

**ANALĪTISKIE UN SKAITLISKIE RISINĀJUMI
SILTUMA UN MASAS PĀRNESES PROCESIEM
KĀRTAINĀS VIDĒS**

MARGARITA BUIĶE

Latvijas universitāte

PROMOCIJAS DARBS MATEMĀTIKĀ

Apakšvirziens– matemātiskā modelēšana

(Tematiski vienota publikāciju kopa)

Vadītājs–

Profesors, Dr. habil. matem. Andris Buiķis

RĪGA-2010

Saturs

| | |
|--|-----|
| Darba pārskats..... | 3 |
| Pirmā daļa. Integrālie splaini un konservatīvās viduvēšanas metode..... | 9 |
| 1. nodaļa. Normalizēti integrālie splaini..... | 9 |
| 1.§. Integrālie paraboliskie splaini..... | 9 |
| 2. §. Vispārinātais IPS..... | 14 |
| 3. §. Klasisko kubisko splainu reprezentācija..... | 16 |
| 2. nodaļa. Konservatīvās viduvēšanas metode cilindriskam R^{n+1} apgabalam..... | 18 |
| Otrā daļa. Konservatīvās viduvēšanas metode un integrālie splaini lietojumos..... | 25 |
| 3. nodaļa. Siltuma un masas pārnese procesi kārtainās vidēs..... | 26 |
| 1.§. Konservatīvās metodes lietojumi kārtainām sistēmām 80-tajos gados..... | 26 |
| 2.§. Filtrācijas materiāla īpašību modelis..... | 34 |
| 3.§. Viduvēšanas procesi 2-D advekcijas – dispersijas vienādojumam..... | 36 |
| 4.§. Transporta procesi 3-D kārtainās vidēs..... | 38 |
| Trešā daļa. Siltuma pārnese procesi sistēmās ar izstieptām virsmām..... | 40 |
| 4. nodaļa. Tuvināti 2-D un 3-D atrisinājumi problēmai..... | 41 |
| 1.§. Stacionārā 3-D un 2-D problēma..... | 41 |
| 2.§. Nestacionārās problēmas tuvinātais atrisinājums..... | 54 |
| 5. nodaļa. Precīzais analītiskais atrisinājums 3 – D problēmai..... | 65 |
| 1. §. Nepilnā stacionārā problēma..... | 65 |
| 2. §. Nepilnā nestacionārā problēma..... | 75 |
| 3.§. Pilnā 3-D stacionārā problēma..... | 83 |
| Ceturrtā daļa. Tērauda rūdišanas matemātiskie modeļi..... | 89 |
| 6. nodaļa. Daži tērauda rūdišanas matemātiskie modeļi hiperboliskai siltuma vadīšanas problēmai..... | 89 |
| 1.§. Konservatīvās viduvēšanas metodes izmantošana laikā inversai siltuma vadīšanai..... | 89 |
| 2.§. Modeļi paralelskaldnim, 1-D un 2-D problēmas..... | 95 |
| Literatūra..... | 105 |

Darba pārskats

Ievads

Promocijas darba mērķis ir ar vienotu metodiku aprakstīt procesus vidēs ar kārtainu struktūru. Darbā apvienoti divi pētījumu bloki. Pirmais no tiem saistīts ar astoņdesmitajiem gadiem un tajā pētīti filtrācijas procesi kārtainos naftas un pazemes ūdens slāņos; šajos darbos piedāvāti jauni matemātiskie modeļi, kuri iegūti ar oriģinālu konservatīvās viduvēšanas metodi, tai skaitā izmantojot integrālos splainus. Otrais pētījumu cikls saistīts ar pēdējiem desmit gadiem un tajā veidoti jauni matemātiskie modeļi sistēmām ar izstieptām virsmām (siltuma maiņiem), īpaši analizētas sistēmas ar taisnstūra ribām, tām izstrādātas jaunas tuvinātas un precīzas risināšanas metodes. Procesiem par intensīvo tērauda rūdīšanu ūdenī (eļļas vietā) izmantots hiperboliskais siltuma vadīšanas vienādojums, problēmas risinātas tuvināti ar konservatīvās viduvēšanas metodi un Grīna funkciju metodes vispārinājumu atrisinājumu reducējot uz integrālvienādojumu.

Autoram par promocijas darba tēmu kopā ar līdzautoriem ir 40 publikācijas, no tām promocijas darbā izmantoti 35 raksti.

Tēmas aktualitāte

Promocijas darbā apskatītajiem procesiem ir svarīga tautsaimnieciska nozīme. Naftas slāņu ekspluatācijas metodika bija ļoti svarīga 20. gs 80.-jos gados, tie tika veikti pēc Maskavas Naftas un gāzes institūta lūguma un pēc Rietumsibīrijas Samotloras atradnes temperatūras lauka aprēķiniem LU vadība saņēma pateicības vēstuli no minētā institūta vadības. Pazemes ūdeņu filtrācijas, piesārņošanās un attīrīšanas procesi tika veikti ar jauna tipa matemātiskajiem modeļiem, kuri izmanto darba vadītāja A. Buiķa definētos integrālos splainus. Šis darbs tika veikts sadarbībā ar Maskavas universitātes Hidroģeoloģijas katedru un Freiburgas, Vācija Kalnu rūpniecības institūtu. Procesī par intensīvo tērauda rūdīšanu ūdenī tiek veikti sadarbībā ar ASV, Ukrainas, Grieķijas un Horvātijas zinātniekiem un praktiķiem WSEAS projekta „Database for cooling capacities of various quenchants to be developed with the modern computational and experimental techniques” ietvaros, vadītājs ir doktors Nikolajs Kobasko, ASV, Ukraina.

Darba mērķis

Promocijas darbs ir teorētisks pētījums ar praktiskiem lietojumiem filtrācijas plūsmu analīzei kārtainos naftas, gāzes un pazemes ūdens slāņos, siltuma pārnesei procesu analīzei sistēmās ar izstieptām virsmām, intensīvās tērauda rūdīšanas procesa aprakstam ar hiperbolisko siltuma vadīšanas vienādojumu.

Pētījumu metodika

Pirmkārt, aprakstot ar matemātiskajiem modeļiem dažādus tehnoloģiskos procesus, tiek konstruēti specifiski matemātiskie modeļi, kuri bieži ir oriģināli, būtiski atšķiras no literatūrā apskatītajiem.

Otrkārt, darbā tiek izmantotas matemātiskās fizikas tradicionālās metodes: analītiskās un skaitliskās metodes. Pie analītiskajām metodēm pirmām kārtām jāatzīmē Grīna funkciju metode ar tās modifikācija regulāriem nekanoniskajiem apgabaliem, splainu metode, tai skaitā integrāliem splainiem, konservatīvās viduvēšanas metodes izstrāde un izmantošana vienādojumam ar nepārtrauktiem koeficientiem. Skaitliskās metodes izmanto galīgo diferencu metodi un tās modifikāciju vienādojumiem ar

robežnosacījumiem, kuri satur augstākās kartas atvasinājumus, kādi ir pamatvienādojumos.

Zinātniskā novitāte un galvenie rezultāti

- Promocijas darba vadītāja A. Buiķa definētos integrālos splainus šajā darbā tiek piedāvāts uzrakstīt normalizētā formā, dodot arī citu atklātu reprezentācijas formulu, kurā tieši atdalīta robežnosacījumu ietekme.
- Dota atklāta reprezentācijas formula klasiskajam kubiskajam splainam.
- Konservatīvās viduvēšanas metode izmantota arī galīgam n - dimensiju cilindram, citiem vārdiem, parciālam diferenciālvienādojumam ar nepārtrauktiem koeficientiem un dažāda veida robežnosacījumiem, tai skaitā nelineāriem.
- Tiek piedāvāti matemātiskie modeļi un to risināšanas metodes viena un daudzu slāņu pazemes slāņu filtrācijas procesiem.
- Doti jauni matemātiskie modeļi divu un trīs dimensiju stacionārām un nestacionārām problēmām sistēmām ar vienu vai vairākām ribām.
- Piedāvātajiem divu un trīs dimensiju stacionārām un nestacionārām problēmām problēmām sistēmām ar vienu ribu doti tuvinātie un precīzie atrisinājumi.
- Piedāvāti intensīvās tērauda rūdīšanas ūdenī matemātiskie modeļi ar hiperbolisko siltuma vadīšanas vienādojumu.
- Konstruēti tuvinātie un precīzie atrisinājumi intensīvās tērauda rūdīšanas procesiem ūdenī.

Darba praktiskais pielietojums

Piedāvātie matemātiskie modeļi ir tikuši izmantoti naftas ieguves procesu prognozēšanai, pazemes ūdeņu piesārņošanas un attīrīšanas procesu prognozēšanai, siltuma maiņu ar izstieptām virsmām efektivitātes aprēķiniem un tērauda rūdīšanas procesa norises procesa modelēšanai.

Publikāciju saraksts

1. А. Буйкис, М. Шмите. Анализ и сравнение решений некоторых задач теплопереноса однородных и трещиноватых нефтяных пластах. *Сб. «Динамика многофазных сред»*, СО АН СССР, ИТПМ, Новосибирск, 1981, с. 119-123.
2. А.Буйкис, М. Шмите. О разностной аппроксимации одной неклассической задачи для уравнения теплопроводности. *Латвийский мат. ежегодник*, 26, 1982, с.217-222.
3. А.Буйкис, М. Шмите. Разностные схемы для расчета температурных полей многослойных и трещиноватых пластов. *Сб. «Проблемы использования химических средств с целью увеличения нефтеотдачи пластов»*. 7.Респ.межотраслевая научно практическая конференция.Уфа,1983.с. 16-18.
4. А.Буйкис, М. Шмите. Разностные схемы для процессов переноса в многослойных пластах. *Сб. «Прикладные задачи математической физики»*, Рига, ЛГУ им.П.Стучки, 1983, с. 53-66.
5. А. Буйкис, М. Шмите. Экономичные разностные схемы для расчета температурных полей многослойных и трещиноватых нефтяных пластов. *Сб. «Динамика многофазных сред»*, Новосибирск, ИТПМ, 1983, с.105-109.
6. А.Буйкис, М.Шмите. Численное решение одной конвективно-диффузионной задачи. *Латвийский мат. ежегодник*, вып.28, 1984. Рига, «Зинатне», с.10-13.
7. А.Буйкис, М.Шмите. Решение задачи определения движения свободной поверхности в почве при работе дренажной системы. *Сб. «Математическое*

- моделирование гидрологических процессов», Новосибирск, инст. Гидродинамики СО АН СССР, 1984, с. 18-24.
8. М.Шмите. Численное решение задачи в двухслойной среде с конвекцией и диффузией. Сб. *»Моделирование физических процессов в слоистых средах»*. Рига, ЛГУ им.П.Стучки, 1985, с.65-75.
 9. А. Буйкис, М.Шмите, Я. Тэхтс. Расчет процесса образования композитного полимерного материала способом пресования при наличии градиента температуры. Сб. *»Прикладные задачи матем. физики»*, Рига, ЛГУ им.П.Стучки, 1985, с.171-180.
 10. А.Буйкис, М.Шмите. Анализ постановки класса задач геотермодинамики для слоистых пластов. Доклад на 36-ом Горно-металлургическом конгрессе в г. Фрейберге, ГДР. Депонировано в ЛАТИНТИ 13.02.1986.-79 А-Д86,11с.
 11. А. Буйкис, М.Шмите. Постановки с осреднением для описания процессов переноса в слоистых пластах. В кн. *»Прикладные задачи математической физики»*. ЛГУ, Рига, 1987. С.138-144.
 12. М.Шмите. Постановка с осреднением в перемычках для температурного поля многослойного пласта. В кн. *»Прикладные задачи математической физики»*. ЛГУ, Рига, 1988, с.112-118.
 13. M. Buiķe, A. Buiķis. Kubiskā splaina tiešās atkarības izteiksme no interpolējamās funkcijas vērtībām. *LU Zin raksti No.575. Matemātiskā modelēšana*. LU 1992, 43-46 lpp.
 14. M.Buiķe, A. Buiķis. Closed two-dimensional solution for the heat transfer in a periodical system with a fin. *Proceedings of the Latvian Academy of Sciences, Sect. B*, vol.52 (1998), No.2 (607). p. 218-222.
 15. M.Buiķe, A. Buiķis. Approximate analytical two- dimensional solution for a longitudinal fin of rectangular profile. *Acta Universitatis Latviensis, 612, Mathematical Modelling Applied Problems of Mathematical Physics*, 1998, p. 33-44.
 16. M.Buiķe. Simulation of steady-state heat process for the rectangular fin-containing system. *Mathematical Modelling and Analysis*, Vol.4, Vilnius, Technika, 1999, p.33-43.
 17. А.Буйкис, М.Буйке, Н.Уланова. Нестационарные решения для теплопереноса в периодических системах с ребрами. *Proceedings of the Ukrainian Congress of Mathematics*, Section 8, 2002, p.15-23.
 18. А. Buikis, M. Buike and Sh. Guseinov. Exact analytical solution and some of its approximations for two-dimensional systems with rectangular fin. – *Journal of Transport and Telecommunication*, 1, Vol. 5, 2004, p.141-149.
 19. А. Buikis, M. Buike, Sh. Guseinov. Analytical two-dimensional solutions for heat transfer in system with rectangular fin. *Advanced Computational Methods in Heat Transfer VIII*. WIT Press 2004. p.35 – 44.
 20. А. Buikis, M. Buike. Some analytical 3-D steady-state solutions for systems with rectangular fin. - *IASME Transactions*, 2005, Vol. 2, Issue 7, p.1112-1119.
 21. А. Buikis, M. Buike. Approximate analytical three-dimensional solution for periodical system with rectangular fin, Part 2. - *IASME Transactions*, 2005, Vol. 2, Issue 9, p.1815-1818.
 22. А. Buikis, M. Buike. Approximate analytical three-dimensional solution for periodical system with rectangular fin, Part 1. – *Proceedings of WSEAS/IASME International Conference on Heat Transfer, Thermal Engineering and Environment*. Corfu Island, Greece, August 20 – 22, 2005, p.382-386.
 23. А. Buikis, M. Buike. Approximate analytical three-dimensional solution for periodical system with rectangular fin, Part 2. - *Proceedings of WSEAS/IASME*

- International Conference on Heat Transfer, Thermal Engineering and Environment*. Corfu Island, Greece, August 20 – 22, 2005, p.387-390.
24. A. Buikis, M. Buike. Green's function for heat transfer in system with fin. – *Proceedings of International Conference on Computational and Experimental Engineering and Sciences, December 1-6, 2005, Madras, India*, p.544-549.
 25. A. Buikis, Sh. Guseinov, M. Buike. Modelling of Intensive Steel Quenching Process by Time Inverse Hyperbolic Heat Conduction. – *Proceedings of the 4th International Scientific Conference on Modelling for Material Processing*, June 08-09, 2006, Riga, Latvia, p. 169-172.
 26. M. Buike, A. Buikis. Modelling of three – dimensional Transport Processes in Anisotropic layered stratum by conservative averaging method. *WSEAS Transactions on Heat and Mass Transfer, Vol.1, Issue 4, 2006*, p.430-437.
 27. M. Buike, A. Buikis. Analytical Approximate Method for Three-Dimensional Transport Processes in Layered Media. *Proceedings of 4th IASME/WSEAS International Conference on Heat Transfer, Thermal Engineering and Environment*. Elounda, Agios Nikolaos, Crete Island, Greece, August 21 – 23, 2006, p.232-237.
 28. M. Buike, A. Buikis. System of Models for Transport Processes in Layered Strata. *Proceedings of 5th WSEAS International Conference on SYSTEM SCIENCE and SIMULATION in ENGINEERING*, Tenerife, Canary Islands, Spain, December 16-18, 2006, p. 19-24.
 29. M. Buike, A. Buikis. System of various mathematical models for transport processes in layered strata with interlayers. *WSEAS TRANSACTIONS on MATHEMATICS*, Issue 4, vol.6, 2007, p. 551-558.
 30. M. Buike, A. Buikis. Approximate Solutions of Heat Conduction Problems in Multi-dimensional Cylinder Type Domain by Conservative Averaging Method, Part 1. *Heat Transfer, Thermal Engineering and Environment*. WSEAS Press, 2007, p. 15-20.
 31. A. Buikis, M. Buike. Approximate Solutions of Heat Conduction Problems in Multi-dimensional Cylinder Type Domain by Conservative Averaging Method, Part 2. *Heat Transfer, Thermal Engineering and Environment*. WSEAS Press, 2007, p. 21-26.
 32. A. Buikis, M. Buike. Exact 3-D Solution for System with Rectangular Fin, Part 1. *Applied Mathematics in Science and Engineering* WSEAS Press, 2007, p. 64-69.
 33. A. Buikis, M. Buike. Exact 3-D Solution for System with Rectangular Fin, Part 2. *Applied Mathematics in Science and Engineering* WSEAS Press, 2007, p. 70-75.
 34. M. Buike, A. Buikis. Exact Transient Solution for System with Rectangular Fin. *Theoretical and Experimental Aspects of Heat and Mass Transfer*. WSEAS Press, 2008. p. 25-30.
 35. A. Buikis, M. Buike, N. Ulanova. Analytically-Numerical Solution for Transient Process in the System with Rectangular Fin. *Theoretical and Experimental Aspects of Heat and Mass Transfer*. WSEAS Press, 2008. p. 31-36.
 36. M. Buike. Exact Solution of Full 3-D Steady-State Problem for One Element of the System with Rectangular Fin. *New Aspects of Heat Transfer, Thermal Engineering and Environment, Part II*. WSEAS Press, 2008. p. 402-406.
 37. M. Buike, A. Buikis. Hyperbolic heat equation as mathematical model for steel quenching of L-shape samples, Part 1 (Direct Problem). *Applied and Computational Mathematics. Proceedings of the 13th WSEAS International Conference on Applied Mathematics (MATH'08)*, Puerto De La Cruz, Tenerife, Canary Islands, Spain, December 15-17, 2008. WSEAS Press, 2008. p. 198-203.

38. A.Buikis, M.Buikė, T. Bobinska. Solution of hyperbolic heat equation reduction to integral equation for a right corner. *Proceedings of conference Differential equations and their applications (DETA'2009)*. Kaunas, 2009, p.14-16.
39. T. Bobinska, M.Buikė, A.Buikis. Hyperbolic Heat Equation as Mathematical Model for Quenching of L-Shape Samples, Part 2 (Inverse Problem). *Proceedings of 5th IASME/WSEAS International Conference on Cotinuum Mechanics (CM'10)*. WSEAS Press, 2010, p. 21-26.
40. M.Buikė, A.Buikis. Several Intensive Steel Quenching Models for Rectangular Samples. *Latest Trends on Theoretical&Applied Mechanics, Fluid Mechanics and Heat&Mass Transfer. Proceedings of NAUN//WSEAS International Conference on Fluid Mechanics and Heat and Mass Transfer, Corfu Island, Greece, July 22-24, 2010*. WSEAS Press, 2010, p. 88-93.

Galvenās publikācijas, kuru materiāli izmantoti promocijas darbā
1-6, 8-17, 20-24, 26-37, 39, 40.

Dalība konferencēs

Piedalīšanās starptautiskās zinātniskās konferencēs:

1. А.Буйкис, М. Шмите. Постановка и решение одной задачи миграции подземных вод. Тезисы лекций и докладов Всесоюзной школы молодых ученых «Численные методы решения задач математической физики». Львов, 1983, ч.2, Москва, 1983, с. 35.
2. A.Buikis, M.Schmite. Die Analyse einer Klasse von Geothermieproblemen. In «Berg und Huttenmannischer Tag 1985»-Referate-Heft A. Reihe I.S.37-38.
3. М. Шмите, Я. Тухтс. Математическое моделирование процесса скрепления нетканых полотен каркасным термопластичным связующим в условиях градиента температуры. Тезисы док. на 6. Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике. 1986, Ташкент, стр.595.
4. М. Шмите. Практикум на ЭВМ как форма самостоятельной работы студентов. Тезисы 6.зон. совещания-семинара зав. каф.и препод. математики. Таллин, 1987. Часть 2..с.81.
5. M. Buiķė, A. Buiķis. Analytical and numerical solutions for the heat transfer in periodical systems with extended surfaces. Abstract of 10-th conference of ECMI, June 22-27, 1998, Geteborg, Abstr., 2 p.
6. M. Buiķė. Simulation of Steady-State Heat Process for Rectangular Fin-Containing System. 4th International conference “Mathematical Modelling and Analysis”, June 3-4, 1999, Vilnius, Lithuania, Abstr, p.23.
7. M. Buiķė, A. Buiķis. Analytical and Numerical Solutions for System with Fin. 3-rd Int. conf. “Finite-Difference Schemes”, Sept.1-4, 2000, Palanga, Lithuania. Abstracts, p.7.
8. M. Buiķė, A. Buiķis. Steady-state heat exchange in the system with fin and the non-ideal thermal contact. 5-th Intern. conf. of Mathematical Modelling and Analysis, June 8-9, 2000, Rīga-Jūrmala, Latvia. Abstr., p.10.
9. M. Buiķė, A. Buiķis. Heat transfer in the systems with extended surface (fins). 11-th ECMI conference, September 26-30, 2000, Torre Normanna, Altavilla Milicia (Palermo), Italy, 2000, Abstracts, p.165.
10. Буйке М., Буйкис А., Уланова Н. Численное и аналитическое решения стационарного и нестационарного теплопереноса в системах с вытянутыми

- поверхностями (ребрами). Тезисы доклада на 6-ой международной конференции “Экология и здоровье”, Краснодар, 2001, стр 252.
11. M.Buikis, A.Buikis. Some analytical 2-D solutions for the heat transfer in system with extended surfaces. *GAMM 2003. March 24-28, 2003, Abano Terme – Padua, Italia*. Abstracts, p. 161-162.
 12. M.Buikis, A.Buikis, Sh.Guseinov. Analytically numerical approach for the heat transfer in periodical systems with fins. *8th International Conference Mathematical Modelling and Analysis, May 28-31, 2003. Trakai, Lithuania*, Abstr, 2003, p. 11.
 13. A Buikis, M. Buikis, Sh. Guseinov. Exact analytical solution and some of its approximations for two-dimensional systems with rectangular fin. *Abstr. of the int. conf. "Reliability and Statistics in Transportation and Communication"*, Riga, Okt. 16-17, 2003, p.57.-58.
 14. A.Buikis, M.Buikis. Approximate solution for 3D system with fin. *MMA-2004: 9th International Conference Mathematical Modelling and Analysis, May 27-29, 2004, Jurmala, Latvia*, Abstracts, p. 8.
 15. А. Буйкис, М. Буйке, А. Бруверс. Аналитическое и численное сравнение различных решений стационарной задачи для стенки с ребром. – *International Conference "Problems of numerical analysis and applied mathematics" devoted to 85 anniversary of the academician A.A. Samarsky and to 160 anniversary of the National University "Lviv Polytechnics"*, September 13-16, 2004, Lviv, Ukraine, Abstracts, p.10.
 16. A. Buikis, M. Buikis, Sh. Guseinov. Exact and approximate 3-D solutions for heat transfer in systems with rectangular fin. *GAMM2005 28.03 – 01. 04. 2005, Luxembourg*, Book of Abstracts, p. 289.
 17. A.Buikis, Sh. Guseinov, M.Buikis. Modelling of Intensive Steel Quenching Process by Time Inverse Hyperbolic Heat Equation. *Proceedings of the 4th International Scientific Colloquium "Modelling for Material Processing"*, Riga, June 8-9, 2006, p. 169-172.
 18. M.Buikis, A.Buikis. Hyperbolic Heat Equation as the Model for Intensive Quenching of Spherical Sample. *12th International Conference Mathematical Modelling and Analysis May 30-June 2, 2007. Trakai, Lithuania*, Abstracts, 2007, p. 22.
 19. T.Bobinska, M.Buikis, A.Buikis. Comparing Solutions of Hyperbolic and parabolic Heat Conduction Equations for L-shape Samples. *15th International Conference Mathematical Modelling and Analysis May 27-29, 2010. Druskininkai Lithuania*, Abstracts, 2010, p. 8.

Piedalīšanās Latvijas zinātniskās konferencēs:

1. М. Шмите. Система ОДУ, описывающая процесс тепломассопереноса в многослойной среде. Тезисы докладов респ. конгр. «Теория и численные методы решения краевых задач дифф. ур.», ЛГУ, Рига, 1988. С.130.
2. M. Buiķis, A. Buiķis. Some two-dimensional solutions for extended surface heat transfer. *ACTA Societatis mathematicae Latviensis*, No. 97. 02, p.3.
3. M. Buiķis, A. Buiķis. Influence of the non-ideal thermal contact to the heat exchange in the system with fin. *ACTA, Societatis Mathematicae Latviensis*, No.3, 2000, p.16-17. A.Buikis, M.Buikis and Sh. Guseinov. Inverse boundary problem as approach for the heat transfer in L-shape domain. – *The 5th Latvian Mathematical Society Conference, 06-07 April 2004, Daugavpils, Latvia*, Abstracts, p.15.

Pirmā daļa. Integrālie splaini un konservatīvās viduvēšanas metode

Šajā pirmajā daļā ir apskatīts matemātiskais aparāts, kurš tiks izmantots turpmākajās divās daļās. Apskatīti integrālie splaini un konservatīvās viduvēšanas metodes daži vispārinājumi. Abas pieejas tiks pielietotas nākamajās divās daļās, modelējot dažādus procesus kārtainās vidēs, sistēmas ar izstieptām virsmām un procesus intensīvai tērauda rūdīšanai. Sāksim ar gabaliem gludas funkcijas integrālo vidējo vērtību ar jauna normalizēta tipa splainiem.

1. nodaļa. Normalizēti integrālie splaini

Integrālie paraboliskie splaini (IPS) pirmo reizi tika definēti A. Buiķa darbos [1], [2] un nublicētajā monogrāfijā [3]. Rakstā [4] formulēts IPS vispārinājumu: tajā tika pierādīta vispārinātā integrālā splaina (VIPS) eksistence un unitāte.

Šeit tiek piedāvāts jauna abu integrālo splainu "normalizēta" forma. Galvenie šīs nodaļas rezultāti atspoguļoti rakstos [5]-[9].

1.§. Integrālie paraboliskie splaini

1.1. Pieņemsim, ka dota nepārtraukta, gabaliem gluda funkcija $U(x), x \in [a, b]$. Tālāk, pieņemsim, ka pirmie atvasinājumiem $U'(x)$, iekšējos punktos $x_i, i = 1, \dots, N$ ir galīgs lēcienis:

$$k_{i-1}U'(x_i - 0) = k_iU'(x_i + 0), i = 1, \dots, N. \quad (1.1.1)^*$$

Šeit $k_i, i = 0, \dots, N$ ir doti pozitīvi koeficienti. Funkcijas nepārtrauktības dēļ izpildās vienādības:

$$U(x_i - 0) = U(x_i + 0), i = 1, \dots, N. \quad (1.1.2)$$

Visbeidzot, papildus ir dotas funkcijas $U(x)$ vidējās integrālās vērtības u_i pa visiem apakšsegmentiem $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \dots, N$, $x_0 = a, x_{N+1} = b$:

$$u_i = H_i^{-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} U(x) dx, H_i = x_{i+1} - x_i, i = 0, \dots, N. \quad (1.1.3)$$

Interpolācijas dēļ nepieciešams tuvināti rekonstruēt funkciju $U(x)$, izmantojot nosacījumus (1)-(3) un šādus vispārīgus robežnosacījumus (RN) intervāla galapunktos $x = a$ un $x = b$:

$$-v_0 k_0 U'(a) + \lambda_0 U(a) = \Phi_0, \quad (1.1.4)$$

$$v_1 k_N U'(b) + \lambda_1 U(b) = \Phi_1. \quad (1.1.5)$$

* Formulas pirmais skaitlis norāda nodaļu, otrais - paragrāfu, trešais - formalas numuru paragrāfā.

Šādi RN ir tipiski parastajiem un parciālajiem diferenciālvienādojumiem. Patiesi, ja $\nu_0 = 0$ ($\nu_1 = 0$) un $\lambda_0 = 1$ ($\lambda_1 = 1$), mēs iegūstam Dirihlē RN, ja $\nu_0 = 1$ ($\nu_1 = 1$) tie dod Neimana RN (ja $\lambda_0 = 0$ ($\lambda_1 = 0$)) un Robina RN (ja $\lambda_0 > 0$ ($\lambda_1 > 0$)).

Darbos [1]-[3] tika pierādīts, ka šī interpolācijas problēma var tikt atrisināta ar otrās pakāpes interpolācijas polinomu splainu šādā formā:

$$S(x) = u_i + m_i(x - \bar{x}_i) + e_i \left[\frac{(x - \bar{x}_i)^2}{k_i H_i} - \frac{G_i}{12} \right], \bar{x}_i = (x_i + x_{i+1})/2, G_i = H_i / k_i > 0. \quad (1.1.6)$$

Šī splaina forma precīzi izpilda integrālās sakarības (3) visām reālām nezināmo koeficientu m_i, e_i vērtībām. Nezināmo $2(N+1)$ brīvo koeficientu noteikšanai ir nepieciešamais vienādojumu skaits (1), (2), (4) un (5). Rakstos [2], [3] tika pierādīts, ka visi koeficienti m_i var tikt izteikti caur koeficientiem e_i divās formās:

a) priekš $i = \overline{0, N-1}$

$$k_i m_i (G_i + G_{i+1}) = 2(u_{i+1} - u_i) - e_i (G_i/3 + G_{i+1}) - 2/3 e_{i+1} G_{i+1}; \quad (1.1.7_a)$$

b) priekš $i = \overline{1, N}$,

$$k_i m_i (G_i + G_{i-1}) = 2(u_i - u_{i-1}) + e_i (G_i/3 + G_{i-1}) + 2/3 e_{i-1} G_{i-1}. \quad (1.1.7_b)$$

Izslēdzot koeficientus m_i no sistēmām $(7_a), (7_b)$ iegūstam priekš $i = \overline{1, N-1}$ lineāru algebrisku vienādojumu sistēmu koeficientiem e_i (sk. [1] - [3]):

$$A_i e_{i-1} + C_i e_i + B_i e_{i+1} = F_i^- u_{i-1} - F_i u_i + F_i^+ u_{i+1}. \quad (1.1.8)$$

Šeit priekš $i = 1, \dots, N-1$:

$$\begin{aligned} A_i &= G_{i-1} (G_i + G_{i+1}), B_i = G_{i+1} (G_i + G_{i-1}), C_i = A_i + B_i + D_i, \\ D_i &= (G_i + G_{i+1})(G_i + G_{i-1}), F_i^- = 3(G_i + G_{i+1}), F_i^+ = F_{i-1}^-, F_i = F_i^+ + F_i^-. \end{aligned} \quad (1.1.9)$$

RN (4), (5) aproksimācija ir šāda:

$$m_0 k_0 \left(\nu_0 + \lambda_0 \frac{G_0}{2} \right) - e_0 \left(\nu_0 + \lambda_0 \frac{G_0}{6} \right) = \lambda_0 u_0 - \Phi_0,$$

$$m_N k_N \left(\nu_1 + \lambda_1 \frac{G_N}{2} \right) + e_N \left(\nu_1 + \lambda_1 \frac{G_N}{6} \right) = \Phi_1 - \lambda_1 u_N.$$

Rakstos [1], [2] tika izrakstīta sistēmai (7) identiska vienādojumu sistēma ar diviem papildus deģenerētiem fiktīviem koeficientiem:

$$e_{-1} = e_{N+1} = 0.$$

Šim nolūkam rakstos [1], [2] tika apskatīti divi atšķirīgi varianti:

1) $\lambda_0 \neq 0$ (un $\lambda_1 \neq 0$). Tad

$$G_{-1} = 2\nu_0 / \lambda_0, G_{N+1} = 2\nu_1 / \lambda_1, u_{-1} = \Phi_0 / \lambda_0, u_{N+1} = \Phi_1 / \lambda_1; \quad (1.1.10_0)$$

2) $\lambda_0 = 0$ (un $\lambda_1 = 0$). Tad

$$G_{-1} = 2\nu_0 - G_0, G_{N+1} = 2\nu_1 - G_N, u_{-1} = \Phi_0 + u_0, u_{N+1} = \Phi_1 + u_N. \quad (1.1.10_1)$$

Otrajā gadījumā daži koeficienti atšķirās no vispārējā gadījuma (8):

$$A_0 = D_0, \quad B_N = D_N.$$

Koeficienti e_i IPS var tikt atklāti izteikti caur visām viduvētajām integrālām vērtībām ([2], [5]-[8]):

$$e_i = \sum_{j=0}^{N+1} \alpha_{ij} (u_{j-1} - u_j) \operatorname{sgn}(i - j + 0.5), \quad i = \overline{-1, N+1}. \quad (1.1.11)$$

Rakstā [2] matrica $\{\alpha_{ij}\}$ tika pakāpeniski atrisināta visiem $j = \overline{0, N}$:

$$\begin{cases} \alpha_{-1,j} = \alpha_{N+1,j} = 0, \\ A_i \alpha_{i-1,j} + C_i \alpha_{ij} + B_i \alpha_{i+1,j} = 0, \quad i \neq j, i \neq j-1, \\ A_i \alpha_{i-1,j} + C_i \alpha_{ij} - B_i \alpha_{i+1,j} = F_i^+, \quad i = j-1, \\ -A_i \alpha_{i-1,j} + C_i \alpha_{ij} + B_i \alpha_{i+1,j} = F_i^-, \quad i = j. \end{cases} \quad (1.1.12)$$

Viegli redzēt, ka lineāro algebrisko vienādojumu sistēma (8) (līdz ar to arī (12)) ir sistēma ar stingri dominējošu galveno diagonāli. Šādai sistēmai ir tikai viens atrisinājums un aprēķinu kļūda var tikt viegli caur sistēmas labo pusi.

1.2. Šajā promocijas darbā tiek piedāvāta atšķirīga “normalizēta” splaina galveno koeficientu e_i atrašanai:

$$a_i e_{i-1} + (1 + a_i + b_i) e_i + b_i e_{i+1} = f_i^- u_{i-1} - f_i u_i + f_i^+ u_{i+1}, \quad i = 1, \dots, N-1. \quad (1.1.13)$$

Papildus tam mēs izmantojam citu formu pirmajam un pēdējam lineārās algebriskās vienādojumu sistēmas vienādojumam:

$$\begin{aligned}(1+a_0+b_0)e_0+b_0e_1 &= f_0^-u_{-1}-f_0u_0+f_0^+u_1, \\ a_Ne_{N-1}+(1+a_N+b_N)e_N &= f_N^-u_{N-1}-f_Nu_N+f_N^+u_{N+1}.\end{aligned}\tag{1.1.14}$$

Šeit

$$f_i = f_i^- + f_i^+$$

un

$$a_i = G_{i-1}/(G_i + G_{i-1}), b_i = G_{i+1}/(G_i + G_{i+1}), f_i^- = 3/(G_i + G_{i-1}), f_i^+ = 3/(G_i + G_{i+1}).$$

Līdzīgi ar iepriekšējo situāciju gadījumam $\lambda_0 = 0$ ($\lambda_1 = 0$) mums ir speciālas formulas koeficientiem a_0 un b_N :

$$a_0 = b_N = 1.$$

Atzīmēsim, ka šī forma ir nozīmīga, ja būtiski atšķiras koeficienti $k_i, i = 0, \dots, N$. Atšķirībā no sistēmas (8) mēs piedāvājam arī citu reprezentācijas formu koeficientiem e_i . Šī reprezentācija skaidri parāda RN tipa un to labās puses ietekmi uz splainu:

$$e_i = \gamma_i^{(0)} f_0^- u_{-1} + \gamma_i^{(1)} f_N^+ u_{N+1} + \sum_{j=0}^N \beta_{ij} u_j, \quad i = \overline{0, N}.\tag{1.1.15}$$

Reprezentācijas (14) koeficienti var tikt noteikti no šādām lineārām algebriskām vienādojumu sistēmām:

a) Sistēma vienādojumiem $\gamma_i^{(0)}$:

$$\begin{aligned}(1+a_0+b_0)\gamma_0^{(0)}+b_0\gamma_1^{(0)} &= 1, \\ a_i\gamma_{i-1}^{(0)}+(1+a_i+b_i)\gamma_i^{(0)}+b_i\gamma_{i+1}^{(0)} &= 0, \quad i = 1, \dots, N-1, \\ a_N\gamma_{N-1}^{(0)}+(1+a_N+b_N)\gamma_N^{(0)} &= 0;\end{aligned}\tag{1.1.16}$$

b) sistēma vienādojumiem $\gamma_i^{(1)}$:

$$\begin{aligned}(1+a_0+b_0)\gamma_0^{(1)}+b_0\gamma_1^{(1)} &= 0, \\ a_i\gamma_{i-1}^{(1)}+(1+a_i+b_i)\gamma_i^{(1)}+b_i\gamma_{i+1}^{(1)} &= 0, \quad i = 1, \dots, N-1, \\ a_N\gamma_{N-1}^{(1)}+(1+a_N+b_N)\gamma_N^{(1)} &= 1\end{aligned}\tag{1.1.17}$$

c) un $N+1$ sistēmām ($j = 0, \dots, N$) priekš β_{ij} :

$$\begin{aligned} (1+a_0+b_0)\beta_{0,j}+b_0\beta_{1,j} &= 0, \\ a_i\beta_{i-1,j}+(1+a_i+b_i)\beta_{ij}+b_i\beta_{i+1,j} &= f_j^-\delta_{i-1,j}-f_j\delta_{i,j}+f_j^+\delta_{i+1,j}, i=1,\dots,N-1, \\ a_N\beta_{N-1,j}+(1+a_N+b_N)\beta_{N,j} &= 0. \end{aligned} \quad (1.1.18)$$

Vēlamies pievērst uzmanību dažiem svarīgiem jauno integrālo splainu īpašībām. Pirmkārt, šie splaini precīzi interpolē funkcijas $U(x)$ integrālās vērtības (3). Otrkārt, tie precīzi interpolē saistības nosacījumus (1), (2). Treškārt, jaunajai reprezentācijai (10) (un īpaši (15)) ir ļoti interesanta īpašība lietojumā diferenciālvienādojumiem. Kā viegli redzēt, vektora $\gamma^{(k)} = (\gamma_i^{(k)})_{i=0}^N, k = \{0,1\}$ komponentes un matrica $\beta = (\beta_{ij})_{i,j=0}^N$ ir atkarīgas no režģa punktu x_i , koeficientu k_i un RN tipu (4), (5), taču tie ir neatkarīgi no integrālām vērtībām u_i un RN labajām pusēm Φ_0, Φ_1 . Šī īpašība nozīmē, ka fiksētiem režģa punktiem un koeficientiem k_i mums vektora $\gamma^{(k)}$ un matrica β jāreķina tikai vienu reizi. Pēc šī aprēķina integrālam splainam mums jāsummē tikai galīga summa (15). Šī reprezentācija (15) ir ļoti nozīmīga diferenciālvienādojumiem ar pārtrauktiem koeficientiem. Atzīmēsim šeit, ka reprezentācija (15) var tikt uzkonstruēta arī klasiskajiem splainiem [10]-[13] (sīkāk tas apskatīts paragrāfā 1.3.).

