ЛАТВИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
Кафедра дифференциальных уравнений и приближенных методов

Х.Калис

РАЗРАБОТКА И ПРИМЕНЕНИЕ СПЕЦИАЛЬНЫХ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, ГИДРОДИНАМИКИ И МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

(Совокупность работ для соискания научной степени хабилитационного доктора по математике.)

Латвийский университет
Рига 1993

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

МГД - магнитная гидродинамика.

ОДУ - обыкновенное дифференциальное уравнение.

t - параметр времени.

(q_1, q_2, q_3) - криволинейные ортогональные координаты точки.

(L_1, L_2, L_3) - коэффициенты Ламэ.

(x, y, z) или (x_1, x_2, x_3) - декартовые координаты точки.

(r, z, θ) - цилиндрические координаты точки.

$\vec{V}, \vec{\omega}$ - векторы скорости и завихренности жидкости.

$\psi, \varkappa$ - функции тока для жидкости и магнитного поля,

$V_1 = L_2^{-1} L_3^{-1} \partial\psi/\partial q_2$, $V_2 = -L_1^{-1} L_3^{-1} \partial\psi/\partial q_1$ - составляющие вектора скорости в криволинейных ортогональных координатах (двумерный случай).

$B_1 = L_2^{-1} L_3^{-1} \partial\varkappa/\partial q_2$, $B_2 = -L_1^{-1} L_3^{-1} \partial\varkappa/\partial q_1$ - соответствующие составляющие вектора индукции магнитного поля.

V_r, V_z, V_θ - радиальная осевая и азимутальная составляющие вектора скорости.

$V_x = u$, $V_y = V$, $V_z = W$ - составляющие вектора скорости в декартовых координатах.

$\omega = \partial V_y/\partial y - \partial V_x/\partial y = -\Delta\psi$ - z -составляющая вектора завихренности или функция завихренности.

$\omega_\theta = \partial V_r/\partial z - \partial V_z/\partial r$ - азимутальная составляющая вектора завихренности.

p, $\Pi = p + \rho|\vec{V}|^2/2$ - давление и полное давление жидкости.

$\vec{F}, \vec{f}, \vec{F}^{э}$ - векторы сил и вектор электромагнитной силы $\vec{F}^{э} = \rho^{-1}(\vec{J} \times \vec{B})$.

$\vec{B}, \vec{H}, \vec{E}$ - векторы индукции и напряженности магнитного и электрического поля.

$\vec{j}, \vec{g}$ - векторы плотности тока и ускорения свободного падения.

I, T, Q - электрический ток, температура среды и функция источника тепла.

$\rho, \sigma, \nu, \eta, \beta, C_p, \lambda, \mu, \nu_m, \chi$ - коэффициенты плотности, электропроводности, кинематической и динамической вязкости, теплового расширения, удельной теплопроводности, теплопроводности, магнитной проницаемости, магнитной вязкости и температуропроводности $(\eta = \nu\rho, \nu_m = (\mu\sigma)^{-1}, \chi = \lambda(\rho C_p)^{-1})$.

V_0, L_0, B_0, T_0 - характерные величины скорости, длины, индукции магнитного поля и температуры.

$Re = V_0 L_0/\nu$, $Re_m = V_0 L_0/\nu_m$ - число Рейнольдса и магнитное число Рейнольдса.

$Ha = B_0 L_0 \sqrt{\sigma/\eta}$, $Al = B_0^2/(\mu\rho V_0^2)$ - число Гартмана и Альвена.

$S = Al \cdot Re_m$, $Gr = \beta g L_0^3 (T_{max} - T_{min})/\nu^2$ - число Стюарта и Грасгофа.

$S^* = \Gamma_k^2 Re\, Re_m$ - параметр электровихревого течения.

$\Gamma_k = (V_\theta)_{max}/V_0$ - параметр закрутки течения.

$P_r = \nu/\chi$, $Pe = Gr \cdot Pr$ - число Прандтля и Пекле.

α_0 - угол между направлением внешнего однородного магнитного поля и оси координат Ox.

$L, \nabla = grad, div, \Delta$ - операторы: дифференциальный, градиента, дивергенции и Лапласа.

$D/Dt = \partial/\partial t + (\vec{V} \cdot grad)$ - полная производная по времени.

$\partial/\partial n$ - оператор нормальной производной по направлению внешней нормали к границе.

$g_n, \vec{g}_\tau$ - нормальная, тангенциальная составляющие вектора

$\Lambda, Ш$ - разностный оператор и шаблон сетки.

$q_{x\bar{x}}, q_{\overset{\circ}{x}}$ - центральные разности второго и первого порядка для переменной q.

τ, h - шаги по времени и пространству равномерной сетки ω_h.

$R_h = qh/\nu$ - сеточное число Рейнольдса составляющей скорости q.

γ - возмущенный коэффициент разностной схемы:

1) $\gamma = R_h/2 \, cth(R_h/2)$ - схема А.М.Ильина,
2) $\gamma = R_h/2 + (1 + R_h/2)^{-1}$ - схема А.А.Самарского,
3) $\gamma = 1 + R_h/2$ - схема "против потока",
4) $\gamma = 1$ - классическая схема в центральных разностях.

МПН - метод переменных направлений.

ЭВМ - электронно-вычислительные машины.

$i^* = \sqrt{-1}$ - мнимая единица.

$\Rightarrow$ - обозначения "следует".

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность работы.

В МГД вязкой несжимаемой жидкости в последние годы сформулировалось новое перспективное направление - МГД сильного поля, которое стимулируется интенсивной разработкой МГД-технологий (насосы, ускорители, кристализаторы, алюминиевые электролизеры и др.). Наличие сильного магнитного поля приводит к появлению специфических МГД эффектов,например, различных скоростных структур с пограничными слоями.

Математическое описание указанных задач приводит к уравнениям в частных производных с большими параметрами при младших производных (большие значения чисел Ha, S, Al, S^*, Re, Re_m, Γ_K, Gr). Для решения соответствующих краевых задач МГД на основе полных нелинейных уравнений Навье-Стокса при умеренных значениях параметров созданы эффективные универсальные численные методы (метод конечных разностей и конечных элементов).

При наличии малых параметров при старших производных или больших параметров при младших производных в системе уравнений МГД в решении краевой задачи возникают пограничные слои и внутренние сдвиговые слои с большими градиентами решений (слои Гартмана, Лудфорда и др.). Это приводит к снижению скорости сходимости и точности классических разностных схем. Для обеспечения равномерной точности и сходимости независимо от величины параметров в схему необходимо ввести подгоночные коэффициенты. Такие специальные монотонные схемы эффективны и в том смысле, что они имеют хорошие свойства сходимости и точности не только для уравнений с малыми параметрами при старших производных (производные второго порядка) или с большими параметрами при младших производных (производные первого порядка), но и в широком диапазоне изменения параметров и, следовательно, могут служить полезным дополнением к пакетам стандартных программ для численного решения дифференциальных уравнений. Специальные численные методы обладают двумя важными свойствами:

1) применимостью на грубой сетке,
2) сходимостью алгоритмов независимо от величин шагов сетки.

Это важно для решения краевых задач механики сплошной среды при ограниченности ЭВМ ресурсов.

Для линейных краевых задач ОДУ и математической физики такие специальные методы, т.н. равномерные численные методы рассмотрены в работах Н.С.Бахвалова, А.М.Ильина, К.В.Емельянова, Г.И.Шишкина, Р.Келлога, Дж.Миллера, Э.Дулана, У.Шилдерса и др. ученых. Специальные методы решения должны быть распространены на решение системы уравнений МГД и системы уравнений математической физики с учетом нелинейностей. Эта область исследования обещает в ближайшем будущем эффективные алгоритмы решения задач с большими параметрами. Теоретическое обоснование равномерной сходимости построенных методов можно получить только для некоторых простейших модельных задач (одномерных и линейных).

При построении разностной задачи (схемы) важно знать, насколько хорошо она аппроксимирует исходную непрерывную дифференциальную задачу. Проверка аппроксимации обычно проводится на основе разложений в ряд Тейлора в пространстве достаточно гладких функций. В случае решений пограничного слоя (экспоненциального вида) такой метод не является точным, так как ошибка аппроксимации определяется не только степенями шагов сетки, но и величиной высших производных от решения задачи, которые не известны. Другой источник ошибки связан с свойством устойчивости вычислительного алгоритма (разностной схемы), которая обычно трактуется как свойство непрерывной зависимости решения разностной задачи от входных данных (правые части разностных уравнений, граничные и начальные условия, коэффициенты уравнений). Пока не существует удовлетворительной теории исследования устойчивости нелинейных разностных схем. В связи с этим устойчивость проверяется для линейных или линеаризованных разностных схем на основе принципа максимума или локального критерия фон Неймана. Особенности различных способов аппроксимаций изучается на модельных линейных одномерных и двумерных краевых задач с учетом аналитического решения этих задач (если его возможно построить).

Результаты расчетов практически важных задач в том числе многомерных и нелинейных по разработанным алгоритмам сравниваются с результатами применения другого численного метода, аналитических методов и физических экспериментов. Численные исследования позволяли выявить ряд специфических особенностей МГД-течений, не проведя в Институте физики АН Латвии дополнительных дорогостоящих физических экспериментов. Предложены новые постановки классов краевых задач МГД и получены эффективные решения их на основе разработанных новых специальных методов решения. Вкратце рассмотрим основные принципы построения специальных разностных схем. Для конечно-разностной аппроксимации одномерных краевых задач на неравномерной сетке используется интегро-интерполяционный метод (Г.И.Марчук, А.А.Самарский). В окрестности 3-точечного шаблона сетки дифференциальное уравнение второго порядка с первыми производными переписывается в самосопряженном виде с учетом экспоненциального преобразования. При наличии кусочно-постоянных коэффициентов и правой части уравнения получаются точные разностные схемы. В случае переменных коэффициентов применяются операции осреднения в пределах шаблона сетки.

В многомерном случае используется поочередная дискретизация переменных и аппроксимация соответствующих одномерных дифференциальных операторов разностными со вторым порядком аппроксимации. Аналогично аппроксимируются системы уравнений, содержащие дифференциальные уравнения второго порядка. Функции-матрицы, входящие в коэффициенты векторно-разностной схемы, вычисляются с помощью значений этих функций на спектрах матриц, используя интерполяционный многочлен Лагранжа-Сильвестера. Построенные специальные разностные схемы монотонны, хорошо учитывают характер пограничных слоев и являются равномерно сходящимися для решения линейных модельных задач. Монотонные разностные схемы позволяют решать ряд практических задач с удовлетворительной точностью на грубых сетках, что вполне достижимо на ЭВМ с малой и средней мощностью. Разработанные методы решения позволяют решать новые практически важные задачи математической физики, в том числе задачи МГД для течения вязкой несжимаемой электропродящей жидкости в широком диапазоне изменения параметров. Среди них обобщенная задача Ханта о нахождении распределения индуцированного магнитного поля и скорости для свободных сдвиговых течений жидкости при разных режимах подвода электрического тока I к электродам. Единым подходом (сквозной расчет) определяются характеристики течений жидкости как внутри пограничных слоев (гартмановских и слоев сдвига), так и в ядре течения. Расчетная область,как это рассматривается в литературе,не разбивается на подобласти с разными типами уравнений (зональный подход). Предложенные специальные методы решения краевых задач могут найти дальнейшие приложения при проектировании и разработке новой МГД-технологии и техники.

История работы.

Численное моделирование вязких несжимаемых течений на основе полной нелинейной системы уравнений Навье-Стокса начиналось во время II Всесоюзного съезда по механике 1964 г. под руководством академика Н.Н.Яненко, когда была организована рабочая группа из механиков и математиков-вычислителей (в эту группу оказался также автор работы, закончивший университет в 1962 г.). С 1966 до 1984 гг. регулярно (через 2 года) проходили Всесоюзные семинары по численным методам вязкой жидкости. Автор работы в 1963 г. впервые получил результаты расчета МГД обтекания цилиндра в магнитном поле. В 1971 г. автором была защищена кандидатская диссертация по теме "О некоторых методах решения системы дифференциальных уравнений магнитной гидродинамики", а в 1991 г. - докторская диссертация по теме "Разработка и применение специальных методов расчета течений вязкой несжимаемой электропроводящей жидкости при больших параметрах". Впервые были исследована разрешимость некоторых новых краевых задач МГД и было предпринято систематическое численное исследование этих задач в широком диапазоне изменения параметров[основные работы: 1-46]. Основной метод исследования - разностные схемы. Разработаны оригинальные приближенные методы расчета краевых задач в криволинейных координатах, пространственных течений и в неограниченных областях. Разработанные численные методы внедрены при разработке хоздоговорных работ в ВЦ Латвийского университета с Институтом физики АН Латвии и с ВАМИ в Ленинграде.

Основные результаты исследований докладывались на 6 Всесоюзных рижских совещаниях по магнитной гидродинамики (1972-1990 гг.), на 8 Всесоюзных школах-семинарах по численным методам динамики вязкой жидкости, руководимых академиком Н.Н. Яненко (1972-1986 гг.). на 6-ой Международной конференции по численным методам в гидродинамике (Тбилиси 1978 г.), на 6-ом Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике (Ташкент 1986 г.), на Международном школе-семинаре по математическим моделям, аналитическим и численным методам в теории переноса (Минск 1986 г.), на Международном Симпозиуме (IUTAM) по жидким металлам в магнитной гидродинамике (Рига - 1988г.), на Международной конференции по численным методам динамики жидкости (Новосибирск 1990 г.), на 5 Международных семинарах в Карловом университете г.Праги (1976-1988 г.) и на ряд Республиканских конференциях и семинарах. Большинство работ автора опубликованы в Всесоюзном журнале "Магнитная гидродинамика" и в Республиканском издании "Латвийский математический ежегодник" (см. Список основных работ).

Далее изложены основные идеи работ автора и обзор работ, полученных после 1990 года и невходящие в докторской диссертации автора[32-37, 44-46].

I. ОСНОВНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Течение вязкой несжимаемой электропровящей жидкости в магнитном поле описывается системой уравнений Навье-Стокса

$$D\vec{v}/Dt = -\rho^{-1}\operatorname{grad} p + \nu\Delta\vec{v} + \vec{F}^{э} + \vec{F}, \qquad (I.1)$$

и уравнениями Максвелла

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t, \quad \operatorname{rot}\vec{B} = \mu\vec{j}, \qquad (I.2)$$

которые дополняются законом Ома

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}) \qquad (I.3)$$

и уравнениями неразрывности

$$\operatorname{div}\vec{v} = \operatorname{div}\vec{B} = \operatorname{div}\vec{j} = 0. \qquad (I.4)$$

В случае вынужденной тепловой конвекции $\vec{F} = \vec{g}(1-\beta(T-T_0))$, где T_0 - температура равновесия.

Уравнение энергии (теплопроводности) рассматривается в виде

$$\rho c_p DT/Dt = \lambda\Delta T + \sigma^{-1}\vec{j}^2. \qquad (I.5)$$

Исключая векторы $\vec{E}, \vec{j}$ из (I.2),(I.3) получим уравнение индукции

$$\partial\vec{B}/\partial t = \operatorname{rot}(\vec{v}\times\vec{B}) + \nu_m\Delta\vec{B}. \qquad (I.6)$$

В стационарном случае электрическое поле можно выразить через скалярный потенциал $\varphi\ (\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi)$, который в силу (I.3),(I.4) определяется из уравнения Пуассона

$$\Delta\varphi = \operatorname{div}(\vec{v}\times\vec{B}). \qquad (I.7)$$

Специфические граничные условия возникает при численном расчете задач МГД-течений, в том числе прилипание жидкости на твердой границе $(\vec{V} = 0)$, непрерывность величин $j_n, \sigma E_n, \mu^{-1}(\operatorname{rot}\vec{B})_n, B_n, \varphi, \vec{E}_\tau, \sigma\partial\varphi/\partial n$ на граничной поверхности.

В произвольной ортогональной системе координат уравнения (I.I),(I.4),(I.5),(I.6) принимают вид [44,45]

$$\partial v_i/\partial t - v_{i+1}\omega_{i+2} + v_{i+2}\omega_{i+1} = L_i^{-1}\partial \Pi/\partial q_i - \nu L_{i+1}^{-1}L_{i+2}^{-1}[\partial(L_{i+2}\omega_{i+2})/\partial q_{i+1} - \partial(L_{i+1}\omega_{i+1})/\partial q_{i+2}] + F_i^{э} + F_i\,, \qquad (I.8)$$

$$L_{i+1}L_{i+2}\partial B_i/\partial t - \partial(L_{i+2}(v_i B_{i+1} - v_{i+1}B_i))/\partial q_{i+1} + \partial(L_{i+1}(v_{i+2}B_i - v_i B_{i+2}))/\partial q_{i+2} = -\nu_m[\partial(L_{i+2}L_i^{-1}L_{i+1}^{-1}(\partial(L_{i+1}B_{i+1})/\partial q_i - \partial(L_i B_i)/\partial q_{i+1}))/\partial q_{i+1} - \partial(L_{i+1}L_i^{-1}L_{i+2}^{-1}(\partial(L_i B_i)/\partial q_{i+2} - \partial(L_{i+2}B_{i+2})/\partial q_i))/\partial q_{i+2}]\,, \qquad (I.9)$$

$$\partial(L_2L_3v_1)/\partial q_1 + \partial(L_1L_3v_2)/\partial q_2 + \partial(L_1L_2v_3)/\partial q_3 = 0\,, \qquad (I.IO)$$

$$\partial(L_2L_3B_1)/\partial q_1 + \partial(L_1L_3B_2)/\partial q_2 + \partial(L_1L_2B_3)/\partial q_3 = 0\,, \qquad (I.II)$$

$$\partial T/\partial t + v_1L_1^{-1}\partial T/\partial q_1 + v_2L_2^{-1}\partial T/\partial q_2 = \chi\Delta T + Q\,, \qquad (I.I2)$$

где

$$\Delta T = L_1^{-1}L_2^{-1}L_3^{-1}[\partial(L_1^{-1}L_2L_3\partial T/\partial q_1)/\partial q_1 + \partial(L_1L_2^{-1}L_3\partial T/\partial q_2)/\partial q_2 + \partial(L_1L_2L_3^{-1}\partial T/\partial q_3)/\partial q_3]\,,$$

$$Q = \vec{j}^{\,2}(\sigma\rho c_p)^{-1}, \quad F_i^{э} = \rho^{-1}(j_{i+1}B_{i+2} - j_{i+2}B_{i+1})\,,$$

$$j_i = (\mu L_{i+2}L_{i+1})^{-1}[\partial(L_{i+2}B_{i+2})/\partial q_{i+1} - \partial(L_{i+1}B_{i+1})/\partial q_{i+2}]\,,$$

$$v_{i+3} = v_i,\ \omega_{i+3} = \omega_i,\ B_{i+3} = B_i,\ L_{i+3} = L_i,\ j_{i+3} = j_i \ (i = 1,2,3).$$

Исключая из уравнения (I.I) давление p получим векторное уравнение

$$\partial\vec{\omega}/\partial t - \mathrm{rot}(\vec{v}\times\vec{\omega}) = -\mathrm{rot}(\nu\,\mathrm{rot}\,\vec{\omega}) + \vec{f}^{\,э} + \vec{f}\,, \qquad (I.I3)$$

которое в проекциях имеет вид (I.9), где переменные B_i, ν_m заменено на ω_i, ν а правой части присутствует сумма составляющих векторов $\vec{f}^{\,э} = \mathrm{rot}\,\vec{F}^{э}$, $\vec{f} = \mathrm{rot}\,\vec{F}$.

В двумерном случае принимается, что все производные по координате q_3 равны нулю. Уравнения неразрывности (I.IO),(I.II) выполняются автоматически, если ввести функции тока для жидкости ψ и магнитного поля $\varkappa$. Для определения функций $V_3, B_3, \omega_3, \psi, \varkappa$ имеем систему уравнений [45]:

$$\partial V_3/\partial t+V_1 L_1^{-1}L_3^{-1}\partial(L_3V_3)/\partial q_1+V_2L_2^{-1}L_3^{-1}\partial(L_3V_3)/\partial q_2= \\ =\nu L_3 E(L_3V_3)+F_3^{Э}+F_3, \tag{I.14}$$

$$\partial B_3/\partial t+L_1^{-1}L_2^{-1}[\partial(L_2V_1B_3)/\partial q_1+\partial(L_1V_2B_3)/\partial q_2]= \\ =\nu_m L_3E(L_3B_3)+L_1^{-1}L_2^{-1}\mathcal{F}(V_3L_3^{-1},\varkappa), \tag{I.15}$$

$$\partial\omega_3/\partial t-L_1^{-1}L_2^{-1}[\partial(V_3L_3^{-1}\partial(L_3V_3)/\partial q_2-L_2V_1\omega_3)/\partial q_1- \\ -\partial(V_3L_3^{-1}\partial(L_3V_3)/\partial q_1+L_1V_2\omega_3)/\partial q_2= \\ =\nu L_3E(L_3\omega_3)+f_3^{Э}+f_3, \tag{I.16}$$

$$E(\psi)=-\omega_3/L_3, \tag{I.17}$$

$$\partial\varkappa/\partial t+M(\varkappa)=\nu_m L_3^2E(\varkappa)+\delta(t), \tag{I.18}$$

где $\delta(t)$ - произвольная функция от времени, которая определяется из конкретной задачи МГД,

$$E(\cdot)=L_1^{-1}L_2^{-1}L_3^{-1}[\partial(L_1^{-1}L_2L_3^{-1}\partial\cdot/\partial q_1)/\partial q_1+\partial(L_1L_2^{-1}L_3^{-1}\partial\cdot/\partial q_2)/\partial q_2],$$

$$M(\varkappa)=V_1L_1^{-1}\partial\varkappa/\partial q_1+V_2L_2^{-1}\partial\varkappa/\partial q_2,$$

$$F_3^{Э}=(4\rho)^{-1}L_1^{-1}L_2^{-1}L_3^{-1}\mathcal{F}(L_3B_3,\varkappa),$$

$$f_3^{Э}=(4\rho L_1L_2)^{-1}[2B_3\mathcal{F}(L_3,B_3L_3^{-1})+\mathcal{F}(\varkappa,E(\varkappa))],$$

$$\mathcal{F}(x,y)=\partial x/\partial q_1\cdot\partial y/\partial q_2-\partial x/\partial q_2\cdot\partial y/\partial q_1.$$

Уравнения (I.14-I.16) содержат источниковые члены вида $aV_3, bB_3, c\omega_3$ с знакопеременными коэффициентами a, b, c. Это затрудняет построение монотонной разностной схемы, т.к. не выполняется принцип максимума.

Применяя преобразования

$$w=L_3V_3,\ H=B_3L_3^{-1},\ u=\omega_3L_3^{-1}, \tag{I.19}$$

и соотношение

$$\partial(L_1^{-1}L_2\partial L_3/\partial q_1)/\partial q_1+\partial(L_1L_2^{-1}\partial L_3/\partial q_2)/\partial q_2=0 \quad (I.20)$$

уравнения (I.I4-I6) примут нужный вид

$$\partial w/\partial t=\nu L_3^2E(w)-M(w)+(\varkappa\rho L_1L_2L_3)^{-1}\mathcal{J}(L_3^2H,\varkappa)+L_3f_3 \quad (I.2I)$$

$$\partial H/\partial t=\nu_m\tilde{E}(H)-M(H)+L_2^{-1}L_1^{-1}L_3^{-1}\mathcal{J}(wL_3^{-2},\varkappa), \quad (I.22)$$

$$\partial u/\partial t=\nu\tilde{E}(u)-M(u)-L_1^{-1}L_2^{-1}L_3^{-4}\mathcal{J}(L_3,w^2)+$$

$$+(\varkappa\rho L_1L_2L_3)^{-1}[\mathcal{J}(L_3,H^2)+L_3^{-1}\mathcal{J}(\varkappa,E(\varkappa))]+L_3^{-1}f_3, \quad (I.23)$$

где

$$\tilde{E}(\cdot)=L_1^{-1}L_2^{-1}L_3^{-3}[\partial(L_3^3L_1^{-1}L_2\partial\cdot/\partial q_1)/\partial q_1+$$
$$+\partial(L_1L_2^{-1}L_3^3\partial\cdot/\partial q_2)/\partial q_2],$$
$$\tilde{E}(H)=E(L_3^2H), \quad \tilde{E}(u)=E(L_3^2u).$$

Для в литературе известных ортогональных систем координат условие (I.20) выполняется, например, в цилиндрической системе координат

$$q_1=r,\ q_2=z,\ q_3=\theta,\quad L_1=L_2=1,\quad L_3=r.$$

Из общей системы уравнении МГД можно выделить два практически важных случая:

I) вектор $\vec{j}$ содержит 2 составляющих, т.е. $\vec{j}=(j_1,j_2,0)$, тогда $B_1=B_2=\varkappa=\sigma=0$ и МГД-процесс описывается уравнениями (I.I2,I7,2I-23),

2) вектор $\vec{j}$ имеет только одну составляющую, т.е. $\vec{j}=(0,0,j_3)$, тогда $B_3=H=0$ и процесс описывается уравнениями (I.I2,I7,I8,2I,23).

Для сильных магнитных полей вкладом нелинейных членов в уравнении МГД можно пренебречь и МГД-течение описывается линеаризованными уравнениями движения.

В случае плоскопараллельного свободного сдвигового $\partial p/\partial z = 0$ течения жидкости в плоскости (x, y) с векторами скорости $\vec{V} = (0, V_y, V_z)$ и индукции магнитного поля $\vec{B} = (B_0 \cos\alpha_0, B_0 \sin\alpha_0, 4 H_z(x,y))$ уравнения движения и индукции имеют следующий безразмерный вид (система типа Ханта) [7,20,24]

$$\begin{cases} \Delta u + Ha[\cos\alpha_0 \partial H/\partial x + \sin\alpha_0 \partial H/\partial y] = Re\, v\, \partial u/\partial y, \\ \Delta H + Ha[\cos\alpha_0 \partial u/\partial x + \sin\alpha_0 \partial u/\partial y] = Re_m v\, \partial H/\partial y \end{cases} \tag{I.24}$$

где

$$H = H_z/I, \quad v = V_y/V_0, \quad u = V_z/(I/\sqrt{\eta\sigma}).$$

При выводе системы (I.24) предполагается, что вторичное магнитное поле с напряженностью H_z индуцируется только электрическим током. Жидкость находится в канале с сечением

$$\Omega = \{(x,y):\ 0 < x < \ell,\ 0 < y < c\},$$

а через стенок канала $y = 0$ и $y = \ell$ прокачивается жидкость с скоростью $V = V(x) > 0$.

Краевая задача МГД сводится к интегрированию системы уравнений (I.24) при граничных условиях

$$H|_{y=0} = H_0(x),\ u|_{y=0} = u|_{y=c} = H|_{y=c} = u|_{x=\ell} = H|_{x=\ell} = 0,$$
$$\partial u/\partial x|_{x=0} = \partial H/\partial x|_{x=0} = 0, \tag{I.25}$$

где $H_0(x)$ - четная функция, определяемая из условия протекания тока через электроды при $y = 0$.

Аналогично формулируется краевые задачи для осесимметричных свободных сдвиговых МГД-течений [25].

Для исследования поведения скорости возмущений по времени при больших значениях числа Ha система линеаризованных уравнений МГД (I.1),(I.4),(I.7) в безындукционном приближении переписалась в безразмерном виде

$$\begin{cases} \partial\vec{v}/\partial t = \Delta\vec{v} + Ha^2(-grad\,\varphi + \vec{v}\times\vec{H})\times\vec{H} - grad\,p \\ div\,\vec{v} = 0,\ \Delta\varphi = div(\vec{v}\times\vec{H}), \end{cases}$$

где $\vec{H}$ - вектор напряженности внешнего однородного магнитного поля.

Для этой системы рассматривалась задача Коши в пространстве, при заданном распределении начальной скорости $\vec{V_0}(div\,\vec{V_0}=0)$. Применяя интегральное преобразование Фурье по пространству, исключая переменные p, φ, получим систему СДУ по времени, которая решается аналитически [4]. Распределение скорости по пространству и времени определяется по теореме Бореля о свертках через интеграл от функции $\vec{V_0}$ и ядро, зависящем от числа $\beta = Hat$. Асимптотическое разложение ядра при больших значениях параметра β, позволяет определить характер течения в зависимости от числа Ha. Если при $Ha = 0$ распределение скорости изотропно в пространстве и монотонно стремится к нулю, если $t\to\infty$, то при $Ha\neq 0$ и достаточно сильном магнитном поле форма начального распределения скорости деформируется (вытягивается) в пространстве в фиксированный момент времени, вдоль направления приложенного магнитного поля. Аналогичные результаты получены для осесимметрического и вращательного движения жидкости в пространстве применяя к задаче Коши интегральные преобразования Фурье и Ханкеля [4].

