ЛАТВИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П. СТУЧКИ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ, ТОМ XX, ВЫПУСК 3, 1958 ГОДА

ОБ ОДНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ

Э. Я. ГРИНБЕРГ

В евклидовом пространстве R_n n измерений рассмотрим интеграл

$$\int f\,ds,$$

взятый вдоль некоторой действительной кривой (M) с длиной дуги s; f — данная функция кривизн k_i $(i = 1,2,\ldots, n-1)$ кривой и их производных по s до порядка r включительно. Требуется определить экстремальные кривые, для которых первая вариация интеграла равна нулю.

Для кривых в R_3 известны следующие результаты. Радон [1] установил, что при $f = f(k_1)$ конечные уравнения экстремалей получаются посредством квадратур. Кастро-Бжезицкий [2] показал, что при

$$f = f\left(k_1, \frac{dk_1}{ds}\right)$$

конечные уравнения получаются посредством квадратур, если найдены натуральные уравнения кривой.

В настоящей работе получены общие выражения для вариации всех k_i и их производных (§ 1); получены уравнения Эйлера-Лагранжа (§ 2); приведены некоторые соображения по интегрированию этих уравнений и показано, что результаты Кастро-Бжезицкого имеют место для любого f в R_3, R_4 и R_5 (§ 3). Наконец, рассмотрены некоторые частные случаи в R_3, причем результат Радона обобщается на функции

$$f = f(k_1, k_2),$$

удовлетворяющие некоторому дифференциальному уравнению.

В дальнейшем предполагается, что все производные, встречающиеся в расчетах, существуют и непрерывны. Производные по s обозначены штрихами и показателями в скобках; суммирования всегда указаны. Краевые условия считаются удовлетворенными.

§ 1.

ВАРИАЦИИ КРИВИЗН И ИХ ПРОИЗВОДНЫХ

Пусть $M(s)$ — радиус вектор рассматриваемой кривой (M), t_i $(i = 1, \ldots, n)$ — орты сопровождающего ортонормированного репера, t_{ij} $(j = 1, \ldots, n)$ — координаты t_i в некоторой неподвижной ортогональной системе координат.

Посредством ортогональной матрицы

$$T = \|t_{ij}\|_1^n$$

и кососимметрической матрицы Френе

$$K = \|k_{ij}\|_1^n,$$

где

$$k_{ij} = k_j \delta_{i,j-1} - k_{i-1} \delta_{i,j+1}, \; k_o = k_n = 0$$

и δ_{ij} — символ Кронекера, формулы Френе можно записать в виде

$$T' = KT. \tag{1}$$

Предполагается, что все k_i $(i = 1, \ldots, n-1)$ отличны от нуля.

Радиус вектор варьированной кривой (N) берем в виде

$$\mathrm{N} = \mathrm{M}(s) + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} u_i \mathrm{t}_i, \tag{2}$$

где ε — параметр, u_i — произвольные функции s.

Интересующие нас величины, характеризующие кривую (N), в дальнейшем разлагаются по возрастающим степеням ε, причем отбрасываются степени выше первой. Коэффициент при ε будем называть вариацией соответствующей величины и обозначать символом δ.

Дифференцируя (2) по s, имеем

$$\frac{dN}{ds} = [1 + \varepsilon(u_1' - k_1 u_2)] \, \mathrm{t}_1 + \varepsilon \sum_{i=2}^{n} (k_{i-1} u_{i-1} + u_i' - k_i \, u_{i+1}) \, \mathrm{t}_i. \tag{3}$$

Модуль этого вектора дает производную дуги σ кривой (N) по s:

$$\frac{d\sigma}{ds} = 1 + \varepsilon a, \tag{4}$$

где

$$a = u_1' - k_1 u_2, \tag{5}$$

а единичный вектор p_1 касательной к (N) равен

$$\frac{d\,\mathrm{N}}{d\sigma} = \mathrm{t}_1 + \varepsilon \sum_{i=2}^{n} a_{1i} \mathrm{t}_i,$$

