J. CIZAREVIČS
LATVIJAS ŪNIVERSITĀTES DOCENTS

ANALITISKĀ ĢEOMETRIJA TELPĀ

1 9 3 1.

LATVIJAS ŪNIVERSITĀTES STUDENTU PADOMES
GRĀMATNĪCAS IZDEVUMS

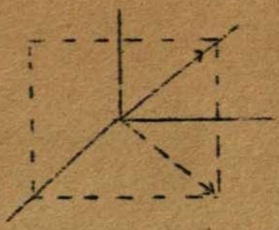
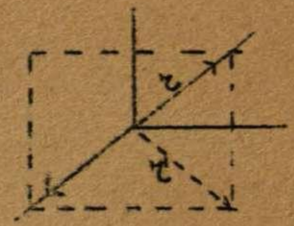
J. C I Z A R E V I Č S
Latvijas Ūniversitātes docents.

A N A L I T I S K Ā   G E O M E T R I J A   T E L P Ā

Lekcijas lasītas Latvijas Ūniversitātes
inženierzinātņu un mēchanikas fakultātēs.

RIGĀ, 1931. GADĀ.
Latvijas Ūniversitātes Studentu Padomes
grāmatnicas izdevums.

Svarīgāko kļūdu saraksts.

7. lp.p. apakšējā zīmējumā  jābūt 

12. " 11 rindā no apakšas ir "Zīmējumā § 6. Taisne..."
jābūt "Zīmējumā § 6 taisne ..."

14. " 5 " " augšas ir "$\cos\alpha_2 = 2\varrho_2$," jābūt "$\cos\alpha_2 = 1\varrho_2$"

14. " 1 " " apakšas ir "cilindra koordinātām", jābūt "polar koordinātām"

15. " 3 " " augšas ir " $tg\psi = \ldots$ ", jābūt "$cotg\psi = \ldots$"

17. " 1 " " apakšas ir "šajā grieztā sistēmā...", jābūt "...šajā jaunā sistēmā..."

33. " 11 " " apakšas ir "Ja D_1 un D_2' ir...", jābūt "Ja D_1 un D_2 ir ..."

45. " 11 " " augšas ir "$\cos\alpha_2 . \cos\beta_2 . \cos\gamma_2 = \ldots$ ", jābūt "$\cos\alpha_2 : \cos\beta_2 : \cos\gamma_2 = \ldots$ "

53. " 16 " " augšas ir " ...sauc par homogenu attiecībā..." jābūt "...sauc par homogeniem attiecībā..."

53. " 22 " " augšas ir "...ar radiusu a un centru ...." jābūt "...ar radiusu r un centru ..... "

62. " 23 " " augšas ir "....nol-ma (7) ...," jābūt "...nol-mā (7)."

62. " 25 " " " ir "... pieņēmuma S = 0 dēļ ja x = 0,..." jābūt "...pieņēmuma S = 0 dēļ x = 0,..."

62. " 5 " " apakšas ir "...Pieskaru plāknes...", jābūt "..Pie-skara plāknes..."

68. " 24 " " augšas formulā (29) 4. un 5. locekļiem jābūt: "$\ldots + 2a_{12}x'y' + 2a_{13}x'z' + \ldots$ "

68. " 30 " " augšas ir " ...locekļi ar x' pirmā kāpē ..." jābūt "...locekļi ar x'' pirmā kāpē..."

68. " 12 " " apakšas ir " $x = 0$ .....(31) " ; jābūt "$x = 0$ "

71. " 9 " " apakšas ir " Ja $a_{11} > 0$, $a_{32} > 0$, ... " jābūt "Ja $a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$, ..."

72. " 4 " " apakšas pierakstīt: "Sekojošā zīmējumā:" rindas galā.

76 " 5 " " pierakstīt "virzienā:" pēc vārdiem " ...ass ir y ass."

S a t u r s .

----- oOo -----

ANALITISKĀ ĢEOMETRIJA TELPĀ.

Virziens, leņķi, projekcijas.

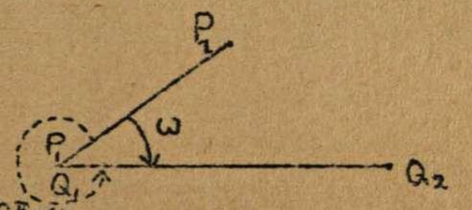
1. Virzienu telpā dod ar taisni vai ar taisnes gabalu. Virziena pilnīgai raksturošanai vajadzīga arī virziena puse, kuŗa uz taisnes gabala iet gabala galu punktu apzīmējošo burtu vai skaitļu kārtībā.

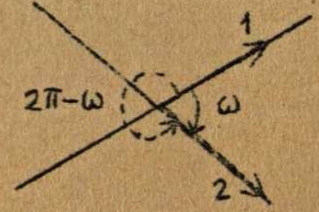
Piemēram A.————B vai arī 1————2. Šie gabali dod virzienus ar noteiktu virziena pusi uz gabala, no A uz B pusi un no 1 uz 2 pusi. Uz taisnes virziena puse tiek dota ar bultu,

Ja virziena pusi, no A uz B, no 1 uz 2 vai arī ar bultu norādīto, uzskatam par +, tad virziena puse no B uz A vai 2 uz 1 vai arī pretēji bultai, uzskatāma par -. Paralelām taisnēm vai arī taišņu gabaliem ir tas pats virziens.

Par leņķi starp diviem gabaliem vai arī taisnēm, neatkarīgi no tam, vai notiek krustošanās vai šķērsošanās, uzskata leņķi, kuŗu veido taisnes, šiem gabaliem vai taisnēm paralelas caur kādu, pēc patikas pieņemtu, punktu.

Šis leņķis ω ņemams no gabala P_1P_2 uz Q_1Q_2 vai no taisnes 1 uz taisni 2.



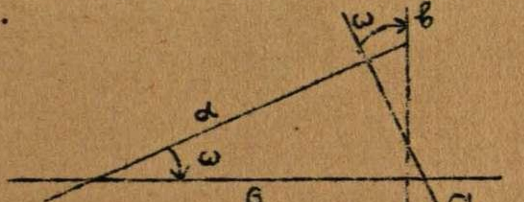


Ievedot kā leņķa funkciju cos funkciju, kā leņķi starp taisnēm varam uzskatīt ω, vai arī $2\pi - \omega$, jo arvienu

$$\cos\omega = \cos(2\pi - \omega)$$

Šeit jāievēro, ka pie leņķa noteikšanas starp taisnēm 1 un 2, jāņem no krustpunkta stiprāk apzīmētie pusstari.

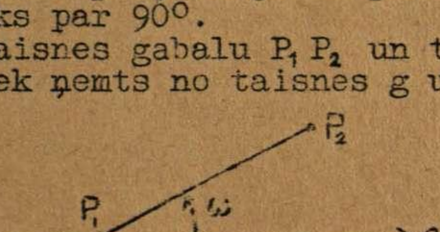
Leņķis starp divām plāknēm tiek noteikts ar leņķi, kuŗu veido šo plākņu krustošanās taisnes α un β ar uz dotām plāknēm stateniskū plākni.



Šis leņķis tiek ņemts no α uz β un dabūjams arī kā leņķis starp stateņiem uz abām plāknēm, mērojot leņķi ω abos gadījumos tai pašā virzienā.

Leņķis starp taisni g un plākni ε tiek veidots starp taisni g un viņas statenisku projekciju uz plāknes ε. Tiek ņemts tas leņķis, kuŗš mazāks par 90°.

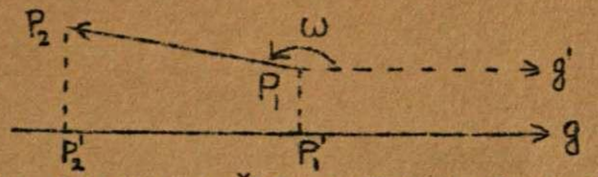
Leņķis starp taisnes gabalu P_1P_2 un taisni g, kuŗai dota virziena puse, tiek ņemts no taisnes g uz gabalu P_1P_2



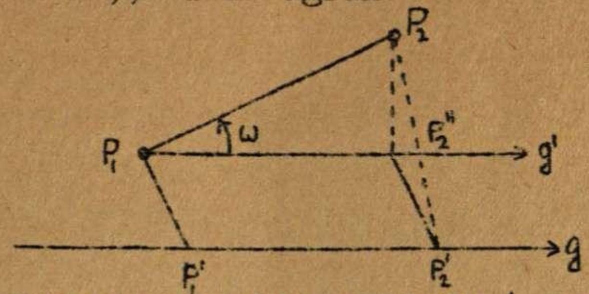
Visos apskatītos gadījumos kā leņķa funkcija tiek lietota cos funkcija.

2. Taisnes gabala $P_1 P_2$ projekcija $P_1'P_2'$ uz virzienotas taisnes g dabūjāma

$$P_1'P_2' = |P_1 P_2| \cos \omega \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$



Ja gabals $P_1 P_2$ un taisne g šķērsojās, tad caur P_1 vedam taisni $g' \parallel g$ un noteicam leņķi ω kā agrāk.

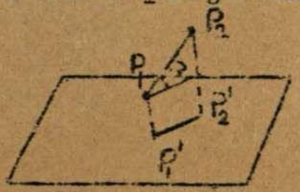


$P_1 P_2''$ ir $P_1 P_2$ projekcija uz g'. Vedam $P_1 P_1' \perp g$ un $P_2''P_2'$ arī $\perp g$, tad

$$P_1'P_2' = P_1 P_2'' = |P_1 P_2| \cos \omega \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1^a)$$

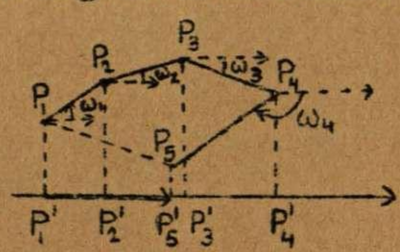
Gabala projekcija dabū + vai - zīmi atkarībā no cos ω zīmes, pirmā gadijumā projekcija tek vienā virzienā ar g un otrā gadijumā pretējā.

Gabala projekcijai uz plāknes nav virziena puses.



$$P_1'P_2' = |P_1 P_2 \cos \omega| \; (\omega \text{ arvien} < 90^\circ)$$

Poligona projekciju uz virzienotas taisnes g dabūjam kā poligona malu projekciju algebrāisku summu.



$$P_1'P_5' = P_1'P_2' + P_2'P_3' + P_3'P_4' + P_4'P_5' = P_1 P_2 \cos\omega_1 + P_2 P_3 \cos\omega_2 +$$

$$+ P_3 P_4 \cos\omega_3 + P_4 P_5 \cos\omega_4 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Izteiksme derīga arī tad, kad poligona malas šķērsojās ar g.

Kā redzams, ja poligons slēgts, tad viņa projekcija uz taisnes g ir 0.

$P_5 P_1$ ir poligona slēdzoša mala un redzams, ka poligona slēdzošas malas $P_5 P_1$ projekcija uz taisnes g nolīdzinās poligona $P_1 P_5$ projekcijai uz g.

3. Plāknē E atrodošā trijstūra laukums

$$\Delta = \frac{1}{2} AB.h$$

Projecējot C uz E' dabūjam C', h' ir Δ projekcijas Δ' augstums, tā tad

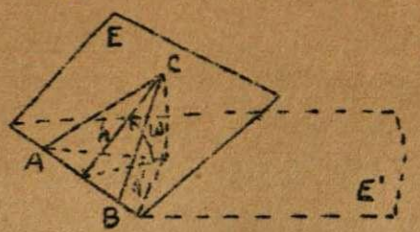
$$\Delta' = \frac{1}{2} AB.h'$$

Leņķis ω starp h' un h ir arī leņķis starp E' un E,un

$$h' = h \cos\omega$$

tādēļ

$$\Delta' = \frac{1}{2} AB.h' = \frac{1}{2} AB.h \cos\omega = \Delta\cos\omega \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$



Ja projecētu Δ uz kādas plāknes E",kuŗa $\parallel$ E', tad

$$\Delta'' = \Delta'$$

Ja trijstūris Δ atrodās plāknē E, pēc patikas kādā vietā, tad vedot BD $\parallel$ $\varepsilon\varepsilon$ sadalam Δ divos trijstūros Δ_1 un Δ_2

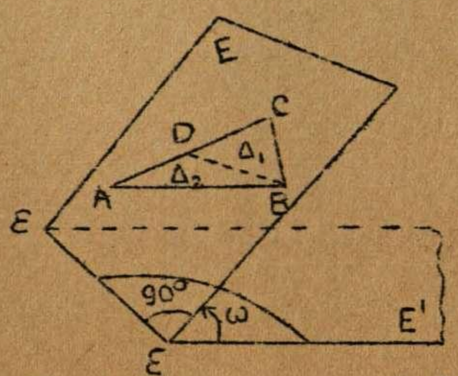
$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$$

un ja ω leņķis starp E' un E, tad saskaņā ar augšējo

$$\Delta_1' = \Delta_1 \cos\omega \quad \text{un} \quad \Delta_2' = \Delta_2 \cos\omega$$

$$\Delta' = \Delta_1' + \Delta_2' = \Delta_1 \cos\omega + \Delta_2 \cos\omega$$

$$\Delta' = \Delta\cos\omega$$



Ja plāknē E atrodās ar taisnēm ierobežots laukums F, tad to varam sadalīt trijstūros $F_1, F_2, F_3 \ldots F_n$ un pamatojoties uz augšējo,dabūjam laukuma F projekciju uz plāknes E'

$$F_1' = F_1 \cos\alpha$$

$$F_2' = F_2 \cos\alpha$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$F_n' = F_n \cos\omega$$

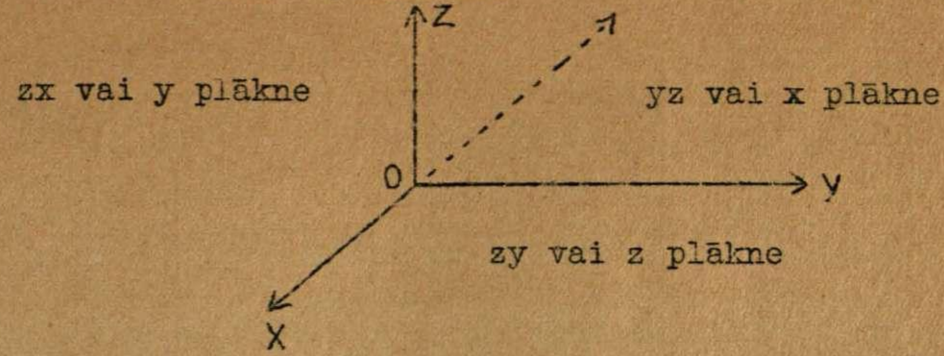
$$F_1' + F_2' + \ldots + F_n' = F' = (F_1 + F_2 + \ldots + F_n)\cos\omega$$

$$F' = F \cos\omega \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Plāknē E atrodošā laukuma F projekciju F' uz plāknes E' dabūjam, reizinot origināllaukumu F ar starp plāknēm veidotā leņķa ω kosinusu.

4. Lai noteiktu punkta vietu telpā, lietosim trīs savstarpēji stāteniski stāvošas plāknes. Šīs plāknes krustojās trijās taisnēs. Minētās plāknes sauc par koordinātu plāknēm un viņu krustošanās taisnes par koordinātu asīm, kuŗas arī savstarpēji stateniskas. Parasti pieņem, ka viena no asīm verti-

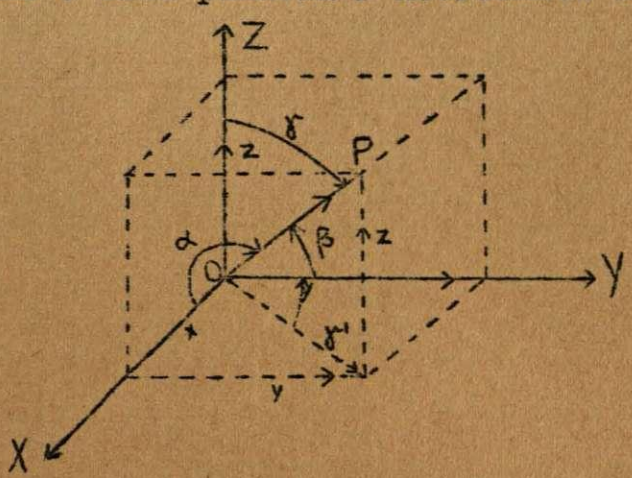
kala un to tad sauc par Z asi. Pārējās divas asis tad ir horicontālas un ja pieņemam, ka z un y asis atrodās zīmējuma plāknē, tad x ase stāv $\perp$ uz zīmējuma plāknes. z ases virziena pusi pieņemam uz augšu, y ases virziena pusi par labi un x ases uz priekšu ārā no zīmējuma plāksnes.



Asu krustpunktu O sauc par koordinātu sākuma punktu.
Plākni caur xy asīm sauc par xy vai arī z plākni
" " yz " " " yz " " x "
" " zx " " " zx " " y "

Augšējā kārtībā pieņemtu koordinātu asu sistēmu sauc par labās skrūves sistēmu, jo ja iedomātos uz z ases labo skrūvi, tad šādu skrūvi ieskrūvējot būtu jāgriež x ase uz y ases pusi un z ase tad dabūtu kustību bultas virzienā. Kreisās skrūves koordinātu sistēmu dabūtu, ja x ases virziena pusi pieņemtu punktotā virzienā. Apskatīto koordinātu sistēmu sauc par Dekarta taisnleņķa koordinātu sistēmu.

5. Par punkta P taisnleņķa koordinātām sauc ceļus no koordinātu sākuma O līdz punktam P koordinātu asu virzienos.



OP, ceļu no O līdz P sauc par radiusu vektoru. Kā redzams, punkta P koordinātas izteic arī punkta P attālumus no attiecīgām koordinātu plāknēm un tāpat arī ieskatams, ka:

punkta P taisnleņķa koordinātas x,y,z ir radiusa vektora projekcijas uz attiecīgām koordinātu asēm.

Koordinātu plāknes dala telpu astoņās daļās, oktantos, kuŗi atšķirās ar viņu punktu koordinātu zīmēm.

Pirmā oktantā, piemēram, visām koordinātām ir + zīmes. Leņķus no koordinātu asu pozitīvā virziena līdz virzienotai taisnei r, sauc par radiusa vektora virziena leņķiem ar koordinātu asēm, pie kam arvienu apzīmēsim:

r virziena leņķi ar x asi ar α
" " " " y " " β
" " " " z " " γ

cos α, cos β, cos γ sauc par attiecīgiem virziena koeficientiem.

Kā redzams no zīmējuma

$$x = r \cos\alpha \ , \ y = r \cos\beta \ , \ z = r \cos\gamma \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

vai arī

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} \ , \ \cos\beta = \frac{y}{r} \ , \ \cos\gamma = \frac{z}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

Redzams, ka

$$r^2 = r'^2 + z^2$$

$$r'^2 = x^2 + y^2$$

Seko

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$ (r arvienu dabū + zīmi)

No (5) un (7) seko

$$r^2 = (r\cos\alpha)^2 + (r\cos\beta)^2 + (r\cos\gamma)^2$$

Nodalot ar r^2 dabūjam virzienu formulu

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(8)$$

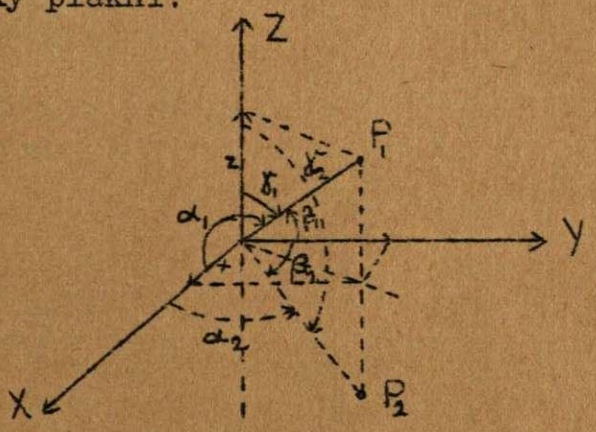
Beidzamā formula rāda, ka virziens telpā noteikts, dodot divus skaitļu dātus un tādēļ taisne caur dotu punktu ir noteikta ar diviem skaitļu dātiem.

Ja telpā dota taisne g, vai gabals $P_1 P_2$, tad attiecīgus virzienus dabūjam, vedot caur koordinātu sākumu 0 taisni $\parallel$ g vai arī $\parallel P_1 P_2$. Šī taisne dod attiecīgus virziena leņķus α, β, γ un arī attiecīgos virziena koeficientus $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$.

Ja zināmi kāda virziena divi virziena koeficienti $\cos\alpha$ un $\cos\beta$, tad

$$\cos\gamma = \pm\sqrt{1 - (\cos^2\alpha + \cos^2\beta)}$$

Trešais virziena koeficients $\cos\gamma$ ir divvērtīgs un tādēļ arī virziena leņķis divvērtīgs. Ģeometriski tas nozīmē, ka punkti: P_2 ar radiusu vektoru r_2 un virziena leņķiem $\alpha_2\ \beta_2\ \gamma_2$ un punkts ar radiusu vektoru r_1, virziena leņķiem $\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1$, stāv simmetriski pret xy plākni.



ja $\quad \alpha_1 = \alpha_2 \ , \ \beta_1 = \beta_2 \ , \ \text{tad } \gamma_2 = 180^\circ - \gamma_1$

un $\quad \cos\gamma_2 = -\cos\gamma_1$

Piemērs.

$$P = 2 \mid 3 \mid -1$$

dabūt r, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ un α, β, γ

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}$$

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{14}} = 0.534 \; ; \; \cos\beta = \frac{3}{\sqrt{14}} = 0.802 \; ; \; \cos\gamma = \frac{-1}{\sqrt{14}} = -0.267$$

$$\alpha = 57^\circ 40' \; ; \; \beta = 36^\circ 40' \; ; \; \gamma = 105^\circ 30'$$

Piemērs.

Doti $r = 5$, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$.

Atrast

$\cos\gamma$ un radiusa vektora gala punkta koordinātas $x|y|z$

$$\cos\alpha = \frac{1}{2} \; ; \; \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \; ; \; \cos\gamma = \pm\sqrt{1 - (\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2})} = \pm \frac{1}{2}$$

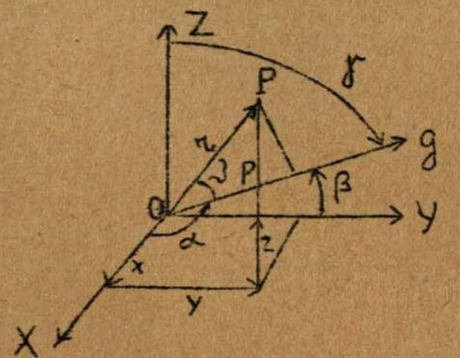
$$x = r\cos\alpha = 5\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{2} \; ; \; y = r\cos\beta = 5\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \; ;$$

$$z = r\cos\gamma = 5(\pm\tfrac{1}{2}) = \pm\frac{5}{2}$$

Bezgalīgi tālu punktu U dod ar tā virzienu, rakstot U koordinātas

$$U = u\cos\alpha \mid u\cos\beta \mid u\cos\gamma \; ; \; u = \infty \quad \text{.........(9)}$$

6. Ja radius vektors r dots ar gala punkta koordinātām $P = x|y|z$ un dota taisne g caur koordinātu sākumu, ar leņķiem α,β,γ, tad r projekciju uz g dabūjam ievērojot, ka poligona x, y, z slēdzošā mala ir r un tādēļ poligona x, y, z projekcija uz g ir tik pat liela, kā slēdzošās malas r projekcija p.



x projekcija uz $g = x\cos\alpha$

y " " $g = y\cos\beta$

z " " $g = z\cos\gamma$

$p = r$ projekcija uz $g = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma$ ....(10)

7. Ja telpā atrodās gabals R ar projekcijām uz koordinātu asīm X,Y,Z (projekcijām ir zīmes), tad pārceļot koordinātu sistēmu paralēli sev uz gabala sākuma punktu redzams, ka varam pielietot agrākās formulas priekš radiusa vektora, liekot R vietā R un x,y,z vietā X,Y,Z, un tā tad

$$\left.\begin{aligned} R &= \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \\ \cos\alpha &= \frac{X}{R} \; ; \; \cos\beta = \frac{Y}{R} \; ; \; \cos\gamma = \frac{Z}{R} \end{aligned}\right\} \quad \text{.....(11)}$$

Ja dots gabala garums R un viņa virzieņi α,β,γ, tad

$$X = R\cos\alpha\ ,\ Y = R\cos\beta\ ,\ Z = R\cos\gamma$$

Ja dotas gabalu noteicošo punktu P_1 un P_2 koordinātas

$$P_1 = x_1|y_1|z_1 \quad \text{un} \quad P_2 = x_2|y_2|z_2$$

tad

$$X = x_2 - x_1\ ,\ Y = y_2 - y_1\ ,\ Z = z_2 - z_1$$

un

$$R = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$$

Redzams, ka:

radiusa vektora vai gabala projekcijas proporcionālas viņu virzienu koeficientiem.

8. Ja dota virzienu koeficientu attiecība

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = a : b : c$$

tad pievienojot še virziena formulu

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

varam dabūt $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$. No augšējās attiecības seko

$$\cos\alpha = \rho a$$
$$\cos\beta = \rho b$$
$$\cos\gamma = \rho c$$

Ievietojot vērtības virziena formulā

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 = \rho^2(a^2+b^2+c^2)$$

$$\rho = \frac{1}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

tad

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \rho.a = \frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ \cos\beta &= \rho.b = \frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ \cos\gamma &= \rho.c = \frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots(12)$$

Šinīs izteiksmēs jāņem vai nu visas virsējās, vai visas apakšējās zīmes. Dabūjam divus virzienus, kuŗi atrodās uz vienas taisnes, bet atšķirās ar virziena pusi.

Tā tad:

no dotām virzienu koeficientu attiecībām dabūjam virzienu, bet ne virziena pusi.

9.

Ja gabals P_1P_2 telpā tiek ar punktu P dalīts attiecībā λ, tad no zīmējuma redzams, ka gabala P_1P_2 projekcija uz xy plāknes tiek dalīta ar C arī attiecībā λ un tādēļ arī gabali $P_1'P_2'$, $P_1''P_2''$ un $P'''P_2$ arī tiek dalīti ar P', P'', P''' attiecībā λ.

Tā kā doti $P_1 = x_1 | y_1 | z_1$ un $P_2 = x_2 | y_2 | z_2$

tad apzīmējot $P = x | y | z$

dabūjam

$$\lambda = \frac{x_1 - x}{x_2 - x} = \frac{y_1 - y}{y_2 - y} = \frac{z_1 - z}{z_2 - z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(13)$$

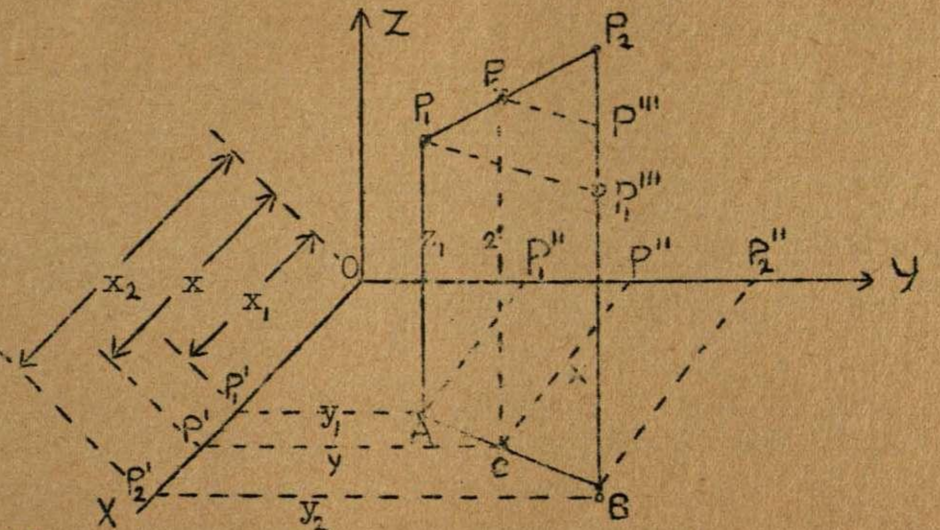
un

$$x = \frac{\lambda x_2 - x_1}{\lambda - 1} \;;\; y = \frac{\lambda y_2 - y_1}{\lambda - 1} \;;\; z = \frac{\lambda z_2 - z_1}{\lambda - 1} \quad \ldots.(14)$$

Gabala $P_1 P_2$ viduspunkta koordinātas dabūjam

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \;;\; y = \frac{y_2 + y_1}{2} \;;\; z = \frac{z_2 + z_1}{2} \quad \ldots\ldots(15)$$

~~Piemē~~



Piemērs.

Pie kāda noteikuma radius vektors OP_3 krusto gabalu $P_1 P_2$? Krustpunkts P atrodās uz gabala $P_1 P_2$ un uz radiusa vektora OP_3. Punkts P dala gabalu attiecībā λ un tādēļ viņa koordinātas ir

$$x = \frac{\lambda x_2 - x_1}{\lambda - 1} \;;\; y = \frac{\lambda y_2 - y_1}{\lambda - 1} \;;\; z = \frac{\lambda z_2 - z_1}{\lambda - 1} \quad \ldots\ldots\ldots(\alpha)$$

Še λ vēl nenoteikts. Punktam P, kā atrodošam uz radiusa vektora OP_3 piekārtotas koordinātas

$$x = \rho x_3 \;,\; y = \rho y_3 \;,\; z = \rho z_3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\beta)$$

Še ρ vēl nenoteikts. No nolīdzinājumu grupām (α) un (β) seko

$$\lambda x_2 - x_1 = \rho(\lambda - 1)x_3 \;;\; \lambda y_2 - y_1 = \rho(\lambda - 1)y_3 \;;\; \lambda z_2 - z_1 = \rho(\lambda - 1)z_3$$

Uzskatot $\rho(\lambda - 1)$ par pirmo nezināmo un λ par otro, zināms, ka šie trīs nehomogenie nolīdzinājumi ar diviem nezināmiem var kopēji pastāvēt, ja nolīdzinājumu koeficientu determinants

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

Augšējais determinants dod meklēto noteikumu.

10. Par plāknes virziena leņķiem sauc leņķus, kuŗus tā veido ar koordinātu plāknēm. Šo virziena leņķu kosinusus sauc par plāknes virzienu faktoriem. Agrāk jau norādīts, ka leņķis starp divām plāknēm dabūjams arī kā leņķis starp šo plākņu

stāteņiem un tādēļ plāknes E virziena leņķis ar (xy) vai z plākni dabūjams kā leņķis starp z asi un stāteni uz plāknes E u.t.t. Seko:

Taisnei un uz viņai stateniskai plāknei ir tie paši virziena leņķi un tādēļ arī tie paši virziena koeficienti.

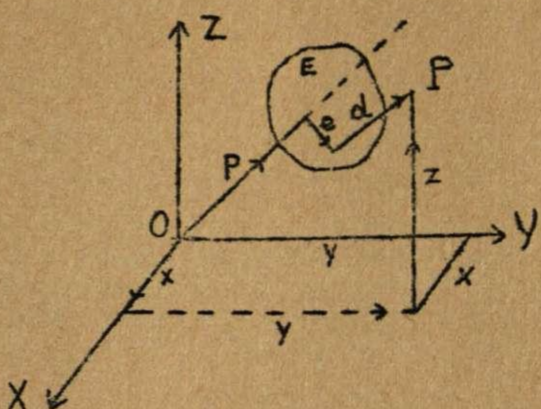
Ja runā par plāknes E virzienu, tad domāts par tās taisnes virzienu, kuŗa stāv stateniski uz E.

Ievērojot augšējo redzams, ka arī plāknes virziena leņķi α, β, γ izpilda formulu

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Piemērs.

Plākne dota ar attālumu p no koordinātu sākuma 0 un virziena leņķiem α, β, γ. Dabūt plāknes attālumu d no punkta $P = x|y|z$.



Poligonam p,e,d ir tā pati slēdzošā taisne kā poligonam (x,y,z). Projecējot poligonu p,e,d uz virziena p,dabūjam

$$p + o + d$$

Projecējot poligonu (x,y,z) uz p,dabūjam

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma$$

Šīm projekcijām vajaga nolīdzināties un tādēļ

$$p + o + d = x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma$$

tā tad

$$d = x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p \quad \ldots\ldots.(16)$$

11. Leņķi starp divām taisnēm g_1 un g_2,kuŗas dotas ar virziena leņķiem $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ un $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$,dabūjam izlietojot formulu (10).Zīmējumā § 6. Taisne g_1 pieņemta r virzienā un taisne g_2 taisnes g virzienā

$$p = x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma \ldots\ldots.(10)$$

Šinī formulā $p = r \cos\vartheta$ un tādēļ

$$r \cos\vartheta = x \cos\alpha_2 + y \cos\beta_2 + z \cos\gamma_2$$

jo taisnes g_2 virziena leņķus apzīmējam ar $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$.
Seko

$$\cos\vartheta = \frac{x}{r}\cos\alpha_2 + \frac{y}{r}\cos\beta_2 + \frac{z}{r}\cos\gamma_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(m)$$

Apzīmējot radiusa vektora r virziena leņķus ar $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$,redzams, ka

$$\frac{x}{r} = \cos\alpha_1 \ , \quad \frac{y}{r} = \cos\beta_1 \ , \quad \frac{z}{r} = \cos\gamma_1$$

Ieliekot šīs vērtības augšējā formulā,dabūjam meklēto leņķa kosinusu

$$\cos\vartheta = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 \quad \dots\dots\dots\dots (17)$$

Šī formula derīga arī leņķa noteikšanai starp divām plāknēm un arī starp diviem taisnes gabaliem.

