J. Č Ī Z A R E V I Č S
Latvijas Ūniversitātes docents

KOMPLEKSI SKAITĻI. DETERMINANTI. ALĢEBRĀISKI NOLĪDZINĀJUMI. PARCIĀĻDAĻAS.

Lekcijas lasītas Latvijas Ūniversitātes inženierzinātņu un mēchanikas fakultātēs.

RĪGĀ, 1931. GADĀ.
Latvijas Ūniversitātes Studentu Padomes grāmatnīcas izdevums.

S a t u r s :

Kompleksi skaitļi.

Kompleksu skaitļu jēdziens 4
Ģeometriska attēlošana, normālveids 4
Trigonometrisks veids 5
Saskaitīšana, atņemšana 7
Reizināšana, dalīšana 7
Kāpināšana, saknes izvilkšana 8
Moivre formula 9
Grafiskas operācijas 10

Attiecības.

Attiecības faktors 13

Permutācijas.

Permutāciju skaits 14
Inversijas 14
Transpozicijas , Bezout.teorema 15
Cikliskas permutācijas 15

Determinanti.

Determinanta jēdziens, apzīme 16
Determinanta īpašības:
Determinanta gāšana 18
Paralelu rindu pārmaiņa 18
Vienlīdzīgas paralelas rindas 19
Determinanta reizināšana 19
Apakšdeterminanti 20
Elementiem piekārtoti apakšdeterminanti. 21
Determinanta attīstīšana pēc rindas elementiem . . . 22
Determinanta elementi reizināti ar citas rindas apakšdeterminantiem 24
Determinanta kāpes pazemināšana un paaugstināšana 24
Determinants ar sastādītiem elementiem 27
Nulldeterminanti 27
Determinanta diferencēšana 28
Lineāru nehomogenu nolīdzinājumu atslēgšana 29
Lineāru nolīdzinājumu kopēja pastāvēšana 30

Algebraisku nolīdzinājumu teorija.

Atsvabināšana no koeficienta pie augstākās kāpes 37
Gaussa teorema 37
Bezout teorema 38
Sadalīšana sakņu faktoros 38
Nolīdzinājumu koeficienti zimetriskas sakņu funkcijas . . 40
Nenoteiktu koeficientu paņēmiens 39

Kompleksas saknes 41
Secinājumi 41
Zīmju maiņas un sekojumi, pozitīvas un negatīvas saknes . . 42
Secinājumi,no funkcijas nepārtrauktības,attiecībā un saknēm 44
Hornera dalīšanas paņēmiens 45
Nolīdzinājumu pārveidošana 46
Atkārtojošās saknes 47
Numeriski nolīdzinājumi 48
Sakņu robežas, Rolle un Newtona paņēmieni 48
Racionālu sakņu atrašana 50
Irracionālu sakņu atrašana 51
Sturma teorema 52
Sakņu tuvina vērtības, Newtona un regula falsi paņēmieni. . 55
Sakņu atrašana ar grafiskiem paņēmieniem 56

Parciāldaļas.

Parciāldaļas pie neatkārtojošām reālām saknēm 57
Koeficientu aprēķināšana 59
Parciāldaļas pie reālām atkārtojošām saknēm 60
Parciāldaļas pie kompleksām neatkārtojošām saknēm 60
Koeficientu aprēķināšana 60
Parciāldaļas pie kompleksām atkārtojošām saknēm 61
Piemēri 61

---------oOo---------

KOMPLEKSI SKAITĻI.

1. Atrisinot nolīdzinājumu

$$x^2 - 6x + 13 = 0$$

dabūjam x vērtību

$$x = 3 \pm \sqrt{-4} = 3 \pm \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = 3 \pm 2\sqrt{-1}$$

Šinī izteiksmē prasīts izvilkt kvadratsakni no -1. Pie reāliem skaitļiem tas nav iespējams, jo ne reāla pozitīva skaitļa, nedz arī reāla negatīva skaitļa kvadrats nedod -1. Tāpat nav iespējams izteikt reālos skaitļos

$$\sqrt[2p]{-b}$$

t.i. pāra skaitļa sakni no -1. Ievērojot permanences principu, šo izteiksmi rakstam

$$\sqrt[p]{\sqrt{-b}} \quad \text{un} \quad \sqrt{-b} = \sqrt{b} \cdot \sqrt{-1}$$

Faktors $\sqrt{b}$ ir dabūjams, kā reāls pozitīvs skaitlis, otrs faktors $\sqrt{-1}$ uzskatāms kā simbols, kurš tiek apzīmēts ar i un ir jauns skaitļu veids. Tā tad

$$\sqrt{-b} = \beta i$$

Veidu βi sauc par imagināru - šķietamu skaitli, $\sqrt{-1} = i$ par šķietamu vienību un β šīs vienības koeficientu. Šķietamā vienība i, ievērojot permanences principu, izpilda pamata likumu

$$i^2 = -1 \ ; \ i^3 = -i \ ; \ i^4 = 1 \ ; \ i^5 = \cancel{-5}\ +i \ \text{u.t.t.}$$

Sakopojums

$$\alpha + \beta i$$

kur α un β ir reāli skaitļi, tiek saukts par kompleksu skaitli.

Veids $\alpha + \beta i$ aptver reālus un imaginarus skaitļus, ja $\beta = 0$, dabūjam

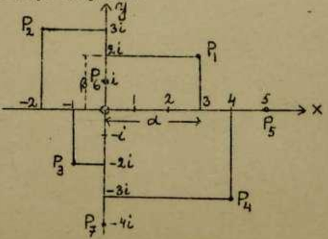
reālu skaitli α

un ja $\alpha = 0$, dabūjam

imaginaru skaitli βi

Ja veidu βi sauc par tīru imaginaru skaitli, tad kompleksu skaitli $\alpha + \beta i$ var saukt par imaginaru skaitli. ?

2. Kompleksu skaitļu geometriska attēlošana tiek izdarīta ar Gausaa paņēmienu; reāli skaitļi tiek attēloti uz x ass un tīri imaginari skaitļi uz y ass.



Komplekss skaitlis

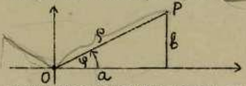
$$\alpha + \beta i$$

tiek attēlots ar punktu P, kuŗa koordinātes ir α un β.

Tā tad katram plāknes punktam atbilst noteikts skaitlis. Ja skaitlis ir reāls, tad viņa attēlojums atrodas uz OX ass, ja skaitlis tīrs imaginars, tad viņa attēlojums atrodas uz OY ass. Skaitlis ir komplekss, ja viņa attēlojums atrodās ārpus šīm taisnēm. Plākni, kuŗā skaitļi tiek šādi attēloti, sauc par kompleksu skaitļu plākni.

Punkts	P_1	attēlo	kompleksu	skaitli	$3 + 2i$
"	P_2	"	"	"	$-2 + 3i$
"	P_3	"	"	"	$-1 - 2i$
"	P_4	"	"	"	$4 - 3i$
"	P_5	"	reālu	"	5
"	P_6	"	tīru imaginaru	"	$+i$
"	P_7	"	"	"	$-4i$

Kompleksa skaitļa veids $a + bi$ tiek saukts par normālveidu ~~un~~



$$\rho = +\sqrt{a^2 + b^2} \quad ....(1)$$

par kompleksa skaitļa modulu, jeb absolutu vērtību.

Kompleksu skaitli varam arī rakstīt šādā veidā

$$a + bi = \rho\left(\frac{a}{\rho} + \frac{b}{\rho}\cdot i\right)$$

un tā kā

$$\frac{a^2}{\rho^2} + \frac{b^2}{\rho^2} = \frac{a^2 + b^2}{\rho^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = 1$$

tad no 0 līdz 2π ir noteikts tikai viens leņķis φ, ja liekam

$$\begin{aligned} \operatorname{Cos}\varphi &= \frac{a}{\rho} \\ \operatorname{Sin}\varphi &= \frac{b}{\rho} \end{aligned} \quad ....(2)$$

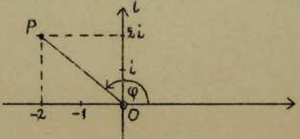
Ieliekot šīs vērtības nolīdzinājumā, dabūjam

$$a + bi = \rho(\operatorname{Cos}\varphi + i\operatorname{Sin}\varphi) \quad ....(3)$$

Šī nolīdzinājuma labā puse izteic kompleksu skaitļu trigonometriskā veidā.

Leņķi φ sauc par kompleksa skaitļa argumentu, amplitudi, ~~anomaliju~~. No zīmējuma redzams, ka $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ ir vektors OP un leņķis φ atrodas starp reālo skaitļu asi un ρ. Tā tad $OP = \rho$ ir kompleksa skaitļa $a + bi$ moduls, jeb arī tā absolūtā vērtība un faktors $\cos\varphi + i\sin\varphi$ ir kompleksa skaitļa virziena koeficients.

Attēlojot kompleksu skaitļu $-2 + 2i$ dabūjam punktu P.



Šeit a = - 2 , b = 2.

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\left.\begin{aligned} \sin\varphi &= \frac{b}{\rho} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \cos\varphi &= \frac{a}{\rho} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

No (4) redzams, ka leņķis φ atrodas otrā kvadrantā, jo šī leņķa sin ir + un cos ir −. Šis leņķis $\varphi = \frac{3}{4}\pi$, bet tā kā

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi &= \cos(\varphi + 2k\pi) \\ \sin\varphi &= \sin(\varphi + 2k\pi) \end{aligned}\right\} \text{(k - vesels skaitlis pēc patikas),}$$

tad varam rakstīt, ka

$$\varphi = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi$$

Tā tad kompleksa skaitļa −2 + 2i izteiksme trigonometriskā veidā ir

$$-2 + 2i = 2\sqrt{2}\left[\cos(\tfrac{3}{4}\pi + 2k\pi) + i \sin(\tfrac{3}{4}\pi + 2k\pi)\right]$$

Tādā pat kārtā dabūjam, ka

skaitļa	+1	moduls	ir 1	un	arguments	$0 + 2k\pi = 2k\pi$
"	−1	"	" 1	"	"	$\pi + 2k\pi$
"	i	"	" 1	"	"	$\frac{\pi}{2} + 2k\pi$
"	−i	"	" 1	"	"	$\frac{3}{2}\pi + 2k\pi$

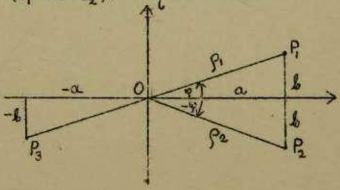
Skaitlis 1 tiek izteikts trigonometriskā veidā

$$1 + 0.i = 1(\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi)$$

Skaitlis −i trigonometriskā veidā

$$0 - i = 1\left[\cos(\tfrac{3}{2}\pi + 2k\pi) + i \sin(\tfrac{3}{2}\pi + 2k\pi)\right]$$

Visi skaitļi, kuŗu moduls ir 1, atrodas uz aploces ar radiusu = 1 un centru O punktā. Skaitļi ar vienlīdzīgu modulu atrodās uz tās pašas aploces ar radiusu ρ ap O punktu. Skaitļi a+ bi un a − bi tiek saukti par piekārtotiem kompleksiem skaitļiem. Šo skaitļu reālas daļas ir vienlīdzīgas un viņu imaginaru daļu absolūtas vērtības ir vienlīdzīgas, bet ar pretēju zīmi (P_1 un P_2).



No zīmējuma redzams,ka piekārtotu kompleksu skaitļu moduļi ir vienlīdzīgi, viņu argumentu absolūtā vērtība ir vienlīdzīga, bet zīme ir pretēja. Skaitļi a + bi un -a - bi tiek saukti par pretējiem skaitļiem (P_1 un P_3).

3. Rēķinu likumi.

1)Ja a + bi = 0, tad vajag būt a = 0 un tāpat arī b = 0. No zīmējuma redzams, ka tādā gadijumā $\rho = 0$, bet φ var pieņemt katru vērtību.
2)Ja divi kompleksi skaitļi ir vienlīdzīgi

$$a_1 + b_1 i = a_2 + b_2 i$$

tad viņi tiek attēloti ar vienu un to pašu punktu, tādēļ

$$a_1 = a_2 \;;\quad b_1 = b_2 \;;\quad \rho_1 = \rho_2$$

bet

$$\varphi_2 = \varphi_1 + 2k\pi \text{ (k vesels skaitlis pēc patikas).}$$

3)Divu kompleksu skaitļu saskaitīšana tiek dēfinēta ar sekojošu izteiksmi

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)i \ldots\ldots(5)$$

No šīs izteiksmes redzams, ka pie kompleksu skaitļu saskaitīšanas derīgs komutatīvais un pie vairākiem saskaitāmiem arī asociatīvais likums.

4)Atņemšana izdarāma,pieskaitot mazināmam mazinātāju ar pretēju zīmi

$$(a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 + b_1 i) + (-a_2 - b_2 i) = a_1 - a_2 + (b_1 - b_2)i \ldots\ldots(6)$$

5)Secinājums
divu piekārtotu kompleksu skaitļu summa ir reāla,bet viņu starpība tīri imaginara.

$$(a + bi) + (a - bi) = 2a$$

$$(a + bi) - (a - bi) = 2bi$$

6)Pie kompleksu skaitļu reizināšanas,pielietojot distributīvo likumu un ievērojot, ka $i^2 = -1$, dabūjam

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$$

Secinājums

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$$

Reizinājums trigonometriskā veidā

$$z_1 = \rho_1 (\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1)$$

$$z_2 = \rho_2 (\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2)$$

$$z_1 . z_2 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1) . \rho_2 (\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2) =$$
$$= \rho_1\rho_2(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + i \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + i^2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 =$$
$$= \rho_1\rho_2[\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + i^2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \sin\varphi_2)] =$$
$$= \rho_1\rho_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

Kompleksi skaitļi tiek reizināti, reizinot viņu moduļus un saskaitot argumentus.
Vispārīgi varam rakstīt

$$z_1 . z_2 \ldots . z_n = \rho_1 . \rho_2 \ldots . \rho_n [\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n)]$$

7)Kompleksu skaitļu dalīšana normālveidā

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) - i(a_1 b_2 - a_2 b_1)}{a_2^2 + b_2^2} =$$

$$= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a^2 + b^2} + i\,\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a^2 + b^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Dalījumu $\frac{1}{z}$ dabūjam

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} \cdot i$$

Kompleksu skaitļu dalīšana trigonometriskā veidā

$$z = \frac{z_1}{z_2}$$

no šejienes dabūjam

$$z_1 = z \cdot z_2$$

Ja kompleksu skaitļu $z_1 z$ z_2 moduļi ir ρ_1 $\rho\ \rho_2$ un viņu amplitudas φ_1 φ φ_2, tad kompleksa skaitļa z_1 modulis ir

$$\rho_1 = \rho \cdot \rho_2 \quad \text{un} \quad \rho = \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

z_1 amplituda ir $\varphi_1 = \varphi + \varphi_2$, tādēļ

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$$

tā tad

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{\rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right] \ldots (8^a)$$

Izteicot trigonometriskā veidā $\frac{1}{z}$ dabūjam

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \frac{1(\cos 0 + i\sin 0)}{\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \frac{1}{\rho}\left[\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)\right] \ldots (9)$$

8) Kompleksu skaitļu kāpināšana

$$z^n = (a + bi)^n$$

pie n vesela pozitīva skaitļa tiek dēfinēta

$$z^n = \overset{(1)}{z} \cdot \overset{(2)}{z} \cdot \overset{(3)}{z} \ldots\ldots \overset{(n)}{z} \quad \text{(n faktoru)}$$

Še izlietojam reizinājuma izteiksmi (7) un dabūjam

$$z^n = (a+bi)^n = [\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = \rho^n[\cos n\varphi + i\sin n\varphi]$$

Tālāk dēfinē, ka

pie $n = 0$

$$z^0 = 1$$

un

$$z^{-n} = \frac{1}{z^n}$$

Ja n ir daļas skaitlis, tad dēfinē

$$\xi = z^{\frac{\lambda}{\mu}} = \sqrt[\mu]{z^\lambda}$$

ξ ir tāds skaitlis, kurš kāpināts ar μ dod z^λ, tā tad

$$\xi^\mu = z^\lambda$$

liekam

$$\xi = r(\cos\omega + i\sin\omega);\ \xi^\mu = r^\mu(\cos\mu\omega + i\sin\mu\omega)$$

un

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi);\ z^\lambda = \rho^\lambda(\cos\lambda\varphi + i\sin\lambda\varphi)$$

$$r^\mu(\cos\mu\omega + i\sin\mu\omega) = \rho^\lambda(\cos\lambda\varphi + i\sin\lambda\varphi)$$

Ja šie lielumi ir vienlīdzīgi, tad, kā agrāk norādīts, viņu moduļiem vajag būt vienlīdzīgiem

$$r^{\mu} = \rho^{\lambda}$$

un viņu argumenti atšķiras par $2k\pi$

$$\mu\omega = \lambda\varphi + 2k\pi$$

un $\left.\begin{aligned} r &= \rho^{\frac{\lambda}{\mu}} \\ \omega &= \frac{\lambda\varphi + 2k\pi}{\mu} \end{aligned}\right\}$ (k ir vesels skaitlis, pēc patikas, var būt arī 0.)

$\rho^{\frac{\lambda}{\mu}}$

tā tad

$$z^{\frac{\lambda}{\mu}} = \xi = r(\cos\omega + i\sin\omega) = \rho^{\frac{\lambda}{\mu}}\left[\cos\frac{\lambda\varphi+2k\pi}{\mu} + i\sin\frac{\lambda\varphi+2k\pi}{\mu}\right] \ldots (10)$$

Šī izteiksme tiek saukta par Moivre teoremu. Lai gan k ir pēc patikas vesels skaitlis, tomēr $z^{\frac{\lambda}{\mu}}$ dabū tikai μ vērtības un ne vairāk.

Izteiksmes (10) absolūtā vērtība ir, kā no agrākā zināms, $\rho^{\frac{\lambda}{\mu}}$ t.i. katras saknes absolūtā vērtība. Bet katrai saknei ir sava arguments, atkarīgs no λ, φ un μ, kuŗu vērtības ir dotas. Divi sekojoši argumenti pie pēc patikas ņemta k ir

$$\frac{\lambda\varphi}{\mu} + \frac{2\pi}{\mu}\cdot k \quad \text{un} \quad \frac{\lambda\varphi}{\mu} + \frac{2\pi}{\mu}(k+1)$$

Viņu starpība ir

$$\frac{2\pi}{\mu}$$

Šis lielums rāda, ka aploce ir dalīta μ vienlīdzīgās daļās. Ja ņemam moduļa vērtību $\rho^{\frac{\lambda}{\mu}}$, un ar šo vērtību vedam aploci ap O punktu, tad uz šīs aploces atrodas visi punkti, kuŗi dod izteiksmes (10) saknes, bet šādu punktu pavisam uz visas aploces ir $\frac{2\pi}{\mu}$.

Pie $k = 0$ argumenta vērtība $\frac{\lambda\varphi}{\mu} + \frac{2\pi}{\mu}k$ ir $\frac{\lambda\varphi}{\mu}$
" $k = 1$ " " " " $\frac{\lambda\varphi}{\mu} + \frac{2\pi}{\mu}\cdot 1$
" $k = 2$ " " " " $\frac{\lambda\varphi}{\mu} + \frac{2\pi}{\mu}\cdot 2$
" $k = \mu$ " " " " $\frac{\lambda\varphi}{\mu} + \frac{2\pi}{\mu}\cdot\mu$

Kā redzams, beidzamā vērtība, pie $k = \mu$, atšķiras no vērtības pie $k = 0$ ar 2π, kas neiespaido cos un sin vērtīb., tādēļ visas saknes vērtības dabūjam, liekot $k = 0$, $k = 1$ ......$k = \mu - 1$ un sakne dabū tikai μ vērtības.

Piemērs.
Dabūt $\sqrt[n]{1} = (1)^{\frac{1}{n}} = (1 + 0i)^{\frac{1}{n}} =$

$$a = 1 \;;\; b = 0 \;;\; \lambda = 1 \;;\; \mu = n$$

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{a}{\rho} = \frac{1}{1} = 1 \\ \sin\varphi &= \frac{b}{\rho} = \frac{0}{1} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \varphi = 0$$

$$\sqrt[n]{1} = 1^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{1.0 + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{1.0 + 2k\pi}{n}\right)$$

$$= \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

pie n = 3 dabūjam

$$\sqrt[3]{1} = \cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}$$

liekot k = 0 dabūjam $z_1 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$

$k = 1$ " $z_2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$

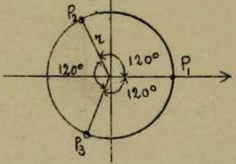
$k = 2$ " $z_3 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}$

Šīs 3 saknes atrodās uz aploces ar radiusu 1.

pirmā pie $\varphi_1 = 0$

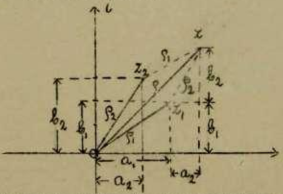
otra " $\varphi_2 = \frac{2\pi}{3} = 120^\circ$

trešā " $\varphi_3 = \frac{4\pi}{3} = 240^\circ$



9)Operacijas ar kompleksiem skaitļiem grāfiskā veidā.
Saskaitīšana.

Dabūt $z = z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)i$
Kā redzams no zīmējuma, kompleksus skaitļus saskaita, veidojot to moduļu grafisko summu.



Šis zīmējums arī rāda, ka divu kompleksu skaitļu summas moduls ir mazāks par viņu moduļu aritmetisko summu. Šī izteiksme, kā redzams, arī tad pareiza, ja saskaitāmo skaits lielāks par divi.

$$\rho \leqslant \rho_1 + \rho_2$$

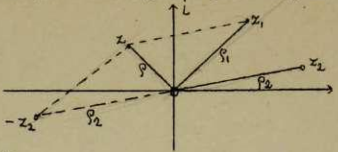
$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$$

Divu jeb vairāku skaitļu summas moduļs tik tad ir vienlīdzīgs šo skaitļu modulu aritmetiskai summai, ja skaitļi ir reāli vai tīri imaginārī.

