{(1+\varphi^2+\psi^2)^2}dt^2$$

un

$$ds_4^2 = dx_4^2(1+\varphi^2+\psi^2) + 2x_4\,dx_4(\varphi\,d\varphi + \psi\,d\psi) + x_4^2(d\varphi^2+d\psi^2)$$

Ievietojot attiecīgās nozīmes, mēs dabūjam

$$ds_4^2 = \frac{(\varphi\varphi'+\psi\psi')^2}{(1+\varphi^2+\psi^2)^2}\,dt^2 - \frac{2(\varphi\varphi'+\psi\psi')^2}{(1+\varphi^2+\psi^2)^2}\,dt^2 + \frac{(\varphi'^2+\psi'^2)}{1+\varphi^2+\psi^2}\,dt^2$$

$$= \frac{-\varphi^2\varphi'^2 - 2\varphi\psi\varphi'\psi' - \psi^2\psi'^2 + \varphi'^2+\psi'^2 + \varphi^2\varphi'^2 + \varphi^2\psi'^2 + \psi^2\varphi'^2 + \psi^2\psi'^2}{(1+\varphi^2+\psi^2)^2}\,dt^2$$

$$= \frac{\varphi'^2+\psi'^2+(\varphi\psi'-\psi\varphi')^2}{(1+\varphi^2+\psi^2)^2}\,dt^2$$

un

$$(12)\qquad s_4 = \int_{t_0}^{t} \frac{\sqrt{\varphi'^2+\psi'^2+(\varphi\psi'-\psi\varphi')^2}}{1+\varphi^2+\psi^2}\,dt$$

ja mēs s_4 sākam skaitīt no tā (L_4) punkta, kur $t=t_0$ un uz (L_4) pieņemtais pozitīvais virziens atbilst pieaugošam t.

Ja nu tagad polārkoordinātu sistēmā (O_1, O_1x_1) ir dots kāds punkts $P(R, \vartheta)$ un ja t_0 ir izvēlēts tā, lai attinumā attiecīgā veidule sakristu ar O_1x_1, mums būs

$$\vartheta = s_4$$

Uztinot plākni uz konu, arī P atstatums no O_1 resp. O nemainīsies, tā tad, ja uz kūņa P ieņemsim stāvokli $P_1(x_p, y_p, z_p)$, tad

$$R^2 = x_p^2 + y_p^2 + z_p^2$$

Ja un P ir kādas līknas

$$f_0(R, \vartheta) = 0$$

~~pe~~košais punkts, šīs līknas uztiemma punktiem būs

$$(13) \qquad f_0(\sqrt{x^2+y^2+z^2},\, s_4) = 0$$

un, tā kā tiem uz kūņa atrodoties ir spēkā arī (1), tad nolīdzinājumi (1) un (13) dod x, y un z kā parametra t funkcijas. Tā arī (L_3) mums dos (1) kopā ar (10), t. i.

$$(10') \qquad f_1(\sqrt{x^2+y^2+z^2},\, s_4) = 0.$$

---

8. Ja abas līknas (L_1) un (L_2) ir noslēgtas, apzīmējot to garumus l_1, l_2, var rasties divi gadījumi: vai nu l_1 un l_2 ir samērojami, vai nē.

Pirmā gadījumā būs

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{p}{q},$$

kur p un q ir veseli skaitļi un $\frac{p}{q}$ nesaīsinā-

8. Ja abas līkās (L_1) un (L_2) ir noslēgtas, apzīmējot to garumus l_1, l_2, var rasties divi gadījumi: vai nu l_1 un l_2 ir samērojami, vai nē.

Pirmā gadījumā būs

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{p}{q},$$

kur p un q ir veseli skaitļi un $\frac{p}{q}$ nesaīsināma racionāla daļa. Tas mums rāda, ka

$$q\,l_2 = p\,l_1$$

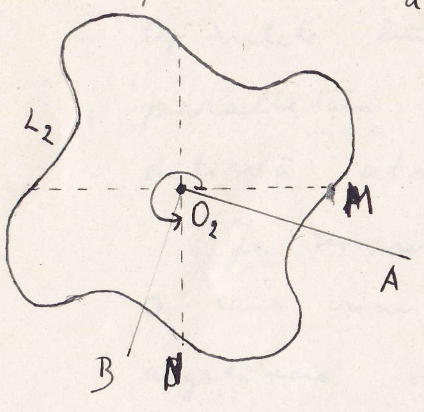
Tā tad kad līkai (L_2) uzlocīties tās pieskarpunkts ar (L_1) P būs q reizes apgājis (L_2) apkārt, tas būs reizē apgājis p reizes līkai (L_1) un pēc šiem q apgriezieniem (L_2) tā tad ieņems atkal to pašu stāvokli attiecībā uz (L_1), tā arī vispār telpā. Katra ar (L_2) saistīta punkta O_2 rulete (L_3) būs noslēgta līkā, kas vispārīgā gadījumā p reizes apriņķos līko (L_2), t.i. katra (L_2) normālā geodētiskā līkā to šķels vismaz p punktos*). Šķelšanās punktu skaits var pavairoties, jā rulete satur cilpas; tas būs mazāks, jā ruletei ir vairākkārtīgi loki. Par to viegli

* Ņemta noteiktā virzienā no attiecīgā (L_1) punkta un ierobežotā noslēgtā apvidū, kas satur (L_1), (L_2) un (L_3).

pārliecināties šādā kārtā: ja līkā (L_2) ir noslēgta, viņai acīmredzot ρ_1 ir φ_1 periodiska funkcija ar periodu 2π vai arī 2π dalīts ar kādu veselu skaitli n. Ja nu tagad n un p ir kāds kopējs dalītājs, kas nav viens, piem. a, būs

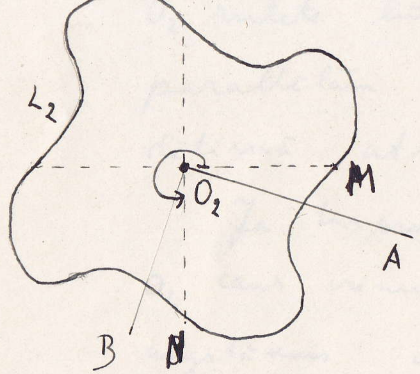
$$p = a p_1 \qquad n = a n_1$$

kur p_1, n_1 ir veseli, savstarpēji nesaīsināmi skaitļi. Liekot (L_2) p_1 reizes apvelties ~~apa~~ (L_1), pieskaršanās punkts P uz (L_2) būs aprakstījis $l_2 \frac{q}{a}$ reizes (L_2). Lai $\frac{q_1}{a}$ ir nesaīsināmā daļa, kas, atmetot $\frac{q}{a}$ ietilpstošos veselos, paliek pāri. Tā kā $\frac{2\pi}{an_1}=\tau$ ir ρ_1 argumenta φ_1 periods,



viegli redzēt, ka radiusi vektori, kas veido savā starpā leņķi $\frac{2\pi}{an_1}$, atdala L_2 loku, kas līdzinājas $\frac{l_2}{an_1}$, un arī otrādi: loka $\frac{l_2}{an_1}$ gala punktu radiusi vektori veido leņķi $\frac{2\pi}{an_1}$.

Tā tad, kad (L_2) būs p_1 reizes apvēlusies pa (L_1),



viegli redzēt, ka radiusi vektori, kas veido savā starpā leņķi $\frac{2\pi}{an_1}$, atdala L_2 loku, kas līdzinājas $\frac{l_2}{an_1}$, un arī otrādi: loka $\frac{l_2}{an_1}$ gala punktu radiusi vektori veido leņķi $\frac{2\pi}{an_1}$.

Tā tad, kad (L_2) būs p_1 reizes apritējusies pa (L_1), tās pieskaršanās punkts ar (L_1) būs uz (L_1) nonācis tai pašā vietā, turpretī uz (L_2) no punkta M tādā punktā N, ka orientētais leņķis starp O_2M un O_2N būs

$$\sphericalangle (O_2M, O_2N) = q_1 n_1 \cdot \frac{2\pi}{an_1} = q_1 n_1 \tau$$

(Augšējais zīmējums izvests plāknē, bet tik pat labi tas varētu būt uz ikkatras virsmas; O_2M un O_2N tad gan būtu ģeodētiskas linijas; mūsu slēdzieni būs vispārīgi.)

Pārejot no polārās ass O_2A uz O_2B tādu, ka

$$\sphericalangle (O_2A, O_2B) = q_1 n_1 \tau$$

radiusi vektori protams nemainīsies, bet φ_1 taps par tādu $\bar\varphi_1$, ka

$$\bar\varphi_1 = \varphi_1 - q_1 n_1 \tau$$

Tā kā periodiskās funkcijas ρ_1 periods ir T, arī jaunā koordinātu sistēmā ρ_1 būs tā pati φ_1 funkcija, kāda bija ρ_1 attiecībā uz φ_1. Ja mēs vēl ievērojam, ka punkta M amplitūde vecā un N amplitūde jaunā sistēmā ir vienādas, ir skaidrs, ka (L_2) nākošās p_1 reizes apvelšoties pa (L_1), t.i. kamēr P nākošās p_1 reizes aprakstīs (L_1), O_2 aprakstīs to pašu ruleti kā iepriekš. O_2 ruletē tad aprinkos (L_1) vairs tikai p_1 reizi.

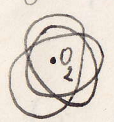
Robežgadījumā, kur ρ_1 vairs nav atkarīgs no φ_1 un tā tad konstants, O_2 ruletes daba vairs neiespaidos l_1 un l_2 garumu samērs. O_2 ruletē būs viena no (L_1) ģeodētiski parallēlām līknēm, kas atrodas ģeodētiskā attālumā ρ_1 no tās.

Ja turpretim l_1 un l_2 nav samērojami, O_2 caur vienu virsmas V punktu var iet augstākais divreiz; turpreti viņš bezgala daudzas reizes paiet garām katram zināmā

O_2 rulete būs viena no (L_1) ģeodētiski paralēlām līkām, kas atrodas ģeodētiskā atstatumā ρ_1 no tās.

Ja turpretim l_1 un l_2 nav samērojami, O_2 caur vienu virsmas V punktu var iet augstākais divreiz; turpreti viņš bezgala daudzas reizes paiet garām katram zināmā V joslā esošam punktam tuvāk par ikkatru iepriekš doto atstatumu, lai tas būtu cik mazs būdams. Šo joslu ierobežo (L_1) ģeodētiskās parallēles, kuŗu atstatums no (L_1) līdzinājas ρ_1 maksimumam un minimumam. Ja līkai (L_2) ir kādi īpatnēji punkti - infleksijas vai atgriešanās punkti, nav grūti katrā atsevišķā gadījumā noteikt augšminēto apgabalu.

Tāpat nebūs grūti analogi izpētīt gadījumu, kur (L_2) vairākkārt apriņķotu kādu



punktu O_2. Tur funkcijas ρ periods nebūs vairs 2π, bet gan $2\pi n$.

Šo drusku garo aplūkojumu gadījumam,

kur (L_1) un (L_2) ir nosligtas, mēs te ievietojām tāpēc, lai vēlāk nebūtu jāaplūko no jauna divu noslēgtu līku gadījums, no kurām viena velas pa otru. Visos gadījumos, kur būs jāizved līdzīgi pētījumi, tie ritīs analogi iepriekšējiem, ka mēs tos atmetīsim un minēsim tikai attiecīgos rezultātus.

9. Tā kā uz mūsu kōna (kā arī vispār uz attinamām virsmām) ģeodētiskām līnijām ir plāksnes taišņu īpašības, mēs varam uz šīm virsmām pārnest visus plāksnes ruletu teōrijas rezultātus, tikai vārdu „taisne" aizvietojot ar vārdu „ģeodētiskā līnija" un „attālums" – ar „ģeodētiskais attālums". Tā, piemēram, mēs varēsim runāt par ģeodētisko aplieksšanas riņķi (geodätischer Inflexionskreis, cercle géodésique des inflexions), definējot pieskaŗoŗos ap-

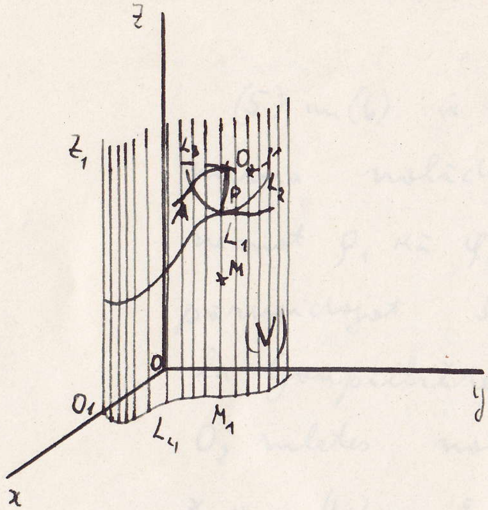
plāksnes rulešu teōrijas rezultātus, tikai vārdu „taisne" aizvietojot ar vārdu „ģeodētiskā līnija" un „attālums" – ar „ģeodētiskais attālums". Tā, piemēram, mēs varēsim runāt par ģeodētisko aplieks-šanas riņķi (geodätischer Inflexionskreis, cercle géodésique des inflexions), definējot pieskaŗošos aplieks-šanās ģeodētisko līniju analogi kā aplieks-šanās tangenti (Inflexionstangente, tangente d'inflexion) plāksnē. Ar tā palīdzību varam konstatēt, ka katrā mirklī viena kēna veidotājā ir viena punkta virsmas ruletes aplieks-šanās tangente: šī veidule ir tā, kas iet caur pieskarš-anās punktam P diametrāli pretējam ģeodētiskā aplieks-anās riņķa punktam un attiecīgais rulete atbilst otram punktam, kur šī veidu šķeļ aplieks-anās riņķi.

Ja mēs varam integrēt (12) formulu, t.i. izteikt s_1 slēgtā veidā kā t funkciju, mēs varam uz virsmas (V) konstruēt visas ģeodētiskās līnijas, kuŗām palīgvolidtinājums (10') būs

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cos(s_4-\alpha)=a$$

Mainot konstantes α un a mēs dabūsim visas ∞^2 dandzās ģeodētiskās līnijas. Tad mēs varēsim arī izteikt analitiski visas virsmas ruletu ģeodētiskās īpašības tā, cik sīki vien vēlamies, izpētīt katru konkrēto gadījumu.

Cilindrs. 10. Ņemot par z asi paralleli cilindra veidulēm, tā volidtinājums būs



(1) $f_1(x,y)=0$

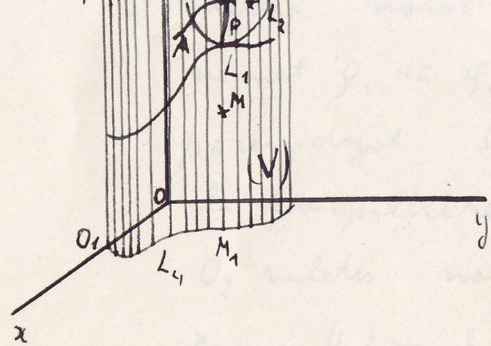
vai arī

(2) $x=\varphi(t)$ $y=\psi(t)$

Līniju (L_1) dos cilindra (V) šķēlums ar virsmu

(3) $F(x,y,z)=0$

un (L_2) būs dota ģeodētiskās polārkoordinātās ar polu O_2 un ģeodētisko polāro asi O_2A:



(2) $x = \varphi(t) \qquad y = \psi(t)$

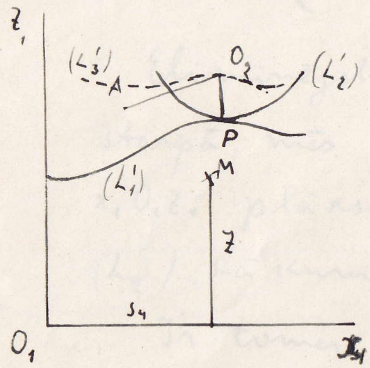
Līniju (L_1) dos cilindra (V) šķēlums ar virsmu

(3) $F(x, y, z) = 0$

un (L_2) būs dota ģeodētiskās polārkoordinātās ar polu O_2 un ģeodētisko polāro asi O_2A:

(4) $f_2(\rho_1, \varphi_1) = 0$

Lai cilindru varētu ērti uztīt uz plāksni, ņemam uz tā ortogonālu ģeodētisku koordinātu sistēmu, kas sastāv no veidotājām un taisnām šķēlumiem. Par koordinātu sākumu ņemot punktu O_1, kur x ass šķeļ cilindru, kāda cilindra punkta M koordinātas būs loka O_1M_1 garums s_4, jā M_1 ir caur M ejošās veidules pēda un $M_1M = z$. Attinot tagad cilindru uz tā pieskarplāksni veidules O_1z_1 punktos un ņemot šai plāksne par koordinātu asim tās šķēlumu O_1x_1 ar xOy plākni



un veidoli $O_1 z_1$, M notinuma koordinātas būs (s_4, z). Atliek tā tad atrast s_4.

Izslēdzot t (2) un (3) mums dod

$$F(\varphi, \psi, z) = 0$$

$$(5) \qquad z = z_1(t)$$

(2) un (5) kopā ir (L_1) notinuma vienādojums parametriskā formā. (L_4) vienādojums plaknē xOy ir (2) un tā pēc, ja t_0 ir tā parametra vērtība, kas atbilst punktam $O_1 z_1$, uz

$$(6)\, x_1 = s_4 = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}\, dt$$

(5) un (6) ir (L_1) notinuma vienādojums. (L_2) notinuma vienādojums ir tas pats (4). Pieņemot ρ_1 kā φ_1 funkciju un nedaudz pārveidojot šim gadījumam Haton de la Goupillière'a dotās formulas, mēs O_2 ruletes notinumam (L_3') dabūsim (jā x_1, y_1 ir (L_1) un ξ, η (L_3') punktu koordinātas):

$$\int \sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2 + z_1'^2}\, dt = \int d\varphi_1 \sqrt{\rho_1^2 + \rho_1'^2} \qquad (1)$$

ņemot ρ_1 kā φ_1 funkciju un nedaudz pārveidojot šim gadījumam Haton de la Goupillière'a dotās formulas, mēs O_2 ruletes notinumam (L_3') dabūsim (ja x_1, y_1 ir (L_1) un ξ, η (L_3') punktu koordinātas):

$$
(7)\begin{cases}
\int\sqrt{\varphi'^2+\psi'^2+z_1'^2}\,dt = \int d\varphi_1\sqrt{\rho_1^2+\rho_1'^2} & (1)\\[2ex]
\xi - x_1 = \dfrac{\rho(\rho z_1' - \rho'\sqrt{\varphi'^2+\psi'^2})}{\sqrt{(\rho^2+\rho'^2)(\varphi'^2+\psi'^2+z_1'^2)}} & (2)\\[2ex]
\eta - z_1 = \dfrac{\rho(\rho\sqrt{\varphi'^2+\psi'^2}+\rho' z_1')}{\sqrt{(\rho^2+\rho'^2)(\varphi'^2+\psi'^2+z_1'^2)}} & (3)
\end{cases}
$$

Eliminējot t un φ_1 šo trīs nolīdzinājumu starpā, mēs dabūtu (L_3') nolīdzinājumu $x_1O_1z_1$ plāksnē. Integrācijas konstanti noteiks (L_2') sākuma stāvoklis.

Ir tomēr izdevīgāki ar (7_1) palīdzību eliminēt φ_1 no (7_2) un (7_3) - tad šie abi pēdējie nolīdzinājumi dos (L_3') parametriskā formā. Uztinot $x_1O_1z_1$ plāksni atpakaļ uz cilindru, mums būs, ja x_3, y_3, z_3 ir (L_3) tekošā punkta koordinātas,

$$z_3 = \eta$$

un x_3 un y_3 atrašanai jāzina attiecīgā t nozīme. Te nu jāievēro, ka nolīdzinājumā (7) t ir tā nozīme, kas atbilst punktam P un nevis O_2 uz cilindra. Tāpēc arī no (7) dabūtās ξ un η nozīmēs mēs rakstīsim

$$(7')\quad \begin{cases} \xi = \xi(\bar{t}) \\ \eta = \eta(\bar{t}) \end{cases}$$

$\bar{t}$ atbilstošo (2) nolīdzinājuma parametru t tad nu dos (6) nolīdzinājums

$$\xi = s_4$$

ko atrisinot attiecībā uz $\bar{t}$ dabūsim

$$\bar{t} = F_1(t)$$

un tad galīgi (L_3) nolīdzinājums būs

$$(8)\quad \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \eta(F_1(t)) = \chi(t) \end{cases}$$

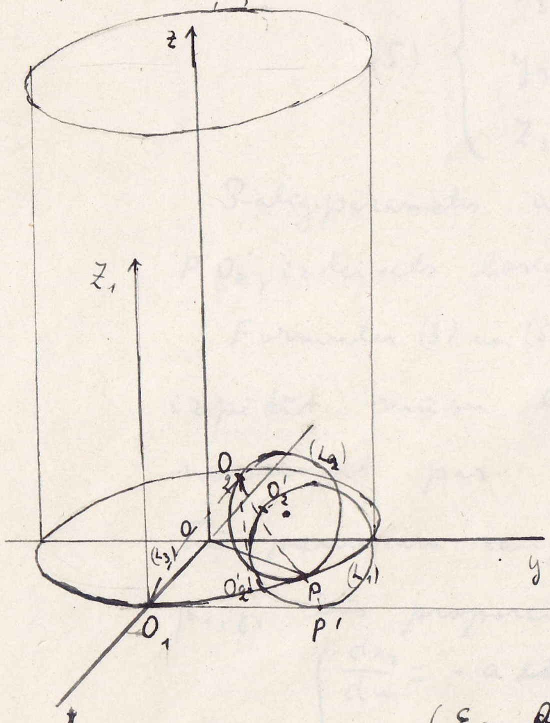
11. Kā piemēru ņemsim taisnu riņķa cilindru. Ņemot tā asi par z asi,

un tad galīgi (L_3) nolīdzinājums būs

$$
(8)\quad \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \eta(F_1(t)) = \chi(t) \end{cases}
$$

11. Kā piemēru ņemsim taisnu riņķa cilindru. Ņemot tā asi par z asi, viņa nolīdzinājums būs

$$
(1)\quad \begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \end{cases}
$$



Pa tā pamata riņķi (L_1) velsim ģeodētisko riņķi (L_2), ar radiju b, un meklēsim kāda viņa punkta O_2 trajektoriju (L_3). Sistēmā $x_1 O_1 z_1$ tās attinumu (L_3') izteic

$$
(9)\quad \begin{cases} \xi = b\left[t\frac{a}{b} - \sin\left(t\frac{a}{b}\right)\right] \\ \eta = b\left[1 - \cos\left(t\frac{a}{b}\right)\right] \end{cases}
$$

un iepriekšējā paragrāfa (6) dod

$$
s = at
$$

Pielīdzinot s un ξ dabūjam

$$a t = a\bar{t} - b \sin\left(\bar{t}\,\frac{a}{b}\right)$$

Šeit izdevīgāki izteikt t caur $\bar{t}$:

$$t = \bar{t} - \frac{b}{a}\sin\left(\bar{t}\,\frac{a}{b}\right)$$

un ievedot jaunu parametru $u = \bar{t}\,\frac{a}{b}$ un apzīmējot $\frac{b}{a} = k$

$$t = k(u - \sin u)$$

(1) un (2) tad mums dos

$$(3)\quad \begin{cases} x_3 = a\cos(ku - k\sin u) \\ y_3 = a\sin(ku - k\sin u) \\ z_3 = ak(1 - \cos u) \end{cases}$$

Ja mēs punktu O_2 nebūtu ņēmuši uz ģeodētiskā riņķa (L_2), bet uz ģeodētiskā attālumā c no riņķa centra, tad būtu (2) vietā

$$(4)\quad \begin{cases} \xi = b\left(\bar{t}\,\frac{a}{b}\right) - c\sin\left(\bar{t}\,\frac{a}{b}\right) \\ \eta = b - c\cos\left(\bar{t}\,\frac{a}{b}\right) \end{cases}$$

Liekot atkal

$$u = \bar{t}\,\frac{a}{b} \qquad \frac{b}{a} = k \qquad \frac{c}{a} = l$$

dabūjam

$$\begin{cases} x_3 = a\cos(ku - l\sin u) \end{cases}$$

c no riņķa centra, tad būtu (2) veidā

$$(4)\begin{cases} \xi = b\left[\bar{t}\frac{a}{b}\right) - c\sin(\bar{t}\frac{a}{b}) \\ \eta = b - c\cos(\bar{t}\frac{a}{b}) \end{cases}$$

Liekot atkal

$$u = \bar{t}\frac{a}{b} \qquad \frac{b}{a} = k \qquad \frac{c}{a} = l$$

dabūjam

$$(5)\begin{cases} x_3 = a\cos(ku - l\sin u) \\ y_3 = a\sin(ku - l\sin u) \\ z_3 = a(k - l\cos u) \end{cases}$$

Palīgparametrs u nav nekas cits, kā loks $P'O_2'$, izteikts loka mēros.

Formulas (3) un (5) mums atļauj pilnīgi izpētīt mūsu līknes, ko mēs varētu nosaukt par cilindra taisnām cikloīdām. Tā piemēram tangentes virziena kosinusi α, β, γ, būs proporcionāli lielumiem

$$(6)\begin{cases} \frac{dx_3}{du} = -a\sin(ku - l\sin u)(k - l\cos u) \\ \frac{dy_3}{du} = a\cos(ku - l\sin u)(k - l\cos u) \\ \frac{dz_3}{du} = +c\sin u \end{cases}$$

Pārliecināsimies, ka geodētiskā līkā, kas iet caur O_2 un P, tieš-ām ir ģeodētiskā (L_3) normāle punktā O_2. Tas, protams, ir acīmredzams noti-numā, bet mēs par to gribam pārlieci-nāties tieši, uz cilindra. Šis ģeodētiskās līkās, kas ir cilindriska vītes līnija, tekošā punkta koordinātas ir (izlietojot (6), t.i. O_2 neesot uz L_2)

$$(7)\begin{cases} \bar{x} = a\cos(ku-\beta) \\ \bar{y} = a\sin(ku-\beta) \\ \bar{z} = \beta\left(\dfrac{ak}{l\sin u} - a\cotg u\right) \end{cases}$$

pie kam te u ir konstante un β - mainīgais parametrs. Mēs nonākam pie (7) ievērojot, ka leņķis $O_1OP = ku$ un aprēķinot vītes kāpi h:

$$h = \frac{O_2O_2'}{\frac{\smile O_2'P}{a}} \cdot 2\pi = \frac{\Delta z_3}{l\sin u}\cdot 2\pi = \frac{ak - al\cos u}{l\sin u}\cdot 2\pi$$

Aprēķinam $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ atvasinājumus

$$(8)\begin{cases} \dfrac{d\bar{x}}{d\beta} = a\sin(ku-\beta) \\ \dfrac{d\bar{y}}{d\beta} = -a\cos(ku-\beta) \end{cases}$$

Kāpi h:

$$h = \frac{O_2 O_2'}{\frac{v O_2' P}{a}} \cdot 2\pi = \frac{a z_3}{l \sin u} \cdot 2\pi = \frac{aK - a l \cos u}{l \sin u} \cdot 2\pi$$

Aprēķinam $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ atvasinājumus

$$(8) \begin{cases} \dfrac{d\bar{x}}{d\beta} = a \sin(Ku - \beta) \\ \dfrac{d\bar{y}}{d\beta} = -a \cos(Ku - \beta) \\ \dfrac{d\bar{z}}{d\beta} = \dfrac{aK}{l \sin u} - a \cot g\, u \end{cases}$$

Punktā O_2 $\beta = l \sin u$.

Ievietosim formulās (8) šo β nozīmi un sastādīsim

$$\frac{dx_3}{du} \cdot \frac{d\bar{x}}{d\beta} + \frac{dy_3}{du} \cdot \frac{d\bar{y}}{d\beta} + \frac{dz_3}{du} \cdot \frac{d\bar{z}}{d\beta} = -a^2 \sin^2(Ku - l \sin u) \cdot (K - l \cos u)$$

$$- a^2 \cos^2(Ku - l \sin u) \cdot (K - l \cos u)$$

$$+ a^2 K - a^2 l \cos u$$

$$= 0$$

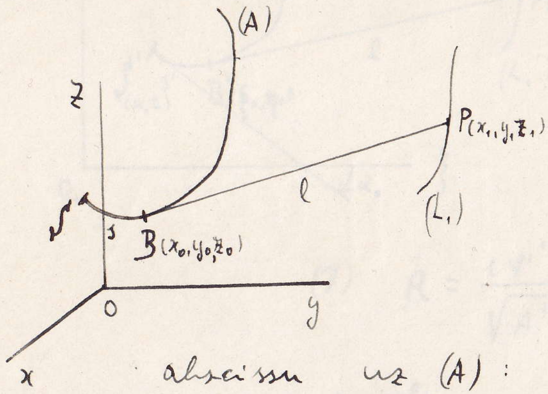
Tā arī analītiskā ceļā ir redzams, ka vītes līnija, kas savieno P un O_2, ir perpendikulāra O_2 ruletei.

12. Tāpat kā kōna gadījumā, arī te mēs varētu aplūkot gadījumus, kur

(L_1) un (L_2) garumi ir vai nav samērojami. Otrā gadījumā atkal varēs noteikt zināmu joslu, kuras katram punktam (L_3) ies ~~tur~~ tuvāk garām par kuru katru robežu.

Tangentu virsmas.

13. (L_1), kā vispār visas līknās uz tangentu virsmas, mēs definēsim ar atgriešanās līknās (A) palīdzību, izsakot sakarību starp nogriezni l, ko (L_1) atšķeļ uz (A) tangentes tekošā punktā B un B liklinijas abscissu uz (A):



$$(1) \qquad l = l_1(s)$$

Pati tangentu virsma būs dota, ja zināsim viņas atgriešanās līkno (A), kuras tekošā punkta B koordinātas lai ir x_0, y_0, z_0:

$$(2) \qquad \begin{cases} x_0 = \varphi(t) \\ y_0 = \psi(t) \\ z_0 = \chi(t) \end{cases}$$

$$(1) \quad l = l_1(s)$$

Pati tangentu virsma būs dota, ja zināsim viņas atgriešanās līko (A), kuras tekošā punkta B koordinātas lai ir x_0, y_0, z_0:

$$(2) \quad \begin{cases} x_0 = \varphi(t) \\ y_0 = \psi(t) \\ z_0 = \chi(t) \end{cases}$$

(1) un (2) kopā dod arī iespēju viegli atrast (L_1) tekošā punkta P koordinātas x_1, y_1, z_1: vispirms (2) dod

$$(3) \quad s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2 + \chi'^2}\, dt$$

pie kam $t = t_0$ atbilst loku sākuma punktam β; šo s vērtību ievietojot (1) dabūjam

$$(4) \quad l = \bar{l}_1(t)$$

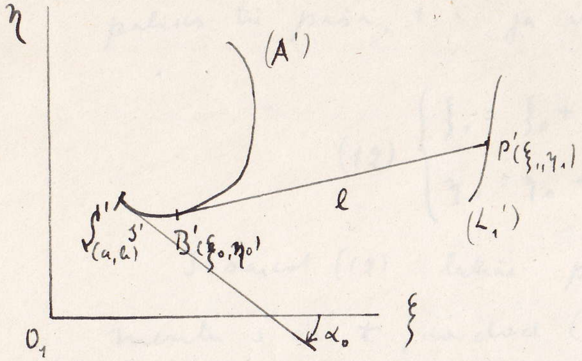
un

$$(5) \quad \begin{cases} x_1 = x_0 + \alpha_1 \bar{l}_1 \\ y_1 = y_0 + \beta_1 \bar{l}_1 \\ z_1 = z_0 + \gamma_1 \bar{l}_1 \end{cases}$$

kur $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ ir tangentes BP virziena koeficienti, t.i.

$$(6) \quad \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{\varphi'}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2 + \chi'^2}} \\ \beta_1 = \dfrac{\psi'}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2 + \chi'^2}} \\ \gamma_1 = \dfrac{\chi'}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2 + \chi'^2}} \end{cases}$$

Lai virsmu (V) notītu uz plakni, atcerēsimies, ka vienu virsmu notinot uz otru, tās līkņu ģeodētiskie liekumi nemainas. Tā kā (A) ģeodētiskais liekums ir viņas paša-as liekums $\frac{1}{R}$, (A) notinumam (A') būs katrā punktā B' tas pats liekums $\frac{1}{R}$ kāds ir līknei (A) punktā B. Bez tam loki $\int B$ un $\int' B'$ būs vienādi. Kā zināms



$$(7) \qquad R = \frac{(\varphi'^2+\psi'^2+\chi'^2)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

kur $A = \begin{vmatrix} \psi' & \chi' \\ \psi'' & \chi'' \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} \chi' & \varphi' \\ \chi'' & \varphi'' \end{vmatrix}$, $C = \begin{vmatrix} \varphi' & \psi' \\ \varphi'' & \psi'' \end{vmatrix}$

Izslēdzot t starp (3) un (7) dabūjam (A') naturālo vienādojumu:

$$(8) \qquad f_1(s, R) = 0$$

Vēl vienkāršāk (8) dabūjams, ja atgriešanās līknē dota ar saviem naturāliem vienādojumiem, kur T būs šķiebuma rādijs:

$$(F_1(R, T, s) = 0$$

kur $A = |\psi'' \chi''|$, $B = |\chi'' \varphi''|$, $C = |\varphi'' \psi''|$

Izslēdzot t starp (3) un (7) dabūjam (A') naturālo vienādojumu:

$$(8) \qquad f_1(s, R) = 0$$

Vēl vienkāršāki (8) dabūjams, ja atgriešanās līknē dota ar saviem naturāliem vienādojumiem, kur T būs šķiebuma rādijs:

$$(9) \qquad \begin{cases} F_1(R, T, s) = 0 \\ F_2(R, T, s) = 0 \end{cases}$$

Lai dabūtu (8), pietiek no abiem vienādojumiem (9) ēliminēt T.

(8), ar trim kvadrātūram, dod (A') nolīdzinājumu Deskarta koordinātās: ja α ir leņķis, ko (A') tangentes pozitīvais virziens veido ar $O_1\xi$ pozitīvo virzienu,

$$(10) \qquad \alpha = \alpha_0 + \varepsilon \int_0^s \frac{ds}{R}$$

$\varepsilon = +1$, ja mēs (6) vēlamies, lai (A') būtu izliekta uz augšu, kā zīmējumā, jo $R > 0$. α_0 ir leņķis, ko ar ξ asi veido tangentē punktā S'. Tad, ja a un b ir punkta S' koordinātas,

$$(11)\begin{cases}\xi_0 = a + \int_0^s \cos\alpha . ds \\ \eta_0 = b + \int_0^s \sin\alpha . ds\end{cases}$$

Formulas (11) mums dod ξ_0 un η_0 kā s funkcijas, (10) dod attiecīgo α. Punkta P noteiņumam kā s, tā l paliek tie paši, t. i. ja viņa koordinātas ir ξ_1, η_1,

$$(12)\begin{cases}\xi_1 = \xi_0 + l\cos\alpha \\ \eta_1 = \eta_0 + l\sin\alpha\end{cases}$$

Izsakot (12) labās puses funkciju argumentu s ar t, ko dod (3), mēs dabūsim ξ_1, η_1 kā t funkcijas.

Pieņemot, ka (L_2) atkal būtu dots ģeodētiskās polārkoordinātās, tās nolīdzinājums nolīnumā būs tas pats

$$(13)\qquad f_2(\rho_2, \varphi_2) = 0$$

Kā tas parādīts jau 16. lp. p., mēs varam dabūt ruletes (L_3) nolīdzinājumu

$$(14)\begin{cases}\xi = \xi_2(\bar{t}) \\ \eta = \eta_2(\bar{t})\end{cases}$$

Lai arī (L_3) varētu izteikt tāda pat

numā būs tas pats

$$(13) \qquad f_2(\rho_2, \varphi_2) = 0$$

Kā tas parādīts jau 16. §.p., mēs varam dabūt ruletes (L_3) nolīdzinājumu

$$(14) \quad \begin{cases} \xi = \xi_2(\bar{t}) \\ \eta = \eta_2(\bar{t}) \end{cases}$$

Lai arī (L_3) varētu izteikt tādā pat veidā, kādā ir dota (L_1), šķelsim (L_3') ar (A') tangenti punktā B, kuras nolīdzinājums ir

$$(15) \quad \begin{cases} \xi = \xi_1 + l \cos \alpha \\ \eta = \eta_0 + l \sin \alpha \end{cases}$$

Ievietojot (14) šīs pēdējās ξ un η izteiksmes, dabūsim divus nolīdzinājumus, kas satur mainīgos s, l un parametru $\bar{t}$. Šo pēdējo izslēdzot un atrisinot attiecībā uz l mēs galā dabūsim

$$(16) \qquad l = l_3(s)$$

kas būs (L_3) kanoniskās formas nolīdzinājums. (L_3) punktu Dekarta koordinātas dabūjam tādā pat kārtā kā līknai (L_1).

14. Kā konkrētu piemēru aplūkosim riņķa cilindra vītes līnijas tangentu virsmu. Šai līnijai kā liekumā tā arī šķiebuma radiji ir konstanti, tāpēc arī (A') būs riņķis ar konstanto radiju R. Vienkāršības pēc ņemot centru O, riņķa centrā, (A') nolīdzinājums būs

$$(1)\quad \begin{cases} \xi_0 = R\cos\frac{s}{R} \\ \eta_0 = R\sin\frac{s}{R} \end{cases}$$

Kā viegli redzēt

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{d\eta_0}{d\xi_0} = \frac{+\cos\frac{s}{R}}{-\sin\frac{s}{R}} = -\operatorname{ctg}\frac{s}{R}$$

tā tad

$$(2)\qquad \alpha = \frac{s}{R} + \frac{\pi}{2}$$

(1) un (2) atļauj mūsu virsmu (V) nolikt uz plāksni un atkal plāksni uztīt atpakaļ uz virsmu. Mēs pie šī jautājuma vairāk nekavēsimies, tikai uzmetīsim vēl taisnes uztinuma, t.i. geodetiskās līnijas vispārīgo kanonisko nolīdzinājumu. Taisnes vispārīgais nolīdzinājums sistēmā $\xi O \eta$ ir

$$A\xi + B\eta = C$$

Pacelot kvadrātā un saskaitot, dabūjam

$$l^2 = \frac{a_1^2 h_1^2 + R^2 a_1^2 \sin^2\frac{s}{R} + R^2 h_1^2 \cos^2\frac{s}{R} - 2Ra_1^2 h_1 \sin\frac{s}{R} - 2Ra_1 h_1^2 \cos\frac{s}{R} + 2R^2 a_1 h_1 \sin\frac{s}{R}\cos\frac{s}{R}}{\left(h_1 \sin\frac{s}{R} - a_1 \cos\frac{s}{R}\right)^2}$$

$$= \frac{\left(a_1 h_1 - R a_1 \sin\frac{s}{R} - R h_1 \cos\frac{s}{R}\right)^2}{\left(h_1 \sin\frac{s}{R} - a_1 \cos\frac{s}{R}\right)^2}$$

un

$$(6) \qquad l = \left| \frac{a_1 h_1 - R a_1 \sin\frac{s}{R} - R h_1 \cos\frac{s}{R}}{h_1 \sin\frac{s}{R} - a_1 \cos\frac{s}{R}} \right|$$

jo l vienmēr ir pozitīvs. Formula (6) mums dod visas mūsu virsmas ģeodētiskās līnijas, ieskaitot arī veidotājas. Tiešām, ja izvēlamies

$$a_1 = \frac{R}{\cos\vartheta} \qquad h_1 = \frac{R}{\sin\vartheta}$$

tad l top

$$(6') \qquad l = R\,\frac{1 - \cos\left(\frac{s}{R} - \vartheta\right)}{\left|\sin\left(\frac{s}{R} - \vartheta\right)\right|}$$

un ja $s = R\vartheta$, l top nenoteikts, kā tam arī jābūt.

15. Gadījumā, ja (L_1) un (L_2) ir noslēgtas līknes, mēs varam atkārtot to pašu, kas jau teikts 8. paragrafā.

16. [illegible]

īpatnējus punktus saturētu augstākais kā robežpunktus kādā savā stāvoklī.

Cilindram ir izcils stāvoklis, jo tas nesatur īpatnējus punktus. Tā tad tur gabals (G) varēs būt visa cilindram uztītā lokanā plāksne. Tomēr jāievēro, ka šī plāksne ir identiska ar cilindra ~~lokano~~ virsmu tikai tad, ja cilindrs nav slēgts, t.i. tā vadule (Leitlinie, directrice) nav slēgta līnija. Šai pēdējā gadījumā cilindra virsma varēs slīdēt pati pa sevi tikai paralleli veidulēm, kamēr cilindram uztītā lokanā plāksne, kas to pārklās bezgalīgi daudzas reizes, varēs brīvi slīdēt visos virzienos.

Kā jau teikts, ar ģeodētisko līniju palīdzību uz attinamām virsmām radītā ģeometrija būs analoga plāksnes Euklida ģeometrijai. Bet ja šī virsma ir kōns vai cilindrs ar noslēgtu vaduli, uz tās varam ienest

kas to pārklās bezgalīgi daudzas reizes,
varēs brīvi slīdēt visos virzienos.

Kā jau teikts, ar ģeodētiskā līniju palīdzību uz attinamām virsmām radītā ģeometrija būs analoga plāknes Euklida ģeometrijai. Bet ja šī virsma ir kōns vai cilindrs ar noslēgtu vaduli, uz tās varam ienest periodicitātes jēdzienu, kas plāknes ģeometrijā, protams, nav: piem. zināmos apstākļos līkā, kas ir noslēgta un vijas pa ģeodētisko līniju, var nonākt atkal agrākā stāvoklī; punkts, kas kustas nemainīdams savu virzienu, var bezgalīgi daudzas reizes iet caur savu iezējas stāvokli, vai arī tam bezgalīgi tuvu garām u.t.t. Šāda veida pētījumi tomēr neattiecas uz mūsu uzdevumu, un tāpēc mēs ar tiem nenodarbosimies.

· ——— ·

·

Ruletes telpā.

Velšanās definīcija.

17. Plāksnē velšanās definīcija mums nesagādā nekādas grūtības; mēs to savā ziņā it kā intuitīvi uztveram, tā kā bieži to pat nemaz stingri nedefinē. Tā, piemēram, sākot nodaļu par plāksnes ruletēm savā grāmatā „Vorlesungen über natürliche Geometrie", Cesàro saka: „Ja kāda līkne (M_0) tiek velta pa plāksnē nekustīgu līkni (M) un pie tam neslīd"... Velšanos varam definēt tā: abām līknēm ir kopīga tangente un loki, ko apraksta pieskaršanās punkts uz abām līknēm ir vienādi[2], vēl piezīmējot, ka uz abām līknēm loku pieaugšanas virziens dod to pašu tangentes pozitīvo virzienu.[3] Pati velšanās kustība sastāvēs no acumirklīgām rotācijām; velšanās pamats (base du

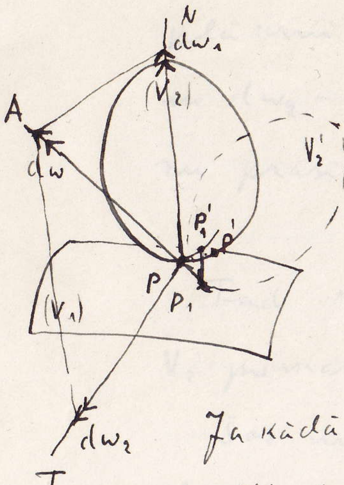
linēt tā: abām līknēm ir kopīga tangente un loki, ko apraksta pieskaršanās punkts uz abām līknēm ir vienādi[2], vēl piezīmējot, ka uz abām līknēm loku pieaugšanas virziens dod to pašu tangentes pozitīvo virzienu.[3] Pati velšanās kustība sastāvēs no acumirklīgām rotācijām; velšanās pamats (base du roulement) un veļošā līkne (roulante) ir acumirklīgo rotācijas centru ģeometriskās vietas.

Telpā rotāciju definē ass un leņķis. Rotācijas asu ģeometriskās vietas būs taisnu virsmas. Tāpēc arī taisnu virsmu (Regelflächen, surfaces réglées) velšanās mums neradīs definīcijas grūtības: mēs teiksim, ka viena taisnu virsma velas pa nekustošo otro tad, ja viņas saskaras pa kopīgu veiduli (t.i. katrā kopīgās veidules punktā tām ir kopīga pieskarplakne) un ja kustošās virsmas acumirklīgā kustība katrā brīdī ir elementāra rotācija ap kopīgo veiduli. Mēs vēlāk redzēsim,

2) Demartres 61. l.p.

3) Bricard 62. lp.p.

kādiem noteikumiem jābūt izpildītiem, lai šāda kustība vispār būtu iespējama.



Aplūkosim tagad divas kaut kādas virsmas (V_1) - nekustīgu un (V_2) - kustīgu, pie kam (V_2) lai vienmēr pieskaras virsmai (V_1). Te, tāpat kā vēlāk, kustību pētīšanai, lietāsim kinemātikas paņēmienus.

Ja kādā mirklī t pieskaršanās punkta P ātrums attiecībā uz virsmu (V_1) nav nulle, tas atrodas abu virsmu kopējā pieskarplāksnē punktā P. Tiešām, ja P_1 un P' ir tie (V_1) un (V_2) punkti, kas saskarsies nākošā mirklī $t+\Delta t$, kad (V_2) būs stāvoklī (V_2') un P, ja to uzskatām kā saistītu ar V_2, nonāks stāvoklī P_1', taisnes PP_1 robežstāvoklis būs kāda (V_1) tangente punktā P un taisnes P_1P_1' robežstāvoklis - pieskare ~~plāksnei~~ virsmai (V_2) tai pašā punktā P. Tā kā (V_1) un (V_2) saskaras, PP_1 un P_1P_1' robežstāvokļi atradīsies virsmu kopējā pieskarplāksnē punktā P un tā tad arī P elementārais pārvietojums P_1P_1' būs stāvokli (V_2) un P_1, ja to uzskatam kā saistītu ar V_1, nonāks stāvoklī P_1', taisnes PP_1 robežstāvoklis būs kāda (V_1) tangente punktā P un taisnes P_1P_1' robežstāvoklis – pieskare ~~plāksnei~~ virsmai (V_2) tai pašā punktā P. Tā kā (V_1) un (V_2) saskaras, PP_1 un P_1P_1' robežstāvokļi atradīsies virsmu kopējā pieskarplāksnē punktā P un tā tad arī P elementārais pārvietojums PP_1' būs šai plāksnē.

Bet nu, ja kāda punkta ātrums ir tangenciāls virsmai, pa kuru tas pārvietojas, mēs varam teikt, ka tas slīd pa virsmu. Mēs gribam aplūkot velšanos bez slīdes, tā tad mēs noteiksim, ka elementāram pārvietojumam P_1P_1' jā būt augstākas kārtības bezgalīgi mazam lielumam kā ds. Pirmā tuvinājumā tad P būs nekustīgs un elementārā (V_2) kustība būs rotācija ap kādu asi PA. Mēs tomēr kustībai uzliksim vēl vienu ierobežojumu. Elementārās rotācijas vektoru dω sadalīsim divās komponentēs, to projicējot uz virsmu kopējo normāli un pieskaršanās plāksni. Vektors dw_1 būs elementārās vērpšanās un dw_2 - elementārās velšanās vektors. Mēs nu prasīsim, lai arī

$$\lim \frac{dw_1}{\Delta t} = 0$$

Tad rotācijas ass gulēs abu virsmu V_1 un V_2 pieskarplāksnē.

Šos noteikumus viegli fiziski interpretēt. Lai plāksnē aizkavētu 2 līniju slīdēšanu vienai pa otru, mēs varam tās iedomāties materializētas un vienu (vai arī abas) apgādātu asumiem, kas pieskaršanās punkta tuvumā iespiežas otrā līknē. Skaidrs, ka tādos apstākļos vienīgā iespējamā abu līniju savstarpējā kustība būs vienas līnijas velšanās pa otru. Tāpat arī telpā varam iedomāties, ka viena (vai arī abas) virsma apgādāta šādiem asumiem. Ievērojot to, ka abām virsmām punktā P sa-

punktā [illegible] iesp[illegible],
ka tādos apstākļos vienīgā iespējamā abu līniju savstarpējā kustība būs vienas līnijas velšanās pa otru. Tāpat arī telpā varam iedomāties, ka viena (vai arī abas) virsma apgādāta šādiem asumiem. Ievērojot to, ka abām virsmām punktā P jāsaskaras, tām tur būs kopējā elementāra virsma, skaidrs, ka vienīgā vienas virsmas kustība attiecībā pret otru būs elementāra rotācija ap kādu arī kopējā pieskarplāksnē.