Piemērs.

Doti gabali R_1 un R_2 ar projekcijām X_1, Y_1, Z_1 un X_2, Y_2, Z_2 ; dabūt leņķi ϑ starp šiem gabaliem.

Tā kā

$$\cos\alpha_1 = \frac{X_1}{R_1}, \quad \cos\beta_1 = \frac{Y_1}{R_1}, \quad \cos\gamma_1 = \frac{Z_1}{R_1}$$

un

$$\cos\alpha_2 = \frac{X_2}{R_2}, \quad \cos\beta_2 = \frac{Y_2}{R_2}, \quad \cos\gamma_2 = \frac{Z_2}{R_2}$$

tad ieliekot šīs vērtības formulā (17),dabūjam

$$\cos\vartheta = \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2}{R_1 R_2} \quad \dots\dots\dots\dots (18)$$

Ja $R_1 \perp$ uz R_2,tad $\vartheta = 90^\circ$ un $\cos\vartheta = 0$ un tādēļ

$$X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2 = 0$$

Ja divu taisnes gabalu projekcijas izpilda augšējo noteikumu, tad gabali stateniski.

R_1 ir $\parallel R_2$ ja $\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2$; $\cos\beta_1 = \cos\beta_2$; $\cos\gamma_1 = \cos\gamma_2$

tā tad

$$\frac{X_1}{R_1} = \frac{X_2}{R_2}, \quad \frac{Y_1}{R_1} = \frac{Y_2}{R_2}, \quad \frac{Z_1}{R_1} = \frac{Z_2}{R_2}$$

Seko

$$\frac{X_1}{X_2} = R_1 R_2 \ ; \ \frac{Y_1}{Y_2} = R_1 R_2 \ ; \ \frac{Z_1}{Z_2} = R_1 R_2$$

un

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{Y_1}{Y_2} = \frac{Z_1}{Z_2}$$

Tā tad divi taisnes gabali ir parallēli, ja to projekcijas ir proporcionālas.

Divas taisnes g_1 un g_2 ir parallēlas, ja

$$\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2, \quad \cos\beta_1 = \cos\beta_2, \quad \cos\gamma_1 = \cos\gamma_2$$

Taisne $g_1 \perp$ uz g_2 ,ja $\cos\vartheta = 0$, tad

$$\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 = 0$$

Piemērs.

Meklēts virziens ar $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$,kurš $\perp$ uz virzieniem ar $\cos\alpha_1, \cos\beta_1, \cos\gamma_1$ un $\cos\alpha_2, \cos\beta_2, \cos\gamma_2$.Pielietojot virziena formulu,priekš meklētā virziena un katra dotā virziena,dabūjam

$$\cos\alpha \cos\alpha_1 + \cos\beta \cos\beta_1 + \cos\gamma \cos\gamma_1 = 0$$

$$\cos\alpha \cos\alpha_2 + \cos\beta \cos\beta_2 + \cos\gamma \cos\gamma_2 = 0$$

No šiem homogeniem nolīdzinājumiem seko

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = \begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

Ja $\cos\alpha_1 : \cos\beta_1 : \cos\gamma_1 = 2 : 3 : 1$

un $\cos\alpha_2 : \cos\beta_2 : \cos\gamma_2 = 1 : 2 : 3$

tad ievedot proporcionālitātes faktorus ρ_1 un ρ_2 dabūjam

$$\cos\alpha_1 = 2\rho_1 \; ; \; \cos\beta_1 = 3\rho_1 \; \text{un} \; \cos\gamma_1 = 1\rho_1$$

$$\cos\alpha_2 = 2\rho_2 \; ; \; \cos\beta_2 = 2\rho_2 \; \text{un} \; \cos\gamma_2 = 3\rho_2$$

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = \begin{vmatrix} 2\rho_1 & 3\rho_1 & \rho_1 \\ \rho_2 & 2\rho_2 & 3\rho_2 \\ + & - & + \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3\rho_1 & \rho_1 \\ 2\rho_2 & 3\rho_2 \end{vmatrix} : -\begin{vmatrix} 2\rho_1 & \rho_1 \\ \rho_2 & 3\rho_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 2\rho_1 & 3\rho_1 \\ \rho_2 & 2\rho_2 \end{vmatrix} =$$

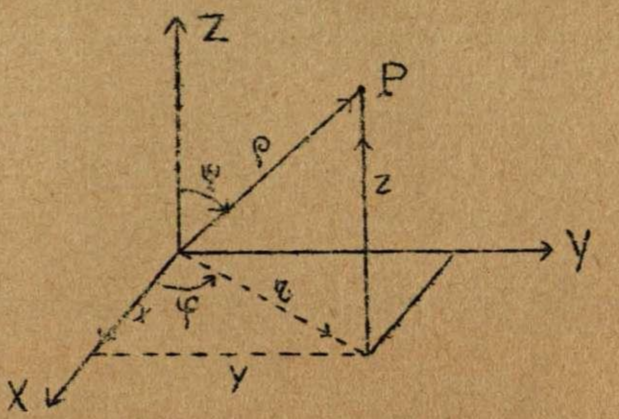
$$= 7\rho_1\rho_2 : -5\rho_1\rho_2 : \rho_1\rho_2$$

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = 7 : -5 : 1$$

Ievērojot formulu Nr.12, dabūjam

$$\cos\alpha = \frac{7}{\pm\sqrt{75}} \; ; \; \cos\beta = \frac{-5}{\pm\sqrt{75}} \; ; \; \cos\gamma = \frac{1}{\pm\sqrt{75}}$$

12. Bez agrāk apskatītās taisnleņķa parallēlkoordinātu sistēmas lieto arī vēl semipolāro vai arī cilindra koordinātu sistēmu un polāro koordinātu sistēmas.



Semipolarā vai cilindra koordinātu sistēmā punkta P koordinātas tiek dotas ar r, leņķi φ un z.

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \\ z &= z \end{aligned}\right\} \text{ pāreja uz cilindra koordinātām} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \; ; \; \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \; ; \; r = \sqrt{x^2+y^2} \; ; \varphi = \text{arc tg}\frac{y}{x} \quad (20)$$

Beidzamās formulas lietojāmas pārejai no cilindra koordinātām uz parallēlkoordinātām.

Polārkoordinātu sistēmā punkta P koordinātas tiek dotas ar leņķi φ, ρ, un leņķi ψ.

Liekot $r = \rho\sin\psi$, dabūjam

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi.\sin\psi \\ y &= \rho\sin\varphi.\sin\psi \\ z &= \rho\cos\psi \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (21)$$

Šīs formulas pielietojamas pārejai no parallēlkoordinātām uz cilindra koordinātām.

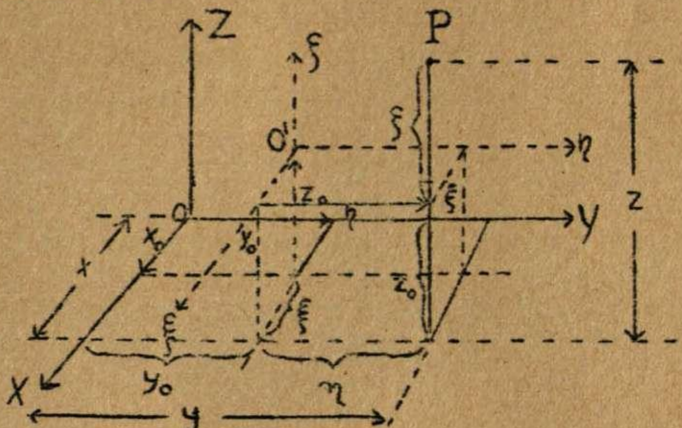
$$\left.\begin{aligned} \varrho &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \operatorname{tg} \varphi &= \frac{y}{x} \\ \operatorname{tg} \psi &= \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(22)$$

Formulas pielietojāmas pārejai no polārkoordinātām uz parallēlkoordinātām.

13. Koordinātu pārveidošana.

a)Virzes pārveidošana vai translācija.

No zīmējuma redzams, ka



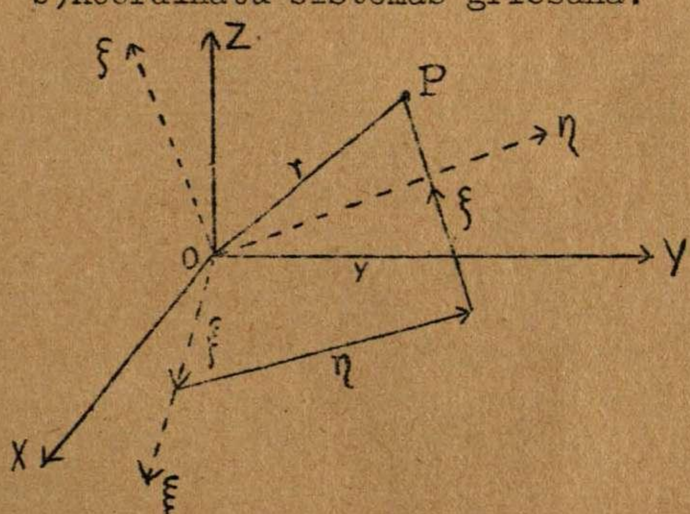
$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + \xi \\ y &= y_0 + \eta \\ z &= z_0 + \zeta \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(23)$$

Formulas pielietojāmas pārejai no (x,y,z) sistēmas uz (ξ,η,ζ) sistēmu.

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x - x_0 \\ \eta &= y - y_0 \\ \zeta &= z - z_0 \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(23^{a})$$

Formulas pielietojamas pārejai no (ξ, η, ζ) sistēmas uz (x,y,z) sistēmu.

b)Koordinātu sistēmas griešana.



Sistēma (x,y,z) un sistēma (ξ, η, ζ) abas ir taisnleņķa sistēmas. Abām sistēmām ir kopējs sākuma punkts O un kopējs radius vektors r uz P. Sistēmas ξ, η, ζ asis veido ar x,y,z sistēmas asīm leņķus $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$ - $\alpha_2 \beta_2 \gamma_2$ - $\alpha_3 \beta_3 \gamma_3$, kā tas redzams no sekojošas tabulas

	ξ	η	ζ
X	α_1	α_2	α_3
Y	β_1	β_2	β_3
Z	γ_1	γ_2	γ_3

Projecējot r uz X ass dabūjam x, bet tā kā jaunā sistēmā punkta P koordinātas ξ, η, ζ sastāda poligonu, kuŗa slēdzošā mala ir r, tad r vietā varam projecēt šo poligonu un dabūjam to pašu lielumu x. Tāpat projecējot šo poligonu uz Y ass dabūjam y un projecējot uz Z ass dabūjam z. Tā tad

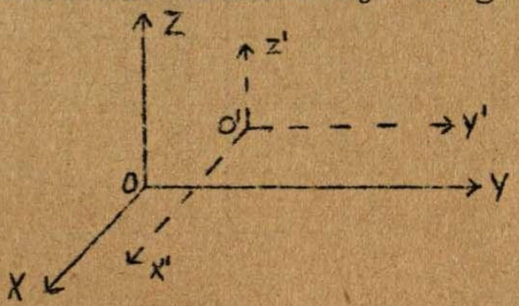
$$\left.\begin{aligned} x &= \xi \cos\alpha_1 + \eta \cos\alpha_2 + \zeta \cos\alpha_3 \\ y &= \xi \cos\beta_1 + \eta \cos\beta_2 + \zeta \cos\beta_3 \\ z &= \xi \cos\gamma_1 + \eta \cos\gamma_2 + \zeta \cos\gamma_3 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (24)$$

Formulas pielietojāmas pārejai no x,y,z sistēmas uz ξ, η, ζ sistēmu.

Lai dabūtu formulas pārejai no (ξ, η, ζ) sistēmas uz (x,y,z) sistēmu, projecējam punkta P koordinātu x,y,z poligonu uz ξ, η, ζ asīm un dabūjam

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x \cos\alpha_1 + y \cos\beta_1 + z \cos\gamma_1 \\ \eta &= x \cos\alpha_2 + y \cos\beta_2 + z \cos\gamma_2 \\ \zeta &= x \cos\alpha_3 + y \cos\beta_3 + z \cos\gamma_3 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (24^a)$$

c)Koordinātu sistēmas translācija un griešana.



Pirms pārceļam sistēmu paralēli uz sākuma punktu O' un pēc tam izdaram sistēmas (x',y',z') griešanu ap punktu O'.

Abas operācijas izvedam kā augšā norādīts un dabūjam

$$\left.\begin{aligned} x &= x_o + \xi \cos\alpha_1 + \eta \cos\alpha_2 + \zeta \cos\alpha_3 \\ y &= y_o + \xi \cos\beta_1 + \eta \cos\beta_2 + \zeta \cos\beta_3 \\ z &= z_o + \xi \cos\gamma_1 + \eta \cos\gamma_2 + \zeta \cos\gamma_3 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (25)$$

Augšējās formulas dod pāreju no sistēmas (XYZ) uz sistēmu (ξ, η, ζ).

Pāreja no sistēmas (ξ, η, ζ) dabūjāma ar sekojošām formulām

$$\xi = (x - x_0)\cos\alpha_1 + (y - y_0)\cos\beta_1 + (z - z_0)\cos\gamma_1$$
$$\eta = (x - x_0)\cos\alpha_2 + (y - y_0)\cos\beta_2 + (z - z_0)\cos\gamma_2 \quad \ldots\ldots(25^{\underline{a}})$$
$$\zeta = (x - x_0)\cos\alpha_3 + (y - y_0)\cos\beta_3 + (z - z_0)\cos\gamma_3$$

Formulās (24),(24$^{\underline{a}}$),(25) un (25$^{\underline{a}}$) atrodās 9 leņķi,bet tikai 3 no tiem uzskatāmi par neatkarīgiem, jo pielietojot pie ξ, η, ζ asu virzienu leņķiem virziena formulas, dabūjam

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1 = 1$$
$$\cos^2\alpha_2 + \cos^2\beta_2 + \cos^2\gamma_2 = 1$$
$$\cos^2\alpha_3 + \cos^2\beta_3 + \cos^2\gamma_3 = 1$$

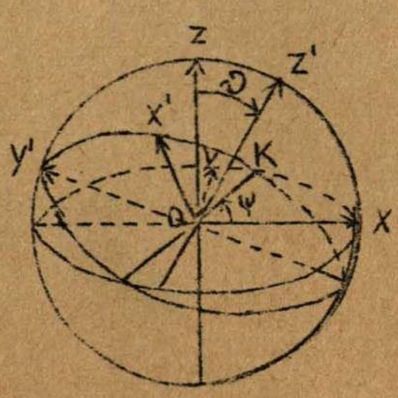
Pielietojot statenības pazīmi pie asīm ($\xi\eta$),($\xi\zeta$) un ($\eta\zeta$) dabūjam

$$\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2 = 0$$
$$\cos\alpha_1\cos\alpha_3 + \cos\beta_1\cos\beta_3 + \cos\gamma_1\cos\gamma_3 = 0$$
$$\cos\alpha_2\cos\alpha_3 + \cos\beta_2\cos\beta_3 + \cos\gamma_2\cos\gamma_3 = 0$$

No šiem sešiem nolīdzinājumiem varam izteikt sešus leņķus kā funkcijas no pārējiem trijiem leņķiem un tādēļ augšējās koordinātu pārveidošanas formulās atrodās tikai trīs neatkarīgi leņķi, kuŗi raksturo koordinātu sistēmas (ξ, η, ζ) griešanu pret koordinātu sistēmu (X,Y,Z).

13. Eulera formulas.

Ievērojot norādīto, Eulers pieņem trīs neatkarīgus leņķus ψ, ϑ un φ.



$\angle$ KOX = ψ , $\angle$ ZOZ' = ϑ un $\angle$ KOX' = φ

Koordinātu sistēmu (XYZ) var pārvest ar trīskārtēju griešanu jaunā koordinātu sistēmā . (ξ, η, ζ)

1)Griežot ap Z asi par leņķi ψ, X ass pārvietojās taisnē OK, analitiskā geometrijā plaknē šāds gadijiens apskatīts un tādēļ, ja punkta P koordinātas vecā sistēmā apzīmējam ar x,y,z un jaunā sistēmā pēc norādītās griešanas ar $x_1 y_1 z_1$

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1\cos\psi - y_1\sin\psi \\ y &= x_1\sin\psi + y_1\cos\psi \\ z &= z_1 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(26)$$

$$0 < \psi < 180^0$$

2)Koordinātu sistēmu ($X_1 Y_1 Z_1$) griežam ap OK par leņķi ϑ un dabūjam, ja punkta P koordinātas šajā grieztā sistēmā apzīmējam ar x_2, y_2, z_2

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_2 \\ y_1 &= y_2 \cos\vartheta - z_2 \sin\vartheta \\ z_1 &= y_2 \sin\vartheta + z_2 \cos\vartheta \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots(26^{\underline{a}})$$

3)Beidzot griežam šo sistēmu ap OZ' par leņķi φ un apzīmējot beidzamā sistēmā punkta P koordinātas ar ξ, η, ζ dabūjam

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= \xi \cos\varphi - \eta \sin\varphi \\ y_2 &= \xi \sin\varphi + \eta \cos\varphi \\ z_2 &= \zeta \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots(26^{\underline{b}})$$

Izslēdzot no (26), $(26^{\underline{a}})$ un $(26^{\underline{b}})$ lielumus $x_1 y_1 z_1$ un $x_2 y_2 z_2$ dabūjam

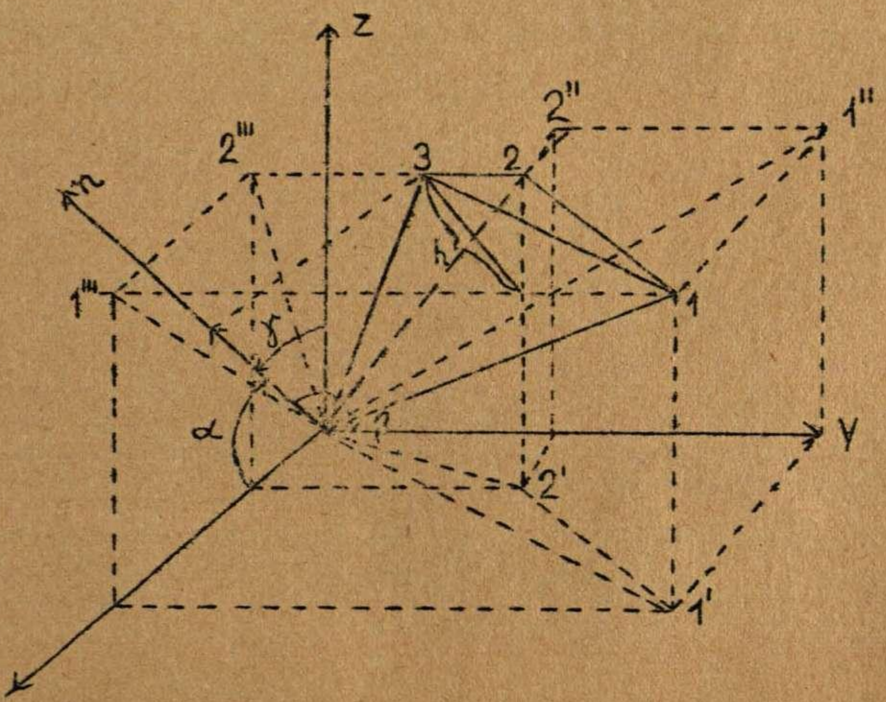
$$\left.\begin{aligned} x &= a_1 \xi + a_2 \eta + a_3 \zeta \\ y &= b_1 \xi + b_2 \eta + b_3 \zeta \\ z &= c_1 \xi + c_2 \eta + c_3 \zeta \end{aligned}\right\} \text{(Eulera formulas)} \ \ldots\ldots(27)$$

Koeficienti $a_1 a_2 a_3$, $b_1 b_2 b_3$, $c_1 c_2 c_3$ dabūjāmi no

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= +\cos\varphi \cos\psi - \sin\varphi \sin\psi \cos\vartheta \\ a_2 &= -\sin\varphi \cos\psi - \cos\varphi \sin\psi \cos\vartheta \\ a_3 &= +\sin\psi \sin\vartheta \\ b_1 &= +\cos\varphi \sin\psi + \sin\varphi \cos\psi \cos\vartheta \\ b_2 &= -\sin\varphi \sin\psi + \cos\varphi \cos\psi \cos\vartheta \\ b_3 &= -\cos\psi \sin\vartheta \\ c_1 &= \sin\varphi \sin\vartheta \\ c_2 &= \cos\varphi \sin\vartheta \\ c_3 &= \cos\vartheta \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots(28)$$

14. Tetraedra tilpums.

Apskatam tetraedru, kuŗa viena virsotne atrodās koordinātu sākumā.



Tetraedra O 1 2 3 tilpums T

$$T = \frac{1}{3} h \, \Delta_{012}$$

Še h statenis no punkta 3 uz Δ_{012} plāknes. Ar n apzīmēts statenis no punkta O uz Δ_{012} un tādēļ $n \parallel h$.
h projekcija uz n ir tik pat liela kā tetraedra šķautnes O3 projekcija uz n, tādēļ, ievērojot formulu (10), dabūjam

$$h = x_3 \cos\alpha + y_3 \cos\beta + z_3 \cos\gamma$$

Tā tad

$$T = \frac{1}{3}\left[x_3 \Delta_{012} \cos\alpha + y_3 \Delta_{012} \cos\beta + z_3 \Delta_{012} \cos\gamma\right]$$

Tā kā

$$\left.\begin{array}{l} \Delta_{012} \cos\gamma = \Delta_{01'2'} \\ \Delta_{012} \cos\alpha = \Delta_{01''2''} \\ \Delta_{012} \cos\beta = \Delta_{01'''2'''} \end{array}\right\} \text{ } \Delta_{012} \text{ projekcijas uz attiecīgām koordinātu plāknēm}$$

un no analītiskās geometrijas plāknē zināms, ka

$$\Delta_{01'2'} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{01''2''} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{01'''2'''} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}$$

tad, ievietojot šīs izteiksmes formulā, dabūjam

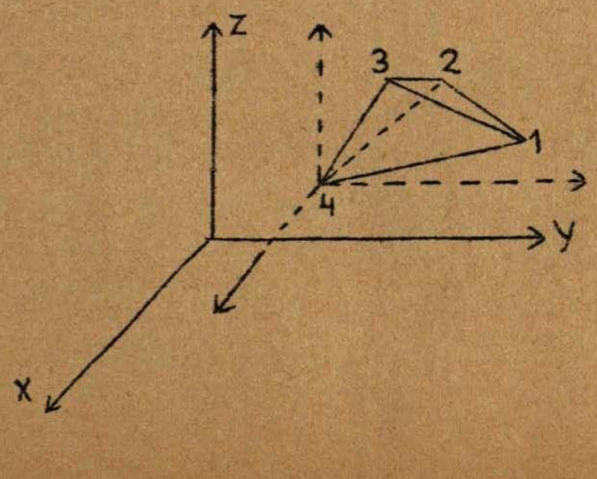
$$T = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\left[x_3 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} + y_3 \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} + z_3 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right]$$

Kā redzams $(x_1 y_1 z_1)$, $(x_2 y_2 z_2)$, $(x_3 y_3 z_3)$ ir tetraedra virsotņu koordinātas.

Augšējo izteiksmi varam arī rakstīt

$$T = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(29)$$

Ja tetraedra virsotne neatrodās koordinātu sākumā, tad saskaņā ar zīmējumu



pārnesam koordinātu asis paralleli uz punktu 4 un tad,kā redzams, augšējā determinantā jāieved

x_1 vietā ... $x_1 - x_4$; x_2 vietā ... $x_2 - x_4$; x_3 vietā $x_3 - x_4$
y_1 " ... $y_1 - y_4$; y_2 " ... $y_2 - y_4$; y_3 " $y_3 - y_4$
z_1 " ... $z_1 - z_4$; z_2 " ... $z_2 - z_4$; z_3 " $z_3 - z_4$

tad

$$T = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 - x_4 & y_1 - y_4 & z_1 - z_4 \\ x_2 - x_4 & y_2 - y_4 & z_2 - z_4 \\ x_3 - x_4 & y_3 - y_4 & z_3 - z_4 \end{vmatrix}$$

Šo determinantu varam arī rakstīt

$$T = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(30)$$

Tā tad tetraedra tilpums tiek izteikts ar augšējo determinantu.

15. Nolīdzinājumu geometriska nozīme.

Ja pieņemam $z = c$, tad šim nolīdzinājumam atbilst bezgalīgs daudzums punktu, kuŗu z nolīdzinas c. Visi šie punkti atrodās plāknē, kuŗa parallēla (xy) vai arī z plāknei.

Tāpat redzams, ka nolīdzinājums $x = a$ dod plākni parallēlu (yz) plāknei un $y = b$ dod plākni parallēlu (xz) plāknei.

Ja kāds punkts atrodās (xy) plāknē, tad viņa $z = 0$ un tādēļ

$z = o$ ir (xy) plāknes nolīdzinājums

kā arī, ievērojot analogiju

$y = o$ ir (xz) plāknes nolīdzinājums
$x = o$ ir (yz) " "

Nolīdzinājumiem

$$\left.\begin{aligned} x &= a \\ y &= b \end{aligned}\right\}$$

atbilst punkti, kuŗi atrodās tikpat pirmā, kā otrā plāknē, tā tad uz šo plākņu krustošanās taisnes. Šī taisne ir parallēla z asij.

Analogi dabūjam, ka

$$\left.\begin{aligned} x &= a \\ z &= c \end{aligned}\right\}$$

dod taisni, parallēlu y asij, un

$$\left.\begin{aligned} y &= b \\ z &= c \end{aligned}\right\}$$

dod taisni, parallēlu x asij.

Ievērojot augšējo redzams, ka

$$\left.\begin{aligned} y &= o \\ z &= o \end{aligned}\right\}$$

ir x ass nolīdzinājumi un nolīdzinājumu pāri

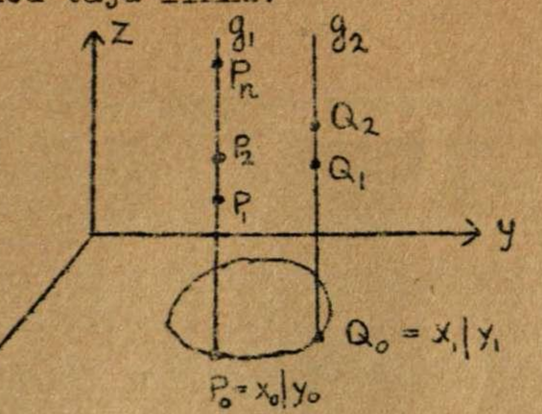
$$\left.\begin{aligned} x &= o \\ z &= o \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x &= o \\ y &= o \end{aligned}\right\}$$

ir y un z ass nol-mi.

Nolīdzinājums

$$F(x,y) = 0$$

apskatīts xy plāknē, dod tajā līkni.



Ja caur šīs līknes punktu P_0 vedam taisni $g_1 \parallel$ z asij un uz g_1 pieņemam punktus $P_1 P_2 \ldots P_n$, tad visiem šiem punktiem ir tādas pašas koordinātas xy plāknē, kā punktam P_0 un tādēļ arī tās apmierina nolīdzinājumu $F(x,y) = 0$. Tāpat tas ir ar punktiem uz taisnes g_2, kuŗa iet caur līknes punktu Q_0 parallēli z asij. Taisnes $g_1 g_2 \ldots g_n$ parallēlas z asij un caur līknes $F(x,y)=0$ punktiem veido statenisku uz xy plāknes cilindru un visu, uz šī cilindra atrodošos punktu koordinātas izpilda nolīdzinājumu $F(x,y) = 0$. Tādēļ nolīdzinājums $F(x,y) = 0$ apskatīts telpā, dod uz xy plāknes stateniska cilindra virsmu.

Analogi dabūjam, ka nolīdzinājums $\varphi(x,z) = 0$ ir uz xz plāknes stateniska čilindra nolīdzinājums un $\psi(y,z) = 0$ izteic uz yz plāknes statenisku cilindru.

Piemēram nolīdzinājums

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

izteic cilindru, statenisku uz xy plāknes.

Nolīdzinājums

$$F(x,y,z) = 0$$

izteic kādu virsmu. Ja pieņemam $z = h$, tad nolīdzinājumu sistēma

$$\left.\begin{aligned} z &= h \\ F(x,y,z) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

dod punktus, kuŗi atrodās uz xy plāknei parallēlas plāknes un arī uz ar $F(x,y,h) = 0$ izteikta cilindra, kuŗa veidule parallēla z asij.

Šie punkti veido līkni; plāknes $z = h$ un cilindra $F(x,y,h)=0$ krustošanās līkni.

Ja mainam h, tad mainās plāknes $z = h$ attālums no xy plāknes, un mainās arī cilindra pamata līkne $F(x,y,h) = 0$, krustošanās līkne tādēļ kustās un pie šīs kustības veido virsmu telpā.

Tā tad nolīdzinājums

$$F(x,y,z) = 0$$

dod telpā virsmu.

Divu nolīdzinājumu kopība

$$\left.\begin{aligned} F(x,y,z) &= 0 \\ f(x,y,z) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\alpha)$$

dod abām virsmām kopējo punktu geometrisku vietu, tā tad šo virsmu krustošanās līkni.

Triju nolīdzinājumu kopība

$$\left.\begin{aligned} F(x,y,z) &= 0 \\ f(x,y,z) &= 0 \\ \varphi(x,y,z) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

dod vienu vai vairākus, ar nolīdzinājumiem izteikto triju virsmu krustpunktus.

Kā redzējam, nolīdzinājumi (α) dod līkni telpā. Izslēdzot no šiem nolīdzinājumiem vispirms z, tad y, dabūjam divus jaunus nolīdzinājumus

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x,y) &= 0 \\ \psi(x,z) &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\beta)$$

Nolīdzinājumi (β) dod to pašu līkni, kuŗu dod nolīdzinājumi (α).

Beidzamā gadijumā līkne tiek dota, kā redzams, kā divu cilindru krustošanās rezultāts. Šie cilindri stāv stateniski, pirmais uz xy plāknes un otrs uz xz plāknes un tiek saukti par līknes projecējušiem cilindriem.

Šeit jāpiezīmē, ka šiem cilindriem var būt kopējas arī kādas citas līknes.

16. Virsmu klasifikācija.

Ja virsmas nolīdzinājums sastāv no polinoma, kuŗa locekļi satur, pie pastāvīgiem koeficientiem, tikai x, y, z veselās un pozitīvās kāpēs vai arī ja virsmas nolīdzinājumu ar pārveidošanu var pārvest tādā izteiksmē, tad virsmu sauc par algebrāisku.

Locekļa $x^m y^n z^p$ rādītāju summu $m + n + p = r$ sauc par locekļa kāpi un polinomā atrodoša, šādi noteikta augstākā kāpe noteic nolīdzinājuma kāpi. Ar tādu nolīdzinājumu izteikto virsmu sauc par r-tās kārtības algebrāisku virsmu.

Virsmas, kuŗu nolīdzinājumi neatbilst augšējai pazīmei, sauc par transcendentām virsmām.

Virsmu klasifikāciju izdara pēc to nolīdzinājumiem Dekarta koordinātās, tāpēc, ka tad pie koordinātu pārveidošanas nolīdzinājuma raksturs nemainās, transcendents nolīdzinājums paliek transcendents un algebrāisks paliek algebrāisks, un pie tam patur arī agrāko kāpi, kā tas redzams, ievērojot Dekarta koordinātu sistēmas pārveidošanas formulas.

Pie virsmu pētīšanas ievērojāmi dotās virsmas šķēlieni ar koordinātu plāknēm. Šos šķēlienus dabū, pievienojot virsmas nolīdzinājumam pēc kārtas koordinātu plākņu nolīdzinājumus.

Tādā kārtā

$$\left.\begin{aligned} F(x,y,z) &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

dod virsmas šķēlienu ar xy plākni.

$$\left.\begin{aligned} F(x,y,z) &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}\right\}$$

dod virsmas šķēlienu ar xz plākni, un

$$\left.\begin{aligned} F(x,y,z) &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}\right\}$$

dod virsmas šķēlienu ar yz plākni.

Ja virsmas nolīdzinājums

$$F(x,y,z) = 0$$

algebrāisks un n-tās kāpes, tad šķēliena līknes nolīdzinājums ar xy plākni ir

$$\left.\begin{array}{r} F(x,y,z) = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\}$$

Šis līknes nolīdzinājums plāknē (xy) ir

$$F(x,y,o) = 0$$

Vispārējā gadijumā šis nolīdzinājums ir n-tās kāpes un tādēļ n-tās kārtības algebrāiska virsma vispārējā gadijumā krusto koordinātu plāknes n-tās kārtības algebrāiskās līknēs.

