LATVIJAS UNIVERSITATES MĀCĪBAS GRĀMATU SĒRIJA
Nr. 16

# DIFERENCIALRĒĶINI
UN
# INTEGRALRĒĶINI

PROF. J. CIZAREVIČS

INŽENIERZINATŅU UN MECHANIKAS
FAKULTATES STUDENTIEM

RĪGĀ, 1941
LATVIJAS UNIVERSITATE

# PRIEKŠVĀRDS

Šīs grāmatas saturs ir L. U. inženierzinātņu un mechanikas fakultates analizes kursa otrā daļa. Kursa pirmā daļa «Ievads analizē» tiek gatavota izdošanai, trešā daļa «Parasto diferencialnolīdzinājumu integrēšana» izdota litografētā veidā.

Grāmata nodomāta minēto fakultatu, galvenā kārtā, pirmā kursa studentiem, kā līdzeklis priekšmeta piesavināšanas atvieglošanai. Šī mērķa sasniegšanas veicināšanas labā grāmatā ievietoti nelieli uzdevumu krājumi, kā arī pielietājumu piemēri.

Rīgā, 1941. gada janvārī.

**J. Cizarevičs.**

# SATURS

## Pirmā daļa.
## *DIFERENCIALRĒĶINI*

*Funkcijas ar vienu mainīgo.*

### Pirmā nodaļa.
### *Diferencēšana.*

Lapp.

### Piecpadsmitā nodaļa.

*Funkcijas ar vairākiem mainīgiem ekstremās vērtības.*



### Sešpadsmitā nodaļa.

*Diferencialģeometrija III.*



### Septiņpadsmitā nodaļa.

*Vektoru rēķinu formulu sakopojums.*



### Astoņpadsmitā nodaļa.

*Diferencialģeometrija IV.*



## Otrā daļa.

## *INTEGRALRĒĶINI*

### Pirmā nodaļa.

*Nenoteiktais integrals.*

Pirmā daļa.

# Diferencialrēķini.

## Funkcijas ar vienu mainīgo.

Pirmā nodaļa.

### Diferencēšana.

**1. Starpību kvocients.** Pieņemam, ka intervalā $(\alpha, \beta)$ dota vienvērtīga, nepārtraukta funkcija:

$$y = f(x) \tag{1}$$

Dotā intervalā pieņemam $x_1$ un $x_2$. Starpību $x_2 - x_1$ apzīmējam ar $h$ vai arī ar simbolu $\Delta x_1$. Tad

$$\Delta x_1 = h, \tag{2}$$

$$x_2 - \quad = h = \Delta x_1.$$

$$x_2 = x_1 + h = x_1 + \Delta x_1. \tag{3}$$

Ar argumentu $x_1$ dabūjam:

$$y_1 = f(x_1)$$

un ar

$$x_2 = x_1 + h \quad x_1 + \Delta x_1$$

dabūjam

$$v_2 = f(x_2) = f(x_1 + h) = f(x_1 + \Delta x_1).$$

Starpību $y_2 - y_1$ apzīmējam ar simbolu $\Delta y_1$ tad

$$y_2 - y_1 = \Delta y_1$$

un

$$y_2 = y_1 + \Delta y_1. \tag{4}$$

Starpību $f(x_2) \quad f(x_1)$, vai $f(x_1 + h) - f(x_1)$, vai arī $f(x_1 + \Delta x_1) - f(x_1)$ apzīmējam ar simbolu $\Delta f(x_1)$, tad

$$\Delta y_1 = y_2 - y_1 = \Delta f(x_1) = f(x_2) - f(x_1) = f(x_1 + h) - f(x_1) = f(x_1 + \Delta x_1) - f(x_1). \tag{5}$$

Simbolu $\Delta x_1$ sauc par argumenta $x_1$ pieaugumu; tas ir pozitivs, ja $x_2 > x_1$ un negativs, ja $x_2 < x_1$. Simbolus $\Delta y_1$ un $\Delta f(x_1)$ sauc par funkcijas pieaugumu; šis pieaugums arī var būt pozitivs vai negativs, kā tas ieskatams no izteiksmes (5).

Ievērojot augšējos apzīmējumus, veidojam izteiksmi:

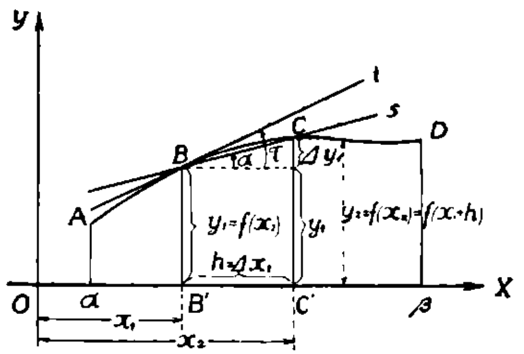
$$\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} = \frac{\Delta f(x_1)}{\Delta x_1} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} \tag{6}$$

Augšējo izteiksmi sauc par **funkcijas $f(x)$ starpību kvocientu** veidotu vietā $x_1$, ar starpību $\Delta x_1 = h$.

**2. Diferencialkvocients.** Ja $x_2 \to x_1$, tad $h \to 0$ $(\Delta x_1 \to 0)$ un, tā kā $f(x)$ pieņemta nepārtraukta, arī $\Delta y_1 \to 0$; $(\Delta f(x_1) \to 0)$.

Tādā gadijumā izteiksmes [1] (6) skaitītājs un saucējs tiecas uz 0 un tādēļ tie ir bezgalīgi mazi lielumi.

Izteiksme [1] (6) tā tad ir divu bezgalīgi mazu lielumu dalījums un tāda dalijuma robeža, kā zinams, atkarībā no skaitītāja un saucēja kārtas var dabūt vērtību: 0, galīgu skaitli, $\infty$, nenoteiktu vērtību.



(Zim. 1.)

Ja izteiksmes [1] (6) robežvērtība ir 0 vai galīgs skaitlis, vai $\infty$, tad šo robežvērtību sauc par funkcijas $f(x)$ **atvasināto vai diferencialkvocientu** vietā $x_1$. Šī robežvērtība ir funkcijas $f(x)$ maiņas mērs vietā $x_1$.

Funkcijas $f(x)$ ģeometrisks attēls plāknē ir līkne $ABCD$ (zīm. 1).

Abscisai $x_1$ atbilst līknes ordinata $B'B = y_1 = f(x_1)$,

„ $x_2$ „ „ „ $C'C = y_2 = f(x_2) = f(x_1 + h) = f(x_1 + \Delta x_1)$.

$B'C' = h = \Delta x_1$.

$$C''C = y_2 - y_1 = \Delta y_1 = \Delta f(x_1) = f(x_2) - f(x_1) =$$
$$= f(x_1 + h) - f(x_1) = f(x_1 + \Delta x_1) - f(x_1).$$

Kā redzams no zīmējuma, funkcijas $f(x)$ starpību kvocients vietā $x_1$ ir:

$$\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} = \operatorname{tg} \alpha. \tag{1}$$

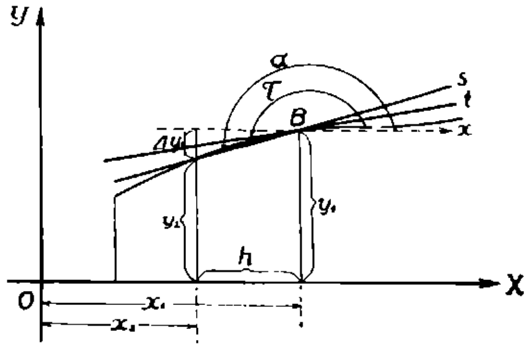
Ja $h \to 0$, tad punkts $C$ tiecas uz punktu $B$ un līknes sekanta $s$, $BC$, griežoties ap punktu $B$, tuvojas līknes punkta $B$ pieskarei $t$. Tā tad, ja $h \to 0$, tad sekanta $s$ tiecas uz robežstāvokli $t$.

No augšējā ieskatams, ka funkcijas $f(x)$ atvasinātā vietā $x_1$ ir:

$$\lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} = \lim_{h \to 0} \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tang} \tau. \qquad (2)$$

Tā tad ģeometriski apskatot, funkcijas $f(x)$ atvasinātā vai diferencialkvocients vietā $x_1$ ir: tā leņķa $\tau$ tangens, ko veido vietā $x_1$ līknes pieskare ar $x$ asi.

Apskatītā gadijumā $h$ ir pozitivs, kad še $h$ tiecas uz 0, tad to raksta $h \to +0$. Šinī gadijumā dabūto atvasināto vai diferencialkvocientu sauc par labās puses diferencialkvocientu.




Zīm. 2.

Zīmējumā (2) $h$ ir negativs, ja še $h$ tiecas uz 0, tad raksta $h \to -0$.

Šinī gadijumā funkcijas $f(x)$ diferencialkvocients vietā $x_1$ ir

$$\lim_{\Delta x \to -0} \left(\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}\right) = \lim_{h \to -0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}. \qquad (3)$$

Še jāievēro, ka $\Delta x_1 = h$ un $\Delta y_1$ ir negativi. Ar negativū $h$ dabūtu diferencialkvocientu sauc par diferencialkvocientu no kreisās puses.

Ja vietā $x_1$ ir abi diferencialkvocienti un pie tam abi ir vienlīdzīgi, tad saka, ka funkcijai $f(x)$ vietā $x_1$ ir pilnīgs vai arī īsts diferencialkvocients un to tad raksta:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x_1)}{h}. \qquad (4)$$

Kā redzams, ģeometriski tas nozīmē, ka vietā $x_1$ līknei $y = f(x)$ ir tikai viena pieskare.

Pieņemam, ka funkcijām, kuras tālāk apskatīsim, ir īsts un galīgs diferencialkvocients un gadijumi, kad labās un kreisās puses diferencialkvocienti nav vienlīdzīgi vai kāds no tiem ir bezgalīgs, gadīsies kā izņēmumi.

**3. Funkcijas atvasinātā.** Ja funkcijai $f(x)$ vietā $x_1$ ir īsts un galīgs diferencialkvocients, tad saka: funkcija $f(x)$ vietā $x_1$ ir diferencējama.

Ja funkcijai $f(x)$ ir šāds diferencialkvocients intervala $(\alpha, \beta)$ katrā vietā, tad tādu funkciju sauc par diferencējamu dotā intervalā. Katram $x$ šini intervalā tad ir piekārtota noteikta diferencialkvocienta vērtība; šīs vērtības tā tad ir atkarīgas no $x$; tās veido jaunu funkciju no $x$, ko sauc par funkcijas $f(x)$ atvasināto funkciju, vai arī vien kārši par atvasināto, vai arī par funkcijas $f(x)$ diferencial kvocientu. To apzīmē ar simboliem:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{df(x)}{dx};\ f'(x);\ D_x f(x) \\ \dfrac{dy}{dx};\ y'\quad D_x y. \end{array}\right\} \tag{1}$$

Tā tad ievērojot [2] (4), vietai $x$ intervalā $(\alpha, \beta)$, dabūjam funkcijas $f(x)$ atvasināto:

$$\frac{dy}{dx} = y' = D_x y = f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = D_x f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{2}$$

Pāreja uz robežu še jāizdara pie nenoteikta $x$.

**4. Funkcijas $f(x) = x$ atvasinātā.** Funkcijas diferencialkvocients, kā augšā norādīts, ir funkcijas $f(x)$ maiņas mērs vietā $x$ Par šī mēra vienību pieņem argumenta $x$ maiņas lielumu.

Ja $f(x) = x$, tad šīs funkcijas starpību kvocients ir

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{x + h - x}{h} = 1;$$

tad diferencialkvocienti katrā vietā ir:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h} = 1.$$

Tā tad, kādā vietā, kur $f(x)$ diferencialkvocients ir lielāks (mazāks) par 1, šī funkcija mainas straujāk (vājāk) nekā arguments $x$.

**5. Linearas funkcijas atvasinātā.** Uzdevumu, atrast kādas funkcijas, piemēram,

$$f(x) = ax + b$$

atvasināto, saskaņā ar augšā norādīto, izteic ar vienu no simboliem:

$$\frac{d}{dx}(ax + b)$$
$$(ax + b)'$$
$$D_x(ax + b).$$

Meklēto atvasināto dabūsim, veidojot izteiksmi:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

Šini gadijumā dabūjam:

$$(ax + b)' = \lim_{h \to 0} \frac{[a(x + h) + b] - (ax + b)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{ah}{h} = a. \tag{1}$$

Funkcija $f(x) = ax + b$ ir lineara Izteiksme (1) rāda, ka linearas funkcijas atvasinātā ir pastāvīgs lielums.

Liekot izteiksmē (1) $a = 0$, dabūjam:

$$(b)' = 0, \tag{2}$$

t. i **pastāvīga lieluma atvasinātā ir 0.**

Ja izteiksmē (1) liekam $a = 1$ un $b = 0$, tad dabūjam:

$$(x)' = 1, \tag{3}$$

t. i. **neatkarīgā mainīgā atvasinātā ir 1.**

**6. Funkcijas diferencējamība un nepārtrauktība.** Ja funkcijai $f(x)$ vietā $x$ ir īsts galīgs diferencialkvocients, t. i. ja funkcija vietā $x$ ir diferencējama, tad tā šai vietā ir nepārtraukta.

Tā kā

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \text{ tad: } \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + \delta, (\text{ja } h \to 0, \text{tad } \delta \to 0),$$

no augšējā dabūjam:

$$f(x + h) - f(x) = h\,[f'(x) + \delta].$$

Šī izteiksme rāda, ka ja $h \to 0$, tad arī $[f(x+h) - f(x)] \to 0$, kas izteic, ka $f(x)$ vietā $x$ ir nepārtraukta funkcija.

Ja funkcija $f(x)$ vietā $x$ ir nepārtraukta, tad tomēr nevar apgalvot, ka funkcijai $f(x)$ šinī vietā ir diferencialkvocients, jo, kā rāda prof. Veierstrass, ir tādas funkcijas, kas katrā vietā ir nepārtrauktas, bet kurām nav nevienā vietā atvasinātās. Šādām funkcijām ir tikai teoretiska nozīme un praksē tās nepielieto.

Sekojošais piemērs rāda funkciju, kas vietā $x = 0$ ir nepārtraukta, bet šai vietā tai funkcijai kreisais un labais diferencialkvocients nav vienlīdzīgi.

$$f(x) = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}.$$

Kā redzams, $f(0) = 0$ un pie $x = 0$ augšējā funkcija ir nepārtraukta. Šis funkcijas atvasinātā ir:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{x+h}{1 + e^{\frac{1}{x+h}}} - \dfrac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}}{h}$$

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{0+h}{1 + e^{\frac{1}{0+h}}} - \dfrac{0}{1 + e^{\frac{1}{0}}}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{h}}}.$$

Ja $h \to +0$, tad labās puses atvasinātā ir:

$$f'(0) = \lim_{h \to +0} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{h}}} = \frac{1}{1 + e^{+\infty}} = 0$$

Ja $h \to -0$, tad kreisās puses atvasinātā ir:

$$f'(0) = \lim_{h \to -0} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{h}}} = \frac{1}{1 + e^{-\infty}} = 1.$$

7. **Vispārējs diferencēšanas likums.** Dotas funkcijas $f(x)$ diferencēšana, t. i. atvasinātās atrašana, sadalas sekojošos soļos:

$$y = f(x).$$

Pirmais solis:

Ja dodam $x$ pieaugumu $h$, tad $y$ dabū pieaugumu $\Delta y$, tā tad;

$$y + \Delta y = f(x+h),$$

Otrs solis: veidojam $\Delta y$:

$$\begin{aligned} y + \Delta y &= f(x + h) \\ y &= f(x) \\ \Delta y &= f(x + h) - f(x) \end{aligned}$$

Trešais solis: dalam augšējo izteiksmi ar $\Delta x$ un $h$, ($\Delta x = h$)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

Ceturtais solis: liekam $\Delta x \rightarrow 0$ un dabūjam izteiksmes robežvērtību:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

Piemērs:

Dota funkcija: $y = 3x^2 + 5$. Dabūt šīs funkcijas atvasināto.

Pirmais solis:

$$y + \Delta y = 3(x + h)^2 + 5 = 3x^2 + 6xh + 3h^2 + 5.$$

Otrs solis:

$$\begin{aligned} y + \Delta y &= 3x^2 + 6xh + 3h^2 + 5 \\ y &= 3x^2 + 5 \\ \Delta y &= 6xh + 3h^2. \end{aligned}$$

Trešais solis:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6xh + 3h^2}{h} = 6x + 3h.$$

Ceturtais solis:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} (6x + 3h) = 6x.$$

Tā tad,

$$\frac{dy}{dx} = 6x.$$

To varam arī rakstīt:

$$\begin{aligned} (3x^2 + 5)' &= 6x \\ D_x(3x^2 + 5) &= 6x \\ \frac{d}{dx}(3x^2 + 6) &= 6x. \end{aligned}$$

Norādītais vispārējais diferencēšanas paņēmiens ir pamata paņēmiens, jo tas pamatojas tieši uz atvasinātās jēdziena definicijas. Tomēr, šī paņēmiena pielietošana vispār dažkārt savienota ar grūtībām, tādēļ, lai atvieglotu diferencēšanu, no vispārējā likuma attista atsevišķus paņēmienus.

**8. Pastāvīga lieluma $C$ atvasinātā** Ja $y = f(x) = C$, tas nozīmē, ka $f(x)$ pie visiem $x$ ir pastāvigs lielums. Tā tad, arī $f(x_1) = C$. Ja liekam $x_1 = x + h$, tad $f(x + h) = C$, bet $f(x + h)$ atbilst $y + \Delta y$; tā tad:

$$y + \Delta y = f(x + h) = C,$$
$$y = f(x) = C,$$
$$\Delta y = 0,$$

tādēļ arī

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$$

un

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = 0.$$

To varam rakstīt:

$$(C)' = 0$$

Tā tad p a s t ā v ī g a l i e l u m a a t v a s i n ā t ā i r 0.

**9. Vienlīdzīgu funkciju atvasinātā.** Ja $u = f(x)$ un $= \varphi(x)$ un kādā dotā intervalā arvienu

$$u = v,$$

tad, ja dodam argumentam $x$ pieaugumu $\Delta x$, arī pie argumenta $x + \Delta x$ augšējās funkcijas ir vienlīdzīgas. Bet ja $x$ dabū pieaugumu $\Delta x$, tad $u$ un $v$ dabū pieaugumus $\Delta u$ un $\Delta v$ un, ievērojot teikto:

$$u + \Delta u = v + \Delta v,$$
$$u = .$$

dabūjam:

$$\Delta u = \Delta v,$$

tādēļ arī:

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Tā kā augšējās izteiksmes ir vienlīdzīgas visā maiņas procesā, tad vienlīdzīgas arī to robežas; tā tad

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x},$$

t. i.

$$u' = v'.$$

Tā tad, ja divas funkcijas ir vienlīdzīgas, tad ir vienlīdzīgas arī to atvasinātās.

**10. Funkcijas $+ C$ atvasinātā.**

$$u = \quad + C.$$

Ja $v$ ir funkcija $x$, tad arī $u$ ir funkcija $x$. Dodot $x$ pieaugumu $\Delta x$, dabūjam:

$$u + \Delta u = v + \Delta v + C$$
$$u = \quad + C$$
$$\Delta u = \Delta v$$
$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x},$$

t. i.

$$u' = v'$$

Ievedot $u = v + C$, dabūjam:

$$(v + C)' = v'.$$

Augšējās izteiksmes rāda: ja divas funkcijas no $x$ atšķiras ar pastāvīgu lielumu, tad šādām funkcijām ir vienlīdzīgas atvasinātās.

Vai arī: konstants sumands pazūd diferencējot.

**11. Summas un starpības atvasinātā.** Ja

$$y = u + v$$

un $u = f(x)$; $\quad = \varphi(x)$, tad arī $y$ ir funkcija $x$. Dodam $x$ pieaugumu $\Delta x$, tad $u$ un $v$ dabū pieaugumus $\Delta u$, $\Delta v$, bet arī $y$ dabū pieaugumu $\Delta y$. Kā agrāk norādīts:

$$y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v$$
$$y = u + v$$
$$\Delta y = \Delta u + \Delta v$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Beidzamā izteiksme dod:

$$y' = u' + v'$$

Tā kā $y = u +$ tad, tevedot šo izteiksmi, dabūjam:

$$(u + v)' = u' +$$

Tā tad: summas atvasinātā ir vienlīdzīga ar saskaitamo atvasināto summu.

Tādā pat ceļā dabūjam, ka

$$(u - v)' = u' -$$

un vispār

$$(u + v - w)' = u' + \quad - w'.$$

**12. Reizinājuma atvasinātā.**

$$y = u \qquad\qquad (\text{še } u = f(x);\ v = \psi(x)).$$

Dodam $x$ pieaugumu $\Delta x$, tad $y$, $u$, dabū pieaugumus $\Delta y$, $\Delta u$, $\Delta v$ un

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) = uv + v\Delta u + u\Delta v + \Delta u \,.\, \Delta v.$$

$$y = u \quad v;$$

$$\Delta y = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u \quad \Delta v;$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u \quad \frac{\Delta v}{\Delta x} + \quad \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \quad \Delta v.$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(u \frac{\Delta v}{\Delta x}\right) + \lim_{\Delta x \to 0}\left(v \frac{\Delta u}{\Delta x}\right) + \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \quad \Delta v\right).$$

$$y' = u \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \Delta v.$$

$$y' = u \quad + \quad u' + u' \quad 0.$$

Galīgi:

$$y' = u \quad + \quad u'$$

Tā kā

$$y = u$$

tad

$$(u \quad v)' = u \quad + v \quad u' \tag{$\alpha$}$$

Augšējās izteiksmes abas puses dalot ar $uv$, dabūjam:

$$\frac{(u \,.\, v)'}{u \quad v} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v}. \tag{$\beta$}$$

Pielietojot formulu ($\alpha$) dabūjam:

$$(u \,.\, v \,.\, w)' = (u \,.\, v)w' + w(u \,.\, v)'.$$

Izvedot $(u \cdot v)'$ no formulas ($\alpha$), dabūjam:

$$(uvw)' = (uv)w' + w(uv' + vu');$$

sakārtojot dabūjam:

$$(uvw)' = uvw' + uwv' + vwu'$$

Dalot abas puses ar $uvw$, dabūjam:

$$\frac{(uvw)'}{uvw} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} + \frac{w'}{w}. \qquad (\gamma)$$

Atsevišķs gadijums: $a$ pastāvīgs lielums un:

$$y = au.$$

Pielietojot formulu ($\alpha$), dabūjam:

$$y' = au' + ua'$$

Tā kā $a$ ir pāstāvīgs lielums, tad, kā redzējām:

$$a' = 0,$$

tādēļ:

$$y' = au'$$

un

$$(au)' = a \quad u'.$$

Augšējā izteiksme rāda, ka diferencējot pastāvīgs reizinātājs parādas kā reizinātājs atvasinātā.

**13. Dalijuma atvasinātā.**

$$y = \frac{u}{v} \qquad (u = f(x); \quad v = \varphi(x)).$$
$$vy = u.$$

Tā kā vienlīdzīgu funkciju atvasinātās arī ir vienlīdzīgas, tad,

$$(vy)' = u'$$
$$vy' + yv' = u'$$
$$y' = \frac{u' - yv'}{v} = \frac{u' - \frac{u}{v} \cdot v'}{v} = \frac{vu' - uv'}{v^2};$$

tā tad

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$$

Atsevišķs gadijums: $a$ pastāvīgs lielums:

$$y = \frac{a}{v},$$

$$y' = \left(\frac{a}{v}\right)' = \frac{va' - av'}{v^2};$$

tā kā $a$ ir pastāvīgs, tad $a' = 0$ un tādēļ

$$\left(\frac{a}{v}\right)' = -\frac{av'}{v^2}.$$

**14. Kāpes un saknes atvasinātās.**

$$y = u^m$$

še $u = f(x)$ un $m$ pozitivs vesels skaitlis. Tā kā

$$u^m = \overset{1}{u} \cdot \overset{2}{u} \cdot \overset{3}{u} \ldots \overset{m}{u},$$

ievērojot formulu [12] ($\gamma$), dabūjam:

$$\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} + \frac{u'}{u} + \frac{u'}{u} + \ldots + \frac{u'}{u} = m \cdot \frac{u'}{u}$$

$$y' = y \cdot m \cdot \frac{u'}{u} = m \cdot u^m \cdot \frac{u'}{u} = mu^{m-1} \cdot u';$$

tā tad

$$(u^m)' = m \cdot u^{m-1} \cdot u'.$$

Ja kāpes rādītājs ir vesels negativs skaitlis $-n$, tad

$$u^{-n} = \frac{1}{u^n}$$

$$(u^{-n})' = \left(\frac{1}{u^n}\right)' = -\frac{1 \cdot (u^n)'}{(u^n)^2} = \frac{-n\, u^{n-1} u'}{u^{2n}} = -nu^{-n-1} u';$$

tā tad

$$(u^{-n})' = -n\, u^{-n-1} \cdot u'$$

Šī formula rāda, ka formula, kas dod kāpes atvasināto ar veselu pozitivu kāpes rādītāju, pielietojama arī tad, ja kāpes rādītājs ir vesels negativs skaitlis.

Saknes atvasinātā:

$$y = \sqrt[n]{u} = u^{\frac{1}{n}} \qquad \text{(še } u = \varphi(x)\text{; } n \text{ vesels poz. vai neg. skaitlis.}$$

$$y^n = u$$

$$(y^n)' = u'$$

$$n y^{n-1} \; y' = u'$$

$$y' = \frac{1}{n} \; \frac{u'}{y^{n-1}}\,; \quad \text{tā kā } y^{n-1} = \left(u^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1} = u^{1-\frac{1}{n}},$$

tad:

$$\left(\sqrt[n]{u}\right)' = \left(u^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n} \; \frac{u'}{u^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n} \; u^{\frac{1}{n}-1} \; u'$$

tā tad

$$\left(\sqrt[n]{u}\right)' = \left(u^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n} \; u^{\frac{1}{n}-1} \; u'.$$

Ja

$$y = \sqrt[q]{u^p} = u^{\frac{p}{q}},$$

tad:

$$y^q = u^p$$

$$(y^q)' = (u^p)'$$

$$q y^{q-1} y' = p u^{p-1} \; u'$$

$$y' = \frac{p}{q} \; \frac{u^{p-1}}{y^{q-1}} \; u' = \frac{p}{q} \; \frac{u^{p-1} . u'}{\left(u^{\frac{p}{q}}\right)^{q-1}} = \frac{p}{q} \; \frac{u^{p-1}}{u^{p-\frac{p}{q}}} \, u'$$

$$y' = \frac{p}{q} \,.\, u^{\frac{p}{q}-1} \; u'.$$

$$\left(\sqrt[q]{u^p}\right)' = \left(u^{\frac{p}{q}}\right)' = \frac{p}{q} \; u^{\frac{p}{q}-1} \; u'.$$

Šī izteiksme rāda, ka formula, kas dod kāpes atvasināto ar veselu, pozitivu vai negativu kāpes rādītāja, pielietojama arī tad, ja kāpes rādītājs ir daļas skaitlis.

## 15. Piemēri algebrisku funkciju diferencēšanai.

1) $$y = x^2 + 4x.$$

Pielietojot summas diferencēšanas paņēmienu, dabūjam:

$$y' = (x^2)' + (4x)'$$

$$y' = 2x \,.\, (x)' + 4 \,.\, (x)'.$$

Tā kā neatkarīgā mainīgā $x$ atvasinātā $(x)' = 1$, tad dabūjam:

$$y' = (x^2 + 4x)' = 2x + 4.$$

2) Dabūt

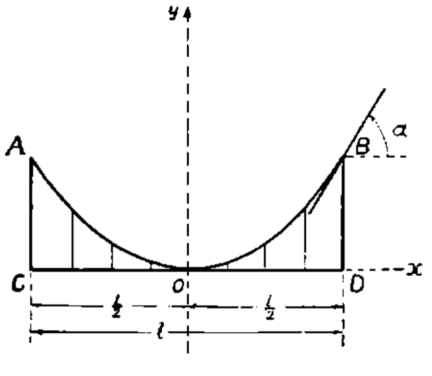
$$(x^2 \sqrt[3]{2x-1})' = ?$$

$$(x^2\sqrt[3]{2x-1})' = (x^2)'\sqrt[3]{2x-1} + x^2(\sqrt[3]{2x-1})' = 2x\sqrt[3]{2x-1} + x^2[(2x-1)^{\frac{1}{3}}]'$$

$$= 2x\sqrt[3]{2x-1} + x^2 \cdot \frac{1}{3}(2x-1)^{\frac{1}{3}-1}(2x-1)' =$$

$$= 2x\sqrt[3]{2x-1} + \frac{x^2 \cdot 2}{3\sqrt[3]{(2x-1)^2}} = \frac{6x(2x-1) + 2x^2}{3\sqrt[3]{(2x-1)^2}}.$$

3) Uzkārta tilta virve veido līkni $AOB$. (Zīm. 3.)




Zīm. 3.

Šīs līknes nolīdzinājums ir

$$y = \frac{1}{2} \frac{q}{T_0} x^2. \qquad (1)$$

Še $q$ ir slodze uz tilta garuma $l$ tekošā metra; $T_0$ virves punktā $O$ iedarbojošais stiepes spēks.

Kāds ir leņķis $\alpha$, ko veido virves pieskare uzkāršanas punktā $B$ ar horizontāli?

No (1) dabūjam:

$$y' = \frac{qx}{T_0}$$

ievietojot $x = \frac{l}{2}$, dabūjam:

$$y'_{x=\frac{l}{2}} = \frac{q}{T_0} \frac{l}{2} = \tan \alpha.$$

No šīs izteiksmes dabūjam leņķi $\alpha$.

4) Dots līknes nolīdzinājums:

$$y = f(x); \qquad (1)$$

pievilkt pieskari līknes punktā $P$, kas piekārtots abscisai $x = a$ (zīm. 4).

No (1) dabūjam:

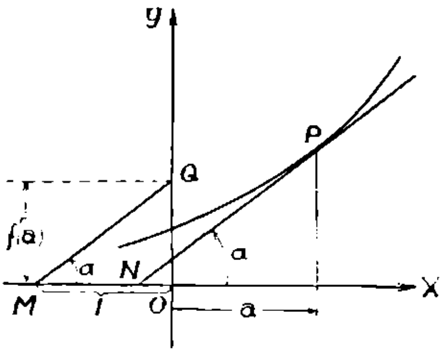
$$y' = f'(x).$$

Tā kā $y'$ ir pieskares virziena leņķa tg, tad ar $x = a$

$$\operatorname{tg} \alpha = y'_{x=a} = f'(a). \quad (2)$$

Nogriežot uz $y$ ass vērtību $f'(a) = OQ$, vedam no pola $M$, kura attālums no koordinatu sākuma $O$ ir zīmējumā izvēlētā vienība, līniju $MQ$. Kā redzams

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{OQ}{1} = \frac{f'(a)}{1}$$



Zīm. 4.

tā tad līnijai $MQ$ ir punkta $P$ pieskares virziens. Līnija $NP \parallel MQ$, tad ir punkta $P$ pieskare pie dotās līknes, kuras nolīdzinājums ir (1).

### 16. Vingrinājumi.

1) $y = \left(3x^5 - \frac{1}{12}x^6\right)^4$; $\quad y' = 2x^4(30 - x)\left(3x^5 - \frac{1}{12}x^6\right)^3$

2) $y = (x + \sqrt{1 + x^2})(\sqrt{1 + x^2})$; $\quad y' = \frac{(x + \sqrt{1 + x^2})^2}{\sqrt{1 + x^2}}$

3) $y = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$; $\quad y' = \frac{a^2}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}}$.

4) $y = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2} + x}$; $\quad y' = \frac{(\sqrt{1 + x^2} - x^2)^2}{\sqrt{1 + x^2}}$.

5) $y = \frac{3}{\sqrt[3]{(2 - \sqrt{x})^2}}$; $\quad y' = \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt[3]{(\sqrt{x} - 2)^5}}$.

6) $y = \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}}$; $\quad y' = -\frac{2a^2x}{(a^2 + x^2)\sqrt{a^4 - x^4}}$.

7) $y = \frac{3 + 2x + x^2}{3 - 2x + x^2}$; $\quad y' = \frac{4(3 - x^2)}{(3 - 2x + x^2)^2}$.

8) $y = (2x - 5)(3x + 8)\sqrt[3]{3x + 8}$; $\quad y' = 2(7x - 2)\sqrt[3]{3x + 8}$.

**17 Apvērstas (inversās) funkcijas atvasinātā.** Ja $y = f(x)$ ir vienvērtīga monotona nepārtraukta funkcija intervalā $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$ un intervals $(A, B)$ ir šīs funkcijas vērtību apjoms, tad katrai $y$ vērtībai no $(A, B)$ atbilst viena un tikai viena $x$ vērtība no intervala $(\alpha, \beta)$ un tādēļ $x$ ir noteikts kā vienvērtīga monotona nepārtraukta funkcija no $y$, $x = \varphi(y)$.

Funkcijas $y = f(x)$ un $x = \varphi(y)$ sauc par apvērstām, inversām funkcijām.

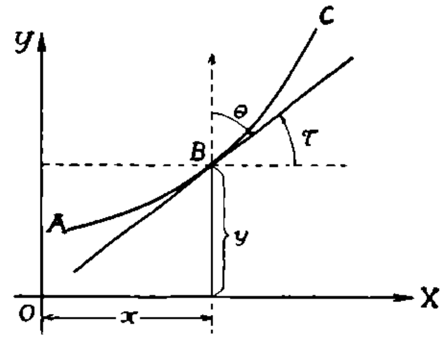
Ja $x$ dabū pieaugumu $\Delta x$, tad $y$ dabū pieaugumu $\Delta y$; tā tad $x + \Delta x$ un $y + \Delta y$ ir piekārtotas vērtības. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ir funkcijas $f(x)$ starpību kvocients. $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ ir $\varphi(y)$ starpību kvocients. Starpību kvocientu reizinājums dod izteiksmi:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta y} = 1,$$

kas pastāv arī vēl tad, ja $\Delta x$ un tādēļ arī $\Delta y$ top bezgalīgi mazi; tādēļ arī šo funkciju diferencialkvocienti izpilda augšējo izteiksmi, t. i.:

$$D_x f(x) \cdot D_y \varphi(y) = 1.$$

Šī īpašība viegli ieskatama no sekojošā ģeometriskā attēla: (zīm. 5)



Zīm 5.

Līknes $ABC$ nolīdzinājums, ja uzskatam $x$ par neatkarīgo mainīgo, ir

$$y = f(x)$$

Ja uzskatam $y$ par neatkarīgo mainīgo, tad līknes $ABC$ nolīdzinājums ir

$$x = \varphi(y).$$

Pirmajā gadijumā atvasinātā ir

$$D_x f(x) = \tan \tau.$$

Otrā gadijumā atvasinātā ir

$$D_y \varphi(y) = \tan \theta.$$

Tā kā

$$\theta + \tau = \frac{\pi}{2},$$

tad

$$\tan \theta = \cot \tau.$$

Tādēļ:

$$D_x f(x) \, . \, D_y \, \varphi(y) = \tan \tau \, . \tan \theta = \operatorname{tang} \tau \quad \cot \tau = 1.$$

**18. Saliktas funkcijas atvasinātā.** Ja $u = \varphi(x)$ ir vienvērtīga, nepārtraukta funkcija no $x$, un $y = f(u)$ arī vienvērtīga, nepārtraukta funkcija no $u$, tad $y$ arī ir vienvērtīga, nepārtraukta funkcija no $x$

$$y = f[\varphi(x)];$$

$y$ še ir salikta funkcija no $x$, vai arī $y$ ir funkcija no funkcijas $x$.

Noteiktai $x$ vērtībai atbilst noteikta $u$ vērtība un pēdējai atbilst noteikta $y$ vērtība. Ja funkcijai $\varphi(x)$ vietā $x$ ir atvasinātā un funkcijai $f(u)$ vietā $u$ arī ir atvasinātā, tad funkcijai

$$y = f[\varphi(x)]$$

arī ir atvasinātā vietā $x$, jo, ja dodam $x$ pieaugumu $\Delta x$, tad $u$ un $y$ dabū pieaugumus $\Delta u$ un $\Delta y$, un ja $\Delta x \to 0$, tad, tādēļ ka funkcijas $\varphi(x)$ un $f(u)$ ir nepārtrauktas, arī $\Delta u \to 0$ un $\Delta y \to 0$.

$\frac{\Delta u}{\Delta x}$ ir funkcijas $u$ starpību kvocients attiecībā uz $x$.

$\frac{\Delta y}{\Delta u}$ „ „ $y$ „ „ „ „ $u$.

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ „ $y$ „ „ „ „ $x$.

Starp šiem starpību kvocientiem pastāv sakars:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \quad \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

kas arī tad pastāv, kad $\Delta x \to 0$; tādēļ augšējais sakars pastāv arī pie robežvērtībām. Tā tad:

$$D_x y = D_u y \quad D_x u.$$

Tā kā $y = f(u)$, tad $D_u y = f'(u)$; $D_x u = \varphi'(x) = u'$, tad augšējo izteiksmi varam rakstīt:

$$y' = f'(u) \quad \varphi'(x) = f'(u) u'.$$

Ja funkcija ar starpmainīgā $u$ palīdzību ir atkarīga no $x$, tad šīs funkcijas atvasināto, attiecībā uz $x$, dabūjam, atrodot funkcijas atvasināto attiecībā uz starpmainīgo $u$, un reizinot šo atvasināto ar starpmainīgā atvasināto attiecībā uz $x$.

## Transcendentu funkciju diferencēšana.

**19. Eksponentfunkcijas atvasinātā** Meklēta atvasinātā no

$$y = a^x$$

Še $a$ pozitivs un nav 1.

Dodot $x$ pieaugumu $\Delta x$, dabūjam:

$$\begin{aligned} y + \Delta y &= a^{x+\Delta x}, \\ y &= a^x, \\ \Delta y &= a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1); \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{a^x(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Ja še $\Delta x \to 0$, tad labajā pusē dabūjam $\frac{0}{0}$. Lai šo nenoteiktību atklātu, izdaram pārveidojumu. Liekam:

$$a^{\Delta x} - 1 = \alpha \qquad \text{(ja } \Delta x \to 0, \text{ tad } \alpha \to 0),$$

tad

$$\Delta x = \log_a(1 + \alpha),$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^x \alpha}{\log_a(1+\alpha)} = \frac{a^x}{\frac{1}{\alpha}\log_a(1+\alpha)} = \frac{a^x}{\log_a(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

Liekam

$$\frac{1}{\alpha} = m; \quad \alpha = \frac{1}{m}.$$

Ja $\Delta x \to 0$, tad $\alpha \to 0$ un $m \to \infty$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^x}{\log_a\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{m \to \infty} \frac{a^x}{\log_a\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m} = \frac{a^x}{\log_a\left[\lim\limits_{m \to \infty}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right]}.$$

Kā zinams

$$\lim_{m \to \infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m} = e;$$

tā tad

$$y' = (a^x)' = \frac{a^x}{\log_a e}.$$

Šī formula nav parocīga atvasinātās dabūšanai, jo, kā redzams, saucējā atrodas logaritms pie pamata $a$; turklāt $a$ var dabūt dažādas vērtības.

Augšējo izteiksmi pārveidojam šādi:

$$e = a^{\log_a e}$$

Abās pusēs ņemam logaritmu ar pamatu $e$. Šādu logaritmu sauc par dabīgo logaritmu — logarithmus naturalis, to apzīmējam ar burtu $l$. Tad:

$$le = \log_a e \quad la$$

$$le = 1,$$

tādēļ

$$1 = \log_a e \quad la$$

$$\log_a e = \frac{1}{la}.$$

Šo vērtību ievedot atvasinātās formulā, dabūjam:

$$(a^x)' = a^x \quad la.$$

Liekot $a = e$ dabūjam:

$$(e^x)' = e^x \quad le = e^x \quad 1$$

$$(e^x)' = e^x$$

Izteiksmes paplašinājums:

Ja jādabū atvasinātā no

$$y = a^u, \text{ tad } \quad = f(u);$$

ja $u = \varphi(x)$, tad, pielietojot paņēmienu, kā diferencē funkcijas funkciju, dabūjam:

$$D_u y = D_u a^u = a^u . la$$

$$D_x u = u'$$

$$D_x y = D_u y . D_x u = a^u . la . u',$$

tā tad

$$(a^u)' = a^u \; la \; u'$$

Liekot $a = e$, dabūjam:

$$(e^u)' = e^u \; 1 \; u' = e^u \, . \, u'$$

Piemērs: Dabūt funkcijas

$$y = a^{x^3-2x}$$

atvasināto.

$$y' = a^{x^3-2x} \, . \, la \, . \, (x^3 - 2x)' = a^{x^3-2x} \, . \, la \, . \, (3x^2 - 2)$$

$$y' = (3x^2 - 2) \, a^{x^3-2x} \, . \, la.$$

**20. Logaritmiskas funkcijas atvasinātā.** Dabūt atvasināto funkcijai

$$y = \log_a x.$$

Šīs funkcijas apvērstā funkcija ir

$$x = a^y.$$

Pielietojam paņēmienu apvērstu funkciju diferencēšanai:

$$D_x f(x) \; D_y \varphi(y) = 1.$$

Še

$$f(x) = \log_a x$$

$$\varphi(y) = a^y;$$

tā tad:

$$D_x f(x) = D_x \log_a x$$

$$D_y \varphi(y) = D_y \; a^y = a^y \, . \, la$$

$$D_x f(x) \, . \, D_y \varphi(y) = D_x \log_a x \, . \, a^y \; la = 1$$

$$D_x \log_a x = \frac{1}{a^y \, . \, la} = \frac{1}{x \, . \, la};$$

tā tad

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \, . \, la}.$$

Paplašinājums: dabūt

$$(\log_a u)', \quad \text{še} \quad u = \varphi(x).$$

Pielietojot paņēmienu funkcijas no funkcijas diferencēšanai dabūjam:

$$(\log_a u)' = \frac{1}{u\ la}\ u'.$$

Pieņemot par logaritmu pamatu $e$, dabūjam dabīgā logaritma atvasināto:

$$(lu)' = \frac{u'}{u}.$$

Liekot $u = x$ dabūjam:

$$(lx)' = \frac{x'}{x} = \frac{1}{x}.$$

Piemērs: Dabūt atvasināto no funkcijas

$$y = l(x + \sqrt{a^2 + x^2}) = u$$

$$y' = \frac{u'}{u} = \frac{(x + \sqrt{a^2 + x^2})'}{x + \sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{1 + [(a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}]'}{x + \sqrt{a^2 + x^2}} =$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{2}(a^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}}(a^2 + x^2)'}{x + \sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}}{x + \sqrt{a^2 + x^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{a^2 + x^2} + x}{\sqrt{a^2 + x^2}(x + \sqrt{a^2 + x^2})} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

Tā tad

$$[l(x + \sqrt{a^2 + x^2})]' = \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

**21. Sinus un kosinus atvasinātās.** Dota funkcija:

$$y = \sin x;$$

dodot $x$ pieaugumu $\Delta x$, dabūjam:

$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$$
$$y = \sin x$$
$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}.$$

Labās puses izteiksmi pārveidojot, dabūjam:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}};$$

tā tad

$$(\sin x)' = \cos x \cdot 1 = \cos x$$

Liekot $x$ vietā $u = \varphi(x)$ dabūjam:

$$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$$

$\cos u$ atvasināto dabūjam sekojoši:

$$\cos u = \sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right)$$

$$(\cos u)' = \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\right]' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\left(\frac{\pi}{2} - u\right)'$$

$$(\cos u)' = \sin u \cdot (-u') = -\sin u \cdot u'.$$

P i e m ē r s. Dabūt atvasināto no funkcijas:

$$y = \cos(x^3 + lx)$$

$$y' = [-\sin(x^3 + lx)](x^3 + lx)'$$

$$y' = [-\sin(x^3 + lx)]\left(3x^2 + \frac{1}{x}\right)$$

$$y' = -\left(3x^2 + \frac{1}{x}\right)\sin(x^3 + lx).$$

**22. Tg un cotg atvasinātās.**

a) $$\operatorname{tg} u = \frac{\sin u}{\cos u}$$

$$(\operatorname{tg} u)' = \left(\frac{\sin u}{\cos u}\right)' = \frac{\cos u\,(\sin u)' - \sin u\,(\cos u)'}{\cos^2 u} =$$

$$= \frac{\cos u \cos u \,.\, u' - \sin u\,(-\sin u)\,u'}{\cos^2 u} = \frac{(\cos^2 u + \sin^2 u)\,u'}{\cos^2 u}$$

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

b) $$= \cot u = \frac{\cos u}{\sin u}$$

$$(\text{cotg}\ u)' = \left(\frac{\cos u}{\sin u}\right)' = \frac{\sin u\ .\ (\cos u)' - \cos u\ (\sin u)'}{\sin^2 u} =$$

$$= \frac{\sin u\ (-\sin u)\ u' - \cos u\ .\ \cos u\ .\ u'}{\sin^2 u} = -\frac{(\sin^2 u + \cos^2 u)u'}{\sin^2 u}$$

$$(\text{cotg}\ u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}.$$

**23. Arc sin un arc cos atvasinātās.** Dabūt atvasināto no funkcijas:

$$y = \text{arc sin}\ x.$$

Šis funkcijas apvērstā funkcija ir:

$$x = \sin y.$$

Pielietojot paņēmienu inversu funkciju diferencēšanai, dabūjam:

$$D_x\ \text{arc sin}\ x\ D_y \sin y = 1,$$

$$D_x\ \text{arc sin}\ x = \frac{1}{D_y \sin y} = \frac{1}{\cos y}.$$

Tā kā sin $= x$, tad $\cos y = \sqrt{1 - x^2}$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$

un

$$(\text{arc sin}\ x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Liekot $x$ vietā $u = \varphi(x)$. un ievērojot funkcijas no funkcijas diferencēšanu, dabūjam paplašinājumu:

$$(\text{arc sin}\ u)' = \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}.$$

Pielietojot tādu pašu paņēmienu, dabūjam:

$$(\text{arc cos}\ x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$(\text{arc cos}\ u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}.$$

**24. Arc tg un arc cotg atvasinātās.** Ja

$$y = \text{arc tg } x,$$

tad

$$x = \text{tg } y$$

$$D_x \text{arc tg } x \quad D_y \text{ tg } y = 1$$

$$D_x \text{arc tg } x = \frac{1}{D_y \text{ tg } y} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y.$$

Ja $\text{tg } y = x$, tad:

$$\frac{\sin y}{\cos y} = x$$

$$\frac{1 - \cos^2 y}{\cos^2 y} = x^2$$

$$1 - \cos^2 y = x^2 \cos^2 y$$

$$1 = \cos^2 y \, (1 + x^2)$$

$$\cos^2 y = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Ievedot šo vērtību dabūjam:

$$(\text{arc tg } x)' = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Liekot $x$ vietā $u = \varphi(x)$ dabūjam:

$$(\text{arc tg } u)' = \frac{u'}{1 + u^2}.$$

Tādā pat kārtā dabūjam:

$$(\text{arc cotg } x)' = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

$$(\text{arc cotg } u)' = \frac{u'}{1 + u^2}.$$

P i e m ē r s. Dabūt atvasināto no funkcijas

$$y = \text{arc tg } \frac{a + x}{1 - ax}.$$

$$y' = \frac{\left(\frac{a + x}{1 - ax}\right)'}{1 + \left(\frac{a + x}{1 - ax}\right)^2} = \frac{(1 - ax)(a + x)' - (a + x)(1 - ax)'}{(1 - ax)^2\left[1 + \left(\frac{a + x}{1 - ax}\right)^2\right]} =$$

$$= \frac{(1 - ax) - (a + x)(-a)}{(1 - ax)^2 + (a + x)^2} = \frac{1 + a^2}{(1 - 2ax + a^2x^2) + (a^2 + 2ax + x^2)} =$$

$$y' = \frac{1 + a^2}{1 + a^2 + x^2(1 + a^2)} = \frac{1 + a^2}{(1 + x^2)(1 + a)} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

**25. Diferencēšanas formulas** Pieņemam, ka $u = f(x)$ un $v = \varphi(x)$.

1) $(c)' = 0$
2) $(x)' = 1$
3) $(u + c)' = u'$
4) $(u + v - w)' = u' + v' - w'$
5) $(cu)' = c \cdot u'$
6) $(u \cdot v)' = uv' + vu'$
7) $(u \cdot v w)' = uvw' + uwv' + vwu'$
8) $(u^m)' = mu^{m-1} \cdot u'$
9) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v^2}$
10) $\left(\frac{c}{u}\right)' = -\frac{c \cdot u'}{u^2}$
11) $(a^u)' = a^u \cdot la \cdot u'$
12) $(e^u)' = e^u \cdot u'$
13) $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot la}$
14) $(lu)' = \frac{u'}{u}$
15) $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
16) $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
17) $(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
18) $(\operatorname{cotg} u) = -\frac{u'}{\sin^2 u}$
19) $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$
20) $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$
22) $(\operatorname{arc\,tg} u)' = \frac{u'}{1 + u^2}$
22) $(\operatorname{arc\,ctg} u)' = -\frac{u'}{1 + u^2}$
23) $D_x f(x) \cdot D_y \varphi(y) = 1$
ja $f(x)$ un $\varphi(y)$ ir apvērstas funkcijas.
24) Ar $y = f(u)$; $u = \varphi(y)$
$D_x y = D_u f(u) \, D_x \varphi(x)$

**26. Logaritmiskā diferencēšana.** Dažkārt ieteicams, ja jādabū funkcijas $f(x)$ atvasinātā, iepriekš ņemt dabīgo logaritmu no $f(x)$, un tad to diferencēt attiecībā uz $x$.

P i e m ē r s.

$$y = u^v.$$

Še $u$ un $v$ ir funkcijas no $x$.

Logaritmējot dabūjam:

$$ly = \quad lu;$$

diferencējot attiecībā uz $x$, dabūjam:

$$\frac{y'}{y} = v\,(lu)' + lu\; v'$$

$$\frac{y'}{y} = v\,\frac{u'}{u} + v'\; lu$$

$$y' = y\left(v\,.\,\frac{u'}{u} + v'\; lu\right) = u^v\left(v\,\frac{u'}{u} + v'\, lu\right)$$

$$y' = v \quad u^{v-1} \quad u' + \; u^v \quad v' \quad lu.$$

**27 Vingrinājumi.**

1) $y = e^{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}$; $\qquad y' = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\, e^{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}$

2) $y = a^{\text{arc sin}\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad y' = \frac{la}{\sqrt{1-x^2}}\, a^{\text{arc cos}\, x}$

3) $y = x^x$; $\qquad y' = x^x\,(1 + lx)$.

4) $y = l\,\sin\, x$; $\qquad y' = \cot\, x$.

5) $y = l\,\text{tg}\, x$; $\qquad y' = \frac{2}{\sin\, 2x}$.

6) $y = \text{arc sin}\, \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$; $\qquad y' = \frac{1}{1 + x^2}$.

7) $y = \text{arc cos}\, \frac{b + a\,\cos\, x}{a + b\,\cos\, x}$; $\qquad y' = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a + b\,\cos\, x}$.

8) $y = \frac{\text{arc tg}\,(\sqrt{1 + x^2} - x)}{x}$; $\qquad y' = -\frac{1}{2\,(1 + x^2)}$.

9) $y = e^{ax}\,(a\,\sin\, x - \cos\, x)$; $\qquad y' = (a^2 + 1)\, e^{ax}.\sin\, x$

10) $y = \frac{1}{3\,\sin^3 x} + \frac{1}{\sin\, x}$; $\qquad y' = \frac{(1 + \sin^2 x)\,\cos\, x}{\sin^4 x}$

**28. Diferencials.**

Kā redzējām:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'\,(x),$$

bet tad:

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)+\varepsilon.$$

Še $\varepsilon$ ir bezgalīgi mazs un kad $\Delta x \to 0$, tad arī $\varepsilon \to 0$. No augšējā dabūjam:

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x)\,.\,\Delta x+\varepsilon\,.\,\Delta x.$$

Augšējās izteiksmes kreisajā pusē ir funkcijas $f(x)$ pieaugums $\Delta f(x)$; tā tad

$$\Delta f(x)=\Delta y=f'(x)\,\Delta x+\varepsilon\Delta x$$

Kā redzams, funkcijas pieaugums $\Delta y$ sastādas no diviem locekļiem. Pirmais

$$f'(x)\;\Delta x$$

ir pirmās kārtas bezgalīgi mazs, ja uzskatam $\Delta x$ par pirmās kārtas bezgalīgi mazu. Otrs loceklis

$$\varepsilon\;\Delta x$$

ir augstākas kārtas bezgalīgi mazs, kā divu bezgalīgi mazu lielumu reizinājums. Salīdzinot otro locekli ar pirmo, redzams, ka tas bezgalīgi mazs pret pirmo. Pirmo locekli

$$f'(x)\,\Delta x$$

sauc par funkcijas $f(x)$ diferencialu un apzīmē ar $dy$ vai arī $df(x)$, tā tad:

$$dy=df(x)=f'(x)\,\Delta x. \qquad (\alpha)$$

Kā redzams, funkcijas diferencials $dy$ ir funkcijas pieauguma $\Delta y$ galvenā sastāvdaļa.

Ja liekam

$$f(x)=x,$$

tad

$$df(x)=dx;\quad f'(x)=(x)'=1.$$

Tā kā

$$df(x)=f'(x)\,\Delta x,$$

tad

$$dx=1\;\Delta x.$$

Tā tad

$$\Delta x=dx.$$

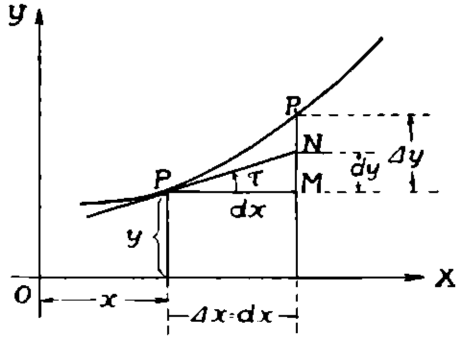
Funkcijas diferencialu tādēļ varam rakstīt:

$$df(x)=dy=f'(x)\,dx. \qquad (\beta)$$

Funkcijas $f(x)$ diferencials tā tad ir funkcijas atvasinātās $f'(x)$ reizinājums ar neatkarīgā mainīgā $x$ diferencialu $dx$. Neatkarīgā mainīgā $x$ pieaugums

$$h = \Delta x = dx$$

vienlīdzīgs tā diferencialam. Pieaugums $\Delta x$ nav atkarīgs no $x$, turpretim jāievēro, ka funkcijas pieaugums $\Delta y$ nav vienlīdzīgs ar $dy$ un ir atkarīgs tikpat no $x$, kā arī no $dx$. No zīmējuma (6) ieskatams, ka $MP = \Delta y$ ir funkcijas $f(x)$ ordinatas pieaugums; $MN = \tan\tau\, dx = f'(x)\, dx = dy$ ir pieskares ordinatas pieaugums, kad $x$ dabū pieaugumu $\Delta x = dx$.



Zīm. 6.

No β izriet kas redzams arī zīmējumā:

$$\tan\tau = f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

t.i. funkcijas $f(x)$ atvasinātā $f'(x)$ nolīdzinas funkcijas diferenciala dalijumam ar neatkarīgā mainīgā diferencialu.

Diferencials $dx$ ir arvienu $\neq 0$, bet $dy$ ir tik tad 0, ja $f'(x) = 0$.

Ja $f(x) = x^3$, tad $f'(x) = 3x^2$; ar $x = 1$ un $f'(3) = 3$.

$\Delta y$ un $dy$ dabū sekojošā tabulā parādītās vērtības.

| | $\Delta x = dx$ | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 0.01 | 0.1 | 1.0 | 10 |
| $\Delta y$ | 0.030301 | 0.331 | 7 | 1330 |
| $dy$ | 0.03 | 0.3 | 3 | 30 |

No augšējā redzams, ka, jo mazāks $\Delta x = dx$, jo pareizāka ir tuvinā formula:

$$\Delta y \approx dy$$

Šādā gadijumā arī $\Delta y$ ir mazs. Tā tad, ja $\Delta x = dx$ ir ļoti mazs, tad funkcijas pieauguma $\Delta y$ vietā var ņemt funkcijas diferencialu $dy$.

Funkcījas pieauguma $\Delta y$ atvietošanai ar $dy$ ar ļoti mazu $\Delta x = dx$ ir šāda ģeometriska nozīme. Kā redzams no zīmējuma 6.

$$\Delta y - dy = NP_1;$$

Liekot $\Delta y \approx dy$, uzskatam $NP_1$ par tik mazu, ka to varam neievērot; bet kā zīmējums rāda, tas var būt tikai tādā gadijumā, kad $\Delta x = dx$ ļoti mazs un tādēļ punkts $P_1$ atrodas ļoti tuvu punktam $P$ Šādā gadijumā liekot

$$\Delta y \approx dy,$$

līkni punkta $P$ ļoti tuvā apkārtnē esam atvietojuši ar līknes pieskari punktā $P$.

Augšējās aizvietošanas fizikalā nozīme ir šāda:

Ja dotā līkne attēlo kādas parādības norisi, tad

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

dod parādības norises ātrumu vietā $x$. Atvietojot $\Delta y$ ar $dy$ un vietā $x$ līkni ar taisni, ar to izteicam, ka vietā $x$ parādības maiņas ātrums ļoti mazā intervalā $\Delta x = dx$ ir uzskatams tuvini par pastāvīgu.

Ja uz līknes ņemam ļoti tuvus punktus un katrā punktā līkni atvietojam ar pieskari, tad līknes vietā dabūjam poligonu, kas iet caur šiem līknes punktiem.

Fizikali tas nozīmē, ka parādības mainīgu norisi esam atvietojuši ar ļoti īsiem elementariem procesiem, katru ar pastāvīgu maiņas ātrumu, kas katrā elementarprocesā ir īpatnējs un ko dabūjam ievedot $f'(x)$ vērtību attiecīgā līknes punktā $x$. Jo mazāks ir $dx$, jo tuvāk šāds poligons pieslejas dotai līknei. Kā vēlāk redzēsim integralrēķinos, ja izteiksmē

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \varphi(x)$$

funkcija $\varphi(x)$ t. i. elementarprocesa maiņas ātrums ir dots, tad var dabūt funkciju $f(x)$, kuras atvasinātā $f'(x) = \varphi(x)$ un tā tad arī sakaru

$$y = f(x)$$

kas dod parādības norisi.

Izteiksmi:

$$\Delta y \approx dy$$

bieži lieto lai aprēķinātu, kā iespaido rezultatu maza kļūda.

P i e m ē r s. Oma likums:

$$R = \frac{E}{J} \tag{1}$$

dod sakaru starp pretestību $R$, strāvas stiprumu $J$ un spriegumu $E$.

Pieņemam, ka mērijot $J$ ir pielaista maza kļūda $J\Delta$; tad ar noteiktu $E$ šī kļūda atsauksies uz lielumu $R$.

Tā kā ar mazu $J\Delta$, $\Delta R \approx dR$, tad no (1) dabūjam:

$$\Delta R \approx dR = -\frac{E}{J^2}\Delta J \tag{2}$$

ar $E = 110$ voltu un $J = 20$ amp. un $J\Delta = \pm 0.5$ amp. dabūjam

$$|\Delta R| = \left|\frac{110}{20^2}\,0.5\right| \text{ omu} \approx 0.14 \text{ omu}. \tag{3}$$

Tā kā praktiski mērīšanas kļūdas ir zinamas tikai kā absoluti lielumi, tad arī $\Delta R$ ir dots kā absoluts lielums.

No (1) dabūjam:

$$R = \frac{110}{20} = 5{,}5 \text{ omu};$$

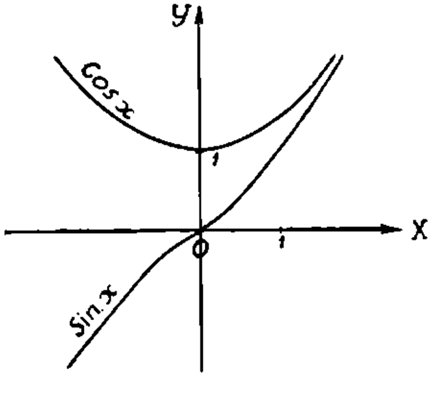
attiecību:

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{0.14}{5.5} = \sim 0.025 = 2.5\%$$

sauc par relativo kļūdu.

**29. Hiperbolas funkcijas.** Fizikā un technikā daudziem nolūkiem ir parocīgi ievest jaunas funkcijas, kas sastādītas no $e^x$ funkcijas. Ieved

$$\text{Cos } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \text{ Sin } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \tag{$\alpha$}$$




Zīm. 7.

Cos $x$ = cosinus hyperbolicus un Sin $x$ = sinus hyperbolicus. Turpmāk apzīmēsim trigonometriskas funkcijas ar $\cos x$, $\sin x$ un hiperbolas funkcijas ar Cos$x$ un Sin$x$. Šīs funkcijas ir nepārtrauktas ar visiem $x$; to grafiskais attēls parādīts zīmējumā 7. No ($\alpha$) dabūjam:

$$e^x = \text{Cos } x + \text{Sin } x \tag{$\beta$}$$

$$\text{Cos }(-x) = \text{Cos } x;$$

$$\text{Sin }(-x) = -\text{Sin } x.$$

Tā tad, Cos $x$ ir pāru un Sin $x$ ir nepāru funkcija.

No ($\alpha$) dabūjam:

$$\mathrm{Cos}^2\, x - \mathrm{Sin}^2\, x = 1$$

$$2\,\mathrm{Cos}\, x\ \mathrm{Sin}\, x = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \mathrm{Sin}\ 2x$$

$$\mathrm{Cos}^2\, x + \mathrm{Sin}^2\, x = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \mathrm{Cos}\ 2x$$

No ($\beta$) dabūjam:

$$(\mathrm{Cos}\ x + \mathrm{Sin}\ x)^n = (e^x)^n = e^{nx} = \mathrm{Cos}\ nx + \mathrm{Sin}$$

Tā kā $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x} = 0$, no ($\alpha$) dabūjam pie liela $x$

$$\mathrm{Cos}\ x \approx \mathrm{Sin}\ x \approx \frac{1}{2} e^x.$$

Tālāk definē:

$$\mathrm{Tg}\ x = \frac{\mathrm{Sin}\ x}{\mathrm{Cos}\ x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}};\quad \mathrm{Cotg}\ x = \frac{\mathrm{Cos}\ x}{\mathrm{Sin}\ x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

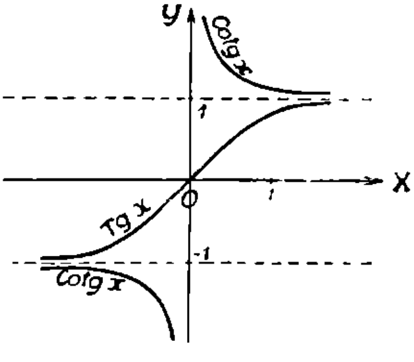
Kā redzams

$\mathrm{Cos}\, x \geqslant 1$; $|\mathrm{Tg}\, x| < 1$; $|\mathrm{Cotg}\, x| > 1$.

Tg $x$ ir nepārtraukta funkcija ar visiem $x$. Cotg $x$ ir pārtraukta funkcija ar $x = 0$. Šo likņu attēls parādīts zīmējumā (8).

Pie lieliem $x$:

$$\mathrm{Tg}\ x \approx \mathrm{Cotg}\ x \approx \pm 1.$$




Zīm. 8.

**30. Hiperbolas funkciju atvasinātās.** No ($\alpha$) viegli ieskatams, ka:

$$(\mathrm{Cos}\ x)' = \mathrm{Sin}\ x;\quad (\mathrm{Sin}\ x)' = \mathrm{Cos}\ x.$$

$$(\mathrm{Tg}\ x)' = \left(\frac{\mathrm{Sin}\ x}{\mathrm{Cos}\ x}\right)' = \frac{\mathrm{Cos}^2\ x - \mathrm{Sin}^2\ x}{\mathrm{Cos}^2\ x} = \frac{1}{\mathrm{Cos}^2 x}.$$

Līdzīgi dabūjam:

$$(\mathrm{Cotg}\ x)' = -\frac{1}{\mathrm{Sin}^2\, x}.$$

**31. Area funkcijas.** Hiperbolas funkciju inversās funkcijas sauc par area funkcijām tādēļ, ka tām, kā vēlāk būs redzams, ir sakars ar hiperbolas segmentu. Ja

$$\mathrm{Cos}\ y = x,$$

tad šis funkcijas inversā funkcija ir

$$y = \mathrm{Ar\ Cos}\ x.$$

Tā kā

$$\mathrm{Cos}\ y = \frac{e^y + e^{-y}}{2},$$

tad saskaņā ar augšējo:

$$\frac{e^y + e^{-y}}{2} = x;$$

$$e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0$$

$$e^y = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$$

un

$$y = l(x \pm \sqrt{x^2 - 1})$$

$$y = \mathrm{Ar\ Cos}\ x = l(x \pm \sqrt{x^2 - 1})$$

Līdzīgi dabū:

$$\mathrm{Ar\ Sin}\ x = l\ (x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

Beidzamajā formulā saknei ir tikai $+$ zīme; še nevar būt $-$ zīme, jo ar $-$ zīmi logaritma arguments būtu negatīvs. Ja

$$\mathrm{Tg}\ y = x,$$

tad

$$y = \mathrm{Ar\ Tg}\ x$$

$$\mathrm{Tg}\ y = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = x.$$

$$e^{2y} - 1 = x(e^{2y} + 1)$$

$$e^{2y}(1 - x) = (1 + x)$$

$$e^{2y} = \frac{1 + x}{1 - x},$$

tā tad

$$y = l\sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}$$

un

$$\mathrm{Ar\ Tg}\ x = l\sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}. \qquad (\text{ar } x < 1)$$

Līdzīgi dabū

$$\mathrm{Ar\ Cotg}\ x = l\sqrt{\frac{x + 1}{x - 1}}. \qquad (\text{ar } x > 1)$$

**32. Area funkciju atvasinātās.** No [31] dabūjam

$$(\mathrm{Ar\ Cos}\ x)' = l\,(x \pm \sqrt{x^2 - 1})'$$

u. t. t. Izdarot attiecīgās diferencēšanas, dabūjam:

$$(\mathrm{Ar\ Cos} \qquad \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \qquad (\mathrm{Ar\ Sin}\ x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}};$$

$$(\mathrm{Ar\ Tg}\ x)' = \frac{1}{1 - x^2}; \quad (\mathrm{Ar\ Cotg}\ x)' = \frac{1}{1 -}$$

**33 Hiperbolas funkciju sakars ar hiperbolu.** Ja liekam

$$x = \pm\, a\ \mathrm{Cos}\ t; \quad y = b\ \mathrm{Sin}\ t, \tag{1}$$

tad šie nolīdzinājumi ir hiperbolas nolīdzinājumi parametriskā veidā.

No augšējiem nolīdzinājumiem secinam:

$$\frac{x^2}{a^2} = \mathrm{Cos}^2\ t$$

$$\frac{x^2}{b^2} = \mathrm{Sin}^2\ t$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \mathrm{Cos}^2\ t - \mathrm{Sin}^2\ t = 1.$$

Tā tad, izslēdzot nolīdzinājumos (1) $t$, dabūjam hiperbolas nolīdzinājumu

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

**34. Diferencialu formulas.** Saskaņā ar [28], ja $y = f(x)$, tad

$$dy = f'(x)\ dx.$$

Saskaņā ar [18], ja $y = f(u)$ un $u = \varphi(x)$, tad

$$y' = f'(u)$$

Reizinot nolīdzinājuma abas puses ar $dx$, dabūjam

$$y'\,dx = f'(u) \qquad dx.$$

Tā kā:

$$y'\,dx = dy = d\,f(u) \quad \text{un} \quad u'\,dx = du,$$

tad

$$d\,f(u) = f'(u)\ du.$$

Ievērojot augšējo, no [25], [30], [32] dabūjam attiecīgas diferencialu formulas.

1) $dc = 0$

2) $d(x) = dx$

3) $d\,(u + c) = du$

4) $d(u + v - w) = du + dv - dw$

5) $d\,(cu) = c\,du$

6) $d\,(u\,.\,v) = u\,dv + v\,du$

7) $d(uvw) = uvdw + uwdv + vwdu$

8) $d\,(u^m) = mu^{m-1}\,du$

9) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$

10) $d\left(\frac{c}{u}\right) = -\frac{cdu}{u^2}$

11) $d\,(a^u) = a^u\,la\,du$

12) $d\,(e^u) = e^u\,du$

13) $d\,(\log_a u) = \frac{du}{u\,la}$

14) $d\,(lu) = \frac{du}{u}$

15) $d\,(\sin u) = \cos u\,du$

16) $d\,(\cos u) = -\sin u\,du$

17) $d\,(\operatorname{tg} u) = \frac{du}{\cos^2 u}$

18) $d\,(\operatorname{cotg} u) = -\frac{du}{\sin^2 u}$

19) $d\,(\operatorname{arc}\sin u) = \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}}$

20) $d\,(\operatorname{arc}\cos u) = -\frac{du}{\sqrt{1 - u^2}}$

21) $d\,(\operatorname{arc}\operatorname{tg} u) = \frac{du}{1 + u^2}$

22) $d\,(\operatorname{arc}\operatorname{cotg} u) = -\frac{du}{1 + u^2}$

23) $d\,(\operatorname{Cos} x) = \operatorname{Sin} x\,dx$

24) $d\,(\operatorname{Sin} x) = \operatorname{Cos} x\,.\,dx$

25) $d\,(\operatorname{Tg} x) = \frac{dx}{\operatorname{Cos}^2 x}$

26) $d\,(\operatorname{Cot} x) = -\frac{dx}{\operatorname{Sin}^2 x}$

27) $d\,(\operatorname{Ar}\operatorname{Cos} x) = \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$

28) $d\,(\operatorname{Ar}\operatorname{Sin} x) = \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$

29) $d\,(\operatorname{Ar}\operatorname{Tg} x) = \frac{dx}{1 - x^2}$

30) $d\,(\operatorname{Ar}\operatorname{Cot} x) = \frac{dx}{1 - x^2}$

## Augstākās kārtas atvasinātās un diferenciali. Leibnica formula. Apslēptu funkciju atvasinātās.

**35. Augstākās kārtas atvasinātās.** Diferencējot funkciju $y = f(x)$ dabūjam

$$y' = f'(x)$$

funkcijas $f(x)$ pirmo atvasināto. Funkcija $f'(x)$ ir arī funkcija no $x$ un, ja tai ir tādas īpašības, kādas prasijām no $f(x)$, tad no funkcijas $f'(x)$ varam veidot:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f'(x + h) - f'(x)}{h}$$

Šī izteiksme dod funkcijas $f'(x)$ atvasināto, ko apzīmējam ar $f''(x)$. Kā redzams, $f''(x)$ ir otrā atvasinātā no $f(x)$. Funkcijas $f(x)$ otro atvasināto apzīmē arī ar

$$y'' \quad D_x^2 y, \quad D_x^2 f(x).$$

Piemērs:

$$y = f(x) = e^{kx}$$

$$= f'(x) = ke^{kx}$$

$$f''(x) = D_x^2 f(x) = D_x^2 y = y'' = k^2 e^{kx}$$

Diferencējot $f''(x)$, ja tā ir diferencējama, dabūjam funkcijas $f(x)$ trešo atvasināto, ko apzīmējam ar:

$$f'''(x) = D_x^3 f(x) = y''' = D_x^3 y.$$

Ja šī trešā un augstākās atvasinātās ir nepārtrauktas un diferencējamas, tad varam veidot ceturto atsavasināto un arī vēl augstākas atvasinātās: kuras apzīmējam ar zimboliem

$$\begin{array}{lll} f^{IV}(x), & f^{V}(x) & f^{(n)}(x) \\ D_x^4 f(x), & D_x^5 f(x) & D_x^n f(x) \\ y^{IV}, & y^{V} & y^{(n)} \\ D_x^4 y, & D_x^5 y & D_x^n y. \end{array}$$

Vispār, funkcijas $f(x)$ $n$-to atvasināto dabū, ņemot atvasināto no funkcijas $f(x)$ $(n-1)$-ās atvasinātās, t. i.

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'.$$

**36. Piemēri atkārtotā diferencēšanā.**

1) Ja

$$f(x) = x^n$$

tad dabūjam:

$$f'(x) = n\, x^{n-1}$$

$$f''(x) = n\,(n-1)\, x^{n-2}$$

$$D^m f(x) = f^{(m)}(x) = n\,(n-1)\,(n-2) \quad [n-(m-1)]\, x^{n-m} \tag{1}$$

Ja $m = n$ dabūjam

$$f^{(n)}(x) = n\,(n-1)\,(n-2)\,.\,.\,.\,1 = n!$$

2)
$$f(x) = lx$$
$$D_x \, lx = \frac{1}{x} = x^{-1}$$
$$D_x^n \, lx = D_x^{n-1} \, x^{-1}.$$

Še pielietojot formulu (1), liekot $= -1$ un $m = n - 1$ dabūjam:

$$D^n \, lx = (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdot \cdot (n-1)}{x^n} \tag{2}$$

3)
$$f(x) = e^{kx}$$
$$f'(x) = ke^{kx}$$
$$f''(x) = k^2 e^{kx}$$

$$D^n \, e^{kx} = (e^{kx})^{(n)} = k^n \, e^{kx} \tag{3}$$

4)
$$y = a^x$$
$$y' = a^x \, la$$
$$y'' = a^x \, (la)^2$$

$$y^{(n)} = a^x \, (la)^n \tag{4}$$

5) $y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \quad + a_{n-2} x^2 + a_{n-1} x + a_n$

$$y' = na_0 x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + (n-2) a_2 x^{n-3} + \ldots + 2a_{n-2} x + a_{n-1}$$

$$y'' = n(n-1) a_0 x^{n-2} + a_1 (n-1)(n-2) x^{n-3} + a_2 (n-2)(n-3) x^{n-4} + \ldots + 2a_{n-2}$$

Kā redzams, veselas algebriskas $n$-tās kāpes funkcijas atvasinātā arī ir vesela algebriska funkcija, bet $(n - 1)$ kāpes. Tālāk diferencējot katrreiz kāpes rādītājs pamazinas par 1, un izteiksmes galā katrā diferencēšanā pazūd viens loceklis. $n$ tās kārtas atvasinātā tādēļ atrodas tikai viens loceklis, kas cēlies no $n$ tās kāpes locekļa $n$-reizējas diferencēšanas:

$$y^{(n)} = 1 \quad 2 \quad 3 \qquad n \, a_0 \tag{5}$$

6)
$$y = \sin x$$
$$y' = \cos x = \sin \left( x + 1 \frac{\pi}{2} \right)$$
$$y'' = -\sin x = \sin \left( x + 2 \frac{\pi}{2} \right)$$

$$y^{(n)} = (\sin x)^{(n)} = \sin \left( x + n \frac{\pi}{2} \right) \tag{6}$$

7) $= \cos$

tāpat dabūjam:

$$y^{(n)} = (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right). \tag{7}$$

8) Nolīdzinājums

$$s = A \cos kt + B \sin kt$$

dod svārstības kustībā sakaru starp svārstošā materialā punkta ceļu $s$ un laiku $t$. Kustības notiek bez berzes.

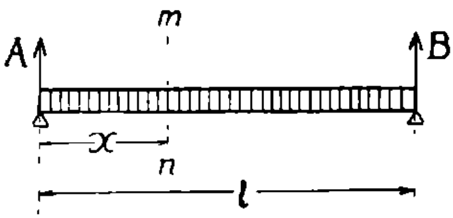
Kustības ātrums

$$= \frac{ds}{dt} = - kA \sin kt + kB \cos kt.$$

Kustības paātrinājums:

$$p = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = - k^2 A \cos kt - k^2 B \sin kt = -k^2 s.$$

9) Ja sija slogota ar $q$ kg uz tekoša metra, tad stiprības mācība dod:



Zīm. 9.

1) balstu reakcijas

$$A = B = q\frac{l}{2},$$

2) šķērsspēku $V = q\frac{l}{2} - qx$,

3) momentu šķēlienam $m, n$: $M = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2}$.

Veidojot pirmo atvasināto no $M$ attiecībā uz $x$, dabūjam:

$$\frac{dM}{dx} = \frac{ql}{2} - qx = V.$$

Veidojot otro atvasināto no $M$ attiecībā uz $x$, dabūjam:

$$\frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dV}{dx} = - q.$$

**37 Leibnica formula.**

Ja

$$=$$

tad

$$= u'v + uv'$$
$$y'' = u''v + 2u'v' + uv''$$
$$y''' = \quad + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''.$$

Redzam, ka koficienti seko Ņutona binoma likumam $n$-to atvasināto varam apzīmēt ar simbolu:

$$D^n (u \quad v) = (u + v)^n$$

Še jāievēro, ka attiecīgas kāpes vietā jāliek attiecīgā atvasinātā un locekļu

$$u^n \; v^0 \quad \text{un} \quad u^0 \; v^n$$

vietā jāieved

$$u^{(n)} v^{(o)} \quad \text{un} \quad u^{(o)} \; v^{(n)},$$

t. i.

$$\text{un} \qquad v^{(n)}.$$

**38. Augstākie diferenciali.** 1) Arguments ir neatkarīgais mainīgais. Ja $y = f(x)$, tad šis funkcijas diferencials ir

$$dy = f'(x) \; dx.$$

Še jāievēro, kā agrāk norādīts, ka $dx$ nav atkarīgs no $x$ un tādēļ uzskatams attiecībā uz $x$ maiņu kā pastāvīgs.

No pirmā diferenciala $dy$ varam veidot otru diferencialu, ko apzīmējam:

$$d(dy) = d^2 y = d\,[f'(x)\,dx] = [f'(x)\,dx]'dx.$$

Saskaņā ar augšā norādīto, ņemot atvasināto no labās puses iekavām, $dx$ jāuzskata kā pastāvīgs faktors; tādēļ

$$[f'(x)\;dx]' = f''(x)\,dx\,;$$

tā tad

$$d^2 y = f''(x)\;dx \quad dx = f''(x)\,dx^2$$
$$d^2 y = f''(x)\;dx^2$$

Tādā kārtā turpinot, dabūjam:

$$d^3 y = f'''(x)\; dx^3$$
$$\cdots$$
$$d^n y = f^{(n)}(x)\; dx^n\,.$$

Tā tad, $n$-tais diferencials no funkcijas, kuras arguments ir neatkarīgais mainīgais, ir reizinājums no funkcijas $n$-tās atvasinātās ar neatkarīgā mainīgā diferenciala $n$-to kāpi.

No augšējā dabūjam

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

$$f''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$$

Še jāievēro, ka augšējās formulās

$$dx^n = (dx)^n$$

un tas nav jāsamazina ar $d(x^n)$.

2) Arguments ir atkarīgs. Dota funkcija

$$y = f(u);$$

še $u = \varphi(x)$ Kā redzējām, diferencējot funkciju no funkcijas,

$$y' = \frac{dy}{dx} = f'(u)$$

funkcijas diferencialu dabūjam, reizinot tās atvasināto ar $dx$; tā tad

$$dy = \frac{dy}{dx}\, dx = f(u)\, u'\, dx,$$

bet

$$dx = du,$$

tā tad

$$dy = f'(u)\, du$$

Kā redzams, gadijumā, kad funkcijas arguments ir atkarīgs, šādas funkcijas pirmajam diferencialam ir tāds pat veids, kā gadijumā, kad arguments nav atkarīgs. Funkcijas $f(u)$ otru diferencialu dabūjam:

$$d^2 y = d\,[f'(u)\, du].$$

Še jāievēro, ka $du$ ir atkarīgs no $x$ un tādēļ mainīgs. Izteiksmes labā puse rāda, ka jāņem diferenciāls no reizinājuma. Tas izdarams saskaņā ar diferencialformulu [34] (6):

$$d^2y = d[f'(u)]\,.\,du + f'(u)\,d(du)$$
$$d^2y = f''(u)\,du\;\;du + f'(u)\,d^2u,$$

tā tad

$$d^2y = f''(u)\,du^2 + f'(u)\,d^2u.$$

Trešo diferencialu dabūjam, ņemot diferencialu no otrā diferenciala:

$$d^3y = d[f''(u)\,du^2 + f'(u)\,d^2u] = d[f''(u)\,du^2] + d[f'(u)\,d^2u] =$$
$$= [f'''(u)\,du\;\;du^2 + f''(u)\,2du\;\;d^2u] + [f''(u)\,du\,.\,d^2u + f'(u)\,d^3u]$$
$$d^3y = f'''(u)\,du^3 + 3f''(u)\,du\,d^2u + f'(u)\,d^3u.$$

**39. Apslēptas funkcijas atvasinātā.** Ar nolīdzinājumu

$$F(x, y) = 0 \tag{1}$$

$y$ ir dots kā apslēpta funkcija no $x$. Bieži nav iespējams no (1) izteikt $y$ kā atklātu funkciju no $x$. Pieņemam, ka $y = f(x)$ būtu tāda atklāta funkcija, tad funkcijai $f(x)$ vajadzētu būt tādai, ka nolīdzinājums

$$F[x, f(x)]\quad 0$$

ir tāpatīgi izpildīts. Šīs funkcijas $F$ no $x$ atvasinātā tādēļ ir 0. No teiktā secinam, ka funkcijas $F(x, y)$ atvasinātā attiecībā uz $x$ ir 0

Pielietojot saliktās funkcijas diferencēšanas paņēmienu (18) dabūjam nolīdzinājumu ar argumentiem $x$, $y$ un $y'$ Šinī nolīdzinājumā $y'$ atradīsies pirmā kāpē un tā atslēgšana attiecībā uz $y'$ grūtības neradīs.

P i e m ē r s.: dabūt $y'$, ja dota funkcija

$$ax^6 + 2x^3y - y^7x - 10 = 0.$$

Diferencējot augšējo izteiksmi, uzskatot $y$ kā funkciju no $x$, dabūjam:

$$6ax^5 + 6x^2y + 2x^3y' - 7y^6y'x - y^7 = 0 \tag{1}$$

$$y' = \frac{y^7 - 6ax^5 - 6x^2y}{2x^3 - 7xy^6}. \tag{2}$$

Nolīdzinājumā (1) atrodas neatkarīgais mainīgais $x$ un atkarīgais $y$, bet tur atrodas arī vēl $y'$.

Šādu nolīdzinājumu sauc par d i f e r e n c i a l n o l ī d z i n ā j u m u. Šini nolīdzinājumā atrodas pirmā atvasinātā, kādēļ nolīdzinājumu apzīmē par p i r m ā s k ā r t a s diferencialnolīdzinājumu.

Diferencējot nolīdzinājumu (1) vēlreiz attiecībā uz $x$, uzskatot $y$ un $y'$ kā atkarīgus no $x$, dabūjam:

$$\begin{aligned}30ax^4 + 12xy + 6x^2y' + 6x^2y' + 2x^3y'' - 7y^6y' - \\ - 42y^5y'^2x - 7y^6y''x - 7y^6y' = 0 \qquad (3)\end{aligned}$$

vai arī:

$$30ax^4+12xy+12x^2y'+2x^3y''-14y^6y'-42y^5y'^2x-7y^6y''x = 0. \qquad (3^a)$$

Ievedot beidzamajā nolīdzinājumā $y'$ vērtību no (2), dabūjam nolīdzinājumu, no kura varam dabūt

Nolīdzinājums ($3^a$) arī ir diferencialnolīdzinājums un tas ir o t r ā s k ā r t a s, jo tur $y$ augstākā atvasinātā ir otrās kārtas.

P i e m ē r s: Dabūt $y'$ un $y''$, ja dots nolīdzinājums

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2. \qquad (4)$$

Ņemam atvasināto no katra nolīdzinājuma locekļa

$$\begin{aligned}2b^2x + 2a^2y\, y' &= 0 \\ b^2x + a^2y\, y' &= 0. \qquad (5)\end{aligned}$$

Nolīdzinājums (5) ir pirmās kārtas diferencialnolīdzinājums; no tā dabūjam:

$$y' = -\frac{b^2x}{a^2y} \qquad (6)$$

Ņemot diferencialu no nolīdzinājuma (4) katra locekļa dabūjam:

$$b^2x\,dx + a^2y\,dy = 0. \qquad (7)$$

Arī šis nolīdzinājums ir pirmās kārtas diferencialnolīdzinājums. Dalot to ar $dx$, dabūjam nolīdzinājumu (5) un no tā $y'$.

$y''$ varam dabūt izejot no nolīdzinājuma (5) vai nolīdzinājuma (6) vai (7).

Izejot no (5) dabūjam:

$$\begin{aligned}b^2 + a^2y' . y' + a^2yy'' &= 0 \\ b^2 + a^2y'^2 + a^2yy'' &= 0 \\ y'' &= -\frac{b^2 + a^2y'^2}{a^2y}. \qquad (8)\end{aligned}$$

Šini izteiksmē jāieved $y'$ vērtība no (6).

Izejot no (6) dabūjam

$$y'' = -\frac{a^2 y (b^2 x)' - b^2 x (a^2 y)'}{a^4 y^2} = -\frac{a^2 b^2 y - a^2 b^2 x y'}{a^4 y^2} \tag{9}$$

Še jāieved vērtība no (6).

Izejot no (7) dabūjam:

$$b^2 dx\, dx + a^2 dy\, dy + a^2 y\, d^2 y = 0$$
$$b^2 dx^2 + a^2 dy^2 + a^2 y\, d^2 y = 0.$$

Dalot ar $dx^2$ dabūjam

$$b^2 + a^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + a^2 y \frac{d^2 y}{dx^2} = 0.$$

No šī nolīdzinājuma dabūjam:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = y'' = -\frac{b^2 + a^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{a^2 y} \tag{10}$$

Ievedot arī še $y'$ vērtību no (6) dabūjam:

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{a^2 y^3}{b^4}.$$

To pašu vērtību dabūjam no (8) vai (9).

### 40. Vingrinājumi apslēptu funkciju diferencēšanā.

1) $x^2 - xy + y^2 = 0$; $\quad y' = \dfrac{2x - y}{x - 2y}$

2) $x^y - y^x = 0$; $\quad y' = \dfrac{y(y - xly)}{x(x - ylx)}$

3) $xy = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x}{y}$; $\quad y' = \dfrac{y(1 - x^2 - y^2)}{x(1 + x^2 + y^2)}$

4) $x^2 + y^2 = r^2$; $\quad y'' = -\dfrac{r^2}{y^3}$

5) $l(x + y) = x - y$; $\quad y'' = \dfrac{4(x + y)}{(x + y + 1)^3}$

6) $e^{x+y} = xy$; $\quad y'' = -\dfrac{y[(x-1)^2 + (y-1)^2]}{x^2 (y - 1)^3}$

Otrā nodaļa.

## Funkcijas f(x) sakars ar f'(x). Rolles, Lagranža un Koši teoremas.

**41. Funkcijas augšanas un dilšanas pazīmes.** Apskatam vienvērtigu nepārtrauktu funkciju $f(x)$ ar $\alpha \leqq x \leqq \beta$ vietā $x$. Saka, ka $f(x)$ vietā $x$ ir augoša, ja varam pozitivu skaitli $\delta$ tā noteikt, ka

$$f(x - h) < f(x) < f(x + h) \tag{1}$$

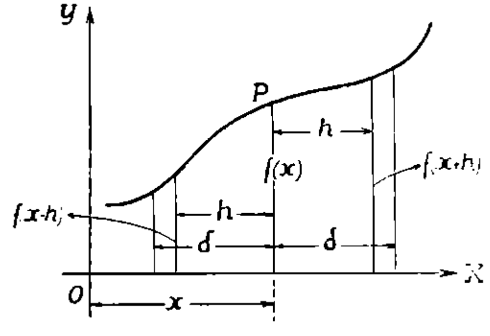
ar visiem $h$, kas izpilda noteikumu

$$0 < h <$$

Zīmējumā 10 redzams, ka $\delta$ še ir tāds lielums, ka ar visiem

$$0 < h <$$

noteikums (1) ir izpildīts; tā tad vietā $x$, t. i. līknes punktā $P$ funkcija ir augoša.




Zīm. 10.

Funkcijas $f(x)$ starpību kvocients pa kreisi, kā redzam no (1) ir

$$\frac{f(x - h) - f(x)}{-h} > 0,$$

jo skaitītājs un saucējs ir abi negativi; tāpat starpību kvocients pa labi ir

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} > 0.$$

Ja $h \to 0$, tad abi starpību kvocienti tiecas uz to pašu robežu, uz $f'(x)$ un tā kā tie abi arvien ir pozitivi, tad arī $f'(x)$ nevar būt negativa.

Funkcija $f(x)$ vietā $x$ ir dilstoša, ja var dabūt tādu pozitivu skaitli $\delta$, ka

$$f(x - h) > f(x) > f(x + h) \tag{2}$$

ar visiem $h$, kas izpilda

$$0 < h <$$

No (2) secinam

$$\frac{f(x - h) - f(x)}{-h} < 0 \quad \text{un} \quad \frac{f(x + h) - f(x)}{h} < 0 \tag{3}$$

Šo izteiksmju kopējā robeža ir $f'(x)$ un tā nevar būt pozitiva, jo izteiksmes (3) arvien ir negativas, kad $h \to 0$.

Tā tad: J a f u n k c i j a $f(x)$ a r v i e n i r m o n o t o n a, t. i. a r v i e n a u g v a i d i l s t, t a d, j a f u n k c i j a i $f(x)$ i r a t v a s i n ā t ā, t ā p i r m ā g a d i j u m ā n e v a r b ū t n e g a t i v a u n o t r ā g a d i j u m ā n e v a r b ū t p o z i t i v a.

Abos gadijumos $f'(x)$ dažās vietās var būt nulle.

P i e m ē r s: Kāda ir funkcija $y$ sin $x$ intervalā $(0, \pi)$

$$(\sin x)' = \cos x.$$

Intervalā $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ funkcija cos ir pozitiva; tā tad $y = \sin x$ ir šinī intervalā augoša funkcija. Intervalā $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ funkcija $\cos x$ ir negativa; tā tad šinī intervalā funkcija $\sin x$ ir dilstoša.

**42. Rolles teorema.** Ja funkcijai $f(x)$ ir šādas īpašibas:

1) $f(x)$ vienvērtīga nepārtraukta intervalā $a \leqslant x \leqslant b$

2) $f(a) = 0$ un $f(b) = 0$

3) funkcijai $f(x)$ dotā intervalā ir katrā vietā viena galīga atvasinātā.

Tad intervalā $(a, b)$ ir vismaz viena vieta $\xi$, kur

$$f'(\xi) = 0.$$

P i e r ā d i j u m s: Funkcija $f(x)$ vietā $a$ var būt augoša, vai dilstoša; pieņemam, ka tā šai vietā augoša. Funkcija nevar būt arvien augoša, kad $x$ mainas no $a$ līdz $b$, jo $f(b) = 0$; tādēļ kādā vietā $\xi$, intervalā $(a, b)$, $f(x)$ pāriet no augšanas dilšanā.

Vietā $(\xi - h)$ funkcija $f(\xi \quad h)$ ir augoša $(0 < h < \delta)$; tādēļ

$$\frac{f(\xi - h) - f(\xi)}{-h} > 0 \qquad (\alpha)$$

Vietā $\xi + h$ funkcija ir dilstoša; tādēļ

$$\frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} < 0 \qquad (\beta)$$

Ja $h \to 0$, tad augšējās izteiksmes tiecas uz kopēju robežvērtību $f'(\xi)$.

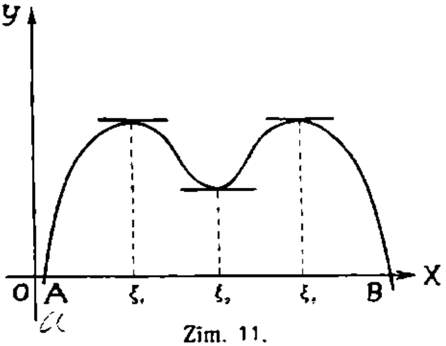
Izteiksmes ($\alpha$) robežvērtība var būt tikai pozitiva vai 0. Izteiksmes ($\beta$) robežvērtība var būt tikai negativa vai 0. Tā kā abām izteiksmēm ir kopēja robežvērtība, tad, ievērojot augšējo, tā var būt tikai 0. Tā tad

$$f'(\xi) = 0.$$

Ja funkcija sākumā dilst, bet vēlāk aug, tad slēdzieni ir analogi Ģeometriski Rolles teorema tieši ieskatama. (Zīm. 11).

Augšējai funkcijai ir pat trīs vietas, kur

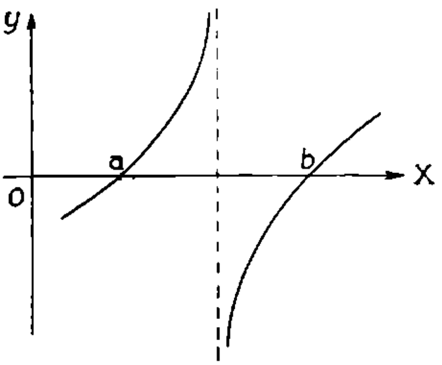
$$f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = f'(\xi_3) = 0.$$



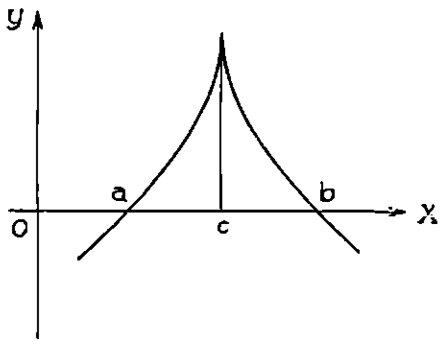
Zīm. 11.

Ir gadījumi kad Rolles teorema nav pielietojama. (Zīm. 12, 13.)

Pirmā gadījumā $f(x)$ ir pārtraukta vietā $c$ intervalā $(a, b)$. Otrā gadījumā $f(x)$ vietā $c$ ir divas kopā sakrītošas pieskares. Kā redzams, lai gan abos gadījumos $f(a) = f(b) = 0$, tomēr intervalā $(a, b)$ nav tādas vietas, kur $f'(x)$ būtu 0. Šajos gadījumos Rolles teoremas noteikumi nav izpildīti.



Zīm. 12.



Zīm. 13.

Ja $f(a) = f(b) = C$, tad arī Rolles teorema derīga.

Funkcija

$$f(x) - C$$

izpilda augšējo noteikumu, jo tā vietās $x = a$ un $x = b$ ir 0; tā tad saskaņā ar Rolles teoremu, jābūt vismaz vienai tādai vietai $\xi$, kur šīs funkcijas atvasinātā dabū vērtību 0, t. i.

$$[f(\xi) - C]' = \quad (\xi) = 0.$$

Piemērs:

$$f(x) = \sin$$

ir 0, vietās $x = 0$ un $x = \pi$. Šī funkcija un tās atvasinātā ir vienvērtīgas nepārtrauktas dotā intervalā. Saskaņā ar Rolles teoremu tā tad starp 0 un $\pi$ jābūt vismaz vienai vietai $\xi$, kur $(\sin x)' = \cos x$ ir 0.

Tāda vieta ir $\xi = \frac{\pi}{2}$ ar $\cos \frac{\pi}{2} = 0$.

**43. Lagranža (Lagrange) vai vidējās vērtības teorema.** Šo teoremu izteic ar formulu:

$$f(x + h) - f(x) = h \quad f'(x + \theta h).$$

Še $0 < \theta < 1$ un $x + \theta h$ izteic skaitli, kas atrodas starp skaitļiem $x$ un $x + h$.

Pierādijums: Apzīmējam attiecību

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

ar $A$; tad

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = A \tag{1}$$

vai

$$f(x + h) - f(x) = hA;$$

liekot

$$x + h = X$$

un

$$h = X \quad x,$$

dabūjam

$$f(X) - f(x) - (X - x)\, A = 0 \tag{$\alpha$}$$

Ar kādu noteiktu $x$, kam atbilst arī noteikta vērtība $A$, augšējā izteiksme ir izpildīta, bet ja uzskatam $x$ kā mainīgu un tad to apzīmējot ar $z$, dabūjam izteiksmi

$$f(X) - f(z) - A(X - z),$$

kas vairs nav vienlīdzīga nullei un ir funkcija no $z$; tā tad

$$\varphi(z) = f(X) - f(z) - A(X - z) \tag{$\beta$}$$

Ja $f(x)$ ir vienvērtīga nepārtraukta, un, ja tai ir tikai viena atvasinātā intervala $(x, X)$ katrā vietā, tad arī augšējai funkcijai $\varphi(z)$ ir tādas pat īpašības. Ja liekam $z = x$, tad $\varphi(x) = 0$, kā redzams no $(\alpha)$.

Ja liekam $z = X$, tad, kā redzams, $\varphi(X) = 0$. Tā tad, funkcija $\varphi(z)$ izpilda visus Rolles teoremas noteikumus un tādēļ attiecībā uz $\varphi(z)$ var pielietot Rolles teoremu. No $(\beta)$ dabūjam:

$$\varphi'(z) = -f'(z) + A.$$

Saskaņā ar Rolles teoremu, starp $x$ un $X$ jābūt tādai $z$ vērtībai $\xi$, ar kuru

$$\varphi'(\xi) = 0;$$

tad

$$-f'(\xi) + A = 0$$

un

$$A = f'(\xi).$$

$\xi$ vērtība atrodas starp vērtībām $x$ un $X = x + h$; tā tad

$$\xi = \quad + \theta h$$

un galīgi

$$A = f'(x + \theta h).$$

Ievedot izteiksmē (1) šo $A$ nozīmi, dabūjam

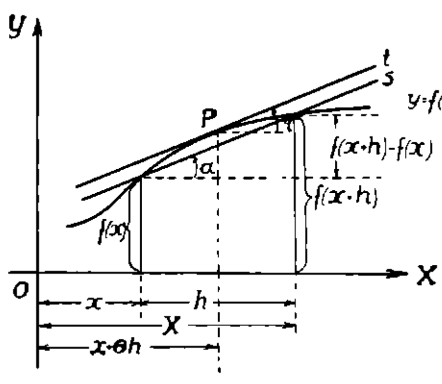
$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = f'(x + \theta h)$$

vai

$$f(x + h) - f(x) = hf'(x + \theta h);$$

ar to tad teorema ir pierādīta.

Rolles teoremas ģeometriskā nozīme ieskatama no zīmējuma 14.




Zīm. 14.

Izteiksme

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \operatorname{tg} \alpha$$

dod sekantas $s$ virziena koeficientu tg $\alpha$.

Izteiksme $f'(x + \theta h)$ dod liknei punktā $P$ pievestās pieskares $t$ virziena koefientu tg $\tau$. Tā kā

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = f'(x + \theta h),$$

tad

$$\operatorname{tg} \tau = \operatorname{tg} \alpha;$$

tā tad

$$= \alpha$$

Beidzamā izteiksme $= \alpha$ rāda, ka ir tāda vieta starp $x$ un $x + h$, t. i. $x + \theta h$ un tā tad arī uz līknes tāds punkts $P$, kur pieskare ir parallēla sekantei $s$.

Ja ar $\xi$ apzīmējam vērtību starp un $x + h$, tad Lagranža teoremu rakstam:

$$f(x + h) - f(x) \quad h f'(\xi).$$

Ja liekam $= a$ un $+ h = b$, tad

$$h = b - a;$$

teoremu tad rakstam:

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'[a + \theta(b - a)]$$

S e c i n ā j u m s: Agrāk pierādīts, ka ja $f(x) = C$, tad šīs funkcijas atvasinātā ir 0.

Tagad, ar Lagranža teoremas palīdzību pierādīsim, ka, ja funkcijas atvasinātā ar visiem $x$ intervalā $a \leqq x \leqq b$ ir nulle, tad šī funkcija dotā intervalā ir pastāvīga.

Kā redzējām

$$f(x + h) \quad f(x) = h f'(\xi); \text{ kur } \xi = x + \theta h;$$

Tā kā dotā intervalā $f'(x) = 0$, tad arī $f'(\xi) = 0$, tādēļ

$$f(x + h) = f(x).$$

Šī izteiksme ir derīga bezgalīgi daudzām $h$ vērtībām dotā intervalā; tas nozīmē, ka funkcija ir pastāvīga.

Agrāk pierādīts, ka, ja divas funkcijas atšķiras par pastāvīgu lielumu, tad šo funkciju atvasinātās ir vienlīdzīgas.

Tagad pierādīsim, ja divu funkciju atvasinātās ir vienlīdzīgas, tad šīs funkcijas atšķiras par pastāvīgu lielumu.

Pieņemam, ka

$$u' = v'$$

tad

$$u' - \quad = 0$$
$$(u - v)' = 0.$$

No beidzamās izteiksmes, secinam

$$u - v = C$$
$$u = v + C.$$

Šī izteiksme dod teoremas pierādijumu.

**44. Koši (Cauchy) formula.** Pieņemam, ka funkcijas $f(x)$ un $F(x)$ ir vienvērtīgas, nepārtrauktas funkcijas intervalā $(a, b)$ un ka tām ir īstās un galīgas atvasinātās šinī intervalā Tālāk pieņemam, ka 1) $f'(x)$ un $F'(x)$ nepieņem vērtību 0 vienā tai pašā vietā, 2) $F(b) \neq F(a)$.

Veidojam izteiksmi:

$$f(x)[F(b) - F(a)] - F(x)[f(b) - f(a)]. \tag{1}$$

Šī funkcija ir nepārtraukta intervalā $(a, b)$ un tai šinī intervalā ir īstās un galīgas atvasinātās.

Ja liekam šinī funkcijā $x = a$, tad dabūjam:

$$f(a)[F(b) - F(a)] - F(a)[f(b) - f(a)].$$

Liekot $x = b$ dotā funkcijā, dabūjam:

$$f(b)[F(b) - F(a)] - F(b)[f(b) - f(a)].$$

Šīs divas izteiksmes ir vienlīdzīgas. Kā redzams, izteiksme (1) ir tāda funkcija, kas atbilst Rolle teoremas noteikumiem, tādēļ varam tai pielietot Rolles teoremu, t. i. funkcijas (1) atvasinātai vajaga dabūt ar kādu $\xi$

$$a < \xi < b$$

vērtību 0. Tā tad:

$$f'(\xi)[F(b) - F(a)] - F'(\xi)[f(b) - f(a)] = 0. \tag{2}$$

un

$$f'(\xi)[F(b) - F(a)] = F'(\xi)[f(b) - f(a)] \tag{3}$$

Ar augšā izdarītiem pieņēmumiem varam (3) dalīt ar $[F(b) - F(a)]$ un $F'(\xi)$ un dabūjam:

$$\frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}.$$

Beidzamā izteiksme dod Koši teoremu.

## Trešā nodaļa.

# Teilora (Taylor) un Meklorena (Mac Laurin) formulas un rindas. Dažu funkciju izvirzīšana rindās.

**45. Teilora formula.** Dažāda veida funkciju, piemēram, logaritmisku, trigonometrisku funkciju pētīšanā, ļoti svarīgs ir jautājums, kā izrēķināt funkcijas vērtības dotām argumenta vērtībām.

Diferencialrēķini šādos gadijumos dod vienkāršu līdzekli minētā uzdevuma veikšanai, proti, izvirzot doto funkciju rindā.

Uzdevuma atrisinājumu panāk ar Teilora formulas atsevišķu veidu: ar Meklorena formulu.

Teilora formula dod funkcijas $f(x+h)$ izvirzijumu rindā ar augošām $h$ kāpēm. Šo formulu lieto netikvien funkcijas vērtību aprēķināšanai, bet arī daudzu citu teoretiska rakstura jautājumu noskaidrošanai.

Apskatam visupirms atsevišķu gadijumu: funkcijas $(x+h)^n$ izvirzīšanu rindā.

Pielietojot Ņutona binoma formulu, dabūjam:

$$(x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}h^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^{n-3}h^3 + \ldots (a)$$

Šī rinda, kā zinams, ir galīga, ja $n$ ir vesels pozitivs skaitlis. Ja $n$ ir daļas skaitlis vai negativs, tad rinda ir bezgalīga. Ja apzīmējam $f(x) = x^n$, tad $f(x+h) = (x+h)^n$

Apskatot rindas $(a)$ locekļus, redzam, ka pirmais loceklis ir $f(x)$; tālāko locekļu koeficientus var izteikt ar funkcijas $f(x)$ atvasinātām:

$$f(x) = x^n$$
$$f'(x) = nx^{n-1}$$
$$f''(x) = n(n-1)x^{n-2}$$

To ievērojot, rindu $(a)$ varam rakstīt:

$$(x+h)^n = f(x+h) = f(x) + \frac{hf'(x)}{1!} + \frac{h^2 f''(x)}{2!} + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \ldots$$

Šādu funkcijas izvirzījumu rindā dabūjam atsevišķai funkcijai $f(x) = x^n$; apskatīsim vai tas ir derīgs arī katram citam funkcijas veidam. Veidojam starpību

$$f(x+h) - \left[f(x) + \frac{h}{1!}f'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \quad + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x)\right]$$

Ja izteiksme iekavās nav vienlīdzīga funkcijai $f(x+h)$, tad šī starpība dabū kādu vērtību $R$ un varam rakstīt:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!}f'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \quad + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x) + R. \qquad (\beta)$$

Ja funkcijai $f(x+h)$ un izteiksmei

$$\left[f(x) + \frac{h}{1!}f'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \quad + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x)\right]$$

ir kāds tuvs sakars, tad starpībai $R$ jāizteicas vienkāršā veidā, un jo ciešāks šis sakars, jo vienkāršākam jābūt $R$ veidam.

Mēģinam atrast $R$ veidā:

$$\frac{h^p}{p} \cdot P;$$

še $p$ ir nenoteikts vesels pozitivs skaitlis un $P$ vēl nezinama funkcija.

Pieņemam, ka $f(x)$ ir vienvērtīga, nepārtraukta, intervalā $x$, $x+h$ ka tai šajā intervalā ir $(n+1)$vienvērtīgas, nepārtrauktas atvasinātās. Tad:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!}f'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \ldots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)} + \frac{h^p}{p} \cdot P \qquad (\gamma)$$

Pārveidojam šo izteiksmi, ievedot:

$$x + h = X$$

Tad

$$h = X - x.$$

Ievedot šīs vērtības nolīdzinājumā $(\gamma)$ un pārnesot visus locekļus nolīdzinājuma kreisajā pusē, dabūjam:

$$f(X) - f(x) - \frac{(X-x)}{1!}f'(x) - \frac{(X-x)^2}{2!}f''(x) - \ldots - \frac{(X-x)^n}{n!}f^{(n)}(x) - \frac{(X-x)^p}{p}P = 0. \qquad (\delta)$$

Ar noteiktiem $x$ un $h$ arī $X$ un $P$ ir noteikti. Bet ja izteiksmē ($\delta$), atstājot kā pastāvīgus $X$ un $P$, aizvietojam $x$ ar $z$ un liekam $z$ mainīties no $x$ līdz $X$, tad izteiksme vispār nav 0, bet ir funkcija no tādēļ varam rakstīt:

$$\varphi(z)=f(X)-f(z)-\frac{(X-z)}{1!}f'(z)-\frac{(X-z)^2}{2!}f''(z)-\ldots-\frac{(X-z)^n}{n!}f^{(n)}(x)-\frac{(X-z)^p}{p}P. \quad (\varepsilon)$$

Ja funkcija $f(x)$ intervalā $(x, X)$ ir vienvērtiga un nepārtraukta un ja tai šajā intervalā ir līdz $(n+1)$ atvasinātās, kas vienvērtīgas un nepārtrauktas, tad, kā zinam no ievada analizē, arī funkcijai $\varphi(z)$ ir visas tās pašas īpašības.

Ja liekam izteiksmē ($\varepsilon$) $z = x$, tad dabūjam izteiksmi ($\delta$), t. i.

$$\varphi(x) = 0.$$

Liekot izteiksmē ($\varepsilon$) $z = X$ redzam, ka arī

$$\varphi(X) = 0$$

No apskatītā izriet, ka funkcija $\varphi(z)$ izpilda Rolles teoremas noteikumus un tādēļ to šinī gadijumā varam pielietot.

Veidojam izteiksmes ($\varepsilon$) atvasināto, uzskatot $X$ un $P$ kā pastāvīgus.

$$\varphi'(z) = -f'(z)+\left[f'(z)-\frac{(X-z)}{1!}f''(z)\right]+\left[\frac{(X-z)}{1!}f''(z)-\frac{(X-z)^2}{2!}f'''(z)\right]+$$
$$+\left[\frac{(X-z)^2}{2!}f'''(z)-\frac{(X-z)^3}{3!}f^{IV}(z)\right]+\ldots+\left[\frac{(X-z)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(z)-\frac{(X-z)^n}{n!}f^{(n+1)}(z)\right]+$$
$$+ (X-z)^{p-1}.P \quad (\zeta)$$

Sakārtojot šo formulu, dabūjam :

$$\varphi'(z) = -\frac{(X-z)^n}{n!}f^{(n+1)}(z) + (X-z)^{p-1}P. \quad (\eta)$$

Saskaņā ar Rolles teoremu jābūt tādai $z$ vērtībai, ko apzīmējam ar $z_1$, un kas dod

$$\varphi'(z_1) = 0.$$

Ja ievedam izteiksmē ($\eta$) $z$ vietā $z_1$, tad izteiksme dabū vērtību 0. Tā tad

$$(X-z_1)^{p-1}\cdot P - \frac{(X-z_1)^n}{n!}\cdot f^{n+1}(z_1) = 0.$$

Šī formula dod

$$P = \frac{(X - z_1)^n}{n!\,(X - z_1)^{p-1}}\; f^{(n+1)}(z_1) = \frac{(X - z_1)^{n-p+1}}{n!}\; f^{(n+1)}(z_1).$$

Tā kā

$$z_1 = x + \theta h \quad \text{un} \quad X = x + h,$$

tad ievedot šīs vērtības augšējā izteiksmē, dabūjam:

$$P = \frac{[x + h - (x + \theta h)]^{n-p+1}}{n!}\; f^{(n+1)}(x + \theta h) = \frac{[h - \theta h]^{n-p+1}}{n!} \cdot f^{(n+1)}(x + \theta h),$$

vai

$$P = \frac{(1 - \theta)^{n-p+1}}{n!} \cdot h^{n-p+1}\; f^{(n+1)}(x + \theta h).$$

Tā tad

$$R = \frac{h^p}{p}\; P = \frac{(1 - \theta)^{n-p+1}}{n!\,p}\; h^{n+1}\; f^{(n+1)}(x + \theta h).$$

$R$ sauc par rindas ($\beta$) a t l i k u m a  l o c e k l i, un pēdējā izteiksme ir rindas atlikuma loceklis Š l e m i l c h  R o š e (*Schlömilch Rosche*) v e i d ā. Tā kā $p$ nav noteikts, tad tam varam dot dažādas vērtības. To izlietojam dodot $p$ tādas vērtības, lai $R$ izteiksme dabūtu vienkāršāku veidu.

Liekam

$$p = n + 1;$$

tad

$$R = \frac{h^{n+1}}{(n + 1)!}\; f^{(n+1)}(x + \theta h).$$

Šo rindas atlikuma locekļa veidu sauc par L a g r a n ž a (*Lagrange*) veidu.

Liekot

$$p = 1,$$

dabūjam:

$$R = \frac{(1 - \theta)^n}{n}\; h^{n+1}\; f^{(n+1)}(x + \theta h).$$

Šo rindas atlikuma locekļa veidu sauc par K o š i (*Cauchy*) veidu.

Izteiksmi

$$f(x + h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)} + R$$

sauc par T e i l o r a  f o r m u l u. $R$ izteiksmes dotas ar augšējām trim formulām.

Teilora formulu var rakstīt visām $x$ un $h$ vērtībām, ja tikai $x$ un $x + h$ atrodas intervalā $(\alpha, \beta)$, kur $f(x)$ ir vienvērtīga, nepārtraukta un tai šinī intervalā ir vienvērtīgas, nepārtrauktas, atvasinātās līdz $(n + 1)$ kārtai, to arī ieskaitot.

Ja $x$ uzskatam par noteiktu, tad saka, ka formula derīga vietā $x$; $h$ tad ir mainīgs tādās robežās, ka $x + h$ vienmēr atrodas dotā intervalā.

Rādītājs $n$ var būt (izvēlēts) pēc patikas, ja tikai augšējie noteikumi izpildīti līdz skaitlim $n + 1$.

Pielietojumos $h$ ir ļoti mazs skaitlis, tuvu nullei. Augošās $h$ kāpes ātri tuvojas robežai nulle un, lai no $f(x)$ dabūtu tuvini $f(x + h)$, vajadzīgi tikai nedaudzi formulas locekļi.

**46. Teilora rinda.** Ja funkcija $f(x)$ intervalā $(\alpha, \beta)$ ir vienvērtīga un nepārtraukta un tai šinī intervalā ir visas atvasinātās, kas vienvērtīgas un nepārtrauktas, tad varam rakstīt:

$$f(x+h) = \lim_{n\to\infty}\left[f(x) + \frac{h}{1!}f'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \ldots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x)\right] + \lim_{n\to\infty} R;$$

tā tad

$$f(x + h) - \lim_{n\to\infty} R = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \ldots$$

Izteiksmes labajā pusē atrodas bezgalīga rinda. Kā redzam, funkciju $f( + h)$ tikai tad izteic šī bezgalīgā rinda, ja $\lim\limits_{n\to\infty} R = 0$.

Izteiksmi

$$f(x + h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \ldots$$

sauc par Teilora rindu, ja $f(x)$ un tās atvasinātās izpilda minētos noteikumus un pie tam vēl

$$\lim_{n\to\infty} R = 0.$$

Ja $f^{(n+1)}(x + \theta h)$ visām $n$ vērtībām ir galīgs lielums, vismaz intervalā $(x, x + h)$, tad $R$ vērtība ar $n \to \infty$ ir atkarīga no izteiksmes

$$\frac{h^{n+1}}{n + 1!}.$$

Ar $n \to 0$ tās robežvērtība ir 0 visiem galīgiem $h$.

P i e r ā d i j u m s.

$$\frac{h^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{h}{1} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{3} \cdots \frac{h}{i} \cdot \frac{h}{i+1} \cdots \frac{h}{n+1}.$$

Pieņemot pozitivu noteiktu skaitli $k < 1$, varam dabūt katram galīgam $h$ tādu galīgu $i$, ka reizinājumā

$$\left|\frac{h}{1}\right| \cdot \left|\frac{h}{2}\right| \cdots \left|\frac{h}{i}\right| \tag{a}$$

katrs faktors lielāks par $k$. Reizinājuma ($a$) vērtība tad ir galīgs skaitlis $G$. Reizinājumā

$$\left|\frac{h}{i+1}\right| \cdot \left|\frac{h}{i+2}\right| \cdots \left|\frac{h}{n+1}\right|$$

ar

$$\frac{h}{i+1} < k < \frac{h}{i}$$

katrs faktors tad ir mazāks par $k$. Redzam, ka

$$0 < \left|\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\right| = \left|\frac{h}{1}\right| \cdot \left|\frac{h}{2}\right| \cdots \left|\frac{h}{i}\right| \cdot \left|\frac{h}{i+1}\right| \cdots \left|\frac{h}{n+1}\right| < G\, k^{n+1-i}$$

Tā kā $k < 1$, tad

$$\lim_{n \to \infty} G \cdot k^{n+1-i} = 0;$$

tādēļ

$$\lim_{n \to \infty} \left|\frac{h^{n+1}}{n+1!}\right| = 0$$

un arī

$$\lim_{n \to \infty} \frac{h^{n+1}}{n+1!} = 0.$$

No augšējā izriet: ja $f^{(n+1)}(x + \vartheta h)$ ar katru $n$ ir galīgs lielums intervala $(x, x + h)$, tad ar galīgu $h$

$$\lim_{n \to \infty} R = 0.$$

Teilora formulu un rindu varam rakstīt arī citā veidā. Liekot

$$x_0 + h = x; \quad h = x - x_0,$$

rakstam Teilora formulu:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{x-x_0}{1!}f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0)+\ldots+\frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0)+R;$$

$$R=\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}[x_0+\theta(x-x_0)]. \qquad \text{(Lagranžs)}$$

$$R=\frac{(1-\theta)^n}{n!}(x-x_0)^{n+1}.f^{(n+1)}[x_0+\theta(x-x_0)]. \qquad \text{(Koši)}$$

Tālāk ievērojam, ka

$$f(x+h)-f(x)=\Delta f(x)=\frac{h}{1!}f'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\frac{h^3}{3!}f'''+$$

Tā kā:

$$h=\Delta x=dx \quad \text{un} \quad f'(x)dx=df(x); \quad f''(x)dx^2=d^2f(x) \qquad \text{u. t. t}$$

dabūjam Teilora rindu veidā

$$\Delta f(x)=\frac{df(x)}{1!}+\frac{d^2f(x)}{2!}+\frac{d^3f(x)}{3!}+$$

Šī izteiksme rāda arī kļūdu, ko pielaižam, ja atvietojam $\Delta f(x)$ ar $df(x)$

**47. Meklorena formula un rinda.** Ja intervalā $(\alpha, \beta)$ atrodas arī vieta $x=0$, tad šo vietu varam pieņemt kā izejas vietu funkcijas izvirzīšanai rindā.

Liekam Teilora formulā $x=0$ un uzskatam $h$ par mainīgu. Ja tad liekam $h$ vietā $x$, dabūjam:

$$f(x)=f(o)+\frac{x}{1!}f'(o)+\frac{x^2}{2!}f''(o)+ \qquad +\frac{x^n}{n!}f^{(n)}+R$$

$$R=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot f^{(n+1)}(\theta x), \qquad \text{(Lagranžs);}$$

$$R=\frac{(1-\theta)^n}{n!}x^{n+1}f^{(n+1)}(\theta x). \qquad \text{(Koši).}$$

Intervalā $(\alpha, \beta)$, kurā atrodas vērtība $x = 0$, funkcijai $f(x)$ jāizpilda noteikumi, kas bija pieņemti attīstot Teilora formulu. Augšējo izteiksmi sauc par **Meklorena formulu.**

Ja intervalā, kurā atrodas 0 un $x$, funkcija $f(x)$ ir vienvērtīga, nepārtraukta, tai šinī intervalā ir visas atvasinātās, kas vienvērtīgas un nepārtrauktās un ja

$$\lim_{n \to \infty} R = 0,$$

tad funkciju $f(x)$ var izteikt ar bezgalīgu rindu:

$$f(x) = f(o) + \frac{x}{1!} f'(o) + \frac{x^2}{2!} f''(o) +$$

$$\lim_{n \to \infty} R = 0,$$

Šo rindu sauc par Meklorena rindu.

Jāievēro, ka $f(o)$ nozīmē funkcijas $f(x)$ vērtību, un $f^{(n)}(o)$ nozīmē funkcijas $n$-tās atvasinātās vērtību ar $x = 0$. $f^{(n+1)}(\theta x)$ nozīmē funkcijas $(n+1)$-ās atvasinātās vērtību, ko dabūjam liekot $x$ vietā $\theta x$.

**48. Dažu funkciju izvirzīšana rindās.** Meklorena rinda ir parocīgs līdzeklis funkciju izvirzīšanai rindās. Apskatīsim dažus piemērus.

$$\text{a)} \quad f(x) = a^x$$

Še $a$ pozitivs un lielāks par 1.

Lai šo funkciju izvirzītu Meklorena rindā, jāapskata, vai šī funkcija izpilda Meklorena rindas noteikumus.

Funkcija $a^x$ ir vienvērtīga, nepārtraukta robežās no $x = -\infty$ līdz $x = +\infty$; tā tad arī ar $x = 0$. Šis funkcijas visas atvasinātās ir vienvērtīgas un nepārtrauktas visām galīgām $x$ vērtībām. Meklorena formulas noteikumi tā tad ir izpildīti.

Ievietošanai Meklorena formulā

$$f(x) = f(o) + \frac{x}{1!} f'(o) + \frac{x^2}{2!} f''(o) + \qquad + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(o) + R,$$

$$R = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(\theta x),$$

veidojam vajadzīgās funkcijas $f(x)$ atvasinātās $f'(o)$, $f''(o)$ u. t. t.

$$f(x) = a^x; \qquad f(o) = a^o = 1$$
$$f'(x) = a^x\, la; \qquad f'(o) = a^o\, la = la$$
$$f''(x) = a^x\, (la)^2; \qquad f''(o) = a^o\, (la)^2 = (la)^2$$

$$f^{(n)}(x) = a^x\, (la)^n \qquad f^{(n)}(o) = a^o\, (la)^n = (la)^n$$
$$f^{(n+1)}(x) = a^x\, (la)^{(n+1)}; \quad f^{(n+1)}(\theta x) = a^{\theta x}\, (la)^{n+1}.$$

Ievietojot dabūjam:

$$a^x = 1 + \frac{x}{1!}(la) + \frac{x^2}{2!}(la)^2 \qquad + \frac{x^n}{n!}(la)^n + R$$

$$R = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\, a^{\theta x}\, (la)^{n+1}$$

$$\lim_{n \to \infty} R = \lim_{n \to \infty}\left(\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\, a^{\theta x}\, (la)^{n+1}\right) =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{(la\,.\,x)^{n+1}}{(n+1)!} \lim_{n \to \infty} a^{\theta x} \tag{1}$$

Agrāk pierādīts, ka

$$\lim_{n \to \infty} \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} = 0,$$

ja $h$ ir galīgs skaitlis, no kā secinam

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(la\, x)^{n+1}}{(n+1)!} = 0. \tag{2}$$

Tā kā $x$ ir galīgs skaitlis

$$\lim a^{\theta x} = a^{\theta x} \tag{3}$$

Tā tad ievērojot (1), (2), (3):

$$\lim_{n \to \infty} R = 0.$$

Ievērojot augšējo redzam ka funkciju $a^x$ varam izvirzīt Meklorena rindā

$$a^x = 1 + \frac{x}{1!}(la) + \frac{x^2}{2}(la)^2 + \frac{x^3}{3!}(la)^3 + .. \quad \text{(ar visiem galīgiem } x\text{)}$$

$$R = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} a^{\theta x} \cdot (la)^{n+1}.$$

Atlikuma loceklis $R$ rāda kļūdu, ko pielaižam rindu beidzot ar locekli

$$\frac{x^n}{n!}(la)^n$$

b) $$f(x) = e^x$$

Še viegli pārliecināties, ka funkcija atbilst Meklorena formulas noteikumiem.

$$f(x) = f'(x) = f''(x) = \qquad = f^{(n)}(x) = f^{(n+1)}(x) = e^x$$

$$f(o) = f'(o) = f''(x) = \qquad = f^{(n)}(x) = 1$$

$$f^{(n+1)}(\theta x) = e^{\theta x}$$

Ievedot šīs vērtības Meklorena formulā, dabūjam:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \qquad + \frac{x^n}{n!} + R;$$

$$R = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot e^{\theta x}$$

Tā kā galīgām $x$ vērtībām

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0; \quad \lim e^{\theta x} = e^{\theta x},$$

tad

$$\lim_{n \to \infty} R = 0,$$

un funkciju $e^x$ varam izvirzīt Meklorena rindā:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \qquad \text{(ar visiem galīgiem } x\text{)}$$

$$R = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}$$

c) $$f(x) = lx.$$

Šo funkciju nevar izvirzīt Meklorena rindā, jo $f(o) = lo = -\infty$. Tāpat arī šīs funkcijas visas atvasinātās ir $\infty$, ja $x = 0$.

Izvirzam rindā funkciju

$$f(x) = l(1 + x).$$

Dabūjam šīs funkcijas atvasinātās:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}; \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}; \quad f'''(x) = \frac{1.2}{(1+x)^3};$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{1 \,.\, 2 \,.\, . \,(n-1)}{(1+x)^n};$$

$$f(o)=0; \; f'(o)=1; \; f''(x)=-1; \; f'''(o)=1 \,.\, 2; \ldots f^{(n)}(o)=(-1)^{n-1}(n-1)!$$

$$f^{(n+1)}(\theta x) = (-1)^n \frac{1 \,.\, 2 \,.\,.\,.\, n}{(1+\theta x)^{n+1}}.$$

$$R = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{(n+1)}.(n+1)} \qquad \text{(Lagranžs).}$$

Kā redzam, funkcija $l(1+x)$ izpilda Meklorena formulas noteikumus vietā $x = 0$.

Atlikuma locekļa $R$ pētīšana Lagranža veidā nav parocīga, tādēļ ņemam $R$ Kosi veidā:

$$R = \frac{(1-\theta)^n}{n!} \; x^{n+1} \; \frac{n!}{(1+\theta x)^{n+1}} \cdot (-1)^n;$$

$$R = (-1)^n (1-\theta)^n \frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}}.$$

Pārveidojot šo izteiksmi, dabūjam:

$$R = (-1)^n \cdot \frac{x}{1+\theta x} \cdot \left(\frac{x - \theta x}{1+\theta x}\right)^n$$

Funkcijas $l(1+x)$ veids rāda, ka $x$ jābūt lielākam par $-1$, jo ar $x \leqslant -1$, $l(1+x)$ būtu $-\infty$ vai imaginars.

Ja $x > -1$, tad daļām

$$\frac{x}{1+\theta x} \quad \text{un} \quad \frac{x-\theta x}{1+\theta x}$$

ar galīgiem $x$ arvienu jābūt galīgiem lielumiem. Kā redzam, $\lim\limits_{n \to \infty} R$ atkarīgs no $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{x-\theta x}{1+\theta x}\right)^n$

Daļas $\frac{x-\theta x}{1+\theta x}$ skaitliskā vērtiba arvienu ir mazāka par $x$ skaitlisko vērtību.

Ja $x > 0$, tad kā redzams, katrai $x$ vērtībai: $1+\theta x > 1-\theta$ un tādēļ daļa $\frac{1-\theta}{1+\theta x}$ ir īsta daļa un $\frac{x(1-\theta)}{1+\theta x} < x$.

Ja $x < 0$, tad daļa dabū veidu:

$$-\frac{|x|(1-\theta)}{1-\theta|x|},$$

tad

$$\left|-\frac{|x|(1-\theta)}{1-\theta|x|}\right| < |x|,$$

jo

$$\frac{1-\theta}{1-\theta|x|} < 1 \quad \text{ar} \quad |x| < 1.$$

Ievērojot augšējo redzam, ka arvienu daļa

$$\left|\frac{x-\theta x}{1+\theta x}\right| < 1, \quad \text{ja} \quad |x| < 1$$

un tādēļ

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{x-\theta x}{1+\theta x}\right)^n = 0; \quad (\text{ar } -1 < x < 1),$$

tādā gadijumā arī $\lim\limits_{n \to \infty} R = 0$.

Funkciju $l(1+x)$ tā tad varam izvirzīt Meklorena rindā, ja $-1 < x < 1$.

Ievedot Meklorena rindā $f(o)$, $f'(o)$ u t. t. dabūjam funkcijas $l(1+x)$ izvirzijumu rindā:

$$l(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + $$

$$R = (-1)^n \cdot \frac{x}{1+\theta x}\left(\frac{x-\theta x}{1+\theta x}\right)^n \qquad \text{(Koši veids)}$$

$$R = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}. \qquad \text{(Lagranža veids)}$$

Šī rinda derīga dabīgiem logaritmiem un no tās izejot varam dabūt rindu logaritmiem

$$\log_a(1+x)$$

ar pamatu $a$ šādā kārtā:

$$1 + x = a^{\log_a(1+x)};$$

$$l(1+x) = \log_a(1+x) \,.\, la;$$

$$\log_a(1+x) = \frac{l(1+x)}{la}.$$

Tā tad

$$\log_a(1+x) = \frac{1}{la}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \quad .\right).$$

Kā redzam, rēķins ar kuru katru $\log_a$ ir sarežģītāks nekā ar Nepera logaritmu, tādēļ pēdējie arī skaitas par dabīgiem.

Nupat apskatīto logaritmisko funkciju rindu savirzāmība ir lēna un tādēļ tās nav parocīgas logaritmu aprēķināšanai, tās pārveidojot dabūjam ātri savirzāmas rindas.

Tā kā $l(1+x)$ rinda savirzāma ar vērtībām $|x| < 1$, tad šinī rindā var ievest $x$ vietā $-x$, tad

$$l(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + $$

$$l(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - $$

Atņemot otru rindu no pirmās, dabūjam:

$$l(1+x) - l(1-x) = l\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \quad .\quad\right) \qquad (a)$$

Liekam

$$\frac{1+x}{1-x}=\frac{z+1}{z},$$

tad

$$x=\frac{1}{2z+1}$$

Ievedot šīs vērtības rindā ($a$), dabūjam :

$$l(z+1)-l(z)=2\left(\frac{1}{2z+1}+\frac{1}{3(2z+1)^3}+\frac{1}{5(2z+1)^5}+\quad.\right)$$

Logaritmiem ar pamatu $a$ dabūjam formulu :

$$\log_a(z+1)-\log_a z=\frac{2}{la}\left(\frac{1}{2z+1}+\frac{1}{3(2z+1)^3}+\frac{1}{5(2z+1)^5}+\quad\right)$$

Šīs rindas ir ļoti ātri savirzāmas un savirzāmība palielinas ar augošu $z$, tādēļ tās derīgas logaritmu tabulu aprēķināšanai.

d) $$f(x)=\sin x.$$

$$(\sin x)'=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right);\qquad (\sin o)'=1.$$

$$(\sin x)''=\sin\left(x+2\frac{\pi}{2}\right);\qquad (\sin o)''=0.$$

$$(\sin x)'''=\sin\left(x+3\frac{\pi}{2}\right);\qquad (\sin o)'''=-1.$$

$$(\sin x)^{IV}=\sin\left(x+4\frac{\pi}{2}\right);\qquad (\sin o)^{IV}=0.$$

Tālāk vērtības atkārtojas

$$(\sin x)^{(n+1)}=\sin\left(x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right);\quad (\sin\theta x)^{(n+1)}=\sin\left(\theta x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

$$R=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\sin\left[\theta x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\lim_{u\to\infty}R=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\lim_{n\to\infty}\sin\left[\theta x+(n+1)\frac{\pi}{3}\right]$$

$$\lim_{n\to\infty}R=0,$$

jo pirmā locekļa robeža, kā agrāk pierādīts, ir 0, bet otra locekļa robeža ir galīgs skaitlis, tādēļ ka sin vērtība arvienu atrodas starp $-1$ un $+1$.

Kā redzam, funkcija $\sin x$ izpilda Meklorena rindas noteikumus, tādēļ funkciju $\sin x$ varam izvirzīt Meklorena rindā: ievedot tur $f(o)$, $f'(o)$ u. t. t. vērtības.

Tā tad

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \qquad \text{(ar visiem galīgiem } x)$$

e) $f(x) = \cos x.$

Līdzīgi dabūjam:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} +$$

Še

$$R = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cos\left[\theta x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right].$$

### 49. Vingrinājumi.

Izvirzīt Teilora rindā:

1) $\sqrt{x+h}$; $\sqrt{x+h} = \sqrt{x} + \frac{h}{2\sqrt{x}} - \frac{h^2}{8x\sqrt{x}} + \frac{h^3}{16x^2\sqrt{x}}$

2) $l(x+h)$; $l(x+h) = lx + \frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3} -$

3) $\sin(x+h)$; $\sin(x+h) = \sin x + \frac{h}{1!}\cos x - \frac{h^2}{2!}\sin x - \frac{h^3}{3!}\cos x +$

Izvirzīt Meklorena rindā

1) $\operatorname{arc\,tg} x$; $\operatorname{arc\,tg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} +$

2) $l\cos x$; $l\cos x = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} -$

Lai ietaupītu laiku $R$, t. i. kļūdas noteikšanai, dažos gadijumos derīga sekojošā tabula:

| | Tuvina formula | $x$ intervals, ja kļūda ir | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 0.1% | | 1% | | 10% | |
| | | no | līdz | no | līdz | no | līdz |
| 1 | $\sin x = x$ | $-0.077$<br>$-4.4^0$ | $+0.077$<br>$+4.4^0$ | $-0.244$<br>$-14.0^0$ | $+0.244$<br>$+14.0^0$ | $-0.780$<br>$-44.0^0$ | $+0.780$<br>$+44.0^0$ |
| 2 | $\sin x = x - \frac{x^3}{3!}$ | $-0.576$<br>$-33.0^0$ | $+0.576$<br>$+33.0^0$ | $-1.032$<br>$-59.0^0$ | $+1.032$<br>$+59.0^0$ | $-1.636$<br>$-93.5^0$ | $+1.636$<br>$+93.5^0$ |
| 3 | $\cos x = 1$ | $-0.045$<br>$-2.6^0$ | $+0.045$<br>$+2.6^0$ | $-0.141$<br>$-8.1^0$ | $+0.141$<br>$+8.1^0$ | $-0.430$<br>$-24.6^0$ | $+0.430$<br>$+24.6^0$ |
| 4 | $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$ | $-0.384$<br>$-22.0^0$ | $+0.384$<br>$+22.0^0$ | $-0.650$<br>$-37.2^0$ | $+0.650$<br>$+37.2^0$ | $-1.034$<br>$-59.2^0$ | $+1.034$<br>$+59.2^0$ |
| 5 | $\operatorname{tg} x = x$ | $-0.054$<br>$-3.1^0$ | $+0.054$<br>$+3.1^0$ | $-0.183$<br>$-10.5^0$ | $+0.183$<br>$+10.5^0$ | $-0.522$<br>$-30.0^0$ | $+0.522$<br>$+30.0^0$ |
| 6 | $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3}$ | $-0.385$<br>$-22.0^0$ | $+0.385$<br>$+22.0^0$ | $-0.533$<br>$-30.5^0$ | $+0.533$<br>$+30.5^0$ | $-0.933$<br>$-53.4^0$ | $+0.933$<br>$+53.4^0$ |
| 7 | $\sqrt{1+x} = x$ | $-0.08$ | $+0.10$ | $-0.24$ | $+0.32$ | $-0.61$ | $+1.53$ |
| 8 | $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2}$ | $-0.04$ | $+0.06$ | $-0.15$ | $+0.17$ | $-0.45$ | $+0.53$ |
| 9 | $\frac{1}{1+x} = 1 - x$ | $-0.03$ | $+0.03$ | $-0.10$ | $+0.10$ | $-0.30$ | $+0.30$ |

Dažas bieži lietojamas rindas:

10 $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \ldots$

11 $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 - \ldots$

12 $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots$

13 $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + \ldots$

14 $\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots$

(10–14) $|x| < 1.$

## Ceturtā nodaļa.

## Dabigā kāpe. Bernulli-Eilera formula. Funkciju sakari.

**50. Dabigā kāpe.** Rindā

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \tag{1}$$

$x$ ir reals skaitlis. Šī rinda ir savirzāma ar visām galigām realām vērtibām

Ja rindā ievedam $x = iy$, tad dabūjam rindu ar imaginaru argumentu

$$1 + \frac{iy}{1!} + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \tag{2}$$

Šī pēdējā rinda ir savirzāma, jo rinda, kas veidota ar rindas (2) moduliem

$$1 + \left|\frac{iy}{1!}\right| + \left|\frac{(iy)^2}{2!}\right| +$$

ir savirzāma. Rindai (2) tā tad ir kāda galiga summa; to apzīmējam ar $e^{yi}$.

Tā tad

$$e^{yi} = 1 + \frac{yi}{1!} + \frac{(yi)^2}{2!} + \frac{(yi)^3}{3!} + \tag{3}$$

Ar rindu (3) dota dabigās kāpes $e^{yi}$ definicija.

Reizinot rindas

$$e^{yi} = 1 + \frac{(yi)}{1!} + \frac{(yi)^2}{2!} + \frac{(yi)^3}{3!} +$$

un

$$e^{zi} = 1 + \frac{(zi)}{1!} + \frac{(zi)^2}{2!} + \frac{(zi)^3}{3!} +$$

dabūjam :

$$e^{yi}\ e^{zi} = (1\ \ 1) + \left(1 \cdot \frac{(zi)}{1!} + \frac{(yi)}{1!}\ 1\right) + \left(1\ \ \frac{(zi)^2}{2!} + \frac{(yi)}{1!} \cdot \frac{(zi)}{1!} + \frac{(yi)^2}{2!} \cdot 1\right) + \dots$$

$$e^{yi}\ e^{zi} = 1 + \frac{(y+z)i}{1!} + \frac{(y+z)^2 i^2}{2!} + \dots \tag{4}$$

Izteiksmes (4) labā puse rāda rindu ar argumentu $(y+z)i$, kādēļ izteiksmes (4) kreisās puses veidam jābūt

$$e^{yi}\,e^{zi}=e^{(y+z)i}.$$

Redzam, ka reizinot dabīgas kāpes, jāsaskaita rādītāji un tā tad pielietojams tas pats likums, kā reizinot kāpes ar realiem rādītājiem, tādēļ arī dabīgām kāpēm attiecinami alģebras likumi.

**51. Bernulli — Eilera formula.** Rindu

$$e^{xi}=1+\frac{xi}{1!}+\frac{(xi)^2}{2!}+\frac{(xi)^3}{3!}+\frac{(xi)^4}{4!}+\frac{(xi)^5}{5!}+\frac{(xi)^6}{6!}+$$

varam izteikt arī šādi:

$$e^{xi}=1+\frac{xi}{1!}-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}i+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}i-\frac{x^6}{6!}$$

Rinda ir absoluti savirzāma, tādēļ varam pārkārtot locekļus. Saņemot kopā realos un atsevišķi imaginaros locekļus, dabūjam:

$$e^{xi}=\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\quad\right)+i\left(\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\quad.\right)$$

Pirmajās iekavās, kā redzam, ir $\cos x$ un otrās iekavās $\sin x$; tā tad

$$e^{xi}=\cos x+i\sin x \tag{1}$$

Šo izteiksmi sauc par Bernulli (arī Eilera) formulu.

Ja augšējā rindā liekam $x$ vietā $-x$, tad dabūjam:

$$e^{-xi}=\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+.\quad\right)+i\,(-1)\left(\frac{x}{1!}-\frac{x}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\quad..\right)$$

$$e^{-xi}=\cos x-i\sin x. \tag{2}$$

Kā zināms, $e^x$ dabū vērtības no 0 līdz $\infty$, kad $x$ mainas no $-\infty$ līdz $+\infty$. Turpretim $e^{xi}$ moduls ir

$$\sqrt{\sin^2 x+\cos^2 x}=1,$$

kas maina tikai virzienu.