Lai atrastu analogu noteikumu gadījumiem, kur viena (vai arī abas) no figūrām (V_1), (V_2) ir līnija, mēs varam katru līniju iedomāties kā tās kanālvirsmas (Röhrenfläche, surface canal) robežveidu, ko izveido elementāra lode, kuras centra trajektorija ir dotā līnija. Tad mēs redzam, ka divu līniju velšanās gadījumā nav ierobežojumu, turpreti ja velas līnija pa virsmu vai virsma pa līniju, rotācijas asij jābūt virsmas pieskarplāksnē. Mēs tomēr vēlāk redzēsim, ka arī 2 līniju velšanās gadījumā asij jāatrodas kādā noteiktā plāksnē, kas iet caur pieskarpunktu.

Visos gadījumos katram abu figūru (virsmu vai līniju) stāvoklim tā tad atbilst ∞' daudz acumirklīgās rotācijas asu - momentānā kustība būs kustība ar 2 brīvības pakāpēm, tā tad padota 4 noteikumiem. Izejot no kāda dota stāvokļa, katrs veļošās figūras punkts varēs pārvietoties pa elementāru virsmu. Katra punkta trajektorija tā tad vispār būs kāda virsma.

Mūsu uzdevuma teksts tomēr vārdu „rulete" paskaidro ar „Rollkurve", tā tad kā trajektorijas ir domātas līknes un nevis virsmas - jāaplūko kustība ar 1 brīvības pakāpi un tā tad 5 noteikumiem. Piekto noteikumu tad mēs varēsim izvēlēties kaut kādu. Mūsu pētījumiem izvēlēsimies trajektorija tā tad telpā ir kāda līkne.

Mūsu uzdevuma teksts tomēr vārdu „rulete" paskaidro ar „Rollkurve", tā tad kā trajektorijas ir domātas līknes un nevis virsmas – jāaplūko kustība ar 1 brīvības pakāpi un tā tad 5 noteikumiem. Piekto noteikumu tad mēs varēsim izvēlēties kaut kādu. Mūsu pētījumiem izvēlēsimies šādus noteikumus:

2 virsmu gadījumā izvēlēsimies pieskarpunkta P ģeometrisko vietu uz vienas no virsmām;

virsmas un līknes gadījumā dosim virsmas un līknes pieglaušanās plāksnes (Schmiegungsebene, plan osculateur) leņķi kā zināmu funkciju

divu līkņu gadījumā dosim kā zināmu funkciju to pieglaušanās plākšņu (vai normāļu, vai binormāļu) leņķi.

18. Līdz ar to redzams, ka ruletes problēma telpā ir daudz sarežģītāka kā plāksnē, pie kam

šo komplikāciju rada vairāki savstarpēji neatkarīgi iemesli.

Viena iemeslu grupa ir analītiskas dabas: plāksnē ~~nez~~ zināmie leņķi ir zināmo lineāras funkcijas, visbiežāk summas vai diferences; ruletes noteikšanai jāzina divi sakari starp doto un meklējamās līkņu koordinātām (Dekarta vai polārām); naturālā ruletes nolīdzinājuma noteikšanai, liekuma radijs ir diezgan vienkārša koordinātu funkcija. Telpā leņķi gandrīz visi ir jānosaka analītiski, ar trigonometrijas formulām; ruletes noteikšanai jāzina 3 sakari; naturālam nolīdzinājumam liekums un jo sevišķi šķiebums ir visai sarežģīta koordinātu funkcija.

Otrs iemesls ir jau minētais neatkarīgais 5. noteikums. Ruleti noteicis 3 pilnīgi neatkarīgi faktori: abas nekustīgās figūras un šis piektais noteikums.

Kā [illegible]

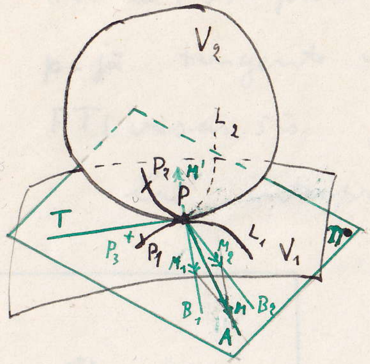
rālam nolīdzinā jumam liekums un jō
sevišķi izliekums ir visai sarežģīta
koordinātu funkcija.

Otrs iemesls ir jau minētais neatkarīgais 5. noteikums. Ruleti nosaka 3 pilnīgi neatkarīgi faktori: abas veltošās figūras un šis piektais noteikums.

Kā mēs turpmāk redzēsim, tiešām attiecīgās formulas ir visai sarežģītas. Mēs tāpēc vispārējo gadījumu nemaz tuvāki nepētīsim, tikai meklēsim formulas, ar kuru palīdzību to varētu novest uz kanonisko gadījumu: divu taišņu virsmu veltīšanos, ko tad mēs aplūkosim sīkāki.

Vēl jāpiezīmē, ka virsmas un līnijas, ko mēs aplūkosim, mēs iedomāsimies bez īpatnējiem punktiem, kā atgriešanās punktiem, punktiem, kur nav noteikta pieskarplakne u.t.t. Līdz ar to katrai rotācijas asij atbildīs bezgalīgi maza un nekad ne galīga rotācija.

Virsmas velšanās pa virsmu.



19. Lai (V_1) ir nekustīgā un (V_2) velošās virsma, P to acumirklīgais pieskarpunkts, (Π) to kopējā pieskarplāksne punktā P, (L_1) pieskarpunkta ģeometriskā vieta uz (V_1) un (L_2) – uz (V_2), P_1 un P_2 tie punktam P bezgala tuvi punkti uz (L_1) un (L_2), kas sakritīs pēc elementārās rotācijas.

Mēs vispirms konstatēsim, ka pietiek dot vienu no līkām (L_1), (L_2) – otra caur to jau būs noteikta. T-ad mēs meklēsim acumirklīgās rotācijas ass PA stāvokli un tai atbilstošo elementāro rotācijas leņķi.

Tā kā P_1 un P_2 sakritīs pēc elementārās rotācijas ap kādu asi, kas iet caur P,

$$\text{loks } PP_1 = \text{loks } PP_2$$

un pirmā tuvinājumā, neievērojot trešās kārtības bezgalīgi mazos lielumus acumirklīgās rotācijas ass PA stāvokli un tai atbilstošo elementāro rotācijas leņķi.

Tā kā P_1 un P_2 sakritīs pēc elementārās rotācijas ap kādu asi, kas iet caur P,

$$\text{loks } PP_1 = \text{loks } PP_2$$

un pirmā tuvinājumā, neievērojot trešās kārtības bezgalīgi mazos lielumus

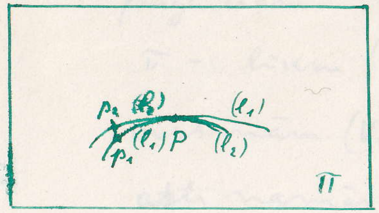
$$(1) \qquad PP_1 = PP_2$$

t.i. punkta P noietie elementārie loki uz (V_1) un (V_2) ir vienādi. P_1 un P_2 atrodas uz riņķa loka, pie kam šī riņķa ass PA atrodas plāksnē $(\overline{V})$. $P'P_1$ robežvirziens tā tad būs perpendikulārs šai plāksnei. Ja $PP_1 = PP_2$ mēs pieņemsim par galveno bezgalīgi mazo lielumu, arī leņķis $d\varphi$, ko veido P_1P_2 ar plāksnes $(\overline{V})$ perpendikuli būs pirmās kārtības bezgalīgi mazs lielums. P_1P_2 turpretī ir vismaz par vienu augstākas kārtības bezgalīgi mazs lielums, ~~jo~~ loks P_1P_2, kas ir līdzvērtīgs P_1P_2, ir PP_1 reizinājums ar elementāro rotācijas leņķi. Tā kā

$$(2) \qquad \lim \frac{P_1P_2}{PP_1} = 0 \quad , \quad \lim \frac{P_1P_2}{PP_2} = 0$$

taišņu PP_1 un PP_2 robežvirzieni sakrīt, t.i. (L_1) un (L_2) punktā P saskaras un viņu kopējā tangente ir kāda plāksnes (Π) taisne PT (visas šīs plāksnes līnijas ir zīmētas zaļas).

Lai interpretētu leņķa $d\varphi$ lielumu, projicēsim abas līknes L_1 un L_2 uz plāksni Π. Lai l_1 un l_2 ir L_1 un L_2 projekcijas un p_1 un p_2 – P_1 un P_2 projekcijas. Acīmredzot



$$(3) \qquad p_1p_2 = P_1P_2 \sin d\varphi$$

Kā mēs jau redzējām, P_1P_2 ir vismaz otrās kārtības bezgalīgi mazs lielums, $\sin d\varphi$ tāpat kā $d\varphi$ ir vismaz pirmās kārtības bezgalīgi mazs lielums. p_1p_2 tā tad būs vismaz trešās kārtības bezgalīgi mazs lielums. Bet un tas nenozīmē neko citu, kā faktu, ka (l_1) un (l_2) punktā P oskulē viena otru[4], t.i. tām ir kopīgs liekums punktā P. Bet (l_1) un (l_2) liekums nav nekas cits kā (l_1) un (l_2)

šīm. Iedomāsimies plāksni (π) nekustīgu un un virsmas (V_1) un (V_2) pa (π) veļamies tā, ka tās abas katrā mirklī tai pašā punktā P pieskartos (π), pie kam uz (V_1) P lai apraksta (L_1), kas ir iepriekš dota. Uz (V_2) P aprakstīs pagaidām nezināmo līkni (L_2) un plāksnē π - līkni (L'). Iedomāsimies vēl dotām virsmām (V_1) un (V_2) pa (L_1) un (L_2) aprakstītas attināmās virsmas (V_1') un (V_2'). Tā kā (L') ir notinums uz plāksnes attināmās virsmas (V_1') līkai (L_1) un attināmās virsmas (V_2') līkai (L_2), (L') liekums katrā punktā būs vienāds ar (L_1), (L_2) ģeodētisko liekumu atbilstošā punktā, ja (L_1) un (L_2) uzskatām kā līkās uz virsmām (V_1') un (V_2'). Bet un pašas (V_1') un (V_2') konstrukcijas dēļ redzams, ka (L_1) un (L_2) ir tas pats ģeodētiskais liekums kā uz (V_1'), respektīvi (V_2'), tā arī uz (V_1), respektīvi (V_2). Mēs tā tad atkal esam konstatējuši, ka līkām (L_1) un (L_2) sadērīgos punktos ir tas pats ģeodētiskais liekums.

punktā, ja (L_1) un (L_2) uzskatām kā līkās uz virsmām (V_1') un (V_2'). Bet no pašas (V_1') un (V_2') konstrukcijas dēļ redzams, ka (L_1) un (L_2) ir tas pats ģeodētiskais liekums kā uz (V_1'), respektīvi (V_2'), tā arī uz (V_1), respektīvi (V_2). Mēs tātad atkal esam konstatējuši, ka līkām (L_1) un (L_2) saderīgos punktos ir tas pats ģeodētiskais liekums.

Šī īpašība ir vispārinājums pazīstamai teorēmai, ka ģeodētiskais liekums nemainas, ja doto virsmu (V_1) saliecam, respektīvi to uztinam uz otru, kurai to var uztīt. Mūsu gadījumā vispār (V_2) nevarēs uztīt uz (V_1), bet varētu teikt, ka (L_2) ir virsmas (V_1) līkās (L_1) uztīnums uz (V_2). Tiešām, sakarība starp loku un ģeodētisko liekumu, ko varētu saukt par ģeodētisko naturālo virsmas līknes nolīdzinājumu, abām līnijām (L_1) un (L_2) būs identiska.

Acumirklīgo rotācijas asi PA mēs dabūjam šādi: lai virsmai (V_1) nelūties pa plākni (π) pieskarpunkts no P nonāk uz P_1, virsmai (V_1) jāgriežas ap virzienam PT saistīto virzienu PB_1; tāpat, lai virsmas (V_2) nākošais pieskarpunkts būtu P_2, tai jāgriežas ap virzienam PT saistīto virzienu PB_2. PB_1 un PB_2 vispārīgā gadījumā nesakritīs, jo kā pašas virsmas (V_1) un (V_2), tā arī to savstarpējā orientācija kustības sākumā ir pilnīgi neatkarīgi faktori. Ja un kādā mirklī PB_1 un PB_2 sakrīt, to kopējais virziens ir momentānā rotācijas ass PA. Vispārīgā gadījumā PA atrašanai būs jāsaliek abas elementārās rotācijas ap PB_1 un PB_2. Šo rotāciju ziņā mēs darbojam šādā kārtā: apzīmēsim ar P_3 to plāksnes ū punktu, kur tai ~~sanā~~ nākošā stāvoklī pieskarsies virsma (V_1) punktā P_1 un virsma (V_2) punktā P_2, pie kam virsma (V_1), izejot no izejas stāvokļa, būs rotējusi ap PB_1 par leņķi ϑ_1 un virsma (V_2) - ap PB_2 par leņķi ϑ_2. Lai $\vec{PM'}$ un $\vec{PM_2}$ ir šīs rotācijas raksturojošie vektori. Tagad šādā kārtā: apzīmēsim ar P_3 to plāksnes π punktu, kur tai savā nākošā stāvoklī pieskarsies virsma (V_1) ~~ar~~ punktā P_1 un virsma (V_2) ~~ar~~ punktā P_2, pie kam virsma (V_1), izejot no izejas stāvokļa būs rotējusi ap PB_1 par leņķi ϑ_1 un virsma (V_2) - ap PB_2 par leņķi ϑ_2. Lai $\overrightarrow{PM'}$ un $\overrightarrow{PM_2}$ ir šīs rotācijas raksturojošie vektori. Tagad pieņemsim atkal, ka virsma (V_1) ir nekustīga. Lai (V_2) dabūtu viņas nākošā stāvoklī, kur tās punkts P_2 nonāks P_1, varam rīkoties šādi: vispirms, paturot (π) nekustīgu, pagriezīsim (V_2) ap PB_2 par leņķi ϑ_2 - tad (V_2) savā punktā P_2 pieskarsies (π) viņas punktā P_3. Tad (π) kopā ar (V_2) griezīsim ap PB_1 par leņķi $-\vartheta_1$: savā jaunā stāvoklī π pieskarsies savā punktā P_3 virsmai (V_1) viņas punktā P_1. Caur šīm abām rotācijām tad arī esam panākuši to, ka (V_2) savā jaunā stāvoklī ~~ar~~ savā punktā P_2 pieskaras virsmai (V_1) tās punktā P_1; meklētā (V_2) elementārā rotācija tad arī būs abu šo rotāciju (PB_2, ϑ_2) un $(PB_1, -\vartheta_1)$ summa. Ja šo pēdējo rotāciju raksturojošais vektors ir $\overrightarrow{PM_1} = -\overrightarrow{PM'}$, lai dabūtu (V_2) elementārās rotācijas raksturojošo vektoru, pietiek salikt $\overrightarrow{PM_1}$ un $\overrightarrow{PM_2}$

$$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PM_1} + \overrightarrow{PM_2}$$

un $\overrightarrow{PM}$ virziens PA būs meklētā rotācijas ass. Vēl jāpiezīmē, ka PA virziena atrašanai, kas mūs galvenokārt interesē, pietiek zināt attiecību

$$\frac{PM_1}{PM_2} = \frac{l_1}{l_2}$$

Mēs tā tad esam nonākuši pie šādiem rezultātiem:

a) Ja dotā līknē (L_1), (L_2) ģeodētiskam liekumam katrā viņas punktā jābūt tam pašam kā (L_1) sakarīgā punktā (entsprechender Punkt, point correspondant). Citiem vārdiem, ja loku sāksim skaitīt uz (L_1) un (L_2) no kādā (V_1) stāvoklī sakritošiem viņu punktiem, ģeodētiskam liekumam uz abām līknēm jābūt tai pašai loka funkcijai.

b) Momentānās rotācijas ass virziens PA ir paralelogramma diagonāles virziens, kā (L_1) sakrīgā punktā (entsprechender Punkt, point correspondant). Citiem vārdiem, ja loku sākam skaitīt uz (L_1) un (L_2) no kāda (V_1) stāvokļa saskrītošiem viņu punktiem, ģeodetiskam liekumam uz abām līknēm jābūt tai pašai loka funkcijai.

b) Momentānās rotācijas ass virziens PA ir parallelogramma diagonales virziens, kā divas malas guļ uz PB_1 un PB_2, būdamas proporcionelas (vektoriāli!) $-\vartheta_1$ un ϑ_2. Tā kā PB_1 un PB_2 ir plāksnē (Π), arī PA būs šai plāksnē.

20. Mēs tā tad mākam katrā (L_1) un (L_2) punktā konstruēt attiecīgo momentāno rotācijas asi. Ar (L_1) saistīto asu kopība būs nekustošais aksoids un ar (L_2) saistīto asu kopība – kustošais aksoids. (V_2) velšanās pa (V_1) tad būs identiska ar šo (V_2) un (V_1) apraustīto pa (L_2) un (L_1) taisnu virsmu velšanos.

Pirms kētis pie šī jautājuma analītiskas atrisināšanas, noskaidrosim vēl, kādiem noteikumiem jābūt izpildītiem, lai abi aksoidi būtu attīnamas virsmas (Entwickelbare Flächen, surfaces développables). Virsmai (V_1) var aprakstīt tikai vienu attīnamu virsmu, kas tai pieskaras (L_1) punktos – tā ir (L_1) punktos konstruēto (V_1) pieskarplākšņu ietītā virsma (eingehüllte Fläche, surface enveloppée). Tāpat arī (V_2) pa (L_2) var aprakstīt tikai vienu attīnamu virsmu. Lai šīs attīnamās virsmas būtu aksoidi, ir nepieciešami un pietiekoši, ka to taisnlīnijainās veidules būtu momentānās rotācijas asis. (L_1) un (L_2) saderīgos punktos vilktām veidulēm tā tad jāsakrīt, kad (L_1) un (L_2) saskaras šajos punktos, t.i. virzieniem PB_1 un PB_2 jāsakrīt. Turpretim, ja šis noteikums ir izpildīts, ir skaidrs, ka (V_2) veļoties pa (V_1), arī (V_2) pa (L_2) aprakstītā attīnamā virsma velsies pa (V_2) pa (L_2) aprakstīto attīnamo virsmu.

21. Meklēsim vispirms līkni (L_2).

Pieņemsim, ka uz virsmām (V_1) un (V_2), kas katra attiecinātas uz ar viņām nekustoši saistītu koordinātu sistēmu, kā

Tātad, ja šis noteikums ir izpildīts, viz. prasības, ka (V_2) uztīsies pa (V_1), arī (V_2) pa (L_2) aprakstītā attinamā virsma uztīsies pa (V_2) pa (L_2) aprakstīto attinamo virsmu.

21. Meklēsim vispirms līkni (L_2).

Pieņemsim, ka uz virsmām (V_1) un (V_2), kas katra attiecinātas uz ar viņām nekustoši saistītu koordinātu sistēmu, kā parametru sistēmas ņemtas ģeodētiskas līkņu saimes un to ortogonālās trajektorijas. Uz (V_1) attiecošos lielumus vienmēr apzīmēsim ar indeksu 1, uz (V_2) attiecošos – ar indeksu 2. Pirmās kārtības fundamentāliem lielumiem tad ir piedota vispārējā vienkāršā forma (u, v – līklīnijas koordinātas)

$$
(1)\quad \begin{cases} E_1 = 1 & F_1 = 0 & G_1 = G_1(u_1, v_1) \\ E_2 = 1 & F_2 = 0 & G_2 = G_2(u_2, v_2) \\ D_1 = \sqrt{E_1 G_1 - F_1^2} = \sqrt{G_1} & & D_2 = \sqrt{E_2 G_2 - F_2^2} = \sqrt{G_2} \end{cases}
$$

un vēl

Ģeodētiskā liekuma formula, ja ir pieņemti ģeodētiski parametri, ir

$$
\frac{1}{\rho_g} = \frac{1}{\sqrt{G}} \begin{vmatrix} u' & -\frac{1}{2} G_u v'^2 + u'' \\ G v' & G_u u' v' + \frac{1}{2} G_v v'^2 + G v'' \end{vmatrix},
$$

vai, atverot determinanti

$$(2) \qquad \frac{1}{\rho_g} = \frac{1}{\sqrt{G}}\left[G(u'v''-u''v') + G_u\left(u'^2v' - \frac{1}{2}Gv'^3\right) + \frac{1}{2}G_v u'v'\right],$$

pie kam u un v ir domāti kā loka s funkcijas.

Ja nu (L_1) ir dots ar

$$(3) \qquad u_1 = u_1(t) \qquad v_1 = v_1(t)$$

tad

$$(4) \qquad s_1 = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\left(\frac{du_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_1}{dt}\right)^2}\, dt$$

Lai gan parasti nebūs iespējams s izteikt slēgtā formā kā t funkciju, mēs tomēr vienmēr varēsim slēgtā veidā izteikt u un v visus atvasinājumus pēc s. Tiešām[5]:

$$\frac{du}{ds} = \frac{\frac{du}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}}$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{\frac{dv}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{du_1}{dt}\right)^2 + G\left(\frac{dv_1}{dt}\right)^2}}$$

$$\frac{d^2u}{ds^2} = \frac{2G\frac{dv}{dt}\left(\frac{dv}{dt}\cdot\frac{d^2u}{dt^2} - \frac{du}{dt}\cdot\frac{d^2v}{dt^2}\right) - \frac{du}{dt}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2\left[G_u\frac{du}{dt} - G_v\frac{dv}{dt}\right]}{2\left[\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2\right]^2}$$

$$\frac{du}{ds} = \frac{\frac{du}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}}$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{\frac{dv}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}}$$

$$\frac{d^2u}{ds^2} = \frac{2G\frac{dv}{dt}\left(\frac{dv}{dt}\cdot\frac{d^2u}{dt^2} - \frac{du}{dt}\cdot\frac{d^2v}{dt^2}\right) - \frac{du}{dt}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2\left[G_u\frac{du}{dt} - G_v\frac{dv}{dt}\right]}{2\left[\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2\right]^2}$$

$$\frac{d^2v}{ds^2} = \frac{2\frac{du}{dt}\left(\frac{du}{dt}\cdot\frac{d^2v}{dt^2} - \frac{dv}{dt}\cdot\frac{d^2u}{dt^2}\right) - \left(\frac{dv}{dt}\right)^3\left[G_u\frac{du}{dt} - G_v\frac{dv}{dt}\right]}{2\left[\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2\right]^2}$$

T-ā kā arī G, G_u un G_v ir u un v funkcijas, mēs varam izteikt visus augšējos lielumus kā t funkcijas un mums tad būs līknei (L_1)

$$(4') \qquad ds_1 = \sqrt{\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\, dt = f_1(t)\,dt$$

$$(5) \qquad \frac{1}{\rho_{1g}} = f_2(t)$$

Ja tagad līkni (L_2) uzlas pa (L_1), abu līkņu elementāriem lokiem jābūt vienādiem, tāpat arī to ģeodētiskiem liekuma radijiem.

$$(6) \quad \begin{cases} ds_2 = ds_1 = f_1(t)\,dt \\ \dfrac{1}{\rho_{2g}} = \dfrac{1}{\rho_{1g}} \end{cases}$$

---

5) Scheffers 540. l.p.

Ja mēs gribam, lai meklējamais (L_2) nolīdzinājums būtu formā

$$(7) \qquad v_2 = v_2(u_2)$$

tad, apzīmējot

$$\frac{dv_2}{du_2} = v_2', \quad \frac{d^2v_2}{du_2^2} = v_2''$$

šai lietai būs

$$\frac{du_2}{ds_2} = \frac{1}{\sqrt{1+Gv'^2}} \qquad \frac{dv_2}{ds_2} = \frac{v'}{\sqrt{1+Gv'^2}}$$

$$\frac{du_2}{ds_2}\cdot\frac{d^2v_2}{ds_2^2} - \frac{d^2u_2}{ds_2^2}\cdot\frac{dv_2}{ds_2} = \frac{d^2v}{dt^2}\cdot\frac{1}{(1+Gv'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{v''}{(1+Gv'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Tad redzams, ka būs

$$\begin{cases} ds_2 = du_2\sqrt{1+Gv'^2} = F_1(u_2, v_2, v_2')du_2 \\ \dfrac{1}{\rho_{2g}} = F_2(u_2, v_2, v_2', v_2'') \end{cases}$$

pie kam F_1 un F_2 forma ir zināma. (6) rāda, ka jābūt

$$(8) \begin{cases} F_1(u_2, v_2, v_2')du_2 = f_1(t)dt & (1) \\ F_2(u_2, v_2, v_2', v_2'') = f_2(t) & (2) \end{cases}$$

Eliminējot t mēs dabūsim (L_2) diferenciālnolīdzinājumu. Tādu nolikšanu diferenciāļu

$$\left\{ \frac{\quad}{\rho_{2g}} = F_2(u_2, v_2, v_2', v_2'') \right.$$

pri kam F_1 un F_2 forma ir zināma. (6) rāda, ka jābūt

$$(8) \left\{ \begin{array}{ll} F_1(u_2, v_2, v_2')\,du_2 = f_1(t)\,dt & (1) \\ F_2(u_2, v_2, v_2', v_2'') = f_2(t) & (2) \end{array} \right.$$

Eliminējot t mēs dabūsim (L_2) diferenciālnolīdzinājumu. Tādam nolūkam diferencējam (8_2)

$$(9) \quad \left(\frac{\partial F_2}{\partial u_2} + \frac{\partial F_2}{\partial v_2} v_2' + \frac{\partial F_2}{\partial v_2'} v_2'' + \frac{\partial F_2}{\partial v_2''} v_2'''\right) du_2 = f_2'(t)\,dt$$

Izdalot (9) ar (8_1) dabūjam

$$(10) \quad F_3(u_2, v_2, v_2', v_2'', v_2''') = f_3(t)$$

un eliminējot (t) no (8_2) un (10) mēs dabūjam

$$(11) \quad F_4(u_2, v_2, v_2', v_2'', v_2''') = 0$$

kas ir (L_2) diferenciālnolīdzinājums. Viņš vispārīgi ir trešās kārtības. Lai loceklis ar v_2''' iztrūktu, nolīdzinājumā (9) arī būtu jāizzūd v_2''', t.i. būtu jābūt

$$\frac{\partial F_2}{\partial v_2''} = 0$$

Bet un viegli redzēt, ka

$$\frac{\partial F_2}{\partial v_2''} = \frac{\sqrt{G}}{(1 + G v'^2)^{\frac{3}{2}}} \neq 0$$

jo $\sigma \neq 0$ un v' vispārī nav bezgalīgs, jo ja viscaur v' būtu bezgalīgs, tas nozīmētu

$$u = \mathrm{const}$$

un (L_2) būtu geodētisko līniju ortogonāla trajektorija. Nolīdzinājuma (11) vispārīgais atrisinājums vispārīgā gadījumā tātad saturēs 3 integrācijas konstantes:

$$(12) \qquad V_2 = V_2(u_2, c_1, c_2, c_3)$$

Šīs trīs konstantes noteiks sākuma nosacījumi: (L_2) sākuma punkts $(\bar{u}_0, \bar{v}_0)$ uz (V_2), sākuma tangentes virziens $\bar{v}'_0$ un (L_1) punkts, kam mēs liekam saskarit ar $\bar{u}_0, \bar{v}_0$: tas dod $\frac{1}{\rho_g}$ vērtību $\frac{1}{\rho_{g0}}$ šim punktam. Trešām, šie trīs nosacījumi dod

$$\bar{v}_0 = v_2(\bar{u}_0, c_1, c_2, c_3)$$

$$\bar{v}'_0 = v'_2(\bar{u}_0, c_1, c_2, c_3)$$

$$\frac{1}{\rho_{g0}} = F_2\left[\bar{u}_0, \bar{v}_0, v'_0, v''_2(\bar{u}_0, c_1, c_2, c_3)\right]$$

kas pilnīgi noteic c_1, c_2, c_3. Ja mums tā tad ir dots (V_2) kaut kādā stāvoklī, pieskaroties

(V_1) kādā līknes (L_1) [illegible]

tis nosacījumi dod

$$\bar{V}_0 = V_2(\bar{u}_0, c_1, c_2, c_3)$$

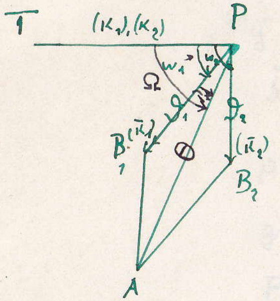
$$\bar{V}_0' = V_2'(\bar{u}_0, c_1, c_2, c_3)$$

$$\frac{1}{\rho_{g0}} = F_2\left[\bar{u}_0, \bar{V}_0, V_0', V_2''(\bar{u}_0, c_1, c_2, c_3)\right]$$

kas pilnīgi noteic c_1, c_2, c_3. Ja mums tā tad ir dots (V_2) kaut kādā stāvoklī, pieskaroties (V_1) kādā līknes (L_1) punktā, kustība ir pilnīgi noteikta, jo mēs dabūjam tikai vienu (L_2).

22. Tad meklēsim acumirklīgo rotācijas asi PA.

Pieņemsim tagad, ka uz (V_1) un (V_2) par parametru līnijām ir izraudzītas liekuma līnijas. Tā gan ir zināma inkonsekvence, jo iepriekšējā paragrafā par parametru līnijām mēs bijām ņēmuši ģeodētisku līniju saimi un to ortogonālās trajektorijas; tomēr tā attaisnojas caur to, ka aprēķini top daudz vienkāršāki. Liekas, ka gadījumos, kur (11) varētu integrēt un tā tad uzdevumu pilnīgi atrisināt, daudz mazāk pūles prasīs pāreja no viena koordinātu līniju tīkla uz otru, kā iepriekšējā un šī paragrafa aprēķinu izvešana vienā koordinātu sistēmā.



Tāpat kā iepriekš visus uz virsmu (V_1) attiecošos lielumus apzīmēsim ar indeksu 1 un uz virsmu (V_2) attiecošos – ar indeksu 2.

Tangentes PT virzieni uz (V_1) un (V_2) izteics

$$(1) \qquad K_1 = \frac{dV_1}{du_1} \qquad K_2 = \frac{dV_2}{du_2}$$

Vispārīgā gadījumā

$$K_1 \neq K_2$$

jo liekuma līniju virzieni uz abām virsmām punktā P nesakritīs. Ja $\bar K_1$ un $\bar K_2$ izsaka PT konjugēto virzienu uz katras no virsmām,

$$(2) \qquad \bar K_1 = -\frac{L_1}{N_1 K_1} \qquad \bar K_2 = -\frac{L_2}{N_1 K_2}$$

Vispārīgā gadījumā būs arī

$$\bar K_1 \neq \bar K_2$$

jo, tāpat kā K_1 un K_2, arī L_1, L_2, N_1, N_2 ir pilnīgi neatkarīgi lielumi.

punktā P nesakrītis. Ja $\bar{\kappa}_1$ un $\bar{\kappa}_2$ izsaka PT konjugēto virzienu uz katras no virsmām,

$$(2) \qquad \bar{\kappa}_1 = -\frac{L_1}{N_1 \kappa_1} \qquad \bar{\kappa}_2 = -\frac{L_2}{N_1 \kappa_2}$$

Vispārīgā gadījumā būs arī

$$\bar{\kappa}_1 \neq \bar{\kappa}_2$$

jo, tāpat kā κ_1 un κ_2, arī L_1, L_2, N_1, N_2 ir pilnīgi neatkarīgi lielumi.

Apzīmējot leņķus

$$\sphericalangle TPB_1 = \omega_1$$

$$\sphericalangle TPB_2 = \omega_2$$

$$\cos\omega_1 = \frac{E_1 + G_1 \kappa_1 \bar{\kappa}_1}{\sqrt{E_1 + G_1 \kappa_1^2}\sqrt{E_1 + G_1 \bar{\kappa}_1^2}}$$

Ievietojam $\bar{\kappa}_1$ izteiksmi

$$(3) \left\{ \begin{aligned} \cos\omega_1 &= \frac{(E_1 N_1 - G_1 L_1)\kappa_1}{\sqrt{E_1 + G_1 \kappa_1^2}\sqrt{G_1 L_1^2 + E_1 N_1^2 \kappa_1^2}} \cdot \frac{N_1}{|N_1|} \qquad \text{un analogi} \\ \cos\omega_2 &= \frac{(E_2 N_2 - G_2 L_2)\kappa_2}{\sqrt{E_2 + G_2 \kappa_2^2}\sqrt{G_2 L_2^2 + E_2 N_2^2 \kappa_2^2}} \cdot \frac{N_2}{|N_2|} \end{aligned} \right.$$

Sastādīsim vēl $\sin\omega_1$ un $\sin\omega_2$

$$\sin^2\omega_i = 1 - \left(\frac{(E_i N_i - G_i L_i)\kappa_i}{\sqrt{E_i + G_i \kappa_i^2}\sqrt{G_i L_i^2 + E_i N_i^2 \kappa_i^2}}\right)^2 = \frac{E_i G_i (N_i^2 \kappa_i^4 + 2\kappa_i^2 L_i N_i + L_i^2)}{(E_i + G_i \kappa_i^2)(G_i L_i^2 + E_i N_i^2 \kappa_i^2)}$$

$$(4) \quad \sin w_i = \varepsilon_i \frac{\sqrt{E_i G_i}\,(N_i \kappa_i^2 + L_i)}{\sqrt{E_i + G_i \kappa_i^2}\,\sqrt{G_i L_i^2 + E_i N_i^2 \kappa_i^2}}$$

kur $i = 1, 2$, $\varepsilon_i = \pm 1$. Mēģināsim noteikt ε tā, lai $\sin w_i$ un $\cos w_i$ noteiktu PB_i virzienu, t.i. lai w_1 un w_2 būtu doti kā algebraiski lielumi, ar noteiktu zīmi. Šim nolūkam vispirms nosacām, lai parametru līnijas būtu tā orientētas, ka griežot virsmu (V_2) ap kopīgo normāli PN punktā P, kamēr tās caur P ejošās u_2 līnijas pozitīvais virziens sakrīt ar attiecīgās (V_1) u_1 līnijas pozitīvo virzienu, arī V_1 un V_2 līniju pozitīvie virzieni sakristu; citiem vārdiem sakot, pieprasīsim κ_i atbilstošais tangentes rotācijas virziens lai ir tas pats abām virsmām. Pieņemsim šo virzienu par pozitīvo leņķu virzienu.

Leņķus w_1 un w_2 pilnīgi noteiks viņu sinusu un kosinusu vērtības. Redzams, ka to sinusi būs pozitīvi: pirmajam, ja $\bar{\kappa}_1 > \kappa_1$

$\bar{\kappa}_2 > \kappa_2$;

piegriešanās K_i atbilstošais tangentes rotācijas virziens bai ir tas pats abiem virsmām. Pieņemsim šo virzienu par pozitīvo leņķu virzienu.

Leņķus w_1 un w_2 pilnīgi noteiksi viņu sinus un kosinus vērtības. Redzams, ka to sinusi būs pozitīvi: pirmajam, ja $\bar{K}_1 > K_1$

un otrajam, ja $\bar{K}_2 > K_2$,

tie būs negatīvi pretējā gadījumā.

$\bar{K}_1 > K_1$ nozīmē

$$K_1 < -\frac{L_1}{N_1 K_1}$$

t.i.

$$\frac{L_1}{N_1 K_1} + K_1 < 0$$

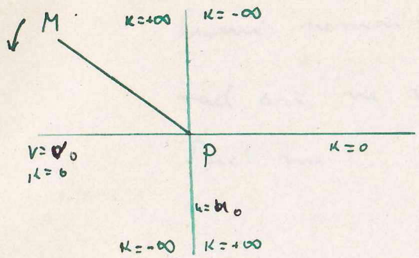
$$\frac{L_1 + N_1 K_1^2}{N_1 K_1} < 0$$

$\sin w_1$ tā tad ir pretējā zīme kā šis nevienādības kreisai pusei. Sareizinot šo izteiksmi ar $\sin w_1$ un atmetot pozitīvos lielumus, kā kvadratsaknes un $(L_1 + N_1 K_1^2)^2$, mums paliek

$$\frac{\varepsilon_1}{N_1 K_1} < 0 \qquad (5)$$

t.i. E_1 un N_1K_1 ir ar pretējām zīmēm.

Varētu likties, ka augšējie slēdzieni ir kļūdaini:



kamēr kāds stars PM apriņķo ap punktu P, viņam atbilstošais

$$k = \frac{dv}{du}$$

divas reizes pieņem katru vērtību, laikā būtu kāda kļūdama. Ja mēs tomēr ievedam noteikumu, ka staram PM jāatrodas visu laiku vienā pusē no līknes $u=u_0$ tangentes, katram k atbilstošs viens stars un mūsu augšējais slēgums būs spēkā. Mums tā tad ir definēts arī PB_1 un PB_2 virziens. Lai konstruētu PA ir jāzina ne tikai d_1 un d_2, bet arī virzieni, kādos šie lielumi atlikti uz PB_1 un PB_2.

Atgriežoties pie 31. l. p. zīmējuma, mēs redzam, ka vektors PM_2 ir vērsts pa kreisi no tangentes (pozitīvā virziena) tad, ja punkts P_2 atrodas virs (π), un pa labi, ja P_2 ir zem (π); PM_2 turpretī ir vērsts pa kreisi no tangentes tad, ja P_1 atrodas zem (π) un pa labi, ja P_1 ir virs (π). Šis noteikums ir neatkarīgs [illegible] (π) puses kur mēs skatamies arī virzieni, kādos šie fiduni atlikti uz PB_1 un PB_2.

Atgriežoties pie 31. l. p. zīmējuma, mēs redzam, ka vektors PM_2 ir vērsts pa kreisi no pozitīvā virziena tangentes tad, jā punkts P_2 atrodas virs (π), un pa labi, jā P_2 ir zem (π); PM_2 turpreti ir vērsts pa kreisi no tangentes tad, jā P_1 atrodas zem (π) un pa labi, jā P_1 ir virs (π). Šis noteikums ir neatkarīgs no tās plāksnes (π) puses, kur mēs skatamies uz P. Īsāki izsakoties, punkti M_1 un M_2 atrodas tai pašā vai dažādās PT pusēs, atkarībā no tā vai P_1 un P_2 atrodas dažādās (π) pusēs, vai arī tai pašā pusē.

Šo pēdējo apstākli viegli noskaidrot. Ja mēs pārnestu koordinātu sistēmu punktā P, liekot Z asij sakrist ar normāli, pie kam z ass pozitīvais virziens lai ir vērsts pozitīvās normāles virzienā. Tad mums būs, jā $X_i\ Y_i\ Z_i$ ir (V_i) normāles virziena koeficienti,

$$(6) \qquad X_i = 0 \qquad Y_i = 0 \qquad Z_i = +1$$

jo saskaņā ar 41. l. p. noteikumu par pamatlīnijas pozitīvo virzienu, arī pozitīvās normāles virziens abiem virsmām būs tas pats.

Kā zināms, otrās kārtības fundamentālie lielumi nemainās no virsmas pārvietojumiem, un tā tad arī ne no sākuma pārnešanas punktā P. Tad un

$$L_i = \int X_i (x_i)_{uu} = (Z_i)_{uu}$$

$$M_i = \int X_i (x_i)_{uv} = (Z_i)_{uv} = 0$$

$$N_i = \int X_i (x_i)_{vv} = (Z_i)_{vv}$$

Punkta P tuvumā Z_i var uzskatīt kā u_i un v_i tādu funkciju, kas izvirzāma Teilora rindā

$$Z_i = \frac{\partial z_i}{\partial u} du + \frac{\partial z_i}{\partial v} dv + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 z_i}{\partial u^2} du^2 + 2\frac{\partial^2 z_i}{\partial u \partial v} du dv + \frac{\partial^2 z_i}{\partial v^2} dv^2\right] + \dots$$

un, tā kā $\frac{\partial z_i}{\partial u} = 0 \quad \frac{\partial z_i}{\partial v} = 0 \;, \; \frac{\partial^2 z_i}{\partial u \partial v} = 0$

$$Z_i = \frac{1}{2}\left(L_i du_i^2 + N_i dv_i^2\right)$$

un virzienā, ko noteic $k_i = \frac{dv_i}{du_i}$

(7) $$Z_i = \frac{1}{2}\left(L_i + N_i k_i^2\right) du_i^2$$

Redzam, ka Z_i ir tā pati zīme kā $L_i + N_i k_i^2$

Tā tad : ja

$$\left(L_1 + N_1 k_1^2\right)\left(L_2 + N_2 k_2^2\right) > 0$$

P_1 un P_2 atrodas tai pašā (π) pusē un PB_1 un PB_2 iet katrs uz savu pusi attiecībā pret PT. Ja un virzienā, ko nosaka $k_i = \frac{dv_i}{du_i}$

(7) $$Z_i = \frac{1}{2}(L_i + N_i k_i^2)\, du_i^2$$

Redzam, ka Z_i ir tā pati zīme kā $L_i + N_i k_i^2$

Tā tad: ja

$$(L_1 + N_1 k_1^2)(L_2 + N_2 k_2^2) > 0$$

P_1 un P_2 atrodas tai pašā (π) pusē un PB_1 un PB_2 iet katrs uz savu pusi attiecībā pret PT. Za turpretī

$$(L_1 + N_1 k_1^2)(L_2 + N_2 k_2^2) < 0,$$

PB_1 un PB_2 guļ tai pašā pusē attiecībā pret PT.

Tagad mēs varam aprēķināt ass PA virzienu kā arī tai atbilstošo elementāro rotāciju θ.

Apzīmējam

$$\sphericalangle TPA = \Omega, \quad \sphericalangle B_1PA = \lambda_1 \quad \sphericalangle APB_2 = \lambda_2, \sphericalangle B_1PB_2 = \lambda$$

Ω un θ var aprēķināt dažādiem paņēmieniem, tikai vienmēr jāievēro $\sin \nu_i$ zīme un PB_1 un PB_2 stāvoklis. Visvienkāršāk, šķiet, izskatās tā: trīsstūrī PB_1A

(8) $$\theta = +\sqrt{\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2 + 2\vartheta_1\vartheta_2 \cos\lambda}$$ un arī

(9) $$\frac{\vartheta_1}{\sin\lambda_1} = \frac{\vartheta_2}{\sin\lambda_2} = \frac{\theta}{\sin\lambda}$$

pie kam (9) dod

$$\sin \lambda_1 = \sin \lambda \frac{\vartheta_1}{\theta}$$

(10) $$\sin \lambda_1 = \sin \lambda \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}\right)^2 + 2\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}\cos \lambda}}$$

(10) rāda, ka lieces ass stāvokļa noteikšanai pietiek pat atrast tikai $\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}$, jo (algebriski)

(11) $$\begin{cases} \lambda = \omega_2 - \omega_1 \\ \Omega = \omega + \lambda_1 = (\omega_2 - \lambda_2) \end{cases}$$

Aprēķināsim ϑ_i. Tas ir elementārais leņķis, par ko jāpagriežas virsmai (V_i), lai tā pieskartos plāksnei π punktā P_i – tas tad nebūs nekas cits, kā leņķis, ko veido (V_i) normāles punktos P un P_i

$$\vartheta_i^2 = \int dX_i^2$$
$$= \int X_{iu}^2 du_i^2 + 2\int X_{iu} X_{iv} du_i dv_i + \int X_{iv}^2 dv_i^2$$

Bet jā parametru līnijas ir liekuma līnijas,

$$\int X_{iu}^2 = \frac{L_i^2}{E_i}, \quad \int X_{iu} X_{iv} = 0; \quad \int X_{iv}^2 = \frac{N_i^2}{G_i}$$

tā tad

(12) $$\vartheta_i^2 = \frac{L_i^2}{E_i} du_i^2 + \frac{N_i^2}{G_i} dv_i^2$$

punktos P un P_i

$$\begin{aligned}\vartheta_i^2 &= \int dX_i^2 \\ &= \int X_{iu}^2\, du_i^2 + 2\int X_{iu} X_{iv}\, du_i\, dv_i + \int X_{iv}^2\, dv_i^2\end{aligned}$$

Betija parametru līnijas ir liekuma līnijas,

$$\int X_{iu}^2 = \frac{L_i^2}{E_i}, \quad \int X_{iu} X_{iv} = 0; \quad \int X_{iv}^2 = \frac{N_i^2}{G_i}$$

un tā tad

$$(12) \qquad \vartheta_i^2 = \frac{L_i^2}{E_i}\, du_i^2 + \frac{N_i^2}{G_i}\, dv_i^2$$

un

$$(13) \qquad \frac{\vartheta_2}{\vartheta_1} = \frac{\sqrt{\frac{L_2^2}{E_2}\, du_2^2 + \frac{N_2^2}{G_2}\, dv_2^2}}{\sqrt{\frac{L_1^2}{E_1}\, du_1^2 + \frac{N_1^2}{G_1}\, dv_1^2}} = \frac{\sqrt{E_1 G_1}\,\sqrt{L_2^2 G_2 + N_2^2 E_2 K_2^2}}{\sqrt{E_2 G_2}\,\sqrt{L_1^2 G_1 + N_1^2 E_1 K_1^2}} \cdot \frac{du_2}{du_1}$$

$$(14) \qquad \frac{du_2}{du_1} = \frac{\frac{du_2}{ds}}{\frac{du_1}{ds}}$$

Ar 21. paragrafa formulām mēs varam izteikt $\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}$ un $\frac{du_2}{du_1}$ vai nu kā t, vai arī kā u_2 funkciju (var protams arī izvēlēties citdas mainīgos lielumus, ja tie ir izdevīgāki).

Atliek vēl aprēķināt ϑ, respektīvi viņa sinu un kosinu.

(11) dod

$$
(15)\quad \begin{cases} \sin \vartheta = \sin w_2 \cos w_1 - \sin w_1 \cos w_2 \\ \cos \vartheta = \cos w_1 \cos w_2 + \sin w_1 \sin w_2 \end{cases}
$$

Labā pusē atsevišķo lielumu absolūtās vērtības ir zināmas, jānosaka tikai to zīmes. Te nu pilnīgi pietiek ar šādiem noteikumiem: leņķim w_1 sinu un kosinu ņemam tādus, kādus tos dod formulas (3) un (4) un noteikums (5) (40. un 41. l.p.)

Leņķa w_2 funkciju zīmes noteikšanai sastādām

$$
A = (L_1 + N_1 K_1^2)(L_2 + N_2 K_2^2)
$$

un formulu (3), (4) un (5) doto $\sin w_2$ un $\cos w_2$ pareizinām ar

$$
\varepsilon_1 = - \frac{A}{|A|}
$$

vai, citiem vārdiem sakot, ja $A > 0$, mēs mainām $\sin w_2$ un $\cos w_2$ zīmes; ja $A < 0$, mēs tās atstājam.

Nav grūti pārliecināties, ka šie noteikumi ir pietiekoši. Piemēra dēļ pieņemsim, ka punkts P abām virsmām ir elliptisks un ka (V_1) atrodas zem (T_1) un (V_2) -

$\cos w_2$ pareizinām ar

$$\varepsilon_1 = -\frac{A}{|A|}$$

vai, citiem vārdiem sakot, ja $A > 0$, mēs mainām $\sin w_2$ un $\cos w_2$ zīmes; ja $A < 0$, mēs tās atstājam.

Nav grūti pārliecināties, ka šie noteikumi ir pietiekoši. Piemēra dēļ pielaidīsim, ka punkts P atrodas virsmām ir elliptisks un ka (V_1) atrodas zem (Π) un (V_2) - virs (Π), kā to rāda 31. 0. p. zīmējums. Tad būs

$$L_1 < 0 \qquad N_1 < 0$$

$$L_2 > 0 \qquad N_2 > 0$$

$$A < 0$$

Formulu (31, (41) un (5) dotām izteiksmēm mēs tā tad zīmes nemainam. Ja nu

$$K_1 K_2 > 0,$$

$\sin w_1$ un $\sin w_2$ ir ar to pašu zīmi, jo to reizinājumam ir tā pati zīme kā

$$N_1 N_2 K_1 K_2 A$$

Arī $\cos w_i$ būs positivs, ja

$$E_i N_i^2 > G_i L_i N_i$$

un negatīvs pretējā gadījumā.

Nebūtu grūti geometriski interpretēt visus šos noteikumus par zīmēm, bet mēs jau pašā sākumā ilgi esam uzkavējušies pie šī blakus jautājuma un tāpēc šo interpretējumu atmetīsim.

Kā jau teikts, Θ un Ω var noteikt arī citā ceļā, piem. projicējot uz PT un uz taisni perpendikulāru PT, kas dos

$$\begin{cases} \vartheta_1 \cos w_1 + \vartheta_2 \cos w_2 = \Theta \cos \Omega \\ \vartheta_1 \sin w_1 + \vartheta_2 \sin w_2 = \Theta \sin \Omega, \end{cases}$$

pazīstamas formulas vektoru saliekšanai.