Atņemšana.

Dabūt $z = z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$

Zīmējums rāda, ka z ir diagonāle parallelogrammā z_1 un $-z_2$



Reizināšana. Dabūt $z = z_1 \cdot z_2$

Griež staru Oz_1, kamēr tā arguments dabū vērtību $\varphi_1 + \varphi_2$. Nogriežam $OL = Oz_2$. Savieno z_1 un 1, vedot no L taisni ‖ $z_1 1$ dabū punktu N, tad

$$\frac{ON}{Oz_1} = \frac{OL}{1}$$

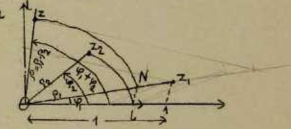
$$\frac{ON}{\rho_1} = \frac{\rho_2}{1}$$

$$ON = \rho_1 \cdot \rho_2$$

Tā kā $\rho = \rho_1 \cdot \rho_2$, tad redzams, ka

$$ON = \rho$$

Nogriežot ON uz taisnes, kuŗa vesta ar leņķi $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, dabūjam punktu z, kas attēlo reizinājumu $z_1 . z_2$. Reizinājuma modulis: $\rho = Oz$ un tā amplituda: $\varphi_1 + \varphi_2$



Dalīšana. Dabūt $z = \frac{z_1}{z_2}$

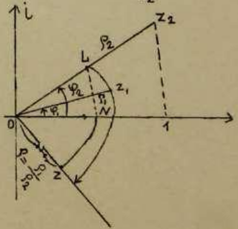
Griežot Oz_2 negatīvā virzienā, dabū virzienu $\varphi_1 - \varphi_2$. Nogriežam $OL = Oz_1$. Vedot LN ‖ $z_2 1$ dabūjam punktu N.

$$\frac{ON}{1} = \frac{OL}{Oz_2}$$

Tā kā $OL = Oz_1 = \rho_1$ un $Oz_2 = \rho_2$, dabūjam

$$ON = \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

Nogriežot Oz = ON, dabūjam punktu z, kas attēlo $\frac{z_1}{z_2}$



Kāpināšana. Dabūt $z^n = z.z.z......$ (n faktori)

Piemēram, dabūt z^3 .Griežam staru Oz kamēr viņa virziena leņķis dabū vērtību 3φ.Nogriežam OM = Oz. Vedam $ML_2 \parallel 1z$, tad

$$\frac{OL_2}{\rho} = \frac{\rho}{1}$$

$$OL_2 = \rho^2$$

Nogriežam $OM_2 = OL_2$ un vedam, $M_2L_3 \parallel ML_2$, tad

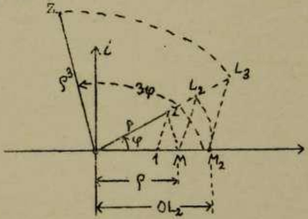
$$\frac{OL_3}{OL_2} = \frac{OL_2}{\rho}$$

$$OL_3 = \frac{OL^2}{\rho} = \frac{\rho^4}{\rho} = \rho^3$$

Uz taisnes ar viezienа leņķi 3φ nogriežam OZ = OL_3,tad

$$OZ = OL_3 = \rho^3$$

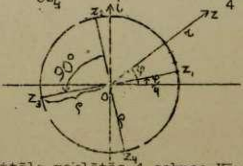
un punkts Z attēlo z^n.



Saknes izvilkšana.
Dabūt,piemēram $z = \sqrt[4]{a + bi}$; $r = \sqrt{a^2 + b^2}$

Ap O ved aploci ar radiusu $\rho = \sqrt[4]{r}$ .Dala leņķi φ četrās daļās.

Pirmās saknes stars		Oz_1	dabū amplitudi		$\frac{\varphi}{4}$
Otrās	"	" Oz_2	"	"	$\frac{\varphi + 2\pi}{4}$
trešās	"	" Oz_3	"	"	$\frac{\varphi + 4\pi}{4}$
Ceturtās	"	" Oz_4	"	"	$\frac{\varphi + 6\pi}{4}$



Punkti z_1, z_2, z_3, z_4 attēlo meklētās 4 saknes.Kā redzams visas, ar kompleksu skaitli izdarītās operācijas kā rezultātu dod atkal kompleksu skaitli.

ATTIECĪBAS.

Attiecību $a : b = a' : b'$

varam uzrakstīt

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{\lambda a'}{\lambda b'} = \frac{\frac{a'}{\mu}}{\frac{b'}{\mu}}$$

seko

$$a : b = \lambda a' : \lambda b' = \frac{a'}{\mu} : \frac{b'}{\mu} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Liekot

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \rho$$

dabūjam

$$a = b\rho \quad ; \quad a' = b'\rho$$

ρ sauc par attiecības faktoru.

Attiecību $a : b : c : d = a' : b' : c' : d' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

vai arī $a : a' = b : b' = c : c' = d : d'$

pārveidojam ar attiecības faktoru

$$a = a'\rho \; ; \; b = b'\rho \; ; \; c = c'\rho \; ; \; d = d'\rho \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2^a)$$

Ar attiecības faktoru palīdzību viegli izvedāmas attiecību formulas, tā, ja $a : b = a' : b'$

tad

$$a = \rho a' \quad \text{un} \quad b = \rho b'$$

un

$$a + b = \rho(a' + b')$$

$$a - b = \rho(a' - b')$$

seko

$$(a \pm b) : a = (a' \pm b') : a'$$

$$(a \pm b) : b = (a' \pm b') : b'$$

$$(a + b):(a - b) = (a' + b'):(a' - b')$$

Pielietojumi.

1)Ja divu lineāru nolīdzinājumu sistēmas atslēgums dots,

$$x : y : 1 = 3 : 4 : 7$$

tad

$$x : 1 = 3 : 7 \quad \text{un} \quad y : 1 = 4 : 7$$

un

$$x = \frac{3}{7} \quad ; \quad y = \frac{4}{7}$$

Otrādi, ja šādas sistēmas triju nolīdzinājumu atslēgums dots

$$x = \frac{a}{d} \quad ; \quad y = \frac{b}{d} \quad ; \quad z = \frac{c}{d}$$

tad varam rakstīt

$$x : y : z : 1 = a : b : c : d$$

2)Dots $tg\frac{\alpha}{2} = t$; dabūt $\sin\frac{\alpha}{2}$ un $\cos\frac{\alpha}{2}$

$$\sin\frac{\alpha}{2} : \cos\frac{\alpha}{2} = t : 1$$

tad

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \rho t \quad \text{un} \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \rho 1$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 = \rho^2(1 + t^2)$$

$$\rho = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + t^2}}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{t}{\pm\sqrt{1+t^2}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\pm\sqrt{1+t^2}}$$

PERMUTACIJAS, INVERSIJAS.

Sakopojumu no n blakus stāvošiem elementiem sauc par permutaciju.

a b d c

ir permutacija no četriem elementiem. Še elementi apzīmēti ar burtiem, bet tos var apzīmēt arī ar cipariem, piemēram

1 3 2 4

Divi permutacijas elementi stāv dabiskā kārtībā, ja augstākais seko zemākam, piemēram elementi a b un 1 3 stāv dabiskā kārtībā, jo a alfabetā stāv zemāk par b un 1 skaitļu rindā zemāk par 3. Ja zemāks elements seko augstākam, tad šie elementi veido inversiju, piemēram elementi dc, tāpat arī 3 2 veido inversiju. Permutacija, kuŗas elementi seko dabiskā kārtībā, tiek saukta par zemāko, katra cita permutacija no šiem pašiem elementiem satur inversijas. Inversiju lielākais skaitls atrodās tajā permutacijā, kuŗu dabūjam apgriežot zemāko permutaciju, jo apgrieztajā permutacijā katrs elements ar katru sekojošu elementu veido inversiju.

Piemēram permutacijā 1 2 3 4

nav inversiju, tā ir zemākā permutacija no dotiem elementiem, bet permutacijā 1 3 2 4

ir viena inversija, jo 3 stāv iepriekš 2. Permutacijā

4 3 2 1

ir 6 inversijas, kuŗas veidojās šādi

elementam	4	seko	zemāki	elementi	3,2,1	tas dod	3 invers.
"	3	"	"	"	2,1	" "	2 "
"	2	"	"	"	1	" "	1 "

Permutacijas no n elementiem šķiro 2 klasēs attiecībā uz permutacijas inversiju skaitu. Vienā klasē skaitās permutacijas ar pāra skaita inversijām un otrā klasē ar nepāra skaita inversijām.

Lai dabūtu permutaciju skaitu P_n no n elementiem, kārtojam šos n elementus n grupās, katrā grupā liekot par pirmo elementu vienu no n elementiem. Katrā no šīm grupām pārējie (n - 1) elementi dod P_{n-1} permutaciju skaitu, tā tad permutaciju skaits visās grupās kopā ir

$$P_n = n.P_{n-1}$$

Ja permutacijā ir tikai viens elements, tad permutaciju skaits

$$P_1 = 1$$

pie diviem elementiem

$$P_2 = 2.P_1 = 2 . 1$$

tālāk, pie 3 elementiem

$$P_3 = 3.P_2 = 3\ 2\ 1$$

pie n elementiem

$$P_n = 1.2.3....n = n!$$

Bézout izteiksme.

Ja permutacijā pārmaina vietās divus elementus, tad saka,ka izdarīta transpozicija. Visas permutacijas no n elementiem var dabūt no vienas, izdarot tanī elementu transpozicijas.

Ja kādā permutacijā izdaram vienu transpoziciju,tad inversiju skaits mainās par nepāra skaitļu, tādēļ permutacija pāriet no vienas klases otrā.

P i e r ā d i j u m s .

Permutacijā

A i k B

A un B elementu grupas, i un k elementi. Ja šinī permutacijā pārmainam i un k vietās, dabūjam

A k i B

Ar šo maiņu še nāk klāt viena inversija, jo tagad pēc k seko zemāks loceklis i. Ja būtu dota permutacija A k i B, tad pārmainot k un i vietās dabūtu permutaciju A i k B un šeit būtu zuduse viena inversija, salīdzinot ar permutaciju A k i B.

Ja dota permutacija, kuŗā elementi i un k nav blakus stāvoši

A i C k B

kur A,B,C elementu grupas, pie kam C grupā atrodas m elementi, tad pārmainot vietās i un C dabūjam

A C i k B

Še,pārnesot i C vietā, esam izdarijuši m transpozicijas. Pārnesot k vietā i dabūjam

A C k i B

Še esam izdarijuši vienu transpoziciju, un beidzot, pārnesot C vietā k dabūjam

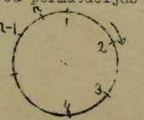
A k C i B

Še esam izdarijuši m transpozicijas ar blakus stāvošiem elementiem. Tā tad no permutacijas A i C k B pārejot uz permutaciju A k C i B esam izdarijuši 2m + 1 transpozicijas ar blakus stāvošiem elementiem, inversiju skaits tā tad mainijies nepāra skaitļa reizes 1 un tādēļ inversiju skaits permutacijā A k C i B atšķirās par nepāra skaitļu no tā inversiju skaita, kas atrodās permutacijā A i C k B.

No dotās permutacijas, kuŗā atrodās n elementi, dabūjam citu permutaciju, pārmainot vietas diviem elementiem.Ja pirmā permutacija ir pāra klasē, tad otra nepāra klasē un otrādi. Tā tad puse no visām permutacijām no n elementiem ir pāra klasē un puse nepāra klasē.

Cikliskas permutacijas.

Ja permutacijas n elementus uzrakstam uz aploces pieņemtā virzienā, tad katru sakopojumu no šiem n elementiem, lasītu pieņemtā virzienā, sauc par ciklisku permutaciju no dotiem n elementiem



1 2 3 .... n
2 3 ....n 1
3 .... n 1 2

} ir cikliskas permutacijas

Katru ciklisku permutaciju dabū no priekšējās, pārnesot pirmo elementu beidzamā vietā, izdarot n - 1 transpozicijas blakus stāvošiem elementiem.Tā tad n elementu vienreizīga cikliska permutacija ir tas pats, kā n - 1 transpozicijas.Ja n ir pāra skaitlis, tad n - 1 ir nepāra skaitlis un tāpēc dotā permutacija un dabūtā nav vienā klasē. Ja n ir nepāra skaitlis, tad izejas permutacija un dabūtā ir vienā klasē.

DETERMINANTI.

I. Determinanta dēfinicija.

1. Ja no m.n elementiem veidojam m rindas,katrā n elementu, tad šādu, sakopojumu sauc par matriksu.

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{m.n} \end{matrix}$$

Katram šīs matriksas elementam ir divi indeksi.Pirmais norāda rindu, kurā elements atrodās, otrs norāda stabiņu jeb kolonu. Kad matriksā rindu skaits ir tik pat liels kā stabiņu skaits, tad matriksu sauc par kvadratisku.

Var apzīmēt arī stabiņus ar burtiem un rindas ar rādītājiem, vai otrādi

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & \cdots & k_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & k_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_n & b_n & c_n & \cdots & k_n \end{matrix}$$

Kvadratiskā matriksā

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

uz diagonālēm atrodās elementi

$$a_{11} \; a_{22} \cdots\cdots a_{nn} \quad \text{un} \quad a_{n1} \; a_{(n-1)2} \cdots\cdots a_{1n}$$

Diagonāli a_{11} ..... a_{nn} sauc par galveno diagonāli un a_{n1} ..a_{1n} par blakus diagonāli.

Ja veidojam galvenās diagonales elementu reizinājumu

$$a_{11} \; a_{22} \; a_{33} \cdots\cdots a_{nn}$$

un šinī reizinājumā permutējam otros indeksus, tad dabūjam n! permutacijas no šiem elementiem. Puse no šīm permutacijām (ievērojot inversiju skaitu) ir pāra klasē un puse nepāra klasē. Pāra klases permutacijām dodam zīmi + un nepāra klases permutacijām zīmi –. Tādā kārtā dabūjam n! reizinājumus. Šo reizinājumu summu sauc par dotās kvadratiskās matriksas determinantu. Piemēram, dota matriksa

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

Šīs matriksas galvenajā diagonālē atrodas elementi

$$a_{11} \quad a_{22} \quad a_{33}$$

permutējot indeksus 1 2 3 dabūjam permutacijas

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
1 2 3	1 3 2	2 1 3	2 3 1	3 1 2	3 2 1

Pirmajā	permutacijā nav	inversiju,	tā tad zīme	$+ a_{11}\ a_{22}\ a_{33}$
otrajā	" ir 1	"	" " "	$- a_{11}\ a_{23}\ a_{32}$
trešajā	" " 1	"	" " "	$- a_{12}\ a_{21}\ a_{33}$
ceturtajā	" " 2	"	" " "	$+ a_{12}\ a_{23}\ a_{31}$
piektajā	" " 2	"	" " "	$+ a_{13}\ a_{21}\ a_{32}$
sestajā	" " 3	"	" " "	$- a_{13}\ a_{22}\ a_{31}$

Dotās matriksas determinants tad ir augšējo reizinājumu summa

$$a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Locekli

$$a_{11}a_{22}a_{33}$$

no kuŗa visi citi determinanta locekļi tiek veidoti, sauc par determinanta galveno locekli.

Kā redzams, determinanta katrā loceklī atrodam tikai pa vienam elementam no katras rindas un katra stabiņa.

2. Kā redzējam, determinantam ir n! locekļu. Katrs loceklis ir reizinājums no n elementiem, tādēļ n-tās kāpes un viņu tāpēc sauc par n-tās kāpes determinantu.

Lai apzīmētu determinantu lieto simbolus

$$D = \sum \pm a_{11}\ a_{22}\ a_{33}$$

ar šo norādot determinanta veidošanu pēc dēfinicijas. Lieto arī simbolu, kas rāda visu elementu sistēmu, ieslēdzot determinanta matriksu starp divām vertikalām strīpām

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Elementu a_{11} sauc par determinanta galvu.

3. Otrās kāpes determinants, attīstot to kā norādīts, dod

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum \pm a_{11}\ a_{22} = a_{11}\ a_{22} - a_{21}\ a_{12}$$

jo permutējot 1 2 dabūjam

1 2 2 1

pirmajā permutacijā 1 2 nav inversijas, tā tad zīme $+ a_{11}\ a_{22}$

otrajā " 2 1 ir 1 inversija, " " " $- a_{12}\ a_{21}$

Tā tad otrās kāpes determinants tiek attīstīts no galvenās diagonāles elementu reizinājuma, novelkot blakus diagonāles elementu reizinājumu.

Trešās kāpes determinanats attīstīts nodaļā 1.

II. Determinanta īpašības.

1. Ja determinantā liek stabiņus, tai pašā kārtībā, rindu vietā, tad determinanta vērtība netiek mainīta.

Dots determinants

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum \pm a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$$

Pārveidotais determinants, kurā pirmais stabiņš likts pirmās rindas vietā u.t.t. ir

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum \pm a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$$

Redzams, ka abiem determinantiem ir tas pats galvenais loceklis, kura otrus rādītājus permutējot dabūjam determinanta locekļus, tādēļ arī

$$D = D'$$

Secinājums.

Pamatojoties uz pierādītās izteiksmes redzams, ka visas izteiksmes, kas pierādītas priekš stabiņiem, derīgas arī priekš rindām un otrādi.

2. Ja determinantā pārmaina divas paralelas rindas (stabiņus) vienu ar otru, tad determinanta vērtība maina tikai zīmi.

Dots determinanats

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum \pm a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$$

Attīstot augšējo determinantu, kā agrāk norādīts no galvenās diagonāles, dabūjam izteiksmi - summu, kuru apzīmējam ar D. D izteiksmē izdaram katrā loceklī rādītāju i un k transpoziciju un šo pārveidoto izteiksmi apzīmējam ar D'. Katram D' izteiksmes loceklim atbilst izteiksmē D loceklis ar vienlīdzīgu absolutu vērtību, bet pretēju zīmi, tā tad D' = - D. Ievērojot izteiksmes D simbolu, redzams, ka D' dabūta no D izdarot determinantā stabiņu i un k transpoziciju.

Piemērs.

Otrās kāpes determinants dod attīstījumā

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}$$

Pārmainot stabiņus dabūjam determinantu un viņa attīstijumu

$$D' = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = a_{12} a_{21} - a_{22} a_{11} = -(a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}) = - D$$

No augšējā seko, ka ja determinantā pārvietojam kaut kādā kārtā stabiņus un rindas, tad determinanta absolūtā vērtībā nemainās, bet viņa zīme var mainīties.

Tas redzams šādi. Ja determinantā R pārvietojam savstarpēji stabiņus k un k + 1, tad R' = - R. Bet ja determinantā R' atkal pārvietojam savstarpēji stabiņus k + 2 un k + 1, tad šis determinants R" = - R' = R. Tā tad stabiņu transpozicijas, pāra skaitā izdarītas, nemaina determinanta zīmi. Tas pats sakams, pamatojoties uz agrāk teikto, arī par rindām.

Ja dotā determinantā

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

pārvietojam 1) trešo stabiņu un pirmo stabiņu savstarpēji, tad izdaram 1 transpoziciju, zīme mainās.

2) pēc tam pārvietojam otru rindu un pirmo savstarpēji, izdaram 1 transpoziciju, zīme mainās.

Pārveidotais determinants ir

$$D' = \begin{vmatrix} a_{23} & a_{22} & a_{21} & a_{24} \\ a_{13} & a_{12} & a_{11} & a_{14} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} & a_{34} \\ a_{43} & a_{42} & a_{41} & a_{44} \end{vmatrix} = D$$

Pēc maiņas stabiņu rādītāju permutacija galvenā diagonālē ir 3 2 1 4, viņa ir nepāra klasē, bet rindu rādītāju permutacija galvenā diagonālē ir 2 1 3 4 un arī nepāra klasē.

Ja rindu rādītāju permutācija un tāpat arī stabiņu rādītāju permutācija ir abas vienā klasē, tad D' = D, bet ja šis permutācijas nepieder pie vienas klases, tad D' = -D. Pirmā gadijumā pārveidošana dabūta ar pāra skaita transpozicijām, bet otrā ar nepāra skaita transpozicijām.

3. Ja determinantā divas paralelas rindas ir vienlīdzīgas, tad determinanta vērtība ir nulle.

Pārmainot determinantā vienlīdzīgas rindas, determinants īstenībā savā veidā nemainās, tādēļ D' = D. Bet no agrākā ir zinams, ka ja savstarpēji pārvietojam divas rindas, tad determinantam vajag mainīt zīmi. Tā tad D' = -D un arī D' = D = -D. Tas var būt tikai tad, ja D = 0.

4. Determinants tiek reizināts ar skaitli k, ja reizinam kādas rindas (stabiņa) katru elementu ar k.

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdot k & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdot k & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2}\cdot k & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \cdot D$$

Katrs determinanta loceklis ir reizinājums, kuŗā atrodās no katras rindas un katra stabiņa pa vienam elementam. Tā tad determinanta D' katrā loceklī atrodas viens elements no ar k reizinātā stabiņa, kādēļ faktors k atrodās determinanta D' katrā loceklī. Faktoru k izņemam priekš determinanta un dabūjam augšējo izteiksmi, kuŗa pierāda teorēmu un viņas apgriezumu.

Secinājumi.

a)determinantu dala ar skaitli k, ja ar šo skaitli dala determinantas kādas rindas (stabiņa) elementus.

b)Ja determinantā kādā rindā (stabiņā) visi elementi ir 0,tad determinanta vērtība ir 0.

Liekot determinantā D' k = 0 redzam, ka determinants dabū vērtību 0.

c)Determinanta vērtība ir 0, ja kādas rindas (stabiņa) elementi ir proporcionāli kādas paralelas rindas (stabiņa) elementiem.

