Universitates Stūdentu Padomes
Mācības Līdzekļu Apgadāšanas Kom.
izdevums

Doc. A. Vītols

Hidrostatikas lekcijas

lasītas Latvijas Universitates
inženeeru un mechanikas fakultatēs
1921/22. m. g.

Rīgā 1922. g.
Krājumā Universitates Stud. Padom.
Grāmatnicā

Universitates Studentu Padomes
Mācības Līdzekļu Apgadašanas Kom.
izdevums

Doc. A. Vītols

Hidrostatikas lekcijas

lasītas Latvijas Universitates
inženieru un mechanikas fakultatēs
1921/22. m. g.

Rīgā 1922. g.
Krājumā Universitates Stud. Padom.
Grāmatnicā

L. U. Stud. Pad. Māc. Līdz. Apg. Komis. izdevumā :

	R.	K.
Logaritmi un antilogaritmi — Prof. Fišera red.	20	—
Prof. Gribovska — Valsts tiesības I d	80	—
Sodu likumi ar visiem papildinajumiem līdz 1. febr. 1922 g.	80	—
Prof. Gribovska — Valsts tiesības II d.	—	—
Doc. Kalniņa — Tēlojošās geometrijas kurss (iespiešanā)	—	—
Doc. Bulbja — Fizikas kurss I d. ... — " —	—	
Prof. Lautenbacha — Anglijas literaturas vēsture — " —	—	—
— " — — Latviešu I d. — " — — " — — " —	—	—

Sagatavo iespiešanai :

Prof. Glazenapa — Rūgšanas tehnologija (tulk.) Doc. Delles red.	—	—
Doc. Loebera — Ievads tiesību zinībās	—	—
Prof. Glazenapa — Metalurgija. . .	—	—
Doc. Lejiņa — Tiesību filosofija . .	—	—
Doc. Būmaņa — Civiltiesības	—	—
Doc. Primaņa — Siltuma un ūdens tehnologija .		
Prof. Centnerszvera un asist. Krustinsona — Neorganiskā ķim.	—	—
Prof. Fišera — Atomu teorija.		—
Prof. Blachera — Ķimiskās rūpniecība tehniskie pamati		—
Lekt. agr. Starca — Sabiedriskā agronomija . . .	—	—
Doc. Nomaļa — Purvi un kūdras izmantošana	—	—
Romiešu tiesību vēsture — lekcijas . . .		
Studentu piezīmju grāmatiņa — kalendars. K. Upesleja red.	—	—

LATV. UNIV.
GRĀMATNĪCA
Torņa iela Nr. 4, ...

Ernsta Plates litografija, Rīgā

Hidrostatikas preekšmets.

1. Hidrostatika saucas tā teoretiskas (analitiskas rationelas) mechanikas daļa, kas nodarbojas pētīdama šķidru ķermeņu līdzsvara noteikumus.

Idealu (pilnigu) šķidrumu definicija.

Šķidrumi atšķiras no citeem fiziskeem ķermeņeem ar to, ka viņeem nepeemīt noteiktas ārejas formas. Šķidrumi peeņem veenmēr savu trauku formas. Ja trauks no visam pusem pilnigi noslēgts un šķidrums peepilda viņu pavisam, tad šķidruma forma sakrīt ar trauka eekšejo noslēgto telpu veidu; pretejā gadijeenā, — ja šķidrums neeeņem visas noslēgta trauka eekšejas telpas, — pa daļai viņu norobežo trauka seenas, pa daļai — šķidruma brīvā virsma, kur šķidrums nāk sakarā ar trauka augšejo daļu ko peepilda kāds gāzejads mediums. Brīvas virsmas formu savkārt noteic spēki, kas darbojas uz zinamo šķidro ķermeni.

Ja mēs eedomasimees tādu smagu ķermeni, kas spējigs pretotees tikai spēkeem, kuri viņu saspeež, pee kam pārejeem spēku veideem, steepei un bīdei, šis ķermens nespēj radit nekādu pretešķibu, tad nāksim pee slēdzeena, ka šāds ķermens ir šķidrums, jo taisni šajos apstākļos ķermens spēj peeņemt kautkuru ārigu formu, ko noteic kāds cits ceets ķermens, kā viņa trauks. Ja tad šķidrumu formu nenoteiktiba slēp sevī zinamas mechaniskas šķidrumu īpašibas, kas peeļauj uzstādit apmēram šādu šķidrumu mechanisku definiciju:

Šķidrumi ir tādi ķermeņi, kuru daļiņas nespēj pretoteos ne steepes, ne bīdes spēkeem, bet rada pretešķību tikai speedes spēkeem.

Peevesta šķidruma definicija prasa, lai zinamas šķidruma daļiņas līdzsvara noteikumu izpētīšanā ārejus spēkus, kas uz šo daļiņu darbojas peeņemtu normalā virzeenā pret daļinas virsmu. Beidzamais apstāklis sarkārt noteic tos paņēmeenus, kurus mēs leetosim, eetērpot analitiskā formā šķidrumu līdzsvara stāvokļa noteikumus.

Šķidruma daļiņas saspeežot, šķidrums deformejas, un te nu jaizšķirs šķidrumu kategorijas. Veenas kategorijas šķidrumi deformejas tik maz, ka praktiski šos šķidrumus var uzlūkot ka nesaspeežamus. Šee ir tā saucamee pileenejadee (neelastigee) šķidrumi, ar kureem galvena kārtā nodarbojas hidrostatika. Otra grupa ir gazejadee (elastigee) šķidrumi, kuru tilpums manami grozas zem speedeena eespaida.

2. Nepilnigee (realee, pateesee) šķidrumi.

Dabā sastopamee šķidrumi pilnigi nepadodas augšā peevestai šķidrumu definicijai

Pateesee šķidrumi padaļai pretojas arī steepes un bīdes spēkeem. Tomēr šī parādiba novērojama tik neleelōs apmērōs, ka praktiski viņu var daudzos jautajumos ignoret. Hidrostatikai vismazak jarēķinajas ar šo šķidrumu nepilnibu.

Pēdejo nevar neņemt vērā atrisinot daudz problemu, kas saistītas ar šķidrumu kustibu Šee jautajumi, izņemot relativo meera stāvokli, (šķidrums kustas līdz ar savu trauku tā, ka pret trauka seenam šķidrums stāv meerā), peekrīt hidrodinamikai.

3. Ūdens īpašibas.

Visbeežak un visleelakā daudzumā dabā sastopamais šķidrais ķermens ir ūdens, un tapēc galvenā kārtā, hidrostatikas panākumus un formulas visbeežak nākas leetot ūdens līdzsvara noteikumu pētišanā. Sakarā ar šo no svara eepazītees ar galvenaim ūdens īpašibam.

Ūdens saspeežamiba miljondaļās no pirmatneja ūdens tilpuma leeluma, atteekta uz 1 atmosferas speedeena, ($1a = 1,033 \frac{kg}{cm^2}$) peeņemot, ka ūdens nesatur gaisu, ir:

pēc	Colladon Sturma	49,65
"	Oersteda	46,65
	Grassi pee 0°C	50,00
"	" " 53°C	44,00

Ta tad ši īpašiba novērojama tikko manamōs apmērōs. Gadijeens, kur ūdens un viņa vadu seenu deformaciju nevar neņemt vērā, ir sevišks šķidrumu kustibas veids vadōs, kad ūdens caurtekas daudzums atkaras veenā un tai paša vada greezeenā no laika t (Mouvement non permanent; mit der Zeit veränderliche Bewegung; не установившееся движение).

Gaisu nesaturošs ūdens ir visbeezaks pee 4° C (t.i. veena un ta paša tilpuma veeniba ir vissmagaka), ka tas ari redzams no sekošas Rozelli empiriski uzstāditas formulas ūdens specifiska tilpuma izteiksmei atkarigi no temperaturas:

$$N_t = 1 + A(t-4)^2 - B(t-4)^{2,6} + C(t-4)^3$$

$$A = 837991\ 10^{-11}$$
$$B = 378702.10^{-12}$$
$$C = 224329.10^{-13}$$

Ta tad arī ūdens tilpuma maiņa zem temperaturas eespaida ir samērā neeciga.

Abu eepreekš apskatīto īpašību neecigums, praktiski ekvivalents massas pastāvibai tilpuma veenibā, noved mūs pee slēdzeeda, ka arī tilpuma veenibas massai proporcionelu tilpuma veenibas svaru, praktiski var skaitīt Constans. Šo konstanti apzīme pa laikam ar Δ, peeņem $\Delta = 1000\ klgr/mtr^3$, t.i. 1000 klgr veenā kub. metrā.

Atteecibā uz ūdens tilpuma veenibas svaru (specifisko svaru) dažreiz vairak vēribas iznāk peegreest ūdens ķimiskam sastāvam. Tā, jūrneekeem jarēķinajas ar kuģu peldes dziļuma peeaugšanu, eenākot no jūras upes ūdeņos, jo jūras ūdens specifiskais svars ir leelaks par upes ūdeņu specifisko svaru.

