Atsevišķs novilkums
no kongresa referātiem.

Cand. math. E. Grünbergs

Dažas transformācijas elementārā ģeometrijā

Referāts,
nolasīts matēmatisko zinātņu darbinieku kongresā.
25. aprīlī 1935

Rīgā, 1936

Izdevusi Matēmatisko zinātņu darbinieku biedrība

4

Cand. math. E. Grünbergs.

Dažas transformācijas elementārā ģeometrijā.

Šī referāta autors, būdams viens no jaunākajiem Latvijas matēmatiķiem, pilnīgi apzinas tam piešķirto godu — izteikties tik ievērojamā sapulcē. Tāpēc tam jo vairāk jāatvainojas par iejaukšanos jautājumā, kur viņš ir tikai vērotājs no malas, un nevis speciālists, proti ģeometrijas mācīšanā vidusskolā. Šī iemesla dēļ daži spriedumi būs pārāk subjektīvi. Referāts galvenā kārtā domāts dažu pārdomu ierosināšanai. Ja tas būs izdevies, mūsu mērķis būs pilnīgi sasniegts.

Kā tas vispār ir atzīts, matēmatikas mācīšanas uzdevums skolā ir attīstīt loģisku domāšanu. To jo sevišķi var attiecināt uz ģeometriju. No šī viedokļa raugoties, teorēmas ir tikai paraugi, un tieši uzdevumu atrisināšanai būtu jārāda, cik tālu skolēni piesavinājušies šādu domāšanu. Ja skolu beidzot tie iemācījušies tikai zināmu skaitu teorēmu, bet neprot tās izlietāt patstāvīgiem loģiskiem secinājumiem, tad matēmatika tiem ir bijusi tikai lieks balasts.

Autoram ir nācies novērot pie vairāku vidusskolu skolēniem, ka ģeometrijas uzdevumus tie lielā mērā uzlūko kā kādu mīklu veidu, kas pie tam nemaz nav interesants. Skolēns tad nu izmēģinas kaut ko „dabūt“, uz labu laimi velkot dažādas taisnes un riņķus. Ja nu šāda švītrošana nekādus panākumus nedod, kas notiek visai bieži, jo skolēns palaikam pat neapzinas, ko viņš īsti meklē, atrisinājumu noraksta no biedra, vai arī to liek „izrēķināt“ privatskolotājam, nemaz pat necenšoties to izprast.

Skolēnu nespēja patstāvīgi atrisināt matēmatikas, it īpaši ģeometrijas, uzdevumus ir diezgan zīmīga līdzšinējai matēmatikas mācīšanai mūsu skolās. Un ja skolēns nav laikus ieradis kaut cik metodiski un patstāvīgi domāt, vēlāk tam grūti šo spēju piesavināties. Ir tak piedzīvoti gadījumi, kur studiju beigās matēmatikas studenti, kas dažreiz pat paši ir skolotāji, neprot tikt galā ar pavisam elementāriem ģeometrijas uzdevumiem. Skaidrs, ka viss teiktais attiecas tikai uz caurmēru; ir, protams, sastopami arī izņēmumi, kam uz matēmatiku ir sevišķa interese, bet arī tiem palaikam skola maz ko devusi metodiskā ziņā.

Varēs iebilst, ka daudzi skolu absolventi labi pārzin izņemto kursu. Bet ko tad tas dod? Kursa zināšana un spēja loģiski domāt ir divas pilnīgi dažādas lietas. Un ja kāds skolēns kursu labi zina, bet nespēj atrisināt vienkāršus uzdevumus, tad ir skaidrs, ka viņš savu kursu ir vairāk vai mazāk iemācījies no galvas, bet nav to īsti izpratis un piesavinājies. Neviens tak neuzskatīs par labu latīnistu skolēnu, kas no galvas iekalis visu latiņu grammatiku, bet nespēj pārtulkot visvienkāršāko Cezara teikumu, ja viņš arī tulkojumu nav iepriekš izmācījies no galvas. Tāpat arī prasme atstāstīt kādu kursa daļu nekādā ziņā viena pati nenorāda uz labām matēmatikas zināšanām.

Šajā referātā ir mēģināts dot dažus ierosinājumus skolēnu sekmīgākai ievadīšanai matēmatiskā domāšanā. Mēs vēl lieku reizi uzsveŗam, ka no vispārīgās izglītības viedokļa pašai prasmei atrisināt ģeometrijas uzdevumus nav sevišķas nozīmes. Šī prasme tomēr ir vienīgais kaut cik drošais kritērijs attiecībā uz matēmatiskās loģiskās domāšanas reālu piesavināšanos.

Vispirms varētu pievērst vairāk vērības pašiem uzdevumiem — mācīt tos pareizi formulēt, metodiski analizēt un izdarīt eventuālās konstrukcijas kā arī diskusiju. Šis jautājums ir stipri plašs, kāpēc arī mēs tanī vairāk neiedziļināsimies.