где

$$a_{1i} = k_{i-1} u_{i-1} + u_i' - k_i u_{i+1}, \; i = 2, 3, \ldots, n. \tag{6}$$

Пусть p_i — орты сопровождающего ортонормированного репера кривой (N), а

$$P = \| p_{ij} \|_1^n$$

матрица их координат. Последняя связана с матрицей T соотношением вида

$$P = T + \varepsilon \, AT. \tag{7}$$

Ввиду ортогональности P и T, матрица $A = \|a_{ij}\|_1^n$ — кососимметрическая. Соотношения (6) дают элементы первой строки (и первого столбца) матрицы A. Остальные элементы A, как и вариации $\varkappa_i$ кривизн k_i, получаются следующим образом: для кривой (N) матрицей Френе является

$$K + \varepsilon L,$$

где кососимметрическая матрица $L = \|\varkappa_{ij}\|_1^n$ составлена из величин $\varkappa_i$ таким же образом, как K составлена из k_i:

$$\varkappa_{ij} = \varkappa_i \delta_{i,j-1} - \varkappa_{i-1} \delta_{i,j+1}, \; \varkappa_o = \varkappa_n = 0.$$

Следовательно для P имеет место соотношение

$$\frac{dP}{d\sigma} = (K + \varepsilon L)\, P.$$

Подставляя для P выражение (7), учитывая (1) и приравнивая коэффициенты при ε, получаем

$$L + aK = A' + AK - KA. \tag{8}$$

Так как в обеих частях уравнения (8) фигурируют кососимметрические матрицы, оно эквивалентно системе $\frac{n(n-1)}{2}$ скалярных независимых уравнений, получаемых приравниванием элементов, лежащих над главной диагональю:

$$\varkappa_i + ak_i = a'_{i,i+1} + k_{i-1}a_{i-1,i+1} - k_{i+1}a_{i,i+2}, \tag{9}$$

где $i = 1, 2, \ldots, n-1$, и

$$k_i a_{i+1,j} = a'_{ij} + k_{i-1}a_{i-1,j} + k_{j-1}a_{i,j-1} - k_j a_{i,j+1}, \tag{10}$$

где

$$i = 1, 2 \ldots, n-2; \; j = i+2, i+3, \ldots, n.$$

Уравнения (10) позволяют определить все элементы $i+1$-ой строки матрицы A посредством элементов предыдущих строк и кривизн. Так как (6) определяет все a_{1j}, имеется возможность выразить все a_{ij} — а с помощью (9) также и все $\varkappa_i$ — как функции кривизн k_i, вариации u_i и производных этих величин по s. Явные выражения, получаемые таким путем, в дальнейшем однако не потребуются.

Если известны вариации

$$\delta(ds) = a\, ds,$$

$$\delta(k_i) = \varkappa_i,$$

то используя соотношение (φ — произвольная функция от s)

$$\delta(\varphi') = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{d(\varphi + \varepsilon\delta\varphi)}{(1+\varepsilon a)ds} - \frac{d\varphi}{ds}\right),$$

т. е.

$$\delta(\varphi') = (\delta\varphi)' - a\varphi', \tag{11}$$

имеем

$$\delta(k_i') = \varkappa_i' - ak_i',$$

и, повторно применяя (11), для производных порядка h получаем

$$\delta(k_i^{(h)}) = \varkappa_i^{(h)} - (ak_i')^{(h-1)} - (ak_i'')^{(h-2)} - \ldots - ak_i^{(h)}, \tag{12}$$

или в более сжатой записи

$$\delta(k_i^{(h)}) = \varkappa_i^{(h)} - \sum_{j=0}^{h-1} \binom{j+1}{h} a^{(j)} k_i^{(h-j)},$$

где $a^{(0)} = a$, $a^{(j)} = \frac{d^j a}{ds^j}$.

§ 2.

УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА-ЛАГРАНЖА

Для интеграла вдоль кривой (M) в R_n

$$J = \int f\,ds,$$

где f — данная функция от k_i $(i = 1, \ldots, n-1)$ и их производных по s до порядка r включительно, вариация равна

$$\delta J = \int \left[af + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{h=o}^{r} \frac{\partial f}{\partial k_i^{(h)}} \;\delta\,(k_i^{(h)}) \right] ds.$$

Подставляя выражения (12) для вариаций производных от кривизн и устраняя интегрированием по частям из подынтегральной функции производные от $\varkappa_i$ и a, эту функцию получаем в виде

$$F = ab + \sum_{i=1}^{n-1} (\varkappa_i + ak_i)\, b_{i,i+1}, \tag{13}$$

где

$$b_{i,i+1} = \sum_{h=o}^{r} (-1)^h f_{ih}^h, \tag{14}$$

$$b = f - \sum_{i=1}^{n-1} \left[k_i b_{i,i+1} + \sum_{h=1}^{r} k_i^{(h)} \sum_{g=o}^{r-h} (-1)^g f_{i,h+g}^g \right], \tag{15}$$

и положено

$$f_{ih}^g = \frac{d^g}{ds^g} \left[\frac{\partial f}{\partial k_i^{(h)}} \right].$$

Дальнейшее преобразование F интегрированиями по частям сводится к выделению из F полных производных по s от подходящих функций с целью удаления всех производных от первоначальных вариаций u_i. В результате получится линейная однородная форма от всех u_i. Приравнивание всех коэффициентов этой формы нулю даст искомые уравнения Эйлера-Лагранжа.

Для выполнения указанного преобразования рассмотрим матрицу $B = \|b_{ij}\|_1^n$, определяемую следующими свойствами:

B — кососимметрическая; элементы первой наддиагонали имеют значения (14); имеет место соотношение

$$B' + BK - KB = -G, \tag{16}$$

где $G = \|g_{ij}\|_1^n$ — матрица, в которой от нуля отличны только элементы

$$g_{1j} = g_j;\; g_{j1} = -g_j \quad (j = 2, 3, \ldots, n).$$

Этими свойствами однозначно определяются матрицы B и G. Действительно, имеем $\frac{n\,(n-1)}{2}$ скалярных уравнений, выражающих равенство элементов кососимметрических матриц обеих частей (16):

$$b'_{ij} + k_{i-1} b_{i-1,j} - k_i b_{i+1,j} + k_{j-1} b_{i,j-1} - k_j b_{i,j+1} = -\delta_{1i} g_j,$$

где

$$i = 1, 2, \ldots, n-1; \; j = i+1, i+2, \ldots, n.$$

С учетом

$$b_{ii} = 0, \; k_n = 0,$$

получаем следующий порядок определения искомых величин, исходя из известных элементов (14) первой наддиагонали матрицы B.

$$\left\{\begin{array}{l} k_{n-2}\, b_{n-2,n} = -\, b'_{n-1,n}, \\ k_{i-1}\, b_{i-1,i+1} = -\, b'_{i,i+1} + k_{i+1}\, b_{i,i+2} \\ (i = n-2,\; n-3, \ldots, 2), \\ k_i b_{ij} = -\, b'_{i+1,j} + k_{i+1}\, b_{i+2,j} - k_{j-1} b_{i+1,j-1} + k_j b_{i+1,\,j+1} \\ (i = n-3,\; n-4, \ldots, 1;\; j = i+3,\; i+4, \ldots, n). \end{array}\right. \tag{17}$$

Наконец

$$\left\{\begin{array}{l} g_2 = -\, b'_{12} + k_2\, b_{13}, \\ g_j = -\, b'_{1j} + k_1\, b_{2j} - k_{j-1}\, b_{1,j-1} + k_j\, b_{1,j+1} \\ (j = 3,\; 4, \ldots, n). \end{array}\right. \tag{18}$$

При $j = n$ отпадают последние члены правых частей, содержащие множитель $k_n = 0$.