Funkcija $e^{xi}$ ir periodiska, kas redzams no sekojošā:

$$e^{(x+2k\pi)i} = \cos(x + 2k\pi) + i\sin(x + 2k\pi) =$$
$$= \cos x + i\sin x = e^{xi}$$

tā tad

$$e^{(x+2k\pi)i} = e^{xi}$$

Kā redzam, rādītājam pieskaitot $2k\pi i$, $e^{xi}$ vērtība nemainas; tā tad $e^{xi}$ ir periodiska funkcija ar imaginaru periodu $2k\pi i$ No

$$e^{(x+2k\pi)i} = e^{xi}\, e^{2k\pi i} = e^{xi}$$

dabūjam:

$$e^{2k\pi i} = 1.$$

**52. Trigonometrisko un hiperbolisko funkciju sakars ar eksponentfunkciju.** No

$$e^{xi} = \cos x + i\sin x$$
$$e^{-xi} = \cos x - i\sin x$$

dabūjam:

$$\cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}.$$

Ja augšējās formulās liekam $x = zi$, tad dabūjam:

$$\cos zi = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} = \operatorname{Cos} z.$$

$$\sin zi = i\,\frac{e^{z} - e^{-z}}{2} = i\operatorname{Sin} z.$$

**53. Logaritms.** Kompleksu skaitli $z$ varam izteikt:

$$z = x + yi = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho[\cos(\varphi + 2k\pi) + i\sin(\varphi + 2k\pi)] \qquad (1)$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{un} \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$$

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}, \qquad (2)$$

bet tā kā

$$[\cos(\varphi + 2k\pi) + i \sin(\varphi + 2k\pi)] = e^{(\varphi+2k\pi)i},$$

tad

$$z = x + yi = \rho \quad e^{(\varphi+2k\pi)i}$$

un

$$lz = l\rho + \varphi i + 2k\pi i.$$

$\varphi$ vietā ieliekot vērtību no (2), dabūjam:

$$lz = l\rho + i \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} + 2k\pi i. \tag{3}$$

Ja $y = 0$, tad $z = x$ un ir reals. Tad,

$$\begin{aligned} &\text{ja } x > 0, \quad \operatorname{arc\,tg} \varphi = 0 \quad \text{un} \\ &\text{ja } x < 0, \quad \operatorname{arc\,tg} \varphi = \pi; \quad \rho = |x|. \end{aligned}$$

Kā redzam:

$$\text{ar } x > 0, \quad lx = \bar{l}x + 2k\pi i. \tag{4}$$

$$\text{„} \; x < 0, \quad lx = \bar{l}|x| + (2k+1)\pi \; i. \tag{5}$$

Ar $\bar{l}x$ ir apzīmēts logaritms parastā aritmetiskā nozīmē.

No (3) redzam, ka k o m p l e k s a s k a i t ļ a d a b ī g a i s l o g a r i t m s i r b e z g a l ī g i d a u d z v ē r t ī g a f u n k c i j a.

No (4) redzam, ka arī r e a l a p o z i t i v a s k a i t ļ a d a b ī b ī g a i s l o g a r i t m s i r b e z g a l ī g i d a u d z v ē r t ī g s u n n o v i s ā m t ā v ē r t ī b ā m t i k a i v i e n a, a r $k = 0$ i r r e a l a.

(5) rāda, ka n e g a t i v a s k a i t ļ a d a b ī g a i s l o g a r i t m s a r v i e n u i r i m a g i n a r s.

**54. Ciklometrisko funkciju sakars ar logaritmisko funkciju.** Par kompleksa mainīgā $z = x + iy$ arcus tangens, t. i. $\operatorname{arc\,tg} z$, apzīmē to komplekso skaitli $w = u + iv$, kas izpilda noteikumu

$$\operatorname{tg} w = z.$$

Tad

$$w = \operatorname{arc\,tg} z.$$

Tā kā

$$\operatorname{tg} w = \frac{\sin w}{\cos w} = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{wi} - e^{-wi}}{e^{wi} + e^{wi}} = z,$$

tad dabūjam:

$$\frac{e^{2iw} - 1}{e^{2iw} + 1} = zi$$

$$e^{2iw} = \frac{1 + zi}{1 - zi}$$

$$\text{arc tg}\, z = w = \frac{1}{2i} l \frac{1 + zi}{1 - zi}.$$

Ja $\cos w = \quad$ tad $\quad = \text{arc cos}\, z$,

$$\cos w = \frac{e^{wi} + e^{-wi}}{2} = z,$$

$$e^{wi} + \frac{1}{e^{wi}} = 2z,$$

$$e^{2wi} - 2ze^{wi} = -1,$$

$$e^{wi} = \quad \pm \sqrt{z^2 - 1} = z \pm i\sqrt{1 - z^2}$$

un

$$\text{arc cos}\, z = \quad = \frac{1}{i} l (z \pm i\sqrt{1 - z^2}).$$

Līdzīgi dabūjam:

$$\text{arc sin}\, z = \frac{1}{i} l (iz \pm \sqrt{1 - z^2}).$$

$$\text{arc cotg}\, z = \frac{1}{2i} l \frac{1 - zi}{1 + zi}.$$

Piektā nodaļa.

## Nenoteiktie veidi. Funkcijas atvasinātās nenoteiktības gadijums.

**55. Nenoteiktie veidi.** Ja funkcijā $f(x)$ ieved $x$ vietā vērtību $a$ ($a$ var būt arī $\infty$), tad var gadīties, ka $f(x)$ vērtība parādas vienā no šādiem nenoteiktiem veidiem:

$$\frac{0}{0};\ \frac{\infty}{\infty};\ 0 \cdot \infty;\ \infty - \infty;\ 0^0;\ \infty^0;\ 1^\infty$$

Var arī gadīties, ka $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ ir kāda noteikta vērtība. Šo robežvērtību tad uzskata par funkcijas $f(x)$ vērtību vietā $a$ un sauc dažreiz par $f(x)$ īsto vērtību vietā $a$.

Šādi veidi parādas, ja $f(x)$ izteicas ar

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)},\quad \varphi(x)\,.\,\psi(x),\quad \varphi(x)-\psi(x)\quad \text{vai}\quad \varphi(x)^{\psi(x)}$$

un funkcijas $\varphi(x)$, $\psi(x)$ top 0 vai $\infty$, ja $x = a$. Tā $x$ vērtību, ar ko $f(x)$ dabū nenoteiktu veidu, sauc par kritisko vērtību.

$f(x)$ robežvērtības noteikšanai pielieto šādus paņēmienus:

I veids $\frac{0}{0}$. Še $f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$.

Ja funkcijas $\varphi(x)$ un $\psi(x)$ ar $x = a$ dabū vērtību 0 un $x = a$ apkārtnē, tām ir īstās noteiktas atvasinātās, tad

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)},$$

ja tāda robežvērtība pastāv.

Pierādijums: Pieņemam, ka $a$ ir galīgs lielums. Koši teorema dod:

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{\psi(x)-\psi(a)} = \frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}. \qquad (a \quad \xi \quad x)$$

Tā kā $\varphi(a) = 0$ un $\psi(a) = 0$, tad

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}.$$

Ja $x \to a$, tad arī $\xi \to a$; tādēļ

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)} = \lim_{\xi\to a}\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)} = \lim_{x\to a}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)};$$

tā tad

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}. \tag{1}$$

Šo paņēmienu sauc par Bernulli vai arī par Lopitala *(l'Hospital)* paņēmienu. Ja arī

$$\frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)} = \frac{0}{0},$$

tad atkārtojam augšējo paņēmienu un dabūjam:

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\varphi''(x)}{\psi''(x)} \quad \text{u. t. t.}$$

Šo paņēmienu atkārtojam, kamēr kāda no robežvērtībām ir galīgs skaitlis, 0 vai $\infty$.

Ja $a = \infty$, tad liekam $x = \frac{1}{z}$. Ja $x \to \infty$, tad $z \to 0$. Pielietojot apskatīto paņēmienu, dabūjam:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{z \to 0} \frac{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}{\psi\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{z \to 0} = \frac{\varphi'\left(\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right)}{\psi'\left(\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right)} =$$

$$= \lim_{z \to 0} \frac{\varphi'\left(\frac{1}{z}\right)}{\psi'\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}.$$

P i e m ē r s. $\frac{l\,x}{x-1}$ ar $x = 1$ dabū nenoteiktu vērtību $\frac{0}{0}$: $x = 1$, tā tad ir k r i t i s k ā vērtība.

Pielietojam izteiksmi (1):

$$\lim_{x \to 1} \frac{l\,x}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(l\,x)'}{(x-1)'} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1.$$

II. Veids $\frac{\infty}{\infty}$.

Ja funkcijā $f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ ar $x = a$ $\varphi(a) = \infty$ un $\psi(a) = \infty$, tad dabūjam apskatamo nenoteiktības veidu.

Izvēlam $x$, $x_0$ tā, lai $x$ vērtība būtu starp $x_0$ un $a$ vērtībām

$$x_0 \qquad x \qquad a$$

un $\varphi(x_0)$, kā arī $\psi(x_0)$ dabū galīgas vērtības. Saskaņā ar Koši teoremu, dabūjam:

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\psi(x) - \psi(x_0)} = \frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}. \quad (x_0 \ldots \xi \ldots x)$$

Pārveidojot dabūjam:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\,\frac{1-\dfrac{\varphi(x_0)}{\varphi(x)}}{1-\dfrac{\psi(x_0)}{\psi(x)}}=\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}$$

un

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{1-\dfrac{\psi(x_0)}{\psi(x)}}{1-\dfrac{\varphi(x_0)}{\varphi(x)}}\,\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}.$$

Atstājam $x_0$ nemainīgu un liekam $x \to a$, tad $\varphi(x) \to \infty$ un $\psi(x) \to \infty$; tad

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}\left(1-\dfrac{\psi(x_0)}{\psi(x)}\right)}{\lim\limits_{x\to a}\left(1-\dfrac{\varphi(x_0)}{\varphi(x)}\right)}\lim_{x\to a}\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}=\lim_{x\to a}\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}$$

jo reizinājuma pirmais reizulis dabū vērtību 1. Tā tad

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}.$$

Ja tagad liekam $x_0 \to a$, tad arī $x \to a$ un $\xi \to a$; tādēļ

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}=\lim_{\xi\to a}\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}=\lim_{x\to a}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}.$$

Tā tad

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}.$$

Kā redzam, arī šai gadijumā Lopitala paņēmiens pielietojams. Ja arī $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ ir nenoteikts veids, tad paņēmienu atkārtojam.

P i e m ē r s.

Funkcija $\dfrac{x^n}{a^x}$ (ar $a>1$, $n>0$ un vesels skaitlis), ja $x=\infty$ dod $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Pielietojam augšējo teoremu:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{a^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^n)'}{(a^x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{a^x la}$$

kā redzam, $\frac{nx^{n-1}}{a^x la}$ ar $x = \infty$ atkal dod $\frac{\infty}{\infty}$; tādēļ turpinam paņēmiena pielietošanu:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{a^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{nx^{n-1}}{a^x \quad la} = \lim_{x\to\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{a^x (la)^2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{n!}{a^x (la)^n} = 0;$$

tā tad

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0 \, (a > 1 \quad \text{un} \quad n > 0 \text{ un vesels}).$$

III veids $0 \, . \, \infty$.

Šo veidu dabūjam, ja $f(x) = \varphi(x) \, . \, \psi(x)$ un ar $x = a$, $\varphi(a) = 0$ un $\psi(a) = \infty$.

Tā kā

$$\varphi(x) \, . \, \psi(x) = \frac{\varphi(x)}{\frac{1}{\psi(x)}},$$

tad ar šiem noteikumiem

$$\frac{\varphi(a)}{\frac{1}{\psi(a)}} = \frac{0}{0}.$$

Pārveidojums pārved doto izteiksmi (I) apskatītā veidā.

P i e m ē r s :

$$f(x) = x\,(a^{\frac{1}{x}} - 1). \qquad (a > 0)$$

Ar $x = \infty$ dabūjam veidu $\infty \, . \, 0$.

Pārveidojam:

$$f(x) = \frac{(a^{\frac{1}{x}} - 1)}{\frac{1}{x}}.$$

Še ar $x = \infty$ dabūjam veidu $\frac{0}{0}$. Liekam $\frac{1}{x} = z$, ja $x \to \infty$, tad $z \to 0$ un izteiksmes

$$\lim_{z\to 0} \frac{a^z - 1}{z} = \frac{0}{0}.$$

Pielietojam Lopitala paņēmienu:

$$\lim_{x\to\infty} x(a^{\frac{1}{x}} - 1) = \lim_{z\to 0} \frac{a^z - 1}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{a^z . la}{1} = la;$$

tā tad

$$\lim_{x\to\infty} x(a^{\frac{1}{x}} - 1) = la.$$

IV veids $\infty - \infty$.

Tādu veidu dabūjam, ja $f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$ un ja ar $x = a$ $\varphi(a) = \infty$ un $\psi(a) = \infty$.

Tā kā

$$\varphi(x) - \psi(x) = \frac{\frac{1}{\psi(x)} - \frac{1}{\varphi(x)}}{\frac{1}{\varphi(x)} \cdot \frac{1}{\psi(x)}},$$

tad ar augšējiem noteikumiem dabūjam veidu $\frac{0}{0}$.

Še atkal pielietojam Lopitala paņēmienu.

P i e m ē r s.

$$f(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \quad \text{ar } x = 0 \text{ dabū veidu } \infty - \infty.$$

Pārveidojam:

$$f(x) = \frac{x - \sin x}{\sin x \cdot x} \quad \text{ar } x = 0 \text{ dabū veidu } \frac{0}{0}.$$

Pielietojam Lopitala paņēmienu:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x - \sin x}{\sin x \cdot x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x \cos x + \sin x} = \frac{0}{0}.$$

Tālāk pielietojot šo paņēmienu, dabūjam:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\cos x - x \sin x + \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2\cos x - x \sin x} = 0.$$

V. Veidi $0^0$, $\infty^0$, $1^\infty$

Šos veidus dabūjam, ja $f(x) = \varphi(x)^{\psi(x)}$, $\varphi(x) > 0$ un $\varphi(a) = 0$, $\infty$, 1, bet $\psi(a) = 0, 0, \infty$. Tā kā

$$l f(x) = \psi(x)\ l\varphi(x),$$

tad arvienu dabūjam veidu $0 . \infty$.

Tā tad šādos gadijumos arvienu visupirms jānoteic $\lim\limits_{x \to a} l f(x)$.

Piemērs.

$$f(x) = x^x \quad (x \to 0)$$

$$l f(x) = x\, l x \quad \text{ar} \quad x \to 0 \quad \text{dod} \quad 0 . \infty.$$

Pārveidojam:

$$l f(x) = x . lx = \frac{lx}{\frac{1}{x}}, \quad \text{kas ar} \quad x \to 0 \quad \text{dod veidu} \quad \frac{\infty}{\infty}.$$

Pielietojam Lopitala paņēmienu:

$$\lim_{x \to 0} l f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{lx}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x \to 0} x = 0,$$

tā tad $\lim\limits_{x \to 0} l f(x = 0$ vai $l \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

Tādēļ

$$\lim_{x \to 0} f(x) = e^0 = 1$$

un

$$\lim_{x \to 0} x^x = 1.$$

Piemērs:

$$y = x^{\frac{1}{1-x}} \quad \text{ar} \quad x = 1 \quad \text{dabū veidu } 1^\infty;$$

$$ly = \frac{1}{1-x} . lx = \frac{lx}{1-x} \quad \text{ar} \quad x = 1 \text{ dabū veidu } \frac{0}{0}.$$

Pielietojam Lopitala formulu:

$$\lim_{x \to 1} ly = \lim_{x \to 1} \frac{lx}{1-x} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x}}{-1} = -1;$$

tā tad

$$\lim_{x\to 1} ly = l \lim_{x\to 1} y = -1,$$

$$\lim_{x\to 1} y = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

un

$$\lim_{x\to 1} \left(x^{\frac{1}{1-x}}\right) = \frac{1}{e}$$

**56. Neatklātas funkcijas atvasinātās nenoteiktības gadījums.** Ar $F(x, y) = 0$ $y$ dots kā funkcija no $x$ neatklātā veidā. Diferencējot šo izteiksmi, dabūjam diferencialnolīdzinājumu, no kura dabūjam:

$$y' = \frac{f(x, y)}{\varphi(x, y)}.$$

Var gadīties, ka vērtības $x = a$ un $y = b$, kas izpilda nolīdzinājumu $F(x, y) = 0$, dod $f(a, b) = 0$, kā arī $\varphi(a, b) = 0$, tad $y'$ dabū nenoteiktu vērtību $\frac{0}{0}$. Arī šādā gadijumā pielietojama vispārējā teorija.

P i e m ē r s: Ar nolīdzinājumu

$$x^2 - xy - y^2 = 0 \qquad (\alpha)$$

$y$ dots kā neatklāta funkcija no $x$. Diferencējot šo nolīdzinājumu dabūjam:

$$2x - y - xy' \quad 2yy' = 0$$

un

$$y' = \frac{2x - y}{x + 2y}. \qquad (\beta)$$

$x = 0$ un $y = 0$ izpilda nolīdzinājumu ($\alpha$), tā tad punkts $P = 0|0$ atrodas uz līknes, kas dota ar šo nolīdzinājumu. Ieliekot $x = 0$ un $y = 0$ nolīdzinājumā ($\beta$), dabūjam pieskares virzienu punktā $P$.

$$y'_{\substack{x=0\\y=0}} = \frac{2\,.\,0 - 0}{0 + 2\;0} = \frac{0}{0}.$$

Pielietojam Lopitala paņēmienu:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} (y') = \lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} \frac{(2x - y)'}{(x + 2y)'} = \lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} \frac{2 - y'}{1 + 2y'}.$$

Apzīmējot $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} (y')$ ar $y'_{00}$, dabūjam:

$$y'_{00} = \frac{2 - y'_{00}}{1 + 2y'_{00}}.$$

Pārveidojot dabūjam:

$$y'_{00} + 2y'^2_{00} = 2 - y'_{00},$$

$$y'^2_{00} + y'_{00} - 1 = 0,$$

$$y'_{00} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}.$$

**57. Vingrinājumi.**

1) $y = \dfrac{\sqrt{a + x} - \sqrt{2a}}{\sqrt{a + 2x} - \sqrt{3a}}$ ar $x = a$; $y_a = \dfrac{1}{4}\sqrt{6}$.

2) $y = \dfrac{e^x - 1}{e^x \, l(1 - x)}$ ar $x = 0$; $y_0 = -1$.

3) $y = \dfrac{a^{lx} - x}{lx}$ ar $x = 1$; $y_1 = la - 1$.

4) $y = \dfrac{x^x - x}{1 - x + lx}$ ar $x = 1$; $y_1 = -2$.

5) $y = \dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2}$ ar $x = 0$; $y_0 = \dfrac{1}{3}$.

6) $y = (1 + ax)^{\frac{1}{x}}$ ar $x = 0$; $y_0 = e^a$.

7) $y = x^{e^x - 1}$ ar $x = 0$; $y_0 = 1$.

## Sestā nodaļa.

## Funkcijas maksimi un minimi.

**58. Funkcijas maksima un minima jēdziens. Ekstrema noteikumi. Maksima un minima atšķiršana.** Ja funkcija nav monotona, tad īpaši ievērojamas ir funkcijas vērtības, pie kurām tā pāriet no augšanas dilšanā un otrādi. Šādiem gadijumiem ir nozīme pielietojumos.

Pieņemam, ka $f(x)$ intervalā $(\alpha, \beta)$ ir vienvērtīga un nepārtraukta.

Tādai funkcijai šī intervala vietā $x = a$ ir maksims, ja ap $x = a$ varam noteikt tādu apkārtni, ka $f(a)$ vērtība ir lielāka par visām citām funkcijas $f(x)$ vērtībām šinī apkārtnē.

Funkcijai $f(x)$ intervala $(\alpha, \beta)$ vietā $x = a$ ir minims, ja ap $x = a$ varam noteikt tādu apkārtni, ka $f(a)$ vērtība ir mazāka par visām citām $f(x)$ vērtībām šinī apkārtnē.

Saskaņā ar definiciju, ja funkcijai $f(x)$ vietā $x = a$ ir maksims, tad var noteikt tādu pozitivu lielumu $\eta$, ka visiem $h$, kas izpilda noteikumu $|h| < \eta$,

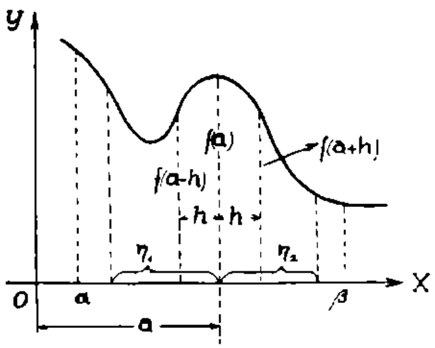
$$f(a - h) < f(a) > f(a + h) \quad (1)$$

un ja funkcijai $f(x)$ vietā $x=a$ ir minims, tad

$$f(a-h) > f(a) < f(a+h) \quad (2)$$

visiem $h$, kas izpilda noteikumu

$$|h| < \eta.$$



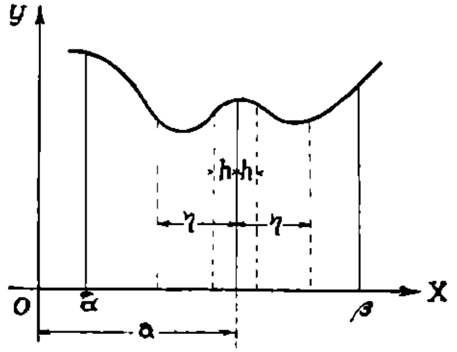

Zīm. 15.

Lieluma $\eta$ vērtība ir atkarīga no funkcijas $f(x)$ veida, t. i. cik bieži tā intervalā $(\alpha, \beta)$ pāriet no augšanas dilšanā. Zīmējumā 15, vietā $x = a$, parādīts funkcijas $f(x)$ maksims.

Kā redzam, pa kreisi no $x = a$ $\eta$ vērtību varētu ņemt $\eta_1$ un pa labi $\eta_2$ un arvienu, kad $|h| < \eta$, būs izpildīts noteikums

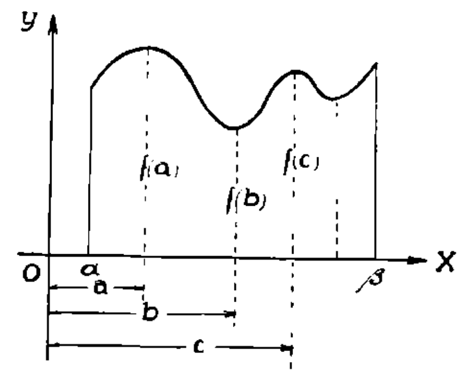
$$f(a - h) < f(a) > f(a + h);$$

tā tad $f(a)$ ir dotās funkcijas maksims.




Zīm. 16.

Zīmējumā 16, kā redzam, $\eta$ ir daudz mazāks. Nav jāņem $\eta$ vērtība, kas dotā gadijumā būtu lielākā pielaižamā; to var ņemt arī pēc patikas mazu. Jēdzieni funkcijas maksims un minims neattiecas uz funkcijas $f(x)$ vērtību kopību dotā intervalā $(\alpha, \beta)$, bet tikai uz tās vērtībām pēc patikas šaurā $x = a$ apkārtnē. Funkcijai $f(x)$ var būt dotā intervalā vairāki maksimi vai minimi un starp šiem maksimiem vai minimiem tad var būt lielākais maksims, vai mazākais minims. Zīmējumā 17. funkcijai $f(x)$ ir vairāki maksimi un minimi. Lielākais maksims ir $f(a)$ vietā $x = a$ un mazākais minims $f(b)$ vietā $x = b$.



Zim. 17.

Funkcijas $f(x)$ maksima un minima vērtības sauc par **e k s t r e m ā m v ē r t ī b ā m**.

Pieņemam, ka funkcija $f(x)$ intervalā $(\alpha, \beta)$ ir vienvērtīga, nepārtraukta un ka tai intervala $(\alpha, \beta)$ katrā vietā ir īsta un galīga atvasinātā. Ja šai funkcijai vietā $x = a$ ir maksims, tad tā šinī vietā pāriet no augšanas dilšanā.

Funkcijas $f(x)$ starpību kvocients tad pa kreisi no $a$ ir

$$\frac{f(a - h) - f(a)}{-h} > 0$$

un starpību kvocients pa labi ir

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h} < 0.$$

Kad $h \to 0$, tad šiem starpību kvocientiem, saskaņā ar pieņēmumu, ir tikai viena robežvērtība un tā kā tā nevar būt vienā laikā pozitiva un negativa, tad šī robežvērtība var būt tikai 0. Tā tad, ja funkcijai $f(x)$ vietā $x = a$ ir maksims, tad

$$f'(a) = 0.$$

Ja funkcijai $f(x)$ vietā $x = b$ ir minims, tad starpību kvocients pa kreisi no $b$ ir negativs un pa labi pozitivs. Ar $h \to 0$ šiem starpību kvocientiem ir viena un tā pati robežvērtība, un tā var būt tikai 0. Tā tad arī, ja funkcijai $f(x)$ vietā $x = b$ ir minims, tad

$$f'(b) = 0.$$

No augšējā redzams, ka ja $f(x)$ intervalā $(\alpha, \beta)$ ir vienvērtīga, nepārtraukta, un tai šinī intervalā visās vietās ir īstās un galīgas atvasinātās, tad vietas $x$, kur funkcija $f(x)$ dabū ekstremas vērtības, jāmeklē nolīdzinājuma

$$f'(x) = 0$$

saknēs. Ja viena no saknēm ir $x = a$ un $f(a)$ ir maksims, tad no $x = a - h$ līdz $x = a$ funkcija $f(x)$ ir augoša un no $x = a$ līdz $x = a + h$ funkcija $f(x)$ ir dilstoša; tādēļ $f'(a - h)$ jābūt pozitivai vērtībai, bet $f'(a + h)$ negativai. Pretējā gadijumā $f(a)$ ir minims.

Tā tad funkcijai $f(x)$ vietā $x = a$ ir maksims, ja

$$\left.\begin{array}{ll} f'(a-h) > 0 \\ f'(a) \quad\;\; = 0 \\ f'(a+h) < 0 \end{array}\right\} \quad (h \text{ ļoti mazs}) \qquad (\alpha)$$

un funkcijai $f(x)$ vietā $x = a$ ir minims, ja

$$\left.\begin{array}{ll} f'(a-h) < 0 \\ f'(a) \quad\;\; = 0 \\ f'(a+h) > 0 \end{array}\right\} \quad (h \text{ ļoti mazs}) \qquad (\beta)$$

Piemērs.

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + b \qquad (1)$$

$$f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x - 1). \qquad (2)$$

Pielīdzinot $f'(x) = 0$, dabūjam:

$$6x(x - 1) = 0$$

un

$$x_1 = a_1 = 0 \quad \text{un} \quad x_2 = a_2 = 1.$$

Ar šīm $x$ vērtībām funkcijai $f(x)$ ir ekstremas vērtības. Pieņemam, ka $h$ ir ļoti mazs pozitivs skaitlis, tad $(0 - h, 0 + h)$ ir vietas $x = 0$ apkārtnē.

Ar $a_1 = 0$ no (2) dabūjam:

$$f'(a_1 - h) = f'(0 - h) = -6h(-h - 1) > 0$$

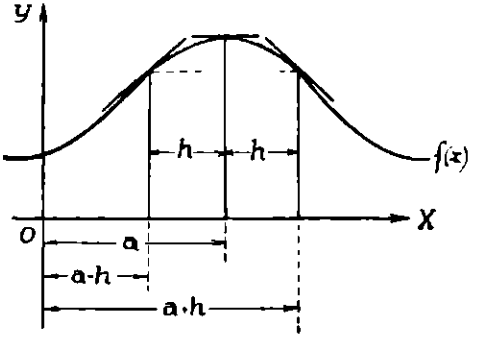
$$f'(a_1 + h) = f'(0 + h) = 6h(h - 1) < 0 \qquad [\text{jo } (h - 1) < 0].$$

Saskaņā ar augšējo redzam, ka ar $x_1 = 0$ funkcijai $f(o)$ ir maksims un tā vērtība ir $f(o) = b$.

Ar $x_2 = a_2 = 1$ no (2) dabūjam:

$$f'(a_2 - h) = f'(1 - h) = 6(1 - h)[(1 - h) - 1] = 6(1 - h) . - h < 0$$

$$f'(a_2 + h) = f'(1 + h) = 6(1 + h)[(1 + h) - 1] = 6(1 + h) \ h > 0.$$



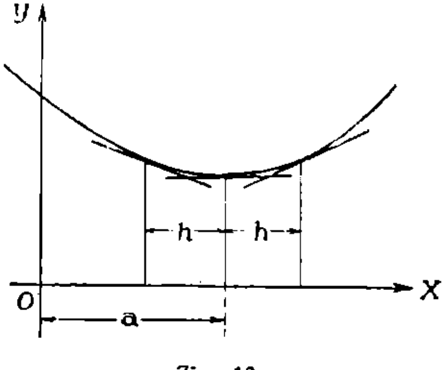
Zīm. 18.

Tā kā $f'(a - h) < 0$ un $f'(a + h) > 0$, tad, saskaņā ar augšējo, vietā $x_2 = 1$ funkcijai $f(x)$ ir minims un tā vērtība ir

$$f(1) = 2.1^3 - 3.1^2 + b = b - 1.$$

Augšējo noteikumu ģeometriskā nozīme ieskatama zīmējumā 18: vietā $x = a$ funkcijai $f(x)$ ir maksims.

Noteikums $f'(a-h) > 0$ izteic, ka līknes pieskares virziena koeficients vietā $a - h$ ir pozitivs; noteikums $f'(a) = 0$ izteic, ka līknes pieskare vieta $x = a$ ir paralela $x$ asij un noteikums $f'(a + h) < 0$ izteic, ka līknes pieskares virziena koeficients vietā $a + h$ ir negativs.

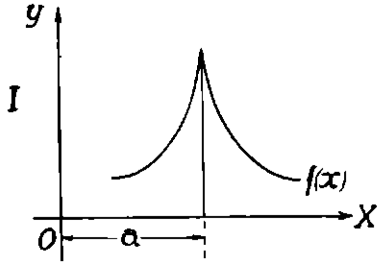


Zīm. 19.

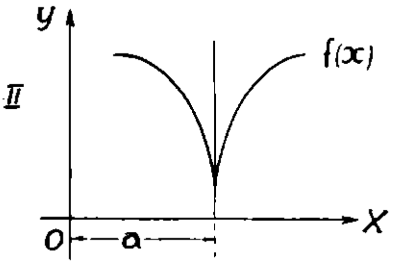
Minima gadijums parādīts zīmējumā 19. Še tg $\tau_{a-h}$ ir negativs; tg $\tau_a = 0$ un tg $\tau_{a+h}$ ir pozitivs. Kā redzam zīm. 18., maksima gadijumā funkcijas $f(x)$ atvasinātā $f'(x)$ iet no pozitivām vērtībām caur 0 uz negativām vērtībām, bet minima gadijumā (zīm. 19.) $f'(x)$ iet no negativām vērtībām caur 0 uz pozitivām vērtībām.

Zīmējumi 20. un 21. rāda, ka var būt gadijumi, kad $f(x)$ dabū maksima vai minima vērtības arī ja $f'(x) = \infty$.

Pirmajā gadijumā $f'(a) = \infty$ un funkcijas $f(a)$ vērtība ir maksims. Otrā gadijumā arī $f'(a) = \infty$ un funkcijas $f(a)$ vērtība ir minims.



Zīm. 20.



Zīm. 21.

Še maksima gadijumā $f'(x)$ iet no + vērtībām caur $\infty$ uz — vērtībām un minima gadijumā no — vērtībām caur $\infty$ uz + vērtībām.

Piemērs.

$$f(x) = \sqrt[3]{(2ax - x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4(a - x)}{3\sqrt[3]{x(2a - x)}}.$$

Ja liekam $f'(x) = 0$, tad dabūjam:

$$x = a.$$

Vai ar šo vērtību $f(x)$ ir maksims vai minims, jāizpēta, kā agrāk norādīts. Pētījums rāda, ka

$$f(a) = a\sqrt[3]{a}$$

ir maksims.

No $f'(x)$ izteiksmes redzams, ka $f'(x) = \infty$ ar

$$x_1 = 0 \quad \text{un} \quad x_2 = 2a.$$

Apskatīsim, vai $f(x)$ vietā $x_1 = 0$ ir maksims vai minims. Veidojam

$$f'(x_1 - h) = f'(0 - h) = -\frac{4(a + h)}{3\sqrt[3]{h(2a+h)}} < 0,$$

$$f'(x_1 + h) = f'(0 + h) = \frac{4(a - h)}{\sqrt[3]{h(2a - h)}} > 0, (h < a).$$

Tā kā $f'(x)$ iet no negatīvām vērtībām caur $\infty$ uz pozitivām vērtībām, tad vietā $x = 0$ funkcijai $f(x)$ ir minims un šī minima vērtība ir:

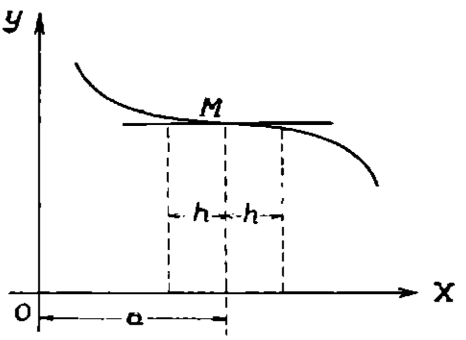
$$f(0) = 0.$$

Izdarot līdzīgu pētījumu ar $x_2 = 2a$, dabūjam, ka

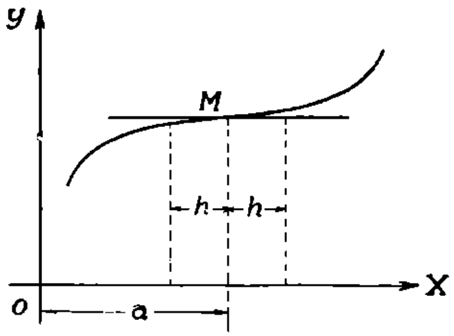
$$f(2a) = 0$$

arī ir minims.

Ja $f'(a) = 0$ vai $f'(a) = \infty$, bet $f'(a - h)$ un $f'(a + h)$ ir ar vienādām zīmēm, tad vietā $x = a$ funkcijai $f(x)$ nav ne maksims, ne minims. Šādā gadijumā funkcijai $f(x)$ vietā $x = a$ ir **infleksijas punkts**. Infleksijas punktu ģeometriski attēlojumi parādīti zīmējumos 22.—25.

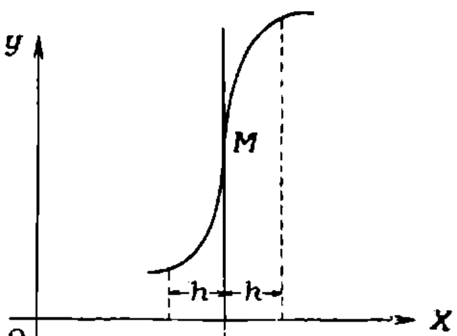



Zīm. 22.

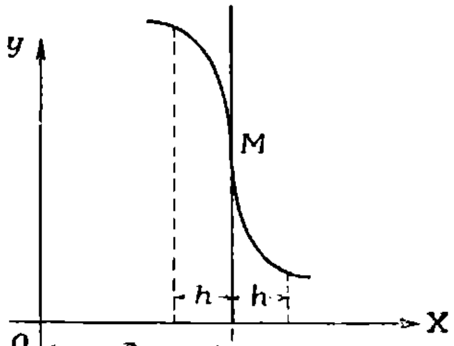



Zīm. 23.

Zīmējumos 22. un 23. funkcijas atvasinātā $f'(a) = 0$ un zīmējumos 24. un 25. funkcijas atvasinātā $f'(a) = \infty$.




Zīm. 24.




Zīm. 25.

Kā redzam, visos šinīs gadijumos funkcijas atvasinātā, ejot caur 0 vai $\infty$, nemaina zīmi. **Punkts M ir infleksijas punkts.** Infleksijas punktus tālāk apskatīsim plašāk.

Augstāk attīstītais paņēmiens pazīmes noteikšanai, vai funkcija $f(x)$ vietā $x = a$ ir maksims vai minims, nav ērts pielietošanā. Parocīgāks ir šāds paņēmiens:

Pieņemam, ka funkciju $f(x)$ apskatam intervala $(\alpha, \beta)$ vietā $x$, kur tai ir maksims vai minims un ka šajā intervalā $f(x)$ un arī tās $n$ atvasinātās ir vienvērtīgas un nepārtrauktas funkcijas.

Kā agrāk redzējām, maksima gadijumā

$$f(x-h) - f(x) < 0 \quad \text{un arī} \quad f(x+h) - f(x) < 0.$$

Še $h$ ir bezgalīgi mazs lielums. Ja uzskatam $h$ par lielumu, kas var pieņemt negativas un pozitivas vērtības, tad maksima gadijumā

$$f(x+h) - f(x) < 0,$$

tā pat dabūjam minima gadijumā

$$f(x+h) - f(x) > 0.$$

Izvirzot $f(x+h)$ ar Teilora formulu, dabūjam

$$f(x+h) - f(x) = \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \qquad + R.$$

Saskaņā ar augšējo, maksima gadijumā jābūt:

$$\frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \qquad + R < 0. \tag{$\alpha$}$$

Šai izteiksmei jābūt izpildītai kā ar pozitiviem, tā arī ar negativiem $h$.

Izteiksmes $(\alpha)$ kreisās puses pirmais loceklis ir pirmās kārtas bezgalīgi mazs, tālākie locekļi, otrās un augstākas kārtas, bezgalīgi mazi lielumi un kā zināms no bezgalīgi mazu lielumu teorijas

$$|\, h\, f'(x)\, | > \left| \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \qquad + R \right| \tag{$\beta$}$$

Šī izteiksme rāda, ka loceklis $hf'(x)$ noteic izteiksmes $(\alpha)$ kreisās puses zīmi. Tā kā pirmajā loceklī $h$ ir pirmajā kāpē, tad šis loceklis maina zīmi, kad $h$ maina zīmi un tādēļ līdz ar $h$ maina zīmi arī izteiksmes $(\alpha)$ kreisā puse. Ja vietā $x$ funkcijai $f(x)$ ir maksims vai minims, tad izteiksmes ($\alpha$) kreisās puses zīme nav atkarīga no $h$ zīmes, tādēļ šādā gadijumā jābūt:

$$h \quad f'(x) = 0.$$

$h$ nav 0, tā tad vietā, kur funkcija $f(x)$ ir maksims vai minims, jābūt

$$f'(x) = 0.$$

To ievērojot, vietā kur funkcijai $f(x)$ ir maksims, izteiksme ($\alpha$) dabū veidu:

$$\frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \qquad + R < 0. \tag{$\gamma$}$$

Še atkal

$$\left|\frac{h^2}{2!}f''(x)\right| > \left|\frac{h^3}{3!} + \qquad + R\right| \tag{$\delta$}$$

un loceklis $\frac{h^2}{2!}f''(x)$ noteic izteiksmes ($\gamma$) zīmi; tā kā $h$ ir kvadratā, tad locekļa $\frac{h^2}{2!}f''(x)$ zīme, un tā tad arī izteiksmes ($\gamma$) kreisās puses zīme, nav atkarīga no $h$ zīmes, bet gan no $f''(x)$ zīmes. Ja $f''(x)$ ir negativa, tad izteiksme ($\gamma$) ir izpildīta un tad šinī vietā funkcijai $f(x)$ ir maksims. Tā tad, ja vietā $x$ funkcijai $f(x)$ ir maksims, tad

$$f'(x) = 0 \quad \text{un} \quad f''(x) < 0.$$

Pielietojot šo paņēmienu funkcijas $f(x)$ minima gadijumā, viegli ieskatams, ka ar $x$ vērtību, kas atbilst $f(x)$ minimam, jābūt:

$$f'(x) = 0$$

un

$$f''(x) > 0.$$

Tā tad redzam: **lai dabūtu vietu vai vietas, kur $f(x)$ ir maksims vai minims, jāatrisina nolīdzinājums**

$$f'(x) = 0.$$

**Šī nolīdzinājuma saknes**

$$x_1 = a_1; \quad x_2 = a_2 \qquad x_n = a_n$$

**atbilst tām vietām, kur funkcijai $f(x)$ ir ekstremas vērtības. Lai izšķirtu, vai kādā vietā, piemēram $x_1 = a_1$, funkcijai $f(a_1)$ ir maksims vai minims, veidojam $f''(x)$ un ja $f''(a_1) < 0$, tad vietā $a_1$**

funkcijai $f(x)$ ir maksims, bet ja $f''(a_1) > 0$, tad vietā $a_1$ funkcijai $f(x)$ ir minims. Gadijumu $f''(a_1) = 0$ apskatīsim vēlāk.

Piemērs.

$$y = f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 1.$$

Dabūt vietas, kur šī funkcija dabū ekstremas vērtības, kā arī $y_{max}$ un $y_{min}$.

Veidojam

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 36 = 0.$$

Šī nolīdzinājuma saknes ir

$$x_1 = 2 \quad \text{un} \quad x_2 = -3,$$

nn tās atbilst dotās funkcijas $f(x)$ ekstremu vietām.

Veidojam

$$f''(x) = 12x + 6.$$

Tā kā ar $x_1 = 2$

$$f''(2) = 12 \ 2 + 6 = 18 > 0,$$

tad vietā $x_1 = 2$

$$f(2) = 2 \, . \, 2^3 + 3 \, . \, 2^2 - 36 \ 2 + 1 = -43$$

ir minims Tālāk:

$$f''(-3) = 12 \ -3 + 6 = -30 < 0;$$

tā tad vietā $x = -3$

$$f(-3) = 2 \, . \, (-3)^3 + 3 \, . \, (-3)^2 - 36 \ -3 + 1 = 82$$

ir dotās funkcijas maksims.

Piemērs.

$$y = \frac{lx}{x}.$$

$$y' = \frac{x \ \frac{1}{x} - lx}{x^2} = \frac{1 - lx}{x^2};$$

Liekot

$$y' = 0,$$

dabūjam

$$1 - lx = 0$$
$$x = e.$$

Vietā $x = e$ dotai funkcijai ir ekstrema vērtība. Lai izšķirtu, vai tā ir maksims vai minims, veidojam:

$$y'' = f''(x) = \frac{x^2\left(-\frac{1}{x}\right) - 2x\,(1 - lx)}{x^4} = \frac{2\,lx - 3}{x^3};$$
$$y_e'' = f''(e) = \frac{2\,le - 3}{e^3} = -\frac{1}{e^3} < 0.$$

Tā kā $f''(e)$ ir negativa, tad vietā $x = e$ dotai funkcijai ir maksims un šī maksima vērtība ir:

$$y_e = f(e) = \frac{le}{e} = \frac{1}{e}.$$

Var gadīties, ka nolīdzinājuma $f'(x) = 0$ sakne $x = a$ padara arī otro atvasināto $f''(x)$ šai vietā par 0, t. i. $f''(a) = 0$. Tad

$$f(a + h) - f(a) = \frac{h^3}{3!} f'''(a) + \qquad + R.$$

Šis izteiksmes labā pusē maina zīmi, ja $h$ maina zīmi. Ievērojot agrāk teikto, vietā $x = a$ funkcifai $f(x)$ nav ne maksims, ne minims, bet gan **infleksijas punkts ar pieskari, paralelu $x$ asij.**

Ja vietā $x = a$ dabūjam:

$$f'(a) = 0, \quad f''(a) = 0 \quad \text{un arī} \quad f'''(a) = 0,$$

tad

$$f(a + h) - f(a) = \frac{h^4}{4!} f^{\mathrm{IV}}(a) + \qquad + R.$$

Šis izteiksmes zīme nav atkarīga no $h$ zīmes, tādēļ vietā $x = a$ funkcijai $f(x)$ ir ekstrema vērtība; tā ir

maksims, ja $f^{\mathrm{IV}}(a) < 0$,
minims, ja $f^{\mathrm{IV}}(a) > 0$.

Vispār varam teikt: **ja vietā** $x = a$

$$f'(a) = 0; \quad f''(a) = 0 \ldots f^{(n-1)}(a) = 0 \quad \text{un} \quad f^{n}(a) \lessgtr 0,$$

kur $n$ ir pāra skaitlis, tad funkcijai $f(x)$ vietā $x = a$ ir ekstrema vērtība, pie kam, ja $f''(a) < 0$, tad $f(a)$ ir maksims un ja $f''(a) > 0$, tad minims. Ja $n$ ir nepāra skaitlis, tad funkcijai $f(x)$ vietā $x = a$ nav ekstremas vērtības, bet gan infleksijas punkts ar pieskari paralelu $x$ asij. Par infleksijas punktu būs runa arī vēlāk. Gadijums, kad funkcijai $f(x)$ var būt ekstrema vērtība vietā $x = b$, kur $f'(b) = \infty$, apskatams, kā agrāk norādīts.

**59. Vingrinājumi.**

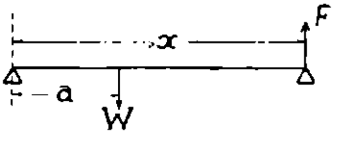
1) $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$; vietā $x_1 = 1$, $f(x)$ ir maksims; vietā $x_2 = 3$, $f(x)$ ir *min.*

2) $y = \frac{1 - x + x^2}{1 + x - x^2}$; vietā $x = \frac{1}{2}$, $f(x)$ ir *min.* $y_{min} = \frac{3}{5}$.

3) Noteikt vaļēja cilindriska trauka izmērus (radius $r$ un augstums $h$), lai ar doto trauka virsmu $s$ tā tilpums būtu maksims.

Atb.: $r = h = \frac{s}{\sqrt{3\pi}}$.

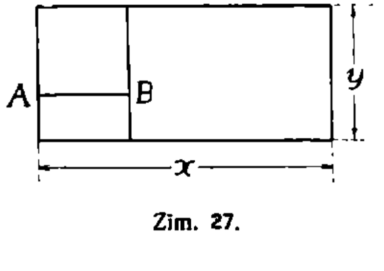
4) Svaru $W$ (zīm. 26.) paceļ ar sviru, pieliekot sviras galā spēku $F$. Svara $W$ attālums no sviras atbalsta punkta ir $a$. Sviras svars uz tekošā centimetra ir $w$ kg. Kādam jābūt sviras garumam $x$, lai spēks $F$ būtu *min*?



Zīm 26.

Atb $x = \sqrt{\frac{2aW}{w}}$ cm.

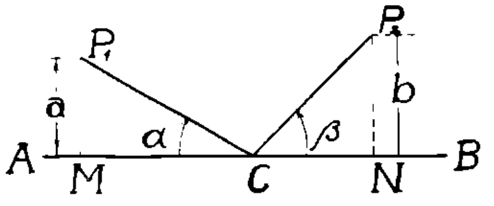
5) Kādam jābūt ēkas garumam $x$ (zīm. 27) un platumam $y$, kuras laukums $F = x \cdot y$ ir dots, lai ārējo un starpsienu garums būtu *min*? Dots arī $AB = \frac{2}{5}x$;



Zīm. 27.

Atb: $x = \frac{1}{2}\sqrt{5F}$, $y = \frac{2F}{\sqrt{5F}}$.

6) Dzelzceļa līnijai $AB$ (zīm. 28) starp punktiem $M$ un $N$ jāatrod atzarojumu līniju $CP_1$ un $CP_2$ kopējais pievienošanas punkts $C$ tā, lai $CP_1 + CP_2$ būtu minims.

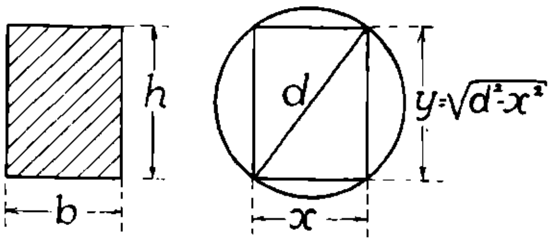


Zīm. 28.

Atb.: leņķiem $\alpha$ un $\beta$ jābūt vienādiem.

7) Sijas nestspēja ir atkarīga no izteiksmes $bh^2$ vērtības, kur $b$ un $h$ ir sijas šķērsgriezuma platums un augstums. Siju veidojam no apaļa koka ar diametru $d$ (zīm. 29.). Kādam jābūt sijas platumam $x$, lai tās nestspēja būtu maksims?

Atb.: $x = \frac{d}{\sqrt{3}}$.



Zīm. 29.

Septītā nodaļa.

## Diferencialrēķinu pielietošana ģeometrijā. Diferencialģeometrija I.

### 60. Līkņu nolīdzinājumu veidi.

Līkne dota plāknē ar šādiem nolīdzinājumu veidiem:

$$y = f(x) \tag{1}$$

$$F(x, y) = 0 \tag{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{array}\right\} \tag{3}$$

$$r = f(\varphi). \tag{4}$$

Nolīdzinājumi (1), (2), (3) dod līkni ortogonalās koordinatās un nolīdzinājums (4) — polarkoordinatās. Nolīdzinājumus (3) sauc par **l ī k n e s  n o l ī d z i n ā j u m i e m  p a r a m e t r i s k ā  v e i d ā**. Izslēdzot parametru $t$ no nolīdzinājumiem (3), dabūjam nolīdzinājuma veidu (1) vai (2).

Ja augšējās funkcijas ir vienvērtīgas, tad dabūjam vienu līkni, bet ja, piemēram, nolīdzinājumā (1) $y$ ir vairākvērtīga funkcija, tad katram funkcijas zaram atbilst līknes zars.

Līkņu iedalīšanas pamatā liek veidu

$$F(x, y = 0.$$

Ja $F(x, y)$ ir algebriska funkcija, tad to var arvienu pārveidot tā, ka nolīdzinājuma loceklī dabū veidu $A_{m,n} \quad . y^n$, kur $m$ un $n$ ir pozitivi veseli skaitļi vai 0, bet $A_{m,n}$ — reali koeficienti.

Lielāko summu $m + n$ sauc par nolīdzinājuma kāpi un ar šo nolīdzinājumu doto līkni — par algebrisku $m+n$ kārtas līkni. Līkni, kuras nolīdzinājums, attiecībā uz $x$ un $y$, nav algebrisks, sauc par transcendentu līkni.

Lai izšķirtu, vai parametriskā veidā dotā līkne ir algebriska vai transcendenta, nolīdzinājums jāizteic veidā (2).

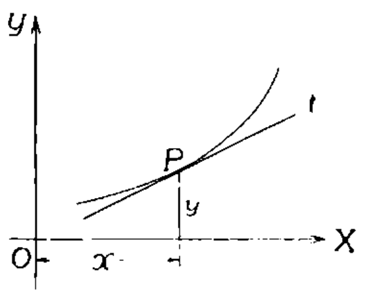
**61. Līknes pieskares nolīdzinājums ortogonalās koordinatās.** Kā jau zinam, ja dots līknes nolīdzinājums

$$y = f(x),$$

tad virziena koeficients pieskarei, kas iet caur līknes punktu $P = x \mid y$, ir $f'(x)$ vai arī $\frac{dy}{dx}$ (zīm. 30.)

Pieskares $t$ nolīdzinājumu dabūjam ievērojot, ka pieskare $t$ iet caur $P$, un tās virziena koeficients ir $\frac{dy}{dx}$.

Apzīmējot pieskares tekošās koordinatas ar $\xi$, $\eta$, dabūjam pieskares nolīdzinājumu punktā $P = x \mid y$ veidā:



Zīm. 30.

$$\eta - y = \frac{dy}{dx}(\xi - x) \qquad (1)$$

vai arī

$$\eta - y = y'(\xi - x). \qquad (1^a)$$

Piemērs. Dots parabolas nolīdzinājums:

$$y^2 = 2px,$$

meklēts pieskares nolīdzinājums. Tā kā

$$y' = \frac{p}{y};$$

tad ievietojot $y'$ izteiksmi nolīdzinājumā ($1^a$), dabūjam pieskares nolīdzinājumu

$$\eta - y = \frac{p}{y}(\xi - x).$$

Šo nolīdzinājumu pārveidojot, dabūjam

$$\eta \cdot y - y^2 = p\xi - px$$
$$y^2 = 2px.$$

Saskaitot augšējos nolīdzinājumus, dabūjam parabolas pieskares nolīdzinājumu veidā:

$$\eta y = p(\xi + x). \tag{2}$$

Nolīdzinājumu (1) pārveidojot, dabūjam:

$$\frac{\xi - x}{dx} = \frac{\eta - y}{dy}. \tag{3}$$

Pēdējais nolīdzinājums pielietojams, ja līkne dota parametriskā veidā:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t) \end{aligned}\right\}$$

Tad

$$dx = \varphi'(t)\,dt \quad \text{un} \quad dy = \psi'(t)\,dt.$$

Ievedot šīs vērtības pieskares nolīdzinājumā (3), dabūjam:

$$\frac{\xi - \varphi(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\eta - \psi(t)}{\psi'(t)}. \tag{3a}$$

Piemērs. Dota līkne parametriskā veidā:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\,\frac{1 - t^2}{1 + t^2} \\ y &= a\,\frac{t(1-t^2)}{1 + t^2} \end{aligned}\right\}$$

$$\varphi'(t) = a\,\frac{4t}{(1 + t^2)^2};$$

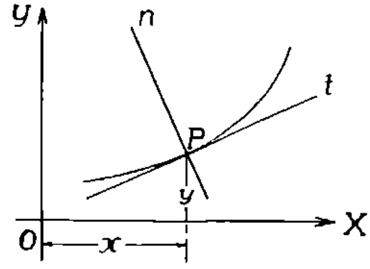
$$\psi'(t) = a\,\frac{1 - 4t^2 - t^4}{(1 + t^2)^2}.$$

Ievedot šīs vērtības nolīdzinājumā ($3^a$), dabūjam pieskares nolīdzinājumu.

Pieskares virziena koeficients ir

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1 - 4t^2 - t^4}{4t}.$$

**62. Liknes normales nolīdzinājums ortogonalās koordinatās.** Taisne $n$, $\perp$ pret pieskari $t$ liknes punktā $P$, ir liknes normale. (Zīm. 31.)



Zīm. 31.

Tā kā pieskares $t$ virziena koeficients ir $\frac{dy}{dx}$ vai $y'$, tad normales virziena koeficients ir

$$-\frac{1}{y'} \quad \text{vai} \quad -\frac{dx}{dy},$$

jo normale ir $\perp$ pret pieskari.

Tā tad normales nolīdzinājums liknes punktā $P = x|y$ ir

$$\eta - y = -\frac{1}{y'}(\xi - x) \tag{1}$$

vai arī

$$\eta - y = -\frac{dx}{dy}(\xi - x). \tag{1$^a$}$$

Pārveidojot, dabūjam normales nolīdzinājumu

$$\frac{\eta - y}{dx} = -\frac{\xi - x}{dy}, \tag{1$^b$}$$

kas pielietojams, ja līkne dota parametriskā veidā. Galīgi normales nolīdzinājums dabū veidu:

$$\frac{\eta - \psi(t)}{\varphi'(t)} = -\frac{\xi - \varphi(t)}{\psi'(t)}. \tag{2}$$

Piemērs. Parabolai

$$y = \frac{x^2}{2}$$

dabūjam

$$y' = x.$$

Šo vērtību ievietojot nolīdzinājumā (1), dabūjam parabolas normales nolīdzinājumu punktā $P = x \mid y$

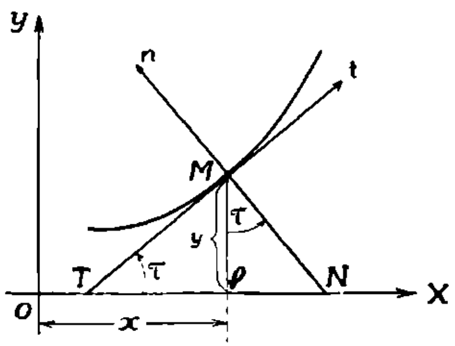
$$\eta - y = -\frac{1}{x}(\xi - x).$$

P i e m ē r s. Līkni, dotu parametriskā veidā

$$x = at - b \sin t = \varphi(t)$$
$$y = a - b \cos t = \psi(t),$$

sauc par c i k l o i d u. Še

$$dx = \varphi'(t)\,dt = (a - b \cos t)\,dt$$
$$dy = \psi'(t)\,dt = b \sin t\,dt.$$



Zīm. 32.

Ievietojot šīs izteiksmes nolīdzinājumā ($1^a$), dabūjam cikloidas pieskares nalīdzinājumu.

**63. Pieskare, normale, apakšpieskare (subtangente) apakšnormale (subnormale).** Līknes $y = f(x)$ punktā $M = x \mid y$ velkam pieskari $t$ un normali $n$ (zīm. 32.).

Zemāk minētiem nogriežņiem pieņemti šādi nosaukumi:

$TM = T =$ pieskares garums
$NM = N =$ normales „
$TP = s_t$ apakšpieskare (subtangente)
$PN = s_n$ apakšnormale (subnormale).

Ja pārpratums izslēgts, tad nogriezni $TM$ sauc vienkārši par pieskari un $NM$ par normali.

Kā zinam,

$$\tan \tau = y'$$

Zīmējumā redzam, ka

$$\frac{y}{TP} = \frac{y}{s_t} = \operatorname{tg} \tau = y',$$

$$\frac{PN}{y} = \frac{s_n}{y} = \operatorname{tg} \tau = y'.$$

Tā tad: subtangente

$$s_t = \frac{y}{y'}; \tag{1}$$

subnormale

$$s_n = y\ y' \tag{2}$$

Tālāk:

$$TM^2 = TP^2 + y^2; \text{ tā tad } T = \sqrt{s_t^{\,2} + y^2} = \sqrt{\frac{y^2}{y'^2} + y^2}$$

$$T = \frac{y}{y'}\sqrt{1 + y'^2}. \tag{3}$$

Beidzot

$$\overline{NM}^2 = y^2 + s_n^{\,2}; \quad N = \sqrt{y^2 + s_n^{\,2}} = \sqrt{y^2 + (y\ y')^2}$$

$$N = y\sqrt{1 + y'^2}. \tag{4}$$

Ja līknes nolīdzinājumi doti parametriskā veidā, tad, pārveidojot formulas (1), (2), (3) un (4), dabūjam:

$$s_t = y\ \frac{dx}{dy} \tag{1a}$$

$$s_n = y\ \frac{dy}{dx} \tag{2a}$$

$$T = \frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy} \tag{3a}$$

$$N = \frac{y\ \sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx} \tag{4a}$$

$dx$, $dy$ un $y$ dabūjam no līknes nolīdzinājumiem.

Pieskares $T$ un normales $N$ garumus ņem kā absolutus lielumus. $T$ un $N$ izteiksmēs saknes tādēļ jāieved ar tādu zīmi, lai izteiksmes, (3), ($3^a$), (4) un ($4^a$) dotu pozitivus lielumus.

Apakšpieskare $s$ un apakšnormale $s_n$ uzskatamas par relativiem lielumiem. Tie ir pozitivi, ja virziens $TN$ atbilst $x$ ass pozitivam virzienam, kā parādīts zīmējumā. Pretējā gadijumā $s_t$ un $s_n$ skaitami kā negativi lielumi. Lielumus $s_t$, $s_n$, $T$, $N$ sauc par pieskaršanās elementiem un tos bieži pielieto pieskares un normales konstrukcijās.

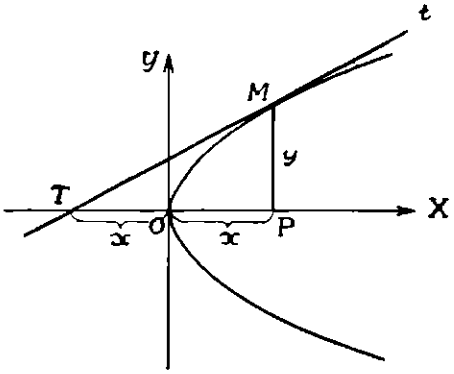
Piemērs.

$$y^2 = 2px; \quad y' = \frac{p}{y}.$$

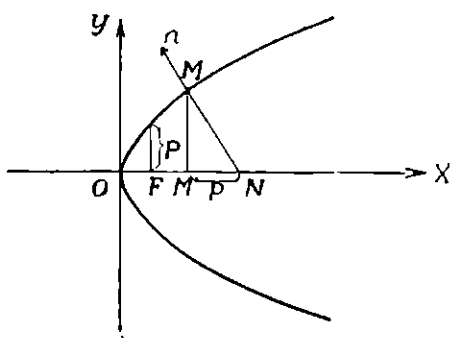
$$s_n = y\ y' = y\ \frac{p}{y} = p.$$

Tā tad **parabolas subnormale ir pastāvīgs lielums**, turpretim

$$s_t = \frac{y}{y'} = \frac{y}{\frac{p}{y}} = \frac{y^2}{p} = \frac{2px}{p} = 2x.$$




Zīm. 33.

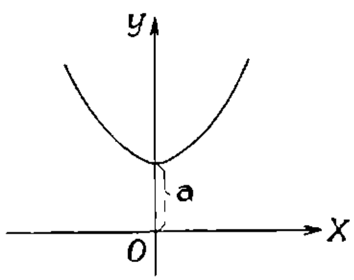



Zīm 34.

Tā tad **parabolas apakšpieskare vienlīdzīga divkāršai pieskaršanās punkta abscisai.** Ar šīm īpašībām normales un pieskares konstrukcijas parabolai, kā redzam zīm. 33. un 34., ir ļoti vienkāršas.

Piemērs. Ķēdes līnijas nolīdzinājums ir:

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$$




Zīm. 35.

Šis līknes ģeometrisks attēls parādīts zīmējumā 35.

Še

$$y' = \frac{a}{2}\left(\frac{1}{a}e^{\frac{x}{a}} - \frac{1}{a}e^{-\frac{x}{a}}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

un

$$\sqrt{1 + y'^2} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = \frac{y}{a};$$

tā tad

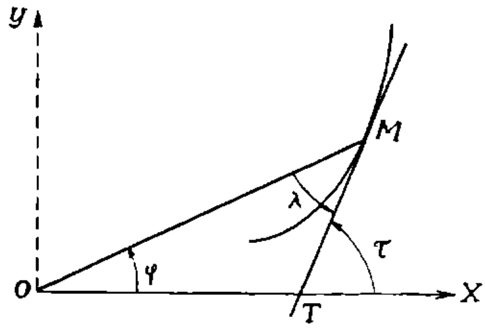
$$N = y\sqrt{1 + y'^2} = y\,\frac{y}{a} = \frac{y^2}{a}.$$

**64. Līknes pieskare, normale, apakšpieskare un apakšnormale polarkoordinatās.**

Līknes nolīdzinājums polarkoordinatās ir

$$r = f(\varphi) = OM.$$

Še (zīm 36.) $MT$ ir līknes pieskare punktā $M$. Punkts $M$ ortogonalās koordinatās tad dots ar



Zīm. 36.

$$x = r\cos\varphi;\quad y = r\sin$$

Otrādi: ja punkts $M$ dots ortogonalās koordinatās, tad tā polarkoordinatas ir:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2};\quad \varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x},$$

jo

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

Zīmējumā redzam:

$$\lambda = \tau - \varphi.$$

Tad

$$\operatorname{tg}\lambda = \frac{\operatorname{tg}\tau - \operatorname{tg}\varphi}{1 + \operatorname{tg}\tau \cdot \operatorname{tg}\varphi} = \frac{\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x}}{1 + \frac{dy}{dx}\cdot\frac{y}{x}}.$$

Pārveidojot dabūjam:

$$\operatorname{tg}\lambda = \frac{x\,dy - y\,dx}{x\,dx + y\,dy}. \tag{1}$$

Šo izteiksmi vēl pārveidojam. Tā kā

$$r^2 = x^2 + y^2,$$

tad

$$r\,dr = x\,dx + y\,dy. \tag{2}$$

Tālāk

$$d\operatorname{tg}\varphi = d\left(\frac{y}{x}\right);$$

$$\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}.$$

Tā kā

$$x^2 = r^2 \cos^2 \varphi,$$

tad dabūjam

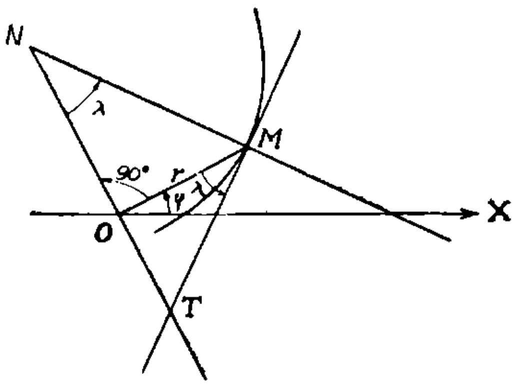
$$r^2 d\varphi = x\,dy - y\,dx. \tag{3}$$

Ievedot nolīdzinājumā (1) attiecīgās vērtības no (2) un (3), dabūjam

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{r^2 d\varphi}{r\,dr} = \frac{r}{\frac{dr}{d\varphi}} = \frac{r}{r'}. \tag{4}$$

Zīmējumā 37 parādīti pieskaršanās elementi polarkoordinatu sistemā.

$O$ pols; $Ox$ polarass; $NT \perp r$.
Līknes nolīdzinājums: $r = f(\varphi)$.
$OT = s_t$ polarā apakšpieskare
$ON = s_n$ polarā apakšnormale.
$TM = T$ polarā pieskare.
$NM = N$ polarā normale.




Zīm. 37.

Zīmējumā redzam, ka

$$\frac{OT}{r} = \frac{s_t}{r} = \operatorname{tg} \lambda = \frac{r}{r'};$$

tā tad

$$s_t = \frac{r^2}{r'} \tag{5}$$

Tālāk:

$$\frac{r}{ON} = \frac{r}{s_n} = \operatorname{tg} \lambda = \frac{r}{r'}.$$

tā tad

$$s_n = r'. \tag{6}$$

Viegli ieskatams, ka

$$N = \sqrt{r^2 + r'^2} \tag{7}$$

un

$$T = \frac{r}{r'} \sqrt{r^2 + r'^2}. \tag{8}$$

$T$ un $N$ uzskatami kā absoluti lielumi, tādēļ formulās saknes jāņem ar tādu zīmi, lai $T$ un $N$ iz-nāk pozitivi. $s_n$ un $s_t$ ir relativi lielumi, polarsubtangente ir pozitiva, ja tā atrodas pa labi no vērotāja, kas skatas radiusa vektora virzienā; polarsubnormale turpretim ir pozitiva, ja tā atrodas pa kreisi no vērotāja.

Piemērs:

$$r = a\varphi. \quad \text{(Archimeda spirale)}$$

$$r' = a.$$

Polarsubnormale

$$s_n = r' = a,$$

tā tad Archimeda spirales subnormale ir pastāvīgs lielums.

Piemērs.

$$r = \frac{a}{\varphi} \quad \text{(hiperboliskā spirale)}$$

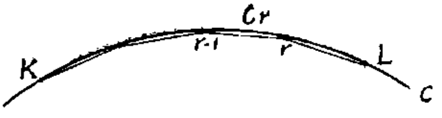
$$r' = -\frac{a}{\varphi^2}$$

$$s_t = \frac{r^2}{r'} = -a.$$

Tā tad hiperboliskās spirales polarsubtangente ir pastāvīgs lielums.

**65. Loka diferencials ortogonalās koordinatās.** Dota līkne $y = f(x)$; tās attēls zīmējumā 38, lai būtu līkne $C$.

Iedalam loku starp $K$ un $L$ pēc patikas $n$ daļās. Caur dalijumu punktiem ierakstam poligonu. Poligona malu starp dalijuma punktiem $r - 1$ un $r$ apzīmējam ar $c_r$.




Zīm. 38.

Līknes loka garumu $s$ starp punktiem $K$ un $L$ definē ar šādu izteiksmi:

$$s = \lim_{n \to \infty} \sum_{1}^{n} r \; c_r$$

Pierādijums par šādas robežvērtības esamību tiks dots integralrēķinos.

Pieņemam, ka funkcija

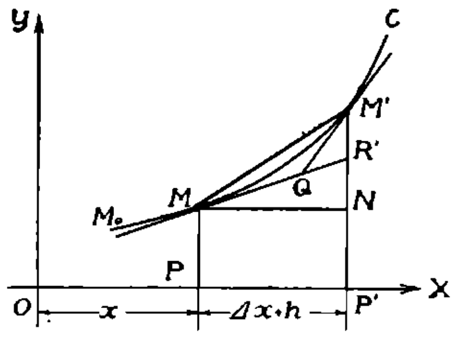
$$y = f(x) \tag{1}$$

attēlota zīmējumā 39 ar līkni $C$.

Loka garums $M_0M = s$ no nekustīga punkta $M_0$ līdz mainīgam punktam $M$, kā ieskatams, ir vienvērtīga funkcija no $x$, t. i.

$$s = F(x).$$

Pati funkcija $F(x)$ nav zināma, bet tās diferenciālu varam noteikt.




Zīm 39.

Ja skaitam loku uz līknes $C$ no punkta $M_0$, tad loks $\widehat{M_0M} = s$. Abscisas pieaugumam $\Delta x = h$ atbilst loka pieaugums $\widehat{MM'} = \Delta s$. Pieņemam, ka $\Delta s$ ir ieliekts pret augšu, kā parādīts zīmējumā. $MQ$ un $QM'$ ir pieskares līknes punktos $M$ un $M'$. Saskaņā ar ģeometrijas aksiomu

$$MM' < \Delta s < MQ + QM'$$

Tā kā

$$MQ + QM' < MR' + R'M',$$

tad

$$MM' < \Delta s < MR' + R'M' \tag{$\alpha$}$$

$$MM' = \sqrt{MN^2 + NM'^2} = \sqrt{h^2 + [f(x+h) - f(x)]^2} =$$

$$= \sqrt{h^2 + [hf'(x + \theta h)]^2} = h\sqrt{1 + f'(x + \theta h)^2}. \tag{$\beta$}$$

$$MR' = \sqrt{h^2 + NR'^2} = \sqrt{h^2 + h^2 f'(x)^2} = h\sqrt{1 + f'(x)^2}. \tag{$\gamma$}$$

$$R'M' = NM' - NR' = f(x+h) - f(x) - hf'(x) =$$

$$= hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x + \theta_1 h) - hf'(x) = \frac{h^2}{2!}f''(x + \theta_1 h). \tag{$\delta$}$$

Ievedot izteiksmes ($\beta$), ($\gamma$), ($\delta$) nevienlīdzībā ($\alpha$), dabūjam:

$$h\sqrt{1 + f'(x+\theta h)^2} < \Delta s < h\sqrt{1 + f'(x)^2} + \frac{h^2}{2}f''(x + \theta_1 h). \tag{$\epsilon$}$$

Nodalot ar $h$, dabūjam:

$$\sqrt{1 + f'(x + \theta h)^2} < \frac{\Delta s}{h} < \sqrt{1 + f'(x)^2} + \frac{h}{2} f''(x + \theta_1 h). \qquad (\varkappa)$$

Ja $f'(x)$ ir nepārtraukta funkcija un $h \to 0$, tad nevienlīdzības $(\varkappa)$ ārējās izteiksmes tiecas uz robežvērtību

$$\sqrt{1 + f'(x)^2}.$$

Saskaņā ar robežvērtību teoremu tad

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta s}{h} = \sqrt{1 + f'(x)^2},$$

vai arī

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + f'(x)^2} = \sqrt{1 + y'^2}$$

un

$$ds = \sqrt{1 + f'(x)} \quad dx = \sqrt{1 + y'^2} \quad dx. \qquad (2)$$

Pārveidojot dabūjam:

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad dx = \sqrt{dx^2 + dy^2}. \qquad (2^a)$$

Formulas (2) lieto, ja līkne dota ar nolīdzinājumu $y = f(x)$, bet ja līkne dota parametriskā veidā, tad lieto formulu ($2^a$).

Formulu (2) un ($2^a$) saknes jāņem ar $+$ zīmi, ja loka garums $s$, ar punkta $M$ abscisu vienā laikā aug vai dilst.

No izteiksmes $(\varepsilon)$ dabūjam:

$$\Delta s < h\sqrt{1 + f'(x)^2} + \frac{h^2}{2} f''(x + \theta_1 h);$$

no (2) dabūjam:

$$ds = h\sqrt{1 + f'(x)^2}. \qquad (dx = h)$$

No šīm izteiksmēm dabūjam

$$\Delta s - ds < \frac{h^2}{2} f''(x + \theta_1 h).$$

Še $h^2$ ir otras kārtas bezgalīgi mazs, tā tad starpība

$$\Delta s - ds$$

ir vismaz otras kārtas bezgalīgi mazs lielums.

Apzīmējot chordu $MM'$ ar $c$, no ($\beta$) redzams, ka

$$c = h\sqrt{1 + f'(x + \theta h)^2}.$$

Nodalot izteiksmi ($\varepsilon$) ar $c$, dabūjam

$$1 < \frac{\Delta s}{c} < \frac{\sqrt{1 + f'(x)^2}}{\sqrt{1 + f'(x + \theta h)^2}} + \frac{h}{2}\,\frac{f''(x + \theta_1 h)}{\sqrt{1 + f'(x + \theta h)^2}}.$$

Ja $h \to 0$, tad augšējās izteiksmes labā puse tiecas uz 1, tādēļ arī

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta s}{c} = 1.$$

Šī izteiksme dod iespēju secināt, ka arī loka un chordas garuma starpība, ar bezgalīgi mazu $h$, ir otras kārtas bezgalīgi mazs lielums.

Piemērs.

$$y = x^2; \quad y' = 2x$$

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} \quad dx = \sqrt{1 + (2x)^2}\,dx.$$

Piemērs

$$\left.\begin{aligned} x &= rt - r\sin t \\ y &= r - r\cos t \end{aligned}\right\} \text{(cikloida)}$$

$$dx = (r - r\cos t)\,dt;$$

$$dy = r\sin t\;dt;$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{r^2(1 - \cos t)^2 + (r\sin t)^2}\,.dt =$$

$$= r\sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t}\,dt = r\sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}\;dt =$$

$$= r\sqrt{2(1 - 2\cos t)}\quad dt = r\sqrt{2 \quad 2\sin^2\frac{1}{2}}\;dt;$$

$$ds = 2r\sin\frac{t}{2}\;dt.$$

**66. Loka diferencials polarkoordinatās.** Ja likne dota ar nolīdzinājumu (zīm. 40)

$$r = f(\varphi),$$

tad

$$x = r\cos\varphi; \quad dx = dr\cos\varphi \quad r\sin\varphi\,d\varphi$$

$$y = r\sin\varphi; \quad dy = dr\sin\varphi + r\cos\varphi\,d\varphi.$$

Ievedot šīs $dx$ un $dy$ izteiksmes formulā

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

dabūjam:

$$ds = \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi. \qquad (1)$$

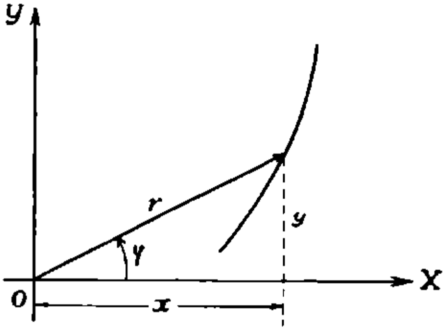
Piemērs:

$r = a\varphi$ (Archimeda spirale).

$$r' = \frac{dr}{d\varphi} = a;$$

$$ds = \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi = \sqrt{a^2\varphi^2 + a^2}\, d\varphi$$

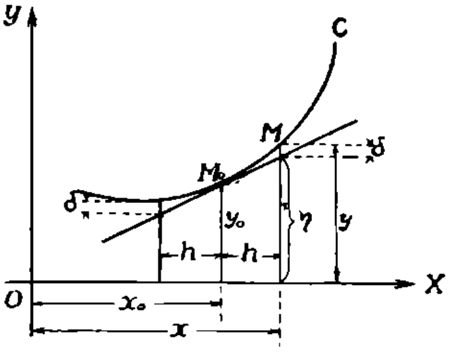
$$ds = a\sqrt{1 + \varphi^2}\, d\varphi.$$



Zīm. 40.

**67. Ieliektas, izliektas līknes. Infleksijas punkts.** Dota funkcija

$$y = f(x).$$



Zīm. 41.

Tās ģeometriskais attēls zīmējumā 41 ir līkne $C$. Velkam pieskari līknes punktā $M_0 = x_0 \mid y_0$. Ja apzīmējam pieskares tekošās koordinatas ar $x$ un $\eta$, tad tās nolīdzinājums ir:

$$\eta - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

vai arī

$$\eta = f(x_0) + h f'(x_0). \qquad (1)$$

Līknes $C$ ordinata punktā $M$ ir:

$$y = f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{h}{1!} f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \frac{h^3}{3!} f'''(x_0) + \ldots + R. \quad (2)$$

Apzīmējam:

$$\delta = y - \eta. \qquad (3)$$

Pieņemam, ka intervalā $(x_0 - h,\ x_0 + h)$, $\delta$ ir 0 tikai vietā $x = x_0$.

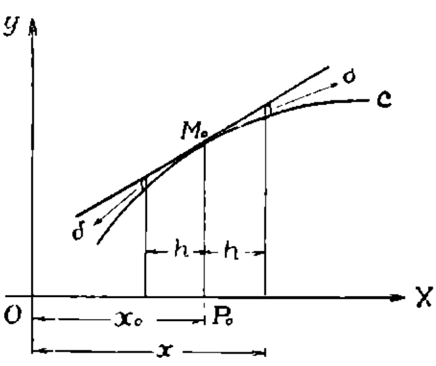
Ievērojot nolīdzinājumus (1), (2) un (3),

$$\delta = \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \frac{h^3}{3!} f'''(x_0) + \ldots + R. \qquad (4)$$

Ja $h$ ir bezgalīgi mazs, tad, kā agrāk redzējām, izteiksmes (4) labās puses zīmi noteic loceklis

$$\frac{h^2}{2!} f''(x_0).$$

Šī locekļa zīme ir $+$, ja $f''(x_0)$ ir pozitivs lielums un tā nav atkarīga no $h$ zīmes. Šinī gadijumā $\delta$ ir pozitivs, kā pozitivam, tā arī negativam $h$. Ģeometriski tas nozīmē, ka līkne $C$ punkta $M_0$ apkārtnē atrodas virs pieskares. Šādā gadijumā saka, ka līkne $C$ punktā $M_0$ un tā apkārtnē ir pret augšu ieliekta (konkava).



Zīm. 42.

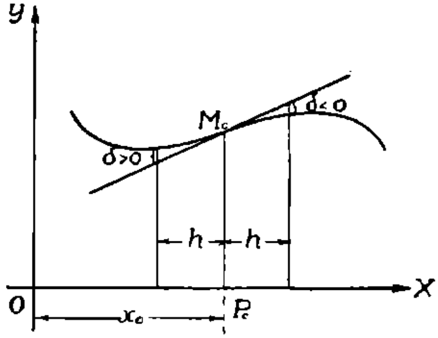
Ja izteiksmē (4) $f''(x_0)$ ir negativs lielums, tad $\delta$ kā pozitivam, tā arī negativam $h$ ir negativs. Ģeometriski tas nozīmē, ka līkne $C$, punkta $M_0$ apkārtnē atrodas zem pieskares, kā redzams zīmējumā 42. Šādā gadijumā saka, ka līkne $C$ punktā $M_0$ un tā apkārtnē ir pret augšu izliekta (konveksa).

Ja $f''(x_0)=0$, bet $f'''(x_0) \gtrless 0$, tad kā redzam, $\delta$ zīme mainas ja $h$ maina zīmi, jo tad

$$\delta = \frac{h^3}{3!} f'''(x_0) + \qquad + R.$$

Tā tad, ja $h$ negativs un $\delta$ ir pozitivs, tad ja $h$ pozitivs $\delta$ ir negativs un otrādi. Ģeometriski tas nozīmē, ka līkne pa kreisi un pa labi no ordinatas $M_0P_0$ atrodas pieskares pretējās pusēs, kā ieskatam zīmējumā 43. Līknes punktu $M_0$, kam ir nupat minētā īpašība, sauc par infleksijas punktu. Kā redzam, vienu, vai vairākus infleksijas punktus dabūsim, atrisinot nolīdzinājumu

$$f''(x) = 0,$$



Zīm. 43.

kā saknes $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2$ u. t. t dod infleksijas punktu abscisas. Ja ar kādu no šīm vērtībām, piemēram $x_2 = a_2$, arī $f'''(a_2) = 0$, bet $f^{IV}(a_2) \gtrless 0$, tad $\delta$ nemaina zīmi ja $h$ maina zīmi. Tādā gadijumā infleksijas punkta nav, bet līkne šinī punktā ir konkava pret augšu, ja $f^{IV}(a_2) > 0$ un konveksa pret augšu, ja $f^{IV}(a_2) < 0$.

Rezultatu sakopojums:

ja $f''(x_0)$ 0, tad līkne konkava pret augšu,
$f''(x_0) < 0$, „ „ konveksa „ „
„ $f''(x_0) = 0$, tad — infleksijas punkts.

Ja

$$f''(x_0) = 0; \quad f'''(x_0) = 0 \quad . f^{(p-1)}(x_0) = 0, \quad \text{bet} \quad f^{(p)}(x_0) \lesseqgtr 0,$$

tad: ja $p$ ir nepāra skaitlis, punkts $M_0$ ir infleksijas punkts, bet ja $p$ ir pāra skaitlis, tad,
ja $f^{(p)}(x_0)$ 0, līkne punktā $M_0$ konkava pret augšu
„ $f^{(p)}(x_0) < 0$, „ „ konveksa „

Piemērs.

$$y = e^{-x^2} \quad \text{(varbūtības līkne)} \qquad (\alpha)$$

Tā kā līknes nolīdzinājums nemainas, ja $+ x$ vietā liekam $- x$, tad līkne ir simetriska pret $y$ asi.

$$y' = -2x\, e^{-x^2}. \qquad (\beta)$$

$$y'' = 2(2x^2 - 1)\, e^{-x^2}. \qquad (\gamma)$$

No

$$y' = 2x\, e^{-x^2} = 0$$

dabūjam $x = 0$.

Šinī vietā līknei ir ekstrema vērtība. Ievedot $x = 0$ nolīdzinājumā ($\gamma$), redzam, ka $y'' < 0$; tā tad vietā $x = 0$ līknei ir maksims un $y_{max} = 1$.

Ja $x = \pm \infty$, tad $y = 0$.

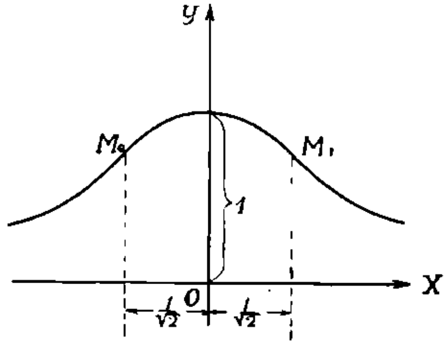
Liekot $y'' = 0$, dabūjam:

$$2(2x^2 - 1)\, e^{-x^2} = 0$$

$$2x^2 - 1 = 0$$

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

vietās $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ un $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ līknei ir infleksijas punkti. Līknes ģeometriskais attēls parādīts zīmējumā 44. $M_0$ un $M_1$ ir infleksijas punkti.



Zīm. 44.

Ja līknes nolīdzinājumi doti parametriskā veidā

$$\left.\begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{array}\right\}, \qquad (5)$$

tad

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

un

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\varphi'(t)\ \psi''(t) - \psi'(t) \cdot \varphi''(t)}{\varphi'(t)^2} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}}.$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\varphi'(t)\ \psi''(t) - \psi'(t) \cdot \varphi''(t)}{\varphi'(t)^3}. \qquad (6)$$

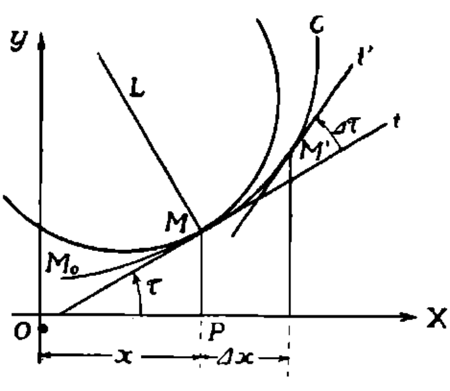
Līknes konkavitati un konveksitati noteic ar izteiksmes (6) labās puses palīdzību. $t$ vērtības, kas atbilst līknes infleksijas punktiem, dabū atrisinot nolīdzinājumu

$$\varphi'(t)\ \psi''(t) - \psi'(t)\ \varphi''(t) = 0.$$

**68. Līknes liekums un liekuma radius ortogonalās koordinatās.** Ar nolīdzinājumu

$$y = f(x) \qquad (1)$$

dota plāknē līkne $C$. (Zīm. 45.)



Zīm. 45.

Dodot abscisai $x$ pieaugumu $\Delta x$, dabūjam uz līknes punktu $M'$. Ja loku $M_0M$ apzīmējam ar $s$, tad loks $\widehat{MM'}$ ir $\Delta s$. Punktos $M$ un $M'$ pieskares apzīmējam ar $t$ un $t'$. Pārejot no punkta

$M$ uz $M'$ leņķis $\tau$ mainās par $\Delta\tau$ un loks — par $\Delta s$.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta x}$$

ir loka maiņas ātrums punktā $M$ un

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \tau}{\Delta x}$$

ir leņķa $\tau$ maiņas ātrums punktā $M$. Jo ātrāk $\tau$ mainas, attiecībā pret $s$, jo vairāk likne $C$ ir liekta. Liknes liekumu punktā $M$ apzīmē ar $k$ un to definē šādi:

$$k = \frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \tau}{\Delta x}}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta x}} = \frac{\frac{d\tau}{dx}}{\frac{ds}{dx}} \tag{1}$$

vai arī

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \tau}{\Delta s} = \frac{d\tau}{ds}. \tag{2}$$

Leņķi $d\tau$ sauc par $dx$ piederošā loka $ds$ kontingences leņķi.

No (2) dabūjam:

$$ds = \frac{1}{k}\, d\tau.$$

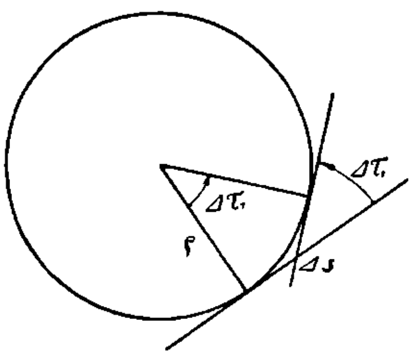
Apzīmējot $\frac{1}{k} = \rho$, dabūjam:

$$ds = \rho\, d\tau. \tag{4}$$

Nolīdzinājums (4) rāda, ka liknes $C$ loka diferencialu $ds$ var uzskatīt, kā tāda riņķa loka diferencialu, kura radius ir $\rho$ un centra leņķis $d\tau$ (Zīm. 46).

Šī riņķa liekums $k_1$ ir:

$$k_1 = \lim \frac{\Delta\tau_1}{\Delta s_1} = \lim \frac{\Delta\tau_1}{\rho\Delta\tau_1} = \frac{1}{\rho}. \tag{5}$$



Zīm. 46.

Liknes $C$ liekums, kā rāda nolīdzinājumi, (2) un (4) ir:

$$k = \frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{\rho}. \tag{6}$$

No (5) un (6) izriet, ka riņķim ar radiusu $\rho = \frac{1}{k}$ visos punktos ir āds pat liekums, kā liknei punktā $M$. Lielumu $\rho = \frac{1}{k}$ sauc tādēļ par **līknes liekuma radiusu punktā** $M$. Ja velkam līknes punktā $M$ normali un liknes konkavā pusē uz šis normales nogriežam $\rho = \frac{1}{k}$ un ar to kā radiusu velkam riņķi, tad šo riņķi sauc par **līknes liekuma riņķi** punktā $M$. Šī riņķa centru $L$ sauc par liknes **liekuma centru** un radiusu $\rho$ par līknes liekuma **radiusu punktā** $M$.

Tā kā

$$\operatorname{tg} \tau = y', \quad \text{tad} \quad \tau = \operatorname{arc\,tg} y'$$

un

$$d\tau = \frac{y''\,dx}{1 + y'^2}.$$

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\,.\,dx.$$

Ievērojot, ka

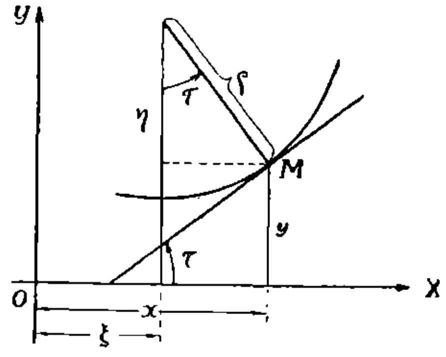
$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\tau}{ds},$$

dabūjam:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{y''dx}{1 + y'^2}}{\sqrt{1 + y'^2}\,dx} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}};$$

tā tad

$$\rho = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}. \tag{7}$$




Zīm. 47.

Ja skaitam loku $s$ tā, ka tas aug līdz ar $x$, tad sakne augšējā formulā ir pozitiva un $\rho$ tad ir tāda pat zīme kā $y''$. Ja $y'' > 0$, tad $\rho$ ir pozitivs un atrodas līknes konkavā pusē, t. i. virzīts uz augšu, bet ja $y'' < 0$, tad $\rho$ ir negativs un virzīts uz leju, jo tad līkne konkava pret apakšu.

Zīmējumā 47. **liekuma centra koordinatas līknes punktā** $M = x \mid y$ apzīmētas ar $\xi$ un $\eta$.

Redzams ka

$$\left.\begin{array}{l}\xi = x - \rho \sin \tau \\ \eta = y + \rho \cos \tau\end{array}\right\}. \tag{8}$$

Tā kā

$$\operatorname{tg} \tau = y',$$

tad

$$\cos \tau = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} \tag{9}$$

un

$$\sin \tau = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}. \tag{10}$$

Ievietojot izteiksmes (9) un (10) nolīdzinājumos (8) dabūjam:

$$\xi = x - \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}};$$

$$\eta = y + \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

Pārveidojot dabūjam liekuma centra koordinatas:

$$\xi = x - \frac{(1 + y'^2)\, y'}{y''}. \tag{11}$$

$$\eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''}. \tag{12}$$

P i e m ē r s.

$$y^2 = 2p\, x$$

$$y' = \frac{p}{y}; \quad y'' = -\frac{p^2}{y^3}.$$

Ievedot $y'$ un $y''$ izteiksmes liekuma radiusa izteiksmē, dabūjam:

$$\rho = \frac{\left(1 + \frac{p^2}{y^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{-\frac{p^2}{y^3}} = \pm \frac{(p^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2} \qquad \begin{pmatrix}\rho < 0 \text{ ja } y > 0 \\ \rho > 0 \text{ ja } y < 0\end{pmatrix}$$

Parabolas virsotnē $y = 0$; liekuma radius šinī vietā dabū vērtību $p$.

Ja līkne dota parametriskā veidā:

$$\left.\begin{array}{l}x = \varphi(t) \\ y = \psi(t)\end{array}\right\}, \tag{13}$$

tad $x$ un $y$ ir atkarīgi no $t$

$$y' = \operatorname{tg} \tau;$$

$$\tau = \operatorname{arc\,tg} y' = \operatorname{arc\,tg} \frac{dy}{dx};$$

$$d\tau = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{\frac{dx\, d^2y - dy d^2x}{dx^2}}{\frac{dx^2 + dy^2}{dx^2}}$$

$$d\tau = \frac{dx\, d^2y - dy\, d^2x}{dx^2 + dy^2}.$$

Tā kā

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

tad

$$\rho = \frac{ds}{d\tau} = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\, d^2y - dy\, d^2x}. \tag{14}$$

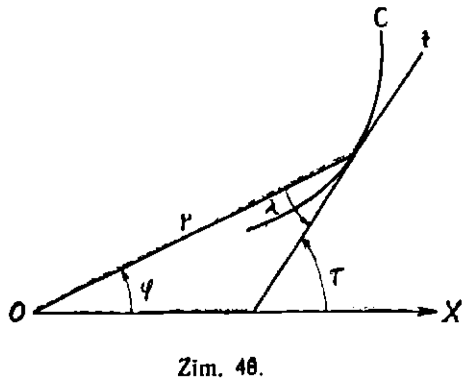
$dx$, $d^2x$, $dy$, $d^2y$ dabūjam no nolīdzinājumiem (13).

**69. Liekuma radius polarkoordinatās.** Tā kā

$$\frac{1}{\rho} = k = \frac{d\tau}{ds},$$

tad varam arī rakstīt:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d\tau}{d\varphi}}{\frac{ds}{d\varphi}}. \tag{1}$$




Zīm. 48.

Pieņemam, ka līknes $C$ nolīdzinājums dots:

$$r = f(\varphi).$$

Zīmējumā 48 redzams, ka pieskares $t$ virziena leņķis

$$\tau = \varphi + \lambda.$$

Nodalijumā [64] formula (4) dod

$$\operatorname{tg}\lambda = \frac{r}{r'};$$

tā tad

$$\lambda = \text{arc tg}\frac{r}{r'}$$

un

$$\tau = \varphi + \text{arc tg}\frac{r}{r'}.$$

Tā kā $r$ un $r'$ ir funkcijas no $\varphi$, tad:

$$\frac{d\tau}{d\varphi} = 1 + \frac{\left(\frac{r}{r'}\right)'}{1 + \left(\frac{r}{r'}\right)^2} = 1 + \frac{\frac{r'r' - rr''}{r'^2}}{\frac{r'^2 + r^2}{r'^2}} = 1 + \frac{r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2}$$

$$\frac{d\tau}{d\varphi} = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2}. \tag{2}$$

[66] formula (1) dod

$$\frac{ds}{d\varphi} = \sqrt{r^2 + r'^2}. \tag{3}$$

Ievedot izteiksmes (2) un (3) formulā (1), dabūjam:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{(r^2 + r'^2)\sqrt{r^2 + r'^2}} = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

vai

$$\rho = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r'^2 - rr''}. \tag{4}$$

Piemērs. Archimeda spirale.

$$r = a\varphi$$

$$r' = a;\quad r'' = 0;$$

$$\rho = \frac{(a^2\varphi^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2\varphi^2 + 2a^2}.$$

**70. Liekuma centrs, kā līknes divu bezgalīgi tuvu normāļu krustpunkts.** Līknes

$$y = f(x)$$

normales nolīdzinājums punktā $M = x|y$ ir:

$$\eta - y = -\frac{1}{y'}(\xi - x). \tag{1}$$

Še $y$ un $y'$ ir funkcijas no Ja dodam $x$ pieaugumu $\Delta x$, tad $y$ un $y'$ dabū pieaugumu $\Delta y$ u $\Delta y'$ Tā tad normales nolīdzinājums līknes punktā $M'$ ar koordinatām $x + \Delta x$ un $y + \Delta y$ ir

$$\eta - (y + \Delta y) = - \frac{1}{y' + \Delta y'} [\xi - (x + \Delta x)]. \tag{2}$$

Normaļu (1) un (2) krustpunkta koordinatas dabūjam atrisinot šos nolīdzinājumus attiecībā uz $\xi$ un $\eta$. Atvelkot (2) no (1) dabūjam:

$$\Delta y = \frac{1}{y' + \Delta y'} [\xi - (x + \Delta x)] - \frac{1}{y'} (\xi - x);$$
$$\Delta y = \frac{[\xi - (x + \Delta x)] y' - (\xi - x)(y' + \Delta y')}{(y' + \Delta y') y'};$$
$$\Delta y (y' + \Delta y') y' = (\xi - x)(y' - y' - \Delta y') - \Delta x y';$$
$$\Delta y (y' + \Delta y') y' = - (\xi - x) \Delta y' - y' \Delta x.$$

Dalot ar $\Delta x$ dabūjam:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} (y' + \Delta y') y' = - (\xi - x) \frac{\Delta y'}{\Delta x} - y'$$

un

$$\xi - x = - \frac{\frac{\Delta y}{\Delta x} (y' + \Delta y') y' + y'}{\frac{\Delta y'}{\Delta x}}. \tag{3}$$

Ja augšējā izteiksmē liekam $\Delta x \to 0$, tad $\xi$ būs divu bezgalīgi tuvu normaļu krustpunkta koordinata, ko apzīmēsim ar $\bar{\xi}$. Šādā gadijumā

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'; \quad \lim \Delta y' = 0; \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y'}{\Delta x} = y''.$$

Tā tad

$$\bar{\xi} - x = - \frac{y'^3 + y'}{y''} = - \frac{(1 + y'^2) y'}{y''}$$

un

$$\bar{\xi} = x - \frac{(1 + y'^2) y'}{y''}$$

Salīdzinot šo abscisas $\bar{\xi}$ izteiksmi ar liekuma centra abscisu $\xi$ [68] formulā (11) redzam, ka

$$\bar{\xi} = \xi.$$

Tādā pat ceļā varam dabūt

$$\bar{\eta} = \eta.$$

Ar to tad ir pierādīts, ka līknes normale punktā $M = x|y$ un līknes normale punktam $M$ bezgalīgi tuvā punktā $M'$ krustojas punkta $M$ liekuma centrā.

**71. Līknes evoluta.** Līknes

$$y = f(x) \tag{1}$$

liekuma centra koordinatas ir:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x - \frac{(1 + y'^2)y'}{y''} \\ \eta &= y + \frac{1 + y'^2}{y''} \end{aligned}\right\}. \tag{2}$$

Lielumi $y$, $y'$, $y''$ ir funkcijas no $x$; tā tad varam rakstīt:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \varphi(x) \\ \eta &= \psi(x) \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Kā redzams, nolīdzinājumi (3) izteic parametriskā veidā līkni. Šo līkni veido dotās līknes (1) liekuma centru ģeometriskā vieta un to sauc par līknes $y = f(x)$ e v o l u t u.

Evolutas nolīdzinājumu atklātā veidā dabūjam, izteicot $y$, $y'$, $y''$ no formulas (1) kā funkcijas no $x$. Ievedam šis izteiksmes nolīdzinājumos (2), un izslēdzam no tiem parametru $x$.

P i e m ē r s:

$$y^2 = 2px\,;$$

$$y' = \frac{p}{y}\,; \quad y'' = -\frac{p^2}{y^3}.$$

Ievedot $y'$ un $y''$ izteiksmes nolīdzinājumos (2), dabūjam:

$$\xi = x - \frac{\left(1 + \frac{p^2}{y^2}\right)\frac{p}{y}}{-\frac{p^2}{y^3}} = x + \frac{(y^2 + p^2)}{p} = x + \frac{y^2}{p} + p. \tag{$\alpha$}$$

$$\eta = y + \frac{1 + \frac{p^2}{y^2}}{-\frac{p^2}{y^3}} = y - y\,\frac{(y^2 + p^2)}{p^2} = -\frac{y^3}{p^2}. \tag{$\beta$}$$

Ievedot tālāk izteiksmēs ($\alpha$) un ($\beta$) $y^2 = 2px$, dabūjam:

$$\xi = 3x + p \tag{$\gamma$}$$

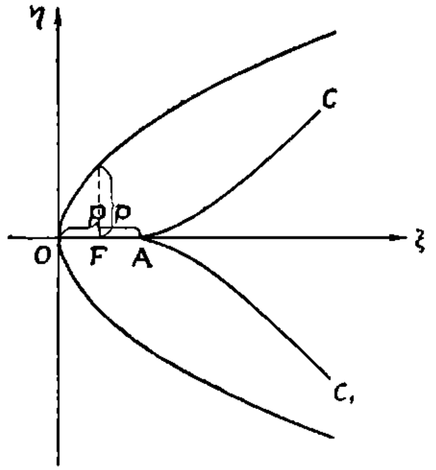
un

$$\eta = -\frac{2^{\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{2}} \cdot p^{\frac{3}{2}}}{p^2} = -\frac{2^{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{3}{2}}}{p^{\frac{1}{2}}}. \qquad (\delta)$$

No ($\gamma$) dabūjam:

$$x = \frac{\xi - p}{3}.$$

Ievedot šo izteiksmi nolīdzinājumā ($\delta$), dabūjam:




Zmi. 49.

$$\eta = -\frac{2^{\frac{3}{2}} \left(\frac{\xi - p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}{p^{\frac{1}{2}}}.$$

Augšējā nolīdzinājuma kvadrats dod

$$\eta^2 = \frac{8}{27 \cdot p} (\xi - p)^3 \qquad (\varepsilon)$$

Pēdējais nolīdzinājums dod parabolas evolutu, ko sauc par **semikubisku parabolu.**

Šī līkne, kā redzams, (zīm. 49.) ir simetriska pret $x$ asi. Ar $\xi = p$, $\eta = 0$ un ar $\xi < p$, $\eta$ ir imaginars.

Apzīmējot $\frac{8}{27 \cdot p} = a$, līknes nolīdzinājumu rakstam:

$$\eta^2 = a\,(\xi - p)^3$$

$$2\eta\eta' = a \cdot 3\,(\xi - p)^2$$

$$\eta' = \frac{3}{2} a \frac{(\xi - p)^2}{\eta} = \pm \frac{3}{2} a^{\frac{1}{2}} \frac{(\xi - p)^2}{(\xi - p)^{\frac{3}{2}}} = \pm \frac{3}{2} a^{\frac{1}{2}} (\xi - p)^{\frac{1}{2}};$$

$$\eta'' = \pm \frac{3}{4} a^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(\xi - p)^{\frac{1}{2}}}.$$

Punktā $A$, kur $\xi = p$, atvasinātā $\eta' = \pm 0$; tā tad punktā $A$ līknes abiem zariem ir kopēja pieskare $x$ ass. Ja $\xi > p$, tad pozitiviem $\eta$ otrā atvasinātā $\eta'' > 0$ un negativiem $\eta$, $\eta'' < 0$.

Līknes zars virs $x$ ass tā tad ir konkavs, bet līknes zars zem $x$ ass — konveks uz augšu. Zīmējumā 49. semikubiskās parabolas attēlojums ir līkne $CAC_1$.

**72. Vingrinājumi.** 1) Dabūt līknes

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

liekuma centra koordinatas un evolutas nolīdzinājumu. Atbilde:

$$\xi = \frac{(a^2 + b^2)\, x^3}{a^4}; \quad \eta = -\frac{(a^2 + b^2)\, y^3}{b^4};$$

evolutas nolīdzinājums:

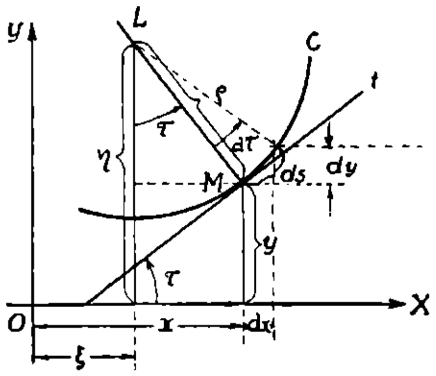
$$(a\xi)^{\frac{2}{3}} - (b\eta)^{\frac{2}{3}} = (a^2 + b^2)^{\frac{2}{3}}$$

2) Dabūt līknes

$$x = a \cos^3 t$$
$$y = a \sin^3 t$$

evolutas parametriskos nolīdzinājumus. Atbilde:

$$\xi = a \cos^3 t + 3\, a \cos t \, \sin^2 t.$$
$$\eta = 3\, a \cos^2 t \sin t + a \sin^3 t.$$




Zīm. 50.

3) Dabūt līknes

$$x = 3t^2$$
$$y = 3t - t^3$$

evolutas parametriskos nolīdzinājumus. Atbilde:

$$\xi = \frac{3}{2}(1 + 2t^2 - t^4); \quad \eta = -4t^2.$$

**73. Evolutas īpašības.** Ja līknes nolīdzinājums $y = f(x)$ dots, evolutas tekošās koordinatas $\xi$ un $\eta$, kā redzams zīmējumā 50, ir:

$$\xi = x - \rho \sin \tau; \quad \eta = y + \rho \cos \tau$$

$$\left.\begin{aligned} d\xi &= dx - d\rho \sin \tau - \rho \cos \tau \, d\tau \\ d\eta &= dy + d\rho \cos \tau - \rho \sin \tau \, d\tau \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

un

$$\rho\, d\tau = ds; \quad dx = ds \cos\tau; \quad dy = ds \sin\tau. \tag{2}$$

Ievedot izteiksmes (2) nolīdzinājumos (1), dabūjam:

$$\left.\begin{aligned} d\xi &= -\, d\rho \sin\tau \\ d\eta &= \phantom{-\,} d\rho \cos\tau \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

un

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{\cos\tau}{\sin\tau} = -\cot\tau = -\frac{1}{\operatorname{tg}\tau} = -\frac{1}{y'}.$$

Tā tad

$$\frac{d\eta}{d\xi} \qquad \frac{1}{y'}. \tag{4}$$

Šī izteiksme rāda, ka evolutas pieskare punktā $L$ ir līknes normale punktā M.

Tālāk, no nolīdzinājumiem (3) dabūjam:

$$d\xi^2 + d\eta^2 = d\rho^2,$$

bet $\sqrt{d\xi^2 + d\eta^2}$ ir evolutas loka diferencials $d\sigma$, ja ar $\sigma$ apzīmē evolutas loku. Tā tad, ja $\sigma$ skaitam augoša $\rho$ virzienā, tad

$$d\sigma = d\rho. \tag{5}$$

Ja divām funkcijām ir vienlīdzīgi diferenciali, tad funkcijas atšķirās ar konstantu lielumu; tā tad

$$\sigma = \rho + c. \tag{6}$$

Ja uz evolutas loka pieņemam kādu punktu $Q$, tad tam atbilst uz līknes punkts $R$ ar liekuma radiusu $\rho_0$ un ja no punkta $Q$ skaitam evolutas loku, tad attiecībā uz šo punktu $\sigma = 0$. Tad dabūjam:

$$0 = \rho_0 + c$$

un

$$c = -\rho_0 \tag{7}$$

Ievietojot $c$ vērtību nolīdzinājumā (6), dabūjam:

$$\sigma = \rho - \rho_0. \tag{8}$$

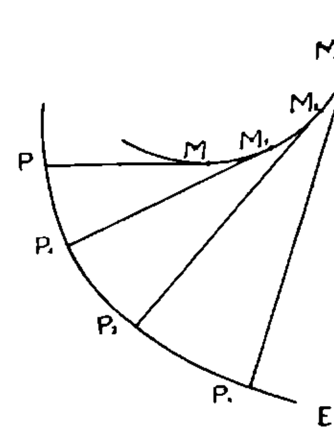
Šis nolīdzinājums izteic:

Ja līknes $y = f(x)$ punktam $R$ atbilst liekuma radius $\rho_0$ un evolutas punkts $Q$ un līknes punktam

$M$ atbilst liekuma radius $\rho$ un evolutas punkts $L$, tad evolutas loka garums $QL$ ir līknes loka $RM$ gala punkta $M$ un sākuma punkta $R$ liekuma radiusu starpība.

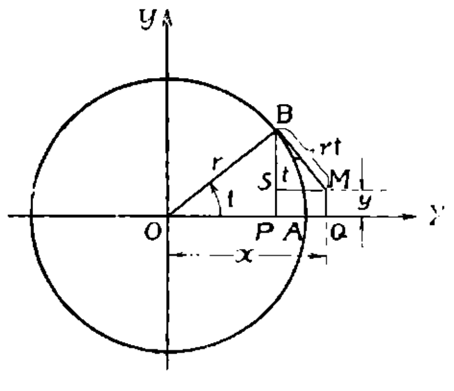
**74. Līknes evolventas.** Tā kā evolutas pieskare ir dotas līknes normale, tad ja uz evolutas pieskares nogriežam no pieskara punkta $L$ (zīm 50) gabalu $\rho$ un notinam šo evolutas pieskari, tad dabūjam doto līkni $C$. Ja uz evolutas pieskares nogriežam gabalu $a$, tad notinot šo pieskari dabūjam līkni $C_1$. Līknes $C$ un $C_1$ ir paralelas.

Ja evolutu apzīmējam ar burtu $K$ (zīm. 51), tad tādā kārtā dabūtās līknes $C$, $C_1$ sauc par līknes $K$ evolventām. Kā redzams, dotai līknei ir tikai viena evoluta, bet evolventu tai ir bezgalīgi daudz.



Zīm. 51.

$MP$, $M_1P_1$, $M_2P_2$ u. t. t. ir pieskares līknes $K$ punktos $M, M_1, M_2$ u. t. t. $M_1P_1 = M_1MP$; $M_2P_2 = M_2M_1P_1$ u. t. t.



Zīm. 52.

Līkne $E$ ir līknes $K$ evolventa; $K$ ir līknes $E$ evoluta. Evolventas nolīdzinājumu vispārējos gadijumos dabū ar diferencialnolīdzinājumu palīdzību. Riņķa evolventas nolīdzinājumu var dabūt elementarā ceļā, kā rāda sekojošā apskate (Zīm. 52.) Ja riņķa punktā $B$ velkam pieskari un uz šis pieskares nogriežam loka $AB$ garumu, t. i. ja $\overline{BM} = \widehat{BA}$, tad punkts $M$ ir riņķa evolventas punkts.

Kā redzams

$$BM = \widehat{BA} = rt$$

un

$$x = OP + PQ = r\cos t + rt\sin t$$
$$y = BP - BS = r\sin t - rt\cos t.$$

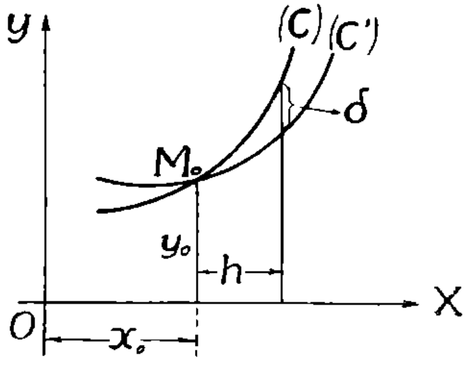
Tā tad riņķa evolventas nolīdzinājumi parametriskā veidā ir:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos t + rt\sin t \\ y &= r\sin t - rt\cos t \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Riņķa evolventu pielieto zobratu zobu veidošanā.

**75. Divu līkņu savstarpējais stāvoklis kopējā punktā.** Dotas divas līknes (zīm. 53.) ar nolīdzinājumiem:

$$y = f(x). \qquad (C)$$
$$y = \varphi(x). \qquad (C')$$




Zīm. 53.

Pieņemam, ka šīm līknēm ir kopējs punkts $M_0$ ar abscisu $x_0$, tad

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= f(x_0) \\ y_0 &= \varphi(x_0) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Tālāk pieņemam, ka funkcijas $f(x)$ un $\varphi(x)$ ir vienvērtīgas, nepārtrauktas un ka tām ir galīgas, nepārtrauktas visu kārtu atvasinātās, kādas būs vajadzīgas, kādā $x$ intervalā, kur abām līknēm ir tikai viens kopējs punkts $M_0$.

Izvirzam funkcijas $f(x_0+h)$ un $\varphi(x_0+h)$ ar Teilora formulu:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{h}{1!}f'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + \qquad + R_1. \quad (2)$$

$$\varphi(x_0 + h) = \varphi(x_0) + \frac{h}{1!}\varphi'(x_0) + \frac{h^2}{2!}\varphi''(x_0) + \qquad + R_2. \quad (3)$$

Atņemam (3) no (2) un ievērojam, ka $f(x_0) = \varphi(x_0)$, tad dabūjam:

$$\delta = f(x_0+h) - \varphi(x_0+h) = [f'(x_0) - \varphi'(x_0)]\frac{h}{1!} + [f''(x_0) - \varphi''(x_0)]\frac{h^2}{2} + \ldots + [R_1 - R_2] \quad (4)$$

Kā redzams:

$$\delta = y_C - y_{C'}.$$

Ja pieņemam, ka $h$ bezgalīgi mazs, tad nolīdzinājumā (4) labās puses pirmais loceklis noteic labajai pusei zīmi. Tā redzam, ka $\delta$ maina zīmi kad $h$ maina zīmi. Tas norāda, ka līknes $(C)$ un $(C')$ pa kreisi un pa labi no punkta $M_0$ atrodas pretējos stāvokļos, kas arī redzams zīmējumā Šādā gadījumā līknes $(C)$ un $(C')$ krustojas punktā $M_0$.

Ja

$$f(x_0) = \varphi(x_0) \quad \text{un arī} \quad f'(x_0) = \varphi'(x_0), \tag{5}$$

tad līknēm $(C)$ un $(C')$ punktā $M_0$ ir kopēja pieskare un $\delta$ zīmi nolīdzinājuma (4) labajā pusē noteic tā locekļa zīme, kur atrodas $h^2$. Še, tā tad $h$ zīmei mainoties, $\delta$ zīme nemainas. Tas nozīmē, ka abas līknes pa kreisi un pa labi no $M_0$ atrodas vienādā savstarpējā stāvoklī.

Ja

$$f(x_0) = \varphi(x_0), \quad f'(x_0) = \varphi'(x_0) \quad \text{un arī} \quad f''(x_0) = \varphi''(x_0), \tag{6}$$

tad $\delta$ izteiksme (4) iesākas ar locekli, kurā atrodas $h^3$; tā tad ja $h$ maina zīmi, tad maina zīmi arī $\delta$. Še līknēm ir pa labi un pa kreisi no $M_0$ tāds pats stāvoklis kā vienkāršas krustošanās gadījumā. Tā kā $h^3$ ir trešās kārtas bezgalīgi mazs un noteic izteiksmes (4) labās puses kārtu, tad arī $\delta$ ir trešās kārtas bezgalīgi mazs.

Vispār, ja

$$f(x_0) = \varphi(x_0); \quad f'(x_0) = \varphi'(x_0) \qquad f^{(k)}(x_0) = \varphi^{(k)}(x_0), \tag{7}$$

tad $\delta$ ir $k+1$ kārtas bezgalīgi mazs. Ja $k$ ir nepāra skaitlis, tad $\delta$ nemaina zīmi, ja $h$ maina zīmi, bet ja $k$ ir pāra skaitlis, tad $\delta$ maina zīmi, ja $h$ maina zīmi. Pirmajā gadijumā līknes pa kreisi un pa labi no punkta $M_0$ atrodas vienādā savstarpējā stāvoklī un otrā gadijumā pretējā savstarpējā stāvoklī.

Ja

$$f(x_0) = \varphi(x_0) \quad \text{un} \quad f'(x_0) = \varphi'(x_0), \tag{5}$$

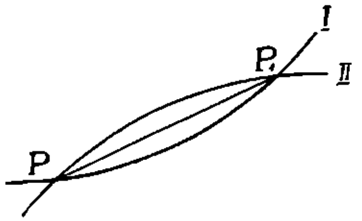
tad līknēm $(C)$ un $(C')$ ir kopēja pieskare punktā $M_0$, tad saka, ka l ī k n e s $(C)$ u n $(C')$ p i e s k a r a s p u n k t ā $M_0$.

Ja pildīti noteikumi (6), tad izpildīti arī noteikumi (5): līknes $(C)$ $(C')$ pieskaras punktā $M_0$, bet ciešāk nekā tad, kad izpildīti tikai noteikumi (5).

Līknes pieskaras vēl ciešāk, ja noteikumiem (6) pievienojam vēl $f'''(x_0) = \varphi'''(x_0)$, u. t. t. Saka, ka l ī k n e s $(C)$ u n $(C')$ p i e s k a r a s $n$-t ā kārtā, ja

$$f(x_0) = \varphi(x_0); \; f'x(_0) = \varphi'(x_0) \; . \; . \; . \; f^{(n)}(x_0) = \varphi^{(n)}(x_0), \tag{8}$$

t. i., ja izpildīti šie $(n + 1)$ noteikumi. Ja $h$ ir pirmās kārtas bezgalīgi mazs, tad šādā gadijumā $\delta$ ir $(n + 1)$ kārtas bezgalīgi mazs.



Zīm. 54.

Zīmējumā 54, līknes I un II krustojas punktos $P$ un $P_1$. Šīm līknēm ir kopēja sekanta $PP_1$. Pieņemam, ka līkne I ir nekustoša, bet līkne II kustās tā, ka punkts $P_1 \longrightarrow P$. Tad kopējā sekanta pāriet kopējā pieskarē un līknēm I un II pieskaršanās punktā ir kopēji divi bezgalīgi tuvi punkti $P$ un $P_1$.

Šinī gadijumā $f(x_0) = \varphi(x_0)$ un $f'(x_0) = \varphi'(x_0)$; tā tad līknes pieskaras, pēc pirmās kārtas un tām pieskaršanās punktā ir kopēji divi bezgalīgi tuvi punkti.

Vispār var pierādīt: ja divas līknes $(C)$ un $C'$) pieskaras pēc $n$-tās kārtas, tad tām pieskaršanās punktā ir kopēji $(n + 1)$ bezgalīgi tuvi punkti.

Līkņu krustošanās leņķis.

Piemērs. Kāds ir līkņu

$$y^2 = x \qquad \text{(I)}$$

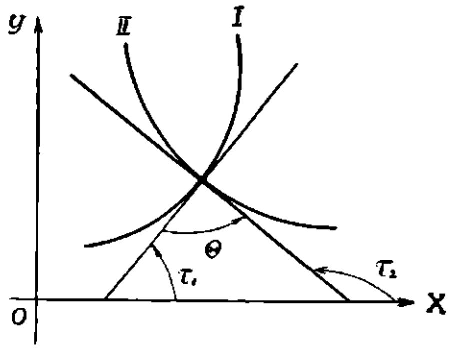
un

$$xy = 1 \qquad \text{(II)}$$

krustošanās leņķis?

Par divu līkņu krustošanās leņķi sauc leņķi, ko veido līkņu pieskares krustošanās punktā. Krustpunktu atrodam atrisinot kopēji līkņu nolīdzinājumus pēc $x$ un $y$. Dabūjam krustpunkta $M_0$ koordinatas (zīm. 55.), kas dotā gadijumā ir:

$$M_0 = 1 \mid 1.$$



Zīm. 55.

Krustošanās leņķi apzīmējam ar $\theta$, tad

$$\theta = \tau_2 - \tau_1;$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{tg} \tau_2 - \operatorname{tg} \tau_1}{1 + \operatorname{tg} \tau_1 \operatorname{tg} \tau_2} = \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\rm II} - \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\rm I}}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\rm II} \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\rm I}}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\rm I} = \frac{1}{2\sqrt{x}}; \quad \text{ar} \quad = 1: \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{{\rm I}\, x=1} = \frac{1}{2},$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\rm II} = -\frac{1}{x^2}; \quad \text{ar } x = 1 \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{{\rm II}\, x=1} = -1.$$

Tā tad

$$(\operatorname{tg} \theta)_{x=1;\ y=1} \quad \frac{-1 - \frac{1}{2}}{1 + (-1)\,\frac{1}{2}} = -3.$$

$$\theta = \sim 108^0.$$

Piemērs.

Ķēdes līnija

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{Cos} x = f(x)$$

un parabola

$$y = \frac{x^2}{2} + 1 = \varphi(x)$$

krustojas punktā

$$M_0 = 0|1.$$

Še:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \operatorname{Cos} x; & f(0) &= \operatorname{Cos} 0 = 1.\\
f'(x) &= \operatorname{Sin} x; & f'(0) &= \operatorname{Sin} 0 = 0.\\
f''(x) &= \operatorname{Cos} x; & f''(0) &= \operatorname{Cos} 0 = 1.\\
f'''(x) &= \operatorname{Sin} x; & f'''(0) &= \operatorname{Sin} 0 = 0.\\
f^{(\mathrm{IV})}(x) &= \operatorname{Cos} x; & f^{\mathrm{IV}}(0) &= \operatorname{Cos} 0 = 1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \frac{x^2}{2} + 1; & \varphi(0) &= 1.\\
\varphi'(x) &= x; & \varphi'(0) &= 0.\\
\varphi''(x) &\ \ 1; & \varphi''(0) &= 1.\\
\varphi'''(x) &= 0; & \varphi'''(0) &= 0.\\
\varphi^{\mathrm{IV}}(x) &= 0; & \varphi^{\mathrm{IV}}(0) &= 0.
\end{aligned}$$

Kā redzam, šinī gadijumā:

$$f(0) = \varphi(0); \quad f'(0) = \varphi'(0); \quad f''(0) = \varphi''(0); \quad f'''(0) = \varphi'''(0),$$

bet $f^{\mathrm{IV}}(0)$ un $\varphi^{\mathrm{IV}}(0)$ nav vienlīdzīgas. Saskaņā ar izteiksmi (8), šīs līknes pieskaras punktā 0|1 pēc trešās kārtas.

**76. Oskulacija, oskulacijas riņķis.** Pieņemam, ka dota līkne $(C)$, $y = f(x)$ ar noteiktiem parametriem, un dota arī otra līkne $(C')$, $y = \varphi(x)$ kuras parametri skaitā $(n+1)$ ir nenoteikti lielumi. Tādā gadijumā līkne $(C')$ var mainīt vietu plāknē un arī savu veidu. Lai šie parametri dabūtu noteiktas vērtības, varam dot, attiecībā uz līkni $(C')$, $(n+1)$ noteikumus. Ja šādi noteikumi ir, ka ar abscisu $x_0$

$$\varphi(x_0) = f(x_0); \quad \varphi'(x_0) = f'(x_0) \qquad \varphi^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0),$$

tad šie $n+1$ noteikumi, saskaņā ar [75] (8), izteic, ka līkne $(C')$ pieskaras līknei $(C)$ pēc $n$-tās kārtas, kas arī ir augstākā pieskaršanās kārta, kādu pielaiž līknes $(C')$ parametru skaits. Šādā gadijumā saka, ka līkne $(C')$ oskulē ar līkni $(C)$ punktā $M_0 = x_0 | y_0$

Tā kā taisnes nolīdzinājumā ir divi parametri, tad taisne var pieskarties kādai dotai līknei pēc pirmās kārtas.

Ja riņķis oskulē ar kādu dotu līkni, tad pieskaršanās ir otrās kartas, jo riņķa nolīdzinājumā ir 3 parametri un pieskaršanās noteikumi tad arī ir trīs:

$$f(x_0) = \varphi(x_0); \quad f'(x_0) = \varphi'(x_0); \quad f''(x) = \varphi''(x_0);$$

tie rāda, ka pieskaršanās ir otras kārtas.

P i e m ē r s.

$$y = x^3 - 3x^2 - 12x \quad 6 = f(x). \tag{1}$$
$$y = -15x - 5 \quad = \varphi(x). \tag{2}$$

Dotai līknei (1) un taisnei (2) ir kopējs punkts.

$$M_0 = 1 | -20,$$

tad

| | | |
|---|---|---|
| | $f(1) = -20$ | $\varphi(1) = -20$ |
| $f'(x) = 3x^2 - 6x - 12$ | $f'(1) = -15$ | $\varphi'(1) = -15$ |
| $f''(x) = 6x - 6$ | $f''(1) = 0$ | $\varphi''(1) = 0$ |
| $f'''(x) = 6$ | $f'''(1) = 1$ | $\varphi'''(1) = 0$ |

Kā redzam, taisne (2) ir līknes (1) pieskare, jo tā iet caur līknes punktu $M_0 = 1 | -20$ un tās virziena koeficients $-15$ ir arī līknes pieskares virziena koeicients Tā kā taisnes nolīdzinājumā ir tikai divas konstantes, tad tā vispār var pieskarties līknei pēc pirmās kārtas.

Apskatot šo gadijumu, redzam, ka ar $x = 1$

$$f(1) = \varphi(1); \quad f'(1) = \varphi'(1); \quad f''(1) = \varphi''(1),$$

bet

$$f'''(1) \neq \varphi'''(1).$$

Še ir otras kārtas pieskaršanās. Šadu parādību sauc par superoskulaciju un tā še ir tādēļ, ka punkts $M_0 = 1 \mid -20$ ir līknes infleksijas punkts, jo

$$f''(1) = 0.$$

Saskaņā ar agrāko, otras kārtas pieskaršanās gadijumos liknēm pieskaršanās punktā $M_0$ ir trīs kopēji, bezgalīgi tuvi punkti. Taisnes pieskaršanās punktā, šinī gadijumā līknes infleksijas punktā, taisnei un liknei tā tad ir kopēji trīs bezgalīgi tuvi punkti.

Oskulacijas riņķis. Ja dota noteikta līkne

$$y = f(x) \tag{1}$$

un riņķis

$$(\xi - \alpha)^2 + (\eta - \beta)^2 - \gamma^2 = 0, \tag{2}$$

tad varam noteikt $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, tādējādi, ka riņķis pieskaras dotai liknei pēc otras kārtas, līknes punktā $M = x \mid y$. Šo rinķi sauc par oskulacijas riņķi. Diferencējam riņķa nolīdzinājumu divas reizes attiecībā uz $\xi$

$$(\xi - x) + (\eta - \beta)\,\eta' = 0. \tag{3}$$

$$1 + \eta'^2 + (\eta - \beta)\,\eta'' = 0. \tag{4}$$

Ja riņķis pieskaras līknei (1) pēc otras kārtas punktā $M = x \mid y$, tad pieskaršanās punktā jābūt:

$$\xi = x; \quad \eta = y; \quad \eta' = y' \quad \eta'' = y''$$

Ievietojot šīs vērtības nolīdzinājumos (2), (3), (4), dabūjam:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \gamma^2. \tag{2a}$$

$$(x - \alpha) + (y - \beta)\,y' = 0. \tag{3a}$$

$$1 + y'^2 + (y - \beta)\,y'' = 0. \tag{4a}$$

No šiem trim nolīdzinājumiem dabūjam oskulacijas riņķa centra koordinatas $\alpha$, $\beta$ un radiusu $\gamma$.

$$\beta = y + \frac{1 + y'^2}{y''};$$

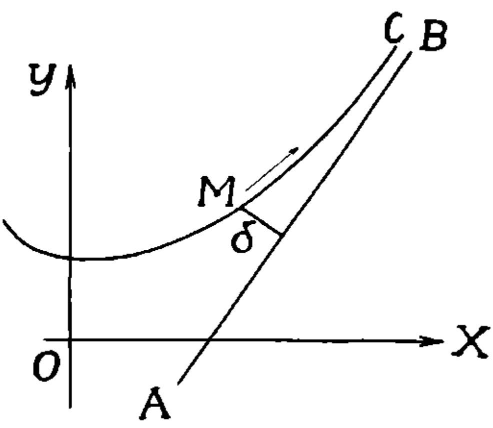
$$\alpha = x - \frac{(1 + y'^2)\,y'}{y''};$$

$$\gamma = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''};$$

Salīdzinot šis izteiksmes ar līknes liekuma radiusa un liekuma centra koordiuatām [68], redzam, ka oskulacijas riņķis ir arī lieces riņķis. Oskulacijas riņķi sauc arī par p i e s l e j a s r i ņ ķ i.

**77. Asimptotas.** a) a s i m p t o t a s o r t o g o n a l ā s k o o r d i n a t ā s.

Ja līknes nolīdzinājumā vai $y$, vai arī abas koordinatas var būt $\infty$, tad saka, ka līknei ir (viens vai arī vairāki) b e z g a l ī g i t ā l i p u n k t i, vai arī: l ī k n e i e t b e z g a l ī b ā.



Zīm. 55.

P a r l ī k n e s b e z g a l ī g a z a r a a s i m p t o t u s a u c t ā d u t a i s n i, n o k u r a s a t t ā l u m s $\delta$ l ī d z k ā d a m l ī k n i a p t e k o š a m p u n k t a m $M$ t i e c a s u z 0.

Taisne $AB$ (zīm. 56.) ir dotās līknes asimptota, jo $\delta \to 0$, kad $M$ kustas pa līkni virzienā no $M$ uz $C$.

Uz šī definējuma pamata var pierādīt: j a l ī k n e s n o l ī d z i n ā j u m s i r

$$y = \alpha + \beta x + \qquad (1)$$

k u r $v$ i r k ā d a f u n k c i j a n o $x$ u n $\lim\limits_{x \to \infty} \quad = 0$, t a d š ī s l ī k n e s a s i m p t o t a i r

$$y = \alpha + \beta x. \qquad (2)$$

P i e r ā d i j u m s:

Taisnes (2) attālums $\delta$ no kāda punkta $x|y$ ir

$$\delta = \frac{y - \alpha - \beta x}{\sqrt{\beta^2 + 1}}. \qquad (3)$$

Ja punkts $x|y$ atrodas uz līknes (1), tad tas izpilda nolīdzinājumu (1). Nolīdzinājumā (3) tādēļ, saskaņā ar (1), varam $y$ aizvietot ar $\alpha + \beta x + v$; tā tad

$$\delta = \frac{\alpha + \beta x + v - \alpha - \beta x}{\sqrt{\beta^2 + 1}} = \frac{v}{\sqrt{\beta^2 + 1}}. \qquad (4)$$

Tālāk:

$$\lim_{x\to\infty} \delta = \lim_{x\to\infty} \frac{v}{\sqrt{\beta^2 + 1}}.$$

Bet tā kā, saskaņā ar pieņēmumu, $\lim\limits_{x\to\infty} v = 0$, tad

$$\lim_{x\to\infty} \delta = 0.$$

Tas nozīmē, ka taisne

$$y = \alpha +$$

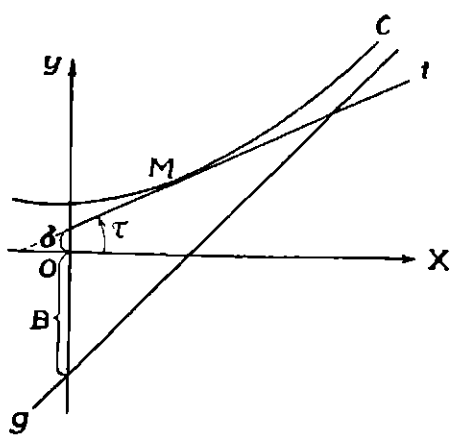
ir līknes

$$y = \alpha + \beta x +$$

asimptota.

Līknes asimptotu definē arī šādi:

Līknes asimptota $g$ ir līknes pieskares $t$ robežstāvoklis, ko tā ieņem, ja pieskaršanās punkts $M$ iet bezgalībā virzienā no $M$ uz $C$. (Zīm. 57.)




Zīm. 57.

Līknes pieskares nolīdzinājums punktā $M = x \mid y$ ir:

$$\eta - y = y'(\xi - x);$$
$$\eta = y'\xi + (y - y'x).$$

Ja asimptotas nolīdzinājums ir

$$\eta = A\xi + B, \qquad (5)$$

tad no šī definējuma dabūjam:

$$A = \lim_{x\to\infty} y'; \quad B = \lim_{x\to\infty} (y - y'x). \qquad (6)$$

Piemērs.

$$xy - \alpha x^2 - \beta x = a.$$

$$y = \alpha x + \beta + \frac{a}{x};$$

$$y' = \alpha - \frac{a}{x^2};$$

$$A = \lim_{x \to \infty} y' = \lim_{x \to \infty}\left(a - \frac{a}{x^2}\right) = a;$$

$$B = \lim_{x \to \infty}(y - y'x) = \lim_{x \to \infty}\left[ax + \beta + \frac{a}{x} - x\left(a - \frac{a}{x^2}\right)\right] = \lim_{x \to \infty}\left(\beta + \frac{2a}{x}\right) = \beta.$$

$$B = \beta.$$

Tā tad dotās līknes asimptotas nolīdzinājums ir

$$\eta = a\xi + \beta.$$

Ja līknes nolīdzinājums ir

$$y = f(x)$$

un ar $x = a$ funkcija $f(a) = \infty$, tad taisne $x = a$ ir dotās līknes asimptota.

Vispārējs paņēmiens līknės asimptotu noteikšanai, kas paralelas koordinatu asīm, ir šāds:

Ja līknes nolīdzinājums ir alģebrisks, tad to sakārtojam pēc dilstošām $y$ kāpēm:

$$y^m \varphi(x) + y^{m-1}\varphi_1(x) + y^{m-2}\varphi_2(x) + \qquad = 0. \qquad (7)$$

Dalam ar $y^m$:

$$\varphi(x) + \frac{\varphi_1(x)}{y} + \frac{\varphi_2(x)}{y^2} + \qquad = 0. \qquad (7^a)$$

Šis nolīdzinājums ir izpildīts, ja

$$\varphi(x) = 0 \quad \text{un} \quad y = \infty.$$

Tā tad:

Ordinatu asij paralelu asimptotu abscisas jāmeklē nolīdzinājuma

$$\varphi(x) = 0 \qquad (8)$$

saknēs.

Piemērs.

$$y^2(x^2 - 1) + 2x^2y + x^3 - 1 = 0.$$

Še

$$\varphi(x) = x^2 - 1.$$

Tā tad ar

$$x_1 = 1 \quad \text{un} \quad x_2 = -1$$

dotai līknei ir asimptotas paralelas $y$ asij.

Lai dabūtu līknes asimptotas, kas paralelas $x$ asij, nolīdzinājuma polinoms jāsakārto pēc dilstošām $x$ kāpēm:

$$x^m\psi(y) + x^{m-1}\psi_1(y) + \quad = 0. \tag{9}$$

Dalam ar $x^m$:

$$\psi(y) + \frac{\psi_1(y)}{x} + \frac{\psi_2(y)}{x^2} + \quad = 0. \tag{9a}$$

Šis nolīdzinājums ir izpildīts ar $\psi(y) = 0$ un $x = \infty$. Nolīdzinājuma

$$\psi(y) = 0 \tag{10}$$

saknes dod līknes asimptotas, paralelas $x$ asij.

Augšējā piemērā līknes nolīdzinājumu sakārtojot pēc dilstošām $x$ kāpēm, dabūjam:

$$x^2(y^2 + 2y + 1) - y^2 + 1 = 0.$$

Še

$$\psi(y) = y^2 + 2y + 1 = (y + 1)^2 = 0$$

dod

$$y = -1.$$

Šis nolīdzinājums dod meklēto asimptotu.

Sakne $y = -1$ jāskaita dubulti.

Alģebriskām līknēm var dabūt asimptotas, kas nav paralelas $y$ asij ar šādu paņēmienu:

Pieņemam, ka līknes nolīdzinājums ir

$$F(x, y) = 0 \tag{11}$$

un asimptotas nolīdzinājums

$$y = mx + b \tag{12}$$

kur $m$ un $b$ nezinami.

Krustojam līkni $F(x, y) = 0$ ar taisni caur koordinātu sākumu:

$$y = mx. \tag{13}$$

Ievedot (13) līknes nolīdzinājumā (11), dabūjam

$$F(x, mx) = 0. \tag{14}$$

No šī nolīdzinājuma varam dabūt krustpunkta abscisu, ja taisnes virziena koeficients $m$ ir dots; bet ja krustpunkta abscisa ir dota, tad varam dabūt taisnes (13) virziena koeficientu. Šinī gadijumā pieņemam, ka krustpunkta koordinata $x = \infty$. Ar nolīdzinājumu (14) tad dabūjam $m$. Taisne

$$y = mx$$

ar šādi noteiktu $m$ iet caur koordinatu sākumu uz līknes bezgalīgi tālo punktu un tādēļ ir paralela meklētai asimptotai. Tā tad $m$ noteic asimptotas virziena koeficientu.

Ievedot līknes nolīdzinājumā (11)

$$y = mx + b$$

dabūjam:

$$F(x, (mx + b)) = 0.$$

Še $m$ ir zinams. Liekot $x = \infty$, ar nolīdzinājumu dabūjam arī asimptotas nogriezni $b$ uz $y$ ass.

P i e m ē r s.

$$x^3 - 3axy + y^3 = 0; \tag{15}$$

Līkne pēc šī nolīdzinājuma attēlo Dekarta lapu.

Ievedam nolīdzinājumā (15)

$$y = mx.$$

Tad dabūjam:

$$x^3 - 3amx^2 + m^3x^3 = 0;$$

dalam ar $x^3$, tad:

$$1 - \frac{3am}{x} + m^3 = 0.$$

Liekot $x = \infty$, dabūjam:

$$1 + m^3 = 0.$$

Šī nolīdzinājuma realā sakne ir

$$m = -1.$$

Liekam nolīdzinājumā (15)

$$y = -1 \quad x + b.$$

$$x^3 - 3ax\,(-x + b) + (-x + b)^3 = 0$$

$$3ax^2 - 3axb + 3bx^2 - 3b^2x + b^3 = 0.$$

Dalot ar $x^2$ dabūjam

$$3a - \frac{3ab}{x} + 3b - \frac{3b^2}{x} + \frac{b^3}{x^2} = 0.$$

Liekot $x = \infty$, dabūjam:

$$3a + 3b = 0;$$
$$b = -a.$$

Ievedot vertības $m = -1$ un $b = -a$ nolīdzinājumā

$$y = mx + b$$

dabūjam asimptotas nolīdzinājumu

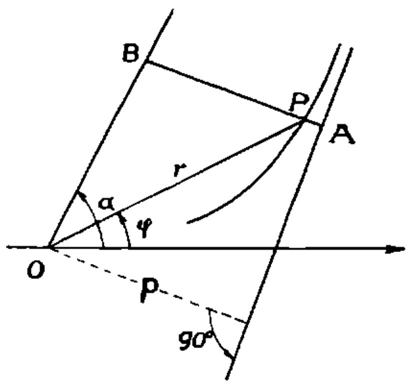
$$y = -x - a.$$

β) Asimptotas nolīdzinājums polarkoordinatās. Līkne dota ar nolīdzinājumu

$$r = f(\varphi) \qquad (1)$$

Ja nolīdzinājumā (1) ar $\varphi = \alpha$, dabūjam $r = \infty$, tad ar leņķi $\alpha$ dots līknes (1) asimptotiskais virziens (zīm. 58.)

Asimptotas attālums no pola $O$ ir



Zīm. 58.

$$p = AB = AP + PB \qquad (2)$$
$$PB = r \sin(\alpha - \varphi);$$

tā tad

$$p = AP + r \sin(\alpha - \varphi). \qquad (2^a)$$

Ja $r \to \infty$, $\varphi \to \alpha$, tad $AP \to 0$ un $PB \to p$; tā tad

$$p = \lim_{\varphi \to \alpha} [r \sin(\alpha - \varphi)]. \qquad (3)$$

Ja $\alpha - \varphi > 0$ un $r > 0$, tad arī $p > 0$, t. i. atrodas pa labo roku vērotājam, kas punktā $O$ skatas $r$ virzienā.

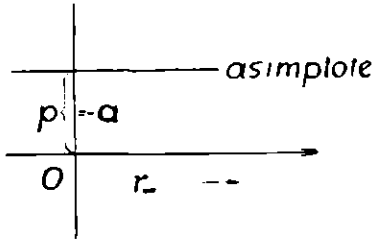
Ja $\alpha - \varphi < 0$ un $r > 0$, tad $p < 0$.

Piemērs.

$$r = \frac{a}{\varphi}. \qquad \text{(hiperboliska spirale, zīm. 59)}$$

Še ar

$$\varphi = 0 \text{ dabūjam } r = \infty .$$




Zīm. 59.