Tāpat ievērojams arī krustpunktu skaits, kuŗos koordinātu asis krusto virsmu.

Virsmas krustpunktus, piemēram, ar x asi dabūjam, atslēdzot kopēji nolīdzinājumus

$$\left.\begin{array}{r} F(x,y,z) = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\}$$

Krustpunktu x koordinātas dabūjam no nolīdzinājuma

$$F(x,o,o) = 0$$

Ja virsmas nolīdzinājums algebrāisks un n-tās kāpes, tad vispārējā gadijumā arī beidzamais nolīdzinājums ir algebrāisks un n-tās kāpes, un kā zināms dod n saknes, t.i. priekš x – n vērtības. Analogi dabūjam arī krustpunktus ar y un z asīm.

Tādēļ:

vispārējā gadijumā n-tās kārtības algebrāiska virsma tiek krustota ar katru koordinātu asi, n punktos, reālos vai imagināros.

P l ā k n e .

17. Agrāk jau redzējam koordinātu plākņu nolīdzinājumus

$z = 0$ ... xy plāknes nolīdzinājums

$y = 0$ ... xz " "

$x = 0$ ... yz " "

Plāknes, parallēlas koordinātu plāknēm

$z = c$ ... plākne parallēla xy plāknei

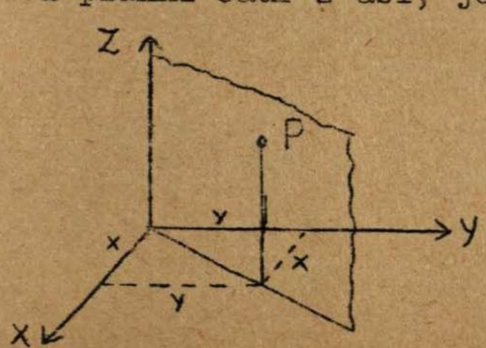
$y = b$ ... " " zx "

$x = a$ ... " " yz "

Plāknes caur koordinātu asīm.

$$y = \alpha x$$

dod plākni caur z asi, jo lai punkts P atrastos tādā plāknē ir tikai vajadzīgs, lai viņa x un y koordinātas izpildītu noteikumu



$$\frac{y}{x} = \text{konst.}$$

un šis noteikums ir izpildīts nolīdzinājumā

$$y = \alpha x$$

Analogi dabūjam plāknes nolīdzinājumu caur x asi

$$y = \beta z$$

un plāknes nolīdzinājumu caur y asi

$$x = \gamma_0 z$$

18. Plāknes nolīdzinājumu caur trijiem punktiem $P_1 = x_1|y_1|z_1$; $P_2 = x_2|y_2|z_2$ un $P_3 = x_3|y_3|z_3$ dabūjam, ievērojot, ka punkti $P_1 P_2 P_3$ un tekošais punkts $P = x|y|z$ veido tetraedru. Ja tekošais punkts P atrodās tanī plāknē, kuŗa iet caur punktiem P_1, P_2, P_3, tad tetraedra tilpums ir 0.

Tetraedra tilpums dots ar determinantu (30) un tādēļ

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(31)$$

dod meklētās plāknes nolīdzinājumu. Nolīdzinājums ir pirmās kāpes attiecībā uz x y z jo ja determinantu attīstam pēc pirmās rindas, tad dabūjam

$$x A_{11} + y A_{12} + z A_{13} + 1.A_{14} = 0$$

Šinī nolīdzinājumā visi koeficienti, apakšdeterminanti A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14} ir pastāvīgi lielumi un nolīdzinājums tādēļ attiecībā uz x,y,z lineārs.

Piemērs.

Kāds nolīdzinājums plāknei, kuŗa nogriež gabalus: uz x ass a, uz y ass b un uz z ass c ?

Še doti trīs punkti

$$P_1 = a|o|o \quad , \quad P_2 = o|b|c \quad \text{un} \quad P_3 = 0|0|c$$

Ieliekot šīs vērtības determinantā (31) dabūjam

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a & o & o & 1 \\ o & b & o & 1 \\ o & o & c & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Attīstot pēc pirmās rindas, dabūjam

$$x \begin{vmatrix} o & o & 1 \\ b & o & 1 \\ o & c & 1 \end{vmatrix} + y(-) \begin{vmatrix} a & o & 1 \\ o & o & 1 \\ o & c & 1 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} a & o & 1 \\ o & b & 1 \\ o & o & 1 \end{vmatrix} + (-) \begin{vmatrix} a & o & o \\ o & b & o \\ o & o & c \end{vmatrix} = 0$$

$$x \begin{vmatrix} b & o \\ o & c \end{vmatrix} + y(-).(-) \begin{vmatrix} a & o \\ o & c \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} a & o \\ o & b \end{vmatrix} - abc = 0$$

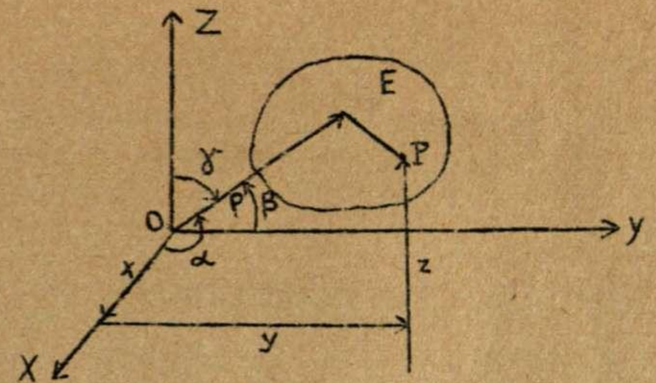
$$x.bc + y.ac + z.ab - abc = 0$$

Nodalot ar abc dabūjam

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(32)$$

Šo nolīdzinājumu sauc par plāknes nolīdzinājumu asu nogriežņos.

19. Apzīmējam ar α, β, γ virziena leņķus, kuŗus veido ar x, y, z asīm uz plāknes E vilktais stāvenis. Pēc agrāk teiktā šie leņķi ir arī plāknes E virziena leņķi. Salīdzinot šo zī-



mējumu ar zīmējumu § 10, redzams, ka formulā

$$d = x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p$$

jāliek $d = 0$, jo punkts P atrodās plāknē E, tā tad, ja punkts P atrodās plāknē E, tad

$$d = 0 = x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p$$

Šāds nolīdzinājums derīgs priekš katra punkta, kuŗš atrodās plāknē E un tādēļ izteic plāknes E nolīdzinājumu, jo visu punktu P kopība, kuŗi apmierina šo nolīdzinājumu, veido plākni E.

Nolīdzinājumu

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p = 0 \quad \ldots.(33)$$

sauc par plāknes normālu nolīdzinājumu.

Piemērs.

Kāds nolīdzinājums plāknei, ja viņas attālums no koordinātu sākuma $p = 3$ un tā stāv perpendikulāri uz gabala $P_1 P_2$?

Dotas gabala projekcijas $X = -1$, $Y = -2$, $Z = -1$.

Šī gabala garums

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

gabala virziena koeficienti

$$\cos\alpha = \frac{X}{R} = \frac{-1}{\sqrt{6}} \quad , \quad \cos\beta = \frac{Y}{R} = \frac{-2}{\sqrt{6}} \quad , \quad \cos\gamma = \frac{Z}{R} = \frac{-1}{\sqrt{6}}$$

Plāknei, kuŗa stateniska uz P P ir tādi pat virziena koeficienti, kā gabalam $P_1 P_2 = R$ un tādēļ arī meklētais plāknes nolīdzinājums ir

$$x.\frac{-1}{\sqrt{6}} + y.\frac{-2}{\sqrt{6}} + z.\frac{-1}{\sqrt{6}} - 3 = 0$$

Piemērs.

Vest caur punktu $P_0 = x_0|y_0|z_0$ plākni ar dotu virzienu, t.i. dotiem virziena koeficientiem $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$. Kāds ir šīs plāknes nolīdzinājums?

Plāknes normālnolīdzinājumā tā tad zināmi virziena koeficienti $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, bet p nav zināms. Plāknes nolīdzinājums ir

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p = 0 \quad \ldots\ldots(r)$$

kuŗā p vēl nezināms.

Tā kā plāknei jāiet caur P_0, tad punkta P_0 koordinātēm vajag apmierināt plāknes nolīdzinājumu, un tādēļ

$$x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(s)$$

No šī nolīdzinājuma dabūjam nezināmo p

$$p = x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma$$

Ieliekot p vērtību nolīdzinājumā (r), dabūjam

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - (x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma) = 0$$

vai arī

$$(x - x_0)\cos\alpha + (y - y_0)\cos\beta + (z - z_0)\cos\gamma = 0 \quad \ldots\ldots(34)$$

Šis nolīdzinājums ir tās plāknes nolīdzinājums,kuŗa iet caur P_0 ar doto virzienu $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$. Nolīdzinājumu var arī dabūt, novelkot nolīdzinājumu (s) no nolīdzinājuma (r).

20. Apskatītiem plāknes nolīdzinājumiem ir lineāra nolīdzinājuma veids

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

un tāpēc varam teikt, ka lineārs nolīdzinājums attiecībā uz x,y,z izteic plākni.

Dalot nolīdzinājumu ar -D dabūjam

$$\frac{Ax}{-D} + \frac{By}{-D} + \frac{Cz}{-D} - 1 = 0$$

Šo nolīdzinājumu pārveidojam

$$\frac{x}{\frac{-D}{A}} + \frac{y}{\frac{-D}{B}} + \frac{z}{\frac{-D}{C}} - 1 = 0$$

Salīdzinot šo nolīdzinājumu ar plāknes nolīdzinājumu asu nogriežņos, redzams, ka

$$a = -\frac{D}{A}\ , \quad b = -\frac{D}{B}\ , \quad c = -\frac{D}{C} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(35)$$

Nolīdzinājumu

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(36)$$

sauc par plāknes nolīdzinājumu vispārējā veidā.

21. Plāknes E nolīdzinājums normālveidā ir

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$$

Tās pašas plāknes nolīdzinājums vispārējā veidā ir

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Šie divi nolīdzinājumi izteic to pašu plākni un var atšķirties tikai ar pastāvīgu, vēl nezināmu reizuli ρ ; nolīdzinājumiem

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$$

un

$$\rho(Ax + By + Cz + D) = 0$$

vajag būt tapatīgiem, un tādēļ

$$\cos\alpha = \rho A \ ; \quad \cos\beta = \rho B \ ; \quad \cos\gamma = \rho C \ ; \quad -p = \rho D$$

Tā kā

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

tad arī

$$\rho^2A^2 + \rho^2B^2 + \rho^2C^2 = 1$$

Seko

$$\rho = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(37)$$

No šejienes redzams, ka lai pārvestu plāknes vispārēju nolīdzinājumu normālnolīdzinājumā, vispārējs nolīdzinājums jādala ar $\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}$, tad

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots..(38)$$

ir plāknes normālnolīdzinājums.

Plāknes virziena koeficienti

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \\ \cos\beta &= \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \\ \cos\gamma &= \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots..(39)$$

$$p = -\frac{D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(40)$$

Tā kā p ņemams arvienu ar + zīmi, tad redzams, ka p arvienu būs + ,ja saknes zīmi ņem pretēju D zīmei.

Attiecībā uz virzienu koeficientiem varam rakstīt

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma : 1 = A : B : C : \pm\sqrt{A^2+B^2+C^2} \quad \ldots..(41)$$

Piemērs.

Dots plāknes vispārējs nolīdzinājums

$$12x + 4y + 3z - 12 = 0$$

Šīs plāknes asu nogriežņi

$$a = -\frac{D}{A} = -\frac{-12}{12} = 1$$

$$b = -\frac{D}{B} = -\frac{-12}{4} = 3$$

$$c = -\frac{D}{C} = -\frac{-12}{3} = 4$$

Plāknes nolīdzinājums asu nogriežņos

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} - 1 = 0$$

Plāknes pēdu liniju xy plāknē dabūjam, liekot plāknes nolīdzinājumā z = o, tā tad

$$12x + 4y - 12 = 0$$

ir pēdu linija (xy) plāknē.

Analogi dabūjam pēdu linijas yz un zx plāknēs, liekot x = o un y = o.

$4y + 3z - 12 = 0$ pēdu linija yz plāknē

$12x + 3z - 12 = 0$ " " zx "

Plāknes nolīdzinājums normālveidā

$$\frac{12x + 4y + 3z - 12}{\pm\sqrt{12^2 + 4^2 + 3^2}} = 0$$

$$\frac{12x + 4y + 3z - 12}{13} = 0$$

$$\cos\alpha = \frac{12}{13}, \quad \cos\beta = \frac{4}{13}, \quad \cos\gamma = \frac{3}{13}$$

$$p = -\frac{-12}{13} = \frac{12}{13}$$

Kā redzams, plāknes virziena koeficienti noteikti tikai ar A,B,C, bet D viņus neiespaido. No D atkarājās tikai plāknes attālums no koordinātu sākuma. Seko, ka ja divu plākņu nolīdzinājumi atšķirās tikai ar absolūto locekli, tad plāknes parallēlas.

Liekot plāknes vispārējā nolīdzinājumā

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

ka $A = 0$, tad $\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$ vai arī $\alpha = 90^\circ$, tas nozīmē, ka $p \perp$ uz x ass un tad plākne ir parallēla x asij; tā tad

ja $A = 0$, tad plākne parallēla x asij
" $B = 0$, " " " y "
" $C = 0$, " " " z "

Ja plāknes vispārējā nolīdzinājumā $A = 0$ un $B = 0$, tad plākne parallēla tikpat x asij, kā arī y asij un tādēļ $\perp$ uz z ass. Tā tad, ja

$A = 0$, $B = 0$ plākne $\perp$ uz z ass
$A = 0$, $C = 0$ " $\perp$ " y "
$B = 0$, $C = 0$ " $\perp$ " x "

Gadijumā, kad $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, tad plāknes nolīdzinājums pieņem veidu

$$o.x + o.y + o.z + D = 0$$

bet tad

$$a = -\frac{D}{A} = -\frac{D}{0} = -\infty$$

$$b = -\frac{D}{B} = -\frac{D}{0} = -\infty$$

$$c = -\frac{D}{C} = -\frac{D}{0} = -\infty$$

Tā tad, ja plāknes nolīdzinājums sastāv no izteiksmes

$$D = 0$$

tad tas dod bezgalīgi tālu plākni, jo tādas plāknes asu nogriežņi ir bezgalīgi lieli.

Plāknes vispārējā nolīdzinājuma lineāro izteiksmi apzīmē ar simbolu E un raksta

$$E \equiv Ax + By + Cz + D$$

Arī plāknes normālnolīdzinājuma lineāro izteiksmi apzīmē ar N un raksta

$$N \equiv x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p$$

Tad

$E = 0$ apzīmē plāknes vispārējo nolīdzinājumu

$N = 0$ " " normālo "

22. Divas plāknes krustojās taisnē. Šīs taisnes punktiem vajag apmierināt abu plākšņu nolīdzinājumus, tā tad

$$E_1 = 0$$
$$E_2 = 0$$

dod krustošanās taisni. Šī taisne tiks vēlāk apskatīta atsevišķi. Šeit apskatīsim kādu leņķi, ko sauc par krituma leņķi un kuŗu šīs plāknes veido. Leņķis starp divām plāknēm tiek mērīts starp plākņu stateņiem p_1 un p_2 un tādēļ, ja doti plākņu nolīdzinājumi

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

dabūjot p_1 un p_2 virzienu koeficientus

$$\cos\alpha_1 = \frac{A_1}{\pm\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}\,;\ \cos\beta_1 = \frac{B_1}{\pm\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}\,;\cos\gamma_1 = \frac{C_1}{\pm\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}$$

$$\cos\alpha_2 = \frac{A_2}{\pm\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}\,;\ \cos\beta_2 = \frac{B_2}{\pm\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}\,;\cos\gamma = \frac{C_2}{\pm\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

dabūjam leņķi starp p_1 un p_2 un tādēļ arī leņķi starp E_1 un E_2, kuŗu apzīmējam ar ϑ.

$$\cos\vartheta = \cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2 = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\,.\,\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \qquad (42)$$

Sakņu zīmes noteicāmas pēc agrākā un tādēļ arī $\cos\vartheta$ zīme ir pilnīgi noteikta.

Piemērs:

$$E_1 \equiv x - 4y + 2z - 30 = 0$$

un

$$E_2 \equiv x + y - 2z - 1 = 0$$

$$\cos\alpha_1 = \frac{1}{+\sqrt{1^2 + (-4)^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{21}}\,;\ \cos\beta_1 = \frac{-4}{\sqrt{21}}\,;\ \cos\gamma_1 = \frac{2}{\sqrt{21}}$$

$$\cos\alpha_2 = \frac{1}{+\sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\,;\ \cos\beta_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\,;\ \cos\gamma_2 = \frac{-2}{\sqrt{6}}$$

$$\cos\vartheta = \frac{1.1 + (-4).1 + 2.(-2)}{\sqrt{21}\,.\,\sqrt{6}} = \frac{-7}{3\sqrt{14}}$$

Ja plākne $E_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ parallēla plāknei $E_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, tad $\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2$, $\cos\beta_1 = \cos\beta_2$, $\cos\gamma_1 = \cos\gamma_2$ un tādēļ

$$\frac{A_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}} = \frac{A_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}{\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} = k$$

tāpat

$$\frac{B_1}{B_2} = \qquad = k$$

un

$$\frac{C_1}{C_2} = \qquad = k$$

Seko

$$A_1 : B_1 : C_1 = A_2 : B_2 : C_2$$

Tā tad, ja

$$E_1 = 0 \parallel E_2 = 0$$

tad

$$E_1 \equiv A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$$

$$E_2 \equiv \frac{1}{k} A_1 x + \frac{1}{k} B_1 y + \frac{1}{k} C_1 z + D_2 = 0$$

No kā seko, ja plāknes parallēlas, tad attiecīgie koeficienti pie x,y,z proporcionāli.

Reizinot E_2 ar k dabūjam

$$E_2 \equiv A_1 x + B_1 y + C_1 z + kD_2 = 0$$

Salīdzinot šo nolīdzinājumu ar E_1 nolīdzinājumu, redzams: parallēlu plākņu nolīdzinājumi atšķirās tikai absolūtos locekļos.

Ja $E_1 = 0 \perp$ uz $E_2 = 0$, tad $\vartheta = 90^\circ$ un $\cos\vartheta = 0$, kas pie galīgiem koeficientiem prasa, lai nolīdzinājuma (42) skaitītājs

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (43)$$

Šī izteiksme ir divu plākņu parallēlisma noteikums.

Piemērs.

Kāds nolīdzinājums ir plāknei caur $P_0 = 3|4|1$, kuŗa parallēla plāknei $E_1 \equiv x + z - 3 = 0$?

Meklētais nolīdzinājuma veids ir

$$E_2 \equiv Ax + By + Cz + D = 0$$

Tā kā plākne parallēla plāknei $E_1 = 0$, tad $E_2 = 0$ var atšķirties no $E_1 = 0$ tikai absolūtā loceklī un tādēļ tās nolīdzinājums ir

$$E_2 \equiv x + z + D = 0$$

Tā kā plāknei $E_2 = 0$ jāiet caur punktu $P_0 = 3|4|1$, tad šī punkta koordinātām vajag apmierināt $E_2 = 0$ nolīdzinājumu, un tādēļ

$$3 + 1 + D = 0$$

$$D = -4$$

Ieliekot šo D vērtību $E_2 = 0$ nolīdzinājumā, dabūjam

$$x + z - 4 = 0$$

t.i. plāknes meklēto nolīdzinājumu.

23. Trīs plāknes $E_1 = 0$, $E_2 = 0$, $E_3 = 0$ krustojās vienā punktā P_0, kuŗa koordinātas dabūjam atslēdzot nolīdzinājumus

$$A_1 x_0 + B_1 y_0 + C_1 z_0 + D_1 = 0$$

$$A_2 x_0 + B_2 y_0 + C_2 z_0 + D_2 = 0$$

$$A_3 x_0 + B_3 y_0 + C_3 z_0 + D_3 = 0$$

Atrisinājumu dabūjam ar izteiksmi

$$x_0 : y_0 : z_0 : 1 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ - & + & - & + \end{vmatrix} = \Delta_1 : \Delta_2 : \Delta_3 : \Delta_4 \quad \ldots\ldots (44)$$

kur $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ ir ceturtās rindas vietām piekārtoti apakšdeterminanti.

Kamēr

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \gtrless 0$$

krustpunkta P_0 koordinātas ir galīgas. Ja $\Delta_4 = 0$ un vismaz viens no $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ nav 0, tad vismaz viena punkta P_0 koordināta ir ∞, krustpunkts tādēļ atrodās bezgalībā un plāknes krustojās trijās parallēlās taisnēs.

Ja pie $\Delta_4 = 0$ arī pārējie $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ ir 0, tad

$$x_0 : y_0 : z_0 : 1 = 0 : 0 : 0 : 0$$

$$x = \frac{0}{0}, \quad y = \frac{0}{0}, \quad z = \frac{0}{0}$$

krustpunkts nav noteikts, t.i. plāknes iet visas caur vienu taisni. Atsevišķā gadijumā šī taisne var būt bezgalībā, tad dotās trīs plāknes ir parallēlas.

Trīs plāknes $E_1 = 0$, $E_2 = 0$, $E_3 = 0$ krustojās parallēlās (atsevišķās vai sakrītošās) taisnēs, ja

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (45)$$

Četrām plāknēm $E_1 = 0$, $E_2 = 0$, $E_3 = 0$, $E_4 = 0$ vispārīgi nav kopēja punkta, bet ja viņām ir kopējs punkts $P_0 = x_0 | y_0 | z_0$, tad šī punkta koordinātām vajaga apmierināt augšējo četru plākņu nolīdzinājumus un tādēļ

$$A_1 x_0 + B_1 y_0 + C_1 z_0 + D_1 = 0$$

$$A_2 x_0 + B_2 y_0 + C_2 z_0 + D_2 = 0$$

$$A_3 x_0 + B_3 y_0 + C_3 z_0 + D_3 = 0$$

$$A_4 x_0 + B_4 y_0 + C_4 z_0 + D_4 = 0$$

Šiem četriem nehomogeniem nolīdzinājumiem ar trijiem nezināmiem vajaga kopēji pastāvēt, bet tas iespējams tad, ja

$$D = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(46)$$

Tā tad, ja četras plāknes krustojās vienā punktā, tad vajaga būt izpildītam augšējam noteikumam.

24. Ja četri punkti $P_1 = x_1|y_1|z_1$, $P_2 = x_2|y_2|z_2$, $P_3 = x_3|y_3|z_3$ un $P_4 = x_4|y_4|z_4$ atrodās plāknē $Ax + By + Cz + D = 0$, tad viņu koordinātām vajaga apmierināt plāknes nolīdzinājumu, ko izpildot dabūjam četrus nolīdzinājumus

$$\begin{aligned} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D &= 0 \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D &= 0 \\ Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D &= 0 \\ Ax_4 + By_4 + Cz_4 + D &= 0 \end{aligned}$$

Attiecībā uz četriem lielumiem A,B,C,D šie četri nolīdzinājumi ir homogeni un nolīdzinājumi var kopēji pastāvēt tikai tad, ja determinants

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(47)$$

25. Plāknes $E = 0$ attālums d no punkta $P_0 = x_0|y_0|z_0$ dots ar formulu (16)

$$d = x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p$$

Formula rāda, ka d dabūjams, ieliekot plāknes normālnolīdzinājumā punkta P_0 koordinātas.

Ja plāknes $E = 0$ nolīdzinājums dots vispārējā veidā, tad viņu pārveidojam normālveidā un d tad dabūjam kā norādīts. Tā tad, ja

$$E \equiv Ax + By + Cz + D = 0$$

tad

$$N \equiv \frac{Ax + By + Cz + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$$

un

$$d = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(48)$$

Saknes zīme, kā agrāk norādīts, jāņem pretējā D zīmei. Attālums d tiek skaitīts no plāknes līdz punktam.

Ja liekam nolīdzinājumā (48) $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$, tad dabūjam plāknes attālumu no koordinātu sākuma O -

$$d_0 = \frac{D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(49)$$

Agrāk jau izteikts p, koordinātu sākuma O attālums līdz plāknei

$$p = -\frac{D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Tā kā p arvien > 0, tad redzams, ka $d_0 < 0$, bet

$$|p| = |d_0|$$

Ja punkts P_0 un koordinātu sākums 0 atrodās vienā pusē no plāknes $E = 0$, tad d dabū - zīmi, bet ja plākne atrodās starp 0 un P_1, tad d dabū + zīmi.

Divu parallēlu plākņu

$$Ax + By + Cz + D_1 = 0$$
$$Ax + By + Cz + D_2 = 0$$

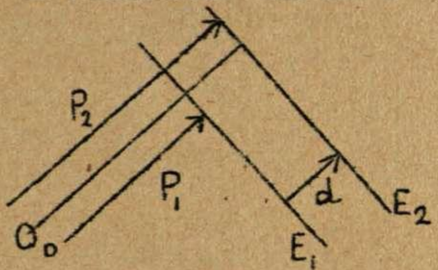
attālumu d dabūjam

$$d = p_2 \pm p_1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(50)$$

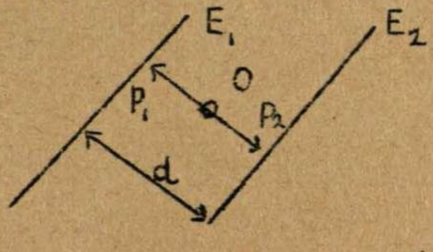
Plākņu asu nogriežņi tiek izteikti

$$a = -\frac{D_1}{A} \quad \text{un} \quad a' = -\frac{D_2}{A}$$
$$b = -\frac{D_1}{B} \quad \text{un} \quad b' = -\frac{D_2}{B}$$
$$c = -\frac{D_1}{C} \quad \text{un} \quad c' = -\frac{D_2}{C}$$

Nogriežņiem a_1 un a_2, b_1 un b_2, c_1 un c_2 ir tās pašas zīmes, ja D_1 un D_2 ir ar vienādām zīmēm. Tādā gadijumā abas plāknes atrodās vienā pusē no koordinātu sākuma 0 un formulā (50) jāņem - zīme .



Ja D_1 un D_2 ir ar pretējām zīmēm, tad a_1 un a_2, b_1 un b_2, c_1 un c_2 ir ar pretējām zīmēm un koordinātu sākums 0 atrodās starp abām plāknēm. Formulā (50) tad jāņem + zīme.



Piemērs.

$$E_1 \equiv 2x - y + 2z + 6 = 0$$
$$E_2 \equiv 2x - y + 2z - 7 = 0$$

$$p_1 = -\frac{6}{-\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = -\frac{6}{-\sqrt{9}} = \frac{6}{3} = 2$$

$$p_2 = -\frac{-7}{+\sqrt{9}} = \frac{7}{3}$$

$$d = p_2 + p_1 = \frac{7}{3} + 2 = \frac{13}{3}$$

$$a_1 = -\frac{6}{2} = -3 \ , \quad a_2 = -\frac{-7}{2} = +\frac{7}{2}$$

$$b_1 = -\frac{6}{-1} = +6 \ , \quad b_2 = -\frac{-7}{-1} = -7$$

$$c_1 = -\frac{6}{2} = -3\ ,\quad c_2 = -\frac{-7}{2} = +\frac{7}{2}$$

No asu nogriežņu zīmēm redzams, ka O atrodās starp abām plāknēm.

26. Simbolu N un E geometriska nozīme.

Ar N apzīmējam izteiksmi

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p$$

Ja dota plākne

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$$

tad šīs plāknes attālums d no punkta $P_0 = x_0|y_0|z_0$ tiek dots

$$d = x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p$$

bet ja punkts dots ar koordinātām $P = x|y|z$,tad augšējā izteiksmē jāievieto x_0, y_0, z_0 vietā x, y, z un tad dabūjam

$$d = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p$$

Izteiksmi labajā pusē, saskaņā ar apzīmējumu, atvietojam ar simbolu N un tad

$$d = N$$

Redzams, ka simbols $|N|$ dod punkta $P = x|y|z$ attālumu no plāknes

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$$

vai arī:

$|N|$ ir punkta $P = x|y|z$ attālums no plāknes

$$N = 0$$

Nolīdzinājums $d = N = 0$ izteic, ka punkts ar koordinātām $x|y|z$ atrodās uz plāknes $N = 0$.

Ja

$$E \equiv Ax + By + Cz + D$$

tad

$$N = \frac{Ax + By + Cz + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{E}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

un

$$E = N(\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2})$$

Tā tad simbols E izteic ar faktoru

$$\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

reizinātu plāknes $E = 0$ attālumu no punkta $P = x|y|z$.

27. Plākšņu šķipsna un plākšņu kūlis.

Nolīdzinājumi

$$E_1 = 0 \quad \text{un} \quad E_2 = 0$$

dod divas plāknes, un ja apskatam abus nolīdzinājumus kopēji,

$$\left.\begin{aligned} E_1 &= 0 \\ E_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

tad dabūjam taisni, kuŗā šīs plāknes krustojās. Punkti uz krustošanās taisnes atrodās abās plāknes un tādēļ to koordinātām vajag apmierināt nolīdzinājumus (α), bet tad arī nolīdzinājums

$$E_1 - \lambda E_2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (51)$$

tiks apmierināts ar krustošanās taisnes punktu koordinātām.

Nolīdzinājumā (51) λ ir skaitlis - parametrs. Nolīdzinājums (51) ir pirmās kāpes attiecībā uz x,y,z un tādēļ izteic plākni. Tā kā krustošanās taisnes punktu koordinātas apmierina tik pat nolīdzinājumu $E_1 = 0$,kā ari nolīdzinājumu $E_2 = 0$ un arī nolīdzinājumu

$$E_1 - \lambda E_2 = 0$$

tad ar šo nolīdzinājumu izteiktā plākne iet caur plākņu $E_1 = 0$ un $E_2 = 0$ krustošanās taisni g.Parametrs λ var pieņemt ∞ vērtības. Katrai λ vērtībai atbilst plākne caur g, tā tad nolīdzinājums izteic bezgalīgi daudz plāknes caur $E_1 = 0$ un $E_2 = 0$ krustošanās taisni. Nolīdzinājumu

$$E_1 - \lambda E_2 = 0$$

sauc par plākņu šķipsnas nolīdzinājumu.

Trīs plāknes

$$\left.\begin{array}{l} E_1 = 0 \\ E_2 = 0 \\ E_3 = 0 \end{array}\right\}$$

krustojās vienā punktā P_0 un krustošanās punkta koordinātas apmierina katru no šiem nolīdzinājumiem.

Nolīdzinājums

$$E_1 - \lambda E_2 - \mu E_3 = 0$$

ir pirmās kāpes, tā tad izteic plākni. Bet tā kā plākņu $E_1 = 0$, $E_2 = 0$, $E_3 = 0$ krustpunkta P_0 koordinātas apmierina arī augšējo nolīdzinājumu, tad redzams, ka plākne

$$E_1 - \lambda E_2 - \mu E_3 = 0$$

iet caur punktu P_0.Parametri λ un μ katrs var pieņemt ∞ vērtības un tādēļ nolīdzinājums izteic ∞^2 plāknes, plākņu kūli, caur P_0.

Nolīdzinājumu $\quad E_1 - \lambda E_2 - \mu E_3 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(52)$

sauc par plākņu kūļa nolīdzinājumu.

Piemērs.

Kāds nolīdzinājums plākņu kūlim caur punktu $P = a|b|c$? Punktu P varam domāt veidotu ar triju plākņu krustošanos

$x - a = 0$	plākne	parallēla	yz	plāknei
$y - b = 0$	"	"	zx	"
$z - c = 0$	"	"	xy	"

Meklētais plākņu kūļa nolīdzinājums

$$(x - a) - \lambda(y - b) - \mu(z - c) = 0$$

T a i s n e .

28. Taisne tiek dota kā divu plākņu $E_1 = 0$ un $E_2 = 0$ krustošanās rezultāts.

Koordinātu asu nolīdzinājumus dabūjam, krustojot divas koordinātu plāknes. x asi dabūjam, krustojot xy un zx plāknes. Tādā pat ceļā dabū arī y un z asu nolīdzinājumus.

$$\left.\begin{array}{l} z = 0 \\ y = 0 \end{array}\right\} \text{x ass nol-ms} \qquad \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\} \text{y ass nol-ms} \qquad \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right\} \text{z ass nol-ms}$$

Taisni, parallēlu z asij dabū, krustojot plākni, parallēlu yz plāknei ar plākni, parallēlu zx plāknei. Tāpat dabū, krustojot attiecīgas plāknes, arī taisni, parallēlu x asij un y asij.

$\left.\begin{array}{l} y = b \\ z = c \end{array}\right\}$ taisne $\parallel$ x asij; $\left.\begin{array}{l} x = a \\ z = c \end{array}\right\}$ taisne $\parallel$ y asij; $\left.\begin{array}{l} x = a \\ y = b \end{array}\right\}$ taisne $\parallel$ z asij

Taisni, paralēlu xy plākni dabū, krustojot plākni, paralēlu xy plāknei ar kaut kādu plākni. Tādā pat ceļā dabū arī taisni, paralēlu yz plāknei un taisni, paralēlu zx plāknei.

