Prof. Dr. ing. A. VĪTOLS
Latvijas universitātes profesors.

STIPRĪBAS MĀCĪBA.

(Lekcijas)

Rīgā, 1942. g.

Prof.Dr.ing. A.V Ī T O L S
Latvijas universitātes profesors.

S T I P R Ī B A S   M Ā C Ī B A .
(Lekcijas)

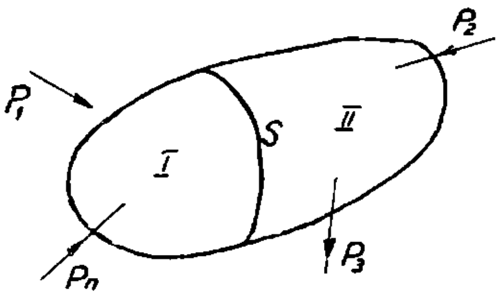
1942.g.
R ī g ā .

LATVIJAS VĒRTSPAP. SPIEST. 2. NOD. RĪGĀ, MATĪSA IELĀ 49.

Stiprības māc.priekšmets.

Statika apskata ķermeņu līdzsvaru zem spēka iespaida,neiz - šķirdama jautājumu,vai attiecīgs ķermenis ir spējigs dotā spēku iedarbi izturēt.No ikdienišķās dzīves mēs zinam,kā uz cietu ķermeni iedarbojušies spēki nedrīkst pārsniegt zināmu robežu,bez ka ķermenis vai nu galīgi nesadruptu,jeb neuzrādītu pirmās sadrupšanas pazīmes,paliekošu ķermena formas maiņu jeb paliekošas deformācijas.Izpētīt jautājumu vai un zem kādiem apstākļiem doti spēki varēs iedarboties uz zināmu ķermeni,bez kā tie apdraudētu ķermeņa stiprību,jeb noteikt, kādas robežas darbojušies uz doto ķermeni spēki drīkst sasniegt,bez kā ķermeņa stiprība tiktu apdraudēta,ir viens no stiprības mācības uzdevumiem.Bet ir vēl viena jautājumu grupa, kad statikas absoluti cieta kermena koncepcija ir nepietiekoša,lai uz tiem atbildētu.Šinī gadījumā jautājums par ķermeņa stiprību izkrīt,tiek pieņemts,kā dotie spēki ķermeņa stiprību neapvieno ,bet pētītāju interesē par piem.ķermeņa deformāciju lielums un to veids.Uz šiem jautājumiem var atbildēt izpētot sakarību starp ķermeņu tā saucamām elastigām deformācijām un uz ķermeni iedarbojušamies spēkiem.Par elastigām deformācijām sauc tādas,kas pēc ķermeņa atbrīvošanās no spēkiem izzūd,t.i.ķermenis atgūst savu pirmatnējo veidu. Kā rāda novērojumi,tāda deformāciju izzušana var notikt tikai tad,ja uz ķermeni iedarbojušies spēki neizsauc ķermenī iekšējos spēkus,kas pārkāp zināmu robežu.

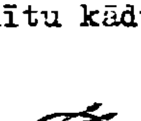
Nav teikts,kā stiprības mācības,tās plašakā nozīmē,apjomā neietilptu ari jautājumu grupa,kas saistīta ar ķermeņu paliekošām,tā saucamām plastiskām deformācijām.Bet dominējošā loma piekrīt ķermeņu īpašību izpētīšanai ķermeņu elastības robežās.Rezumejot teikto par stiprības mācības uzdevumiem,varētu pēdējo definēt,kā mechānikas nozari,kas nodarbojas ar ķermeņu izturības noteikumu un to deformāciju veidu pētīšanu. Lai šos uzdevumus veiktu,stiprības mācība operē ar spēku spraigumu jēdzienu,pie kura nonākam pielietojot tā saucamo ķermeņu šķelšanās metodi.Iedomājamies kādu ķermeni (sk.sk.)



sašķeltu gar kādu virsmu S un ķermeņa atšķelto daļu, p.piem. II, pilnīgi atdalītu no ķermeņa. Tad, ja pieliktie spēki apmierināja statikas noteikumus, pielaižot iekšējo, molekulāro, spēku eksistenci, jāatzīst, kā katra ķermeņa daļa zem iekšējo spēku iespaida atrodās līdzsvara stāvoklī. Tādēļ ķermeņa daļa I atrodas līdzsvara stāvoklī zem šai daļai pielikto ārējo spēku P_1 un P_n un iekšējo gar šķēliena virsmu S pielikto molekulāro spēku iespaida.

Attiecībā uz iekšējiem, resp. molekulāriem, spēkiem mums jāpieņem hipotese par to nepārtrauktu sadalījumu gar šķēliena virsmu. Par hipotesi sauksim mūsu spriedumu par iespējamo, varbūtējo kāda procesa norisi, ar kura palīdzību varam iegūt rezultātus, kas apmierina eksperimenta rezultātus. Pieņemot hipotesi par molekulāro spēku nepārtrauktu sadalījumu, mēs nonākam pie atziņas, kā tie ir virsmas spēki, kas iedarbojās katrā virsmas punktā. Sakarā ar šo mēs varam iedomāties katram virsmas punktam pieliktu attiecīgu molekulāra spēka vektoru. Bet tūlīt mēs konstatēsim, par šie vektori ir bezgalīgi mazi lielumi, jo ja mēs uz brīdi pieņemtu, kā tie ir galēji lielumi, tad mēs nonāktu pie slēdziena, kā virsmas S kopspēks ir bezgalīgs lielums, jo tāds ir punktu daudzums šinī virsmā.

Bet operēt ar bezgalīgi mazu, iedomājamu lielumu ir neērti, tādēļ izlietosim sekošu līdzekli. Iedomāsimies šķēliena virsmā izdalītu kādu *(šī)* ļoti mazu elementu, kuru apzīmēsim ar ΔF (sk.sk.) Šis elements ir pārklāts nepārtraukti ar bezgalīgi īsu molekulāro spēku sistēmu. Šos spēkus var iedomaties savienotus ar statikas atziņu palīdzību vienā kopspēkā, kuram jābūt tās pašas mazākuma kārtas lielumam, kā ΔF, jo tā tas būtu citādi, p.piem. ja šis kopspēks nebūtu "ļoti mazs" lielums, bet galējs, tad mēs atkal nonāktu pie nonsensa, kā uz šķēliena virsmu iedarbojas bezgalīgi liels molekulāru spēku kopspēks, un ja tas būtu otrādi-



ja šis kopspēks būtu otras kārtas samērā pret Δ F lielumu, tad visa šķēliena kopspēks būtu 0. Konstatējuši šo apstākli, apzīmēsim kppspēku ar $\Delta\bar{P}$. Vēl minēsim, kā vispārejā gadijumā $\Delta\bar{P}$ nav parallelu spēku kopspēks. Tālāk apskatīsim kvocientu

$\frac{\Delta\bar{P}}{\Delta F} = \bar{p}'$, kas nav vairs ļoti mazs lielums, bet ir kāds galējs, mainīgs līdz ar ΔF, lielums. Iedomāsimies šo ΔF maiņu, kā tūvošanos 0, ka robežas, tad līdz ar šo ari ΔP tuvosies 0, ka robežai, un tad $\left(\lim \frac{\Delta\bar{P}}{\Delta F}\right)_{\Delta F \to 0} = \frac{d\bar{P}}{dF} = \bar{p}$ ir ta saucamā spēka $\bar{P}$ geometriskā atvasinātā pēc dF, galējs lielums, ja starp dP un dF pastāv kāda funkcionāla sakarība, kuras uzmeklēšana ir viens no stiprības mācības uzdevumiem. Šo funkcionālu sakarību jāiedomajās tā: pārejot ķermeņa iekšienē no punkta uz punktu, virsmas elementa dF smaguma centra koordinātes x, y un z mainās, bet līdz ar šo koordinātu maiņu mainās ari dP, kā koordinātu funkcija, kadēl $\left(\lim \frac{\Delta\bar{P}}{\Delta F}\right)_{\Delta F \to 0} = \frac{d\bar{P}}{dF} = \bar{p}'$.

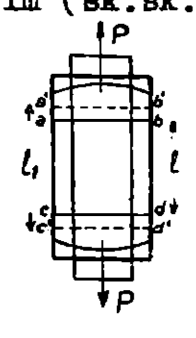
Ja šīs funktionālās sakarības nebūtu, tad būtu $\left(\lim \frac{\Delta\bar{P}}{\Delta F}\right)_{\Delta F \to 0} = \frac{0}{0}$ (nenoteiktība). Lielumu sauksim par iekšējo (molekulāro) spēku *spraigumu* dotā punktā. (Spannung, Tension, naprjažeņije) Šī leluma dimensija ir:

$$\bar{p} = \frac{(dP)}{(dF)}\frac{[kg]}{[cm^2]} = \left(\frac{dP}{dF}\right)[kg\,cm^{-2}]$$

No sakarības $\bar{p} = \frac{d\bar{P}}{dF}$ seko $d\bar{P} = \bar{p}\,dF$. Tā kā vispārejā gadījumā $\bar{p}$ nesakrīt ar virsmas normāli, tad to var salikt divās komponentēs: $\bar{p} = \bar{\sigma} + \bar{\tau}$, kur $\bar{\sigma}$ ir spraiguma normālā bet $\bar{\tau}$ spraiguma tangenciālā komponente.

Ķermeņa lineālas deformācijas un Rob. Hooke'a likums.
(Ut tensio sic vis 1676)

Pieliksim (sk. sk.) prizmatiskam ķermenim tā centrālās ass



virzienā divus vienādus spēkus P, Iegravēsim uz ķermeņa virsmas taisnu, normālu pret centrālo asi, līniju sistemu. Pēc deformācijas mēs

mēs kontatēsim,kā līnijas,tuvas ķermeņa galiem,ir izliekušās, pie kam šo līniju izliekums līdz ar to attālināšanos no ķermeņa galiem samazinajās,tākā pietiekošā atstātumā no ķermeņa galiem iegravētās līnijas varēs uzskatīt par nedeformētām,Tālāk mēs konstatēsim ari iegravēto līniju pārbīdi paralleli sev,kas nozīmē kā ķermeņa škiedri,kuru sākuma garums bija l ir pagarinājušies (punktētas līnijas) līdz garumam l_1.Jāpieņem,kā arī ķermeņa normālie šķēlieni,kuru krustojumu līnijas ar ķermeņa sānvirsmu ir minētās līnijas,(ab,cd un a' b' un c'd) ir palikuši plakani (Jēkaba Bernoulli hipotese),tā kā var pieņemt,kā visi ķermeņa šķiedri starp min.normāliem šķēlieniemir vienādā mērā pagarinājušies.Šis šķiedru pagarinājums-ķermeņa absolutā lineāla deformācija - ir $l_1 - l = \Delta l$. $\frac{\Delta l}{l} = \varepsilon$ ir ķermeņa relatīvā deformācija.Saskaņā ar spraiguma jēdziena definiciju var rakstīt $dP = \sigma\ dF$.Tā kā šķiedru pagarinājums ir vienāds tad jāpieņem,kā ari spraigums σ ir vie āds pa visu ķermeņa normālo šķēlienu,kadēl $\int^F dP = P = \sigma \int^F dF = \sigma F$,no kurienes $\sigma = \frac{P}{F}$ Starp šo spraigumu σ un relatīvo daformāciju Hooke nodibinājis sakaru $E\varepsilon = \sigma$,kur proporcionalitātes koeficients ir tā saucamais elastības jeb Junga modulis.

Spiedei paliek spēkā tā pati Hooke'a formula.

Dažu materiālu E vērtības ir pievestas tabulā.

Materiāls	E $kg_{cm}2$
Tērauds	2,10 -2,2IO
Ķets	0,75.10 - 1,6.10
Kapars	1.10
Bronza	1,2.10
Aluminijs	0,675,10
Koks	0,1.10

Tūlīt jāmin,kā Hooke fizikālais likums ir spēkā tikai līdz zināmai robežai,kuru sauc par proporcionalitātes robežu σ_p

Sankontrakcija un Poissona koeficients.

Līdz ar ķermeņa pagarināšanos ir novērojama ķermeņa sankontrakcija pārejo 2 asu virzienos.Kā eksperiments rāda,šī kontrakcija ir proporcionāla stiepes relatīvai deformācijai un to var izteikt tā:lg $- \nu\varepsilon$,kur ν ir Poisson'a koeficients.

Iedomāsimies taisni prizmatisku ķermeni ar šķautņu garumiem a,b,c,Kad būs notikusi deformācija,a,b un c būs mainījuši savus garumus,pāriedami $a(1+e)$, $b(1-\nu e)$ un $c(1-\nu e)$.Sakarā ar šo ķermeņa relatīvā tilpuma deformācija ir: $\frac{\Delta V}{V} = \frac{a(1+e).b(1-\nu e)c(1-\nu e) - abc}{abc} = (1+e)(1-\nu e)^2 - 1 = (1+e)(1-2\nu e+e^2) - 1$.Tā kā e^2 ir niecīgs lielums,tad varam bez kaut cik ievērojamas kļūdas atmest e augstākas pakāpes.Tā p.piem.var uz reizi atmest e^2 samērā pret $1-2\nu e$ un rakstīt $\frac{\Delta V}{V} = (1+e)(1-2\nu e) - 1 = 1-2\nu e + e - 2\nu e^2 - 1 = \sim e - 2\nu e = e(1-2\nu)$.Stiepes gadījumā šim lielumam vismaz jābūt: $e(1-2\nu) = 0$.Robežgadījums ir $e(1-2\nu) = 0$, $e = 0$(nav praktiskas nozīmes), $1-2\nu = 0$ $\nu = 1/2 = 0,5$. Tasnozīmē,kā ν var atrasties robežās $0 \leq \nu \leq 0,5$.

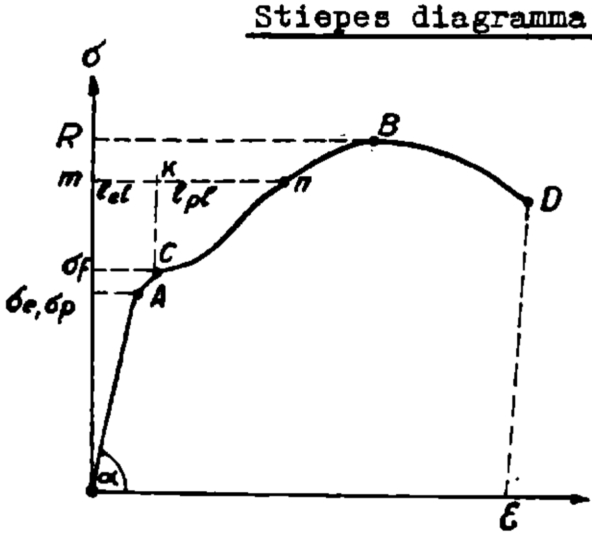
Dažu materiālu vidējās nozīmes:

pēc Wilkemann'a:

Materiāls		Materiāls	
dzelzs	0,28	cinks	0,27
tērauds	0,29	bronza	0,36
kapars	0,34	korkis	0,00
nikelis	0,33	kaučuks	0,47
aluminijs	0,36	parafīns	0,50
		ūdens	0,33

No tabulas p.piem.ir redzams,kā korķis izstiepas bez sankontrakcijas,bet parafīns bez tilpuma deformācijas. Ar koeficientiem un ν ir noteiktas materiāla elastības īpašības, jo proporcionalitātes rob. $\sigma_p > \sigma_{el}$.

Stiepes diagramma un tās raksturīgie punkti.



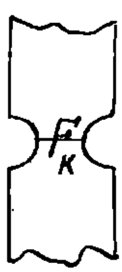
Materiāla izturēšanās pret stiepi vislabāk attēlo tā saucamā stiepes diagramma attiekta pret ortogonālām e un σ asīm.

Līdz kādam p.A novērojam Hooke'a likumu $Ee = \sigma = \frac{P}{F}$

Trigonometrisjais sakars starp σ un e Hooke likuma robežās ir: $\sigma = e\,tg\alpha = e\varepsilon$, no kurienes $\varepsilon = tg\alpha$. Tā tadproporcionāli - tates robeža ir tas vislielākais spraigums σ_R, līdz kuram materiāla deformācijas pieaug proporcionāli spraigumam.

Elastības robeža. Projektējot kādu ietaisi, jārūpejās lai materiīls nebūtu pārpūlēts līdz paliekošo deformācijām, t.i. materiāls var tikt piepūlēts tikai elastīgo deformāciju robežās. Ļoti precīzi mērījumi ir pierādījuši, kā arī ļoti elastīgos ķermeņos, pat pie nelielām piepūlēm, rodas, kaut arī ļoti niecīgas paliekošas deformācijas, kurām to niecīgumu dēļ nav praktiskas nozīmes. Līdz ar spraigumu pieaugumu pieaug arī paliekošās deformācijas. Tadēļ par elastības robešu sauc to vislielāko spraigumu σ_e, pie kura paliekošas deformācijas nepārsniedz zinamu, iepriekš pieņemtu normu. Šī norma ir ļoti niecīga, tā nav noteikta starptautiski. Praktiska σ_e noteikšana ir diezgan komplicēta. Tēraudam elastības robeža σ_e ir ļoti tuva σ_p un tapēc pieņem $\sigma_e = \sigma_p$ Tālāk līdz ar σ pieaugšanu diagrammas līkne sāk izliekties līdz p.C, pie kam šo izliekumu raksturo $\frac{d\sigma}{d\varepsilon}$ samazināšanas jeb $\frac{d^2\sigma}{d\varepsilon^2} < 0$. No punkta iesākas ievērojams paliekošo deformāciju pieaugums bez sevišķa pieauguma. P.C. sauc par materiāla kritisko punktu un tam atbilstošo spraigumu apzīmēsim ar σ_{kr} Diagrammas gabals ar materiāla plūšanas pazīmēm nav garšs un tālāk σ nozīmes atkal ceļas līdz p.B, vislielākam A - tā saucamam galīgam jeb graujošam spraigumam, pēc kam nozīmes līdz pārrāvuma momentam atkal krīt.

Galīga pretestība R. Materiāla paraugā pēc p.B sasniegšanas deformācijas koncentrejas vidus daļā, pie kam pārejās daļas vairs nepiedalās deformācijā.



Sakarā ar sašaurināta šķēliena rašanos, arī izskaidrojama spraigumu krišana, sākot no p.B. Tā kā $R = \frac{P}{F}$, kur F ir nesašaurinātais sākuma šķēliens, tad $\frac{R_w}{F_K}$ ir konvencionēls likumms. Ja pēc sašaurinātā šķēliena F_k (sk.sk.) rašanos mēs attiektu spēkus pret F_k, tad diagrammas līkne aiz p.B nekristu, bet celtos. Līdz ar šo paliek saprotams,kadēļ parauga saraušanas spraigums (p.4) ir mazāks par R.

Materiāla plastiskums.

Materiāla plastiskumu raksturo $\delta = \frac{l_k - l}{l} 100\% - \frac{\Delta l}{l} 100\%$ un $\psi = \frac{F - F_k}{F} 100\%$,kur l_k un F_k ir attiecīgu lielumu parauga saraušanās momentā..

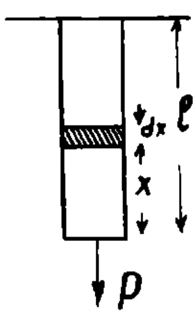
Gerstnera likums.

Šis likums skan tā: deformācijas elastīgā daļa arī aiz proporcionalitātes robežām paliek proporcionala stiepes spraigumiem.Sakarā ar šo $e = e_{el} + e_{pl} = m\kappa + \kappa\pi$ (sk.skici).Gerstnera likums nav absoluti pareizs.
Tā kā universitātes kursā ietilpst materiālu izmēģināšana,tad par šo jautājumu še vairāk netiek referēts.

Pašsvara iespaids stiepē vai spiedē.

Kad dimensionejamā elementa pašsvars ir niecīgs samērā pret ārējiem spēkiem,tad pašsvaru neņem vērā.Citādi tas ir ar gariem ķermeņiem (stangām,trosiem,ķēdēm),tāpat ar teltu balstiem,bākām,kolonām etc.

Apskatīsim p.piem.garu brusu,kas piestiprināts vienā galā,padots bez ārēja spēka P ,pašsvaram,kas atkarīgs no brusas dimensijām.Šinī gadījumā:



$\sigma = \frac{P + G_x}{F} = \frac{P + \gamma F_x}{F} = \frac{P}{F} + \gamma x$ kur γ ir materiāla tilpuma vienības svars,x škēliena atstatums no apakšejā gala škēliena.Ir saprotams,ka max $\sigma = \left(\frac{P}{F} + \gamma x\right)_{x=l} = \frac{P}{F} + \gamma l$ (1).Atkarībā no tam,kas tiek skaitīts par nezinamu,šo nolīdzinājumu var visādi izlietot.
Pieņemsim kā pie dotā garuma l tiek meklēts škērsšķēliens.Tad $\sigma_{adm\,el} = \frac{P}{F} + \gamma l$, $\frac{P}{F} = \sigma_{adel} - \gamma l$ $F = \frac{P}{\sigma_{adm\,el} - \gamma l}$ Attaisnojums ir neiespējams ja $\sigma_{adel} = \gamma l$ Ja tiek meklēts brusas garums l, tad $\left(\sigma_{adm\,el} - \frac{P}{F}\right)\frac{1}{\gamma} = l$

Apskatīsim gadījumu: $P = 0$, meklēts tiek brusas, resp. stiepules, stangas garums. Tad $l = \frac{\sigma_{adm\,el}}{\gamma}$ Pieņemot dzelzs tilpuma vienības (specifisko) $\gamma = \frac{7,6\ gr}{cm^3} = \frac{0,0076\ gr}{cm^3}$, $\sigma_{adm\,el} = \frac{1140\ kg}{cm^2}$, iegūstam:

$$l = \frac{\sigma_{adm\,el}}{\gamma} = \frac{1140}{0,0076} = \frac{114.10^5}{76} = \frac{3.10^5}{2} = 3.5.10^4 cm = 1500\ mtr \approx 1,5\ klm.$$

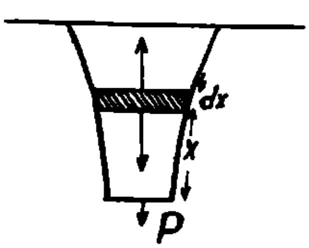
Uziesim brusas izstiepi: $e\varepsilon = \frac{\Delta(dx)}{dx}$; $\varepsilon = \sigma - \gamma x$, $\Delta(dx)\varepsilon = \sigma dx = \gamma x dx$

$$\varepsilon\int_0^l \Delta(dx) = \varepsilon\int_0^l d(\Delta x) = \varepsilon(\Delta x)\Big|_0^l = \varepsilon\Delta l = \gamma\int_0^l x dx = \gamma\frac{x^2}{2}\Big|_0^l = \gamma\frac{l^2}{2};$$

$\varepsilon\frac{\Delta l}{l} = \varepsilon e = \gamma\frac{l}{2} = \gamma\frac{lF}{2F} = \frac{1}{2}\cdot\frac{Q}{F}$ kur Q ir brusas pašsvars, $\Delta l = \frac{1}{2}\frac{Ql}{\varepsilon F}$

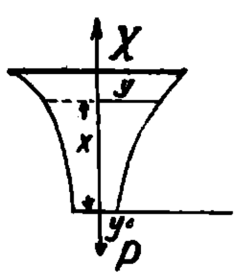
tā tad zem pašsvara iespaida brusas pagarinājums ir 2 reizes mazāks par pagarinājumu, kuri rastos, ja brusai būtu pielikts ārejais spēks Q.

Kā formula $\sigma = \frac{P}{F} + \gamma x$ rāda, piešķirt ķermenim prizmatisku formu būtu neracionēli, jo tikai augšējā šķēlienā ($x = l$) būtusasniegts vislielākais spraigums, kamēr lieki ieguldītā materiāla daudzums virzienā pret apakšejo šķēlienu pieaugtu. Tadēļ var uzstādīt jautājumu par ķermeņa formu ar σ_{adm} visos šķēlienos. Ja mēs tādu prasību uzstādītu, tad ķermeņa sasvītrotā elementa līdzsvars prasītu:

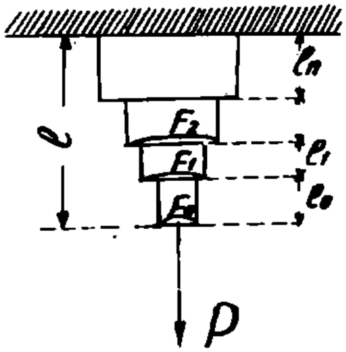


$$(F + dF)\sigma_{adm} = \sigma_{adm} F + \gamma F dx,$$
$$F\sigma_{adm} + dF\sigma_{ad} = \sigma_{ad} F + \gamma F dx$$
$$dF\sigma_{ad} = \gamma F\,dx, \frac{dF}{F} = dln\ F = \frac{\gamma dx}{\sigma_{ad}}$$
$$\int_0^x dln\ F = ln\frac{F}{F_0} = \frac{\gamma}{\sigma_{ad}}\int_0^x dx = \frac{\gamma}{\sigma_{ad}}\ x,$$
$F = F_0 e^{\frac{\gamma x}{\sigma_{ad}}}$, kur no $\sigma_{ad} = \left(\frac{P}{F} + \gamma x\right)_{x=0} = \frac{P}{F_0}$ $F_0 = \frac{P}{\sigma_{ad}}$ Ja ķermenis ir plakans, tad $F = 2y\,b = 2y_0 b.e^{\frac{\gamma x}{\sigma_{ad}}}$, $y = y_0 e$ Uzmeklēsim izstiepes izteiksmi šinī gadījumā. $\frac{\Delta(dx)}{dx}\varepsilon = \sigma_{adm}$.

$$\varepsilon\int_0^l \Delta dx = \varepsilon|\Delta x|_0^l = \varepsilon.\Delta l = \sigma_{ad}\int_0^l dx = \sigma_{adm}.l, \Delta l = \frac{\sigma_{adm}l}{\varepsilon}$$



Kā redzams, izstiepe tāda pati, kā prizmatiskam ķermenim, kas noslodzīts ar ārējo spēku savas ass virzienā. Veidot darījumus ar līkumainiem konturiem daudzreiz ir neērti,kadēl vienādas pretestības profīli atvieto ar trepveidīgiem konturiem saskanā ar sk.



$$\sigma_{ad} F_0 = \gamma F_0 l_0 + P, \quad F_0(\sigma_{ad} - \gamma l_0) = P,$$

$$F_0 = \frac{P}{\sigma_{ad} - \gamma l_0},$$

$$F_1 \sigma_{ad} = \gamma l F_1 + \sigma_{ad} F_0, \quad F_1(\sigma_{ad} - \gamma l) = \sigma_{ad} F_0$$

$$F_0 = F_0 = \frac{P}{\sigma_{ad} - \gamma l_0}$$

$$F_1 = F_0\left(\frac{1}{1 - \frac{\gamma l}{\sigma_{ad}}}\right) \quad F_2 \sigma_{ad} = \gamma l_2 F_2 + \sigma_{ad} F_1$$

$$F_2 = F_1\left(\frac{1}{1 - \frac{\gamma l}{\sigma_{ad}}}\right)$$

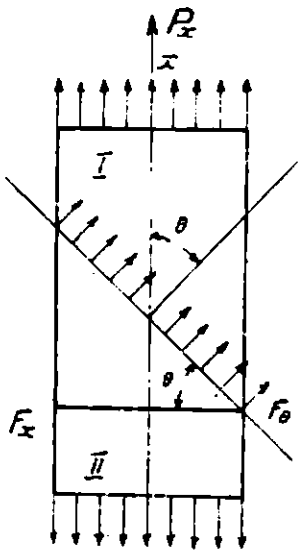
un laukumu līkums ir noskaidrots, tā kā lauk. F_n var rakstīt $F_n = F_{n-1}\left(\frac{1}{1 - \frac{\gamma l_n}{\sigma_{ad}}}\right)$

Pārreizinajot uzrakstīto kolonu un taisnojot iegūstam: $F_n = F_0 \frac{1}{\left(1 - \frac{\gamma l_1}{\sigma_{ad}}\right)\left(1 - \frac{\gamma l_2}{\sigma_{ad}}\right) \cdots \left(1 - \frac{\gamma l_{n-1}}{\sigma_{ad}}\right)\left(1 - \frac{\gamma l_n}{\sigma_{ad}}\right)} =$

$$= \frac{P}{\sigma_{ad}} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{\gamma l_0}{\sigma_{ad}}\right)\left(1 - \frac{\gamma l_1}{\sigma_{ad}}\right) \cdots \left(1 - \frac{\gamma l_n}{\sigma_{ad}}\right)}$$

STIEPES UN SPIEDES SPRIEGUMI.

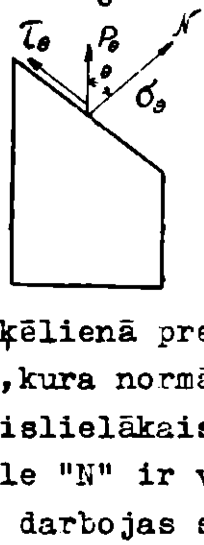
Elementāras (vienas ass virzienā) stiepes spriegumi.



Pieņemsim, ka prizmatisks ķermenis ar normālo šķērsšķēlienu F_x ir noslodzīts centrālās galvenās ass X virzienā vienmērīgi ar spēku P_x, kura spraigums ir $\sigma_x = \frac{P_x}{F_x}$. Novilksim kādu slīpu šķēlienu F_θ, kura normāle ir virzīta pret X-asi zem leņķa θ. Tad tā kā $F_\theta = \frac{F_x}{\cos\theta}$, tad spraigums šinī šķēlienā X-ass virzienā ir:

$$p_\theta = \frac{P_x}{F_\theta} = \frac{P_x \cos\theta}{F_x} = \sigma_x \cos\theta.$$

Šo spraigumu p_θ var salikt divi komponentēs: σ normāles N un šķēliena F_θ virzienā (sk. zīm.) τ, pie kam



$$\sigma_\theta = p_\theta \cos\theta = \sigma_x \cos\theta \cos\theta = \sigma_x \cos^2\theta \qquad (1)$$

un $$\tau_\theta = p_\theta \sin\theta = \sigma_x \cos\theta \sin\theta = \sigma_x \frac{\sin 2\theta}{2} \qquad (2)$$

No šīm formulām seko, kā

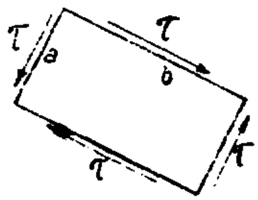
max $\sigma_\theta = (\sigma_x \cos^2\theta)_{\theta=0^\circ} = \sigma_x$ un

max $\tau_\theta = \left(\sigma_x \frac{\sin 2\theta}{2}\right)_{\theta=45^\circ} = \frac{\sigma_x}{2}$

t.i. vislielākais normālais spraigums rodas šķēlienā pret kuru spēka P_x virziens ir normāls, jeb šķēlienā, kura normāle sakrīt ar spēka, resp. X-ass virzienu ($\theta = 0$) bet vislielākais tangenciālais spraigums rodās šķēlienā, kura normāle "N" ir virzīta zem leņķa $\theta = \pi/4$ pret X-asi, kuras virzienā darbojas spēks P_x, min $\sigma_\theta = (\sigma_x \cos^2\theta)_{\theta=\pi/2} = 0$, t.i. gareniskās materiāla fibras spēka P_x, resp. X-ass virzienā nespiež viena uz otru – ļoti svarīgs konstatējums, kuru stiprības mācība izlieto dažādu attiecīgu problēmu atrisināšanai.

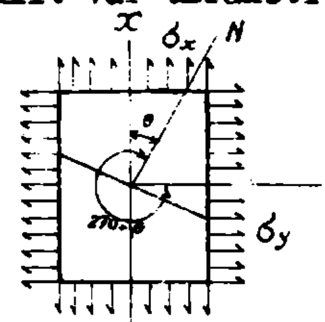
min $\tau'_\theta = \left(\sigma_x \frac{\sin 2\theta}{2}\right)_{\theta=\frac{3\pi}{4}} = -\frac{\sigma_x}{2}$, un vispār ir:

$\tau_\theta = \frac{\sigma_x}{2} \sin 2\theta = -\frac{\sigma_x}{2} \sin 2\left(\theta + \frac{3\pi}{2}\right) \quad \tau_{\left(\theta + \frac{3\pi}{2}\right)}$, kas nozīmē, kā tangenciālie spraigumi, kas darbojas uz savā starpā ortogonāliem šķēlieniem, absolūtas vērtības ir vienādas. Sakarā ar šo konstatējumu elementārā stiepē kāds ķermeņa elements,kura šķēliens ir taisnstūris,ar tangenciāliem spraigumiem ir noslodzīts saskaņā ar skici t.i. visu 4 absolūtas vērtības ir vienādas.



Patiesi,projecējot spēkus uz divām savstarpīgi ortogonālam asīm,paralellām malām a un b iegūsim: $\tau b.1 - \tau b1 = 0$, $\tau a.1 - \tau a.1 = 0$, kur 1 nozīmē elementa trešo dimensiju,perpendikulāru pret papīra plakni.Spēku pāri ir:$ab\tau + ba\tau = 0$,tā tad līdzsvars ir garantēts.

Spraigumu sadalījums, gadījumā,kad prizmatisks ķermenis ir noslodzīts divu centrālo galveno asu X un Y virzienos.Tulīt var uzrakstīt normāla un tangenciāla spraigumu izteiksmes,kurus izsauc spēks zem leņķa θ pret X-asi liektā šķēlienā spēks,kas darbojas Y-ass virzienā.Šinī nolūkā jānoskaidro tikai leņķi,kuru veido Y-ass ar slīpā šķēliena normāli,šis leņķis ir $\frac{3\pi}{2}+\theta$, kadēļ



$$\sigma_{\theta+\frac{3\pi}{2}} = \sigma_y \left\{\cos\left(\theta+\frac{3\pi}{2}\right)\right\}^2 = \sigma_y \sin^2\theta \text{ un}$$

$$\tau_{\theta+\frac{3\pi}{2}} = \frac{\sigma_y}{2}\left\{\sin 2\left(\theta+\frac{3\pi}{2}\right)\right\} = \frac{\sigma_y}{2}\sin\left(2\theta+3\pi\right) = -\frac{\sigma_y}{2}\sin 2\theta,$$ un kopējais,summārais,normālais spraigums uz slīpu šķēlienu ir:

$$\sigma = \sigma_\theta + \sigma_{\theta+\frac{3\pi}{2}} = \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta \quad (3),$$ bet tangenciālais: $\tau = \tau_\theta + \tau_{\theta+\frac{3\pi}{2}} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\theta$ (4) Lai uzietu max vai min σ, jāstāda $\frac{d\sigma}{d\theta} = -2\sigma_x \cos\theta \sin\theta + 2\sigma_y \sin\theta \cos\theta$, kuru jāpielīdzinā 0, tā tad: $\frac{d\sigma}{d\theta} = 0 = -\left(\sigma_x - \sigma_y\right)\sin 2\theta$, no kurienes

$$\sin 2\theta = 0,\ 2\theta = \arcsin 0 = 0,\ \theta_1 = 0$$

$$2\theta_2 = \arcsin 0 = \pi,\ \theta_2 = \pi/2$$

$$(\sigma)_{\theta=\theta_1=0} = \left(\sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta\right)_{\theta=0} = \sigma_x \quad \ldots\ldots(5)$$

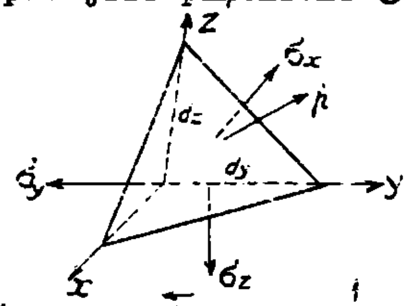
$$\sigma_{\theta=\theta_2=\pi/2} \quad \left(\sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta\right)_{\theta=\pi/2} = \sigma_y \quad (6)$$

viena no šīm vērtībām attilst max σ, otra-min σ.

$$\max\tau = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \max \sin 2\theta = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta_{\theta=\pi/4} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \quad (7)$$

$$\min\tau = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta_{\theta=\frac{3\pi}{2}+\pi/2} = -\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) \quad (8)$$

Vispārējais paņēmiens σ un τ uziešanai.



Pieņemsim, ka uz elementāra tetraedra 3 savstarpīgi ortogonālām šķautnēm iedarbojas normālie spraigumi σ_x, σ_y un σ_z, bet uz ceturto skaldni iedarbojas $\bar{p}'_r$. Uzrakstīsim spēku līdzsvara noteikumus, kuri ir:

$\bar{\sigma}_x \frac{dydz}{2} + \bar{\sigma}_y \frac{dxdz}{2} + \bar{\sigma}_z \frac{dxdy}{2} + \bar{p}\, dF = 0$, (9), bet normālo skaldņu laukumi ir saistīti ar dF: $\frac{dydz}{2} = dF \cos\alpha$, $dxdz = dF\cos\beta$, $dxdy = dF\cos\gamma$, kur α, β un γ ir leņķi, kurus veido 4. skaldnes laukuma plakne ar attiecīgām tetraedra skaldņu plaknēm. Kadēļ varēja uzrakstīt min. sakarības starp tetraedra skaldņu laukumiem. Bet šos leņķus veido savā starpā arī 4. un pārējo skaldņu normāles. Ievietojot min. sakarības nol. (9) un saīsinājot uz dF, iegūstam: $\bar{\sigma}_x \cos\alpha + \bar{\sigma}_y\cos\beta + \bar{\sigma}_z\cos\gamma + \bar{p}' = 0$, $\bar{\sigma}_x\cos\alpha + \bar{\sigma}_y\cos\beta + \bar{\sigma}_z\cos\gamma = -\bar{p}'_r = \bar{p}_r = \bar{\sigma} + \bar{\tau} = \bar{x} + \bar{y} + \bar{z}$, (10) kur x, y un z ir $\bar{p}$ vektora gala punkta koordinātes. No (10) seko: $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_x\cos\alpha + \bar{\sigma}_y\cos\beta + \bar{\sigma}_z\cos\gamma - \bar{\tau}$.

Noprojektēsim šo vektoru $\bar{\sigma}$, kas sakrīt ar normāli pret 4. skaldni, uz viņa paša virzienu, tad $\sigma = \sigma_x\cos^2\alpha + \sigma_y\cos^2\beta + \sigma_z\cos^2\gamma$ (11), jo τ projekciju uz σ nedod. Leņķi α, β un γ nav pilnīgi savā starpā neatkarīgi, jo jābūt noteikumam, kā: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. (12). No nolīdzinājuma (10) seko, ka: $x = \sigma\cos\alpha$, $y = \sigma_y\cos\beta$, $z = \sigma_z\cos\gamma$. Paceļot šos nolīdzinājumus otrā potencē, iegūstam: $\frac{x^2}{\sigma_x^2} = \cos^2\alpha$, $\frac{y^2}{\sigma_y^2} = \cos^2\beta$, $\frac{z^2}{\sigma_z^2} = \cos^2\gamma$, kuras saskaitot iegūstam:

$$\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2} + \frac{z^2}{\sigma_z^2} = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

(spraigumu elipse) (13)

MOHR'A SPRAIGUMA RIŅĶIS.

Mēs bījām uzgājuši,kā $\sigma = \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta$ (3) un

$$\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) \sin 2\theta \quad (4)$$

Ir interesanti uziet funkciju f (σ,τ)= 0,kas panākams izslēdzot no (3) un (4) leņķi θ.Tā kā $\frac{1+\cos 2\theta}{2} = \cos^2\theta$ un

$1 - \frac{\cos 2\theta}{2} = \sin^2\theta$, tad: $\sigma = \sigma_x \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) + \sigma_y \left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)$

$$\sigma - \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta, \quad \left(\sigma - \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 \cos^2 2\theta,$$

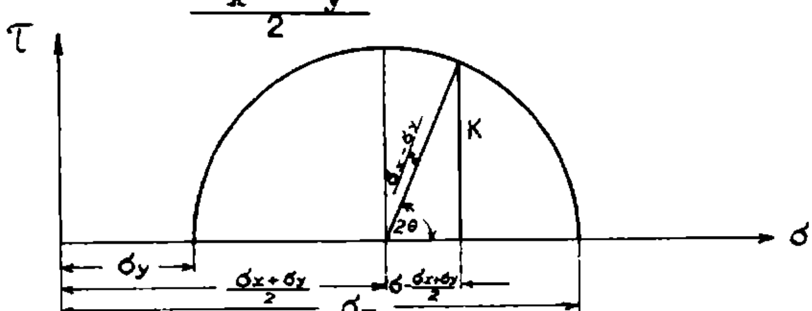
$$\tau = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\theta, \quad \tau^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 \sin^2 2\theta$$

Saskaitot iegūstam:

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)^2 \tau^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 \left(\cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta\right) =$$

$= \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2$, kas izteic riņķa nolīdzinājumu ar centru punktā

$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$ (sk.zk.).Šo riņķi sauc par Mohr'a spraigumu riņķi ar radiusu: $\tau = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$



Tā kā $\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$ maxτ , tad: $\left(\sigma - \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)^2 = \max\tau^2 - \tau^2$.

Ja viens no spraigumiem p.p. $\sigma_y = 0$,tad iegūstam elementāras prizmatiskā ķermeņa noslodzes veidu:

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_x}{2}\right)^2 = \left(\sigma - \max\tau\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 - \tau^2 = (\max\tau)^2 - \tau^2$$

Pēc piezīmēm

Tā kā $\bar{p} = \bar{\sigma} + \bar{\tau} = \sigma_x \cos\alpha + \bar{\sigma}_y \cos\beta + \sigma_z \cos\gamma$, tad:

$$(\sigma+\tau)^2-\sigma^2+\tau^2 = \sigma_x{}^2\cos^2\alpha+\sigma_y{}^2\cos^2\beta+\sigma_z^2\cos^2\gamma$$ un

$$\tau^2 = \sigma_x^2\cos^2\alpha+\sigma_y^2\cos^2\beta+\sigma_z^2\cos^2\gamma-\sigma^2 =$$

$$=\sigma_x{}^2\cos^2\alpha+\sigma_y^2\cos^2\beta+\sigma_z^2\cos^2\gamma - (\sigma_x\cos^2\alpha+\sigma_y\cos^2\beta+\sigma_z\cos^2\gamma)^2 \quad (14)$$

Atsevišks gadījums: $\gamma = \pi/2$, t.i. prizmatiska ķermeņa šķēliens iet caur Z-asi un ķermens ir noslodzīts tikai X un Y asu virzienos. Saprotams, kā šinī gadījumā mums no formulas (14) jāiegūst $\tau = \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\alpha$. Patiesi, pielīdzinot form. (14) $\cos\gamma = \cos\pi/2 = 0$ un ņemot vērā, kā tad (12) pāriet: $\cos^2\alpha+\cos^2\beta = \cos^2\alpha+\sin^2\alpha = 1$, $\cos^2\beta = \sin^2\alpha$, no (14) iegūstam: $\tau^2 = \sigma_x^2\cos^2\alpha+\sigma_y^2\sin^2\alpha - (\sigma_x\cos^2\alpha+\sigma_y\sin^2\alpha)^2 = \sigma_x^2\cos^2\alpha+$

$$+\sigma_y\sin^2\alpha - \sigma_x{}^2\cos^4\alpha - \sigma_y\sin^4\alpha - 2\sigma_x\sigma_y\cos^2\alpha\sin^2\alpha =$$

$$\sigma_x^2\cos^2\alpha(1-\cos^2\alpha)+\sigma_y\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha) - 2\sigma_x\sigma_y\cos^2\alpha\sin^2\alpha$$

$$=\sigma_x{}^2\cos^2\alpha\sin^2\alpha+\sigma_y^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha - 2\sigma_x\sigma_y\cos^2\alpha\sin^2\alpha =$$

$$=\cos^2\alpha\sin^2\alpha(\sigma_x^2-2\sigma_x\sigma_y+\sigma_y^2) = \cos^2\alpha\sin^2\alpha(\sigma_x-\sigma_y)^2 =$$

$$=\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 4\cos^2\alpha\sin^2\alpha = \left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2(2\sin\alpha\cos\alpha)^2 =$$

$$\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2\sin^2 2\alpha, \quad \tau = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2\sin^2 2\alpha} = \pm\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\alpha,$$

kas sakrīt ar tieši izvesto formulu $\tau = \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\alpha$

τ extremās vērtības.

Lai šīs vērtības uzietu, jāliek $\frac{d\tau}{d\alpha} = 0$

Diferencējam nolīdz. (14) pēc argumenta α, ņemot vērā (12), kas norāda, kā tikai divi ir neatkarīgi lielumi, kamēr trešais leņķis p. piem. γ ir saistīts caur (12), no kura seko, kā $\cos^2\gamma = 1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta$, kadēļ:

$$2\tau\frac{d\tau}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha}\left[\sigma_x^2\cos^2\alpha+\sigma_y^2\cos^2\beta+\sigma_z(1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta)\right] - 2\sigma\frac{d\sigma}{d\alpha} = 0$$

$$= -2\sigma_x^2 \cos\alpha \sin\alpha + 2\sigma_z^2 \cos\alpha \sin\alpha - 2\sigma\frac{d\sigma}{d\alpha} = (\sigma^2 - \sigma_x^2)\sin 2\alpha$$

$$2\sigma\frac{d\sigma}{d\alpha} = 0, \frac{d\sigma}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha}\left(\sigma_x\cos^2\alpha + \sigma_y\cos^2\beta + \sigma_z\cos^2\gamma\right) - (\text{ sk. } 11)$$

$$-2\sigma_x\cos\alpha \sin\alpha + 2\sigma_z \cos\alpha \sin\alpha = (\sigma_z - \sigma_x)\sin 2\alpha \text{ un}$$

$$2\tau\frac{d\tau}{d\alpha} = 0 = (\sigma_z^2 - \sigma_x^2)\sin 2\alpha - 2\sigma\frac{d\sigma}{d\alpha} = (\sigma_z^2 - \sigma_x^2)\sin 2\alpha - 2\sigma(\sigma_z - \sigma_x\sin^2\alpha$$

$$= (\sigma_z - \sigma_x)\sin 2\alpha\left[(\sigma_z + \sigma_x) - 2\sigma\right] = 0.$$

Atrisinājumi:

1) $\sigma_z - \sigma_x = 0$, $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z$ un $\tau^2 = \sigma_x^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) + \sigma_x^2$ $(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)^2 = \sigma_x^2 - \sigma_x^2 = 0$ (hidrostatikas gadījums)

2) $\sin 2\alpha = 0 \left| \begin{array}{l} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = \pi/2 \end{array} \right.$

Kad $\alpha_1 = 0$, tad: $\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

$\cos^2\beta + \cos^2\gamma = 0$, kas nozīmē, kā: $\cos\beta = \cos\gamma = 0$ un $\tau^2 = \sigma_x^2 - \sigma_x^2 = 0$, kas arī bija sagaidams; šķēlienā normālā pret kādu no galvenajām centrālajām asīm $\tau = 0$.

Kad $\alpha_2 = \pi/2$, tad: $\cos^2\alpha_2 + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$,

$\cos^2\gamma = \sin^2\beta$ un $(\tau^2)_{\alpha = \pi/2} = \sigma_y^2\cos^2\beta + \sigma_z^2\sin^2\beta - (\sigma_y\cos^2\beta + \sigma_z\sin^2\beta)^2 =$

$$= \sigma_y^2\cos^2\beta + \sigma_z^2\sin^2\beta - \sigma_y^2\cos^4\beta - \sigma_z^2\sin^4\beta - 2\sigma_y\sigma_z\cos^2\beta\sin^2\beta$$

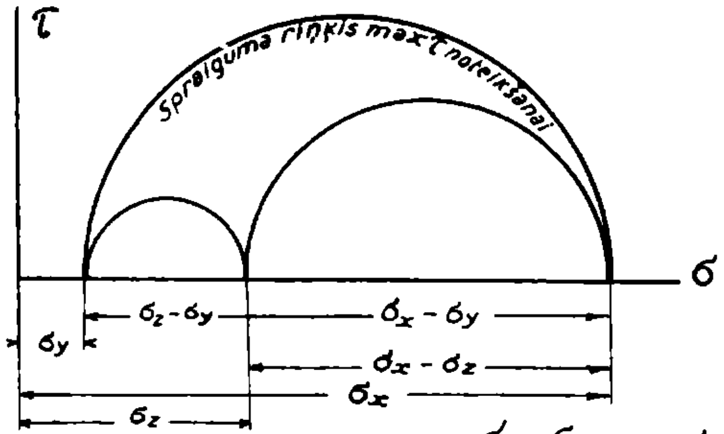
$$= \sigma_y^2\cos^2\beta(1 - \cos^2\beta) + \sigma_z^2\sin^2\beta(1 - \sin^2\beta) - 2\sigma_y\sigma_z\cos^2\beta\sin^2\beta =$$

$$= \sigma_y^2\cos^2\beta\sin^2\beta + \sigma_z^2\cos^2\beta\sin^2\beta - 2\sigma_y\sigma_z\cos^2\beta\sin^2\beta =$$

$$= \cos^2\beta\sin^2\beta(\sigma_y^2 - 2\sigma_y\sigma_z + \sigma_z^2) = \cos^2\beta\sin^2\beta(\sigma_y - \sigma_z)^2$$

$$= 4\cos^2\beta\sin^2\beta\left(\frac{\sigma_y - \sigma_z}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_y - \sigma_z}{2}\right)^2\sin^2 2\beta \quad (15)$$

Šis rezultāts ir sevišķi pamācošs, jo viņš nozīmē to, kā ekstremas vērtības sniedz Mohr'a spraigumu riņķi un kā šķēlienos, kas neiet caur kādu no asīm X Y vai Z atrodas starp ekstremālām vērtībām, tātad max uzmeklēšanai pietiek ar to Mohra riņķi, kas sniedz vislielakās skaitliskās nozīmes



3) Vēl atliek izpētīt 3.atrisinājumu $\sigma_z + \sigma_x - 2\sigma = 0, \sigma = \frac{\sigma_z + \sigma_x}{2}$

Uzrakstot Mohr'a riņķa nolīdzinājumu: $\left(\sigma - \frac{\sigma_z + \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_z - \sigma_x}{2}\right)^2$,

iegūstam $\tau = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_x}{2}\right)^2} = \pm \frac{\sigma_z - \sigma_x}{2} = \max\tau$

Prizmatiska ķermeņa,kas noslodzīts 3 centrālo asu virzienos ar spiedes jeb stiepes vai spiedes spēkiem,deformācijas. Apzīmēsim attiecīgas relativas deformācijas ar lx ,ly unlz. Tad relativa deformācija X-ass virzienā sastādās tā:vispirms pieņemam kā spēks darbojas tikai X-ass virzienā,tad uz Hooke'a likuma pamata: $l_{xx} = \frac{\sigma_x}{E}$ Pieņemsim,kā spraigums σ_x ir stiepes spraigums,tad prizmatiskais ķermenis X-ass virzienā pagarinajās.Tālāk pieņemsim,kā pēc tam,kad l_{xx} deformācija bija radusies,Y-ass virzienā tika pielikts stiepes spēks,kas izsauca spraigumu σ_y ar deformāciju $l_{yy} = \frac{\sigma_y}{E}$. Bet šī deformācija izsauc šķērskontrakciju X Z asu virzienos,tāpat ka σ_x izsauca šķērskontrakoju Y un Z asu virzienos.Šķērskontrakcijas iz - teiksme X-ass virzienā ir $l_g = -\nu l_{yy} = -\frac{\nu\sigma_y}{E}$,kur ν ir Poisson'a skaitlis.Tālāk iedomāsimies pieliktu spēku ar spraigumu σ_z arī Z ass virzienā,tad šķērskontrakcija X-ass virzienā ir $l_g = -\nu l_{zz} = -\frac{\nu\sigma_z}{E}$ un kopēja summara deformācija $l_x = l_{xx} - \nu l_{yy} - \nu l_{zz} = l_{xx} - \nu(l_{yy} + l_{zz}) = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z)$ .Ja kāds no spraigumiem ir spiediena spraigums,

tad tā priekšā jānovieto zīme - .Tāpat var uzrakstīt summaro deformāciju izteiksmes arī pārejo asu virzienos un iegūt:

$$l_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu(\sigma_y + \sigma_y)}{E},$$

$$l_y = \frac{\sigma_y}{\mathcal{E}} - \frac{\nu}{\mathcal{E}}\left(\sigma_x + \sigma_z\right), \qquad (\text{I})$$
$$l_z = \frac{\sigma_z}{\mathcal{E}} - \frac{\nu}{\mathcal{E}}\left(\sigma_x + \sigma_y\right)$$

Prizmatiskā ķermeņa tilpuma $\mathcal{V}$ relatīvā deformācija $\frac{\Delta\mathcal{V}}{\mathcal{V}}$.
Pieņemsim, ka taisnleņķiskā prizmatiska ķermeņa dimensijas ir a, b un c, tad $\mathcal{V}$=abc. Pēc deformācijas:

$$\mathcal{V}+\Delta\mathcal{V} = a\left(1\ l_x\right)\ b\left(1+l_y\right)c\left(1+l_z\right) = abc\left(1+l_x\right)\left(1+l_y\right)\left(1+l_z\right)$$

$$\frac{\Delta\mathcal{V}}{\mathcal{V}} = \frac{(\mathcal{V}+\Delta\mathcal{V})-\mathcal{V}}{\mathcal{V}} \quad \frac{abc\left(1+l_x\right)\left(1+l_y\right)\left(1+l_z\right) - abc}{abc} =$$
$$=\left(1+l_x\right)\left(1+l_y\right)\left(1+l_z\right) - 1 = 1+l_x l_y + l_y l_z + l_z l_x + l_x l_y l_z + l_x + l_y + l_z - 1$$

$=\left(l_x + l_y + l_z\right) + l_x l_y + l_y l_z + l_z l_x + l_x l_y l_z$.Šinī izteiksmē var atmest visus locekļus, kā samērā niecīgus pret ($l_x + l_y + l_z$) un iegūt:

$\frac{\Delta\mathcal{V}}{\mathcal{V}} = l_x + l_y + l_z$,ko var izteikt tā: taisnstūrīga prizmatiskā ķermeņa relativa deformācija ir vienāda ar šī ķermena šķautņu relativo deformāciju algebraisko summu.