Otrs ceļš būtu zināma programmas paplašināšana no skolotāja puses. Te nu var rasties iebildumi, kas būs vērsti arī pret pirmo līdzekli — tikko atliekot laika izņemt obligatorisko programmu un to iemācīt skolēniem, kur tad nu vēl lai nodarbojoties ar blakus lietām. Šie iebildumi nav vairs dibināti. Ar neseno skolu reformu, kā to arī vairākkārt uzsvēris Izglītības ministra kungs, palielinot vidusskolas klašu skaitu ir novērstas pārpūlēšanās briesmas un katru priekšmetu ir iespējams apstrādāt mierīgāk un pamatīgāk. Otrkārt, autoram ir cieša pārliecība, ka metodiski izlietājot abus minētos līdzekļus, skolēnu darbs patiesībā tiks

atvieglots un dos tiem lielāku svētību. Ja tie reiz būs iemācījušies ģeometrijā patstāvīgi domāt un patstāvīgi secināt, tiem teorēmas nemaz vairs nebūs jākaļ: pietiks atcerēties domu gaitas virzienu, lai pierādījums nāktu pats no sevis. Šāda mācīšana skolotājam protams prasīs lieku darbu, bet par to viņš varēs apzināties, ka viņš saviem skolēniem iemācījis ne tikai zināmu skaitu teorēmu (ko tie tā kā tā drīz aizmirsīs), bet tiem devis arī ko daudz vērtīgāku — prasmi metodiski strādāt.

Kursu eventueli paplašinot protams ir jārīkojas pēc noteikta plāna. Tad varēs cīnīties vēl ar otru negātīvu parādību. Skolēni visumā ģeometriju mazāk ciena, kā algebru vai pat trigōnometriju. Zināmā mērā tas ir izskaidrojams ar subjektīvo ievirzi — arī radošos matēmatiķus mēdz sadalīt „analītiķos“ un „ģeometros“ — tomēr sava loma būs arī objektīviem apstākļiem. Algebrā un trigōnometrijā teorija iet uz priekšu pa diezgan norobežotu ceļu; arī uzdevumi pieder pie zināmiem raksturīgiem tipiem, ko var atrisināt gandrīz mēchaniski. Ģeometrijā, turpretī, pierādījumi ir tik dažādi, ka skolēnam dažs labs tiešām var likties kā kāds veikls triks, kur savelk kopā pavisam nesaderīgas lietas. Tādā kārtā viegli kaut kur sirds dziļumos var rasties pārliecība, ka ģeometrija ir tīrī vai sagudrota nabaga skolēnu mocīšanai; loģiskas kārtības vietā tur saredz vairs tikai patvaļu un nekārtību, ko nemaz nav vērts censties saprast Šāda uzskata dabīgās sekas tad ir vai nu pilnīga atmešana ģeometrijai ar roku, vai arī kalšana no galvas. Te nu skolēniem diezgan daudz varētu līdzēt no vienas puses dodot plašāku skatu un no otras — tos tik tālu iepazīstinot ar ģeometrijas paņēmieniem un to būtiskām sakarībām, ka viņi vairs nejustos kā neizbrienamā purvā. Tad arī skolēns pats sāks izprast ģeometrijas loģisko uzbūvi un iegūs pārliecību, ka tam dotos uzdevumus viņš spēj atrisināt paša spēkiem, kaut arī dažreiz būtu jāpiepūlas.

Ir vairākas iespējamības strādāt šai virzienā. Vispirms var dot dažus apvienotājus principus, kas sevī ietveŗ lielāku skaitu teorēmu. Tā, piemēram, antiparallēlitātes jēdziens un tā divas pamatīpašības satur teorēmas par ievilkto četrstūri, punkta pakāpi attiecībā pret riņķi, taisnleņķa trijstūŗa katetes kvadrātu, punktu ģeometrisko vietu, no kuriem dotu nogriezni redz zem dota leņķa, u. t. t

Cits līdzeklis būs skolēnus ieradināt rīkoties ar ģeometriskām figūrām, tās metodiski pētīt: apzināties, kas tieši jāmeklē un kādiem līdzekļiem tas būtu atrodams. Tad skolēnam vairs nebūs jāķeŗas pie neauglīgās zīlēšanas.

Šī mērķa sasniegšanai liela nozīme var būt dažām elementārām transformācijām. Tīrā ģeometrijā transformācijas ir paņēmieni, kas vienas figūras elementiem — punktiem, līknēm, vai virsām ar noteiktu konstrukciju palīdzību liek atbilst citiem šādiem elementiem, kas nosaka transformēto figūru. Viegli noprast, ka visvienkāršākās ir tās transformācijas, kas punktus pārvērš punktos. Mēs tad nu arī aplūkosim dažas no šīm transformācijām plānimetrijā, norādot arī uzdevumu vai figūru tipus, kam katra sevišķi piemērota. Minēsim arī dažus uzdevumus analītiskā ģeometrijā plāksnē, kur pāris plānimetrijas slēdzieni lielā mērā atvieglo aplēsumus; šādus uzdevumus atrisinot skolēni būtu jāpieradina iepriekš meklēt vienkāršāko atrisināšanas veidu. Tūliņ ķerdamies pie aplēsumiem tie var nonākt pie tik sarežģītām izteiksmēm, ka nespēj tās veikt.

Izteiksmes saīsināšanai izejas figūru, ko mēs transformējam, mēs apzīmēsim ar F un tās atsevišķos punktus ar A, B, C, . . . Attiecīgie transformētie punkti būs A′, B′, C′, . . . un to kopība sastādīs F transfomēto figūru F′.

Samērā vienkāršas ir tās transformācijas, kas katru doto figūru F pārvērš kongruentā figūrā. Tās sauc arī par pārvietojumiem, jo faktiski tās doto figūru tikai pārvieto citā stāvoklī. Savu aplūkojumu mēs tad arī iesāksim ar visvienkāršāko pārvietojumu — proti translāciju.