Tā tad $a = 0$ un asimptota iet polarass virzienā.

$$p = \lim_{\varphi \to a} [r \sin (a - \varphi)] =$$

$$= \lim_{\varphi \to 0} [r \sin (0 - \varphi)] =$$

$$= \lim_{\varphi \to 0} \left( \frac{a}{\varphi} \sin(-\varphi) \right) = - \lim_{\varphi \to 0} \left( \frac{a \sin \varphi}{\varphi} \right);$$

$$p = - a$$

**78. Spirales.** 1) Archimeda spirales nolīdzinājums ir

$$r = a\varphi. \tag{1}$$

Ja $\varphi = 0$, tad $r = 0$; ar $\varphi = \infty$ $= \infty$. Līkne iet caur $O$ punktu un tai ir $\infty$ tāli punkti. Ja

$$r_{\varphi} = a\varphi$$

un

$$r_{\varphi + 2\pi} = a(\varphi + 2\pi),$$

tad

$$r_{\varphi+2\pi} - r_{\varphi} = a(\varphi + 2\pi) - a\varphi = a2\pi;$$

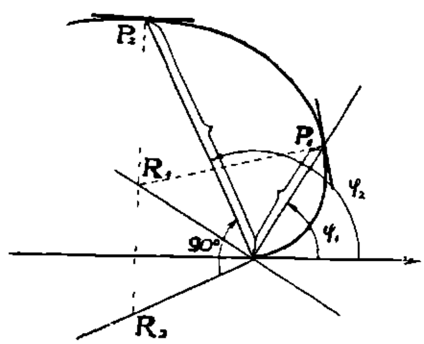
bet arī

$$r_{\varphi+4\pi} - r_{\varphi+2\pi} = a\,2\pi.$$

Līkne vijas ap $O$ punktu un vijumu atstatums ir $a\,2\pi$. Tā kā

$$r' = a,$$

tad līknes subnormale ir pastāvīgs lielums. Ja $\varphi_1 = 1$, tad $r = a$. Līknes konstrukcija ieskatama zīmējumā 60.




Zīm. 60.

Ja $\widehat{\varphi}_1 = 57^0.26$, tad $r_1 = a$; ar $\widehat{\varphi}_2 = 2\widehat{\varphi}_1$ $r_2 = 2r_1$ u. t. t. Līknes punktos varam zīmēt pieskares ievērojot, ka subnormale ir $a$. Tā piem., punktā $P_2$ dabūjam pieskari šādi:

Nogriežam $OR_2 = a$, tad $OR_2$ ir punkta $P_2$ subnormale. Līknes pieskare punktā $P_2$ ir $R_2P_2$. $O$ punktā līkne pieskaras polarasij.

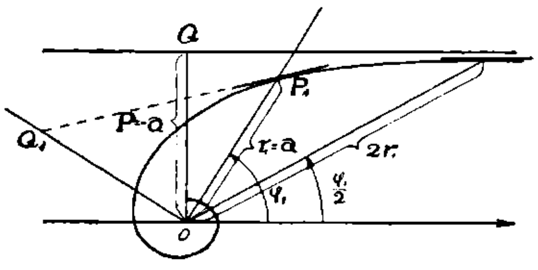
2) Hiperboliskās spirales nolīdzinājums ir

$$r = \frac{a}{\varphi}.$$

Tā kā ar $\varphi = 0$, $r = \infty$, tad redzam, ka **asimptotiskais leņķis** ir $\alpha = 0$. Līknes asimptota iet paraleli polarasij un, kā jau agrāk redzējām [77],

$$p = -a.$$

Tā kā ar $\varphi = \infty$, $r = 0$, tad redzam, ka līkne vijas $\infty$ daudzos vijienos ap 0 punktu. Agrāk jau redzējām, ka šis līknes subtangente ir $-a$.




Zīm. 61.

Ja leņķis $\varphi_1 = 57^0.26$, tad loks $\varphi_1 = 1$ un

$$r_1 = a.$$

$OQ_1$ ir punkta $P_1$ subtangente $= -a$;

$$OQ = p = -a$$

(zīm. 61.).

3) Logaritmiskās spirales nolīdzinājums ir

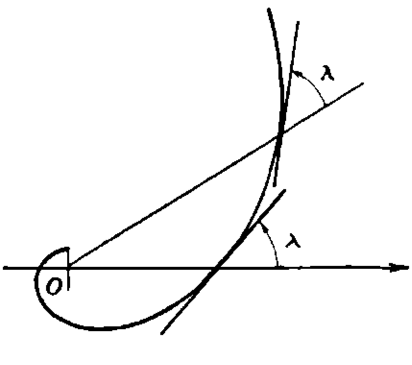
$$r = ae^{m\varphi}.$$

Ja $\varphi = \infty$; arī $r = \infty$ tā tad līkne iet ap polu $O$ leņķiem pieaugot arvienu paplašinātos vijienos. Ar $\varphi = -\infty$ $r = 0$; tā tad līkne leņķim $\varphi$ dilstot arī vijas ap polu $O$, bet vijieni sašaurinās.

$$r' = am\, e^{m\varphi}.$$

Tā kā

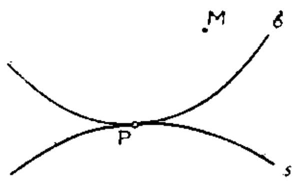
$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{r}{r'} = \frac{1}{m} = const.,$$




Zīm. 62.

tad līkne krusto katru radiusu vektoru, veidojot ar to pastāvīgu leņķi $\lambda$ (zīm. 62.).

**79. Cikloidas.** Plašu līkņu kategoriju sastāda novelšanās līknes. Tās veido zemāk aprakstītā kārtā.



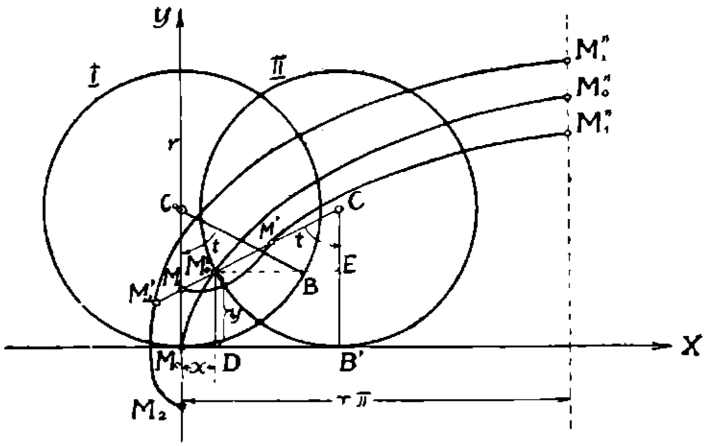
Zīm. 63.

Plāknē atrodas nekustīga līkne $s$ (zīm. 63.). Šinī plāksnē atrodas arī otra līkne $\sigma$, kas pieskaras līknei $s$ punktā $P$. Ar līkni $\sigma$ nekustīgi saistīts punkts $M$.

Ja līkne $\sigma$ veļas plāknē pa līkni $s$, tad punkts $M$ kustas kopā ar līkni $\sigma$ un veido jaunu līkni. Punktu $P$ sauc par momentano polu; līkni $s$ sauc par pola ceļu; līkni $\sigma$ — par pola līkni, līkni, ko veido punkts $M$ sauc par novelšanās līkni.

Novelšanās līknes ir svarīgas technikā, jo tās lieto mechanismu teorijā un konstrukcijā.

Ja pola ceļa līkne ir taisne un pola līkne — riņķis, tad punkti $M_0$, $M_1$, $M_2$ (zīm. 64.) veido līknes, ko sauc par cikloidām. Ja pola ceļa līkne ir riņķis un pola līkne arī rinķis, tad ar punktiem $M_0$, $M_1$, $M_2$ veidotās līknes sauc par trochoidām vai arī cikloidām, pie



Zīm. 64.

kam, ja riņķi atrodas viens ārpus otra, tad veidotās līknes sauc par epicikloidām; ja viens riņķis atrodas otrā, tad par hipocikloidām.

1) Cikloidas. Ja rinķis I (zīm. 64.) noveldamies uz $x$ ass ieņem stāvokli II, tad riņķa punkts $B$ isņem stāvokli $B'$ un

$$M_0B' = rt.$$

Novelšanās leņķis ir $t$. Punkts $M_0$ ieņem vietu $M_0'$. Še pastāv sakari:

$$\measuredangle M_0C_0B = \measuredangle M_0'CB'.$$

Veidotās līknes punkta $M_0'$ koordinatas $x$ un $y$ ir

$$= M_0D = M_0B' - DB'; \quad y = r - CE;$$

vai

$$\left.\begin{aligned} x &= rt - r\sin t \\ y &= r - r\cos t \end{aligned}\right\}. \tag{1}$$

Izteiksmes (1) dod līknes $M_0\ M_0'\ M_0''$ nolīdzinājumu. Šo līkni sauc par vienkāršu cikloidu.

Punkts $M_2$ veido līkni $M_2\ M'\ M_2''$, ko sauc par pagarinātu cikloidu.

Punkts $M_1$ veido līkni $M_1\ M_1'\ M_1''$, ko sauc par saīsinātu cikloidu.

Ja apzīmējam $C_0M_2$ ar $a$, tad, kā redzam zīmējumā

$$\left.\begin{aligned} x &= rt - a\sin t \\ y &= r - a\cos t \end{aligned}\right\}. \tag{2}$$

Šie divi nolīdzinājumi dod parametriskā veidā kā saīsināto, tā arī pagarināto un vienkāršo cikloidu, un proti:

ja $a = r$, tad dabūjam vienkāršo cikloidu;

ja $a < r$, tad saīsināto un

ja $a > r$ tad pagarināto cikloidu.

Šīs līknes ir simetriskas pret ordinatu asi un tāpat pret ordinatu, kad $x = r\pi$.

2) Epicikloidas. Ja riņķis $K$ noveļas ārpusē uz riņķa $K_0$ (zīm. 65.), tad dabūjam līknes, ko sauc par epicikloidām.
Ja riņķim $K$ noveļoties uz riņķa $K_0$, riņķa $K$ punkts $M_0$ nonāk punktā $M_0'$, tad

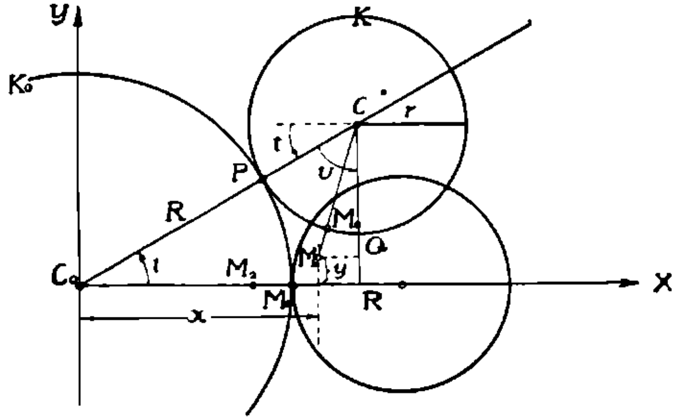
$$Rt = ru$$

un

$$u = \frac{Rt}{r}. \tag{1}$$

Kā redzam (zīm. 65.), apzīmējot $CM_2' = a$, dabūjam punkta $M_2'$ koordinatas:

$$x = C_0R - M_2'Q = (R + r)\cos t - a\cos(t + u);$$
$$y = CR \quad CQ = (R + r)\sin t - a\sin(t + u).$$




Zīm. 65.

Ievedot $u$ izteiksmi no (1) dabūjam:

$$\left.\begin{aligned} x &= (R + r)\cos t - a\cos\frac{R + r}{r}t \\ y &= (R + r)\sin t - a\sin\frac{R + r}{r}t \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Nolīdzinājumi (2) dod:

ar $a = r$ vienkāršo epicikloidu
„ $a < r$ saīsināto „
„ $a > r$ pagarināto „

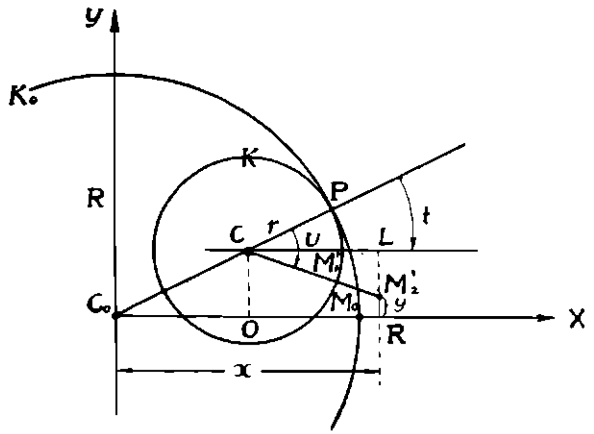
Ja $\frac{R}{r}$ ir racionals skaitlis, tad riņķis $K$ pēc zinama novelšanās skaita atgriežas izejas vietā un cikloidai ir galīgs vienlīdzīgu zaru skaits. Ja turpretim $\frac{R}{r}$ ir iracionals skaitlis, tad tas nekad nenotiek. Var pierādīt, ka pirmajā gadijumā epicikloidas ir alģebriskas un pēdējā — transcendentas līknes.

Ja $R = r = a$, tad šādu epicikloidu sauc par kardioidu.

Kardioidas nolīdzinājums ir:

$$\left.\begin{aligned} x &= 2a \cos t - a \cos 2t \\ y &= 2a \sin t - a \sin 2t \end{aligned}\right\}$$

3. **H i p o c i k l o i d a s.** Ja riņķis $K$ novelas uz riņķa $K_0$ iekšpusē, tad veidotās līknes sauc (zīm. 66) par h i p o c i k l o i d ā m.




Zīm. 66.

Sākuma stāvoklī riņķa $K$ centrs $C$ atradās uz $x$ ass un punkts $M_0'$ sakrīt ar punktu $M_0$, tādēļ

$$\widehat{PM_0'} = \widehat{PM_0}$$

$$ru = Rt$$

un

$$u = \frac{Rt}{r}. \tag{1ª}$$

Ar $CM_2' = a$ dabūjam:

$$x = C_0O + OR = (R - r) \cos t + a \cos (u - t)$$
$$y = CO - LM_2' = (R - r) \sin t - a \sin (u - t).$$

Ievedot $u$ izteiksmi no (1ª) dabūjam:

$$\left.\begin{aligned} x &= (R - r) \cos t + a \cos \frac{R - r}{r}\, t \\ y &= (R - r) \sin t \quad a \sin \frac{R - r}{r}\, t \end{aligned}\right\} \tag{2ª}$$

Nolīdzinājumi dod hipocikloidas:

ar $a = r$ vienkāršo hipocikloidu
„ $a < r$ saīsināto „
„ $a > r$ pagarināto „

Ja $r = \frac{R}{2}$, tad no ($2^a$) dabūjam:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{R}{2}\cos t + a\cos t = \left(\frac{R}{2} + a\right)\cos t \\ y &= \frac{R}{2}\sin t - a\sin t = \left(\frac{R}{2} - a\right)\sin t \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Šie divi nolīdzinājumi dod elipsi, kuras lielā pusass ir $\frac{R}{2} + a$ un mazā $\frac{R}{2} - a$.

Ja $a = r = \frac{R}{2}$, tad no (3) dabūjam:

$$x = R\cos t;$$
$$y = 0.$$

Šie pēdējie nolīdzinājumi dod taisni, kas sakrīt ar $x$ asi.

Līkni, ko dabūjam ieliekot hipocikloidas nolīdzinājumā ($2^a$)

$$a = r = \frac{R}{4}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{3}{4}R\cos t + \frac{R}{4}\cos 3t \\ y &= \frac{3}{4}R\sin t - \frac{R}{4}\sin 3t \end{aligned}\right\}$$

sauc par astroidu.

## Astotā nodaļa.

## Neatkarīgā mainīgā transformacija.

**80. Neatkarīgā mainīgā transformacija.** Pieņemam, ka kādā funkcionalā sakarā $x$ ir neatkarīgais un $y$ no $x$ atkarīgais mainīgais. Ievedam

$$x = \varphi(u), \tag{1}$$

tad arī $y$ un $y$ atvasinātās top par funkcijām no $u$. Še apskatam divus gadijumus:

I. Ir kaut kāda funkcija $y$ no $x$, kuras veids nav dots, bet tās atvasinātās $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ u. t. t. saistītas kādā izteiksmē.

Ar kādām izteiksmēm aizvietojami $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ u. t. t., ja ievedam

$$x = \varphi(u).$$

rāda sekojošais.

Ievērojot (1) redzam, ka $y$ tagad ir salikta funkcija no $u$, tādēļ, saskaņā ar [18].

$$\frac{dy}{du} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{du}. \tag{2}$$

No (2) dabūjam:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{du}}{\frac{dx}{du}}; \tag{3}$$

tā tad ievērojot (1)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{du}}{\varphi'(u)}. \tag{4}$$

Diferencējot (2) vēl reiz attiecībā uz $u$ dabūjam:

$$\frac{d^2y}{du^2} = \frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \frac{dy}{dx}\,\frac{d^2x}{du^2} \tag{5}$$

No šī nolīdzinājuma dabūjam:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d^2y}{du^2} - \frac{dy}{dx}\,\frac{d^2x}{du^2}}{\left(\frac{dx}{du}\right)^2}. \tag{6}$$

Ievietojot nolīdzinājumā (6), $\frac{dy}{dx}$ izteiksmi no (3), dabūjam;

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d^2y}{du^2} - \frac{\frac{dy}{du}}{\frac{dx}{du}}\,\frac{d^2x}{du^2}}{\left(\frac{dx}{du}\right)^2}$$

vai

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dx}{du}\,\frac{d^2y}{du^2} - \frac{dy}{du} \cdot \frac{d^2x}{du^2}}{\left(\frac{dx}{du}\right)^3}. \tag{7}$$

Ievērojot (1) redzam, ka

$$\frac{dx}{du} = \varphi'(u) \quad \text{un} \quad \frac{d^2x}{du^2} = \varphi''(u).$$

Ievietojot šīs izteiksmes nolīdzinājumā (7) dabūjam:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\varphi'(u)\dfrac{d^2y}{du^2} - \varphi''(u)\dfrac{dy}{du}}{[\varphi'(u)]^3} \tag{8}$$

Izteiksmes (4) un (8) ir uzdevuma atrisinājumi. Līdzīgā kārtā diferencējot (5) varam dabūt $\frac{d^3y}{dx^3}$ izteiksmi u. t. t.

P i e m ē r s.

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + n^2y = 0 \tag{$\alpha$}$$

Augšējais diferencialnolīdzinājums jāpārveido, ievedot jaunu neatkarīgo mainīgo $u$, liekot

$$x = e^u = \varphi(u) \tag{$\beta$}$$

Še

$$\varphi'(u) = e^u; \quad \varphi''(u) = e^u;$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{du}}{\varphi'(u)} = \frac{\dfrac{dy}{du}}{e^u}. \tag{$\gamma$}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\varphi'(u)\dfrac{d^2y}{du^2} - \varphi''(u)\dfrac{dy}{du}}{[\varphi'(u)]^3} = \frac{e^u\dfrac{d^2y}{du^2} - e^u\dfrac{dy}{du}}{(e^u)^3} = \frac{\dfrac{d^2y}{du^2} - \dfrac{dy}{du}}{e^{2u}} \tag{$\delta$}$$

Ievedot izteiksmes ($\beta$,) ($\gamma$), ($\delta$) nolīdzinājumā ($\alpha$) dabūjam:

$$e^{2u}\cdot\frac{\dfrac{d^2y}{du^2} - \dfrac{dy}{du}}{e^{2u}} + e^u\frac{\dfrac{dy}{du}}{e^u} + n^2y = 0$$

vai

$$\frac{d^2y}{du^2} + n^2y = 0.$$

Kā redzam, ar jauna mainīga ievešanu, diferencialnolīdzinājums ir daudz vienkāršāks.

II. Dota funkcija

$$y = f(x). \tag{1}$$

Ar nolīdzinājumu

$$x = \varphi(u) \tag{2}$$

ievedam jaunu neatkarīg umainīgo $u$. Kādu veidu šādā gadijumā dabū $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$?

Ka redzam

$$y = f[\varphi(u)] = \psi(u) \tag{3}$$

še $\psi(u)$ ir zinama funkcija no $u$.

Diferencējot (3), attiecībā uz $u$ dabūjam:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{du} &= \psi'(u) \\ \frac{d^2y}{du^2} &= \psi''(u) \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

ievietojot šīs vērtības I (4) un I (8) dabūjam:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\psi'(u)}{\varphi'(u)} \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{\varphi'(u)\,\psi''(u) - \varphi''(u)\psi'(u)}{[\varphi'(u)]^3} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Izteiksmes (5) dod jautājuma atrisinājumu.

Piemērs.

Elipses nolīdzinājumā

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} = f(x)$$

ievedot

$$x = a \sin u = \varphi(u) \tag{$\alpha$}$$

dabūjam:

$$y = b \cos u = \psi(u) \tag{$\beta$}$$

Nolīdzinājumi ($\alpha$) un ($\beta$) izteic elipses nolīdzinājumus parametriskā veidā.

$$\varphi(u) = a \sin u; \quad \varphi'(u) = a \cos u; \quad \varphi''(u) = -a \sin u;$$
$$\psi(u) = b \cos u; \quad \psi'(u) = -b \sin u; \quad \psi''(u) = -b \cos u.$$

Ievietojot šīs atvasinātās nolīdzinājumos (5) dabūjam:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}\operatorname{tg} u;$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b}{a^2\cos^3 u}.$$

Nolīdzinājumus (5) var rakstīt veidā:

$$\left.\begin{aligned} D_x y &= \frac{\psi'(u)}{\varphi'(u)} \\ D_x^2 y &= \frac{\varphi'(u)\psi''(u) - \varphi''(u)\psi'(u)}{[\varphi'(u)]^3} \end{aligned}\right\}. \qquad (5^a)$$

Reizinot pirmā ($5^a$) nolīdzinājuma labās puses skaitītāju un saucēju ar $du$ un otra nolīdzinājuma labās puses skaitītāju un saucēju ar $du^3$ dabūjam

$$\left.\begin{aligned} D_x y &= \frac{\psi'(u)\, du}{\varphi'(u)\, du} \\ D_x^2 y &= \frac{\varphi'(u)\,du\ \psi''(u)\,du^2 - \varphi''(u)\,du^2 \,.\, \psi'(u)\,du}{[\varphi'(u)\,du]^3} \end{aligned}\right\}. \qquad (5^b)$$

Bet

$$\varphi'(u)du = dx;\quad \varphi''(u)du^2 = d^2x;$$
$$\psi'(u)du = dy;\quad \psi''(u)du^2 = d^2y;$$

ievedot šīs izteiksmes nolīdzinājumos ($5^b$) dabūjam:

$$\left.\begin{aligned} D_x y &= \frac{dy}{dx} \\ D_x^2 y &= \frac{dx\ d^2y - d^2x\ dy}{dx^3} \end{aligned}\right\}. \qquad (5^c)$$

Nolīdzinājumu ($5^c$) labās puses jāuzskata kā diferencialu īsti kvocienti, pie kam šie diferenciali ir funkcijas no kāda pēc patikas izraudzīta neatkarīga mainīgā.

Šīs formulas lieto tad, kad $x$ un $y$ funkcionalā sakarā neatkarīgais mainīgais atstāts izvēlei. Gadijumi var būt šādi:

1) Ja $x$ ir neatkarīgais mainīgais, tad $d^2x = 0$, tad augšējās formulas dod

$$D_x = \frac{dy}{dx}$$

un

$$D_x^2 y = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

2) Ja $y$ ir neatkarīgais mainīgais, tad $d^2y = 0$ un

$$D_x y = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}};$$

$$D_x^2 y = -\frac{d^2x\, dy}{dx^3} = -\frac{\frac{d^2x}{dy^3}dy}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3} = -\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}.$$

Tā tad, ja ir kāds funkcionals sakars, starp $y$ un $x$, kur $x$ uzskatīts par neatkarīgo mainīgo, ja gribam $y$ ievest ka neatkarīgo mainīgo, tad jāieved

$$\frac{dy}{dx} \text{ vietā } \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

un

$$\frac{d^2y}{dx^2} \text{ vietā } -\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}.$$

Piemērs.

Kāda ir $\rho$ izteiksme, ja līknes nolīdzinājums dots parametriskā veidā?

Ja $y$ ir funkcija no $x$, tad

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Šinī izteiksmē, ievedot $\frac{dy}{dx}$ un $\frac{d^2y}{dx^2}$ izteiksmes no nolīdzinājumiem ($5^c$) dabūjam:

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{dx\, d^2y - d^2x\, dy}{dx^3}} = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\, d^2y - d^2x\, dy}.$$

Šinī formulā $dx$, $d^2x$, $dy$, $d^2y$ izteiksmes dabūjam no līknes parametriskiem nolīdzinājumiem.

Piemērs.

$$\left.\begin{aligned} x &= r(t - \sin t) \\ y &= r(1 - \cos t) \end{aligned}\right\} \text{(cikloida)}$$

$t$ ir parametrs.

Tad

$$dx = r(1 - \cos t)\,dt; \quad d^2x = r\sin t\; dt^2;$$

$$dy = r\sin t\; dt; \quad d^2y = r\cos dt^2.$$

Ievietojot šīs izteiksmes augšējā formulā dabūjam:

$$\rho = \frac{[r^2(1 - \cos t)^2 + r^2\sin^2 t]^{\frac{3}{2}}}{r(1-\cos t)(r\cos t) - r\sin t\;(r\sin t)} = \frac{r[1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t]^{\frac{3}{2}}}{\cos t - \cos^2 t - \sin^2 t} =$$

$$= \frac{r[2 - 2\cos t]^{\frac{3}{2}}}{-1 + \cos t}$$

$$\rho = \frac{r\,.\,2^{\frac{3}{2}}[(1 - \cos t)]^{\frac{3}{2}}}{-1 + \cos t} = -\frac{r\,.\,2^{\frac{3}{2}}[1-\cos t]^{\frac{3}{2}}}{1 - \cos t} = -2^{\frac{3}{2}}r(1-\cos 1)^{\frac{1}{2}}$$

Tā kā

$$1 - \cos t = 2\sin^2\frac{t}{2},$$

tad:

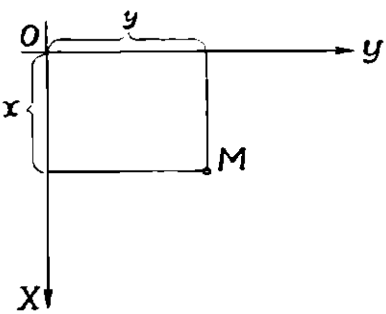
$$\rho = -2^{\frac{3}{2}}.\,r\left(2\sin^2\frac{t}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = -4r\sin\frac{t}{2}.$$

# Funkcijas ar vairākiem mainīgiem.

## Devītā nodaļa.

## Parcialās atvasinātās. Parcialie diferenciali. Totalais diferencials.

**81. Funkcijas ģeometriskā attēlošana. Robežvērtiba. Nepārtrauktība.** Pieņemam, ka $x$ un $y$ ir viens no otra neatkarīgi mainīgi lielumi. Šādu vērtību pāris $x|y$ noteic $xy$ plāknē punktu $M$ (zīm. 67.).



Zīm. 67.

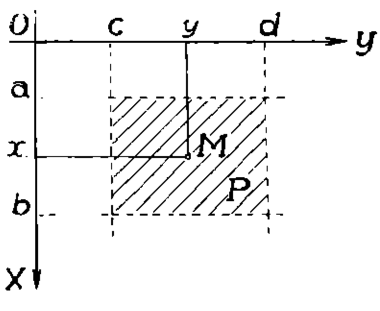
Ja punkts $M$ var $xy$ plāknē ieņemt kuru katru vietu, tad neatkarīgos mainīgos $x$ un $y$ sauc par neierobežotiem.

Ja $a < x < b$ un $c < y < d$, tad punkts $M$ (zīm. 68.) var ieņemt katru vietu svītrotā paralelogramā, izņemot tā malas; ja

$$a \leqslant x \leqslant b \quad \text{un} \quad c \leqslant y \leqslant d,$$

tad $M$ var ieņemt vietu arī uz paralelograma malām.

Šo paralelogramu $P$ sauc par vērtību pāra $x|y$ iecirkni.



Zīm. 68.

Vērtību pāra iecirknis var arī būt ierobežots ar likni. Ja rakstam

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 \leqslant r^2,$$

tad vērtību pāra $x|y$ iecirknis ir rinķis ar radiusu $r$ un centra koordinātām $\alpha$ un $\beta$ (zīm. 69.).

Šādos gadijumos saka, ka $x$ un $y$ ir ierobežoti mainīgi.

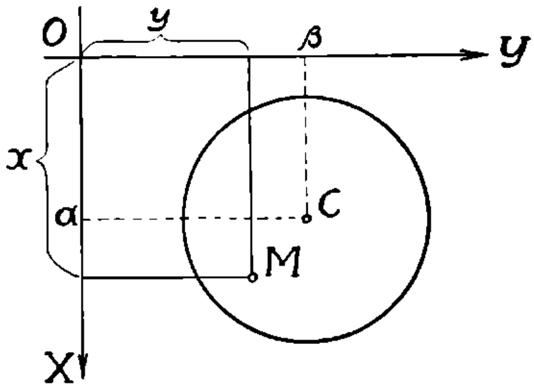
Ja katram vērtību pārim $x|y$ no iecirkņa $P$, piekārtota viena (vai arī vairākas) kāda trešā mainīgā $z$ noteikta vērtība, tad $z$ sauc par funkciju no $x$ un $y$ un raksta:

$$z = f(x, y).$$

$z$ sauc par no neatkarīgiem mainīgiem $x$ un $y$ **atkarīgu mainīgu.**

Piemērs.

$$z = f(x, y) = x + y + c.$$




Zīm. 69.

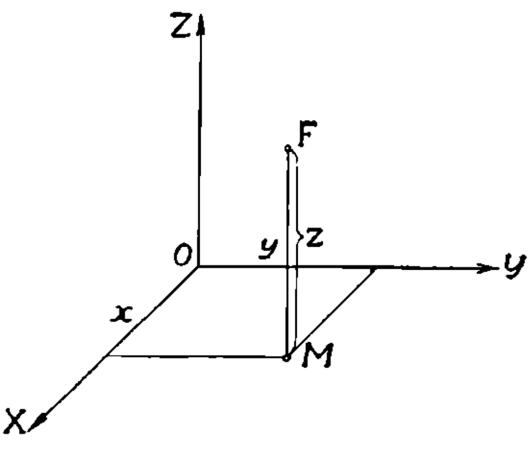
Še katram vērtību pārim $x, y$ atbilst viena noteikta $z$ vērtība. Funkciju $f(x, y)$ tādēļ sauc par **vienvērtīgu.**

Ja

$$z = \pm \sqrt{x^2 - y^2 - r^2},$$

tad katram vērtību pārim $x \mid y$ atbilst divas noteiktas $z$ vērtības. Šādu funkciju sauc par **divvērtīgu.** Var būt arī trīsvērtīgas u. t. t. funkcijas.

Ģeometriski $z$ vērtību, t. i. $f(x, y)$ atveido šādi (zīm. 70.) telpas ortogonalā koordinatu sistemā. Še pieņemta labās skrūves sistema Vērtību pāris $x \mid y$ dod punktu $M$ plāknē. Uz stāteņa punktā $M$ nogriežam $z$ vērtību un dabūjam telpā punktu $F$.




Zīm. 70.

Iecirkņa $P$ vērtību pāri $x_1 \mid y_1$, $x_2 \mid y_2$ u. t. t. dod telpā punktus $F_1$ $F_2$ u. t. t. Šie punkti vienkāršos gadijumos veido līku virsmu. Tā tad, izteiksmes

$$z = f(x, y)$$

ģeometrisks atveids vienkāršos gadijumos ir līka virsma.

Ja $\delta$ ir zinams pozitivs mazs lielums un

$$0 < |h| < \delta$$
$$0 < |k| < \delta,$$

tad vērtību pārus $(x+h, y+k)$ ar $h \neq 0$ un $k \neq 0$ sauc par vietas $x|y$ apkārtni. Šī apkārtne tā tad ir kvadrats ar malu $2\delta$ un centru $x|y$.

Ja neatkarīgi viens no otra $x \to a$ un $y \to b$, tad mainīgais punkts $x \mid y$ kaut kādā ceļā tiecas uz nekustīgo punktu $a \mid b$. To apzīmē:

$$(x, y) \to (a, b),$$

vai arī

$$\lim (x, y) = (a, b).$$

Lai tas notiktu, jābūt izpildītam nepieciešamam un pietiekamam noteikumam

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 \to 0.$$

Ja

$$(x, y) \to (a, b)$$

un

$$f(x, y) \to G,$$

tad saka, ka vietā $(a, b)$ funkcijas $f(x, y)$ robeža ir $G$.

To pašu izteic arī

$$\lim_{(x, y) \to (a, b)} f(x, y) = G.$$

Precizāk augšējo izteic sekojoši: funkcijas $f(x, y)$ robežvērtība vietā $(a, b)$ ir vērtība $G$, ja pieņemot, pēc patikas, mazu pozitivu skaitli $\varepsilon$, varam atrast citu pozitivu skaitli $\delta$, tādu kā

$$f(x, y) - G \qquad \varepsilon$$

visām vērtībām

$$0 < \quad x - a \quad < \delta \quad \text{un} \quad 0 < |y - b| < \delta,$$

pie kam $\delta$ ir atkarīgs no $\varepsilon$. Funkcijas $f(x, y)$ vērtību, ko dabūjam ievietojot $x$ vietā $a$ un $y$ vietā $b$, t. i. $f(a, b)$ sauc par funkcijas $f(x, y)$ ievietošanas vērtību vietā $(a, b)$; tā var būt noteikts skaitlis $A$, arī $\infty$, vai kāda nenoteikta vērtība.

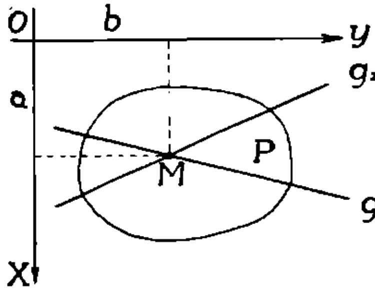
Ja funkcijai $f(x, y)$ vietā $(a, b)$ ir noteikta vērtība $A$, ja vietā $(a, b)$ funkcijas $f(x, y)$ robežvērtība $G$ arī ir noteikta un ja pie tam vērtība $A$ nolīdzinās robežvērtībai $G$, tad funkcija $f(x, y)$ ir nepārtraukta vietā $(a, b)$. To izteic arī šādā veidā:

Funkcija $f(x, y)$ ir nepārtraukta vietā $(a, b)$, ja pieņemot, pēc patikas, mazu pozitivu skaitli $\varepsilon$, varam atrast citu pozitivu skaitli $\delta$, tādu kā

$$| f(x, y) - f(a, b) | < \varepsilon$$

visām vērtībām

$$| x - a | < \delta \text{ un } | y - b | < \delta.$$



Zīm. 72.

Funkcija $f(x, y)$ ir nepārtraukta iecirknī $P$, ja tā ir nepārtraukta visās iecirkņa $P$ vietās.

Gar kādu taisni $g$ $f(x, y)$ ir funkcija tikai no $x$. Ja visos šīs taisnes punktos iecirknī $P$ funkcija $f(x, y)$ ir nepārtraukta, tad saka, ka $f(x, y)$ ir nepārtraukta gar šo taisni. Ja funkcija $f(x, y)$ ir nepārtraukta punktā $M = a \mid b$ (zīm. 72), ejot gar taisnēm $g_1$, $g_2$, $g_3$ u. t. t., tad tā ir nepārtraukta punktā $M$ tikai tad, ja funkcijai $f(a, b)$ ir viena un tā pati noteikta vērtība gar visām taisnēm caur $M$.

Piemērs.

$$f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

vietā $0 \mid 0$ dabūjam $f(0, 0) = \frac{0}{0}$, tā tad nenoteiktu vērtību.

Velkam caur punktu $0 \mid 0$ taisni

$$y = kx;$$

tad

$$f(x, kx) = \frac{2kx^2}{x^2(1 + k^2)} = \frac{2k}{1 + k^2}.$$

Šo vērtību funkcija patur kamēr $x^2 > 0$, bet ar $x = 0$ funkcijas vērtība ir $\frac{0}{0}$. Funkcija $f(x, kx)$ patur vērtību

$$\frac{2k}{1 + k^2}$$

arī tad, kad $x$ ir bezgalīgi tuvu 0. Tad, kā funkcijas $f(x, kx)$ vērtību vietā $x = 0$ varam pieņemt augsējo izteiksmi, un funkciju $f(x, y)$ gar taisni $y=kx$ varam uzskatīt par nepārtrauktu vietā $x=0$. Punktā $0|0$ funkcija $f(x, y)$ tomēr nav nepārtraukta, jo ar katru $k$ vērtību funkcija $f(x, kx)$ dabū citu robežvērtību, ja $x \to 0$ un šādā gadījumā nav iespējams atrast tādu punkta $0|0$ apkārtni, kur

$$|f(x, y) - f(0, 0)|$$

būtu pēc patikas mazs lielums pie visiem $x|y$ šinī apkārtnē, jo funkcijai $f(0, 0)$ nav noteiktas vērtības. Ja kādā iecirknī $f(x, y)$ ir nepārtraukta, tad tā ir nepārtraukta arī gar katru līniju šinī iecirknī.

**82. Parcialie diferencialkvocienti un parcialie diferenciali.** Dota funkcija

$$z = f(x, y),$$

kas iecirknī $P$ ir nepārtraukta. Ja pieņemam $y$ par pastāvīgu, tad apskatam $f(x, y)$ gar kādu $x$ asij paralelu taisni, kas krusto iecirkni $P$. Šādā gadījumā $f(x, y)$ ir funkcija no viena mainīgā $x$. Tās atvasināto attiecībā uz $x$ varam veidot, kā agrāk norādīts.

Ja dodam abscisai $x$ pieaugumu $\Delta x = h$, tad $z$ dabū pieaugumu

$$\Delta_x z = f(x + h, y) - f(x, y). \tag{1}$$

Rādītājs $x$ pie simbola $\Delta$ norāda, ka $z$ dabū pieaugumu tādēļ ka mainijies vienīgi $x$.

Ja izteiksmei

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

ir viena un noteikta robežvērtība, kad $h \to \pm 0$, tad vietai $x|y$ piekārtotā robežvērtība ir funkcijas $f(x, y)$ parciālā atvasinātā attiecībā uz $x$ vietā $x|y$. To apzīmē ar šādiem simboliem:

$$D_x f(x, y), \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, f'_x(x, y), \frac{\partial z}{\partial x}.$$

Tā tad

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{h \to \pm 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}. \tag{2}$$

Ja funkcijai $f(x,y)$ iecirkņa $P$ katrā vietā ir šāda atvasinātā, tad $f'_x(x, y)$ ir jauna funkcija iecirknī $P$, to sauc par funkcijas $f(x, y)$ parcialo atvasināto attiecībā uz $x$.

Ja parcialo atvasināto, attiecībā uz $x$, reizinam ar $\Delta x = dx$, tad saskaņā ar [28] dabūjam **p a r c i a l o d i f e r e n c i a l u** attiecībā uz $x$. Tā tad

$$d_x z = \frac{\partial z}{\partial x} dx. \tag{3}$$

Saskaņā ar agrāko par funkcijas pieaugumu, varam rakstīt:

$$\Delta_x z = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \varepsilon_1 h. \tag{4}$$

Tādā pat ceļā dabūjam funkcijas $f(x, y)$ **p a r c i a l o a t v a s i n ā t o**, attiecībā uz $y$, dodot $y$ pieaugumu $\Delta y = k$, tad

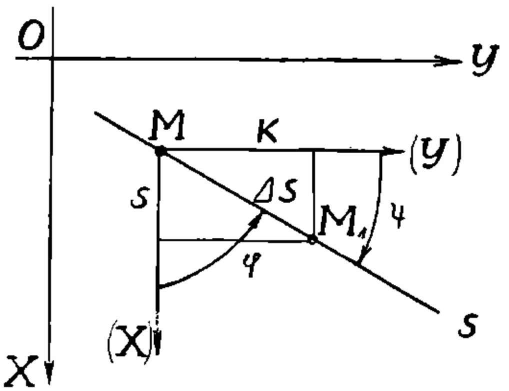
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{k \to \pm 0} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k} \tag{2a}$$

un **p a r c i a l o d i f e r e n c i a l u** attiecībā uz $y$

$$d_y z = \frac{\partial z}{\partial y} dy, \tag{3a}$$

kā arī

$$\Delta_y z = \frac{\partial z}{\partial y} dy + \varepsilon_2 k. \tag{4a}$$




Zim. 73.

**83. Totalais (pilnīgais) diferencialkvocients un totalais (pilnīgais) diferencials** Parcialos diferencialkvocientus, attiecībā uz $x$ un $y$, var uzskatīt, kā ņemtus $x$ un $y$ asu virzienā (zīm. 73.) Apskatīsim diferencialkvocientu pēc patikas izvēlētā virzienā $S$. Šinī gadijumā mainas abi mainīgie $x$ un $y$. Virzienu $MS$ uzskatam par pozitivu; tas veido ar $x$ asi leņķi $\varphi$ un ar $y$ asi leņķi $\psi$.

Punkta $M$ koordinatas ir $x \mid y$ un punkta $M_1$ koordinatas ir

$$x + h, \quad y + k.$$

Kā redzam

$$\frac{h}{\Delta s} = \cos \varphi; \quad \frac{k}{\Delta s} = \cos \psi. \tag{1}$$

Ja dodam abscisai $x$ pieaugumu $h$ un ordinatai $y$ pieaugumu $k$, tad $z$ dabū pieaugumu $\Delta z$, ko nosaucam par funkcijas $f(x, y)$ totalo pieaugumu vietā $x|y$. Tad

$$\Delta z = f(x + h, \ y + k) - f(x, y). \tag{2}$$

Šo izteiksmi pārveidojam:

$$\Delta z = f(x + h, \ y+k) - f(x, y + k) + f(x, y+k) - f(x, y), \tag{3}$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta s} = \frac{f(x+h, y+k) - f(x, y+k)}{h} \frac{h}{\Delta s} + \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k} \frac{k}{\Delta s} \tag{3ᵃ}$$

Ja $\Delta s \to 0$, tad arī $h \to 0$ un $k \to 0$, bet arvienu $\frac{h}{\Delta s} = \cos \varphi$ un $\frac{k}{\Delta s} = \cos \psi$.

Ja funkcijai $f(x, y)$ ir parciali diferencialkvocienti, attiecībā uz $x$ un $y$, tad

$$\lim_{h \to \pm 0} \frac{f(x + h, y + k) - f(x, y + k)}{h} = f'_x(x, y + k) \tag{4}$$

un

$$\lim_{k \to \pm 0} \frac{f(x, y + k) - f(x, y)}{k} = f'_y(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} \tag{5}$$

Ja $f'_x(x, y + k)$ ir nepārtraukta funkcija no $y$, tad

$$\lim_{k \to \pm 0, \ h \to \pm 0} \frac{f(x + h, y + k) - f(x, y + k)}{h} = f'_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x}. \tag{4ᵃ}$$

Ja $\Delta s \to 0$ un $h \to 0$, $k \to 0$, tad izteiksme (3ᵃ) tiecas uz robežvērtību

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial z}{\partial y} \cos \psi. \tag{6}$$

Šo izteiksmi sauc par funkcijas $f(x, y)$ totalo diferencialkvocientu, vai arī tās diferencialkvocientu virzienā $S$. Še pieņemts, ka vietā $x | y$: funkcija $f(x, y)$ ir nepārtraukta ka $f'_x$ ir nepārtraukta funkcija no $y$, vai arī kā viegli ieskatams, $f'_y$ nepārtraukta funkcija no $x$, jo izteiksmi (3) varam arī rakstīt:

$$\Delta z = f(x + h, y + k) - f(x + h, y) + f(x + h, y) - f(x, y).$$

Reizinot (6) ar $ds$ dabūjam:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \tag{7}$$

vai arī, ievērojot [82] (3) un (3ª)

$$dz = d_x z + d_y z. \tag{7ª}$$

Tā tad, $dz$ funkcijas $z = f(x, y)$ totalais diferencials **ir attiecīgo parcialo diferencialu summa.**

Starp funkcijas pieaugumu $\Delta z$ un funkcijas totalo diferencialu $dz$ pastāv sakars, ko dabūjam sekojoši. Ka redzējām:

$$\Delta z = f(x + h, y + k) \quad f(x, y + k) + f(x, y + k) - f(x, y).$$

Pieņemam ka $f'_x(x, y)$ un $f'_y(x, y)$ nepārtrauktas funkcijas no $x$ un $y$.

Pielietojot Lagranža teoremu dabūjam

$$f(x + h, y + k) - f(x, y + k) = hf'_x(\xi, y + k), \text{ kur } x \ldots \xi \ldots x + h \tag{8}$$

$$f(x, y + k), \quad - f(x, y) \quad = kf'_y(x, \eta), \quad \text{„} \quad y \ldots \eta \ldots y + k \tag{9}$$

kad $h \to 0$, tad $\xi \to x$; tādēļ

$$\lim_{(h, k) \to (0, 0)} f'_x(\xi, y + k) = f'_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} \tag{10}$$

Kad $k \to 0$, tad $\eta \to y$; tādēļ

$$\lim_{(h, k) \to (0, 0)} f'_y(x, \eta) = f'_y(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y}. \tag{11}$$

No (10) dabūjam:

$$f'_x(\xi, y + k) = f'_x(x, y) + \varepsilon_1; \quad [\text{še } \varepsilon_1 \to 0 \text{ kad } (h, k) \to (0, 0)] \tag{12}$$

Tāpat no (11) dabūjam:

$$f'_y(x, \eta) = f'_y(x, y) + \varepsilon_2; \quad [\text{še } \varepsilon_2 \to 0 \text{ kad } (h, k) \to (0, 0)] \tag{13}$$

Ievērojot (8), (9) (12), (13) dabūjam

$$f(x + h, y + k) - f(x, y + k) = h f'_x(x, y) + h\, \varepsilon_1$$

$$f(x, y + k) \quad - f(x, y) \quad = kf'_y(x, y) + k\, \varepsilon_2.$$

Tādēļ funkcijas pieaugums

$$\Delta z = f(x + h, y + k) - f(x, y + k) + f(x, y + k) - f(x, y) =$$
$$= hf'_x(x, y) + h\varepsilon_1 + kf'_y(x, y) + k\varepsilon_2 =$$
$$= hf'_x(x, y) + kf'_y(x, y) + h\varepsilon_1 + k\varepsilon_2,$$

vai arī

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy + h\varepsilon_1 + k\varepsilon_2,$$

un

$$\Delta z = dz + h\varepsilon_1 + k\varepsilon_2. \tag{14}$$

Formula (14) izteic meklēto sakaru starp $\Delta z$ un $dz$. $h\varepsilon_1$ un $k\varepsilon_2$ ir augstākās kārtas bezgalīgi mazi lielumi pret $dx$, $dy$ un $dz$.

Ja $h = dx$ un $k = dy$ ir ļoti mazi lielumi, tad

$$\Delta z \sim dz \tag{15}$$

Piemērs.

$$f(x, y) = \alpha x^3 + 3\beta x^2 y + 3\gamma xy^2 + \delta y^3.$$

Lai dabūtu parcialo atvasināto, attiecībā uz $x$, funkcija jādiferencē, uzskatot $y$ kā pastāvīgu lielumu; tad

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3\alpha x^2 + 6\beta xy + 3\gamma y^2$$

Līdzīgi dabūjam:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3\beta x^2 + 6\gamma xy + 3\delta y^2;$$

Parcialie diferenciali ir:

$$d_x z = \frac{\partial f}{\partial x}dx = (3\alpha x^2 + 6\beta xy + 3\gamma y^2)\,dx,$$
$$d_y z = \frac{\partial f}{\partial y}dy = (3\beta x^2 + 6\gamma xy + 3\delta y^2)\,dy,$$

totalais diferencials ir

$$dz = d_x z + d_y z = (3\alpha x^2 + 6\beta xy + 3\gamma y^2)dx + (3\beta x^2 + 6\gamma xy + 3\delta y^2)dy.$$

P i e m ē r s.

Taisnleņķu paralelograma malas ir $x$ un $y$ Par cik palielinas paralelograma laukums, ja palielinam malu $x$ par $h$ un $y$ par $k$, kur $h$ un $k$ ir mazi lielumi.

Apzīmējot laukuma vērtību ar $z$ dabūjam:

$$z = xy.$$

Laukuma pieaugums ir $\Delta z$, bet tā kā $h$ un $k$ ir mazi, tad, kā redzējām, $\Delta z$ varam tuvini atvietot ar funkcijas diferencialu $dz$. Tā kā

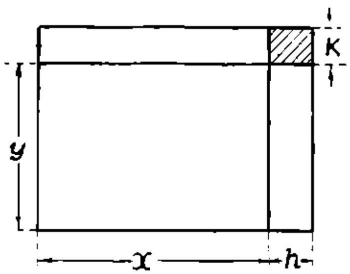
$$\frac{\partial f}{\partial x} = y; \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x;$$

tad:

$$\Delta z \sim dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = yh + xk.$$

Funkcijas īstais pieaugums ir:

$$\Delta z = f(x + h, y + k) - f(x, y) = (x + h)(y + k) - xy =$$
$$= xy + hy + kx + hk - xy = hy + kx + hk.$$



Zīm. 74.

Kā redzam,

$$\Delta z - dz = hk$$

ir otras kārtas mazs lielums. Šī starpība redzama grafiskā attēlojumā, kā svītrotais laukums. (Zīm. 74).

P i e m ē r s. Oma likumā

$$R = \frac{E}{J}.$$

$R$ — pretestība, $E$ — spraigums, $J$ — strāvas stiprums.

Ja mērījot $E$ un $J$ pielaistas kļūdas, $\Delta E$ un $\Delta J$, kas ir mazi lielumi, tad pielietojot formulu (15) dabūjam:

$$dR_E = \frac{\Delta E}{J}; \quad dR_J = -\frac{E}{J^2}\Delta J; \quad dR = dR_E + dR_J;$$

$$\Delta R \sim dR = \frac{J\Delta E - E\Delta J}{J^2}.$$

Tā kā zinama tikai mērīšanas kļūdu absolutā vērtība, tad augšējā formula dod kļūdas virsrobežu:

$$|\Delta R| = \frac{J|\Delta E| + E|\Delta J|}{J^2}$$

Ja

$$E = 110 \pm 2 \text{ volti un } J = 20 \pm 0.5 \text{ amp.,}$$

tad

$$|\Delta R| = \frac{20.2 + 110 \cdot 0.5}{400} = 0.2375 \text{ omu.}$$

Tā kā

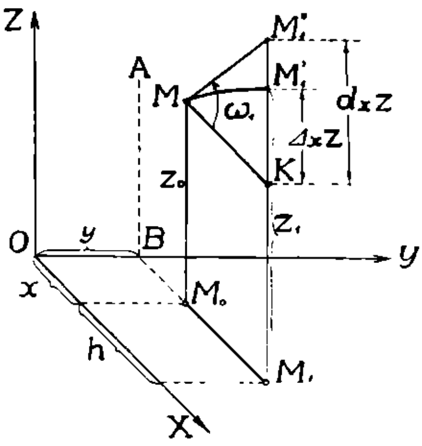
$$R = \frac{110}{20} = 5.5 \text{ omu,}$$

tad

$$R = 5.5 \pm 0.24 \text{ omu.}$$

Relativā kļūda

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{0.24}{5.5} = 0.044 = 4.4\%.$$



Zīm. 75.

**84. Parcialo atvasināto, parcialo un totalā diferencialu ģeometriskā nozīme.** Kā redzējām

$$z = f(x, y)$$

dod telpā līku virsmu. Ja $y$ pastāvīgs un mainas tikai   tad visi abscisām $x$ atbilstošie $z$ atrodas plāknē, kas ir $\perp$ pret $xy$ plākni un kuras pēdu līnijas ir $AB$ un $BM_1$ (zīm. 75). Šī plākne krusto virsmu $z = f(x, y)$ līknē $MM'_1$. Šis līknes abscisas ir $x$ un ordinatas
Ar mainīgu $x$, bet pastāvīgu $y$

$$z = f(x, y)$$

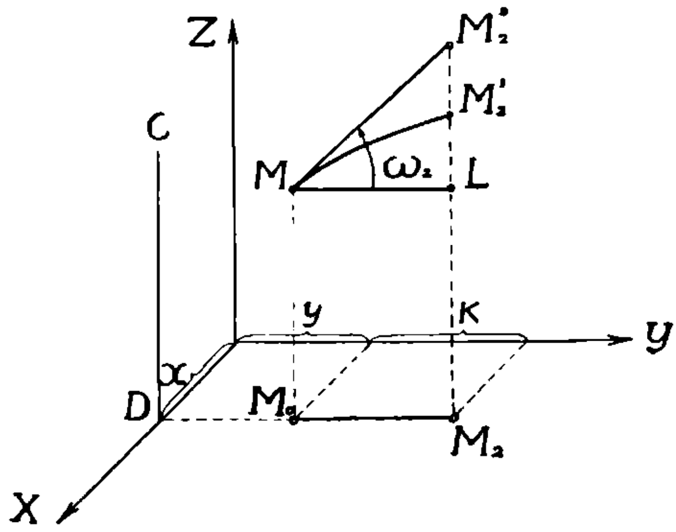
ir šis līknes nolīdzinājums. Kā redzam,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y) = \operatorname{tg} \omega_1,$$

$$\Delta_x z = KM'_1$$

$$d_x z = KM''_1$$

Tāpat ja $x$ pastāvīgs un $y$ mainīgs, tad $= f(x, y)$ dod līkni $MM'_2$ plāknē $CDM_2$ (zīm. 76).




Zīm. 76.

un

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y) = \operatorname{tg} \omega_2$$

$$\Delta_y z = LM'_2$$

$$d_y z = LM''_2.$$

Ja $x$ un $y$ abi ir mainīgi, tad $z = f(x, y)$ dod līku virsmu (zīm. 77). Stateniskai prizmai ar šķautnēm $\|$, $z$ asij pamats $xy$ plāknē ir $M_0M_1M_3M_2$, tā izgriež no līkās virsmas daļu $MM'_1M'_3M'_2$. Caur punktu $M$ velkam plākni $MKSL \parallel xy$ plāknei. $MM''_1$ ir pieskare līknei $MM'_1$ punktā $M$. $MM''_2$ ir pieskare līknei $MM'_2$ punktā $M$. Plākne $MM''_1M''_3M''_2$ tā tad ir pieskaru plāksne virsmai $z = f(x, y)$ punktā $M$.

Ievērojot agrāko, redzam, ka

$$KM''_1 = SS' = d_x z$$

$$LM''_2 = S'M''_3 = d_y z,$$

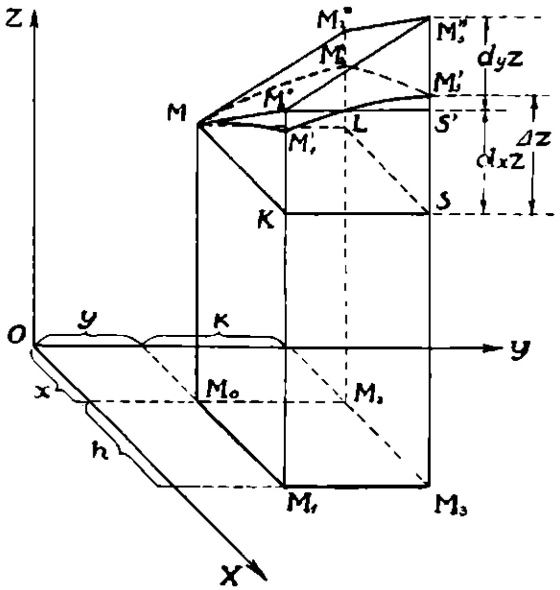
jo

$$\Delta MLM''_3 = \Delta M''_1 S' M''_3$$

Tā tad

$$SM''_3 = SS' + S'M''_3 = d_x z + d_y z = dz.$$

Zīmējums rāda: ja $x$ pieaug par $h$ un $y$ par $k$, tad $f(x + h, y + k)$ dod virsmas punktu $M'_3$.




Zīm. 77.

Virsmas punkta $M$, $z$ koordinata ir $M_0M$

„ $M'_3$, $z$ „ „ $M_3M'_3$.

Virsmas koordinatas $z$ pieaugums tā tad ir

$$\Delta z = f(x + h, y + k) - f(x, y) = M_3 M'_3 - M_3S = SM'_3.$$

Pieskaru plāknes $z$ koordinata punktā $M$ ir $M_0M$

„ „ $z$ „ „ $M''_3$ $z$ ir $M_3M''_3$.

tā tad

$$dz = d_x z + d_y z = M_3M''_3 - MM_0 \qquad \text{(jo } M_3S = MM_0\text{)}.$$

Tā tad: $\Delta z$ ir virsmas koordinatas pieaugums, kad pārejam no punkta $x \mid y$ uz punktu $x + h \mid y + k$ un totalais diferencials $dz$ ir punktā $x \mid y \mid z$ pievestās pieskaru plāknes $z$ koordinatas pieaugums, kad pārejam no punkta $x \mid y$ uz punktu $x + h \mid y + k$.

**85. Paplašinājums trijiem un vairākiem mainīgiem.** Ja $x$, $y$, $z$ apzīmē kāda punkta koordinatas un

$$u = f(x, y, z)$$

ir vienvērtīga un nepārtraukta funkcija kādā iecirknī $R$, (iecirknis $R$ ir kāds tilpums), tad ja $x$ dodam pieaugumu $h$, dabūjam:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{h \to \pm 0} \frac{f(x + h, y, z) - f(x, y, z)}{h} = f'_x(x, y, z).$$

Tāpat dabūjam:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f'_y(x, y, z) \quad \text{un} \quad \frac{\partial u}{\partial z} = f'_z(x, y, z).$$

Virziens $S$ tagad veido ar koordinatu asīm leņķus

$$\varphi, \psi, \omega.$$

Ja funkcijai $f(x, y, z)$ ir parcialās atvasinātās un ja tās arī ir nepārtrauktas, tad totalais diferencialkvocients virzienā $S$ ir

$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \psi + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \omega.$$

No šīs izteiksmes dabūjam pilnīgo diferencialu

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz,$$

vai arī:

$$du = d_x u + d_y u + d_z u.$$

Ja

$$u = f(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n) \quad \text{un} \quad n > 3,$$

tad izteiksmi attiecina uz $n$-dimensionalu telpu un, kā agrāk, dabū parcialās atvasinātās

$$\frac{\partial u}{\partial x_1};\ \frac{\partial u}{\partial x_2};\qquad \frac{\partial u}{\partial x_n}$$

Ja šīs atvasinātās ir nepārtrauktas, tad arī še

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2 + \qquad + \frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n.$$

Ja funkcija $u$ visā iecirknī $R$ ir pastāvīga tad tās atvasinātā $\frac{du}{ds}$ un diferencials ir visā iecirknī $= 0$. Tādēļ, ja

$$f(x_1,\ x_2,\qquad x_n) = 0,$$

tad

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \qquad + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n = 0.$$

## Desmitā nodaļa.

## Augstākās kārtas parcialie un totalie diferencialkvocienti un diferenciali.

**86. Augstākie parcialie diferencialkvocienti un diferenciali.** Pieņemam, ka $z = f(x, y)$ dota iecirknī $P$ kā nepārtraukta funkcija un tai šinī iecirknī ir nepārtraukta parciala atvasinātā $f'_x$, attiecībā uz $x$, tad atvasināto no $f'_x$ attiecībā uz $x$, ja $f'_x$ ir diferencējama, sauc par funkcijas $f(x, y)$ otro parcialo diferencialkvocientu vai otro parcialo atvasināto attiecībā uz $x$. To apzīmē ar simboliem:

$$D^2_x f(x,\ y);\quad \frac{\partial^2 f(x,\ y)}{\partial x^2};\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2};\quad f''_x(x, y);\ f_{xx}(x,\ y)$$

Tāpat definē otro atvasināto attiecībā uz $y$, ko apzīmē:

$$D^2_y f(x,\ y);\quad \frac{\partial^2 f(x,\ y)}{\partial y^2};\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2};\quad f''_y(x,\ y);\quad f_{yy}(x,\ y).$$

Ja $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}$ ir nepārtraukta funkcija no $x$ un diferencējama, tad tālāk diferencējot dabūjam

$$\frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x^3};$$

ja pievestie pieņēmumi pastāv arī tālāk, tad dabūjam:

$$\frac{\partial^4 f(x, y)}{\partial x^4}; \qquad \frac{\partial^n f(x, y)}{\partial x^n};$$

un tāpat

$$\frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial y^3}; \qquad \frac{\partial^n f(x, y)}{\partial y^n}.$$

Ja

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y)$$

ir nepārtraukta un diferencējama funkcija no $y$ iecirknī $P$, tad šo funkciju varam diferencēt attiecībā uz $y$. Šis diferencēšanas rezultatu sauc par funkcijas $f(x, y)$ otro parcialo atvasinato, attiecībā $x$ un $y$, un apzīmē ar simboliem:

$$f''_{xy}(x, y) = \frac{\partial f'_x(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}.$$

Tāpat ja attiecīgi izpildīti sākumā pieņemtie noteikumi, varam $\frac{\partial z}{\partial y}$ diferencēt attiecībā uz $x$ un rakstīt

$$f''_{yx}(x, y) = \frac{\partial f'_y(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}.$$

**87. Švarca teorema.** Ja funkcijai $f(x, y)$ vietā $x|y$ un tās apkārtnē ir atvasinātās

$$f'_x(x, y), \quad f'_y(x, y), \quad f''_{xy}(x, y), \quad f''_{yx}(x, y)$$

pie kam $f''_{yx}$ un $f''_{xy}$ vietā $x|y$ ir nepārtrauktas, tad pastāv izteiksme:

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y), \quad \text{vai arī} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}.$$

Pierādijums.

Liekam

$$\varphi(x) = \frac{f(x, y + k) - f(x, y)}{k}$$

un

$$\psi(y)=\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h},$$

tad

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}=\frac{1}{hk}[f(x+h,y+k)-f(x+h,y)-f(x,y+k)+f(x,y)], \quad (1)$$

$$\frac{\psi(y+k)-\psi(y)}{k}=\frac{1}{hk}[f(x+h,y+k)-f(x,y+k)-f(x+h,y)+f(x,y)] \quad (2)$$

Lietojot divas reizes Lagranža teoremu dabūjam:

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}=\varphi'(\xi)=\frac{f'_x(\xi,y+k)-f'_x(\xi,y)}{k}=f''_{xy}(\xi,\eta), \quad (3)$$

$$\frac{\psi(y+k)-\psi(y)}{k}=\psi'(\bar\eta)=\frac{f'_y(x+h,\bar\eta)-f'_y(x,\bar\eta)}{h}=f''_{yx}(\bar\xi,\bar\eta). \quad (4)$$

No (1) un (2) redzam, ka šo izteiksmju labās puses ir vienlīdzīgas; tā tad vienlīdzīgas ir arī to kreisās puses, bet tad, ievērojot (3) un (4), dabūjam:

$$f''_{xy}(\xi,\eta)=f''_{yx}(\bar\xi,\bar\eta).$$

Tā kā saskaņā ar pieņēmumu $f''_{xy}$ un $f''_{yx}$ ir nepārtrauktas funkcijas vietā $x|y$, tad ar $h\to 0$ un $k\to 0$,

$$\xi\to x;\quad \eta\to y \quad \text{un} \quad \bar\xi\to x;\quad \bar\eta\to y.$$

Tā tad

$$f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y)$$

vai arī

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}.\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Ja funkcija $f(x,y)$ iecirkņa $P$ visās vietās izpilda sākumā pieņemtos noteikumus, tad izteiksmes (5) pastāv iecirkņa $P$ katrā vietā.

Tā tad, **ja funkciju $f(x,y)$ diferencējam attiecībā uz abiem mainīgiem, tad diferencēšanas rezultats nav atkarīgs no kārtības kādā izdaram diferencēšanu.**

Šo īpašību var paplašināt. Tā kā

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\,\partial x},$$

tad diferencējot abas puses, attiecībā uz $x$, dabūjam

$$\frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x\, \partial y\, \partial x} = \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial y\, \partial x\, \partial x} = \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial y\, \partial x^2};$$

bet

$$\frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x\, \partial y\, \partial x} = \frac{\partial^2 f'_x(x, y)}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial^2 f'_x(x, y)}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x\, \partial x\, \partial y} = \frac{\partial^3 f)x, y)}{\partial x^2\, \partial y};$$

tā tad:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x\, \partial y\, \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\, \partial y}.$$

Ja funkcija $u = f(x, y, z)$ jādiferencē parciali $n$ reizes, attiecībā uz $x$, $m$ reizes, attiecībā uz $y$ un $p$ reizes, attiecībā uz $z$, tad tādu diferencēšanu var izdarīt pēc patikas izvēlētā kārtībā un šādu operaciju izteic ar simbolu:

$$\frac{\partial^{n+m+p}}{\partial x^n\ \partial y^m\ \partial z^p}.$$

Fizikā un technikā lietojamās funkcijas vispār izpilda sākumā minētos noteikumus, kas vajadzīgi, lai augšējā teorema būtu pielietojama. Izņēmumi var būt tikai dažos punktos. Tas pats attiecās uz augstākām atvasinātām. Tālāk tādēļ pieņemsim, ka apskatamās funkcijas minētos noteikumus izpilda.

Ja veido $f(x, y, z)$ atvasinātās, tikai attiecībā uz vienu mainīgo, tad tādas atvasinātās sauc par **tīrām**, bet ja atvasinātās veido, attiecībā uz vairākiem mainīgiem, tad tās sauc par **jauktām atvasinātām**.

Piemēram

$$\frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x^3}$$

ir tīra atvasināta

$$\frac{\partial^3 f(x, y, z)}{\partial x^2\, \partial y}$$

ir jaukta atvasinātā.

Piemērs.

$$z = f(x, y) = ax^3 + 3\beta x^2 y + 3\gamma x y^2 + \delta y^2;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3ax^2 + 6\beta xy + 3\gamma y^2;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3\beta x^2 + 6\gamma xy + 3\delta y^2;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6ax + 6\beta y;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6\gamma x + 6\delta y;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = 6\beta x + 6\gamma y;$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 6a; \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = 6\beta; \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = 6\gamma; \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = 6\delta.$$

Augstākās atvasinātās visas ir 0.

Funkcijas

$$z = f(x, y)$$

atvasinātās arī apzīmē:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = p; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = q$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = r; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = s; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = t.$$

**88 Augstākās kārtas totalie diferencialkvocienti un diferenciali.** Kā redzējām

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos\varphi + \frac{\partial z}{\partial y} \cos\psi.$$

Ja funkcijai $z$ vietā $x \mid y$ ir visi parcialie diferencialkvocienti 2, 3 ... $n$-tās kārtas un ja tie ir vienvērtīgi nepārtraukti, tad $f$-jai šai vietā virzienā $S$ ir arī augstākie totalie diferencialkvocienti un diferenciali.

Otrs totalais diferencialkvocients (otrā totalā atvasinātā) ir:

$$\frac{d^2 z}{ds^2} = \frac{\partial \frac{dz}{ds}}{\partial x} \cos\varphi + \frac{\partial \frac{dz}{ds}}{\partial y} \cos\psi. \tag{1}$$

$$\frac{\partial \frac{dz}{ds}}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cos\varphi + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \cos\psi \tag{2}$$

$$\frac{\partial \frac{dz}{ds}}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \cos\varphi + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \cos\psi. \tag{3}$$

Ievedot izteiksmes (2) un (3) izteiksmē (1) dabūjam:

$$\frac{d^2 z}{ds^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cos^2 \varphi + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \cos \varphi \cos \psi + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \cos^2 \psi.$$

Reizinot šo izteiksmi ar $ds^2$ dabūjam

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \cdot dy^2.$$

Šo izteiksmi var rakstīt simboliski

$$d^2 z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^2 z.$$

Vispār var rakstīt simboliski:

$$\frac{d^n z}{ds^n} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial}{\partial y} \cos \psi\right)^n z;$$

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^n z.$$

Par šo simbolu pareizību var pārliecināties, veidojot augstākās totalās atvasinātās un attiecīgos, totalos diferencialus. Iegūtos rezultatus var paplašināt arī funkcijām ar vairāk kā diviem mainīgiem, piemēram funkcijai:

$$u = f(x, y, z);$$

tad dabūjam

$$\frac{d^n u}{ds^n} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial}{\partial y} \cos \psi + \frac{\partial}{\partial z} \cos u\right)^n z$$

un

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz\right)^n z.$$

Tādā kārtā f-jai

$$z = ax^3 + 3\beta x^2 y + 3\gamma x y^2 + \delta y^3$$

dabūjam:

$$d^2 z = 6\,(ax + \beta y)\, dx^2 + 12\,(\beta x + \gamma y)\, dx\, dy + 6\,(\gamma x + \delta y) dy^2;$$

$$d^3 z = 6\,(a\, dx^3 + 3\beta\, dx^2\, dy + 3\gamma\, dx\, dy^2 + \delta dy^3)$$

Vienpadsmitā nodaļa.

## Saliktu un apslēptu funkciju diferencēšana.

**89. Saliktas funkcijas ar vienu neatkarīgo mainīgo diferencēšana.** Pieņemam, ka $u$ un $v$ ir vienvērtīgas un nepārtrauktas funkcijas no $x$ un ka

$$y = f(u, v)$$

ir vienvērtīga un nepārtraukta funkcija no $u$ un $v$, tad arī $y$ ir vienvērtīga un nepārtraukta funkcija no $x$, un to sauc par saliktu funkciju no $x$.

Ja dodam mainīgam $x$ pieaugumu $\Delta x$, tad $u$, $v$ dabū pieaugumus $\Delta u$, $\Delta v$ un $y$ pieaugumu $\Delta y$.

Ja $\Delta x \to 0$, tad arī $\Delta u \to 0$; $\Delta v \to 0$ un $\Delta y \to 0$. Saskaņā ar [83] (14)

$$\Delta y = f(u + \Delta u), v + \Delta v) - f(u, v) = dy + \varepsilon_1 \Delta u + \varepsilon_2 \Delta v,$$

$$dy = \frac{\partial f}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial f}{\partial v} \Delta v;$$

tā tad

$$\Delta y = \frac{\partial f}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial f}{\partial v} \Delta v + \varepsilon_1 \Delta u + \varepsilon_2 \Delta v. \tag{1}$$

Tā kā

$$\Delta u = du + \varepsilon_3 \Delta x \quad \text{un} \quad \Delta v = dv + \varepsilon_4 \Delta x,$$

tad

$$\Delta u = \frac{du}{dx} \Delta x + \varepsilon_3 \Delta x; \quad \Delta v = \frac{dv}{dx} \Delta x + \varepsilon_4 \Delta x. \tag{2}$$

Ievedot izteiksmes (2) nolīdzinājumā (1), dabūjam

$$\Delta y = \frac{\partial f}{\partial u} \left(\frac{du}{dx} \Delta x + \varepsilon_3 \Delta x\right) + \frac{df}{dv} \left(\frac{dv}{dx} \Delta x + \varepsilon_4 \Delta x\right) + \varepsilon_1 \Delta u + \varepsilon_2 \Delta v.$$

Pārveidojot augšējo izteiksmi dabūjam:

$$\Delta y = \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}\right) \Delta x + \left(\varepsilon_3 \frac{\partial f}{\partial u} + \varepsilon_4 \frac{\partial f}{\partial v}\right) \Delta x + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta x$$

un

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{dv}{dx}\right) + \left(\varepsilon_3 \frac{\partial f}{\partial u} + \varepsilon_4 \frac{\partial f}{\partial v}\right) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2.$$

Ja $\Delta x \to 0$, tad $\varepsilon_1 \to 0$; $\varepsilon_2 \to 0$; $\varepsilon_3 \to 0$ un $\varepsilon_4 \to 0$;

tā tad

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u}\,\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}\,\frac{dv}{dx}. \tag{3}$$

Reizinot ar $dx$ dabūjam saliktas funkcijas totalo diferencialu

$$dy = \frac{\partial f}{\partial u}\,du + \frac{\partial f}{\partial v}\,dv. \tag{4}$$

Kā redzam, saliktas funkcijas $f(u, v)$ pirmais totalais diferencials veidojams tāpat kā, kad $u$ un  būtu neatkarīgi mainīgie.

Ja $u$,  ir funkcijas no $x$, tad viegli ieskatams, ka funkcijas

$$y = f(u, v, \quad .)$$

atvasinātā, attiecībā uz $x$, ir:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u}\,\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}\,\frac{dv}{dx} + \frac{\partial f}{\partial w}\,\frac{dw}{dx} + \tag{3$^a$}$$

un

$$dy = \frac{\partial f}{\partial u}\,du + \frac{\partial f}{\partial v}\,dv + \frac{\partial f}{\partial w}\,dw + \tag{4$^a$}$$

Piemērs.

$$y = u^v$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = v \quad u^{v-1}; \quad \frac{\partial f}{\partial v} = u^v\, lu;$$

$$\frac{dy}{dx} = vu^{v-1}\,\frac{du}{dx} + u^v\, lu\,\frac{dv}{dx}.$$

Funkcijas $y$ augstākās atvasinātās dabūjam diferencējot (3) tālāk, attiecībā uz $x$, un ievērojot, ka $\frac{\partial f}{\partial u}$ un $\frac{\partial f}{\partial v}$ savukārt atkal ir funkcijas no $u$ un $v$, tā tad, saliktas funkcijas no $x$. Tās jādiferencē tāpat, kā funkcija $f(u, v)$ attiecībā uz $x$. $y$ otro atvasināto, attiecībā uz $x$, dabūjam diferencējot (3) attiecībā uz $x$. To varam rakstīt šādi:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial f}{\partial u}\,\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}\,\frac{dv}{dx}\right] = \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial f}{\partial u}\,\frac{du}{dx}\right] + \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial f}{\partial v}\,\frac{dv}{dx}\right],$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\cdot\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial u}\,\frac{d^2u}{dx^2}\right] + \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\cdot\frac{dv}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}\,\frac{d^2v}{dx^2}\right] =$$

$$= \left[\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial u}\,\frac{du}{dx}\,\frac{du}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}\,\frac{dv}{dx}\,\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{d^2u}{dx^2}\right] +$$

$$+ \left[\frac{\partial^2 f}{\partial v\,\partial u}\,\frac{du}{dx}\,\frac{dv}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial v\,\partial v}\,\frac{dv}{dx}\,\frac{dv}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}\,\frac{d^2v}{dx^2}\right].$$

Sakārtojot dabūjam:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}\frac{du}{dx}\cdot\frac{dv}{dx}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{d^2v}{dx^2} \tag{5}$$

Reizinot augšējo izteiksmi ar $dx^2$ dabūjam

$$d^2y=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}du^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}du\,dv+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}dv^2+\frac{\partial f}{\partial u}d^2u+\frac{\partial f}{\partial v}d^2v \tag{6}$$

Ja $u$ uu $v$ būtu neatkarīgie mainīgie, tad formulās (5) un (6) atkristu beidzamie divi locekļi.

Ja $u$ un $v$ ir linearas funkcijas no $x$, tad beidzamie divi locekļi arī atkrīt. Ja

$$u = ax + b$$
$$= ax + \beta,$$

tad

$$du = adx;\quad d^2u = 0$$
$$dv = adx;\quad d^2v = 0.$$

Līdzīgi jārīkojas attīstot trešo un augstākās atvasinātās un diferencialus.

Izteiksmes var viegli paplašināt vairākiem mainīgiem $u$, $v$, $w$.

**90. Eilera teorema par homogenām funkcijām.** Ja funkcijā $f(x, y, z)$ ievietojam, $x$ vietā $tx$, $y$ vietā $ty$ un $z$ vietā $tz$ un ja tad

$$f(tx, ty, tz) = t^n f(x, y, z), \tag{1}$$

tad funkciju $f(x, y, z)$ sauc par $n$-tās dimensijas homogenu funkciju.

Otrās dimensijas homogena funkcija ir, piemēram,

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2,$$

jo redzam ka

$$a_{11}(tx)^2 + 2a_{12}tx\ ty + a_{22}(ty)^2 = t^2(a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2).$$

Nolīdzinājumā (1) ievietojam:

$$u = tx,\quad v = ty,\quad w = tz \tag{2}$$

Tad

$$f(u, v, w) = t^n f(x, y, z). \tag{3}$$

Nolīdzinājuma (3) kreisā puse, kā redzam, ir salikta funkcija no $t$. Veidojam nolīdzinājuma (3) abās pusēs atvasināto attiecībā uz $t$. Tad ievērojot [89] dabūjam

$$\frac{\partial f(u, v, w)}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial f(u, v, w)}{\partial v}\frac{dv}{dt} + \frac{\partial f(u, v, w)}{\partial w}\frac{dw}{dt} = nt^{n-1}f(x, y, z) \quad (4)$$

Kā redzams no (2):

$$\frac{du}{dt} = x; \quad \frac{dv}{dt} = y; \quad \frac{dw}{dt} = z.$$

Ievedot šīs vērtības nolīdzinājumā (4) dabūjam

$$\frac{\partial f}{\partial u} x + \frac{\partial f}{\partial v} . y + \frac{\partial f}{\partial w} . z = n . t^{n-1} f(x, y, z) \quad (5)$$

Liekot $t = 1$, no (5) dabūjam

$$\frac{\partial f}{\partial x} x + \frac{\partial f}{\partial y} y + \frac{\partial f}{\partial z} z = nf(x, y, z).$$

Beidzamais nolīdzinājums dod Eilera teoremu:

J a h o m o g e n a s f u n k c i j a s p a r c i a l o s d i f e r e n c i a l k v o c i e n t u s r e i z i n a k a t r u a r a t t i e c ī g o m a i n ī g o u n v e i d o š o r e i z i n ā j u m u s u m m u, t a d t ā i r v i e n l ī d z ī g a d o t a i f u n k c i j a i, r e i z i n ā t a i a r d i m e n s i j a s r ā d ī t ā j u.

P i e m ē r s.

$$f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2.$$

Kā redzējām, šī funkcija ir otrās dimensijas homogena funkcija. Še $n = 2$;

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2a_{11}x + 2a_{12}y; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2a_{12}x + 2a_{22}y;$$

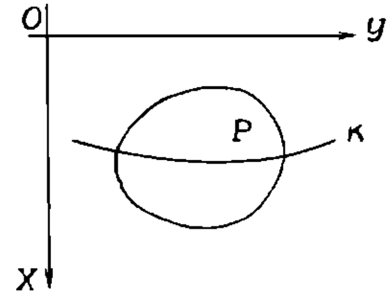
$$\frac{\partial f}{\partial x} x + \frac{\partial f}{\partial y} y = (2a_{11}x + 2a_{12}y)\, x + (2a_{12}x + 2a_{22}y)\, y =$$

$$= 2\,(a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2).$$

**91. Apslēptas funkcijas ar vienu neatkarigo mainigo diferencēšana.** Pieņemam zīm. 78, ka funkcija $f(x, y)$ kādā iecirknī $P$ ir vienvērtīga un nepārtraukta un ka tai šinī iecirknī ir nepārtrauktas parcialas atvasinatās attiecībā uz $x$ un $y$ pie kam $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$. Ja šī funkcija $f(x, y)$ iecirknī $P$ gar kādu šo iecirkni krustojošu likni $K$, dabū vērtibu $C$, t. i.

$$f(x, y) = C, \tag{1}$$

tad $y$ ir ar to dots kā apslēpta, nepārtraukta funkcija no $x$ ar $x$ kādā intervalā $(\alpha, \beta)$.



Zim 78.

Ja šī funkcija būtu zinama atklātā veidā:

$$y = \varphi(x),$$

tad:

$$f[x, \varphi(x)] = C$$

vajadzētu būt tāpatīgi izpildītai ar visiem $x$ intervalā $(\alpha, \beta)$. Nolīdzinājums

$$f(x, y) = C, \tag{1}$$

tā tad ir uzskatams kā salikta funkcija no $x$.

Tā kā šī funkcija ir pastāvīga, tad tās atvasinātai jānolīdzinājas 0.

Funkcijas

$$f(x, y) = C$$

atvasināto, attiecībā uz $x$, pielietojot [89] doto paņēmienu dabūjam:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0$$

vai arī:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0. \tag{2}$$

un

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \tag{3}$$

Nolīdzinājums (2) rāda, kā diferencē apslēptu funkciju attiecībā uz $x$:

**Diferencē (1) parciali attiecībā uz $x$, tad diferencē (1) parciali attiecībā uz $y$ un atvasināto $\frac{\partial f}{\partial y}$ reizina ar $\frac{dy}{dx}$, veido abu izteiksmju summu un pielīdzina to nullei.**

Pielietojot šo paņēmienu nolīdzinājumam (2) pieņemot, ka funkcijai $f(x, y)$ ir arī otras kārtas parcialas atvasinātās, dabūjam:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)\frac{dy}{dx}=0$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2 y}{dx^2}\right)+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\frac{dy}{dx}\right)\frac{dy}{dx}=0.$$

Sakārtojot dabūjam:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2 y}{dx^2}=0. \tag{4}$$

No (4) dabūjam:

$$\frac{d^2 y}{dx^2}=-\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{\partial f}{\partial y}} \tag{5}$$

Ievedot izteiksmē (5) $\frac{dy}{dx}$ vērtību no (3) dabūjam:

$$\frac{d^2 y}{dx^2}=-\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2-2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3} \tag{6}$$

**Piemērs:**

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2x}{a^2};\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2y}{b^2};\quad y'=\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{2x}{a^2}}{\frac{2y}{b^2}}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{2}{a^2};\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{2}{b^2};\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=0.$$

Ievedot šīs vērtības izteiksmē (6) dabūjam:

$$\frac{d^2 y}{dx^2}=-\frac{b^4}{a^2 y^3}.$$

**92. Saliktu funkciju ar diviem neatkarīgiem mainīgiem, diferencēšana.** Ja $u$ un $v$ ir vienvērtīgas, nepārtrauktas funkcijas no $x$ un $y$ un

$$z = f(u, v) \tag{1}$$

vienvērtīga un nepārtraukta funkcija no $u$, $v$, tad funkciju $f(u, v)$ sauc par *saliktu* funkciju no $x$ un $y$, un tā ir nepārtraukta vienvērtīga funkcija no $x$ un $y$ tajā pašā iecirknī, kurā tā ir nepārtraukta attiecībā uz $u$ un $v$.

Ja šajā iecirknī uzskatam kā mainīgu tikai $x$, tad varam še pielietot visus [89] rezultatus, tikai liekot $\frac{du}{dx}$ vietā $\frac{\partial u}{\partial x}$; $\frac{dv}{\partial x}$ vietā $\frac{\partial v}{\partial x}$ u. t. t.

Tā tad parcialā atvasinatā no $z$ attiecībā uz $x$ ir:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{2}$$

Tāpat dabūjam:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \tag{3}$$

Totalo diferencialu dabūjam formulā

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

ievedot vērtības no (2) un (3), tā tad

$$dz = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy,$$

$$dz = \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right).$$

Še iekavās atrodas:

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = du; \quad \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy = dv.$$

Tā tad

$$dz = \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}\partial v \tag{4}$$

*Funkcijas* $z = f(u, v)$ *pirmais diferencials, kā redzams, ir tāda paša veida, kā tad, kad* $u$ *un* $v$ *būtu neatkarīgi mainīgie.*

Otro atvasināto izrēķināšanā jāievēro, ka nolīdzinājumos (2) un (3) $\frac{\partial f}{\partial u}$, $\frac{\partial f}{\partial v}$ atkal ir saliktas funkcijas, un ka

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \frac{\partial u}{\partial y}; \quad \frac{\partial v}{\partial y}$$

ir funkcijas no $x$ un $y$. Tad:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} +$$
$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

un

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \quad (5)$$

Līdzīgi dabūjam:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}. \quad (6)$$

No (2) vai (3) dabū:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}\right] + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} +$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \quad (7)$$

Totalais diferencials dabū veidu:

$$d^2 z = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} du^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} du\, dv + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} dv^2 + \frac{\partial f}{\partial u} d^2 u + \frac{\partial f}{\partial v} d^2 v. \quad (8)$$

Ja $u$ un $v$ ir linearas funkcijas no $x$ un $y$, tad izteiksmes (8) divi beidzamie locekļi atkrīt un $d^2 z$ dabū tādu pašu veidu, kā tad kad $u$ un $v$ ir neatkarīgi mainīgie. Ja

$$u = ax + by + c,$$
$$= \alpha x + \beta y + \gamma,$$

tad

$$d^2 u = 0, \quad \text{un} \quad d^2 v = 0.$$

**93. Apslēptas funkcijas, ar diviem neatkarīgiem mainīgiem, diferencēšana.** Dota telpas iecirknī $R$ vienvērtīga, nepārtraukta funkcija $f(x, y, z)$, kurai šinī iecirknī ir nepārtrauktas parcialas atvasinātās. Pieņemam, ka šī funkcija dabū vērtību $c$ uz kādas, telpas iecirknī $R$ krustojošas, virsmas. Tad $z$ ir vienvērtīga, nepārtraukta funkcija no $x$ un $y$, arī uz minētās virsmas. Ar izteiksmi

$$f(x, y, z) = c \tag{1}$$

$z$ ir noteikta, kā vienvērtīga, nepārtraukta, a p s l ē p t a funkcija no $x$ un $y$.

Funkciju $f(x, y, z)$ var uzskatīt kā saliktu funkciju ar neatkarīgiem, mainīgiem $x$ un $y$. Šīs funkcijas parciālā atvasinātā attiecībā uz $x$ ir:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

Tā kā $\frac{\partial x}{\partial x} = 1$ un $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$, ($y$ nav atkarīgs no $x$) tad dabūjam

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0 \tag{2}$$

un

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}. \tag{3}$$

Līdzīgi dabūjam:

$$\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0 \tag{4}$$

un

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}. \tag{5}$$

Še pieņemam, ka $\frac{\partial f}{\partial z} \neq 0$ pie tām, $x$, $y$, $z$ vērtībām, kas apmierina nolīdzinājumu (1).

Pielietojot šo pašu paņēmienu, diferencējot (2) attiecībā uz $x$ un (4) attiecībā uz $y$, dabūjam:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0\\&\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial y}\frac{\partial z}{\partial z}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

No (2) vai (4) dabūjam:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\,\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 0 \quad (7)$$

No nolīdzinājumiem (6) un (7) var dabūt:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}.$$

Piemērs:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = k \qquad (\alpha)$$

Atvasinātā attiecībā uz $x$ ir:

$$ax + cz\frac{\partial z}{\partial x} = 0. \qquad (\beta)$$

Atvasinātā attiecībā uz $y$ ir:

$$by + cz\frac{\partial z}{\partial y} = 0. \qquad (\gamma)$$

Diferencējot ($\beta$) attiecībā uz $x$ un ($\gamma$) attiecībā uz $y$ dabūjam:

$$\left.\begin{aligned} a + cz\frac{\partial^2 z}{\partial^2 x} + c\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 = 0 \\ b + cz\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + c\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (\delta)$$

No ($\beta$) vai ($\gamma$) dabūjam:

$$cz\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + c\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial y} = 0. \qquad (\varepsilon)$$

Atslēdzot nolīdzinājumus ($\beta$) un ($\gamma$) dabūjam:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{ax}{cz}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{by}{cz}.$$

Ievedot šīs vērtības nolīdzinājumos ($\delta$) un ($\varepsilon$) dabūjam:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{a(k - by^2)}{c^2 z^3}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial^2 y} = -\frac{b(k - ax^2)}{c^2 z^3}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -\frac{ab\,xy}{c^2 z^3}$$

**94. Apslēptu funkciju, kas dotas ar simultaniem nolīdzināju miem, diferencēšana.** Ja kādā telpas iecirknī $R$ funkcijas $\varphi(x, y, z)$ un $\psi(x, y, z)$ dotas vienvērtīgas un nepārtrauktas un ja funkcija $\varphi$ uz kādas $R$ krustojošas virsmas dabū vērtību $\alpha$ un funkcija $\psi$ uz kādas citas $R$ krustojošās virsmas dabū vērtību $\beta$, tad virsmu krustošanās līknes katram punktam atbilst vērtību kopība $x \mid y \mid z$ ar kurām

$$\varphi = \alpha \quad \text{un} \quad \psi = \beta. \tag{1}$$

Gar šo līkni $y$ un $z$ ir funkcijas no $x$, tā tad ar simultaniem nolīdzinājumiem:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x, y, z) &= \alpha \\ \psi(x, y, z) &= \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

mainīgie $y$ u $z$ ir doti kā a p s l ē p t a s funkcijas no $x$.

Nolīdzinājumu kreisās puses uzskatam kā saliktas funkcijas ar neatkarīgo mainīgo $x$. Mainīgo $y$ un $z$ pirmās atvasinātās dabūjam diferencējot (1) attiecībā uz $x$ kā rādīts [89].

Tā tad:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{dx} &= 0 \\ \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{dz}{dx} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Atvasināto vērtības dabūjam no izteiksmes:

$$\frac{dy}{dx} : \frac{dz}{dx} \quad 1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial z} & \frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial\psi}{\partial z} & \frac{\partial\psi}{\partial x} \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial\psi}{\partial y} & \frac{\partial\psi}{\partial x} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial\psi}{\partial y} & \frac{\partial\psi}{\partial z} \end{vmatrix} \tag{3}$$

Atvasinātās dabū galīgas vērtības, ja determinants

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial\psi}{\partial y} & \frac{\partial\psi}{\partial z} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Otrās atvasinātās dabūjam, diferencējot nolīdzinājumus (2) pirmo attiecībā uz $x$ un otro uz $y$.

Tā tad:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}\frac{dy}{dx}+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial z}\frac{dz}{dx}+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial z}\frac{dy}{dx}\frac{dz}{dx}+\\&+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{d^2z}{dx^2}=0.\\&\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}\frac{dy}{dx}+2\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial z}\frac{dz}{dx}+2\frac{\partial^2\psi}{\partial y\,\partial z}\frac{dy}{dx}\frac{dz}{dx}+\\&+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{d^2z}{dx^2}=0\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

Ievedot nolīdzinājumos (4) $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ vērtības no (3) dabūjam otrās atvasinātsās: $\frac{d^2z}{dx^2}$ un $\frac{d^2z}{dx^2}$.

Šis paņēmiens viegli paplašinams, piemēram, ja ar trim nolīdzinājumiem, $y$, $z$, $u$ ir doti kā apslēptas funkcijas no $x$.

Piemērs:

$$\left.\begin{aligned}x^2+y^2+z^2&=4a^2\\x^2+y^2-2ax&=0\end{aligned}\right\}\quad(\alpha)$$

Vienreizēja diferencēšana dod:

$$\left.\begin{aligned}x+y\frac{dy}{dx}+z\frac{dz}{dx}&=0\\x-a+y\frac{dy}{dx}&=0\end{aligned}\right\}\quad(\beta)$$

Diferencējot nolīdzinājumus ($\beta$) dabūjam:

$$\left.\begin{aligned}1+y\frac{d^2y}{dx^2}+z\frac{d^2z}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2&=0\\1+y\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2&=0\end{aligned}\right\}\quad(\gamma)$$

No nolīdzinājumiem ($\beta$) dabūjam:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a-x}{y};\quad\frac{dz}{dx}=-\frac{a}{z}.$$

Ievedot šīs vērtības nolīdzinājumos ($\gamma$) dabūjam:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{a^2}{y^3};\quad\frac{d^2z}{dx^2}=-\frac{a^2}{z^3}.$$

## Divpadsmitā nodaļa.

# Mainīgo transformacija.

**95. Divu, vienu no otra atkarīgu mainīgu simultana transformacija.** Starp neatkarīgo mainīgo $x$ un atkarīgo $y$ pastāv kāds funkcionals sakars. Šo mainīgo vietā ievedam jaunus mainīgos $u$ un $v$ ar nolīdzinājumiem:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(u, v) \\ y &= \psi(u, v) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Še $u$ uzskatam kā jauno neatkarīgo un kā no $u$ atkarīgo mainīgo.

Pieņemam, ka nolīdzinājumi (1) ir vienvērtīgi, un arī šo nolīdzinājumu apvērstie nolīdzinājumi ir vienvērtīgi.

Še jāatrisina jautājums kā jāizteic

$$\frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} \quad \text{u. t. t.}$$

ar jauniem mainīgiem $u$ un $v$.

No (1), diferencējot attiecībā uz $u$, dabūjam:

$$\frac{dx}{du} = \frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{dv}{du},$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{\partial\psi}{\partial u} + \frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{dv}{du},$$

$$\frac{d^2x}{du^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}\frac{dv}{du} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{d^2v}{du^2},$$

$$\frac{d^2y}{du^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial v}\frac{dv}{du} + \frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + \frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{d^2v}{du^2}.$$

Ievedot šīs vērtības, agrāk dabūtās, izteiksmēs:

$$dy = \frac{\frac{dy}{du}}{\frac{dx}{du}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dx}{du}\cdot\frac{d^2y}{du^2} - \frac{d^2x}{du^2}\cdot\frac{dy}{du}}{\left(\frac{dx}{du}\right)^2}$$

dabūjam jautājuma atrisinājumu.

**96. Mainīgo pārveidošana funkcijās ar vairāk kā vienu neatkarīgo mainīgo.** Pirmais gadijums.

Pieņemam, ka $z$ ir kautkāda neatkarīgo mainīgo $x$, $y$ funkcija. Neatkarīgo mainīgo $x$ un $y$ vietā ievedam jaunus mainīgos ar nolīdzinājumiem:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(u, v) \\ y &= \psi(u, v) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Tad $z$ ir salikta funkcija no $u$ un $v$. Diferencējot $z$ attiecībā uz $u$ un $v$ (1), dabūjam:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial v} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

No šiem nolīdzinājumiem dabūjam:

$$\frac{\partial z}{\partial x} : \frac{\partial z}{\partial y} : 1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial u} & -\frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial \psi}{\partial v} & -\frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} : -\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & -\frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial o} & -\frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} \tag{3}$$

No augšējās izteiksmes dabūjam: $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ kā noteiktas vērtības, ja determinants

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Lai dabūtu $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ un $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ vēl reiz jādiferencē nolīdzinājumi (2).

Otrs gadijums.

Dota funkcija:

$$z = f(x, y) \tag{4}$$

un

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(u, v) \\ y &= \psi(u, v) \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Ievedot $x$, $y$ vērtības no (5) nolīdzinājumā (4) dabūjam

$$z = f(\varphi, \psi) = w(u, v).$$

Šini gadijumā dabūjam

$$\frac{\partial z}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y};$$

no izteiksmes (3) ievedot tajā

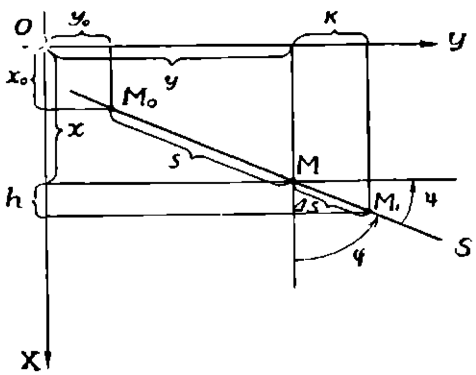
$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial w}{\partial u};\quad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial w}{\partial v}.$$

Ja pirmā gadijumā dabūtas arī otras kārtas atvasinātās, tad tajās jāieved:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial^2 u}=\frac{\partial^2 w}{\partial u^2};\quad \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial v^2};\quad \frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}.$$

## Trīspadsmitā nodaļa.

**97 Teilora un Meklorena formulas funkcijai ar vairākiem mainigiem.** Pieņemam, ka $f(x, y)$ iecirknī $P$, kas ietver punktus $x|y$ un $x+h \mid y+k$, ir vienvērtīga, nepārtraukta funkcija un, ka tās atvasinātās $1\,..\,n$ arī ir vienvērtīgas un nepārtrauktas šinī iecirknī (zīm. 79). Punkta $M$ koordinatas (zīm. 79) ir $x|y$ un punkta $M_1: x+h \mid y+k$. Gar taisni, uz kuras atrodas $M$ un $M_1$, funkcija $f(x, y)$ ir funkcija no viena mainīgā.



Zīm. 79.

Apzīmējam

$$M_0M = s;\quad MM_1 = \Delta s,$$

tad

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + s\cos\varphi; & h &= \Delta s\cos\varphi \\ y &= y_0 + s\cos\psi; & k &= \Delta s\cos\psi \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

un

$$\left.\begin{aligned} &f(x,y)=f(x_0+s\cos\varphi,\ y_0+s\cos\psi)=F(s) \\ &f(x+h,\ y+k)=f[x_0+(s+\Delta s)\cos\varphi,\ y_0+(s+\Delta s)\cos\psi]F=(s+\Delta s) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Funkciju:

$$F(s+\Delta s)$$

izteicam ar Teilora formulu:

$$F(s+\Delta s)=F(s)+\frac{\Delta s}{1!}F'(s)+\frac{\Delta s^2}{2!}F''(s)+\quad+\frac{\Delta s^{n-1}}{(n-1)!}F^{(n-1)}(s)+$$

$$+\frac{\Delta s^n}{n!}F^{(n)}(s+\theta\Delta s) \tag{3}$$

Augšējā izteiksmē:

$$F(s + \Delta s) = f(x + h,\ y + k) \tag{4}$$

un

$$F'(s),\ F''(s)$$

ir $f(x, y)$ totalās atvasinātās virzienā $S$

Tā tad:

$$\left.\begin{aligned} F'(s) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial}{\partial y}\cos\psi\right) f(x, y) \\ F''(s) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial}{\partial y}\cos\psi\right)^2 f(x, y) \\ &\ \ \vdots \\ F^{(n-1)}(s) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial}{\partial y}\cos\psi\right)^{n-1} f(x, y) \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Tā kā:

$$F(s+\theta\Delta s) = f[x_0 + (s+\theta\Delta s)\cos\varphi,\ y_0 + (s+\theta\Delta s)\cos\psi] = f(x+\theta h,\ y+\theta k),$$

tad:

$$F^{(n)}(s + \theta\Delta s) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial}{\partial y}\cos\psi\right)^n f(x + \theta h,\ y + \theta k) \tag{6}$$

Ievietojot vērtības no (2), (5), (6) izteiksmē (3) dabūjam:

$$f(x + h,\ y + k) = f(x, y) + \frac{\Delta s}{1!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial}{\partial y}\cos\psi\right) f(x, y) +$$

$$+ \frac{\Delta s^2}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial}{\partial y}\cos\psi\right)^2 f(x, y) + \ldots + \frac{\Delta s^{n-1}}{(n-1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial}{\partial y}\cos\psi\right)^{n-1} f(x, y) +$$

$$+ \frac{\Delta s^n}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial}{\partial y}\cos\psi\right)^n f(x + \theta h,\ y + \theta k).$$

Ievērojot, ka $\Delta s\cos\varphi = h$ un $\Delta s\cos\psi = k$, no augšējās izteiksmes dabūjam:

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right) f(x, y) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right)^2 f(x, y) + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right)^{n-1} f(x, y) + \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right)^n f(x+\theta h, y+\theta k) \tag{7}$$

Izteiksmi (7) sauc par **Teilora formulu** funkcijai ar diviem neatkarīgiem mainīgiem.

Ja vieta $x = 0$ un $y = 0$ atrodas iecirknī, kurā $f(x, y)$ un $f(x, y)$ atvasinātās izpilda augšā minētos noteikumus, tad formulā (7) liekam $x$ un $y$ vietā 0, 0 un tā kā $h$ un $k$ še varam uzskatīt kā mainīgus, liekam $h$ vietā $x$ un $k$ vietā $y$. Tad dabūjam:

$$f(x, y) = f(0, 0) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial}{\partial y}y\right)f(0, 0) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial}{\partial y}y\right)^2 f(0, 0) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial}{\partial y}y\right)^{n-1} f(0, 0) + \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial}{\partial y}y\right)^n f(\theta x, \theta y). \quad (8)$$

Izteiksmi (8) sauc par Meklorena formulu funkcijai ar diviem mainīgiem.

Lai nebūtu šaubu izrakstīsim augšējo formulu simbolu nozīmi.

Teilora formulā:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right)^2 f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}k^2,$$

pie kam atvasinātās jāveido vietā $x \mid y$.

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right)^n f(x + \theta h, y + \theta k)$$

apzīmē ka pēc diferencēšanas visās $n$-tās kārtas parcialās atvasinātās $x$ vietā jāievieto $x + \theta h$ un $y$ vietā $y + \theta k$.

Meklorena formulā:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial}{\partial y}y\right)^2 f(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}y^2,$$

pie kam labajā pusē diferencialkvocientos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2};\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y};\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

jāievieto $x = 0$ un $y = 0$.

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial}{\partial y}y\right)^n f(\theta x, \theta y)$$

apzīmē, ka pēc diferencēšanas visās $n$-tās kārtas atvasinātās jāievieto $x = \theta x$ un $y = \theta y$.

Ja $f(x, y)$ iecirknī $P$, kurā atrodas vērtību pāri $x|y$ un $x+h|y+k$ ir vienvērtīga, nepārtraukta un funkcijai $f(x, y)$ ir visas parciālās atvasinātās, kas vienvērtīgas, nepārtrauktas šajā iecirknī, tad, ja $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$ dabūjam bezgalīgu rindu — Teilora rindu. Meklorena rindu dabūjam, ja augšējie noteikumi izpildīti iecirknī, kurā atrodas vērtību pāri $0|0$ un $x|y$.

## Četrpadsmitā nodaļa.

## Diferencialģeometrija II.

**98. Papildinājums diferencialģeometrijā plāknē.** Ja dota apslēpta funkcija

$$F(x, y) = 0, \tag{1}$$

tad dabūjam:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{F'_x}{F'_y}; \tag{2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{F''_{xx}\left(F'_y\right)^2 - 2F''_{xy}F'_xF'_y + F''_{yy}\left(F'_x\right)^2}{\left(F'_y\right)^3} \tag{3}$$

Tādā gadijumā diferencialģeometrijas agrāk dotās formulās jāieved izteiksmes (2) un (3), tā piemēram:

1) Līknes $F(x, y) = 0$, pieskares nolīdzinājumu dabūjam:

$$\eta - y = y'(\xi - x),$$

ievērojot (2)

$$\eta - y = -\frac{F'_x}{F'_y}(\xi - x)$$

un

$$(\xi - x)F'_x + (\eta - y)F'_y = 0 \tag{4}$$

2) Līknes $F(x, y) = 0$, normales nolīdzinājumu dabūjam:

$$\eta - y = -\frac{1}{y'}(\xi$$

ievērojot (2)

$$\eta - y = \frac{F'_y}{F'_x}(\xi \quad x).$$

un

$$\frac{\xi - x}{F'_x} = \frac{\eta - y}{F'_y} \tag{5}$$

3) Lai izšķirtu vai likne $F(x, y) = 0$ punktā $F_0 = a \mid b$ ir konkava vai konveksa, tad vērtības $a \mid b$ jāieved izteiksmē (3).

4) Līknes $F(x, y) = 0$ infleksijas punktus dabū atslēdzot kopēji nolīdzinājumus:

$$\left.\begin{aligned} F(x, y) &= 0 \\ F''_{xx}\left(F'_y\right)^2 - 2F''_{xy}F'_xF'_y + F''_{yy}\left(F'_x\right)^2 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

5) Līknes $F(x, y) = 0$ liekuma radiusu un liekuma centra koordinatas dabūjam, ievedot attiecīgās agrāk dotās formulās, $y'$ un $y''$ vērtības no (2) un (3). Tā piemēram dabūjam:

$$\rho = \frac{\left(F'^2_x + F'^2_y\right)^{\frac{3}{2}}}{-F''_{xx}(F'_y)^2 + 2F''_{xy}F'_xF'_y - F''_{yy}\left(F'_x\right)^2}$$

Piemērs:

No punkta $P_0 = x_0 | y_0$ vilkt pieskari pie līknes

$$f(x, y) = 0. \tag{$\alpha$}$$

Pieskares nolīdzinājums pie līknes ($\alpha$), līknes punktā $x|y$ ir

$$(\xi - x)f'_x + (\eta - y)f'_y = 0.$$

Tā kā šī pieskare iet caur $P_0 = x_0 | y_0$, tad jābūt izpildītam nolīdzinājumam

$$(x_0 - x)f'_x + (y_0 - y)f'_y = 0. \tag{$\beta$}$$

Nolīdzinājumus ($\alpha$) un ($\beta$) kopā atslēdzot dabū pieskāršanās punkta koordinatas. Pieskares nolīdzinājumu dabūjam velkot taisni caur punktu $x_0 | y_0$ un pieskāršanās punktu.

Piemērs.

Dotas līknes ar nolīdzinājumiem:

$$\varphi(x, y) = 0 \quad \text{un} \quad \psi(x, y) = 0. \tag{$\alpha$}$$

Kāds ir noteikums, lai šīm līknēm kopējā punktā būtu arī kopēja pieskare?

Ja $x | y$ ir kopējais punkts, tad pirmās līknes pieskares virziena koeficients ir

$$-\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}$$

un otrās līknes vieziena koeficients ir·

$$-\frac{\psi_x'}{\psi_y'}.$$

Šiem virziena koeficientiem, saskaņā ar uzdevumu, jābūt vienlīdzīgiem, tā tad

$$\frac{\varphi_x'}{\varphi_y'} = \frac{\psi_x'}{\psi_y'}$$

vai:

$$\varphi_x' \psi_y' - \varphi_y' \psi_x' = 0. \tag{$\beta$}$$

Izslēdzot $x$, $y$ starp nolīdzinājumiem ($\alpha$) un ($\beta$), dabūjam meklēto noteikumu.

Viegli ieskatīt, ka noteikums, lai līknes ($\alpha$), kopējā punktā būtu stateniskas, dabūjams izslēdzot $x$ un $y$ starp nolīdzinājumiem:

$$\varphi(x, y) = 0; \quad \psi(x, y) = 0,$$

$$\varphi_x' \psi_x' + \varphi_y' \psi_y' = 0.$$

Piemērs

Caur punktu $P_0 = x_0 | y_0$ vilkt normali pret līkni

$$f(x, y) = 0.$$

Normales krustpunktu ar līkni dabūjam, kopēji atslēdzot nolīdzinājumus:

$$f(x, y) = 0,$$

$$(x_0 - x) f_y' - (y_0 - y) f_x' = 0.$$

Līknes normale iet caur punktu $x_0 | y_0$ un dabūto krustpunktu.

Piecpadsmitā nodaļa.

## Funkcijas ar vairākiem mainīgiem ekstremas vērtības.

**99. Apslēptas funkcijas ekstremās vērtības** Ar izteiksmi

$$F(x, y) = 0 \tag{1}$$

$y$ ir dots kā apslēpta funkcija no $x$. Lai dabūtu $y$ ekstremās vērtības, kā agrāk norādīts, jāliek:

$$y' = 0.$$

Šinī gadijumā:

$$= -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0\right)$$

Redzams, ka $y' = 0$, ja

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \tag{2}$$

Ja nolibzinājumu (1) un (2) kopējs atslēgums ir

$$x = a \quad \text{un} \quad y = b$$

Tad vietā $x = a$ ordinatai $y$ ir ekstrema vērtība,

$$y = b$$

Vai $y = b$ ir maksims vai minims, noteicams ar $y''$ palīdzību. Tā kā

$$y'' = -\frac{F''_{xx}\left(F'_y\right)^2 - 2F''_{xy}F'_xF'_y + F''_{yy}\left(F'_x\right)^2}{\left(F'_y\right)^3}$$

un tā kā ar $x = a$ un $y = b$ atvasinātā $\left(F'_x\right)_{a,b} = 0$, tad augšējā izteiksme dod, ar $x = a$ un $y = b$,

$$(y'')_{\substack{x=a\\y=b}} = -\left(\frac{F''_{xx}}{F'_y}\right)_{a,b}$$

Ja

$$-\left(\frac{F''_{xx}}{F'_y}\right)_{a,b} \quad \begin{matrix} > 0 \text{ tad } y=b \text{ minims.} \\ < 0 \text{ tad } y=b \text{ maksims.} \end{matrix}$$

Ja ar $x = a$ un $y = b$ arī $\left(F'_y\right)_{a,b} = 0$, tad līknei ir īpaši punkti Šis gadijums tiks apskatīts vēlāk.

Piemērs.

$$F(x, y) = x^3 - 3axy + y^3 = 0. \tag{1}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - 3ay.$$

$$3x^2 - 3ay = 0. \tag{2}$$

(1) un (2) kopēji atslēdzot dabūjam:

$$x_1 = 0; \quad y_1 = 0; \quad x_2 = a\sqrt[3]{2}; \quad x_2 = a\sqrt[3]{4}$$

Ar $x_1$ un $y_1$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 - 3ax$$

izteiksme dabū vērtību 0. Še ir augšā minētais īpašais gadījums.

Ar $x_2$ un $y_2$ izteiksme:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 6x$$

dabū vērtību $6a\sqrt[3]{2}$ un $\frac{\partial F}{\partial y}$ dabū vērtību $3a^2\sqrt[3]{2}$, tad

$$\left(-\frac{F''_{xx}}{F'_y}\right)_{x_1 y_2} = -\frac{2}{a}.$$

Tā tad, $y_2 = a\sqrt[3]{4}$ ir maksims, ja $a > 0$ un minims, ja $a < 0$.

**100. Funkcijas, ar diviem mainīgiem, ekstremas vērtības.** Pieņemam, ka $f(x, y)$ ar diviem neatkarīgiem mainīgiem $x$ un $y$, iecirknī $P$ ir vienvērtīga un nepārtraukta (zīm. 80.).

Funkcijai $f(x, y)$ iecirknī $P$ vietā $x = a$; $y = b$, ir e k s t r e m a vērtība: m a k s i m s, ja varam atrast tādu apkārtni kā $f(a, b)$ vietā $a|b$ ir lielāka kā katra cita funkcijas $f(x, y)$ vērtība šinī apkārtnē.

Tā tad vajaga varēt noteikt tādu pozitivu skaitli $\eta$, ka maksima gadijumā

$$f(a + h, \ b + k) - f(a, \ b) < 0 \tag{1}$$

ar visiem:

$$|h| < \eta \quad \text{un} \quad |k| < \eta.$$

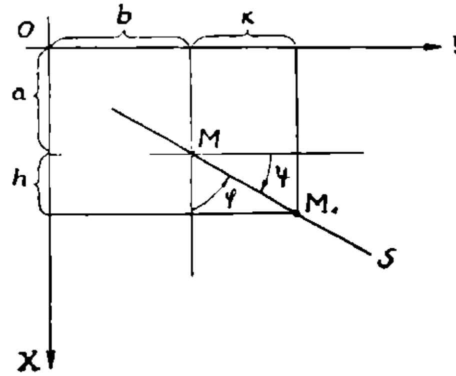
Funkcijai $f(x, y)$ vietā $x = a$; $y = b$ ir ekstrema vērtiba: m i n i m s ja:

$$f(a + h, \ b + k) - f(a, \ b) > 0 \tag{2}$$

ar visiem:

$$|h| < \eta; \quad |k| < \eta.$$

Katra $\frac{k}{h}$ vērtība noteic taisni caur punktu $M$. Zīm. 80. Telpā, virs taisnes $S$, atrodas krustošanās līkne virsmai $z = f(x, y)$ un plāknei, kas stateniska pret $xy$ plākni un kuras pēdu līnija ir taisne $S$. Ja funkcijai $f(x, y)$ vietā $a|b$ ir maksims, tad tas ir arī augšā minētās līknes maksims. Tāpat, ja funkcijai $f(x, y)$ vietā $a|b$ ir minims, tad tas arī ir minims minētai līknei. Izteiksmes (1) un (2) norāda, ja funkcijai $f(x, y)$ vietā $a|b$ ir maksims vai minims, tad vietā $a|b$ ir maksims vai minims uz katras līknes telpā, kuras dabūjam, ja velkam caur $a \mid b$ dažādas taisnes $S$.



Zim. 80.

Ja līknei telpā, kas atbilst taisnei $S$, vietā $a|b$ ir ekstrema vērtība, tad funkcijas $f(x, y)$ totalai atvasinātai šinī vietā un virzienā jābūt 0. Tā tad:

$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \psi = 0. \tag{3}$$

Šai izteiksmei jābūt izpildītai visos virzienos, kuru $\cos^2\varphi + \cos^2\psi = 1$. Ar šādu noteikumu augšējā izteiksme ir tikai tad 0, ja vietā $a \mid b$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \text{un} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \tag{4}$$

No augšējā secinam: Tās vietas, kurās $f(x, y)$ dabū ekstremas vērtības, atrodas nolīdzinājumu (4) atslēgumos.

Pieņemam, ka atslēdzot nolīdzinājumus (4) dabūjam:

$$x = a; \quad y = b.$$

Lai izšķirtu vai šai vietā ir maksims vai minims, jāapskata otrā totalā atvasinātā vietā $a \mid b$,

$$\frac{d^2 f}{ds^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cos^2 \varphi + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} \cos \varphi \, . \cos \psi + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cos^2 \psi \tag{5}$$

Ja funkcijai $f(x, y)$ vietā $a \mid b$ ir maksims, tad izteiksmei (5) jābūt vietā $a \mid b$ negativai un ja minims, tad pozitivai vērtībai, visos virzienos. Vispirms vietā $a \mid b$ jābūt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \neq 0 \text{ un } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \neq 0. \tag{6}$$

Ja, piemēram, $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{a,b}$ būtu 0, tad $\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}$ arī būtu 0 ar $\psi = \frac{\pi}{2}$ un ja $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{a,b}$ būtu 0, tad $\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}$ arī būtu 0 ar $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Pieņemot, ka augšējais noteikums (6) izpildīts, reizinot (5) ar $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, dabūjam:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{d^2 f}{ds^2} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^2 \cos^2 \varphi + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cos \varphi \cos \psi + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cos^2 \psi.$$

Papildinot labajā pusē pirmos divus locekļus līdz kvadratam dabūjam:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{d^2 f}{ds^2} = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cos \varphi + \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} \cos \psi\right]^2 + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y}\right)^2\right] \cos^2 \psi. \tag{7}$$

No (7) redzams, ja

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y}\right)^2 > 0 \tag{8}$$

tad (7) labā puse, visos virzienos, arvienu ir pozitiva, bet tad arī (7) kreisā puse ir pozitiva, un tādēļ ar visiem $S$ virzieniem caur $a \mid b$ izteiksmei $\frac{d^2 f}{ds^2}$ tad ir tāda pati zīme kā

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{a,b}$$

Izteiksme (8) ir pietiekama, lai $\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}$ visos virzienos paturētu to pašu zīmi, bet ka tā ir arī vajadzīga, redzams no sekojošā:

Ja būtu:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y}\right)^2 < 0, \text{ (vietā } a \mid b) \tag{9}$$

tad ar $\cos\psi = 0$ izteiksmes (7) labā pusē un tādēļ arī kreisā būtu pozitiva. Bet izteiksmes labās puses, un tādēļ arī kreisās puses zīme būtu negativa pastāvot (9), ja:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cos\varphi + \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\cos\psi = 0.$$

Tā tad šādā gadijumā, ja pastāvētu (9), $\frac{d^2 f}{ds^2}$ ar visiem virzieniem nepaturētu pastāvīgu zīmi.

Gadijumā, ja

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = 0, \quad (\text{vietā } a \mid b) \tag{10}$$

tad (7) labā un kreisā puse gan paturētu pozitivo zīmi visos virzienos, izņemot gadijumu virzienā, kad

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cos\varphi + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cos\psi = 0$$

Tad pazustu (7) labā puse un tā tad arī $\frac{d^2 f}{ds^2}$.

Tādā gadijumā par $\frac{\partial^2 f}{ds^2}$ zīmi neko nevar izteikt.

N o a u g š ē j ā r e d z a m s, k a f u n k c i j a i $f(x, y)$ v a r b ū t e k s t r e m a s v ē r t ī b a s t i k a i g a d i j u m ā j a v i e t ā $a|b$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \text{ un } \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \text{un}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\;\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\;\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2 > 0$$

Tādā gadijumā, otrai totalai atvasinātai $\frac{d^2 f}{ds^2}$ ir tāda pat zīme kā $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{a,b}$ $\left(\text{vai arī } \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{a,b}\right)$

Ja šī zīme ir negativa, tad $f(a, b)$ ir maksims un ja šī zīme ir pozitiva, tad $f(a, b)$ ir minims

Tā tad lai dabūtu funkcijas $f(x, y)$ ekstremās vērtības, jārīkojas sekojoši:

1) jāveido $\frac{\partial f}{\partial x}$ un $\frac{\partial f}{\partial y}$

2) no nolīdzinājumiem

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

dabūjam: $x_1 = a_1 \quad y_1 = b_1 \quad x_2 = a_2 \quad y_2 = b_2$

3) Lai izšķirtu vai vietā $a_1 b_1$, funkcija $f(a_1\ b_1)$ ir ekstrēma vērtība, veidojam:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2.$$

4) Ievedam vērtības $a_1 b_1$

$$\left(\frac{\partial f^2}{\partial x^2}\right)_{a_1 b_1} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{a_1 b_1} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{a_1 b_1} \tag{11}$$

Tikai, ja šī starpība ir lielāka par 0, $f(a_1\ b_1)$ ir ekstrema vērtība.

5) Ja

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{a_1 b_1} \begin{array}{l} < 0 \text{ tad } f(a_1\ b_1) \text{ ir maksims.} \\ > 0 \text{ tad } f(a_1\ b_1) \text{ ir minims.} \end{array}$$

Ja starpība (11) ir mazāka par 0, tad nav ne maksims, ne minims. Ja starpība (11) nolīdzinās 0, tad jautājums nav izšķirts un vajadzīgi tālāki pētijumi.

Ja ar $x_1 = a_1$ un $y_1 = b_1$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

tad, lai $f(a_1,\ b_1)$ būtu ekstrēma vērtība, vajadzīgs, lai arī ar $x_1 = a_1$ un $y_1 = b_1$, pazustu visas trešās parcialas atvasinātās. Maksima vai minima jautājumu tad izšķir $\frac{d^4 f}{ds^4}$, ja šī izteiksme ar visiem virzieniem patur vienu un to pašu zīmi.

P i e m ē r s.

$$f(x, y) = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}. \qquad (p > 0,\ q > 0).$$

1) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{p}; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{q}.$

2) no $\frac{x}{p} = 0$ un $\frac{y}{q} = 0$ dabūjam $x = 0$ un $y = 0$.

3) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{p}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{q}.$

4) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 = \frac{1}{p} \frac{1}{q} - 0 > 0.$

Tā tad vietā $x = 0; \quad y = 0$ dotai funkcijai ir ekstrema vērtība.

5) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{p} \left(\text{vai ari } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{q}\right) > 0.$

tā tad ar $x = 0$ un $y = 0$ dotai funkcijai ir minims, un šis minims ir.

$$f(0, 0) = 0.$$

**101. Funkcijas ekstremās vērtības ar vairāk kā diviem mainīgiem** Līdzīgi, kā [100] dabūjam, ka funkcijai

$$f(x_1, x_2, x \quad x_n) \tag{1}$$

vietā

$x_1 | x_2 | x_3 | \quad | x_n$ ir maksims vai minims

ja:

$f(x_1 + h_1, x_2 + h_2 . \quad x_n + h_n) - f(x_1, x_2, x_3 \quad x_n) < 0$ maksims

$> 0$ minims.

pie visiem $h_1 \quad h_n$ ar kuriem

$$|h_1| < \eta \qquad |h_n| < \eta.$$

Tālāk dabūjam, ka vajadzīgais noteikums, lai dotā funkcija dabūtu ekstremu vērtību, ir:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

No šiem nolīdzinājumiem dabū vērtību sistemas, kas varētu dot funkcijas (1) ekstremas vērtības. Izteiksmi, kas norāda vai ar dabūto vērtību sistemu ir maksims vai minims, neizvedīsim. Prakses gadijumos, problemas raksturs daudzkārt neapšaubami rāda, kas dotā gadijumā sagaidams, maksims vai minims.

**102. Relativās ekstremās vērtības.** Ja dota funkcija $f(x, y, z)$ un ja jānoteic, ar kādu vērtību sistemu $x | y | z$ funkcija $f(x, y, z)$ dabū ekstremu vērtību, tad $x, y, z$ varēja būt, kā [100] redzējām, visas vērtību sistemas, kas atradās šīs funkcijas noteiktības iecirknī $R$. Mainīgie $x, y, z$ ir visi neatkarīgi. Šādi noteiktus ekstremus sauc par a b s o l u t i e m e k s t r e m i e m.

Bet ja jādabū funkcijas

$$f(x, \quad z) \tag{1}$$

ekstremas vērtības ar dotu noteikumu:

$$\varphi(x, y, z) = 0, \tag{2}$$

tad vērtību sistemas $x|y|z$, kas dod (1) ekstremas vērtības, var būt tikai tādas, kas apmierina arī nolīdzinājumu (2) Tā kā no (2) dabūjam $z$ kā funkciju no $x$ un $y$, tad šinī gadijumā iecirknis vērtību sistemai, kas dod (1) ekstremu, ir tilpumu $R$ krustojoša virsma.

Šinī gadijumā dabūtos funkcijas $f(x, y, z)$ ekstremus, sauc par relativiem ekstremiem.

Ja prasītu funkcijas

$$f(x, y, z) \tag{3}$$

ekstremās vērtības ar noteikumiem

$$\varphi(x, y, z) = 0 \tag{4}$$

$$\psi(x, y, z) = 0 \tag{5}$$

tad ierobežojums ir vēl šaurāks. Tā kā no (4) un (5) $y$ un $z$ dabūjami kā funkcijas no $x$, tad tagad mainīgo iecirknis ir tilpumu $R$ krustojoša līkne.

Kā redzams, ja dotā funkcijā ir trīs mainīgie, tad var dot tikai divus noteikumus.

Vispārīgi, ja dotā funkcijā, kuras ekstremās vērtības jānoteic, atrodas $n$ mainīgie, tad lielākais noteikumu skaits ir $n-1$. Noteikumu skaits gan var būt mazāks par $n-1$.

Pieņemam, ka dota, kādā iecirknī $R$, vienvērtīga, nepārtraukta funkcija.

$$f(x, y, z, u) \tag{6}$$

Dabūsim šīs funkcijas relativās ekstremās vērtības ar noteikumiem:

$$\varphi(x, y, z, u) = 0 \tag{7}$$

$$\psi(x, y, z, u) = 0. \tag{8}$$

To varētu izdarīt šādi:

No (7) un (8) varam izteikt:

$$\left.\begin{aligned} z &= \omega_1(x, y) \\ u &= \omega_2(x, y) \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Ievietojot šīs $z$ un $u$ vērtības dotā funkcijā $f(x, y, z, u)$ dabūjam

$$f[x, y, \omega_1(x, y), \omega_2(x, y)] \qquad (10)$$

Kā redzams, šinī funkcijā ir tikai mainīgie $x$ un $y$

Šīs funkcijas absolutos ekstremus varam dabūt, kā norādīts [100]

Šis ceļš, izdarot mainīgo $z$ un $u$ izslēgšanu, nav arvienu iespējams. Gadijumos, kad tas iespējams, tas dažkārt dod neparocīgus rēķinus.

Še apskatīsim Lagranža paņēmienu, kā dabūt funkcijas

$$f(x, y, z, u) \qquad (11)$$

relatīvos ekstremus, kad doti noteikumi:

$$\varphi(x, y, z, u) = 0 \qquad (12)$$

$$\psi(x, y, z, u) = 0. \qquad (13)$$

Veidojam funkcijas (11) pilnīgo diferencialu:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial u} du. \qquad (14)$$

Ja augšā minētā $z$ un $u$ izslēgšana būtu izdarīta, tad izteiksmē (14) atrastos tikai $dx$ un $dy$. Arī še var izdarīt $dz$ un $du$ izslēgšanu. Veidojam funkciju (12) un (13) diferencialus:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \partial u = 0. \qquad (15)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial u} dz + \frac{\partial \psi}{\partial u} du = 0. \qquad (16)$$

No (15) un (16) varētu dabūt $dz$, $du$ un to vērtības ievest nolīdzinājumā (14), tad $dz$ un $du$ izslēgšana būtu izdarīta. Kā izdarīt izslēgšanu parocīgi, rāda sekojošais Lagranža paņēmiens.

Reizinam nolīdzinājumu (15) ar $\lambda$ un nolīdzinājumā (16) ar $\mu$. Še $\lambda$ un $\mu$ nenoteikti reizinātāji. Rezultatus pieskaitam pie (14). Tad dabūjam:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) dy +$$
$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial z}\right) dz + \left(\frac{\partial f}{\partial u} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial u}\right) du \tag{17}$$

Tā ka $\lambda$ un $\mu$ ir nenoteikti reizinātāji, tad lai tos noteiktu, varam uzdot divus noteikumus:

$$\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \tag{18}$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial u} = 0 \tag{19}$$

Kā redzams, tad izteiksme (17) dabū veidu:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) dy \tag{17a}$$

Vietā, kurā $f(x, y)$ dabū ekstremu vērtību, tās totalais diferencials ir 0, neatkarīgi no $dx$ un $dy$ vērtībām; tā tad tajā vietā ir:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0. \tag{20}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0. \tag{21}$$

Lai funkcija $f(x, y, z, u)$ dabūtu ekstremu vērtību ar dotiem noteikumiem (12) un (13), jāizvēlē $x, y, z, u, \lambda, \mu$ vērtības tādi, lai būtu izpildītas sekojošas izteiksmes:

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi(x, y, z, u) = 0 \\
&\psi(x, y, z, u) = 0 \\
&\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \\
&\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \\
&\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \\
&\frac{\partial f}{\partial u} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial u} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Še ir 6 nolīdzinājumi un arī nezinamo skaits ir: četri mainīgie $x$, $y$, $z$, $u$ un divi reizinātāji $\lambda$ un $\mu$, tā tad arī 6.

Vispārīgi, ja $n$ ir funkcijas mainīgo skaits, $r$ nenoteikto reizinātāju skaits, tad nezinamo skaits ir $r + n$, bet, kā redzams, arī nolīdzinājumu skaits ir $(r + n)$, tā tad nezinamo noteikšanai pietiekams.

Nolīdzinājumu sistemas (22) četrus beidzamos nolīdzinājumus varam dabūt sekojoši.

Uzskatot $\lambda$ un $\mu$ par pastāvīgiem skaitļiem, veidojam funkciju $F$: pie dotās $f$ funkcijas pieskaitot ar $\lambda$ reizinātu $\varphi$ funkciju un ar $\mu$ reizinātu $\psi$ funkciju tā tad,

$$F = f(x, y, \quad u) + \lambda\varphi(x, y, z, u) + \mu\psi(x, y, z, u).$$

$F$ funkcijas absolutām ekstremām vērtībām noteikumi ir:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial u} = 0.$$

Kā redzams, šīs četras izteiksmes tieši dod minētos četrus nolīdzinājumus. No apskatītā redzams, ka, lai dabūtu dotas funkcijas ekstremas vērtības ja doti arī noteikumu nolīdzinājumi, jārīkojas sekojoši:

1) Jāveido funkcija $F$, kas sastāv no summas kurā ieiet: dotā funkcija $f$ un katrs ar nenoteiktu reizinātāju reizināts noteikuma nolīdzinājums.

2) Jāveido funkcijas $F$ parcialās atvasinātās attiecibā uz katru funkcijas $f$ mainīgo.

3) Katra parcialā atvasinātā jāpielīdzina nullei.

4) Augšējiem nolīdzinājumiem jāpievieno dotie noteikumu nolīdzinājumi.

5) Šo nolīdzinājumu sistemu, kuras nezinamie ir funkcijas $f$ mainīgie un nenoteiktie reizinātāji, (kuru ir tikpat daudz, kā noteikumu nolīdzinājumu) jāatslēdz attiecibā uz nezinamiem.

Ar to tad problema ir atrisināta.

Vai ar šādu paņēmienu dabūtā vieta $x|y|z|u$ ir maksims, vai minims, to prakses gadijumos var ieskatīt no problemas rakstura

P i e m ē r s.

Skaitli $a$ sadalīt trijos summandos tā, lai šo summandu reizinājums būtu maksims. Apzīmējam meklētos summandus ar $x$, $y$, $z$. Tad funkcija, kurai meklējam maksimu, ir

$$f(x, y, z) = x \,.\, y \quad z.$$

Šis funkcijas maksims tiek meklēts ar noteikumu, ka

$$x + y + \quad = a,$$

tā tad

$$\varphi(x, y, z) = x + y + z - a.$$

1) $$F = xyz + \lambda(x + y + z - a)$$

2) $$\frac{\partial F}{\partial x} = yz + \lambda; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = xz + \lambda; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = xy + \lambda;$$

3) un 4)
$$\left.\begin{aligned} x + y + \quad &= a \\ yz + \lambda \quad &= 0 \\ xz + \quad &= 0 \\ xy + \quad &= 0 \end{aligned}\right\}$$

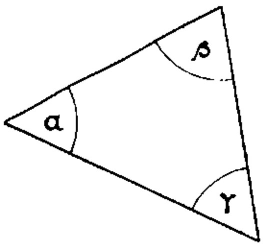
No trim beidzamiem nolīdzinājumiem dabūjam:

$$x = y =$$

un ievērojot pirmo nolīdzinājumu dabūjam

$$x = y = z = \frac{a}{3};$$

funkcijas $f(x, y, z) = x \cdot y \cdot z$ maksims ir $\frac{a^3}{27}$.




Zīm. 81.

Piemērs. Dotā trīsstūrī (zīm 81) ar vienādu precizitati izmērīti leņķi $\alpha$, $\beta$, $\gamma$

Šo leņķu summa $\alpha + \beta + \gamma \neq 180^0$, jo leņķus nevar pilnīgi precizi izmērīt. Apzīmējam kļūdas leņķu vērtībās ar $x$, $y$, tad $(\alpha + x)$; $(\beta + y)$ un $(\gamma + z)$ ir trīsstūra īstie leņķi un tādēļ

$$(\alpha + x) + (\beta + y) + (\gamma + z) - 180^0 = 0. \tag{1}$$

Varbūtības teorija rāda, ka šādā gadijumā kļūdu kvadratu summai jābūt minimam.

Tā tad jāatrod funkcijas

$$x^2 + y^2 + z^2 \tag{2}$$

minims ar noteikumu (1).

Saskaņā ar teoriju veidojam funkciju

$$F = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda[(\alpha + x) + (\beta + y) + (\gamma + z) - 180^0].$$

Pielīdzinot šīs funkcijas parcialās atvasinātās nullei, dabūjam:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= 2x + \quad = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 2y + \lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= 2z + \lambda = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Augšējie nolīdzinājumi (3) rāda, ka $\quad = y = z$; tā tad, ja

$$180^0 - (\alpha + \beta + \gamma) = \delta,$$

tad katra kļūda $x = y = z = \frac{\delta}{3}$ un īstie leņķi ir

$$\alpha + \frac{1}{3}\delta; \quad \beta + \frac{1}{3}\delta; \quad \gamma + \frac{1}{3}\delta.$$

## Sešpadsmitā nodaļa.

## Diferencialģeometrija III.

**103. Plāknes likņu īpašie punkti.** Ja līknes ordinata $y$ ir dota kā vienvērtīga funkcija no $x$ un, ja vietā $x_0$ funkcijai ir viens un galīgs diferencialkvocients, tad punkts $x_0 | y_0$ ir vienkāršs līknes punkts. Šinī punktā līknei ir viena pieskare. Īpaši gadijumi parādās, ja ar dažām $x$ vērtībām $y$, vai $y'$ vai arī abi, $y$ un $y'$ vienā laikā, dabū nenoteiktas vērtības, vai arī tad, ja $y$ ir vairākvērtīga funkcija no $x$.

Pieņemam, ka ar nolīdzinā.umu

$$f(x, y) = 0 \tag{1}$$

ir dota $n$ tas kārtas algebriska likne. Ja $m$ ir $y$ augskākā kāpe, tad katrai $x$ vērtībai atbilst $m$ vērtības $y$, kas var būt realas vai imaginaras Ja tās visas savā starpā atšķiras, piemēram, ja

$$\begin{array}{lll} \text{ar } x_1 & \text{dabūjam ordinatas} & y_1^{I} \; y_1^{II} \; y_1^{III} \\ x_1 + h & & y_2^{I} \; y_2^{II} \; y_2^{III} \end{array}$$

tad, ja $h$ ir ļoti mazs arī $y_1^{I}$ $y_2^{I}$ būs tuvu stāvošas vērtības, tāpat $y_1^{II}$ un $y_2^{II}$, kā arī $y_1^{III}$ un $y_2^{III}$. Tādā gadijumā ordinatas

$$y_1^{I}, \; y_2^{I} \quad . \; .$$

veido dotās līknes (1) zaru. Tāpat veido zarus ordinatas

$$y_1^{II},\ y_1^{II}$$

kā arī

$$y_1^{III},\ y_2^{III}$$

Tā piemēram

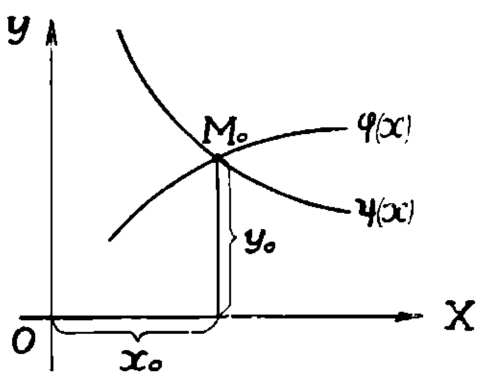
$$y^2 - 2px = 0$$

dod zarus:

$$y^I = \sqrt{2px}$$

un

$$y^{II} = -\sqrt{2px}.$$




Zīm. 82.

Ja

$$y = \varphi(x) \tag{2}$$

un

$$y = \psi(x) \tag{3}$$

ir funkcijas $f(x, y) = 0$ zari, un abi kādā iecirknī reali, tad abiem zariem būs kopēji punkti, ja nolīdzinājumam:

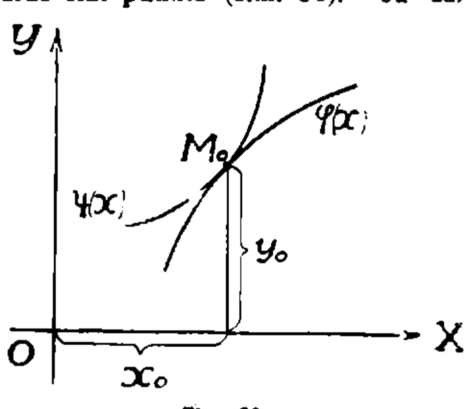
$$\varphi(x) = \psi(x)$$

ir realas saknes dotā iecirknī.

Ja šāda sakne ir $x_0$, tad

$$\varphi(x_0) = \psi(x_0) = y_0$$

ir nolīdzinājuma (1) divkārša sakne un līknes zari (2) un (3) krustojas punktā (zīm 82) $x_0 | y_0$ vai pieskaras šinī punktā (zīm. 83). Ja zari krustojas, tad punktu $M_0$ sauc par **mezgla punktu**. Otrā gadijumā punktu $M_0$ sauc par **pašpieskaršanās punktu**.




Zīm. 83.

Ja nolīdzinājumam (1) ir kompleksas saknes, tad tās ir pāros un piekārtotas. Tādā gadijumā, piemēram, viens pāris sakņu dabū veidu:

$$\left.\begin{aligned} y &= \omega_1(x) + i\,\omega_2(x) \\ y &= \omega_1(x) - i\,\omega_2(x) \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &(I) \\ &(II) \end{aligned}$$

Še $\omega_1(x)$ un $\omega_2(x)$ ir nepārtrauktas, realas funkcijas.

Ja uz zara I $y$ ir kompleksa vērtība, piemēram, intervalā, $(-\infty, x_0)$, tad arī zara II $y$ ir kompleksa vērtība šinī intervalā. Ja intervalā $(x_0, \infty)$ zars I ir reals, tad reals ir arī zars II. Vietā $x_0$ abi zari top reali ar to, ka $\omega_2(x_0)$ dabū vērtību 0. Šajā vietā $x_0$ abu zaru ordinatas dabū vērtību

$$y_0^{\mathrm{I}} = \omega_1(x_0) = y_0^{\mathrm{II}}.$$

No augšējā redzams, ka ja līknei (1) ir zars

$$y = \varphi(x),$$

kas imaginars, piemēram, intervalā $(-\infty, x_0)$ un reals intervalā $(x_0, \infty)$, tad šim zaram ir piekārtots otrs zars, kas arī ir imaginars intervalā $(-\infty, x_0)$ un reals intervalā $(x_0, \infty)$ Abi realie zari sākas punktā $x_0 \,|\, y_0$.

Piemērs:

Līknes nolīdzinājums:

$$y^2 - 2xy + x^2 - \quad + 2 = 0$$

dod

$$y = x \pm \sqrt{x \quad 2}.$$

Pirmais zars ir:

$$y = x + \sqrt{x - 2}.$$

otrs zars ir:

$$y = x - \sqrt{x - 2}.$$

Kā redzams, abi zari ir imaginari intervalā $(-\infty, 2)$ un abi zari ir reali intervalā $(2, \infty)$.

Ar $x_0 = 2$ abi zari dabū vienlīdzīgas ordinatas

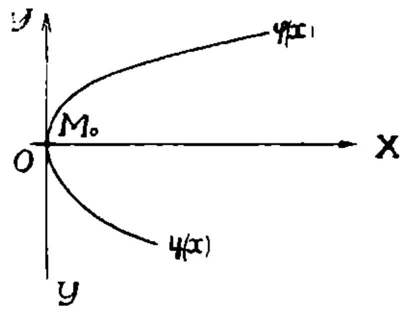
$$y^{\mathrm{I}}_{x=2} = y^{\mathrm{II}}_{x=2} = 2.$$

Šinī punktā $2 \,|\, 2$ abi imaginarie zari pāriet realos.

Punkts $M_0$, kurā imaginarie zari pāriet realos zaros, var būt līknes vienkāršs punkts. Piemēram līknei

$$y^2 = 2x$$

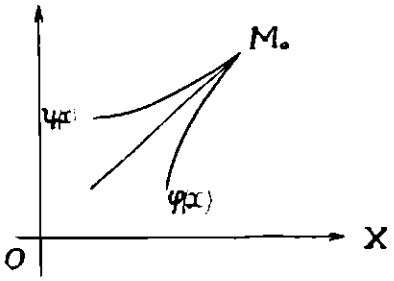
zari ir $y = \sqrt{2x}$ un $y = -\sqrt{2x}$ tie pāriet punktā $0 \,|\, 0$ no realiem maginaros. Šis punkts ir parabolas vienkāršs punkts.



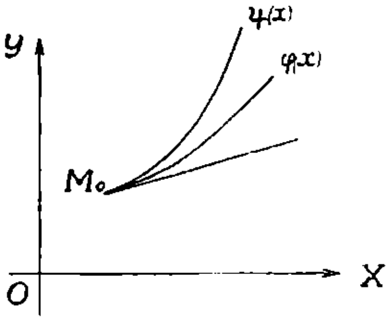

Zīm. 84.

Pāreja no realiem zariem imaginaros, notiek arī citā veidā, bet tad arvienu pārejas punktā abiem zariem ir kopēja pieskare.

Līknes veidu, zīmējumā 85 un 86, sauc par smaili. Zīmējumā (85) smaile ir pirmā un zīmējumā (86) otra veida.




Zīm. 85.




Zīm. 86.

Ja līknes zari:

$$y = \omega_1(x) + i\,\omega_2(x),$$
$$y = \omega_1(x) - i\,\omega_2(x),$$

ar visiem $x$ imaginari, izņemot tos atsevišķos $x$, kas ir nolīdzinājuma:

$$\omega_2(x) = 0$$

realas saknes, tad, ja kāda sakne ir piemēram $x_0$, tad:

$$y_0 = \omega_1(x_0)$$

un līknes punkts $x_0 | y_0$, tad ir reals. Šādu punktu sauc par izolētu punktu.