Saskaņā ar (I) varam uzrakstīt:

$$\frac{\Delta\mathcal{V}}{\mathcal{V}} = l_x + l_y + l_z = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{\mathcal{E}} - \frac{2\nu}{\mathcal{E}}\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right) = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{\mathcal{E}}\left(1 - 2\nu\right) \quad (1)$$

Saskanā ar (1) $\frac{\Delta\mathcal{V}}{\mathcal{V}} = 0$, kad $\sigma_x + \sigma_y\ \sigma_z = 0$, vai

$1 - 2\nu = 0,\ \nu = 1/2$ ($\nu = 1/2$ piemīt parafinam)

Nav jāaizmirst, ka sistema (I) attiecas tikai uz spraigumiem proporcionalitates robežās. Kad ķermena spraigumi vienādi, tad:

$$\frac{\Delta\mathcal{V}}{\mathcal{V}} = \frac{3\sigma}{\mathcal{E}}\left(1 - 2\nu\right) = \frac{3}{\mathcal{E}}\left(1 - 2\nu\right)\sigma \quad \text{kur} \quad K = \frac{\mathcal{E}}{3\left(1 - 2\nu\right)}$$

Salīdzinajot izteiksmi $\sigma = K\frac{\Delta\mathcal{V}}{\mathcal{V}}$ ar Hooke'a formulu $\sigma = \mathcal{E}l$, redzam, ka K var uzskatīt par spiedes resp. stiepes elastības moduli attiecībā uz ķermeņa tilpuma relativo deformaciju.

Reducētie spraigumi $\sigma_{red.}$

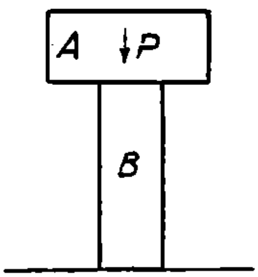
Pareizinajot sistemas (I) nolīdzinājumus uz $\mathcal{E}$ iegūstam:

$$l_x\mathcal{E} = \sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right), \quad l_y\mathcal{E} = \sigma_y - \nu\left(\sigma_x + \sigma_z\right),$$

$l_z\mathcal{E} = \sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)$ .Saskaņā ar Hooke'a likumu $l_x\mathcal{E}$, $l_y\mathcal{E}$ un $l_z\mathcal{E}$ izteic kādus spraigumus, kurus sauksim par reducētiem spraigumiem, $l_x \varepsilon = \sigma_x$ red, $l_y \varepsilon = \sigma_y$red. $l_z \varepsilon = \sigma_z$red. Šo spraigumu nozīme ir: $\sigma_x$red u.t.t.ir spraigumi,kas iedarbojoties vieni paši,bez citu 2 līdzda-lības,izsauktu tās pašas deformacijas l_x, l_y un l_z,ka tad.kad uz ķermeni iedarbojas vienlaicīgi visi spraigumi,kuru vērtības tiek uzietas saskaņā ar formulu $\sigma_x = \frac{P_x}{F_x}$ u.t.t.

Dinamiskās noslodzes iespaids.

Līdz šim daudzreiz klusu ciešot - mēs pielaidām ķermenim pielikto spēku pieaugumu no 0 līdz tā kādai galīgai vērtībai.Bet praksē var nākt priekšā ari gadījums,kad slodze iedarbojas piepeši,ar visu savu galējo vērtību.To gadījumu var iedomāties realizētu tā: smags ķermenis ir novests kontaktā ar prizmatisku ķermeni (sk.skici),bet pagaidām tiek noturēts tā,(pa



piemēru ar rokām) tā kā uz ķermeni neiedarbojas.Iedomāsimies,ka tagad piepeši esam rokas atņēmuši,tad smagais ķermenis uzreizi iedarbojas ar visu savu svaru P.Ķermenis B uz kuru uzguļas ķermenis A,tūlīt sāk deformēties,bet tā ka iekšējais spraigums seko Hooke'a likumam,t.i. šis spraigums ir proporcionals deformacijai,tad spraigums pieaugs no 0 līdz kādai galējai nozīmei.Ja tas ir tā,tad ķermenim A pieliktie spēki P un F nelīdzsvarojas un statikas atzinumus pielietot nevar.Ķermenis A kustēsies ar mainīgu ātrumu un izsauks savas masas inerces spēku iedarbi,kas radīs kinētisku enerģiju,atkarīgu no ātruma.Šī kustība būs raksturota ar to,ka ķerm.A ātrums no paša sākuma pieaugs,sasniegs savu vislielāko vērtību un tad nokritīs līdu 0,lai pēc tam ķermenī B uzkrātā potenciālā enerģija ķermeni A atkal atsviestu atpakaļ tā pirmatnējā stāvotnē,pēc kam process atkal atkārtosies u.t.t.Momentā,kad ķermena A ātrums ir 0 tā kinetiskā enerģija ari pārvēršas 0 un tad var pieņemt,ka spēka P darbs ir pilnīgi pārvērties ķermeņa B deformacijas darbā.Elastīgos ķermeņos resp.ķermeņu elastības robežās notiek sekojošs process:Ārējo spēka darbu D patērē iekšējie spēki,ta ka starp ā -

rejo spēku darbu D un iekšējo spēku darbu J pastāv sakarība: $D+J=0$. Elastīgos ķermeņos iekšējo spēku darbs nepāriet mechaniski ne restitujemos enerģijas veidos, ka p.piem. siltumā, bet gan potenciālā enerģijā t.i. spējā radīt no jauna darbu, kas smago ķermeni A atkal paceļ atpakaļ, ta ka rodās sakarība: $J+U=0$, no kurienes seko, ka ķermeņa deformacijas darbs $D=U$. Ja ķermeņa B absolutā deformacija ir Δl, tad $D=P\Delta l=\int_0^{\Delta l}\sigma_{\text{"}}F.d\Delta l=F\int_0^{\Delta l}\sigma_{din}d\Delta l=$ $=F\int\frac{E\Delta l}{l}.d\Delta l=\frac{FE}{l}\int_0^{\Delta l}\Delta l.d\Delta l=\frac{FE}{2l}\Big|(\Delta l)^2\Big|^{\Delta l}=\frac{FE}{2l}.(\Delta l)^2=\frac{FE.\Delta l.\Delta l}{2l}=\frac{FE l\Delta l}{2}=$ $=\frac{F.\sigma_{din}\Delta l}{2}$, no kurienes seko, ka: $\sigma_{din}=\frac{2P\Delta l}{F\Delta l}=2\sigma$ stat t.i. šinī īpatnējā dinamiskā noslodzes gadījumā dinamiskais spraigums σ_{din} ir 2 reizes lielāks par statisko.

Garamejot vēl minēsim, kā apskatītā gadījumā ķermenis A iedarbojas uz ķermeni B bez trieciena, bez sākuma ātruma, kas nebūtu, ja ķermenis A nokristu no kāda augstuma (pāļu iesišanas gadījumā).

Sakarā ar minēto jautājumu ir interesanti citēt franču spēka dinamiskās iedarbes iespaida izpausmes formulu: statisko noslodzi P jāpareizinā ar koeficientu $\varphi=1+\alpha+\beta=1+\frac{0,4}{1+0,2\,L}\,\frac{0,6}{1+\frac{4G}{S}}$,

kur apzīmē: L - tilta laidumu metros,

G - visa pastāvīgā slodze,

S - vislielakā kustigā slodze, kura vienā laikā var iedarboties uz laidumu.

Ja $L=\infty$ un $S=0$, tad $P_{din}=P.stat\,\varphi=1\left(\frac{0,4}{1+0,2L}\right)_{L\to\infty}\frac{0,6}{1+\frac{4G}{S}}$,

tad $P_{din}=$ Pstat. 1 = Pstat.

Ja $L=0$ un $G=0$, tad $\varphi=\left(\frac{1+0,4}{1+0,2L}\right)_{L=0}+\left(\frac{0,6}{1+\frac{4G}{S}}\right)_{G=0}=$ $=1+0,4+0,6=2$, t.i. mēs dabujam mūsu koeficientu.

Materiālu piekuses parādība.

Ne katru reizi spēki iedarbojas uz konstrukciju,pie - augdami no 0 līdz to galējai vērtībai,pēdējo pēc tam piepaturot.Ļoti bieži slodze svārstās,kriedama atpakaļ uz 0,lai no jauna atkal pieaugtu un pēc tam atkal atkristu.

Šī slodzes svārstība var notikt pat netiaki starp 0 un spēka kādu galēju vērtību,bet arī plašakās robežās - starp spēka pozitīvām un negatīvām vērtībām,pārejot no stiepes uz spiedi un atpakaļ.

Praktika rāda,ka slodzes svārstības ir ļoti kaitīgas konstrukcijas drošībai un kā konstrukcijas,resp.konstrukciju elementi,kas padoti slodzes svārstībām nonāk dažreiz destrukcijas stāvoklī pie spraigumiem,kas mazāki par R - materiāla galējo pretestību un dažreiz pat mazākiem par proporcionalitates robežu.

Šo parādību - proti metalu pretestības samazināšanos zem mainigās slodzes iespaida - sauc par metalu piekuses parādību.

Sakarā ar šo parastie izmēģinājumi ar materiāliem uz vienreizīgu pretestības pārbaudi min.gadījumā nav izšķiroši. Ir jāizdara speciāli mēģinājumi,reģistrejot kā svārstību skaitu n,pie kura materiāla destrukcija notiek,ta maxσ un minσ,starp kuriem svārstība notiek,tāpat attiecīgu materiālu ir ari jāpārbauda uz vienreizīgu galējo pretestību R,lai raksturotu materiālu no parastās pretestības viedokļa.

Kas attiecās uz piekuses parādības cēloņiem,tad pēdējie vēl nav pilnīgi izpētīti,bet galveno lomu šīs parādības rašanā spēlē pakāpeniska paliekošo deformāciju akumulācija,jo absolūti elastīgu ķermenu nav,un pēc katras materiāla - kaut ari elastīgas - piepūles un materiāla sekojošas atbrīvošanās tomēr pēdejā paliek,kaut ari niecīga - deformācija.

Funkcijas F (n,maxσ,minσ,R)= 0 uzmeklēšana.

Visvairāk pazīstami pētījumi par piekuses parādību ir Wöhler'a pētījumi (1860 - 1870),kuru rezultātus var formulēt:

1) Tādi materiāli,kā dzelzs un tērauds,var tikt novesti destrukcijas stāvoklī ar spraigumiem,kas mazāki par galējo pretestību R,kas uzieta parastā ceļā ar vienreizīgu materiāla pārbaudi,bez noslodzes svārstības,ja tikai mainīt spraigumus lielu reizu skaitu.

2) Reizu skaits n,ar kuru var novest materiālu destrukcijas stāvoklī,ir atkarīgs ne tikai no maxσ, bet arī no spraigumu,starp kuriem notiek svārstības,starpības.

3) Jo šī starpība mazāka,jo lielāks ir n,ar kuru var panākt materiāla destrukciju.

4) Var uziet tādu svārstošo spraigumu starpību,pie kuras materiāls var izturēt kaut kuru svārstību atkārtojumu n.

5) P.4.minēta svārstību starpība krīt līdz ar maxσ pieaugumu.

Šinīs 5 punktos ir minēti sekoši elementi,no kuriem materiālu destruejošs skaitlis n ir atkarīgs,tie ir maxσ,minσ un R, resp.maxσ,(maxσ - minσ=spraigumu starpība),R,resp.minσ, (maxσ - minσ),R.

Mūsu uzdevums ir uziet empirisku funktionālu sakarību starp vienu no šo elementu kombinaciju grupām p.piem.uziet F(n,maxσ,minσ,R) = 0.Praktisku interesi modinā svārstošo spraigumu kombinācija,kas pielaiž ļoti lielu,pat kuru n atkārtojumu.

- - - - - - - - - -

1)Wohler: Ueber die Festigkeitsversuche mit Eisen und Stahl Zeitschr.fur Bauwesen 1870.

Teoretiski tas nozīmētu, ka mums būtu jāuzmeklē $F(n, \max\sigma, \min\sigma, R)_{n\to\infty} F_0(\max\sigma, \min\sigma, R) = 0$.

Šo uzdevumu mēs varam veikt, balstoties uz eksperimenta datiem, pie kam empiriskas funkcijas F_0 precizitāte atkarāsies no izlietoto eksperimenta daļu skaita.

Šo funkciju uziesim attiecībā uz dzelzi ar $R = 3600\ kg/_{cm^2}$ un maxe apm. 20%. Šī dzelzs šķirne ir uzrādījusi pie $\max\sigma = +2400\ kg/_{cm^2}$, $\min\sigma$ $-2400\ kg/_{cm^2}$ $N = 56430$ $\max\sigma = +1200\ kg/_{cm^2}$, $\min\sigma$ $-1200\ kg/_{cm^2}$ $N = 132250000$ (sabrukums netika kontatēts).

2) pie $\max\sigma = 2400\ kg/_{cm^2}$, $\min\sigma = 0$, $n = 10.141.645$

3) $R = 3600\ kg/_{cm^2}$ $\min\sigma = 0$, $n = \frac{0}{0}$ (kurš katris skaitlis)

Uz šo datu pamata mēģināsim uzbūvēt funkciju F_0.

Pienemsim, kā: $\min\sigma = a + b\max\sigma + c\max^2\sigma$.

Par mēra vienību skaitīsim $1200\ kg = \frac{1}{3} R$, tad:

$$-1 = a + b + c \ ,\quad (1)$$
$$0 = a + 2b + 4c \ ,\quad (2)$$
$$3 = a + 3b + 9c \ ,\quad (3)$$

Atvelkot (1) no (2) iegūstam: $1 = b + 3c$; $3 = 3b + 9c$, ko ievietojot (3), iegūstam: $3 = a + 3b + 9c = a + 3$, no kurienes seko kā: $a = 0$, Pie $a = 0$ (1) un (2) pāriet

$$-1 = b + c \ ,\quad (1^{bis})$$
$$0 = b + 2c \quad (2^{bis})$$

Atvelkam (1^{bis}) no (2^{bis}) un dabujam:

$$1 = c, \text{ pie kam } b = -2 \text{ un}$$

$$\min\sigma = a + b\max\sigma + c\max^2\sigma = -2\max\sigma \ \max^2\sigma$$

$$\frac{\min}{\max} = -2 + \max\sigma \ ,\ \max\sigma = 2 + \frac{\min\sigma}{\max\sigma} \cdot 2\left(1 + \frac{\min\sigma}{\max\sigma}\right)$$

Tā kā par mēra vienību tika pienemts $1200\ kg = \frac{1}{3}R$, tad

$$\max\sigma = \frac{2}{3} R \left(1 + \frac{\min\sigma}{\max\sigma}\right)$$

Kā redzams, funkcija F_0 ir iegūvusi veidu:

$$F_0(\max\sigma, \min\sigma, R) = 0$$

Pie dota R pieškirot $\max\sigma$ vai $\min\sigma$ noteiktu nozīmi, iegūstam attiecīgi $\min\sigma$ vai $\max\sigma$. Bet funkcijas uzbūve ir tāda, kā par argumentiem var skaitīt arī $\frac{\min\sigma}{\max\sigma}$ vai $\max\sigma$ un meklēt attiecīgi $\max\sigma$ vai $\frac{\min\sigma}{\max\sigma}$. Piemērs: pieņemsim, kā $\frac{\min\sigma}{\max\sigma} = -1$, tad

$\max\sigma = \frac{2}{3} R\,(1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{3}R = 1200$ kg un $\min\sigma = -1.1200 = -1200$ kg

$\frac{\min\sigma}{\max\sigma} = +1$, tad $\max\sigma = \frac{2}{3} R\,(1 + \frac{1}{2})$ $R = 3600$ kg un $\min\sigma = +1.R = R$

$\frac{\min}{\max} = 0$, R $\max\sigma = \frac{2}{3} R = +2400$ kg un $\min\sigma = 0.\max\sigma = 0$

Pieņemsim, ka ir dots $\min\sigma$, tad no izvestas formulas seko, kā: $3\max^2\sigma = 2R\max\sigma + R\min\sigma$, $3\max^2\sigma - 2R\max\sigma - R\min\sigma = 0$, $\max\sigma = 2R \pm \sqrt{4R^2 + 12R\min\sigma}$, ar kuras palīdzību var uziet meklējamo $\max\sigma$, kad $\min\sigma$ ir dots.

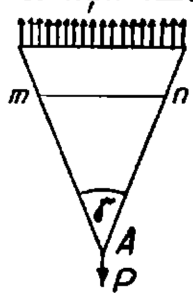
Tā kā pie $\frac{\min\sigma}{\max\sigma} = +1$, $\max\sigma = \min\sigma = R$ galējai pretestībai, tad, neskatot uz to, kā pie citām $\max\sigma$ un $\min\sigma$ nozīmēm svārstību skaits n sniedzās vairākos miljonos, tomēr ar min. formulas palīdzību uzietas $\max\sigma$ un $\min\sigma$ vērtības nevar skaitīt par pielaižamām, bet jāieved sprieguma drošības koeficients.

Balszoties uz eksperimenta tabulu datiem varētu iegūt arī precizākas, nekā izvestā, formulas, bet domajams, tām nevarētu piešķirt sevišķas priekšrocības samērā pret augstāki izvesto, ļoti vienkāršo formulu.

Ķermeņu ar mainošos šķēlienu, kā arī ar caurumiem vājināto ķermeņu stipe un spiede.

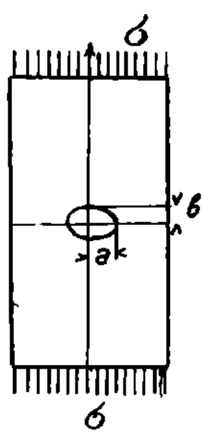
Inženieram daudzreiz nākās uziet stiepes, resp. spiedes spraigumus arī aprizmatiskos, kā arī ķermeņos ar spēji mainošamies šķēlieniem, un arī ķermeņos, kas vājināti ar caurumiem.

Precīzu formulu, kuras sniedz matematiska elastības teorija, trūkuma dēl inženieri arī šinī gadījumā lieto tās pašas formulas, kā prizmatisku ķermeņu gadījumā, kas noved pie zinamām kļūdam. Iedomāsimies vadža veidīgu ķermeni ar pastāvīgu biezumu.

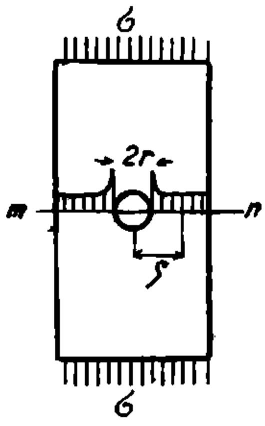


Pieņemsim, kā materiāls ir gumija un kā uz šī ķermeņa sānvirsmas ir iegravētas parallelu un līniju sistema. Kad šis ķermenis tiks ar spēka P spiests,tad iegravetās līnijas nepaliks taisnes,parallelas savā starpā,bet tās izlieksies,pie kam attālums starp šīm līnijām būs vislielākais gar centrālo asi,kas nozīmē,kā ari vislielākie spraigumi radīsies gar šo asi.Precīzie pētījumi noved pie rezultāta,kā pie $\gamma=10^{\circ}$ starpība starp vislielāko spraigumu un vidējo spraigumu,kuru dabū dalot P uz attiecīgo šķēliena laukumu,nepārkāp 1,3%,kas nozīmē,kā šinī gadījumā parastais spraigumu uzieśanas paņēmiens būtu pielaižams.

Turpretīm pie $\gamma=30^{\circ}$ šī divergence sasniedz jau 13%. Tālākā lenķa palielināšana izsauktu vēl lielāku nevienmērību spraigumu sadalījumu.



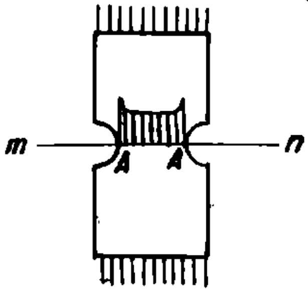
Tālāk apskatīsim caurumu iespaidu. Pieņemsim,kā caurums ir eliptisks. Tad matem.elastības teorīja sniedz: $\max\sigma=\sigma\left(1+\frac{2a}{b}\right)$,kur a un b ir elipses puasis,bet σ ir vienmērīgais spraigums,kuru uzejam parastā ceļā,dalot P uz ķermeņa nevājināto šķēlienu.Šī formula ir sevišķi pamācoša attiecībā uz plaisām,kad b samazinajās,tad elipse tūvojās šķērsplaisai un $(\max\sigma)_{b\to 0}=\sigma\left(1+\frac{2a}{b}\right)_{b\to 0}=\infty$,kas nozīmē,kā šķērsplaisas ir pavisam bīstamas.Turpretīm,$(\max\sigma)_{a\to 0}=\sigma\left(1+\frac{2a}{b}\right)_{a\to 0}=\sigma$, t.i.garenplaisas pavisam nav bīstamas.$(\max\sigma)_{a=b}=\sigma\left(1+\frac{2a}{b}\right)=3\sigma$ ripas caurumam.Vēl ir interesanti apskatīt σ' maiņas likumu gar asi,perpendikulāru spēka virzienam un ejošu caur apaļa cauruma centru.



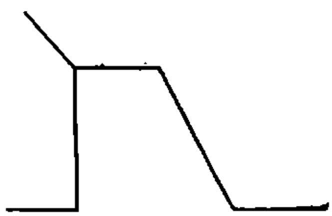
Šo likumu ari sniedz matem.elastības teorija: $(\sigma')_{\rho=r}=\frac{\sigma}{2}\left[2+\frac{r^2}{\rho^2}+3\frac{r^4}{\rho^4}\right]=\frac{\sigma}{2}(2+1+3)=\frac{\sigma\cdot 6}{2}=3\sigma$, t.i. gar cauruma malu spraigums ir 3 reizes lielāks par $\sigma=\frac{P}{F}$.Turpretīm,pietiekošā attālumā no centra

$$(\sigma')_{\rho\to\infty}=\frac{\sigma}{2}\left[2+\frac{r^2}{\rho^2}+3\frac{r^4}{\rho^4}\right]_{\rho\to\infty}=\sigma$$

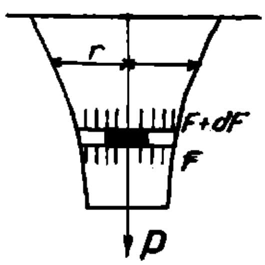
Tas pats sakams par ķermeņa vājināšanu no sāniem(sk.skici).



Mainot izgriezuma formu to izstiepjot min.virzienā,mēs spraigumus p.p.A palielinājam.Katrā gadījumā,kur krustojas kontura taisnes,var iedomāties šo krustojumu radušos tādā ceļā,kā (sk. skici) aploces,kuru skar kontura taisnes,radius ir samazinājies līdz 0,kas radījis vislielāko stūra asuma pakāpi,līdz ar ko stūrī rodās palielināti spraigumi.Šāda veida parādības mēs novērojam p.piem.lokomotīvu rāmju bukšu izgriezumos,(sk.skici) kur plīsums no kontura stūra virzas slīpi uz iekšu.Lai aizkavētu plīsuma tālāko izplātīšanos,plīsuma galā izurbj nelielu caurumiņu,lai novērotu radušos asumu.Atgriežoties pie elipsoidāla cauruma šēmas,tādā ceļā tiek palielināta elipses pašas vērtība b no 0 līdz ieurbta cauruma radiusam,līdz ar ko krīt spraigumi.



Konturu stūru nevēlamo iespaidu mēģināsim noskaidrot vēl tādā ceļā.Iedomāsimies ķermeni,kura ripveidīgie šķēlienu radiusi samazinājās pēc kāda likuma.Tad apskatot sasvītrota ripveidīga elementa līdzsvaru,mums būtu jānāk pie sekojoša slēdziena:



Spraigumi šķēlienos F un F+dF nav vienādi, jo vienā šķēlienā tie ir $\sigma = \frac{P}{F}$ un augšejā $\sigma + d\sigma = \frac{P}{F + dF} = \sigma - P\frac{dF}{F^2}$ un

$d\sigma = -\sigma\frac{dF}{F}$ .Ja sašvītrota ripveidīgā ķermeņa radius ir ρ ,

tad vertikālā spēku komponente ir $\sigma\pi\rho - (\sigma - \sigma\frac{dF}{F})\pi\rho^2 = (\sigma\frac{dF}{F}\pi\rho^2 \neq 0$

un tadēļ,pieņemot vienmērīga σ sadalījumu likumu pa šķēlienu, jāpielaiž spraigumu eksistence gar cilindrisko ķermeņa virsmu $dx\,2\pi\rho$, kadēl $\sigma\frac{dF}{F}\pi\rho^2 - \tau 2\pi\rho\,dx$ 0, no kurienes: $\tau = \frac{\sigma\,dF\,\pi\rho^2}{F.2\pi\rho\,dx} =$

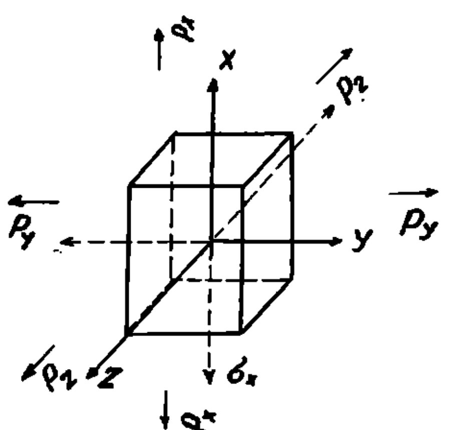
$$= \frac{\sigma.\,2\pi r\,dr.\,\pi\rho^2}{\pi r^2.\,2\pi\rho\,dx} = \frac{P.\,2\pi r.\,\pi\rho^2\,dr}{\pi r^2.\,\pi r^2.\,2\pi\rho\,dx} = \left(\frac{P.\rho.}{r^3\pi}\right)\frac{dr}{dx} = \frac{P\rho}{r^3\pi}\,tg\alpha,$$

kur $tg\alpha$ ir r liknes tangentes tangens.

Jo $tg\alpha$ lielāks, jo τ lielāks. Kad notiek kontura lūzums, tad $tg\alpha$ spēji mainas, kad šis lūzums notiek $or\ \alpha = \pi/2$ tad $tg\alpha = \infty$ un $\tau = \infty$, kas nozīmē, kā ķermenī jārodās plaisai virzienā, ko mēs ari ļoti bieži novērojam. Šī pierādījuma vājā puse ir vienmērīgais sadalījums pa šķēlienu.

Dažādas stiprības teorijas.

Atškirsim divus prizmatiska kermena (s. skici) noslpdzes veidus: elementāro ar noslodzi vienas kādas nebūt galvenās ass virzienā un komplicēto ar noslodzi visu trīju vai vismaz divu galveno asu virzienos. Ir saprotams, kā elementāra noslodze var tikt uzskatīta, kā komplicētas noslodzes atsevišķs gadījums, kad noslodzes divu asu virzienos trūkst.



Vienosimies šo noslodzu dažādu mechanisku īpašību vērtības atškirt ar attiecīgiem indeksiem el un komp. (par piem. σ_{el} un σ comp u.t t.)

Tālāk vienosimies skaitīt divus prizmatiskus ķermeņus, vienu noslodzītu elementāri un otru kompl. par vienādi stipriem, ja kādas elementāras noslodzes mechaniskas īpašības jeb faktora vērtība ir vienāda ar komp. noslodzes attiecīgas īpašības maksimālo vērtību(p.piem. σ_{el} = max σ comp, ℓ_{el} = max ℓ comp τ_{el} = max τ comp u.t.t.)

Atkarībā no tam, kādas elem. un komp. noslodzes īpašību jeb faktoru vērtības tiek pielīdzinātas, rodas dažādas stiprības teorijas.

1. teorija.

Saskaņā ar visvecāko stiprības teoriju (šo teoriju ir atbalstījuši: stiprības mācības nodibinātājs Gallilei, tālāk Leibnitz, Navi , Lame , Clapeyvon's, Clebsch's, Rankin's) divi ķermeņi ir vienādi stipri, ja 6_{el} - max 6 comp . Pieņemot šo teoriju, jāpieņem, kā komp. piepūlētā kermeņa stiprību nodrošina: 6_{eladm} = max 6_{comp}

2. teorija.

Tūlīt var konstatēt 1. teorijas nepilnības. Proti, cementa kubs, padots vienādiem visos trījos vienāda veida (stiepes vai spiedes noslodzei resp. spraigumiem, iztur nesamērojami lielāku 6 neka 6 max6_{comp} $\leq$ 6_{eladm}. Jādomā, kā tāds kubs nogremdēts okeāna visdziļākā vietā, ņemot vērā ideāli vienmērīgu vispusīgu, kaut ari ļoti ievērojamu, noslodzi, nemaz nav sadrupināms.

Ņemot šo vērā, citi zinatnieki , kā Poncelet, Barre'de St. Venant, Mariotte, Grashof's un ari Navier, proponēja par bīstamo materiāla destrukcijas robežu atzīt lineālu deformāciju e , pie kuras materiāls tiek sagrauts. Sakarā ar šo teoriju: e_{elem} $\frac{1}{E}\left[6_x - \nu(6_y + 6_z)\right] = max\, e_{comp}$ pie kam no visam 3 e_{comp} jāizvēl max e_{comp} , tā kā vienādu abu ķermeņu stiprību izteic e_{el} = max e_{comp} , bet comp, noslodzīts ķermeņa stiprību nodrošina sakarība: $e_{eladm} \geq$ max e_{comp}.
Pareizinajot augšējo formulu uz E, Iegūstam:
$$eE = 6 = 6_x - \nu(6_y + 6_z) = 6_{red}$$
. Šis teorijas nepilnība tomēr vēl ir diezgan liela jo ir daudz faktu, kas tai runā pretī.

Coulomb'a teorija

Šīs teorijas autors ir Coulomb's. Šo izteic sakarība: maxτ_{el} $=^{max}$maxτ_{comp} , tā kā $\tau = \frac{6_x - 6_y}{2}$ sin 2θ , tad maxτ_{el} =

$$= \left(\frac{6_x - 6_y}{2}\right) \sin \underset{\substack{\theta = 45^\circ \\ 6_y = 0}}{2\theta} \quad \frac{6_{elem}}{2} \text{ un } \frac{6_{elem}}{2} = \max\left(\frac{6_x - 6_y}{2}\right)$$

$\sigma_{elem} = \max \Delta\sigma$, kur ar $\Delta\sigma$ apzīmēta normālo spraigumu diference.

Šī teorija pietiekoši labi izskaidro gadījumu ar cements kubu, jo max $\max_{comp} = \left(\max \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)\right)_{\sigma_x = \sigma_y} = 0 < \max \tau_{elem\,adm} = \frac{\sigma_{el}}{2}$,

bet attiecībā uz stiepes spraigumiem šī attiecība gan neattaisnojas trausliem materiāliem, kāds ir cements, turpretīm attiecībā uz plastiskiem materiāliem šī teorija ir pilnigāka nekā iepriekšejās.

4. Mohr'a teorija.

Attiecībā uz trauskiem materāliem: cementu, ketu (čugumu) u.c. vairāk piemērota ir Mohr'a stiprības teorija. Šīs teorijas pamatojumam attiecībā uz stiepi vairs neder iepriekšejais divu ķermeņu vienādas stiprības definējums.

Eksperiments māca, kā materiāli ir mazāk stipri, ja tos padód stiepes spēkiem un pēc tam to pretestība stiepei ir mazāka, jo stiepes spraigumu diference resp. $\max \tau_{comp}$ divu asu virzienos ir lielāka, t.i. jo šo spraigumu diference resp. $\max \tau_{comp}$ lielāka, jo mazākam jābūt šo spraigumu skaitliskām vērtībām; spraigumu diference, resp. $\max \tau_{comp}$ noteic spraigumu vislielāko iespējamo vērtību, kuru nedrīkst pārkāpt, bez kā ķermenis netiktu sarauts.

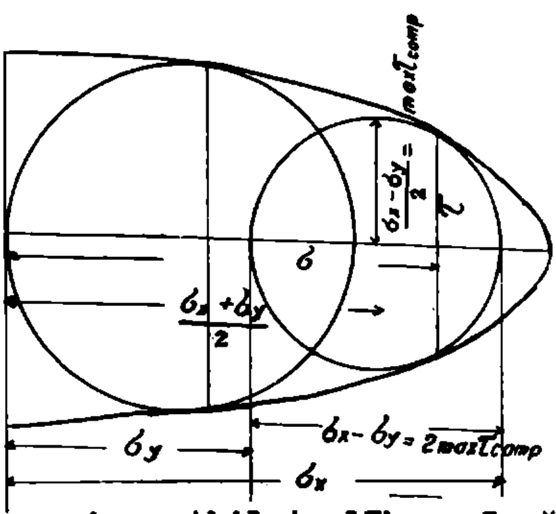
Ja viens no divi stiepes spraigumiem ir 0, tad spraigumu diference, resp. $\max \tau_{comp}$ ir $\frac{\max \sigma_{comp}}{2}$ un pēdejam spraigumam F vienādas stiprības gadījumā jāapmierinā prasība $\max \sigma_{comp} = \sigma_{el}$ bet stiprību nodrošinā prasība: $\max \sigma_{comp} \leq \sigma_{el\,adm}$. Ja abi spraigumi ir savstarpīgi ar pretējām zīmēm, tad saprotams $|\max \sigma_{comp}| < |\max \sigma_{comp}| + |\sigma_{comp}|$, un tad stiprību noteic $|\max \sigma_{comp}| + |\sigma_{comp}|$

Šo Mohr'a likumu var attiekt, kā uz ķermeņa galējo tā arī uz pielaižamo pretestību, vai kādu citu spraiguma veidu, p.p. elastības, resp. proporcionalitates robežu u.tt.

Uzrakstot Mohr'a spraigumu riņķa nolīdzinājumu

$$\left(\frac{\sigma - \sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 = \left(\max \tau_{comp}\right)^2,$$

mēs saskatam šinī nolīdzinājumā taisni tos elementus, un $\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$, kurus mēs saistījam (caur izteikto stiprības likumu). Tā tad līdz ar $\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}$ pieaugumu jākrīt $\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$ un otrādi, kas nozīmētu to pašu, kā līdz ar riņķu centru $\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$ attālināšanos no koordinātu sākuma riņķu caurmēram jasamazinajās. (sk. skici). Šo samazināšanos varētu realizēt tā, kā novilktu kādu līkni, kas apvījot Mohr'a spraigumu riņķus, spiestu šo riņķu caurmērus samazināties līdz ar to centru attālināšanos no koordinātu sākuma. Šis līknes veids varētu būt apm. tāds, kādu esam skicējuši. Ieskatoties skicē, mēs konstatējam, kā šis līknes koordinātes ir σ un τ, kadēl problēma reducejās pie funkcijas $f(\sigma, \tau) = 0$ uzieša-



nas, kas atbilstu līknes īpašībām.

Tālāk mēs konstatējam, kā apvīstīšana nozīmē to, ka Mohr'a riņķiem un līknei $f(\sigma, \tau) = 0$ jābūt pieskares punktā kopējai tangentei. Tagad mūsu rīcībā ir pietiekošs noteikumu skaits funkcijas F $F\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}, \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)$ uziešanai

Šie noteikumi ir: $\left(\sigma - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2$, (1)

$f(\sigma, \tau) = 0$, (2)

abu līkņu tangenta sakrišana (3)

Nodiferencejot nol.(1), iegūstam: $\left(\sigma - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) d\sigma + \tau d\tau = 0$

Nodifernncejot nol(2) iegūstam: $\frac{df}{d\sigma} d\sigma + \frac{df}{d\tau} d\tau = 0$,

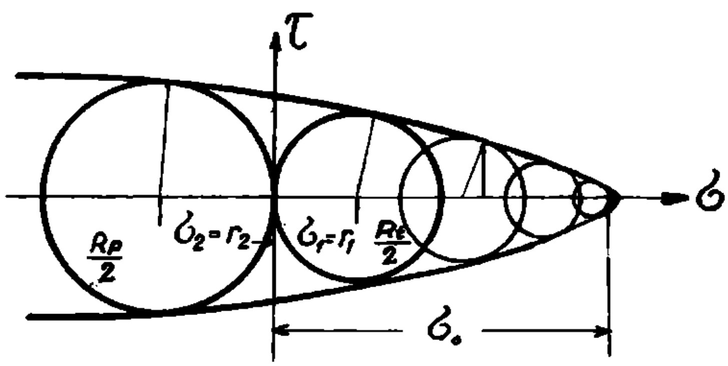
no kurienes, ņemot vērā noteikumu (3), seko, kā:

$$- \frac{d\sigma}{d\tau} = \frac{\tau}{\sigma - \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}} = \frac{\frac{df}{d\tau}}{\frac{df}{d\sigma}} \quad \text{jeb} \quad \frac{\frac{df}{d\tau}}{\tau} = \frac{\frac{df}{d\sigma}}{\sigma - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}} \qquad (3^{bis})$$

Tagad mūsu rīcībā ir trīs nolīdzinājumi, kas satur 4 mainīgus:

$\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}$, $\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}$, σ un τ. Izslēdzot no šo nolīdzinājumu sistemas σ un τ, iegūstam meklējamo funkciju:
$F\left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}, \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)=0$. Piešķirot šinī nolīdzinājumā kādam no mainīgiem, p.piem. σ_y, speciālu nozīmi, uziesim tam atbilstošu σ_x nozīmi, un jautājums par pielaižamo stiprību tad ir atrisināts.

Mohr'a līknes nolīdzinājums nav zinams. Bet mēs varam mēģināt to uziet šādā ceļā.
Trausliem materiāliem stiepes rajonā pienemsim:
1) $\tau^2 = A(\sigma_0 - \sigma)$, ka Mohr'a līknes izteiksmi ar divi nezinamiem parametriem A un σ_0. Šai līknei piemīt īpašība, kā $(\tau)_{\sigma=\sigma} = 0$, ko arī mēs no šīs līknes prasam, proti, kā galējā attālumā no τ- ass τ paliek 0. Bez tam mēs prasīsim, lai Mohr'a līkne



tange spraiguma $R_t=\sigma_{el}=r_1$ un spiedes spraiguma $R_p=\sigma_{2el}=r_2$ riņķus. Šo riņķu nolīdzinājumi ir: $\tau^2+(\sigma-r_1)^2=r_1^2$ (2) stiepes riņķim un $\tau^2+(\sigma+r_2)^2=r_2^2$ (3) spiedes riņķim.
Diferencējot nol.(1) un (2) iegūstam: $+2\tau\tau' = -A = -2(\sigma-r_1)$, no kurienes: $(\sigma-r_1)=\frac{A}{2}$, $\sigma=\frac{A}{2}r_1$, ievietojot nol.(2) iegūstam: $\tau^2 = r_1^2-\frac{A^2}{4}$. Šo τ^2 nozīmi ievietosim nol.(1) un dabusim: $r_1^2-\frac{A^2}{4}=A\left(\sigma_0-\frac{A}{2}-r_1\right)$ (I). Bet tādu pašu sakarību mēs prasam no spiedes riņķa, kur jābūt: $r_2^2-\frac{A}{4}=A\left(\sigma_0-\frac{A}{2}+r_2\right)$ (II)
Nolīdzinājumus (I) un (II) var pārrakstīt:

$$-4r_1^2 \mp A^2 = -2A(2\sigma_0-A-2r_1) = 4A\sigma_0 \mp 2A^2 \pm 4Ar_1 \quad (\text{I bis}).$$

$$4\tau_2^2 - A^2 - 2A\,(2\sigma_0 - A + 2\tau_2) = 4\,A\sigma_0 - 2\,A^2 + 4\,A\tau_2 \qquad (\text{II}\ \underline{\text{bis}})$$

$$4\,(\tau_2^2 - \tau_1^2) = \qquad\qquad = 4\,A\,(\tau_2 + \tau_1)$$

$$A = \frac{\tau_2^2 - \tau_1^2}{\tau_2 + \tau_1} = (\tau_2 - \tau_1)$$

No (II) seko: $4\,A\sigma_0 = 4\tau_2^2 - A^2 + 2\,A^2 - 4\,A\tau_2 = 4\tau_2^2 + A^2 - 4A\tau_2$,

$$\sigma_0 = \frac{4\tau_2^2 + A^2 - 4\,A\tau_2}{4\,A} = \frac{4\tau_2^2 + (\tau_2 - \tau_1)^2 - 4\,(\tau_2 - \tau_1)\tau_2}{4(\tau_2 - \tau_1)} =$$

$$= \frac{4\tau_2^2 + \tau_2^2 - 2\tau_1\tau_2 + \tau_1^2 - 4\tau_2^2 + 4\tau_1\tau_2}{4(\tau_2 - \tau_1)} = \frac{\tau_2^2 + 2\tau_2\tau_1 + \tau_1^2}{4(\tau_2 - \tau_1)} = \frac{(\tau_2 + \tau_1)^2}{4(\tau_2 - \tau_1)}$$

un Mohr'a līknes nolīdzinājums ir:

$$\tau^2 = A\,(\sigma_0 - \sigma) = (\tau_2 - \tau_1)\left[\frac{(\tau_1 + \tau_2)^2}{4(\tau_2 - \tau_1)} - \sigma\right] = \frac{(\tau_2 + \tau_1)^2}{4} - \sigma(\tau_2 - \tau_1).$$

Ja pienem kā: $\tau_2 = k\tau_1$, tad Mohr'a līkne ir:

$$\tau^2 = \frac{\tau_1^2}{4}(k+1)^2 - \sigma\tau_1(k-1) = \frac{\tau_1}{4}\left[\tau_1(k+1)^2 - 4\sigma(k-1)\right] =$$

$$= \frac{R_t}{8}\left[\frac{R_t}{2}(k+1)^2 - 4\sigma(k-1)\right]. \quad (4)$$

Plastiskiem materiāliem ir $k = 1$ un Mohr'a līknei - ja tā korekti atvasināta - jānoved pie Coulomb'a formulas. Patiesi, šinī gadījumā $(\tau^2)_{k=1} = \frac{R_t}{8}\cdot\frac{R_t}{2}\cdot 4 = \frac{R_t^2}{4}$, $\tau = \frac{R_t}{2}$ (Coulomb'a formulas spec. veids).

Saskaņā ar izvesto formulu vislielākais iespējamais stiepes spraigums max vispusīgā vienmērīgā noslodzē būtu pie $\tau^2 = 0 = \frac{R_t}{8}\left[\frac{R_t}{2}(k+1)^2 - 4\sigma\max(k-1)\right]$, $\sigma\max = \frac{R_t}{8}\frac{(k+1)^2}{(k-1)}$

Meklēsim $\max\sigma_{max}$. Tad $\frac{d\sigma\max}{dk} = \frac{R_t}{8}\cdot\frac{2(k+1)(k-1) - (k+1)^2}{(k-1)^2} = 0$

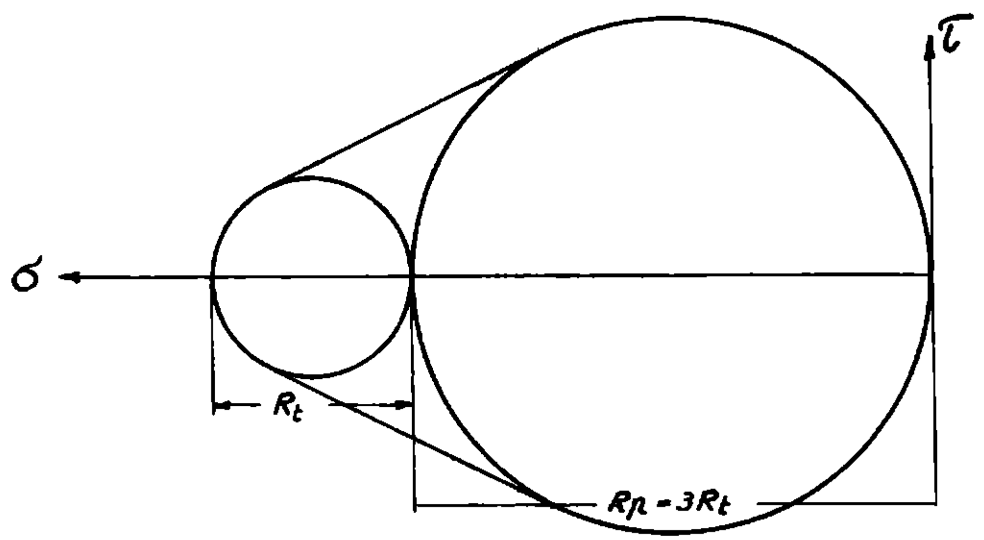
$2\,(k+1)(k-1)-(k+1)^2=0=(k+1)\left[2\,(k-1)-(k+1)\right]=0,$

$k=-1$ (neder), $2\,(k-1)-(k+1\,)=2k-2-k-1=K-3=0.$

$K=3$. Tā kā $\frac{d}{dk}\,(k-3)=1>0$, tad $k=3$ dod funkcijas

$\min \sigma_{max}=\frac{R_t}{8}\left(\frac{k+1}{k-1}\right)^2_{k=3}=\frac{R_t}{8}\,\frac{4^2}{2}\,R_t\,.\frac{16}{16}=R_t$, t.i. Mohr'a līkne

gūst veidu saskanā ar skici:



Attālinājoties ar k no 3 ka uz vienu tā uz otru pusi, mēs konstatētu, ka $\sigma_{max}>R_t$

Tālāk atgriezīsimies pie nolīdzinājumu sistēmas (1), (2) un (3^{bis}). Tagad $f(\sigma,\tau)=0$ (2) ir uzieta un $f(\sigma,\tau)=0$ reprezentē (4). Diferencējot (4) iegūstam: $2\tau\,d\tau=-\frac{R_t}{2}d\sigma\,(k-1)$,

bet diferencējot (1), iegūstam $2\left(\sigma-\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)d\sigma+2\tau\,d\tau=0$,

$2\tau d\tau=-\,2\left(\sigma-\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)d\sigma.$ pielīdzinājot abus $2\tau d\tau$, iegūstam:

$-\frac{R_t}{2}\,d\sigma\,(k-1)=-\,2\left(\sigma-\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)d\sigma$, no kurienes se-

ko, kā $\left(\sigma-\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)=\frac{R_t}{4}\,(k-1)$ (5). Pārējie nolīdzinājumi ir (1) un (4). Izslēgsim šās nolīdzinājumu sistemas σ un τ. Šis izslēgšanas rezultāts ir:

$$\left(\sigma-\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)^2+\tau^2=\frac{R_t^2}{16}(k-1)^2+\frac{R_t}{8}\left[\frac{R_t}{2}(k-1)^2-4(k-1)\left\{\frac{R_t}{4}(k-1)+\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right\}\right]=\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2$$

Mērīsim visus spraigumus ar R_t tad:

$$\frac{(k-1)^2}{16}+\frac{(k+1)^2}{16}-\frac{(k-1)^2}{8}-\frac{(\sigma'_x+\sigma'_y)}{4}(k-1)=\left(\frac{\sigma'_x-\sigma'_y}{2}\right)^2 \quad \text{, kur}$$

$$\sigma'_x=\frac{\sigma_x}{R_t}, \quad \sigma'_y=\frac{\sigma_y}{R_t} \qquad \frac{(k+1)^2}{16}-\frac{(k-1)^2}{16}=\frac{(\sigma'_x-\sigma'_y)^2}{4}+(k-1)\frac{(\sigma'_x+\sigma'_y)}{4},$$

$$\frac{k^2-2k+1-k^2+2k-1}{16}=\frac{k}{4}=\frac{(\sigma'_x-\sigma'_y)^2}{4}+(k-1)\frac{(\sigma'_x+\sigma'_y)}{4},$$

$$\boxed{k=(\sigma'_x-\sigma'_y)^2+(k-1)(\sigma'_x+\sigma'_y)} \quad (6)$$

. Šī ir meklējamā funkcija F

$$\left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}, \frac{\sigma'_x-\sigma'_y}{2}\right)=0,$$

Atsevišķi gadījumi.

1) $k=1$; $1=(\sigma'_x-\sigma'_y)^2$, $R_f^2=(\sigma_x-\sigma_y)^2$, $\frac{R_t}{2}=\pm\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}$ (Coulomb'a gadījums).

2) $\sigma'_x-\sigma'_y=0$: $k=-(k-1)(\sigma'_x+\sigma'_y)=-(k-1)\,2\sigma'_y$.

Neiespējams gadījums.

3) $\sigma'_x+\sigma'_y=0$: $k=(\sigma'_x-\sigma'_y)^2=4\sigma'^2_x$, $\sigma'_x=\sqrt{\frac{k}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{k}$

Tīras bīdes (vērpes) gadījums. Patiesi, liekot $k=1$, iegūstam:

$$\sigma'_x=\frac{\sigma_x}{R_t}=\frac{1}{2}, \quad \sigma_x=\neq\tau=\frac{R_t}{2} \text{ (Coulomb'a gadījums)}$$

4) $\max\sigma=\frac{R_t}{8}\frac{(k+1)^2}{(k-1)}$, $\max\sigma^1=\sigma_x^1\frac{(k+1)^2}{8(k-1)}$

$$k=(\sigma'_x-\sigma'_y)^2-(k-1)(\sigma'_x+\sigma'_y)=\sigma'^2_x-2\sigma'_x\sigma'_y+\sigma'^2_y-(k-1)\sigma'_x-(k-1)\sigma'_y$$

$$\sigma_y^2 - (2\sigma'_x + (k-1) + \sigma'^2_x - (k-1)\sigma'_x - k = 0.$$

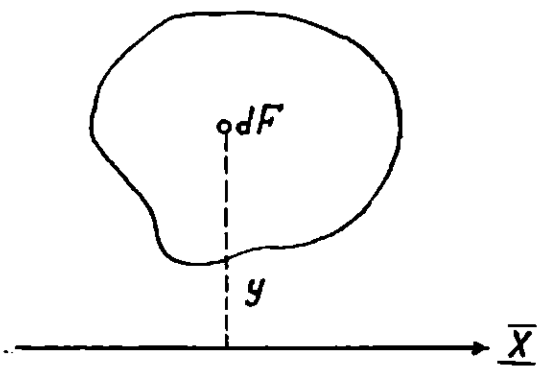
no kurienes var uziet σ'_y, kas atbilstu $\max \sigma' = \frac{(K+1)^2}{8(K-1)}$

Piezīme: *Tīrā bīde* – *(Skat. lekciju beigās)*

Plakanu figuru inerces momenta teorija.

Inerces moments un inerces radiuss. Saliktu figuru inerces momenti.

Zem dotās figuras laukuma inerces momenta pret doto asi (axialais moments) saprotam reizinājumu summu, kas iegūta reizinājot katru šī laukuma bezgalīgi mazu daļiņu uz šīs daļiņas atstātuma kvadrātu līdz dotai asij. Apzīmējot kaut kuru dotā laukuma daļiņu ar dF un viņas atstātumu līdz dotai asij ar y, iegūstam dotā



laukuma inerces momenta F pret doto asi pamatizteiksmi $I_{xx} = \sum_{i=1}^{i=\infty} dF\, y^2 = \int y^2 dF$ kur summa attiecās uz dotā laukuma visām daļiņām, un tadēļ sastāv no bezgalīgi daudziem bezgalīgi maziem locekļiem, t.i. viņa ir noteikts integrals.

Tā kā abi reizinātāji dF un y ir vienmēr pozitīvi, tad katrs augšā pievestās summas loceklis un līdz ar to arī pate summa var iegūt tikai pozitīvu vērtību. Tapēc inerces moments nekad nevar būt vienāds ar 0, izņemot vienīgo gadījumu, kad katrs summas loceklis pats par sevi ir 0.

Tas būs tikai tad, ja dotais laukums ir bezgalīgi šaura strēmele, kura tieši sakrīt ar doto asi.

Visos pārējos gadījumos inerces momentam it pozitīva vērtība, kura atšķirās no 0.

Augšā minētās summas katrs loceklis, un tā tad arī visa summa, ir kaut kāda laukuma reizinājums ar kāda garuma kvadrātu

Tapēc inerces momenta mēra vienība ir garuma vienības ceturtā pakāpe $[L^4]$ Pa piem.,mēs varam inerces momentus izteikt vienībās cm^4.

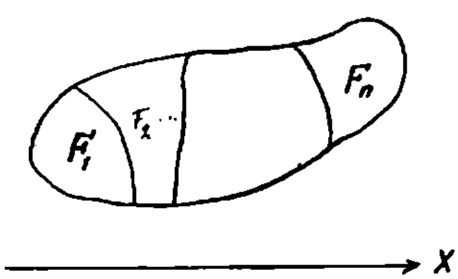
Izdalot kaut kādu inerces momentu uz kaut kādu laukumu,rezultātā iegūsim vienmēr kaut kādu garuma kvadrātu.