Для плоских ламинарных МГД течений из уравнений движения (I.I) в декартовых координатах (x,y) можно исключить давление p и получить уравнение параболического типа для вихря ω (в безразмерном виде)

$$\partial\omega/\partial t + u\,\partial\omega/\partial x + v\,\partial\omega/\partial y = Re^{-1}\Delta\omega + f, \quad (I.26)$$

где f z - составляющая ротора вектора электромагнитных сил $(rot\,\vec{F})$. При заданных значениях x, y -составляющих вектора $\vec{F} = \vec{j}\times\vec{B}$ уравнение (I.26) представляет собой уравнение гидродинамики для вихря, т.е. система (I.17) $(\omega_3=\omega, L_1=L_2=L_3=1)$, (I.26) есть классическая система уравнений Навье-Стокса в переменных (ψ, ω). Для плоскопараллельного течения жидкости при наличии однородного магнитного поля с вектором индукции

$$\vec{B}=B_0(\cos\alpha_0, \sin\alpha_0, 0) \Rightarrow -f=S\left(\cos\alpha_0\frac{\partial}{\partial x}+\sin\alpha_0\frac{\partial}{\partial y}\right)^2\psi.$$

Во многих практических задачах интерес представляет получить стационарное решение, т.е. в (I.26) можно положить $\partial\omega/\partial t=0$. Но в вычислительной гидродинамике разработка эффективных численных методов решения в том числе стационарных задач, основывается на интегрировании нестационарных уравнений. Стационарное решение получается как предел по времени решения нестационарных уравнений (метод установления) [I,2].

Уравнение (I.26) можно записать и в дивергентном виде

$$\partial\omega/\partial t+\partial(u\omega)/\partial x+\partial(v\omega)/\partial y=Re^{-1}\Delta\omega+f. \quad (I.27)$$

2. СПЕЦИАЛЬНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Специальные численные методы решения задач математической физики целесообразно начинать разрабатывать на простейших одномерных модельных уравнениях, в том числе для решения задач Коши и краевых задач СДУ [10,12]. Полученные алгоритмы обобщают разностные схемы А.М.Ильина, Г.И.Шишкина, К.В. Емельянова, Н.С.Бахвалова, А.А.Самарского, Г.И.Марчука.

2.1. Специальные методы решения задач Коши для СДУ

В литературе известно много алгоритмов и методов (явных и неявных) для решения задач Коши СДУ, например, методы Эйлера, Адамса, Рунге-Кутта [47]. Явные методы имеют жесткие ограничения на шаг сетки из-за условий устойчивости метода, а неявные методы требуют объемных вычислений. В [12] построенные специальные методы частично устраняют недостатки классических методов. Разностные схемы (алгоритмы) строятся на равномерной сетке

$$\omega_h = \{x_k = kh,\ k=\overline{1,N-1},\ Nh=1\} \qquad (2.1)$$

промежутка $[0,1]$. Для СДУ первого порядка на отрезке $\mathcal{J}_k = [x_k, x_{k+1}]$ строятся двухслойные явные разностные схемы с повышенным порядком точности.

Решая задачу Коши в промежутке $\mathcal{J}_k$ для линейного однородного СДУ первого порядка в виде

$$y'(x) = a(x)\,y(x),\quad y(x_k) = y_k, \qquad (2.2)$$

специальную двухслойную абсолютно устойчивую явную разностную схему можно представить в виде

$$(y_{k+1} - y_k)/h = \gamma(a_k)a_k y, \qquad (2.3)$$

где $a = a(x)$ – дифференцируемая функция в $\mathcal{J}_k$,

$$\gamma(a) = (ah)^{-1}(\exp(ah) - 1) \qquad (2.4)$$

– возмущенный коэффициент схемы.

Приближенное решение y_{k+1} совпадает с точным решением $y(x_{k+1})$ задачи (2.2), если коэффициент a "замороженный", т.е. $a(x)=a_k,\ x\in \mathcal{J}_k$. Если выбрать a_k равным среднему значению функции $a(x)$ на $\mathcal{J}_k$, т.е.

$$a_k = h^{-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} a(x)\,dx, \tag{2.5}$$

то разностная схема (2.3) является точной и относительно решения исходной задачи Коши (2.2) с переменными коэффициентами. При $a_k=a(x_k)$, $\gamma=1$ имеем явный метод Эйлера, условно устойчивый при $h\le 2/|a_k|$, если $a_k\le 0$.

При $a_k=(a(x_k)+a(x_{k+1}))/2$ точность алгоритма (2.3) увеличивается на порядок по сравнению с явным методом Эйлера. Разностная схема (2.3) сохраняет свой вид и для решения системы m-уравнений (2.2), где $a(x)$, a_k - квадратные матрицы m-го порядка, $y'(x), y(x), y_k, y_{k+1}$ - векторы размерности m,

$$\gamma(a)=(ah)^{-1}(\exp(ah)-E)- \tag{2.6}$$

матрица-функция возмущенных коэффициентов, E - единичная матрица m-го порядка. Матрицу $\gamma(a)$ можно вычислять при помощи значений функции $\gamma=\gamma(x)$ на спектре матрицы a, используя интерполяционный многочлен Лагранжа-Сильвестера. Явная векторно-разностная схема (2.3) абсолютно устойчива, если все собственные значения λ_i матрицы a не положительные, $i=\overline{1,m}$, и точна в случае кусочно-постоянных значений элементов матрицы a, определенных на $\mathcal{J}_k$ $(k=\overline{1,N-1})$.

Для решения неоднородного линейного уравнения в промежутке $\mathcal{J}_k$

$$y'(x)=a(x)y(x)+f(x),\ y(x_k)=y_k \tag{2.7}$$

имеем приближенную задачу Коши

$$(y_{k+1}-y_k)/h=\gamma(a_k)(a_k y_k+f_k), \tag{2.8}$$

которая имеет по крайней мере 2-ой порядок точности, если

$$a_k = h^{-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} a(x)\,dx, \quad f_k = h^{-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx.$$

Алгоритм (2.8) сохраняет свой вид и для системы уравнений (2.7), когда a, a_k - матрицы, $y', y, f, y_k, y_{k+1}, f_k$ - векторы.

Для решения нелинейной задачи Коши в $\mathcal{J}_k$

$$y'(x) = F(y(x)), \quad y(x_k) = y_k \tag{2.9}$$

применяется метод Ньютона. Алгоритм представляется в виде

$$(y_{k+1} - y_k)/h = \gamma(a_k)\,F_k, \tag{2.10}$$

где

$$a_k = \partial F/\partial y\big|_{x=x_k}, \quad F_k = F(y_k).$$

Специальная явная двухслойная схема (2.10) устойчива и точно интегрирует линеаризованную по Ньютону задачу Коши.

Для соответствующей системы уравнений (2.9) F, y, y_k, y_{k+1} - векторы, a_k - матрица Якоби.

В случае задачи Коши для линейного уравнения второго порядка в промежутке $\mathcal{J}_k$ $(\tilde{a}^2 > 4\tilde{b},\ \tilde{b} \neq 0)$

$$\begin{cases} \tilde{y}''(x) + \tilde{a}(x)\tilde{y}'(x) + \tilde{b}(x)\tilde{y}(x) = \tilde{f}(x) \\ \tilde{y}(x_k) = \tilde{y}_k, \quad \tilde{y}'(x_k) = \tilde{y}_k' \end{cases} \tag{2.11}$$

применяется векторная постановка (2.7)

где $a = \begin{pmatrix} -\tilde{a} & -\tilde{b} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} \tilde{f} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} \tilde{y}' \\ \tilde{y} \end{pmatrix}.$

Поэтому разностная задача имеет вид (2.8), где

$$\gamma(a) = \frac{1}{2\varkappa}\begin{pmatrix} -\tilde{a}(\mu_1-\mu_2)+\delta & -\tilde{b}(\mu_1-\mu_2) \\ \mu_1-\mu_2 & \delta \end{pmatrix},$$

$$\mu_i = \gamma(\lambda_i) = (e^{\lambda_i h} - 1)/(\lambda_i h),\ i=1,2;\ \lambda_1 = \xi + \varkappa,\ \lambda_2 = \xi - \varkappa,$$
$$\xi = -\tilde{a}/2,\ \varkappa^2 = \tilde{a}^2/4 - \tilde{b},\ \delta = -\lambda_2 \mu_1 + \lambda_1 \mu_2 =$$
$$= (\tilde{b}h)^{-1}[2\tilde{a}\varkappa - e^{\xi h}((\tilde{a}^2/2 - \tilde{b})\,sh(\varkappa h) - 4\varkappa\xi\, ch(\varkappa h))],$$
$$\mu_1 - \mu_2 = 2(\tilde{b}h)^{-1}[\varkappa + e^{\xi h}(\xi\, sh(\varkappa h) - \varkappa\, ch(\varkappa h))].$$

При $\tilde{a}^2 < 4\tilde{b}$ матрица $\gamma(a)$ сохраняет свою форму, если функции $sh(\varkappa h), ch(\varkappa h)$ заменено на $\sin(\varkappa h), \cos(\varkappa h)$; $\varkappa^2 = \tilde{b} - \tilde{a}^2/4$. При $\tilde{a}^2 = 4\tilde{b}$ или $\varkappa \to 0$ следует, что

$$\gamma(a) = \begin{pmatrix} e^{\xi h} & \xi(\mu_1 - e^{\xi h}) \\ \xi^{-1}(e^{\xi h} - \mu_1) & 2\mu_1 - e^{\xi h} \end{pmatrix}.$$

2.2. Разностные схемы решения краевых задач ОДУ второго порядка

Метод сеток построен на основе точных разностных схем относительно решения линеаризованных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами [IC], [I7]. Для специальной разностной аппроксимации дифференциальных операторов разностными на неравномерной сетке применен интегро-интерполяционный метод. В окрестности 3-точечного шаблона сетки дифференциальные уравнения второго порядка с производными первого порядка перепишется в самосопряженном виде, используя экспоненциальное преобразование. В случае кусочно-постоянных коэффициентов уравнения и правой части получены точные разностные схемы. Построенные схемы монотонны, хорошо учитывают характеры пограничных слоев и являются равномерно сходящимися при стремлении коэффициента у старшей производной к нулю или при стремлении коэффициента у младшей производной к бесконечности.

В качестве примера рассмотрим аппроксимацию на неравномерной сетке с узлами $x_k \in (0,1)$, $k = \overline{1, N-1}$ краевой задачи

$$Lu \equiv u'' + au' + bu = f(x),\ u(0) = u_a,\ u(1) = u_b, \qquad (2.12)$$

где $u_a, u_b \in \mathbb{R}$, a, b, f - кусочно-постоянные функции в $[0,1]$, которые в промежутке $[x_{k-1}, x_k]$ принимают постоянные значения a_k^-, b_k^-, f_k^-, а в промежутке $[x_k, x_{k+1}]$ - a_k^+, b_k^+, f_k^+; $x_0 = 0$, $x_1 = 1$. В этом случае на неравномерной сетке можно построить точную разностную схему

$$\begin{cases} \Lambda u_k \equiv B_k(u_{k+1} - u_k) - A_k(u_k - u_{k-1}) - D_k u_k = \varphi_k \\ u_0 = u_a, \; u_N = u_b, \quad k = \overline{1, N-1}, \end{cases} \tag{2.13}$$

где u_k, φ_k значения сеточных функций, которые аппроксимируют $u(x_k), f(x_k)$; A_k, B_k, D_k - коэффициенты схемы. Разностная схема монотонна, если $A_k > 0$, $B_k > 0$, $D_k \geqslant 0$. В зависимости от наличия коэффициента b в (2.12) точная разностная схема (2.13) построена с двумя разными методами.

I. Если $b = 0$, то монотонная точная разностная схема (2.13) получена интегро-интерполяционным методом Г.И. Марчука предварительно записав уравнение (2.12) в самосопряженном виде.

Тогда
$$B_k = (\hbar_k h_k^+)^{-1} s(-a_k^+ h_k^+),$$
$$A_k = (\hbar_k h_k^-)^{-1} s(a_k^- h_k^-), \quad D_k = 0,$$
$$\varphi_k = \hbar_k^{-1}[h_k^- r(a_k^- h_k^-) f_k^- + h_k^+ r(-a_k^+ h_k^+) f_k^+], \tag{2.14}$$
где $h_k^+ = x_{k+1} - x_k$, $h_k^- = x_k - x_{k-1}$, $\hbar_k = (h_k^+ + h_k^-)/2$,
$$s(z) = z(e^z - 1)^{-1} > 0, \; r(z) = z^{-1}(1 - s(z)). \tag{2.15}$$

Если $\varphi_k = f_k = f(x_k)$, то разностная схема (2.13) имеет 2-ой порядок аппроксимации. В случае равномерной сетки имеем разностную схему А.М.Ильина в виде

$$\begin{cases} \gamma u_{x\bar{x}} + a u_{\overset{\circ}{x}} = f(x), \; x \in \omega_h \\ u(0) = u_a, \; u(1) = u_b, \end{cases} \tag{2.16}$$

где $\gamma = (ah/2)\,\mathrm{cth}\,(ah/2)$ - возмущенный коэффициент схемы. Схема (2.16) точна, если коэффициенты a, f постоянные.

