Dr.ing.A.VĪTOLS
Latvijas Ūniversitātes profesors.

STATIKA PLAKNĒ.

1934.
L.Ū.Studentu padomes grāmatnīcas izdevums.

Ievads.

Statika ir mēchanikas daļa, kuŗa pēta spēku līdzsvara noteikumus. Ar šo jautājumu tiešā sakarā atrodas spēku ekvivalences jautājums. Divas spēku sistemas ir ekvivalentas (mēchaniski līdzvērtīgas) jeb viena sistema ir ekvivalenta otrai, ja abas rada vienu un to pašu mēchanisku efektu, piemēram, ja abas rada ķermeņa līdzsvara stāvokli.

Kad ir uzieta spēku sistema ekvivalenta dotai, tad pēdējo var iedomāties atmestu un viņas vietā stājušos pirmo.

Nosauksim operāciju, ar kuŗu savieno spēkus, novedot doto spēku sistemu pie viņai ekvivalentas, par spēku savienošanu. Šī savienošana var tikt izvesta pa daļai jeb līdz iespējamai robežai. Pēdējā gadījumā operācijas rezultāts ir visvienkāršākā iespējamā ekvivalenta dotai spēku sistēma , ar kuŗas uziešanu pirmā kārtā nodarbojas statika.

Divas spēku sistemas, kuŗas reducējas pie vienādām ekvivalentām sistemām, ir savā starpā ekvivalentas. Var iedomāties un pielietot arī pretēju operāciju: doto visvienkāršāko spēku sistemu jeb arī vairāk vienkāršāko pārvest vairāk komplicētākā un sarežģītākā. Šī operācija nedod viennozīmīgus rezultātus pretēji pirmai, kamēr nav doti kādi papildnoteikumi, kā to redzēsim tālāk. Nosauksim operāciju, ar kuŗu sadala spēkus, izveidojot spēku sistemu par komplicētāku, par spēku sadalīšanu.

Uz augšā minētām statikas problemām mēs vienmēr centīsimies pēc iespējas gūt atbildes divās valodās - vektoru un algebras, pie kam rādīsim, kā spēku sistemas elementu saistības algebras valodā ir cēlušās no šo saistību aprakstīšanas ar vektoru palīdzību un šo saistību ietērpšanas geometrisku nolīdzinājumu veidā,kuŗiem atbilst zinams skaits algebrāisku nolīdzinājumu, gūtu galvenā kārtā caur vektoru projektēšanu uz asīm. Kur tāda parallēle netiks skaidri izpausta,tur ir ieteicams lasītājam pašam vienmēr noskaidrot, kādi geometriski nolīdzinājumi atbilst dotai algebrāisku nolīdzinājumu sistēmai, ar kuŗām viņš operē, lai atrisinātu noteiktu statikas problemu.

S t a t i k a   p l a k n ē .

I. nodaļa:

Spēki darbojas uz brīvu, nesaistītu ķermeni.

§ 1. Spēku, kuŗu darbības linijas krustojas vienā punktā, savienošana un sadalīšana.

1. Spēku savienošana.

A. Grafostatiskais paņēmiens.

Kad spēku darbības linijas krustojas plaknes vienā punktā, tad, ņemot vērā, ka spēkus viņu darbības liniju virzienos var neaprobežoti pārnest, mēs pārnesam visus spēkus tā, lai viņu darbības liniju krustojumu punkts paliktu par spēku iedarbes punktu. Šis tad ir gadijums, kad spēki iedarbojas uz vienu punktu, kuŗa atrisinājums ir dots "Ievads mēchanikā" 55.lap.p. Minētā gadijumā spēku sistema reducējās pie kopspēka jeb rezultantes $\bar{R}$, kuŗa ir saistīta ar dotiem spēkiem caur ģeometrisku (vektoru) nolīdzinājumu

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{P}_i$$

pie kam $\bar{R}$ pilno vērtību uzejam ar tā saucamā spēka poligona palīdzību. Kāda uzdevuma atrisinājumu, izpildītu ar zīmējuma palīdzību, vispār sauc par grafisku, bet statikā – par grafostatisku.

B. Analitiskais paņēmiens.

Lai gūtu saistības starp kopspēka R un doto spēku elementiem (gaŗumu, virzienu) algebras valodā, ir jānoprojecē R uz divām krustojošām projekcijas asīm (X,Y), kuŗas plaknē pilnīgi noteic R kā vektoru (skat."Ievads mēchanikā" 46.l.p.). Šīs asis savā starpā var veidot kaut kuŗu leņķi, bet algebrāiskas operacijas ļoti vienkāršojas, ja asis krusto viena otru zem leņķa $\alpha = \frac{\pi}{2}$, t.i. ja asu sistema ir ortogonala.

Vienu no asīm parasti virza kāda spēka virzienā. Kad asis ir izvēlētas, tad projecējot uz viņām (sk.Ievads II, § 1,B, 31.l.p.) gūstam:

$$R_x = X = R.\cos\varphi = \sum_{i=1}^{i=n} P_i.\cos(\bar{X},\bar{P}_i) = \sum_{i=1}^{i=n} P_i.\cos\alpha_i = \sum_{i=1}^{i=n} X_i \quad \ldots(1)$$

kur φ ir nezinamais R virziena leņķis starp $\bar{X}$ un $\bar{R}$ pozitiviem virzieniem (sk.Ievads II, § 1,B, 30.l.p.par leņķu skaitīšanas paņēmienu), bet α_i ir leņķis, kuŗu $\bar{P}_i$ pozitivais virziens sastāda ar X ass pozitivo virzienu. Tāpat gūstam

$$R_y = Y = R.\sin\varphi = \sum_{i=1}^{i=n} P_i\sin(\bar{Y},\bar{P}_i) = \sum_{i=1}^{i=n} P_i\sin\alpha_i = \sum_{i=1}^{i=n} Y_i \quad \ldots..(2)$$

Pacelsim R_x un R_y otrā potencē un tad gūtos nolīdzinājumus saskaitīsim:

$$R_x^2 = X^2 = R^2.\cos^2\varphi = \left(\sum_{i=1}^{i=n} P_i.\cos\alpha_i \right)^2$$

$$R_y^2 = Y^2 = R^2.\sin^2\varphi = \left(\sum_{i=1}^{i=n} P_i.\sin\alpha_i \right)^2$$

$$R_x^2 + R_y^2 = X^2 + Y^2 = R^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=R^2=\left(\sum_{i=1}^{i=n} P_i\cos\alpha_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{i=n} P_i\sin\alpha_i\right)^2$$

Še ir saskatāmas ortogonalas projekciju asu sistemas priekšrocības, jo viņā

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$$

kādēļ caur nupat pievesto operāciju izdodās gūt vienu nolīdzinājumu, bez nezinamā φ, t.i. izdodās gūt vienu nolīdzinājumu ar vienu nezināmo, vektora $\bar{R}$ moduli R, kuŗš ir absoluts lielums. Atrisinājuma gaita nu ir:

$$R = + \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{i=n} P_i\cos\alpha_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{i=n} P_i\sin\alpha_i \right)^2} \quad ......(3)$$

Zīme + ņemta tādēļ, ka R ir absoluts lielums.