Iznesot priekš determinanta kopējo faktoru,paliek determinants ar divi vienlīdzīgām paralelām rindām, kuŗa vērtība pēc iepriekšējā ir 0.

5. Apakšdeterminanti.

Ja n-tās kāpes determinantā velk strīpu pēc r-tā stabiņa un r-tās rindas, tad tas tiek sadalīts divās kvadratiskās un divās taisnleņķa matriksās. Kvadratiskās matriksas dod atkal determinantus, vienu ar r un otru ar (n - r) elementiem.

$$D = \left|\begin{array}{cccc:cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & a_{1,r+1} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} & a_{2,r+1} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} & a_{r+1,r+1} & \cdots & \cdots & a_{rn} \\ \hdashline a_{r+1,1} & a_{r+1,2} & \cdots & a_{r+1\,r} & a_{r+1,r+1} & \cdots & \cdots & a_{r+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nr} & a_{n,r+1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{array}\right|$$

No D ar norādīto paņēmienu izveidotos determinantus D_1 un D_2 sauc par D apakšdeterminantiem

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \quad \text{un } D_2 = \begin{vmatrix} a_{r+1,r+1} & \cdots & a_{r+1,n} \\ a_{r+2,r+2} & \cdots & a_{r+2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,r+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Apakšdeterminantiem D_1 un D_2 ir tā īpašība, ka ikviens loceklis no D_1 reizināts ar ikvienu locekli no D_2 dod vienu locekli no D.

Ja reizinam D_1 galveno locekli ar D_2 galveno locekli,tad redzams, ka dabū D galveno locekli.

Ja apskatam tikai locekļu absolūto vērtību,tad minētā īpašība redzama arī pie citiem locekļiem,jo katrā šādā reizinājumā atrodās no determinanta D_1 un D_2 pa vienam elementam no katras rindas un stabiņa un tādēļ šāds reizinājums ir determinanta D loceklis. Arī attiecībā reizinājuma zīmi izteiksme ir pareiza, jo ja ņemam kaut kādu locekli no D_1,tad šāda locekļa zīme ir noteikta ar viņa stabiņa rādītāju permutacijas inversiju skaitu,tāpat locekļa no D_2 zīme ir noteikta ar viņa stabiņa rādītāju permutacijas inversiju skaitu.Loceklim,kuŗu dabūjam reizinot D_1 locekli ar D_2 locekli,stabiņu rādītāju permutacijas inversiju skaits ir abu inversiju skaita summa un šī summa ir pāra skaitlis (kas dod + zīmi), ja abas inversijas ir vienā klasē (abas pāra,jeb abas nepāra), summa ir nepāra skaitlis (dod zīmi -), ja abas inversijas nav vienā klasē (viena pāra klasē, otra nepāra). Tas saskan arī ar zīmju likumu reizināšanā, jo ja abi locekļi ar vienādām zīmēm, tad reizinājums dod + zīmi, bet ja locekļi ir ar nevienādām zīmēm, tad reizinājums dod - zīmi.

Determinantus D_1 un D_2 ar minēto īpašību sauc arī par piekārtotiem apakšdeterminantiem.

6. Apakšdeterminanti, kuŗi piekārtoti determinanta elementiem.

Katram determinanta D elementam ir piekārtots (n - 1) - mās kāpes apakšdeterminants.

$$D = \left|\begin{array}{c|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \hline a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{array}\right|$$

Atdalot pirmo elementu a_{11} dabūjam viņam piekārtotu apakšdeterminantu D_{11}

$$D_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots\cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Šo apakšdeterminantu dabūjam, ja determinantā D strīpojam rindu un stabiņu, kuŗos atrodās a_{11}.

Lai dabūtu elementam a_{ik} piekārtotu apakšdeterminantu, D ir tā jāpārveido, lai elements a_{ik} atrostos determinanta D galvā, tad a_{ik} apakšdeterminants dabūjams, kā norādīts.

Elementu a_{ik} varam pārnest uz galvu a) pārnesot rindu i pirmās rindas vietā, pie tam jāizdara i-1 transpozicijas, b) pārnesot pēc tam stabiņu k pirmā stabiņa vietā, izdarot k-1 transpozicijas. Tā tad, elementu a_{ik} pārnesot determinantā galvā, jāizdara $i - 1 + k - 1 = i + k - 2$ transpozicijas. Pārveidots determinants $D' = D$, ja transpoziciju skaits ir pāra un $D' = -D$ ja transpoziciju skaits ir nepāra (pēc 2) un tādēļ

$D' = (-1)$ $\quad D' = (-1)^{k+i}D$, (jo 2 var atmest), un $D = (-1)^{i+k} D'$

Tā tad

$$D = (-1)^{k+i} \begin{vmatrix} a_{ik} & a_{i1}\; a_{i2} & \cdots & a_{ik-1} & a_{ik+1} & \cdots & a_{in} \\ a_{1k} & a_{11} \cdots\cdots & & a_{1k-1} & a_{1k+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,k} & a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,k-1} & a_{i-1,k+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,k} & a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,k-1} & a_{i+1,k+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{nk} & a_{n1} & & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad ..(I)$$

un a_{ik} piekārtots apakšdeterminanats D_{ik} ir

$$D'_{ik} = (-1)^{k+i} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,k-1} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,k-1} & a_{i-1,k+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,k-1} & a_{i+1,k+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Redzams, ka D_{ik} matriksa dabūjama, strīpojot determinantā D rindu un stabiņu, kuros atrodās elements a_{ik}. Apakšdeterminanta D_{ik} zīme ir plus, ja $k + i$ ir pāra skaitlis un minus, ja $k + i$ ir nepāra skaitlis.

D_{ik} zīmi dabūt var arī, ja katra D elementa vietai dod zīmi + jeb – atkarībā no tam, cik transpozicijas ir vajadzīgas, lai elementu pārnestu determinanta galvā.
Šis paņēmiens dod schemu

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \end{vmatrix}$$

Lai elementu a_{23} pārnestu galvā, jāizdara otras rindas transpozicija uz pirmo, un trešā stabiņa uz pirmo, tā tad 3 transpozicijas, kas dod – zīmi.

Arī $(-1)^{i+k} = (-1)^{2+3} = -1$ dod to pašu rezultātu.

Piemērs.

Dabūt apakšdeterminantu, piekārtotu elementam a_{32}

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \qquad D_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Arī pēc schemas redzams, ka D_{32} zīme ir minus.

7. Determinantu pirmā galvenā izteiksme.

Ja reizinam kādas rindas (stabiņa) katru elementu ar viņam piekārtotu apakšdeterminantā, tad šoreizinājumu summa dod determinanta vērtību.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D = a_{i1} D_{i1} + a_{i2} D_{i2} + a_{i3} D_{i3} + \dots + a_{in} D_{in}$$

Ja uzskatam determinanta I elementu a_{ik} par pirmās kāpes determinantu, tad izteiksme par piekārtot. apakšdeterminantiem dod, ka a_{ik} reizināts ar sava piekārtota apakšdeterminanta locekļiem dod determinanta D locekļus, kuŗos atrodās a_{ik} un viņam piekārtota apakšdeterminanta D_{ik} elementi. Tā tad

$$a_{ik} D_{ik}$$

aptver visus determinanta D locekļus, kuŗos atrodas elements a_{ik}. Tāpat $a_{i1} D_{i1}$ aptver visus locekļus ar a_{i1} u.t.t. Determinanta D katrā loceklī atrodas tikai pa vienam elementam no katras rindas, tā tad arī no rindas i pa vienam elementam. D locekļi ar a_{i1} doti ar $a_{i1} D_{i1}$, locekļi ar a_{i2} doti ar $a_{i2} D_{i2}$ u.t.t. Seko, ka $a_{i1} D_{i1} + a_{i2} D_{i2} + \dots + a_{in} D_{in}$ aptver visus determinanta D locekļus un tādēļ

$$D = a_{i1} D_{i1} + a_{i2} D_{i2} + \dots + a_{in} D_{in} \quad \dots\dots\dots \quad (II)$$

Ar šīs izteiksmes palīdzību n-tās kāpes determinanta aprēķināšana tiek pārvesta uz (n - 1) -tās kāpes determinanta aprēķināšanu. Turpinot šo paņēmienu, beidzot nākam pie 2-tās kāpes determinanta aprēķināšanas, kuŗa, kā agrāk norādīts, viegli izdarāma.

Izteiksmes (II) labo pusi sauc par determinanta attīstījumu pēc i-tās rindas elementiem.

Piemērs.

Attīstīt determinantu

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 0 \\ 2 & 7 & 8 \end{vmatrix} \qquad \text{schema} \quad \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

Attīstam, piemēram, pēc pirmās rindas. Tad vajadzīgi pirmās rindas apakšdeterminanti, kuŗi ir

$$D_{11} = (+)\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} ; \quad D_{12} = (-)\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} ; \quad D_{13} = (+)\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$D = a_{11} D_{11} + a_{12} D_{12} + a_{13} D_{13} = 1\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} + 3(-)\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$$

Apakšdeterminantu zīmes dabūjam no schemas.

$$D = 1(2.8 - 7.0) - 3(6.8 - 2.0) + 4(6.7 - 2.2) = 16 - 144 + 152 = 24.$$

Determinantu attīstot pēc trešā stabiņa, vērtību dabūjam ar mazāku darbu, jo trešā stabiņā viens elements ir 0 un tādēļ un tādā attīstijumā ir tikai divi locekļi

$$D = 4\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 0(-)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 4(6.7-2.2)+8(1.2-6.3)= 152-128 = 24$$

8. Determinanta otra galvenā izteiksme

Ja kādas rindas (stabiņa)katru elementu reizinam ar citas paralelas rindas (stabiņa) piekārtotiem attiecīgiem apakšdeterminantiem, tad šo reizinājumu summa ir 0. Tā tad

$$a_{i1} D_{k1} + a_{i2} D_{k2} + \ldots\ldots + a_{in} D_{kn} = 0$$

Šo izteiksmi varam uzskatīt kā determinanta attīstijumu pēc rindas k, pie kam šīs rindas elementi ir vienlīdzīgi ar rindas i elementiem. Tā tad determinantā ir divi vienlīdzīgas rindas un saskaņā ar agrāko, šāda determinanta vērtība ir 0.

9. Ja determinantā kādas rindas (stabiņa) elementiem pieskaitam, ar kādu pēc patikas faktoru reizinātus, kādas paralelas rindas (stabiņa) elementus, tad determinants savu vērtību nemaina.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & ka_{11} + a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & ka_{21} + a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & ka_{n1} + a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Attīstot determinantu pēc otrā stabiņa dabūjam

$$(ka_{11} + a_{12})D_{12} + (ka_{21} + a_{22})D_{22} + \ldots + (ka_{n1} + a_{n2})D_{n2} =$$

$$= k[a_{11} D_{12} + a_{21} D_{22} + \ldots + a_{n1} D_{n2}] + a_{12} D_{12} + a_{22} D_{22} + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + a_{n2} D_{n2} = D$$

jo izteiksme iekavās ir nulle.(Pēc 8)

Piemērs.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 0 \\ 2 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 24$$

Pieskaitam pie trešās rindas pirmo rindu, reizinātu ar -2,tad

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Attīstam pēc trešā stabiņa, tad attīstijumā ir tikai viens loceklis

$$D = 4\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 4(6.1 - 0.2) = 24$$

10. Determinanta kāpes pazemināšana un paaugstināšana.

Determinanta kāpe pazeminās par 1, ja kādā rindā (stabiņā) visi elementi, izņemot vienu, ir nulles.

Pierādijums redzams, attīstot D pēc šās rindas (stabiņa)

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Šo īpašību izlieto, lai vienkāršotu determinanta aprēķināšanu. Ar iepriekšējās teorēmas palīdzību dabū, lai kādā rindā vai stabiņā, izņemot vienu elementu, pārējie elementi būtu 0.

Piemērs.

$$D = \begin{vmatrix} 16 & 4 & 10 \\ 3 & 2 & 1 \\ 9 & 6 & 4 \end{vmatrix}$$

+128+36+180- -180-48-96 20

Attīstot pēc vienkāršākas rindas, otrās, dabūjam

$$D = 3(-)\begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} + 2(+)\begin{vmatrix} 16 & 10 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} + 1(-)\begin{vmatrix} 16 & 4 \\ 9 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 3.44 + 2.(-26) + 1(-60) = 20.$$

Pārveidojam augšējo determinantu tā, lai otrā stabiņā divi elementi būtu 0. To varam panākt, ja ar -2 reizinātu otro rindu pieskaitam pirmai rindai, un ar -3 reizināto otro rindu pieskaitam trešai rindai.

$$D = \begin{vmatrix} 10 & 0 & 8 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Attīstam pēc otrā stabiņa

$$D = 2(+)\begin{vmatrix} 10 & 8 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2.10 = 20$$

So varam attīstīt arī pēc trešās rindas un dabūjam

$$D = 1(+)\begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 20$$

Secinājums.

Ja elementi galvenās diagonāles vienā pusē ir nulles, tad determinanta vērtība ir viņa galvenā diagonāle.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22}\, a_{33}\, a_{44}$$

Determinanta kāpi paaugstina šādi

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 0 & 1 & x & x \\ 0 & 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x & 1 & x \\ a_{11} & 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 & a_{22} \end{vmatrix}$$

Ar x apzīmētie elementi var būt pēc patikas. Paņēmiena pareizība redzama attīstot determinantus.

Piemēri.

1. Kāda ir sekojoša determinanta vērtība?

$$A = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{vmatrix}$$

Ar daļas skaitļiem nav ērti rīkoties, tādēļ pārveidojam determinantu, reizinot pirmo stabiņu ar 6, otru ar 12 un trešo ar 6, tad determinantā elementi būs veseli skaitļi. Tā tad

$$6.12.6\ A = \begin{vmatrix} 2 & 8 & 3 \\ 3 & -3 & 2 \\ 6 & -6 & 2 \end{vmatrix}$$

novelkam otru rindu no trešās un attīstam pēc trešā stabiņa

$$6.12.6\ A = \begin{vmatrix} 2 & 8 & 3 \\ 3 & -3 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$6.12.6\ A = 3(+)\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ +3 & -3 \end{vmatrix} + 2(-)\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}$$

Pirmais determinants ar divām proporcionālām rindām ir 0. Paliek

$$6.12.6\ A = 2.-(2.-3\ -3.8) = 2.-(-30) = 60$$

$$A = \frac{60}{6.12.6} = \frac{5}{36}$$

2. Kāda vērtība determinantam

$$A = \begin{vmatrix} 4 & 6 & 10 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

No pirmās rindas iznesam pirms determinanta kopējo faktoru 2. No otrās rindas iznesam kopējo faktoru $\frac{1}{3}$, tad

$$A = 2 . \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

Pieskaitam ar -1 reizināto trešo rindu pirmai rindai

$$A = 2 \cdot \frac{1}{3}$$

attīstam pēc pirmās rindas

$$A = 2\cdot\frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot\frac{1}{3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = \frac{2}{3}(10 + 3) = \frac{26}{3} = 8\ \frac{2}{3}$$

11. Determinanti ar sastādītiem elementiem.

Ja determinanta kādas rindas (stabiņa) elementi sastāv no k summandiem, tad šo determinantu var pārveidot kā summu no k tās pašas kāpes determinantiem ar vienkāršiem elementiem.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \alpha+a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \beta+a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \gamma+a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (\alpha+a_{12})D_{12} + (\beta + a_{22})D_{22} + (\gamma + a_{32})D_{32} =$$

$$(\alpha D_{12} + \beta D_{22} + \gamma D_{32}) + (a_{12}D_{12} + a_{22}D_{22} + a_{32}D_{32}) =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \alpha & a_{13} \\ a_{21} & \beta & a_{23} \\ a_{31} & \gamma & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Pierādijums izdarīts, attīstot pēc otrā stabiņa, atklājot iekavas un beidzot pārvedot iekavās izteiksmes determinantā simbola veidā.

Arī apgriezta izteiksme ir pareiza un pierādijums izdarams apgrieztā kārtībā

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a'_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a'_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a'_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + a'_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} + a'_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} + a'_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

12. Nulldeterminanti.

Par nulldeterminantu sauc tādu, kuŗa vērtība ir 0. Nulldeterminantā paralelu rindu (stabiņu) elementiem piekārtoti apakšdeterminanti ir proporcionāli.

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Veidojam $A_{11} A_{42} - A_{12} A_{41}$. Ievērojam, ka A_{42} dabū + zīmi un A_{41} - zīmi.

$$A_{11} A_{42} - A_{12} A_{41} = A_{11} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} + A_{12} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}A_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21}A_{11} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31}A_{11} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}A_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22}A_{12} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32}A_{12} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12}) & a_{13} & a_{14} \\ (a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12}) & a_{23} & a_{24} \\ (a_{31}A_{11} + a_{32}A_{12}) & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

Beidzamā determinantā, reizinot otru stabiņu ar A_{13} un trešo ar A_{14} un pēc tam pieskaitot pirmam stabiņam, dabūjam

$$\begin{vmatrix} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} + a_{24}A_{14} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31}A_{11} + a_{32}A_{12} + a_{33}A_{13} + a_{34}A_{14} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} = A \begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

Tā tad $A_{11} A_{42} - A_{41} A_{12} = A \begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$

Ja $A = 0$, tad arī

$$A_{11} A_{42} - A_{41} A_{12} = 0$$

un

$$\frac{A_{11}}{A_{41}} = \frac{A_{12}}{A_{42}}$$

vai arī

$$A_{11} : A_{41} = A_{12} : A_{42}$$

ar ko augšējā teorēma ir pierādīta.

III. Determinanta diferencēšana.

Diferencēšana attiecībā uz kādu elementu

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{ik}A_{ik} + \dots + a_{in}A_{in}$$

$\frac{\partial A}{\partial a_{ik}}$ dabū diferencējot A attīstījumu pēc rindas i, attiecībā uz a_{ik}.

Redzams, ka $\frac{\partial A}{\partial a_{ik}} = A_{ik}$ jo determinanta attīstītā veidā elementā a_{ik} atrodas tikai vienu reizi un pie tam reizināts ar savu apakšdeterminantu, kurā nav a_{ik}.

Diferencēšana attiecībā uz kādu parametru.

Ja A elementi ir funkcijas no parametra t, tad varam determinantu diferencēt attiecībā uz t.

$$A = f(a_{ik}) \quad \begin{matrix} i = 1 \dots n \\ k = 1 \dots n \end{matrix}$$

tā kā, ja

$$A = f(x, y, z \dots\dots)$$

tad

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial A}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial A}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} + \dots$$

tādēļ

$$\frac{dA}{dt} = \sum \frac{\partial A}{\partial a_{ik}} \cdot \frac{da_{ik}}{dt} = \sum A_{ik} \cdot a'_{ik} \qquad (i=1,2,..n);(k=1,2,..n)$$

$$\frac{dA}{dt} = \sum A_{ik} a'_{ik} = \sum_1^n A_{i1} a'_{i1} + \sum_1^n A_{i2} a'_{i2} + \dots + \sum_1^n A_{in} a'_{in}$$

Pārvedot katru summu determinanta simbolā, dabūjam

$$\frac{dA}{dt} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a'_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a'_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a'_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a'_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a'_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{vmatrix}$$

Piemērs.

$$A = \begin{vmatrix} y_1 & y_1' & y_1'' & \dots & y_1^{(n-2)} & y_1^{(n-1)} \\ y_2 & y_2' & y_2'' & \dots & y_2^{(n-2)} & y_2^{(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n & y_n' & y_n'' & \dots & y_n^{(n-2)} & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Šinī determinantā $y_1, y_2 \dots y_n$ ir funkcijas no x. y_1' ir y_1 atvasinātā attiecībā uz x u.t.t. So determinantu diferencē attiecībā uz x izlietojot augšējo paņēmienu.

$$\frac{dA}{dx} = A' = \begin{vmatrix} y_1' & y_1' & y_1'' & \dots & y_1^{(n-2)} & y_1^{(n-1)} \\ y_2' & y_2' & y_2'' & \dots & y_2^{(n-2)} & y_2^{(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n' & y_n' & y_n'' & \dots & y_n^{(n-2)} & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & y_1'' & y_1'' & \dots & y_1^{(n-2)} & y_1^{(n-1)} \\ y_2 & y_2'' & y_2'' & \dots & y_2^{(n-2)} & y_2^{(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n & y_n'' & y_n'' & \dots & y_n^{(n-2)} & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + \dots$$

$$\dots + \begin{vmatrix} y_1 & y_1' & y_1'' & \dots & y_1^{(n-2)} & y_1^{(n)} \\ y_2 & y_2' & y_2'' & \dots & y_2^{(n-2)} & y_2^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n & y_n' & y_n'' & \dots & y_n^{(n-2)} & y_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

Visos determinantos šinī summā, izņemot beidzamo, ir divi vienlīdzīgi paraleli stabiņi, tādēļ šie determinanti, izņemot beidzamo, ir 0, un tā tad

$$A' = \begin{vmatrix} y_1 & y_1' & y_1'' & \dots & y_1^{(n-2)} & y^{(n)} \\ y_2 & y_2' & y_2'' & \dots & y_2^{(n-2)} & y^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n & y_n' & y_n'' & \dots & y_n^{(n-2)} & y_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

IV. Determinantu pielietošana lineāros nolīdzinājumos.

1. Dēfinicijas.

Nolīdzinājums tiek saukts par homogenu, ja katram tā loceklim, attiecībā uz nezināmiem, ir tā pati dimenzija. Piemēri: sekojošie nolīdzinājumi ir homogeni, pirmās, otrās un trešās dimenzijas

$$x - 2y + z = 0 \quad , \quad x^2 - 2xy + 4y^2 = 0 \quad , \quad x^3 - 4z^3 + xyz = 0$$

Nolīdzinājums ir lineārs, ja tā locekļi attiecībā uz nezināmiem ir pirmās dimenzijas:

$$x - 4y + z - 3 = 0 \quad , \quad ax + by + c = 0$$

Augšējie nolīdzinājumi ir lineāri, bet sekojošie ir homogeni un lineāri

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0 \quad , \quad 3x - 4y + 5z - 2u = 0$$

Homogenu nolīdzinājumu var pārvērst ekvivalentā nehomogenā, dalot nolīdzinājumu ar vienu no mainīgiem un attiecību vietā ievedot jaunu apzīmi

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

$$a_1 \frac{x}{z} + b_1 \frac{y}{z} + c_1 = 0$$

liekam

$$\frac{x}{z} = \xi \ , \quad \frac{y}{z} = \eta$$

$$a_1 \xi + b_1 \eta + c_1 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

Nolīdzinājumi (a) un (b) ir ekvivalenti.