Divi pēdējie paragrafi: 21. un 22. satur visas nepieciešamās formulas akšoidu saskaitīšanai. Trešām, katrā (L_1) un (L_2) punktā mēs zinām leņķi, kādu ass veido ar līku. Tā kā ass atrodas arī attiecīgās viļņas pieskarplāknē, tā ir noteikta, jo tai jābūt perpendikulārai viļņas normālei. Ja λ_i, μ_i, ν_i ir ass virziena kosini un $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ līkas (L_i) tangentes virziena kosini, mums būs

$$\Big\{ \alpha_i \lambda_i + \beta_i \mu_i + \gamma_i \nu_i = \cos \Omega$$

zinām lenķi, kādu ass veido ar līniju. Tā kā ass atrodas vēl attiecīgās virsmas pieskarplaknē, tā ir noteikta, jo tai jābūt perpendikulārai virsmas normālei. Ja λ_i, μ_i, ν_i ir ass virziena kosini un $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ līnijas (L_i) tangentes virziena kosini, mums būs

$$\begin{cases} \alpha_i \lambda_i + \beta_i \mu_i + \gamma_i \nu_i = \cos \Omega \\ X_i \lambda_i + Y_i \mu_i + Z_i \nu_i = 0 \\ \lambda_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2 = 1 \end{cases}$$

un šī sistēma dod iespēju atrast $\lambda_i, \beta_i, \gamma_i$. Katrā (L_i) punktā mums tad ir dots attiecīgās veidules virziens, kas ir viens no kanoniskajiem taisņu virsmu attēlošanas veidiem. Ar pazīstamām metodēm tad varēsim izpētīt katru aksoidu, noteikt tiem strikcijas līniju, sadalījuma parametru (Verteilungsparameter, paramètre de distribution), u.t.t.

Aksoida atrašanas galvenā grūtība ir trešās kārtības diferenciālvienādojuma integrēšana, kas tikai retos gadījumos būs iespējama.

Varētu arī iztikt bez aksoida meklēšanas, piem. izteikt, ka (V_2) kādā (L_2) punktā pieskaras virsmai (V_1) kādā (L_1) punktā un diferencēt tādi dabūtās izteiksmes, ievērojot to, ka uz (L_1) un (L_2) noietie elementārie loki ir vienādi, bet visos gadījumos ir jāatrisina (L_2) diferenciālvienādojums.

23. Ja (L_1) un (L_2) ir noslēgtas, un to garumi l_1 un l_2 ir samērojami, katra punkta rulete būs noslēgta līknē; ja turpreti šie garumi nav samērojami, katra ar (V_2) saistītā punkta rulete būs līknē, kas atradīsies kādā zināmā virsmā (V_3) un ies bezgalīgi daudzkas reizes bezgalīgi tuvu šīs virsmas punktiem. (V_3) mēs varam dabūt šādā ceļā: mēs liksim katram (L_2) punktam P slīdēt pa (L_1), piedodot (V_2) katrā mirklī tādu stāvokli, lai tā punktā P pieskartos virsmai (V_1).

24. Meklēsim vēl analītiskos noteikumus, lai asrasidā līknes attīnamas virsmas. Kā

mēs šīs virsmas pielīcam (V_2) ...

dabūt šādā ceļā: mēs liksim katram (L_2) punktam P slīdēt pa (L_1), ~~piedodot~~ (V_2) katrā mirklī tādu stāvokli, lai tā punktā P pieskartos virsmai (V_1).

24. Meklēsim vēl analītiskos noteikumus, lai aksoīdi būtu ~~attinamas~~ virsmas. Kā iepriekš redzējām, tam ir nepieciešami un pietiekoši, ka katrā mirklī PB_1 un PB_2 virsieni sakrīt, t.i. ka

$$\omega_1 = \omega_2$$

Ir skaidrs, ka tad nevis līkne (L_1) mēs nevarēsim brīvi izvēlēties.

Uz katras virsmas par parametru līnijām ņemsim ģeodētiskās līknes un to ortogonālās trajektorijas. Tad būs

$$E_i = 1 \qquad F_i = 0 \qquad G_i = G_i(u_i, v_i)$$

un

$$(1) \qquad \cos\omega_i = \frac{1 + G_i \kappa_i \bar{\kappa}_i}{\sqrt{1 + G_i \kappa_i^2}\sqrt{1 + G_i \bar{\kappa}_i^2}}$$

kur $\bar{k}_i = -\dfrac{L_i + M_i k_i}{M_i + N_i k_i}$

Pielīdzinot $\cos w_1$ un $\cos w_2$ mēs dabūsim

$$(2)\quad \frac{M_1 + (N_1 - G_1 L_1)k_1 + G_1 M_1 k_1^2}{\sqrt{1+G_1 k_1^2}\sqrt{M_1^2 + G_1 L_1^2 + 2M_1(N_1 - G_1 L_1)k_1 + (G_1 M_1^2 + N_1^2)k_1^2}} =$$

$$= \varepsilon \frac{M_2 + (N_2 - G_2 L_2)k_2 + G_2 M_2 k_2^2}{\sqrt{1+G_2 k_2^2}\sqrt{M_2^2 + G_2 L_2^2 + 2M_2(N_2 - G_2 L_2)k_2 + (G_2 M_2^2 + N_2^2)k_2^2}}$$

Te atkal $\varepsilon = \pm 1$. Šis reizinātājs jāpieviено tāpēc, ka mēs saucējā pareizinām ar $|M_i + N_i k_i|$, kamēr skaitītājā – ar $M_i + N_i k_i$. Paceļot abas puses kvadrātā, mēs dabūsim izteiksmi ar veidu

$$(3)\quad F_1(u_1, v_1, k_1) = F_2(u_2, v_2, k_2)$$

kur $k_i = \dfrac{dv_i}{du_i}$

Ģeodētiskās līnijas vienādojuma izteiksme

$$(4)\quad \sqrt{G_1}(u_1' v_1'' - u_1'' v_1') + \frac{G_{1u}}{\sqrt{G_1}}\left(u_1'^2 v_1' - \frac{1}{2} G_1 v_1'^3\right) + \frac{1}{2}\frac{G_{1v}}{\sqrt{G_1}} u_1' v_1'^2 =$$

$$= \sqrt{G_2}(u_2' v_2'' - u_2'' v_2') + \frac{G_{2u}}{\sqrt{G_2}}\left(u_2'^2 v_2' - \frac{1}{2} G_2 v_2'^3\right) + \frac{1}{2}\frac{G_{2v}}{\sqrt{G_1}} u_2' v_2'^2$$

kur accenti apzīmē diferencēšanu pēc loka. Ja no loka vietā par neatkarīgiem mainīgiem mēs ņemam u_1 un u_2, viegli redzēt, ka tad ~~no~~ līdzinājums (4) patur savu formu, vienīgi

$$(4)\quad \sqrt{G_1}(u_1'v_1''-u_1''v_1') + \frac{G_{1u}}{\sqrt{G_1}}(u_1'^2 v_1' - \tfrac{1}{2} G_1 v_1'^3) + \frac{1}{2}\frac{G_{1v}}{\sqrt{G_1}} u_1' v_1'^2 =$$

$$= \sqrt{G_2}(u_2'v_2''-u_2''v_2') + \frac{G_{2u}}{\sqrt{G_2}}(u_2'^2 v_2' - \tfrac{1}{2} G_2 v_2'^3) + \frac{1}{2}\frac{G_{2v}}{\sqrt{G_1}} u_2' v_2'^2$$

kur accenti apzīmē diferencēšanu pēc loka.

Ja mēs loka vietā par neatkarīgiem mainīgiem mēs ņemam u_1 un u_2, viegli redzēt, ka tad nolīdzinājums (4) patur savu formu, vienīgi viņa kreisā puse jāpareizina ar $\left(\frac{du_1}{ds}\right)^3$ un labā puse – ar $\left(\frac{du_2}{ds}\right)^3$. Izdalot abas puses ar $\left(\frac{du_1}{ds}\right)^3$ mums tad būs:

$$(5)\quad \sqrt{G_1}\frac{dk_1}{du_1} + \frac{G_{1u}}{\sqrt{G}}(k_1 - \tfrac{1}{2} G k_1^3) + \frac{G_v}{\sqrt{G}} k_1^2 = \left(\sqrt{G_2}\frac{dk_2}{du_2} + \frac{G_{2u}}{\sqrt{G_2}}(k_2 - \tfrac{1}{2} G k_2^3) + \frac{G_{2v}}{\sqrt{G_2}} k_2^2\right)\left(\frac{du_2}{du_1}\right)^3$$

Šim nolīdzinājumam ir forma

$$(6)\quad \Phi_1\left(u_1, v_1, k_1, \frac{dk_1}{du_1}\right) = \Phi_2\left(u_2, v_2, k_2, \frac{dk_2}{du_2}\right) \cdot \left(\frac{du_2}{du_1}\right)^3$$

Mēs vēl izteicam, ka elementārie loki ir vienādi:

$$ds_1^2 = ds_2^2$$

$$(1 + G_1 k_1^2)\,du_1^2 = (1 + G_2 k_2^2)\,du_2^2$$

$$(7)\quad 1 + G_1 k_1^2 = (1 + G_2 k_2^2)\left(\frac{du_2}{du_1}\right)^2$$

Starp neatkarīgo mainīgo u_1 un tā funkcijām v_1, u_2, v_2 mums ir trīs nolīdzinājumi: (3), (6) un (7). Šīm funkcijām būs tā tad aprobežots skaits izteiksmju, kurās ieies augšējo trīs diferenciālvolīdzinājumu integrēšanas radītās konstantes. Noteiksim šo konstanšu skaitu. Tā kā funkcijas G_1 un G_2 ir pilnīgi neatkarīgas, vispārējā gadījumā nebūs iespējams ar ēliminēšanu dabūt vienādojumu, kas saturētu u_1 un vienu no mainīgiem. Tomēr neatkarīgo konstanšu skaitu mēs varēsim noteikt ar pašu vienādojumu (3), (6) un (7) palīdzību – tie mums rāda neatkarīgo sākuma nosacījumu skaitu.

Nolīdzinājumā (3) mēs varam brīvi izvēlēties $(u_1)_0, (v_1)_0, (K_1)_0, (u_2)_0, (v_2)_0$ – tad $(K_2)_0$ ir noteikts. Bet (7) tad dod arī $\left(\frac{du_2}{du_1}\right)_0$, jo G_1 un G_2 ir zināmas u_1, v_1 un u_2, v_2 funkcijas. Nolīdzinājumā (6) mēs varam brīvi izvēlēties vēl vienu lielumu, piem. $\left(\frac{dK_1}{du_1}\right)_0$, vai arī nolīdzinājumā (4) ģeodētiskā liekuma $\frac{1}{\rho_{g}}$ vērtību punktā $(u_1)_0, (v_1)_0$.

Mums tad nu kopā ir 5 neatkarīgas konstantes, t.i., ja ir dotas divas virsmas (V_1) un (V_2), uz tām ir ∞^5 tādu līniju pāru, ur katras pa vienai, ka (V_2) pa (V_1) veļoties un viņu pieskarvaram būvi izvēlēties vēl vienu lielumu, piem. $\left(\frac{dk_1}{du_1}\right)_0$, vai arī nolīdzināšanā (4) ģeodētiskā liekuma $\frac{1}{\rho_{1g}}$ vērtību punktā $(u_1)_0, (v_1)_0$.

Mums tad un kopā ir 5 neatkarīgas konstantes, t. i. ja ir dotas divas virsmas (V_1) un (V_2), uz tām ir ∞^5 tādu līkņu pāru, uz katras pa vienai, ka (V_2) pa (V_1) veļoties un viņu pieskarpunktam uz katras virsmas aprakstot pa vienu pāra līknei, veļšanās kustības aksoīdi būtu attinami.

Dotam (V_1) punktam atbilst ∞^4 šādu līkņu pāru, ja dodam tangentes virzienu, pāru skaits ir ∞^3; dodot arī (V_2) punktu, caur kuru līknei jāiet, pāru skaits ir ∞^4, pie kam arī (V_2) virsmas līknēm dotā punktā ir kopējā tangente. Beidzot dodot vienā no dotiem punktiem liekuma radiju, pāru skaits top galīgs.

Var arī novietot (V_1) un (V_2) kādā noteiktā stāvoklī, lai tās saskartos kādā punktā P. Caur to mēs dodam $(u_1)_0, (v_1)_0, (u_2)_0, (v_2)_0$ un noteiktu sakaru starp k_1 un k_2, jo tas nosaka virsmu savstarpējā orientācija. K_1 un K_2 tā tad būs galīgs pieņemamo vērtību skaits, t. i. (L_1) un (L_2) tangentēm būs viens noteikts virziens, vai arī vairāki; mēs varēsim vēl brīvi izvēlēties sākuma ģeodētiskā liekuma radiju ρ_g.

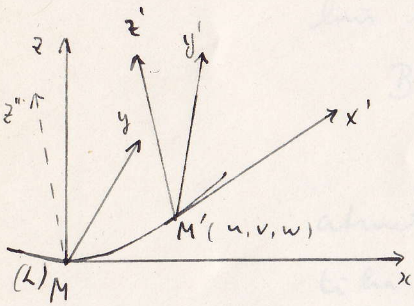
Cesàro metode. § 5. Kā redzējām, iepriekšējie aprēķini ar parasto analitisko metodi bija visai gari un vispārējā gadijumā pat neizvedami. Rodas jautājums, vai nevarētu sasniegt labākus rezultātus ar Cesàro īpatnējām metodēm. Mēs tomēr redzēsim, ka arī tur i jāzina (L_2).

Savās „Vorlesungen über natürliche Geometrie" Cesàro lietā šādu fundamentālo triedru: x ass ir tangente, y ass – binormāle un z ass – galvenā normāle; pie tam rotācijas virziens ap z asi no x uz y ir vienāds ar pulksteņa rādītāja virzienu. Mēs šo virzienu pieņemam par negatīvu un tāpēc fundamentālo triedru ņemsim pretēji orientētu Cesàro

Cesàro lietā šādu fundamentālo triedru: x ass ir tangente, y ass – binormāle un z ass – galvenā normāle; pie tam rotācijas virziens ap z asi no x uz y ir vienāds ar pulksteņa rādītāja virzienu. Mēs šo virzienu pieņemam par negatīvu un tāpēc fundamentālo triedru ņemsim pretēji orientētu Cesàro triedram. Bez tam par y asi ņemsim normāli un par z asi – binormāli. Šādu pārmaiņu mēs ievedam tāpēc, ka vēlāk, sevišķi pētot attinamu virsmu veidošanos, mums nāksies lietāt asu sistēmu, kas saistīta ar nupat izvēlēto triedru. Tad mēs varēsim ērti un tieši salīdzināt resultātus, ko dod parastā diferenciālģeometrija un Cesàro metodes (ar šo vārdu mēs arī turpmāk apzīmēsim punkta pārvietošanās noteikšanu telpā, ja zinam tā koordinātas attiecībā uz kādas likās fundamentālo triedru, vai kādu citu, ar to saistītu triedru; naturālās ģeometrijas metodes turpreti, kā to jau saka Cesàro grāmatas „Vorlesungen..." izdevējs Kowalewski's, izvairās izlietāt sešus elementus, kā piem. kādu nekustošu koordinātu sistēmu. Bet šādām metodēm mēs visur ievadam analitiskas apskatu, kā piemēram 19. un 20. paragrafā).

Lai no Cesàro izvestām pamatformulām dabūtu tādas, kas noderēs mūsu asīm, varētu permutēt y un z, mainot arī dažu locekļu zīmes. Pamatformulu izvedums tomēr ir tik vienkāršs, ka mēs tās aprēķināsim tieši, lai nerastos arī kļūdas locekļu zīmēs.

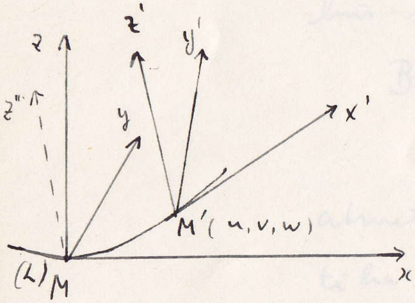
26. Noteiksim fundamentālā triedra pārvietošanos.



Vispirms noteiksim līnijas (L) punktam M bezgalīgi tuvā punktā M' asu triedra $M'x'y'z'$ stāvokli attiecībā pret punkta M triedri.

Koordinātu sistēmā (M, x, y, z) apzīmēsim M' koordinātas ar u, v, w; tie būs bezgalīgi

26. Noteiksim fundamentālā triedra pārvietošanos.



Vispirms meklēsim līnijas (L) punktam M bezgalīgi tuvā punktā M' asu triedra M'x'y'z' stāvokli attiecībā pret punkta M triedri.

Koordinātu sistēmā (M,x,y,z) apzīmēsim M' koordinātas ar u,v,w; tie būs bezgalīgi mazi lielumi.

Binormāli var uzskatīt kā perpendikulārām divām blakus esošām tangentēm, tāpēc

$$\cos(z,x') = 0 = \cos(x,z')$$

No tā izriet, ka mēs varam tangenti M'x' uzskatīt kā paralēlu xMy plāknei, un binormāli M'z' – kā paralēlu yMz plāknei. Tāpat Mx būs paralēls x'M'y' un Mz – paralēls y'M'z' plāknei.

Tad, ja $d\varphi$ ir divu bezgalīgi tuvu tangenšu leņķis,

$$\cos(y,x') = \sin d\varphi$$

un robežgadījumā, atmetot trešās kārtības bezgalīgi mazos lielumus,

$$\cos(y, x') = d\varphi \quad \text{un tāpat}$$

$$\cos(x, y') = -d\varphi$$

un analoģi dabūjam, apzīmējot ar $d\psi$ divu bezgalīgi tuvu binormāļu leņķi

$$\cos(y, z') = -d\psi$$

$$\cos(z, y') = +d\psi$$

Leņķu vērtība $d\varphi$ un $d\psi$ ir protams algebraiski lielumi. Tā ir pozitīva, ja rotācija ap attiecīgo asi notiek pozitīvā virzienā, t.i. preti pulksteņa rādītāja virzienam. Lielumi

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{R} = \rho \quad \text{un} \quad \frac{d\psi}{ds} = \frac{1}{T} = \tau$$

būs līknes (L) liekums un šķiebums punktā M. To apgrieztie lielumi

$$R \quad \text{un} \quad T$$

būs liekuma un šķiebuma radiji.

Beidzot

$$\cos(x, x') = \cos d\varphi = 1 - \tfrac{1}{2}(d\varphi)^2 \pm \dots = 1$$

atmetot bezgalīgi mazus lielumus, kuŗu kārtība augstāka par pirmo. Tāpat

$$\cos(z, z') = \cos d\psi = 1 - \tfrac{1}{2}(d\psi)^2 \pm \dots = 1$$

[illegible]

k un 1

līnijas liekuma un šķiebuma radiji.

Beidzot

$$\cos(x,x') = \cos d\varphi = 1 - \tfrac{1}{2}(d\varphi)^2 + \dots = 1$$

atmetot bezgalīgi mazos lielumus, kuru kārtība augstāka par pirmo. Tāpat

$$\cos(z,z') = \cos d\psi = 1 - \tfrac{1}{2}(d\psi)^2 + \dots = 1$$

un tā kā arī My un $M'y'$ leņķis ir vismaz pirmās kārtības bezgala mazs,

$$\cos(y,y') = 1.$$

Mēs tad nu visiem leņķu kosinus sakopošim šādā tabulē

(1)

	x	y	z
x'	1	$d\varphi$	0
y'	$-d\varphi$	1	$d\psi$
z'	0	$-d\psi$	1

27. Tad varam uzstādīt fundamentālās formulas. Aplūkosim kādu punktu P, kas vispārīgā gadījumā pārvietojas līdz ar M. P koordinātas sistēmā (M, x, y, z) lai ir x, y, z (šie

lielumi ir tie Z loka s funkcijas), $x+\delta x$, $y+\delta y$ un $z+\delta z$ lai ir šai pašā sistēmā tā punkta P' (uz P trajektorijas) koordinātas, kas atbilst punktam M'; sistēmā (M', x', y', z') punkta P' koordinātas lai ir $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$. Tad mums būs, ievērojot augšējās tabeles lielumus un projicējot PP' uz Mx, My, Mz:

$$
(2) \quad \left\{
\begin{aligned}
x+\delta x &= u + x + dx - (y+dy)\,d\varphi \\
y+\delta y &= v + y + dy - (x+dx)\,d\varphi - (z+dz)\,d\psi \\
z+\delta z &= w + z + dy + (y+dy)\,d\psi
\end{aligned}
\right.
$$

Tāpat kā Cesàro, mēs aplūkosim tikai tās līknes, kam loka MM' attiecībai pret chordu MM' ir robežvērtība 1, kad M' neaprobežoti tuvojas M. Tā kā pie tangentes definīcijas

$$\lim \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}} = 1 \qquad \lim \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}} = 0 \qquad \lim \frac{w}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}} = 0$$

un pie augšējā pielaiduma

$$\lim \frac{\delta s}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}} = 1$$

mums būs

$$\lim \frac{u}{\delta s} = 1 \qquad \lim \frac{v}{\delta s} = 0 \qquad \lim \frac{w}{\delta s} = 0$$

…, kad M neaprobe-

žoti tuvojas M. Tā kā pie tangentes definīcijās

$$\lim \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}} = 1 \qquad \lim \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}} = 0 \qquad \lim \frac{w}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}} = 0$$

un pie augšējā pielaiduma

$$\lim \frac{\delta s}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}} = 1$$

mums būs

$$\lim \frac{u}{\delta s} = 1 \qquad \lim \frac{v}{\delta s} = 0 \qquad \lim \frac{w}{\delta s} = 0$$

Nolīdzinājumus (2) mēs izdalīsim ar $\delta s = ds$ un robežās. Tad mēs dabūsim fundamentālās formulas:

$$(3) \quad \begin{cases} \dfrac{\delta x}{ds} = \dfrac{dx}{ds} - \dfrac{y}{R} + 1 \\ \dfrac{\delta y}{ds} = \dfrac{dy}{ds} + \dfrac{x}{R} - \dfrac{z}{T} \\ \dfrac{\delta z}{ds} = \dfrac{dz}{ds} + \dfrac{y}{T} \end{cases}$$

Kā Cesàro to aizrāda, un kā viegli pārliecināties, formulas (2) ir derīgas arī visiem koeficientiem α, β, γ, kas notiek kādu virzienu, ja tikai atmetam u, v, w; t.i. formulas (3) būs derīgas visiem, atmetot pirmajā 1. Mums tā tad būs

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{\delta\alpha}{ds} = \dfrac{d\alpha}{ds} - \dfrac{\beta}{R} \\[2mm] \dfrac{\delta\beta}{ds} = \dfrac{d\beta}{ds} + \dfrac{\alpha}{R} - \dfrac{\gamma}{T} \\[2mm] \dfrac{\delta\gamma}{ds} = \dfrac{d\gamma}{ds} + \dfrac{\beta}{T} \end{cases}$$

Katru taisni varam definēt ar viņas virziena kosinusiem α, β un γ un ar lielumiem

$$(5)\qquad \xi = \gamma y - \beta z, \quad \eta = \alpha z - \gamma x \quad \zeta = \beta x - \alpha y$$

kas ir saistīti ar virziena kosinusiem identiskā sakarībā

$$(6)\qquad \alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = 0$$

un kas ir neatkarīgi no punkta (x, y, z) stāvokļa uz aplūkojamās taisnes, jo tie nemainās, ja x, y, z aizvietojam ar $x+\alpha t$, $y+\beta t$, $z+\gamma t$. Tad mums būs

$$\frac{\delta\xi}{ds} = \frac{\delta\gamma}{ds}y + \frac{\delta y}{ds}\gamma - \frac{\delta\beta}{ds}z - \frac{\delta z}{ds}\beta$$

un līdzīgas izteiksmes būs $\frac{\delta\eta}{ds}$ un $\frac{\delta\zeta}{ds}$. Ievērojot (3) un (4), mēs dabūjam

$$\begin{cases} \dfrac{\delta\xi}{ds} = \dfrac{d\xi}{ds} \quad \eta \end{cases}$$

vokļa uz aplūkojamās taisnes, jo tie nemainas, ja x, y, z aizvietojam ar $x+\alpha t,\ y+\beta t,\ z+\gamma t$. Tad nu būs

$$\frac{\delta\xi}{ds} = \frac{\delta x}{ds}\gamma + \frac{\delta y}{ds}\gamma - \frac{\delta\beta}{ds}z - \frac{\delta z}{ds}\beta$$

un līdzīgas izteiksmes būs $\frac{\delta\eta}{ds}$ un $\frac{\delta\zeta}{ds}$. Ievērojot (3) un (4), mēs dabūjam

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{\delta\xi}{ds} = \dfrac{d\xi}{ds} - \dfrac{\eta}{R} \\[2ex] \dfrac{\delta\eta}{ds} = \dfrac{d\eta}{ds} + \dfrac{\xi}{R} - \dfrac{\zeta}{T} - \gamma \\[2ex] \dfrac{\delta\zeta}{ds} = \dfrac{d\zeta}{ds} + \dfrac{\eta}{T} + \beta \end{cases}$$

Lai kāds punkts būtu nekustīgs, ir nepieciešami un pietiekoši, ka vinam

$$\delta x = 0 \qquad \delta y = 0 \qquad \delta z = 0$$

(3) tad dod

$$(8)\quad \frac{dx}{ds} = \frac{y}{R} - 1 \qquad \frac{dy}{ds} = -\frac{x}{R} + \frac{z}{T} \qquad \frac{dz}{ds} = -\frac{y}{T}$$

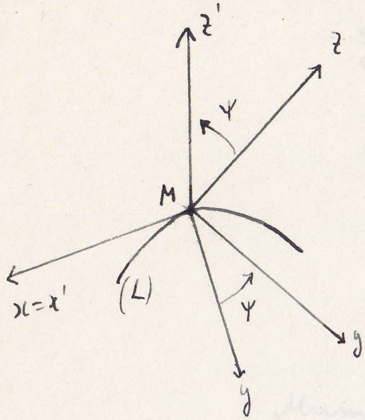
Tāpat, lai kāds virziens būtu nemainīgs, (4) dod

$$(9)\quad \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\beta}{R} \qquad \frac{d\beta}{ds} = -\frac{\alpha}{R} + \frac{\gamma}{T} \qquad \frac{d\gamma}{ds} = -\frac{\beta}{T}$$

un lai kāda noteikta taisne būtu nesaistīga, jābūt izpildītiem noteikumiem (9) viņas virzienam un tās stāvoklim:

$$(10) \qquad \frac{d\xi}{ds} = \frac{\eta}{R} \qquad \frac{d\eta}{ds} = -\frac{\xi}{R} + \frac{\zeta}{T} + \gamma \qquad \frac{d\zeta}{ds} = -\frac{\eta}{T} - \beta$$

27. Lai dabūtu formulas, kas derīgas līknēm (L) uz virsmas (V), apzīmēsim ar ψ leņķi, par



ko jāgriež, no pozitīvā (L) tangentes virziena skatoties, virsmas (V) normāle, lai tā sakristu ar līknes (L) galveno normāli. Šis leņķis protams būs pozitīvs, ja rotācija notiek virzienā pretējā pulksteņa rādītāja virzienam. Līdz ar Cesàro[6] apzīmēsim

$$\mathcal{N} = \frac{\cos\psi}{R} \qquad \mathcal{G} = \frac{\sin\psi}{R} \qquad \mathcal{T} = \frac{d\psi}{ds} - \frac{1}{T}$$

$\mathcal{N}$ būs (L) normālais un $\mathcal{G}$ - ģeodētiskais liekums un $\mathcal{T}$ - ģeodētiskais šķiebums punktā M. Cesàro[7] aizrāda, ka visām virsmas līnijām, kam ir kopēja tangente Mx, $\mathcal{N}$ un $\mathcal{T}$ ir kopēji y virzienam. Līdzar Cesàro apzīmēsim

$$\mathcal{N} = \frac{\cos\psi}{R} \qquad \mathcal{G} = \frac{\sin\psi}{R} \qquad \mathcal{T} = \frac{d\psi}{ds} - \frac{1}{T}$$

$\mathcal{N}$ būs (L) normālais un $\mathcal{G}$ – ģeodētiskais liekums un $\mathcal{T}$ – ģeodētiskais izliekums punktā M. Cesàro[7] aizrāda, ka visām virsmas līnijām, kam ir kopējā tangente Mx, $\mathcal{N}$ un $\mathcal{T}$ ir kopēji.

Ievedīsim tagad jaunu references triedru: kā x asi paturēsim (L) tangenti, bet kā y asi ņemsim virsmas (V) normāli. z ass tad arī būs noteikta. Kāda punkta P koordinātas pret (L) fundamentālo triedru lai ir x', y', z', bet pret jauno references triedru tās būs x, y, z. Šo koordinātu starpā pastāv sakari

$$x = x' \quad , \quad y = y'\cos\psi - z'\sin\psi \quad , \quad z = y'\sin\psi + z'\cos\psi$$

Punkta P nekustības noteikumi sistēmā $(Mx'y'z')$ bija

$$(1) \qquad \frac{dx'}{ds} = \frac{y'}{R} - 1 \qquad \frac{dy'}{ds} = -\frac{x'}{R} + \frac{z'}{T} \qquad \frac{dz'}{ds} = -\frac{y'}{T}$$

Aprēķināsim šos noteikumus sistēmas $(Mxyz)$ koordinātām.

---

6) Cesàro, 194. l.p.

7) 197. l.p.

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dx'}{ds} = \frac{y'}{R} - 1 = \frac{y\cos\psi + z\sin\psi}{R} - 1$$

$$= \mathcal{N} y + \mathcal{G} z - 1$$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy'}{ds}\cos\psi - \frac{dz'}{ds}\sin\psi - (y'\sin\psi + z'\cos\psi)\frac{d\psi}{ds}$$

$$= -\frac{x'}{R}\cos\psi + \frac{z'}{T}\cos\psi + \frac{y'}{T}\sin\psi - z\frac{d\psi}{ds}$$

$$= -\mathcal{N}x + \left(\frac{1}{T} - \frac{d\psi}{ds}\right) z$$

$$= -\mathcal{N}x - \mathcal{T} z$$

$$\frac{dz}{ds} = \frac{dy'}{ds}\sin\psi + \frac{dz'}{ds}\cos\psi + (y'\cos\psi - z'\sin\psi)\frac{d\psi}{ds}$$

$$= -\frac{x'}{R}\sin\psi + \frac{z'}{T}\sin\psi - \frac{y'}{T}\cos\psi + y\frac{d\psi}{ds}$$

$$= -\mathcal{G}x + y\left(\frac{d\psi}{ds} - \frac{1}{T}\right)$$

$$= -\mathcal{G}x + \mathcal{T}y$$

Mums tā tad ir

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{ds} = \mathcal{N}y + \mathcal{G}z - 1 \\[2ex] \dfrac{dy}{ds} = -\mathcal{N}x - \mathcal{T}z \\[2ex] \dfrac{dz}{ds} = \mathcal{T}y - \mathcal{G}x \end{cases}$$

kā punkta $P(x, y, z)$ nekustības noteikumi. Ja

[illegible] tā P [illegible] līdz ar M tā koordinātu ah-

Mums tā tad ir

$$(2)\begin{cases}\dfrac{dx}{ds} = \mathcal{N}y + \mathcal{G}z - 1\\[2mm] \dfrac{dy}{ds} = -\mathcal{N}x - \mathcal{T}z\\[2mm] \dfrac{dz}{ds} = \mathcal{T}y - \mathcal{G}x\end{cases}$$

kā punkta $P(x, y, z)$ nekustības noteikumi. Ja turpretī P kustas līdz ar M, tā koordinātu absolūtās variācijas būs

$$(3)\begin{cases}\dfrac{\delta x}{ds} = \dfrac{dx}{ds} - \mathcal{N}y - \mathcal{G}z + 1\\[2mm] \dfrac{\delta y}{ds} = \dfrac{dy}{ds} + \mathcal{N}x + \mathcal{T}z\\[2mm] \dfrac{\delta z}{ds} = \dfrac{dz}{ds} + \mathcal{G}x - \mathcal{T}y\end{cases}$$

un ir skaidrs, kā to aizrāda arī Cesàro, ka šīs formulas būs derīgas arī ja x, y, z ir virsmas koordināti, ar noteikumu atmest pirmās formulas labā pusē pastāvīgo locekli 1.

28. Aplūkosim tagad telpā divas virsmas (V_1) un (V_2), no kurām pirmā ir nekustīga un pieņemsim, ka (V_2) velās pa (V_1) pie kam pieskar-

punkts P lai apraksta uz (V_1) līniju (L_1) un uz (V_2) - līniju (L_2). Pagaidām uzliksim vienīgo noteikumu, lai velšanās notiktu bez slīdes, par vērpšanos (sk. 28. l. p.) neko nenosakot. Tad P elementārie pārvietojumi pa (L_1) un (L_2) būs vienādi. Apzīmējot visus uz līniju (L_i) attiecošos elementus ar indeksu i, mums būs

$$(1) \qquad ds_1 = ds_2$$

Tagad aplūkosim kādu ar (V_2) nekustīgi saistītu punktu O_2. Tā kā viņš ir nekustīgs attiecībā pret L_2, mums būs, ja x, y, z ir šī punkta koordinātas attiecībā uz iepriekšējā paragrafā definēto triedru,

$$(2) \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{ds_2} = N_2 y - g_2 z - 1 \\[2ex] \dfrac{dy}{ds_2} = -N_2 x - T_2 z \\[2ex] \dfrac{dz}{ds_2} = T_2 y - g_2 x \end{cases}$$

Bet ir x, y, z ir arī O_2 koordinātas attiecībā pret (L_1) piesaistīto triedru, jo abām līkām

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{ds_2} = N_2 y - g_2 z - 1 \\[2ex] \dfrac{dy}{ds_2} = -N_2 x - T_2 z \\[2ex] \dfrac{dz}{ds_2} = T_2 y - g_2 x \end{cases}$$

Bet un x, y, z ir arī O_2 koordinātas attiecībā pret (L_1) piesaistīto triedru, jo abām līknēm pozitīvie tangentes virzieni sakrīt un tāpat sakrīt ar pozitīvo (ν_1) un (ν_2) normāļu virzieni. Tā kā O_2 ir kustīgs attiecībā pret (L_1),

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{\delta x}{ds_1} = \dfrac{dx}{ds_1} - N_1 y - g_1 z + 1 \\[2ex] \dfrac{\delta y}{ds_1} = \dfrac{dy}{ds_1} + N_1 x + T_1 z \\[2ex] \dfrac{\delta z}{ds_1} = \dfrac{dz}{ds_1} + g_1 x - T_1 y \end{cases}$$

(1) rāda, ka

$$\frac{dx}{ds_1} = \frac{dx}{ds_2} \quad \text{u.t.t.}$$

Ievērojot nolīdzinājumā (3) vērtības, ko dod (2) un apzīmējot

$$N = N_2 - N_1, \quad g = g_2 - g_1, \quad T = T_2 - T_1,$$

mēs dabūjam

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{\delta x}{ds_1} = Ny + Gz \\[2ex] \dfrac{\delta y}{ds_1} = -Nx - Tz \\[2ex] \dfrac{\delta z}{ds_1} = Ty - Gx \end{cases}$$

Nolīdzinājums (4) mums dod O_2 rulletes (L_2) tangentes nolīdzinājumu sistēmā $Pxyz$:

$$(5)\quad \frac{\xi - x}{Ny + Gz} = -\frac{\eta - y}{Nx + Tz} = \frac{\zeta - z}{Ty - Gx}$$

Rulletes normālplāksne punktā O_2 ir

$$(\xi - x)(Ny + Gz) - (\eta - y)(Nx + Tz) + (\zeta - z)(Ty - Gx) = 0$$

kas vienkāršojas par

$$(6)\quad \xi(Ny + Gz) - \eta(Nx + Tz) + \zeta(Ty - Gx) = 0$$

Nolīdzinājumos ξ, η, ζ ir tekošā punkta koordinātas. Kā tas jau bija iepriekš paredzams, (6) rāda, ka rulletes normālplāksne iet caur punktu

$$\xi = 0 \quad \eta = 0 \quad \zeta = 0$$

t.i. caur punktu P.

$$(6)\qquad \xi(Ny+Gz)-\eta(Nx+Jz)+\zeta(Jy-Gx)=0$$

Nolīdzinājumos ξ, η, ζ ir tekošā punkta koordinātas. Kā tas jau bija iepriekš paredzams, (6) rāda, ka ruletes normāl-plāksne iet caur punktu

$$\xi=0 \qquad \eta=0 \qquad \zeta=0$$

t.i. caur punktu P.

Ruletes elementārais loks ds ir

$$ds^2=\delta x^2+\delta y^2+\delta z^2$$

un tāpēc tā attiecība pret ds_1 būs

$$(7)\qquad \frac{ds}{ds_1}=\sqrt{(Ny+Gz)^2+(Nx+Jz)^2+(Jy-Gx)^2}$$

Meklēsim tos punktus, kas ir nekustīgi.

Tiem jābūt

$$\frac{\delta x}{ds_1}=0=\frac{\delta y}{ds_1}=\frac{\delta z}{ds_1}$$

un (4) dod

$$(8)\qquad \begin{cases} Ny+Gz=0 & \dfrac{y}{G}=-\dfrac{z}{N} \\ Nx+Jz=0 & \dfrac{x}{J}=-\dfrac{z}{N} \\ Jy-Gx=0 & \dfrac{x}{J}=\dfrac{y}{G} \end{cases}$$

Nolīdzinājumu (8) starpā tikai divi ir neatkarīgi un tiem ir bezgalīgi daudz atrisinājumu, ko saista

$$(9) \qquad \frac{x}{\mathfrak{J}} = \frac{y}{\mathfrak{g}} = \frac{z}{\mathfrak{N}}$$

(9) ir taisnes nolīdzinājums, pie kam (8) izteic, ka visi šīs taisnes punkti ir nekustīgi - tā ir acumirklīgā rotācijas ass.

Ja mēs gribam, lai šī ass būtu (V_1) un (V_2) kopējā pieskarplāksnē, jābūt

$$y = 0 \quad \text{t. i.} \quad \mathfrak{g} = 0$$

Tā tad nepieciešamais un pietiekošais noteikums, lai acumirklīgā ~~rotācijas~~ ass būtu abu virsmu pieskarplāksnē (t. i. lai vērpšanās leņķa ātrums būtu 0) ir, ka abu līku (L_1) un (L_2) ģeodētiskie liekumi ir identiskas ~~loka~~ funkcijas.

Pateicoties saīsinātai rakstībai, te šis noteikums uzrakstams ārkārtīgi vienkārši, bet viņš nozīmē to pašu kā 38. lap. puses diferenciālabu virsmu pieskarplāksne (t. i. lai vērpšanās leņķa ātrums būtu 0) ir, ka abu līko (L_1) un (L_2) ģeodētiskie liekumi ir identiskas loka funkcijas.

Pateicoties saīsinātai rakstībai, te šis noteikums uzrakstams ārkārtīgi vienkārši, bet viņš nozīmē to pašu kā 38. lap. puses diferenciālnolīdzinājums (8_2). Ja mums tā tad L_1 ir dota ar saviem koordinātām, faktiskai aprēķini (L_2) atrašanai te ir identiski tie paši kā 21. paragrafā.

Vispārīgiem pētījumiem mēs tomēr varam pieņemt, ka g_i, N_i, T_i ir zināmas kā attiecīgā loka s_i funkcijas, kā to mēs arī te darām.

Ruletes (L_3) tangentes virziena kosini ir

$$(10) \quad \lambda = \frac{Ny + gz}{\sqrt{\sum\left(\frac{\delta x}{ds_1}\right)^2}} \qquad \mu = -\frac{Nx + Tz}{\sqrt{\sum\left(\frac{\delta x}{ds_1}\right)^2}} \qquad \nu = \frac{Ty - gx}{\sqrt{\sum\left(\frac{\delta x}{ds_1}\right)^2}}$$

Lai atrastu ruletes (L_3) liekumu $\frac{1}{R}$, jāaprēķina λ, μ un ν absolūtās maiņas attiecība pret ds un jāsaskaita to kvadrāti:

$$(11) \quad \frac{1}{R^2} = \left(\frac{\delta \lambda}{ds}\right)^2 + \left(\frac{\delta \mu}{ds}\right)^2 + \left(\frac{\delta \nu}{ds}\right)^2$$

$$(12)\qquad \frac{\delta\lambda}{ds} = \frac{\delta\lambda}{ds_1} : \frac{ds}{ds_1} = \frac{\dfrac{\delta\lambda}{ds_1}}{\sqrt{S\left(\dfrac{\delta x}{ds_1}\right)^2}}$$

Izteiksmes (3) (52. l. pusē) ir derīgas arī virziena kosinusiem, ja tikai pirmās labā pusē atmetam pastāvīgo locekli $+1$. Tā tad

$$(13)\quad \begin{cases} \dfrac{\delta\lambda}{ds_1} = \dfrac{d\lambda}{ds_1} - N_1\mu - \mathcal{G}_1\nu \\[2ex] \dfrac{\delta\mu}{ds_1} = \dfrac{d\mu}{ds_1} + N_1\lambda + T_1\nu \\[2ex] \dfrac{\delta\nu}{ds_1} = \dfrac{d\nu}{ds_1} + \mathcal{G}_1\lambda - T_1\mu \end{cases}$$

Atliek vēl aprēķināt $\frac{d\lambda}{ds_1}, \frac{d\mu}{ds_1}, \frac{d\nu}{ds_1}$. Tā kā

$$ds_1 = ds_2$$

pietiek diferencēt λ, μ, ν pēc s_2, ievērojot vēl noteikumus (2).

$$\frac{d\lambda}{ds_1} = \frac{d\lambda}{ds_2} = \frac{\sqrt{S\left(\frac{\delta x}{ds_1}\right)^2}\left(N\frac{dy}{ds_2} + \mathcal{G}\frac{dz}{ds_2} + y\frac{dN}{ds_2} + z\frac{d\mathcal{G}}{ds_2}\right) - (Ny + \mathcal{G}z)\dfrac{d\left(\sqrt{S\left(\frac{\delta x}{ds_1}\right)^2}\right)}{ds_2}}{S\left(\frac{\delta x}{ds_1}\right)^2}$$

Aprēķināsim šis izteiksmes skaitītāju Σ, pareizinātu ar $\sqrt{S\left(\frac{\delta x}{ds_1}\right)^2}$.

$$\Sigma = \left[(Ny+\mathcal{G}z)^2 + (Nx+Tz)^2 + (Ty-\mathcal{G}x)^2\right]\left[N(-N_2x - T_2z) + \mathcal{G}(T_2y - \mathcal{G}_2x) + y\frac{dN}{ds_2} + z\frac{d\mathcal{G}}{ds_2}\right] -$$

$$- \frac{\delta x}{ds_1} S\left[\left(\frac{\delta x}{ds_1}\right)\frac{d\left(\frac{\delta x}{ds_1}\right)}{ds_2}\right]$$

noteikumus (2).

$$\frac{d\lambda}{ds_1} = \frac{d\lambda}{ds_2} = \frac{\sqrt{\int\left(\frac{\delta x}{ds_1}\right)^2}\left(N\frac{dy}{ds_2} + \mathcal{G}\frac{dz}{ds_2} + y\frac{dN}{ds_2} + z\frac{d\mathcal{G}}{ds_2}\right) - (Ny + \mathcal{G}z)\frac{d\left(\sqrt{\int\left(\frac{\delta x}{ds_1}\right)^2}\right)}{ds_2}}{\int\left(\frac{\delta x}{ds_1}\right)^2}$$

Aprēķināsim šīs izteiksmes skaitītāju Σ, pareizinātu ar $\sqrt{\int\left(\frac{\delta x}{ds_1}\right)^2}$.

$$\Sigma = \left[(Ny+\mathcal{G}z)^2 + (Nx + \mathcal{T}z)^2 + (\mathcal{T}y - \mathcal{G}x)^2\right]\left[N(-N_2x - \mathcal{T}_2z) + \mathcal{G}(\mathcal{T}_2y - \mathcal{G}_2x) + y\frac{dN}{ds_2} + z\frac{d\mathcal{G}}{ds_2}\right] -$$

$$- \frac{\delta x}{ds_1}\int\left[\left(\frac{\delta x}{ds_1}\right)\frac{d\left(\frac{\delta x}{ds_1}\right)}{ds_2}\right]$$

Redzams, ka loceklis $\left(\frac{\delta x}{ds_1}\right)^2\frac{d\left(\frac{\delta x}{ds_1}\right)}{ds_2}$ saīsinājas: tas vienreiz ir ar plus un otro reizi ar minus zīmi.

Tad paliek pāri

$$\Sigma = \left[\left(\frac{\delta y}{ds_1}\right)^2 + \left(\frac{\delta z}{ds_1}\right)^2\right]\frac{d\left(\frac{\delta x}{ds_1}\right)}{ds_2} - \frac{\delta x}{ds_1}\cdot\frac{\delta y}{ds_1}\frac{d\left(\frac{\delta y}{ds_1}\right)}{ds_2} - \frac{\delta x}{ds_1}\cdot\frac{\delta z}{ds_1}\frac{d\left(\frac{\delta z}{ds_1}\right)}{ds_2}$$

Jāsastāda $\frac{\delta x}{ds_1}$ u.t.t. atvasinājumi pēc ds_2

$$\frac{d}{ds_2}\left(\frac{\delta x}{ds_1}\right) = N(-N_2x - \mathcal{T}_2z) + \mathcal{G}(\mathcal{T}_2y - \mathcal{G}_2x) + y\frac{dN}{ds_2} + z\frac{d\mathcal{G}}{ds_2}$$

$$= -x(NN_2 + \mathcal{G}\mathcal{G}_2) + y\mathcal{G}\mathcal{T}_2 - zN\mathcal{T}_2 + y\frac{dN}{ds_2} + z\frac{d\mathcal{G}}{ds_2}$$

$$\frac{d}{ds_2}\left(\frac{\delta y}{ds_1}\right) = -N(N_2y - \mathcal{G}_2z - 1) - \mathcal{T}(\mathcal{T}_2y - \mathcal{G}_2x) - x\frac{dN}{ds_2} - z\frac{d\mathcal{T}}{ds_2}$$

$$= x\mathcal{T}\mathcal{G}_2 - y(NN_2 + \mathcal{T}\mathcal{T}_2) + zN\mathcal{G}_2 + N + x\frac{dN}{ds_2} - z\frac{d\mathcal{T}}{ds_2}$$

$$\frac{d}{ds_2}\left(\frac{\delta z}{ds_1}\right) = \mathcal{T}(-N_2x - \mathcal{T}_2z) - \mathcal{G}(N_2y - \mathcal{G}_2z - 1) + y\frac{d\mathcal{T}}{ds_2} - x\frac{d\mathcal{G}}{ds_2}$$

$$= -x\mathcal{T}N_2 - y\mathcal{G}N_2 + z(\mathcal{G}\mathcal{G}_2 - \mathcal{T}\mathcal{T}_2) + \mathcal{G} + y\frac{d\mathcal{T}}{ds_2} - x\frac{d\mathcal{G}}{ds_2}$$

Kā redzams, šis izteiksmes ir visai sarežģītas. Ievērojot to, ka ~~pie~~ $\frac{d\lambda}{ds_1}$ vēl jāpieskaita $-N_1\mu - g_1\nu$, lai dabūtu $\frac{\delta\lambda}{ds_1}$, redzam, ka šī pēdējā lieluma atrašanai ir izdevīgāki Σ formu nevienkāršot, bet pievest pie kopējā saucēja

$$(14)\quad \frac{\delta\lambda}{ds_1} = \frac{1}{\left[S\left(\frac{\delta x}{ds_1}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\Bigg[\left(S\left(\frac{\delta x}{ds_1}\right)^2\right).\left(-NN_2x - gg_2x + gT_2y - NT_2z + NN_1x + gg_1x - g_1Ty + N_1Tz + y\frac{dN}{ds_2} + z\frac{dN}{ds_2}\right) - (Ny + gz)\frac{1}{2}\frac{d}{ds_2}\left(S\left(\frac{\delta x}{ds_1}\right)^2\right)\Bigg]$$

$$(14')\quad \frac{\delta\lambda}{ds_1} = \frac{-x(N^2+g^2) + y\frac{dN}{ds_2} + z\frac{dg}{ds_2}}{\sqrt{S\left(\frac{\delta x}{ds_1}\right)^2}} + \frac{1}{\left[S\left(\frac{\delta x}{ds_1}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\left[\left[(gT_2 - g_1T)y - (NT_2 - N_1T)z\right]S\left(\frac{\delta x}{ds_1}\right)^2 - (Ny + gz)\frac{1}{2}\frac{d}{ds_2}\left(S\left(\frac{\delta x}{ds_1}\right)^2\right)\right]$$

Pirmo locekli mēs atdalījām tāpēc, ka tas ir atkarīgs tikai no N, g un T, bet nevis no katras līknes (L_1) vai (L_2) elementiem atsevišķi. Pēc analoģijas ar plakni varētu domāt, ka arī kvadrātiskā izteiksme atkarīsies tikai no N, g, T. Tās aprēķināšanai sastādām

$$(15)\quad S\left(\frac{\delta x}{ds_1}\right)^2 = x^2(N^2+g^2) + y^2(N^2+T^2) + z^2(g^2+T^2) + 2yzNg + 2zxNT - 2xygT$$

tikai (L_1) vai (L_2) elementiem atsevišķi. Pēc analoģijas ar plākšņu varētu domāt, ka arī kvadrātiskā izteiksme atkarājas tikai no N, G, T. Tās aprēķināšanai sastādām

$$(15) \quad \int\left(\frac{\delta x}{ds_1}\right)^2 = x^2(N^2+G^2)+y^2(N^2+T^2)+z^2(G^2+T^2)+ 2yzNG+2zxNT-2xyGT$$

Tad

$$(16) \quad \frac{1}{2}\frac{d}{ds_2}\left(\int\left(\frac{\delta x}{ds_1}\right)^2\right) = x(N_2y-G_2z-1)(N^2+G^2)+y(-N_2x-T_2z)(N^2+T^2)+z(T_2y-G_2x)(G^2+T^2)+ y(T_2y-G_2x)NG+z(-N_2x-T_2z)NG+z(N_2y-G_2z-1)NT+ x(T_2y-G_2x)NT-y(N_2y-G_2z-1)GT+x(N_2x+T_2z)GT+F(N,G,T)$$

kur

$$(17) \quad F(N,G,T) = (x^2N+y^2N+yzG+zxT)\frac{dN}{ds_2}+(x^2G+z^2G+yzN-xyT)\frac{dG}{ds_2}+ (y^2T+z^2T+zxN-xyG)\frac{dT}{ds_2}$$

Arī $F(N,G,T)$ atkarājas tikai no N, G, T. Ja nu mēs aprēķinām (14') formulas kvadrātisko izteiksmi, tad tomēr redzam, ka tur visi koeficienti nav N, G, T funkcijas, bet gan tie satur $N_1, N_2, G_1, G_2, T_1, T_2$, pie kam šie lielumi vienmēr sastopami grupās, kam var piedot šādu formu:

$$\begin{vmatrix} g & T \\ g_1 & T_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} T & N \\ T_2 & N_1 \end{vmatrix}$$

u.t.t. Bet nu

$$\begin{vmatrix} g & T \\ g_1 & T_2 \end{vmatrix} = g_1 T_1 - 2 g_1 T_2 + g_2 T_1$$

nav simmetrisks attiecībā uz abu līniju (L_1), (L_2) elementiem. Ja nu mēs liekam veltes (V_1) pa (V_2), redzams, ka $\frac{\delta x}{ds_1}$, $\frac{\delta y}{ds_1}$, $\frac{\delta z}{ds_1}$ maina savas zīmes, paturot savu absolūto vērtību, kamēr izteiksmes kā

$$\begin{vmatrix} g & T \\ g_1 & T_2 \end{vmatrix}$$

mainās savu absolūto vērtību.