Tas garums,kura kvadrātu iegūstam dalot kaut kādas figuras laukuma inerces momentu uz viņas pašas laukumu,tiek saukts par dotās figuras inerces radiusu attiecībā uz to pašu asi,uz kuru bija attiecināts inerces moments.

Apzīmēsim dotās figuras laukumu ar F,viņas inerces momentu pret doto asi X ar I_{xx} un inerces radiusi pret to pašu asi ar ρ_{xx},tad pamata sakarība ir $\rho_{xx}^2 = \frac{J_{xx}}{F}$ jeb $J_{xx} = \rho_{xx}^2\, F$

Raksta saīsināšanas labad,axialā momenta un attiecīgā inerces radiusa apzīmējumu indeksos parasti neatkārto burtus,bet parasti raksta J_x, ρ_x u.t.t.,lai gan pilnam apzīmējumam,kā redzēsim tālāk,piemīt zināmas priekšrocības.

No inerces momenta definicijas tieši seko, ka ja dotais laukums F sastāv no daļām F_1, $F_2 \dots F_n$,tad visa laukuma inerces moments pret kaut kādu asi ir vienāds ar šo daļu inerces momentu,ņemtu pret to pašu asi,summu.



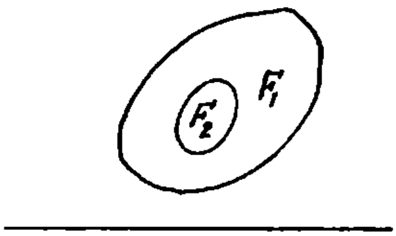
Ja $F = F_1 + F_2 + \dots F_n$, tad

$$J_{xx} = J_{1xx} + J_{2xx} \dots + J_{nxx} = \sum_{i=1}^{i=n} J_{ixx}$$

(Jo izteiksmes $J_{1xx} \dots J_{nxx}$ ir summas,kuru locekli ieiet ari izteiksmē J_{xx})

To pašu ari varam teikt,ja aplūkojamais laukums ir divu laukumu starpība(kā tas nāk priekšā,ja ir dots laukums ar caurumiem).

Ari šajā gadījumā atlikušās laukuma daļas inerces moments ir vienāds ar veselā laukuma un izgriestās laukuma daļas



inercu momentu starpību.

Ja $F = F_1 - F_2$, tad $J_{xx} = J_{1xx} - J_{2xx}$

Apvienojot abus augšā pievestos likumus, varam teikt ka katrā gadījumā, kad dotais laukums var tikt uzlūkots, kā astevišķu daļu algebraiska summa, viņa inerces moments ir vienāds ar šo atsevišķo daļu inerces momentu algebraisko summu.

Ja $F = F_1 \pm F_2 \pm F_3 \ldots\ldots \pm F_n$, tad $J_{xx} = J_{1xx} \pm J_{2xx} \pm J_{3xx} \ldots\ldots \pm J_{nxx}$, F un J_{xx} izteiksmu labas puses ar attiecīgiem locekļiem piešķiramas vienādas zīmes. Šinīs formulās visi lielumi ir domāti absoluti, šo apstākli varētu pastrīpot ar simbolie (F_1) resp. (J_{1xx}).

Ievedot algebraiskus lielumus, varētu rakstīt

$F = \sum_{i=1}^{i=n} F_i$ un $J_{xx} = \sum_{i=1}^{i=n} J_{ixx}$

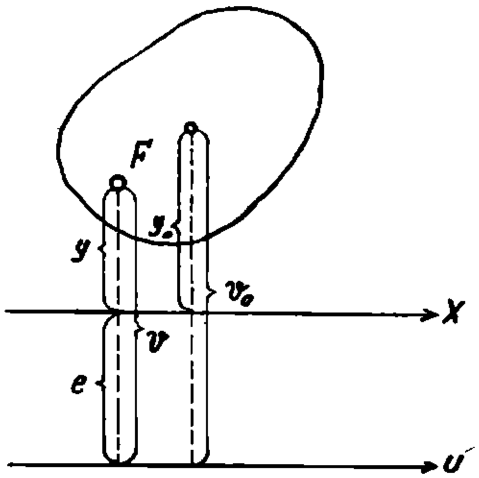
Inerces momenti, attiekti pret parallelām asīm.

Dotās figuras inerces moments, var tikt ņemts pret kuru katru asi, atrodošos tajā pašā plāknē, kurā atrodās dotā figura.

Izpētīsim tos sakarus, kuri pastāv starp vienas un tās pašas figuras inerces momentiem attiektiem pret dažādēm asīm.

Vispirms aplūkosim jautājumu kā mainas dotas figuras inerces moments, ja pārejam no dotas ass X uz asi U, kura ir parallela pirmai.

Apzīmēsim kaut kuru dotā laukuma daļiņu ar dF, šīs daļiņas atstātumus no asīm X un U attiecīgi ar y un v abu asu savstarpējo atstātumu ar e un dotā laukuma inerces momentus pret asīm X un U ar J_{xx} un J_{uu}



Izejot no inerces momenta definicijas, varam uzrakstīt, kā

$$J_{uu} = \sum_{i=1}^{i\to\infty} dF v^2 = \int^F dF v^2 = \sum_{i=1}^{i\to\infty} dF\,(y+e)^2 = \sum_{i=1}^{i\to\infty} dF(y^2+2ye+e^2)$$

Šīs summas visos locekļos lielums e ir *constants*, bet lielums y ir mainīgs. Atverot iekavas, saliksim summu trijās summās. Iznesot pastāvīgo reizinātāju auz sumas, resp. noteiktā integrala zīmes, iegūsim $J_{uu} = \sum_{i=1}^{i\to\infty} dF\, y^2 + 2e\sum_{i=1}^{i\to\infty} dF\, y + e^2 \sum_{i=1}^{i\to\infty} dF$. Pirmā summa ir inerces moments, otrā summa - dotās figuras laukuma statiskais moments pret asi X un trešā summa - dotās figuras laukums: $\sum_{i=1}^{i\to\infty} dF\, y^2 = J_{xx}$ $\sum_{i=1}^{i\to\infty} dF\, y$ Fy_0 un $\sum_{i=1}^{i\to\infty} dF = F$, kur y_0 - dotās figuras laukuma smaguma centra atstātums no ass X.

Ievērojot šīs vērtības iegūsim: $J_{uu} = J_{xx} + 2e\,F y_0 + F e^2$

Lai vienkāršotu šo izteiksmi apzīmēsim vēl dotās figuras laukuma smaguma centra atstātumu no ass U caur v_0, tad $e = v_0 - y_0$ un $J_{uu} = J_{xx} + 2F y_0 (v_0 - y_0) + F(v_0^2 - 2y_0 = v_0 + y_0^2) =$ $= J_{xx} + F(v_0^2 - y_0^2)$..... (1). Ja $v_0 > y$, tad $J_{uu} > J_{xx}$. Tā tad dotās figuras inerces moments pret parallelam asīm jo lielāks, jo tālāk ass, pret kuru viņš ņemts, no dotās figuras laukuma smaguma centra, jeb, citiem vārdiem sakot, ja ass nemainot savu virzienu, attālinājās no smaguma centra, tad inerces moments pieaug.

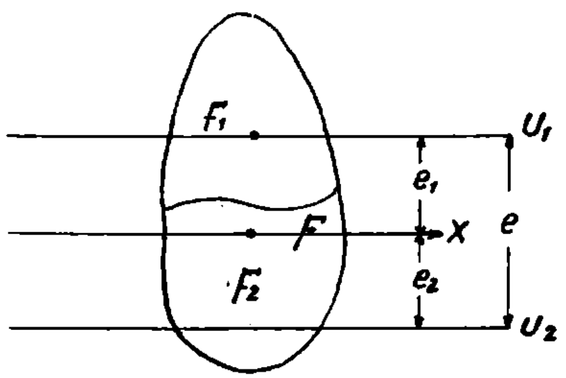
Vismazakā vērtība būs tam inerces momentam, kurš ņemts pret to no visām paralelām asīm, kura iet caur dotās figuras laukuma smaguma centru.

Pieņemsim tagad, kā X ass iet caur dotās figuras laukuma smaguma centru, tad apzīmējot attiecīgo inerces momentu ar J_{xx}, atradīsim, kad tad tās pašas figuras laukuma inerces moments pret asi U, kura paralela asij X un atrodas no viņas atstātumā v_o izteiksies sekoši:

$$J_{uu} = J_{xx} + F v_o^2 \ldots \quad (1^a)$$

Izvestā izteiksme dod iespēju atrisināt sekošu uzdevumu:

Aplūkojamais laukums F sastāv no divām daļām F_1 un F_2, kuru smaguma centri ir zināmi.



Bez tam ir vēl zināmi katras daļas inerces momenti pret paralelām asīm, ejošām caur šo daļu smaguma centriem.

Jāatrod visa laukuma F inerces moments J_{xx} pret asi X, ejošu paraleli asīm U_1 U_2 caur visa laukuma F smaguma centru.

Atrisinājums.

Apzīmēsim laukuma F inerces momentu pret asi U_1 ar J_{uu_1}, laukuma F_2 inerces momentu pret asi U_2 ar J_{uu_2}, visa laukuma F inerces momentu pret asi X ar J_{xx}, visa laukuma smaguma centra atstātumu no ass U_1 ar e_1 un no ass U_2 - ar e_2 un savstarpējo asu U_1 un U_2 atstātumu ar e.

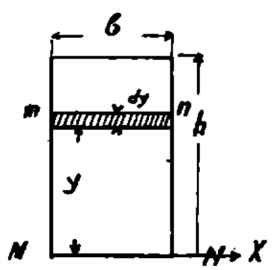
Tad dabujam ka $J_{xx} = J_{1uu} + F_1 e_1^2 + J_{2uu} + F_2 e_2^2$ No tā, ka ass X iet caur visas figuras laukuma smaguma centru, seko ka $F_1 e_1 - F_2 e_2 = 0$ un bez tam vēl $e_1 + e_2 = e$. Atrisinot šos abus nolīdzinājumus attiecībā uz e_1 un e_2, iegūsim:

$$e_1 = \frac{F_2\, e}{F_1 + F_2} \quad un \quad e_2 = \frac{F_1\, e}{F_1 + F_2}$$ Tā tad:

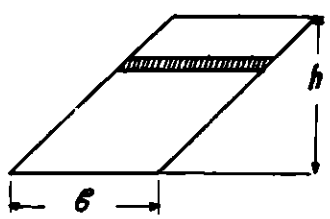
$$J_{xx} = J_{1uu} + J_{2uu} + \frac{f_1 f_2^2 e^2}{(f_1+f_2)^2} + \frac{f_2 f_1^2 e^2}{(f_1+f_2)^2} = J_{1uu} + J_{2uu} + \frac{f_1 f_2\, e^2}{f_1 + f_2}$$ Šī iz-

teiksme dod iespēju noteikt dotā laukuma inerces momentu pret asi, kura iet caur viņa smaguma centru, bez viņa stāvotnes noteikšanas.

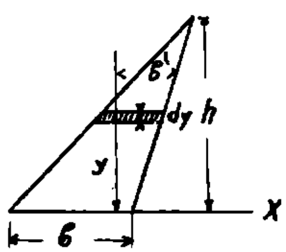
Dažu figuru laukumu inerces momenti.



Taisns četrstūris:
Inerces moments pret asi X, kas sakrīt ar malu M N:
$J_{xx} = b\int_0^h y^2 dy = \frac{b}{3}\left| y^3 \right|_0^h = \frac{bh^3}{3}$ Šī paša formula pielietojama arī parallelogrammam ar augstumu h, jo inerces moments nemainas, ja katru laukuma elementu pārvietot paralleli sev.

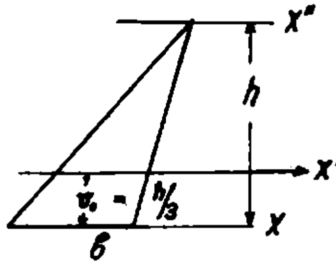


Zinot taisna četrstūra inerces momenta izteiksmi, var uziet kuras katras plakanas figuras laukuma, kas sastādīta no taisniem četrstūriem, inerces momentu.



Trīsstāvā inerces moments pret asi, kas sakrīt pret malu b:
$J_{xx} = \int_0^h b' y^2\, dy$, bd $\frac{b}{b'} = \frac{h}{h-y}$,
$b^1 = b\,\frac{(h-y)}{h}$ un $J_{xx} = \int_0^h b' y^2\, dy =$
$= \frac{b}{h}\int_0^h (h-y)\, y^2\, dy = b\int_0^h y^2\, dy - \frac{b}{h}\int_0^h y^3\, dy = \frac{b}{3}\left|h^3\right|_0^h - \frac{b}{4h}\left|h^4\right|^h =$
$= bh^3\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \quad \frac{b\,h^3}{12}$

TRīsstūra inerces moments pret centrālo asi parallelu malai b: Saskanā ar (1[a])



$$J_{xx} = J_{(x'x')} + F v_0^2 \;,\; J_{x'x'} = J_{xx} - F v_0^2$$

$$\frac{b\,h^3}{12} - \frac{bh}{2}\left(\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{b\,h^3}{12} - \frac{bh^3}{18} = b\,h^3\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{18}\right) = \frac{bh^3}{36}$$

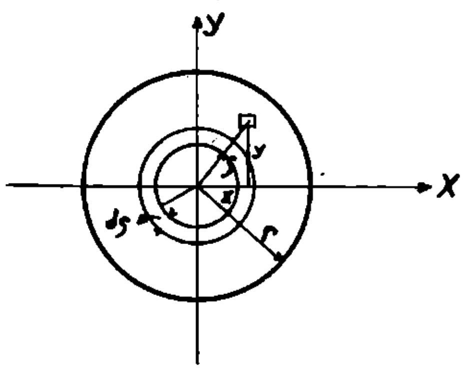
Pret asi X'': $J_{x''x''} = J_{x'x'} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 h^2$

$$\frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{36} + \frac{4}{18}\,bh^3 = \frac{bh^3\,9}{36} = \frac{bh^3}{4}$$

Taisna četrstūra laukuma inerces moments pret centrālo asi, parallelu pamatam

$$J_{x'x'} = J_{xx} - bh\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{bh^3}{3} - \frac{bh^3}{4} = \frac{bh^3}{12}$$ Sastādot šo meomentu tieši būtu augšējā izteiksmē $J_{xx} = b\int_0^h y^2\,dy = \frac{b}{3}\left|y^3\right|^h$ jāmaina robežas, ņemot $\left|y^3\right|^h$ vietā $\left|y^3\right|_{-h/2}^{h/2}$,

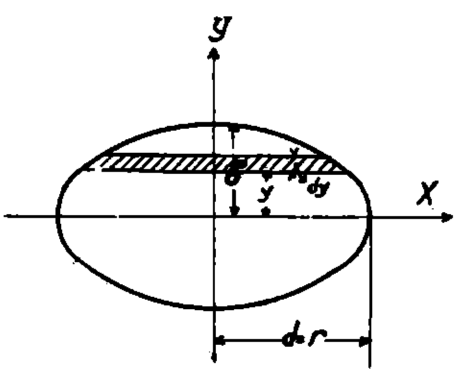
kas dotu $J_{x'x'} = \frac{b}{3}\left|y^3\right|_{-h/2}^{h/2} = \frac{b}{3.8}\,2\,h^3 = \frac{bh^3}{12}$

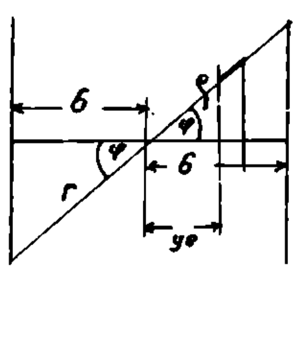


Tā kā ripa ir simetriska pret visām centrālām asīm, tad

$$J_{xx} = J_{yy} = \frac{J_x + J_y}{2} = \frac{1}{2}\int_0^F (y^2 + x^2)\,dF = \frac{1}{2}\int_0^F \rho^2\,dF = \frac{1}{2}\int_0^r \rho^2\,2\pi\rho\,d\rho = \pi\int_0^r \rho^3\,d\rho = \pi\left|\frac{\rho^4}{4}\right|_0^r = \frac{\pi r^4}{4}$$

Elipsi var uzskatīt par riņķa līnijas projekciju.

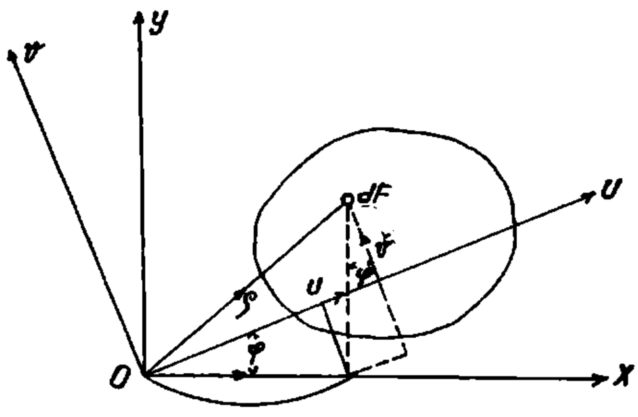




$$J_{xxel} = \int^{F_e} dF_e\,y_e^2 = \int^F dF\cos\varphi\;y^2\cos^2\varphi = \cos^3\varphi\int^F dF\;y^2 = \cos^3\varphi\;J_{xxripa} = \frac{\pi a^4}{4}\,\frac{b^3}{a^3} = \frac{\pi a b^3}{4}$$

Inerces momenti pret krustojošām asīm.

Noskaidrosim kā mainās dotās figuras laukuma inerces moments, ja pārejam no dotās ass uz jaunu asi, kura krusto pirmo. Uzstādītā jautājuma noskaidrošanai izvēlēsimies dotās figuras plāknē kaut kādu ortogonālu koordinātu asi sistemu XOY



Caur šīs koordinātu sistemas temas sākuma punktu O novilksim kaut kādu asi U zem leņķa φ pret X asi. Aplūkosim kaut kādu elementāru laukumiņu dF, kura koordinātes ir x un y un atstātums no ass U ir v. No zīmējuma seko, kā $\bar{\rho} = \bar{x} + \bar{y} = \bar{u} + \bar{v}$ Projecējot šo vektoru uz virzienu, iegūstam: $v = y\cos\varphi - x\sin\varphi$. Dotā laukuma ienerces moments pret asi U izteicas: $J_{uu} = \sum_{i=1}^{i=\infty} dF\, v^2 = \sum_{i=1}^{i=\infty} dF\,(y^2\cos^2\varphi + x^2\sin^2\varphi - 2xy\cos\varphi\sin\varphi)$ Faktiski vajadzētu rakstīt $J_{uu} = \sum_{i=1}^{i=\infty} dF_i\, v^2 = \sum_{i=1}^{i=\infty} dF_i\,(y_i^2\cos^2\varphi + x_i^2\sin^2\varphi - 2x_i\, y_i \cos\varphi\sin\varphi) = \int_F v^2\, dF = \int_F dF\,(y^2\cos^2\varphi + x^2\sin^2\varphi - 2\,xy\cos\varphi\sin\varphi)$, bet raksta saīsināšanas labad kā še tā ari tālākajā tekstā, atstāsim šos saīsinātos simbolus.

Atklājot iekavas, sadalot summu trījos saskaitamos un iznesot pastāvīgos reizuļus aiz summas zīmes iegūsim:

$J_{uu} = \cos^2\varphi \sum dF\, y^2 + \sin^2\varphi \sum dF\, x^2 + 2\cos\varphi\sin\varphi \sum dF\, x\, y$. Pirmā summa ir dotās figuras inerces moments pret X asi, otrā - inerces moments pret Y asi un trešā - centrifugālais dotā laukuma inerces moments pret koordinātu sistemu $X\,O\,Y$. $\sum dF \cdot y^2 = J_{xx}$; $\sum dF \cdot x^2 = J_{yy}$ un $\sum dF \cdot x\,y = J_{xy}$. Ievietojot pievestos apzīmējumus iegūsim sekošo izteiksmi:

$J_{uu} = J_x \cos^2\varphi + J_y \sin^2\varphi - 2J_{xy}\cos\varphi\sin\varphi$ (2). Šī izteiksme noteic dotās figuras inerces momentu pret kuru katru asi, ejošu caur kaut kādu punktu O, ja zināmi viņas inerces momenti pret divām ortogonālām asīm, ejošām caur to pašu punktu un centrifugālais inerces moments pret minēto asu sistēmu.

Galvenās asis un galvenie inerces momenti.

Kā redzams no augšā izvestās izteiksmes, inerces moments atkarajās no leņķa t.i. no ass U virziena. No šīs izteiksmes redzams, kā mainās inerces moments asij griežoties ap doto punktu.

Mēs varam izpētīt kādiem ass virzieniem, resp. kādām leņķa φ vērtībām, inerces moments iegūst savu maksimālo un minimālo vērtību.

Šis jautājums atrisinams, pielietojot diferenciālrēķinu teorēmu, ka kura katra funkcija $y = f(x)$ iegūst maksimālās un minimālās vērtības pie tām mainīgā lieluma x vērtībām, kuras dotās funkcijas pirmo atvasināto pārvērš par 0, $\frac{dy}{dx} = 0$.

Katra x vērtība, kura iegūta no šī nolīdzinājuma, dod funkcijas y maksimālo jeb minimālo (extrema) vērtību.

Maksimums ir, ja pie tās iegūtās x vērtības, pie kuras šis $\frac{dy}{dx} = 0$ funkcijas otrā atvasinatā kļūst negatīva, $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$, un minimums pie tās - , pie kuras otrā atvasinātā kļūst pozitiva, $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$, Pielietojot šos likumus J_u funkcijai, kura atkarīga no mainīgā φ, iegūsim: $\frac{dJ}{d\varphi} = -2J_x \cos\varphi \sin\varphi +$

$$+ 2J_y \sin\varphi\cos\varphi - 2J_{xy}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = 0 \text{ jeb } (J_{yy} - J_{xx})\sin 2\varphi -$$

$$2J_{xy}\cos 2\varphi = 0, \text{no kurienes } \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2J_{xy}}{J_{yy} - J_{xx}} \quad \ldots\ldots (3)$$

Šai izteiksmei atbilst divas leņķa 2φ vērtības, kuras atšķirās viena no otras par 180°, jo $\operatorname{tg}(2\varphi + 180) = \operatorname{tg} 2\varphi$ un tādā veidā mēs iegūstam meklējamam leņķim divas vērtības, kuras atšķirās viena no otras par 90°.

Kā redzams, iepriekšejā izteikeme noteic divas savstarpēji perpendikulāras asis, pret kurām inerces momenti iegūst maksimālo jeb minimālo vērtības (salīdzinot ar inerces momentiem pret visām citām asīm caur to pašu punktu.)

Lai pārliecinātos kādai no atrastām asīm atbilst maksimālā un kādai minimālā inerces momenta vērtības, aplūkosim funkcijas otro atvasināto $\frac{d^2 J}{d\varphi^2} = (J_y - J_x) 2 \cos 2\varphi + 2 J_{xy} 2 \sin 2\varphi = 2 \cos 2\varphi \left\{ (J_y - J_x) + 2 J_{xy} \, tg 2\varphi \right\} = 2 \cos 2\varphi \left\{ J_y - J_x + \frac{4 J^2_{xy}}{J_y - J_x} \right\}$ Tā kā izteiksme iekavās nav atkarīga no φ, tad visas izteiksmes zīme atkarajās no reizuļa $\cos^2\varphi$, kurš pie tādām leņķa φ vērtībām, kuras atšķirās viena no otras par 90°, iegūst pretējas zīmes, jo $\cos^2(\varphi + 90^\circ) = \cos(2\varphi + 180^\circ) = -\cos 2\varphi$.

Tagad kļūst skaidris kā pie vienas no atrastām φ vērtībām otrā atvasinātā klūs pozitiva, tā tad būs funkcijas J_{uu} minimums, un pie otras φ vērtības otrā atvasinātā būs negatīva, un pie šīs vērtības J_{uu} funkcija gūs maksimumu.

Atradīsim tagad tās inerces momenta vērtības, kuras atbilst atrastām φ vērtībām, un tā tad tās būs maksimālā J_u max. resp. minimālā J_{uu} min. inerces momentu vērtības attiecībā visām asīm, ejošām caur doto punktu O.

Uzrakstīsim iepriekšējo inerces momenta J izteiksmi sekošā veidā:

$$J_{uu} = J_{xx} \frac{1 + \cos^2\varphi}{2} + J_{yy} \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} - J_{xy} \sin 2\varphi = \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2} \cos^2\varphi - J_{xy} \sin 2\varphi \quad \ldots (2^a)$$

Ieliekot šajā izteiksmē tās φ vērtības, kuras ņemtas no nolīdzinājuma (3), iegūsim J_u maksimālo un minimālo vērtības.

Var arī dabūt to pašu, izslēdzot kādā citā veidā mainīgo φ no nolīdzinājumiem (2) un (3)

Pārrakstīsim minētos nolīdzinājumus sekošā veidā:

$$J + - \frac{J_x + J_y}{2} = \frac{J_x - J_y}{2} \cos 2\varphi - J_{xy} \sin 2\varphi \text{ un } 0 = \frac{J_{xx} - J_{yy}}{2} \sin 2\varphi + J_{xy} \cos 2\varphi .$$

Pacelot abus nolīdzinājumus kvadratā un saskaitot iegūsim: $\left(J_{uu} - \frac{J_x + J_y}{2}\right)^2 = \left(\frac{J_x - J_y}{4}\right)^2 + J_{xy}^{2\,2}$.

Atrisinot šo nolīdzinājumu iegūstam divas J_{uu} vērtības, viena no kurām ir *maksimalā* vērtība J_{uu} max un otrā - *minimalā* vērtība J min.

Šīs vērtības ir sekošas:

$$J_{uu}\max = \frac{1}{2}\left\{J_x + J_y + \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4\ J_{xy}^2}\right\} \quad \text{un} \quad \min = $$

$$= \frac{1}{2}\left\{J_x + J_y - \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4\,J_{xy}^2}\right. \ldots\ldots \ (4).$$

Tās divas savstarpēji perpendikulārās asis, kuras iet caur doto punktu O, kā viņu sākuma punktu un pret kurām dotās figuras inerces momenti iegūst maksimālo J_{uu} max un minimāla J_{uu} min vērtības, sauc par dotās figuras galvenām inerces asīm un attiecīgos momentos J_{uu} max un J_{uu} min - par dotās figuras galveniem inerces momentiem attiecībā pret doto punktu O. Galvenās asis jāatiecina uz zināmu punktu, caur kuru viņas iet, jo katram punktam ir sava galveno asu sistēma.

Ja runāts tiek par dotās figuras galvenām asīm un galveniem inerces momentiem, neminot punktu, uz kuru viņi attiecās, tad viņi vienmēr ir attiekti uz figuras smaguma centru.

Ja piņemsim galvenās asis, ejošas caur kādu punktu O par koordinātu asīm X un Y, tad leņķis φ, kurš saskaņā ar izteiksmi (3) noteic galveno asu virzienu, vienai no galvenām asīm būs 0 un otrai - 90°, tā tad tg$2\varphi = 0$.

Tā kā pēc izteiksmes (3), $tg\,2\varphi = \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x}$, tad

$J_{xy} = 0$. Esam nonākuši pie ļoti svarīga rezultāta:
Ja galvenās inerces asis, ejošas caur kaut kādu dotās figuras punktu, pieņemtas par koordinātu asīm X, Y, tad centrifugālais inerces moments $J_{xy} = 0$ un otrādi, ja attiecībā pret doto koordinātu sistemu dotās figuras centrifugālais inerces moments ir vienāds ar 0, tad dotās koordinātu asis ir

ari dotās figuras galvenās inerces asis attiecībā pret doto koordinātu sākuma punktu.

Ja galvenās inerces asis,ejošas caur kaut kādu punktu O,tiek pieņemtas par koordinātu asīm X,Y ,tad inerces moments pret kaut kādu asi,ejošu caur to pašu punktu O zem leņķa φ pret X asi,izteicās caur vienkāršotu izteiksmi:

$$J_w = J_x \cos^2\varphi + J_y \sin^2\varphi \quad \ldots\ldots \quad (2^b).$$

Ja $\varphi = \pm 45^{\circ}$,tad $J_w = \frac{1}{2}(J_x + J_y)$,t.i.inerces moments pret katru no asīm,kuras dala leņķi starp galvenām inerces asīm uz pusēm,ir vienlīdzīgs galveno inerces momentu vidējam aritmetiskam.

Pieņemot kaut kādas asis (kuras nesakrīt ar galvenām inerces asīm) par koordinātu asīm X,Y ,iegūsim inerces momentam pret asi,kura veido ar X asi leņķi $\varphi = 45^{\circ}$,izteiksmi:

$$J_w = \frac{J_x + J_y}{2} - J_{xy}.$$

Šī izteiksme dod iespēju izteikt dotās figuras centrifugālo inerces momentu pret doto koordinātu sistemu caur trīs inerces momentiem,attiektiem pret koordinātu asīm un asi, kura dala leņķi starp pēdejām uz pusēm.

Tik pat ērti ir ari noteikt figuras centrifugālo inerces momentu tieši caur izteiksmi $J_{xy} = \Sigma\, dF\, x\, y$,kura vienkārši atrisināma ar integraļrēķinu palīdzību.

Aplūkosim dažus paņēmienus,kā atrast dotai figurai galvenās inerces asis,ejošas caur kaut kādu doto punktu.Ja dotai figurai ir simetrijas ass ,tad katram šīs ass punktam viena galvenā inerces ass sakrīt ar šo simetrijas asi un otra ir perpendikulāra viņai.

Tā tad šādos gadījumos galvenās inerces asis jau iepriekš zināmas.

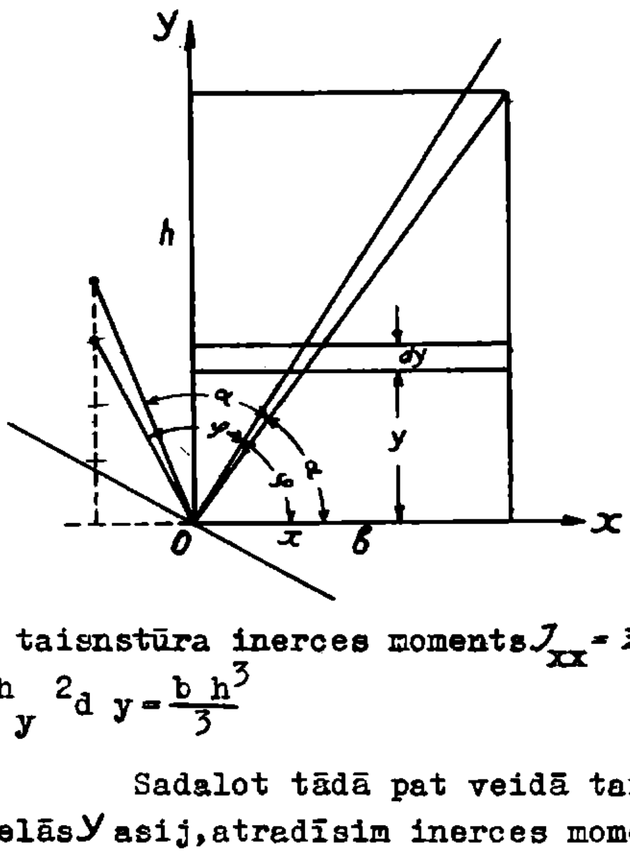
Visos citos gadījumos galveno inerces asu virzienus noteic pēc izteiksmes (3).
Novelkam caur doto punktu kaut kādas savstarpēji perpendikulāras asis X,Y ,atradīsim ari noteikto integraļu palīdzību

tieši inerces momentus J_{xx} un J_{yy} un centrifugālo inerces momentu J_{xy} un iegūtās vērtības ievietosim nol-jumā (3), kurš tieši dos galveno inerces asu virzienus.

Paskaidrosim sacīto ar vienkāršu piemēru.

Piemērs. Atradīsim taisnstūra galvenās inerces asis, ejošas caur vienu no viņa virsotnēm.

Apzīmēsim taisnstūra malas ar b un h un novilksim caur viņa virsotni 0 asis X un Y, kuras sakrīt ar taisnstūra malām. Lai noteiktu inerces momentu J_{xx}, sadalīsim taisnstūri bezgalīgi šaurās strēmelītēs, parallelās X asij.



Kaut kādas šādas strēmelītes atstātumu līdz X asij apzīmēsim ar y un pašas strēmelītes platumu ar dy. Tad strēmelītes laukums $dF = b\,dy$ un viņas inerces moments pret X asi $dJ_{xx} = dF\,y^2 = b\,y^2\,dy$.

Visa taisnstūra inerces moments $J_{xx} = \Sigma\,dF\,y^2 = b\,\Sigma\,y^2\,dy = b\int^h y^2 d\,y = \frac{b\,h^3}{3}$

Sadalot tādā pat veidā taisnstūri strēmelītēs, parallelās Y asij, atradīsim inerces momentu pret Y asi $J_{yy} = \frac{b^3 h}{3}$

Lai noteiktu centrifugālo inerces momentu J_{xy}, sadalīsim taisnstūri elementāros taisnstūros un apzīmēsim kaut kura šāda taisnstūra koordinātes ar x un y un viņa malas ar dx un dy.

Šāda elementāra taisnstūra laukums $dF = dx \cdot dy$ un meklētais centrifugālais inerces moments izteicas sekoši:

$$J_{xy}=\Sigma\, dF\cdot x\, y=\Sigma\, x\, y\, d\, x\, d\, y\,.$$

Vispirms izdarīsim summēšanu vienas strēmelēs, parallēlas X asij, robežās, pieņemot y un d y par pastāvīgiem lielumiem un pēc tam izvedīsim summēšanu visās pārejās strēmelītēs. Tad iegūsim:

$$J_{xy}=\Sigma\, y\, d\, y\, \Sigma x d\, x=\int_0^h y\, d\, y\int_0^b x\, d\, x=\frac{b^2h^2}{4}$$

Ievietojot iegūtās J_{xx}, J_{yy} un $J_{x\,y}$ vērtības izteiksme (3) dabusim:

$$t\, g\, 2\varphi=\frac{3\, b^2h^2}{2(b^3\, h-\, b\, h^3)}=\frac{3\, b\, h}{2(b^2-h^2)}).$$

Lai labāk ilustrētu šo izteiksmi, apzīmēsim leņķi starp taisnstūra diagonāli un X asi ar α. Tad iegūstam sekošu izteiksmi:

$$t\, g\, 2\alpha=\frac{2\, t\, g\alpha}{1-\, t\, g^2\alpha}=\frac{2\frac{h}{b}}{1-\frac{h^2}{b^2}}=\frac{2\, b\, h}{b^2-h^2}$$

Salīdzinot šo izteiksmi ar iepriekšējo, redzam kā $tg2\varphi=\frac{3}{4}\,tg\,2\alpha$

Šī sakarība dod mums iespēju ļoti ērti geometriski novilkt galvenās inerces asis. Pie ass X konstruējam leņķi 2α un viņa tangensu nogriežņa veidā, nolaižot no kaut kāda leņķa 2α vienas malas punkta perpendikulāru pret otru malu.

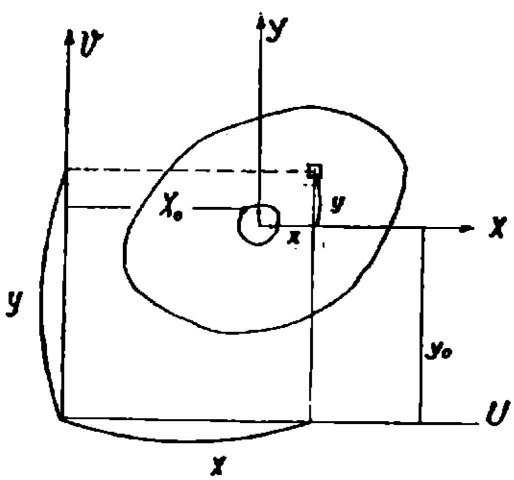
Ņemot šī nogriežņa $\frac{3}{4}$ un velkot caur dalījuma punktu un O taisni dabūsim leņķi 2φ. Taisne, kura dala šo leņķi uz pusēm ir viena no galvenām inerces asīm un otra iet perpendikulāri pret pirmo.

Viena no viņām vienmēr krusto mazāko taisnstūra malu, bet otra iet ārpus taisnstūra.

Attiecībā pret pirmo asi ir taisnstūra minimālais taisnstūra inerces moments un attiecībā pret otro - maksimālais.

Dažos gadījumos J_{xy} uziešana var tikt ievērojami vienkāršota ar sekojošās teorēmas palīdzību:

Ja ir zināms J_{xy} pret centralajām asīm X un Y tad J_{uv} pret parallēlu šīm asīm U un V izteicās tā:



$$J_{uv} = \int^{F} dF_{uv} = \int^{F} dF(Y_0+v)(x_0+u) =$$

$$= X_0 Y_0 \int^{F} dF + \int^{F} uv\, dF + X_0 \int^{F} U dF +$$

$$+ Y_0 \int^{F} v\, dF$$ Bet $\int^{F} dF = F$ $\int uv\, dF = J_{uv}$ $\int^{F} u\, dF = \int^{F} v\, dF = 0$ tadēļ,kā šīs izteiksmes ir laukumu statiskie momenti pret centrālām asīm,

Kadēļ galīgi:

$$J_{uv} = J_{xy} + X_0 Y_0 F \quad (a)$$

Aksialais inerces moments pret asu U turpretim izteicas:

$$J_{uu} = J_{xx} + Y_0^2 F \quad (b)$$

Kā redzams,formula b pāriet formulā (a) mainot indeksus u un x uz v resp.y un y^2_0 vietā ņemot $X_0 Y_0$.

Inerces elipses.

Atgrizīsimies pie nol-juma (2),kurš izteic inerces momentu pret kaut kādu asi,ejošu caur kaut kuru punktu:

$J_{uu} = J_x \cos^2\varphi + J_y \sin^2\varphi - 2J_{xy}\cos\varphi\sin\varphi$ .No šī nol-juma var izvest vienkāršu geometrisku sakarību likumu,kurš noteic inerces momenta maiņu atkarībā no leņķa φ maiņas,t.i.ja ass griežās ap doto punktu.

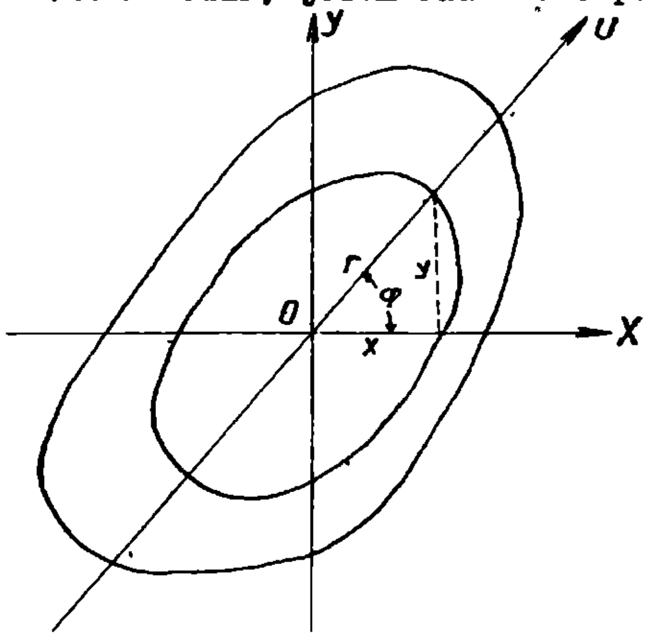
Atliksim pa doto asi U no sākuma punkta O nogriezni r_u, kurš ir pretēji proporcionāls kvadrātsaknei no inerces momenta J_{uu} attiekta pret asi U.

Tā tad $r_u \sqrt{\frac{K}{J_{uu}}}$,kur k ir patvaļīgs,konstants lielums,kurš noteic mūsu figuras mērogu.

Nogriežņa r_u gala punkta koordinates apzīmēsim ar x un y.Tad varam rakstīt,kā $\cos\varphi = \frac{x}{r_u} = x\sqrt{\frac{J_{uu}}{K}}$, $\sin\varphi = \frac{y}{r_u} = y\sqrt{\frac{J_{uu}}{K}}$. Izliekot šīs vērtības (1) iegūsim: $J_{uu} = J_{xx} x^2 \frac{J_{uu}}{K} + J_{yy} y^2 \frac{J_{uu}}{K} - 2 J_{xy}\, xy \cdot \frac{J_{uu}}{K}$,Saīsinot uz J_{uu}, iegūsim:

$$J_{xx} x^2 + J_{yy} y^2 - 2J_{xy} xy = K \ .$$

Šajā izteiksmē lielumi J_{xx}, J_{yy}, J_{xy} un k nav atkarīgi no ass U virziena bet paliek konstanti visām asīm,ejošām caur doto punktu O.Lielumi x un



y,turpretīm mainās līdz ar leņķa φ maiņu,bet viņu sav - starpeja sakarība vienmēr izteicās caur augšā minēto nol-jumu.

Kā zinams no analitiskās geometrijas, tad šāds nol-jums izteic otrās kārtības līkni-elipsi, kuras centrs atrodās koordinatu sākuma punktā.Tā tad mēs esam pierādījuši sekošu teoremu:ja caur kaut kādu punktu,atrodošos dotās figuras plāknē,vilkt visas iespējamās asis un pa viņām no dotā punkta nospraust nogriežņus,pretēji proporcionālus dotās figuras attiecīgo inerces momentu kvadrātiem,tad šo nogriežņu galu punkti veido elipsi,kura centrs sakrīt ar doto punktu.

Šis elipss tiek saukts par dotās figuras inerces elipsi attiecībā uz doto punktu.

Ja dotais punkts sakrīt ar dotās figuras smaguma centru,tad attiecīgais inerces elipss tiek saukts par galveno jeb centrālo inerces elipsi.

Pteicoties inerces elipsim,inerces momenta maiņas likums,asij U griežoties ap doto punktu O,kļūst ļoti pārskatams:inerces moments pretēji proporcionāls tā inerces elipsa radiusa-vektora kvadrātam,kurš sakrīt ar doto asi.

Jo garāks raduuss-vektors r,jo mazāks attiecīgais inerces moments.No šejienes seko,kā tās divas savstarpīgi perpendikulārās asis,ejošas caur doto punktu O,pret kurām inerces moments iegūst savu maksimālo un minimālo vērtības, un kuras saucās par dotas figuras galvenām inerces asīm attiecībā uz punktu O,sakrīt ar punkta O inecces elipses geometriskām asīm. Lielai inerces elipsa asij atbilst minimālais inerces moments un mazai - maksimālais inerces moments.

Pats par sevi saprotams, kā sacītais attiecās tikai uz inerces momentu pret asīm, ejošām caur vienu un to pašu punktu.

Ja mēs salīdzinātu dotās figuras inerces momentus pret visām iespējamām asīm, ejošām caur visiem iespējamiem punktiem, tad redzēsim, kā vismazakā figuras inerces momenta vērtība (šī vērtība technikā ļoti no svara) ir pret to asi, kura sakrīt ar centrālās inerces elipses lielo asi, jo griežot šo asi ap figuras smaguma centru, inerces moments palielināsies un, attālinot punktu, caur kuru ass novilkta, no smaguma centra, ari figuras inerces moments palielināsies.

Visās iepriekšejās izteiksmēs inerces momentu var atvietot ar inerces radiusu, ievietojot visur J vietā reizinājumu $f\rho^2$. Tad visas izteiksmes iegūs pārskatamāku veidu, jo inerces radiuss ir daudz pārskatamāks jēdziens, nekā inerces moments.

Inerces radiusu varam attēlot zīmējumā ar taisnes nogriezni, kurš tiek mērots pēc mēroga garuma vienībās, bet lai grafiski attēlotu inerces momentus, jāieved speciāls momentu mērogs.

Aplūkosim kaut kādas figuras kaut kāda punkta inerces elipsi, kura kaut kādu radiusu-vektoru apzīmēsim ar r.
Tad: $r_v = \sqrt{\frac{K'}{J}} = \sqrt{\frac{K'}{f\rho^2}} = \frac{K'}{\rho}$, kur $k' = \sqrt{\frac{k}{f}}$. Tā kā k bija pilnīgi patvaļīga konstante, tad ari k' ir patvaļīga konstante.

Saskaņā ar iepriekšējo izteiksmi, varam teikt, kā inerces elipses radiusi-vektori ir pretēji proporcionāli attiecīgiem dotās figuras inerces radiusiem.

(Pēc piezīmēm.)

Kad koordinatu asis sakrīt ar galvenām, tad: $J_{xy} = 0$ un

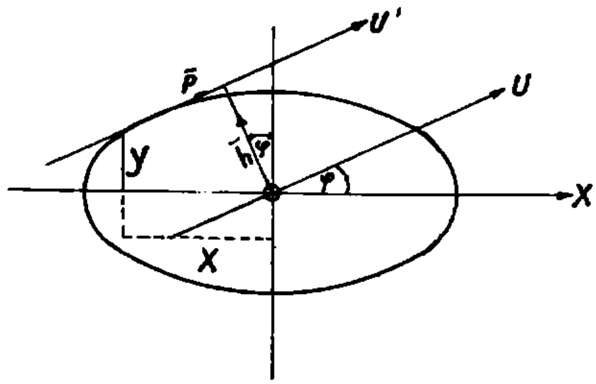
$$\left(J_{xx} X^2 + J_{yy} Y^2 - 2J_{xy} XY\right)_{J_{xy}=0} J_{xx} X^2 + J_{yy} Y^2 = k ,$$

$$\frac{J_{xx}}{F} X^2 + \frac{J_{yy}}{F} Y^2 = \rho_{xx}^2 \cdot X^2 + \rho_{yy}^2 \cdot Y^2 = \frac{k}{F}$$ Ta kā k ir brīvi

vēlēts lielums, tad arī $\frac{k}{F}$ ir tāds pats. Ļoti ērtu elipses nolīdzinājumu iegūsim, ja liksim $\frac{K}{F} = \rho_{xx}^2 \rho_{yy}^2$; tad $\rho_{xx}^2 X^2 + \rho_{yy}^2 Y^2 = \rho_{xx}^2 \rho_{yy}^2$ $\frac{\rho_{xx}^2 X^2}{\rho_{xx}^2 \rho_{yy}^2} + \frac{\rho_{yy}^2 Y^2}{\rho_{yy}^2 \rho_{xx}^2} = \frac{X^2}{\rho_{yy}^2} + \frac{Y^2}{\rho_{xx}^2} = 1$, kas pavisam pārskatamā veidā, pret kuru asi inerces momentē iegūst savu vislielāko nozīmi un otrādi.

Ar šīs elipses palīdzību var uziet inerces radiusu pret asi U, kas sastāda leņķi ar X-asi.

Šinī nolūkā novelkam asi U', parallelu U un tangngejošu elipsi. Perpendikulārais atstātums starp abām asīm h ir $\rho_{uu}^2 = \frac{J_{uu}}{F}$.



Patiesi elipsei ar koordinatu asīm, kas sakrīt ar galvenām ir $J_{uu} = J_{xx}\cos^2\varphi + J_{yy}\sin^2\varphi$, $\frac{J_{uu}}{F} = \rho_{uu}^2 = \frac{J_{xx}\cos^2\varphi + J_{yy}\sin^2\varphi}{F} = \rho_{xx}^2\cos^2\varphi + \rho_{yy}^2\sin^2\varphi$. (1) Tā kā $h = X + Y + F$ tad projecējot uz h virzienu iegūstam: $h = X\sin\varphi Y\cos\varphi$ (2) kur X un Y ir taisnes U' tekošas koordinates. Tangentes nol. pret kādu līkni ir $Y - y = y'(X-x) = \frac{dy}{dx}(X-x)$ (3) Inerces elips. nol ir $\frac{X^2}{\rho_{yy}^2} + \frac{Y^2}{\rho_{xx}^2} = 1$. (4). (3) un (4). Diferancējot (4) iegūstam

$\frac{X}{\rho_{yy}^2} + \frac{Yy}{\rho_{xx}^2} = 0$, no kurienes $y' = \frac{-X\rho_{xx}^2}{\rho_{yy}^2 \cdot y} = \frac{Y-y}{X-x}$, $-X_x\rho_{xx}^2 + X^2\rho_{xx}^2 = Y_y\rho_{yy}^2 - y^2\rho_{yy}^2$

$Yy\rho_{yy}^2 + Xx\rho_{xx}^2 = X^2\rho_{xx}^2 + y^2\rho_{yy}^2$, $\frac{Yy}{\rho_{xx}^2} + \frac{Xx}{\rho_{yy}^2} = \frac{x^2}{\rho_{yy}^2} + \frac{y^2}{\rho_{xx}^2} = 1$

$= \frac{Y\cos\varphi - X\sin\varphi}{2}$, no kurienes seko, kā: $\frac{y}{\rho^2_{xx}} = \frac{\cos\varphi}{h}$, $hy = \rho^2_{xx}\cos\varphi$,

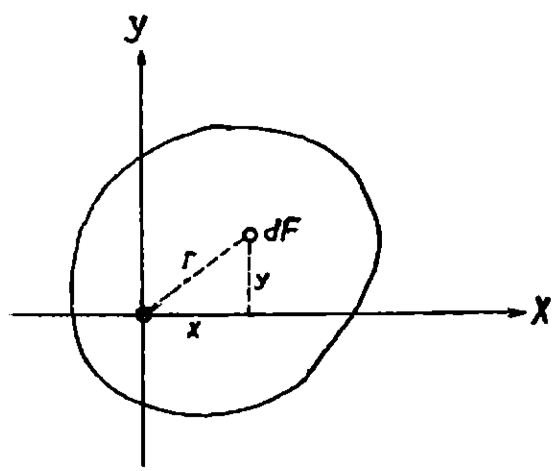
$-\frac{x}{\rho^2_{yy}} = \frac{\sin\varphi}{h}$, $-\rho^2_{yy}\sin\varphi = hx$; $\left(\frac{hy}{\rho^2_{xx}}\right)^2 = \frac{h^2y^2}{\rho^4_{xx}} = \cos^2\varphi$, $\frac{h^2x^2}{\rho^4_{yy}} = \sin^2\varphi$

$h^2\left(\frac{x^2}{\rho^2_{yy}} + \frac{y^2}{\rho^2_{xx}}\right) = h^2 = \rho^2_{xx}\cos^2\varphi + \rho^2_{yy}\sin^2\varphi = \rho^2_{uu}$, no kurienes

seko, kā $|h| = |\rho_{uu}|$, ko ari vajadzēja pierādīt.

Polārais inerces moments.

Inerces moments tādā nozīmē, kā mēs to aplūkojam nupat, t.i. summas $\Sigma\, dF\, y^2$ veidā, kur y ir elementārā laukumiņa dF atstātums no dotās ass, tiek saukts par aksiālo inerces momentu. Figuras polārais inerces moments definējams, kā to reizinājumu summa, kuri iegūti dotās plakanās figuras katru daļiņu reizinājot uz tās pašas daļiņas atstātuma kvadrātu no dotā punkta, kas atrodas dotās figuras plāknē. Apzīmējot kaut kāda



dotās figuras elementārā laukumiņa dF atstātumu līdz dotam punktam O ar r un viņas polāro inerces momentu pret punktu O ar J_p, varam rakstīt, kā $J_p = \Sigma\, dF.\, r^2$ kur šī summa attiecināma uz visām dotās figuras daļiņām. Polāro inerces moments vienmēr sadalāms divos aksiālos inerces momentos.

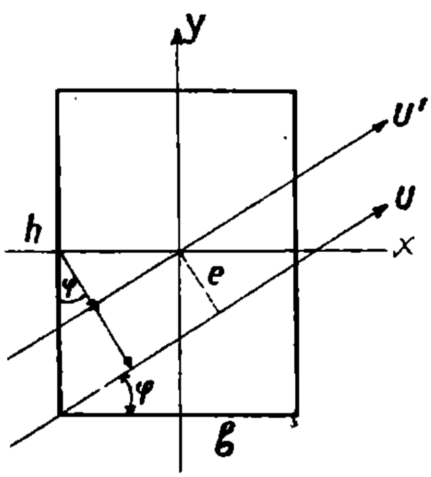
Lai to izdarītu, novelkam caur punktu O kaut kādas savstarpēji perpendikulāras asis X un Y un apzīmēsim laukumiņa dF koordinates minētā asu sistemā ar X un y. Tad $r^2 = x^2 + y^2$ untā tad $J_p = \Sigma\, dF\,(x^2+y^2) = \Sigma\, dF.\, x^2 + \Sigma\, dF.\, y^2 = J_{yy} + J_{xx}$. Tā tad kaut kura laukuma polārais inerces moments pret kaut kādu punktu ir vienlīdzīgs katru divu aksiālo inerces momentu summai,kuri attiecināti pret divām savstarpēji perpendikulārām asīm,ejošām caur doto punktu.

Atsevišķā gadījumā polārais inerces moments ir vienāds ar abu galveno aksialo inerces momentu,attiekto pret doto punktu summu.

Pamatojoties uz iepriekšējiem izvedumiem,viegli iespējams uziet dotās figuras inerces momentu pret kaut kuru asi,ja mums zinami figuras galvenie inerces momenti pret asīm,ejošām caur kaut kādu punktu.,p.piem.caur figuras smaguma centru.