$\left.\begin{array}{l} z = a \\ E = o \end{array}\right\}$ taisne $\parallel$ xy plāknei; $\left.\begin{array}{l} x = a \\ E = o \end{array}\right\}$ taisne $\parallel$ yz plāknei; $\left.\begin{array}{l} y = b \\ E = 0 \end{array}\right\}$ taisne $\parallel$ zx plāknei

Taisni koordinātu plāknē dabūjam, krustojot plākni E = 0 ar attiecošos koordinātu plākni. Šāda taisne tiek saukta par plāknes E pēdu liniju.

Tā tad

$\left.\begin{array}{l} z = o \\ E = o \end{array}\right\}$ taisne xy plāknē, vai arī plāknes E=O pēdu linija xy plāknē

$\left.\begin{array}{l} x = o \\ E = o \end{array}\right\}$ " yz " " " " E=0 " " yz "

$\left.\begin{array}{l} y = o \\ E = o \end{array}\right\}$ " zx " " " " E=0 " " zx "

Taisnes pēdu punktu xy plāknē dabūjam, liekot taisnes nolīdzinājumā z = o, tad

$$\left.\begin{array}{l} E_1 = 0 \\ E_2 = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\} \text{taisnes pēdu punkts xy plāknē}$$

Analogi dabūjāmi pēdu punkti yz un zx plāknēs.

Taisni caur koordinātu sākumu dabūjam krustojot divas plāknes, kuŗas iet caur koordinātu sākumu

$$\left.\begin{array}{l} A_1 x + B_1 y + C_1 z = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z = 0 \end{array}\right\}$$

29. Nolīdzinājumus

$$\left.\begin{array}{l} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (53)$$

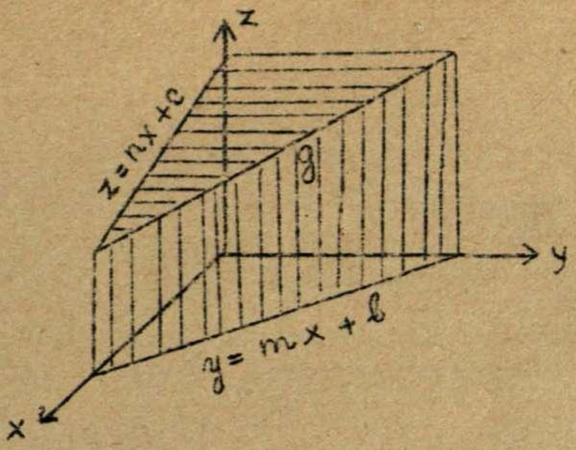
sauc par taisnes nolīdzinājumu vispārējā veidā. Izslēdzot starp šiem nolīdzinājumiem z, dabūjam nolīdzinājumu starp x un y un izslēdzot y, dabūjam nolīdzinājumu ar x un z. Šie nolīdzinājumi pieņem veidu

$$\left.\begin{array}{l} y = mx + b \\ z = nx + c \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (54)$$

Tie izteic to pašu taisni, kā (53) un tiek saukti par taisnes nolīdzinājumu normālā veidā.

Kā redzams no taisnes normālnolīdzinājuma, tad, lai noteiktu taisnes vietu un virzienu telpā, mazākais neatkarīgu parametru skaits ir četri.

Ar nolīdzinājumiem (53) taisne g tiek veidota, krustojot divas vispārējas plāknes, bet ar nolīdzinājumiem (54) tā pati taisne tiek veidota, krustojot divas atsevišķas plāknes. Plākne y = mx + b ir stateniska uz xy plāknes un plākne z = nx + c , stateniska uz zx plāknes, kā tas redzams zīmējumā.



Taisnes g projekcijas uz xy un zx plāknēm dabūjam

$$\left.\begin{aligned} y &= mx + b \\ z &= o \end{aligned}\right\} \text{ taisnes g projekcija uz xy plāknes}$$

un

$$\left.\begin{aligned} z &= nx + c \\ y &= o \end{aligned}\right\} \text{ taisnes g projekcija uz zx plāknes.}$$

Redzams, ka nolīdzinājums

$$y = mx + b$$

apskatīts xy plāknē, dod taisnes projekciju uz xy plāknes. Analogi ieskatams, ka nolīdzinājums

$$z = nx + c$$

dod taisnes g projekciju uz xz plāknes.

Pastāvīgie lielumi m,b,n,c pilnīgi noteic taisnes vietu un virzienu telpā un tiek saukti par taisnes g koordinātām. Tā kā taisnes g projekcijas nolīdzinājums xy plāknē ir

$$y = mx + b$$

tad m ir šīs projekcijas virziena koeficients un b viņas nogrieznis uz y ass.

Tāpat ieskatams, ka n ir taisnes g projekcijas xz plāknē, virziena koeficients un c ir projekcijas nogrieznis uz z ass.

Piemērs.

Pārveidot taisnes vispārēju nolīdzinājumu

$$\left.\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ 2x + y + 2z - 12 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\gamma)$$

normālnolīdzinājumā.

Izslēdzot starp nolīdzinājumiem z, dabūjam

$$2x + y + 2(x + y) - 12 = 0$$

$$4x + 3y - 12 = 0 \quad , \quad y = -\frac{4}{3}x + 4$$

Izslēdzot y dabūjam

$$2x + (z - x) + 2z - 12 = 0$$

$$x + 3z - 12 = 0 \quad , \quad z = -\frac{1}{3}x + 4$$

tā tad nolīdzinājumi

$$\left.\begin{aligned} y &= -\frac{4}{3}x + 4 \\ z &= -\frac{1}{3}x + 4 \end{aligned}\right\}$$

dod meklēto taisnes normālnolīdzinājumu.

Nolīdzinājums

$$y = -\frac{4}{3}x + 4$$

ir dotās taisnes projekcijas nolīdzinājums xy plāknē, $-\frac{4}{3}$ šīs projekcijas virziena koeficients un 4 viņas nogrieznis uz y ass.

Nolīdzinājums $$z = -\frac{1}{3}x + 4$$

ir dotās taisnes projekcijas nolīdzinājums uz zx plāknes, $-\frac{1}{3}$ ir šīs projekcijas virziena koeficients un 4 ir nogrieznis uz z ass.

30. Nolīdzinājumi

$$\left.\begin{aligned} E_1 &\equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ E_2 &\equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{aligned}\right\}$$

dod taisni g_1. Šai taisnei parallēlas taisnes g_2 nolīdzinājumus dabūjam, krustojot plāknes $E_1' = 0$ un $E_2' = 0$, pie kam $E_1' = 0$ parallēla $E_1 = 0$ un $E_2' = 0$ parallēla $E_2 = 0$.

$E_1' = 0$ dabūjam, liekot nolīdzinājumā $E_1 = 0$ D_1 vietā D_1' un $E_2' = 0$ dabūjam, liekot nolīdzinājumā $E_2 = 0$ D_2 vietā D_1', un tad

$$\left.\begin{aligned} E_1' &\equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1' = 0 \\ E_2' &\equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2' = 0 \end{aligned}\right\}$$

ir taisnes g_2 nolīdzinājums, kuŗa parallēla taisnei g_1. Salīdzinot taisnes g_1 un taisnes g_2 nolīdzinājumus redzam, ka tie atšķirās tikai absolūtā loceklī.

Piemērs.

Taisnes g_1 nolīdzinājumi

$$\left.\begin{aligned} 2x - y + 4z - 5 &= 0 \\ x + 2y - 7z + 8 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Tai parallēlas taisnes g_2 nolīdzinājumi

$$\left.\begin{aligned} 2x - y + 4z + D_1 &= 0 \\ x + 2y - 7z + D_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Ja noteicam, ka taisnei g_2 jāiet caur punktu $P = 1|2|4$, tad šī punkta koordinātām vajag apmierināt taisnes g_2 nolīdzinājumu. Ievietojot P koordinātas g_2 nolīdzinājumā, dabūjam D_1 un D_2

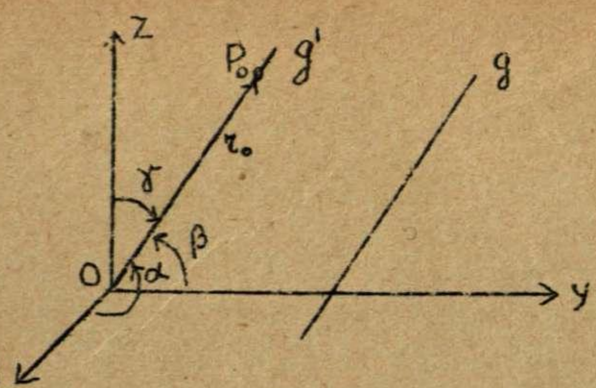
$$2.1 - 2 + 4.4 + D_1 = 0 \quad , \quad D_1 = -16$$

$$1 + 2.2 - 7.4 + D_2 = 0 \quad , \quad D_2 = +23$$

un tad taisnes g_2 nolīdzinājums, kuŗa parallēla taisnei g_1 un iet caur P , ir

$$\left.\begin{aligned} 2x - y + 4z - 16 &= 0 \\ x + 2y - 7z + 23 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

31. Taisnes g virzienu dabūjam, atrodot virzienu taisnei g', kuŗa iet caur koordinātu sākumu un parallēla taisnei g.



Apzīmējam taisnes g' virziena leņķus ar α,β,γ. Pieņemam uz g' pēc patikas punktu $P_o = x_o | y_o | z_o$ ar radiusu vektoru r_o ,tad

$$\cos\alpha = \frac{x_o}{r_o} \quad , \quad \cos\beta = \frac{y_o}{r_o} \quad , \quad \cos\gamma = \frac{z_o}{r_o}$$

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = \frac{x_o}{r_o} : \frac{y_o}{r_o} : \frac{z_o}{r_o} = x_o : y_o : z_o \quad \ldots\ldots\ldots (m)$$

Ja taisnes g nolīdzinājums ir

$$\left.\begin{array}{l} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{array}\right\}$$

tad, tā kā g' $\|$ g un g' iet caur koordinātu sākumu, g' nolīdzinājums ir

$$\left.\begin{array}{l} A_1 x + B_1 y + C_1 z = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z = 0 \end{array}\right\}$$

Punkts P_o atrodās uz g',tādēļ viņa koordinātām vajag apmierināt taisnes g' nolīdzinājumu, tā tad

$$A_1 x_o + B_1 y_o + C_1 z_o = 0$$

$$A_2 x_o + B_2 y_o + C_2 z_o = 0$$

no šiem diviem homogeniem nolīdzinājumiem dabūjam

$$x_o : y_o : z_o = \left|\begin{array}{ccc} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ + & - & + \end{array}\right| = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$$

Ievietojot šo izteiksmi attiecībā (m),dabūjam

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots (55)$$

Apzīmējot determinantus ar $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ un ievērojot formulu (12), dabūjam

$$\left.\begin{array}{l} \cos\alpha = \dfrac{\Delta_1}{\pm\sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2}} \\ \cos\beta = \dfrac{\Delta_2}{\pm\sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2}} \\ \cos\gamma = \dfrac{\Delta_3}{\pm\sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2}} \end{array}\right\} \ldots\ldots (56)$$

Piemērs.

Kādi ir virziena koeficienti taisnei

$$2x - 3y - z - 4 = 0$$
$$x + y - 2z + 3 = 0$$

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ + & - & + \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 7 : 3 : 5$$

$$\cos\alpha = \frac{7}{\pm\sqrt{7^2 + 3^2 + 5^2}} = \frac{7}{\pm\sqrt{83}}\ ; \ \cos\beta = \frac{3}{\pm\sqrt{83}}\ ; \ \cos\gamma = \frac{5}{\pm\sqrt{83}}$$

Zīmes augšējās formulās lietojamas vai nu visas + ,vai visas −.

Taisnes g bezgalīgi tālo punktu varam darbūt, ejot no koordinātu sākuma taisnes g vieziena ceļu $u = \infty$.

Bezgalīgi tāla punkta U koordinātas

$$U = u\cos\alpha | u\cos\beta | u\cos\gamma\ ; \quad u = \infty$$

Dažreiz izdevīgi rēķinos ievest bezgalīgi tālo punktu,piemēram:

Kādai vajag būt parametra λ vērtībai, lai taisne

$$\left.\begin{aligned} \lambda x - y + z &= 0 \\ x - \lambda y + z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

būtu parallēla plāknei

$$E \equiv 4x - 4y + z - 6 = 0$$

Ja taisne parallēla plāknei $E = 0$, tad taisnes bezgalīgi tālam punktam U vajaga atrasties plāknē $E = 0$.Lai dabūtu taisnes bezgalīgi tālā punkta U koordinātas, dabūjam taisnes virziena koeficientus

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ + & - & + \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -1 : -\lambda : (-\lambda^2 + 1) = 1 : \lambda : (\lambda^2 - 1)$$

tad

$$U = u\,1 \,|\, u\lambda \,|\, u(\lambda^2 - 1)$$

Ieliekot šīs vērtības plāknes nolīdzinājumā, dabūjam

$$4u - 4u\lambda + u(\lambda^2 - 1) - 6 = 0$$

nodalot ar u un liekot $u = \infty$,dabūjam

$$4 - 4\lambda + \lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda_1 = 3 \quad ; \quad \lambda_2 = 1$$

Piemērs.

Kāds ir plāknes nolīdzinājums, kuŗa iet caur $P = 0|1|0$ un stateniska uz taisnes g

$$\left.\begin{aligned} 2x - y + z &= 0 \\ x + y - 2z - 1 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Ja plākne $\perp$ uz g, tad viņai tādi paši virzienu koeficienti kā taisnei g.

Taisnes virzienu koeficientu attiecība

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ + & - & + \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 : 5 : 3$$

Meklētās plāknes nolīdzinājums

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Saskaņā ar formulu (41)

$$A : B : C = \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma$$

$$A : B : C = 1 : 5 : 3$$

$$A = \rho 1 \; ; \; B = \rho 5 \; ; \; C = \rho 3$$

Plāknes nolīdzinājums caur doto punktu P

$$A(x - o) + B(y - 1) + C(z - o) = 0$$

Ieliekot šinī nolīdzinājumā A,B,C vērtības, dabūjam meklēto nolīdzinājumu

$$\rho 1(x - o) + \rho 5(y - 1) + \rho 3(z - 0) = 0$$

$$x + 5y + 3z - 5 = 0$$

32. Ja taisnes nolīdzinājums dots normālveidā

$$\left.\begin{array}{l} y = mx + b \\ z = nx + c \end{array}\right\}$$

tad pārrakstam to

$$\left.\begin{array}{l} mx - y + oz - b = 0 \\ nx + oy - z - c = 0 \end{array}\right\}$$

Saskaņā ar formulu (55) dabūjam

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = \begin{vmatrix} m & -1 & o \\ n & o & -1 \\ + & - & + \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & o \\ o & -1 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} m & o \\ n & -1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} m & -1 \\ n & o \end{vmatrix}$$

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = 1 : m : n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (57)$$

$$\cos\alpha = \rho.1 \; ; \; \cos\beta = \rho.m \; ; \cos\gamma = \rho.n$$

$$\rho = \pm\sqrt{1^2 + m^2 + n^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1^2 + m^2 + n^2}} \; ; \; \cos\beta = \frac{m}{\pm\sqrt{1 + m^2 + n^2}} \; ; \cos\gamma = \frac{n}{\pm\sqrt{1 + m^2 + n^2}} \quad ..(58)$$

Piemērs.

Kādi virziena koeficienti taisnei

$$\left.\begin{array}{l} y = 3x - 1 \\ z = x - 3 \end{array}\right\}$$

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = 1 : 3 : 1$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{1}{\pm\sqrt{11}} \; ; \; \cos\beta = \frac{3}{\pm\sqrt{11}} \; ; \; \cos\gamma = \frac{1}{\pm\sqrt{11}}$$

Ja divas taisnes parallēlas,tad to nolīdzinājumi atšķirās absolūtos locekļos. Taisnei

$$\left.\begin{aligned} y &= mx + b \\ z &= nx + c \end{aligned}\right\}$$

parallēlas taisnes nolīdzinājums

$$\left.\begin{aligned} y &= mx + b' \\ z &= nx + c' \end{aligned}\right\}$$

33. Taisnes nolīdzinājumu caur doto punktu $P_0 = x_0|y_0|z_0$ ar dotu virzienu $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ dabūjam šādi.

Pieņemam uz taisnes pēc patikas punktu $P = x|y|z$,tā attālumu no P_0 apzīmējam ar λ (mainīgs parametrs).

Gabala λ projekcijas uz koordinātu asīm tad ir

$$x - x_0 \;, \quad y - y_0 \;, \quad z - z_0$$

un virziena koeficienti

$$\cos\alpha = \frac{x - x_0}{\lambda} \;, \quad \cos\beta = \frac{y - y_0}{\lambda} \;, \quad \cos\gamma = \frac{z - z_0}{\lambda}$$

No šejienes dabūjam

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda\cos\alpha \\ y &= y_0 + \lambda\cos\beta \\ z &= z_0 + \lambda\cos\gamma \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(59)$$

Šos trīs nolīdzinājumus sauc par taisnes nolīdzinājumu parametra veidā (λ parametrs).

No augšējiem trim nolīdzinājumiem dabūjam taisnes nolīdzinājumu virziena veidā

$$\frac{x - x_0}{\cos\alpha} = \frac{y - y_0}{\cos\beta} = \frac{z - z_0}{\cos\gamma} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(60)$$

Ja dots,ka

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = L : M : N$$

tad

$$\cos\alpha = \rho L \;, \quad \cos\beta = \rho M \;, \quad \cos\gamma = \rho N$$

un taisnes nolīdzinājums dabū veidu

$$\frac{x - x_0}{\rho L} = \frac{y - y_0}{\rho M} = \frac{z - z_0}{\rho N}$$

reizinot ar ρ dabūjam

$$\frac{x - x_0}{L} = \frac{y - y_0}{M} = \frac{z - z_0}{N} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(61)$$

Ja dots taisnes nolīdzinājums beidzamā veidā,tad tās virziena koeficientus dabūjam no izteiksmes

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = L : M : N \quad \ldots\ldots(61^{a})$$

Taisnes nolīdzinājumu caur $P_1 = x_1|y_1|z_1$ un $P_2 = x_2|y_2|z_2$ dabūjam sekojošā ceļā. Šīs taisnes virziena koeficienti dabūjami no

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = x_2 - x_1 : y_2 - y_1 : z_2 - z_1$$

Nolīdzinājumā

$$\frac{x - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y - y_1}{\cos\beta} = \frac{z - z_1}{\cos\gamma} \text{ (taisne caur } x_1|y_1|z_1)$$

ievedam virzienu koeficientiem proporcionālos lielumus $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$ un dabūjam taisnes nolīdzinājumu caur diviem punktiem

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad \text{...........(62)}$$

Taisnes nolīdzinājumu caur diviem punktiem dabūjam arī parametra veidā, ievērojot, ka tekošais punkts $P = x|y|z$ daļa gabalu P_1P_2 attiecībā λ un tad saskaņā ar Nr.10

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\lambda x_2 - x_1}{\lambda - 1} \\ y &= \frac{\lambda y_2 - y_1}{\lambda - 1} \\ z &= \frac{\lambda z_2 - z_1}{\lambda - 1} \end{aligned}\right\} \quad \text{..............(63)}$$

Piemērs.

Kāds ir taisnes nolīdzinājums caur $P_1 = 2|0|1$ un $P_2 = -1|0|3$

$$\frac{x - 2}{-1 - 2} = \frac{y - 0}{0 - 0} = \frac{z - 1}{3 - 1}$$

$$\frac{x - 2}{-3} = \frac{y - 0}{0} = \frac{z - 1}{2}$$

Šeit vidējais dalijums dabū vērtību ∞. Bet ievērojot, ka pie galīgiem x un z pirmais un trešais dalijums dod galīgas vērtības, tādēļ arī vidējam dalijumam vajaga dot galīgu vērtību, kas iespējams, ja $y = 0$.

$$\frac{x - 2}{-3} = \frac{z - 1}{2}$$

dod

$$2(x - 2) = -3(z - 1)$$

un

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3z - 7 &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}\right\}$$

dod taisnes nolīdzinājumu dotā gadijumā.

34. Divas taisnes šķērsojās vispārējā gadijumā, viņām tad nav kopēja punkta.

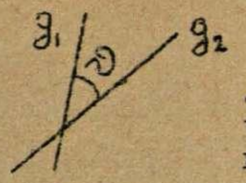
Taisni g_1 dabūjam ar plākņu $E_1 = 0$ un $E_2 = 0$ krustošanu; tāpat taisni g_2 dabūjam ar plākņu $E_3 = 0$ un $E_4 = 0$ krustošanu. Ja taisnes krustojās, tad krustošanās punkts ir g_1 un g_2 kopējs punkts, caur kuŗu tad arī iet plāknes $E_1 = 0$, $E_2 = 0$, $E_3 = 0$ un $E_4 = 0$.

Šie četri nolīdzinājumi ir nehomogeni attiecībā uz x,y,z un tādēļ var kopēji pastāvēt, ja viņu koeficientu determinants

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{............(64)}$$

Tā tad augšējā izteiksme ir noteikums, kuŗu izpilda divas krustojošas taisnes.

35. Leņķi starp taisnēm g_1 un g_2 dabū no formulas



$$\cos\vartheta = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2$$

Ja taisnes nolīdzinājumi doti vispārējā veidā, tad virziena koeficienti aprēķināmi kā agrāk norādīts un ieliekāmi augšējā formulā.

Ja taisnes nolīdzinājumi doti normalā veidā, tad

$$\cos\alpha_1 : \cos\beta_1 : \cos\gamma_1 : 1 = 1 : m_1 : n_1 : \pm\sqrt{1 + m_1^2 + n_1^2}$$

$$\cos\alpha_2 . \cos\beta_2 . \cos\gamma_2 . 1 = 1 : m_2 : n_2 . \pm\sqrt{1 + m_2^2 + n_2^2}$$

un

$$\cos\vartheta = \frac{1 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{1 + m_1^2 + n_1^2} \; . \; \sqrt{1 + m_2^2 + n_2^2}} \quad ....(65)$$

Taisne g_1 dota caur punktu $P_1 = x_1 | y_1 | z_1$ un taisne g_2 caur punktu $P_2 = x_2 | y_2 | z_2$, tad viņu nolīdzinājumi ir

$$\frac{x - x_1}{L_1} = \frac{y - y_1}{M_1} = \frac{z - z_1}{N_1}$$

$$\frac{x - x_2}{L_2} = \frac{y - y_2}{M_2} = \frac{z - z_2}{N_2}$$

un

$$\cos\vartheta = \frac{L_1 L_2 + M_1 M_2 + N_1 N_2}{\sqrt{L_1^2 + M_1^2 + N_1^2} \quad \sqrt{L_2^2 + M_2^2 + N_2^2}} \quad ......(66)$$

Ja taisnes stateniskas, tad $\vartheta = 90^\circ$ un $\cos\vartheta = 0$, bet tad pirmā gadijumā (65)

$$1 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0 \quad ....(67$$

un otrā gadijumā (66)

$$L_1 L_2 + M_1 M_2 + N_1 N_2 = 0 \quad ....(68)$$

Ja taisnes parallēlas, tad pirmā gadijumā

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= m_2 \\ n_1 &= n_2 \end{aligned}\right\} \quad ....(69)$$

un otrā gadījienā

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{M_1}{M_2} = \frac{N_1}{N_2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(70)$$

Piemērs.

Kādu leņķi veido taisnes

$$\left.\begin{array}{l} x - 2y - z + 2 = 0 \\ x + y - z - 1 = 0 \end{array}\right\} \text{ un } \left.\begin{array}{l} x - 2y + z = 0 \\ 2x - y - 2z + 5 = 0 \end{array}\right\}$$

$$\cos\alpha_1 : \cos\beta_1 : \cos\gamma_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ + & - & + \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3:0:3$$

$$\cos\alpha_2 . \cos\beta_2 . \cos\gamma_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ + & - & + \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 5:4:3$$

$$\cos\vartheta = \frac{3\cdot 5 + 0\cdot 4 + 3\cdot 3}{\sqrt{3^2 + 0^2 + 3^2} \,.\, \sqrt{5^2 + 4^2 + 3^2}} = \frac{4}{5}$$

Piemērs.

Kāds taisnes g nolīdzinājums, kuŗa iet caur $P = a|b|c$ un stateniska uz taisnēm g_1 un g_2 ?

$$g_1 \left\{ \frac{x - x_1}{L_1} = \frac{y - y_1}{M_1} = \frac{z - z_1}{N_1} \right. \quad \text{un } g_2 \left\{ \frac{x - x_2}{L_2} = \frac{y - y_2}{M_2} = \frac{z - z_2}{N_2} \right.$$

Meklētās taisnes g nolīdzinājums caur punktu P ir

$$\frac{x - a}{L} = \frac{y - b}{M} = \frac{z - c}{N} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\alpha)$$

Šeit L,M,N, lielumi, proporcionāli meklētās taisnes koeficientiem, nav zināmi, bet jādabū no uzdevuma datiem $g \perp g_1$ un $g \perp g_2$

Ja $g \perp$ uz g_1 ,tad

$$LL_1 + MM_1 + NN_1 = 0$$

Ja $g \perp$ uz g_2 ,tad

$$LL_2 + MM_2 + NN_2 = 0$$

Nezināmo lielumu L,M,N attiecības dabūjam no šiem diviem homogeniem nolīdzinājumiem

$$L : M : N = \begin{vmatrix} L_1 & M_1 & N_1 \\ L_2 & M_2 & N_2 \\ + & - & + \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} M_1 & N_1 \\ M_2 & N_2 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} L_1 & N_1 \\ L_2 & N_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} L_1 & M_1 \\ L_2 & M_2 \end{vmatrix} \qquad \ldots\ldots(71)$$

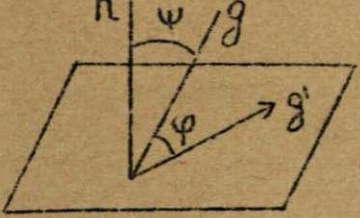
Ievērojot šo izteiksmi, taisnes meklēto nolīdzinājumu (α) varam rakstīt

$$\frac{x - a}{\begin{vmatrix} M_1 & N_1 \\ M_2 & N_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - b}{\begin{vmatrix} L_1 & N_1 \\ L_2 & N_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - c}{\begin{vmatrix} L_1 & M_1 \\ L_2 & M_2 \end{vmatrix}} \qquad \ldots\ldots\ldots(72)$$

Šis nolīdzinājums dod uzdevuma atrisinājumu.

Taisne un plākne.

36. Leņķis starp taisni g un plākni ir leņķis φ, starp taisni g un viņas projekciju g' uz šīs plāknes. Leņķis $\psi = 90^0 - \varphi$



$$\cos\psi = \cos(90^0 - \varphi) = \sin\varphi$$

Ja plāknes virziena koeficienti ir $\cos\alpha_1, \cos\beta_1, \cos\gamma_1$ un taisnes g virziena koeficienti $\cos\alpha_2, \cos\beta_2, \cos\gamma_2$, tad

$$\sin\varphi = \cos\psi = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 \quad \text{........(73)}$$

Tā tad, ja doti plāknes un taisnes nolīdzinājumi

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$$\frac{x - x_1}{L} = \frac{y - y_1}{M} = \frac{z - z_1}{N}$$

Saskaņā ar formulām (39) un (61^a) dabūjam

$$\sin\varphi = \frac{AL + BM + CN}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{L^2 + M^2 + N^2}} \quad \text{........(74)}$$

Ja taisne g parallēla plāknei E, tad $\varphi = o$, $\sin\varphi = o$ un

$$AL + BM + CN = 0 \quad \text{...............(75)}$$

ir noteikums, lai g būtu parallēla plāknei E = 0.

Ja taisne g stateniska uz plāknes E = 0, tad

$$\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2, \quad \cos\beta_1 = \cos\beta_2, \quad \cos\gamma_1 = \cos\gamma_2$$

$$\cos\alpha_1 = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; \cos\beta_1 = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; \cos\gamma_1 = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\cos\alpha_2 = \frac{L}{\pm\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}; \cos\beta_2 = \frac{M}{\pm\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}; \cos\gamma_2 = \frac{N}{\pm\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}$$

Seko

$$\frac{A}{L} = \frac{B}{M} = \frac{C}{N} \quad \text{.....................(76)}$$

Ja taisnes nolīdzinājums dots vispārējā veidā vai normālveidā, tad ar agrāk norādītiem paņēmieniem jāizrēķina $\cos\alpha_2, \cos\beta_2$ un $\cos\gamma_2$ un jāievieto formulā (73).

37. Taisnes g krustpunktu ar plākni E = 0 dabū atslēdzot attiecībā uz x,y,z nolīdzinājumus

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \quad \text{(plāknes nolīdzinājums)}$$

$$\left.\begin{aligned} A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \\ A_3 x + B_3 y + C_3 z + D_3 = 0 \end{aligned}\right\} \text{(taisnes nolīdzinājums)}$$

jo krustpunkta koordinātas kopējas visām trijām plāknēm. Krustpunkta koordinātas dabūjam no izteiksmes

$$x : y : z : 1 = \left| \begin{matrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ - & + & - & + \end{matrix} \right| \quad \text{..............(74)}$$

Ja taisnes nolīdzinājumi doti normālveidā, tad rakstam viņus

$$\left.\begin{aligned} mx - y + b = 0 \\ nx - z + c = 0 \end{aligned}\right\}$$

un koeficientus ievietojam augšējā izteiksmē.

Ja taisnes nolīdzinājums dots veidā

$$\frac{x - x_1}{L} = \frac{y - y_1}{M} = \frac{z - z_1}{N} = s$$

tad

$$x = x_1 + Ls \;,\; y_1 = y + Ms \;,\; z_1 = z + Ns \quad \ldots\ldots\ldots (u)$$

Krustpunkts atrodās arī uz plāknes un tādēļ, ja punkts $P = x|y|z$ ir krustpunkts, tad viņa koordinātām vajag apmierināt arī plāknes nolīdzinājumu; tā tad

$$A(x_1 + Ls) + B(y_1 + Ms) + C(z_1 + Ns) + D = 0$$

seko

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D + s(AL + BM + CN) + D = 0$$

$$s = - \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{AL + BM + CN}$$

ievietojot s vērtības nolīdzinājumos (u), dabūjam krustpunkta koordinātas.

Ja taisne parallēla plāknei, tad apakšdeterminants

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (75)$$

jo tad vismaz viena krustpunkta koordināta būs ∞.

38. Plāknes nolīdzinājumu caur dotu taisni dabū, veidojot plākņu šķipsnu caur doto taisni g.

$$\left.\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{aligned}\right\} \text{taisne } g$$

Plākņu šķipsnas nolīdzinājums

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 - \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

Pie katras λ vērtības šis nolīdzinājums izteic plākni caur taisni g.

Piemērs.

Dabūt plāknes nolīdzinājumu, kuŗa iet caur punktu $P_0 = 2|0|1$ un taisni

$$\left.\begin{aligned} 2x - y + z = 0 \\ x + y - 2z - 1 = 0 \end{aligned}\right\} \text{taisne } g.$$

Taišņu šķipsna caur g

$$2x - y + z - \lambda(x + y - 2z - 1) = 0 \quad \ldots\ldots (u)$$

Šinī šķipsnā atrodās arī meklētā plākne. Tā kā P_0 jāatrodās meklētā plāknē, tad P_0 koordinātām vajag apmierināt šīs plāknes nolīdzinājumu (u), tā tad

$$2.2 - 1.0 + 1 - \lambda(1.2 + 1.0 - 2.1 - 1) = 0$$

$$\lambda = \frac{5}{-1} = -5$$

Ievietojot šo λ vērtību nolīdzinājumā (u), dabūjam meklēto nolīdzinājumu

$$2x - y + z - (-5)(x + y - 2z - 1) = 0$$

$$7x + 4y - 9z - 5 = 0$$

Piemērs.

Dabūt plāknes nolīdzinājumu, kuŗa iet caur taisni g

$$\frac{x - x_1}{L} = \frac{y - y_1}{M} = \frac{z - z_1}{N}$$

un stāv $\perp$ uz plāknes

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(k)$$

Veidojam plākņu kūli caur $P = x_1 | y_1 | z_1$

$$(x - x_1) - \lambda(y - y_1) - \mu(z - z_1) = 0 \quad \ldots..(m)$$

Izņemam no šī kūļa plākni, kuŗa parallēla g, tad saskaņā ar (75) jāizpilda noteikums

$$L.1 + M(-\lambda) + N(-\mu) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(o)$$

lai plākne (m) būtu arī $\perp$ uz dotās plāknes (k),tad saskaņā ar (43) jāizpilda arī noteikums

$$A1 + B(-\lambda) + C(-\mu) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(p)$$

Divi nezināmie λ un μ atrodās trijos nehomogenos nolīdzinājumos (m),(o),(p). Šie nolīdzinājumi var kopēji pastāvēt,ja visu koeficientu determinants ir 0, tā tad

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ L & M & N \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0$$

Attīstot šo determinantu attiecībā uz pirmo rindu, dabūjam pirmās kāpes nolīdzinājumu starp x,y,z, kuŗš tad ir meklētās plāknes nolīdzinājums.