Mēs tā tad redzam, ka punkta O_2 ruletei kādā O_2 stāvoklī ir tā pati tangente, vienalga, vai O_2 ir saistīts ar (V_2) kas veļas pa nekustošo (V_1), ~~vai~~ vai arī O_2 ir saistīts ar (V_1), kas veļas pa nekustošo (V_2). Turpreti šīs tangentes virziena kosinu maiņas abās šajās kustībās ir dažādas.

Varētu tomēr būt, ka ruletes liekumam $\frac{1}{R}$ mēs abās kustībās dabūjam to pašu vērtību. Mēs šo aprēķinu tomēr neiznekustošo (V_1), ~~vai~~ arī O_2 ir saistīts ar (V_1), kas velās pa nekustošo (V_2). Turpreti šis tangentes virziena kosinu maiņas abās š-ajās kustībās ir daž-ādas.

Varētu tomēr būt, ka ruletes liekumam $\frac{1}{R}$ mēs abās kustībās dabūjam to pašu vērtību. Mēs šo aprēķinu tomēr neizvedām, jo, lai gan tas nav grūts, tas ir visai garš (tā izteiksmes (14') kvadrātiskā ieskavā satur ap 60 monomu)

Tāpat mēs neesam izveduši citus pētījumus š-ai vispārējā gadījumā, jo formulas ātri top sarežģītas un, ja lielumi N_i, G_i, T_i nav pārāk sarežģītas s_i funkcijās, liekas, ka būs vienkārš-āki izvest aprēķinus katrā konkretā gadījumā. Apskatot aksoīdu velšanos mēs tad arī pētījumus izvedīsim tālāk.

Formulas stipri vienkāršojas, ja (L_1) un (L_2) ir kāds kopējs elements, t. i. ja viena no funkciju pāriem N_1, N_2; G_1, G_2; T_1, T_2, abas funkcijās ir identiskas. Tad attiecīgais lielums bez indeksa ir nulle- tāds būtu piem. velšanās bez vērpšanās gadījumā, kur

$$g_1 = g_2 \quad \text{un} \quad g = 0$$

Tāpat formulas vienkāršojas, ja līnijas (L_i) vai un abas, vai viena no viņām, ir kādas īpašas virsmas līnijas. Tā ar, ja (L_1) ir ģeodētiska līnija, tad

$$g_1 = 0;$$

ja (L_1) ir liekuma līnija,

$$T_1 = 0$$

beidzot, ja (L_1) ir asimptotiska līnija,

$$N_1 = 0$$

un līdzīgi ar (L_2). Mēs tomēr arī šos gadījumus neapskatīsim.

Līnijas velšanās pa virsmu (vai virsmas pa līniju).

29. Šo gadījumu mēs atsevišķi nepētīsim, bet to reducēsim uz nākošo.

Ja līnija (L_2) pieskaras virsmai (V_1) punktā P un neaplūkosim.

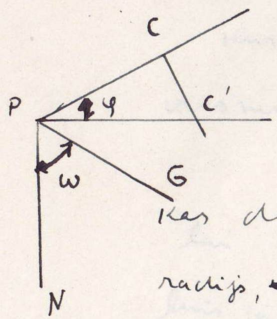
Līnijas velšanās pa virsmu (vai virsmas pa līniju). (2)

29. Šo gadījumu mēs atsevišķi nepētīsim, bet to reducēsim uz nākošo.

Ja līnija (L_2) pieskaras virsmai (V_1) punktā P un ja (L_1) ir P ģeometriskā vieta uz (V_1), tāpat kā 19. paragrafā (31. un 32. lap. p.) mēs konstatētu, ka punktā P līknēm (L_1) un (L_2) ir kopēja tangente un ka (L_1) ģeodētiskam liekumam g punktā P jābūt vienādam ar (L_2) projekcijas (L_2') uz (V_1) pieskarplāksni (II) punktā P liekumu. Šo pēdējo mēs zinām, jo ~~kaimus~~ ir zināms, kā mēs to sākumā noteicām, (L_2) pieglaušanās plāksnes un (II) leņķis φ kā (L_2) loka s_2 funkcija: ja R_2 ir (L_2) liekuma radijs un R_2' (L_2) projekcijas liekuma radijs, tad

$$(1)\qquad R_2' = \frac{R_2}{\cos\varphi}$$

Šo sakarību var patstāvīgi pierādīt kā atsevišķu teorēmu, kā to dara, piemēram, Scheffers (543-545 l. p.), bet tā ir tiešas sekas Meusnier'a teorēmai. Tiešām taisnes, kas projicē (L_2) uz π, sastāda virsmu, kuras normālšķēlums ar plākšni, kas iet caur (L_2) pieskari punktā P ir taisni (L_2) projekcijā (L_2') uz (π). Ja tā tad C un C' ir (L_2) un (L_2') liekuma centri punktā P, C ir C' projekcijā uz (L_2) pieglaušanās plāksni.



$$PC = R_2 \qquad PC' = R_2'$$

un

$$PC' = \frac{PC}{\cos\varphi}$$

kas dod sakarību (1). Ja tagad R ir (L_1) liekuma radijs, $\frac{1}{\rho_g}$ un $\frac{1}{\rho_n}$ tās ģeodētiskais un normālais liekums punktā P, ω tās galvenās normāles leņķis ar virsmas normāli,

$$\frac{1}{\rho_g} = \frac{\sin\omega}{R} = \frac{\cos\varphi}{R_2}$$

$$\frac{1}{\rho_n} = \frac{\cos\omega}{R} = L_1\left(\frac{du_1}{ds_1}\right)^2 + 2M_1\left(\frac{du_1}{ds_1}\right)\left(\frac{dv_1}{ds_1}\right) + N_1\left(\frac{dv_1}{ds_1}\right)^2$$

un, liekot

$$\frac{du_1}{ds_1} = u_1' \qquad \frac{dv_1}{ds_1} = v_1'$$

$$(2) \qquad \operatorname{tg}\omega = \frac{\cos\varphi}{R_2\left(L_1 u_1'^2 + 2M_1 u_1' v_1' + N_1 v_1'^2\right)}$$

Beidzot (L_1) un (L_2) pieglaušanās plākšņu, respektīvi galveno normāļu virzienu

$$\bar{\rho}_n = \frac{\cos\omega}{R} = L_1\left(\frac{du_1}{ds_1}\right)^2 + 2M_1\left(\frac{du_1}{ds_1}\right)\left(\frac{dv_1}{ds_1}\right) + N_1\left(\frac{dv_1}{ds_1}\right)^2$$

un, liekot

$$\frac{du_1}{ds_1} = u_1' \qquad \frac{dv_1}{ds_1} = v_1'$$

$$(2) \qquad \operatorname{tg}\omega = \frac{\cos\varphi}{R_2(L_1 u_1'^2 + 2M_1 u_1' v_1' + N_1 v_1'^2)}$$

Beidzot (L_1) un (L_2) pieglaudušās plaknes, respektīvi galveno normālu virziens leņķis ir

$$(3) \qquad CPG = \varphi \pm \frac{\pi}{2} - \omega$$

Jāievēro, ka šeit izteiksmē φ un ω tiek skaitīti pozitīvi tai pašā virzienā, t.i. mūsu augšējā zīmējuma gadījumā tie abi ir pozitīvi. Ja PC un PG abi atrastos leņķī $C'PN$, φ būtu jāskaita kā negatīvs.

Tā, kā jau teikts, mēs esam problēmu reducējuši uz nākošo: aplūkot divu līniju veltņus, ja zinām to pieglaudušās plaknes veidotais leņķis kā loka funkciju.

30. Leņķa φ vietā varētu arī dot līkni (L_1). Tad mēs varēsim aprēķināt katrā punktā P

viņas ģeodētisko liekumu $\frac{1}{\rho_g}$:

$$\frac{1}{\rho_g} = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} Eu'+Fv' & \frac{1}{2}E_u u'^2 + E_v u'v' + (F_v - \frac{1}{2}G_u)v'^2 + Eu'' + Fv'' \\ Fu'+Gv' & (F_u - \frac{1}{2}E_v)u'^2 + G_u u'v' + \frac{1}{2}G_v v'^2 + Fu'' + Gv'' \end{vmatrix}$$

kur lielumi $E, F, G, D = \sqrt{EG-F^2}$ attiecas uz virsmu (V_1). Tad

$$\cos\varphi = \frac{R_2}{\rho_g};$$

lai leņķis φ varētu eksistēt, acīmredzot viņš jābūt

$$\rho_g \geqslant R_2$$

Beidzot varētu šo gadījumu izpētīt arī ar Cesàro metodēm. Arī te formulas drīzi top sarežģītas. Viegli konstatēt, ka katra punkta O_2 ruletes (L_3) normālplāksne iet caur P, tāpat arī var atrast (L_3) loka elementa nāģumu pēc (L_1) vai (L_2) loka, bet tālākās formulas top stipri nepārskatamas.

Divu līniju velšanās.

30. Mums ir dotas divas līnijas, (L_1) un (L_2),

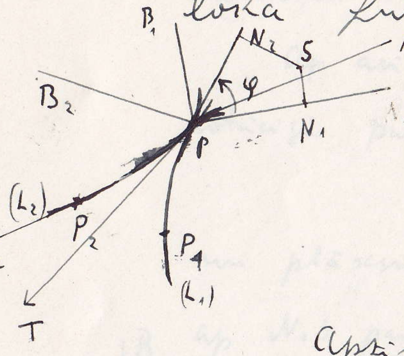
rezģītas. Viegli konstatēt, ka katra punkta O_2 ruletes (L_3) normālplāksne iet caur P, tāpat arī var atrast (L_3) loka atvasinājumu pēc (L_1) vai (L_2) loka, bet tālākās formulas top stipri nepārskatamas.

Divu līniju velšanās.

30. Mums ir dotas divas līnijas, (L_1) un (L_2), no kurām pirmā ir nekustīga. (L_2) liksim velties pa (L_1), ~~=~~ meklēsim kādas ar (L_2) nekustoši saistīta punkta O_2 trajektoriju - ruleti.

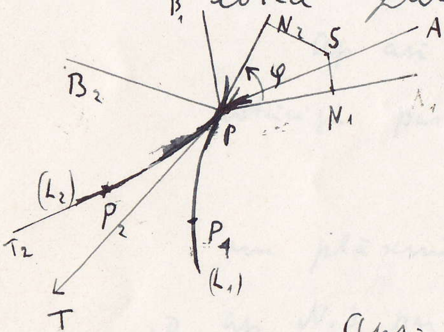
Vispirms arī te varam meklēt acumirklīgo asi. Plāksne (π), kas satur abu līku kopējo tangenti PT un acumirklīgo rotācijas asi PA (kas, acimredzot, iet caur pieskaršanās punktu), būs abu kustības aksoīdu pieskarplāksne punktā P: tā satur katra aksoida vienu veiduli un to līniju (L_1) un (L_2) pieskari. Ja nu mēs projicēsim abas līkus uz šo plākni (π), tad varam konstatēt, tādā pat ceļā kā 19. paragrafā runājot par virsmām, ka abu līku (L_1) un (L_2) projekciju

(l_1) un (l_2) liekums punktā P ir tas pats. Tā kā PT ir kopējā pieskare abām līknēm (l_1) un (l_2), to liekuma centri sakrīt. Bet un, kā to redzējām 64. lapas pusē, (l_1) liekuma centrs ir punkts, kur (L_1) polārā ass šķeļ plāksni (π), tāpat (l_2) liekuma centrs ir (L_2) polārās ass pēda plāksnē (π). Šie abi punkti sakrīt, tā tad (π) iet caur (L_1) un (L_2) polāro asu krustpunktu un ass noteikšanai mums pietiks ar vienu noteikumu, piemēram ar leņķi φ, ko veido abu līkņu (L_1) un (L_2) pieglaušanās plāksnes (vai arī to normāles vai binormāles), dotu kā (L_1) un (L_2) kopējo loka funkciju.



Meklēsim tagad ass stāvokli. Šim nolūkam izdevīgi izlietāt abu līkņu fundamentālo triedru pārvietošanos.

Apzīmēsim ar PN_1 un PB_1 līknes (L_1) galveno normāli un binormāli punktā P un



loka funkciju.

Meklēsim tagad ass stāvokli. Šim nolūkam izdevīgi izlietāt abu līkņu fundamentālo triedru pārvietošanos.

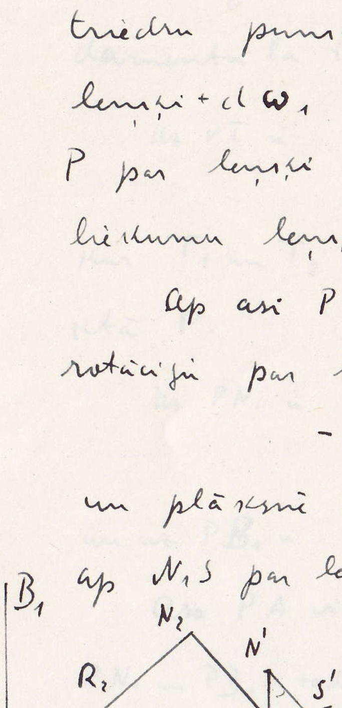
Apzīmēsim ar PN_1 un PB_1 līknes (L_1) galveno normāli un binormāli punktā P un ar PN_2 un PB_2 līknes (L_2) tās pašas taisnes. Ja P_1 un P_2 ir punktam P bezgalīgi tuvi (L_1) un (L_2) punkti, kas sakritīs pie elementārās rotācijas ap asi PA, meklēsim tos pārvietojumus, ar kuru palīdzību var likt sakrist P_2 un P_1, liekot arī sakrist ~~līkņu~~ tangentēm šais punktos, bet galvenām normālēm (respektīvi binormālēm) liekot izveidot leņķas $\varphi + d\varphi$. Šos pārvietojumus var panākt vairākiem paņēmieniem; vienkāršākais liekas šāds:

Vispirms punkta P_2 fundamentālam triedram, ko mēs apzīmēsim ar (P_2), liksim sakrist ar punkta P fundamentālo triedru PTN_2B_2. Tas, kā zināms, ir panākams griežot (P_2) ap asi PT par leņķi $-d\omega_2$ un ap (L_2) polāro asi punktā P - N_2S par leņķi $-dw_2$ (kur $d\omega_2$ un dw_2 ir (L_2) liekuma un šķiebuma leņķi). Tad liekam (P_2) ~~triedrā~~ ietilpstošai taisnei, kas ir (L_2) galvenā normāle punktā P_2, veidot ar PN_1 leņķi $\varphi + d\varphi$, liekot (P_2) griezties ap PT par leņķi $+d\varphi$. Beidzot iedomājamies šādi pagriezto (P_2) nekustoši saistītu ar PTN_1B un liekam šim pēdējam triedram sakrist ar (P_1) - līknes (L_1) fundamentālo triedru punktā (P_1), to griežot ap PT par leņķi $+d\omega_1$, un ap (L_1) polāro asi N_1S punktā P par leņķi $+dw_1$ ($d\omega_1$ un dw_1 ir abu (L_1) liekumu leņķi). (P_2) ir novests vajadzīgā stāvoklī.

Ap asi PT mēs esam tā tad izveduši rotāciju par leņķi

$$-d\omega_2 + d\varphi + d\omega_1$$

un plāksnē PN_1N_2: ap N_2S par leņķi $-dw_2$ un ap N_1S par leņķi $+dw_1$. Saliksim šīs abas rotācijas,



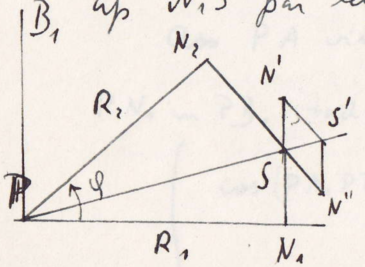
vai, kas ir tas pats, viņu attiecības

liekuma leņķi). (P_2) ir novests vajadzīgā stāvoklī.

Ap asi PT mēs esam tā tad izveduši rotāciju par leņķi

$$-d\omega_2 + d\varphi + d\omega_1$$

un plāksnē PN_1N_2: ap N_2S par leņķi $-d\omega_2$ un ap N_1S par leņķi $+d\omega_1$. Salīdzinim šīs abas rotācijas,



vai, kas ir tas pats, viņu attiecības pret $ds_1 = ds_2$

$$-\frac{d\omega_2}{ds_2} = -\frac{1}{R_2} \qquad \frac{d\omega_1}{ds_1} = \frac{1}{R_1}$$

R_1 un R_2 ir (L_1) un (L_2) liekuma radiji

Vectorus $-\frac{1}{R_2}$ un $\frac{1}{R_1}$ pārnesam abu polāro asu krustpunktā S un konstruējam to resultanti SS', kas iet caur P. Lai šo pēdējo pierādītu, pietiek parādīt, ka

$$\frac{\sin(N'SS')}{\sin(N''SS')} = \frac{\sin(PSN_1)}{\sin(PSN_2)} \quad \text{(absolūtā vērtībā)}$$

jo viegli pārliecināties, ka $S'S$ turpinājums iet pa to pašu N_2SN_1 leņķa ietverto apvidu, kur atrodas punkts P. Bet un

$$\frac{\sin(PSN_1)}{\sin(PSN_2)} = \frac{\frac{R_1}{PS}}{\frac{R_2}{PS}} = \frac{R_1}{R_2}$$

un, tā kā $\sphericalangle N''SS' = N'S'S$,

$$\frac{\sin(N'SS')}{\sin(N''SS')} = \frac{\sin(N'SS')}{\sin(N'S'S)}$$

$$= \frac{N'S'}{SN'} = \frac{\frac{1}{R_2}}{\frac{1}{R_1}}$$

$$= \frac{R_1}{R_2} = \frac{\sin(PSN_1)}{\sin(PSN_2)}$$

Tā tad $S'S$ tiešām iet caur P, kā tam arī ir jābūt, lai PA ietu caur P.

Lai dabūtu momentānās rotācijas ass stāvokli, noteiksim ~~mom~~ mainīgā rotācijas leņķa atvasinājuma pēc s projekcijas uz (L_1) fundamentālā triedra taisnēm PT, PN_1 un PB_1

uz PT ir $$\frac{-dw_2 + d\varphi + dw_1}{ds_1} = \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} + \frac{d\varphi}{ds_1},$$

kur T_1 un T_2 ir (L_1) un (L_2) šķiebuma radiji punktā P.

uz PN_1 ir $$-\frac{dw_2}{ds_1}\cdot\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{dw_2}{ds_2}\sin\varphi = \frac{\sin\varphi}{R_2}$$

un uz PB_1 ir $$-\frac{dw_2}{ds_1}\cos\varphi + \frac{dw_1}{ds_1} = -\frac{dw_2}{ds_2}\cos\varphi + \frac{dw_1}{ds_1} = -\frac{\cos\varphi}{R_2} + \frac{1}{R_1}$$

Ass PA virziena kosinī ar taisnēm PT, PN_1 un PB_1 tad ir kur T_1 un T_2 ir (L_1) un (L_2) šķiebuma radiji punktā P.

Uz PN_1 ir $$-\frac{dw_2}{ds_1}\cdot\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{dw_2}{ds_2}\sin\varphi=\frac{\sin\varphi}{R_2}$$

un uz PB_1 ir $$-\frac{dw_2}{ds_1}\cos\varphi+\frac{dw_1}{ds_1}=-\frac{dw_2}{ds_2}\cos\varphi+\frac{dw_1}{ds_1}=-\frac{\cos\varphi}{R_2}+\frac{1}{R_1}$$

Ass PA virziena kosini ar taisnēm PT, PN_1 un PB_1 tad ir

$$(1)\left\{\begin{aligned}
\cos(PA,PT)&=\frac{\frac{1}{T_1}-\frac{1}{T_2}+\frac{d\varphi}{ds_1}}{\sqrt{\left(\frac{1}{T_1}-\frac{1}{T_2}+\frac{d\varphi}{ds_1}\right)^2+\frac{1}{R_2^2}+\frac{1}{R_1^2}-\frac{2\cos\varphi}{R_1R_2}}}\\
\cos(PA,PN_1)&=\frac{\frac{\sin\varphi}{R_2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{T_1}-\frac{1}{T_2}+\frac{d\varphi}{ds_1}\right)^2+\frac{1}{R_2^2}+\frac{1}{R_1^2}-\frac{2\cos\varphi}{R_1R_2}}}\\
\cos(PA,PB_1)&=\frac{-\frac{\cos\varphi}{R_2}+\frac{1}{R_1}}{\sqrt{\left(\frac{1}{T_1}-\frac{1}{T_2}+\frac{d\varphi}{ds_1}\right)^2+\frac{1}{R_2^2}+\frac{1}{R_1^2}-\frac{2\cos\varphi}{R_1R_2}}}
\end{aligned}\right.$$

Mums tā tad ass PA ir pilnīgi noteikta. Bez tam, konstatējot, ka tā dabūjama saliekot divus vektorus, no kuriem viens guļ uz taisnes PS un otrs – uz PT, mēs esam citā ceļā pierādījuši, ka abu līniju (L_1) un (L_2) projekcijām uz plāksni (π), kas satur PA un PT, ir vienāds liekums (augšējais pierādījums ir inspirēts no R. Bricard'a raksta: „Sur la conservation de la courbure géodésique dans la déformation d'une surface", kas ievietots „Nouvelles Annales de Mathématiques" 1922. g. krājumā).

Zinot ass stāvokli attiecībā pret abu līniju fundamentālajiem triedriem - jo

$$(2)\begin{cases}\cos(PA, PN_2) = \cos(PA, PN_1)\cdot\cos\varphi + \cos(PA, PB_1)\sin\varphi\\ \cos(PA, PB_2) = -\cos(PA, PN_1)\sin\varphi + \cos(PA, PB_1)\cos\varphi,\end{cases}$$

kas dod izteiksmes analogas (1), tikai R_1 un R_2 pārmainīti savā starpā, mēs varam noteikt kustošo un nekustošo aksoīdu - problēma atkal ir reducēta uz diviem taišņu virsmu veļšanos.

31. Mēs varam meklēt noteikumus, kādiem jābūt izpildītiem, lai aksoīdi būtu attinamas virsmas. Tā kā tie ir viens uz otru uztinami, acimredzot pietiks izteikt, ka viens no tiem ir attinams.

Aksoīda, kas iet caur (L_1), kaut kādā koor-

31. Mēs varam meklēt noteikumus, kādiem jābūt izpildītiem, lai aksoīdi būtu attināmas virsmas. Tā kā tie ir viens uz otru uztinami, acimredzot pietiks izteikt, ka viens no tiem ir attināms.

Aksoīda, kas iet caur (L_1), kaut kādā koordinātu sistēmā, kur (L_1) tekošā punkta P koordinātas ir x, y, z, nolīdzinājums būs

$$(1)\quad \begin{cases} X = x + av \\ Y = y + bv \\ Z = z + cv \end{cases}$$

kur X, Y, Z ir aksoīda tekošā punkta koordinātas, a, b, c tā veidulu virzienu kosiniem proporcionāli lielumi, kas ir tā paša parametra t funkcijas kā x; beidzot v ir virsmas otrais parametrs.

Lai taišņu virsma, kuras nolīdzinājums ir (1), pie kam a, b, c ir tās veidulu virzienu kosini paši, būtu attināma jā pastāv sakarībai[8]:

---

[8] Niewenglowski, 183. l. p.

$$(2) \qquad D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = 0$$

pie kam akcenti apzīmē diferencēšanu pēc t. Tomēr augšējā izteiksmē a, b, c var arī būt lielumi, kas tikai proporcionāli virzienu kosinusiem. Lai to pierādītu, aplūkosim lielumus

$$(3) \qquad a_1 = a\mu \qquad b_1 = b\mu \qquad c_1 = c\mu$$

kur μ ir tā paša mainīgā t funkcija kā a, b, c un pie tam

$$(4) \qquad \mu \neq 0$$

Ar a_1, b_1, c_1 palīdzību sastādām tādas pat formas determinanti D_1, kā augšējā (2):

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1' & b_1' & c_1' \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\mu & b\mu & c\mu \\ a'\mu + a\mu' & b'\mu + b\mu' & c'\mu + c\mu' \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}$$

Pareizinām D_1 pirmo rindiņu ar $-\frac{\mu'}{\mu}$ un to pieskaitām otrai: locekļi ar μ' izzūd. Tad ņemot μ kā reizinātāju ~~pirmās~~ determinantes divreiz ārā, dabūjam

$$D_1 = \mu^2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1' & b_1' & c_1' \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\mu & b\mu & c\mu \\ a'\mu + a\mu' & b'\mu + b\mu' & c'\mu + c\mu' \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}$$

Pareizinām D_1 pirmo rindiņu ar $-\frac{\mu'}{\mu}$ un to pieskaitām otrai: locekļi ar μ' izzudīs. Tad ņemot μ kā reizinātāju priekšā determinantes dimensijā, dabūjam

$$D_1 = \mu^2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}$$

$$(5) \qquad D_1 = \mu^2 D$$

Tā kā mēs pieņēmām, ka μ nav nulle, ja viens no lielumiem D, D_1 ir nulle, arī otis būs nulle. Tāpēc izteiksmē (2) lielumi a, b, c var apzīmēt tiklab pašus virzienu kosinus, kā arī tiem proporcionālus lielumus.

Ja par parametru t ņemam (L_1) loku s_1,

$$x' = \alpha_1 \qquad y' = \beta_1 \qquad z' = \gamma_1 ,$$

kur $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ ir (L_1) tangentes virziena kosini, un (2) var rakstīt

$$(6) \qquad \alpha_1 A + \beta_1 B + \gamma_1 C = 0$$

kur (7) $\qquad A = bc' - cb' \qquad B = ca' - ac'$

$$C = ab' - ba'$$

Atliek aprēķināt a, b, c. Ja apzīmējam (L_1) galvenās normāles un binormāles virziena kosinus ar $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ un $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$, mums būs, ievērojot 68. lapas puses formulas (1) un ņemot par reizinātāju

$$\mu = \sqrt{\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} + \frac{d\varphi}{ds_1}\right)^2 + \frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} - \frac{2\cos\varphi}{R_1 R_2}}$$

$$(8)\quad \begin{cases} a = \alpha_1\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} + \frac{d\varphi}{ds_1}\right) + \alpha_2 \frac{\sin\varphi}{R_2} + \alpha_3\left(-\frac{\cos\varphi}{R_2} + \frac{1}{R_1}\right) \\ b = \beta_1\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} + \frac{d\varphi}{ds_1}\right) + \beta_2 \frac{\sin\varphi}{R_2} + \beta_3\left(-\frac{\cos\varphi}{R_2} + \frac{1}{R_1}\right) \\ c = \gamma_1\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} + \frac{d\varphi}{ds_1}\right) + \gamma_2 \frac{\sin\varphi}{R_2} + \gamma_3\left(-\frac{\cos\varphi}{R_2} + \frac{1}{R_1}\right) \end{cases}$$

Ievedīsim vēl apzīmējumus

$$(8')\qquad L = \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} + \frac{d\varphi}{ds_1} \qquad M = \frac{\sin\varphi}{R_2} \qquad N = -\frac{\cos\varphi}{R_2} + \frac{1}{R_1}$$

Tad

$$(9)\quad \begin{cases} a = \alpha_1 L + \alpha_2 M + \alpha_3 N \\ b = \beta_1 L + \beta_2 M + \beta_3 N \\ c = \gamma_1 L + \gamma_2 M + \gamma_3 N \end{cases}$$

un $$a' = \frac{\alpha_2}{R_1} L + \alpha_1 L' + \left(-\frac{\alpha_1}{R_1} + \frac{\alpha_3}{T_1}\right) M + \alpha_2 M' - \frac{\alpha_2}{T_1} N + \alpha_3 N'$$

Ievedot atkal apzīmējumus

$$\Big(L_1 = L' - \frac{M}{R} = \left(\frac{1}{\ }\right)' - \left(\frac{1}{\ }\right)' + \frac{d^2\varphi}{\ } - \frac{\sin\varphi}{\ }$$

Iacl

$$(9)\quad \begin{cases} a = \alpha_1 L + \alpha_2 M + \alpha_3 N \\ b = \beta_1 L + \beta_2 M + \beta_3 N \\ c = \gamma_1 L + \gamma_2 M + \gamma_3 N \end{cases}$$

un $$a' = \frac{\alpha_2}{R_1} L + \alpha_1 L' + \left(-\frac{\alpha_1}{R_1} + \frac{\alpha_3}{T_1}\right) M + \alpha_2 M' - \frac{\alpha_2}{T_1} N + \alpha_3 N'$$

Tevechot atical apsimejimus

$$(9')\quad \begin{cases} L_1 = L' - \dfrac{M}{R_1} = \left(\dfrac{1}{T_1}\right)' - \left(\dfrac{1}{T_2}\right)' + \dfrac{d^2\varphi}{ds_1^2} - \dfrac{\sin\varphi}{R_1 R_2} \\ M_1 = \dfrac{L}{R_1} + M' - \dfrac{N}{T_1} = \dfrac{1}{T_1 R_1} - \dfrac{1}{T_2 R_1} + \dfrac{\varphi'}{R_1} + \dfrac{\cos\varphi}{R_2}\varphi' + \sin\varphi\left(\dfrac{1}{R_2}\right)' + \dfrac{\cos\varphi}{R_2 T_1} - \dfrac{1}{R_1 T_1} \\ \quad = -\dfrac{1}{T_2 R_1} + \dfrac{\cos\varphi}{R_2 T_1} + \varphi'\left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{\cos\varphi}{R_2}\right) + \sin\varphi\left(\dfrac{1}{R_2}\right)' \\ N_1 = \dfrac{M}{T_1} + N' = \dfrac{\sin\varphi}{T_1 R_2} + \dfrac{\sin\varphi}{R_2}\varphi' - \cos\varphi\left(\dfrac{1}{R_2}\right)' + \left(\dfrac{1}{R_1}\right)' \end{cases}$$

mums bus

$$a' = \alpha_1 L_1 + \alpha_2 M_1 + \alpha_3 N_1$$

$$b' = \beta_1 L_1 + \beta_2 M_1 + \beta_3 N_1$$

$$c' = \gamma_1 L_1 + \gamma_2 M_1 + \gamma_3 N_1$$

un noteisums (2) top

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_1 L + \alpha_2 M + \alpha_3 N & \beta_1 L + \beta_2 M + \beta_3 N & \gamma_1 L + \gamma_2 M + \gamma_3 N \\ \alpha_1 L_1 + \alpha_2 M_1 + \alpha_3 N_1 & \beta_1 L_1 + \beta_2 M_1 + \beta_3 N_1 & \gamma_1 L_1 + \gamma_2 M_1 + \gamma_3 N_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \end{vmatrix} = 0$$

D savu vērtību acīmredzot nemaina, ja mēs pēdējo rindiņu pareizinām ar $-L$ un to pieskaitām pirmai un tad pēdējo rindiņu pareizinām ar $-L_1$ un to pieskaitām otrai. Tad dabūjam

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_2 M + \alpha_3 N & \beta_2 M + \beta_3 N & \gamma_2 M + \gamma_3 N \\ \alpha_2 M_1 + \alpha_3 N_1 & \beta_2 M_1 + \beta_3 N_1 & \gamma_2 M_1 + \gamma_3 N_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \end{vmatrix}$$

Izvirzot D pie pēdējās rindiņas elementiem

$$D = \alpha_1 \begin{vmatrix} \beta_2 M + \beta_3 N & \gamma_2 M + \gamma_3 N \\ \beta_2 M_1 + \beta_3 N_1 & \gamma_2 M_1 + \gamma_3 N_1 \end{vmatrix} + \beta_1 \begin{vmatrix} \gamma_2 M + \gamma_3 N & \alpha_2 M + \alpha_3 N \\ \gamma_2 M_1 + \gamma_3 N_1 & \alpha_2 M_1 + \alpha_3 N_1 \end{vmatrix} +$$

$$+ \gamma_1 \begin{vmatrix} \alpha_2 M + \alpha_3 N & \beta_2 M + \beta_3 N \\ \alpha_2 M_1 + \alpha_3 N_1 & \beta_2 M_1 + \beta_3 N_1 \end{vmatrix}$$

$$= \alpha_1 (\beta_2 \gamma_3 - \beta_3 \gamma_2)(M N_1 - M_1 N) + \beta_1 (\gamma_2 \alpha_3 - \gamma_3 \alpha_2)(M N_1 - M_1 N) +$$

$$+ \gamma_1 (\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2)(M N_1 - M_1 N)$$

Bet nu

$$\beta_2 \gamma_3 - \beta_3 \gamma_2 = \alpha_1 \qquad \gamma_2 \alpha_3 - \gamma_3 \alpha_2 = \beta_1 \qquad \alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2 = \gamma_1$$

$$D = (\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2)(M N_1 - M_1 N) = M N_1 - M_1 N$$

un (9) tā tad dod

$$(10) \qquad M N_1 - M_1 N = 0 .$$

$$= \alpha_1(\beta_2\gamma_3-\beta_3\gamma_2)(MN_1-M_1N) + \beta_1(\gamma_2\alpha_3-\gamma_3\alpha_2)(MN_1-M_1N) +$$
$$+ \gamma_1(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)(MN_1-M_1N)$$

Bet ir

$$\beta_2\gamma_3-\beta_3\gamma_2=\alpha_1 \qquad \gamma_2\alpha_3-\gamma_3\alpha_2=\beta_1 \qquad \alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2=\gamma_1$$

$$D=(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)(MN_1-M_1N) = MN_1-M_1N$$

un (9) tā tad dod

$$(10) \qquad MN_1-M_1N=0,$$

kas ir meklētais noteikums.

Ievietojot izteiksmē (10) M, N, M_1, N_1 vērtības, ko dod (8') un (9'), redzam, ka vispārējā gadījumā (10) dod sakarību starp abu līniju liekumu un šķiebumu un to pirmiem atvasinājumiem pēc loka, un leņķi φ un tā diviem pirmiem atvasinājumiem pēc loka. Ja tā tad ir dotas abas līknes, φ ~~noteiks~~ šis nolīdzinājums, kas būs otrās kārtības diferenciālvienādojums attiecībā uz φ. φ būs dabūjams, vismaz principā, kā s funkcija, kur ietilps divas patvaļīgas konstantes. Tās noteiksim ar sākuma noteikumiem, piemēram abu līniju pieskaru plākšņu leņķi, kas dos sākuma φ, un ass PA stāvokli, kas dos $\frac{d\varphi}{ds_1}$ sākuma vērtību. Ja mums tā tad ir dotas divas telpas līnijas (L_1) un (L_2) un uz katras izvēlēts viens punkts, kam velšanās kustības sākumā jāsakrīt, būs ∞^2 iespējamu kustību (kur asvoidi ir attiņamas virsmas). Ja arī sākuma punkti nav noteikti, ∞^3 šādu kustību; ja (L_1) un (L_2) dotas izejas stāvoklī, viena otrai pieskaroties, kustību skaits ir ∞^1.

Ja no otras puses dodam φ, jā pastāv zināmam sakaram lielumu $\frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2}, \frac{1}{T_1}, \frac{1}{T_2}$ starpā. Ja dodam trīs no tiem, noteikums (10) būs pirmās kārtības diferenciālvienādojums attiecībā uz ceturto. Pie speciālām φ nozīmēm (10) top par polinomu attiecībā uz abu līniju liekumiem un šķiebumiem. Tas notiek, kad

$$\varphi = 0 \quad \text{vai} \quad \varphi = \pi$$

Tad $$M = 0$$

un (10) top $$M_1 N = 0$$

t.i. $$N = 0 \quad \text{vai} \quad M_1 = 0$$

Pirmais dod (ņemot $\varphi = 0$)

$$\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} = 0$$

par polinomu attiecībā uz abu līkņu liekumiem un šķiebumiem. Tas notiek, kad

$$\varphi = 0 \quad \text{vai} \quad \varphi = \pi$$

Tad $M = 0$

un (10) top $M_1 N = 0$

t.i. $N = 0$ vai $M_1 = 0$

Pirmais dod (ņemot $\varphi = 0$)

$$\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} = 0$$

t.i., atmetot atrisinājumu $\frac{1}{R_1} = 0 = \frac{1}{R_2}$

$$(11) \qquad R_1 = R_2$$

un otrais dod (12) $-\frac{1}{T_2 R_1} + \frac{1}{T_1 R_2} = 0$

Šim pēdējam vispirms ir speciāli atrisinājumi, kad abas līknes ir plāksnes līknes un atrodas kopīgā plāksnē, vai kad viena ir taisne:

$$\frac{1}{T_2} = 0, \frac{1}{T_1} = 0 \ ; \quad \frac{1}{T_2} = 0 \ \frac{1}{R_2} = 0 \quad ; \quad \frac{1}{R_1} = 0, \frac{1}{T_1} = 0$$

(mēs atkal atmetam triviālo jau atrisinājuma sistēmu $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_2} = 0$)

(12) vispārējais atrisinājums ir

$$(13) \qquad \frac{T_1}{R_1} = \frac{T_2}{R_2}$$

Kā zināms $\frac{T}{R}$ nosaka kādai līknei rektificējošās taisnes (rektifizierende Gerade, droite rectifiante Itā leņķa tangensu, ~~kā~~ tā veido ar tangenti, pēc absolūtās vērtības un arī pēc zīmes. (13) tā tad izteic ka līkām (L_1) un (L_2) katrā viņu stāvoklī, sakrīt rektificējošās taisnes.

Atmetot vēl gadījumu, kur $\frac{1}{R_1}$ vai $\frac{1}{R_2}$ līdzī nulle - jo runāt par kādas taisnes pieglaušanās plāksni nav nekādas jēgas - mēs varam izteikt sekošo īpašību:

Lai divām līkām velotos vienai pa otru tā, ka katrā stāvoklī sakrīt viņu pieglaušanās plāksnes, kustības aksoīdi būtu attinami, ir nepieciešami un pietiekoši, ka būtu izpildīta viena no trim sekojošām prasībām:

abām ~~līkām~~ jābūt plāksnes ~~līnijām~~ (tad aksoīdi acīmredzot ir cilindri);

abām līkām jābūt ar to pašu liekumu sadērīgos punktos (tad aksoīdi ir līko tangentu virsmas); vai

abu līko liekumiem un šķiebumiem

viena no trim sekojoš-ām prasībām:

abām ~~lūsnām~~ jābūt plaknes ~~līnijām~~ (tad aksoidi acīmredzot ir cilindri);

abām līkām jābūt ar to pašu liekumu saderīgos punktos (tad aksoidi ir līko tangentu virsmas); vai

abu līko liekumiem un šķiebumiem jābūt proporcionāliem (tad aksoidi ir rektificējoš-ās virsmas).

Pieņēmums $\varphi = \pi$ nesko jaunu nedod: tas nozīmē tikai, ka (L_2) normāli uzskatam pozitīvu pretējā virzienā kā (L_1) normāli.

Tiešāro metode.

32. Mēs varam arī š-ai gadījumā mēģināt pētīt ar (L_2) saitītu punktu O_2 ruletes, bet mēs nonāksim pie līdzīgām formulām kā divu veļošos virsmu gadījumā, kur, kā mēs redzējām, formulas visai ātri top stipri sarežģītas.

Kā to rāda 66. un 67. lapas puses ši mēģinimi (un kā tas ir acīmredzams), ja x_1, y_1, z_1 ir kāda punkta O_2 koordinātas attiecībā uz (L_1) fundamentālo triedru (L_1) un (L_2) pieskaršanās punktā P un x_2, y_2, z_2 tā paša punkta O_2 koordinātas attiecībā uz (L_2) fundamentālo triedru tai pašā punktā P, šos lielumus saista sakari

$$(1)\quad \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \cos\varphi - z_2 \sin\varphi \\ z_1 = y_2 \sin\varphi + z_2 \cos\varphi \end{cases}$$

jeb

$$(2)\quad \begin{cases} x_2 = x_1 \\ y_2 = y_1 \cos\varphi + z_1 \sin\varphi \\ z_2 = -y_1 \sin\varphi + z_1 \cos\varphi \end{cases}$$

Velšanās nosacījums ir

$$(3)\qquad ds_1 = ds_2$$

un punkta O_2 nekustības nosacījumi sistēmā $(x_2 y_2 z_2)$ ir

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_2}{ds_2} = \dfrac{y_2}{R_2} - 1 \\[2ex] \dfrac{dy_2}{ds_2} = -\dfrac{x_2}{R_2} + \dfrac{z_2}{T_2} \\[2ex] \dfrac{dz_2}{ds_2} = -\dfrac{y_2}{T_2} \end{cases}$$

un punkta O_2 nekustīgās notaiskumi sistēma

$(x_2 y_2 z_2)$ ir

$$
(4)\quad \begin{cases}
\dfrac{dx_2}{ds_2} = \dfrac{y_2}{R_2} - 1 \\[2ex]
\dfrac{dy_2}{ds_2} = -\dfrac{x_2}{R_2} + \dfrac{z_2}{T_2} \\[2ex]
\dfrac{dz_2}{ds_2} = -\dfrac{y_2}{T_2}
\end{cases}
$$

O_2 koordinātu absolūtās variācijas telpā

ir

$$
(5)\quad \begin{cases}
\dfrac{\delta x_1}{ds_1} = \dfrac{dx_1}{ds_1} - \dfrac{y_1}{R_1} + 1 \\[2ex]
\dfrac{\delta y_1}{ds_1} = \dfrac{dy_1}{ds_1} + \dfrac{x_1}{R_1} - \dfrac{z_1}{T_1} \\[2ex]
\dfrac{\delta z_1}{ds_1} = \dfrac{dz_1}{ds_1} + \dfrac{y_1}{T_1}
\end{cases}
$$

Aprēķināsim $\dfrac{dx_1}{ds_1}$, $\dfrac{dy_1}{ds_1}$ un $\dfrac{dz_1}{ds_1}$ ievērojot

formulas (1), (2), (3) un (4).

$$
(6)\quad \begin{cases}
\dfrac{dx_1}{ds_1} = \dfrac{dx_2}{ds_2} = \dfrac{y_2}{R_2} - 1 = \dfrac{y_1 \cos\varphi + z_1 \sin\varphi}{R_2} - 1 \\[2ex]
\dfrac{dy_1}{ds_1} = \dfrac{d(y_2 \cos\varphi - z_2 \sin\varphi)}{ds_2} = -\dfrac{x_1 \cos\varphi}{R_2} + z_1\left(\dfrac{1}{T_2} - \dfrac{d\varphi}{ds_2}\right) \\[2ex]
\dfrac{dz_1}{ds_1} = \dfrac{d(y_2 \sin\varphi + z_2 \cos\varphi)}{ds_2} = -\dfrac{x_1 \sin\varphi}{R_2} + y_1\left(\dfrac{d\varphi}{ds_2} - \dfrac{1}{T_2}\right)
\end{cases}
$$

Ievedīsim apzīmējumus

$$
(7)\quad \begin{cases} \dfrac{\cos\varphi}{R_2} = \mathcal{N}_2 & \dfrac{1}{R_1} = \mathcal{N}_1 \\[2ex] \dfrac{\sin\varphi}{R_2} = \mathcal{G}_2 & \mathcal{G}_1 = 0 \\[2ex] \dfrac{d\varphi}{ds_2} - \dfrac{1}{T_2} = \mathcal{T}_2 & \dfrac{1}{T_1} = \mathcal{T}_1 \end{cases}
$$

un vēl

$$
(7')\quad \begin{cases} \dfrac{\cos\varphi}{R_2} - \dfrac{1}{R_1} = \mathcal{N}_2 - \mathcal{N}_1 = \mathcal{N} \\[2ex] \dfrac{\sin\varphi}{R_2} = \mathcal{G}_2 - \mathcal{G}_1 = \mathcal{G} \\[2ex] \dfrac{d\varphi}{ds_2} - \left(\dfrac{1}{T_2} - \dfrac{1}{T_1}\right) = \mathcal{T}_2 - \mathcal{T}_1 = \mathcal{T} \end{cases}
$$

Šo apzīmējumu ģeometrisko interpretāciju mēs drīzumā aplūkosim. Tagad ievietosim izteiksmēs (5) vērtības, ko dod (6):

$$
(8)\quad \begin{cases} \dfrac{\delta x_1}{ds_1} = y_1\left(\dfrac{\cos\varphi}{R_2} - \dfrac{1}{R_1}\right) + z_1 \dfrac{\sin\varphi}{R_2} \\[2ex] \dfrac{\delta y_1}{ds_1} = -x_1\left(\dfrac{\cos\varphi}{R_2} - \dfrac{1}{R_1}\right) - z_1\left[\dfrac{d\varphi}{ds_2} - \left(\dfrac{1}{T_2} - \dfrac{1}{T_1}\right)\right] \\[2ex] \dfrac{\delta z_1}{ds_1} = y_1\left[\dfrac{d\varphi}{ds_2} - \left(\dfrac{1}{T_2} - \dfrac{1}{T_1}\right)\right] - x_1 \dfrac{\sin\varphi}{R_2} \end{cases}
$$

un, ievērojot (7')

$$
\dfrac{\delta x_1}{ds_1} = y_1 \mathcal{N} + z_1 \mathcal{G}
$$

ievērosim izteiksmes (5) [illegible]

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{\delta x_1}{ds_1} = y_1\left(\dfrac{\cos\varphi}{R_2} - \dfrac{1}{R_1}\right) + z_1 \dfrac{\sin\varphi}{R_2} \\[2ex] \dfrac{\delta y_1}{ds_1} = -x_1\left(\dfrac{\cos\varphi}{R_2} - \dfrac{1}{R_1}\right) - z_1\left[\dfrac{d\varphi}{ds_2} - \left(\dfrac{1}{T_2} - \dfrac{1}{T_1}\right)\right] \\[2ex] \dfrac{\delta z_1}{ds_1} = y_1\left[\dfrac{d\varphi}{ds_2} - \left(\dfrac{1}{T_2} - \dfrac{1}{T_1}\right)\right] - x_1 \dfrac{\sin\varphi}{R_2} \end{cases}$$

un, ievērojot (7')

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{\delta x_1}{ds_1} = y_1 N + z_1 G \\[2ex] \dfrac{\delta y_1}{ds_1} = -x_1 N - z_1 T \\[2ex] \dfrac{\delta z_1}{ds_1} = y_1 T - x_1 G \end{cases}$$

Ja nu mēs salīdzinām (9) ar formulām (4) 58. lapas pusē, ko mēs izvedām dim vispārīgākās gadījumam, mēs redzam, ka tās ir formas ziņā identiskas. No tā arī izriet, ka formulas tālākiem pētījumiem, kas dabūjamas no (9) ar diferencēšanu, būs tikpat sarežģītas kā 28. paragrafā, un tāpēc mēs arī aprobežosimies ar šejām dabūto formulu interpretēšanu.