Ja tas mums zinams,tad mēs varam pēc izteiksmes (2^b) noteikt inerces momentu pret kuru katru asi,ejošu caur to pašu punktu un pēc izteiksmes (1) - inerces momentu pret kuru katru asi,ejošu paralleli pēdajai.

Pa piem. atradīsim taisnstūra,kura malas ir b un h, inerces momentu pret asi U,ejošu caur virsotni zem leņķa φ pret malu b.Lai to panāktu,novilksim caur figuras smaguma centru galvenās inerces asis X,Y un vēl asi U',ejošu paralleli dotai asij U.Taisnstūra inerces moments pret asi U' izteicās:



$$J' = J_x\cos^2\varphi + J_y\sin^2\varphi = \frac{bh}{12}\,(h^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)$$

Ass U atrodās e atstātumā no ass U',kur $e = \frac{h}{2}\cos\varphi - \frac{b}{2}\sin\varphi$.

Pēc izteiksmes (1^a) inerces moments pret asi U izteicās:

$$J = J' + f\,e^2 = \frac{bh}{12}\,(h^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi) + bh\,\Big(\frac{h^2}{4}\cos^2\varphi + \frac{b^2}{4}\sin^2\varphi - \frac{bh}{2}\cos\varphi\sin\varphi\Big) = \frac{bh}{6}\,(2h^2\cos^2\varphi + 2b^2\sin^2\varphi - 3bh\cos\varphi\sin\varphi)$$

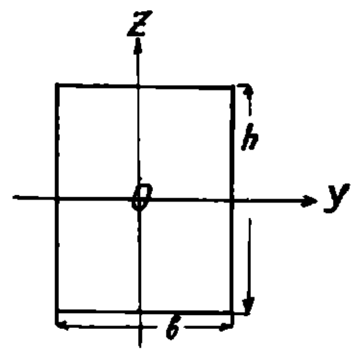
Abus galvenos inerces momentus,caur kuriem izteicās visi pārējie,- var atrast katram gadījumam ar integrālrēķinu palīdzību.

Tīrās lieces gadījums.

Šis deformācijas veids raksturojas caur to,kā prizmatiska ķermeņa šķēlieni pirmāk pret centrālo asi normāli,pēc deformācijas pagriežas viens pret otru,pie kam ķermeņa ass izliecās.Lai šinī deformācijas veidā uzietu iekšējo spēku spraigumus,pielietosim mums pazīstamo šķēlienu metodi,šķeļot ķermeni gar kādu virsmu,atmetot vienu ķermeņa daļu,kuras iedarbi atvietojam ar gar šķēliena virsmu iedomāto pielikto iekšējo spēku iedarbi.

Šiem spēkiem kopā ar ārējiem spēkiem,kas iedarbojās uz paliekošo ķermeņa daļu,jāapmierina statikas prasības.

Kā realizēt tīru lieci.



Pieņemsim,kā prizmatisks ķermenis,kuru uz priekšu sauksim par siju(par siju vispāri sauksim paliekoši garu prizmatisku ķermeni,kas noslodzīts galvenā kārtā normāliem pret tā asi spēkiem,kas darbojas caur pēdējo ejošās plāknēs),atbalstīts saskaņā ar skici.

Sījas šķēršķēliens lai ir taisns četrstūris bxh un ārējie spēki P lai iedarbojās vienā no šķēliena simetrijas galvenajām plāknēm.Statika šinī gadījumā dod rezultātu kā $A_1 = A_2 = A - P$.

Iedomāsimies sīju šķeltu ar normālu pret asi plakni x atstātumā no kreisā sījas gala.

Saskaņā ar šķēlienu metodes konsekvencēm jāpieņem,kā gar šķelto šķēlienu iedarbojas iekšējie spēki,kas līdzsvaro ārējos spēkus - šoreiz $\bar{P}$ .Pēdējo mēs varam pārnest šķēlienā ar pāra momenta Px (kuru sauksim par lieces pāri) palīdzību.

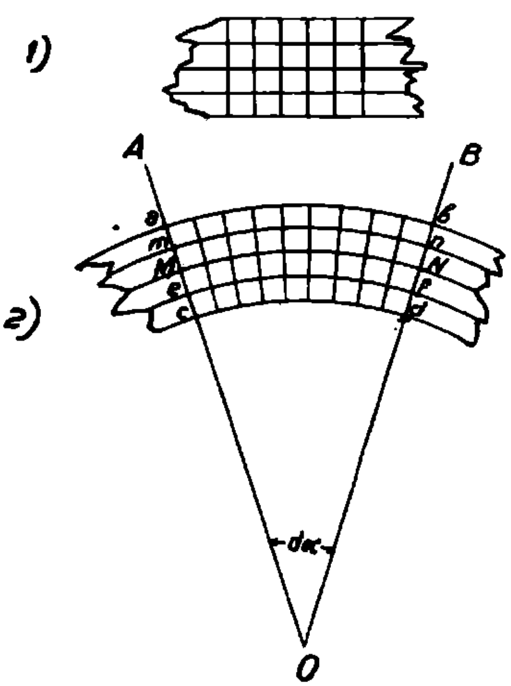
Patiesi,iedomāsimies šķēlienā pieliktus 2 vienādus ar P ,pretēji virzītus spēkus tad spēks P ,kas pielikts sījas galā un spēks (-P) veido pāri Px, bet šķēlienā vēl paliek spēks $\overline{P}$,kuru uz priekšu sauksim par šķērs - jeb cērpes spēku,kuru apzīmēsim ar Q.Tā tad Q - P un $M_x(O) = P x$ (še simbols M_x (O) apzīmē ne $M(O)$ vektora projekciju uz x-asi ,bet $M(O)$ šķēliena x atstātumu no sījas gala).

Tāds stāvoklis pastāvēs līdz kamēr $x < a$.Tiklīdz x $\geqq$ a šķērsspēks Q pazūd un paliek vienīgi lieces pāris resp.moments M_x (O) = Pa,par ko var pārliecināties ņemot x $\geqq$ a.

Tā tad posmā starp sījas tabalsta punktiem darbojas tikai lieces pāra moments $M_x(O) - Pa$, kas izsauc tīro lieces deformāciju ar jau minētām pazīmēm.

Experimenta dati.

Iegravēsim uz sījas sānviresmām ortogonālus tīkliņus (Sk. 1 un 2) Tad konstatēsim sekošas parādības.Tīkliņa rūtiņas vidējā daļā,starp atbalsta punktiem,deformejas tā,ka rūtiņu taisnie leņķi nesašķobās.Pielaidīsim kā tādas pašas deformācijas notiek arī sījas iekšienē, kas nozīmē,kā tangenciālie spraigumi sījā nekur nedarbojas kā viscaur $\tau = 0$ un kā vispāri kāds sījas elements taisnā parallelepipeda, kas izdalīts ar šķēlieniem normāliem un paralleliem galveno asu plaknēm,veidā paliek nesašķobīts,kadēļ



jautājums paceļas tikai par šī parallelepipeda šķautņu garumu maiņu,ko var izsaukt vienīgi σ_x, σ_y un σ_z.

Tā kā minētā elementa taisnie leņķi nesašķobās,līdz ar ko visur $\tau = 0$,tad normālie šķēlieni,pagriezdamies viens pret otru,paliek plakani.

Šo šķēlienu krustojumu līnijas veido kādu cilindrisku virsmu,parallelu kā sijas augš-un apakšvirsmām, ab un cd, tā arī izliekto rūtiņu starpvirsmām ef u.t.t.,sījas ass izliecas galvenajā Z plāksnē.

Salīdzinot ab,ef un cd garumus,mēs konstatējam sekošo: augšejās sījas daļas šķiedri ir pagarinājušies,apakšējie saīsinājušies,bet var atrast starp šīm šķiedru kārtām kādu starpkārtu MN,kuras garums palicis nemainīgs.

Šo šķiedru kārtu sauc par neitrālo šķiedru kārtu,jeb vienkārši par neitrālo kārtu.

Šīs kārtas plaknes krustojuma līniju ar sījas normālo šķēlienu sauc par neitrālo asi jeb nulles līniju.Garamejot minēsim,kā sījas gabalos no galiem līdz atbalsta punktiem , (šos gabalus sauksim par konsolēm) iegravēta sānvirsmas tīkliņa rūtiņas sašķobisies,pateicoties - kā redzēsim vēlāk - tam apstāklim,kā še, bez lieces pāra,darbojās arī šķērsspēks Q,bez tam vēl minēsim, kā uz sījas sānvirsmām mēs gan nekonstatēsim tik krasu rūtiņu deformāciju pārmaiņas ainu,kā tas notiek ar Q,kurš virs atbalsta punktiem piepeši paliek $Q = 0$ un turpina tāds palikt posmā līdz nākamam atbalsta punktam.

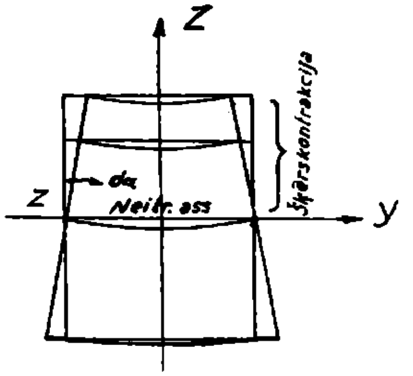
Tadēļ apskatītā rūtiņu deformāciju aina attiecās faktiski uz kādu sījas vairāk vai mazāk saīsinātu sījas gabalu starp sījas atbalsta punktiem.

Tālāk piegriezīsim speciēlu vērību sījas šķērsšķēlienam.(Sk.sk.3)

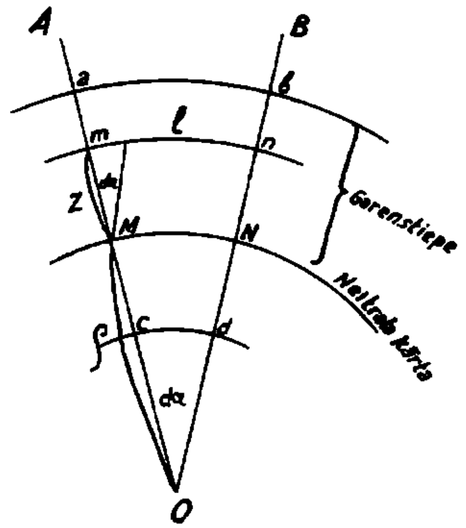
Še mēs konstatējam sījas augšējā daļā mums pazīstamo sānkontrakciju,kuru noteic Poisson'a koeficients ν ,bet apakšējā daļā pretēju paradību.

Ja leņķi starp divi bezgalīgi tuvi viens no otra atrodošamies sījas normāliem šķēlieniem AMO un BNO (sk.

3)



4)



skici 2 un 4) apzīmēsim ar dα, kāda šķiedra mn-ℓ atstātumu virs neitrālas kārtas ar z, tad $\Delta mn = \Delta\ell = mn - MN = z d\alpha$ un relatīvais visu šķiedru kārtas pagarinājums ir $\ell_x = \frac{\Delta\ell}{MN} = \frac{z d\alpha}{\rho d\alpha} = \frac{z}{\rho}$. Bet šīs pašas šķiedru kārtas sānkontrakcija (sk. sk.3) izteicas $\ell_y = \frac{z d\alpha_1}{\rho_1 d\alpha_1} = \frac{z}{\rho_1} = -\nu\frac{z}{\rho}$, no kurienes

$$|\rho_1| = \frac{|\rho|}{\nu}, \quad |\rho_1| > |\rho|$$

Tā kā saskaņā ar eksperimentu $\nu = 0{,}30$, tad apmēram

$$|\rho_1| \sim 3\tfrac{1}{3}\rho.$$

Šķērsliecesa spraigumi.

(Pēc piezīmēm)

Kā zinams, ķermeņa spraiguma stāvoklis ir pilnīgi noteikts, ja ir zinami spraigumi uz bezgalīgi mazu taisna tetraedra resp. paralleĺepipēdu 3 savstarpīgi ortogonālām skaldnēm.

Līdz šim no mums kontatēti fakti noveda pie atziņas, kā uz skaldnēm, parallelām normāliem un tāpat arī uz skaldnēm, parallelām galvenām sījas plaknēm, tangenciāli spraigumi nedarbojās, līdz ar ko jautājums par τ ir izšķirts.

Tā kā mēs konstatējam sījas šķiedru garumu maiņu sījas gareniskās ass, ar ko uz priekšu savietosim mūsu koordinātu sistemu X - asi, virzienā, tad var rasties doma pieņemt kā X-ass virzienā darbojās spraigums σ_x. Tomēr, jāņem vērā, kā gadījumā, kad σ_y un $\sigma_z \neq 0$, var kontatēt šķiedru garumu maiņu arī pie $\sigma_x = 0$. Patiesi, varētu rakstīt:

$\ell_x = \frac{\nu}{\varepsilon}(\sigma_y + \sigma_z)$, kur $\sigma_x = 0$, bet $\ell_x \neq 0$. Tālākus aizrādījumus dod sakars starp garen- un šķērsdeformāciju, kurus iegūvam veidā: $\ell_y = -\nu\ell_x = -\frac{\nu z}{\rho}$. Sakarā ar šo varam rakstīt:

$$\ell_x = \frac{z}{\rho} = \frac{\sigma_x}{\varepsilon} - \frac{\nu}{\varepsilon}(\sigma_y + \sigma_z),\quad \ell_y = -\nu\ell_x = -\frac{\nu z}{\rho} = \frac{\sigma_y}{\varepsilon} - \frac{\nu(\sigma_z + \sigma_x)}{\varepsilon},$$

no kurienes seko: $\frac{\nu\sigma_x}{\varepsilon} - \frac{\nu^2}{\varepsilon}(\sigma_y + \sigma_z) + \frac{\sigma_y}{\varepsilon} - \frac{\nu}{\varepsilon}(\sigma_z + \sigma_x) = 0,$

$$-\nu^2(\sigma_y + \sigma_z) + \sigma_y - \nu\sigma_z = 0,\quad \sigma_y(1 - \nu^2) - \nu\sigma_z(1 + \nu) = 0,$$

$\sigma_y(1 - \nu) = \nu\sigma_z$, kas nozīmē, kā uz $\ell_y = \nu\ell_x$ attiecības sakara vien nevar slēgt par $\sigma_y = \sigma_z = 0$, kā tas parasti tiek darīts stiprības mācības kursos.

Bez šaubām, $\sigma_y = \sigma_z = 0$ apmierinā $\sigma_y(1 - \nu) = \nu\sigma_z$, bet bez šī atrisinājuma ir vēl daudz citu atrisinājumu ar $\sigma_y \neq 0$ un $\sigma_z \neq 0$. Tikai pieņemot (konstatēt ar experimentu šo faktu laikam nevarēs, jo, kā rādās, Z-ass virzienā dimensiju kontrakcijas nevarēs konstatēt, kā to pierāda šīs dimensijas kontrakcijas aprēķins à posteriori, pēc σ likuma iegūšanas) arī

$\ell_z = -\nu\ell_x = -\frac{\nu z}{\rho} = \frac{\sigma_z}{\varepsilon} - \frac{\nu}{\varepsilon}(\sigma_x + \sigma_y)$, nonāksim pie atziņas, ka $\sigma_y = \sigma_z = 0$. Patiesi, saskaitot visus 3 nolīdzinājumus iegūsim:

$$(1 - 2\nu)\frac{z}{\rho} = \frac{(1 - 2\nu)}{\varepsilon}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z),\quad \frac{z}{\rho} = \frac{\sigma_x}{\varepsilon} - \frac{\nu(\sigma_y + \sigma_z)}{\varepsilon} =$$

$$= \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{\varepsilon} \quad \frac{\sigma_y + \sigma_z}{\varepsilon}(1 + \nu) = 0$$ no kurienes $\sigma_z = -\sigma_y$.

Ievietojot šo sakarību jau uzietā nolīdzinājumā $\sigma_y(1 - \nu) = \nu\sigma_z$, iegūstam: $\sigma_y(1 - \nu) + \nu\sigma_y = \sigma_y = 0 = \sigma_z$ 1

Rezumējot visu līdz šim atzīto, jākonstatē kā šķērsi liektā sījā: $\tau = 0$, $\sigma_y = \sigma_z = 0$. un $\frac{z}{\rho} = \frac{\sigma_x}{\varepsilon} - \nu(\sigma_y + \sigma_z)_{\sigma_y = \sigma_z = 0} =$

$$= \frac{\sigma_x}{\varepsilon},\quad \sigma_x = \sigma = \frac{\varepsilon z}{\rho}$$

Tāļāki apskatīsim līdzsvara noteikumus, visā normālā šķēlienā. Statika vispārējā gadījumā sniedz 6 analitiskus nolīdzinājumus līdzsvara noteikšanai: 3 projekciju un 3 momentu nolīdzinājumus.

3 projekciju nolīdzinājumi ir:

1) Uz X - asi: $\int^{F} \sigma dF = \int^{F} \frac{\varepsilon}{\varsigma} z dF = \frac{\varepsilon}{\varsigma} \int z dF_y = 0$ (identitāte) jo X -ass virzienā ārējo spēku pielikts nav un Y asi mēs savietojam ar figuras galveno asi. Ja to mēs nebūtu darījuši, tad 1) būtu jāuzskata par nolīdzinājumu, kas dotu aizrādījumu kā jānovieto Y.

2) $\tau_{xz}\, dF = \int^{F} 0 . dF = 0 = 0$ identitāte, jo tangenciālā spraiguma komponentes Z - ass virzienā uz šķēlienu, normālu pret X -asi, nav,

3) $\int^{F} \tau_{xy}\, dF = \int^{F} 0\, dF = 0 = 0$ (identitate) jo tangenciālā spraiguma komponentes Y— ass virzienā normālā sījas šķēlienā nav. Pirmais nolīdzinājums $\frac{\varepsilon}{\varsigma} \int^{F} z dF = 0$, izteic kā $\int^{F} z dF = 0$, t.i. kā laukuma statiskam momentam pret Y asi jābūt 0, kas ir iespējams tikai tad, ja Y ass ir centrālā ass t.i. ja tā iet caur šķēliena smaguma centru.

Tā tad Y asij jābūt virzītai caur šķēliena smaguma centru. Apskatīsim tālāk momenta noteikumus. Ārējo spēku moments pret Y asi resp. šī pāra momenta projekcija uz šo asi (Statika pierāda, kā spēka moments pret kādu asi = šī spēka momenta, kas sastādīts pret kaut kuru uz šīs ass punktu, projekcijai) ir $(M_x(0))_y = aP$. Iekšējie spēki reducējas pie to spraigumiem σ, parallelām X -asij, kadēļ jābūt :

4) $\int^{F} \sigma dF\, y = \int^{F} \frac{\varepsilon z}{\varsigma} dF\, z = \frac{\varepsilon}{\varsigma} \int^{F} z^2\, dF = \frac{\varepsilon}{\varsigma} J_y = (M_x(0))$ kur J_z ir šķēliena axiālais inerces moments pret Z -asi.

Tā kā $\sigma = \frac{z}{\varsigma} \varepsilon$, tad $\frac{\varepsilon}{\varsigma} = \frac{\sigma}{z}$ un $\frac{\varepsilon}{\varsigma} . J_y = \frac{\sigma}{z} . J_z = (M_x(0))_y$

x)

$$\boxed{\sigma = \frac{M_x(0)_y z}{J_y}}$$

$^{x)}$ Šī ir ļoti svarīga formula,kadēļ nodarbosimies ar to tuvāki.

Pirmkārt, simbola $(M_x(0))_z$ vienkāršosim to atvietojot vienkārši ar M_x ,saprotot ar pēdējo tomēr pāra momentu,tā tad M_x jālasa tā: spēku koppāra moments,kas darbojas vienā no sījas šķēliena galvenajām plāknēm sījas šķēlienā x - atstātumā no sījas ass kāda punkta,parasti no sījas gala resp. atbalsta punkta.

Sakarā ar šo vienkāršojumu mūsu formula gūst veidu: $\boxed{\sigma = \frac{M_x\, y}{J_z}}$ Šinī formulā ietilpst algebraiski lielumi σ,M un y; J_z ir absolūts lielums.

Sakarā ar šo paceļās jautājums par zīmju saskaņošanu,kuras būs atkarīgas kā no koordinātu asu virzieniem, tā no tā apstākļa, vai σ ir stiepes vai spiedes spraigums,kā arī no konvencijas par momentiem piešķiramām zīmēm.

Pienemot y- ass uz augšu virzītu virzienu par pozitīvu,mēs būtu izšķīruši jautājumu par y zīmēm,paliek σ un M_x. Ja mēs vienotos lieces momentus pret kādu šķēlienu skaitīt par pozitīviem,ja tie cenšās kreiso sījas atšķelto daļu pagriezt attiecībā pret šo šķēlienu pulksteņa rādītāja kustības virzienā,tad pie $y>0$ $\sigma = \frac{M_x\, y}{J_z} > 0$,pie kam σ būtu spiedes spraigumi.

Ja mēs vēlētos lai spiedes spraigumi iegūtu z zīmi - tad mums minētos momentus būtu jāskaita par negatīviem, jeb skaitot tos tomēs par pozitīviem,būtu jāraksta $\sigma = -\frac{M_x\, y}{J_z}$

Visām šīm piezīmēm šķērslieces teorijā tomēr ir tikai principiēla nozīme,jo konstruktoru interesē tikai max σ absolutā vērtība,t.i. $\left|\begin{matrix}\max\\ \min\end{matrix}\sigma\right|$ Konstruktoru interesē

$\max\sigma = \frac{(M_x(0))_y}{J_y}\max y$ resp. $\min\sigma = \frac{(M_x(0))_y}{J_y}\min z$

Taisna četrstūra b·h gadījumā max $Z = h/2$ un $\max\sigma = \frac{(M_x(0))_y}{J_y} = \frac{(M_x(0))_z}{W}$, kur $\frac{J_z}{h/2} = W$ sauc par šķēliena pretestības momentu.Taisnam četrstūrim $J_y = \frac{bh^3}{12}$ un $W = \frac{bh^3 \cdot 2}{12 h} = \frac{bh^2}{6}$

Nebūtu pareizi ar šo rezultātu apmierināties, jo statika prasa 6 noteikumu apmierināšanu. Vēl paliek nepārbaudīti 2 momentu noteikumi. Šie noteikumi ir: spēku momentu summām pret asīm X un Z jeb spēku momentu projekciju summām pret šī asīm atsevišķi jābūt 0.

Sastādot iekšejo spēku momentu pret asi X resp. šo spēku momentu projekciju pret šo asi, ņemsim vērā, kā σ ir paralleli X asij, kādēļ iekšējie spēki momentu pret X - asi nedod kādēļ:

5) $\int^{F}\left[\bar{\tau}, \bar{\sigma} dF\right]_x = \int^{F}\left[\bar{\tau}, \bar{\sigma}\right]_x dF = \int^{F} 0 \, dF = 0 = 0$ (identitate).

Še $\bar{\tau}$ apzīmē kāda bezgalīgi maza iekšēja spēka $\bar{\sigma} dF$ radiusu - vektoru. Sastādot spēku momentu pret asi X, mums būtu jānoprojecē $\bar{\sigma} dF$ uz plakni peprpendikulāru pret X asi, t.i. jānoprojecē uz YOZ plakni. Bet šī projekcija $(\bar{\sigma} dF)_{yoz} = 0$, kādēl atkal nonāksim pie identitates 5). Un beidzot 6. noteikums ir:

6) $\int^{F}\left[\bar{\tau}, \bar{\sigma}\right]_z dF = \frac{(M_x(0))_y}{J_y} \int^{F} yz \, dF = \frac{(M_x(0))_y}{J_y} J_{zy} = 0$. Tā kā koordinātu asis tika savietotas ar galvenām asīm, tad $J_{zy} = 0$ un 6) ir identitate.

Šķērslieces spraigumu problēmas atrisinājuma paplašinājums.

Iepriekšejā gadījumā tika operēts ar sīju ar normālo šķēlienu taisna četrstūra veidā, kura vienas simetrijas plāknē iedarbojas ārējie spēki, kādēļ tūlīt varēja noteikt izlieces plakni, neitrālās kārtas virzienu u.t.t.

Tālāk apskatīsim gadījumu, kad galveno asu virzieni iepriekš nav zināmi, bet tos papriekšu ir jāuziet ar metodēm, kuras sniedz inerces momenta teorija.

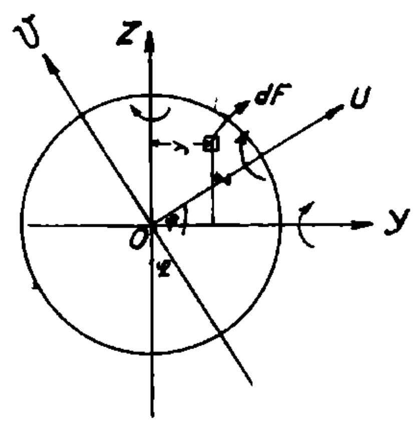
Tad novietojot spēkus tāpat vienā no sījas galnenajām plaknēm, mēs nonāksim pie slēdziena, kā sīja izliecās spēku iedarbes plaknē, kā neitrālai šķiedru kārtas plaknei jābūt perpendikulārai pret spēku darbības - jeb konkretāki - pret šķērslieces iedarbes pāra plakni. Atkarībā no tam, vai mēs kādu no šiem noteikumiem būsim jau à priori izpildījuši jeb ne,mēs iegūsim attiecīgu identitāti jeb nolīdzinājumu.

Izpildot nolīdzinājuma prasības,mēs nolīdzinājuma vietā iegūsim identitāti.

Greizā liece.

Visos iepriekšējos gadījumos lieces pāris darbajās vienā no sījas galvenajām plaknēm.Tagad apskatīsim gadījumu, kad lieces pāris darbojās plaknē U,kas nav galvenā plakne, bet tādas ir ZX un YX plaknes,kuru šķēlieni ar normālo dod pēdejā galvenās asis OZ un OY. X - ass pieņemsim tāpat savietotu ar sījas centrālo asi,bet pārejās ar šķēliena galvenajām asīm ZO un YO.

Lieces pāra momenta vektors $\bar{M}_x(o)$ tādā gadījumā atrodas U-plaknē un to var virzīt caur p O.Apzīmēsim leņķi starp Z un U asu virzieniem ar φ un saliksim vektoru $M_x(o)$ divi komponentēs: $M_x(o) = M_x(o)\cos\varphi + M_x(o)\sin\varphi$.Katra no šīm komponentēm darbojās attiecīgā galvenajā plaknē.Pieņemsim uz brīdi,kā darbojās tikai viena komponente p.p. $M_x(o)\cos\varphi$. Šī komponente darbojās Y-ass virzienā,bet pāris pats atrodās ZX-ass plaknē,t.i.mēs esam nonākuši pie mums jau iepriekš apskatītā gadījuma,kādēļ tūlīt varam uzrakstīt spraigumu formulu $\sigma_1 = \frac{M(o)\cos\varphi z}{J_y}$. Svarīgs tagad ir jautājums par spraiguma zīmi.Pieņemsim,kā pāra momenta,kas iedarbojās uz šķēlienu ir rotācijas virziens sakrīt ar pulksteņa rādītāja kustības virzienu (sk.sk.).Tad komponente $M(o)\cos\varphi$ šķēliena šķiedru,



kura elementārais šķēliens ir dF, bet šī elementa koordinātes ir y un z ,saspiež.Skaitot spiedes spraigumus par negatīviem būtu jāraksta $\sigma_1 = -\frac{M(o)\cos\varphi z}{J_x}$ Visi stiprības mācības kursi min kādu superpozicijas principu,saskanā ar kuru it kā varētu spraigumus,kurus izsauc kādā šķiedrā divi jeb vairāki spēki,vienkārši algebraiski summēt

Bet tāds princips šķiet pavisam nav vajadzīgs (Par šo jautājumu konf.prof.A.Vītols: Eine Verallgemeinerung der Sätze von der potentiellen Energie elastischer Körper A.U.L.1935.)

Lieta tā,kā ja mēs gribētu ievest attiecīgos diferenc. nolīdzinājumus tās pārmaiņas,kuras ir izsaukusi sijas deformācija no jau iedarbojošos spēku,tad mēs konstatētu,ka šīs pārmaiņas tiek izpaustas ar kādiem augstākas kārtas mazākuma lielumiem,kurus samērā pret nolīdzinājumā ietilpstošiem pamatlielumiem,var atmest.

Tāpat,ja gribētu būt konsekvents,tad jau viena spēka iedarbes gadījumā būtu jāatsaucās uz „superpozicijas principu" jo arī še notiek „superpozicija",ņemot vērā pakāpenisku spēka,kuru var iedomāties kā spēku-elementu summu,pieaugumu.

Otra pāra momenta komponente $M(\acute{o})\sin\varphi$;kā redzams, izsauc stiepes spraigumu min.šķiedrā,kadēļ $\sigma_1 = \frac{M(o)\sin\varphi\, y}{J_z}$ un $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = \frac{M(o)\sin\varphi\, y}{J_z} - \frac{M(o)\cos\varphi\, z}{J_y} = M\left(\frac{\sin\varphi}{J_z} - \frac{\cos\varphi Z}{J_y}\right)$.Šī formula atvasināta dotam konkretam gadījumam,paliek spēkā arī vispārejā gadījumā,kad kāds no algebraiskiem lielumiem maina savu zīmi.Vispirms tas attiecas uz y un z ,kuru zīmes noteic attiecīgs kvadrants.

Tā tālāki ja M ir pretējais rotācijas virziens,tad M ir negatīvs lielums;tāpat φ ir algebraisks lielums.

Neitrālas ass jeb 0-līnijas nolīdzinājumu iegūstam, liekot: $M\left(\frac{y\sin\varphi}{J_z} - \frac{z\cos\varphi}{J_y}\right) = 0$, $\frac{y\sin\varphi}{J_z} - \frac{z\cos\varphi}{J_y} = 0$,

$tg\varphi = \frac{z}{y}\frac{J_z}{J_y} = \frac{z}{y}\frac{\varrho_z^2}{\varrho_y^2} = tg\alpha\frac{J_z}{J_y} = tg\alpha\frac{\varrho_z^2}{\varrho_y^2}$, $\frac{z}{y}tg\alpha = \frac{\varrho_y^2}{\varrho_z^2}\, tg\varphi$ (I)

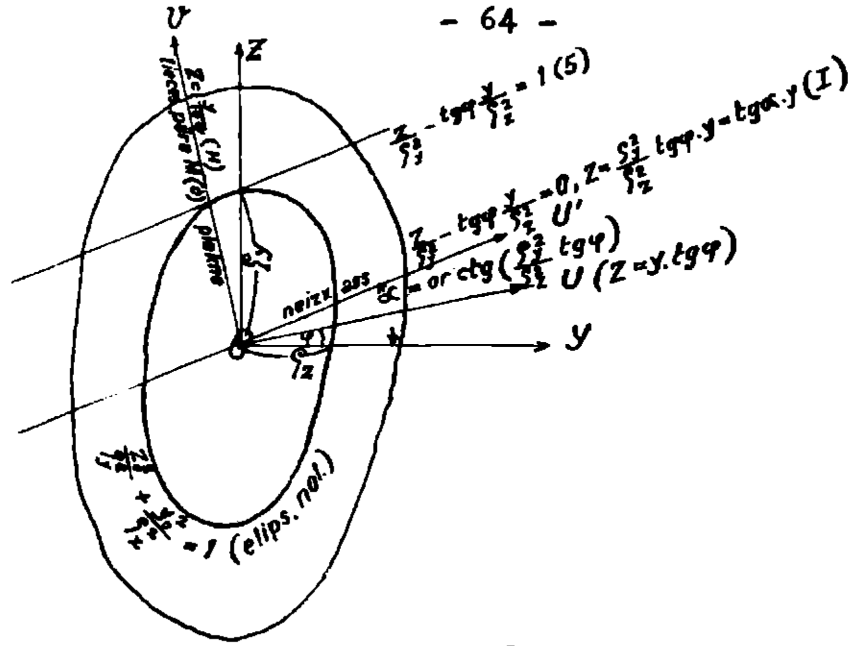
kur ir inerces radius.Kad $\varrho_y = \varrho_z$ (ripa),tad $tg\varphi = tg\alpha$,tas nozīmē šinī gadījumā kā neitrālā ass ir perpendikulāra pret liecces para plakni,kurā notiek sijas izliece.

(Pēc piezīmēm) (sk.skici)

Tangentes pret kādas līknes punktu nolīdzinājums ir:
$z - z_0 = z_0' (y - y_0)$ (1),kur indeks o attiecas uz līknes punktiem inerces elipses (sk.sk.) nolīdzinājums ir: $\frac{Z_0^2}{\varrho_y^2} + \frac{y_0^2}{\varrho_z^2} = 1$,

$\frac{2 Z_0 Z_0'}{\varrho_y^2} + \frac{2 y_0}{\varrho_z^2} = 0$, $\frac{Z_0 Z_0'}{\varrho_y^2} + \frac{y_0}{\varrho_z^2} = 0$. (2)

Ievietojot no (1) $Z_0' = \frac{Z - Z_0}{y - y_0}$ nol. (2) iegūstam:



$$\frac{Zo\,(Z-Z_0)}{\rho_y^2\,(y-y_0)_2} + \frac{y_0}{\rho_z^2} = 0,\quad \frac{ZoZ}{\rho_y^2} - \frac{Zo^2}{\rho_y^2} + \frac{yy_0}{\rho_z^2} - \frac{y_0^2}{\rho_z^2} = 0\quad \frac{ZoZ}{\rho_y^2} + \frac{yy_0}{\rho_z^2} - \left(\frac{z_0^2}{\rho_y^2} + \frac{y_0^2}{\rho_z^2}\right),$$

Tā kā $\frac{Zo^2}{\rho_y^2} + \frac{y_0^2}{\rho_z^2} = 1$, tad: $\frac{ZoZ}{\rho_y^2} + \frac{yy_0}{\rho_z^2} = 1$ (3) Ja ass U nolīdzinājums ir $z = y\ \mathrm{tg}\varphi$, tad ass V, kas ir ortogonāla pret U, nolīdzinājums ir: $z = y\ \mathrm{tg}\varphi_1$ pie kam $1 + \mathrm{tg}\varphi\ \mathrm{tg}\varphi_1 = 0$, $\mathrm{tg}\varphi_1 = -\frac{1}{\mathrm{tg}\varphi}$ un $z = y\frac{1}{\mathrm{tg}\varphi}$; $-\ \mathrm{tg}\varphi = \frac{y}{z}$ (4). tad tangentes, kas iet caur V-ass un elipses krustojuma punktu, nolīdzinājums ir, kuru gūstam, ievietojot (3) no (4) $-\ \mathrm{tg}\varphi = \frac{y_0}{z_0}$; $\frac{z}{\rho_y^2} + \frac{y\frac{y_0}{z_0}}{\rho_z^2} = \frac{z}{\rho_y^2} - \mathrm{tg}\varphi\frac{y}{\rho_z^2} = 1$ (5)

Līnijas, kas parallela (5), un iet caur šķēliena smaguma centru nolīdzinājums ir iegūstams no (5), liekot 1 vietā 0, tad:

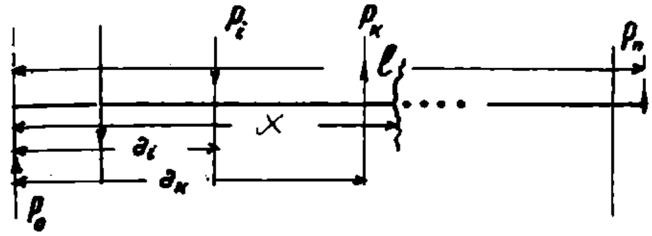
$\frac{Z}{\rho_y^2} - \mathrm{tg}\varphi\frac{y}{\rho_z^2} = 0$, $\frac{Z}{\rho_y^2}\ \mathrm{tg}\varphi\cdot\frac{y}{\rho_z^2}$ (6) $Z = y.\mathrm{tg}\varphi\frac{\rho_y^2}{\rho_z^2}$ kas ir (I) neitrālas ass nolīdzinājums.

No augstāk konstatētā izriet sekošais ļoti ērts un· parocīgs neitralas ass grafiskais uzieŝanas paņēmiens:

Novelk inerces elipses konturam tangenti, punktā, kurā krustojās elipses konturs ar V-asi, kas ir sījas normāla šķēliena un tās plaknes, kurā darbojās lieces pāris, krustojuma līnija. Līnija parallela šai tangentei un vilkta caur šķēliena centru, ir neitrāla ass jeb 0 – līnija.

Sījas izliece ar spēkiem normāliem pret sījas asi.

Par sīju tā tad sauksim pietiekoši garu prizmatisku ķermeni, kas noslodzīts galvenā kārtā ar spēkiem normāliem pret sījas asi un krustojušiem šo asi, jeb normāliem spēkiem, kas darbojas plaknēs kas iet caur sījas asi. Pieņemsim kā kāda sīja, attiecīgi atbalstīta, ir noslodzīta ar $(n+1)$ normāliem pret tās asi spēkiem, pie kam šo spēku starpā daži ir reakcijas spēki.



Šinī gadījumā starp šiem spēkiem pastāv sakarība

$$\sum_{i=0}^{i=n} P_i = 0.$$

Ņemsim vērā kādu šķēlienu x atstatumā no sījas kreisā atbalsta punkta un pārnesīsim šinī šķēlienā visus pa kreisi no šī šķēliena pieliktus spēkus. Šīs operācijas rezultāts būs: 1) $Q_x = \sum_{i=0}^{i=k} P_i$

2) $M_x = \sum_{i=0}^{i=k} (X - a_i) P_i$

Kur Q_x ir šķērs- jeb cerpes spēks sījas šķēlienā x atstatumā no sījas kreisā gala. Kā rāda izteiksme 1) šis spēks ir visu pa kreiso pusi no minētā šķēliena darbojošos spēku algebraiskā summa.

M_x ir lieces kopparis, kas kā rāda izteiksme 2), ir visu pa kreiso pusi no šķēliena darbojošos spēku pāru algebraiskā summa. Stiprības mācība pārus nevar pārnest, kadēļ še kopparis ir identisks ar visu pa kreiso pusi no šķēliena darbojošos spēku momentu pret sījas OY -asi algebraisku summu.

Šīs izteiksmes varēja sastādīt arī summējot spēkus un momentus pa labo pusi no šķēliena, tikai jāmin, kā starp kreisās un labās puses šiem lielumiem pastāv sakarība:

$$Q_{xkr} + Q_{xlab} = (Q_x)_I - (Q_x)_{II} = 0, (Q_x)_{II} = -(Q_x)_I \;;$$

$$M_{x\,kr} + M_{xlab} = (M_x)_I + (M_x)_{II} = 0, (M_x)_{II} = -(M_x)_I$$

Tālāk pierādīsim, kā arī Q_x un M_x savā starpā nav neatkarīgi. Šinī nolūkā ņemsim vērā šķēlienu $x+dx$ atstatumā no kreisa sījas gala. Tad, ja šinī par dx tālakajā šķēlienā nedarbojas nekāds spēks, tad Q_{x+dx} paliks tāds pats, kāds tas bīja šķēlienā x, t.i. $Q_{x+dx} = Q_x$. Bet M_x gūs pieaugumu $dM_x = d\sum\limits_{i=0}^{i=k}(x-a_i)P_i = dx\sum\limits_{i=0}^{i=k}P_i = dx.Q_x$, no kurienes seko, kā $\boxed{Q_x = \frac{dM_x}{dx}}$

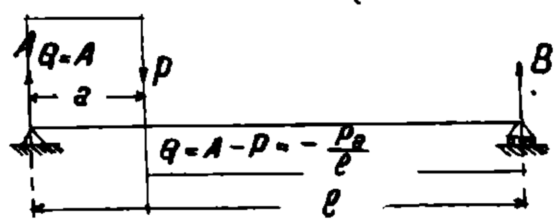
(Schwedlera teorema). Apskatīsim tālāk to gadījumu, kad $x = a_k$, t.i. kad P_k darbojas taisni pašā šķēlienā x. Šis gadījums ir interesants no funkciju teorijas viedokļa: ir jāsastāda 2 Q izteiksmes: $Q_{x-dx} = \sum\limits_{i=0}^{i=k-1} P_i$, un $Q_{x+dx} = \sum\limits_{i=0}^{i=k} P_i$.

Šis ir Q funkcijas pārtrauktamības gadījums, kuru vispārskatamāki ir attēlot grafiski. Šinī nolūkā apskatīsim gadījumu, kad sīja ir noslodzīta tikai ar vienu spēku P a atstatumā no sījas kreisā gala.

$$A = P\left(1 - \frac{a}{l}\right),$$
$$B = P\frac{a}{l}$$

$$Q_{a-dx} = A = P\left(1 - \frac{a}{l}\right)$$

$$Q_{a+dx} = A - P = -P\frac{a}{l}$$



$$Q_{0-dx} = 0,\ Q_{0+dx} = A,\ Q_{l-dx} = A - P = -P\frac{a}{l},\ Q_{l+dx} = A - P + Q = 0.$$

Uz jautājumu, kāds ir Q šķēlienā x=a še jāatbild ar uzrakstītam Q_{a-dx} un Q_{a+dx} nozīmēm.

Saprotams, kā saskaņā ar Schwedlera teoremu arī $\frac{dM_x}{dx} = Q_x$ būs pārtraukta funkcija šķēlienā zem spēka. Citādi tas būs ar integrālu $\int dM_x = M_x = \int Q_x dx + C$, kas būs nepārtraukta funkcija, pie kam, saprotams, Q_x vietā tāpat jāņem attiecīgais Q_{x-dx} un Q_{x+dx} nozīmes.

Schwedlera teoremai ir sevišķa nozīme stiprības mācībā. Pie tam x nozīmēm, pie kurām $Q_x = \frac{dM_x}{dx}$ maina savu zīmi, t.i. iet caur nozīmi 0, M_x iegūst ekstremālas vērtības maxM_x vai minM_x.

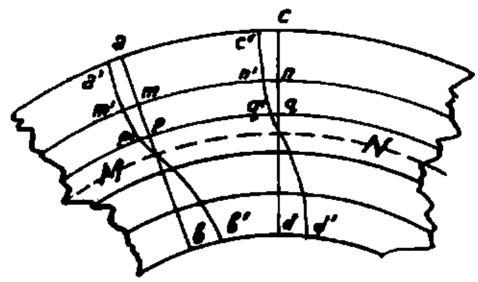
Sījas noslodzījums ne vienmēr ir tāds, kādu mēs apskatījam - ar koncentrētiem spēkiem. Ir vēl cits noslodzes veids - nepārtraukts, ar spēkiem attiektiem uz sījas garuma vienību.

Šinī gadījumā $Q_x = \frac{dM_x}{dx} = 0$, atļauj uziet sījas šķēlienus ar

M_x ekstremālām vērtībām.

Tangenciālie spraigumi šķērsliecē.

Kad šķēlienā darbojās bez lieces pāra arī šķērespēks Q, tad

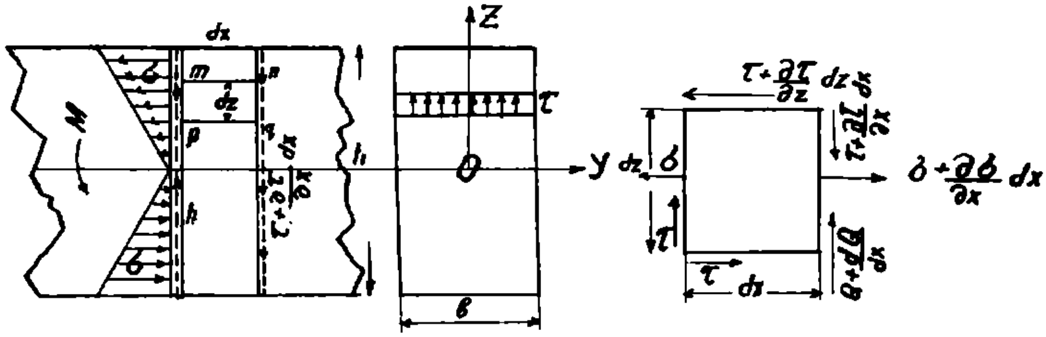


sījas sānvirsmā iegraveta tīkliņa rūtiņu pirmāk taisnie leņķi sašķobās, kas nozīmē, kā sīja uz elementa skaldnēm, normālām pret sījas asi, kā arī skaldnēs, paralelās koordinātu sistēmas plaknei XOY, darbojas τ. Apskatīsim vispirms sīju ar normālo šķēlienu taisna četrstūra veidā.

Pieņemsim hipotezi, kā arī sījas iekšienē notiek tādas pašas deformācijas, proti, kā a'b' un c'd' ir cilindriskas virsmas. Ņemsim vēl vērā sekošus eksperimenta konstatējumus:
1) pirmatnējais šķiedru garums mn pēc deformācijas nav mainijies, šķiedrs mn ir tikai pārvietojies jaunā stāvotnē m'n', no kā var slēgt, kā Q līdzdalība deformācijā neiespaido nozīmes, kas ir tikai M funkcijas.
2) rūtiņu gar augšējo un apakšējo virsmām leņķi nav sašķobījušies - slēdziens: augšejās un apakšejās virsmas šķiedra slāņos τ = 0, pie šī paša slēdziena varēja nonākt, ņemot vērā, kā gar ārējo virsmu nav pielikts nekāds spēks, kadēl gar ārējo virsmu τ = 0.
3) Taisno leņķu šķiebe sasniedz savu vislielāko vērtību neitrālā šķiedru kārtā MN, kur tā tad jārodas maxτ;
4) dotā šķēlienā un pie dota Q ir funkcija vienīgi no z-punkta attāluma normāles virzienā pret neitrālo šķiedru kārtu. Problēmas par τ, kā Q funkcijas uziešanu korekts atrisinājums prasa bez tam visu b statikas analitisko līdzsvara noteikumu izpildīšanu attiecībā uz normālo šķēlienu. Tā kā Q ir x funkcija, tad galīgā atrisinājuma konvencionāla forma ir: $\tau = \tau\,(z,x)$, tapat kā $\sigma = \sigma\,(z,x)$.

(Pēc piezīmēm)

Apskatīsim sījas elementa mn-pg līdzsvara noteikumus.



Projekciju uz X-asi noteikums ir:

$$\left(\tau - \left(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial z}\, dz\right)\right) dx\, b + \left(\sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial x}\, dx - \sigma\right) dz\, b =$$

$$= -\frac{\partial \tau}{\partial z}\, dz\, dx\, b + \frac{\partial \sigma}{\partial x}\, dx\, dz\, b = 0\,, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial x} - \frac{\partial \tau}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

Uz Z-asi: $-\int^F \frac{\partial \tau}{\partial x}\, dx\, dz\, b + \frac{dQ}{dx}\, dx = 0$ (2)

Momentu nolīdzinājumi dod: uz X-asi: $\int^F \tau\, dF\, y = 0$ (4), uz Y-asi: $\int^F \sigma\, dF\, z = M$ (5) uz Z-asi: $\int^F \sigma\, dF\, y = 0$ (6). (5) un (6) pilda σ, paliek tikai uz τ attiecošais (4).

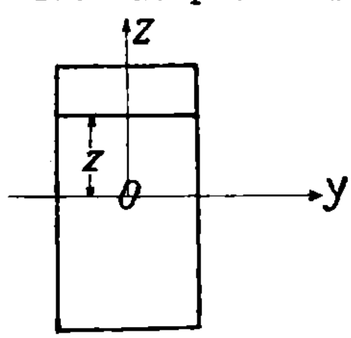
Uz Y-asi 0 = 0 (identitāte) (3)

No (1) seko $\frac{\partial \tau}{\partial z} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}$, $\tau = \frac{1}{b}\int \frac{\partial \sigma}{\partial x}\, dz\, b + \varphi(x)$, kur $\varphi(x)$ ir kāda brīva x funkcija. Tā kā $\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{MZ}{J_y}\right) = \frac{Z}{J_y}\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{Z}{J_y}\frac{dM}{dx} =$

$= \frac{Z}{J_y} Q$, tad $\tau = \frac{1}{b}\int \frac{\partial \sigma}{\partial x}\, dz\, b + \varphi(x) = \frac{Q}{bJ_y}\int bz\,dz + \varphi(x) =$

$$\tau\Big|_z^{h/2} = (\tau)_{h/2} - \tau_z = \frac{Q}{bJ_y}\int_z^{h/2} bz\,dz = \frac{QS_y}{bJ_y}$$

, kur S_y ir šķēliena laukuma, kas sasvītrots uz sk., statiskais moments. Tā kā gar ārējo sījas virsmu nav pielikts nekāds spēks, tad $(\tau)_{h/2} = 0$ un $\tau_z = \tau = -\frac{QS_y}{bJ_y}$.



Še zīmei nav nekādas nozīmes, tadēļ šo formulu uzrakstīsim veidā:

$$\boxed{\tau = \frac{QS_y}{bJ_y}} \qquad (\text{I})$$

Tālāk izpētīdim, ko izteic nolīdzinājums (2). No (3) seko, kā

$$\frac{\partial \tau}{\partial x}\, dx = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{QS_y}{bJ_y}\right) dx = -\frac{S_y}{bJ_y}\cdot\frac{\partial Q}{\partial x}\, dx =$$

$$= \frac{S_y}{bJ_y}\cdot\frac{dQ}{dx}\, dx, \text{ kadēļ}$$

$$\int^F \frac{\partial \tau}{\partial x}\, dx\, dz\, b = -\frac{1}{bJ_y}\frac{dQ}{dx}\, dx\int^F S_y\, dz\, b = -\frac{dQ}{dx}\frac{dx}{J_y}\int^F S_y\, dz = \frac{dQ}{dx}\, dx$$

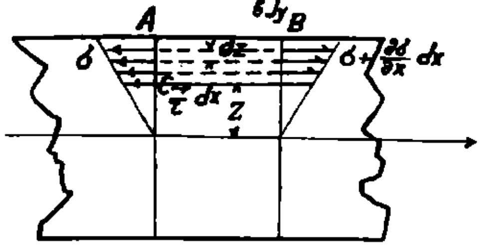
$$-\int^F S_y\, dz = J_y = -\Big|S_y\, z\Big|_{-h_1}^{h_2} + \int_{-h_1}^{h_2} z\, dS_y = 0 + \int_{-h_1}^{h_2} z\, bz\,dz = \int_{-h_1}^{h_2} bz^2\,dz = J_y \text{ (identitate)}$$

Paliek vēl pārbaudīt noteikumu (4):

$\int^{F}\tau dFy = -\frac{Q}{bJ_y}\int^{F} S_y \cdot y dF = 0$. Tā kā šinī gadījumā $y\,dF = 0$ (skšķēlienu), tad (4) ir identitate: $0 = 0$

(Obligatorisks)

Formula (1) $\tau = \frac{QS_y}{bJ_y}$ var izvest elementārākā ceļā. Ņemsim vērā



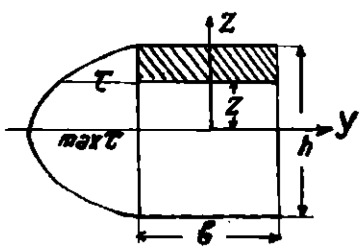
prizmatiska elementa ABCD līdzsvara noteikumu uz X-asi: $-\int_z^{h/2}\sigma b dz + \int_z^{h/2}(\sigma + \frac{\partial\sigma}{\partial x}dx) b dz + \tau b dx = 0$,

$\int_z^{h/2}\frac{\partial\sigma}{\partial x}dx b dz + \tau b dx = 0$,

$\tau = -\frac{1}{b}\int_z^{h/2}\frac{\partial\sigma}{\partial x} b dz =$

$= -\frac{1}{b}\int_z^{h/2}\frac{\partial(MZ)}{J_y\partial x} b dz = -\frac{1}{bJ_y}\int\frac{dM}{dx} b z dz = -\frac{1}{bJ_y}\int_0^{h/2} Q\, b z dz = -\frac{Q}{bJ_y}\int_z b z dz = -\frac{QS_y}{bJ_y}$.

Studentiem formulas $\tau = \frac{Q}{bJ_y}$ piemērošana ļoti bieži rada grūtības. Šīs grūtības koncentrejās S_y izteiksme. S_y ir četrstūra laukuma daļas līdz šķiedru kārtai Z atstatumā no neitrālas šķiedru kārtas, kur gribam Z uziet, statiskais moments (uz skices sasvītrots). Šī laukuma $S_y = \frac{1}{2}(\frac{h}{2} + z)(\frac{h}{2} - z) b = \frac{1}{2}(\frac{h^2}{4} - z^2) b$.

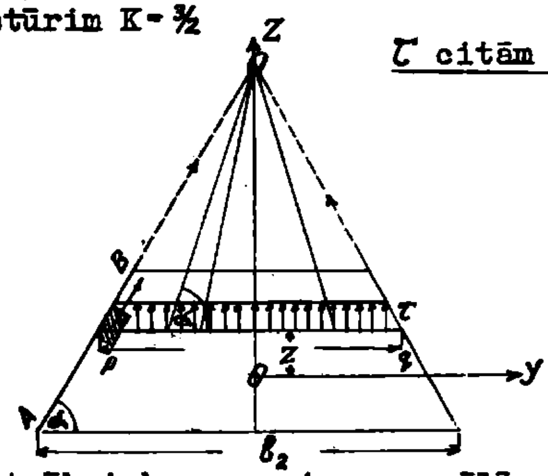


$\max\tau = \frac{Q}{bJ_y}\max S_y = \frac{Q}{bJ_y}\frac{1}{2}b(\frac{h^2}{4} - z^2)_{z=0}$

$= \frac{Q.12.\frac{1}{2}b.h^2}{b.bh^3.4} = \frac{3}{2}\frac{Q}{bh} = \frac{3}{2}\frac{Q}{F} =$

$= K\frac{Q}{F}$, kur K ir koeficients atkarīgs no šķēliena formas. Četrstūrim $K = 3/2$

τ citām šķēlienu formām.