1.3. IPS aproksimācijas kļūda var tikt novērtēta šādi.

Teorēma. Ja nepārtraukta, gabaliem gluda funkcija $U(x), x \in [a, b]$ apmierina nosacījumus (1)-(3):

$$U(x_i - 0) = U(x_i + 0), k_{i-1}U'(x_i - 0) = k_iU'(x_i + 0) \quad i = 1, \dots, N,$$

$$u_i = H_i^{-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} U(x) dx, H_i = x_{i+1} - x_i, i = 0, \dots, N$$

tad tās interpolācija ar splainu IPS ir novērtējama ar nevienādību:

$$\left| U^{(p)}(x) - S^{(p)}(x) \right| \leq C_p \alpha_N \left\| \tilde{\Delta}_N \right\|^{2-p}, \quad p = 0, 1, 2; \quad (1.1.19)$$

$$\tilde{\Delta}_N = \max_i G_i, \alpha_N = \omega(U'', 2 \left\| \tilde{\Delta}_N \right\|).$$

Šeit ω ir nepārtrauktības modulis atbilstošajai funkcijai [13]:

$$\omega(U, \delta) = \max_{\substack{|h| \leq \delta \\ x, x+h \in [a, b]}} |U(x+h) - U(x)|.$$

Tas izpildās divreiz nepārtraukti diferencējamai funkcijai, kura pārtraukuma punktos izpilda šādu nosacījumu:

$$k_i^2 U''(x_i - 0) = k_{i-1}^2 U''(x_i + 0).$$

Ja funkcija $U \in C^1[z_0, z_{N+1}]$, tad novērtējums pavājinās:

$$|U^{(p)}(x) - S^{(p)}(x)| \leq C_p \alpha_N \|\tilde{\Delta}_N\|^{1-p}, \quad p = 0, 1. \quad (1.1.20)$$

Šīs teorēmas pierādījumu reducēsim uz aproksimācijas teorēmu klasiskajam paraboliskajam splainam [13]. Šim nolūkam no argumenta x pārejām uz jaunu mainīgo z :

$$z_0 = a, z = z_i + \frac{x - x_i}{k_i}, z_{i+1} = z_i + G_i, G_i = \frac{H_i}{k_i}, H_i = x_{i+1} - x_i, i = \overline{0, N}.$$

Viegli ieraudzīt, ka mainīgajos z funkcija $U(z)$ ir nepārtraukta un gluda funkcija. Integrālais paraboliskais splains $S_2(z)$ tagad aproksimē gludu funkciju segmentā $[z_0, z_{N+1}]$. Tā kā splains interpolē vidējās integrālās vērtības, tad katrā apakšintervālā $[z_i, z_{i+1}]$ splains krusto līkni $U(z)$ kādā punktā z_i^* , līdz ar to integrālais splains ir uzskatāms par parasto parabolisko splainu [13] segmentam $[z_0, z_{N+1}]$. Maksimālais attālums starp diviem z_i^* nevar pārsniegt $2G_i$. Tādejādi teorēmas pierādījumu esam reducējuši uz teorēmu klasiskajam paraboliskajam splainam [13]. No tā arī izriet abi augstāk dotie novērtējumi (1.1.19), (1.1.20).

2. §. Vispārinātais IPS.

2.1. Dota nepārtraukta, gabaliem gluda funkcija $U(x), x \in [a, b]$, kuras atvasinājumam $U'(x)$ ir pirmā veida pārtraukumi $2N$ atšķirīgos iekšējos punktos $x_i, x_{i-1/2}, i = 1, \dots, N$:

$$k_{i-1} U'(x_{i-1/2} - 0) = k_{i-1/2} U'(x_{i-1/2} + 0), k_{i-1/2} U'(x_i - 0) = k_i U'(x_i + 0). \quad (1.2.1)$$

Funkcijas $U(x)$ nepārtrauktība dod $2N$ vienādības:

$$U(x_{i-1/2} - 0) = U(x_{i-1/2} + 0), U(x_i - 0) = U(x_i + 0). \quad (1.2.2)$$

Šeit funkcijas (koeficienti) $k(x)$ ir gabaliem konstantas funkcijas:

$$k(x) = \begin{cases} k_{i-1/2}, & \text{if } x \in (x_{i-1/2}, x_i), \\ k_i, & \text{if } x \in (x_i, x_{i+1/2}) \end{cases} \quad (1.2.3)$$

ar īpašībām $k_{i-1/2} \ll k_{i-1}, k_{i-1/2} \ll k_i$. Jāatzīmē $x_{N+1/2} = x_{N+1} = b$.

Papildus dotas $N+1$ vērtības \tilde{u}_i funkcijai $U(x)$ pa apakšsegmentiem $[x_i, x_{i+1/2}]$:

$$\tilde{u}_i = \frac{1}{\tilde{H}_i} \int_{x_i}^{x_{i+1/2}} U(x) dx, \quad \tilde{H}_i = x_{i+1/2} - x_i, \quad i = 0, N. \quad (1.2.4)$$

Tālāk, ir zināms, ka apakšsegmentos $[x_{i+1/2}, x_{i+1}]$, $i = 0, N-1$ funkcija ir tuvināma ar lineāru funkciju. Visbeidzot, izpildās RN (1.4), (1.5).

Rakstā [4] ir parādīts, ka eksistē tieši viens splains, kurš izpilda visus minētos nosacījumus.

2.2. Mēs šo splainu meklēsim formā:

$$\tilde{S}(x) = \begin{cases} \tilde{u}_i + \tilde{m}_i(x - \tilde{x}_i) + \tilde{e}_i \left[\frac{(x - \tilde{x}_i)^2}{k_i \tilde{H}_i} - \frac{\tilde{G}_i}{12} \right], & x \in [x_i, x_{i+1/2}], \\ \tilde{x}_i = \frac{x_i + x_{i+1/2}}{2}, \quad i = \overline{0, N}; \\ u_{i-1/2} + m_{i-1/2}(x - \bar{x}_{i-1/2}), & x \in [x_{i-1/2}, x_i], \quad \bar{x}_{i-1/2} = \frac{x_{i-1/2} + x_i}{2}, \quad i = \overline{1, N}. \end{cases} \quad (1.2.5)$$

Šeit $\tilde{G}_i = \tilde{H}_i / k_i$ ir garuma elementi, dalīti ar siltuma vadīšanas koeficientu, kurus var nosaukt par “raksturīgajiem vadīšanas garumiem”. Līdzīgi mēs definējam N papildus garumus otrā tipa slāņiem

$$G_{i-1/2} = H_{i-1/2} / k_{i-1/2}, \quad i = \overline{1, N}.$$

Līdzīgi kā iepriekšējā paragrāfā IPS saistības nosacījumi (1), (2) VIPS dod gala sistēmu:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_i \tilde{e}_{i-1} + (1 + \tilde{a}_i + \tilde{b}_i) \tilde{e}_i + \tilde{b}_i \tilde{e}_{i+1} &= \tilde{f}_i^- \tilde{u}_{i-1} - \tilde{f}_i \tilde{u}_i + \tilde{f}_i^+ \tilde{u}_{i+1}, \quad i = 1, \dots, N-1, \\ (1 + \tilde{a}_0 + \tilde{b}_0) \tilde{e}_0 + \tilde{b}_0 \tilde{e}_1 &= \tilde{f}_0^- \tilde{u}_{-1} - \tilde{f}_0 \tilde{u}_0 + \tilde{f}_0^+ \tilde{u}_1, \\ \tilde{a}_N \tilde{e}_{N-1} + (1 + \tilde{a}_N + \tilde{b}_N) \tilde{e}_N &= \tilde{f}_N^- \tilde{u}_{N-1} - \tilde{f}_N \tilde{u}_N + \tilde{f}_N^+ \tilde{u}_{N+1}. \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

Šeit lineārās algebriskās vienādojumu sistēmas koeficienti ir šādi:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_i &= \tilde{G}_{i-1} / (\tilde{G}_i + 2G_{i-1/2} + \tilde{G}_{i-1}), \quad \tilde{b}_i = \tilde{G}_{i+1} / (\tilde{G}_i + 2G_{i+1/2} + \tilde{G}_{i+1}), \\ \tilde{f}_i^- &= 3 / (\tilde{G}_i + 2G_{i-1/2} + \tilde{G}_{i-1}), \quad \tilde{f}_i^+ = 3 / (\tilde{G}_i + 2G_{i+1/2} + \tilde{G}_{i+1}), \quad \tilde{f}_i = \tilde{f}_i^- + \tilde{f}_i^+, \\ G_{-1/2} &= G_{N+1/2} = 0. \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

Izteiksmes koeficientiem $\tilde{G}_{-1}, \tilde{G}_{N+1}, \tilde{u}_{-1}, \tilde{u}_{N+1}$ ir identiska ar izteiksmēm (1.10_i), $i = 0, 1$. Pasvītrosim šādu interesantu VIPS momentu: lineāro algebrisko vienādojumu sistēma splaina koeficientiem satur tikai “parabolisko” koeficientu daļu. Lineārā raksturlielumu daļa ir reprezentēta caur lineārās algebriskās vienādojumu sistēmas (6)

koeficientiem (7). Otrs svarīgs aspekts: VIPS dabiskā ceļā transformējas par IPS, ja visi $x_{i-1/2} = x_i$. Šī paša īpašība paliek spēkā atklātajai VIPS koeficientu \tilde{e}_i reprezentācijai (sistēmas (1.15) analogam):

$$\tilde{e}_i = \tilde{\gamma}_i^{(0)} \tilde{f}_0^- \tilde{u}_{-1} + \tilde{\gamma}_i^{(1)} \tilde{f}_N^+ \tilde{u}_{N+1} + \sum_{j=0}^N \tilde{\beta}_{ij} \tilde{u}_j. \quad (1.2.8)$$

3. §. Klasisko kubisko splainu reprezentācija. Līdzīgi kā (1.15) atklāta sistēma var tikt konstruēta arī klasiskajiem splainiem. Šāda tipa formula nav literatūrā apskatīta, sk. [10]-[13]. Mūsu rakstā [9] krievu valodā 90 –tajos gados pēc analogijas ar reprezentāciju (1.15) (vai (1.11)) klasiskajiem kubiskajiem splainiem (KKS) tika iegūta līdzīga reprezentācija. Mēs to šeit dosim nedaudz atšķirīgā formā.

Klasiskā interpolācijas problēma funkcijai $u(x)$ tiek formulēta šādi. Pieņemsim, ka uz režģa

$$\Delta := \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b\}, \quad H_i = x_{i+1} - x_i$$

dotas funkcijas vērtības $u_i = u(x_i), i = 0, \dots, N$.

Interpolācija ar klasisko kubisko splainu $S_3(x) \in C^2[a, b]$ apakšsegmentam $x \in [x_i, x_{i+1}]$ attiecībā pret normalizēto argumentu $t = (x - x_i) / H_i$ tiek reducēts uz splaina otro atvasinājumu atrašanu $M_i = S_3''(x_i)$. Trīsdiagonālās lineāro algebrisko vienādojumu sistēma koeficientu M_i atrašanai pēc būtības ir identiska sistēmai (1.13):

$$a_i M_{i-1} + (1 + a_i + b_i) M_i + b_i M_{i+1} = f_i^- u_{i-1} - f_i u_i + f_i^+ u_{i+1}. \quad (1.3.1)$$

Interpolācijas formula apakšsegmentam $x \in [x_i, x_{i+1}]$ attiecībā pret normalizēto argumentu $t = (x - x_i) / H_i$ tiek reducēta uz splaina otro atvasinājumu atrašanu:

$$S_3(t) = u_i(1-t) + u_{i+1}t - \frac{H_i^2}{6} t(1-t)[(2-t)M_i + (1+t)M_{i+1}], \quad i = \overline{0, N-1}. \quad (1.3.2)$$

Koeficienti kubiskā splaina atrašanai ir šādi:

$$\begin{aligned} a_i &= H_{i-1} / (H_{i-1} + H_i), \quad b_i = H_i / (H_{i-1} + H_i), \\ f_i^- &= 6a_i / H_{i-1}^2, \quad f_i^+ = 6b_i / H_i^2, \quad f_i = f_i^- + f_i^+. \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

Tādejādi sistēma (1) var tikt uzrakstīta formā:

$$a_i M_{i-1} + 2M_i + b_i M_{i+1} = f_i^- u_{i-1} - f_i u_i + f_i^+ u_{i+1}, \quad i = 1, \dots, N-1. \quad (1.3.4)$$

Mēs probežosimies ar diviem RN tipiem:

$$\text{a) } S_3'(a) = u_0', S_3'(b) = u_N'; \quad \text{b) } S_3''(a) = u_0'', S_3''(b) = u_N''.$$

Uzrakstīsim tos līdzīgā formulai (1) formā:

$$2M_0 + b_0 M_1 = f_0^+(u_1 - u_0) + F_0, a_N M_{N-1} + 2M_N = f_N^-(u_{N-1} - u_N) + F_N. \quad (1.3.5)$$

Vienādojumu (5) koeficienti izskatās šādi:

$$\text{a) } b_0 = 1, F_0 = -6u_0' / H_0, a_N = 1, F_N = 6u_N' / H_{N-1};$$

$$\text{b) } b_0 = f_0^+ = 0, F_0 = 2u_0'', a_N = f_N^- = 0, F_N = 2u_N''.$$

KKS koeficientiem M_i reprezentācijas ir uzrakstāmas šādā formā. To iegūšana ir tāda pati kā pirmajā paragrāfā, skat vienādojumu sistēmas (1.16)-(1.18):

$$M_i = \gamma_i^{(0)} F_0 + \gamma_i^{(1)} F_N + \sum_{j=0}^N \beta_{ij} u_j, \quad i = \overline{0, N}. \quad (1.3.6)$$

Reprezentācijas (4) ievietošana izteiksmē (2) dod jaunu interesantu atklātu KKS formulu:

$$S_3(t) = u_i(1-t) + u_{i+1}t - H_i^2 / 6t(1-t) \left[3(\gamma_i^{(0)} F_0 + \gamma_i^{(1)} F_N) + \sum_{j=0}^N [(2-t)\beta_{ij} + (1+t)\beta_{i+1,j}] u_j \right]. \quad (1.3.7)$$

2. nodaļa. Konservatīvās viduvēšanas metode cilindram R^{n+1}

Šajā nodaļā vispirms ir apskatīta konservatīvā viduvēšana vienkāršam cilindram, citiem vārdiem, diferenciālvienādojumam ar nepārtrauktiem koeficientiem. Metode vienādojumiem ar pārtrauktiem koeficientiem apskatīta virknē darbu: monografijā [3], publikācijās [14]-[16]. Šī pieja ļauj vienotā matemātiskā formā iegūt neklasiskus robežnosacījumus problēmām ar pārtrauktiem koeficientiem. No daudzajiem darbiem atsauksimies uz A. Samarska publikācijām [17], [18]. Šajā daļa tiek apskatītas divas pētījumu grupas, kuras atšķiras ar pētījumu laiku. To rezultātu pirmā daļa ir publicēta, sākot ar 1981. gadu un tajos ir aplūkotas toreiz aktuālas tēmas par naftas iegūvi daudzslāņu sistēmās un par pazemes ūdeņu piesārņošanu. Šie darbi ir publicēti rakstos pazīstamu speciālistu monogrāfijās [19]-[22], kā arī mūsu publikācijās [23]-[32]. Pēc zināma pārtraukuma šie pētījumi tika turpināti jau pēdējos gados un tajos problēmas skatītas vispārīgākā formā. Galvenie šīs nodaļas rezultāti pēdējos gados ir publicēti rakstos [5]-[8], [34]-[36].

2.1. Mēs sāksim ar problēmas diferenciālvienādojumam ar nepārtrauktiem koeficientiem (vai integrodiferenciālvienādojumam). Mēs apskatīsim *klasisko* atrisinājumu, t.i. visi diferenciālvienādojuma augstākie atvasinājumi apgabalā ir nepārtraukti.

Apskatīsim apgabalu D (skat 1. zīm.), kur $D = \{(x, y) : x \in [0, H] \times G \subset R^{n+1}\}$. Šeit apgabala D bāze G ir ierobežots (vai neierobežots) apgabals $y = (y_1, \dots, y_n) \in G \subset R^n$. Uzreiz atzīmēsim, ka viens no vektora y argumentiem var būt laiks t . Tātad metode ir lietojama gan stacionārām, gan nestacionārām matemātiskās fizikas problēmām.

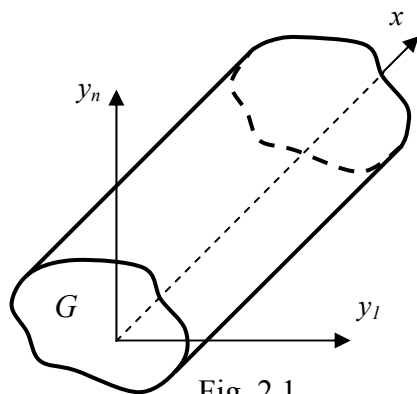


Fig. 2.1.

Pamatvienādojums ir šāds:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial U}{\partial x} \right) + L(U) = -F(x, y), (x, y) \in D. \quad (2.1)$$

Šeit $L(\bullet)$ ir *lineārs diferenciāls* (vai integrodiferenciāls) operātors attiecībā pret vektoru argumentu y ar koeficientiem, kuri var būt atkarīgi no y , bet ne no argumenta x .

Uz pamatnes (uz G) mēs uzliekam RN vispārīgā formā:

$$-v_0 k \frac{\partial U}{\partial x} + \lambda_0 U = \Phi_0(y) + L_0(U). \quad (2.2)$$

RN (2) operatoram $L_0(U)$ ir tādas pašas īpašības kā operatoram $L(U)$; šāds operators var parādīties RN, ja izmanto konservatīvās viduvēšanas metodi līdzīgi kā vienādojumam (1) cilindrā $G_0 = G \times \{x \in [-\delta, 0]\}$. Pēc konservatīvās viduvēšanas metodes lietošanas tievais cilindrs G_0 pazūd no problēmas formulējuma un iegūstam problēmu parciālajam diferenciālvienādojumam (1) ar netipisku RN (2), detaļas apskatītas rakstos [14]-[16].

Konservatīvās viduvēšanas metode ir izmantojama arī nelineāriem RN:

$$-k \frac{\partial U}{\partial x} + \beta^m [U - \Theta(t)]^m = 0. \quad (2.3)$$

Šeit koeficients m ir: $m = 3; 10/3$ tā sauktai burbuļveida vārīšanās robežnosacījumam uz materiāla virsmas intensīvās tērauda rūdīšanas procesā [61]-[63].

Cits interesants un svarīgs RN process ir siltuma izstarošanās (ε ir virsmas absorbēšanas koeficients, σ – Stefana-Boltzmanas konstante):

$$-k \frac{\partial U}{\partial x} + \varepsilon \sigma [U^4 - \Theta^4(t)] = 0. \quad (2.4)$$

Uz otras cilindra pamatnes (pie $x = H$) mēs formulējam tāda paša tipa RN:

$$v_1 k \frac{\partial U}{\partial x} + \lambda_1 U = \Phi_1(y) + L_1(U). \quad (2.5)$$

Robežnosacījumu (vai nosacījumu) tips uz cilindra D sānu virsmas (uz visas virsmas vai tikai uz daļas no tās) $\Gamma \subseteq \{\partial G = \bar{G} \setminus G\} \times \{0 \leq x \leq H\}$ ir atkarīgs no operatora $L(\bullet)$ tipa. RN tipu precīzē vēlāk, bet šeit aprobežosimies ar *lineāru* RN šādā vispārīgā formā:

$$l(u) = \Psi(x, y), (x, y) \in \Gamma. \quad (2.6)$$

Transformēsim problēmu (1), (2), (5) un (6), t.i. mēs formulēsim citu problēmu sākotnējās problēmas vietā. Lai šo atšķirību pasvītrotu, mēs jaunās problēmas vienādojumam (1) apzīmēsim ar $u(x, y)$ funkcijas $U(x, y)$ vietā un papildus definēsim vidējo integrālo funkcijuvirzienā:

$$u_0(y) = H^{-1} \int_0^H U(x, y) dx. \quad (2.7)$$

Integrējam pamatvienādojumu (1). Tas dod precīzu vienādojumu (operators $L(u)$ ir lineārs operators!):

$$L(u_0) + \frac{k}{H} \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x=0}^{x=H} = -f(y), \quad f(y) = H^{-1} \int_0^H F(x, y) dx. \quad (2.8)$$

Mēs sauksim šo vienādojumu par *principiālo sakarību*. Viegli redzams, ka principiālā sakarība ir nepilnīgi definēts vienādojums, jo viņš satur divas atšķirīgas funkcijas: $u_0(y)$ un $U(x, y)$, atbilstoši $u(x, y)$ vienā vienādojumā. Tas nozīmē, ka jānosaka saistība starp šīm funkcijām. Nākamais solis mūsu pieejā (metodē) ir atkarīgs no diviem faktoriem:

1) Pieņēmuma par funkcijas $U(x, y)$, attiecīgi $u(x, y)$ izturēšanās x – virzienā pie fiksēta y ;

2) No RN tipa uz abām cilindriskā apgabala pamatnēm.

Vienkāršākais pieņēmums; funkcijas $u(x, y)$ izturēšanās x – virzienā: tā ir vāji atkarīga no argumenta x . Tad iespējams uzrakstīt šādas vienādības:

$$U(x, y) = u(x, y) \approx u(y) = u_0(y).$$

Otrā veida RN tips tūlīt dod šādu jaunu pamatvienādojumu (no principiālās sakarības):

$$L(u_0) = - \left[\frac{\Phi_0(y) + \Phi_1(y)}{H} + f(y) \right]. \quad (2.9)$$

Trešā veida robežnosacījumu gadījumā mēs izsakām “plūsmas” locekli:

$$-k \frac{\partial U}{\partial x} = h_0 \Theta_0(y) - h_1 u(0, y).$$

Gala rezultātā iegūstam pamatvienādojumu:

$$L(u_0) - \frac{h_0 + h_1}{H} u_0 = \left\{ \frac{h_0 \Theta_0(y) + h_1 \Theta_1(y)}{H} + f(y) \right\}. \quad (2.10)$$

RN (33) dod šādu pamatvienādojumu:

$$L(u_0) - \frac{\beta_0^m}{H} [u_0 - \Theta_0(y)]^m - \frac{\beta_1^m}{H} [u_0 - \Theta_1(y)]^m = -f(y). \quad (2.11)$$

Vairāk uzmanības pirmā veida RN. Formāli no principiālās sakarības (8) izriet, ka abi “plūsmas” locekļi pazūd (vienādi ar nulli) un kā pamatvienādojumu iegūstam:

$$L(u_0) = -f(y).$$

Iegūtā vienādojuma vājums ir acīmredzams: tas ir neatkarīgs no RN labajām pusēm $\Phi_i(y), i = 0, 1$. Pieņemot, ka integrālā vidējā vērtība $u_0(y)$ ir tuvu viduspunktam $x = H/2$ (aizvietojojot abas plūsmas ar galīgām diferencēm), iegūstam:

$$L(u_0) - \frac{4k}{H^2} u_0 = \left\{ \frac{2k}{H^2} [\Phi_0(y) + \Phi_1(y)] + f(y) \right\}. \quad (2.12)$$

Vispārējā gadījumā (operatori $L_0(L_1)$ ir klāt RN) iegūstam šādu viduvēto vienādojumu:

$$L(u_0) + \frac{2k}{H^2} [L_0(u_0) + L_1(u_0) - 2u_0] = - \left\{ f + \frac{2k}{H^2} [\Phi_0(u_0) + \Phi_1(u_0)] \right\}.$$

Visos gadījumos pamatvienādojumam (8) jāpievieno RN uz $\gamma \subseteq \{\partial G = \bar{G} \setminus G\}$. RN linearitāte dod viduvēto jauno RN:

$$l(u_0) = \psi(y), y \in \gamma, \psi(y) = H^{-1} \int_0^H \Psi(x, y) dx.$$

2.2. Īsi dosim piemēru konservatīvās viduvēšanas metodes izmantošanai viendimensiju siltuma vadīšanas vienādojumam:

$$c_i \frac{\partial U_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_i \frac{\partial U_i}{\partial x} \right) + F_i(x, t), x_i < x < x_{i+1}, i = \overline{0, N}, x_0 = a, x_{N+1} = b, t \in (0, T], \quad (2.13)$$

$$U_{i-1}(x_i - 0) = U_i(x_i + 0), k_{i-1} \frac{\partial U_{i-1}(x_i - 0)}{\partial x} = k_i \frac{\partial U_i(x_i + 0)}{\partial x}, \quad (2.14)$$

$$-v_0 k_0 \frac{\partial U_0(a)}{\partial x} + \lambda_0 U_0(a) = \Phi_0(t), v_1 k_N \frac{\partial U_N(b)}{\partial x} + \lambda_N U_N(b) = \Phi_1(t), \quad (2.15)$$

$$U_i(x, 0) = U_i^0(x). \quad (2.16)$$

Viduvētrā vērtība $u_i(t)$:

$$u_i(t) = \frac{1}{H_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} U_i(x, t) dx, H_i = x_{i+1} - x_i, i = 0, \dots, N.$$

Gala rezultātā iegūstam:

$$c_i \frac{du_i}{dt} = \frac{2}{H_i} \left[\sum_{j=0}^N \beta_{ij} u_j + \gamma_i^{(0)} f_0^- u_{-1} + \gamma_i^{(1)} f_N^+ u_{N+1} \right] + f_i(t), i = \overline{0, N}, t \in (0, T]. \quad (2.17)$$

2.3. Ja apskatam sistēmu stieņi ar starpstieņiem, tad formulējums ir šāds. Pamatstieņiem:

$$\tilde{c}_i \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\tilde{k}_i \frac{\partial^2 \tilde{U}_i}{\partial x} \right) - q_i(t) \tilde{U}_i + F_i(x, t), \quad (2.18)$$

$$x_i < x < x_{i+1/2}, i = \overline{0, N}, x_0 = a, x_{N+1/2} = x_{N+1} = b, t \in (0, T].$$

Vienādojumi starpstieņiem:

$$c_{i-1/2} \frac{\partial U_{i-1/2}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_{i-1/2} \frac{\partial^2 U_{i-1/2}}{\partial x} \right) - q_{i-1/2} U_{i-1/2} \quad (2.19)$$

$$+ F_{i-1/2}(x, t), \quad x_{i-1/2} < x < x_i, i = \overline{1, N}.$$

Saistības nosacījumi uz stienīšu un starpstienīšu virsmas punktos $x_i, x_{i-1/2}$:

$$\tilde{U}_{i-1}(x_{i-1/2} - 0) = U_{i-1/2}(x_{i-1/2} + 0), \quad (2.20)$$

$$U_{i-1/2}(x_i - 0) = \tilde{U}_i(x_i + 0), i = \overline{1, N},$$

$$\tilde{k}_{i-1} \frac{\partial \tilde{U}_{i-1}(x_{i-1/2} - 0)}{\partial x} = k_{i-1/2} \frac{\partial U_{i-1/2}(x_{i-1/2} + 0)}{\partial x}, \quad (2.21)$$

$$k_{i-1/2} \frac{\partial U_{i-1/2}(x_i - 0)}{\partial x} = \tilde{k}_i \frac{\partial \tilde{U}_i(x_i + 0)}{\partial x}.$$

Visbeidzot, izrakstam RN (22) malējiem stienīšiem un sākuma nosacījumus (23):

$$-v_0 k_0 \frac{\partial U_0(a)}{\partial x} + \lambda_0 U_0(a) = \Phi_0(t), \quad (2.22)$$

$$v_1 k_N \frac{\partial U_N(b)}{\partial x} + \lambda_1 U_N(b) = \Phi_1(t),$$

$$\tilde{U}_i(x, 0) = \tilde{U}_i^0(x), U_{i-1/2}(x, 0) = U_{i-1/2}^0(x). \quad (2.23)$$

Kā redzams, vienādojuma koeficientiem ir pārtraukumi $2N$ iekšējos punktos $x_i, x_{i-1/2}, i = 1, \dots, N$. Tehniskās (dabiskās) sistēmās bieži izpildās šādas nevienādības:

$$k_{i-1/2} \ll \min(k_{i-1}, k_i), i = \overline{1, N}, x_i - x_{i-1/2} = H_{i-1/2} < \min(\tilde{H}_{i-1}, \tilde{H}_i).$$

Tādos gadījumos matemātiskajos modeļos pieņem, ka starpslāņos var ielikt lineāru attiecībā pret x (skat, [3], [4], [19], [21]-[27]).

Problēmas (18)-(23) atrisinājums ir nepārtraukta taisnstūrī $\{x \in [a, b]\} \otimes \{t \in [0, T]\}$ funkcija:

$$U(x, t) = \begin{cases} \tilde{U}_i(x, t), \text{ if } x \in (x_i, x_{i+1/2}), i = \overline{0, N}, \\ U_{i-1/2}(x, t), \text{ if } x \in (x_{i-1/2}, x_i), i = \overline{1, N}. \end{cases}$$

Integrētās pret argumentu x vidējās vērtības $\tilde{u}_i(t)$ saskaņā ar VIPS īpašību definē šādi:

$$\tilde{u}_i(t) = \frac{1}{\tilde{H}_i} \int_{x_i}^{x_{i+1/2}} \tilde{U}_i(x, t) dx, \tilde{H}_i = x_{i+1/2} - x_i, i = \overline{0, N}.$$

Integrējot pamatvienādojumu (18), iegūstam:

$$\tilde{c}_i \frac{d\tilde{u}_i}{dt} = \frac{\tilde{k}_i}{\tilde{H}_i} \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x} \Big|_{x=x_i}^{x=x_{i+1/2}} - q_i(t)\tilde{u}_i + f_i(t), f_i(t) = \frac{1}{\tilde{H}_i} \int_{x_i}^{x_{i+1/2}} F_i(x, t) dx. \quad (2.24)$$

Šī vienādība (24) ir precīza. Tagad labās puses pirmo locekli aizvietojam ar splaina (1.2.5) atvasinājumu:

$$\frac{\tilde{k}_i}{\tilde{H}_i} \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x} \Big|_{x=x_i}^{x=x_{i+1/2}} \approx \frac{\tilde{k}_i}{\tilde{H}_i} \frac{d\tilde{S}}{dx} \Big|_{x=x_i}^{x=x_{i+1/2}} = \frac{2\tilde{e}_i}{\tilde{H}_i}. \quad (2.25)$$

Reprezentācijas (1.2.8) ievietošana vienādojumā (25) dod vienādojumu:

$$\frac{\tilde{k}_i}{\tilde{H}_i} \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x} \Big|_{x=x_i}^{x=x_{i+1/2}} \approx \frac{2}{\tilde{H}_i} \left[\sum_{j=0}^N \tilde{\beta}_{ij} \tilde{u}_j + \tilde{\gamma}_i^{(0)} \tilde{f}_0^- \tilde{u}_{-1} + \tilde{\gamma}_i^{(1)} \tilde{f}_N^+ \tilde{u}_{N+1} \right]. \quad (2.26)$$

Šo izteiksmi ievietojam formulā (24) un iegūstam vienādojumu kopā ar viduvēto sākuma nosacījumu:

$$\tilde{c}_i \frac{d\tilde{u}_i}{dt} = \frac{\tilde{k}_i}{\tilde{H}_i} \left[\sum_{j=0}^N \tilde{\beta}_{ij} \tilde{u}_j + \tilde{\gamma}_i^{(0)} \tilde{f}_0^- \tilde{u}_{-1} + \tilde{\gamma}_i^{(1)} \tilde{f}_N^+ \tilde{u}_{N+1} \right] - q_i(t) \tilde{u}_i + f_i(t), \quad (2.27)$$

$$\tilde{u}_i(0) = \frac{1}{\tilde{H}_i} \int_{x_i}^{x_{i+1/2}} \tilde{U}_i^0(x) dx.$$

Šīs Košī problēmas atrisinājums parasto diferenciālvienādojumusistēmai (analītiski vai skaitliski) funkcijas $\tilde{u}_i(t), i = \overline{0, N}$. Tas atļauj atrast no VIPS reprezentācijas (1.2.8) un formulām visus koeficientus \tilde{e}_i, \tilde{m}_i , un rekonstruēt atrisinājumu $\tilde{U}_i(x, t), i = \overline{0, N}$ elementārajiem stienīšiem.

Vienkāršākais veids, kā atrast atrisinājumu starpstienīšiem, ir izmantot linearitātes pieņēmumu. Iegūstam:

$$U_{i-1/2}(x, t) = \tilde{U}_{i-1}(x_{i-1/2}, t) \frac{x_i - x}{H_{i-1/2}} + \tilde{U}_i(x_i, t) \frac{x - x_{i-1/2}}{H_{i-1/2}}. \quad (2.28)$$

VIPS definīcija dod:

$$u_{i-1/2}^{(1)}(t) = \frac{\tilde{U}_{i-1}(x_{i-1/2}, t) + \tilde{U}_i(x_i, t)}{2}. \quad (2.29)$$

Otra iespēja ir vienādojuma (19) integrēšana x – virzienā:

$$c_{i-1/2} \frac{du_{i-1/2}}{dt} = \frac{k_{i-1/2}}{H_{i-1/2}} \frac{\partial U_{i-1/2}}{\partial x} \Big|_{x=x_{i-1/2}}^{x=x_i} - q_{i-1/2} u_{i-1/2} + f_{i-1/2}(t),$$

t.i.

$$c_{i-1/2} \frac{du_{i-1/2}^{(2)}}{dt} + q_{i-1/2} u_{i-1/2}^{(2)} = f_{i-1/2}(t), \quad (2.30)$$

$$u_{i-1/2}^{(2)}(0) = u_i^0 = \frac{1}{H_{i-1/2}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_i} U_{i-1/2}^0(x) dx.$$

Atšķirība starp abām pieejām $|u_{i-1/2}^{(1)}(t) - u_{i-1/2}^{(2)}(t)|$ parāda kļūdas lielumu konservatīvās viduvēšanas metodei problēmai (18)-(23).

Otrā daļa. **Konservatīvās viduvēšanas metode un integrālie splaini lietojumos**

Promocijas darba turpmākajā nodaļā tiek pētīti siltuma un masas pārneses procesi daudzslāņu sistēmās. Pēc tam tiek apskatīti siltuma apmaiņas procesi sistēmās ar izstieptām virsmām. Visbeidzot tiek apskatīti intensīvās tērauda rūdīšanas procesi.

Nākamajā nodaļā tiek apskatītas divas pētījumu grupas, kuras atšķiras ar pētījumu laiku. To rezultātu pirmā daļa ir publicēta, sākot ar 1981. gadu un tajos ir aplūkotas toreiz aktuālas tēmas par naftas ieguvī daudzslāņu sistēmās [19]-[21] un par pazemes ūdeņu piesārņošanu [22]. Toreizējos apstākļos šīs publikācijas bija zinātniski aktuālas, jo tābrīža apstākļos datoriem ES (Jedinaja Sistēma) bija nepieciešams minimāls problēmu formulējums un datu apstrādes apjoms, lai datori spētu aprēķināt ilgtermiņa (15-20 gadu) naftas atradņu stratēģijas. Šobrīd ar pavisam citas jaudas datoriem šie problēmu uzdevumi izskatās pēc metodiskiem modeļiem.

Šie autores un ar līdzautoru darbi ir publicēti rakstos [23] –[33]. Pēc zināma pārtraukuma šie pētījumi tika turpināti jau pēdējos gados un tajos problēmas skatītas daudz vispārīgākā formā, atbilstoši inženierzinātņu attīstības līmenim [5]-[8], [34]-[36].

3. nodaļa. Siltuma un masas pārnese procesi kārtainās vidēs

1.§. Konservatīvās metodes lietojumi kārtainām sistēmām 80-tajos gados

Publikācijā [23] apskatīta siltuma pārnese siltuma vadīšanas un konvekcijas ceļā porainā vidē (slānī), ja atšķiram slānim cauri plūstošā šķidruma temperatūru $u(x_2, t)$ un paša slāņa temperatūru $v(x_1, x_2, t)$:

- Paša slāņa temperatūra viduvēta pa slāņa biezumu (koordināti x_1) ar konservatīvās viduvēšanas metodi, aproksimējot ar konstanti;
- Siltuma vadīšana slānī un apkārtējā vidē konvekcijas virzienā (koordināte x_2) netiek ņemta vērā;
- Pašu slāni uztveram kā divu temperatūru vidi: porainā matrica un tai cauri plūstošais šķidrums.

Darbā formulēta nostādne:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}, x_1, x_2, t > 0, \quad (3.1.1)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x_1} + \alpha(u - v), \\ x_1 = 0, x_2, t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{v}{m} \frac{\partial u}{\partial x_2} + \alpha_0(v - u), \end{cases} \quad (3.1.2)$$

$$v|_{t=0} = v^0(x_1, x_2), u|_{t=0} = u^0(x_2), u|_{x_1=x_2=0} = \mu(t). \quad (3.1.3)$$

Darbā tiek salīdzināti divi matemātiskie modeļi:

- Tikko aprakstītajā matemātiskajā modelī tiek veikta temperatūru viduvēšana attiecībā uz viduvētajām termiskajām īpašībām (indekss „0” attiecas uz šķidrumu, indekss „1” - uz poraino matricu):

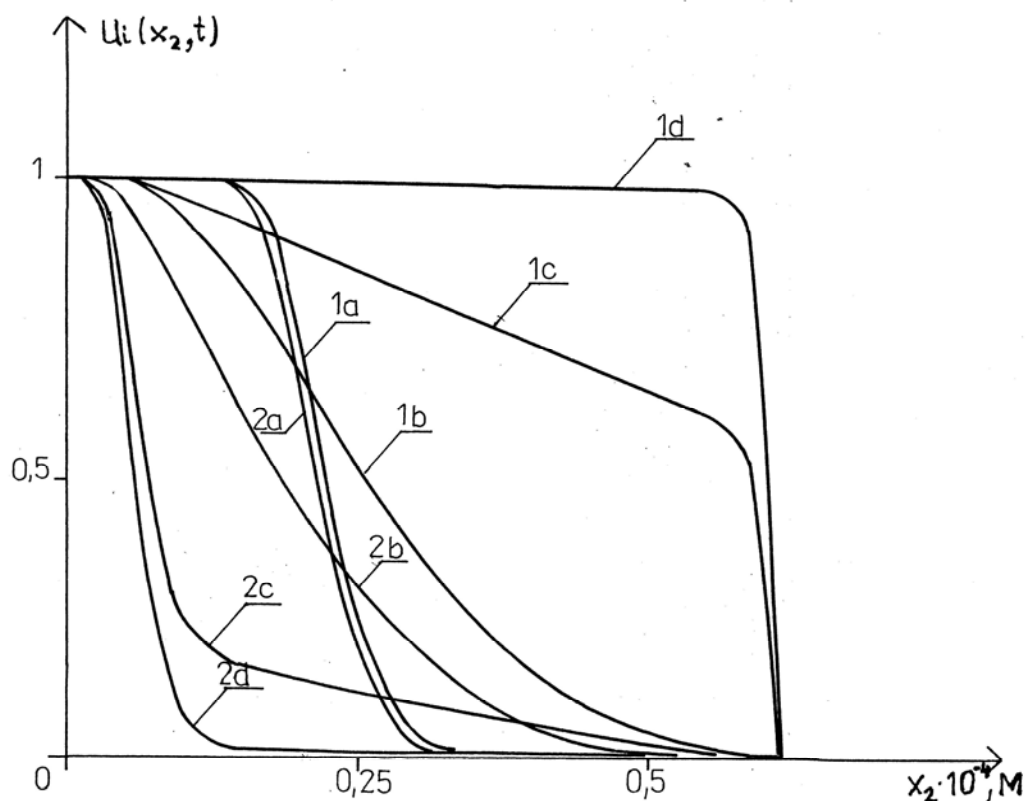
$$\tilde{u}(x_2, t) = \frac{mc_0 u(x_2, t) + (1-m)c_1 v(0, x_2, t)}{mc_0 + (1-m)c_1}; \quad (3.1.4)$$

- Kad slānī tiek izdarīta divu komponentu (fāzu) vides termisko īpašību homogenizācija (viduvēšana: apskatīta vide ar viduvētām termiskām īpašībām). Tāda problēma tiek saukta arī par Loverjē shēmu $u_L(x_2, t)$. Tajā pašā slānī tiek definēta temperatūra ar vienādojumu

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \beta \frac{\partial v}{\partial x_1} - \tilde{w} \frac{\partial v}{\partial x_2}. \quad (3.1.5)$$

Koeficientu β, \tilde{w} vērtības ir atkarīgas no porainās vides fizikālajiem un ģeometriskajiem parametriem un filtrācijas ātruma lielumiem. Pievienotajā zīmējumā parādītas temperatūras $u(x_2, t)$ un $u_L(x_2, t)$ atkarībā no fizikālajiem parametriem un ģeometriskajiem parametriem. Kā redzams, ļoti būtiski atšķiras temperatūras frontes

un temperatūru lauku izmaiņas. Tātad darbā parādīts (ar analītiskām formulām un ar galīgo diferencu metodi), ka abas pieejas dod principiāli atšķirīgus rezultāts. Temperatūru frontes atrodas visai dažādās vietās, kas bija ļoti nozīmīgi temperatūru ietekmei uz slāņu naftas atdevi.