Определим скалярное произведение двух матриц, напр. A и B посредством *соотношения*

$$A \times B = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{ij}.$$

Вследствие линейности и однородности по отношению к элементам каждого множителя это произведение аддитивно по отношению к каждому множителю. Поэтому дифференцированием получаем

$$(A \times B)' = A' \times B + A \times B'. \tag{19}$$

Используя явное выражение для скалярного произведения легко проверить, что вследствие кососимметричности K

$$\begin{aligned} (AK) \times B + A \times (BK) &= 0, \\ (KA) \times B + A \times (KB) &= 0, \end{aligned} \tag{20}$$

где скобки содержат обычные произведения матриц. Подставляя в правую часть (19) значения производных A' и B' из соотношений (8) и (16) и учитывая дистрибутивность скалярного произведения и соотношения (20), получаем

$$(L + aK) \times B = (A \times B)' + A \times G,$$

или

$$\sum_{i=1}^{n-1} (\varkappa_i + a k_i)\; b_{i,i+1} = (A \times B)' + \sum_{i=2}^{n} a_{1i}\, g_i.$$

Тогда (13) дает

$$F = (A \times B)' + ab + \sum_{i=2}^{n} a_{1i} g_i,$$

или, с учетом значений (5) и (6) и полагая

$$g_1 = b,$$

$$F = (A \times B)' + \sum_{i=1}^{n} (u_i g_i)' - \sum_{i=1}^{n} u_i (g_i' + k_{i-1} g_{i-1} - k_i g_{i+1}).$$

Как было указано выше, уравнения Эйлера-Лагранжа получаются приравниванием нулю коэффициентов отдельных u_i в последней сумме правой части, что дает

$$\begin{cases} g_1' = k_1 g_2, \\ g_i' = -k_{i-1} g_{i-1} + k_i g_{i+1} \\ (i = 2, 3, \ldots, n-1), \\ g_n' = -k_{n-1} g_{n-1}. \end{cases} \tag{21}$$

Так как u_1 характеризует перемещение вдоль кривой (M), которое не может создавать вариации интеграла J, первое из уравнений (21) должно выполняться тождественно, что и имеет место. Действительно, дифференцируя значение (15) для $g_1 = b$, получаем

$$g_1' = -\sum_{i=1}^{n-1} k_i b_{i,i+1}'.$$

С другой стороны, умножая те из уравнений (17) и (18), которые содержат $b_{i,i+1}'$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ на соответствующее k_i и складывая, после упрощения получаем

$$k_1 g_2 = -\sum_{i=1}^{n-1} k_i b_{i,i+1}' = g_1'.$$

Остающиеся $n-1$ уравнения (21) образуют систему Эйлера-Лагранжа, определяющую $n-1$ искомые кривизны экстремалей.

§ 3.

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ УРАВНЕНИЙ ПРОБЛЕМЫ

Предположим, что имеется решение системы (21); тогда известен комплект величин k_i, b_{ij} и g_i, удовлетворяющий совокупности уравнений (17), (18) и (21). Рассматривая нахождение конечных уравнений кривой (M), мы одновременно найдем и первые интегралы системы уравнений (21). В эти выражения будут входить k_i, b_{ij} и g_i, однако их значения не зависят от s.

Интегрирование натуральных уравнений кривой в R_n, кривизны k_1,

$k_2, \ldots, k_{n-1}$ которой известны, сводится к нахождению n независимых систем решений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ уравнений Френе

$$x'_i = -k_{i-1} x_{i-1} + k_i x_{i+1} \tag{22}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n;\ k_0 = k_n = 0).$$

Если посредством такой системы величин x_i образовать вектор

$$\mathrm{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathrm{t}_i, \tag{23}$$

то этот вектор будет неподвижен, т. е. его производная будет равна нулю. Обратно, если для неподвижного ненулевого вектора x известно представление (23), то x_i — система решений уравнений Френе (22). $x_1, x_2, \ldots, x_n$ можем называть относительными координатами вектора x, причем его длина — первый интеграл системы (22). Таким неподвижным вектором является g.