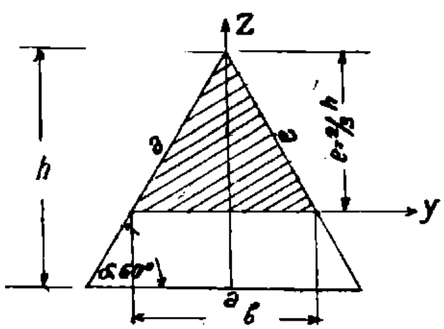
1) Apskatīsim simetrisku trapeci. Ņemsim vērā šķiedru kārtu Z atstatumā no neitralas šķiedru kārtas, kas sakrīt ar Y-ass virzienu. Tā kā trapeces sānvirsmas nav noslodzītas ne ar kādiem Q, tad uz sasvītrotā šķēliena elementa skaldni darbojas τ, kam trūkst komponentes normālā pret trapeces sānvirsmu virzienā, kas nozīmē kā šī elementa τ virziens sakrīt ar trapeces sāna virzienu AB. Turpinot šo τ virzienu līdz krustojumam ar

asi Z iegūsim krustojuma punktu O_1 ,caur kuru ies ari τ virziens no otras trapeces puses.Tālāk pieņemam 2 hipotezes:

1) visu pq šķiedru kārtas τ virzieni krustojas p O_1 un 2) šo τ vertikālās komponentes τ_v šinī šķiedru kārtā ir vienādas,t.i. šīs komponentes ir atkarīgas tikai no Z,tāpat kā taisnā četrstūrī un tās uzejamas tāpat kā četrstūrī,t.i. $\tau_v = \frac{Q S_y}{b J_y}$ .Kad τ virziena slīpuma leņķis nav zināms - un tas,noteikts ar p O_1 ,ir zināms - tad $\tau = \frac{\tau_v}{\sin\alpha'} = \frac{Q S_y}{b J_y \sin\alpha'}$,maxτ šķiedru kārtā z atstatumā ir $\left(\frac{\tau_v}{\sin\alpha'}\right)_{\alpha'=\alpha} = \frac{Q S_y}{b J_y \sin\alpha'}$

bet max max$\tau = \frac{Q\ (\max S_y)}{b J_y \sin\alpha}$ un max max max$\tau = \frac{\max Q\ \max S_y}{b J_y \sin\alpha}$

2) Tālāk apskatīsim trapeces speciāla veida,b=o t.i. vienādmalu trīsstūta gadījumu.



$\max\tau = \frac{Q \max S_y}{b J_y \sin 60°}$,

$J_y = \frac{ah^3}{36} = \frac{ah}{2} \cdot \frac{h^2}{18} = \frac{F.h^2}{18}$

$\max S_y = F_z \frac{e}{3}$, kur F_z ir svītrota laukuma lielums.

$\frac{F}{F_z} = \frac{h^2}{(2/3 h)^2} = \frac{9}{4}$, $F_z = \frac{4}{9}$ F;

$\max S_y = F_z \cdot e/3 = F_z \cdot \frac{2\cdot}{3.3} h = \frac{2}{9} F_z \quad h = \frac{2.4}{9.9} F.h = \frac{8}{81}$ F.h un

$$\max \frac{Q.\max S_y}{b J_y \sin 60°} \quad \frac{Q.8.F.h.18}{81.b.Fh^2 \sin 60°} = \frac{Q.8.18}{81.bh \sin 60°} = \frac{Q.8.18}{81.\frac{4}{3} a \cos 60° h \sin 60°} =$$

$$= \frac{Q.8.18}{27.2ah \sin 60°} = \frac{Q.8.18}{108.\left(\frac{ah}{2}\right) \sin 60°} = \frac{Q.8.18.2}{108\ F\ \sqrt{3}} =$$

$$\frac{Q.8.18.2\ \sqrt{3}}{108\ F.3} = \frac{8\ \sqrt{3}}{9} \cdot Q, \quad K = \frac{8\ \sqrt{3}}{9}.$$

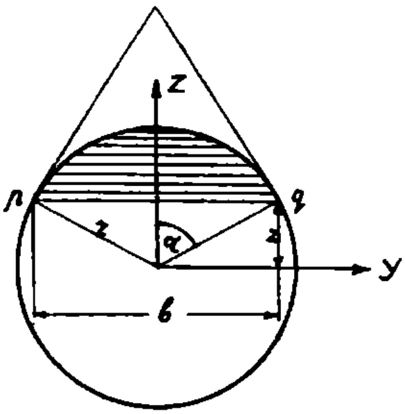
3) Sija ar ripas šķēlienu $\tau_v = \frac{Q.\ S_y}{b J_y}$ Ripas segmenta līdz šķiedru kārtai pq statiskais moments pret asi Y ir:

$$S_y = r^2\alpha.\frac{2}{3} r \frac{\sin\alpha}{\alpha} - r^2\cos\alpha\sin\alpha\ \frac{2}{3}\ r \cos\alpha\ \frac{2}{3}\ r^3 \sin\alpha\ (1-\cos^2\alpha) =$$

$$= 2/3\ r^3 \sin^3\alpha\ ;\ b = 2\ r \sin\alpha\ , J_y = \frac{\pi r^4}{4} \text{ un } \max\tau =$$

$$= \frac{Q.\ S_y}{b J_y} = \frac{Q.\frac{2}{3} r^3 \sin^3\alpha.\ 4}{2 r \sin\alpha\ \pi r^4 \sin\alpha} = \frac{4}{3} \frac{Q}{\pi r^2} \sin\alpha = \frac{4}{3} \frac{Q}{F} \sin\alpha$$

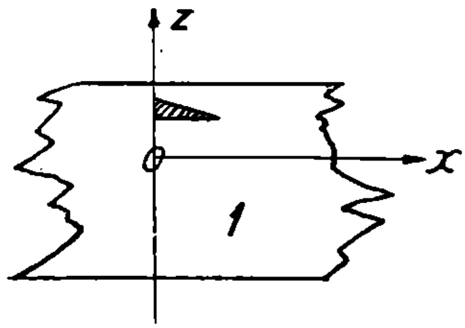
3)



$$= \frac{4}{3}\tau_v \sin\alpha, \ \max\max\tau = \left(\frac{4}{3}\frac{Q}{F}\sin\alpha\right)_{\alpha=\pi/2} =$$

$$= \frac{4}{3}\frac{Q}{F}, \quad K = 4/3$$

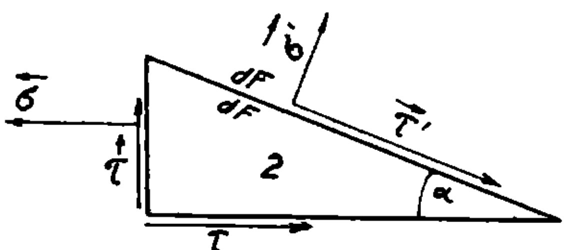
Galvenie šķērslieces spraigumi.



Izdalīsim izliektā sījā prizmatisku elementu, parallelu neitrālai šķiedru kārtai, ejošu caur visu sīju un tā tad garumā b, bet ar bezgalīgi mazām šķērsdimensijām.

Uz šī elementa skaldnēm darbojas spraigumi saskaņā ar skici 2. Starp uz šī elementa skaldnēm darbojušamies spēkiem pastāv sakarība: $\overleftarrow{\sigma} dF \sin\alpha + \overrightarrow{\tau} dF \cos\alpha + \overset{\uparrow}{\tau} dF \sin\alpha + \sigma' dF + \tau' dF = 0$

$\overleftarrow{\sigma}\sin\alpha + \overrightarrow{\tau}\cos\alpha + \overset{\uparrow}{\tau}\sin\alpha + \sigma' + \tau' = 0$ (1)



Projecēsim šos spēkus uz σ' virzienu, tad iegūsim:

$$\sigma \sin\alpha \cos\left(\tfrac{\pi}{2}-\alpha\right) + \tau\cos\alpha\cos\left(\tfrac{\pi}{2}-\alpha\right) + \tau\sin\alpha\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right) \cdot \sigma' = -\sigma\sin^2\alpha + \tau\cos\alpha \sin\alpha +$$

$$+\tau\sin\alpha\cos\alpha + \sigma' = \tau\sin 2\alpha - \sigma\sin^2\alpha + \sigma' = 0$$

Meklēsim σ' ekstremālas vērtības: $\frac{d\sigma'}{d\alpha} = 2\tau\cos 2\alpha + 2\sigma\sin\alpha\cos\alpha = -2\tau\cos 2\alpha + \sigma\sin 2\alpha = 0$

$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau}{\sigma}$, $2\alpha = \operatorname{arctg}\frac{2\tau}{\sigma}$, $\alpha_1 = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2\tau}{\sigma}$

$2\alpha + \pi = \operatorname{arctg}\frac{2\tau}{\sigma'}$ $\alpha_2 = \alpha + \pi/2 = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2\tau}{\sigma}$

Tā tad 2π robežās ir divi atrisinājumi, divi leņķi, kas atšķirās savā starpā par $\pi/2$. Viens no šiem leņķiem sniedz $\max\sigma'$ otrs $\min\sigma'$. Jautājumu izšķir $\frac{d^2\sigma'}{d\alpha^2} = +4\tau\sin 2\alpha + 2\sigma\cos 2\alpha = +2\cos 2\alpha(\sigma + 2\tau\operatorname{tg}2\alpha)$.

$= 2\cos 2\alpha \left(\sigma + \frac{4\tau^2}{\sigma}\right) = \frac{2\cos 2\alpha}{\sigma}(\sigma^2 + 4\tau^2)$ Iekavās ieslēgtā izteiksme$(\sigma + 2\tau\, tg\, 2\alpha) = \left(\sigma + \frac{4\tau^2}{\sigma}\right)$ ir no α neatkarīga, tapēc visas $\frac{d^2\sigma'}{d\alpha^2} = \frac{2\cos 2\alpha}{\sigma}(\sigma^2 + \tau^2)$ izteiksmes zīme atkarajās no α vērtības, vai $\alpha = \alpha_1$, vai $\alpha = \alpha_2 = \alpha + \pi/2$ Pie tās α nozīmes, kura pārvērtīs $\frac{d^2\sigma'}{d\alpha^2} < 0$ σ' būs $\max\sigma'$ nozīmi un otrādi.

Uziesim šīs $\max\sigma'$ un $\min\sigma'$ nozīmes:

$$\sigma' = \sigma\sin^2\alpha - \tau\sin 2\alpha = \frac{\sigma}{2}(1 - \cos 2\alpha) - \tau\sin 2\alpha,$$

$$\sigma' - \frac{\sigma}{2} = -\left(\tau\sin 2\alpha + \frac{\sigma\cos 2\alpha}{2}\right), \quad \left(\sigma' - \frac{\sigma}{2}\right)^2 = \tau^2\sin^2 2\alpha + \tau\sigma\sin 2\alpha\cos 2\alpha + \frac{\sigma^2}{4}\cos^2 2\alpha,$$

$$0^2 = \tau\cos 2\alpha - \frac{\sigma\sin 2\alpha}{2}, \quad 0 = \tau^2\cos^2 2\alpha - \tau\sigma\sin 2\alpha\cos 2\alpha + \frac{\sigma^2}{4}\sin^2 2\alpha$$

$$\left(\sigma' - \frac{\sigma}{2}\right)^2 = \tau^2(\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha) + \frac{\sigma^2}{4}(\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha) = \tau^2 + \frac{\sigma^2}{4},$$

$$\sigma' - \frac{\sigma}{2} = \pm\sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2}, \quad \begin{matrix}\max\sigma' \\ \min\sigma'\end{matrix}\Big\} = \frac{1}{2}\left(\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}\right)$$

Iegūtais rezultāts rāda, kā galvenājiem spraigumiem ir pretējas zīmes: viens no tiem ir stiepes, otris - spiedes spraigums. Tālāk noprojektējot spēku poligonu uz τ' virzienu, iegūsim: $\sigma\sin\alpha\cos(\pi-\alpha) + \tau\cos\alpha\cos(\ ) + \tau\sin\alpha\cos(\ ) + \tau' = 0$

$= -\sigma\sin\alpha\cos\alpha + \tau\cos^2\alpha - \tau\sin^2\alpha + \tau' = 0$, $\tau' = \frac{\sigma\sin 2\alpha}{2} - \tau\cos 2\alpha$. Uzejot (τ') iegūstam: $(\tau')_{tg 2\alpha = \frac{2\tau}{\sigma}} = \cos 2\alpha\left(\frac{\sigma}{2}tg 2\alpha - \tau\right) = \cos 2\alpha\left(\frac{\sigma}{2}\cdot\frac{2\tau}{\sigma} - \tau\right) = 0$, t.i. tos šķēlienos, kuros darbojas $\begin{matrix}\max\sigma' \\ \min\sigma'\end{matrix}$ tangenciālu spraigumu nav.

Tā kā $\sigma = \sigma(x,z)$ un $\tau = \tau(x,z)$, tad $\begin{matrix}\max\sigma' \\ \min\sigma'\end{matrix} = \frac{1}{2}\left(\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}\right) = F(z,x)$, kur simbols $F(z,x)$ apzīmē attiecīgu z un x funkciju.

Ar formulu $\begin{matrix}\max\sigma' \\ \min\sigma'\end{matrix} = \frac{1}{2}\left(\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}\right)$ uzietās nozīmes attiecās tikai uz zināma šķēliena punktu. Šīs izteiksmes mainīsies, pārejot no punkta uz punktu, kadēļ var meklēt max $\max\sigma'$, kas var konstruktoru interesēt.

Šinī nolūkā būtu jāatrisina nolīdzinājumu sistēma $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$ un $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$, lai uzietu max $\max\sigma'$. Šī problēma pat vienkāršākos noslodzes gadījumos ir diezgan sarežģīta, kādēļ izlieto citus paņēmienus, par kuriem būs runa tālāk.

Izliektas sījas stiprības pārbaude.

Pieņemsim,kā šādā jeb tādā ceļā ir uzietsmaxmaxσ' $\frac{1}{2}\left(\sigma+\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}\right)$

Tad saskaņā ar I. stipr.teoriju $\frac{1}{2}\left(\sigma+\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}\right) \leqq \sigma_{admelem}$

Saskaņā ar II teoriju būtu jāuziet max$e \leqq e_{admel} = \frac{\sigma_{admel}}{E}$

Šinī nolūkā uzrakstīsim relatīvo deformāciju izteiksmi :

$$e_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z)$$

$$e_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_z),$$

$$e_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y).$$

Šinī gadījumā jāpieņem $\sigma_y = 0$,kadēļ: $e_1 = \max\sigma' - \frac{\nu}{E}\min\sigma'$

$$e_2 = -\frac{\nu}{E}(\max\sigma' + \min\sigma')$$

$$e_3 = \frac{\min\sigma'}{E} - \frac{\nu}{E}\max\sigma'$$

Ievietojot maxσ' un minσ' izteiksmes,nonākam pie

$$2e_1 E = (\sigma+\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}) - \nu(\sigma-\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}) = \sigma(1-\nu)+(1+\nu)\sqrt{\sigma^2+4\tau^2},$$

$$2e_2 E = -\nu 2\sigma,$$

$$2e_3 E = (\sigma-\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}) - \nu(\sigma+\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}) = \sigma(1-\nu)-(1+\nu)\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}$$

Šīs izteiksmes dos iespēju uziet max$e$,kurai jāapmierina noteikumu max$e \leqq \frac{\sigma_{admel}}{E}$

Saskaņā ar III.teoriju ir max$\tau \leqq \tau_{admel} = \frac{\sigma_{admel}}{2}$

$$\max\tau = \frac{\max\sigma' - \min\sigma'}{2} = \frac{1}{2}\,\frac{(\sigma+\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}) - (\sigma-\sqrt{\sigma^2+4\tau^2})}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}}{2} \leqq \frac{\sigma_{admel}}{2},\ \sqrt{\sigma^2+4\tau^2} \leqq \sigma_{admel}.$$

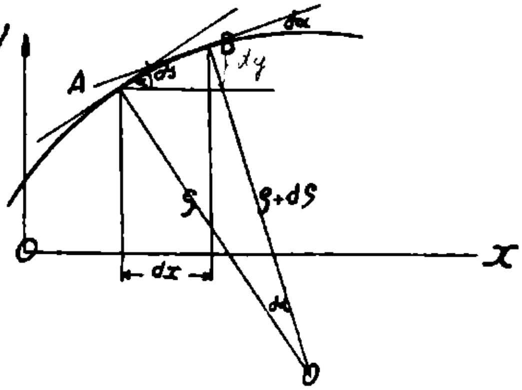
Ja šinī izteiksmē mēs atmestu $4\tau^2$,tad $\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}$ vietā rastos samazināta vērtība σ.Prasīt lai šī vērtība apmierinātu $\sigma \leqq \sigma_{admel}$, nozīmētu palielināt sījas nedrošību,kadēļ,lai nevajadzētu meklēt maxmaxσ ,par ko tika minēts un kas ir ļoti neērta operācija, σ_{admel} vietā pieņem kādu σ_{adm} pazeminātu normu, $\sigma_{adm flex} < \sigma_{admel}$,kuru sauc par pielaižamo lieces spraigumu. Kad tāda norma ir pieņemta,tad ir jāuzmeklē sījas šķēliens vienīgi ar max M,kas dod max max$\sigma \leqq \sigma_{adm flex}$.

Sījas liektas ass nolīdzinājums.

Zem ārējo spēku iespaida sījas ass pieņem kādas līknes veidu, kuras nolīdzinājumu uziet ir mūsu uzdevums.

Iedomāsimies kādu līkni uz kuras ņemsim vērā līknes elementu

AB = ds. Novelkot šī elementa līcības radiusus ρ un $\rho+d\rho$, konstatējam, kā centrālais leņķis starp abiem līcības radiusiem ir $d\alpha$, vienāds ar leņķi starp abām tangentēm, kas novilktas p.p. A un B. No skices ir redzams, kā $d\alpha$ ir leņķa α, kuru veido tangente p. A



ar X - asi, pieaugums, kad abscise x pieaug par dx (Koordinātu asis pieņemtas: horicontālā -X, vertikālā Y) Tad $\frac{dy}{dx} = y = tg\alpha$,

$\alpha = arctg\, y'$; $d\alpha = \frac{dy'}{1+y'^2} = \frac{\frac{d}{dx}(y')\,dx}{1+y'^2} = \frac{y''dx}{1+y'^2}$. Tā kā $ds = |\rho|\,d\alpha$, kur $|\rho|$ ir absoluts lielums. Bet $ds = \sqrt{dy^2+dx^2} = dx\sqrt{1+y'^2}$ un tadēl: $d\alpha = \frac{ds}{|\rho|} = \frac{dx\sqrt{1+y'^2}}{|\rho|} = \frac{y''\,dx}{1+y'^2}$, $y'' = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|\rho|} = \frac{d^2y}{dx^2}$

Sījas izliektā ass ir ļoti vāji izliekta līkne ar vājiem $tg\alpha = y'$. Samērā pret 1 y'^2 var droši atmest un iegūt liektas ass diferenc. nolīdzinājumu veidā $\frac{d^2y}{dx^2} \sim \frac{1}{|\rho|}$. Tālāk atcerēsimies, kā ρ ir saistīts ar lieces spraigumu σ: $\sigma = \frac{z}{\rho}E$. Attiecībā uz koordinātu asu novietojumu, mēs pieturamies pie konvencijas: kad mums jāoperē ar 3 asu problēmām, tad Z ir vertikālā ass, kad ar 2 - tad Y-ass ir vertikālā ass, Tā kā tagad trešā ass vairs nekrīt svarā, tad Z vietā ņemam Y-asi un rakstam: $\sigma = \frac{y}{|\rho|}E$, no kurienes $\left|\frac{1}{\rho}\right| = \frac{\sigma}{yE} = \frac{My}{JyE} = \frac{M}{JE} = \frac{d^2y}{dx^2}$, jeb:

$EJ\frac{d^2y}{dx^2} = M$ (sījas liektas ass diferenc. nolīdzinājums)

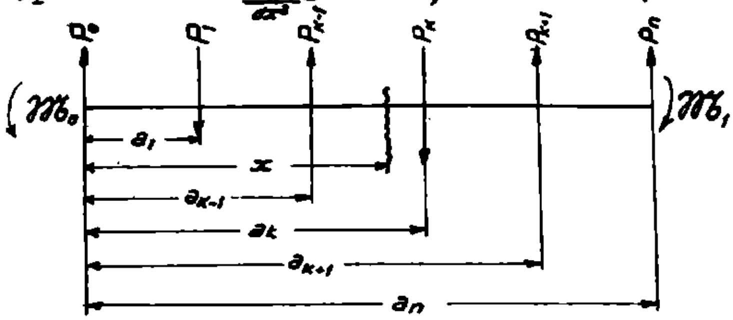
Šinī nolīdzinājumā EJ ir absoluts lielums, $\frac{d^2y}{dx^2}$ un M algebraiski lielumi. Virzot Y-asi uz augšu, un X uz labo pusi, konstatē-

kā $tg\alpha = y'$ šinī sistēmā ir negatīvi lielumi. Kā redzams, šo tg absolūtas vērtības līdz ar x krīt. Ja negatīvs lielums skaitliski samazinājās, tad viņa pieaugums - šinī gadījumā $d\left(\frac{dy}{dx}\right) = dy' = y''dx = \frac{d^2y}{dx^2}dx$ ir pozitīvs EJ ir pozitīvs skaitlis, M - algebraisks. Ja mēs vienotos skaitīt momentus, kas cenšas pagriezt sījas kreiso galu pulksteņa rādītāja kustības virzienā par pozitīviem, tad uzrakstīto formūlu, var atstāt negrozītu, ja turpretīm, šos momentus skaitītu par negatīviem, tad M priekšā jānovieto zīmi.

Clebsch'a teorema.

(Pēc piezīmēm)

Operēt ar $\mathcal{E}J\frac{d^2y}{dx^2} = M$ ir ļoti neērti, kad sīja noslodzīta ar atsevišķiem koncentrētiem spēkiem, kas prasa katru reizi jaunu M izteiksmes sastādīšanu, tiklīdz šķēliens pārlec pāri kādam spēkam, kas tad nokļūst pa kreiso pusi no šķēliena, kas ņemts atstātumā x no kreisā atbalsta punkta.



Pieņemsim, kā uz sīju darbojas (n+1) spēku, skaitot no P_0 līdz P_n un bez tam vēl vienmērīga slodze q kg/mtr un reaktīvie momenti $\mathfrak{M}_0$ un $\mathfrak{M}_1$ pie kam visi šie spēki apmierina statikas noteikumus, tā kā starp tiem ir zināms skaits reakciju spēku.

Dif. nolīdz. posmā starp spēkiem P_k un P_{k-1} konvencionāli var tikt uztakstīts tā:

$\mathcal{E}Jy''_{\substack{K\\K-1}} = -\mathfrak{M}_0 + \sum_{i=0}^{i=K-1}(x-a_i)P_i - q\frac{x^2}{2}$ (1), kur simbols $\substack{k\\k-1}$ apzīmē posmu starp spēkiem P_{k-1} un P_k. Starp spēkiem P_{k+1} un P_k

$$\mathcal{E}Jy''_{\substack{K+1\\K}} = -\mathfrak{M}_0 + \sum_{i=0}^{i=K}(x-a_i)P_i - q\frac{x^2}{2} = -\mathfrak{M}_0 + \sum_{0}^{i=K-1}(x-a_i)P_i + (x-a_k)P_k - q\frac{x^2}{2} \quad (2)$$

Integrēsim (1) un (2), skaitot par mainīgo $(x-a_i)$, tad

$$\mathcal{E}Jy'_{\substack{K\\K-1}} = -\mathfrak{M}_0 x + \sum_{i=0}^{i=K-1}\frac{(x-a_i)^2}{2}P_i - \frac{qx^3}{6} + A^K_{K-1} \quad (1^{\underline{bis}}) \text{ un}$$

$$\mathcal{E}Jy'_{\substack{K+1\\K}} = -\mathfrak{M}_0 x + \sum_{i=0}^{i=K-1}\frac{(x-a_i)^2}{2}P_i + \frac{(x-a_K)^2}{2}P_K - \frac{qx^3}{6} + A^{K+1}_K \quad (2^{\underline{bis}}),$$ kur A^K_{k-1} resp. A^{K+1}_k ir *integrēšanas konstantes*

Tā kā sījas ass ir nepārtraukta līkne, tad

$$\left(\mathcal{E}Jy'^{K}_{K-1}\right)_{x=a_K} = \left(\mathcal{E}Jy'^{K+1}_{K}\right)_{x=a_K} = -\mathfrak{M}_0 a_K + \sum_{i=0}^{i=K-1}(a_k-a_i)P_i - \frac{qa_K^3}{6} + A^K_{K-1} = -\mathfrak{M}_0 a_K + \sum_{i=0}^{i=K-1}(a_k-a_i)P_i - \frac{qa_K^3}{6} + A^{K+1}_K,$$ no kurienes seko, kā $A^K_{K-1} = A^{K+1}_K = A$, t.i. pirmā inte-

grēšanas konstante var tikt pieņemta visiem posmiem vienāda.

Tā tad: $\mathcal{E}Jy'_{K-1} = -\mathfrak{M}_0 x + \sum_{i=0}^{i=K-1}\left(\frac{x-a_i}{2}\right)^2 P_i - \frac{qx^3}{6} + A$, (3)

$$\mathcal{E}Jy'_{K} = -\mathfrak{M}_0 x + \sum_{i=0}^{i=K-1}\left(\frac{x-a_i}{2}\right)^2 P_i + \left(\frac{x-a_K}{2}\right)^2 P_k + A \quad (4)$$

Integrējot vēl vienu reizi iegūstam:

$$\mathcal{E}Jy_{K-1} = -\mathfrak{M}_0\frac{x^2}{2} + \sum_{i=0}^{i=K-1}\left(\frac{x-a_i}{6}\right)^3 - \frac{qx^4}{24} + Ax + B_{K-1}^{K},$$

$$\mathcal{E}Jy_{K+1} = -\mathfrak{M}_0\frac{x^2}{2} + \sum_{i=0}^{i=K-1}\left(\frac{x-a_i}{6}\right)^3 + \left(\frac{x-a_K}{6}\right)^3 P_k - \frac{qx^4}{24} Ax + B_K^{K+1}$$

Bet: $\left(\mathcal{E}Jy_{K-1}\right)_{x=a_K} = -\mathfrak{M}_0\frac{a_K^2}{2} + \sum_{i=0}^{i=K-1}\left(\frac{a_K-a_i}{6}\right)^3 P_i - \frac{qa_K^4}{24} + Aa_K + B_{K-1}^{K} = \left(\mathcal{E}Jy_{K+1}\right)_{x=a_K} =$
$= -\mathfrak{M}_0\frac{a_K^2}{2} + \sum_{i=0}^{i=K-1}\left(\frac{a_k-a_i}{6}\right)^3 P_i - \frac{qa_K^4}{24} + Aa_k + B_K^{K+1}$,no kurienes ari konstantes $B_{K-1}^K = B_K^{K+1} = B$ .Tā tad mēs esam piešķīruši dif.nol.$\mathcal{E}Jy'' = M$ integrāļiem formu ar 2 vienādām konstantēm A un B visos posmos (Clebsch'a teorema) un galīgo integrāļu forma ir:

$$\mathcal{E}Jy_{K-1} = -\mathfrak{M}_0\frac{x^2}{2} + \sum_{i=0}^{i=K-1}\left(\frac{x-a_i}{6}\right)^3 P_i - \frac{qx^4}{24} + Ax + B \quad (3^{\underline{bis}})$$

$$\mathcal{E}Jy_{K+1} = -\mathfrak{M}_0\frac{x^2}{2} + \sum_{i=0}^{i=K-1}\left(\frac{x-a_i}{6}\right)^3 + \left(\frac{x-a_K}{6}\right)^3 P_k - \frac{qx^4}{24} + Ax + B. \quad (4^{\underline{bis}})$$

Universālais sīju aprēķina paņēmiens(pēc piezīmēm).

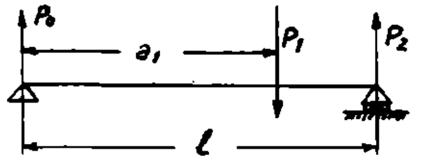
Kā rādās uz Clebsch'a teoremas pamata var nodibināt kādu universālu sīju aprēķina paņēmienu.

Ņemsim vērā kā : $\left(\mathcal{E}Jy''_{K-1}\right) = \mathcal{E}Jy'''_{K} = \frac{dM_{K-1}^{K}}{dx} = Q_{K-1}^{K} = \sum_{i=0}^{i=K-1} P_i - qx$ (5)

Bet $\mathcal{E}Jy'''_{n+1}$ (iedomajams posms aiz beidzamā atbalsta punkta ar atbalsta reakciju P_n vai beidzamo aktīvo spēku P_n) $= 0 = Q_n^{n+1} = Q = \sum_{i=0}^{i=n} P_i - ql = 0$, ,(6)

Tāpat: $\mathcal{E}Jy''_{n+1} = M_n^{n+1} = -\mathfrak{M}_0 + \mathfrak{M}_l + \sum_{i=0}^{i=n}(l-a_i) P_i - \frac{ql^2}{2} = 0$ (7)

Izlietojot (6) un (7) kā arī pielīdzinājot ($3^{\underline{bis}}$) resp.($4^{\underline{bis}}$) 0 virs negrozīgiem atbalstu punktiem,kuriem $y=0$, un tāpat pielīdzinājot (3) resp.(4) 0 sījas iespīlējuma vietās,kur sījas šķēlieni nevar pagriezties,iegūsim pietiekošu skaitu nolīdzinājumu visu sījas reakciju noteikšanai,nešķirojot sījas vairs statiski noteiktās un nenoteiktās.2 no šiem nolīdzinājumiem tiks paterētu integrācijas konstantu A un B uzieśanai līdz ar ko ari jautājums par sījas izlieci būs izšķirts Paņēmiens noderīgs tikai spraigumu proporcionalitātes robežās.



Piemēri.

1.Uzmeklējami: liektās ass līkne un atbalstu reakcijas, balstoties uz elastības teorijas atziņām.

Saskanā ar (3^{bis}) $(\mathcal{E}Jy_0')_{x=0} = 0 = \left(\sum_{i=0}^{i=0}\frac{(x-a_i)^3}{6}P_i\right)_{x=0,\ \delta_i=0} + (Ax)_{x=0} + B = 0 + B$

$B = 0$

Saskaņā ar (4^{bis}) $(\mathcal{E}Jy_x)_{x=\ell} = 0 = \left(\sum_{i=0}^{i=1}\frac{(x-a_i)^3}{6}P_i\right)_{x=\ell} + \left(\frac{(x-a_2)^3}{6}P_2\right)_{x=\ell-a_2} +$

$A\ell = \frac{\ell^3 P_0}{6} - \frac{(\ell-a_1)^3}{6}P_1 + A\ell = 0$, no kurienes

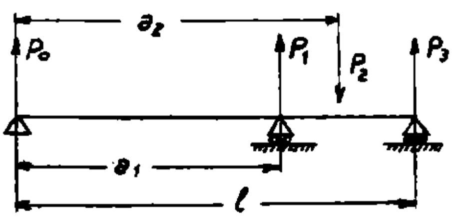
$Ax = -\frac{\ell^2 P_0}{6}x + \frac{(\ell-a_1)^3 x}{6\ell}P_1$ un: Pievienojot (6) un (7) iegūstam: $\mathcal{E}Jy'''_{n+1} - \mathcal{E}Jy'''_{3} = Q_2^3 = \sum_{i=0}^{i=2}P_i = P_0 - P_1 + P_2 = 0$

$$\mathcal{E}Jy''_{n+1} - \mathcal{E}Jy''_{3} = M_2^3 = \sum_{i=0}^{i=2}(\ell-a_i)P_i = \ell P_0 - (\ell-a_1)P_1 = 0,$$

no kurienes $P_0 = P_1\frac{(\ell-a_1)}{\ell}$, $P_2 = P_1\frac{a_1}{\ell}$ un uz (3^{bis}) pamata:

$$\mathcal{E}Jy_1 = \sum_{i=0}^{i=0}\frac{(x-a_i)^3}{6}P_i + Ax = P_0\frac{x^3}{6} + Ax = \frac{P_0x^3}{6} - \frac{\ell^2P_0x}{6} + \frac{(\ell-a_1)^3x}{6\ell}P_1 = \frac{P_0}{6}(x^3-\ell^2x) + \frac{(\ell-a_1)^3}{6\ell}P_1 = \frac{P_1(\ell-a_1)}{6\ell}(x^3-\ell^2x) + \frac{(\ell-a_1)^3x}{6\ell}P_1 = \frac{P_1(\ell-a_1)}{6\ell}\left[(x^3-\ell^2x)+(\ell-a_1)^2x\right] = \frac{P_1(\ell-a_1)}{6\ell}\left[x^3-\ell^2x+\ell^2x-2\ell a_1x+a_1^2x\right] = \frac{P_1(\ell-a_1)}{6\ell}\left[x^3-2\ell a_1x+a_1^2x\right].$$

Bet $\mathcal{E}Jy_2 = \sum_{i=0}^{i=1}\frac{(x-a_i)^3}{6}P_i + Ax = \frac{P_0x^3}{6} - P_1\frac{(x-a_1)^3}{6} - \frac{\ell^2}{6}P_0x + \frac{(\ell-a_1)^3x}{6\ell}P_1 = \frac{P_0}{6}(x^3-\ell^2x) + \frac{P_1}{6}\left[\frac{(\ell-a_1)^3x}{\ell} - (x-a_1)^3\right] = \frac{P_1(\ell-a_1)}{6\ell}(x^3-\ell^2x) + \frac{P_1}{6\ell}\left[(\ell-a_1)^3x - \ell(x-a_1)^3\right] = \frac{P_1}{6\ell}\left[(\ell-a_1)(x^3-\ell^2x) + (\ell-a_1)^3x - \ell(x-a_1)^3\right]$



2.Uzdevums. Sakarā ar paņēmiena īpatnībām formulējams tapat kā 1. piemērā. Tūlīt var konstatēt, kā $B = 0$.

(6) sniedz: $P_0 + P_1 - P_2 + P_3 = 0$ (a)

(7) sniedz: $P_0\ell + P_1(\ell-a_1) - P_2(\ell-a_2) = 0$ (b)

Bez šiem nolīdzinājumiem mūsu rīcībā vēl ir 3. (3^{bis}) resp. (4^{bis}) tipa nolīdzinājumi atbalstu punktu pārvietojumu pielīdzināšanai 0, tā kā pavisam kopā būtu 5 nolīdzinājumi. Nezinamo turpretīm ir P_0, P_1, P_3 un A^-, kopā 4 , bet $\delta J(y^{\kappa}_{\kappa-1})_{x=0} = 0 = \left[-\mathfrak{M}_0 x^2 + \sum_{i=0}^{i=\kappa-1} \frac{(x-a_i)^3}{6} P_i - \frac{qx^4}{24} + Az\right]_{\substack{\mathfrak{M}_0=0, q=0\\ x=0}} =$

$=0$ (identitate) (Garamejot minēsim kā šī identitate bija konstatējama ari 1.piemērā,kurā tā,klusu ciešot,tika apieta)

Tālāki:

$$(\delta J y_{\kappa}^{\kappa+1})_{\kappa+1} = \left(\sum_{i=0}^{i=\kappa+1} \frac{(x-a_i)^3}{6} P_i + Az\right)_{\substack{\kappa-1\\ x=a_1}} = \frac{(a_1-a_0)^3}{6} P_0 + (a_1 - a_1) P_1 +$$

$$Aa_1 - \frac{a_1^3 P_0}{6} + Aa_1 = 0 \quad a_1^2 P_0 + 6A = 0 \quad (c)$$

$$\left(\delta J y_{\kappa}^{\kappa+1}\right)_{\substack{\kappa=2\\ x=\ell}} = \left(\sum_{i=0}^{i=\kappa+2} \frac{(x-a_i)^3}{6} P_i + Az\right)_{\substack{\kappa=2\\ x=\ell}} = \frac{(\ell-a_0)^3}{6} P_0 + \frac{(\ell-a_1)^3}{6} P_1 -$$

$$\frac{(\ell-a_2)^3}{6} P_2 + A\ell - \frac{\ell^3 P_0}{6} + \frac{(\ell-a_1)^3}{6} P_1 - \frac{(\ell-a_2)}{6} P_2 + A\ell = 0. \quad (d)$$

Ar nolīdzinājumu sistemas (a),(b),(c) un (d) palīdzību var uziet reakcijas P_0, P_1, P_3 un A un atrisināt kopā divus uzdevumus, jo A ir sījas liektas ass reprezentante.

Minēto nolīdzinājumu sistēmu pārrakstam sekošā veidā:

$$(Pol) + P_1\ell - P_2\ell + P_3\ell = 0 \qquad (a').$$

$$(Pol) + P_1(\ell - a_1) - P_2(\ell - a_2) = 0 \quad (b),$$

$$a_1^2 \, (Pol) + 6A\ell = 0 \quad (c'),$$

$$\ell^2 \, (Pol) + P_1 \, (\ell - a_1)^3 - P_2 \, (\ell - a_2)^3 \quad 6A\ell = 0 \quad (d),$$

Atbalstu reakcijas var uziet izslēdzot A:

$$-6A\ell = a_1^2 \, (Pol) = \ell^2 \, (Pol) + P_1 (\ell - a_1)^3 - P_2 \, (\ell - a_2)^3$$

$$(Pol)(\ell^2 - a_1^2) + P_1 (\ell - a_1)^3 - P_2 \, (\ell - a_2)^3 = 0 \quad (e)$$

Nolīdz.(b) un (e) satur tikai 2 nezinamus:(Pol) un $P_1(\ell - a_1)$

Uzmeklēsim Pol.Šinī nolūkā reizinajam (b) uz $(\ell - a_1)^2$:

$$(Pol)(\ell - a_1)^2 + P_1 \, (\ell - a_1)^3 - P_2 \, (\ell - a_2)\,(\ell - a_1)^2 = 0 \quad (b')$$

$$(Pol)(\ell^2 - a_1^2) \mp P_1 (\ell - a_1)^3 \pm P_2 (\ell - a_2)^3 = 0 \quad (e)$$

$$(Pol)\left[(\ell - a_1)^2 - (\ell^2 - a_1^2)\right] + P_2\left[(\ell - a_2)^3 - (\ell - a_2)(\ell - a_1)^2\right] = 0$$

$$(Pol) = -P_2 \frac{(\ell - a_2)\left[(\ell-a_2)^2 - (\ell - a_1)^2\right]}{\left[(\ell - a_1)^2 - (\ell^2 - a_1^2)\right]} = -\frac{P_2(\ell - a_2)\left[2\ell - (a_2 + a_1)\right](a_2 - a_1)}{\ell^2 - 2\ell a_1 + a_1^2 - \ell^2 + a_1^2} =$$

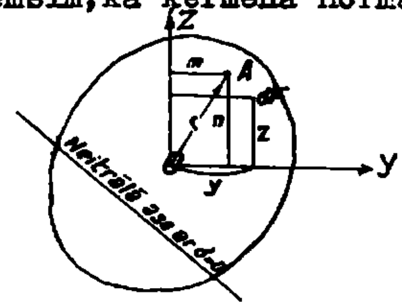
$$= -P_2 \, (\ell - a_2)(a_2 - a_1) \frac{\left[2\ell - (a_2 + a_1)\right]}{2a_1(\ell - a_1)}$$

Tādā pašā ceļā var uziet ari reakcijas P_1 un P_3

Uzgājuši A,mūsu rīcībā tūlīt ir izliektas sījas ass līkne un atbildes uz visiem mūs interesejošiem jautājumiem.Šinī nozīmē paņēmienu nosaucam par universālu sīju aprēķina paņēmienu. Uzdevumi ar sījas vienmērīgu slodzi ir vienkāršāki, kadēļ še netika apskatīti.

Ekscentriskā spēka iedarbe uz ķermeņa šķēlienu.

Pieņemsim, ka ķermena normālā šķēlienā p.A, kura koordinātes ir m un n, iedarbojas kāds spēks P. Šo spēku var pārnest šķēliena centrā ar statikā pazīstamu paņēmienu - proti centrā O pieliek 2 vienādus pretēji virzītus spēkus P. Šīs operācijas rezultātā spēks P izrādās pārnests centrā, pie kam operācijas blakus produkts ir spēku pāris $\bar{M}(o)[\bar{r}, \bar{P}]$, kuru var salikt 2 komponentēs:



$$\bar{M}(o)=[\bar{r}\,\bar{P}]=[(\bar{n}+\bar{m})\cdot\bar{P}]=[\bar{n},\bar{P}]+[\bar{m},\bar{P}]=\bar{M}_y(o)+\bar{M}_z(o).$$

Spriegums šķēliena punktā, kura koordinates ir y un z izteiksies:

$$\sigma=\frac{P}{F}+\frac{Pmy}{J_z}+\frac{Pnz}{J_y}=\frac{P}{F}+\frac{Pmy\cdot F}{J_z\cdot F}+\frac{Pnz\,F}{J_y\cdot F}=\frac{P}{F}\left(1+\frac{my}{\rho_z^2}+\frac{nz}{\rho_y^2}\right),$$

kur ρ_z un ρ_y ir attiecīgo aksiālo inerces momemtu radiusi:

Ja iegūti izteiksmi pielīdzinājam $\sigma=0$, tad iegūstam neitrālas ass jeb 0 - līnijas nolīdzinājumu:

$$\sigma=\frac{P}{F}\left(1+\frac{my}{\rho_z^2}+\frac{nz}{\rho_y^2}\right)=0,\quad 1+\frac{my}{\rho_z^2}+\frac{nz}{\rho_y^2}=0 \qquad (1)$$

Akmens, cements, betons, ķeta un citi trausli materiāli vāji pretojas stiepes spēkiem, kādēļ konstruktoriem jārūpejās, lai darījumos no šiem materiāliem nerastos stiepes σ, t.i. lai visā normālā šķēlienā darbotos tikai spiedes spraigumi. Šis noteikums prasa, lai neitrālā ass nekrustotu darījuma šķēlienu, kas nozīmē, kā šīs ass robežstāvotni var noteikt šķēlienā tikai kontura tangente attiecīgā punktā.

Šis konstatējums līdz ar to noteic kādu spēka P iedarbes punktu geometrisku vietu - kādas figuras konturu, kura iekšpusē iedarbojušamies spēkam P jāpaliek, lai darījuma normālā šķēlienā nerastos stiepes spraigumi.

Šo figuru sauc par šķēliena kodolu.

Šķēliena kodola uzbūves paņēmieni.

Izšķirsim 2 gadījumus: 1) ķermeņa šķēliena konturs ir nepārtraukta līkne, resp. tādu līkņu virkne un 2) ķermeņa šķēliena konturs ir poligons.

1. Ķermena šķēliena konturs ir nepārtraukta līkne.

(pēc piezīmēm)

Pieņemsim, kā šī kontura nolīdzinājums ir dots ar vispārēju veidu $Z_k = F(y_k)$. Šīs līknes tangentes nolīdzinājumu sniedz analītiska geometrija veidā: $z - z_k = z_k'(y - y_k) = \frac{dz_k}{dy_k}(y - y_k)$ z un y ir tangentes tekošas koordinātes, bet z_k un y_k ir šīs taisnes pieskares punktu koordinates, kam jāapmierinā kā tangentes, tā arī šķēliena kontura nolīdzinājumus.

Uzrakstīto tangentes nolīdzinājumu, var pārveidot: $z - z_k = z_k' y - z_k' y_k$, $z + (-z_k' y) + (z_k' y_k - z_k) = 0$, $\frac{z}{z_k' y_k - z_k} + \left(\frac{-z_k' y}{z_k' y_k - z_k}\right) + 1 = 0$. (2) Tā kā neitrālās ass nolīdzinājums bīja $\frac{my}{\rho_z^2} + \frac{nz}{\rho_y^2} + 1 = 0$ (1), un (1) un (2) ir jāsakrīt, tad jābūt:

$\frac{n}{\rho_y^2} = \frac{1}{z_k' y_k - z_k}$ un $\frac{m}{\rho_z^2} = \frac{-z_k'}{z_k' y_k - z_k} = \frac{-1}{y_k - \frac{z_k}{z_k'}}$ Tā kā $z_k' = \frac{dz_k}{dy_k} = \frac{dF(y_k)}{dy_k} = F'(y_k)$, tad $\frac{n}{\rho_y^2} = \frac{1}{F'(y_k) y_k - F(y_k)}$ un $\frac{m}{\rho_z^2} = \frac{-1}{y_k - \frac{F(y_k)}{F'(y_k)}}$. Izslēdzot no šīm izteiksmēm y_k iegūsim $f\left(\frac{n}{\rho_y^2}, \frac{m}{\rho_z^2}\right)$, t.i. kodola kontura nolīdzinājumu.

Piemērs:

$Z_k = F(y_k)$, $Z_k - F(y_k) = \frac{y_k^2}{a^2} + \frac{z_k^2}{b^2} - 1 = 0$ (šķēliena konturs ir elipse). $a^2 z_k^2 + b^2 y_k^2 - a^2 b^2 = 0$, $a^2 z_k z_k' + b^2 y_k = 0$,

$$z_k' = -\frac{b^2 y_k}{a^2 z_k} = F'(y_k) \quad \frac{-z_k}{z_k'} = \frac{z_k a^2 z_k}{b^2 y_k} = \frac{a^2 z_k^2}{b^2 y_k}, \quad \frac{m}{\rho_z^2} = \frac{-1}{y_k - \frac{z_k}{z_k'}} = \frac{-1}{y_k + \frac{a^2 z_k^2}{b^2 y_k}} = \frac{-b^2 y_k}{b^2 y_k^2 + a^2 z_k^2} = \frac{-b^2 y_k}{a^2 b^2} = -\frac{y_k}{a^2}$$

$$\frac{n}{\rho_y^2} = \frac{1}{z_k' y_k - z_k} = \frac{-1}{\frac{-b^2 y_k^2}{a^2 z_k} - z_k} = \frac{a^2 z_k}{a^2 z_k^2 + b^2 y_k^2} = \frac{a^2 z_k}{a^2 b^2} = \frac{z_k}{b^2}$$

$$\left(\frac{m}{\rho_z^2}\right)^2 a^2 = \left(\frac{-y_k}{a^2}\right)^2 a^2 = \frac{y_k^2 a^2}{a^4} = \frac{y_k^2}{a^2} = \left(\frac{ma}{\rho_z^2}\right)^2 = \frac{m^2 \cdot a^2}{\rho_z^4}$$

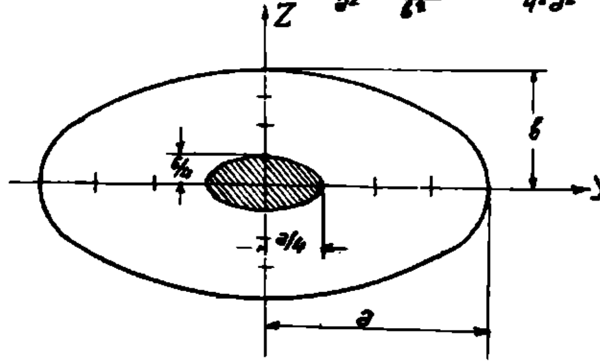
$$\left(\frac{n}{\rho_y^2}\right)^2 b^2 = \left(\frac{z_k}{b^2}\right)^2 b^2 = \frac{z_k^2}{b^2} = \left(\frac{nb}{\rho_y^2}\right)^2 = \frac{n^2 b^2}{\rho_y^4},$$

$\frac{m^2 a^2}{\rho_z^4} + \frac{n^2 b^2}{\rho_y^4} = \frac{y_k^2}{a^2} + \frac{z_k^2}{b^2} = 1$. (3) (Kodola kontura nolīdzinājums eliptiskam šķēlienam). Min. nolīdzinājums var pārveidot:

$\frac{m^2}{\frac{\rho_z^4}{a^2}} + \frac{n^2}{\frac{\rho_y^4}{b^2}} = 1$. (elipse ar pusasīm $\frac{\rho_z^2}{a}$ un $\frac{\rho_y^2}{b}$).

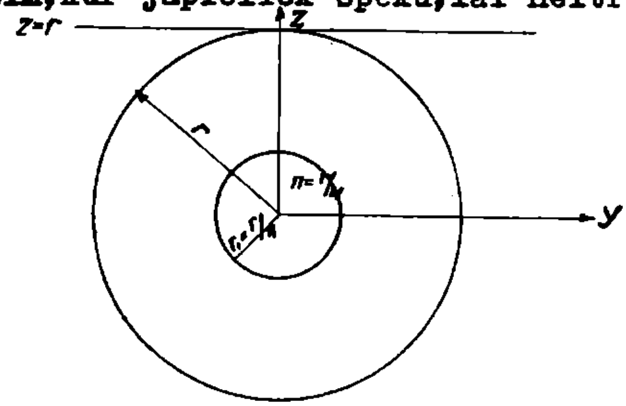
Tā kā elipsei: $J_y = \frac{\pi a b^3}{4}$ un $J_z = \frac{\pi b a^3}{4}$, $\rho_y^2 = \frac{J_y}{F} = \frac{\pi a b^3}{4\pi a b} = \frac{b^2}{4}$

$\rho_z^2 = \frac{J_z}{F} = \frac{\pi b a^3}{4\pi a b} = \frac{a^2}{4}$ un $\frac{m^2}{\frac{\rho_z^4}{a^2}} + \frac{n^2}{\frac{\rho_y^4}{b^2}} = \frac{m^2}{\frac{a^4}{4^2 a^2}} + \frac{n^2}{\frac{b^4}{4^2 b^2}} = \frac{m^2}{(\frac{a}{4})^2} + \frac{n^2}{(\frac{b}{4})^2} = 1$



Kad a = b = r, tad:

$\frac{m^2}{(r/4)^2} + \frac{n^2}{(r/4)^2} = 1$, $m^2 + n^2 = \left(\frac{r}{4}\right)^2$ riņķa līnijas nolīdzinājums) Starp citu, ripas šķēliena kodolu var uziet tieši šādā ceļā. Ripai katras 2 savstarpēji ortogonālas asis ir galvenās un $\rho_y = \rho_z = \sqrt{\frac{J_z}{F}} = \sqrt{\frac{J_y}{F}} = \sqrt{\frac{\pi r^4}{4\pi r^2}} = \frac{r}{2}$ Prasīsim, kur jāpieliek spēku, lai neitrālā ass sakristu ar tangenti, $z = r$, $-\frac{z}{r} + 1 = 0$, parallelu Y-asij, tad pielīdzinājot šī nolīdzinājuma un $\frac{my}{(r/2)^2} + \frac{nz}{(r/2)^2} + 1 = 0$ koeficientus, konstatēsim, kā $\frac{m}{(r/2)^2} = 0$, $m = 0$,



$\frac{n}{(r/2)^2} = \frac{-1}{r}(n)_{y=0} = \frac{-r}{4}$. Tādu pašu rezultātu mēs iegūtu visos asu virzienos, kadēļ ripas šķēliena kodols ir ripa ar $r_1 = r/4$

2. Šķēlienu konturs ir poligons.

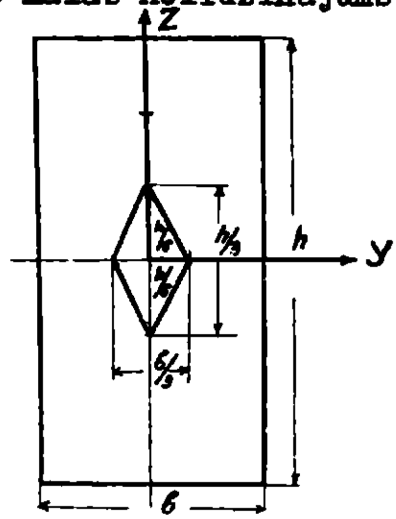
Šinī gadījumā šķēliena ar n malu skaitu kontura nolīdzinājumu var uzrakstīt: $(a_1 z + b_1 y + 1)\ldots(a_i z + b_i y + 1)\ldots(a_n z + b_n y + 1) = \prod_{i=1}^{i=n}(a_i z + b_i y + 1) = 0$, Pielīdzinājot neitrālās ass, kurai jāsakrīt ar attiecīgu malu, un šīs malas nolīdzinājumu koeficientus, iegūsim kodola kontura attiecīga stūra punkta koordinatēs.

Patiesi, pieņemsim, kā gribam, lai neitrālā ass sakrīt ar poligona i - malu, tad līnijām: $\frac{m_i y}{\rho_z^2} + \frac{n_i z}{\rho_y^2} + 1$ un $b_i y + a_i z + 1$ jābūt identiskām, kadēļ ar $\frac{m_i}{\rho_z^2} = b_i$ un $\frac{n_i}{\rho_y^2} = a_i$ iegūsim kodola kontura stūra punkta i koordinates. Atkārtojot šo operāciju visām malām, pilnīgi noteiksim šķēliena kodola konturu.

Piemērs. Šķēliena konturs ir taisns četrstūris.