Zīm.3.1. Loverjē atrisinājums – līknes 1,2; 3-6 - problēmas (3.1.1)-(3.1.3) atrisinājums (3.1.4)

Publikācijā [24] apskatīta siltuma pārnese siltuma vadīšanas un konvekcijas ceļā daudzslāņu porainā sistēmā, ja atsevišķu slāņu temperatūra viduvēta pa attiecīgā slāņa biezumu (pieņēmumi līdzīgi iepriekšējai publikācijai, bez otras komponentes). Detalizētāk nostādnes par daudzslāņu sistēmām apskatītas zemāk (3. un 4. šīs nodaļas paragrāfos), šeit dosim tikai problēmas formulējumu:

Publikācijā tiek piedāvāta galīgo diferencu shēma ar svariem:

$$y_i = a_k^2 \Lambda_{11} y^{(\sigma_1^{(k)})}, N_1^{(k-1)} < i < N_1^{(k)},$$

$$\left(1 + \frac{\beta_k^+ h_1^{(k+1)}}{4a_{k+1}^2} + \frac{\beta_k^- h_1^{(k)}}{4a_k^2} \right) y_i = \frac{\beta_k^+}{2} \Lambda_1^+ y^{(\sigma_1^{(k+1)})} - \frac{\beta_k^-}{2} \Lambda_1^- y^{(\sigma_1^{(k)})} - w_k \Lambda_2^- y^{(\sigma_1^{(k)})}, i = N_k^{(k)}.$$

Pārejie vienādojumi (robežnosacījumi un sākuma nosacījums) ir acīmredzami.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a_k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, x_1^{(k-1)} < x_1 < x_1^{(k)}, x_2, t > 0, k = \overline{1, K+1};$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\beta_k^+}{2} \frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|_{x_1=x_1^{(k)+0}} - \frac{\beta_k^-}{2} \frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|_{x_1=x_1^{(k)-0}} - w_k \frac{\partial u}{\partial x_2}, x_1 = x_1^{(k)}, x_2, t > 0, k = \overline{1, K}; \quad (3.1.6)$$

$$u|_{t=0} = u^0(x_1, x_2), u|_{x=x_1^{(k)}} = \mu_k(t), |u|_{x_1^2+x_2 \rightarrow \infty} < \infty.$$

Tālāk rakstā [24] formulēta shēmas stabilitātes teorēma C metrikā un piedāvāts ekonomisks pārneses tipa (faktorizācijas) algoritms trīs punktu shēmas risināšanai (pa koordināti perpendikulāri slāņu biezumam).

3.1. Teorēma. Ja $0 \leq \sigma_1^{(k)} < 1, 0 \leq \sigma_2^{(k)} < 1$ un ir izpildīti nosacījumi

$$\tau \leq \left(\begin{array}{cc} \min & \tau_1^{(k)}, & \min & \tau_2^{(k)}, \\ 1 \leq k \leq K+1 & & 1 \leq k \leq K \end{array} \right),$$

kur

$$\tau_1^{(k)} = \frac{(h_1^{(k)})^2}{2a_k^2(1-\sigma_1^{(k)})}, \tau_2^{(k)} = \frac{1 + \frac{\beta_k^+ h_1^{(k+1)}}{4a_{k+1}^2} + \frac{\beta_k^- h_1^{(k)}}{4a_k^2}}{\frac{\beta_k^+(1-\sigma_1^{(k+1)})}{2h_1^{(k+1)}} + \frac{\beta_k^-(1-\sigma_1^{(k)})}{2h_1^{(k)}} + \frac{w_k(1-\sigma_1^{(k)})}{h_2}}, \quad (3.1.7)$$

tad diferenču shēma ir stabila C normā. Tīri aizklāta shēma $\sigma_1^{(k)} = \sigma_2^{(k)} = 1$ ir absolūti stabila.

Publikācijā [25] apskatīta siltuma pārnese siltuma vadīšanas un konvekcijas ceļā divu dimensiju daudzslāņu poraini - plasainā sistēmā, ja atsevišķu slāņu temperatūra viduvēta pa attiecīgā slāņa biezumu (pieņēmumi līdzīgi publikācijai [23]):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2(x_1) \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2}, x_1 \neq x_1^{(k)}, x_2, t > 0;$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\beta_k^+}{2} \frac{\partial T}{\partial x_1} \Big|_{x_1=x_1^{(k)+0}} - \frac{\beta_k^-}{2} \frac{\partial T}{\partial x_1} \Big|_{x_1=x_1^{(k)-0}} - w_k \frac{\partial T}{\partial x_2} + \alpha_k (\Theta_k - T), x_1 = x_1^{(k)}, x_2, t > 0; \quad (3.1.8)$$

$$\frac{\partial \Theta_k}{\partial t} = -w_k^0 \frac{\partial \Theta_k}{\partial x_2} + \alpha_k^0 (T - \Theta_k),$$

$$T|_{t=0} = T^0(x_1, x_2), \Theta_k|_{t=0} = \Theta_k^0(x_2), T|_{x=x_1^{(k)}, x_2=0} = T_k^1(t), \Theta_k|_{x_2=0} = \Theta_k^1(t).$$

Darbā tiek piedāvāta galīgo diferencu shēma ar svariem, jaunajā laika momentā tiek izslēgts temperatūras vienādojums šķidrumam un piedāvāts pārnese tipa algoritms. Publikācijā [26] apskatīta divu dimensiju siltuma pārnese siltuma vadīšanas un konvekcijas ceļā daudzslāņu porainā sistēmā, kura satur starpslāņus starp jebkuriem diviem pamatslāņiem. Tiek realizēta viduvēšana pa attiecīgā slāņa biezumu un iegūta Loverjē modeļa analogs daudzslāņu sistēmai:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2(x_1) \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2}, \quad x_1 \neq x_1^{(k)}, x_2, t > 0;$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \beta_k^+ \frac{\partial T}{\partial x_1} \Big|_{x_1=x_1^{(k)}+0} - \beta_k^- \frac{\partial T}{\partial x_1} \Big|_{x_1=x_1^{(k)}-0} - w_k \frac{\partial T}{\partial x_2}, \quad x_1 = x_1^{(k)}, x_2, t > 0;$$

$$T|_{t=0} = T^0(x_1, x_2), \quad T|_{x=x_1^{(k)}, x_2=0} = T_k^1(t).$$

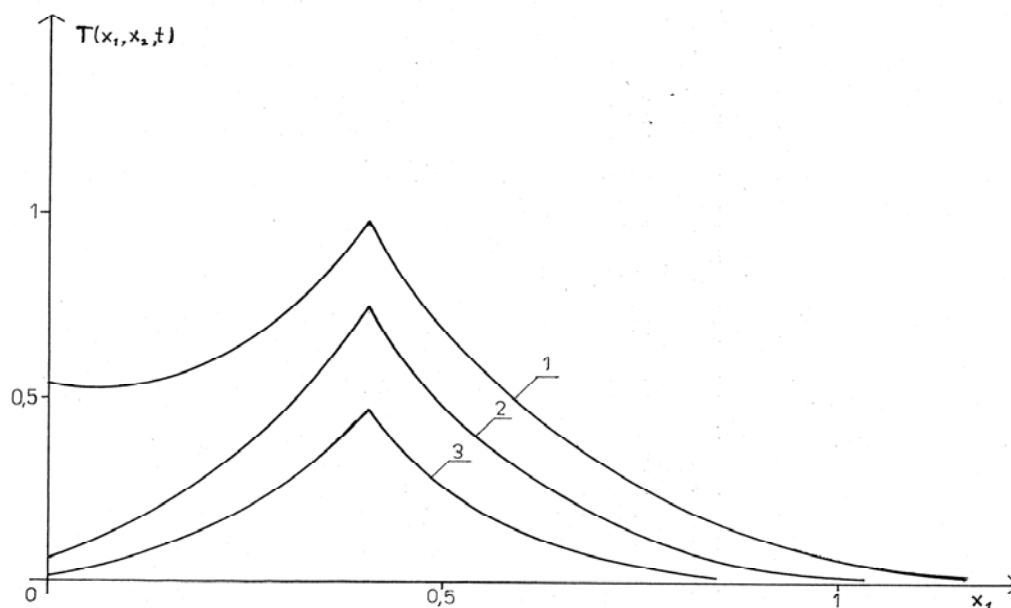
Tiek piedāvāta diferencu shēma ar svariem šādai vienādojumu sistēmai:

$$y_i = a_k^2 \Lambda_{11} y^{(\sigma_1^{(k+1/2)})}, \quad N_1^{(k-1)} < i < N_1^{(k)},$$

$$\left(1 + \frac{\beta_k^+ h_{1,k+1/2}^{(k+1)}}{2a_{k+1/2}^2} + \frac{\beta_k^- h_{1,k-1/2}^{(k)}}{2a_{k-1/2}^2} \right) y_i = \beta_k^+ \Lambda_1^+ y^{(\sigma_1^{(k+1/2)})} - \beta_k^- \Lambda_1^- y^{(\sigma_1^{(k-1/2)})} - w_k \Lambda_2^- y^{(\sigma_2^{(k)})},$$

$$i = N_k^{(k)}$$

kopā ar acīmredzamajiem papildnosacījumiem.

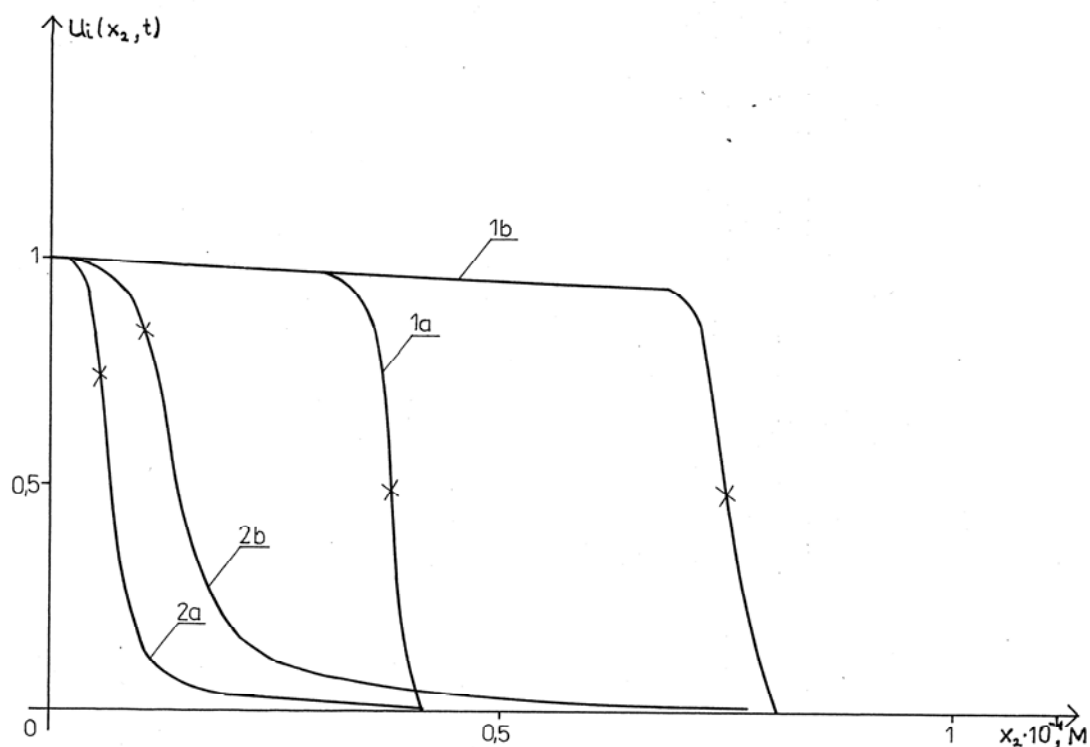


Zīm.3.2. Temperatūru lauka sadalījums koordinātes x_1 virzienā. Tas ir vienādojumu (3.1.8) atrisinājums simetriskam trīs slāņu atradnei ar starpslāņu biezumu 0,4.

Formulēts diferencu shēmas stabilitātes nosacījums vienmērīgā metrikā (3.1. teorēmas analogs) un diferencu shēmas atrisināšanas algoritms. Apskatīta arī nostādne daudzslāņu poraini-plaisainai sistēmai (īsā materiāla [25] paplašinājums) un diferencu vienādojuma šķidrumam izslēgšana no vienādojumu sistēmas. Darba beigu daļā doti aprēķini, kuri parāda, ka monogrāfijās [19], [21] izdarītais pieņēmums par temperatūras linearitāti starpslāņos var arī neizpildīties, ja starpslāņu biezums ir pietiekami liels.

Publikācijā [27] apskatīta siltuma pārnese siltuma vadīšanas un konvekcijas ceļā divu dimensiju daudzslāņu porainā vai poraini - plasainā sistēmā, ja atsevišķu slāņu temperatūra viduvēta pa attiecīgā slāņa biezumu. Darba beigu daļā doti konkrēti aprēķini, kuri parāda, ka pieņēmums par temperatūras linearitāti starpslāņos var arī neizpildīties: atrisinājums var būt ar iekšēju minimumu.

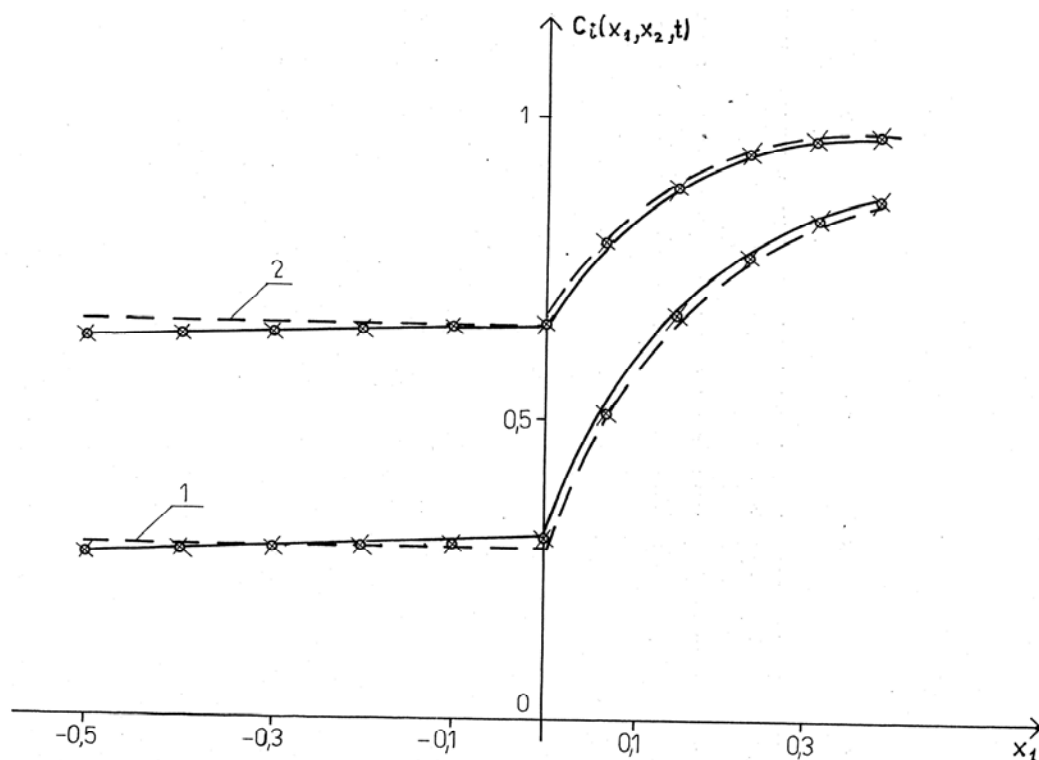
Publikācijā [28] apskatīta gruntsūdeņu konvekcijas - difūzijas problēma, izmantojot konservatīvās viduvēšanas metodi. Iegūtajai neklasiskajai problēmai uzkonstruēta galīgo diferencu shēma ar svāriem, iegūts pietiekamais stabilitātes kritērijs vienmērīgajā metrikā, tuvs formulai (3.1.7), kā arī izteikti apsvērumi par skaitliskās difūzijas samazināšanu aprēķinos. Dots piemērs, kuru piedāvāja Maskavas universitātes profesors V. Šestakovs. Rezultāti parādīti grafikā 3.3., krustiņi uz līknēm parāda konvektīvās frontes novietojumu aprēķina beigās: pēc aptuveni 27,5 gadiem.



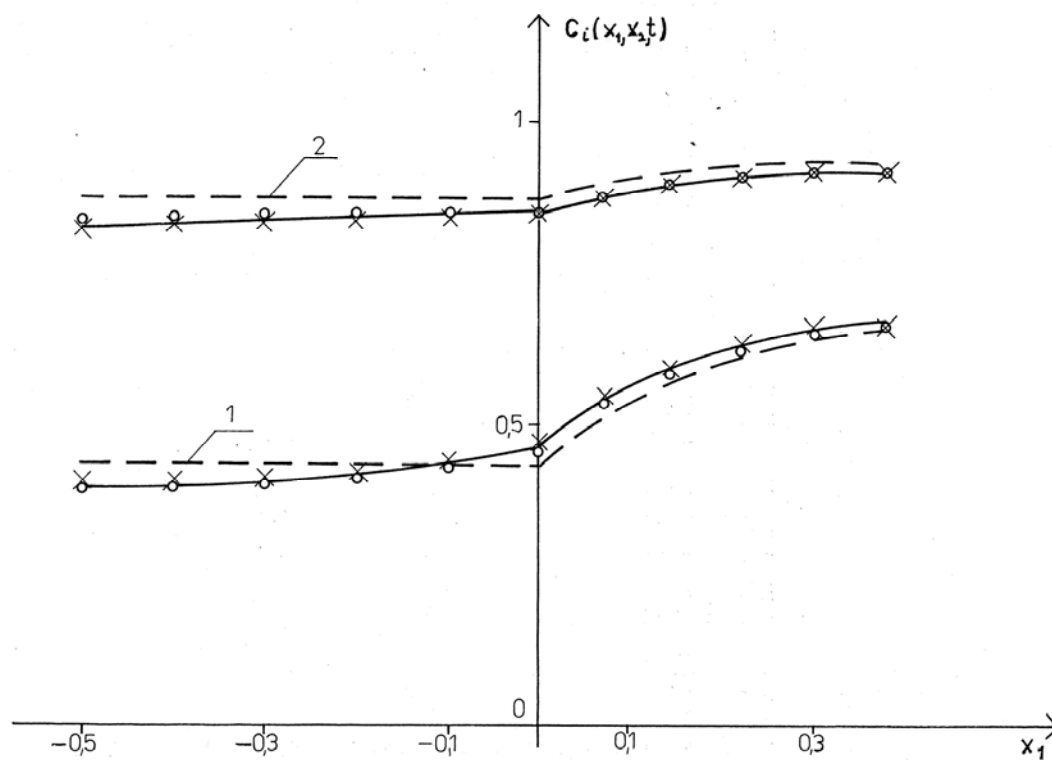
Zīm.3.3. Temperatūru lauka sadalījums koordinātes x_2 (slāņa gareniskajā) virzienā. Slāņa garums ir 10^4 m.

Autores darbā [29] apskatīts matemātiskais modelis divdimensiju divu slāņu sistēmai ar difūziju šķērsām slāņa gareniskajam virzienam, kad būtiski atšķiras abu slāņu difūzijas koeficienti. Ar viduvēšanas procesa palīdzību tiek izslēgts otrā slāņa

diferenciālvienādojums un tas pārvēršas par neklasisko robežnosacījumu.



Zīm.3.4. Temperatūru lauka sadalījums šķērskoordinātes virzienā. Difūzijas koeficientu attiecība ir 16. Nepārtrauktā līkne – pilnā nostādne; pārējie atrisinājumi: konstante slānī ar lielāko difūziju, tad IPS tur un abos slāņos IPS.



Zīm.3.5. Temperatūru lauka sadalījums šķērskoordinātes virzienā. Difūzijas koeficientu attiecība ir 5. Nepārtrauktā līkne – pilnā nostādne; pārējie atrisinājumi: konstante slānī ar lielāko difūziju, tad IPS tur un abos slāņos IPS.

Jaunajai nostādnei tiek piedāvāta diferencu shēma, ar maksimuma principa palīdzību tiek izrakstīts stabilitātes kritērijs diferencu shēmai un piedāvāts aprēķinu variants.

Tāpat darbā [29] apskatīta vielas pārnese šķērsām (pa slāņu biezumu) difūzijas un konvekcijas pa slāņu garenisko līniju divu dimensiju daudzslāņu porainā izolētā vidē. Piedāvāta divu dimensiju diferencu shēma. Pēc tam tiek apskatīta nostādne ar konservatīvo viduvēšanu pa slāni, kurā difūzijas koeficients ir lielāks; rezultātā tiek iegūta problēma vienam slānim ar neklasisko robežnosacījumu un attiecīgā diferencu shēma, tāda kā [28]. Tālāk tiek apskatīta aproksimācija ar otrās pakāpes polinomu un arī šim modelim piedāvāta diferencu shēma. Beidzot apskatīts variants ar aproksimāciju ar 2. pakāpes polinomu (IPS) abos slāņos un arī šajā gadījumā piedāvāta diferencu shēma. Darba beigu daļā salīdzināti aprēķinu rezultāti dažādiem parametriem (kad difūzijas koeficienti atšķiras 20 reizi un 5 reizes). Attēlos 3.4. un 3.5. parādīti rezultāti abiem gadījumiem

Darbos [30]-[32] apskatīti pārnese matemātiskais modelis divdimensiju daudzu slāņu sistēmai ar starpslāņiem, kad ir difūzija šķērsām slāņa gareniskajam virzienam, kad atšķiras slāņu difūzijas koeficienti un konvekcijas ātrumi. Starpslāņos izmantota lineāra aproksimācija. Ar VIPS (skat 1. nodaļas 2.§) nenormētā formā palīdzību tie iegūta vienas dimensijas vienādojumu sistēma un parādīts, ka iegūtā sistēma atšķiras no klasiskās Mjatijeva – Girinska shēmas, kura nepieļauj starp slāņu biezumu vienādu ar nulli.

Autores publikācija [31] apskata situāciju, kad atšķirībā no [30] starpslāņu aproksimācijai tiek izmantots otrās pakāpes polinoms. Izmantojot saistības nosacījumus tiek iegūta vienādojumu sistēma galvenajiem slāņiem un arī starpslāņiem. Tiek izrakstīti stabilitātes kritēriji galīgo diferencu shēmām. Pēc publikāciju [26]-[31] teorētiskajiem rezultātiem tika veikti aprēķini daudzslāņu sistēmās, kad tiek salīdzināti pilnās un viduvētās ar VIPS palīdzību iegūtās diferencu shēmas. Tika veikti aprēķini 9 slāņu sistēmai ar dažādiem konvekcijas ātrumiem slāņos. Ja pilnās sistēmas aprēķini uz ES datora prasīja stundām ilgus aprēķinus, tad nostādne ar VIPS aprēķinus procesam, kurš ilga gadus, tika veikts dažās minūtēs. Pie tam diferencu shēmu rezultāti ar VIPS parādīja, ka integrālā bilances kļūda atradās aptuveni 1-1,5% kļūdas robežās. Grafiki 3.6. un 3.7. atspoguļo iegūtos rezultātus.

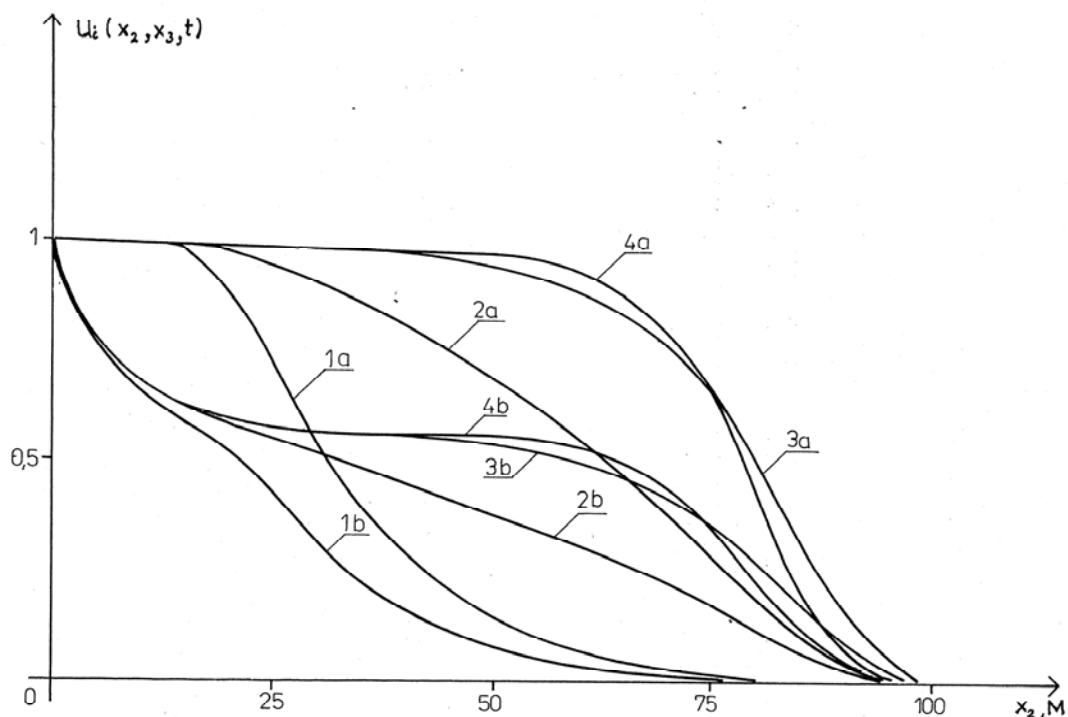
Atzīmēsim svarīgākos aspektus. Plūsma tika rēķināta starp ieplūšanas galereju un izplūdes zonu (ekspluatācijas galereju) $L_2 = 1000\text{ m}$ laika intervālam 3000 diennaktis.

Visu slāņu biezumi bija vienādi: 0,9 metri. Vertikālās difūzijas koeficienta dēļ daļa masas no viena slāņa var nonākt blakus slānī; to labi parāda 3.7 zīmējums. Slāņu filtrācijas koeficienti bija šādi: 4,8;5,7;6,8,1;12;15;18;21;10,5 m/diennaktī. Lai novērtētu aprēķinu kļūdu, tika definēti masas apmaiņas koeficienti:

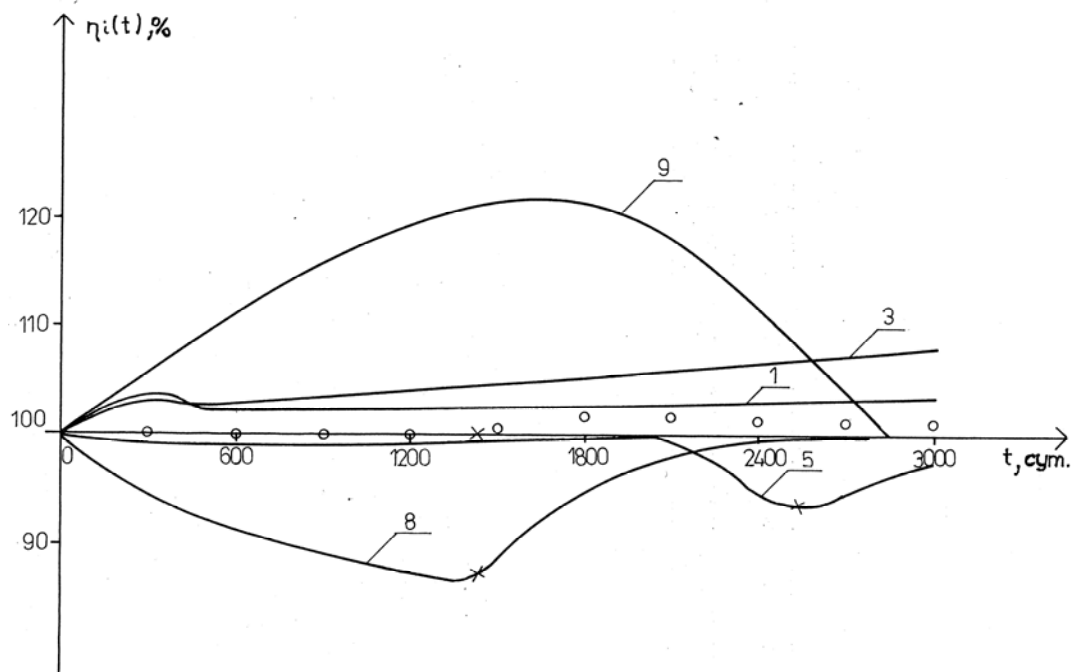
$$\eta_i(t) = \frac{M_i(t)}{M_{v,i}(t)} 100\%, M_i(t) = \int_0^{L_2} u_i(x,t) dx, M_{v,i}(t) = \min(v_i t, L_2);$$

$$\bar{\eta}(t) = \frac{\sum_{i=1}^9 H_i M_i(t)}{\sum_{i=1}^9 H_i M_{v,i}(t)} 100\%.$$

Ja aprēķini precīzi, tad $\bar{\eta}(t) = 100\%$. Aprēķinu laikā šis lielums mainījās no 0,1-0,3%, sasniedzot laika momentā 2000 diennaktis sasniedzot maksimālo vērtību 2%. Šajā brīdī eksploatācijas galereju sasniedz trīs labāko slāņu (no 6. līdz 8. slānim) frontes. Šāda aprēķinu kļūda astoņdesmitajos gados, ņemot vērā pārejo parametru neprecizitātes, bija maza.



Zīm. 3.6. Temperatūras lauku sadalījums 9 slāņu sistēmai (parādīti būtiskākie slāņi).



Zīm. 3.7. Iegūtie masas bilances aprēķini. $\circ\circ\circ - \bar{\eta}(t)$. Ar zvaigznītēm parādīti momenti, kad slāņa plūsma sasniedz eksploatācijas galereju.

2.8. Filtrācijas materiāla īpašību modelis

Publikācija [33] apskata situāciju, kad modelējamais filtrējošais kompozītais materiāls sastāv no polietilēna sietiņa (PS) un neausta poliakrilonitrila diegiem (PAN). Materiāls ievietots presē zem spiediena, pie kam no PAN puses ir preses plāksne sakarsēta līdz temperatūrai T_3 , otra plate atrodas pie temperatūras T_4 . Eksperimentos tika variēta temperatūra T_3 , izrādījās, ka katrai temperatūrai atbilst kopējais robežas biezums. Modelī tiek formulēts kritiskais temperatūras lielums T_k (tas atkarīgs no preses spiediena), pie kura PAN materiāls sāk iespieties PS līdz zināmam dziļumam. Apskatam vienas dimensijas modeli ar koordināti x materiāla dziļumā. PAN materiāls ir poraina vide ar gaisu porās. Līdzīgi kā iepriekš, to aprakstam ar divu fāzu vienādojumu (indekss „0” attiecas uz gaisu, „1” - uz PS, bet „2” – uz PAN).

$$\begin{cases} mc_0\rho_0 \frac{\partial T_0}{\partial t} = mk_0 \frac{\partial^2 T_0}{\partial x^2} + \alpha_{02} (T_2 - T_0), \\ (1-m)c_2\rho_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} = (1-m)k_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + \alpha_{02} (T_0 - T_2). \end{cases} \quad (3.2.1)$$

Šeit apzīmējumi tādi paši kā iepriekš, siltuma apmaiņas koeficients:

$$\alpha_{02} = \frac{k_2}{r} Nu \cdot S.$$

Šeit Nu – Nuselta kritērijs, S – īpatnējais virsmas laukums tilpuma vienībā. Izdarot novērtējumus, iegūst, ka pēdējā vienādojumu sistēma var tikt aizvietota ar vienu vienādojumu ar viduvētiem termiskajiem koeficientiem:

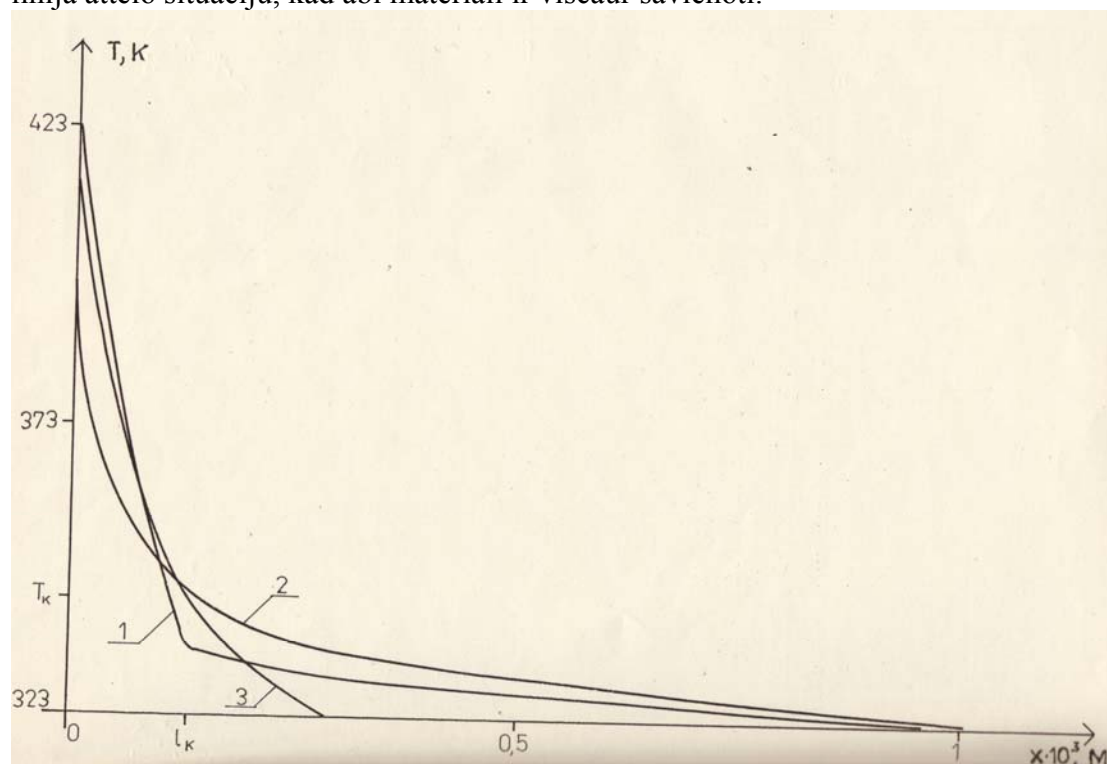
$$c(T)\rho(T) \frac{\partial T_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right), 0 < x < l(t), 0 < t,$$

$$T|_{t=0} = T^0, \quad (3.2.2)$$

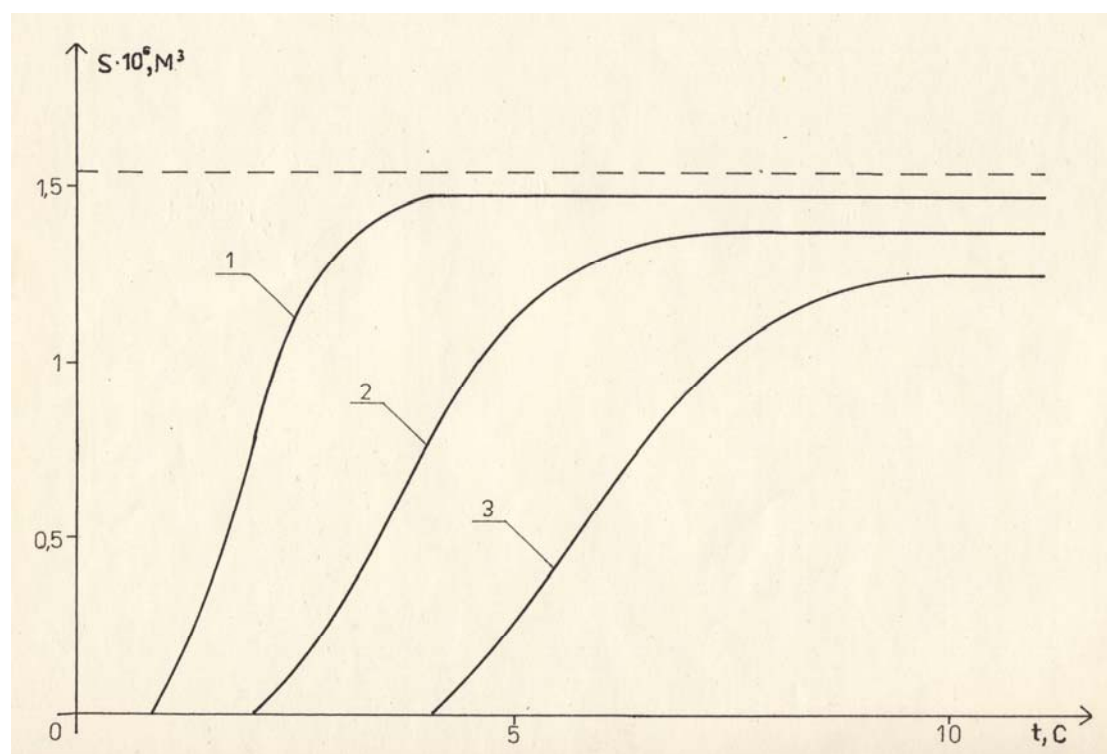
$$k = \begin{cases} mk_0 + (1-m)k_2, & 0 \leq x \leq l_0(t) - 0, \\ mk_1 + (1-m)k_2, & l_0(t) + 0 \leq x \leq l_2 - 0, \\ k_1, & l_2 + 0 \leq x \leq l(t). \end{cases}$$

Šeit $l(t)$ ir kopējais materiāla biezums. Pārtraukuma punktos: $l_0(t), l_2$ tiek formulēti saistības nosacījumi, savukārt kreisajā un labajā malā tiek formulēti trešā veida RN. Pie kritiskās temperatūras PAN iegūst spēju iespieties PS; te gan jāatzīmē, ka tā nav Stefana tipa problēma, kad pie $T = T_k$ izdalās slēptais siltuma daudzums. Kritiskās temperatūras bija dažādiem variantiem dažādas, ievērojot materiālu saspiešanas stiprunu. Ja nākamajā režģa punktā PAN iekšienē temperatūra ir augstāka par kritisko, tad PAN materiāls iespiežas PS sietiņā, veidojot abu materiālu saskares zonu, kurā

tilpuma vienībā saskaras abu materiālu virsmas. Tas attēlots zīm. 3.9, kur raustītā līnija attēlo situāciju, kad abi materiāli ir viscaur savienoti.