Nehomogenu nolīdzinājumu var pārvērst homogenā, ievedot nezināmo vietā attiecības

$$a_1 \xi + b_1 \eta + c_1 = 0$$

liekam

$$\xi = \frac{x}{z} \ , \quad \eta = \frac{y}{z}$$

$$a_1 \frac{x}{z} + b_1 \frac{y}{z} + c_1 = 0$$

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0$$

Ja kāda izteiksme pierādīta priekš homogeniem nolīdzinājumiem, tad viņa derīga arī priekš nehomogeniem nolīdzinājumiem un otrādi.

2. Nolīdzinājumu atslēgšana. Nolīdzinājumu kopēja pastāvēšana.

a) Lineāru nehomogenu n nolīdzinājumu ar n nezināmiem sistēma.

Lineāru nehomogenu n nolīdzinājumu sistēmai ar n nezināmiem ir šāds veids

$$\left.\begin{array}{l} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n + f_1 = 0 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n + f_2 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \ldots + a_{nn} x_n + f_n = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Še koeficienti a_{ik} ir reāli skaitļi un no tiem sastādīts determinants tiek saukts par šīs nolīdzinājumu sistēmas determinantu

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Lai dabūtu **reizinamo** x_k, reizinam D ar x_k

$$D\, x_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1k} x_k & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2k} x_k & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nk} x_k & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Reizinot katru stabiņu (izņemot stabiņu k) ar attiecošo x un pieskaitot k-tam stabiņam, determinanta vērtība nemainās. Pēc tam k-tā stabiņā un rindā i stāvošais elements dabū veidu

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{ik} x_k + \dots + a_{in} x_n$$

Šis elements nolīdzinās $-f_i$,kas redzams no nolīdzinājumu sistēmas (1). Ieliekot determinantā k-ta stabiņa clementu vietā attiecošos $-f_1$, $-f_2$ ... $-f_n$ šis stabiņā dabū katrā elementā zīmi -. Šo zīmi iznesot pirms determinanta, varam rakstīt

$$D x_k = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & f_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & f_2 & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & f_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = - D_k$$

Ar D_k apzīmēts determinants, kuņu dabūjam, ja nolīdzinājumu sistemas (1) determinanta k-ta stabiņa elementu vietā ieliekam attiecīgos nolīdzinājumu absolūtos locekļus.

Ja

$$D_k \neq 0$$

tad

$$x_k = \frac{-D_k}{D}$$

Tā tad

$$x_1 : x_2 : x_3 : \dots : x_n : 1 = -D_1 : -D_2 : -D_3 : \dots : -D_n : D$$

Determinantus $-D_1$, $-D_2$ ... $-D_n$ un D varam dabūt pārredzamākā veidā, sekojošā kārtā. Sastādam matriksu no sistēmas (1) visiem koeficientiem a_{ik} ,pievienojot koeficientiem arī absolūtos locekļus f

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1k} \dots & a_{1n} & f_1 \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2k} \dots & a_{2n} & f_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nk} \dots & a_{nn} & f_n \end{matrix}$$

Šajā matriksā ir n rindas un n+ 1 stabiņu. Papildinot šo matriksu ar (n + 1)-mo rindu, dabūjam determinantu ar n + 1 rindām un n + 1 stabiņiem. Kā vēlāk redzēsim, (n + 1)-mās rindas elementi nebūs vajadzīgi, bet gan to vietām piekārtoti apakšdeterminanti un tādēļ,konkretā gadījumā, ievedam (n + 1)-mās rindas elementu vietā, pielietojot zināmo schemu,elementu vietu zīmes. Vispārējā gadījumā šeit elementu vietā liekam punktus, tad

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} & f_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} & f_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} & f_n \\ \underset{n+1,1}{\bullet} & \underset{n+1,2}{\bullet} & \dots & \underset{n+1,k}{\bullet} & \dots & \underset{n+1,n}{\bullet} & \underset{n+1,n+1}{\bullet} \end{vmatrix}$$

Determinanta A apakšdeterminants,

$$A_{n+1\,k} = (-1)^{n+1+k} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1k-1} & a_{1k+1} & \dots & a_{1n} & f_1 \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2k-1} & a_{2k+1} & \dots & a_{2n} & f_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nk-1} & a_{nk+1} & \dots & a_{nn} & f_n \end{vmatrix}$$

Šinī apakšdeterminantā nav k-tā stabiņa, determinantā ir n rindas un n stabiņi. Pārnesam beidzamo stabiņu ar elementiem $f_1, f_2, f_3 \dots f_n$ starp stabiņiem k-1 un k+1. Lai to izvestu, tad ar beidzamo stabiņu jāizdara transpozicijas, pirms tas jāpārvieto n-tā stabiņa, tad (n-1)-mā u.t.t. stabiņu vietā un beidzot arī (k+1)-mā stabiņa vietā. Tādā kārtā jāizdara n-k transpozicijas. Bet tad determinanta zīme būs atkarīga no $(-1)^{n-k}$. Lai $A_{n+1\,k}$ paturētu savu zīmi, kāda tam ir pirms transpozicijām, tad pārveidoto determinantu jāreizina ar $(-1)^{n-k}$ un tādēļ pēc transpozicijām

$$A_{n+1\,k} = (-1)^{n+1+k}.(-1)^{n-k} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1k-1} & f_1 & a_{1k+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2k-1} & f_2 & a_{2k+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nk-1} & f_n & a_{nk+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Reizinājums $(-1)^{n+1+k}.(-1)^{n-k} = (-1)^{2n+1} = -1$ un tādēļ

$$A_{n+1\,k} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1k-1} & f_1 & a_{1k+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2k-1} & f_2 & a_{2k+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nk-1} & f_n & a_{nk+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Šis determinants ir tas pats, kuŗu agrāk apzīmējam ar $-D_k$, tā tad

$$-D_k = A_{n+1\,k}$$

Viegli ieskatams, ka agrāk ar D apzīmēto determinantu dabūjam kā apakšdeterminantu no A un

$$D = A_{n+1\,n+1}$$

Tādēļ varam rakstīt

$$x_k = \frac{-D_k}{D} = \frac{A_{n+1\,k}}{A_{n+1\,n+1}}$$

un

$$x_1 : x_2 : \dots : x_n : 1 = A_{n+1\,1} : A_{n+1\,2} : A_{n+1\,3} : \dots$$

$$\dots : A_{n+1\,n} : A_{n+1\,n+1}$$

Šo izteiksmi rakstam pārskatāmā simboliskā veidā

$$x_1 : x_2 : \dots : x_n : 1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & f_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & f_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & f_n \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = A_{n+1\,1} : A_{n+1\,2} : \dots : A_{n+1\,n+1}$$

Konkretā gadijumā (n+1)-mā rindā punktu vietā ievedam vietu zīmes pēc schemas. Tad $A_{n+1,1}, A_{n+1,2} \dots A_{n+1,n+1}$ dabūjami kā šī determinanta apakšdeterminanti.

Piemērs.

Atrast sekojošas nolīdzinājumu sistēmas nezināmo x,y,z vērtības.

$$2x + 3y - z - 3 = 0$$
$$3x - y + z - 4 = 0$$
$$5x - 3y - 2z + 7 = 0$$

Veidojam simbolisko izteiksmi no nolīdzinājumu koeficientiem un absolutiem locekļiem

$$x : y : z : 1 = \left| \begin{array}{cccc} 2 & 3 & -1 & -3 \\ 3 & -1 & 1 & -4 \\ 5 & -3 & -2 & 7 \\ - & + & - & + \end{array} \right|$$

Determinanta beidzamās rindas vietu zīmes dabūjam pēc schemas.

$$x = \frac{A_{41}}{A_{44}}$$

A_{41} ir apakšdeterminants priekš ceturtās rindas pirmās vietas, tā tad

$$A_{41} = - \begin{vmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & -4 \\ -3 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

A_{44} ir apakšdeterminants priekš ceturtās rindas ceturtās vietas, tā tad

$$A_{44} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & -3 & -2 \end{vmatrix}$$

tā tad

$$x = - \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & -4 \\ -3 & -2 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & -3 & -2 \end{vmatrix}}$$

Apvienojot atslēgumu, rakstam

$$x:y:z:1 = - \begin{vmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & -4 \\ -3 & -2 & 7 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & -4 \\ 5 & -2 & 7 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 3 & -1 & -4 \\ 5 & -3 & 7 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & -3 & -2 \end{vmatrix}$$

Pēc augšējo determinantu vērtību izrēķināšanas dabūjam

$$x : y : z : 1 = 37 : 72 : 149 : 47$$

$$x = \frac{37}{47} \quad ; \quad y = \frac{72}{47} \quad ; \quad z = \frac{149}{47}$$

b) Lineāru homogenu n nolīdzinājumu ar n + 1 ~~nolīdzinājumiem~~ nezināmiem sistēma.

Ja nolīdzinājumu sistēmā (1) liekam

$$x_1 = \frac{\xi_1}{\xi_{n+1}} \quad ; \quad x_2 = \frac{\xi_2}{\xi_{n+1}} \quad \cdots\cdots \quad x_n = \frac{\xi_n}{\xi_{n+1}}$$

tad dabūjam

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\dfrac{\xi_1}{\xi_{n+1}} + a_{12}\dfrac{\xi_2}{\xi_{n+1}} + \cdots + a_{1n}\dfrac{\xi_n}{\xi_{n+1}} + f_1 = 0 \\ a_{21}\dfrac{\xi_1}{\xi_{n+1}} + a_{22}\dfrac{\xi_2}{\xi_{n+1}} + \cdots + a_{2n}\dfrac{\xi_n}{\xi_{n+1}} + f_2 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\dfrac{\xi_1}{\xi_{n+1}} + a_{n2}\dfrac{\xi_2}{\xi_{n+1}} + \cdots + a_{nn}\dfrac{\xi_n}{\xi_{n+1}} + f_n = 0 \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots (2)$$

Noreizinot nolīdzinājumus ar ξ_{n+1} dabūjam

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \cdots + a_{1n}\xi_n + f_1\xi_{n+1} = 0 \\ a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \cdots + a_{2n}\xi_n + f_2\xi_{n+1} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + \cdots + a_{nn}\xi_n + f_n\xi_{n+1} = 0 \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots (3)$$

Nolīdzinājumu sistema (3) sastāv no lineāriem homogeniem n nolīdzinājumiem ar n + 1 nezināmiem $\xi_1, \xi_2 \;\cdots\; \xi_{n+1}$. Nezināmo vērtības no šiem nolīdzinājumiem nevaram dabūt, bet gan nezināmo attiecību vērtības pret vienu no nezināmiem, dotā gadijumā nezināmo attiecību pret ξ_{n+1} vērtības.

Uzskatot sistēmā (2) attiecības

$$\frac{\xi_1}{\xi_{n+1}}, \quad \frac{\xi_2}{\xi_{n+1}}, \quad \cdots \quad \frac{\xi_n}{\xi_{n+1}}$$

kā nezināmos, pielietojot norādīto simbolu, dabūjam

$$\frac{\xi_1}{\xi_{n+1}} : \frac{\xi_2}{\xi_{n+1}} : \cdots : \frac{\xi_n}{\xi_{n+1}} : 1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & f_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & f_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & f_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

Noreizinot ar ξ_{n+1} dabūjam

$$\xi_1 : \xi_2 : \cdots : \xi_n : \xi_{n+1} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots, & a_{1n} & f_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & f_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & f_n \\ - & - & \cdots & - & - \end{vmatrix} =$$

$$= A_{n+1\,1} : A_{n+1\,2} : \cdots : A_{n+1\,n+1}$$

Simbola atslēgšana izdarāma kā agrāk norādīts.

c) Lineāru nehomogenu n+1 nolīdzinājumu ar n nezināmiem sistēma.

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + \ldots + a_{1n}\ x_n + f_1 = 0 \\ a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 + \ldots + a_{2n}\ x_n + f_2 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\ x_1 + a_{n2}\ x_2 + \ldots + a_{nn}\ x_n + f_n = 0 \\ a_{n+1}\ x_1 + a_{n+1\,2}\ x_2 + \ldots + a_{n+1\,n}\ x_n + f_{n+1} = 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots(4)$$

Lai dabūtu n nezināmo vērtības vajadzīgi n nolīdzinājumi, (n+1)-mais nolīdzinājums ir lieks, tas var kopēji pastāvēt ar pārējiem n nolīdzinājumiem tad, ja izpildīts kāds noteikums.

Kā redzējam, no n nolīdzinājumiem dabūjam nezināmo vērtības

$$x_1 = \frac{A_{n+1\,1}}{A_{n+1\,n+1}}\ ,\ x_2 = \frac{A_{n+1\,2}}{A_{n+1\,n+1}}\ ,\ \ldots\ x_n = \frac{A_{n+1\,n}}{A_{n+1\,n+1}}$$

Ieliekot šīs vērtības (n+1)-mā nolīdzinājumā, dabūjam

$$a_{n+1\,1}\frac{A_{n+1\,1}}{A_{n+1\,n+1}} + a_{n+1\,2}\frac{A_{n+1\,2}}{A_{n+1\,n+1}} + \ldots + a_{n+1\,n}\frac{A_{n+1\,n}}{A_{n+1\,n+1}} + f_{n+1} = 0$$

Noreizinot ar $A_{n+1\ n+1}$ dabūjam

$$a_{n+1\,1}\cdot A_{n+1\,1} + a_{n+1\,2}\cdot A_{n+1\,2} + \ldots + a_{n+1\,n}\ A_{n+1\,n} + f_{n+1}\ A_{n+1\ n+1} = 0$$

Kā redzams, augšējā izteiksme ir sekojoša determinanta attīstījums pēc (n + 1)-mās rindas

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & f_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & f_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & f_n \\ a_{n+1\,1} & a_{n+1\,2} & \ldots & a_{n+1\,n} & f_n \end{vmatrix} = 0$$

Tā tad, lai n+1 lineāri homogeni nolīdzinājumi ar n nezināmiem varētu kopēji pastāvēt, vajadzīgs, lai nolīdzinājumu sistēmas koeficientu un absolūto locekļu determinants ir nulle.

d) Lineāru homogenu n nolīdzinājumu ar n nezināmiem sistēma.

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + \ldots + a_{1n}\ x_n = 0 \\ a_{12}\ x_1 + a_{22}\ x_2 + \ldots + a_{2n}\ x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\ a_1 + a_{n2}\ x_2 + \ldots + a_{nn}\ x_n = 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

Nodalot, piemēram ar x_n ,dabūjam

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\frac{x_1}{x_n} + a_{12}\frac{x_2}{x_n} + \ldots + a_{1n} &= 0 \\ a_{21}\frac{x_1}{x_n} + a_{22}\frac{x_2}{x_n} + \ldots + a_{2n} &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\frac{x_1}{x_n} + a_{n2}\frac{x_2}{x_n} + \ldots + a_{nn} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Sistema (6) sastāv no n lineāriem nehomogeniem nolīdzinājumiem ar $(n - 1)$ mainīgiem $\frac{x_1}{x_n}$; $\frac{x_2}{x_n}$ ... $\frac{x_{n-1}}{x_n}$

Šī sistēma,pēc agrākā, var pastāvēt, ja visu koeficientu un absolūto locekļu determinants = 0. Tā kā sistēmas (6) un (5) ir ekvivalentas, tad arī varam teikt:

> n homogeni lineāri nolīdzinājumi ar n nezināmiem var kopēji pastāvēt,ja sistēmas visu koeficientu determinants ir nulle.

Piemērs.
Atslēgt nolīdzinājumu sistēmu

$$x - 2y + 3z = 0$$
$$2x + y - z = 0$$

Sistēmas lineāra un homogena. Atslēgums simboliskā veidā

$$x : y : z = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ + & - & + \end{vmatrix} = (+)\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} : (-)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} : (+)\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$x : y : z = -1 : 7 : 5$$

ALĢEBRAISKU NOLĪDZINĀJUMU TEORIJA.

1. Dēfinicijas.

Katrs nolīdzinājums

$$f(x) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

kurā f apzīmē galīgu algebrāisku operāciju sekojumu (saskaitīšanu, atņemšanu, reizināšanu, dalīšanu, kāpināšanu ar veselu rādītāju un saknes izvilkšanu ar veselu rādītāju) tiek saukts par algebrāisku nolīdzinājumu. Tādu nolīdzinājumu var atsvabināt no daļām un arī no saknēm un pārveidot

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots a_n = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Koeficientus $a_0, a_1, \ldots a_n$ šeit pieņemsim kā reālus skaitļus, turpretīm pieņemsim, ka x var būt tikpat reāls, kā arī komplekss skaitlis. Rādītājs n tiek pieņemts kā pozitīvs vesels skaitlis un noteic nolīdzinājuma kāpi. n-tās kāpes nolīdzinājumam var būt lielākais n + 1 locekļu un tādā gadijumā nolīdzinājums tiek saukts par pilnīgu. Ja trūkst dažu locekļu,t.i. ja attiecīgie koeficienti = 0, tad nolīdzinājums ir nepilnīgs.

Ja nolīdzinājumā nav locekļa ar a x^{n-1} ,tad to sauc par reducētu. Katru x vērtību, kuŗa ielikta x vietā nolīdzinājumu (2) apmierina, sauc par nolīdzinājuma sakni.Atrisināt nolīdzinājumu nozīmē atrast nolīdzinājuma saknes. Nolīdzinājums, kuŗam dots veids (2), tiek saukts par sakārtotu.

2. Nolīdzinājumu var atsvabināt no koeficienta a_0 liekot

$$x = \frac{z}{a_0}$$

ievietojot šo vērtību nolīdzinājumā (2) dabūjam

$$a_0 \cdot \frac{z^n}{a_0^n} + a_1 \cdot \frac{z^{n-1}}{a_0^{n-1}} + a_2 \cdot \frac{z^{n-2}}{a_0^{n-2}} + \ldots + a_n = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

$$\frac{z^n}{a_0^{n-1}} + a_1 \frac{z^{n-1}}{a_0^{n-1}} + a_2 \frac{z^{n-2}}{a_0^{n-2}} + \ldots + a_n = 0$$

noreizinot ar a_0^{n-1} dabūjam

$$z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 a_0 z^{n-2} + a_3 a_0^2 z^{n-3} + \ldots + a_n a_0^{n-1} = 0 \ \ldots.(4)$$

3. Polinomā

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n \ \ldots\ldots.(5)$$

x varam dot tik lielu vērtību, ka locekļa $a_0 x^n$ absolūtais lielums būs lielāks, nekā visu citu locekļu summas absolūtais lielums un tā tad polinoma zīme atkarāsies tikai no šī pirmā locekļa zīmes.

Pārveidojam polinomu (5)

$$x^n \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}\right) \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Redzams, ka priekš x varam atrast tik lielu vērtību, pie kuŗas

$$a_0 > \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}$$

Reizinot abas nenolīdzinājuma puses ar x^n, dabūjam, pie pietiekoši liela x

$$a_0 x^n > a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n$$

Pie pietiekoši mazas x vērtības, polinoma (2) beidzamā locekļa absolūtā vērtība ir lielāka, nekā visu citu locekļu summas absolūtā vērtība

$$a_n > a_{n-1} x + a_{n-2} x^2 + a_{n-3} x^3 + \ldots + a_0 x^n \quad \ldots\ldots.(7)$$

jo pie x = bezgalīgi maza, augšējā summa ir bezgalīgi mazs lielums un tādēļ mazāks, kā galīgs lielums a_n.

4. Galvenā teorēma.

Katram algebrāiskam n-tās kāpes nolīdzinājumam ir sakne. Šīs teorēmas pareizība ir pierādīta no Gauss'a. Še pieņemsim izteiksmi kā pierādītu.

5. Bézout teorēma.

Ja veselu algebrāisku funkciju dala ar $x - \alpha$, tad dalījuma atlikums ir $f(\alpha)$.

$$f(x) = (x - \alpha)f_1(x) + R$$

Še $f_1(x)$ ir dalīšanas kvocients un R atlikums. Liekot $x = \alpha$ dabūjam

$$f(\alpha) = 0.f_1(\alpha) + R$$

tā tad

$$f(\alpha) = R$$

Secinājums: ja α ir nolīdzinājuma sakne, tad $f(\alpha) = 0$ un nolīdzinājuma polinoms dalams ar $(x - \alpha)$ bez atlikuma.

$$f(x) = (x - \alpha)f_1(\alpha) + R$$

ja α sakne, tad liekot $x = \alpha$

$$f(\alpha) = 0.f_1(\alpha) + R$$

$$0 = 0.f_1(\alpha) + R$$

$$R = 0$$

Apgriezums arī derīgs:

Ja vesela algebrāiska funkcija $f(x)$ dalama ar $(x - \alpha)$ bez atlikuma, tad α ir $f(x) = 0$ sakne.

$$f(x) = (x - \alpha)f_1(x) ,$$

t.i. $f(x)$ dalama ar $(x - \alpha)$ bez atlikas, liekot $x = \alpha$ dabūjam

$$f(\alpha) = 0.f_1(\alpha) = 0$$

Tā kā $f(\alpha) = 0$, tad α ir $f(x) = 0$ sakne.