Šī kontura nolīdzinājums ir: $\left[z^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2\right]\left[y^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2\right] = 0$. Augšējās, resp.

apakšejās malas nolīdzinājums seko no $z^2 - (h/2)^2 = 0$, $z = \pm h/2$



$z \pm h/2 = 0$, $\pm \frac{2z}{h} + 1 = 0$

Salīdzinājot šo nolīdzinājumu ar $\frac{my}{\varsigma_z^2} + \frac{nz}{\varsigma_y^2} + 1$, konstatējam, kā

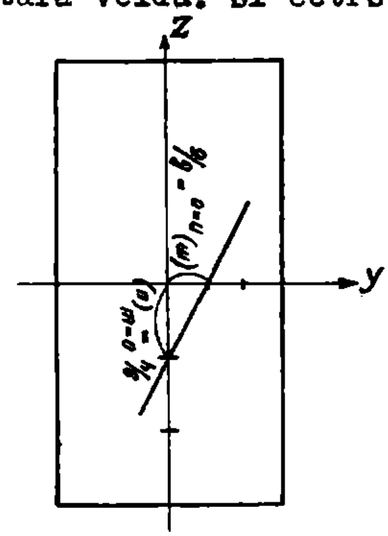
$m = 0$, $\frac{n}{\varsigma_y^2} = \mp \frac{2}{h}$, $n = \mp \frac{2}{h}$.

$\varsigma_y^2 = \mp \frac{2}{h} \frac{J_y}{F} = \mp \frac{2}{h} \frac{bh^3}{12\, bh} = \mp \frac{h}{6} = \mp \frac{b}{2.3}$

Apskatītam paņēmienam ir tā priekšrocība, kā tas dod iespēju noteikt kodola kontura stūra punktus, kurus savienojot iegūstam kodola konturu pilnīgi.

Tā kā visērtāki ir noteikt poligonālu šķēlienu ar ta stūru punktu koordinātēm, tad paceļas jautājums, vai nebūtu iespējams noteikt kodola konturu caur šķēliena stūru punktu koordinātēm. Tas notiek tā: Ievietojot poligonā kāda stūra punkta p.piem. stūra i - punkta ko-ordinates z_i un y_i neitralas ass $\frac{my}{\varsigma_z^2} + \frac{nz}{\varsigma_y^2} + 1 = 0$ nolīdzinājumā, iegūstam $\frac{my_i}{\varsigma_z^2} + \frac{nz_i}{\varsigma_y^2} + 1 = 0$, kodola kontura attiecīgu malas nolīdzinājumu, kas saista m un n, kas tagad ir šīs malas tekošas koordinātes.

Piemērs. Kā piemēru izvēlamies to pašu šķēliena konturu taisnā četrstūra veidā. Šī četrstūra visu stūru punktu koordinātes ir zinamas. Par piem. vēlot $z = h/2$, $y = b/2$, iegūstam:



$\frac{my}{\varsigma_z^2} + \frac{nz}{\varsigma_y^2} + 1 = \frac{m}{\varsigma_z^2}\frac{b}{2} + \frac{n}{\varsigma_y^2}\frac{h}{2} + 1 = 0.$

Tālāki mēs uzmeklējam nogriežņus, kurus kodola mala nogriež uz koordinātu asīm. Šie nogriežņi ir:

$\left(-\frac{mb}{2\varsigma_z^2} + \frac{nh}{2\varsigma_y^2} + 1\right) = (n)_{m=0} \frac{h}{2\varsigma_y^2} + 1 = 0,$

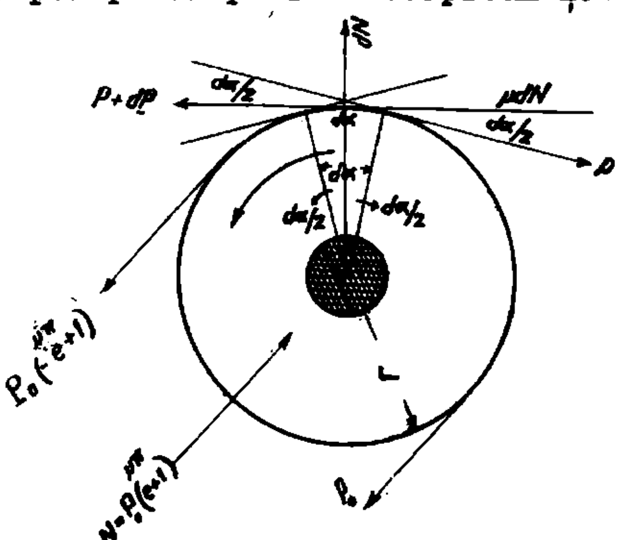
$(n) = \frac{-2\varsigma_y^2}{h} = -\frac{2}{h}\frac{h^2}{12} = \frac{-h}{6} = -\frac{h}{2.3}$. Tāpat $\left(-\frac{mb}{2\varsigma_z^2} + \frac{nh}{2\varsigma_y^2} + 1\right)_{n=0} = (-m)_{n=0} \frac{b}{2\varsigma_z^2} + 1 = 0$, $(m)_{n=0} = \frac{2\varsigma_z^2}{b} = \frac{b}{6} = \frac{b}{2.3}$

Kā saprotams, stūru punktu paņēmiens ir piemērots grafiskai kodola kontura uzbūvei: novelkot visas malas, mēs grafiski uziesim šo malu krustojumu punktus, kas ir šķēliena kodola kontura stūru punkti.

Šķērsliece's un vērpes kopēja deformācija.

(Pēc piezīmēm)

Vērpes pārus pieliek vārpstām ļoti bieži ar dzensiksnu palīdzību. Tāda pāra pielikšana nevar notikt bez atsevišķa spēka pielikšanas: siksna tiek uzmaukta skriemelim ar zināmu siksnas piepūli, lai izsauktu gar skriemeļa perifēriju, kurai siksna piekļaujās, berzes



spēkus pietiekošā lielumā, lai siksna nesāktu slīdēt gar skriemeli. Mēģināsim noskaidrot šīs tēzes pamatus.

Ņemsim vērā skriemeļa elementu ar centrālo leņķi $d\alpha$ Tad siksnas piepūlē tas elementa ds pieaugs no P līdz P+dP rotācijas virzienā, jo šinī virzienā spēkam P jāuzņem arī berzes spēki gar siksnas elementu ds. Ja normālo, centrālo, spēku apzīmēsim ar dN, tad berzes spēks, kas darbojās gar elementu ds, ir μdN. Projektēsim spēku poligonu $\vec{\mu dN} + \vec{dN} + \vec{P} + \vec{P+dP} = 0$ uz virzienu $\vec{\mu dN}$ un $\vec{dN}$, tad iegūsim:

$(P + dP)\cos\frac{d\alpha}{2} - \mu dN - P\cos\frac{d\alpha}{2} = dP\cos\frac{d\alpha}{2} - \mu dN = 0$. Bet tā kā $\frac{d\alpha}{2}$ ir bezgalīgi mazs lielums, tad $dP\cos\frac{d\alpha}{2} = dP$, un tadēļ $dP = \mu dN$ (1). Projektējot uz N virzienu, iegūsim:

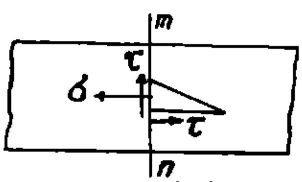
$(P + dP)\sin\frac{d\alpha}{2} + P\sin\frac{d\alpha}{2} - dN = 0 = P.\sin\frac{d\alpha}{2} + dP\sin\frac{d\alpha}{2} + P\sin\frac{d\alpha}{2} - dN = P.\frac{d\alpha}{2} + \frac{Pd\alpha}{2} - dN = Pd\alpha - dN = 0$, $Pd\alpha = dN$ (2) jo $dP\sin\frac{d\alpha}{2}$ ir otrās kārtas mazākuma lielums, kas atmetams samērā pret pārējiem, pirmās mazākuma kārtas lielumiem un $\sin\frac{d\alpha}{2} = \frac{d\alpha}{2}$, kas ir ekvivalenti. Izslēdzot no (1) un (2) dN, nonāksim pie $dP = \mu Pd\alpha$,

$\frac{dP}{P} = d\ln P = \mu d\alpha$ (3), $\int_{P_0}^{P} d\ln = \ln P - \ln P_0 = \ln\frac{P}{P_0} = \int_0^{\alpha} \mu d\alpha = \mu\alpha$, $\frac{P}{P_0} = e^{\mu\alpha}$, $P = P_0 e^{\mu\alpha}$ (4). Dzensiksnas gadījumā $\alpha = \pi$ un $P = P_0 e^{\mu\pi}$ (5).

$N = P + P_0 = P_0 \; (e^{\mu\pi} + 1)$ (6) $M(o) = (P - P_0) r = P_0 r (e^{\mu\pi} - 1)$ (7), no kurienes seko sakars starp N un M(o): $Nr = P_0 r \; (e^{\mu\pi} + 1)$,

$P_0 r = \frac{Nr}{e^{\mu\pi}+1}$, $M(o) = Nr \frac{(e^{\mu\pi} - 1)}{e^{\mu\pi}+1}$ (8) Bez N uz vārpstu iedarbojas arī citi, pielikti tieši vārpstas spēki, kā vārpstas smagums, skriemeļu smagums un t.t. Spēks N rada šķērslieces momentu M_e un $\sigma = \frac{M_e r}{J}$, kur r vārpstas radius, J ripas šķēliena aksiālais moments $J = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{4 M_e}{\pi r^3} = \frac{M_e}{W}$ kur $W = \frac{\pi r^3}{4}$ (pretestības moments)

Bez tam vārpstā darbosies cērpes spraigumi τ, kurus izsauc Q. Tomēr šie spraigumi ir niecīgi samērā pret spraigumiem, kurus izsauc vērpes moments M(o). M_v $\tau = \frac{M_v \cdot r}{J_p} = \frac{2 M_v r}{\pi r^4} = \frac{2 M_v}{\pi r^3} = \frac{M_v}{W_p}$ (10), kur $W_p = \frac{\pi r^3}{2}$ (polārais pretestības mom.) Ja uz vārpstas virsmas apskatamā šķēlienā mn ņemtu vērā p A, tad šķiedrā normālā pret mn darbojas σmax, bet turpat darbojas arī τ, kuru rada vērpē. Galvenie spraigumi ir



$$\sigma_{\substack{max \\ min}} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad (11)$$

Ievietojot šinī formulā σ un τ izteiksmes no (9) un (10) un ņemot vērā, kā $W_p = 2W$, iegūsim $\sigma_{\substack{max \\ min}}$

Uz Coulomb'a stiprības teorījas pamata varam rakstīt:

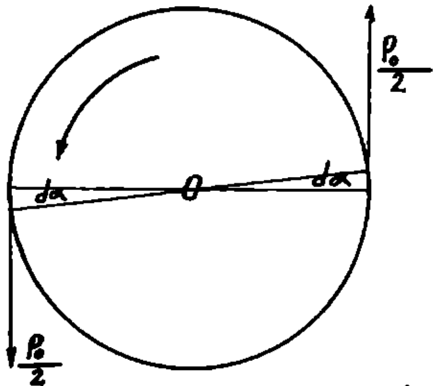
$\max \tau_{comp} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leqq \tau_{adm\,elem} = \frac{\sigma_{adm\,el}}{2}$,

kadēl: $\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\frac{M_e^2}{W^2} + \frac{4 M_v^2}{W_p^2}} = \sqrt{\frac{M_e^2}{W^2} + \frac{4 M_v^2}{4 W^2}} = \frac{1}{W}\sqrt{M_e^2 + M_v^2} = \frac{M_{red}}{W} \leqq \sigma_{adm\,el}$, kur M_{red} ir ta saucamais reducētais moments.

Visbīstamākais vārpsta šķēliens, saprotams būs tas, kura M_{red} būs vislielākais, kadēļ gadījumā, kad uz reizi ir pagrūti šo šķēlienu uzrādīt, ir jāuzbūvē M_{red} epiru. Kas sttiecas uz $e^{\mu\pi}$ skaitlisko vērtību, tad Hütte 1919. I Band lap..p.257 sniedz sekošus datus: ādas dzensiksnai uz skriemeļa labi eļļotai $\mu = 0{,}12$, $e^{\mu\pi} = 1{,}46$, drusku eļļotai $\mu = 0{,}28$, $e^{\mu\pi} = 2{,}41$, Mašīnu būvniecībā parasti pieņem $e^{\mu\pi} = 2$, kadēl $M_v = M(o) = P_0 r \; (e^{\mu\pi} - 1) = P_0 r$
$N = P_0 \; (e^{\mu\pi} + 1) = 3 P_0$.

Vēl noskaidrosim jautājumu par mašīnas jaudu, kuras skriemeļiem pielikts vērpes moments $M(o)=P_0 2r$.

Pieņemsim, kā skriemelis ir pagriezies par leņķi $d\alpha$ tad elemen. darba izteiksme ir $dA=P_0 r d\alpha\ 2=P_0 r 2 d\alpha$,



$A=\int_0^{\alpha=\pi} dA=P_0 r\int_0^{\pi} d\alpha=P_0 2\pi r=$ $=M(o)2\pi$.

Ievedīsim apgriezienu skaitu n vienā minūtē, tad $\frac{2\pi n}{60}=\omega$ (leņķiskais ātrums vienā sekundē), Ja vārpsta pārvada NHP (zirgu spēku), tad mašīnas jauda ir 75 N kg mtr $=M(o)\frac{2\pi w}{60}=M(o)\omega=75\ N\ \frac{100\ kg\ cm}{sec}$

un $\tau=\frac{M(o)}{\frac{\pi r^3}{2}}=\frac{N\ 75.30.100}{\frac{\pi r^3}{2}\pi n}=\frac{N}{n}.\frac{75.30.100}{\frac{\pi^2 r^3}{2}}=\frac{N}{n}.\frac{75.30.100.16}{\pi^2 d^3}=$
$=\frac{N}{n}.\frac{36.10^5}{\pi^2 d^3}\leqq\tau_{adm\ el}=\frac{\sigma_{adm\ el}}{2}$, no kurienes vārpsta diam. d $\geqq$
$\sqrt[3]{\frac{N.36.10^5}{n\pi^2\tau_{adm\ el}}}\sim\sqrt[3]{\frac{N.36.10^4}{n.\tau_{adm\ el}}}\ cm$, pieņemot Coulomb'a stipr. teoriju un pielīdzinājot $\pi^2\backsim 10$.

Uz elastīgo ķermeņu potenciālo energiju attiecošos teorēmu apvienošana.

Prof. A. Vītols.

Prētēji parastai pierādīšanas kārtībai teorēmām par elastīgo ķermeņu potenciālo enerģiju, kas dibinajās uz superpozicijas principu kā arī uz vairākām hipotēzēm un nosacījumiem, iztirzāšu šeit citu pierādījumu, nelietojot superpozicijas principu.

Ja piem. gribētu integrālā veidā uzrakstīt kāda ķermeņa punkta i pārvietojuma y sakarību spēku P $,P_1$ ... P_2 ... P_k ... P_k ... P_m iedarbībā, vajadzētu pielietot superpozicijas principu. Likumība starp pārvietojumu un minētiem spēkiem būtu diferenciālā veidā uzrakstīt tikai iespējamo, pieņemot, ka y_i ir attiecīgo spēku funkcija, t.i. var rakstīt:

$$dy_i=\frac{\partial y_i}{\partial P_1}d\,P_1+\dots\frac{\partial y_i}{\partial P_k}dP_k+\dots\frac{\partial y_i}{\partial P_i}\ d\,P_i+\dots\frac{\partial y_i}{\partial P_n}\ d\,P_n=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{\partial y_i}{\partial P_k}\quad(1)$$

Šīs izteiksmes integrālais veids nepastāv vienmēr un ir saistīts ar noteikumu: $\frac{\partial^2 y_i}{\partial P_k \partial P_m} = \frac{\partial^2 y_i}{\partial P_m \partial P_k}$ $(1^{\underline{bis}})$

kur m un k pieņem visas vērtības starp 1 un n. Īpašība $(1^{\underline{bis}})$ ir autora šeit iztirzātās metodes funktionāli teoretiskais pamats. No vienādojuma (1) iespējamām atsevišķām daļām, kuras atbilst $(1^{\underline{bis}})$ noteikumiem, apskatīsim sekošas:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial y_i}{\partial P_k} = \alpha_{ik} = C_1 onstans \\ \frac{\partial y_i}{\partial P_m} = \alpha_{im} = C_2 onstans \end{array}\right\}$$ atrisinājums (a) (Hooke'a likums)

un $\frac{\partial y_i}{\partial P_k} = \varphi_i(P_K)$ un $\frac{\partial y_i}{\partial P_m} = \varphi_i(P_m)$ } atrisinājums (b) (potences likums: cements, ķets)

jo šajos atrisinājumos $\frac{\partial y_i}{\partial P_k \partial P_m} = 0 = \frac{\partial y_i}{\partial P_m \partial P_k} = 0$

φ_i šeit apzīmē attiecīgo funkciju.

Atrisinājumi (a) un (b) tanī ziņā svarīgi, kā šeit daļējie atvasinājumi vai nu pilnīgi neatkarīgi no spēkiem, kas iedarbojas uz ķermeni (atrisinājums (a)), vai arī viņi atkarīgi tikai no viena vienīga spēka, kas būtu izsaucis το pašu punkta i pārvietojumu, ja tas viens pats iedarbotos uz ķermeni. Ar citiem vārdiem izteiksme (1) attēlo abos gadījumos savā diferenciālā veidā tā saucamo superpozicijas likumu, ko daudzi pētnieki uzskata par pieredzes (empīrisku) likumu.

Kā tālāk redzēsim, varam šo pieņēmumu apiet. Pieņemsim, kā uz kādu sīju kāds spēks P_i normālā virzienā pret asi jau iedarbojies un izsaucis zinamu izlieci. Tādā gadījumā nākošais spēks P_K iedarbosies uz jau ieliektu stieni un kāda punkta pārvietošanās diferenciālizteiksme būs tad atkarīga no jau notikušas pārvietošanās resp. no jau pieliktā spēka. Ja nu šī pārvietošana ir ļoti maza, salīdzinot ar pārējiem pārvietojuma diferenciālizteiksmē esošiem lielumiem, tad viņu var neņemt vērā un iegūt izteiksmi, kas atbilstu viena vienīga spēka P_K iedarbes gadījumam, it kā šis spēks būtu iedarbojies uz pilnīgi taisnu stieni. Šis viedoklis ir ērts un ļauj viegli aptvert gadījumus, kas stāv ārpus šķietamā superpozicijas likuma. Tā piem. atkrīt pazīstamā diferenciālnolīdzinājumā par stieņa ass izlieci šķērsspēku iespaidā samērā mazi, no citu spēku pārvietošanas atkārīgie lielumi, jo tie ir samērā mazi salīdzinot ar spēku atstātumeim x_i no atbalsta punktiem.Turpretīm šo atmešanu nevar pielietot.Knickausbiegung gadījumā, jo sviras plecis spēkam,kas darbojas neizliektā stieņa ass virzienā,vienlīdzīgs 0 un nevienu lielumu,lai cik mazs tas arī nebūtu,nevar attiecībā uz nulli neievērot.Tā tad jāievēro ka pēc atrisinājumiem (a) un (b) tā saucamais superpozicijas likums attiecinams ne tikai uz ķermeņiem,kuru deformācija seko Hooke'a likumam,bet arī uz kuru katru citu deformācijas likumu,starp citu arī uz stiprības mācībā pazīstamo potences likumu (cements,ķets).

Tapēc ir skaidrs,kā atrisinājumiem (a) un (b) pastāv atbisstošais integrālais veids,kura konvencionālā izteiksme $y_i = F_i(P_1 \ldots P_i \ldots P_n)$ Izteiksme (1) rāda,kā y_i ir atrisinājumu (a) un (b) algebraiska summa,kura,kā zinams,seko kommutatīvam un associatīvam likumiem,kas nozīmē to pašu,ka deformācija y_i neatkarīga no spēku iedarbes secenības,kā arī no viņu augšanas likuma.

Maxwell'a teorēma.

Maxwell'a teorēma ir pamats,uz kura balstās autora teorēmu pierādījumu izvedums.Šeit tiks parādīts,ka ārējo spēku deformācijas darba izteiksmes funkcionāli-teorētiskā apstrādāšana dod Maxwell'a teorēmas vispārēju pierādījumu,pie kam atkritīs citu,mazāk pārliecinošu hipotēzu pielietošana.

Uzrakstīsim izteiksmi spēka P_i daļējam elementāram darbam, kurš iedarbojas punktā i:

$$d A_i = P_i\, d y_i = P_i \sum_{K=1}^{K=n} \frac{\partial y_i}{\partial P_K}\, d P_K = \sum_{K=1}^{K=n} P_i \frac{\partial y_i}{\partial P_K}\, d P_K$$

Visu spēku elementārais darbs tad ir

$$d A = \sum_{i=1}^{i=n} d A_i = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{K=1}^{K=n} P_i \frac{\partial y_i}{\partial P_K}\, d P_K = \sum_{i=1}^{i=n} P_i\, d y_i \quad\text{..........(2)}$$

Rodas jautājums,vai funkcija A vispār var pastāvēt.

Ja viņa vispār eksistē,tad

$$d A = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial A}{\partial P_i}\, d P_i = \sum_{K=1}^{K=n} \frac{\partial A}{\partial P_K}\, d P_K$$

Jo A jābūt visu spēku pilnam diferenciālam.

Tā kā katra summa neatkarīga no saskaitamo kārtības,var rakstīt:

$$d A = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{K=1}^{K=n} P_i \frac{\partial y_i}{\partial P_K}\, d P_K = \sum_{K=1}^{K=n} d P_K \sum_{i=1}^{i=n} P_i \frac{\partial y_i}{\partial P_K} = \sum_{K=1}^{K=n} d P_K \frac{\partial A}{\partial P_K}$$

Šo izteiksmi var pārrakstīt

$$\sum_{\kappa=1}^{\kappa=n} \frac{\partial A}{\partial P_\kappa} d\ P_\kappa - \sum_{\kappa=1}^{\kappa=n} d\ P_\kappa \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial y_i}{\partial P_\kappa} P_i = \sum_{\kappa=1}^{\kappa=n}\left(\frac{\partial A}{\partial P_\kappa} - \sum_{i=1}^{i=n} P_i \frac{\partial y_i}{\partial P_\kappa}\right) d\ P_\kappa = 0 \quad (3)$$

no kurienes seko ka

$$\frac{\partial A}{\partial P_\kappa} - \sum_{i=1}^{i=n} P_i \frac{\partial y_i}{\partial P_\kappa} = 0, \left(\frac{\partial A}{\partial P_\kappa} - \sum_{i=1}^{i=n} P_i \frac{\partial y_i}{\partial P_\kappa}\right)_{\kappa=1,2,3\ldots i\ldots \kappa\ldots n} \quad (4)$$

jo diferenciāli d P_κ u.t.t.ir neatkarīgi lielumi un nolīdzinājums (3) nenozīmē kaut kādu sakarību starp savā starpā neatkarīgiem diferenciāļiem.Līdzīgā kārtā iegūstam sakarību

$$\frac{\partial A}{\partial P_i} = \sum_{\kappa=1}^{\kappa=n} P_\kappa \frac{\partial y_\kappa}{\partial P_i} \quad (5)$$

No (4) tālāk seko:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial P_\kappa \partial P_i} = \frac{\partial y_i}{\partial P_\kappa} + \sum_{i=1}^{i=n} P_i \cdot \frac{\partial^2 y_i}{\partial P_\kappa \partial P_i}$$

un no (5):

$$\frac{\partial^2 A}{\partial P_i \partial P_\kappa} = \frac{\partial y_\kappa}{\partial P_i} + \sum_{\kappa=1}^{\kappa=n} P_\kappa \cdot \frac{\partial^2 y_\kappa}{\partial P_i \partial P_\kappa}$$

Bet tā kā atrisinājumos (a) un (b) $\frac{\partial^2 y_i}{\partial P_\kappa \partial P_i} = 0$ un $\frac{\partial^2 y_\kappa}{\partial P_i \partial P_\kappa} = 0$ un bez tam jābūt $\frac{\partial^2 A}{\partial P_\kappa \partial P_i} = \frac{\partial^2 A}{\partial P_i \partial P_\kappa}$, tad secinams ka $\frac{\partial y_i}{\partial P_\kappa} = \frac{\partial y_\kappa}{\partial P_i}$

Redzam,kā no atrisinājumiem (a) un (b) tikai Hooke'a likums šo identitāti apmierina,ja liekam $\frac{\partial y_i}{\partial P_\kappa} = \alpha_{i\kappa}$ = const. un kas pierādā Maxwell'a teorēmu.

Savādi ir,kā otrais atrisinājums (b),kas arī superpozicijas pricipam atbilst,tagad izrādas nederīgs,jo(a)priekš (b) būtu:

$$\varphi_i\,(P_\kappa) = \varphi_\kappa\,(\ P_i\ ),$$

kas ir lielumu P_κ, P_i u.t.t neatkarības dēļ neiespējams.

Castigliano un Menabre'a teorēmu diferenciālforma.

Pēc Maxwell'a teorēmas arī visām pārējām pazīstamām teorēmām viegli var atrast pierādījumus.

Šim nolūkam apskatīsim no jauna izteiksmi (5),kurz uz Maxwell'a teorēmas pamata tagad rakstīsim sekoši:

$\frac{\partial A}{\partial P_i} = \sum_{\kappa=1}^{\kappa=n} P_\kappa \frac{\partial y_\kappa}{\partial P_i} = \sum_{\kappa=1}^{\kappa=n} \frac{\partial y_i}{\partial P_\kappa} P_\kappa$, bet tā kā $\frac{\partial y_i}{\partial P_\kappa} = \alpha_{i\kappa}$ constans

tad $\sum_{\kappa=1}^{\kappa=n} \frac{\partial y_i}{\partial P_\kappa} P_\kappa$ ir izteiksmes (1) integrāls,jo

$$\int_0^{y_i} dy_i = y_i = \int_0^{P_\kappa} \sum_{\kappa=1}^{\kappa=n} \frac{\partial y_i}{\partial P_\kappa} d\ P_\kappa = \sum_{\kappa=1}^{\kappa=n} \int_0^{P_\kappa} \frac{\partial y_i}{\partial P_\kappa} dP_\kappa = \sum_{\kappa=1}^{\kappa=n} \frac{\partial y_i}{\partial P_\kappa} \int_0^{P_\kappa} dP_\kappa = \sum_{\kappa=1}^{\kappa=n} \frac{\partial y_i}{\partial P_\kappa} P_\kappa = \frac{\partial A}{\partial P_i} = y_i$$

un Castigliana teorēma $\frac{\partial A}{\partial P_i} = y_i$ u.t.t. ir pierādīta.Tikai jāuz.sver,ka spēkiem P_i u.t.t.,pēc kuriem atrod atvasinājumus $\frac{\partial A}{\partial P_i}$ u.t.t.,jābūt neatkarīgiem,jo taisni šī īpašība ved pie izteiksmēm kā piem.(4).Castigliano teorēmas gadījums $\frac{\partial A}{\partial P_i} = y_i = 0$ ir,kā zinams, Menabre'a teorēma, kurai dod matematisku izskaidrojumu, jo $\frac{\partial A}{\partial P_i} = y_i = 0$ nozīmē, ka spēkiem P_i u.t.t jāpieņem vērtības, kuras funkcijai A, deformācijas darba izteiksmei, piedod galēju vērtību. Galējās vērtības veidu (max vai min.) izšķir zīme izteiksmes $\frac{\partial^2 A}{\partial P_i^2} = \frac{\partial}{\partial P_i}\left(\sum_{k=1}^{k=n} \alpha_{ik} P_k\right) = \alpha_{ii}$ priekšā. Pēdējā ir vienmēr pozitīva, kas nozīmē, ka A galējā vērtība ir minima virzienā. Turpretīm teorēmas $\frac{\partial A}{\partial y_k} = P_k$ pierādījumam nav vajadzīgi nekādi ierobežojoši noteikumi.

$$d\,A = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial A}{\partial y_k}\, dy_k = \sum_{k=1}^{k=n} P_k\, dy_k\,;\quad \sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{\partial A}{\partial y_k} - P_k\right) dy_k = 0;$$

tā kā dy_k ir neatkarīgs, tad $\frac{\partial A}{\partial y_k} - P_k = 0$ u.t.t.

Clapeyron'a un Rayleigh-Betti teorēmu integrālais veids.

Iziesim atkal no izteiksmes (2):

$$d\,A = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} P_i \frac{\partial y_i}{\partial P_k}\, d\,P_k$$

Tāpat varam rakstīt

$$d\,A = \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{i=1}^{i=n} P_k \frac{\partial y_k}{\partial P_i}\, d\,P_i = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} P_k \frac{\partial y_k}{\partial P_i}\, dP_i$$

Ja šīs izteiksmes saskaitam, iegūstam

$$2\,d\,A = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} P_i \frac{\partial y_i}{\partial P_k}\, dP_k + \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} P_k \frac{\partial y_k}{\partial P_i}\, d\,P_i =$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n}\left(P_i \frac{\partial y_i}{\partial P_k}\, dP_k + P_k \frac{\partial y_k}{\partial P_i}\, dP_i\right) = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} \alpha_{ik} (P_i\, d\,P_k + P_k\, d\,P_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} \alpha_{ik}\; d(P_i\, P_k)$$, un pēc integrēšanas:

$$2\,A = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} (\alpha_{ik} P_k)\; P_i = \sum_{i=1}^{i=n} P_i \sum_{k=1}^{k=n} \alpha_{ik} P_k = \sum_{i=1}^{i=n} P_i y_i \text{ -----} (6)$$

(Clapeyron'a teorēma, no kuras izejot daudz autoru (Timošenko, Pappl) pierāda pārējās teorēmas).

Izteiksmi $2\,A = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} \alpha_{ik} P_k\, P_i$ varam sekošā konvencionālā veidā pārrakstīt: $2\,A = \left(\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i\; P_i\right)^2$ ....(7)

ja α_i^2 vietā rakstam α_{ii}, $\alpha_i \alpha_k = \alpha_{ik}$ u.t.t.

Izteiksme (7) sevišķi izdevīga parādīšanai, ka A attēlota ar otrās kārtas homogēnu polinomu. Tā rāda arī, ka superpozicijas princips darbam vairs nepastāv, jo bez locekļiem kā $\alpha_{ii} P_i^2$, kuri superpozicijas likumam atbilstu, izteiksme (7) satur arī produktus kā $\alpha_{ik} P_k\, P_i$, kuri ar šo likumu nesaskan. Bez tam vēl jāpiezīmē, ka izteiksme (7), kas satur minētā veida produktu galējās vērtības, neatkarīga arī no spēku pieauguma likuma iedarbes kārtības, kā tas ir attiecībā uz pārvietošanu.

No izteiksmes (6) viegli atvasināma lorda Rayleigh un Betti teorēma:

divām sistē-mām ar spēkiem (P_{Ii}) un (P_{IIi}),ar vienādiem iespaidošanas skaitļiem

$$A = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=n}\alpha_{ik} P_{Ii} \; P_{IIk} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n} P_{Ii} \sum_{k=1}^{k=n}\alpha_{ik} P_{IIk} =$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n} P_{Ii}\, y_{IIi} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=n} P_{IIk} \sum_{l=1}^{l=n}\alpha_{kl} P_{Ii} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=n} P_{IIk}\, y_{Ik} \text{------}(8)$$

un teorēma pierādīta.

Iepriekšējā tekstā jēdziens"potenciālā enerģija" netika lietots.

Šis apstāklis pieļauj teorēmu apvienošanu.Literatūrā pazīstamie pierādījumi balstās uz ārējo spēku darba vienlīdzību ar potenciālo enerģiju,no kā tiek arī secināta deformācijas darba neatkarība no spēku iedarbes kārtības un viņu vērtības pieauguma,jo potenciālās enerģijas jēdziens,kas ir vienāds ar iekšējo spēku darbu,esot neatkarīgs no šiem faktoriem,un deformācijas beigu forma arī nepārprotami ar to noteikta.

Šie nosacījumi vairs nav vajadzīgi autora šeit aprakstītā pierādīšanas kārtībā,kas ved pie sekošas teorēmu apvienošanas.

Ārējo spēku deformācijas darbs mazām deformācījām vienlīdzīgs ķermeņa potenciālās enerģijas un iekšēju bēzes spēku izlietotās enerģijas summai.Pēdejā enerģija galvenokārt nosaka neelastigās,plastiskās deformācijas.Tas nozīmē,kā pierādītās teorēmas var arī plastiskām,neelastīgām vai pa daļai elastīgām deformācījām pielietot.Šīs teorēmas atsevišķs gadījums: Ārējo spēku deformācijas darbs vienlīdzīgs pilnīgi elastīgu ķermeņu potenciālai enerģijai.

<u>Uz elastīgo ķermeņu potenciālo enerģiju attiecošos teorēmu apvienošana.</u>

A.Vītols.

Autoreferāts.

Līdz šim minētās teorēmas ir pierādījuši dažādi autori,neatkarīgi vienu no otras,balstoties galvenā kārtā uz tā saucamo superpozicijas principu,kuru daži autori skaita par empīrisku likumu.Šā apcerējuma autoram,turpretīm,ir radusies doma izlietot zināmu nepārtraukto analitisko funkciju īpašību,proti,ka funkcijas augstāko kārtu atvasināto vērtība ir neatkarīga no atvasināto ņemšanas kārtības (sk.iepriekšejā teksta nol. (1^{bis}),lai iegūtu visu elastības teorījā par ķermeņu potenciālo enerģiju pazīstamo teorēmu pierādījumu bez atsaukšanās uz kādu superpozicijas principu.Beidzamais autora domu gājienā nepavisam nav vajadzīgs;pie tam,garāmejot,autors rāda, kā šo principu var aizstāt ar deduktīvā ceļā pierādamo teorēmu par dažādu mechanisku lielumu superpoziciju.Autora ceļš tūlīt pieļauj slēgt,kā pārvietojumu superpozicija ir iespējama ne tikai attiecībā uz ķermeņiem,kuri seko Hooke'a likumam,bet arī attiecībā uz ķermeņiem,kuru elastīgās deformācijas seko tā saucamam potences likumam(trausli ķermeņi: cements,ķets, stikls u.t.t.). Abi šie likumi (Hooke'a un potences) pielaiž diferenciālā veidā uzstādīta pārvietojumu nolīdzinājuma (1) integrāciju(sk.iepriekšējo tekstu),kura izteiksme līdz šim tika uzstādīta ar superpozicijas principa palīdzību.

Lai pierādītu pazīstamo Maxwell'a teorēmu,autors atkal neizlieto nekādu hipotēzi pār spēku deformācījas darba neatkarību no spēku iedarbes kārtības,kā to parasti dara,bet izmanto jau minēto nepārtraukto analitisko funkciju īpašību par augstākās kārtas atvasinātās vērtības neatkarību no šās atvasinātās sastādīšanas kārtības(sk.nolīdz.5 un tālāk līdz Maxwell'a teorēmas pierādījuma galam).

Ļoti skaidri tagad ir redzams,kā spēku deformācijas darba izteiksmi var sastādīt vienīgi ķermeņiem,kuri seko Hooke'a likumam,turpretim,potenclikums vairs nepieļauj sastādīt deformācijas darba izteiksmi,neskatoties uz to,kā pārvietojuma izteiksmi integrālā veidā šim likumam varēja uzrakstīt.

Kad Maxwell'a teorēma ir pierādīta,tad tūlīt viņai seko teorēmu diferenciālforma(Castigliano un Menabre'a teorēmas).

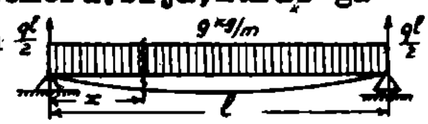
Tāļāk seko teorēmu integrālforma(Clapeyron'a, Raylegh'a un Betti teorēmas)Par Clapeyron'a teorēmu jāmin,ka līdz šim šo teorēmu daži autori pierādīja diezgan mākslīgi, tika pieņemts, kā uz ķermeni iedarbojušies spēki pieauga no 0 līdz viņu galīgām vērtībām, tā ka katrā momentā starp spēkiem pastāv tā pati attiecība, kas starp viņu galīgām vērtībām, piem. ja kāda spēka galīgā vērtība ir 2 reizes lielāka par kāda cita spēka galīgo vērtību, tad arī katrā momentā starp vēl līdz galam nepieaugušām vērtībām pastāv tā pati attiecība.

Kad tādā ceļā tika izvesta izteiksme (6), tad tālāk tika secināts, kā, tā ka spēku deformācijas darbs (6) ir pārgājis ķermeņa potenciālā enerģijā, kuras izteiksme ir viennozīmīga neatkarīga no spēku iedarbes kārtības, (superpozicijas princips latentā veidā), tad arī spēku deformācījas darbs vienmēr, - ari pie cita spēku pieauguma likuma - gūst to pašu izteiksmes veidu (6). Kā redzams, še spēku deformācījas darba izteiksmes neatkarība tiek motivēta ar potenciālās enerģijas izteiksmes viennozīmīgumu, t.i. min. autori aprobežo problēmu ar deformācījām elastības robežās. Turpretīm, šā apcerējuma autoram izdodas min. teorēmas paplašināt arī ārpus minātām robežām, jo viņam viņa teorēmu pierādījumā nepavisam nav vajadzīgs jēdziems par potenciālo enerģiju, un viņa teorēmas attiecās tikai uz deformācījas darbu, Ja tas ir tā, tad min. teorēmas var attiecināt ari uz neelastīgām, plastiskām deformācījām, ar noteikumu, kā šīs deformācījas ir relatīvi mazas, jeb šīs teorēmas var lietot arī ārpus ķermeņa elastības robežām, kad iesākās nelielas paliekošas deformācijas. Atsevišks gadījums ir: "Ārējo spēku deformācījas darbs ir vienāds ar pilnīgi elastīgu ķermeņu potenciālo enerģiju", uz kuru līdz šim attiecās min. teorēmas.

Ģeneralizētais spēks un ģeneralizētais pārvietojums.

Apskatot deformācijas darba izteiksmes dažādos gadījumos, mēs tur sastopam ari tādas, kas neiekļaujas parastā darba definīcījā, proti, ka darbs ir spēka algebrisks produkts ar tā iedarbes punkta pārvietojumu spēka virzienā, jeb-kas tas pats-darbs ir spēka un pārvietojuma vektoru skalareus produkts. Saskaņā ar šo definīcīju $dA = (\bar{P}.\bar{ds}) = P.ds\cos(\bar{P},\bar{ds})$. Še P ir spēks, kustības maiņas cēlonis, Newton'a primārā spēka, $P = m\bar{j}$, definīcījas nozīmē.

Konfrontējot ar šo izteiksmi mums pazīstamo vērpes darba izteiksmi $A_0 = \frac{M\varphi}{2}$, kuras elements ir $dA_0 = Md\varphi$, mēs saskatam še lineāra pārvietojuma ds vietā $d\varphi$ bezdimensijas skaitli, bet P vietā M lielumu, kura dimensija ir $[ML^2T^{-2}]$ Sakarā ar šo apstākli rodās doma kā spēka tā arī pārvietojuma jēdzienu paplašināt un skaitīt par spēku un pārvietojumu - skatot pēc apstākļiem- divus tādus lielumus, kuru dimensiju produkts būtu tikai vienāds ar darba resp. enerģijas dimensiju $[ML^2T^{-2}]$, pie kam šāda spēka dimensijas sastāvā katrā ziņā būtu jāietilpst masas dimensijai $[M]$. Šādu spēku ar attiecīgu pārvietojumu sauksim par ģeneralizētu spēku un pārvietojumu. Sacīto ilustrēsim vēl ar vienu piemēru. Sīja, kuras garums ir l noslodzīta vienmērīgi ar 9 kg/m



$$A = 2\frac{1}{2EJ}\int_0^{l/2} Mdx = \frac{1}{EJ}\left(\frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{2EJ}\int_0^{l/2}(qlx - qx^2)^2 dx = \frac{q^2}{2EJ}\int_0^{l/2}(lx - x^2)^2 dx = \frac{q^2}{4EJ}\int_0^{l/2}(l^2x^2 - 2lx^3 + x^4)dx$$

$$= \frac{q^2}{4EJ}\left|\frac{l^2x^3}{3} - \frac{2lx^4}{4} + \frac{x^5}{5}\right|_0^{l/2} = \frac{q^2l^5}{4EJ}\left(\frac{1}{24} - \frac{1}{32} + \frac{1}{160}\right) = \frac{q^2l^5 \cdot 8}{4.480EJ} = \frac{q^2l^5}{240EJ}$$

Pa ceļam uziesim izlieci f sījas vidū, Iedomāsimies tur pieliktu fiktīvu spēku P. Tad saskaņā ar Castigliano teorēmu: $\left(\frac{\partial A}{\partial P}\right)_{P_0} = \frac{1.2.2}{2EJ}\int_0^{l/2}\left(M\frac{\partial M}{\partial P}\right)_{P=0}dx = \frac{2}{EJ}\int_0^{l/2}(M)_{P=0}\cdot\left(\frac{\partial M}{\partial P}\right)_{P=0}dx =$

$$\frac{2}{EJ}\int_0^{l/2}\left(\frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2}\right)\frac{x}{2}dx = \frac{1.ql^4}{2EJ}\left|\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right|_0^{l/2} = \frac{ql^3}{2EJ}\left(\frac{1}{24} - \frac{1}{64}\right) = \frac{ql^3}{2EJ}\cdot\frac{5}{192} = \frac{5}{384}\frac{ql^4}{EJ} = f.$$

Uziesim tālāki laukumu starp sījas pirmātnējo, neizliekto un izliekto asi: $EJy'' = M = \frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2}$; $EJy' = \frac{q}{2}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) + C_1 \left(EJy'\right)_{x=l/2} =$

$$= \frac{ql^3}{24}. \quad EJy' = \frac{q}{2}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) - \frac{ql^3}{24}. \quad EJy = \frac{q}{2}\left(\frac{lx^3}{2.3} - \frac{x^4}{12}\right) - \frac{ql^3x}{24} + C_2.$$

$$(EJy)_{x=0} = 0 = C_2 \text{ un } EJy = \frac{q}{2}\left(\frac{lx^3}{6} - \frac{x^4}{12}\right) - \frac{ql^3x}{24}$$

Šis laukums F ir: $EJF = 2\int_0^{l/2} y dx = q\int_0^{l/2}\left(\frac{lx^3}{6} - \frac{x^4}{12} - \frac{l^3x}{12}\right) dx =$

$$= q\left|\frac{lx^4}{24} - \frac{x^5}{60} - \frac{l^3x^2}{24}\right| = \frac{ql^5}{240}\left|10x^4 - 4x^5 - 10x^2\right|_0^{1/2} = \frac{ql^5}{240}\left(\frac{10}{16} - \frac{4}{32} - \frac{10}{4}\right) = \frac{ql^5}{240}$$

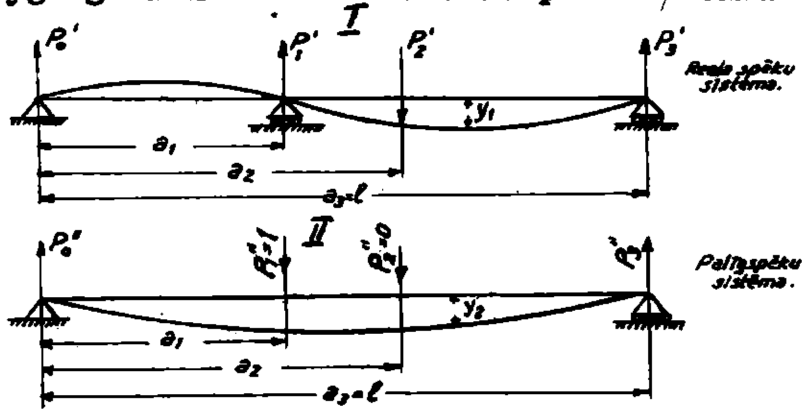
$$\left(\frac{40 - 8 - 160}{64}\right) = -\frac{ql^5}{240}\frac{128}{64} = \frac{ql^5}{120}, \quad F = \frac{ql^5}{120EJ}$$

Izteiksim ar šī laukuma, kā ģeneralizēta pārvietojuma, palīdzību deformācijas darbu,tad meklējams ir generalizetais spēks P_{gen}: $\frac{P_{gen}.F}{2} = A$, $P_{gen} = \frac{2A}{F} = 2\frac{q^2 l^5}{240}\cdot\frac{120EJ}{EJ.ql^5} = q\ \frac{kg}{m}$ un $A = q\frac{F}{2}$.

Ieveduši jēdzienu par generalizētiem spēkiem un pārvietojumiem,mēs varam arī visas elastības teorēmas generalizēt,atvietojot visur Newton'a primāro spēkus ar generalizētiem un pārvietojumus ar generalizētiem pārvietojumiem,pēc kam

$$\frac{\partial A}{\partial P_{gen}} = y_{gen}\ \frac{\partial A}{\partial \mathfrak{M}} = \varphi \text{ u.t.t.}$$

Piemērs ar Rayglegh'a un Betti teorēmas pielietošanu



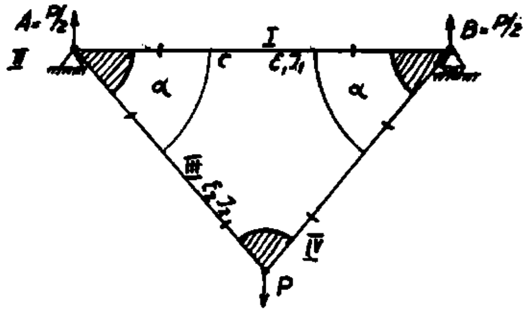
Še nezinamais spēks ir P_1' atbalsta punkata reakcija sakarā ar šolai P_1 nolīdzinājumā neizkristu,vidējais atbalsta punkts ir atmetams. Tā vietā pielikts palīgspēks $P_1''=1$ Uz teorēmas pamata var rakstīt:

$$P_0'(y_2)_{x=0} + P_1'(y_2)_{x=a_1} - P_2'(y_2)_{x=a_2} + P_3'(y_2)_{x=a_3=l} = P_0''(y_1)_{x=0} - 1(y_1)_{x=a_1} + 0(y_1)_{x=a_2} + P_3''(y_1)_{x=a_3=l}$$

Še ar y_1 apzīmēts sistemas I pārvietojumi,ar y_2 sistemas II. Tā kā $(y_1)_{x=0} = (y_2)_{x=0} = (y_1)_{x=a_1} = (y_1)_{x=a_3} = (y_2)_{x=a_3}$, tad uzrakstītais nolīdzinājums pāriet:

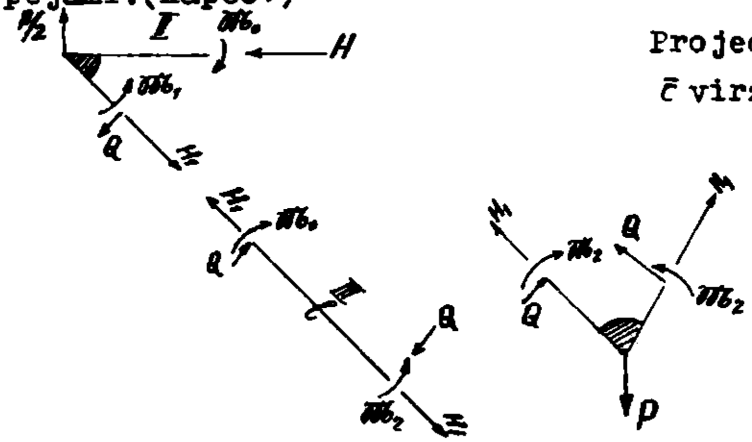
$P_1'(y_2)_{x=a_1} - P_2'(y_2)_{x=a_2} = 0$, no kurienes $P_1' = \frac{P_2'(y_2)_{x=a_2}}{(y_2)_{x=a_1}}$ un nezinamais P_1 ir uziets.P_1 izteiksmē figūrā y_2 ,kas ir statiski noteiktas sījas izliektās ass ordinātes pie noslodzes $P_1''=1$, pieliktas atmesta atbalsta punkta vietā.

Castigliano teorēma,piemērota attiecībā uz iekšējiem spēkiem.Simetriska trīsstūra rāmis ar stingriem mezglu punktiem



noslodzīts ar spēku P.Uziet iekšējās reakcijas, jo ārēji rāmis ir

statiski noteikts un atbalsta reakcijas ir $A=P/2$ un $B=P/2$.
Izšķelsim rāmī stienu elementus I un III un mezglus II un IV kuru līdzsvaru apskatīsim atsevišķi.
Elementam I ārējo spēku nav pielikts. Tadēļ iekšējo spēku līdzsvaru noteic spēku sistēma no abu mezglu puses. Tā kā mezgli ir stigri, tad elementa galu šķēlienos darbijās reakcijas momenti $\mathfrak{M}$ bez tam jāpielaiž H spēku eksistenci. Q spēki ir neiespējami. (kapēc?)



Projecējot mezgla spēkus uz $\bar{c}$ virzienu, iegūstam

$$H+Q\sin\alpha-H_1\cos\alpha=0 \quad (1)$$

Projecējot uz P virzienu:

$$P/2+Q\cos\alpha-H_1\sin\alpha=0 \quad (2)$$

$$\mathfrak{M}_0-\mathfrak{M}_1=0,\ (3)\ \mathfrak{M}_1=\mathfrak{M}_0 \ (3)$$

$$\underline{III}.\quad Ql+\mathfrak{M}_0-\mathfrak{M}_2=0 \quad (4)$$

Projecējot mezgla IV spēkus uz horicontālu virzienu, iegūsim identitāti bet uz vertikālu: $-P+2H_1\sin\alpha+2Q\cos\alpha=0$, kas ir nol. (2) kadēļ IV nekādus neatkarīgus nolīdzinājumus nedod.

Nolīdzinājumu ir (1), (2) un (4), ja (3) tūlīt izlieto $\mathfrak{M}_1$ izteikšanai caur $\mathfrak{M}_0$. Nezinamie ir: H, Q, H_1, $\mathfrak{M}_0$ un $\mathfrak{M}_2$. Tā kā nolīdzinājumu skaits ir 3, tad neatkarīgo mainīgo ir 2, kas dod 2 elastības teorījas nolīdzinājumus. Par šiem neatkarīgiem, mainīgiem pieņemsim $\mathfrak{M}_0$ un $\mathfrak{M}_2$, tad $\frac{\partial A}{\partial \mathfrak{M}_0}=0$ $\frac{\partial A}{\partial \mathfrak{M}_2}=0$.

$$A=\frac{H^2c}{2E_1F_1}+\frac{1}{2E_1J_1}\int_0^c \mathfrak{M}_0^2\,dx+2\frac{1}{2E_2J_2}\int_0^l(\mathfrak{M}_0+Qx)^2dx+\frac{2H_1^2 l}{2E_2F_2}.\ \frac{\partial A}{\partial \mathfrak{M}_0}=0=\frac{Hc}{E_1F_1}\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{M}_0}+\frac{1}{E_1J_1}$$

$$\int_0^c\mathfrak{M}_0\,dx+\frac{2}{E_2J_2}\int_0^l(\mathfrak{M}_0+Qx)(1+\frac{\partial Q}{\partial \mathfrak{M}_0}x)dx+\frac{2H_1 l}{E_2F_2}\frac{\partial H_1}{\partial \mathfrak{M}_0}\quad \frac{\partial A}{\partial \mathfrak{M}_2}=0=\frac{Hc}{E_1F_1}\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{M}_2}+\frac{2}{E_2J_2}\int_0^l(\mathfrak{M}_0+Qx)\frac{\partial Q}{\partial \mathfrak{M}_2}x\,dx+\frac{2H_1 l}{E_2F_2}\frac{\partial H_1}{\partial \mathfrak{M}_2},\ \text{jo}\ \frac{\partial \mathfrak{M}_0}{\partial \mathfrak{M}_2}=0.$$

Paraelo atvasināto ņemšanu ir ieteicams izdarīt zem zīmēm, kas nozīmē, kā no divām operācījīm - integrācijas un atvasināto ņemšanas - pēdējā izdarama pa priekšu, ar ko tiek vienkāršota aprēķina gaita. Par atvasinatos pēc $\mathfrak{M}_0$ un $\mathfrak{M}_2$ uzejam ar nolīdz. (1), (2) un (4) palīdzību:

$$(1)\quad \frac{\partial H}{\partial \mathfrak{M}_0}+\frac{\partial Q}{\partial \mathfrak{M}_0}\sin\alpha-\frac{\partial H_1}{\partial \mathfrak{M}_0}\cos\alpha=0 \qquad (I)$$

$$(2)\quad \frac{\partial Q}{\partial \mathfrak{M}_0}\cos\alpha+\frac{\partial H_1}{\partial \mathfrak{M}_0}\sin\alpha=0 \qquad (II)$$

$$(4)\quad \frac{\partial Q}{\partial \mathfrak{M}_0}l+1=0 \qquad (III)$$

No kurienes: $\frac{\partial Q}{\partial \mathfrak{M}_0}=-\frac{1}{l}$,

$$\frac{\partial H_1}{\partial \mathfrak{M}_0}=-\frac{\partial Q}{\partial \mathfrak{M}_0}\,ctg\alpha=\frac{ctg\alpha}{l},$$

$$\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{M}_0}=\frac{\partial H_1}{\partial \mathfrak{M}_0}\cos\alpha-\frac{\partial Q}{\partial \mathfrak{M}_0}\sin\alpha=$$

$$-\frac{\operatorname{ctg}\alpha\cos\alpha}{l}+\frac{\sin\alpha}{l}=-\frac{1}{l}\left(\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}+\sin\alpha\right)=-\frac{1}{l\sin\alpha}$$

Atvasinātie pēc $\mathfrak{M}_2$ ir: $\frac{\partial Q}{\partial\mathfrak{M}_2}=\frac{1}{l}$, $\frac{\partial H_1}{\partial\mathfrak{M}_2}=-\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{l}$, $\frac{\partial H}{\partial\mathfrak{M}_2}=-\frac{1}{l\sin\alpha}$

Ievietojot uzietas vērtības nol. $\frac{\partial A}{\partial\mathfrak{M}_0}=0$ un $\frac{\partial A}{\partial\mathfrak{M}_2}=0$ un izvedot integrāciju, iegūsim 2 papildu nolīdzinājumus siste - mai (1), (2) un (4), -kopā 5, piecu nezinamu H, Q, H_1, $\mathfrak{M}_0$ un $\mathfrak{M}_2$ uz- iešanai

Vēl var atuīmēt, kā atvasinātie $\frac{\partial Q}{\partial\mathfrak{M}_0}$, $\frac{\partial H}{\partial\mathfrak{M}_0}$ u.t.t. ir Q, H, un t.t. vērtības, kuras šie lielumi pieņem, kad atmet $\mathfrak{M}_0$ un tā vietā pieliek $\mathfrak{M}_0=1$ u.t.t.