Zīm. 3.8. Temperatūras sadalījums materiālā, ja $T_k = 70^{\circ}C$, $T_z = 150^{\circ}C$. 1- $t = 0,5$ sek, 2- $t = 2$ sek, 3- $t = 4$ sek.



Zīm. 3.9. Kompozitā materiāla sasaistīšanās tilpuma izmaiņa laikā, ja $T_z = 453K$. 1-345 K, 2-358 K, 3-371 K.

3.8. Viduvēšanas procesi 2-D advekcijas – dispersijas vienādojumam.

Šajā nodaļā tiek apskatīts labi zināma problēma kārtainai videi, aizvietojot 2-D problēmu ar tās 1-D tuvinājumu, kas analizēta izdevniecībā Springer izdotā monogrāfijā par ūdens filtrāciju [37]. Pēc šī darba analīzes mēs piedāvājam pirmajā daļā apskatītos splainus problēmas risināšanai, skat mūsu darbu [8].

Monogrāfijā (apakšsekcija 7.2.3) tiek analizēta 2-D advekcijas – difūzijas vienādojums horizontālai kārtainai videi

$$\frac{\partial C}{\partial t} + V(y) \frac{\partial C}{\partial x} = D_{xx}(y) \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left[D_{yy}(y) \frac{\partial C}{\partial y} \right] \quad (3.3.1)$$

Un tur ir parādīts, ka šis 2-D vienādojums nevar tikt aizvietots ar sekojošu 1-D vienādojumu ar kādu fiksētu konstantu ātrumu V un dispersijas koeficientu D :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + V \frac{\partial C}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}.$$

Mēs apskatīsim vispārīgāku 2-D vienādojumu:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + V(y,t) \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[D_{xx}(x,y,t) \frac{\partial C}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[D_{yy}(x,y,t) \frac{\partial C}{\partial y} \right] + F(x,y,t). \quad (3.3.2)$$

Parādīsim, ka IPS atļauj reducēt šo 2-D vienādojumu uz 1-D vienādojumu tādā veidā, ka visi sākotnējās problēmas saglabāšanās likumi ir izpildīti (neparādās papildus avotu/noplūdes locekļi). Mēs sāksim ar vispārīgo 3-D problēmu un tās redukciju uz 2-D sistēmu.

Konservatīvās viduvēšanas metode advekcijas – difūzijas vienādojumam kārtainā vidē var tikt uzrakstīta šādā formā visiem $i = 0, \dots, N$ (šeit $N+1$ ir slāņu skaits ar biezumu $H_i = y_{i+1} - y_i$):

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} + V_i(t) \frac{\partial C_i}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[D_{i,xx}(x,t) \frac{\partial C_i}{\partial x} \right] + D_{i,yy}(x,t) \frac{\partial^2 C_i}{\partial y^2}, y_i < y < y_{i+1} \quad (3.3.3)$$

Kopā ar saistības nosacījumiem

$$\begin{aligned} C_{i-1} \Big|_{y=y_i-0} &= C_i \Big|_{y=y_i+0}, \\ D_{i-1,yy} \frac{\partial C_{i-1}}{\partial y} \Big|_{y=y_i-0} &= D_{i,yy} \frac{\partial C_i}{\partial y} \Big|_{y=y_i+0} \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Un robežas nosacījumiem:

$$\left[-v_0 D_{0,yy} \frac{\partial C_0}{\partial y} + \lambda_0 C_0 \right]_{y=y_0} = \Phi_0(x,t), \quad (3.3.5')$$

$$\left[\nu_1 D_{N,yy} \frac{\partial C_N}{\partial y} + \lambda_1 C_N \right]_{y=y_{N+1}} = \Phi_1(x, t). \quad (3.3.5'')$$

Definējam integrālās vērtības:

$$c_i(x, t) = \frac{1}{H_i} \int_{y_i}^{y_{i+1}} C_i(x, y, t) dy, \quad (3.3.6)$$

Integrējam vienādojumu (3) y – virzienā un atkārtojam visus viduvēšanas soļus. Beigās iegūstam $N+1$ viendimensiju parciālos advekcijas – difūzijas tipa diferenciālvienādojumus:

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_i}{\partial t} + V_i(t) \frac{\partial c_i}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[D_{i,xx}(x, t) \frac{\partial c_i}{\partial x} \right] + f_i(x, t) \\ + \frac{2}{H_i} \left[\sum_{j=0}^N \beta_{ij} c_j + \gamma_i^{(0)} f_0^- c_{-1} + \gamma_i^{(1)} f_N^+ c_{N+1} \right]. \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

Šeit parametri G_i sistēmai saskaņā ar definīciju ir:

$$G_i = H_i / D_{i,yy}(x, t). \quad (3.3.8)$$

Tālāk, ja $\lambda_0 \neq 0$ un $\lambda_1 \neq 0$:

$$G_{-1} = 2\nu_0 / \lambda_0, G_{N+1} = 2\nu_1 / \lambda_1, c_{-1} = \Phi_0 / \lambda_0, c_{N+1} = \Phi_1 / \lambda_1;$$

ja $\lambda_0 = 0$ un $\lambda_1 = 0$:

$$G_{-1} = 2\nu_0 - G_0, G_{N+1} = 2\nu_1 - G_N, c_{-1} = \Phi_0 + c_0, c_{N+1} = \Phi_1 + c_N.$$

Koeficienti $\gamma_i^{(0)}, \gamma_i^{(1)}, \beta_{ij}, i, j = 0, \dots, N$ tiek rēķināti atbilstoši no sistēmām (1.1.15), (1.1.16) un (1.1.17). Formula (3) rāda, ka vispārīgā gadījumā

$$\gamma_i^{(0)} = \gamma_i^{(0)}(x, t), \gamma_i^{(1)} = \gamma_i^{(1)}(x, t), \beta_{ij} = \beta_{ij}(x, t).$$

Kā seko no lineāro algebrisko vienādojumu sistēmām (1.1.15)-(1.1.17), tās ir jārisina visiem x . Pretstatā tam labo pušu atkarība no x - $\Phi_0(x, t), \Phi_1(x, t)$ RN (5'), (5'') nepieprasa $\gamma_i^{(0)}, \gamma_i^{(1)}, \beta_{ij}$ pārrēķinu, jo šī atkarība ir ietverta vienādojumos caur locekļiem c_{-1}, c_{N+1} un

$$f_0^- = 3/(G_0 + G_{-1}), f_N^+ = 3/(G_N + G_{N+1}).$$

Ir acīmredzami, ka konstantu dispersijas koeficientu gadījumā i -tajā slānī (tomēr atšķirīgus dažādiem slāņiem!) mēs iegūstam sistēmu (7) ar sasaistītu $N+1$ vienas dimensijas vienādojumiem ar konstantiem koeficientiem. Mēģinājums reducēt 2-D sistēmu uz 1-D vienādojumu noved pie nepieciešamības laika un telpas koordinātu atkarīgus advekcijas – difūzijas koeficientus (skat [36]).

4.§. Transporta procesi 3-D kārtainās vidēs

Šajā nodaļā tiek apskatīta transporta procesi ortotropās vidēs. Galvenie šī paragrāfa rezultāti publicēti darbos [6]-[8], [34]-[36]. Vienādojums cietās matricas raksturošanai $U_i(x, y, z, t)$ (koncentrācija, temperatūra utt.) i -tajā ortotropajā slānī uzrakstāms šādi:

$$c_1^i \frac{\partial U_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_{11}^i \frac{\partial U_i}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_{22}^i \frac{\partial U_i}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_{33}^i \frac{\partial U_i}{\partial z} \right) + F_i(x, y, z, t). \quad (3.4.1)$$

Mēs pieņemam, ka avota funkcija sastāv no divām daļām. Pirmkārt, lineāra mijiedarbība ar šķidrums (gāzes) raksturotāju $V_i(x, y, z, t)$ un, otrkārt, iekšējais avots $\Phi_i(x, y, z, t)$:

$$F_i(x, y, z, t) = \alpha_{i,1}(V_i - U_i)/(1 - m_i) + \Phi_i(x, y, z, t).$$

Šeit $0 < m_i < 1$ ir i -tā slāņa porainība un $\alpha_{i,1}$ ir zināms mijiedarbības koeficients. Vienādojums kustīgai fāzei tiek uzrakstīts līdzīgā formā:

$$c_2^i \frac{\partial V_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa_{11}^i \frac{\partial V_i}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\kappa_{22}^i \frac{\partial V_i}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\kappa_{33}^i \frac{\partial V_i}{\partial z} \right) + G_i(x, y, z, t). \quad (3.4.2)$$

Avota loceklis kustīgai fāzei ir sarežģītākā formā saistībā ar tās iespējamo kustību ar ātrumu $\vec{w}_i = (w_{i,1}, w_{i,2}, 0)$:

$$G_i(x, y, z, t) = \alpha_{i,2}(U_i - V_i)/m_i + \Gamma_i(x, y, z, t) - \frac{\partial}{\partial x}(w_{i,1}V_i) - \frac{\partial}{\partial y}(w_{i,2}V_i). \quad (3.4.3)$$

Kā lasītājs var redzēt, tiek izslēgta kustība z virzienā: ortogonāli slāņa plaknei. Papildus pieprasam ātruma komponentu $w_{i,1}, w_{i,2}$ un koeficientu k_{jj}^i, κ_{jj}^i atkarību tikai no x, y, t .

Mēs izmantosim oriģinālo konservatīvās viduvēšanas metodi un tādēļ definēsim vidējās integrālās vērtības:

$$u_i(x, y, t) = H_i^{-1} \int_{z_i}^{z_{i+1}} U_i(x, y, z, t) dz, v_i(x, y, t) = H_i^{-1} \int_{z_i}^{z_{i+1}} V_i(x, y, z, t) dz. \quad (3.4.4)$$

Integrējam diferenciālvienādojumu (1) z -virzienā:

$$c_1^i \frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_{11}^i \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_{22}^i \frac{\partial u_i}{\partial y} \right) + H_i^{-1} k_{33}^i \frac{\partial U_i}{\partial z} \Big|_{z=z_i}^{z=z_{i+1}} + f_i(x, y, t), \quad (3.4.5)$$

$$f_i(x, y, t) = \alpha_{i,1}(v_i - u_i)/(1 - m_i) + \varphi_i(x, y, t), \quad \varphi_i(x, y, t) = H_i^{-1} \int_{z_i}^{z_{i+1}} \Phi_i(x, y, z, t) dz.$$

Nākamais solis ir funkciju $U_i(x, y, z, t)$ un $V_i(x, y, z, t)$ aproksimācija ar integrālo parabolisko splainu z – virzienā. Kā tas tika parādīts iepriekš, splaina konstrukcija reducējas uz tā koeficientu $e_i^{(u)}$, $i = 0, \dots, N$ (augšējais indekss (u)) atspoguļo tā saistību ar funkciju $U_i(x, y, z, t)$). Nākamais būtiskais solis ir aproksimācija ar splaina atvasinājumu plūsmu starpību integrētajā diferenciālvienādojumā (5):

$$k_{33}^i \frac{\partial U_i}{\partial z} \Big|_{z=z_i}^{z=z_{i+1}} \approx \frac{dS^{(u)}}{dz} = 2e_i^{(u)}. \quad (3.4.6)$$

Jāpasvītro, ka šis pēdējais ir vienīgais solis, kurā tuvināta aproksimācija konservatīvās viduvēšanas metodē tiek izdarīta.

Nākamais un arī pēdējais solis konservatīvās viduvēšanas metodē ir reprezentācijas (1.1.15) izmantošana integrētajā diferenciālvienādojumā (5). Iegūstam:

$$c_1^i \frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_{11}^i \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_{22}^i \frac{\partial u_i}{\partial y} \right) + f_i(x, y, t) + \frac{2}{H_i} \left[\sum_{j=0}^N \beta_{ij}^{(u)} u_j + \gamma_i^{(0,u)} f_0^- u_{-1} + \gamma_i^{(1,u)} f_N^+ u_{N+1} \right], \quad (3.4.7)$$

$$f_i(x, y, t) = \alpha_{i,1}(v_i - u_i)/(1 - m_i) + \varphi_i(x, y, t).$$

Līdzīgā veidā tiek transformēts diferenciālvienādojums (2) un gala rezultātā no diviem 3-D vienādojumiem iegūstam 2-D sistēmu (7), (8) ar konstantiem koeficientiem:

$$c_2^i \frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa_{11}^i \frac{\partial v_i}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\kappa_{22}^i \frac{\partial v_i}{\partial y} \right) + \frac{2}{H_i} \left[\sum_{j=0}^N \beta_{ij}^{(v)} v_j + \gamma_i^{(0,v)} f_0^- v_{-1} + \gamma_i^{(1,v)} f_N^+ v_{N+1} \right] + g_i(x, y, t), \quad g_i(x, y, t) = \alpha_{i,2}(u_i - v_i)/m_i + \gamma_i(x, y, t) - \frac{\partial}{\partial x}(w_{i,1}v_i) - \frac{\partial}{\partial y}(w_{i,2}v_i), \quad (3.4.8)$$

$$\gamma_i(x, y, t) = H_i^{-1} \int_{z_i}^{z_{i+1}} \Gamma_i(x, y, z, t) dz.$$

Mēs probežojamies ar šo 2-D modeli transporta procesam.

Trešā daļa. Siltuma pārnese procesi sistēmās ar izstieptām virsmām

Liela apjoma dažādu inženierzinātņu nozaru uzdevumi ir orientēti uz ātru siltuma enerģiju pārnesei. Atšķirīgu efektīvu siltuma pārnesei iekārtu ar tā saukto pamatvirsmu (bāzi) ir papildinātas ar papildu virsmām, piemēram, taisnstūra vai citas formas ribām [42]-[44]. Tādas siltuma pārnesei iekārtas ir saistītas ar refrižeratoriem, radiatoriem, dzinējiem un mikroelektroniku utt. Tradicionālā matemātiskajā aprakstā siltuma plūsma starp avotu un vietu, kur siltums aizplūst tiek ierobežots ar tā sauktajiem Marreja- Gārdnera hipotēzēm [43]. Tās ir:

- 1) Siltuma plūsma ribā un temperatūra jebkurā punktā ribā laikā nemainās;
- 2) Ribas materiāls ir homogēns; tā siltuma vadīšana ir visos virzienos viena un tā pati un nemainās;
- 3) Siltuma pārnese koeficients starp ribu un apkārtējo vidi ir homogēns un nemainīgs pa visu kopējo ribas virsmu;
- 4) Apkārtējās vides temperatūra ap ribu ir viena un tā pati;
- 5) Ribas platums ir mazs salīdzinot ar tās augstumu, līdz ar to temperatūras gradientu ribas platuma virzienā var tikt neņemts vērā;
- 6) Temperatūras sadalījums ribas pamatnē ir homogēns;
- 7) Ribā pašā nav nekādu siltuma avotu;
- 8) Siltuma pārnese uz vai no ribas ir proporcionāla temperatūru starpībai starp ribu un apkārtējo vidi;
- 9) Nav nekāda kontakta pretestības starp ribām konstrukcijā vai starp ribu un pamatni;
- 10) Siltuma pārnese starp ribas gala virsmu ir ļoti maza salīdzinājumā ar siltuma atdevi no pārējās ribas virsmas.

Mēs atteiksimies no Marreja- Gārdnera ierobežojumiem 5), 6) un 10) pilnīgi, arī no 9) un no ierobežojuma 2) nodaļā 5.1.

4. nodaļa. Tuvināti 2-D un 3-D atrisinājumi problēmai

1.§. Stacionārā 3-D un 2-D problēma

1.1. Mēs sāksim ar precīzu trīs dimensiju formulējumu stacionārai problēmai vienai periodiskai sistēmai ar taisnstūra ribām. Šis matemātiskais formulējums ir apskatīts publikācijā [41] un kopējās publikācijās divu [42]-[46], [50] un trīs dimensiju [51]-[53] gadījumam. Nestacionārās problēmas apskats ir publikācijās [45], [54]. Materiāla izklāsts saīsinājumam mēs vispārinām rezultātus 3-D variantam, izlaižot apskatu 2-D gadījumam, kā tas minētajā literatūrā. Galvenie rezultāti publicēti darbos [42]-[45], [47]-[54]. Atzīmēsim, ka šie matemātiskie modeļi ir oriģināli, literatūrā parasti apskata vienas vai divu dimensiju tuvinājumus [38]-[40], [58]-[60]. Somu autoru darbā [61] apskatīta trīju dimensiju nostādne, taču risinājuma metode ir klasiskā mainīgo atdalīšanas metode, kura darbojas tikai zināmās robežās. Šajā gadījumā somu autori atsaucas uz mūsu darbiem kā precīzo atrisinājumu. Izmantosim turpmāk šādus bezdimensiju argumentus, parametrus:

$$x = \frac{x'}{B+R}, y = \frac{y'}{B+R}, z = \frac{z'}{B+R}, \delta = \frac{\Delta}{B+R}, l = \frac{L}{B+R}, b = \frac{B}{B+R},$$
$$\beta_0^0 = \frac{h_0(B+R)}{k_0}, \beta_0 = \frac{h(B+R)}{k_0}, \beta = \frac{h(B+R)}{k}, w = \frac{W}{B+R}$$

un temperatūras:

$$V(x, y, z) = \frac{\tilde{V}(x, y, z) - T_a}{T_b - T_a}, V_0(x, y, z) = \frac{\tilde{V}_0(x, y, z) - T_a}{T_b - T_a}.$$

Šeit $k(k_0)$ - siltuma vadīšanas koeficients ribai (sieniņai), $h(h_0)$ - siltuma apmaiņas koeficients ribai (sieniņai), L –ribas garums, Δ -sieniņas platums, W – sieniņas platums (garums), $2R$ – attālums starp divām ribām, T_b -apkārtējās vides temperatūra sieniņas kreisajā (karstajā) pusē (siltuma avota pusē), T_a - apkārtējās vides temperatūra sieniņas labajā (aukstajā) un ribas pusē. Dimensiju temperatūras: $\tilde{V}(x, y, z)$ ($\tilde{V}_0(x, y, z)$).

Sieniņas (bāzes) viens elements ir novietots apgabalā $\{x \in [0, \delta], y \in [0, 1], z \in [0, w]\}$ un mēs aprakstam ar $V_0(x, y, z)$ temperatūru, un tā apmierina vienādojumu:

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_0}{\partial z^2} = 0. \quad (4.1.1)$$

Nepieciešami šādi robežnosacījumi (siltuma apmaiņa ar apkārtējo vidi):

$$\frac{\partial V_0}{\partial x} + \beta_0^0(1 - V_0) = 0, \quad (4.1.2)$$

$$\frac{\partial V_0}{\partial x} + \beta_0 V_0 = 0, \quad x = \delta, y \in (b, 1), z \in (0, w), \quad (4.1.3)$$

$$\left. \frac{\partial V_0}{\partial y} \right|_{y=0} = Q_{0,0}(x, z), \quad (4.1.4)$$

$$\left. \frac{\partial V_0}{\partial y} \right|_{y=1} = Q_{0,1}(x, z), \quad (4.1.5)$$

$$\left. \frac{\partial V_0}{\partial z} \right|_{z=0} = Q_{0,2}(x, y), \quad (4.1.6)$$

$$\frac{\partial V_0}{\partial z} + \beta_0 V_0 = 0, \quad z = w. \quad (4.1.7)$$

Uz virsmas starp sienīņu un ribu mēs pieņemam saistības nosacījumus – ka tur nav kontakta pretestības:

$$V_0|_{x=\delta-0} = V_0|_{x=\delta+0}, \quad (4.1.8)$$

$$\beta \left. \frac{\partial V_0}{\partial x} \right|_{x=\delta-0} = \beta_0 \left. \frac{\partial V_0}{\partial x} \right|_{x=\delta+0}. \quad (4.1.9)$$

Taisnstūra riba ar garumu l aizņem apgabalu $\{x \in [\delta, \delta + l], y \in [0, b], z \in [0, w]\}$ un temperatūru lauks $V(x, y, z)$ izpilda vienādojumu:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0. \quad (4.1.10)$$

Tur ir šādi robežnosacījumi:

$$\frac{\partial V}{\partial x} + \beta V = 0, \quad x = \delta + l, \quad (4.1.11)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} + \beta V = 0, \quad y = b, \quad (4.1.12)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} + \beta V = 0, \quad z = w, \quad (4.1.13)$$

$$\left. \frac{\partial V}{\partial y} \right|_{y=0} = Q_1(x, z), \quad (4.1.14)$$

$$\left. \frac{\partial V}{\partial z} \right|_{z=0} = Q_2(x, y). \quad (4.1.15)$$

Atzīmēsim, ka praktiski visi autori neņem vērā siltuma atdevi no sānu virsmas, t.i., pie $z = w$. Mēs pieņemam, ka šis siltuma pārnese process ir proporcionāls temperatūru starpībai starp sienīgas/ribas temperatūru un apkārtējās vides temperatūru un ir fiksēts ar robežnosacījumiem (7) un (13).

1.2. Mēs izmantosim konservatīvās viduvēšanas metodi. Sāksim ar periodisku sistēmu ar taisnstūra ribu. Tad mums ir homogēni robežnosacījumi (4)-(6), (14) un (15):

$$\left. \frac{\partial V_0}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial V_0}{\partial y} \right|_{y=1} = \left. \frac{\partial V_0}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial V}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial V}{\partial z} \right|_{z=0} = 0. \quad (4.1.16)$$

Mūsu rakstos [42]-[50] mēs ierobežojām sevi ar homogēniem robežnosacījumiem (16) un ar divu dimensiju siltuma pārnese problēmu periodiskai sistēmai ar taisnstūra ribu.

Līdzīgi kā rakstos [42]-[45] mēs izmantosim oriģinālo konservatīvās viduvēšanas metodi un aproksimēsim 3-D temperatūras lauku $V(x, y, z)$ šādā formā:

$$V(x, y, z) = h_0(x, y) + (e^{\sigma z} - 1)h_1(x, y) + (1 - e^{-\sigma z})h_2(x, y), \quad \sigma = w^{-1} \quad (4.1.17)$$

Ar trim nezināmām funkcijām $h_i(x, y)$, $i = 0, 1, 2$. Šim nolūkam mēs definēsim integrālo vidējo funkcijas $V(x, y, z)$ vērtību z -virzienā:

$$U(x, y) = \sigma \int_0^w V(x, y, z) dz. \quad (4.1.18)$$

Šī vienādība kopā ar diviem RN (pie $z = 0$ un $z = w$) atļauj mums izslēgt visas nezināmās funkcijas $h_i(x, y)$ no reprezentācijas (13). RN (16) funkcijai $V(x, y, z)$ pie $y = 0$ dod sakarību:

$$h_2(x, y) = -h_1(x, y).$$

Reprezentācijas (17) ievietošana (18) dod izteiksmi:

$$h_1(x, y) = \frac{U(x, y) - h_0(x, y)}{2(\sinh(1) - 1)} \quad (4.1.19)$$

Un izteiksme (17) iegūst formu:

$$V(x, y, z) = \frac{\cosh(\sigma z) - 1}{\sinh(1) - 1} U(x, y) + \frac{\sinh(1) - \cosh(\sigma z)}{\sinh(1) - 1} h_0(x, y).$$

Beidzot, izmantojot (13) mēs izslēdzam $h_0(x, y)$ no pēdējās izteiksmes un 3-D atrisinājumu $V(x, y, z)$ izsakam formā:

$$V(x, y, z) = U(x, y)\Psi(z). \quad (4.1.20)$$

Ir vienkārši pārbaudīt, ka $\Psi(z)$ izskatās šādi

$$\Psi(z) = \frac{\sinh(1) + \beta w [\cosh(1) - \cosh(\sigma z)]}{\sinh(1) + \beta w [\cosh(1) - \sinh(1)]}. \quad (4.1.21)$$

Otrajā konservatīvās viduvēšanas metodes stadijā tiek pārveidots parciālais diferenciālvienādojums (10) funkcijai $V(x, y, z)$ uz divu argumentu funkciju $U(x, y)$. Lai realizētu šo mērķi mēs integrējam galveno vienādojumu (10) z -virzienā:

$$\frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial y^2} + w^{-1} \frac{\partial V}{\partial z} \Big|_{z=0}^{z=w} = 0. \quad (4.1.22)$$

Izmantojot RN (16) pie $z = 0$ funkcijai $V(x, y, z)$ un izsakot no RN (13) pie $z = w$ pirmo atvasinājumu $\frac{\partial V}{\partial z}$ caur funkciju $V(x, y, z)$ mēs iegūstam vienādojumu:

$$\frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial y^2} - w^{-1} \beta V(x, y, z) \Big|_{z=w} = 0. \quad (4.1.23)$$

Atliek tikai funkciju $V(x, y, z)$ izteikt caur funkciju $U(x, y)$ ar vienādības (20) palīdzību un mēs iegūstam jaunu diferenciālvienādojumu, kurš apraksta divu dimensiju temperatūras lauku $U(x, y)$ ribā:

$$\frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial y^2} - \bar{\mu}^2 U(x, y) = 0. \quad (4.1.24)$$

Šeit

$$\bar{\mu}^2 = \beta w^{-1} \Psi(w).$$

1.3. Varam atzīmēt, ka ir viegli pārbaudīt, ka mēs esam atteikušies no otrā Mareja-Gardnera pieņēmuma. Patiešām, apzīmēsim ar k_l siltuma vadīšanas koeficientu ribā tās garuma (x -) virzienā, ar k_w tās platuma (z -)virzienā un ar k_o tās augstuma (y -height) virzienā. Tad vienādojuma (10) vietā mums būs parciālais diferenciālvienādojums

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \kappa_1 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \kappa_2 \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Šeit

$$\kappa_1 = \frac{k_o}{k_l}, \kappa_2 = \frac{k_w}{k_l}.$$

Diferenciālvienādojuma (22) vietā būs:

$$\frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x^2} + \kappa_1 \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial y^2} + \kappa_2 w^{-1} \frac{\partial V}{\partial z} \Big|_{z=0}^{z=w} = 0.$$

Galū galā mēs iegūsim šādu divu dimensiju diferenciālvienādojumu (vienādojuma (24) vietā):

$$\frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x^2} + \kappa_1 \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial y^2} - \bar{\mu}^2 U(x, y) = 0. \quad (4.1.25)$$

Šeit

$$\bar{\mu}^2 = \kappa_2 \bar{\mu}^2 = \kappa_2 \beta w^{-1} \Psi(w).$$

Tā pati procedūra sienīgai ((20) vietā) dos reprezentāciju:

$$V_0(x, y, z) = U_0(x, y) \Psi(z). \quad (4.1.26)$$

Te $U_0(x, y)$ (līdzīgi vienādojumam (18)) ir atkal vidējā integrālā funkcijas z -virzienā $V_0(x, y, z)$:

$$U_0(x, y) = \sigma \int_0^w V_0(x, y, z) dz. \quad (4.1.27)$$

Atkal mēs atkārtojam konservatīvās viduvēšanas metodes otro soli un pārveidojam parciālo diferenciālvienādojumu (1) funkcijai $V_0(x, y, z)$ par vienādojumu pret funkciju $U_0(x, y)$. Izmantojot homogēno robežnosacījumu (6) un RN (7) mēs iegūstam sekojošu diferenciālvienādojumu priekš divu dimensiju sienīgas temperatūru lauku $U_0(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 U_0(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_0(x, y)}{\partial y^2} - \bar{\mu}^2 U_0(x, y) = 0. \quad (4.1.28)$$

Gadījumā, ja sienīga ir no ortotropa materiāla, tad vienādojuma (28) vietā būs vienādojums:

$$\frac{\partial^2 U_0(x, y)}{\partial x^2} + \kappa_{0,1} \frac{\partial^2 U_0(x, y)}{\partial y^2} - \bar{\mu}_0^2 U_0(x, y) = 0. \quad (4.1.29)$$

Vienādojumā (29) mēs esam izmantojuši apzīmējumus:

$$\bar{\mu}_0^2 = \kappa_{0,2} \bar{\mu}^2 = \kappa_{0,2} \beta w^{-1} \Psi(w).$$

Šeit

$$\kappa_{0,1} = \frac{k_{0,o}}{k_{0,l}}, \kappa_{0,2} = \frac{k_{0,w}}{k_{0,l}}. \quad (4.1.30)$$

Apzīmējumos (30) mēs siltuma vadīšanas koeficientu trijos ortogonālos virzienos ortotropam materiālam sienīnai mēs esam izmantojuši atbilstošos ribas apzīmējumus.

1.4. No šejienes mēs varam izmantot konservatīvās viduvēšanas metodi 2-D līdzīgi kā tas tika darīts publikācijās [47] - [49]. Vienīgā atšķirība, ka tagad Laplasa vienādojumu (24), (28) vietā būs Helmholca vienādojumi (25), (29). Taču šī izmaiņa nerada nekādas papildus grūtības konservatīvās viduvēšanas metodes izmantošanai. Tādēļ mēs relatīvi īsi aprakstīsim tālākos soļus vienādojumu (24), (28) kopā ar RN (2)-(5), (11), (12), homogēniem RN (14), (15) un saistības nosacījumiem (8), (9).

Mēs izmantosim eksponenciālo aproksimāciju y -virzienā 2-D temperatūras laukam $U(x, y)$ ribā līdzīgi reprezentācijai (17):

$$U(x, y) = f_0(x) + (e^{\rho y} - 1)f_1(x) + (1 - e^{-\rho y})f_2(x), \rho = b^{-1} \quad (4.1.31)$$

Mēs definējam otru integrālo vērtību funkcijai $V(x, y, z)$, taču tagad y -virzienā (skat (18)):

$$u(x) = \rho \int_0^b U(x, y) dy. \quad (4.1.32)$$

Atkārtojot visus soļus mēs beigās iegūstam atrisinājumu ribai līdzīgu aproksimācijai (20):

$$U(x, y) = u(x)\Phi(y). \quad (4.1.33)$$

Šeit izteiksme funkcijai $\Phi(y)$ ir līdzīga funkcijas $\Psi(z)$ aproksimācijai (21):

$$\Phi(y) = \frac{\sinh(1) + \beta b [\cosh(1) - \cosh(\rho y)]}{\sinh(1) + \beta b [\cosh(1) - \sinh(1)]}. \quad (4.1.34)$$

Kā sekas vienādojumiem (20) un (34) iegūstam:

$$V(x, y, z) = u(x)\Phi(y)\Psi(z). \quad (4.1.35)$$

Tagad integrējam vienādojumu (24) y -virzienā (līdzīgi kā vienādojumu (22)) un izmantojam robežnosacījumus (skat RN (12) un homogēno RN (14)):

$$\frac{\partial U}{\partial y} + \beta U = 0, y = b, \left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{y=0} = 0.$$

Gala rezultātā iegūstam, ka funkcija $u(x)$ ir atrisinājums šādam diferenciālvienādojumam:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - \tilde{\mu}^2 u = 0. \quad (4.1.36)$$

Šajā vienādojumā parametrs $\tilde{\mu}^2$ ir dots ar izteiksmi:

$$\tilde{\mu}^2 = \beta \rho \Phi(b) + \bar{\mu}^2. \quad (4.1.37)$$

Ortotropa materiāla gadījumā ribai parametra $\tilde{\mu}^2$ parādīsies parametrs $\tilde{\tilde{\mu}}^2$, kurš ir dots ar izteiksmi:

$$\tilde{\tilde{\mu}}^2 = \kappa_1 \beta \rho \Phi(b) + \bar{\mu}^2.$$

Parastā diferenciālvienādojuma (36) atrisinājums argumentam $x \in (\delta, \delta + l)$ kopā ar vienu RN punktā $x = \delta + l$ (šis RN ir iegūts no vienādojuma (11) pēc integrēšanas y - un z - virzienos)

$$\left[\frac{du(x)}{dx} + \beta u(x) \right]_{x=\delta+l} = 0$$

dod:

$$u(x) = C_1 (\mu_1 e^{\tilde{\mu}x} + e^{-\tilde{\mu}x}). \quad (4.1.38)$$

Šeit C_1 ir pagaidām nezināma konstante, bet

$$\mu_1 = \frac{\tilde{\mu} - \beta}{\tilde{\mu} + \beta} \exp(-2\tilde{\mu}(\delta + l)).$$

Mēs darbojamies līdzīgi sienīņā un atrodam aproksimēto atrisinājumu - 2-D temperatūru lauku $U_0(x, y)$ x - virzienā kopā ar divu eksponenšu funkciju kombināciju (viena ir augoša, otra ir dilstoša):

$$U_0(x, y) = g_0(y) + [e^{d(\delta-x)} - 1]g_1(y) + [1 - e^{d(x-\delta)}]g_2(y), \quad d = \delta^{-1}, \quad (4.1.39)$$

Tagad mēs definējam funkcijas $U_0(x, y)$ viduvēto x - virzienā:

$$u_0(y) = d \int_0^\delta U_0(x, y) dx. \quad (4.1.40)$$

Vienādība (40) kopā ar RN (2) atļauj izteikt $g_i(y), i = 1, 2$ formā:

$$g_i(y) = (-1)^{i-1} [b_i u_0(y) - a_i g_0(y) + d_i], \quad i = 1, 2. \quad (41)$$

Šeit

$$a_i = A_i K_1^{-1}, b_i = B_i K_1^{-1}, d_i = D_i K_1^{-1}, i = 1, 2,$$

$$K_1 = e^{-1} [2 + \beta_0^0 \delta (e-1)(3-e)], A_1 = e^{-1} (1 + \beta_0^0 \delta (e-2)), A_2 = e + \beta_0^0 \delta, \quad (4.1.41)$$

$$B_1 = e^{-1} (1 + \beta_0^0 \delta (e-1)), B_2 = e + \beta_0^0 \delta (e-1),$$

$$D_1 = e^{-1} \beta_0^0 \delta, D_2 = \beta_0^0 \delta (e-2).$$

No šejienes mēs varam pārrakstīt izteiksmi (39) funkcijai $U_0(x, y)$ formā:

$$U_0(x, y) = [1 + (e^{d(\delta-x)} - 1)a_1 - (1 - e^{d(x-\delta)})a_2]g_0(y) + \quad (4.1.42)$$

$$[(1 - e^{d(x-\delta)})b_2 - (e^{d(\delta-x)} - 1)b_1]u_0(y) + (e^{d(\delta-x)} - 1)d_1 - (1 - e^{d(x-\delta)})d_2.$$

Izmantojot RN (3) sienīņas augšējai daļai $b < y < 1$ mēs iegūstam saistību starp $g_0(y)$ un $u_0(y)$:

$$g_0(y) = b_0 u_0(y) - d_0. \quad (4.1.43)$$

Izteiksmē (43):

$$b_0 = B_0 K_0^{-1}, d_0 = D_0 K_0^{-1}, B_0 = B_2 - B_1, D_0 = D_2 - D_1, K_0 = A_2 - A_1 + \beta_0 \delta K_1.$$

Saistība starp funkcijām $g_0(y)$ un $u_0(y)$ atļauj mums izteikt funkciju $U_0(x, y)$ īsākā formā, kura atkarīga tikai no viena argumenta funkcijas $u_0(y)$ (integrālās vērtības funkcijas):

$$U_0(x, y) = A(x)u_0(y) + D(x). \quad (4.1.44)$$

Te

$$A(x) = b_0 + (a_1 b_0 - b_1)(e^{d(\delta-x)} - 1) + (b_2 - a_2 b_0)(1 - e^{d(x-\delta)}), \quad (4.1.45)$$

$$D(x) = -d_0 + (d_1 - a_1 d_0)(e^{d(\delta-x)} - 1) + (a_2 d_0 - d_2)(1 - e^{d(x-\delta)}). \quad (4.1.46)$$

Integrējot diferenciālvienādojumu (28) x - virzienā un izmantojot RN (2) un (3) mēs iegūstam parasto diferenciālvienādojumu:

$$\frac{d^2 u_0}{dy^2} - \tilde{k}^2 u_0 + \Theta_2 = 0, b < y < 1, \quad (4.1.47)$$

$$\tilde{k}^2 = 2\delta^{-2}K_0^{-1}[(\beta_0 + \beta_0^0)\delta \sinh(1) + 2\beta_0\beta_0^0\delta^2(\cosh(1)-1)] + \bar{\mu}^2,$$

$$\Theta_2 = \delta^{-2}[(d_1 - a_1d_0)(e-1) + (d_2 - a_2d_0)(1-e^{-1})].$$

Papildus mums ir RN $u'(1) = 0$ (RN (5) sekas). Problēmas (47) kopā ar šo vienu RN atrisinājums izskatās šādi:

$$u_0(y) = C_2 \cosh(\tilde{k}(1-y)) + U_2, U_2 = \tilde{k}^{-2}\Theta_2. \quad (4.1.48)$$

Šeit C_2 atkal ir nezināma konstante.