6. Ja:

$$f(x) = (x - \alpha)f_1(x)$$

tad

$$f'(x) = (x - \alpha)f_1'(x) + f_1(x)$$

liekot $x = \alpha$ dabūjam

$$f'(\alpha) = f_1(\alpha)$$

7. Katru veselu algebrāisku n-tās kāpes polinomu $f(x)$ var pārveidot n faktoros

$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_n)$, kur $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ ir nolīdzinājuma $f(x) = 0$ saknes.

Faktorus $(x-\alpha_1), (x-\alpha_2) \ldots (x-\alpha_n)$ sauc par $f(x)$ sakņu faktoriem.

Pēc Gauss'a izteiksmes $f(x) = 0$ vajag būt vismaz vienai saknei, α_1 tamdēļ

$$f(x) = (x-\alpha_1)f_1(x)$$

Pēc Gauss'a izteiksmes $f_1(x) = 0$ arī ir vismaz viena sakne, tamdēļ, ja α_2 ir šī sakne, tad

$$f_1(x) = (x - \alpha_2)f_2(x) \quad \text{u.t.t.}$$

$$f_2(x) = (x - \alpha_3)f_3(x)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f_{n-1}(x) = x - \alpha_n$$

$$f_n(x) = a_0$$

Ja $f(x)$ ir n-tās kāpes, tad $f_1(x)$ ir (n-1) kāpē u.t.t., $f_n(x)$ ir $n-n = 0$ kāpē.

Noreizinot nolīdzinājumu, kreisās un labās puses, dabūjam

$$f(x) = a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3) \ldots (x-\alpha_n) \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ir $f(x) = 0$ saknes, jo liekot $x = \alpha_i$ nolīdzinājuma (8) labā puse ir $= 0$, tā tad arī $f(\alpha_i) = 0$, t.i. α_i ir nolīdzinājuma sakne.

8. Katram n-tās kāpes algebrāiskam nolīdzinājumam ir n saknes, ne mazāk un arī ne vairāk.

Kā redzams no (8) $f(x)$ var sadalīt n sakņu faktoros, kuŗus noreizinot dabūjam n-tās kāpes izteiksmi. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ir $f(x)$ saknes un to skaits ir n, un n arī ir $f(x)$ kāpe.

Pieņemsim, ka nolīdzinājumam bez saknēm $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$ arī ir vēl sakne β, kuŗa atšķirās no iepriekšējām, tad saliekot nolīdzinājumu sakņu faktoros, dabūjam

$$f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_n) = (x-\beta)f_1(x) \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

Labā pusē $f(x)$ ir salikta sakņu faktora $(x-\beta)$ reizinājumā ar $f_1(x)$, jo ja β ir nolīdzinājuma sakne, tad tāds salikums ir iespējams.

Liekam (9) ka $x = \beta$, tad dabūjam

$$(\beta - \alpha_1)(\beta - \alpha_2)(\beta - \alpha_3) \ldots (\beta - \alpha_n) = 0.f_1(\beta) \ldots\ldots (10)$$

Labā pusē (10) dabūjam 0, bet kreisā pusē neviens no faktoriem nav 0, tā tad kreisā puse nav 0. Pieņēmums, ka β ir sakne, kuŗa atšķirās no $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ ved pie pretrunas, no kā redzams ka pieņēmums nav pareizs.

Daži no sakņu faktoriem var būt vienlīdzīgi, tad arī dažas saknes ir vienlīdzīgas, bet tomēr nolīdzinājumam ir n saknes, ja viņš ir n-tās kāpes. Ja $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n$, tad α sauc par n kārtēju sakni. Ievērojot šo izteiksmi, var viegli veidot nolīdzinājumu ar dotām saknēm.

Piemēram, ja dotas saknes +1, +2, un -3, tad nolīdzinājums ar šīm saknēm ir $(x-1)(x-2)(x+3) = x^3 - 7x + 6 = 0$

Nenoteiktu koeficientu paņēmiens.

Sadalot sakņu faktoros

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

dabūjam $f(x) = a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n) = 0$

Pieņemam, ka bez n saknēm $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ ir vēl sakne β, tad

$$f(\beta) = a_0(\beta-\alpha_1)(\beta-\alpha_2)\ldots(\beta-\alpha_n) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Izteiksme (2) tikai tad var būt 0, ja $a_0 = 0$, jo visas starpības ir lielākas par 0. Tad seko $f(x) = 0$ pie katras x vērtības. Bet $f(x) = a_0x^n + a x^{n-1} + \ldots + a_n$ ir pie katras x vērtības nulle ja

$$a_0 = 0 \;;\; a_1 = 0 \;;\; \ldots\; a_n = 0\;.$$ Tādēļ

ja veselai n-tās kāpes funkcijai ir vairāk kā n saknes, tad tai ir bezgalīgi daudz saknes, tā ir 0 pie katras x vērtības.

Ja funkcijām

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$

$$\varphi(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_n$$

ir vienlīdzīgas vērtības pie vairāk kā n vērtībām x,tad nolīdzinājumam

$$f(x) - \varphi(x) = (a_0-b_0)x^n + (a_1 - b_1)x^{n-1}+\ldots+(a_n - b_n) = 0$$

vajaga būt vairāk kā n saknes, bet tad,ievērojot augšējo

$$a_0 - b_0 = 0\ ,\quad a_1 - b_1 = 0\ ,\ \ldots\ a_n - b_n = 0$$

tā tad

$$a_0 = b_0\ ,\ a_1 = b_1\ ,\ldots\ a_n = b_n$$

Divi, attiecībā uz x sakārtoti polinomi, ir identiski vienlīdzīgi, ja vienlīdzīgi koeficienti pie vienlīdzīgām kāpēm.

9. Nolīdzinājuma

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n = 0 \quad \ldots\ldots\ldots(11)$$

koeficienti ir simmetriskas funkcijas no nolīdzinājuma saknēm. a_1 ir visu sakņu summa ar pretējo zīmi, a_2 ir summa no sakņu kombinācijām pa divām ar nemainītu zīmi, a_3 ir summa no sakņu kombinācijām pa trijām ar pretējo zīmi u.t.t. Absolūtais loceklis a_n ir visu sakņu reizinājums. Ja n, nolīdzinājuma kāpe, ir pāra skaitlis, tad sakņu reizinājums ar nemainītu zīmi,bet ja n ir nepāra skaitlis, tad zīme pretēja.

f(x) pārveidojot sakņu faktoros, dabūjam

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_n)\ldots(12)$$

Izvedot labā pusē reizinājumu, dabūjam

$$= x^n - (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)x^{n-1} + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots)x^{n-2} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^n\,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$$

Ievērojot nenoteiktu koeficientu izteiksmi,koeficientiem pie x tām pašām kāpēm vajag abās pusēs būt vienlīdzīgiem

$$a_1 = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)$$
$$a_2 = +(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_n)$$
$$a_3 = -(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \ldots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_n = (-1)^n\,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n$$

Šeit īpaši ievērojamas izteiksmes par koeficientu pie x^{n-1} un par absolūto locekli a_n . Šīs izteiksmes turpmāk bieži lietosim.

Secinājumi.

Ja nolīdzinājumā nav otra locekļa(t.i.locekļa ar x^{n-1}), tad visu sakņu summa ir nulle.

Ja nolīdzinājumā nav a_n ,absolūtā locekļa,tad viena sakne = 0.

Redzams arī, ka ja a_n un a_{n-1} = 0, tad $x_1 = x_2 = 0$.

Šeit jāpiemin arī izteiksme, kuŗa bieži tiek lietota.

Ja n-tās kāpes nolīdzinājuma koeficients a_0 pie x^n top = 0,tad nolīdzinājumam ir viena sakne $x = \infty$

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

liekam

$$x = \frac{1}{z}$$

$$\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_2}{z^{n-2}} + \ldots\ldots + a_n = 0$$

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n = 0$$

ja šeit $a_0 = 0$, tad $z_1 = 0$, bet

$$x_1 = \frac{1}{z_1} = \frac{1}{0} = \infty$$

Ja arī $a_1 = 0$, tad arī $x_2 = \infty$

10. Ja nolīdzinājumam, kuŗa koeficienti ir reāli skaitļi,

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0 \quad \ldots\ldots\ldots(13)$$

ir sakne $x_1 = \alpha + \beta i$, tad nolīdzinājumam ir arī sakne $x_2 = \alpha - \beta i$ Ieliekot vērtību $x_1 = \alpha + \beta i$ nolīdzinājumā (13) zinam,ka izdarot operācijas dabūjam rezultātā

$$A + Bi$$

Ieliekot nolīdzinājumā (13) $x_2 = \alpha - \beta i$, dabūjam kā rezultātu

$$A - Bi$$

Tā kā $\alpha + \beta i$ ir sakne, tad vajag būt $A + Bi = 0$,t.i. $A = 0$ un $B = 0$. Bet tad arī ir $A - Bi = 0$, t.i. $\alpha - \beta i$ arī ir sakne. Tā tad ja nolīdzinājumam ir kompleksas saknes, tad tās arvien parādās piekārtotas pāros.

Secinājumi.

a) Ja nolīdzinājuma sakne $\alpha + \beta i$ atkārtojās k reizes,tad šajā nolīdzinājumā atkārtojās k reizes arī sakne $\alpha - \beta i$.

b) Redzams,arī, ka nepāra kāpes nolīdzinājumam ir vismaz viena reāla sakne un ka pāra kāpes nolīdzinājumam var būt visas saknes reālas, kā arī visas saknes kompleksas.

c) Kompleksu sakņu pāra reizinājums

$$[x - (\alpha + \beta i)][x - (\alpha - \beta i)] = [(x - a) - \beta i][(x - a) + \beta i]$$

dod $(x-\alpha)^2 + \beta^2 = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2 = x^2 + px + q$

Ievērojot šo izteiksmi un agrāk norādīto salikumu redzams, ka nolīdzinājuma polinomu var sadalīt faktoros,kuŗi vispārējā gadījā pieņem veidus

1) $(x-\alpha)$, 2) $(x-\beta)^m$, 3) $(x^2 + px + q)$ un 4) $(x^2 + px + q)^n$

Pirmā veida faktoru dod katra reāla vienreizēja sakne,otra veida faktoru dod katra reāla un m reizēja sakne.Trešā veida faktoru dabūjam no katra vienreizēja kompleksu sakņu pāra un beidzamo veidu dod katrs kompleksu piekārtotu sakņu pāris, ja tas atkārtojās n reizes.

d) Pāra kāpes nolīdzinājumam ir divi reālas saknes,viena +,otra -,ja absolūtā locekļa zīme ir minus un visas saknes var būt kompleksas, ja zīme pie a_n ir plus.

e) Nepāra kāpes nolīdzinājuma reālas saknes zīme ir pretēja absolūtā locekļa zīmei.

11. Ja nolīdzinājumā $f(x) = 0$ ieliek x vietā $-x$,tad nolīdzinājuma $f(-x) = 0$ saknēm ir tāds pat absolūta vērtība, kā $f(x) = 0$ saknēm, bet sakņu zīmes ir apgrieztas.

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n) = 0$$

$$f(-x) = (-x-\alpha_1)(-x-\alpha_2) \dots (-x - \alpha_n) = 0 \quad \dots\dots(14)$$

Redzams, ka nolīdzinājuma saknes ir $-\alpha_1$, $-\alpha_2$ u.t.t.,

Piemērs.
Nolīdzinājuma

$$x^3 + 2x^2 - 19x + 20 = 0$$

saknes ir +1, -4 un +5. Liekot x vietā -x, dabūjam

$$-x^3 - 2x^2 + 19x + 20 = 0$$

pārmainot zīmes, lai pataisītu pirmo locekli par pozitīvu, dabūjam

$$x^3 + 2x^2 - 19x - 20 = 0$$

Šī nolīdzinājuma saknes ir -1, +4 un -5, jo redzams, ka

$$-(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = a_1 = -(-1 + 4 - 5) = +2$$

un

$$\alpha_1 . \alpha_2 . \alpha_3 = (-1)^m . a_n = (-1)^3 . (-20) = - . (-1. +4. -5) = +20$$

12. Ja nolīdzinājuma polinomā seko divi locekļi ar pretējām zīmēm, tad saka, ka tai vietā ir zīmju maiņa, bet ja diviem blakus stāvošiem locekļiem ir vienlīdzīgas zīmes, tad saka, ka tai vietā ir zīmju sekojums.

m-tās kāpes pilnīgā nolīdzinājumā atrodas m+1 locekļi, tāpēc viņā zīmju maiņu un zīmju sekojumu skaita summa ir = m.

Agrāk norādīts, ka nolīdzinājuma koeficienti ir simmetriskas funkcijas no tā saknēm. Izteiksmes (§ 8) priekš koeficientiem rāda, ka nolīdzinājumā, kuŗam ir tikai realas pozitīvas saknes, var būt tikai zīmju maiņas un ka nolīdzinājumā, kuŗam ir tikai reālas, bet negatīvas saknes, var būt tikai zīmju sekojumi.

Nolīdzinājumam ar reāliem koeficientiem (pilnīgam vai nepilnīgam) ir lielākais tik daudz pozitivu sakņu, kā zīmju maiņu.

Pieņemam, ka $\varphi(x)$ ir vesela rācionāla funkcija ar reāliem koeficientiem

$$\varphi(x) = x^m + \dots + - \dots - + \dots + - \dots - + \dots + \quad \dots (15)$$

Šinī izteiksmē uzrādītas tikai locekļu zīmes, jo šeit lieta grozās ap zīmju maiņām jeb sekojumiem. Reizinam (15) ar $(x-\alpha)$ kā aritmetikā norādīts

$$\varphi(x) = x^m + \dots + \; - \dots - \; + \dots + \; - \dots - \; + \dots +$$

$$\underline{\qquad x-\alpha \qquad}$$

$$\underline{x^{m+1} \; \pm \dots \pm \; \mp \; \mp \cdots \mp\pm \; \pm \cdots \pm\mp \; \mp \cdots \mp\pm \; \pm \cdots \pm \; -}$$

$$\varphi(x)(x-\alpha) = x^{m+1} \; \pm \dots \pm \; \mp \; \mp \cdots \mp\pm \; \pm \cdots \pm\mp \; \mp \cdots \mp\pm \; \pm \cdots \pm \; - \quad \dots\dots\dots(16)$$

Izteiksmē (15) punkti starp divām + zīmēm apzīmē, ka šeit visi locekļi + un punkti starp divām - zīmēm, ka šeit visi locekļi -. Izteiksmē (16) dubultās zīmes apzīmē, ka attiecošā locekļa zīme nav zināma. Zīmju rindā redzams, ka pēc dažiem locekļiem ar nenoteiktām zīmēm nāk loceklis ar noteiktu zīmi - un atkal pēc locekļiem ar nenoteiktām zīmēm nāk loceklis ar noteiktu zīmi +. Šāda kārtība atkārtojās. Reizinājuma locekļi ar noteiktām zīmēm mainās kārtīgi, pie kam divi sekojušas noteiktas zīmes nevar būt vienlīdzīgas. Noteiktās zīmes reizinājumā, kā redzams, rodās tur, kur reizināmā atrodās zīmju maiņa. Ja funkcijā $\varphi(x)$ ir r zīmju maiņas, tad reizinājumā vajag būt r + 2 locekļiem ar noteiktām zīmēm, jo pirmajam un beidzamam loceklim reizinājumā arī ir noteiktas zīmes. Tā kā noteiktās zīmes mainās kārtīgi + - + - u.t.t., tad starp divām noteiktām ir vismaz viena zīmju maiņa (var būt arī vairākas, bet nepāra skaitlī), tā tad starp r + 2 locekļiem ar noteiktām zīmēm ir vismaz r + 1 zīmju maiņas. No tā seko, ka ar $(x - \alpha)$ reizinātā polinomā $\varphi(x)$ ir vismaz par vienu zīmju maiņu vairāk, nekā polinomā $\varphi(x)$.

Pieņemam, ka nolīdzinājuma

$$f(x) = 0$$

pozitīvas saknes ir $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ un ka negatīvo un komplekso sakņu reizinājums dod $\varphi(x)$, tad

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_n)\varphi(x)$$

Ja polinomu $\varphi(x)$ pakāpeniski reizinam pirms ar $(x - \alpha_1)$, tad ar $(x - \alpha_2)$ u.t.t. līdz $(x - \alpha_n)$, tad ar katru reizināšanu nāk klāt viena zīmju maiņa un pēc noreizināšanas ar visiem faktoriem, reizinājumā ir n zīmju maiņu vairāk, nekā polinomā $\varphi(x)$.

No teiktā seko:

Nolīdzinājumam $f(x) = 0$ ir vismaz tikdaudz zīmju maiņu, cik pozitīvu sakņu. No augšējā un agrākām izteiksmēm seko

a) nolīdzinājumam $f(x) = 0$ nevar būt vairāk pozitīvas saknes, kā zīmju maiņu, bet gan mazāk.
b) Nolīdzinājumam $f(x) = 0$ var būt lielākais tik daudz negatīvu sakņu, kā $f(-x) = 0$ ir zīmju maiņu.
   Tas seko, ievērojot § 10.
c) Pilnīgā nolīdzinājumā zīmju maiņām $f(x) = 0$ atbilst zīmju sekojumi $f(-x) = 0$ un katram zīmju sekojumam $f(x) = 0$ atbilst zīmju maiņa $f(-x) = 0$. Ievērojot (a) un (b) seko: katram pilnīgam nolīdzinājumam $f(x) = 0$ ir lielākais tik daudz pozitīvu sakņu, kā $f(x) = 0$ ir zīmju maiņu un lielākais tik daudz negatīvu sakņu, kā $f(x) = 0$ ir zīmju sekojumu.
d) Ievērojot, ka zīmju maiņu skaits plus zīmju sekojumu skaits nolīdzinās $f(x) = 0$ kāpei un visu sakņu skaitam, no (c) seko:

Katram pilnīgam nolīdzinājumam $f(x) = 0$, kuŗa visas saknes ir reālas, ir taisni tik daudz pozitīvu sakņu, kā zīmju maiņu un negatīvu sakņu taisni tikdaudz kā zīmju sekojumu.

Piemēri.

1) $$f(x) = x^5 - 3x^4 - 7x^2 + 5 = 0$$

Nolīdzinājumā ir 2 zīmju maiņas, tā tad tam ir lielākais divi saknes +. Veidojot $f(-x)$, dabūjam

$-x^5 - 3x^4 - 7x^2 + 5 = 0$ jeb $x^5 + 3x^4 + 7x^2 - 5 = 0.$

Šinī nolīdzinājumā ir viena zīmju maiņa, tā tad $f(x)$ ir lielākais viena negatīva sakne. Tā kā nolīdzinājums ir nepāra kāpes, un absolūtais loceklis ir +, tad tas, pēc agrākā, norāda, ka vismaz vienai saknei vajag būt -. Tā kā pozitīvu sakņu skaits ir lielākais divas un negatīvo lielākais viena, tad redzams, ka nolīdzinājumam vajag būt vismaz 2 kompleksām saknēm.

2) $$f(x) = x^6 - 3x^5 - 7x^4 + 21x^3 - 48x^2 + 12x - 20 = 0$$

Šis nolīdzinājums ir pilnīgs, tanī ir 5 zīmju maiņas un viens sekojums. Tāpēc tam ir lielākais 5 pozitīvas saknes un lielākais viena negatīva sakne. Bet tā kā absolūtais loceklis ir negatīvs un nolīdzinājuma kāpe ir pāra, tad pēc § 9 šim nolīdzinājumam vajag būt vismaz divām reālām saknēm, vienai + un otrai –. No tā ir redzams, ka šim nolīdzinājumam vajag būt vienai negatīvai saknei, kuŗa arī ir vienīgā negatīvā sakne.

3) $$f(x) = x^7 - 7 = 0$$

Šeit ir viena zīmju maiņa, šinī nolīdzinājumā ir lielākais viena pozitīva sakne, bet tā kā nolīdzinājums ir nepāra kāpes un absolūtais loceklis ir negatīvs, tad šim nolīdzinājumam arī pienākās šī viena + sakne. Tā kā $f(-x) = x^7 + 7 = 0$, kur nav zīmju maiņas, tad augšējam nolīdzinājumam nav negatīvu sakņu, tādēļ 6 saknes imagināras.

13. Ja nolīdzinājumā $f(x) = 0$ trūkst loceklis starp locekļiem, kuŗiem ir vienlīdzīgas zīmes, tad $f(x) = 0$ ir imagināras saknes. Ja šinī nolīdzinājumā trūkstošā locekļa vietā ieliktu locekli ar koeficientu 0 un tā kā tā zīme nav noteikta, dotu tam reizi zīmi +, otrreiz –, tad vienā gadijumā šai vietā dabūtu divi zīmju maiņas un otrā divi zīmju sekojums, un ja visas saknes būtu reālas, tad divām saknēm vajadzētu būt, vienā un tai pašā laikā, abām pozitīvām un abām negatīvām. Tas nav iespējams, tādēļ visas saknes nevar būt reālas un ar šo trūkstošo locekli ir norādīts vismaz uz vienu pāri imagināru sakņu.

Piemērs. $$x^6 + x^4 + x^2 - 3 = 0$$

Loceklis ar x^5 trūkst starp locekļiem ar + zīmēm un norāda 1 pāri imagināru sakņu, un tāpat loceklis ar x^3 trūkst starp locekļiem ar + zīmi un arī norāda 1 pāri imagināru sakņu.

Pievedam bez pierādijuma arī vēl pazīmes, kad nolīdzinājumam ir imagināras saknes.

1) Ja nolīdzinājumā 3 sekojoši koeficienti veido geometrisku rindu,

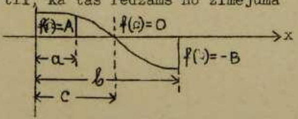
2) ja nolīdzinājumā 4 sekojoši koeficienti veido aritmetisko rindu.