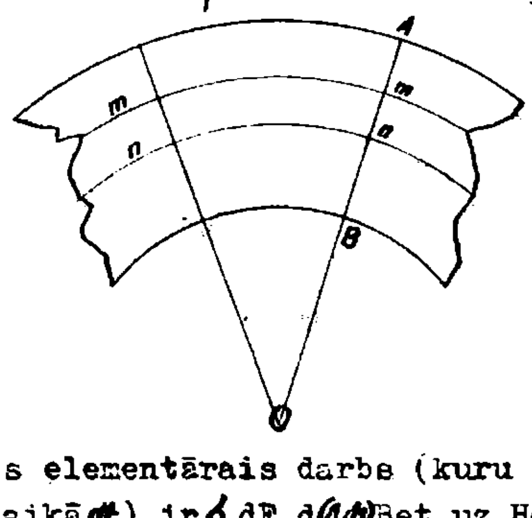
Kad visas iekšejās reakcijas ir uzietas, tad var uziet ari mezglu punktu pagrieziena leņķus.

Šo uzdevumu var veikt sekojošā veidā. Ņemam vērā p. piem. elementu I, attiecībā uz kuru $\mathfrak{M}_0$ ir ārējais moments.

Tad $\frac{\partial A_I}{\partial\mathfrak{M}_0}=\varphi\,(\text{pag.leņķ.})=\frac{Hc}{E_1F_1}\cdot\frac{\partial H}{\partial\mathfrak{M}_0}+\frac{1}{E_1J_1}\int_0^c\mathfrak{M}_0\,dx=\frac{Hc}{E_1F_1\sin\alpha}+\frac{1\cdot\mathfrak{M}_0c}{E_1F_1}=\frac{c}{E_1}\left(\frac{H}{F_1\sin\alpha}+\frac{\mathfrak{M}_0}{J_1}\right)$ u.t.t.

Izliektas sījas potenciālā enerģija un iekšējo spēku deformācijas darbs.

Spēks ar kuru šķiedra tiek stiepta, ja m ir neitrāla šķiedru kārta, ir σdF kur σ ir lieces normālais spraigums, dF šķiedras šķērsgriezuma laukums. Šķiedras pilno absoluto izstiepi apzīmēsim ar Δds, apzīmējot ar ds šķiedras nn garumu. Šķiedras iz- stiepes elementārais darbs (kuru stiepes darbs veic bezgalīgi mazā laikā dt) ir σ dF $d(\Delta ds)$ Bet uz Hooke'a likuma pamata



$\varepsilon=\frac{\Delta ds}{ds}\to\varepsilon=\sigma,\ \Delta ds=\frac{\sigma}{E}ds$; ($ds$ še ir konstants), kadēļ $\sigma dF\,d(\Delta ds)=\frac{\sigma d\sigma}{E}dFds$.

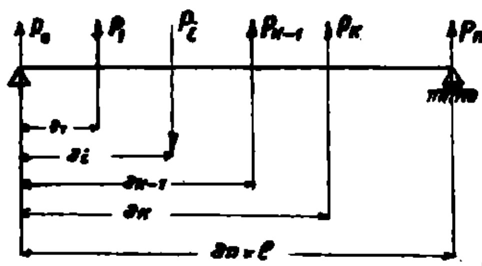
$d(\Delta ds)=d\left(\frac{\sigma}{E}ds\right)=\frac{d\sigma}{E}ds$

Šķiedras mm pagarinājuma deformācijas darbs $=\int_0^\sigma\frac{\sigma d\sigma}{E}dFds=\frac{\sigma^2}{2E}dFds=$ $=\frac{M^2z^2}{2J_y^2E}dFds.$

Visa šķēliena AB deformācijas darbs

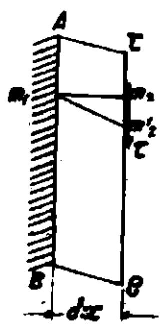
Fd $D_e = \frac{M^2 ds}{2J_y^2 E}\int^F dF z^2 = \frac{M^2 ds . J_y}{2J_y^2 E} = \frac{M^2 ds}{2EJ_y}$ Visas sījas deformācijas darbs $D_e = \int^l \frac{M^2 ds}{2EJ_y}$ Ja sīja ir priezmatisks ķermenis, tad $D_e = \frac{1}{2EJ_y}\int^l M^2 ds$ Liektas ass garums niecīgi atšķirsies no sījas garuma l un tāpat $ds \approx dx$, kur dx ir ds horicontālā projekcija. Tapēc beidzot $\boxed{D_e = \frac{1}{2EJ_y}\int^l M^2 dx}$ (1)

M ir funkcija no x, M = f (x). Vispārīgā gadījumā funkcijas veids mainās pa sījas gabaliem, tadēļ $D_e = \frac{1}{2EJ_y}\sum_{i=1}^{i=n}\int_{x=a_{i-1}}^{x=a_i} M_i^2 dx$



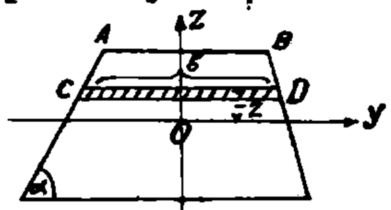
Zīm.2.

Vispārīgā gadījumā šķērsliece ir saistīts ar cērpi. Cērpes spēki Q arī rada deformāciju, tapēc uziesim šo spēku deformācijas darba izteiksmi. Šinī nolūkā vēlēsim (sk. zīm.3) divus sījas šķēlienus AB un CD attālumā d x vienu no otra un apskatīsim kādas šķiedras m_1 m_2 deformāciju. Patiesību sakot, cērpes jeb bīdes sekas būs tikai šķiedras m_1 m_2 stāvotnes maiņa, kura izpaudīsies punkta m_2 pāriešanā punktā m_2' jeb taisna leņķa m_2 $m_1 B$ sašķobīšanā par mums jau pazīstamo bīdes deformācijas leņķi β Ja bīdes jeb cērpes spraigumu punktā m_2 apzīmēsim ar τ



Zīm 3

(zīm.3), tad bīdes spēks tai pašā punktā būs τdF, kur dF ir šķiedras m_1 m_2 šķēršķēliena laukums. Pilnu bīdes spēka iedarbes punkta pārvietojumu var izteikt tā $m_2 m_2' = \beta dx$; $d(m_2 m_2') = dx\, d\beta$ un bīdes spēka elementārais darbs $= \tau dF dx\, d\beta$. Bet $\tau = g\beta$ un $d\tau = g\, d\beta$, tapēc $\tau dF dx\, d\beta = \frac{dF dx\, \tau d\tau}{g}$ Pilnais bīdes spēka darbs punktā m_2 = $\frac{dFdx}{g}\int^\tau \tau d\tau = \frac{dFdx}{g}\cdot\frac{\tau^2}{2}$ Bet $\tau = \frac{Q S_z}{b J_y \sin\alpha}$, kur (zīm.4) Q ir cērpes spēks sījas šķēlienā (šķēliena attālums no kreisā sījas atbalsta punkta ir x); S_z ir laukuma ABCD statiskais moments pret nulles līniju jeb neitrālo asi ar kuru ir



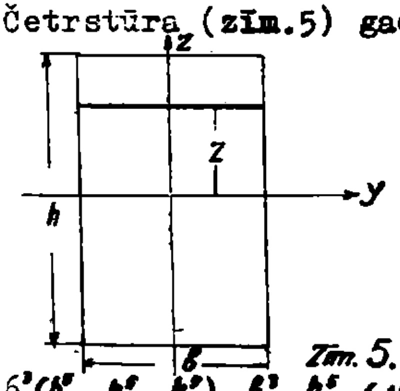
Zīm 4.

apvienota OY ass, b ir līnijas CD garums jeb šķēliena platums, kurā τ tiek apskatīts; J_y ir visa šķēliena aksiālais inerces moments ņemts pret asi OY neitrālo asi); α ir leņķis, kura nozīme ir redzama no zīmējuma. Ievietojot τ izteiksmi darba izteiksmē, dabūsim: $\frac{dF\,dx}{g}\cdot\frac{\tau^2}{2}=\frac{dx}{2g}\cdot\frac{Q^2S_z^2\,dF}{b^2J_y^2\sin^2\alpha}$ Un visa šķēliena cērpes darbs $D_c=\frac{dx\,Q^2}{2g}\int^F\frac{S_z^2\,dF}{b^2J_y^2\sin^2\alpha}$ Vispārīgā gadījumā varēs izteikt visus lielumus, kuri atrodas zem integrāla kā funkcijas no ordinātas Z. Šim nolūkam būs vajadzīgs šķēliena figuras kontura nolīdzinājums jeb. nolīdzinājums $f(y,z)'=0$ Pat vispārīgā gadījumā (piem. ripas gadījumā) ari nebūs constants, bet funkcija no Z. Sakarā ar šo integrāls dos kādu lielumu ar dimensiju

$\int^F\frac{(S_z^2)[L^6](dF)[L^2]}{(b^2)[L^2](J_y^2)[L^8]\sin^2\alpha}=\int\left(\frac{S_z^2\,dF}{b^2J_y^2\sin^2\alpha}\right)\left[\frac{1}{L^2}\right]=\frac{K}{F}$, kur F ir šķēliena šķērslaukums, bet k ir bezdimensijas koeficients katrā atsevišķā gadījumā atkarīgs no šķēliena formas un izteicams caur

$$K=\frac{F}{b^2J_y^2\sin^2\alpha}\int^F S_z^2\,dF$$

Četrstūra (zīm.5) gadījumā šis koeficients k dabū nozīmi



Zīm. 5.

$$S_z=\frac{b}{2}\left(\frac{h}{2}-z\right)\left(\frac{h}{2}+z\right)=\frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4}-z^2\right);$$

$$S_z^2=\frac{b^2}{4}\left(\frac{h^2}{4}-z^2\right)^2=\frac{b^2}{4}\left(\frac{h^4}{16}-\frac{h^2z^2}{2}+z^4\right);$$

$$dF=b\,dz \text{ un } S_z^2\,dF=\frac{b^2}{4}\left(\frac{h^4}{16}-\frac{h^2z^2}{2}+z^4\right)b\,dz=$$

$$=\frac{b^3}{4}\left(\frac{h^4dz}{16}-\frac{h^2z^2dz}{2}+z^4dz\right);$$

$$\int^F S_z^2\,dF=\frac{b^3}{4}\left\{\frac{h^4}{16}\Big|z\Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}-\frac{h^2}{6}\Big|z^3\Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}+\frac{1}{5}\Big|z^5\Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\right\}=$$

$\frac{b^3}{4}\left(\frac{h^5}{16}-\frac{h^5}{24}+\frac{h^5}{80}\right)=\frac{b^3}{4}\cdot\frac{h^5}{240}(15-10+3)=\frac{b^3h^5 8}{4\cdot 240}=\frac{b^3h^5}{120}$; $b^2J_y^2=b^2\,\frac{b^2h^6}{144}=\frac{b^4h^6}{144}$ un

$\int^F\frac{S_z^2\,dF}{b^2J_y^2}=\frac{b^3h^5}{120}\cdot\frac{144}{b^4h^6}=\frac{144\,b^3h^5}{120\cdot b^4h^6\,bh}=\frac{6}{5}bh.\ K=\frac{6}{5}=1.2$ dubult T  h šķēliena gadījumā k mainās no $K=2$ līdz $k=2{,}4$, kad h mainās no $h=50$ cm līdz $h=8$ cm) Visas prizmatiskās sījas cērpes spēku darbs izteiksies:

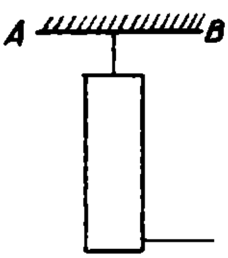
$$\boxed{D_c=\frac{K}{2gF}\int_0^l Q^2\,dx} \qquad (2)$$

ja Q katrā sījas dalā ir sava izteiksme

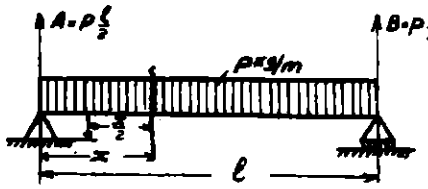
Kopējo iekšējo darbu dabunam, ja izteiksmes (1) un (2) algebriski saskaitam. Kā dabūtās darba izteiksmes rāda, darbs ir neatkarīgs no likuma pēc kāda ārējie spēki pieaug no nulles līdz viņu galējām nozīmēm. Tikai ir vajadzīgs, lai šī pieaugšana no-tiktu gausi, t.i. lai katrā acumirklī būtu līdzsvars starp ārējiem un iekšējiem spēkiem. Pretējs gadījums būtu dinamisks kur būtu jāņēm vērā kermeņa masas inerces spēki. Lai vispārīgi ārējie spēki varētu radīt deformācijas darbu ir vajadzīgs, lai ķermenis (resp. sīja) būtu pienācīgi nostiprināta.

Pa piemēram iesms piekārts ar vienu galu un padots horocontālam spēkam otrā galā (sk. zīm.6) nekādu deformācijas darbu neuzņems, ja pieņemtu, kā tā pašsvaru varam neņemt vērā.

Turpretīm tas pats iesms iespīlēts griestos AB uzņems deformācijas darbu. Piemērs: Uziet prizmatiskas sījas potenciālo enerģiju no vienmērīgas slodzes p kg/m, ja sījas škērsgriezums ir četrstūris $b \times h$, sījas garums ℓ un elastības modulis ir E (zīm.7)



Zīm.6



Zīm.7

$$M_x = A_x - \frac{px^2}{2} = \frac{p\ell}{2}x - \frac{px^2}{2} = \frac{p}{2}\left(\ell x - x^2\right)$$

sakarā ar (1) $De = \frac{1p^2}{8EJ_y}\int\left(\ell x - x^2\right)^2 dx = \frac{p^2}{4EJ_y}\int_0^\ell \ell^2 x^2 dx - 2\ell x^3 dx + x^4 dx =$

$$= \frac{p^2}{4EJ_y}\left(\frac{\ell^5}{3} - \frac{2\ell^5}{4} + \frac{4\ell^5}{20}\right) = \frac{p^2\ell^5}{4EJ_y}\left(\frac{20-30+12}{60}\right) = \frac{2p^2\ell^5}{4EJ_y \cdot 60} = \frac{p^2\ell^5}{120EJ_y} \qquad \boxed{De = \frac{p^2\ell^5}{120EJ_y}} \; (3)$$

Tapat Dc saskaņā ar (2)

$$Dc = \frac{1{,}2}{2{,}gF}\int_0^\ell (p\ell - px)^2 \, dx = \frac{1{,}2p^2}{2gF}\int_0^\ell \frac{\ell^2 dx}{4} - \ell x\,dx + x^2 dx =$$

$$= \frac{1{,}2p^2}{2.gF}\left(\frac{\ell^3}{4} - \frac{\ell^3}{2} + \frac{\ell^3}{3}\right) = \frac{1{,}2p^2\ell^3}{2g.F.12} = \frac{p^2\ell^3}{20g.F}.$$

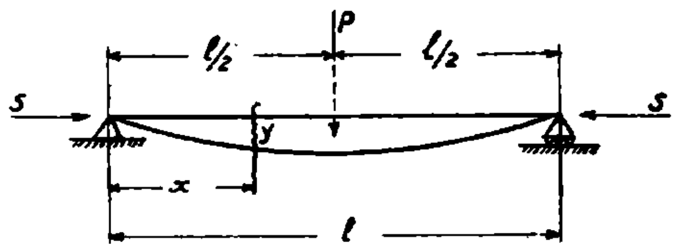
Kopdarbs $=$

$$= \frac{p^2\ell^5}{120EJ_y} + \frac{p^2\ell^3}{20.g.F} = \frac{p^2\ell^5}{120EJ_y}\left(1 + \frac{p^2\ell^3}{20.gF} \cdot \frac{240EJ_y}{p^2\ell^5}\right)$$

Tā kā $g = \frac{3}{8}E$, $F = bh$, $J_y = \frac{bh^3}{12}$, tad beidzot k.d $= \frac{p^2\ell^5}{120EJ_y}\left(1 + \frac{p^2\ell^3\, 240 b.h^3}{20.\frac{3}{8}E.b.h\,p^2\ell^5\, 12}\right) =$

$= \frac{p^2\ell^5}{240EJ_y}\left\{1 + \frac{8}{3}\left(\frac{h}{\ell}\right)^2\right\}$ no kā ir redzams, kā Dc samērā ar lieces deformācijas darbu De ir niecīgs un viņu var atmest, ja sījas garums samērā ar viņas augstumu ir kaut cik ievērojams (kā tas parasti mēdz būt). Ne tikai vienmērīgas noslodzes gadījumā, bet arī vispārīgi Dc ir ļoti niecīgs, tāpēc viņu arī uz priekšu visos aplēses gadījumos atmetīsim. Pastrīposim, kā iepriekšējā teksta rezultāti attiecās: 1) tikai uz materiāliem, kuru elastīgās īpašības seko Hooke'a likumam un 2) uz gadījumiem, kad, attiecībā uz spēku iedarbi, var pieņemt superpozicijas principu, pie kam ar superpozicijas principu jāsaprot: Ja uz ķermeni darbojās vairāki spēku veidi vienā laikā (piem. spiede un stiepe,liece savienota ar bīdi un t.t.) tad kairs no šiem darbības veidiem izsauc tos pašus mechaniskos elementus (spraigumu,izlieci, deformācijas darbu) kā gadījumā,kad uz ķermeni darbojās katrs no šiem veidiem atsevišķi,bez otra veida līdzdarbības,pie kam gala rezultātu dabūsim,algebriski summējot atsevišķo spēku veidu iedarbības rezultātus.

Piemērs,kur superpozicijas principu nevar piemērot (sk.zīm.8).Šai gadījumā superpozicijas princips nav piemērojams, jo spiede še ir savienota ar izlieci.Ja šķērspēka P nebūtu,tad pie rūpīgas spēku S centrēšanas,tie izsauktu tikai spiedi. Bet kopā,vienā laikā, ar P spēki S izsauc arī lieci.



Zīm. 8

Trīs momentu(Bertol-Clapeyron) teorēma.

I Trīs momentu nolīdzinājuma uziešana.

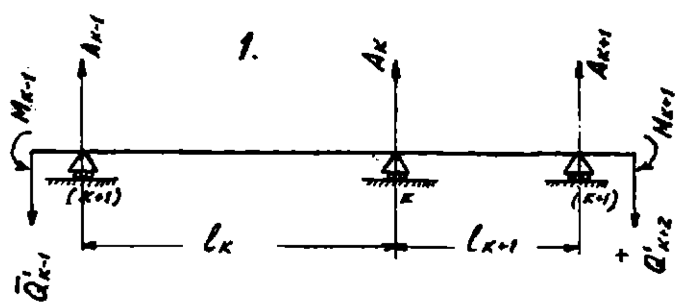
Šo teorēmu var sevišķi ērti izvest,balstoties uz Castigliano teorēmu,kā deformācijas darba A parcielu atvasinātie pēc statiski nenoteiktām liekšējām reakcījām ir 0 (sk.A.Vītola: Eine Verallgemeinerung etc papildinājumu zīmulī lap.p.343).

Ņemsim vērā nepārtrauktu sīju,kas brīvi atbalstīta ($n+1$) punktos (alb.punktu numerācija ietver sevī sukcesīvus skaitļus no 0 līdz n)Ja sīja ir noslodzīta tikai ar vertikāliem spēkiem,tad viens no 3 statikas nolīdzinājumiem,proti spēku projekcīju nolīdzinājums uz X - asi,kas sakrīt ar sījas centrālo asi,iegūst veidu 0 = 0 (identitāte),un paliek tikai 2 nolīdzinājumi,kurus var izlietot reakcīju noteikšanai.

Tā kā nezinamu reakcīju skaits ir ($n+1$) tad stat.ne noteiktu reakcīju paliek ($n+1$) - 2 = (n - 1).Ja n ir kaut cik ievērojams,tad paņēmiens,kas balstās uz sījas liektas ass īpašībām,kā arī minimuma deformācijas darba principa, resp.Castigliano teorēmas tieša pielietošana,paliek neērta daudzo nolīdzinājumu dēl,kurus jāatrisina simultani (kopā).

Stipri min.operācijas atvieglo trīs momentu teorēma.Izgriezīsim sījas gabalu ar 3 sukusiviem atb.punktiem: (k - 1), k un (k + 1).Šādu sījas sašķelšanu var izdarīt tikai pieliekot nošķeltos galos attiecīgus momentus un

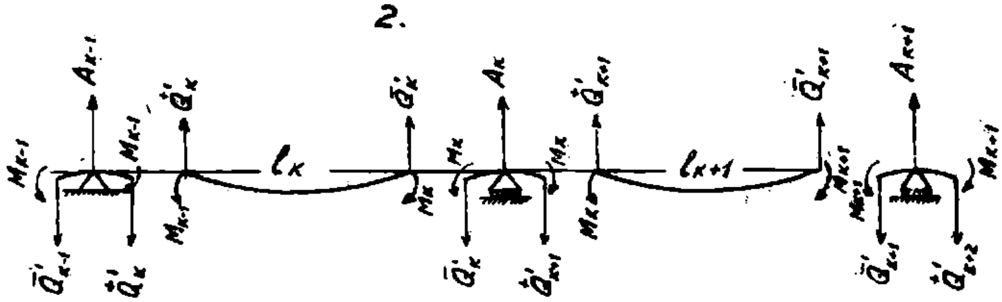
1.



šķērsspēkus Q,kurus atšķirsim divejādi: pirmkārt ar indeksiem (k-1) un (k + 2),ar kuriem atšķirsim sījas posmus,un otrkārt - ar zīmēm + un - virs spēka apzīmējuma,pie kam simbols $\bar{Q}'$ apzīmē posma l_{k-1} šķērsspēku,kas atrodās pa kreisi no atb.p. (k-1),bet $\overset{+}{Q}'_{k+2}$ - šķērsspēku,kas atrodās pa labi no atb.p.(k+1)

Tālāk sašķelsim sīju vēl sīkākos gabalos,izdalot katru no 3 atbalstu punktiem atsevišķi un izdalot abus posmus l_k un l_{k+1} garumā.(sk.skici).

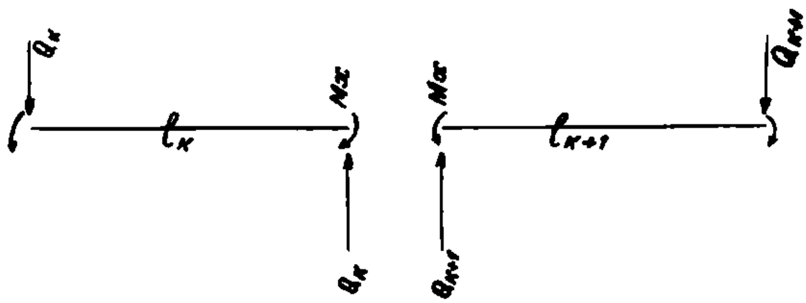
2.



Še A_{k-1}, A_k un A_{k+1} apzīmē meklējamās atbalsta reakcijas.Katrā atb. punktā pieliktie no abām pusēm momenti ir vienādi,bet pretēji virzīti,jo tiem jālīdzsvarójās,tāpat jālīdzsvarojās vertikāliem spēkiem,kuru starpā ir meklējamas atb.reakcījas. Sījas posmi ir noslodzīti ar ārējiem spēkiem.

Uzrakstīsim tālāk posma l_k vienu no līdzsvara noteikumiem,ņemot p.piem.momentus pret posma kreiso galu un pielīdzinājot to *summu* 0.

$M_K - \bar{Q}' \ell_K + \mathfrak{M}^K_{K-1} - M_{K-1} = 0$ (1) kur ar $\mathfrak{M}^K_{K-1}$ ir apzīmēts ārējo posma ℓ_K spēku moments pret atb.p.(k-1).Pielīdzināsim $\bar{Q}'_K = Q_K + B^\circ_K$ (1^{bis}) tad uzrakstītais līdzsvara nolīdzinājums (1) gūst veidu: $M_K - Q_K \ell_K - B^\circ_K \ell_K + \mathfrak{M}^K_{K-1} - M_{K-1} = 0$ B°_K izvēlēsim tā lai būtu $\mathfrak{M}^K_{K-1} - B^\circ_K \ell_K = 0$, kas nozīmē kā B°_K ir brīvi atbalstītas sījas ℓ_K ar 2 atb.punktiem - un tā tad statiski noteiktas atb.šķērsspēks.Pēc šādas vienošanas nol.(1) pāriet:
$M_K \quad Q_K \ell_K - M_{K-1} = 0$ (2),kur Q_K tagad nozīmē sījas ℓ_K šķērsspēku,kuru izsauc vienīgi momenti M_{K-1} un M_K ,bez posma noslodzījuma ar ārējiem spēkiem.Sakarā ar šo konstatējumu posmu ℓ_K un ℓ_{K+1} noslodzes šēma ir sekojoša (sk.nākamo skici)



Šķērsspēki Q_K un Q_{K+1} veido pārus tadēļ kā vertikālo spēku projekcījai,kurai jābūt 0,sastāv tikai no 2 spēkiem jo posmā ārējo spēku nav.Attiecībā uz sījas daļu starp atb.p. k-1 un k+1 (saskaņā ar sk.1) moments M_K ir iekšējais,kadēļ saskaņā ar Castigliāno teorēmu:

$$\frac{\partial A}{\partial M_K} = \frac{1}{2EJ} \frac{\partial}{\partial M_K}\left[\int^{\ell_K} M^2\,dx + \int^{\ell_{K+1}} M^2\,dx\right] = \frac{1}{2EJ}\left[\int M \frac{\partial M}{\partial M_K}\,dx + \int_0^{\ell_{K+1}} M \frac{\partial M}{\partial M_K}\,dx\right] = 0$$

$$\int_0^{\ell_K} M \frac{\partial M}{\partial M_K}\,dx + \int_0^{\ell_{K+1}} M \frac{\partial M}{\partial M_K}\,dx = 0.$$

Posmam ℓ_K $M = M^\circ_x - Q_K x - M_{K-1}$ (1) kur M°_x ir brīvas sījas ārējo spēku lieces moments pret atb.p.(k-1).Bez tam ir līdzsvara nolīdzinājums: $M_K - Q_K \ell_K - M_{K-1} = 0$ (2) $\frac{\partial M}{\partial M_K} = \frac{x \partial Q_K}{\partial M_K}, \frac{\partial}{\partial M_K}\left(M_K - Q_K \ell_K - M_{K-1}\right) = 1 - \frac{\partial Q_K}{\partial M_K} \ell_K = 0$, $x - x\frac{\partial Q_K}{\partial M_K} \ell_K = 0$; $x\frac{\partial Q_K}{\partial M_K} = -\frac{x}{\ell_K}$ un tadēļ

$$\int_0^{\ell_K} M \frac{\partial M}{\partial M_K}\,dx = \frac{-1}{\ell_K}\int_0^{\ell_K}\left(M^\circ_x - Q_K x - M_{K-1}\right) x\,dx = \frac{-1}{\ell_K}\left[\Omega_K a_K - \frac{Q_K \ell_K^3}{3} - \frac{M_{K-1}\ell_K^2}{2}\right] =$$

$$= \left[-\frac{\Omega_K a_K}{\ell_K} + \frac{Q_K \ell_K^2}{3} + \frac{M_{K-1}\ell_K}{2}\right] = \frac{1}{6}\left[\frac{-6\Omega_K a_K}{\ell_K} + 2 Q_K \ell_K^2 + 3 M_{K-1}\ell_K\right]$$

Tā kā no (2) seko,ka $2Q_K \ell_K = 2(M_K - M_{K-1})$,tad $\int_0^{\ell_K} M \frac{\partial M}{\partial M_K}\,dx =$

$$= \frac{1}{6}\left[-\frac{6\Omega_K a_K}{\ell_K} + 2(M_K - M_{K-1})\ell_K + 3 M_{K-1}\ell_K\right] = \frac{1}{6}\left[\frac{6\Omega_K a_K}{\ell_K} + 2 M_K \ell_K + M_{K-1}\ell_K\right] \quad (3)$$

Še apzīmē $\Omega_k a_k = \int_0^{l_k} M_x^{\circ} x dx = \int_0^{l_k} x(M_x^{\circ} dx)$ = ārējo spēku momentu laukuma statisko momemntu pret atb.p.(k-1), kur a_k ir šī laukuma smag. centra koordināte. Uziesim tālāk $\int_0^{l_{k+1}} M \frac{\partial M}{\partial M_k} dx$ Šinī nolūkā sastādīsim posma l_{k+1} momentu pret atb.p.(k+1), lai iegūtu vienkāršāku izteiksmi, pie kam attiecībā uz zīmēm ņemsim vērā, kā sastādot momentus no labās puses par pozitīviem skaitīsim momentus, kas griež pretēji pulksteņa rādītāja kustības virzienā, jo sakars starp kreisās un labās puses momentiem ir:

$M_{kr} + M_{kl} = 0, M_{kr} = - M_{kl}$ Tā tad $M = M_{x_1}^{\circ} - M_{k+1} Q_{k+1} x_1$ (II)

un $M_k - M_{k+1} - Q_{k+1} l_{k+1} = 0$ (4) $\frac{\partial M}{\partial M_k} = -x_1 \frac{\partial Q_{k+1}}{\partial M_k}$,

$$\frac{\partial}{\partial M_k}(M_k - M_{k+1} - Q_{k+1} l_{k+1}) = 1 - l_{k+1}\frac{\partial Q_{k+1}}{\partial M_k} = 0, \quad \frac{x_1}{l_{k+1}} - x_1\frac{\partial Q_{k+1}}{\partial M_k} = 0$$

$$-x_1 \frac{\partial Q_{k+1}}{\partial M_k} = \frac{-x_1}{l_{k+1}}, \quad -\frac{1}{l_{k+1}}\int_0^{l_{k+1}}\left(M_{x_1}^{\circ} - M_{k+1} - Q_{k+1} x_1\right) x_1 dx_1 =$$

$$-\frac{1}{l_{k+1}}\left[\Omega_{k+1} \cdot l_{k+1} - \frac{M_{k+1} l_{k+1}^2}{2} - \frac{Q_{k+1} l_{k+1}^3}{3}\right]\frac{1}{6}\left[\frac{6\Omega_{k+1} b_{k+1}}{l_{k+1}} + 3 M_{k+1} l_{k+1} + 2 Q_{k+1} l_{k+1}^2\right].$$

Ta kā no (4) $2Q_{k+1} l_{k+1} = 2(M_k - M_{k-1})$, tad $\int_0^{l_{k+1}} M \frac{\partial M}{\partial M_1} dx_1 =$

$$\frac{1}{6}\left[\frac{6\Omega_{k+1} b_{k+1}}{l_{k+1}} + 3 M_{k+1} l_{k+1} + 2(M_k - M_{k-1}) l_{k+1}\right] = \frac{1}{6}\left[-\frac{6\Omega_{k+1} b_{k+1}}{l_{k+1}} + M_{k+1} l_{k+1} + 2M_k l_{k+1}\right] \quad (5)$$

kur $\Omega_{k+1} b_{k+1} = \int_0^{l_{k+1}} M_{x_1}^{\circ} x dx = \int_0^{l_{k+1}} M_{x_1}^{\circ} dx_1 . x$ = ārējo spēku momenta laukkuma stat. moments pret atb,p.(k+1) ar smag. centra koordināti b_{k+1}.

Tā kā $\frac{\partial A}{\partial M_k} = \frac{1}{2EJ}\left[\int_0^{l_k} M \frac{\partial M}{\partial M_1} dx + \int_0^{l_{k+1}} M \frac{\partial M}{\partial M_k} dx\right] = 0$, tad

$$-6\frac{\Omega_k a_k}{l_k} - \frac{6\Omega_{k+1} b_{k+1}}{l_{k+1}} + M_{k-1} l_k + 2M_k(l_k + l_{k+1}) + M_{k+1} l_{k+1} = 0 \quad (6)$$

(trīs momentu nolīdzinājums) ar kuru palīdzību pakāpeniski var uziet visus atbalsta momentus.

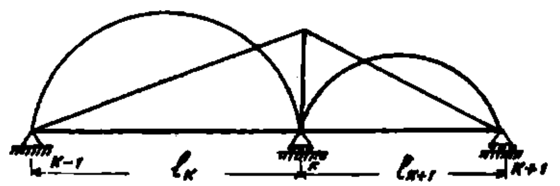
II Atbalsta k reakcījas A_k uziešana.

Kad momenti ar nolīdzinājuma (6) palīdzību ir uzieti, tad reakcīju A_k var usiet vienkārši šādā ceļā, bez Schwedlera teorēmas $Q = \frac{dM}{dx}$ pielietošanas. Šinī nolūkā apskatīsim izdalītā atsevišķi atbalsta (k) līdzsvara noteikumus. Saskaņā ar skici 2 varam uzrakstīt: $\overset{\uparrow}{A}_k + \overset{\downarrow}{\bar{Q}}'_k + \overset{\downarrow}{Q}'_{k+1} = 0$. Še simboliem A_k, $\bar{Q}'_k$ un $\overset{\downarrow}{Q}'_{k+1}$ tagad ir pievienptas šautriņas $\downarrow$, lai apzīmētu attiecīgu vektoru virzienus (sk.sk.2) No nolīdzinājuma $\overset{\uparrow}{A}_k + \overset{\downarrow}{\bar{Q}}'_k + \overset{\downarrow}{Q}'_{k+1} = 0$ seko, kā $\overset{\uparrow}{A}_k - \overset{\downarrow}{\bar{Q}}'_k - \overset{\downarrow}{Q}'_{k+1} = \overset{\uparrow}{\bar{Q}}'_k + \overset{\uparrow}{Q}'_{k+1}$, jo abos šķēlieņos, pa labi un pa kreisi no atb.p.k, jāpastāv sakarībām:

$\overset{\downarrow}{\bar{Q}}'_k + \overset{\uparrow}{\bar{Q}}'_k = 0$, $\overset{\downarrow}{Q}'_{k+1} + \overset{\uparrow}{Q}'_{k+1} = 0$. Bet $\bar{Q}'_k = Q_k + B_k^{\circ}$ (sk.nol. (1^{bis}). Saskaņā

ar sk.2 un 3 attiecīgu vektoru virzienu ir↑, kadēļ $\overset{\uparrow}{Q}'_K = \overset{\uparrow}{Q}_{K_{t_0}} + \overset{\uparrow}{B}^\circ_K$. Tāpat $\overset{\uparrow}{Q}_{K+1} = \overset{\uparrow}{Q}_{K+1} + \overset{\uparrow}{A}^\circ_{K+1}$ un tādēl:
$\overset{\uparrow}{A}_K = (\overset{\uparrow}{B}^\circ_K \ \overset{\uparrow}{A}^\circ_{K+1}) + \overset{\uparrow}{Q}_K + \overset{\uparrow}{Q}_{K+1}$. Tā kā šo vektoru virzieni sakrīt ar to vektoru virzieniem, kas ietilpst tekstā ievestos nolīdzinājumos, tad simbolus↑ uz priekšu atmetot, rakstam $A_K = (B^\circ_K + A_{K+1}) + (Q_K + Q_{K+1})$. Pe B°_K apzīmē posma ℓ_K labā atb.p., bet A°_{K+1} posma ℓ_{K+1} kreisā atb.p.reakcījas.

Piemēri.



Sīja noslodzīta ar vienmērīgu slodzi $q \frac{kg}{m\ell}$. Uziet reakcīju A_K.
Tā kā $M_{K-1} = M_{K+1} = 0$, tad (6) noved pie $M_K = 3\left[\left(\frac{\Omega_K a_K}{\ell_K} + \frac{\Omega_{K+1} b_{K+1}}{\ell_{K+1}}\right)\right] \frac{1}{\ell_K + \ell_{K+1}}$ Bet $\Omega_K a_K = \frac{2}{3} \cdot \frac{q\ell_K^2 \ell_K \ell_K}{8 \cdot \ell_K \cdot 2} = \frac{q\ell_K^3}{24}$ un

$M_K = \frac{9}{8}(\ell_K^3 + \ell_{K+1}^3) \cdot \frac{1}{(\ell_K + \ell_{K+1})}$ Bet saskaņā ar (2) un (4)

$Q_K = \frac{M_K}{\ell_K}$ un $Q_{K+1} = \frac{M_K}{\ell_{K+1}}$, kadēl $Q_K + Q_{K+1} = M_K\left(\frac{1}{\ell_K} + \frac{1}{\ell_{K+1}}\right) = M_K\left(\frac{\ell_K + \ell_{K+1}}{\ell_K \ell_{K+1}}\right) =$

$= \frac{9}{8}(\ell_K^3 + \ell_{K+1}^3)\frac{(\ell_K + \ell_{K+1})}{(\ell_K + \ell_{K+1})\ell_K \ell_{K+1}} = \frac{9}{8}\left(\frac{\ell_K^3 + \ell_{K+1}^3}{\ell_K \ell_{K+1}}\right)$ $B^\circ_K + A^\circ_K =$

$\frac{9}{2}(\ell_K + \ell_{K+1})$ un tādēļ $A_K = \frac{9}{8}\left(\frac{\ell_K^3 + \ell_{K+1}^3}{\ell_K \ell_{K+1}}\right) + \frac{9}{2}(\ell_K + \ell_{K+1}) =$

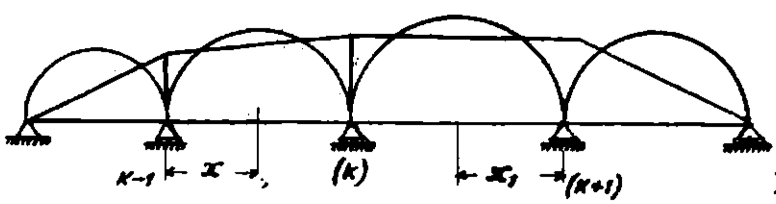
$= \frac{9}{8\ell_K \ell_{K+1}}\left[\ell_K^3 + \ell_{K+1}^3 + 4\ell_K^2 \ell_{K+1} + 4\ell_{K+1}^2 \ell_K\right]$ Ja $\ell_K = \ell_{K+1} = \ell$, tad

$A_K = \frac{q}{8\ell^2}(2\ell^3 + 4\ell^3 + 4\ell^3) = q\frac{\ell 5}{4} = 1{,}25\, q\ell$

Teorēma par 2 momentiem.

(Maurice Levy teorēma)

Kad atbalsta punktu skaits pieaug, tad teorēmas par 3 momentiem pielietošana arī paliek neērta, jo katrā nolīdzinājumā ietilpst 3 momentu izteiksmes M_{K-1}, M_K un M_{K+1}. Maurice Levy



ir atradis paņēmienu reducēt uzdevuma atrisinājuma pie 2 nolīdzinājumu sistēmas, pie kam katru reizi ir jāatrisina tikai 2 nolīdzinājumi, kuri katrs satur tikai pa vienam nezināmam.

Kā redzams šī teorēma sniedz sevišķi ērtu paņēmienu statiski nenoteiktu sīju reakcīju uziešanai. Lévy teorēma balstas uz sekojošiem apsvērumiem. Pārrakstīsim p. piem. nolīdzinājumu (I) posmam $\ell^{\kappa}_{\kappa-1}$ (Sk. 3 momentu teorēmas tekstu) $M = M^{\bullet}_{x} - Q_{\kappa}x - M_{\kappa-1}$ (I)
Šo nolīdzinājumu pārrakstīsim tā: $(M_x - M^{\bullet}_x) = -Q_{\kappa}x - M_{\kappa-1}$ (I)
piešķirot M indeksu x, lai pastrīpotu, kā ar šo simbolu ir domāts moments šķēlienā x atstatumā no atb.p.(k-1). Pievienojot nolīdzinājumam nolīdzinājumu(2) $M_{\kappa} - Q_{\kappa}\ell_{\kappa} - M_{\kappa-1} = 0$ (2) iegūstam:
$-Q_{\kappa}x = (M_{\kappa-1} - M_{\kappa})\frac{x}{\ell_{\kappa}}$ un $(M_x - M^{\bullet}_x)^{\kappa}_{\kappa-1} = -Q_{\kappa}x - M_{\kappa-1} = (M_{\kappa-1} - M_{\kappa})\frac{x}{\ell_{\kappa}} - M_{\kappa-1} =$
$M_{\kappa-1}\left(\frac{x}{\ell_{\kappa}} - 1\right) - M_{\kappa}\frac{x}{\ell_{\kappa}}$ (I^{bis}) No šīs izteiksmes ir redzams, apzīmējot ar simbolu $(\;)^{\kappa}_{\kappa-1}$ attiecīgu posmu, kā $(M_x - M^{\bullet}_x)$ ir lineāra funkcija, kuru grafiski attēlo taisne. Konstatējuši šo, sapratīsim, kā katri 2 šīs taisnes punkti katrā posmā pilnīgi noteiks momenta $(M_x - M^{\bullet}_x)$ taisni. No (I^{bis}) uziesim:

$$M_{k-1} = \left[\left(M_x - M^{\bullet}_x\right)^{\kappa}_{\kappa-1} + M_k\frac{x}{\ell_{\kappa}}\right]\frac{\ell_{\kappa}}{x - \ell_{\kappa}}$$

Posmam $\ell^{\kappa+1}_{\kappa}$ var uzrakstīt: (sk. nolīdz. II):
$(M_x - M^{\bullet}_{x_1})^{\kappa+1}_{\kappa} = -Q_{\kappa+1}x_1 - M_{\kappa+1}$. Bet, ņemot vērā nol.(4) varam uzrakstīt: $-Q_{\kappa+1}x_1 = (M_{\kappa+1} - M_{\kappa})\frac{x_1}{\ell_{\kappa+1}}$,
$(M_{x_1} - M^{\bullet}_{x_1})^{\kappa+1}_{\kappa} = (M_{\kappa+1} - M_{\kappa})\frac{x_1}{\ell_{\kappa+1}} - M_{\kappa+1}$, no kurienes:
$(M_{x_1} - M^{\bullet}_{x_1})^{\kappa+1}_{\kappa} = M_{\kappa+1}\left(\frac{x_1}{\ell_{\kappa+1}} - 1\right) - M_{\kappa}\frac{x_1}{\ell_{\kappa+1}}$, no kurienes:
$M_{\kappa+1} = \left[(M_{x_1} - M^{\bullet}_{x_1})^{\kappa+1}_{\kappa} + M_{\kappa}\frac{x_1}{\ell_{\kappa+1}}\right]\frac{\ell_{\kappa+1}}{x_1 - \ell_{\kappa+1}}$, kur x_1 ir šķēliena atstatums no atb.p. (k+1) uz kreiso pusi (sk. skici). Tālāk ņemsim vērā nolīdzinājumu (6) kuru provizoriski liksim $\frac{6\Omega_{\kappa}a_{\kappa}}{\ell_{\kappa}} + \frac{6\Omega_{\kappa+1}b_{\kappa+1}}{\ell_{\kappa+1}} = C^{\kappa+1}_{\kappa-1}$ un no kura izslēgsim $M_{\kappa-1}$ un $M_{\kappa+1}$. Tad iegūsim:

$$\left[(M_x - M^{\bullet}_x)^{\kappa}_{\kappa-1} + M_{\kappa}\frac{x}{\ell_{\kappa}}\right]\frac{\ell^2_{\kappa}}{x-\ell_{\kappa}} + \left[(M_{x_1} - M^{\bullet}_{x_1})^{\kappa+1}_{\kappa} + M_{\kappa}\frac{x_1}{\ell_{\kappa+1}}\right]\frac{\ell^2_{\kappa+1}}{x_1 - \ell_{\kappa+1}} =$$

$$= (M_x - M^{\bullet}_x)^{\kappa}_{\kappa-1}\frac{\ell^2_{\kappa}}{x-\ell_{\kappa}} + (M_{x_1} - M^{\bullet}_{x_1})^{\kappa+1}_{\kappa}\frac{\ell^2_{\kappa+1}}{x_1-\ell_{\kappa+1}} + M_{\kappa}\left[\frac{x\,\ell_{\kappa}}{x-\ell_{\kappa}} + \frac{x_1\,\ell_{\kappa+1}}{x_1-\ell_{\kappa+1}}\right] = C^{\kappa+1}_{\kappa-1} \qquad (7)$$

Šinī nolīdzinājumā saistīsim x un x_1 tā, lai koeficients pie M_{κ}, $\frac{x\,\ell_{\kappa}}{x-\ell_{\kappa}} + \frac{x\,\ell_{\kappa+1}}{x_1-\ell_{\kappa+1}} = 0$ (8). Līsz ar šo (7) pārvēršas par
$(M_x - M^{\bullet}_x)^{\kappa}_{\kappa-1}\frac{\ell^2_{\kappa}}{x-\ell_{\kappa}} + (M_{x_1} - M^{\bullet}_{x_1})^{\kappa+1}_{\kappa}\frac{\ell^2_{\kappa+1}}{x_1-\ell_{\kappa+1}} = 0.$ (9). (8) un (9) nu ir to divu nolīdzinājumu sistēma, kuras katrs satur pa vienam nezinamam. Patiesi, izejot no šķēliena x, kurā $(M_x - M^{\bullet}_x)$ ir zinams, ar (8) palīdzību uzmeklēsim x_1, kuru ievietojot (9), dabūsim $(M_{x_1} - M^{\bullet}_{x_1})$ līdz ar ko nākamā posmā būs zinams šķēliens x_1 ar zinamu momentu $(M_{x_1} - M^{\bullet}_{x_1})^{\kappa+1}_{\kappa}$. Pieņemot pēdejas vērtības,

kā izejas vērtības, iegūsim attiecīga šķēliena absusu līdz ar momentu nākamā posmā, līdz kamēr nonāksim līdz beidzamam posmam, kurā būs atkal zinams viens moments $(M_{x_1} - M^o_{x_1})^n_{x_1=0} = 0$, pie brīviem sījas galiem, tā kā beidzamā posmā izrādīsies divi zinami momenti, viens aprēķinātais un otrs jau iepriekš zinamais, līdz ar ko būs iespēja novilkt šinī posmā $(M_x - M^o_x)^n_{n-1}$ taisni līdz atb.p.(n-1). Tā kā posmā ℓ^{n-1}_{n-2} ir jau zinams viens momenta punkts, tad velkot taisni caur pēdējo un $(M_{x_1} - M^o_{x_1})_{x_1=\ell}$ yirs atb. p. (n-1) dabūsim momentu taisni posmā ℓ^{n-1}_{n-2} u.t.t. līdz kamēr nonāksim līdz sījas kreisā gala ar momentu taisnēm, līdz ar ko uzdevums ir atrisināts.

Gareniskā liece.

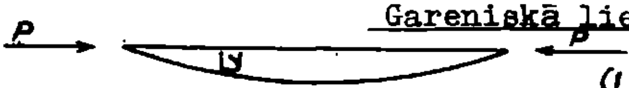
Dažas piezīmes.

(neobligatoriski).

$y = B \sin\alpha x, 0 = B \sin\alpha\ell$,

α pieaug no 0, tādēl pašā sākumā $(\sin\alpha\ell)_{t=0} = 0$ un $(B \sin\alpha\ell)_{t=0} = 0$ būtu tādā gadījumā apmierināts ari pi $B \neq 0$ tā tad identitāte. Tā kā $0 = B \sin\alpha\ell$ ari tālāk, kad $\alpha \neq 0$ un $\sin\alpha\ell \neq 0$, tad jābūt $B = 0$ un tādēl $y = B \sin\alpha x = 0$, kamēr $\sin\alpha\ell \neq 0$, t.i. sījas ass piepatur savu pirmātnēju formu taisnes veidā līdz $\sin\alpha\ell = 0$ jeb robežās $0 \leqq \alpha < \frac{\pi}{\ell}$ Kad $\alpha = \frac{\pi}{\ell}$, $\sin\alpha\ell = 0$, $B \sin\alpha\ell = 0$, kas nozīmē, kā B var pieņomt ari nozīmi $B \neq 0$, neskaitot $B = 0$, kas nozīmē kā pie $\alpha\ell = \pi$ forma $y = 0$ paliek labila, spējiga pāriet formā $y = B \sin\alpha x = B \sin\alpha\frac{x}{\ell} = f_0 \sin\alpha\frac{x}{\ell} \neq 0$ Kad tāda pāreja ir notikusi, <u>tad nav iespējams tālāk palielināt $\alpha = \frac{\pi}{\ell}$</u>, jo citādi vairs nebūtu iespējams apmierināt $B \sin\alpha\ell = 0$. Ari eksperiments apstiprina šo faktu. Kā līdz $\alpha = \frac{\pi}{\ell}$ forma $y = 0$ ir stabila, pierāda 109 lap.p.piemērs: $B\alpha \cos\frac{\alpha\ell}{2} + \frac{Q}{2P} = 0$, kas nozīmē, kā α nevar sasniegt nozīmi $\alpha = \frac{\pi}{\ell}$ un kā $\cos\frac{\alpha\ell}{2} \neq 0$. Ja nusīju atbrīvo no Q, tad šis nolīdzinājums ir apmierināts pie $B = 0$, kam atbilst y ($U \sin\alpha x$) $= 0$, t.i. $y = 0$ ir stabila forma. Ja pie $\alpha = \frac{\pi}{\ell}$ izdodas ieturēt $B = 0$, $y = 0$ tālāki, tad ir iespējams P tālāk palielināt un sasniegt nākamo $P_{kr_1} = 4\frac{EJ\pi^2}{\ell^2}$ un t.t.

Gareniskā liece.



$EJy = - Py$ (1)

$EJy'' + Py = 0, y'' + \frac{P}{EJ}y = y'' + \alpha^2 y = 0$, kur $\alpha = \sqrt{\frac{P}{EJ}}$. .Meklēsim nol. (1) partikulāro integrālu zem veida: $y = e^{ax}$ tad $y'' = a^2 e^{ax}$, un $y'' + \alpha^2 y = a^2 e^{ax} + \alpha^2 e^{ax} = e^{ax}(a^2 + \alpha^2) = 0$, no kurienes seko:

A) $e^{ax} = 0$, $x \to -\infty$, jo a ir galējs lielums.

B) $a = \pm i\alpha$.

Atrisinājumam $x \to -\infty$ nav nekādas praktiskas nozīmes, paliek tā tad $a = \pm i\alpha$, un $y = e^{\pm i\alpha x}$. Vispārejais integrāls sakarā ar šo rezultātu ir $y = A_1 e^{i\alpha x} + A_2 e^{-i\alpha x}$. Bet:

$$e^{i\alpha x} = \cos\alpha x + i\sin\alpha x ,$$

$$e^{-i\alpha x} = \cos\alpha x - i\sin\alpha x ,$$

un $y = A_1(\cos\alpha x + i\sin\alpha x) + A_2(\cos\alpha x - i\sin\alpha x) = (A_1 + A_2)\cos\alpha x + i(A_1 - A_2)\sin\alpha x$, kur A_1 un A_2 ir kaut kādi skaitļi, reāli jeb imaginārī.