Ķimiski tīrs gaisbrīvs ūdens zem atmosferas speedeena parastos apstākļos sasalst pee 0°C, netīrs, upes, ūdens – pee drusku zemakas temperaturas – 0,0017°C, jūras ūdens – pee – 2,5°C. Ledus kušanas punktu var pazeminat paleelinot speedeenu. Ledus parādišanas ir saistīta ar 79,25 kaloriju atbrīvošanu. Ceeta ledus specifiskais siltums ir 0,5, kauseta 1,0 kalorija.

Meerā stāvošā ūdenī ledus peeaug no augšas uz leju, zem ledus segas ūdens temperatura ir augstāka nē ka 0°C līdz 4°C.

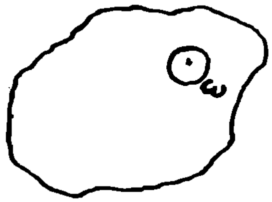
Sevišķa parādiba tekošā ūdenī – gruntsledus eelšanas, kas atšķiras no normalas ūdens sasalšanas.

Gruntsledus mēdz parāditees peepeži leelās sās uz upem, kur leeli ūdens straujumi. Šīs anomali=jas cēloņi vēl nav galigi izpētīti. No mūsu upem ši parādiba leelā mērā peemīt Daugavai.

4. Hidrostatiskais speedeens.

Šķidruma definicijā redzams, ka kaimiņu daļiņas speež viņa atseviškas daļiņas, un šis speedeens ne=mitigi pareet no daļiņas uz daļiņu līdz šķidruma attalakam nomalem (periferijai).

Atdalisim šķidruma masā kādu virsmu un ņem=sim kādu bezgaligi mazu laukumiņu $d\omega$ ar viņas smaguma punktu centru O. Daļiņas, kas šai lauku=miņā, atrodas zem kaimiņu daļiņu speedeena, normalā virzeenā pret šo lauku=miņu. Ta ka laukumiņa $d\omega$ sa=mēri bezgaligi mazi, tad var peeņemt, ka šee pret laukumiņu $d\omega$ spēki normalee ir paraleli, veens otram līdzigi. Šee spēki apklāj lau=kumiņu $d\omega$ nepārtraukti, jo viņi darbojas uz lauku=ma elementa, cik mazs viņs ari nebūtu. Šo spēku darbibu var saveenot veenā rezultejošā spēkā dP, kas tad reprezente pilnu speedeenu uz laukumu $d\omega$. Atvasinajumu $\frac{dP}{d\omega}$, apzīmesim ar $\frac{dP}{d\omega} = p$ (1)



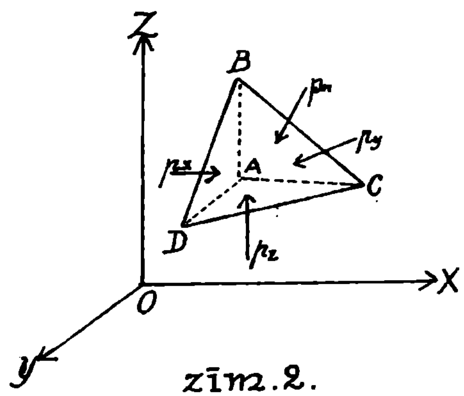
zīm. 1.

Pēdejais ir ta saucamais hidrostatiskais speedeens p (speedeens uz laukuma veenibu) punktā O. Pilnais uz mineta laukumiņa $d\omega$ darbojošais speedeens pēc hidrostatiska speedeena sajēguma noteikšanas ir:

$$dP = p\, d\omega. \quad (2)$$

5. Speedeena leeluma neatkarība no peeņemtā virsmas elementu virzeena.

Eedomasimees šķidruma masā atdalītu viņas daļiņu tetraedra veidā ar bezgalīgu mazeem apmēram, uz kura skaldnem darbojas spēki normalā virzeenā, ka tas redzams peevestā zīmejumā, p_x, p_y, p_z un p_n (spēki, atteekti uz laukuma veenibu)



zīm. 2.

Speedeeni uz atteecigam skaldnem būs:

uz ABD: $p_x \frac{1}{2} dydz$

uz ABC: $p_y \frac{1}{2} dxdz$

uz ACD: $p_z \frac{1}{2} dydx$

Peeņemsim, ka skaldnes BCD laukums ir ω, tad pilnais speedeens uz šo skaldni $= p_n\,\omega$; ša speedeena projekcijas uz 3 savstarpigi perpendikularam koordinatu asim būs:

$$p_n \cos(\bar{p}_n, \bar{X})\,\omega = -p_n \cos(-\bar{p}_n, \bar{X})$$
$$p_n \cos(\bar{p}_n, \bar{Y})\,\omega = -p_n \cos(-\bar{p}_n, \bar{Y})$$
$$p_n \cos(\bar{p}_n, \bar{Z})\,\omega = -p_n \cos(-\bar{p}_n, \bar{Z})$$

kur zimbols $\cos(\bar{p}_n, \bar{X})$ un t.t. nozīme leņķa cozinusu starp $\bar{p}_n$ un $\overline{OX}$ un t.t. pozitiveem virzeeneem.

Bez peevesteem spēkeem vērā ņemami vēl tilpuma spēki, kas darbojas uz šķidruma masu (smaguma spēks) un citi)

Apzīmesim ar X, Y un Z tilpuma spēka paātrinajuma (jeb uz šķidruma masas veenibu atteekta tilpuma spēka) projekcijas uz asim

OX, OY, OZ. Tetraedrā tilpums ir $1/6\, dxdydz$; jā tilpuma veenibas masa ir m, tad atteecigas tilpuma spēka projekcijas ir:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{m}{6}\, dxdydz\; X \\ \frac{m}{6}\, dxdydz\; Y \\ \frac{m}{6}\, dxdydz\; Z \end{array}\right\}$$

Eevedot jaunas saites kautkurā materialu punktu zistemā, kas atrodas līdzsvarā, mēs pēdejo nelaužam, un tapēc šķidrumā masā atdalito tetraedru varam eedomatees, ka sastingušu, ka ceetu ķermeni, un visu uz viņu darbojošos spēku projekciju zumu uz atteecigam asim peelīdzinat 0.

$$1/2\, p_x\, dydz - p_n \cos(-\bar{p}_n, \bar{x})\,\omega + m/6\; dydxdz\; X = 0$$
$$1/2\, p_y\, dxdz - p_n \cos(-\bar{p}_n, \bar{y})\,\omega + m/6\; dydxdz\; Y = 0$$
$$1/2\, p_z\, dxdy - p_n \cos(-\bar{p}_n, \bar{z})\,\omega + m/6\; dydxdz\; Z = 0$$

Bet:

$$1/2\; dydz = \omega \cos(-\bar{p}_n, \bar{x})$$
$$1/2\; dxdz = \omega \cos(-\bar{p}_n, \bar{y})$$
$$1/2\; dxdy = \omega \cos(-\bar{p}_n, \bar{z})$$

un tapēc nolīdzinajums:

$$1/2\, p_x\, dydz - 1/2\, p_n\, dydz + m/6\; X\, dxdydz = 0$$

pēc saīsinajuma peeņems veidu:

$$p_x - p_n + m/3\; X\, dx = 0$$

tapat pārejee nolīdzinajumi pārveidosees:

$$p_y - p_n + m/3\; Y dy = 0$$
$$p_z - p_n + m/3\; Z dz = 0$$

Mazinot tetraedra samēru līdz 0, robežā, kad $dx = 0$, $dy = 0$ un $dz = 0$, dabusim:

$$\left.\begin{array}{l} p_x = p_n \\ p_y = p_n \\ p_z = p_n \end{array}\right\} \text{jeb } p_x = p_y = p_z \quad (3)$$

Tas nozīme, ka šķidruma daļiņas no visam pusem atrodas zem veena un ta paša speedeena un ka hidrostatiskais speedeens uz laukuma veenibu neatkaras no vēleta laukuma virzeena (speedeena vektori ir kādas bumbas virsmas radiusi), bet gan tikai no ša laukuma smaguma punkta, t. i. citā šķidruma punktā speedeens būs cits, un tapēc šis speedeens .būs veenigi šķidruma daļiņas koordinatu funkcija: t. i. $p = f(x, y, z)$ (4)

6. Šķidra ķermeņa līdzsvara nolīdzinajumi.

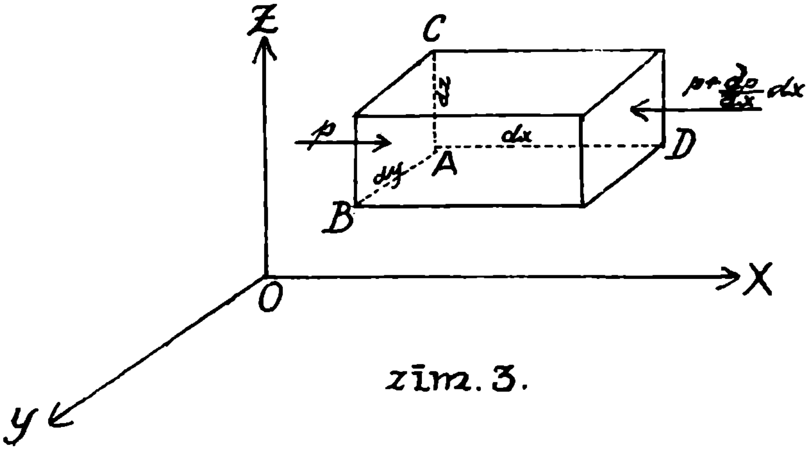
No svara ir noteikt speedeena mainas likumu, pārejot no veena šķidruma punkta uz otru, t. i. noteikt funkcijas $p=f(x,y,z)$ veidu.