Vispirms meklēsim tos punktus, kas ir

telpā nekustīgi. Tiem jābūt

$$\frac{\delta x_1}{ds_1} = 0 \qquad \frac{\delta y_1}{ds_1} = 0 \qquad \frac{\delta z_1}{ds_1} = 0$$

kas dod

$$(10) \begin{cases} \mathcal{N} y_1 + g z_1 = 0 \\ -x_1 \mathcal{N} - z_1 \mathcal{T} = 0 \\ y_1 \mathcal{T} - x_1 g = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} \frac{y_1}{g} &= -\frac{z_1}{\mathcal{N}} \\ \frac{x_1}{\mathcal{T}} &= -\frac{z_1}{\mathcal{N}} \\ \frac{x_1}{\mathcal{T}} &= \frac{y_1}{g} \end{aligned}$$

Kā redzams, šie punkti guļ uz taisnes, kā nolīdzinājums ir

$$(11) \qquad \frac{x_1}{\frac{d\varphi}{ds_2} - \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right)} = \frac{y_1}{\frac{\sin\varphi}{R_2}} = -\frac{z_1}{\frac{\cos\varphi}{R_2} - \frac{1}{R_1}}$$

(11) ir acumirklīgās rotācijas asslīdzinājums

Tās leņķus ar triedra šķautnēm meklējot, mēs dabūsim tās pašas izteiksmes kā 68. lapas pusē.

Kā redzam, (11) ir apmierināts ja

$$x_1 = 0 \qquad y_1 = 0 \qquad z_1 = 0$$

t.i. punkts P guļ uz ~~mo~~ momentānās rotācijas ass, ko tad varam apzīmēt ar PA.

Plāksnei (π), kas iet caur tangenti punktā P un caur PA, nolīdzinājums būs dabūsim tās pašas izteiksmes kā 68. lapas pusē.

Kā redzam, (11) ir apmierināts ja

$$x_1 = 0 \quad y_1 = 0 \quad z_1 = 0$$

t.i. punkts P guļ uz ~~asmomentānās~~ momentānās rotācijas ass, ko tad varam apzīmēt ar PA.

Plāksnei (π), kas iet caur tangenti punktā P un caur PA, vienādojums būs

$$\frac{y_1}{\frac{\sin\varphi}{R_2}} = -\frac{z_1}{\frac{\cos\varphi}{R_2} - \frac{1}{R_1}}$$

$$z_1 = -\frac{y_1 R_2}{\sin\varphi}\left(\frac{\cos\varphi}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)$$

Meklēsim to punktu, kur (π) šķeļ līknes (L_1) polārā ass, kuras vienādojums ir

$$x_1 = 0 \qquad y_1 = +R_1$$

Šim punktam S x_1 un y_1 būs augšējās vērtības un

$$z_1 = -\frac{R_1 R_2}{\sin\varphi}\left(\frac{\cos\varphi}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)$$

$$= +\frac{1}{\sin\varphi}\left(R_2 - R_1\cos\varphi\right)$$

Meklēsim šī punkta koordinātas sistēmā (x_2, y_2, z_2):

$$x_2 = x_1 = 0$$

$$y_2 = R_1\cos\varphi + (R_2 - R_1\cos\varphi) = R_2$$

$$z_2 = -R_1\sin\varphi + \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}(R_2 - R_1\cos\varphi) = \frac{1}{\sin\varphi}(R_2\cos\varphi - R_1)$$

Pirmās dinas koordinātas ($x_2 = 0$, $y_2 = R_2$) rāda, ka S atrodas arī uz (L_2) polārās ass, kā mēs to jau atradām ar citiem paņēmieniem.

76. lapas pusē ievestie apzīmējumi (7) ~~rata~~, salīdzinot tos ar 28. paragrafa izvedumiem (52. un 58. lapas pusē), rāda, ka (L_2) velšanās kustība pa (L_1) ir identiska ar kādas virsmas (V_2), kas iet caur (L_2), velšanos ar vērpšanos pa virsmu (V_1), kas satur (L_1), pie kam šo virsmu normāli liekumi, geodētiskie liekumi un geodētiskie šķiebumi ir attiecīgi N_i, G_i, T_i.

N_1, G_1 un T_1 rāda katrs atsevišķi, ka (L_1) ir virsmas (V_1) geodētiskā līnija. Viena tāda virsma (V_1') ir (L_1) rektificējošā virsma; citas mēs dabūsim, konstruējot tādas virsmas, kas pa līniju (L_1) pieskaras virsmai (V_1'). Virsmas (V_2) būs tādas, ka to normāle ar (L_2) galveno normāli vienmēr veidos leņķi φ, t.i. tās katrā (V_2) stāvoklī pieskarsies (L_1) rektificējošai plāksnei un tamlīdz arī visām virsmām (V_1) punktā P.

(V_1) ģeodētiskā līniji. Viena tāda virsma (V_1) ir (L_1) rektificējoš-ā virsma; citas mēs dabūsim, konstruējot tādas virsmas, kas pa līniji (L_1) pieskaŗas virsmai (V_1'). Virsmas (V_2) būs tādas, ka to normāle ar (L_2) galveno normāli vienmēr veidos leņķi φ, t.i. tās katrā (V_2) stāvokli pieskarsies (L_1) rektificējoš-ai plāksnei un tamlīdz ar visām virsmām (V_1) punktā P.

Ja mēs gribam dabūt tīru velš-anas bez vērpš-anas, rotācijas ap PA katru mirkli jāatrodas (V_1) un (V_2) pieskarplāksnē (Π) punktā P. Kā vienu šādu virsmu pāri mēs varētu ņemt tās virsmas, ko ietin attiecībā pret katru līko plāksni (π). Šīs virsmas būs attinamas, bet vispārējā gadījumā tās nepieskarsies viena otrai visos vienas veidules (taisnes) punktos, bet gan tikai vienā punktā. Citas virsmas (V_1) un (V_2) mēs dabūsim ierakstot šim attinamām virsmām kaut kādas divas virsmas, kas tām pieskartos visos (L_1) respektīvi (L_2) punktos.

Beidzot D_2 ruletes (L) elementārā loka attiecības pret ds_1 kvadrātu dabūsim, paceļot kvadrātā un saskaitot izteiksmes (8)

Taišņu virsmu velšanās gadījumi.

<u>Attinamas virsmas.</u> Kā mēs jau redzējām, visus velšanās gadījumus telpā var novest uz divu taišņu virsmu velšanos. Šīs taišņu virsmas var būt attinamas un neattinamas; pirmā gadījumā tās būs vai nu cilindri, vai koni, vai arī telpas līknes tangentu virsmas. Jāievēro, ka pēc paša viņu rašanās veida aksoīdi ir viens uz otra uztinami un tāpēc, ja esam kādam velšanās gadījumam noteikuši aksoīdus, mums vairs nebūs jāpārbauda, vai tie tiešām var velties viens pa otru. Tāpēc arī, ja viens no aksoīdiem ir cilindrs, kons vai tangentu virsma, arī otrs būs tās pašas attinamo virsmu pasugas.

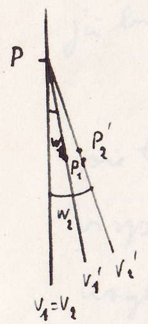
Ja aksoīdi ir cilindri, šķeļot to konfigurāciju ar plakni (Π) kas ir perpendikulāra

velš-anās gadījumam noteikusi aksoīdi,
mums vairs nebūs jāpārbauda, vai tie
tieš-ām var velties viens pa otru. Tāpēc
arī, ja viens no aksoīdiem ir cilindrs,
kōns vai tangentu virsma, arī otrs būs
tās pašas attināmo virsmu pasugas.

Ja aksoīdi ir cilindri, šķeļot to konfi-
gurāciju ar plāksni (π), kas ir perpendikulāra
to veidulu kopīgam virzienam un kas
satur to punktu O_2, kura ruleti mēs gri-
bam pētīt, mēs kustību reducējam uz plāksnes
kustību: punkts O_2 pārvietojas plāksnē (π),
no kuras viņš neiziet, tā, it kā tas būtu
nekustoši saistīts ar kustoš-ā aksoīda šķē-
lumu, kas veļas pa nekustoš-ā aksoīda
šķēlumu. Problēma ir reducēta uz problēmu plāk-
snē. Līdzīgi, ja aksoīdi ir kōni, šķeļot
tos abus ar lodi, kuras centrs ir kōnu
kopējā virsotnē un kuras iet cauri
punktam O_2, mēs reducējam problēmu
ruletes problēmā uz lodes. Šos abus

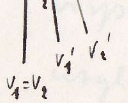
aksoidu tipus tad mēs arī neapskatīsim. Mums atliek aplūkot tikai divus gadījumus: kad aksoids ir kādas līkās tangentu virsma un kad tas nav attināms.

Meklēsim tagad tiešā ceļā noteikumus, lai divas tangentu virsmas varētu velties viena pa otru. Kā jau teikts, velšanās aksoidiem šie noteikumi vienmēr būs izpildīti, bet viņu pazīšana mums varēs sniegt dažas ziņas par paša aksoida dabu.



Aplūkosim abus aksoidus kādā stāvoklī, kur tie viens otram pieskaras pa veiduli V_1, V_2 (Visur indekss 1 attiecas uz nekustošo un 2 – uz kustošo aksoidu). V_1' un V_2' lai ir nākošās bezgalīgi tuvās katra aksoida veidules, kas sakritīs pie bezgalīgi mazas rotācijas ap momentāno asi $V_1 = V_2$.

Lai V_1' un V_2' pie šādas rotācijas varētu sakrist, tām abām jāšķeļ V_1, respektīvi V_2 tai



nekustošo un 2-ir kustošo aksoidu).

V_1' un V_2' lai ir nākošās bezgalīgi tuvās katra aksoida veidules, kas sakritīs pie bezgalīgi mazas rotācijas ap momentāno asi $V_1 = V_2$.

Lai V_1' un V_2' pie šādas rotācijas varētu sakrist, tām abām jāšķeļ V_1, respektīvi V_2 tai pašā punktā P un jāveido vienādi leņķi W_1 un W_2 ar to.

$$(1) \quad \sphericalangle W_1 = \sphericalangle W_2$$

Lai arī V_1' un V_2' pie sakrišanas varētu būt momentānā rotācijas ass, būs jāsakrīt arī tiem punktiem P_1', P_2' kur tos šķeļ nākošās bezgalīgi tuvās veidules, tā tad jābūt

$$(2) \quad PP_1' = PP_2'$$

un tā tad arī

$$(3) \quad \frac{W_1}{PP_1'} = \frac{W_2}{PP_2'}$$

Bet nu, kā zināms, tangentu virsmai visas veidules ir atgriešanās linijas (Gratlinie, arête de rebroussement) tangentes. Leņķi W_1 un W_2, ~~b~~dalīti ar bezgalīgi tuvu tangentu leņķi, būs atgriešanās līkņo kontingences leņķi un nogriežņi PP_1' un PP_2' robežgadījumā taps par to loka elementiem ds_1 un ds_2. Mums tā tad jābūt

$$\frac{w_1}{ds_1} = \frac{w_2}{ds_2}$$

t.i.

$$(L) \qquad \frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_2}$$

Nepieciešamais noteikums, lai divas tangentu virsmas būtu viena otrai uztinamas, respektīvi varētu viena pa otru veltīties, ir tas, ka viņu atgriešanās līknām saderīgos punktos jābūt vienādiem liekumiem.

Ir skaidrs, ka šis noteikums arī ir pietiekošs. Tas vispār ir speciāls gadījums vispārējai teorēmai par ģeodētiska liekuma uzglabāšanos vienu virsmu uztinot uz otras: tā kā atgriešanās līknās pieglaušanās plāksne ir tangentu virsmas pieskarplāksne tai pašā punktā, tad tāpēc atgriešanās līknās ģeodētiskās liekuma radijs ir vienāds ar tās liekuma radiju.

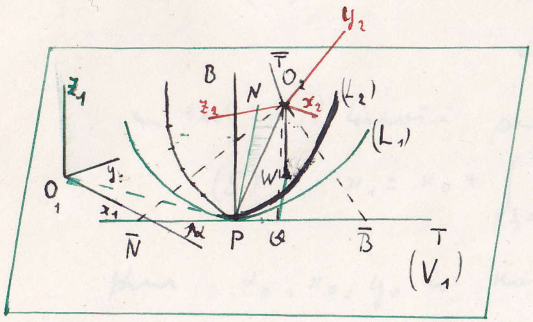
vispārējai teorēmai par ģeodētiska liekuma uzglabāšanos vienu virsmu ustinot uz otras: tā kā atgriešanās līkās pieglaušanās plāksne ir tangentu virsmas pieskarplāksne tai pašā punktā, tad tapēc atgriešanās līkās ģeodētiskā liekuma radijs ir vienāds ar tās liekuma radiju.

34. Aplūkosim papriekš vienkāršāko gadījumu, kur viens no aksoidiem ir plāksne. Pieņemsim, ka tas ir nekustošais aksoids (V_1). Kustošam aksoidam (V_2) veļoties pa plāksni (V_1), tā atgriešanās līkā (L_2) velsies pa plāksni (V_1) tā, ka (V_1) katrā (L_2) stāvoklī būs tās pieglaušanās plāksne attiecīgā punktā P, kur tai pieskaŗas momentānā rotācijas ass veidule PT.

Vispirms meklēsim P ģeometrisko vietu plāksnē (V_1). Pieņemsim, ka līkās (L_2) noliekšinājums dots kaut kādā koordinātu sistēmā, kur koordinātu sākuma punkts ir tas punkts O_2, kuŗa ruleti mums jāatrod. Ja x_2, y_2, z_2 ir (L_2) tekošā punkta P koordinātas šai sistēmā, mēs

Zināsim x_2, y_2, z_2 kā kāda parametra t funkcijas:

$$(1)\quad \begin{cases} x_2 = x_2(t) \\ y_2 = y_2(t) \\ z_2 = z_2(t) \end{cases}$$



Kā nekustošās koordinātu asis, attiecībā uz kurām mēs noteiksim O_2 netes nolieci nāju. mus, mēs ņemsim trīs savstarpējā perpendikulārās taisnes O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1, no kurām abas pirmās lai atrodas (V_1) plāksnē.

Līnijas (L_2) loku s_2 un liekumu $\frac{1}{R_2}$ dod formulas:

$$(2)\quad s_2 = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_2}{dt}\right)^2}\, dt$$

kur t_0 ir tam (L_2) punktam atbilstošais parametrs, no kura sākam skaitīt lokus, un

$$(3)\quad \frac{1}{R_2} = \frac{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}{\left[\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_2}{dt}\right)^2\right]}$$

kur

$$A_2 = \frac{dy_2}{dt}\cdot\frac{d^2z_2}{dt^2} - \frac{d^2y_2}{dt^2}\cdot\frac{dz_2}{dt}$$

formulas:

$$(2)\qquad s_2=\int_{t_0}^{t}\sqrt{\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_2}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz_2}{dt}\right)^2}\,dt$$

kur t_0 ir tam (L_2) punktam atbilstošais parametrs, no kura sākam skaitīt lokus, un

$$(3)\qquad \frac{1}{R_2}=\frac{\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}{\left[\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_2}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz_2}{dt}\right)^2\right]}$$

kur

$$A_2=\frac{dy_2}{dt}\cdot\frac{d^2z_2}{dt^2}-\frac{d^2y_2}{dt^2}\cdot\frac{dz_2}{dt}$$

$$B_2=\frac{dz_2}{dt}\cdot\frac{d^2x_2}{dt^2}-\frac{d^2z_2}{dt^2}\cdot\frac{dx_2}{dt}$$

$$C_2=\frac{dx_2}{dt}\cdot\frac{d^2y_2}{dt^2}-\frac{d^2x_2}{dt^2}\cdot\frac{dy_2}{dt}$$

Ja (2) dod s_2 kā t funkciju, eliminējot t starp (2) un (3) mēs dabūjam $\frac{1}{R_2}$ kā s_2 funkciju:

$$(4)\qquad \frac{1}{R_2}=f(s_2)$$

Ja (2) nav integrējams, mēs varam, diferencējot (2) un (3) un izdalot vienu ar otru, atrast sakaru starp ds_2 un $d\left(\frac{1}{R_2}\right)$ un t. Eliminējot savukārt t starp šo sakaru un (3), mēs dabūtu pirmās kārtības diferenciālvienādojumu starp s_2 un $\frac{1}{R_2}$, kas varēs būt atrisināms (arī ja (2) nav integrējams) ar kvadratūrām.

Lai būtu kā būdams, pielaidīsim, ka esam dabūjuši (4). T-as ir (L_1) naturālais vienādojums. Tad aprēķinam palīgfunkciju α tādu, ka

$$(5)\qquad \frac{d\alpha}{ds_2} = \varepsilon f(s_2) \qquad \text{kur } \varepsilon = \pm 1$$

$$\alpha = \varepsilon \int_{s_0}^{s_2} f(s_2)\, ds_2 + \alpha_0$$

un tad (L_1) tekošā punkta P koordinātas būs

$$(5')\qquad x_1 = x_0 + \int_{s_0}^{s_2} \cos\alpha\, ds \qquad y_1 = y_0 + \int_{s_0}^{s_2} \sin\alpha\, ds$$

kur α_0, x_0, y_0 ir konstantes, ko nosaka (L_2) sākuma stāvoklis: x_0, y_0 ir P koordinātas un

$$\tan\alpha_0 = \left(\frac{dy_1}{dx_1}\right)_0$$

t.i. α_0 ir lenķis, ko veido PT ar pozitivo x_1 asi.

Lielums ε jāņem vienāds ar $+1$, ja (L_2) pozitivās binormāles virziens sakrīt ar $O_1 z_1$ pozitivo virzienu un vienāds ar -1, ja abi šie virzieni ir pretēji vērsti. T-ā, piemēram, ja (L_2) ir kāda infleksijas tangente, arī (L_1) tam atrodot infleksijas punktu un $\frac{d\alpha}{ds_2}$ maina tur savu zīmi. Vispār α ir PT lenķis ar pozitivo x_1 asi.

Turpmākos aprēķinos pieņemsim, ka x_1, y_1 ir zināmi kā s_1 funkcijas un x_2, y_2, z_2 – kā (L_2) loka pozitīvo virzienu un vienāds ar -1, ja abi šie virzieni ir pretēji vērsti. Tā, piemēram, ja (L_2) ir kāda infleksijas tangente, arī (L_1) tam atbilst infleksijas punkts un $\frac{d\alpha}{ds_2}$ maina tur savu zīmi. Vispār α ir PT leņķis ar pozitīvo x_1 asi.

Turpmākos aprēķinos pieņemsim, ka x_1, y_1 ir zināmi kā s_1 funkcijas un x_2, y_2, z_2 - kā (L_2) loka s_2 funkcijas. R_1 būs (L_1) un (L_2) kopējais liekuma radijs punktā P, T_2 - (L_2) šķiebuma radijs tai pašā punktā, X, Y, Z - O_2 koordinātas sistēmā (O, x_1, y_1, z_1), R un $\mathcal{T}$ - O_2 ruletes (L_3) liekuma un šķiebuma radijs punktā O_2.

Tad ievedam palīga references sistēmu: liekā (L_1) un (L_2) kopējo fundamentālo triedru $PTNB$ punktā P (PT - tangente, PN - galvenā normāle, PB - binormāle). Šī sistēma, ko mēs iedomāsimies nekustīgu, katrā mirklī, protams, būs cita. Punktu pārvietojumus un leņķu virzienu kosinus pret šo sistēmu tieši dod Cesàro formulas, ko mēs vēlāk arī lietāsim.

---

9) α, x_1 un y_1 aprēķinu dod Goursat, 563. l.p.

Tagad turpreti izlietāsim paņēmienu, kādu dod Demartres's [10]: visas vajadzīgās diferencēšanas izved ar koordinātām attiecībā pret nekustīgām asīm $(O_1 x_1 y_1 z_1)$, un tikai pēc tam pārnesīs asis, lai tās sakristu ar $(PTNB)$, caur ko top:

$$(6) \quad x_1 = 0 \quad y_1 = 0 \quad \alpha = 0$$

un dabūtās formulas ir viegli interpretējamas.

Konstruēsim O_2 koordinātu poligonu $PQWO_2$ sistēmā $(PTNB)$ un noteiksim tā atsevišķos vektorus. Sistēmā $(O_2 x_2 y_2 z_2)$ mēs zinam P koordinātas: tās ir x_2, y_2, z_2 un PT, PN, PB virziena kosinus, ko apzīmēsim, kā tas ir parasts, ar $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$. Tad

$$PQ = \text{proj}_{PT}(PO_2) = -\text{proj}_{PT}(O_2 P)$$
$$= -\alpha_1 x_2 - \beta_1 y_2 - \gamma_1 z_2$$
$$= -\int \alpha_1 x_2$$

Simbols $\int$ te, tāpat kā tālāk, norāda, ka jāsummē trīs locekļi, ko dabūjam aizvietojot reizē α un x ar β un y un ar γ un z.

$$QW = \text{proj}_{PN}(PO_2) = -\text{proj}_{PN}(O_2 P)$$

$$P\Theta = \mathrm{proj}_{PT}(PO_2) = -\,\mathrm{proj}_{PT}(O_2P)$$
$$= -\alpha_1 x_2 - \beta_1 y_2 - \gamma_1 z_2$$
$$= -\textstyle\int \alpha_1 x_2$$

Simbols $\int$ te, tāpat kā tālāk, norāda, ka jāsummē trīs locekļi, ko dabūjam aizvietojot reizē α un x ar β un y un ar γ un z.

$$\Theta W = \mathrm{proj}_{PN}(PO_2) = -\,\mathrm{proj}_{PN}(O_2P)$$
$$= -\alpha_2 x_2 - \beta_2 y_2 - \gamma_2 z_2$$
$$= -\textstyle\int \alpha_2 x_2$$
$$WO_2 = \mathrm{proj}_{PB}(PO_2) = -\,\mathrm{proj}_{PB}(O_2P)$$
$$= -\alpha_3 x_2 - \beta_3 y_2 - \gamma_3 z_2$$
$$= -\textstyle\int \alpha_3 x_2$$

$P\Theta$, ΘW un WO_2 ir O_2 koordinātas X_p, Y_p, Z_p sistēmā $(PTNB)$. Vispār dažādu izteiksmju vērtību šai sistēmā mēs apzīmēsim ar indeksu p. Kā nupat atradām,

$$(6')\quad \begin{cases} X_p = -\int \alpha_1 x_2 \\ Y_p = -\int \alpha_2 x_2 \\ Z_p = -\int \alpha_3 x_2 \end{cases}$$

Lai dabūtu O_2 koordinātas X, Y, Z sistēmā

10) Demartres, 165. l.p.

$(O_1 x_1 y_1 z_1)$, projicēsim uz x_1, y_1 un z_1 asi lauzto līniju $O_1 P B W O_2$. Pieņemot, ka PB pozitīvais virziens vērsts uz augšu,

$$(7)\quad \begin{cases} X = x_1 + X_p \cos\alpha - Y_p \sin\alpha \\ Y = y_1 + X_p \sin\alpha + Y_p \cos\alpha \\ Z = Z_p \end{cases}$$

un ievietojot X_p, Y_p, Z_p vērtības

$$(8)\quad \begin{cases} X = x_1 - \cos\alpha \int \alpha_1 x_2 + \sin\alpha \int \alpha_2 x_2 \\ Y = y_1 - \sin\alpha \int \alpha_1 x_2 - \cos\alpha \int \alpha_2 x_2 \\ Z = - \int \alpha_3 x_2 \end{cases}$$

(8) ir meklētais ruletes (L_3) nolīdzinājums. Labā pusē visi lielumi ir loka $s_1 = s_2$ funkcijas. (L_3) izpētīšanai mums vajag diferencēt X, Y, Z pēc to argumenta s_1. Rakstības vienkāršošanai ievedīsim apzīmējumus

$$\frac{1}{R_1} = \rho \qquad \frac{1}{T_2} = \tau$$

tad mums būs

$$\frac{dx_2}{ds_1} = \frac{dx_2}{ds_2} = \alpha_1$$

$$\frac{d\alpha_1}{ds_1} = \frac{d\alpha_1}{ds_2} = \frac{\alpha_2}{R_1} = \alpha_2 \rho$$

$$\frac{d\alpha_2}{ds_1} = \frac{d\alpha_2}{ds_2} = -\frac{\alpha_1}{R_1} + \frac{\alpha_3}{T_2} = -\alpha_1 \rho + \alpha_3 \tau$$

to argumenta s_1. Ka...

ja apzīmējam

$$\frac{1}{R_1} = \rho \qquad \frac{1}{T_2} = \tau$$

tad mums būs

$$\frac{dx_2}{ds_1} = \frac{dx_2}{ds_2} = \alpha_1$$

$$\frac{d\alpha_1}{ds_1} = \frac{d\alpha_1}{ds_2} = \frac{\alpha_2}{R_1} = \alpha_2 \rho$$

$$\frac{d\alpha_2}{ds_1} = \frac{d\alpha_2}{ds_2} = -\frac{\alpha_1}{R_1} + \frac{\alpha_3}{T_2} = -\alpha_1\rho + \alpha_3\tau$$

$$\frac{d\alpha_3}{ds_1} = \frac{d\alpha_3}{ds_2} = -\frac{\alpha_2}{T_2} = -\alpha_2\tau$$

un, ievērojot (5)

$$\frac{d\alpha}{ds_1} = +\frac{1}{R_1} = \rho$$

Bez tam jāievēro sakari

$$\int \alpha_1^2 = 1 \qquad \int \alpha_1\alpha_2 = 0 \qquad \int \alpha_1\alpha_3 = 0$$

Visas šīs formulas ir arī spēkā līknēm β un γ.

Sastādam X, Y, Z pirmos atvasinājumus.

$$\frac{dX}{ds_1} = \cancel{\cos\alpha} + \sin\alpha\,\rho\cancel{\int}\alpha_1 x_2 - \cos\alpha\cancel{\int}\alpha_2\rho x_2 - \cancel{\cos\alpha} + \cos\alpha\,\rho\cancel{\int}\alpha_2 x_1 + \sin\alpha\int(-\cancel{\alpha_1\rho}+\alpha_3\tau)x_2 =$$

$$= \sin\alpha\,\tau\int\alpha_3 x_2 =$$

$$= -\sin\alpha\,\tau\,Z$$

$$\frac{dY}{ds_1} = \cancel{\sin\alpha} - \cos\alpha\,\rho\cancel{\int}\alpha_1 x_2 - \sin\alpha\cancel{\int}\alpha_2\rho x_2 - \cancel{\sin\alpha} + \sin\alpha\,\rho\cancel{\int}\alpha_2 x_1 - \cos\alpha\int(-\cancel{\alpha_1\rho}+\alpha_3\tau)x_2 =$$

$$= -\cos\alpha\,\tau\int\alpha_3 x_2 =$$

$$= \cos\alpha\,\tau\,Z$$

$$\frac{dZ}{ds_1} = -\int(-\alpha_2\tau)x_2$$
$$= \tau\int\alpha_2 x_2$$

Mums tā tad ir

$$(9)\quad\begin{cases} \dfrac{dX}{ds_1} = -\sin\alpha\,\tau\,Z \\[2ex] \dfrac{dY}{ds_1} = \cos\alpha\,\tau\,Z \\[2ex] \dfrac{dZ}{ds_1} = \tau\int\alpha_2 x_2 \end{cases}$$

Un sistēmā (PTMN), kur mēs turpmāk sauksim par sistēmu (P)

$$(10)\quad\begin{cases} \left(\dfrac{dX}{ds_1}\right)_p = 0 \\[2ex] \left(\dfrac{dY}{ds_1}\right)_p = \tau Z_p \\[2ex] \left(\dfrac{dZ}{ds_1}\right)_p = -\tau Y_p \end{cases}$$

Mēs šīs formulas tūliņ neinterpretēsim, bet aprēķināsim papriekš otros un trešos atvasinājumus, lai mums tie būtu jau gatavi. Kā jau teikts, ir jādiferencē formulas (9) un nevis (10). Mēs liksim $\rho' = \frac{d\rho}{ds_1}$, $\tau' = \frac{d\tau}{ds_1}$

$$\frac{d^2X}{ds_1^2} = (-\cos\alpha\,\rho\tau - \sin\alpha\,\tau')Z - \sin\alpha\,\tau^2\int\alpha_2 x_2$$

$$\frac{d^3Y}{ds_1^3} = -(\cos\alpha\,\rho^2\tau + \sin\alpha\,\rho'\tau + 2\sin\alpha\,\rho\tau' - \cos\alpha\,\tau'')Z - (\sin\alpha\,\rho\tau - \cos\alpha\,\tau')\tau\int\alpha_2 x_2 +$$

$$+ (-\sin\alpha.\rho\tau^2 + 2\cos\alpha.\tau\tau')\int\alpha_2 x_2 + \cos\alpha.\tau^2\int(-\alpha_1\rho + \alpha_3\tau)x_2$$

$$= -Z\left[\cos\alpha.(\rho^2\tau - \tau'' - \tau^3) + \sin\alpha(\tau\rho' + 2\rho\tau')\right] - \int\alpha_2 x_2 (2\sin\alpha.\rho\tau^2 - 3\cos\alpha.\tau\tau') -$$

$$- \cos\alpha\,\rho\tau^2\int\alpha_1 x_2$$

$$\frac{d^3Z}{ds_1^3} = +\tau''\int\alpha_2 x_2 + \tau'\int(-\alpha_1\rho + \alpha_3\tau)x_2 - (\tau'\rho + \tau\rho')\int\alpha_1 x_2 - \tau\rho^2\int\alpha_2 x_2 - \tau\rho - 2\tau\tau' Z - \tau^3\int\alpha_2 x_2$$

$$= -3\tau\tau' Z - \tau\rho - \int\alpha_1 x_2 .(2\tau'\rho + \tau\rho') + \int\alpha_2 x_2 (\rho^2\tau - \tau'' - \tau^3)$$

Sistēma (P) būs

$$(13)\quad\left\{\begin{aligned}
\left(\frac{d^3X}{ds_1^3}\right)_p &= -Z_p(\tau\rho' + 2\rho\tau') + 2\rho\tau^2 Y_p\\
\left(\frac{d^3Y}{ds_1^3}\right)_p &= -Z_p(\rho^2\tau - \tau'' - \tau^3) - 3Y_p\tau\tau' + X_p\rho\tau^2\\
\left(\frac{d^3Z}{ds_1^3}\right)_p &= -\tau\rho - 3Z_p\tau\tau' + X_p(2\tau'\rho + \tau\rho') + Y_p(\rho^2\tau - \tau'' - \tau^3)
\end{aligned}\right.$$

Lielumu noteikšanai būs derīgi zināt X, Y, Z otros atvasinājumus pēc pašas ruletes loka ds. (10) mums dod pirmos atvasinājumus:

$$\left(\frac{ds}{ds_1}\right)_p^2 = \left(\frac{dX}{ds_1}\right)_p^2 + \left(\frac{dY}{ds_1}\right)_p^2 + \left(\frac{dZ}{ds_1}\right)_p^2$$

$$= \tau^2 u^2$$

kur u ir punkta O_2 attālums no PT. Ja

$$\left(\frac{dZ}{ds_1}\right)_p = -\tau Y_p$$

Mēs šīs formulas tūliņ neinterpretēsim, bet aprēķināsim papriekš otros un trešos atvasinājumus, lai mums tie būtu jau gatavi. Kā jau teikts, ir jādiferencē formulas (9) un nevis (10). Mēs liksim $\rho' = \frac{d\rho}{ds_1}$, $\tau' = \frac{d\tau}{ds_1}$

$$(11)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2X}{ds_1^2} = -(\cos\alpha\,\rho\tau + \sin\alpha\,\tau')\,Z - \sin\alpha\,\tau^2 \int \alpha_2 x_2 \\[2ex] \dfrac{d^2Y}{ds_1^2} = -(\sin\alpha\,\rho\tau - \cos\alpha\,\tau')\,Z + \cos\alpha\,\tau^2 \int \alpha_2 x_2 \\[2ex] \dfrac{d^2Z}{ds_1^2} = \tau' \int \alpha_2 x_2 - \tau\rho \int \alpha_1 x_2 - \tau^2 Z \end{cases}$$

un sistēmā (P):

$$(12)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{d^2X}{ds_1^2}\right)_p = -\rho\tau Z_p \\[2ex] \left(\dfrac{d^2Y}{ds_1^2}\right)_p = \tau' Z_p - \tau^2 Y_p \\[2ex] \left(\dfrac{d^2Z}{ds_1^2}\right)_p = -\tau' Y_p + \tau\rho X_p - \tau^2 Z_p \end{cases}$$

Vēlreiz diferencējot (11)

$$\begin{aligned} \frac{d^3X}{ds_1^3} &= (\sin\alpha\,\rho^2\tau - \cos\alpha\,\tau\rho' - \cos\alpha\,\rho\tau' - \cos\alpha\,\rho\tau' - \sin\alpha\,\tau'')\,Z - (\cos\alpha\,\rho\tau + \sin\alpha\,\tau')\tau \int \alpha_2 x_2 - \\ &\quad - (\cos\alpha\,\rho\tau^2 + 2\sin\alpha\,\tau\tau') \int \alpha_2 x_2 - \sin\alpha\,\tau^2 \int (-\alpha_1\rho + \alpha_3\tau)\,x_2 \\ &= Z\left[\sin\alpha(\rho^2\tau - \tau'' - \tau^3) - \cos\alpha(\tau\rho' + 2\rho\tau')\right] - (\sin\alpha \cdot 3\tau\tau' + 2\cos\alpha\,\rho\tau^2) \int \alpha_2 x_2 + \\ &\quad + \sin\alpha\,\rho\tau^2 \int \alpha_1 x_2 \end{aligned}$$

Formula (15) protams ir derīga arī Y un Z otrā atvasinājuma atrašanai un tā paša spēkā, ja mēs labās puses izteiksmē liekam katra lieluma vienkāršoto izteiksmi sistēmā (P); mēs tad dabūjam kreisās puses vērtību šai sistēmā. Atliek vēl aprēķināt $\frac{d^2s}{ds_1^2}$.

Šim nolūkam paceļam kvadrātā un saskaitām formulas (9), kas dod

$$\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2 = \tau^2\left[Z^2 + \left(\int \alpha_2 X_2\right)^2\right]$$

Diferencējam un izdalām abas puses ar 2

$$\frac{ds}{ds_1}\cdot\frac{d^2s}{ds_1^2} = \tau\tau'\left[Z^2 + \left(\int\alpha_2 X_2\right)^2\right] + \tau^2\left[Z\frac{dZ}{ds_1} + \int\alpha_2 X_2 \int(-\alpha_1\rho + \alpha_3\tau)X_2\right]$$

Liekam tagad labā pusē vienkāršotās izteiksmes

$$\left(\frac{ds}{ds_1}\cdot\frac{d^2s}{ds_1^2}\right)_p = \tau\tau'(Z_p^2 + Y_p^2) + \tau^2\left[-\tau Z_p Y_p - Y_p(\rho X_p - \tau Z_p)\right]$$

$$= \tau\tau' u^2 - \rho\tau^2 X_p Y_p$$

un izdalot abas puses ar (14), dabūjam

$$(16) \qquad \left(\frac{d^2s}{ds_1^2}\right)_p = \tau' u - \rho\tau\frac{X_p Y_p}{u}$$

Visus turpmākos aprēķinus, ja tas nebūs citādi atzīmēts, mēs izdarīsim sistēmā (P), un tāpēc, lai turpmāk vienkāršotu rakstību, dažādu izteiksmju nozīmes rakstīsim bez indeksa p. Tad (15) dos, ievērojot (12), (14) un (16)

$$\frac{d^2X}{ds^2} = \frac{-\rho\tau Z}{\tau^2 u^2} = -\frac{\rho Z}{\tau u^2}$$

$$\frac{d^2Y}{ds^2} = \frac{\tau' Z - \tau^2 Y}{\tau^2 u^2} - \frac{\tau Z . (\tau' u - \rho\tau \frac{XY}{u})}{\tau^3 u^3}$$

$$= \frac{1}{\tau^2 u^4}(\cancel{\tau' Z u^2} - \tau^2 Y u^2 - \cancel{\tau' Z u^2} + \rho\tau Z XY)$$

$$= \frac{Y(XZ\rho - u^2\tau)}{\tau u^4}$$

$$\frac{d^2Z}{ds^2} = \frac{-\tau' Y + \tau\rho X - \tau^2 Z}{\tau^2 u^2} + \frac{\tau Y(\tau' u - \rho\tau\frac{XY}{u})}{\tau^3 u^3}$$

$$= \frac{1}{\tau^2 u^4}(\cancel{-\tau' Y u^2} + \tau\rho X u^2 - \tau^2 Z u^2 + \cancel{\tau' Y u^2} - \rho\tau X Y^2)$$

$$= \frac{Z(\rho XZ - \tau u^2)}{\tau u^4}$$

Tā tad

$$(17)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2X}{ds^2} = -\dfrac{\rho Z}{\tau u^2} \\[2ex] \dfrac{d^2Y}{ds^2} = \dfrac{Y(\rho XZ - \tau u^2)}{\tau u^4} \\[2ex] \dfrac{d^2Z}{ds^2} = \dfrac{Z(\rho XZ - \tau u^2)}{\tau u^4} \end{cases}$$

Formulas (14), (14'), (17) un (13) ir pētīšanai ruletes

$$= \frac{Z(\rho X Z - \tau u^2)}{\tau u^4}$$

Tā tad

$$(17)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 X}{ds^2} &= -\frac{\rho Z}{\tau u^2} \\ \frac{d^2 Y}{ds^2} &= \frac{Y(\rho X Z - \tau u^2)}{\tau u^4} \\ \frac{d^2 Z}{ds^2} &= \frac{Z(\rho X Z - \tau u^2)}{\tau u^4} \end{aligned} \right.$$

Formulas (14), (14'), (17) un (13) ir pietiekošas ruletes (L_3) elementāras teorijas izveidošanai; ruletes šķiebuma aprēķinam liekas, ka vajadzētu pievienot vēl (10) un (12), jo (13) satur s_1 un nevis s kā neatkarīgo parametru. Mēs tomēr redzēsim, ka arī šim aprēķinam pietiek ar augšējām 4 formulu grupām.

35. Stājoties pie (L_3) pētīšanas, sakoposim iepriekšējā paragrafa formulas (14'), (17), (14) un (13), tās vēlreiz pārrakstot un apzīmējot respectīvi ar (1), (2), (3) un (4).

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dX}{ds} &= 0 \\ \frac{dY}{ds} &= \frac{Z}{u} \\ \frac{dZ}{ds} &= -\frac{Y}{u} \end{aligned} \right. \qquad u = \sqrt{Y^2 + Z^2}$$

$$
(2)\quad
\begin{cases}
\dfrac{d^2X}{ds^2} = -\dfrac{\rho Z}{\tau u^2} \\[2ex]
\dfrac{d^2Y}{ds^2} = \dfrac{Y(\rho X Z - \tau u^2)}{\tau u^4} \\[2ex]
\dfrac{d^2Z}{ds^2} = \dfrac{Z(\rho X Z - \tau u^2)}{\tau u^4}
\end{cases}
$$

$$
(3)\quad \frac{ds}{ds_1} = \tau u
$$

$$
(4)\quad
\begin{cases}
\dfrac{d^3X}{ds_1^3} = -Z(2\rho\tau' + \tau\rho') + 2Y\rho\tau^2 \\[2ex]
\dfrac{d^3Y}{ds_1^3} = -Z(\rho^2\tau - \tau'' - \tau^3) - 3Y\tau\tau' + X\rho\tau^2 \\[2ex]
\dfrac{d^3Z}{ds_1^3} = -\tau\rho - 3Z\tau\tau' + X(2\rho\tau' + \tau\rho') + Y(\rho^2\tau - \tau'' - \tau^3)
\end{cases}
$$

Fundamentálais triedr.

a). (L_3) tangentea punctă O_2 [illegible]

$$
\frac{x - X}{\frac{dX}{ds}} = \frac{y - Y}{\frac{dY}{ds}} = \frac{z - Z}{\frac{dZ}{ds}}
$$

t.i., ținînd (1)

$$
\frac{x - X}{0} = \frac{y - Y}{\frac{Z}{u}} = \frac{z - Z}{-\frac{Y}{u}}
$$

$\left(\frac{}{ds^3} \right.$

Fundamentalais triedrs. a). (L_3) tangentes punktā O_2 nolīdzinājumi

$$\frac{x-X}{\frac{dX}{ds}} = \frac{y-Y}{\frac{dY}{ds}} = \frac{z-Z}{\frac{dZ}{ds}}$$

t.i., ievērojot (1)

$$\frac{x-X}{0} = \frac{y-Y}{\frac{Z}{u}} = \frac{z-Z}{-\frac{Y}{u}}$$

x, y, z ir tekošā punkta koordinātas. Augšējie nolīdzinājumi dod, izvedot attiecīgos rēķinus

$$(5) \qquad x = X \qquad yY + zZ = Y^2 + Z^2$$

Tangente, būdama perpendikulāra pret PT, atrodas plāksnē, kas paralēla ~~līnijas~~ L_1 normālplāksnei NPB. Otrs nolīdzinājums rāda, ka tangente ir perpendikulāra arī pret taisni O_2 ... un tā tad pret plāksni (O_2, PT), bet to var labāk redzēt, sastādot normālplāksnes vienādojumu:

$$(x-X)\frac{dX}{ds} + (y-Y)\frac{dY}{ds} + (z-Z)\frac{dZ}{ds} = 0$$

kas top par

$$yZ - zY = 0$$

b) Tā tad normālplāksne iet caur x asi, t.i. caur PT: tā ir plāksne (O_2, PT). Visu ar (L_2) saistīto punktu trajektoriju normālplāksnes katrā mirklī sastāda plākšņu kūlīti, kas iet caur PT - momentāno rotācijas asi.

Tangentes pēdu plāksnē (V_1) dabūjam liekot $z_t = 0$. Tad

$$y_t = \frac{y^2+z^2}{y}$$

Meklēsim to punktu M ģeometrisko vietu, kuru ruletu tangentes iet caur kādu dotu punktu A x_0, y_0, z_0. (5) dod

$$X = x_0 \qquad y^2 + z^2 = y y_0 + z z_0$$

Tas ir riņķa noliecinājums, kā plaksne ir perpendikulāra PT, t.i. paralēla (L_1) un (L_2) normālplāksnei punktā P un kura diametrs ir no A uz PT nolaistais perpendikulis. Šis fakts ir ģeometriski acīmredzams: katrs punkts M ir A projekcija uz M ruletes normālplāksni punktā M. Tā kā šīs plāksnes iet caur PT un no otras puses katra caur PT ejoša plāksne ir normālplāksne visu savu punktu ruletēm, ir skaidrs, ka M ģeometriskā vieta būs augšminētais riņķis.

c) Binormāles noliecinājums ir

... perpendikulāri. Tas ir arī

ģeometriski acīmredzams: katrs punkts M ir A projekcija uz M rullētes normālplāksni punktā M. Tā kā šīs plāksnes iet caur PT un no otras puses katra caur PT ejoša plāksne ir normālplāksne visu savu punktu rullētim, ir skaidrs, ka M ģeometriskā vieta būs augšminētais riņķis.

c.) Binormāles nolīdzinājums ir

$$\frac{x-X}{A}=\frac{y-Y}{B}=\frac{z-Z}{C}$$

kur

$$A=\frac{dY}{ds}\frac{d^2Z}{ds^2}-\frac{d^2Y}{ds^2}\frac{dZ}{ds}=\frac{Z}{u}\cdot\frac{Z(\rho XZ-\tau u^2)}{\tau u^4}+\frac{Y}{u}\cdot\frac{Y(\rho XZ-\tau u^2)}{\tau u^4}$$

$$=\frac{\rho XZ-\tau u^2}{\tau u^3}$$

$$B=\frac{dZ}{ds}\cdot\frac{d^2X}{ds^2}-\frac{d^2Z}{ds^2}\cdot\frac{dX}{ds}=\left(-\frac{Y}{u}\right)\left(-\frac{\rho Z}{\tau u^2}\right)=\frac{\rho YZ}{\tau u^3}$$

$$C=\frac{dX}{ds}\cdot\frac{d^2Y}{ds^2}-\frac{d^2X}{ds^2}\cdot\frac{dY}{ds}=-\left(-\frac{\rho Z}{\tau u^2}\right)\left(\frac{Z}{u}\right)=\frac{\rho Z^2}{\tau u^3}$$

Tad binormāles nolīdzinājums ir

$$\frac{x-X}{\rho XZ-\tau u^2}=\frac{y-Y}{\rho YZ}=\frac{z-Z}{\rho Z^2}$$

Binormāle protams atrodas normālplāksnē, kas arī tūliņ redzams, ja abu virzienu koeficientus pareizina un summētie dod nulli. Binormāles pēdas punkts plāksnē (V_1) –

tā tad atradīsies uz PT un tā koordinātas būs:

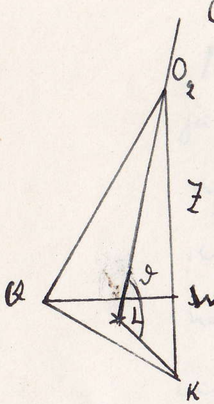
$$y_a = 0 \qquad z_a = 0$$

$$x_a = x - \frac{1}{\rho z}(\rho x z - \tau u^2) = \frac{\tau u^2}{\rho z} = \frac{R}{T}\cdot\frac{y^2+z^2}{z}$$

Šī formula dod iespēju vienkārši konstruēt binormāli, jo zinām $\frac{R}{T}$, ko mums piemēram dotu rektificējošā taisne, jo leņķis, ko tā veido ar PT, tangentei $\frac{T}{R}$ (absolūti ne mot/). Trešām, lielumu

$$x' = \frac{y^2+z^2}{z}$$

mēs dabūjam velkot plāksnē $O_2 \Theta W$ punktā Θ perpendikulu pret $O_2\Theta$, kas šķeļ O_2W punktā K,



pie kam

$$\overline{KO_2} = \frac{O_2\Theta^2}{\overline{WO_2}} = \frac{y^2+z^2}{z}$$

Tad caur O_2 velkam paralēli rektificējošai taisnei un caur K – paralēli tangentei. Abas šīs taisnes krustojas, atrazdamās plāksnē, kas paralēla rektificējošai plāksnei.

Ja L ir šo taisņu krustpunkts,

$$KL = KO_2 \cotang O_2LK = KO_2 \cotang \vartheta$$
$$= KO_2\frac{R}{T}$$

KL tad nu mēs atliekam uz x ass vai nu

pozitīvā vai negatīvā virzienā, atkarībā no

šīs taisnes krustojas, atrazdamās plāksnē,

kas paralēla rektificējošai plāksnei.

Ja L ir šo taisņu krustpunkts,

$$KL = KO_2 \operatorname{cotang} O_2LK = KO_2 \operatorname{cotang} \vartheta$$
$$= KO_2 \frac{R}{T}$$

KL tad nu mēs atliekam uz x ass vai nu pozitīvā, vai negatīvā virzienā, atkarībā no tā, vai $\bar{KO_2}$ ir pozitīvs vai negatīvs.

Tangentes un binormāles pēdas punktu plāksnē (V_1) koordinātu zīmes atļauj noteikt aptuveni (L_3) stāvokli katram punktā O_2. Tiešām, tangentes pēdas punkta ordinātei ir tā pati zīme, kā y un binormāles pēdas punkta abscisai: tāda pat kā reizinājumam RTZ, vai, ja R un T abi ir pozitīvi, kā piemēram mūsu zīmējumā (82. lapas pusē), tāda pat kā Z. Tā zinot aptuveni šos abus pēdas punktus un rotācijas zīmi, ko dod T_2, varam aptuveni, bez jebkādiem aprēķiniem, noteikt katram ar (L_2) saistītam punktam O_2 viņa ruletes fundamentālā triedra stāvoklī.