2. Если $b \neq 0$, то точная разностная схема получена при помощи аналитического решения уравнения (2.12) в элементарных промежутках $[x_{k-1}, x_k]$ и $[x_k, x_{k+1}]$ при зафиксированных значениях сеточной функции u_{k-1}, u_k, u_{k+1} на концах промежуток. Разностная схема монотонна, если $b \leq 0$. В частном случае на равномерной сетки при $a=0$ имеем разностную схему Н.С.Бахвалова в виде $(b>0)$

$$\begin{cases} \gamma u_{x\bar{x}} + bu = f(x), \ x \in \omega_h \\ u(0) = u_a, \ u(1) = u_b, \end{cases}$$

где

$$\gamma = \left(\frac{\varkappa h/2}{\sin(\varkappa h/2)} \right)^2, \quad \varkappa = \sqrt{b}.$$

Аналогично строится точная разностная схема в случае, когда $f(x)$ – кусочно-линейная функция в каждом элементарном промежутке [17]. В случае системы уравнений (2.12) (u, u', f, u_a, u_b - векторы m -го порядка, a, b - квадратные матрицы m -го порядка) разностная схема (2.13) сохраняет свой вид ($u_k, u_{k\pm1}, \varphi_k, f_k^-, f_k^+$ - векторы, $z, a_k^-, a_k^+, A_k, B_k, D_k$ - матрицы, S, r - матрицы-функции, $S(z) = z(\exp z - E)^{-1}$, $r(z) = z^{-1}(E - S(z))$, E - единичная матрица).

Если матрицы a_k^+, a_k^- симметричны, то они имеют действительные собственные значения λ и матрицы B_k, A_k имеют положительные собственные значения $(\hbar_k h_k^\pm)^{-1} S(\mp \lambda^\pm h_k^\pm)$, т.е. разностная схема (2.13),(2.14) монотонна.

Для приложений важную роль играет уравнение

$$(\nu u')' + au' = f(x), \tag{2.17}$$

где $\nu > 0$. Соответствующая монотонная разностная схема второго порядка аппроксимации имеет вид [18] (2.13), где

$$B_k = (\hbar_k h_k^+)^{-1} S(-\alpha_k^+ h_k^+) \nu_k^+ > 0, \ A_k = (\hbar_k h_k^-)^{-1} S(\alpha_k^- h_k^-) \nu_k^- > 0,$$
$$D_k = 0, \ \varphi_k = f(x_k), \ \alpha = a\nu^{-1}. \tag{2.18}$$

Разностная схема (2.13) является точной, если коэффициенты ν, a кусочно-постоянные в каждом элементарном промежутке, $f = const$. В случае системы уравнений (2.17) ν – положительно-определенная матрица.

Если коэффициенты ν, a, b в уравнениях (2.12), (2.17) непрерывны, то можно применять аппроксимацию этих коэффициентов с кусочно-постоянными, например, заменяя коэффициент $a(x)$ в промежутке $[x_{k-1}, x_k]$ средним значением

$$a_k^- = (h_k^-)^{-1} \int_{x_{k-1}}^{x_k} a(x)\,dx .$$

2.3. Специальные разностные схемы для решения краевых задач для уравнений эллиптического типа

Рассмотрим краевую задачу Дирихле для уравнения в частных производных эллиптического типа

$$\begin{cases} Lu = f(x_1,x_2), & (x_1,x_2)\in\Omega \\ u = \psi(x_1,x_2), & (x_1,x_2)\in\partial\Omega \end{cases} \tag{2.19}$$

в прямоугольнике $\Omega = \{(x_1,x_2) : 0 < x_1 < l_1,\ 0 < x_2 < l_2\}$ с границей $\partial\Omega$, где

$$Lu \equiv \nu^{(1)}\partial^2 u/\partial x_1^2 + \nu^{(2)}\partial^2 u/\partial x_2^2 + a_1\partial u/\partial x_1 + a_2 \partial u/\partial x_2 + bu$$

– дифференциальный оператор второго порядка, f, ψ – непрерывные функции, $b \leq 0$, $\nu^{(1)} > 0$, $\nu^{(2)} > 0$.

Заменяя производные разностями на равномерной сетке

$$\omega_h = \{(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}) : x_m^{(i_m)} = i_m h_m,\ i_m = \overline{0, N_m},\ h_m N_m = l_m,\ m = 1,2\} \tag{2.20}$$

имеем монотонную разностную схему 2-го порядка аппроксимации

$$\begin{cases} \Lambda y = \varphi(x_1,x_2), & (x_1,x_2)\in\omega_h \\ y = \psi(x_1,x_2), & (x_1,x_2)\in\partial\omega_h , \end{cases} \tag{2.21}$$

где

$$\partial\omega_h = \omega_h \cap \partial\Omega ,$$

$y = y(x_1,x_2)$, $\varphi = \varphi(x_1,x_2)$ – сеточные функции, которые аппроксимируют непрерывные функции u, f в узлах сетки ω_h,

$$\Lambda y \equiv \nu^{(1)} \gamma_1 y_{x_1 \bar{x}_1} + \nu^{(2)} \gamma_2 y_{x_2 \bar{x}_2} + a_1 y_{\overset{\circ}{x}_1} + a_2 y_{\overset{\circ}{x}_2} + by$$

- разностный оператор на 5-ти точечном шаблоне,

$\gamma_m = (R_m/2)\, cth(R_m/2)$ - возмущенные коэффициенты схемы,

$R_m = a_m h_m / \nu^{(m)}$ - сеточное число Рейнольдса, $m = 1, 2$.

Разностная схема (2.21) обобщает одномерную схему (2.16) на двумерный случай, содержащая поочередную аппроксимацию одномерных дифференциальных выражений

$L_m u = \nu^{(m)} \partial^2 u / \partial x_m^2 + a_m \partial u / \partial x_m$ с разностными

$\Lambda_m y = \nu^{(m)} \gamma_m y_{x_m \bar{x}_m} + a_m y_{\overset{\circ}{x}_m}$, $m = 1, 2$.

Разностная схема в центральных разностях $(\gamma_1 = \gamma_2 = 1)$ монотонна только тогда, когда

$$\max_m |R_m| \leq 2 \tag{2.22}$$

Разностная схема (2.21) обобщается на векторный случай, когда a_1, a_2, b - квадратичные матрицы, u, f, y, φ - векторы, γ_1, γ_2 - матрицы-функции.

В случае постоянных коэффициентов решение обеих краевых задач (2.19),(2.21) легко представить аналитически в виде разложений рядов Фурье (непрерывных и дискретных) [46]. Эти разложения служат для апробации численных алгоритмов.

Для аппроксимации двумерного аналога уравнения (2.17)

$$\begin{aligned} &\partial(\nu^{(1)} \partial u / \partial x_1) / \partial x_1 + \partial(\nu^{(2)} \partial u / \partial x_2) / \partial x_2 + \\ &+ a_1 \partial u / \partial x_1 + a_2 \partial u / \partial x_2 = f(x_1, x_2) \end{aligned} \tag{2.23}$$

имеем на неравномерной сетке с узлами $(x_1^{(i)}, x_2^{(j)})$ разностные уравнения в виде

$$\begin{aligned} \Lambda y_{ij} &= B_{ij} (y_{i+1j} - y_{ij}) - A_{ij} (y_{ij} - y_{i-1j}) + \\ &+ \tilde{B}_{ij} (y_{ij+1} - y_{ij}) - \tilde{A}_{ij} (y_{ij} - y_{ij-1}) = f_{ij}, \end{aligned} \tag{2.24}$$

где y_{ij}, f_{ij} значения сеточных функций, которые аппроксимируют $u(x_1^{(i)}, x_2^{(j)})$, $f(x_1^{(i)}, x_2^{(j)})$; $A_{ij}, B_{ij}, \widetilde{A}_{ij}, \widetilde{B}_{ij}$ - коэффициенты (разностная схема монотонна, если коэффициенты положительные),

$$B_{ij} = (\hbar_i h_{i+1})^{-1} S(-\alpha_{i+1/2,j} h_{i+1})\, \nu^{(1)}_{i+1/2,j} > 0 ,$$
$$A_{ij} = (\hbar_i h_i)^{-1} S(\alpha_{i-1/2,j} h_i)\, \nu^{(1)}_{i-1/2,j} > 0 ,$$
$$\widetilde{B}_{ij} = (\bar{g}_j g_{j+1})^{-1} S(-\widetilde{\alpha}_{i,j+1/2}\, g_{j+1})\, \nu^{(2)}_{i,j+1/2} > 0,$$
$$\widetilde{A}_{ij} = (\bar{g}_j g_j)^{-1} S(\widetilde{\alpha}_{i,j-1/2}\, g_j)\, \nu^{(2)}_{i,j-1/2} > 0 .$$

Здесь

$$\alpha = a_1 / \nu^{(1)}, \quad \widetilde{\alpha} = a_2 / \nu^{(2)},$$
$$h_i = x_1^{(i)} - x_1^{(i-1)}, \quad h_{i+1} = x_1^{(i+1)} - x_1^{(i)}, \quad \hbar_i = (h_i + h_{i+1})/2,$$
$$g_{j+1} = x_2^{(j+1)} - x_2^{(j)}, \quad g_j = x_2^{(j)} - x_2^{(j-1)},$$

$\bar{g}_j = (g_j + g_{j+1})/2$; величины с индексами $i \pm 1/2$, $j \pm 1/2$ означают соответствующие средние значения сеточных функций в промежутках $(x_1^{(i-1)}, x_1^{(i)})$, $(x_1^{(i)}, x_1^{(i+1)})$ и $(x_2^{(j-1)}, x_2^{(j)})$, $(x_2^{(j)}, x_2^{(j+1)})$ соответственно.

Алгоритмы (2.21),(2.24) обобщаются в случаях одного уравнения с n независимыми переменными и системы уравнений, когда $\nu^{(1)}, \nu^{(2)}, a_1, a_2, b$ - матрицы, u, f, y, φ - векторы, S, γ_1, γ_2 - матрицы-функции [15,18].

2.4. Методы решения начально-краевой задачи для уравнений параболического типа

Рассматривается нестационарная задача

$$\begin{cases} \partial u/\partial t = Lu + f(x,t),\ x\in(0,l),\ t>0 \\ u|_{t=0} = \tilde{\varphi}(x),\ x\in[0,l] \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0,\ t\geq 0, \end{cases} \qquad (2.25)$$

где $Lu = \nu\,\partial^2 u/\partial x^2 + a\,\partial u/\partial x$,

$\tilde{\varphi}, f, \nu, a$ - заданные функции, $\nu>0$.

Для разработки специальных методов важно рассматривать случай, когда a большой параметр по модулю или ν малый параметр.

Из монотонной аппроксимации по пространству (2.16) на равномерной сетке (2.1) следует метод прямых в виде задачи Коши для СДУ

$$\begin{cases} du_i/dt = \gamma\nu u_{x\bar{x}_i} + a u_{\overset{\circ}{x}_i} + f_i(t) \\ u_0(t) = u_N(t) = 0,\ u_i(0) = \tilde{\varphi}_i;\ i=\overline{1,N-1}, \end{cases} \qquad (2.26)$$

где $u_i(t) = u(x_i,t),\ f_i(t) = f(x_i,t),\ \tilde{\varphi}_i = \tilde{\varphi}(x_i)$.

Соответствующая 6-ти точечная двухслойная разностная схема имеет вид

$$\begin{cases} (y^{(n+1)}(x) - y^{(n)}(x))/\tau = \Lambda(\sigma y^{n+1}(x) + (1-\sigma)y^n(x)) + \bar{f}(x),\ x\in\omega_h \\ y^0(x) = \tilde{\varphi}(x),\ y^n(0) = y^n(l) = 0,\ n\geq 0, \end{cases} \qquad (2.27)$$

где $\Lambda y = \nu\gamma y_{x\bar{x}} + a y_{\overset{\circ}{x}}$, $0\leq\sigma\leq 1$ - параметр схемы ($\sigma=0$ - явная схема, $\sigma=0,5$ - Кранка-Николсона) $\bar{f}(x)$ - аппроксимация правой части $f(x,t)$ на $n+1/2$ -ом временном слое.

В случае $\nu, a = const$ решения этих задач можно получить аналитически методом разделения переменных. Для этого используется биортонормированная система собственных функций операторов $(-L)$, $(-\Lambda)$ и их сопряженных в виде

$$X_k(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\exp\left(-\frac{ax}{2\nu}\right)\sin\frac{k\pi x}{l};\ X_k^*(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\exp\left(\frac{ax}{2\nu}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}, \quad (2.28)$$
$$k=1,2,\ldots .$$

Собственные значения этих операторов отличаются и имеют вид

$$\lambda_k=(a/2\nu)^2+(k\pi/l)^2,\ k=1,2,\ldots$$

$$\lambda_k^h=\frac{a}{h}\left(ch\frac{ah}{2\nu}-\cos\frac{k\pi h}{l}\right)/sh\frac{ah}{2\nu},\ k=\overline{1,N-1}. \quad (2.29)$$

Так как аппроксимация оператора L монотонная, то для схемы сохраняется неравенство устойчивости $\sigma\geqslant\sigma_0=0,5-(\tau\lambda_{N-1}^h)^{-1}$, а при $\sigma=0,5$ – второй порядок аппроксимации по времени.

При $\sigma=0$ можно построить абсолютно устойчивую разностную схему (2.27) с двумя возмущенными параметрами γ и $\tilde{\gamma}$ (в (2.27) τ заменено на $\tilde{\gamma}$), где аналогично (2.4) имеем

$$\tilde{\gamma}=(1-\exp(-2C))/(2C),\ C=\gamma h^{-2}\nu.$$

Из оценок $\gamma\geqslant\frac{ah}{2\nu}$, $\tilde{\gamma}\leq(2C)^{-1}$ вытекает абсолютная устойчиовтсь явной схемы. Явную абсолютно устойчивую схему можно построить и для решения двумерного уравнения теплопроводности (2.25), где $L=L_1+L_2$, $x=(x_1,x_2)$,

$$L_m u=\nu^{(m)}\partial^2u/\partial x_m^2+a_m\partial u/\partial x_m,\ \nu^{(m)}>0,\ m=1,2.$$

Тогда разностные уравнения имеют следующий вид

$$(y^{n+1}(x)-y^n(x))/\tilde{\gamma}=\nu^{(1)}\gamma_1 y_{x_1\bar{x}_1}+\nu^{(2)}\gamma_2 y_{x_2\bar{x}_2}+ \quad (2.30)$$
$$+a_1 y_{\overset{\circ}{x}_1}+a_2 y_{\overset{\circ}{x}_2}+\bar{f}(x),$$

где $x=(x_1,x_2)\in\omega_h$,

$$\tilde{\gamma}=(1-\exp(-2C))/(2C),\ C=\nu^{(1)}\gamma_1 h_1^{-2}+\nu^{(2)}\gamma_2 h_2^{-2}.$$

Для решения начально-краевой задачи для двумерного уравнения можно применять методы переменных направлений, один алгоритм из которых можно записать (после исключения половинного слоя) в виде неявных разностных уравнений

$$\left(E-\frac{\tau}{2}\Lambda_1\right)\left(E-\frac{\tau}{2}\Lambda_2\right)\frac{y^{n+1}(x)-y^{n}(x)}{\tau}=\Lambda y^{n}(x)+\bar{f}(x), \qquad (2.31)$$

где E - единичный оператор, $\Lambda=\Lambda_1+\Lambda_2$.