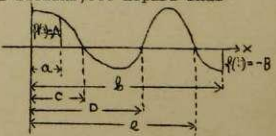
Piemēri.
$$x^5 + 3x^4 - x^3 + 2x^2 - 4x + 7 = 0$$
$$(-1),(+2),(-4) = -1,(-1.\ -2),(2.\ -2)$$

Še 3 locekļu koeficienti veido geometrisku rindu ar reizinātāju -2.
$$x^6 + 11x^5 + 8x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 9 = 0$$
$$11 \quad (11-3) \quad (8-3) \quad (5-3)$$

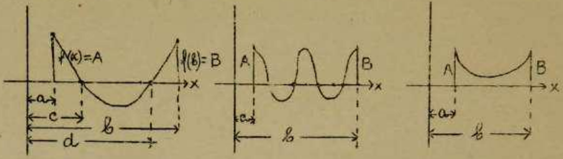
Koeficienti 11, 8, 5, 2 veido aritmetisku rindu.
Šiem nolīdzinājumiem ir imaginaras saknes.

14. Algebrāisks polinoms $f(x)$ ir nepārtraukta funkcija no x, kā tas zināms no diferenciālrēķiniem. Tādēļ, ja pie $x = a$ $f(a) = +A$ un pie $x = b$ $f(b) = -B$, starp a un b vajag atrasties vismaz vienai nolīdzinājuma $f(x) = 0$ saknei. Sakņu skaits starp a un b var būt arī lielāks, bet nepāra skaitlī, kā tas redzams no zīmējuma





Ja $f(a) = \pm A$ un $f(b) = \pm B$, tad starp A un B var atrasties reālas saknes pāra skaitā, jeb visas saknes imagināras, kā to redzam no sekojošiem zīmējumiem



15. Dalīšana ar Hornera paņēmienu.

Bieži vajadzīgs nolīdzinājuma polinomu dalīt ar $(x - \alpha)$. Dalīšana viegli izdarāma ar Hornera paņēmienu.

Dalot polinomu ar $(x - \alpha)$ ar algebrā rādītu paņēmienu, dabūjam

$$(a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + a_3x^{n-3} + \ldots + a_n):(x-\alpha) = a_0x^{n-1} + (a_0\alpha + a_1)x^{n-2} + [(a_0\alpha+a_1)\alpha+a_2]x^{n-3} \text{ u.t.t.}$$

$$\begin{array}{l} \underline{a_0x^n - a_0\alpha\, x^{n-1}} \\ \quad (a_0\alpha+a_1)x^{n-1} + a_2x^{n-2} \\ \quad \underline{(a_0\alpha+a_1)x^{n-1} - (a_0\alpha+a_1)\alpha\, x^{n-2}} \\ \qquad\qquad [(a_0\alpha+a_1)\alpha+a_2]x^{n-2}+a_3x^{n-3} \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Dalijuma kvocients ir arī vesela algebrāiska funkcija no x

$$A_0\, x^{n-1} + A_1x^{n-2} + A_2x^{n-3} + \ldots -$$

Salīdzinot koeficientus, dabūjam

$$\begin{aligned} A_0 &= a_0 && = a_0 \\ A_1 &= A_0\alpha + a_1 && = a_0\alpha + a_1 \\ A_2 &= A_1\alpha + a_2 && = a_0\alpha^2 + a_1\alpha + a_2 \\ &\text{u.t.t.} \\ A_{n-1} &= A_{n-2}\alpha + a_{n-1} && = a_0\alpha^{n-1} + a_1\alpha^{n-2} + \ldots + a_{n-1} \\ A_n &= A_{n-1}\alpha + a_n && = a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \ldots + a_n \end{aligned}$$

Kā redzams A_n ir izteiksme, kuŗu dabū polinomā x vietā ieliekot α.

Ja α ir nol-ma $f(x) = 0$ sakne, tad $A_n = 0$.

Koeficientu A_1, A_2 ... A_n aprēķināšana izdarāma pēc šādas schemas

$$f(x) = 5x^3 - 2x^2 + 4x - 8$$

jādala ar $x - 2$, tad $\alpha = 2$. Schema dabū veidu

	5	-2	4	-8	(koeficienta a rinda)
2	5	8	20	(32)	(koeficienta A rinda)

$a_0 = 5$, $a_1 = -2$, $a_2 = 4$, $a_3 = -8$

$A_0=a_0=5; A_1=A_0\alpha+a_1=5.2-2=8; A_2=A_1\alpha+a_2=8.2+4=20; A_3=A_2\alpha+a_3=20.2-8=32$

Skaitlis iekavās (32) = f(2).

Ja polinomā trūkst kāds loceklis, tad attiecīgā vietā koeficientu rindā jaieved koeficients 0. Piemēram

$$x^4 - 5x^2 - 6 \text{ ; jā dala } x + 2 \text{ ; } \alpha = -2$$

	1	0	-5	0	-6
-2	1	-2	-1	2	(-10)

dalijuma rezultats ir $x^3 - 2x^2 - x + 2 - \frac{10}{x+2}$; $f(-2) = -10$.

Ja dalīšanā ar $(x - \alpha)$ ar Hornera paņēmienu, beidzamais koeficients iznāk nulle, tad α ir $f(x) = 0$ sakne. Piemēram atrast sekojuša nolīdzinājuma saknes

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

Šis ir nepāra kāpes nolīdzinājums un absolūtais loceklis ir −, tā tad viena sakne ir +. Nolīdzinājums ir pilnīgs, še ir trīs zīmju maiņas, tādēļ vislielākais 3 saknes +

$$f(-x) = -x^3 - 6x^2 - 11x - 6 = 0$$
$$f(-x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$$

zīmju maiņu nav, tādēļ negatīvu sakņu nav. Saliekam absolūto locekli 6 faktoros 1,2,3,6. Starp šiem faktoriem vajag atrasties nolīdzinājuma visām veselām saknēm un pie tam ar + zīmēm, jo negatīvu sakņu nav. Mēģinam faktorus, dalot ar Hornera paņēmienu. Ja 1 ir sakne, tad polinomam vajag dalīties ar (x−1) bez atlikuma, tad Hornera schemā beidzamam koeficientam vajag būt 0. Tādā kārtā mēģinam arī citus faktorus un atrodam saknes

	1	-6	11	-6	
1	1	-5	6	(0)	1 ir sakne
2	1	-3	(0)		2 " "
3	1	(0)			3 " "

Tā kā koeficients pie x^2 ir −6, tad sakņu summai vajag būt +6. Tā tas arī ir, jo 1 + 2 + 3 = 6.

16. Nolīdzinājumu pārveidošana.

a) $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (A)$

Liekot šinī nolīdzinājumā $x = kz$, dabūjam $z = \frac{x}{k}$; ievedot šo vērtību nolīdzinājumā, tas dabū veidu

$$f(kz) = a_0k^nz^n + a_1k^{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

Šo nolīdzinājumu atslēdzot attiecībā uz z, dabūjam sakņu vērtības, kuŗas katra ir k-tā daļa no dotā nolīdzinājuma saknēm.

b) Liekot $x = z + h$ nolīdzinājumā (A), dabūjam nolīdzinājumu iekš z un tā kā $z = x - h$, tad jaunā nolīdzinājumā saknes ir par h mazākas, nekā nolīdzinājuma (A) saknes. Ievedot x vietā z + h, dabūjam, izvirzot f(z+h) Taylora rindā

$$f(x)=f(z+h)=f(h)+\frac{f'(h)}{1!}\cdot z+\frac{f''(h)}{2!}\cdot z^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(h)}{n!}\cdot z^n = 0 \ldots\ldots (B)$$

$$f(x)=f(h)+\frac{f'(h)}{1!}\cdot(x-h)+\frac{f''(h)}{2!}\cdot(x-h)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(h)}{n!}\cdot(x-h)^n = 0 \ldots (C)$$

Salīdzinot (B) un (C) redzams, ka koeficientus pie z dabūjam dalot f(x) ar (x−h). Pie pirmā dalijuma atlikums ir f(h), tas ir nolīdzinājuma (B) absolūtais loceklis. Dalot kvocientu vēl reizi ar (x−h), dabūjam atlikumu, kas dod koeficientu pie z. u.t.t.

Šo paņēmienu sauc par Budana paņēmienu. Dalīšana izdarāma viegli ar Hornera paņēmienu. Hornera schemā, iekavās atrodošies skaitļi dod meklētos koeficientus.

Piemērs. $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ pārveidot, liekot $x = z + 3$

	1	-2	-3	0	1
3	1	1	0	0	(1)
3	1	4	12	(36)	
3	1	7	(33)		
3	1	(10)			
	(1)				

Pārveidotais nolīdzinājums ir

$$z^4 + 10z^3 + 33z^2 + 36z + 1 = 0$$

Koeficientus var arī dabūt šādi. No (B) redzams, ka pārveidotā nolīdzinājumā, ar z kā nezināmo

absolūtais loceklis : $a'_n = f(h)$; $h = 3$

koeficients pie z : $a'_{n-1} = \frac{f'(h)}{1!}$

. . . .

koeficients pie $z_n = \frac{f^{(n)}(h)}{n!}$

Piemēram koeficients pie z^2 ir $\frac{f''(h)}{2!} = \frac{(12x^2-12x-6).3}{2} = \frac{66}{2} = 33$

c) Liekot nolīdzinājumā (A) $x = \frac{1}{z}$, dabūjam

$$f(x) = f(\tfrac{1}{z}) = \frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_2}{z^{n-2}} + \dots + a_n = 0$$

vai arī

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \dots + a_0 = 0$$

Šī nolīdzinājuma saknes ir dotā nolīdzinājuma sakņu apgrieztas vērtības.

17. Atkārtojušās saknes.

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

saliekot sakņu faktoros, dabūjam

$$f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\dots(x-\alpha_n) = 0$$

Ja $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \dots \alpha_i$, tad dabūjam

$$f(x) = (x-\alpha_1)^i (x-\alpha_{i+1})(x-\alpha_{i+2})\dots(x-\alpha_n) = 0$$

Sakni α_1 sauc par i reizes atkārtojušos sakni.
f(x) varam attīstīt

$$f(x) = f(\alpha_1 + x - \alpha_1) = f(\alpha_1) + \frac{f'(\alpha_1)}{1!}\cdot(x-\alpha_1) + \frac{f''(\alpha_1)}{2!}\cdot(x-\alpha_1)^2 + \dots\dots$$

$$\dots + \frac{f^{(n)}(\alpha_1)}{n!}\cdot(x-\alpha_1)^n$$

Ja α ir $f(x) = 0$ sakne, tad $f(\alpha_1) = 0$ un nolīdzinājumā labā pusē var izņemt kopēju reizinātāju $(x-\alpha_1)$

$$f(x) = (x-\alpha_1)\left[\frac{f'(\alpha_1)}{1!} + \frac{f''(\alpha_1)}{2!}(x-\alpha_1) + \dots + \frac{f^{(n)}(\alpha_1)}{n!}(x-\alpha_1)^{n-1}\right] \dots\dots(C)$$

Ja α_1 ir divkārtēja sakne, tad vajag varēt izņemt faktoru $(x - \alpha_1)^2$. Kā redzams no (C), to var izdarīt, ja $f'(\alpha_1) = 0$. Tālāk ejot redzams, ka α_1 būs k-kārtēja sakne, ja varēsim izņemt faktoru $(x - \alpha_1)^k$ un tas būs iespējams, ja

$$f(\alpha_1) = 0 \; ; \; f'(\alpha_1) = 0 \; ; \; f''(\alpha_1) = 0 \; \ldots \; f^{n-1}(\alpha_1) = 0$$

Bet tad funkcijas izvirzijums rindā būs šāds

$$f(x) = \frac{f^{(k)}(\alpha_1)}{k!}(x-\alpha_1)^k + \frac{f^{(k+1)}(\alpha_1)}{(k+1)!}(x-\alpha_1)^{k+1} + \ldots + \frac{f^{(n)}(\alpha_1)}{n!}(x-k)^n$$

Diferencējot attiecībā uz x, dabūjam

$$f'(x) = \frac{f^{(k)}(\alpha_1)}{k!}.k.(x-\alpha_1)^{k-1} + \frac{f^{(k+1)}(\alpha_1)}{(k+1)!}.(k+1).(x-\alpha_1)^k + \ldots + \frac{f^{(n)}(\alpha_1)}{n!}.n(x-\alpha_1)^{n-1}$$

No augšējā redzams, ka ja α_1 ir k-kārtēja sakne, tad $f(x)$ satur sakņu faktoru $(x - \alpha_1)^k$ un $f'(x)$ satur faktoru $(x-\alpha_1)^{k-1}$. Redzams arī, ja α neatkārtojās, tad $f'(x)$ nesatur faktoru $(x-\alpha)$.
Ja α ir k-kārtēja un β ir i-kārtējas saknes, un pieņemot, ka citas saknes neatkārtojās, tad ievērojot augšējo, varam rakstīt

$$f(x) = (x - \alpha)^k (x - \beta)^i \varphi(x)$$

un

$$f'(x) = (x - \alpha)^{k-1} (x - \beta)^{i-1} \psi(x)$$

Redzams, ka $f(x)$ un $f'(x)$ lielākais kopējs dalītājs ir

$$\omega(x) = (x - \alpha)^{k-1} (x - \beta)^{i-1}$$

Dalot $f(x)$ ar $\omega(x)$ dabūjam

$$\theta(x) = \frac{f(x)}{\omega(x)} = \frac{(x - \alpha)^k (x - \beta)^i \varphi(x)}{(x - \alpha)^{k-1} (x - \beta)^{i-1}} = (x - \alpha)(x - \beta)\varphi(x)$$

Beidzamajā izteiksmē atrodās nolīdzinājuma $f(x) = 0$ visas saknes, bet tikai pa vienai. Ja uzmeklējam kopējo dalītāju funkcijām $\theta(x)$ un $\omega(x)$, tad dabūjam izteiksmi, kurā atrodās atkārtojošās saknes, bet arī tikai pa vienai.

18. Numeriski nolīdzinājumi.

1) Ja dotā nolīdzinājumā

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

Visi koeficienti ir doti kā noteikti skaitļi, tad šādu nolīdzinājumu sauc par numerisku nolīdzinājumu. Pieņemot, ka visi koeficienti ir racionāli skaitļi, tad augšējo nolīdzinājumu var ar pārveidošanas paņēmieniem pārvest sekojošā veidā

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + a_n = 0$$

kur visi koeficienti ir veseli skaitļi un koeficients pie augstākā locekļa ir 1.

2) Sakņu robežas.
Ja $f(x)$ dabū pozitīvu vērtību priekš katra $x \geq g$, tad starp g un $+\infty$ nevar atrasties $f(x) = 0$ sakne; g tādēļ ir sakņu virsrobeža. Dotā nolīdzinājumā

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + a_3 x^{n-3} + \ldots - a_k x^{n-k} \pm a_{k+1} x^{n-k-1} \pm \ldots \pm a_n = 0$$

$a_k x^{n-k}$ ir pirmais negatīvais loceklis,

a_r lielākā negatīva koeficienta absolūtā vērtība, tad f(x) dabūs pozitīvu vērtību pie visiem x, pie kuriem

$$x^n \geqq a_r(x^{n-k} + x^{n-k-1} + x^{n-k-2} + \ldots + 1)$$

Šeit sākot ar pirmo negatīvo locekli visi tālākie locekļi ņemti negatīvi un visi ar lielāko negatīvo koeficienta vērtību.

Rakstot rindas vietā tās summu

$$x^n \geqq a_r \cdot \frac{(x^{n-k+1} - 1)}{x - 1}$$

Atmetot labā pusē skaitītājā -1, noteikums būs izpildīts,ja

$$x^n \geqq a_r \cdot \frac{x^{n-k+1}}{x - 1}$$

$$x^{k-1} \geqq a_r \frac{1}{x - 1}$$

$$(x-1)x^{k-1} \geqq a_r$$

noteikums būs vēl vairāk izpildīts, ja

$$(x-1)(x-1)^{k-1} \geqq a_r$$

$$(x-1)^k \geqq a_r$$

$$x \geqq 1 + \sqrt[k]{a_r}$$

tad $x = 1 + \sqrt[k]{a_r}$ ir pozitīvo sakņu robeža.(Rolle paņēmiens).

Piemērs.

$$294x^4 + 31x^3 - 76x^2 + 6x + 1 = 0$$

Še $a_r = 76$; k = 2. Robeža + saknēm

$$1 + \sqrt{76} = 9.7 \sim 10$$

Pozitīvo sakņu robežu var dabūt arī ar Newtona paņēmienu. Izvirzot nolīdzinājuma polinomu Taylora rindā,dabūjam

$$f(x)=f(\ell + x-\ell)=f(\ell)+ \frac{f'(\ell)}{1!}(x-\ell)+ \frac{f''(\ell)}{2!}(x-\ell)^2 +\ldots+ \frac{f^{(n)}(\ell)}{n!}(x-\ell)^n$$

Ja šinī izteiksmē, pie kāda ℓ visi $f(\ell)$, $f'(\ell)$ ... $f^{(n)}(\ell)$ ir pozitīvi lielumi, tad pie $x > \ell$,funkcijas f(x) vērtība arvien ir pozitīva, tā tad $x = \ell$ ir pozitīvo sakņu robeža.

Piemērs.

$$2x^3 - 5x^2 - 8x + 3 = 0$$

dabūt + sakņu robežu.

$f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 8x + 3$	$f(3) < 0$ tāpēc jāņem $4: f(4) > 0$
$f'(x) = 6x^2 - 10x - 8$	$f'(1) < 0$ " " $3: f'(3) > 0$
$f''(x) = 12x - 10$	$f''(1) > 0$

Pie vērtībām 1,2,3 augšējās izteiksmes nav visas pozitīvas, bet pie x = 4 dabūjam tās pozitīvas, tā tad 4 ir + sakņu robeža. Robežu prieks negatīvām saknēm dabū, ja liek nolīdzinājumā x vietā -x, un šinī nolīdzinājumā meklē robežu + saknēm.

Atrastā vērtība tad ir dotā nolīdzinājuma negatīvo sakņu robeža.

3) Nolīdzinājumam $x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$

kuŗa koeficienti $a_1, a_2, \ldots a_n$ ir veseli skaitļi, nevar būt par saknēm daļas skaitļi. Pieņemot, ka daļa $\frac{p}{q}$ ir nolīdzinājuma sakne,(kur p un q nav kopēja dalītāja),tad ieliekot nolīdzinājumā, dabūjam

$$\frac{p^n}{q^n} + a_1 \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \ldots + a_n = 0$$

vai arī

$$\frac{p^n}{q} + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n q^{n-1} = 0$$

Šāda izteiksme nevar pastāvēt,jo $\frac{p^n}{q}$ ir daļa un daļa nevar nolīdzināties veselu skaitļu summai. Tā tad pieņēmums ir nepareizs.

4) Racionālo sakņu atrašana.

Kā zināms, nolīdzinājuma absolūtais loceklis a_n ir visu sakņu reizinājums un ja nolīdzinājumam ir racionālas saknes,veseļi skaitļi, tad šīs saknes atrodas kā faktori absolūtā loceklī a_n.

Tādēļ,lai dabūtu veselas saknes, sadalam a_n reizinātājos un ieliekam ar zīmi + vai - nolīdzinājumā, tie faktori,kuŗi pie tam apmierina nolīdzinājumu, ir tā saknes.No mēģinājuma saprotams jāizslēdz tie faktori, kuŗi atrodās ārpus sakņu robežām. Faktoru izmēģinājumu izdara ar Hornera paņēmienu.

Piemērs. $$x^4 - 8x^3 - 9x^2 + 102x + 90 = 0$$

Šis nolīdzinājums ir pilnīgs. Zīmju maiņu ir 2, tā tad lielākais ir 2 pozitivas saknes.Zīmju sekojumu ir 2, tā tad negativu sakņu ir lielākais 2.

\+ sakņu robeža $\quad 1 + \sqrt[1]{9} = 10 \quad$,jo k = 1 un $a_r = 9$

$$f(-x) = + x^4 + 8x^3 - 9x^2 - 102x + 90 = 0$$

$$1 + \sqrt{102} = \sim 11$$

Negativu sakņu robeža ir - 11.

Sadalot 90 faktoros redzams, ka mēģinājami faktori

1,2,3,5,6,9,10 ar + un - zīmēm

Uzmeklējot sakņu robežas ar Newtona paņēmienu, dabūjam

$f(x)=x^4-8x^3-9x^2+102x+90$	pie 5 vērtības +	$f(-x)=x^4+8x^3-9x^2-102x+90$	pie 3 vērtības +
$f'(x)=4x^3-24x^2-18x+102$		$f'(-x)=4x^3+24x^2-18x-102$	
$f''(x)=12x^2-48x-18$		$f''(-x)=12x^2+48x-18$	
$f'''(x)=24x-48$		$f'''(-x)=24x+48$	

Ar šo paņēmienu dabūjam labākas robežas, + sakņu robeža ir +5 un - sakņu robeža ir -3. Tā tad jāmēģina faktori 1,2,3,5.

I. $f(x)$		1	-8	-9	102	90	
	1	1	-7	-16	86	(176)	+ 1 nav sakne
	2	1	-6	-21	60	(210)	+ 2 " "
	3	1	-5	-24	30	(180)	+ 3 " "
II. $\varphi(x)$	5	1	-3	-24	-18	(0)	+ 5 ir "
	6	1	3	-6	(-54)		+ 6 nav "
	7	1	4	4	(10)		+ 7 " "
	-1	1	-4	-20	(2)		- 1 " "
	-2	1	-5	-14	(10)		- 2 " "
	-3	1	-6	-6	(0)		- 3 ir "

Dalot ar 1,2,3,5 lietojam koeficientu rindu I, bet tā kā 5 ir sakne, tad koeficientu rinda II. dod

$\frac{f(x)}{x-\alpha} = \varphi(x)$ koeficientus, kuŗa funkcija ir par vienu kāpi zemāka, nekā $f(x)$.

Šinī $\varphi(x)$ atrodas citas meklējamas saknes un tādēļ izlietojam šos koeficientus priekš tālāku faktoru izmēģināšanas.