Pieņemsim A_1 un A_2, kā divus imaginārus sajūgtus skaitļus: $A_1 = a + bi$

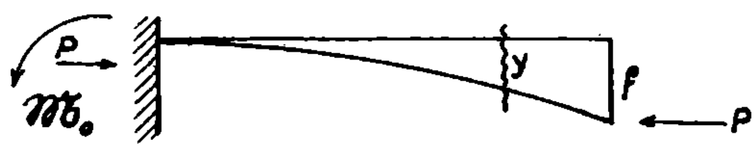
$A_2 = a - bi$

Tad: $A_1 + A_2 = 2a$, un $A_1 - A_2 = 2bi$ un : $y = (A_1 + A_2)\cos\alpha x + i(A_1 - A_2) = 2a\cos\alpha x - 2b\sin\alpha x = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x$. Tā tad nolīdzinājuma (1) integrāls ir: $y = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x$ (2) $(y)_{x=0} = 0 = A$ un paliek: $y = B\sin\alpha x$ (3). Tālāk robežapstākļi noved pie $(y)_{x=\ell} = B\sin\alpha x\ell = 0$ (4). Beidzamā prasība tiek pildīta, ja: 1) $B = 0$, pie kam $\sin\alpha\ell$ var pieņemt kaut kuru iespējamo nozīmi, arī $\sin\alpha\ell = 0$. Bet ja $B = 0$, tad $(y)_{B=0} = 0$ un izlieces nav. Tas nozīmē, ka robežās $0 \leq \alpha\ell \leq \pi$, $0 \leq \alpha^2 = \frac{P}{EJ} \leq \frac{\pi^2}{\ell^2}$, jo $y = (B\sin\alpha x) = 0$ $B = o$
$0 \leq P \leq \frac{\pi^2}{\ell^2}$ EJ izliece nevar rasties. Bet prasība (4) ir arī pildīta, ja 2) $\sin\alpha\ell = 0$, $B =$ kaut kāds lielums, tanī starpā arī $B = 0$. $\sin\alpha\ell = 0$ atbilst divas tuvākās nozīmes $\alpha = 0$ un $\alpha = \frac{\pi}{\ell}$.
Tā tad, kad $\alpha = \frac{\pi}{\ell}$, $P = \frac{\pi^2}{\ell^2} EJ$ var būt $y = 0$, bet var rasties arī: $y \neq$ (o(odze) jo, kā aizrādīts, B var pieņemt kaut kuru nozīmi. Tā tad tagad, šinī stadījā jāatvieto pirmo slēdzienu "izliece nevar rasties ar "izliece var rasties", kas nozīmē, ka tad, kad

P sasniedz $P = \frac{\pi^2}{\ell^2}EJ$,rodas instabils (labils) līdzsvara stāvoklis. Šo P nozīmi sauksim par kritisko nozīmi un apzīmēsum viņu ar $P_{kr} = \frac{\pi^2}{\ell^2}EJ$.Nu ir saprotams,kā nākamiem atrisinājumiem $\alpha\ell = 2\pi$ un vispār $\alpha\ell = 2\pi \cdot n$ nevar piešķirt nekādu praktisku nozīmi,jo no $\alpha\ell = \pi$ sākas labils līdzsvara stāvoklis.

Tā tad,vienkārši analizējot noteikumu $B\sin\alpha\ell = 0$,mēs varam nonākt pie nupat iegūtā slēdziena:"Kad P sasniedz savu kritisko nozīmi,var vēl pastāvēt $y = 0$,bet var arī rasties $y = B\sin\alpha x$ ar kādu nenoteiktu B - nenoteiktu - jo nav mūsu rīcībā vairs nekādu līdzekļu B noteikšanai.Apskatīsim,kāda ir B fizikālā nozīme.Tā kā $\alpha = \frac{\pi}{\ell}$,tad $y = B\sin\alpha x = B\sin\frac{\pi x}{\ell}$, no kurienes seko $(y)_{x=\ell/2} = B = f_0$,kur f_0 ir nokare sījas vidū, kādēļ: $y = f_0 \sin\frac{\pi x}{\ell}$,liektās ass nolīdzinājums.Kad sījas ass pie $P = P_{kr}$ ir izliekusies,tad sabrukums ir iespējams,jo B resp. f_0 var pieņemt kuru katru nozīmi,arī tādu,pie kuras radušies spraigumi pārkāpj σ_{adm} .Tiklīdz P ir sasniedzis savu P_{kr} nozīmi un izliece līdz ar $B \neq 0$ ir radusies,nav iespējams P nozīmi tālāk palielināt,jo tad $\sin\alpha\ell$ atkal sāktu atšķirties no 0,un noteikums $(y)_{x=\ell} = B\sin\alpha\ell = 0$ netiktu vairs pildīts.

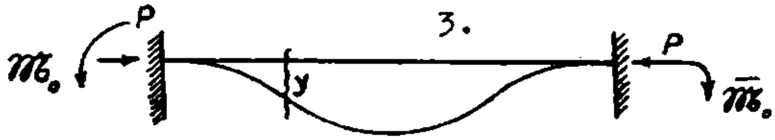
2.



Apzīmēsim ar f sījas gala nokares absolūto vērtību, tad M_{II} (labās puses moments) $= P(f + y)$,kur y ir algebrisks lielums.Bet $M_I + M_{II} = 0$,kur M_I ir kreisās puses moments,kādēļ $M_I = M_{II} = P(y+f)$ un $EJy'' = -P(y+f)$,$EJy'' + P(y+f) = 0$, $y'' + \alpha^2(y+f) = 0$.Liekot $y + f = u$,iegūstam $u'' + \alpha^2 u = 0$,no kurienes $u = y + f = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x$. $y = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x - f$; $(y)_{x=0} = 0 = A - f = 0, A = f$ un $y = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x - f = f(\cos\alpha x - 1) + B\sin\alpha x. y' = -\alpha f\sin\alpha x + B\alpha\cos\alpha x, (y')_{x=0} = 0 = B\alpha$,

no kurienes $B = 0$ jeb $\alpha = 0$, $\alpha = 0$ nav nekādas nozīmes,kādēļ $B = 0$ un $y = f(\cos\alpha x - 1)$;$(y)_{x=\ell} = -f = f(\cos\alpha\ell - 1) = f\cos\alpha\ell - f$; $f\cos\alpha\ell = 0$.Kamēr $f = 0$,tikmēr izliece vēl nav iesākusies.Kad $\cos\alpha\ell = 0$, $\alpha\ell = \frac{\pi}{2}$, $\alpha^2 = \frac{\pi^2}{4\ell^2} = \frac{P_{kr}}{EJ}$, $P_{kr} = \frac{\pi^2}{4\ell^2} EJ$,tad $(y)_{x=\ell} = -f$,kas var sasniegt kaut kuru nozīmi,kādēļ sabrukums ir iespējams.

3.

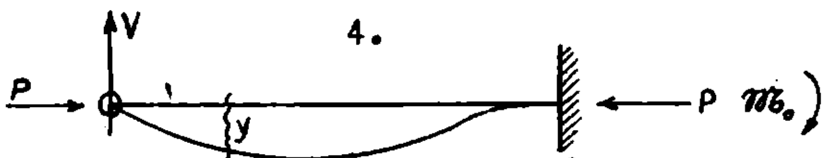


$M = -\mathfrak{M}_0 - Py$ un $EJy'' = -\mathfrak{M}_0 - Py$, $EJy'' + Py + \mathfrak{M}_0 = 0$.
$EJy'' + P(y + \frac{\mathfrak{M}_0}{P}) = 0$, $y'' + \alpha^2(y + \frac{\mathfrak{M}_0}{P}) = 0$, $y + \frac{\mathfrak{M}_0}{P} = u$, $u'' + \alpha^2 u = 0$, $u = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x = y + \frac{\mathfrak{M}_0}{P}$, $y = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x - \frac{\mathfrak{M}_0}{P}$,
$(y)_{x=0} = 0 = A - \frac{\mathfrak{M}_0}{P} = 0$. $A = \frac{\mathfrak{M}_0}{P}$. $y' = -A\alpha\sin\alpha x + B\alpha\cos\alpha x$,
$(y')_{x=0} = B\alpha = 0$ un $y = A\cos\alpha x - \frac{\mathfrak{M}_0}{P} = A(\cos\alpha x - 1)$.

$$\left.\begin{aligned} (y)_{x=\ell} &= A(\cos\alpha\ell - 1) = 0 \\ (y')_{x=\ell} &= -A\alpha\sin\alpha\ell = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} &\cos\alpha\ell = 1 \\ &\sin\alpha\ell = 0. \end{aligned}$$

Šiem noteikumiem atbilst: $\alpha\ell = 2\pi$, $P_{kr} = \frac{4\pi^2}{\ell^2}EJ$

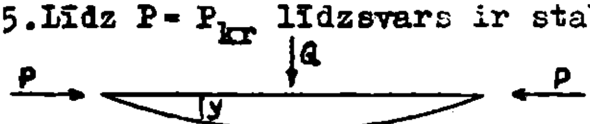
4.



$M = -Py + Vx$, $EJy'' + P(y - \frac{V}{P}x) = 0$, $EJy'' + \alpha^2(y - \frac{V}{P}x) = 0$,
$u = y - \frac{V}{P}x$, $y = u + \frac{V}{P}x = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x + \frac{V}{P}x$. $(y)_{x=0} = 0 = A$ un
$y = B\sin\alpha x + \frac{V}{P}x$; $(y)_{x=\ell} = 0 = B\sin\alpha\ell + \frac{V}{P}\ell$, $y' = \alpha B\cos\alpha x + \frac{V}{P}$,
$(y')_{x=\ell} = 0 = \alpha B\cos\alpha\ell + \frac{V}{P}$. Nu ir divi nolīdzinājumi: $B\sin\alpha\ell = -\frac{V}{P}\ell$, $\alpha\ell B\cos\alpha\ell = -\frac{V}{P}\ell$,
no kurienes seko: $B\sin\alpha\ell = \alpha\ell B\cos\alpha\ell$, $\mathrm{tg}\,\alpha\ell = \alpha\ell$, transcedents nolīdzinājums. Mēģinājumu ceļā nonākam pie atrisinājuma:

$$\alpha\ell = 4{,}49;\ \alpha^2 = \frac{4{,}49^2}{\ell^2} = \frac{20{,}1601}{\ell^2} \sim \frac{2\pi^2}{\ell^2},$$ no kurienes $P_{kr} = \frac{2\pi^2}{\ell^2}EJ$.

5. Līdz $P = P_{kr}$ līdzsvars ir stabīls. Patiesi, pieliksim sījas

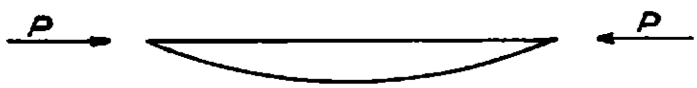


vidū bez P sījas galos kādu ārēju spēku Q, tad:
$M = -Py + \frac{Q}{2}x = -P(y - \frac{Q}{2P}x)$. Liekot $u = y - \frac{Q}{2P}x$, iegūstam:
$y = u - \frac{Q}{2P}x = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x + \frac{Q}{2P}x$; $(y)_{x=0} = A = 0$ un $y = B\sin\alpha x + \frac{Q}{2P}x$; $y' = B\alpha\cos\alpha x + \frac{Q}{2P}$, $(y')_{x=\ell/2} = B\alpha\cos\frac{\alpha\ell}{2} + \frac{Q}{2P} = 0$, no kurienes $B = \frac{Q}{2P\alpha\cos\frac{\alpha\ell}{2}}$ un $y = \frac{Q}{2P}(x - \frac{\sin\alpha x}{\alpha\cos\frac{\alpha\ell}{2}}) = \frac{Q}{2\alpha P}(\alpha x - \frac{\sin\alpha x}{\cos\frac{\alpha\ell}{2}})$ (1). Šī izteiksme rāda, kā: $(y)_{\substack{Q=0 \\ 0\le\frac{\alpha\ell}{2}<\frac{\pi}{2}}} = \left[\frac{Q}{2\alpha P}(\alpha x - \frac{\sin\alpha x}{\cos\frac{\alpha\ell}{2}})\right]_{\substack{Q=0 \\ 0\le\frac{\alpha\ell}{2}\le\pi/2}} = 0$, t.i. kad sīju atbrīvo no spēka Q, tā tūlīt iztaisnojās, ja $0 \le \frac{\alpha\ell}{2} < \pi/2$,

$0 \le \alpha l < \pi$,kad $\cos\frac{\alpha l}{2} \ne 0$ un $0 \le P < P_{kr} = \frac{\pi^2}{l^2}$ EJ ,pie kam $y = B\sin\alpha x = 0$ paliek līdz $\alpha l = \pi$,$P = P_{kr} = \frac{\pi^2}{l^2}$ EJ,kad B paliek nenoteikts,$B = \frac{0}{0}$,pie kam iespējamo B-vērtību starpā var būt arī $B = 0$ ar $y = (B\sin\alpha x)_{B=0} = 0$,kas nozīmē kā sījas līdzsvars,sākot ar $\alpha l = \pi$, $P = P_{kr} = \frac{\pi^2}{l^2}$ EJ paliek tālāk labīls,kamēr līdz

$0 \le \alpha l < \pi$, $P < P_{kr} = \frac{\pi^2}{l^2}$ EJ,tas ir stabīls.

6. Ekscentricitātes iespaids.



Pieņemsim,kā sīja iepriekš jau ir izliekta pēc likuma $y_0 = f_0 \sin\pi\frac{x}{l}$,tad: $M = - Py\ Pf_0\sin\pi\frac{x}{l} = - P(y + f_0\sin\pi\frac{x}{l})$ un $y'' + \alpha^2(y + f_0\sin\pi\frac{x}{l}) = 0$.Ir redzams,kā vispārejam integrālam piemitīs veids: $y = A\cos\pi\frac{x}{l} + B\sin\pi\frac{x}{l}$,pie kam $(y)_{x=0} = 0 = A$ un $y = B\sin\pi\frac{x}{l}$; $y'' = B\frac{\pi^2}{l^2}\sin\pi\frac{x}{l}$ un $y'' + \alpha^2(y + f_0\sin\pi\frac{x}{l}) =$

$$= B\frac{\pi^2}{l^2}\sin\pi\frac{x}{l} + \alpha^2\left(B\sin\pi\frac{x}{l} + f_0\sin\pi\frac{x}{l}\right) = 0,$$

$$\frac{B\pi^2}{l^2} + \alpha^2(B + f_0) = - B\frac{P_{kr}}{EJ} + \frac{P}{EJ}(B + f_0) = 0.$$

$B.P_{kr} + PB + Pf_0 = - B(P_{kr} - P) + Pf_0 = 0$, $B = f_0\frac{P}{P_{kr} - P} = \frac{f_0}{\frac{P_{kr}}{P} - 1}$,un $y = \frac{f_0}{\frac{P_{kr}}{P} - 1}\sin\pi\frac{x}{l}$,(1) no kurienes ir redzams,kā iepriekš izliektās sījas P nevar sasniegt P_{kr} ,kā to mēs konstatējam arī gadījumā,kad sīja ir noslodzīta ar šķērsspēku Q.

7.Eulera formulu piemērības robežas.*)

Ņemsim vērā gadījumu ar abiem brīviem galiem,kad:$P_{kr} = \frac{\pi^2}{l^2}$ EJ. Šīs formulas ir piemērojamas tikai līdz proporcionālitātes robežai.Tā tad ideālā gadījumā:

$$\frac{P_{kr}}{F} = \frac{\pi^2}{l^2} E.\frac{J}{F} = \frac{\pi^2}{l^2} E\rho^2 = \pi^2\left(\frac{\rho}{l}\right)^2 E,$$ kur

ir inerces radius.Pieņemot $\sigma_p = 2.10^3$ kg/cm², E $\frac{2.10^6 \text{kg.}}{cm^2}$, $\pi^2 \approx 10$.

- - - - - - - - - - - - - -

*)Sauksim izvestās formulas par Eulera formulām,lai gan Eulers bīja izvedis formulu tikai gadījumam 2.(Berlin,Histoire de l'Academie,v.13.1757)

iegūstam: $\left(\frac{\ell}{S}\right)^2 = \frac{10.2.10^6}{2.10^3}10^4$, $\ell/S = \sqrt{10^4} = 100$. Tā tad Eulera formulas varētu piemērot, sākot no $\ell/S = 100$ un tālāki. Kā redzams $\sigma_{kr} = \frac{\pi^2}{\ell^2}\frac{EJ}{F} = (\pi^2 E)\left(\frac{S}{\ell}\right)^2$, noved pie hiperboliska likuma $\sigma_{kr}(\ell/S)^2 = \pi^2 E$ = constans.

Ko jāsaprot ar praktisko σ_{kr}, kuru apzīmēsim ar σ_{pkr}.

Tā kā nevar izgatavot prizmatiskus elementus bez ekscentricitātes, tāpat, tā kā nav iespējams spēkus centrēt, tad tūlīt no paša sākuma rodas ekscentriska spiede. Pieņemsim, ka spēki ir stingri centrēti, bet ka iepriekšējā ekscentricitāte nav novērsta un kā pēdejā ir raksturota ar $y_0 = f_0 \sin \pi\frac{x}{\ell}$. Tad saskaņā ar ekscentrisko spiedi varam rakstīt: (sk. 6.form.(1)) jo $M = -P\left(y + f_0 \sin\frac{\pi x}{\ell}\right)$ $\sigma = \frac{P}{F} \pm \frac{P(f+f_0)z}{J}$ (1).

Kad max σ būs sasniedzis proporcionalitātes robežu max $\sigma = \sigma_p$, tad jāskaita, ka P būs sasniedzis P_{pkr} (praktiskais kritiskais P). max σ iegūsim ņemot formulu (1) ar zīmi +, kādēl:

$$\sigma_p \cdot F = P_{pkr} + P_{pkr}(f + f_0)\frac{zF}{J} = P_D.$$

Tā kā $f = \frac{f_0 . P}{P_{kr} - P}$ (sk6form.(1)) tad: $P_D = P_{pkr} + P_{pkr}\left(\frac{P_{pkr}}{P_{pkr} - P_{pkr}} + 1\right)\frac{zFf_0}{J}$.

Še $\frac{zFf_0}{J}$, kur

$z = \frac{b}{2}$ (b šķēliena biezums) ir dotam šķēlienam un dotai sījai constans lielums, kādēļ apzīmēsim to ar : $\frac{bFf_0}{2J} = \eta$ un tādēl:

$P_D = P_{pkr} + P_{pkr}\left(\frac{P_{kr}}{P_{kr} - P_{pkr}}\right)\eta$. Mērīsim visus lielumus ar teorētisko P_{kr}, tad: $\frac{P_D}{P_{kr}} = \frac{P_{pkr}}{P_{kr}} + \frac{P_{pkr}\eta}{P_{kr}\left(1 - \frac{P_{pkr}}{P_{kr}}\right)}$ un apzīmēsim reducētos lielumus: $\frac{P_D}{P_{kr}} = P'_D$, $\frac{P_{pkr}}{P_{kr}} = P'_{pkr}$, tad:

$P'_D = P'_{pkr} + P'_{pkr}\frac{\eta}{1 - P'_{pkr}}$, no kurienes:

$P'_D - P'_D P'_{pkr} = P'_{pkr} - P'^2_{pkr} + P'_{pkr}\eta$; $P'^2_{pkr} - (P'_D + 1 + \eta)P'_{kr} + P'_D = 0$.

$$P'_{pkr} = \frac{(P'_D + 1 + \eta) \pm \sqrt{(P'_D + 1 + \eta)^2 - 4P'_D}}{2}$$

Kādu ņemt no divām zīmēm? jāņem tādu zīmi, lai pie $\eta = 0$ (ideāls gadījums) būtu $P'_{pkr} = 1$ $(P_{pkr} = P_{kr})$. Liekot iepriekšējā formulā $\eta = 0$, iegūstam: $P'_{pkr} = \frac{(P'_D + 1) \pm \sqrt{(P'_D+1)^2 - 4P'_D}}{2} = \frac{(P'_D + 1) \pm (P'_D - 1)}{2}$.

Kā redzams jāņem zīme $-$, jo tad $P'_{kr} = 1$ un tādēļ:

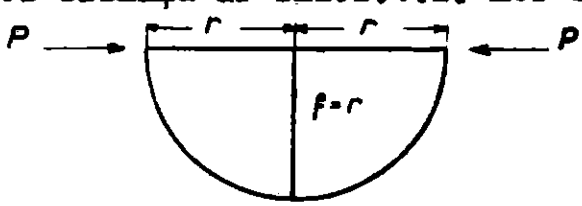
$$P'_{pkr} = (P'_D + 1 + \eta) - \sqrt{(P'_D + 1 + \eta)^2 - 4P'_D} \qquad (2)$$

Šinī formulā (2) uzietais P_{pkr} ir bez drošības koeficienta, kādēl projektos tādu pielaist nevar. Principiēli šo drošību var ievest vai nu tieši pareizinājot P_{pkr} uz $1/m'$, kur m ir drošības koeficients, vai pareizinājot P_o uz $\frac{1}{n}$, kur n ir parastais drošības koeficients, vai ievedot rezervi η vērtībā.

Tā kā η nav zināms, tad pelna ievērību prof. Jasinska drošības hipotēze: $\frac{\sigma_{kr\,adm}}{\sigma_{adm}} = \frac{\sigma_{kr}}{R}$, $\sigma_{kr\,adm} = \sigma_{adm}\left(\frac{\sigma_{kr}}{R}\right) = \varphi\cdot\sigma_{adm} = \frac{\sigma_{adm}}{R}\cdot\sigma_{kr} = \frac{1}{n}\sigma_{kr}$ kur apzīmē: $\sigma_{kr\,adm}$ pielaižamo ļodzes(Ausknickung) spraigumu, σ_{adm} – parasto pielaižamo spraigumu(precizāki $\sigma_{adm\,elem}$) $\sigma_{kr} = \frac{P_{kr}}{F}$, R –galējais (graujošais) spraigums. Šī hipotēze dibināta uz atzinuma, kā ļodzei σ_{kr} ir tas pats, kas R elementārai ķermeņa piepūlei. Jasinskis ir sastādijis koef. φ nozīmju tabulas.

T e z e :

Kad P ir sasniedzis P_{kr} nozīmi, tad to ievērojami palielināt nav iespējams: ķermenis tikai var tikt izliekts, bez kā P_{kr} pie tam kaut cik pieaugtu. Iedomāsimies kādu ļoti elastīgu ķermeni, par piem. valzivs stīpiņu un pieņemsim, kā tā ir izliekusies saskaņā ar skici, t.i. mēs šo stīpiņu esam izliekuši tā,



ka nokare F $f = r = \frac{1}{2}2r$. Ja novilksim ar zīmuli līkni gar iekšējo malu, tad konstatēsim, ka šī līkne ļoti tūva būs parabolei: $y = r - \frac{x^2}{r}$, pie kam stīpiņas garums $= 2\int_0^r \sqrt{1 + y'^2}\,dx = 2\int_0^r \sqrt{1 + \frac{4x^2}{r^2}}\,dx$. Ievedīsim apzīmējumu $\frac{2x}{r} = u$, tad: $dx = \frac{r}{2}du$ un $l = r\int_0^2 \sqrt{1 + u^2}\,.du =$

$$= r\left|\frac{u}{2}\sqrt{1 + u^2} + \frac{\ln}{2}\left(u + \sqrt{1 + u^2}\right)\right|_0^{u=2} = r\left|\sqrt{1 + 2^2} + 1/2\ln\left(2 + \sqrt{1 + 2^2}\right)\right. = r\left|\sqrt{5} + \frac{\ln}{2}\left(2 + \sqrt{5}\right)\right|^0 =$$

$r\,(2{,}2361 + \frac{\ell n}{2}\; 4{,}2361) = r(2{,}2361 + 1/2 \cdot 1{,}4422) = r$

$= r\,(2{,}2361 + 0{,}7211) \sim 2{,}96\ r$. Bet šis garums arī ir ļoti tūvs $\ell \sim \pi r$. Patiesi: $\frac{\pi - 2{,}96}{2{,}96} \cdot 100\% = \frac{3{,}14-2{,}96}{2{,}96}\,100\% = \frac{0{,}18}{2{,}96}\,100\% =$

$= \frac{18}{2{,}96}\% \sim 6\%$. Tādēļ: $M = P.r = E\,Jy'' = \frac{EJ}{r} = P.r$, $P = \frac{EJ}{r^2} = \frac{EJ\pi^2}{\ell^2} =$

$= P_{kr}$, no kurienes ir redzams, kā P ir palicis negrozīgs $= P_{kr}$.

8. P_{kr} ārpus proporcionalitātes robežām. (conf.7)

Ārpus proporcionalitātes robežām $\frac{P_{kr}}{F} = \sigma_{kr} = (a - b\frac{\ell}{\varsigma})\frac{kg}{cm^2}$, kur a un b ir empiriski uzejami koeficienti, ς ir inerces radius $\varsigma = \sqrt{\frac{F}{J_{min}}}$ Lietai dzelzij p.piem.ir:

$\sigma_{kr} = (3387 - 14{,}83\,\ell/\varsigma)\,\frac{kg}{cm^2}$ robežās $20 < \ell/\varsigma < 110$,

kokam: $\sigma_{kr} = (293 - 1{,}94\,\ell/\varsigma)\frac{kg}{cm^2}$ pie $\frac{\ell}{\varsigma} \leq 110$,

ķetam Eulera formulu var piemērot līdz $\ell/\varsigma \geq 80$, pie mazākām ℓ/ς nozīmēm:

$$\sigma_{kr} = \left[7760 - 120\,\ell/\varsigma + 0{,}53\,(\ell/\varsigma)^2\right]\,kg/cm^2$$

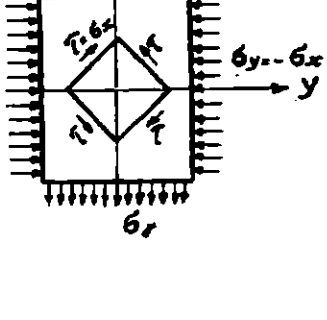
T ī r ā   b ī d e.

Uzrakstot izteiksmes: $\sigma = \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta$ un

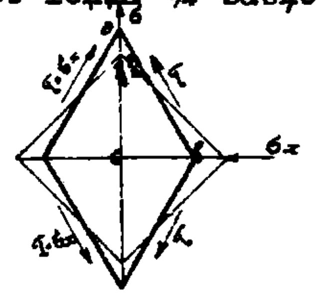
$$\tau = \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2}\sin 2\theta,$$

Konstatējam, ka $(\sigma)_{\substack{\theta=45^\circ\\ \sigma_x=-\sigma_y}} = \sigma_x\frac{1}{2} - \sigma_x\frac{1}{2} = 0$ un $(\tau)_{\substack{\theta=45^\circ\\ \sigma_x=-\sigma_y}} = \sigma_x = -\sigma_y$,

Kas nozīmē, ka šķēlienā, kura normāle sastāda leņķi $\theta = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$ ar x-asi, $\sigma = 0$ un darbojās tikai tangenciālais spraigums τ, kura skaitliskā vērtība $\tau = \sigma_x$. Zem šī spraiguma τ iespaida prizmatisks



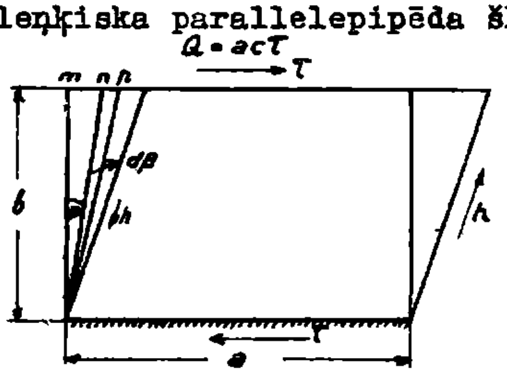
ķermeņa elements ar kvadrāta šķēlienu deformēsies, kvadrātam pārejot rombā. Šī deformācija ir saistīta ar kvadrāta taisno leņķu sašķobīšanos par leņķi β jeb leņķa $\pi/4$ sašķobīšanos par $\frac{\beta}{2}$. Kvadrāta diagonāles izstiepe ir



$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} = \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\nu\sigma_x}{E} = \frac{\sigma_x}{E}(1+\nu) = \varepsilon$ bet deformācija Y-ass virzienā ir $\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_x}{E} = -\frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_x}{E} = -\frac{\sigma_x}{E}(1+\nu) = -\varepsilon_x = -\varepsilon$ No trīsstūra acb seko, kā $(1-\varepsilon) = (1+\varepsilon)\, tg(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2})$, $\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} = \frac{tg\frac{\pi}{4} - tg\frac{\beta}{2}}{1+tg\frac{\pi}{4}\cdot tg\frac{\beta}{2}} = \frac{1-\frac{\beta}{2}}{1+\frac{\beta}{2}}$. Še ir pieņemts $tg\frac{\beta}{2} \sim \frac{\beta}{2}$, ņemot vērā ka $\frac{\beta}{2}$ ir ļoti mazs lielums. No uztakstītās sakarības seko, ka $\varepsilon = \frac{\sigma_x}{E}(1+\nu) = \frac{\beta}{2} = \frac{\tau}{E}$ $(1+\nu) = \frac{\beta}{2}$, no kurienes $\tau = \frac{E}{2(1+\nu)}\beta = G.\beta$ (1) kur $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ (2) bīdes elastības modulis, bet β ir bīdes relatīva deformācija (taisna leņķa šķiebe, mērīta radiusos). No 2. ir redzams, ka G nav neatkarīgs lielums, bet jau mums pazīstamo E un ν funkcīja. G Skaitliskā vērtība ir, pieņemot apmēram $\nu = 1/3$, $G = \frac{E}{2\cdot 4/3} = 3/8\, E$.

Bīdes deformācijas darbs.

Taisnleņķiska parallelepipēda šķautņu garumi lai ir a, b un c. Tad uz augšējo skaldni darbojošais spēks ir $Q = ac\tau$. Tāds pats spēks darbojās arī apakšējā šķēlienā. Patiesībā notiek augšējās skaldnes pārbīde $\vec{\tau}$ virzienā, bet



apakšejās $\overleftarrow{\tau}$ virzienā. Tā ka svarā krīt tikai relatīva vienas slaldnes pret otru pārbīde, tad var pieņemt, kā apakšejā skaldne ir negrozīgi piestiprināta un darbu rada tikai spēks Q augšējā skaldnē. Tāpat jāņem vērā, kā spēkí, kas iedarbojās uz sānu skaldnēm, nekādu darbu nerada, jo šo spēku pārvietojumi ir normāli pret šo spēku virzieniem. Ņemsim vērā spēka Q darbu, kad tā iedarbes punkts pārvietojās par np. Ja pārvietojums np ir bezgalīgi mazs, tad $dA = Q\,np = Q\,(mp - mn)$ $Qb\left[tg(\beta + d\beta) - tg\beta\right] \sim$

$\sim Qb\left[\beta + d\beta - \beta\right] = Q\,bd\beta$. Bet $\tau = G\beta$, $d\beta = \frac{d\tau}{G}$ un $dA = Qb.d\beta = \frac{\tau abc\, d\tau}{G}$.

$\int_0^{\tau} dA = A = \frac{abc}{G}\int_0^{\tau} \tau\, d\tau = \frac{abc\tau^2}{2G}$ (3)

Specifiski (attiekts pret tilpuma vienību) deform.darbs,resp. potenc.enerģija $A_r = \frac{abc\tau^2}{2G} = \frac{\tau^2}{2G} = \frac{\beta^2 G}{2}$. Tā kā $Q = \tau ac$ un $\tau = G\beta$, tad $A = \frac{abc\tau^2}{2G} = \frac{\tau ac \cdot b\tau}{2G} = \frac{Q}{2G} b\beta G = \frac{Q \cdot S}{2}$, kur $S = b\beta$ - spēka Q iedarbes p.pārvietojums.

Pielaižamie bīdes spraigumi.

1) Saskaņā ar stipr.teorīju $\max\sigma \leq \sigma_{ad}$, iegūstam, ņemot vērā, kā $\max\sigma = \max\tau$ $\max\tau_{comp} \leq \sigma_{adm\,elem}$.

2) Saskaņā ar $\max\varepsilon_{comp} \leq \varepsilon_{adm\,el}$: $\max\varepsilon_{comp} = \max\frac{\sigma_x}{E}(1+\nu) = \max\frac{\tau(1+\nu)}{E} \leq \varepsilon_{adm\,elem} = \frac{\sigma_{adm\,el}}{E}$, no kurienes: $\max\tau_c \leq \frac{\sigma_{adm\,el}}{1+\nu}$

3) Saskaņā ar $\max\tau_{comp} \leq \tau_{adel}$: $\max\tau_{comp} \leq \tau_{adel} = \frac{\sigma_{adm\,el}}{2}$

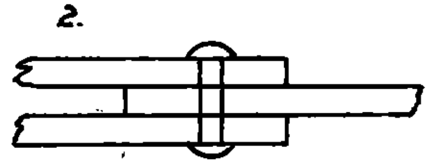
Tīrā bīde nevar tikt realizēta tieši, jo cērpes spēka Q iedarbe izsauc, kaut arī nelielu, lieces momentu. Knieżu savienojumos kniedes tiek cērptas, pie kam šī cērpe var būt ordināra vai dubulta.

Ordināras cērpes gadījums ir attēlots skicē 1. Tā kā spēki Q veido pāri, $Q\ell$ kur ℓ ir loksnes biezums, tad kniedes izliece ir neizbēgama.

1.

Pieliekot cērpes šķēlienam divus vienādus un pretēji virzītus spēkus Q, iegūstam pāri $\frac{Q\ell}{2}$ un cērpes spēku Q, kas darbojās lokšņu kontakta šķēlienā. Ja kniežu diametrs ir d, tad nepieciešamais kniežu skaits $n\frac{\pi d^2}{4}\tau_{adm} \geq Q$, no kurienes $n \geq \frac{4 \cdot Q}{\pi d^2 \tau_{adm}}$

2.



Skicē 2 ir attēlots kniedes dubultās cērpes gadījums. Tā kā kniede tiek cērpta divos šķēlienos, tad:

$n \geq \frac{4Q}{2\pi d^2 \tau_{ad}}$.

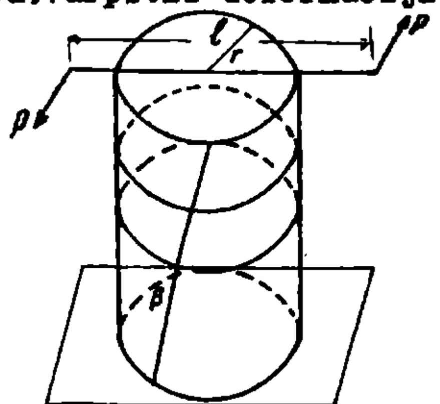
Vēl jāpiezīmē, kā kniežu aprēķinam uz cerpi ir stipri konvencionāla nozīme.

Patiesībā kniedes tiek ievietotas sakarsētā stāvoklī. Pēc atdzišanas kniedes saraujās un izsauc berzes spēkus kontakta plāksnēs, kas līdzsvaro Q. Tikai tad, ja tāda kniežu iedarbe atslābtu,tad varētu sākt darboties cērpe.

Bez kniedēm ir vēl daudz konstrukcīju elementu, kur var pielietot cērpes ideju.

V ē r p e .

Iedaomāsimies apaļu vārpstu ar ripas šķēlienu,kas vienā galā negrozīgi piestiprināta ,bet otrā padota tā saucamam vērpes momentam,kuru var iedomāties pieliktu ar sviras palīdzību.Vārpstas deformācija tad varēs tikt raksturota sekojoši,izejot no pavisam varbūtīgas hipotēzes,ka:

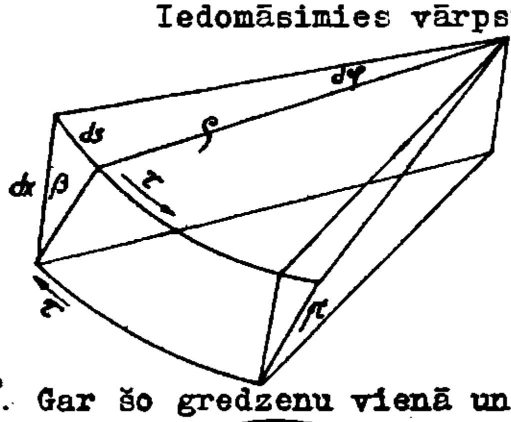


1) ripas vārpstas šķēlienu savstarpējie attālumi nemainās,

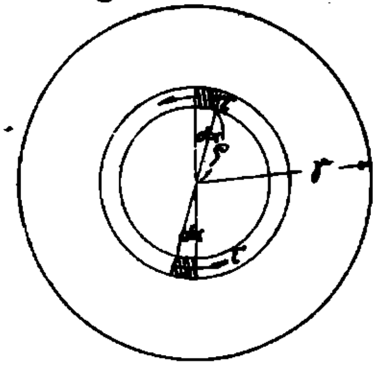
2) nepaliek plakani,

3) Šinīs šķēlienos novilktie radiusi neizliecas,bet paliek taisni.Šādos apstākļos atsevišķi vārpstas elementi būs padoti tīrai bīdei, ko raksturo leņķa rašanās,kuru veido savā starpā kāda veidule pirmatnējā stāvoklī un pēc deformācijas.

Iedomāsimies vārpstas elementu izgriestu saskaņā ar skici.Tad aploces elements $ds = \rho d\varphi = \beta\, dx$ (1) kur $d\varphi$ ir tā saucamā savērpes leņķa elements. Ņemsim vērā ripas šķēlienā kādu gredzenveidīgu elementu ar radiusu ρ. Gar šo gredzenu vienā un tanī pašā virzienā darbojās τ



Sasvītrotos gredzena elementos darbojas τ ,pie kam tie veido vērpes momenta elementu:



$$\rho\, dx\, d\rho\, 2\rho = 2\rho^2\, d\rho\, dx\tau.$$

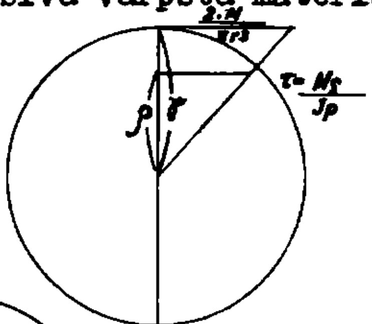
Lai iegūtu vērpes pāri, kas darbojās uz visu

gredzenu šo izteiksmi ir jāintegrē: $dM = 2\rho^2 d\rho\tau\int_0^{\pi} d\alpha = 2\pi\rho^2 d\rho\tau$,
bet uz visu šķēlienu ar radiusu r iedarbojas vērpes moments:
$M = 2\pi\int_0^r \rho^2\, d\rho\tau$, bet $\tau = G\beta$ un no (1) seko, ka $\beta = \rho\frac{d\varphi}{dx}$, kādēļ
$M = 2\pi\int_0^r \rho^2 d\rho\tau = 2\pi G\int \rho^2\, d\rho\cdot\rho\frac{d\varphi}{dx} = \frac{2\pi d\varphi G}{dx}\int_0^r \rho^3\, d\rho = \frac{d\varphi G}{dx}2\pi\left|\frac{\rho^4}{4}\right|_0^r = \frac{d\varphi}{dx}\frac{\pi r^4}{2}G = \frac{d\varphi}{dx}GJ_p$, kur J_p ir tā saucamā ripas šķēliena polārais inerces moments.

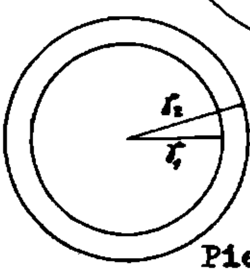
No formulas $M = \frac{d\varphi}{dx}GJ_p$ uzejam $\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M}{GJ_p}$,
kuru ievietojam formulā (1) un gūstam:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M}{GJ_p} = \frac{\beta}{\rho} = \frac{\tau}{G\rho}, \quad \tau = \frac{M\rho G}{GJ_p} = \frac{M\rho}{J_p} \qquad (2)$$

$\max\tau = (\tau)_{\rho=r} = \frac{Mr}{J_p} = \frac{2Mr}{\pi r^4} = \frac{M}{\pi r^3}$ No $M = GJ_p\frac{d\varphi}{dx}$
varam uziet savērpes leņķi φ: $d\varphi = \frac{Mdx}{GJ_p}$, $\int_0^{\varphi} d\varphi = \varphi = \frac{M}{GJ_p}\int_0^{l} dx = \frac{Ml}{GJ_p}$ (3)
Tā kā masīvā vārpstā materiāls it nelietderīgi izlietots, tad lieto dobjas vārpstes, kurās



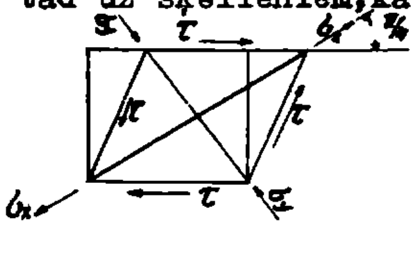
$M = \frac{2\pi d\varphi}{dx}G\int_{r_1}^{r_2}\rho^3 d\rho =$
$= \frac{d\varphi}{dx}G\cdot 2\pi\left|\frac{\rho^4}{4}\right|_{r_1}^{r_2} = \frac{d\varphi}{dx}G\cdot\frac{2\pi(r_2^4 - r_1^4)}{4}$
$= \frac{d\varphi}{dx}G\,(J_{2p} - J_{1p}) =$
$= G\,(J_{2p} - J_{1p})\,\frac{\tau}{G\rho}$,
$\tau = \frac{M\rho}{J_{2p} - J_{1p}}$ (4), no kurienes pie $r_1 = 0$ seko formula (2).



Vārpsta stipr.noteikumi.

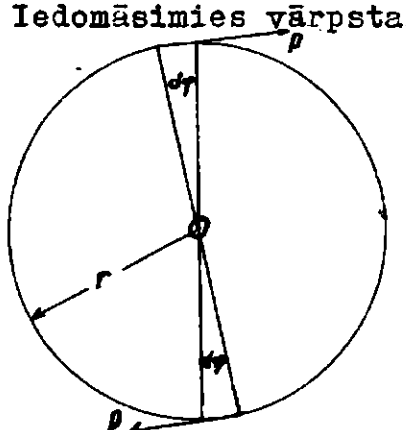
Pielietojot Coulomb'a teoriju, varam rakszīt:
$\max\tau = \frac{2M}{\pi r^3} \leq \tau_{ad} = \frac{\sigma_{ad}}{2}$. Tā kā τ ir tīrā bīde, kuru, ka redzējam, var realizēt caur speciēlu praktiska ķermena noslodzi ar $\sigma_x = -\sigma_y$, pie kam $\theta = 45° = \frac{\pi}{4}$ tad ir pareizs arī pretējais slēdziens, proti, kā tīrā bīde izsauc spiciālu prizmatiska ķermena noslodzi ar normāliem spraigumiem $\sigma_x = -\sigma_y$, kuru virziens sastāda ar τ virzienu $\theta = 45° = \frac{\pi}{4}$, pie kam $\sigma_x = \tau$. Tā

tad uz šķēlieniem, kas ir vilkti caur kvadrāta diagonālēm, darbojās normālie spraigumi
$\sigma_x = -\sigma_y$



Ripas šķēliena vārpstu stiprības aprēķins atkarībā no mašīnas jaudas.

Iedomāsimies vārpstai pieliktu spēku pāri P. 2r, kura elementāru darbu mēģināsim uzrakstīt.



Pieņemsim, kā vārpsta ir pagriezusies par leņķi $d\varphi$, tad katra no spēkiem P iedarbes punkta pārvietojums ir $r d\varphi$, tā kā pāra elementārais kopdarbs ir $dA = r d\varphi\, P + r\, d\varphi\, P = 2\,r\,P.d\varphi = M d\varphi$, kur M ir vērpes pāris. Āreja pāra darbs laika vienībā (jauda) ir $\frac{dA}{dt} = \frac{Md\varphi}{dt} = M\omega$, kur ω ir tā saucamais leņkiskais ātrums.

Ja vārpstas rotē vienmērīgi, kas ir parastās prakses gadījums, tad leņkiskais ātrums $\omega = \omega_0$ ir constans.

Šo lielumu ω_0 var aprēkiņāt no vārpstas apgriezienu skaita laika vienībā. Pieņemsim, ka vārpsta ir apgriezusies n' reižu T minūtēs, tad $\omega_0 = \frac{2\pi n'}{T 60} = \frac{2\pi}{60}\frac{n'}{T} = \frac{2\pi n}{60}$ Mašīnu jaudu mēro zirga spēku (HP) vienībās pie (HP) $= (75)\left[kg\,{}^{mtr}/_{sec}\right]$, tā kā

$$(N)\,[HP] = \left(\frac{M\omega}{75}\right)\left[kgm{}^{tr}/_{sec}\right] = M\,\frac{2\pi n}{60.75} = N,\quad M = \frac{N\,60.75}{2\pi n} \quad (1) \text{ un}$$

$$\max \tau = \frac{2M}{\pi r^3} = \frac{2M\,8}{\pi d^3} = \frac{16\,M}{\pi d^3} = \frac{16\,N\,60.75}{\pi d^3 .\,2\pi n} = \frac{1200.60\,N}{2\pi^2 d^3 n} = \left(\frac{36.10^3\,N}{\pi^2 n d^3}\right)[kg\,mtr] =$$

$$= \left(\frac{36.10^3.10^2\,N}{\pi^2\,n\,d^3}\right)[kg\;cm] = \frac{36.10^5\,N}{\pi^2 n d^3} \leqq \tau_{adm},$$ no kurienes

$$d \geqq \sqrt[3]{\frac{36.10^5\,N}{n\pi^2}} \sim \sqrt[3]{\frac{N}{n}.\frac{36.10^4}{\tau_{a\partial}}}$$, pieņemot aptuveni $\pi^2 \sim 10$

Tā kā $\tau_{a\partial} = \frac{\sigma_{adm}}{2}$ tad šo formulu var vēl pārrakstīt tā: $(d)\,[cm] = \sqrt[3]{\frac{72.10^4}{\sigma_{adm}}}\;\sqrt[3]{\frac{N}{n}}$, kur N ir mašīnas jauda zirga spēka [HP] vienībās, bet n apgriezienu skaits vienā sekundē.

Piemērs:

1) Aprēķinot vārpstas diametru d, ja mašīnas jauda $N = 300$, $n = 200$ un $\tau_{a\partial} = 400\ kg/_{cm^2}$,

Tad $d \geqq \sqrt[3]{\frac{36.10^4}{4.10^2}}\;\sqrt[3]{\frac{300}{200}} = \sqrt[3]{9,10^2}\;\sqrt[3]{\frac{3}{2}} =$

$=\frac{1}{2}\sqrt[3]{910^2}\;\sqrt[3]{12} = \frac{1}{2}\,9{,}6549.2{,}2894 \sim 11$ cm $= 110$ mm

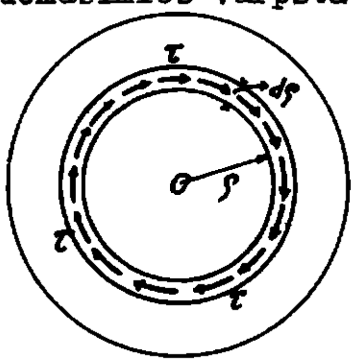
2) Uziet mašīnas jaudu, ja savērpes leņķis mērīts garumā ℓ mtr. ir φ°, vārpstas diam. ir d, apgr. skaits vienā min. ir n.

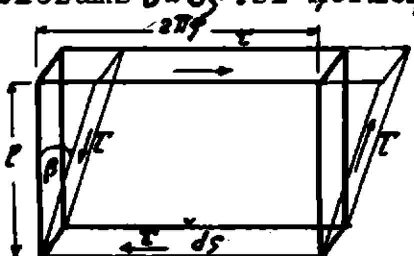
Saskanā ar formulu (1) $M = \frac{N\,60.75}{2\pi}$, $N = \frac{2\pi}{60.75}M$,

bet $\varphi = \frac{M\ell}{JG}$. Tā kā uzdevumā savērpes leņķis ir dots grādos, tad $\varphi = \frac{\varphi^\circ}{360}2\pi$ un $N = \frac{2\pi}{60.75}\cdot\frac{\varphi^\circ 2\pi J_p G}{360\,\ell}$. Lietojot šo formulu, jāievēro atsevišķo lielumu dimensijas.

Vērpes deformācijas darbs resp. potenciālā enerģija.

Iedomāsimies vārpsta ķermenī izgrieztu dobju cilindri ar radiusiem $(\rho+d\rho)$ un ρ, kuru pāršķelsim gar vienu veiduli, pie kam ķermeni ar tam pieliktiem τ atlocīsim un savietosim ar kādu plakni, tad iegūsim taisnu parallelepipēdu, kura augstums būs vārpsta garums ℓ, platums $b = 2\pi\rho$ bet biezums $\delta = d\rho$. Šī ķermeņa elementārais deformācijas darbs





$d^2A = \ell\,d\beta\,\tau\,d\rho.2\pi\rho$, bet $\tau = G\beta$,

$d\tau = G\,d\beta$ $\quad d\beta = \frac{d\tau}{G}$

un $d^2A = \frac{\ell.2\pi\rho\,d\rho\,\tau\,d\tau}{G}$,

$\int_0^\tau d^2A = dA = \frac{\ell.2\pi\rho\,d\rho}{G}\int_0^\tau \tau\,d\tau =$

$= \frac{\ell 2\pi\rho\,d\rho}{G}\left|\frac{\tau^2}{2}\right|_0^\tau = \frac{\ell 2\pi\rho\,d\rho}{2G}\tau^2$,

bet $\tau = \frac{M\rho}{J_p}$ un tādēļ $dA = \frac{\ell 2\pi\rho\,d\rho}{2G}\,\frac{M^2\rho^2}{J_p^2} = \frac{\ell M^2 2\pi}{2GJ_p^2}\rho^3 d\rho$,

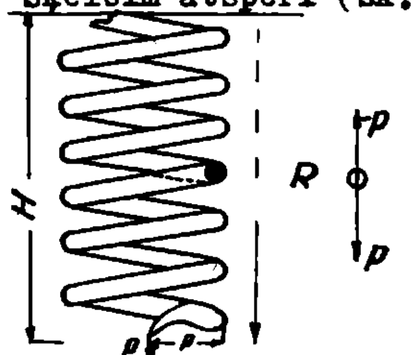
$$A = \int_0^r dA = \frac{\ell M^2 2\pi}{2GJ_p^2}\int_0^r \rho^3 d\rho = \frac{\ell M^2 2\pi}{2GJ_p^2}\left|\frac{\rho^4}{4}\right|_0^r = \frac{\ell M^2 2\pi r^4}{2GJ_p^2\,4} = \frac{\ell M^2 \pi r^4}{2GJ_p^2\,2} = \frac{\ell M^2 J_p}{2GJ_p^2} =$$

$= \frac{\ell M^2}{2GJ_p} = \frac{M}{2}\cdot\frac{M\ell}{GJ_p} = \frac{M\varphi}{2}$, kur M ir vērpes moments, bet φ savērpes leņķis radianos. Ja φ tiek dots grādos, tad p.p. φ°, tad

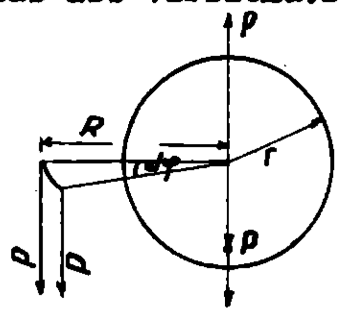
$\frac{\varphi^\circ}{360}\cdot 2\pi = \varphi$ (radianos).

Skrūvveidīgu cilindrisku atsperu aprēķins. (dimensionēšana)

Šķelsim atsperi (sk.sk.) pārnesot šķēlienā spēku P ar para RP palīdzību. Tad spēks P, pielikts šķēlienā, pēdējo cērpe, radot $\tau_1 = \frac{P}{\pi r^2}$ bet pāris M ir vērpes pāris, kas min. šķēlienā izsauks $\max\tau_2 = \frac{Mr}{J_p} = \frac{RPr}{J_p} = \frac{R.P.r}{\frac{\pi r^4}{2}} = \frac{2\,RP}{\pi r^3}$ un kopspraigums $\tau = \tau_1 + \max\tau = \frac{P}{\pi r^2} + \frac{2RP}{\pi r^3} = \frac{2\,RP}{\pi r^3}\left(\frac{r}{2R} + 1\right) \sim = 2\,\frac{RP}{\pi r^3}$, jo $\frac{r}{2R}$ samērā pret 1 ir niecīgs lielums un tādēļ to var atmest.



Atsperes izstiepe ΔH kur H ir atsperes garums centrālās ass virzienā. Zem spēka P iespaida šķēliens ar radiusu r pārvietosies un pagriezīsies. Pārvietošanā spēku P un -P darbu summa = 0, bet spēka P rotācijas darba elements ir $d\,A = P\,d\,(\Delta H) = P.R\,d\varphi = M\,d\varphi$ $d\varphi = \frac{d\varphi}{dP}\,dP = d\left(\frac{M\ell}{J_pG}\right)\,dP = \frac{\ell}{J_pG}\,\frac{dM}{dP}\,dP = \frac{\ell.R}{J_pG}\,\frac{dP}{dP}\,dP = \frac{\ell R dP}{J_pG}$ un $d\,A = P.R\,d\varphi = P.R.\frac{\ell R}{J_pG}dP = PR.d\,(RP)\frac{\ell}{J_pG} = \frac{MdM\ell}{J_pG}$; $\int_0^M d\,A = A = \frac{\ell}{J_pG}\int_0^M MdM = \frac{\ell}{J_pG}\left|\frac{M^2}{2}\right|_0^M = \frac{\ell M^2}{J_pG2} = \frac{M\ell}{J_pG2}\cdot M = \frac{\varphi}{2}M = \frac{\varphi R.P}{2} = \frac{\Delta H}{2}$ P, no kurienes meklējama atsperes izstiepe $\Delta H = \frac{\ell M^2}{J_pGP} = \frac{2\pi R n P^2 R^2\,2}{G.\pi r^4.P} = P\,\frac{4\,n\,R^3}{G r^4}$, kur n ir vītņu skaits.



No šīs formulas ir redzams, kā izstiepe ir jo lielāka, un tā tad trieciena iespaids mazāks - jo G lielāks, r mazāks, jo atsperes cilindra caurmērs R lielāks un vītņu skaits n lielāks.