Eedomasimees šķidruma masā atdalitu bezgaligi mazu parallelepipedu ar šķautņem dx, dy, dz, kas eet līdztekus savstarpeji perpendikularam koordinatu asim x, y un z. Peeņemsim, ka hidrostatiskais speedeens punktā A būs p, tad pilnais speedeens uz skaldni ABC būs $p dy dz$. (Faktiski p eedarbes punkts ir skaldnes ABC smaguma centrs, bet ši smaguma centra attālums no A ir bezgaligi mazs, kadēļ var runat par speedeenu punktā A.) Speedeens p uz skaldnes laukuma veenibu, līdztekus skaldnei ABC, bet no viņas dx attālinajumā uz (4) nolīdzinajuma pamata būs (skaitliski):

$$p + \frac{\partial p}{\partial x} dx = f(x+dx, y, z)$$

Ņemot vērā virzeenu, speedeens uz visu skald=ni būs: $-(p+\frac{\partial p}{\partial x} dx)dydz$.

Tāpat uzeesim speedeenus uz pārejam skald=nem un gūsim spēkus:



zīm. 3.

speedeeni OX virzeenā: $pdydz$ un $-(p+\frac{\partial p}{\partial x}dx)dydz$

speedeeni OY virzeenā: $pdxdz$ un $-(p+\frac{\partial p}{\partial y}dy)dxdz$

speedeeni OZ virzeenā: $pdydx$ un $-(p+\frac{\partial p}{\partial z}dz)dydx$

Bez šeem spēkeem jaņem vērā tilpuma spēki*), kuru atteecigu projekciju leelumi būs:

$$m\, Xdxdydz,$$
$$m\, Ydxdydz,$$
$$m\, Zdxdydz$$

Tā ka parallepipeds atrodas līdzsvara stāvo=klī, tad nāk spēkā sekošee nolīdzinajumi:

$$pdydz - (p+\frac{\partial p}{\partial x}dx)dydz + m\,Xdxdydz = 0$$
$$pdxdy - (p+\frac{\partial p}{\partial z}dz)dxdy + m\,Zdxdydz = 0$$

*) Taisni šee tilpuma spēki rada speedeenu maiņu uz skaldnem: Ja viņu nebūtu, tad, ka veegli redzams no (5): $\frac{\partial p}{\partial x}=0$, $\frac{\partial p}{\partial y}=0$ un $\frac{\partial p}{\partial z}=0$, jeb $dp=0$ un $p=$ Constans.

$$p\,dx\,dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y} dy\right) dx\,dz + m\,Y\,dx\,dy\,dz = 0$$

Atklājot eekavas, saīsinot un, beidzot, dalot katru nolīdzinajumu uz tilpuma leelumu $dxdydz$, gūsim atteecigi:

$$\left.\begin{aligned} m\,X &= \frac{\partial p}{\partial x} \\ m\,Y &= \frac{\partial p}{\partial y} \\ m\,Z &= \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned}\right\} (5)$$

Dabutee (5) differencial-nolīdzinajumi ir vispārejee šķidra ķermeņa līdzsvara nolīdzinajumi. Šo nolīdzinajumu otras daļas ir atvasinajumi no funkcijas p pēc zinama punkta koordinatem.

Pareizinasim nolīdzinajumus (5) uz atteecigu koordinatu differentialeem, tad gūsim:

$$m\,X dx = \frac{\partial p}{\partial x} dx$$
$$m\,Y dy = \frac{\partial p}{\partial y} dy$$
$$m\,Z dz = \frac{\partial p}{\partial z} dz$$

Saskaitot šos nolīdzinajumus, gūstam izteiksmi:

$$m(Xdx + Ydy + Zdz) = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz = dp \quad (6)$$

$$p = \int m\,(Xdx + Ydy + Zdz) + C \quad (7)$$

Lai varetu integret (7), tad zemintegralai izteiksmei jabūt pilnam kādas funkcijas $f(x.y.z)$ differencialam, pee kam jabūt:

$$\left.\begin{aligned} m\,X &= \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x} \\ m\,Y &= \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial y} \\ m\,Z &= \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned}\right\}$$

t.i. mX, mY un mZ jabūt atteecigeem atsevišķeem, kādas funkcijas $p = f(x.y.z)$. atvasinajumeem (частных производных). Bet mX, mY un mZ būs atsevišķi atvasinajumi tai gadijumā ja

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial(mX)}{\partial y}&=\frac{\partial(mY)}{\partial x}\\ \frac{\partial(mX)}{\partial z}&=\frac{\partial(mZ)}{\partial x}\\ \frac{\partial(mY)}{\partial z}&=\frac{\partial(mZ)}{\partial y}\end{aligned}\;(8)\right\}\; \text{jo}\; \begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}&=\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}&=\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}\end{aligned}\quad (8)$$

Ta tad, lai nolīdzinajumu (7) varetu integret, mX, mY un Z — funkcijam no punkta koordinateem x, y un z, jaapmeerina noteikumus (8). Tikai šinī gadijeenā zemintegrala izteiksme (7) būs kādas $f(x,y,z)$ pilns differentials.

Nolīdzinajums (6) ir hidrostatikas pamatnolīdzinajums. Pileenejadeem homogeneem šķidrumeem noteikumi (8) pārveršas par:

$$\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{\partial Y}{\partial x},\ \frac{\partial X}{\partial z}=\frac{\partial Z}{\partial x}\ \text{un}\ \frac{\partial Y}{\partial z}=\frac{\partial Z}{\partial y}\quad (8^x)$$

Nolīdzinajuma (7) C ir pastāvigs leelums, ta saucama integracijas konstante, kas noteicas ar to, ka zinamā šķidruma punktā, kā koordinates dotas, un atteecigās nozīmes ir x_0 y_0 un z_0, hidrostatiskais speedeens ir zinams.

Homogenam, pastāvigam gāzem m—tilpuma veenibas masu, un speedeenu p saista pazīstamais nolīdzinajums

$m = Kp$, (uz Gay Lussac-Boyles likuma pamata)

kur K — no temperaturas atkarigs koeficients un tapēc, ja peeņemtu visos punktōs veenlīdzigi sasilditu gāzi, tad gūtu:

$$dp = kp\,(Xdx + Ydy + Zdz), \text{ jeb}$$

$$\frac{dp}{p} = k\,(Xdx + Ydy + Zdz)\quad (9)$$

Lai gāze atrastos līdzsvara stāvoklī, vajadzigs, lai nolīdzinajumu (9) otra daļa apmeerinātu integrešanas noteikumus, kas pee κ = constans pāreet noteikumos (8^x).

Integrals $\int \frac{dp}{p} = lg\,p = \kappa \int (Xdx + Ydy + Zdz)$

Nolīdzinajumu (5) atrisinot jaņem vērā šķidruma daļiņas kas atrodas uz šķidrumu norobežojošam virsmam. Šās virsmas, var būt divejadas: virsmas kuram šķidrums nāk sakarā ar trauka seenam un, otrkārt, brīva virsma, kur šķidrums norobežojas ar kādu gazejadu mediumu.

Peeņemsim brīvai virsmai, ka dotu: $p = \Pi$.
Ja še šķidrums nāk sakarā ar atmosferu, tad Π līdzinās atmosferas speedeenam.

7. Līmeņa virsma.

Virsma, kuras punkti visi padoti veenadam speedeenam, saucas līmeņa virsma

Šai virsmai ta tad: p = constans un $dp = 0$, kapēc:

$$dp = m\,(Xdx + Ydy + Zdz) = 0$$

jeb $Xdx + Ydy + Zdz = 0$

ši izteiksme ir līmeņa virsmas diferencial nolīdzinajums.

Ka augšā minets lai varetu (7) integret, X, Y un Z, pee m = const., jabūt atsevišķeem atvasinajumeem no $f(x.y.z)$ jeb p. Šādu funkciju sauc tilpumu spēku potencialfunkciju, bet pašus spēkus – par tilpuma spēkeem, kam peemīt potencials.

Šos terminus eeveduši, varam teikt, ka lī=

meņa virsma ir virsma, kuras punktī visi dod veenadu potencialu. Sakarā ar šo līmeņa virsmu varetu saukt arī – ekvipotencialvirsmu. virsmu.