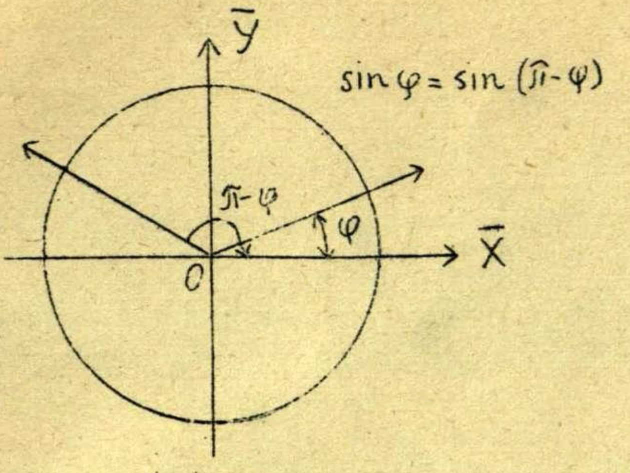
Mūsu gadijumā (kad spēku darbības linijas krustojas vienā punktā) no visiem 4 vektora elementiem (garums, virziens, apakšvirziens un stāvotne, noteikta caur vienu punktu, caur kuŗu spēka vektora darbības linija iet) ir jau iepriekš zināma $\bar{R}$ darbības linijas stāvotne, jo $\bar{R}$ darbības linija iet caur to pašu punktu, kuŗā doto spēku darbības linijas krustojās; paliek uziet pārējos 3 elementus. No šiem elementiem jau esam uzgājuši $\bar{R}$ garumu (moduli) caur formulu (3); paliek noteikt $\bar{R}$ virzienu un apakšvirzienu.

$\bar{R}$ darbības linijas virzienu noteic nolīdzinājumu sistēma

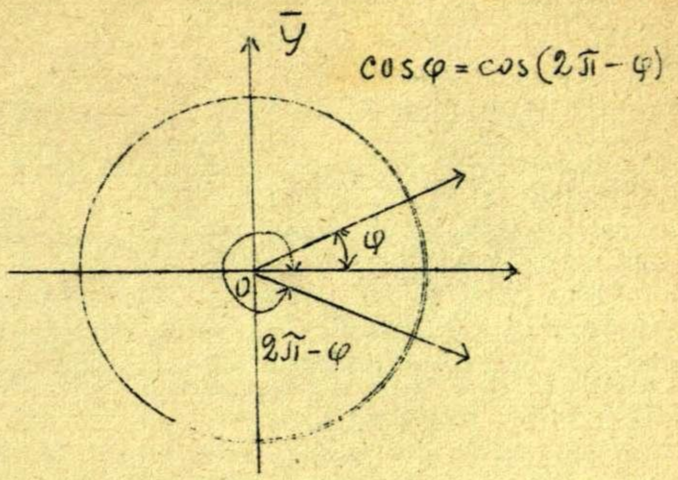
$$\cos\varphi = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} P_i\cos\alpha_i}{R} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} P_i.\cos\alpha_i}{+\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{i=n} P_i.\cos\alpha_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{i=n} P_i.\sin\alpha_i\right)^2}}$$

$$\sin\varphi = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} P_i\sin\alpha_i}{R} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} P_i.\sin\alpha_i}{+\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{i=n} P_i.\cos\alpha_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{i=n} P_i.\sin\alpha_i\right)^2}}$$

Tā kā vienam $\cos\varphi$ leņķa 2π robežās atbilst 2 leņķi φ un $(2\pi - \varphi)$, kuŗu kopsumma ir $\varphi + (2\pi - \varphi) = 2\pi$, un tāpat vienam $\sin\varphi$ atbilst leņķi φ un $\pi - \varphi$, kuŗu kopsumma ir $\varphi + (\pi - \varphi) = \pi$ (skat.zīm.1. un 2.), tad rodas jautājums, kā gūt viennozīmīgu (eindeutig) $\bar{R}$ virziena, līdz ar apakšvirziena, noteikšanu. Piezīmēsim, ka ja būs noteikts leņķis, tad līdz ar to būs izšķirts arī jautājums par virzienu līdz ar viņa apakšvirzienu, ņemot vērā leņķu skaitīšanas likumu (sk.Ievads,II,§ 1,B, 30 l.p.).



Zīm.1.



Zīm.2.

Atzīmēsim tūlīt vēl vienu svarīgu īpašību: ţiem leņķiem,kuŗiem cos paliek negrozīgs, sin maina zīmi un otrādi. Šī īpašība taisni atļaus mums orientēties atrisinājumā par $\bar{R}$ virzienu. Pārejam uz atrisinājumu.

$$\cos\varphi = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} P_i.\cos\alpha_i}{R}$$

dod divus leņķus. Lai izšķirtu jautājumu, kuŗu leņķi izvēlēties,atliek konstatēt tikai $\sin\varphi = \frac{\sum_{i=n}^{i=n} P_i.\sin\alpha_i}{R}$ zīmi, kuŗa ir skaitītāja zīme,jo R vienmēr ir absoluts lielums. Par piemēru pieņemsim, ka

$$\cos\varphi = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} P_i.\cos\alpha_i}{R}$$

ir negatīvs; tad uzietais leņķis var atrasties otrā jeb trešā kvadrantā. Pieņemsim, ka tanī pašā laikā sin φ ir pozitivs. Šis apstāklis tūlīt izslēdz nenoteiktību, norādīdams,ka no diviem uzietiem leņķiem atrisinājumu sniedz otra kvadranta leņķis,kuŗa sin ir pozitivs.