Lai binormāle ietu caur kādu iepriekš doto punktu A, ir jābūt, ja x_0, y_0, z_0 ir A koordinātas

$$\frac{x_0 - X}{\varrho X Z - \tau u^2} = \frac{y_0 - Y}{\varrho Y Z} = \frac{z_0 - Z}{\varrho Z^2}$$

Abu pēdējo lielumu vienādība dod

$$\frac{y_0 - Y}{z_0 - Z} = \frac{Y}{Z} = \frac{y_0}{z_0},$$

pielaižot, ka $Z \neq 0$. Ja turpreti $Z = 0$, kā redzams, jābūt arī $Y = 0$, kas dod taisni PT. Šo taisni mēs dabūsim visiem punktiem x_0, y_0, z_0, tā tad redzams, ka tās punktiem fundamentālo triedru stāvoklis nav noteikts - jo arī tangente var iet visos virzienos, kas perpendikulāri PT, un tā tad PT punkti atrodas savā ziņā īpatnējos punktos. Liekot

$$\frac{z_0}{y_0} = \varkappa,$$

$$Z = \varkappa Y$$

nav noteikts – jo arī tangente varējā iet visos virzienos, kas perpendikulāri PT, un tā tad PT punkti atrodas savu rullētu īpat-nējos punktos. Liekot

$$\frac{z_0}{y_0} = \varkappa,$$

$$Z = \varkappa Y$$

un augšējā sakarība dod

$$\frac{x_0 - X}{\varrho\varkappa XY - \tau Y^2(1+\varkappa^2)} = \frac{y_0 - Y}{\varrho\varkappa Y^2}$$

Mēs varam vienmēr saīsināt ar $Y \neq 0$, jo vērtību $Y = 0$ mēs atmetām, kā nepieņemamu. Tad izzūdis arī loceklis ar XY un paliks

$$Y^2\tau(1+\varkappa^2) - Y\left[\varrho\varkappa x_0 + \tau y_0(1+\varkappa^2)\right] + \varrho\varkappa y_0 X = 0$$

Izdalām abas puses ar $\tau(1+\varkappa^2) \neq 0$ un apzīmējam

$$\frac{\varrho\varkappa}{\tau(1+\varkappa^2)} = \kappa$$

$$Y^2 - Y[\kappa x_0 + y_0] + y_0\kappa X = 0$$

$$\left(Y - \frac{\kappa x_0 + y_0}{2}\right)^2 = \left(\frac{\kappa x_0 + y_0}{2}\right)^2 - y_0\kappa X$$

Šis vienādojums attēlo parabolisku cilindru, kam veidules paralēlas z asij. Taisnā šķēluma ass vērsta negatīvās X ass virzienā un virsotne atrodas uz taisnes paralēlas z asij, t. i. veidules:

$$y=\frac{kx_0+y_0}{2}\qquad x=\frac{(kx_0+y_0)^2}{4ky_0}$$

Šķēlot ar plākni

$$z=\varkappa y$$

mēs dabūjam parabolu, kas guļ šai plāknē, kuras ir paralēla PT negatīvam virzienam, kas iet caur P un kuras virsotnes koordinātas ir

$$x=\frac{(kx_0+y_0)^2}{4ky_0}\qquad y=\frac{kx_0+y_0}{2}\qquad z=\varkappa\,\frac{kx_0+y_0}{2}$$

Ja $y_0=0$, liekas, ka mūsu cilindrs pārvēršas divās plāknēs: $y=0$ un $y=kx_0$. Tā tomēr nav, jo

$$\frac{y_0}{z_0}=\frac{y}{z}$$

dod, ja $z_0\neq 0$, tikai $y=0$ un rīkojoties ar x un z tāpat kā iepriekš ar y un x, dabūjam atkal parabolisku cilindru, ar veidulēm paralēlām y asij PN, ko plāksne

$$y=0$$

šķeļ viņa taisnā šķēlumā.

Beidzot, ja $y_0=0$, $z_0=0$, mēs dabūjam tikai vienu noteikumu:

ēd, jā $z_0 \neq 0$, tikai $Y = 0$ un rīkojoties ar X un Z tāpat kā iepriekš ar Y un X, dabūjam atkal paraboliskus cilindri, ar veidulēm paralēlām Y asij PN, kas plāksne

$$Y = 0$$

iekš, viņa taisnā šķēlumā.

Beidzot, jā $y_0 = 0$, $z_0 = 0$, mēs dabūjam tikai vienu noteikumu:

$$\tau(Y^2 + Z^2) - x_0 \rho Z = 0$$

kas dod taisnu riņķa cilindru, kas satur arī X asi.

Ja vēl $x_0 = 0$, redzams, ka vairs atbilstoša punkta nav, jo atrisinājums $X = Y = Z = 0$ nav pieņemams. Tā tad neviena punkta rulētes binormāle (nedz arī tangente) neiet caur punktu P.

d) Pieglaušanās plāksne ir perpendikulāra binormālei un tās nolīdzinājums tā tad ir

$$(x - X)A + (y - Y)B + (z - Z)C = 0$$

$$(x - X)(\rho XZ - \tau Z^2 - \tau Y^2) + (y - Y)\rho YZ + (z - Z)\rho Z^2 = 0$$

vai, pārveidojot,

$$x\left[\rho XZ - \tau Y^2 - \tau Z^2\right] + y\rho YZ + z\rho Z^2 - \rho Z(X^2 + Y^2 + Z^2) + \tau X(Y^2 + Z^2) = 0$$

Tās kustošanās līnijā ar normālplāksni

$$yZ - zY = 0$$

ir galvenā normāle. Noteiksim šīs normāles pēdas punktu plāksnē (V_1). Tur būs

$$z = 0$$

un normālplāksnes nolīdzinājums rāda, ka arī

$$y = 0$$

Tad pieglaušanās plāksnes nolīdzinājums dos

$$x_n = \frac{\rho Z(X^2+Y^2+Z^2) - \tau X(Y^2+Z^2)}{\rho XZ - \tau Y^2 - \tau Z^2}$$

Ja prasam, lai O_2 rulletes pieglaušanās plāksne iet caur vienu dotu punktu, O_2 vietai dabūjam trešās pakāpes virsmu.

Ja gribam, lai O_2 pieglaušanās plāksne ietu caur diviem dotiem punktiem, respektīvi saturētu dotu taisni, mēs dabūsim divus trešās pakāpes nolīdzinājumus starp X, Y un Z. Varētu tā tad domāt, ka punktu O_2 ģeoiet caur vienu dotu punktu, O_2 vitai dabūjam

trešās pakāpes virsmu.

Ja gribam, lai O_2 pieglaušanās plāksne ietu caur diviem dotiem punktiem, respektīvi saturētu dotu taisni, mēs dabūsim divus trešās pakāpes nolīdzinājumus starp X, Y un Z. Varētu tātad domāt, ka punktu O_2 ģeometriskā vieta ir devītās pakāpes līnija (L). Bet tā kā abiem nolīdzinājumiem trešās pakāpes locekļi ir tie paši (tie ir neatkarīgi no x, y un z), viena šīs līnijas daļa atrodīsies bezgalībā, un otra būs sestās pakāpes līkā, ko dos viens trešās un viens otrās pakāpes nolīdzinājums. To pēdējo mēs dabūjam eliminējot starp abiem nolīdzinājumiem trešās pakāpes locekļus.

Jāpiezīmē, ka šīs virsmas, respektīvi līkās, visas iet caur P un pat caur visiem taisnes PT punktiem, jo $Y=0, Z=0$ apmierina kuras katras pieglaušanās plāksnes nolīdzinājumu. Bez šīs taisnes (L) tātad var būt vairs tikai priekšā parādās zars

Galvenās normāles divi punkti mums ir zināmi: punkts $O_2(X, Y, Z)$ un viņas pēdas punkts plāksnē (V_1), kuŗa koordinātas ir

$$x_n = \frac{\varrho Z(X^2+Y^2+Z^2) - \tau X(Y^2+Z^2)}{\varrho XZ - \tau Y^2 - \tau Z^2}, \quad y_n = 0, \quad z_n = 0$$

Galvenās normāles vienādojums tātad būs

$$\frac{x-X}{X-x_n} = \frac{y-Y}{Y} = \frac{z-Z}{Z}$$

Aprēķināsim pirmās attiecības saucēju

$$X - x_n = \frac{\varrho X^2 Z - \tau X(Y^2+Z^2) - \varrho Z(X^2+Y^2+Z^2) + \tau X(Y^2+Z^2)}{\varrho XZ - \tau Y^2 - \tau Z^2}$$

$$= \frac{-\varrho Z(Y^2+Z^2)}{\varrho XZ - \tau(Y^2+Z^2)}$$

Tad galvenās normāles vienādojums būs

$$-(x-X)\frac{\varrho XZ - \tau(Y^2+Z^2)}{\varrho Z(Y^2+Z^2)} = \frac{y}{Y} - 1 = \frac{z}{Z} - 1.$$

Kontroles pēc pārliecināsimies, vai tā ir perpendikulāra pret tangenti: sareizinām un saskaitam to sadarīgos virzienu koeficientus

$$= \frac{-\rho z(y^2+z^2)}{\rho x z - \tau(y^2+z^2)}$$

Tagad galvenās normāles nolīdzinājums būs

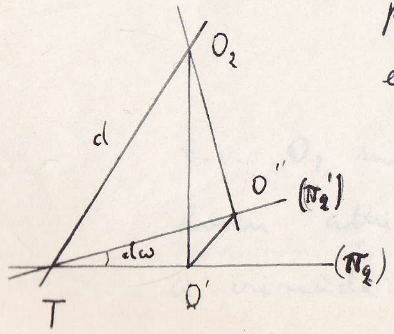
$$-(x-X)\frac{\rho x z - \tau(y^2+z^2)}{\rho z(y^2+z^2)} = \frac{y}{Y} - 1 = \frac{z}{Z} - 1.$$

Kontroles pēc pārbaudīsim, vai tā ir perpendikulāra pret tangenti: sareizināsim un saskaitīsim to sadalīgos virzienu koeficientus

$$-\frac{\rho z(y^2+z^2)}{\rho x z - \tau(y^2+z^2)}\left[\rho x z - \tau(y^2+z^2)\right] + y\rho y z + z\rho z^2 = 0$$

Mēs jau atradām formulu O_2 __rullētes leņķa__ atvasinājumam pēc līknes (L_2) loka. Meklēsim tā paša punkta O_2 podāres pret (V_2) loka atvasinājumu pēc (L_2) loka.

2.) Tagad meklēsim punkta O_2 __podārei__ attiecībā pret attinamo virsmu (V_2), t.i. pret līknes (L_2) pieglaušanās plāksnēm, elementāro loku.



Ja aplūkojam divus bezgalīgi tuvus pieglaušanās plāksnes stāvokļus (Π_2) un (Π_2'), mēs dabūjam (Π_2') liekot (Π_2) griesties ap līknes tangenti PT par leņķi $d\omega$, kas ir L_2 šķiebuma leņķis. Taisnes O_2O' un O_2O'', kas projicē O_2 uz (Π_2) un (Π_2') punktos O' un O'' ir tā tad perpendikulāras pret PT, un arī plāksne $O'O_2O''$ būs perpendikulāra pret PT.

Ņemsim šo plāksni par zīmējuma plāksni. Tā ies caur O_2 projekciju T uz PT un šķels (Π_2) un (Π_2') pa divām taisnēm, kas veido leņķi $d\omega$. Šī plāksne satur arī podāres elementārā loka chordu, kas ir $O'O''$. Neievērojot trešās kārtības bezgalīgi mazus lielumus, varam teikt, ka $O'O''$ ir vienāds ar podāres elementāro loku $d\sigma$:

$$d\sigma = O'O''$$

Bet un punkti O' un O'' guļ uz riņķa ar diametru O_2T, jo leņķi $TO'O_2$ un $TO''O_2$ ir taisni. Chorda $O'O''$, uz kuras atbalstas ierakstītais leņķis $O''TO' = d\omega$ līdzinas

$$O'O'' = O_2T \sin d\omega$$

un apzīmējot O_2T ar u, jo tas ir punkta O_2

$$d\sigma = O'O''$$

Bet un punkti O' un O'' guļ uz riņķa ar diametru O_2T, jo leņķi $TO'O_2$ un $TO''O_2$ ir taisni. Chorda $O'O''$, uz kuras atbalstās ierakstītais leņķis $O''TO' = d\omega$ lidzinas

$$O'O'' = O_2T \sin d\omega$$

un apzīmējot O_2T ar u, jo tas ir punkta O_2 attatums no tangentes PT, kā arī neievērojot trešās kārtības bezgalīgi mazos lielumus, varam rakstīt

$$O'O'' = u\, d\omega$$

Tā tad $$d\sigma = u\, d\omega$$

un izdalot abas puses ar (L_2) elementāro loku ds_2

$$\frac{d\sigma}{ds_2} = u \frac{d\omega}{ds_2} = \frac{u}{T} = u\tau$$

Tā kā $ds_2 = ds_1$, redzam ka

$$\frac{d\sigma}{ds_1} = \frac{ds}{ds_1}$$

t.i. O_2 ruletes un podāres elementārie loki attiecības pret ds_1 elementāriem lokiem ir vienāda. Ja mēs sākam skaitīt ruletes un podāres loku no diviem sadērīgiem punktiem, kam atbilst s_1 vērtība $(s_1)_0$, mums būs

$$\sigma = \int_{(s_1)_0}^{s_1} u\tau\, ds_1 \qquad s = \int_{(s_1)_0}^{s_1} u\tau\, ds_1$$

tā tad $\qquad \sigma = s$

kas ir pazīstamās Steiner'a teorēmas vispārinājums telpā un mēs to varam izteikt šādi:

Ja uz kādas plāksnes veļas telpas līknās (L_2) tangentu virsma, katra ar šo līkno saistīta punkta O_2 rulettes loks, kas atbilst kādam noteiktam (L_2) lokam s_2, ir tieši pat garš kā lokam s_2 atbilstošais loks uz O_2 pedāres attiecībā pret (L_2) tangentu virsmu.

f.) Rulettes liekumu $\frac{1}{R}$ punktā O_2 dod formula

$$\frac{1}{R^2} = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2$$

kas top, ievietojot attiecīgās nozīmes

$$\frac{1}{R^2} = \frac{\rho^2 z^2}{\tau^2 u^4} + \frac{y^2(\rho x z - \tau u^2)^2}{\tau^2 u^8} + \frac{z^2(\rho x z - \tau u^2)^2}{\tau^2 u^8}$$

$$\left(\frac{\rho}{\tau} x z - u^2\right)^2 + \frac{\rho^2}{\tau^2} u^2 z^2$$

f.) Rulетes liekumu $\frac{1}{R}$ punktā O_2 dod formula

$$\frac{1}{R^2} = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2$$

kas top, ievietojot attiecīgās nozīmes

$$\frac{1}{R^2} = \frac{\rho^2 z^2}{\tau^2 u^4} + \frac{y^2(\rho x z - \tau u^2)^2}{\tau^2 u^8} + \frac{z^2(\rho x z - \tau u^2)^2}{\tau^2 u^8}$$
$$= \frac{\left(\frac{\rho}{\tau} x z - u^2\right)^2 + \frac{\rho^2}{\tau^2} u^2 z^2}{u^6}$$

Šī pēdējā forma rāda, ka $\frac{1}{R}$ atkarājas tikai no ρ un τ attiecības, bet nevis no katra šo liekumu lieluma atsevišķi.

$$\frac{1}{R} = \frac{\sqrt{(\rho x z - \tau u^2)^2 + \rho^2 u^2 z^2}}{u^3 \tau}$$

Lai

$$\frac{1}{R} = 0$$

ir nepieciešami un pietiekoši, ka

$$\rho x z - \tau u^2 = 0$$
$$\rho^2 u^4 z^2 = 0$$

Mēs pieņemam, ka (L_2) nav īpatnēju punktu, tātad

$$\rho \neq 0 \quad \tau \neq 0$$

Tad otrais noteikums dod

$$z = 0$$

un pirmais $\qquad u = 0$, t.i. $z = 0,\ y = 0$.

Liekums ir nulle tā tad vienīgi PT punktu nuletēm, kas arī saprotams, jo plāksnē (V_1) atrodas visu (L_2) tangentu virsmas punktu nuletu atgriešanās punkti.

Savā ziņā interesanti ir punkti, kam

$$\rho X z - \tau u^2 = 0$$

Šiem punktiem

$$\frac{d^2y}{ds^2} = \frac{d^2z}{ds^2} = 0 \qquad A = 0$$

Pēdējā vienādība norāda, ka binormāle ir perpendikulāra pret PT. Tā kā PT guļ arī normālplāksnē, galvenā normāle būs paralēla PT. Apskatāmajiem punktiem

$$\frac{1}{R} = -\frac{\rho z}{\tau u^2} = -\frac{1}{X}$$

Liekuma centrs tā tad atrodas PNB plāksnē, tas ir P projekcija uz galveno normāli, pie kam P projicējošā taisne ir paralēla binornormālplaknē, galvenā normāle būs paralēla PT. Aplūkojamiem punktiem

$$\frac{1}{R} = -\frac{\rho z}{\tau u^2} = -\frac{1}{X}$$

Liekuma centrs tā tad atrodas PNB plaknē, tas ir P projekcija uz galveno normāli, pie kam P projicējošā taisne ir paralēla binormālei. Šī taisne tad ir ruletes polārā ass. Rodas jautājums: vai arī citiem punktiem polārā ass neiet caur P, kā to var ģeometriski paredzēt: P atrodas uz divām sekojošām rotācijas asīm, tā tad P caur šīm divām rotācijām savu stāvokli nemaina, pie reizes palikdams tai pašā attālumā no katra punkta O_2 trim sekojošiem stāvokļiem, t.i. viņš atradīsies uz katra punkta O_2 ruletes polārās ass.

Pirms nosakam analitiski polāro asi, apskatīsim vēl to punktu ģeometrisko vietu, kam liekuma centri bija PNB plaknē. Šiem punktiem bija

$$\rho X Z - \tau (Y^2 + Z^2) = 0$$

t.i. tie atrodas uz 2. pakāpes virsmas. Šī virsma ir kōns ar virsotni punktā P, jo viņas nolīdzinājums ir homogens; tāpat kā liekuma radijs R, tā atkarājas nevis tieši no (L_2) liekuma vai šķēluma, bet gan no viņu attiecības. Lai dabūtu šī kōna (K) izskatu, šķeļam to ar plāksni

$$X = a\frac{T}{\rho} \quad \text{(a ir patvaļīga konstante)}$$

šķēluma projekcijai uz PNB plāksni nolīdzinājums ir

$$y^2 + z^2 - az = 0$$

T-as ir riņķis ar centru uz z ass, kas pieskaras y asij sākuma punktā. Redzams, ka (K) ir kōns, kas pieskaras plāksnei (V_1) pa taisni PT un kas šķēlumā ar plāksnēm perpendikulārām PT dod riņķus. Plāksne PTB ir (K) simmetrijas plāksne.

Kā redzējām, telpas ruletēm nav nekā analoga apliekšanās riņķim, ko sastopam pie plāksnes ruletēm. Augšējais kōns (K) savā

pieskaras , augš- sākumā [illegible],
ka (K) ir kōns, kas pieskaras plāksnei (V_1) pa taisni PT un kas šķēlumā ar plāksni perpendikulāru PT dod riņķus. Plāksne PTB ir (K) simmetrijas plāksne.

Kā redzējām, telpas ruletēm nav neka analoga aplieskšanas riņķim, ko sastopam pie plāksnes ruletēm. Augšējais kōns (K) savā stāvoklā gan atgādina aplieskšanas riņķi, bet tā punktiem ne tālu nav tās raksturīgā īpašība kā aplieskšanas riņķa punktiem.

g) Polārās ass atrašanai uz mirkli atgriezīsimies sistēmā (O, x_1, y_1, z_1). Tur normālplāksnes nolīdzinājums ruleti punktā O_2 ir

$$(1) \qquad (x-X)\frac{dX}{ds} + (y-Y)\frac{dY}{ds} + (z-Z)\frac{dZ}{ds} = 0$$

Lai dabūtu polāro asi, t.i. normālplāksnes charakteristiku, diferencējam nolīdzinājumā (1) visus lielumus, kas ir s funkcijas:

$$(2) \quad (x-X)\frac{d^2X}{ds^2}+(y-Y)\frac{d^2Y}{ds^2}+(z-Z)\frac{d^2Z}{ds^2}=1$$

Characteristika ir plākšņu (1) un (2) šķēlšanās taisne. Tā protams nemainās, ja mēs plāknes (1) un (2) attiecinam uz kaut kādu citu koordinatu sistēmu, piemēram mūsu sistēmu (P), ko mēs pazīstam, liekot $\frac{dX}{ds}$, $\frac{d^2X}{ds^2}$ u.t.t. vietā to vienkāršotās izteiksmes sistēmā (P). Sistēmā (P) protams (2) vairs nebūtu iegūts no (1) caur diferencēšanu; kā jau vairākkārt teikts, sistēmā (P) pašā mēs nedrīkstam izdarīt nekādu diferencēšanu. (1) un (2) dos

$$(1') \qquad yZ - zY = 0 \qquad \text{un}$$

$$-(x-X)\rho Z u^2 + (y-Y)Y(\rho XZ - \tau u^2) + (z-Z)Z(\rho XZ - \tau u^2) = \tau u^4$$

Atverot iekavinas

$$-x\rho Z u^2 + yY(\rho XZ - \tau u^2) + zZ(\rho XZ - \tau u^2) = -\rho XZ u^2 + u^2(\rho XZ - \tau u^2) + \tau u^4$$

Labās puses locekļiem izzūdot paliek

$$(2') \qquad x\rho Z u^2 + yY(\tau u^2 - \rho XZ) + zZ(\tau u^2 - \rho XZ) = 0$$

Plākne (2') arī iet caur sākuma punktu P, tāpat kā (1'); to šķelšanās taisne tā tad ies

$$-(x-X)\rho Z u^2+(y-Y)Y(\rho XZ-\tau u^2)+(z-Z)Z(\rho XZ-\tau u^2)=\tau u^4$$

Atverot iekavinas

$$-x\rho Z u^2+yY(\rho XZ-\tau u^2)+zZ(\rho XZ-\tau u^2)=-\rho XZu^2+u^2(\rho XZ-\tau u^2)+\tau u^4$$

Labās puses locekļiem izzūdot paliek

$$(2')\qquad x\rho Z u^2+yY(\tau u^2-\rho XZ)+zZ(\tau u^2-\rho XZ)=0$$

Plāksne (2') arī iet caur sākuma punktu P, tāpat kā (1'); to krustošanās taisne tā tad iet caur P visos gadījumos.

Ievērojams, ka arī polārās ass stāvoklis, ~~kaut~~ X, Y, Z, atkarājas tikai no ρ un τ attiecības. Šās polārās ass nolīdzinājums ir

$$\frac{x}{\tau u^2-\rho XZ}=\frac{y}{\rho YZ}=\frac{z}{\rho Z^2}$$

tā ir binormālei vilktā parallēle caur P. Ja meklējam tos punktus, kam polārā ass iet caur kādu dotu punktu x_0, y_0, z_0, mēs dabūjam divas otrās pakāpes homogenas sakarības starp x, y un z. Meklētie punkti atrodas tā tad ~~uz~~ šo sakarību noteikto konu krustošanās līnijas. Abiem koniem ir kopēja virsotne P. Tā kā vēl

$$yzz_0 - z^2 y_0 = 0$$

redzams, ka viens konus sastāv no plaknēm

$$z = 0 \quad \text{un} \quad yz_0 - zy_0 = 0$$

un tā šķēlšanās līkā ar otro konu ir dubulttaisne

$$z = 0\,, \quad y = 0$$

pašā $z = 0$ plakne pieskaras otram konam un divas citas taisnes, kas iet caur P. Šīs divas taisnes ir arī faktiski meklēto punktu vieta, jo X asi mēs atkal atmetam – tās punkti atrodas savu trajektoriju īpatnējos punktos.

b) Šķiebumu $\frac{1}{\tau}$ punktā O_2 relatīvi punktā O_2 dod formula

$$\frac{1}{\tau} \cdot \frac{1}{R^2} = \Delta$$

kur Δ ir sekojošas determinantes vērtība:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}$$

b) Stiepumu $\frac{1}{\tau}$ punktā O_2 uzlietā punktā O_2 dod formula

$$\frac{1}{\tau}\cdot\frac{1}{R^2}=\Delta$$

kur Δ ir sekošās determinantes vērtība:

$$\Delta=\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}$$

pie kam akcenti apzīmē diferencēšanu pēc uzlietes lokas s. Mēs aplūkosim determinanti

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ \frac{d^3x}{ds_1^3} & \frac{d^3y}{ds_1^3} & \frac{d^3z}{ds_1^3} \end{vmatrix}$$

un meklēsim, vai nepastāv kādi sakari Δ un Δ_1 vērtību starpā. Ja tā būs, būs pierādīts mūsu apgalvojums, ka stiepuma aprēķināšanai pietiek zināt x, y un z trešos atvasinājumus pēc s_1.

Šai nolūkā diferencēsim pēc s_1 88. lapas pusē atrasto sakarību (kas ir Gauchiē evidenta)

$$\frac{d^2X}{ds_1^2} = \frac{d^2X}{ds^2}\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2 + \frac{dX}{ds}\cdot\frac{d^2s}{ds_1^2}$$

kas dod (izņemot to sistēmā $O_1 x_1 y_1 z_1$)

$$\frac{d^3X}{ds_1^3} = \frac{d^3X}{ds^3}\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3 + 2\,\frac{d^2X}{ds^2}\,\frac{ds}{ds_1}\cdot\frac{d^2s}{ds_1^2} + \frac{d^2X}{ds^2}\cdot\frac{ds}{ds_1}\cdot\frac{d^2s}{ds_1^2} + \frac{dX}{ds}\cdot\frac{d^3s}{ds_1^3}$$

$$= \frac{d^3X}{ds^3}\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3 + 3\,\frac{d^2X}{ds^2}\cdot\frac{ds}{ds_1}\cdot\frac{d^2s}{ds_1^2} + \frac{dX}{ds}\cdot\frac{d^3s}{ds_1^3}$$

$\frac{d^3X}{ds_1^3}$ ir tā tad lineāra funkcija attiecībā uz X pirmiem trīs atvasinājumiem pēc s. Acīmredzot ar Y un Z būs pilnīgi analogi. Determinante Δ_1 tad izteicot X, Y, Z trešos atvasinājumus pēc s_1 ar viņu izteiksmēm

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} X' & Y' & Z' \\ X'' & Y'' & Z'' \\ X'''\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3 + 3X''\frac{ds}{ds_1}\frac{d^2s}{ds_1^2} + X'\frac{d^3s}{ds_1^3} & Y'''\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3 + 3Y''\frac{ds}{ds_1}\frac{d^2s}{ds_1^2} + Y'\frac{d^3s}{ds_1^3} & Z'''\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3 + 3Z''\frac{ds}{ds_1}\frac{d^2s}{ds_1^2} + Z'\frac{d^3s}{ds_1^3} \end{vmatrix}$$

Pareizinot Δ_1 pirmo rindiņu ar $-\frac{d^3s}{ds_1^3}$ un otro ar $-3\frac{ds}{ds_1}\cdot\frac{d^2s}{ds_1^2}$, un tās pieskaitot pēdējai, pēdējā rindiņā paliks tikai loceklis ar X''' (respektīvi Y''' un Z'''). Izņemot vēl reizinātāju $\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3$ priekš determinantes, redzam, ka

$$\Delta_1 = \Delta\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3$$

$$\left| \; x'''\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3+3x''\frac{ds}{ds_1}\frac{d^2s}{ds_1^2}+x'\frac{d^3s}{ds_1^3} \quad y'''\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3+3y''\frac{ds}{ds_1}\frac{d^2s}{ds_1^2}+y'\frac{d^3s}{ds_1^3} \quad z'''\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3+3z''\frac{ds}{ds_1}\frac{d^2s}{ds_1^2}+z'\frac{d^3s}{ds_1^3} \right|$$

Pareizinot Δ_1 pirmo rindiņu ar $-\frac{d^3s}{ds_1^3}$ un otro ar $-3\frac{ds}{ds_1}\cdot\frac{d^2s}{ds_1^2}$, un tās pieskaitot pēdējai, pēdējā rindiņā paliks tikai loceklis ar x''' (respektīvi y''' un z'''). Izņemot vēl reizinātāju $\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3$ priekš determinantes, redzam, ka

$$\Delta_1 = \Delta\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3$$

Lielumi $-\frac{d^3s}{ds_1^3}$ un $-3\frac{ds}{ds_1}\frac{d^2s}{ds_1^2}$, ar ko mēs reizinājām, nedrīkst būt bezgalīgi, kamēr nulles tie var būt. Kā viegli pārliecināties, punktiem galīgā attālumā šī faktori nav bezgalīgi, ja vien attiecīgais (L_2) punkts nav īpatnējs.

Šī lieluma aprēķināšanai mums tā tad būs formula

$$\frac{1}{\tau}\cdot\frac{1}{R^2} = \frac{\Delta_1}{\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3}$$

kas tiešām vienmēr dos $\frac{1}{\tau}$, jo, kā mēs redzējām,

$$\frac{1}{R} \neq 0.$$

Lai atrastu punktus ar stacionāru pieglaušanās plākšni, pietiek pielīdzināt nullei Δ_1. Ir paredzams, ka mēs dabūsim trešās pakāpes virsmu, kas eventuāli varētu vienkāršoties, piemēram sadalīties vairākās citās.

Šīs virsmas noteikšanai mēs varam arī pielīdzināt nullei determinanti

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{dX}{ds_1} & \frac{dY}{ds_1} & \frac{dZ}{ds_1} \\ \frac{d^2X}{ds_1^2} & \frac{d^2Y}{ds_1^2} & \frac{d^2Z}{ds_1^2} \\ \frac{d^3X}{ds_1^3} & \frac{d^3Y}{ds_1^3} & \frac{d^3Z}{ds_1^3} \end{vmatrix}$$

jo, tāpat kā iepriekš, var pārliecināties, ka

$$\Delta_2 = \Delta \left(\frac{ds}{ds_1}\right)^6$$

un Δ_2 ir vieglāk aprēķināma.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & \tau Z & -\tau Y \\ -\rho\tau Z & Z\tau' - Y\tau^2 & -Y\tau' + X\rho\tau - Z\tau^2 \\ -Z(\tau\rho' + 2\rho\tau') + 2\rho\tau^2 Y & \begin{matrix} -Z(\rho^2\tau - \tau'' - \tau^3) \\ -3Y\tau\tau' + X\rho\tau^2 \end{matrix} & \begin{matrix} -\tau\rho - 3Z\tau\tau' + X(2\rho\tau' + \tau\rho') + \\ + Y(\rho^2\tau - \tau'' - \tau^3) \end{matrix} \end{vmatrix} = 0$$

Abas nolīdzināšanas puses izdalām ar $\tau \neq 0$ - tad augšējā determinantes rindā paliek un Δ_2 ir vieglāk aprēķināma.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & \tau Z & -\tau Y \\ -\rho\tau Z & Z\tau' - Y\tau^2 & -Y\tau' + X\rho\tau - Z\tau^2 \\ -Z(\tau\rho' + 2\rho\tau') + 2\rho\tau^2 Y & \begin{matrix} -Z(\rho^2\tau - \tau'' - \tau^3) \\ -3Y\tau\tau' + X\rho\tau^2 \end{matrix} & \begin{matrix} -\tau\rho - 3Z\tau\tau' + X(2\rho\tau' + \tau\rho') + \\ + Y(\rho^2\tau - \tau'' - \tau^3) \end{matrix} \end{vmatrix} = 0$$

Abas nelīdzinājuma puses izdalam ar $\tau \neq 0$ - tad augšējā determinantes rindā paliek $0, Z, -Y$. Pareizinam augšējās rindiņas locekļus ar $-\tau'$ un tos pieskaitam otrās rindiņas locekļiem, tad tos pareizinam ar

$$-(\rho^2\tau - \tau'' - \tau^3)$$

un pieskaitam trešās rindiņas locekļiem, kas dod

$$\begin{vmatrix} 0 & Z & -Y \\ -\rho\tau Z & -Y\tau^2 & X\rho\tau - Z\tau^2 \\ -Z(\tau\rho' + 2\rho\tau') + 2\rho\tau^2 Y & -3Y\tau\tau' + X\rho\tau^2 & -\tau\rho - 3Z\tau\tau' + X(\tau\rho' + 2\rho\tau') \end{vmatrix} = 0$$

Tad vēl izdalam ar τ abas nelīdzinājuma puses, ar to izdalot otro rindiņu. Jaunās otrās rindiņas locekļus pareizinam ar $-3\tau'$ un tos pieskaitam pēdējās rindiņas locekļiem:

$$\begin{vmatrix} 0 & Z & -Y \\ -\rho Z & -Y\tau & X\rho - Z\tau \\ Z(\rho\tau' - \tau\rho') + 2\rho\tau^2 Y & X\rho\tau^2 & -\tau\rho - X(\rho\tau' - \tau\rho') \end{vmatrix} = 0$$

Šo pēdējo determinanti atverām pēc pirmās rindiņas elementiem, mainot zīmi:

$$Z\left\{Z\tau\rho^2 + XZ\rho(\rho\tau' - \tau\rho') - (X\rho - Z\tau)\left[Z(\rho\tau' - \tau\rho') + 2\rho\tau^2 Y\right]\right\} +$$

$$+ Y\left(-XZ\rho^2\tau^2 + YZ\tau(\rho\tau' - \tau\rho') + 2Y^2\rho\tau^2\right) = 0$$

Šī forma jau rāda, ka mūsu virsma iet caur X asi. Atverot iekavas un sakārtojot, dabūjam

$$F = XYZ\rho^2\tau + 2Y^3\rho\tau^2 + Z^3(\rho'\tau - \rho\tau') - Y^2Z(\rho'\tau - \rho\tau') - 2YZ^2\rho\tau^2 - \rho^2 Z^2 = 0$$

Attiecīgā virsma satur X tikai pirmā pakāpē: katra paralēle X asij to šķeļ vienā un tikai vienā punktā. Pati X ass ir virsmas īpatnējā taisne; jo tās punktos:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

Šo virsmu zināmā mērā varētu uzskatīt par aplieksanās riņķa plāknē analogo

Attiecīgā virsma satur X tikai pirmā pakāpē: katra paralēle X asij to šķels vienā un tikai vienā punktā. Pati X ass ir virsmas īpatnējā taisne; jo tās punktos:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

Šo virsmu zināmā mērā varētu uzskatīt par apliekšanās riņķa plaknē analogo figūru telpā. Tomēr, kā redzams, te šī figūra ir daudz sarežģītāka un nevarēs noderēt dažādām konstrukcijām, kā tas ir ar apliekšanās riņķi.

Lai šo virsmu varētu attēlot, šķelsim to ar koordinātu plaknēm. Plaknes $Y = 0$ un $Z = 0$ dod kā šķēlumu vienīgi X asi, kamēr plakne $X = 0$ dod NPB plaknē līkni

$$f = 2y^3 \rho \tau^2 + z^3 (\rho' \tau - \rho \tau') - y^2 z (\rho' \tau - \rho \tau') - 2 y z^2 \rho \tau^2 - \rho' z^2 = 0$$

Punktā $Y = 0$, $Z = 0$ arī

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

Lai dabūtu līknes tangenti šai punktā, sastādam otrās kārtības f parciālos atvasinājumus

No tiem tikai $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ satur konstantu locekli, proti $-2\rho^2$. Tā kā

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\frac{dz}{dy} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{d^2 z}{dy^2} = 0$$

redzam, ka punktam $y=0,\ z=0$ atbilst

$$\frac{dz}{dy} = 0$$

t.i. tangente ir pati y ass.

Ja turpretī mēs šķeļam ar kādu plakni $x = a$ punktam $y=0,\ z=0$ būs

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = a\rho^2\tau \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -2\rho^2$$

un tā tad

$$-2\rho^2\left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + 2a\rho^2\tau\frac{dz}{dy} = 0$$

kas dod 2 vērtības

$$\frac{dz}{dy} = 0 \qquad \frac{dz}{dy} = a\tau$$

Attiecīgajā punktā $(a,0,0)$ tā tad mūsu virsmai ir divas pieskarplaknes, kas iet caur X asi: viena plakne $z=0$, t.i. pati plakne (V_1) vai PTN un otra veido ar pirmo leņķi ϑ pie kam

$$\tang \vartheta = a\tau$$

Šī otrā pieskarplakne pārvietojas tā

kas dod 2 vērtības

$$\frac{dz}{dy} = 0 \qquad \frac{dz}{dy} = a\tau$$

Attiecīgajā punktā $(a,0,0)$ tā tad mūsu virsmai ir divas pieskarplāksnes, kas iet caur X asi: viena plāksne $z=0$, t.i. pati plāksne (V_1) vai PTN un otra veido ar pirmo leņķi ϑ pie kam

$$\tan\vartheta = a\tau$$

Šī otrā pieskarplāksne pārvietojas tā tad pilnīgi tāpat, kā nemetināmu taišņu virsmu pieskarplāksnes vienas veidules punktos.

Lai vienkāršotu tālākos pētījumus, pielaidīsim, ka

$$\rho'\tau - \rho\tau' = 0$$

t.i. ka dotā liniji $\frac{d}{ds_1}\left(\frac{R}{T}\right) = 0$: liekai (L_2) ir ~~pārosculējoša~~ (überosculierende, surosculatrice) vispārējā vietas limiji, kam ir ar to ceturtās kārtības pieskaršanās. Tad plāksne $X=0$ dalbujām lieko

$$f = 2y^3\tau^2 - 2yz^2\tau^2 - \rho z^2 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 6y^2\tau^2 - 2z^2\tau^2 = 2\tau^2(3y^2 - z^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -4yz\tau^2 - 2\rho z$$

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{2\tau^2(3y^2 - z^2)}{-2z(2y\tau^2+\rho)}$$

Redzam, ka $\frac{dz}{dy} = 0$ ja $3y^2 - z^2 = 0$

kas dod $y = 0$ un $y_1 = -\frac{3}{4}\frac{\rho}{\tau^2}$

Otrai y vērtībai atbilst $z_1 = \pm \frac{3\sqrt{3}}{4}\frac{\rho}{\tau^2}$

$\frac{dz}{dy}$ neaprobežoti pieaug absolūtā vērtībā, ja

y tuvojas tādam y_2, ka $2y_2\tau^2 + \rho = 0$

Ja ja z tiecas uz 0, arī y tiecas uz nulli un

īstā $\frac{dz}{dy}$ vērtība, kā mēs redzējām, te ir nulle.

$$y_2 = -\frac{\rho}{2\tau^2}$$

kam atbilst $z_2 \to \infty$

Beidzot, ja ~~liekām [illegible] formu~~ rakstam

$$z^2\rho = 2y\tau^2(y^2 - z^2)$$

redzam, ka y un $y^2 - z^2$ jābūt tām pašām

zīmēm: ja $y>0$, tam jābūt absolūtā vērtībā

lielākam par z, ja $y<0$, bet $|y|<|z|$. Bet tā kā

$$z^2 = \frac{2y^3}{\rho+2y\tau^2}$$

Redzam, ka arī y un $\rho + 2y\tau^2$ jābūt ar to pašu

zīmi, kas dod $y>0$

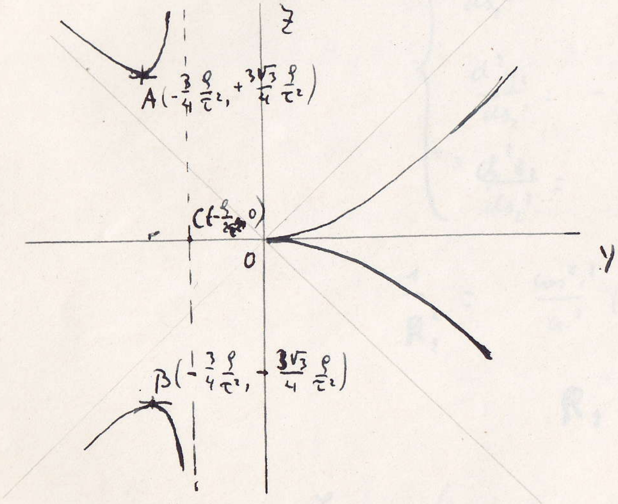
un $y < -\frac{\rho}{2\tau^2}$

Redzam, ka y un $y-z$ jābūt tām pašām zīmēm: ja $y>0$, tam jābūt absolūtā vērtībā lielākam par z, ja $y<0$, lai $|y|<|z|$. Bet tā kā

$$z^2 = \frac{2y^3}{\rho+2y\tau^2}$$

Redzam, ka arī y un $\rho+2y\tau^2$ jābūt ar to pašu zīmi, kas dod $y>0$

un $y < -\frac{\rho}{2\tau^2}$



Izlietojot visus iegūtos rezultātus, varam to līkni attēlot. Tai daļā, kur $y<0$, viņai ir asimptotes:

$$y = -\frac{\rho}{2\tau^2}$$
$$y = z$$
$$y = -z$$

Kamēr pozitīvajā daļā asimptotu nav: tangentes gan, kā esam pierādījuši, arvien vairāk top paralēlas taisnēm

$$y = z \quad \text{un} \quad y = -z$$

bet reizē tā bezgalīgi attālinās.

Nav grūti arī izpētīt mūsu visas

šķēlumu ar plāksnēm

$$y = b \quad \text{vai} \quad z = c$$

Mēs to tomēr šeit nedarīsim.

36. Kā piemēru rulētām apskatīsim līkni, ko apraksta cirkulārās vītes līnijas ass punkts, kad tās tangente visma velļas pa plāksni.

Mums ir, ņemot $O_2 z_2$ sakrītošu ar asi,

$$x_2 = a \cos\vartheta \cos\frac{s_2}{a}$$

$$y_2 = a \cos\vartheta \sin\frac{s_2}{a}$$

$$z_2 = \sin\vartheta \cdot s_2$$

kur a un ϑ ir konstantes, kuŗu ģeometrisko interpretāciju viegli atrast un s_2 - vītes līnijas loks.

$$\begin{cases} \dfrac{dx_2}{ds_2} = -\cos\vartheta \sin\dfrac{s_2}{a} \\ \dfrac{dy_2}{ds_2} = \cos\vartheta \cos\dfrac{s_2}{a} \\ \dfrac{dz_2}{ds_2} = \sin\vartheta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x_2}{ds_2^2} = -\dfrac{\cos\vartheta}{a}\cos\dfrac{s_2}{a} \end{cases}$$

[illegible] în s_2 [illegible]

$$\begin{cases} \dfrac{dx_2}{ds_2} = -\cos\vartheta \sin\dfrac{s_2}{a} \\[2ex] \dfrac{dy_2}{ds_2} = \cos\vartheta \cos\dfrac{s_2}{a} \\[2ex] \dfrac{dz_2}{ds_2} = \sin\vartheta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x_2}{ds_2^2} = -\dfrac{\cos\vartheta}{a}\cos\dfrac{s_2}{a} \\[2ex] \dfrac{d^2y_2}{ds_2^2} = -\dfrac{\cos\vartheta}{a}\sin\dfrac{s_2}{a} \\[2ex] \dfrac{d^2z_2}{ds_2^2} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{R_2^2} = \frac{\cos^2\vartheta}{a^2}\left(\cos^2\frac{s_2}{a} + \sin^2\frac{s_2}{a}\right)$$

$$R_2 = \frac{a}{\cos\vartheta} = \text{const} = R$$

Linia (L_1) pentru $\alpha_0 = 0$, $s_0 = 0$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$

$$\alpha = \int_0^{s_2} \frac{\cos\vartheta}{a} ds_2$$

$$\alpha = \frac{s_2}{R}$$

$$x_1 = \int_0^{s_2} \cos\frac{s_2}{R} ds_2 = R\sin\left(\frac{s_2}{R}\right)$$

$$y_1 = \int_0^{s_2} \sin\frac{s_2}{R} ds_2 = R\left[1 - \cos\left(\frac{s_2}{R}\right)\right]$$

$$\frac{d^3 x_2}{ds_2^3} = + \frac{\cos\lambda}{a^2} \sin \frac{s_2}{a}$$

$$\frac{d^3 y_2}{ds_2^3} = - \frac{\cos\lambda}{a^2} \cos \frac{s_2}{a}$$

$$\frac{d^3 z_2}{ds_2^3} = 0.$$

$$\frac{1}{T_2} = R_2^2 \begin{vmatrix} -\cos\lambda \sin\frac{s_2}{a} & \cos\lambda \cos\frac{s_2}{a} & \sin\lambda \\ -\frac{\cos\lambda}{a}\cos\frac{s_2}{a} & -\frac{\cos\lambda}{a}\sin\frac{s_2}{a} & 0 \\ \frac{\cos\lambda}{a^2}\sin\frac{s_2}{a} & -\frac{\cos\lambda}{a^2}\cos\frac{s_2}{a} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= R^2 \sin\lambda \frac{\cos^2\lambda}{a^3}\left(\cos^2\frac{s_2}{a} + \sin^2\frac{s_2}{a}\right)$$

$$= \frac{\sin\lambda}{a}$$

Šo līkumu pietiek, lai kādā nekustīgās līkās stāvokli noteiktu un izpētītu katram ar viņu saistītam punktam dažādos ruletes elementus. Ja mēs turpmāk gribam kāda noteikta punkta ruletes noliektinājumu, mēs sastādām

$$\left\{ \alpha = \frac{dx_2}{ds_2} = - \cos\lambda \sin\frac{s_2}{a} \right.$$

Šo lielumu pietiek, lai kādā nekustošās līkās stāvoklī noteiktu un izpētītu katram ar viņu saistītam punktam dažādos ruletes elementus. Ja mēs turpreti gribam ~~...~~ kāda noteikta punkta ruletes noliektinājumu.

mēs sastādam

$$\begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{dx_2}{ds_2} = -\cos\lambda \sin\dfrac{s_2}{a} \\ \beta_1 = \dfrac{dy_2}{ds_2} = \cos\lambda \cos\dfrac{s_2}{a} \\ \gamma_1 = \dfrac{dz_2}{ds_2} = \sin\lambda \end{cases}$$

Galvenās normāles virziena kosinusi

$$\begin{cases} \alpha_2 = \dfrac{\frac{d^2x_2}{ds_2^2}}{R_2} = \cos\dfrac{s_2}{a} \\ \beta_2 = \dfrac{\frac{d^2y_2}{ds_2^2}}{R_2} = \sin\dfrac{s_2}{a} \\ \gamma_2 = \dfrac{\frac{d^2z_2}{ds_2^2}}{R} = 0 \end{cases}$$

un

$$\begin{cases} \alpha_3 = \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1 = -\sin\lambda \sin\dfrac{s_2}{a} \\ \beta_3 = \gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1 = \sin\lambda \cos\dfrac{s_2}{a} \\ \gamma_3 = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = -\cos\lambda\left(\sin^2\dfrac{s_2}{a} + \cos^2\dfrac{s_2}{a}\right) \\ \qquad = -\cos\lambda \end{cases}$$

Tad

$$X_p = -\sin^2\lambda \cdot s_2$$

$$Y_p = -a\cos\lambda$$

$$Z_p = +\sin\lambda\cos\lambda \cdot s_2$$

un liekot

$$X = x_1 - \cos\left(\frac{s_2}{R}\right)\sin^2\lambda \cdot s_2 + \sin\frac{s_2}{R}(-a\cos\lambda)$$

$$Y = y_1 - \sin\left(\frac{s_2}{R}\right)\sin^2\lambda \cdot s_2 - \cos\frac{s_2}{R}(-a\cos\lambda)$$

$$Z = +\sin\lambda\cos\lambda \cdot s_2$$

ko var rakstīt, ievietojot attiecīgās vērtības

$$X = \sin^2\lambda\left[R\sin\left(\frac{s_2}{R}\right) - s_2\cos\left(\frac{s_2}{R}\right)\right]$$

$$Y = R - \sin^2\lambda\left[R\cos\left(\frac{s_2}{R}\right) + s_2\sin\left(\frac{s_2}{R}\right)\right]$$

$$Z = -s_2\sin\lambda\cos\lambda$$

Tālāk nav grūti izpētīt pašu uzleti: tā ir līknē, kas paceļas aizvien lielākiem lokiem. Interesanti, ka

$$\frac{dZ}{ds_2} = -\sin\lambda\cos\lambda$$

Tas ir konstants lielums, bet tas arī ir saprotams un izriet no vispārējām formulām. Tiešām, mēs atradām, ka

$$\frac{dZ}{ds_2} = \left(\frac{dZ}{ds_2}\right)_p = \tau y_p$$

Interesanti, ka

$$\frac{dz}{ds_2} = -\sin\vartheta\cos\vartheta$$

Tas ir konstants lielums, bet tas arī ir saprotams un izriet no vispārējām formulām. Tiešām, mēs atradām, ka

$$\frac{dz}{ds_2} = \left(\frac{dz}{ds_2}\right)_p = \tau\, y_p$$

$\tau = \frac{1}{T_2}$ mums ir pastāvīgs, tāpat arī y_p - punkta O_2 attālums līdz (L_2) rektificējošai plāksnei, kas te ir cilindra pieskarplāksne.