8. Līmeņa virsmas īpašibas.

Ta ka līmeņa virsmai $dp = m(Xdx + Ydy + Zdz) = 0$, tad, ja uz daļiņas masas veenibu atteektu spēku, kā (spēka) projekcijas ir X, Y, un Z, apzīmesim ar F, un bezgaligi mazu loka elementu, kam atteecigās projekcijas ir dx, dy un dz, ar ds, tad dabusim:

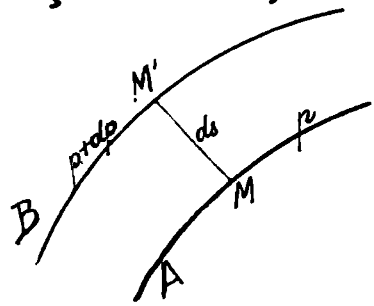
$$dp = m[\bar{F}ds \cos(\bar{F}\bar{x})\cos(\bar{ds},\bar{x}) + \bar{F}ds\cos(\bar{F}\bar{y})\cos(\bar{ds},\bar{y}) + \bar{F}ds\cos(\bar{F}\bar{z})\cos(\bar{ds},\bar{z}) = mFds[\cos(F,\bar{x})\cos(\bar{ds},\bar{x}) + \cos(\bar{F}\bar{y})\cos(\bar{ds},\bar{y}) + \cos(\bar{F},\bar{z})\cos(\bar{ds},\bar{z})] = mFds\cos(F,\bar{ds}) =$$
$$= \bar{F}\cdot\bar{ds} = 0$$

Ta ka ne m, ne F, ne ds nelīdzinas 0, tad, lai $m\bar{F}\bar{ds} = mFds\cos(\bar{F},\bar{ds})$ būtu 0, jāpeeņem, ka $\cos(\bar{F},\bar{ds}) = 0$, t.i. $\cos(\bar{F},\bar{ds}) = \cos \pi/2$, jeb $(\bar{F},\bar{ds}) = \pi/2$. Ta tad spēka virzeens pret līmeņa virsmu ir normals.

$mFds\cos(\bar{F},\bar{ds})$ ir elementara darba izteiksme. Sakarā ar šo var teikt, ka uz līmeņa virsmas spēku elementarais darbs $= 0$.

Otra līmeņa virsmas īpašiba ir ta, ka divas līmeņu virsmas ar dažadeem hidrostatiskeem speedeeneem savā starpā ne krustojas nedz viņam kopeja peeskārtne.

Pateesi, ņemsim divas līmeņa virsmas ar speedeeneem p un $p + dp$ un izvēlesimees uz viņam divus punktus M un M', ds attālumā veens no otra, pee kam ds virzeens lai normals pret virsmu A punktā M. Tad $dp = m.F.ds \cos(\bar{F}, \bar{ds})$, bet tā ka $\bar{F} \parallel \bar{ds}$, tad $dp = \pm$ $= \pm\, m\, F ds$. Tā ka



zīm. 4.

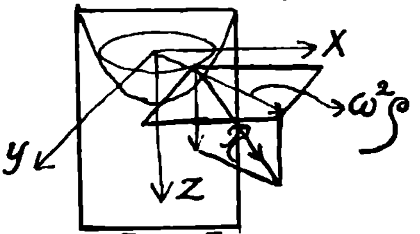
$dp \neq 0$, ari ds nevar būt 0, un tapēc abas virsmas ne krustojas, nedz viņām kopejā peeskārtne.

9. Līmeņu virsmas atsevišķos gadijeenos.

a) Ja šķidruma daļiņas padotas tikai veenigi smaguma spēkam, tad līmeņa virsmai šādi noteikumi, ja koordinatu asu zistemu peeņemsim ortogonalu ar Z asi, virzitu vertikali uz apakšu: $X = 0$, $Y = 0$, $Z = g$ un $dp = mgdz$ $p = mg\int dz + C = mgz + C$ (10) t. i. līmeņa virsmas ir plāksnes. Ja xy plāksne sakrīt ar šķidruma brīvo virsmu, pee kam pēdejā atrodas zem atmosferas speedeena, tad pee $Z = 0$; $p = \Pi$ un $\Pi = C$, pēc kam $p = mgZ + \Pi$; m ir masa tilpuma veeniba, tā tad mg = tilpuma veenibas svars jeb tā saucamais specifiskais svars, apzīmejams ar Δ. Tā tad beidzot $p = \Delta Z + \Pi$.

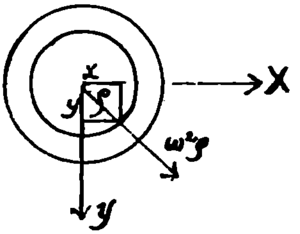
b) Peeņemsim, ka šķidrums atrodas cilindriskā traukā un līdz ar viņu greežas ap vertikalu asi, ar kuru sakrīt pret zemes lodes sma=

gumu centru virzīta koordinatu ase Z.



zīm. 5.

Šķidruma daļiņas padotas smaguma spēkam, kura paātrinajums ir g, un bez tam centrifugalam spēkam $\frac{mv^2}{\rho}$, kura paātrinajums ir $\frac{v^2}{\rho}$. Ja pastāvīgs leņķisks ātrums ir ω tad $v = \omega\rho$ un $\frac{v^2}{\rho} = \frac{\omega^2\rho^2}{\rho} = \omega^2\rho$.



zīm. 6.

Šinī gadijeenā mums ir darišana ar relativu meera stāvokli (atteecigi pret trauka seenam) un tapēc varam peemērot hidrostatikas nolīdzinajumu.

Līmeņa virsmas atrašanai mums ir nolīdzinajums

$$X dx + Y dy + Z dz = 0$$

Še:

$$X = R\cos(\bar{R},\bar{x}) = g\cos(\bar{g},\bar{x}) + \omega^2\rho\cos(\bar{\rho},\bar{x})$$
$$Y = R\cos(\bar{R},\bar{y}) = g\cos(\bar{g},\bar{y}) + \omega^2\rho\cos(\bar{\rho},\bar{y})$$
$$Z = R\cos(\bar{R},\bar{z}) = g\cos(\bar{g},\bar{z}) + \omega^2\rho\cos(\bar{\rho},\bar{z})$$

bet: $\cos(\bar{\rho},\bar{x}) = \frac{x}{\rho}$, $\cos(\bar{\rho},\bar{y}) = \frac{y}{\rho}$ un $\cos(\bar{\rho},\bar{z}) = 0$

$\cos(\bar{g},\bar{x}) = 0$, $\cos(\bar{g},\bar{y}) = 0$ un $\cos(\bar{g},\bar{z}) = 1$.

un tapēc:

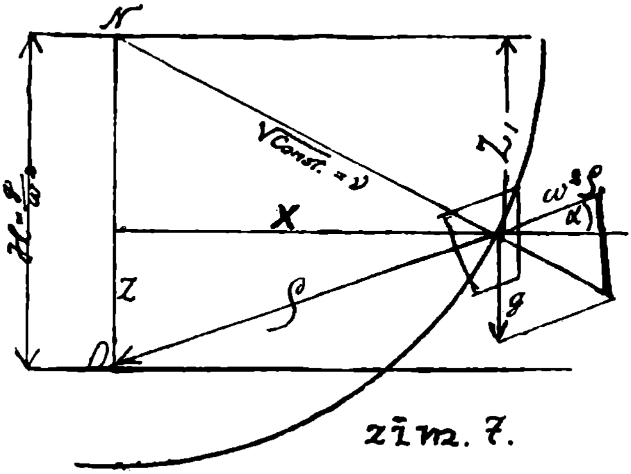
$$X = \omega^2\rho\frac{x}{\rho} = \omega^2 x$$
$$Y = \omega^2\rho\frac{y}{\rho} = \omega^2 y$$
$$Z = g.$$

Pēc šo nozīmju eeveetošanas nolīdzinajumā $X dx + Y dy + Z dz = 0$, gūstam:

$$\omega^2 x dx + \omega^2 y dy + g dz = 0;\ \omega^2(x dx + y dy) + g dz = 0.$$

Integrešana dod $\omega^2\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)+gz$ = Constans.
Šī izteiksme ir greešanas paraboloida nolīdzinajums (параболоид вращения).
c) Škidrums līdz ar savu trauku greežas ap horizontalu asi (ūdens rats ar kaušeem, kurōs atrodas ūdens).
Šinī gadijeenā atkrīt $Ydy=0$ un tapēc:

$$Xdx + Zdz = 0,\ \text{jeb}\ \frac{dz}{dx} = -\frac{X}{Z}$$



zīm. 7.

$$\left.\begin{array}{l} X = \omega^2 \rho \cos\alpha \\ Z = -g + \omega^2 \rho \sin\alpha \end{array}\right\}\ \omega = \text{lenka ātrums}$$

un $\frac{dz}{dx} = \frac{-\omega^2\rho\cos\alpha}{-g+\omega^2\rho\sin\alpha}$, bet $\rho\cos\alpha = x$
un $\rho\sin\alpha = z$

tapēc: $\frac{dz}{dx} = \frac{-\omega^2 x}{-g+\omega^2 z}$, jeb $-gdz + \omega^2 zdz = -\omega^2 xdx$, jeb $xdx + zdz - \frac{g}{\omega^2}dz = 0$;

Integrejot: $x^2 + z^2 - \frac{2g}{\omega^2}z = C_1$

$$x^2 + z^2 - 2\frac{g}{\omega^2}z + \left(\frac{g}{\omega^2}\right)^2 = C_1 + \left(\frac{g}{\omega^2}\right)^2 = \text{Constans}.$$

$x^2 + \left(z - \frac{g}{\omega^2}\right)^2 = Const.$ Ja pārnesisim koordinatu zistemu centru O centrā N, tad jauna koordinate z_1 būs saistita ar veco: $z_1 + z = H$; $z = H - z_1$ un $x^2 + \left(H - z_1 - \frac{g}{\omega^2}\right)^2 = Const.$ ja $H = \frac{g}{\omega^2}$, tad: $x^2 + z_1^2 =$