Piemērs.

Ja līknes nolīdzinājumu atslēdzot dabūjam:

$$y = x \pm x\sqrt{-(x-2)^2},$$

tad zari ir:

$$y^{I} = x + x\sqrt{-(x-2)^2},$$
$$y^{II} = \quad - x\sqrt{-(x-2)^2}.$$

Kā redzams, abu zaru ordinatas ir arvienu kompleksas, izņemot gadijumus, kad $x = 2$ un $x = 0$.

Šinīs gadijumos ordinatas $y^{I}$ un $y^{II}$ ir realas un vienlīdzīgas. Punkti $P_1 = 2|2$ un $P_2 = 0|0$ ir dotās līknes izolēti punkti.

**104 Līknes īpašo (singularo) punktu analītiska noteikšana.** Ja līknes nolīdzinājums dots veidā:

$$F(x\ y) = 0, \tag{1}$$

tad

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}. \tag{2}$$

Ja gadijumā, kādā līknes punktā $x_0 | y_0$ dabūjam

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{x_0, y_0} = 0 \quad \text{un} \quad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{x_0 y_0} = 0, \tag{3}$$

tad:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$$

Līknes punktu $x_0 | y_0$, kam ir īpašība kā norādīts (3), sauc par līknes singularu punktu

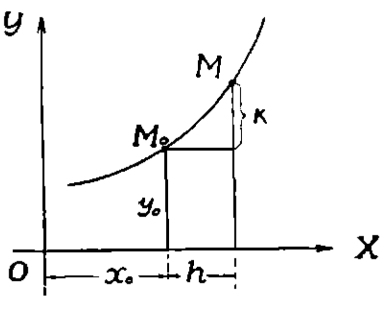
Kā redzams, lai dabūtu līknes (1) singularus punktus, kopīgi jāatslēdz nolīdzinājumi:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad \text{un} \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 0. \tag{3ª}$$

Vērtību pāris $x = a$ un $y = b$, kas apmierina nolīdzinājumus (3ª), noteic singularu punktu, ja $x = a$ un $y = b$ apmierina arī līknes nolīdzinājumu (1).

Pieņemam, ka līknes nolīdzinājums dots:

$$F(x, y) = 0.$$




Zīm. 87.

Ja punkti (zīm. 87.) $M_0 = x_0 | y_0$ un $M = x_0 + h | y_0 + k$ atrodas uz līknes (1), tad

$$F(x_0, y_0) = 0 \tag{4}$$

un

$$F(x_0 + h,\ y_0 + k) = 0. \tag{4ª}$$

Nolīdzinājuma (4) kreiso pusi izteicam ar Teilora formulu

$$F(x_0 + h,\ y_0 + k) = F(x_0,\ y_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial x} h + \frac{\partial F}{\partial y} k\right)_{x_0 y_0} +$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} h^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y} hk + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} k^2\right)_{x_0 y_0} + R = 0 \qquad (5)$$

Ievērojot izteiksmes (4) un (4ᵃ), izteiksme (5) dabū veidu:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} h + \frac{\partial F}{\partial y} k\right)_{x_0 y_0} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} h^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y} hk + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} k^2\right)_{x_0 y_0} + R = 0. \qquad (6)$$

Kā redzējām, ja $M_0$ ir īpašs punkts, tad

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \ \text{ un } \ \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \qquad (\text{vietā } x_0 \mid y_0)$$

un izteiksmē (6) paliek:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} h^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y} hk + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} k^2\right)_{x_0 y_0} + R = 0. \qquad (7)$$

dalot ar $h^2$, varam rakstīt:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y}\frac{k}{h} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{k}{h}\right)^2\right)_{x_0 y_0} + \frac{R}{h^2} = 0. \qquad (8)$$

Kā redzams, no augšējā zīmējuma

$$\lim_{h \to 0} \frac{k}{h} = y_0'. \qquad (h \to 0 \text{ tad arī } k \to 0)$$

Ja izteiksmē (8) liekam $h \to 0$, tad

$$\lim_{h \to 0} \frac{R}{h^2} = 0,$$

jo $R$ izteiksmē atrodas kā reizinātājs $h^3$.

Tad izteiksme (8) dabū veidu:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y} y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} y'^2\right)_{x_0 y_0} = 0. \qquad (9)$$

No izteiksmes (9) dabūjam:

$$y' = -\frac{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y}\right)_{x_0 y_0}}{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_{x_0 y_0}} \pm \sqrt{\left[\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y}}{\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}}\right]^2_{x_0 y_0} - \left[\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}}{\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}}\right]_{x_0 y_0}}$$

vai pārveidojot:

$$y' = -\frac{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y}\right)_{x_0 y_0}}{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_{x_0 y_0}} \pm \frac{1}{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_{x_0 y_0}} \sqrt{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y}\right)^2_{x_0 y_0} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\, \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_{x_0 y_0}} \qquad (10)$$

Se jāizšķir trīs gadijumi.

1) $$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y}\right)^2_{x_0 y_0} > \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\, \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_{x_0 y_0} \qquad (11)$$

Še $y'$ dabū divas nevienādas realas vērtības. Punktā $M_0 = x_0 | y_0$, (kas izpilda (1) un (3) izteiksmi) ir divas realas pieskares, $|M_0|$ ir mezgla punkts.

2) $$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y}\right)^2_{x_0 y_0} = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\, \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_{x_0 y_0} \qquad (12)$$

Še $y'$ dabū divas vienādas vērtības. Punktā $M_0 = x_0 | y_0$ sakrīt divas pieskares. Tad $M_0$ var būt: smailes atgriezes, pašpieskāršanās vai izolēts punkts. Kā šos trīs gadijumus atšķiŗ, par to vēlāk.

3) $$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y}\right)^2_{x_0 y_0} < \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_{x_0 y_0}$$

Še punkts $M_0 = x_0 | y_0$ gan ir reals, bet tajā ir divas imaginaras pieskares. Punkts $M_0$ tad ir izolēts punkts.

Gadijumā, kad

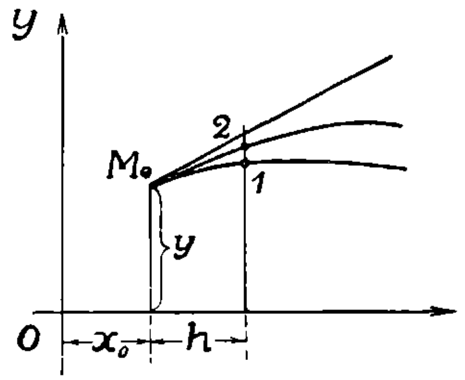
$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y}\right)^2_{x_0 y_0} = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_{x_0 y_0},$$

tālākā pētīšana izdarama šādi.

Liekam nolīdzinājumā $F(x, y) = 0$

$x_0$ vietā $x_9 + h$ un $x_0 - h$.

Ja abos gadijumos $y$ dabū realas vērtības, tad $M_0 = x_0 | y_0$ ir pašpieskaršanās punkts. Ja abos gadijumos $y$ dabū imaginaras vērtības, tad $M_0$ ir izolēts punkts. Bet, ja piemēram, ar $x_0 + h$ $y$ dabū realas vērtības un ar $x_0 - h$ imaginaras vai arī otrādi, tad punkts $M_0$ ir smailes atgriezes punkts.




Zīm 88.

Lai izšķirtu, kāda veida ir smaile, tad jāveido $y''$ Ja smaile ir pirmā veida, tad zariem 1 un 2 otrā atvasinātā $y''$ punktā $M_0$ ir ar pretējām zīmēm, (zīm. 89), bet ja smaile ir otra veida, tad $y''$ ar vienādām zīmēm (zīm. 88). Tā tad, ja dots līknes nolīdzinājums

$$F(x, y) = 0,$$

tad, lai dabūtu līknes īpašos punktus jārīkojas sekojoši:

1) Jāveido

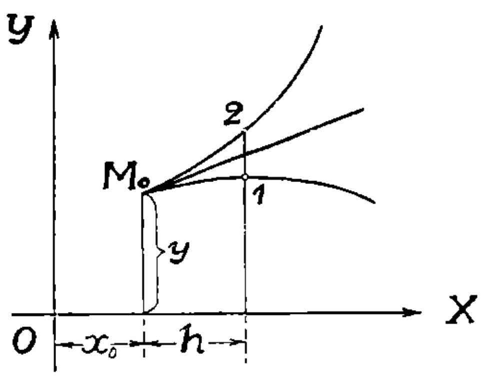
$$\frac{\partial F}{\partial x} \text{ un } \frac{\partial F}{\partial y}.$$

2) Jādabū nolīdzinājumu

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad \text{un} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

saknes. Pieņemam, ka saknes ir:

$$x_1 = a_1; \quad y_1 = b_1;$$
$$x_2 = a_2; \quad y_2 = b_2.$$




Zīm. 89.

3) Ja vērtību pāris $a_1 | b_1$ apmierina arī līknes nolīdzinājumu $F(x, y) = 0$, tad punkts $M_1 = a_1 | b_1$ ir līknes īpašs punkts.

4) Veidojam:

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \, \partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \, \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right).$$

Tad, ja

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \, \partial y}\right)^2_{\substack{x_1=a_1\\y_1=b_1}} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \, \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_{\substack{x_1=a_1\\y_1=b_1}} \begin{matrix} > 0 \text{ mezgla punkts} \\ = 0 \text{ pašpieskares, smailes atgriešanās,} \\ < 0 \text{ izolēts punkts.} \quad \text{[izolets punkts} \end{matrix}$$

P i e m ē r s.

Lemniskatas nolīdzinājums ir:

$$+ y^2)^2 \qquad\qquad y^2) = 0$$

1) $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 2\,(x^2 + y^2)\,2x - 2a^2x$; $\dfrac{\partial F}{\partial y} = 2\,(x^2 + y^2)\,2y + 2a^2y.$

2) $2\,(x^2 + y^2)\,2x - 2a^2x = 0$ un $2\,(x^2 + y^2)\,2y + 2a^2y = 0.$
dod saknes $x = 0$ un $y = 0.$

Vērtības $x = 0$ un $y = 0$ apmierina l e m n i s k a t a s nolīdzinājumu, tā tad $M = 0|0$ ir līknes īpašs punkts.

3) $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 12x^2 + 4y^2 - 2a^2.$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 4x^2 + 12y^2 + 2a^2.$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = 8xy.$$

4) $\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\right)^2_{0,0} - \left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\quad\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_{0,0} = 0 - (-\,2a^2 \quad 2a^2) > 0,$

tā tad punkts $M = 0|0$ ir līknes mezgla punkts.

Pieskaru virzienu koeficientus punktā $0|0$ dabūjam ievedot šīs vērtības nolīdzinājumā (9), kas dod:

$$2a^2y'^2 - 2a^2 = 0,$$
$$y' = \pm 1.$$

Tā tad pieskaru nolīdzinājums ir:

$$y = x,$$
$$y = -x.$$

P i e m ē r s.

C i s s o ī d a s nolīdzinājums ir:

$$(x^2 + y^2)\,x - 2ay^2 = 0. \qquad (a > 0)$$

1) $\dfrac{\partial F}{\partial x} = x^2 + y^2 + 2x^2 = 3x^2 + y^2$; $\dfrac{\partial F}{\partial y} = 2xy - 2ay.$

2) Nolīdzinājumi

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 + y^2 = 0 \quad \text{un} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2xy - 4ay = 0.$$

dod saknes $x=0$ un $y=0$. Šis vērtības apmierina arī cissoidas nolīdzinājumu, tādēļ punkts $0|0$ ir cissoidas īpašs punkts.

$$3)\ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 6x \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2\,(x - 2a); \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y} = 2y.$$

$$4)\ \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y}\right)^2_{0,0} - \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_{0,0} = 0 - (0 \;-\; 4a) = 0.$$

Kā no līknes nolīdzinājuma redzams, ar $x = 0 + h$, dabūjam:

$$(h^2 + y^2)\, h - 2ay^2 = 0.$$

$$y^2\,(h - 2a) = - h^3.$$

$$y^2 = \frac{h^3}{2a - h}.$$

Šī izteiksme dod realas vērtības $y$, ja $h > 0$ un imaginaras ja $h < 0$.

Ievērojot šo apstākli un (4) rezultatu, līknei punktā $0|0$ ir smailes atgriezes punkts.

No (9) dabūjam

$$y'^2 = 0.$$

$$y' = 0,$$

tā tad smailes atgriezes punkta pieskare sakrīt ar $x$ asi. No līknes nolīdzinājuma redzams, ka tas nemaina veidu, ja $y$ vietā ievedam $-y$; tas norāda, ka līkne ir simetriska pret $x$ asi. Tā tad še ir pirmā veida smaile.

**105. Apliecošās līknes.** Pieņemam, ka nolīdzinājumā:

$$f(x,\ y,\ t) = 0 \tag{1}$$

$f(x,\ y,\ t)$ ir vienvērtīga, nepārtraukta argumentu $x$, $y$, $t$ funkcija.

Uzskatam $t$ par p a r a m e t r u, no ka otkarājas ar nolīdzinājumu (1) dotās līknes izmērī vai vieta plāknē. Ar mainīgu $t$ nolīdzinājums (1) dod līkņu saimi. Tā piemēram, nolīdzinājums

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

ar mainīgu $r$ dod riņķu saimi, ar centru koordinatu sākumā. Nolīdzinājums

$$(x - a)^2 + y^2 - r^2 = 0$$

ar mainīgu $a$ dod riņķu saimi. Visiem riņķiem ir viens un tas pats radiuss, riņķu centri atrodas uz $x$ ass.

Ja dodam $t$ noteiktu vērtību, tad no līkņu saimes (1) izņemam noteiktu līkni. Ja nolīdzinājumā (1) ievietojam $t$ vietā $t + \Delta t$, tad dabūjam augšējās saimes otru līkni.

Līknes

$$f(x, y, t) = 0 \tag{1}$$

$$f(x, y, t + \Delta t) = 0 \tag{2}$$

vispārīgā gadijumā krustojas Ja $\Delta t \to 0$, tad līkņu (1) un (2) krustpunkts tiecas uz kādu noteiktu robežvietu. Šādu robežvietu — punktu sauc par **robežpunktu**. Līkņu saimes (1) visu robežpunktu kopība veido līkni, līkņu saimes (1) **apliecošo līkni.**

Līkņu (1) un (2) krustpunkts ir dots ar nolīdzinājumiem (1) un (2).

Nolīdzinājums:

$$f(x, y, t + \Delta t) - f(x, y, t) = 0 \tag{3}$$

dod līkni, kas iet caur līkņu (1) un (2) krustpunktu. Tā tad, lai dabūtu līkņu (1) un (2) krustpunktu, varam ņemt arī līknes (1) un (3) Pielietojot Lagranža teoremu, dabūjam:

$$f(x, y, t + \Delta t) - f(x, y, t) = \Delta t f'_t(x, y, t + \theta \Delta t) = 0.$$

Tā kā $\Delta t \neq 0$, tad nodalot ar $\Delta t$ dabūjam

$$f'_t(x, y, t + \theta \Delta t) = 0. \tag{3^a}$$

Tā tad līkņu (1) un (2) krustpunktu varam dabūt lietojot nolīdzinājumus (1) un ($3^a$).

Lai dabūtu līkņu (1) un (2) krustpunkta robežvietu — robežpunktu, jāliek nolīdzinājumā ($3^a$) $\Delta t \to 0$, tad dabūjam nolīdzinājumu

$$f'_t(x, y, t) = 0. \tag{3^b}$$

Pievienojam šim nolīdzinājumam

$$f(x, y, t) = 0. \tag{1}$$

Nolīdzinājumi (1) un ($3^b$) dod līkņu (1) un (2) krustošanās **robežpunktu.** Izslēdzot starp šiem nolīdzinājumiem $t$, dabūjam robežpunktu kopibu — likņu saimes (1) **apliecošās** līknes nolīdzinājumu. Tā tad, lai dabūtu līkņu saimes $f(x, y, t) = 0$ apliecošās līknes nolīdzinājumu, jārīkojas sekojoši:

1) veidojam

$$f'_t(x, y, t) = 0$$

2) starp nolīdzinājumiem

$$f(x, y, t) = 0 \quad \text{un} \quad f'_t(x, y, t) = 0,$$

izslēdzot parametru $t$, dabūjam nolīdzinājumu — apliecošās līknes nolīdzinājumu.

Piemērs:

Dabūt taišņu saimes

$$y = kx + \frac{p}{k} \quad \text{vai} \quad y - kx - \frac{p}{k} = 0 = f(x, y, k)$$

apliecošo līkni. Mainīgais parametrs še ir $k$.

1) $$f'_k(x, y, k) = -x + \frac{p}{k^2} = 0.$$

2) $$k = \pm\sqrt{\frac{p}{x}}$$

šo vērtību ievietojot taišņu saimes nolīdzinājumā dabūjam:

$$y = \pm\sqrt{\frac{p}{x}}\,x + \frac{p}{\pm\sqrt{\frac{p}{x}}} = \pm 2\sqrt{px}$$

Kā redzams, apliecošā līkne šinī gadijumā ir parabola.

Teorema.

Apliecošā līkne pieskaras robežpunktā apliektai līknei.

No apliektās līknes $f(x, y, t) = 0$ nolīdzinājuma dabūjam tās pieskares virziena koeficientu:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \qquad (a)$$

Ja punkts $x|y$ ir robežpunkts, tad tas atrodas arī uz apliecošās līknes.

Apliecošās līknes nolīdzinājumi parametriskā veidā ir:

$$\left.\begin{aligned} f(x, y, t) &= 0 \\ f'_t(x, y, t) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (\beta)$$

Še apliecošās līknes koordinatas $x$ un $y$ ir funkcijas no parametra $t$.

Nolīdzinājuma sistemas ($\beta$) pirmā nolīdzinājuma pilnīgs diferencials ir:

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial t}dt = 0. \qquad (\gamma)$$

Sistemas ($\beta$) otrs nolīdzinājums rāda, ka

$$\frac{\partial f}{\partial t} = f'_t(x, y, t) = 0.$$

Šo izteiksmi ievērojot, nolīdzinājums ($\gamma$) dabū veidu:

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0 \qquad (\delta)$$

No šī nolīdzinājuma dabūjam:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}.$$

Šī izteiksme dod apliecošās līknes pieskares virziena koeficientu robežpunktā.

Apliecošai un apliektai līknei ir kopējs punkts — robežpunkts. Šinī punktā, kā to rāda nolīdzinājumi ($\alpha$) un ($\varepsilon$), abām līknēm ir kopējs pieskares virziens, tā tad arī kopēja pieskare.

Kā redzams, $\frac{dy}{dx}$ dabū noteiktas vērtības, ja

$$\frac{\partial f}{\partial x} \neq 0 \quad \text{un arī} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \neq 0,$$

t. i. ja līknei (1) nav īpašu (singularu) punktu.

Ja līknei (1) ir īpaši punkti, tad izslēgšanas rezultats no nolīdzinājumiem

$$\left.\begin{aligned} f(x, \quad t) &= 0 \\ f'_x(x, y, t) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

kā to var pierādīt: dod līkņu saimes (1) singularo punktu ģeometrisko vietu un šo līkņu saimes (1) apliecošo līkni, vai arī tikai singularo punktu ģeometrisko vietu vien vai arī tikai apliecošo līkni

Ja līkņu saimes nolīdzinājumā atrodas divi parametri, tad nolīdzinājuma veids ir:

$$f(x, y, u, v) = 0 \tag{4}$$

un ja parāmetri saistīti ar nolīdzinājumu

$$\varphi(u, v) = 0 \tag{5}$$

tad, lai dabūtu līkņu saimes (4) apliecošo līkni, varētu no (5) dabūt $v$ vērtību kā funkciju no $u$. Ievietojot šo vērtību nolīdzinājumā (4) šis gadijums būtu pārvests uz jau apskatīto. Bet ja izslēgšana nav viegli izdarama, tad pielieto sekojošu paņēmienu:

Uzskatot $u$ kā neatkarīgu un $v$ kā no $u$ atkarīgu parametru, diferencējot nolīdzinājumus (4) un (5) attiecībā uz $u$, dabūjam

$$\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{du} = 0. \tag{6}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{dv}{du} = 0. \tag{7}$$

Starp četriem nolīdzinājumiem (4), (5), (6), (7) izslēdzam $u$, $v$, $\frac{dv}{du}$.

Izslēgšanas rezultats — nolīdzinājums starp $x$ un $y$ dod apliecošās līknes nolīdzinājumu.

P i e m ē r s gadijumam, kad līknei ir īpaši punkti.

Dabūt līkņu saimes

$$f(x, y, u) = \quad + (x + a)(y - u)^2 - ax^2 = 0 \tag{a}$$

apliecošo līkni.

Šī saime dod strofoidas. Šīm līknēm ir mezgla punkts uz $y$ ass (zīm. 90). $LL$ ir strofoidu asimptota. Ja mainam līknes nolīdzinājumā $u$, tad strofoida tiek pabīdīta paralēli $x$ asij. Še

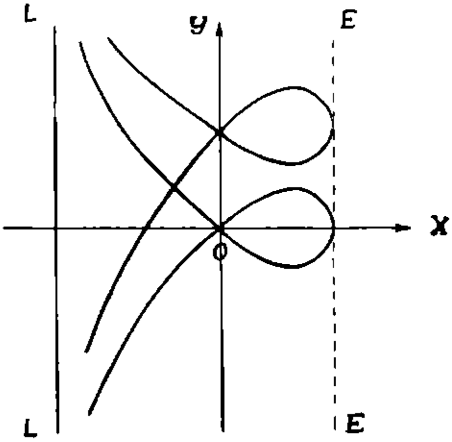
$$f'_u(x, y, u) = \frac{\partial f}{\partial u} = -2(x+a)(y-u)$$

Liekot

$$(x + a)(y - u) = 0 \quad (\beta)$$

un izslēdzot starp nolīdzinājumiem ($\alpha$) un ($\beta$) $u$, dabūjam:

$$x^2(x - a) = 0.$$



Zīm. 90.

Še $x = 0$ dod $y$ asi, dubultpunktu $O$ ģeometrisko vietu, jo ar $x = 0$ un $y = u$ nolīdzinājums ($\alpha$) dod $f'_x = 0$; $f'_y = 0$. Ar $x = a$ dabūjam taisni $EE$, likņu saimes ($\alpha$) apliecošo līkni.

**106. Vingrinājumi.**

1) $z = l\dfrac{x+y}{x-y}$; $\dfrac{\partial z}{\partial x} = ?$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = ?$

Atbilde: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2y}{y^2 - x^2}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2x}{x^2 - y^2}$.

2) $z = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; $\dfrac{\partial z}{\partial x} = ?$ $\dfrac{\partial z}{\partial y} = ?$

Atbilde: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{xy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$.

3) $z = l \sin \dfrac{x}{y}$; $dz = ?$

$$dz = \frac{1}{y} \operatorname{cotg} \frac{x}{y}\, dx - \frac{x}{y^2} \operatorname{cotg} \frac{x}{y}\, dy.$$

4) $y = \dfrac{u}{v}$; $u = x^2 - x$; $v = \cos x$.

Dabūt $\dfrac{dy}{dx}$, uzskatot $y = f(u, v)$ kā saliktu funkciju.

Atbilde $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x - 1 + (x^2 - x)\operatorname{tg} x}{\cos x}$

5) $u = \arc\cos\frac{z}{xy}$; $du = ?$

Atbilde: $du = \frac{1}{xy\sqrt{x^2y^2 - z^2}}(yzdx + xzdy - xydz)$.

6) $z = y^2 lx$; $d^2z = ?$

Atbilde: $d^2z = -\frac{y^2}{x^2}dx^2 + \frac{4y}{x}dx\,dy + 2lx\,dy^2$.

7) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$; $y'' = ?$

Atbilde: $y'' = \frac{2a(y^2 - ax)(ay - x^2) - 2x(y^2 - ax)^2 - 2y(ay - x^2)^2}{(y^2 - ax)^3}$

8) $u = e^{xyz}$; $\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = ?$

Atbilde: $\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = e^{xyz}(x^2y^2z^2 + 3xyz + 1)$.

9) $u = (xy)^z$; $\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = ?$

Atbilde: $\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = z(xy)^{z-1}[2 + z(lx + ly)]$

10) $2x - ay^2 - bz^2 = 0$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = ?$ $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = ?$

Atbilde: $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{ay}{b^2z^3}$ $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2ax}{b^2z^3}$.

11) $xy + xz - y^2 - z^2 = 0$; $dz = ?$

Atbilde: $dz = \frac{y + z}{2z - x}dx + \frac{x - 2y}{2z - x}dy$

12) $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$; $d^2z = ?$

Atbilde: $d^2z = -\frac{x^2 + z^2}{z^3}dx^2 - \frac{2xy}{z^3}dx\,dy - \frac{y^2 + z^2}{z^3}dy^2$.

13) Izvirzīt Meklorena rindā:

$$f(x, y) = \cos x \cos y.$$

Atbilde: $\cos x \cos y = 1 - \frac{1}{1\,.\,2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{4!}(x^4 + 6x^2y^2 + y^4)$.

Beidzot rindu ar sestās dimensijas locekļiem dadūjam:

$$R = \frac{1}{6!}(6x^5y + 21x^3y^3 + 6xy^5)\sin\theta x \sin\theta y -$$

$$-\frac{1}{6!}(x^6 + 15x^4y^2 + 15y^2x^4 + y^6)\cos\theta x \cos\theta y$$

14) Dabūt funkcijas

$$z = x^2 + xy + y^2 \quad 2x - y$$

minimu.

Atbilde: ar $x = 1$ un $y = 0$ dabūjam $z = -1$ (minims)

15) Dota elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Šīs elipses asis pieņemtas mainīgas, elipse tad maina veidu. Pieņemam, ka elipses laukums ir pastāvīgs.

$$\pi \, . \, ab = k.$$

Dabūt veidotās līkņu saimes apliecošās līknes nolīdzinājumu.

Atbilde: $xy = \pm \dfrac{k}{2\pi}$.

16) Dabūt vislielāko taisnleņķa paralelepipeda tilpumu, ko var ievietot elipsoidā:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Atbilde: Meklētais paralelepipeda tilpums: $\dfrac{8abc}{3\sqrt{3}}$.

17) Dabūt līknes

$$y^3 = 6x^2 + x^3$$

asimptotas.

Atbilde: $y = x + 2$.

18) Dabūt līknes

$$xy^2 + x^2y = a^3$$

asimptotas.

Atbilde: $x = 0$; $\quad = 0$; $x + y = 0$.

19) Izpētīt, attiecībā uz īpašiem punktiem, līkni:

$$a^4y^2 = a^2x^4 \quad x^6$$

Atbilde: $P = 0|0$ pašpieskaršanās punkts.

20) Izpētīt, attiecībā uz īpašiem punktiem, līkni:

$$(y - x^2)^2 = x^5$$

Atbilde: punkts $0|0$ ir otra veida smaile.

21) Izpētīt, attiecībā uz īpašiem punktiem, līkni

$$y^2 = x^3 - x^2.$$

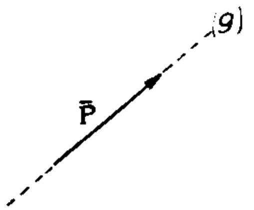
Atbilde: punkts $0|0$ ir izolēts punkts.

## Septiņpadsmitā nodaļa.

# Vektoru rēķinu formulu sakopojums.

### 107. Vektoru algebras formulas.

1) Vektora apzīme:



vai arī

Zīm. 92.

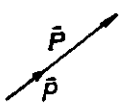
Zīm. 91.

Taisne $(g)$ ir vektora $\overline{P}$ pamats.

2) Vektora moduls vai absolutais lielums:

$$|\overline{P}| = P; \text{ vai } |\overline{a}| = a.$$

3) Vektora $\overline{P}$

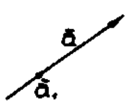


vienības vektors $\overline{p}$:

Zīm. 93.

$$|\overline{p}| = 1.$$

Vektora $\overline{a}$

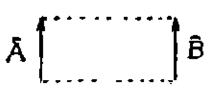


vienības vektors $\overline{a}_1$; $|\overline{a}_1| = 1$.

Zīm. 94.

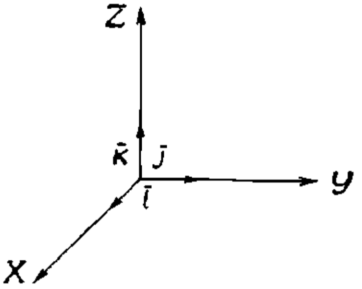
4) $\overline{P} = P \; \overline{p}$; $\overline{a} = a \; \overline{a}_1$.

5) $\overline{A} = \overline{B}$, ja $A = B$; vienāds virziens un pamati paraleli.



Zīm. 96.

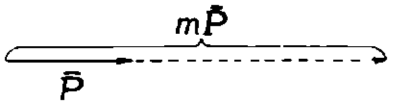
6) Pamata vektori $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$;




Zīm. 97.

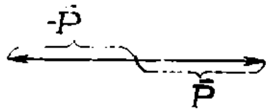
$$|\bar{i}| = 1; \quad |\bar{j}| = 1; \quad |\bar{k}| = 1.$$

7) Vektors $m\bar{P}$:



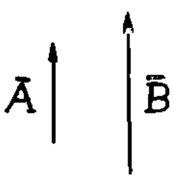

Zīm 8.

8) Vektors $-\bar{P} = (-1)\,\bar{P}$:




Zīm. 99.

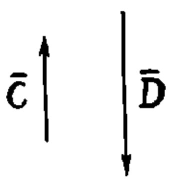
9) Vektori:




ir paraleli. Tiem ir vienlīdzīgs virziens un pamati paraleli.

Zīm. 100.

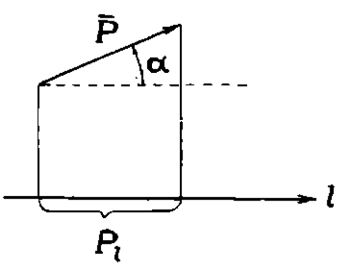
Vektori



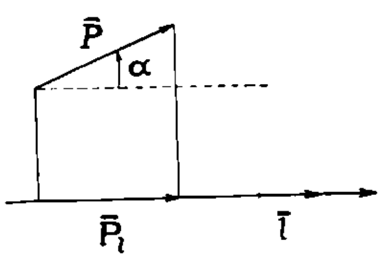

ir antiparaleli. Tiem ir paraleli pamati, bet virziens nav vienlīdzīgs.

Zīm. 101.

10) Vektora $\bar{P}$ projekcija uz taisnes $l$. (Skalars). Zīm. 102.




Zīm. 102.

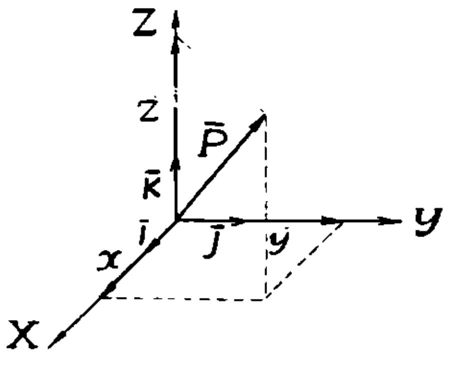



Zīm. 103.

$P_l = P \cdot \cos \alpha$. ($\alpha$ lenķis starp vektoru $\overline{P}$ un taisni $l$). Vektora $\overline{P}$ komponenta uz taisnes $\overline{l}$ zīm. 103.

$$\overline{P}_l = P_l \; \overline{l} = (P \cos \alpha)\,\overline{l}; \; |\overline{l}| = 1.$$

11) Radiusa vektora projekcijas uz koordinātu asīm.




Zīm. 104.

Ja vektors iziet no koordinata sākuma $O$ un vektora gala punkta koordinatas $x \mid y \mid z$ dotas, tad vektora projekcijas ir:

$$P_x = x; \quad P_y = y; \; P_z = z.$$

Vektora komponentas ir:

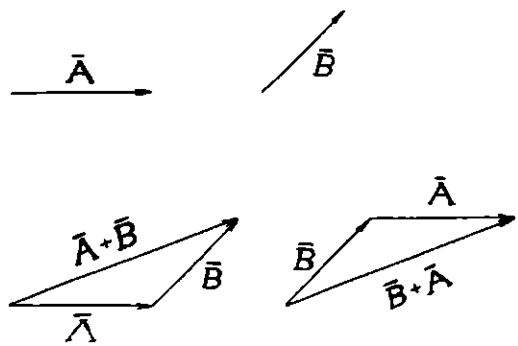
$$\overline{P}_x = \overline{i}\,x; \quad \overline{P}_y = \overline{j}\,y;$$
$$\overline{P}_z = \overline{k}\,z$$

12) Saistīts vektors: vektors, kā sākuma punkts saistīts ar noteiktu dotu punktu. Šāda vektora noteikšanai vajadzīgi seši noteikumi. Piemērs: dota punkta ātrums rotacijas kustībā.

Slīdošs vektors: vektors, ko var pārbīdīt uz vektora pamata Piemērs: cieta ķermeņa svars statikā. Slīdoša vektora noteikšanai vajadzīgi pieci noteikumi.

Svabads vektors: vektors ko var telpā pārbīdīt paraleli sev Piemērs: spēku pāra moments. Svabada vektora noteikšanai vajadzīgi trīs noteikami.

Še apskatīsim svabados vektorus.



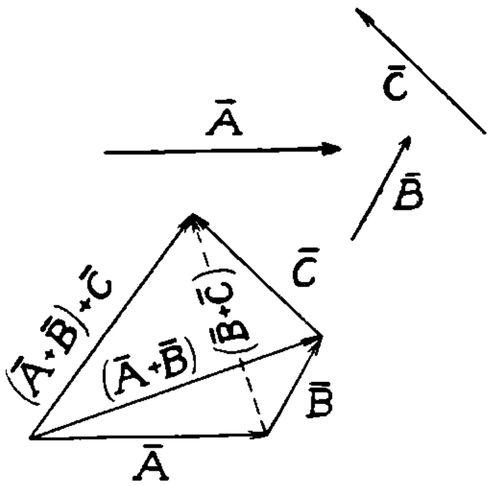

Zīm. 105.

13) Vektoru $\overline{A}$ un $\overline{B}$ summa

$\overline{A} + \overline{B} = \overline{B} + \overline{A}$ (komutativais likums). Zīm. 105

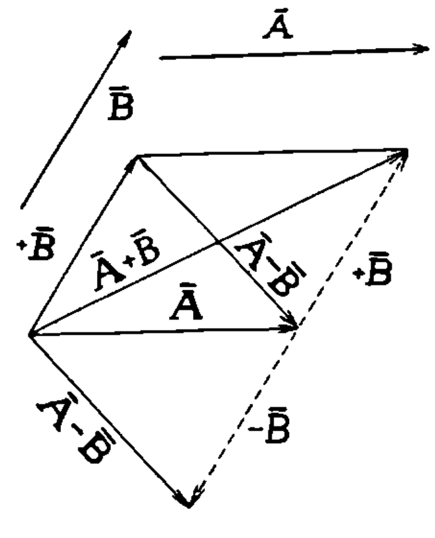
Vektoru $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ summa: $\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$.

Redzam, ka: $(\bar{A} + \bar{B}) + \bar{C} = \bar{A} + (\bar{B} + \bar{C})$ (associativais likums).




Zīm. 106.

14) Vektoru $\bar{A}$ un $\bar{B}$ starpība: $\bar{A} - \bar{B} = \bar{A} + (-\bar{B})$.

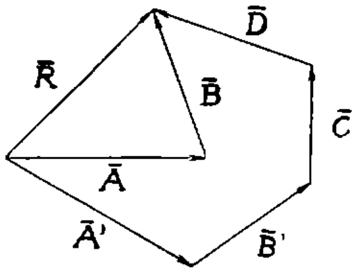



Zīm. 107.

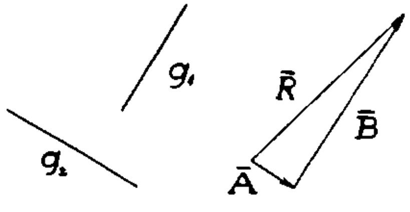
15) Vektora $\bar{R}$ saskaldīšana komponentās ir daudzvērtīgs uzdevums.

Kā redzams:

$$\overline{R} = \overline{A} + \overline{B} = \overline{A}' + \overline{B}' + \overline{C} + \overline{D}.$$



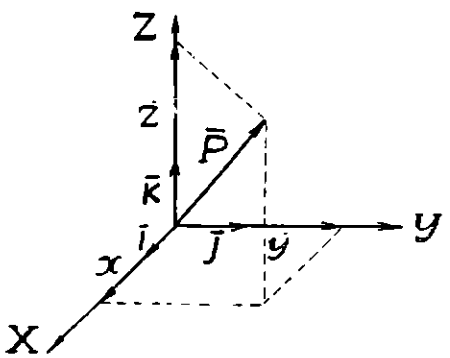

Zīm. 108.




Zīm. 109.

Plāknē saskaldīt vektoru $\overline{R}$ divās komponentās, ko virzieni doti ir vienvērtīgs uzdevums. Zīm. 109.

$$\overline{B} \parallel g_1 \quad \text{un} \quad \overline{A} \quad g_2.$$




Zīm. 110.

Telpā var vienvērtīgi saskaldīt vektoru $\overline{P}$ tris dotos virzienos. Zīm. 110.

$$\overline{P} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k} = \overline{x} + \overline{y} + \overline{z} =$$
$$= (P \cos \alpha)\overline{i} + (P \cos \beta)\overline{j} + $$
$$+ (P \cos \gamma)\overline{k}.$$

Leņķi $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ ir vektora $\overline{P}$ leņķi ar koordinatu asīm.

16) Ja

$$\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}.$$

un

$$\overline{b} = b_x\overline{i} + b_y\overline{j} + b_z\overline{k}.$$

tad

$$\overline{c} = \overline{a} + \overline{b} = (a_x + b_x)\overline{i} + (a_y + b_y)\overline{j} + (a_z + b_z)\overline{k}.$$

$$c_x\overline{i} + c_y\overline{j} + c_z\overline{k} = (a_x + b_x)\overline{i} + (a_y + b_y)\overline{j} + (a_x + b_z)\overline{k}.$$

Še $a_x$, $b_x$, $c_x$ u. t. t. ir vektoru $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ projekcijas uz koordinatu asīm. Redzams ka

$$c_x = a_x + b_x; \quad c_y = a_y + b_y; \quad c_z = a_z + b_z.$$

17) Vektoru s k a l a r a i s, (i e k š ē j a i s) reizinājums.

$$(\overline{A}\,\overline{B}) = A\,.\,B \cos(\overline{A}, \overline{B}).$$

Secinājumi:

1) $(\overline{A}\,\overline{B}) = (\overline{B}\,\overline{A})$; jo $\cos(\overline{A}, \overline{B}) = \cos(\overline{B}, \overline{A})$ (komutativais likums)

2) ja $\overline{A}$ $\quad\overline{B}$, tad $\cos(\overline{A}, \overline{B}) = 0$ un $(\overline{A}\overline{B}) = 0$.

$(\overline{A}\overline{B}) = 0$ i r v e k t o r u s t a t e n ī b a s n o t e i k u m s ($\overline{A}$ un $\overline{B} \neq 0$).

Tādēļ

$$(\overline{i}\,\overline{j}) = 0$$
$$(\overline{j}\,\overline{k}) = 0$$
$$(\overline{k}\,\overline{i}) = 0$$

3) ja $\overline{A} \parallel \overline{B}$, $\cos(\overline{A}, \overline{B}) = 1$.

Tad

$$(\overline{A}\overline{B}) = AB$$

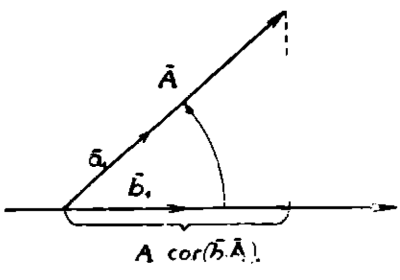
un

$$(\overline{A}\,\overline{A}) = \overline{A}^2 = A^2.$$

Tādēļ

$$(\overline{i}\,\overline{i}) = |\overline{i}|\;|\overline{i}| \cos 0 = 1 \;\; 1 \cos 0 = 1.$$
$$(\overline{j}\,\overline{j}) = 1$$
$$(\overline{k}\,\overline{k}) = 1.$$

18) $(\overline{A}\,\overline{b}_1) = A \;\; 1\,.\cos(\overline{A}, \overline{b}_1) = A \cos(\overline{A}, \overline{b}_1)$; $|\overline{b}_1| \quad 1.$




Zīm. 111.

Ja

$$|\overline{a}_1| = 1 \text{ un } |\overline{b}_1| = 1,$$

tad

$$(\overline{a}_1\,\overline{b}_1) = |\overline{a}_1|\,.\,|\overline{b}_1| \cos(\overline{a}_1, \overline{b}_1) =$$
$$= 1 \;\; 1 \cos(\overline{a}_1, \overline{b}_1) = \cos(\overline{a}_1, \overline{b}_1).$$

Apzīmējot ar $\alpha, \beta, \gamma$ vienības vektora $\overline{a}_1$ virziena leņķus ar koordinatu asīm dabūjam:

$$(\bar{a}_1\,\bar{i}) = |\bar{a}_1|\,|\bar{i}|\,.\cos\alpha = 1\ 1\ \cos\alpha;\quad |\bar{a}_1| = 1$$

$$(\bar{a}_1\,\bar{j}) = \cos\beta.$$

$$(\bar{a}_1\,\bar{k}) = \cos\gamma.$$

$$\bar{a}_1 = \cos\alpha\,\bar{i} + \cos\beta\,\bar{j} + \cos\gamma\,\bar{k}.$$

19) $\bar{A}(\bar{B} + \bar{C}) = (\bar{A}\,\bar{B}) + (\bar{A}\,\bar{C}).$

$(\bar{A} + \bar{B})(\bar{C} + \bar{D}) = (\bar{A}\,\bar{C}) + (\bar{A}\,\bar{D}) + (\bar{B}\,\bar{C}) + (\bar{B}\,\bar{D})$ (distributivais likums)

20) $(\bar{A}\ \bar{B}) = (A_x\bar{i} + A_y\bar{j} + A_z\bar{k})(B_x\bar{i} + B_y\bar{j} + B_z\bar{k}) =$

$= A_x\ B_x + A_y\ B_y + A_z\,.\,B_z = AB\cos(\bar{A},\bar{B}).$

$$\cos(\bar{A},\bar{B}) = \frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{AB}.$$

Ja

$$\bar{A} \perp \bar{B},$$

tad

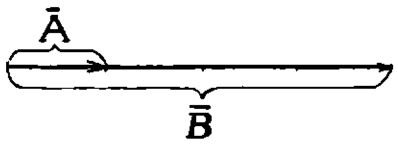
$A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = 0.$ (statenības noteikums)

21) $\frac{1}{\bar{R}} = \frac{1}{R\,\bar{r}} = \frac{1}{R}\,\frac{\bar{r}}{\bar{r}\,\bar{r}} = \frac{\bar{r}}{R\ 1} = \frac{\bar{r}}{R}$ $(|\bar{r}| = 1).$

22) Ja $\bar{B} = m\,\bar{A},$

tad vektori $\bar{A}$ un $\bar{B}$ ir kolineari, un

$$\frac{\bar{B}}{\bar{A}} = m.$$



Zīm. 112.

Divu kolinearu vektoru daliļums dod skalaru lielumu.

23) Vektoru $\bar{A}$ un $\bar{B}$ vektorialais (ārējais) reizinājums:

$$[\bar{A}\ \bar{B}] = |\bar{A}|\ |\bar{B}|\sin(\bar{A},\bar{B})\,\bar{c}_1 = A\ B\sin(\bar{A},\bar{B})\bar{c}_1.$$

$$\bar{c}_1 \perp \bar{A},\quad \bar{c}_1 \perp \bar{B}.\quad (|\bar{c}_1| = 1).$$

Vektori $\bar{A}, \bar{B}, \bar{c}_1$ veido labās skrūves zistemu.

Secinājumi:

1) $[\bar{B}\ \bar{A}] = -[\bar{A}\ \bar{B}]$, jo $\sin(\bar{B},\bar{A}) = -\sin(\bar{A},\bar{B})$

2) Ja $\bar{A} \parallel \bar{B}$, tad $\sin(\bar{A},\bar{B}) = 0$ un $[\bar{A}\bar{B}] = 0.$

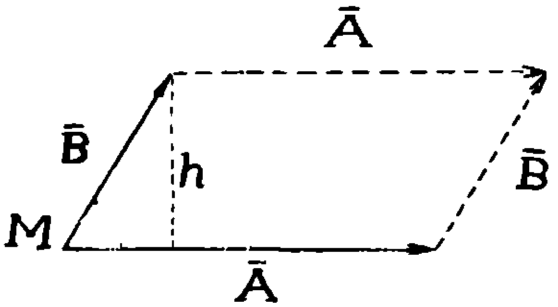
tādēļ, ja:

$$[\bar{A}\ \bar{B}] = 0 \text{ un } \bar{A} \neq 0,\ \bar{B} \neq 0, \text{ tad } \bar{A} \parallel \bar{B}.$$

3) ja $\bar{A} \perp \bar{B}$, tad $\sin(\bar{A}, \bar{B}) = \pm 1$ un

$$|[\bar{A}\ \bar{B}]| = |\bar{A}| . |\bar{B}| |\sin(\bar{A}, \bar{B})|\ |\bar{c}_1| = AB.$$

24) Vektoriālā reizinājuma $[\bar{A}\ \bar{B}]$ ģeometriskā nozīme.

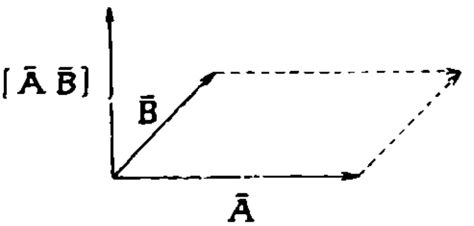



Zīm. 113.

Uz vektoriem $\bar{A}$ un $\bar{B}$ veidotā paralelograma laukums ir

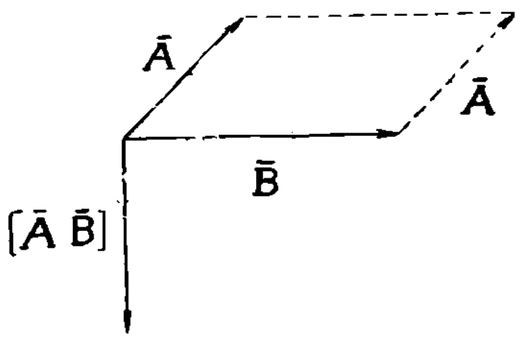
$$F = A\ h = A . B \sin(\bar{A}, \bar{B}),$$

tā tad




Zīm. 114.

$$|[\bar{A}\,\bar{B}]| = AB\, |\sin(\bar{A}, \bar{B})|\ |\bar{c}_1| = F \qquad |\bar{c}_1| = 1.$$




Zīm. 115.

Reizinājums $[\bar{A}\,\bar{B}]$ ir vektors, kas statenisks pret vektoriem $\bar{A}$ un $\bar{B}$. Vektori $\bar{A}$, $\bar{B}$ un $[\bar{A}\bar{B}]$ veido labās skrūves sistemu, (zīm. 114). (Zīm. 115)

Ievērojot augšējo un [23] dabūjam:

$$[\bar{i}\,\bar{i}] = 0;\quad [\bar{j}\bar{j}] = 0;\quad [\bar{k}\bar{k}] = 0$$
$$[\bar{i}\bar{j}] = \bar{k};\quad [\bar{j}\bar{k}] = \bar{i};\quad [\bar{k}\,\bar{i}] = \bar{j}$$
$$[\bar{j}\,\bar{i}] = -\bar{k};\quad [\bar{k}\bar{j}] = -\bar{i};\quad [\bar{i}\,\bar{k}] = -\bar{j}.$$

25) $[\bar{A}(\bar{B} + \bar{C})] = [\bar{A}\bar{B}] + [\bar{A}\bar{C}]$.

(Ievērot labajā pusē vektoru sekošanas kārtību reizinājumos)

$$[(\bar{A} + \bar{B})(\bar{C} + \bar{D})] = [\bar{A}\bar{C}] + [\bar{A}\,\bar{D}] + [\bar{B}\bar{C}] + [\bar{B}\bar{D}].$$

Ievērot labajā pusē vektoru sekošanas kārtību reizinājumos. Augšējās izteiksmes rāda, ka vektoru vektoriālā reizinājumā distributivais likums pastāv.

26) $[\bar{A}\bar{B}] = [(A_x\bar{i} + A_y\bar{j} + A_z\bar{k})(B_x\bar{i} + B_y\bar{j} + B_z\bar{k})] =$

$$= (A_y B_z - A_z B_y)\bar{i} + (A_z B_x - A_x B_z)\bar{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\bar{k}.$$

Tā tad

$$[\bar{A}\bar{B}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

27) $\bar{A}[\bar{B}\bar{C}] = (A_x\bar{i} + A_y\bar{j} + A_z\bar{k}) \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} =$

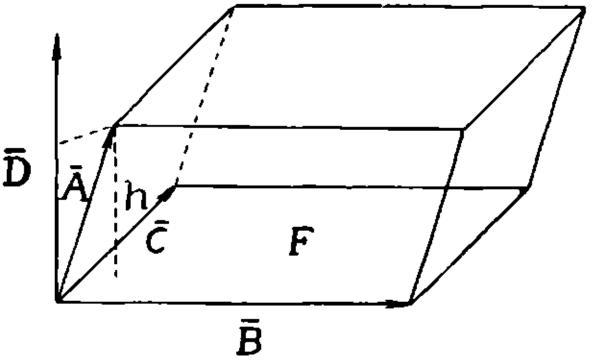
$$= \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} =$$

$$= \bar{A}[\bar{B}\bar{C}] = \bar{B}[\bar{C}\bar{A}] = \bar{C}[\bar{A}\bar{B}].$$

Reizinājumi, kuros šie trīs vektori seko cikliskā kārtībā, ir vienlīdzīgi. Ja sekošanas kārtība nav cikliska tad: piemēram:

$$\bar{B}[\bar{A}\bar{C}] = \bar{A}[\bar{B}\bar{C}].$$

28) Reizinājuma $\bar{A}[\bar{B}\bar{C}]$ ģeometriska nozīme ir zīmējumā 116 uz vektoriem $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ veidotā paralelepipeda tilpums.




Zīm. 116.

Izteiksme

$$\bar{A}[\bar{B}\bar{C}] = 0. \quad (\bar{A} \neq 0;\ \bar{B} \neq 0;\ \bar{C} \neq 0)$$

ir triju vektoru $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ komplanaritates noteikums.

29) $[\bar{A}[\bar{B}\bar{C}]] = \bar{B}(\bar{A}\bar{C}) - \bar{C}(\bar{A}\bar{B})$.

30) Ja divu vektoru summa

$$\alpha\bar{a} + \beta\bar{b} = 0,$$

tad vektori ir kolineāri.

Ja:

$$\alpha\bar{a} + \beta\bar{b} + \gamma\bar{c} = 0,$$

tad vektori $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ ir komplanari.

**108. Vektoru diferencēšana attiecībā uz skalaru argumentu.** Vektoram var būt sekojošas maiņas:

1) virzienam nemainoties, mainas tikai moduls. Vektora gals tad veido taisni.

2) moduls pastāvīgs, mainas vektora virziens. Vektora gals veido uz lodes virsmas kādu trajektoriju.

3) Vektora moduls un virziens mainīgi. Vektora gals veido kādu likni telpā.

Še pieņemam, ka mainīgā vektora sākuma punkts arvien atrodas kādā dotā punktā.

Ja:

$$\bar{a} = \bar{f}(v), \qquad (v \text{ skalars})$$

tad $\bar{a}$ ir funkcija no skalara $v$. Dodam $v$ pieaugumu $\Delta v$, tad:

$$\Delta\bar{a} = \bar{f}(v + \Delta v) - \bar{f}(v).$$

$$\frac{\Delta\bar{a}}{\Delta v} = \frac{\bar{f}(v + \Delta v) - \bar{f}(v)}{\Delta v}$$

$$\lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta\bar{a}}{\Delta v} = \frac{d\bar{a}}{dv} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\bar{f}(v + \Delta v) - \bar{f}(v)}{\Delta v} = \bar{f}'(v) = \bar{a}' \qquad (1)$$

Ja:

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k} \qquad (\bar{i}, \bar{j}, \bar{k} \text{ pamata vektori})$$

un

$$a_x = f_1(v); \quad a_y = f_2(v); \quad a_z = f_3(v), \qquad (2)$$

tad:

$$\frac{d\bar{a}}{dv} = \frac{da_x}{dv}\bar{i} + \frac{da_y}{dv}\bar{j} + \frac{da_z}{dv}\bar{k} \qquad (4)$$

un

$$\frac{d^2\bar{a}}{dv^2} = \frac{d^2a_x}{dv^2}\bar{i} + \frac{d^2a_y}{dv^2}\bar{j} + \frac{d^2a_z}{dv^2}\bar{k}. \qquad (4)$$

Ja $\bar{a} = m.\bar{b}$, tad

$$\bar{a} = mb_x\bar{i} + mb_y\bar{j} + mb_z k$$

un ja skalars $m$ un vektors $\bar{b}$ atkarīgi no mainīga skalara $v$, tad

$$\frac{d\bar{a}}{dv} = \frac{dm}{dv} b_x\bar{i} + m\frac{db_x}{dv}\bar{i} + \frac{dm}{dv} b_y\bar{j} + m\frac{db_y}{dv}\bar{j} + \frac{dm}{dv} b_z\bar{k} + m\frac{db_z}{dv}\bar{k} =$$

$$= \frac{dm}{dv}(b_x\bar{i} + b_y j + b_z\bar{k}) + m\left(\frac{db_x}{dv}\bar{i} + \frac{db_y}{dv}\bar{j} + \frac{db_z}{dv}\bar{k}\right).$$

Tā tad:

$$\frac{d}{dv}(m\bar{b}) = \frac{dm}{dv}\bar{b} + m\frac{d\bar{b}}{dv} \qquad (5)$$

Nav grūti pierādīt ka:

$$\frac{d}{dv}(\bar{a}\,\bar{b}) = \frac{d\bar{a}}{dv}\bar{b} + \frac{d\bar{b}}{dv}\,\bar{a}. \tag{6}$$

$$\frac{d}{dv}[\bar{a}\,\bar{b}] = \left[\frac{d\bar{a}}{dv}\,\bar{b}\right] + \left[\bar{a}\,\frac{d\bar{b}}{dv}\right]. \tag{7}$$

Beidzamajā izteiksmē jāievēro reizinātāju sekošanas kārtība.

V i e n ī b a s v e k t o r a d i f e r e n c i a l s. Tā kā

$$(\bar{a}_1\,\bar{a}_1) = 1, \qquad (|\bar{a}_1| = 1)$$

tad

$$\frac{d}{dv}(\bar{a}_1\,\bar{a}_1) = \frac{d\bar{a}_1}{dv}\,\bar{a}_1 + \bar{a}_1\frac{d\bar{a}_1}{dv} = 2\bar{a}_1\frac{d\bar{a}_1}{dv} = 0$$

un

$$d(\bar{a}_1\,\bar{a}_1) = 2\bar{a}_1\,d\bar{a}_1 = 0.$$

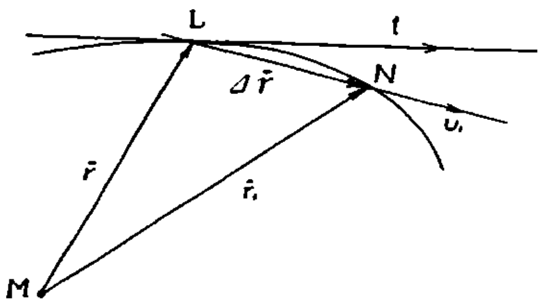
Šī izteiksme rāda, ka $d\bar{a}_1 \perp \bar{a}_1$. Tā tad, v i e n ī b a s v e k t o r a d i f e r e n c i a l s i r s t a t e n i s k s p r e t v i e n ī b a s v e k t o r u.

R a d i u s a v e k t o r a d i f e r e n c i a l a ģ e o m e t r i s k a n o z ī m e.

Ja mainīgs, no skalara $v$ atkarīgs, vektors $\bar{r}$ iziet no noteikta punkta $M$, tad izteiksme

$$\bar{r} = \bar{f}(v)$$

dod telpā līkni.




Zīm. 117.

Ja dodam $v$ pieaugumu $\Delta v$, tad dabūjam:

$$\bar{r}_1 = \bar{f}(v + \Delta v). \tag{1}$$

$$\Delta\bar{r} = \bar{r}_1 - \bar{r} = \bar{f}(v + \Delta v) - \bar{f}(v) = \overline{LN} \text{ (līknes chorda.)}$$

$$\frac{\Delta\bar{r}}{\Delta v} = \frac{\bar{f}(v + \Delta v) - \bar{f}(v)}{\Delta v} = \frac{|\bar{f}(v + \Delta v) - \bar{f}(v)|\,\bar{u}_1}{\Delta s}\cdot\frac{\Delta s}{\Delta v};$$

($\Delta s$ loka pieaugums. $\bar{u}_1$ chordas $LN$ vienības vektors)

$$\lim_{\Delta v\to 0}\frac{\Delta\bar{r}}{\Delta v} = \lim_{\Delta v\to 0}\frac{|\bar{f}(v + \Delta v) - \bar{f}(v)|}{\Delta s}\lim_{\Delta v\to 0}\bar{u}_1\lim_{\Delta v\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta v} \tag{2}$$

Še

$$\lim_{\Delta v \to 0} \frac{|\overline{f}(v + \Delta v) - \overline{f}(v)|}{\Delta s} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{|\Delta \overline{r}|}{\Delta s} = 1. \qquad (3)$$

Ja $\Delta v \to 0$, tad vektors $\overline{u}_1$ tiecas uz vektoru $\overline{t}$ ($\overline{t}$ vienības vektors pieskares virzienā punktā $L$).

Tā tad

$$\lim_{\Delta v \to 0} u_1 = t \qquad (4)$$

Ievērojot (2), (3), (4) dabūjam:

$$\lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta \overline{r}}{\Delta v} = \frac{d\overline{r}}{dv} = 1 \,.\, \overline{t} \,.\, \frac{ds}{dv}$$

un

$$d\overline{r} = \overline{t}\,.\,ds.$$

Augšējā izteiksme rāda, ka radiusa vektora $\overline{r}$ diferencials $d\overline{r}$ iet līknes pieskares virzienā.

No augšējā dabūjam

$$\overline{t} = \frac{d\overline{r}}{ds}. \qquad (5)$$

## Astoņpadsmitā nodaļa.

## Diferencialģeometrija IV.

**109. Līknes telpā.** Līkni telpā dod ar parametriskiem nolīdzinājumiem:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(v) \\ y &= \psi(v) \\ z &= \omega(v) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Še $v$ ir mainīgs parametrs.

Nolīdzinājumi:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(v) \\ y &= \psi(v) \end{aligned}\right\}$$

dod līknes projekciju uz $(xy)$ plāknes. Izslēdzot starp šiem nolīdzinājumiem, dabūjam nolīdzinājumu

$$\lambda(x, y) = 0,$$

kas arī izteic līknes projekciju uz $xy$ plāknes. Līdzīgi dabūjam arī līknes projekcijas uz $(yz)$ un $(zx)$ plāknēm:

$$\mu(y, z) = 0$$
$$\nu(z, x) = 0.$$

No trim līknes projekciju nolīdzinājumiem, divi ir patstāvīgi un trešais pārējo divu sekas. Tā tad līknes nolīdzinājumu varam dot veidā:

$$\left.\begin{aligned} \lambda(x, y) &= 0 \\ \omega(x, z) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{1ᵃ}$$

Līknes nolīdzinājumus varam dot arī šādi:

$$\left.\begin{aligned} F(x, y, z) &= 0 \\ f(x, y, z) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{1ᵇ}$$

Gadijumā ($1^a$) līkne dota kā divu cilindru un gadijumā ($1^b$) kā divu vispārīgu virsmu krustošanās līkne.

Līkni varam dot arī vektoriālā veidā, ar nolīdzinājumu:

$$\bar{r} = \bar{f}(v). \tag{1ᶜ}$$

Šādā gadijumā kā redzējām:

$$\bar{t} = \frac{d\bar{r}}{ds}. \qquad |\bar{t}| = 1 \tag{2}$$

Tā kā:

$$\bar{t}\,ds = d\bar{r} = dx\bar{i} + dy\bar{j} + dz\bar{k}, \tag{2ᵃ}$$

tad, paceļot izteiksmes abas puses kvadratā dabūjam:

$$\bar{t}^2 ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2; \qquad (\bar{t}^2 = 1).$$
$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}. \tag{4}$$

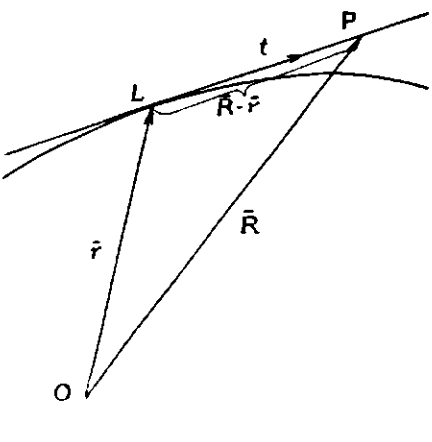
Izteicot izteiksmes (2) abas puses koordinatu sistemā, ievērojot, ka pieskares vienības vektora virziena koeficienti ir $\cos\alpha_1$, $\cos\beta_1$, $\cos\gamma_1$; dabūjam:

$$\cos\alpha_1\bar{i} + \cos\beta_1\bar{j} + \cos\gamma_1\bar{k} = \frac{dx}{ds}\bar{i} + \frac{dy}{ds}\bar{j} + \frac{dz}{ds}\bar{k}.$$

No šis formulas secinam:

$$\cos\alpha_1 = \frac{dx}{ds}; \quad \cos\beta_1 = \frac{dy}{ds}; \quad \cos\gamma_1 = \frac{dz}{ds} \tag{5}$$

P i e s k a r e s n o l ī d z i n ā j u m u l ī k n e s p u n k t ā $L = x|y|z$, dabūjam šādi: Apzīmējot līknes pieskares tekošo punktu ar $P$ un radiusu vektoru uz to ar $\overline{R}$, redzams, ka pieskares visi punkti izpilda nolīdzinājumu:



Zīm. 118.

$$\overline{R} - \overline{r} = \overline{t}.\lambda \qquad |\overline{t}| = 1 \qquad (6)$$

kur $\lambda$ mainīgs parametrs Pieskares tekošā punkta $P$ koordinatas apzīmējam ar $\xi$, $\eta$, $\zeta$ un līknes dotā punkta $L$ koordinatas ar $x$, $y$, $z$. Liekot koordinatu sistemu punktā $O$ augšējā izteiksme koordinatu sistemā dabū veidu:

$$(\xi - x)\overline{i} + (\eta - y)\overline{j} + (\zeta - z)\overline{k} = \lambda(\cos\alpha_1\overline{i} + \cos\beta_1\overline{j} + \cos\gamma_1\overline{k}). \qquad (6^a)$$

Še ar $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$ apzīmēti pieskares virzienu leņķi ar koordinatu asīm. No (6ª) secinam:

$$\left.\begin{array}{ll} - \quad = \lambda\cos\alpha_1; & \dfrac{\xi - x}{\cos\alpha_1} = \lambda \\ \eta - \quad = \lambda\cos\beta_1; & \dfrac{\eta - y}{\cos\beta_1} = \lambda \\ - \quad = \lambda\cos\gamma_1; & \dfrac{\zeta - z}{\cos\gamma_1} = \lambda \end{array}\right\} \qquad (7)$$

Pieskares nolīdzinājumus dabūjam no augšējo nolīdzinājumu otrās grupas:

$$\frac{\xi - x}{\cos\alpha_1} = \frac{\eta - y}{\cos\beta_1} = \frac{\quad - z}{\cos\gamma_1} \qquad (7^a)$$

Ievērojot (5) šos nolīdzinājumus varam rakstīt arī:

$$\frac{\xi - x}{dx} = \frac{\eta - y}{dy} = \frac{\zeta - \quad}{dz} \qquad (7^b)$$

Diferencialus $dx$, $dy$, $dz$ dabūjam no līknes sekojošiem nolīdzinājumiem:

$$\left.\begin{array}{r} = \varphi(v) \\ = \psi(v) \\ z = \omega(v) \end{array}\right\} \qquad (A)$$

še $v$ mainīgs parametrs.

Līknes normalplāknes nolīdzinājumu, liknes punkta $P = x \mid y \mid z$, dabūjam šādi:

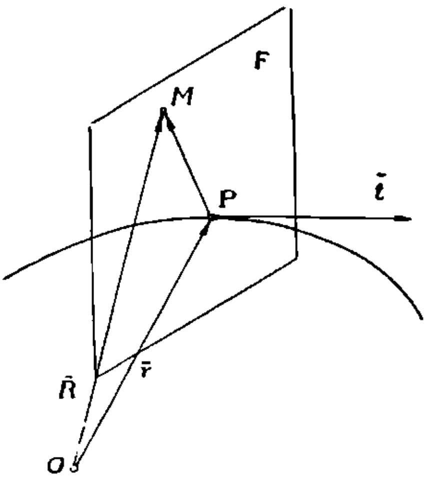
Plākni $F$, kas punktā $P = x \mid y \mid z$ ir $\perp$ pret pieskares vienības vektoru $\bar{t}$, sauc par līknes normalplākni punktā $P$.

Velkam, uz normalplāknes, pēc patikas ņemto punktu $M$, radiusu vektoru $\bar{R}$, tad vektors

$$\overline{PM} = \bar{R} - \bar{r}.$$

Šis vektors visos normalplāknes punktos ir $\perp$ pret $\bar{t}$. Pielietojot še statenības noteikumu dabūjam:

$$(\bar{R} - \bar{r})\,\bar{t} = 0. \qquad (8)$$




Zīm. 119.

Liekam koordinatu sistemu punktā $O$, tad punktu $M$ un $P$ koordinatas ir

$$M = \xi \mid \eta \mid \zeta \quad \text{un} \quad P = x \mid y \mid z.$$

Augšējo vektoru skalaro reizinājumu (8) izteicot koordinatu sistemā un ievērojot, ka $\bar{t}$ projekcijas uz koordinatu asīm ir $\cos\alpha_1$, $\cos\beta_1$, $\cos\gamma_1$, dabūjam;

$$(\xi - x)\cos\alpha_1 + (\eta - y)\cos\beta_1 + (\zeta - z)\cos\gamma_1 = 0 \qquad (8^a)$$

Ievērojot (5) varam arī rakstīt:

$$(\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy + (\zeta - z)\,dz = 0. \qquad (8^b)$$

Diferencialus, $dx$, $dy$, $dz$, dabūjam no (A).

Izteiksmes (8), ($8^a$) un ($8^b$) ir līknes normalplāknes nolīdzinājumi.

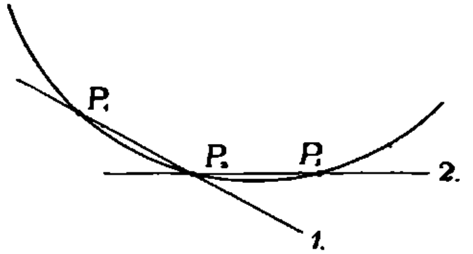
Līknes pieslejas plākne.

Par liknes pieslejas plākni, sauc plākni:

1) caur liknes trim bezgalīgi tuviem punktiem $P_1$, $P_2$, $P_3$

2) caur divām liknes pieskarēm 1 un 2, kas iet caur bezgalīgi tuviem punktiem 1, 2, 3, zīm. 120.

3) caur pieskari 1 un tās pieskaršanās punktam bezgalīgi tuvu punktu $P_3$



Zīm. 120.

Kā redzams, visos trīs gadījumos dabūjam to pašu plākni. Pieņemam ka līkne dota ar nolīdzinājumu:

$$\bar{r} = \bar{f}(v)$$

un ka $P_1$, $P_2$, $P_3$ ir līknes trīs bezgalīgi tuvi punkti. Šie punkti atrodas pieslejas plāknē $E$.

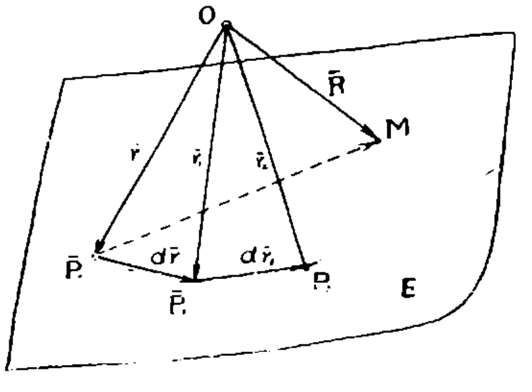
No zīmējuma 121 redzams:

$$\bar{r}_1 = \bar{r} + d\bar{r};$$

$$d\bar{r}_1 = d(\bar{r} + d\bar{r}) = d\bar{r} + d^2\bar{r},$$

Pieņemam, ka punkts $M$ atrodas pieslejas plāknē $E$ un uzskatam šo punktu par plākni $E$ veidojošo tekošo punktu. Radiusu vektoru no $O$ uz $M$ apzīmējam ar $\bar{R}$. Tad vektors

$$\overrightarrow{P_1M} = \bar{R} - \bar{r}.$$



Zīm. 121.

Šis vektors $(\bar{R} - \bar{r})$ un vektori $d\bar{r}$, $d\bar{r}_1$ atrodas pieslejas plāknē, tā tad šie trīs vektori ir komplanari.

Pielietojot komplanaritates noteikumu, dabūjam:

$$(\bar{R} - \bar{r})[d\bar{r} \,.\, d\bar{r}_1] = 0$$

Ievedot

$$d\bar{r}_1 = d\bar{r} + d^2\bar{r}$$

dabūjam:

$$(\bar{R} - \bar{r})[d\bar{r}(d\bar{r} + d^2\bar{r})] = 0.$$

Pārveidojot dabūjam:

$$(\bar{R} - \bar{r})[d\bar{r} \,.\, d\bar{r}] + (\bar{R} - \bar{r})[d\bar{r} \,.\, d^2\bar{r}] = 0.$$

Tā kā:

$$[d\overline{r}\ d\overline{r}] = 0,$$

tad augšējā nolīdzinājumā paliek:

$$(\overline{R} - \overline{r})[d\overline{r}\ d^2\overline{r}] = 0. \tag{9}$$

Liekam koordinatu sistemas sākuma punktu punktā $O$, tad punktu $M$ un $P_1$ koordinatas ir:

$$M = \xi \mid \eta \mid \zeta;$$
$$P_1 = x \mid y \mid z.$$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $(\overline{R} - \overline{r})$ | projekcijas ir | $(\xi - x)$; | $(\eta - y)$; | $(\zeta - z)$ | un |
| $\overline{r}$ | „ „ | $x$; | $y$; | $z$; | |
| $d\overline{r}$ | „ „ | $dx$; | $dy$; | $dz$; | |
| $d^2\overline{r}$ | „ „ | $d^2x$; | $d^2y$; | $d^2z$; | |

Ar šīm vērtībām no (9) dabūjam:

$$(\overline{R} - \overline{r})[d\overline{r}.\,d^2\overline{r}] = \begin{vmatrix} \xi - x & \eta - y & \zeta - z \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix} = 0. \tag{9^a}$$

Augšējā izteiksme dod pieslejas plāknes nolīdzinājumu. Attīstot determinantu, attiecībā uz pirmās rindas elementiem, dabūjam pieslejas plāknes nolīdzinājumu:

$$(\xi - x)\begin{vmatrix} dy & dz \\ d^2y & d^2z \end{vmatrix} + (\eta - y)(-1)\begin{vmatrix} dx & dz \\ d^2x & d^2z \end{vmatrix} + (\zeta - z)\begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y \end{vmatrix} = 0 \tag{9^b}$$

Apzīmējot pieslejas plāknes virziena koeficientus ar $\cos\alpha_3$, $\cos\beta_3$, $\cos\gamma_3$ dabūjam:

$$\cos\alpha_3 : \cos\beta_3 : \cos\gamma_3 = \begin{vmatrix} dy & dz \\ d^2y & d^2z \end{vmatrix} : -\begin{vmatrix} dx & dz \\ d^2x & d^2z \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y \end{vmatrix} \tag{10}$$

Tad

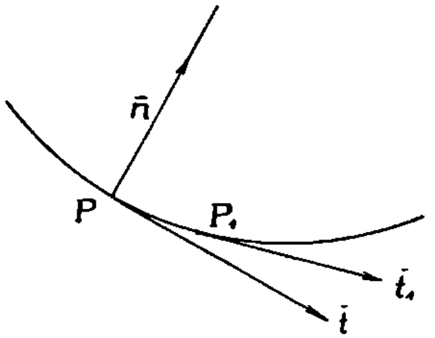
$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha_3 &= \frac{\begin{vmatrix} dy & dz \\ d^2y & d^2z \end{vmatrix}}{\pm\sqrt{\begin{vmatrix} dy & dz \\ d^2y & d^2z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} dx & dz \\ d^2x & d^2z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y \end{vmatrix}^2}} \\ \cos\beta_3 &= \frac{-\begin{vmatrix} dx & dz \\ d^2x & d^2z \end{vmatrix}}{\pm\sqrt{\begin{vmatrix} dy & dz \\ d^2y & d^2z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} dx & dz \\ d^2x & d^2z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y \end{vmatrix}^2}} \end{aligned}\right\} \tag{10^b}$$

$$\cos\gamma_3 = \frac{\begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2y & d^2y \end{vmatrix}}{\pm\sqrt{\begin{vmatrix} dy & dz \\ d^2y & d^2z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} dx & dz \\ d^2x & d^2z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y \end{vmatrix}^2}}.$$

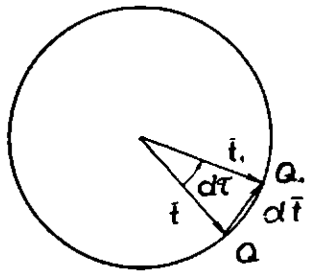
No līknes nolīdzinājumiem (A) dabūjam $dx$, $dy$, $dz$, $d^2x$, $d^2y$, $d^2z$.

Līknes galvenā normale.

Līknes punktā $P = x\,|\,y\,|\,z$, pieslejas plāknē, velkam stateni pret pieskari. Šo taisni sauc par līknes galveno normali. Apzīmējam galvenās normales vienības vektoru ar $\bar{n}$, tad: $|\bar{n}| = 1$, $|\bar{t}| = 1$ un $\bar{n} \perp \bar{t}$ (Zīm 122).




Zīm. 122.




Zīm 123.

Līknes pieskaru vienības vektori $\bar{t}$ un $\bar{t}_1$ līknes divos bezgalīgi tuvos punktos veido leņķi $d\tau$, ko dabūjam (zīm. 123) velkot riņķī, ar radiusu 1 pieskarēm $\bar{t}$ un $\bar{t}_1$ paralelas taisnes caur riņķa centru. Tad:

$$|d\bar{t}| = QQ_1 = 1 \quad d\tau \tag{a}$$

Loks $\widehat{PP}_1 = ds$ atrodas pieslejas plāknē, tādēļ:

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{\rho}$$ (ρ liekuma radiuss līknes punktā $P$)

Ievērojot (a) dabūjam:

$$\frac{|d\bar{t}|}{ds} = \frac{1}{\rho}$$

Tā kā $d\bar{t}$ ir $\parallel \bar{n}$, tad $|d\bar{t}|\,\bar{n} = d\bar{t}$. Tādēļ:

$$\frac{d\bar{t}}{ds} = \frac{\bar{n}}{\rho} \tag{11}$$

un

$$\bar{n} = \rho \frac{d\bar{t}}{ds} \tag{12}$$

Vienības vektora $\bar{n}$ projekcijas uz koordinatu asīm ir galvenās normales virziena koeficienti

$$\cos\alpha_2, \cos\beta_2, \cos\gamma_2.$$

$\frac{d\bar{t}}{ds}$ projekcijas uz koordinatu asīm ir

$$\frac{d\cos\alpha_1}{ds}, \quad \frac{d\cos\beta_1}{ds}, \quad \frac{d\cos\gamma_1}{ds}$$

Ievērojot augšējo, no nolīdzinājuma (12) dabūjam:

$$\cos\alpha_2\bar{i} + \cos\beta_2\bar{j} + \cos\gamma_2\bar{k} = \rho\left(\frac{d\cos\alpha_1}{ds}\bar{i} + \frac{d\cos\beta_1}{ds}\bar{j} + \frac{d\cos\gamma_1}{ds}\bar{k}\right) \tag{12'}$$

No šī nolīdzinājuma dabūjam galvenās normales virziena koeficientus:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha_2 &= \rho\,.\frac{d\cos\alpha_1}{ds} \\ \cos\beta_2 &= \rho\,.\frac{d\cos\beta_1}{ds} \\ \cos\gamma_2 &= \rho\,.\frac{d\cos\gamma_1}{ds} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

vai arī

$$\cos\alpha_2 : \cos\beta_2 : \cos\gamma_2 = d\cos\alpha_1 : d\cos\beta_1 : d\cos\gamma_1$$

No šīs izteiksmes dabūjam galvenās normales virziena koeficientus. Paceļot katru nolīdzinājumu (13) kvadratā un saskaitot, ievērojot, ka

$$\cos^2\alpha_2 + \cos^2\beta_2 + \cos^2\gamma_2 = 1,$$

dabūjam:

$$\frac{1}{\rho^2} = \left(\frac{d\cos\alpha_1}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\beta_1}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\gamma_1}{ds}\right)^2. \tag{14}$$

Nolīdzinājumus (13) varam arī rakstīt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\cos\alpha_2}{\rho} &= \frac{d\cos\alpha_1}{ds} \\ \frac{\cos\beta_2}{\rho} &= \frac{d\cos\beta_1}{ds} \\ \frac{\cos\gamma_2}{\rho} &= \frac{d\cos\gamma_1}{ds} \end{aligned}\right\} \qquad (13^a)$$

Galvenās normales nolīdzinājumi līknes punktā $P = x \mid y$ ir:

$$\frac{\xi - x}{d\cos\alpha_1} = \frac{\eta - y}{d\cos\beta_1} = \frac{\zeta - z}{d\cos\gamma_1}. \qquad (15)$$

Līknes binormale.

Stateni pret pieslejas' plākni, līknes punktā $P = x \mid y \mid z$, sauc par līknes **binormali**. Kā redzams, binormalei ir tādi paši virziena koeficienti kā pieslejas plāknei. Pieslejas plāknes virziena koeficientus apzīmējot ar $\cos\alpha_3$, $\cos\beta_3$, $\cos\gamma_3$ dabūjam ar formulu (10)

$$\cos\alpha_3 : \cos\beta_3 : \cos\gamma_3 = \begin{vmatrix} dy & dz \\ d^2y & dz \end{vmatrix} : -\begin{vmatrix} dx & dz \\ d^2x & dz \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & dy \end{vmatrix}$$

Binormales nolīdzinājumi ir:

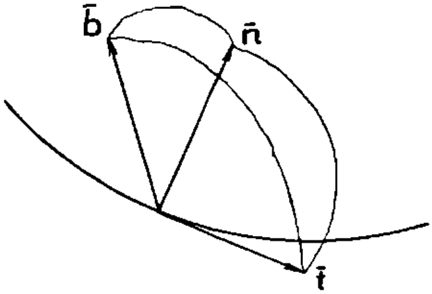
$$\frac{\xi - x}{\begin{vmatrix} dy & dz \\ d^2y & d^2z \end{vmatrix}} = \frac{\eta - y}{-\begin{vmatrix} dx & dz \\ d^2x & d^2z \end{vmatrix}} = \frac{\zeta - z}{\begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y \end{vmatrix}} \qquad (16)$$

Rektificējošā plākne.

Plākni, kas līknes punktā $P = x \mid y \mid z$ ir $\perp$ pret līknes galveno normali, sauc par **līknes rektificējošo plākni punktā** $P$. Rektificējošās plāknes nolīdzinājums ir:

$$(\xi - x)\, d\cos\alpha_2 + (\eta - y)\, d\cos\beta_2 + (\zeta - z)\, d\cos\gamma_2 = 0. \qquad (17)$$

Tā tad, līknes punktā $P = y|_s$ atrodas (zīm. 124): pieskare, galvenā normale un binormale ar vienības vektoriem, $\bar{t}$; $\bar{n}$; $\bar{b}$. Šie vienības vektori ir savstarpēji stateniski un veido labo skrūvi. Caur $\bar{t}$ un $\bar{n}$ iet pieslejas plākne; caur $\bar{n}$ un $\bar{b}$ normalplākne un caur $\bar{b}$ un $\bar{t}$ rektificējošā plākne.



Zīm. 124.

Vērpe.

Līknes pirmais liekums stāv sakarā ar pieskares virziena maiņu. Pirmo liekuma radiusu $\rho$ jau atradām. Līknes otrs liekums stāv sakarā ar binormales virziena maiņu.

Otra liekuma radiusu — vērpes radiusu — apzimējam ar $T$, tad līdzīgi, kā pirmā liekuma gadijumā, dabūjam:

$$\left|\frac{d\bar{b}}{ds}\right| = \frac{1}{T}. \tag{18}$$

Vektori $\bar{t}$, $\bar{n}$, $\bar{b}$ veido labo skrūvi, tādēļ:

$$\bar{b} = [\bar{t}\ \bar{n}]. \tag{19}$$

$$\frac{d\bar{b}}{ds} = \left[\frac{d\bar{t}}{ds} \cdot \bar{n}\right] + \left[\bar{t}\ \frac{d\bar{n}}{ds}\right].$$

Tā kā $\frac{d\bar{t}}{ds} = \frac{\bar{n}}{\rho}$, tad pirmais vektorialais reizinājums dabū veidu:

$$\left[\frac{\bar{n}}{\rho}\ \bar{n}\right];$$

tā vērtībā ir 0, jo abi reizinātāji ir paraleli. Paliek:

$$\frac{d\bar{b}}{ds} = \left[\bar{t}\ \frac{d\bar{n}}{ds}\right]. \tag{20}$$

No augšējā redzams, ka vektors $\frac{d\bar{b}}{ds}$ ir $\perp$ $\bar{t}$, bet $\frac{d\bar{b}}{ds}$ ir arī $\perp$ pret $\bar{b}$.

Tā tad vektors $\frac{d\bar{b}}{ds}$ ir stateniski pret plākni caur $\bar{t}$ un $\bar{b}$, tas ir paralels vektoram $\bar{n}$.

Tādēļ no izteiksmes:

$$\frac{|d\bar{b}|}{ds} = \frac{1}{T}$$

reizinot ar $\bar{n}$ dabūjam:

$$\frac{d\bar{b}}{ds} = \frac{\bar{n}}{T}. \tag{21}$$

Tā kā

$$\bar{b} = \cos\alpha_3\,\bar{i} + \cos\beta_3\,\bar{j} + \cos\gamma_3\,\bar{k}$$

un

$$\bar{n} = \cos\alpha_2\,\bar{i} + \cos\beta_2\,\bar{j} + \cos\gamma_2\,\bar{k},$$

tad izteiksmi (21) varam rakstīt:

$$\frac{d\cos\alpha_3}{ds}\bar{i} + \frac{d\cos\beta_3}{ds}\bar{j} + \frac{d\cos\gamma_3}{ds}\bar{k} = \frac{\cos\alpha_2}{T}\bar{i} + \frac{\cos\beta_2}{T}\bar{j} + \frac{\cos\gamma_2}{T}\bar{k}. \tag{21ᵃ}$$

No izteiksmes (21ᵃ) dabūjam:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\cos\alpha_2}{T} &= \frac{d\cos\alpha_3}{ds} \\ \frac{\cos\beta_2}{T} &= \frac{d\cos\beta_3}{ds} \\ \frac{\cos\gamma_2}{T} &= \frac{d\cos\gamma_3}{ds} \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Paceļot kvadratā augšējos nolīdzinājumus un saskaitot, dabūjam

$$\frac{1}{T^2} = \left(\frac{d\cos\alpha_3}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\beta_3}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\gamma_3}{ds}\right)^2 \tag{23}$$

Tā kā:

$$\bar{n} = [\bar{b}\,\bar{t}],$$

tad

$$\frac{d\bar{n}}{ds} = \left[\frac{d\bar{b}}{ds}\ \bar{t}\right] + \left[\bar{b}\,.\,\frac{d\bar{t}}{ds}\right].$$

Ievērojot, ka:

$$\frac{d\bar{b}}{ds} = \frac{\bar{n}}{T}; \quad \text{un} \quad \frac{d\bar{t}}{ds} = \frac{\bar{n}}{\rho},$$

dabūjam:

$$\frac{d\bar{n}}{ds} = \left[\frac{\bar{n}}{T}\,.\,\bar{t}\right] + \left[\bar{b}\ \frac{\bar{n}}{\rho}\right]. \tag{24}$$

Nolīdzinājuma (24) labās puses locekļi dod:

$$\left[\frac{\bar{n}}{T}\cdot\bar{t}\right] = -\frac{\bar{b}}{T}$$

un

$$\left[\bar{b}\ \frac{\bar{n}}{\rho}\right] = -\frac{\bar{t}}{\rho}.$$

Ievērojot šīs izteiksmes, nolīdzinājums (24) dabū veidu:

$$\frac{d\bar{n}}{ds} = -\frac{\bar{b}}{T} - \frac{\bar{t}}{\rho} \tag{24^a}$$

Augšējo vektoru projekcijas uz koordinatu asīm ir:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\cos\alpha_2}{ds} &= -\frac{\cos\alpha_3}{T} - \frac{\cos\alpha_1}{\rho}\\ \frac{d\cos\beta_2}{ds} &= -\frac{\cos\beta_3}{T} - \frac{\cos\beta_1}{\rho}\\ \frac{d\cos\gamma_2}{ds} &= -\frac{\cos\gamma_3}{T} - \frac{\cos\gamma_1}{\rho}\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Paceļot šos nolīdzinājumus kvadratā un saskaitot, dabūjam.

$$\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{T^2} = \left(\frac{d\cos\alpha_2}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\beta_2}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\gamma_2}{ds}\right)^2. \tag{26}$$

Formulas: (13ᵃ), (22), (25) sauc par Frene formulām.

P i e m ē r s.

Skrūves līnijas (zīm. 125) nolīdzinājums ir:

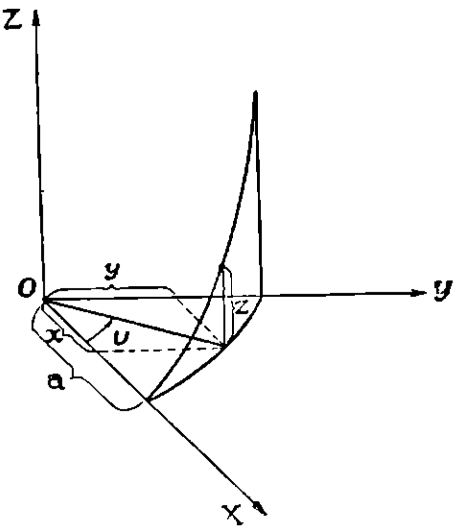
$x = a\cos u$; $y = a\sin u$; $z = ku$.

Ja $u = 2\pi$, tad $h = 2k\pi$; $h$ sauc par skrūves līnijas soli

$$k = \frac{h}{2\pi}.$$

Tā kā

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$




Zīm. 125.

un

$$dx = -a \sin u \, du; \quad dy = a \cos u \, du; \quad dz = k \, du.$$

Tad

$$ds = \sqrt{a^2 + k^2} \, du.$$

Pieskares virziena koeficienti ir.

$$\cos \alpha_1 = \frac{dx}{ds} = \frac{-a \sin du}{\sqrt{a^2 + k^2} \, du} = -\frac{a \sin u}{\sqrt{a^2 + k^2}};$$

$$\cos \beta_1 = \frac{dy}{ds} = \frac{a \cos u \, du}{\sqrt{a^2 + k^2} \, du} = \frac{a \cos u}{\sqrt{a^2 + k^2}};$$

$$\cos \gamma_1 = \frac{dz}{ds} = \frac{k \, du}{\sqrt{a^2 + k} \, du} = \frac{k}{\sqrt{a^2 + k^2}}.$$

Pieskares nolīdzinājumi ir:

$$\frac{\xi - a \cos u}{-a \sin u} = \frac{\eta - a \sin u}{a \cos u} = \frac{\zeta - ku}{k}.$$

Normalplāknes nolīdzinājums ir:

$$(\xi \quad a \cos u)(-a \sin u) + (\eta - a \sin u)(a \cos u) + (\zeta - ku) k = 0.$$

Pieslejas plāknes nolīdzinājumu dod determinants:

$$\begin{vmatrix} \xi - a \cos u & \eta - a \sin u & \zeta - ku \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi - a \cos u & \eta - a \sin u & \zeta - ku \\ -a \sin u \, du & a \cos u \, du & k \, du \\ -a \cos u \, du^2 & -a \sin u \, du^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Attīstot determinantu attiecībā uz pirmās rindas elementiem dabūjam pieslejas plāknes nolīdzinājumu:

$$(\xi - a \cos u)(k \sin u) + (\eta - a \sin u)(-k \cos u) + (\zeta - ku) a = 0$$

Pirmā liekuma radiusu un galvenās normales virziena koeficientus dabūjam sekojoši.

Tā kā

$$\frac{\cos\alpha_2}{\rho}=\frac{d\cos\alpha_1}{ds}=\frac{-a\cos u}{a^2+k^2},$$

$$\frac{\cos\beta_2}{\rho}=\frac{d\cos\beta_1}{ds}=-\frac{a\sin u}{a^2+k^2};$$

$$\frac{\cos\gamma_2}{\rho}=\frac{d\cos\gamma_1}{ds}=0;$$

tad paceļot šos nolīdzinājumus kvadratā un saskaitot dabūjam:

$$\frac{1}{\rho^2}=\frac{a^2}{(a^2+k^2)^2};\quad \rho=\frac{a^2+k^2}{a}.$$

Ievedot $\rho$ augšējās formulās dabūjam galvenās normales virziena koeficientus:

$$\cos\alpha_2=-\cos u;\quad \cos\beta_2=-\sin u;\quad \cos\gamma_2=0.$$

Veidojot:

$$\frac{d\cos\alpha_2}{ds};\quad \frac{d\cos\beta_2}{ds};\quad \frac{d\cos\gamma_2}{ds}$$

un ievedot formulās (25) dabūjam

$$-\frac{\cos\alpha_1}{\rho}-\frac{\cos\alpha_3}{T}=\frac{d\cos\alpha_2}{ds}=\frac{\sin u}{\sqrt{a^2+k^2}};$$

$$-\frac{\cos\beta_1}{\rho}-\frac{\cos\beta_3}{T}=\frac{d\cos\beta_2}{ds}=\frac{-\cos u}{\sqrt{a^2+k^2}};$$

$$-\frac{\cos\gamma_1}{\rho}-\frac{\cos\gamma_3}{T}=\frac{d\cos\gamma_2}{ds}=0.$$

Paceļot šos nolīdzinājumus kvadratā un saskaitot, dabūjam:

$$\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{T^2}=\frac{1}{a^2+k^2}$$

Še ievedot jau dabūto $\rho$ vērtību, dabūjam:

$$\frac{1}{T^2}=\frac{k^2}{(a^2+k^2)^2};\quad T=\frac{a^2+k^2}{k}.$$

Binormales virzienu koeficientu attiecību dabūjam no pieslejas plāknes nolīdzinājuma:

$$\cos\alpha_3:\cos\beta_3:\cos\gamma_3=k\sin u:-k\cos u:a$$

Binormales nolīdzinājumi ir:

$$\frac{\xi - a\cos u}{k\sin u} = \frac{\eta - a\sin u}{-k\cos u} = \frac{\zeta - ku}{a}$$

Galvenās normales virziena koeficienti jau zinami, tā tad galvenās normales nolīdzinājumi ir:

$$\frac{\xi - a\cos u}{-\cos u} = \frac{\eta - a\sin u}{-\sin u} = \frac{\zeta - ku}{0}.$$

**110. Virsmas** Virsmas nolīdzinājums ir

$$z = f(x, y). \tag{1}$$

Pieņemam, ka šo funkciju var izvirzīt Teilora rindā. Parcialos diferencialkvocientus še apzīmējam:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial z}{\partial x} = p; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q. \\ &\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = s; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Plašāks ir virsmas nolīdzinājuma veids:

$$F(x, y, z) = 0. \tag{3}$$

Še $z$ ir apslēpta funkcija no $x$ un $y$.

Virsmas nolīdzinājuma trešais veids ir:

$$x = f(u, v); \quad y = \varphi(u, v); \quad z = \psi(u, v). \tag{4}$$

Ja $v =$ konst, tad ar nepārtrauktu mainīgu $u$ nolīdzinājumi (4) dod līkni telpā un ja arī $v$ nepārtraukti mainīgs, tad šī līkne veido virsmu.

Ar $u =$ konst $= k$, augšējie nolīdzinājumi dod līkni, kas atrodas uz virsmas, dotas ar nolīdzinājumiem (4). Dodot $k$ vērtības: $k_1$, $k_2$ dabūjam uz virsmas līknes, ko apzīmējam par $u$ līknēm.

Tāpat ar $v = k$ dabūjam uz virsmas $v$ līkni un ar $k_1$, $k_2$. $v$ līknes.

Tādā kārtā virsma ir apklāta ar divām līkņu saimēm. Šīs līknes sauc par **p a r a m e t r a  l ī n i j ā m**. Kādas $v$ un kādas $u$ līknes krustpunkts dod virsmas punktu. Ievērojot augšējo $u$ un $v$ **s a u c  a r ī  p a r  l ī k ā m  k o o r d i n a t ā m**.

Ja starp nolīdzinājumiem (4) izslēdzam $u$ un $v$, tad dabūjam veidu (3), un ja veidu (3) var atslēgt, attiecībā uz $z$, tad dabūjam veidu (1).

Ortogonalās koordinatās doto virsmas nolīdzinājumu pārveido polarkoordinatās $\varphi$, $\theta$, $r$ ar nolīdzinājumiem:

$$x = r \sin\theta \cos\varphi;$$
$$y = r \sin\theta \sin\varphi;$$
$$z = r \cos\theta.$$

Ja nolīdzinājums

$$F(x, y, z) = 0$$

ir vesela racionala $n$ kāpes algebriska funkcija, tad virsmu, kas dota ar augšējo nolīdzinājumu, sauc par $n$ kārtas algebrisku virsmu.

Šādu virsmu taisne krusto $n$ punktos, un plākne to krusto $n$ kārtas līknē.

Virsmu, kuras nolīdzinājums neatbilst augšējām pazīmēm, sauc par transcendentu virsmu.

a) **Pieskaru plākne virsmas punktā $x|y|z$.**

Līknes pieskari, ja līkne dota ar nolīdzinājumiem:

$$\left.\begin{aligned} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

dabūjam šādi:

Līknes pieskares nolīdzinājumi, ja līknes nolīdzinājumi doti parametriskā veidā, ir:

$$\frac{\xi - x}{dx} = \frac{\eta - y}{dy} = \frac{\zeta - z}{dz} = \lambda. \tag{2}$$

Še $x$, $y$, $z$ ir kāda līknes punkta koordinatas $\xi$, $\eta$, $\zeta$ pieskares tekošas koordinatas.

No (1) dabūjam:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial x} dx + \frac{\partial F_1}{\partial y} dy + \frac{\partial F_1}{\partial z} dz = 0; \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} dx + \frac{\partial F_2}{\partial y} dy + \frac{\partial F_2}{\partial z} dz = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Ja uz līknes (1) no punkta $P = x|y|z$ ejam pa $ds$, tad $ds$ atrodas uz virsmas $F_1 = 0$ un arī uz $F_2 = 0$. Šādā gadijumā $ds$ projekcijām: $dx$, $dy$, $dz$ vajaga apmierināt nolīdzinājumus (3).

No (2) dabūjam:

$$dx = \frac{\xi - x}{\lambda} \qquad dy = \frac{\eta - y}{\lambda} \qquad dz = \frac{\zeta}{\lambda} \tag{4}$$

Ievedot šīs vērtības nolīdzinājumos (3), dabūjam:

$$\left.\begin{aligned} - x) \frac{\partial F_1}{\partial x} + (\eta - y) \frac{\partial F_1}{\partial y} + (\zeta - z) \frac{\partial F_1}{\partial z} = 0; \\ (\xi - x) \frac{\partial F_2}{\partial x} + (\eta - y) \frac{\partial F_2}{\partial y} + (\zeta - z) \frac{\partial F_2}{\partial z} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Nolīdzinājumi (5) dod līknes (1) pieskari punktā $x \,|\, y \,|\, z$. Katrs no šiem nolīdzinājumiem, attiecībā uz $\xi$, $\eta$, $\zeta$, ir pirmās kāpes, tādēļ dod plākni, kas, kā redzams, iet caur punktu $P = x \,|\, y \,|\, z$. Šo plākņu krustošanās taisne $t_1$ ir pieskare līknei (1) un tādēļ arī pieskare virsmām $F_1 = 0$ un $F_2 = 0$ punktā $P = x \,|\, y \,|\, z$.

Virsmu $F_1 = 0$ krustojam punktā $x \,|\, y \,|\, z$ ar kādu citu virsmu $F_3 = 0$, tad krustošanās līkne iet caur punktu $x \,|\, y \,|\, z$. Šīs līknes pieskari $t_2$ punktā $x \,|\, y \,|\, z \,|$ arī izteic ar nolīdzinājumiem (5), kur $F_2$ vietā jāliek $F_3$.

Tādā pat kārtā dabūjam pieskares $t_3$, $t_4$ u. t. t. Kā redzams, visas līkņu pieskares punktā $x \,|\, y \,|\, z$, t. i $t_1$, $t_2$, $t_3$ atrodas plāknē

$$(\xi - x) \frac{\partial F_1}{\partial x} + (\eta - y) \frac{\partial F_1}{\partial y} + (\zeta - z) \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0, \tag{6}$$

un tā kā $t_1$, $t_2$, $t_3$ ir virsmas $F_1 = 0$ pieskkres, tad plākne (6) ir visu virsmas $F_1 = 0$ pieskaru kopība, punktā $x \,|\, y \,|\, z$ t. i. plākne:

$$(\xi - x) \frac{\partial F}{\partial x} + (\eta - y) \frac{\partial F}{\partial y} + (\zeta - z) \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \tag{7}$$

ir p i e s k a r u p l ā k n e v i r s m a i $F(x, y, z) = 0$ punktā $P = x \,|\, y \,|\, z$.

No

$$F(x, y, z) = 0$$

dabūjam:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial x} = - \frac{\partial F}{\partial z} p;$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = - \frac{\partial F}{\partial z} q$$

Ievedot $\frac{\partial F}{\partial x}$ un $\frac{\partial F}{\partial y}$ vērtības pieskaru plāknes nolīdzinājumā (7) dabūjam:

$$(\xi - x)\,p + (\eta - y)\,q - (\zeta - z) = 0. \tag{8}$$

Šis nolīdzinājums dod pieskaru plāknes nolīdzinājumu virsmas punktā $P = x\,|\,y\,|\,z$, ja virsma dota ar nolīdzinājumu:

$$z = f(x,\ y).$$

b) Virsmas normale un normalplāknes.

Pieskaršanās punktā $P = x\,|\,y\,|\,z$, pret pieskaru plākni vestu stateni, sauc par virsmas normali šinī punktā.

Virsmas normales nolīdzinājumi ir:

$$\frac{\xi - x}{p} = \frac{\eta - y}{q} = \frac{\zeta - z}{-1}. \tag{9}$$

Šie nolīdzinājumi pielietojami, ja virsmas nolīdzinājums dots:

$$z = f(x,\ y).$$

Ja virsmas nolīdzinājums dots:

$$F(x,\ y,\ z) = 0,$$

tad virsmas normales nolīdzinājumi ir:

$$\frac{\xi - x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{\eta - y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{\zeta - z}{\frac{\partial F}{\partial z}}. \tag{10}$$

No (9) dabūjam:

$$\frac{\xi - x}{p} = \frac{\zeta - z}{-1} \quad \text{un} \quad \frac{\eta - y}{q} = \frac{\zeta - z}{-1}.$$

Pārveidojot dabūjam:

$$(\xi - x) + p\,(\zeta - z) = 0; \tag{11}$$

$$(\eta - y) + q\,(\zeta - z) = 0. \tag{12}$$

Nolīdzinājumi (11) un (12) dod normales projekcijas uz $(xz)$ un $(yz)$ plāknēm.

No (9) dabūjam virsmas normales virziena koeficientus:

$$\cos\lambda = \frac{p}{\pm\sqrt{p^2+q^2+1}}; \quad \cos\mu = \frac{q}{\pm\sqrt{p^2+q^2+1}}; \quad \cos\nu = \frac{-1}{\pm\sqrt{p^2+q^2+1}} \tag{13}$$

Ja par normales pozitivo virzienu pieņemam to, kas ar pozitivo $z$ asi veido šauru leņķi, tad $\cos\gamma > 0$ un sakne jāņem ar minus zīmi. Tādā gadijumā:

$$\cos\lambda = \frac{-q}{\sqrt{p^2+q^2+1}}; \quad \cos\mu = \frac{-q}{\sqrt{p^2+q^2+1}}; \quad \cos\nu = \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+1}} \tag{14}$$

No (10) dabūjam:

$$\left.\begin{aligned} \cos\lambda &= \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\pm\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}; \quad \cos\mu = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\pm\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2=\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}; \\ \cos\nu &= \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\pm\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Ja

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz > 0,$$

tad saknei dod + zīmi, bet ja $dF < 0$, tad saknei dod — zīmi.

Ar šādu noteikumu saknes + zīme atbilst virsmas ārējai un — zīme iekšējai normalei.

c) Virsmas normalplāknes.

Virsmas normali varam dot ar tās projekcijām:

$$\left.\begin{aligned} (\xi - x) + p(\zeta - z) &= 0; \\ (\eta - y) + q(\zeta - z) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Katra caur šo normali vesta plākne, tad ir virsmas

$$z = f(x, y)$$

normalplākne.

Nolīdzinājums:

$$(\xi - x) + p(\zeta - z) + \lambda[(\eta - y) + q(\zeta - z)] = 0 \tag{17}$$

ir virsmas $z = f(x, y)$ normalplākņu šķipsnas nolīdzinājums.

P i e m ē r s.

Dabūt virsmas

$$2z = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}$$

pieskaru plāknes nolīdzinājumu.

Virsmas pieskaru plāknes nolīdzinājums šādā gadijumā ir:

$$p(\xi - x) + q(\eta - y) - (\zeta - z) = 0.$$

Še

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{a} \quad \text{un} \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{b}.$$

Ievedot šīs vērtības pieskaru plāknes nolīdzinājumā dabūjam

$$\frac{x}{a}(\xi - x) + \frac{y}{b}(\eta - y) - (\zeta - z) = 0$$

pārveidojot dabūjam:

$$\frac{x\xi}{a} - \frac{x^2}{a} + \frac{y\eta}{b} - \frac{y^2}{b} - (\zeta - z) = 0.$$

Ievērojot virsmas nolīdzinājumu dabūjam:

$$\frac{x \cdot \xi}{a} + \frac{y\eta}{b} = \zeta + z.$$

P i e m ē r s.

Dabūt elipsoida

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c} - 1 = 0$$

pieskaru plāknes nolīdzinājumu. Virsmas pieskaru plāknes nolīdzinājums šinī gadijumā ir:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(\eta - y) + \frac{\partial F}{\partial z}(\zeta - z) = 0.$$

Še

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x}{a^2}; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2y}{b^2}; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{2z}{c^2}.$$

Ievedot šīs vērtības pieskaru plāknes nolīdzinājumā dabūjam:

$$\frac{x}{a^2}(\xi - x) + \frac{y}{b^2}(\eta - y) + \frac{z}{c^2}(\zeta - z) = 0.$$

Ievērojot elipsoida nolīdzinājumu dabūjam:

$$\frac{\xi x}{a^2}+\frac{\eta y}{b^2}+\frac{\zeta z}{c^2}-1=0.$$

Elipsoida normales nolīdzinājumi punktā $P = x\,|\,y\,|\,z$ ir

$$\frac{\xi - x}{\frac{x}{a^2}}=\frac{\eta - y}{\frac{y}{b^2}}=\frac{\zeta - z}{\frac{z}{c^2}}.$$

Normales virziena koeficientus $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ dabūjam no:

$$\cos\lambda : \cos\mu : \cos\nu = \frac{x}{a^2} : \frac{y}{b^2} : \frac{z}{c^2}.$$

P i e m ē r s.

Vilkt caur punktu $P_0 = x_0\,|\,y_0\,|\,z_0$, virsmai

$$F(x,\,y,\,z)=0$$

pieskaru plākni

Punkts $P_0$ neatrodas uz virsmas.

Apzīmējam ar $P = x\,|\,y\,|\,z$ virsmas punktu, kurā pieskaras virsmai plākne, kas iet caur punktu $P_0$

Pieskaru plāknes nolīdzinājums ir:

$$(\xi - x)\frac{\partial F}{\partial x}+(\eta - y)\frac{\partial F}{\partial y}+(\zeta - z)\frac{\partial F}{\partial z}=0.$$

Tā kā pieskaru plāknei, jāiet caur punktu $x_0\,|\,y_0\,|\,z_0$, tad tā punkta koordinatām jāapmierina augšējais nolīdzinājums. Tā tad:

$$(x_0 - x)\frac{\partial F}{\partial x}+(y_0 - y)\frac{\partial F}{\partial y}+(z_0 - z)\frac{\partial F}{\partial z}=0. \qquad (\alpha)$$

Tā kā $P = x\,|\,y\,|\,z$ atrodas uz pieskaru plāknes un virsmas

$$F(x,\,y,\,z)=0, \qquad (\beta)$$

tad punktam $x\,|\,y\,|\,z$ jāapmierina abi nolīdzinājumi $(\alpha)$ un $(\beta)$.

Šie nolīdzinājumi $(\alpha)$ un $(\beta)$ dod līkni, kas atrodas uz virsmas $(\beta)$ un ir pieskaršanās līkne, kurā caur $P_0$ ejošā pieskaru plākne pieskaras virsmai. Caur $P = x | y | z$, kas atrodas uz virsmas un $P_0 = x_0 | y_0 | z_0$ liekam taisni

$$\frac{\xi - x}{x_0 - x} = \frac{\eta - y}{y_0 - y} = \frac{\zeta - z}{z_0 - z}. \tag{$\gamma$}$$

Šī taisne ir virsmas pieskare.

Starp četriem nolīdzinājumiem ($\alpha$), ($\beta$) un ($\gamma$) izslēdzot $x, y, z$ dabūjam vienu nolīdzinājumu ar $\xi, \eta, \zeta$. Šis nolīdzinājums dod virsmu uz kuras atrodas visas no $P_0$ pie virsmas $F(x, y, z) = 0$ vilktās pieskares. Šī virsma ir kons ar virsotni punktā $P_0$.

P i e m ē r s.

Dabūt: 1) tā cilindra nolīdzinājumu, kas projecē virsmu $F(x, y, z) = 0$ uz $xy$ plāknes un 2) šī cilindra un virsmas pieskāršanās līknes nolīdzinājumu.

Pieskaršanās līknes katrā punktā $P = x | y | z$, virsmas normale ir $\perp$ pret $z$ asi, tādēļ $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$. Tā kā šis punkts atrodas uz virsmas tad tā koordinatām jāizpilda arī nolīdzinājums

$$F(x, y, z) = 0.$$

Tā tad pieskaršanās punktam $P = x | y | z$ jāizpilda nolīdzinājumi:

$$\left.\begin{aligned} F(x, y, z) &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{$\mu$}$$

Šie divi nolīdzinājumi dod pieskaršanās līkni. Projecējošā cilindra nolīdzinājumu dabūjam, izslēdzot starp šiem nolīdzinājumiem koordinatu $z$.

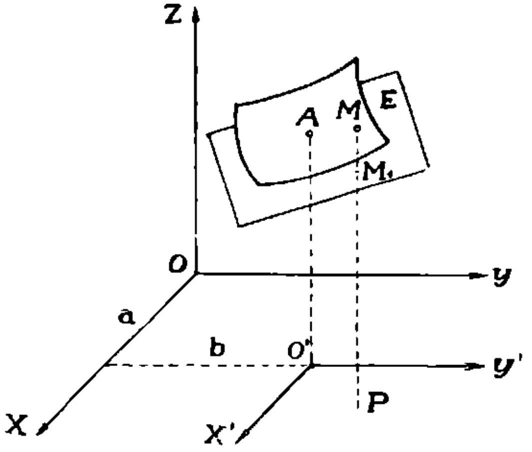
**111. Virsmas stāvoklis pret pieskaru plākni, pieskaršanās punkta apkārtnē.** Pieņemam, ka virsmas nolīdzinājums dots veidā:

$$z = f(x, y). \tag{1}$$

Apzīmējam ar

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{\partial z}{\partial x}; \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} \\ r &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}; \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Pieņemam, ka punkts $A$ (zīm. 126) ir pieskaru plāknes $E$ pieskaršanās punkts virsmai (1). Punkta $A$ projekcija uz $xy$ plāknes ir $O'$.




Zīm 126.

Pieņemam ka punkts $M$ atrodas ļoti tuvu punktam $A$ uz virsmas. $P$ ir šī punkta projekcija uz $xy$ plāknes. $MP$ krusto pieskaru plākni $E$ punktā $M_1$. Ja punkta $O'$ koordinatas ir $a$ un $b$, tad punkta $A$ $z$ koordinata ir:

$$c = f(a, b). \tag{3}$$

Pārnesam koordinatu sistemu paraleli uz $O'$, tad

$$\left.\begin{aligned} x &= a + x' \\ y &= b + y' \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

un

$$z = f(a + x', \quad b + y').$$

Izvirzot izteiksmes labo pusi Teilora rindā dabūjam:

$$z = f(a, b) + px' + qy' + \frac{1}{2}(rx'^2 + 2sx'y' + ty'^2) + \tag{5}$$

Pieskaru plāknes nolīdzinājums punktā $A$ ir:

$$\zeta - c = (\xi - a)p + (\eta - b)q.$$

Ievērojot transformacijas formulas (4), kas dod

$$\xi = a + x' \quad \text{un} \quad \eta = b + y',$$

dabūjam pieskaru plāknes nolīdzinājumu jaunā koordinatu sistemā

$$\zeta = c + px' + qy' \tag{6}$$

Jaunā koordinatu sistemā punkta $M_1$ koordinatas ir $x' | y' | \zeta$.

No nolīdzinājumiem (5) un (6) dabūjam:

$$z - \zeta = \frac{1}{2}(rx'^2 + 2sx'y' + ty'^2) + \tag{ }$$

Tālākie locekļi še ir trešā un augstākās kāpēs. Ja $z - \zeta > 0$, tad virsmas punkts $M$ atrodas virs pieskaru plāknes, bet ja $z - \zeta < 0$, tad punkts $M$ atrodas zem tās un ja $z - \zeta = 0$, tad punkts $M$ atrodas pieskaru plāknē.

Virsmas un pieskaru plāknes krustošanās līknes projekciju uz $xy$ plāknes dabūjam liekot nolīdzinājumā (7)

$$z - \zeta = 0.$$

Tad nolīdzinājums

$$0 = (rx'^2 + 2sx'y' + ty'^2) + \tag{8}$$

dod šo krustošanās līknes projekciju.

Šis nolīdzinājums, kā locekļu zemākā kāpe ir otrā, kā redzējām līkņu īpašu punktu pētīšanā, izteic līkni ar dubultpunktu punktā $O'$ Šīs līknes pieskaru nolīdzinājums punktā $O'$, ir:

$$rx'^2 + 2sx'y'^2 + ty'^2 = 0. \tag{9}$$

Augšējais nolīdzinājums izteic divas taisnes caur $O'$, kas var būt imaginaras, realas nesakrītošas, realas sakrītošas.

P i r m a i s  g a d i j u m s. Pieņemam, ka

$$rt - s^2 > 0.$$

Tad nolīdzinājums (9) izteic divas imaginaras taisnes: virsmas un pieskaru plāknes punktā $A$ krustošanās līknes projekcija uz $xy$ plāknes dod izolētu punktu $O'$ Tādēļ pieskaru plāknei, punkta $A$ apkārtnē, ar virsmu nav citu kopēju punktu kā pieskaršanās punkts $A$.

Tā kā punktā $P$, $x'$ un $y'$ ļoti mazi lielumi, tad $z - \zeta$ zīmi noteic trinoma

$$rx'^2 + 2sx'y' + ty'^2$$

zīme. Tā kā šim trinomam ir imaginaras saknes, tad tam ir pastāvīgi tāda zīme kā lielumam $r$ (vai arī $t$). Ja $r > 0$, tad $z - \zeta > 0$ punkta $O'$ apkārtnē. Virsma tad atrodas virs pieskaru plāknes; ja $r < 0$, tad $z - \zeta < 0$ un virsma $O'$ apkārtnē atrodas zem pieskaru plāknes.

Šinī gadijumā saka: virsma ir konveksa punktā $A$. Konveksas virsmas ir lode, elipsoids, eliptisks paraboloids un divtelpu hiperboloids.

O t r s  g a d i j u m s. Ja

$$rt - s^2 < 0,$$

tad nolīdzinājums (9) izteic divas realas punktā $O'$ krustojošās taisnes.

Virsmas un pieskaru plāknes krustošanās līknes projekcijai $xy$ plāknē punkts $O'$ ir dubultpunkts. Taisnes, kas dotas ar nolīdzinājumu (9), ir minētās līknes pieskares punktā $O'$. Telpā, virsmas un pieskaru plāknes krustošanās līknei, arī ir dubultpunkts pieskaršanās punktā $A$. Šai punktā krustošanās līknei ir divas pieskares, kuru projekcijas uz $xy$ plāknes dod nolīdzinājums (9). Šīs pieskares, virsmas un pieskaru plāknes krustošanās līknei punktā $A$, sauc par virsmas asimptotiskiem virzieniem punktā $A$ Krustošanās līknes abu zaru projekcijas $xy$ plāknē veido punktā $O'$ četrus līknes leņķus I, II, III, IV.

Ja punkts $P = x' | y'$ kustas punkta $O'$ apkārtnē, tad starpība $z - \zeta$, ja tā piemēram leņķa iecirknī I ir $+$, tad tā leņķa iecirknī II ir $-$, iecirknī III $+$ un iecirknī IV $-$. Virsmas daļa, kas projecējas uz I un III, atrodas virs pieskaru plāknes un tā virsmas daļa, kas projecējas iecirkņos II un IV, atrodas zem pieskaru plāknes.

Šinī gadijumā saka, ka virsmas punktā $A$ totalais liekums ir negativs.

Virsmas ar totalo negativo liekumu ir piemēram: vientelpas hiperboloids, hiperboliskais paraboloids.

T r e š a i s g a d i j u m s. Ja

$$rt - s^2 = 0,$$

tad nolīdzinājums (9) izteic divas sakrītošas taisnes. Virsmas un pieskaru plāknes krustošanās līknes projekcijai $xy$ plāknē punktā $O'$ ir smaile; abiem līknes zariem punktā $O'$ ir kopēja pieskare. Telpā, pieskaru plakne punktā $A$ krusto virsmu līknē, kurai punktā $A$ ir smaile. Smailes zariem ir kopīga pieskare. Asimptotiskie virzieni sakrīt ar šo pieskari. Smailes zaru projekcija dala $xy$ plākni divos iecirkņos. Starpība $z - \zeta$ dabū pozitivu vai negativu zīmi atkarībā no punkta $P = x' | y'$ atrašanās vienā vai otrā iecirknī.

Šinī gadijumā saka, ka virsmai punktā $A$ totalais liekums ir 0. Šādas virsmas ir piemēram konu un cilindru virsmas, vispār plāknē izplatamas virsmas.

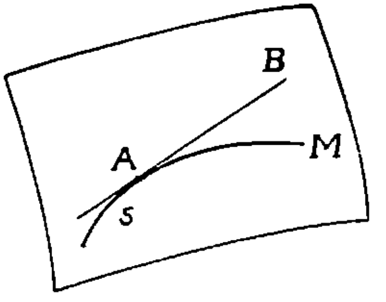
**112. Uz virsmas atrodošas līknes liekums.** Pieņemam, ka punkts $A$ (zīm. 127) atrodas uz virsmas.

$$z = f(x, y). \tag{1}$$

Pieņemam arī, ka līkne $AM$ atrodas uz šīs virsmas. Apzīmējam ar $s$ loku uz šīs līknes, skaitot no kāda punkta, ar $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$ līknes pieskares $AB$ virziena koeficientus, ar $\alpha_2$, $\beta_2$, $\gamma_2$ šīs līknes galvenās normales virziena koeficientus un ar $R$ līknes liekuma radiusu punktā $A$ Uz līknes $AM$, $x$, $y$, $z$ ir funkcijas no $s$.

Frene formulas dod:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{ds}=\alpha_1; \quad \frac{dy}{ds}=\beta_1; \quad \frac{dz}{ds}=\gamma_1 \\ &\frac{d\alpha_1}{ds}=\frac{\alpha_2}{R}; \quad \frac{d\beta_1}{ds}=\frac{\beta_2}{R}; \quad \frac{d\gamma_1}{ds}=\frac{\gamma_2}{R} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$



Zīm. 127.

Tā kā līkne atrodas uz virsmas (1), tad $x$, $y$, $z$ kā funkcijas $s$ tāpatīgi izpilda nolīdzinājumu (1). Diferencējot (1), attiecībā uz $s$, dabūjam:

$$\frac{dz}{ds}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{ds}. \tag{3}$$

Ievedot še apzīmes no (2) dabūjam:

$$\gamma_1 = p\alpha_1 + q\beta_1 \tag{4}$$

Diferencējot nolīdzinājumu (4) attiecībā uz $s$, dabūjam:

$$\frac{d\gamma_1}{ds}=\frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{ds}\alpha_1+\frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{ds}.\alpha_1+p\frac{d\alpha_1}{ds}+\frac{\partial q}{\partial x}.\frac{dx}{ds}\beta_1+\frac{\partial q}{\partial y}\frac{dy}{ds}\beta_1+q\frac{d\beta_1}{ds}.$$

Ievērojot izteiksmes (2), dabūjam:

$$\frac{\gamma_2}{R}=r\ \alpha_1^2+s\,.\,\beta_1\alpha_1+p\ \frac{\alpha_2}{R}+s\ \alpha_1\beta_1+t\ \beta_1^2+q\,.\,\frac{\beta_2}{R}$$

vai arī

$$\frac{\gamma_2-p\alpha_2-q\beta_2}{R}=r\alpha_1^2+2s\,\alpha_1\beta_1+t\beta_1^2 \tag{5}$$

un

$$R=\frac{\gamma_2-p\alpha_2-q\beta_2}{r\alpha_1^2+2s\,\alpha_1\beta_1+t\beta_1^2}. \tag{6}$$

Šinī izteiksmē $p$, $q$, $r$, $s$, $t$ ir atkarīgi tikai no punkta $A$ koordinatām $x$, $y$, $z$, bet nav atkarīgi no līknes izvēles, kas iet caur $A$. Lielumi $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$ ir zinami, ja līknei punktā $A$ pievelkam pieskari. Lielumi $\alpha_2$, $\beta_2$, $\gamma_2$ ir zinami, ja zinama pieņemtās līknes galvenā normale.

Teorema.

Ja uz virmas $z = f(x, y)$ velkam caur punktu $A$ līkni, tad šīs līknes liekuma radius $R$ punktā $A$ ir tāds pats, kāds tas ir tai līknei, ko dabū, krustojot virsmu ar dotās līknes pieslejas plākni, kas iet caur pieskari $AB$.

Pierādijums.

Dotās līknes liekuma radius $R$ ir noteikts ar nolīdzinājumu (6) un atrodas šīs līknes pieslejas plāknē. Ja punkts $A$ pieņemts, tad arī doti $p, q, r, s, t$. $R$ ka redzams no (6) tad ir atkarīgs tikai no $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ un $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$. $R$ vērtība ir tā pati visām līknēm, kas iet caur punktu $A$ un kam ir tie paši seši lielumi $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$.

Virsmas krustošanās līknei ar dotās līknes pieslejas plākni ir kopīgi ar doto līkni punktā $A$: pieskare un galvenā normale; tā tad tai ir arī tie paši $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, kā dotai līknei un tādēļ, saskaņā ar (6), tas pats liekuma radius $R$, kā dotai līknei. Ar šo teorema ir pierādīta.

Virsmas šķēlumu ar plākni, kas iet caur virsmas pieskari un virsmas normali punktā $A$, sauc par normalšķēlumu. Katru citu virsmas šķēlumu ar plākni, caur to pašu pieskari $AB$ punktā $A$, bet kas neiet caur virsmas normali sauc par slīpu šķēlumu.

Menie (Meusnier) teorema:

Slīpā šķēluma līknes liekuma centrs $C_1$, ir attiecīgā normalšķēluma līknes liekuma centra $C$ projekcija uz slīpā šķēluma plāknes.

Pierādijums.

Virsmas

$$z = f(x, y)$$

normales nolīdzinājumi punktā $A = x \mid y \mid z$ ir:

$$\frac{\xi - x}{p} = \frac{\eta - y}{q} = \frac{\zeta - z}{-1}. \tag{7}$$

Virsmas normales virziena koeficienti $\lambda$, $\eta$, $\nu$ ir doti ar

$$\lambda = \frac{-p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}; \quad \eta = \frac{-q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}; \quad \nu = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}. \tag{8}$$

Šī virsmas normale arī ir normalšķēluma galvenā normale.

Apzīmējot slīpā šķēluma galvenās normales virziena koeficientus ar:

$$\alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2,$$

un apzīmējot leņķi, starp normalā un slīpā šķēluma galvenām normaēm ar $\theta$, dabūjam:

$$\cos\theta = \lambda\alpha_2 + \mu\beta_2 + \nu\gamma_2.$$

Ievietojot $\lambda$, $\mu$, vērtības no (8) dabūjam:

$$\cos\theta = \frac{-p\alpha_2 - q\beta_2 + \gamma_2}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

No (5) dabūjam:

$$-p\alpha_2 - q\beta_2 + \gamma_2 = R(r\alpha_1^2 + 2s\alpha_1\beta_1 + t\beta_1^2).$$

Šis izteiksmes kreisās puses vērtību ievietojot augšējā formulā, dabūjam:

$$\cos\theta = \frac{R(r\alpha_1^2 + 2s\alpha_1\beta_1 + t\beta_1^2)}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

un

$$R = \frac{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{r\alpha_1^2 + 2s\alpha_1\beta_1 + t\beta_1^2} \cdot \cos\theta. \tag{10}$$

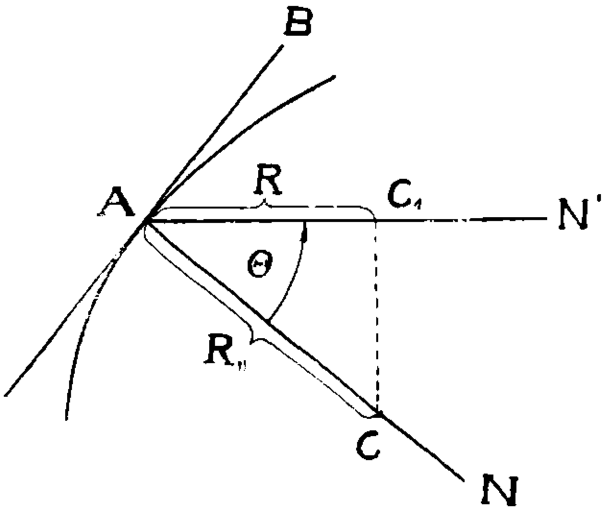
Še $R$ ir slīpā šķēluma liekuma radius punktā $A$.

Izteiksmes (10) saucējs var būt pozitivs vai negativs, bet tā kā $R$ ir pozitivs, tad $\cos\theta$ zīmei jābūt tādai pat kā saucēja zīmei.

1) Pieņemam ka:

$$r\alpha_1^2 + 2s\alpha_1\beta_1 + t\beta_1^2 > 0,$$

tad $\cos\theta$ ir pozitivs un leņķis $\theta$ ir šaurs.




Zīm. 128.

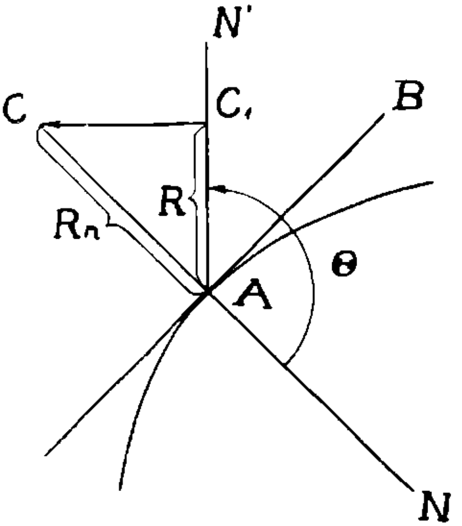
Zīmējumā 128 $AB$ ir virsmas normalšķēluma pieskare punktā $A$.

$AN$ ir virsmas normale un arī normalšķēluma (caur $AB$ $AN$) galvenā normale. $AN'$ ir slīpā šķēluma (caur $AB$ un $AN'$) galvenā normale.

Ja $\theta \to 0$, t. i. ja slīpais šķēlums tuvinas normalšķēlumam, griezdamies ap $AB$, tad, saskaņā ar (10), $R$ aug un ar $\theta = 0$ dabū vērtību

$$R_n = \frac{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{r\alpha_1^2 + 2s\alpha_1\beta_1 + t\beta_1^2}. \tag{11}$$

Še $R_n$ tad ir normalšķēluma liekuma radius punktā $A$.




Zīm. 129.

Salīdzinot nolīdzinājumus (10) un (11) dabūjam:

$$R = R_n \cos\theta. \tag{12}$$

No zīmējuma 128 redzams, ka $R = AC_1$, ir $R_n$ projekcija uz $AN'$, kas pierāda Menie teoremu

2) Ja

$$r\alpha_1^2 + 2s\alpha_1\beta_1 + t\beta_1^2 < 0,$$

tad, kā augšā norādīts, $\cos\theta < 0$ un $\theta$ tad ir platleņķis. (Zīm. 129)

Ja griežam slīpā šķēluma plākni $BAN'$ ap $AB$, ar augošu $\theta$, redzam, ka ar $\theta = \pi$, slīpā šķēluma plākne sakrīt ar normalšķēluma plākni un $AN'$ sakrīt ar $AN$ pagarinājumu $AC$. Tad saskaņā ar (10) $R$ tiecas uz vērtību

$$R_n = -\frac{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{r\alpha_1^2 + 2s\alpha_1\beta_1 + t\beta_1^2}.$$

Formula (10) tad dod:

$$R = -R_n \cos\theta = R_n \cos(\pi - \theta).$$

Šī formula pierāda Menie teoremu arī dotā gadijumā.

M e n i e t e o r e m a r ā d a, k a j a z i n a m k ā d a n o r m a l-š ķ ē l u m a l i e k u m a c e n t r u $C$ p u n k t ā $A$, t a d a r t o a r i z i n a m k a t r a a t t i e c ī g ā s l ī p ā š ķ ē l u m a l i e k u m a c e n t r u $C_1$ p u n k t ā $A$.

Kā redzējām, normalšķēluma liekuma centrs $C$ var atrasties uz virsmas normales pozitivās puses $AN$ vai arī uz $AN$ pagarinājuma. Pirmā gadijumā dabūjam

$$R_n = \frac{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{r\alpha_1^2 + 2s\alpha_1\beta_1 + t\beta_1^2}$$

un otrā

$$R_n = -\frac{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{r\alpha_1^2 + 2s\alpha_1\beta_1 + t\beta_1^2}.$$

Lai abos gadijumos izteiktu $R_n$ ar vienu formulu, dodam $R_n$ pozitivu zīmi, ja liekuma centrs $C$ atrodas uz virsmas normales pozitivās puses $AN$ un negativo zīmi pretējā gadijumā. Ar šādu noteikumu $R_n$ apzīmē taisnes gabala $AC$ algebrisko vērtību, kas skaitama pozitiva uz virsmas normales izvēlētā virzienā $AN$. Šī algebriskā vērtība tad ir dota ar vienu formulu.

$$R_n = \frac{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{r\alpha_1^2 + 2s\alpha_1\beta_1 + t\beta_1^2} \tag{13}$$

Ja $R_n$ dabū pozitivu vērtību, tad liekuma centrs atrodas uz virsmas normales pozitivās puses un ja $R_n$ dabū negativu zīmi, tad liekuma centrs atrodas uz virsmas normales negativās puses.

Formulā (13) skaitītājs ir pozitivs. Ja $A$ pieņemts, tad saucējs ir atkarīgs no $\alpha_1$ un $\beta_1$. Ja normalšķēluma plākni griežam ap virsmas normali, mainas pieskares virziena koeficienti $\alpha_1$ un $\beta_1$. $R_n$ zīme, tā tad, atkarīga tikai no saucēja.

Ja $rt - s^2 < 0$, tad saucējam ir pastāvīga zīme ar visām $\alpha_1$ un $\beta_1$ vērtībām. Šādā gadijumā visu normalšķēluma liekuma centri atrodas vienā pusē no $A$.

Ja $rt - s^2 < 0$, tad saucējs dabū kā pozitivas tā arī negativas vērtības. Tad dažu normalšķēlumu liekuma centri atrodas vienā pusē no $A$ un dažu — otrā pusē. Bet tā kā saucēja vērtība, ejot no $+$ uz $-$, iet caur 0, tad gadijumā, ja

$$r\alpha_1^2 + 2s\,\alpha_1\beta_1 + t\beta_1^2 = 0 \tag{14}$$

$R_n$ dabū vērtību $\infty$ Šādu vērtību dabū $R_n$ divos virzienos. Tas redzams no sekojošā. Pieskares $AB$ nolīdzinājumi ir

$$\frac{\xi - x}{\alpha_1} = \frac{\eta - y}{\beta_1} = \frac{\zeta - z}{\gamma_1}.$$

tad

$$\frac{\xi - x}{\alpha_1} = \frac{\eta - y}{\beta}$$

vai

$$\frac{\eta - y}{\xi - x} = \frac{\beta_1}{\alpha_1}; \tag{15}$$

ir pieskares projekcija uz $x$, $y$ plāknes.

No nolīdzinājuma (15) redzams, ka $\frac{\beta_1}{\alpha_1}$ ir pieskares projekcijas virziena koeficients. Ievedot $\frac{\beta_1}{\alpha_1} = \operatorname{tg}\varphi$ nolīdzinājumā (14) dabūjam:

$$t \operatorname{tg}^2\varphi + 2s \operatorname{tg}\varphi + r = 0.$$

Šis nolīdzinājums dod divus virzienus, ar kuriem nolīdzinājums (14) ir izpildīts.

Ja $rt - s^2 = 0$, tad $R_n$ zīmi nemaina, bet $R_n$ dabū vērtību $\infty$ vienā virzienā.

**113. Eilera formula.** Pārnesam koordinatu sākumu uz virsmas punktu $A$. $z$ asi še liekam virsmas normales $+$ virzienā. No virsmas punkta $A$ atkarīgos diferenciālkvocientus apzīmējam ar $p_0$, $q_0$, $r_0$, $s_0$, $t_0$.

Tā kā virsmas normale punktā $A$ še sakrīt ar $z$ asi, tad šis normales virziena koeficienti jaunā koordinatu sistemā ir:

$$\lambda = 0; \quad \mu = 0; \quad \nu = 1.$$

Bet tad, saskaņā ar formulām (8), [112] jābūt

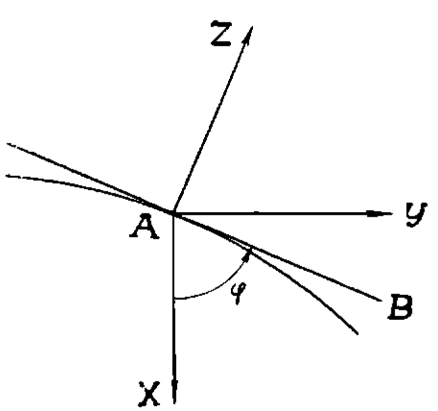
$$p = 0; \quad q = 0,$$

Šādā gadijumā formula (13) [112] dod:

$$R_n = \frac{1}{r_0\alpha_1^2 + 2s_0\alpha_1\beta_1 + t_0\beta_1^2}$$

vai arī:

$$\frac{1}{R_n} = r_0\alpha_1^2 + 2s_0\alpha_1\beta_1 + t_0\beta_1^2 \tag{16}$$



Zīm. 130.

Pieskare $AB$ virsmas punktā $A$ (zīm. 130.), tagad atrodas $xy$

plāknē. Apzīmējot leņķi starp $x$ asi un pieskari ar $\varphi$, redzams, ka formulā (16) $\alpha_1$ vietā liekams $\cos\varphi$ un $\beta_1$ vietā $\sin\varphi$, tad:

$$\frac{1}{R_n} = r_0 \cos^2\varphi + 2s_0 \sin\varphi \cos\varphi + t_0 \sin^2\varphi. \tag{17}$$

$\frac{1}{R_n}$ vērtiba, kā redzams no augšējā, ir atkarīga no leņķa $\varphi$, un tā kā izteiksme ir otrās kāpes, tad tai ir maksims un minims. Vērtības $\varphi$, kas dod maksimu vai minimu, dabūjam no izteiksmes:

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{R_n}\right) = -2r_0 \cos\varphi \sin\varphi + 2s_0 \cos^2\varphi - 2s_0 \sin^2\varphi + 2t_0 \sin\varphi \cos\varphi =$$

$$= -(r_0 - t)\, 2 \sin\varphi \cos\varphi + 2s_0 (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = 0. \tag{18}$$

No nolīdzinājuma (18) dabūjam:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2s_0}{r_0 - t_0}. \tag{19}$$

Vispārīgā gadijumā, kad $s_0 \neq 0$ un $r_0 \neq t_0$, augšējā izteiksme dod vērtības:

$$2\varphi = m \quad \text{un} \quad 2\varphi = m + \pi,$$

tā tad:

$$\varphi_1 = \frac{m}{2}; \quad \varphi_2 = \frac{m}{2} + \frac{\pi}{2}. \tag{20}$$

Ar vienu no $\varphi$ vērtībām $\frac{1}{R_n}$ ir maksims, tad $R_n$ ir ir minims, ar otru $\frac{1}{R_n}$ ir minims, tad $R_n$ ir maksims. Apzīmējam šīs $R_n$ ekstremās vērtības ar $R_1$ un $R_2$. Šeit $R_1$ un $R_2$ atrodas normalšķēlumos, kas stāv stateniski viens pret otru, kā to rāda (20). Normalšķēlumus, caur virsmas punktu $A$, kuru liekumu radiusi $R_1$ un $R_2$ dabū ekstremas vērtības, sauc par **galveniem šķēlumiem**. **Pieskares virzienus**, ar leņķiem $\varphi_1$ un $\varphi_2$, sauc par **galveniem virzieniem**, $R_1$ un $R_2$ par **galveniem liekuma radiusiem.**

Ja koordinatu asis $x$ un $y$ liekam galvenos virzienos, tad šajā koordinatu sistemā galveno šķēlumu leņķi ir:

$$\varphi_1 = \frac{m}{2} = 0 \quad \text{un} \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Ar šīm $\varphi_1$ un $\varphi_2$ vērtībām formulā (19) jābūt $s_0 = 0$. Tad nolīdzinājums (17) dabū veidu:

$$\frac{1}{R_n} = r_0 \cos^2\varphi + t_0 \sin^2\varphi \tag{21}$$

Še leņķi $\varphi$ veido kāda normalšķēluma pieskare punktā $A$ ar $x$ asi, caur kuru tagad iet galvenais šķēlums.

Ja $\varphi = 0$, normalšķēlums sakrīt ar vienu galveno šķēlumu, tad $R_n = R_1$ un formula (21) dod:

$$\frac{1}{R_1} = r_0.$$

Ja $\varphi = \frac{\pi}{2}$, normalšķēlums sakrīt ar otru galveno šķēlumu, tad $R_n = R_2$. Še nolīdzinājums (21) dod:

$$\frac{1}{R_2} = t_0.$$

Ievedot $\frac{1}{R_1} = r_0$ un $\frac{1}{R_2} = t_0$ nolīdzinājumā (21) dabūjam:

$$\frac{1}{R_n} = \frac{\cos^2\varphi}{R_1} + \frac{\sin^2\varphi}{R_2}. \tag{22}$$

Augšējā formula rāda, ka ja caur virsmas punktu $A$ liekam kādu normalšķēlumu, kas ar vienu no galveniem šķēlumiem veido leņķi $\varphi$, tad šāda normalšķēluma liekuma radiusu $R_n$ varam dabūt, ja zinami galvenie liekuma radiusi $R_1$ un $R_2$.

Formulu (22) sauc par Eilera formulu.

Pirmis secinājums.

Normalšķēlumiem, kas veido ar galveno šķēlumu leņķus $\psi$ un $\pi - \psi$, ir vienlīdzīgi liekuma radiusi.

Ievedot formulā (22) leņķus $\psi$ un $\pi - \psi$ dabūjam:

$$\frac{1}{R_\psi} = \frac{\cos^2\psi}{R_1} + \frac{\sin^2\psi}{R_2};$$

$$\frac{1}{R_{\pi-\psi}} = \frac{\cos^2(\pi-\psi)}{R_1} + \frac{\sin^2(\pi-\psi)}{R_2} = \frac{\cos^2\psi}{R_1} + \frac{\sin^2\psi}{R_2}.$$

No augšējā redzams, ka

$$\frac{1}{R_\psi} = \frac{1'}{R_{\pi-\psi}}$$

Otrs secinājums.

Normalšķēlumiem ar leņķiem $\varphi$ un $\varphi + \frac{\pi}{2}$, pastāv izteiksme:

$$\frac{1}{R_\varphi} + \frac{1}{R_{\varphi+\frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Pierādijums:

$$\frac{1}{R_\varphi} = \frac{\cos^2\varphi}{R_1} + \frac{\sin^2\varphi}{R_2}$$

$$\frac{1}{R_{\varphi+\frac{\pi}{2}}} = \frac{\cos^2\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)}{R_1} + \frac{\sin^2\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)}{R_2} = \frac{\sin^2\varphi}{R_1} + \frac{\cos^2\varphi}{R_2}$$

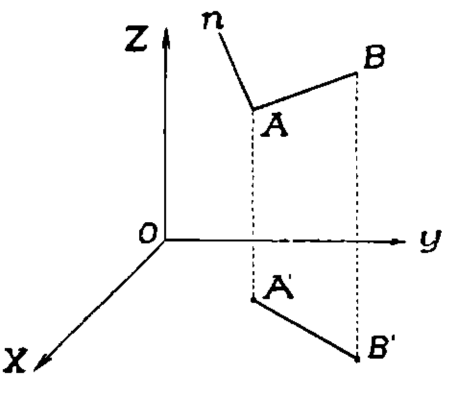
Saskaitot šos nolīdzinājumus dabūjam:

$$\frac{1}{R_\varphi} + \frac{1}{R_{\varphi+\frac{\pi}{2}}} = \frac{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}{R_1} + \frac{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}{R_2} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

**114. Galveno virzienu noteikšana.** Pieņemam, ka virsma dota ar nolīdzinājumu

$$z = f(x, y) \tag{1}$$

un ka šīs virsmas punktā $A = x|y|z$ jānoteic galvenie virzieni. Zīm. 131.)