37. Pagriezīsimies rulletes pretējai problēmai: dota kāda līnija (L) un plāksne (Π) un jāatrod attinamā virsma (V_2) kurai pa plāksni veļoties kāds ar to saistīts punkts O_2 apraksta (L).

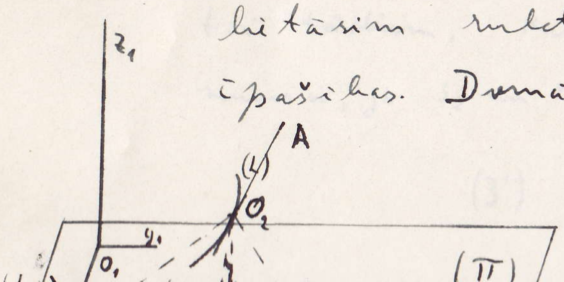
Dotās līnijas tekošā punkta koordinātas būs dotas kā kāda parametra (t) funkcijas

$$(1) \qquad x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad z = z(t)$$

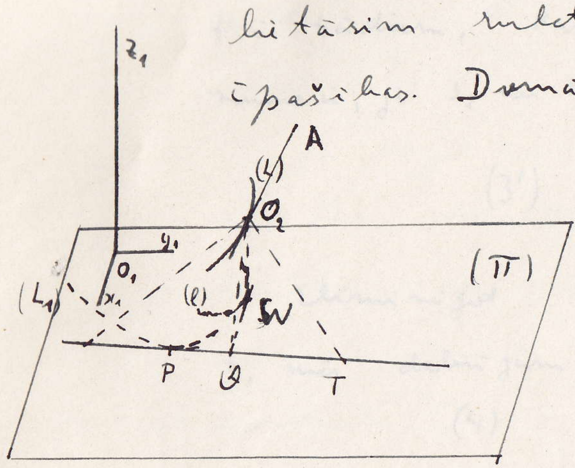
un mums ir jāatrod tā paša parametra t trīs tādas funkcijas x_2, y_2, z_2, ka būtu

$$(9)\quad \begin{cases} X = x - \cos\alpha \int \alpha_1 x_2 + \sin\alpha \int \alpha_2 x_2 \\ Y = y - \sin\alpha \int \alpha_1 x_2 - \cos\alpha \int \alpha_2 x_2 \\ Z = -\int \alpha_3 x_2 \end{cases}$$

pie kam $x, y, \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots \gamma_3$ ir ar x_2, y_2 un z_2 un to pirmo un otro atvasinājumu pie t palīdzību sastādītas izteiksmes, kuru forma ir zināma. (9) tātad ir otrās kārtības diferenciālvienādojumu sistēma, kas kreisā pusē satur, katrā vienādojumā, zināmu parametra t funkciju un labā nezināmās funkcijas un to atvasinājumus. Šī sistēma ir ļoti sarežģīta un tāpēc x_2, y_2, un z_2 atrašanai mēs izlietosim rulētes un velšanās kustības īpašības. Domājams, ka nebūs grūti sastādīt



attinamās virsmas (V_2) atgriešanās līnijas netinamās funkcijas un to atvasinājumus. Šī sistēma ir ļoti sarežģīta un tāpēc x_2, y_2, un z_2 atrašanai mēs izlietāsim ruletes un velšanās kustības īpašības. Domājams, ka nebūs grūti sastādīt



attinamās virsmas (V_2) atgriešanās līnijas naturālos vienādojumus, jo tās liekums un izliekums tieši ieiet vairākās ruletes formulās.

Piepaturēsim tos pašus apzīmējumus kā 34. paragrafā.

Plakne, kas iet caur O_2 un veiduli PT, p-a kuru (V_2) pieskaras plaknei (π), ir O_2 ruletes (L) normālplakne, tā tad arī otrādi: (L) normālplaknes pēda plaknē (π) būs acumirklīgā rotācijas ass. Konstruējot normālplaknes katrā (L) punktā, to pēdas plaknē (π) sastādīs vienkārši bezgalīgu taišņu saimi, kas vispārējā gadījumā ietis kādu līniju (L_1). Šī līkā (L_1) būs meklējamās attinamās virsmas (V_2) atgriešanās līnijas (L_2) notinums plāksnē (Π); punkts P, kur tai pieskaņas acumirklīgā rotācijas ass PT, ir ar PT sakritošās (V_2) veidules strikcijas punkts.

Mēs tā tad varam noteikt līnijas (L_1) tekošā punkta koordinātas (x_1, y_1) kā parametra t funkcijas, kas mums dos arī viņas loku s_1 un liekuma radiju R_1 kā t funkcijas:

$$(3) \begin{cases} s_1 = s_1(t) \\ R_1 = R_1(t) \end{cases}$$

Bet nu, ja uz (L_1) un (L_2) sākam skaitīt lokus no diviem sadevīgiem punktiem, t. i. tādiem, kas kādā (V_2) stāvoklī sakrīt, mums ir, ja s_2 un R_2 ir (L_2) loks un liekuma radijs

$$(3') \begin{cases} s_2 = s_1 & = s_1(t) \\ R_2(s_2) = R_1(s_1) & = R_1(t) \end{cases}$$

$$\left\{ R_1 = R_1(t) \right.$$

Bet nu, ja uz (L_1) un (L_2) sākam skaitīt lokus no diviem saderīgiem punktiem, t.i. tādiem, kas kādā (V_2) stāvoklī sakrīt, nums ir, ja s_2 un R_2 ir (L_2) loks un liekuma radijs

$$(3')\quad \begin{cases} s_2 = s_1 & = s_1(t) \\ R_2(s_2) = R_1(s_1) & = R_1(t) \end{cases}$$

Eliminējot no augšējās sistēmas $(3')$ t, mēs dabūjam

$$(4)\qquad F(s_2, R_2) = 0$$

kas ir viens no meklējamās virsmas (V_2) atgriešanās līnijas (L_2) naturāliem vienādojumiem. Lai (L_2) un līdz ar to (V_2) pilnīgi noteiktu, pietiktu tā tad atrast vēl vienu sakarību starp s_2, R_2 un (L_2) žņiebuma radiju T_2.

Šo sakarību mums dos 82. lapas pusē dotā formula (14)

$$\frac{ds}{ds_1} = \tau u$$

kur u apzīmē punkta O_2 attālums $O_2 Q$ no PT, un $\tau = \frac{1}{T_2}$ un ds ir ruletes (L) elementārais kur tam jābūt noteiktam s_2, K_2, ...

Ir tā tad tikai viena līkā (L_2), kuŗas tangentu plāksnei (V_2) veļoties pa (π), kāds ar (K_2) saistīts punkts apraksta iepriekš dotu ruleti (L).

Ja, izejot no (L_1) un (6) mums izdotos atrast (L_2) vienādojumus kartēziskās koordinātās, tad pēc izejas stāvokļu nosacījumu ievērošanas tur paliktu 3 neatkarīgas konstantes. Tas rodas no tā, ka (L_2) mēs attiecinam uz koordinātu asu sistēmu, kas nekustoši saistīta ar (V_2) un kuŗas sākuma punkts ir O_2. Tā kā šai sistēmai nav jāpilda citi noteikumi, viņas izejas stāvoklis atkarājas no trim patvaļīgām konstantēm.

Vispār varētu pētīt arī līko (L) un (L_1) savstarpējās attiecības. Mēs te minēsim tikai vienu: Ja (l) un W ir līkās (L) un punkta O_2 projekcijas uz plāksni (π), (l) tangente punktā W un

11) Cesàro, 159. l.p.

(L_1) tangente punktā P ir savstarpēji perpendikulāras.

Šī īpašība viegli pierādāma, kā ģeometriski, tā arī analītiski:

(l) tangente punktā W ir (L) tangentes punktā O_1 projekcija uz (π). PT kā (L) normālplaknes taisne, ir perpendikulāra (L) tangentei O_2A; kā plaknes (π) taisne, PT ir perpendikulāra O_2W. PT ir tā tad perpendikulāra O_2A projicējošai plaknei WO_2A un arī tās pēdai WQ (π) plaknē, kas ir (l) tangente punktā W.

Analītiskais pierādījums ir šāds: izdalot formulas

$$\frac{dX}{ds_1} = -\sin\alpha\,\tau\,Z$$

$$\frac{dY}{ds_1} = \cos\alpha\,\tau\,Z$$

(sk. 86. l.p.) vienu ar otru, dabūjam

$$\frac{dY}{dX} = -\operatorname{ctg}\alpha$$

$\frac{dY}{dX}$ ir (l) tangentes ar X asi izveidotā leņķa θ

$$\frac{dX}{ds_1} = -\sin\alpha \,\tau\, Z$$

$$\frac{dY}{ds_1} = \cos\alpha \,\tau\, Z$$

(sk. 86. l.p.) vienu ar otru, dabūjam

$$\frac{dY}{dX} = -\cot g\, \alpha$$

$\frac{dY}{dX}$ ir (l) tangentes ar X asi izveidotā leņķa θ tangente, kamēr α ir leņķis, ko PT veido ar X asi. Augšējā vienādība rāda, ka

$$\tan g\, \theta = -\cot g\, \alpha$$

t.i.

$$\theta = \alpha + \frac{\pi}{2}$$

un abu līkņu tangentes ir perpendikulāras.

39. Lai aprēķinātu (L_2) noliecināājumus formulas būtu vienkāršākas, pieņemsim, ka parametrs t ir (L) loks s.

(L) normālplāksnes nolīdzinājums ir

$$(1) \qquad (x - X)X' + (y - Y)Y' + (z - Z)Z' = 0$$

tās pēdu plāksnē π dod $z = 0$ un

$$(2) \qquad (x - X)X' + (y - Y)Y' = ZZ'$$

kas ir taisnes PT nolīdzinājums. Lai dabūtu P, Izteiksim to ar taisni, ko dod (2) diferencēšana:

$$(3)\qquad (x-X)X''+(y-Y)Y''=zz''+1$$

(2) un (3) dod

$$(4)\quad \begin{cases} x_1 = X + \dfrac{Y''zz'-Y'(zz''+1)}{X'Y''-X''Y'} \\[2ex] y_1 = Y + \dfrac{X'(zz''+1)-X''zz'}{X'Y''-X''Y'} \end{cases}$$

Tas ir (k_1) nolicētinājums parametriskā formā.

Lai abām šīm izteiksmēm būtu noteikta vērtība, jābūt

$$X'Y''-X''Y'\neq 0$$

Ja viens no lielumiem X', Y' nav nulle, piemēram X', tad

$$X'Y''-X''Y'=0$$

ir ekvivalents ar

$$\frac{X'Y''-X''Y'}{X'^2}=0.$$

t.i.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{Y'}{X'}\right)=0$$

$$\frac{Y'}{X'}=a=\text{konst.}$$

$$\frac{dY}{dX}=a,\qquad Y=aX+b$$

$$\frac{x'y'' - x''y'}{x'^2} = 0$$

t.i.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{y'}{x'}\right) = 0$$

$$\frac{y'}{x'} = a = \text{konst.}$$

$$\frac{dy}{dx} = a, \quad y = ax + b$$

t.i. (L) atrodas Z ayi parallēlā plāksnē. Šai gadījumā x_1 un y_1 ir bezgalīgi un (L_1) atrodas bezgalībā. Tas nenozīmē neko citu, kā to, ka (V_2) ir cilindrs, un tā veidules PT, kā mēs redzējām, ir perpendikulāras plāksnei $O_2 w \Theta$, kas te ir pastāvīga. Lai šo cilindru (V_2) noteiktu, pietiek atrast (L) plāksnē to līniju (L_2'), kuru veļot pa šīs plāksnes pēdu plāksnē (π), ar viņu nekustoši saistīts punkts O_2 apraksta (L). Velkot caur visiem (L_2') punktiem perpendikulus pret (L) plāksni, mēs dabūjām cilindru, kuru veļot pa (π) plāksni, tā šķēlums ar (L) plāksni - līnija (L_2') velsies pa šīs plāksnes pēdu un ar viņu saistītais punkts O_2 apraksta (L). (L_2') atrašanai formulas dotas jau minētajos Haton de la Goupillière'a un Cesàro rakstos.

Gadījums, kur dotā rulete ir taisne, arī ietilpst šai grupā. Ja tā tad attinama virsma, kas ~~nav~~ cilindrs, veļas pa plaksni, neviens ar viņu saistīts punkts neapraksta taisni.

Tad vēl ir iespējams gadījums, kur (4) dotās vērtības x_1, y_1 ir konstantes:

$$x_1 = a \qquad y_1 = b$$

Šīs konstantes tad identiski apmierinās nolīdzinājumu (2), jo katra taisne PT ies caur punktu (a, b). Uzrakstot (2) drusku citādā formā:

$$2X'(X-a) + 2Y'(Y-b) + 2Z'Z = 0$$

un integrējot, mēs dabūjam

$$(X-a)^2 + (Y-b)^2 + Z^2 = l^2$$

rinās noliekamājumu (2), jo katra taisne PT ies caur punktu (a, b). Uzrakstot (2) drusku citādā formā:

$$2X'(X-a) + 2Y'(Y-b) + 2Z'Z = 0$$

un integrējot, mēs dabūjam

$$(X-a)^2 + (Y-b)^2 + Z^2 = l^2$$

kur l^2 ir integrācijas konstante, kas jāņem pozitīva, lai X, Y, Z varētu būt reālas funkcijas. Šī pēdējā formula rāda, ka (L) ir līkā uz lodes ar centru punktā $(a, b, 0)$, t. i. plāksnē (π). Šai gadījumā visas taisnes PT ies caur šo punktu C $(a, b, 0)$, kustošais akords (V_2) būs tā tad konus ar virsotni punktā C. Šķeļot (V_2) ar lodi (V), uz kuras guļ (L), mēs dabūsim kādu līkņo (L_2''), kuŗai veļoties pa lielo riņķi, (V) un (π) šķēlumu, ar (L_2'') saistīt ar lodes punktam jāapraksta (L). Šai problēmai Hahon de la Goupillière's savos sfērisku ruletu pētījumos nedod tiešas formulas, bet tādas var ar viņa dotajām viegli sastādīt.

Šai grupā ietilpst arī gadījums, kur dotā rulete (L) ir ~~kaut~~ kāds riņķis.

Lai īsāki formulētu ~~dabūtos~~ rezultātus, uzskatīsim plāksni kā lodi ar bezgalīgi tālu centru.

Mēs esam konstatējuši sekošo: ja ir dota plāksne (Π) un rulete (L), attinamā virsma (V_2), kam veļoties pa (Π), kāda ar viņu saistīta punkta O_2 rulete būs (L), ir kādas noteiktas telpas līknes (L_2) tangentu virsma, izņemot gadījumu, kur (L) ir lodes līkne un šīs lodes centrs C arī atrodas uz (Π): tad aksoīds (V_2) būs kōns ar virsotni punktā C (t.i. cilindrs, ja C ir bezgala tālu).

Ja (L) nav taisne vai riņķis, pārvietojot (Π) stāvoklī (Π'), kas nesaturētu C, varēs telpas līkas (L_2) tangentu virsmā, izņemot gadījumu, kur (L) ir lodes līkā un šīs lodes centrs C arī atrodas uz (Π): tad aksoīds (V_2) būs kōns ar virsotni punktā C (t.i. cilindrs, jā C ir bezgala tālu).

Ja (L) nav taisne vai riņķis, pārvietojot (Π) stāvoklī (Π'), kas nesaturētu C, varēs dabūt aksoīdu, kas būs tangentu virsma. Mēs redzam, ka visas ~~telpas~~ līkās, kas nav taisnes vai riņķi, var uzskatīt kā ruletes, kas radušās attinamai virsmai veļoties pa plāksni.

(4) mums tā tad dos, atskaitot augšā aplūkotos gadījumus, (L_1) un līdz ar to arī iepriekšējā paragrafa formulas (112. l. p.)

$$(5)\quad \begin{cases} R_2 = R_2(s) \\ s_2 = s_2(s) \end{cases}$$

T_2 atrašanai varam izlietāt dažādas agrāk uzstādītās formulas, bet tās ir vai un diezgan sarežģītas, vai arī derīgas tikai attiecinājumiem sistēmā (P), kas arī nav izdevīgi aprēķiniem. Visērtākā, šķiet, ir 87. lapas pusē dotā formula (14):

$$\frac{ds}{ds_1} = \tau u$$

t.i. (6) $T_2 = u\frac{ds_1}{ds}$

kā tas jau aizrādīts

Atliek atrast u, kas ir punkta X, Y, Z attālums no taisnes

$$(x - X)X' + (y - Y)Y' = ZZ' \qquad z = 0$$

bet, kā tas redzams zīmējumā 111. lapas pusē,

$$u^2 = Z^2 + \overline{W\Theta}^2$$

$W\Theta$ ir plaknē (Π) punkta X, Y attālums no taisnes

$$(x - X)X' + (y - Y)Y' = ZZ'$$

t.i.

$$|W\Theta| = \frac{|ZZ'|}{\sqrt{X'^2 + Y'^2}}$$

kur

$$u^2 = \frac{Z^2(X'^2 + Y'^2 + Z'^2)}{X'^2 + Y'^2}$$

(7) $$u = \varepsilon\frac{Z}{\sqrt{X'^2 + Y'^2}} \qquad \text{kur } \varepsilon = \pm 1$$

Formulā (6)

t.i.

$$|WQ| = \frac{|zz'|}{\sqrt{x'^2+y'^2}}$$

un

$$u^2 = \frac{z^2(x'^2+y'^2+z'^2)}{x'^2+y'^2}$$

$$(7) \qquad u = \varepsilon \frac{z}{\sqrt{x'^2+y'^2}} \qquad \text{kur } \varepsilon = \pm 1$$

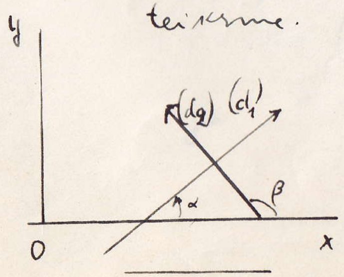
Formulā (6)

$$\frac{ds_1}{ds} > 0$$

tā tad u un T_2 būs tā pati zīme.

Atliek tikai formulā (7) noteikt ε.

ε ir $+1$, ja PT pozitīvais virziens jāpagriež par $+\frac{\pi}{2}$ ap Z asi, lai dabūtu (L) tangentes pozitīvā virziena projekciju.x) Ja (L) un (L_1) ir samērā vienkāršas līknes, mēs šo ε zīmi kādam pārim saderīgu punktu ērti ~~varam~~ noteikt tieši. Pretējā gadījumā ε zīmes noteikšanai jāaprēķina diezgan sarežģīta izteiksme.



Ja kādā ortogonālā koordinātu sistēmā plāksnē mums ir dati divi virzieni (d_1) un (d_2) ar to leņķiem pa-

x) To rāda kaut vai 86. lapas puses (10.) formula:

$$\left(\frac{dy}{ds_1}\right)_p = \tau z_p, \quad \text{t.i.} \quad T_2 z > 0 \quad \text{ja} \left(\frac{dy}{ds_1}\right)_p > 0$$

līdzību, ka tie veido ar pozitīvo x asi:

$$\sphericalangle(Ox, (d_1)) = \alpha \qquad \sphericalangle(Ox, (d_2)) = \beta,$$

lai izteiktu, ka (d_1) ir jāpagriež par $+\frac{\pi}{2}$, lai sakristu ar (d_2), pietiek uzrakstīt, ka

$$\sin((d_1), (d_2)) = +1$$

t.i.

$$\sin(\beta - \alpha) = +1$$

$$(8) \qquad \cos\alpha \sin\beta - \sin\alpha \cos\beta = +1.$$

Ja nu (d_1) un (d_2) ir divu līniju (L) un (ℓ) tangenšu pozitīvi virzieni, apzīmējot šo līniju tekošo punktu koordinātas ar x_1, y_1 un X, Y un to lokus ar s_1 un σ, (8) top

$$(9) \qquad \frac{dx_1}{ds_1} \cdot \frac{dY}{d\sigma} - \frac{dy_1}{ds_1} \cdot \frac{dX}{d\sigma} = +1$$

Ja nu mēs jau zinām, ka tangentes saskares punktos jau ir perpendikulāras, pietiek izteikt, ka (9) kreisās puses izteiksme ir pozitīva. Tad arī neatkarīgiem mainīgiem, pēc kuriem koordinātas ir diferencētas, vairs nav jābūt šiem lokiem, bet tie var būt kādi citi mainīgie t_1, t, kam tikai

Jam mēs jau zinam, ka tangentes šādos punktos jau ir perpendikulāras, pietiek izteikt, ka (9) kreisās puses izteiksme ir pozitīva. Tad arī neatkarīgiem mainīgiem, pēc kuriem koordinātas ir diferencētas, vairs nav jābūt liko lokiem, bet tie var būt kādi citi mainīgie t_1, t, kam tikai jāpilda noteikumi

$$\frac{ds_1}{dt_1} \cdot \frac{d\sigma}{dt} > 0 \quad \text{vai arī} \quad \frac{dt_1}{ds_1} \cdot \frac{dt}{d\sigma} > 0$$

Ja šis reizinājums būtu negatīvs, būs jāizteic, ka arī (9) kreisā puse ir negatīva.

Uzrakstīsim tad arī (9) kā nevienādību mūsu līkām (L_1) un (l), par kurām mēs zinām, ka to tangentes saderīgos punktos ir perpendikulāras.

$$(9') \qquad \frac{dx_1}{ds_1} \cdot \frac{dY}{d\sigma} - \frac{dy_1}{ds_1} \cdot \frac{dX}{d\sigma} > 0$$

vai, diferencējot x_1, y_1 pēc (L) loka s un arī X, Y pēc s, būs jābūt

$$(10) \qquad \frac{dx_1}{ds} \cdot \frac{dY}{ds} - \frac{dy_1}{ds} \cdot \frac{dX}{ds} > 0$$

jo

$$\frac{ds_1}{ds} > 0 \qquad \frac{d\sigma}{ds} > 0$$

tādēļ, ka s_1 un σ pieaug līdz ar s.

Diferencējot (4) dabūjam

$$\frac{dx_1}{ds} = X' + \frac{(X'Y''-X''Y')(Y''ZZ'+Y''Z'^2-Y''-Y'Z'Z''-Y'ZZ''')-(Y''ZZ'-Y'ZZ''-Y')(X'Y'''-X'''Y')}{(X'Y''-X''Y')^2}$$

$$\frac{dy_1}{ds} = Y' + \frac{(X'Y''-X''Y')(X''+X'ZZ''+X'ZZ'''-X'''ZZ'-X''Z'^2-X'''ZZ')-(X'-X''ZZ'+XZZ'')(X'Y''-X'''Y')}{(X'Y''-X''Y')^2}$$

un ievērojot identitātes

$$X'^2+Y'^2+Z'^2=1$$

$$X'X''+Y'Y''+Z'Z''=0$$

(10) var novest pie formas

$$(11)\qquad \begin{aligned}&(1-Z'^2)\left[(1+ZZ'')(X'X'''-Y'Y''')-ZZ'''(X'Y''-X''Y')\right]+\\ &+ZZ'\left[Z''(X'Y'''-X'''Y')-(X'Y''-X''Y')(Y'Y'''+X'X''')\right] > 0\end{aligned}$$

Un formulā (7) ε būs (11) kreisās puses zīme. Ir iespējams, ka (11) kreiso pusi var vēl vairāk vienkāršot, ievērojot vēl identitāti

$$X''^2+Y''^2+Z''^2+X'X'''+Y'Y'''+Z'Z'''=0$$

var arī to novest determinantes formā. Mums ne viens, ne otrs neizdevās (ir skaidrs, ka (11) kreiso pusi var dabūt ļoti dažādos veidos).

ε zīmes noteikšanai var vēl lietot vienkāršot, ievērojot vēl identitāti

$$x''^2 + y''^2 + z''^2 + x'x''' + y'y''' + z'z''' = 0$$

vai arī to novest determinantes formā. Mums nevienu, ne otro neizdevās (ir skaidrs, ka (11) kreiso pusi var dot ļoti dažādos veidos).

ε zīmes noteikšanai var vēl lietot citus paņēmienus, piemēram punkta α pārvietošanās virzienu. Tomēr liekas, ka pie citām metodēm aprēķini ir garāki.

Tāpat nav izdevīgi ņemt sistēmā (P) dotās formulas, jo tur pārejai uz šo sistēmu ir jāaprēķina $\sin\alpha$ un $\cos\alpha$ pašas vērtības, kamēr še mēs aprēķinājām tikai viņiem proporcionālus lielumus.

Formulas (5), (6) un (7) mums tā tad dod vellešās tangentu virsmas (V_2) atgriešanās līnijas (L_q) naturālo nolīdzinājumu parametriskā formā. Atrast x_q, y_q un z_q slēgtā veidā būs reti kad iespējams, jo T_2 ir (L_q) punktu koordinātu pirmo, otro un trešo atvasinājumu funkcijā.

40. Kā pirmām apgrieztai problēmai meklēsim līkni (k_3), kuŗas tangentu virsmai uzlieкоt pa XOY plāksni, kāds ar to nekustoši saistīts punkts apraksta riņķa cilindra vītes līniju:

$$(1)\quad \begin{cases} X = a\cos t \\ Y = a\sin t \\ Z = bt \end{cases}$$

Sastādām atvasinājumus pēc t (kas nav loks)

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = -a\sin t = -Y \\ \dfrac{dY}{dt} = a\cos t = X \\ \dfrac{dZ}{dt} = b \end{cases} \qquad \frac{ds}{dt} = \sqrt{X^2+Y^2+b^2} = \sqrt{a^2+b^2}$$

Normālplāksnes (pēdas) nolīdzinājums ir

$$(x - X)(-Y) + (y - Y)X = Zz'$$

$$(3)\qquad -a\sin t\cdot x + a\cos t\cdot y = b^2 t$$

un tās robežpunktu mēs dabūjam šķeļot pēdu ar taisni

$$\frac{dz}{dt} = b \qquad = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Normālplāknes (pēdas) vienādojums ir

$$(x - X)(-Y) + (y - Y)X = Zz'$$

$$(3) \qquad -a\sin t \cdot x + a\cos t \cdot y = b^2 t$$

un tās robežpunktu mēs dabūjam šķeļot

pēdu ar taisni

$$-a\cos t \cdot x - a\sin t \cdot y = b^2$$

kas dod

$$(4) \quad \begin{cases} x_1 = -\dfrac{b^2}{a}(t\sin t + \cos t) \\ y_1 = \dfrac{b^2}{a}(t\cos t - \sin t) \end{cases}$$

(4) mēs varētu protams dabūt arī ar

iepriekšējā paragrafa formulu (4) (115. lapas

pusē) palīdzību, bet te tiešs aprēķins

iznāk ātrāks (jo sevišķi ievērojot to,

ka X, Y, Z nav doti kā s funkcijās).

Sastādam x_1 un y_1 atvasinājumus:

$$(5) \quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -\dfrac{b^2}{a} t\cos t \\ \dfrac{dy_1}{dt} = -\dfrac{b^2}{a} t\sin t \end{cases}$$

$$\left(\frac{ds_1}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2 = \frac{b^4}{a^2} t^2$$

un, tā kā

$$\frac{ds}{dt} > 0 \quad \text{un jā būt} \quad \frac{ds_1}{dt} > 0$$

$$(6) \qquad \frac{ds_1}{dt} = \frac{b^2}{a} t$$

$$s_1 = \frac{b^2}{2a} t^2$$

jā parametra vērtībai $t = 0$ liekam atbilst loka sākuma punktam.

R_1 aprēķināšanai tā būs izdevīgi atrast (4) tangentes nerādoto leņķi α ar pozitīvo x asi:

$$\cos\alpha = \frac{dx_1}{ds_1} = \frac{\frac{dx_1}{dt}}{\frac{ds_1}{dt}} = -\cos t$$

$$\sin\alpha = \frac{dy_1}{ds_1} = \frac{\frac{dy_1}{dt}}{\frac{ds_1}{dt}} = -\sin t$$

tā tad $\qquad (7) \qquad \alpha = t + \pi$

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_2} = \frac{d\alpha}{ds_1} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{a}{b^2 t}$$

$$(8) \qquad R_2 = \frac{b^2}{a} t$$

T_2 aprēķināšanai (sk. 118. l.p.) atrodam

$$\sin\alpha = \frac{dy_1}{ds_1} = \frac{\frac{dy_1}{dt}}{\frac{ds_1}{dt}} = -\sin t$$

tā tad (7) $\alpha = t + \pi$

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_2} = \frac{d\alpha}{ds_1} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{a t}{b^2 t}$$

$$(8) \qquad R_2 = \frac{b^2}{a} t$$

T_2 aprēķināšanai (sk. 118. l.p.) atrodam vispirms u:

$$u^2 = \frac{b^2(a^2+b^2)}{a^2} t^2$$

Lai noteiktu u zīmi, sastādam

$$\cos\alpha \frac{dY}{dt} - \sin\alpha \frac{dX}{dt} = -a < 0$$

Tā tad $u < 0$:

$$u = -\frac{b}{a} t \sqrt{a^2+b^2}$$

Tad vēl

$$\frac{ds_1}{ds} = \frac{\frac{ds_1}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\frac{b^2 t}{a}}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b^2 t}{a\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$T_2 = u \frac{ds_1}{ds} = -\frac{b^3 t^2}{a^2}$$

Vēl vieglāki te atrast T_2 ar formulu (86. lapas pusē, formula (10)):

$$\left(\frac{dY}{ds_1}\right)_p = \tau Z_p$$

t.i.

$$T_2 = \frac{z}{\left(\frac{dy}{ds_1}\right)_p}$$

$$\left(\frac{dy}{ds_1}\right)_p = \left(\frac{dy}{dt}\right)_p : \frac{ds_1}{dt}$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)_p = -\sin\alpha\frac{dx}{dt} + \cos\alpha\frac{dy}{dt} = \sin t(-a\sin t) - \cos t(a\cos t)$$

$$= -a$$

un

$$T_2 = \frac{kt\cdot\frac{k^2}{a}t}{-a} = -\frac{k^3}{a^2}t^2$$

Kustošā ascoida atgriešanās līnijas naturālie vienādojumi tā tad ir:

$$\begin{cases} s_2 = \dfrac{k^2}{2a}t^2 \\ R_2 = \dfrac{k^2}{a}t \\ T_2 = -\dfrac{k^3}{a^2}t^2 \end{cases}$$

vai, eliminējot t:

$$\begin{cases} R_2 = k\sqrt{\dfrac{2s_2}{a}} \\ T_2 = -2\dfrac{k}{a}s_2 \end{cases}$$

Redzams, ka R un $|T|$ neaprobežoti pieaug līdz

$$\begin{cases} R_2 = \dfrac{b^2}{a} t \\[2ex] T_2 = -\dfrac{b^3}{a^2} t^2 \end{cases}$$

vai, eliminējot t:

$$\begin{cases} R_2 = b\sqrt{\dfrac{2 s_2}{a}} \\[2ex] T_2 = -2\dfrac{b}{a} s_2 \end{cases}$$

Redzams, ka R_2 un $|T_2|$ neapstrobežoti pieaug līdz ar s_2, pie kam T_2 pieaug (absolūti ņemot) daudz ātrāk par R_2, jo

$$\frac{R_2^2}{T_2} = -b$$

(L_2) tekošā punkta koordinātām x_2, y_2, z_2, ja tās uzskatām kā s_2 funkcijas, būtu jāapmierina sekošie trīs diferenciālvienādojumi (akcenti apzīmē diferencēšanu pie s_2):

$$x_2'^2 + y_2'^2 + z_2'^2 = 1$$

$$x''^2_2 + y_2''^2 + z_2''^2 = \frac{a^2}{b^4 t^2} = \frac{a}{2b^2 s_2}$$

$$\begin{vmatrix} x_2' & y_2' & z_2' \\ x_2'' & y_2'' & z_2'' \\ x_2''' & y_2''' & z_2''' \end{vmatrix} = -\frac{a^4}{b^7 t^4} = -\frac{a^2}{4 b^3 s_2^2}$$

Lai gan šai sistēmai var vēl pievienot šādus nolīdzinājumus, ko dabūjam diferencējot pirmo un otro:

$$\int x_2' x_2'' = 0$$

$$\int x_2'' + \int x_2' x_2''' = 0 \text{, t. i. } \int x_2' x_2''' = -\frac{a}{2k^2 s_2}$$

$$\int x_2'' x_3''' = -\frac{a}{4k^2 s_2^2}$$

mums neizdevās viņu atrisināt.

Dabūtā līkne (L_2) pieder pie īpatnēju līniju tipa, ko pētījis E. Cesàro[12]. Tai ir vairākas interesantas īpašības, starp citu arī šāda: tai eksistē kāds taisns trešās kārtības konoīds, kas ir nekustoši saistīts ar fundamentālo triedru un kura ikkatra veidule pārvietojās attināmā virsmā, fundamentālajam triedrim pārvietojoties.

Attinamas virsmas.

41. Kā mēs jau redzējām, lai divas tangentu virsmas varētu veltīties viena pa otru, viņu (atgriešanās līniju) līkumiem jābūt identiskiem loka

ikkatra veidulē pārvietojās attināmā virsmā, fundamentalajam triedrim pārvietojoties.

Lattināmas virsmas.

41. Kā mēs jau redzējām, lai divas tangentu virsmas varētu veltīes viena pa otru, viņu atgriešanās līniju liekumiem jābūt identiskām loka funkcijām. Katrā virsmu (V_1), (V_2) stāvoklī, to atgriešanās līnijām (L_1), (L_2) tad būs kopīgā pieglaušanās plāksne viņu saskaršanās punktā P un arī kopīgs liekuma centrs.

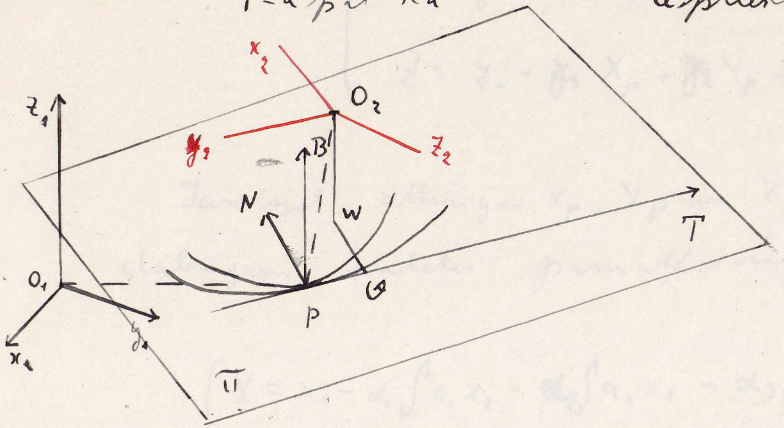
Nekustošās virsmas (V_1) atgriešanās līnija lai būtu attiecināta uz koordinātu sistēmu $(O_1 x_1 y_1 z_1)$, un tās tekošā punkta koordinātas būs x_1, y_1, z_1; virsmas (V_2) atgriešanās līkā (L_2) lai ir attiecināta uz koordinātu sistēmu $(O_2 x_2 y_2 z_2)$, kuras sākuma punkts sakrīt ar to punktu O_2, kā ruleti mēs gribam noteikt. L_2 tekošā punkta koordinātas lai ir x_2, y_2, z_2 (sistēmā

---

19) Cesàro, 190, 191. un jo sevišķi 192. l.p.

$(O_2 x_2 y_2 z_2)$, un O_2 koordinātas sistēmā $(O_1 x_1 y_1 z_1)$ apzīmēsim ar X, Y, Z. (L_1) un (L_2) parametri būs loki s_1 un s_2.

T-ā pat kā iepriekš, ievedīsim



vēl palīga koordinātu sistēmu, kuras sākuma punkts būtu P un asis: (L_1) un (L_2) kopējā tangente PT, galvenā normāle PN un binormāle PB punktā P. Šo sistēmu apzīmēsim par sistēmu P, un lielumiem, kas uz to attiecas, pievienosim indeksu p.

T-ad vēl līnijai (L_1) tangentes, galvenās normāles un binormāles virziena kosinus apzīmēsim ar $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$; līnijai (L_2) šie lielumi būs a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; a_3, b_3, c_3. Kopējais (L_1) un (L_2) liekums punktā P būs R, (L_1) šķiebums T_1, (L_2) šķiebums T_2.

Ruletes vienādojuma sastādīšanai

Tad arī līnijai (L_1) tangentes, galvenās normāles un binormāles virziena kosinus apzīmēsim ar $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$; līnijai (L_2) šie lielumi būs a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; a_3, b_3, c_3. Kopējais (L_1) un (L_2) liekums punktā P būs R, (L_1) šķiedums T_1, (L_2) šķiedums – T_2.

Ruletes melektināju ma sastādīšanai vispirms nosacām x_p, y_p, z_p pilnīgi tāpat kā iepriekš:

$$
(1) \begin{cases} x_p = -(a_1 x_2 + b_1 y_2 + c_1 z_2) = -\sum a_1 x_2 \\ y_p = -(a_2 x_2 + b_2 y_2 + c_2 z_2) = -\sum a_2 x_2 \\ z_p = -(a_3 x_2 + b_3 y_2 + c_3 z_2) = -\sum a_3 x_2 \end{cases}
$$

Tad projicējam O_2 koordinātu poligonu sistēmā (P): $PTNB$ O_2 uz sistēmas (O_1) asīm. Attiecīgos kosinus abu sistēmu leņķu starpā dod tabele

	x_1	y_1	z_1
PT	α_1	β_1	γ_1
PN	α_2	β_2	γ_2
PB	α_3	β_3	γ_3

$$\begin{cases} X = x_1 + \alpha_1 X_p + \alpha_2 Y_p + \alpha_3 Z_p \\ Y = y_1 + \beta_1 X_p + \beta_2 Y_p + \beta_3 Z_p \\ Z = z_1 + \gamma_1 X_p + \gamma_2 Y_p + \gamma_3 Z_p \end{cases}$$

Ievietojot attiecīgās X_p, Y_p un Z_p nozīmes dabūjam ruletes pamatformulas

$$(2) \begin{cases} X = x_1 - \alpha_1 \int a_1 x_2 - \alpha_2 \int a_2 x_2 - \alpha_3 \int a_3 x_2 \\ Y = y_1 - \beta_1 \int a_1 x_2 - \beta_2 \int a_2 x_2 - \beta_3 \int a_3 x_2 \\ Z = z_1 - \gamma_1 \int a_1 x_2 - \gamma_2 \int a_2 x_2 - \gamma_3 \int a_3 x_2 \end{cases}$$

No šīm formulām varam tūliņ dabūt agrākās, ko atradām gadījumam, kur (V_1) bija plāksne, liekot

$$\begin{array}{lll} \alpha_1 = \cos\alpha & \alpha_2 = -\sin\alpha & \alpha_3 = 0 \\ \beta_1 = \sin\alpha & \beta_2 = \cos\alpha & \beta_3 = 0 \\ \gamma_1 = 0 & \gamma_2 = 0 & \gamma_3 = 1 \\ z_1 = 0 & & \end{array}$$

Formulās (2), X, Y, Z ir viena parametra $s_1 = s_2$

agrākās, ko atradām gadījumam, kur (V_1) ir plāksne, liekot

$$\alpha_1 = \cos\alpha \qquad \alpha_2 = -\sin\alpha \qquad \alpha_3 = 0$$

$$\beta_1 = \sin\alpha \qquad \beta_2 = \cos\alpha \qquad \beta_3 = 0$$

$$\gamma_1 = 0 \qquad \gamma_2 = 0 \qquad \gamma_3 = 1$$

$$z_1 = 0$$

Formulās (2), X, Y, Z ir viena parametra $s_1 = s_2$ funkcijas, jo velšanās noteikums ir

$$ds_1 = ds_2$$

un tā tad, attiecīgi izvēlaties loku sākuma punktus

$$s_1 = s_2.$$

Diferencējot (2) dotās X, Y un Z vērtības pēc $s_1 = s_2$, mēs dabūsim to atvasinājumus vispārīgā sistēmā. Rezultātu interpretēšanai mēs atkal izlietāsim (P) kā palīgsistēmu; lai dabūtu uz (P) attiecošās vērtības, būs jāliek: $x_1 = y_1 = z_1 = 0$ (šie liekumi gan nebūs formulās sastopami)

$$\alpha_1 = 1 \quad \alpha_2 = 0 \quad \alpha_3 = 0$$

$$\beta_1 = 0 \quad \beta_2 = 1 \quad \beta_3 = 0$$

$$\gamma_1 = 0 \quad \gamma_2 = 0 \quad \gamma_3 = 1$$

Liekot

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_2} = \rho \qquad \frac{1}{T_1} = \tau_1, \qquad \frac{1}{T_2} = \tau_2$$

būs jāievēro diferencēšanai, derēs šās formulas

$$\frac{dx_1}{ds_1} = \alpha_1 \qquad \frac{d\alpha_1}{ds_1} = \alpha_2\rho \qquad \frac{dx_2}{ds_2} = \alpha_1 \qquad \frac{da_1}{ds_2} = a_2\rho$$

$$\frac{dy_1}{ds_1} = \beta_1 \qquad \frac{d\alpha_2}{ds_1} = -\alpha_1\rho + \alpha_3\tau_1 \qquad \frac{dy_2}{ds_2} = \beta_1 \qquad \frac{da_2}{ds_2} = -a_1\rho + a_3\tau_2$$

$$\frac{dz_1}{ds_1} = \gamma_1 \qquad \frac{d\alpha_3}{ds_1} = -\alpha_2\tau_1 \qquad \frac{dz_2}{ds_2} = \gamma_1 \qquad \frac{da_3}{ds_2} = -a_2\tau_2$$

Pie kam otrā un ~~ceturtā~~ kolonnā ir spēkā, ja α aizvietojam ar β vai γ, respektīvi a ar b vai c.

Pirmais atvasinājums.

$$\frac{dX}{ds_1} = \cancel{\alpha_1} - \cancel{\alpha_2\rho\int a_1x_2} - \cancel{\alpha_1} - \cancel{\alpha_1\rho\int a_2x_2} + (\cancel{\alpha_1\rho} - \alpha_3\tau_1)\int a_2x_2 +$$
$$+ \alpha_2\int x_2(\cancel{a_1\rho} - a_3\tau_2) + \alpha_2\tau_1\int a_3x_2 + \alpha_3\int a_2x_2\tau_2$$
$$= -\alpha_2(\tau_2-\tau_1)\int a_3x_2 + \alpha_3(\tau_2-\tau_1)\int a_2x_2$$

Apzīmēsim vēl $\tau_2 - \tau_1 = \vartheta$. T-ad, ievērojot ka Y mēs dabūjam no X izteiksmes, aizvietojot α ar β un a ar b, un līdzīgi arī Z, ko dabū no X aizvietojot α ar γ un a ar c, mēs varam rakstīt

$$\frac{dX}{\ldots} \quad \ldots\vartheta\int a_3x_2 + \alpha_3\vartheta\int a_2x_2$$

$$= -\alpha_2(\tau_2-\tau_1)\int_1 a_3 x_2 + \alpha_3(\tau_2-\tau_1)\int_1 a_2 x_2$$

Apzīmēsim vēl $\tau_2-\tau_1=\vartheta$. T-ad, ievērojot ka Y mēs dabūjam no X izteiksmes, aizvietojot α ar β un a ar b, un līdzīgi arī Z, kā dabū no X aizvietojot α ar γ un a ar c, mēs varam rakstīt

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{dX}{ds_1} = -\alpha_2\vartheta\int_1 a_3x_2 + \alpha_3\vartheta\int_1 a_2x_2 \\[2ex] \dfrac{dY}{ds_1} = -\beta_2\vartheta\int_1 a_3x_2 + \beta_3\vartheta\int_1 a_2x_2 \\[2ex] \dfrac{dZ}{ds_1} = -\gamma_2\vartheta\int_1 a_3x_2 + \gamma_3\vartheta\int_1 a_2x_2 \end{cases}$$

Bet sistēmā (P)

$$(4)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{dX}{ds_1}\right)_p = 0 \\[2ex] \left(\dfrac{dY}{ds_1}\right)_p = +\vartheta Z_p \\[2ex] \left(\dfrac{dZ}{ds_1}\right)_p = -\vartheta Y_p \end{cases}$$

Redzams, ka šīs formulas ir tādas pat kā iepriekšējā gadījumā, tikai turienes formulās τ jāaizvieto ar ϑ. (4) dod arī

$$(5)\qquad \frac{ds}{ds_1} = \vartheta\sqrt{Y_p^2+Z_p^2}$$

Arī šī formula ir tāda pat kā jau atrasta.

Tāpēc arī būs, liekot

$$u = \sqrt{y_p^2 + z_p^2}$$

$$(6)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{dX}{ds}\right)_p = 0 \\[2ex] \left(\dfrac{dY}{ds}\right)_p = \dfrac{z_p}{u} \\[2ex] \left(\dfrac{dZ}{ds}\right)_p = -\dfrac{y_p}{u} \end{cases}$$

Diferencējot $\dfrac{dX}{ds_1}$ pēc s_1 dabūjam

$$\frac{d^2X}{ds_1^2} = -(-\alpha_1\rho + \alpha_3\tau_1)\vartheta_1\int a_3x_2 - \alpha_2\vartheta'_1\int a_3x_2 + \alpha_2\vartheta_1\int a_2\tau_2x_2 - $$
$$- \alpha_2\tau_1\vartheta_1\int a_2x_2 + \alpha_3\vartheta'_1\int a_2x_2 + \alpha_3\vartheta_1\int(-a_1\rho + a_3\tau_2)x_2$$

$$\frac{d^2X}{ds_1^2} = \alpha_1(\rho\vartheta_1\int a_3x_2) + \alpha_2(\vartheta^2_1\int a_2x_2 - \vartheta'_1\int a_3x_2) + \alpha_3(\vartheta^2_1\int a_3x_2 - \vartheta\rho_1\int a_1x_2 +$$
$$+ \vartheta'_1\int a_2x_2)$$

un analogas izteiksmes mēs dabūjam kā $\dfrac{d^2Y}{ds_1^2}$ un $\dfrac{d^2Z}{ds_1^2}$. Sistēmā (p) būs

$$(7)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{d^2X}{ds_1^2}\right)_p = -\rho\vartheta z_p \\[2ex] \left(\dfrac{d^2Y}{ds_1^2}\right)_p = -\vartheta^2 y + \vartheta' z \end{cases}$$

$$\frac{d^2 X}{ds_1^2} \ldots + \vartheta' \int a_2 x_2)$$

un analogas izteiksmes mēs dabūjām kā $\frac{d^2 y}{ds_1^2}$ un $\frac{d^2 z}{ds_1^2}$. Sistēma (ρ) tagad būs

$$(\gamma)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{d^2 X}{ds_1^2}\right)_p = -\rho\vartheta Z_p \\[2ex] \left(\dfrac{d^2 Y}{ds_1^2}\right)_p = -\vartheta^2 Y + \vartheta' Z \\[2ex] \left(\dfrac{d^2 Z}{ds_1^2}\right)_p = \rho\vartheta X - \vartheta' Y - \vartheta^2 Z \end{cases}$$

Arī šīs formulas ir vienādas ar agrāk dabūtajām; tā tad arī $\left(\frac{d^2 X}{ds^2}\right)_p$ u. t. t. būs tādas pat izteiksmes, kā 86. lapā, vienīgi apmainot τ pret ϑ.