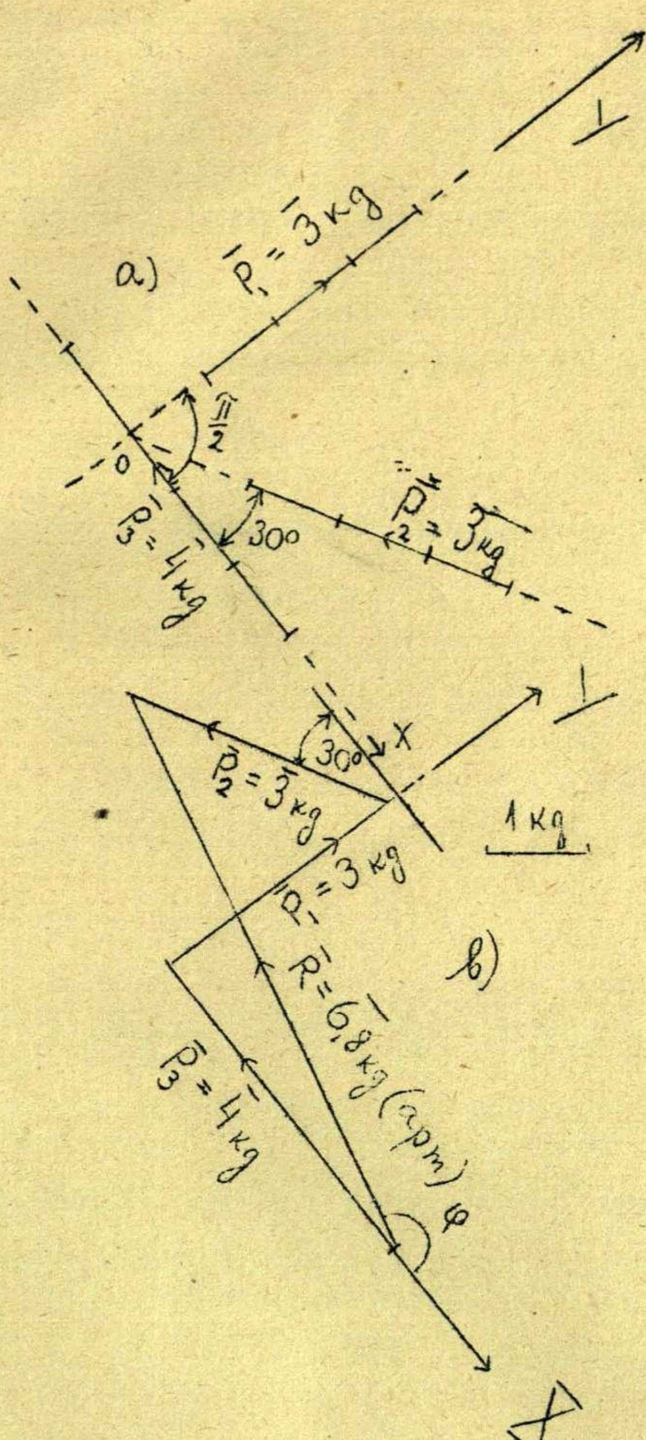
Ir saprotams, ka leņķu skaitlisku vērtību uziešanu varēja arī izdarīt izejot no sin φ izteiksmes, paturot cos φ izteiksmi jautājuma izšķiršanai, kuŗš no diviem uzietiem leņķiem sniedz uzdevuma galīgu atrisinājumu.

<u>Piemērs.</u> Dota spēku sistema, sastāvoša no 3 spēkiem (zīm.3). Uziet rezultanti.

Papriekšu uzdevumu atrisinājam grafostatiski, izejot no geometriskā (vektoru valodā sastādītā) nolīdzinājuma

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{P}_i$$

kas izteic, ka zināmā kārtā uzbūvēta no vektoriem $\bar{P}_1$,$\bar{P}_2$ un $\bar{P}_3$ poligona noslēdzošā mala ar apakšvirzienu, pretējo doto vektoru apakšvirzieniem,ir meklējamā rezultante (skat.zīm. 3-b), kuŗa, mērīta ar pie-



Zīm.3.
Grafostatiskais atrisinājums ar spēku poligona palīdzību.

ņemto par 1 kg garuma vienību, dod $\bar{R}$ skaitlisko vērtību. Spēku poligons sniedz visus $\bar{R}$ elementus, izņemot $\bar{R}$ darbības linijas stāvotni, kuŗa vienkārši ir noteikta caur doto spēku darbības liniju krustojuma punktu, ceur kuŗu iet arī $\bar{R}$ darbības linija, kuŗas katru punktu var skaitīt par $\bar{R}$ iedarbes punktu, saskaņā ar aksiomu, ka spēku var pārnest viņa darbības virzienā pēc patikas.

Analitisks (algebraisks) atrisinājums: saskaņā ar augstāk izvestām formulām (1) un (2) ir:

$$R_x = R.\cos\varphi = X = \sum_{i=1}^{i=n} P_i.\cos\alpha_i = P_3\cos\pi + P_2\cos(\pi + 30^\circ) + P_1\cos\frac{\pi}{2} =$$

$$= -4 - \frac{3\sqrt{3}}{2} = -4 - 1{,}5\sqrt{3}$$

$$R_y = R.\sin\varphi = Y = \sum_{i=1}^{i=n} P_i.\sin\alpha_i = P_1.\sin\frac{\pi}{2} + P_2\sin(\pi + 30^\circ) + P_3\sin\pi =$$

$$= 3 - 3\,\frac{1}{2} = 1{,}5$$

$$R = + \sqrt{(4 + 1{,}5\sqrt{3})^2 + (1{,}5)^2} = \sqrt{25 + 12\sqrt{3}} = \sqrt{25 + 20{,}78} =$$

$$= \sqrt{45{,}78} = 6{,}77\ldots \backsim 6{,}8$$

(salīdzināt ar garumu, gūtu grafostatiskā ceļā zīm.3-b).

$\bar{R}$ virziens:

$$\sin\varphi = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} P_i\sin\alpha_i}{R} = \frac{1{,}5}{6{,}8}$$, kam atbilst 2 leņķi, mazākais I kvadrantā un lielākais II kvadrantā.

Tā kā $\cos\varphi = \dfrac{\sum_{i=1}^{i=n} P_i\cos\alpha_i}{R} = \dfrac{-4 - 1{,}5\sqrt{3}}{R} < 0$, tad meklējamais virziena leņķis atrodas II kvadrantā (salīdz. grafostatisko atrisinājumu,kas pierāda to pašu).