$= Const. = r^2$ (riņķa nolīdzinajums). Tā tad ūdens virsmas kaušos veenmēr ir cilindru virsmas, kuru centrala ase eet perpendikulari zīmejumu plāksnei caur punktu N. Ja $\omega = 0$, t. i. rats negreežas, tad $\frac{dz}{dx} = 0$, t. i. ūdens virsma kaušos ir horicontala plāksne, tapat ka uzdevuma d) gadijeenā.

d) Katru (homogena, $m = const.$) šķidruma daļiņu peevelk kāds pastāvigs centrs O ar tilpuma spēku, proporcionalu daļiņas atstatumam l no ša centra. Ņemsim vērā šķidruma daļiņu, kuras koordinates pret ortogonalu caur peevilkšanas centru O ejošu koordinatu zistemu ir x, y un z. Proporcionalitates koeficientu ar K apzīmejot, peevilkšanas spēka projekcijas būs:

Kx, Ky un Kz, jo
$$X = Kl\cos(\bar{l}.\bar{x}) = K\frac{lx}{l} = Kx$$
$$Y = Kl\cos(\bar{l}.\bar{y}) = K\frac{ly}{l} = Ky$$
$$Z = Kl\cos(\bar{l}.\bar{z}) = K\frac{lz}{l} = Kz$$

Līmeņa virsmas diferencialnolīdzinajums peeņems veidu:
$$Xdx + Ydy + Zdz = K(xdx + ydy + zdz) = 0$$
tā ka $K \neq 0$, tad $xdx + ydy + zdz = 0$ un $\int xdx + \int ydy + \int zdz = Const.$, jeb: $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} =$ $= Constans$, jeb $x^2 + y^2 + z^2 = C_0$, kas nozīme lodes virsmas nolīdzinajumu.

e) Ja tādos pašos, ka augšā, uzdevuma apstākļos atteecigo spēka projekciju proporcionalitates koeficienti ir μ; ν un ϱ, tad $\mu xdx + \nu ydy + \varrho zdz = 0$ un $\int(\mu xdx + \nu ydy + \varrho zdz) = Constans$. $\frac{\mu x^2}{2} + \frac{\nu y^2}{2} + \frac{\varrho z^2}{2} = Const.$

Šo izteiceenu var pārveidot:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \quad \text{kur: } \frac{\mu}{2\,Const.}=\frac{1}{a^2}$$
$$\frac{\nu}{2\,Const.}=\frac{1}{b^2}$$
$$\frac{\rho}{2\,Const.}=\frac{1}{c^2}$$

Ši izteiksme ir elipsoïda nolīdzinajums ar pusasim a, b un c, pee kam pusasu leelumi atteecigi ir: $a=\sqrt{\frac{2\,const}{\mu}}$, $b=\sqrt{\frac{2\,const}{\nu}}$ un $c\sqrt{\frac{2\,const}{\rho}}$.

10. Speedeena aprēķinašana dažados smaga šķidruma punktos gadijeenā, kad ārejais spēks ir smaguma spēks.

Mēs tikam izveduši nolīdzinajumu (6):

$$dp=m\,(Xdx+Ydy+Zdz).$$

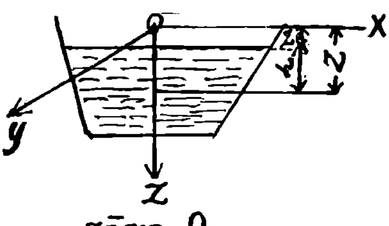
Šinī gadijeenā, ja peeņemtu, ka ortogonalas koordinatu zistemas. Z ass ir virzita vertīkali pret zemes smaguma punkta centru, tad:

$$X=0,\ Y=0,\ Z=0 \text{ un } dp=mgdz$$

Ja šķidrums homogens, tad $m=const.$ un, kā redzejām, izvedot nolīdzinajumu (10)

$$p=mgz+C,$$

jeb $p=\Delta z+C$



zīm. 9.

Ja šķidruma virsma atrodas zem atmosferas speedeena Π, tad, ja koordinatu XY plāksne pacelta pār šķidruma virsmu uz Z_0 —

$$\Pi=\Delta Z_0+C,$$

atvelkot šo nolīdzinajumu no nolīdzinajuma (10) gūstam $p - \Pi = \Delta (z - z_0)$, jeb:

$$p = \Pi + \Delta (z - z_0) \quad (11)$$

Še $(z - z_0)$ ir daļiņas dziļums h zem šķidruma virsmas, pār kuru speedeens Π; tā tad:

$$p = \Pi + \Delta h \quad (12)$$

Citai daļiņai kas atrodas h' dziļumā zem šķidruma virsmas, hidrostatiskais speedeens ir: $p' = \Pi + \Delta h'$

Atvelkot no šī nolīdzinajuma nolīdzinajumu (12), dabujam izteiksmi hidrostatiska speedeena peeaugšanai, pārejot no plāksnes h dziļumā uz plāksni h' dziļumā.

Fiziska nolīdzinajuma (12) interpretacija būtu: „Hidrostatiskais speedeens kaut jeb kurā zinama homogena šķidruma punktā līdzinas speedeenam uz brīvas šā šķidruma virsmas laukuma veenibas, saskaitītam ar šķidruma staba smagumu, pee kam šā staba apakšejais laukums līdzinas peeņemtai plāksnes mēra veenibai, bet staba augstums — no brīvas šķidruma virsmas skaitītam punkta dziļumam."

Ja šķidrums heterogens, tad, zinams, m — tilpuma veenibas masu nevar peeņemt, ka $m = const.$, bet gan ka $m = \varphi(z)$ kur φ kautkāda daļiņas koordinates Z funkcija un

$$p = g \int m dz + C \quad (13)$$

No $m = \varphi(z)$ redzams, ka veenas un tas pašas plāksnes $z = const.$ daļiņam peemīt veena un tā pate specifiska masa $m_0 = \varphi(const.) = Const.$ Stabilam līdzsvaram stāvokļam vajaga, lai spe=

cifiska masa m peeaugtu līdz ar dziļumu.
No ša redzams, ka nesajaucami škidrumi traukā nostājas kārtam*) un šķidrumi padoti veenigi smaguma spēka darbibai, nostājas horizontalās kārtās $\varrho(z) = constans$; vairaku nesajaucamu šķidrumu gadijeenā viņi nostājas kārtam, kuru atteecigee beezumi ir h, h_2 un hidrostatiskais speedeens šai gadijeenā izteicas:

$$p = \Pi + g \sum mh = \Pi + \sum \Delta h \quad (14)$$

Tā ka šķidruma hidrostatiskais speedeens, ka jau tika peerādits, zinamā punktā ir veens un tas pats, neatkarigi no virzeena, tad nolīdzinajuma (12) fiziska nozīme vēl ir ta, ka speedeenu Π, zem kura atrodas šķidruma virsma, pārraida viseem šķidruma punkteem, kaut jeb kurā virzeenā (Paskaļa likums). Uz šīs īpašibas dibinas hidraulisku presu, un citu hidraulisko mašinu uzbūve.

11. Speedeens $\mathcal{R}$ uz plakanas figuras laukuma zem leņķa α pret horizontu leekta seenā.

Dalisim figuras laukumu uz elementeem ar platumu b un beezumu du, tad pilnais speedeens uz šo elementu būs:

$$d\mathcal{R} = p\,b\,du = (\Pi + \Delta h)\,b\,du$$

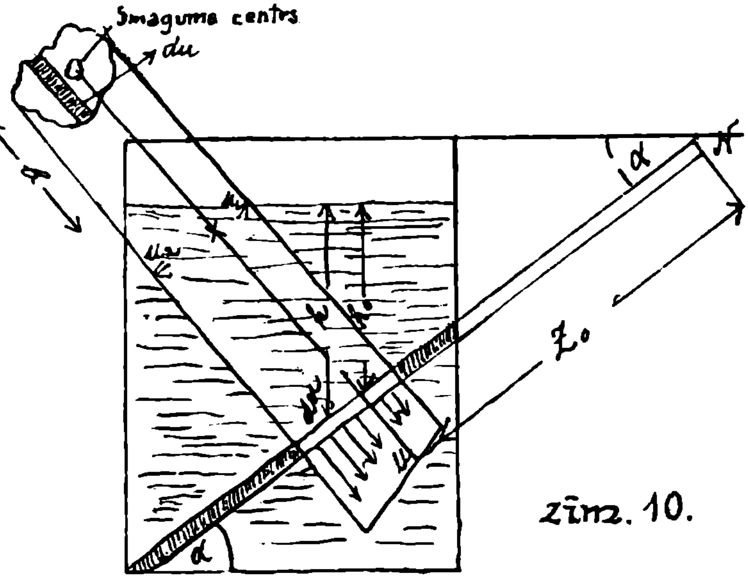
Šo spēku virzeens ir normals pret seenas plāksni, tapēc rezultejošais speedeens uz pil=

*) Plāksnes, kuras norobežo kārtas ar dažadu specifisko masu, saucas par diskontinuitates plāksnem (плоскости раздела)

nu figuras laukumu būs:

$$\mathcal{R}=\int_{-u_1}^{u_2} p\,b\,du = \Pi\int_{-u_1}^{u_2} b\,du + \Delta \sin\alpha\int_{-u_1}^{u_2}(z_0+u)\,b\,du =$$

$$=\Pi\int_{-u_1}^{u_2} b\,du + \Delta \sin\alpha\, z_0\int_{-u_1}^{u_2} b\,du + \Delta \sin\alpha\int_{-u_1}^{u_2} u\,b\,du.$$



zīm. 10.