Sieniņas apakšējai daļai $0 < y < b$ mēs izmantojam RN (6) un (7). Izmantojam sakarības (33) un (39); tās dod vienādojumu:

$$g_0(y) = u(\delta)\Phi(y), \quad (4.1.49)$$

$$\left. \frac{\partial U_0(x,y)}{\partial x} \right|_{x=\delta-0} = \frac{\beta_0}{\beta} \Phi(y) \left. \frac{du_0(y)}{dy} \right|_{x=\delta+0}. \quad (4.1.50)$$

Mēs integrējam vienādojumu (28) x - virzienā

$$\frac{d^2u_0(y)}{dy^2} + d \left. \frac{\partial U_0(x,y)}{\partial x} \right|_{x=0}^{x=\delta} - \bar{\mu}^2 u_0(x,y) = 0.$$

Tālāk izmantojam reprezentāciju (42) vērtībai $x = 0$ un vienādību (49). Tas dod:

$$d \left. \frac{\partial U_0(x,y)}{\partial x} \right|_{x=0} = d^2 [(eb_1 - e^{-1}b_2)u_0(y) + (-ea_1 + e^{-1}a_2)u(\delta)\Phi(y) + ed_1 - e^{-1}d_2].$$

Izteiksmi (38) mēs varam izmantot atrisinājumam $u(x)$ sakarībā (50). Iegūstam:

$$d \left. \frac{\partial U_0(x,y)}{\partial x} \right|_{x=\delta-0} = d \frac{\beta_0}{\beta} \Phi(y) \tilde{\mu} C_1 (\mu_1 - 1).$$

Gala rezultātā mēs iegūstam šādu nehomogēnu parasto diferenciālvienādojumu:

$$\frac{d^2u_0}{dy^2} - \tilde{\lambda}^2 u_0 + C_1 \Theta_{3,0} - C_1 \Theta_{3,1} \cosh(\rho y) + D_3 = 0.$$

Šeit parametri ir šādi:

$$\tilde{\lambda}^2 = \frac{\beta_0^0(e-1)^2}{e\delta K_1} + \bar{\mu}^2, D_3 = \frac{2\tilde{\lambda}^2}{(e-1)^2}, \Theta_{3,i} = \Theta_3 \Phi_i, i = 0, 1, d_3 = \frac{D_3}{\tilde{\lambda}^2}, \Theta_{3,0} = \frac{\Theta_{3,0}}{\tilde{\lambda}^2},$$

$$\Theta_3 = \frac{(A_1 e - A_2 e^{-1})(1 + \mu_1)}{\delta^2 K_1} - \frac{\beta_0 \tilde{\mu}}{\beta \delta} (1 - \mu_1),$$

$$\mathcal{G}_{3,1} = \frac{\Theta_{3,1}}{\rho^2 - \tilde{\lambda}^2}, \Phi_0 = \left(\frac{\sinh(1)}{\beta b} + \cosh(1) \right) \Phi_1, \Phi_1 = \left[\frac{\sinh(1)}{\beta b} + \cosh(1) - \sinh(1) \right]^{-1}.$$

Atrisinājumu (38) ievietojam (49). Tas dod

$$g_0(y) = C_1 (\mu_1 e^{\tilde{\mu} \delta} + e^{-\tilde{\mu} \delta}) (\Phi_0 - \Phi_1(\rho y)). \quad (4.1.51)$$

Atrisinājums kopā ar homogēno RN (4):

$$\frac{du_0(0)}{dy} = 0$$

Vispārējā gadījumā $\rho \neq \tilde{\lambda}$ izskatās šādi (šeit konstante C_3 atkal pagaidām nav zināma):

$$u_0(y) = C_3 \cosh(\tilde{\lambda} y) + C_1 (\mathcal{G}_{3,0} + \mathcal{G}_{3,1} \cosh(\rho y)) + d_3. \quad (4.1.52)$$

Singulārajā gadījumā $\rho = \tilde{\lambda}$ atrisinājums izskatās šādi:

$$u_0(y) = C_3 \cosh(\tilde{\lambda} y) + C_1 (\mathcal{G}_{3,0} + \Theta_{3,1} \frac{\sinh(\tilde{\lambda} y)}{2\tilde{\lambda}}) + d_3.$$

Kopumā šis 3-D problēmas atrisinājums ar konservatīvās viduvēšanas metodi satur trīs nezināmas konstantes $C_i, i=1,2,3$ vienādojumos (27), (34) un (35). To noteikšanai mēs formulēsim dabiskus nosacījumus, kuri doti publikācijās [42]-[45]. Pirmā no tām ir temperatūras nepārtrauktība noteiktā punktā - $x = \delta, y = b$ - tur, kur saskaras sienas augšējā daļa ar ribas stūri. No vienādībām (26), (33) un (35) iegūstam:

$$C_1 (\mu_1 e^{\tilde{\mu} x} + e^{-\tilde{\mu} x}) \Phi(b) - C_2 b_0 \cosh(\tilde{k}(1-b)) = U_2 b_0 - d_0. \quad (4.1.53)$$

Kā nākamos divus nosacījumus mēs uzliekam prasību par temperatūras un tās plūsmas nepārtrauktību uz līnijas $0 < x < \delta, y = b$ starp sienas augšējo un apakšējo daļu. No (48) un (52) iegūstam:

$$C_2 \cosh(\tilde{k}(1-b)) - C_1 [\mathcal{G}_{3,0} + \mathcal{G}_{3,1} \cosh(1)] - C_3 \cosh(\tilde{\lambda} b) = d_3 - U_2, \quad (4.1.54)$$

$$C_1 \mathcal{G}_{3,1} \rho \sinh(1) + C_2 \tilde{k} \sinh(\tilde{k}(1-b)) + C_3 \tilde{\lambda} \sinh(\tilde{\lambda} b) = 0. \quad (4.1.55)$$

Ir viegli pārliecināties, ka šai trīs lineāru algebrisku vienādojumu sistēmai ir tikai viens atrisinājums.

1.5. Daži skaitliskie rezultāti un to analīze ir mūsu publikācijā [44]. Dosim īsu to analīzi. Par tipisku piemēru izvēlamies problēmu, kura apskatīta publikācijās [58]-[60].

| | | | | | | | | |
|-------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| y/x | 0,000 | 0,195 | 0,391 | 0,586 | 0,586 | 1,260 | 1,934 | 2,608 |
| 1,000 | 73,62 74,17 | 72,15 72,71 | 71,09 71,65 | 70,32 70,89 | | | | |
| 0,714 | 73,53 74,08 | 72,05 72,61 | 70,99 71,56 | 70,23 70,79 | | | | |
| 0,428 | 73,24 73,80 | 71,76 72,32 | 70,69 71,27 | 69,94 70,51 | | | | |
| 0,142 | 72,77 73,33 | 71,27 71,85 | 70,20 70,78 | 69,44 68,42 | | | | |
| 0,142 | 72,77 73,33 | 71,27 71,85 | 70,20 70,78 | 69,44 68,42 | 69,44 68,42 | 48,67 48,13 | 39,12 38,81 | 36,08 35,84 |
| 0,094 | 72,62 73,35 | 71,14 71,86 | 70,14 70,79 | 69,50 68,50 | 69,50 68,48 | 48,70 48,16 | 39,14 38,83 | 36,09 35,86 |
| 0,048 | 72,53 73,36 | 71,06 71,87 | 70,10 70,79 | 69,54 68,62 | 69,54 68,51 | 48,72 48,18 | 39,15 38,84 | 36,10 35,86 |
| 0,000 | 72,51 73,36 | 71,04 71,87 | 70,09 70,79 | 69,55 68,75 | 69,55 68,52 | 48,72 48,18 | 39,16 38,84 | 36,10 35,87 |

1.6. Speciālie gadījumi. Mēs iegūsim pirmo speciālo gadījumu, ja pieņemsim 3-D atrisinājuma neatkarību no trešā argumenta z . Tad vienādība (18) reducējas uz triviālu identitāti:

$$V(x, y, z) \equiv U(x, y),$$

Bet līdzīgi vienādojums (27) reducējas uz identitāti:

$$V_0(x, y, z) = U_0(x, y).$$

Parametrs $\bar{\mu}$ šajā gadījumā pārvēršas par sakarību $\bar{\mu}^2 = \beta w^{-1}$. Tomēr svarīgi atzīmēt, ka šajā gadījumā tomēr mēs esam ņēmuši vērā siltuma plūsmu no virsmas $z = w$. Nākamais speciālais gadījums ir, ja uzskatam, ka plūsma no sānu virsmas netiek ņemta vērā, t.i. virsma $z = w$ ir izolēta. Tad $\bar{\mu}^2 = 0$ un 3-D atrisinājums reducējas uz agrāko 2-D atrisinājumu [42],[43]. Labi zināmais 1-D formulējums periodiskai sistēmai ar taisnstūra ribu no publikācijām [59], [60] izskatās šādi:

$$\frac{d^2 U_0(x)}{dx^2} = 0, x \in (0, \delta), \quad (4.1.56)$$

$$b \frac{d^2 U}{dx^2} - \beta U(x) = 0, x \in (\delta, \delta + l), \quad (4.1.57)$$

$$\frac{dU_0(x)}{dx} + \beta_0^0(1-U_0) = 0, \quad x = 0, \quad (4.1.58)$$

$$\frac{dU(x)}{dx} + \beta U = 0, \quad x = \delta + l, \quad (4.1.59)$$

$$U_0|_{x=\delta-0} = U|_{x=\delta+0}, \quad (4.1.60)$$

$$\beta \left[\frac{dU_0(x)}{dx} + \beta_0(1-b)U_0 \right]_{x=\delta-0} = \beta_0 b \frac{dU(x)}{dx} \Big|_{x=\delta+0}. \quad (4.1.61)$$

Problēmas (56)-(61) atrisinājums var tikt uzrakstīts formā (skat [59], [60]):

$$U_0(x) = C_1^{(0)}x + C_0^{(0)}, \quad (4.1.62)$$

$$U(x) = C_1 e^{\mu x} + C_2 e^{-\mu x}, \quad \mu = \frac{\beta}{b}.$$

Šeit četras nezināmās konstantes viegli var tikt noteiktas no četriem RN un saistības nosacījumiem (58)-(61).

Šis vienas dimensijas modelis viegli var tikt noteikts kā mūsu trīs dimensiju atrisinājuma (1)-(3), (7)-(13) un (16) integrējot y - virzienā, ja izdaram vēl divus vienkāršojumus:

1) mēs pieņemam abu temperatūru neatkarību no diviem argumentiem - y un z , t.i., mēs pieņemam, ka

$$V(x, y, z) \equiv U(x), \quad (4.1.63)$$

$$V_0(x, y, z) \equiv U_0(x); \quad (4.1.64)$$

2) mēs pieņemam, ka parametrs $\bar{\mu}^2 = 0$. Tas nozīmē, ka mēs esam izdarījuši pieņēmumu par izolācijas nosacījumiem uz virsmas $z = w$.

Patiešām, parādīsim šo izvedumu vienādojumam (10). Integrēsim (10) y - virzienā pa segmentu $y \in [0, b]$ un z - virzienā pa segmentu $z \in [0, 1]$:

$$\frac{d^2U(x)}{dx^2} + b^{-1} \frac{\partial V}{\partial y} \Big|_{z=0}^{z=w} + w^{-1} \frac{\partial V}{\partial z} \Big|_{z=0}^{z=w} = 0. \quad (4.1.65)$$

Trīs homogēnie RN atļauj pārrakstīt vienādojumu (65) formā:

$$\frac{d^2U(x)}{dx^2} + b^{-1} \frac{\partial V}{\partial y} \Big|_{y=b} = 0.$$

Atliek izmantot nosacījumu (12), identitāti (63) un esam ieguvuši vienādojumu (57).

Mēs viegli varam iegūt uzlabotu atrisinājumu (salīdzinājumā ar "klasisko" atrisinājumu (62)), ja mēs pieņemsim 3-D atrisinājuma neatkarību no otrā un trešā mainīgā, taču ņemsim vērā siltuma apmaiņu ar apkārtējo vidi saskaņā ar RN (7) un

(13) ar konservatīvās viduvēšanas metodi. Beigās, atrisinājuma (62) mēs iegūsim atrisinājumu formā:

$$U_0(x) = \tilde{C}_1^{(0)} \exp(\mu^{(0)}x) + \tilde{C}_2^{(0)} \exp(-\mu^{(0)}x),$$

$$U(x) = \tilde{C}_1 \exp(\mu^{(1)}x) + \tilde{C}_2 \exp(-\mu^{(1)}x), \quad (4.1.66)$$

$$\mu^{(0)} = \beta/w, \mu^{(1)} = \beta/(b+1/w).$$

Šis jaunais un vienkāršais 1-D atrisinājums atļauj mums viegli novērtēt, kad ir iespējams izmantot atrisinājumu (62) atrisinājuma (66) vietā. Šis nosacījums ir:

$$\mu^{(0)} \delta \ll 1, b \ll w.$$

Visinteresantākais no lietojumu viedokļa ir divu nehomogēno sieniņas robežnosacījumu (4) un (5), t.i., $Q_{0,2}(x, y) = Q_1(x, z) = Q_2(x, y) = 0$. Šajā gadījumā 3-D problēmas redukcija uz divu dimensiju problēmu ir identiska ar to, kura ir realizēta subsection 3.1 un mums ir tas pats parciālais diferenciālvienādojums (24) 2-D temperatūras laukam $U(x, y)$. Mums ir vismaz divas iespējas transformēt RN no 3-D uz 2-D formu.

Pirmais ceļš ir izmantot konservatīvās viduvēšanas procedūru (18) abiem nehomogēnajiem RN un definēt:

$$q_{0,0}(x) = \sigma \int_0^w Q_{0,0}(x, z) dz, \quad q_{0,1}(x) = \sigma \int_0^w Q_{0,1}(x, z) dz.$$

Kā nākamo mēs par jaunu definējam vienādbi (40) funkcijas $U_0(x, y)$ integrālai vidējai vērtībai $u_0(y)$ x -virzienā un beigu beigās iegūstam parasto diferenciālvienādojumu (47), taču tagad homogēna robežnosacījuma vietā mēs iegūstam šādu nehomogēnu:

$$\frac{du_0(y)}{dy} = q_{0,1}(x).$$

Atrisinājums izskatās sekojoši:

$$u_0(y) = C_2 \cosh(\tilde{k}(1-y)) + U_2 - \frac{q_{0,1}(x)}{\tilde{k}} \sinh(\tilde{k}(1-y)), U_2 = \tilde{k}^{-2} \Theta_2.$$

Līdzīgi pārveidojas atrisinājums sieniņas apakšējai daļai.

Otrajā paņēmiņā mēs izdaram viduvēšanas procedūru visam intervalam $y \in (0, 1)$, taču ne RN (4) un (5). Tad tikko iegūtais atrisinājums iegūst formu:

$$u_0(y; z) = C_2(z) \cosh(\tilde{k}(1-y)) + U_2 - \frac{Q_{0,1}(x, z)}{\tilde{k}} \sinh(\tilde{k}(1-y)), U_2 = \tilde{k}^{-2} \Theta_2.$$

Tas nozīmē, ka vienas dimensijas atrisinājums patiesībā ir atkarīgs no argumenta z kā parametra caur nezināmajām konstantēm C_2 un siltuma plūsmas uz robežas $y = 1$.

2.§. Nestacionārā 2-D problēma

Šajā otrajā paragrāfā mēs izpētīsim nestacionāro siltuma pārneši vienā 3-D sistēmas elementā ar taisnstūra ribi. Mēs pārveidosim sākotnējo 3-D problēmu uz trijiem saistītiem viendimensiju parciāliem paraboliska tipa diferenciālvienādojumiem (siltuma vienādojumi ar konstantiem koeficientiem un lineāriem avotiem) Šos vienādojumus risināsim ar galīgo diferenču metodi [45].

2.1. Sāksim ar nestacionāras trīs dimensiju problēmas formulējumu sistēmas vienam elementam ar taisnstūra ribi. Izmantosim tos pašus bezdimensiju argumentus un parametrus kā iepriekšējā paragrāfā, tikai ar tikai vienu papildinājumu:

$$a^2 = k / c, (a_0^2 = k_0 / c_0),$$

šeit temperatūras vadīšanas koeficients ribai (sieniņai), kur $c(c_0)$ ir īpatnējā siltuma ietilpība tilpuma vienībai ribai (sieniņai). Sieniņa – ir viens sistēmas elements ar taisnstūra ribi – ir novietots 3-D apgabalā $\{x \in [0, \delta], y \in [0, 1], z \in [0, w]\}$ un temperatūras lauks $V_0(x, y, z, t)$ tiek aprakstīts ar siltuma vienādojumu:

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_0}{\partial z^2} = a_0^{-2} \frac{\partial V_0}{\partial t}. \quad (4.2.1)$$

Pamatvienādojumam mēs pievienojam nepieciešamos robežnosacījumus:

$$\frac{\partial V_0}{\partial x} + \beta_0^0 (1 - V_0) = 0, \quad x = 0, \quad (4.2.2)$$

$$\frac{\partial V_0}{\partial x} + \beta_0 V_0 = 0, \quad x = \delta, \quad y \in (b, 1), \quad (4.2.3)$$

$$\left. \frac{\partial V_0}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial V_0}{\partial y} \right|_{y=1} = 0, \quad (4.2.4)$$

$$\left. \frac{\partial V_0}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial V_0}{\partial z} + \beta_0 V_0 \right|_{z=w} = 0. \quad (4.2.5)$$

Pievienojam nepieciešamos saistības nosacījumus starp sieniņu un ribi:

$$V_0 \Big|_{x=\delta-0} = V_0 \Big|_{x=\delta+0}, \quad (4.2.6)$$

$$\beta \left. \frac{\partial V_0}{\partial x} \right|_{x=\delta-0} = \beta_0 \left. \frac{\partial V_0}{\partial x} \right|_{x=\delta+0}. \quad (4.2.7)$$

Visbeidzot, pievienojam sākuma nosacījumus šādā formā:

$$V_0(x, y, z, t)|_{t=0} = V_0^0(x, y, z). \quad (4.2.8)$$

Taisnstūra riba aizņem apgabalu $\{x \in [\delta, \delta + l], y \in [0, b], z \in [0, w]\}$ un temperatūras lauks $V(x, y, z, t)$ apmierina vienādojumu

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = a^{-2} \frac{\partial V}{\partial t}. \quad (4.2.9)$$

Robežnosacījumi ribai ir šādi (sagrīt ar agrākajiem):

$$\frac{\partial V}{\partial x} + \beta V = 0, \quad x = \delta + l, \quad (4.2.10)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} + \beta V = 0, \quad y = b, \quad (4.2.11)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} + \beta V = 0, \quad z = w, \quad (4.2.12)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial V}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad (4.2.13)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 \quad (4.2.14)$$

Un sākuma nosacījums:

$$V(x, y, z, t)|_{t=0} = V^0(x, y, z). \quad (4.2.15)$$

Atkal izmantosim konservatīvās viduvēšanas metodi. Šī tuvinātā pāreja no 3-D uz 2-D formulējumu ir tuva tam, kā tas bija stacionārā gadījumā.

2.2. Mēs aproksimēsim 3-D temperatūras lauku $V(x, y, z, t)$ sekojošā formā:

$$V(x, y, z, t) = h_0(x, y, t) + (e^{\sigma z} - 1)h_1(x, y, t) + (1 - e^{-\sigma z})h_2(x, y, t), \quad \sigma = w^{-1} \quad (4.2.16)$$

Šeit trīs funkcijas $h_i(x, y, t)$, $i = 0, 1, 2$ pagaidām ir nezināmas. Atkal definēsim funkcijai $V(x, y, z, t)$ vidējo integrālo vērtību z -virzienā:

$$U(x, y, t) = \sigma \int_0^w V(x, y, z, t) dz. \quad (4.2.17)$$

Šī sakarība kopā ar RN (pie $z = 0$ un $z = w$) atļauj izslēgt $h_i(x, y)$ no reprezentācijas (16). Beigās mēs varam izteikt 3-D atrisinājumu $V(x, y, z, t)$ formā:

$$V(x, y, z, t) = U(x, y, t)\Psi(z). \quad (4.2.18)$$

Funkcijai $\Psi(z)$ iznāk šāda izteiksme:

$$\Psi(z) = \frac{\sinh(1) + \beta w [\cosh(1) - \cosh(\sigma z)]}{\sinh(1) + \beta w [\cosh(1) - \sinh(1)]}. \quad (4.2.19)$$

Tagad mēs vienādojumu (9) transformējam uz diferenciālvienādojumu funkcijai $U(x, y, t)$: integrējam vienādojumu (9) z - virzienā. Galu galā iegūstam šādu 2-D temperatūras lauku $U(x, y, t)$ ribā:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \bar{\mu}^2 U = a^{-2} \frac{\partial U}{\partial t}, \quad (4.2.20)$$

Šeit

$$\bar{\mu}^2 = \beta w^{-1} \Psi(w).$$

Tā pati procedūra sienīgai dod identisku reprezentāciju:

$$V_0(x, y, z, t) = U_0(x, y, t) \Psi(z). \quad (4.2.21)$$

Šeit $U_0(x, y, t)$ atkal ir funkcijas $V_0(x, y, z, t)$ vidējā integrālā vērtība z - virzienā:

$$U_0(x, y, t) = \sigma \int_0^w V_0(x, y, z, t) dz. \quad (4.2.22)$$

Siltuma vadīšanas vienādojums funkcijai $U_0(x, y, t)$ sienīgai ir identisks vienādojumam (20) ribai:

$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} - \bar{\mu}^2 U_0 = a_0^{-2} \frac{\partial U_0}{\partial t}. \quad (4.2.23)$$

Mums jāpievieno viduvētās z - virzienā sākuma nosacījumi vienādojumiem (20) un (23):

$$U(x, y, t) \Big|_{t=0} = U^0(x, y), \quad (4.2.24)$$

$$U_0(x, y, t) \Big|_{t=0} = U_0^0(x, y).$$

Tagad mēs atkal varam izmantot konservatīvās viduvēšanas metodi 2-D problēmai ar RN temperatūrām $U(x, y, t)$ un $U_0(x, y, t)$. Tas var tikt izdarīts līdzīgā formā kā iepriekš. Mēs 2-D temperatūras lauks $U(x, y, t)$ ribā izteikts formā:

$$U(x, y, t) = f_0(x, t) + (e^{\rho y} - 1) f_1(x, t) + (1 - e^{-\rho y}) f_2(x, t), \rho = b^{-1}. \quad (4.2.25)$$

Otrā integrālā vidējā vērtība funkcijai $V(x, y, z, t)$ tiek definēta šādi:

$$u(x, t) = \rho \int_0^b U(x, y, t) dy. \quad (4.2.26)$$

Līdzīgi kā iepriekš iegūstam:

$$U(x, y, t) = u(x, t)\Phi(y). \quad (4.2.27)$$

Izteiksme funkcijai $\Phi(y)$ ir kā iepriekš:

$$\Phi(y) = \frac{\sinh(1) + \beta b [\cosh(1) - \cosh(\rho y)]}{\sinh(1) + \beta b [\cosh(1) - \sinh(1)]}. \quad (4.2.28)$$

Beigās mēs iegūstam no (18) un (27) tuvinātu reprezentāciju trīs dimensiju temperatūras laukam ribā:

$$V(x, y, z, t) = u(x, t)\Phi(y)\Psi(z). \quad (4.2.29)$$

Integrējam diferenciālvienādojumu (20) y - virzienā un izmantojam RN (skat (11) un otro RN (13)):

$$\frac{\partial U}{\partial y} + \beta U = 0, \quad y = b, \quad \left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{y=0} = 0.$$

Tad mēs iegūstam funkcijai $u(x, t)$ 1-D parabolisku parciālu diferenciālvienādojumu:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \tilde{\mu}^2 u = a^{-2} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \tilde{\mu}^2 = \beta \rho \Phi(b) + \bar{\mu}^2. \quad (4.2.30)$$

Šis vienādojums jārisina pret argumentu $x \in (\delta, \delta + l)$ ar RN:

$$\left[\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \beta u(x, t) \right]_{x=\delta+l} = 0, \quad (4.2.31)$$

Un tam pievienotu sākuma nosacījumu

$$u(x, t)|_{t=0} = u^0(x). \quad (4.2.32)$$

Abi šie nosacījumi ir saskaņoti ar nosacījumiem (8) un (15) pēc to integrēšanas (viduvēšanas) y - un z - virzienos.

Līdzīgi darbojamies sieniņai un aproksimējam 2-D temperatūras lauku $U_0(x, y, t)$ sieniņai x -virzienā:

$$U_0(x, y, t) = g_0(y, t) + [e^{d(\delta-x)} - 1]g_1(y, t) + [1 - e^{d(x-\delta)}]g_2(y, t), \quad d = \delta^{-1}, \quad (4.2.33)$$

Definējot integrālo vidējo vērtību funkcijai $U_0(x, y, t)$ x -virzienā:

$$u_0(y, t) = d \int_0^{\delta} U_0(x, y, t) dx. \quad (4.2.34)$$

Definīcija (34) un RN (2) ļauj mums atrast $g_i(y, t), i = 1, 2$ formā:

$$g_i(y, t) = (-1)^i [b_i u_0(y, t) - a_i g_0(y, t) + d_i], i = 1, 2. \quad (4.2.35)$$

Šeit visiem koeficientiem ir tādas pašas vērtības kā iepriekšējā paragrāfā. Tas ļauj pārrakstīt $U_0(x, y, t)$ formā:

$$U_0(x, y, t) = [1 + (e^{d(\delta-x)} - 1)a_1 - (1 - e^{d(x-\delta)})a_2]g_0(y, t) + [(1 - e^{d(x-\delta)})b_2 - (e^{d(\delta-x)} - 1)b_1]u_0(y, t) + (e^{d(\delta-x)} - 1)d_1 - (1 - e^{d(x-\delta)})d_2.$$

Izmantojot RN (3) sieniņas augšējai daļai $b < y < 1$ mēs iegūstam saiti starp funkcijām $g_0(y, t)$ un $u_0(y, t)$:

$$g_0(y, t) = b_0 u_0(y, t) - d_0. \quad (4.2.36)$$

Izteiksmē (36):

$$b_0 = B_0 K_0^{-1}, d_0 = D_0 K_0^{-1}, B_0 = B_2 - B_1, D_0 = D_2 - D_1, K_0 = A_2 - A_1 + \beta_0 \delta K_1.$$

Integrējot diferenciālvienādojumu (23) y -virzienā un izmantojot RN (2), (3) un otro nosacījumu (4) mēs iegūstam vienādojumu:

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} - \tilde{k}^2 u_0 + \Theta_2 = a_0^{-2} \frac{\partial u_0}{\partial t}, b < y < 1, \quad (4.2.37)$$

$$\frac{\partial u_0(1, t)}{\partial y} = 0, \quad (4.2.38)$$

$$\tilde{k}^2 = 2\delta^{-2}[(\beta_0 + \beta_0^0)\delta \sinh(1) + 2\beta_0 \beta_0^0 \delta^2 (\cosh(1) - 1)]/K_0 + \bar{\mu}^2,$$

$$\Theta_2 = \delta^{-2}[(d_1 - a_1 d_0)(e - 1) + (d_2 - a_2 d_0)(1 - e^{-1})].$$

Sieniņas apakšējai daļai $0 < y < b$ izmantojam RN (6), (7) un beigās iegūstam vienādojumu:

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} - \tilde{\lambda}^2 u_0 + \Phi(y) \left[E_0 u + E_1 \frac{\partial u}{\partial x} \right]_{x=\delta} + D_3 = a_0^{-2} \frac{\partial u_0}{\partial t}, 0 < y < b. \quad (4.2.39)$$

Šeit

$$\tilde{\lambda}^2 = \frac{\beta_0^0 (e-1)^2}{e\delta K_1} + \bar{\mu}^2, D_3 = \frac{2\tilde{\lambda}^2}{(e-1)^2}, d_3 = \frac{D_3}{\tilde{\lambda}^2}, E_0 = \frac{\beta_0^0 (e^2 - 2e - 1)}{e\delta K_1}, E_1 = \frac{\beta_0}{\beta\delta}.$$

Diferenciālvienādojumam (39) jāpievieno viduvēti x - un z - virzienos RN (4) formā:

$$\frac{\partial u_0(0, t)}{\partial y} = 0 \quad (4.2.40)$$

Un sākuma nosacījums (24), kurš ir integrēts x -virzienā:

$$u_0(y, t)|_{t=0} = u_0^0(y). \quad (4.2.41)$$

Šis sākuma nosacījums der abiem vienādojumiem (37) un (39).

Šī problēma trijiem parciāliem diferenciālvienādojumiem (30), (37) un (39) ar dotajiem RN un sākuma nosacījumiem mēs risināsim ar galīgo diferenču metodi, kā darbos [45], [54]. Taču trūkst nosacījumu diferenciālvienādojumu (37), (39) sajūgšanai uz līnijas $y = b$. Taču te ir vienkārša izeja: mēs pieņemam acīmredzamu funkcijas (temperatūras) $u_0(y, t)$ un siltuma plūsmas nepārtrauktību stūra punktā $\{x = \delta, y = b\}$. Temperatūras sajūgšanai starp sienīņu un ribu šajā punktā $\{x = \delta, y = b\}$ mēs varam izmantot vienādību (6), (18), (21), (27) un (36) sekas:

$$u(\delta, t)\Phi(b) = b_0 u_0(b, t) - d_0. \quad (4.2.42)$$

Vienādojumu kopā ar RN, saistības un sākuma nosacījumiem mēs izmantosim klasisko trīs punktu shēmu ar svāriem ar otro aproksimācijas kārtu attiecībā pret telpas argumentu. Lai iegūtu otro aproksimācijas kārtu RN, mēs izmantojam ideju par pamatvienādojuma izmantošanu uz robežas [45], [55]. Kad mēs cenšamies tradicionālā veidā aproksimēt diferenciālvienādojumu (39), tad mums ir netradicionāla situācija, jo šis vienādojums satur locekļus ar ribas temperatūru un siltuma plūsmu. Šī grūtību pārvaram ar Gausa izslēgšanas metodes vispārinājumu trīs diagonālai matricai.

$$A u_{i-1}^{n+1} - C u_i^{n+1} + B u_{i+1}^{n+1} = -F_i, \quad i = \overline{1, N-1},$$

$$A = \frac{\sigma}{h_x^2} = B, \quad C = \frac{2\sigma}{h_x^2} + \mu^2 \sigma + \frac{1}{a^2 \tau},$$

$$F_i = (1 - \sigma) \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{h_x^2} - \mu^2 (1 - \sigma) u_i^n + \frac{u_i^n}{a^2 \tau}.$$

Robežnosacījuma (15₁) aproksimācija punktā $x = \delta + l$ ($i = N$) robežpunktā (13) [55]:

$$\sigma \frac{u_N^{n+1} - u_{N-1}^{n+1}}{h_x} + (1-\sigma) \frac{u_N^n - u_{N-1}^n}{h_x} + \frac{h_x}{2} [\mu^2 \sigma u_N^{n+1} + \mu^2 (1-\sigma) u_N^n + \frac{u_N^{n+1} - u_N^n}{a^2 \tau}]$$

(4.2.29)

$$+ \beta \sigma u_N^{n+1} + \beta (1-\sigma) u_N^n = 0.$$

Pārrakstot to formā:

$$u_N^{n+1} = \varpi_2 u_{N-1}^{n+1} + \mu_2. \quad (4.2.30)$$

Te

$$\varpi_2 = \varpi_{21} \frac{\sigma}{h_x}, \quad \varpi_{21} = \left(\frac{\sigma}{h_x} + \frac{\sigma \mu^2 h_x}{2} + \frac{1}{a^2 \tau} + \beta \sigma \right)^{-1},$$

$$\mu_2 = -\varpi_{21} \left[(1-\sigma) \frac{u_N^n - u_{N-1}^n}{h_x} + \frac{(1-\sigma) h_x \mu^2}{2} u_N^n - \frac{u_N^n}{a^2 \tau} + (1-\sigma) \beta u_N^n \right].$$

Aprēķini ribā ar pārnese metodes koeficientu (kreisā pārnese):

$$\zeta_N = \varpi_2, \quad \eta_N = \mu_2,$$

$$\zeta_i = \frac{A}{C - \zeta_{i+1} B}, \quad \eta_i = \frac{B \eta_{i+1} + F_i}{C - \zeta_{i+1} B}, \quad i = \overline{N-1, 1}. \quad (4.2.31)$$

Otrajā etapā ar formulām

$$u_{i+1}^{n+1} = \zeta_{i+1} u_i^{n+1} + \eta_{i+1}, \quad i = \overline{0, N-1} \quad (4.2.32)$$

Tiek atrasti u_i^{n+1} . Taču u_0^{n+1} nav zināms. Vienādojums (21) ir vienādojuma (24) speciālgadījums, kad koeficienti $E_0 = E_1 = 0$. Tādēļ sīkāk apskatīsim tikai vienādojuma (24). Locekļa

$$\left[E_0 u + E_1 \frac{\partial u}{\partial x} \right]_{x=\delta}$$

aproximāciju.

Pirmā atvasinājuma aproximāciju x virzienā funkcijai $u(x, t)$ uz robežas $x = \delta$ izmantosim, tāpat kā vienādojuma (29) aproximācijai, izvirzījumu Teilora rindā ar sekojošu otrā atvasinājuma x virzienā izteikšanu no vienādojuma (13). Iegūstam:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=\delta} = \sigma \frac{u_1^{n+1} - u_0^{n+1}}{h_x} + (1-\sigma) \frac{u_1^n - u_0^n}{h_x} - \frac{h_x}{2} \left[\frac{u_0^{n+1} - u_0^n}{a^2 \tau} + \mu^2 (\sigma u_0^{n+1} + (1-\sigma) u_0^n) \right].$$

Atliek izmantot sakarību (32) pie $i=0$, lai izslēgtu u_1^{n+1} no pēdējā diferencu vienādojuma. Pārejo vienādojuma (24) locekļu aproksimāciju tiek veikta standartveidā (kā vienādojumam (28)). Gala rezultātā vienādojuma (24) diferencu aproksimācija var tikt uzrakstīta šādā formā:

$$A^{(1)} u_{0,j-1}^{n+1} - C^{(1)} u_{0,j}^{n+1} + B^{(1)} u_{0,j+1}^{n+1} + D_j^{(1)} u_0^{n+1} = -F_j^{(1)}, \quad j = 1, \overline{M_0 - 1}. \quad (4.2.33)$$

Te

$$A^{(1)} = \frac{\sigma_1}{h_{y,1}^2} = B^{(1)}, \quad C^{(1)} = \frac{2\sigma_1}{h_{y,1}^2} + \lambda^2 \sigma_1 + \frac{1}{a_0^2 \tau}, \quad (4.2.34)$$

$$F_j^{(1)} = (1-\sigma_1) \frac{u_{0,j-1}^n - 2u_{0,j}^n + u_{0,j+1}^n}{h_{y,1}^2} - \lambda^2 (1-\sigma_1) u_{0,j}^n + \frac{u_{0,j}^n}{a_0^2 \tau} + D_3 + F_j^{(0)} \dots$$

No otras puses $D_j^{(1)}$ vienādojumā (33) uzrakstāms formā $D_j^{(1)} = D^{(1)} \Phi_j$, kur

$$D^{(1)} = -E_0 \sigma + E_1 \left[\sigma \left(\frac{1-\zeta_1}{h_x} + \mu^2 \right) + \frac{h_x}{2a^2 \tau} \right],$$

bet $\Phi_j = \Phi(y_j)$.

Visbeidzot $F_j^{(0)} = F^{(0)} \Phi_j$, te

$$F^{(0)} = E_0 (1-\sigma) u_0^n + E_1 \left[\sigma \frac{\eta_1}{h_x} + (1-\sigma) \frac{u_1^n - u_0^n}{h_x} + \frac{h_x}{2} \left(\frac{1}{a^2 \tau} - \mu^2 (1-\sigma) \right) u_0^n \right].$$

RN (25₁) aproksimācija ar otro kārtu attiecībā pret y , izmantojot vienādojumu (24) tiek realizēts kā vienādojuma aproksimāciju (29) un var tikt īsi uzrakstīts formā:

$$u_{0,0}^{n+1} = \varpi_1 u_{0,1}^{n+1} + \mu_1 - \nu_1 u_0^{n+1},$$

kur

$$\varpi_1 = \varpi_{11} \frac{\sigma_1}{h_{y,1}}, \quad \varpi_{11} = \left[\frac{\sigma_1}{h_{y,1}} + \frac{h_{y,1}}{2} \left(\frac{1}{a_0^2 \tau} + \lambda^2 \sigma_1 \right) \right]^{-1}, \quad \nu_1 = \varpi_{11} D_0^{(1)} \frac{h_{y,1}}{2},$$

$$\mu_1 = -\varpi_{11}[(1 - \sigma_1) \frac{u_{0,1}^n - u_{0,0}^n}{h_{y,1}} + \frac{h_{y,1}}{2} (\frac{u_{0,0}^n}{a_0^2 \tau} - \lambda^2 (1 - \sigma_1) u_{0,0}^n + D_3 - F_0^{(0)})].$$

Sieniņas apakšējai daļai pārnese koeficienti $\alpha_{j+1}, \beta_{j+1}, \gamma_{j+1}$ ir šādā neparastākā formā:

$$u_{0,j}^{n+1} = \alpha_{j+1} u_{0,j+1}^{n+1} + \beta_{j+1} - \gamma_{j+1} u_0^{n+1}, \quad j = \overline{0, M_0 - 1}. \quad (4.2.35)$$

Šiem koeficientiem ir sekojošas izteiksmes:

$$\alpha_1 = \varpi_1, \beta_1 = \mu_1, \gamma_1 = \nu_1,$$

$$\alpha_{j+1} = \frac{B^{(1)}}{C^{(1)} - \alpha_j A^{(1)}}, \beta_{j+1} = \frac{A^{(1)} \beta_j + F_j^{(1)}}{C^{(1)} - \alpha_j A^{(1)}}, \quad (4.2.36)$$

$$\gamma_{j+1} = \frac{A^{(1)} \gamma_j + D_j^{(1)}}{C^{(1)} - \alpha_j A^{(1)}}, j = \overline{1, M_0 - 1}.$$

Vienādojums (21) ir gadījums, kad koeficienti $E_0 = E_1 = 0$ (tātad vienādojumā (33) koeficients $D_j \equiv 0$):

$$A^{(2)} u_{0,j-1}^{n+1} - C^{(2)} u_{0,j}^{n+1} + B^{(2)} u_{0,j+1}^{n+1} = -F_j^{(2)}, \quad j = \overline{M_0 + 1, M - 1}, \quad (4.2.37)$$

Bet koeficienti A, B, C, F_j tiek atrasti pēc formulām (34), svars σ_2 var būt cits, tāpat kā solis $h_{y,2}$; $F_j^{(2)}$ nesatur $F_j^{(0)}$, koeficienta λ^2 ir k^2 un D_3 ir Θ_2 .

$$\zeta_M^{(2)} = \varpi_2^{(2)}, \eta_M^{(2)} = \mu_2^{(2)}, \zeta_j^{(2)} = \frac{A^{(2)}}{C^{(2)} - \zeta_{j+1}^{(2)} B^{(2)}}, \quad (4.2.38)$$

$$\eta_j^{(2)} = \frac{B^{(2)} \eta_{j+1}^{(2)} + F_j^{(2)}}{C^{(2)} - \zeta_{j+1}^{(2)} B^{(2)}}, j = \overline{M - 1, M_0 + 1}.$$

RN (22₁) aproksimācija ir analoģa vienādojuma (29) aproksimācijai:

$$u_{0,M}^{n+1} = \varpi_2^{(2)} u_{0,M-1}^{n+1} + \mu_2^{(2)}. \quad (4.2.39)$$

Te

$$\varpi_2^{(2)} = \varpi_{21}^{(2)} \frac{\sigma_2}{h_{y,2}}, \varpi_{21}^{(2)} = \left(\frac{\sigma_2}{h_{y,2}} + \frac{\sigma_2 k^2 h_{y,2}}{2} + \frac{1}{a_0^2 \tau} \right)^{-1},$$

$$\mu_2^{(2)} = -\varpi_{21}^{(2)} \left[(1 - \sigma_2) \frac{u_{0,M}^n - u_{0,M-1}^n}{h_{y,2}} + \frac{h_{y,2}}{2} (k^2 (1 - \sigma_2) u_{0,M}^n - \Theta_2 - \frac{u_{0,M}^n}{a_0^2 \tau}) \right].$$

Tādā veidā ir zināmi koeficienti $\zeta_N^{(2)}, \eta_N^{(2)}$ un var tikt atrasti koeficienti $\zeta_j^{(2)}, \eta_j^{(2)} \cdot u_{0,j}^{n+1}$

$$u_{0,j+1}^{n+1} = \zeta_{j+1}^{(2)} u_{0,j}^{n+1} + \eta_{j+1}^{(2)}, \quad j = \overline{M_0, M-1}. \quad (4.2.40)$$

Ar vienādojumiem (26), (27), (26) ir noteikti u_{0,M_0}^{n+1} , vienādojumam (35) $j = M_0 - 1$ un (40) pie $j = M_0$. (27):

$$u_{0,M_0}^{n+1} \Phi_{M_0} = b_0 u_{0,M_0}^{n+1} - d_0. \quad (4.2.41)$$

$$\sigma_1 \frac{u_{0,M_0}^{n+1} - u_{0,M_0-1}^{n+1}}{h_{y,1}} + (1 - \sigma_1) \frac{u_{0,M_0}^n - u_{0,M_0-1}^n}{h_{y,1}} + \frac{h_{y,1}}{2} [\lambda^2 (\sigma_1 u_{0,M_0}^{n+1} + (1 - \sigma_1) u_{0,M_0}^n) +$$

$$\frac{u_{0,M_0}^{n+1} - u_{0,M_0}^n}{a_0^2 \tau} + (D^{(1)} u_0^{n+1} - F^{(0)}) \Phi_{M_0} - D_3] = \sigma_2 \frac{u_{0,M_0+1}^{n+1} - u_{0,M_0}^{n+1}}{h_{y,2}} +$$

$$(1 - \sigma_2) \frac{u_{0,M_0+1}^n - u_{0,M_0}^n}{h_{y,2}} - \frac{h_{y,2}}{2} [k^2 (\sigma_2 u_{0,M_0}^{n+1} + (1 - \sigma_2) u_{0,M_0}^n) + \frac{u_{0,M_0}^{n+1} - u_{0,M_0}^n}{a_0^2 \tau} - \Theta_2].$$

Izslēdzot u_0^{n+1} no (41), $u_{0,M_0+1}^{n+1}, u_{0,M_0-1}^{n+1}$ ar vienādojumiem (35) un (40) punktā $j = M_0$:

$$u_{0,M_0}^{n+1} = \frac{F}{G}, \quad F = \frac{\sigma_1}{h_{y,1}} \beta_{M_0} + \frac{\sigma_2}{h_{y,2}} \eta_{M_0+1}^{(2)} + \left(\frac{h_{y,1}}{2} D^{(1)} + \sigma_1 \frac{\gamma_{M_0}}{h_{y,1} \Phi_{M_0}} \right) d_0 + \frac{h_{y,1}}{2} (D_3 + F_{M_0}^{(0)}) +$$

$$\frac{h_{y,2}}{2} \Theta_2 + (1 - \sigma_1) \left[\frac{u_{0,M_0-1}^n - u_{0,M_0}^n}{h_{y,1}} - \lambda^2 \frac{h_{y,1}}{2} u_{0,M_0}^n \right] + (1 - \sigma_2) \left[\frac{u_{0,M_0+1}^n - u_{0,M_0}^n}{h_{y,2}} - k^2 \frac{h_{y,2}}{2} u_{0,M_0}^n \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{h_{y,1} + h_{y,2}}{2a_0^2\tau} u_{0,M_0}^n, \quad G = \frac{\sigma_1}{h_{y,1}} (1 - \alpha_{M_0} + \gamma_{M_0} \frac{b_0}{\Phi_{M_0}}) + \frac{\sigma_2}{h_{y,2}} (1 - \zeta^{(2)}_{M_0+1}) + \sigma_1 \lambda^2 \frac{h_{y,1}}{2} \\
& + \sigma_2 k^2 \frac{h_{y,2}}{2} + b_0 D^{(1)} \frac{h_{y,1}}{2} + \frac{h_{y,1} + h_{y,2}}{2a_0^2\tau}.
\end{aligned}$$

Kad atrasts u_{0,M_0}^{n+1} , tad no (41) tiek atrasts u_0^{n+1} :

$$u_0^{n+1} = \frac{1}{\Phi_{M_0}} [b_0 \frac{F}{G} - d_0]. \quad (4.2.42)$$

5. nodaļa. Precīzais analītiskais atrisinājums 3 – D problēmai

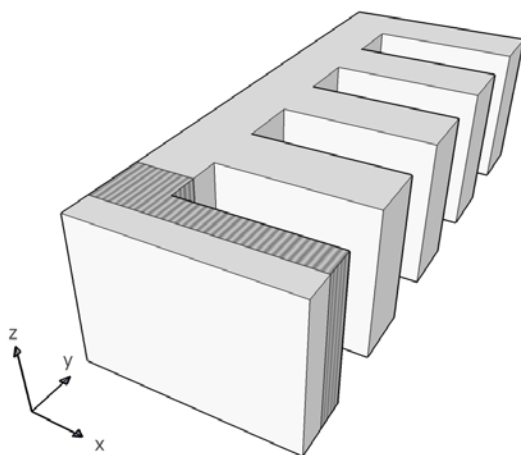
1. § Nepilnā stacionārā problēma

Šajā paragrāfā tiks apskatīta nepilna matemātiska 3-D stacionāra problēma, kad uz divām pretējām virsmām ir doti otrā veida RN, kas ļauj problēmu reducēt uz 2-D problēmu Puasona vienādojumam. Problēma tiek apskatīta vienam sistēmas elementam ar taisnstūra ribu, kā tas attēlots grafikā ar tumšāku krāsu. Šis matemātiskais formulējums 2-D un 3-D problēmām ir apskatīts rakstos [50], [51], [53].