Исходя из n неподвижных векторов, соответствующих n линейно независимым решениям системы (22), можем построить ортонормированную систему неподвижных векторов Z_i. Первые координаты ξ_{i1} этих векторов дают также и разложение t_1 по Z_i:

$$\mathrm{t}_1 = \sum_{i=1}^{n} \xi_{i1} \mathrm{Z}_i,$$

и интегрированием получаем радиус вектор кривой (M) в системе Z_i.

Если известны функции x_i, при которых вектор (23) не неподвижен, но находится в некоторой неподвижной плоскости (π), то одной квадратурой мы получаем два линейно независимых неподвижных вектора в этой плоскости.

Вектор x можно нормировать. В плоскости (π) находим орт y, ортогональный к x. Тогда имеют место соотношения

$$\mathrm{x}' = \alpha \mathrm{y},$$
$$\mathrm{y}' = -\alpha \mathrm{x},$$

где $\alpha = \mathrm{x}'\mathrm{y}$ известно. Вычисляем функцию

$$\varphi = \varphi_0 - \int_{s_0}^{s} \alpha ds,$$

где $\varphi_0 = \mathrm{const}$. Тогда векторы

$$\mathrm{z}_1 = \mathrm{x} \cos \varphi + \mathrm{y} \sin \varphi,$$
$$\mathrm{z}_2 = -\mathrm{x} \sin \varphi + \mathrm{y} \cos \varphi$$

неподвижны и ортонормированы.

Для нахождения векторов, которые неподвижны или лежат в неподвижной плоскости, можно использовать „неподвижные" тензоры, т. е. тензоры с постоянными координатами в неподвижной системе координат. Векторы и плоскости, однозначно определенные таким тензором, будут также неподвижными. Если же известны относительные координаты тензора, т. е. его координаты по отношению к ортогональному реперу искомой кривой, то по ним можно определить и относительные координаты интересующего нас вектора, следовательно получить одну или две системы решений (22).

Рассматривая тензор второго порядка B, получаемый общим произведением двух неподвижных векторов, можем получить условия „неподвижности" или формулы Френе для тензора. В матричной записи эти формулы имеют вид (16), где $G = 0$, а в координатной записи — вид последнего уравнения (17), взятого для всех i, j.

Очевидно матрица или тензор B, рассмотренный в предыдущем параграфе, не неподвижен, так как G должно отличаться от нуля. Однако комбинируя тензор B с некоторым постоянным вектором x путем умножения и альтернирования, в результате получим неподвижный тензор третьего порядка D, если использованная операция, примененная к тензору G, даст нулевой тензор. Действительно, связь тензоров D' и D будет такой же, какая получилась бы для комбинации неподвижного тензора с вектором x, следовательно будут удовлетворены соответствующие формулы Френе.

В качестве x берем g, альтернируем по всем индексам. Отбрасывая знаменатель 3, для элементов D получаем выражения

$$d_{ijk} = g_i b_{jk} + g_j b_{ki} + g_k b_{ij}, \tag{24}$$

и тензор G при этом превращается в нулевой тензор.

Полученный кососимметрический тензор D в общем случае не нулевой.

Покажем, что в R_3, R_4, R_5 при известном решении системы (21) определение кривой (M) завершается квадратурами.

Кривая в R_3.

Первые интегралы (21) — длина вектора g и псевдоскаляр—единственная существенная координата D. После нормирования g в качестве векторов x и y, лежащих в неподвижной плоскости, перпендикулярной к g, можно взять

$$\mathrm{x} = (g_2^2 + g_3^2)^{-\frac{1}{2}} (g_3 \mathrm{t}_2 - g_2 \mathrm{t}_3),$$

$$\mathrm{y} = (g_2^2 + g_3^2)^{-\frac{1}{2}} [-(g_2^2 + g_3^2) \mathrm{t}_1 + g_1 g_2 \mathrm{t}_2 + g_1 g_3 \mathrm{t}_3].$$

Тогда

$$\alpha = \frac{k_1 g_3}{g_2^2 + g_3^2}$$

и одной квадратурой получаем ортонормированную систему неподвижных векторов g, z_1, z_2.