39. Plāknes nolīdzinājumu caur divām parallēlām taisnēm g_1 un g_2 dabū sekojošā kārtā

$$\frac{x - x_1}{L} = \frac{y - y_1}{M} = \frac{z - z_1}{N} \quad \text{(taisne } g_1\text{)}$$

$$\frac{x - x_2}{L} = \frac{y - y_2}{M} = \frac{z - z_2}{N} \quad \text{(taisne } g_2\text{)}$$

Liekam plākni caur $P_1 = x_1 | y_1 | z_1$

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$$

Tā kā šī plākne jāved parallēli taisnēm g_1 un g_1 ,tad vajadzīgs, lai būtu izpildīts noteikums

$$AL + BM + CN = 0$$

Meklētai plāknei jāiet arī caur $P_2 = x_2 | y_2 | z_2$,tādēļ arī

$$A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) = 0$$

Šie trīs, attiecībā uz A,B,C homogeni nolīdzinājumi var kopēji pastāvēt, ja

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ L & M & N \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Attīstot determinantu pēc pirmās rindas, dabūjam meklētās plāknes nolīdzinājumu.

40. Vest taisni no punkta $P = a|b|c$ $\perp$ uz taisnes

$$\frac{x - x_1}{L} = \frac{y - y_1}{M} = \frac{z - z_1}{N} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(\alpha)$$

Meklētais statenis ir dabūjams kā krustošanās taisne starp plāknēm, no kuŗām viena iet caur doto taisni un doto punktu P un otra iet caur doto punktu P un stateniska uz dotās taisnes.

Plākne caur $P = a|b|c$ un $\perp$ uz taisnes (α)

$$L(x - a) + M(y - b) + N(z - c) = 0 \quad \ldots\ldots.(\beta)$$

Plākne caur taisni (α) un $P = a|b|c$:

liekam plāknei iet caur $P = a|b|c$

$$A(x - a) + B(y - b) + C(z - c) = 0 \quad \ldots\ldots.(\gamma)$$

Tā kā šī plākne parallēla taisnei (α), tad vajaga būt

$$AL + BM + CN = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(\delta)$$

un tā kā plākne (γ) iet arī caur taisni (α), tad viņai jāiet arī caur $P_1 = x_1|y_1|z_1$,kas dod

$$A(x_1 - a) + B(y_1 - b) + C(z_1 - c) = 0 \quad \ldots\ldots.(\varepsilon)$$

Plāknes nolīdzinājumu, caur taisni (α) un punktu $P = a|b|c$ dabūjam ievērojot, ka trīs homogeni nolīdzinājumi (γ), (δ), (ε) ar nezināmiem A,B,C var kopēji pastāvēt, ja koeficientu determinants

$$\begin{vmatrix} x - a & y - b & z - c \\ L & M & N \\ x_1 - a & y_1 - b & z_1 - c \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots.(\lambda)$$

Nolīdzinājumi (β) un (λ) dod meklēto stateņa nolīdzinājumu.

41. Dabūt plāknes nolīdzinājumu, kuŗa iet caur $P = a|b|c$ un parallēla taisnēm g_1 un g_2

$$\frac{x - x_1}{L_1} = \frac{y - y_1}{M_1} = \frac{z - z_1}{N_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\alpha)$$

$$\frac{x - x_2}{L_2} \quad \frac{y - y_2}{M_2} \quad \frac{z - z_2}{N_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\beta)$$

Vedam plākni caur P ar nolīdzinājumu (γ). Ar nolīdzinājumu (δ) izteicam, ka šī plākne ir parallēla g_1 un ar nolīdzinājumu (ε) izteicam, ka plākne ir parallēla g_2

$$A(x - a) + B(y - b) + C(y - c) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots(\gamma)$$

$$AL_1 \quad + \quad BM_1 \quad + \quad CN_1 \quad = 0 \quad \ldots\ldots\ldots(\delta)$$

$$AL_2 \quad + \quad BM_2 \quad + \quad CN_2 \quad = 0 \quad \ldots\ldots\ldots(\varepsilon)$$

Nolīdzinājumi (γ),(δ),(ε) homogeni attiecībā uz A,B,C un var kopēji pastāvēt, ja

$$\begin{vmatrix} x - a & y - b & z - c \\ L_1 & M_1 & N_1 \\ L_2 & M_2 & N_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots(\lambda)$$

Izteiksme (λ) dod meklētās plāknes nolīdzinājumu.

42. Dabūt plāknes nolīdzinājumu, kuŗa iet caur taisni g_1

$$\frac{x - x_1}{L_1} = \frac{y - y_1}{M_1} = \frac{z - z_1}{N_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(\alpha)$$

un parallēla taisnei g_2

$$\frac{x - x_2}{L_2} = \frac{y - y_2}{M_2} = \frac{z - z_2}{N_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(\beta)$$

Plāknes nolīdzinājums caur taisnes g_1 punktu $P_1 = x_1|y_1|z_1$ ir

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0 \ldots\ldots(\gamma)$$

Tā kā šī plākne parallēla taisnei g_1, tad vajaga būt

$$AL_1 + BM_1 + CN_1 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\delta)$$

Plākne (γ) parallēla arī taisnei g_2 un tādēļ

$$AL_2 + BM_2 + CN_2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\varepsilon)$$

Nolīdzinājumi (γ),(δ),(ε) attiecībā uz A,B,C homogeni,tādēļ var kopēji pastāvēt, ja

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ L_1 & M_1 & N_1 \\ L_2 & M_2 & N_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots(\lambda)$$

Nolīdzinājums (λ) dod meklēto plākni.

43. Noteikums, kad divas taisnes krustojās.

Dotas taisnes

$$\frac{x - x_1}{L_1} = \frac{y - y_1}{M_1} = \frac{z - z_1}{N_1} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots(\alpha)$$

$$\frac{x - x_2}{L_2} = \frac{y - y_2}{M_2} = \frac{z - z_2}{N_2} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots(\beta)$$

Liekam plākni caur taisni (α) parallēlu taisnei (β)

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ L_1 & M_1 & N_1 \\ L_2 & M_2 & N_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots(\gamma)$$

Ja taisnes (α) un (β) krustojās, tad punktam $P_2 = x_2|y_2|z_2$ vajaga atrasties uz plāknes (γ) un tādēļ tā koordinātām vajaga apmierināt nolīdzinājumu (γ), tas dod

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ L_1 & M_1 & N_1 \\ L_2 & M_2 & N_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots(\delta)$$

Izteiksme (δ) dod noteikumu, kuŗam vajag būt izpildītam, ja taisnes (α) un (β) krustojās.

44. Īsākais attālums d starp divām taisnēm.

Dotas taisnes

$$\frac{x - x_1}{L_1} = \frac{y - y_1}{M_1} = \frac{z - z_1}{N_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(\alpha)$$

$$\frac{x - x_2}{L_2} = \frac{y - y_2}{M_2} = \frac{z - z_2}{N_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(\beta)$$

Meklētais attālums dabūjams kā statenis no kaut kuŗa taisnes (β) punkta, piemēram $P_2 = x_2|y_2|z_2$, uz plāknes, kuŗa iet caur taisni (α) un parallēla taisnei (β).

Tā tad plāknes nolīdzinājums, kuŗa iet caur taisni (α) un paralēla taisnei (β)

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ L_1 & M_1 & N_1 \\ L_2 & M_2 & N_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{........}(\gamma)$$

Attīstot determinantu, dabūjam

$$\begin{vmatrix} M_1 & N_1 \\ M_2 & N_2 \end{vmatrix}(x-x_1) + (-)\begin{vmatrix} L_1 & N_1 \\ L_2 & N_3 \end{vmatrix}(y-y_1) + \begin{vmatrix} L_1 & M_1 \\ L_2 & M_2 \end{vmatrix}(z-z_1) = 0 \quad \text{..........}(\delta)$$

Plāknes (γ) attālums d no taisnes (β) punkta $P = x_2|y_2|z_2$ ir

$$d = \frac{\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ L_1 & M_1 & N_1 \\ L_2 & M_2 & N_2 \end{vmatrix}}{\pm\sqrt{\begin{vmatrix} M_1 & N_1 \\ M_2 & N_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} L_1 & N_1 \\ L_2 & N_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} L_1 & M_1 \\ L_2 & M_2 \end{vmatrix}^2}}$$

Virsmu veidošana.

45. Līkne telpā tiek dota ar diviem nolīdzinājumiem, saturošiem koordinātas x,y,z. Ja nolīdzinājumos atrodās arī mainīgs parametrs u, tad nolīdzinājumi dod ne vienu vien līkni, bet vienkāršu bezgalīgu daudzumu līkņu. Tā tad, ja nolīdzinājumos

$$\begin{aligned} F(x,y,z,u) &= 0 \\ \varphi(x,y,z,u) &= 0 \end{aligned} \quad \text{...............}(1)$$

pārejam nepārtraukti no kādas parametra u vērtības uz citu vērtību, tad ar nolīdzinājumiem (1) izteiktā līkne kustās nepārtraukti un veido virsmu. Kustošo līkni sauc par veiduli.

Atslēdzot nolīdzinājumus attiecībā uz u, dabūjam

$$\begin{aligned} u &= f(x,y,z) \\ u &= \psi(x,y,z) \end{aligned} \quad \text{................}(1^a)$$

seko

$$f(x,y,z) - \psi(x,y,z) = 0 \quad \text{...............}(2)$$

Šinī nolīdzinājumā nav u, tas izteic virsmu, kuŗa iet caur līkni (1), jo tas ir apmierināts ar tiem pašiem x,y,z, kuŗi apmierina līknes nolīdzinājumus (1) vai (1^a). Nolīdzinājumu (2) varam rakstīt

$$\Phi(x,y,z) = 0 \quad \text{...................}(3)$$

un to, kā redzams, dabūjam, izslēdzot u starp nolīdzinājumiem (1). Nolīdzinājums (3) dod to virsmu, kuŗa tiek veidota ar kustošo līkni (1) - veiduli.

Ja veidules nolīdzinājumos

$$\begin{aligned} F(x,y,z,u,v) &= 0 \\ \varphi(x,y,z,u,v) &= 0 \end{aligned} \quad \text{...............}(4)$$

atrodās divi mainīgi parametri u,v, tad mainoties u un v dabūjam ∞^2 līknes, bet ja ar kādu likumu no ∞^2 daudzuma līkņu izņemam ∞^1 līknes, tad šis daudzums veido atkal virsmu. Likums tiek izteikts ar sakara nolīdzinājumu starp u un v

$$\psi(u,v) = 0 \quad \text{..................}(5)$$

Izslēdzot divus mainīgos, u un v, starp trijiem nolīdzinājumiem (4) un (5), dabūjam veidotās virsmas nolīdzinājumu.

Apskatītā gadijumā no ∞^2 daudzuma līkņu izņemam ∞^1 daudzumu līkņu, dodot sakara nolīdzinājumu (5). Šo izņemšanu var arī izdarīt noteicot, ka veidulei vietu mainot, arvien jākrusto kāda noteikta nekustoša līkne, kuŗu tad sauc par vaduli. Uz vadules ir ∞^1 punktu un no ∞^2 daudzuma līkņu, kuŗas dotas ar nolīdzinājumiem (4) ar augšējo noteikumu tiek izņemts tikai ∞^1 daudzums tās līknes, kuŗas krusto vaduli. Šīs izņemtās līknes veido virsmu. Tā tad sakara nolīdzinājuma (5) vietā dodam taisnes - vadules nolīdzinājumus. Noteikums, ka kustošā veidule arvien krusto vaduli nozīmē, ka vajaga būt tādai vērtību sistēmai x,y,z, kas apmierina vienā laikā nolīdzinājumu sistēmu

$$\left.\begin{aligned} F(x,y,z,u,v) &= 0 \\ \varphi(x,y,z,u,v) &= 0 \end{aligned}\right\} \text{(veidule)}$$

$$\left.\begin{aligned} f(x,y,z) &= 0 \\ \psi(x,y,z) &= 0 \end{aligned}\right\} \text{(vadule)}$$

Starp šiem četriem nolīdzinājumiem izslēdzot trīs lielumus x,y,z dabūjam vienu nolīdzinājumu, ar u un v, kas atbilst sakara nolīdzinājumam (5).

Ja līknes nolīdzinājumā atrodās trīs mainīgi parametri u,v,w, tad vajadzīgi divi noteikuma nolīdzinājumi starp u,v un w, lai no ∞^3 daudzuma līkņu izņemtu ∞^1 daudzumu, bet šos noteikumu vai sakaru nolīdzinājumus varam dabūt, dodot divas vadules, jo katra vadule dod vienu sakara nolīdzinājumu starp parametriem.

Vispārīgi varam teikt ka, ja veidules nolīdzinājumā atrodās n mainīgi parametri, tad vajadzīgi n-1 noteikuma vai sakara nolīdzinājumi starp parametriem. Izslēdzot šos parametrus starp (n-1) sakara nolīdzinājumiem un diviem veidules nolīdzinājumiem, dabūjam veidotās virsmas nolīdzinājumu.

No teiktā par vaduli redzams ka, ja veidules nolīdzinājumā ir n mainīgi parametri, tad (n-1) noteikumu vietā varam dot n-1 vadules.

Virsmu veidojošā kustošā linija var arī būt taisne. Kā redzam no taisnes normālnolīdzinājuma, to noteic četri neatkarīgi parametri un tādēļ, ievērojot augšējo, lai kustošā taisne veidotu virsmu, vajadzīgas trīs vadules.

Ja dots nekustošs punkts $P_o = x_o|y_o|z_o$, caur kuŗu jāiet veidulei, tad ieliekot šī punkta koordinātas veidules nolīdzinājumos, dabūjam divus noteikuma-sakara nolīdzinājumus starp parametriem. Lai veidulei paliktu kustības brīvība, tad redzams, ka šādā gadijumā tās nolīdzinājumos vajaga atrasties vismaz trim parametriem. No augšējā arī redzams, ka nekustošs punkts atvieto divas vadules.

46. Konusu virsmas.

Ja telpā taisne griežās ap uz viņas atrodošu nekustošu punktu, tad viņa veido virsmu, kuŗu sauc par konusa virsmu, nekustošais punkts ir konusa virsotne.

Ja nekustošā punkta koordinātas $P = x_o|y_o|z_o$, tad veidules nolīdzinājums ir

$$\frac{x - x_o}{L} = \frac{y - y_o}{M} = \frac{z - z_o}{N}$$

vai arī

$$\frac{x - x_o}{1} = \frac{y - y_o}{\frac{M}{L}} = \frac{z - z_o}{\frac{N}{L}}$$

Liekam $\frac{M}{L} = u$; $\frac{N}{L} = v$

tad u un v ir veidules mainīgie parametri un

$$\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{u} = \frac{z - z_0}{v}$$

seko

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = u \text{ un } \frac{z - z_0}{x - x_0} = v \text{ ....(1)}$$

Ja dots sakara nolīdzinājums, kas veidules kustību noteic

$$\varphi(u,v) = 0 \text{ ....(2)}$$

tad ievedot šinī nolīdzinājumā vērtības no (1), dabūjam veidotās konusa virsmas nolīdzinājumu

$$\varphi\left(\frac{y - y_0}{x - x_0}, \frac{z - z_0}{x - x_0} \right) = 0 \text{ ....(3)}$$

Ja veidule iet caur koordinātu sākumu, tad

$$x_0 = y_0 = z_0 = 0$$

un veidotās konusa virsmas nolīdzinājums dod veidu

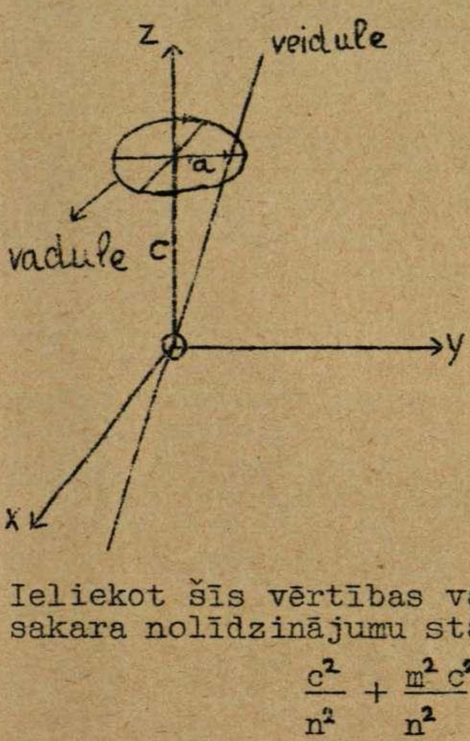
$$\varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x} \right) = 0 \text{ ....(4)}$$

Šāda veida nolīdzinājumus (3) un (4) sauc par homogenu attiecībā uz viņos atrodošamies argumentiem.

Sakara nolīdzinājuma vietā var dot vaduli un tad konusa virsma noteikta ar virsotni un vaduli.

Piemērs.

Dabūt konusa virsmas nolīdzinājumu, kuŗas virsotne atrodās koordinātu sākumā, vadule riņķis ar radiusu a un centru uz z ass, attālumā c no xy plāknes. Riņķa plākne $\perp$ uz z ass.



Veidules nolīdzinājums

$$\left.\begin{aligned} y &= mx \\ z &= nx \end{aligned}\right\} \text{ (m un n mainīgi parametri)}$$

Vadules nolīdzinājums

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 - r^2 &= 0 \\ z &= c \end{aligned}\right\}$$

Izslēdzam x,y,z starp veidules un vadules nolīdzinājumiem

$$z = c$$

$$x = \frac{z}{n} = \frac{c}{n}$$

$$y = mx = \frac{mc}{n}$$

Ieliekot šīs vērtības vadules pirmā nolīdzinājumā, dabūjam sakara nolīdzinājumu starp parametriem m un n

$$\frac{c^2}{n^2} + \frac{m^2 c^2}{n^2} - r^2 = 0 \text{ ....(s)}$$

Izslēdzot m un n starp šo nolīdzinājumu un veidules nolīdzinājumu, dabūjam veidotās konusa virsmas nolīdzinājumu

$$\frac{c^2}{\left(\frac{z}{x}\right)^2} + \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2 c^2}{\left(\frac{z}{x}\right)^2} - r^2 = 0$$

$$\frac{x^2 + y^2}{r^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

47. Cilindru virsmas.

Ja taisne kustās telpā, nemainot savu virzienu, tad viņa veido cilindra virsmu.

Ja taisnes nolīdzinājumos

$$\left.\begin{array}{l} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{array}\right\} \dots\dots\dots\dots(1)$$

Pieņemam D_1 un D_2 kā mainīgus parametrus un rakstam nolīdzinājumus

$$\left.\begin{array}{l} A_1 x + B_1 y + C_1 z = u \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z = v \end{array}\right\} \dots\dots\dots\dots(2)$$

tad pie mainīgiem u un v dabūjam ∞^2 parallēlas taisnes telpā un dodot sakara nolīdzinājumu

$$\varphi(u,v) = 0 \quad \dots\dots\dots\dots(3)$$

no ∞^2 daudzuma izņemam ∞^1 taisnes, kuŗu geometriskā vieta ir cilindra virsma.

Liekot u,v vietā nolīdzinājumā (3) u un v vērtības no (2), dabūjam veidotas cilindra virsmas nolīdzinājumu

$$\varphi[(A_1 x + B_1 y + C_1 z),(A_2 x + B_2 y + C_2 z)] = 0$$

Redzam, ka šis nolīdzinājums ir funkcija no divām linearām izteiksmēm iekš x,y,z.

Ja šinīs izteiksmēs trūkst, piemēram, koordināta z, tad cilindra virsma $\perp$ uz xy plāknes.

Sakara nolīdzinājuma vietā varam dot vaduli.

Piemērs.

Dabūt cilindra virsmas nolīdzinājumu, kuŗas vadule riņķis xy plāknē ar radiusu r un centru koordinātu sākumā. Veidule taisne, kuŗas leņķi ar x asi $\alpha = 60^\circ$, ar y asi $\beta = 45^\circ$ un ar z asi γ - ir šauri.

Veidules nolīdzinājums

$$\frac{x - u}{L} = \frac{y - v}{M} = \frac{z - o}{N}$$

Še u|v|o tā mainīgā punkta koordinātas xy plāknē, caur kuŗu veidule iet.

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 + \cos^2\gamma = 1$$

tad

$$\cos\gamma = \frac{1}{2}$$

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = \frac{1}{2} : \frac{1}{2}\sqrt{2} : \frac{1}{2}$$

$$L : M : N = 1 : \sqrt{2} : 1$$

$$\frac{x-u}{1} = \frac{y-v}{\sqrt{2}} = \frac{z}{1}$$

$$\frac{x-u}{1} = \frac{z}{1}$$

$$\frac{y-v}{\sqrt{2}} = \frac{z}{1}$$

$$\left.\begin{aligned} x - z &= u \\ y - \sqrt{2}\, z &= v \end{aligned}\right\} \text{veidule}$$

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2 \\ z &= 0 \end{aligned}\right\} \text{vadule}$$

Izslēdzam x,y,z starp veidules un vadules nolīdzinājumiem

$$u^2 + v^2 - r^2 = 0 \quad \text{(sakara nolīdzinājums)}$$

Izslēdzot starp sakara un veidules nolīdzinājumiem u un v, dabūjam meklēto virsmas nolīdzinājumu

$$(x - z)^2 + (y - \sqrt{2}\, z)^2 = r^2$$

48. Konoidi.

Ja veidule ir taisne, tad viņas normālnolīdzinājumā atrodās četri parametri m,n,b,c. Kā agrāk redzējam, tad pie četriem parametriem vajadzīgas trīs vadules.

Pie konusa veidošanas dota vadule un punkts (kuŗš atvieto divas vadules) ar galīgām koordinātām.

Pie cilindra veidošanas dota vadule un punkts (atvieto divas vadules) bezgalībā. Abos gadijumos veidule katros divos sekojošos stāvokļos krustojās. Konusu veidojot, veidule-taisne atrodas griezes kustībā; cilindru veidojot, veidule atrodās virzes kustībā.

Ja veidule-taisne kustās tā, kā pēc patikas ņemtos divos sekojošos stāvokļos veidules nekrustojās, tad tādu veidules kustību sauc par skrūves kustību un tā ir sastādama no griezes un virzes kustībām.

Taisnes skrūves kustība vispārēji ir noteikta ar trim vadulēm. Ja viena vadule ir taisne galībā, otra vadule taisne bezgalībā un trešā vadule pēc patikas līkne, tad ar taisnes veidules kustību veidotā virsma tiek saukta par konoidu.

Tā tad konoids tiek veidots ar veidules-taisnes kustību, veidulei arvien krustojot pirmo vaduli-taisni, otru vaduli pēc patikas līkni un trešo vaduli bezgalīgi tālo taisni, t.i. veidule kustās parallēli plāknei, kuŗā šī bezgalīgi tāla taisne atrodās. Minēto plākni sauc par virzienojošo plākni. Ja vadule-taisne stateniska uz virzienojušas plāknes, tad veidotais konoids taisns, pretējā gadijumā slīps.

Ja vadule-taisne sakrīt ar x asi, tad taisna konoida virzienojošā plākne ir yz plākne. Tad taisnes-veidules nolīdzinājums, kuŗa krusto x asi un parallēla yz plāknei (t.i. krusto tanī atrodošos bezgalīgi tālo taisni) ir

$$\left.\begin{aligned} x &= u \\ z &= vy \end{aligned}\right\} \text{(veidule)}$$

Ja ar trešās vadules palīdzību dabūts sakars starp u un v

$$\varphi(u,v) = 0$$

tad izslēdzot starp šo nolīdzinājumu un veidules nolīdzinājumu u un v, dabūjam veidotās virsmas nolīdzinājumu

$$\varphi(x\ ,\ \frac{z}{y}) = 0$$

un atslēdzot attiecībā uz x

$$x = f(\frac{z}{y})$$

Piemērs.

Dabūt taisna konoida nolīdzinājumu, kuŗa pirmā vadule ir x ass un otra vadule arī taisne, kuŗa krusto y asi stateniski attālumā b no koordinātu sākuma. Virzienojušā plākne ir yz plākne.

Kā redzējam, veidules nolīdzinājums, kuŗa krusto pirmo vaduli (x asi) un otro vaduli (bezgalīgi tālo taisni yz plāknē) ir

$$\left.\begin{aligned} x &= u \\ z &= vy \end{aligned}\right\}(\text{veidule})$$

vadules nolīdzinājums, tās taisnes nolīdzinājums, kuŗa $\perp$ uz y ases ar krustpunktu attālumā b no koordinātu sākuma

$$\left.\begin{aligned} y &= b \\ x &= kz \end{aligned}\right\}(\text{vadule})$$

Izslēdzam x,y,z starp veidules un vadules nolīdzinājumiem

$$z = \frac{x}{k}$$

$$\frac{x}{k} = v.y$$

$$\frac{u}{k} = v.b$$

$$u = kbv \quad \ldots. \ (\text{sakara nolīdzinājums})$$

Izslēdzam u un v starp sakara nolīdzinājumu un veidules nolīdzinājumiem

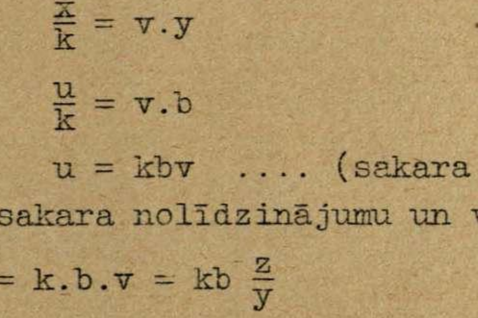
$$x = k.b.v = kb\ \frac{z}{y}$$

$$x = kb\cdot\frac{z}{y}$$

Beidzamais nolīdzinājums ir meklētais veidotā konoida virsmas nolīdzinājums.

49. Rotācijas virsmas.

Rotācijas virsma tiek veidota ar kādas līknes griešanu ap asi, kuŗa ar līkni nekustāmi saistīta. Griezes asi sauc par rotācijas asi. Zīmējumā rotācijas ass ir z ass.



Katrs līknes punkts P veido rotācijā riņķi, statenisku uz rotācijas ass. Šie riņķi tiek saukti par parallēlriņķiem. Katra, caur rotācijas asi liktā plākne šķeļ rotācijas virsmu līknē; visas šķēlienu līknes ir kongruentas ar origināllīkni C un tiek sauktas par meridiāniem.

To pašu rotācijas virsmu var arī veidot ar veidules-riņķa kustību, riņķa plākni pieņemot $\perp$ uz rotācijas ases un tā centru uz rotācijas ases.

Par vaduli tad uzskatams meridiāns, līkne C. Mainīgie parametri veidules nolīdzinājuma tad ir riņķa radiuss u un riņķa plāknes attālums no koordinātu sākuma, v.

Veidules nolīdzinājums

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2+z^2&=u^2 \\ z&=v \end{aligned}\right\}$$

Ja dots sakara nolīdzinājums starp u un v

$$\varphi(u,v) = 0$$

tad

$$\varphi(\sqrt{x^2+y^2+z^2},z) = 0$$

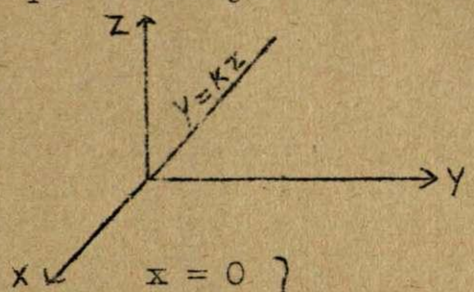
ir veidotās virsmas nolīdzinājums. Šo nolīdzinājumu varam arī rakstīt atslēgtu attiecībā uz z

$$z = \phi(x^2+y^2)$$

Šis nolīdzinājums ir rotācijas virsmu vispārējs nolīdzinājums, ja z ass ir rotācijas ass.

Piemērs.

Pieņemam z asi par rotācijas asi un kā meridiānu taisni



$$\left.\begin{aligned} x&=0 \\ y&=kz \end{aligned}\right\}$$

tad veidules riņķa nolīdzinājums ir

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2+z^2&=u^2 \\ z&=v \end{aligned}\right\} \text{(veidule)}$$

un vadules nolīdzinājums

$$\left.\begin{aligned} x&=0 \\ y&=kz \end{aligned}\right\} \text{(vadule)}$$

Izslēdzot starp veidules un vadules nolīdzinājumiem x,y,z dabūjam

$$k^2v^2+v^2=u^2 \quad \text{(sakara nolīdzinājums)}$$

Izslēdzot starp sakara un veidules nolīdzinājumiem u un v, dabūjam meklēto virsmas nolīdzinājumu

$$z^2k^2 = x^2+y^2$$

Šis nolīdzinājums dod rotācijas konusu.

OTRĀS KĀRTĪBAS VIRSMAS.

Vispārējās izteiksmes.

50. Ja virsmas nolīdzinājums

$$F(x,y,z) = 0 \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

sadalās divos reizinātājos

$$\varphi(x,y,z)\ \psi(x,y,z) = 0 \quad \dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

tad virsma sadalās divās virsmās, kuŗu nolīdzinājumi ir

$$\varphi(x,y,z) = 0 \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (3)$$

$$\psi(x,y,z) = 0 \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (4)$$

Ja punkts $P = x|y|z$ atrodās uz virsmas (1), tad viņa koordinātām vajaga apmierināt nolīdzinājumu (1) un tādēļ arī nolīdzinājumu (2). Nolīdzinājums (2) tiek apmierināts ar P koordinātām, tad, ja tās apmierina nolīdzinājumu (3) vai (4),t.i. kad P atrodās uz virsmas (3) vai uz virsmas (4). Tā tad ja punkts atrodās uz virsmas (1), tad viņam vajaga atrasties uz virsmas (3) vai (4) un tādēļ virsma (1) sastāv no virsmu (3) un (4) kopības, t.i. virsma (1) sadalās divās virsmās (3) un (4).

Ja nolīdzinājums (1) ir otrās kāpes, tad nolīdzinājumi (3) un (4) katrs ir pirmās kāpes,t.i. plāknes, un tādēļ otrās kārtības virsmu var sadalīt divās plāknēs.

51. Ja virsmas nolīdzinājums $F(x,y,z) = 0$ nemainās kad z vietā ievedam -z, tad virsma simmetriska pret (xy) plākni.

Ja $P=a|b|c$ atrodās uz virsmas, tad viņa koordinātas apmierina virsmas nolīdzinājumu, bet ja arī $P_1 = +a|+b|-c$ apmierina virsmas nolīdzinājumu, tad arī P_1 atrodās uz virsmas un punkti P un P_1 atrodās simmetriski pret (xy) plākni.

Analogas izteiksmes dabūjam tāpat arī priekš y un x. No augšējā seko:

ja virsmas nolīdzinājums nemainās kad z vietā liekam -z un y vietā -y,tad virsma simmetriska pret (xy) un (zx) plāknēm un ja virsmas nolīdzinājums nemainās kad x vietā liekam -x, y vietā -y un z vietā -z, tad virsma simmetriska pret katru no trim koordinātu plāknēm.

52. Par virsmas centru sauc punktu, kuŗš dala uz pusēm katru,caur to vestu chordu. Ja virsmas centrs atrodās koordinātu sākumā, tad tas parādās tā, ka katru reizi, ja $P_1 = a|b|c$ apmierina virsmas nolīdzinājumu, tad arī $P_2 = -a|-b|-c$ apmierina virsmas nolīdzinājumu, tad taisnes $P_1 P_2$ viduspunkta koordinātas $x_0|y_0|z_0$ ir

$$x_0 = \frac{a + (-a)}{2} = 0 \ , \ y_0 = \frac{b + (-b)}{2} = 0 \ , \ z_0 = \frac{c + (-c)}{2} = 0$$

53. Otrās kāpes homogens nolīdzinājums starp x,y,z

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz = 0 \quad \dots\dots\dots\dots (1)$$

dod konusa virsmu, kuŗa virsotne atrodās koordinātu sākumā.

Dotā virsma iet caur koordinātu sākuma punktu, jo tā koordinātas apmierina virsmas nolīdzinājumu.

Virsmas krustpunktus ar taisni caur koordinātu sākumu

$$\left.\begin{aligned} y &= mx \\ z &= nx \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

dabūjam, atslēdzot kopēji nolīdzinājumus (1) un (2).

Ievedot y un z vērtības no (2) nolīdzinājuma (1), dabūjam

$$x^2(A + Bm^2 + Cn^2 + 2Dm + 2En + 2Fmn) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

No (3) seko, ka vai

$$x^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

vai

$$A + Bm^2 + Cn^2 + 2Dm + 2En + 2Fmn = 0 \quad \ldots\ldots (5)$$

Ja $x = 0$, tad no (2) seko $y = o$, $z = o$, t.i. taisne (2) krusto virsmu (1) koordinātu sākumā. Bet ja izpildīts nolīdzinājums (5), tad dabūjam no (3)

$$x = \frac{o}{o}$$

un ievērojot nolīdzinājumus (2) redzams, ka tad arī

$$y = \frac{o}{o}$$

$$z = \frac{o}{o}$$

tas nozīmē, ka ja taisnes parametri m un n izpilda nolīdzinājumu (5), tad taisnes katrs punkts ir tās krustpunkts ar virsmu (1) - taisne atrodās uz virsmas (1).