R moduli var uziet vēl citā ceļā, proti paceļot

$\bar{R} = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{P}_i$ otrā potencē; tad gūstam:

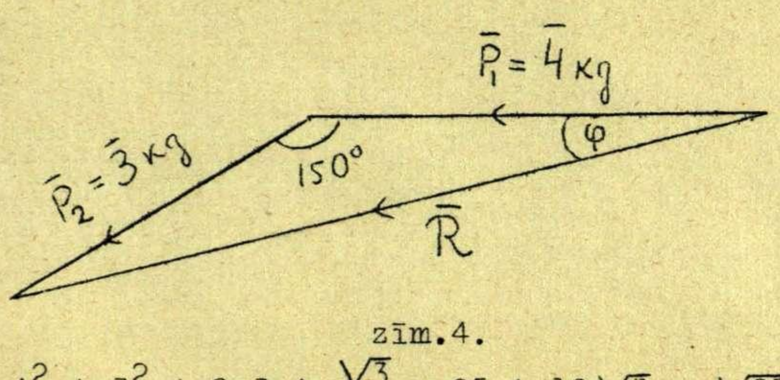
$$R^2 = (\sum_{i=1}^{i=n} \bar{P}_i)^2 = \bar{P}_1^2 + \bar{P}_2^2 + \bar{P}_3^2 + 2P_1P_2\cos(\bar{P}_1,\bar{P}_2) + 2P_1P_3\cos(\bar{P}_1,\bar{P}_3) +$$

$$+ 2P_2P_3\cos(\bar{P}_2,\bar{P}_3) = 3^2 + 3^2 + 4^2 + 2.3.3.\cos(\frac{\pi}{2} + 30^\circ) + 2.3.4.\cos\frac{\pi}{2} +$$

$$+ 2.3.4.\cos(2\pi - 30^\circ) = 3^2 + 3^2 + 4^2 - 9 + \frac{24\sqrt{3}}{2} = 25 + 12\sqrt{3}$$

no kurienes redzams, ka rezultāts sakrīt ar jau iepriekš uzieto.

Ja spēku sistema sastāvētu no tikai 2 spēkiem, piemēram no $\bar{P}_1$ un $\bar{P}_2$, tad varētu piemērot arī tīri trigonometrisku atrisinājumu (sk.zīm.4).



zīm.4.

Saskaņā ar pazīstamo trigonometrijas formulu ir:

$$R^2 = P_1^2 + P_2^2 - 2P_1P_2\cos150^\circ =$$

$$= P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2\cos(\bar{P}_1,\bar{P}_2) =$$

$$= P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2\cos30^\circ =$$

$$= 4^2 + 3^2 + 2.3.4.\frac{\sqrt{3}}{2} = 25 + 12\sqrt{3} = \sqrt{25 + 20{,}78} = \sqrt{45{,}78} = 6{,}77 \backsim 6{,}8$$

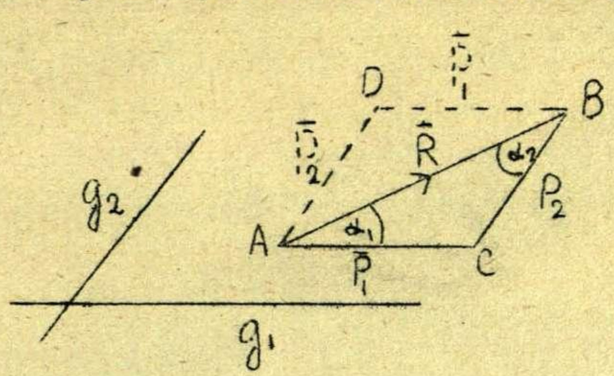
Tālāk: $\frac{R}{P_2} = \frac{\sin 150^\circ}{\sin\varphi}$, no kurienes $\sin\varphi = \frac{P_2 . \sin 150^\circ}{R} = \frac{3 . \sin 30^\circ}{6{,}8} =$

$= \frac{3\frac{1}{2}}{6{,}8} = \frac{1{,}5}{6{,}8}$, kas savukārt dod iespēju uziet φ un tad uzdevums ir atrisināts pilnīgi.

2. Dotā spēka sadalīšana divās komponentēs.

A. Grafostatiskais paņēmiens.

Pieņemsim, ka doto spēku $\bar{R}$ ir jāsadala divās komponentēs $\bar{P}_1$ un $\bar{P}_2$. Mēs zinam, ka visiem 3 spēkiem $\bar{R}$, $\bar{P}_1$ un $\bar{P}_2$ ir jāsastāda spēku poligons, šinī gadijumā spēku trīsstūris. Bet uz dotā $\bar{R}$ garuma, kā trīsstūra vienas malas, var uzbūvēt nenoteiktu daudzumu trīsstūru , kuŗu viena mala vienmēr būs R. Tā tad uzdevums paliek nenoteikts, kamēr nav doti kādi papildu noteikumi, kuŗi izslēgtu nenoteiktību. Tāds papildu noteikums var būt, piemēram, meklējamo komponentu virzieni, kuŗi ir iepriekš doti. Pieņemsim, ka šie virzieni ir g_1 un g_2 (skat.zīm.5).



zīm.5.

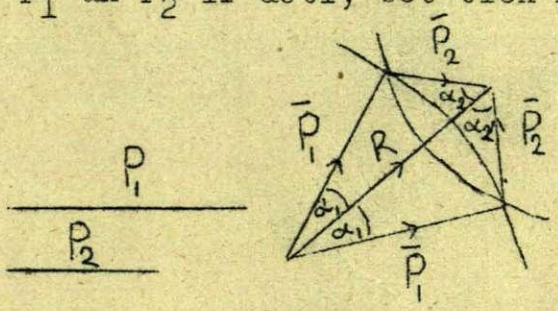
Velkam caur punktu A liniju parallēlu g_1 un caur B - parallēlu g_2. Šīs linijas krustojās punktā C. Atliek nogriežņiem AC un BC piešķirt attiecīgus apakšvirzienus, lai būtu

$$\bar{R} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2$$

Uz zīmējuma Nr.5. ir parādīta vajadzīgo bultīšu piešķiršana. Tāpat varēja vilkt arī caur punktu B liniju parallēlu g_1 un caur punktu A parallēlu g_2, caur ko rastos trīsstūris ABD ar attiecīgu bultīšu novietošanu. Tālāk ir jāpārnes $\bar{P}_2$ resp. $\bar{P}_2$ parallēli sev līdz punktam A un uzdevums ir viennozīmīgi atrisināts. Kā redzams, uzdevums ir trīsstūra konstrukcijas gadijums, kad ir doti mala R un divi viņai piegulošī leņķi.

Varēja arī uzstādīt tādu noteikumu, ka meklējamo $\bar{R}$ komponentu garumi P_1 un P_2 ir doti, bet tiek meklēti viņu virzieni. Kā redzams, jautājums reducējas pie trīsstūra uzbūves, kuŗam ir doti visu triju malu garumi R, P_1 un P_2. Šinī gadījumā atrisinājumu ir divi.

Varam arī dot viena spēka garumu P_1 un otra, meklējamā jeb dota spēka P_1 virzienu, tad jautājums reducējas pie trīsstūra uzbūves, kad ir dotas 2 viņa malas un viens no leņķiem.



zīm.6.

B. Analitiskais paņēmiens.

Sastādam 2 projekciju nolīdzinājumus:

1) $R = P_1\cos\alpha_1 + P_2\cos\alpha_2$

2) $0 = P_1\sin\alpha_1 - P_2\sin\alpha_2$

Ja tikai R ir dots, tad paliek nezināmi P_1, P_2 un α_1 un α_2. Tā kā gūto nolīdzinājumu skaits ir 2, tad nezināmo skaits nedrīkst pārsniegt 2, lai uzdevums būtu noteikts, kādēļ jātiek dotiem 2 papildu noteikumiem šādā jeb tādā veidā.