Apzīmejot laukuma elementu ar $b\,du = dw$, gūstam $\mathcal{R}=\Pi\int_{-u_1}^{u_2} dw\ \Delta \sin\alpha\, z_0\int_{-u_1}^{u_2} dw + \Delta \sin\alpha\int_{-u_1}^{u_2} u\,du.$ Pēdējā izteiksmes locekļa daļa $\int_{-w}^{w} u\,dw$ ir mūsu plakanas figuras statiskais moments atteekts uz asi, kas eet caur figuras smaguma centru, tapēc viņš $\int_{-u_1}^{u_2} u\,dw = 0$; otra locekļa daļa $z_0\int_{-u_1}^{u_2} dw = z_0 w$ nozīme tas pašas figuras laukuma statisko momentu S_n, atteektu uz šķidruma un seenas plākšņu krustošanos līniju N; $\int_{-u_1}^{u_2} dw = w$, ir figuras laukums.

Galigi $\mathcal{R}=\Pi w + S_n \Delta \sin\alpha$ (15)

Lai spēka darbiba būtu noteikta, tad bez viņa leeluma un virzeena, vēl jazina viņa eedarbošanas punkts. Šo punktu sauc speedeena centru.

Viņu var aprēķināt, izdarot rezultējošā speedeena $\mathcal{R}$ momentu, atteektu uz zinamu asi. Asij peeņemsim to pašu līniju $\mathcal{N}$

Speedeena moments tādā gadijeenā dabu izteiksmi

$$\mathcal{M}=\int_{-u_1}^{u_2} d\mathcal{M}=\int_{-u_1}^{u_2} p(z_0+u)\,b\,du=\int_{-u_1}^{u_2}(\Pi+\Delta h)(z_0+u)\,b\,du$$

$$=\int_{-u_1}^{u_2}(\Pi+\Delta h)$$

$$(z_0+u)\,dw=\Pi\int_{-u_1}^{u_2}(z_0+u)\,dw+\Delta\sin\alpha\int_{-u_1}^{u_2}(z_0+u)^2\,dw=$$

$$=\Pi z_0 w+\Pi\int_{-u_1}^{u_2} u\,dw+\Delta\sin\alpha\; z_0^2 w+2\sin\alpha\, z_0\int_{-u_1}^{u_2} u\,dw+$$

$$+\Delta\sin\alpha\int_{-u_1}^{u_2} u^2\,dw;$$

$= wz_0$ ir mūsu figuras statiskais moments, atteekts uz asi $\mathcal{N}$, bet $\int_{-u_1}^{u_2} u^2\,dw$ — inercijas moments; atteekts uz centrālo, caur smaguma centru O parallelī $\mathcal{N}$ ejošo, asi. Ja pēdejo apzīmesim ar J_0, tad meklejamā momenta izteiksme ir: $\mathcal{M}=\Pi S_n^d+(z_0^2 w+J_0)\sin\alpha=\mathcal{R}\nu_0$, kur ν_0 rezultējošā speedeena $\mathcal{R}$ plecis, un tapēc:

$$\nu_0=\frac{\Pi S_n+(z_0^2 w+J_0)\Delta\sin\alpha}{\Pi w+S_n\,\Delta\sin\alpha}=\frac{\Pi z_0 w+\Delta\sin\alpha(z_0^2 w+J_0)}{\Pi w+z_0 w\,\Delta\sin\alpha}\quad(16)$$

Visbeežakais praktikas gadijeens ir, pirmkārt, kad locekļi ar Π pazūd, proti, kad speedeens (atmosferas) Π darbojas uz abām seenu pusem, tad $\nu_0=\frac{z_0^2 w+J_0}{z_0 w}=z_0+\frac{J_0}{z_0 w}$ (izteiceens neatkarigs no α) jeb $\nu_0=z_0\left(1+\frac{+J_0}{z_0^2 w}\right)$ (17)

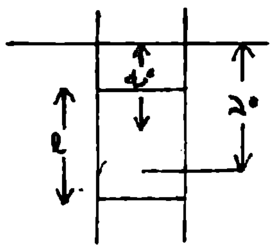
Ja figura ir četrstūris ar platumu b, augstumu $l=2u_1$, tad $\nu_0=z_0+\frac{bl^3}{12 z_0 bl}=z_0+\frac{l^2}{12 z_0}=z_0\left(1+\frac{1}{12}\frac{l^2}{z_0^2}\right)$

Gadijeenā, kad $z_0=\frac{1}{2}l$, $\nu_0=\frac{l}{2}\left(1+\frac{1.4 l^2}{12 l^2}\right)=\frac{2}{3}l$.

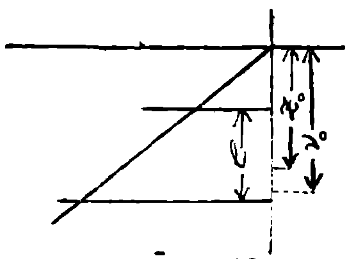
Ja figura ir ripa ar radiusu ρ, tad

$$y_0 = z_0\left(1+\frac{J_0}{z_0^2\omega}\right) = z_0\left(1+\frac{1}{4}\frac{\rho^2}{z_0^2}\right)$$

Ja ņemtū vērā, ka $z_0 \sin\alpha = h_0$, kur h_0 ir figuras smaguma centra dziļums zem šķidruma virsas, tad preekš $\mathcal{R}$ dabujam vēl šādu izteiksmi: $\mathcal{R} = \Pi\omega + \Delta h_0 \omega$ (18). Leetojot šo izteiksmi rezultejošam speedeenam $\mathcal{R}$, var teikt, ka speedeena leelums uz kautkādas figuras laukuma, kas atrodas leektas seenas plāksnē neatkaras no leekšanas leņķa, bet gan tikai no figuras laukuma leeluma ω un viņas smaguma centra dziļuma zem šķidruma brīvas virsmas.



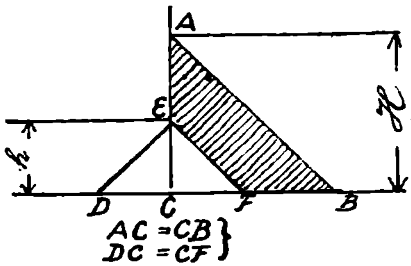
zīm.11



zīm.12.

Peelikums pee 10.11.

Peemērs 1. Aprēķinat speedeenu uz vertikalu seenu ar atteecigeem ūdens līmeņa augstumeem H un h.



zīm.8.

Speedeens $\mathcal{R}$ uz tekošo seenas veenibu: $\mathcal{R} = \frac{\Delta H^2}{2}$ pretspeedeens $\mathcal{R}_1 = \frac{\Delta h^2}{2}$. Rezultejošais speedeens $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R} - \mathcal{R}_1 = \frac{\Delta}{2}(H^2-h^2)$. Speedeens $\mathcal{R}$ proporcionals laukumam ABC, speedeens $\mathcal{R}_1$ – DEC; $\frac{H^2-h^2}{2}$ ir sastrīpotas figuras laukums. Kopspeedeena centrs atrodas zem augšeja līmeņa

$$h_1 = \frac{\frac{2}{3}\mathcal{H}\cdot\frac{\Delta\mathcal{H}^2}{2} - \frac{2}{3}h\frac{\Delta h^2}{2}}{\frac{\Delta}{2}(\mathcal{H}^2-h^2)} = \frac{\frac{2}{3}\frac{\Delta}{2}(\mathcal{H}^3-h^3)}{\frac{\Delta}{2}(\mathcal{H}^2-h^2)} =$$

$$= \frac{\frac{2}{3}.(\mathcal{H}^2+\mathcal{H}h+h^2)}{(\mathcal{H}+h)}.$$

12. Speedeens uz līku seenu.

Peeņemsim, ka S ir kādas līkas seenas daļa, nodalīta ar koordinatu zistemas plāksnem XZ, ZY un XY. Ņemsim no šās seenas kādu viņas elementu, kura bezgaligi mazs laukums būs $d\omega$. Pilnais speedeens ša laukuma normales N virzeenā tad būs $pd\omega = dP$.

Projecesim šo speedeenu $pd\omega$ uz atteecigam koordinatu asem OX, OY un OZ.

Ja atteecigas pilna speedeena projekcijas apzīmesim ar dPx, dPy un dPz, tad:
$dPx = (pd\omega)\cos(\bar{N},\bar{X})$ kur zimbols $\cos(\bar{N},\bar{X})$ nozīme leņka cozinusu starp N un X pozitiveem virzeeneem. Bet $pd\omega\cos(\bar{N},\bar{X}) =$
$= p\,[d\omega\cos(\bar{N},\bar{X})]$.

Izteiksme $d\omega\cos(\bar{N},\bar{X})$ ir elementa $d\omega$ projekcija uz plāksni ZOY, kuru apzīmesim ar $d\omega x$.