Кривая в R_4.

Тензор V, дополнительный к D [ср. 3] — первого порядка, следовательно эквивалентен псевдовектору. Поэтому неподвижным будет вектор v с координатами

$$v_h = g_i b_{jk} + g_j b_{ki} + g_k b_{ij},$$

где h, i, j, k — четная пермутация индексов 1, 2, 3, 4. В общем случае v не нулевой вектор; его длина — второй первый интеграл.

Очевидно v и g ортогональны. Любой вектор x, одновременно перпендикулярный к v и к g, параллелен неподвижной плоскости и, согласно вышеизложенному позволяет определить два неподвижных ортогональных вектора z_1 и z_2. Последние, совместно с нормированными g и v, дают неподвижный репер.

Как и в случае R_3, определение t_1 требует одной квадратуры.

Кривая в R_5.

Имеем неподвижный кососимметрический тензор V второго порядка, дополнительный к D, с координатами

$$v_{hm} = g_i b_{jk} + g_j b_{ki} + g_k b_{ij},$$

где h, m, i, j, k — четная пермутация индексов 1, 2, 3, 4, 5. Вектор g — характеристический вектор этого тензора, соответствующий нулевому характеристическому числу. Остальные характеристические числа чисто мнимы и попарно сопряжены, в общем случае различны и отличны от нуля. Каждой паре сопряженных характеристических чисел соответствует некоторая двухмерная плоскость, причем эти плоскости перпендикулярны как между собой, так и к вектору g [ср. 4]. Определяя в каждой из этих плоскостей пару неподвижных ортонормированных векторов, мы посредством двух квадратур получаем представление t_1 в неподвижной системе.

Произведение тензора v_{hm} на себя, альтернированное по трем индексам, дает антисимметрический тензор четвертого порядка, следовательно и псевдовектор. Однако последний коллинеарен с g, так что получается не новый неподвижный вектор, а только первый интеграл — отношение координат обоих векторов. Оно дается выражением

$$\nu = \frac{v_{12}v_{34} - v_{13}v_{24} + v_{14}v_{23}}{g_5},$$

или выражениями, получаемыми любой четной перестановкой индексов в правой части. Помимо длины g, имеем еще два первых интеграла, например, коэффициенты характеристического уравнения. Коэффициент при λ^3 равен $\sum\limits_{j>i} v_{ij}^2$; коэффициент при λ равен $\nu^2 g^2$. Следовательно независимы только первые три интеграла.

В качестве простого примера, показывающего отличие от нуля величин, рассматриваемых в R_5 и R_4, рассмотрим определение экстремалей для функции

$$f = k_2 + c, \quad c = \text{const}.$$

В R_5, полагая $\eta = k_1^{-1} k_3$,

$$g = ct_1 + k_1 (1 - \eta^2)\, t_3 + \eta' t_4 + \eta k_4 t_5,$$

и V имеет следующие отличные от нуля координаты с $j > i$:

$$v_{14} = \eta k_4, \quad v_{15} = \eta', \quad v_{23} = -\eta^2 k_4,$$

$$v_{25} = \eta k_1 (1 - \eta^2), \quad v_{45} = c.$$

Здесь $\nu = -\eta^2 k_4$; g^2 и $\sum v_{ij}^2$ содержат $(\eta')^2$, а их разность равна

$$k_1^2 (1 - \eta^2)^3 - \nu^2,$$

следовательно три первых интеграла действительно независимы.

В R_4 имеем

$$\mathrm{g} = c\mathrm{t}_1 + k_1(1-\eta^2)\,\mathrm{t}_3 + \eta'\,\mathrm{t}_4,$$

$$\mathrm{v} = \eta'\,\mathrm{t}_1 - \eta k_1(1-\eta^2)\,\mathrm{t}_2 - c\mathrm{t}_4;$$

эти векторы отличны от нуля и перпендикулярны.