Zīm. 131.

Pieņemam ka $An$ ir virsmas normale un $AB$ virsmas pieskare. Caur šīm taisnēm iet normalplākne, kas dod ar virsmu normalšķēlumu. $A'B'$ ir pieskares $AB$ projekcija uz $xy$ plāknes. Kā redzējām:

$$R_n = \frac{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{r\alpha_1^2 + 2s\alpha_1\beta_1 + t\beta_1^2} \tag{2}$$

vai

$$\frac{R_n}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = \frac{1}{r\alpha_1^2 + 2s\,\alpha_1\beta_1 + t\beta_1^2}. \tag{2a}$$

Ja punkts $A$ uz virsmas pieņemts, tad $p, q, r, s, t$ ir noteikti pastāvīgi lielumi. Tā kā $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ ir pieskares $AB$ virziena koeficienti, tad:

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1. \tag{3}$$

Kā agrāk redzējām [112] (4):

$$\gamma_1 = p\alpha_1 + q\beta_1 \tag{4}$$

tad

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + (p\alpha_1 + q\beta_1)^2 = 1. \tag{5}$$

Izteiksmi (5) ievedam formulas (2*), labās puses skaitītājā, 1 vietā, tad:

$$\frac{R_n}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = \frac{\alpha_1^2 + \beta_1^2 + (p\alpha_1 + q\beta_1)^2}{r\alpha_1^2 + 2s\alpha_1\beta_1 + t\beta_1^2}. \tag{6}$$

Izteiksmes (6) labās puses skaitītāju un saucēju dalam ar $\alpha_1^2$ un, liekot

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1} = m, \tag{7}$$

dabūjam:

$$\frac{R_n}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = \frac{(1 + q^2)\, m^2 + 2pqm + 1 + p^2}{tm^2 + 2sm + r}. \tag{8}$$

Tā kā

$$\alpha_1 = \frac{dx}{ds}; \qquad \beta_1 = \frac{dy}{ds}$$

tad

$$m = \frac{\beta_1}{\alpha_1} = \frac{dy}{dx}$$

t. i. $m$ ir pieskares $AB$ projekcijas $A'B'$ virziena koeficients.

Galvenos virzienos, vienā $R_n$ ir maksims, otrā minims. Lai dabūtu galvenos virzienus, jāgriež normalplākne ap normali $An$.

Pieskare $AB$ tad griežas ap $A$ un pieskares projekcija $A'B'$ ap $A'$. Tās $m$ vērtības, ar kurām $R_n$ ir maksims vai minims, dabūjam pielīdzinot nullei izteiksmes (8) labās puses atvasināto attiecībā uz $m$.

Izdarot teikto dabūjam:

$$\begin{aligned}[(1 + q^2)\, m + pq]\,(tm^2 + 2sm + r) - \\ - (tm + s)\,[(1 + q^2)\, m^2 + 2pqm + (1 + p^2)] = 0.\end{aligned} \tag{9}$$

Sakārtojot dabūjam:

$$m^2[s(1 + q^2) - pqt] + m[r(1 + q^2) - t(1 + p^2)] + pqr - s(1 + p^2) = 0 \tag{10}$$

Šim, attiecībā uz $m$, kvadratiskam nolīdzinājumam, ir divas realas saknes $m_1$ un $m_2$, kas ir galveno virzienu projekciju virziena koeficienti ($x$, $y$ plāknē).

Galvenie liekuma radiusi.

Apzīmējam

$$\frac{R_n}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = S \tag{11}$$

$R_n$ ir ekstrema vērtība, ja $S$ ir tāda. Ievērojot (8) un (11) dabūjam:

$$S = \frac{(1+q)^2 m^2 + 2pqm + 1 + p^2}{tm^2 + 2sm + r} \tag{12}$$

Dabūsim $S$ ekstremās vērtības, kad $m$ mainas no $-\infty$ līdz $+\infty$. No (12) redzams, ka katrai $S$ vērtībai atbilst divas $m$ vērtības. Lai kāda $S$ vērtība būtu ekstrema, vajadzīgs un pietiekams, lai atbilsošās $m$ vērtības būtu vienādas. No (12) dabūjam:

$$m^2[(1+q^2)-tS] + 2m[pq - sS] + (1+p^2) - rS = 0 \tag{13}$$

Šim nolīdzinājumam ir vienādas saknes $m_1 = m_2$, ja:

$$(pq - sS)^2 - [(1+q^2) - tS][(1+p^2) - rS] = 0 \tag{14}$$

Sakārtojot dabūjam

$$S^2(rt - s^2) - S[(1+p^2)t + (1+q^2)r - 2pqs] + 1 + p^2 + q^2 = 0 \tag{15}$$

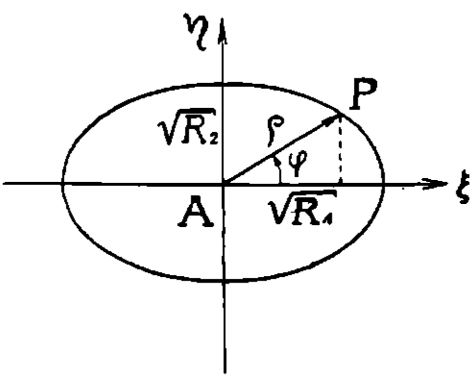
Šim nolīdzinājumam ir divas saknes $S_1$ un $S_2$ no kurām viena ir $S$ maksims un otra minims.

Ievērojot (11) dabūjam:

$$\begin{aligned} R_1 &= \sqrt{1+p^2+q^2}\,.\,S_1 \\ R_2 &= \sqrt{1+p_2+q^2}\,.\,S_2 \end{aligned} \tag{16}$$

Šīs izteiksmes dod galvenos liekuma radiusus. Virsmas punktā $A$ veidotās izteiksmes

$$\frac{1}{R_1 R_2} \text{ un } \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$




Zīm. 132.

sauc, pirmo, par virsmas totalo un otro, par virsmas vidējo liekumu punktā $A$.

**115. Dipena (Dupin) indikatrica.** Virsmas punktā $A$ velkam pieskaru plākni. Šo plākni pieņemam par $\xi$, $\eta$ plākni ar koordinatu sākumu punktā $A$ (zīm. 132). Koordinatu asis $\xi$ un $\eta$ liekam liekuma galvenos virzienos.

1) Ja galvenie liekuma radiusi $R_1$ un $R_2$ ir ar vienlīdzīgām zīmēm, tad veidojam elipsi ar pusasīm $\sqrt{R_1}$ un $\sqrt{R_2}$, kuras nolīdzinājums tad ir:

$$\frac{\xi^2}{R_1} + \frac{\eta^2}{R_2} = 1. \qquad (R_1 > R_2)$$

Elipses punkta $P$ koordinatas tad ir:

$$\xi = \rho \cos\varphi; \quad \eta = \rho \sin\varphi.$$

Ievietojot šīs vērtības elipses nolīdzinājumā dabūjam

$$\frac{\rho^2 \cos^2\varphi}{R_1} + \frac{\rho \sin^2\varphi}{R_2} = 1$$

un dalot ar $\rho^2$ dabūjam:

$$\frac{\cos^2\varphi}{R_1} + \frac{\sin^2\varphi}{R_2} = \frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{R}.$$

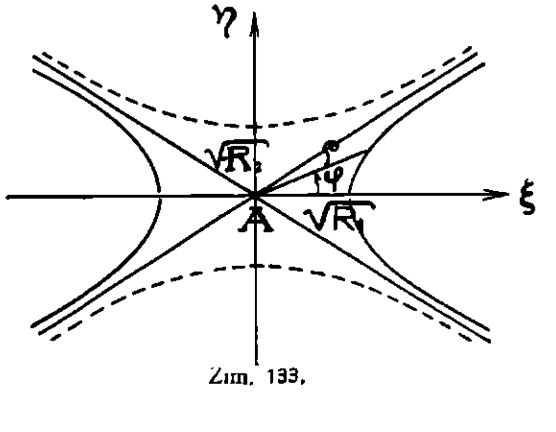
Tā tad: $R = \rho^2$.

Elipses pusdiametra kvadrats dod liekuma radiusu tam normalšķēlumam, kas iet caur šo pusdiametru un virsmas normali punktā $A$.

2) Ja $R_1$ un $R_2$ ir ar pretējām zīmēm, piemēram, $R_1 > 0$ un $R_2 < 0$; tad veidojam pieskaru plāknē punktā $A$, kā centru piekārtotas hiperbolas ar asīm galvenos virzienos. Šo hiperbolu pusasīm, ņemam $\sqrt{R_1}$ un $\sqrt{-R_2}$. Minēto hiperbolu nolīdzinājumi tad ir:

$$\frac{\xi^2}{(\sqrt{R_1})^2} - \frac{\eta^2}{(\sqrt{-R_1})^2} = 1 \qquad (\alpha)$$

$$-\frac{\xi^2}{(\sqrt{R_1})^2} + \frac{\eta^2}{(\sqrt{-R_2})^2} = 1. \qquad (\beta)$$



Zīm. 133.

Ievedot hiperbolu nolīdzinājumos

$$\xi = \rho \cos\varphi$$

un

$$\eta = \rho \sin\varphi,$$

dabūjam no $(\alpha)$

$$\frac{\cos^2\varphi}{R_1} + \frac{\sin^2\varphi}{R_2} = \frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{R}$$

un no (β)

$$\frac{\cos^2\varphi}{R_1} + \frac{\sin^2\varphi}{R_2} = -\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{R}.$$

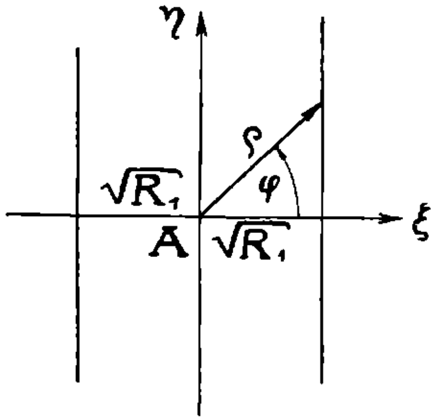
Pirmā gadijumā $R = \rho^2$ un otrā $R = -\rho^2$. Asimptotām atbilst normalšķēlumi ar bezgalīgi lielu liekuma radiusu.

3. Ja viens galvenais liekuma radius, piemēram $R_2 = \infty$, tad: Eilera formula dod:

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\varphi}{R_1}.$$

Konstruejam punktā $A$ zīm. 134.) pieskaru plāknē taisnu pāri

$$1 = \frac{\xi^2}{R_1}; \quad (\xi = \rho\cos\varphi) \text{ (zīm. 134).}$$



Zīm. 134.

Še $\xi$ ase ir galvenā šķēluma pieskare, ka liekuma radius ir $R_1$. Tad

$$\frac{\rho^2\cos^2\varphi}{R_1} = 1; \quad \frac{\cos^2\varphi}{R_1} = \frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{R} \text{ un } R = \rho^2.$$

Apskatītos gadijumos veidotās līknes: elipsi, piekārtotās hiperbolas un taišņu pāri, sauc par Dipena indikatricām.

**116. Atsevišķas līknes uz likām virsmām.** 1. Līmeņa līnijas un krituma līnijas.

Ja šķeļam virsmu

$$z = f(x, y)$$

ar plākai $z = c$, pieņemot, ka $xy$ plākne horizontala, tad dabūjam līmeņa līniju. Līmeņa līnijas, katram punktam pieder konstants $z$, tādēļ:

$$dz = p\,dx + q\,dy = 0$$

un

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{p}{q}.$$

ir līmeņa līniju diferencialnolīdzinājums.

Līknes uz dotās virsmas, kas $\perp$ pret līmeņa līnijām, sauc par **krituma līnijām**. Tā kā krituma līnijas $xy$ projekcija ir $\perp$ pret līmeņa līnijas projekciju, tad krituma līnijas projekcija ir dota ar nolīdzinājumu:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{q}{p}.$$

2 Ģeodetiskas līnijas.

**Ģeodetiska līnija** uz virsmas ir tāda līkne, kuras galvenā normale katrā līknes punktā sakrīt ar virsmas normali šajā punktā.

Apzīmējam:

virsmas normales virziena koeficientus dotā punktā ar $\lambda, \mu, \nu$.
un līknes galvenās normales virziena „ „ „ „ $\alpha_2\ \beta_2\ \gamma_2$.

Ģeodetiskas līnijas galvenā normale katrā līknes punktā $\parallel$ virsmas normalei attiecīgā punktā, tādēļ

$$\frac{\lambda}{\alpha_2} = \frac{\mu}{\beta_2} = \frac{\nu}{\gamma_2}.$$

Tā kā

$$\lambda : \mu : \nu = -p : -q : 1 \quad \text{un} \quad \alpha_2 : \beta_2 : \gamma_2 = \frac{d^2x}{ds^2} : \frac{d^2y}{ds^2} : \frac{d^2z}{ds^2},$$

tad dabūjam sekojošo sakaru:

$$\frac{-p}{\frac{d^2x}{ds^2}} = \frac{-q}{\frac{d^2y}{ds^2}} = \frac{1}{\frac{d^2z}{ds^2}}.$$

**117. Apliecošās virsmas.** Pieņemam ka nolīdzinājumā

$$f(x, y, z, u) = 0 \tag{1}$$

$f(x, y, z, u)$ ir vienvērtīga, nepārtraukta funkcija no mainīgiem $x, y, z, u$. Ar mainīga $u$ nolīdzinājums (1) dod virsmu saimi.

Nolīdzinājumi

$$\left.\begin{aligned} f(x, y, z, u) &= 0 \\ f(x, y, z, u+h) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

dod līkni, caur kuru iet arī virsma:

$$f(x, y, z, u+h) - f(x, y, z, u) = 0. \tag{3}$$

Lai dabūtu līkni (2), varam tādēļ virsmas

$$f(x, y, z, u + h) = 0$$

vietā ievest virsmu (3).

Izteiksmei (3) pielietojot Lagranža teoremu dabūjam:

$$f(x, y, z, u + h) - f(x, y, z) \doteq hf'_u(x, y, z, u + \theta h) = 0,$$

tā tad, līkni (2) dabūjam ar nolīdzinājumiem:

$$\left.\begin{array}{l} f(x, y, z, u) = 0 \\ f'_u(x, y, z, u + \theta h) = 0 \end{array}\right\} \qquad (2^a)$$

Ja $h \to 0$, tad dabūjam:

$$\left.\begin{array}{l} f(x, y, z, u) = 0 \\ f'_u(x, y, z, u) = 0 \end{array}\right\} \qquad (2^b)$$

Šinī līknē krustojas divas saimes (1) virsmas, kas ar nepārtrauktu mainīgu $u$ ir bezgalīgi tuvas. Nolīdzinājumi ($2^b$) ar mainīgu $u$ dod līkņu saimi, ko kopība veido virsmu, virsmu saimes (1) apliecošo virsmu. Apliecošās virsmas nolīdzinājumu parastā veidā dabūjam izslēdzot $u$ starp nolīdzinājumiem ($2^b$). Līknes ($2^b$) sauc par robežlīknēm vai arī virsmu saimes (1) raksturojošām līknēm.

Piemērs.

$$x^2 + y^2 + (z - a)^2 - r^2 = 0. \qquad (1)$$

Še $a$ mainīgs parametrs. Dabūt dotās virsmu saimes apliecošās virsmas nolīdzinājumu. Tā kā

$$f'_a = -2(z - a),$$

tad kopēji jāapskata

$$\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 + (z - a)^2 - r^2 = 0 \\ (z - a) = 0 \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Šie divi nolīdzinājumi dod saimes (1) raksturojošās līknes. Izslēdzot starp šiem nolīdzinājumiem $a$ dabūjam:

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0.$$

Šī virsma ir meklētā apliecošā virsma. Tā ir pret $xy$ plākni $\perp$ cilindrs ar radiusu $r$.

Apliektās virsmas ir lodes, ar radiusu $r$, kuru centrs atrodas uz $z$ ass.

Teorema.

Apliecošā virsma pieskaras katrai apliektai virsmai visos raksturojošās līknes punktos.

Apliecošās virsmas nolīdzinājumu dabūjam, izslēdzot $u$ starp nolīdzinājumiem

$$f(x, y, z, u) = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial f(x, y, z, u)}{\partial u} = 0. \tag{2}$$

Parametra izslēgšanu varam izdarīt šādi: no (2) dabūjam

$$u = \varphi(x, y, z). \tag{3}$$

Šo $u$ vērtību, ieliekot nolīdzinājumā (1), dabūjam apliecošās virsmas nolīdzinājumu. Ja punkts $(x, y, z)$ atrodas uz raksturojošās līknes, tad apliektās virsmas pieskaru plākne šajā punktā ir:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(\eta - y) + \frac{\partial f}{\partial z}(\zeta - z) = 0. \tag{4}$$

Apliecošas virsmas nolīdzinājums ir arī (1), ja tajā ieved $u$ vērtību no (3).

Pieskaru plāknes nolīdzinājums šai virsmai raksturojošas līknes punktā $x, y, z$ ir:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(\xi - x) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(\eta - y) + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)(\zeta - z) = 0. \tag{5}$$

Še

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

apzīmē funkcijas $f$ atvasinātās, kad $u$ vietā ievesta vērtība no (3) Bet tad:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}; \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}; \quad \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}.$$

Tā kā, saskaņā ar (2), $\frac{\partial f}{\partial u} = 0$, tad

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial f}{\partial x};\quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial f}{\partial y};\quad \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)=\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Tā tad nolīdzinājums (5) dabū veidu

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(\eta - y) + \frac{\partial f}{\partial z}(\zeta - z). \tag{5$^a$}$$

Nolīdzinājumi (4) un (5$^a$) rāda, ka raksturojošās līknes punktā $(x, y, z)$, apliektai un apliecošai virsmai ir kopēja pieskaru plākne. No augšējā redzams, ka apliektā un apliecošā virsma pieskaras gar raksturojošo līkni.

**118. Plāknē izplātamas virsmas.** Virsmu, kas izplātama plāknē dabūjam kā apliecošo virsmu, ja apliekto virsmu saime ir plāknes.

Ja plāknes nolīdzinājumā

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

pieņemam, ka $A$, $B$, $C$, $D$ ir nepārtrauktas funkcijas no mainīgā parametra $u$, tad mainot $u$ dabūjam plākņu saimi, kuru apliecošā virsma ir plāknē izplātama virsma. Nolīdzinājumi

$$\left.\begin{array}{r} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A' + B'y + C'z + D' = 0 \end{array}\right\} \qquad \left(\text{Še } A' = \frac{dA}{du} \text{ u. t. t.}\right)$$

dod raksturojošo līkni. Tā kā šie nolīdzinājumi ir pirmās kāpes attiecībā uz $x$, $y$, $z$, tad raksturojošā līkne ir taisne. Gar šo taisni apliektā virsma — plākne, pieskaras apliecošai virsmai.

Izslēdzot starp abiem nolīdzinājumiem $u$, dabūjam apliecošas, plāknē izplātamas virsmas nolīdzinājumu.

Piemērs.

Dabūt apliecošo virsmu, virsmu saimei:

$$x + uy + u^2 z + a = 0$$

Šī virsma ir plākne, tādēļ apliecošā virsma būs izplātama plāknē virsma. Kā redzams, nolīdzinājums ir apmierināts ar visām $u$ vērtībām, ja:

$$x = -a;\quad y = 0;\quad z = 0.$$

Tā tad, visas saimē atrodošās plāknes iet caur punktu $P = -a|0|0$ un apliecošā virsma tā tad ir kons

Tā kā šinī gadijumā

$$\frac{\partial f}{\partial u} = y + 2uz,$$

tad izslēdzot $u$ starp nolīdzinājumiem:

$$\left.\begin{aligned} x + uy + u^2z + a &= 0 \\ y + 2uz &= 0 \end{aligned}\right\}$$

dabūjam apliecošās virsmas nolīdzinājumu

$$4xz - y^2 + 4az = 0.$$

Šī virsma ir otrās kārtas kons ar virsotni punktā $P = -a|0|0$

P l ā k n ē i z p l ā t a m u v i r s m u d i f e r e n c i a l n o l ī d z i n ā j u m i.

Plākni

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

kur $A$, $B$, $C$, $D$ ir funkcijas no viena parametra $u$, var uzskatīt kā pieskaru plākni plāknē izplātamai virsmai kas dota ar nolīdzinājumiem

$$\begin{aligned} Ax + By + Cz + D &= 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' &= 0. \end{aligned}$$

Virsmas $z = f(x, y)$ pieskaru plāknes nolīdzinājums ir:

$$p(\xi - x) + q(\eta - y) - (\zeta - z) = 0$$

vai arī

$$p\xi + q\eta - \zeta + z - px - qy = 0.$$

Ja virsma ir izplātama plāknē, tad kā redzējām, šīs plāknes visiem koeficientiem

$$p, q, z, -px, -qy,$$

jābūt funkcijām tikai no viena parametra $u$, bet tad $p$ un $q$ katrs ir funkcija no $u$, tādēļ tie ir savstarpēji atkarīgi, t. i.

$$q = \varphi(p).$$

Šis nolīdzinājums ir plāknē izplatamu virsmu pirmās kārtas diferencialnolīdzinājums.

Diferēncējot šo nolīdzinājumu, attiecībā uz $x$, dabūjam:

$$\frac{\partial q}{\partial x} = s = \varphi'(p)\frac{\partial p}{\partial x} = \varphi'(p)\, r$$

un

$$s = \varphi'(p)\, r. \tag{l}$$

Diferencējot, attiecībā uz $y$, dabūjam:

$$\frac{\partial q}{\partial y} = t = \varphi'(p)\frac{\partial p}{\partial y}$$

un

$$t = \varphi'(p)\, s. \tag{m}$$

Nodalot nolīdzinājumus (l) un (m) dabūjam

$$\frac{s}{t} = \frac{r}{s}$$

vai arī

$$rt - s^2 = 0$$

Šis nolīdzinājums ir plāknē izplatamo virsmu otrās kārtas diferencial-nolīdzinājums.

Otrā daļa.

# Integralrēķini.

Pirmā nodaļa.

## Nenoteiktais integrals.

**1. Integrala jēdziens.** Diferencialrēķinu pamata uzdevums ir atrast intervalā $(\alpha, \beta)$ dotas vienvērtīgas, nepārtrauktas funkcijas $f(x)$ atvasināto funkciju $f'(x)$ t. i. robežvērtību:

$$\lim_{h \to \pm 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h};$$

vai arī kā atrast dotas funkcijas $f(x)$ diferencialu $f'(x)\,dx$.

Integralrēķinu pamata uzdevums ir atrast funkciju, kuras diferencials dots. Tā tad, ja

$$d\,F(x) = F'(x)\,dx = f(x)\,dx,$$

un dots diferencials $f(x)\,dx$, atrast funkciju $F(x)$.

Meklēto funkciju $F(x)$, sauc par funkcijas $f(x)$ integralfunkciju vai arī par diferenciala $f(x)\,dx$ integralu. Funkciju $f(x)$ pieņemam kā vienvērtīgu un nepārtrauktu kādā dotā intervalā.

Operaciju, ko izdarot atrodam diferenciala $f(x)\,dx$ integralu, sauc par integrēšanu un to apzīmē ar integrēšanas zīmi $\int$ Šo zīmi raksta priekš dotā diferenciala; tā tad ja:

$$f(x)\,dx = d\,F(x),$$

tad:

$$\int f(x)\,dx = F(x).$$

Reizinājumu $f(x)\,dx$ sauc par zemintegrala izteiksmi un $f(x)$ par zemintegrala funkciju. Diferencials $dx$ norāda, ka $x$ ir integrēšanas mainīgais.

Piemēram,

$$\text{ja} \quad F(x) = x^3, \quad \text{tad} \quad d\,F(x) = f(x)\,dx = 3x^2dx,$$

un

$$\int 3x^2dx = x^3.$$

No augšējā redzams, ka diferencēšana un integrēšana ir pretējas operacijas.

**2. Integrēšanas pastāvīgais lielums. Nenoteiktais integrals.** Kā redzējām, ja

$$d\,F(x) = f(x)\,dx,$$

tad

$$\int f(x)\,dx = F(x),$$

bet tā kā arī

$$d\,[F(x) + C] = f(x)\,dx,$$

tad vispār

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Še $C$ ir pēc patikas pastāvīgs nenoteikts lielums, neatkarīgs no $x$. $C$ sauc par integrēšanas pastāvīgo lielumu.

Redzams, ka ja izteiksmei $f(x)\,dx$ ir integrals, tad tai ir bezgalīgi daudz integralu, kas atšķiras tikai ar pastāvīga lieluma $C$ vērtībām.

Tā kā lielums $C$ ir nenoteikts, tad izteiksmi

$$F(x) + C,$$

sauc par izteiksmes $f(x)\,dx$ nenoteikto integralu.

Izteiksme $F(x) + C$ aptver visas funkcijas, kuru diferencials ir $f(x)\,dx$, jo diferencialrēķinos pierādīts, ka divas funkcijas, kuru diferenciali un tā tad arī atvasinātās ir vienlīdzīgi, atšķiras ar pastāvīgu lielumu.

Tā kā

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad \text{un} \quad d\,F(x) = f(x)\,dx$$

tad:

$$d\int (x)\,dx = d\,[F(x) + C] = d\,F(x) = f(x)\,dx.$$

Šī izteiksme rāda, ka diferenciala zīme atceļ integrala zīmi.

Tā kā:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad \text{un} \quad d\,F(x) = f(x)\,dx,$$

tad $f(x)\,dx$ vietā ievedot $d\,F(x)$ dabūjam:

$$\int d\,F(x) = F(x) + C.$$

Redzams, ka integrala zīme atceļ diferenciala zīmi, bet pie $F(x)$ jāpieskaita pēc patikas pastāvīgs lielums $C$.

Nenoteiktās integrēšanas operacijas pareizu atrisināšanu pārbauda, veidojot atrastās funkcijas diferencialu $d\,F(x)$. Šim diferencialam jānolīdzinājas zemintegrala izteiksmei, t. i.

$$d\,F(x) = f(x)\,dx.$$

Kā vēlāk redzēsim, integrēšanas pastāvīgā $C$ vērtību var noteikt, ja zinami kādas problemas atsevišķi noteikumi — **sākuma noteikumi**.

**3. Integrēšanas pamata formulas.** Integrēšanas pamata formulu sastādīšanai nav tāda vispārēja paņēmiena kā diferencialrēķinos atvasinātās atrašanai. Lai dabūtu integralrēķinu pamata formulas, izlietojam norādijumu, ka **integrēšanas operacija ir pretēja diferencēšanai, tādēļ integrēšanas formulas dabūjam apgriežot diferencēšanas formulas.** Katras diferencēšanas rezultats dod iespēju dabūt integralrēķinu formulu.

Pieņemam, ka $u$ ir funkcija no $x$.

1) Tā kā $d\left(\frac{u^{m+1}}{m+1}\right) = u^m \quad du,$

tad saskaņā ar nenoteiktā integrala jēdzienu dabūjam

$$\int u^m\,du = \frac{u^{m+1}}{m+1} + C \qquad (m+1 \neq 0)$$

2) $d\left(\frac{a^u}{la}\right) = a^u\,du.$

$$\int a^u\,du = \frac{a^u}{la} + C.$$

3) $d(e^u) = e^u\,du.$

$$\int e^u\,du = e^u + C.$$

4) $d\,(lu) = \frac{du}{u}.$

$$\int \frac{du}{u} = lu + C.$$

Liekot $C = lC_1$ dabūjam

$$\int \frac{du}{u} = lu + lC_1 = l(C_1 u.)$$

Augšējie piemēri rāda, kā no diferencialrēķinu formulām dabūjam integralrēķinu formulas. Šo formulu pareizību parāda diferencējot integralformulu abas puses.

Integrēšanas operacijās bieži pielieto sekojošas trīs izteiksmes.

1) $$\int c\, udx = c \int udx. \qquad (c \text{ konst, } u = \varphi(x))$$

Pārbaudam šo formulu. Diferencējot nolīdzinājuma (1) abas puses dabūjam:

$$d\int cudx = cudx \quad \text{un} \quad d\left(c\int u\, dx\right) = cudx.$$

Kā redzams formulas (1) abām pusēm ir vienlīdzīdi diferenciali, tādēļ tās var atšķirties tikai ar pastāvīgu lielumu. Formula (1) izteic:

J a z e m i n t e g r a l a a t r o d a s p a s t ā v ī g s f a k t o r s, t a d t o v a r a m i z n e s t i n t e g r a l a p r i e k š ā u n j a i n t e g r a l s r e i z i n ā t s a r p a s t ā v ī g u f a k t o r u, t a d t o v a r a m i e v e s t k ā f a k t o r u z e m i n t e g r a l a.

2) $$\int (udx + vdx + wdx) = \int udx + \int vdx + \int wdx$$

(še $u$, $v$, $w$ funkcijas no $x$).

Šīs izteiksmes pareizību pierādam, kā augšā norādīts, ar diferencēšanu. Formula (2) izteic:

D i f e r e n c i a l u a l g e b r i s k a s s u m m a s i n t e g r a l s n o l ī d z i n a s a l g e b r i s k a i s u m m a i, k u r a s s u m m a n d i i r d o t o d i f e r e n c i a l u i n t e g r a l i.

3) $$\int udv = u \quad v - \int vdu \tag{3}$$

(še $u$, $v$ funkcijas no $x$).

Izteiksme 3 izteic paņēmienu, ko sauc par p a r c i a l u i n t e g r ē š a n u. Diferencējot tzteiksmes abas puses dabūjam:

$$d\int udv = d(u \quad v) - d\int vdu.$$

Tā kā $d$ zīme atceļ $\int$ zīmi, dabūjam:

$$udv = d(uv) - vdu.$$

Si izteiksme izriet no diferencialrēķinu formulas

$$d(uv) = udv + vdu.$$

Pielietojot augšējos norādījumus sastādam sekojošo tabulu.

**Pamata integralu tabula.**

1) $\int c du = c \int du.$ ($c$ pastāvīgs).

2) $\int (u + v)\, dx = \int u\, dx + \int v dx.$

3) $\int du = u + C.$

4) $\int u^m du = \frac{u^{m+1}}{m+1} + C.$ $(m + 1 \neq 0).$

5) $\int \frac{du}{u} = lu + C = l\,(C_1 u).$

6) $\int a^u du = \frac{a^u}{la} + C.$

7) $\int e^u du = e^u + C.$

8) $\int \cos u\, du = \sin u + C.$

9) $\int \sin u\, du = - \cos u + C.$

10) $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C.$

11) $\int \frac{du}{\sin^2 u} = - \operatorname{ctg} u + C.$

12) $\int \frac{du}{1 + u^2} = \operatorname{arc\,tg} u + C = \operatorname{arc\,ctg} u + C_1.$

13) $\int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \arcsin u + C = - \arccos u + C_1.$

14) $\int \operatorname{Cos} u\, du = \operatorname{Sin} u + C.$

15) $\int \operatorname{Sin} u\, du = \operatorname{Cos} u + C.$

16) $\int \frac{du}{\operatorname{Cos}^2 u} = \operatorname{Tg} u + C.$

17) $\int \frac{du}{\mathrm{Sin}^2 u} = -\mathrm{Ctg}\, u + C.$

18) $\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \mathrm{Ar\ Sin}\, u + C = l\,(u + \sqrt{1+u^2}) + C.$

19) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = \mathrm{Ar\ Cos}\, u + C = l\,(u \pm \sqrt{u^2-1}) + C.$

20) $\int \frac{du}{1-u^2} = \mathrm{Ar\ Tg}\, u + C = l\sqrt{\frac{1+u}{1-u}} + C. \qquad (u < 1)$

21) $\int \frac{du}{1-u^2} = \mathrm{Ar\ Ctg}\, u + C_1 = l\sqrt{\frac{u+1}{u-1}} + C_1. \qquad (u > 1)$

22) $\int u\,dv = uv - \int v\,du.$

Augšējās formulās ar Sin, Cos, Tg, Cotg apzīmētas hiperbolas un ar Ar, area funkcijas.

4. **Integrēšanas pamata paņēmieni.** Ja dots diferencials $f(x)\,dx$, tad integrēšanā arvienu jāatbild uz jautājumu: kāda ir tā funkcija, ko diferencējot dabūjam doto diferencialu. Nav vispārēja paņēmiena, kas varētu dot atbildi šim jautājumam; katrs gadijums jāapskata atsevišķi. Lai dabūtu dotā diferenciala integralu, salīdzinam to ar augšējās tabulas formulām. Ja izrādas, ka tam ir tāds pats veids kā kādai tabulas formulai, tad integrals dabūts. Ja meklētais integrals nav tāpatīgs ne ar vienu tabulas formulu, tad zemintegrala izieiksmi mēģinam ar pārveidošanu pievest kādai tabulas formulai. Tas dažos gadijumos nav viegli panākams, tādēļ vajadzīga pamatīga ievingrināšanās pārveidošanas paņēmienos.

Integrēšanā lieto sekojošus četrus pamata paņēmienus.

a) Tieša integrēšana.

Šis paņēmiens pastav tiešā pamata formulas pielietošanā.

Piemērs.

Lai dabūtu

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-(lx)^2}},$$

pārveidojam zemintegrala izteiksmi:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-(lx)^2}} = \int \frac{\frac{dx}{x}}{\sqrt{1-(lx)^2}}.$$

Ja pārveidotā izteiksmē $(lx)$ uzskatam par argumentu, tad redzams ka pārveidotais integrals tāpatīgs ar pamata formulu (13).

Tādēļ

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-(lx)^2}} = \text{arc sin}\,(lx) + C.$$

Piemērs.

Dabūt

$$\int \frac{\sin x\, dx}{a + b \cos x}.$$

Ievērojot, ka $d\,(a + b \cos x) = - b \sin x\, dx$, un ka reizinot un dalot, skaitītāju ar $- b$ integrals nemainās, dabūjam

$$\int \frac{- b \sin x\, dx}{- b\,(a + b \cos x)} = -\frac{1}{b}\int \frac{- b \sin x\, dx}{a + b \cos x},$$

bet tad zemintegrala daļas skaitītāja vietā varam ievest $d\,(a+b \cos x)$, tad

$$\int \frac{\sin x\, dx}{a + b \cos x} = -\frac{1}{b}\int \frac{d\,(a + b \cos x)}{a + b \cos x}.$$

Kā redzams, zemintegrala daļas skaitītājs ir saucēja diferencials, tādēļ varam pielietot pamata formulu (5) un dabūjam

$$\int \frac{\sin x\, dx}{a + b \cos x} = -\frac{1}{b}\, l\,(a + b \cos x) + C.$$

Piemērs.

Dabūt

$$\int \frac{x\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Ja skaitītāju reizinam ar $- 2$, tad

$$- 2\, x\, dx = d\,(a^2 - x);$$

ievērojot šo izteiksmi, pārveidojam zemintegrala izteiksmi, reizinot un dalot ar $- 2$, tad

$$\int \frac{x\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{- 2x\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{1}{2}\int (a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}\, d\,(a^2 - x^2).$$

Uzskatot $(a^2 - x^2)$ kā argumentu, redzams, ka pēdējam integratam ir pamata integrala (4), veids, tādēļ,

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{2}\int (a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,d(a^2-x^2) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C =$$

$$= -\sqrt{a^2-x^2} + C.$$

Tāpat dabūjam

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \sqrt{a^2+x^2} + C.$$

Piemērs.

Dabūt

$$\int \operatorname{ctg} x\,dx.$$

Pārveidojot zemintegrala funkciju dabūjam:

$$\int \operatorname{ctg} x\,dx = \int \frac{\cos x\,dx}{\sin x}.$$

Tā kā skaitītājā atrodas saucēja diferencials, tad integralu dabūjam saskaņā ar formulu (5)

$$\int \operatorname{ctg} x\,dx = \int \frac{\cos x\,dx}{\sin x} = l \sin x + C.$$

Tāpat dabūjam:

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = -l\cos x + C.$$

b) Integrēšana ar sadalīšanas paņēmienu.

Piemērs.

Saskaņā ar sadalīšanas teoremu:

$$\int (Ax^n + Bx^{n-1} + \ldots + Mx + N)\,dx = \int Ax^n\,dx + \int Bx^{n-1}dx +$$

$$+ \int Mx\,dx + \int N\,dx + C =$$

$$= \frac{Ax^{n+1}}{n+1} + \frac{Bx^n}{n} + \ldots + \frac{Mx^2}{2} + Nx + C.$$

Piemērs.

Dabūt

$$\int \frac{x^3}{1+x^2}\,dx.$$

Zemintegrala funkcija ir neīsta algebriska daļu funkcija, tādēļ sadalam še funkciju, iedalot saucēju skaitītājā:

$$x^3 : (x^2 + 1) = x - \frac{x}{1 + x^2}.$$

Tad

$$\int \frac{x^3}{1 + x^2}\,dx = \int \left(x - \frac{x}{1 + x^2}\right) dx = \int x\,dx - \int \frac{x\,dx}{1 + x^2} =$$
$$= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\,l\,(1 + x^2) + C.$$

P i e m ē r s. Dabūt

$$\int \cos^2 x\,dx.$$

Pārveidojot zemintegrala funkciju dabūjam:

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Ievedot šo izteiksmi zemintegrala dabūjam:

$$\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\,x + \frac{1}{2\,.\,2}\int \cos 2x\,d(2x) = \frac{1}{2}\,x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

P i e m ē r s. Dabūt

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}.$$

Ievedam skaitītājā trigonometrisko vienību

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Tad

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\,dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\right) dx =$$
$$= \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$$

P i e m ē r s. Dabūt

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2}.$$

Zemintegrala funkciju $\frac{1}{x^2 - a^2}$ sadalam vienkāršās daļās — parcial-daļās — ar nenoteiktu koeficientu paņēmienu

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{A}{x - a} + \frac{B}{x + a} = \frac{A(x + a) + B(x - a)}{x^2 - a^2}$$

No augšējā secinam

$$1 = A(x + a) + B(x - a).$$

Salīdzinot koeficientus augšējās izteiksmes labajā un kreisajā pusē redzam: labajā pusē koeficients pie $x$ ir $(A + B)$, bet tā kā kreisajā pusē $x$ nav, t. i. koeficients pie $x$ ir 0, tad

$$A + B = 0.$$

Absolutais loceklis labajā pusē ir $(A - B)a$ un kreisajā pusē tas ir 1, tā tad

$$(A - B)a = 1.$$

No šiem diviem nolīdzinājumiem dabūjam:

$$A = \frac{1}{2a}$$

$$B = -\frac{1}{2a}$$

Tā tad

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{x - a} - \frac{1}{x + a}\right]$$

un

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\int\left[\frac{1}{x - a} - \frac{1}{x + a}\right] dx = \frac{1}{2a}\left(\int \frac{dx}{x - a} - \int \frac{dx}{x + a}\right) =$$

$$= \frac{1}{2a}[l(x - a) - l(x + a)].$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} l \frac{x - a}{x + a} + C.$$

c) Integrēšana ar ievietošanas paņēmienu.

Lai doto integralu pievestu kādai pamata formulai, noteicam ar nolīdzinājumu, sakaru starp integrala mainīgo un kādu jaunu mainīgo. Ar šī sakara nolīdzinājuma palīdzību izslēdzam zemintegrala izteiksmē agrāko mainīgo un tā diferencialu. Tādā kārtā pārveidotu integralu nointegrē un dabūtā izteiksmē ieved atkal agrāko mainīgo.

Piemērs. Dabūt

$$\int \frac{x^2\,dx}{a - bx^3}.$$

Liekam

$$a - bx^3 = z. \tag{$\alpha$}$$

Diferencējot dabūjam

$$-3bx^2\,dx = dz$$

$$x^2\,dx = -\frac{dz}{3b}. \tag{$\beta$}$$

Ievedot ($\alpha$) un ($\beta$) zemintegrala izteiksmē, dabūjam:

$$\int \frac{x^2\,dx}{a - bx^3} = -\frac{1}{3b}\int \frac{dz}{z} = -\frac{1}{3b} lz + C.$$

Ievedot labajā pusē $z$ vērtību no ($\alpha$) dabūjam:

$$\int \frac{x^2\,dx}{a - bx^3} = -\frac{1}{3b} l(a - bx^3) + C.$$

Piemērs. Dabūt

$$\int \frac{dx}{(x - \alpha)^2 + \beta^2}.$$

Liekam

$$x - \alpha = z. \tag{$\alpha$}$$

$$dx = dz.$$

Ievedot šīs vērtības integralā dabūjam

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^2 + \beta^2} = \int \frac{dz}{z^2 + \beta^2} = \frac{1}{\beta^2}\int \frac{dz}{\left(\frac{z}{\beta}\right)^2 + 1} = \frac{1}{\beta}\int \frac{d\left(\frac{z}{\beta}\right)}{1 + \left(\frac{z}{\beta}\right)^2} = \frac{1}{\beta} \operatorname{arc\,tg} \frac{z}{\beta} + C.$$

Ievietojot $z$ vērtību no ($\alpha$) dabūjam:

$$\int \frac{dx}{(x - \alpha)^2 + \beta^2} = \frac{1}{\beta} \operatorname{arc\,tg} \frac{x - \alpha}{\beta} + C.$$

Piemērs. Dabūt

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a + b\,lx}}.$$

Liekam

$$\sqrt{a + b\,lx} = z, \tag{$\alpha$}$$

tad

$$a + b\, lx = z^2.$$

Diferencējot dabūjam

$$b\,\frac{dx}{x} = 2z\, dz,$$

un

$$\frac{dx}{x} = \frac{2z}{b}\, dz \tag{$\beta$}$$

Ievedot vērtības no ($\alpha$) un ($\beta$) zemintegrala izteiksmē dabūjam:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a + b\, lx}} = \frac{2}{b}\int \frac{z\, dz}{z} = \frac{2}{b}\int dz = \frac{2}{b}\, z + C.$$

Ievedot $z$ vērtību no ($\alpha$) dabūjam

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a + b\, lx}} = \frac{2}{b}\sqrt{a + b\, lx} + C.$$

Piemērs. Dabūt

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Liekam

$$x = a \sin \varphi, \tag{$\alpha$}$$

tad

$$dx = a \cos \varphi\, d\varphi,$$

un

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{a \cos \varphi\, d\varphi}{\sqrt{a^2 - a^2 \sin^2\varphi}} = \int \frac{a \cos \varphi\, d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\varphi}} = \int d\varphi = \varphi + C. \tag{$\beta$}$$

No ($\alpha$) dabūjam

$$\varphi = \arcsin \frac{x}{a}.$$

Ievedot šo vērtību izteiksmē ($\beta$) dabūjam

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

Piemērs. Dabūt

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

Liekam

$$\sqrt{a^2 + x^2} = z - x. \tag{$\alpha$}$$

Tad

$$a^2 + x^2 = z^2 - 2zx + x^2$$

un

$$x = \frac{z^2 - a^2}{2z}. \tag{β}$$

Ievērojot (β)

$$\sqrt{a^2 + x^2} = z - x = z - \frac{z^2 - a^2}{2z} = \frac{2z^2 - z^2 + a^2}{2z} = \frac{z^2 + a^2}{2z} \tag{γ}$$

Diferencējot (β) dabūjam

$$dx = \frac{2z \cdot 2z - (z^2 - a^2)\, 2}{4z^2}\, dz = \frac{2\,(z^2 + a^2)}{4z^2}\, dz. \tag{δ}$$

Ievietojot vērtības (γ) un (δ) zemintegrala izteiksmē dabūjam:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \int \frac{(z^2 + a^2)\, dz}{2z^2} \cdot \frac{2z}{z^2 + a^2} = \int \frac{dz}{z} = lz + C. \tag{ε}$$

No (α) dabūjam

$$z = x + \sqrt{a^2 + x^2}.$$

Ievietojot šo vērtību $z$ vietā izteiksmē (ε) dabūjam:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = l\,(x + \sqrt{a^2 + x^2}) + C.$$

Ar to pašu paņēmienu dabūjam arī

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - z^2}} = l\,(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + C.$$

d) Parciālā integrēšana, vai arī integrēšana pa daļām.

Še pielietojam agrāk dabūto formulu:

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du \tag{a}$$

$u$ un $v$ ir funkcijas no $x$. Formulas kreisās puses integrals dots integrēšanai. Zemintegrala izteiksmes reizinātāju $u$ sauc par funkcionalo un $dv$ par diferencialo reizinātāju.

Pielietojot parcialās integrēšanas formulu (a), izteiksmes labajā pusē dabūjam integralu, kas daudzos gadījumos ir vienkāršāks, kā kreisās puses integrals, reizēm pat tāda paša veida kā tas.

Ja zemintegrala funkcijā atrodas, kā reizinātājs transcendenta funkcija, kuras diferencials ir algebriska funkcija, tad šis reizinātājs jāapzīmē ar $u$, jo labās puses integralā atrodas $du$, kas dod algebrisku funkciju.

P i e m ē r s. Dabūt

$$\int \operatorname{arc\,tg} x \, dx.$$

Apzīmējam arc tg $x$ ar $u$ un $dx$ ar $dv$. Pielietojot formulu ($a$) dabūjam

$$\int \underbrace{\operatorname{arc\,tg} x}_{u} \, \underbrace{dx}_{dv} = \underbrace{\operatorname{arc\,tg} x}_{u} \quad \underbrace{x}_{v} - \int \underbrace{x}_{v} \, \underbrace{d \operatorname{arc\,tg} x}_{du} =$$

$$= x \quad \operatorname{arc\,tg} x - \int \quad \frac{dx}{1+x^2} = x \quad \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2} \, l\,(1+x^2) + C.$$

P i e m ē r s. Dabūt

$$\int l\,(1+x)\,dx.$$

$$\int l\,(1+x)\,dx = l\,(1+x) \quad x \quad - \int x \quad \frac{dx}{1+x}.$$

Izdalot saucēju skaitītājā, dabūjam

$$\frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}.$$

Ievedot šo izteiksmi zemintegrala, labajā pusē, dabūjam:

$$\int l\,(1+x)\,dx = x \, l\,(1+x) \quad - \int \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) dx =$$

$$= x \, l\,(1+x) - \int dx + \int \frac{dx}{1+x} = x\,l(1+x) - x + l(1+x) =$$

$$= (1+x)\,l\,(1+x) - x + C.$$

P i e m ē r s. Dabūt

$$\int \frac{x \, dx}{\cos^2 x}.$$

Ievērojot ka $\frac{dx}{\cos^2 x}$ ir $d\,\mathrm{tg}\,x$, pārveidojam augšējo integralu un pielietojot parcialās integrēšanas formulu dabūjam

$$\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x} = \int x \frac{dx}{\cos^2 x} = \int x\,d\,\mathrm{tg}\,x = x\,\mathrm{tg}\,x - \int \mathrm{tg}\,x\,dx =$$

$$= x\,\mathrm{tg}\,x - \int \frac{\sin x\,dx}{\cos x} = x\,\mathrm{tg}\,x \quad \int \frac{-(d\cos x)}{\cos x} = x\mathrm{tg}x + l\cos x + C.$$

P i e m ē r s. Dabūt

$$\int x \cos 3x\,dx.$$

$$\int x \cos 3x\,dx = \frac{1}{3}\int x \cos 3x\,d\,(3x) = \frac{1}{3}\int x\,d\sin 3x =$$

$$= \frac{1}{3}\left[x \sin 3x \quad \int \sin 3x\,dx\right] = \frac{1}{3}\left[x \sin 3x - \frac{1}{3}\int \sin 3x\,d\,(3x)\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left[x \sin 3x + \frac{1}{3}\cos 3x\right] + C.$$

P i e m ē r s. Dabūt

$$\int x^3 e^{-x}\,dx.$$

Še uzskatam $e^{-x}dx$ par diferencialo reizinātāju un pārvedam $e^{x}$ zem $d$ zīmes.

$$e^{-x}dx = d\,(-e^{-x}).$$

Tad

$$\int x^3 e^{-x}dx = \int x^3\,d\,(-e^{-x}) = x^3\,(-e^{-x}) \quad \int (-e^{-x})\,3x^2dx =$$

$$= -x^3 e^{-x} + 3\int x^2 e^{-x}\,dx. \qquad (\alpha)$$

$$\int x^2 e^{-x}\,dx = \int x^2\,d\,(-e^{-x}) = x^2\,(-e^{-x}) - \int (-e^{-x})\,2x\,dx =$$

$$= -x^2 e^{-x} + 2\int x e^{-x}\,dx. \qquad (\beta)$$

$$\int xe^{-x}dx = \int xd\,(-e^{-x})\,dx = x\,(-e^{-x}) - \int (e^{-x})\,dx = -xe^{-x} +$$

$$+ \int e^{-x}\,dx = -xe^{-x} - e^{x} \qquad (\gamma)$$

Ievērojot $(\alpha)$, $(\beta)$ un $(\gamma)$ dabūjam

$$\int x^3 e^{-x}\,dx = -x^3 e^{-x} + 3\left[-x^2 e^{-x} + 2\,(-x e^{-x} - e^{-x})\right] =$$

$$= -(x^3 + 3x^2 + 6x + 6)\,e^{-x} + C.$$

Piemērs. Dabūt

$$\int \sin^m x\,dx.$$

Še no $\sin^m x$ atdalam reizinātāju $\sin x$ un pārveidojam zemintegrala funkciju šādi:

$$\int \sin^m x\,dx = \int \sin^{m-1} x \quad \sin dx = - \int \sin^{m-1} x\, d\cos x =$$

$$= - \sin^{m-1} x \quad \cos x + \int \cos x \quad (m - 1)\sin^{m-2} x \cos x\,dx =$$

$$= - \sin^{m-1} x \cos x + (m - 1) \int \cos^2 x \sin^{m-2} x\,dx =$$

$$= - \sin^{m-1} x \cos x + (m - 1)\int (1 - \sin^2 x)\sin^{m-2} x\,dx =$$

$$= - \sin^{m-1} x \cos x + (m \quad 1) \int (\sin^{m-2} x - \sin^m x)\,dx =$$

$$= - \sin^{m-1} x \cos x + (m-1)\int \sin^{m-2} x\,dx - (m-1) \int \sin^m x\,dx.$$

Labajā pusē dabūjam divus integralus. Zem pirmā integrala $\sin x$ ir zemākā kāpē, kā kreisajā pusē, bet otrs integrals ir tāda pat veida, kā kreisās puses integrals. Beidzamo integralu pārnesam uz kreiso pusi, tad dabūjam:

$$(m-1)\int \sin^m x dx + \int \sin^m x dx = -\sin^{m-1} x \cos x + (m-1)\int \sin^{m-2} x\,dx$$

tad

$$\int \sin^m x\,dx = - \frac{\sin^{m-1} x \cos x}{m} + \frac{m-1}{m}\int \sin^{m-2} x\,dx. \qquad (\beta)$$

Pieņemot $m$ kā veselu un pozitivu skaitli, še dabūjam tā saukto r e d u k c i j a s f o r m u l u. Labās puses integralā $\sin x$ kāpe pazemināta par divām vienībām. Pielietojot šo formulu, atkārtoti, katrreiz pazeminam $\sin x$ kapi par divām vienībām. Ja $m$ nepāra skaitlis, tad nonākam uz integralu $\int \sin x\,dx$, ja $m$ pāra skaitlis tad uz integralu $\int dx$.

P i e m ē r s: Dabūt

$$\int \sin^5 x\,dx.$$

Še $m = 3$ Pielietojam formulu ($\beta$)

$$\int \sin^3 x\, dx = -\frac{\sin^2 x \cos x}{3} + \frac{3-2}{3}\int \sin x\, dx =$$

$$= -\frac{\sin^2 x \cos x}{3} - \frac{1}{3}\cos x + C.$$

**5. Dažādi piemēri.**

1) $$\int \sin^2 x\, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\, dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\int \cos 2x\, d(2x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

2) $$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\,.\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{d\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\,\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{\dfrac{d\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\dfrac{\sin\frac{x}{2}\,\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} =$$

$$= \int \frac{d\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}} = l\,\mathrm{tg}\frac{x}{2} + C.$$

3) $$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = -\int \frac{d\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = -l\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + C.$$

4) $$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x}\, dx = \int \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}\right) dx =$$

$$= \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx + \int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx = -l\cos x + l\sin x + C =$$

$$= l\frac{\sin x}{\cos x} + C = l\,\mathrm{tg}\, x + C.$$

5) $$\int \mathrm{tg}^2 x\, dx.$$

Liekam

$$\mathrm{tg}\, x = z$$

tad

$$= \operatorname{arc\,tg} z, \quad dx = \frac{dz}{1+z^2}$$

un

$$\int \operatorname{tg}^2 x\, dx = \int z^2 \cdot \frac{dz}{1+z^2} = \int \left(1 - \frac{1}{z^2+1}\right) dz =$$

$$= \int dz \quad \int \frac{dz}{1+z^2} = z - \operatorname{arc\,tg} z = \operatorname{tg} x - x + C.$$

6) $$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int x \quad \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = x \;( \quad \sqrt{a^2-x^2}) - \int -\sqrt{a^2-x^2}\;\; dx =$$

$$= -x\sqrt{a^2-x^2} + \int \frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = -x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} - \int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$2\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a};$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

7) $$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \int x \cdot \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = x \,.\, \sqrt{a^2+x^2} - \int \sqrt{a^2+x^2}\;\; dx =$$

$$= x\sqrt{a^2+x^2} - \int \frac{a^2+x^2}{\sqrt{a^2+x^2}} dx = x\sqrt{a^2+x^2} - a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} \quad \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}};$$

$$2 \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = x\sqrt{a^2+x^2} - a^2\, l\,(x + \sqrt{a^2+x^2}),$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} - \frac{a^2}{2}\, l\,(x + \sqrt{a^2+x^2}) + C.$$

8) $$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int \frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx = a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} - \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} =$$

$$= a^2 \arcsin \frac{x}{a} - \left(-\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a}\right) =$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{a^2 \underline{+} x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

9) $$\int \sqrt{a^2+x^2}\; dx = \int \frac{a^2+x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\, dx = a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} + \int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2+x^2}} =$$

$$= a^2 l(x + \sqrt{a^2 + x^2}) + \left(\frac{x}{2}\sqrt{a^2 + x^2} - \frac{a^2}{2} l(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right) =$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} l(x + \sqrt{a^2 + x^2}) + C$$

10) $$\int \frac{dx}{ax + bx + c} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

Liekam :

$$x + \frac{b}{2a} = t; \quad dx = dt.$$

Še jāizšķir trīs gadījumi :

a) $b^2 - 4ac < 0.$

Liekam

$$-\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = k^2,$$

tad

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2 + k^2} = \frac{1}{ak} \text{ arc tg } \frac{t}{k} + C.$$

$$t = x + \frac{b}{2a}$$

$$k = \sqrt{\frac{4ac - b^2}{4a^2}}.$$

Še $t$ un $k$ vērtības jāieved augšējā integrala izteiksmē

b) $b^2 - 4ac > 0.$

Liekam :

$$\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = k^2; \quad x + \frac{b}{2a} = t,$$

tad

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\left(x + \frac{b}{2a}\right) - k^2} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2 - k^2} = \frac{1}{2ak} l \frac{t - k}{t + k} + C.$$

$t$ un $k$ vērtības jāieved integrala izteiksmē.

c) $b^2 - 4ac = 0,$

tad

$$\int \frac{dx}{ax + bx + c} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \frac{1}{a}\int \left(x + \frac{b}{2a}\right)^{-2} d\left(x + \frac{b}{2a}\right) =$$

$$\frac{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^{-1}}{-1} + C.$$

11) $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$. $(a > 0)$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}}$$

Liekam

$$x + \frac{b}{2a} = t; \quad dx = dt;$$

$$-\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = h.$$

Tad

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + h}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\, l\,(t + \sqrt{t^2 + h}) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}}\, l\left[x + \frac{b}{2a} + \frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{ax^2 + bx + c}\right] + C.$$

12) $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ $(a < 0)$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \int \frac{dx}{\sqrt{-\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}}.$$

Še $b^2 - 4ac$ jābūt $> 0$, jo pretējā gadijumā saknes vērtība būtu imaginara ar visām $x$ vērtībām.

Liekam

$$x + \frac{b}{2a} = t; \quad dx = dt;$$

$$k^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

tad

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \int \frac{dt}{\sqrt{k^2-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \text{ arc sin } \frac{t}{k} + C.$$

Rezultatā ievietojam

$$t = x + \frac{b}{2a} \text{ un } k = \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}.$$

13) $$\int \sqrt{ax^2+a}\, dx = x\sqrt{ax^2+a} - \int \frac{ax^2}{\sqrt{ax^2+a}} dx =$$

$$= x\sqrt{ax^2+a} - \left( \int \frac{ax^2\, dx}{\sqrt{ax^2+a}} + \int \frac{a\, dx}{\sqrt{ax^2+a}} - \int \frac{a\, dx}{\sqrt{ax^2+x}} \right) =$$

$$= x\sqrt{ax^2+a} \quad \int \frac{ax^2+a}{\sqrt{ax^2+a}} dx + a \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+a}} =$$

$$= x\sqrt{ax^2+a} - \int \sqrt{ax^2+a}\, dx + a \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+a}}.$$

$$2\int \sqrt{ax^2+a}\, dx = x\sqrt{ax^2+a} + a \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+a}},$$

$$\int \sqrt{ax^2+a}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{ax^2+a} + \frac{a}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+a}}$$

Labās puses integrala integrēšana jau zinama.

14) $$\int \sqrt{ax^2+bx+c}\, dx = \int \sqrt{a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)} dx =$$

$$= \int \sqrt{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}}\, dx.$$

Liekam

$$x + \frac{b}{2a} = t; \quad dx = dt;$$

$$-\frac{b^2-4ac}{4a} = a.$$

Tad integrals dabū veidu

$$\int \sqrt{axt^2+a}\, dt.$$

Tā tad integrals (14) pārvests uz integralu (13).

**6 Vingrinājumi.**

1) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt[3]{a - bx^3}} = -\frac{1}{2b}\sqrt[3]{(a - bx^3)^2} + C.$

2) $\int \frac{\cos x}{e^{\sin x}}\,dx = -\frac{1}{e^{\sin x}} + C.$

3) $\int \frac{e^x - e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2}\,dx = -\frac{e^x}{e^{2x} + 1} + C.$

4) $\int \frac{\sin x}{(a + b\cos x)^2}\,dx = \frac{1}{b(a + b\cos x)} + C.$

5) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^4 - x^4}} = \frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{a^2} + C.$

Integrali (1) līdz (5) atrisinami ar tiešu integrēšanu.

6) $\int \frac{(a - bx)^3}{x^4}\,dx = -\frac{a^3}{3x^3} + \frac{3a^2b}{2x^2} - \frac{3ab^2}{x} - b^3\,lx + C.$

7) $\int \frac{x^3 - x}{\sqrt{a^4 - x^4}}\,dx = -\frac{1}{2}\sqrt{a^4 - x^4} + \frac{1}{2}\arccos\frac{x^2}{a^2} + C.$

8) $\int \frac{dx}{5 - x^2} = \frac{1}{2\sqrt{5}}\,l\,\frac{x + \sqrt{5}}{x - \sqrt{5}} + C.$

9) $\int \frac{dx}{\sqrt{x + 1} + \sqrt{x}} = \frac{2}{3}\sqrt{(x + 1)^3} - \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C.$

10) $\int \sin^2 x\,dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$

Integrali (6) līdz (10) atrisinami ar sadalīšanas paņēmienu.

11) $\int \sin^3 x\cos^2 x\,dx = -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x + C \quad (\cos x = z).$

12) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^4 - x^4}} = \frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{a^2} + C$

13) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = l\,(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + C \qquad (\sqrt{x^2 - a^2} = z - x)$

14) $\int x^2\sqrt{a + x}\,dx = 2\,(a + x)\left[\frac{1}{7}(a + x)^2 - \frac{2a}{5}(a+x) + \frac{a^2}{3}\right]\sqrt{a+x}.$

(liekot $a + x = z^2$).

Integrali (11) līdz (14) atrisinami ar ievietošanas paņēmienu.

15) $\int x^2 e^x \, dx = (x - 1)^2 e^x + e^x + C.$

16) $\int x^n \, lx \, dx = \frac{x^{n+1} \, lx}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C.$

17) $\int x^2 \cos x \, dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C$

18) $\int \cos^n x \, dx = \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx.$

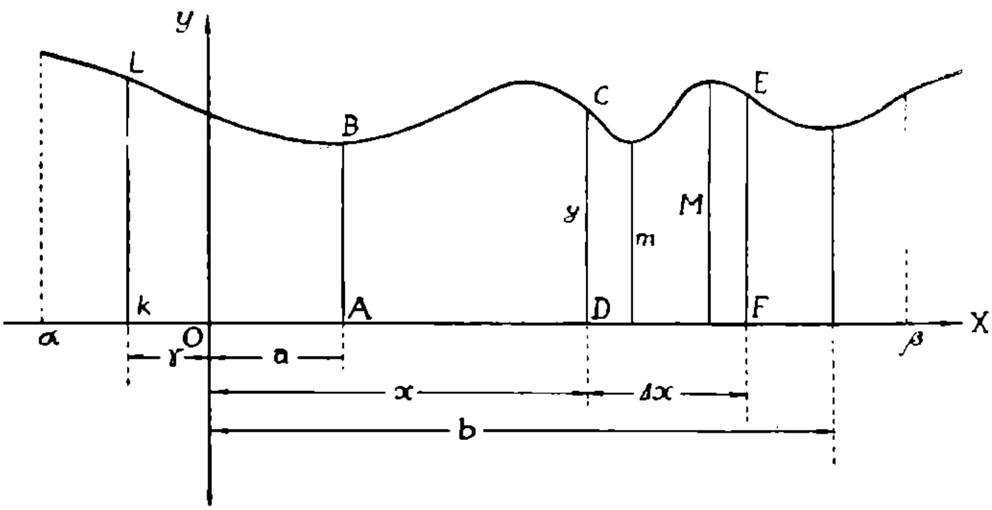
19) $\int \operatorname{arc\,cos} x \, dx = x \operatorname{arc\,cos} x - \sqrt{1 - x^2} + C.$

Integrali (15) līdz (19) atrisinami ar parcialu integrēšanu.

## Otrā nodaļa.

## Noteiktais integrals.

9. **Integrala ģeometriskā nozīme.** Pieņemam, ka funkcija $f(x)$, (zīmējuma 1 līkne) kādā intervalā $(\alpha, \beta)$ ir vienvērtīga, nepārtraukta un pozitiva.




Zīm. 1.

Pieņemam dotā intervalā noteiktu abscisu $a$ un mainīgu abscisu $x$. Laukums $ABCDA$, kā redzams, ir funkcija no $x$. Ja dodam abscisai $x$ pieaugumu $\Delta x$, tad minētais laukums dabū pieaugumu, laukumu $DCEFD$.

Apzīmējam:

$$\text{laukumu } ABCDA \text{ ar } U_a^x$$

un

$$\text{laukumu } DCEFD \text{ ar } \Delta U_a^x.$$

Ja intervalā $\Delta x$ funkcijas $f(x)$ mazākā un lielākā vērtība ir $m$ un $M$, tad kā redzam pastāv izteiksme:

$$m\,\Delta x < \Delta U_a^x < M\Delta x. \tag{1}$$

Nodalot ar $\Delta x$ dabūjam

$$m < \frac{\Delta U_a^x}{\Delta x} < M. \tag{2}$$

Ja $\Delta x \to 0$, tad $m \to y$ un $M \to y$. Tā tad

$$\lim_{\Delta x \to 0} m = \lim_{\Delta x \to 0} M = y. \tag{3}$$

No (2) un (3) secinam, ka

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta U_a^x}{\Delta x} = y = f(x).$$

Tā tad

$$\frac{dU_a^x}{dx} = f(x), \tag{4}$$

un

$$dU_a^x = f(x)\,dx. \tag{5}$$

Integrējot dabūjam:

$$U_a^x + P = \int f(x)\,dx \qquad (P = \text{const, pēc patikas}) \tag{6}$$

Tā kā $U_a^x$ ir laukums, tad arī $P$ ir laukums, bet pēc patikas starp līkni un abscisu asi, piemēram laukums $KLBAK$. Laukums $U_a^x + P$ tā tad ir nenoteikts, jo tā sākumu ierobežojošā ordinata $KL$ atbilst pēc patikas pieņemtai abscisai $\gamma$.

Apzīmējam šo nenoteikto laukumu

$$U_a^x + P = U^x \tag{7}$$

tad

$$U^x = \int f(x)\,dx. \tag{8}$$

Tā kā

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \tag{9}$$

tad ievērojot (8) un (9), dabūjam:

$$U^x = \int f(x)\,dx = F(x) + C. \tag{10}$$

Izteiksme (10) rāda, ka nenoteiktā integrala

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

ģeometriskā nozīme ir nenoteiktais laukums $U^x$

Liekot izteiksmē (10) $x = b$ un $x = a$ $(a < b)$ dabūjam:
ar $x = b$

$$U^b = \left[\int f(x)\,dx\right]_{x=b} = F(b) + C. \tag{11}$$

ar $x = a$:

$$U^a = \left[\int f(x)\,dx\right]_{x=a} = F(a) + C. \tag{12}$$

Atņemot izteiksmi (12) no izteiksmes (11) dabūjam:

$$U^b - U^a = \left[\int f(x)\,dx\right]_{x=b} - \left[\int f(x)\,dx\right]_{x=a} = F(b) - F(a). \tag{13}$$

Apzīmējot:

$$U^b \quad U^a = U_a^b \text{ un } \left[\int f(x)\,dx\right]_{x=b} - \left[\int f(x)\,dx\right]_{x=a} = \int_a^b f(x)\,dx,$$

izteiksmi (13) rakstam

$$U_a^b = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{14}$$

Simbolu $\int_a^b f(x)\,dx$ sauc par **noteiktu integralu**, $a$ ir **noteiktā integrala apakš** un $b$ **tā virsrobeža.**

Noteiktā integralā $\int_a^b f(x)\,dx$ analitiskā nozīme dota ar

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

un ģeometriskā ar

$$\int_a^b f(x)\,dx = U_a^b \tag{15}$$

Še kā redzams no zīmējuma, $U_a^b$ ir noteikts laukums starp abscisu asi, līkni un līknes ordinatām ar $x = a$ un $x = b$. Izteiksme (15) dod atrisinājumu laukuma aprēķināšanas, kvadraturas problemai — plāknē.

Laukum $U_a^b$ varam aprēķināt arī izejot no nenoteiktā integrala (10), noteicot integrēšanas konstanti $C$.

Ja laukumu $U^x$ skaitam no abscisas $x = a$, tad $U^a = 0$. Šādā gadijumā, ievietojot $x = a$ nenoteiktā integralā

$$U^x = \int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

dabūjam:

$$U^a = 0 = F(a) + C,$$

un

$$C = - F(a).$$

Tad

$$U_a^x = \int_a^x f(x)\,dx = F(x) - F(a).$$

Liekot augšējā izteiksmē $x = b$, dabūjam

$$U_a^b = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Izteiksmi

$$F(b) - F(a)$$

apzīmējot ar simbolu

$$|F(x)|_a^b$$

rakstam

$$U_a^b = \int_a^b f(x)\,dx = |F(x)|_a^b = F(b) - F(a).$$

No izteiksmes

$$U_a^b = U^b - U^a = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

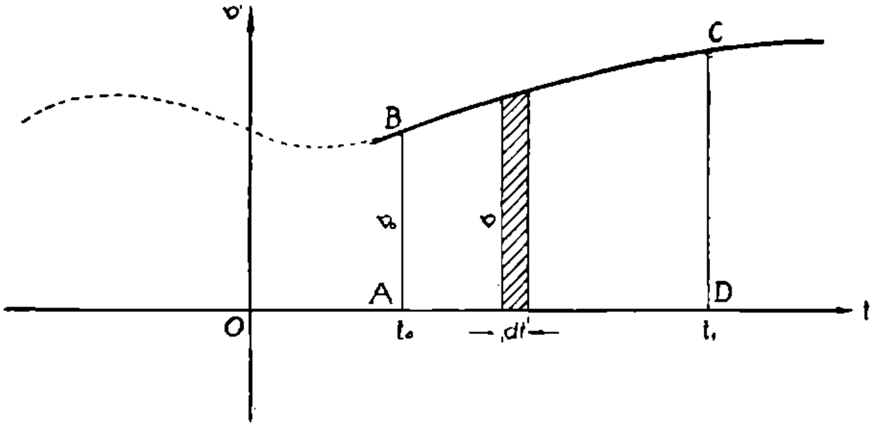
dabūjam:

$$U^b = U^a + \int_a^b f(x)\,dx = U^a + F(b) - F(a). \qquad (16)$$

Ja $U^a$ ir dots ar kādas problemas noteikumiem, tad augšējā izteiksme dod arī $U^b$.

Piemērs.

Punkts $M$ kustas uz taisnes ar ātrumu $v=f(t)$. Dabūt 1) ceļu $s_{t_1-t_0}$ ko noiet punkts $M$ laikā $t_1 - t_0$, 2) ceļu $s_{t_1}$ ko nogājis punkts $M$ līdz līdz laika momentam $t_1$. Tā kā




Zīm. 2.

$$\frac{ds}{dt} = v$$

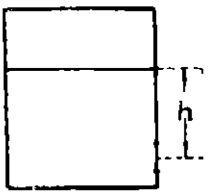
tad

$$ds = v\,.\,dt.$$

Zīmējumā 2 redzam, ka svītrotais laukums $ds = vdt$ ir laukuma, kas atrodas starp līkni, abscisu asi un ordinatām $v_0$ un $v$, diferencials. Pielietojot formulu (16) dabūjam:

$$s_{t_1} = s_{t_0} + \int_{t_0}^{t_1} v dt.$$

Augšējā formulā $\int_{t_0}^{t_1} v dt$ izteic ceļu, ko punkts $M$ noiet laika sprīdī $t_1 - t_0$, $s_{t_0}$ ir ceļš, ko punkts nogājis priekš laika momenta $t_0$ un $s_{t_1}$ ir punkta $M$ viss noietais ceļš līdz laika momentam $t_1$.



Zīm. 3.

Piemērs.

Cilindriska trauka (zīm. 3), ar pamata laukumu $F$, sienā apakšā atrodas caurums ar laukumu $f$. Laika momentā $t$ traukā atrodošā ūdens līmeņa stāvoklis virs cauruma $f$ centra ir $h$. Laika $t$ pieaugumā $\Delta t$, ūdens līmenis pazemināsies par $-\Delta h$ un šajā laikā $\Delta t$ iztecējušā ūdens tilpums ir $-\Delta h \,.\, F$.

Laikā $\Delta t$ iztecējušā ūdens tilpumu varam arī izteikt šādi:

$$f \,.\, v_m \,.\, \Delta t \,.\, k.$$

Še $v_m$ ir ūdens iztecēšanas vidējs ātrums laika sprīdī $\Delta t$ un $k$ hidraulikas dots koeficients. Nolīdzinot abus iztecējušā ūdens tilpumus dabūjam:

$$-\Delta h \,.\, F = f \,.\, v_m \Delta t \,.\, k.$$

No augšējā dabūjam:

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = -\frac{kf\ v_m}{F}.$$

Ja $\Delta t \to 0$, tad $\Delta h \to 0$ un $v_m \to v_h$. Še $v_h$ ir iztecēšanas ātrums pie ūdens līmeņa $h$. Tad:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta h}{\Delta t} = -\lim_{\Delta t \to 0} \frac{kf\ v_m}{F} = -\frac{kf}{F} \,.\, \lim_{\Delta t \to 0} v_m.$$

No augšējā dabūjam

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{kf \,.\, v_h}{F}.$$

Tā kā

$$v_h = \sqrt{2gh},$$

tad

$$\frac{dh}{dt} = \frac{k.f.\sqrt{2gh}}{F}.$$

Pārveidojot dabūjam:

$$dt = -\frac{F}{k.f\sqrt{2g}} . h^{-\frac{1}{2}} dh.$$

$$t = \frac{F}{kf\sqrt{2g}} \int h^{-\frac{1}{2}} dh = -\frac{F}{kf\sqrt{2g}} 2h^{\frac{1}{2}} + C. \qquad (a)$$

Ja laika momentā $t = 0$ ūdens līmeni traukā apzīmējam ar $H$, tad ievadot šīs vērtības augšējā nolīdzinājumā dabūjam:

$$0 = -\frac{2F}{k\ f\sqrt{2g}} H^{\frac{1}{2}} + C,$$

un

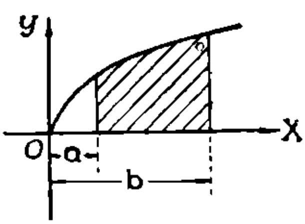
$$C = \frac{2F}{kf\sqrt{2g}} H^{\frac{1}{2}}.$$

Ievedot šo $C$ vērtību formulā $(a)$ dabūjam:

$$t = \frac{2F}{kf\sqrt{2g}} \left[ H^{\frac{1}{2}} - h^{\frac{1}{2}} \right].$$

Ja $h = 0$, tad viss ūdens no trauka iztecējis. Ievietojot $h = 0$ augšējā formulā dabūjam laiku $T$, kurā trauks iztukšojas:

$$T = \frac{2F}{kf\sqrt{2g}} H^{\frac{1}{2}}.$$



Zīm. 4.

Piemērs.

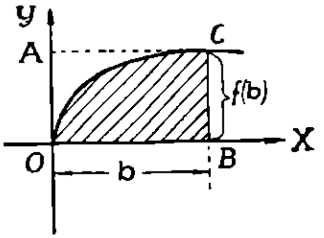
Aprēķināt parabolas, zīmējumā 4 svītroto laukumu no $x = a$ līdz $x = b$.

Parabolas nolīdzinājums ir:

$$y^2 = 2px; \quad \text{vai} \quad y = \sqrt{2p} \cdot x^{\frac{1}{2}}.$$

$$U_a^b = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \sqrt{2p}\,.\,x^{\frac{1}{2}}\,dx = \sqrt{2p}\int_a^b x^{\frac{1}{2}}\,dx,$$

$$U_a^b = \left|\sqrt{2p}\;\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_a^b = \frac{2}{3}\sqrt{2p}\left(b^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}}\right).$$




Zim. 5.

Ja $a = 0$, tad

$$U_o^b = \frac{2}{3}\sqrt{2p}\,.\,b^{\frac{3}{2}},$$

dod zīmējumā 5. svītroto laukumu.

Augšējo izteiksmi pārveidojot dabūjam:

$$U_o^b = \frac{2}{3}\,b\,\sqrt{2p}\,b^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\,b\,f(b) = \frac{2}{3}\,b\,CB.$$

Kā redzams $b\,CB$ ir paralelograma $OACB$ laukums.

Svītrotais parabolas laukums tā tad ir $\frac{2}{3}$ paralelograma $OACB$ laukuma.

**8. Noteiktais integrals kā summas robežvērtiba.** Pieņemam ka intervalā

$$a \leqslant x \leqslant b$$

dota funkcija $f(x)$, kas šajā intervalā ir vienvērtīga, pozitiva, nepārtraukta. (Zim. 6.) Intervalu iedalam pēc patikas $n$ daļās, apzīmējot dalītāju punktu abcisas ar:

$$a = x_0;\quad x_1;\quad x_2;\quad \ldots\quad x_{r-1};\quad x_r;\quad x_{r+1}\quad \ldots\quad x_{n-1};\quad x_n = b$$

Apzīmējam atsevišķu intervalu:

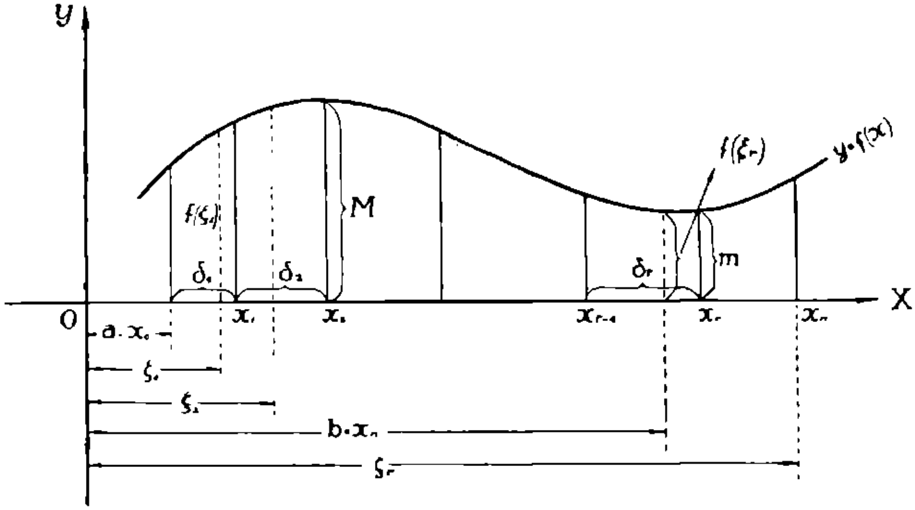
$$x_r - x_{r-1} = \delta_r.$$

Dodot $r$ vērtības $1, 2, 3 \ldots n$ dabūjam daļas intervalus $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \ldots \delta_n$. Šiem atsevišķiem intervaliem nav jābūt vienlīdzīgiem.

Intervalā $\delta_r$, pieņemam pēc patikas punktu ar abscisu $\xi_r$. Tādā kārtā dabūjam $\xi_1, \xi_2, \xi_3$; $\xi_r$; $\xi_n$ un attiecīgas funkcijas $f(x)$ vērtības: $f(\xi_1)$; $f(\xi_2)$; $f(\xi_3)$; $f(\xi_r)$; $f(\xi_n)$.

Veidojam reizinājumus

$$\delta_1 f(\xi_1);\quad \delta_2 f(\xi_2);\quad \delta_r f(\xi_r);\quad \delta_n f(\xi_n)$$




Zim. 6.

un šo reizinājumu summu.

$$S = \delta_1 f(\xi_1) + \delta_2 f(\xi_2) + \ldots + \delta_r f(\xi_r) + \ldots + \delta_n f(\xi_n) = \sum_1^n \delta_r f(\xi_r) \qquad (1)$$

Par šo summu varam izteikt sekojošo: ja $n$ pastāvīgi aug un $\delta_1, \delta_2$ $\delta_n$ katrs tiecas uz 0, tad summa $S$ tiecas uz kādu noteiktu robežvērtību, neatkarīgi no iedalīšanas kārtības un $\xi_1, \xi_2$ $\xi_n$ izvēles katrā daļas intervalā.

P i e r ā d i j u m s.

$a$) apzīmējam intervalā $\delta_r$ funkcijas $f(x)$ mazāko vērtību ar $m_r$ un lielāko ar $M_r$ (zīm. 7).

Tad funkcijas $f(\xi_r)$ vērtība nekad nav mazāka, bet vispār gan lielāka par $m_r$ vērtību. Tāpat $f(\xi_r)$ vērtība nekad nav lielāka, bet vispār gan mazāka par $M_r$ vērtību. Tā tad:

$$m_r < f(\xi_r) < M_r\,.$$

Apzīmējot funkcijas $f(x)$ vismazāko vērtību ar $m$ un vislielāko vērtību ar $M$ visā intervalā $(a, b)$ zīm. 6, redzams, ka vispārīgā gadījumā:

$$m < m_r < f(\xi_r) < M_r < M.$$

Reizinot šīs izteiksmes locekļus ar $\delta_r$ dabūjam:

$$m\delta_r < m_r\delta_r < f(\xi_r)\delta_r < M_r\delta_r < M\delta_r$$

un tādēļ arī

$$\sum_1^n m\,\delta_r < \sum_1^n m_r\delta_r < \sum_1^n f(\xi_r)\delta_r < \sum_1^n M_r\delta_r < \sum_1^n M\delta_r.$$

Apzīmējam:

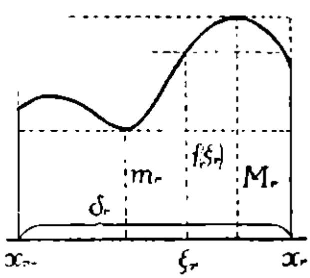
$$\sum_1^n m\delta_r = m\sum_1^n \delta_r = m(b-a)$$

$$\sum_1^n m_r\delta_r = p$$

$$\sum_1^n f(\xi_r)\delta_r = S$$

$$\sum_1^n M_r\delta_r = P$$

$$\sum_1^n M\delta_r = M\sum_1^n \delta_r = M(b-a).$$



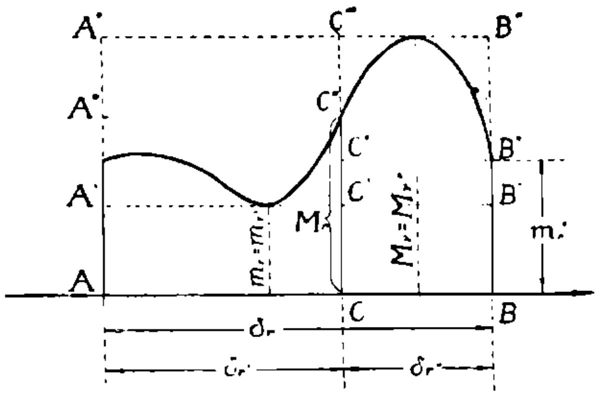
Zīm. 7.

Ievedot šos apzīmējumus augšējā izteiksmē, dabūjam:

$$m(b-a) < p < S < P < M(b-a). \quad (2)$$

Summu $p = \sum_1^n m_r\delta_r$ sauc par apakš-summu un summu $P = \sum_1^n M_r\delta_r$ par virssummu.

β) Palielinot dalījuma skaitli $n$ dabūjam apakšsummu $p_1$ un virssummu $P_1$ Ar jauno dalījumu, $p_1$ var būt tikai lielāks par $p$, bet nekad mazāks. Turpretim $P_1$ var būt tikai mazāks par $P$ un nekad lielāks. Tas redzams zīmējumā 8.




Zīm. 8.

$$\delta_r m_r = \text{laukums } AA'B'BA.$$

$$\delta_{r'} m_{r'} + \delta_{r''} m_{r''} = \text{laukums } AA'C'CA + \text{laukums } CC''B''BC.$$

Redzams, ka

$$m_r \delta_r < m_{r'} \delta_{r'} + m_{r''} \delta_{r''},$$

tā tad $p < p_1$.

$$M_r \delta_r = \text{laukums}. AA''B'''BA.$$

$$M_{r'} \delta_{r'} + M_{r''} \delta_{r''} = \text{laukums } AA'''C'''CA + \text{laukums } CC''''B'''BC.$$

Redzams, ka

$$M_{r'} \delta_{r'} + M_{r''} \delta_{r''} < M_r \delta_r$$

tā tad $P_1 < P$.

Tā tad ar palielinātu dalijumu skaitu

$$p < p_1 \quad \text{bet} \quad P_1 < P.$$

$\gamma$) Katra, uz kāda iedalijuma pamata dabuta apakšsumma ir mazāka kā katra ar to pašu vai ar kādu citu iedalijumu dabūta virssumma.

Pieņemam, ka apakšsumma $p$ dabūta ar iedalijumu $\delta_1, \delta_2 \quad \delta_n$ un ka $R$ ir virssumma ar iedalijumu $\varepsilon_1 \, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_m$. Ja saliekam abus iedalijumus kopā, tad dabūjam jaunu iedalijumu ar lielāku iedalijumu skaitu nekā katrā iedalijumā $\delta_1\ \delta_2\ \ldots\ \delta_n$ un $\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \ldots\ \varepsilon_m$. Jaunā iedalijuma virssummu apzīmējam ar $Q$ un apakšsummu ar $q$.

Ievērojot agrāko, varam rakstīt

$$
\begin{gathered}
(b-a)\, m < p < q; \\
Q < R < (b-a)\, M; \\
q < Q
\end{gathered}
$$

No augšējā redzams, ka

$$(b-a)\, m < p < R < (b-a)\, M.$$

δ) ja augošiem dalijuma skaitļiem $n,\ n_1,\ n_2 \ldots$ atbilst apakšsummas $p,\ p_1,\ p_2 \ldots$ un augšsummas $P,\ P_1,\ P_2 \ldots$ tad pamatojoties uz augšējo, dabūjam:

$$
\begin{gathered}
p < p_1 < p_2 \ldots \\
P > P_1 > P_2 \ldots
\end{gathered}
$$

Apakšsummas $p < p_1 < p_2 \ldots$ veido augošu skaitļu sekojumu, kam ar $n \to \infty$ ir robeža, jo šinī sekojumā katrs lòceklis ir mazāks par katru virssummu un katra virssumma mazāka par $(b-a)\, M$. Virssummas $P > P_1 > P_2 \ldots$ veido dilstošu skaitļu sekojumu. Katrs šī sekojuma loceklis ir lielāks par katru apakšsummu un katra no pēdējām ir lielāka par $(b-a)\, m$. Tādēļ arī dilstošam virssummu sekojumam ir robeža ar $n \to \infty$.

Tā kā

$$
\begin{gathered}
p = \sum_1^n m_r\, \delta_r \\
P = \sum_1^n M_r\, \delta_r,
\end{gathered}
$$

tad:

$$P - p = \sum_1^n M_r\, \delta_r - \sum_1^n m_r\, \delta_r = \sum_1^n (M_r - m_r)\, \delta_r.$$

Apzīmējam

$$M_r - m_r = \sigma_r.$$

Šo starpību $\sigma_r$ sauc par funkcijas $f(x)$ svārstību intervalā $\delta_r$.

Ievērojot $\sigma_r$ apzīmi, dabūjam:

$$P - p = \sum_1^n (M_r - m_r)\, \delta_r = \sum_1^n \sigma_r\, \delta_r.$$

Vislielāko starp svārstībām $\sigma_1, \sigma_2 \ldots \sigma_n$ apzīmējam ar $\sigma$. Tad

$$0 < \sum_1^n (M_r - m_r)\delta_r < \sigma \sum_1^n \delta_r = \sigma\,(b - a). \tag{3}$$

Ja $n \to \infty$, tad tā kā funkcija $f(x)$ intervalā $(a, b)$ pieņemta nepārtraukta $\sigma \to 0$.

Ievērojot teikto, dabūjam

$$\lim_{n\to\infty} \sigma\,(b - a) = 0$$

un tādēļ, ievērojot (3)

$$\lim_{n\to\infty} (P - p) = \lim_{n\to\infty} \sum_1^n (M_r - m_r)\,\delta_r = 0.$$

No augšējā secinam:

$$\lim_{n\to\infty} P = \lim_{n\to\infty} p. \tag{4}$$

Bet tā kā

$$p < S < P,$$

tad ievērojot (4) arī:

$$\lim_{n\to\infty} S = \lim_{n\to\infty} \sum_1^n f(\xi_r)\,\delta_r = \lim_{n\to\infty} p = \lim_{n\to\infty} P$$

Tā tad, ja $f(x)$ atbilst pieņemtiem noteikumiem, tad ar $n\to\infty$ ($\delta_r \to 0$) pastāv $\lim p$, kā arī $\lim P$ un tādēļ arī $\lim S$.

Summas:

$$S = f(\xi_1)\,\delta_1 + f(\xi_2)\,\delta_2 + \ldots + f(\xi_n)\,\delta_n = \sum_1^n f(\xi_r)\,\delta_r$$

robežvērtību, kad $n\to\infty$ un tādēļ $\delta_r \to 0$, sauc par funkcijas $f(x)$ noteiktu integralu intervalā $(a, b)$ un apzīmē to ar simbolu

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Tā tad

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_1^n f(\xi_r)\,\delta_r. \tag{5}$$

$a$ sauc par integrala apakšrobežu, $b$ par virsrobežu un

$f(x)\,dx$ par integrala elementu, pie kam $x_0 = a$ un $x_n = b$. Ar izteiksmi (5) ir dota noteikta integrala definīcija ka summas robežvērtība.

No augšējā ieskatams, ka

$$\lim_{n\to\infty} S = \int_a^b f(x)\,dx$$

tad pastāv ja

$$\lim_{n\to\infty} (P - p) = 0$$

un tas ir tikai tad, ja

$$\lim_{n\to\infty} \sum_1^n \sigma_r\, \delta_r = 0.$$

Ja funkcija $f(x)$ intervalā $(a, b)$ izpilda noteikumu, ka

$$\lim_{n\to\infty} \sum_1^n \sigma_r\, \delta_r = 0$$

tad funkciju $f(x)$ sauc par integrējamu intervalā $(a, b)$. Ja $f(x)$ intervalā $(a, b)$ ir nepārtraukta, tad tā izpilda šo noteikumu, un tādēļ arī ir integrējama intervalā $(a, b)$.

**9. Noteiktā integrala galvenā izteiksme.** Kā redzējām, ja

$$d\,F(x) = f(x)\,dx,$$

tad

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Pierādīsim, ka arī ar definīciju

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_1^n f(\xi_r)\,\delta_r$$

dabūjam

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Pieņemam, ka intervalā $(a, b)$

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x).$$

Še funkcijas $f(x)$ un $F(x)$ pieņemtas intervalā $(a, b)$ kā vienvērtīgas un nepārtrauktas. Iedalam intervalu $(a, b)$ $n$ daļās ar abscisām:

$$x_0 = a,\ x_1,\ x_2, \qquad x_n = b; \qquad a < b.$$

Apzīmējam:

$$x_r - x_{r-1} = \delta_r .$$

Pielietojot Lagranža teorēmu intervalā $\delta_r$, dabūjam.

$$F(x_r) - F(x_{r-1}) = \delta_r f(\bar{\xi}_r). \qquad (x_{r-1} < \bar{\xi}_r < x_r)$$

Liekot $r = 1, 2, 3, \quad n$ dabūjam:

$$F(x_1) - F(a) = \delta_1 f(\bar{\xi}_1);$$
$$F(x_2) - F(x_1) = \delta_2 f(\bar{\xi}_2);$$
$$F(b) - F(x_{n-1}) = \delta_r f(\bar{\xi}_n).$$

Saskaitot augšējos nolīdzinājumus dabūjam:

$$F(b) - F(a) = \delta_1 f(\bar{\xi}_1) + \delta_2(\bar{\xi}_2) + \ldots + \delta_n f(\bar{\xi}_n) = \sum_1^n \delta_r f(\bar{\xi}_r) \qquad (\alpha)$$

Še $\bar{\xi}_r$ ir abscisa, daļas intervala $\delta_r$ noteiktā vietā un nav pēc patikas pieņemama.

Izteiksme $(\alpha)$ nav atkarīga no dalījuma skaita un iedalījuma kārtības. Tādēļ arī ar $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_1^n \delta_r f(\bar{\xi}_r) = F(b) - F(a).$$

Agrāk pierādījām, ka

$$\lim_{n\to\infty} \sum_1^n \delta_r f(\xi_r) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Kā augšā norādīts, kreisās puses summa šajā izteiksmē, ja funkcija $f(x)$ izpilda dotos noteikumus, dabū noteiktu vērtību. Še $\xi_r$ ir intervalā $\delta_r$ pēc patikas pieņemta vērtība, tādēļ, ja $\xi_r$ vietā liekam $\overline{\xi}_r$, tad augšējā robežvērtība nemainas. Ievedot augšējā izteiksmē $\xi_r$ vietā $\overline{\overline{\xi}}_r$ dabūjam:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_1^n \delta_r\, f(\overline{\overline{\xi}}_r) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Tā kā

$$\lim_{n\to\infty} \sum_1^n \delta_r\, f(\overline{\xi}_r) = F(b) - F(a),$$

tad arī

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = |\,F(x)\,|_a^b.$$

Šajā formulā ar $F(x)$ ir apzīmēta tā vienvērtīgā nepārtrauktā funkcija, kuras diferencials ir $f(x)\,dx$, t. i.

$$d\,F(x) = f(x)\,dx.$$

Šo funkciju $F(x)$ dabūjam izdarot nenoteiktas integrēšanas operaciju $\int f(x)\,dx$, kā tas agrāk norādīts.

Isteiksmi

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) \quad F(a)$$

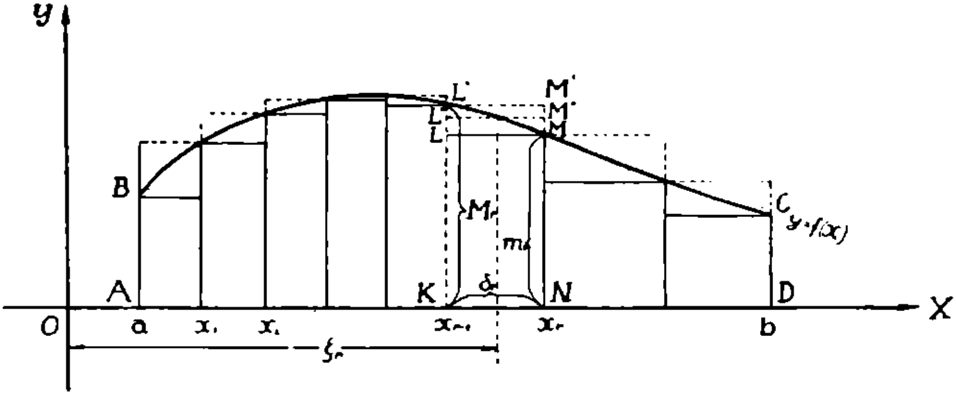
sauc par **integralrēķinu galveno izteiksmi**.

**10. Noteiktā integrala ģeometriskā nozime** Pieņemam, ka $f(x)$ atbilst agrāk dotiem noteikumiem, tad $y = f(x)$ dod nepārtrauktu līkni. (Zīm. 9).

Kā redzams, $\delta_r\, m_r$ ir laukums $KLMN$ un $p = \sum_1^n \delta_r\, m_r$ ir laukums starp apakš līknes atrodošām kāpnēm — apakškāpnēm, gala un sākuma ordinatām $AB$, $CD$ un abscisu asi.

Tāpat redzams, ka $\delta_r\, M_r$ ir laukums $KL'M'N$ un $P = \sum_1^n \delta_r\, M_r$ ir laukums starp svītrotām kāpnēm — virskāpnēm, šo kāpņu sākuma un gala ordinatām un abscisu asi.

Ģeometriski ieskatams, ka, ja $n \to \infty$ un $\delta_r \to 0$, tad tikpat apakškāpņu kā arī virskāpņu laukumi tiecas uz laukumu starp līkni, abscisu asi, sākuma un gala ordinatām.



Zīm. 9.

Tā tad

$$\lim_{n \to \infty} p = \lim_{n \to \infty} P = \text{laukums } ABCD.$$

Tālāk redzams, ka $f(\xi_r)\delta_r$ ir laukums $KL''M''N$ un $S = \sum_1^n f(\xi_r)\delta_r$ ir visu tāda veida laukumu summa.

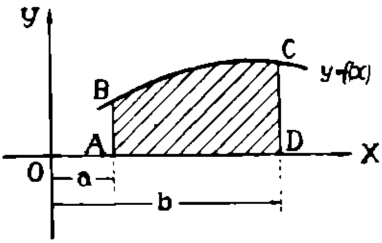
Ja $n \to \infty$ un $\delta_r \to 0$, tad

$$\lim_{n \to \infty} S = \int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n \to \infty} p = \lim_{n \to \infty} P.$$

Tā kā $\lim_{n \to \infty} p = \lim_{n \to \infty} P$ dod laukumu starp līkni, abscisu asi, sākuma un gala ordinatam, tad arī

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n \to \infty} \sum_1^n f(\xi_r)\delta_r$$

dod to pašu laukumu.

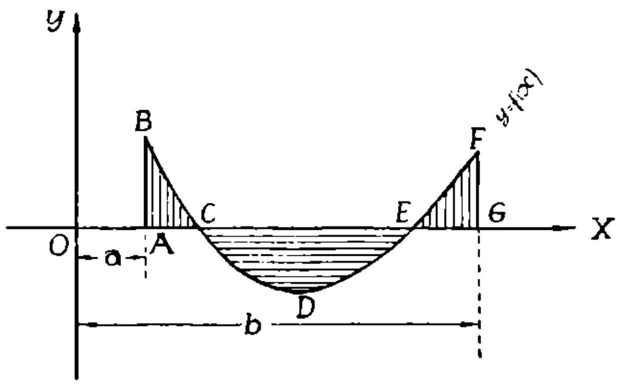


Zīm. 10.

Tā tad noteiktais integrals dod atrisinājumu uzdevumam, aprēķināt laukumu starp dotu līkni $y = f(x)$, abscisu asi un ordinatām ar $x = a$ un $x = b$, t. i. laukumu $ABCD$ zīmējumā 10.

Laukums $ABCD = L = \int_a^b f(x)\,dx.$

Gadijumā, ja $y = f(x)$ dabū veidu, kā zīmējumā 11., tad, ja




Zīm. 11.

$a < x_1 < x_2 \ldots x_{n-1} < b$ visi $\delta_r > 0$, bet funkcijas $f(x)$ vērtības starpā $CE$ ir negativas, redzams, ka

$$\int_a^b f(x)\,dx =$$

$=$ laukums $ABC -$
$-$ laukums $CDE +$
$+$ laukums $EFG$.

Izteiksmē:

$$\sum_1^n \delta_r f(\xi_r)$$

$\xi_r$ ir pēc patikas intervalā $\delta_r$, tā tad varam $\xi_r$ vietā ievest $x_{r-1}$ un dabūjam

$$\sum_1^n \delta_r f(x_{r-1})$$

vai arī $\xi_r$ vietā $x_r$ un dabūjam:

$$\sum_1^n \delta_r f(x_r).$$

Šo summu robežvērtības ir vienlīdzīgas. Pieņemam visus daļas intervalus vienlīdzīgus.

Liekam

$$\frac{b-a}{n} = h,$$

tad

$f(x_0)=f(a);\ f(x_1)=f(a+h);\ f(x_2)=f(a+2h)\ \ldots\ f(x_{n-1})=f[a+(n-1)h]=f(b-h),$

un

$$\lim_{n\to\infty}\sum_1^n f(x_{r-1})\delta_r = \int_a^b f(x)dx = \lim_{h\to 0}\{h[f(a)+f(a+2h)+\ldots+f(b-h)]\} \quad (A)$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_1^n f(x_r)\delta_r = \int_a^b f(x)dx = \lim_{h\to 0}\{h[f(a+h)+f(a+2h)+\ldots+f(b)]\} \quad (B)$$

## 11. Noteiktā integrala tieša aprēķināšana.

P i e m ē r s.

$$\int_\alpha^\beta a^x\, dx.$$

Pielietojot formulu ($A$) rakstam:

$$\int_\alpha^\beta a^x\, dx = \lim_{h\to 0}\{h[a^\alpha + a^{\alpha+h} + a^{\alpha+2h} \qquad + a^{\alpha+(n-1)h}]\}.$$

Pārveidojam izteiksmi, ievērojot ka: $nh = \beta - \alpha$, dabūjam:

$$ha^\alpha[1 + a^h + a^{2h} + \qquad + a^{(n-1)h}] = ha^\alpha\frac{(a^{nh}-1)}{a^h-1}$$

$$= \frac{a^{\alpha+nh}-a^\alpha}{\frac{a^h-1}{h}} = \frac{a^{\alpha+\beta-\alpha}-a^\alpha}{\frac{a^h-1}{h}} = \frac{a\ \ -a^\alpha}{\frac{a^h-1}{h}}.$$

Tad

$$\int_\alpha^\beta a^x\, dx = \lim_{h\to 0}\frac{a^\beta-a^\alpha}{\frac{a^h-1}{h}}.$$

Tā kā

$$\lim\frac{a^h-1}{h} = la,$$

tad

$$\int_\alpha^\beta a^x\, dx = \frac{a^\beta-a^\alpha}{la}.$$

**12. Noteiktā integrala pamata īpašības.** Pieņemam, ka funkcijas ar kurām tālāk rīkosimies, integrēšanas intervalā ir integrējamas.

$$1) \quad \int_a^a f(x)\, dx = 0.$$

jo še integrēšanas intervals $a - a = 0$.

Tā tad:

Noteikta integrala vērtība ir 0, ja integrala apakšrobeža nolīdzinas virsrobežai.

2) Ja pārmaina integrala robežas, tad mainas integrala zīme.

Ar abscisu sekojumu

$$x_0 = a, \quad x_1, x_2, \quad \quad x_{n-1}, \quad x_n = b$$

summa $S$ dabū vidu:

$$\sum_1^n \delta_r f(\xi_r).$$

Ar sekojumu:

$$b = x_n, \quad x_{n-1}, \quad \quad x_1, \quad x_1, x_0 = a$$

summas veids ir

$$\sum_n^1 (-\delta_r) f(\xi_r).$$

Tā kā

$$\sum_n^1 (-\delta_r) f(\xi_r) = -\sum_1^n \delta_r f(\xi_r),$$

tad

$$\lim_{n\to\infty} \sum_n^1 (-\delta_r) f(\xi_r) = -\lim_{n\to\infty} \sum_1^n \delta_r f(\xi_r).$$

un

$$\int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx.$$

3) Ja $a, b, c$ trīs skaitli funkcijas $f(x)$ integrēšanas intervalā, un $a < b < c$, tad

$$\int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx.$$

Starpvērtība $b$ sadala intervalu $(a, c)$ divās daļās $(a, b)$ un $(b, c)$. Uz intervaliem $(a, b)$ un $(b, c)$ attiecīgās summas kopā dod uz visu intervalu $(a, c)$ attiecīgu summu. Pāreja uz robežu dod augšējo formulu.

Ja $a < c < b$, tad ievērojot augšējo, dabūjam:

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx\,;$$

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx\,;$$

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

4) Ja pastāvīgs reizinātājs atrodas zem integrala, tad šo reizinātāju var iznest priekš integrala. Ja pastāvīgs reizinātājs atrodas priekš integrala, tad reizinātāju var pārnest zem integrala.

Tā kā

$$\sum_1^n c\,.\,f(\xi_r)\,\delta_r = c\sum_1^n f(\xi_r)\,\delta_r$$

tad ar $n \to \infty$ dabūjam:

$$\int_a^b c\,.\,f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx.$$

5) $$\int_a^b [\varphi(x) + \psi(x)]\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx + \int_a^b \psi(x)\,dx. \qquad (\alpha)$$

Tā kā

$$\sum_1^n [\varphi(\xi_r) + \psi(\xi_r)]\,\delta_r = \sum_1^n \varphi(\xi_r)\,\delta_r + \sum_1^n \psi(\xi_r)\,\delta_r \qquad (\beta)$$

tad izteiksmes $(\beta)$ robežvērtība ar $n \to \infty$ ir izteiksme $(\alpha)$. Izteiksme $(\alpha)$ derīga katram galīgam saskaitamo skaitam.

6) $$\int_a^b f(x)\,dx = (b - a)\,\mu. \qquad (\alpha)$$

Še $\mu$ ir funkcijas $f(x)$ vērtība, kas atrodas starp funkcijas $f(x)$ vismazāko vērtību $m$ un vislielāko vērtību $M$ intervalā $(a, b)$.

Kā redzējām

$$(b-a)m < S < (b-a)M.$$

Šī izteiksme pastāv arī attiecībā uz $\lim\limits_{n\to\infty} S$, tādēļ

$$(b-a)m < \int_a^b f(x)\,dx < (b-a)M,$$

Šis izteiksmes secinājums ir nolīdzinājums ($\alpha$).

Ja $f(x)$ ir nepārtraukta, tad tā dabū intervalā $(a, b)$, vismaz vienā vietā $\xi$, vērtību $\mu$ Šo vērtību $\xi$ tad var izteikt

$$\xi = a + \theta(b-a) \qquad (0 < \theta < 1)$$

Tad

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b - a) f[a + \theta(b-a)]. \tag{$\beta$}$$

No ($\alpha$) dabūjam:

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

V ē r t ī b u $\mu$ s a u c p a r f u n k c i j a s $f(x)$ v i d ē j u v ē r t ī b u i n t e r v a l ā $a, b$.

No ($\beta$) secinam: ja funkcija $f(x)$ intervalā $(a, b)$ nekad nav negativa (pozitiva), tad integralam $\int_a^b f(x)\,dx$ ir tā pati (pretēja) zīme kā $(b-a)$. Tālāk varam secināt, ja $a < b$ un intervalā $(a, b)$ $f(x) \geqslant \varphi(x)$ (pie kam intervalā $a, b$ nav arvienu $f(x) = \varphi(x)$), tad

$$\int_a^b f(x)\,dx > \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Še

$$b - a > 0 \quad \text{un} \quad f(x) - \varphi(x) > 0.$$

Ar augšējiem pieņēmumiem:

$$\int_a^b [f(x) - \varphi(x)]\, dx > 0,$$

vai arī

$$\int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b \varphi(x)\, dx > 0$$

un

$$\int_a^b f(x)\, dx > \int_a^b \varphi(x)\, dx.$$

7) Noteikta integrala vērtība nav atkarīga no neatkarīgā mainīgā apzīmes.

Ja integrēšanas intervals ir $(\alpha, \beta)$ un $a$, $b$ divi skaitļi šinī intervalā, tad neatkarīgi no neatkarīgā mainīgā apzīmes

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(t)\, dt = F(b) - F(a).$$

Ja $a$ pastāvīgs un $b = x$ mainīgs, tad dabūjam:

$$\int_a^x f(t)\, dt = F(x) - F(a). \qquad (\alpha)$$

Šis integrals ar pastāvīgu apakšrobežu un mainīgu virsrobežu $x$, ir vienvērtīga virsrobežas $x$ funkcija, jo intervalā $(\alpha, \beta)$ katram $x$ atbilst viena un tikai viena noteikta integrala $\int_a^x f(t)\, dt$ vērtība.

Ar integralu $(\alpha)$ noteikto funkciju sauc par integralfunkciju.

8) Ja $f(t)$ ir galīga funkcija, tad $\int_a^x f(t)dt$ ir virsrobežas $x$ nepārtraukta funkcija.

Ja $a$, $x$ un $x + h$ pieder integrēšanas intervalam $(\alpha, \beta)$, tad

$$\int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt = \int_a^{x+h} f(t)\,dt \tag{1}$$

un

$$\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^{x+h} f(t)\,dt. \tag{2}$$

Ievērojot īpašību (6), intervalā $(x, x+h)$, atrodas tāda $f(t)$ vērtība $\mu$, ka

$$\int_x^{x+h} f(t)\,dt = \mu(x + h - x) = \mu \cdot h \tag{3}$$

$\mu$ ir galīgs; tādēļ, kad $h \to 0$, ievērojot (2) un (3) dabūjam:

$$\lim_{h\to 0}\left[\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right] = \lim_{h\to 0} h \cdot \mu = 0.$$

Beidzamā izteiksme rāda, ka $\int_a^x f(t)\,dt$ ir nepārtraukta funkcija no $x$.

9) Nepārtrauktas funkcijas integrala diferencialkvocients, attiecībā uz integrala virsrobežu, dod integrējamās funkcijas vērtību, kad argumenta vietā ievedam augšrobežas vērtību.

Ja $f(t)$ ir nepārtraukta funkcija, tad:

$$\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^{x+h} f(t)\,dt = h\mu = hf(x + \theta h).$$

Dalot ar $h$ dabūjam

$$\frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt}{h} = f(x + \theta h).$$

Ja $h \to \pm 0$, tad augšējā izteiksme dod

$$D_x \int_a^x f(t)\,dt = f(x).$$

No augšējā secinam:

$$d \int_a^x f(t)\,dt = f(x)\,dx.$$

Līdzīgi dabūjam

$$d \int_x^b f(t)\,dt = -f(x)\,dx.$$

**13 Jauna mainīgā ievešana.** 1) Dotā integralā

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

ievedam mainīgā $x$ vietā jaunu mainīgo $t$ ar nolīdzinājumu:

$$x = \varphi(t). \tag{1}$$

Pieņemam, ka funkcija $\varphi(t)$, ka arī šīs funkcijas inversā funkcija

$$t = \psi(x) \tag{2}$$

ir vienvērtīgas un nepārtrauktas intervalā $(a, b)$.

Ar vērtību sekojumu

$$a = x_0, x_1, x_2 \quad x_n = b \tag{3}$$

un ievedot

$$x_r - x_{r-1} = \delta_r$$

veidojam

$$\sum_1^n f(\xi_r)\,\delta_r. \tag{4}$$

Kā zinams:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_1^n f(\xi_r)\,\delta_r = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Ievērojot noteikumus par transformacijas nolīdzinājumiem (1) un

(2), augošam $x$ vērtību sekojumam (3) atbilst augošs vai dilstošs) $t$ vērtību sekojums

$$\alpha = t_0, \quad t_1 \; t_2 \quad\quad t_n = \beta.$$

Vērtībām

$$\xi_1 \; \xi_2 \; \xi_3 \quad\quad \xi_n$$

atbilst vērtības

$$\tau_1 \; \tau_2 \; \tau_3 \quad\quad \tau_n.$$

Vispār:

$$t_r = \psi(x_r); \quad x_r = \varphi(t_r).$$

un

$$\alpha = \psi(a); \quad \beta = \psi(b).$$

Starpību

$$\delta_r = x_r - x_{r-1} = \varphi(t_r) - \varphi(t_{r-1})$$

ar Lagranža teoremu izteicam:

$$\delta_r = (t_r - t_{r-1})\,\varphi'(\bar{\tau}_r),$$

kur $\bar{\tau}_r$ ir kāda noteikta $t$ vērtība intervalā $(t_r, t_{r-1})$.

Ievērojot augšējo, summa (4) dabū veidu:

$$\sum_1^n f[\varphi(\tau_r)]\,(t_r - t_{r-1})\,\varphi'(\bar{\tau}_r). \tag{5}$$

Kā zināms, summā (4) vērtību $\xi_r$ var ņemt pēc patikas intervalā $\delta_r$, tādēļ to var darīt arī ar $\tau_r$. To ievērojot izvēlam

$$\tau_r = \bar{\tau}_r,$$

tad summu (5) dabū veidu:

$$\sum_1^n f[\varphi(\bar{\tau}_r)]\,(t_r \quad t_{r-1})\,\varphi'(\bar{\tau}_r). \tag{6}$$

Tā tad

$$\sum_1^n f(\xi_r)\,\delta_r = \sum_1^n f[\varphi(\bar{\tau}_r)]\,(t_r - t_{r-1})\,\varphi'(\bar{\tau}_r)$$

Ar $n \to \infty$, dabūjam

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

Šī izteiksme rāda, ka izdarot noteikta integrala transformaciju, zem integrala jāieved $x$ vietā $\varphi(t)$ un $dx$ vietā $\varphi'(t)\,dt$. Robežu $a$ un $b$ vietā jāieved tām piekārtotās $\alpha$ un $\beta$ vērtības. Ja $b$ mainīgs, tad mainīgs arī $\beta$

tad

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt$$

Beidzamā formula izteic:

No katras integralformulas var dabūt jaunu integralformulu, ievietojot $x$ vietā kādu funkciju no $x$ un $dx$ vietā šīs funkcijas diferecialu.

Piemērs.

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n = 1} + C.$$

Liekot $x$ vietā $\varphi(x)$ un $dx$ vietā $\varphi'(x)\,dx$ dabūjam:

$$\int [\varphi(x)]^n\,\varphi'(x)\,dx = \frac{[\varphi(x)]^{n+1}}{n+1} + C.$$

No

$$\int \frac{dx}{x} = lx + C$$

dabūjam:

$$\int \frac{\varphi'(x)\,dx}{\varphi(x)} = l\,\varphi(x) + C.$$

Apskatīsim ievietošanas gadijumu kad

$$x = -t.$$

Še dabūjam:

$$\text{ar } x = a,\quad t = -a;\quad \text{ar } x = b,\quad t = = -b;$$
$$dx = -dt.$$

Ar augšējām vērtibām dabūjam

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-a}^{-b} f(-t)\,.\,(-dt) = -\int_{-a}^{-b} f(-t)\,dt = \int_{-b}^{-a} f(-t)\,dt.$$

Noteikta integrala vērtiba nemainas, ja mainam argumenta apzīmi, tādēļ liekot labajā pusē $t$ vietā $x$ dabūjam:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-b}^{-a} f(-x)\,dx \tag{7}$$

No šīs izteiksmes dabūjam divas bieži lietotas formulas. Ja $f(x)$ ir pāru funkcija, tad:

$$f(-x) = f(x). \tag{8}$$

Tā kā

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx, \tag{9}$$

tad, ievērojot (7) un (8), dabūjam:

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_0^a f(-x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx. \tag{10}$$

Ievērojot (9) un (10) dabūjam:

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx. \quad [f(-x) = f(x)].$$

Ja funkcija $f(x)$ ir nepāru funkcija, tad

$$f(-x) = -f(x). \tag{8a}$$

Tad ievērojot (7) un (8ª) dabūjam:

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_0^a f(-x)\,dx = -\int_0^a f(x)\,dx.$$

Ievērojot šo izteiksmi un (9) dabūjam:

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = -\int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = 0. \qquad [f(-x) = -f(x)]$$

Tā piemēram, ievērojot, ka cos $x$ ir pāru funkcija:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = 2 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = 2 \mid \sin x \mid_{0}^{\frac{\pi}{2}} = 2 \quad (1 - 0) = 2.$$

Ievērojot, ka sin $x$ ir nepāru funkcija:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = 0.$$

Šie rezultāti viegli ieskatami no cos $x$ un sin $x$ grafikām.

2) Ja transformacijas nolīdzinājumi

$$x = \varphi\,(t) \text{ un } t = \psi\,(x)$$

neizpilda dotos noteikumus, tad jāizpēta, kā mainas $t$, kad $x$ nepārtraukti mainas no $a$ līdz $b$. Tajās vietās, kurās $t$ maina savu virzienu, pārveidotais integrals jāsadala.

Piemērs:

$$\int_{0}^{\pi} \sin x \, dx = - \mid \cos x \mid_{0}^{\pi} = \mid \cos x \mid_{\pi}^{0} = \cos 0 - \cos \pi =$$

$$= 1 - (-1) = 2.$$

Ievedam transformaciju:

$$\psi\,(x) = \sin x = t,$$

tad

$$x = \text{arc} \sin t = \varphi\,(t)$$

$$dx = \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}.$$

Ar $x = 0$, $t = \alpha = 0$; ar $x = \pi$, $t = \beta = 0$.

Ievedot augšējās vērtības dotā integralā dabūjam:

$$\int_{0}^{\pi} \sin x \, dx = \int_{0}^{0} \frac{t\,dt}{\sqrt{1 - t^2}} = 0.$$

Kā redzams dabūjam nepareizu rezultatu. Šādu rezultatu dabūjam tādēļ, ka noteikums par substitucijas nolīdzinājumiem nav izpildīts.

$$t = \psi(x) = \sin x$$

ir vienvērtīga funkcija, jo katram $x$ atbilst tikai viena vērtība $t$.

Bet substitucijas nolīdzinājuma inversā funkcija

$$x = \varphi(t) = \text{arc} \sin t$$

nav vienvērtīga funkcija.

Ievērojot augšējo norādījumu, attiecībā uz $t$ maiņu, kad $x$ mainās no $a$ līdz $b$, redzams:

kad $x$ mainās no 0 līdz $\frac{\pi}{2}$

$t$ mainās no 0 līdz 1 (ar $dt > 0$)

kad $x$ mainās no $\frac{\pi}{2}$ līdz $\pi$

$t$ mainās no 1 līdz 0 (ar $dt < 0$)

Tā tad $t$ maina virzienu ar $x = \frac{\pi}{2}$ tādēļ dotais integrals jāsadala pie $x = \frac{\pi}{2}$. Tā tad:

$$\int_0^\pi \sin x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x\,dx. \tag{a}$$

Izdarot augšā noradīto substituciju izteiksmes ($a$) labajā pusē, ievērojot robežas un apstākli, ka ja $t$ mainās no 0 līdz 1, $dt$ ir pozitivs un ja $t$ mainās no 0 līdz 1, $dt$ ir negativs dabūjam:

$$\int_0^\pi \sin x\,dx = \int_0^1 \frac{t\,dt}{\sqrt{1-t^2}} + \int_1^0 \frac{t(-dt)}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^1 \frac{t\,dt}{\sqrt{1-t^2}} - \int_1^0 \frac{t\,dt}{\sqrt{1-t^2}} =$$

$$= \int_0^1 \frac{t\,dt}{\sqrt{1-t^2}} + \int_0^1 \frac{t\,dt}{\sqrt{1-t^2}} = 2\int_0^1 \frac{t\,dt}{\sqrt{1-t^2}} = -2\left|\sqrt{1-t^2}\right|_0^1 =$$

$$= 2\left|\sqrt{1-t^2}\right|_1^0 = 2.$$

Pareizu rezultatu arī dabūjam, ja izvedam augšējo substituciju nenoteiktā integralā, tad izdaram pārveidotā integrala integrēšanu un rezultatā ievietojam $t$ vērtību no substitucijas nolīdzinājuma, kā rāda sekojošais piemērs

$$\int \sin x\, dx = \int \frac{t\, dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\sqrt{1-t^2} = -\sqrt{1-\sin^2 x} = -\cos x.$$

Tad

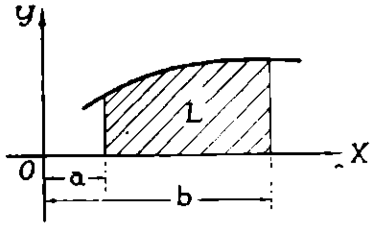
$$\int_0^\pi \sin x\, dx = -\left|\cos x\right|_0^\pi = \left|\cos x\right|_\pi^0 = \cos 0 - \cos\pi = 1-(-1) = 2.$$

## Trešā nodaļa.

## Pielietojumi ģeometrijā. Diferencialģeometrija V

**14. Plāknē atrodoša laukuma aprēķināšana. (Kvadratura.)** Ja pieņemam, ka $y = f(x)$ ir nepārtraukta, vienvērtīga funkcija intervalā $(\alpha, \beta)$ un šajā intervalā atrodas $a$ un $b$, pie kam $a < b$, tad (zīm. 12) svītrotais laukums, kā redzējām

$$L = \int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b y\, dx. \qquad (1)$$

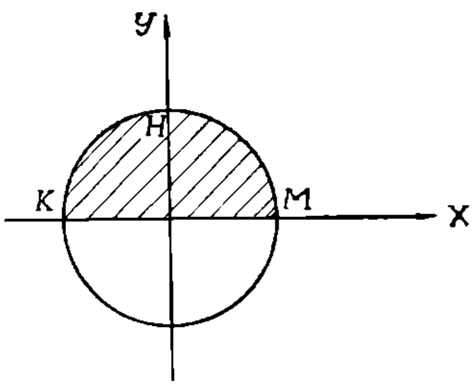


Zīm. 12.

Piemērs.

Riņķa laukums.

a) Riņķa nolīdzinājums artogonalās koordinatās ir:



Zīm. 13.

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0,$$
$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}.$$

Kā redzam zīmējumā 13, ja ņemam augšējās divvērtīgās funkcijas zaru

$$y = \sqrt{r^2 - x^2},$$

dabūjam riņķa ordinatas virs $x$ ass. Pusriņķa laukums virs $x$ ass tad ir:

$$L = \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx.$$

Parciali integrējot, kā parādīts [5] (8) dabūjam:

$$\int \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{r^2 - x^2} + \frac{r^2}{2} \text{arc sin } \frac{x}{r}.$$

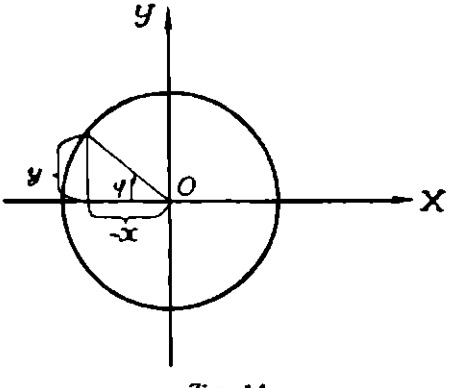
$$\int\limits_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \left| \frac{x}{2}\sqrt{r^2 - x^2} + \frac{r^2}{2} \text{arc sin } \frac{x}{r} \right|_{-r}^{r} =$$

$$\left[\left(0 + \frac{r^2}{2} \text{arc sin } 1\right) - \left(0 + \frac{r^2}{2} \text{arc sin } (-1)\right)\right].$$

$$L = \int\limits_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \frac{r^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \left[\frac{r^2}{2} \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{r^2 \pi}{2}.$$

Tā tad riņķa laukums

$$2L = 2 \cdot \frac{r^2 \pi}{2} = r^2 \pi.$$




Zīm. 14.

β) Riņķa nolīdzinājums parametriskā veidā (zīm. 14):

$$x = -r \cos \varphi;$$
$$dx = r \sin \varphi\, d\varphi.$$
$$y = r \sin \varphi;$$

ar

$$x = -r; \quad \varphi = 0$$

un ar

$$x = r; \quad \varphi = \pi.$$

Ievedot šīs vērtības integralā (1) dabūjam pusriņķi

$$L = \int\limits_{-r}^{r} y dx = \int\limits_{0}^{\pi} r \sin \varphi \cdot r \sin \varphi\, d\varphi = r^2 \int\limits_{0}^{\pi} \sin^2 \varphi\, d\varphi =$$

$$= r^2 \int\limits_{0}^{\pi} \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}\, d\varphi = r^2 \left[\frac{1}{2} \int\limits_{0}^{\pi} d\varphi - \frac{1}{2} \int\limits_{0}^{\pi} \cos 2\varphi\, d\varphi\right] =$$

$$= r^2 \left[\frac{1}{2} |\varphi|_0^{\pi} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int\limits_{0}^{\pi} \cos 2\varphi\, d2\varphi\right] = r^2 \left[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} |\sin 2\varphi|_0^{\pi}\right].$$

$$L = r^2 \frac{\pi}{2} \quad \text{un} \quad 2L = 2 \cdot r^2 \frac{\pi}{2} = r^2 \pi$$

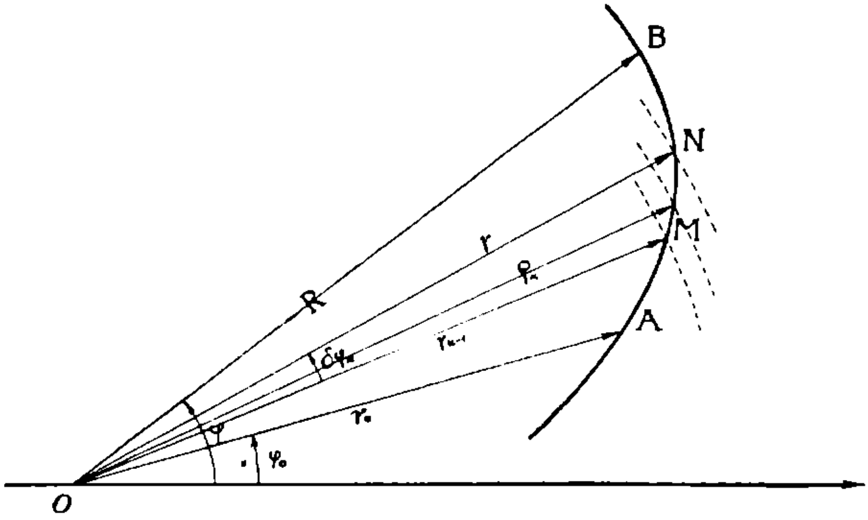
$\gamma$) Kvadratura, ja līknes nolīdzinājums dots polarkoordinatās.

Aprēķināt sektora $OABO$ laukumu. (Zīm. 15.) Līknes $AB$ nolīdzinājums dots

$$r = f(\varphi).$$

Leņķi $\varphi - \varphi_0$ iedalum pēc patikas $n$ daļās, apzīmējam

$$\varphi_k - \varphi_{k-1} = \delta\varphi_k.$$




Zīm. 15.

Par sektora $OABO$ elementa $OMNO$ laukumu $\Delta S$ varam izteikt

$$\frac{1}{2}\,\rho^2_{\min}\,\delta\varphi_k < \Delta S < \frac{1}{2}\,\rho^2_{\max}\,\delta\varphi_k.$$

Še $\rho_{\max}$ ir vislielākā un $\rho_{\min}$ vismazākā $r$ vērtība daļas intervalā $\delta\varphi_k$. Tad

$$\Delta S = \frac{1}{2}\,\rho_k^2\,\delta\varphi_k.$$

Še $\rho_k$ atrodas starp $\rho_{\max}$ un $\rho_{\min}$ vērtībām daļas intervalā $\delta\varphi_k$. Šim radiusam vektoram $\rho_k$ atbilstošo leņķi apzīmējam ar $\theta_k$. Tad

$$\rho_k = f(\theta_k).$$

Ievērojot augšējo dabūjam

$$\Delta S = \frac{1}{2}\,[f(\theta_k)]^2\,.\,\delta\varphi_k.$$

Saskaņā ar [8] tad

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_1^n \Delta S = \lim_{n\to\infty} \sum_1^n \frac{1}{2} [f\theta_k)]^2 \delta\varphi_k = \frac{1}{2}\int_{\varphi_0}^{\varphi} r^2 d\varphi.$$

Piemērs.

Archimeda spirales nolīdzinājums ir

$$r = a\varphi.$$

Sektora $S$ laukums, no radiusa $r_1$ ar leņķi $\varphi_1$ līdz radiusam $r_2$ ar leņķi $\varphi_2$, ir:

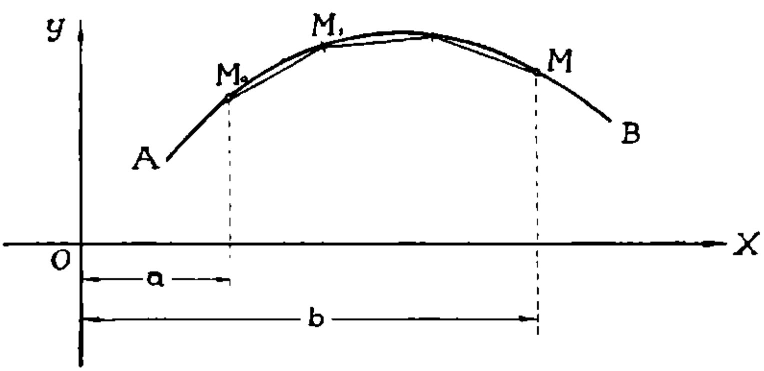
$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2\, d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} a^2\varphi^2\, d\varphi = \frac{1}{2}\,\frac{a^2}{3}\,|\,\varphi^3\,|_{\varphi_1}^{\varphi_2}$$

Ja $\varphi_1 = 0$ un $\varphi_2 = 2\pi$, tad

$$S = \frac{1}{2}\,\frac{a^2}{3}\,|\,\varphi^3\,|_0^{2\pi} = \frac{a^2}{2\cdot 3}\; 2^3\pi^3 = \frac{4}{3}\,a^2\pi^3.$$

**15. Plāknē atrodokas līknes loka garums. (Rektifikacija).** Ar nolīdzinājumu

$$y = f(x)$$




Zīm. 16.

dota plāknē līkne $AB$ (zīm. 16).

Pieņemam, ka funkcijas $f(x)$ un $f'(x)$ vienvērtīgas, nepārtrauktas intervalā $(a, b)$.

Loku $M_0M$ iedalam $n$ daļās, kas var būt arī nevienlīdzīgas. Tad punktiem

$$M_0\ M_1\ M_2 \qquad M_n = M$$

atbilst abscisas

$$a = x_0\ x_1\ x_2 \qquad x_n = b.$$

Punktus $M_0M_1$, $M_1M_2$ u. t. t. savienojam ar taisnēm un dabūjam līknē ierakstītu poligonu.

P a r  l ī k n e s  g a r u m u,  s t a r p  p u n k t i e m  $M_0$  u n  $M$  s a u c  i e r a k s t ī t ā  p o l i g o n a  p e r i m e t r a  r o b e ž u,  u z  k u r u  t a s  t i e c a s,  k a d  i e d a l ī j u m u  s k a i t s  $n \to \infty$.

Poligona mala ir:

$$c_r = M_{r-1}M_r = \sqrt{(x_r - x_{r-1})^2 + (y_r - y_{r-1})^2} =$$
$$= \sqrt{(x_r - x_{r-1})^2 + [f(x_r) - f(x_{r-1})]^2}.$$

Pielietojot Lagranža teoremu dabūjam:

$$c_r = \sqrt{(x_r - x_{r-1})^2 + (x_r - x_{r-1})^2 f'(\xi_r)^2} = (x_r - x_{r-1})\sqrt{1 + f'(\xi_r)^2}.$$

Poligona perimetrs $p$ ir:

$$p = \sum_1^n c_r = \sum_1^n (x_r - r_{r-1})\sqrt{1 + f'(\xi_r)^2}$$

Liekam

$$x_r - x_{r-1} = \delta_r,$$

tad

$$p = \sum_1^n \delta_r \sqrt{1 + f'(\xi_r)^2}$$

Apzīmējam loku $\widehat{M_0M}$ ar $s$, tad:

$$\lim_{n\to\infty} p = s \qquad (\delta_r \to 0)$$

$$s = \lim_{n\to\infty} p = \lim_{n\to\infty} \sum_1^n \delta_r \sqrt{1 + f'(\xi_r)}$$

No [8] zinams, ka

$$\lim_{n\to\infty} \sum_1^n \delta_r \sqrt{1 + [f'(\xi_r)]^2} = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

Tā tad

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

Ja $M$ uz līknes mainīgs punkts, tad $b$ vietā liekot $x$ dabūjam

$$s = \int_a^x \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx. \tag{1}$$

Ja loks $s$ aug ar augošu $x$, tad sakne še jāņem ar $+$ zīmi. Pretējā gadijumā sakne dabu $-$ zīmi.

Diferencējot formulu (1) attiecībā uz $x$, dabūjam

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + f'(x)^2},$$

$$ds = \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx = \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Ja līknes nolīdzinājums dots parametriskā veidā

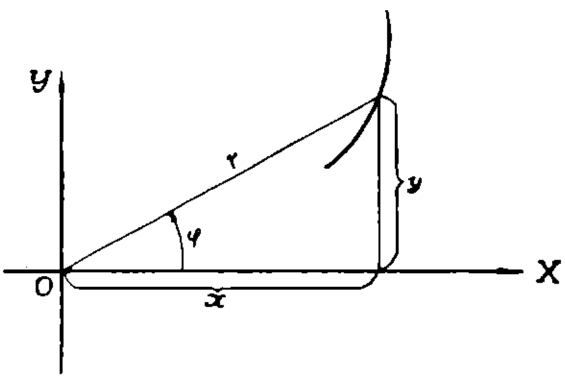
$$x = \varphi(t); \quad y = \psi(t),$$

tad

$$ds = \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2} \, . \, dt$$

un

$$s = \int_{t_1}^{t} \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\, dt.$$




Zīm. 17.

Ja līkne dota polarkoordinatās ar nolīdzinājumu

$$r = f(\varphi), \quad \text{(zīm. 17)}$$

tad

$$x = r \cos \varphi;$$

$$dx = dr \cos \varphi - r \sin \varphi\, d\varphi.$$

$$y = r \sin \varphi;$$

$$dy = dr \sin \varphi + r \cos \varphi\, d\varphi.$$

Ieliekot $dx$ un $dy$ vērtības sekojošā formulā dabūjam

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{(dr \cos \varphi - r \sin \varphi\, d\varphi)^2 + (dr \sin \varphi + r \cos \varphi\, dy)^2} =$$

$$= \sqrt{dr^2 + r^2\, d\varphi^2} = \sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2}\; d\varphi.$$

Apzīmējot

$$\frac{dr}{d\varphi} = r',$$

dabūjam

$$ds = \sqrt{r'^2 + r^2}\quad d\varphi.$$

Šo sakni ņemam ar + zīmi, ja loks aug ar augošu $\varphi$. Loka garumu dabūjam

$$s = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{r'^2 + r^2}\quad d\varphi.$$

Piemērs:

Archmieda spirales nolīdzinājums ir

$$r = a\varphi.$$

$$r' = a.$$

$$ds = \sqrt{a^2 + a^2\varphi^2}\quad d\varphi$$

$$s = a\int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{1 + \varphi^2}\, d\varphi.$$

Nenoteiktais integrals $\int \sqrt{1 + \varphi^2} d\varphi$ aprēķināts [5] kur dabūjām

$$\int \sqrt{1 + \varphi^2}\, d\varphi = \frac{\varphi}{2}\sqrt{1 + \varphi^2} + \frac{1}{2}\, l\,(\varphi + \sqrt{1 + \varphi^2}).$$

Tad

$$s = \frac{a}{2}\,|\,\varphi\sqrt{1 + \varphi^2} + l\,(1 + \sqrt{1 + \varphi^2})|_{\varphi_0}^{\varphi_1}.$$

Piemērs.

Riņķa loka garums.

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0,$$

$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}.$$

Ņemam sakni ar + zīmi, t. i. riņķa loku virs $x$ ass, tad

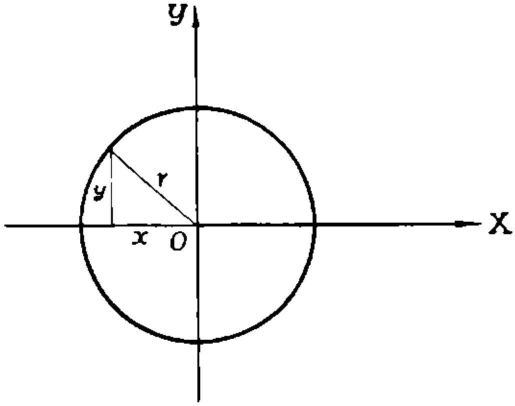
$$y' = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

un

$$s = \int_{-r}^{+r} \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \int_{-r}^{r} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, dx = r \int_{-r}^{r} \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$= r \left| arc \sin \frac{x}{r} \right|_{-r}^{r} = r\,(arc \sin 1 - arc \sin - 1) =$$

$$= r \left[ \frac{\pi}{2} - \left( - \frac{\pi}{2} \right) \right] = r\ \pi.$$



Zīm. 18.

Tā tad pusriņķa loks ir $r\ \pi$ un visa riņķa loks $= 2r\ \pi$.

Piemērs.

Riņķa nolīdzinājums parametriska veidā. (Zīm. 18.)

$$x = - r \cos \varphi;$$
$$x' = r \sin \varphi.$$

$$y = r \sin \varphi$$
$$y' = r \cos \varphi.$$

$$s = \int_0^\pi \sqrt{x'^2 + y'^2}\, d\varphi = \int_0^\pi \sqrt{r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi = r \int_0^\pi d\varphi;$$

Tā tad pusriņķa loks

$$s = r \left| \varphi \right|_0^\pi = r\pi.$$

Riņķa loks $= 2 . r\pi$.

**16. Tilpuma aprēķināšana. (Kubatura).** Apskatīsim virsmu, ko šķeļot ar plāknēm, kas $\parallel zy$ plāknei, dabūjam slēgtas līknes. (zīm. 19). Virsmas šķēlumi ar plāknēm $x = a$ un $x = b$ dod līknes ar laukumiem $L_0$ un $L_n$. Šie šķēlumi un virsma ierobežo tilpumu, ko apzīmējam ar $V$.

Iedalam intervalu $(a, b)$ $n$ daļās, tad dalošo punktu abscisas ir

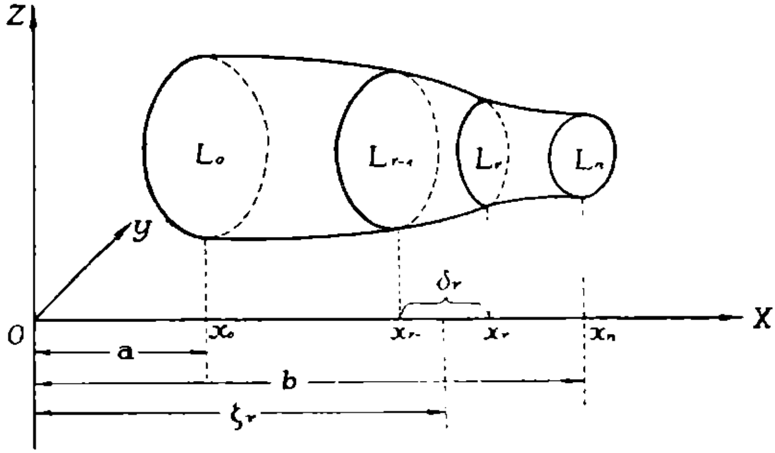
$$a = x_0,\ x_1 \qquad x_{r-1},\ x_r \qquad x_n = b.$$

Apzīmējam

$$x_r - x_{r-1} = \delta_r.$$

Caur dalijuma punktiem $x_{r-1}$ un $x_r$ liekam plāknes $\|$ $zy$ plāknei. Šīs plāknes dod šķēlumus ar laukumiem $L_{r-1}$ un $L_r$. Pieņemam ka šķēluma lauukums ir nepārtraukta funkcija no $x$, šķēluma attāluma no $zy$ plāknes. Tad

$$L_x = f(x).$$




Zīm. 19.

Šķēlumi $L_{r-1}$, $L_r$ un virsma ierobežo elementaro tilpumu $\Delta V$, Ja intervalā $\delta_r$ vislielākais šķēluma laukums ir $L$ un vismazākais $l$, tad redzams, ka

$$l\delta_r < \Delta V_r < L\delta_r.$$

Elementāro tilpumu $\Delta V_r$ atvietojam ar cilindru, kā pamats ir laukums $L_{\xi_r}$ un augstums $\delta_r$ tad

$$\Delta V_r = L_{\xi_r} \quad \delta_r$$

Še

$$l < L_{\xi_r} < L \qquad (L_{\xi_r} \text{ virsmas šķēlums ar plākni } x = \xi_r).$$

Elementaro tilpumu $\Delta V_r$ atvietojām ar cilindru un ja šādi atvietojam visus elementaros tilpumus, tad dotā virsma tiek atvietota ar jaunu virsmu. Šī jaunā virsma jo mazāk atšķiras no dotās virsmas, jo mazāku pieņemam $\delta_r$. Ievērojot augšējo, meklēto tilpumu definē:

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_1^n \Delta V_r = \lim_{n\to\infty} \sum_1^n L_{\xi_r} \delta_r = \lim_{n\to\infty} \sum_1^n f(\xi_r)\, \delta_r$$

Kā zinams

$$\lim_{n\to\infty} \sum_1^n f(\xi_r)\,\delta_r = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Tā tad

$$V = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b L_x\,dx. \tag{2}$$

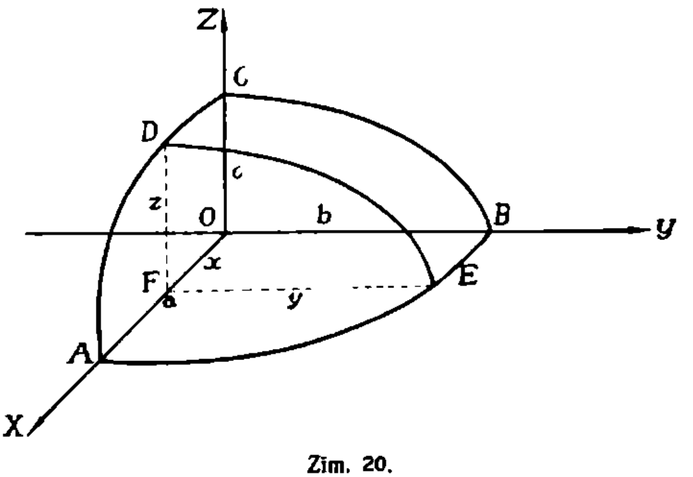
Piemērs.