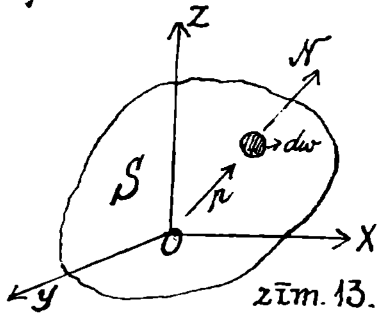
Ta tad atteecigi

$$\left.\begin{aligned} dPx &= pd\omega_x \\ dPy &= pd\omega_y \\ dPz &= pd\omega_z \end{aligned}\right\} \text{un} \quad \begin{aligned} Px &= \int_0^{\omega_{zy}} pd\omega_x \\ Py &= \int_0^{\omega_{xz}} pd\omega_y \\ Pz &= \int_0^{\omega_{xy}} pd\omega_z \end{aligned} \qquad (19)$$

Ka jau zinam, $p = (\Pi + \Delta h)d\omega$; Jr g. dijeeni, kur

Δh var atmest, proti, aprēķinot gāzu un tvaiku speedeenus (jo šo šķidrumu Δ samērā pret speedeenu Π ir mazs). Tad atteecigi $P_x = \Pi\omega_{zy}$

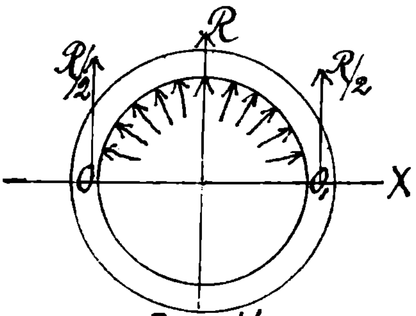
$$P_y = \Pi\omega_{zx} \quad (20)$$
$$P_z = \Pi\omega_{xy}$$



zīm. 13.

kur ω_{zy}, ω_{zx} un ω_{xy} apzīme līkas seenas laukuma projekcijas uz plāksnem ZY, ZX un XY, uz kuram speedeens teek aprēķinats.

Peemērs 1. Aprēķinat spēkus, kas darbojas caurules diametralos šķēlumos (plāksnēs O un O_1), ja caurules caurmērs ir $D = 1$ mtr, bet hidrostatiskais speedeens $p = 10a$ (vecam atmosferam $a = 1{,}033\ kg/1cm^2$). Speedeenu rada suta, kuras, ka arī caurules pašsvaru var ignoret.

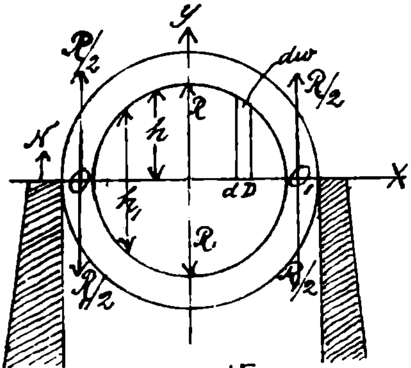


zīm. 14.

Rezultejošais speedeens uz caurules augšejo daļu, saskaņā ar formulu (20) būs, rēķinot uz 1 tekošu centimetru caurules gareniskas ases virzeenā $R = pD = 1{,}033\ kg \times 10 \times 100 = 1033\ kg$. Šis speedeens sadalas veenlīdzigi pa punkteem O un O_1, kapēc katrā punktā rodas: $R/2 = pD/2 = 516\ kg$.

Peemērs 2. Cilindrisku katlu ar caurmēru $D = 2$ mtr., galos noslēgtu sferiskam seenam ar caurmēru $D = 6$ mtr. hidrauliski pārbaudīta ar ūdens speedeenu, pee kam diametralā plāksnē OX rodas hidrostatiskais speedeens $p = 15a$

(jaunam atmosferam $a = 1 kg/1 cm^2$). Katla paš= svaru var ignoret. Aprēķinat spēkus, kas dar= bojas katla horizontalā diametralā šķēlumā pl. O un O_1 atteektus uz 1 cm katla garuma.

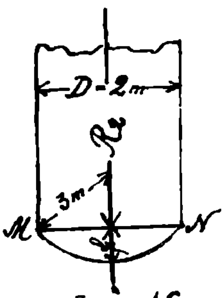


zīm. 15.

Speedeena projekcija uz seenas elementu dw paraleli katla asij $\mathcal{R} = p\,dD = (a + \Delta h)dD$, $\mathcal{R} = \int_0^D (a+\Delta h)\,dD = \Delta\int_0^D h\,dD =$
$= aD - \frac{\Delta \pi D^2}{4 \cdot 2} =$
$= 15 \times 200 - \frac{1 \times 22 + 40.000}{1000 \times 7 \times 4 \times 2} =$
$= 3000 - {}^{110}/_{7}$. Ka redzams šinī gadījeenā ari ūdens svaru var ignoret.

Katrā plāksnē O un O_1 nāk pa $\mathcal{R}/2 = (3000 - {}^{110}/_{7}):2 =$
$= (1500 - \frac{16 kg}{2}) = 1492 kg.$

Uz katla apakšejo daļu darbojas:
$\mathcal{R}_1 = aD + \Delta\int_0^D h_1\,dD = aD + \Delta . \pi \frac{D^2}{4 . 2} = 15 \times 200 + \frac{1 \times 22 \times 40000}{1000 \times 7 \times 4 \times 2} =$
$= 3000 + {}^{110}/_{7} = 3016$. Uz katru plāksni O un O_1 nāk:



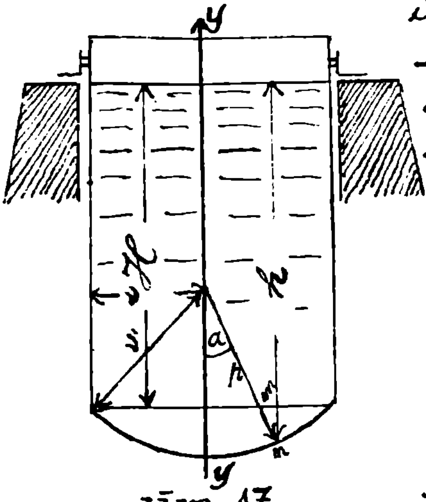
zīm. 16.

$\mathcal{R}_1/2 = {}^{3016}/_{2} = 1508 kg$. Peestiprinajuma punktu reakcijas $N = \frac{\mathcal{R}_1 - \mathcal{R}}{2} =$
$= \left\{aD + \frac{\Delta\pi . D^2}{4 . 2} - \left(aD - \frac{\Delta\pi . D^2}{4 . 2}\right)\right\} : 2 =$
$= \frac{\Delta\pi D^2}{4} : 2 = \frac{\Delta\pi . D^2}{x} = 16 kg$. Speedeens uz katla sferisko dibenu: $\mathcal{R}_2 = \int_0^{\omega} a\,d\omega = a\omega_0$, kur ω_0 sferiskas virsmas projekcija uz plāksni MN;*) $\omega_0 = \frac{\pi D^2}{4}$ un $\mathcal{R}_2 = \frac{a . \pi D^2}{4}$. Ka redzams, $\mathcal{R}_2$ neatkaras no sferas caurmēra, bet gan tikai no katla cilindriskās daļas caurmēra $D = 200 cm$.

Peemērs 3. Aprēķinat speedeenu uz cilindriska trauka sferisko dibenu. Trauka pildi=

*) jeb katla šķēluma laukums perpendikularā pret katla garenisko asi virzeenā

Tas cilindriskas daļas augstums $\mathcal{H}$, trauka radius r, sferas radius r'. Speedeens uz dibena elementu punktā n būs: $\Delta h\, d\omega$.



zīm. 17

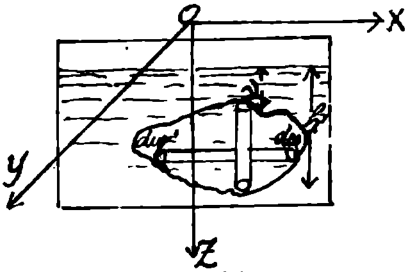
Ša speedeena projekcija uz asi YY būs $\Delta h d\omega \cos\alpha$. Rezultejošais speedeens uz visu dibenu $\mathcal{R} = \int_0^{\omega_0} \Delta h d\omega \cos\alpha = \Delta \int_0^{\omega_0} h d\omega \cos\alpha$, kur $h = (\mathcal{H} + mn)$, un tapēc $\mathcal{R} = \Delta \left[\int_0^{\omega_0} \mathcal{H} d\omega \cos\alpha + \int_0^{\omega_0} mn . d\omega . \cos\alpha\right] = \Delta\left[\mathcal{H}\int_0^{\omega_0} d\omega . \cos\alpha + \int_0^{\omega_0} mn . d\omega . \cos\alpha\right]$; bet $\int_0^{\omega_0} d\omega \cos\alpha = \omega_0 = \pi r^2$, un tapēc $\mathcal{R} = \Delta \mathcal{H} \pi r^2 + \Delta \int_0^{\omega_0} mn . d\omega . \cos\alpha$. $\int_0^{\omega_0} mn . d\omega . \cos\alpha$ ir sferiska segmenta tilpums v, kadēļ galigi speedeens uz dibenu $\mathcal{R} = \Delta(\pi r^2 \mathcal{H} + v)$ t. i. = traukā eeslēgta šķidruma svaram. Trauka materials peestiprinajuma veetā teek peepūlets: $\sigma = \frac{\Delta(\pi r^2 \mathcal{H} + v)}{2\pi r \delta}$ (δ seenas beezums).