При $\gamma^{(m)}, a_m=const$ решение разностной начально-краевой задачи в прямоугольнике Ω с нулевыми граничными условиями можно найти аналитически в виде конечного ряда Фурье

$$y^{n}(x)=\sum_{k_1=1}^{N_1-1}\sum_{k_2=1}^{N_2-1}T^{n}_{k_1k_2}X_{k_1k_2}(x),$$

где $X_{k_1k_2}(x)=X^{(1)}_{k_1}(x_1)\,X^{(2)}_{k_2}(x_2)$ - биортонормированные собственные функции двумерных операторов $(-L)$ $(-\Lambda)$ со собственными значениями $\lambda_{k_1k_2}=\lambda^{(1)}_{k_1}+\lambda^{(2)}_{k_2}$,

$$T^{n}_{k_1k_2}=\left(q_{k_1k_2}\right)^{n}T^{0}_{k_1k_2},$$

$$q_{k_1k_2}=\frac{\left(2-\tau\lambda^{(1)}_{k_1}\right)\left(2-\tau\lambda^{(2)}_{k_2}\right)}{\left(2+\tau\lambda^{(1)}_{k_1}\right)\left(2+\tau\lambda^{(2)}_{k_2}\right)},$$

$T^{0}_{k_1k_2}$ - коэффициенты Фурье для функции $\tilde{\varphi}(x)$,
$\lambda^{(m)}_{k_m}$, $X^{(m)}_{k_m}(x_m)$ - собственные значения и функции для соответствующих одномерных операторов, $m=1,2$.

Отсюда видна абсолютная устойчивость схемы метода переменных направлений, т.к. $|q_{k_1k_2}|\leq 1$.

3. СПЕЦИАЛЬНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ РАСЧЕТА ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ

Для расчета течении жидкости в широком диапазоне изменения параметров, в том числе при больших значениях чисел $Re, Gr, Ha, S, S^*, \Gamma_K$, необходимо разрабатывать эффективные алгоритмы и специальные разностные методы для решения соответствующих линейных и нелинейных, стационарных и нестационарных задач МГД. Такие методы целесообразно начинать разрабатывать на простейших одномерных модельных задачах. Разработанные разностные и векторно-разностные схемы монотонны и хорошо учитывают особенности решения краевых задач. Полученные схемы обобщают разностные схемы А.М.Ильина, Г.И.Шишкина, К.В.Емельянова, Н.С.Бахвалова, А.А.Самарского, Г.И.Марчука.

3.1. Разностные схемы для решения одномерных краевых задач гидродинамики и магнитной гидродинамики

Построенные монотонные разностные схемы для СДУ в 2 разд. используются для решения соответствующих одномерных краевых задач гидродинамики [18] и магнитной гидродинамики [16,19] как в декартовой, так и в цилиндрической системах координат.

В произвольных криволинейных ортогональных координатах (q_1, q_2) для аппроксимации дифференциальных операторов с разностными на 5-ти точечном шаблоне используется поочередняя аппроксимация соответствующих одномерных операторов на 3-х точечном шаблоне [18]. Как одномерную модель стационарной системы уравнений (1.21-1.23) рассмотрим следующую:

$$\begin{cases} (b_1 u')' + a_1 u' + c w' + d H' = f_1 \\ (b_2 w')' + a_2 w' = f_2 \\ (b_3 H')' + a_3 H' = f_3 \,, \end{cases} \tag{3.1}$$

где функции и коэффициенты зависят от переменной x, $b_1 > 0$, $b_2 > 0$, $b_3 > 0$, $u' = du/dx$, ...

Систему (3.1) можно переписать в векторном виде (2.17), где матрицы

$$b=\begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{pmatrix}, \quad a=\begin{pmatrix} a_1 & c & d \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix},$$

а векторы $\vec{u}$, $\vec{f}$ со составляющими u, w, H и f_1, f_2, f_3. Соответствующая векторно-разностная схема имеет вид (2.13), (2.18), где A_k, B_k, α_k - матрицы, а u_k, φ_k - векторы. Схема монотонна т.к. собственные значения матриц $z=\alpha h = ah/b$ действительные, а собственные значения матрицы-функции $S(z)$ положительные, т.е. $A_k>0, B_k>0$. Вычисляя $S(z)$ на спектре матрицы z интерполяционным методом Лагранжа-Сильвестера имеем

$$S(z)=\begin{pmatrix} s(\lambda_1) & cb_2^{-1}\delta s(\lambda_1,\lambda_2)h & db_3^{-1}\delta s(\lambda_1,\lambda_3)h \\ 0 & s(\lambda_2) & 0 \\ 0 & 0 & s(\lambda_3) \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

где

$$\lambda_m = a_m b_m^{-1} h \ (m=1,2,3), \ s(\lambda)=\lambda/(\exp(\lambda)-1),$$
$$\delta s(\lambda,\bar\lambda)=(s(\lambda)-s(\bar\lambda))/(\lambda-\bar\lambda).$$

Поэтому

$$B_k=(\hbar_k h_k^+)^{-1}\begin{pmatrix} s(-\lambda_1^+)b_1^+ & -c^+\delta s(-\lambda_1^+,-\lambda_2^+)h_k^+ & -d\delta s(-\lambda_1^+,-\lambda_3^+)h_k^+ \\ 0 & s(-\lambda_2^+)b_2^+ & 0 \\ 0 & 0 & s(-\lambda_3^+)b_3^+ \end{pmatrix},$$

$$A_k=(\hbar_k h_k^-)^{-1}\begin{pmatrix} s(\lambda_1^-)b_1^- & c^-\delta s(\lambda_1^-,\lambda_2^-)h_k^- & d^-\delta s(\lambda_1^-,\lambda_3^-)h_k^- \\ 0 & s(\lambda_2^-)b_2^- & 0 \\ 0 & 0 & s(\lambda_3^-)b_3^- \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

где

$$\lambda_m^{\pm} = a_m^{\pm} h_k^{\pm}/b_m^{\pm}, \ m=1,2,3.$$

При $\bar\lambda \to \lambda$ следует, что $\delta s(\lambda,\bar\lambda) \to s'(\lambda)$.

В случае постоянных коэффициентов и равномерной сетки

$$\Lambda \vec{u}_k = h^{-2}[S(-Z)\nu(\vec{u}_{k+1} - \vec{u}_k \pm (\vec{u}_{k+1} + \vec{u}_{k-1})/2) -$$
$$- S(Z)\nu(\vec{u}_k - \vec{u}_{k-1} \pm (\vec{u}_{k+1} + \vec{u}_{k-1})/2) =$$
$$= (S(-Z) + S(Z))\nu \vec{u}_{x\bar{x}_k}/2 + (S(-Z) - S(Z))h^{-1}\nu \vec{u}_{\overset{\circ}{x}_k} =$$
$$= \gamma(Z)\nu \vec{u}_{x\bar{x}_k} + a\vec{u}_{\overset{\circ}{x}_k},$$

где

$$Z = ah/\nu,\ S(-Z) - S(Z) = Z,\ (S(-Z) + S(Z))/2 =$$

$= \gamma(Z) = (Z/2)\,\mathrm{cth}(Z/2)$ - возмущенный коэффициент схемы. Вычисляя $\gamma(Z)$ на спектре матрицы Z имеем

$$\gamma(Z) = \begin{pmatrix} \gamma_1 & cb_2^{-1}\delta_\gamma(\lambda_1,\lambda_2)h & db_3^{-1}\delta_\gamma(\lambda_1,\lambda_3)h \\ 0 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 \end{pmatrix}, \qquad (3.4)$$

где $\gamma_m = \gamma(\lambda_m)$, $m = 1,2,3$, $\delta_\gamma(\lambda,\bar{\lambda}) = (\gamma(\lambda) - \gamma(\bar{\lambda}))/(\lambda - \bar{\lambda})$.

Следовательно, разностные уравнения для системы уравнений (3.I) на равномерной сетке имеют вид

$$\begin{cases} b_1\gamma_1 u_{x\bar{x}} + a_1 u_{\overset{\circ}{x}} + cw_{\overset{\circ}{x}} + dH_{\overset{\circ}{x}} + ch\delta_\gamma(\lambda_1,\lambda_2)w_{x\bar{x}} + \\ \qquad + dh\delta_\gamma(\lambda_1,\lambda_3)H_{x\bar{x}} = f_1 \\ b_2\gamma_2 w_{x\bar{x}} + a_2 w_{\overset{\circ}{x}} = f_2 \\ b_3\gamma_3 H_{x\bar{x}} + a_3 H_{\overset{\circ}{x}} = f_3 \end{cases} \qquad (3.5)$$

В [I9] показана преимущество разностных уравнений (3.5) с возмущенными коэффициентами γ_m, δ_γ при больших значениях параметра C. Уравнения (3.5) отличаются от стандартной схемы А.М.Ильина с отличными от нуля коэффициентами $\delta_\gamma(\lambda_1,\lambda_2)$ и $\delta_\gamma(\lambda_1,\lambda_3)$, которые в случае постоянных величин b_m, a_m, f_m $(m=1,2,3)$, c, d и граничных условий первого рода обеспечивают построение точной разностной схемы. Точную разностную схему (2.I3),(2.I8),(3.3) можно построить на неравномерной сетке в случае кусочно-постоянных величин. В случае переменных коэффициентов эта схема сохраняет свой вид и имеет по крайней мере второй порядок аппроксимации и равномерно сходится, если a_1, a_2, a_3 или $c, d \to \infty$.

В работах [44,45,46] рассматривается и другие одномерные модели задач гидродинамики МГД.

Отметим, что в случае матрицы

$$a = \begin{pmatrix} a_1 & c & d \\ 0 & a_2 & e \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix},$$

т.е. когда второе уравнение (3.I) имеет вид

$(b_2 w')' + a_2 w' + eH' = f_2$, матрица $S(z)$ (3.2) имеет следующий вид

$$S(z) = \begin{pmatrix} S(\lambda_1) & c b_2^{-1} \delta S(\lambda_1, \lambda_2) h & d b_3^{-1} \delta S(\lambda_1, \lambda_3) h \\ 0 & S(\lambda_2) & e b_3^{-1} \delta S(\lambda_2, \lambda_3) h \\ 0 & 0 & S(\lambda_3) \end{pmatrix}$$

3.2. Разностные схемы для решения линейных задач МГД

Для линейной краевой задачи МГД (I.24),(I.25) система уравнений при $\alpha_0 = \pi/2$ имеет вид (2.23), где $\nu^{(1)} = \nu^{(2)} = E$ - единичная матрица, $a_1 = 0$, $x_1 \equiv x$, $x_2 \equiv y$, $a_2 = \begin{pmatrix} -Re\,v & Ha \\ Ha & -Re_m v \end{pmatrix}$. Собственные значения симметричной матрицы a_2 имеют вид

$$\tilde{\lambda}_{1,2} = -0{,}5\left[v(Re + Re_m) \pm \left(4Ha^2 + (Re - Re_m)^2 v^2\right)^{1/2} \right]. \quad (3.6)$$

Следовательно, монотонная векторно-разностная схема имеет вид (2.24), где $A_{ij}, B_{ij}, \tilde{A}_{ij}, \tilde{B}_{ij}$ - матрицы второго порядка, y_{ij}, f_{ij} - векторы. Легко проверить, что $S(0) = E$,

$$S(z)=\begin{pmatrix} (-Re\,v g-\lambda_1)\delta s(\lambda_2,\lambda_1)+s(\lambda_1) & g\,Ha\,\delta s(\lambda_2,\lambda_1) \\ g\,Ha\,\delta s(\lambda_2,\lambda_1) & (-Re_m v g-\lambda_2)\delta s(\lambda_2,\lambda_1)+s(\lambda_2) \end{pmatrix},$$

где $\delta s(\lambda_2,\lambda_1)=(s(\lambda_2)-s(\lambda_1))/(\lambda_2-\lambda_1)$, $\lambda_1=g\tilde{\lambda}_1$, $\lambda_2=g\tilde{\lambda}_2$.

Поэтому $B_{ij}=(\hbar_i h_{i+1})^{-1}E$, $A_{ij}=(\hbar_i h_i)^{-1}E$,

$$\tilde{B}_{ij}=\frac{1}{g_j g_{j+1}}\begin{pmatrix} s(-\lambda_1^+)-(Re\,v g^+-\lambda_1^+)\delta s(-\lambda_2^+,-\lambda_1^+) & -g^+Ha\,\delta s(-\lambda_2^+,-\lambda_1^+) \\ -g^+Ha\,\delta s(-\lambda_2^+,-\lambda_1^+) & s(-\lambda_2^+)-(Re_m v g^+-\lambda_2^+)\delta s(-\lambda_2^+,-\lambda_1^+) \end{pmatrix},$$

$$\tilde{A}_{ij}=\frac{1}{g_j g_j}\begin{pmatrix} s(\lambda_1^-)-(Re\,v g^-+\lambda_1^-)\delta s(\lambda_2^-,\lambda_1^-) & g^-Ha\,\delta s(\lambda_2^-,\lambda_1^-) \\ g^-Ha\,\delta s(\lambda_2^-,\lambda_1^-) & s(\lambda_2^-)-(Re_m v g^-+\lambda_2^-)\delta s(\lambda_2^-,\lambda_1^-) \end{pmatrix}, \tag{3.7}$$

где $\lambda_1^+,\lambda_2^+,g^+$ и $\lambda_1^-,\lambda_2^-,g^-$ средние значения величин λ_1,λ_2,g в промежутках (y_j,y_{j+1}) и (y_{j-1},y_j) соответственно.

В случае равномерной сетки имеем

$$\vec{u}_{x\bar{x}}+\gamma\,\vec{u}_{yy}+a_2\,\vec{u}_{\mathring{y}}=0, \tag{3.8}$$

где

$$\gamma=\begin{pmatrix} \gamma_1-(Re\,v g+\lambda_1)\delta_\gamma(\lambda_2,\lambda_1) & g\,Ha\,\delta_\gamma(\lambda_2,\lambda_1) \\ g\,Ha\,\delta_\gamma(\lambda_2,\lambda_1) & \gamma_2-(Re_m v g+\lambda_2)\delta_\gamma(\lambda_2,\lambda_1) \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

- матрица возмущенных коэффициентов.