Pirmā gadijumā šie papildu noteikumi bija leņķi α_1 un α_2 (virzieni g_1 un g_2), kādēļ sistema reducējas pie lineāro nolīdzinājumu sistemas, kuŗas tips ir:

$$ax + by = c$$

$$a_1x + b_1y = 0$$

Atrisinājums iespējams tikai viens.

Otrā gadijumā bez R bija doti P_1 un P_2 un vajadzēja uziet α_1 un α_2, ko var panākt sekojoši:

$$(R - P_1\cos\alpha_1)^2 = R^2 - 2RP_1\cos\alpha_1 + P_1^2.\cos^2\alpha_1 = P_2^2.\cos^2\alpha_2$$

$$P_1^2.\sin^2\alpha_1 = P_2^2.\sin^2\alpha_2$$

Saskaitot gūstam: $R^2 - 2RP_1\cos\alpha_1 + P_1^2 = P_2^2$.

$$\cos\alpha_1 = \frac{R^2 + P_1^2 - P_2^2}{2RP_1} \text{ un tāpat arī } \cos\alpha_2 = \frac{R - P_1\cos\alpha_1}{P_2} = \frac{R}{P_2} -$$

$$- \frac{R^2 + P_1^2 - P_2^2}{2RP_2} = \frac{2R^2 - R^2 - P_1^2 + P_2^2}{2RP_2} = \frac{R^2 + P_2^2 - P_1^2}{2RP_2}$$

Ir redzams, ka atrisinājumu ir 2, jo vienam $\cos\alpha_1$ atbilst divi leņķi α_1' un α_1'', kuŗiem piemīt īpašība:

$$\alpha_1' + \alpha_1'' = 2\pi$$

Trešā gadijumā bez R bija doti P_1, α_1 resp. P_1, α_2 un vajadzēja uziet P_2, α_2 resp. P_2, α_1.

Ja ir doti R, P_1 un α_1 un tiek meklēti P_2 un α_2, tad

$$P_2^2 = R^2 - 2RP_1\cos\alpha_1 + P_1^2$$

$$P_2 = +\sqrt{R^2 - 2RP_1\cos\alpha_1 + P_1^2}$$

$$\cos\alpha_2 = \frac{R - P_1\cos\alpha_1}{P_2} = \frac{R - P_1\cos\alpha_1}{+\sqrt{R^2 - 2RP_1\cos\alpha_1 + P_1^2}}$$

Beidzamais nolīdzinājums sniedz divas α_2 nozīmes.

Ja ir doti R, P_1 un α_2 un tiek meklēti P_2 un α_1, tad

$$(R - P_2\cos\alpha_2)^2 = R^2 - 2RP_2\cos\alpha_2 + P_2^2\cos^2\alpha_2 = P_1^2\cos^2\alpha_1$$

$$P_2^2\sin^2\alpha_2 = P_1^2\sin^2\alpha_1$$

Saskaitot gūstam:

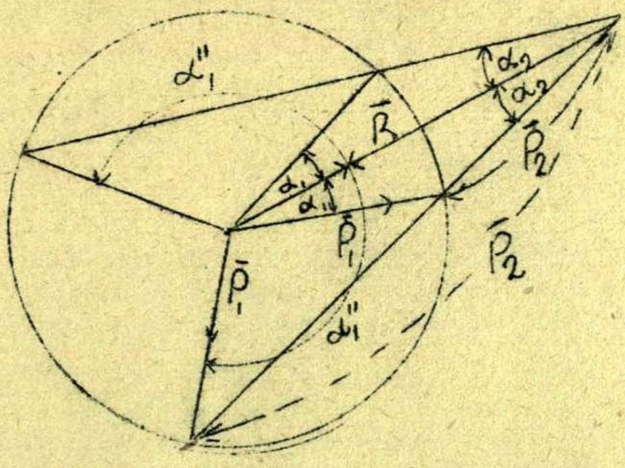
$$R^2 - 2RP_2\cos\alpha_2 + P_2^2 = P_1^2, \quad P_2^2 - 2R\cos\alpha_2 . P_2 + R^2 - P_1^2 = 0$$

$$P_2 = \frac{2R\cos\alpha_2 \pm \sqrt{4R^2\cos^2\alpha_2 + 4P_1^2 - 4R^2}}{2} = R\cos\alpha_2 \pm \sqrt{-R^2\sin^2\alpha_2 + P_1^2}$$

no kurienes gūstam divas P_2 nozīmes.

$$\sin\alpha_1 = \frac{P_2\sin\alpha_2}{P_1}$$

(4 nozīmes, jo P_2 ir divnozīmīgs). Skat. zīm. Nr.7.



zīm.7.

3. Spēku, kuŗu darbības linijas krustojas vienā punktā, līdzsvars.

A. Grafostatiskas līdzsvara pazīmes.

Spēku līdzsvara apstākļus noteic geometriskais nolīdzinājums

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{P}_i = 0$$

(skat. Ievads 56 lap.p.), kam atbilst slēgts doto spēku poligons.

B. Analitiskās līdzsvara pazīmes.

Tā kā līdzsvars prasa, lai spēka poligons pilnīgi noslēgtos, tad $\bar{R}$ garums

$$R = 0 = +\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{i=n} P_1 . \cos\alpha_1\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{i=n} P_1 . \sin\alpha_1\right)^2} = 0.$$

Tā kā

$$(\sum_{i=1}^{i=n} P_1 . \cos\alpha_1)^2 \text{ un } (\sum_{i=1}^{i=n} P_1 . \sin\alpha_1)^2$$

ir pozitīvi skaitļi, tad $R = 0$, ja atsevišķi

$$\sum_{i=1}^{i=n} P_1 . \cos\alpha_1 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} P_1 . \sin\alpha_1 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Tā tad grafostatiskai (geometriskai) spēku līdzsvara pazīmei

$\bar{R} = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{P}_1 = 0$, atbilst 2 analitiski noteikumi un proti, līdzsvarojošos spēku projekciju algebrāiska summa uz katru no 2 savstarpīgi ortogonālām asīm ir 0, ko izteic nolīdzinājumi (1) un (2).

§ 2. Spēku, kas brīvi izklaidēti vienā plaknē, savienošana un sadalīšana.