Peemērs 4. Aprēķinat rezultejošu gazes speedeenu uz pilnu caurules aploci, kuras caurmērs D, $\mathcal{R} = p\int_0^D dD + p\int_D^0 dD = pD - pD = 0$.

13. Peldoša ķermeņa līdzsvars.

Peeņemsim, ka peldošs ķermens peld homogenā šķidrumā pēdeja pilnigi pārklāts. Ņemsim elementarus laukumiņus $d\omega$ un $d\omega'$, kurus dabujam uz ķermeņa virsmas — pēdejai krustojotees ar kādu cilindrisko virsmu, pee kam cilindra ase ir parallela koordinatu zistemas OX asei. Tad speedeeni uz šeem elementareem laukumiņeem $d\omega$ un $d\omega'$ būs atteecigi

$\Delta h dw$ un $\Delta h dw'$. Projecesim šos speedeenus uz asi OX. Laukumiņu dw un dw' projekcijas uz koordinatu zistemas XOZ plāksnes būs veenadas; apzīmesim viņu ar dw_{zy}. Abu projekciju rezultats būs: $\Delta h dw_{zy} - \Delta h dw_{zy} = 0$.



zīm. 18.

Tādus pašus rezultatus dabusim, apskatot speedeedeenu projekcijas, paralelli OY asei. Tā tad speedeens uz mūsu ķermeni šķidrumā būs virzīts tikai vertikali.

Projecejot speedeenus uz elementareem laukumeem paralelli OZ asei gūsim:

$$+\Delta h dw_{xy} - \Delta h' dw_{xy} = -\Delta (h' - h) dw_{xy}$$

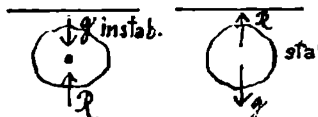
Līdziga speedeena zumma, izplātīta pa visu ķermeņa horizontalo projekcijas plāksni, = pilna speedeena projekcijai uz asi OZ, viņa būs: $- \Sigma \Delta (h' - h) dw_{xy}$ (21) un līdzinas ķermeņa izspeestam šķidruma tilpuma svaram (Archimeda likums).

Ja ķermeņa tilpums līdzigs v, tad viņa izspeesta šķidruma svars būs $\Delta . v$. Ja ķermeņa svaru apzīmesim ar p, tad, ja: $p > \Delta v$, līdzsvara nevar būt, un ķermens nogrims līdz dibenam; ja $p < \Delta . v$, tad ķermens pacelsees uz augšu un peldes šķidruma virsū pee $p = \Delta . v$. t.i. viņa izspeesta šķidruma svars līdzinasees ķermeņa svaram.

Lai ķermens zem šķidruma virsas atrastos pilnigi meerā, vajadzigs, bez $p = \Delta . v$, lai ari viņu greezošo momentu zuma būtu $= 0$.

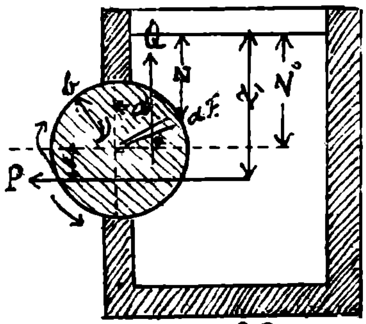
Homogena šķidruma un tāda paša ķermeņa gadījeenā, ķermeņa smaguma centrs sakritis ar ķermeņa izspeesto šķidrumu tilpuma smaguma centru, un šinī gadijeenā ķermeņa stāvoklis pret greešanu būs indiferents, t.i. ķermens pilnigi padosees bez pretošanas visam greešanas kustibam.

Otrs gadijeens, ja ķermeņa smaguma punkts atradisees augstāk par izspeesta šķidruma smaguma punktu, tad stavoklis būs pret greešanos instabils un ķermens greezisees, līdz abi punkti atradisees uz vertikalas ass, bet veens otra veetā.



zīm. 19.

Peemērs 1. Puscilindris A, kas var greestees ap asi O, eeeet ar šķidrumu pildītā traukā B. Šķidrumā atrodošās daļa zaude atteecigu svaru, kapēc abi puscilinderu svari neveenadi. Ja peerāda, ka cilindros nevar greestees (japeerāda perpetuum mobile neeespēj). Peeņemsim cilindra augstumu $= 1$. Speedeens Q vertikalā virzeenā dod momentu ap O $Qa = M_1$.



zīm. 20.

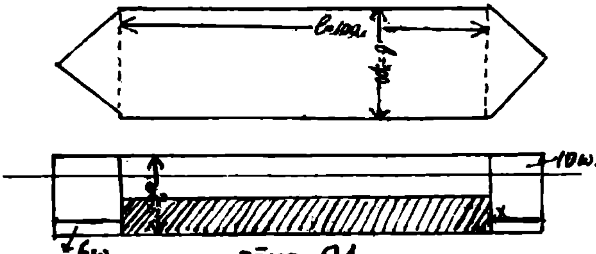
Speedeens P horizontalā virzeenā dod momentu ap O $Pb = M_2$. Cilindris negreezisees, ja $M_1 + M_2 = 0$ jeb $M_1 = -M_2$. Pateesi: $Q = \frac{\pi \vartheta^2}{2} \Delta$ un $a = \frac{4}{3} \cdot \frac{\vartheta}{\pi}$ *), un tapēc $M_1 = \frac{2}{3} \vartheta^3 \Delta$.

Horizontalā speedeena komponente uz cilindra virsmas elementu dF ir: $\Delta z \, dF . \cos\alpha = \Delta z \, dz$ un $P = \Delta \int_{z_0-\vartheta}^{z_0+\vartheta} z \, dz = 2 \vartheta \Delta z_0$. un $P_{z_1} = \int_{z_0-\vartheta}^{z_0+\vartheta} \Delta z^2 dz = \Delta \left(\frac{z^3}{3}\right)_{z_0-\vartheta}^{z_0+\vartheta}$

*) pusripas smaguma centra ordinate.

no ka $z_1 = \frac{P z_1}{P} = z_0 + \frac{1}{3}\frac{v^2}{z_0}$.*) Zinadami z_1, dabusim b:
$b = z_1 - z_0 = \frac{1}{3}\frac{v^2}{z_0}$ un $M_2 = Pb = 2v\Delta z_0 \frac{1}{3}\frac{v^2}{z_0} = \frac{2}{3}v^3\Delta$, no ka redzams, ka $M_1 = -M_2$, un greešanas nav eespējama.

Peemērs 2. Paralepipedala, ar vadžejadu noasinateem preekš-un pakaļas galeem leellaiva kuras apmēri doti zīmejumā, peebērta ar zemi, kuras specifiskais svars $-\Delta_0 = 1000$ pudu veenā kub. asī. Lādiņs eeņem tikai laivas četrstūraino daļu. Aprēķinat, cik zemes viņā var eelādet, lai eelādetai laivai malu augstums pār ūdeni būtu 10 veršoku. Tukšā laiva peld 6 veršok.



zīm. 21.

Lādiņa peldešanas dziļums netto = 16×2−(10+16) = 16 w = 1 arš = 1/3 ass = h_0, bet lādiņa svars $lbx.\Delta_0$
Lādiņa izspeestais ūdens tilpums $\left(lb + \frac{b^2}{2}\right)h_0$,
bet šā tilpuma svars: $\left(lb+\frac{b^2}{2}\right)h_0\Delta$,

$$lbx\Delta_0 = \left(lb+\frac{b^2}{2}\right)h_0\Delta,$$ no ka seko:

$$x = \left(lb+\frac{b^2}{2}\right)\frac{h_0\Delta}{lb.\Delta_0} = \left(1+\frac{b}{2l}\right)\frac{h_0\Delta}{\Delta_0}$$

Eeveetojot skaitļus, gūstam $x = \left(1+\frac{3}{20}\right)\frac{1}{3}\frac{600}{1000} = 0,23$ ass.
Lādiņa kubatura $W = 10\times3\times0,23 = 6,9$ kub. asis.

---

*) $$z_1 = \frac{\Delta}{3}\left[z^3\right]_{z_0-v}^{z_0+v} : 2v\Delta z_0 = \frac{\Delta}{3}\left[(z_0+v)^3-(z_0-v)^3\right] : 2v\Delta z_0 =$$
$$= \frac{\Delta}{3}\left\{(z_0+v)^2+(z_0+v)(z_0-v)+(z_0-v)^2\right\}\left\{(z_0+v)-(z_0-v)\right\} : 2v\Delta z_0 =$$
$$= \frac{\frac{\Delta}{3}(z_0^2+2z_0v+v^2+z_0^2-v^2+z_0^2-2z_0v+v^2)2v}{2v\Delta z_0} =$$
$$= \frac{1/3\,(3z^2+v^2}{z_0} = z_0 + 1/3\frac{v^2}{z}.$$