Translācija pastāv katra punkta pārvietošanā dotā virzienā par dotu atstatumu; to var definēt ar noteiktu brīvu vektoru plāksnē. Pierādīsim, ka translācija ir pārvietojums. Aplūkosim trīs F punktus A, B, M un to transformētos (zīm. I)*). Pēc translācijas definīcijas nogriežņi AA′, BB′, MM′ ir paralleli un vienādi, tā tad četrstūŗi ABB′A′, AMM′A′, BMM′B′ ir parallelogrammi, AB = A′B′, AM = A′M′, BM = B′M′, trīsstūŗi ABM un A′B′M′ ir tā tad kongruenti. Tā kā tiem ir vienāda orientācija, pārbīdot F pa plāksni tā ka A sakristu ar A′ un B ar B′,

*) Šo un turpmākos zīm. skat. pieliktā tabulā lpp. 36.

arī M sakritīs ar M′. Par M mēs varam izvēlēties ikkatru F punktu, kas norāda, ka pēc F pārvietojuma tā sakrīt ar F′, tā tad figūras F un F′ ir kongruentas. Translācija tā tad taisnes pārvērš parallēlās taisnēs un uzglabā leņķu lielumu un orientāciju.

Ja gribam noteikt translāciju, lietājot tikai F un F′ elementus, to visvienkāršāki var izdarīt dodot atbilstošu punktu pāri A un A′. Katram F punktam M atbilstošu punktu M′ dabūjam kā krustpunktu taisnēm, kas caur M, respektīvi A′, vilktas parallēli AA′, respektīvi AM. Ja M atrodas uz taisnes AA′, šī konstrukcija, neder, bet nav ne mazākās gŗūtības atrast kādu citu. Arī turpmāk mēs katrai tranformācijai dosim vienu vai dažas vispārīgas konstrukcijas, nepakavējoties pie gadījumiem, kur tās neder, jo katrreiz speciālas konstrukcijas var atrast bez gŗūtībām.

Translācija, kā visai vienkārša transformācija, uzdevumu atrisināšanai neko daudz nevar dot. Tā piemērota uzdevumiem, kur dotā virzienā jākonstruē dota gaŗuma nogrieznis, kā gala punktiem jāatrodas uz divām dotām līnijām. Šādi uzdevumi ar attiecīgās translācijas palīdzību atrisināmi pāris vārdos.

Rotācija definējama šādi: dots rotācijas centrs O un orientēts leņķis α. Katra F punkta M transformētais M′ ir tāds, ka OM = OM′ un orientētais leņķis MOM′ ir α. Citiem vārdiem, nogriezni OM pagriežot ap O par leņķi α, tā gala punkts nonāk punktā M′. Punkts O ir dubultpunkts, t. i. tas sakrīt ar savu transformēto. Viegli pierādāmas šādas rotācijas pamatīpašības:

1) Tā ir pārvietojums; it īpaši taisnes pārvēršas taisnēs un leņķi uzglabā savu lielumu un orientāciju.

2) Katra taisne T veido ar savu transformēto T′ orientēto lenķi α; šī īpašība izriet no iepriekšējās, jo T veido ar OM tādu pat leņķi kā T′ ar OM′.

3) O ir vienādā attālumā no katras taisnes un tās transformētās.

Rotācijas noteikšanai ar F un F′ elementu palīdzību pietiek divi atbilstoši stari Ax, A′x′. Rotācijas leņķis φ ir leņķis (Ax, A′x′) un caur centru O iet trīs līnijas: AA′ vidusperpendikulis, trīsstūrim ABA' apvilktais riņķis (B ir Ax un A'x' krustpunkts), jo (zīm. 3.)

$$\varphi = \sphericalangle (Ax, A'x') = \sphericalangle (OA, OA'),$$

un viena no Ax un A'x' veidoto leņķu bisektrisēm. Tā kā figūrām (O, Ax), (O, A'x') ir jābūt kongruentām, O jāatrodas taī pašā pusē attiecībā pret abu staru atbilstošiem virzieniem. O tā tad atradīsies nevis uz bisektrises zBz', kas iet starp atbilstošiem virzieniem Ax, A'x', bet gan uz otrās bisektrises yBy'. Ja tikai stari Ax un A'x' nav parallēli un vienādi vērsti, vienmēr atrodams viens un tikai viens rotācijas centrs, ap kuŗu griežot staru Ax, var likt tam sakrist ar A'x'.

Atrisinot ģeometrijas uzdevumus, rotācijas bieži lietojamas kopā ar homotēcijām, kāpēc attiecīgā tipa uzdevumus mēs aplūkosim vēlāk.

Rotācijas definīcijai viegli dot dažus vispārinājumus. Ja mēs centru O attālinam kādā virzienā, liekot leņķim reizē dilt, tā kā izteiksme $2OA\sin\frac{\varphi}{2}$, kas izteic atstatumu AA', tiecas pret kādu galīgu robežvērtību, rotācija aizvien mazāk atšķiras no translācijas AA' un, punktam O neaprobežoti attālinoties, ar to sakritīs. Šis apstāklis arī norāda, kāpēc diviem parallēliem un vienādi vērstiem stariem nevar likt sakrist ar rotācijas palīdzību, bet gan izlietājot translāciju. Katru pārvietojumu plāksnē tā tad var izdarīt ar rotācijas vai translācijas palīdzību. Ja nu mēs aplūkojam kādu figūru, kas kustas plāksnē, divos ļoti tuvos stāvokļos F un F', viegli saredzams, ka katra kustība plāksnē ir sadalāma elementārās kustībās — acumirklīgās rotācijās vai translācijās. Šādā ceļā mēs nonākam pie kinemātikas teorēmas par acumirklīgās rotācijas centru. Tā, no vienas puses, var dot labu priekšstatu par acumirklīgo kustību, bet no otras — ērtu līdzekli tīri ģeometriskā ceļā pētīt dažādas trajektorijas.