§ 4.

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА-ЛАГРАНЖА В R_3

Уточним вид операций, фактически необходимых для полного решения проблемы, если

$$f = f(k_1,\ k_2).$$

Полагая для сокращения записи

$$k_1 = x,\ k_2 = y,\ \frac{\partial f}{\partial x} = p,\ \frac{\partial f}{\partial y} = q,$$

имеем

$$g_1 = f - xp - yq,$$

$$g_2 = -p' - \frac{y}{x}\,q',$$

$$g_3 = -\left(\frac{q'}{x}\right)' + xq - yp,$$

$$b_{12} = p,\ b_{31} = \frac{q'}{x},\ b_{23} = q.$$

Решения проблемы удовлетворяют уравнениям, даваемым первыми интегралами:

$$\begin{cases} g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 = c_1 = \mathrm{const}, \\ g_1 b_{23} + g_2 b_{31} + g_3 b_{12} = c_2 = \mathrm{const}. \end{cases} \tag{25}$$

Пусть x и y могут быть выражены как функции от p и q и последние не постоянны. Тогда, решая систему (25) по отношению к g_2 и g_3, мы получаем соотношения вида

$$\begin{cases} p' = F_1(p,\ q',\ q), \\ q'' = F_2(p,\ q',\ q). \end{cases} \tag{26}$$

Считая q независимой переменной и вводя новую неизвестную $z = q'$, систему (26) можно преобразовать в каноническую систему второго порядка:

$$\frac{dp}{dq} = \frac{1}{z}F_1(p, z, q),$$

$$\frac{dz}{dq} = \frac{1}{z}F_2(p, z, q).$$

В результате решения этой системы s получается как функция от q посредством квадратуры

$$s = s_0 + \int\limits_{q_0}^{q} \frac{dq}{z}.$$

Решая соответствующие уравнения, мы получаем q, p, x и y как функции от s и заканчиваем определение решения квадратурами, как указано в предыдущем параграфе.

Рассмотренный прием не применим, если p и q не независимы, т. е. имеет место соотношение

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2=0. \tag{27}$$

В последнем случае поверхность, определяемая уравнением

$$f=f\,(x,\;y), \tag{28}$$

в декартовых координатах x, y, f, является развертывающейся. Если q не постоянно, то при независимых переменных x и q (28) допускает представление

$$\begin{cases} f=(\varphi-q\dot{\varphi})\,x+\;\psi-q\,\dot{\psi}, \\ y=-\,x\dot{\varphi}-\;\dot{\psi}, \\ p=\varphi, \end{cases}$$

где φ и ψ — подходящие функции от q, а точками обозначено дифференцирование по q. Исключая g_3 из системы (25), получаем уравнение

$$\varphi^2\;\left[\;\psi^2+\left(\frac{\dot{\psi}q'}{x}\right)^2-c_1\right]+\left[\;\psi q+\dot{\psi}\left(\frac{q'}{x}\right)^2-c_2\right]^2=0,$$

которое дает

$$x=\varphi_1\,(q)\,q',$$

с определенной функцией $\varphi_1(q)$. Подставляя это значение x в любое (например второе) уравнение (25), мы получаем соотношение, которое содержит только q' и известные функции от q. После представления q' в виде

$$q'=\psi_1\,(q),$$

s получается квадратурой и решение заканчивается, как выше.

Если $q=q_0=\mathrm{const.}$, т. е.

$$f=q_0 y+\psi\,(x),$$

имеем

$$g_1=\psi-x\,\dot{\psi},\;\; g_2=-\,\ddot{\psi}x',\;\; g_3=xq_0-y\,\dot{\psi},$$

$$b_{12}=\dot{\psi},\;\; b_{31}=0,\;\; b_{23}=q_0;$$

исключая g_3, получаем уравнение, дающее x' в виде известной функции от x. Как и раньше, s получается квадратурой, а y определяется из любого уравнения (25). Функция f этого типа с $q_0=0$ рассматривается в [1].