При $V=const$ коэффициенты в системе уравнений (I.24) постоянны и краевую задачу можно решать аналитически методом разделения переменных [20,24]. Специальные разностные схемы и аналитические решения построены также в случае цилиндрической системы координат [I4,25,39]. Расчеты таких задач проведены в широком диапазоне изменения параметров Re, Ha, Re_m и могут быть использованы при анализе МГД явлений и также как тесты для проверки эффективности специальных разностных методов.

3.3. Разностные схемы для решения нелинейных краевых задач гидродинамики и магнитной гидродинамики

Специальные разностные схемы применяются для решения нелинейных краевых задач. Для построения таких схем используется метод "замораживания" коэффициентов. В этом случае в разностных уравнениях (2.2I),(2.24),(2.30) коэффициенты a_1, a_2 зависят от решения u в узлах сетки [II,I3,45].

При аппроксимации уравнений (I.2I-I.23) с разностными на неравномерной сетке в плоскости (q_1, q_2) с узлами $(q_i, \tilde{q}_j)$ и с шагами $h_i = q_i - q_{i-1}$, $g_j = \tilde{q}_j - \tilde{q}_{j-1}$, $\hbar_i = (h_i + h_{i+1})/2$, $\bar{g}_j = (g_j + g_{j+1})/2$ имеем следующие разностные уравнения (после умножения на $L_1 L_2$):

$$
\begin{gathered}
B_{ij}^{(1)}(u_{i+1j} - u_{ij}) - A_{ij}^{(1)}(u_{ij} - u_{i-1j}) + \tilde{B}_{ij}^{(1)}(u_{ij+1} - u_{ij}) - \\
- \tilde{A}_{ij}^{(1)}(u_{ij} - u_{ij-1}) + C_{ij}(w_{i+1j} - w_{ij}) - E_{ij}(w_{ij} - w_{i-1j}) + \\
+ \tilde{C}_{ij}(w_{ij+1} - w_{ij}) - \tilde{E}_{ij}(w_{ij} - w_{ij-1}) + D_{ij}(H_{i+1j} - H_{ij}) - \\
- P_{ij}(H_{ij} - H_{i-1j}) + \tilde{D}_{ij}(H_{ij+1} - H_{ij}) - \tilde{P}_{ij}(H_{ij} - H_{ij-1}) = F_{ij}^{(1)} \hbar_i \bar{g}_j ,
\end{gathered}
\tag{3.10}
$$

$$
\begin{gathered}
B_{ij}^{(2)}(w_{i+1j} - w_{ij}) - A_{ij}^{(2)}(w_{ij} - w_{i-1j}) + \tilde{B}_{ij}^{(2)}(w_{ij+1} - w_{ij}) - \\
- \tilde{A}_{ij}^{(2)}(w_{ij} - w_{ij-1}) = F_{ij}^{(2)} \hbar_i \bar{g}_j ,
\end{gathered}
\tag{3.11}
$$

$$
\begin{gathered}
B_{ij}^{(3)}(H_{i+1j} - H_{ij}) - A_{ij}^{(3)}(H_{ij} - H_{i-1j}) + \tilde{B}_{ij}^{(3)}(H_{ij+1} - \\
- H_{ij}) - \tilde{A}_{ij}^{(3)}(H_{ij} - H_{ij-1}) = F_{ij}^{(3)} \hbar_i \bar{g}_j ,
\end{gathered}
\tag{3.12}
$$

где

$$B_{ij}^{(1)}=\nu g_j h_{i+1}^{-1}(G_{i+1/2,j}/G_{ij})^{\varepsilon}(\tilde L/L)_{i+1/2,j}\,S(\alpha_{i+1/2,j}h_{i+1}),$$
$$A_{ij}^{(1)}=\nu g_j h_i^{-1}(G_{i-1/2,j}/G_{ij})^{\varepsilon}(\tilde L/L)_{i-1/2,j}\,S(-\alpha_{i-1/2,j}h_i),$$
$$\tilde B_{ij}^{(1)}=\nu h_i g_{j+1}^{-1}(G_{i,j+1/2}/G_{ij})^{\varepsilon}(L/\tilde L)_{i,j+1/2}\,S(\tilde\alpha_{i,j+1/2}g_{j+1}),$$
$$\tilde A_{ij}^{(1)}=\nu h_i g_j^{-1}(G_{i,j-1/2}/G_{ij})^{\varepsilon}(L/\tilde L)_{i,j-1/2}\,S(-\tilde\alpha_{i,j-1/2}g_j),$$
$$C_{ij}=-2g_j w_{i+1/2,j}G_{ij}^{-3}(\partial\ln G/\partial q)_{i+1/2,j}\,S'(\alpha_{i+1/2,j}h_{i+1}),$$
$$E_{ij}=2g_j w_{i-1/2,j}G_{ij}^{-3}(\partial\ln G/\partial q)_{i-1/2,j}\,S'(-\alpha_{i-1/2,j}h_i),$$
$$\tilde C_{ij}=2h_i w_{i,j+1/2}G_{ij}^{-3}(\partial\ln G/\partial\tilde q)_{i,j+1/2}\,S'(\tilde\alpha_{i,j+1/2}g_{j+1}),$$
$$\tilde E_{ij}=-2h_i w_{i,j-1/2}G_{ij}^{-3}(\partial\ln G/\partial\tilde q)_{i,j-1/2}\,S'(-\tilde\alpha_{i,j-1/2}g_j),$$
$$D_{ij}=(2\mu\rho)^{-1}g_j H_{i+1/2,j}G_{ij}^{-3}(\partial G^4/\partial\tilde q)_{i+1/2,j}\,\delta S(\alpha_{i+1/2,j}h_{i+1},\beta_{i+1/2,j}h_{i+1}),$$
$$P_{ij}=-(2\mu\rho)^{-1}g_j H_{i-1/2,j}G_{ij}^{-3}(\partial G^4/\partial\tilde q)_{i-1/2,j}\,\delta S(-\alpha_{i-1/2,j}h_i,-\beta_{i-1/2,j}h_i),$$
$$\tilde D_{ij}=-(2\mu\rho)^{-1}h_i H_{i,j+1/2}G_{ij}^{-3}(\partial G^4/\partial q)_{i,j+1/2}\,\delta S(\tilde\alpha_{i,j+1/2}g_{j+1},\tilde\beta_{i,j+1/2}g_{j+1}),$$
$$\tilde P_{ij}=(2\mu\rho)^{-1}h_i H_{i,j-1/2}G_{ij}^{-3}(\partial G^4/\partial q)_{i,j-1/2}\,\delta S(-\tilde\alpha_{i,j-1/2}g_j,-\tilde\beta_{i,j-1/2}g_j),$$
$$\alpha=vL/\nu,\quad \tilde\alpha=\tilde v\tilde L/\nu,\quad \beta=vL/\nu_m,\quad \tilde\beta=\tilde v\tilde L/\nu_m,\quad \varepsilon=3,$$
$$F^{(1)}=L\tilde L(\partial u/\partial t-f_3/G)-(\mu\rho G)^{-1}J(x,E(x)),$$
$$F^{(2)}=L\tilde L(\partial w/\partial t-F_3G)-(\mu\rho G)^{-1}J(G^2H,x),$$
$$F^{(3)}=L\tilde L\,\partial H/\partial t-G^{-1}J(wG^{-2},x),$$
$$L=L_1,\ \tilde L=L_2,\ G=L_3,\ v=v_1,\ \tilde v=v_2,$$
$$u_{ij}=u(q_i,\tilde q_j),\ \ldots\ .$$

Выражения J можно аппроксимировать при помощи центральных разностей, причем $E(x)$ надо выражать через первые производные из уравнения (I.18). Коэффициенты $B_{ij}^{(2)}, A_{ij}^{(2)}, \tilde B_{ij}^{(2)}, \tilde A_{ij}^{(2)}$ вычисляются аналогично $B_{ij}^{(1)}, A_{ij}^{(1)}, \tilde B_{ij}^{(1)}, \tilde A_{ij}^{(1)}$

при $\mathcal{E}=-1$, а при вычислении $B_{ij}^{(3)}, A_{ij}^{(3)}, \tilde{B}_{ij}^{(3)}, \tilde{A}_{ij}^{(3)}$ надо выбрать $\mathcal{E}=3$, а $\nu, \alpha, \tilde{\alpha}$ заменить на $\nu_m, \beta, \tilde{\beta}$.

Так как уравнение (I.I8) аналогичное (I.2I), то для его аппроксимации справедливы разностные уравнения (3.II), где $w, \nu, \alpha, \tilde{\alpha}$ заменено на $\varkappa, \nu_m, \beta, \tilde{\beta}$, а $F^{(2)} = L\tilde{L}(\partial\varkappa/\partial t - \delta)$. Уравнение (I.I7) есть стационарное уравнение (I.2I) $(\partial w/\partial t = 0)$ при $V_1 = V_2 = \varkappa = 0$, $F_3 = Gu$, поэтому разностные уравнения (3.II) сохраняются для аппроксимации уравнения (I.I7) при $W \equiv \psi$, т.к. $S(0) = 1$. Для аппроксимации уравнения (I.I2) разностные уравнения имеют вид (3.I0), где ν, u заменено на X, T, а $\mathcal{E}=1, C_{ij} = E_{ij} = \tilde{C}_{ij} = \tilde{E}_{ij} = D_{ij} = P_{ij} = \tilde{D}_{ij} = \tilde{P}_{ij} = 0$, $F^{(1)} = L\tilde{L}(\partial T/\partial t - Q)$. Для аппроксимации производной по времени используется односторонняя разность по времени. Аппроксимация других уравнений дана в работах [I3,I9].

4. ПРИМЕНЕНИЕ СПЕЦИАЛЬНЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ

4.I. Аналитические решения некоторых дифференциальных и разностных краевых задач

Для проверки точности и эффективности построенных разностных схем необходимо сравнить приближенные и точные значения решения в узлах сетки. Для некоторых линейных задач возможно построить решение аналитически в виде однократных тригонометрических рядов. В случае больших значениях числах Ha не всегда удобно исходить из точного решения задачи в виде ряда, так как сходимость рядов с ростом числа Ha ухудшается. Построенные точные решения позволяют выявить основные свойства физических процессов. Аналитические решения построены для свободного сдвигового течения жидкости на основе уравнения (I.24) как в декартовых [20,24], так и в цилиндрических [25] координатах. Выявлены следующие основные характерные явления течений типа Ханта при больших значениях числа Ha : I) течение жидкости концентрируется в узкой области между электродами и становится однородным в направлении поля, 2) максимальная скорость течения и расход жидкости ограничены и стремятся к пределу при $Ha \to \infty$, 3) в области между электродами токи сосредоточены в тонких пограничных слоях с толщиной порядка $O(Ha^{-1})$ у торцевых поверхностей, перпендикулярных магнитному полю, а также в свободных пограничных слоях, продольных полю, с толщиной $O(Ha^{-1/2})$, 4) распределение скорости сильно зависит от способа подвода тока к электродам и направления внешнего магнитного поля. В зависимости от величин чисел Re, Re_m, Al получены различные асимптотики течений. Исследована также деформация возмущений по врамени при больших числах Ha [3,4].

4.2. Особенности реализации численных методов для решения краевых задач

В методе сеток существует большой выбор различных возможностей дискретизации в зависимости от выбора зависимых переменных, стационарных и нестационарных задач. Разностные схемы различаются по следующим основным признакам: I) вид аппроксимации основного дифференциального оператора по пространству (односторонние разности, симметричные разности, монотонная аппроксимация, точная аппроксимация); 2) вид аппроксимации дифференциального оператора по времени (явный, неявный, полунеявный); 3) метод аппроксимации граничных условий; 4) метод решения систем разностных уравнений (методы установления, переменных направлений, итерационные и релаксационные методы). В последние годы в задачах вычислительной гидродинамики и магнитной гидродинамики осуществляется продвижение в область все больших значений параметров задач (числа Re, Ha, Gr). Это связано с разработкой специальных разностных схем и других численных методов, которые характеризуются следующими особенностями: I) применением неравномерной сетки с возможностью сгущения узлов в областях с большими градиентами; 2) монотонной аппроксимацией конвективных членов второго порядка точности; 3) экономичной неявной схемой, позволяющей свести решения двумерных уравнений к последовательному решения одномерных уравнений; 4) усовершенствованием методов расчета граничных условий (напр., для вихря); 5) решением высокой точности разностных уравнений.