Taisnes nolīdzinājumā (2) m un n ir mainīgi parametri, kuŗi saistīti ar nolīdzinājumu (5) un tādēļ, saskaņā ar augšējo, visas taisnes (2), kuŗu parametri m un n izpilda nol-mu (5) atrodās uz virsmas (1).

Taisni (2) varam uzskatīt par veiduli un nol-mu (5) par veidules parametru sakara nol-mu. Kā agrāk redzējam, pie virsmas veidošanas ar taisnes kustību, šinī gadijumā veidotā virsma (1) ir konus un šī konusa nol-mu dabūjam, izslēdzot starp veidules nol-miem (2) un sakara nol-mu (5) parametrus m un n. Izslēgšanas rezultāts dod nol-mu (1) un tā tad nol-ms (1) dod konusa virsmu.

Otrās kāpes nolīdzinājums ar x,y,z.

54. Izteiksmē

$$a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4 u \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

saucam pēc kārtas: x,y,z,u par pirmo, otro u.t.t. mainīgiem, Visi koeficienti apzīmēti ar a, bet rādītāji pie a norāda pie kāda mainīgā koeficients atrodās.

Veidojot izteiksmēs (1) kvadratu, dabūjam

$$a_1 a_1 x^2 + a_2 a_2 y^2 + a_3 a_3 z^2 + a_{44} u^2 + 2a_1 a_2 xy + 2a_{13} xz + 2a_{14} xu +$$
$$+ 2a_2 a_3 yz + 2a_2 a_4 yu + 2a_3 a_4 zu \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Šeit liekam

$a_1 a_1$ vietā a_{11}, $a_2 a_2$ vietā a_{22} u.t.t.

$a_1 a_2$ " a_{12}, $a_1 a_3$ " a_{13}, $a_2 a_3$ vietā a_{23} u.t.t.

tad (2) dabū veidu

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44}u^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{14}xu + 2a_{23}yz +$$
$$+ 2a_{24}yu + 2a_{34}zu$$

Šeit liekam u = 1 un dabūjam otrās kāpes nehomogenu izteiksmi

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y +$$
$$+ 2a_{34}z + a_{44} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Ievērojot augšējo, redzams, ka

$$a_{12} = a_{21}\ ,\ a_{13} = a_{31}\ ,\ a_{23} = a_{32}\ \text{u.t.t.}$$

Tālāk jāievēro, ka nav reizinātāja 2 koeficientos pie x^2, y^2, z^2 un arī pie u^2, t.i. locekļi ar $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}$ nav reizināti ar 2.

Pielīdzinot izteiksmi (3) nullei, dabūjam otrās kāpes pilnīgu nolīdzinājumu starp x,y,z

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y +$$
$$+ 2a_{34}z + a_{44} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Šis nolīdzinājums izteic otrās kārtības virsmas. Nolīdzinājumā atrodās desmit parametru, bet nodalot nolīdzinājumu ar vienu no koeficientiem redzams, ka paliek deviņi neatkarīgi parametri, kuŗi noteic otrās kārtības virsmu.

55. Otrās kārtības virsmas (3) krustošanās līkne ar plākni tiek noteikta ar nolīdzinājumu sistēmu

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + \\ \qquad + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \quad \ldots(1) \\ \qquad Ax + By + Cz + D = 0 \quad \ldots(8) \end{array}\right\}$$

Ja z no plāknes nolīdzinājuma (8) ievietojam virsmas nolādzinājumā (1), tad pēdējais ir otrās kāpes nolīdzinājums starp x un y. Tāds nolīdzinājums izteic otrās kārtības cilindru, statenisku uz xy plāknes. Šis cilindrs projecē meklēto krustošanās līkni uz xy plāknes un šī projekcija ir otrās kārtības līkne, jo viņas nolīdzinājums, kā redzams, ir otrās kāpes. No augšējā seko: tā kā virsmas (1) un plāknes (8) krustošanās līkne atrodās plāknē (8) un līknes projekcija uz xy plāknes ir otrās kārtības līkne, tad arī krustošanās līkne ir otrās kārtības līkne, jo izejot no līknes projekcijas varam dabūt krustošanās līkni ar homogenu dēfermaciju, kuŗu izvedot nolīdzinājuma kāpe nemainās.

Otrās kārtības virsmas krustošanās līkni ar (xy) plākni dabūjam no nolīdzinājumu sistēmas

$$(1)\ \text{un}\ z = 0$$

Redzams, ka šī līkne ir otrās kārtības. Analogi dabūjam krustošanās līknes ar (yz) un (zx) plāknēm.

Ja nolīdzinājums (1) pastāv kopēji ar taisnes nolīdzinājumiem

$$\left.\begin{array}{l} y = mx + b \\ z = nx + c \end{array}\right\} (3)$$

tad izslēdzot starp nol-miem(1) un (3) koordinātas y un z dabūjam kā redzams, otrās kāpes nol-mu ar x, no kuŗa dabūjam priekš x divas vērtības x_1 un x_2, un ieliekot šīs vērtības nol-mos (3) arī priekš y un z, katram divas vērtības y_1, y_2 un z_1, z_2. Dabūtās vērtības dod taisnes (3) krustpunktus ar virsmu (1). Vērtības var abas būt reālas vai arī abas imagināras. Tā tad taisne krusto otrās kārtības virsmu divos punktos.

Virsmas krustpunktus ar x asi dabūjam, atslēdzot kopēji nolīdzinājumus

$$(1)\ \text{un}\ \left.\begin{array}{l} y = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\}$$

Analogi dabūjam krustpunktus ar y un z asīm.

Otrās kārtības virsmu pētīšana.

56. Lai dabūtu otrās kārtības virsmas īpašības, meklējam šīs virsmas krustpunktus ar taisni, kuŗai mainīgs virziens, t.i. krustpunktus ar taišņu kūli, mainot vajadzības gadijumā arī kūļa centru. Sekojošos pētijumos, labākas orientācijas dēļ, visas formulas tiks apzīmētas tekošā kārtībā.

Otrās kārtības virsmas nolīdzinājums, kā redzējam, ir

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + $$
$$+ 2a_{34}z + a_{44} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Ievedot

$$\left.\begin{aligned} x &= \bar{x} + x' \\ y &= \bar{y} + y' \\ z &= \bar{z} + z' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

dabūjam virsmas nolīdzinājumu jaunā koordinātu sistēmā, kuŗas centrs ir $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ un kuŗas asis ir x',y',z' parallēlas asīm x,y,z.

Izdarot norādīto ievešanu, dabūjam virsmas nolīdzinājumu jaunā koordinātu sistēmā

$$a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + a_{33}z'^2 + 2a_{12}x'y' + 2a_{13}x'z' + 2a_{23}y'z' +$$
$$+ 2x'(a_{11}\bar{x} + a_{12}\bar{y} + a_{13}\bar{z} + a_{14}) + 2y'(a_{21}\bar{x} + a_{22}\bar{y} + a_{23}\bar{z} + a_{24}) +$$
$$+ 2z'(a_{31}\bar{x} + a_{32}\bar{y} + a_{33}\bar{z} + a_{34}) + (a_{11}\bar{x}^2 + a_{22}\bar{y}^2 + a_{33}\bar{z}^2 + 2a_{12}\bar{x}\bar{y} +$$
$$+ 2a_{13}\bar{x}\bar{z} + 2a_{23}\bar{y}\bar{z} + 2a_{14}\bar{x} + 2a_{24}\bar{y} + 2a_{34}\bar{z} + a_{44}) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Beidzamās iekavās atrodošos izteiksmi apzīmējam ar S un viņu pārveidojot algebrāiski, varam rakstīt

$$S = \bar{x}(a_{11}\bar{x} + a_{12}\bar{y} + a_{13}\bar{z} + a_{14}) + \bar{y}(a_{21}\bar{x} + a_{22}\bar{y} + a_{23}\bar{z} + a_{24}) +$$
$$+ \bar{z}(a_{31}\bar{x} + a_{32}\bar{y} + a_{33}\bar{z} + a_{34}) + (a_{41}\bar{x} + a_{42}\bar{y} + a_{43}\bar{z} + a_{44}) \quad \ldots\ldots (4)$$

Tad virsmas nolīdzinājumu koordinātu sistēmā x',y',z' varam rakstīt

$$a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + a_{33}z'^2 + 2a_{12}x'y' + 2a_{13}x'z' + 2a_{23}y'z' + 2x'(a_{11}\bar{x} + a_{12}\bar{y} +$$
$$+ a_{13}\bar{z} + a_{14}) + 2y'(a_{21}\bar{x} + a_{22}\bar{y} + a_{23}\bar{z} + a_{24}) + 2z'(a_{31}\bar{x} + a_{32}\bar{y} +$$
$$+ a_{33}\bar{z} + a_{34}) + S = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Visās pārveidošanās izlietots, agrāk norādītais, ka

$$a_{14} = a_{41}\ , \quad a_{23} = a_{32}\ , \quad a_{24} = a_{42} \quad \text{u.t.t.}$$

Kā redzams, pie šīs koordinātu sistēmas transformācijas, nav mainijušies koeficienti pie nol-ma (1) otrās dimenzijas locekļiem.

No jaunā koordinātu sākuma vedam taisni

$$\left.\begin{aligned} y' &= mx' \\ z' &= nx' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Uzskatot m un n kā mainīgus parametrus, ar nolīdzinājumu (6) dots taišņu kūlis.

Ievietojot nolīdzinājumu (6) y' un z' vērtības virsmas nolīdzinājumā (5), dabūjam

$$x'^2 (a_{11} + a_{22}m^2 + a_{33}n^2 + 2a_{12}m + 2a_{13}n + 2a_{23}mn) +$$
$$+ 2x'[(a_{11}\bar{x} + a_{12}\bar{y} + a_{13}\bar{z} + a_{14}) + m(a_{21}\bar{x} + a_{22}\bar{y} + a_{23}\bar{z} + a_{24}) +$$
$$+ n(a_{31}\bar{x} + a_{32}\bar{y} + a_{33}\bar{z} + a_{34})] + S = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Nolīdzinājums (7) ir otrās kāpes attiecībā uz x' un dod taisnes (6) un virsmas (5) krustpunktu koordinātas x_1' un x_2' un ievērojot nolīdzinājumus (6), arī krustpunktu koordinātas y_1', y_2' un z_1', z_2'.

I. Pieskara plākne.

Ja pieņemam, ka nolīdzinājumā (7) $\bar{x},\bar{y},\bar{z}$ tā izvēlēti, ka

$$S = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

tad tas nozīmē, ka jaunais koordinātu sākums $O' = (\bar{x}|\bar{y}|\bar{z})$ - taišņu kūļa (6) centrs, atrodās uz virsmas (1), jo S = 0 ir tā izteiksme, kuŗu dabūjam ievedot nolīdzinājumā (1) x,y,z vietā $\bar{x},\bar{y},\bar{z}$.

Bet arī nolīdzinājums (7) to rāda, jo ja kvadratiskā nol-mā absolūtais loceklis S = 0, tad, kā zināms, viena sakne $x_1 = 0$ un ievērojot (6) arī $y_1 = 0$ un $z_1 = 0$. Tas nozīmē, ka taisnes (6) krusto virsmu vienreiz koordinātu sākumā O', t.i. O' atrodās uz virsmas.

Ja pieņemam, ka atkarībā no m un n arī vēl

$$a_{11}\bar{x} + a_{12}\bar{y} + a_{13}\bar{z} + a_{14} + m(a_{21}\bar{x} + a_{22}\bar{y} + a_{23}\bar{z} + a_{24}) +$$
$$+ n(a_{31}\bar{x} + a_{32}\bar{y} + a_{33}\bar{z} + a_{34}) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

t.i. ka kvadratiskā nol-ma (7) koeficients pie x' ir 0, tad tas, kā zināms izteic, ka nol-ma sakņu summa $x_1' + x_2' = 0$. Bet tā kā agrākā pieņēmuma S = 0 dēļ ja $x_1' = 0$, tad redzams, ka ja izpildīti (8) un (9), tad arī $x_2' = 0$ un ievērojot (6) arī $y_2' = 0$ un $z_2' = 0$. Tas nozīmē, ka taisnes (6), katra krusto virsmu punktā O' divos kopā sakrītošos punktos un tā tad tās ir virsmas pieskares.

Šo pieskaru kopība veido pieskara plākni punktā O', kā tas redzams no sekojošā.

Uzskatot nol-mus (6) kā veiduli, šīs veidules parametri m un n saistīti ar nol-mu (9).

Izslēdzot starp nol-miem (6) un (9) parametrus m un n, dabūjam veidoto virsmu

$$(a_{11}\bar{x} + a_{12}\bar{y} + a_{13}\bar{z} + a_{14}) + \frac{y'}{x'}(a_{21}\bar{x} + a_{22}\bar{y} + a_{23}\bar{z} + a_{24}) +$$
$$+ \frac{z'}{x'}(a_{31}\bar{x} + a_{32}\bar{y} + a_{33}\bar{z} + a_{34}) = 0$$

vai arī

$$(a_{11}\bar{x} + a_{12}\bar{y} + a_{13}\bar{z} + a_{14})x' + (a_{21}\bar{x} + a_{22}\bar{y} + a_{23}\bar{z} + a_{24})y' +$$
$$+ (a_{31}\bar{x} + a_{32}\bar{y} + a_{33}\bar{z} + a_{34})z' = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

Nol-ms (10) ir pirmās kāpes attiecībā uz x',y',z' un tādēļ izteic koordinātu sistēmā x',y',z' plākni, t.i. pieskara plākni pie virsmas (1). Pieskaru plāknes nol-mu koordinātu sistēmā x,y,z dabūjam, ievedot nol-mā (10) no (2)

$$x' = x - \bar{x}$$
$$y' = y - \bar{y}$$
$$z' = z - \bar{z}$$

$$(a_{11}\bar{x} + a_{12}\bar{y} + a_{13}\bar{z} + a_{14})(x-\bar{x}) + (a_{21}\bar{x} + a_{22}\bar{y} + a_{23}\bar{z} + a_{24})(y-\bar{y}) +$$
$$+ (a_{31}\bar{x} + a_{32}\bar{y} + a_{33}\bar{z} + a_{34})(z-\bar{z}) = 0$$

Pārveidojot dabūjam

$$(a_{11}\bar{x} + a_{12}\bar{y} + a_{13}\bar{z} + a_{14})x + (a_{21}\bar{x} + a_{22}\bar{y} + a_{23}\bar{z} + a_{24})y +$$
$$+ (a_{31}\bar{x} + a_{32}\bar{y} + a_{33}\bar{z} + a_{34})z - [(a_{11}\bar{x} + a_{12}\bar{y} + a_{13}\bar{z} + a_{14})\bar{x} +$$
$$+ (a_{21}\bar{x} + a_{22}\bar{y} + a_{23}\bar{z} + a_{24})\bar{y} + (a_{31}\bar{x} + a_{32}\bar{y} + a_{33}\bar{z} + a_{34})\bar{z}] = 0$$

Ievērojot, ka šinī pētijumā S = 0 un S izteiksmi (4), redzams, ka -[ ] atrodošos izteiksmi var atvietot ar

$$a_{41}\bar{x} + a_{42}\bar{y} + a_{43}\bar{z} + a_{44}$$

un tādēļ augšējo nol-mu rakstam

$$(a_{11}\bar{x} + a_{12}\bar{y} + a_{13}\bar{z} + a_{14})x + (a_{21}\bar{x} + a_{22}\bar{y} + a_{23}\bar{z} + a_{24})y +$$
$$+ (a_{31}\bar{x} + a_{32}\bar{y} + a_{33}\bar{z} + a_{34})z + (a_{41}\bar{x} + a_{42}\bar{y} + a_{43}\bar{z} + a_{44}) = 0 \quad \ldots(11)$$

Nol-ms (11) dod pieskara plāknes nol-mu pie virsmas (1) punktā $\bar{x},\bar{y},\bar{z}$ koordinātu sistemā x,y,z, ja punkts $\bar{x}|\bar{y}|\bar{z}$ tā izvēlēts, ka atrodās uz virsmas (1).

II. Konuss.

Pieņemam, ka O' = $\bar{x}|\bar{y}|\bar{z}$ atrodās uz virsmas (1), tad

$$S = 0 \quad \ldots\ldots(8)$$

Pieņemam, ka arī

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\bar{x} + a_{12}\bar{y} + a_{13}\bar{z} + a_{14} &= 0 \\ a_{21}\bar{x} + a_{22}\bar{y} + a_{23}\bar{z} + a_{24} &= 0 \\ a_{31}\bar{x} + a_{32}\bar{y} + a_{33}\bar{z} + a_{34} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(12)$$

Ievērojot, ka S = 0 un S izteiksmi (8), kā arī (12), redzams, ka tad arī

$$a_{41}\bar{x} + a_{42}\bar{y} + a_{43}\bar{z} + a_{44} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(13)$$

Nol-mi (12) un (13) dod nolīdzinājumu grupu

$$\begin{aligned} a_{11}\bar{x} + a_{12}\bar{y} + a_{13}\bar{z} + a_{14} &= 0 \\ a_{21}\bar{x} + a_{22}\bar{y} + a_{23}\bar{z} + a_{24} &= 0 \\ a_{31}\bar{x} + a_{32}\bar{y} + a_{33}\bar{z} + a_{34} &= 0 \\ a_{41}\bar{x} + a_{42}\bar{y} + a_{43}\bar{z} + a_{44} &= 0 \end{aligned}$$

Šie četri, attiecībā uz $\bar{x},\bar{y},\bar{z}$ nehomogeni nol-mi var kopēji pastāvēt tikai tad, ja determinants

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(14)$$

Ievedot virsmas nol-mā (5) vērtības no (8) un (12) un ņemot vērā S izteiksmi, nol-mā (5) paliek locekļi

$$a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + a_{33}z'^2 + 2a_{12}x'y' + 2a_{13}x'z' + 2a_{23}y'z' = 0 \quad \ldots(15)$$

Šis nol-ms, kā agrāk norādīts, izteic konusu, kuŗa virsotne atrodās punktā O' = $\bar{x}|\bar{y}|\bar{z}$.

Konusa virsotnes koordinātas dabūjam atslēdzot nolīdzinājumus (12) attiecībā uz $\bar{x},\bar{y},\bar{z}$.

Tā tad, ja virsmas (1) visu koeficientu determinants D=0, tad virsma (1) izteic konusu.

III. Centrs.

Pieņemam, ka nol-mā (7) koeficients pie x'

$$(a_{11}\bar{x} + a_{12}\bar{y} + a_{13}\bar{z} + a_{14}) + m(a_{21}\bar{x} + a_{22}\bar{y} + a_{23}\bar{z} + a_{24}) + $$
$$+ n(a_{31}\bar{x} + a_{32}\bar{y} + a_{33}\bar{z} + a_{34}) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

tad tas izteic, ka nol-ma (7) sakņu summa

$$x_1' + x_2' = 0$$

bet tad arī, ievērojot (6)

$$y_1' + y_2' = 0$$
$$z_1' + z_2' = 0$$

Tā kā šinī gadijumā arī

$$\frac{x_1' + x_2'}{2} = 0 \ , \quad \frac{y_1' + y_2'}{2} = 0 \ , \quad \frac{z_1' + z_2'}{2} = 0$$

tad redzams, ka taisnes

$$\left.\begin{aligned} y' &= mx' \\ z' &= nx' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

chorda $P_1 P_2$ tiek dalīta uz pusēm koordinātu sākumā O'. Bet ja nol-mā (9) pieņemam, ka

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\bar{x} + a_{12}\bar{y} + a_{13}\bar{z} + a_{14} &= 0 \\ a_{21}\bar{x} + a_{22}\bar{y} + a_{23}\bar{z} + a_{24} &= 0 \\ a_{31}\bar{x} + a_{32}\bar{y} + a_{33}\bar{z} + a_{34} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

tad ne tikvien chorda ar koeficientiem m un n, bet katra chorda caur šādi izvēlētu O' tiek dalīta uz pusēm, jo nol-ma (9) izpildīšana nav atkarīga vairs no m un n, bet tikai no (16).

Tā tad novietojot $O' = \bar{x}|\bar{y}|\bar{z}$ tā, ka viņa koordinātas izpilda nol-mus (16), esam dabujuši tādu punktu, kuŗš dala visas caur viņu vestas chordas uz pusēm. Šo punktu sauc par virsmas centru un viņa koordinātas $C = x_0|y_0|z_0$ dabūjam

$$x_0 : y_0 : z_0 : 1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ - & + & - & + \end{vmatrix} =$$

$$=(-)\underbrace{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}}_{D_{41}} : \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}}_{D_{42}} : (-)\underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \end{vmatrix}}_{D_{43}} : \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{D_{44}} \ldots (17)$$

Augšējie determinanti, kā redzams, ir virsmas visu koeficientu determinanta D...(14) apakšdeterminanti.
Ja determinants $D_{44} \neq 0$, tad centra koordinātas x_0, y_0, z_0 ir galīgi lielumi un virsmai ir galīgs centrs. Ja $D_{44} = 0$ un kaut tikai viens no pārējiem apakšdeterminantiem $\neq 0$, tad virsmas centrs atrodās bezgalībā. Bet ja $D_{44} = 0$ un arī $D_{41} = D_{42} = D_{43} = 0$, tad

$$x_0 = \frac{0}{0} \ ; \quad y_0 = \frac{0}{0} \ , \quad z_0 = \frac{0}{0}$$

Ja nol-mos (16) uzskatam $\bar{x},\bar{y},\bar{z}$ kā mainīgus, tad katrs nol-ms izteic plākni. Šīs plāknes krustojās centrā un dod centra koordinātas $x_0|y_0|z_0$. Ja divas plāknes identiskas, tad $D_{44}=0$ un tāpat $D_{41} = D_{42} = D_{43} = 0$ un punkta vietā dabūjam taisni- asi, kuŗa tad izpilda centra vietu. Ja visas trīs plāknes identiskas, tad punkta - centra vietā dabūjam plākni, kuŗa izpilda centra vietu.

IV. Diametra plāknes, diametri.

Katra no plāknēm (16)

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} = 0$$
$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} = 0$$
$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34} = 0$$

iet caur centru un ir diametra plākne. Visu diametra plākņu nol-mus dabūjam veidojot diametru plākņu kūli

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}) + \lambda(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}) + $$
$$+ \mu(a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}) = 0 \;\ldots(18)$$

Diametra plākņu kūļa nol-mu dabūjam arī sekojošā kārtā.

Pētijumā III redzējam, ka, ja liekam

$$a_{11}\bar{x} + a_{12}\bar{y} + a_{13}\bar{z} + a_{14} + m(a_{21}\bar{x} + a_{22}\bar{y} + a_{23}\bar{z} + a_{24}) +$$
$$+ n(a_{31}\bar{x} + a_{32}\bar{y} + a_{33}\bar{z} + a_{34}) = 0 \;\ldots\ldots\ldots(9)$$

tad punkts $O' = \bar{x}|\bar{y}|\bar{z}$ dala uz pusēm chordu, kuŗas projekciju virziena koeficienti m un n izpilda nol-mu (9). Pie pieņemtiem noteiktiem $m = \lambda$ un $n = \mu$, nol-mu (9) var arī izpildīt, uzskatot koordinātas $\bar{x},\bar{y},\bar{z}$ kā mainīgus, bet tad nol-ms (9) dod plākni un katrs šīs plāknes punkts dala uz pusēm no viņa vestu chordu ar virzienu koeficientiem, proporcionāliem $1, \lambda, \mu$. Tādā kārtā esam dabujuši to pašu diametra plāknes nol-mu (18); tā iet, kā augšā norādīts, caur centru un kā tagad redzējam, dala uz pusēm parallēlas chordas, kuŗu virziena koeficienti proporcionāli $1, \lambda, \mu$. Šīs chordas sauc par diametra plāknei (18) piekārtotām chordām.

Diametru, t.i. chordu, kuŗa iet caur centru, dabūjam krustojot divas diametra plāknes

$$\left.\begin{aligned} &a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} + \lambda(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}) + \\ &\qquad + \mu(a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}) = 0 \\ &a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} + \lambda'(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}) + \\ &\qquad + \mu'(a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}) = 0 \end{aligned}\right\} \ldots(19)$$

V. Asimptotisks konus.

Taisne (6) krusto virsmu (5) divos punktos, šo krustpunktu koordinātas x_1' un x_2' dabūjam no nol-ma (7) un ievērojot (6), dabūjam arī attiecošos y_1', y_2' un z_1', z_2'

Ja nol-mā (7) koeficientu pie x'^2 liekam

$$a_{11} + a_{22}m^2 + a_{33}n^2 + 2a_{23}mn + 2a_{12}m + 2a_{13}n = 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(20)$$

tad nol-ma (7) viena sakne $x_1' = \infty$, t.i. taisnes (6) viens krustpunkts ar virsmu (5) atrodās bezgalībā.

Uzskatot taisni (6) kā veiduli ar mainīgiem parametriem m un n redzam, ka ar nol-mu (20) šie parametri saistīti. Izslēdzot m un n starp nol-miem (6) un (20) dabūjam nol-mu

$a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + a_{33}z'^2 + 2a_{23}y'z' + 2a_{12}x'y' + 2a_{13}x'z' = 0$ ....(21)

Šis nol-ms, kā zinams, ir konusa nol-ms. Tas tiek veidots no taišņu kūļa (6) tām taisnēm, kuŗas izpilda nol-mu (20), t.i. kuŗas krusto virsmu (5) bezgalīgi tālos punktos.

Še var būt gadijumi a) konus reāls, b) konus imaginārs, c) konus sadalās divās krustojošās plāknēs.

Kad konusa virsotni $O' = \bar{x}|\bar{y}|\bar{z}$ pārnesam virsmas centrā, tad kā zinams no pētijuma par centru

$a_{11}\bar{x} + a_{12}\bar{y} + a_{13}\bar{z} + a_{14} + m(a_{21}\bar{x} + a_{22}\bar{y} + a_{23}\bar{z} + a_{24}) +$
$+ n(a_{31}\bar{x} + a_{32}\bar{y} + a_{33}\bar{z} + a_{34}) = 0$ ....(22)

bet tad nol-mā (7) koeficients pie x' arī ir 0 un tas nozīmē, ka arī $x_2' = \infty$, tā tad abas saknes $x_1' = x_2' = \infty$ un ievērojot (6) arī $y_1' = y_2' = \infty$, $z_1' = z_2' = \infty$

Šinī gadijienā konus pieskarās virsmai bezgalībā. Tādu konusu sauc par asimptotisku.

VI. Otrās kārtības virsmu klasifikācija.

Ja virsmas nol-ms tāds, ka $D_{44} \neq 0$, tad centra koordinātu vērtības ir galīgi skaitļi. Šādu virsmu sauc par centrālu. Kā vēlāk redzēsim, šādu centrālu virsmu tipi ir ellipsoids, vientelpas hiperboloids, divtelpu hiperboloids un konus.

Ja $D_{44} = 0$ un kaut arī tikai viens no $D_{41}, D_{42}, D_{43} \neq 0$, tad vismaz viena no centra koordinātām ir ∞ un virsmas centrs tad ir bezgalīgi tāļš punkts. Virsmas ar bezgalīgi tālu centru sauc par paraboloidiem, tādu ir divi tipi: elliptisks paraboloids un hiperbolisks paraboloids. Tā kā virsmas diametri iet caur centru un paraboloidu centrs ir ∞ tālu, tad paraboloidu diametri ir parallēli un visas paraboloidu diametra plāknes ir parallēlas vienai taisnei.

Ja $D_{44} = 0$, $D_{43} = 0$, $D_{42} = 0$, $D_{41} = 0$, tad centra koordinātas dabū nenoteiktas vērtības. Tādai virsmai tad ir bezgalīgi daudz centru.

Šāds gadijiens var būt, ja nol-mu sistemā (16) ir tikai divi patstāvīgi nol-mi. Tad sistema nedod punktu-centru, bet taisni, kuŗa nāk centra vietā. Šo taisni sauc par asi. Virsmas ar asi galībā ir eliptisks cilindrs un hiperbolisks cilindrs. Paraboliska cilindra ass atrodās bezgalībā.

Ja nol-mu sistemā (16) tikai viens patstāvīgs nol-ms, tad sistema dod centra vietā plākni, virsma tad sadalās divās parallēlās plāknēs.

Apskatītā iedalijumā par pazīmi pieņemts apstāklis, vai virsmas centrs atrodās galībā vai bezgalībā.

Par iedalīšanas pazīmi varam pieņemt arī, vai virsmai ir bezgalīgi tāli punkti vai nav. Šo jautājumu izšķir nol-ms(7). Kā agrāk redzējam taisnes (6), kuŗas iet uz virsmas bezgalīgi tāliem punktiem atrodās uz konusa.

$a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + a_{33}z'^2 + 2a_{12}x'y' + 2a_{13}x'z' + 2a_{23}y'z' = 0$

Ja šis konus imaginars, t.i. ja izņemot vērtības x = 0, y = 0, z = 0, nol-ms tiek apmierināts tikai ar imaginarām x, y, z vērtībām, tad virsma ir ellipsoids. Ja konus reāls, tad virsma ir vientelpas vai divtelpu hiperboloids.

Ja konus sadalās divās plāknēs, kuŗas var būt imagināras vai arī reālas, tad $D_{44} = 0$ un virsma ir pirmā gadījienā elliptisks paraboloids, otrā - hiperbolisks paraboloids. Ja arī $D_{41} = 0$, $D_{42} = 0$, $D_{43} = 0$, tad elliptisks vai hiperbolisks cilindrs.

Ja konus sadalās divās sakrītošās plāknēs, tad virsma ir parabolisks cilindrs.

VII. Galvenās diametra plāknes.

Kā redzējam pētijumā IV, ja virsmas chordu virziena koeficienti proporcionāli l,m,n, tad chordām piekārtotas diametra plāknes nolīdzinājums ir

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} + m(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}) +$$
$$+ n(a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}) = 0$$

Sakārtojot šo nol-mu attiecībā uz x,y,z, dabūjam

$$(a_{11} + ma_{21} + na_{31})x + (a_{12} + ma_{22} + na_{32})y + (a_{13} + ma_{23} + na_{33})z +$$
$$+ (a_{14} + ma_{24} + na_{34}) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(23)$$

Šīs plāknes virziena koeficientus dabūjam no

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = (a_{11}+ma_{21}+na_{31}) : (a_{12}+ma_{22}+na_{32}) : (a_{13}+ma_{23}+na_{33}) \ldots(24)$$

Chordu virziena koeficientus dabūjam no

$$\cos\alpha_1 : \cos\beta_1 : \cos\gamma_1 = l : m : n \quad \ldots\ldots\ldots(25)$$

Lai chordas būtu stateniskas uz plāknes (23), tad, kā zinams, vajaga būt

$$\cos\alpha = \cos\alpha_1 \ , \quad \cos\beta = \cos\beta_1 \ , \quad \cos\gamma = \cos\gamma_1$$

No augšējā seko, ievērojot, ka $a_{12} = a_{21}$, $a_{31} = a_{13}$ u.t.t.

$$\frac{a_{11}+ma_{12}+na_{13}}{l} = \frac{a_{21}+ma_{22}+na_{23}}{m} = \frac{a_{31}+ma_{32}+na_{33}}{n} = s \quad \ldots\ldots\ldots(26)$$

Diametra plākni, kuŗa stāv stateniski uz tai piekārtotām parallēlām chordām, sauc par virsmas galveno diametra plākni. Šīs plāknes nolīdzinājumu dabūjam, ievedot nol-mā (23) m un n vērtības, kuŗas dabūjam no (26).

No nol-ma (26) dabūjam

$$a_{12}m + a_{13}n + a_{11} = s \ ; \quad a_{22}m + a_{23}n + a_{21} = ms \ ; \quad a_{32}m + a_{33}n + a_{31} = ns$$

vai arī

$$\left.\begin{aligned} a_{12}m + a_{13}n + (a_{11} - s) &= 0 \\ (a_{22} - s)m + a_{23}n + a_{21} &= 0 \\ a_{32}m + (a_{33} - s)n + a_{31} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(27)$$

Šie trīs nol-mi, kā nehomogeni attiecībā uz m un n var kopēji pastāvēt tad, ja

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{11} - s \\ a_{22} - s & a_{23} & a_{21} \\ a_{32} & a_{33} - s & a_{31} \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(28)$$

Attīstot determinantu (28) pēc pirmās rindas, dabūjam

$$a_{12}\begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ (a_{33}-s) & a_{31} \end{vmatrix} - a_{13}\begin{vmatrix} (a_{22}-s) & a_{21} \\ a_{32} & a_{31} \end{vmatrix} + (a_{11}-s)\begin{vmatrix} (a_{22}-s) & a_{23} \\ a_{32} & (a_{33}-s) \end{vmatrix} = 0$$

Attīstijuma trešais loceklis rāda, ka galīgā attīstijumā s būs trešā kāpē, tā tad (28) dod trešās kāpes nol-mu attiecībā uz s. Atslēdzot nol-mu attiecībā uz s, dabūjam trīs vērtības: s_1, s_2, s_3, kuŗas, kā to var pierādīt, arvien visas reālas.