Следует отметить, что в противоположность обычным параметрическим вариационным задачам в нашем случае допустимы решения

$$x=\mathrm{const.},\;\; y=\mathrm{const.}$$

В этом случае постоянство первых интегралов (25) еще не является достаточным условием для решения. Возвращаясь к дифференциальным уравнениям (17), (18) и (21), видим, что должно иметь место соотношение

$$(x^2-y^2)\,p+2xyq-xf=0. \tag{29}$$

Для произвольных функций f это условие устанавливает соотношение между x и y, т. е. определяет однопараметрическое семейство натуральных уравнений обыкновенных винтовых линий, являющихся экстремалями. Если же $f(x, y)$ имеет вид

$$f = c_0 \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}^{\,3}} \left[\ln \frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{y} - \frac{x\sqrt{x^2+y^2}}{y^2} \right] + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} f_1 \left(\frac{x^2+y^2}{y} \right), \quad (30)$$

где c_0 — постоянная, а f_1 — произвольная функция своего аргумента, то левая часть (29) тождественно равна $2\,c_0$. Если $c_0 = 0$, любая обыкновенная винтовая линия является экстремалью. Если же $c_0 \neq 0$, среди экстремалей нет ни одной такой линии.

1 VI 1957 *Кафедра математического анализа*

ЛИТЕРАТУРА

[1]. *W. Blaschke.* Vorlesungen über Differentialgeometrie I, §§ 26, 27, Berlin, 1930.

[2]. *A. de Castro Brzezicki.* Curvas extremales del problema variacional $\delta \int f(\varkappa, \varkappa')\,ds = 0$, Rev. mat. hisp.-amer. 1955, 15, Nr. 3—4, 71—78.

[3]. *П. К. Рашевский.* Геометрическая теория уравнений с частными производными, § 9, Гостехиздат, 1947.

[4]. *Ф. Р. Гантмахер.* Теория матриц, IX, § 13, Гостехиздат, 1954.

PAR KĀDU ĢEOMETRISKU VARIACIJU PROBLĒMU

E. Grinbergs

(Kopsavilkums)

Rakstā aplūkota problēma: n dimensiju Eiklīda telpā R_n noteikt līknes, kam integrāļa

$$J = \int f\,ds$$

pirmā variācija ir nulle; s ir līknes loka garums, f — dota liekumu $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$ un to atvasinājumu pēc s funkcija.

Ņemot variētās līknes radijvektoru veidā (2), sakari (5) un (6) dod loka diferenciāļa un pieskares vienības vektora variācijas; ar (9) un (10) ir nosakāmas liekumu k_i variācijas $\varkappa_i$. Liekumu atvasinājumu variācijas dod (12).

Noteikumi, lai J pirmā variācija katriem u_i ir nulle, ir izsakāmi sekojošā veidā: ar sakariem (14), (15), (17), (18) aprēķina lielumus g_i, kam jāpilda noteikumi (21) (pirmais no tiem ir identitāte). Ja ir zināms šo vienādojumu atrisinājums, telpās R_3, R_4 un R_5 atbilstošās līknes vienādojumi ir nosakāmi ar kvadratūrām; reizē iegūti daži pirmintegrāļi.

Telpā R_3, ja f ir dota liekuma x un vērpes y funkcija, pilns problēmas atrisinājums ir reducējams uz kanonisku otrās kārtas diferenciālvienādojumu sistēmu, pēc kuras atrisināšanas jaizdara vēl kvadratūras. Ja pastāv noteikums (27), viss atrisinājums ir iegūstams ar kvadratūrām. Ekstremāļu starpā ir parastās skrūves līnijas, kam x un y saista (29). Ja f ir ar veidu (30), gadījumā $c_0 = 0$ katra parastā skrūves līnija ir ekstremāle, bet gadījumā $c_0 \neq 0$ — neviena.