Ja rotācijas leņķis ir π, attiecīgo transformāciju sauc par *simmetriju attiecībā pret centru*. Simmetrija ir definējama arī vienkāršāki: O ir viduspunkts katram atbilstošu punktu pārim. Citiem vārdiem, punkta A simmetriskais A' atrodas uz taisnes AO, pie kam $\overline{AO} = \overline{OA'}$.

Simmetrija, līdzīgi translācijai, taisnes pārvērš parallēlās taisnēs, bet maina to virzienu.

Uzskatot A' kā izejas figūras F sastāvdaļu, tā simmetriskais ir A Šo faktu izteic, simmetriju apzīmējot par *involutīvu* transformāciju. Ir skaidrs, ka translācija un vispārīgā rotācija nav involutīvas.

Simmetrija ir sekmīgi izlietājama uzdevumos, kur dots kāda meklējama nogriežņa viduspunkts un līnijas, uz kuŗām jāatrodas tā gala punktiem.

Atrisināsim vienu šādu uzdevumu: konstruēt četrstūri ABCD, kam dotas stāvoklī virsotnes B un D, diagonāles AC viduspunkts O un leņķi A un C (zīm. 4). A un C tā tad respektīvi atrodas uz lokiem BED un BFD, ko mēs mākam konstruēt. Tā kā O ir AC viduspunkts, A simmetriskais pret O sakritīs ar C. C tā tad atrodas arī uz loka BED simmetriskā loka B'E'D' attiecībā pret O. Kā redzams, uzdevuma konstrukcija ir diezgan vienkārša. Drusku gaŗāka, bet arī ne visai grūta ir diskusija, lai noteiktu gadījumus, kad uzdevumam ir 0, 1, 2 vai bezgalīgi daudz atrisinājumu, jo ir jānoteic tikai loku BFD un B'E'D' krustošanās. Turpretī atrisinot šo uzdevumu ar analītiskās ģeometrijas palīdzību, kā viegli redzams, aplēsumi būs visai sarežģīti.

Ir iespējams vēl otrs simmetrijas veids, proti *simmetrija pret asi*. Tās vispārīgā definīcija ir šāda: ir dota simmetrijas ass (D) un virziens (u) (zīm. 5). Punkta A simmetrisko dabū velkot parallēli virzienam (u) caur A, kas šķeļ asi punktā M, un atliekot uz šīs parallēles $\overline{MA'} = \overline{AM}$.

Aplūkojamo transformāciju starpā šī ir pirmā, kas gan taisnes pārvērš taisnēs, bet vispārīgajā gadījumā uzglabā tikai tos gaŗumus, kas ir parallēli asij vai virzienam. To viegli redzēt, ievērojot, ka katra trijstūŗa malas ir simmetriskas attiecībā pret to ietverto mediānu parallēli trešai malai. Arī leņķa un tā simmetriskā lielumi ir dažādi, pie kam leņķu un vispār figūru orientācija pārvēršas pretējā.

Bieži par simmetriju pret asi mēdz saukt augšminētās transformācijas speciālo gadījumu, kur simmetrijas virziens ir ortogonāls asij. Šī speciālā simmetrija uzglabā kā gaŗumus, tā leņķus. Tomēr tā nav pārvietojums plāksnē, jo katras figūras F simmetriskā F′ ir gan kongruenta ar F, bet pretēji orientēta. Lai F′ liktu sakrist ar F, tā ir jāizceļ no plāksnes ārā un jāatliek apgriezta atpakaļ.

Simmetrija pret asi būs noderīga analogu uzdevumu atrisināšanai, kā simmetrija pret centru. Bez tam visāda veida simmetrijas var palīdzēt pētīt un padarīt uzskatāmas dažas figūras (it īpaši telpā), kam ir simmetrijas asis vai centrs, t. i. kas sakrīt ar savu simmetrisko figūru attiecībā pret šīm asīm vai centru. Starp citu pastāv visai vienkāršas sakarības starp šādu figūru simmetrijas elementiem: asīm un centru. Beidzot simmetrijas elementiem ir nozīme statikā, piemēram smaguma centra noteikšanā.

H o m o t ē c i j a ir bieži un izdevīgi izlietājama transformācija. To definē šādi: dots homotēcijas centrs un homotēcijas attiecība k (patvaļīgs, pozitīvs vai negātīvs skaitlis). Punkta A homotētiskais A′ atrodas uz taisnes OA, pie kam (zīm. 6)

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = k.$$

Viegli redzēt, ka homotēcija taisnes pārvērš parallēlās taisnēs, pie kam leņķi patur savu lielumu un orientāciju, bet visi atstatumi tiek pareizināti ar k. Katra figūra pārvēršas tai līdzīgā figūrā. Ja k = — 1, attiecīgā homotēcija ir simmetrija ar centru O.

Gan viena pati, gan kopā ar rotāciju, homotēcija izlietājama daudzos gadījumos. Vispirms tā ietveŗ sevī visu līdzīgo figūru teoriju, it īpaši teorēmas par leņķa, trijstūŗa malu, vai arī staru šķipsnas šķelšanu ar parallēlām taisnēm.