Уравнение для переноса вихря (I.26) служит как модель для описания многих других процессов переноса (диффузии, тепла и др.) и численные методы решения уравнений (I.26), (I.27) применимы для решения широкого класса задач. Для составления специальных разностных схем рассматриваются соответствующие одномерные модельные уравнения. Нелинейным одномерным модельным уравнением переноса является уравнение Бюргерса

$$\partial u/\partial t + u\,\partial u/\partial x = Re^{-1}\partial^2 u/\partial x^2 + f\,. \qquad (4.1)$$

Для численного моделирования течения жидкости система уравнений (I.18) $(\omega_3=\omega,\ L_1=L_2=L_3=1)$ (I.26) должна дополняться с граничными условиями прилипания жидкости на твердых стенках (границах)

$$\psi = 0\,,\quad \partial\psi/\partial n = 0\,. \qquad (4.2)$$

При решении краевых задач важное место занимает вопрос о процедуре вычисления функции завихренности ω на твердой стенке.От этой процедуры зависят точность и устойчивость вычислительного алгоритма в целом.В случае применения явных разностных схем приближенные формулы для завихренности на стенке (Тома, Вудса, Полежаева) не понижают порядок аппроксимации схем и практически не ухудшают условий на шаг времени τ. Для неявных схем эти формулы могут привести к таким ограничениях на шаг τ, при которых неявные схемы теряют свое преимущество в устойчивости и в ряде случаев уступают явным схемам. Аналогичная ситуация возникает также с применением итерационных схем для расчета стационарных задач. Для модельных одномерных течений в плоском канале, обтекания цилиндра и шара (задача Стокса) можно показать, что в литературе известные приближенные граничные условия для функции ω неприменимы для вычисления стационарного течения без введения коэффициента релаксации [6]. Предлагается совместное решение системы (ψ,ω) методом переменных направлений (МПН) на основе условий (4.2) без специальных граничных условий для ω. В случае двумерной стационарной задачи (I.18),(I.26),(4.2) в прямоугольнике для реализации разностных уравнений применяется МПН (дробных шагов) на основе схем Писмена-Рэкфорда и Дугласа-Рэкфорда. Методом гармонического анализа и применяя принцип максимума исследована устойчивость и сходимость соответствующих линеаризованных разностных уравнений. Для расчета нестационарных задач при умеренных и больших значениях числа Re МПН для каждого уравнения отдельно не эффективен, т.к. растет ограничения на шаг τ из-за применения приближенных граничных условий для функции вихря на твердых стенках границы расчетной области. В этом случае удобнее пользоваться неявными векторно-разностными схемами и для решения системы уравнений на $(n+1)$ -ом временном слое применять метод локальной релаксации в котором параметры релаксации определяются в каждом узле сетки, принимая, что коэффициенты разностного уравнения "замороженны" (постоянны) в окрестности центрального узла сетки. Хорошей моделью для вычисления оптимальных коэффициентов релаксации является линейное уравнение (2.19) $(b=0)$ и его разностный аналог (2.21) [32, 35]. Для реализации разностных уравнений методом верхней релаксации на основе поточечного итерационного метода Зейделя с параметром $\omega^r (1 \le \omega^r < 2)$ рассматривается следующий итерационный процесс:

$$y_{ij}^{(k+1)} = (1-\omega^r)\, y_{ij}^{(k)} + \frac{\omega^r}{2(\gamma_1+\gamma_2)} \Big[(\gamma_1 - R_1/2)\, y_{i-1,j}^{(k+1)} + (\gamma_1 + R_1/2)\, y_{i+1,j}^{(k)} + (\gamma_2 - R_2/2)\, y_{i,j-1}^{(k+1)} + (\gamma_2 + R_2/2)\, y_{i,j+1}^{(k)} - h^2 \varphi_{ij} \Big], \quad i = \overline{1, N_1-1}, \quad j = \overline{1, N_2-1}, \tag{4.3}$$

где $y_{ij}^{(k)}$ - значения сеточной функции на K -ой итерации, $k=0,1,\ldots$, $h_1=h_2=h$, $y_{ij}^{(0)}$ - заданное начальное приближение. Для разности $z_{ij}^{(k)} = y_{ij}^{(k)} - u_{ij}$ уравнения (4.3) однородные $(\varphi_{ij}=0)$ и оптимальный параметр ω_0^r определяется из условий минимизации максимума модуля собственных значений матрицы перехода [35,47]. Получено, что

$$\omega_0^r = 2/\left(1+\sqrt{1-\eta_0^2}\right), \tag{4.4}$$

где
$$\eta_0 = (\gamma_1+\gamma_2)^{-1}\left[\sqrt{\gamma_1^2 - R_1^2/4}\cos\frac{\pi}{N_1} + \sqrt{\gamma_2^2 - R_2^2/4}\cos\frac{\pi}{N_2}\right] < 1,$$

При $\gamma_m = 1$ формула справедлива только при $|R_m| \le 2$, $m = 1,2$ (условие монотонности схемы в центральных разностях). Формула (4.4) обобщает в литературе известных формул Юнга $(a_1 = a_2 = 0)$, Расселя, Такемитсу, Стрикверды, Ботты и Еелдман. Численные эксперименты показали эффективность разностной схемы типа А.М.Ильина по сравнении с схемой в центральных разностях и в односторонних разностях. С ростом абсолютных значений сеточных чисел Рейнольдса R_1, R_2 значения ω_0^r приближаются к единице (метод Зейделя).

При решении начально-краевых задач математической физики и МГД важно оценивать устойчивость разностных схем для того, чтобы ошибки округления не вызывали рост погрешности с увеличением числа шагов по времени для нестационарных задач или числа итераций для стационарных задач. В случае численной устойчивости метода необходимо также исследовать точность приближенного решения, так как оказывается [5], что известные абсолютно устойчивые разностные схемы (неявные, Кранка-Николсона, Дюфорта-Франкеля, Писмена-Рэкфорда, Дугласа-Рэкфорда) являются недостаточными по точности для решения нестационарных краевых задач. Для решения задач гидродинамики или МГД необходимо сравнить спектры соответствующих линеаризованных дифференциальных и разностных задач, чтобы различать между собой численную неустойчивость метода сеток от гидродинамической или МГД неустойчивости течения жидкости и разрабатывать устойчивые алгоритмы расчетов течений.

Явные разностные уравнения с монотонной аппроксимацией (2.3С) для уравнения (I.26) имеют вид

$$(\omega^{n+1} - \omega^n)/\tau + u\,\omega^n_{\overset{\circ}{x}} + v\,\omega^n_{\overset{\circ}{y}} = Re^{-1}(\gamma_1 \omega^n_{x\bar{x}} + \gamma_2 \omega^n_{y\bar{y}}) + f, \quad (4.5)$$

где u, v - фиксированные значения скоростей на сетке, $\gamma_m = (R_m/2)\,\mathrm{cth}(R_m/2), m = 1,2;\ R_1 = |u| h_1 Re,\ R_2 = |v| h_2 Re$.

Из принципа максимума следует неравенства

$$\gamma_m \geq R_m/2, \quad m=1,2, \tag{4.6}$$

$$\tau \leq \frac{Re}{2(\gamma_1 h_1^{-2}+\gamma_2 h_2^{-2})}. \tag{4.7}$$

Для классической схемы в центральных разностях $(\gamma_1=\gamma_2=1)$ из (4.6) следует дополнительные ограничения на шаги пространственной сетки в виде неравенств $R_m \leq 2$, а для монотонной схемы неравенство (4.6) выполняется автоматически.

Ограничение (4.7) на шаг по времени тоже можно снимать, если использовать схему (2.30) с параметром $\tilde{\gamma}$, т.е. τ заменить на $\tilde{\gamma}$. В этом случае неравенство (4.7) выполняется автоматически для шага $\tau=\tilde{\gamma}$.

Двухслойная параметрическая схема имеет разностные уравнения

$$(\omega^{n+1}-\omega^n)/\tau = Re^{-1}[\sigma\Lambda\omega^{n+1}+(1-\sigma)\Lambda\omega^n]+f, \quad n\geq 0, \tag{4.8}$$

где $\Lambda = \Lambda_1+\Lambda_2, \quad 0\leq\sigma\leq 1,$

$$\Lambda_1\omega=\gamma_1\omega_{x\bar{x}}-u\,\omega_{\overset{\circ}{x}}, \quad \Lambda_2\omega=\gamma_2\omega_{y\bar{y}}-v\,\omega_{\overset{\circ}{y}}.$$

Из принципа максимума имеем неравенства (4.6) и неравенство

$$\tau \leq \frac{Re}{2(1-\sigma)(\gamma_1 h_1^{-2}+\gamma_2 h_2^{-2})}. \tag{4.9}$$

Следовательно при $\sigma=1$ неявная монотонная разностная схема абсолютно устойчива как по пространству так и по времени.

Разностные уравнения (4.8) при $\sigma\neq 0$ трудно реализовать из-за двумерности разностного оператора на $(n+1)$-ом слое. Для определения стационарного решения методом установления разностные уравнения для (1.26) можно реализовать итерациями Зейделя. Если схема монотонна по пространству, то метод итераций Зейделя абсолютно устойчив. Для реализации монотонной схемы можно также применять метод верхней релаксации с параметром $\omega^r \geqslant 1$ (без слагаемого $\partial\omega/\partial t$), причем оптимальный параметр релаксации ω_0^r выбирается из (4.4). Схема в центральных разностях реализуется только методом нижней релаксации $(\omega^r < 1)$.

Для совместного решения системы уравнений (I.18),(1.26) при $\alpha_0 = \pi/2$ по неявной схеме, имеем $(u = v = 0)$

$$\begin{cases} (\omega^{n+1} - \omega^n)/\tau = Re^{-1}\Lambda\omega^{n+1} + S\psi^n_{y\bar{y}} \\ \Lambda\psi^{n+1} + \omega^n = 0, \quad n > 0. \end{cases} \tag{4.10}$$

Будем искать решение разностных уравнений (4.10) в прямоугольнике со сторонами ℓ_1, ℓ_2, с однородными граничными условиями первого рода. Тогда из разложения по собственным функциям $W_K(x,y)$ оператора $(-\Lambda)$

$$\psi^n(x,y) = \sum_K a_K^n W_K(x,y), \quad (x,y) \in \omega_h, \tag{4.11}$$
$$K = (K_1, K_2),$$

следует, что $a_K^{n+1} = \rho_K a_K^n$, где модуль перехода

$$\rho_K = (\lambda_K \tau^{-1} - S\lambda^{(2)}_{K_2}) / (\lambda_K \tau^{-1} + Re^{-1}\lambda_K^2); \tag{4.12}$$
$$\lambda_K = \lambda^{(1)}_{K_1} + \lambda^{(2)}_{K_2}, \quad \lambda^{(m)}_{K_m} = 4h_m^{-2}\sin^2(\pi K_m h_m/(2\ell_m)),$$
$$W_K(x,y) = W^{(1)}_{K_1}(x)\, W^{(2)}_{K_2}(y), \quad W^{(m)}_{K_m}(x_m) = \sqrt{\frac{2}{\ell_m}}\sin\frac{\pi K_m x_m}{\ell_m},$$
$$K_m = \overline{1, N_m - 1}, \quad m = 1,2, \quad (x_1, x_2) = (x,y).$$

Таким образом разностная схема условно устойчивая при $S \neq 0$, например, при $h_1 = h_2 = h$; $|\rho_K| \leq 1$, если

$$\tau \leq 2S^{-1}.$$

Такое же неравенство сохраняется, если $u \neq 0$, $v \neq 0$ и схема монотонна.

Разностные уравнения (4.IC) можно усовершенствовать, если выражение $\psi_{y\bar{y}}$ выражать через второе уравнение (4.IC), т.е. в первом уравнении вместо слагаемого $S\psi^n_{y\bar{y}}$ записать $S(-\omega^{n+1} - \psi^n_{x\bar{x}})$. Тогда

$$\rho_K = (\lambda_K \tau^{-1} + S\lambda^{(1)}_{K_1}) / (\lambda_K \tau^{-1} + Re^{-1}\lambda^2_K + S\lambda_K) \leq 1 \qquad (4.13)$$

и разностная схема абсолютно устойчива.

Следовательно, для увеличения запаса устойчивости важно научиться преобразовать исходную систему уравнений.

Аналогично исследуется счетная устойчивость разностных итерационных схем типа Зейделя для решения уравнений (4.IC). Оказывается, что устойчивее реализовать совместные итерации для расчета обеих уравнений. Для расчета стационарных сдвиговых течений (система уравнений (I.24)) методом переменных направлений видно, что для монотонной аппроксимации устойчивость повышается [7].

Для расчета плоскопараллельных течений жидкости методом установления рассматривается система уравнений относительно переменных (u, v, p), разностной аналог которой решается методом итерации типа Зейделя. Итерационный метод становится абсолютно устойчивым для монотонной аппроксимации. Специальном случае для расчета уравнения теплопроводности в единичном квадрате (в (I.26) $u = v = 0$, $Re = 1$) показано [5], например, что схема Кранка-Николсона (в (4.8) $\sigma = 0,5$) абсолютно устойчивая, но асимптотически устойчива только при $\tau \leq \tau_0 \approx h/\pi$. Это следует из того, что матрица перехода имеет собственные значения

$$\rho_K = (2 - \tau\lambda_K)/(2 + \tau\lambda_K), \qquad (4.14)$$

где
$$K = (K_1, K_2), \quad \lambda_K = \lambda^{(1)}_{K_1} + \lambda^{(2)}_{K_2}.$$

Приближенное решение ω^n на сетке можно представить в виде разложения (4.II), где

$$a_K^n = a_K^0 (\rho_K)^n = a_K^0 \exp(-\tilde{\lambda}_K t_n),$$
$$\tilde{\lambda}_K = -\tau^{-1} \ln \rho_K, \quad t_n = n\tau.$$

Приближенное значение $\tilde{\lambda}_K$ аппроксимирует показатель роста экспоненты при фиксированном значении времени t_n для точного решения $\pi^2(K_1^2+K_2^2)$. Для исходной дифференциальной задачи этот показатель растет квадратично по K, старшие гармоники ряда Фурье быстро затухают и решение фактически определяется первой гармоникой

$a_{1,1}^0 \exp(-2\pi^2 t)\, W_{1,1}(x,y)$. Эти свойства сохраняются только при $\tau \leq \tau_0$. Сказывается, что для обеспечения точности разностной схемы при конечных $\tau \neq 0$ и $h = h_1 = h_2 \neq 0$, для всех гармоник с номерами $K_1 \leq N_1 - 1$, $K_2 \leq N_2 - 1$ требование асимптотической устойчивости даже недостаточно, т.к. ограничения шага τ должны быть еще более жесткими. Если в качестве начальной функции $\omega|_{t=0} = g$ выбрать одну гармонику, т.е. $g = a_K^0 W_K$ (K - фиксирован), то ряды обрываются и содержит только одно слагаемое вида $a_K^0 \exp(-\lambda_K^* t)\, W_K$, где $\lambda_K^* = \pi^2(K_1^2+K_2^2)$ для точного решения, $\lambda_K^* = \tilde{\lambda}_K$ для приближенного решения. Если $\tau \to 2/\lambda_K$, то $\tilde{\lambda}_K \to +\infty$, $\rho_K \to 0$ и $\omega^n \to 0$ для всех n, что совершенно не приемлемо, так как,например, точное решение при $\tau \to 2/\lambda_K$, $h \to 0$ $(n=1)$ стремится к $a_K^0 \exp(-2)\, W_K$.

При $K = 1$ и h достаточно малым следует, что $\tau < \pi^{-2}$, а с ростом K ограничение на τ растет. Поэтому важно, чтобы $\tilde{\lambda}_K > 0$ или

$$\tau < 2/\lambda_K < h^2/4. \tag{4.15}$$

Если $\tau > 2/\lambda_K$, то величина $\tilde{\lambda}_K$ становится комплексной: $\tilde{\lambda}_K = -\tau^{-1} \ln|\rho_K| - i^* \pi \tau^{-1}$.