Beidzamo koeficientu rinda 1 -6 -6, dod nolīdzinājuma koeficientus, kuŗus dabūtu, dalot doto nolīdzinājumu ar $(x-5)$ un $(x+3)$.Šinī nolīdzinājumā atrodās vēl pārējās neatrastās saknes.Nolīdzinājums ar šiem koeficientiem ir

$$x^2 - 6x - 6 = 0$$

$$x = 3 \pm \sqrt{15}$$

Irracionālas saknes vietu redzam starp 6 un 7 schemā, jo pie $x = 6$ dalījums $\varphi(x):(x-6)$ dod atlikumu -54,t.i. $\varphi(6)$ vērtību un pie $x = 7$, $\varphi(7) = 10$. Tā tad starp $x = 6$ un $x = 7$ atrodas + sakne.Pie $x = 0$, $\varphi(0) = -18$ un pie $x = -1$ $\varphi(-1) = 2$.No tā redzams, ka starp 0 un -1 atrodās otra irracionāla sakne.

5) Irracionālu sakņu atrašana.

Iekams meklē irracionālas saknes, dabū ar norādītiem paņēmieniem + sakņu un - sakņu robežas. Ja + sakņu robeža ir g un - sakņu robeža ir -g', tad izdara Hornera dalīšanu ar skaitļiem 0,1,2,3 ... +g un tāpat -1,-2,-3,...-g', dalīšanas atlikumi dod funkcijas vērtības pie šiem x un starp divām funkcijas vērtībām ar pretējām zīmēm vajag būt vienai vai nepāra skaitā vairākām irracionālām saknēm.

Piemērs.

$$x^3 - 7x + 1 = 0$$

Šis nolīdzinājums ir nepāra kāpes,absolūtam loceklim ir + zīme,tā tad vismaz vienai saknei vajag būt reālai un ar zīmi -. Še ir 2 zīmju maiņas, tā tad + sakņu var būt lielākais 2.
Sakņu robežas pēc Newtona

$f(x) = x^3 - 7x + 1$	3	$f(-x) = x^3 - 7x - 1$	3
$f'(x) = 3x^2 - 7$	2	$f'(-x)= 3x^2 - 7$	2
$f''(x) = 6x$	1	$f''(-x)= 6x$	1

$-3<x<3$

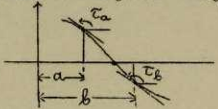
Pozitīvu sakņu robeža ir +3 un negatīvu sakņu robeža ir -3.
Tā kā nolīdzinājuma absolūtais loceklis ir 1,tad šim nolīdzinājumam var būt sakne,vesels skaitlis,tikai ± 1.
Izdaram Hornera dalīšanu

	1	0	-7	1
3	1	3	2	(7)
2	1	2	-3	(-5)
0	1	0	-7	(1)
-1	1	-1	-6	(7)
-2	1	-2	-3	(7)
-3	1	-3	2	-5

Redzams no atlikumiem, ka nolīdzinājumam nav saknes ± 1. Tā kā pie $x = 3$, $f(x) = 7$ un pie $x = 2$, $f(x) = -5$, tad viena + sakne atrodas starp 3 un 2, un tāpat ieskatāms, ka otra sakne atrodās starp 1 un 0 un viena negatīva sakne atrodās starp -2 un -3, tā tad saknes ir šķirtas. Ar šo paņēmienu nevar vispārēji visas saknes šķirt, jo kā zinam, ja pie $x = a$ $f(a) = +A$ un pie $x = a + 1$ $f(a+1) = -B$, tad starp a un a+1 var atrasties viena vai arī vairākas saknes nepāra skaitā. Bet ja pie $x = a$ $f(a) = \pm A$ un pie $x = a + 1$ $f(a+1) = \pm B$, tad intervalā a,a+1 var atrasties divas saknes vai vairākas pāra skaitā. Cik saknes atrodās dotā intervalā, nosakāms ar Sturma teorēmu.

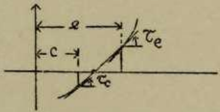
Sturma teorēma.

Kad dilstoša jeb augoša $f(x)$ iet uz vērtību 0, tad $f(x)$ un $f'(x)$ ir pretējas zīmes. Pēc tam, kad $f(x)$ ir gājuse caur vērtību 0, tai abos gadijumos ir tā pate zīme kā $f'(x)$. Tas redzams no sekojošiem zīmējumiem



$f(a)$ ir + ,bet $f'(a) = \tan\tau_a$ ir –

$f(b)$ ir – ,un $f'(b) = \tan\tau_b$ ir –



$f(c)$ ir – ,bet $f'(c) = \tan\tau_c$ ir +

$f(e)$ ir + ,un $f'(e) = \tan\tau_e$ ir +

Pieņemam, ka dotam n-tās kāpes nolīdzinājumam $f(x) = 0$ saknes neatkārtojās, tad arī $f(x)$ un tās atvasinātai $f'(x)$ nav kopēja dalītāja.

Dalot $f(x)$ ar $f'(x)$ dabūjam kvocientu Q_1 un atlikumu r. Atlikumam r pārmainam zīmi un tad to apzīmējam ar R_1, tad

$$r_1 = -R$$

Ievērojot augšējo, varam rakstīt

$$f(x) = f'(x)\, Q_1 - R_1$$

Tālāk dalot $f'(x)$ ar R_1 un atlikumam pārmainot zīmi, dabūjam

tāpat
$$\left.\begin{aligned} f'(x) &= Q_2R_1 - R_2 \\ R_1 &= Q_3R_2 - R_3 \\ R_2 &= Q_4R_3 - R_4 \\ &\dots\dots \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots\dots(1)$$

Turpinot dalijumu, dabūjam šādu funkciju rindu

$$f(x),\ f'(x),\ R_1,\ R_2,\ R_3,\ \dots\ R_{n-1} \quad \dots\dots\dots\dots(2)$$

Katra no šīm funkcijām vispārīgi ir par vienību zemākas kāpes, nekā priekšējā un beidzamā būs 0-tās kāpes un no x neatkarīga.

Šīs funkcijas sauc par Sturma funkcijām un tām ir sekojošas īpašības

a) kad viena no šīm funkcijām pie kāda $x = c$ dabū vērtību 0, tad blakus stāvošās pie tā pasa $x = c$ ir pretējām zīmēm. Tas redzams no (1), ja piemēram $R_2 = 0$, tad paliek $R_1 = -R_3$

b) divas blakus stāvošas funkcijas nekad nevar abas pieņemt vērtību 0 pie tā paša $x = c$, jo ja piemēram $R_2 = 0$ un $R_3 = 0$ pie

$x = c$, tad seko no (1), ka $R_1 = 0$, bet tad arī $f'(c) = 0$ un beidzot arī $f(c) = 0$. Bet $f(c) = 0$ un $f'(c) = 0$ var būt tad, ja c ir atkārtojošā sakne un tas nav iespējams, jo runā pretīm pieņēmumam, ka $f(x)$ nav atkārtojošās saknes.

Sturma teorēma.

Ja funkciju rindā (2) ieliekam x vietā pirms skaitļa p un vēlāk skaitli q $(p < q)$, tad, neievērojot substitucijas skaitļu vērtību, bet griežot vērību tikai uz substitucijas rezultāta zīmēm, dabūjam divas zīmju rindas, vienu pie $x = p$ un otru pie $x = q$.

Beidzamā rindā nekad nevar būt vairāk zīmju maiņu kā pirmā, bet gan mazāk un starp skaitļiem p un q atrodas taisni tikdaudz nolīdzinājuma $f(x) = 0$ reālu sakņu, cik zīmju maiņu otrā rindā (pie $x = q$) ir mazāk kā pirmā rindā (pie $x = p$).

Pierādijums. Katra no rindas (2) funkcijām maina zīmi, kad tā iet caur 0. Tā tad, zīmju rinda priekš $x = p$ nemainīsies tik ilgi, kamēr kāda no rindas funkcijām ies caur 0, pie kādas x vērtības starp p un q.

Ja kāda, vai vairākas, no funkcijām, $f'(x)$ jeb $R_1 \ldots R_{n-1}$ iet caur 0 pie kādas x vērtības starp p un q, tad rindas (2) zīmju maiņu skaits nemainās, zīmes tikai rindā pārvietojās.

Pieņemot, ka R_k iet caur 0 pie $x = c$ $(p < c < q)$ un δ tik mazs skaitlis, ka intervalā $c - \delta$ un $c + \delta$ neviena no blakus funkcijām rindā (2) neiet caur 0, tad apskatot trīs funkcijas R_{k-1}, R_k R_{k+1} redzam, ka zīmju kārtība var būt viena no sekojošām

	R_{k-1}	R_k	R_{k+1}	R_{k-1}	R_k	R_{k+1}	R_{k-1}	R_k	R_{k+1}	R_{k-1}	R_k	R_{k+1}
pie $x = c - \delta$	+	+	−	−	+	+	+	−	−	−	−	+
" $x = c$	+	o	−	−	o	+	+	o	−	−	o	+
" $x = c + \delta$	+	−	−	−	−	+	+	+	−	−	+	+

Apskatot zīmju maiņu skaitļu rindās pie $x = c - \delta$ un $x = c + \delta$ redzams, ka zīmju maiņu skaitlis abās rindās ir tas pats. Tā tad, ja kāda no funkcijām $f'(x)$, $R_1 \ldots R_n$ ir 0 pie kautkāda x starp p un q, tad zīmju maiņu skaits paliek agrākais.

Pieņemot, ka pie $x = c$ $f(c) = 0$, tad c ir nolīdzinājuma sakne. $f'(c)$ nevar būt 0, jo pieņemts, ka atkārtojošos sakņu nav. Ja pie $x = c$ kāda no funkcijām R arī ir 0, tad tas, kā redzējam, zīmju maiņu skaitu neiespaido. Zīmju maiņu skaits tiek iespaidots, kad $f(x)$ iet caur 0. Pieņemam, ka $f(x)$ iet caur 0, tad var būt divi šādi gadijumi

	$f(x)$	$f'(x)$		$f(x)$	$f'(x)$
pie $x = c - \delta$	+	−		−	+
" $x = c$	o	−	vai	o	+
" $x = c + \delta$	−	−		+	+

Redzams, ka pārejot no $x = c - \delta$ uz $x = c + \delta$ ir pazuduse viena zīmju maiņa un proti tā, kuru veido $f(x)$ un $f'(x)$ īsi pirms tam, kad $f(x)$ iet caur 0 pie $x = c$.

Pieņemam, ka $f(x) = 0$ reālas saknes starp $x = p$ un $x = q$ ir $a, b, c \ldots$ un $a < b < c < \ldots$ Ieliekot funkciju rindā (2) $x = p$ dabūjam zināmu zīmju rindu ar kādu zīmju maiņu skaitu. Ja x mainās nepārtraukti no p līdz $a - \delta$, tad zīmju maiņu skaits nevar mainīties, jo $f(x)$ šinī intervalā neiet caur 0 un ja $f'(x)$ vai kāds no R maina zīmi šinī intervalā, tad kā redzējam, tas zīmju maiņu skaitu neiespaido. Īsi pirms tam, kad $f(x)$ iet caur 0, t.i. pie $x = a - \delta$ funkcijai $f(x)$ un $f'(x)$ kā zināms ir pretējas zīmes, bet pēc tam, kad $f(x)$ gājuse caur 0, tai un f'(x) ir vienlīdzīgas zīmes,še ir pazuduse viena zīmju maiņa zīmju rindā, jeb zīmju rindā pie $x = a + \delta$ ir par vienu zīmju maiņu mazāk, kā zīmju rindā pie $x = p$. Liekam x augt no a uz b, no $x = a + \delta$ līdz $x = b - \delta$, f(x) neiet caur 0,tā tad f(x) zīmi nemaina, bet f'(x) šinī intervalā iet caur 0,jo pie $x = b - \delta$ tai atkal ir tāda pat zīme, kā f(x). Bet kā zinams ja f'(x) iet caur 0,tas zīmju skaitu rindā (2) nemaina.Tā tad īsi pirms tam, kad f(x) iet caur 0, pie otras saknes b zīmju maiņu ir tik pat, kā pēc tam, kad f(x) bija gājuse caur 0 pie saknes a, un pie tam pie $x = b - \delta$, f(x) un f'(x) ir atkal pretējas zīmes. Kad f(x) iet caur 0 pie $x = b$, pazūd atkal viena zīmju maiņa un zīmju rindā (2) pie $x = b + \delta$ ir par 2 zīmju maiņām mazāk,nekā pie $x = p$. Tā tas atkārtojās katru reizi, kad f(x) iet caur 0 un ja starp p un q atrodās k saknes, tad zīmju rindā pie $x = q$ ir taisni par k zīmju maiņām mazāk, kā zīmju rinda pie $x = p$.

Sakņu šķiršana ar Sturma paņēmienu tiek izdarīta sekojošā kārtā.

Dots nolīdzinājums $x^3 - 3x + 1 = 0$

+ sakņu robeža ir $1 + \sqrt{3} = \sim 3$; jo $k = 2$ un $a_r = 3$.

− sakņu robeža ir $-x^3 + 3x - 1 = 0$, $x^3 - 3x - 1$ $1 + \sqrt{3} = \sim 3$

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

dalam f(x) ar f'(x). Tā kā šeit vajadzīga tikai zīme,tad var dalīt ar $(x^2 - 1)$

$$(x^3 - 3x + 1):(x^2 - 1) = x$$
$$\frac{x^3 - x}{-2x + 1} \qquad R_1 = 2x - 1$$

dalam f'(x) ar R_1

$(x^2 - 1):(2x - 1)$; var dalīt $(2x^2 - 2):(2x - 1) = x$

$$\frac{2x^2 - x}{x - 2} \quad \text{reizināts ar } 2$$
$$(2x - 4):(2x - 1) = 1$$
$$\frac{2x - 1}{-3} \qquad R_2 = +3.$$

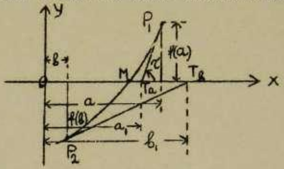
Sturma funkcijas ir	x^3-3x+1	x^2-1	$2x-1$	un +3			
$x = -\infty$	−	+	−	+	še 3 zīmju maiņas		1 negatīva sakne
$x = -3$	−	+	−	+			
$x = -2$	−	+	−	+	3 zīmju maiņas	sakne	
$x = -1$	+	−	−	+	2 zīmju maiņas		
0	+	−	−	+	še 2 zīmju maiņas	sakne	2 poz. saknes
1	−	−	+	+	" 1 " "	"	
2	+	+	+	+	" 0 " "		
3	+	+	+	+			

Pirms liekam $x = -\infty$ Sturma funkcijās un dabūjam zīmju rindu, kuŗā ir 3 maiņas. Liekot x vietā 0, dabūjam zīmju rindu ar 2 maiņām,tā tad no $x = -\infty$ līdz $x = 0$ ir pazuduse viena maiņa,tādēļ starp $x = -\infty$ un $x = 0$ atrodās 1 negatīva sakne.Liekot x vietā + ∞ dabūjam zīmju rindu, kurā nav nevienas maiņas. Tā tad starp $x = 0$, kad ir 2 maiņas un $x = +\infty$ ir pazudušas 2 maiņas, tādēļ starp $x = 0$ un $x = +\infty$ atrodas 2 saknes. Tā kā negatīvo sakņu robeža ir -3, tad liekot $x = -3$, tālāk $x = -2$, $x = -1$, redzam, ka vienīgā negatīvā sakne atrodās starp -2 un -1. Liekot $x = 1$, $x = 2$, dabūjam, ka + saknes atrodās starp 0 un 1 un starp 1 un 2.

Kad saknes šķirtas, tad to tuvina vērtību aprēķins izdarāms analitiski ar Newton'a un tā saukto reģula falsi paņēmieniem.

Newton'a paņēmiens.

$y = f(x)$ dod plāknē līkni. Šī līkne attēlota zīmējumā.



Nolīdzinājuma $f(x) = 0$ sakne ir $x = OM$. Ja $f(a)$ ir mazs skaitlis, tad $x = a$ varētu uzskatīt par saknes tuvinu vērtību, bet, kā redzams, a_1, punkta T_a abscisa, uzskatāma par labāku tuvinu vērtību.

$P_1 T_a$ ir pieskare līknes punktā P_1, kuŗa abscisa ir a.

No zīmējuma redzams, ka

$$\frac{f(a)}{a-a_1} = \tan\tau = f'(a)$$

$$a - a_1 = \frac{f(a)}{f'(a)}$$

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

Uzskatot a_1 par jaunu tuvinu vērtību, atkārtojot paņēmienu, dabūjam

$$a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)}{f'(a_1)}$$

a_2 tad ir precizāka saknes tuvina vērtība, nekā a. Operaciju atkārto kamēr dabū pietiekoši daudz pareizu decimālvietu. Ja vajadzīgs, lai tuvina vērtība a_r būtu k-tā decimalē pareiza, tad $f(a_r)$ un $f(a_r')$ vajaga būt ar pretējām zīmēm, pie kam a_r' tuvina vērtība, kuŗa atšķirās no a_r par vienību k-tā decimalē.

Ja pie $x = a$ un $x = b$, $f(a)$ un $f(b)$ ir ar pretējām zīmēm, tad sakne atrodās starp a un b. Saknes tuvina vērtības aprēķināšanai tad jālieto tā x vērtība (a vai b), pie kuŗas funkcijai un tās otrai atvasinātai ir vienādas zīmes.

Piemērs.

Aprēķināt augšējā nolīdzinājuma sakni starp 0 un 1.

$f(0) = +1$, $f'(x) = 3x^2 - 3$, $f''(x) = 6x$, $f''(0) = 0$, $f''(1) = 6$

$f(1) = -1$

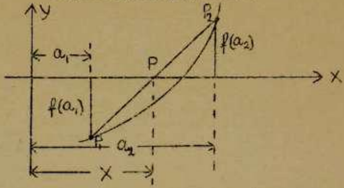
$f(1)$ ir zīme − un $f''(1)$ ir zīme +, tā tad jāņem kā tuvina vērtība $a = 0$.

Tad

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)} = 0 - \frac{f(o)}{f'(o)} = 0 - \frac{1}{-3} = + 0,333$$

Tā tad saknes pirmā tuvinā vērtība ir + 0,333.

Regula falsi paņēmiens.



Ja dotas divas f(x) vērtības $f(a_1)$ un $f(a_2)$, kuŗas atrodas tuvu f(x) = 0, tad izlietojam $f(a_1)$ un $f(a_2)$, lai atrastu punkta P chordas $P_1 P_2$ krustpunktu ar x asi abscisu, kuŗa tad uzskatāma par saknes tuvinu vērtību.

No zīmējuma redzams

$$\frac{-f(a_1)}{f(a_2)} = \frac{x - a_1}{a_2 - x}$$

$$-f(a_1)(a_2 - x) = f(a_2)(x - a_1)$$

$$-a_2 f(a_1) + x\, f(a_1) = x\, f(a_2) - a_1 f(a_2)$$

$$x[f(a_1) - f(a_2)] = - a_1 f(a_2) + a_2 f(a_1)$$

$$x = \frac{-a_1 f(a_2) + a_2 f(a_1)}{f(a_1) - f(a_2)} = \frac{-a_1 f(a_2) + a_1 f(a_1) - a_1 f(a_1) + a_2 f(a_1)}{f(a_1) - f(a_2)}$$

$$x = a_1 + \frac{(a_2 - a_1) f(a_1)}{f(a_1) - f(a_2)}$$

Augšējā piemērā liekam $a_1 = 0$, $a_2 = 1$

$$f(a_1) = +1 \ , \ f(a_2) = -1$$

$$x = 0 + \frac{(1 - 0).1}{1 - (-1)} = 0.5$$

Atrodam pie x = 0.5 vērtību f(0.5) un atkārtojam rēķinu. Pēc Hornera

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & 1 \\ \hline 0.5 & 1 & 0.5 & -2.75 & (-0.37) \end{array}$$

$$a_1 = 0 \ , \ f(a_1) = +1$$

$$a_2 = 0.5 \ , \ f(0.5) = -0.37$$

$$x_2 = 0 + \frac{(0.5 - 0).1}{1 - (-0.37)} = \frac{0.5}{1.37} = 0.36$$

Sakņu atrašana ar grāfiskiem paņēmieniem.

Ar Hornera paņēmienu dabū f(x) vērtības pie dažādiem x pietiekošā skaitā un tad uzzīmē līkni y = f(x). Nolīdzinājuma f(x) = 0 saknes dabūjam kā šīs līknes krustpunktu abscisas ar x asi. Jo pareizāki līkne zīmēta, jo precizākas dabū sakņu vērtības.

Bieži pielieto arī šādu paņēmienu. Iārved nolīdzinājumu $f(x) = 0$ kreiso pusi veidā

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x)$$

Ja $x = a$ ir nolīdzinājuma $f(x) = 0$ sakne, tad

$$f(x) = 0 = f_1(a) - f_2(a)$$

$$f_1(a) = f_2(a)$$

Augšējais nolīdzinājums izteic, ka vietā $x = a$, kur $f(a) = 0$, līknēm $f_1(x)$ un $f_2(x)$ ir vienlīdzīgas ordinātes, pie $x=a$ abas līknes krustojās.

Tā tad $f(x) = 0$ saknes dabū kā līkņu $f_1(x)$ un $f_2(x)$ krustpunktu abscisas. Šis paņēmiens pielietojams arī pie transcendentiem nolīdzinājumiem.

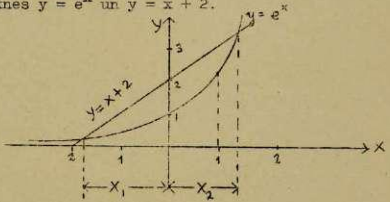
Piemērs.

Dabūt sekojoša nolīdzinājuma saknes

$$e^x - x - 2 = 0$$

$$e^x = x + 2$$

Zīmējam līknes $y = e^x$ un $y = x + 2$.