Šeit tiek lietoti iepriekš izmantotie bezdimensiju parametri. Arī bezdimensiju temperatūras:

$$\bar{V}(x, y, z) = \frac{\tilde{V}(x, y, z) - T_a}{T_b - T_a}, \bar{V}_0(x, y, z) = \frac{\tilde{V}_0(x, y, z) - T_a}{T_b - T_a},$$

$$\Theta(x, y, z) = \frac{\tilde{\Theta}(x, y, z) - T_a}{T_b - T_a}, \Theta_0(y, z) = \frac{\tilde{\Theta}_0(y, z) - T_a}{T_b - T_a}.$$



Zīm. 5.1.

Te $\tilde{\Theta}_0(y, z)$ ir apkārtējās vides temperatūra kreisajā (karstajā) sienīgas pusē (siltuma avota pusē), $\tilde{\Theta}(x, y, z)$ - apkārtējās vides temperatūra labajā (vēsajā) sienīgas un ribas pusē. Tālāk, $\tilde{V}(x, y, z)$ ($\tilde{V}_0(x, y, z)$) ir dimensiju temperatūras ribai (sienīgai). Visbeidzot, šeit $T_a(T_b)$ ir integrālās vidējās temperatūras uz atbilstošajām virsmas plaknēm:

$$T_a = \frac{\left[\int_0^W dz \int_B^{B+R} \Theta(\Delta, y, z) dy + \int_{\Delta}^{\Delta+L} dx \int_0^W \Theta(x, B, z) dz + \int_0^W dz \int_0^B \Theta(\Delta + L, y, z) dy \right]}{[(B + R + L)W]},$$

$$T_b = \frac{\int_0^{B+R} dy \int_0^W \Theta_0(y, z) dz}{[W(B + R)]}.$$

Mēs šeit esam definējuši sekojošus dimensiju siltuma un ģeometriskos parametrus: $k(k_0)$ - siltuma vadīšanas koeficients ribai (sieniņai), $h(h_0)$ - siltuma apmaiņas koeficients ribai (sieniņai), $2B$ – ribas biezums, L – ribas garums, Δ – sieniņas biezums, W – sieniņas platums (garums), $2R$ – distance starp divām ribām (ribu sprauga).

Mēs aprakstam bezdimensiju temperatūru lauku ar funkcijām sieniņā (ribā). Tie tiek aprakstīti ar vienādojumiem:

$$\frac{\partial^2 \bar{V}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{V}_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{V}_0}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial z^2} = 0.$$

Vispirms mēs apskatīsim trīs dimensiju nostādni ar dotām siltuma plūsmām no sānu virsmām:

$$\left. \frac{\partial \bar{V}_0}{\partial z} \right|_{z=0} = Q_{0,2}(x, y), \quad \left. \frac{\partial \bar{V}_0}{\partial z} \right|_{z=w} = Q_{0,3}(x, y), \quad \left. \frac{\partial \bar{V}}{\partial z} \right|_{z=0} = Q_2(x, y), \quad \left. \frac{\partial \bar{V}}{\partial z} \right|_{z=w} = Q_3(x, y). \quad (5.1.1)$$

Šāds RN tips atļauj precīzu pāreju no 3-D problēmas nostādni uz 2-D nostādni Puasona vienādojumam ar konservatīvās viduvēšanas metodi. Kā iepriekš, definēsim sekojošu integrāļus vidējām vērtībām:

$$V_0(x, y) = w^{-1} \int_0^w \bar{V}_0(x, y, z) dz, \quad \mathcal{G}_0(y) = w^{-1} \int_0^w \Theta_0(y, z) dz, \quad (5.1.2)$$

$$V(x, y) = w^{-1} \int_0^w \bar{V}(x, y, z) dz, \quad \mathcal{G}(x, y) = w^{-1} \int_0^w \Theta(x, y, z) dz.$$

Atliek izmantot galvenā vienādojuma integrāciju, izmantojot abu RN pārus un mēs iegūstam:

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_0}{\partial y^2} + Q_0(x, y) = 0, \quad (5.1.3)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + Q(x, y) = 0.$$

Šeit

$$Q_0(x, y) = \frac{1}{w} (Q_{0,3}(x, y) - Q_{0,2}(x, y)), \quad Q(x, y) = \frac{1}{w} (Q_3(x, y) - Q_2(x, y)).$$

Pievienojam abiem jaunajiem diferenciālvienādojumiem (3) nepieciešamos RN:

$$\left\{ \frac{\partial V_0}{\partial x} + \beta_0^0 [\mathcal{G}_0(y) - V_0] \right\} \Big|_{x=0} = 0, \quad y \in (0, 1), \quad (5.1.4)$$

$$\left\{ \frac{\partial V_0}{\partial x} + \beta_0 [V_0 - \mathcal{G}(x, y)] \right\} \Big|_{x=\delta} = 0, \quad y \in (b, 1), \quad (5.1.5)$$

$$\frac{\partial V_0}{\partial y} \Big|_{y=0} = Q_{0,0}(x), \quad (5.1.6)$$

$$\frac{\partial V_0}{\partial y} \Big|_{y=1} = Q_{0,1}(x). \quad (5.1.7)$$

Mēs pieļaujam situāciju, ka ribas materiāls var būt atšķirīgs no sienīņas materiāla. Tātad, tas nozīmē, ka jāformulē saistības nosacījumi uz virsmas starp sienīņu un ribu. Mēs pieņemam ideālu termisko kontaktu – nav kontakta pretestības:

$$V_0 \Big|_{x=\delta-0} = V \Big|_{x=\delta+0}, \quad (5.1.8)$$

$$\beta \frac{\partial V_0}{\partial x} \Big|_{x=\delta-0} = \beta_0 \frac{\partial V}{\partial x} \Big|_{x=\delta+0}. \quad (5.1.9)$$

Ribai ir šādi RN:

$$\left\{ \frac{\partial V}{\partial x} + \beta [V - \mathcal{G}(x, y)] \right\} \Big|_{x=\delta+l} = 0, \quad y \in [0, b], \quad (5.1.10)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} \Big|_{y=0} = Q_1(x), \quad (5.1.11)$$

$$\left. \left\{ \frac{\partial V}{\partial y} + \beta [V - \mathcal{G}(x, y)] \right\} \right|_{y=b} = 0, x \in [\delta, \delta + l]. \quad (5.1.12)$$

Mēs pieņemam, ka ir izpildīti visi nosacījumi, kuri nodrošina klasiskā atrisinājuma eksistenci un unitāti problēmai (3)-(12), t.i., apkārtējās vides temperatūras nepārtrauktību, saskaņotības nosacījumus uz virsmas saskares līnijām utt.

Atzīmēsim, ka praktiski visi autori ignorē siltuma apmaiņu caur sānu virsmām $z = w$ (tāpat kā no virsmas $z = 0$). Mēs pieņemam, ka ir dotas siltuma plūsmas caur abām virsmām.

Mēs izklāstīsim galveno ideju atrisinājumam 2-D gadījumā ar konstantām bezdimensiju temperatūrām $\mathcal{G}_0 = 1 (\Theta_0 = T_b)$ un $\mathcal{G} = 0 (\Theta = T_a)$. Mēs papildus neņemsim vērā siltuma plūsmas caur sānu virsmām. Šajā konkrētajā gadījumā mums ir šāds pamatvienādojums temperatūrai $U_0(x, y)$ sienīņai, atbilstoši temperatūrai ribai $U(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} = 0, \{x \in [0, \delta], y \in [0, 1]\}, \quad (5.1.13)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0, \{x \in [\delta, \delta + l], y \in [0, b]\}. \quad (5.1.14)$$

RN (6), (7) un (12) ir homogēni:

$$\left. \frac{\partial U_0}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial U_0}{\partial y} \right|_{y=1} = \left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{y=0} = 0. \quad (5.1.15)$$

RN (4), (5), (10) un (11) vietā iegūstam:

$$\left[\frac{\partial U_0}{\partial x} + \beta_0^0 (1 - U_0) \right]_{x=0} = 0, y \in (0, 1), \quad (5.1.16)$$

$$\left(\frac{\partial U_0}{\partial x} + \beta_0 U_0 \right) \Big|_{x=\delta} = 0, y \in (b, 1), \quad (5.1.17)$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \beta U \right) \Big|_{x=\delta+l} = 0, y \in [0, b], \quad (5.1.18)$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \beta U \right) \Big|_{y=b} = 0, x \in [\delta, \delta + l]. \quad (5.1.19)$$

Saistības nosacījumi starp sienīņu un ribu nemainās, paliek (8), (9) izskatā. Vienādojumu (8), (9) lineāra kombinācija kopā ar RN (17) atļauj mums pārrakstīt kā šādu RN ar labo pusi uz sienīņas visas labās puses:

$$\left. \left(\frac{\partial U_0}{\partial x} + \beta_0 U_0 \right) \right|_{x=\delta-0} = \beta_0 F_0(\delta, y). \quad (5.1.20)$$

Šeit

$$F_0(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{1}{\beta} \frac{\partial U}{\partial x} + U \right), & 0 \leq y \leq b, \\ 0 & , b < y \leq 1, \end{cases} \quad (5.1.21)$$

$$x \in [\delta, \delta + l].$$

Pieņemot, ka funkcija $F_0(x, y)$ ir dota, mēs atrisinājumu varam izteikt kā zināmu atrisinājumu caur Grīna funkciju [56]:

$$U_0(x, y) = -\beta_0^0 \int_0^1 G_0(x, y, 0, \eta_0) d\eta_0 + \beta_0 \int_0^b F_0(\delta, \eta_0) G_0(x, y, \delta, \eta_0) d\eta_0. \quad (5.1.22)$$

Ievērojot formulu (21), mēs atrisinājumu pārrakstam šādi:

$$U_0(x, y) = \beta_0^0 \int_0^1 G_0(x, y, 0, \eta_0) d\eta_0 + \beta_0 \int_0^b \left. \left(\frac{1}{\beta} \frac{\partial U}{\partial \xi_0} + U \right) \right|_{\xi_0=\delta+0} G_0(x, y, \delta, \eta_0) d\eta_0. \quad (5.1.23)$$

Grīna funkcijas izteiksme formulās (22), (23) ir šāda (skat [56], [57]):

$$G_0(x, y, \xi, \eta) = G_0^x(x, \xi) \cdot G_0^y(y, \eta), \quad (5.1.24)$$

$$G_0^x(x, \xi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varphi_m(x) \varphi_m(\xi)}{\|\varphi_m\|^2},$$

$$G_0^y(y, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos[n\pi(y+\eta)] + \cos[n\pi(y-\eta)]}{[(\pi n)^2 + \mu_m^2]}.$$

Formulā (24) viendimensiju Grīna funkcijas īpašfunkcijas ir šādas:

$$\varphi_m(x) = \cos(\mu_m x) + \frac{\beta_0^0}{\mu_m} \sin(\mu_m x).$$

Šeit μ_m ir transcendentā vienādojuma pozitīvās saknes:

$$\operatorname{tg}(\mu_m \delta) = \frac{\mu_m (\beta_0 + \beta_0^0)}{\mu_m^2 - \beta_0 \beta_0^0}.$$

Diemžēl, formula (22) nav tieši lietojama, tādēļ ka, funkcija $F_0(x, y)$ nav zināma, t.i., nav zināma ribas temperatūra $U(x, y)$. Tas liek apskatīt atrisinājumu ribā. To darām tādā pašā veidā kā nosacījumam (20) mēs saistības nosacījumus pārrakstām kā trešā veida RN ribas taisnstūra kreisajai malai:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x} - \beta U \right) \Big|_{x=\delta+0} = \beta F(\delta, y). \quad (5.1.25)$$

Te RN labajai pusei vienādojumā (25) ir izskats:

$$F(x, y) = \left(\frac{1}{\beta_0} \frac{\partial U_0}{\partial x} - U_0 \right), x \in [0, \delta], y \in [0, b]. \quad (5.1.26)$$

Tagad, līdzīgi kā iepriekš mēs atrisinājumu ribai varam izrakstīt formā:

$$U(x, y) = -\beta \int_0^b F(\delta, \eta) G(x, y, \delta, \eta) d\eta. \quad (5.1.27)$$

Te

$$G(x, y, \xi, \eta) = G^{(x)}(x, \xi) \cdot G^{(y)}(y, \eta),$$

$$G^{(x)}(x, \xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\phi_i(x)\phi_i(\xi)}{\|\phi_i\|^2}, \quad G^{(y)}(y, \eta) = 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\psi_j(y, \eta)}{\|\psi_j\|^2},$$

$$\phi_i(x) = \cos[\lambda_i(x - \delta)] + \frac{\beta}{\lambda_i} \sin[\lambda_i(x - \delta)],$$

$$\psi_j(y, \eta) = \cos[\kappa_j(y + \eta)] + \cos[\kappa_j(y - \eta)],$$

$$\|\psi_j\|^2 = \frac{1}{2} \left(b + \frac{\beta}{\kappa_j^2 + \beta^2} \right).$$

Šeit $\lambda_i(\kappa_j)$ ir transcendentālo vienādojumu pozitīvās saknes:

$$\tan(\lambda_i b) = \frac{2\lambda_i \beta}{\lambda_i^2 - \beta^2}, \quad \tan(\kappa_j b) = \frac{\beta}{\kappa_j}.$$

Izmantojot apzīmējumus (21) un reprezentāciju (27) mēs viegli iegūstam šādu vienādojumu:

$$F_0(x, y) = -\int_0^b F(\delta, \eta) \Gamma(x, y, \delta, \eta) d\eta, \quad (5.1.28)$$

$$\Gamma(x, y, \xi, \eta) = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \beta \right) G(x, y, \xi, \eta).$$

No (22) mēs tūlīt iegūstam līdzīgu representāciju funkcijai $F(\delta, y)$:

$$F(\delta, y) = \frac{\beta_0^0}{\beta_0} \int_0^1 \Gamma_0(\delta, y, 0, \eta_0) d\eta_0 - \int_0^b F_0(\delta, \eta_0) \Gamma_0(\delta, y, \delta, \eta_0) d\eta_0. \quad (5.1.29)$$

Šeit īsumam mēs esam izmantojuši apzīmējumus kā formulā (28):

$$\Gamma_0(x, y, \xi_0, \eta_0) = \left(\beta_0 - \frac{\partial}{\partial x} \right) G_0(x, y, \xi_0, \eta_0). \quad (5.1.30)$$

Tagad representāciju (29) ievietoja formulas (28) labajā pusē un mēs iegūstam sekojošu otrā veida Fredholma integrālvienādojumu funkcijai $F_0(\delta, y)$:

$$F_0(\delta, y) = -\Phi_0(y) + \int_0^b K(y, \zeta) F_0(\delta, \zeta) d\zeta. \quad (5.1.31)$$

Te izmantoti īsāki apzīmējumi:

$$\Phi_0(y) = \frac{\beta_0^0}{\beta_0} \int_0^b \Gamma(\delta, y, \delta, \eta) d\eta \int_0^1 \Gamma_0(\delta, \eta, 0, \eta_0) d\eta_0, \quad (5.1.32)$$

$$K(y, \eta_0) = \int_0^b \Gamma_0(\delta, \eta, \delta, \eta_0) \Gamma(\delta, y, \delta, \eta) d\eta.$$

Kad esam atrisinājuši integrālvienādojumu (31), mēs tūlīt no reprezentācijas (22) varam iegūt temperatūras lauku sienīnā. Tad representācija (27) dos temperatūras lauku ribā.

Tagad apskatam vispārējo gadījumu, ka ir nehomogēna apkārteijā vides temperatūra. Tad atrisinājums ar Grīna funkciju (22) vietā ir formā:

$$U_0(x, y) = \Psi_0(x, y) - \beta_0 \int_0^b F_0(\delta, \eta_0) G_0(x, y, \delta, \eta_0) d\eta_0. \quad (5.1.33)$$

Šeit visi zināmie locekļi ir savilkti kopā:

$$\Psi_0(x, y) = \int_0^\delta Q_{0,1}(\xi_0)G_0(x, y, \xi_0, 1)d\xi_0 - \int_0^\delta Q_{0,0}(\xi_0)G_0(x, y, \xi_0, 0)d\xi_0 - \quad (5.1.34)$$

$$\beta_0 \int_0^1 \vartheta_0(\eta_0)G_0(x, y, 0, \eta_0)d\eta_0 + \int_0^\delta d\xi_0 \int_0^1 Q_0(\xi_0, \eta_0)G_0(x, y, \xi_0, \eta_0)d\eta_0.$$

Līdzīgā formā mēs varam reprezentēt atrisinājumu ribā. Atrisinājums izskatās šādi:

$$U(x, y) = \Psi(x, y) - \beta \int_0^b F(\delta, \eta)G(x, y, \delta, \eta)d\eta. \quad (5.1.35)$$

Zināmā funkcija $\Psi(x, y)$ ir šāda:

$$\begin{aligned} \Psi(x, y) = & - \int_\delta^{\delta+l} Q_1(\xi)G(x, y, \xi, 0)d\xi + \beta \int_0^b \vartheta(\delta+l, \eta)G(x, y, \delta+l, \eta)d\eta \\ & + \beta \int_\delta^{\delta+l} \vartheta(\xi, b)G(x, y, \xi, b)d\xi + \int_\delta^{\delta+l} d\xi \int_0^1 Q(\xi, \eta)G(x, y, \xi, \eta)d\eta. \end{aligned} \quad (5.1.36)$$

Formulu (28) un (29) vietā iegūstam reprezentācijas:

$$F(x, y) = \tilde{\Psi}_0(x, y) - \int_0^b F_0(\delta, \eta_0)\Gamma_0(x, y, \delta, \eta_0)d\eta_0, \quad (5.1.37)$$

$$F_0(\delta, y) = \tilde{\Psi}(x, \delta) - \beta \int_0^b F(\delta, \eta)\Gamma(\delta, y, \delta, \eta)d\eta.$$

Vienādojumā (37) ir izmantoti apzīmējumi:

$$\tilde{\Psi}_0(x, y) = \frac{1}{\beta_0} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \beta_0 \right) \Psi_0(x, y), \quad \tilde{\Psi}(x, y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \beta \right) \Psi(x, y).$$

Gala rezultātā mēs iegūstam šādu nehomogēnu Fredholma otrā veida integrālvienādojumu (31):

$$F_0(\delta, y) = -Y_0(y) + \int_0^b K(y, \varsigma)F_0(\delta, \varsigma)d\varsigma. \quad (5.1.38)$$

Te

$$Y_0(y) = \tilde{\Psi}(\delta, y) - \beta \int_0^b \tilde{\Phi}_0(\delta, \eta)\Gamma(\delta, y, \delta, \eta)d\eta.$$

Atkal, atrisinot integrālvienādojumu (38), uzreiz no vienādojuma (33) iegūstam temperatūru lauku sienīņā [62]. Tad formula (37) atļauj atrast kombināciju $F(x, \delta)$. No tās izteiksme (35) dod temperatūras lauku ribā.

Atzīmēsim, ka pēdējā problēma ar nehomogēnu apkārtējās vides temperatūru un tās atrisinājums atļauj sasaistīt temperatūru lauku ar hidrodinamiku (šķidruma vai gāzes kustību starp divām ribām un gar kreiso malu). Ja ir trešā veida RN, tad iegūstam pilnu 3-D problēmu.

Īsi apskatīsim sistēmu ar riba, kura ar sienīņu savienota tā, ka ir neideāls siltuma kontakts; tātad arī materiāli nav cieši savienoti. Līdzīgas problēmas var apskatīt arī citām ģeometrijām, arī nestacionārām problēmām. Šis uzdevums apskatīts un referēts pasaules kongresā Indijā, atreferējums dots mūsu rakstā [50].

Izrakstam saistības nosacījumus neideāla siltuma kontakta formā. Šeit koeficients α raksturo abu materiālu kontakta trūkumu. Darbā [15] parādīts, ka $\alpha = \frac{k_0}{\delta_1}$, kur k_0 ir vides starp abiem materiāliem siltuma vadīšanas koeficients, δ_1 – vides starp abām pusēm biezums. Atšķirībā no nosacījumiem (8), (9) tagad doti nosacījumi:

$$U_0 \Big|_{x=\delta-0} = \left(U - \alpha \frac{\partial U}{\partial x} \right) \Big|_{x=\delta+0}, \quad y \in (0, b), \quad (5.1.39)$$

$$\beta \frac{\partial U_0}{\partial x} \Big|_{x=\delta-0} = \beta_0 \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x=\delta+0}, \quad y \in (0, b). \quad (5.1.40)$$

Pirmais no tiem rāda, ka temperatūra savienojuma vietā nav nepārtraukta, bet ir lēcienis, proporcionāls plūsmai ar koeficientu α . Robežnosacījumus sienīņas labajai malai robežnosacījumu pārrakstam formā:

$$\left[(U_0)'_x + \tilde{\beta}(y)U_0 \right] \Big|_{x=\delta+0} = F_0(y), \quad \tilde{\beta}(y) = \begin{cases} \beta^{-1}, & \text{ja } 0 < y < b, \\ \beta_0, & \text{ja } b < y < 1. \end{cases}$$

$$F_0(y) = \begin{cases} \beta^{-1} ((\beta_0 - \alpha)U'_x(x, y) + U(x, y)) \Big|_{x=\delta+0}, & \text{ja } 0 < y < b, \\ 0, & \text{ja } b < y < 1. \end{cases}$$

Analogi ribas kreisajai pusei robežnosacījumu pārrakstam šādā formā:

$$\left[\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{U(x, y)}{(\beta_0 + \alpha)} \right] \Big|_{x=\delta+0} = F(y) = \frac{1}{\beta_0 + \alpha} \left[\beta \frac{\partial U_0}{\partial x} - U_0(x, y) \right] \Big|_{x=\delta-0}.$$

Līdzīgi kā iepriekš, atrisinājumu ribai var uzrakstīt tādā pašā kā iepriekš formā:

$$U(x, y) = - \int_0^b F(\eta) G(x, y; \delta, \eta) d\eta. \quad (5.1.41)$$

Atrisinājumu sienīņai uzrakstam formā, zināmos locekļus apvienojam kā nehomogēno locekli $f(x, y)$. ($\tilde{\beta}_\alpha = \beta_0 - \alpha$):

$$U_0(x, y) = f(x, y) + \frac{1}{\beta} \int_0^b \left[\tilde{\beta}_\alpha \frac{\partial U(x, \eta)}{(\beta_0 - \alpha) \partial x} + U(x, \eta) \right] \Big|_{x=\delta+0} G_1^0(x, y; \delta, \eta) d\eta. \quad (5.1.42)$$

$$\text{Te } f(x, y) = \beta_0^0 \int_0^b G_1^0(x, y; 0, \eta) d\eta + \beta_0^0 \int_b^1 G_2^0(x, y; 0, \eta) d\eta.$$

No atrisinājuma (42) ribai un atrisinājuma (43) sienīnai, kura satur reprezentāciju (41) un tās diferenciāciju, iegūstam:

$$U_0(x, y) - \beta (U_0)_x' = F_\beta(x, y) + \int_0^b \left[\tilde{\beta}_\alpha U_x' + U(x, \eta) \right] \Big|_{x=\delta+0} G_\beta^0(x, y; \delta, \eta) d\eta. \quad (5.1.43)$$

Šeit ir apzīmējumi:

$$F_\beta(x, y) = f(x, y) - \beta f_x', \quad G_\beta^0(x, y; \delta, \eta) = \beta^{-1} G_1^0(x, y; \delta, \eta) - (G_1^0)_x'.$$

Analogi no reprezentācijas (41) un tās diferenciācijas iegūstam:

$$\tilde{\beta}_\alpha U_x' + U(x, y) = \int_0^b \left[U_0(x, \eta) - \beta (U_0)_x' \right] \Big|_{x=\delta-0} G_{\tilde{\beta}}(x, y; \delta, \eta) d\eta, \quad (5.1.44)$$

$$G_{\tilde{\beta}}(x, y; \delta, \eta) = \beta_\alpha^{-1} \left[G(x, y; \delta, \eta) + \tilde{\beta}_\alpha G_x'(x, y; \delta, \eta) \right].$$

Tas dod galu galā:

$$V(\delta, y) = F_\beta(\delta, y) + \int_0^b V(\delta, \varsigma) K(\delta, y; \delta, \varsigma) d\varsigma \quad (5.1.45)$$

Šeit ir šadi apzīmējumi:

$$V(x, y) = U_0(x, y) - \beta (U_0)_x', \quad K(x, y; \delta, \varsigma) = \int_0^b G_{\tilde{\beta}}(\delta, y; \delta, \varsigma) G_\beta^0(x, y; \delta, \eta) d\eta.$$

$$U(x, y) = \beta_\alpha^{-1} \int_0^b V(\delta, y) G(x, y; \delta, \eta) d\eta$$

2. § Nepilnā nestacionārā problēma

Te apskatām nestacionāro 3-D formulējumu sistēmas elementam ar taisnstūra ribu. Formulēsim bezdimensiju temperatūras tādā pašā formā kā iepriekšējā paragrāfā:

$$\bar{V}(x, y, z, t) = \frac{\tilde{V}(x, y, z, t) - T_a}{T_b - T_a}, \bar{V}_0(x, y, z, t) = \frac{\tilde{V}_0(x, y, z, t) - T_a}{T_b - T_a},$$

$$\Theta(x, y, z, t) = \frac{\tilde{\Theta}(x, y, z, t) - T_a}{T_b - T_a}, \Theta_0(y, z, t) = \frac{\tilde{\Theta}_0(y, z, t) - T_a}{T_b - T_a}.$$

Te $\tilde{\Theta}_0(y, z, t)$ ir apkārtējās vides temperatūra kreisajā, karstajā pusē; $\tilde{\Theta}(x, y, z, t)$ - apkārtējās vides temperatūra labajā (aukstajā) pusē sieniņai un ribai. Visbeidzot, $\tilde{V}(x, y, z, t)$ ($\tilde{V}_0(x, y, z, t)$) ir dimensiju temperatūras sieniņai un ribai, kur T_a (T_b) ir kāda raksturīga apkārtējās vides temperatūra. Temperatūru lauku aprakstam ar funkcijām $\bar{V}_0(x, y, z, t)$ ($\bar{V}(x, y, z, t)$) sieniņā (ribā):

$$\frac{\partial^2 \bar{V}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{V}_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{V}_0}{\partial z^2} = \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial \bar{V}_0}{\partial t}, \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial z^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial \bar{V}}{\partial t}.$$

Pieņemam, ka siltuma plūsmas no sānu virsmām, no augšas un apakšas ir dotas ideālā siltuma kontakta formā:

$$\left. \frac{\partial \bar{V}_0}{\partial z} \right|_{z=0} = Q_{0,2}(x, y, t), \left. \frac{\partial \bar{V}_0}{\partial z} \right|_{z=w} = Q_{0,3}(x, y, t), \quad (5.2.1)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{V}}{\partial z} \right|_{z=0} = Q_2(x, y, t), \left. \frac{\partial \bar{V}}{\partial z} \right|_{z=w} = Q_3(x, y, t).$$

Atkal RN (1) ļauj atbrīvoties no 3-D problēmas un pāriet uz 2-D problēmu. Definējam vidējās integrālās vērtības:

$$V_0(x, y, t) = w^{-1} \int_0^w \bar{V}_0(x, y, z, t) dz, \mathcal{G}_0(y, t) = w^{-1} \int_0^w \Theta_0(y, z, t) dz, \quad (5.2.2)$$

$$V(x, y, t) = w^{-1} \int_0^w \bar{V}(x, y, z, t) dz, \mathcal{G}(x, y, t) = w^{-1} \int_0^w \Theta(x, y, z, t) dz.$$

RN (1) pēc integrēšanas ļauj iegūt 2-D vienādojumu:

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_0}{\partial y^2} + Q_0(x, y, t) = \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial V_0}{\partial t}, \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + Q(x, y, t) = \frac{1}{a^2} \frac{\partial V}{\partial t}. \quad (5.2.3)$$

Šeit

$$Q_0(x, y, t) = \frac{1}{w} (Q_{0,3}(x, y, t) - Q_{0,2}(x, y, t)), \quad Q(x, y, t) = \frac{1}{w} (Q_3(x, y, t) - Q_2(x, y, t)).$$

Diferenciālvienādojumiem (3) pievienojam RN:

$$\left\{ \frac{\partial V_0}{\partial x} + \beta_0^0 [\vartheta_0(y, t) - V_0] \right\} \Big|_{x=0} = 0, \quad y \in (0, 1), \quad (5.2.4)$$

$$\left\{ \frac{\partial V_0}{\partial x} + \beta_0 [V_0 - \vartheta(x, y, t)] \right\} \Big|_{x=\delta} = 0, \quad y \in (b, 1), \quad (5.2.5)$$

$$\frac{\partial V_0}{\partial y} \Big|_{y=0} = Q_{0,0}(x, t), \quad (5.2.6)$$

$$\frac{\partial V_0}{\partial y} \Big|_{y=1} = Q_{0,1}(x, t). \quad (5.2.7)$$

Mēs atkal pieļaujam abām daļām būt no dažāda materiāla, tādēļ formulējam klasiskos saistības nosacījumus:

$$V_0 \Big|_{x=\delta-0} = V \Big|_{x=\delta+0}, \quad (5.2.8)$$

$$\beta \frac{\partial V_0}{\partial x} \Big|_{x=\delta-0} = \beta_0 \frac{\partial V}{\partial x} \Big|_{x=\delta+0}. \quad (5.2.9)$$

RN ribai:

$$\left\{ \frac{\partial V}{\partial x} + \beta [V - \vartheta(x, y, t)] \right\} \Big|_{x=\delta+l} = 0, \quad y \in [0, b] \quad (5.2.10)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} \Big|_{y=0} = Q_1(x, t), \quad (5.2.11)$$

$$\left\{ \frac{\partial V}{\partial y} + \beta [V - \vartheta(x, y, t)] \right\} \Big|_{y=b} = 0, \quad x \in [\delta, \delta + l]. \quad (5.2.12)$$

Sākuma nosacījumi abiem siltuma vienādojumiem (4), (5). Vispārīgajā gadījumā tie ir formā:

$$V_0 \Big|_{t=0} = V_0^0(x, y, z), \quad V \Big|_{t=0} = V^0(x, y, z).$$

Atkal definējam ar (2) vidējās integrālās vērtības:

$$V_0|_{t=0} = U_0^0(x, y), V|_{t=0} = U^0(x, y). \quad (5.2.13)$$

Tāpat kā iepriekš mēs pieņemam, ka ir formulēti visi nosacījumi, kuri nodrošina klasiskā atrisinājuma eksistenci un unitāti problēmai (3)-(13).