Ja ir dotas divas līdzīgas figūras līdzīgā stāvoklī, t. i. abas ir orientētas taī pašā riņķošanas virzienā un viens atbilstošu malu pāris ir parallēls, vienmēr var atrast homotēcijas centru O, kas ļauj vienu figūru pārvērst otrā. Tā, piemēram, visas taisnes, kas savieno atbilstošus punktus abās figūrās, iet caur O. Ja turpretī vienai figūrai F ir simmetrijas centrs C, atbilstošais punkts C′ būs F′ simmetrijas centrs un F un F′ ir divi homotēcijas centri O un O_1, kas iekšēji un ārēji sadala nogriezni CC′ abu figūru līdzības attiecībā.

It īpaši katriem diviem dotiem riņķiem ar dažādiem radijiem ir divi homotēcijas centri O un O_1, pie kam kopējās tangentes, ja tādas ir, iet vai nu caur O vai O_1. Šis fakts starp citu lielā mērā atvieglina uzdevumu ar analītiskās ģeometrijas palīdzību vilkt kopējās pieskares diviem patvaļīgi dotiem riņķiem. Ja mēs turpretī neizmantojam šo apstākli, bet mēģinam tieši atrisināt uzdevumu, vispārīgā gadījumā mēs nonākam pie pilna ceturtās pakāpes nolīdzinājuma, kuŗa atrisināšana prasa gaŗus un sarežģītus aplēsumus.

Ja doti 3 riņķi ar centriem C_1, C_2, C_3, tos ik pa diviem ņemot dabūjam 6 homotēcijas centrus, kas, kā to viegli pierādīt, ik pa trim atrodas uz 4 taisnēm, tā saucamajām h o m o t ē c i j a s a s ī m. Šīs asis izveido pilnīgu četrmali, pie kam doto riņķu centru līnijas ir četrmaļa diagonāles. Kā redzams (zīm. 7) šī speciālā pilnīgā četrmaļa katras divas diagonāles trešo sadala harmoniski. Aplūkojamai konfigurācijai ir daudzas vienkārši pierādamas īpašības. Tā, piemēram, riņķu radiji ir proporcionāli to centru atstatumiem no homotēcijas asīm; ja viens riņķis pieskaŗas kādai asij, respektīvi to šķeļ, arī abi pārējie tai pieskaŗas, respektīvi to šķeļ.

Ja mums ir dots kāds patvaļīgs pilnīgs četrmalis, ir iespējams konstruēt aplūkoto figūru un tādā kārtā pierādīt, ka teorēma par četrmaļa diagonālēm ir vienmēr pareiza. Šis paņēmiens gan ir visai mākslots, bet par to tas izlietā tikai elementārus līdzekļus, nevis transversāļu vai projektīvās staru šķipsnas īpašības.

Konstrukcijas uzdevumos homotēcija plaši izlietājama gadījumos, kur meklējamai figūrai zināms viens gaŗums, bet pārējie dotie elementi ir leņķi vai attiecības. Ja, piemēram, jākonstruē trijstūris, kam doti divi leņķi un kaut kādu divu punktu atstatums m, mēs konstruējam trijstūri, kam ir dotie leņķi — tas būs līdzīgs meklētajam. Attiecīgo divu punktu atstatums šai trijstūrī būs m′. Pietiks izdarīt homotēciju ar patvaļīgu centru (to bieži ērti novietot vienā no palīgtrijstūŗa virsotnēm) un ar attiecību $k = \frac{m}{m'}$, lai dabūtu meklējamo trijstūri. Tāpat homotēcija lietājama visur tur, kur dotā leņķī jāievelk dotai figūrai līdzīga figūra, kam uzlikts vēl kāds noteikums. Šāda tipa uzdevumi būtu:

konstruēt riņķi, kas iet caur dotu punktu un pieskaŗas 2 taisnēm, dotā trijstūrī vai riņķa sektorā ievilkt trijstūri, kā malas ietu dotos virzienos, u. t. t.

Kopā ar rotāciju homotēcija lietājama konstrukcijas uzdevumos, kur dots kāds meklējamās figūras punkts un leņķi, zem kādiem no tā redzami nogriežņi, kuŗu gala punktiem jāpilda vēl citi noteikumi. Paraugam aplūkosim šādu uzdevumu: dots punkts A un divas taisnes D, D_1. Jākonstruē dotam trijstūrim $\alpha\beta\gamma$ līdzīgs trijstūris ABC, pie kam B jāatrodas uz D un C uz D_1 (zīm. 8).

Ja ABC ir meklētais trijstūris, tad

$$\sphericalangle (AB, AC) = \sphericalangle (\alpha\beta, \alpha\gamma)$$

un

$$\frac{AC}{AB} = \frac{\alpha\gamma}{\alpha\beta},$$

kas izsaka, ka C atrodas arī uz taisnes D′, ko mēs dabūjam pagriežot D ap A par leņķi ($\alpha\beta$, $\alpha\gamma$) un konstruējot šai pagrieztai taisnei homotētisko attiecībā $\frac{\alpha\gamma}{\alpha\beta}$ pret centru A. C tā tad būs D_1 un D′ krustpunkts. Arī diskusija ir visai vienkārša: jāizteic tikai, ka D′ šķeļ D_1.