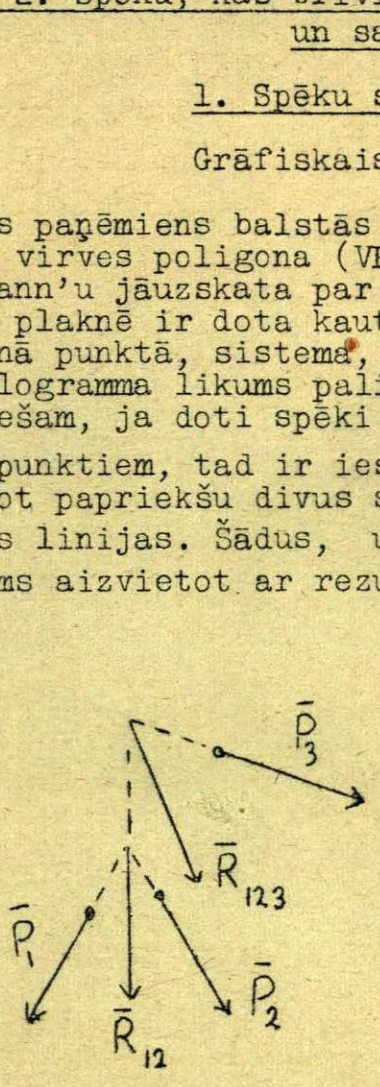
1. Spēku savienošana.

Grāfiskais paņēmiens.

Šis paņēmiens balstās galvenā kārtā uz tā saucamo spēka poligona (SP) un virves poligona (VP) īpašībām. Ciriches ūniversitātes profesoru Culmann'u jāuzskata par celmlauzi šīs mēchanikas daļas radīšanā.

Ja plaknē ir dota kaut kuŗa spēku, kuŗu darbības linijas nekrustojas vienā punktā, sistema, tad var viegli pierādīt, ka arī šeit spēku parallēlogramma likums paliek spēkā.

Tiešam, ja doti spēki $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$ ... , kuŗi darbojās uz ķermeņa dažādiem punktiem, tad ir iespējams, nesagrozot spēku darbības rezultātu, pārvietot papriekšu divus spēkus $\bar{P}_1$ un $\bar{P}_2$ punktā, kuŗā krustojas viņu darbības linijas. Šādus, uz vienu punktu darbojošos spēkus $\bar{P}_1$ un $\bar{P}_2$ ir iespējams aizvietot ar rezultanti $\bar{R}_{12}$, kuŗa ir vienāda ar abu doto spēku geometrisko summu: $\bar{R}_{12} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2$. Tālāk ir iespējams turpināt $\bar{R}_{12}$ darbības liniju līdz krustpunktam ar $\bar{P}_3$ darbības liniju un pārnest šo abu spēku pielikšanas punktus minēto darbības liniju krustpunktā. Šos, uz vienu punktu darbojošos spēkus iespējams savienot vienā rezultantē $\bar{R}_{123}$, kuŗas darbības linija ies caur minēto krustpunktu un būs vienāda ar spēku $\bar{R}_{12}$ un $\bar{P}_3$ geometrisko summu, t.i.



$$\bar{R}_{123} = \bar{R}_{12} + \bar{P}_3 = (\bar{P}_1 + \bar{P}_2) + \bar{P}_3 =$$
$$= \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{P}_3 \quad .$$

zīm.8.

Turpinot tādā pat virzienā savienot $\bar{R}_{123}$ ar nākošo spēku u.t.t., beigās būsim aizvietojuši visus dotos spēkus ar vienu rezultējošo spēku $\bar{R}$, kuŗš būs vienāds ar visu doto spēku geometrisko summu, t.i.

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{P}_1$$

un izteiksies grafiski caur poligona (daudzstūra), iegūtā izvedot doto spēku geometrisku savienošanu, noslēdzošo malu. Aplūkotais paņēmiens dod arī rezultantes iedarbes punktu jeb pareizāki izteicoties, mēs esam ieguvuši punktu, kuŗu varam uzlūkot par rezultantes iedarbes punktu; tā kā rezultante, kā ikkuŗš spēks, var tikt patvaļīgi pārvietots savas darbības linijas virzienā, tad var teikt, ka viņai jāiet caur atrasto punktu. Patiesībā mēs esam atraduši to taisni, gar kuŗu rezultante darbojās un kuŗas katru punktu varam uzlūkot par viņas iedarbes punktu.

Dotais paņēmiens dod iespēju noteikt doto spēku rezultanti grafiskā ceļā, iezīmējot dotos spēkus zinanā mērogā.

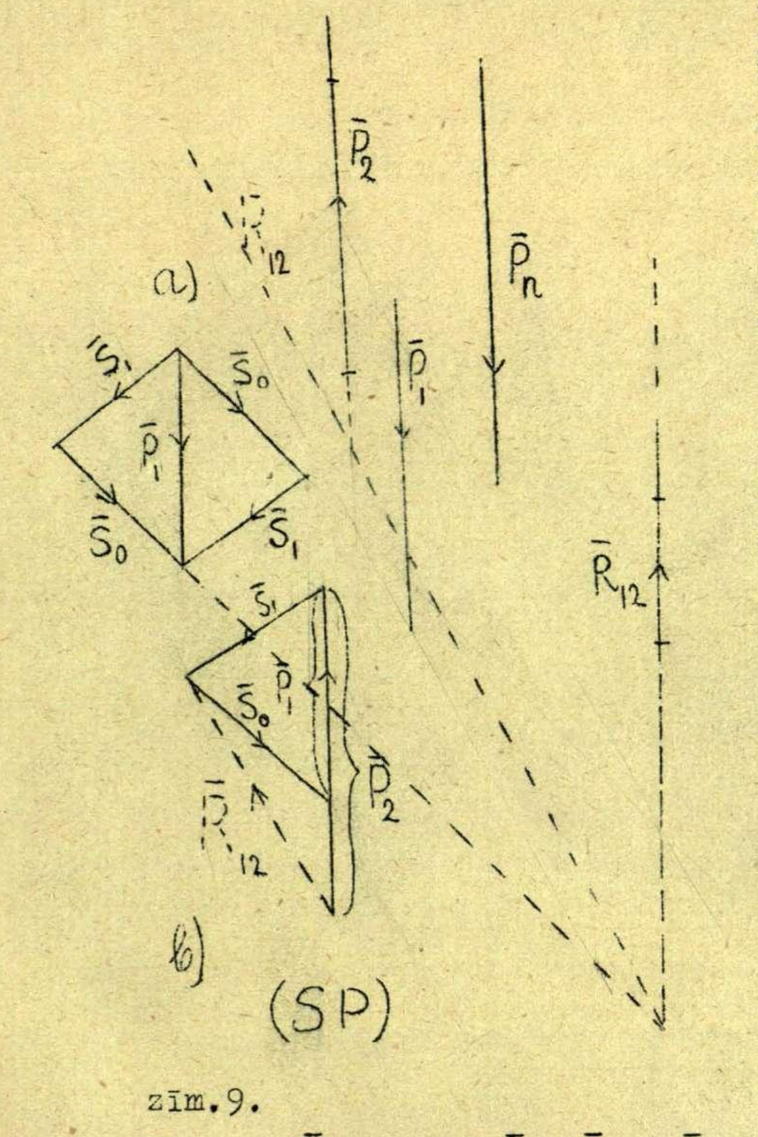
Viegli var pierādīt, ka arī parallēlu spēku sistēma reducējās pie