Ievietojot s vērtības divos no nol-miem (27), dabūjam

s_1 atbilstošas vērtības .... m_1, n_1

s_2 " " .... m_2, n_2

s_3 " " .... m_3, n_3

Tā tad virsmai (1) ir trīs reāli virzieni, kuŗi stāv stateniski katrs uz tam piekārtotas diametra plāknes. Šos virzienus sauc par virsmas galveniem virzieniem un diametru, kuŗš iet galvenā virzienā sauc par virsmas asi.

Galveno diametra plākņu nol-mus dabūjam, ievietojot nol-mā (23) vērtību pārus (m_1, n_1), (m_2, n_2), (m_3, n_3).

Katra galveno diametra plākņu pāra krustošana dod vienu no trim asīm. Šīs trīs asis, kā to var pierādīt, stāv stateniski viena uz otras un tamdēļ stāv stateniski viena uz otras arī šīm asīm piekārtotas galvenās diametra plāknes.

Virsmas, kuŗu centram ir galīgas koordinātas.

57. Ja pārnesam koordinātu sākumu $O' = \bar{x}|\bar{y}|\bar{z}$ uz virsmas centru, tad ievērojot Nr.56, III nol-mus (16) redzams, ka virsmas nol-mā Nr.56, nol.(3) pazūd pirmās dimenzijas locekļi un virsmas nol-ms dabū veidu

$$a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + a_{33}z'^2 + 2a_{13}x'y' + 2a_{23}x'z' + 2a_{23}y'z' + R = 0 \quad ..(29)$$

kur $$R = a_{41}\bar{x} + a_{42}\bar{y} + a_{43}\bar{z} + a_{44}$$

Atstājot koordinātu sākumu O' centrā, ievedam jaunu koordinātu sistēmu, kuŗas x" ass iekrīt galvenā virzienā. Tad (y",z") plākne būs galvenā diametra plākne un virsma simmetriska pret šo plākni, bet tad pēc nol-ma (29) pārveidošanas tanī vairs neatradīsies locekļi ar x' pirmā kāpē un virsmas pārveidotais nol-ms (29) dabū veidu

$$a'_{11}x''^2 + a'_{22}y''^2 + a'_{33}z''^2 + 2a'_{23}y''z'' + R = 0 \quad ....(30)$$

Šo virsmu krustojam ar (y"z") plākni, liekot

$$x'' = 0 \quad ....(31)$$

Tad krustošanās līknes nol-ms (y"z") plāknē ir

$$a'_{22}y''^2 + a'_{33}z''^2 + 2a'_{23}y''z'' + R = 0 \quad ....(31)$$

Ja y" un z" iegriežam šīs otrās kārtības līknes diametru virzienos, tad nol-mā (31) un tādēļ arī pārveidotā nol-mā (30) pazūd loceklis ar y"z" un pēc šīs pārveidošanas virsmas nol-ms (30) dabū veidu

$$a'''_{11}x'''^2 + a'''_{22}y'''^2 + a'''_{33}z'''^2 + R = 0 \quad ....(32)$$

Priekš šī nol-ma determinants (28) dabū veidu

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & (a'''_{11} - s) \\ (a'''_{22} - s) & 0 & 0 \\ 0 & (a'''_{33} - s) & 0 \end{vmatrix} = (a'''_{11} - s)(a'''_{22} - s)(a'''_{33} - s) = 0$$

No augšējā seko

$$s_1 = a'''_{11} \;,\; s_2 = a'''_{22} \;,\; s_3 = a'''_{33} \qquad \ldots\ldots\ldots(33)$$

Uzskatam nol-mu (32) kā dotu un tālāk atmetam koeficientu augšējos rādītājus.

Nol-mi (27) šinī gadijumā, ievērojot (32), dabū veidu

$$\left.\begin{aligned}(a_{11} - s) &= 0\\(a_{22} - s)m &= 0\\(a_{33} - s)n &= 0\end{aligned}\right\} \quad (27^{\underline{a}})$$

noreizinam nol-mus ar $L = \dfrac{1}{\sqrt{1+m^2+n^2}}$

un ievedot $mL = M$, $nL = N$,tad $\cos\alpha = L$, $\cos\beta = M$, $\cos\gamma = N$

$$\left.\begin{aligned}(a_{11} - s)L &= 0\\(a_{22} - s)M &= 0\\(a_{33} - s)N &= 0\end{aligned}\right\} \quad (27^{\underline{b}})$$

liekot nol-mos $(27^{\underline{b}})$ $s = s_1 = a_{11}$,ievērojot (32), dabūjam

$$\left.\begin{aligned}(a_{11} - s_1)L_1 &= 0\\(a_{22} - s_1)M_1 &= 0\\(a_{33} - s_1)N_1 &= 0\end{aligned}\right\}$$

seko $M_1 = 0$, $N_1 = 0$,bet tad

$$\cos\beta_1 = 0 \;,\; \beta_1 = 90^\circ \;;\; \cos\gamma_1 = 0 \;,\; \gamma_1 = 90^\circ$$

kas rāda, ka galvenais virziens $\perp$ uz y un z asīm, tā tad sakrīt ar x asi.

Liekam nol-mos $(27^{\underline{b}})$ $s = s_2 = a_{22}$,ievērojot (32),dabūjam

$$\left.\begin{aligned}(a_{11} - s_2)L_2 &= 0\\(a_{22} - s_2)M_2 &= 0\\(a_{33} - s_2)N_2 &= 0\end{aligned}\right\}$$

seko $L_2 = 0$ un $N_2 = 0$, bet tad

$$\cos\alpha_2 = 0 \;,\; \alpha_2 = 90^\circ \;;\; \cos\gamma_2 = 0 \;,\; \gamma_2 = 90^\circ$$

kas rāda, ka galvenais virziens $\perp$ uz x un z asīm, tā tad sakrīt ar y ass virzienu.

Liekot nol-mos $(27^{\underline{b}})$ $s = s_3 = a_{33}$ dabūjam

$$\begin{aligned}(a_{11} - s_3)L_3 &= 0\\(a_{22} - s_3)M_3 &= 0\\(a_{33} - s_3)N_3 &= 0\end{aligned}$$

seko $L_3 = 0$ un $M_3 = 0$,bet tad

$$\cos\alpha_3 = 0 \;,\; \alpha_3 = 90^\circ \;;\; \cos\beta_3 = 0 \;,\; \beta_3 = 90^\circ$$

kas rāda, ka galvenais virziens $\perp$ uz x un y asīm, tā tad sakrīt ar z ass virzienu.

No augšējā redzams, ka tagadējā koordinātu sistema, ar koordinātu sākuma punktu virsmas centrā, tā novietota, ka tās asis x y z iet virsmas galvenos virzienos.

Tā tad nolīdzinājums

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + R = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(32^{\underline{a}})$$

izteic visas otrās kārtības virsmas, kuŗu centram ir galīgas koordinātas un pie tam koordinātu sistēmas sākuma punkts atrodās virsmas centrā un koordinātu asis iet virsmas galvenos virzienos.

58. Kādas virsmas izteic nol-ms ($32^{\underline{a}}$).

Nolīdzinājumā ($32^{\underline{a}}$) ievedam absolūtam loceklim apzīmi a_{44} apzīmes R vietā, tad

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (32^{\underline{b}})$$

Šinī nol-mā koeficienti a_{11}, a_{22}, a_{33} var būt visi pozitivi (gadijums α) vai arī divi pozitivi un viens negatīvs (gadijums β). Gadijienus, kad visi trīs koeficienti negativi vai tikai viens no viņiem pozitivs, var tad pārvest uz gadijumie α un β, reizinot nol-mu ar -1.

a) pieņemam, ka $a_{44} = 0$

tad nol-ms ($32^{\underline{b}}$) dabū veidu

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (34^{\underline{a}})$$

Nol-mu pārveidojam, liekot

$$a_{11} = \frac{1}{a^2}, \quad a_{22} = \frac{1}{b^2}, \quad a_{33} = \frac{1}{c^2}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (34^{\underline{b}})$$

Šis nol-ms ir homogens attiecībā uz x,y,z un kā no agrākā zināms, izteic konusa virsmu, kuŗas virsotne atrodās koordinātu sākumā.

Ja a_{11}, a_{22}, a_{33} visi pozitīvi, tad konus imaginārs, bet ja $a_{33} < 0$, tad liekot $a_{33} = -\frac{1}{c^2}$ dabūjam reālu konusu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (34^{\underline{c}})$$

Ja a = b, tad dabūjam rotacijas konusu

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (34^{\underline{d}})$$

b) liekam, ka nol-mā ($32^{\underline{b}}$) viens no koeficientiem pie mainīgiem, piemēram, $a_{33} = 0$, tad dabūjam

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{44} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (35)$$

Nol-ms, kā zināms, izteic cilindru $\perp$ uz xy plāknes. Ja apskatam nol-mu (35) kopēji ar z = 0, tad dabūjam līkni xy plāknē un kā zināms no analitiskās geometrijas plāknē, nol-ms

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{44} = 0$$

dod ellipsi vai hiperbolu, un tā tad šinī gadijumā dabūjam elliptisku vai hiperbolisku cilindru.

Ja $a_{11} = a_{22}$, tad dabūjam rotacijas cilindru.

c) ja nol-mā ($32^{\underline{b}}$) divi no četriem koeficientiem ir 0, tad virsma sadalās plāknēs.

d) Pieņemam, ka nol-mā ($32^{\underline{b}}$) visi koeficienti $\neq 0$, tad nodalot nol-mu ar $-a_{44}$, dabūjam

$$\frac{x^2}{\frac{-a_{44}}{a_{11}}} + \frac{y^2}{\frac{-a_{44}}{a_{22}}} + \frac{z^2}{\frac{-a_{44}}{a_{33}}} - 1 = 0 \quad \ldots\ldots (36)$$

Šeit var būt atsevišķi gadijieni.

d_1) $a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$, $a_{33} > 0$, $a_{44} > 0$

liekam

$$\frac{-a_{44}}{a_{11}} = -a^2 , \quad \frac{-a_{44}}{a_{22}} = -b^2 , \quad \frac{-a_{44}}{a_{33}} = -c^2$$

tad dabūjam

$$\frac{x^2}{-a^2} + \frac{y^2}{-b^2} + \frac{z^2}{-c^2} - 1 = 0$$

vai arī

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0 \quad \text{.........(37)}$$

Nol-ms dod imagināru virsmu. Šis virsmas asimptotiska konusa nol-ms, saskaņā ar (20) un (21) ir

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

imagināra izteiksme, tā tad asimptotisks konus imaginārs un virsma tad ir imaginārs ellipsoīds.

d_2) ja $a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$, $a_{33} > 0$, bet $a_{44} < 0$

tad $-a_{44}$ ir > 0 un tādēļ varam ievest

$$\frac{-a_{44}}{a_{11}} = a^2 , \quad \frac{-a_{44}}{a_{22}} = b^2 , \quad \frac{-a_{44}}{a_{33}} = c^2$$

ievietojot šīs vērtības nol-mā (36), dabūjam

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \quad \text{..........(38)}$$

Šī virsma ir reāla, bet viņas asimptotisks konus arī imaginārs. Virsma ir reāls ellipsoīds.

d_3) Ja $a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$, bet $a_{33} < 0$ un $a_{44} < 0$, tad

$$\frac{-a_{44}}{a_{11}} = a^2 , \quad \frac{-a_{44}}{a_{22}} = b^2 , \quad \frac{-a_{44}}{a_{33}} = - c^2$$

un nol-ms (36) dabū veidu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \quad \text{..........(39)}$$

Virsma ir reāla, asimptotisks konus $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ reāls. Šī virsma ir vientelpas hiperboloīds.

d_4) Ja $a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$, $a_{33} < 0$ un $a_{44} > 0$

tad liekam

$$\frac{-a_{44}}{a_{11}} = -a^2 , \quad \frac{-a_{44}}{a_{22}} = - b^2 , \quad \frac{-a_{44}}{a_{33}} = c^2$$

Nol-ms (36) dabū veidu

$$- \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

vai arī

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0 \quad \text{...........(39)}$$

Virsma reāla, asimptotisks konus arī reāls. Virsma ir divtelpas hiperboloīds.

59. K o n u s .

Konusa nol-ms dots ar (34$^{\underline{c}}$)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (34^{\underline{c}})$$

Šķeļot virsmu ar yz plākni

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}\right\}$$

dabūjam yz plāknē

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \text{ vai arī } = y = \pm \frac{b}{c} z$$

divas taisnes. Tāpat dabūjam xz plāknē divas taisnes

$$x = \pm \frac{a}{c} z$$

Šķeļot virsmu ar xy plākni, dabūjam

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Šie nol-mi dod punktus $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
Šķeļot virsmu ar plākni, kuŗa parallēla xy plāknei, $z = \pm h$

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} &= 0 \\ z &= \pm h \end{aligned}\right\}$$

Izslēdzot z starp šiem nol-miem redzam, ka šķēliena līknes projekcija uz xy plāknes ir

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{h^2}{c^2} = 0 \quad \text{vai arī} \quad \frac{x^2}{a^2\frac{h^2}{c^2}} + \frac{y^2}{b^2\frac{h^2}{c^2}} - 1 = 0$$

t.i. ellipse.

Šķēļam virsmu ar plākni caur z asi:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} &= 0 \\ y &= mx \end{aligned}\right\}$$

Izslēdzot y starp šiem nol-miem, dabūjam šķēliena līknes projekciju uz xz plāknes

$$x^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right) - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

vai arī

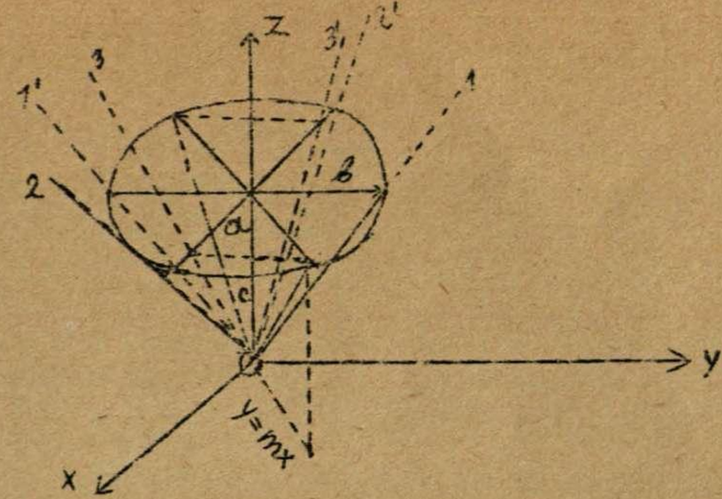
$$\left(x\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}} + \frac{z}{c} \right) \left(x\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}} - \frac{z}{c} \right) = 0$$

t.i. divas taisnes.

Taisnes (1 un 1'): $y = \pm \frac{b}{c} z$

taisnes (2 un 2'): $x = \pm \frac{a}{c} z$

ellipse ar pusasīm a un b ,šķēliens pie $z = c$, taisnes (3 un 3'): šķēliena (ar plākni $y = mx$) projekcijas uz xz plāknes.



(apakš xy plāknes atrodošā konusa virsmas daļa nav uzzīmēta)

60. Cilindri.

Cilindru nol-mu (35)

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{44} = 0$$

pārveidojam

$$\frac{x^2}{\frac{-a_{44}}{a_{11}}} + \frac{y^2}{\frac{-a_{44}}{a_{22}}} - 1 = 0$$

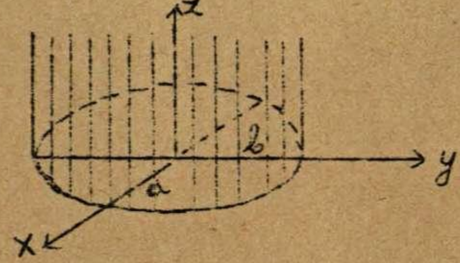
kad $a_{11} > 0$ un $a_{22} > 0$, $a_{44} < 0$,
tad liekam

$$\frac{-a_{44}}{a_{11}} = a^2 \quad , \quad \frac{-a_{44}}{a_{22}} = b^2$$

un dabūjam

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

Šis nol-ms dod elliptisku cilindru



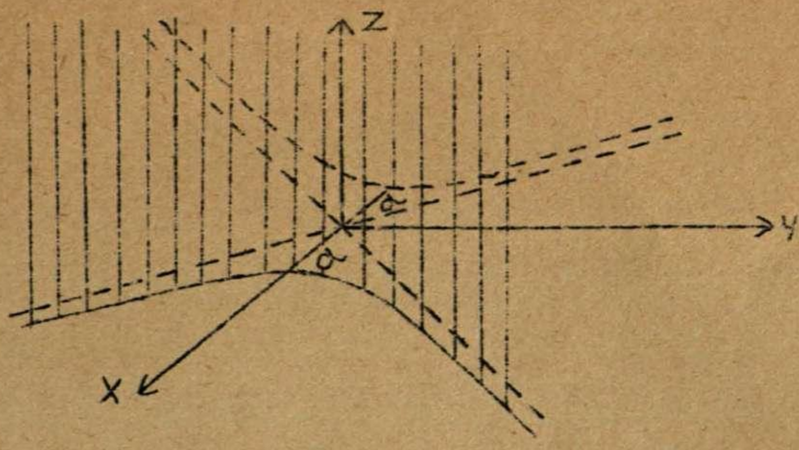
Ja $a_{11} > 0$, $a_{22} < 0$ un $a_{44} < 0$, tad liekot

dabūjam

$$\frac{-a_{44}}{a_{11}} = a^2 \quad , \quad \frac{-a_{44}}{a_{22}} = -b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

Nolīdzinājums dod hiperbolisku cilindru.



61. E l l i p s o ī d s .

Ellipsoīda nolīdzinājums (38)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (38)$$

Nol-ms rāda, ka virsma simmetriska pret koordinātu plāknēm.

Šķēlienu ar xy plākni dabūjam no nol-miem

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Šķēliena līkne xy plāknē ir ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

Tāpat dabūjam, ka šķēliena līknes yz un zx plāknēs ir ellipses

$$\left.\begin{aligned} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \quad &(\text{līkne yz plāknē}) \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \quad &(\text{līkne xz plāknē}) \end{aligned}\right\} \text{ellipses}$$

x ass krustpunktus ar virsmu dabūjam no nolīdzinājumiem

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 &= 0 \\ y &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Tā tad virsmas krustpunktu koordinātas ar x asi ir

$$x = \pm a|o|o$$

Tāpat dabūjam, ka

$$y = \pm o|b|o \quad (\text{y ass krustpunkti ar virsmu})$$

$$z = o|o|\pm c \quad (\text{z ass krustpunkti ar virsmu})$$

Lielumus a,b,c sauc par ellipsoīda pusasīm.

Ellipsoīda šķēlienu ar plākni $z = \pm h$ dabūjam no nol-miem

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 &= 0 \\ z &= \pm h \end{aligned}\right\}$$

Izslēdzot starp šiem nol-miem z, dabūjam šķēliena līknes projekciju uz xy plāknes, apskatot sekojošo nol-mu (xy) plāknē

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{h^2}{c^2}-1=0$$

pārveidojot

$$\frac{x^2}{a^2(1-\frac{h^2}{c^2})}+\frac{y^2}{b^2(1-\frac{h^2}{c^2})}-1=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(39)$$

tas ir ellipses nolīdzinājums.

Ellipses pusasis

$$a'=\sqrt{a^2(1-\frac{h^2}{c^2})} \text{ un } b'=\sqrt{b^2(1-\frac{h^2}{c^2})}$$

paliek mazākas ar augošo h un pie $h = c$ pusasis = 0. Tā tad plākne $z = \pm h$ krusto virsmu punktos $C_1 = o|o|c$ un $C_2 = o|o|-c$. Ja $h > c$, tad ellipse (39) imagināra.

Analogus rezultātus dabūjam, šķeļot virsmu ar plāknēm $x = \pm h$ un $y = \pm h$.

Šie rezultāti rāda, ka ellipsoīds ir slēgta virsma, un taisnleņķa parallēlepipeds ar malām 2a, 2b, 2c pilnīgi ieslēdz ellipsoīda virsmu.

Parasti pieņem $a > b > c$, tad ellipsoīda lielākā ass pieņemta kā x ass, vidējā, kā y ass un mazākā kā z ass.

Ja $a = b$, tad ellipsoīda nol-ms dabū veidu

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

Šis nol-ms dod rotacijas ellipsoīdu ar z asi kā rotacijas asi.

Ja $a = b = c$, tad dabūjam lodes (sfairas) nol-mu

$$x^2+y^2+z^2-a^2=0$$

kur lodes radiuss

$$r = a$$

Pieskara plāknes nol-mu pie ellipsoīda dabūjam pielietojot formulu (11). Šajā nol-mā

$$a_{11}=\frac{1}{a^2}, \quad a_{22}=\frac{1}{b^2}, \quad a_{33}=\frac{1}{c^2}, \quad a_{44}=-1$$

Visi citi koeficienti = 0. Apzīmējot ellipsoīda punktu, kurā pievedama pieskara plākne, ar $P = x_0|y_0|z_0$, dabūjam pieskara plāknes nol-mu

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}+\frac{zz_0}{c^2}-1=0$$

Zīmējumā Nr.1 parādīts ellipsoīda attēls.

62. Vientelpas hiperboloīds.

Vientelpas hiperboloīda nol-ms, kā redzējam, ir

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(40)$$

Virsmas šķēlienu ar xy plākni dabūjam no nolīdzinājumiem

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1&=0\\ z&=0\end{aligned}\right\}$$

Ievedot pirmā nol-mā $z = o$, dabūjam

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

Nol-ms dod ellipsi xy plāknē.

Šķēlieni ar (yz) un (xz) plāknēm ir hiperbolas, jo pievienojot nol-mam (40) nol-mu

$$x = 0$$

dabūjam

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

un pie $y = o$ dabūjam

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

Abos gadijumos nol-mi dod hiperbolas attiecīgās koordinātu plāknēs.

Šķēlienu ar plākni, kuŗa parallēla xy plāknei, dabūjam, apskatot kopā nol-mus

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \\ z = \pm h \end{aligned}\right\}$$

Izslēdzot starp nol-miem z, dabūjam šķēliena līknes projekciju uz xy plāknes, apskatot sekojošo nol-mu xy plāknē

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - (1 + \frac{h^2}{c^2}) = 0$$

vai arī

$$\frac{x^2}{a^2(1 + \frac{h^2}{c^2})} + \frac{y^2}{b^2(1 + \frac{h^2}{c^2})} - 1 = 0 \quad ....(41)$$

Nol-ms dod ellipsi, kuŗas asis aug, ja aug h. Tā tad plāknes, parallēlas (xy) plāknei, krusto vientelpas hiperboloīdu ellipses, vismazākā ellipse ir pie $h = 0$. Šo ellipsi sauc par rīkles ellipsi. Augšējais nol-ms rāda, ka šķēliena ellipsei pie $\pm h$ arvien reālas asis. Seko, ka šī virsma iet bezgalībā z ass virzienā.

Šķēlienu ar plākni, kuŗa parallēla yz plāknei dabūjam, apskatot kopēji nolmu (40)

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \\ x = \pm k \end{aligned}\right\}$$

un

Izslēdzot starp tiem x, dabūjam šķēliena līknes projekciju uz yz plāknes, apskatot sekojošo nol-mu yz plāknē

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - (1 - \frac{k^2}{a^2}) = 0 \quad ....(42)$$

vai arī

$$\frac{y^2}{b^2(1 - \frac{k^2}{a^2})} - \frac{z^2}{c^2(1 - \frac{k^2}{a^2})} - 1 = 0 \quad ....(43)$$

Nol-ms izteic hiperbolu. Šeit jāizšķir trīs gadijieni

1) $|k| < a$, tad hiperbolas reālā ass ir y ass.

2) $|k| = a$, tad, kā redzams no nol-ma(42), šķēliens ir divas taisnes

$$(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}) = 0 \text{ un } (\frac{y}{b} + \frac{z}{c}) = 0$$

3) $|k| > a$, tad hiperbolas (43) reālā ass ir z ass virzienā.

Šķēlieni ar plāknēm, kuŗas parallēlas (xz) plāknei, dod analogus rezultātus.

Vientelpas hiperboloīda krustpunktus ar koordinātu asīm dabūjam: ar x asi, atslēdzot kopēji nol-mu (40) un y=0 , z=0, tas dod

$$x = \pm a$$

Tāpat dabūjam arī krustpunktus ar y asi

$$y = \pm b$$

Krustpunktus ar z asi dabūjam

$$z = \pm ci$$

tas nozīmē, ka z asij nav reālu krustpunktu ar virsmu.

a un b sauc par vientelpas hiperboloīda reālām pusasīm un c par imagināro pusasi.

Ja a = b, tad dabūjam rotacijas vientelpas hiperboloīda nolīdzinājumu

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

Pieskara plāknes nol-mu dabūjam pielietojot formulu (11)

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - \frac{zz_0}{c^2} - 1 = 0$$

Vientelpas hiperboloīda attēls redzams zīm.Nr.2.

63. Divtelpu hiperboloīds.

Šīs virsmas nol-ms, kā agrāk redzējam, ir

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0 \quad ....(44)$$

Virsmas šķēlienus ar (xy),(yz),(xz) plāknēm dabūjam

1)ar xy plākni $\left.\begin{array}{r}\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0\\ z = 0\end{array}\right\}$

2)ar yz plākni $\left.\begin{array}{r}\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0\\ x = 0\end{array}\right\}$

3)ar xz plākni $\left.\begin{array}{r}\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0\\ y = 0\end{array}\right\}$

Pirmā gadijumā izslēdzot z starp nol-miem dabūjam, ka šķēliena līknes projekcija uz xy plāknes,apskatot nol-mu xy plāknē

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$$

Šis šķēliens ir imagināra ellipse.

Otrā gadijienā izslēdzot x un trešā gadijienā izslēdzot y, dabūjam šķēlienu projekcijas, apskatot sekojošus nol-mus attiecīgās plāknēs

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$$

Abos gadijienos dabūjam hiperbolas, pie kam reālā ass ir z ass.

Šķēlienu ar plākni, parallēlu (xy) plāknei, dabūjam ar nolīdzinājumiem

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0\\ x=\pm h\end{aligned}\right\}$$

Izslēdzot z starp šiem nol-miem, dabūjam šķēliena projekciju uz xy plāknes, apskatot nol-mu

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\left(\frac{h^2}{c^2}-1\right)=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(45)$$

xy plāknē.

Pārveidojot, dabūjam

$$\frac{x^2}{a^2\left(\frac{h^2}{c^2}-1\right)}+\frac{y}{b^2\left(\frac{h^2}{c^2}-1\right)}-1=0 \quad \ldots\ldots(46)$$

Kamēr $|h|<c$ nol-ms dod imagināru ellipsi. Kad $|h|=c$, tad nol-ms (45) rāda, ka tas apmierināts ar $x=o$ un $y=o$. Tad plākne $z=\pm c$ krusto virsmu punktos

$$P_1 = o|o|c$$

$$P_2 = o|o|-c$$

Kad $|h|>c$, tad nol-ms (46) dod reālu ellipsi. Šīs ellipses asis aug, ja aug h. Seko, ka divtelpu hiperboloīds sastāv no divām telpām, viena no tām atrodās virs plāknes $z = c$ un otra apakš plāknes $z = -c$.

Šķēlienu ar plākni, parallēlu yz plāknei, dabūjam ar nolīdzinājumiem

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0\\ x=\pm k\end{aligned}\right\}$$

Izslēdzot starp šiem nol-miem x, dabūjam

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+\left(1+\frac{k^2}{a^2}\right)=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(47)$$

vai arī

$$\frac{y^2}{b^2\left(1+\frac{k^2}{a^2}\right)}-\frac{z^2}{c^2\left(1+\frac{k^2}{a^2}\right)}+1=0 \quad \ldots\ldots\ldots(48)$$

Apskatot nol-mu (48) plāknē (yz), tas dod krustošanās līknes projekciju uz xy plāknes. Redzams, ka līkne ir hiperbola ar z asi kā reālo asi. Tādu pašu rezultātu dabūjam, krustojot virsmu ar plākni, kuŗa parallēla xz plāknei.

Divtelpu hiperboloīda attēlujums parādīts zīm.Nr.3.

Koordinātu asu krustpunkti ar divtelpu hiperboloīda virsmu:

Ar x asi

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0\\ y=0\\ z=0\end{aligned}\right\}$$

Seko

$$x=\pm ai$$

Tāpat dabūjam ar y asi

$$y=\pm bi$$

Ar z asi

$$z=\pm c$$

Redzams, ka tikai z ass ir reāla.

Ja liekam a = b, dabūjam rotacijas divtelpu hiperboloīdu

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0$$

Pieskara plāknes nol-mu dabūjam, pielietojot formulu (11)

$$\frac{x.x_0}{a^2}+\frac{y.y_0}{b^2}-\frac{z.z_0}{c^2}+1=0$$

64. Hiperboloīdu asimptotisks konus.

Hiperboloīdi ar nol-miem

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0$$

tiek saukti par piekārtotiem. Šiem hiperboloīdiem ir tie paši parametri a,b,c.

Vedam taisni no koordinātu centra,tad šī taisne iziet arī no augšējo hiperboloīdu centra

$$\left.\begin{array}{l} y = mx \\ z = nx \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (6)$$

Ievedot šīs izteiksmes hiperboloīdu augšējos nol-mos,dabūjam

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{m^2x^2}{b^2}-\frac{n^2x^2}{c^2}-1=0$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{m^2x^2}{b^2}-\frac{n^2x^2}{c^2}+1=0$$

vai arī

$$x^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}-\frac{n^2}{c^2}\right)-1=0$$

$$x^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}-\frac{n^2}{c^2}\right)+1=0$$

Ja koeficients pie x^2 ir nulle, tad x top bezgalīgs.Bet tā kā šeit koeficients arī pie x ir nulle, tad arī $x_2=\infty$ un taisnes (6) pieskarās virsmai bezgalībā.

Izteiksmi

$$\frac{1}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}-\frac{n^2}{c^2}=0$$

izpilda daudzas taisnes no koordinātu sākuma; šīs taisnes veido virsmu, kuŗu dabūjam, izslēdzot starp taisnes nol-miem un šo noteikumu m un n.

Izslēgšana dod

$$\frac{1}{a^2}+\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{b^2}-\frac{\left(\frac{z}{x}\right)^2}{c^2}=0$$

vai arī

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

Šī virsma ir konus, kas, kā redzams, kopējs abiem hiperboloīdiem un pieskarās pie tiem bezgalīgi tālā līknē.

Šķeļot konusu ar plākni z = h dabūjam, kā šķēliena projekciju uz xy plāknes

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{h^2}{c^2}=0$$

Šķeļot hiperboloīdus ar to pašu plākni, dabūjam šķēliena projekcijas uz (xy) plāknes

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - (1 + \frac{h^2}{c^2}) = 0$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - (\frac{k^2}{c^2} - 1) = 0$$

Pārveidojot šos trīs nol-mus, dabūjam

$$\frac{x^2}{a^2 \cdot \frac{h^2}{c^2}} + \frac{y^2}{b^2 \cdot \frac{h^2}{c^2}} - 1 = 0 \quad \text{(konusa šķēliens)}$$

$$\frac{x^2}{a^2(1 + \frac{h^2}{c^2})} + \frac{y^2}{b^2(1 + \frac{h^2}{c^2})} - 1 = 0 \quad \text{(vientelpas hiperboloīda šķēliens)}$$

$$\frac{x^2}{a^2(\frac{h^2}{c^2} - 1)} + \frac{y^2}{b^2(\frac{h^2}{c^2} - 1)} - 1 = 0 \quad \text{(divtelpu hip.šķēliens)}$$

Kā redzams, šīs trīs šķēlienu ellipses ir līdzīgas. Vislielāko ellipsi dod vientelpas hiperboloīds, vismazāko ellipsi dod divtelpu hiperboloīds. No tā seko, ka asimptotiskā konusa virsma atrodās starp vientelpas un divtelpu hiperboloīdu virsmām.

Šķeļot asimptotisko konusu un hiperboloīdus ar plākni $x = 0$, dabūjam

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

vai arī

$$(\frac{y}{b} + \frac{z}{c})(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}) = 0$$

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$$

Redzams, ka asimptotiskā konusa šķēliens - divas taisnes,- ir, hiperboloīdu šķēlienu - hiperbolu - asimptotas. Analogu rezultātu dabūjam, šķeļot ar plākni $y = 0$.

Asimptotiskā konusa pieskara plāknes nol-ms, pielietojot nol-mu (11), ir

$$\frac{x\,x_0}{a^2} + \frac{y\,y_0}{b^2} - \frac{z\,z_0}{c^2} = 0$$

Virsmas ar centru bezgalībā.