Uzdevumu var protams atrisināt arī citādā veidā, piemēram konstruējot punktu E, no kuŗa trijstūŗa $\alpha\beta\gamma$ malas saredzamas zem tiem pašiem leņķiem, kā trijstūŗa ABC malas no D un D_1 krustpunkta E, kas dod četrstūrim ABEC līdzīgu četrstūri $\alpha\beta\varepsilon\gamma$. Šī konstrukcija tomēr sarežģītāka, tā izlietā uzdevuma būtībai svešo punktu E un arī diskusija ir sarežģītāka, jo jāizsaka divu loku krustošanās un atsevišķi jāaplūko gadījumi, kad E ir trijstūŗa $\alpha\beta\gamma$ iekšpusē vai ārpusē.

Visas aplūkotās transformācijas faktiski nepārsniedz vidusskolas plānimetrijas programmu, bet gan tikai sistematizē dažus spriedumus un konstrukcijas. Tāpēc arī tos var izlietāt pat nepārkāpjot programmas teksta burtu — pietiek katrā atsevišķā gadījumā aprakstīt izdaramos pārveidojumus vai konstrukcijas un pierādīt no tiem izrietošās vajadzīgās īpašības.

Tagad aplūkosim transformāciju, kas vairs nav ietilpināma vidusskolas programmā, bet ir ļoti noderīgs ierocis dažādiem pētījumiem ģeometrijā — proti i n v e r s i j u. Tai iespējams dot dažādas definīcijas; vienkārša un vispārīga ir šāda: dots inversijas centrs jeb pols O un inversijas pakāpe εa^2, kur $\varepsilon = +1$ vai -1 un a ir dots gaŗums. Punkta A inversais A′ atrodas uz OA, pie kam

$$\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \varepsilon a^2$$

Atkarībā no ε zīmes runā par p o z i t ī v o i n v e r s i j u, kam $\varepsilon = +1$ un O atrodas nogriežņa AA′ ārpusē, un n e g a t ī v o i n v e r s i j u, kam $\varepsilon = -1$ un O ir starp A un A′. Augšējā sakarība rāda, ka inversija ir involutīva transformācija, jo A′ inversais ir A.

Ja kādu figūru pārveidojam ar divām dažādām inversijām, kam ir kopējs pols O, dabūtās figūras F′ un F″ ir homotētiskas. Tiešām, ja A ir kaut kāds F punkts un A′, respektīvi A″ tā inversais, attiecībā pret O, tad

$$\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \varepsilon_1 a_1^2$$

un

$$\overline{OA} \cdot \overline{OA''} = \varepsilon_2 a_2^2,$$

kas dod

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{AO''}} = \frac{\varepsilon_1 a_1^2}{\varepsilon_2 a_2^2} = \text{konst.}$$

Tieši šādā veidā mēs definējām homotēciju. Šis apstāklis rāda, ka kādu figūru pārveidojot ar pozitīvu vai negātīvu inversiju, dabūtās figūras principiāli neatšķiras.

Aplūkosim tagad dažas svarīgākās inversijas īpašības.

Divi pāŗi inversu punktu atrodas uz kopēja riņķa. Ja A, A′ un B, B′ ir šādi punkti, riņķis, kas iet caur A, A′ un B, šķels OB kādā punktā B″ (zīm. 9), pie kam

$$\overline{OB} \cdot \overline{OB''} = \overline{OA} \cdot \overline{OA'}$$

Bet tā kā $\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \varepsilon a^2 = \overline{OB} \cdot \overline{OB'}$, redzams, ka $\overline{OB'} = \overline{OB''}$ un B′ un B″ sakrīt. Bez tam vēl redzams, ka taisnes AB, A′ B′ ir antiparallēlas attiecībā pret leņķa AOB malām.

Ja tagad punktam B mēs liekam tuvoties A pa kādu līkni L, B' tuvosies A' virzīdamies pa inverso līkni L'. Taišņu AB un $A'B'$ robežstāvokļi ir līkņu L un L' tangentes AT un $A'T'$, kas būs antiparallēlas pret dubulto taisni OA, citiem vārdiem veidos ar to vienādus, bet pretēji orientētus leņķus (zīm. 10). Tas pats būs ar kuŗu katru citu līkni, kas iet caur A un tās inverso — tā tad inversija uzglabā leņķus, bet maina to orientāciju. It īpaši, ja divas līknes punktā A viena otrai pieskaŗas vai ir ortogonālas, tas pats notiks ar viņu inversām līknēm punktā A'.

Otra inversijas svarīgākā īpašība ir tā, ka tā riņķus, kas iet caur polu, pārvērš taisnēs, bet visus pārējos — atkal riņķos. Šo īpašību var daudzējādi pierādīt. Izvēlēsimies sekošu veidu, kas derīgs abiem gadījumiem. Dots kāds riņķis, kas neiet caur O (zīm. 11.). A un B lai ir tā diametra gala punkti, kas iet caur O, un M kaut kāds riņķa punkts. Attiecīgie inversie punkti būs A', B', M'. Tā kā taišņu pāŗi AM, $A'M'$ un BM, $B'M'$ ir antiparallēli attiecībā pret leņķa AOM malām, $A'M'$ veidos ar $B'M'$ tādu pat leņķi, kā AM ar BM. Tā kā šis pēdējais leņķis ir taisns, arī

$$\sphericalangle B'M'A' = \frac{\pi}{2}$$

un M' atrodas uz riņķa ar diametru $A'B'$. Ja M apraksta visu pirmo riņķi, M' apraksta visu otro riņķi, tā tad teorēmas viena puse ir pierādīta. Ja nu O sakrīt ar A, $\sphericalangle$ OMB un tam vienlielais $\sphericalangle\, O'B'M'$ top taisni. M' tā tad atrodas uz taisnei OB punktā B' vilktā perpendikula. Ja M apraksta visu riņķi, M' apraksta visu šo perpendikulu, tā tad caur polu ejoša riņķa inversā ir taisne. Redzams, ka arī otrādi, polu nesaturošas taisnes inversā figūra ir caur polu ejošs riņķis. Ja taisne turpretim iet caur polu, tā ir pati sava inversā. Viegli atrast dažādas ērtas konstrukcijas riņķa vai taisnes inversai figūrai.