Dabūt elipsoida tilpumu.

Elipsoida nolīdzinājums ir

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

Zīmējumā 20 parādīts elipsoida oktants




Zīm. 20.

Izdarot šķēlumu $\perp$ pret $x$ asi, attālumā $x$ no $yz$ plāknes, dabūjam elipsi ar pusasīm $z$ un $y$, no kuras apskatam $\frac{1}{4}$ daļu.

No elipses nolīdzinājuma $xy$ plāknē

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

dabūjam:

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

No elipses nolīdzinājuma $xz$ plāknē

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

dabūjam

$$z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

$$\text{Laukums } DEF = \frac{1}{4} yz\pi = \frac{1}{4}\, bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\pi = f(x).$$

Elipsoida $\frac{1}{8}$ daļas tilpums tad, ievērojot formulu (2), ir:

$$V = \int_0^a \frac{1}{4} bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\pi\, dx = \frac{\pi\, bc}{4}\int_0^a\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{\pi\, bc}{4a^2}\int_0^a (a^2 - x^2)dx =$$

$$= \frac{\pi\, bc}{4a^2}\left| a^2x - \frac{x^3}{3}\right|_0^a = \frac{\pi\, bc}{4a^2}\cdot\frac{2}{3}a^3 = \frac{\pi\ abc}{6}.$$

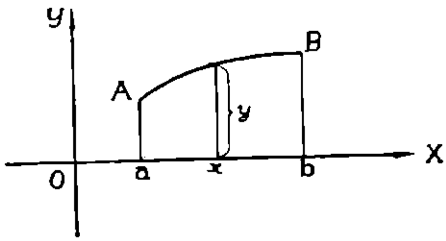
Visa elipsoida tilpums

$$V = 8 .\frac{\pi abc}{6} = \frac{4}{3}\pi\ \ abc.$$

R o t a c i j a s  ķ e r m e ņ a  t i l p u m s.

Ja līkne $AB$ (zīm. 21.), kuras nolīdzinājums ir

$$y = f(x),$$



Zīm. 21.

griežas ap $x$ asi, tad dabūjam rotacijas ķermeni. Še katrs šķēlums $L$, $\perp$ pret $x$ asi, ir riņķis ar radiusu $= y$ un laukumu

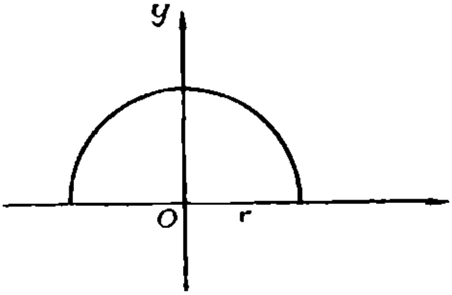
$$L_x = y^2\ \pi = f(x)^2\ \pi.$$

Tādēļ rotacijas ķermeņa tilpums, ievērojot formulu (2) ir

$$V = \int_a^b L_x \pi\ dx = \int_a^b \pi\ \ y^2 . dx = \pi\int_a^b y^2 dx.$$

Piemērs.

Lodi dabūjam, ja pusriņķis griežas ap $x$ asi. (Zīm. 22.)




Zīm. 22.

Še

$$y^2 = r^2 - x^2.$$

Lodes tilpums $V$ tad ir

$$V = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\, dx =$$

$$= \pi \left( r^2 x - \frac{x^3}{3} \right)_{-r}^{r} =$$

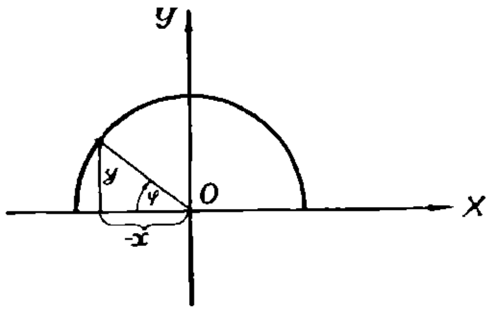
$$= \pi \left[ \left( r^3 - \frac{r^3}{3} \right) - \left( - r^3 + \frac{r^3}{3} \right) \right] = \pi \left( 2r^3 - \frac{2}{3} r^3 \right) = \frac{4}{3} r^3 \pi$$

Ja riņķa nolīdzinājums dots parametriskā veidā

$$x = - r \cos \varphi;$$

$$dx = r \sin \varphi \, d\varphi.$$

$$y = r \sin \varphi.$$




Zīm. 23.

Tad

$$V = \pi \int_0^{\pi} (r \sin \varphi)^2 \;(r \sin \varphi \, d\varphi) = \pi \int_0^{\pi} r^3 \sin^3 \varphi \, d\varphi = r^3 \pi \int_0^{\pi} \sin^3 \varphi \, d\varphi.$$

$$\int \sin^3 \varphi \, d\varphi = \int \sin^2 \varphi \sin \varphi \, d\varphi = - \int (1 - \cos^2 \varphi) \, d \cos \varphi =$$

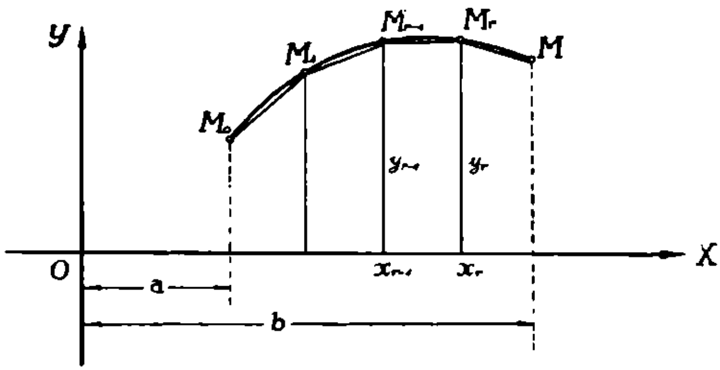
$$= - \cos \varphi + \frac{\cos^3 \varphi}{2}.$$

$$\int_0^{\pi} \sin^3 \varphi \, d\varphi = - \cos \varphi + \frac{\cos^3 \varphi}{2} \Big|_0^{\pi} = \left[ \left( 1 - \frac{1}{3} \right) - \left( - 1 = \frac{1}{3} \right) \right] = \frac{4}{3}.$$

Tad

$$V = r^3 \pi \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{3} r^3 \pi.$$

**17. Rotacijas virsmas laukuma aprēķināšana. (Komplanacija)** Pieņemam ka $y = f(x)$ ir vienvērtīga, nepārtraukta funkcija intervalā $(a, b)$; tad, ja šīs funkcijas attēls likne $M_0\ M$, (zīm. 24).




Zīm. 24

griežas ap $x$ asi, likne $M_0\ M$ veido rotacijas virsmu.

Loku $M_0\ M$ iedalam $n$ daļās, tad liknes punktiem

$$M_0\ M_1\ M_2 \qquad M_{r-1}\ M_r \qquad M_n = M,$$

atbilst loki

$$s_0\ s_1\ s_2 \qquad s_{r-1}\ s_r \qquad s_n = s.$$

Apzīmējam loku

$$M_{r-1}\ M_r = s_r - s_{r-1} = \Delta s_r .$$

Savienojot ar taisnēm punktus $M_0\ M$, $M_1\ M_2$ $\quad M_{r-1}\ M_r$, u. t. t. dabujam poligonu.

Par rotacijas virsmu, ko veido likne $M_0\ M$, griežoties ap $x$ asi sauc tās virsmas robežvērtibu, ko veido rotacijā liknē $M_0\ M$ ierakstitā poligona malas, kad $n \to \infty$ un katra mala tiecas uz 0.

Apzīmējam chordu

$$M_r - M_{r-1} = c_r .$$

Rotacijā taisne $c_r$ veido nogriesto kona virsmu $\omega_r$

$$\omega_r = c_r \cdot 2 \cdot \frac{y_{r-1} + y_r}{2} \cdot \pi. \tag{1}$$

Rotacijas virsmu, ko veido likne $M_0\, M$, apzīmējam ar $\Omega$. Rotacijas virsmu definē ar izteiksmi

$$\Omega = \lim_{n\to\infty} \sum_1^n \omega_r . \qquad (c_r \to 0). \tag{2}$$

Nolīdzinājumu (1) varam rakstīt

$$\omega_r = 2\pi . \frac{y_{r-1} + y_r}{2} \Delta s_r - 2\pi \frac{y_{r-1} + y_r}{2} (\Delta s_r - c_r).$$

tad

$$\lim_{n\to\infty} \sum_1^n \omega_r = 2\pi \lim_{n\to\infty} \sum_1^n \frac{y_{r-1}+y_r}{2} \Delta s_r - 2\pi \lim_{n\to\infty} \sum_1^n \frac{y_{r-1}+y_r}{2} (\Delta s_r - c_r) \tag{3}$$

Apskatam izteiksmes (3) labās puses otro locekli. Apzīmējam

$$\frac{y_{r-1} + y_r}{2} = \eta_r .$$

Intervalā $(a, b)$ atrodošo vislielāko $\eta_r$ apzīmējam ar $\eta$, tad

$$0 < \sum_1^n \eta_r (\Delta s_r - c_r) < \eta \sum_1^n (\Delta s_r - c_r) = \eta (\widehat{M_0 M} - \sum_1^n c_r) \tag{4}$$

Saskaņā ar loka definiciju

$$\widehat{M_0 M} = \lim_{n\to\infty} \sum_1^n c_r ,$$

tādēļ

$$\lim_{n\to\infty} \eta \sum_1^n (\Delta s_r - c_r) = \lim_{n\to\infty} \eta (\widehat{M_0 M} - \sum_1^n c_r) = 0. \tag{5}$$

No (4) un (5) secinam, ka arī

$$\lim_{n\to\infty} \sum_1^n \eta_r (\Delta s_r - c_r) = \lim_{n\to\infty} \sum_1^n \frac{y_{r-1} + y_r}{2} (\Delta s_r - c_r) = 0. \tag{6}$$

Ievērojot (6) redzam no izteiksmes (3), ka

$$\lim_{n\to\infty} \sum_1^n \omega_r = 2\pi \lim_{n\to\infty} \sum_1^n \frac{y_{r-1} + y_r}{2} \Delta s_r = 2\pi \lim_{n\to\infty} \sum_1^n \eta_r \Delta s_r .$$

Tā kā

$$\lim_{n\to\infty} \sum_1^n \omega_r = \Omega$$

un

$$2\pi \lim_{n\to\infty} \sum_{1}^{n} \eta_r \Delta s_r = 2\pi \int_{s_0}^{s} y\, ds,$$

tad

$$\Omega = 2\pi \int_{s_0}^{s} y\, ds. \tag{7}$$

**Šis nolīdzinājums dod rotacijas virsmu ortogonalās koordinatās.** Tā kā

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\, dx,$$

tad

$$\Omega = 2\pi \int_{x_0}^{x} y \sqrt{1 + y'^2}\, dx. \tag{8}$$

**Ja līknes nolīdzinājums dots parametriskā veidā** tad

$$x = \varphi(t); \quad y = \psi(t); \quad ds = \sqrt{\varphi'(t^2) + \psi'(t)^2}\, dt$$

un

$$\Omega = 2\pi \int_{t_0}^{t_1} \psi(t) \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\, dt. \tag{9}$$

**Ja līknes nolīdzinājums dots polarkoordinatās,** tad

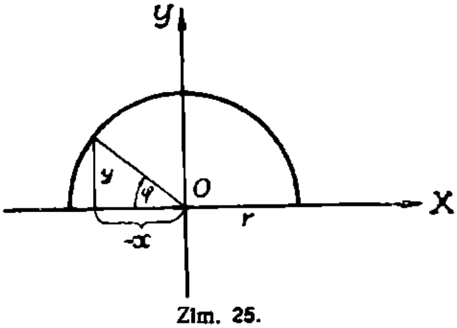
$$r = f(\varphi); \quad v = r \sin\varphi; \quad ds = \sqrt{r'^2 + r^2}\, d\varphi$$

un

$$\Omega = 2\pi \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} r \sin\varphi \sqrt{r'^2 + r^2}\, d\varphi. \tag{10}$$

Piemērs.

Lodes virsmu dabūjam, kad pusriņķis griežas ap $x$ asi (zīm. 25). Šī pusriņķa nolīdzinājums ir



Zīm. 25.

$$y = \sqrt{r^2 - x^2},$$

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\, ds$$

$$\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} = 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}}\, dx =$$

$$= 2\pi r \int_{-r}^{r} dx = 2\pi r \mid x \mid_{-r}^{r} = 2\pi r \cdot 2r = 4r^2\pi.$$

Ja riņķa nolīdzinājums dots parametriskā veidā

$$x = -r\cos\varphi;\quad x' = r\sin\varphi.$$
$$y = r\sin\varphi;\quad y' = r\cos\varphi.$$

Tad

$$\Omega = 2\pi \int_0^{\pi} r\sin\varphi \sqrt{(r\sin\varphi)^2 + (r\cos\varphi)^2}\, d\varphi = 2\pi \int_0^{\pi} r^2 \sin\varphi\, d\varphi =$$

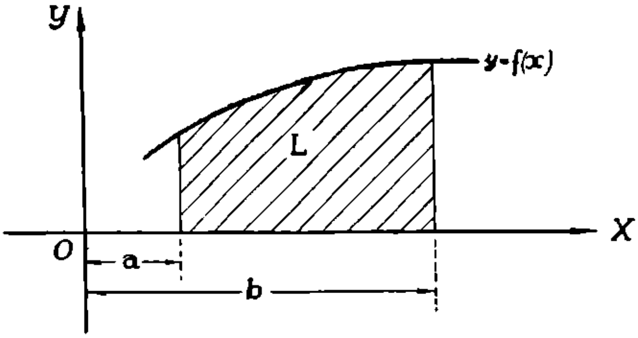
$$= 2\pi r^2 \int_0^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi = -2\pi r^2 \mid \cos\varphi \mid_0^{\pi} = 2\pi r^2 \cdot \cos\varphi \mid_{\pi}^{0} =$$

$$= 2\pi r^2 [1 - (-1)] = 2\pi r^2 \cdot 2 = 4r^2\pi.$$

## Ceturtā nodaļa.

## Integrals ņemts gar likni.

**18. Likņu kvadratura ortogonalās koordinatās.** Apskatīsim jēdzienu, integrals ņemts gar likni, sakarā ar laukuma aprēķināšanu plāknē. Kā redzējām, laukumu $L$ (zīm. 26) dabūjam



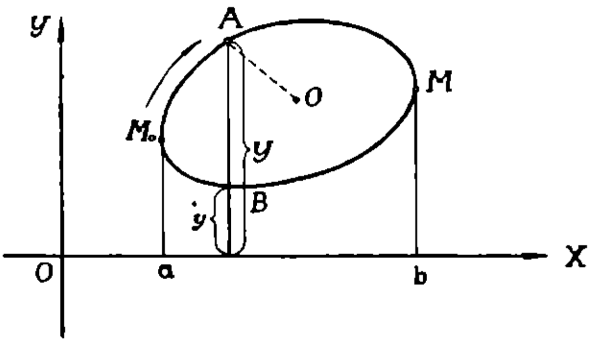

Zīm. 26.

$$L = \int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b y\, dx$$

Še $y = f(x)$ dota kā vienvērtīga, nepārtraukta funkcija no $x$.

Pieņemsim, ka dota slēgta līkne ko taisne $\parallel$ $y$ asij krusto divos punktos.

Pieņemam arī, ka ordinatas ar $x = a$ un $x = b$ (zīm. 27.) ir dotās līknes pieskares. Laukumu $L$, ko ieslēdz šī līkne, dabūjam šādi. Redzams ka




Zīm. 27.

$$L = \int_a^b Ydx - \int_a^b ydx = \int_a^b Ydx + \int_b^a ydx.$$

Ja punkts $A$ aptek līkni $M_0\,AMBM_0$ norādītā virzienā, tad katram līknes punktam ir piekārtota noteikta ordinata. Augšējās izteiksmes labajā pusē atrodošo integralu summu tad varam apzīmēt ar simbolu

$$L = \overline{\int_C} ydx$$

neatšķirot $Y$ un $y$, bet apzīmējot abas ordinatas ar $y$.

Šis simbols lasams: i n t e g r a l s g a r l ī k n i $C$ no $ydx$ negativā virzienā. Līknes $C$ vietā var būt arī konturs, kas veidots no līkņu vai taišņu gabaliem. Negativais virziens še noteicams šādi: novērotājam, kas kustas uz līknes ar punktu $A$ negativā virzienā, līknes ieslēgtais laukums atrodas pa labi.

Šādu integralu ņemtu gar līkni, varam aprēķināt, izteicot $x$ un $y$ kā atkarīgus no kāda parametra $t$, izvēlot parametru $t$ tā, kad parametrs mainas no $t_0$ līdz $t$, tad kustošais, no parametra atkarīgais, punkts aptek visu līkni. Ja

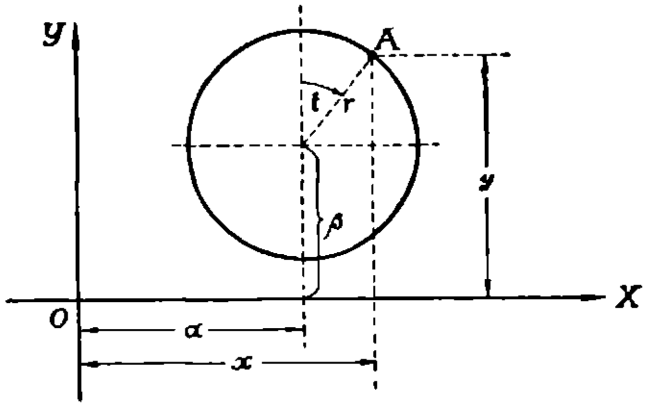
$$x = \varphi(t) \quad y = \psi(t),$$
$$dx = \varphi'(t)\, dt,$$

tad

$$L = \int_{t_0}^{t} \psi(t) \,.\, \varphi'(t)\, dt.$$

P i e m ē r s.

Dabūt riņķa laukumu, kā centra koordinatas ir $\alpha$ un $\beta$ un radiuss $r$. (Zīm. 28.)




Zīm. 28.

Riņķa nolīdzinājums ir

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - r^2 = 0.$$

Šī riņķa nolīdzinājums parametriskā veidā ir

$$x = \alpha + r \sin t; \quad dx = r \cos t \, dt.$$
$$y = \beta + r \cos t.$$

Ja $t$ mainas no $t = 0$ līdz $t = 2\pi$, tad kustošais punkts $A$ aptek visu riņķi negativā virzienā. Tad

$$L = \overline{\int_C} y dx = \int_0^{2\pi} (\beta + r \cos t)\, r \cos t \, dt = \beta r \int_0^{2\pi} \cos t \, dt + r^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt.$$

Še integrals

$$\int_0^{2\pi} \cos t \, dt = 0$$

un

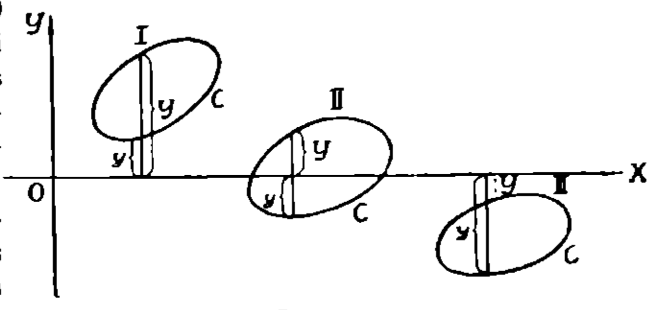
$$\int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} dt + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos 2t \, dt.$$

Še beidzamais integrals ir 0, tā tad

$$L = r^2 \quad \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} dt = \frac{r^2}{2} \quad |t|_0^{2\pi} = r^2\pi.$$

Zīmējumā 29 parādīti gadījumi I, II, III, kad slēgtas līknes laukums ieņem dažādu stāvokli pret $x$ asi.

Ar līkni ieslēgtais laukums visos trijos gadījumos, ka viegli ieskatams ir



Zīm. 29.

$$L = \int\limits_C^{-} ydx.$$

Augšējā formulā, kā augšā norādīts līknes ordinatas $Y$ un $y$ abas apzīmētas ar $y$.

Tā kā

$$\int\limits_C^{-} ydx = \int_a^b Ydx + \int_b^a ydx \qquad \text{(sk. zīm. 27)}$$

tad

$$\int\limits_C^{+} ydx = \int_b^a Ydx + \int_a^b ydx.$$

Saskaitot dabūjam

$$\int\limits_C^{-} ydx + \int\limits_C^{+} ydx = 0$$

tā tad

$$\int\limits_C^{+} ydx = - \int\limits_C^{-} ydx.$$

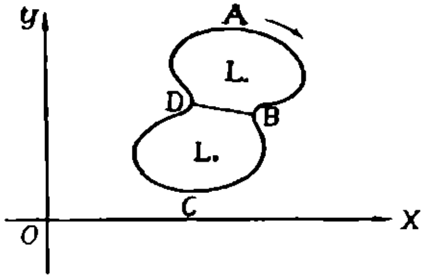
Šī formula izteic:

J a i n t e g r a l a m g a r l ī k n i m a i n a m v i r z i e n u, t a d m a i n a s i n t e g r a l a z ī m e.

Ja līkni krusto taisne, kas paralela $y$ asij, vairāk kā divos punktos, tad sadalam konturu daļās, lai katras daļas konturs tiktu krustots tikai divos punktos. (Zīm. 30.)

Tad

$$L = L_1 + L_2 = \int\limits_{DABD} y\,dx + \int\limits_{BCDB} y\,dx = \int\limits_{DAB} y\,dx + \int\limits_{BD} y\,dx + \int\limits_{BCD} y\,dx + \int\limits_{DB} y\,dx$$




Zīm. 30.

Integrali

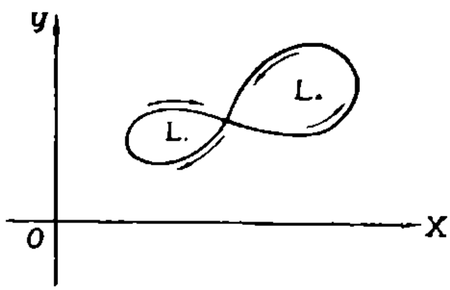
$$\int\limits_{BD} y\,dx \quad \text{un} \quad \int\limits_{DB} y\,dx$$

ir ar pretējām zīmēm, tie iznīcinas; paliek

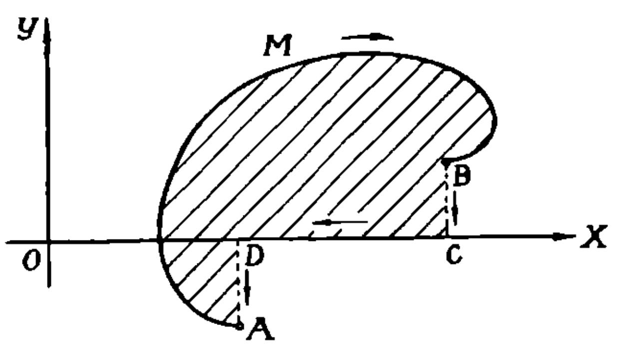
$$L = \int\limits_{DAB} y\,dx + \int\limits_{BCD} y\,dx = \overline{\int\limits_{C}} y\,dx.$$

Ja līknei ir dubultpunkti, tad (zīm. 31)

$\overline{\int\limits_{C}} y\,dx$ dod laukumu $L_1$ un $L_2$ starpību, jo laukumu $L_1$ dabūjam, aptekot līknes daļu kas ieslēdz $L_1$ negatīvā virzienā un $L_2$, aptekot līknes otru daļu, pozitīvā virzienā. Ja līkne nav slēgta, ka zīmējumā 32, tad, ievedot punktu $B$ un $A$ ordinatas $CB$ un $AD$,




Zīm. 31.




Zīm. 32.

dabūjam slēgtu konturu. Veidojam integralu ņemtu gar šo konturu

$$\int\limits_{AMBCDA} y dx = \int\limits_{AMB} y dx + \int\limits_{BC} y dx + \int\limits_{CD} y dx + \int\limits_{DA} y dx. \qquad (\alpha)$$

Labajā pusē

$$\int\limits_{BC} y dx = 0, \text{ jo taisnes } BC \text{ punktiem } dx = 0.$$

Tāpat

$$\int\limits_{CD} y dx = 0, \text{ jo taisnes } CD \text{ punktiem } y = 0$$

un

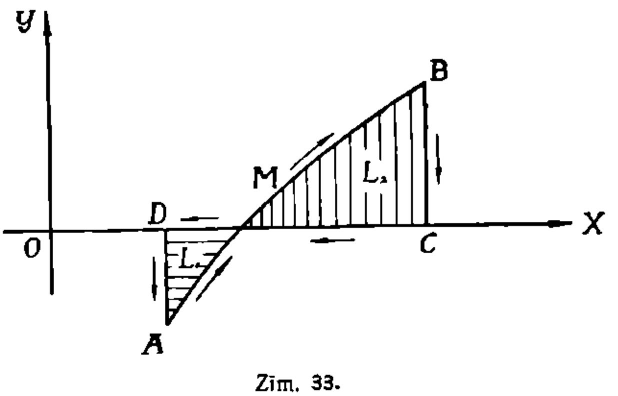
$$\int\limits_{DA} y dx = 0, \text{ jo taisnes } DA \text{ visiem punktiem } dx = 0.$$

Izteiksme ($\alpha$) kreisā pusē dod svītroto laukumu $L$, tā tad ievērojot augšējo

$$L = \int\limits_{AMB} y dx = \overline{\int\limits_{C}} y dx$$

Ja līkne krusto $x$ asi zīm. 33, tad redzams, ka

$$\int\limits_{AB} y dx = \overline{\int\limits_{C}} y dx$$



Zīm. 33.

dod $L_2 - L_1$, jo $L_2$ aptecēts negatīvā virzienā, bet $L_1$ pozitivā.

**19 Sektora laukuma diferencials ortogonalā koordinatu sistemā.** Sektora laukums $dS$ polarkoordinatu sistemā ir

$$dS = \frac{1}{2} r^2 d\varphi.$$

Sektoru ierobežojošās līknes nolīdzinājums dots ar

$$r = f(\varphi).$$

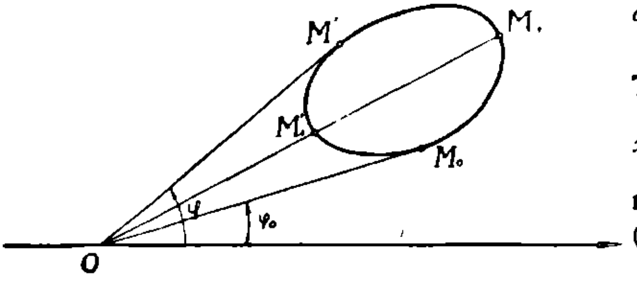
Šis liknes punkta $M$ koordinatas ir dotas ar

$$x = r\cos\varphi\,; \quad y = r\sin\varphi.$$

No augšējā dabūjam:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\varphi \quad \text{un} \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

Diferencējot dabūjam




Zīm. 34.

$$d\varphi = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}. \quad (\alpha)$$

Tā kā

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad (\beta)$$

redzam no $(\alpha)$ un $(\beta)$, ka

$$r^2 d\varphi = x\,dy - y dx$$

un tā tad

$$dS = \frac{1}{2}\,(x\,dy - y\,dx) \tag{1}$$

Ja dota slēgta līkne, zīm. 34, bez dubultpunkta, ko radiuss vektors krusto tikai divos punktos $M_1'$, $M_1$, tad ar šo līkni ieslēgtais laukums $L$ ir:

$$L = \text{sektors } OM_0M_1M'O - \text{sektors } OM_0M_1'M'O.$$

Apzīmējam radiusus vektorus $OM_1'$ un $OM_1$ ar $r$ un $R_1$ laukums $L$, tad ir

$$L = \frac{1}{2}\int_{\varphi_0}^{\varphi} R^2\,d\varphi - \frac{1}{2}\int_{\varphi_0}^{\varphi} r^2\,d\varphi = \frac{1}{2}\Big(\int_{\varphi_0}^{\varphi} R^2\,d\varphi + \int_{\varphi}^{\varphi_0} r^2\,d\varphi\Big) \tag{2}$$

Šo izteiksmi

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} R^2\,d\varphi + \int_{\varphi}^{\varphi_0} r^2\,d\varphi$$

varam uzskatīt ka integralu ņemtu gar līkni un tādēļ neatšķirot $R$ un $r$ rakstīt

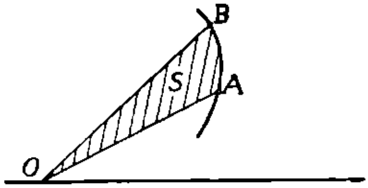
$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} R^2\, d\varphi + \int_{\varphi}^{\varphi_0} r^2\, d\varphi = \overset{+}{\int_C} r^2\, d\varphi = \overset{+}{\int_C} (x\, dy - y\, dx).$$

Tā tad augšējās slēgtās līknes laukums ir dots ar izteiksmi:

$$L = \frac{1}{2} \overset{+}{\int_C} r^2\, d\varphi = \frac{1}{2} \overset{+}{\int_C} (x\, dy - y\, dx) \tag{3}$$

Ja integralu

$$\frac{1}{2} \overset{+}{\int_C} r^2 d\varphi = \frac{1}{2} \overset{+}{\int_C} (x\, dy - y\, dx)$$



Zīm 35.

ņemam gar neslēgtās līknes loku $AB$, tad dabūjam sektora $OAB$ laukumu, jo sektora laukums ir:

$$S = \frac{1}{2} \overset{+}{\int_C} r^2\, d\varphi = \frac{1}{2} \int_{OABO} r^2\, d\varphi = \frac{1}{2} \int_{OA} r^2\, d\varphi + \frac{1}{2} \int_{AB} r^2\, d\varphi + \frac{1}{2} \int_{BO} r^2\, d\varphi$$

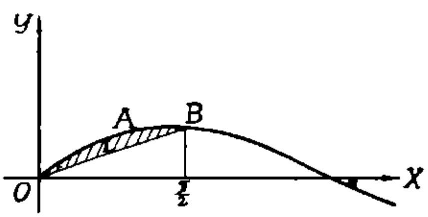
Še

$$\frac{1}{2} \int_{OA} r^2\, d\varphi = 0, \quad \text{jo} \quad d\varphi \text{ gar } OA \text{ ir } 0$$

$$\frac{1}{2} \int_{BO} r^2\, d\varphi = 0, \quad \text{jo} \quad d\varphi \text{ gar } BO \text{ ir } 0.$$

Tā tad

$$S = \frac{1}{2} \int_{AB} r^2\, d\varphi = \frac{1}{2} \overset{+}{\int_C} (x\, dy - y\, dx)$$



Zīm. 36.

P i e m ē r s:

Dota līkne

$$y = \sin x.$$

Dabūt svītroto laukumu $L$ (zīm.36.)

$$L = \text{sektors } OBAO = \frac{1}{2} \int\limits_{BAOB} (x\,dy - y\,dx) = \frac{1}{2} \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} (x \cos x\,dx - \sin x\,dx).$$

Pēdējā integrala robežas ir $\frac{\pi}{2}$ un 0, jo ja $x$ mainas no $\frac{\pi}{2}$ līdz 0, tad punkts $B$ aptek sektora loku $BAO$ pozitivā virzienā.

$$L = \frac{1}{2}\left[\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} x \cos x\,dx - \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin x\,dx\right].$$

$$\int x \cos x\,dx = x \sin x - \int \sin x\,dx = x \sin x + \cos x$$

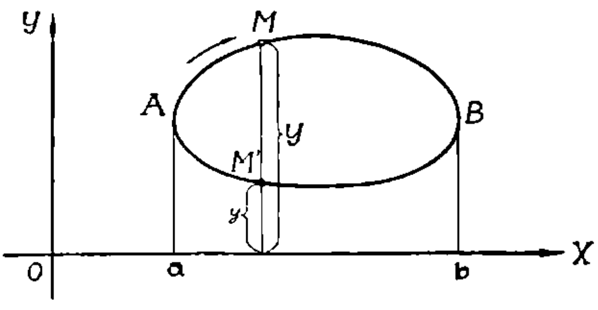
$$\int \sin x\,dx = -\cos x.$$

Ievērojot augšējo nenoteikto integralu izteiksmes, dabūjam:

$$L = |x \sin x + \cos x - (-\cos x)|_{\frac{\pi}{2}}^{0} = \frac{1}{2}\,|x \sin x + 2 \cos x|_{\frac{\pi}{2}}^{0} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[2 - \left(\frac{\pi}{2} \cdot 1\right)\right] = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

**20. Rotacijas tilpums ar integralu ņemtu gar līkni.** Rotacijas tilpums še tiek veidots ar slēgtu līkni (zīm. 37), kam nav dubultpunktu. Šo līkni krusto taisne $\|\, y$ asij divos punktos. Punkti $A$ un $B$ ir abscisām $a$ un $b$ piekārtotu ordinatu pieskaršanās punkti līknei.



Zīm. 37.

Līkne $AMB$ veido rotacijas tilpumu:

$$V_2 = \pi \int\limits_a^b Y^2\,dx.$$

Likne $AM'B$ veido rotacijas tilpumu:

$$V_1 = \pi \int_a^b y^2\, dx.$$

Ar slēgto likni $AMBM'A$ veidotais rotacijas tilpums ir:

$$V = V_2 - V_1 = \pi \int_a^b Y^2\, dx - \pi \int_a^b y^2\, dx = \pi \int_a^b Y^2\, dx + \pi \int_b^a y^2\, dx$$

Piekārtojot katram liknes punktam šī punkta ordinatas kvadratu varam rakstīt:

$$\pi \int_a^b Y^2\, dx = \pi \int_{AMB} Y^2\, dx$$

un

$$\pi \int_b^a y^2 dx = \int_{BM'A} y^2\, dx.$$

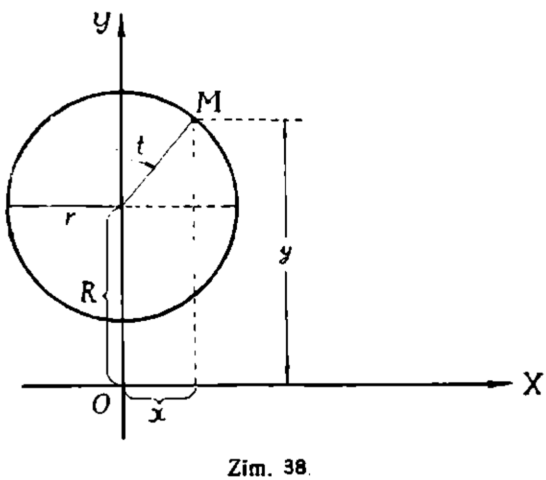
Še redzams, ka šādā gadījumā atšķirība starp $Y$ un $y$ atkrīt, tādēļ varam rakstīt:

$$V = \pi \int_{AMB} y^2\, dx + \pi \int_{BM'A} y^2\, dx = \pi \int_{\overline{C}} y^2\, dx.$$

Tā tad, ar slēgtu likni veidoto rotacijas tilpumu dabūjam ar augšējo integralu, kas ņemts gar dotās liknes kontūru $C$ negativā virzienā.

Šī liknes integrala aprēķināšanai, liknes nolīdzinājums jāizteic parametriskā veidā

$$x = \varphi(t); \qquad y = \psi(t).$$




Zīm. 38.

Parametrs $t$ ir tā jāieved, ka ja $t$ mainas no $t_0$ līdz $t$, mainīgais punkts $M$ aptek visu likni.

Piemērs:

Dabūt tora tilpumu. (zīm. 38).

Dots riņķa nolīdzinājums parametriskā veidā:

$$x = r \sin t;\ dx = r \cos t\, dt$$
$$y = R + r \cos t.$$

No zīm. 38 redzams, ja $t$ mainas no 0 līzd $2\pi$, mainīgais punkts $M$ aptek visu riņķi. Ja šis riņķis griežas ap $x$ asi, tad veidotais rotacijas tilpums ir tors.

Tora tilpums, saskaņā ar augšējo, ir:

$$V = \pi \int\limits_{\bar{C}} y^2\, dx = \pi \int\limits_0^{2\pi} (R + r \cos t)^2 r \cos t\, dt =$$

$$= \pi \int\limits_0^{\pi} (R^2 r \cos t + 2Rr^2 \cos^2 t + r^3 \cos^3 t)\, dt =$$

$$= \pi R^2 r \int\limits_0^{2\pi} \cos t\, dt + \pi 2R r^2 \int\limits_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt + \pi r^3 \int\limits_0^{2\pi} \cos^3 t\, dt.$$

Ievērojot $\cos t$ un $\cos^3 t$ grafikas redzams, ka augšējā izteiksmē pirmais un pēdējais integrals ir 0.

Tad

$$V = \pi 2Rr^2 \int\limits_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt = \pi 2Rr^2 \int\limits_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2}\, dt =$$

$$= \frac{\pi 2Rr^2}{2} \int\limits_0^{2\pi} dt + \frac{\pi 2Rr^2}{2} \int\limits_0^{2\pi} \cos 2t\, dt.$$

Tā kā še otris integrals ir 0, tad

$$V = \pi R r^2 \left| t \right|_0^{2\pi} = 2\pi^2 R r^2.$$

Šo izteiksmi varam rakstīt

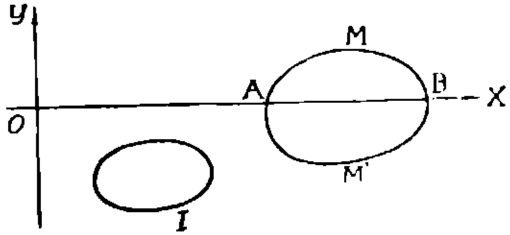
$$V = r^2\pi \,.\, 2R\pi. \qquad \text{(Guldina formula).}$$

Viegli ieskatams, ka

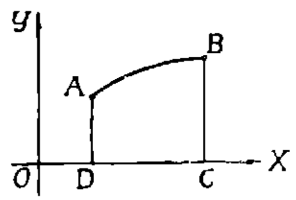
$$\pi \int\limits_{\bar{C}} y^2 dx$$

dod tilpumu $V$ arī ja viss slēgtais konturs atrodas zem $x$ ass. (I) (zīm. 39.). Bet ja konturs krusto $x$ asi, tad dabūjam

$$\pi \int\limits_{\bar{C}} y^2 dx = V' - V'',$$



Zīm. 39.



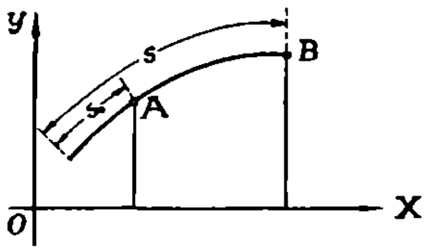
Zīm. 40.

kur $V'$ ir rotacijas tilpums, kas veidots ar līkni $AMB$, un $V''$ rotacijas tilpums, kas veidots ar līkni $AM'B$.

Ja līkne nav slēgta, (zīm. 40.) tad $\pi \int\limits_{AB} y^2 dx$ dod rotacijas tilpumu, veidotu ar konturu $ABCD$.

**21. Rotacijas virsmas komplanacija.** Kā redzējām, rotacijas virsmas laukums ir (zīm. 41).

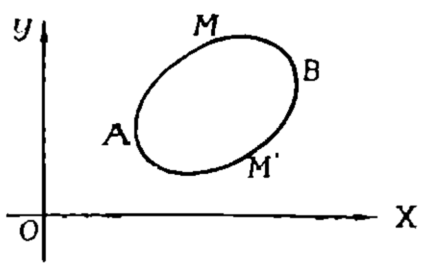
$$\Omega = 2\pi \int\limits_{s_0}^{s} y ds.$$



Zīm. 41.

Ievērojot integrala, ņemta gar līkni definiciju varam rakstīt

$$\Omega = 2\pi \int\limits_{AB} y ds.$$



Zīm. 42.

Ja konturs slēgts, (zīm. 42) tad

$$\Omega = 2\pi \int\limits_{AMBM'A} y ds = 2\pi \int\limits_{\bar{C}} y ds.$$

Integrala aprēķināšanai jaizteic līknes nolīdzinājums parametriskā veidā.

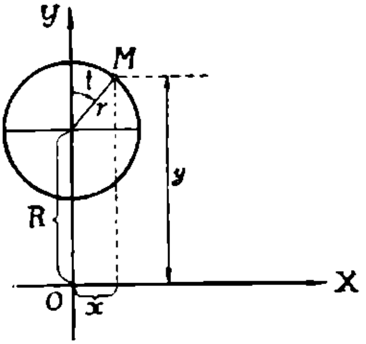
$$x = \varphi(t);$$
$$y = \psi(t).$$

Parametrs $t$ ir tā jāieved, ka ja $t$ mainas no $t_0$ līdz $t$, tad mainīgais punkts $M$ aptek visu līkni. Tā kā

$$ds = \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\, dt,$$

tad

$$\Omega = 2\pi \int_{t_0}^{t} \psi(t) \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\, dt. \qquad (1)$$



Zīm. 43.

Piemērs:

Tora virsma (zīm. 43.)

$$x = r \sin t; \quad x' = \varphi'(t) = r \cos t.$$
$$y = R + r \cos t; \quad y' = \psi'(t) = -r \sin t.$$

Ja $t$ mainas no $t_0 = 0$ līdz $t = 2\pi$, tad $M$ aptek visu riņķi.

Ievedot augšējās vērtības izteiksmē (1) dabūjam

$$\Omega = 2\pi \int_0^{2\pi} (R + r \cos t) \sqrt{r^2 \cos^2 t + r^2 \sin t}\, dt =$$

$$= 2\pi r \int_0^{2\pi} (R + r \cos t)\, dt = 2\pi r R \int_0^{2\pi} dt + 2\pi r^2 \int_0^{2\pi} \cos t\, dt.$$

Labajā pusē otrs integrals ir 0, tādēļ:

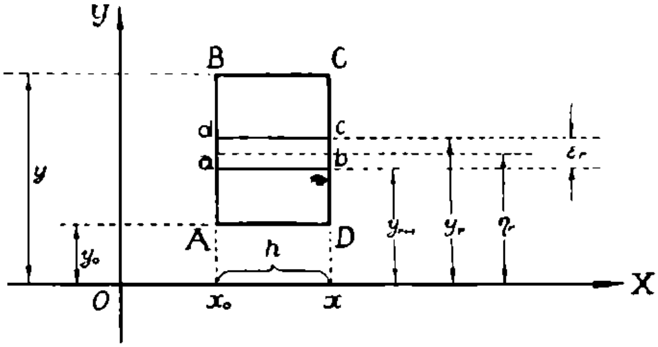
$$\Omega = 2\pi r R\, |t|_0^{2\pi} = 4\pi^2 r R = 2\pi r \quad 2\pi R \qquad \text{(Guldina formula)}$$

**22. Statiskais moments, smaguma centrs un inerces moments.** Dots $xy$ plāknē paralelograms (zīm. 44.), ar vienmērīgi sadalītu masu.

Iedalam starpību $y - y_0$ $n$ daļās. Intervalā $y_r - y_{r-1} = \varepsilon_r$ ņemam pēc patikas $\eta_r$. Elementarlaukums $a\, b\, c\, d$ ir

$$\Delta_r = h \cdot \varepsilon_r.$$

Veidojam reizinājumu $\Delta_r \eta_r$, tad par paralelograma $ABCD$ **statisko momentu** $M_{s_x}$ attiecībā uz $x$ asi, sauc sekojošo izteiksmi




Zīm. 44.

$$M_{s_x} = \lim_{n\to\infty} \sum_1^n \Delta_r \quad \eta_r = h \lim_{n\to\infty} \sum_1^n \eta_r \, \varepsilon_r = h \int_{y_0}^{y} y \, dy$$

$$M_{s_x} = h \int_{y_0}^{y} y \, dy \quad \frac{h}{2} \, |y^2| _{y_0}^{y} = h \quad \frac{y^2 - y_0^2}{2}$$

Apzīmējam paralelograma laukumu ar $F$, tad

$$F = h \quad (y - y_0)$$

Liekam

$$F \quad Y = M_{s_x}, \tag{A}$$

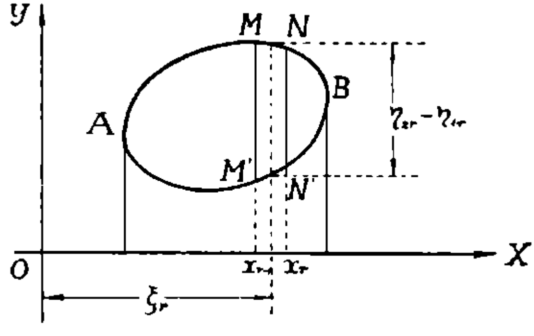
tad

$$Y = \frac{M_{s_x}}{F} = \frac{h}{2} \frac{(y^2 - y_0^2)}{h \, (y - y_0)} = \frac{y + y_0}{2}. \tag{B}$$

Tāpat dabūjam

$$X = \frac{M_{s_y}}{F} = \frac{x_0 + x}{2}.$$

Punktu paralelogramā, ar koordinatām $X$, $Y$, sauc par paralelograma **smaguma centru**, $X$ un $Y$ par **smaguma centra koordinatām**.




Zīm. 45.

Ja laukums ieslēgts ar likni, tad tā smaguma centra koordinatas dabūjam sekojoši.

Intervalu $a$, $b$ (zīm. 45.) iedalam $n$ daļās. Apzīmējam

$$x_r - x_{r-1} = \delta_r.$$

Pieņemam, ka abscisai $\xi_r$ atbilst trapecas $M'MNN'$ vidus līnija $\eta_{2_r} - \eta_{1_r}$.

Šo trapecu atvietojam ar paralelogramu, ka augstums ir $\eta_{2_r} - \eta_{1_r}$ platums $\delta_r$ un laukums $(\eta_{2_r} - \eta_{1_r})\,\delta_r$. Šī paralelograma statiskais moments, attiecībā uz $x$ asi, ievērojot formulas $(A)$ un $(B)$ ir

$$(\eta_{2_r} - \eta_{1_r})\,\delta_r\,\frac{\eta_{2_r} + \eta_{1_r}}{2}.$$

Visa, liknes ieslēgtā laukuma, statiskais monents, attiecībā uz $x$ asi, tad ir

$$\lim_{n\to\infty}\sum_1^n (\eta_{2_r} - \eta_{1_r})\,\delta_r\,\frac{\eta_{2_r} + \eta_{1_r}}{1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sum_1^n (\eta_{2_r}^2 - \eta_{1_r}^2)\,\delta_r = \frac{1}{2}\int_a^b (y_2^2 - y_1^2)\,dx$$

Apzīmējot ar līkni ieslēgto laukumu ar $F$ un šī laukuma smaguma centra ordinatu ar $Y$, liekam

$$F\quad Y = \frac{1}{2}\int_a^b (y_2^2 - y_1^2)\,dx.$$

Ka zinam

$$\int_a^b (y_2^2 - y_1^2)\,dx = \overline{\int_C} y^2 dx.$$

Tādēļ

$$Y = \frac{1}{2}\,\frac{\overline{\int_C} y^2 dx}{F}.$$

Līdzīgi dabūjam smaguma centra abscisu

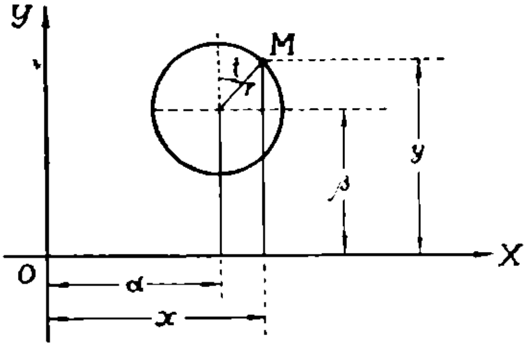
$$X = \frac{1}{2}\,\frac{\overset{+}{\int_C} x^2 dy}{F}$$

Piemērs.

Dabūt riņķa laukuma smaguma centra koordinatas.

Riņķa nolīdzinājums parametriskā veidā ir

$$x = a + r \sin t$$
$$y = \beta + r \cos t.$$




Zīm. 46.

$$Y = \frac{1}{2}\frac{\int\limits_C y^2 dx}{F} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\int\limits_0^{2\pi} (\beta + r\cos t)^2 \; r\cos t\, dt}{r^2\pi} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\int\limits_0^{2\pi} (\beta^2 r\cos t + 2\beta r^2\cos^2 t + r^3\cos^3 t)\, dt}{r^2\pi} =$$

$$= \frac{1}{2r^2\pi}\left[\beta^2 r\int\limits_0^{2\pi}\cos t\, dt + 2\beta r^2\int\limits_0^{2\pi}\cos^2 t\, dt + r^3\int\limits_0^{2\pi}\cos^3 t\, dt\right] =$$

$$= \frac{1}{2r^2\pi}\left[0 + 2\beta r^2\int\limits_0^{2\pi}\frac{1+\cos^2 t}{2}\, dt + 0\right] =$$

$$= \frac{1}{2r^2\pi}\, 2\beta r^2\left[\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} dt + \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\cos 2t\, dt\right] =$$

$$= \frac{1}{2r^2\pi}\, 2\beta r^2\left[\frac{1}{2}\, |t|_0^{2\pi} + 0\right].$$

Tā tad

$$Y = \frac{1}{2r^2\pi}\;\; 2\beta r^2\;\; \pi = \beta.$$

Līdzīgi dabūjam, kā

$$X = a.$$

Kā agrāk redzējām, rotacijas tilpums, ko veido slēgta līkne $C$, griežoties ap $x$ asi, ir:

$$V = \pi \int_{\overline{C}} y^2\, dx,$$

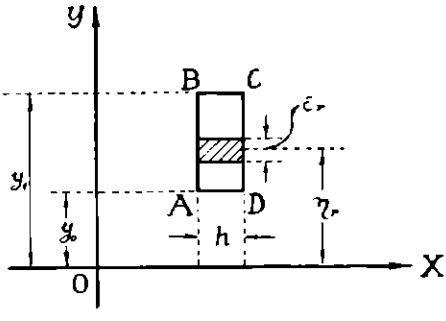
Tā kā

$$F \quad Y = \frac{1}{2} \int_{\overline{C}} y^2\, dx,$$

tad

$$V = 2\, F \quad Y\pi = 2\, Y\, \pi \quad F \qquad \text{(Guldina formula.)}$$

Rotacijas tilpumu dabū, reizinot kontura aptverto laukumu ar šī laukuma smaguma centra ceļu.




Zīm. 47.

Še pieņemts, ka konturs nekrusto rotacijas asi $x$.

Plāknē atrodoša laukuma inerces moments.

Pieņemam, ka paralelograms $ABCD$ (zīm. 47.) homogens un tā malas paralelas koordinatu asīm. Iedalam intervalu $(y_0, y_1)$ $n$ daļās, apzīmējot

$$y_r - y_{r-} =$$

Par paralelograma $ABCD$ laukuma inerces momentu $J_x$, attiecībā uz $x$ asi, sauc izteiksmi:

$$J_x = \lim_{n \to \infty} \sum_1^n (h \quad \varepsilon_r)\, \eta_r^2 = h \lim_{n \to \infty} \sum_1^n \eta_r^2\, \varepsilon_r \qquad h \int_{y_0}^{y_1} y^2\, dy.$$

$$J_x = h \int_{y_0}^{y_1} y^2\, dy = \frac{h}{3}\,(y_1^3 - y_0^3). \qquad (C)$$

Inerces moments, kad laukumu ierobežo līkne.

Pieņemsim, ka līknes konturu krusto taisne kas $y \parallel$ asij divos punktos un konturām nav dubultpunktu. (Zīm. 48).

Intervalu $(a, b)$ iedalam $n$ daļās.

Apzīmējam

$$h = \delta_r = x_r - x_{r-1}.$$

Tad uzskatot elementarlaukumu par paralelogramu un ievērojot augšējo formulu $(C_1)$ dabūjam visa, ar līkni ieslēgtā laukuma inerces momentu

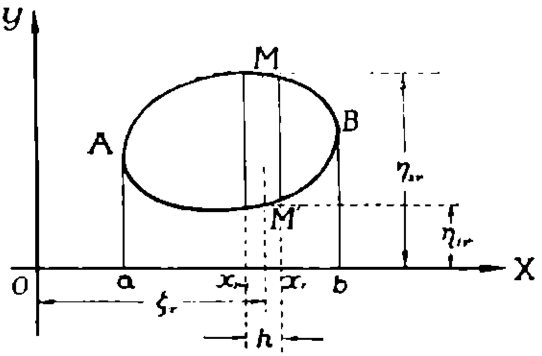
$$J_x = \lim_{n\to\infty} \sum_1^n \frac{1}{3} (\eta_{2_r}^3 - \eta_{1_r}^3)\, \delta_r = \frac{1}{3}\int_a^b (y_2^3 - y_1^3)\, dx.$$

Ar $y_2$ apzīmētas līknes $AMB$ un ar $y_1$ līknes $AM'B$ ordinatas (zīm.48.)

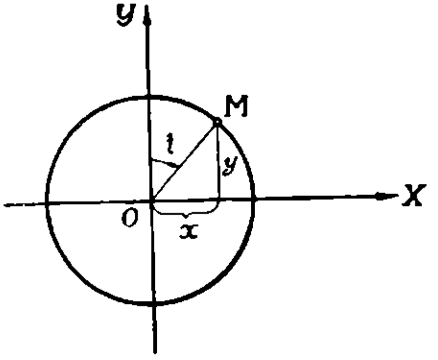
Augšējo izteiksmi varam arī rakstīt

$$J_x = \frac{1}{3}\int_C y^3\, dx.$$

Šis līknes integrals aprēķinams, kā agrāk norādīts.




Zīm. 48.




Zīm. 49.

Piemērs.

Riņķa inerces moments attiecībā uz diametru.

Riņķa nolīdzinājums parametriskā veidā ir

$$x = r \sin t; \qquad y = r \cos t.$$

$$J_x = \frac{1}{3}\int_C y^3\, dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} r^3 \cos^3 t\; r \cos t\; dt.$$

$$J_x = \frac{1}{3}\, r^4 \int_0^{2\pi} \cos^4 t\, dt.$$

$$\int \cos^4 t\, dt = \int \cos^3 t \cos t\, dt \quad \int \cos^3 t\, d(\sin t) =$$
$$= \cos^3 t \sin t - \int \sin t\; 3\cos^2 t\,(-\sin t)\, dt =$$
$$= \cos^3 t \sin t + 3\int \sin^2 t \cos^2 t\, dt =$$
$$= \cos^3 t \sin t + 3\int (1-\cos^2 t)\cos^2 t\, dt =$$
$$= \cos^3 t \sin t + 3\int \cos^2 t\, dt - 3\int \cos^4 t\, dt.$$
$$\int \cos^4 t\, dt = \frac{\cos^3 t \sin t}{4} + \frac{3}{4}\int \cos^2 t\, dt.$$
$$\int_0^{2\pi} \cos^4 t\, dt = \left|\frac{\cos^3 t \sin t}{4}\right|_0^{2\pi} + \frac{3}{4}\int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt.$$

Labajā pusē pirmā izteiksme ir 0.

Tā tad

$$\int_0^{2\pi} \cos^4 t\, dt = \frac{3}{4}\int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt = \frac{3}{4}\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt =$$
$$= \frac{3}{4}\;\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} dt + \frac{3}{4}\;\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos 2t\, dt$$

Še labajā pusē otrs integrals ir 0.

Tā tad

$$\int_0^{2\pi} \cos^4 t\, dt = \frac{3\cdot 1}{4\;\;2}\,|t|_0^{2\pi} = \frac{3}{4}\pi.$$

un

$$J_x = \frac{1}{3} r^4 \int_0^{2\pi} \cos^4 t\, dt = \frac{1}{3} r^4\;\frac{3}{4}\pi = \frac{r^4\pi}{4}.$$

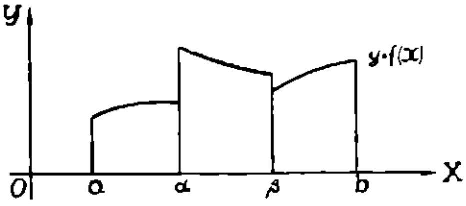
## Piektā nodaļa.

## Noteiktā integrala jēdziena paplašināšana.

**23. Paplašinājumi atkarībā no zemintegrala funkcijas veida.** Noteiktā integrala

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

jēdzienu definējot, tika pieņemts, ka funkcija $f(x)$ integrēšanas intervalā $(a, b)$ ir: vienvērtīga, pozitiva nepārtraukta un kā integrēšanas robežas ir galīgas.



Zim. 50.

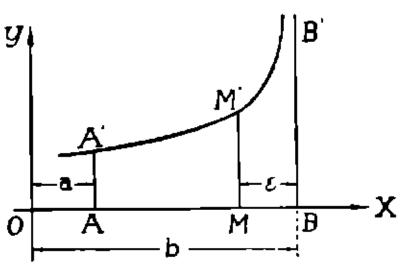
Jau agrāk [10] paplašinājam, kā $f(x)$ var būt intervalā $(a, b)$ tiklab pozitiva kā negativa. Še izdarīsim tālākus paplašinājumus. Ja zemintegrala funkcija $f(x)$ intervalā $(a, b)$ ir pārtraukta galīgu lēcienu veidā, kā redzams zīmējumā 50., vietās $x = \alpha$ un $x = \beta$, tad, ievērojot noteiktā integrala pamata īpašību [12] (3) dabūjam

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0}\left[\int_a^{\alpha-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{\alpha+\varepsilon}^{\beta-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{\beta+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx\right]$$

Lai integralam būtu noteikta vērtība, tad pārtrauktību vietu skaitam jābūt galīgam.

Integralus, kuŗu zemintegrala funkcija integrēšanas intervalā ir nepārtraukta vai arī pārtraukta, ar galīgiem lēcieniem, kuŗu skaits ir galīgs un integrala robežas ir galīgas, sauc par **istiem integraliem**.

Par neīstiem sauc tādus integralus kuŗu integrēšanas intervals ir $\infty$, vai zemintegrala funkcija $f(x) = \infty$, ar kādu vērtību starp integrēšanas robežām, vai arī pie vienas vai abām robežām.



Zim. 51.

Apskatīsim šos neīstos integralus.

a) Funkcija $f(x)$ intervalā $a \leqslant x < b$ ir nepārtraukta, bet ar $x = b$, $f(b) = \infty$;

Šādas funkcijas attēls parādīts zīmējumā 51.

$BB'$ ir līknes $y = f(x)$ asimptota. Integrējam robežās no $a$ līdz $b - \varepsilon$, tad integralam

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

ir noteikta vērtība, laukums $AA'M'MA$.

Ja varam dabūt nenoteikto integralu slēgtā veidā, tad

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

un

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = F(b-\varepsilon) - F(a)$$

Liekam $\varepsilon \to 0$, tad:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} [F(b-\varepsilon) - F(a)]$$

Ar šo robežvērtību dotā gadijumā definē meklēto neīsto integralu.

Tā tad, ja $f(b) = \infty$, tad

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} [F(b-\varepsilon) - F(a)] \qquad (A)$$

Ja augšējā robežvērtība ir galīga, tad tā ir dotā integrala vērtība, bet ja šī robežvērtība ir $\infty$, tad dotā integrala vērtība ir $\infty$.

Pirmā gadijumā laukums starp līkni, abscisu asi, ordinātu $AA'$ un asimptotu $BB'$ (zīm. 51) ir galīgs, un otrā gadijumā šis laukums ir $\infty$.

Šāds pētijums nav vajadzīgs, ja ar ievietošanas palīdzību dotu integralu var pārveidot integralā, kā robežas ir galīgas un zemintegrala funkcija visā integrēšanas intervalā un arī ar augš- un apakš robežu ir galīga

P i e m ē r s:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Še

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad \text{ar} \quad x = 1, \; f(1) = \infty.$$

Ievedam:

$$x = \sin t; \; dx = \cos t\,dt$$

ar

$$x = 0; \; t = 0; \; \text{ar} \; x = 1; \; t = \frac{\pi}{2}.$$

Ar šo substituciju augšējais integrals dabū veidu

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt.$$

Šis integrals ir īsts un tādēļ arī

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = |\text{arc} \sin x|_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

dabū noteiktu vērtību.

Piemērs:

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{b-x}}; \quad \text{še} \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{b-x}}$$

un $f(b) = \infty$. Pielietojot formulu ($A$) dabūjam:

$$\int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{b-x}} = -2 \left| \sqrt{b-x} \right|_a^{b-\varepsilon}$$

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{b-x}} = -2 \lim_{\varepsilon \to 0} \left[ \sqrt{b-(b-\varepsilon)} - \sqrt{b-a} \right] = 2\sqrt{b-a}$$

Tā tad, dotam integralam ir noteikta vērtība.

Piemērs

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^n}.$$

Še

$$f(x) = \frac{1}{(b-x)^n} \quad \text{un} \quad f(b) = \infty.$$

Ar formulu ($A$) dabūjam:

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^n} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{(b-x)^n} = -\lim_{\varepsilon \to 0} \left| \frac{(b-x)^{-n+1}}{-n+1} \right|_a^{b-\varepsilon} =$$

$$= -\lim_{\varepsilon \to 0} \left[ \frac{(b-b+\varepsilon)^{-n+1} - (b-a)^{-n+1}}{-n+1} \right] = -\lim_{\varepsilon \to 0} \left[ \frac{\varepsilon^{-n+1} - (b-a)^{-n+1}}{-n+1} \right]$$

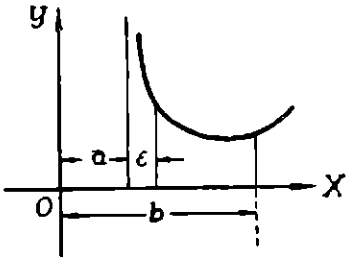
No beidzamā locekļa redzams, ka robežvērtība ir galīga, ja $n < 1$ un tā ir $\infty$, ja $n > 1$.

Ja $n = 1$, tad

$$\int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{b - x} = - l|b - x|_a^{b-\varepsilon}$$

un

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{b - x} = -\lim_{\varepsilon \to 0} l\,[(b - b + \varepsilon) \quad (b \quad a)] = \infty$$



Zim. 52.

Tā tad integralam

$$\int_a^b \frac{dx}{(b - x)^n}$$

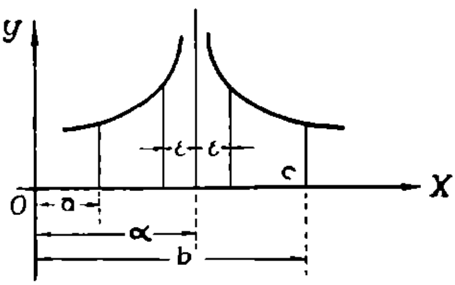
ir galīga vērtība ar $n < 1$ un bezgalīga vērtība ar $n \geqslant 1$.

b) Ja funkcija $f(a) = \infty$, (zīm 52)

tad

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} [F(b) \quad F(a + \varepsilon)]$$



Zim. 53.

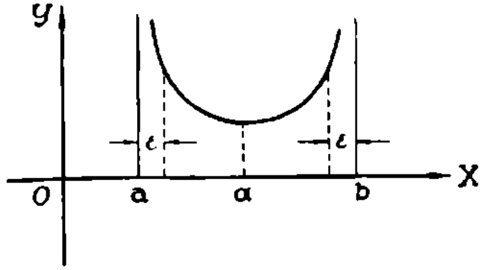
c) Ja $f(\alpha) = \infty$, še $a < \alpha < b$. (Zīm. 53)

Tad

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{\alpha-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\alpha+\varepsilon}^b f(x)\,dx.$$

d) Ja $f(a) = \infty$, un $f(b) = \infty$, ievedam abscisu $\alpha$ ar noteikumu

$$a < \alpha < b.$$




Zīm. 54.

Tad

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{\alpha} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\alpha}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

Augšējos gadijumos varam dabūt meklētās robežvērtības, ja iespējams dabūt dotās funkcijas $f(x)$ nenoteikto integralu

24. **Ja funkcijas $f(x)$ nenoteikto integralu nevaram dabūt slēgtā veidā, tad lai noteiktu, vai dotā integrala vērtība ir galīga vai bezgalīga, pielietojam sekojošu paņēmienu.** Pieņemam, ka integralā

$$J = \int_a^b f(x)\,dx$$

funkcija $f(x)$ ir galīga, kad $a \leqslant x < b$, bet ka

$$f(b) = +\infty.$$

veidojam reizinājumu:

$$(b - x)^n f(x) \qquad (n > 0).$$

Kad $x \to b$, reizinājums dabū veidu $0\,\infty$ Pieņemam, ka varam atrast tādu $n$ ar ko

$$\lim_{x \to b} [(b - x)^n f(x)] = l. \qquad \text{(še } l \text{ galīgs lielums)}$$

Tad pastāv sekojošas izteiksmes:

1) ja ar kādu vērtību $n < 1$

$$\lim_{x \to b} [(b - x)^n f(x)] = l, \qquad (l \text{ var būt arī } 0)$$

tad dotam integralam ir galīga vērtība.

2) ja ar kādu vērtību $n \geqslant 1$

$$\lim_{x \to b} [(b - x)^n f(x)] = l > 0,$$

tad dotā integrala vērtība ir $\infty$.

Pirmais gadijums:

Pieņemam, ka ar kādu $n < 1$

$$\lim_{x \to b} [(b - x)^n f(x)] = l.$$

Redzams, ka tādā gadijumā reizinājuma

$$(b - x)^n f(x)$$

vērtība ir ļoti tuva vērtībai $l$, kad $x$ ir ļoti tuvu $b$. Ievedam abscisu $\alpha$ tā kā $a < \alpha < b$, pie tam $\alpha$ ļoti tuvu $b$, tad:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^\alpha f(x)\,dx + \int_\alpha^b f(x)\,dx.$$

Pirmais integrals labā pusē ir galīgs. Jāpierāda ka arī otrs ir galīgs.

Tā kā:

$$\lim_{x \to b} [(b - x)^n f(x)] = l,$$

tad, pieņemot pozitivu skaitli $M > l$ un ievērojot, ka ja $x$ ļoti tuvu $b$, reizinājuma $(b - x)^n f(x)$ vērtība ļoti tuva $l$, varam $\alpha$ izvēlēt tik tuvu $b$, ka ar $x$ starp $\alpha$ un $b$ arvienu

$$(b - x)^n f(x) < M,$$

un

$$f(x) < \frac{M}{(b - x)^n}, \tag{$\gamma$}$$

Tā kā še $\alpha < b$ un visā intervalā $(\alpha, b)$ izteiksme $(\gamma)$ pastāv, tad arī

$$\int_\alpha^b f(x)\,dx < \int_\alpha^b \frac{M\,dx}{(b - x)^n}.$$

Ja $n < 1$, tad kā agrāk redzējām, integrals

$$M\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^n}$$

ir galīgs, bet tad gālīgs ir arī integrals

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Otrs gadijums:

Pieņemam, ka ar $n \geqslant 1$

$$\lim_{x \to b}[(b - x)^n f(x)] = l > 0.$$

Tad tāpat, kā pirmajā gadijumā sadalam integralu:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^\alpha f(x)\,dx + \int_\alpha^b f(x)\,dx$$

Še $a < \alpha < b$ un $\alpha$ ļoti tuvu $b$.

Labajā pusē pirmais integrals ir galīgs, bet ar $n \geqslant 1$ otrs integrals ir $\infty$, kā tas redzams no sekojošā.

Pieņemam, pozitivu $m$, tādu, ka

$$0 < m < l$$

Kad $x$ ļoti tuvu $b$, tad reizinājuma

$$(b - x)^n f(x)$$

vērtība ļoti tuva $l$ un tādēļ lielāka par $m$. Tad varam $\alpha$ pieņemt tik tuvu $b$, lai visā intervalā $(\alpha, b)$

$$(b - x)^n f(x) > m,$$

tad

$$f(x) > \frac{m}{(b - x)^n},$$

un

$$\int_\alpha^b f(x)\,dx > m\int_\alpha^b \frac{dx}{(b - x)^n}.$$

Labās puses integrals, kā agrāk redzējām, ar 1 ir $\infty$, tādēļ arī dotais integrals

$$\int_a^b f(x)\,dx = \infty.$$

Ja $f(b) = -\infty$, tad pārmainot $y$ ass virzienu, dabūjam jau apskatīto gadījumu.

Ja dots integrals

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

ar $f(a) = +\infty$ ar $a < b$, tad, lai noteiktu vai dotam integralam ir galīga vērtība, apskatam izteiksmi

$$(x - a)^n f(x).$$

Še pastāv sekojošas izteiksmes:

1) ja ar kādu $n < 1$

$$\lim_{x \to a} [x - a)^n f(x)] = l,$$

tad dotā integrala vērtība ir galīga.

2) ja ar kādu $n \geqslant 1$

$$\lim_{x \to a} [(x \quad a)^n f(x)] = l > 0,$$

tad dotā integrala vērtība ir $\infty$.

Piemērs

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^3}}$$

Še

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^3}}; \quad f(1) = \infty.$$

Veidojam

$$(1 - x)^n \quad \frac{1}{\sqrt{1 - x^3}}$$

un meklējam tādu $n$, ar ko

$$\lim_{x \to 1} \left[(1 - x)^n \quad \frac{1}{\sqrt{1 - x^3}}\right]$$

dabū galīgu vērtību. Tā kā

$$\sqrt{1-x^3}=\sqrt{1-x}\,\sqrt{1+x+x^2},$$

redzams, ka

$$\lim_{x\to 1}\left[(1-x)^n\,\frac{1}{\sqrt{1-x}\,\sqrt{1+x+x^2}}\right]$$

dabū galīgu vērtību ar $n=\frac{1}{2}$ tad augšējās izteiksmes robeža ir $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Tā kā še $n<1$, tad $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$ dabū galīgu vertību.

P i e m ē r s.

$$\int\limits_0^1\frac{dx}{1-x^3}.$$

Še

$$f(x)=\frac{1}{1-x^3}=\frac{1}{(1-x)(1+x+x^2)};\ f(1)=\infty$$

Veidojam

$$(1-x)^n\,\frac{1}{(1-x)(1+x+x^2)}.$$

Redzams, ka ja $n=1$, tad izteiksmes robeža ar $x\to 1$ ir $\frac{1}{3}$.

Tā kā še $n=1$ un reizinājuma limes ir $>0$, tad dotā integrala vērtība ir $\infty$

**25. Integrali ar bezgalīgu integrēšanas intervalu.** Ja dots integrals

$$\int\limits_a^\infty f(x)\,dx,$$

kā augšrobeža ir $\infty$, bet $f(x)$ vienvērtīga, nepārtraukta intervalā $(a,+\infty)$. tad apskatam integralu

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx. \qquad (b \text{ galīgs})$$

Šim integralam ir noteikta vērtība. Ja pieņemam $b$ kā mainīgu, tad zinams, ka šī integrala vērtība ir nepārtraukta funkcija no virsrobežas $b$. Tā kā

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

Apskatam

$$\lim_{b\to\infty} [F(b) - F(a)] = \lim_{b\to\infty} F(b) - F(a).$$

Še var būt gadijumi

1) $\lim\limits_{b\to\infty} F(b)$ ir galīga vērtība, tad dotam integralam $\int_a^\infty f(x)\, dx$ ir galīga vērtība un

$$\int_a^\infty f(x) = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\, dx = \lim_{b\to\infty} F(b) - F(a).$$

2) $$\lim_{b\to\infty} F(b) = \infty.$$

Tad

$$\int_a^\infty f(x)\, dx = \infty$$

3) $\lim\limits_{b\to\infty} F(b)$ ir nenoteikta vērtība, tad integralam $\int_a^\infty$ ir nenoteikta vērtība.

P i e m e r s.

$$\int_0^\infty e^{-x}\, dx.$$

Apskatam integralu

$$\int_0^b e^{-x}\, dx = -\left|e^{-x}\right|_0^b = -e^{-b} + 1.$$

Še

$$\lim_{b\to\infty} [-e^{-b}] = 0.$$

Tā tad

$$\int_a^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{b \to \infty} \int_0^b e^{-x} dx = 1.$$

Piemērs.

$$\int_0^{\infty} \frac{x\ dx}{1 + x^2}.$$

Apskatam

$$\int_0^b \frac{x\ dx}{1 + x^2} = \frac{1}{2}\ |l\ (1 + x^2)|_0^b = \frac{1}{2}\ [l\ (1 + b^2) - 0]$$

$$\lim_{b \to \infty} F(b) = \lim_{b \to \infty} l\ (1 + b) = \infty$$

Tā tad

$$\int_0^{\infty} \frac{x\ dx}{1 + x^2} = \infty$$

Piemērs.

$$\int_0^{\infty} \cos x\ dx.$$

Apskatam

$$\int_0^b \cos x\ dx = |\sin x|_0^b = \sin b - 0.$$

Še

$$\lim_{b \to \infty} F(b) = \lim_{b \to \infty} \sin b$$

Tā kā $\lim\limits_{b \to \infty} \sin b$ nav noteikta vērtība, ar $b \to \infty$ tad

$$\int_0^{\infty} \cos x\ dx$$

ir nenoteikta vērtība.

Ja dotu integralu

$$\int_0^{\infty} f(x)\ dx$$

var ar substitucijas palīdzību pārveidot īstā integralā, t. i. tādā, kā robežas ir galīgas un $f(x)$ integrēšanas intervalā, ieskaitot arī intervala robežas, ir vienvērtīga un nepārtraukta, tad integrala vērtības pētīšana nav vajadzīga.

Piemērs.

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^n} \quad \text{ar } n > 0 \quad \text{un} \quad a > 0.$$

Apskatam

$$\int_a^b \frac{dx}{x^n} = \left|\frac{x^{-n+1}}{-n+1}\right|_a^b = \left[\frac{b^{-n+1}}{-n+1} - \frac{a^{-n+1}}{-n+1}\right].$$

Še

$$\lim_{b \to \infty} F(b) = \lim_{b \to \infty} \left[\frac{b^{-n+1}}{-n+1}\right].$$

Redzams, ja $n > 1$, tad augšējā robeža ir 0. Tad

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^n} = -\frac{a^{-n+1}}{-n+1} \qquad (n > 1).$$

Ja $n = 1$, tad

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = l\,b \quad l\,a.$$

Še $\lim\limits_{b \to \infty} l\,b = \infty$, tādēļ

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x} = \infty$$

Ja $n < 1$, tad

$$\lim_{b \to \infty} F(b) = \lim_{n \to \infty} \left[\frac{b^{-n+1}}{-n+1}\right] = \infty$$

Tad

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^n} = \infty$$

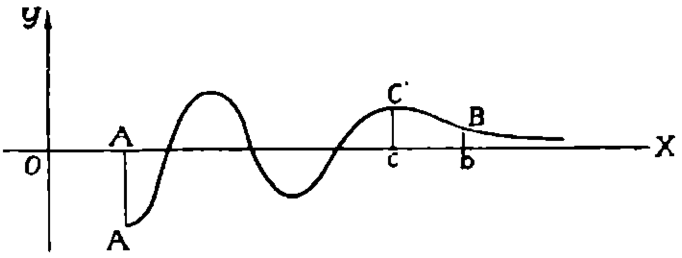
Gadījums, kad zemintegrala funkcijai ar ļoti lieliem $x$ ir pastāvīga zīme un

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0.$$

Pieņemam, ka integrala

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

zemintegrala funkcija $f(x)$ patur pastāvīgu zīmi, piemēram $+$, kad $x \to \infty$. Šādas funkcijas attēls redzams zīmējumā 55 No zīmējuma redzams, ka




Zīm. 55.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Labajā pusē pirmajam integralam ir noteikta vērtība. Otra integrala vērtība aug uz augošu $b$. Lai noteiktu, vai otra integrala vērtība ir galīga, apskatam reizinājumu

$$x^n f(x).$$

Še $n > 0$. Ar $x \to \infty$, reizinājums dabū veidu

$$\infty . 0.$$

Ja var dabūt tādu $n$, ar ko augšējā reizinājuma robežvērtība $l$ ir galīga, kad $x \to \infty$, tad pastāv sekojošas izteiksmes:

1) ja ar $n > 1$

$$\lim_{x \to \infty} x^n f(x) = l, \qquad (l \text{ galīgs})$$

tad

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx \quad \text{ir galīgs.}$$

2) Ja ar $n \leqslant 1$

$$\lim_{x \to \infty} x^n f(x) = l > 0,$$

tad

$$\int_a^{\infty} f(x)\, dx$$

vērtība ir bezgalīga.

Pirmais gadijums.

Pieņemam, ka ar $n > 1$

$$\lim_{x \to \infty} x^n f(x) = l, \qquad (l \text{ var būt arī } 0)$$

tad redzams, ka šī reizinājuma vērtība ir ļoti tuva $l$, ja $x$ ir ļoti liels.

Sadalam doto integralu divos integralos ar abscisu $\alpha$, pie kam $a < \alpha$, bet $\alpha$ ļoti liels skaitlis, tad

$$\int_a^{\infty} f(x)\, dx = \int_a^{\alpha} f(x)\, dx + \int_{\alpha}^{\infty} f(x)\, dx.$$

Labajā pusē pirmā integrala vērtība ir galīga. Še jāpēta otra integrala vērtība. Ja $x \to \infty$, tad

$$\lim_{x \to \infty} x^n f(x) = l$$

Ja ar $M$ apzīmējam pozitivu skaitli, lielāku par $l$, redzams, ka ar ļoti lielu $x$, reizinājums

$$x^n f(x),$$

kas ļoti tuvu $l$, ir mazāks par $M$. Tad $\alpha$ var izvēlēt tik lielu, ka ar $x > \alpha$ arvienu

$$x^n f(x) < M.$$

un

$$f(x) < \frac{M}{x^n},$$

un tādēļ arī

$$\int_{\alpha}^{\infty} f(x)\, dx < \int_{\alpha}^{\infty} \frac{M\, dx}{x^n}. \tag{$\gamma$}$$

Tā kā $n > 1$, tad ievērojot agrāko, otrs integrals izteiksmē ($\gamma$) ir galīgs. Tādēļ arī galīgs ir pirmais integrals un galīgs arī integrals.

$$\int_a^{\infty} f(x)\, dx.$$

P i e m ē r s.

Izpētīt sekojoša integrala vērtību

$$\int_a^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+x^2+1}}$$

Še

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3+x^2+1}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}}.$$

Veidojam

$$x^n f(x) = x^n \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}}.$$

Redzams, ka ar $n = \frac{3}{2}$ augšējās izteiksmes robeža ar $x \to \infty$, ir 1.

Tā kā $n = \frac{3}{2} > 1$ un $l = 1$, tad saskaņā ar norādīto pazīmi, dotam integralam ir galīga vērtība.

O t r s g a d i j u m s.

Pieņemam, ka ar $n \leqslant 1$

$$\lim_{x \to \infty} x^n f(x) = l > 0,$$

tad kā agrāk

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \int_a^a f(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)\,dx. \qquad (a \text{ ļoti liels})$$

Labajā pusē pirmais integrals ir galīgs. Otrs integrals, kā redzēsim, ir bezgalīgs.

Pieņemam pozitivu skaitli $m$, tādu kā

$$0 < m < l.$$

Ja $x$ ļoti liels, tad reizinājums $x^n f(x)$ maz atšķiras no $l$ un tādēļ

$$x^n f(x) > m.$$

Tad varam ņemt $a$ tik lielu, lai ar $x > a$ arvienu

$$x^n f(x) > m.$$

un

$$f(x) > \frac{m}{x^n}.$$

Tad

$$\int_a^\infty f(x)\,dx > \int_a^\infty m\ \frac{dx}{x^n}. \tag{ε}$$

Tā kā $n \leqslant 1$, izteiksmes (ε) otrs integrals ir bezgalīgs, tādēļ arī pirmais ir bezgalīgs un arī

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \infty.$$

Piemērs.

Izpētīt sekojošā integrala vērtību

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+1}}$$

Še

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}} = \frac{1}{x\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}}.$$

Veidojam

$$x^n f(x) = x^n\ \frac{1}{x\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}}$$

Redzams, ka ar $n = 1$ augšējās izteiksmes robeža ar $x \to \infty$ ir 1.

Tā kā $n = 1$ un $l > 0$, tad saskaņā ar doto pazīmi, dotā integrala vērtība ir $\infty$.

Ja integrala abas robežas ir $\infty$, tad integralu sadala

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\ dx = \int_{-\infty}^a f(x)\ dx + \int_a^\infty f(x)\ dx.$$

Ja abi augšējie integrali ir galīgi, tad galīgs arī integrals

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx.$$

**26. Integrals, kā zemintegrala funkcija pastāvīgi maina zīmi bezgalīgā integrēšanas intervalā.** Integrals ar tādu īpašību ir

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Dalam integrēšanas intervalu daļās

$$(0, \pi);\quad (\pi, 2\pi);\quad (2\pi, 3\pi);$$

Tad

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx = a_1;\quad -\int_\pi^{2\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx = a_2;\quad \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx = a_3 \text{ u. t. t.}$$

$$a_{n+1} = (-1)^n \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx. \tag{a}$$

Vērtības

$$a_1,\ a_2,\ a_3 \text{ u. t. t.}$$

veido alternējošu veidu

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 -$$

ar pozitivu sākuma locekli $a_1$.

Ievedam substituciju

$$x = n\pi + t.$$

$$\text{Ar } x = n\pi,\ t = 0;\ \text{ ar } x = (n+1)\pi,\ t = \pi.$$

$$\sin x = \sin(n\pi + t) = (-1)^n \sin t.$$

Ievedot šīs vērtības izteiksmē ($a$), dabūjam

$$a_{n+1} = \int_0^\pi \frac{\sin t\,dt}{n\pi + t}.$$

Redzams, ka

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = 0,$$

Tā tad, augšējā alternējošā rinda ir savirzama un integralam

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$$

ir galīga vērtība, kas, kā vēlāk redzēsim, ir $\frac{\pi}{2}$.

## Sestā nodaļa.

# Noteiktu integralu izvērtēšana.

**27. Noteiktā integrala izvērtēšana ar galvenās izteiksmes palīdzību.** Noteiktā integrala izvērtēšana izdarama vienkārši, ja var dabūt nenoteikto integralu slēgtā veidā, t. i. ja var dabūt slēgtu analītisku izteiksmi funkcijai $F(x)$, kas integrēšanas intervalā nepārtraukta un kuŗas diferencialkvocients intervala $(a, b)$ katrā vietā dod zemintegrala funkciju $f(x)$. Tad, kā redzējām

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

Iekams izvērtējam noteiktu integralu, vajaga izpētīt, vai zemintegrala funkcija $f(x)$ visā integrēšanas intervalā, ieskaitot arī abas robežas, ir galīga un nepārtraukta. Gadijumā, ja aprobežojamies realos skaitļos, jānoskaidro, vai $f(x)$ integrēšanas intervalā ir reala. Tā tad, piemēram, ja dots integrals

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1 - x^9}},$$

jāizpēta vai tā vērtība būs galīga, jo $f(x)$ ar $x = 1$ dabū vērtību $\infty$.

Ja dots integrals

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x - 1}},$$

tad to neintegrējam, jo $f(x)$ visā integrēšanas intervalā ir imaginara.

Apskatīsim dažu noteiktu integralu izvērtēšanu.

1) Jānoteic, pieņemot, ka $m \geqslant 0$ un $n \geqslant 0$, kāda vērtība ir noteiktam integralam

$$\int_0^1 x^m (1 - x)^n\, dx = J(m, n).$$

Ja $m = 0$, tad

$$J(0, n) = \int_0^1 (1 - x)^n\, dx = -\left|\frac{(1 - x)^{n+1}}{n + 1}\right|_0^1 = \left|\frac{(1 - x)^{n+1}}{n + 1}\right|_1^0 = \frac{1}{n + 1}.$$

Ja $n = 0$, tad

$$J(m, 0) = \int_0^1 x^m \, dx = \left| \frac{x^{m+1}}{m+1} \right|_0^1 = \frac{1}{m+1}.$$

Ievedam

$x = 1 - t$, tad, ar $x = 0$; $t = +1$ un ar $x = 1$, $t = 0$;

$$dx = -dt.$$

Tad

$$J(m, n) = -\int_1^0 (1-t)^m t^n \, dt = \int_0^1 t^n (1-t)^m \, dt = J(n, m).$$

Integrējot parciali dabūjam

$$\int_0^1 x^m (1-x)^n \, dx =$$

$$= \left| \frac{x^{m+1}(1-x)^n}{m+1} \right|_0^1 - \int_0^1 n (1-x)^{n-1} \, (-dx) \cdot \frac{x^{m+1}}{m+1} =$$

$$= \left| \frac{x^{m+1}}{m+1} (1-x)^n \right|_0^1 + \frac{n}{m+1} \int_0^1 x^{m+1} (1-x)^{n-1} \, dx.$$

Pirmais loceklis labajā pusē ir 0, tādēļ

$$J(m, n) = \frac{n}{m+1} \int_0^1 x^{m+1} (1-x)^{n-1} \, dx = \frac{n}{m+1} J(m+1, n-1).$$

Ja $n$ vesels skaitlis, tad, pielietojot formulu $n$ reizes, dabūjam

$$J(m, n) = \frac{n \, . \, (n-1)(n-2) \, . \, . \, 1}{(m+1)(m+2) \quad (m+n)} \; J(m+n, 0).$$

Ievērojot, ka

$$J(m+n, 0) = \frac{1}{m+n+1},$$

dabūjam

$$J(m, n) = \frac{n!}{(m+1)(m+2) \, . \, . \, . \, (m+n)(m+n+1)}.$$

Ja $m$ vesels skaitlis, ievērojot, ka $J(m, n) = J(n, m)$, dabūjam

$$J(m, n) = \frac{m!}{(n+1)(n+2)\ldots(n+m)(n+m+1)}.$$

Ja $m$ un $n$ veseli skaitļi tad

$$J(m, n) = \frac{m!}{(n+1)(n+2)\ldots(n+m+1)}\cdot\frac{n!}{n!} = \frac{m!\; n!}{(n+m+1)!}.$$

P i e m ē r s.

$$\int\limits_0 (1-x)^3 \sqrt{x}\, dx = \frac{3!}{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{9}{2}} = \frac{32}{315} = \int\limits_0^1 x^3 (1-x)^2\, dx$$

P i e m ē r s.

$$\int\limits_0^1 x^4 (1-x)^3\, dx = \frac{3!\; 4!}{8!} = \frac{1}{280}.$$

2) Kā redzējām [4]

$$\int \sin^n x dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\, dx. \quad (n \text{ vesels un} \geqslant 2)$$

Ievedot robežas 0 un $\frac{\pi}{2}$ dabūjam

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = -\left|\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{n-1}{n}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\, dx = \frac{n-1}{n}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\, dx.$$

Liekot $n = 2p$, un pielietojot formulu $p$ reizes, dabūjam

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p} x\, dx = \frac{(2p-1)(2p-3)(2p-5)\ldots 1}{2p(2p-2)(2p-4)\ldots 2}\;\frac{\pi}{2};$$

liekot $n = 2p+1$, dabūjam

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p+1} x\, dx = \frac{2p(2p-2)(2p-4)\ldots 2}{(2p+1)(2p-1)(2p-3)\ldots 3}.$$

Septītā nodaļa.

## Bezgalīgu rindu integrēšana.

**28. Vienmērīgi savirzamu rindu integrēšana.** Dota bezgalīga rinda

$$f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \qquad (1)$$

šīs rindas locekļi ir funkcijas no $x$. Pieņemam, ka intervalā $(a, b)$, ieskaitot arī robežas, šīs funkcijas ir vienvērtīgas un nepārtrauktas. Tālāk pieņemam, ka rinda vienmērīgi savirzama intervalā $(a, b)$

Kā zinams, tad šīs rindas suma intervalā $(a, b)$, ieskaitot tā robežas, ir nepārtraukta funkcija no $x$, to apzīmējam ar $f(x)$.

Ja rinda (1) izpilda augšējos pieņēmumus, tad to var locekli pa loceklim integrēt. Tad dabū jaunu rindu.

$$\int_a^b f_0(x)\,dx + \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx +$$

kas ir konvergenta un kuras suma ir

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Pierādijums.

Apzīmējam:

$$f_0(x) + f_1(x) + \qquad + f_n(x) = s_n(x) \qquad (2)$$

$$f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \qquad = r_n(x) \qquad (3)$$

tad

$$f(x) = s_n(x) + r_n(x). \qquad (4)$$

Integrējot (4) dabūjam:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b s_n(x)\,dx + \int_a^b r_n(x)\,dx. \qquad (5)$$

Integrējot (2) dabūjam:

$$\int_a^b s_n(x)\,dx = \int_a^b f_0(x)\,dx + \int_a^b f_1(x)\,dx + \ldots + \int_a^b f_n(x)dx = S_n(x) \qquad (6)$$

Tā kā rinda (1) vienmērīgi savirzama, tad, ja pieņemam pēc patikas mazu pozitivu skaitli $\varepsilon$, varam atrast skaitli $m$, tādu kā ar katru $x$: $(a \leqslant x \leqslant b)$

$$| r_n(x) | < \varepsilon \tag{A}$$

tiklīdz $n \geqslant m$.

Integrējot ($A$) dabūjam:

$$\int_a^b | r_n(x) | \, dx < \int_a^b \varepsilon \, dx,$$

bet tā kā

$$\left| \int_a^b r_n(x) \, dx \right| < \int_a^b | r_n(x) | \, dx,$$

tad

$$\left| \int_a^b r_n(x) \, dx \right| < \int_a^b \varepsilon \, dx = \varepsilon (b - a). \tag{7}$$

No (4) dabūjam:

$$r_n(x) = f(x) - s_n(x).$$

Šo izteiksmi ievedot (7) un ieverojot (6) dabūjam:

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx - \int_a^b s_n(x) \, dx \right| < \varepsilon (b - a)$$

un

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx - S_n(x) \right| < \varepsilon (b - a). \tag{8}$$

Izteiksme (8) pastāv ar katru $n \geqslant m$ un izteic, ka

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{n \to \infty} S_n(x)$$

vai arī

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f_0(x) \, dx + \int_a^b f_1(x) \, dx + \int_a^b f_2(x) \, dx + \; . \; . \tag{9}$$

Ar izteiksmi (9) augšējā teorema pierādita.

Ja uzskatam virsrobežu $b$ kā mainīgu un apakšrobežu kā nenoteiktu, pie kam abām robežām jāatrodas rindas (1) konvergences intervalā, tad dabūjam nenoteiktās integrēšanas formulu.

Potencrindas ir vienmērīgi savirzamas katrā intervalā, kas ietilpst rindas konvergences intervalā, tādēļ

Potencrindu var integrēt locekli pa loceklim katrā intervalā, kas ietilpst rindas konvergences intervalā.

Ja $X$ ir potencrindas konvergences intervala virsrobeža un $a$ atrodas konvergences intervalā, tad ja rinda

$$\int_a^X f_0(x)\,dx + \int_a^X f_1(x) + $$

ir konvergenta, tā dod

$$\int_a^X f(x)\,dx$$

vērtību arī tad, ja potencrinda ar $x = X$ pati nav vairs konvergenta.

Ja dota potencrinda

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 +$$

un $(-X, X)$ šīs rindas konvergences intervals, $f(x)$ šīs rindas summa, tad

$$\int_0^x f(x)\,dx = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} +$$

Augšējā izteiksme pastāv ar katru $x < X$. Izteiksme

$$\int_0^X f(x)\,dx = a_0 X + a_1 \frac{X^2}{2} + a_2 \frac{X^3}{3} +$$

pastāv, ja labajā pusē potencrinda savirzama, pie kam potencrinda

$$a_0 + a_1 X + a_2 X^2$$

var arī būt nesavirzama.

Piemērs 1.

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 + \qquad (\alpha)$$

Šī rinda ir vienmērīgi savirzama ar $|x| < 1$. Tādēļ ar katru tādu $x$

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} +$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} +$$

Beidzamā izteiksme pastāv, jo rinda labā pusē ir savirzama, bet, kā redzams, rinda $(\alpha)$ nav savirzama ar $x = 1$.

Piemērs.

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \qquad \text{savirzama ar } |x|<1 \qquad (\beta)$$

Tādēļ ar $|x|< 1$

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x} = l(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} +$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = l(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} +$$

Arī beidzamā izteiksme pastāv, jo rinda labā pusē savirzama, lai gan rinda $(\beta)$ nav savirzama ar $x = 1$

Piemērs:

Pielietojot Ņutona binomu dabūjam:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}x^4 + \qquad (|x| < 1) \qquad (\gamma)$$

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{x^5}{5} + \qquad (|x| < 1)$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5} +$$

Arī beidzamā izteiksme pastāv, jo labā pusē rinda ir savirzama. Augšējie piemēri rāda, kā ar integrēšanas palīdzību izvirza funkciju rindā.

**29. Savirzamu bezgalīgu rindu diferencēšana.**

Teorema:

Ja savirzamu bezgalīgu rindu

$$f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \quad (1)$$

kuras robežvērtība ir $f(x)$, diferencējam, locekli pa loceklim, un ja tad dabūjam vienmērīgi savirzamu bezgalīgu rindu

$$f_0'(x) + f_1'(x) + f_2'(x) + \quad (2)$$

tad, ja šīs rindas robežvērtību apzīmējam ar $F(x)$, pastāv izteiksme

$$F(x) = f'(x).$$

Ja vērtības $a$ un $x$ atrodas rindas (1) un arī rindas (2) konvergences intervalā, tad varam rindu (2) integrēt intervalā $(a, x)$, jo tā saskaņā ar pieņēmumu, ir vienmērīgi savirzama. Tad

$$\int_a^x F(t)\,dt = \int_a^x f_0'(t)\,dt + \int_a^x f_1'(t)\,dt + \int_a^x f_2'(t)\,dt + \quad =$$

$$= f_0(x) - f_0(a) + f_1(x) - f_1(a) + f_2(x) - f_2(a) + \quad =$$

$$= f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \quad - [f_0(a) + f_1(a) + f_2(a) + \quad].$$

Tā tad

$$\int_a^x F(t)\,dt = f(x) - f(a)$$

Diferencējot attiecībā uz $x$, dabūjam:

$$F(x) = f'(x).$$

Ar šo izteiksmi augšējā teorema ir pierādīta.

**30. Integrēšana ar bezgalīgas rindas palīdzību.** Ja $\int f(x)\,dx$ nevaram dabūt slēgtā veidā, tad mēģinam, ja iespējams, šo $f(x)$, vai kādu šīs funkcijas lietderīgi izvēlētu reizinātāju, izvirzīt vienmērīgi savirzamā rindā, galvenā kartā potencrindā. Tad, izdarot šīs rindas integrēšanu, dabūjam kā integralu savirzamu rindu. Šāds integrals ir lietojams, ja rindas katra locekļa integrals pieder pie elementariem veidiem.

Piemērs

Integralam

$$\int_a^x \frac{e^x}{x}\,dx$$

ir noteikta vērtiba, ja 0 neietilpst integrēšanas intervalā. No funkcijas $\frac{e^x}{x}\,dx$ nevar dabūt nenoteiktu integralu.

Izvirzam dotas funkcijas reizinātāju $e^x$ rindā

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} +$$

tad

$$\frac{e^x}{x} = \frac{1}{x} + 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} +$$

un

$$\int_a^x \frac{e^x}{x}\,dx = l\,\frac{x}{a} + \frac{x-a}{1\ \ 1!} + \frac{x^2-a^2}{2\ \ 2!} + \frac{x^3-a^3}{3\ \ 3!} + \frac{x^4-a^4}{4\ \ 4!} +$$

Piemērs.

$$\int_0^x \frac{l(1+x)}{x}\,dx, \quad \text{ar } |x| \leq 1.$$

Izvirzam rindā

$$l(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} -$$

tad

$$\frac{l(1+x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} -$$

un

$$\int_0^x \frac{l(1+x)}{x}\,dx = \frac{x}{1^2} - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} -$$

Piemērs.

$$\int_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx \qquad \text{(ar katru } x).$$

Izvirzam rindā

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots,$$

tad

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - $$

un

$$\int_0^x \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{x}{1 \cdot 1!} - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - $$

Piemērs.

$$\int_a^x \frac{\cos x}{x}\, dx \qquad \text{(ja 0 neietilpst intervalā } (a,\ x)\text{).}$$

Izvirzam rindā

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

tad

$$\frac{\cos x}{x} = \frac{1}{x} - \frac{x}{2!} + \frac{x^3}{4!} - $$

un

$$\int_a^x \frac{\cos x}{x}\, dx = l\,\frac{x}{a} - \frac{x^2 - a^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^4 - a^4}{4 \cdot 4!} - $$

Piemērs.

Tā kā

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{dx}{\sqrt{1 + x^4}} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1 + x^4}} + \int_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{1 + x^4}}$$

tad kreisās puses integrala aprēķināšana pārvesta uz labās puses divu integralu aprēķināšanu.

Ar $|x| \leqslant 1$ izteiksmi $(1 + x^4)^{-\frac{1}{2}}$ izvirzam rindā ar Ņutona binomu

$$(1 + x^4)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}\,\frac{3}{4}x^8 - $$

Tad

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^4}} = x - \frac{1}{2}\,\frac{x^5}{5} + \frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\,\frac{x^9}{9} - \dots$$

ievedot robežas dabūjam

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}=\left(1-\frac{1}{2}\,\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{9}-\ldots\right)-$$

$$-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\,\frac{5}{5\;2^5}+\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{9\;2^9}-\ldots\right)$$

Tā kā

$$\int\limits_{1}^{2}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}=\int\limits_{1}^{2}\frac{dx}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}},$$

tad izvirzam rindā

$$\left(1+\frac{1}{x^4}\right)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}\,\frac{1}{x^4}+\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{x^8}-\ldots$$

dalot šo izteiksmi ar $x^2$ dabūjam

$$\frac{1}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2}\,\frac{1}{x^6}+\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{x^{10}}-\ldots$$

Tad

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}=-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{5x^5}-\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{9x^9}+\ldots$$

ievedot robežas, dabūjam

$$\int\limits_{1}^{2}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\,\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{9}-\ldots\right)-$$

$$-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\,\frac{1}{5\;2^5}+\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{9\;2^5}-\ldots\right).$$

Tā tad

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}+\int\limits_{1}^{2}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}=$$

$$=2\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{9}-\ldots\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5.2^5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\,\frac{1}{9.2^9}-\ldots\right)\right]$$

## 31. Eliptiskie integrali.

1) Pirmā veida eliptiskais integrals.

Integralu

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \qquad 0 < k^2 < 1$$

pārved ar substituciju

$$x = \sin\varphi; \qquad dx = \cos\varphi\, d\varphi$$

veidā:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi\,(1-k^2\sin^2\varphi)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

$$\text{Ar } x = 0,\ \varphi = 0;\ \text{ar } x = 1,\ \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Tā kā pārveidotais integrals ir īsts integrals, tad, redzams, arī dotais integrals, kur apakšintegrala funkcija top $\infty$ ar $x = 1$, dabū noteiktu vērtību. Ar mainīgu virsrobežu rakstam

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \quad (0 < k^2 < 1 \ \text{un}\ 0 \leqslant x \leqslant 1) \tag{1}$$

un

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \quad \left(0 < k^2 < 1 \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\right) \tag{2}$$

Integralu (1) sauc par **algebrisko** un integralu (2) par **trigonometrisko pirmā veida eliptisku normalintegralu**. Virsrobežu $\varphi$ sauc par **amplitudu** un $k$ par integrala **modulu**.

Simboliski apzīmē integralu (2) šādi

$$F(k, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Tā kā

$$k^2\sin^2\varphi < 1,$$

tad ar Ņutona binomu dabūjam

$$(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2\varphi + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} k^4 \sin^4 \varphi + \ldots$$

un

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = J_0 + \frac{1}{2} k^2 J_2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} k^4 J_4 + \ldots$$

pie kam

$$J_{2p} = \int_0^{\varphi} \sin^{2p} \varphi \, d\varphi.$$

Izteiksmi $J_{2p}$ dabū ar redukcijas formulu.

Kad virs robežas $x = 1$ vai $\varphi = \frac{\pi}{2}$, tad

(1) un (2) katru sauc par **pilnīgu eliptisko integralu** un **apzīmē ar simbolu** $F(k)$.

Tā kā saskaņā ar [27] (2)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p}\varphi \, d\varphi = \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots (2p - 1)}{2 \cdot 4 \ldots 2p} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad (p = 1, 2, 3 \ldots) \quad (\Delta)$$

tad dabūjam

$$F(k) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} =$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\right)^2 k^4 + \ldots\right]$$

Šī rinda ir jo ātrāk savirzama, jo mazāks $k$.

Integrala $F(k, \varphi)$ vērtības aprēķinātas ar dažādiem $\varphi$ un $k$, un ievietotas tabulās, kur liek

$$k = \sin \alpha.$$

$F(k, \varphi)$ tabulas veids:

| | $\alpha^0$ | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi^0$ | $0^0$ | $10^0$ | $20^0$ | $30^0$ | $40^0$ | $50^0$ | $60^0$ | $70^0$ | $80^0$ | $90^0$ |
| $10^0$ | 0.1745 | 0 1746 | 0.1746 | 0.1748 | 0.1749 | 0.1751 | 0.1752 | 0 1754 | 0.1754 | 0.1754 |
| $20^0$ | | | | | | | | | | |
| $30^0$ | | | | | | | | | | |
| $40^0$ | | | | | | | | | | |
| $50^0$ | 0 8727 | 0.8756 | 0.8842 | 0.8983 | 0.9173 | 0.9401 | 0.9647 | 0 9876 | 1.0044 | 1.0107 |
| $60^0$ | | | | | | | | | | |
| $70^0$ | | | | | | | | | | |
| $80_0$ | | | | | | | | | | |
| $90^0$ | 1.5708 | 1.5828 | 1.6200 | 1.6858 | 1.7868 | 1.9356 | 2.1565 | 2.5046 | 3.1534 | $\infty$ |

Šinī tabulā piemēram parādītas dažas $F(k, \varphi)$ vērtības.

2) Otrā veida eliptiskais integrals.

Integralu

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,dx \quad (0 < k^2 < 1;)$$

pārveidojam. Liekot

$$x = \sin\varphi \quad \text{un} \quad dx = \cos\varphi\, d\varphi,$$

dabūjam

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi.$$

Tā kā pārveidotais integrals ir īsts integrals, tad dotam integralam arī ir noteikta vērtība, lai gan zemintegrala funkkija top $\infty$ ar $x = 1$.

Pieņemot virsrobežu mainīgu, rakstam

$$\int_0^x \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,dx \;(0 \leqslant k^2 < 1 \quad \text{un} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1) \tag{1}$$

un

$$\int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi.\left(0 \leqslant k^2 < 1 \quad \text{un} \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\right) \tag{2}$$

Integralu (1) sauc par algebrisko un integralu (2) par trigonometrisko otra veida eliptisko normalintegralu.

Integralu (2) apzīmē ar simbolu

$$E(k\,\varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi$$

$E(k,\ \varphi)$ aprēķina šādi:

$$(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} k^4 \sin^4 \varphi - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6} k^6 \sin^6 \varphi - \ldots$$

Integrējot dabūjam:

$$E\,(k,\varphi) = J_0 - \frac{1}{2} k^2 J_2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} k^4 J_4 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6} k^6 J_6 -$$

pie kam

$$J_{2p} = \int_0^{\varphi} \sin^{2p} \varphi\, d\varphi.$$

Izteiksmi $J_{2p}$ dabū ar redukcijas formulu.

Ja virsrobeža $x = 1$ vai $\varphi = \frac{\pi}{2}$, tad ieved simbolu

$$E(k) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1 - k^2 x^2}{1 - x^2}}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi.$$

Šos integralus sauc par pilnīgiem. Integralu

$$(J_{2p})_{\frac{\pi}{2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p} \varphi\, d\varphi$$

izteic ar jau lietoto redukcijas formulu (A).

Tad

$$E(k) = \frac{\pi}{2} \left[ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{k^2}{1} - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\right)^2 \frac{k^4}{3} - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6}\right)^2 \frac{k^6}{5} \quad \cdot \right]$$

Arī $E(k,\varphi)$ vērtības dod tabula, kuras iekārtojums tāds pats kā $F(k,\varphi)$ tabulai.

## Astotā nodaļa.

# Noteiktā integrala tuvina novērtēšana.

**32. Integrala ieslēgšana starp zinamām robežām.** Ja nevar dabūt slegtā veidā nenoteikto integralu $\int f(x)\,dx$, tad noteikta integrala izvērtēšana jāizdara citā ceļā. Šādu vienu ceļu jau apskatijām, izvērtējot noteikto integralu ar rindas palīdzību.

Bieži, īpaši teoretiskos pētijumos, ir vajadzīga noteiktā integrala vērtība tikai tuvini vai arī integrala vērtības izslēgšana starp zinamām robežām.

1) Ja $M$ ir funkcijas $f(x)$ lielākā un $m$ mazākā vērtība intervalā $(a, b)$, tad

$$m(b-a) < \int_a^b f(x)\,dx < M(b-a).$$

Ar šo nevienādību meklētā noteiktā integrala vērtība ir ieslēgta starp zinamām vērtībām.

2) Ja varam dabūt divas tādas funkcijas $\varphi(x)$ un $\psi(x)$, ka

$$\varphi(x) < f(x) < \psi(x),$$

kad

$$a \leqq x \quad b,$$

tad arī

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx < \int_a^b f(x) < \int_a^b \psi(x)\,dx.$$

Ja varam dabūt pirmā un pēdējā integrala vērtības, tad atkal meklētais integrals ir ieslēgts starp zinamiem integraliem.

Piemērs,

Apskatīsim starp kādām vērtībām atrodas

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^n}}, \quad (n > 2).$$

Izņemot apakšrobežu 0, visā integrēšanas intervalā pastāv izteiksme:

$$1 > \frac{1}{\sqrt{1+x^n}} > \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

Uz augšējās izteiksmes pamata pastāv arī sekojošā izteiksme

$$\int\limits_0^1 1\,dx > \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^n}} > \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

un

$$1 > \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^n}} > \left| l\,(x + \sqrt{1+x^2}) \right|_0^1$$

Tā tad

$$1 > \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^n}} > l\,(1 + \sqrt{2}) = 0.8814.$$

Pēdējā izteiksmē novērtējamais integrals ieslēgts starp zinamām vērtībām.

**33. Vidējās vērtības teorema.** Pieņemam, ka integrējamo funkciju $f(x)$ varam sadalīt divos reizinātājos, $\varphi(x)$ un $\psi(x)$, tā tad

$$f(x) = \varphi(x)\;\psi(x).$$

Pieņemam arī, ka abas šīs funkcijas integrēšanas intervalā $(a, b)$, ieskaitot arī robežas, ir galīgas un nepārtrauktas. Par funkciju $\psi(x)$ pieņemam, ka tā integrēšanas intervalā, nekad nav negativa (vai nekad pozitiva).

Ja intervalā $(a, b)$ funkcijas $\varphi(x)$ lielākā vērtība ir $M$ un mazākā $m$, tad ar visiem $x$ šai intervalā

$$m \leqslant \varphi(x) \leqslant M.$$

Še nolīdzinājuma zīme iestājas tikai dažos gadijumos. Ja $\psi(x)$ arvienu pozitiva, tad

$$m\,\psi(x) \quad \psi(x)\;\varphi(x) \leqslant M\psi(x)$$

un tādēļ arī

$$m\int\limits_a^b \psi(x)\,dx < \int\limits_a^b \psi(x)\,\varphi(x)\,dx < M\int\limits_a^b \psi(x)\,dx. \qquad (1)$$

Šī izteiksme rāda, ka starp $m$ un $M$ jābūt tādai vērtībai $\mu$, kā:

$$\int\limits_a^b \psi(x)\cdot\varphi(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx = \mu\int\limits_a^b \psi(x)\,dx. \qquad (2)$$

Tā kā funkcija $\varphi(x)$ pieņemta nepārtraukta, tad $\varphi(x)$ noteikti dabū intervalā $(a, b)$, kaut arī vienreiz, vērtība $\mu$ kādā vietā $\xi$. Ar

$$a + \theta(b$$

$$\mu = \varphi(\xi)$$

un

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx = \varphi(\xi)\int_a^b \psi(x)\,dx. \tag{2}$$

Šo izteiksmi sauc par integralrēķinu vidējās vērtibas teoremu.

Nevienādība (1) dod iespēju ieslēgt meklēto integralu starp zināmām vērtibām, ja $\int_a^b \psi(x)\,dx$ varam dabūt slēgtā veidā.

Piemērs.

Izpētīt starp kādām vērtībām atrodas sekojošā integrala vērtiba

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}} \qquad (k^2 < 1, \quad 0 < a < 1).$$

Še

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - k^2x^2}}.$$

Apzīmējam

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = \psi(x) \quad \text{un} \quad \frac{1}{\sqrt{1 - k^2x^2}} = \varphi(x).$$

Funkcijas $\varphi(x)$ mazākā vērtība integrēšanas intervalā ir 1, un lielākā $\dfrac{1}{\sqrt{1 - k^2a^2}}$

Tādēļ, ievērojot (1), dabūjam

$$1 \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} < \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}} < \frac{1}{\sqrt{1 - k^2a^2}} \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Integrējot dabūjam

$$\arcsin a < \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2a^2)}} < \frac{1}{\sqrt{1 - k^2a^2}} \arcsin a.$$

Ar $k = \frac{1}{2}$ un $a = \frac{1}{2}$, integrala meklētā vērtība atrodas starp 0, 5 2 3 5 9 . . . un 0, 5 5 1 0 9 . . .

**34. Mēchaniskā kvadratura.** Par mechanisko kvadraturu sauc noteikta integrala vērtības tādu tuvinu aprēķinu, kam nav vajadzīga integrējamās funkcijas visa norise, bet tikai funkcijas vērtības pie atsevišķām argumenta vērtībām.

Šo paņēmienu lietojam, 1) ja integrējamā funkcija $f(x)$ dota kā analitiska izteiksme, bet $\int f(x)\,dx$ nevar dabūt slēgtā veidā. 2) ja funkcijas $f(x)$ vērtības dabūtas kā novērojumu mērijumi. 3) kad funkcija $f(x)$ dota grafiski.

Apskatīsim dažus mechaniskās kvadraturas veidus.

1) trapezas formula.

Ja formulās ($A$) un ($B$) [10], izteiksmē

$$\frac{b-a}{n}=h$$

$n$ ir galīgs skaitlis, tad dabūjam tuvina formulas

$$\int_a^b f(x)\,dx \sim h\,[f(a)+f(a+h)+\quad+f(b-h)]. \tag{1}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \sim h\,[f(a+h)+f(a+2h)+\quad+f(b)]. \tag{2}$$

Šīs formulas dod integrala vērtību jo precizāki, jo lielāks $n$.

Ja funckija $f(x)$ dota analitiski vai grafiski līknes veidā, tad apzīmējam

$$f(a)=y_0;\quad f(a+h)=y_1;\quad f(a+2h)=y_2;\ .\quad .f(a+nh)=y_n.$$

Pastāvīgi augošai funkcijai formula (1) dod par mazu un formula (2) par lielu meklētā integrala vērtību. Pastāvīgi dilstošai funkcijai tas ir otrādi, tādēļ var sagaidīt, ka visos gadijumos augšējo izteiksmju aritmetiskā vidējā vērtība būs integrala meklētai vērtībai tuvāki nekā katra no šīm atsevišķām vērtībām.

Saskaitot izteiksmes (1) un (2) dabūjam

$$\int_a^b f(x)\,dx \sim h\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}+f(a+h)+f(a+2h)+\ldots+f(b-h)\right] \tag{3}$$

vai arī

$$\int_a^b y\, dx \sim h\left[\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \quad + y_{n-1}\right] \quad (4)$$

Šis izteiksmes dod integrala meklēto tuvinu vērtību.

Formulu (3) vai (4) sauc par **trapezas formulu**, jo kā redzams no zīmējuma (56), sekojošā formulā (5), kas ir formulu ($1^a$) un ($2^a$) summa dalīta ar 2, katrs formulas (5) iekavu loceklis reizināts ar $h$, izteic trapezas laukumu.

$$\int_a^b f(x)\, dx \sim h\left[y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_r + y_{r+1} + \ldots + y_{n-1}\right] \quad (1^a)$$

$$\int_a^b f(x)\, dx \sim h\left[y_1 + y_2 + y_3 + \quad + y_r + y_{r+1} + \ldots + y_n\right] \quad (2^a)$$

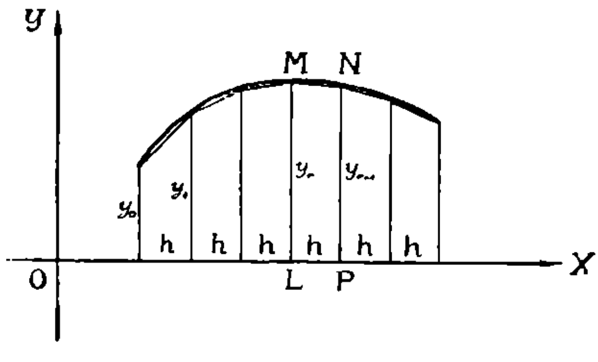
$$\int_a^b f(x)dx \sim h\left(\frac{y_0+y_1}{2} + \frac{y_1+y_2}{2} + \frac{y_2+y_3}{2} + \ldots + \frac{y_r+y_{r+1}}{2} + \ldots + \frac{y_{n-1}+y_n}{2}\right) \quad (5)$$

Formula (5) ir identiska ar formulu (4).

Izteiksme

$$h\,\frac{y_r + y_{r+1}}{2}$$

ir trapezas $LMNPL$ laukums. Formula (5) dod laukumu, kas ierobežots ne ar doto līkni bet ar līknē ievilktu chordu poligonu.




Zīm. 56.

Ja līkne pret augšu arvienu konveksa, kā zīmējumā, tad formula (4) dod laukumu mazāku par īsto. Ja līkne pret augšu konkava, tad otrādi.

Ja līkne pret augšu tāda, ka konkavitate un konveksitate seko līknes norisē, tad iestājas zināmā mērā izlīdzinājums.

Piemērs.

Jāaprēķina:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x}.$$

Še varam dabūt nenoteiktu integralu un tādēļ arī dotā integrala vērtību.

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = [\, l(1+x)]_0^1 = l2 = 0.69314718$$

Aprēķinot šo integralu ar trapezas formulu (4), pieņemot $n = 8$, dabūjam:

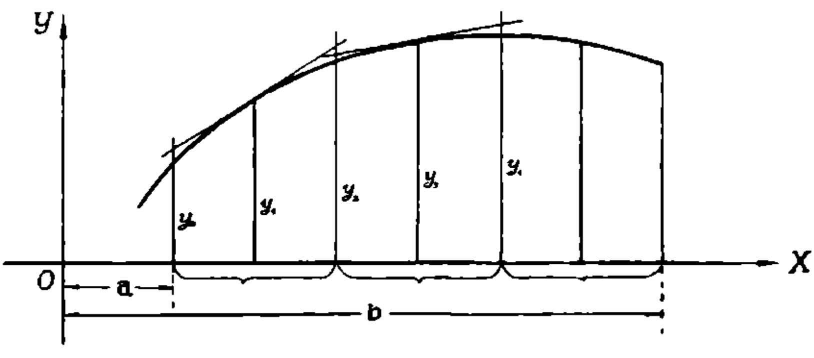
$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \infty\, 0\; 69412184.$$

Šī vērtība lielāka par īsto par 0.00097466, tādēļ ka līkne

$$y = \frac{1}{1+x}$$

ir konkava pret augšu intervalā (0, 1).

2) Pieskaru formula.




Zīm. 57.

Iedalam $(b - a)$ (zīm. 57) pārā skaita daļās $2n$ un apzīmējam

$$\frac{b-a}{2n} = h.$$

Liknes ordinatu $y_1, y_3, y_5$ gala punktos novelkam pieskares, tad no pieskarēm un ordinatām veidotā poligonalā figura sastādās no trapezām ko laukumi ir:

$$2hy_1,\ 2hy_3,\ 2hy_5 \text{ u. t. t.}$$

Saskaitot trapezas dabūjam tuvina formulu:

$$\int_a^b f(x)\,dx \sim 2h\,[\,y_1 + y_3 + \qquad + y_{2n-1}]$$

Še vajadzīgās ordinatas tikai ar nepāra skaitļu rādītājiem. Jāievēro, ka pirmā ordinata jāapzīmē ar $y_0$.

Ja ņemam, pieskaru formulā dalījumu skaitu $2n$, tādu pat kā trapezas formulā, tad ietaupam darbu, bet ja pieskaru formulā ņemam dalijuma skaitu divreiz lielāku kā trapezas formulā, tad darbs tas pats, bet precizitate lielāka, jo pieskares pieslejas līknei tuvāk nekā chordas. Aprēķinot

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

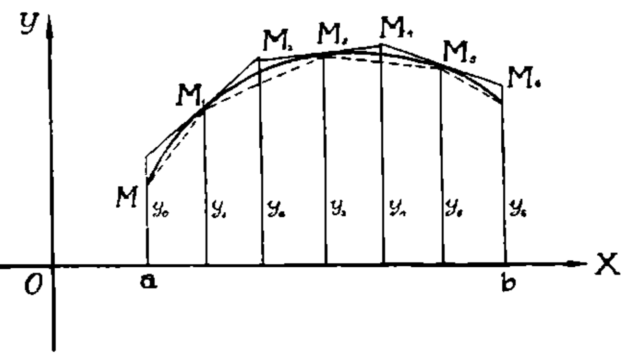
ar pieskaru formulu, $n = 8$ ar iedalijumu skaitu $2n = 16$, izlietojot ordinatas

$$y_1, y_3, y_5 \qquad y_{15},$$

dabūjam

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \sim 0.69266073.$$

Šī vērtiba ir par 0.00047645 mazāka nekā īstā. Kļūda, kā redzams, apmēram uz pusi mazāka nekā trapezas formulas rezultatā.




Zīm. 58.

3) **Ponsele (Poncelet) formula.**

Dalam $(b - a)$ (zīm. 58) pāra skaitā, $2n$ daļās

$$\frac{b-a}{2n} = h.$$

Pievelkam punktos $M_1$, $M_3$, $M_5$ pieskares, tad ar pieskarēm ierobežotais laukums ir:

$$P = 2h\,[\,y_1 + y_3 + y_5] = h\,[2y_1 + 2y_3 + 2y_5].$$

Velkam chordas: $M_0\,M_1$; $M_1\,M_3$; $M_3\,M_5$; $M_5\,M_6$.

Tad ierakstītā poligona laukums ir:

$$T = \left[\frac{y_0 + y_1}{2}\,h + 2h\,.\frac{y_1 + y_3}{2} + 2h\,.\frac{y_3 + y_5}{2} + h\,.\frac{y_5 + y_6}{2}\right] =$$

$$= h\left[\frac{y_0 + y_1}{2} + y_1 + 2y_3 + y_5 + \frac{y_5 + y_6}{2}\right].$$

$P$ ir lielāks un $T$ mazāks par īsto laukumu. Laukuma labāku tuvina vērtību $S$ dabūjam liekot

$$S = \frac{P + T}{2} = h\left[\frac{y_0 + y_6}{4} - \frac{y_1 + y_5}{4} + 2\,(y_1 + y_3 + y_5)\right].$$

Vispārīgi, ja $(b - a)$ iedalam $2n$ daļās, tad

$$\int_a^b f(dx) \sim S = h\left[\frac{y_0 + y_{2n}}{4} - \frac{y_1 + y_{2n-1}}{4} + 2\,(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1})\right]$$

Še jāievēro, ka līkne jāsadala konveksos un konkavos gabalos un augšējā formula jāpielieto katram gabalam atsevišķi.

Apzīmēsim, laukuma īsto vērtību ar $L$, tad kļūda ir

$$L - S,$$

bet tā kā $L < P$, tad

$$L - S < P - S.$$

Tā kā

$$P - S = h\left(\frac{y_1 + y_5}{4} - \frac{y_0 + y_6}{4}\right),$$

tad kļūda

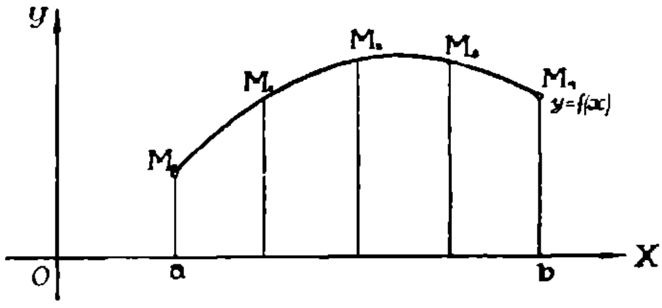
$$k \quad h\left[\frac{y_1 + y_5}{4} - \frac{y_0 + y_6}{4}\right].$$

Vispārīgā gadijumā ja iedalijums ir $2n$, tad

$$k < h\left[\frac{y_1 + y_{2n-1}}{4} - \frac{y_0 + y_{2n}}{4}\right].$$

Ponsele formula atšķiras no agrākām mechaniskās kvadraturas formulām ar to, ka tā dod iespēju novērtēt kļūdu.

4) S i m p s o n a  f o r m u l a.




Zīm. 59.

Iedalam $(b - a)$ pāra skaita, $2n$ daļās.

$$\frac{b-a}{2n} = h.$$

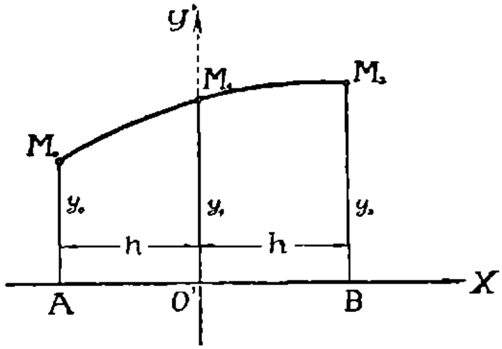
Pieņemam ka $\int f(x)\,dx$ nevar dabūt slēgtā veidā.

Simpsona paņēmiens izpaužas ar to, kā līknes $y = f(x)$ vietā liekam caur $M_0M_1M_2$ citu līkni $y = \varphi(x)$, bet tādu: 1) lai tā tuvu pieslietos līknei $M_0M_1M_2$ un 2) lai $\int \varphi(x)\,dx$ būtu dabūjams slēgtā veidā.

Pieņemam

$$y = \varphi(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$$

otrās kāpes parabolu, kam ass $\parallel$ $y$ asij. Apskatam laukumu $AM_0M_2BA$ (zīm. 60).




Zīm 60.

Lai līkne

$$y = \alpha + \beta x + \qquad (1)$$

ietu caur $M_0$, šī punkta koordinātām jāizpilda līknes nolīdzinājumi; (1). Tā tad

$$y_0 = \alpha + \beta(-h) + \quad (-h)^2 = \alpha - \beta h + \gamma h^2. \qquad (2)$$

Lai līkne ietu caur punktu $M_1$ jābūt

$$y_1 = \alpha + \beta \cdot 0 + \gamma \cdot 0 = \alpha. \qquad (3)$$

Tāpat dabūjam, ka

$$y_2 = \alpha + \beta h + \gamma h^2. \tag{4}$$

No nolīdzinājumiem (2), (3), (4) varam dabūt $\alpha$, $\beta$. Aprēķinam laukumu $AM_0M_1M_2BA$.

$$L_1 = \text{laukums}\, AM_0M_1M_2BA = \int_{-h}^{+h} (\alpha+\beta x+\gamma x^2)dx = \alpha x + \beta\frac{x^2}{2} + \gamma\frac{x^3}{3}\Big|_{-h}^{h} =$$

$$= \alpha h + \beta\frac{h^2}{2} + \gamma\frac{h^3}{3} - \left(-\alpha h + \beta\frac{h^2}{2} - \gamma\frac{h^3}{3}\right) = 2\alpha h + \frac{h^3}{3} \tag{5}$$

No (3) dabūjam

$$\alpha = y_1.$$

Saskaitot (2) un (4) dabūjam

$$y_0 + y_2 = 2\alpha + 2\gamma h^2 = 2y_1 + 2\gamma h^2$$

un

$$\gamma = \frac{y_0 + y_2 - 2y_1}{2h^2}.$$

Ievietojot $\alpha$ un $\gamma$ vērtības izteiksmē (5) dabūjam

$$\text{Laukums}\ AM_0M_1M_2BA = L_1 = 2y_1 h + 2h^3 \frac{y_0 + y_2 - 2y_1}{3 \cdot 2h^2} =$$

$$= \frac{h}{3}[6y_1 + y_0 + y_2 - 2y_1] = \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + y_2].$$

Pielietojot šo formulu laukumam ar $M_2M_3M_4$ dabūjam

$$L_2 = \frac{h}{3}[y_2 + 4y_3 + y_4]$$

$$L_1 + L_2 = \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + y_2] + \frac{h}{3}[y_2 + 4y_3 + y_4] =$$

$$= \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4].$$

Pieskaitot klāt $L_3$, ar punktiem $M_4M_5M_6$, dabūjam

$$L_1 + L_2 + L_3 = \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + y_6].$$

Formulu, redzams, varam paplašināt, ja dalijumu skaits ir $2n$; tad

$$L = \frac{h}{3}[y_0 + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2}) + y_{2n}]$$

Šo formulu sauc par **Simpsona formulu**.

Pielietojot šo formulu integrala

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+}$$

aprēķināšanai ar $n = 8$ dabūjam

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \sim 0{,}69314764.$$

Šī vērtība pret īsto vērtību lielāka par 0.000 00046.

Noteikta integrala tuvina aprēķināšanu var arī izdarīt ar:

5) Planimetru un integrafu.

6) Grafisku integrēšanu.

Planimetrs ir aparats, kas mechaniskā ceļā atzīmē kāda slēgta laukuma skaitlisko vērtību.

Integrafs ir aparats, kas grafiski dod kāda laukuma integrallikni.

Šo aparatu aprakstu, teoriju un pielietošanu apskata lekcijās „Praktiskā matematika". Dota integrala grafiska izvērtēšana apskatīta: J. Cizarevičs „Grafiska diferencēšana, integrēšana un neperiodiskas līknes nolīdzinājuma atrašana".

## Devītā nodaļa.

## Ar integralu noteiktas funkcijas diferencēšana un integrēšana.

**35. Ar integralu noteiktas funkcijas diferencēšana.** 1) Integrals kā savu robežu funkcija.

Noteiktā integrala īpašības apskatot redzējām, ka noteiktais integrals no $f(x)$, kas intervalā $(a, b)$ vienvērtīga un nepārtraukta, ir nepārtraukta funkcija no integrala virsrobežas, ja tā mainīga intervalā $(a, b)$.

Funkcijas veidošana ar noteiktu integralu, kā virsrobeža mainīga, paplašina funkcijas jēdzienu.

Sekojošus integralus nav iespējams izteikt slēgtā veidā ar elementarām funkcijām, tādēļ ar tiem ir definētas jaunas transcendentas funkcijas.

$$1) \int_0^x \frac{dt}{lt} \quad (x > 0); \qquad 2) \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt; \qquad 3) \int_a^x \frac{\cos t}{t}\, dt \quad (ax > 0);$$

4) $\int\limits_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$; $(k^2 < 1;$ $\quad$ $1)$.

5) $\int\limits_0^x \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}\, dt \; (k^2 < 1;$ $\quad$ $1)$.

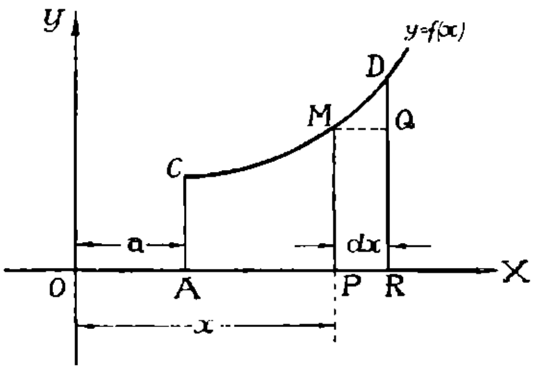
Ar 1) ir definēta funkcija integrallogaritms, ar 2) integralsinus, ar 3) integralcosinus, ar 4) pirmā veida un ar 5) otrā veida eliptiskie integrali.

Tā kā

$$D_x \int\limits_a^x f(t)\, dt = f(x),$$

tad, piemēram

$$D_x \int\limits_0^x \frac{dt}{lt} = \frac{1}{lx}.$$




Zīm. 61.

Ja funkcijas $f(x)$ ģeometrisks attēls ir līkne $CD$ (zīm. 61), tad

$$\int\limits_a^x f(x)\, dx = \text{laukums } ACMPA$$

un

$$D_x \int\limits_a^x f(x)\, dx = f(x) = MP.$$

Laukuma $ACMPA$ diferencials ir laukums $PRQM$.

Ja diferencialu $dx$ uzskatam par pozitivu, tad laukuma diferencials ir pozitivs, kad $f(x) > 0$ un tas ir negativs, ja $f(x) < 0$. Vietās, kur $f(x) = 0$, funkcija

$$\int\limits_a^x f(x)\, dx$$

dabū ekstremas vērtības

Integrals ar mainīgu apakšrobežu

$$\int_x^b f(x)\,dx$$

noteic funkciju no apakšrobežas un

$$D_x \int_x^b f(x) \quad = -D_x\left(\int_b^x f(x)\,dx\right) = -f(x).$$

2) Integrals, kā funkcija no kāda integrējamās funkcijas parametra.

Integrala

$$\int_a^b f(x, y)\,dx$$

zem integrala funkcijā atrodas bez integrēšanas mainīgā $x$ arī mainīgs, bet no $x$ neatkarigs parametrs $y$.

Pieņemam, ka funkcija $f(x, y)$, ir integrējama intervalā $(a, b)$, ar visām vērtībām kādas $y$ var pieņemt intervalā $(c, d)$. Tad augšējā integrala vērtība ir atkarīga no tās atsevišķās vērtības, kas dota parametram $y$, tā tad augšējais integrals ir funkcija no $y$ intervalā $(c, d)$. Apzīmējam šo funkciju ar $\Phi(y)$, tad

$$\int_a^b f(x, y)\,dx = \Phi(y). \qquad (c \leqslant y \quad d)$$

Ja $f(x, y)$ ir nepārtraukta funkcija no $y$ intervalā $(c, d)$ ar katru $x$ vērtību intervalā $(a, b)$, tad $\Phi(y)$ ir nepārtraukta funkcija intervalā $(c, d)$. Tas redzams no sekojošā.

Ja $f(x, y)$ ir nepārtraukta funkcija no $y$ intervala $(c, d)$, tad pieņemot pēc patikas mazu pozitivu skaitļu $\varepsilon$ varam atrast pietiekoši mazu $\eta$, tādu kā

$$|f(x, y + k) - f(x, y)| < \varepsilon, \qquad (a \leqslant x \leqslant b) \tag{1}$$

ja tikai $y$ un $y + k$ atrodas intervalā $(c, d)$ un $|k| < \eta$. Tā kā

$$\Phi(y + k) - \Phi(y) = \int_a^b f(x, y + k)\,dx - \int_a^b f(x, y)\,dx =$$

$$= \int_a^b [f(x, y + k) - f(x, y)]\,dx \tag{2}$$

tad

$$|\Phi(y + k) - \Phi(y)| =$$

$$= \left|\int_a^b [f(x, y+k) - f(x, y)]dx\right| < \int_a^b \left|[f(x, y + k) - f(x, y)]\right| dx. \tag{3}$$

Ievērojot (1), redzam ka

$$\int_a^b \left| f(x, y + k) - f(x, y)\right| dx < \int_a^b \varepsilon\,dx = \varepsilon(b - a). \tag{4}$$

No (3) un (4) redzams:

$$|\Phi(y + k) - \Phi(y)| < \varepsilon(b - a). \tag{5}$$

Izteiksme (5) rāda, ka $|\Phi(y + k) - \Phi(y)|$ varam pataisīt pēc patikas mazu, ar galīgiem $a$ un $b$, tādēļ funkcija $\Phi(y)$ ir nepārtraukta intervalā $(c, d)$. Augšējie pieņēmumi ir noteikti izpildīti, ja $f(x, y)$, kā funkcija no diviem mainīgiem, ir nepārtraukta iecirknī, kas izteikts ar

$$a \leqslant x \leqslant b \quad \text{un} \quad c \leqslant y \leqslant d.$$

No (2) dabūjam:

$$\frac{\Phi(y + k) - \Phi(y)}{k} = \int_a^b \frac{f(x, y + k) - f(x, y)}{k}\,dx.$$

Ja funkcijai $f(x, y)$ ir, katrā vietā $a \leqslant x \leqslant b$, ar katru $y$ intervalā $(y - k, y + k)$, galīga pirmā un otrā atvasinatā attiecībā uz $y$, tad varam pielietot Teilora formulu un dabūjam

$$f(x, y + k) = f(x, y) + k f_y(x, y) + \frac{k^2}{2} f_{yy}(x, y + \theta k). \quad (0 < \theta < 1)$$

Ievērojot augšējo dabūjam:

$$\frac{\Phi(y+k)-\Phi(y)}{k}=\int_a^b f_y(x, y)\,dx+\frac{k}{2}\int_a^b f_{yy}(x, y+\theta k)\,dx$$

Ja intervals $(a, b)$ galīgs, tad abiem integraliem ir galīgas vērtības un liekot $k \to 0$ dabūjam:

$$\Phi'(y)=\int_a^b f_y(x, y)\,dx,$$

vai arī

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x, y)\,dx=\int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,dx. \qquad (6)$$

Arī, ja intervals $(a, b)$ ir bezgalīgs, šī formula pastāv, ja tikai integraliem

$$\int_a^b f_y(x, y)\,dx \quad \text{un} \quad \int_a^b f_{yy}(x, y)\,dx$$

ir noteiktas vērtības ar katru $y$ intervalā

$$(y-k, \ y+k).$$

Ar formulu (6) izteiktu operaciju sauc par diferencēšanu zem integrala zīmes.

Ja integrala robežas ir funkcijas no parametra $y$, kā sekojošam integralam:

$$\int_u^v f(x, y)\,dx; \quad u=\varphi(y); \quad v=\psi(y),$$

tad

$$\int_u^v f(x, y)\,dx=F(y, u, v)$$

un

$$\frac{d}{dy}\int_u^v f(x, y)\,dx=\frac{d}{dy}F(y, u, v)=\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial u}\frac{du}{dy}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{dv}{dy}$$

$$=\int_u^v \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,dx-f(u, y)\frac{du}{dy}+f(v, y)\frac{dv}{dy}.$$

Ar diferencēšanu zem integralzīmes varam dabūt·

1) no dotām integralformulām jaunas,

2) iespēju dažreiz izvērtēt dotu noteiktu integralu.

Pirmais gadijums.

$$\int_0^\infty e^{-xy}\,dx = -\left|\frac{e^{-xy}}{y}\right|_0^\infty = \left|\frac{e^{-xy}}{y}\right|_\infty^0 = \frac{1}{y}. \qquad (y > 0)$$

Še funkcija $f(x, y) = e^{-xy}$ atbilst pieņemtiem noteikumiem un tādēļ varam diferencēt, attiecībā uz $y$, zem integrala zīmes. Diferencējot augšējās izteiksmes abas puses attiecībā uz $y$ dabūjam:

$$\int_0^\infty -x\, e^{-xy} = -\frac{1}{y^2}.$$

Arī še augšā pieņemtie noteikumi ir izpildīti, tādēļ diferencējot atkal, attiecībā uz $y$, dabūjam

$$\int_0^\infty x^2\, e^{-xy}\,dx = \frac{1\,.\,2}{y^3}.$$

Diferencējot $n$ reizes dabūjam:

$$\int_0^\infty x^n\, e^{-xy}\,dx = \frac{n!}{y^{n+1}}$$

Ar $y = 1$ dabūjam:

$$\int_0^\infty x^n\, e^{-x}\,dx = n!$$

Otrs gadijums:

Ja integralu

$$\int_a^b f(x, y)\,dx = \Phi(y)$$

nevaram izvērtēt, t. i. dabūt $\Phi(y)$ parastā ceļā, bet ja iespējams dabūt

$$\int_a^b f_y(x, y)\, dx = \Phi'(y),$$

tad meklēto funkciju $\Phi(y)$ dabūjam integrējot $\Phi'(y)$, ja šo integrēšanu varam izdarīt.

Piemērs.

$$\int_0^\infty e^{-yx} \frac{\sin x}{x}\, dx = \Phi(y). \qquad (1)$$

Var pierādīt, ka augšējam integralam ar visiem $y$ integrēšanas iecirknī ir noteikta vērtība un ka intervalā $(0, +\infty)$ funkcija $\Phi(y)$ ir nepārtraukta funkcija no $y$.

Diferencēšana zem integrala zīmes še pielaižama, jo ar

$$f(x, y) = e^{-yx} \frac{\sin x}{x},$$

dabūjam

$$f_y(x, y) = -e^{-yx} \sin x; \quad f_{yy}(x, y) = xe^{-yx} \sin x.$$

un abiem integraliem

$$\int_0^\infty f_y(x, y)\, dx \quad \text{un} \quad \int_0^\infty f_{yy}(x, y)\, dx$$

ir noteiktas vērtības ar $y > 0$. Diferencējot (1) dabūjam

$$\Phi'(y) = -\int_0^\infty e^{-yx} \sin x\, dx.$$

Šo integralu parciali integrējot dabūjam

$$\Phi'(y) = -\int_0^\infty e^{-yx} \sin x\, dx = -\frac{1}{1+y^2}$$

un

$$\int_y^\infty \Phi'(y) dy = \Phi(\infty) - \Phi(y) = -\int_y^\infty \frac{dy}{1+y^2} = -\Big|\operatorname{arc\,tg} y\Big|_y^\infty = \operatorname{arctg} y - \frac{\pi}{2} \qquad (2)$$

Ar apakšrobežu $y = 0$, dabūjam

$$\int_0^\infty \Phi'(y)\,dy = \Phi(\infty) - \Phi(0) = -\frac{\pi}{2} \qquad (2^a)$$

Tā kā $\Phi(y)$ ir integrals (1), tad ievietojot integralā (1) $y = \infty$ un $y = 0$ dabūjam

$$\Phi(\infty) = 0; \quad \Phi(0) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx. \qquad (3)$$

No (2) un (3) dabūjam

$$\Phi(y) = \int_0^\infty e^{-xy}\frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} y = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{y}.$$

No $(2^a)$ un (3) dabūjam

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

**36. Ar integralu noteiktas funkcijas integrēšana.** Dota vienvērtīga, nepārtraukta funkcija $f(x, y)$ iecirknī, kas noteikts ar

$$\begin{matrix} a \leqslant x \leqslant b \\ c \leqslant y \leqslant d \end{matrix} \qquad (1)$$

Tad, kā redzējām

$$\int_a^b f(x, y)\,dx$$

ir nepārtraukta funkcija no $y$ intervalā $(c, d)$ un tādēļ to varam integrēt, attiecībā uz $y$, no $c$ līdz $d$. Šādu operaciju apzīmējam ar simbolu

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\,dx. \qquad (2)$$

Tāpat

$$\int_c^d f(x, y)\,dy$$

ir nepārtraukta funkcija no $x$ intervalā $(a, b)$, tādēļ varam integrēt to attiecībā uz $x$, no $a$ līdz $b$.