Mēs atkal sāksim ar vienkāršāko variantu, kad 2-D problēmai ir apkārtējās vides bezdimensiju temperatūras $\mathcal{G}_0 = 1$ un $\mathcal{G} = 0$. Papildus vienkāršotajām apkārtējās vides temperatūrām pieņemsim, ka nav siltuma plūsmu no ķermeņa sānu virsmām. Šajā gadījumā iegūstam pamatvienādojumus temperatūrām $U_0(x, y, t)$ sienīnai, atbilstoši $U(x, y, t)$ ribai:

$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} = \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial U_0}{\partial t}, \quad (5.2.14)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial U}{\partial t}.$$

RN (6), (7) un (12) ir homogēni:

$$\left. \frac{\partial U_0}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial U_0}{\partial y} \right|_{y=1} = \left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{y=0} = 0. \quad (5.2.15)$$

RN (4), (5), (10) un (11) ir sādi:

$$\left[\frac{\partial U_0}{\partial x} + \beta_0^0 (1 - U_0) \right]_{x=0} = 0, y \in (0, 1), \quad (5.2.16)$$

$$\left(\frac{\partial U_0}{\partial x} + \beta_0 U_0 \right) \Big|_{x=\delta} = 0, y \in (b, 1), \quad (5.2.17)$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \beta U \right) \Big|_{x=\delta+l} = 0, y \in [0, b], \quad (5.2.18)$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \beta U \right) \Big|_{y=b} = 0, x \in [\delta, \delta + l]. \quad (5.2.19)$$

Sākuma nosacījumi (13) un saistības nosacījumi (8), (9) funkcijām $U(x, y, t)$ un $U_0(x, y, t)$ nemainās. Vienādojumu (8), (9) kombinācija kopā ar RN (17) ļauj tos pārrakstīt šādā RN uz sienīņas labās puses:

$$\left(\frac{\partial U_0}{\partial x} + \beta_0 U_0 \right) \Big|_{x=\delta-0} = \beta_0 F_0(\delta, y, t). \quad (5.2.20)$$

Te

$$F_0(x, y, t) = \begin{cases} \left(\frac{1}{\beta} \frac{\partial U}{\partial x} + U \right), & 0 \leq y \leq b, \\ 0 & , b < y \leq 1, \end{cases} \quad x \in [\delta, \delta + l]. \quad (5.2.21)$$

Uzskatot, ka funkcija $F_0(x, y, t)$ ir zināma, mēs atrisinājumu varam izteikt šādi ar Grīna funkcijas palīdzību:

$$U_0(x, y, t) = -\beta_0^0 \int_0^t d\tau \int_0^1 G_0(x, y, 0, \nu, t - \tau) d\nu + \quad (5.2.22)$$

$$\int_0^1 d\zeta \int_0^\delta U_0^0(\zeta, \nu) G_0(x, \zeta, y, \nu, t) d\nu + \beta_0 \int_0^t d\tau \int_0^b F_0(\delta, \nu, \tau) G_0(x, y, \delta, \nu, t - \tau) d\nu.$$

Nemot apzīmējumu (21), mēs atrisinājumu sienīnai pārrakstam šādi:

$$U_0(x, y, t) = \beta_0^0 \int_0^t d\tau \int_0^1 G_0(x, y, 0, \nu, t - \tau) d\nu + \quad (5.2.23)$$

$$\int_0^1 d\zeta \int_0^\delta U_0^0(\zeta, \nu) G_0(x, \zeta, y, \nu, t) d\nu +$$

$$\beta_0 \int_0^t d\tau \int_0^b \left(\frac{1}{\beta} \frac{\partial U}{\partial \zeta} + U \right) \Big|_{\zeta=\delta+0} G_0(x, y, \delta, \nu, t - \tau) d\nu.$$

Grīna funkcija vienādojumos (22), (23) ir šāda (skat [56], [57]):

$$G_0(x, y, \zeta, \nu, t) = G_0^x(x, \zeta, t) \cdot G_0^y(y, \nu, t). \quad (5.2.24)$$

Te

$$G_{0,m}^x(x, \zeta, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varphi_m(x) \varphi_m(\zeta)}{\|\varphi_m\|^2} \exp(-a_0^2 \mu_m^2 t),$$

$$G_{0,n}^y(y, \nu, t) = \exp(-a_0^2 n^2 \pi^2 t) \{ \cos[n\pi(y + \nu)] + \cos[n\pi(y - \nu)] \}.$$

Izteiksmē (24) Grīna funkcijai ir šādas īpašfunkcijas:

$$\varphi_m(x) = \cos(\mu_m x) + \frac{\beta_0^0}{\mu_m} \sin(\mu_m x), \|\varphi_m\|^2 = \frac{\beta_0^0}{2\mu_m^2} + \frac{\beta_0}{2\mu_m^2} \frac{\mu_m^2 + (\beta_0^0)^2}{\mu_m^2 + (\beta_0)^2} + \frac{\delta}{2} \left(1 + \frac{(\beta_0^0)^2}{\mu_m^2} \right).$$

Šeit μ_m ir transcendentā vienādojuma pozitīvās saknes:

$$\operatorname{tg}(\mu_m \delta) = \frac{\mu_m (\beta_0 + \beta_0^0)}{\mu_m^2 - \beta_0 \beta_0^0}.$$

Līdzīgi kā iepriekš, šis atrisinājums (22) nav tūlīt izmantojams, jo nav zināma funkcija $F_0(x, y, t)$, t.i. temperatūra ribā $U(x, y, t)$. Tādēļ tagad pievērsīsimies ribai, pārrakstot (20) kā RN saistības nosacījumus ribas kreisajā pusē:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x} - \beta U \right) \Big|_{x=\delta+0} = \beta F(\delta, y, t). \quad (5.2.25)$$

Te RN labā puse (25) ir šāda:

$$F(x, y, t) = \left(\frac{1}{\beta_0} \frac{\partial U_0}{\partial x} - U_0 \right), x \in [0, \delta], y \in [0, b]. \quad (5.2.26)$$

Tad, līdzīgi sienīnai, atrisinājumu ribai varam uzrakstīt formā:

$$U(x, y, t) = \int_0^b d\xi \int_{\delta}^{\delta+t} U^0(\xi, \eta) G(x, \xi, y, \eta, t) d\eta - \beta \int_0^t d\tau \int_0^b F(\delta, \eta, \tau) G(x, y, \delta, \eta, t - \tau) d\eta. \quad (5.2.27)$$

Šeit

$$G(x, y, \xi, \eta, t) = G^{(x)}(x, \xi, t) \cdot G^{(y)}(y, \eta, t),$$

$$G^{(x)}(x, \xi, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\phi_i(x)\phi_i(\xi)}{\|\phi_i\|^2} \exp(-a^2 \lambda_i^2 t), \quad G^{(y)}(y, \eta) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\psi_j(y, \eta)}{2\|\psi_j\|^2},$$

$$\phi_i(x) = \cos[\lambda_i(x - \delta)] + \frac{\beta}{\lambda_i} \sin[\lambda_i(x - \delta)], \|\phi_i\|^2 = \frac{\beta}{\lambda_i^2} + \frac{l}{2} \left(1 + \frac{\beta^2}{\lambda_i^2}\right),$$

$$G^{(y)}(y, \eta, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j(y, \eta) \exp(-a^2 \kappa_j^2 t),$$

$$\psi_j(y, \eta) = \cos[\kappa_j(y + \eta)] + \cos[\kappa_j(y - \eta)], \|\psi_j\|^2 = \frac{1}{2} \left(b + \frac{\beta}{\kappa_j^2 + \beta^2}\right).$$

Te $\lambda_i(\kappa_j)$ ir transcendentālo vienādojumu pozitīvās saknes:

$$\tan(\lambda_i l) = \frac{2\lambda_i \beta}{\lambda_i^2 - \beta^2}, \tan(\kappa_j b) = \frac{\beta}{\kappa_j}.$$

Izmantojot apzīmējumus (21) un reprezentāciju (27), mēs iegūstam vienādojumu:

$$F_0(x, y, t) = -\int_0^t d\tau \int_0^b F(\delta, \eta, \tau) \Gamma(x, y, \delta, \eta, t - \tau) d\eta, \quad (5.2.28)$$

$$\Gamma(x, y, \xi, \eta, t) = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \beta\right) G(x, y, \xi, \eta, t).$$

No (22) līdzīgi iegūstam reprezentāciju funkcijai $F(\delta, y, t)$:

$$F(\delta, y, t) = \frac{\beta_0^0}{\beta_0} \int_0^t d\tau \int_0^1 \Gamma_0(\delta, y, 0, \nu, t - \tau) d\nu \quad (5.2.29)$$

$$-\int_0^t d\tau \int_0^b F_0(\delta, \nu, \tau) \Gamma_0(\delta, y, \delta, \nu, t - \tau) d\nu.$$

Te, līdzīgi (28), izmantots apzīmējums:

$$\Gamma_0(x, y, \zeta, \nu, t) = \left(\beta_0 - \frac{\partial}{\partial x}\right) G_0(x, y, \zeta, \nu, t). \quad (5.2.30)$$

Atliek reprezentāciju (29) ievietot formulas (28) labajā pusē un iegūstam otrā veida integrālvienādojumu funkcijai $F_0(\delta, y, t)$, kurš ir Voltēra attiecībā pret laiku un Fredholma pret telpas koordināti:

$$F_0(\delta, y, t) = -Y_0(y, t) + \int_0^t d\tau \int_0^b K(y, \nu, t - \tau) F_0(\delta, \nu, \tau) d\nu. \quad (5.2.31)$$

Šeit izmantoti apzīmējumi:

$$K(y, \nu, t) = \int_0^b \Gamma_0(\delta, \eta, \delta, \nu, t) \Gamma(\delta, y, \delta, \eta, t) d\eta, \quad (5.2.32)$$

$$Y_0(y, t) = \frac{\beta_0^0}{\beta_0} \int_0^t d\tau \int_0^b \Gamma(\delta, y, \delta, \eta, t) d\eta \int_0^1 \Gamma_0(\delta, \eta, 0, \nu, t) d\nu.$$

Kad ir atrisināts integrālvienādojums (31), mēs uzreiz iegūstam temperatūras lauku sienīnā no reprezentācijas (22). Pēc tam, reprezentācija (27) dod temperatūras lauku ribā.

Tālāk apskatam vispārējo gadījumu ar nehomogēnu apkārtējās vides temperatūru: diferenciālvienādojums (3) ar RN un sākuma nosacījumiem (4)-(13). Tad atrisinājums sienīnai (22) vietā izskatās šādi:

$$V_0(x, y, t) = \Psi_0(x, y, t) + \beta_0 \int_0^t d\tau \int_0^b F_0(\delta, \nu, \tau) G_0(x, y, \delta, \nu, t - \tau) d\nu. \quad (5.2.33)$$

Šeit visi zināmie locekļi ir šādi:

$$\begin{aligned} \Psi_0(x, y, t) = & \int_0^b d\zeta \int_{\delta}^{\delta+l} U_0^0(\zeta, \nu) G_0(x, \zeta, y, \nu, t) d\nu + \\ & \int_0^t d\tau \int_0^{\delta} d\zeta \int_0^1 Q_0(\zeta, \nu, \tau) G_0(x, y, \zeta, \nu, t - \tau) d\nu + \int_0^t d\tau \int_0^{\delta} Q_{0,1}(\zeta, \tau) G_0(x, y, \zeta, 1, t - \tau) d\zeta \\ & - \int_0^t d\tau \int_0^{\delta} Q_{0,0}(\zeta, \tau) G_0(x, y, \zeta, 0, t - \tau) d\zeta - \\ & \beta_0^0 \int_0^t d\tau \int_0^1 \mathcal{G}_0(\nu, \tau) G_0(x, y, 0, \nu, t - \tau) d\nu + \beta_0 \int_0^t d\tau \int_b^1 \mathcal{G}(\delta, \nu, \tau) G_0(x, y, \delta, \nu, t - \tau) d\nu. \end{aligned}$$

Līdzīgi izskatās atrisinājums ribai:

$$V(x, y, t) = \Psi(x, y, t) - \beta \int_0^t d\tau \int_0^b F(\delta, \eta, \tau) G(x, y, \delta, \eta, t - \tau) d\eta. \quad (5.2.35)$$

Zināmā funkcija $\Psi(x, y, t)$ ir šāda:

$$\begin{aligned}\Psi(x, y, t) = & \int_0^t d\tau \int_{\delta}^{\delta+l} d\xi \int_0^1 Q(\xi, \eta, \tau) G(x, y, \xi, \eta, t - \tau) d\eta - \\ & \int_0^t d\tau \int_{\delta}^{\delta+l} Q_1(\xi, \tau) G(x, y, \xi, 0, t - \tau) d\xi + \beta \int_0^t d\tau \int_0^b \mathcal{G}(\delta + l, \eta, \tau) G(x, y, \delta + l, \eta, t - \tau) d\eta \\ & + \beta \int_0^t d\tau \int_{\delta}^{\delta+l} \mathcal{G}(\xi, b, \tau) G(x, y, \xi, b, t - \tau) d\xi + \int_{\delta}^{\delta+l} d\xi \int_0^1 U^0(\xi, \eta) G(x, y, \xi, \eta, t) d\eta.\end{aligned}$$

Formulu (28) un (29) vietā iegūstam:

$$F(x, y, t) = \tilde{\Psi}_0(x, y, t) - \int_0^t d\tau \int_0^b F_0(\delta, \nu, \tau) \Gamma_0(x, y, \delta, \nu, t - \tau) d\nu, \quad (5.2.36)$$

$$F_0(\delta, y, t) = \tilde{\Psi}(\delta, y, t) - \int_0^t d\tau \int_0^b F(\delta, \eta, \tau) \Gamma(\delta, y, \delta, \eta, t - \tau) d\eta.$$

Izteiksmēs (36) esam izmantojuši apzīmējumus:

$$\tilde{\Psi}_0(x, y, t) = \frac{1}{\beta_0} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \beta_0 \right) \Psi_0(x, y, t), \quad \tilde{\Psi}(x, y, t) = \frac{1}{\beta} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \beta \right) \Psi(x, y, t).$$

Galu galā iegūstam nehomogēnu otrā veida integrālvienādojumu funkcijai $F_0(\delta, y, t)$, kurš ir Voltēra attiecībā pret laiku un Fredholma pret telpas koordināti:

$$F_0(\delta, y, t) = -\Phi_0(y, t) + \int_0^t d\tau \int_0^b K(y, \nu, t - \tau) F_0(\delta, \nu, \tau) d\nu. \quad (5.2.37)$$

Te

$$\Phi_0(y, t) = \tilde{\Psi}(\delta, y, t) - \int_0^t d\tau \int_0^b \tilde{\Psi}_0(\delta, \eta, \tau) \Gamma(\delta, y, \delta, \eta, t - \tau) d\eta.$$

Integrālvienādojumam ir nepārtraukts kodols un tam ir tikai viens atrisinājums [62]. Atrisinot (37), tūlīt no formulas (33) iegūstam temperatūru lauku sienīņā. Tad pirmā formula (36) formula ļauj atrast kombināciju $F(x, \delta, t)$. Tad formula (35) dod temperatūru lauku ribā.

Nobeigsim ar šādām divām piezīmēm. Pirmkārt, nehomogēna apkārtējās vides temperatūra un tās atrisinājums atļauj sajūgt sasaistīto temperatūru lauku ar ārējo hidrodinamiku: šķidrums vai gāzes plūsmu starp divām ribām un pa kreisi no sienīņas. Otrkārt, ja RN (1) būtu trešā tipa RN, tad būtu jārisina pilna 3-D problēma.

3. §. Pilnā 3-D stacionārā problēma

Lietosim tos pašus parametrus kā nodaļas pirmajā paragrāfā. Bezdimensiju temperatūras izpilda Laplasa vienādojumus:

$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_0}{\partial z^2} = 0, \quad (5.3.1)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0. \quad (5.3.2)$$

Vienādojumiem (1) un (2) pievienojam šādus RN:

$$\left\{ \frac{\partial U_0}{\partial x} + \beta_0^0 [1 - U_0] \right\} \Big|_{x=0} = 0, y \in (0, 1), z \in [0, w], \quad (5.3.3)$$

$$\left\{ \frac{\partial U_0}{\partial x} + \beta_0 U_0 \right\} \Big|_{x=\delta} = 0, y \in (b, 1), z \in [0, w], \quad (5.3.4)$$

$$\frac{\partial U_0}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, x \in [0, \delta], z \in [0, w], \quad (5.3.5)$$

$$\frac{\partial U_0}{\partial y} \Big|_{y=1} = 0, x \in [0, \delta], z \in [0, w], \quad (5.3.6)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, x \in [\delta, \delta + l], z \in [0, w], \quad (5.3.7)$$

$$\left\{ \frac{\partial U}{\partial y} + \beta U \right\} \Big|_{y=b} = 0, x \in [\delta, \delta + l], z \in [0, w], \quad (5.3.8)$$

$$\frac{\partial U_0}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, x \in [0, \delta], y \in [0, 1], \quad (5.3.9)$$

$$\left\{ \frac{\partial U_0}{\partial z} + \beta_0 U_0 \right\} \Big|_{z=w} = 0, x \in [0, \delta], y \in [0, 1], \quad (5.3.10)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, x \in [\delta, \delta + l], y \in [0, b], \quad (5.3.11)$$

$$\left\{ \frac{\partial U}{\partial z} + \beta U \right\} \Big|_{z=w} = 0, x \in [\delta, \delta + l], y \in [0, b]. \quad (5.3.12)$$

Uzskatām, ka arī no ribas gala ņemam vērā siltuma atdevi:

$$\left\{ \frac{\partial U}{\partial x} + \beta U \right\} \Big|_{x=\delta+l} = 0, y \in [0, b], z \in [0, w]. \quad (5.3.13)$$

Starp ribu un sienīņu (pie $y \in [0, b], z \in [0, w]$) ir ideāls termisks kontakts – saistības nosacījumi:

$$V_0 \Big|_{x=\delta-0} = V \Big|_{x=\delta+0}, \quad (5.3.14)$$

$$\beta \frac{\partial V_0}{\partial x} \Big|_{x=\delta-0} = \beta_0 \frac{\partial V}{\partial x} \Big|_{x=\delta+0}. \quad (5.3.15)$$

Līdzīgi kā iepriekš, saistības nosacījumus (14), (15) pārrakstam RN (4) Laplasa vienādojumam (1) sienīņai $\{x \in [0, \delta], y \in [0, 1], z \in [0, w]\}$:

$$\left\{ \frac{\partial U_0}{\partial x} + \beta_0 U_0 \right\} \Big|_{x=\delta} = \beta_0 F_0(\delta, y, z), y \in (b, 1), z \in [0, w]. \quad (5.3.16)$$

Te

$$F_0(x, y, z) = \begin{cases} \left(\frac{1}{\beta} \frac{\partial U}{\partial x} + U \right), & 0 \leq y \leq b, \\ 0, & b < y \leq 1, \end{cases} \quad x \in [\delta, \delta + l], z \in [0, w]. \quad (5.3.17)$$

Tāpat RN formā (16) transformējam RN formā (12) Laplasa vienādojumam (2) uz taisnstūra ribas (uz paralelopipeta $\{x \in [\delta, \delta + l], y \in [0, b], z \in [0, w]\}$) kreisās malas $x = \delta$:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x} - \beta U \right) \Big|_{x=\delta+0} = \beta F(\delta, y, z). \quad (5.3.18)$$

Te RN labā puse ir formā:

$$F(x, y, z) = \left(\frac{1}{\beta_0} \frac{\partial U_0}{\partial x} - U_0 \right), \quad x \in [0, \delta], y \in [0, b], z \in [0, w]. \quad (5.3.19)$$

Grīna funkcija $G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)$ paralelopipetam ar RN (7), (8), (11)-(13) un (18) ir šāda [56], [57]:

$$G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = \sum_{i,j,k=1}^{\infty} \frac{g_i(x, \xi) g_j(y, \eta) g_k(z, \zeta)}{\lambda_i^2 + \mu_j^2 + \nu_k^2},$$

$$g_i(x, \xi) = \frac{\varphi_i(x) \varphi_i(\xi)}{\|\varphi_i\|^2}, \|\varphi_i\|^2 = \frac{l}{2} + \frac{\beta}{\lambda_i^2} \left(1 + \frac{l\beta}{2}\right), \quad (5.3.20)$$

$$\varphi_i(x) = \cos(\lambda_i(x - \delta)) + \frac{\beta}{\lambda_i} \sin(\lambda_i(x - \delta)),$$

$$g_j(y, \eta) = \frac{\phi_j(y) \phi_j(\eta)}{\|\phi_j\|^2}, \phi_j(y) = \cos(\mu_j y), \|\phi_j\|^2 = 0.5 \left(b + \frac{\beta}{\mu_j^2 + \beta^2} \right),$$

$$g_k(z, \zeta) = \frac{\psi_k(z) \psi_k(\zeta)}{\|\psi_k\|^2}, \psi_k(z) = \cos(\nu_k z), \|\psi_k\|^2 = 0.5 \left(w + \frac{\beta}{\nu_k^2 + \beta^2} \right).$$

Īpašvērtības λ_i, μ_j, ν_k ir transcendentu vienādojumu pozitīvās saknes:

$$\tan(\lambda_i l) = \frac{2\lambda_i(\beta_0^0 + \beta_0)}{\lambda_i^2 - \beta_0^0 \beta_0}, \tan(\mu_j b) = \frac{\beta}{\mu_j}, \tan(\nu_k w) = \frac{\beta}{\nu_k}.$$

Grīna funkcija sieniņai ar RN (3), (5), (6), (9), (10) un (16) ir tuva (20):

$$G_0(x, y, z, \varsigma, \upsilon, \omicron) = \sum_{l,m,n=1}^{\infty} \frac{g_l^0(x, \varsigma) \cdot g_m^0(y, \upsilon) \cdot g_n^0(z, \omicron)}{[\lambda_l^2 + (\pi m)^2 + \nu_n^2]}, \quad (5.3.21)$$

Viendimensionālās Grīna funkcijas (21) satur šādas izteiksmes īpašfunkcijām:

$$g_l^0(x, \varsigma) = \frac{\varphi_l(x) \varphi_l(\varsigma)}{\|\varphi_l\|^2}, \|\varphi_l\|^2 = \frac{\delta}{2} + \frac{\beta}{\lambda_l^2} \left(1 + \frac{\beta}{2}\right), \varphi_l(x) = \cos(\lambda_l x) + \frac{\beta_0^0}{\lambda_l} \sin(\lambda_l x),$$

$$\tan(\lambda_l l) = \frac{2\lambda_l(\beta_0^0 + \beta_0)}{\lambda_l^2 - \beta_0^0 \beta_0}, g_m^0(y, \upsilon) = \frac{\phi_m(y) \phi_m(\upsilon)}{2}, \phi_m(y) = \cos(\pi m y),$$

$$g_n^0(z, \zeta) = \frac{\psi_n(z) \psi_n(\zeta)}{\|\psi_n\|^2}, \psi_n(z) = \cos(\nu_n z), \|\psi_n\|^2 = \frac{w}{2} + \frac{\beta}{2(\nu_n^2 + \beta^2)}.$$

Īpašvērtības λ_l, ν_n ir transcendentu vienādojumu pozitīvās saknes:

$$tg(\lambda_l \delta) = \frac{\mu_m (\beta_0 + \beta_0^0)}{\lambda_l^2 - \beta_0 \beta_0^0}, \tan(v_n w) = \frac{\beta}{v_n}.$$

Uzskatot, ka funkcija $F_0(x, y, z)$ RN (16) ir zināma, mēs atrisinājumu varam sienīgai izteikt formā:

$$U_0(x, y, z) = \beta_0^0 \int_0^1 d\nu \int_0^w G_0(x, y, z, 0, \nu, o) do$$

$$+ \beta_0 \int_0^b d\nu \int_0^w F_0(\delta, \nu, o) G_0(x, y, z, \delta, \nu, o) do. \quad (5.3.22)$$

Līdzīgi ar zināmu funkciju $F(x, y, z)$ RN (18) atrisinājums ribai var tikt reprezentēts formā:

$$U(x, y, z) = -\beta \int_0^b d\eta \int_0^w F(\delta, \eta, \zeta) G(x, y, z, \delta, \eta, \zeta) d\zeta. \quad (5.3.23)$$

Diferencējot formulu (20), iegūstam:

$$\frac{\partial U_0(x, y, z)}{\partial x} = \beta_0^0 \int_0^1 d\nu \int_0^w \frac{\partial G_0}{\partial x}(x, y, z, 0, \nu, o) do$$

$$+ \beta_0 \int_0^b d\nu \int_0^w F_0(\delta, \nu, o) \frac{\partial G_0}{\partial x}(x, y, z, \delta, \nu, o) do.$$

Formula (22) kopā ar tikko iegūto dod:

$$F(x, y, z) = -\frac{\beta_0^0}{\beta_0} \int_0^1 d\nu \int_0^w \Gamma_0(x, y, z, 0, \nu, o) do$$

$$- \int_0^b d\nu \int_0^w F_0(\delta, \nu, o) \Gamma_0(x, y, z, \delta, \nu, o) do. \quad (5.3.24)$$

Šeit izmantoti apzīmējumi:

$$\Gamma_0(x, y, z, \zeta, \nu, o) = \left(\beta_0 - \frac{\partial}{\partial x} \right) G_0(x, y, z, \zeta, \nu, o). \quad (5.3.25)$$

Tādā pašā veidā no formulas (23) iegūstam reprezentāciju funkcijai $F_0(x, y, z)$:

$$F_0(x, y, z) = -\int_0^b d\eta \int_0^w F(\delta, \eta, \zeta) \Gamma(x, y, z, \delta, \eta, \zeta) d\zeta. \quad (5.3.26)$$

Šeit

$$\Gamma(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \beta \right) G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta). \quad (5.3.27)$$

Ņemot vērā pēdējo integrāli formulā (24), mēs pārrakstām reprezentāciju (26) formā:

$$F_0(\delta, \nu, o) = -\int_0^b d\eta \int_0^w F(\delta, \eta, \zeta) \Gamma(\delta, \nu, o, \delta, \eta, \zeta) d\zeta. \quad (5.3.28)$$

Ievietojam funkciju F_0 no formulas (28) izteiksmē (24):

$$F(x, y, z) = -\frac{\beta_0^0}{\beta_0} \int_0^1 d\nu \int_0^w \Gamma_0(x, y, z, 0, \nu, o) d o \quad (5.3.29)$$

$$+ \int_0^b d\eta \int_0^w \tilde{K}(x, y, z, \eta, \zeta) F(\delta, \eta, \zeta) d\zeta.$$

Te

$$\tilde{K}(x, y, z, \eta, \zeta) = \int_0^b d\nu \int_0^w \Gamma_0(x, y, z, \delta, \nu, o) \Gamma(\delta, \nu, o, \delta, \eta, \zeta) d o.$$

Atliek definēt: $\tilde{K}(\delta, y, z, \eta, \zeta) = K(y, z, \eta, \zeta)$ un pārrakstīt formulu (29) punktam $x = \delta$ formā:

$$F(\delta, y, z) = -Y(y, z) + \int_0^b d\eta \int_0^w K(y, z, \eta, \zeta) F(\delta, \eta, \zeta) d\zeta, Y(y, z) \quad (5.3.30)$$

$$- \frac{\beta_0^0}{\beta_0} \int_0^1 d\nu \int_0^w \Gamma_0(\delta, y, z, 0, \nu, o) d o.$$

Esam ieguvuši nehomogēnu otrā veida Fredholma integrālvienādojumu attiecībā pret funkciju $F(x, y, z)$: pret atrisinājuma un pirmā atvasinājuma x -virzienā lineāru kombināciju, kura ņemta uz robežas $x = \delta$.

Līdzīgi iegūstam otrā veida Fredholma integrālvienādojumu attiecībā pret funkciju $F_0(\delta, y, z)$ ievietojot (24) formulā (26):

$$F_0(\delta, y, z) = -\int_0^b d\eta \int_0^w F(\delta, \eta, \zeta) \Gamma(\delta, y, z, \delta, \eta, \zeta) d\zeta,$$

$$F(\delta, \eta, \zeta) = -\frac{\beta_0^0}{\beta_0} \int_0^1 d\nu \int_0^w \Gamma_0(\delta, \eta, \zeta, 0, \nu, o) do - \int_0^b d\nu \int_0^w F_0(\delta, \nu, o) \Gamma_0(\delta, \eta, \zeta, \delta, \nu, o) do,$$

$$F_0(\delta, y, z) = \frac{\beta_0^0}{\beta_0} \int_0^b d\eta \int_0^w d\zeta \int_0^1 d\nu \int_0^w \Gamma_0(\delta, \eta, \zeta, 0, \nu, o) \Gamma(\delta, y, z, \delta, \eta, \zeta) do +$$

$$\int_0^b d\nu \int_0^w F_0(\delta, \nu, o) do \int_0^b d\eta \int_0^w \Gamma_0(\delta, \eta, \zeta, \delta, \nu, o) \Gamma(\delta, y, z, \delta, \eta, \zeta) d\zeta.$$

Šo vienādojumu var pārrakstīt īsākā formā:

$$F_0(\delta, y, z) = \Upsilon_0(y, z) + \int_0^b d\nu \int_0^w K_0(y, z, \nu, o) F_0(\delta, \nu, o) do. \quad (5.3.31)$$

Šeit

$$\Upsilon_0(y, z) = \frac{\beta_0^0}{\beta_0} \int_0^b d\eta \int_0^w d\zeta \int_0^1 d\nu \int_0^w \Gamma_0(\delta, \eta, \zeta, 0, \nu, o) \Gamma(\delta, y, z, \delta, \eta, \zeta) do,$$

$$K_0(y, z, \eta, \zeta) = \int_0^1 d\nu \int_0^w \Gamma(\delta, y, z, \delta, \eta, \zeta) \Gamma_0(\delta, \eta, \zeta, \delta, \nu, o) do.$$

6. Nodaļa. Daži tērauda rūdīšanas matemātiskie modeļi hiperboliskai siltuma vadīšanas problēmai

Parastā tērauda rūdīšanas tehnoloģija ir saistīta ar tērauda rūdīšanu eļļā. Jau vairāk kā 30 gadus ir attīstīta tehnoloģija par rūdīšanu ūdenī vai polimēru šķīdumos [63]-[65]. Tēmas vadītājs pirmais šāda procesa aprakstam izmantoja ne klasisko siltuma vadīšanas vienādojumu, bet hiperbolisko siltuma vienādojumu [65].

Šajā nodaļā mēs apskatīsim dažus siltuma pārnese procesus hiperboliskajam siltuma vadīšanas vienādojumam. Vispirms tiek apskatīts process viendimensiju tuvinājumā stienītīm ar konservatīvās viduvēšanas metodi, reducējot problēmu uz 2. kārtas parasto diferenciālvienādojumu. Tālāk apskatītas problēmas trīs telpas koordinātēm un ar konservatīvās viduvēšanas metodi tās reducējot uz divu dimensiju un vienas dimensijas problēmām, kas sevī ietver arī siltuma zudumus no sānu virsmām, un tām apskatītas gan tiešās, gan inversās problēmas. Visbeidzot, līdzīgi kā iepriekšējās nodaļās tika apskatītas sistēmas ar ribām, šeit apskatītas problēmas taisnstūra tērauda detaļām. Atkal ir analizētas gan tiešās, gan inversās problēmas. Galvenie šīs nodaļas rezultāti publicēti darbos [66], arī publikācijās [67]- [69].

1.8. Konservatīvās viduvēšanas metodes izmantošana laikā inversai siltuma vadīšanai

1.1. Disertācija vadītāja publikācijā [65] tika piedāvāts matemātiskais modelis tērauda rūdīšanas procesa aprakstam ar hiperbolisko siltuma vadīšanas vienādojumu. Šāda pieeja no matemātiskā skatu punkta analizēta monogrāfijā [70]. Publikācijā [65] atrisinājums tika reducēts uz pirmā veida Fredholma integrālvienādojumu. Tur dota šāda nostādne:

$$\tau_r \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + f(x, t), \quad x \in (0, H), t \in (0, T), H < \infty, \quad (6.1.1)$$

$$\left(-k \frac{\partial U}{\partial x} + hU \right) = h\Theta(t), \quad x = 0, t \in [0, T], \quad (6.1.2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad x = H, \quad (6.1.3)$$

$$U = U^0(x), \quad t = 0, x \in [0, H]. \quad (6.1.4)$$

Šeit k ir siltuma vadīšanas koeficients, c -īpatnējā siltuma ietilpība, h - siltuma apmaiņas koeficients, $a^2 = k / (c\rho)$ un ρ ir tērauda blīvums, τ_r – relaksācijas koeficients. Pilnam problēmas formulējumam nepieciešams vēl viens sākuma nosacījums:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = V_0(x), \quad x \in [0, l], t = 0. \quad (6.1.5)$$

No praktiskā viedokļa šis sākuma nosacījums ir nereāls: nav iespējams izmērīt temperatūras maiņu sākuma momentā un tas ir jāatrod matemātiski. Tā vietā uzdosim eksperimentāli realizējamu nosacījumu, ka beigu momentā ir dots temperatūras sadalījums:

$$U(x, T) = U_T(x), x \in [0, H]. \quad (6.1.6)$$

Darbā [65] tika parādīts, ka problēmas atrisinājums ir uzrakstāms labi zināmā formā siltuma vadīšanas vienādojumam:

$$U(x, t) = \int_0^H U^0(x) G(x, \xi, t) d\xi + \frac{h}{c\rho} \int_0^t \Theta(\tau) G(x, 0, t - \tau) d\tau \\ + \int_0^t d\tau \int_0^H \left[f(\xi, \tau) - \tau_r \frac{\partial^2 U(\xi, \tau)}{\partial \tau^2} \right] G(x, \xi, t - \tau) d\xi.$$

Šeit $G(x, \xi, t)$ ir Grīna funkcija klasiskajam siltuma vadīšanas vienādojumam [55], [56]:

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2\sqrt{a^2\pi t}} \left[e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}} + e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \right] - \frac{4h|a|}{k} e^{-\frac{h}{k} \left[|a(x+\xi) + \frac{ht}{c\rho} \right]} \operatorname{erfc} \left[\frac{x+\xi}{2\sqrt{a^2t}} + \frac{h\sqrt{t}}{c\rho|a|} \right],$$

$$\operatorname{erfc}(z) = \int_z^\infty e^{-\zeta^2} d\zeta.$$

Ar RN (2), (3) un sākuma nosacījumu (4) atrisinājums var tikt uzrakstīts īsākā formā:

$$u(x, t) = G_2(x, t) - \tau_r \int_0^t d\tau \int_0^H \frac{\partial^2 U(\xi, \tau)}{\partial \tau^2} G(x, \xi, t - \tau) d\xi, \quad (6.1.7)$$

Šeit $G_2(x, \xi, t)$ ir atrisinājuma zināmā daļa:

$$G_2(x, t) = \int_0^H u^0(\xi) G(x, \xi, t) d\xi + \frac{h}{c\rho} \int_0^t \Theta(\tau) G(x, 0, t - \tau) d\tau + \int_0^t d\tau \int_0^H f(\xi, \tau) G(x, \xi, t - \tau) d\xi.$$

Tagad ir iespējams izmantot nosacījumu beigu momentā (6) un no (7) iegūt šādu pirmā veida Fredholma integrālvienādojumu otrās kartas atvasinājumam laikā:

$$\int_0^T d\tau \frac{\partial^2 U(\xi, \tau)}{\partial \tau^2} \int_0^H G(x, \xi, T - \tau) d\xi = \frac{G_2(x, T) - U(x)}{\tau_r}. \quad (6.1.8)$$

Šī integrālvienādojuma risināšana ir nekorekta problēma, te iespējams izmantot skaitliskas risināšanas metodes, piemēram, Tihonova regularizācijas metodi []. Pēc tam, skat [8]:

$$V_0(x) = \frac{\partial G_2(x, +0)}{\partial t} - \tau_r \frac{\partial^2 \tilde{U}(\xi, 0)}{\partial \tau^2}. \quad (6.1.9)$$

Šeit $\frac{\partial^2 \tilde{U}(x,t)}{\partial t^2}$ ir tuvinātais integrālvienādojuma (8) regularizētais atrisinājums.

Šai pieejai ir būtisks trūkums: publikācijas metode izmanto ne hiperboliskā vienādojuma (1) Grīna funkciju, bet klasiskā siltuma vadīšanas vienādojuma Grīna funkciju.

1.2. Tagad izmantosim pirmajā nodaļā izmantoto konservatīvās metodi. Definējam vidējo pa argumentu x vērtību:

$$u_0(t) = H^{-1} \int_0^H U(x,t) dx. \quad (6.1.10)$$

No vienādojumu sistēmas (1)-(6) iegūstam šādu robežproblēmu parastajam diferenciālvienādojumam pret funkciju:

$$\tau_r \frac{du_0^2}{dt^2} + \frac{du_0}{dt} + \frac{h}{c_H} u_0 = \frac{h}{c_H} \Theta(t) + f(t), c_H = c\rho H, \quad (6.1.11)$$

$$u_0(0) = u_0^0 = H^{-1} \int_0^H U_0^0(x) dx, \quad (6.1.12)$$

$$u_0(T) = u_T = H^{-1} \int_0^H U_T(x) dx. \quad (6.1.13)$$

Mums jāatrod lielums

$$v_0 = \frac{du_0(0)}{dt}. \quad (6.1.14)$$

Lai atrisinātu šo problēmu, mēs to sadalam divās apakšproblēmās:

$$u_0(t) = \bar{u}(t) + \bar{w}(t). \quad (6.1.15)$$

Pirmā no tām ir ar homogēnu pamatvienādojumu:

$$\tau_r \frac{d\bar{u}}{dt^2} + \frac{d\bar{u}}{dt} + \frac{h}{c_H} \bar{u} = 0 \quad (6.1.16)$$

Kopā ar nehomogēniem sākuma nosacījumiem:

$$\bar{u}(0) = u_0^0, \quad \frac{d\bar{u}(0)}{dt} = v_0. \quad (6.1.17)$$

Tās atrisinājums ir šāds:

$$\bar{u}(t) = \left[u_0^0 \cosh(\beta t) + v_0 \beta^{-1} \sinh(\beta t) \right] e^{-\frac{t}{2\tau_r}}. \quad (6.1.18)$$

$$\text{\u0152eit } \beta = \frac{1}{2\tau_r} \sqrt{1 - \frac{4h\tau_r}{c_H}}. \quad (6.1.19)$$

\u0152is nosac\u012bjums $4h\tau_r < c_H$ ir matem\u0101tiski formul\u0113ts: tas rada ierobe\u017eot\u012bbu iesp\u0113jai aproksim\u0113t atrisin\u0101jumu $U(x, t)$ ar konstanti attiec\u012bb\u0101 pret x .

Otra probl\u0113ma ir ar nehomog\u0113nu pamatvien\u0101dojumu un homog\u0113niem s\u0101kuma nosac\u012bjumiem:

$$\tau_r \frac{d\bar{w}^2}{dt^2} + \frac{d\bar{w}}{dt} + \frac{h}{c_H} \bar{w} = \frac{h}{c_H} \Theta(t) + f(t), \quad (6.1.20)$$

$$\bar{w}(0) = \frac{d\bar{w}(0)}{dt} = 0.$$

Atrisin\u0101jums ir form\u0101:

$$\bar{w}(t) = e^{-\frac{t}{2\tau_r}} \int_0^t q(t-\tau) \Phi(\tau) d\tau,$$

$$\Phi(t) = \tau_r^{-1} \left[\gamma \Theta(t) + f(t) \right] e^{\frac{t}{2\tau_r}}, \gamma = \frac{h}{c_H}.$$

\u0152eit $q(t)$ ir diferenci\u0101lvien\u0101dojuma (16) ar speci\u0101liem s\u0101kuma nosac\u012bjumiem:

$$q(0) = 0, \quad \frac{dq(0)}{dt} = 1,$$

tas ir $q(t) = \beta^{-1} \sinh(\beta t)$.

\u0152eit:

$$\bar{w}(t) = \beta^{-1} e^{-\frac{t}{2\tau_r}} \int_0^t \sinh[\beta(t-\tau)] \Phi(\tau) d\tau. \quad (6.1.21)$$

T\u0101dej\u0101di gal\u012bg\u0101i ieg\u012b\u0161tam probl\u0113mas (11), (12), (14) atrisin\u0101jumu form\u0101:

$$u_0(t) = \left[u_0^0 \cosh(\beta t) + \frac{v_0}{\beta} \sinh(\beta t) \right] e^{-\frac{t}{2\tau_r}} + \quad (6.1.22)$$

$$\frac{e^{-\frac{t}{2\tau_r}}}{\beta\tau_r} \int_0^t \sinh[\beta(t-\tau)] [\gamma\Theta(\tau) + f(\tau)] e^{\frac{\tau}{2\tau_r}} d\tau.$$

Kā pēdējo soli izmantojam papildus informāciju (13), tas ir, zināmo atrisinājumu beigu momentā. Tas ļauj šo informāciju izteikt vienkāršā un noslēgtā formā:

$$v_0 = \frac{\beta u_T e^{\frac{T}{2\tau_r}}}{\sinh(\beta T)} - \beta u_0^0 \coth(\beta T) - \quad (6.1.23)$$

$$\tau_r^{-1} \int_0^T \frac{\sinh(\beta(T-\tau))}{\sinh(\beta T)} [f(\tau) + \gamma\Theta(\tau)] e^{\frac{\tau}{2\tau_r}} d\tau.$$

Mēs varam paaugstināt aproksimācijas kārtu ar konservatīvās viduvēšanas metodi problēmai (11)-(14) līdz otrās pakāpes polinomam, kā rakstos [9], [10]:

$$U(x, t) = u_0(t) + m(t) \left(x - \frac{H}{2} \right) + \frac{e(t)}{kH} \left[\left(x - \frac{H}{2} \right)^2 - \frac{H^2}{12} \right]. \quad (6.1.24)$$

Nezināmos koeficientus $m(t), e(t)$ mēs nosakam no RN (2), (3) un galu galā iegūstam:

$$U(x, t) = u_0(t) + \frac{[\Theta(t) - u_0(t)]}{H \left(H + \frac{3k}{h} \right)} \left(\frac{3}{2} x^2 - 3Hx + H^2 \right).$$

Integrēšana pa intervalu $x \in [0, H]$ pamatvienādojumu dod to pašu parasto diferenciālvienādojumu (11), atšķirība ir tikai divos koeficientos:

$$\tau_r \frac{du_0^2}{dt^2} + \frac{du_0}{dt} + \frac{3kh}{c_H(3k+hH)} u_0 = \frac{3kh}{c_H(3k+hH)} \Theta(t) + f(t). \quad (6.1.25)$$

Papildnosacījumi (12)-(14) paliek tie paši, tātad var izmantot iegūtās formulas (25), (28)-(30), aizvietojot parametrus β, γ ar šādām izteiksmēm:

$$\beta = \frac{1}{2\tau_r} \sqrt{1 - \frac{4h\tau_r}{c_H \left(1 + \frac{hH}{3k} \right)}}, \quad \gamma = \frac{h}{c_H \left(1 + \frac{hH}{3k} \right)}. \quad (6.1.26)$$

Kā bija atzīmēts iepriekš, nosacījums $\frac{4h\tau_r}{c_H} < 1$ parāda šī atrisinājuma ierobežotību, aproksimējot atrisinājumu $U(x,t)$ ar konstanti. Aproksimējot funkciju $U(x,t)$ ar reprezentāciju (24) no (26) mēs iegūstam vājāku ierobežojumu:

$$\frac{4h\tau_r}{c_H} < 1 + \frac{hH}{3k}.$$

Tas, no vienas puses, ir inversās problēmas tuvinātā atrisinājuma ierobežotība. No otras puses, mēs esam ieguvuši korektas problēmas atrisinājumu slēgtā formā. Šis atrisinājums (23) var tikt izmantots kā sākuma tuvinājums pilnajai problēmai vienādojumam (1) intervālā $x \in [0, H]$.