No teiktā redzams, ka inversija var lielā mērā atvieglot uzdevumu atrisināšanu, kas saistīti ar riņķiem. Divus dotos riņķus iespējams vienmēr pārvērst vai nu taisnēs, ja tie šķeļas, vai arī koncentriskos riņķos. Tā, piemēram *Apollonija problēmai*: konstruēt riņķi, kas pieskaŗas trim dotiem riņķiem (kā to robežforma var būt arī taisnes vai punkti), vai pat šīs

problēmas vispārinājumam: konstruēt riņķi, kas zem dotiem leņķiem šķeļ trīs dotus riņķus, samērā vienkārši ir dodams vispārējais atrisinājums un arī diskutējams atrisinājumu skaits un iespējamība. Turpretī bez inversijas šo pašu uzdevumu atrisināšana ir stipri sarežģīta — ir jāaplūko dažādi speciāli gadījumi — un pilnīga diskusija praktiski gandrīz nemaz nav izdarāma.

Illustrācijas pēc aplūkosim *uzdevumu*: konstruēt riņķi, kas iet caur 2 dotiem punktiem A un B un pieskaŗas dotam riņķim (R) (zīm. 12.). Izdarot inversiju ar centru A un pakāpi vienādu ar A pakāpi pret riņķi (R), (R) būs pats sava inversā figūra, B dod viegli konstruējamo punktu B' un meklētais riņķis pārvēršas taisnē, kas iet caur B' un pieskaŗas (R). Šādas taisnes ir divas, un to pieskāršanās punkti T', T_1' ir meklējamā riņķa pieskāršanās punkta inversie. Izdarot vēl reiz to pašu inversiju, B' dod B; T' un T_1' inversie punkti T un T_1 ir tie, kur taisnes $T'A$, $T_1'A$ otrreiz šķeļ (R) un trijstūrim ATB respektīvi AT_1B apvilktais riņķis ir meklētais. Uzdevumam tā tad ir divi atrisinājumi, ja tikai B' atrodas ārpus (R). Viegli redzams, ka tas būs tad, un tikai tad, ja A un B ir vai nu abi (R) ārpusē, vai iekšpusē. Tāpat nerada grūtības daži atsevišķi gadījumi, kur taisne AB ir (R) tangente, vai arī viens no punktiem ir uz (R).

Aplūkoto uzdevumu, protams, ir iespējams atrisināt arī ar daudziem citādiem paņēmieniem. Var piemēram konstruēt punktu C, kur šķeļas (R) pieskares punktos T un T_1, jo velkot caur A un B kādu riņķi, kas šķeļ (R), to kopējā chorda krusto taisni AB punktā C, tomēr neviena cita konstrukcija nerodas tik dabīgā ceļā, kā minētā.

Arī dažādu *konfigurāciju* pētīšanā inversija dod lielas iespējamības. Tā, piemēram, viegli iespējams atrisināt šādu jautājumu: kādiem trijstūriem, kam malas ir taisnas vai riņķu loki, leņķu summa ir π? — Vispirms der trijstūŗi ar taisnām malām. Skaidrs, ka neder trijstūŗi, kam tikai viena mala ir riņķa loks. Ja tagad kādam trijstūrim divas malas ir loki, izdarām inversiju, centru ņemot šo loku tai krustpunktā M, kas nav virsotne. Lai inversais trijstūris, kam leņķi ir tie paši kā dotajam, nepiederētu pie iepriekš minētās kategorijas, arī trešai malai jātop par taisni, t. i. trešam riņķim jāiet caur M. No inversijas viedokļa var teikt, ka plāksnei ir viens vienīgs bezgala tāļš punkts — taisnes tad ir riņķi, kas iet caur šo punktu. Atbilde uzstādītam jautājumam, kā redzējām, ir šāda : lai riņķu loku veidotam trijstūrim leņķu summa būtu π, ir nepieciešami un pietiekoši, ka visiem trim riņķiem ir kopējs punkts.

Arī bezgalīgi daudzu riņķu saimes ērti pētamas ar inversiju. Riņķu saimi, kam ir divi kopēji punkti, tā atļauj pārvērst taišņu šķipsnā ; minētai saimei ortogonālo riņķu saime tad pārvēršas koncentrisku riņķu saimē. Tāpat arī telpā viegli aplūkojamas riņķu izveidotas figūras. Minēsim tikai to apstākli, ka Latvijas Universitātes šajā mācības gadā izsludināto sacensības darbu par Dipēna ciklidām ir iespējams ļoti pilnīgā veidā apstrādāt ar inversijas palīdzību, bez neviena aprēķina vai formulas, vienīgi izlietājot dažas diferenciālģeometrijas teorēmas Dipēna ciklīdu definīcijas pārveidošanai piemērotā veidā.