65. Kā redzējam, virsmai (1) ir trīs galvenās diametra plāknes, kuŗas stāv savstarpēji stateniski. Liekam koordinātu sistēmu tā, lai (y'z') un (x'z') koordinātu plāknes sakristu ar divām galvenām plāknēm un koordinātu sākums O' atrastos uz virsmas. Tādā gadijienā virsmas nol-mā nebūs absolūtā locekļa un nebūs, virsmas simmetrijas dēļ, arī locekļu, kuŗos x' un y' pirmā kāpē. Virsmas nol-ms (1) tad dabū veidu

$$a'_{11}\,x'^2 + a'_{22}\,y'^2 + a'_{33}\,z'^2 + 2a'_{34}\,z' = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(49)$$

Ērtības dēļ atmetam augšējos rādītājus pie koeficientiem un nezināmiem, un rakstam

$$a_{11}\,x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{34}z = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(49^a)$$

Šinī nol-mā atrodās vēl visas otrās kārtības virsmas. Virsmas, kuŗu centra koordinātas ir galīgas, jau apskatītas, tādēļ apskatīsim tās virsmas, kuŗu centra koordinātas ir bezgalīgas. No pētijuma par centru zinams, ka centra koordinātas dabū vērtību ∞, ja

$$D_{44} = 0$$

$$D_{44} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Priekš nol-ma ($49^{\underline{a}}$) determinants dabū veidu

$$D_{44} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} . a_{22} . a_{33}$$

Lai centra koordinātas dabūtu vērtību ∞, tad vajaga, lai

$$D_{44} = a_{11} \; a_{22} \; a_{33} = 0$$

1) Ja $a_{11} = 0$, tad $D_{44} = 0$ un nol-mā ($49^{\underline{a}}$) paliek

$$a_{22} y^2 + a_{33} z^2 + 2a_{34} z = 0 \qquad \text{.............(50)}$$

Šis nol-ms dod cilindra virsmu. Augšējo nol-mu varam rakstīt

$$y^2 = 2pz + qz^2 \qquad \text{...............}(50^{\underline{a}})$$

kur

$$p = \frac{-a_{34}}{a_{22}} \quad \text{un} \quad q = \frac{-a_{33}}{a_{22}}$$

Pieņemam, ka $a_{34} < 0$, jo ja $a_{34} > 0$, tad varam par pozitivas z ass virzienu pieņemt pretēju dotam virzienam. Nol-ms ($50^{\underline{a}}$) dod, ja $q \neq 0$ elliptisku vai hiperbolisku cilindru. Ja $q = 0$, tad dabūjam parabolisku cilindru.

Analogus rezultātus dabūjam pie $a_{22} = 0$.

2) Ja $a_{33} = 0$, tad arī $D_{44} = 0$. Nol-ms ($49^{\underline{a}}$) tad dabū veidu

$$a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + 2a_{34} z = 0$$

Pieņemam

$$a_{11} > 0 \; , \; a_{22} > 0 \text{ un kā agrāk } a_{34} < 0$$

tad nodalot nolīdzinājumu ($49^{\underline{a}}$) ar $-a_{34}$, dabūjam

$$\frac{x^2}{\frac{-a_{34}}{a_{11}}} + \frac{y^2}{\frac{-a_{34}}{a_{22}}} = 2z \qquad \text{................(51)}$$

Liekam
$$p = \frac{-a_{34}}{a_{11}} \quad \text{un} \quad q = \frac{-a_{34}}{a_{22}}$$

Nol-ms (51) tad dabū veidu

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \qquad \text{..................(52)}$$

Šis nol-ms dod elliptisku paraboloīdu.

Pieņemot $a_{11} < 0$, $a_{22} > 0$, $a_{34} < 0$

dabūjam

$$-\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \qquad \text{...................(53)}$$

Šis nol-ms dod hiperbolisku paraboloīdu.

66. Elliptisks paraboloīds.

Elliptiska paraboloīda nolīdzinājums ir

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$$

Šķēlienu ar xy plākni dabūjam ar nol-miem

$$\left.\begin{array}{r}\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \\ z = 0\end{array}\right\}$$

Šķēliena līknes projekcija xy plāknē ir

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 0$$

Nol-ms dod divas imagināras taisnes ar reālu krustpunktu $P = o|o|o$. Tā tad xy plākne pieskarās elliptiskam paraboloīdam koordinātu sākumā.

Šķēliena līkni ar yz plākni dabūjam

$$\left.\begin{array}{r}\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \\ x = 0\end{array}\right\}$$

Šīs līknes (yz) projekcija ir

$$y^2 = 2qz$$

Nol-ms dod parabolu. Analogus rezultātus dabūjam, šķeļot virsmu ar plākni $y = o$. Šķēlienu ar plākni, paralēlu(xy)plāknei dabūjam

$$\left.\begin{array}{r}\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \\ z = h\end{array}\right\}$$

Šīs līknes projekcija (xy) plāknē ir

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2h$$

vai arī

$$\frac{x^2}{p.2h} + \frac{y^2}{q.2h} - 1 = 0$$

Nol-ms dod ellipsi, kuŗas asis aug, ja aug h. Ellipse,kā redzams, reāla tikai pie $h > o$. Elliptisks paraboloīds tā tad atrodās virs xy plāknes un iet bezgalībā z ass virzienā.

Šķēlienu ar plākni, paralēlu (yz) plāknei dabūjam

$$\left.\begin{array}{r}\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \\ x = \pm k\end{array}\right\}$$

Šīs līknes projekcija uz (yz) plāknes ir

$$\frac{y^2}{q} = 2z - \frac{k^2}{p}$$

$$y^2 = 2qz - \frac{q}{p} k^2$$

Nol-ms dod parabolu.

Analogu rezultātu dabūjam, šķeļot ar plākni $y = \pm k$. Elliptisks paraboloīds attēlots zīm.Nr.4.

Ja $p = q$, tad dabūjam rotacijas paraboloīdu

$$\frac{x^2 + y^2}{p} = 2z$$

Pieskara plāknes nol-mu dabūjam no formulas (11)

$$\frac{x x_0}{p} + \frac{y y_0}{q} = z + z_0$$

67. Hiperbolisks paraboloīds.

Hiperboliskā paraboloīda nolīdzinājums ir

$$-\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$$

Šķēlienu ar (xy) plākni dabūjam ar nolīdzinājumiem

$$\left.\begin{array}{r} -\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \\ z = 0 \end{array}\right\}$$

(xy) plāknē dabūjam

$$-\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 0$$

vai arī

$$\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right)\left(-\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right) = 0$$

nol-ms dod divas reālas taisnes, bet tas arī apmierināts ar $x = o$, $y = o$, tā tad (xy) plākne pieskarās virsmai koordinātu sākumā.

Šķēlienu ar (yz) plākni dabūjam

$$\left.\begin{array}{r} -\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \\ x = 0 \end{array}\right\}$$

(xy) plāknē dabūjam

$$y^2 = 2qz$$

parabolu, kuŗas ass iet pozitīvas z ass virzienā.

Šķēlienu ar (xz) plākni dabūjam

$$\left.\begin{array}{r} -\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \\ y = 0 \end{array}\right\}$$

(xz) plāknē dabūjam

$$-\frac{x^2}{p} = 2z$$

$$x^2 = -2pz$$

arī parabolu, bet šīs parabolas ass iet negatīvās z ass virzienā.

Šķēlienu ar plākni, paralēlu (xy) plāknei dabūjam

$$\left.\begin{array}{r} -\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \\ z = h \end{array}\right\}$$

Šīs līknes projekcija uz xy plāknes ir

$$-\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2h$$

vai arī

$$\frac{-x^2}{p.2h} + \frac{y^2}{q.2h} - 1 = 0$$

Pie $h > o$ šī līkne ir hiperbola, kuŗas reālā ass paralēla y asij, tās asis aug, ja aug h.

Ja $h < o$, tad arī dabūjam hiperbolu

$$\frac{-x^2}{p.2(-h)} + \frac{y^2}{q.2(-h)} - 1 = 0$$

Šīs hiperbolas reālā ass ir parallēla x asij.
Šķēlienu ar plākni, parallēlu (yz) plāknei dabūjam

$$\left.\begin{array}{r} -\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \\ x = \pm k \end{array}\right\}$$

Šīs līknes projekcija uz (yz) plāknes ir

$$\frac{y^2}{q} = 2z + \frac{k^2}{p}$$

$$y^2 = 2qz + \frac{k^2}{p} q$$

Līkne ir parabola, viņas ass iet pozitīvās z ass virzienā.
Šķēlienu ar plākni, parallēlu (xz) plāknei dabūjam

$$\left.\begin{array}{r} -\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \\ y = \pm k \end{array}\right\}$$

Šīs līknes projekcija uz (xz) plāknes ir

$$-\frac{x^2}{p} + \frac{k^2}{q} = 2z$$

$$x^2 = -2pz + \frac{k^2}{q} p$$

Šī līkne ir parabola, kuŗas ass iet negatīvās z ass virzienā.
Hiperboliska paraboloīda attēlojums parādīts zīm.Nr.5.
Pieskara plāknes nol-ms seko no nol-ma (11)

$$-\frac{x x_o}{p} + \frac{y y_o}{q} = z + z_o$$

68. Otrās kārtības virsmas, uz kuŗām atrodās taisnes.

Taisne iet bezgalībā divos pretējos virzienos. Ellipsoīds ir slēgta virsma, tam nav bezgalīgi tālu punktu un tādēļ uz tā arī nevar atrasties taisne. Divtelpu hiperboloīds sastāv no divām atsevišķām daļām, tādēļ uz tā arī nevar atrasties taisne. Paraboloīds iet bezgalībā vienā virzienā un tādēļ arī uz tā nevar atrasties taisne.

Taisne var atrasties 1) uz konusa, 2)uz cilindra, 3)uz vientelpu hiperboloīda, 4) uz hiperboliska paraboloīda, jo šīs virsmas iet bezgalībā divos pretējos virzienos un sastāv no vienas telpas.

Taisnes uz vientelpas hiperboloīda.

Vientelpas hiperboloīda nolīdzinājums

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

Pārveidojam

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}$$

(

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \left(1 + \frac{y}{b}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right)$$

$$\frac{\frac{x}{a} + \frac{z}{c}}{1 + \frac{y}{b}} = \frac{1 - \frac{y}{b}}{\frac{x}{a} - \frac{z}{c}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\alpha)$$

Ja pieņemam uz hiperboloīda punktu P = x|y|z,tad pie šīm koordinātu vērtībām nol-ma (α) kreisā puse dabū vērtību

$$\frac{\frac{x}{a} + \frac{z}{c}}{1 + \frac{y}{b}} = \ell_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\beta)$$

tad

$$\ell_1 = \frac{1 - \frac{y}{b}}{\frac{x}{a} - \frac{z}{c}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\gamma)$$

no (β) un (γ) seko

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} &= \ell_1\left(1 + \frac{y}{b}\right) \\ \ell_1\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) &= 1 - \frac{y}{b} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\delta)$$

Nol-mi (δ) ir vientelpas hiperboloīda nol-mi parametra veidā, bet katrs no tiem ir pirmās kāpes un tādēļ izteic plākni.Pie noteikta ℓ_1 nol-mi izteic taisni, kuŗa atrodās uz hiperboloīda, bet ja ℓ_1 mainīgs parametrs,tad katrai ℓ_1 vērtībai atbilst taisne un visas šīs taisnes atrodās uz hiperboloīda un veido vienu bezgalīgu daudzumu.

Hiperboloīda nol-mu varam rakstīt arī šādi

$$\frac{\frac{x}{a} + \frac{z}{c}}{1 - \frac{y}{b}} = \frac{1 + \frac{y}{b}}{\frac{x}{a} - \frac{z}{a}}$$

un liekot, kā augšā

$$\frac{\frac{x}{a} + \frac{z}{c}}{1 - \frac{y}{b}} = \ell_2$$

$$\ell_2 = \frac{1 + \frac{y}{b}}{\frac{x}{a} - \frac{z}{a}}$$

dabūjam

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} &= \ell_2\left(1 - \frac{y}{b}\right) \\ \ell_2\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) &= 1 + \frac{y}{b} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\delta')$$

Šeit mainot ℓ_2,dabūjam arī taisnes, kuŗas atrodās uz hiperboloīda. Tā tad, uz vientelpas hiperboloīda atrodās divi bezgalīgi daudzumi taišņu, viens no tiem atbilst mainīgam parametram ℓ_1 un otrs - mainīgam ℓ_2.

Kā redzējam, ℓ_1 tika noteikts, pieņemot uz paraboloīda punktu P = x|y|z, pirmā taisne (δ) tādēļ iet caur punktu P.

Ja noteicam ℓ_2 arī ar tā paša punkta P koordinātām,tad arī otra taisne (δ') iet caur P un tādēļ,taisnes (δ) un (δ')krusa tojās punktā P. No sacītā seko: caur katru vientelpas hiperboloīda punktu iet divas taisnes, pa vienai no katra, parametriem ℓ_1 un ℓ_2 atbilstoša daudzuma.

Tā kā katram $P = x|y|z$ atbilst tikai viens ℓ_1 un arī viens ℓ_2, un katram ℓ_1 un ℓ_2 atbilst tikai pa vienai taisnei katrā daudzumā, tad seko, ka viena un tā paša daudzuma taisnes nekrustojās.

Taisnes uz hiperboliska paraboloīda.

Hiperboliska paraboloīda nol-ms

$$-\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$$

pārveidojam

$$\left(\frac{-x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}\right)=2z$$

Pieņemam uz hiperboliska paraboloīda punktu $P = x|y|z$, tad to vērtību, kuru pieņem pirmās iekavas ar P koordinātām, apzīmējam ar ℓ_1

$$\left.\begin{aligned}\frac{-x}{\sqrt{p}}+\frac{8y}{\sqrt{q}}&=\ell_1\\ \ell_1\left(\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}\right)&=2z\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(a)$$

Nol-mi (a) ir hiperboliska paraboloīda nol-mi parametra veidā, parametrs ir ℓ_1. Katrs nol-ms izteic plākni un pie noteikta ℓ_1 dabūjam taisni, kura atrodās uz hiperboliska paraboloīda. Ja ℓ_1 mainīgs, tad dabūjam vienu taišņu bezgalīgu daudzumu, kurš tad veido hiperbolisko paraboloīdu. Otru taišņu daudzumu dabūjam, liekot

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}&=\ell_2\\ \ell_2\left(\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}\right)&=2z\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(b)$$

Kā agrāk redzējam, tā arī šeit, caur katru hiperboliska paraboloīda punktu iet divas taisnes, pa vienai no taišņu daudzumiem, atbilstošiem parametriem ℓ_1 un ℓ_2. Tāda pat kārtā, kā pie vientelpas hiperboloīda, šeit redzams, ka viena un tā paša daudzuma taisnes nekrustojās.

Pirmā daudzuma taisnes atrodās plāknē

$$\frac{-x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}=\ell_1$$

tā tad tās parallēlas plāknei

$$\frac{-x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(c)$$

Otra daudzuma taisnes atrodās plāknē

$$\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}=\ell_2$$

tā tad tās parallēlas plāknei

$$\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(d)$$

Plāknes (c) un (d) sauc par hiperboliskā paraboloīda virzienošām plāknēm.

Vingrinājumi.

1.Dabūt attālumu starp punktiem $P_1=5|-6|-9|$. Atbilde 13.

2.Kāds z,lai $P_1=5|-2|z$ attālums no $P_2=3|0|1$ būtu 3 ? Atbilde $z_1=0;z_2=-2$.

3.Kādus leņķus veido ar koordinātu asīm taisne no koordinātu sākuma,līdz $P = 5/\sqrt{2}|10|5\sqrt{2}$. Atbilde $\alpha=60^\circ, \beta=45^\circ, \gamma=60^\circ$

4.Taisne g_1 veido ar x un y asīm leņķus $\alpha=60^\circ, \beta=60^\circ$ taisne g_2 veido ar x un y asīm leņķus $\alpha=45^\circ, \beta=45^\circ$. Kāds ir leņķis starp g_1 un g_2 ? Atbilde 45°

5.Dabūt leņķi starp r_1 un r_2 .Radius vektors r_1 iet uz $P_1 = 2\sqrt{2}|2|\sqrt{6}$ un r_2 uz $P_2 = 3|0|\sqrt{3}$ Atbilde 30°

6.Taisnes gabals $P_1 P_2$ noteikts ar $P_1 = 9|12|3$ un $P_2 = 15|-18|9$, ir dalīts trīs vienlīdzīgās daļās. Dabūt punktu P_1 ,tuvākā dalijuma punkta koordinātas. Atbilde $11|2|5$

7.Uz plāknes $6x - 3y + 2z - 1 = 0$ dabūt tādu punktu,kuŗa $y = -1$ un $z = 2$. Atbilde $P = -1|-1|2$

8.Uz plāknes $5\sqrt{2}\, x + 5y + 5z - 1 = 0$ vests statenis d no koordinātu sākuma. Dabūt stateņa garumu un tā virziena leņķus. Atbilde $d = 0.1$ $\alpha=45^\circ, \beta=60^\circ, \gamma=60^\circ$

9.Dabūt plāknes $2x - 3y + 5z + 30 = 0$ asu nogriežņus a,b,c. Atbilde $a = -15$,$b = 10$, $c = -6$

10.Kāds ir plāknes $6x - 5y + 8 = 0$ normālnolīdzinājums?

Atbilde $\dfrac{6x - 5y + 8}{-\sqrt{61}} = 0$

11.Kāds ir plāknes $3x + 4y - 12z + 6 = 0$ attālums d no punkta $P = 3|-1|2$? Atbilde $d = 1$

12.Kāds leņķis ϑ starp plāknēm $3x - 5y + 6z - 7 = 0$ un $3x + 3y + z - 11 = 0$? Atbilde $\vartheta = 90^\circ$

13.Vai punkti $P_1 = 2|4|3$, $P_2 = 6|5|5$, $P_3 = 2|5|3$ un $P_4 = -2|7|1$ atrodās plāknē ? Atbilde atrodās

14.Kāds ir tās plāknes nol-ms, kuŗā augšējie četri punkti atrodās? Atbilde $x-2z+4=0$

15.Dabūt plākni,kuŗa iet caur $P_1 = 14|12|10$ un $P_2 = 14|8|10$ un kuŗa stateniska uz plāknes $13y - 11z + 17 = 0$ Atbilde $x-14=0$

16.Dabūt plākni, kuŗa iet caur taisni

$$\left.\begin{array}{l} 3x - 7y + 8z - 10 = 0 \\ 2x + 4y - 7z + 5 = 0 \end{array}\right\}$$

un caur koordinātu sākumu. Atbilde $7x+y-6z=0$

17.Kāds ir leņķis ϑ starp taisnēm

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{6}$$

$$\frac{x-2}{8} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-3}{1}$$

Atbilde $\cos\vartheta = \frac{34}{63}$

18. Vai punkti $P_1 = 2|3|1$, $P_2 = 4|5|2$ un $P_3 = 6|7|3$ atrodās uz vienas taisnes?

Atbilde: ja

19. Dabūt tā virziena koeficientus, kurš $\perp$ uz taisnēm

$$\frac{x+1}{-6} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1}$$

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{1}$$

Atbilde $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, $\cos\beta = \frac{2}{3}$, $\cos\gamma = \frac{2}{3}$

20. Dabūt leņķi starp plākni $2x - 3y + 6z - 39 = 0$ un taisni

$$x - 8z - 1 = 0$$
$$y + 4z - 1 = 0$$

Atbilde $\sin\varphi = \frac{34}{63}$

21. Dabūt plākni, kuŗa iet caur $P = 2|3|1$ un $\perp$ uz taisnes

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+2}{4}$$

Atbilde $2x-3y+4z+1=0$

22. Dabūt plākni, kuŗa iet caur taisni

$$\frac{x+1}{5} = \frac{y-15}{3} = \frac{z-2}{2}$$

un parallēla taisnei

$$\left.\begin{array}{l} x - 4z - 7 = 0 \\ y - 3 = 0 \end{array}\right\}$$

Atbilde $x+y-4z-6=0$

23. Kādās virsmās sadalās virsma, dota ar nol-mu

$$x^4 - y^4 = x^2 - y^2$$

Atbilde cilindr. $x^2 + y^2 = 1$

plākne $x + y = 0$

" $x - y = 0$

24. Dabūt virsmas $x^2-4xy+9y^2-6xz+2yz+2z^2+8x-16y+1=0$ centra koordinātas

Atbilde $1|1|1$.

25. Kāda virsma izteikta ar nol-mu

$$5x^2 - 6xy + 2y^2 - 4xz + 2yz + z^2 - 8x + 6y + 4z + 2 = 0$$

Atbilde paraboloīds.

26. Kādā līknē tiek krustota virsma $4x^2-12xy+9y^2+5z^2+12y=0$ ar plākni $z = 0$.

Atbilde parabolā.

27. Dabūt virsmas (24.uzdevumā) diametra plākni, kuŗa iet caur koordinātu sākumu un punktu $P = 0|1|2$

Atbilde $x-2y+z=0$

28. Dota virsma $11x^2-8xy+7y^2+12xz-6yz+5z^2-4x+6y+2z-1=0$ dabūt virsmas diametra plākni, kuŗa piekārtota chordām ar virzienu koeficientu $1|1|1$.

Atbilde $13x+8z+2=0$

29. Kādu virsmu izteic nol-ms $x^2-y^2+10x+12y-18z+7=0$

Atbilde hiperbol. paraboloīdu.

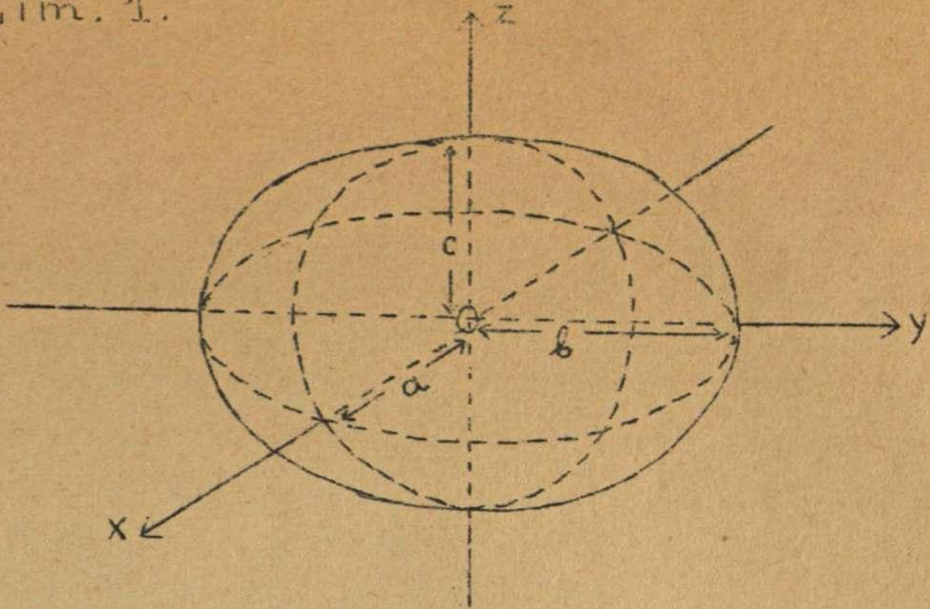
30. Ellipsoīds, kuŗa asis sakrīt ar koordinātu asīm, iet caur punktiem $P_1 = 1|3|1$, $P_2 = 3|1|1$ un $P_3 = 1|1|\sqrt{5}$. Kāds ir šī ellipsoīda nol-ms?

Atbilde $\frac{x^2+y^2}{12} + \frac{z^2}{6} - 1 = 0$

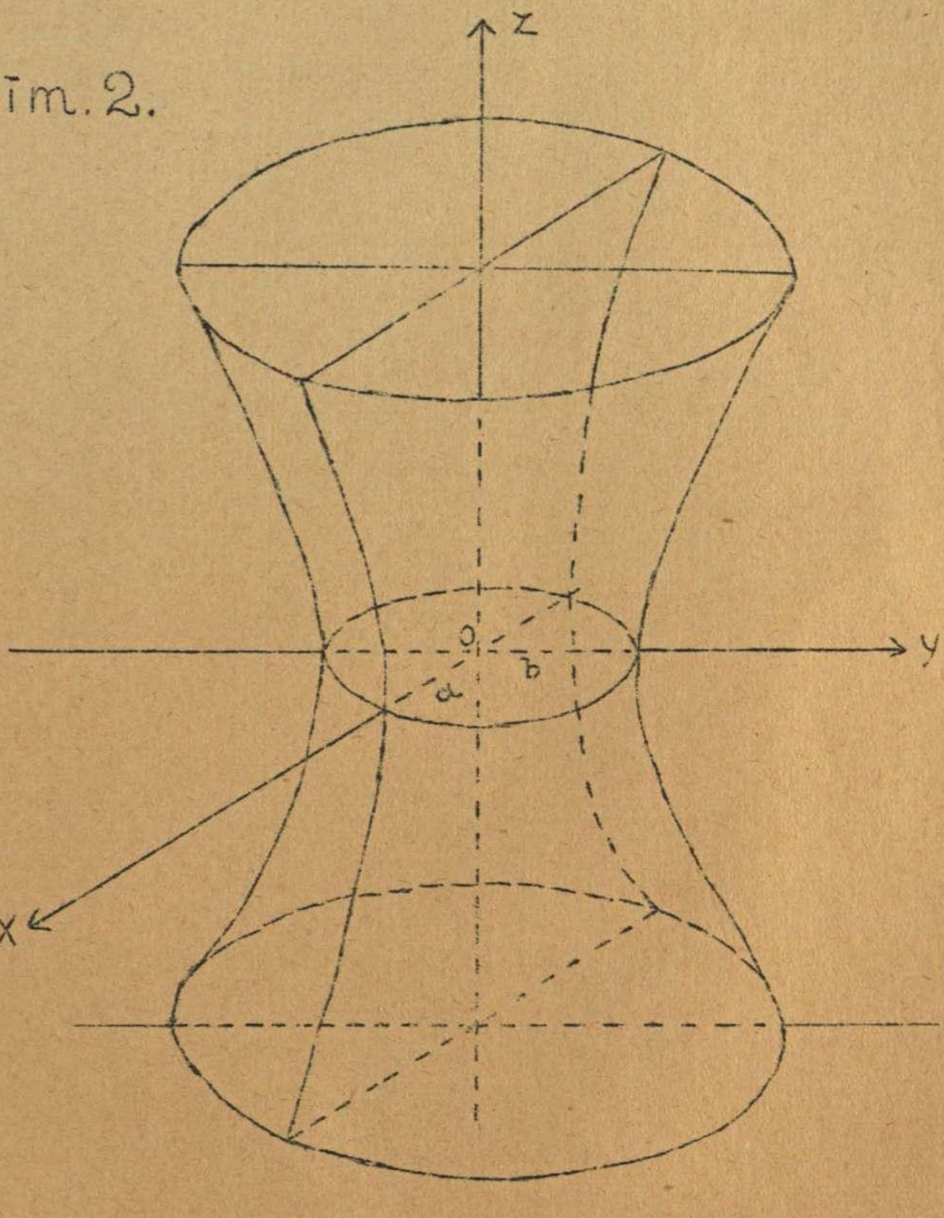
31. Virsmas $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} - \frac{z^2}{2} - 1 = 0$ punktā $P = 1|2|1$ dabūt pieskara plāknes nol-mu ?

Atbilde $\frac{x}{6} + \frac{2y}{3} - \frac{z}{2} - 1 = 0$

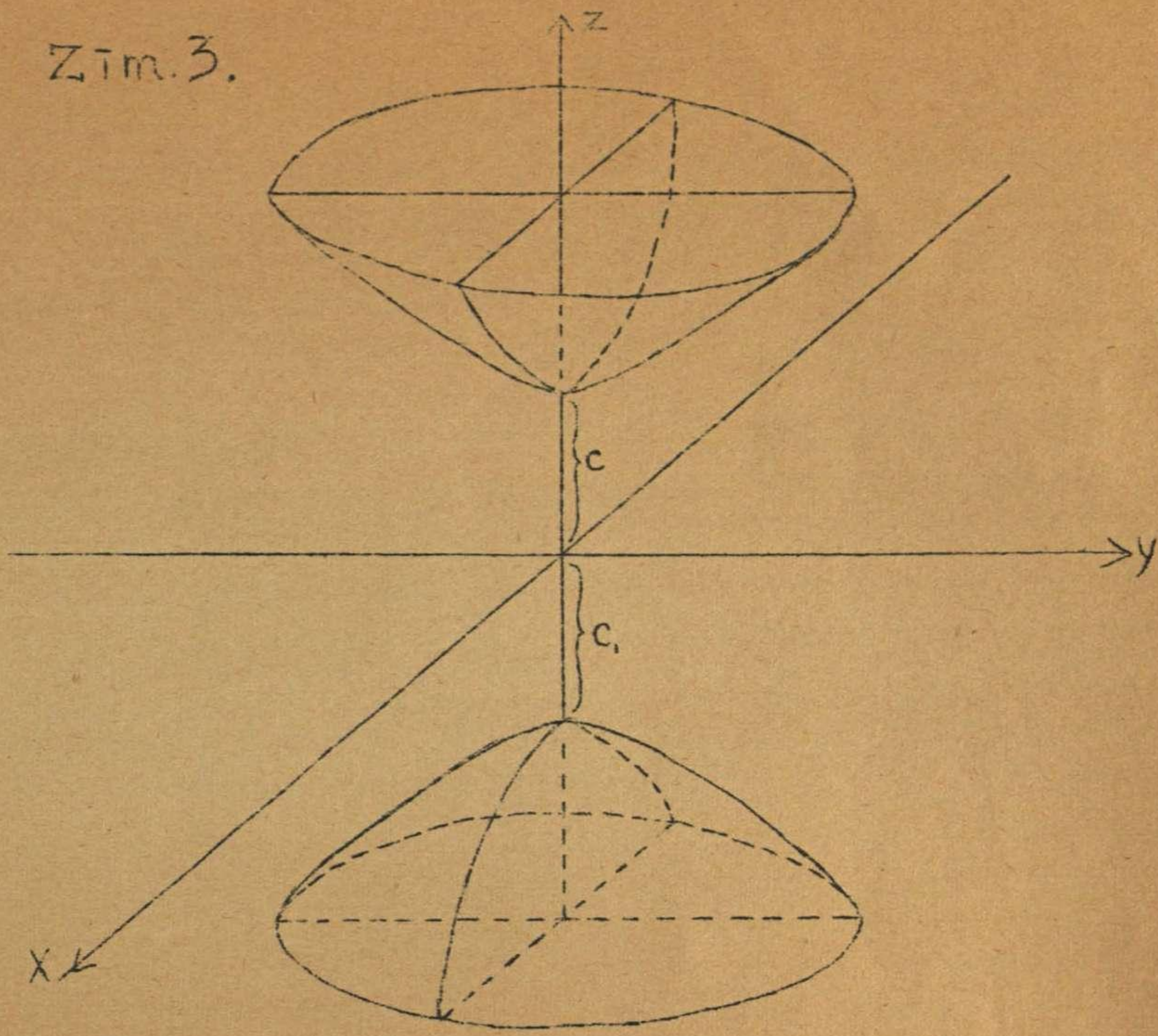
Zīm. 1.



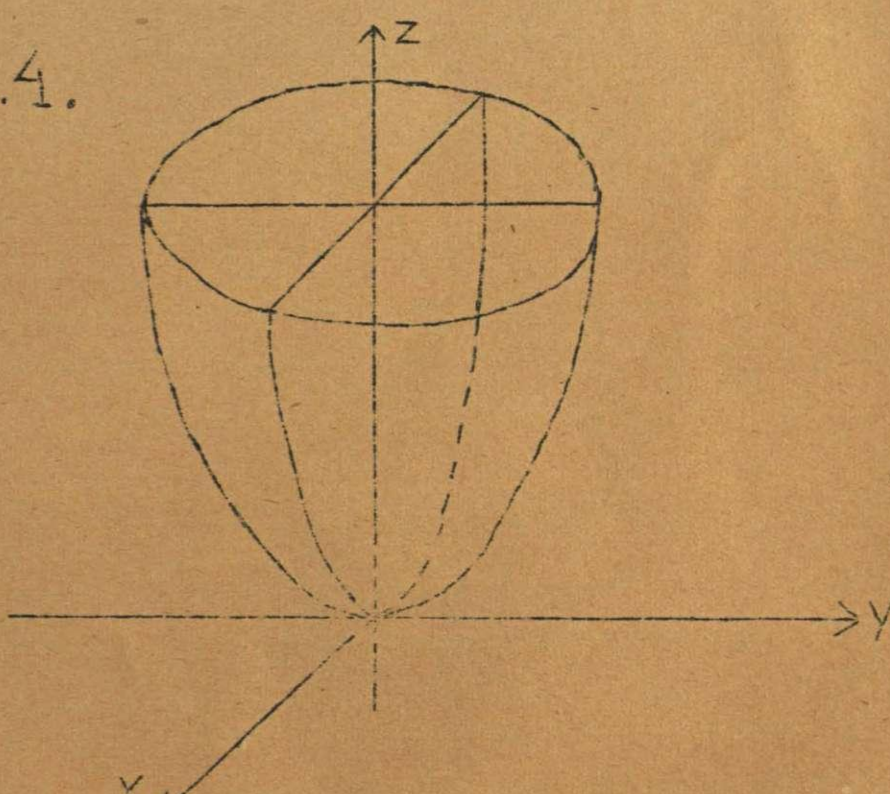
Zīm. 2.



Zīm. 3.



Zīm. 4.



Zīm. 5.