1.3. Konservatīvās viduvēšanas metode ir izmantojama arī nelineāru robežnosacījumu gadījumā. Izmantosim to šī paragrāfa sākumā apskatītajam hiperboliskajam diferenciālvienādojumam (1) ar RN: stienīša kreisais galapunktā ir burbuļošanas RN, bet labajā galapunktā ir Stefana-Bolcmana robežnosacījums:

$$\tau_r \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + f(x,t), x \in (0, H), t \in (0, T), H < \infty, \quad (6.1.27)$$

$$-k \frac{\partial U}{\partial x} + \beta_0 [U - \Theta_0(t)]^m = 0, x = 0, t \in [0, T], \quad (6.1.28)$$

$$k \frac{\partial U}{\partial x} + \varepsilon_1 \sigma [U^4 - \Theta_1^4(t)] = 0, x = H, t \in [0, T],$$

$$U|_{t=0} = U^0(x), x \in [0, H]. \quad (6.1.29)$$

Izmantosim vienkāršāko aproksimāciju problēmai ar aproksimāciju ar konstanti. Gala rezultātā iegūstam šādu parasto diferenciālvienādojumu:

$$\tau_r \frac{du_0^2}{dt^2} + \frac{du_0}{dt} - \frac{\varepsilon_1 \sigma}{c_H} u_0^4 - \beta_0 [U - \Theta_0(t)]^m = -\frac{\varepsilon_1 \sigma}{c_H} \Theta_1^4(t) + f(t). \quad (6.1.30)$$

Šis diferenciālvienādojums ir jārisina kopā ar sākuma nosacījumu un papildus nosacījumu beigu momentā:

$$u_0(0) = u_0^0, \quad (6.1.31)$$

$$u_0(T) = u_T. \quad (6.1.32)$$

Šādu problēmu varam risināt ar skaitlisku metodi. Pēc tam jāatrod plūsma laikā sākuma momentā:

$$v_0 = \frac{du_0(0)}{dt}.$$

Turpmākajos divos paragrāfos attīstītas citas pieejas, risinot hiperbolisko siltuma vienādojumu. Tajās ņemti vērā arī siltuma zudumi no sānu virsmām.

2.8. Modeļi paraleloskaldnim, 1-D un 2-D problēmas

2.1. Mēs apskatīsim 3-D problēmu paralelopipetam ar funkciju $\bar{V}(x, y, z, t)$ un definēsim bezdimensiju temperatūras laukus (šeit V_{in} ir kāda raksturīga vērtība, piemēram, tērauda parauga sākuma temperatūra un Θ_0 ir apkārtējās vides temperatūra, tā varētu būt paraugam garām plūstošā ūdens temperatūra):

$$V(x, y, z, t) = \frac{\bar{V}(x, y, z, t) - \Theta_0}{V_{in} - \Theta_0}.$$

Bezdimensiju temperatūras lauks izpilda hiperbolisko siltuma vienādojumu (telegrafa vienādojumu):

$$\tau_r \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\partial V}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right), x \in (0, l), y \in (0, b), z \in (0, w), t \in (0, T]. \quad (6.2.1)$$

Šeit $a^2 = \frac{k}{c\rho}$, apzīmējumi parastie un τ_r - atkal ir relaksācijas laiks. Dabiski uzskatīt,

ka plaknes $x = 0, y = 0, z = 0$ ir simetrijas plaknes paraugam:

$$\left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad (6.2.2)$$

$$\left. \frac{\partial V}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad (6.2.3)$$

$$\left. \frac{\partial V}{\partial z} \right|_{z=0} = 0. \quad (6.2.4)$$

Uz pārējām parauga skaldnēm ir siltuma apmaiņa ar apkārtējo vidi. Kaut arī metode ir izmantojama arī nehomogēnai videi, mēs vienkāršības dēļ apskatīsim situāciju ar konstantu temperatūru Θ_0 . Šāds nosacījums ļauj apskatīt homogēnus trešā veida robežnosacījumus (šei h ir siltuma apmaiņas koeficients):

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \beta V \right) \Big|_{x=l} = 0, \beta = \frac{h}{k}, \quad (6.2.5)$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial y} + \beta V\right)\Big|_{y=b} = 0, \quad (6.2.6)$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial z} + \beta V\right)\Big|_{z=w} = 0. \quad (6.2.7)$$

Sākuma nosacījumi ir formā:

$$V|_{t=0} = V_0(x, y, z), \quad (6.2.8)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}\Big|_{t=0} = W_0(x, y, z). \quad (6.2.9)$$

Tāpat kā iepriekšējā paragrāfā nosacījums (9) ir nepraktisks. Šī plūsma jānosaka teorētiski. tā vietā uzdosim divus nosacījumus beigu momentā. Dota temperatūra un siltuma plūsma laikā:

$$V|_{t=T} = V_T(x, y, z), \quad (6.2.10)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}\Big|_{t=T} = W_T(x, y, z). \quad (6.2.11)$$

Kā pirmo soli izmantosim labi zināmu transformāciju, kura ļauj:

$$V(x, y, z, t) = \exp\left(-\frac{t}{2\tau_r}\right)U(x, y, z, t). \quad (6.2.12)$$

Tad pamatvienādojums (1) atbrīvojas no pirmā atvasinājuma laikā:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a_\tau^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{4\tau_r^2} U, \quad (6.2.13)$$

$$x \in (0, l), y \in (0, b), z \in (0, w), t \in (0, T], a_\tau^2 = \frac{a^2}{\tau_r}.$$

Sākuma un robežnosacījumi pārveidojas šādi:

$$U|_{t=0} = V_0(x, y, z), \quad (6.2.14)$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial t} \right|_{t=0} = W_0(x, y, z) + \frac{V_0(x, y, z)}{2\tau_r}, \quad (6.2.15)$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial U}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad (6.2.16)$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \beta U \right) \Big|_{x=l} = 0, \quad (6.2.17)$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \beta U \right) \Big|_{y=b} = 0, \quad (6.2.18)$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial z} + \beta U \right) \Big|_{z=w} = 0. \quad (6.2.19)$$

Papildnosacījumi (10), (11) transformējas šādi:

$$U \Big|_{t=T} = \exp\left(\frac{T}{2\tau_r}\right) V_T(x, y, z), \quad (6.2.20)$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial t} \right|_{t=T} = \exp\left(\frac{T}{2\tau_r}\right) \left[W_T(x, y, z) + \frac{V_T(x, y, z)}{2\tau_r} \right]. \quad (6.2.21)$$

Mēs apskatu sāksim plānam y, z – virzienos paraugam (vienas dimensijas modelis):

$$w \ll l, b \ll l. \quad (6.2.22)$$

Tad saskaņā ar konservatīvās viduvēšanas metodi mēs definēsim šādu vidējo vērtību funkciju:

$$u(x, t) = (bw)^{-1} \int_0^b dy \int_0^w dz U(x, y, z, t). \quad (6.2.23)$$

Pieņemot vienkāršāko aproksimāciju y, z – virzienos, bet ņemot vērā saskaņā ar RN (18), (19), iegūstam 1-D diferenciālvienādojumu ar negatīvu avota funkciju:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_\tau^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - cu, \quad x \in (0, l), t \in (0, T], c = \left[\beta \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{w} \right) - \frac{1}{4\tau_r^2} \right]. \quad (6.2.24)$$

Sākuma nosacījumi (14), (15) diferenciālvienādojumam (24) ir šādi:

$$u|_{t=0} = u_0(x), u_0(x) = (bw)^{-1} \int_0^b dy \int_0^w V_0(x, y, z) dz, \quad (6.2.25)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = v_0(x), v_0(x) = w_0(x) + \frac{u_0(x)}{2\tau_r}, w_0(x) = (bw)^{-1} \int_0^b dy \int_0^w W_0(x, y, z) dz. \quad (6.2.26)$$

RN paliek tajā pašā formā:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad (6.2.27)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \beta u \right) \Big|_{x=l} = 0. \quad (6.2.28)$$

Šis vienas dimensijas formulējums ir realitātei tuvāks kā iepriekšējā paragrāfā apskatītie, jo šeit ņemti vērā siltuma zudumi no sānu virsmām $y = b$ un $z = w$.

Problēmas (24)-(28) atrisinājums ir labi zināms [55], [56]:

$$u(x, t) = \int_0^l u_0(\xi) \frac{\partial}{\partial t} G(x, \xi, t) d\xi + \int_0^l v_0(\xi) G(x, \xi, t) d\xi. \quad (6.2.29)$$

Grīna funkcija ir šāda [55]:

$$G(x, \xi, t) = \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\varphi_i(x) \varphi_i(\xi) \sinh\left(t \sqrt{a_\tau^2 \lambda_i^2 + c}\right)}{\|\varphi_i\|^2 \sqrt{a_\tau^2 \lambda_i^2 + c}} + \sum_{i=m}^{\infty} \frac{\varphi_i(x) \varphi_i(\xi) \sin\left(t \sqrt{a_\tau^2 \lambda_i^2 + c}\right)}{\|\varphi_i\|^2 \sqrt{a_\tau^2 \lambda_i^2 + c}}, \quad (6.2.30)$$

$$\varphi_i(x) = \cos(\lambda_i x), \|\varphi_i\|^2 = \frac{l}{2} + \frac{\beta}{2(\lambda_i^2 + \beta^2)}.$$

Naturālais skaitlis m abās summās ir definēts ar nevienādībām:

$$a_\tau^2 \lambda_i^2 + \left[\beta \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{w} \right) - \frac{1}{4\tau_r^2} \right] < 0, i = \overline{1, m-1},$$

$$a_\tau^2 \lambda_i^2 + \left[\beta \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{w} \right) - \frac{1}{4\tau_r^2} \right] > 0, i = \overline{m, \infty}.$$

Īpašavērtības λ_i ir transcendentā vienādojuma pozitīvās saknes: $\lambda \tan(\lambda l) = \beta$.

Kā jau bija teikts iepriekš, mēs apskatām konstantu apkārtējās vides temperatūru. Ja vides temperatūra stienītim apkārt ir $\Theta = \Theta(t)$, tad (28) vietā būs nehomogēns RN:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \beta u \right) \Big|_{x=l} = \beta \mathcal{G}(t), \mathcal{G}(t) = \Theta(t) - \Theta_0. \quad (6.2.31)$$

Tad tiešajai problēmai (24)-(27), (31):

$$u(x, t) = \int_0^l u_0(\xi) \frac{\partial G(x, \xi, t)}{\partial t} d\xi + \int_0^l v_0(\xi) G(x, \xi, t) d\xi + a_r^2 \beta \int_0^t \mathcal{G}(\tau) G(x, l, t - \tau) d\tau. \quad (6.2.32)$$

Kā bija atzīmēts paragrāfa sākumā, sākuma nosacījums (26) nav reāls un lielums $v_0(x)$ jāatrod teorētiski. Atrisinājuma (29) diferencēšana dod:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \int_0^l u_0(\xi) \frac{\partial^2}{\partial t^2} G(x, \xi, t) d\xi + \int_0^l v_0(\xi) \frac{\partial}{\partial t} G(x, \xi, t) d\xi. \quad (6.2.33)$$

Papildus nosacījumi (20) un (21) procesa beigās pret atrisinājumu $u(x, t)$ ir šādi:

$$u \Big|_{t=T} = u_T(x), u_T(x) = \exp\left(\frac{T}{2\tau_r}\right) \tilde{v}_T(x), \quad (6.2.34)$$

$$\tilde{v}_T(x) = (bw)^{-1} \int_0^b dy \int_0^w V_T(x, y, z) dz.$$

Citādi

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=T} = v_T(x), v_T(x) = \exp\left(\frac{T}{2\tau_r}\right) \left[\frac{\tilde{v}_T(x)}{2\tau_r} + w_T(x) \right], \quad (6.2.35)$$

$$w_T(x) = (bw)^{-1} \int_0^b dy \int_0^w W_T(x, y, z) dz.$$

Atrisinājums (29) beigu momentā $t = T$ dod:

$$u_T(x) = \int_0^l u_0(\xi) \frac{\partial}{\partial t} G(x, \xi, t) \Big|_{t=T} d\xi + \int_0^l v_0(\xi) G(x, \xi, T) d\xi,$$

vai:

$$\int_0^l K(x, \xi) v_0(\xi) d\xi = f_0(x). \quad (6.2.36)$$

Šeit

$$f_0(x) = u_T(x) - \int_0^l u_0(\xi) \frac{\partial}{\partial t} G(x, \xi, t) \Big|_{t=T} d\xi, \quad K(x, \xi) = G(x, \xi, T). \quad (6.2.37)$$

Tādejādi mēs atkal esam ieguvuši pirmā veida Fredholma integrālvienādojumu sākotnējās siltuma plūsmas noteikšanai. Integrālvienādojuma (37) risināšanai var izmantot kādu regularizācijas metodi.

Kā tika parādīts iepriekš, pirmais atvasinājums problēmai (24)-(28) ir šāds:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \int_0^l u_0(\xi) \frac{\partial^2}{\partial t^2} G(x, \xi, t) d\xi + \int_0^l v_0(\xi) \frac{\partial}{\partial t} G(x, \xi, t) d\xi. \quad (6.2.38)$$

Ja dots otrs papildus nosacījums, mēs iegūstam šādu pirmā veida Fredholma integrālvienādojumu:

$$\int_0^l \tilde{K}(x, \xi) v_0(\xi) d\xi = g_0(x), \quad \tilde{K}(x, \xi) = \frac{\partial}{\partial t} G(x, \xi, t) \Big|_{t=T}, \quad (6.2.39)$$

$$g_0(x) = v_T(x) - \int_0^l u_0(\xi) \frac{\partial^2}{\partial t^2} G(x, \xi, t) \Big|_{t=T} d\xi.$$

Vēl interesantāka ir situācija, ja doti abi papildus nosacījumi (34), (35). Tad definēsim šādu jaunu laika argumentu ar formulu:

$$\tilde{t} = T - t. \quad (6.2.40)$$

Pamata diferenciālvienādojums (24) paliek nemainīgā formā:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{t}^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - cu, \quad x \in (0, l), \tilde{t} \in (0, T]. \quad (6.2.41)$$

RN (27), (28) nemainās. Abi papildus nosacījumi transformējas par abiem sākuma nosacījumiem vienādojumam (41):

$$u \Big|_{\tilde{t}=0} = u_T(x), \quad (6.2.42)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tilde{t}} \Big|_{\tilde{t}=0} = -v_T(x).$$

Tiešās problēmas (41), (42), (27) un (28) ir līdzīgs ar atrisinājumu (29):

$$u(x, \tilde{t}) = \int_0^l u_T(\xi) \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} G(x, \xi, \tilde{t}) d\xi - \int_0^l v_T(\xi) G(x, \xi, \tilde{t}) d\xi. \quad (6.2.43)$$

Siltuma plūsmai mēs iegūstam izteiksmi, kura līdzīga formulai (38):

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} u(x, \tilde{t}) = \int_0^l u_T(\xi) \frac{\partial^2}{\partial \tilde{t}^2} G(x, \xi, \tilde{t}) d\xi - \int_0^l v_T(\xi) \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} G(x, \xi, \tilde{t}) d\xi. \quad (6.2.44)$$

No formulas (44) tūlīt seko skaista atklāta reprezentācija meklējamai sākuma siltuma plūsmai:

$$v_0(x) = \int_0^l u_T(\xi) \frac{\partial^2}{\partial \tilde{t}^2} G(x, \xi, \tilde{t}) \Big|_{\tilde{t}=T} d\xi - \int_0^l v_T(\xi) \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} G(x, \xi, \tilde{t}) \Big|_{\tilde{t}=T} d\xi. \quad (6.2.45)$$

Mēs šo apakšpunktu nobeigsim ar dažiem apsvērumiem par iegūto šeit atrisinājumu un 1. §. Atrisinājumu no raksta [7]. Galvenā atšķirība ir izmantotajās Grīna funkcijās. Rakstā [7] tika izmantota klasiskā (paraboliskā) Grīna funkcija, bet šeit izmantota Grīna funkcija viļņa (hiperboliskajam) vienādojumam. Jāatceras, ka paraboliskā Grīna funkcija dod nepārtrauktu atrisinājumu, bet hiperboliskā atrisinājuma pārtraukumus pārnes tālāk.

2.2. Tagad iegūsim 2-D problēmas atrisinājumu tādā pašā veidā kā tikko vienas dimensijas problēmai.

Matematiskais formulējums plānam z – virzienā paralelopipetam 2-D modelim ir visai tuvs tam, kā tas tikko tika izdarīts 1-D modelim. Plāns nozīmē: $w \ll l, w \ll b$.

Pirmkārt, mēs definējam integrālo vidējo vērtību z – virzienā:

$$\bar{U}(x, y, t) = w^{-1} \int_0^w U(x, y, z, t) dz.$$

Līdzīgi kā iepriekš iegūstam šādi 2-D pamatdiferenciālvienādojumu:

$$\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2} = a_\tau^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2} \right) - \bar{c} \bar{U}, x \in (0, l), y \in (0, b), t \in (0, T]. \quad (6.2.46)$$

Šeit:

$$\bar{c} = \left(\frac{\beta}{w} - \frac{1}{4\tau_r^2} \right).$$

2-D problēmai ir šādi RN:

$$\left. \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \left. \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \beta \bar{U} \right) \right|_{x=l} = 0, \quad (6.2.47)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \left. \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial y} + \beta \bar{U} \right) \right|_{y=b} = 0.$$

Sākuma nosacījumus vienādojumam (46) pieņemam formā:

$$\bar{U} \Big|_{t=0} = \bar{U}_0(x, y), \quad (6.2.48)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} \right|_{t=0} = \bar{V}_0(x, y).$$

Vienādojumā (48) esam definējuši šādus apzīmējumus:

$$\bar{U}_0(x, y) = w^{-1} \int_0^w V_0(x, y, z) dz,$$

$$\bar{V}_0(x, y) = w^{-1} \int_0^w \left(W_0(x, y, z) + \frac{V_0(x, y, z)}{2\tau_r} \right) dz.$$

2-D problēmas atrisinājums ir līdzīgs ar formulu (29):

$$\bar{U}(x, y, t) = \int_0^l d\xi \int_0^b \bar{V}_0(\xi, \eta) G(x, y, \xi, \eta, t) d\eta \quad (6.2.49)$$

$$+ \int_0^l d\xi \int_0^b \bar{U}_0(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial t} G(x, y, \xi, \eta, t) d\eta.$$

Divu dimensiju Grīna funkcija formulā (49) ir formā [55]:

$$G(x, y, \xi, \eta, t) = \sum_{i,j=1}^{m-1} \frac{\varphi_i(x) \varphi_i(\xi) \phi_j(y) \phi_j(\eta) \sinh\left(t\sqrt{v_{i,j}}\right)}{\|\varphi_i\|^2 \|\phi_j\|^2 \sqrt{v_{i,j}}} \quad (6.2.50)$$

$$+ \sum_{i,j=m}^{\infty} \frac{\varphi_i(x) \varphi_i(\xi) \phi_j(y) \phi_j(\eta) \sin\left(t\sqrt{v_{i,j}}\right)}{\|\varphi_i\|^2 \|\phi_j\|^2 \sqrt{v_{i,j}}}, \quad v_{i,j} = a_\tau^2 (\lambda_i^2 + \mu_j^2) + \bar{c}.$$

Atkal naturālais skaitlis ir dots ar nevienādībām:

$$a_r^2 (\lambda_i^2 + \mu_j^2) + \left(\frac{\beta}{w} - \frac{1}{4\tau_r^2} \right) < 0, i = \overline{1, m-1},$$

$$a_r^2 (\lambda_i^2 + \mu_j^2) + \left(\frac{\beta}{w} - \frac{1}{4\tau_r^2} \right) > 0, i = \overline{m, \infty}.$$

Īpašfunkcijas vienādojumā (50) ir dotas ar transcendentām izteiksmēm:

$$\varphi_i(x) = \sin(\lambda_i x + \varepsilon_i), \varepsilon_i = \arctan\left(\frac{\lambda_i}{l}\right), \|\varphi_i\|^2 = \frac{l}{2} + \frac{\beta}{2(\lambda_i^2 + \beta^2)},$$

$$\phi_j(y) = \sin(\mu_j y + \sigma_j), \sigma_j = \arctan\left(\frac{\mu_j}{b}\right), \|\phi_j\|^2 = \frac{b}{2} + \frac{\beta}{2(\mu_j^2 + \beta^2)}.$$

Īpašfunkcijas λ_i, μ_j ir transcendentu vienādojumu pozitīvās saknes:

$$\lambda \tan(\lambda l) = \beta, \mu \tan(\mu b) = \beta.$$

Papildus nosacījumi beigu momentā (20) un (21) attiecībā pret meklējamo funkciju $\bar{U}(x, y, t)$ ir šādi:

$$\bar{U}|_{t=T} = \bar{U}_T(x, y), \bar{U}_T(x, y) = \exp\left(\frac{T}{2\tau_r}\right) \bar{v}_T(x, y), \quad (6.2.51)$$

$$\bar{v}_T(x, y) = w^{-1} \int_0^w V_T(x, y, z) dz.$$

Attiecīgi:

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} \Big|_{t=T} = \bar{V}_T(x, y), \bar{V}_T(x, y) = \exp\left(\frac{T}{2\tau_r}\right) \left[\frac{\bar{v}_T(x, y)}{2\tau_r} + \bar{w}_T(x, y) \right], \quad (6.2.52)$$

$$\bar{w}_T(x, y) = w^{-1} \int_0^w W_T(x, y, z) dz.$$

Apskatam problēmu ar abiem dotajiem papildus nosacījumiem (51), (52) un no jauna definējam jaunu laiku \tilde{t} ar formulu (40). Jaunie sākuma nosacījumu ir:

$$\bar{U}|_{\tilde{t}=0} = \bar{U}_T(x, y), \frac{\partial \bar{U}}{\partial \tilde{t}} \Big|_{\tilde{t}=0} = -\bar{V}_T(x, y).$$

Jaunās 2-D problēmas atrisinājums attiecībā pret jauno laika argumentu \tilde{t} (taču tā ir inversa pret sākuma laika argumentu t !) ir šāda:

$$\bar{U}(x, y, \tilde{t}) = \int_0^l d\xi \int_0^b \bar{U}_T(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} G(x, y, \xi, \eta, \tilde{t}) d\eta - \int_0^l d\xi \int_0^b \bar{V}_T(\xi, \eta) G(x, y, \xi, \eta, \tilde{t}) d\eta.$$

Reprezentācija pret sākuma siltuma plūsmu:

$$\bar{V}_0(x, y) = \int_0^l d\xi \int_0^b \bar{U}_T(\xi, \eta) \frac{\partial^2}{\partial \tilde{t}^2} G(x, y, \xi, \eta, \tilde{t}) \Big|_{\tilde{t}=T} d\eta \quad (6.2.53)$$

$$- \int_0^l d\xi \int_0^b v_T(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} G(x, y, \xi, \eta, \tilde{t}) \Big|_{\tilde{t}=T} d\eta.$$

Tātad mēs esam ieguvuši atklātu slēgtu analītisku izteiksmi attiecībā pret sākuma plūsmu.

2.3. līdzīgā veidā mēs varam apskatīt pilno 3-D problēmu. Šajā gadījumā galvenais vienādojums (13) satur negatīvu koeficientu c :

$$c = -\frac{1}{4\tau_r^2} < 0.$$

Atrisinājumu iegūstam līdzīgā veidā kā plāksnei, izmantojot Grīna funkciju no [58], [59].

Tātad mēs esam ieguvuši inverso problēmu atrisinājumus hiperboliskam siltuma vienādojumam. Tie ir iegūti vai nu kā pirmā veida Fredholma integrālvienādojumi ar nepārtrauktu kodolu (1-D variantā), vai arī slēgtā analītiskā formā (1-D un 2-D).

Literatūra

1. Buikis, A. Interpolation of integral mean of piecewise smooth function by means of parabolic spline. *Latvian Mathematical Yearbook*, 1985, No. 29, pp. 194-197. (In Russian)
2. Buikis, A. Calculation of coefficients of integral parabolic spline. *Latvian Mathematical Yearbook*, 1986, No. 30, pp. 228-232. (In Russian)
3. Buikis A. *Problems of Mathematical Physics with Discontinuous Coefficients and their Applications*. Riga, 1991, 385 p. (In Russian, unpublished book)
4. Buikis, A. Definition and calculation of a generalized integral parabolic spline. *Proceedings of the Latvian Academy of Sciences*. Section B, 1995, No. 7/8 (576/577), pp.97-100.
5. M.Buikis, A.Buikis. Analytical Approximate Method for Three-Dimensional Transport Processes in Layered Media. *Proceedings of 4th IASME/WSEAS International Conference on HEAT TRANSFER, THERMAL ENGINEERING and ENVIRONMENT*, Elounda, Crete Island, Greece, August 21-23, 2006, p. 232-237.
6. M.Buikis, A.Buikis. System of Models for Transport Processes in Layered Strata. *Proceedings of 5th WSEAS International Conference on SYSTEM SCIENCE and SIMULATION in ENGINEERING*, Tenerife, Canary Islands, Spain, December 16-18, 2006, p. 19-24.
7. M.Buikis, A.Buikis. Modelling 3-D transport processes in anisotropic layered stratum by conservative averaging method. *WSEAS Transactions on Heat and Mass Transfer*, Issue 4, vol.1, 2006, p. 430-437.
8. M.Buikis, A.Buikis. System of various mathematical models for transport processes in layered strata with interlayers. *WSEAS Transaction on Mathematics*, Issue 4, vol.6, 2007, p. 551-558.
9. Buikis, M., Buikis, A. Representation formula for cubic spline with explicit dependence of interpolation function values. *Acta Universitatis Latviensis*, 575. 1992, p. 43-46. (In Russian)
10. Ahlberg, J.H., Nilson, E.N., Walsh, J.L. *The Theory of Splines and their Applications*. Academic Press, New York, 1967. (Krievu izdevums 1971.)
11. de Boor, C. *A Practical Guide to Splines*. Springer – Verlag, 1978.
12. Zavjalovs, J.S., Kvasovs, B.I., Mirošņičenko, V.L. Splainfunkciju metodes. Nauka, 1980. (Krievu val.).
13. Stečkins, S.B., Subotins, J.N. Splaini klasiskajā matemātikā. Nauka, 1976. (Krievu val.).
14. Buikis, A. Aufgabenstellung und Loesung einer Klasse von Problemen der mathematischen Physik mit nichtklassischen Zusatzbedingungen. *Rostock. Math. Kolloq.*, 1984, 25, pp. 53-62. (In German)
15. Buikis, A. Conservative averaging as an approximate method for solution of some direct and inverse heat transfer problems. *Advanced Computational Methods in Heat Transfer, IX*. WIT Press, 2006. p. 311-320.
16. Vilums, R., Buikis, A. Conservative averaging method for partial differential equations with discontinuous coefficients. *WSEAS Transactions on Heat and Mass Transfer*. Vol. 1, Issue 4, 2006, p. 383-390.
17. Samarskii, A.A. Par kādu siltuma pārneses problēmu. *Bulletin of Moscow University*. I, Nr. 3, 85.-101.lpp., II, Nr.6, 119.-129.lpp., 1947. (Krievu val.)
18. Samarskii, A.A., Vabishchevich, P.N. *Computational Heat Transfer. Vol.1, Mathematical Modelling*. John Wiley&Sons Ltd., 1995.
19. Čekāļins A.N. Filtrācijas problēmu skaitlisks risinājums ūdens naftas slāņos. Kazana, Kazanas valsts universitāte, 1981. Lpp. 208. (Krievu val.)
20. Ališajevs M.G., Rozenbergs M.D., Tešļuks E.V. Neizotermiskā filtrācija naftas lauku izstrādri. M., „Nedra”, 1985. Lpp. 271. (Krievu val.)
21. Pudovkins M.A., Volkovs I.K. Matemātiskās siltuma vadīšanas teorijas robežproblēmu lietojumi naftas slāņu temperatūras lauku aprēķiniem to apūdeņošanā. Kazana, Kazanas valsts universitāte, 1978. 188 lpp.

22. Lukners L., Šestakovs V.M. Ģeofiltrācijas modelēšana. Maskava, Nedra, Berlīne, 1976. 407 lpp. (Krievu, vācu val.)
23. А. Буйкис, М. Шмите. Анализ и сравнение решений некоторых задач теплопереноса однородных и трещиноватых нефтяных пластах. Сб. «Динамика многофазных сред», СО АН СССР, ИТПМ, Новосибирск, 1981, с. 119-123.
24. А.Буйкис, М. Шмите. О разностной аппроксимации одной неклассической задачи для уравнения теплопроводности. Латвийский мат. ежегодник,26,1982, с.217-222.
25. А.Буйкис, М. Шмите. Разностные схемы для расчета температурных полей многослойных и трещиноватых пластов.Сб. «Проблемы использования химических средств с целью увеличения нефтеотдачи пластов».7.Респ.межотраслевая научно практическая конференция.Уфа,1983.с. 16-18.
26. А.Буйкис, М.Шмите. Разностные схемы для процессов переноса в многослойных пластах. Сб. «Прикладные задачи математической физики»,Рига,ЛГУ им.П.Стучки,1983,с. 53-66.
27. А. Буйкис, М. Шмите. Экономичные разностные схемы для расчета температурных полей многослойных и трещиноватых нефтяных пластов. Сб. «Динамика многофазных сред»,Новосибирск,ИТПМ, 1983, с.105-109.
28. А.Буйкис, М.Шмите. Численное решение одной конвективно-диффузионной задачи. Латв.мат.ежег.,вып.28, 1984. Рига, «Зинатне», с.10-13.
29. М.Шмите. Численное решение задачи в двухслойной среде с конвекцией и диффузией. Сб. «Моделирование физических процессов в слоистых средах».Рига,ЛГУ им.П.Стучки,1985,с.65-75.
30. А. Буйкис, М.Шмите. Постановки с осреднением для описания процессов переноса в слоистых пластах. В кн. «Прикладные задачи математической физики». ЛГУ, Рига, 1987. С.138-143.
31. М.Шмите. Постановка с осреднением в перемычках для температурного поля многослойного пласта. В кн. «Прикладные задачи математической физики». ЛГУ,Рига,1988,с.112-118.
32. А. Буйкис, М.Шмите. Анализ постановок класса задач геотермодинамики для слоистых пластов. Доклад на 36-ом Горно-металлургическом конгрессе в г. Фрейберге, ГДР. Депонировано в ЛАТИНТИ 13.02.1986.-79 А-Д86,11с.
33. А. Буйкис, М.Шмите, Я. Тхтс. Расчет процесса образования композитного полимерного материала способом пресования при наличии градиента температуры. Сб. «Прикладные задачи матем. физики», Рига, ЛГУ им.П.Стучки, 1985, с.171-180.
34. Buike M, Buikis A. Approximate Solutions of Heat Conduction Problems in Multi- Dimensional Cylinder Type Domain by Conservative Averaging Method, Part 1. *Proceedings of the 5th IASME/WSEAS Int. Conf. on Heat Transfer, Thermal Engineering and Environment*, Vouliagmeni, Athens, August 25 -27, 2007, p. 15 – 20.
35. M. Buike, A. Buikis. Modelling of three – dimensional Transport Processes in Anisotropic layered stratum by conservative averaging method. *WSEAS Transactions on Heat and Mass Transfer, Vol.1, Issue 4, 2006*, p.430-437.
36. A. Buikis, M. Buike. Approximate Solutions of Heat Conduction Problems in Multi-dimensional Cylinder Type Domain by Conservative Averaging Method, Part 2. *Heat Transfer, Thermal Engineering and Environment*. WSEAS Press, 2007, p. 21-26.
37. Ne – Zheng Sun. *Mathematical Modeling of Groundwater Pollution*. Springer, 1995.
38. Kern, D.Q, Kraus, A.D., *Extended Surface Heat Transfer*. – McGraw-Hill Book Company. 1972.
39. Kraus, A.D., *Analysis and Evaluation of Extended Surface Thermal Systems*. Hemisphere Publishing Corporation, 1982.
40. Manzoor, M., *Heat Flow through Extended Surface Heat Exchangers*. Springer-Verlag: Berlin and New York, 1984.

41. Buikis, A., Two-dimensional solution for heat transfer in a regular fin assembly. *Latvian Journal of Physics and Technical Sciences*, No. 5, 1995, pp. 51-58.
42. Buikis, A., Buike, M., Approximate analytical two-dimensional solution for a longitudinal fin of rectangular profile. *Acta Universitatis Latviensis*, vol. 612, 1998, pp. 33-44.
43. Buikis A., Buike M., Closed two-dimensional solution for heat transfer in a periodical system with a fin. *Proceedings of the Latvian Academy of Sciences*. Section B, Vol.52, Nr.5, 1998, pp. 218-222.
44. Buike M., Simulation of steady-state heat process for the rectangular fin-containing system, *Mathematical Modelling and Analysis*, 1999, vol. 4, pp. 33-43.
45. А.Буйкис, М.Буйке, Н.Уланова. Нестационарные решения для теплопереноса в периодических системах с ребрами. *Proceedings of the Ukrainian Congress of Mathematics*, Section 8, 2002, p.15-23.
46. A.Buikis, M.Buike, Sh.Guseinov. Analytical two-dimensional solutions for heat transfer in system with rectangular fin. *Advanced Computational Methods in Heat Transfer VIII*. WIT Press 2004. p.35 – 44.
47. A. Buikis, M. Buike. Some analytical 3-D steady-state solutions for systems with rectangular fin. - *IASME Transactions*, 2005, Vol. 2, Issue 7, p.1112-1119.
48. A. Buikis, M. Buike. Approximate analytical three-dimensional solution for periodical system with rectangular fin, Part 1. – *Proceedings of WSEAS/IASME International Conference on Heat Transfer, Thermal Engineering and Environment*. Corfu Island, Greece, August 20 – 22, 2005, p.382-386.
49. A. Buikis, M. Buike. Approximate analytical three-dimensional solution for periodical system with rectangular fin, Part 2. - *Proceedings of WSEAS/IASME International Conference on Heat Transfer, Thermal Engineering and Environment*. Corfu Island, Greece, August 20 – 22, 2005, p.387-390.
50. A.Buikis, M.Buike. Green's function for heat transfer in system with fin. – *Proceedings of International Conference on Computational and Experimental Engineering and Sciences, December 1-6, 2005, Madras, India*, p.544-549.
51. A. Buikis, M. Buike. Exact 3-D Solution for System with Rectangular Fin, Part 1. *Applied Mathematics in Science and Engineering* WSEAS Press, 2007, p. 64-69.
52. A. Buikis, M. Buike. Exact Transient Solution for System with Rectangular Fins, Part 2. *Applied Mathematics in Science and Engineering* WSEAS Press, 2007, p. 70-75.
53. M. Buike, A. Buikis. Exact Solution for System with Rectangular Fin. *Theoretical and Experimental Aspects of Heat and Mass Transfer*. WSEAS Press, 2008, p. 25-30.
54. A. Buikis, M. Buike, N. Ulanova. Analytically-Numerical Solution for Transient Process in the System with Rectangular Fin. *Theoretical and Experimental Aspects of Heat and Mass Transfer*. WSEAS Press, 2008. p. 31-36.
55. Самарский, А.А., *Теория разностных схем*. М. Наука, 1989.
56. Polyanin, A.D. *Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists*. Chapman&Hall/CRC, 2002. (Russian edition, 2001)
57. Carslaw, H.S., Jaeger, C.J. *Conduction of Heat in Solids*. Oxford, Clarendon Press, 1959.
58. Malik, M.Y., Wood, A.S., Buikis, A., An approximate analytical solution to a familiar conjugate heat transfer problem, *International journal of Pure and Applied Mathematics*, Vol.10, Nr.1, 2004, pp. 91-107.
59. Wood A.S., Tupholme G.E., Bhatti M.I.H., Heggs P.J., Performance indicators for steady-state heat transfer through fin assemblies, *Trans. ASME Journal of Heat Transfer*, **118**, 1996, pp. 310-316.
60. Wood A.S., Tupholme G.E., Bhatti M.I.H., Heggs P.J., Steady-state heat transfer through extended plane surfaces, *Int. Commun. in Heat and Mass Transfer*, **22**, No.1, 1995, pp. 99-109.
61. Lehtinen A., Karvinen, R., Analytical three-dimensional solution for heat sink temperature, *Proceedings of IMECE2004-61062*, 2004, 7 p.

62. Guenther, R.B., Lee, J.W. *Partial Differential Equations of Mathematical Physics and Integral Equations*. Dover Publications, Inc. New York, 1996.
63. Kobasko N.I. *Steel Quenching in Liquid Media under Pressure*. – Kyiv, Naukova Dumka, 1980.
64. Aronov M.A., Kobasko N., Powell J.A. Intensive Quenching of Carburized Steel Parts, *IASME Transactions*, Issue 9, Vol. 2, November 2005, p. 1841-1845.
65. Kobasko N.I. Self-regulated thermal processes during quenching of steels in liquid media. – *International Journal of Microstructure and Materials Properties*, Vol. 1, No 1, 2005, p. 110-125.
66. N.I. Kobasko, A. Buikis. Cooling time calculation for any configuration of steel part. *Proceedings of 9th International Scientific and Technical Congress of Heat-Treaters and Metallographers*. Vol. I, Kharkov, 2008. p. 275-281.
67. Wang L., Zhou X., Wei X. Heat Conduction. Mathematical Models and Analytical Solutions. Springer, Berlin, Heidelberg, 2008.
68. Buikis A., Guseinov Sh. Solution of Reverse Hyperbolic Heat equation for intensive carburized steel quenching. *Proceedings of ICCES'05 (Advances in Computational and Experimental Engineering and Sciences)*. December 1-6, 2005, IIT Madras. p. 741-746.
69. M.Buikis, A.Buikis. Hyperbolic Severe Intensive Steel Quenching Models for Rectangular Samples. *Proceedings of 5th NAUN//WSEAS International Conference on Fluid Mechanics and Heat and Mass Transfer*
70. M. Buikis, A. Buikis. Hyperbolic heat equation as mathematical model for steel quenching of L-shape samples, Part 1 (Direct Problem). *Applied and Computational Mathematics. Proceedings of the 13th WSEAS International Conference on Applied Mathematics (MATH'08)*, Puerto De La Cruz, Tenerife, Canary Islands, Spain, December 15-17, 2008. WSEAS Press, 2008. p. 198-203.
71. A.Buikis, M.Buikis, T. Bobinska. Solution of hyperbolic heat equation reduction to integral equation for a right corner. *Proceedings of conference Differential equations and their applications (DETA'2009)*. Kaunas, 2009, p.14-16.
72. T. Bobinska, M.Buikis, A.Buikis. Hyperbolic Heat Equation as Mathematical Model for Quenching of L-Shape Samples, Part 2 (Inverse Problem). *Proceedings of 5th IASME/WSEAS International Conference on Continuum Mechanics (CM'10)*. WSEAS Press, 2010, p. 21-26.