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{P}_1$$

kur $\bar{P}_1$ apzīmē kādu no parallēlo spēku sistemas spēkiem. Šī teorēma tāpat balstās uz spēku parallēlogramma likumu. Tiešam, izvēlēsimies parallēlu spēku sistemu $\bar{P}_1, \bar{P}_2 \ldots \bar{P}_n$ (sk.zīm.9.). Spēku $\bar{P}_1$ saliksim divās komponentēs $\bar{P}_1 = \bar{S}_0 + \bar{S}_1$,pēc kam var iedomāties $\bar{P}_1$ atmestu un viņa vietā stājušos spēku sistemu $\bar{S}_0$ un $\bar{S}_1$. Tā kā spēku $\bar{S}_0$ un $(\bar{S}_1 + \bar{P}_2)$ resp. $\bar{S}_1 + (\bar{S}_0 + P_2)$ darbības linijas krustojās,tad uz minēto spēku sistemu var attiecināt parallēlogramma likumu un rakstīt, piemēram, parallēlu spēku $\bar{P}_1$ un $\bar{P}_2$ kopspēks

$$\bar{R}_{12} = \bar{S}_0 + (\bar{S}_1 + \bar{P}_2) = \bar{S}_0 + \bar{S}_{12} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2$$

(sk.zīm.9.). Ievērojams šeit ir tas, ka spēku poligons (SP) gūst tagad īpatnēju veidu, viņš pārvēršās taisnē, kas ir parallēlu spēku grafostatiska atšķirība. Ir saprotams,ka pierādijumu var izplatīt uz visu spēku sistemu,pakāpeniski pievienojot uzietam $\bar{R}_{12\ldots i-1}$ nākamo spēku $\bar{P}_1$, līdz kamēr netiks dabūts



zīm.9.

$$\bar{R}_{12\ldots n} = \bar{R} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \ldots + \bar{P}_n = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{P}_i$$

Vēl var pievest vienu pierādījumu, ka parallēliem spēkiem

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{P}_1$$

Pagriezīsim kādu no parallēliem spēkiem, piemēram $\bar{P}_1$, ap viņa iedarbes punktu, pie kam uziesim $\bar{R}'_{i-1,i} = \bar{P}_{i-1} + \bar{P}'_i$, kur P'_i ir parallēlo spēku sistemas spēks $\bar{P}_i$ pagriests ap viņa iedarbes punktu. Gūtais spēka poligons būs kāds trīsstūris. Tagad griezīsim spēku $\bar{P}'_i$ atpakaļ viņa pirmatnējā stāvotnē, kuŗu var uzskatīt par robežu, tad

$$\lim \bar{R}'_{i-1,i} = \bar{R}_{12} = \lim(\bar{P}_{i-1} + \bar{P}'_i) = \bar{P}_{i-1} + \lim \bar{P}'_i = \bar{P}_{i-1} + \bar{P}_i$$

pie kam spēku trīsstūris robežstāvotnē pāriet taisnē; izvedot minēto operāciju ar visiem parallēliem spēkiem, nonākam pie

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{P}_i$$

Šinī pierādījumā, tiesa, jautājums par $\bar{R}$ stāvotni paliek atklāts, viņš attiecas tikai uz likumu

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{P}_i$$

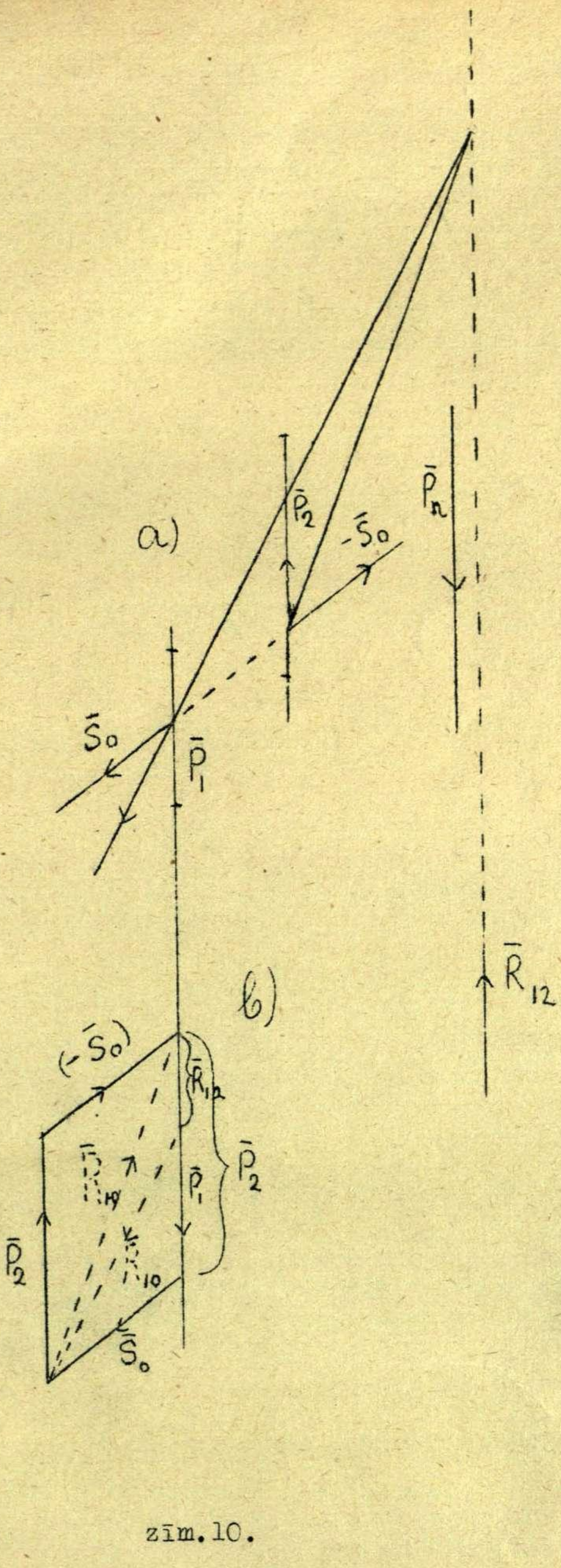
Jautājumu par parallēlu spēku savienošanu var reducēt pie krustojošos spēku savienošanas vēl šādā ceļā. Velkam caur doto parallēlu spēku sistēmu kādu taisni, uz kuŗas pieliekam 2 vienādus un pretēji virzītus spēkus $\bar{S}_o$ un $(-\bar{S}_o)$ /skat. zīm.Nr.10/. Šī divu spēku sistema neizsauks nekādas pārgrozības doto spēku sistemā, jo spēki $\bar{S}_o$ un $(-\bar{S}_o)$ līdzsvarojās. Būvējam SP (skat.zīm.10-b), kas sniedz

$$\bar{R}_{12} = (\bar{S}_o + \bar{P}_1) + \left\{\bar{P}_2 + (-\bar{S}_o)\right\} = \bar{R}_{1.o} + \bar{R}_{2-o} = \bar{R}_{12} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2$$

u.t.t.

zīm.Nr.10 skat.nākošā lapā.