Dabūjam $x_1 = \sim -1.8$ un $x_2 = \sim 1.2$

Nolīdzinājumu atslēgšanas iespējamība.

Algebrāiskus vispārēja veida nolīdzinājumus var atslēgt, t.i. izteikt saknes kā funkcijas no nolīdzinājuma koeficientiem, tikai līdz ceturtai kāpei, to ieskaitot.

Algebrāiskus numeriskus nolīdzinājumus varam atslēgt, dabūt to reālas saknes, arī ja tie augstākās kā ceturtās kāpes, pielietojot norādītos analītiskos vai grāfiskos paņēmienus.

PARCIĀLDAĻAS.

1. Algebrāisku racionālu daļu rakstam veidā

$$\frac{F(x)}{f(x)}$$

šeit skaitītājs un saucējs veselas racionālas funkcijas no x, pie kam pieņemam, ka saucējam un skaitītājam nav kopēja dalītāja. Ja skaitītāja kāpe ir n un saucēja m un $n > m$, tad var skaitītāju nodalīt ar saucēju, dabūjot veselu funkciju un daļu, kuras skaitītājs ir zemākā kāpē, nekā saucējs.

Daļu

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)}$$

uzskatam kā tādu, kuras skaitītājam ir zemāka kāpe, nekā saucējam. Saucēju $f(x)$ varam sadalīt reizinātājos, un daļu

$\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ var pārveidot vienkāršāku daļu summā. Šīs vienkāršākās daļas sauc par parciāldaļām. Kā redzējam nolīdzinājumu teorijā, tad algebraisku f(x) var sadalīt saķņu faktoros, dabūjot šīs funkcijas saknes. f(x) saknes var būt reālas vienreizīgas, reālas atkārtojošās, kompleksas neatkārtojošās un kompleksas atkārtojošās. Sadalot f(x) reizinātājos dabūjam, piemēram, šādu veidu

$$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)^i(x-\delta)^k(x^2+px+q)(x^2+p_1x+q_1)^{\ell} \quad \ldots\ldots\ldots(1)$$

Reizinātājus $(x-\alpha)$ un $(x-\beta)$ dabūjam no neatkārtojošām reālām saknēm α un β. Atkārtojošās saknes γ un δ dod reizinātājus $(x-\gamma)^i$ un $(x-\delta)^k$, pie kam sakne γ atkārtojās i reizes un sakne δ k-reizes. Piekārtots kompleksu saķņu pāris $\alpha+\beta i$ un $\alpha-\beta i$ dod reizinātāju x^2+px+q un piekārtots, ℓ reizes atkārtojošās kompleksu saķņu pāris $\alpha_1+\beta_1 i$ un $\alpha_1-\beta_1 i$ dod reizinātāju $(x^2+p_1x+q_1)^{\ell}$. Tā tad pie f(x) sadalīšanas parciāldaļās jāapskata šie 4 gadījumi.

2. Funkcijai f(x) ir tikai reālas saknes.

Tad f(x) sadalot reizinātājos, dabūjam

$$f(x) = (x-\alpha)^k(x-\beta)(x-\gamma)\ldots(x-\delta)$$

Šo izteiksmi rakstam

$$f(x) = (x-\alpha)^k.f_\alpha(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$f_\alpha(x)$ ir polinoms, kuŗā nav saķņu faktora $(x-\alpha)$, bet kuŗš sastāv no f(x) pārējo saķņu faktoru reizinājuma.

Daļu

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)}$$

varam sadalīt parciāldaļās šādā veidā, liekot $f(x)=(x-\alpha)^k f_\alpha(x)$

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-\alpha)^k} + \frac{\varphi_1(x)}{(x-\alpha)^{k-1}f_\alpha(x)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

Še A pastāvīgs skaitlis, $\varphi_1(x)$ vesela funkcija no x un zemākas kāpes, nekā izteiksmes $f_\alpha(x).(x-\alpha)^{k-1}$ kāpe.

Pievedot nolīdzinājuma (3) labo pusi pie viena saucēja un nolīdzinot skaitītājus kreisā un labā pusē, dabūjam

$$\varphi(x) = A\,f_\alpha(x) + (x-\alpha)\varphi_1(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

$$\varphi_1(x) = \frac{\varphi(x) - A\,f_\alpha(x)}{(x-\alpha)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

Lai $\varphi_1(x)$ būtu vesela funkcija, tad skaitītājam izteiksmē (5) vajag dalīties bez atlikuma ar saucēju $(x-\alpha)$, bet tad $(x-\alpha)$ ir kā faktors skaitītājā un tad α ir skaitītāja funkcijas sakne, tādēļ

$$\varphi(\alpha) - A\,f_\alpha(\alpha) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

Atslēdzot (6), dabūjam vērtību A

$$A = \frac{\varphi(\alpha)}{f_\alpha(\alpha)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

Kā redzam A ir pastāvīgs skaitlis. Ieliekot šo vērtību izteiksmē (5), dabūjam $\varphi_1(x)$ kā veselu funkciju, kuŗas kāpe, kā redzams ir zemākā, nekā izteiksmes $(x-\alpha)^{k-1} f_\alpha(x)$ kāpe. Ieliekot A vērtību un $\varphi(x)$ izteiksmē (3), dabūjam daļas sadalīšanu, atbilstošu pieņemtiem noteikumiem. No (7) redzams, ka A nav 0, jo pēc noteikuma α nav $\varphi(x)$ sakne. Tāpat A nav arī ∞, jo $f_\alpha(x)$ nesatur $(x-\alpha)$ kā sakņu faktoru, tā tad A ir pilnīgi noteikts pastāvīgs skaitlis.

Ja $k = 1$, tad dabūjam no (3)

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{\varphi_1(x)}{f_1(x)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

$\frac{\varphi_1(x)}{f_1(x)}$ varam sadalīt tāpat, kā $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ un dabūjam

$$\frac{\varphi_1(x)}{f_1(x)} = \frac{B}{x-\beta} + \frac{\varphi_2(x)}{f_2(x)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

Tāpat sadalam arī $\frac{\varphi_2(x)}{f_2(x)}$ un turpinot dabūjam, ja $f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)\ldots$
$\ldots(x-\varepsilon)$

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \frac{C}{x-\gamma} + \ldots + \frac{H}{x-\varepsilon} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

Koeficientus dabū

$$A = \frac{\varphi(\alpha)}{f_\alpha(\alpha)} = \frac{\varphi(\alpha)}{[(x-\beta)(x-\gamma)\ldots(x-\varepsilon)]_{x=\alpha}} \;;\; B = \frac{\varphi(\beta)}{[(x-\alpha)(x-\gamma)\ldots(x-\varepsilon)]_{x=\beta}}$$

Koeficientus var dabūt arī ar šādu paņēmienu

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{(x-\beta)} + \frac{C}{x-\gamma} + \ldots + \frac{H}{x-\varepsilon} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

$$\varphi(x) = \frac{Af(x)}{x-\alpha} + \frac{Bf(x)}{x-\beta} + \frac{Cf(x)}{x-\gamma} + \ldots + \frac{Hf(x)}{x-\varepsilon} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

ja liekam $x = \alpha$, tad

$$\varphi(\alpha) = A\cdot\frac{0}{0} + 0 + 0 + \ldots + 0$$

Šīs funkcijas vērtība ir nenoteikta, bet ar diferenciālrēķinu palīdzību tā dabūjama

$$\varphi(x)_{x=\alpha} = A\left|\frac{f'(x)}{(x-\alpha)'}\right|_{x=\alpha} = A\, f'(\alpha)$$

tā tad

$$A = \frac{\varphi(\alpha)}{f'(\alpha)} \;;\; B = \frac{\varphi(\beta)}{f'(\beta)} \text{ u.t.t.} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

Trešais paņēmiens koeficientu aprēķināšanai

$$\varphi(x)=A(x-\beta)(x-\gamma)\ldots(x-\varepsilon)+B(x-\alpha)(x-\gamma)\ldots(x-\varepsilon)+\ldots+H(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) \quad \ldots\ldots (14)$$

Šeit liekot $x = \alpha$, dabūjam

$$\varphi(\alpha) = A(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)\ldots(\alpha-\varepsilon) + 0 + \ldots + 0$$

No šī nolīdzinājuma dabūjam A. Liekot $x = \beta$ nolīdzinājumā (14), dabūjam nolīdzinājumu priekš B u.t.t. Tādā kārtā dabūjam tikdaudz nolīdzinājumu, cik rezinām koeficientu A,B...H.

Ceturtais paņēmiens pastāv koeficientu salīdzināšanā pie vienlīdzīgām x kāpēm.

Izreizinot nolīdzinājuma (14) labo pusi, dabūjam polinomu iekš x. Nolīdzinot koeficientus pie vienlīdzīgām x kāpēm nolīdzinājuma abās pusēs, dabūjam taisni tikdaudz lineārus nolīdzinājumus cik nezināmo koeficientu A,B,C...H skaits. No šiem nolīdzinājumiem dabūjam koeficientus A,B,C...H.

3. Atkārtojošās reālas saknes.

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A_1}{(x-\alpha)^k} + \frac{\varphi_1(x)}{(x-\alpha)^{k-1} f_\alpha(x)} \quad \ldots\ldots\ldots(15)$$

šeit

$$A_1 = \frac{\varphi(\alpha)}{f_\alpha(\alpha)}$$

Nolīdzinājuma (15) daļu $\frac{\varphi_1(x)}{(x-\alpha)^{k-1} f_\alpha(x)}$ sadalam ar to pašu paņēmienu

$$\frac{\varphi_1(x)}{(x-\alpha)^{k-1} f_\alpha(x)} = \frac{A_2}{(x-\alpha)^{k-1}} + \frac{\varphi_2(x)}{(x-\alpha)^{k-2} f_\alpha(x)}$$

un tālāk

$$\frac{\varphi_2(x)}{(x-\alpha)^{k-2} f_\alpha(x)} = \frac{A_3}{(x-\alpha)^{k-2}} + \frac{\varphi_3(x)}{(x-\alpha)^{k-3} f_\alpha(x)} \quad \text{u.t.t.}$$

Tādā kārtā dabūjam

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A_1}{(x-\alpha)^k} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^{k-1}} + \ldots + \frac{A_k}{(x-\alpha)} + \frac{\varphi_k(x)}{f_\alpha(x)} \quad \ldots\ldots\ldots(16)$$

Ja $f_\alpha(x)$ ir atkārtojošās sakne β, tad sadala $\frac{\varphi_k(x)}{f_\alpha(x)}$ pēc šī paša paņēmiena un vēlāk, kad saucējā funkcijā ir tikai neatkārtojušās saknes, izlieto sadalīšanu pēc (10).

Koeficientus dabū ar agrākiem paņēmieniem.

4. Funkcijai f(x) ir kompleksas saknes.

Tad sadalīšana šāda

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{Px + Q}{(x^2+px+q)^k} + \frac{\varphi_1(x)}{(x^2+px+q)^{k-1} \cdot f_\alpha(x)} \quad \ldots\ldots\ldots(17)$$

$f_\alpha(x)$ satur visus reālus sakņu faktorus, P un Q pastāvīgi lielumi. $f(x) = (x^2+px+q)^k \cdot f_\alpha(x)$; $\varphi_1(x)$ vesela funkcija.

No (17) dabūjam

$$\varphi(x) = (Px + Q)f_\alpha(x) + (x^2+px+q)\varphi_1(x) \quad \ldots\ldots\ldots(18)$$

$$\varphi_1(x) = \frac{\varphi(x) - (Px + Q)f_\alpha(x)}{x^2 + px + q} \quad \ldots\ldots\ldots(19)$$

Ja $\varphi_1(x)$ ir vesela funkcija, tad izteiksmes (19) skaitītājam vajag dalīties bez atlikuma ar trinomu x^2+px+q, kuŗa saknes ir $a = m + \ell i$ un $b = m - \ell i$. Tad (19) skaitītājā vajag būt reizinātājiem x-a un x-b un tādēļ, ja liekam $x = a$ (jeb $x = b$), tad skaitītājam vajag būt = 0. Tā tad

$$\varphi(a) - (Pa + Q)f_\alpha(a) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots(20)$$

$$Pa + Q = \frac{\varphi(a)}{f_\alpha(a)} \quad \ldots\ldots\ldots(21)$$

Ievedam $a = m + \ell i$

$$P(m + \ell i) + Q = \frac{\varphi(a)}{f_\alpha(a)} = \text{kompleks.vērtībai } R + Si$$

Nolīdzinot reālos un imagināros locekļus, dabūjam

$$Pm + Q = R$$

$$P\ell = S$$

$$P = \frac{S}{\ell}$$

$$Q = R - Pm = R - S\frac{m}{\ell} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(22)$$

P un Q nav ne 0, ne ∞, jo $\varphi(a)$ nav 0 un $f_\alpha(a)$ arī nav 0.
Ja $k = 1$, tad

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{Px + Q}{x^2+px+q} + \frac{\varphi_1(x)}{f_\alpha(x)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(23)$$

$\frac{\varphi_1(x)}{f_\alpha(x)}$ sadala parciāldaļās ar agrākiem paņēmieniem.

Ja kompleksas saknes atkārtojās, tad sadalīšana izdarāma ar sekojošo paņēmienu.

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{P_1x + Q_1}{(x^2+px+q)^k} + \frac{\varphi_1(x)}{(x^2+px+q)^{k-1}\, f_\alpha(x)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(24)$$

$$\frac{\varphi_1(x)}{(x^2+px+q)^{k-1} f_\alpha(x)} = \frac{P_2x + Q_2}{(x^2+px+q)^{k-1}} + \frac{\varphi_2(x)}{(x^2+px+q)^{k-2} f_\alpha(x)} \quad \text{u.t.t.}$$

dabūjam

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{P_1x + Q_1}{(x^2+px+q)^k} + \frac{P_2x + Q_2}{(x^2+px+q)^{k-1}} + \ldots + \frac{P_kx + Q_k}{x^2+px+q} + \frac{\varphi_k(x)}{f_\alpha(x)} \quad ..(25)$$

Še $\frac{\varphi_k(x)}{f_\alpha(x)}$ sadala ar agrākiem paņēmieniem.

P_1, Q_1, P_2, Q_2 u.t.t. dabū ar nenoteiktu koeficientu paņēmienu arī kombinējot to ar citiem koeficientu aprēķināšanas paņēmieniem.

Piemērs 1.
Sadalīt parciāldaļās

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{15x^2 - 70x - 95}{x^3 + 6x^2 - 13x + 42} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-7} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(26)$$

f(x) saknes ir $a = 2$, $b = -3$, $c = 7$, visas reālas. Tā tad sadalijums ir, kā rādīts (26). Koeficientus aprēķina ar agrākiem paņēmieniem

a) $A = \frac{\varphi(a)}{f'(a)}$, $B = \frac{\varphi(b)}{f'(b)}$, $C = \frac{\varphi(c)}{f'(c)}$

$f(x)=x^3-6x^2-13x+42$; $f(2)= -175$; $f(-3)=250$; $f(7)=150$.

$f'(x)=3x^2-12x-13$; $f'(2)= -25$; $f'(-3)=50$; $f'(+7)=50$

$$A = \frac{-175}{-25} = 7 \;;\; B = \frac{250}{50} = 5 \;;\; C = \frac{150}{50} = 3$$

Tā tad sadalīšana ir

$$\frac{15x^2 - 70x - 95}{x^3 - 6x^2 - 13x + 42} = \frac{7}{x-2} + \frac{5}{x+3} + \frac{3}{x-7}$$

b) $15x^2-70x-95 = A(x+3)(x-7)+B(x-2)(x-7)+C(x-2)(x+3)$

liekam $x = 2$, dabūjam

$$-175 = -A.25 \; ; \; A = 7$$

liekot $x = -3$

$$250 = B.50 \; ; \; B = 5$$

liekot $x = 7$

$$150 = C.50 \; ; \; C = 3$$

c) Nenoteiktu koeficientu paņēmiens

$$15x^2 - 70x - 95 = A(x+3)(x-7) + B(x-2)(x-7) + C(x-2)(x+3)$$

Šī nolīdzinājuma labo pusi izreizinot, dabūjam

$$15x^2-70x-95 = (A+B+C)x^2 + (-4A-9B+C)x - 21A + 14B - 6C = 0$$

Koeficientiem pie vienlīdzīgām x kāpēm vajag būt vienlīdzīgiem

$$A + B + C = 15$$
$$-4A - 9B + C = -70$$
$$-21A + 14B - 6C = -95$$

Atrisinot šo nolīdzinājumu sistēmu, dabūjam A,B,C vērtības.

Piemērs 2.

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{13x^2 - 68x + 95}{x^3 - 11x^2 + 43x - 65} = \frac{A}{x-5} + \frac{Px + Q}{x^2 - 6x + 13} \quad \ldots\ldots\ldots(27)$$

$f(x)$ ir viena reāla sakne $a_1 = 5$ un divas piekārtotas kompleksas saknes iekš $x^2 - 6x + 13$. Tad salikums dabū augšējo veidu

$$A = \frac{\varphi(a)}{f'(a)} = \frac{80}{8} = 10 \text{ , jo } \varphi(5) = 80 \text{ un } f'(5) = 8$$

Pievedot (27) labo pusi pie kopēja saucēja, dabūjam

$$13x^2 - 68x + 95 = A(x^2-6x + 13)+(Px + Q)(x - 5) \;\ldots\ldots(28)$$

Salīdzinot (28) koeficientus pie vienlīdzīgām x kāpēm labā un kreisā pusē, dabūjam

$$A + P = 13 \quad \text{bet} \quad A = 10 \text{ , tā tad}$$
$$10 + P = 13$$
$$P = 3$$
$$13A - 5Q = 95$$
$$-5Q = -35$$
$$Q = 7$$

Tā tad

$$\frac{13x^2 - 68x + 95}{x^3 - 11x^2 + 43x - 65} = \frac{10}{x - 5} + \frac{3x + 7}{x^2 - 6x + 13}$$

Piemērs 3.

$$\frac{3x^3 + 3x^2 - 5x + 3}{(x - 1)^2 (x + 1)^2 . x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x+1)^2} + \frac{E}{x+1} \ldots(29)$$

Reizinam (29) ar x

$$\frac{3x^3+3x^2-5x+3}{(x-1)^2(x+1)^2} = A + x\left[\frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x+1)^2} + \frac{E}{x+1}\right]$$

liekot nolīdzinājumā x = 0, dabūjam

$$\frac{3}{1} = A \; ; \quad A = 3$$

Reizinot (29) ar $(x-1)^2$

$$\frac{3x^3+3x^2-5x+3}{(x+1)^2 .x} = B + (x-1)^2 \left|\frac{A}{x} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x+1)^2} + \frac{E}{x+1}\right|$$

liekot x = +1, dabūjam

$$\frac{4}{4} = 1 = B \; ;$$

Tādā pat kārtā reizinot ar $(x+1)^2$ nolīdzinājumu (29)un liekot x = -1, dabūjam

$$\frac{8}{-4} = D \; ; \; D = -2$$

Ar šo paņēmienu,kā redzams, nevar dabūt C un E. Tādēļ,lai dabūtu C, liekam nolīdzinājumā,piemēram, x = 2 un dabūjam nolīdzinājumu

$$\frac{29}{18} = \frac{A}{2} + \frac{B}{1} + \frac{C}{1} + \frac{D}{9} + \frac{E}{3}$$

Liekot x = -2, dabūjam ....(30)

$$\frac{1}{-18} = \frac{A}{-2} + \frac{B}{9} + \frac{C}{-3} + \frac{D}{1} + \frac{E}{-1}$$

Šinīs nolīdzinājumos A,B,D vērtības ir zināmas, ieliekot šīs vērtības, varam no (30) dabūt C un E

$$C = 0.5 \text{ un } E = -3.5$$

Piemērs 4.

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{2x+2}{(x-1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{P_1x+Q_1}{(x^2+1)^2} + \frac{P_2x+Q_2}{x^2+1} \quad ....(31)$$

Pievedot pie viena saucēja, dabūjam

$$2x + 2 = A(x^2+1)^2 + (P_1x+Q_1)(x-1) + (P_2x+Q_2)(x^2+1)(x-1) \quad ....(32)$$

Liekot x = 1, dabūjam

$$4 = 4A \; ; \quad A = 1$$

Reizinot (31) ar $(x^2+1)^2$,dabūjam

$$\frac{2x+2}{x-1} = P_1x + Q_1 + (x^2+1)^2\left[\frac{A}{x-1} + \frac{P_2x+Q_2}{x^2+1}\right]$$

Liekot $x^2 = -1$; $x = \sqrt{-1} = i$, dabūjam

$$\frac{2i+2}{i-2} = P_1 i + Q_1$$

$$2i + 2 = (P_1 i + Q_1)(i-1) = -P_1 + Q_1 i - P_1 i - Q_1 = -P_1 - Q_1 + (Q_1 - P_1)i$$

$$\left.\begin{array}{l} -P_1 - Q_1 = 2 \\ -P_1 + Q_1 = 2 \end{array}\right\} \text{ no šejienes } \quad \begin{array}{l} P_1 = -2 \\ Q_1 = 0 \end{array}$$

Ja nolīdzinājumu (32) iereizinam, tad pie x^4 ir koeficients $A + P_2$, bet kreisā pusē nav x^4, tā tad

$$A + P_2 = 0, \text{ bet } A = 1, \text{ tā tad}$$

$$P_2 = -1$$

Nolīdzinājuma (32) absolūtais loceklis labā pusē ir $A - Q_1 - Q_2$, bet kreisā pusē tas ir 2, tā tad

$$A - Q_1 - Q_2 = 2$$

$$1 - 0 - Q_2 = 2$$

$$Q_2 = -1$$

Tā tad

$$\frac{2x + 2}{(x-1)(x^2+1)^2} = \frac{1}{x - 1} - \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} - \frac{x + 1}{x^2 + 1}$$

----- oOo -----