Aplūkotie gadījumi attiecas uz figūru formālām īpašībām, bet tie ne tālu neizsmeļ inversijas lietāšanas iespējamības. Tā var dot metriskas īpašības : piemēram pārveidojot taisnes punktu īpašību

$$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC},$$

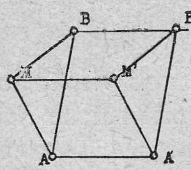
mēs dabūjam pirmo Ptolomeja teorēmu ievilktam četrstūrim. Līdzīgi dabūjama arī otrā Ptolomeja teorēma. Tad vēl inversija nemaina anharmonisko attiecību 4 riņķa, respektivi 4 taisnes punktiem (kā zināms, par anharmonisko attiecību četriem punktiem, kas atrodas uz riņķa, sauc to, kādā šajos punktos vilktas pieskares sadala patvaļīgu piekto pieskari).

Šajā pārskatā, kā redzams, ir gribēts vienīgi dot kādus ierosinājumus transformāciju izlietāšanai vidusskolu plānimetrijas kursā. Tāpēc arī galvenā vērība piegriezta to „praktiskai pusei", t. i. aplūkotas tikai dažas tieši izlietājamas pamatīpašības. Vienīgi inversijai doti drusku plašāki norādījumi izlietāšanas iespējamībām. Lai vairākkārt nepavairotu referāta apjomu, bija pilnīgi jāatmet pašu transformāciju pētīšana. Šī iemesla dēļ arī pats referāts sirgst ar metodes trūkumu, pret ko tas bija gribējis cīnīties. Viegli noprotams, ka arī pašas transformācijas var diezgan plaši izpētīt tik pat elementārā ceļā — var, piemēram, katrai atrast

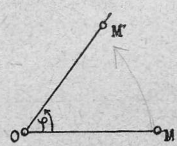
visus dubultpunktus, invariantas figūras un figūru saimes, parametru skaitu, noteikt, kādas transformācijas veido grupu un kādas nē, u. t. t.

Katrs skolotājs, protams, pats noteiks, vai viņš vispār atzīst par derīgu aplūkoto principu izlietāšanu savā mācībā un kādā mērā viņš to darīs. Ja varbūt šie ierosinājumi nebūtu piemērojami kārtējam klases darbam, tomēr ir jāpatur prātā, ka klase nav tikai amorfs kollektīvs, bet ka tajā ir arī topošas personības, nākošie Latvijas likteņa veidotāji. Ja nu kāds skolēns interesējas par matēmatiku, paverot tam plašākus apvārkšņus, kaut arī ārpus stundām, skolotājs viņam ne tikai sagādās prieku, bet arī dos svētīgu ierosinājumu patstāvīgam darbam, kas dienās var vaiņagoties ar lieliem panākumiem un palīdzēt mūsu tēviju celt saulītē pārējo kultūras tautu vidū.

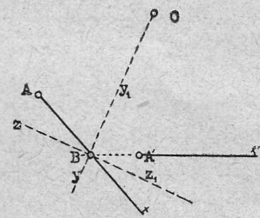
Zīmējumu tabula.



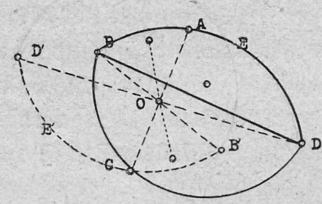
Zīm.1.



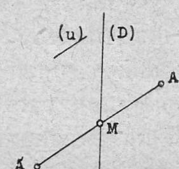
Zīm.2.



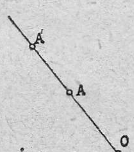
ZĪM.3.



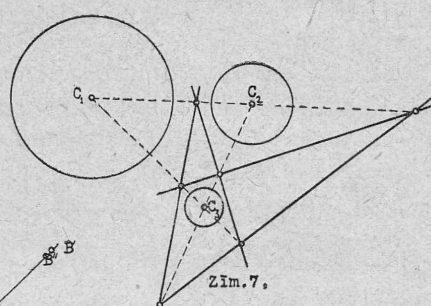
Zīm.4.



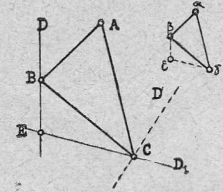
Zīm.5.



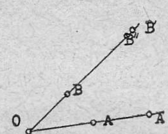
Zīm.6.



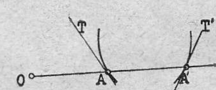
Zīm.7.



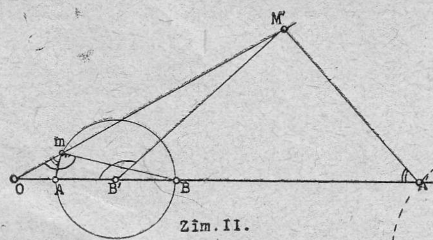
Zīm.8.



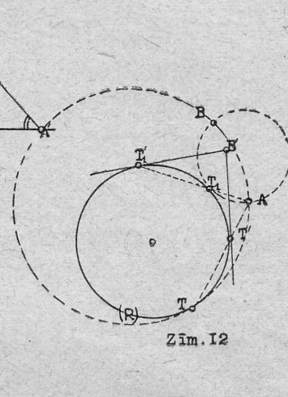
Zīm.9.



Zīm.IO.



Zīm.II.



Zīm.I2

492929

1,–