Тогда $\exp(-\tilde{\lambda}_k t_n) = (-1)^n \exp(-Re^*(\tilde{\lambda}_k) t_n)$ и $Re^*(\tilde{\lambda}_k) \to 0$, когда $k \to \infty$ (Re^* - действительная часть). Следовательно, приближенное решение при $\tau \geqslant 2/\lambda_k$ сильно искажает точное решение. Аналогичные неравенства (4,15) найдены и для других неявных, абсолютно-устойчивых схем, для которых не выполняется неравенство

4.3. Расчеты конкретных задач гидродинамики и магнитной гидродинамики

На основе разработанных специальных численных методов проведены расчеты некоторых прикладных задач МГД о плоскопараллельных, осесимметрических, вращательных и пространственных течениях вязкой несжимаемой электропроводящей жидкости в магнитном поле и также об МГД устойчивости этих течений. Получены численные результаты, согласующиеся с результатами проведенных имеющимся физических экспериментов. Получено, что в сильном магнитном поле [14,20,22-25,38,39, 41]:1) можно пренебречь нелинейными членами в уравнении движения, 2) линии тока жидкости деформируется в зависимости от направления магнитного поля, 3) завихренность жидкости уменьшается, 4) возникает M -образные профили скорости в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, 5) обнаружена тенденция потока жидкости перейти к двумерной в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, 6) проводящий участок стенки канала, который расположен перпендикулярно полю, обтекается как твердое тело, 7) конвективное течение жидкости уменьшается, причем сильно подавляется та компонента вектора скорости, которая лежит в плоскости, перпендикулярной полю, 8) стабилизируется вращение жидкости между двумя бесконечными дисками и возникает единственное течение жидкости независимо от заданных начальных данных, 9)уменьшается длина переходного участка канала. Проведено также численное решение задач МГД, возникающих в процессе получения алюминия [26-30,36,42,43] .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе проведенных исследований в области краевых задач математической физики, гидродинамики и МГД вязкой несжимаемой электропроводящей жидкости можно сделать следующие общие выводы:

1. Построены специальные разностные схемы для расчета краевых задач в широком диапазоне изменения параметров. Разностные схемы монотонны, хорошо учитывают характер пограничных слоев и равномерно со вторым порядком точности аппроксимируют соответствующие краевые задачи.

2. Показана эффективность построенных специальных методов для решения краевых задач с большими параметрами при первых производных; определяется оптимальные коэффициенты метода релаксации и условия счетной устойчивости для монотонных разностных схем.

3. Разработанные методы совместно с экспериментальными исследованиями позволили создать математические модели течений и исследовать их физические особенности в зависимости от чисел Re, Re_m, Ha, Al, S и др. параметров задач.

4. Проведенные численные исследования позволили получить качественную картину рассматриваемых явлений и тем самым подойти более рационально к планированию экспериментальных работ по их исследованию. Способы управления течений вязкой несжимаемой электропроводящей жидкости в сильных магнитных и электрических полях нашли применение на заводах промышленности цветной и черной металлургии.

5. Под руководством автора исследования проведены
а) сотрудниками лаборатории теории уравнений в частных производных института математики и информатики и Латвийского университета [8,14,26,42];
б) кафедры дифференциальных уравнений и приближенных методов физико-математического факультета Латвийского университета и математического института [11,37];

в) лаборатории магнитной гидродинамики института физики Академии Наук Латвии [3,26,28,38,39,41,42];

г) кафедры прикладной математики математико-физического факультета Карлова университета г.Праги, Чехословакия [22,43];

д) кафедры информатики Ростокского университета г.Ростока, Германия [40].

6. Главные результаты исследований внедрены также в учебном процессе Латвийского Университета [46-48].

ЛИТЕРАТУРА

1. Калис Х.Э. Поведение решения нестационарной краевой задачи МГД при больших значениях параметра времени//Латв. матем.ежегодник.-Рига:Зинатне,1972, Вып.10, с.33-41.

2. Калис Х.Э. Стационарное решение краевой задачи магнитной гидродинамики как предел решения соответствующей нестационарной краевой задачи//Латв.матем.ежегодник.-Рига: Зинатне,1976, Вып.17, с.166-178.

3. Калис Х.Э., Цинобер А.Б. О деформации гидродинамических возмущений в однородном магнитном поле//Магнитная гидродинамика.-1972, №2, с.25-28.

4. Калис Х.Э. О временном деформации пространственных возмущений в потоке вязкой проводящей жидкости в сильном однородном магнитном поле//Магнитная гидродинамика.-1980, №4, с.28-34.

5. Калис Х.Э. Сравнение некоторых методов численного решения нестационарных краевых задач математической физики// Латв.матем.ежегодник.- Рига: Зинатне,1976, вып.20, с.78-94.

6. Калис Х.Э. О постановке граничных условий для решения системы уравнений Навье-Стокса в переменных функций тока и вихря скорости//Проблемы вязких течений, Труды 8-го Всесоюз. школы-семинара по численным методам механики вязкой жидкости Новосибирск: СО АН СССР, 1981, с.93-103.

7. Калис Х.Э. О методе сеток для решения одной краевой задачи МГД при больших значениях числа Гартмана//Численные методы механики сплошной среды.-1978, Т.9, №3, с.101-111.

8. Калис Х.Э., Луринс Г.Р. Определение оптимального релаксационного параметра для некоторых монотонных разностных схем//Латв.матем.ежегодник.- Рига: Зинатне,1981, вып.25, с.167-178.

9. Калис Х.Э. О монотонных разностных схемах для решения одной краевой задачи системы уравнений магнитной гидродинамики//Численные методы механики сплошной среды.- 1982, Т.13, №1, с.84-97.

10. Калис Х.Э. Специальные разностные схемы решения краевых задач для СДУ второго порядка//Прикладные задачи математической физики.- Рига: Латвийский университет,1983, с. 115-133.

11. Калис Х.Э., Пагодкина И.Э. Некоторые разностные схемы для решения задач конвекции вязкой несжимаемой жидкости//Прикладные задачи математической физики.- Рига: Латвийский университет,1983, с.134-141.

12. Калис Х.Э. Специальные разностные методы решения задач Коши для СДУ//Латв.матем.ежегодник.- Рига: Зинатне, 1984, вып.28, с.39-61.

13. Калис Х.Э. Построение монотонных разностных схем для решения задач об осесимметрично-вращательных конвективных течениях вязкой несжимаемой жидкости//Прикладные задачи математической физики.- Рига: Латвийский университет,1985, с.51-59.

14. Калис Х.Э., Луринс Г.Р. Применение специальной разностной схемы для расчета потоков вязкой несжимаемой электропроводящей жидкости//Проблемы динамики вязкой жидкости, Труды 10-го Всесоюз. школы-семинара.- Новосибирск: СО АН СССР,1985, с.172-175.

15. Калис Х.Э. О применении некоторых монотонных разностных схем для решения эллиптических уравнений второго порядка//Численные методы механики сплошной среды.- 1985, Т.16, №2, с.65-80.

16. Калис Х.Э. Построение точных разностных схем для одномерных модельных задач магнитной гидродинамики//Численные методы механики сплошной среды.- 1986,Т.17, №3, с.80-91.

17. Калис Х.Э. Точные разностные схемы решения краевых задач СДУ второго порядка с кусочно-постоянными коэффициентами//Латв.матем.ежегодник.- Рига: Зинатне,1986, вып.30, с.177-184.

18. Калис Х.Э. Специальные разностные схемы решения краевых задач математической физики//Электронное моделирование.- 1986, Т.8, №3, с.78-83.

19. Калис Х.Э. Некоторые разностные схемы для решения краевых задач гидродинамики и магнитной гидродинамики в широком диапазоне изменения параметров//Латв.матем.ежегодник.- Рига: Зинатне,1988, вып.31, с.160-166.

20. Калис Х.Э. Плоскопараллельное свободное сдвиговое течение проводящей жидкости с прямолинейными линиями тока в сильном однородном магнитном поле//Магнитная гидродинамика.- 1978, №2, с.65-72.

21. Калис Х.Э. Численное моделирование температурных и гидродинамических полей в системе кристалл-расплав-флюс// Прикладные задачи математической физики.- Рига: Латвийский университет,1987, с.53-62.

22. Форжстова М, Хаслингер Я., Калис Х.Э. Применение метода сеток и метода конечных элементов для расчета плоскопараллельного сдвигового течения электропроводящей жидкости в магнитном поле//Численные методы механики сплошной среды.- 1980, Т.11, №6, с.150-161.

23. Калис Х.Э. Некоторые разностные схемы для расчета потоков вязкой несжимаемой электропроводящей жидкости//6-ой Всесоюз.съезд по теор. и прикл.механике.-Аннотоация докладов, Ташкент,1986, с.322.

24. Калис Х.Э. Численная реализация течения Колмогорова в сильном поле//Магнитная гидродинамика. -1988, №4,с.69-74.

25. Калис Х.Э. Осесимметричное свободное сдвиговое МГД-течение жидкости между двумя коаксиальными цилиндрами//Латв. матем.ежегодник. - Рига: Зинатне,1988, вып.32, с.127-131.

26. Бояревич В.Б., Калис Х.Э., Миллере Р.П., Пагодкина И.Э. Математическая модель для расчета параметров алюминиевого электролизера//Цветные металлы. - 1988, №7, с.63-66.

27. Калис Х,Э. Об одной линейной краевой задаче гидродинамики с разрывным решением возникающей в процессе электролиза//Латв.матем.ежегодник.- Рига: Зинатне,1989,вып.33, с.160-170.

28. Бояревич В.В., Калис Х.Э. Турбулентное движение двухслойной жидкости под действием объемных сил//Всесоюз. конф. "Проблемы стратифицированных течений.-Тез.докл.,Ч.11, Юрмала,1988, с.25-28.

29. Калис Х.Э. О постановке и разрешимости одной нелинейной краевой задачи с разрывным решением, возникающей при описании процесса электролиза//Моделирование в механике - Новосибирск: СО АН СССР,1990, Т.4(21), с.91-101.

30. Калис Х.Э. Математическое моделирование температурных полей в алюминиевых электролизерах//Научные труды: Прикладные задачи математической физики/ математическое моделирование.- Рига: Латвийский университет, 1990, Т.554, с.158-171.

31. Калис Х.Э. Абсолютно-устойчивая явная уточненная разностная схема для решения начально-краевой задачи уравнения теплопроводности//Научные труды: математика, дифференциальные уравнения. - Рига: Латвийский университет,1990,Т.553, с.131-141.

32. Калис Х.Э. Численное решение уравнения теплопроводности в многослойной среде методом оптимальной релаксации//Научные труды: Прикладные задачи математической физики, математическое моделирование. - Рига: Латвийский университет, 1991, т.564, с.105-116.

33. Калис Х.Э. О специальной разностной аппроксимации несамосопряженного дифференциального уравнения теплопроводности в криволинейных ортогональных координатах//Научные труды: математика, дифференциальные уравнения. - Рига: Латвийский университет,1992, Т.570, с.85-93.

34. Авдонин Н.А., Калис Х.Э. Численный анализ выбрационных течений в неизотермической жидкости//Научные труды: Математическое моделирование, прикладные задачи математической физики.-Рига: Латвийский университет,1992, Т.575, с.11-26.

35. Калис Х.Э. Определение оптимальных коэффициентов метода локальной релаксации для решения уравнения теплопроводности в двухслойной среде//Научные труды: математическое моделирование, прикладные задачи математической физики.- Рига:Латвийский университет,1992, Т.575, с.89-100.

36. Калис Х.Э. О численном моделировании алюминиевых электролизеров//Моделирование в механике. - Новосибирск: СО АН СССР, 1992, Т.6(24), №1, с.52-57.

37. Рейнфельд А.А., Калис Х.Э., Крикис Ю.Ю. Качественное исследование некоторой модели развития мира//Научные труды: математическое моделирование, прикладные задачи математической физики. - Рига: Латвийский университет,1992, Т.575, с.101-108. (на англ.).

38. Османис А.Д., Микельсон А.Э., Калис Х.Э. и др. Устройство МАХИД для варки свинецсодержащего стекла//Авторское свидетельство, № 1496203, 1989 г.

39. Kalis H., Kolesnikov J.B., Kljukin A.A. The effect of strong magnetic field on the schift flow of viscous uncompressible electroconducting fluid//VI International conference on numerical methods in fluid dynamics.- Abstr., Tbilisi, 1978, pp.78.

40. Kalis H., Holdenhauer M., Riedewald G. Numerische Experimente mit monotonen Differenzen-Schemas//Mathematisch-Naturwissenschaftliche Reihe - Rostok: 1982, 18 Jahrgang, Heft 1, s.77-82.

41. Kalis H., Kljukin A.A., Kolesnikov J.B. MHD instabilities and turbulence in liquid metal schear flows//Proc. of IUTAM Simpozium on liquid metal magnetohydrodynamics.- Riga, 1988, pp 449-454.

42. Bojarevics V., Chaikovsky A.I., Gorbachev E.V., Kalis H., Millere R., Sherbinin E.V. Physical and mathematical modeling of MHD-processes in aluminium reduction cell //Proc.of IUTAM Simpozium on liquid metal magnetohydrodynamics.-1989, pp.205-211.

43. Kalis H., Feistauer M., Rokyta M. Mathematical modelling of an electrolysis process//Commentationes Mathematical Universitates Carolinae, 1989, vol.30, No.3, pp.465-477.

44. H.Kalis. Special finite-difference approximations of flow equations in terms of stream function, vorticity and velocity components for viscous incompressible liquid in curvilinear orthogonal coordinates//Commentationes Mathematical Universitates Carolinae, 1993, vol.34, No.2,10 p. to appear.

45. H.Kalis. Special finite-difference approximations of magnetohydrodynamics equations in curvilinear orthogonal coordinates of two dimensional viscous incompressible flow //ZAMM, 1993, 12 p., to appear.

46. H.Kalis. Speciālas diferenču shēmas matemātiskās fizikas problēmu risināšanā//Latvijas universitāte, mācību līdzeklis, 1991, 104 lpp.

47. H.Kalis. Diferenciālvienādojumu tuvinātās risināšanas metodes//Rīga: Zvaigzne,1985, 416 lpp.

48. H.Kalis. Nepārtraukto un diskrēto matemātiskās fikas problēmu analītiskie atrisinājumi//Latvijas universitāte, metodiskā izstrāde, 1992, 38 lpp.