Tad dabūjam

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy. \tag{3}$$

Ja dotie attiecībā uz funkciju $f(x, y)$ noteikumi izpildīti, tad

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy. \tag{4}$$

Pierādijums.

Augšrobežu $d$ un $b$ vietā ievedam $y$ un $x$, ar noteikumiem

$$c \leqslant y \leqslant d \quad \text{un} \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

tad izteiksme (2) ir funkcija no $x$, $y$.

Apzīmējam šo funkciju ar $F(x, y)$, tad

$$F(x, y) = \int_c^y dy \int_a^x f(x, y)\, dx. \tag{5}$$

Diferencējot augšējās izteiksmes (5) abas puses, attiecībā uz $y$ dabūjam

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = \int_a^x f(x, y)\, dx,$$

diferencējot šo izteiksmi, attiecībā uz $x$ dabūjam

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}\right)}{\partial x} = f(x, y).$$

Diferencējot (5), attiecībā uz $x$, dabūjam

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_c^y dy \int_a^x f(x, y) dx\right) = \int_c^y dy \quad \frac{\partial}{\partial x}\int_a^x f(x, y)\, dx = \int_c^y f(x, y) dy,$$

diferencējot augšējo izteiksmi attiecībā uz $y$, dabūjam

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial F(x, y)}{\partial x}\right)}{\partial y} = f(x, y).$$

Pieņemam, ka $F(x, y)$ ir zināma, tad, ievedot izteiksmē (2)

$$f(x, y) = \frac{\partial\left(\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}\right)}{\partial x},$$

dabūjam

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_c^d dy \int_a^b \frac{\partial\left(\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}\right)}{\partial x}\, dx =$$

$$= \int_c^d dy \left|\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}\right|_a^b = \int_c^d \left(\frac{\partial F(b, y)}{\partial y} - \frac{\partial F(a, y)}{\partial y}\right) dy =$$

$$= |F(b, y) - F(a, y)|_c^d = F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c). \quad (\alpha)$$

Ievedot izteiksmē (3)

$$f(x, y) = \frac{\partial\left(\frac{\partial F(x, y)}{\partial x}\right)}{\partial y},$$

dabūjam

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy = \int_a^b dx \int_c^d \frac{\partial\left(\frac{\partial F(x, y)}{\partial x}\right)}{\partial y}\, dy =$$

$$= \int_a^b dx \left|\frac{\partial F(x, y)}{\partial x}\right|_c^d = \int_a^b \left(\frac{\partial F(x, d)}{\partial x} - \frac{\partial F(x, c)}{\partial x}\right) dx =$$

$$|F(x, d) - F(x, c)|_a^b = F(b, d) - F(b, c) - F(a, d) + F(a, c). \quad (\beta)$$

Kā redzams izteiksmes ($\alpha$) un ($\beta$) ir vienlīdzīgas, ar to tad ir pierādīts ka

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy. \quad (6)$$

Tā tad, ja funkcija $f(x, y)$ ir vienvērtīga nepārtraukta iecirknī

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad c \leqslant y \leqslant d$$

un ja jāizdara šīs funkcijas integrēšana iepriekš, attiecībā uz $x$, pastāvīgās robežās $a$ un $b$ un tad, attiecībā uz $y$, arī pastāvīgās robežās

$c$ un $d$, tad izdarot integrēšanu apgriestā kārtībā, t. i. integrējot iepriekš attiecībā uz $y$ un tad attiecībā uz $x$, attiecīgās robežās dabūjam to pašu rezultatu.

Formulas (6) kreisajā pusē jāizdara integrala $\int_a^b f(x, y)\, dx$ integrēšana, attiecībā uz $y$, un ja to izdara tā, kā formulas labajā pusē norādīts, tad tādu operaciju sauc par **integrēšanu zem integrala zīmes**.

Ja dots integrals

$$\int_{\varphi_0(y)}^{\varphi(y)} f(x, y)\, dx = F(y),$$

tad to varam integrēt, attiecībā uz $y$, robežas $c$, $d$. Tad rakstam

$$\int_c^d dy \int_{\varphi_0(y)}^{\varphi(y)} f(x, y)\, dx.$$

Še integrēšanas kārtību nevar apgriezt. Vispirms jāintegrē attiecībā uz $x$, un tad rezultats jāintegrē attiecībā uz $y$.

Ar integrēšanu zem integrala zīmes varam dabūt:

1) no dotām integralformulam jaunas,

2) iespēju gadijumā izvērtēt dotus integralus.

**Pirmais gadijums:**

$$\int_0^\infty e^{-yx}\, dx = -\left|\frac{e^{-yx}}{y}\right|_0^\infty = \frac{1}{y}$$

Integrējam izteiksmes abas puses, attiecībā uz $y$, no $a$ līdz $b$ ($a$ un $b$ pozitivi). Tad

$$\int_a^b dy \int_0^\infty e^{-yx}\, dx = \int_0^\infty dx \int_a^b e^{-yx}\, dy = \int_a^b \frac{1}{y}\, dy$$

un

$$\int_0^\infty - \left|\frac{e^{-yx}}{x}\right|_a^b dx = |ly|_a^b = lb - la = l\,\frac{b}{a}.$$

Tā tad

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\, dx = l\, \frac{b}{a} \qquad (a > 0,\ b > 0)$$

Otrs gadijums:

Dabūt

$$J = \int_0^\infty e^{-x^2}\, dx$$

vērtību.

Ievedam substituciju $x = yt$. $(y > 0)$.
Še $y$ ir no $x$ neatkarīgs parametrs. Tad

$$dx = y\,dt; \quad \text{ar} \quad x = 0; \quad t = 0; \quad \text{ar } x = \infty;\ t = \infty.$$

Pēc substitucijas dotais integrals dabū veidu:

$$J = \int_0^\infty e^{-y^2t^2}\, y\, dt$$

Reizinot augšējās izteiksmes abas puses ar $e^{-y^2}$ dabujam:

$$J\, e^{-y^2} = \int_0^\infty e^{-y^2(1+t^2)}\, y\, dt.$$

Labās puses integrals ir funkcija no $y$, un tā vērtība atrodas kreisajā pusē. Integrējam šo funkciju, attiecībā uz $y$, robežas $0, \infty$, tad dabūjam:

$$\int_0^\infty J e^{-y^2}\, dy = \int_0^\infty dy \int_0^\infty e^{-y^2(1+t^2)}\, y\, dt = \int_0^\infty dt \int_0^\infty e^{-y^2(1+t^2)}\, y\, dy. \qquad (1)$$

Kreisajā pusē dabūjam:

$$J \int_0^\infty e^{-y^2}\, dy = J\ J = J^2 \qquad (2)$$

Labajā pusē dabūjam:

$$\int_0^\infty e^{-y^2(1+t^2)} y\,dy = -\int_0^\infty e^{-y^2(1+t^2)} \cdot \frac{d[-y^2(1+t^2)]}{2(1+t^2)} =$$

$$= -\frac{1}{2(1+t)^2}\left| e^{-y^2(1+t^2)} \right|_0^\infty = \frac{1}{2(1+t^2)}\left| e^{-y^2(1+t^2)} \right|_\infty^0 = \frac{1}{2(1+t^2)}$$

Tā tad

$$\int_0^\infty dt \int_0^\infty e^{-y^2(1+t^2)}\, y\, dy = \int_0^\infty \frac{dt}{2(1+t^2)} = \frac{1}{2}\left| \operatorname{arc\,tg} t \right|_0^\infty = \frac{\pi}{4}, \qquad (3)$$

Ievērojot (1), (2), (3) dabūjam:

$$J^2 = \frac{\pi}{4}$$

un

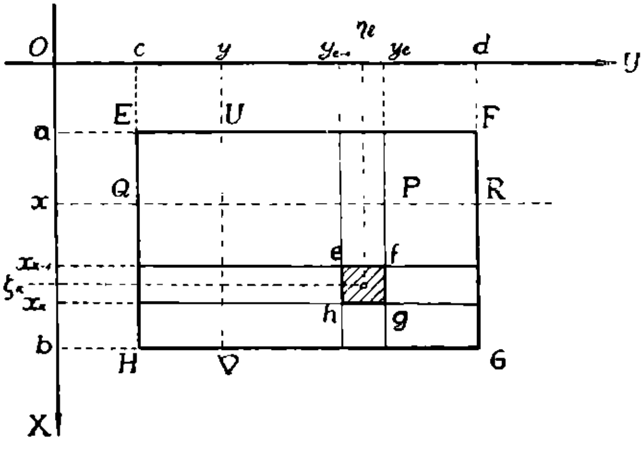
$$J = \int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

## Desmitā nodaļa.

## Vairākkārtēji integrali.

**37. Divkāršais integrals.** Pieņemam, ka funkcija $f(x, y)$ ir vienvērtīga un nepārtraukta ar visiem vērtību sakopojumiem $x \mid y$, kad (zīm.62)

$$\left.\begin{array}{l} a \leqslant x \leqslant b \\ c \leqslant y \leqslant d \end{array}\right\} \quad (1)$$




Zīm. 62.

Noteikumam (1) ģeometriski atbilst paralelograms $EFGH$, kā laukumu apzīmējam ar $P$.

Intervalu $(a, b)$ iedalam $p$ daļās un intervalu $(c, d)$ $q$ daļās ar sekojošiem skaitļu sekojumiem

$$a = x_0, \quad x_1 \quad x_{k-1}, \quad x_k \quad x_{p-1}, \quad x_p = b.$$

$$c = y_0, \quad y_1 \ldots y_{e-1}, \quad y_e \ldots y_{q-1}, \quad y_q = d.$$

Apzīmējam

$$\left.\begin{aligned} x_k - x_{k-1} &= \delta_k \\ y_e - y_{e-1} &= \varepsilon_e \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Caur dalijuma punktiem vilktās taisnes, paraleli asīm, sadala iecirknī $P$ mazos paralelogramos. Vienu no tiem $efgh$ apzīmējam ar

$$\Delta_{ke}P = \delta_k \quad \varepsilon_e .$$

Pieņemam šai laukumā $\Delta_{ke}P$ pēc patikas punktu un apzīmējam tā koordinatas ar $\xi_k \mid \eta_e$, tad šai vietā $f(x, y)$ dabū vērtību $f(\xi_k, \eta_e)$.

Veidojam divkāršu sumu

$$L = \sum_1^p{}_k \sum_1^q{}_e f(\xi_k, \eta_e)\, \Delta_{ke}P. \tag{3}$$

Teorema.

Ja funkcija $f(x, y)$ atbilst pieņemtiem noteikumiem, tad šī divkāršā suma tiecas uz noteiktu robežvērtību, ar $p \to \infty$ un $q \to \infty$ (tad $\delta_k \to 0$ un $\varepsilon_e \to 0$). Šī robežvērtība nav atkarīga no iedalijuma veida un punkta $\xi_k \mid \eta_e$ izvēles laukumā $\Delta_{ke}P$.

Pierādijums izdarams līdzīgi kā [8] un tādēl še saīsināts.

Funkcijas $f(x, y)$ mazāko un lielāko vērtību laukumā $\Delta_{ke}P$ apzīmējam ar $m_{ke}$ un $M_{ke}$.

Funkcijas $f(x, y)$ mazāko un lielāko vērtību visā laukumā $P$ apzīmējam ar $m$ un $M$.

Ievedot izteiksmē (3) funkcijas $f(\xi_k \ \eta_e)$ vietā $m_{ke}$ dabūjam jaunu sumu, ko apzīmējam ar $s$.

Ievedot izteiksmē (3) funkcijas $f \xi_k \ \eta_e)$ vietā $M_{ke}$, dabūjam arī jaunu summu, ko apzīmējam ar $S$.

Tad

$$s < L < S. \tag{4}$$

Ievedot summā $s$, $m_{ke}$ vietā $m$, suma $s$ dabū vērtību $m \, . \, P$. Ievedot sumā $S$, $M_{ke}$ vietā $M$, $S$ dabū vērtību $M \, . \, P$.

Redzams, ka

$$m \quad P < s \quad \text{un} \quad S < M \quad P. \tag{5}$$

Ievērojot (4) un (5), varam rakstīt

$$mP < s < L < S < MP. \tag{6}$$

Še redzam, ka suma $L$ ieslēgta starp noteiktām vērtībām $mP$ un $MP$.

Kad $p$ un $q$ aug, tad, visparigi $s$ var tikai augt, bet $s$ nevar pārsniegt $M \; P$.

Kad $p$ un $q$ aug, tad, vispārigi, $S$ var tikai dilt, bet nevar pieņemt mazāku vērtibu par $m \; P$.

Ar augošiem $p$ un $q$ sumas $s$ un $S$ tuvojas viena otrai, tās tiecas uz kopēju robežu.

Veidojam

$$S - s = \sum_{k=1}^{p} \sum_{e=1}^{q} (M_{ke} - m_{ke}) \, \Delta_{ke} P \tag{7}$$

Ar dotām $p$ un $q$ vērtībām starpība

$$M_{ke} - m_{ke} = \gamma_{ke}$$

dažādos $\Delta_{ke} P$ dabū dažādas vērtības. Apzīmēsim ar lielāko no visiem $\gamma_{ke}$.

Tad no (7) redzams

$$0 < S - s < \gamma \sum_{k=1}^{p} \sum_{e=1}^{q} \Delta_{ke} P = \gamma P.$$

Tā kā funkcija $f(x, y)$ ir nepārtraukta, tad ja $\delta_k \to 0$ un $\varepsilon_e \to 0$ arī $\gamma \to 0$, $(p \to \infty,\ q \to \infty)$. Tādēļ

$$\lim_{\substack{\delta_k \to 0 \\ \varepsilon_e \to 0}} (S - s) = 0 \qquad (p \to \infty;\ q \to \infty).$$

Tā tad

$$\lim S = \lim s.$$

Bet tā kā $L$ atrodas starp $s$ un $S$, tad

$$\lim_{\substack{\delta_k \to 0 \\ \varepsilon_e \to 0}} L = \lim s = \lim S.$$

Še lim $L$ sauc par funkcijas $f(x, y)$ divkāršu integralu virs laukuma $P$ un apzīmē ar simbolu:

$$\lim_{\substack{\delta_k \to 0 \\ \varepsilon_e \to 0}} L = \lim_{\substack{\delta_k \to 0 \\ \varepsilon_e \to 0}} \sum_{k=1}^{p} \sum_{e=1}^{q} f(\xi_k, \eta_e) \delta_k \varepsilon_e = \iint_P f(x, y)\, dx\, dy \tag{8}$$

Izteiksmi $f(x, y)\,dx\,dy$ sauc par divkārša integrala elementu un $dP = dx\,dy$ par integrēšanas iecirkņa elementu.

Divkārša integrala ietegrēšanas iecirknis ir laukums, tādēļ divkāršu integralu sauc arī par **laukuma integralu**.

Vienkārša integrala integrēšanas intervals ir līnijas nogrieznis, tādēļ vienkāršu integralu sauc arī par **līnijas integralu**.

**38. Divkārša integrala izvērtēšana.** Tā kā

$$\iint\limits_P f(x, y)\,dx\,dy = \lim_{\substack{\delta_k \to 0 \\ \varepsilon_e \to 0}} \sum_1^p {}_k \sum_1^q {}_e f(\xi_k, \eta_e)\,\delta_k\,\varepsilon_e$$

tad izdarot pāreju uz robežu vispirms attiecībā uz $x$, dabūjam:

$$\sum_1^q {}_e\, \varepsilon_e \lim_{\delta_k \to 0} \sum_1^p {}_k f(\xi_k\, \eta_e)\,\delta_k = \sum_1^q {}_e\, \varepsilon_e \int_a^b f(x, \eta_e)\,dx. \qquad (a)$$

Izteiksmē ($a$) izdarot pāreju uz robežu, attiecībā uz $y$, dabūjam:

$$\lim_{\varepsilon_e \to 0} \sum_1^q {}_e\, \varepsilon_e \lim_{\delta_k \to 0} \sum_1^p {}_k f(\xi_k, \eta_e) = \lim_{\varepsilon_e \to 0} \sum_1^q {}_e\, \varepsilon_e \int_a^b f(x, \eta_e)\,dx =$$

$$= \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\,dx. \qquad (1)$$

Izdarot pāreju uz robežu vispirms, attiecībā uz $y$, un tad attiecībā uz $x$, dabūjam

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\,dy. \qquad (2)$$

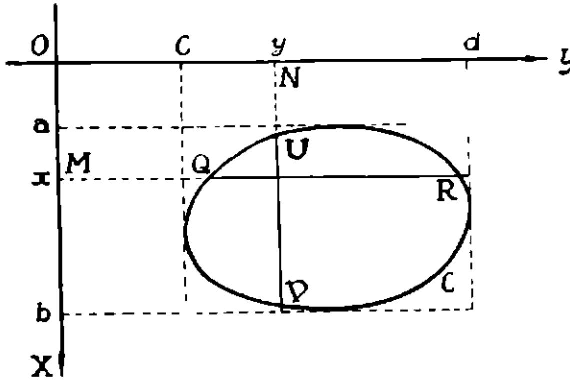
Kā agrāk redzējām:

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\,dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\,dy.$$

Izteiksme (1) kā arī izteiksme (2) noteic divkāršā integrala vērtību.

Ja divkāršā integrala izvērtēšanu izdaram ar priekšrakstu (1), tad izdaram integrēšanu, attiecībā uz $x$, ar pastāvīgu $y$, kas ģeometriski apskatot rāda, ka integrēšana izdarita gar taisni $UV$, (zīm. 62) otra integrēšana, attiecībā uz $y$, izdarīta starp taisnes $UV$ tālākām iespējamām vietām t. i. starp taisnēm $EH$ un $FG$.

Rikojoties pēc priekšraksta (2) pirmo integrēšanu izdaram ar pastāvīgu $x$ gar taisni $QR$, un otru integrēšanu starp taisnes $QR$ iespējamām vietām $EF$ un $HG$.




Zīm. 63.

Apskatīsim gadijumu, kad integrēšanas iecirkni $P$ ierobežo līkne. Pieņemam ka še, integrēšanas iecirkni $P$ (zīm. 63) ierobežojošā līkne ir $C$, ko taisnes paralelas koordinatu asīm krusto tikai divos punktos.

Še funkcijas $f(x,y)$ integrēšana notiek ar tādiem $x \mid y$ vērtību pāriem, kam atbilst punkti laukumā $P$ un uz līknes $C$. Ja līknes $C$ nolīdzinājums ir $\varphi(x, y) = 0$, tad līknes punkti izpilda šo nolīdzinājumu, bet ja punkti atrodas laukumā $P$, tad

$$\varphi(x, y) < 0$$

Piemēram, ja integrēšanas laukums $P$ ir riņķis ap koordinatu sākumu ar radiusu $R$, tad punktiem $x \mid y$ jāizpilda noteikums

$$x^2 + y^2 \quad R^2 \leqq 0.$$

Ja taisne $\parallel y$ asij krusto līkni $C$ tikai divos punktos, tad divkāršā integrala pirmo integrēšanu attiecībā uz $y$ ar pastāvīgu $x$, izdaram gar taisni $QR$. Integrala apakšrobeža tad ir $MQ$ un augšrobeža $MR$. Tikpat $MQ$ kā $MR$ ir funkcijas no $x$. Apzīmējot

$$MQ = \varphi_0(x) \quad \text{un} \quad MR = \varphi\,(x)$$

dabūjam pirmo reizi integrējot

$$\int_{\varphi_0(x)}^{\varphi(x)} f(x, y)\, dy.$$

Šo izteiksmi integrējam, attiecībā uz $x$, robežās no $x = a$ līdz $x = b$. Vērtības $a$ un $b$ dabūjam, velkot līknei $C$ pieskares $\parallel y$ asij. Šīs pieskares nogriež uz $x$ ass $a$ un $b$. Tā tad

$$\int_a^b dx \int_{\varphi_0(x)}^{\varphi(x)} f(x, y)\, dy = \iint_P f(x, y)\, dx\, dy. \tag{3}$$

Ja izdaram pirmo integrēšanu, attiecībā uz $x$, ar pastāvīgu $y$, tad integrējam gar taisni $UV$. Apakšrobeža tad ir $NU = \omega_0(y)$ un virsrobeža $NV = \omega(y)$. Tad dabūjam

$$\int_{\omega_0(y)}^{\omega(y)} f(x, y)\, dx.$$

Šo izteiksmi integrējam, attiecībā uz $y$, no $c$ līdz $d$. Vērtības $c$ un $d$ dabūjam velkot pieskares līknei $C$ paraleli $x$ asij. Tad

$$\int_c^d dy \int_{\omega_0(y)}^{\omega(y)} f(x, y)\, dx = \iint_P f(x, y)\, dx\, dy \tag{4}$$

Salīdzinot 3 un 4 redzam ka

$$\int_c^d dy \int_{\omega_0(y)}^{\omega(y)} f(x, y)\, dx = \int_a^b dx \int_{\varphi_0(x)}^{\varphi(x)} f(x, y)\, dy.$$

Šī izteiksme rāda, ka arī šinī gadijumā var integrēšanas kārtību pārmainīt, bet tad pirmās integrēšanas robežas jāmaina, jo tās atkarīgas no tā mainīgā, attiecībā uz ko otrreiz jāintegrē. Otras integrēšanas robežas arvienu ir pastāvīgi lielumi.

**39. Divkārša integrala ģeometriska nozime.** Apzīmējot funkcijas $f(x, y)$ vērtību ar $z$, varam uzskatīt $x \mid y \mid z$ kā kāda punkta koordinatas telpā, tad

$$z = f(x, y).$$

dod telpā virsmu.

Pieņemam, ka $z$ arvienu pozitivs. Reizinājums

$$f(\xi_k, \eta_e)\, \delta_k \cdot \varepsilon_e$$

tad dod tādas prismas tilpumu, kam pamats ir

$$\delta_k \cdot \varepsilon_e = \Delta_{ke} P$$

un augstums

$$z_{ke} = f(\xi_k, \eta_e).$$

Tad

$$\Sigma \, \Sigma \, z_{ke} \cdot \Delta_{ke} P$$

dod tilpumu, (zīm. 62), kas ierobežots ar laukumu $P$, katros sānos ar plāknēm kas $\perp$ uz $xy$ plāknes un ar plāknēm, caur aplikatu $z_{ke}$ gala punktiem.

Ar augšējās divkāršās summas robežvērtību, ar divkāršo integralu

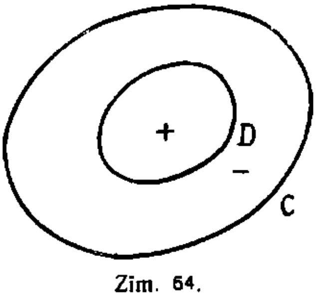
$$\iint\limits_P f(x, y) \, dx \, dy \tag{14}$$

ir definēts tilpums, ko veido, prizma vai cilindrs, virs laukuma $P$ un kas augšā ierobežots ar virsmu

$$z = f(x, y).$$

Ar noteiktu divkāršu integralu atrisina problēmu: aprēķināt ar līku virsmu ierobežotu tilpumu.

Ja $f(x, y)$ maina zīmi integrēšanas iecirknī $P$, kas ierobežots ar līkni $C$, tad $f(x, y)$ iet caur 0 gar kādu līkni $D$. Ja $f(x, y) > 0$ līknes $D$ laukumā, tad tā ir $< 0$ starp līknēm $D$ un $C$.



Zīm. 64.

Integrals

$$\iint\limits_P f(x, y) \, dx \, dy,$$

tad dod divu tilpumu starpību, no kuŗiem pozitivais atrodas virs līknes $D$ laukuma un negativais zem laukuma starp līknēm $D$ un $C$.

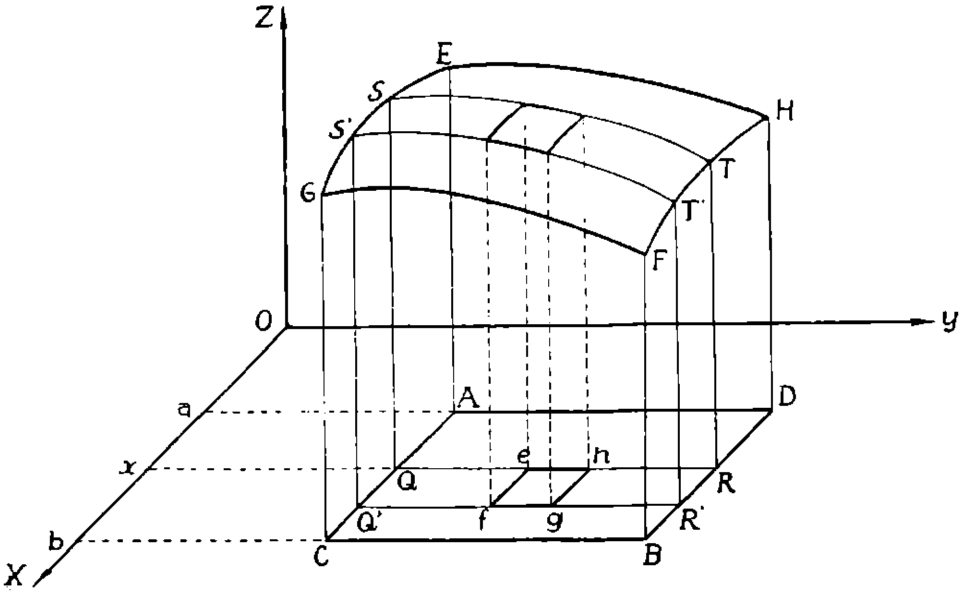
Divkāršā integrala izvērtēšana ar divām sekojošām integrēšanām

$$\iint\limits_P f(x, y) \, dx \, dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x, y) \, dy$$

ir šāda ģeometriska nozīme.

Integrēšanas iecirknis $P$ = laukums $ACBD$ (zīm. 65), ar malām $\parallel$ koordinātu asīm.

Virsmas daļa, ko veido $z = f(x, y)$ virs laukuma $P$ ir laukums $EGFH$.




Zīm. 65.

Kad funkciju $f(x, y)$, integrējam attiecībā uz $y$, ar pastāvīgu $x$ robežās no $c = xQ$ līdz $d = xR$, tad

$$\int_c^d f(x, y)\, dy = \text{laukums } QRST = u.$$

Laukumu $u$ dabūjam šķeļot tilpumu ar plākni $\parallel$ $yz$ plāknei attālumā $x$ no $yz$ plāknes. Reizinot ar $dx$ dabūjam

$$dx \int_c^d f(x, y)\, dy = u dx.$$

Šī izteiksme dod prizmas tilpumu, kuras pamats ir $u$ un augstums $dx$.

Šo prizmu sumas robežvērtība

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy = \int_a^b u dx$$

dod visu tilpumu. Līdzīgi izskaidrojams arī integrals

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx.$$

Šī apskate arī derīga, ja iecirkni $P$ ierobežo likne.

Divkārša integrala

$$\iint_P f(x, y)\, dx\, dy = \iint_P z\, dx\, dy$$

elements $z\, dx\, dy$ ir, (neievērojot augstākus par otro kārtu bezgalīgi mazus lielumus, attiecībā uz $dx$ un $dy$), mazas prizmas tilpums, kuŗas pamats $efgh = dx\, dy$ un kas augšā ierobežota ar virsmu $z = f(x, y)$.

Ja liekam

$$f(x, y) = 1, \quad \text{tad} \quad \iint_P dx\, dy = P \qquad \text{(integrēšanas laukums).}$$

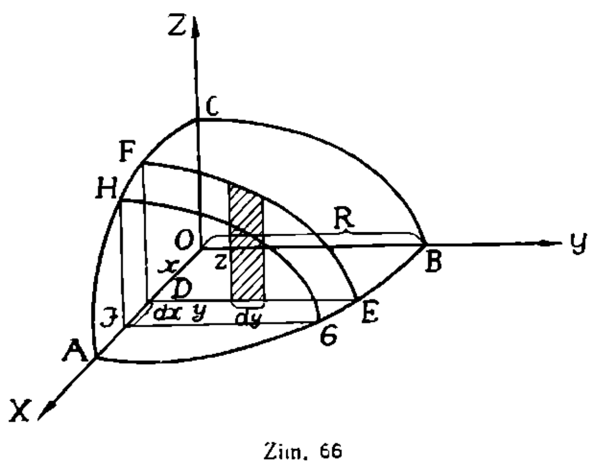
P i e m ē r s.

Aprēķināt lodes tilpumu. Kā redzējām

$$\iint_P f(x, y)\, dx\, dy$$

dod iespēju aprēķināt tilpumus. Liekam $\quad = f(x,$ tad

$$\iint_P f(x, y)\, dx\, dy = \iint_P z\, dx\, dy. \tag{1}$$




Zīm. 66

Pieņemam, ka lodes centrs atrodas koordinatu sistemas sākumā, lodes radiuss $R$.

Lodes nolīdzinājums ir

$$z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}. \tag{2}$$

Aprēķinam tilpumu $V$ pirmā oktantā. Šinī gadijumā sakne jāņem ar $+$ zīmi, jo pirmā oktantā $z$ ir pozitivi.

Zīmējumā 66. loki $AB$, $BC$, $CA$ katrs ir $\frac{1}{4}$ riņķa ar radiusu $R$.

Integrēšanas iecirknis $P$ ir $\frac{1}{4}$ riņķa laukums $OAB$ ar radiusu $R$.

Ievērojot teikto par divkāršo integralu, tilpumu $V$ dabūjam aprēķinot divkāršo integralu

$$V = \iint_P z\,dx\,dy. \tag{3}$$

Divkāršo integralu (3) izvērtējam, kā norādīts ar divām sekojošām integrēšanām, tad

$$V = \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} z\,dy \tag{4}$$

Augšējo integralu robežas dabūjam šādi. Zemintegrala izteiksme $z\,dy$ dod svītroto elementarlaukumu. Integrējot šo izteiksmi robežās no 0 līdz $\sqrt{R^2-x^2}$ dabūjam laukumu $FDE$.

Reizinājums

$$dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} z\,dy$$

dod elementarprizmu $HJGEFD$. Šo elementarprizmu sumu, meklēto tilpumu $V$ dabūjam integrējot augšējo izteiksmi robežās no 0 līdz $R$. Tā tad

$$V = \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} z\,dy \tag{5}$$

Ievedot $z$ vērtību dabūjam

$$V = \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dy \tag{6}$$

Lai šo izteiksmi izvērtētu dabūjam vispirms nenoteiktu integralu

$$\int \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dy. \tag{7}$$

Še jāintegrē, attiecībā uz $y$, $x$ uzskatams kā pastāvīgs. No agrākā zinams integrals

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} \tag{8}$$

Salīdzinot integralu (7) ar izteiksmi (8) redzams, ka (7) varam pārvest uz veidu (8), ja $a^2$ vietā ievedam $R^2 - x^2$ un $x$ vietā ievedam $y$. Tad

$$\int \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, dy = \frac{y}{2} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} + \frac{R^2 - x^2}{2} \arcsin \frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

Ievedot robežas, dabūjam

$$\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{R^2-x^2-y^2}\, dy = \left| \frac{y}{2} \sqrt{R^2-x^2-y^2} + \frac{R^2-x^2}{2} \arcsin \frac{y}{\sqrt{R^2-x^2}} \right|_0^{\sqrt{R^2-x^2}} =$$

$$= \left[\left(0 + \frac{R^2 - x^2}{2} \arcsin 1\right) - \left(0 + \frac{R^2 - x^2}{2} \arcsin 0\right)\right] = \frac{R^2 - x^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Tad

$$\int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, dy = \int_0^R dx \left(\frac{R^2 - x^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4} \int_0^R (R^2 - x^2) dx =$$

$$= \frac{\pi}{4} \left[R^2 \left| x \right|_0^R - \left| \frac{x^3}{3} \right|_0^R \right] = \frac{\pi}{4} \left[R^3 - \frac{R^3}{3}\right] = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2}{3} R^3$$

Tā tad

$$V = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2}{3} R^3$$

un lodes tilpums

$$8\, V = \frac{4}{3} R^3 \pi$$

Šis piemērs rāda, kā izdara **tilpuma aprēķināšanu — kubaturu**, ar divkārša integrala palīdzību.

**40. Jaunu mainīgu ievešana divkāršā integralā.** Integrēšanas iecirkni $P$ iedalijām taisnleņķu elementaros laukumos $dP$, ar taisnēm, paralelām koordinatu asīm. Iedalīt varam arī citādi, tikai jāgādā, lai elementarlaukumu $dP$ sumas robeža būtu $P$ un to izmēri visos virzienos tiektos uz 0. Tādā gadijumā

$$\iint_P f(x, y)\, dP$$

dabū arvienu to pašu vērtību, neskatoties uz to, kādā kārtībā iedalīšana izdarīta.

Agrāko iedalīšanas veidu varam mainīt ievedot $x$ un $y$ vietā jaunus mainīgos, kurus varam tā izvēlēt lai jaunais iedalīšanas veids piemērotos integrējamās funkcijas īpatnībām Tam ir nozīme tikpat integrēšanas operacijas izvešanā, kā arī integrēšanas robežu noteikšanā, kas dažos gadijumos rada grūtības.

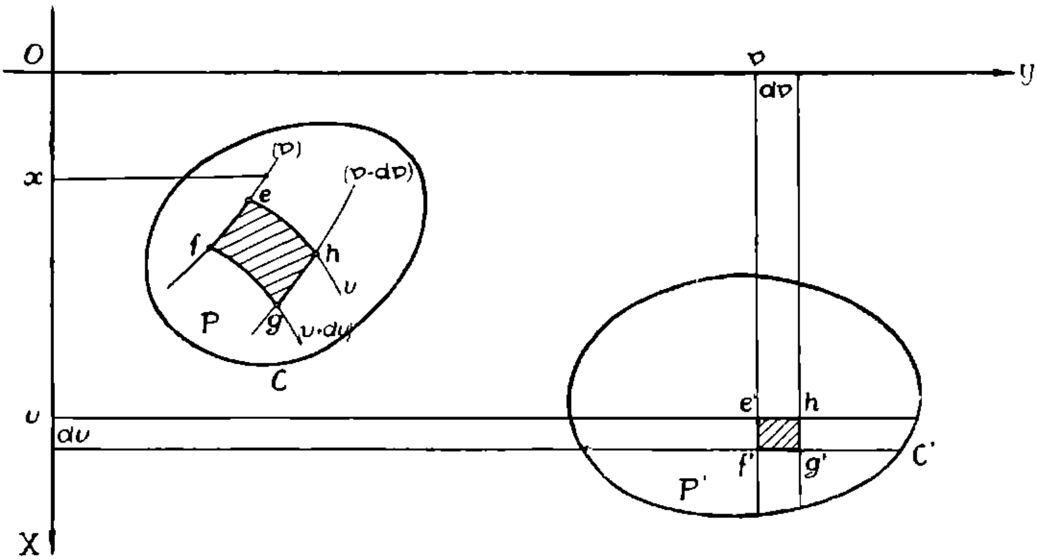
Integralā

$$\iint_{P} f(x, y)\, dx\, dy \tag{1}$$

ievedam $x$ un $y$ vietā jaunus mainīgus $u$ un $v$ ar nolīdzinājumiem:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(u, v) \\ y &= \psi(u, v) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Pieņemam: 1) ka $\varphi$ un $\psi$ funkcijas ir nepārtrauktas un šīm funkcijām ir nepārtrauktas atvasinātās attiecībā uz $u$ un $v$, 2) ka ja doti $u$ un $v$, tad no (2) dabūjam $x$ un $y$ vienvērtīgus. Tāpat, ja doti $x$ un $y$, tad dabūjam no (2) $u$ un $v$ vienvērtīgus.




Zīm. 67.

Tādā gadijumā nolīdzinājumus (2) sauc par **vien-vienvērtīgiem, nepārtrauktiem transformacijas nolīdzinājumiem.**

Ar nolīdzinājumiem (2) katram punktam ar koordinatām $x|y$, $xy$ plāknē, atbilst šai pašā plāknē punkts ar koordinatam $u|v$. Līknei $C$ atbilst līkne $C'$ (zīm. 67), laukumam $P$, kas ierobežots ar līkni $C$, atbilst laukums $P'$, kas ierobežots ar līkni $C'$.

Diferencējot nolīdzinājumus (2) dabūjam:

$$\left.\begin{aligned} dx &= \frac{\partial\varphi}{\partial u}\,du + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\,dv \\ dy &= \frac{\partial\psi}{\partial u}\,du + \frac{\partial\psi}{\partial v}\,dv \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

No (3) dabūjam:

$$du\;dv:1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial v} & -dx \\ \frac{\partial\psi}{\partial v} & -dy \end{vmatrix} : -\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & -dx \\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & -dy \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Tā kā nolīdzinājumi (2) ir nepārtraukti un vienvērtīgi, tad katrā vietā, dotiem $dx$ un $dy$ jāatbilst noteiktām vērtībām $du$ un $dv$ no (3) un arī otrādi. Redzams, ka tādā gadijumā determinants, ko apzīmējam ar $J$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix}$$

nevar būt 0 nevienā vietā laukumā $P'$, un tādēļ tas arī nevar mainīt zīmi. Šo determinantu sauc par funkciju $\varphi$ un $\psi$ funkcionalo determinantu vai arī Jakobi determinantu.

Iedalam iecirkni $P'$ ar taisnēm || koordinatu asīm paralelograma veida elementos, viens no tiem ir $e'f'g'h'$. Šādam laukuma $P'$ iedalijumam, atbilst laukuma $P$ iedalijums, vispārīgi ar divu sistemu līknēm, elementos $dP = efgh$. Ja $du$ un $dv$ pieņemti ļoti mazi, tad $efgh$ var uzskatīt kā paralelogramu, kā malas ir taisnes, jo dalītājas līknes nepārtraukti maina virzienu. Šī virziena maiņa uz ļoti maza līknes gabala ir ļoti maza.

Pārejot no $e'$ un $f'$ $v$ nemainas. Laukumā $P$ tad $e$ iet uz $f$ un punkta $e$ koordinatas $x|y$ mainas par

$$d_1x = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\,du; \quad d_1y = \frac{\partial\psi}{\partial u}\,du.$$

Pārejot no $e'$ uz $h'$ $u$ nemainas. Laukumā $P$ punkts $e$ tad iet uz $h$.

Še punkta $e$ koordinatas $x \mid y$ mainas par

$$d_2 x = \frac{\partial \varphi}{\partial v} \partial v; \quad d_2 y = \frac{\partial \psi}{\partial v} dv.$$

Tā tad punkta $e$ koordinatas ir $x \mid y$.

" " " $f$ " $x + d_1 x \mid y + d_1 y$.

" " " $h$ $x + d_2 x \mid y + d_2 y$.

Trijstūŗa $efh$ laukums ir

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x + d_1 x & y + d_1 y & 1 \\ x + d_2 x & y + d_2 y & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} d_1 x & d_1 y \\ d_2 x & d_2 y \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} d_1 x & d_2 x \\ d_1 y & d_2 y \end{vmatrix}.$$

Elementarlaukums $dP = 2\,\Delta\, efg$. Tā tad

$$dP = \begin{vmatrix} d_1 x & d_2 x \\ d_1 y & d_2 y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} du & \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} du & \frac{\partial \psi}{\partial v} dv \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} du\, dv = J\, du\, dv.$$

Tā kā laukums $P$ ir pozitivs un $dP$ arī ir pozitivs, skaitot $du$ un $dv$ par pozitiviem, redzam ka

$$dP = |J|\, du\, dv.$$

Ievērojot $dP$ izteiksmi dabūjam

$$\iint_P f(x, y) \cdot dP = \iint_{P'} f(\varphi, \psi)\, |J|\, du\, dv$$

Kreisās puses divkāršā integrala vērtību dabūjam, kā redzams labā pusē, integrējot funkciju $f(\varphi, \psi)\,|J|$ ar jauniem mainīgiem $u$ un $v$ uz laukuma $P'$, iedalot to elementos $du\ dv$. Labās puses integralu robežas noteicamas ar $C'$ līknes palīdzību, kā agrāk norādīts.

Ja neuzskatam $u$ un $v$ kā jaunas koordinatas, bet kā parametrus, ar kuŗiem izteikti $x$ un $y$, tad varam nākt pie sekojoša uzskata:

Uzskatot $v$ par nemainīgu, punkts $e$ ar koordinatām $x \mid y$ veido līkni $(v)$.

Uzskatot $u$ par nemainīgu, punkts $e$ ar koordinatām $x \mid y$ veido līkni $(u)$. Tā tad, punkts $e$ parādas kā līkņu $(u)$ un $(v)$ krustojuma punkts. Tādēļ $u$ un $v$ arī sauc par punkta $e$ **līknes veida koordinatām**.

Taisnleņķa paralelogramam $dP' = du\ dv$ atbilst laukumā $P$ paralelograms ar elementaro laukumu

$$|J|\ du\ dv.$$

Šis elementarais laukums ir laukuma $P$ iedalijuma elements. Funkcijā $f(x, y)$ ieliekot $x$ vietā $\varphi(u, v)$ un $y$ vietā $\psi(u, v)$, dabūjam

$$f[\varphi(u, v),\ \psi(u, v)].$$

Tad divkāršo integralu

$$\int\int f(\varphi, \psi)\ |J|\ du\ dv$$

varam uzskatīt kā integrējamu iecirknī $P$, un rakstīt

$$\int\int_P f(\varphi, \psi)\ |J|\ du\ dv = \int\int_P f(x, y)\ dP$$

Integralu robežas jānoteic, ievērojot parametru $u$ un $v$ nozīmi.

P i e m ē r s.

Izdaram transformaciju

$$x = r\cos\varphi.$$
$$y = r\sin\varphi.$$

Tad jaunie mainīgie ir $r$ un $\varphi$.

Šo transformaciju, attiecībā uz koordinatām telpā, sauc par c i l i n d r a k o o r d i n a t u, arī s e m i p o l a r o k o o r d i n a t u i e v e š a n u. Šinī gadijumā

$$J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r,$$

un

$$dP = |J|\ du\,dv = r\,dr\,d\varphi.$$

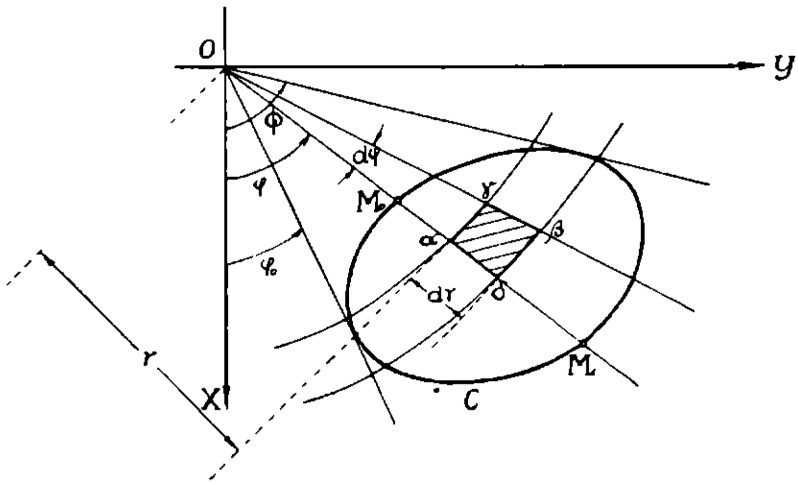
Tad

$$\int\int_P f(x, y)\,dx\,dy = \int\int_P f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi.$$

No zīmējuma 67ᵃ redzams, ja $r$ ir pastāvīgs, tad transformacijas nolīdzinājumi:

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$

rāda, ka punkts $a$ veido riņķi ar radiusu $r$.




Zīm. 67ᵃ

Ja $\varphi$ ir pastāvīgs, tad transformacijas nolīdzinājumi rāda, ka punkts $a$ veido taisni caur koordinatu sākumu.

Dalijuma elements $dP$ ir laukums $a\gamma\beta\delta$. Augšējo divkāršo integralu pārveidojot dabūjam:

$$\iint_P f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\, r\, dr\, d\varphi = \int_{\varphi_0}^{\Phi} d\varphi \int_{\omega_0(\varphi)}^{\omega_1(\varphi)} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\, r\, dr.$$

No zīmējuma redzam, ka ievērojot parametru $r$ un $\varphi$ nozīmi, pirmās integrēšanas robežas ir $OM_0 = \omega_0(\varphi)$ un $OM_1 = \omega_1(\varphi)$.

Otras integrēšanas robežas ir leņķis $\varphi_0$ un leņķis $\Phi$.

P i e m ē r s.

Aprēķinam lodes tilpumu pielietojot koordinatu transformaciju.

Kā agrāk redzējām, lodes oktanta tilpumu $V$ dabujam ortogonalās koordinatas:

$$V = \iint_P \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, dx\, dy.$$

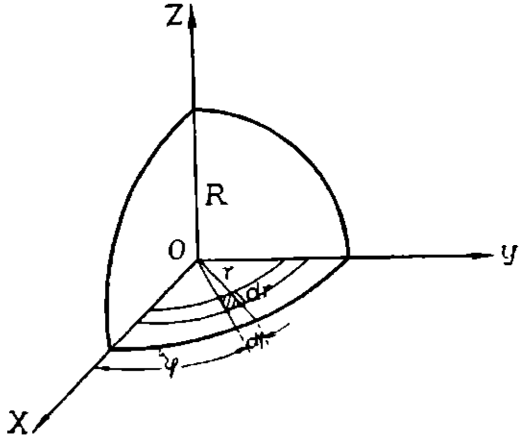
Liekam

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi,$$

tad

$$|J| = r; \quad dP = r\,dr\,d\varphi$$

un




Zīm. 69

$$\iint_P \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,dx\,dy = \iint_P \sqrt{R^2 - r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi}\;r\,dr\,d\varphi$$

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2}\;r\,dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\;\frac{1}{2}\,\frac{2}{3}\left|(R^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\right|_R^0 = \frac{1}{3}\,R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi =$$

$$V = \frac{1}{3}\,.\,R^3\,\frac{\pi}{2}$$

un lodes tilpums

$$8\,V = \frac{4}{3}\,.\,R^3\pi.$$

**41. Neīsti divkārši integrali.** Par n e ī s t i e m d i v k ā r š i e m i n t e g r a l i e m sauc tādus divkāršus integralus, ko integrējamā funkcija $f(x, y)$ kādā vietā integrēšanas iecirkni, vai kādā vietā uz iecirkņa malas, dabū vērtību $\infty$. Arī tādus divkāršus integralus sauc par neīstiem, ko integrēšanas iecirknis ir $\infty$,

Divkāršu integralu no funkcijas $f(x, y)$, kas integrēšanas iecirknī dabū vērtību $\infty$, definē kā tāda divkārša integrala robežvērtību, no kura integrēšanas iecirkņa kritiskās vietas ir izslēgtas ar attiecīgi vestām līknēm, pie kam šādi veidotais integrēšanas iecirknis kaut kādā kārtā tiecas uz pilnīgo iecirkni kā robežu. Ja divkāršam integralam tādas robežvērtības nav, tad tam nav nozīmes.

Divkāršu integralu no $f(x, y)$, ja integrēšanas iecirknis ir $\infty$, definē kā robežvērtību, uz ko tiecas divkāršs integrals ar galīgu integrēšanas iecirkni, kad šis iecirknis tiecas uz bezgalību.

Ja tādas robežvērtības nav, tad dotam divkāršam integralam nav nozīmes.

Piemērs.

Dabūt divkārša integrala

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\ dy$$

vērtību, kad integrēšanas iecirknis ir visa $xy$ plākne Ievedam polar·koordinatas

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi.$$

Ar šo substituciju

$$J = r;\quad dP = r\,dr\,d\varphi$$

ko ievērojot, augšējais divkāršais integrals dabū veidu

$$\int\int e^{-r^2}\, d\varphi\ r\ dr.$$

Šo integralu integrējam pieņemot kā integrēšanas iecirkni riņķi ar radiusu $R$. Tad

$$\int\int_P e^{-r^2}\, d\varphi\ r\,dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R e^{-r^2}\, r\,dr = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R e^{-r^2}\, d(-r)^2 =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi\ \left| e^{-r^2}\right|_0^R = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 - e^{-R^2})\, d\varphi = \pi\,(1 - e^{-R^2}).$$

Ja šai izteiksmē liekam $R \to \infty$, tad galīgais integrēšanas iecirknis riņķis, tiecas uz integrēšanas iecirkni, visu $x$, $y$ plākni. Tad dabūjam

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\ dy = \pi.$$

Tā kā

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy = \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right]^2,$$

tad

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right]^2 = \pi$$

un

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

**42. Trīskāršais integrals.** Dota funkcija $f(x, y, z)$, vienvērtīga, nepārtraukta ar visiem $x, y, z$, kas izpilda noteikumus

$$\left.\begin{array}{l} a \leqslant x \leqslant b. \\ c \leqslant y \leqslant d. \\ g \leqslant z \leqslant h. \end{array}\right\} \tag{1}$$

Punkts ar koordinatām $x \mid y \mid z$ ar šiem noteikumiem atrodas telpā paralelepipedā $R$, kā šķautnes ‖ koordinatu asīm. Šo šķautņu garumi ir

$$(b - a); \quad (d - c); \quad (h - g).$$

Intervalu $(a, b)$ iedalam $p$ daļās
„ $(c, d)$ „ $q$ „
„ $(g, h)$ „ $r$

Tad dalījumu punktu koordinatas uz asīm ir

$$\begin{array}{llll} a = x_0, & x_1, & x_2, & x_{p-1},\ x_p = b \\ c = y_0, & y_1, & y_2, & y_{q-1},\ y_q = d \\ g = z_0, & z_1, & z_2, & z_{r-1},\ z_r = h \end{array}$$

Apzīmējam

$$\Delta x_j = x_j - x_{j-1}; \quad \Delta y_k = y_k - y_{k-1}; \quad \Delta z_e = z_e - z_{e-1}.$$

Veidojam trīskāršu sumu

$$\sum_1^r{}^{e} \sum_1^q{}^{k} \sum_1^p{}^{j} f(\xi_j, \eta_k, \zeta_e)\, \Delta x_j \,.\, \Delta y_k \,.\, \Delta z_e\,. \tag{2}$$

Še punkts ar koordinatām $\xi_j$, $\eta_k$, $\zeta_e$ atrodas kādā pēc patikas ņemtā vietā paralelepipedā ar šķautnēm $\Delta x_j$, $\Delta y_k$, $\Delta z_e$.

Ja dalijumu skaitli $p$, $q$, $r$ pastāvīgi aug, tad $\Delta x_j$, $\Delta y_k$, $\Delta z_e$ tiecas uz 0, bet augšējā trīskāršā suma tad tiecas uz kādu noteiktu robežvērtību. Ar sumas (2) robežvērtību definē trīskāršu integralu no funkcijas $f(x, y, z)$ tilpumā $R$ un apzīmē ar simbolu

$$\iiint_R f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz. \tag{3}$$

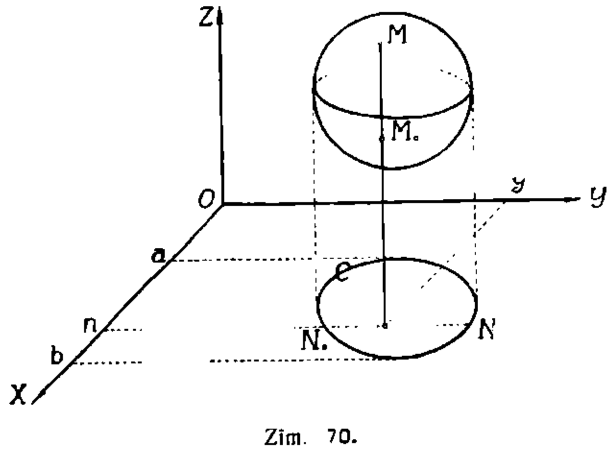
Ka summai (2) ir robežvērtība, ja funkcijai $f(x, y, z)$ ir pieņemtās īpašības, pierādams līdzīgi kā divkāršā integrala gadijumā.

Trīskāršu integralu izvērtē, izdarot ar $f(x, y, z)$ trīs integrēšanas; integrē vispirms, attiecībā uz $z$, robežās no $g$ līdz $h$, tad integrē, attiecībā uz $y$, robežas no $c$ līdz $d$ un beidzot, integrē attiecībā uz $x$, robežās no $a$ līdz $b$. Tad dabūjam:

$$\iiint_R f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_g^h f(x, y, z)\, dz. \tag{4}$$

Arī še, kad robežas pastāvīgas, var mainīt integrēšanas kārtību, piemēram:

$$\iiint_R f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_a^b dx \int_g^h dz \int_c^d f(x, y, z)\, dy. \tag{4a}$$




Zīm. 70.

Ja liekam $f(x, y, z) = 1$, tad, kā redzams

$$\iiint_R dx\, dy\, dz = R \tag{5}$$

t. i. integrēšanas iecirknis.

Trīskārša integrala integrēšanas iecirkni $R$ varam pieņemt arī veidotu ar kādu slēgtu virsmu

$$F(x, y, z) = 0. \tag{6}$$

Pieņemam, ka šo virsmu krusto taisnes, kas ‖ kādai koordinatu asij (zīmējumā 70) ne vairāk kā divos punktos.

Ja paralela $z$ asij taisne krusto virsmu tikai divos punktos, tad pirmā integrēšana, attiecībā uz $z$, ar pastāvīgiem $x$ un $y$, jāizdara no punkta $M_0$ līdz punktam $M$, kuros aplikata krusto virsmu (6). Ar dotiem $x$ un $y$ no (6) dabūjam divas $z$ vērtibas: $z_0$ un $z_1$ $(z_0 < z_1)$. Še

$$z_0 = \varphi_0(x, y) \quad \text{un} \quad z_1 = \varphi_1(x, y).$$

Pirmā integrēšana dod:

$$\int\limits_{\varphi_0(x, y)}^{\varphi_1(x, y)} f(x, y, z)\, dz.$$

Otru integrēšanu izdaram ar pastāvīgu $x$, attiecībā uz $y$, no punkta $N_0$ līdz punktiem $N$, kas atrodas uz liknes $C\,(x, y)$ plāknē. Šo likni dabūjam kā cilindra pamatu, kas pret $xy$ plākni un pieskaras izteiktai ar (6) virsmai $R$. Liknes $C$ nolīdzinājumu dabūjam izslēdzot starp nolīdzinājumiem

$$F(x, y, z) = 0 \tag{6}$$

$$\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z} = 0 \tag{7}$$

mainīgo $z$. Tā tad liknes $C$ nolīdzinājums zinams no kura dabūjam:

$$\begin{array}{lll} N_0 \text{ ordinata:} & y_0 & = \psi_0(x) \\ N \quad \text{„} & y & = \psi_1(x). \end{array}$$

Otra integrēšana tad dod:

$$\int\limits_{\psi_0(x)}^{\psi_1(x)} dy \int\limits_{\varphi_0(x, y)}^{\varphi_1(x, y)} f(x, y, z)\, dz.$$

Trešo integrēšanu izdaram, attiecībā uz $x$, kā redzams, no $x = a$ līdz $x = b$ (starp liknes $C$ pieskarēm, kas vilktas ‖ $y$ asij).

Tad dabūjam

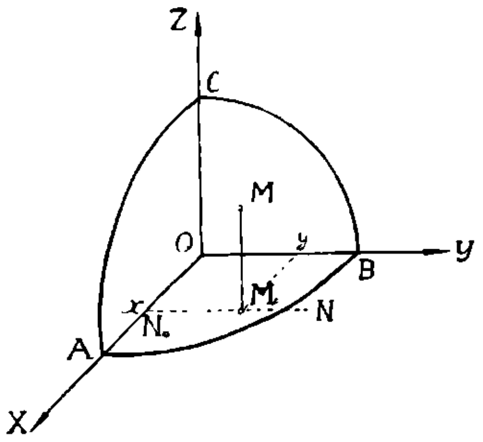
$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{\psi_0(x)}^{\psi_1(x)} dx \int\limits_{\varphi_0(x, y)}^{\varphi_1(x, y)} f(x, y, z)\, dz. \tag{8}$$

Tā kā $R$ ir telpas daļa, tad trīskāršu integralu sauc par **telpas integralu.**

Ja pieņemam, ka telpa $R$ pildīta ar masu un ka punktā $x \mid y \mid z$ blīvums ir $f(x, y, z)$, tad trīskāršs integrals no $f(x, y, z)$, ņemts telpā $R$, dod šīs telpas masu.

**Piemērs.**

Lodes tilpuma sprēķināšana ar trīskāršu integralu. Pieņemam, ka lodes centrs atrodas koordinatu sākumā un lodes radiuss ir $r$.



Zīm. 71.

Kā redzējām, ja trīskāršā integralā

$$\iiint_R f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

liekam $f(x, y, z) = 1$, tad dabūjam integrēšanas iecirkni, tā tad

$$\iiint_R dx\, dy\, dz = R,$$

kas ir integrēšanas telpas $R$ tilpums. Aprēķinam tilpumu pirmā oktantā. Apzīmējot ar $8V$ lodes visu tilpumu, aprēķinam $V$. Šī telpa ir integrēšanas telpa $R$, ar kuras palīdzību dabūjam integrēšanas robežas, kā norādīts. Trīskāršo integralu izvērtējam ar atkārtotu integrēšanu.

Pirmā integrēšana, attiecībā uz $z$, jāizdara no $M_0$ līdz $M$ t. i. še no $z = 0$ līdz $z = +\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$. Tad dabūjam

$$\int_0^{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} dz.$$

Otra integrēšana jāizdara attiecībā uz $y$ no $N_0$ līdz $N$, t. i. šinī gadijumā no $y = 0$ līdz $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, tad dabūjam:

$$\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} dz.$$

Trešā integrēšana jāizdara, attiecībā uz $x$, no 0 līdz $A$ t. i. no $x = 0$ līdz $x = r$, tā tad:

$$\iiint_P dx\, dy\, dz = \int_0^r dx \int_0^{\sqrt{r^2 - x^2}} dy \int_0^{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} dz = V \tag{9}$$

$$\int_0^{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} dz = \Big| z \Big|_0^{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}.$$

Šo vērtību, ievedot (9) dabūjam:

$$\int_0^r dx \int_0^{\sqrt{r^2 - x^2}} \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\, dy = V. \tag{10}$$

Izteiksme (10) ir tā pati, ko dabūjām aprēķināt lodes tilpumu ar divkāršu integralu.

**43. Jaunu mainīgu ievešana trīskāršā integralā.** Liekam integralā

$$\iiint_R f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(u, \quad \omega) \\ y &= \psi(u, v, \omega) \\ z &= \varkappa(u, \quad \omega) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Pieņemam, ka šis trīs funkcijas ir v i e n v i e n v ē r t ī g a s un nepārtrauktas.

Līdzīgi, kā divkārša integrala gadijumā dabūjam:

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial \omega} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi}{\partial v} & \dfrac{\partial\psi}{\partial \omega} \\ \dfrac{\partial\varkappa}{\partial u} & \dfrac{\partial\varkappa}{\partial v} & \dfrac{\partial\varkappa}{\partial \omega} \end{vmatrix} \tag{1}$$

Ja jaunā telpā $R'$, pieņemam taisnleņķa paralelpipedu ar šķautnēm $du$, $dv$, $d\omega$, tad telpā $R$ tam arī atbilst paralelopipeds, bet vispārīgi tā leņķi nebūs taisnleņķi.

Līdzīgi, kā divkāršā integrala gadijumā, dabūjam:

$$dR = |J|\, du\, dv\, d\omega. \tag{3}$$

Tālāk dabūjam

$$\iiint\limits_{R} f(x, y, z)\, dR = \iiint\limits_{R'} f(\varphi, \psi, \chi)\, |J|\, du\, dv\, d\omega. \tag{4}$$

Labās puses integralu robežas noteicamas ievērojot jauno integrēšanas telpu $R'$, tā kā agrāk norādīts.

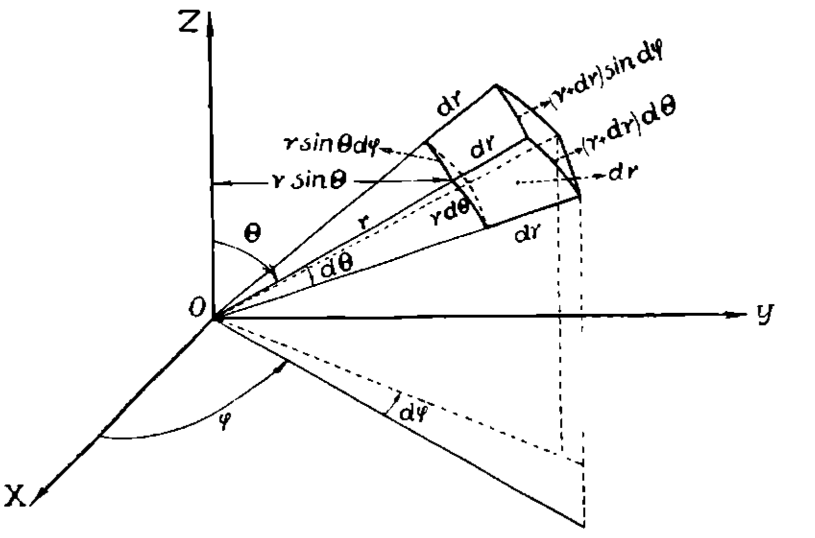
Ja uzskatam $u$, $v$, $\omega$ kā parametrus, tad $|J|\, du\, dv\, d\omega$ ir integrala integrēšanas telpas $R$ elements un funkcijas $f(\varphi, \psi, \chi)$ integrēšana jāizdara telpā $R$. Robežas jānoteic ievērojot parametru nozīmi.

Bieži lieto substituciju, ievedot polarkoordinatas telpā

$$\left.\begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\varphi, \\ y &= r \sin\theta \sin\varphi, \\ z &= r \cos\theta. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Tad dabūjam

$$J = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2 \sin\theta \tag{6}$$




Zīm. 72.

un

$$dR = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi. \tag{7}$$

Elementa $dR$ nozīme redzama zīmējumā 72.

Ja $r$ pastāvīgs, tad dabūjam lodes virsmu ap 0.
„ $\theta$ „ „ „ konu ar virsotni 0 un asi 0 $z$.
$\varphi$ „ plāknes caur $z$ asi.

Ievērojot $|J|$ vērtību un (5) dabūjam

$$\iiint\limits_R f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz =$$

$$= \iiint\limits_R f(r \sin\theta \cos\varphi, \, r \sin\theta \sin\varphi, \, r\cos\theta) \, r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi. \tag{8}$$

## Vienpadsmitā nodaļa.

## Integralrēķinu pielietošana ģeometrijā. Diferencialģeometrija.

**44. Līkņu kvadratura.** Plāknē ar līkni veidotu laukumu var aprēķināt arī ar divkāršu integralu, liekot divkāršā integralā

$$f(x, y) = 1,$$

tad

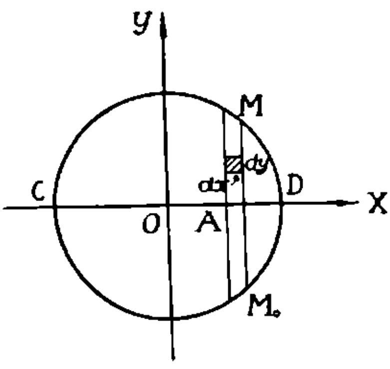
$$\iint\limits_P dx \, dy = P$$

Šādā gādijumā, laukums, kā vērtību meklējum, ir integrēšanas iecirknis $P$.

Piemērs.

Aprēķināt riņķa laukumu.

$$\iint\limits_P dx \, dy = \int\limits_{-r}^{r} dx \int\limits_{y_0}^{y_1} dy.$$




Zīm. 73.

Pirmā integrēšana, attiecībā uz $y$, ar pastāvīgu $x$ jāizdara no $M_0$ līdz $M$. (Zīm. 73). No riņķa nolīdzinājuma dabūjam

$$y = \pm \sqrt{r^2 - x^2};$$

tā tad

$$AM_0 = y_0 = -\sqrt{r^2 - x^2}; \quad AM = y_1 = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Otra integrēšana jāizdara no $C$ līdz $D$, attiecībā uz $x$, ar

$$x_0 = -r \quad \text{un} \quad x_1 = r.$$

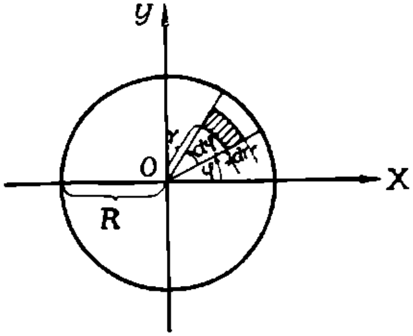
Tā tad, riņķa laukumu dabūjam

$$\int_{-r}^{r} dx \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} dy = \int_{-r}^{r} dx \left| y \right|_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} = \int_{-r}^{r} dx \; 2\sqrt{r^2-x^2} = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2}\, dx =$$

$$= 2 \left| \frac{x}{2} \sqrt{r^2-x^2} + \frac{r^2}{2} \arcsin \frac{x}{r} \right|_{-r}^{r} =$$

$$= 2 \left\{ \left( 0 + \frac{r^2}{2} \arcsin 1 \right) - \left( 0 + \frac{r^2}{2} \arcsin(-1) \right) \right\} =$$

$$= 2 \left\{ \frac{r^2}{2} \frac{\pi}{2} - \left( \frac{r^2}{2} - \frac{\pi}{2} \right) \right\} = 2 \cdot \frac{r^2 \pi}{2} = r^2 \pi.$$



Zīm. 74.

Ievedot polarkoordinatas apzīmējot riņķa radiusu ar $R$ dabūjam

$$\iint_P dx\, dy = \iint_P r\, dr\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r\, dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \left| \frac{r^2}{2} \right|_0^R =$$

$$= \frac{R^2}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{R^2}{2} \left| \varphi \right|_0^{2\pi} = \frac{R^2\, 2\pi}{2} = R^2 \pi$$

**45. Līknes loka garuma aprēķināšana — rektifikacija.** Plāknē atrodošas līknes loka garuma aprēķināšana parādīta [15]

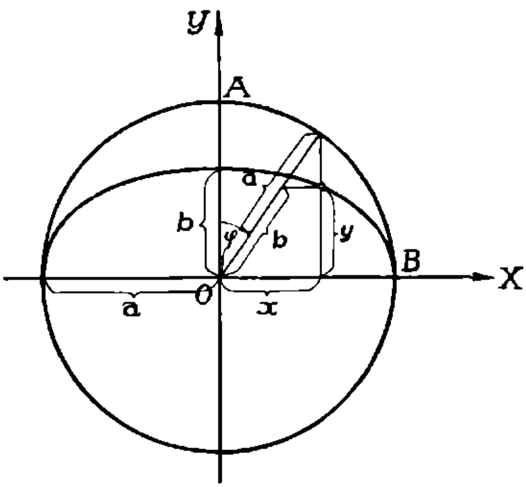
Še apskatīsim vēl piemēru.

Aprēķināt elipses loka garumu (zīm. 75). Elipses nolīdzinājumi parametriskā veidā ir

$$x = a \sin \varphi; \quad dx = a \cos \varphi\, d\varphi.$$

$$y = b \cos \varphi;$$

$$dy = -b \sin \varphi\, d\varphi.$$



Zīm. 75.

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi =$$

$$= a \sqrt{\cos^2\varphi + \frac{b^2}{a^2}\sin^2\varphi}\, d\varphi = a \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi + \frac{b^2}{a^2}\sin^2\varphi - \sin^2\varphi}\, d\varphi =$$

$$= a \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \sin^2 \varphi}\, d\varphi = a \sqrt{1 - \frac{e^2}{a^2} \sin^2 \varphi}\, d\varphi.$$

Tā kā

$$\frac{e}{a} = \varepsilon,$$

tad

$$ds = a \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi.$$

Loka garums $AB$ ir $\frac{1}{4}$ daļa no elipses visa loka $l$, tad

$$\frac{1}{4} s_{el} = a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi.$$

Kā redzam, še jādabū otra veida pilnīga eliptiska integrala vērtība. Šo integralu izvedām [31] Tā tad

$$\frac{1}{4} s_{el} = a \frac{\pi}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{\varepsilon^2}{1} - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^2 \frac{\varepsilon^4}{3} - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\right)^2 \frac{\varepsilon^6}{5} - \ldots\right].$$

$$s_{el} = 2\pi a \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{\varepsilon^2}{1} - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^2 \frac{\varepsilon^4}{3} - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\right)^2 \frac{\varepsilon^6}{5} - \ldots\right].$$

**Telpā atrodošas līknes loka garums.**

Pieņemam līknes nolīdzinājumus parametriskā veidā

$$\begin{aligned} x &= x \\ y &= \varphi(x) \\ z &= \psi(x). \end{aligned} \tag{1}$$

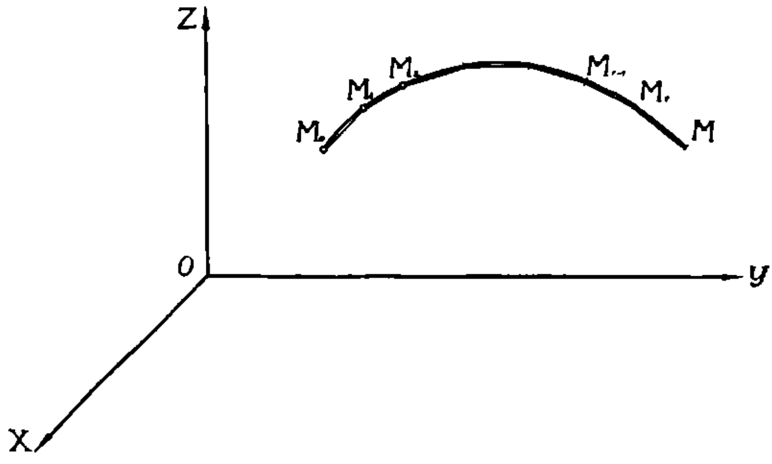
Pieņemam, ka funkcijas $\varphi$ un $\psi$ ir vienvērtīgas, nepārtrauktas un ka funkcijām $\varphi'$ un $\psi'$ arī ir šīs īpašības.

Loku $\widehat{M_0 M}$ zīm. 76. iedalam $n$ daļās, tad iedalījuma punktiem

$$M_0\ M_1\ M_2\ \ldots\ M_r\ \ldots\ M$$

atbilst koordinatas

$$\begin{array}{lllll} x_0 \; x_1 \; x_2 & & x_r & & x_n \\ y_0 \; y_1 \; y_2 & & y_r & & y_n \\ z_0 \; z_1 \; z_2 & & z_r & & \end{array}$$




Zīm. 76.

Velkam chordas $M_0M$, $M_1M_2 \ldots M_{r-1}M_r$. Apzīmējam chordas $M_{r-1}M_r$ garumu ar $c_r$. Tad

$$c_r = \sqrt{(x_r - x_{r-1})^2 + (y_r - y_{r-1})^2 + (z_r - z_{r-1})^2}. \qquad (\alpha)$$

L o k a $\widehat{M_0M}$ g a r u m u d e f i n ē a r i z t e i k s m i:

$$s = \widehat{M_0M} = \lim_{n \to \infty} \sum_1^n c_r$$

Pārveidojam $c_r$ izteiksmi.

Pielietojot Lagranža teoremu dabūjam:

$$\left.\begin{array}{l} y_r - y_{r-1} = \varphi(x_r) - \varphi(x_{r-1}) = (x_r - x_{r-1})\,\varphi'(\xi_r) \\ z_r - z_{r-1} = \psi(x_r) - \psi(x_{r-1}) = (x_r - x_{r-1})\,\psi'(\overline{\xi}_r) \end{array}\right\} \qquad (\beta)$$

Liekam: $x_r - x_{r-1} = \delta_r$, tad ievērojot ($\beta$) un ($\alpha$) dabūjam

$$c_r = \delta_r \sqrt{1 + \varphi'(\xi_r)^2 + \psi'(\overline{\xi}_r)^2} \qquad (\gamma)$$

$\xi_r$ un $\overline{\xi}_r$ nav vienlīdzīgi.

Ja $\psi'(x)^2$ lielāko vērtību intervalā $x_r - x_{r-1}$ apzīmējam ar $P_r$ un mazāko ar $p_r$, tad

$$\psi'(\bar{\xi}_r)^2 = \psi'(\xi_r)^2 + \theta(P_r - p_r). \qquad (0 < |\theta| < 1)$$

Ieveđot šo vērtību izteiksmē ($\gamma$) dabūjam:

$$c_r = \delta_r \sqrt{1 + \varphi'(\xi_r)^2 + \psi'(\xi_r)^2 + \theta(P_r - p_r)},$$

tad

$$c_r - \delta_r\sqrt{1+\varphi'(\xi_r)^2+\psi'(\xi_r)^2} = \delta_r\left[\sqrt{1+\varphi'(\xi_r)^2+\psi'(\xi_r)^2+\theta(P_r-p_r)} - \sqrt{1+\varphi'(\xi_r)^2+\psi'(\xi_r)^2}\right]$$

Tā kā:

$$\left|\sqrt{1+\varphi'(\xi_r)^2+\psi'(\xi_r)^2+\theta(P_r - p_r)} - \sqrt{1+\varphi'(\xi_r)^2+\psi'(\xi_r)^2}\right| < \left|\theta(P_r - p_r)\right|$$

un

$$|\theta(P_r - p_r)| < P_r - p_r,$$

tad

$$\left|c_r - \delta_r \sqrt{1 + \varphi'(\xi_r)^2 + \psi'(\xi_r)^2}\right| < \delta_r(P_r - p_r)$$

un

$$0 < \left|\sum_1^n \left[c_r - \delta_r \sqrt{1+\varphi'(\xi_r)^2 + \psi'(\xi_r)^2}\right]\right| < \sum_1^n \delta_r(P_r - p_r) < \varepsilon \sum_1^n \delta_r$$

(ar $\varepsilon$ apzīmējam vislielāko starpību $(P_r - p_r)$).

$$\varepsilon \sum_1^n \delta_r = \varepsilon(x - x_0).$$

Ja $n \to \infty$, tad $\varepsilon \to 0$, tādēļ

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon \sum \delta_r = 0.$$

Ievērojot augšējo redzam, ka

$$\lim_{n\to\infty} \left|\sum_1^n c_r - \sum_1^n \delta_r \sqrt{1 + \varphi'(\xi)^2 + \psi'(\xi)^2}\right| = 0.$$

Tā tad:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_1^n c_r = \lim_{n\to\infty} \sum_1^n \delta_r \sqrt{1 + \varphi'(\xi_r)^2 + \psi'(\xi_r)^2}. \qquad (\delta_r \to 0)$$

Saskaņā ar loka garuma definiciju

$$\lim_{n\to\infty} \sum_1^n c_r = s \text{ (} s \text{ loka } M_0M \text{ garums)}$$

Tā kā

$$\lim_{n\to\infty}\sum_1^n \delta_r \sqrt{1+\varphi'(\xi_r)^2+\psi'(\xi_r)^2}=\int_{x_0}^{x}\sqrt{1+\varphi'(x)^2+\psi'(x)^2}\,dx,$$

tad

$$s=\int_{x_0}^{x}\sqrt{1+\varphi'(x)^2+\psi'(x)^2}\,dx$$

un

$$ds=\sqrt{1+\varphi'(x)^2+\psi'(x)^2}\,dx.$$

Pārveidojot dabūjam:

$$ds=\sqrt{dx^2+[\varphi'(x)dx]^2+[\psi'(x)\,dx]^2}=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}.$$

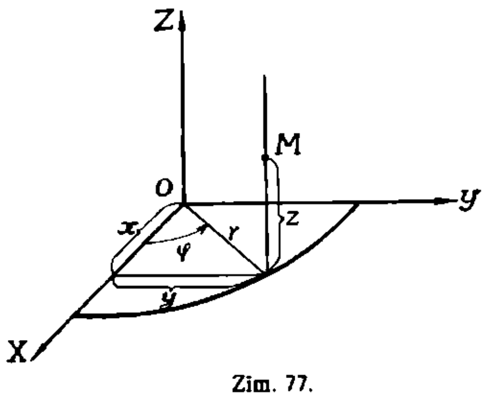
Šo formulu varam pielietot arī, kad visas koordinatas ir funkcijas no $t$:

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t)\\ y &= \psi(t)\\ z &= \omega(t).\end{aligned}$$

Tad

$$ds=\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2+\omega'(t)^2}\,dt$$

$$s=\int_{t_0}^{t}\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2+\omega'(t)^2}\,dt$$



Zīm. 77.

Loka diferenciala sakni ņemam ar $+$ zīmi, ja loku skaitam pozitivu ar augošu $t$.

Piemērs.

Skrūves līnijas loka garums. Skrūves līnijas nolīdzinājumi parametriskā veidā: (zīm. 77)

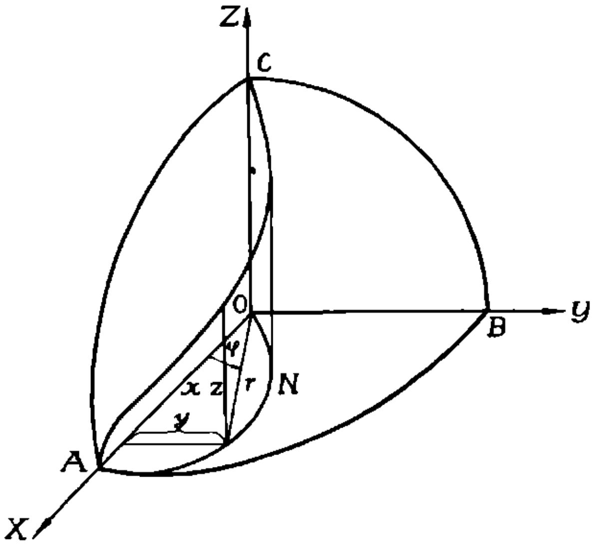
$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\\ y &= r\sin\varphi\\ z &= k\varphi\end{aligned}$$

$$s=\int_0^{\varphi}\sqrt{r^2\sin^2\varphi+r^2\cos^2\varphi+k^2}\,d\varphi=\int_0^{\varphi}\sqrt{r^2+k^2}\,d\varphi$$

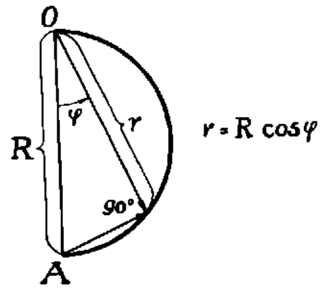
$$s=\sqrt{r^2+k^2}\,\varphi.$$

**46. Tilpumu aprēķināšana — kubatura.** Kubaturu ar vienkāršu integralu apskatījām [20]. Kubaturu ar divkāršu un trīskāršu integralu apskatījām piemēros [39] un [42].

Apskatīsim še vēl vienu piemēru.




Zīm. 78.




Zīm. 79.

Aprēķināt tilpumu, ko izgriež no $\frac{1}{8}$ lodes ($ABC$) (zīm. 79.) vertikals cilindrs ar pamatu pusriņķi ($ONA$). Lodes radiuss $R$.

Še integrēšanas iecirknis $P$ ir pusriņķis $ONA$ un virsma, kas noslēdz tilpumu pret augšu, ir lodes virsma

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$
$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} = f(x, y).$$

Meklētais tilpums $V$

$$V = \iint\limits_P f(x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_P \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, dx\, dy.$$

Ievedam semipolaras koordinatas

$$x = r \cos \varphi,$$
$$y = r \sin \varphi.$$

Tad

$$J = r \quad \text{un} \quad dP = r\, dr\, d\varphi.$$

Ievedot šīs vērtības dabūjam

$$V = \iint_P \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, dx\, dy = \iint_P \sqrt{R^2 - r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi}\, r\, dr\, d\varphi =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{r} \sqrt{R^2 - r^2}\, r\, dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{R\cos\varphi} \sqrt{R^2 - r^2}\, r\, dr.$$

$$\int \sqrt{R^2 - r^2}\, r\, dr = \int (R^2 - r^2)^{\frac{1}{2}}\, r\, dr = -\frac{1}{2} \int (R^2 - r^2)^{\frac{1}{2}}\, d(R^2 - r^2) =$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{(R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3} (R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}$$

Tad

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \,.\, -\frac{1}{3} \left| (R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \right|_0^{R\cos\varphi} = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left| (R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \right|_{R\cos\varphi}^{0} =$$

$$= \frac{R^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3\varphi)\, d\varphi = \frac{R^3}{3} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi\, d\varphi \right].$$

$$\int \sin^3\varphi\, d\varphi = \int \sin^2\varphi \quad \sin\varphi\, d\varphi = -\int (1 - \cos^2\varphi)\, d\cos\varphi =$$

$$= -\cos\varphi + \frac{\cos^3\varphi}{3}.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi\, d\varphi = \left| -\cos\varphi + \frac{\cos^3\varphi}{3} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \left\{ (0 + 0) - \left( -1 + \frac{1}{3} \right) \right\} = \frac{2}{3}.$$

Tā tad

$$V = \frac{R^3}{3} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right).$$

**47. Līku virsmu laukumu aprēķināšana — komplanacija.** Rotacijas virsmu komplanaciju ar vienkāršu integralu apskatījām [21].

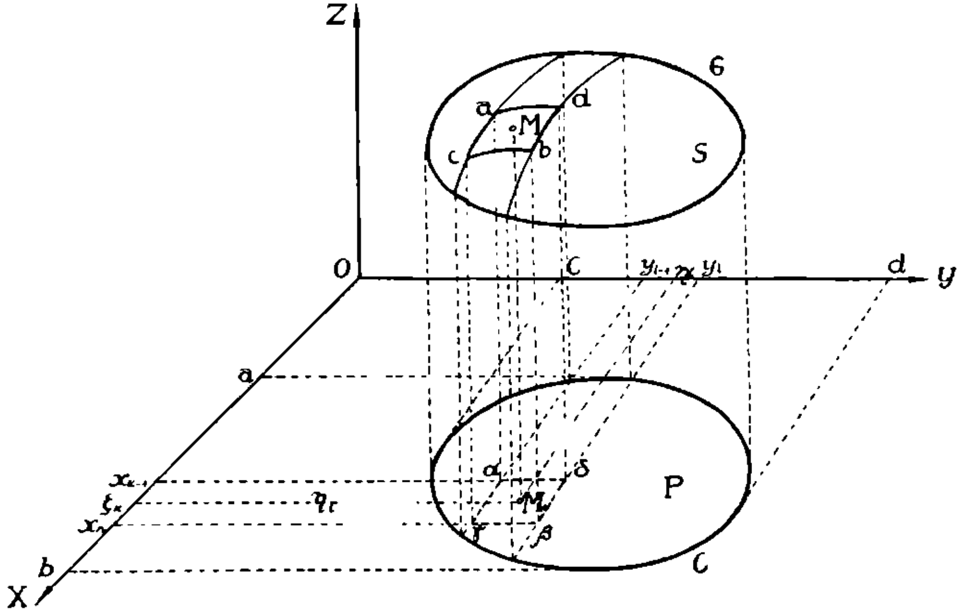
Še apskatīsim komplanaciju ar divkāršu integralu.

Uz līkas virsmas, kuŗas nolīdzinājums ir

$$z = f(x, y), \tag{1}$$

vilkta līkne $G$. Aprēķināt laukumu $S$, ko uz dotās virsmas ieslēdz līkne $G$ (zim. 80).

Liekam caur līkni $G$ pret $xy$ plākni statenisku cilindru, tad laukuma $S$ projekcija uz $xy$ plāknes ir laukums $P$, kas ieslēgts ar līknes $G$ projekciju, līkni $C$.




Zīm. 80.

Pievelkam līknei $C$ pieskares, paraleli koordinatu asīm. Uz $x$ ass dabūjam punktus $a$ un $b$ un uz $y$ ass $c$ un $d$.

Intervalu $(a, b)$ iedalam $p$ daļās un intervalu $(c, d)$, $q$ daļās. Ar to tad laukums $P$ ir iedalīts elementaros laukumos, piemēram $\alpha\gamma\beta\delta$, kā malas ir:

$$x_k - x_{k-1} = \delta_k.$$

$$y_e - y_{e-1} = \varepsilon_e.$$

Tad elementarlaukums

$$\alpha\gamma\beta\delta = \Delta_{ke} P = \delta_k \quad \varepsilon_e$$

Uz elementarlaukuma $\alpha\gamma\beta\delta$ pieņemam pēc patikas punktu $M_0$ ar koordinatām $(xy)$ plāknē $\xi_k$ un $\eta_e$. Punktam $M_0$ atbilst punkts $M$ uz virsmas, elementarlaukumā $acbd$

Punktā $M$ uz virsmas, velkam pieskaru plākni. Šī plākne veido ar $(xy)$ plākni leņķi $\vartheta$, kā cos, kā zinams, ir:

$$\cos\vartheta = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x'(\xi_k, \eta_e)^2 + f_y'(\xi_k, \eta_e)^2}} \tag{1}$$

Prizma, ko veidojam virs $(\alpha\beta\gamma\delta)$, izgriež no punkta $M$ pieskaru plāknes paralelogramu $ABCD$ (kas zīmējumā nav parādīts). Apzīmējam $ABCD$ laukumu ar $\omega_{ke}$, tad

$$\omega_{ke} \cdot \cos\vartheta = \text{laukums } \alpha\beta\gamma\delta = \Delta_{ke} P$$

un

$$\omega_{ke} = \frac{\Delta_{ke} P}{\cos\vartheta} = \delta_k \quad \varepsilon_e \sqrt{1 + f_x'(\xi_k, \eta_e) + f_y'(\xi_k, \eta_e)^2} \tag{2}$$

Tad

$$S = \lim_{\substack{\delta_k \to 0 \\ \varepsilon_e \to 0}} \sum_1^p \sum_1^q \omega_{ke} = \lim_{\substack{\delta_k \to 0 \\ \varepsilon_e \to 0}} \sum_1^p \sum_1^q \delta_k \quad \varepsilon_e \sqrt{1 + f_x'(\xi_k, \eta_e)^2 + f_y'(\xi_k, \eta_e)^2} \tag{3}$$

Uz virsmas $z = f(x, y)$ ar līkni $G$ ieslēgto laukumu $S$ definē ar augšējās summas robežvērtību. Šo robežvērtību dod izteiksmes (3) labā puse, kas kā zinams ir divkāršs integrals

$$\iint_P \sqrt{1 + f_x'(x, y)^2 + f_y'(x, y)^2} \; dx\, dy.$$

Tā kā

$$f_x'(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = p \quad \text{un} \quad f_y'(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = q,$$

tad

$$S = \iint_P \sqrt{1 + p^2 + q^2} \; dx\, dy. \tag{4}$$

Piemērs.

Aprēķināt lodes virsmu.

Lodes nolīdzinājums ir:

$$z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}. \tag{5}$$

Aprēķinam lodes virsmu pirmā oktantā ar dubultintegralu:

$$S = \iint_P \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy.$$

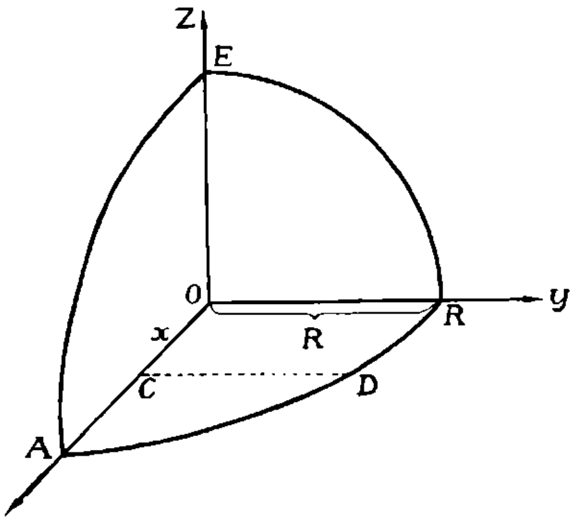
Še

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} \text{ un } q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Formula (5) dod $z$, še jāņem $+$ zīme, kā redzams no zīmējuma 81.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$



Zīm. 81

Tā tad:

$$S = \iint_P \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{R^2 - x^2 - y^2}}\, dx\, dy =$$

$$= \iint_P \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2 - y^2}}\, dx\, dy = R \iint_P \frac{dx\, dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

Kā redzams, integrēšanas iecirknis $P$ še ir riņķa ceturtā daļa.

Pirmā integrēšana jāizdara ar pastāvīgu $x$, attiecībā uz $y$. zīmējumā: no $C$ līdz $D$, t. i. no

$$y_0 = 0 \text{ līdz } y = \sqrt{R^2 - x^2}.$$

Otra integrēšana jāizdara, attiecībā uz $x$, no $O$ līdz $A$, t. i. no $x_0 = 0$ un $x = OA = R$.

Tā tad

$$S = R \iint_P \frac{dx\, dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} = R \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} \frac{dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

Integralu

$$\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$

dabūjam no sekojošā integrala

$$\int \frac{dy}{\sqrt{a^2-y^2}} = \text{arc sin}\,\frac{y}{a},$$

liekot $a^2$ vietā $R^2 - x^2$, tad

$$\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} = \left|\text{arc sin}\,\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2}}\right|_0^{\sqrt{R^2-x^2}} =$$

$$= \text{arc sin}\,1 - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Tā tad

$$S = R\,\frac{\pi}{2}\int_0^R dx = R\,\frac{\pi}{2}\,R = \frac{R^2\pi}{2}.$$

$$\text{Lodes virsma} = 8\,S = \frac{8\,.\,R^2\pi}{2} = 4R^2\pi.$$

**48. Jaunu mainīgu ievešana.** Ievedot jaunus mainīgos, formulu [44] (4) var piemērot citai koordinatu sistemai vai arī integrēšanas laukumu $P$ citam iedalijumam.

Ievedam

$$x = \varphi(u, v),\qquad y = \psi(u, v), \tag{1}$$

tad, tā kā

$$z = f(x, y)$$

arī $z$ ir funkcija no $u$, $v$; tā tad

$$z = \varkappa(u, v). \tag{2}$$

Diferencējot (2) dabūjam

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial u} = p\,\frac{\partial x}{\partial u} + q\,\frac{\partial y}{\partial u},\\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial v} = p\,\frac{\partial x}{\partial v} + q\,\frac{\partial y}{\partial v}.\end{aligned} \tag{3}$$

Izteiksmes

$$\frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial x}{\partial v}, \quad \frac{\partial y}{\partial v}$$

dabūjam no nolīdzinājumiem (1).

No nolīdzinājumiem (3) dabūjam

$$p \quad q \quad 1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & -\frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & -\frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \quad - \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & -\frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & -\frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

$$p = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & -\frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & -\frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}}; \quad q = \frac{-\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & -\frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & -\frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}}.$$

Apzīmējam

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & -\frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & -\frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \mathrm{I}; \quad - \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & -\frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & -\frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \mathrm{II}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = J.$$

Še jāievēro, ka saucējs augšējās izteiksmēs ir $J$. Ievedot šīs vērtības izteiksmē [47] (4) dabūjam

$$S = \iint\limits_P \sqrt{1 + \frac{\mathrm{I}^2}{J^2} + \frac{\mathrm{II}^2}{J^2}} \cdot |J|\, du\, dv = \iint\limits_P \sqrt{J^2 + \mathrm{I}^2 + \mathrm{II}^2} \cdot du\, dv \quad (4)$$

Ievedam semipolaras koordinatas

$$x = r\cos\varphi; \quad y = r\sin\varphi,$$

tad

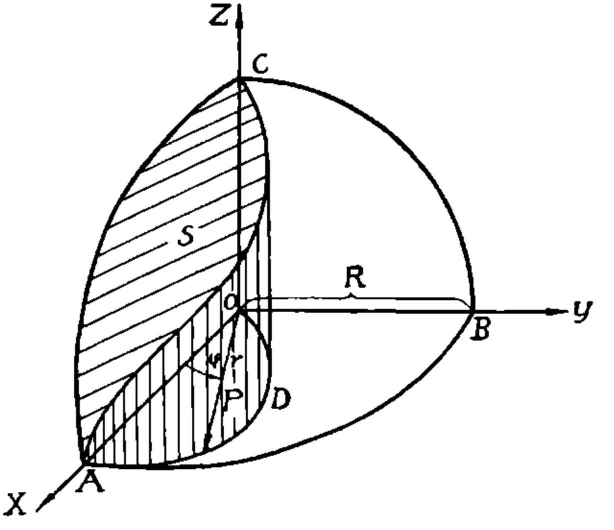
$$\mathrm{I} = \begin{vmatrix} \sin\varphi & -\dfrac{\partial z}{\partial r} \\ r\cos\varphi & -\dfrac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = r\frac{\partial z}{\partial r}\cos\varphi - \frac{\partial z}{\partial \varphi}\sin\varphi,$$

$$\mathrm{II} = -\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\dfrac{\partial z}{\partial r} \\ -r\sin\varphi & -\dfrac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \frac{\partial z}{\partial \varphi}\cos\varphi + r\frac{\partial z}{\partial r}\sin\varphi,$$

$$J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r.$$

Ievietojot šīs vērtības izteiksmē (4) dabūjam

$$S = \iint_P \sqrt{r^2 + \left(r\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2}\; dr\, d\varphi. \tag{5}$$




Zīm. 82.

Piemērs.

Aprēķināt lodes virsmas to daļu, ko izgriež cilindrs, kā parādīts zīmējumā 82.

Meklētais laukums $S$ ir dots ar integralu:

$$S = \iint_P \sqrt{1 + p^2 + q^2}\; dx\, dy.$$

Še

$$z = f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

Integrēšanas iecirknis $P$ ir pusriņķis $OAD$.

Ievedam semipolarās koordinatas un pielietojam formulu (5)

$$x = r\cos\varphi$$

$$y = r\sin\varphi\,; \qquad r = R\cos\varphi$$

Tad

$$z = \sqrt{R^2 - r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi} = \sqrt{R^2 - r^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = -\frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0$$

un

$$S = \iint\limits_P \sqrt{(R\cos\varphi)^2 + \left(R\cos\varphi\,.\frac{-r}{\sqrt{R^2 - r^2}}\right)^2 + 0}\,dr\,d\varphi =$$

$$= \iint\limits_P R\cos\varphi\sqrt{1 + \frac{r^2}{R^2 - r^2}}\,dr\,d\varphi =$$

$$= \iint\limits_P R\cos\varphi\,.\frac{dr\,d\varphi}{\sqrt{R^2 - r^2}} = R\iint\limits_P \frac{r\,dr\,d\varphi}{\sqrt{R^2 - r^2}}$$

Pirmo integrēšanu izdaram, attiecībā uz $r$, ar pastāvīgu $\varphi$, ar robežām $r = 0$ un $r = R\cos\varphi$. Otru integrēšanu izdaram, attiecībā uz $\varphi$, no $\varphi = 0$ līdz $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Ievērojot augšējo dabūjam:

$$S = R\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{R\cos\varphi} \frac{r\,dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} = R\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left| -\sqrt{R^2 - r^2}\right|_0^{R\cos\varphi} =$$

$$= R\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left|\sqrt{R^2 - r^2}\right|_{R\cos\varphi}^{0}$$

Tā tad

$$S = R\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi[R - R\sin\varphi] = R^2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\,d\varphi\right) =$$

$$= R^2\left\{\frac{\pi}{2} + |\cos\varphi|_0^{\frac{\pi}{2}}\right\} = R^2\left[\frac{\pi}{2} - 1\right].$$

Polarkoordinatās komplanacijas formulu dabūjam šādi. Virsmas nolīdzinājums tad ir:

$$r = f(\theta, \varphi)$$

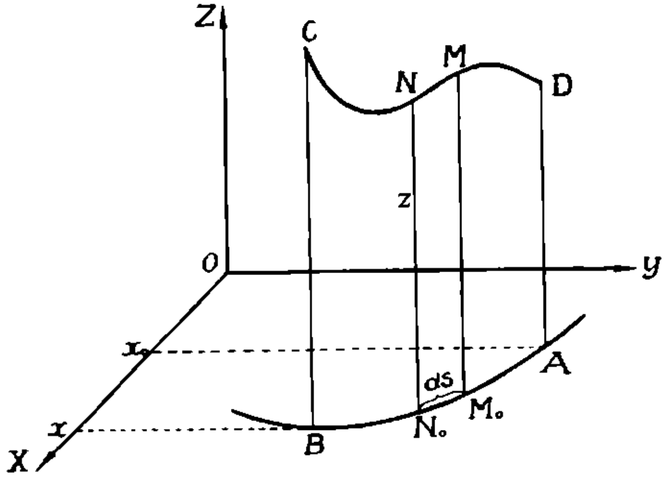
un kāda virsmas punkta $x$, $y$, $z$ koordinatas ir:

$$\begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\varphi \\ y &= r \sin\theta \sin\varphi \\ z &= r \cos\theta. \end{aligned}$$

Še redzam, ka $x$, $y$, $z$ ir funkcijas no $\theta$ un $\varphi$, jo $r$ arī ir funkcija no šiem mainīgiem. Ievērojot šīs izteiksmes, aprēķinam attiecīgos determinantus I, II, $J$ un ievedam formulā [48] (4); dabūjam:

$$S = \int\int_F \sqrt{\left[\left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2 + r^2\right] \sin^2\theta + \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2}\, r d\theta\, d\varphi.$$

**49. Cilindra virsmas laukums.** Ja cilindra ass paralela $z$ asij, tad $\cos\vartheta = 0$ un formula [47] (2) nav pielietojama. Tādā gadījumā nav derīga arī formula [47] (4), jo tā pamatota uz formulas [47] (2). Šādā gadījumā cilindra virsmu dabūjam šādi (zīm. 83).




Zīm. 83.

Cilindra virsmas nolīdzinājums ir:

$$\varphi(x, y) = 0 \tag{1}$$

Virsma

$$\psi(x, y, z) = 0 \tag{2}$$

krusto cilindra virsmu līknē $CD$.

Aprēķinam cilindra virsmu $ABCD$.

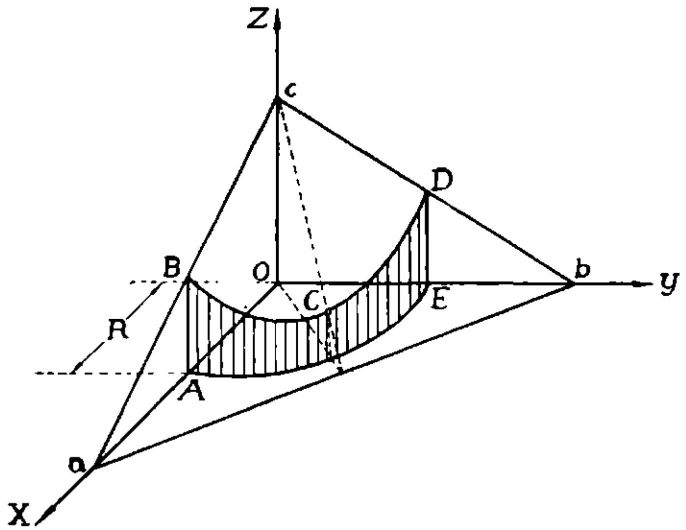
Apzīmējot $\widehat{M_0N_0}$ ar $ds$ un $M_0M$ ar $z$, dabūjam meklēto virsmu ar integralu

$$S = \int_{x_0}^{x} z\, ds.$$

$ds$ dabūjam izlietojot nolīdzinājumu (1), no kuŗa dabūjam

$$y = f(x)$$

un tad arī $ds$ kā funkciju no $x$.




Zīm. 84.

$z$ kā funkciju no $x$ dabūjam, izslēdzot starp nolīdzinājumiem (1) un (2) $y$ un tad rezultējošo nolīdzinājumu atslēdzot, attiecībā uz $z$.

Piemērs.

Dabūt svītroto virsmu $ABCDE$ (zīm. 84.), kas atrodas uz cilindra (ar radiusu $R$, kā ass sakrīt ar $z$ asi) starp $(xy)$ plākni un plākni ar asu nogriežņiem $a$, $b$, $c$.

Cilindra pamata liknes $AE$ nolīdzinājums ir

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}. \tag{1}$$

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\, dx = R \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}}.$$

Cilindru krustojošās plāknes nolīdzinājums ir

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1=0. \tag{2}$$

No (2) un (1) dabūjam

$$z=c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{\sqrt{R^2-x^2}}{b}\right).$$

Tā tad

$$S=Rc\int_0^R\left(1-\frac{x}{a}-\frac{\sqrt{R^2-x^2}}{b}\right)\frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2}}=$$

$$=Rc\left[\int_0^R\frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2}}-\frac{1}{a}\int_0^R\frac{x\,dx}{\sqrt{R^2-x^2}}-\frac{1}{b}\int_0^R dx.\right].$$

$$S=Rc\left[\left|\arcsin\frac{x}{R}\right|_0^R+\frac{1}{a}\left|\sqrt{R^2-x^2}\right|_0^R-\frac{1}{b}\left|x\right|_0^R\right]$$

$$S=Rc\left[\frac{\pi}{2}-\frac{R}{a}-\frac{R}{b}\right]=Rc\left[\frac{\pi}{2}-R\left(\frac{a+b}{ab}\right)\right].$$

## Divpadsmitā nodaļa.

## Pilnīga diferenciala izteiksme. Integrals ņemts gar likni.

**50. Pilnīga diferenciala integrēšana** a) Pilnīgs diferencials ar diviem neatkarīgiem mainīgiem.

Dota izteiksme

$$f(x, y)\,dx+\varphi(x, y)\,dy \tag{1}$$

kūŗā $f(x, y)$ un $\varphi(x, y)$ vienvērtīgas un nepārtrauktas funkcijas kādā iecirknī. Pieņemam, ka šo funkciju pirmās atvasinātas šai iecirknī arī vienvērtīgas un nepārtrauktas.

Teorema.

Lai izteiksme (1) būtu kādas funkcijas $u(x, y)$ pilnīgs diferencials, vajadzīgs un pietiekams ja

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}=\frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial x}.$$

1) Šis noteikums ir vajadzīgs.

Pieņemam, ka (1) ir funkcijas $u(x, y)$ diferencials. Tad

$$du = f(x, y)\,dx + \varphi(x, y)\,dy \tag{2}$$

bet arī

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy. \tag{2a}$$

Salīdzinot (2) un (2a) redzam, ka tad jābūt

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f(x, y) \quad \text{un} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \varphi(x, y).$$

Diferencējot pirmo izteiksmi, attiecībā uz $y$, un otru attiecībā uz $x$, dabūjam

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x}. \tag{3}$$

No diferencialrēķiniem zinams ka

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}.$$

Šo izteiksmi ievērojot, no (3) dabūjam, ka jābūt

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x}.$$

2) Noteikums ir pietiekams. Pieņemam ka

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x}. \tag{4}$$

Pierādīsim, ka ar šo pieņēmumu varam atrast tādu funkciju $u(x, y)$, kuŗas pilnīgs diferencials ir

$$f(x, y)\,dx + \varphi(x, y)\,dy.$$

Pieņemam, ka $u(x, y)$ ir meklētā funkcija, tad

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f(x, y) \quad \text{un} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \varphi(x, y). \tag{5}$$

Meklējam vispirms tādu visplašāko funkciju $u(x, y)$, kuŗas

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f(x, y). \tag{5a}$$

Tā kā diferencēšanā, attiecībā uz $x$, $y$ uzskatam kā pastāvīgu, tad visplašākā funkcija $u(x, y)$ kas izpilda noteikumu ($5^a$) ir funkcijas $f(x, y)$ pirmatnējā funkcija, attiecībā uz $x$, kam jāpieskaita pēc patikas pastāvīgs, neatkarīgs no $x$, lielums $Y$.

Tā tad

$$u = \int_{x_0}^{x} f(x, y)\, dx + Y. \tag{6}$$

Še $Y$ ir kāda funkcija no $y$. Šādi dabūtā funkcija $u$, kā redzam, izpilda noteikumu

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f(x, y).$$

Bet šai funkcijai $u$ jāizpilda arī noteikums

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi(x, y). \tag{$5^b$}$$

Diferencējot izteiksmi (6), attiecībā uz $y$, dabūjam

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, dx + \frac{dY}{dy}. \tag{7}$$

Ievērojot ($5^b$), nolīdzinājumu (7) rakstam

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, dx + \frac{dY}{dy} = \varphi(x, y). \tag{8}$$

Ievērojot ka

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x},$$

dabūjam

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x}\, dx + \frac{dY}{dy} = \varphi(x, y). \tag{9}$$

Tā kā

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x}\, dx = \Big|\varphi(x, y)\Big|_{x_0}^{x} = \varphi(x, y) - \varphi(x_0, y),$$

tad izteiksme (9) dabū veidu

$$\varphi(x, y) - \varphi(x_0\, y) + \frac{dY}{dy} = \varphi(x, y).$$

Tad

$$\frac{dY}{dy} = \varphi(x_0\, y)$$

un

$$Y = \int_{y_0}^{y} \varphi(x_0\, y)\, dy + C$$

Ievedot $Y$ vērtību izteiksmē (6) dabūjam

$$u = \int_{x_0}^{x} f(x, y)\, dx + \int_{y_0}^{y} \varphi(x_0\, y)\, dy + C. \tag{10}$$

Tā tad pieņemot ka

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x}, \tag{11}$$

esam dabūjuši izteiksmi (10), kuŗaś pilnīgs diferencials ir

$$f(x, y)\, dx + \varphi(x, y)\, dy. \tag{12}$$

Tā tad lai izteiksme (12) būtu kādas funkcijas $u(x, y)$ pilnīgs diferencials, ir vajadzīga izteiksmes (11) izpildīšana, bet ja izteiksme (11) ir izpildīta, tad ar to arī pietiek lai dabūtu meklēto funkciju $u(x, y)$.

Augšējās formulās $x_0$ un $y_0$ ir pēc patikas pieņemti lielumi.

P i e m ē r s.

Dota izteiksme

$$y\, dx + x\, dy. \tag{a}$$

Še

$$f(x, y) = y \quad \text{un} \quad \varphi(x, y) = x.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1; \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 1.$$

Tā tad pilnīga diferenciala pazīme

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

ir izpildīta

To funkciju $u(x, y)$, kuŗas pilnīgs diferencials ir izteiksme $\alpha$, dabūjam pielietojot (10)

$$u = \int_{x_0}^{x} y\, dx + \int_{y_0}^{y} x_0\, dy + C.$$

Izdarot integrēšanu dabūjam:

$$u = xy - x_0 y + x_0 y - x_0 y_0 + C.$$

$$u = xy + k. \qquad (C - x_0 y_0 = k).$$

Redzams ka

$$du = y\,dx + x\,dy.$$

Pilnīgais diferencials ar trīs neatkarīgiem mainīgiem.

Teorema.

Izteiksme:

$$f(x, y, z)\,dx + \varphi(x, y, z)\,dy + \psi(x, y, z)\,dz \tag{1}$$

ir kādas funkcijas $u(x, y, z)$ pilnīgs diferencials, ja izpildīti noteikumi

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial y}. \tag{2}$$

Pieņemam, ka funkcijas $f$, $\varphi$, $\psi$ ir vienvērtīgas un nepārtrauktas funkcijas no $x$, $y$, $z$ kādā tilpumā $R$ un ka to parcialām atvasinatām arī tās pašas īpašības.

1) Noteikumi (2) ir vajadzīgi.

Pieņemam, ka $U$ ir tāda funkcija no $x$, $y$, $z$, kuras pilnīgais diferencials ir (1), tad

$$dU = f(x, y, z)\,dx + \varphi(x, y, z)\,dy + \psi(x, y, z)\,dz,$$

bet arī

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}\,dx + \frac{\partial U}{\partial y}\,dy + \frac{\partial U}{\partial z}\,dz.$$

Salīdzinot šīs izteiksmes, redzam, ka jābūt

$$f(x, y, z) = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad \varphi(x, y, z) = \frac{\partial U}{\partial y}; \quad \psi(x, y, z) = \frac{\partial U}{\partial z}. \tag{3}$$

Tā kā

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y};\quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}=\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial x};\quad \frac{\partial \psi}{\partial x}=\frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial z};\quad \frac{\partial \varphi}{\partial z}=\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial z};\quad \frac{\partial \psi}{\partial y}=\frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial y},$$

tad

$$\text{no}\ \frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial x}\quad \text{dabūjam:}\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

$$\text{no}\ \frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial z}=\frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial x}\quad \text{dabūjam}\quad \frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

un no

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial z}=\frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial y}\quad \text{dabūjam}\quad \frac{\partial \varphi}{\partial z}=\frac{\partial \psi}{\partial y},$$

kas rāda, ka izteiksmes (2) ir vajadzīgas.

2) Noteikumi (2) ir pietiekami.

Pierādīsim, ka ja noteikumi (2) izpildīti, tad varam atrast funkciju $U(x, y, z)$, kuras pilnīgais diferencials ir izteiksme (1).

Uzskatam $z$ par pastāvīgu un meklējam to plašāko funkciju $U(x, y, z)$ kas izpilda divas pirmās izteiksmes (3) t. i.

$$\frac{\partial U}{\partial x}=f(x, y, z),\qquad \frac{\partial U}{\partial y}=\varphi(x, y, z). \tag{4}$$

Tad funkcija $U$ uzskatama kā funkcija no diviem neatkarīgiem mainīgiem $x$ un $y$.

No noteikuma (2) dabūjam

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

No agrākā redzam, ka tad:

$$U=\int_{x_0}^{x} f(x, y, z)\,dx+\int_{y_0}^{y}\varphi(x_0, y, z)\,dy+Z. \tag{5}$$

Še $Z$ ir funkcija tikai no $z$.

Izteiksme (5) izpilda noteikumu (4), jo:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=f(x, y, z)\quad \text{un}\quad \frac{\partial U}{\partial y}=\varphi(x, y, z),$$

$\frac{\partial U}{\partial x}$ dabūjam diferencējot izteiksmes (5) labās puses pirmo integralu, attiecībā uz virsrobežu; tas dod $f(x, y, z)$.

Lai dabūtu $\frac{\partial U}{\partial y}$, jādiferencē izteiksmes (5) labās puses pirmais un otrs integrals, attiecībā uz $y$, tas dod

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} dx + \varphi(x_0, y, z).$$

Ievērojot izteiksmi (4) dabūjam:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial \varphi(x, y, z)}{\partial x} dx + \varphi(x_0, y, z) = \varphi(x, y, z) - \varphi(x_0, y, z) + \varphi(x_0, y, z).$$

Tā tad

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \varphi(x, y, z).$$

Tā kā

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \psi(x, y, z),$$

tad diferencējot izteiksmi (5) attiecībā uz $z$, dabūjam:

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} dx + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial \varphi(x_0, y, z)}{\partial z} dy + \frac{dZ}{dz} = \psi(x, y, z) \quad (6)$$

Ievērojot, ka noteikumi (2) izpildīti, no izteiksmes (6) dabūjam:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial \psi(x, y, z)}{\partial x} dx + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial \psi(x_0, y, z)}{\partial y} dy + \frac{dZ}{dz} = \psi(x, y, z).$$

Izdarot integrēšanu dabūjam

$$\psi(x, y, z) - \psi(x_0, y, z) + \psi(x_0, y, z) - \psi(x_0, y_0, z) + \frac{dZ}{dz} = \psi(x, y, z).$$

No augšējās izteiksmes dabūjam

$$\frac{dZ}{dz} = \psi(x_0, y_0, z)$$

un

$$Z = \int_{z_0}^{z} \psi (x_0\, y_0\, dz) + C.$$

Tā tad

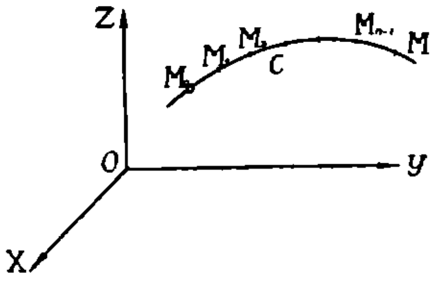
$$U = \int_{x_0}^{x} f(x, y, z)\, dx + \int_{y_0}^{y} \varphi (x_0, y, z)\, dy + \int_{z_0}^{z} \psi (x_0, y_0, z)\, dz + C. \quad (7)$$

Šī izteiksme dod to funkciju $U(x, y, z)$, kuŗas pilnīgais diferencials ir izteiksme (1) par ko varam pārliecināties, veidojot pilnīgo diferencialu no $U$.

**51. Integrals ņemts gar līkni.** Agrāk, [18] apskatījām jēdzienu par integralu ņemtu gar līkni plāknē vienkāršos gadijumos. Še apskatīsim plašāk jēdzienu par integralu ņemtu gar līkni.

Dota telpā līkne un uz tās punkts $M_0 = x_0 | y_0 | z_0$ un punkts $M = x | y\ z$ (zīm. 85.). Līkni apzīmējam ar $C$.

Dotas trīs funkcijas




$$f(x, y, z)\,; \quad \varphi(x, y, z)\,; \quad \psi(x, y, z),$$

Zīm. 85.

kas ir vienvērtīgas, nepārtrauktas kādā telpas nodalijumā, kuŗā atrodas arī līkne $M_0M$. Iedalam līkni $\widehat{M_0M}$ pēc patikas $n$ daļās, tad līknes punktiem

$$M_0,\ M_1,\ M_2, \qquad M_k, \qquad M_{n-1} \qquad M$$

atbilst koordinatas

$$\begin{array}{llllll} x_0, & x_1, & x_2, & x_k, & x_{n-1} & x \\ y_0, & y_1, & y_2, & y_k, & y_{n-1} & y \\ z_0, & z_1, & z_2, & z_k, & z_{n-1} & z. \end{array}$$

Apzīmējam

$$x_k - x_{k-1} = \delta_k; \quad y_k - y_{k-1} = \varepsilon_k; \quad z_k - z_{k-1} = \gamma_k.$$

Veidojam sumu

$$f(x_0, y_0, z_0)\,\delta_1 + f(x_1, y_1, z_1)\,\delta_2 + \dots + f(x_{k-1}, y_{k-1}, z_{k-1})\,\delta_k + \dots + f(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})\,\delta_n,$$

ko apzimējam ar simbolu

$$\sum_{1}^{n}{}^{k} f(x_{k-1}, \ y_{k-1}, \ z_{k-1})\,\delta_k. \tag{1}$$

Tā kā funkcija $f(x, y, z)$ ir vienvērtīga un nepārtraukta uz līknes no $M_0$ līdz $M$, tad, ja $n \to \infty$ $(\delta_k \to 0)$ augšējai, sumai (1) ir robežvērtība

Šo robežvērtību

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{1}^{n}{}^{k} f(x_{k-1}, \ y_{k-1}, \ z_{k-1})\,\delta_k, \tag{2}$$

apzīmē ar simbolu

$$\int_{M_0}^{M} f(x, y, z)\,dx.$$

Ka tāda robežvērtība, tiešām pastāv, tas redzams no sekojošā.

Ja līknes $C$ nolīdzinājumi doti parametriskā veidā

$$x = \lambda(t); \quad y = \mu(t); \quad z = \omega(t),$$

tad

$$x_{k-1} = \lambda(t_{k-1}); \quad y_{k-1} = \mu(t_{k-1}); \quad z_{k-1} = \omega(t_{k-1})$$

un

$$t_k - t_{k-1} = \delta\tau_k.$$

Ievedot šīs vērtības izteiksmē (2), dabūjam

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{1}^{n}{}^{k} f[\lambda(t_{k-1}), \ \mu(t_{k-1}), \ \omega(t_{k-1})] \ \frac{\delta_k}{\delta\tau_k} \ \delta\tau_k. \tag{3}$$

Ja $n \to \infty$, tad $\delta_k \to 0$ un arī $\delta\tau_k \to 0$.

Kā zināms no agrākā, šī robežvērtība (3) pastāv, to apzīmē ar

$$\int_{\alpha}^{\beta} f[\lambda(t),\ \mu(t),\ \omega(t)]\ \frac{dx}{dt}\ dt. \tag{4}$$

Še $\alpha$ ir tā vērtība, ko dabū $t$, kad $x = x_0$ un $\beta$ tā $t$ vērtība, kad $x = x_n$ un

$$\frac{dx}{dt} = \lambda'(t).$$

Tā tad

$$\int_{M_0}^{M} f(x, y, z)\ dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\lambda(t),\ \mu(t),\ \omega(t)]\ \lambda'(t)\ dt \tag{5}$$

Integralu $\int_{M_0}^{M} f(x, y, z)\, dx$ sauc par integralu ņemtu gar līkni $C$, no punktu $M_0$ līdz punktam $M$ no funkcijas $f(x, y, z)$.

Izteiksme (5) rāda, ka integrals, ņemts gar līkni $C$ (nolīdzinājuma kreisā puse) izvērtējams, kā vienkāršs integrals.

Līdzīgi dabūjam

$$\int_{M_0}^{M} \varphi(x, y, z)\ dy = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi[\lambda(t),\ \mu(t),\ \omega(t)]\ \mu'(t)\ dt. \tag{6}$$

$$\int_{M_0}^{M} \psi(x, y, z)\ dz = \int_{\alpha}^{\beta} \psi[\lambda(t),\ \mu(t),\ \omega(t)]\ \omega'(t)\ dt. \tag{7}$$

Pielietojumos bieži līknes integrali parādas šādā kombinacijā

$$\int_{M_0}^{M} f(x, y, z)\ dx + \int_{M_0}^{M} \varphi(x, y, z)\ dy + \int_{M_0}^{M} \psi(x, y, z)\ dz =$$

$$= \int_{M_0}^{M} [f(x, y, z)\ dx + \varphi(x, y, z)\ dy + \psi(x, y, z)\ dz]. \tag{8}$$

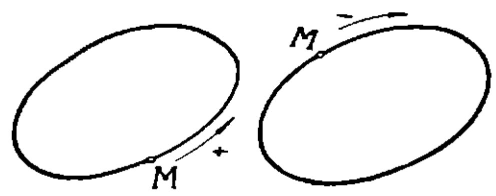
Šī līknes integrala vērtība tad ir

$$\int\limits_{M_0 \text{ gar } C}^{M} [f(x, y, z)\,dx + \varphi(x, y, z)\,dy + \psi(x, y, z)\,dz] =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} \{f[\lambda(t),\mu(t),\omega(t)]\lambda'(t) + \varphi[\lambda(t),\mu(t),\omega(t)]\mu'(t) + \psi[\lambda(t),\mu(t)\,\omega(t)]\omega'(t)\}dt \quad (9)$$

Ja integralu gar līkni $C$ ņemam no $M$ līdz $M_0$, tad redzams, ka izteiksmē (9) $dt$ maina zīmi, bet integrala absolūtā vērtība paliek tā pati, tā tad

$$\int\limits_{M \text{ gar } C}^{M_0} = - \int\limits_{M_0 \text{ gar } C}^{M} \quad (10)$$



Zīm 86.

Ja līkne $C$ slēgta, tad līknes sākuma punkts $M_0$ un gala punkts $M$ sakrīt. Tad integrals ir ņemts gar slēgtu līkni $C$. Ja līkne $C$ (zīm. 86) atrodas plāknē, tad līknes apejas virzieniem dod $+$ vai $-$ zīmi, kā norādīts zīmējumā.

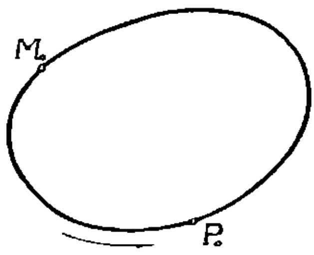
Ja dots slēgts konturs $C$, tad līknes integrala vērtība nav atkarīga no sākuma punkta $M_0$ izvēles.

Integralu ņemtu gar līkni, sākot no $M_0$ dotā virzienā (zīm. 87.) dabūjam

$$J = \int\limits_{M_0}^{P_0} + \int\limits_{P_0}^{M_0}$$

un sākot no $P_0$ dotā virzienā, dabūjam

$$J_1 = \int\limits_{P_0}^{M_0} + \int\limits_{M_0}^{P_0}$$



Zīm. 87.

Kā redzams, šīs divas izteiksmes ir vienlīdzīgas. Augšējā pierādijumā integrals gar līkni $C$ ir sadalīts divos integralos, jo ievērojot, ka integrals gar līkni ir sumas robežvērtība, šo sumu varam sadalīt divās sumās un ņemt no katras robežu atsevišķi. Šīs robežvērtības tad ir augšējie divi integrali.

Vispārīgā gadijumā integrala (8) vērtība ir atkarīga no līknes $C$ veida starp $M_0$ un $M$, t. i. no integrēšanas ceļa. Bet atsevišķā gadijumā, integrala (8) vērtība nav atkarīga no ceļa $C$.

Teorema:

Gar līkni $C$ no $M_0$ līdz $M$, ņemta integrala

$$\int_{M_0}^{M} [f(x, y, z)\,dx + \varphi(x, y, z)\,dy + \psi(x, y, z)\,dz] \tag{11}$$

vērtība ir atkarīga tikai no sākuma punkta $M_0$ un gala punkta $M$ koordinatām un nav atkarīga no integrēšanas ceļa, t. i. no līknes $C$, ja

$$f(x, y, z)\,dx + \varphi(x, y, z)\,dy + \psi(x, y, z)\,dz$$

ir pilnīgs diferencials no kādas vienvērtīgas, nepārtrauktas funkcijas $u(x, y, z)$ t. i ja izpildīti sekojošie noteikumi

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial y}. \tag{12}$$

1) Noteikumi (12) ir vajadzīgi.

Pieņemam, ka integrals (11) nav atkarīgs no līknes $C$, bet no $M_0$ un $M$ koordinatām: $(x_0, y_0, z_0)$ un $(x, y, z)$.

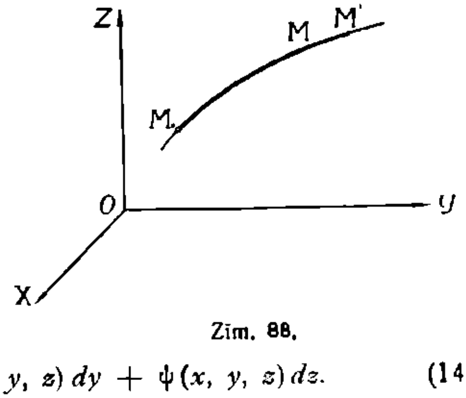
Tad integrala (11) vērtībai jābūt kādai funkcijai no $x, y, z$ un $x_0, y_0, z_0$. Tā tad

$$\int_{M_0}^{M} [f(x,y,z)dx+\varphi(x,y,z)dy+\psi(x,y,z)dz]=F(x, y, z, x_0, y_0, z_0) \tag{13}$$

Atstājot $M_0$ nekustamu, liekam $M$ pārvietoties uz $M'$ (zīm 88).

Apzīmējam $MM' = ds$, tad $ds$ projekcijas uz koordinatu asīm ir: $dx, dy, dz$.

Tādā gadijumā sumā, ar kuras robežvērtību definēts izteiksmes (13) kreisās puses integrals, nāk klāt loceklis:



Zīm. 88.

$$f(x, y, z)\,dx + \varphi(x, y, z)\,dy + \psi(x, y, z)\,dz. \tag{14}$$

Tā tad izteiksmes (13) kreisās puses diferencials ir izteiksme (14) Izteiksmes (13) labās puses diferencials ir:

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz. \tag{15}$$

Šiem abiem diferencialiem jābūt vienlīdzīgiem, tā tad

$$f(x, y, z)\,dx + \varphi(x, y, z)\,dy + \psi(x, y, z)\,dz$$

ir funkcijas $F(x, y, z)$ pilnīgais diferencials.

2) Noteikumi ir pietiekami.

Pieņemam, ka pārbaudot izteiksmi

$$f(x, y, z)\,dx + \varphi(x, y, z)\,dy + \psi(x, y, z)\,dz \tag{16}$$

atrodam, ka

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial y},$$

tad (16) ir kādas funkcijas $F(x, y, z)$ pilnīgais diferencials un tādēļ

$$f(x, y, z)\,dx + \varphi(x, y, z)\,dy + \psi(x, y, z)\,dz = dF(x, y, z).$$

Tad

$$\int_{M_0}^{M} [f(x, y, z)\,dx + \varphi(x, y, z)\,dy + \psi(x, y, z)\,dz] = \int_{M_0}^{M} dF(x, y, z) =$$
$$= |F(x, y, z)|_{M_0}^{M} = F(x, y, z) \quad F(x_0, y_0, z_0).$$

Kā redzams šinī gadijumā integrala vērtība nav atkarīga no līknes $C$, bet tikai no punkta $M_0 = x_0 | y_0 | z_0$ un $M = x | y | z$ koordinatām.

Ar to teorema pierādita.

Ja līkne $C$ slēgta un zemintegrala izteiksme

$$f(x, y, z)\,dx + \varphi(x, y, z)\,dy + \psi(x, y, z)\,dz$$

ir pilnīgs diferencials, tad līknes integrala vērtiba ir 0. Tas redzams no sekojošā

$$\int_{M_0}^{M} [f(x, y, z)\,dx + \varphi(x, y, z)\,dy + \psi(x, y, z)\,dz] = F(x, y, z) - F(x_0 y_0 z_0).$$

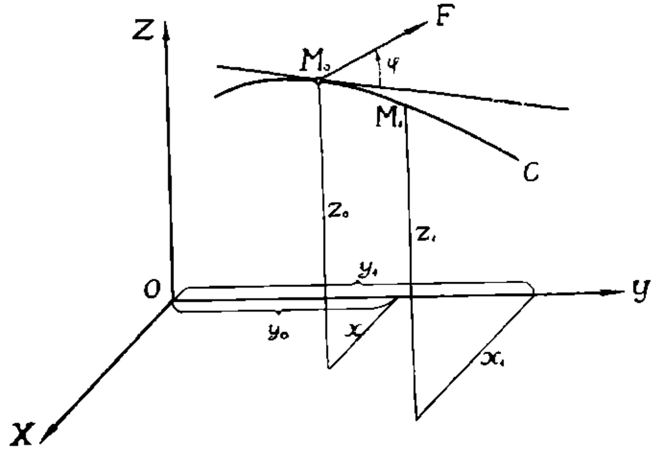
Ja līkne slēgta, tad $M$ sakrīt ar $M_0$ un tādēļ augšējās izteiksmes labā puse dod

$$F(x_0, y_0, z_0) - F(x_0\ y_0\ z_0) = 0.$$

Ja līkne $C$ atrodas plāknē, visas augšējās izteiksmes ir jāspecilizē, ievērojot, ka tādā gadijumā nav funkcijas $\psi(x, y, z)$ un nav arī mainīgā $z$.

Piemērs.

Uz materiala punkta $M_0$ iedarbojas spēks $F$ (zīm. 89.). Pieņe-




Zīm. 89.

mam ka vispār spēks $F$ ir funkcija $\Phi(x, y, z)$ no līknes punkta $M$ koordinatām $x, y, z$, un ka spēka $F$ projekcijas uz koordinatu asīm ir

$$X = f(x, y, z); \quad Y = \varphi(x, y, z); \quad Z = \psi(x, y, z).$$

Ja punkts pāriet uz līknes $C$ no $M_0$ uz $M_1$ ar koordinatām

$$x_0 + dx \mid y_0 + dy \mid z_0 + dz,$$

tad spēks izdara elementardarbu

$$dA = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz.$$

Viss darbs, kad punkts noiet no $M_0$ līdz $M$, ir

$$A = \int_{M_0}^{M} (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz).$$

Vispārīgā gadījumā darbs $A$ ir atkarīgs no punkta $M_0$ un $M$, bet arī no līknes $C$, t. i. no integrēšanas ceļa.

Darbs $A$ nav atkarīgs no ceļa t. i. no līknes $C$, ja

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

ir kādas vienvērtīgas, nepārtrauktas funkcijas

$$U(x, y, z)$$

pilnīgs diferencials; tad

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = d\,U(x, y, z)$$

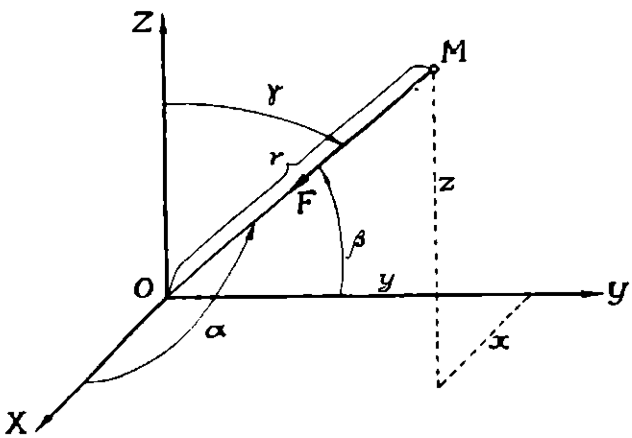
un

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}; \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Ja ir šāda funkcija $U(x, y, z)$, tad to sauc par **spēka funkciju**. Šādā gadījumā

$$A = \int_{M_0}^{M} dU = U(x, y, z) - U(x_0, y_0, z_0).$$

Apskatam konkretu piemēru.




Zīm. 90.

Punktu $M$ (zīm. 90.) pievelk koordinatu sākums ar spēku

$$F = -\frac{k}{r^2}.$$

Spēka projekcijas uz koordinatu asīm tad ir

$$X = F \cos \alpha = -\frac{k}{r^2}\ \frac{x}{r}$$

$$Y = F \cos\ \ = -\frac{k}{r^2}\ \frac{y}{r}$$

$$Z = F \cos \gamma = -\frac{k}{r^2}\ \frac{z}{r}.$$

Tad

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = -\frac{k}{r^3}\,(x\,dx + y\,dy + z\,dz).$$

Tā kā

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = \frac{1}{2}\,d\,(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{1}{2}\,d\,(r^2) = r\,dr,$$

tad

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = -\frac{k}{r^3}\ r\,dr = -k\frac{dr}{r^2} = d\left(\frac{k}{r}\right).$$

Kā redzams

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

ir pilnīgs diferenciāls no funkcijas

$$U(x, y, z) = \frac{k}{r} = \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Tādēļ

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -k\,.\,\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = -k\ \frac{x}{r^3} = X,$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -k\ \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = -k\ \frac{y}{r^3} = Y,$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -k\ \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = -k\ \frac{z}{r^3} = Z$$

kas saskan ar augšējo.

Ja kustošais punkts no $M_0$ pārgājis stāvoklī $M$, pie kam $r_0$ ir punkta $M_0$ un $r$ punkta $M$ radiuss vektors, tad

$$A = \int_{M_0}^{M} (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = \int_{M_0}^{M} d\left(\frac{k}{r}\right) = \left|\frac{k}{r}\right|_{r_0}^{r} = \frac{k}{r} - \frac{k}{r_0}.$$

Kā redzam, še darbs ir atkarīgs tikai no ceļa sākuma un gala punkta koordinatām. Še spēka funkcija ir

$$\frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

## Trispadsmitā nodaļa.

# Funkciju sistematiska integrēšana.

Jau [4] apskatijām integrēšanas pamata paņēmienus. Še tos paplašināsim apskatot tādus diferencialu veidus, kam ir vispārīgi integrēšanas paņēmieni. Šādi diferenciali ir racionali un arī tie, kurus ar mainīgā pārmaiņu var pārveidot racionalos

### A. Algebrisku racionalu funkciju integrēšana.

Algebriskas racionalas funkcijas ir veselas un lauztas funkcijas. Pēdējās ir īstas un neīstas lauztas funkcijas.

**52. Algebrisku veselu funkciju**

$$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \qquad + a_{m-1} x + a_m$$

integrē pielietojot pamata formulu:

$$\int x^m\, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C.$$

Tā tad:

$$\int (a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \qquad + a_{m-1} x + a_m)\, dx =$$

$$= a_0 \frac{x^{m+1}}{m+1} + a_1 \frac{x^m}{m} + \qquad + a_{m-1} \frac{x^2}{2} + a_m x + C.$$

Veselas racionalas algebriskas funkcijas integrals ir vesela racionala algebriska funkcija.

Ja funkcija ir $(ax + b)^m$, tad

$$\int (ax + b)^m\, dx = \frac{1}{a} \int (ax + b)^m\, d\,(ax + b) = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax+b)^{m+1}}{m+1} + C.$$

Integralu

$$\int x^m\, (ax + b)^n\, dx$$

var dabūt izvirzot $(ax + b)^n$ ar Ņutona binomu, tad reizinot katru locekli ar $x^m$ un integrējot. Še labāk dabūt redukcijas formulu ar parcialu integrēšanu.

Tā tad:

$$\int x^m(ax+b)^n\,dx = \frac{x^m(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} - \int \frac{(ax+b)^{n+1}\,.\,mx^{m-1}\,dx}{a(n+1)} =$$

$$= \frac{x^m(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} - \frac{m}{a(n+1)}\int (ax+b)^{n+1}\,.\,x^{m-1}\,dx \qquad (1)$$

Pārveidojot dabūjam:

$$\int (ax+b)^{n+1}x^{m-1}\,dx = \int (ax+b)^n \quad (ax+b)\,x^{m-1}\,dx =$$

$$= \int (ax+b)^n \quad (ax^m + bx^{m-1})\,dx =$$

$$= a\int x^m(ax+b)^n\,dx + b\int x^{m-1}(ax+b)^n\,dx \qquad (2)$$

Ievedot (2) izteiksmē (1) dabūjam:

$$\int x^m(ax+b)^n\,dx = \frac{x^m(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} - \frac{m}{n+1}\int x^m(ax+b)^n\,dx -$$

$$- \frac{bm}{a(n+1)}\int x^{m-1}(ax+b)^n\,dx.$$

Pārveidojot dabūjam:

$$1 + \frac{m}{n+1}\int x^m(ax+b)^n\,dx = \frac{x^m(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} - \frac{bm}{a(n+1)}\int x^{m-1}(ax+b)^n\,dx$$

un

$$\int x^m(ax+b)^n\,dx = \frac{x^m(ax+b)^{n+1}}{a(m+n+1)} -$$

$$- \frac{b\,.\,m}{a(m+n+1)}\int x^{m-1}(ax+b)^n\,dx. \qquad (3)$$

Piemērs:

$$\int x^2(ax+b)^4\,dx = \frac{x^2(ax+b)^5}{a\,.\,7} - \frac{b\ 2}{a\,.\,7}\int x(ax+b)^4\,dx.$$

$$\int x(ax+b)^4\,dx = \frac{x(ax+b)^5}{a\,.\,6} - \frac{b\,.\,1}{a\ 6}\int (ax+b)^4\,dx$$

$$\int (ax+b)^4\,dx = \frac{1}{a}\,.\,\frac{(ax+b)^5}{5}.$$

Tā tad:

$$\int x^2(ax+b)^4\,dx = \frac{x^2(ax+b)^5}{7a} - \frac{2b}{7a}\left[\frac{x(ax+b)^5}{6a} - \frac{b}{6a}\cdot\frac{1}{a}\frac{(ax+b)^6}{5}\right] + C.$$

**53 Algebriskas racionalas lauztas funkcijas.** Ja dota algebriska racionala lauztas funkcija:

$$\frac{F(x)}{\varphi(x)} = \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \quad + a_{m-1}x + a_m}{b_0x^n + b_1x^{m-1} + \quad + b_{m-1}x + b_m}$$

ar $m \geqslant n$, tad iedalot saucēju skaitītājā dabūjam:

$$f(x) + \frac{\psi(x)}{\varphi(x)}.$$

Funkcija $f(x)$ tad ir vesela funkcija un $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ īsta lauzta funkcija. Funkcijas $\psi(x)$ kāpe ir zemāka kā $\varphi(x)$ kāpe.

Funkcijas $f(x)$ integrēšanu jau apskatījām, tādēļ apskatīsim, ka integrē algebriskas racionalas, īstās lauztas funkcijas.

a) Racionalas, īstas lauztas pirmās kāpes funkcijas.

$$\int\frac{dx}{x} = lx + C = lcx.$$

$$\int\frac{dx}{x+a} = l(x+a) + C = l[c(x+a)]$$

$$\int\frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int\frac{d(ax+b)}{ax+b} = \frac{1}{a}\,l(ax+b) + C.$$

Piemērs.

Iedalot saucēju skaitītājā dabūjam:

$$\int\frac{x^2-4x+2}{x-2}\,dx = \int\left(x-2-\frac{2}{x-2}\right)dx = \frac{x^2}{2} - 2x - 2l(x-2) + C.$$

b) Racionalas īstas lauztas otras kāpes funkcijas.

$$\int\frac{dx}{x^2} = \int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x} + C.$$

$$\int\frac{dx}{(x+a)^2} = \int(x+a)^{-2}\,.\,d(x+a) = \frac{(x+a)^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x+a} + C.$$

Sekojoša integrala zemintegrala funkciju sadalot parcialdaļās dabūjam:

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \int \frac{dx}{(x-a)(x+a)} = \int \frac{A}{x-a}\,dx + \int \frac{B\,dx}{x+a} =$$

$$= \int \frac{dx}{2a(x-a)} - \int \frac{dx}{2a(x-a)} = \frac{1}{2a}\, l\, \frac{x-a}{x+a} + C$$

$$\int \frac{dx}{ax^2 - b} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{x^2 - \left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2} = \frac{1}{a}\; \frac{1}{2\sqrt{\frac{b}{a}}}\; l\, \frac{x - \sqrt{\frac{b}{a}}}{x + \sqrt{\frac{b}{a}}} + C.$$

$$\int \frac{dx}{x+a)^2 - b^2};\quad \text{liekam } x + a = u \quad \text{tad,}$$

$$\int \frac{dx}{(x+a)^2 - b^2} = \int \frac{du}{u^2 - b^2} = \frac{1}{2b}\, l\, \frac{u-b}{u+b} = \frac{1}{2b}\, l\, \frac{x+a-b}{x+a+b} + C.$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a} \int \frac{d\,\frac{x}{a}}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\, \text{arc tg}\, \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{(x+a)^2 + b^2} = \frac{1}{b^2} \int \frac{dx}{1 + \left(\frac{x+a}{b}\right)^2} = \frac{1}{b} \int \frac{d\,\frac{x+a}{b}}{1 + \left(\frac{x+a}{b}\right)^2} = \frac{1}{b}\, \text{arctg}\, \frac{x+a}{b} + C.$$

Sekojošais integrals jāintegrē ķermeņa brīvās krišanas problemā, ņemot vērā gaisa pretestību.

$$\int \frac{m\,dv}{mg - cv^2} = -\int \frac{m\,dv}{(\sqrt{c}\,v)^2 - (\sqrt{mg})^2} = -\frac{m}{\sqrt{c}} \int \frac{d\sqrt{c}\,v}{(\sqrt{c}\,v)^2 \quad (\sqrt{mg})^2} =$$

$$= -\frac{m}{\sqrt{c}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{mg}}\; l\, \frac{\sqrt{c}\,v - \sqrt{mg}}{\sqrt{c}\,v + \sqrt{mg}} = \frac{-m}{2\sqrt{cmg}}\; l\, \frac{cv - \sqrt{cmg}}{cv + \sqrt{cmg}} + C.$$

Ja daļas saucējs ir otras kāpes trinoms

$$ax^2 + bx + c,$$

tad, kā norādīts [4], šo trinomu pārveidojam par binomu un tādējādi šo gadījumu pārvedam uz vieņu no augšējām formulām.