Meklējam tagad trešos atvasinājumus

$$\frac{d^3 X}{ds_1^3} = \alpha_2 \rho^2 \vartheta \int a_3 x_2 + \alpha_1 (\rho' \vartheta + \rho \vartheta') \int \alpha_3 x_2 - \alpha_1 \rho \tau_2 \vartheta \int a_2 x_2 +$$

$$+ (-\alpha_1 \rho + \alpha_3 \tau_1) \vartheta^2 \int a_2 x_2 + 2\alpha_2 \vartheta \vartheta' \int a_2 x_2 + \alpha_2 \vartheta^2 \int x_2 (-a_1 \rho + a_3 \tau_2) -$$

$$- (-\alpha_1 \rho + \alpha_3 \tau_1) \vartheta' \int a_3 x_2 - \alpha_2 \vartheta'' \int a_3 x_2 + \alpha_2 \vartheta' \int a_2 \tau_2 x_2 -$$

$$- \alpha_2 \tau_1 \vartheta^2 \int a_3 x_2 + 2\alpha_3 \vartheta \vartheta' \int a_3 x_2 - \alpha_3 \vartheta^2 \tau_2 \int a_2 x_2 +$$

$$+ \alpha_2 \tau_1 \vartheta \rho \int a_1 x_2 - \alpha_3 (\vartheta' \rho + \rho \vartheta') \int a_1 x_2 - \alpha_3 \vartheta \rho\, \rho \int a_2 x_2 - \alpha_3 \vartheta \rho -$$

$$- \alpha_2 \vartheta' \tau_1 \int a_2 x_2 + \alpha_3 \vartheta'' \int a_2 x_2 + \alpha_3 \vartheta' \int (-a_1 \rho + a_3 \tau_2) x_2 .$$

$$\frac{d^3X}{ds_1^3} = \alpha_1\left[-\int a_2x_2(\rho\tau_2\vartheta+\rho\vartheta^2)+\int a_3x_2(2\rho\vartheta'+\rho'\vartheta)\right]+$$

$$+\alpha_2\left[-\int a_1x_2(\vartheta^2\rho-\vartheta\rho\tau_1)-\int a_2x_2(-3\vartheta\vartheta')+\int a_3x_2(\rho^2\vartheta+\vartheta^3-\vartheta'')\right]$$

$$+\alpha_3\left[-\int a_1x_2(2\vartheta'\rho+\rho\vartheta')-\int a_2x_2(\vartheta^3+\vartheta\rho^2-\vartheta'')+\int a_3x_2\,3\vartheta\vartheta'\right]$$

$$-\alpha_3\vartheta\rho$$

Redzams, ka X-a trešais atvasinājums jau top atkarīgs no τ_1 un τ_2 katra atsevišķi. Līdzīgi būs ar Y un Z. Sistēmā (P):

$$(8)\quad\begin{cases}\left(\dfrac{d^3X}{ds_1^3}\right)_p = Y_p(2\rho\vartheta^2+\rho\tau_1\vartheta)-Z_p(2\rho\vartheta'+\rho'\vartheta)\\[2ex]\left(\dfrac{d^3Y}{ds_1^3}\right)_p = X_p(\vartheta^2\rho-\vartheta\rho\tau_1)-3Y_p\vartheta\vartheta'-Z_p(\rho^2\vartheta+\vartheta^3-\vartheta'')\\[2ex]\left(\dfrac{d^3Z}{ds_1^3}\right)_p = X_p(2\vartheta'\rho+\rho\vartheta')+Y_p(\rho^2\vartheta+\vartheta^3-\vartheta'')-3Z_p\vartheta\vartheta'\end{cases}$$

Salīdzinot ar izteiksmēm (13) 87. lapas pusē, redzam, ka te nākuši klāt divi locekļi, kas atkarīgi no τ_1 ~~tieši~~ un kas izzūd, kad $\tau_1 \to 0$. Trešos atvasinājumus mēs lietājām vienīgi ruletes šķiedruma aprēķināšanai (sk. 103. un 104. lapas pusē).

Ievietojot šīs atvasinājumu nozīmes

Salīdzinot ar izteiksmēm (13) 87. lapas pusē, redzam, ka te nākuši klāt divi locekļi, kas atkarīgi no τ_1 tieši un kas izzūd, kad $\tau_1 \to 0$. Trešos atvasinājumus mēs lietājām vienīgi rindas šķiebuma aprēķināšanai (sk. 103. un 104. lapas pusē).

Ievērojot šīs atvasinājumu nozīmes 104. lapas puses determinantē, redzam, ka pie F_1 vēl jāpieskaita

$$f(x,y,z) = y^3\rho\vartheta\tau_1 - yz^2\rho\vartheta\tau_1 + 2xyz\rho^3\tau_1$$

tā ka gala rezultātā dabūjam, atceroties, ka $\vartheta = \tau_2 - \tau_1$:

$$(9) \quad F_1(x,y,z) = y^3\rho\vartheta(\tau_1+\tau_2) + z^3(\rho'\vartheta - \rho\vartheta') - y^2z(\rho'\tau - \rho\tau') - yz^2\rho\vartheta(\tau_1+\tau_2) +$$
$$+ xyz\rho^2(\tau_1+\tau_2) - \rho' z^2 = 0$$

Redzam, ka vairākos locekļos ieradušās abu atgriešanās līko šķiebumu summa. Tā no formulām (8), kas šķiet mazliet paradoksālas, jo pēc pirmo divu atvasinājumu analoģijas gribētos domāt, ka arī trešais atkarāsies no ϑ un nevis no τ_1 vai τ_2 tieši, mēs dabūjam (9) nolīdzinājumu, kas atkal samā ziņā ir simmetrisks pret T_1 un T_2, atkarādamies no to summas un diferences.

Mēs tādēļ redzam, ka visi rezultāti (atskaitot vienīgi Steiner'a teorēmas vispārinājumu telpā), ko mēs ieguvām tangentu virsmas velšanās gadījumā pa plāksni, un kas atkarājās tikai no pirmiem un otriem atvasinājumiem, paliek spēkā arī vienai tangentu virsmai veļoties pa otru. To punktu, kuru meklētām ir stacionāra pieglaušanās plāksne, ģeometriskās vietas vienādojums gan maina savu formu, bet savu būtību visai maz: locekļi, kam plāksnes gadījumā bija vienādi koeficienti, arī tagad tādus pašus; jauni locekļi nemaz nenāk klāt. Tā var paredzēt, ka šo punktu sastādītā virsma maz ko atšķirsies no tās, ko mēs izpētījām tai gadījumā, kur (V_1) bija plāksne.

formulas

$$(1) \qquad \frac{dx}{ds_2} = \frac{y}{R_2} - 1 \qquad \frac{dy}{ds_2} = -\frac{x}{R_2} + \frac{z}{T_2} \qquad \frac{dz}{ds_2} = -\frac{y}{T_2}$$

No otrās puses x, y un z absolūtās maiņas koordinātu sistēmā, kas saistīta ar nekustīgo līkno (L_2) ir

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\delta x}{ds_1} = \dfrac{dx}{ds_1} - \dfrac{y}{R_1} + 1 \\[2ex] \dfrac{\delta y}{ds_1} = \dfrac{dy}{ds_1} + \dfrac{x}{R_1} - \dfrac{z}{T_1} \\[2ex] \dfrac{\delta z}{ds_1} = \dfrac{dz}{ds_1} + \dfrac{y}{T_1} \end{cases}$$

Velšanās noteikumi dod

$$ds_1 = ds_2$$

bez tam, kā redzējām, jābūt

$$R_1 = R_2 = R$$

Tad, ievietojot izteiksmēs (2) nozīmes, ko dod (1), dabūjam

$$\frac{\delta x}{ds_1} = 0 \ ; \qquad \frac{\delta y}{ds_1} = \frac{z}{T_2} - \frac{z}{T_1} \ ; \qquad \frac{\delta z}{ds_1} = \frac{y}{T_1} - \frac{y}{T_2}$$

vai, apzīmējot

gan mainā sav[illegible]

visai maz: locekļi, kam plāksnes gadījumā

bija vienādi koeficienti, arī tagad tādus pat;

jauni locekļi nemaz nenāk klāt. Tā var

parādīt, ka šo punktu sastādītā viesma

maz ko atšķiŗsies no tās, ko mēs iz-

pētījām tai gadījumā, kur (V_1) bija plāksne.

Cesàro metodes. 42. Par kustības noteikumiem, tās

noteikš-anu un ievedamiem apzīmējumiem

paliek spēkā viss tas, kas minēts pagājuš-ā

paragrafa sākumā (124. un 125. lapas pusē, arī turp-

mākās).

Par kustoš-ām asīm pieņemsim abu

atgriež-anās līniu kopējo tangenti, normāli un

binormāli to acumirklīgā pieskarš-anās punktā

P. Apzīmēsim ar (x, y, z) tā punkta O

koordinatas, kas nekustoši saistīts ar (L_2) un ap-

raksta meklējamo ruleti (L), kad (L_2) veļas pa

(L_1), to pieglauš-anās plāksnēm punktā M arvien

sakrītot. P nekustību attiecībā uz (L_2) izteic analogs ar to gadījumu plāksnē, kur abām līknēm, nekustīgai un kustīgai, ir kopējs liekums – plāksnes ruletēm visām tad ir īpatnīgi punkti.

Paceļot (3) dotās vienādības kvadrātā un saskaitot dabūjam

$$(5) \qquad \frac{ds}{ds_1} = \frac{u}{\rho}$$

kur

$$u = \sqrt{y^2 + z^2}$$

ir punkta M attālums no tangentes. Tad mēs varēsim aprēķināt ruletes loka garumu:

$$(6) \qquad s = \int \frac{u}{\rho}\, ds_1$$

Ja $\frac{1}{\rho} \neq 0$, ruletes tangentes vienādojums punktā O ir

$$(7) \qquad \frac{\bar{x} - x}{0} = \frac{\bar{y} - y}{z} = \frac{\bar{z} - z}{-y}$$

un viņas virziena kosinusi ir

$$(8) \qquad \begin{cases} a_1 = \dfrac{\delta x}{ds} = 0 \\[2ex] b_1 = \dfrac{\delta y}{ds} = +\dfrac{z}{u} \\[2ex] c_1 = \dfrac{\delta z}{ds} = -\dfrac{y}{u} \end{cases}$$

Diferencēsim šos lielumus, ievērojot

punkta

$$(7)\qquad \frac{\bar{x}-x}{0}=\frac{\bar{y}-y}{z}=\frac{\bar{z}-z}{-y}$$

un viņas virziena kosinusi ir

$$(8)\qquad \begin{cases} a_1=\dfrac{\delta x}{ds}=0\\[2mm] b_1=\dfrac{\delta y}{ds}=+\dfrac{z}{u}\\[2mm] c_1=\dfrac{\delta z}{ds}=-\dfrac{y}{u}\end{cases}$$

Diferencēsim šos lielumus, ievērojot punkta O nekustības noteikumus (1):

$$(9)\qquad \begin{cases} \dfrac{du}{ds_2}=\dfrac{d(\sqrt{y^2+z^2})}{ds_2}=\dfrac{y\frac{dy}{ds}+z\frac{dz}{ds}}{u}=-\dfrac{xy}{uR}\\[3mm] \dfrac{da_1}{ds_2}=0\\[3mm] \dfrac{db_1}{ds_2}=+\dfrac{\frac{dz}{ds_2}}{u}-\dfrac{z}{u^2}\cdot\dfrac{du}{ds_2}=-\dfrac{y}{uT_2}+\dfrac{z}{u^2}\,\dfrac{xy}{uR}=\dfrac{y}{u}\left(\dfrac{xz}{u^2R}-\dfrac{1}{T_2}\right)\\[3mm] \dfrac{dc_1}{ds_2}=-\dfrac{\frac{dy}{ds_2}}{u}+\dfrac{y}{u^2}\,\dfrac{du}{ds_2}=+\dfrac{x}{uR}-\dfrac{z}{uT_2}-\dfrac{xy^2}{u^3R}=\dfrac{1}{u}\left(\dfrac{x}{R}-\dfrac{z}{T_2}-\dfrac{xy^2}{u^2R}\right)\end{cases}$$

Vispārīgās virziena absolūtās maiņas formulas

$$(10)\qquad \begin{cases} \dfrac{\delta a_1}{ds_1}=\dfrac{da_1}{ds_1}-\dfrac{b_1}{R_1}\\[3mm] \dfrac{\delta b_1}{ds_1}=\dfrac{db_1}{ds_1}+\dfrac{a_1}{R_1}-\dfrac{c_1}{T_1}\\[3mm] \dfrac{\delta c_1}{ds_1}=\dfrac{dc_1}{ds_1}+\dfrac{b_1}{T_1}\end{cases}$$

te dod $(ds_1 = ds_2)$

$$
(11)\quad \begin{cases}
\dfrac{\delta a_1}{ds_1} = -\dfrac{h_1}{R} & = -\dfrac{z}{uR} \\[2ex]
\dfrac{\delta h_1}{ds_1} = \dfrac{xyz}{u^3 R} - \dfrac{y}{uT_2} + \dfrac{y}{uT_1} & = \dfrac{y}{u}\left(\dfrac{xz}{u^2 R} - \dfrac{1}{J}\right) \\[2ex]
\dfrac{\delta c_1}{ds_1} = \dfrac{x}{uR} - \dfrac{z}{uT_2} - \dfrac{xy^2}{u^3 R} + \dfrac{z}{uT_1} & = \dfrac{z}{u}\left(\dfrac{xz}{u^2 R} - \dfrac{1}{J}\right)
\end{cases}
$$

Lai no augšējām formulām dabūtu šo virzienu kosinu absolūtās maiņas atvasinājumu pēc ruletes loka s, pietiek katru izteiksmi pareizināt ar

$$\frac{ds_1}{ds} = \frac{J}{u}$$

kas dod, apzīmējot ar $\frac{\delta^2 x}{ds^2}$ utt. x'a otro atvasinājumu nekustīgajā sistēmā,

$$
(12)\quad \begin{cases}
\dfrac{\delta^2 x}{ds^2} = \dfrac{\delta a_1}{ds} = -\dfrac{zJ}{u^2 R} \\[2ex]
\dfrac{\delta^2 y}{ds^2} = \dfrac{\delta h_1}{ds} = \dfrac{xyzJ - yu^2 R}{u^4 R} \\[2ex]
\dfrac{\delta^2 z}{ds^2} = \dfrac{\delta c_1}{ds} = \dfrac{xz^2 J - zu^2 R}{u^4 R}
\end{cases}
$$

Kā zināms, kreisās puses lielumi ir $\frac{1}{R}$ projekcijas uz koordinātu asīm. Paceļot kvad-

$$
(12)\quad \begin{cases}
\dfrac{\delta^2 x}{ds^2} = \dfrac{\delta a_1}{ds} = -\dfrac{zT}{u^2 R} \\[2ex]
\dfrac{\delta^2 y}{ds^2} = \dfrac{\delta b_1}{ds} = \dfrac{xyzT - yu^2 R}{u^4 R} \\[2ex]
\dfrac{\delta^2 z}{ds^2} = \dfrac{\delta c_1}{ds} = \dfrac{xz^2 T - zu^2 R}{u^4 R}
\end{cases}
$$

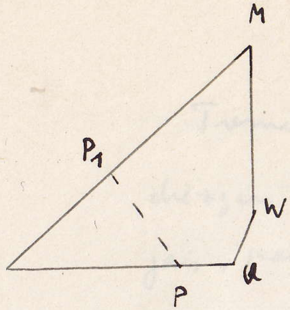
Kā zināms, kreisās puses lielumi ir $\frac{1}{R}$ projekcijas uz koordinātu asīm. Paceļot kvadrātā un saskaitot, mēs dabūjam

$$
(13)\quad \begin{cases}
\left(\dfrac{1}{R}\right)^2 = \dfrac{(xzT - u^2R)^2 + z^2u^2T^2}{R^2u^6} \\[2ex]
R = \dfrac{u^3 R}{\sqrt{(xzT - u^2R)^2 + z^2u^2T^2}}
\end{cases}
$$

Galvenās normāles virziena kosini būs

$$
(14)\quad \begin{cases}
a_2 = \dfrac{\frac{\delta a_1}{ds}}{\frac{1}{R}} = -\dfrac{zu^2T}{u\sqrt{(xzT - u^2R)^2 + z^2u^2T^2}} \\[2ex]
b_2 = \dfrac{xyzT - yu^2R}{u\sqrt{(xzT - u^2R)^2 + z^2u^2T^2}} \\[2ex]
c_2 = \dfrac{xz^2T - zu^2R}{u\sqrt{(xzT - u^2R)^2 + z^2u^2T^2}}
\end{cases}
$$

Meklēsim tagad P projekciju P_1 uz galveno normāli. Šim nolūkam projicēsim uz galveno normāli ON lauzto līniju $OWQP$ i gal-



veras normāles virziena kosinus ņemsim viņu formā

$$a_2 = R\frac{\delta a_1}{ds} \qquad b_2 = R\frac{\delta b_1}{ds} \qquad c_2 = R\frac{\delta c_1}{ds}$$

Tad būs

$$MP_1 = -xR\frac{\delta a_1}{ds} - yR\frac{\delta b_1}{ds} - zR\frac{\delta c_1}{ds}$$

$$= R\frac{xzu^2T - \cancel{xy^2zT} + y^2u^2R - \cancel{x^2z^2T} + z^2u^2R}{u^4R}$$

$$MP_1 = R$$

Tā tad redzam, ka visu rulešu polārās asis dotā brīdī iet caur P, jo plāksne PaM ir normālplāksne un PP_1 tā tad paralēla binormālei.

x, y un z otro atvasinājumu izteiksmes pie $s = 0$ ir identiskas ar tām, kuras dod parastā diferenciālģeometrija (citādi jau arī nevarētu būt). Kādas speciālas figūras meklējot: pieglaušanās plāksni, binormāli u.t.t., mēs dabūtu tos pašus rezultātus kā 35. paragrafā.

Ruletes šķiebumu $\frac{1}{T}$, kas mums ir nepieciešams viņas naturālā nolīdzinājuma sastādīšanai, varam dabūt izejot no daž-ādām

[illegible]

būt). Kādas speciālu figūru meklējot: pieglaušanās plāksni, binormāli u.t.t., mēs dabūtu tos pašus rezultātus kā 35. paragrafā.

Rulētes šķiedumu $\frac{1}{T}$, kas mums ir nepieciešams viņas naturālā vienādojuma sastādīšanai, varam dabūt izejot no dažādām formulām, kur tas ietilpst:

$$(15)\qquad \left(\frac{1}{T}\right)^2 = \left(\frac{\delta a_3}{ds}\right)^2 + \left(\frac{\delta b_3}{ds}\right)^2 + \left(\frac{\delta c_3}{ds}\right)^2$$

$$(16)\qquad \frac{\delta a_2}{ds} + \frac{a_1}{R} = \frac{a_3}{T}$$

$$(17)\qquad \frac{\delta a_3}{ds} = -\frac{a_2}{T}$$

$$(18)\qquad \frac{1}{T} = \Delta R^2$$

kur

$$\Delta = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}$$

pie kam akcenti apzīmē diferencēšanu pēc s. Lai gan šīs formulas izliekas dažādas, pēc būtības tās ir identiskas.

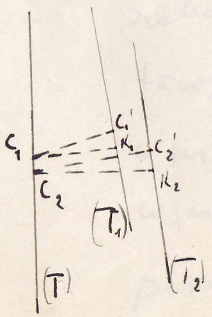
Tomēr aprēķini pēc šīm formulām ir diezgan gari. Vienkāršākais, kā liekas, ir pēdējais, kaut gan pārējās formulas izliekas vienkāršākas. Mēs jau izvedām $\frac{1}{\pi}$ noteikšanu ar pēdējās formulas palīdzību 82. l. pusē un tāpēc pie šī jautājuma vairs neatkārtosimies. Aprēķini te faktiski būs vienkāršāki kā 82. l. pusē, kaut gan formulas ir pilnīgi tās pašas. Lieta tā, ka te mūsu x, y, z ir jau x_p, y_p, z_p, kamēr 82. un 129. lapas pusē tie bija vēl jāaprēķina.

Neattinamas virsmas.

43. Kā jau agrāk aizrādīts, mēs teicām, ka viena taisņu virsma (V_2) veļas pa otru (V_1), ja tām katrā viņu stāvoklī ir kopējā veidule un ja šī kopējā veidule ir acumirklīgā rotācijas ass. Mēs vēl nevaram noteikt, vai abas virsmas saskaras pa taisni, t.i. gar visu veiduli, vai K_1 arī tikai

Neatkarīgas

43. Kā jau agrāk aizrādīts, mēs teicām, ka viena taišņu virsma (V_2) veļas pa otru (V_1), ja tām katrā viņu stāvoklī ir kopēja veidule un ja šī kopējā veidule ir acumirklīgā rotācijas ass. Mēs vēl nevaram noteikt, vai abas virsmas saskaras pa taisni, t.i. gar visu veiduli, vai arī tikai vienā vai vairākos punktos un tāpēc to neievedīsim kā noteikumu, bet meklēsim tos noteikumus, kam jābūt izpildītiem, lai viena taišņu virsma varētu velties pa otru. Šādi noteikumi protams pastāvēs, jo ne katrā gadījumā vienas taišņu virsmas velšanās pa otru nav iespējama, kā, piemēram, cilindram kona gadījumā.



Aplūkosim kopējo veiduli (T) un divas bezgalīgi tuvas (V_1) un (V_2) veidules (T_1) un (T_2). Pēc elementāras rotācijas ap (T), (T_2) jāsakrīt ar (T_1). Lai tas būtu iespējams, jā C_1K_1 un C_2K_2 ir (T) un (T_1), (T) un (T_2)

kopējais perpendikuls, punkti C_1 un C_2 robežstāvokļiem jāsakrīt. Šie robežstāvokļi ir attiecīgās virsmas strikcijas punkts uz veidules (T), tā tad abu virsmu strikcijas punktiem uz kopējās veidules jāsakrīt.

$$(1) \qquad \lim C_1 = \lim C_2$$

Tā tad pie elementārās rotācijas jāsakrīt

$T_1 \sim T$

arī punktiem K_1 un K_2, t. i. ir jābūt

$$(2) \qquad C_1K_1 = C_2K_2$$

Lai (T_1) un (T_2), kas tā tad pie šās elementārās rotācijas atradīsies vienā plāksnē, sakristu, tām jāveido vienādi leņķi ar (T):

$$(3) \qquad \lim \sphericalangle(TT_1) = \lim \sphericalangle(TT_2)$$

Beidzot arī uz (T_1) un (T_2), pie viņu sakrišanas, strikcijas punktiem C_1' un C_2' jāsakrīt.

$$(4) \qquad \lim K_1C_1' = \lim K_2C_2'$$

Nosacījums (1) dod izejas stāvokli. To mēs vairāk nepētīsim. Izdalot (3) ar (2) dabūjam

$$(5) \qquad \lim \frac{\sphericalangle(TT_1)}{C_1K_1} = \lim \frac{\sphericalangle(TT_2)}{C_2K_2}$$

Beidzot ari ar (T_1) un (T_2), pie c_1 un c_2 viņu saskišanās, strikcijas punktiem jā saskrīt:

$$(4) \qquad \lim K_1 c_1' = \lim K_2 c_2$$

Nevienādums (1) dod ievējas stāvokli. To mēs vairāk nepētīsim. Izdalot (3) ar (2) dabūjam

$$(5) \qquad \lim \frac{\star(TT_1')}{c_1 K_1} = \lim \frac{\star(TT_2')}{c_2 K_2}$$

(5) izsaka, ka abām virsmām sadalījuma parametri ir tie paši. Tāpat, (4) ar (2) izdalīts dod

$$\lim \frac{K_1 c_1'}{c_1 K_1} = \lim \frac{K_2 c_2'}{c_2 K_2},$$

kas trijstūros $c_1 K_1 c_1'$, $c_2 K_2 c_2'$ dod

$$\lim tg \star(K_1 c_1 c_1') = \lim tg \star(K_2 c_2 c_2')$$

tā tad ari

$$(6) \qquad \lim \star(K_1 c_1 c_1') = \lim \star(K_2 c_2 c_1')$$

jo abi leņķi ir šauri. Taišņu $c_1 c_1'$ un $c_2 c_2'$ robežstāvokļi tad saskritīs pie elementārās robežstāvokļi tad saskritīs pie elementārās stāvokļa. Bet tad viņas būs tapušas par strikcijas līniju tangentēm - abu virsmu strikcijas līnijas saderīgos punktos veidos to pašu leņķi ar veiduli, kas iet caur šo punktu.

Mēs tā tad redzam, ka jābūt izpildītiem diviem noteikumiem, lai vispār velšanās būtu iespējama: saderīgos punktos sadalīšanas parametriem jābūt tiem pašiem; strikcijas līnijā leņķiem ar veidulēm jābūt tiem pašiem.

44. Turpmāk mēs izlietāsim formulas, ko dod E. Amigues's savā rakstā: „Équation générale des surfaces réglées dont la ligne de striction satisfait à certaines conditions", kas ievietots „Nouvelles Annales de Mathématiques" 1889. g. sējumā.

Pamatvirsmas (V_1) un (V_2) būs dotas šādā formā:

$$(1)\quad \begin{cases} x_1 = f_1(s_1) + \lambda_1(u_1) \\ y_1 = \varphi_1(s_1) + \mu_1(u_1) \\ z_1 = \psi_1(s_1) + \nu_1(u_1) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = f_2(s_2) + \lambda_2(u_2) \\ y_2 = \varphi_2(s_2) + \mu_2(u_2) \\ z_2 = \psi_2(s_2) + \nu_2(u_2) \end{cases}$$

Kur

$$(1')\quad x = f_1(s_1) \qquad y = \varphi_1(s_1) \qquad z = \psi_1(s_1)$$

3-amata virsmas (V_1) un (V_2) ...

formā:

$$(1)\quad \begin{cases} x_1 = f_1(s_1) + \lambda_1(u_1) \\ y_1 = \varphi_1(s_1) + \mu_1(u_1) \\ z_1 = \psi_1(s_1) + \nu_1(u_1) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = f_2(s_2) + \lambda_2(u_2) \\ y_2 = \varphi_2(s_2) + \mu_2(u_2) \\ z_2 = \psi_2(s_2) + \nu_2(u_2) \end{cases}$$

kur

$$(1')\quad x = f_1(s_1) \qquad y = \varphi_1(s_1) \qquad z = \psi_1(s_1)$$

un

$$(1'')\quad x = f_2(s_2) \qquad y = \varphi_2(s_2) \qquad z = \psi_2(s_2)$$

ir strikcijas līniju vienādojumi.

Anniques dod noteikumu, lai katra no šīm līnijām būtu attiecīgās virsmas strikcijas līnijā:

$$(2)\quad \int f_1'(s_1)\frac{d\lambda_1}{ds_1} = 0 \qquad \int f_2'(s_2)\frac{d\lambda_2}{ds_2} = 0$$

Apzīmējam ar α_1 un α_2 leņķus, ko veido ciešs strikcijas līniju sadursmes punktos P_1 un P_2 ejošās veidules ar strikcijas līniju. Tad

$$(3)\quad \cos\alpha_1 = \sum \lambda_1 f_1'(s_1) \qquad \cos\alpha_2 = \sum \lambda_2 f_2'(s_2)$$

Beidzot punktiem P_1, P_2 attiecīgos sadalījuma parametrus dod

$$(4)\quad \frac{\sin^2\alpha_1}{\varpi_1^2} = \int\left(\frac{d\lambda_1}{ds_1}\right)^2 \qquad \frac{\sin^2\alpha_2}{\varpi_2^2} = \int\left(\frac{d\lambda_2}{ds_2}\right)$$

un, lai λ, μ, ν būtu attiecīgās veidulas virsuma kosini, kā tas pieņemts (3) un (4) formulā, jābūt

(5) $\lambda_1^2+\mu_1^2+\nu_1^2=1$ $\qquad\qquad \lambda_2^2+\mu_2^2+\nu_2^2=1$

Pieņemsim, ka liekās ir dotas, t.i. mums ir zināmas formulas (1') un (1''), kur s_1 un s_2 ir attiecīgo strikuļās līniju (L_1) un (L_2) loki. Nezināmas funkcijās ir $\lambda, \mu, \nu, \alpha, \varpi$ - katrai virsmai kopā 5; tās saista nolīdzinājumi (2), (3), (4), (5) - viena no šīm funkcijām, piem. α var brīvi izvēlēties. Vekšanās noteikumi ieved vēl

$$s_1 = s_2$$

$\alpha_1=\alpha_2$, t.i. $\qquad$ (6) $\int \lambda_1 f_1'(s_1) = \int \lambda_2 f_2'(s_1)$

$\varpi_1=\varpi_2$, t.i. $\qquad$ (7) $\int\left(\frac{d\lambda_1}{ds_1}\right)^2 = \int\left(\frac{d\lambda_2}{ds_2}\right)^2$

Tad nezināmās 6 funkcijas $\lambda_1, \mu_1, \nu_1, \lambda_2, \mu_2, \nu_2$ saista 6 nolīdzinājumi : (2), (5), (6), (7). Būs tā tad galīgs skaits atrisinājumu, kuros gan ieies patvaļīgas konstantes, jo (2), (6) un (7) ir diferenciālnolīdzinājumi.

Lai šo nolīdzinājumu sistēmu atri-

$\alpha_1=\alpha_2$, t.i. $\quad (6) \int \lambda_1 f_1(s_1) = \int \lambda_2 f_2(s_1)$

$\varpi_1=\varpi_2$, t.i. $\quad (7) \int\left(\frac{d\lambda_1}{ds_1}\right)^2 = \int\left(\frac{d\lambda_2}{ds_2}\right)^2$

Tad nezināmās 6 funkcijas $\lambda_1, \mu_1, \nu_1, \lambda_2, \mu_2, \nu_2$ saista 6 vienādojumi: (2), (5), (6), (7). Būs tā tad galīgs skaits atrisinājumu, kuros gan ieies patvaļīgas konstantes, jo (2), (6) un (7) ir diferenciālvienādojumi.

Lai šo vienādojumu sistēmu atrisinātu, atmetam vienādojumu (7). Tad mums paliek 5 vienādojumi ar 6 nezināmām funkcijām. Mēs varam brīvi izvēlēties vienu lielumu. Par tādu pieņemsim $\cos\alpha = a$. Tad mēs aprēķināsim $\lambda_1, \mu_1, \dots \nu_2$ kā a funkcijas; ievietojot dabūtās nozīmes (7) vienādojumā, mēs dabūsim vienādojumu, kas saturēs dotās funkcijas, a un a atvasinājumus: tas būs diferenciālvienādojums funkcijai a un tā atrisinājumi dos vajadzīgo a kā s funkciju.

Mums tā tad jāatrisina sistēma (ar accentu apzīmējot diferencēšanu pēc loka $s_1=s_2$):

$$(8)\begin{cases} (1)\ \int f_1'\lambda_1' = 0 \\ (2)\ \lambda_1^2+\mu_1^2+\nu_1^2 = 1 \\ (3)\ \int \lambda_1 f_1' = a \end{cases} \qquad (8')\begin{cases} \int f_2'\lambda_2' = 0 \\ \int \lambda_2^2 = 1 \\ \int \lambda_1 f_1' = a \end{cases}$$

Aprēķināsim tikai mūsu sistēmas (8) sakarus: sistēmai (8') tās būs analogas izteiksmes.

Diferencējot (8_3) un ievērojot (8_1):

$$(9) \qquad \int \lambda_1 f_1'' = a'$$

(8_3) un (9) dod

$$\lambda_1 = \frac{a\varphi_1'' - a'\varphi_1' + \nu_1(\varphi_1'\psi_1'' - \varphi_1''\psi_1')}{f_1'\varphi_1'' - f_1''\varphi_1'} = \frac{a\varphi_1'' - a'\varphi_1' + \nu_1 A}{C}$$

$$\mu_1 = \frac{-af_1'' + a'f_1' + \nu_1(\psi_1'f_1'' - \psi_1''f_1')}{f_1'\varphi_1'' - f_1''\varphi_1'} = \frac{-af_1'' + a'f_1' + \nu_1 B}{C}$$

kur A, B, C ir parastās nozīmes. Ievietojot šīs λ_1 un μ_1 nozīmes vienādojumā (8_2), mēs dabūjam (jā $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \dots \nu_1$ attiecas uz līkni (1') un $\frac{1}{R_1}$ ir tās liekums)

$$\nu_1^2 - 2\nu_1(a\gamma_1 + a'\gamma_2 R_1) - \gamma_3^2 + a^2 + a'^2R^2 - (a\gamma_2 - a'R\gamma_1)^2 = 0$$

Ievedot atkal $a = \cos\alpha$

un sastādot šī vienādojuma diskriminanti, mēs redzam, ka tai ir tā pati zīme kā

$$1 - \alpha'^2 R_1^2$$

λ_1 un μ_1, nosimus nolīdzinājumā (δ_2), mēs dabūjam (jā $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \dots \nu_1$ attiecas uz līknu (1') un $\frac{1}{R_1}$ ir tās liekums)

$$\nu_1^2 - 2\nu_1(a\gamma_1 + a'\gamma_2 R_1) - \gamma_3^2 + a^2 + a'^2 R^2 - (a\gamma_2 - a' R\gamma_1)^2 = 0$$

Ievedot atkal $a = \cos\alpha$

un sastādot šī nolīdzinājuma diskrimināntu, mēs redzam, ka tai ir tā pati zīme kā

$$1 - \alpha'^2 R_1^2$$

Lai ν_1 būtu reāls, tātad jābūt

$$(10) \qquad |\alpha'| \leq \frac{1}{R_1}$$

Ja šis noteikums ir izpildīts,

$$(11) \quad \begin{cases} \lambda_1 = a\alpha_1 + a'\alpha_2 R_1 + \varepsilon\, \alpha_3 \sin\alpha \sqrt{(1-\alpha'^2 R_1^2)} \\ \mu_1 = a\beta_1 + a'\beta_2 R_1 + \varepsilon\, \beta_3 \sin\alpha \sqrt{(1-\alpha'^2 R_1^2)} \\ \nu_1 = a\gamma_1 + a'\gamma_2 R_1 + \varepsilon\, \gamma_3 \sin\alpha \sqrt{(1-\alpha'^2 R_1^2)} \end{cases}$$

kur $\varepsilon = \pm 1$.

Ja $d\theta$ ir divu sekojošu tangentu leņķis, (10) rāda, ka

$$\left|\frac{d\alpha}{ds}\right| \leq \frac{d\theta}{ds}$$

$$|d\alpha| \leq d\theta$$

t.i. divu sekojošu veidotāju leņķis nedrīkst būt lielāks kā divu sekojošu tangentu leņķis. Liekām, kam

$|d\alpha| = d\theta$

ir, protams, savičas īpašības; tās, starp citiem, ir pētījis Demartres's[13]

Arī otrai līknei mēs dabūjam analogas izteiksmes lielumiem λ_2, μ_2, ν_2. Diferencējot $\lambda_1, \mu_1 \ldots \nu_2$ un ~~ievietojot~~ tos atvasinājumus vienādojumā (7), mēs dabūjam vienādojumu, kas satur $\alpha, \alpha', \alpha''$, s_1 un s_2 funkcijas un vēl lielumu ε. Lai atsvabinātos no ε, mēs varam pārnest visus locekļus, kas to satur, vienā pusē un pacelt kvadrātā. Tad mēs dabūjam izteiksmi, kas ir polinoms attiecībā uz α' un α'', pie kam α'' tur ieiet ceturtā pakāpē, un α tur ieiet kā $\sin\alpha$ un $\cos\alpha$. Atrisinot šo vienādojumu attiecībā uz α'', mēs varēsim dabūt augstākais 4 α'' izteiksmes. Bez tam, tā kā ~~katrs~~ vienādojums ir otrās kārtības, tā atrisinājumā ietilpst divas patvaļīgas konstantes: tās varēs noteikt ar sākuma noteikumiem, liekot saskārt 2 (L_1) un (L_2)

M_1 un M_2;

un α tu iegūt kā $\sin\alpha$ un $\cos\alpha$. Atrisinot šo nolīdzinājumu attiecībā uz α'', mēs varētu dabūt augstākais 4 α'' izteiksmes. Bez tam, tā kā ~~katrs~~ nolīdzinājums ir otrās kārtības, tā atrisinājumā ietilps divas patvaļīgas konstantes: tās varēs noteikt ar sākuma noteikumiem, liekot sakrist 2 (L_1) un (L_2) punktiem ~~tādz~~ M_1 un M_2 ar attiecīgām ~~tangentiem~~ un patvaļīgi izvēlēties izejas α. Tad būs augstākais 4 pāri līniju virsmu, kam (L_1) un (L_2) būs strikcijas līnijās, punktos M_1 un M_2 vienāds α un ϖ un kas varēs velties viena pa otru, ja tās novietos tā, ka tās saskartos pa visu caur M_1, M_2 ejošo vertikāli.

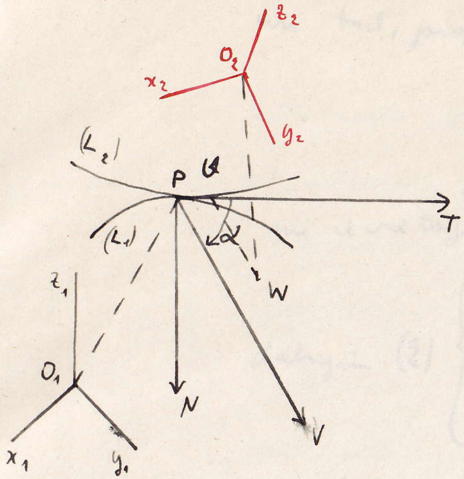
Der ievērot, ka ja (L_1) un (L_2) ir identiskas līknes, α ir pilnīgi patvaļīgs; tas tikai nedrīkst būt pastāvīgi nulle, jo tad abas līknes sakritīs un nebūs nekādas kustības. Bez tam vēl jābūt

$$|\alpha'| \leq \frac{1}{R}$$

---

13) Demartres, 320. l.p.

Rulete. 38. Ruletes noteikšanai attiecināsim nekustošo virsmu (V_1) uz koordinātu sistēmu $(O_1 x_1 y_1 z_1)$, kustošo (V_2) - uz sistēmu $(O_2 x_2 y_2 z_2)$, kas ar to saistīta. Mēs meklējam O_2 trajektoriju. Sistēmā $(O_1 x_1 y_1 z_1)$, O_2 koordinātas lai ir X, Y, Z.



Ievedīsim atkal palīgsistēmu, kuras sākums atrastos punktā P un asis būtu: (L_1) un (L_2) kopējā tangente PT punktā P, normāle PV, kas iet caur P un PT un PN kopējā perpendikulāre PN. Šīs palīgsistēmas asu leņķiem ar sistēmas (O_1) vai (O_2) asīm ir šādi kosinusi:

	PT	PV	PN
x_1	α_1	λ_1	l_1
y_1	β_1	μ_1	m_1
z_1	γ_1	ν_1	n_1

pie kam

$$\alpha_1 = x_1' \qquad \beta_1 = y_1' \qquad \gamma_1 = z_1'$$

(O_1) un (O_2) asīm ir šādi kosinusi:

	PT	PV	PN
x_1	α_1	λ_1	l_1
y_1	β_1	μ_1	m_1
z_1	γ_1	ν_1	n_1

pie kam

$$\alpha_1 = x_1' \qquad \beta_1 = y_1' \qquad \gamma_1 = z_1'$$

$$l_1 = \frac{y_1'\nu_1 - z_1'\mu_1}{\sin\alpha} \qquad m_1 = \frac{z_1'\lambda_1 - x_1'\nu_1}{\sin\alpha} \qquad n_1 = \frac{x_1'\mu_1 - y_1'\lambda_1}{\sin\alpha}$$

tāpat ir

	PT	PV	PN
x_2	$\mathfrak{A}_1$	λ_2	l_2
y_2	$\mathfrak{B}_1$	μ_2	m_2
z_2	$\mathfrak{C}_1$	ν_2	n_2

pie kam

$$\mathfrak{A}_1 = x_2' \qquad \mathfrak{B}_1 = y_2' \qquad \mathfrak{C}_1 = z_2'$$

$$l_2 = \frac{y_2'\nu_2 - z_2'\mu_2}{\sin\alpha} \qquad m_2 = \frac{z_2'\lambda_2 - x_2'\nu_2}{\sin\alpha} \qquad n_2 = \frac{x_2'\mu_2 - y_2'\lambda_2}{\sin\alpha}$$

Projicējot PO_2 uz PT, PV, PN dabūjam:

$$(1)\quad \begin{cases} \overline{PQ} = -\int x_2 x_2' \\ \overline{QW} = -\int x_2 \lambda_2 \\ \overline{WO_2} = -\int x_2 l_2 \end{cases}$$

un tad, projicējot $O_1 P Q W O_2$ uz Ox_2, Oy_2, Oz_2:

$$X = x_1 + x_1' \overline{PQ} + \lambda_1 \overline{QW} + l_1 \overline{WO_2}$$

un ievietojot

dabūjam (2)
$$\begin{cases} X = x_1 - \alpha_1 \int x_2 a_1' - \lambda_1 \int x_2 \lambda_2 - l_1 \int x_2 l_2 \\ Y = y_1 - \beta_1 \int x_2 a_1 - \mu_1 \int x_2 \lambda_2 - m_1 \int x_2 l_2 \\ Z = z_1 - \gamma_1 \int x_2 a_1 - \nu_1 \int x_2 \lambda_2 - n_1 \int x_2 l_2 \end{cases}$$
un tāpat

Nolīdzinājumi (2) līdz ar noteikumiem (2), (5), (6), (7) - 137. un 138. lapu pusē, mums atļauj izpētīt O_2 kustību.

Šo darbu nobeidzot, sarakstītājam jāatvainojas par grūto salasāmību kā arī par nesamērīgu dažu blakus jautājumu aplūkošanu. No viņa neatkarīgu iemeslu dēļ, tas bija spiests grozīt sākumā sprausto plānu, caur ko arī zuda atsevišķo daļu samērs.

Šo darbu sastādot kā

Šo darbu nostādot, sarastīt[?] jāatvainojas par grūto salasamību kā arī par nesamērīgu dažu klasisku jautājumu aplūkošanu. Nevienā neatkarīgu iemeslu dēļ, tas bija spiests grozīt sākumā sprausto plānu, cater[?] kā arī žuda atsevišķo daļu samērs.

Šo darbu sastādot kā palīglīdzekļi lietāti:

I) Prof. A. Mecleru Diferenciālģeometrijas kurss

Prof. E. Lejnieka kursi Analītiskā ģeometrijā un Integrālrēķinos.

II) Grāmatas:

1. G. Demartres, Cours de Géométrie infinitésimale (Gauthier-Villars) 1913

2. G. Scheffers, Einführung in die Theorie der Flächen (Veit, Leipzig) 1913

3. E. Cesàro, Vorlesungen über natürliche Geometrie (Teubner) 1926

4. B. Niewenglowski, Cours de Géométrie analytique, Tome III (Gauthier-Villars) 1929

5. E. Goursat, Cours d'Analyse mathématique, Tome I (Gauthier-Villars 1927)

6. R. Bricard, Cinématique et Mécanismes. (Collin) 1921.

ietinums - Eingehüllte; enveloppe

īpatnējs (punkts) - singulär; particulier

liekums - Krümmung, courbure

pieglaušanās (plāksne) - oskulierend; osculateur.

šķiebums - Torsion; torsion

saderīgs - entsprechend; correspondant

sadalīšanās (parametrs) - Verteilungs-; de distribution

virsma ir notinama uz - ... aufwickelbar auf; applicable sur...

velšanās - Rollen, roulement

virpšanās ——— , pivotement

veidule - Erzeugende, génératrice

vītes līnija - Böschungslinie, hélice

pilnā liece - totale Krümmung, courbure totale

751875

6. sept. 34

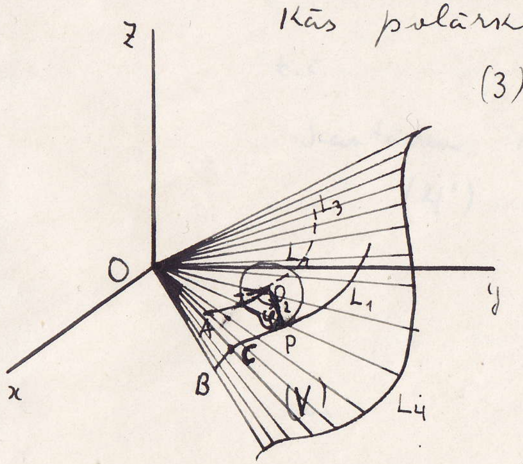
Kā rand. dasbs.

$$(1)\quad \left\{ \frac{z}{x} = \psi(t) \right.$$

Līniju (L_1) dos kōna (V) šķēlums ar virsmu

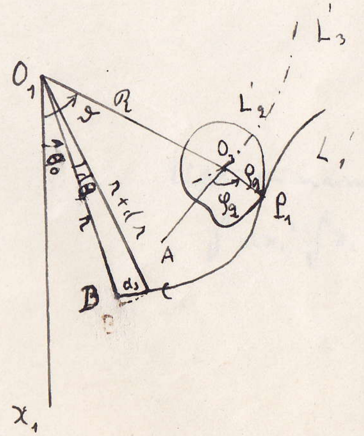
$$(2)\qquad F(x, y, z) = 0$$

Beidzot līnija (L_2) būs dota ģeodētiskās polārkoordinātās



$$(3)\qquad f(\rho_1, \varphi_1) = 0$$

kur $\rho_1 = \cup O_2 P$ ir punkta O_2 un liekā tekošā punkta P ģeodētiskais attālums un φ_1: ar (G) saistītās ģeodētiskās līnijas OA un ģeodētiskā radiusa vektora OP leņķis.



Attinot kōnu uz plāknes, iz teiksim (L_1) attinumu polārās koordinātās ar centru O_1, kas atbilst kōna virsotnei. Šādi attinot, garums $OB = r$ un loka elements BC nebūs mainījuši savu garumu, t. i. mums būs, ja x_1, y_1, z_1 ir punkta B un $x_1 + dx_1$, $y_1 + dy_1$, $z_1 + dz_1$

un ja $s = R\vartheta$, l top nenoteikts, kā tam arī jābūt.

15. Gadījumā, ja (L_1) un (L_2) ir noslēgtas līknes, mēs varam atkārtot to pašu, kas jau teikts 8. paragrafā.

16. Definējot aplūkoto velšanos virsmā, mēs teicām (3. §), ka mēs pārvietojam virsmas gabalu (G), kamēr kinemātikā uz lodes vai plāksnes mēdz teikt, ka pārvieto visu lodes virsmu vai visu plāksni, tai ļaujot slīdēt pašai par sevi. Mūsu ierobežojuma pamats viegli redzams: virsmām ar pastāvīgu K mēdz būt īpatnēji punkti (piemēram Kōnam-tā virsotne) un ir skaidrs, ka bez tālākām norunām, kas nedos nekā interesanta, neviena gabala G daļa kādā tā stāvoklī nevarēs saturēt šādus īpatnējus punktus, jo tad tās kustība pa virsmu būs ierobežota vai pat neiespējama. Tādēļ arī katrā atsevišķā gadījumā ar līkni (L_2) saistītiem punktiem jāatrodas tādā virsmas gabalā G, kas

loks. Lielumus u, ds, ds_1 mēs varam noteikt kā t funkcijas un tā tad dabūsim

$$T_1 = u\frac{ds_1}{ds}$$

$$(5)\qquad T_2 = T_2(t)$$

kopā ar (3'), (5) mums dod līkni (L_2), jo, eliminējot t no s_2 un T_2 izteiksmēm, dabūjam

$$(6)\qquad F_1(s_2, T_2) = 0$$

un (4) un (6) pilnīgi nosaka līkni (L_2), atstājot nenoteiktu tikai tās stāvokli.[11] Bet arī šis pēdējais ir noteikts, jo ņemot kādu punktu O_2 uz (L), tam plāksnē (II) atbilst noteikta taisne PT_2 un punkts P, kur līknei (L_2) jāguļ tā, ka tās piekļaušanās plāksne sakrīstu ar (II) un bez tam jābūt noteiktām s_2, R_2, T_2 vērtībām. Ir tā tad tikai viena līknē (L_2), kuras tangentu plāksne (V_2) neļaujas pa (II), kāds ar (K_2) saistīts punkts apraksta iepriekš dotu ruleti (L).

Ja, ievējot no (4) un (6) mums izdotos atrast (L_2) vienādojumus Kartēziskās koorbez tam, kā redzējām, jā būt

$$R_1 = R_2 = R$$

Tād, ievietojot izteiksmēs (2) nozīmes, ko dod (1), dabūjam

$$\frac{\delta x}{ds_1} = 0 \; ; \quad \frac{\delta y}{ds_1} = \frac{z}{T_2} - \frac{z}{T_1} \; ; \quad \frac{\delta z}{ds_1} = \frac{y}{T_1} - \frac{y}{T_2}$$

vai, apzīmējot

$$\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} = \frac{1}{\varrho}$$

$$(3) \qquad \frac{\delta x}{ds_1} = 0 \; ; \quad \frac{\delta y}{ds_1} = \frac{z}{\varrho} \; ; \quad \frac{\delta z}{ds_1} = -\frac{y}{\varrho}$$

Šie pēdējie vienādojumi dod kā normālplāksni ($\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ - tās tekošā punkta koordinātas)

$$(\bar{x} - x)\frac{\delta x}{ds_1} + (\bar{y} - y)\frac{\delta y}{ds_1} + (\bar{z} - z)\frac{\delta z}{ds_1} = 0,$$

kas top, ievietojot (3) un pieņemot, ka $\frac{1}{\varrho} \neq 0$

$$(4) \qquad \bar{y} z - \bar{z} y = 0$$

Redzams, ka normālplāksne iet caur x asi, t. i. caur (L_1) un (L_2) kopējo tangenti. Ja $\frac{1}{\varrho} = 0$, normālplāksne ir nenoteikta, visām ruletēm šim (L_2) stāvoklim atbilst īpatnēji punkti. Šis gadījums ir