Piemērs.

$$\int \frac{dx}{3x^2+4x+5} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+\frac{4}{3}x+\frac{5}{3}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{4}{9}+\frac{5}{3}} =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{d\left(x+\frac{2}{3}\right)}{\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{11}{9}}\right)^2} = \frac{1}{3}\int \frac{d\left(x+\frac{2}{3}\right)}{\left(\sqrt{\frac{11}{9}}\right)^2\left\{1+\left(\frac{x+\frac{2}{3}}{\sqrt{\frac{11}{9}}}\right)^2\right\}} =$$

$$= \frac{1}{3}\ \frac{1}{\sqrt{\frac{11}{9}}}\int \frac{d\frac{x+\frac{2}{3}}{\sqrt{\frac{11}{9}}}}{1+\left(\frac{x+\frac{2}{3}}{\sqrt{\frac{11}{9}}}\right)^2} = \frac{1}{3}\ \frac{1}{\sqrt{\frac{11}{9}}}\ \operatorname{arc\,tg}\frac{x+\frac{2}{3}}{\sqrt{\frac{11}{9}}} + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{11}}\ \operatorname{arc\,tg}\frac{3x+2}{\sqrt{11}} + C.$$

Piemērs.

$$\int \frac{dx}{3x^2+4x+1} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{4}{9}+\frac{1}{3}} =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}\int \frac{d\left(x+\frac{2}{3}\right)}{\frac{1}{9}\left\{\left(\frac{x+\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}}\right)^2-1\right\}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\frac{1}{3}}\int \frac{d\left(\frac{x+\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}}\right)}{\left(\frac{x+\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}}\right)^2-1} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot l\,\frac{\frac{x+\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}}-1}{\frac{x+\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}}+1} = \frac{1}{2}\ l\,\frac{3x+1}{3x+3} + C.$$

Piemērs.

$$\int \frac{dx}{3x^2+4x+\frac{4}{3}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{3}\int \frac{d\left(x+\frac{2}{3}\right)}{\left(x+\frac{2}{3}\right)^2} =$$

$$= -\frac{1}{3}\,\frac{1}{x+\frac{2}{3}} = -\frac{1}{3x+2} + C.$$

Ja skaitītājs ir pirmās kāpes funkcija, tad dabūjam veidus:

a) $$\int \frac{ax+\beta}{(x+a)^2}\,dx = \int \frac{ax+aa-aa+\beta}{(x+a)^2}\,dx =$$

$$= a\int \frac{x+a}{(x+a)^2}\,dx + (\beta - aa)\int \frac{dx}{(x+a)^2} =$$

$$= a\int \frac{dx}{x+a} + (\beta - aa)\int \frac{dx}{(x+a)^2} = al\,(x+a) - \frac{(\beta - aa)}{x+a} + C.$$

β) $$\int \frac{ax+\beta}{x^2-a^2}\,dx = a\int \frac{x\,dx}{x^2-a^2} + \beta\int \frac{dx}{x^2-a^2} =$$

$$= \frac{a}{2}\,l\,(x^2-a^2) + \frac{\beta}{2a}\,l\,\frac{x-a}{x+a} + C.$$

γ) $$\int \frac{ax+\beta}{x^2+a^2}\,dx = a\int \frac{x\,dx}{x^2+a^2} + \beta\int \frac{dx}{x^2+a^2} =$$

$$= \frac{a}{2}\,l\,(x^2+a^2) + \frac{\beta}{a}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x}{a} + C.$$

δ) $$\int \frac{ax+\beta}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{(ax+\beta)\,dx}{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}} =$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{(ax+\beta)\,dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{(ax+\beta)\,dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + k}.$$

Liekot beidzamajā integralā:

$$x+\frac{b}{2a} = z \qquad x = z - \frac{b}{2a}; \qquad dx = dz$$

dabūjam:

$$\int \frac{ax+\beta}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{\left[a\left(z-\frac{b}{2a}\right)+\beta\right]}{z^2+k}\,dz =$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{\left[az + \left(\beta - \frac{ab}{2a}\right)\right]dz}{z^2+k}.$$

Beidzamais integrals, ja:

$$k < 0,\ \text{dabū veidu}\ (\beta)$$
$$k > 0,\ \quad „ \quad „ \quad (\gamma)$$

Piemērs:

$$\int \frac{(x+2)\,dx}{3x^2+4x+1} = \frac{1}{3}\int \frac{(x+2)\,dx}{x+\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\int \frac{(x+2)\,dx}{\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{1}{9}}.$$

Liekam

$$x+\frac{2}{3}=z;\quad x=z-\frac{2}{3};\quad dx=dz,$$

tad

$$\int \frac{(x+2)\,dx}{3x^2+4x+1} = \frac{1}{3}\int \frac{\left(z-\frac{2}{3}+2\right)dz}{z^2-\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}\int \frac{\left(z+\frac{4}{3}\right)dz}{z^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\int \frac{z\,dz}{z^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2} + \frac{4}{3}\int \frac{dz}{z^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2}\right] = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\,l\left(z^2-\frac{1}{9}\right) +$$

$$+\frac{1}{3}\cdot\frac{\frac{4}{3}}{2\,\frac{1}{3}}\,l\,\frac{z-\frac{1}{3}}{z+\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\,l\left[x^2+\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}\right]+\frac{2}{3}\,l\,\frac{x+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}}{x+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}} =$$

$$= \frac{1}{6}\,l\left[x^2+\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}\right]+\frac{2}{3}\,l\,\frac{3x+1}{3(x+1)}+C.$$

c) Augstākas kāpes racionalas algebriskas lauztas funkcijas.

Ja funkcija ir neīsta lauzta, tad iedalam saucēju skaitītājā, dabūjam veselu funkciju un īstu lauztu funkciju.

Īstu lauztu funkciju

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)}$$

sadala parcialdaļās.

Kā tas izdarams, parādīts autora grāmatā: „Kompleksi skaitļi, determinanti, algebriski nolīdzinājumi, parcialdaļas."

Ja īstas lauztas funkcijas $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ saucēju $f(x)$ sadalot reizinātājos dabūjam piemēram:

$$f(x) = (x-a)(x \quad \beta)^m(x^2+px+q)(x^2+p_1x+q_1)^n$$

tad sadalot parcialdaļas dabūjam:

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\frac{A}{x-\alpha}+\frac{B_1}{(x-\beta)^m}+\frac{B_2}{(x-\beta)^{m-1}}+\ldots+\frac{B_m}{x-\beta}+$$

$$\frac{P_x+Q}{x^2+px+q}+\frac{L_1x+M_1}{(x^2+p_1x+q_1)^n}+\frac{L_2x+M_2}{(x^2+p_1x+q_1)^{n-1}}+\ldots+\frac{L_n+M_n}{x_1+p_1x+q_1}$$

Parcialdaļas dabū šādus veidus:

$$1)\ \frac{A}{x-\alpha};\quad 2)\ \frac{B}{(x-\beta)^m};$$

$$3)\ \frac{Px+Q}{x^2+px+q};\quad 4)\ \frac{L_nx+M_n}{(x^2+p_1x+q_1)^n}.$$

Pirmā, otra un trešā veida parcialdaļu integrēšana jau apskatīta.

Ceturtā veida parcialdaļu integrē šādi:

$$\int\frac{(L_nx+M_n)}{[x^2+p_1x+q_1]^n}\,dx=\int\frac{(L_nx+M_n)\,dx}{\left[\left(x+\frac{p_1}{2}\right)^2+q_1-\frac{p_1^2}{4}\right]^n}.$$

Liekam

$$x+\frac{p_1}{2}=t;\quad x=t-\frac{p_1}{2};\quad dx=dt;\quad q_1-\frac{p_1^2}{4}=h.$$

Ievedot šīs vērtības, integralā dabūjam:

$$\int\frac{(L_nx+M_n)dx}{[x^2+p_1x+q_1]^n}=\int\frac{L_n\left(t-\frac{p_1}{2}\right)+M_n}{[t^2+h]^n}\,dt=\int\frac{L_nt+M_n-\frac{L_np_1}{2}}{(t^2+h)^n}\,dt=$$

$$=L_n\int\frac{t\,dt}{(t^2+h)^n}+\left(M_n-\frac{L_np_1}{2}\right)\int\frac{dt}{(t^2+h)^n}.$$

Pirmo integralu integrējot dabūjam:

$$\int\frac{t\,dt}{(t^2+h)^n}=-\frac{1}{2(n-1)}\,\frac{1}{(t^2+h)^{n-1}},\quad (\text{ar } n>1).$$

Otru integralu dabūjam sekojoši: Apzīmējam

$$J_n=\int\frac{dt}{(t^2+h)^n},$$

un

$$J_{n-1}=\int\frac{dt}{(t^2+h)^{n-1}}.$$

Pēdējo integralu integrējam parciali.

$$J_{n-1}=\int\frac{dt}{(t^2+h)^{n-1}}=\frac{t}{(t^2+h)^{n-1}}-\int t\,.\,(-n+1)(t^2+h)^{-n}\,2\,t\,dt=$$

$$=\frac{t}{(t^2+h)^{n-1}}+2\,(n-1)\int\frac{t^2\,dt}{(t^2+h)^n}=$$

$$=\frac{t}{(t^2+h)^{n-1}}+2\,(n-1)\left[\int\frac{(t^2+h)\,dt}{(t^2+h)^n}-\int\frac{h\,dt}{(t^2+h)^n}\right].$$

Tā tad

$$J_{n-1}=\frac{t}{(t^2+h)^{n-1}}+2\,(n-1)\,(J_{n-1}-h\,J_n)$$

un

$$2\,(n-1)\,h\quad J_n=\frac{t}{(t^2+h)^{n-1}}+(2n-3)\,J_{n-1}.$$

Šī formula ir r e d u k c i j a s f o r m u l a.

P i e m ē r s.

$$\int\frac{(x+1)\,dx}{(x^2+4x+6)^3}=\int\frac{(x+1)\,dx}{[(x+2)^2+6-4]^3}=\int\frac{(x+1)\,dx}{[(x+2)^2+2]^3}$$

Liekot

$$x+2=t;\quad x=t-2\quad \text{un}\quad dx=dt,$$

dabūjam:

$$\int\frac{(t-2+1)\,dt}{(t^2+2)^3}=\int\frac{(t-1)\,dt}{(t^2+2)^3}=\int\frac{t\,dt}{(t^2+2)^3}-\int\frac{dt}{(t^2+2)^3}\qquad(1)$$

$$\int\frac{t\,dt}{(t^2+2)^3}=\frac{1}{2}\int(t^2+2)^{-3}d\,(t^2+2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{(t^2+2)^{-2}}{-2}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(t^2+2)^2}\qquad(2)$$

Še

$$J_3=\int\frac{dt}{(t^2+2)^3}\quad \text{un}\quad J_1=\int\frac{dt}{t^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ \text{arc tg}\ \frac{t}{\sqrt{2}}.$$

Liekot redukcijas formulā

$$2\,(n-1)\,h\quad J_n=\frac{t}{(t^2+h)^{n-1}}+(2n-3)\,J_{n-1}.$$

$n=2$ dabūjam:

$$2\,(2-1)\,.\,2\quad J_2=\frac{t}{(t^2+h)^{2-1}}+(2\quad 2-3)\,J_1$$

$$J_2=\frac{1}{4}\quad\frac{t}{t^2+2}+\frac{1}{4}\,J_1=\frac{1}{4}\,\frac{t}{t^2+2}+\frac{1}{4}\quad\frac{1}{\sqrt{2}}\ \text{arc tg}\ \frac{t}{\sqrt{2}}.$$

Liekot redukcijas formulā $n = 3$ dabūjam

$$2\,(3\quad 1)\;2\;J_3 = \frac{t}{(t^2+2)^{3-1}} + (2\quad 3-3)\,J_2.$$

Tā tad:

$$J_3 = \frac{1}{8}\,\frac{t}{(t^2+2)^2} + \frac{1}{8}\;3\,J_2 = \frac{1}{8}\,\frac{t}{(t^2+2)^2} + \frac{3}{8}\left[\frac{1}{4}\,\frac{t}{t^2+2} + \frac{1}{4}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}\right]$$

$$J_3 = \frac{1}{8}\,\frac{t}{(t^2+2)^2} + \frac{3}{32}\,\frac{t}{t^2+2} + \frac{3}{32}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{\sqrt{2}} \qquad (3)$$

Ievērojot (1), (2) un (3) dabūjam

$$\int\frac{x+1}{(x^2+4x+6)^3} = -\frac{1}{4}\,\frac{1}{(t^2+2)^2} - \frac{1}{8}\cdot\frac{t}{(t^2+2)^2} - \frac{3}{32}\,\frac{t}{t^2+2} - \frac{3}{32}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} + C.$$

Ievietojot

$$t = x + 2$$

dabūjam:

$$\int\frac{x+1}{(x^2+4x+6)^3} = -\frac{1}{8}\,\frac{x+4}{(x^2+4x+6)^2} - \frac{3}{32}\cdot\frac{x+2}{x^2+4x+6} - \frac{3}{32}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{2}} + C.$$

No augšējā redzams, ka katras racionalas algebriskas funkcijas nenoteiktais integrals ir dabūjams slēgtā veidā. Integrēšana dod: racionalas algebriskas, logaritmiskas, un arc tg funkcijas

## B. Algebriskas iracionalas funkcijas.

### 54. Iedališana.

a) Zemintegrala funkcijā $f(x)$ atrodas racionalā veidā $x$ un izteiksmes

$$P = \sqrt[p]{\frac{ax+\beta}{\gamma x+\delta}}; \quad Q = \sqrt[q]{\frac{ax+\beta}{\gamma x+\delta}}; \quad T = \sqrt[r]{\frac{ax+\beta}{\gamma x+\delta}}$$

Tā tad:

$$f(x) = R\,(x, P, Q, T).$$

$p$, $q$, $r$ var būt pozitivi vai negativi, veseli vai arī daļas skaitļi. Ar $R$ še apzīmēta racionala funkcija ar argumentiem $x$, $P$, $Q$, $T$.

b) Zemintegrala funkcijā $f(x)$ atrodas racionalā veidā $x$ un izteiksme

$$X = \sqrt{ax^2 + bx + c}.$$

Tā tad:

$$f(x) = R(x, X)$$

c) I n t e g r ē j a m ā f u n k c i j ā $f(x)$ a t r o d a s r a c i o n a l ā v e i d ā $x$ u n $\sqrt{G}$, u n $G$ i r

$$= ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

vai arī

$$= ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Tā tad:

$$f(x) = R(x, \sqrt{G}).$$

Šādu funkciju integralus sauc par eliptiskiem integraliem.

d) Zemintegrala funkcijā atrodas racionalā veidā $x$ un kvadratsakne no kādas funkcijas, kuŗas kāpe augstāka par ceturto, vai arī trešā, ceturtā sakne u. t. t. no nelinearas funkcijas. Tādu funkciju integralus sauc par hipereliptiskiem, Abela integraliem.

Veidu ($a$) un ($b$) integralus var dabūt slēgtā veidā. Veidu ($c$) un ($d$) integrali slēgtā veidā nav dabūjami.

Apskatam funkcijas, kuŗu integralus varam dabūt slēgtā veidā, vispirms vienkāršākās, pārejot uz sarežģītākām.

**55. Monomiska iracionalitate.**

1) $\int R(x, \sqrt[n]{x})\, dx.$ ($n$ vesels skaitlis $> 0$).

Ievedam substituciju

$$\sqrt[n]{x} = z,$$

tad:

$$x = z^n; \quad dx = nz^{n-1}\, dz.$$

Ar šīm vērtībām dabūjam:

$$\int R(x, \sqrt[n]{x})\, dx = \int R(z^n, z)\, nz^{n-1}\, dz = n \int R(z^n, z)\, z^{n-1}\, dz$$

Zemintegrala funkcija tā tad ir racionalizēta.

P i e m ē r s.

$$\int \frac{x\, dx}{\sqrt[3]{x} + 1}.$$

Ievērojot augšā norādīto dabūjam:

$$\sqrt[3]{x} = z; \quad x = z^3; \quad dx \quad 3z^2\, dz$$

$$\int \frac{x\, dx}{\sqrt[3]{x}+1} = \int \frac{z^3 \,.\, 3z^2\, dz}{z+1} = 3\int \frac{z^5\, dz}{z+1}.$$

Kā redzams, pēc substitucijas dabūjam zem integrala racionalu algebrisku neīstu lauztu funkciju, kas jāintegrē, kā agrāk norādīts, vispirms iedalot saucēju skaitītājā.

$$2) \quad \int R(x, \sqrt[m]{x}, \sqrt[n]{x},)\, dx \quad = \int R\,(x, x^{\frac{1}{m}}, x^{\frac{1}{n}})\, dx.$$

Ievedam substituciju

$$x^{\frac{1}{p}} = z \qquad \left(p \text{ daļu } \frac{1}{m} \text{ un } \frac{1}{n} \text{ kopējs saucējs}\right).$$

$$x = z^p; \quad dx = p\, z^{p-1}\, dz; \quad x^{\frac{1}{m}} = z^{\frac{p}{m}}; \quad x^{\frac{1}{n}} = z^{\frac{p}{n}}$$

Ar šo substituciju zemintegrala funkcija dabū racionalu veidu

Piemērs.

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}\, dx}{\sqrt{x}-1} = \int \frac{x^{\frac{1}{3}}\, dx}{x^{\frac{1}{2}}-1}.$$

Daļu $\frac{1}{3}$ un $\frac{1}{2}$ kopīgs saucējs ir 6, tā tad jaliek

$$x^{\frac{1}{6}} = z.$$

Tad

$$x = z^6; \quad dx = 6z^5\, dz.$$

Ar augšējām vērtībām dabūjam:

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}\, dx}{\sqrt{x}-1} = \int \frac{z^2 \,.\, 6z^5\, dz}{z^3-1} = 6\int \frac{z^7\, dz}{z^3-1}.$$

Tā tad zemintegrala funkcija ir racionalizēta.

**56. Lineara iracionalitate.**

1) $\int R(x, \sqrt[n]{ax + b})\, dx.$

Ievedam substituciju

$$\sqrt[n]{ax + b} = z,$$

tad

$$ax + b = z^n; \quad x = \frac{z^n - b}{a}; \quad dx = \frac{1}{a} \cdot n\, z^{n-1}\, dz.$$

Ar šīm vērtībām dabūjam:

$$\int R(x, \sqrt[n]{ax + b})\, dx = \int R\left(\frac{z^n - b}{a}, z\right) \frac{1}{a}\, n\, z^{n-1}\, dz =$$

$$= \frac{n}{a} \int R\left(\frac{z^n - b}{a}, z\right) z^{n-1}\, dz.$$

Tā tad zemintegrala funkcija ir racionalizēta.

Piemērs.

$$\int \frac{dx}{x \sqrt[3]{1 - x}}$$

Liekam

$$\sqrt[3]{1 - x} = z.$$

Tad

$$1 - x = z^3, \quad x = 1 - z^3, \quad dx = -3z^2\, dz.$$

un

$$\int \frac{dx}{x \sqrt[3]{1 - x}} = \int \frac{-3z^2\, dz}{(1 - z^3) \cdot z} = -3 \int \frac{z\, dz}{1 - z^3}$$

2) $\int R(x, \sqrt[m]{ax + b}, \sqrt[n]{ax + b})\, dx = \int R\left[x, (ax + b)^{\frac{1}{m}}, (ax + b)^{\frac{1}{n}}\right] dx$

Ievedam substituciju

$$(ax + b)^{\frac{1}{p}} = z.$$

($p$ ir daļu $\frac{1}{m}$ un $\frac{1}{n}$ kopējs saucējs).

Tad

$$ax + b = z^p; \quad x = \frac{z^p - b}{a}; \quad dx = \frac{1}{a} \; p z^{p-1} \, dz$$

$$\sqrt[m]{ax + b} = z^{\frac{p}{m}} \quad \sqrt[n]{ax + b} = z^{\frac{p}{n}}.$$

Ar šo vērtību ievešanu zemintegrala funkcija dabū racionalu veidu.

Piemērs.

$$\int \frac{x \sqrt[3]{3x + 2} \, dx}{1 - \sqrt{3x + 2}} = \int \frac{x \, (3x + 2)^{\frac{1}{3}} \, dx}{1 - (3x + 2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Daļu $\frac{1}{3}$ un $\frac{1}{2}$ kopigs saucējs ir 6, tā tad jāieved

$$3x + 2 = z^6.$$

Tad

$$x = \frac{z^6 - 2}{3}; \quad dx = \frac{1}{3} \quad 6 \, z^5 \, dz$$

un

$$\sqrt[3]{3x + 2} = z^2; \quad \sqrt{3x + 2} = z^3.$$

Ievedot šīs vērtības zemintegrala funkcijā dabūjam

$$\int \frac{x \sqrt[3]{3x + 2}}{1 - \sqrt{3x + 2}} \, dx = \int \frac{\frac{z^6 - 2}{3} \cdot z^2 \; \frac{1}{3} \; 6 \, z^5 \, dz}{1 - z^3} = \frac{2}{3} \int \frac{(z^6 - 2) \, z^7 \, dz}{1 - z^3}.$$

## 57 Zem saknes atrodas linearu funkciju dalijums.

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax + b}{a_1 x + b_1}}\right) dx.$$

Ievedam substituciju

$$\sqrt[n]{\frac{a \, x + b}{a_1 x + b_1}} = z,$$

tad

$$x = \frac{b_1 z^n - b}{a - a_1 z^n}; \quad dx = \frac{a \, b_1 - a_1 \, b}{(a - a_1 \, z^n)^2} \; n \, z^{n-1} \, dz$$

un

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{a x + b}{a_1 x + b_1}}\right) dx = n (a b_1 - a_1 b) \int R\left(\frac{b_1 z^n - b}{a - a_1 z^n}, z\right) \frac{z^{n-1}\, dz}{(a - a_1 z^n)^2}$$

Piemērs.

$$\int \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}} \frac{dx}{x}.$$

Ievedam

$$\sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}} = z.$$

Tad

$$x = \frac{1 - z^2}{1 + z^2}; \quad dx = -\frac{4 z\, d z}{(1 + z^2)^2}$$

un

$$\int \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}} \frac{dx}{x} = -4 \int \frac{z^2}{(1 - z^2)(1 + z^2)}\, dz.$$

**58. Kvadratiska iracionalitate.**

1) $\int R(x, X)\, dx$; še $X = \sqrt{a^2 - x^2}$ vai arī $X = \sqrt{x^2 \pm a^2}$.

Še vispirms apskatīsim atsevišķus veidus.

Pirmais veids:

$$\int \frac{x^m\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad \text{un} \quad \int \frac{x^m\, dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}. \qquad (m \geqslant 2)$$

Integrējam parciali

$$\int \frac{x^m\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int x^{m-1} \frac{x\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} =$$

$$= x^{m-1}\left(-\sqrt{a^2 - x^2}\right) - \int -\sqrt{a^2 - x^2}\,(m - 1)\, x^{m-2}\, dx =$$

$$= -x^{m-1}\sqrt{a^2 - x^2} + (m - 1)\int \sqrt{a^2 - x^2}\, x^{m-2}\, dx =$$

$$= -x^{m-1}\sqrt{a^2 - x^2} + (m - 1)\int \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, x^{m-2} dx =$$

$$= -x^{m-1}\sqrt{a^2 - x^2} + (m - 1)\left[a^2 \int \frac{x^{m-2}}{\sqrt{a^2 - x}} dx - \int \frac{x^m\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right].$$

Pārnesot beidzamo integralu no labās puses uz kreiso dabūjam

$$m\int\frac{x^m\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-x^{m-1}\sqrt{a^2-x^2}+a^2\,(m-1)\int\frac{x^{m-2}}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$$

un

$$\int\frac{x^m\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{x^{m-1}\sqrt{a^2-x^2}}{m}+\frac{a^2\,(m-1)}{m}\int\frac{x^{m-2}\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}. \qquad (\alpha)$$

Šī izteiksme ir redukcijas formula.

Līdzīgi dabūjam

$$\int\frac{x^m\,dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\frac{x^{m-1}\sqrt{x^2\pm a^2}}{m}\mp\frac{a^2\,(m-1)}{m}\int\frac{x^{m-2}\,dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}. \qquad (\beta)$$

Ar $m=2$ dabūjam

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{1}{2}a^2\arcsin\frac{x}{a}+C$$

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\frac{x\sqrt{x^2\pm a^2}}{2}\mp\frac{a^2}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2}\mp\frac{a^2}{2}\,l\left(x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right)+C.$$

Otrs veids:

Integralus

$$\int x^m\sqrt{a^2-x^2}\,dx \quad \text{un} \quad \int x^m\sqrt{x^2\pm a^2}\,dx$$

dabūjam šādi:

$$\int x^m\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int x^m\cdot\frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=a^2\int\frac{x^m\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}-\int\frac{x^{m+2}}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx.$$

Ievērojot formulu ($\alpha$) dabūjam:

$$\int\frac{x^{m+2}}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=-\frac{x^{m+1}\sqrt{a^2-x^2}}{m+2}+\frac{a^2\,(m+1)}{m+2}\int\frac{x^m\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Tā tad

$$\int x^m\sqrt{a^2-x^2}\,dx=a^2\int\frac{x^m\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{x^{m+1}\sqrt{a^2-x^2}}{m+2}-\frac{a^2(m+1)}{m+2}\int\frac{x^m\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=$$

$$=\frac{x^{m+1}\sqrt{a^2-x^2}}{m+2}+\frac{a^2}{m+2}\int\frac{x^m\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Ievietojot beidzamā integrala izteiksmi no formulas ($a$), dabūjam:

$$\int x^m \sqrt{a^2 - x^2}\, dx =$$

$$= \frac{x^{m+1}\sqrt{a^2-x^2}}{m+2} + \frac{a^2}{m+2}\left[-\frac{x^{m-1}\sqrt{a^2-x^2}}{m} + \frac{a^2(m-1)}{m}\int \frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{a^2-x^2}}\right].$$

Tā tad

$$\int x^m \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x^{m-1}(mx^2 - a^2)}{m(m+2)}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^4(m-1)}{m(m+1)}\int \frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (\gamma)$$

Līdzīgi dabūjam

$$\int x^m \sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx = \frac{x^{m-1}(mx^2 \pm a^2)}{m(m+2)}\sqrt{x^2 \pm a^2} - \frac{a^4(m-1)}{m(m+2)}\int \frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \quad (\delta)$$

Formulas ($\gamma$) un ($\delta$) ir redukcijas formulas.

Ar $m = 1$ dabūjam:

$$\int x\sqrt{a^2 - x^2}\, dx = -\frac{1}{3}(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2} + C$$

$$\int x\sqrt{x^2 \pm a^2} = \frac{1}{3}(x^2 \pm a^2)\sqrt{x^2 \pm a^2} + C.$$

Ar $m = 2$ dabūjam

$$\int x^2\sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{8}x\sqrt{a^2 - x^2}(2x^2 - a^2) + \frac{1}{8}a^4 \arcsin\frac{x}{a} + C.$$

$$\int x^2\sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx = \frac{1}{8}x\sqrt{x^2 \pm a^2}(2x^2 \pm a^2) - \frac{a^4}{8}\, l(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + C$$

T r e š a i s v e i d s:

Integralus

$$\int \frac{dx}{x^m\sqrt{a^2 - x^2}} \quad \text{un} \quad \int \frac{dx}{x^m\sqrt{x^2 \pm a^2}}$$

dabūjam šādi:

$$\int \frac{dx}{x^m\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{x^{-m}\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Labajā pusē pielietojot jormulu ($\alpha$), dabūjam:

$$\int \frac{dx}{x^m \sqrt{a^2 - x^2}} = - \frac{x^{-m-1}\sqrt{a^2 - x^2}}{-m} + \frac{a^2(-m-1)}{-m} \int \frac{x^{-m-2}\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$\int \frac{dx}{x^m \sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{m\, x^{m+1}} + \frac{(m+1)\, a^2}{m} \int \frac{dx}{x^{m+2}\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Šo izteiksmi rakstam

$$\frac{(m+1)\, a^2}{m} \int \frac{dx}{x^{m+2}\sqrt{a^2 - x^2}} = - \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{m\, x^{m+1}} + \int \frac{dx}{x^m \sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Tad

$$\int \frac{dx}{x^{m+2}\sqrt{a^2 - x^2}} = - \frac{\sqrt{a^2 - {}^2x}}{a^2(m+1)\, x^{m+1}} + \frac{m}{a^2(m+1)} \int \frac{dx}{x^m \sqrt{a^2 - x^2}}$$

Liekam

$$m + 2 = n,$$

tad

$$m + 1 = n - 1; \quad m = n - 2.$$

Ievedot šīs vērtības augšējā izteiksmē dabūjam

$$\int \frac{dx}{x^n \sqrt{a^2 - x^2}} = - \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2(n-1)\, x^{n-1}} + \frac{n-2}{a^2(n-1)} \int \frac{dx}{x^{n-2}\sqrt{a^2 - x^2}} \qquad (\varepsilon)$$

Līdzīgi dabūjam

$$\int \frac{dx}{x^n \sqrt{x^2 \pm a^2}} = \mp \frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{(n-1)\, a^2 x^{n-1}} \mp \frac{n-2}{(n-1)\, a^2} \int \frac{dx}{x^{n-2}\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx. \qquad (k)$$

Formulas ($\varepsilon$) un ($k$) ir redukcijas formulas.

Ar $n = 2$ dabūjam

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{a^2 - x^2}} = - \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2 x} + C.$$

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 \pm a^2}} = \mp \frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{a^2 x} + C.$$

Ar $n = 1$ formulas ($\varepsilon$) un ($k$) nav pielietojams. Attiecīgos integralus tad dabūjam šādi:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{dx}{x \quad x\sqrt{\frac{a^2}{x^2} - 1}} = \int \frac{\frac{dx}{x^2}}{\sqrt{\frac{a^2}{x^2} - 1}} = -\frac{1}{a}\int \frac{d\frac{a}{x}}{\sqrt{\left(\frac{a}{x}\right)^2 - 1}} =$$

$$= -\frac{1}{a}\, l\left(\frac{a}{x} + \sqrt{\left(\frac{a}{x}\right)^2 - 1}\right) = -\frac{1}{a}\, l\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right) + C.$$

Līdzīgi dabūjam

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + a^2}} = -\frac{1}{a}\, l\left(\frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{x}\right) + C.$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \int \frac{dx}{x \quad x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}} = \int \frac{\frac{dx}{x^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{x}\right)^2}} =$$

$$= -\frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{a}{x}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{x}\right)^2}} = -\frac{1}{a} \arcsin \frac{a}{x} + C.$$

Ceturtais veids:

Integralus

$$\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^m}\, dx \quad \text{un} \quad \int \frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{x^m}\, dx,$$

dabūjam šādi:

$$\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^m}\, dx = \int \frac{(a^2 - x^2)\, dx}{x^m\sqrt{a^2 - x^2}} = a^2 \int \frac{dx}{x^m\sqrt{a^2 - x^2}} - \int \frac{dx}{x^{m-2}\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Labās puses pirmo integralu dabūjam pielietojot formulu ($\varepsilon$)

$$a^2 \int \frac{dx}{x^m\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{m-2}{m-1}\int \frac{dx}{x^{m-2}\sqrt{a^2 - x^2}},$$

tad

$$\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^m}\, dx = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{m-2}{m-1}\int \frac{dx}{x^{m-2}\sqrt{a^2 - x^2}} -$$

$$-\int \frac{dx}{x^{m-2}\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{(m-1)\, x^{m-1}} - \frac{1}{m-1}\int \frac{dx}{x^{m-2}\sqrt{a^2 - x^2}}. \quad (\lambda)$$

Līdzīgi dabūjam

$$\int \frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{x^m} = -\frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{(m-1)\,x^{m-1}} + \frac{1}{m-1}\int \frac{dx}{x^{m-2}\sqrt{x^2 \pm a^2}}. \quad (\mu)$$

Formulas ($\lambda$) un ($\mu$) ir redukcijas formulas. Ar $m = 1$ šīs formulas nav pielietojamas. Šādā gadijumā attiecīgos integralus dabūjam

$$\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}\,dx = \int \frac{a^2 - x^2}{x\sqrt{a^2 - x^2}} = a^2 \int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 - x^2}} - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} =$$

$$= \quad a\, l\, \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} + \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

Līdzīgi dabūjam

$$\int \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x}\,dx = -\, a\, l\, \frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{x} + \sqrt{x^2 + a^2} + C.$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x}\,dx = a \arcsin \frac{a}{x} + \sqrt{x^2 - a^2} + C.$$

Piektais veids:

$$\int \frac{dx}{(x \quad b)^n \sqrt{a^2 - x^2}} \quad \text{un} \quad \int \frac{dx}{(x - b)^n \sqrt{x^2 \pm a^2}}.$$

Ievedam:

$$x \quad b = \frac{b^2 - a^2}{z - b}; \quad \left(\text{otrā integralā: } x - b = \frac{b^2 \pm a^2}{z - b}\right).$$

Tad izdarot attiecīgus rēķinus dabūjam:

$$\int \frac{dx}{(x - b)^n \sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{(b^2 - a^2)^{n-1}\sqrt{a^2 - b^2}} \int \frac{(z - b)^{n-1} dz}{\sqrt{z^2 - a^2}}$$

$$\int \frac{dx}{(x - b)^n \sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{-1}{(b^2 + a^2)^{n-1}\sqrt{b^2 + a^2}} \int \frac{(z - b)^{n-1} dz}{\sqrt{z^2 + a^2}}$$

$$\int \frac{dx}{(x - b)^n \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{-1}{(b^2 - a^2)^{n-1}\sqrt{a^2 - b^2}} \int \frac{(z - b)^{n-1} dz}{\sqrt{a^2 - z^2}}.$$

Šie integrali ir vienkāršāki nekā dotie.

Vispārīgais veids:

Integralā:

$$\int R(x, X)\,dx, \quad \text{kur} \quad X = \sqrt{a^2 - x^2} \quad \text{vai} \quad X = \sqrt{x^2 \pm a^2}$$

vispārīgā gadijumā funkcijai $R$ ir veids

$$R(x, X) = \frac{AX + B}{CX + D}.$$

Še $A$, $B$, $C$, $D$ ir racionalas veselas algebriskas funkcija no $x$. Reizinot skaitītāju un saucēju ar $CX - D$ dabūjam:

$$R(x, X) = \frac{ACX^2 - BD}{C^2X^2 - D^2} + \frac{BC - AD}{C^2X^2 - D^2} \cdot X.$$

Labās puses pirmā daļa ir racionala attiecībā uz $X$. Racionals ir arī otras daļas koeficients pie $X$, tādēļ varam rakstīt:

$$R(x, X) = E + FX = E + \frac{FX^2}{X} = E + \frac{H}{X}.$$

Še $E$ un $H$ arī ir racionalas funkcijas no $x$.

Integrējamā funkcija tā tad sadalīta racionalā funkcijā $E$ un raci onalas funkcijas $H$ dalijumā ar $X$.

Piemērs:

$$\int \frac{\sqrt{2 - x^2} + x}{\sqrt{2 - x^2} - 1} dx$$

Pielietojot augšējo, pārveidojam zemintegrala funkciju

$$\frac{\sqrt{2 - x^2} + x}{\sqrt{2 - x^2} - 1} \cdot \frac{\sqrt{2 - x^2} + 1}{\sqrt{2 - x^2} + 1} = \frac{2 - x^2 + (x + 1)\sqrt{2 - x^2} + x}{2 - x^2 - 1} =$$

$$= \frac{2 - x^2 + x}{1 - x^2} + \frac{x + 1}{1 - x^2}\sqrt{2 - x^2} = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 1} + \frac{(x + 1)(2 - x^2)}{(1 - x^2)\sqrt{2 - x^2}} =$$

$$= \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 1} + \frac{2 - x^2}{(1 - x)\sqrt{2 - x^2}} = \left(1 - \frac{1}{x - 1}\right) + \left(x + 1 + \frac{1}{1 - x}\right)\frac{1}{\sqrt{2 - x^2}}.$$

Tā tad

$$\int \frac{\sqrt{2 - x^2} + x}{\sqrt{2 - x^2} + 1} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x - 1}\right) dx + \int \left(x + 1 + \frac{1}{1 - x}\right) \frac{dx}{\sqrt{2 - x^2}} =$$

$$= x - l(x - 1) + \int \frac{x\, dx}{\sqrt{2 - x^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{2 - x^2}} - \int \frac{dx}{(x - 1)\sqrt{2 - x^2}} =$$

$$= x - l(x - 1) - \sqrt{2 - x^2} + \arcsin \frac{x}{\sqrt{2}} - \int \frac{dx}{(x - 1)\sqrt{2 - x^2}}$$

Beidzamo integralu dabūjam, kā norādīts piektā gadijumā. Še ar

$$a^2 = 2, \quad b = 1 \quad \text{un} \quad n = 1$$

dabūjam:

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{2-x^2}} = \int \frac{dz}{\sqrt{z^2-2}} = l(z + \sqrt{z^2-2}) =$$
$$= l\left(\frac{x-2}{x-1} + \sqrt{\frac{2-x^2}{(x-1)^2}}\right) = l\frac{x-2+\sqrt{2-x^2}}{x-1}.$$

Tā tad

$$\int \frac{\sqrt{2-x^2}+x}{\sqrt{2-x^2}-1}dx = x - l(x-1) - \sqrt{2-x^2} + \arcsin\frac{x}{\sqrt{2}} - l\frac{x-2+\sqrt{2-x^2}}{x-1} + C.$$

**59. Kvadratisku iracionalitati var racionalizēt ar** trigonometrisku ievietojumu:

a) Ja $X = \sqrt{a^2 - x^2}$.

Liekam:

$$x = a\cos z, \quad \text{tad} \quad dx = -a\sin z\, dz \quad \text{un} \quad X = a\sin z$$

vai

$$x = a\sin z, \quad \text{tad} \quad dx = a\cos z\, dz \quad \text{un} \quad X = a\cos z.$$

b) Ja $X = \sqrt{x^2 + a^2}$.

Liekam

$$x = a\,\mathrm{tg}\, z, \quad dx = \frac{a\,dz}{\cos^2 z} \quad \text{un} \quad X = \frac{a}{\cos z}$$

vai

$$x = a\,\mathrm{ctg}\, z, \quad dx = -\frac{a\,dz}{\sin^2 z} \quad \text{un} \quad X = \frac{a}{\sin z}.$$

c) Ja $X = \sqrt{x^2 - a^2}$

Liekam

$$x = \frac{a}{\cos a}, \quad dx = \frac{a\sin z\,dz}{\cos^2 z} \quad \text{un} \quad X = a\,\mathrm{tg}\, z$$

vai

$$x = \frac{a}{\sin z}, \quad dx = -\frac{a\cos z\,dz}{\sin^2 z} \quad \text{un} \quad X = a\,\mathrm{cotg}\, z.$$

Piemērs:

$$\int \frac{dx}{(x-b)\sqrt{x^2-a^2}}.$$

Liekam

$$x = \frac{a}{\cos z} \quad \text{un} \quad dx = \frac{a \sin z \, dz}{\cos^2 z},$$

tad

$$\int \frac{dx}{(x - b)\sqrt{x^2 - a^2}} = \int \frac{a \sin z \, dz}{\cos^2 z \left(\frac{a}{\cos z} - b\right)\sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 z} - a^2}} =$$

$$= \int \frac{a \sin z \, dz}{\cos^2 z \left(\frac{a}{\cos z} - b\right) a \frac{\sin z}{\cos z}} = \int \frac{dz}{a - b \cos z}.$$

Kā integrējams beidzamais integrals būs norādīts vēlāk.

P i e m ē r s :

$$\int \frac{dx}{(x^2 - 1)\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Liekam

$$x = 1 . \operatorname{tg} z, \quad dx = \frac{dz}{\cos^2 z} \quad \text{un} \quad \sqrt{x^2 + 1} = \frac{1}{\cos z},$$

tad

$$\int \frac{dx}{(x^2 - 1)\sqrt{x^2 + 1}} = \int \frac{dz \cos z}{\cos^2 z (\operatorname{tg}^2 z - 1)} = \int \frac{\cos z \, dz}{2 \sin^2 z - 1} = \int \frac{du}{2u^2 - 1}.$$

Šis integrals jau agrāk integrēts.

**60.** $$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\, dx.$$

Šo integralu varam integrēt ar diviem paņēmieniem.

P i r m a i s p a ņ ē m i e n s.

Kā agrāk norādīts, izdarot kvadratisku papildinājumu un pēc tam substituciju, sakni $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ pārvedam uz vienu no veidiem:

$$Z = \sqrt{a^2 - z^2} \quad \text{vai} \quad Z = \sqrt{z^2 \pm a^2},$$

tad

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\, dx = \int R(z, Z)\, dz.$$

Beidzamo integralu varam integrēt ar agrāk norādītiem paņēmieniem.

Piemērs:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+x+1}}.$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+x+1}} = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+1}} = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}.$$

Liekam

$$x+\frac{1}{2}=z \quad \text{un} \quad \frac{3}{4}=a^2,$$

tad

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+x+1}} = \int \frac{\left(z-\frac{1}{2}\right)dz}{\sqrt{z^2+a^2}} = \int \frac{z\,dz}{\sqrt{z^2+a^2}} - \frac{1}{2}\int \frac{dz}{\sqrt{z^2+a^2}} =$$

$$= \sqrt{z^2+a^2} - \frac{1}{2}\,l\left(z+\sqrt{z^2+a^2}\right) = \sqrt{x^2+x+1} -$$

$$-\frac{1}{2}\,l\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)+C.$$

Otrs paņēmiens: Eilera substitucija.

Ja dotā integralā

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx\right)dx$$

$a > 0$, tad pārveidojot sakni dabūjam:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\sqrt{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}} = \sqrt{a}\sqrt{x^2+px+q}.$$

Liekam:

$$\sqrt{x^2+px+q} = x-u, \quad (u \text{ funkcija no } x)$$

tad

$$x^2+px+q = x^2-2ux+u^2;$$

$$x = \frac{u^2-q}{2u+p}; \quad dx = 2\,.\,\frac{u^2+pu+q}{(2u+p)^2}du$$

un

$$\sqrt{x^2+px+q} = x-u = \frac{u^2-q}{2u+p} - u = -\frac{u^2+pu+q}{2u+p}$$

Ievedot šīs vērtības dotā integralā, tas pārveidojas integralā ar racionalu diferencialu.

Piemērs:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x+3}}$$

$$\sqrt{x^2+2x+3} = x - u$$

$$x^2 + 2x + 3 = x^2 - 2ux + u^2$$

$$x = \frac{u^2-3}{2+2u}; \qquad dx = 2\,.\,\frac{u^2+2u+3}{(2+2u)^2}\,du$$

$$\sqrt{x^2+2x+3} = x - u = \frac{u^2-3}{2+2u} - u = -\frac{u^2+2u+3}{2+2u}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x+3}} = -\int \frac{2\,du}{u^2-3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,l\,\frac{u+\sqrt{3}}{u-\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\,l\,\frac{x+\sqrt{3}-\sqrt{x^2+2x+3}}{x-\sqrt{3}-\sqrt{x^2+2x+3}} + C$$

Ja $a < 0$, tad liekam:

$$\sqrt{ax^2+bx+C} = \sqrt{-a}\sqrt{-x^2+px+q}\,.$$

Tā kā $a < 0$, tad $\sqrt{-a}$ ir reals skaitlis. Lai sakne būtu reala, trinoma $-x^2+px+q$ abām saknēm jābūt realām un $x$ jāatrodas starp šīm saknēm $\alpha$ un $\beta$.

Pieņemam $\alpha < \beta$, tad

$$\alpha \leqslant x \leqslant \beta,$$

un

$$\sqrt{-x^2+px+q} = \sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}.$$

Liekam

$$x - \alpha = (\beta - x)\,u^2.$$

Tad

$$x = \frac{\alpha+\beta u^2}{1+u^2}; \quad dx = 2(\beta-\alpha)\frac{u\,du}{(1+u^2)^2}$$

un

$$\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)} = \sqrt{(\beta-x)\,u^2\,(\beta-x)} = (\beta-x)\,u =$$

$$= (\beta-\alpha)\frac{u}{1+u^2}.$$

Ievedot šīs vērtības integralā

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx,$$

to pārveido integralā ar racionalu diferenciału.

61. $$\int R(x, \sqrt{ax+\beta}, \sqrt{\gamma x+\delta})\,dx.$$

Ievedam:

$$\sqrt{ax+\beta} = X, \quad \text{tad} \quad x = \frac{X^2-\beta}{a}.$$

Ar šo ievietošanu augšējais integrals dabū veidu:

$$\int R(X, \sqrt{AX^2+C})\,dX,$$

kur

$$A = \frac{\gamma}{a}; \quad C = \frac{a\delta-\beta\gamma}{a}.$$

Šāda veida integrals jau apskatīts

Piemērs:

$$\int \frac{1+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}\,dx.$$

Liekam

$$\sqrt{1+x} = X,$$

tad

$$x = X^2 - 1; \quad dx = 2X\,dX$$

$$\int \frac{1+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}dx = \int \frac{1+\sqrt{1-X^2+1}}{X}.2X\,dX = 2\int (1+\sqrt{2-X^2})dX =$$

$$= 2X + 2\left(\frac{X}{2}\sqrt{2-X^2} + \frac{2}{2}\arcsin\frac{X}{\sqrt{2}}\right) = 2X + X\sqrt{2-X^2} +$$

$$+ 2\arcsin\frac{X}{\sqrt{2}}.$$

**62. Diferencialbinoms.** Izteiksmi

$$x^m(a+bx^n)^p\,dx, \tag{1}$$

kurā $a$ un $b$ pēc patikas pastāvīgi lielumi un $m$, $n$, $p$ racionali skaitļi, sauc par diferencialbinomu.

Rādītāji $m$, $n$, $p$ var būt pozitivi vai negativi, veseli vai arī daļas skaitļi.

Ja $m$ un $n$ ir daļas skaitļi, tad, izteiksmi pārveidojot, var panākt ka $m$ un $n$ vietā dabūjam veselus skaitļus. Pieņemam, ka

$$m = \frac{h}{k}; \quad n = \frac{h_1}{k_1}$$

un ka daļu $\frac{h}{k}$ un $\frac{h_1}{k_1}$ kopējs saucējs ir $t$, tad liekot

$$x = z^t \text{ un } dx = t \,.\, z^{t-1}\, dz$$

dabūjam

$$x^m = z^{t \cdot \frac{h}{k}}; \quad x^n = z^{t \cdot \frac{h_1}{k_1}}.$$

Še $t \,.\, \frac{h}{k}$ un arī $t \,.\, \frac{h_1}{k_1}$ ir veseli skaitļi. Tad

$$x^m (a + bx^n)^p dx = z^{t \cdot \frac{h}{k}} \left(a + bz^{t \cdot \frac{h_1}{k_1}}\right)^p . \, tz^{t-1} dz =$$

$$= z^{t \cdot \frac{h}{k} + t - 1} \left(a + bz^{t \cdot \frac{h_1}{k_1}}\right)^p t\, dz.$$

Pārveidotā diferencialā $z$ kāpes, kā redzams ir veseli skaitļi. Pieņemam turpmāk, ka $m$ un $n$ ir veseli skaitļi, bet vispārīgā gadijumā $p$ ir daļas skaitlis.

Diferencialbinoma integralu

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx$$

var dabūt slēgtā veidā, šādos gadijumos, ja:

1) $p$ vesels skaitlis, pozitivs, negativs vai 0

2) $\frac{m+1}{n}$ „ „ „ 0

3) $\frac{m+1}{n} + p$ „ „ „ 0

P i r m a i s g a d i j u m s.

Ja $p$ vesels un pozitivs skaitlis tad, kā norādīts racionalu algebrisku funkciju integrēšanā, varam attīstīt $(a + bx^n)^p$ ar Ņutona binomu un tad integrēt ar sadalīšanas paņēmienu, vai varam arī pielietot redukcijas formulu.

Ja $p$ vesels, bet negativs skaitlis, tad

$$\int x^m (a + bx^n)^{-p} dx = \int \frac{x^m}{(a + bx^n)^p} dx.$$

Izteiksmi integrējam sadalot zemintegrala funkciju parcialdaļās,

Piemērs.

$$\int x^{-\frac{1}{4}}(1 - x^{\frac{1}{6}})^{-2}\,dx.$$

Daļu $\frac{1}{4}$ un $\frac{1}{6}$ kopīgs saucējs ir 12, tā tad

$$x = z^{12} \quad dx = 12z^{11}\,dz.$$

Ievedot šīs vērtības dabūjam:

$$\int x^{-\frac{1}{4}}(1 - x^{\frac{1}{6}})^{-2}\,dx = \int z^{-3}(1 - z^2)^{-2} \,.\, 12\,z^{11}\,dz =$$

$$= 12\int z^8(1 - z^2)^{-2}\,dz = 12\int \frac{z^8\,dz}{(1 - u^2)^2}.$$

Šo integralu integrējam, sadalot zemintegrala funkciju parcialdaļās.

Otrs gadijums.

Ja $\frac{m+1}{n}$ vesels skaitlis, $p = \frac{r}{s}$ daļas skaitlis, tad integrals dabū veidu

$$\int x^m(a + bx^n)^{\frac{r}{s}}\,dx.$$

Liekam

$$a + bx^n = z^s,$$

tad

$$x = \left(\frac{z^s - a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$dx = \frac{1}{n}\left(\frac{z^s - a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1} \cdot \frac{1}{b}s\,.\,z^{s-1}\,dz.$$

$$x^m = \left(\frac{z^s - a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}$$

Ievedot šīs izteiksmes zem integrala, dabūjam:

$$\int x^m(a + bx^n)^{\frac{r}{s}}\,dx = \int \left(\frac{z^s - a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} z^r\,\frac{s}{bn}\left(\frac{z^s - a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1} z^{s-1}\,dz =$$

$$= \frac{s}{bn}\int z^{r+s-1}\left(\frac{z^s - a}{b}\right)^{\frac{m}{n}+\frac{1}{n}-1} dz = \frac{s}{bn}\int z^{r+s-1}\left(\frac{z^s - a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}-1} dz.$$

$r+s-1$ ir vesels skaitlis un, ja $\frac{m+1}{n}$ ir vesels skaitlis vai 0, tad arī $\frac{m+1}{n}-1$ ir vesels skaitlis un zemintegrala funkcija ir racionala.

Piemērs:

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int x^3 (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} dx.$$

Še $m=3$; $n=2$; $p=\frac{r}{s}=-\frac{1}{2}$; $s=2$; $\frac{m+1}{n}=\frac{3+1}{2}=2.$

Tā kā $\frac{m+1}{n}$ ir vesels skaitlis, liekam:

$$1+x^2=z^2.$$

Tad

$$x=(z^2-1)^{\frac{1}{2}}.$$

$$dx=\frac{1}{2}(z^2-1)^{-\frac{1}{2}}.2z\,dz=z(z^2-1)^{-\frac{1}{2}}dz.$$

Ievedot šīs izteiksmes zem integrala, dabūjam:

$$\int x^3(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}dz=\int (z^2-1)^{\frac{3}{2}}.z^{-1}\quad z(z^2-1)^{-\frac{1}{2}}dz=$$

$$=\int (z^2-1)\,dz=\frac{z^3}{3}-z+C=\frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{3}-(1+x^2)^{\frac{1}{2}}+C.$$

Trešais gadijums.

Pieņemam ka $\frac{m+1}{n}+p$ vesels skaitlis, $p=\frac{r}{s}$ daļas skaitlis. Tā kā

$$x^m(a+bx^n)^p=x^m.x^{np}(ax^{-n}+b)^p=x^{m+np}(ax^{-n}+b)^p=x^{m'}(ax^{n'}+b)^p,$$

tad labās puses izteiksme arī ir diferencialbinoms ar kāpes rādītājiem $m'$, $n'$ un $p$.

Kā augšā redzējām, ja

$$\frac{m'+1}{n'}=\frac{(m+np)+1}{-n}$$

ir vesels skaitlis vai 0, tad doto diferencialbinomu var pārvest uz racionalu veidu. Tā kā

$$\frac{m + np + 1}{-n} = -\left[\frac{m+1}{n} + p\right],$$

tad redzams, ka ja

$$\frac{m+1}{n} + p$$

ir vesels skaitlis vai 0, diferencialbinomu

$$x^m (a + bx^n)^p$$

var pārveidot racionalā veidā, liekot:

$$(ax^{-n} + b) = z^s; \quad \left(p = \frac{r}{s}\right)$$

tad

$$a + bx^n = x^n (ax^{-n} + b) = x^n z^s$$

Tā tad šai gadijumā jālieto substitucija:

$$a + bx^n = x^n z^s.$$

Piemērs.

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1 + x^8}} = \int x^3 (1 + x^8)^{-\frac{1}{2}} dx.$$

Še $m = 3$; $n = 8$; $p = \frac{r}{s} = -\frac{1}{2}$; $s = 2$.

$$\frac{m+1}{n} + p = \frac{3+1}{8} - \frac{1}{2} = 0.$$

Tā tad, šo diferencialu var racionalizēt, liekot

$$1 + x^8 = x^8 . z^2.$$

tad

$$x^8 = \frac{1}{z^2 - 1}$$

$$x = \frac{1}{(z^2 - 1)^{\frac{1}{8}}} = (z^2 - 1)^{-\frac{1}{8}}$$

$$dx = \frac{1}{8}(z^2 - 1)^{-\frac{9}{8}}.2z\,dz = -\frac{1}{4}(z^2 - 1)^{-\frac{9}{8}} z\,dz$$

$$x^3 = (z^2 - 1)^{-\frac{3}{8}}$$

$$\sqrt{1 + x^8} = x^4 z = (z^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} z$$

un

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1 + x^8}} = -\frac{1}{4}\int \frac{(z^2 - 1)^{-\frac{3}{8}}.(z^2 - 1)^{-\frac{9}{8}}}{(z^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}.z} z\,dz = -\frac{1}{4}\int \frac{dz}{z^2 - 1} =$$

$$= \frac{1}{8} l \frac{z + 1}{z - 1} + C.$$

## C. Transcendentu funkciju integrēšana.

**63 Pārvešana uz algebriskiem integraliem.** Transcendentu diferencialu veidi, kurus var nointegrēt slēgtā veidā ar elementaru funkciju palīdzību, ir ļoti aprobežoti. Ja slēgtā veidā nevar nointegrēt, tad dažkārt integrēšanu var novest līdz tādiem integraliem, kas jāuzskata par jaunām transcendentām funkcijām.

Šādus integralus tad integrē ar rindu palīdzību, vai arī pielietojot agrāk norādītos integrēšanas tuvinus paņēmienus.

Ja ar substitucijas palīdzību integrējamo transcendento diferencialu var pārveidot algebriska diferenciala veidā, tad uzdevums pārvests uz jau apskatītu.

Šādā gadijumā ir arī redzams, vai elementara integrēšana izdarama vai ne.

Integralu $\int \varphi(x)\psi(x)\,dx$ ar transcendentu diferencialu var pārveidot integralā ar algebrisku diferencialu, ja $\varphi(x)$ ir algebriska funkcija, kuras integrals $\Phi(x)$ arī ir algebriska funkcija un $\psi(x)$ ir transcendenta funkcija, kuras diferencials ir algebriska funkcija. Šādā gadijumā parciali integrējot dabūjam:

$$\int \varphi(x)\psi(x)dx = \int \psi(x).\varphi(x)dx = \Phi(x)\psi(x) - \int \Phi(x).\psi'(x)dx. \qquad (1)$$

Labajā pusē zemintegrala funkcija $\Phi(x)\psi'(x)$ ir algebriska.

Šādu gadijumu, piemēram, dabūjam, ja $\varphi(x)$ ir vesela racionala algebriska funkcija un $\psi(x)$ ir viena no sekojošām funkcijām:

$$l\,\omega(x);\quad \arcsin \omega(x);\quad \operatorname{arc\,tg} \omega(x),$$

kur $\omega(x)$ ir algebriska funkcija.

Tad $\psi'(x)$ ir:

$$\frac{\omega'(x)}{\omega(x)}; \quad \frac{\omega'(x)}{\sqrt{1-[\omega(x)]^2}}; \quad \frac{\omega'(x)}{1+[\omega(x)]^2}.$$

Šis funkcijas ir algebriskas.

Piemērs:

$$\int x^n \arcsin x\, dx = \int \arcsin x \; x^n\, dx =$$
$$= \frac{x^{n+1}}{n+1} \arcsin x - \frac{1}{n+1}\int \frac{x^{n+1}\, dx}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (n \text{ vesels skaitlis})$$

Labās puses integralu integrējam, kā norādīts algebrisku funkciju integrēšanā.

Piemērs:

$$\int l(x+\sqrt{1+x^2})\, x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} l(x+\sqrt{1+x^2}) -$$
$$-\frac{1}{n+1}\int \frac{x^{n+1}\, dx}{\sqrt{1+x^2}} \quad (n \text{ vesels skaitlis}).$$

Labās puses integralu integrējam, kā norādīts algebrisku funkciju integrēšanā.

Piemērs.

$$\int \operatorname{arc\,tg} x \; x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{n+1}\int \frac{x^{n+1}\, dx}{1+x^2}$$
$$(n \text{ vesels skaitlis})$$

Labās puses integralu integrējam, kā norādīts algebrisku funkciju integrēšanā.

**64. Vispārīgas redukcijas formulas.** Ar parcialu integrēšanu var dabūt redukcijas formulas, ja integralā

$$\int \psi(x)^n \quad \varphi(x)\, dx; \qquad (n > 0 \text{ un vesels skaitlis})$$

$\varphi(x)$ algebriska funkcija, kuras integrals $\Phi(x)$ ir algebriska funkcija un $\psi(x)$ transcendenta funkcija, kuras diferencials ir algebriska funkcija.

Integrējot parciali dabūjam:

$$\int \psi(x)^n \quad \varphi(x)\,dx = \Phi(x)\psi(x)^n - n\int \Phi(x)\,\psi'(x)\,\psi(x)^{n-1}\,dx.$$

Tāds paņēmiens arī tālāk pielietojams, ja algebriskās izteiksmes $\Phi(x)\psi'(x)$ integrals arī ir algebriska funkcija.

Piemērs.

$$\int (l\,x)^n\; x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}(l\,x)^n - \frac{1}{m+1}\int x^{m+1}\quad n\,(l\,x)^{n-1}\frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{x^{m+1}}{m+1}(l\,x)^n - \frac{n}{m+1}\int x^m\,(l\,x)^{n-1}\,dx. \qquad (m \neq -1)$$

Šī formula ir redukcijas formula.

Parciala integrēšana dod redukcijas formulu arī šādā gadijumā:

$$\int \frac{\varphi(x)}{\psi(x)^n}\,dx, \qquad (n > 0 \text{ un vesels skaitlis})$$

ja $\varphi(x)$ un $\psi(x)$ izpilda agrākos noteikumus. Pārveidojot dabūjam

$$\int \frac{\varphi(x)}{\psi(x)^n}\,dx = \int \frac{\varphi(x)}{\psi'(x)}\cdot\frac{\psi'(x)}{\psi(x)^n}\,dx = \int \frac{\varphi(x)}{\psi'(x)}\cdot\frac{d\psi(x)}{\psi(x)^n} =$$

$$= -\frac{\varphi(x)}{(n-1)\,\psi'(x)\,\psi(x)^{n-1}} + \frac{1}{n-1} = \int D_x\frac{\varphi(x)}{\psi'(x)}\cdot\frac{dx}{\psi(x)^{n-1}}.$$

Paņēmiens arī tālāk pielietojams, liekot:

$$u = \frac{D_x\dfrac{\varphi(x)}{\psi'(x)}}{\psi'(x)} \quad \text{un} \quad dv = \frac{\psi'(x)\,dx}{\psi(x)^{n-1}}.$$

Piemērs:

$$\int\frac{x^m\,dx}{(l\,x)^n} = \int\frac{x^m}{(l\,x)'}\quad\frac{(lx)'\ \ dx}{(l\,x)^n} = \int\frac{x^m}{\dfrac{1}{x}}\quad\frac{d\,(lx)}{(lx)^n} =$$

$$= \int x^{m+1}\quad\frac{d\,(lx)}{(lx)^n} = -\frac{x^{m+1}}{(n-1)\,(lx)^{n-1}} + \frac{m+1}{n-1}\int\frac{x^m\,dx}{(lx)^{n-1}}.\ (m\neq -1)$$

Atkārtoti pielietojot augšējo formulu nonākam uz integralu

$$\int\frac{x^m\,dx}{lx}.$$

Liekam

$$lx = z, \quad \text{tad} \quad x = e^z \quad \text{un} \quad dx = e^z\, dz.$$

Ievietojot šīs izteiksmes zem integrala, dabūjam

$$\int \frac{x^m\, dx}{lx} = \int \frac{e^{mz} \,.\, e^z\, dz}{z} = \int \frac{e^{mz+z}\, dz}{z} = \int \frac{e^{z(m+1)}\, dz}{z}.$$

Liekot

$$z\,(m + 1) = u$$

dabūjam:

$$z = \frac{u}{m+1}; \quad dz = \frac{du}{m+1},$$

tad

$$\int \frac{x^m\, dx}{lx} = \int \frac{e^u}{\frac{u}{m+1}} \, \frac{du}{m+1} = \int \frac{e^u\, du}{u}.$$

Šo integralu dabūjam integrējot ar rindas palīdzību, tas ir jauna transcendenta funkcija-integrallogaritms.

Jaunas transcendentas funkcijas dod arī integrali

$$\int \frac{\cos z\, dz}{z} \quad \text{integralcosinus}$$

$$\int \frac{\sin z\, dz}{z} \quad \text{integralsinus},$$

kas integrējami ar rindas palīdzību.

**65. Algebriska funkcija no eksponentfunkcijas.** Ja $f$ apzīmē argumenta $e^{ax}$ algebrisku funkciju, tad integralu:

$$\int f(e^{ax})\, dx$$

ievedot substituciju

$$e^{ax} = t$$

un ar no tās izrietošu $dx = \frac{dt}{at}$, pārveidojam

$$\int f(e^{ax})\, dx = \frac{1}{a} \int f(t) \frac{dt}{t}$$

integralā no algebriskas funkcijas.

Integrals dabūjams slēgtā veidā, ja $f(t)$ ir racionala algebriska funkcija.

Piemērs:

$$\int \frac{a^x\,dx}{ma^x + n}.$$

Liekam

$$a^x = t, \quad \text{tad} \quad a^x\, la\, dx = dt$$

$$dx = \frac{dt}{a^x\, la} = \frac{dt}{t\,.\,la}.$$

Tad

$$\int \frac{a^x\,dx}{ma^x + n} = \int \frac{t\,.\,dt}{la\;\; t(mt + n)} = \frac{1}{la}\int \frac{dt}{mt + n} =$$

$$= \frac{1}{m\,.\,la}\,.\,l(mt + n) + C = \frac{l(ma^x + n)}{m\,.\,la} + C.$$

## 66. Reizinājums $e^{kx}$ ar racionalu algebrisku funkciju no $x$.

$$\int f(x)\, e^{kx}\, dx.$$

Vispārigi $f(x)$ var sadalīt veselā funkcijā $G(x)$ un īstā daļā $\frac{F(x)}{\varphi(x)}$, tad

$$\int f(x)\, e^{kx}\, dx = \int G(x)\, e^{kx}\, dx + \int \frac{F(x)}{\varphi(x)}\, e^{kx}\, dx.$$

Parciali integrējot dabūjam:

$$\int G(x) e^{kx}\, dx = \frac{1}{k}\, e^{kx}\, G(x) - \frac{1}{k}\int G'(x) e^{kx}\, dx.$$

Integrēšanu atkārtojot, beidzot nonākam pie:

$$\int e^{kx} dx = \frac{1}{k}\, e^{kx} + C.$$

Īsto daļu

$$\frac{F(x)}{\varphi(x)}$$

sadalam parcialdaļās. Parcialdaļa

$$\frac{A}{x - a}$$

dod:

$$A\int \frac{1}{x-a}\, e^{kx} dx.$$

Liekam:

$$x - a = z,$$

tad

$$x = z + a; \quad dx = dz$$

un

$$\int \frac{e^{kx}}{x-a} dx = \int \frac{e^{k(z+a)}\, dz}{z} = e^{ka}\int \frac{e^{kz}}{z} dz.$$

Beidzamo integralu integrējam ar rindas palīdzību.

Parcialdaļa

$$\frac{B}{(x-\beta)^m}$$

dod:

$$B\int \frac{1}{(x-\beta)^m}\, e^{kx}\, dx;$$

Šo integralu integrējam parciali:

$$\int e^{kx}\, \frac{dx}{(x-\beta)^m} = e^{kx}\, \frac{(x-\beta)^{-m+1}}{-m+1} - \frac{1}{-m+1}\int \frac{1}{(x-\beta)^{m-1}}\, k e^{kx} dx =$$

$$= \frac{e^{kx}}{(m-1)(x-\beta)^{m-1}} + \frac{k}{(m-1)}\int \frac{e^{kx}}{(x-\beta)^{m-1}}\, dx.$$

Turpinot integrēšanu, nonākam pie jau apskatītā integrala

$$\int \frac{e^{kx}}{x-\beta}\, dx$$

Piemērs:

$$\int \frac{e^{kx}\, dx}{(x+1)^2} = e^{kx}\ -\frac{1}{x+1} - \int -\frac{1}{x+1}\ k\, e^{kx}\, dx =$$

$$= -\frac{e^{kx}}{x+1} + k\int \frac{e^{kx}}{x+1}\, dx$$

### 67. Reizinājums $lx$ ar racionalu algebrisku funkciju $f(x)$.

1) $$\int f\,(lx)\, dx$$

Še $f$ apzīmē argumenta $lx$ racionalu algebrisku funkciju.

Liekot

$$lx = t;\ x = e^t;\ \ dx = e^t\ dt.$$

dabūjam:

$$\int f\ (lx)\ dx = \int f\ (t)\ e^t\ dt.$$

Beidzamais integrals jau apskatīts.

2)
$$\int f\ (x)\ lx\ dx.$$

Racionalo algebrisko funkciju $f\ (x)$ sadalam: veselā funkcijā $G\ (x)$ un īstā daļas funkcijā $\frac{F\ (x)}{\varphi\ (x)}$.

Tad

$$\int f(x)\, lx\, dx = \int G(x)\, lx\, dx + \int \frac{F(x)}{\varphi\ (x)}\, lx\, dx.$$

Labās puses pirmo integralu parciali integrējot dabūjam:

$$\int G\,(x)\, lx\, dx = G_1\,(x)\, lx - \int \frac{G_1\,(x)}{x} dx.$$

$$\left(G_1\,(x) = \int G\,(x)\, dx\right)$$

Zemintegrala funkcija labajā pusē ir algebriska.

Īsto daļu $\frac{F(x)}{\varphi\,(x)}$ sadalam parcialdaļās un, piemēram, dabūjam:

$$\frac{A}{x - a};\ \frac{B}{(x - \beta)^m}.$$

Tad jāintegrē:

$$A \int \frac{lx}{x - a} dx \ \text{ un } \ B \int \frac{lx}{(x - \beta)^m}.\ dx.$$

Pirmo integralu dabūjam liekot

$$x - a = az;\ x = a\ (1 + z);\ dx = a\ dz.$$

Tad

$$\int \frac{lx}{x - a}\ dx = \int \frac{l\ [a\,(1 + z)]}{az}\ a\ dz = \int la\ \frac{dz}{z} + \int \frac{l\,(1 + z)}{z}\ dz =$$

$$= la\ .\ lz + \int \frac{l\,(1 + z)}{z}\ dz.$$

Šo integralu integrējam ar rindas palīdzību, Otru integralu integrējam parciali.

$$\int \frac{lx}{(x-\beta)^m}\,dx = \int lx \frac{dx}{(x-\beta)^m} =$$

$$= -\frac{lx}{(m-1)(x-\beta)^{m-1}} + \frac{1}{m-1}\int \frac{dx}{x(x-\beta)^{m-1}}.$$

Labajā pusē zem integrala funkcija ir racionala algebriska funkcija.

Piemērs.

$$\int (ax^2 + 2bx + c)\, lx\, dx = \left(\frac{ax^3}{3} + bx^2 + cx\right) lx -$$

$$-\left(\frac{ax^3}{9} + \frac{bx^2}{2} + cx\right) + C.$$

Piemērs:

$$\int \frac{x^2+1}{x^4}\, lx\, dx = \int \frac{lx}{x^2} dx + \int \frac{lx}{x^4}\, dx.$$

Šos integralus nointegrējot dabūjam:

$$\int \frac{x^2+1}{x^4}\, lx = -\frac{9x^2+1}{9x^3} - \frac{3x^2+1}{3x^3}\, lx + C.$$

## 68 Racionalas funkcijas no trigonometriskām funkcijām.

a) Substitucijas.

Integralu no racionalas funkcijas, kuras arguments ir viena vai vairākas sekojošas funkcijas:

$$\sin x,\quad \cos x,\quad \operatorname{tg} x,\quad \operatorname{cotg} x$$

arvienu var pārvest uz racionalu algebrisku funkciju, izdarot substituciju.

Substitucijas ir šādas:

1) Visos gadijumos derīga substitucija ir:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t.$$

no kuras dabūjam:

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \cos^2 \frac{x}{2}\left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}\right) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2},$$

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \cos^2 \frac{x}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{2t}{1 + t^2},$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{2t}{1 - t^2}; \quad \operatorname{cotg} x = \frac{1 - t^2}{2t},$$

$$x = 2 \operatorname{arc\,tg} t; \quad dx = \frac{2dt}{1 + t^2}.$$

Ar šo substituciju dabūjam:

$$\int R(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{cotg} x)\, dx =$$
$$= 2 \int R\left(\frac{2t}{1 + t^2}, \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \frac{2t}{1 - t^2}, \frac{1 - t^2}{2t}\right) \frac{dt}{1 + t^2}.$$

Beidzamā integrala zemintegrala funkcija ir racionala algebriska funkcija.

P i e m ē r s:

$$\int \frac{dx}{a \cos x + b \sin x} = \int \frac{2\, dt}{1 + t^2} \cdot \frac{1}{a \cdot \frac{1 - t^2}{1 + t^2} + b \frac{2t}{1 + t^2}} =$$
$$= \int \frac{2dt}{a(1 - t^2) + 2bt}.$$

2) Ja trigonometriskiem diferencialiem ir veidi

$$\int R(\sin^2 x, \cos x) \sin x\, dx \quad \text{un} \quad \int R(\sin x, \cos^2 x) \cos x\, dx,$$

tad pirmā gadijumā, liekot

$$\cos x = t \quad \text{un} \quad -\sin x\, dx = dt$$

dabūjam

$$\int R(\sin^2 x, \cos x) \sin x\, dx = - \int R[(1 - t^2), t]\, dt$$

Otrā gadijumā liekot

$$\sin x = t \quad \text{un} \quad \cos x\, dx = dt,$$

dabūjam

$$\int R(\sin x, \cos^2 x) \cos x \, dx = \int R[t, (1 - t^2)] \, dt.$$

Piemērs:

$$\int \frac{\sin x \, dx}{a \cos^2 x + b \sin^2 x}$$

liekam $\cos x = t$,

$$\int \frac{\sin x \, dx}{a \cos^2 x + b \sin^2 x} = -\int \frac{dt}{at^2 + b(1 - t^2)}.$$

3) Gadījumā

$$\int R(\operatorname{tg} x) \, dx$$

liekam

$$\operatorname{tg} x = t \quad \text{un} \quad dx = \frac{dt}{1 + t^2},$$

tad

$$\int R(\operatorname{tg} x) \, dx = \int R(t) \frac{dt}{1 + t^2}.$$

## 69 Redukcijas formulas.

1) $$\int \cos^m x \, dx \quad \text{un} \quad \int \sin^m x \, dx. \qquad (m \text{ vesels} > 0)$$

Vispārīgā gadījumā izdaram parcialu integrēšanu.

$$\int \cos^m x \, dx = \int \cos^{m-1} x \, . \cos x \, dx = \int \cos^{m-1} x \, d \sin x =$$

$$= \cos^{m-1} x \sin x - \int \sin x \, (m - 1) \cos^{m-2} x (- \sin x \, dx) =$$

$$= \cos^{m-1} x \sin x + (m - 1) \int \sin^2 x \cos^{m-2} x \, dx =$$

$$= \cos^{m-1} x \sin x + (m - 1) \int (1 - \cos^2 x) \cos^{m-2} x \, dx =$$

$$= \cos^{m-1} x \, . \sin x + (m - 1) \int \cos^{m-2} x \, dx - (m - 1) \int \cos^m x \, dx.$$

Pārnesot beidzamo integralu no labās puses uz kreiso dabūjam:

$$m \int \cos^m x \, dx = \cos^{m-1} x \sin x + (m - 1) \int \cos^{m-2} x \, dx$$

un

$$\int \cos^m x\, dx = \frac{\cos^{m-1} x \sin x}{m} + \frac{(m-1)}{m}\int \cos^{m-2} x\, dx \qquad (\alpha)$$

Šī izteiksme ir redukcijas formula.

Līdzīgi dabū:

$$\int \sin^m x\, dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cdot \cos x}{m} + \frac{m-1}{m}\int \sin^{m-2} x\, dx.$$

Ja $m$ ir nepāra skaitlis

$$m = 2p + 1,$$

tad

$$\int \cos^{2p+1} x\, dx = \int \cos^{2p} x \cos x\, dx = \int (1 - \sin^2 x)^p \cdot d \sin x$$

liekot

$$\sin x = z$$

dabūjam

$$\int \cos^{2p+1} x\, dx = \int (1 - z^2)^p\, dz.$$

Līdzīgi dabūjam:

$$\int \sin^{2p+1} x\, dx = \int \sin^{2p} x \sin dx = -\int (1 - \cos^2 x)^p\, d \cos x =$$

$$= -\int (1 - z^2)^p\, dz,$$

kur

$$\cos x = z.$$

$\int \cos^m x\, dx$ varam dabūt arī šādi:

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x,$$

$$\cos^3 x = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right)\cos x = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\cos 2x \cos x =$$

$$= \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{1}{4}\cos x = \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x.$$

u. t. t. Šādā gadijumā jāintegrē tikai pirmās kāpes cos funkcijas.

2) $$\int \sin^m x \cos^n x\, dx.$$

Vispārīgā gadijumā integrējam parciali.

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = \int \sin^m x \cos^{n-1} x \cos x\, dx =$$

$$= \int \sin^m x \cos^{n-1} x\, d\sin x = \int \cos^{n-1} x \,.\, \sin^m x\, d\sin x =$$

$$= \cos^{n-1} x\, \frac{\sin^{m+1} x}{m+1} - \frac{1}{m+1}\int \sin^{m+1} x \,.\, (n-1)\cos^{n-2} x\, (\ \sin x\, dx) =$$

$$= \cos^{n-1} x \,.\, \frac{\sin^{m+1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int \sin^{m+2} x \cos^{n-2} x\, dx =$$

$$= \cos^{n-1} x\, \frac{\sin^{m+1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int (1-\cos^2 x) \cos^{n-2} x \sin^m x\, dx =$$

$$= \cos^{n-1} x\, \frac{\sin^{m+1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int \sin^m x \cos^{n-2} x\, dx -$$

$$- \frac{n-1}{m+1}\int \sin^m x \cos^n x\, dx.$$

Pārnesot integralu no labās puses kreisā, dabūjam:

$$1 + \frac{n-1}{m+1}\int \sin^m x \cos^n x\, dx = \cos^{n-1} x \,.\, \frac{\sin^{m+1} x}{m+1} +$$

$$+ \frac{n-1}{m+1}\int \sin^m x \cos^{n-2} x\, dx$$

un

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = \frac{\cos^{n-1} x \sin^{m+1} x}{m+n} +$$

$$+ \frac{n-1}{m+n}\int \sin^m x \cos^{n-2} x\, dx. \quad (m+n \neq 0) \qquad (\alpha)$$

Līdzīgi dabūjam:

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = \frac{-\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} +$$

$$+ \frac{m-1}{m+n}\int \sin^{m-2} x \cos^n x\, dx. \qquad (\beta)$$

($\alpha$) un ($\beta$) ir redukcijas formulas.

Ja $m$ vai $n$ nepāra skaitļi, tad

$$\int \cos^m x \sin^n x\, dx$$

var pārveidot un dabūt integralu no algebriskas funkcijas.

Pieņemsim, ka $m = 2p + 1$, tad

$$\int \sin^{2p+1} x \cos^n dx = \int \sin^{2p} x \cos^n x \sin x\, dx =$$

$$= -\int (1 - \cos^2 x)^p \cos^n x\, d\cos x,$$

liekot

$$\cos x = z$$

dabūjam:

$$\int \sin^{2p+1} x \cos^n x\, dx = -\int (1 - z^2)^p z^n\, dz.$$

Ja $m = n$, tad dabūjam:

$$\int \sin^m x \cos^m x\, dx = \int (\sin x \cos x)^m dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)^m dx = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)^m d\,2x = \frac{1}{2^{m+1}} \int \sin^m 2x\, d\,2x.$$

3) $$\int \frac{dx}{\sin^m x} \text{ un } \int \frac{dx}{\cos^m x},$$

$$\int \frac{dx}{\cos^m x} = \int \cos^{-m} x\, dx = \int \cos^{-m-1} x \cos x\, dx = \int \cos^{-m-1} x\, d\sin x.$$

Integrējot parciali dabūjam formulu, kurā zem integrala labajā pusē atrodas $\frac{1}{\cos^{m+2}}$. Apgriežot šo formulu un tad liekot $m + 2 = n$ dabūjam:

$$\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}. \tag{$\gamma$}$$

Līdzīgi dabūjam:

$$\int \frac{dx}{\sin^n x} = -\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x}. \tag{$\delta$}$$

($\gamma$) un ($\delta$) ir redukcijas formulas.

4) $$\int \frac{\sin^m x}{\cos^n x}\, dx \text{ un } \int \frac{\cos^n x}{\sin^m x}\, dx.$$

Liekam formulā ($\alpha$), $n = -r$, tad

$$\int \sin^m x \cos^{-r} x\, dx =$$
$$= \int \frac{\sin^m x}{\cos^r x}\, dx = \frac{\sin^{m+1} x}{(m-r)\cos^{r+1} x} \quad \frac{r+1}{m-r} \int \frac{\sin^m x}{\cos^{r+2} x}\, dx$$

Formulu apgriežot dabūjam:

$$\int \frac{\sin^m x}{\cos^{r+2} x} = \frac{\sin^{m+1} x}{(r+1)\cos^{r+1} x} - \frac{m-r}{r+1} \int \frac{\sin^m x}{\cos^r x}\, dx.$$

Liekam:

$$r + 2 = n; \quad r + 1 = n - 1; \quad r = n - 2,$$

tad

$$\int \frac{\sin^m x}{\cos^n x}\, dx = \frac{\sin^{m+1} x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{n-m-2}{n-1} \int \frac{\sin^m x}{\cos^{n-2} x}\, dx. \qquad (\varepsilon)$$

Līdzīgi dabūjam:

$$\int \frac{\cos^n x}{\sin^m x}\, dx = -\frac{\cos^{n+1} x}{(m-1)\sin^{m-1} x} + \frac{m-n-2}{m-1} \int \frac{\cos^n x}{\sin^{m-2} x}\, dx. \qquad (k)$$

Formulas ($\varepsilon$) un ($k$) ir redukcijas formulas.

Ja $m = 2p + 1$, tad

$$\int \frac{\sin^{2p+1} x}{\cos^n x}\, dx = \int \sin^{2p} x \frac{\sin x\, dx}{\cos^n x} = -\int (1 - \cos^2)^p \frac{d \cos x}{\cos^n x}$$

Liekam $\cos x = z$, tad:

$$\int \frac{\sin^{2p+1} x}{\cos^n x}\, dx = -\int \frac{(1 - z^2)^p}{z^n}\, dz.$$

5) $$\int \sin ax \cos bx\, dx, \quad \int \sin ax \sin bx\, dx$$

un

$$\int \cos ax \cos bx\, dx.$$

Tā kā

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}[\sin(a+b)x + \sin(a-b)x],$$

tad

$$\int \sin ax \cos bx\, dx = \frac{1}{2}\int[\sin(a+b)x + \sin(a-b)x]\, dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(a+b)x}{a+b} + \frac{\cos(a-b)x}{a-b}\right].$$

Tā kā:

$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}[\cos(a-b)x - \cos(a+b)x],$$

tad

$$\int \sin ax \sin bx\, dx = \frac{1}{2}\int[\cos(a-b)x - \cos(a+b)x]\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(a-b)x}{a-b} - \frac{\sin(a+b)x}{a+b}\right].$$

Tā kā

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}[\cos(a+b)x + \cos(a-b)x],$$

tad

$$\int \cos ax \cos bx\, dx = \frac{1}{2}\int[\cos(a+b)x + \cos(a-b)x]\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(a+b)x}{a+b} + \frac{\sin(a-b)x}{a-b}\right].$$

**70. Racionalas algebriskas funkcijas $f(x)$ reizinājums ar $\sin x$ vai $\cos x$.**

Racionalu algebrisku funkciju $f(x)$, varam sadalīt: veselā $G(x)$ un īstā daļā $\frac{F(x)}{\varphi(x)}$. Tad dabūjam integralus:

$$\int G(x)\sin x\, dx; \quad \int \frac{F(x)}{\varphi(x)}\sin x\, dx.$$

Pirmo integralu integrējam parciali.

$$\int G(x).\sin x\, dx = G(x)(-\cos x) + \int G'(x)\cos x\, dx.$$

$$\int G'(x)\cos x\, dx = G'(x)\sin x - \int G''(x)\sin x\, dx.$$

Ievērojot augšējo:

$$\int G(x)\sin x\,dx = -G(x)\cos x + G'(x)\sin x - \int G''(x)\sin x\,dx. \quad (a).$$

Formula $(a)$ ir redukcijas formula. $G''(x)$ ir par divām kāpēm zemāka funkcija nekā $G(x)$.

Piemērs:

$$\int x^2 \sin x\,dx = x^2(-\cos x) - \int -\cos x \,.\, 2x\,dx =$$
$$= -x^2\cos x + 2\int x\cos x\,dx = -x^2\cos x +$$
$$+ 2\left(\sin x \,.\, x - \int \sin x\,dx\right) = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x.$$

Īsto daļu $\frac{F(x)}{\varphi(x)}$ sadala parcialdaļās un, ja, piemēram, dabū:

$$A\int \frac{\sin x}{x-a}\,dx.$$

Liekam

$$x - a = t,$$

tad

$$\int \frac{\sin x}{x-a}\,dx = \int \frac{\sin(t+a)}{t}\,dt = \cos a\int \frac{\sin t}{t}\,dt + \sin a\int \frac{\cos t}{t}\,dt.$$

Labās pusēs integrali integrējami ar rindām.

Saucēja vairākkārtēja sakne dod integrala veidu:

$$B\int \frac{\sin x}{(x-\beta)^n}\,dx$$

Šo integralu integrējot parciali divi reizes, dabūjam:

$$\int \sin x\,\frac{dx}{(x-\beta)^n} = -\frac{\sin x}{(n-1)(x-\beta)^{n-1}} \quad \frac{\cos x}{(n-1)(n-2)(x-\beta)^{n-2}} -$$
$$-\frac{1}{(n-1)(n-2)}\int \frac{\sin x\,dx}{(x-\beta)^{n-2}}.$$

Šī izteiksme ir redukcijas formula.

Līdzīgi dabūjam attiecīgus integralus, ja $\sin x$ vietā atrodas $x \cos$.

**71. Reizinājumi:** $e^{ax}\sin bx$; $e^{ax}\cos bx$. Integrējam parciali:

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = e^{ax}\cdot\frac{1}{b}\sin bx - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\,dx.$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = e^{ax}\left(-\frac{1}{b}\cos bx\right) + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx\,dx.$$

Atslēdzot šos nolīdzinājumus, attiecībā uz nezinamiem integraliem, dabūjam:

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = e^{ax}\cdot\frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2};$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = e^{ax}\cdot\frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}.$$

## Četrpadsmitā nodaļa.

## Pielietojumi mechanikā. Masu, momentu un smaguma centra koordinatu aprēķināšana.

**72. Vispārēja apskate.** Apzīmējam ar $K$ nepārtrauktu ģeometrisku attēlojumu, kādu ķermeni, virsmu vai līniju, $dK$ tad ir tā attēla elements. Apzīmējam ar $\varphi$ nepārtrauktu to argumentu funkciju, kas noteic $dK$ vietu iecirknī $K$.

Veidojam integralu

$$\int_K \varphi\,dK$$

un ņemam to visā iecirknī $K$. Šī integrala nozīme ir atkarīga no tā, ko nozīmē $\varphi$ un $K$.

a) Ja $K$ nozīmē ķermeni ar tilpumu $v$, tad $dK$ ir tilpuma diferencials $dv$ un ja $\varphi$ ir ķermeņa masas blīvums tai vietā, kur atrodas $dv$, tad integrals

$$\int_v \varphi\,dv = m$$

dod ķermeņa masu.

Ja $K$ ir virsma, $S$ laukums uz šīs virsmas un $\varphi$ virsmu, vietā $dS$ apklājošās masas blīvums, tad integrala

$$\int_S \varphi\,dS = m$$

dod virsmu apklājošo masu.

Ja $K$ ir līnija, kuras garums ir $s$ un $\varphi$ masas blīvums vietā $ds$, tad integrals:

$$\int_s \varphi \, ds = m$$

dod līnijas masu.

b) Ja $K$ nozīme ir agrākā, bet

$$\varphi = \rho\delta,$$

kur $\rho$ ir blīvums vietā $dK$ un $\delta$ elementa $dK$ attālums no kādas plāknes, taisnes vai punkta, tad sekojošie trīs integrali:

$$\int_v \rho\delta \, dv = M_E$$

$$\int_S \rho\delta \, dS = M_E$$

$$\int_s \rho\delta \, ds = M_E$$

izteic attiecīgās masas statisko momentu attiecībā uz $E$ (plākni, taisni vai punktu). Pirmais integrals izteic kādas tilpumā $v$ atrodošās masas, otrs kādas uz virsmas $S$ atrodošās masas un trešais kādas uz līnijas $s$ atrodošās masas statisko momentu attiecībā uz $E$.

Ja $\rho$ ir pastāvīgs, tad masas sadalīšana uz attiecīgā attēla ir vienmērīga. Materialais ķermenis $v$, virsma $S$ vai līnija $s$ tad ir homogeni. Tādā gadijumā integrali:

$$\int_v \delta \, dv; \quad \int_S \delta \, dS; \quad \int_s \delta \, ds.$$

izteic attiecīgo ģeometrisko attēlu, tilpuma $v$, virsmas laukuma $S$, vai līnijas $s$ gabala statisko momentu attiecībā uz $E$ ($E$ var būt: plākne, taisne, punkts).

c) Ja

$$\varphi = \rho\delta^2,$$

tad integralus:

$$\int_v \rho\delta^2 \, dv; \quad \int_S \rho\delta^2 \, dS; \quad \int_s \rho\delta^2 \, ds$$

sauc par materialā ķermeņa, materialās virsmas, materialās līnijas gabala inerces momentiem, attiecībā uz $E$ ($E$ var būt: plākne, taisne, punkts)

Tā pat, ja $\rho$ ir pastāvīgs, tad integralus:

$$\int_v \delta^2 \, dv; \quad \int_S \delta^2 \, dS; \quad \int_s \delta^2 \, ds$$

sauc par: ģeometriskā ķermeņa $v$, ģeometriskā laukuma $S$, ģeometriskās taisnes gabala $s$ inerces momentiem, attiecībā uz $E$.

### 73. Smaguma centrs.

$$\int_v \delta \, dv = M_E. \tag{1}$$

Šis integrals izteic ģeometriskā ķermeņa $v$ statisko momentu, attiecībā uz plākni $E$, kuras nolīdzinājumu dodam ar

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0 \tag{2}$$

Pieņemam, ka punkts $x|y|z$ atrodas tilpuma elementa $dv$ iekšienē. Šī punkta attālums $\delta$ no plāknes $E$ ir:

$$\delta = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p \tag{3}$$

Ievietojot $\delta$ izteiksmi augšējā integralā (1), dabūjam:

$$M_E = \int_v \delta \, dv = \int_v (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p) \, dv. \tag{4}$$

Pārveidojot dabūjam:

$$M_E = \cos \alpha \int_v x \, dv + \cos \beta \int_v y \, dv + \cos \gamma \int_v z \, dv - p\, v, \tag{5}$$

un

$$M_E = v \left[ \frac{\int_v x \, dv}{v} . \cos \alpha + \frac{\int_v y \, dv}{v} \cos \beta + \frac{\int_v z \, dv}{v} \cos \gamma - p \right]. \tag{6}$$

Plākne $E$ ir noteikta ar $p$ un $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$. Redzams, ka reizinātāji pie $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ nav atkarīgi no plāknes stāvokļa.

Apzīmējam šos reizinātājus:

$$\frac{\int_v x\,dv}{v} = X; \quad \frac{\int_v y\,dv}{v} = Y; \quad \frac{\int_v z\,dv}{v} = Z. \tag{7}$$

Kā redzams, lielumiem $X$, $Y$, $Z$ ir līnijas dimensija.

Ievietojot $X$, $Y$, $Z$, izteiksmē (6) dabūjam:

$$M_E = v\,[X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma - p]. \tag{8}$$

Ievērojot nolīdzinājumu (3), redzams, ka izteiksmes (8) iekavas izteic kāda punkta $X\,|\,Y\,|\,Z$, kas atrodas dotā tilpumā attālumu $\Delta$ no plāknes $E$.

Tā tad:

$$M_E = v \,.\, \Delta. \tag{9}$$

$X$, $Y$, $Z$, kā redzējām, nav atkarīgi no plāknes $E$ stāvokļa, bet tie atkarīgi tikai no tilpuma $v$ un tā stāvokļa koordinatu sistemā. Formula (9) rāda, ka reizinot šī punkta attālumu $\Delta$ no kādas plāknes $E$ ar tilpumu $v$, dabūjam šī tilpuma $v$ statisko momentu attiecībā uz $E$. Šo punktu sauc par dotā tilpuma s m a g u m a  c e n t r u; tā vieta tilpumā $v$ ir pilnīgi noteikta ar tilpuma veidu un nav atkarīga no koordinatu sistemas, kā tas redzams no sekojošā. No (7), kas noteic smaguma centra koordinatas $X$, $Y$, $Z$

$$X = \frac{\int_v x\,dv}{v}; \quad Y = \frac{\int_v y\,dv}{v}; \quad Z = \frac{\int_v z\,dv}{v}$$

dabūjam:

$$X v = \int_v x\,dv; \quad Y = \int_v y\,dv; \quad Z v = \int_v z\,dv.$$

Uzskatam $X$, $Y$, $Z$ un tāpat $x$, $y$, $z$ kā vektorus, tad

$$\overline{X}\,v = \int_v \overline{x}\,dv,$$

$$\overline{Y}\,v = \int_v \overline{y}\,dv,$$

$$\overline{Z}\,v = \int_v \overline{z}\,dv,$$

un

$$(\overline{X}+\overline{Y}+\overline{Z})\,v=\int_v \overline{x}\,dv+\int_v \overline{y}\,dv+\int_v \overline{z}\,dv=\int_v(\overline{x}+\overline{y}+\overline{z})\,dv.$$

Tā kā

$$\overline{X}+\overline{Y}+\overline{Z}=\overline{R},$$

$\overline{R}$ ir smaguma centra $S_0$ attālums no koordinata sākuma $O$ un

$$\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}=\overline{r},$$

ir punkta $x\,|\,y\,|\,z$ attālums no koordinata sākuma $O$, tad no augšējā secinam:

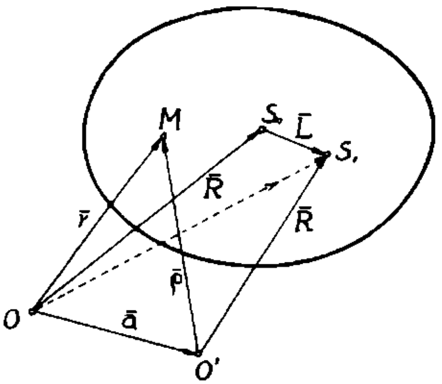
$$\overline{R}\,v=\int_v \overline{r}\,dv.$$

Še $\overline{R}$ noteic smaguma centru $S_0$.

Jaunā koordinatā sistemā ar sākuma punktu $O'$, pastāv tāda pat formula:

$$\overline{R}_1 v=\int_v \overline{\rho}\,.\,dv.$$

$\overline{R}_1$ noteic punktu $S_1$.



Zīm. 91.

No zīmējuma 91. redzam:

$$\overline{R}+\overline{L}=\overline{a}+\overline{R_1}.$$
$$\overline{L}=\overline{a}+\overline{R_1}-\overline{R}.$$

Tā tad

$$\overline{L}=\overline{a}+\frac{\int_v \overline{\rho}\,dv}{v}-\frac{\int_v \overline{r}\,dv}{v}.$$

Tā kā:

$$\overline{\rho}=\overline{r}-\overline{a},$$

tad

$$\overline{L}=\overline{a}+\frac{\int_v(\overline{r}-\overline{a})\,dv}{v}-\frac{\int_v \overline{r}\,dv}{v}.$$

Pārveidojot dabūjam:

$$\overline{L} = \overline{a} + \frac{\int\limits_v \overline{r}\,dv}{v} - \frac{\int \overline{a}\,dv}{v} - \frac{\int\limits_v \overline{r}\,dv}{v}$$

un

$$\overline{L} = \overline{a} - \frac{\overline{a}\int\limits_v dv}{v} = \overline{a} - \overline{a} = 0.$$

Tā kā $\overline{L} = 0$, tad punkts $S_1$ sakrīt ar $S_0$. Tas nozīmē, ka arī kaut kādā citā koordinatu sistemā ar sākuma punktu $O'$ dabūjam to pašu punktu $S_0$, ko nosaucām par smaguma centru. Šī punkta vieta tilpumā $v$, tā tad, nav atkarīga no koordinatu sistemas.

Ja $v$ vietā liekam virsmu $S$, tad dabūjam virsmas $S$ smaguma centra koordinatas:

$$X = \frac{\int\limits_S x\,dS}{S}; \quad Y = \frac{\int\limits_S y\,dS}{S}; \quad Z = \frac{\int\limits_S z\,dS}{S}.$$

Liekot $v$ vietā līniju $s$, dabūjam līnijas $s$ smaguma centra koordinatas:

$$X = \frac{\int\limits_s x\,ds}{s}; \quad Y = \frac{\int\limits_s y\,ds}{s}; \quad Z = \frac{\int\limits_s z\,ds}{s}.$$

Ja laukums $S$ vai līnija $s$ atrodas kādā plāknē, tad līdzīgi dabūjam laukuma vai līnijas smaguma centra koordinatas attiecībā uz plāknē atrodošos taisni.

Piemērs:

Lodes radiuss $R$, lodes centrs atrodas koordinatu sākumā. Dabūt lodes tilpuma smaguma centra koordinatas.

Polarkoordinatās dabūjam no [43]

$$dv = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi.$$

Tā kā $x = r \sin\theta \cos\varphi$, tad

$$X = \frac{\int\limits_v x\,dv}{v} = \frac{\int\limits_v (r\sin\theta\cos\varphi)\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi}{v},$$

$$=\frac{\int_0^a dx \cdot \frac{2px}{2}}{\int_0^a \sqrt{2p}\, x^{\frac{1}{2}}\, dx}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2p}{\sqrt{2p}}\cdot\frac{\int_0^a x\, dx}{\int_0^a x^{\frac{1}{2}}\, dx}=\frac{1}{2}\sqrt{2p}\,\frac{\frac{1}{2}\left|x^2\right|_0^a}{\frac{2}{3}\left|x^{\frac{3}{2}}\right|_0^a}=$$

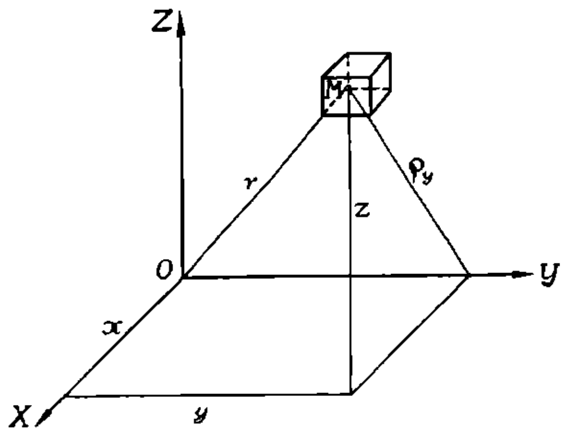
$$=\frac{3}{8}\cdot\sqrt{2p}\,\frac{a^2}{a^{\frac{3}{2}}}=\frac{3}{8}\sqrt{2p}\,.\,a^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{8}\,b.$$

**74. Inerces momenti.** Ja punktā $M$ (zīm. 93) atrodas tilpuma $v$ elements

$$dv = dx\ dy\ dz$$

ar blīvumu $\gamma$, tad masas elements ir:

$$dm=\gamma\ dx\, dy\, dz=\gamma\ dv.$$



Zīm. 93.

Integralu

$$\int_v z^2\, dm$$

sauc par tilpuma $v$ planaro inerces momentu, attiecībā uz $xy$ plākni. Integrali

$$\int_v y^2\, dm \quad \text{un} \quad \int_v x^2\, dx$$

tad ir planarie inerces momenti, attiecībā uz $xz$ un $yz$ plāknēm.

Apzīmējot:

$xy$ plākni par $\zeta$ plākni
$yz$ „ „ $\xi$ „
$zx$ „ „ $\eta$ „

ievedam apzīmējumus:

$$J_\xi = \int_v x^2\, dm; \quad J_\eta = \int_v y^2\, dm; \quad J_\zeta = \int_v z^2\, dm. \qquad (1)$$

Ja ar $\rho_y$ apzīmējam punkta $M$ attālumu no $y$ ass, tad integralu

$$\int_v \rho_y^2\, dm = J_y$$

sauc par **tilpuma** $v$ **masas aksialo inerces momentu**, attiecībā uz $y$ asi. Tā kā

$$\rho_y^2 = x^2 + z^2,$$

tad

$$J_y = \int_v \rho_y^2\, dm = \int_v (x^2 + z^2)\, dm.$$

Līdzīgi dabūjam $J_x$ un $J_z$. Tā tad:

$$\left.\begin{aligned} J_x &= \int_v (y^2 + z^2)\, dm. \\ J_y &= \int_v (z^2 + x^2)\, dm. \\ J_z &= \int_v (x^2 + y^2)\, dm \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Integralu

$$\int_v r^2\, dm = J_0$$

sauc par **tilpuma** $v$ **masas polaro inerces momentu**, attiecībā uz koordinatu sākumu $O$. Tā kā

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

tad

$$J_0 = \int_v (x^2 + y^2 + z^2)\, dm. \tag{3}$$

Ja tilpuma $v$ masa homogena, $\gamma$ = konst., tad formulās var $dm$ vietā ievest tilpuma elementu $dv$.

No (1) un (2) redzams, ka:

$$\left.\begin{aligned} J_x &= J_\eta + J_\zeta. \\ J_y &= J_\zeta + J_\xi. \\ J_z &= J_\xi + J_\eta \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

No (1) un (3) redzams, ka:

$$J_0 = J_\xi + J_\eta + J_\zeta. \tag{5}$$

No (4) un (5) redzams, ka:

$$J_x = J_0 - J_\xi; \ J_y = J_0 - J_\eta; \ J_z = J_0 - J_\zeta. \tag{6}$$

No (4) dabūjam:

$$J_x + J_y + J_z = 2\,(J_\xi + J_\eta + J_\zeta).$$

Ievērojot (5) redzams, ka:

$$J_0 = J_\xi + J_\eta + J_\zeta = \frac{1}{2}\,(J_x + J_y + J_z). \tag{7}$$

Ja pārnesam koordinatu sākumu uz punktu $O'$ ar koordinatām $a|b|c$ un jauno koordinatu sistemu novietojam paraleli vecajai, tad punkta $M$ koordinatas $x'$, $y'$, $z'$ jaunajā sistemā ir:

$$x' = x - a; \ y' = y - b; \ z' = z - c.$$

Aksialais inerces moments attiecībā uz $z'$ asi tad ir:

$$J_{z'} = \int_v (x'^2 + y'^2)\,dm = \int_v [(x - a)^2 + (y - b)^2]\,dm =$$

$$= \int_v (x^2 + y^2)\,dm - 2a\int_v x\,dm - 2b\int_v y\,dm + (a^2 + b^2)\,m.$$

Ja $z$ ass iet caur smaguma centru, tad $X = 0$, $Y = 0$ tādēļ saskaņā ar [73], 7

$$\int_v x\,dm = 0; \quad \int_v y\,dm = 0.$$

Tā kā

$$a^2 + b^2 = d^2,$$

kur $d$ ir paralelo asu $z$ un $z'$ attālums, tad dabūjam:

$$J_{z'} = \int_v (x^2 + y^2)\,dm + d^2 . m = J_z + d^2\,m. \tag{8}$$

Formula (8) rāda, kā dabū inerces momentu kādai asij, kas paralela asij caur smaguma centru, ja dots inerces moments, attiecībā uz asi caur smaguma centru. No (8) arī redzams, ka paralelām asīm vismazākais inerces moments ir tai, kas iet caur smaguma centru.

Ja dots polarais inerces moments $J_0$, attiecībā uz smaguma centru, tad kādam citam punktam $O'$ polaro inerces momentu dabūjam šādi. Pārnesot koordinatu sistemu, kā agrāk, uz $O'$ ar koordinatām $a \mid b \mid c$ dabūjam:

$$J_0' = \int_v (x'^2 + y'^2 + z'^2)\, dm = \int_v [(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2\, dm =$$

$$= \int_v (x^2 + y^2 + z^2)\, dm - 2a\int_v x\, dm - 2b\int_v y\, dm - 2c\int_v z\, dm +$$

$$+ (a^2 + b^2 + c^2)\, m.$$

Punkts $O$ atrodas smaguma centrā, tādēļ:

$$\int_v x\, dm = 0; \quad \int_v y\, dm = 0; \quad \int_v z\, dm = 0.$$

Tā kā

$$(a^2 + b^2 + c^2) = d^2 \qquad \text{(attālums } \overline{OO'}\text{)},$$

tad:

$$J_0' = \int (x^2 + y^2 + z^2)\, dm + (a^2 + b^2 + c^2)\, m.$$

un

$$J_0' = J_0 + d^2\; m. \tag{9}$$

**75. Centrifugalmomenti jeb deviacijas momenti. Inerces elipsoids. Inerces elipse.** Par centrifugal- jeb deviacijas momentiem, attiecībā uz koordinatu plāknēm, sauc izteiksmes:

$$D_{\eta\zeta} = \int_v yz\, dm$$

$$D_{\zeta\xi} = \int_v zx\, dm$$

$$D_{\xi\eta} = \int_v xy\, dm$$

$dm$ ir masas elements un $x$, $y$, $z$ šī masas elementa attālumi no $\xi$, $\eta$, $\zeta$ plāknēm.

Deviacijas momentu izteiksmēs atrodas $x$, $y$, $z$. kas var būt pozitivi vai negativi. Šie momenti tādēļ var dabūt arī vērtību 0.

Apskatīsim jautājumu, cik var būt tādu pāru statenisku plākņu, kas iet caur kādu asi un kuru deviacijas moments ir 0. Šādu plākņu pāri sauc par piekārtotām plāknēm.

Pieņemam kā asi, $z$ asi, caur to tad iet $\xi$ un $\eta$ plāknes. Veidojam jaunas $\xi'$ un $\eta'$ $\perp$ plāknes, griežot $\xi$ un $\eta$ plāknes par leņķi $\alpha$ pozitivā virzienā. Masas elementa $dm$ koordinatas jaunajā sistemā tad ir:

$$x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha$$

$$y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha.$$

Tad jaunajā koordinatu sistemā, dabūjam:

$$D_{\xi'\eta'} = \int_v x' y' \, dm = \int_v (x \cos \alpha + y \sin \alpha)(-x \sin \alpha + y \cos \alpha) \, dm.$$

Šo izteiksmi pārveidojot, dabūjam:

$$D_{\xi'\eta'} = \cos \alpha \sin \alpha \left[ \int_v y^2 \, dm - \int_v x^2 \, dm \right] + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \int_v xy \, dm.$$

$$D_{\xi'\eta'} = \cos \alpha \sin \alpha (J_\eta - J_\xi) + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) D_{\xi\eta}.$$

No šis izteiksmes redzam, ka $D_{\xi'\eta'} = 0$, ja:

$$\cos \alpha \sin \alpha (J_\eta - J_\xi) + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) D_{\xi\eta} = 0$$

vai

$$\frac{\sin 2\alpha}{2} (J_\eta - J_\xi) + \cos 2\alpha \, D_{\xi\eta} = 0.$$

No augšējās izteiksmes dabūjam:

$$\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{2 D_{\xi\eta}}{J_\xi - J_\eta} \tag{1}$$

Šī izteiksme noteic tikai vienu statenisku plākņu pāri, kā deviacijas moments ir 0.

Ja $D_{\xi\eta} = 0$, tad $\xi$ un $\eta$ plāknes ir pašas sev piekārtotas.
Ja $D_{\eta\xi} = 0$ un $J_\xi = J_\eta$, tad plākņu pāris ir nenoteikts.

Ja kādā koordinatu sistemā doti aksialie inerces momenti un deviacijas momenti, tad varam atrast inerces momentu attiecībā uz katru plākni un katru taisni, kas iet caur koordinata sākumu.

Pieņemam, ka plākne $\varepsilon$ iet caur koordinatu sākumu, tad šīs plāknes nolīdzinājums ir

$$Ax + By + Cz = 0.$$

Punkta $M = x \mid y \mid z$ attālums $\delta$ no šīs plāknes ir:

$$\delta = \frac{Ax + By + Cz}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Tad:

$$J_\varepsilon = \int_v \delta^2\, dm = \int_v \frac{(Ax + By + Cz)^2}{A^2 + B^2 + C^2}\, dm.$$

Pārveidojot šo izteiksmi, dabūjam:

$$J_\varepsilon\ (A^2+B^2+C^2) = \int_v (A^2x^2+B^2y^2+C^2z^2+2ABxy+2ACxz+2BCyz)dm =$$

$$= A^2 J_\xi + B^2 J_\eta + C^2 J_\zeta + 2AB\,.\,D_{\xi\eta} + 2AC\,.\,D_{\xi\zeta} + 2BC\,.\,D_{\eta\zeta}. \qquad (2)$$

Kā redzams, ar formulu (2) $J_\varepsilon$, attiecībā uz plākni $\varepsilon$, ir noteikts, ja doti:

$$J_\xi;\ J_\eta;\ J_\zeta \text{ un } D_{\xi\eta};\ D_{\eta\zeta};\ D_{\zeta\xi}.$$

Ja $g$ ir taisne caur $O$, kas $\perp$ pret plākni $\varepsilon$, tad, ievērojot analoģiju, no formulas [74] (6) dabūjam:

$$J_g = J_0 - J_\varepsilon.$$

Tad ievērojot [74] (5) dabūjam:

$$J_g = (J_\xi + J_\eta + J_\zeta) - \frac{[A^2 J_\xi + B^2 J_\eta + C^2 J_\zeta + 2AB\,.\,D_{\xi\eta} + 2AC\, D_{\xi\zeta} + 2BC\,.\,D_{\eta\zeta}]}{A^2 + B^2 + C^2}$$

un

$$J_g(A^2 + B^2 + C^2) = (J_\xi + J_\eta + J_\zeta)(A^2 + B^2 + C^2) -$$

$$-[A^2 J_\xi + B^2 J_\eta + C^2 J_\zeta + 2AB\,.\,D_{\xi\eta} + 2AC\, D_{\xi\zeta} + 2BC\,.\,D_{\eta\zeta}] =$$

$$= (J_\eta + J_\zeta)A^2 + (J_\xi + J_\zeta)B^2 + (J_\xi + J_\eta)C^2 -$$

$$- 2AB\,.\,D_{\xi\eta} - 2AC\,.\,D_{\xi\zeta} - 2BC\, D_{\eta\zeta}. \qquad (3)$$

Ievērojot [74] (4), no augšējā dabūjam:

$$(A^2 + B^2 + C^2)J_g = J_x A^2 + J_y B^2 + J_z C^2 -$$
$$- 2AB\ D_{\xi\eta} - 2AC\ D_{\xi\zeta} - 2BC\ D_{\eta\zeta}. \tag{4}$$

Kā redzams, $J_g$ ir noteikts ar (4), ja doti aksialie inerces momenti un deviacijas momenti.

Katram inerces momentam ir piekārtots i n e r c e s r a d i u s s $k$. Inerces radiusu definē:

$$mk_\xi^2 = J_\xi; \quad mk_x^2 = J_x = J_\eta + J_\xi; \quad mk_0^2 = J_0 = J_\xi + J_\eta + J_\zeta.$$

Tā tad

$$k_\xi = \sqrt{\frac{J_\xi}{m}}; \qquad k_x = \sqrt{\frac{J_x}{m}} \qquad k_0 = \sqrt{\frac{J_0}{m}} \tag{5}$$

Ar $m$ še apzīmēta ķermeņa visa masa.

Ja uz ass $g$, kas iet caur koordinatu sākumu, nogriežam uz abām pusēm gabalus, kas pretēji proporcionali šīs ass aksialam inerces radiusam, t. i. gabalu $\frac{p^2}{k_g}$, tad šo gabalu gala punktu koordinatas ir:

$$x = \mp\frac{p^2 A}{k_g\sqrt{A^2+B^2+C^2}}; \; y = \mp\frac{p^2 B}{k_g\sqrt{A^2+B^2+C^2}}; \; z = \mp\frac{p^2 C}{k_g\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \tag{6}$$

Nolīdzinājumā (4) liekot $J_g$ vietā $mk_g^2$ reizinot nolīdzinājumu (4) ar $p^4$ un dalot ar $A^2 + B^2 + C^2$, dabūjam:

$$p^4 m k_g^2 = J_x \cdot \frac{A^2 p^4}{A^2+B^2+C^2} + J_y \frac{B^2 p^4}{A^2+B^2+C^2} + J_z \cdot \frac{C^2 p^4}{A^2+B^2+C^2} -$$
$$- \frac{2ABp^4}{A^2+B^2+C^2} \cdot D_{\xi\eta} - \frac{2ACp^4}{A^2+B^2+C^2} \cdot D_{\xi\zeta} - \frac{2BCp^4}{A^2+B^2+C^2}\ D_{\eta\zeta}.$$

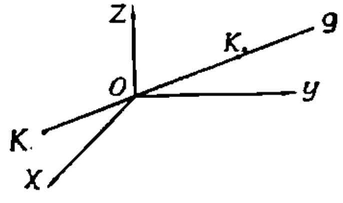
Dalot šo nolīdzinājumu ar $k_g^2$, un ievērojot (6), dabūjam

$$mp^4 = J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 - 2xyD_{\xi\eta} - 2xzD_{\xi\zeta} - 2yzD_{\eta\zeta}. \tag{7}$$

Augšējam par paskaidrojumu (zīm. 94): $g$ ir $\perp$ pret plākni $\varepsilon$, kuras nolīdzinājums ir

$$A_x + B_y + C_z + 0$$

Šīs taisnes $g$ virziena koeficienti ir



Zim. 94.

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}};$$

$$\cos\beta = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}};$$

$$\cos\gamma = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Saskaņā ar konstrukciju:

$$OK_1 = OK_2 = \frac{p^2}{k_g}.$$

Ievērojot šīs izteiksmes, redzams, ka izteiksmes (6) dod punktu $K_1$ un $K_2$ koordinatas; tās izpilda nolīdzinājumu (7). Ja velkam caur $O$ citu taisni $g'$, tad uz šīs taisnes tāpat veidotie punkti $K_1'$ un $K_2'$ arī izpilda nolīdzinājumu (7). Nolīdzinājums (7) dod uz visām caur $O$ vilktām taisnēm $g$ atrodošos punktu $K$ ģeometrisko vietu. Šis nolīdzinājums ir otrās kāpes, attiecībā uz $x$, $y$, $z$, tā tad tas izteic otras kārtas virsmu. Tā kā visi $OK$ ir reali un galīgi lielumi, tad ar (7) izteiktā virsma ir elipsoids. Šo elipsoidu sauc par punktam $O$ piekārtotu inerces elipsoidu.

Šim elipsoidam ir trīs savstarpēji asis $a$, $b$, $c$. Pieņemam, ka lieluma ziņā

$$a > b > c.$$

Tā kā, saskaņā ar konstrukciju

$$\frac{a}{2} = \frac{p^2}{k_a}; \quad \frac{b}{2} = \frac{p^2}{k_b}; \quad \frac{c}{2} = \frac{p^2}{k_c},$$

tad asij $a$ atbilst vismazākais un asij $c$ vislielākais inerces moments. Asij $b$ atbilstošais inerces moments atrodas starp abiem minētajiem. Šīs trīs asis sauc par punktam $O$ piekārtotām inerces galvenām asīm.

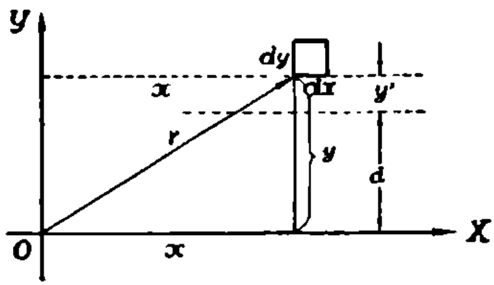
Ja šīs asis pieņem kā koordinatu asis, tad inerces elipsoida nolīdzinājumā, attiecībā uz šo koordinatu sistemu, var atrasties locekļi tikai ar $x^2$, $y^2$, $z^2$ un tas dabū veidu:

$$mp^4 = J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2. \qquad (7^a)$$

Še $J_x$, $J_y$, $J_z$ ir veidoti, attiecībā uz inerces galvenajām asīm, punktā $O$. Nolīdzinājumā $(7^a)$ nav locekļu ar deviacijas momentiem, kas atrodas nolīdzinājumā (7), jo nolīdzinājuma $(7^a)$ koordinatu sistemā šie deviacijas momenti ir 0. Tā kā deviacijas momenti ir 0, tad inerces elipsoida galvenās plāknes ir pāros piekārtotas.

Pieņemot koordinatu sākumu $O$ smaguma centrā, teiktais arī tad pastāv. Tādā gadijumā inerces elipsoidu sauc par centralelipsoidu un tā asis par centralasīm.

Ar centralelipsoida palīdzību varam dabūt atbildi uz visiem jautājumiem, attiecībā uz inerces momentiem.




Zīm. 95.

Ja masu sistema atrodas plāknē, tad formulas vienkāršojas, kā tas redzams no sekojošā.

Elementarlaukuma un masas elementa izteiksmes plāknē ir:

$$dS = dx\, dy$$
$$dm = dS\,\gamma$$

Saskaņā ar zīmējumu 95, redzams, ka

$$J_x = \int_S y^2\, dm; \quad J_y = \int_S x^2\, dm$$

$$J_0 = \int_S r^2\, dm = \int_S (x^2 + y^2)\, dm = J_y + J_x$$

$$J_{x'} = \int_S y'^2\, dm = \int_S (y - d)^2\, dm = \int_S y^2\, dm - 2d \int_S y\, dm + d^2 \int_S dm =$$

$$= J_x - 2d \int_S y\, dm + md^2.$$

Ja 0 atrodas ķermeņa smaguma centrā, tad

$$\int_S y\, dm = 0$$

un

$$J_{x'} = J_x + md^2.$$

$J_{x'}$ dod inerces momentu, attiecībā uz $x'$ asi, kas paralela $x$ asij caur smaguma centru.

Ja pārceļam koordinatu sākumu uz punktu

$$O' = a \mid b$$

ar jaunām koordinatu asīm $\parallel$ vecām, tad:

$$x' = x - a; \quad y' = (y - b).$$

$$J_{0'} = \int_S (x'^2 + y'^2)\, dm = \int_S [(x - a)^2 + (y - b)^2]\, dm =$$

$$= \int_S (x^2 + y^2)\, dm - 2a \int_S x\, dm - 2b \int_S y\, dm + (a^2 + b^2) \int_S dm =$$

$$= J_0 - 2a \int_S x\, dm - 2b \int_S y\, dm + (a^2 + b^2)\, m.$$

Ja 0 atrodas smaguma centrā, tad

$$\int_S y\, dm = 0; \quad \int_S x\, dm = 0 \quad \text{un} \quad a^2 + b^2 = r^2.$$

Ievērojot augšējo, dabūjam polaro inerces momentu jaunajā koordinatu sistemā:

$$J_{0'} = J_0 + mr^2.$$

Centrifugalmomenta izteiksme plāknē ir

$$D_{xy} = \int_S xy\, dm.$$

Ja koordinatu sistemā zinami $J_x$, $J_y$, $D_{xy}$, tad dabūjam leņķi $\alpha$, par kuru jāgriež koordinatu sistema, lai dabūtu to sistemu, kurā centrifugalmoments ir 0 no formulas:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2D_{xy}}{J_y - J_x}$$

Pierādijums.

$$x' = x\cos a + y\sin a$$
$$y' = -x\sin a + y\cos a$$

$$D_{x'y'} = \int_S x'y'\,dm = \int_S (x\cos a + y\sin a)(-x\sin a + y\cos a)dm =$$

$$= \sin a\cos a\left[\int_S -x^2\,dm + \int_S y^2\,dm\right] + (\cos^2 a - \sin^2 a)\int_S xy\,dm.$$

$$D_{x'y'} = \sin a\cos a\,[J_x \quad J_y] + (\cos^2 a - \sin^2 a)\,D_{xy}.$$

$D_{x'y'} = 0$, ja

$$\sin x\cos a\,[J_x - J_y] + (\cos^2 a - \sin^2 a)\,D_{xy} = 0.$$

No šis formulas dabūjam:

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2D_{xy}}{J_y - J_x}.$$

Ja kādā koordinatu sistemā (0, $x$ $y$) zinami $J_x$, $J_y$, $D_{xy}$, tad varam dabūt $J_g$ attiecībā uz katru taisni $g$, kas iet caur koordinatu sākumu 0.

Tādas taisnes $g$ nolīdzinājums ir:

$$Ax + By = 0.$$

Punkta $x|y$ attālums no šis taisnes ir:

$$\delta = \frac{Ax + By}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Tad

$$J_g = \int_S \delta^2\,dm = \int_S \frac{(Ax + By)^2}{A^2 + B^2}\,dm.$$

$$J_g(A^2 + B^2) = A^2\int_S x^2\,dm + 2AB\int_S xy\,dm + B^2\int_S y^2\,dm =$$

$$= A^2 J_y + 2AB\;D_{xy} + B^2 J_x. \qquad (\lambda)$$

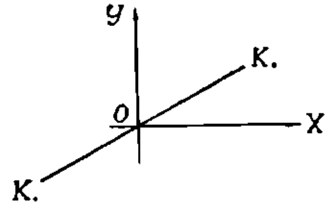
Ar šo nolīdzinājumu $J_g$ ir noteikts.

Inerces radiusi ir

$$k_x = \sqrt{\frac{J_x}{m}}; \quad k_y = \sqrt{\frac{J_y}{m}} \quad k_0 = \sqrt{\frac{J_0}{m}}.$$

Nogriežot uz taisnes $g$ caur $O$ (zīm. 96), uz abām pusēm no $O$, garumu:

$$OK_1 = OK_2 = \frac{p^2}{k_g},$$



Zīm. 96

dabūjam $K$ punktu koordinatas:

$$x = \mp \frac{p^2 A}{k_g\sqrt{A^2 + B^2}}; \quad y = \mp \frac{p^2 B}{k_g\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Pārveidojot nolīdzinājumu ($\lambda$): reizinot ar $p^4$, dalot ar $(A^2 + B^2)$ un liekot $J_g$ vietā $m\,.\,k_g^2$, dabūjam:

$$mp^4 = \frac{p^4A^2}{k_g^2(A^2 + B^2)}\,.\,J_y + \frac{2ABp^4}{k_g^2(A^2 + B^2)}D_{xy} + \frac{B^2p^4}{k_g^2(A^2 + B^2)}J_x.$$

Redzams, ka koeficients pie $J_y$ ir $x^2$, koeficients pie $D_{xy}$ ir $2xy$ un koeficients pie $J_x$ ir $y^2$, tā tad:

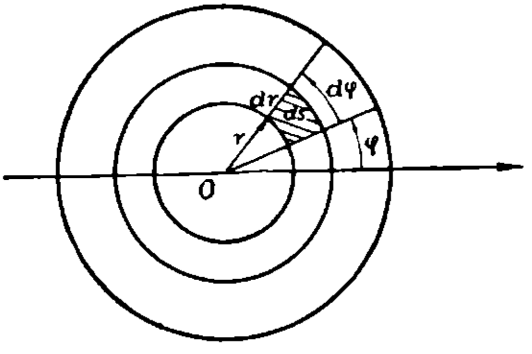
$$mp^4 = x^2J_y + y^2J_x + 2xy\,D_{xy}.$$

Šis nolīdzinājums dod likni, punktu $K$ ģeometrisko vietu, un tā kā visi $OK$ ir galīgi, tad likne ir elipse, ko sauc par punkta $O$ inerces elipsi. Ja koordinatu sistemu liekam elipses asīs, tad elipses nolīdzinājums ir:

$$mp^4 = x^2J_y + y^2Jx;$$

tā tad šai sistemā $D_{xy} = 0$.

Ja koordinatu sākums atrodas smaguma centrā, tad attiecīgo elipsi sauc par centralelipsi.



Zīm. 97.

Piemērs:

Dabūt cilindra aksialo inerces momentu. Cilindra radiuss $= a$ un augstums $h$.

Ievedam semipolaras jeb cilindra koordinatas (zīm. 97), tad

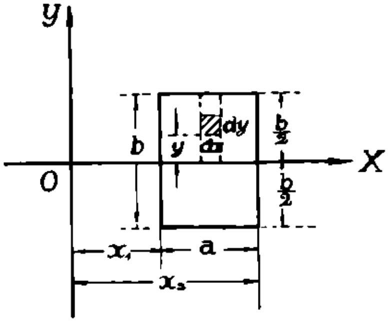
$$dS = r\,d\varphi\,.\,dr$$
$$dv = dS\;dz = r\,d\varphi\,dr\,dz.$$

$$J = \int_v r^2\,dv = \int_v r^2\,.\,r\,dr\,.\,d\varphi\,dz = \int_v r^3\,dr\,d\varphi\,.\,dz =$$

$$= \int_0^a r^3\,dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h dz = \int_0^a r^3\,dr \int_0^{2\pi} d\varphi\,.\,h = h\int_0^a r^3\,dr\;2\pi = 2\pi h\int_0^a r^3 dr$$

$$J = \frac{2\pi\,h}{4}\,|\,r^4\,|_0^a = \frac{2\pi\,a^4\,.\,h}{4} = \frac{\pi a^4 h}{2}$$

$$k = \sqrt{\frac{J}{v}} = \sqrt{\frac{\pi\,\frac{a^4 h}{2}}{2a^2\pi\;h}} = \frac{a}{2}.$$



Zīm. 98.

Piemērs:

Dabūt zīmējumā 98 rādītā paralelograma inerces momentu attiecībā uz $x$ asi.

$$dS = dx\,.\,dy$$

$$J_x = \int_S y^2\,dS = \int_S y^2\;dx\,dy = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2\,dy =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx\;\frac{1}{3}\,|\,y^3\,|_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = \frac{1}{3}\int_{x_1}^{x_2} dx\,.\left[\frac{b^3}{8} - \left(-\frac{b^3}{8}\right)\right] = \frac{1}{12}b^3\int_{x_1}^{x_2} dx =$$

$$= \frac{1}{12}b^3\,|\,x\,|_{x_1}^{x_2} = \frac{1}{12}b^3\,(x_2 - x_1) = \frac{1}{12}b^3\,.\,a.$$

**76. Diferencialmetode.** Dabas zinātnēs un technikā kāda problema ir atrisināta, ja zinam cēloņa $x$ sakaru ar seku $y$, ko izteic ar:

$$y = f(x).$$

Šo sakaru, funkcijas $f(x)$ veidu, dabūt ir grūti, daudzos gadijumos pat neiespējami, ja $x$ un $y$ ir galīgi lielumi. Sakaru tomēr daudzkārt varam dabūt, ja galīgu lielumu vietā ņemam bezgalīgi mazus lie-

lielumus, apskatot dotajā problemā bezgalīgi šauras: slejas, sektorus, plātes, stabiņus, īsus laika momentus, mazus pārvietojumus u. t. t.

Dažkārt šos, tā sauktos elementus atkal sakopo, kā to redzējām noteiktā integrala veidošanā, ko definējām kā summu, kas veidota no bezgalīgi daudziem bezgalīgi maziem elementiem.

Biežāk ar diferencialmetodi uzstāda sakara nolīdzinājumu atvasinātām vai diferencialiem. Šāda veida sakara nolīdzinājumu sauc par d i f e r e n c i a l n o l ī d z i n ā j u m u. Šāds nolīdzinājums var būt pamatots uz zinamām teoremām, lietderīgi izdarītiem eksperimentiem, teoretiskiem prātojumiem vai hipotezēm. Ar integralrēķinu palīdzību no diferencialnolīdzinājuma, problemas momentanās norises, dabūjam sakaru starp galīgiem lielumiem, cēloni $x$ un seku $y$, tā tad problemas norises likumu visumā.

Ja diferencialnolīdzinājums ir sastādīts uz kādas hipotezes pamata, tad jāpārbauda vai integrallikums saskan ar īstenību

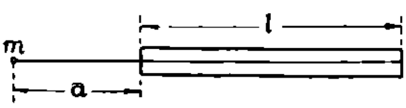
Sastādot diferencialnolīdzinājumu, pieņemam neatkarīgā mainīgā $x$ pieaugumu $\Delta x = dx$ ļoti mazu. Šādā gadijumā, kā tas pierādīts diferencialrēķinos, varam ievest diferencialnolīdzinājumā funkcijas $f(x)$ pieauguma $\Delta f(x) = \Delta y$ vietā funkcijas $f(x)$ diferencialu $df(x) = dy$.

P i e m ē r s:

Ja divu punktu masas ir $m_1$ un $m_2$ un punktu attālums $r$, tad Ņutona likums dod šo punktu savstarpējo pievilkšanās spēku $F$ ar formulu:

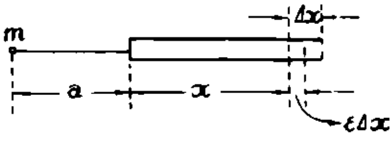
$$F = \frac{m_1 \; m_2}{r^2}. \tag{1}$$

Ar kādu spēku pievelk punktu ar masu $m$ tievs stienis, kā garums ir $l$ un masa $\mu$ uz tekošu metru (zīm. 99) Punkta attālums no stieņa ir $a$.



Zīm. 99.

Pieņemam ka stieņa garums ir $x$ (zīm. 100). Ar $F$ apzīmējam stieņa pievilkšanas spēku, attiecībā uz punktu ar masu $m$ $F$ nav zinams, bet ievērojot (1) varam dabūt $\Delta F$, ja dodam $x$ pieaugumu $\Delta x$. Pieauguma $\Delta x$ masa ir $\mu \Delta x$. Tā kā $\Delta x$ ir ļoti mazs, tad šo masu varam pieņemt, kā koncentrētu punktā, kā attālums no masas $m$ ir $a + x + \varepsilon\Delta x$.



Zīm. 100.

(še $\varepsilon < 1$). Masa $\mu\Delta x$, tad, saskaņā ar (1), pievelk masu $m$ ar spēku

$$\frac{m \cdot \mu\Delta x}{(a + x + \varepsilon\Delta x)^2}.$$

Šis spēks tad ir spēka $F$ pieaugums, kad $x$ dabū pieaugumu $\Delta x$. Tā tad

$$\Delta F = \frac{m \cdot \mu\Delta x}{(a + x + \varepsilon\Delta x)^2}. \tag{2}$$

$\varepsilon\Delta x$ ir bezgalīgi mazs lielums samerā ar galīgu lielumu $a + x$, tādēļ to varam atmest saucējā un dabūjam

$$\Delta F = \frac{m \cdot \mu\Delta x}{(a + x)^2}. \tag{3}$$

Atvietojot izteiksmē (3) $\Delta F$ ar $dF$ un $\Delta x$ ar $dx$, dabūjam

$$dF = \frac{m \cdot \mu\, dx}{(a + x)^2}. \tag{4}$$

Integrējot dabūjam:

$$F = \int \frac{m \cdot \mu\, dx}{(a + x)^2} = m\ \mu \int (a+x)^{-2} . d(a+x) = -\frac{m\ \mu}{a + x} + C. \tag{5}$$

Ja stieņa garums $x = 0$, tad arī $F = 0$; ieliekot šīs vērtības (sākuma noteikumus) augšējā izteiksmē (5), dabūjam:

$$0 = -\frac{m \cdot \mu}{a} + C,$$

tā tad

$$C = \frac{m \cdot \mu}{a}.$$

Ievedot $C$ vērtību izteiksmē (5), dabūjam:

$$F = m \cdot \mu\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a + x}\right).$$

Ar $x = l$ dabūjam:

$$F_l = m \cdot \mu\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a + l}\right) \tag{6}$$

Izteiksme (6) ir dotās problemas atrisinājums.

Kā redzams no augšējā, diferencialnolīdzinājuma uzstādīšanā pielietojam diferenciala jēdzienu. Pielietojot atvasinatās jēdzienu, problemas diferencialnolīdzinājumu dabūjam šādi:

No (2) dabūjam:

$$\Delta F = \frac{m \,.\, \mu \,\Delta x}{(a + x + \varepsilon\Delta x)^2}.$$

Dalot ar $\Delta x$ dabūjam:

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{m \,.\, \mu}{(a + x + \varepsilon\Delta x)^2}. \tag{7}$$

Ar $\Delta x \to 0$, no (7) dabūjam:

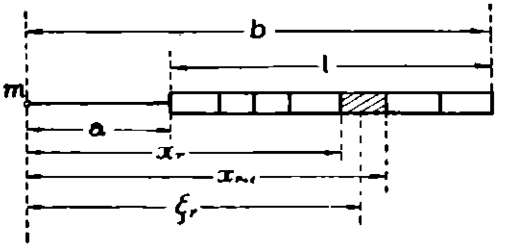
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{m \;\mu}{(a + x + \varepsilon\Delta x)^2}$$

un

$$\frac{dF}{dx} = \frac{m \,.\, \mu}{(a + x)^2},$$

$$dF = \frac{m \,.\, \mu \, dx}{(a + x)^2}.$$

Beidzamais nolīdzinājums, kā redzams, ir jau dabūtais nolīdzinājums (3).



Zīm. 101.

Doto problemu varam arī atrisināt, pielietojot noteiktā integrala jēdzienu. Iedalam stieņa garumu $n$ daļās (zīm. 101), apzīmējam

$$x_{r+1} - x_r = \delta_r,$$

tad svītrotā stieņa elementa masa ir $\mu \,.\, \delta_r$. Šo masu varam pieņemt koncentrētu punktā, kā attālums no punkta ar masu $m$ ir $\xi_r$.

Šis stieņa elements pievelk punktu ar masu $m$ ar spēku

$$\frac{m \,.\, \mu \,\delta_r}{\xi_r^{\,2}}.$$

Stieņa pievilkšanas spēku tad varam izteikt:

$$F = \lim_{n\to\infty} \sum_1^n r \frac{m \ \mu\delta_r}{\xi_r^2} = \int_a^b \frac{m \ \mu \, dx}{x^2} = m \ \mu \int_a^b \frac{dx}{x^2} = - \ m \, . \mu \left| \frac{1}{x} \right|_a^b =$$

$$= m\mu \left| \frac{1}{x} \right|_b^a = m\mu \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right).$$

$$F = m \, . \mu \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{a+l} \right). \qquad (b = a + l).$$

Inženierzinātņu problemu atrisināšanā diferencialnolīdzinājumiem ir liela nozīme. Kā uzstāda diferencialnolīdzinājumu dotās problemas atrisināšanai, māca atsevišķas zinātnes: dinamika, stiprības mācība, hidraulika u. t. t.

Diferencialnolīdzinājuma uzstādīšana ir problemas atrisināšanā pirmais solis. Otrs solis pastāv diferencialnolīdzinājuma integrēšanā, kas apskatīta autora grāmatā „Parasto diferencialnolīdzinājumu integrēšana".

# ALFABETISKS RĀDĪTĀJS

# Iespieduma kļūdas.

| Lapp. | Rindiņa no augšas (au) „ apakšas (ap) | iespiests | jābūt |
|---|---|---|---|
| 7 | 13 au | $y+\Delta y = 3(x+h^2)$ | $y+\Delta y = 3(x+h)^2$ |
| 19 | 2 au | $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\ )^m = e$ | $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e$ |
| 19 | 2 ap | $D_x u = u$ | $D_x u = u'$ |
| 30 | 1 au, 3 au, 5 au | $J\Delta$ | $\Delta J$ |
| 39 | 12 au | jāsamazina | jāsamaina |
| 53 | 6 ap | $\frac{(1-\theta)^n}{n}$ | $\frac{(1-\theta)^n}{n!}$ |
| 54 | 10 ap | $f(\ +h)$ | $f(x+h)$ |
| 54 | 1 ap | $n\to 0$ | $n\to\infty$ |
| 54, 55 | | $\frac{h^{n+1}}{n+1!}$ | $\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}$ |
| 100 | zīmējumā | $\Delta x + h$ | $\Delta x = h$ |
| 102 | 8 ap | $\ldots = r\sqrt{2\,.\,2\sin^2\frac{1}{2}}\,dt$ | $\ldots = r\sqrt{2\,.\,2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt$ |
| 140 | 14 au | $r_{\varphi+\pi} = a(\varphi+2\pi)$ | $r_{\varphi+2\pi} = a(\varphi+2\pi)$ |
| 142 | 9 au | $d^2y = r\cos dt^2$ | $d^2y = r\cos t\,dt^2$ |
| 161 | 2 au | $+\ \delta y^2$ | $+\ \delta y^3$ |
| 168 | 8 au | $+\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}+$ | $\ldots+\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+.$ |
| 171 | 1 ap | $\ldots+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial y}\cdot\frac{\partial z}{\partial z}+$ | $+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial y}+.$ |
| 177 | 6 ap | $\ldots+(s+\Delta s)\cos\psi]\ F=s+\Delta s$ | $\ldots+(s+\Delta s)\cos\psi]=F(s+\Delta s)$ |
| 184 | 12 au | $f(x,\ x)$ | $f(x,\ y)$ |
| 199 | 13 ap | $\frac{\partial F}{\partial x}=0$ | $\frac{\partial F}{\partial y}=0$ |

| Lapp. | Rindiņa no augšas (au) apakšas (ap) | Iespiests | Jābūt |
|---|---|---|---|
| 232 | 1 ap | $(\xi-x)d\cos a_2+(\eta-y)d\cos\beta_2+(\zeta-z)d\cos\gamma_2=0$ | jābūt $(\xi-x)d\cos a_1+(\eta-y)d\cos\beta_1+(\zeta-z)d\cos\gamma_1=0$ |
| 242 | 6 au | $\cos\lambda=\frac{-q}{\sqrt{p^2+q^2+1}}$ | $\cos\lambda=\frac{-p}{\sqrt{p^2+q^2+1}}$ |
| 243 | 8 ap | $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c}-1=0$ | $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$ |
| 250 | 2 ap | $\eta=\frac{-q}{\sqrt{p^2+q^2+1}}$ | $\mu=\frac{-q}{\sqrt{p^2+q^2+1}}$ |
| 260 | 12 au | $\ldots+\frac{\rho\sin^2\varphi}{R_2}=1$ | $+\frac{\rho^2\sin^2\varphi}{R_2}=1$ |
| 262 | 12 ap | $=\frac{d^2x}{ds^2}:\frac{dy^2}{ds^2}:\frac{d^2z}{ds^2}$ | $=\frac{d^2x}{ds^2}:\frac{d^2y}{ds^2}:\frac{d^2z}{ds^2}$ |
| 270 | 9 ap | $d\int(x)\,dx$ | $d\int f(x)\,dx$ |
| 273 | 5 ap | $=\operatorname{arc\,tg}u+C_1$ | $\ldots=-\operatorname{arc\,tg}u+C_2$ |
| 277 | 5 au | $\ldots=\quad-\int\frac{x\,ax}{1+x^2}$ | $\ldots=\ldots-\int\frac{x\,dx}{1+x^2}$ |
| 283 | 9 ap | $\ldots=\int x^3\,d(-e^{-x})=\ldots$ | $=\int x^2\,d(-e^{-x})=.$ |
| 283 | 6 ap | $\ldots=-xe^{-x}-e^{x}$ | $.=-xe^{-x}-e^{-x}$ |
| 286 | 2 ap | $=\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\ldots$ | $.=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+$ |
| 288 | 2 au | $\ldots=\frac{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^{-1}}{-1}+C$ | $.=\frac{1}{a}\frac{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^{-1}}{-1}+C$ |
| 289 | ap | $\int\sqrt{axt^2+a}\,dt$ | $\int\sqrt{at^2+a}\,dt$ |
| 290 | 5 ap | $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{a^4\quad x^4}}$ | $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{a^4-x^4}}$ |
| 317 | 12 au | $\ldots=\frac{x^{n+1}}{n=1}+C$ | $\ldots=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$ |
| 327 | 7 ap | $\ldots+l(1+\sqrt{1+\varphi^2})\Big\vert_{\varphi_0}^{\varphi_1}$ | $\ldots+l(\varphi+\sqrt{1+\varphi^2})\Big\vert_{\varphi_0}^{\varphi_1}$ |

| Lapp. | Rindiņā no augšas (au) „ apakšas (ap) | Iespiests | Jābūt |
|---|---|---|---|
| 331 | 1 ap | $V=\int_a^b L_x \pi\, dx$ | $V=\int_a^b L_x\, dx$ |
| 332 | 3 ap 4 ap | $\ldots=-\cos\varphi+\frac{\cos^3\varphi}{2}$ | $=-\cos\varphi+\frac{\cos^3\varphi}{3}$ |
| 332 | 3 ap | $.=\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)-\left(-1=\frac{1}{3}\right)\right]=\frac{4}{3}$ | $..=\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)-\left(1+\frac{1}{3}\right)\right]=\frac{4}{3}$ |
| 335 | 12 au | $ds=\sqrt{\varphi'(t^2)+\psi'(t)^2}\, dt$ | $ds=\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2}\, dt$ |
| 335 | 9 ap | $v=r\sin\varphi$ | $y=r\sin\varphi$ |
| 350 | 13 au | $\lim_{n\to\infty}\sum_1^n(\eta_{2_r}-\eta_{1_r})\delta_r\cdot\frac{\eta_{2_r}+\eta_{1_r}}{1}$ | $\lim_{n\to\infty}\sum_1^n(\eta_{2_r}-\eta_{1_r})\delta_r\cdot\frac{\eta_{2_r}+\eta_{1_r}}{2}$ |
| 351 | 7 ap | $\ldots+2\beta r^2\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos^2 t}{2}dt+0\Big]$ | $\ldots+2\beta r^2\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}dt+0\Big]$ |
| 457 | 2 au | $Z=\int_{z_0}^{z}\psi(x_0, y_0, dz)+C$ | $Z=\int_{z_0}^{z}\psi(x_0, y_0, z)\, dz+C$ |