Šī tiešā doto spēku vektoru izlietošana tanī pašī laikā, dod arī kopspēka $\bar{R}$ darbības linijas stāvotni plaknē, un tādēļ uzdevums grafostatiskā ceļā tika pilnīgi veikts. Nevar teikt, ka šis ceļš bija sevišķi ērts, sevišķi tas sakams par parallēliem spēkiem, kur bija jāpiemēro mākslīgs spēku vektoru sadalījums; bez tam arī vispārējā gadījumā atsevišķu spēku darbības linijas varēja krustoties ārpus zīmējuma lapas, kas tad nepielaistu parallēlogramma likuma tiešu piemērošanu, ja negribētu pielietot tādu pašu pa-



zīm.10.

ņēmienu, kā attiecībā uz parallēliem spēkiem

Šīs grūtības tiek apietas caur Culmann'a paņēmienu, lietojot divus poligonus, - mums jau pazīstāmo SP un kādu jaunu poligonu, kuŗu autors nosauc par **virves** poligonu VP (Seilpolygon).

Pieņemsim, ka ir dota spēku sistema, sastāvoša no trim spēkiem $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$ un $\bar{P}_3$. Nolīdzinājums

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{P}_i$$

izteic, ka vektoram $\bar{R}$ geometriski parallēlu var uziet uzbūvējot SP, kas sniedz

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{P}_i$$

(skat.zīm.Nr.11 nākošā lapā).

Izvēlēsim brīvu punktu O SP tuvumā (jeb iekšienē), ar kuŗu savienosim SP stūra punktus. Tad rodas trīs parcieli (SP):

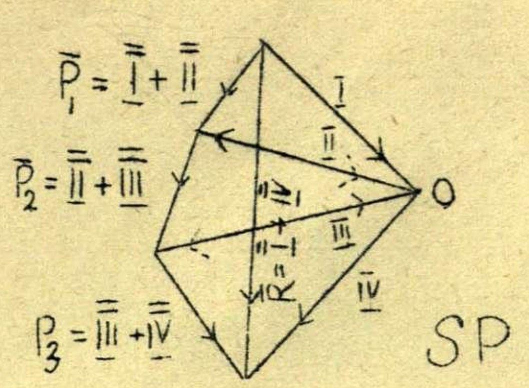
$$\bar{P}_1 = \bar{I} + \overline{II}$$

$$\bar{P}_2 = \overline{III} + (-\overline{II})$$

$$\bar{P}_3 = \overline{IV} + (-\overline{III})$$

$$\bar{R} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{P}_3 = \bar{I} + \overline{IV}$$

Punktu O sauc par polu, vektorus $\bar{I}$, $\overline{II}$, $\overline{III}$ un $\overline{IV}$ par stariem. Izvēlēsimies tāļāk brīvu punktu A spēku plana tuvumā (skat.zīm.Nr.12 nākošā lapā) un vilksim caur viņu liniju, parallēlu staram I līdz krustojumam ar spēka $\bar{P}_1$ darbības liniju, caur pēdējo punktu tāpat vilksim liniju parallēlu staram II līdz viņas krustojumam ar $\bar{P}_2$



zīm.11.

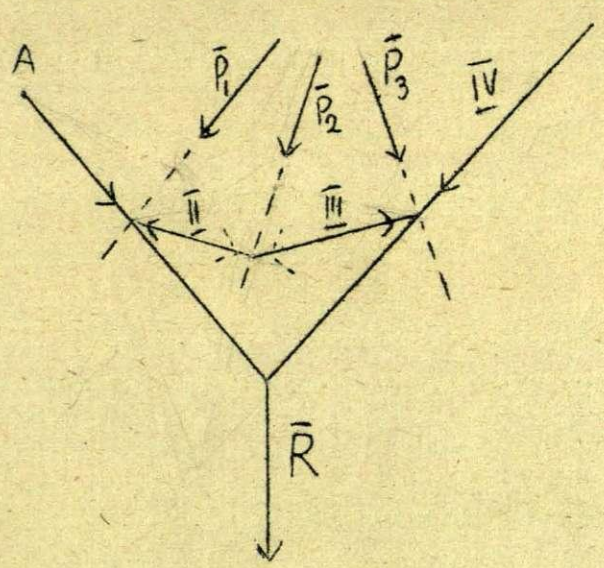
liniju u.t.t. Gūto poligonu sauc par virves poligonu VP. Uz šiem virzieniem iedomāsimies nospraustus attiecīgus vektorus $\bar{I}$ ... $\bar{IV}$. Tad plānā dotie spēku vektori izrādīsies salikti, katrs divās attiecīgās komponentēs un

$$\bar{R} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{P}_3 = (\bar{I} + \bar{II}) + (-\bar{II} + \bar{III}) + (-\bar{III} + \bar{IV}) = \bar{I} + \bar{IV}$$

t.i. spēku sistemu var atvietot ar viņai ekvivalento spēku sistemu, kuŗi sakrīt ar VP malām. Bet tā kā šinī sistemā ir vektori, kuŗi pa pāriem līdzsvarojas, tad paliek

$$\bar{R} = \bar{I} + \bar{IV}$$

Atliek tikai krustot staru virzienus $\bar{I}$ un $\bar{IV}$, lai uzietu punktu, kuŗš noteic $\bar{R}$ darbības linijas patieso stāvotni. Kā zinams, gar šo darbības liniju $\bar{R}$ var pārnest pēc patikas.



Kas attiecas uz spēku grafostatisku sadalīšanu šinī gadijumā, tad samērā pret pirmo gadijumu, kad spēku $\bar{R}$ bija jāsaliek komponentēs, kuŗu darbības linijas ietu caur to pašu R iedarbes punktu, šis problēms uzrāda maz jauna. Ir saprotams, ka papildu noteikumu skaits tagad ir lielāks, jo jānoteic arī komponentu darbības linijas stāvotnes.

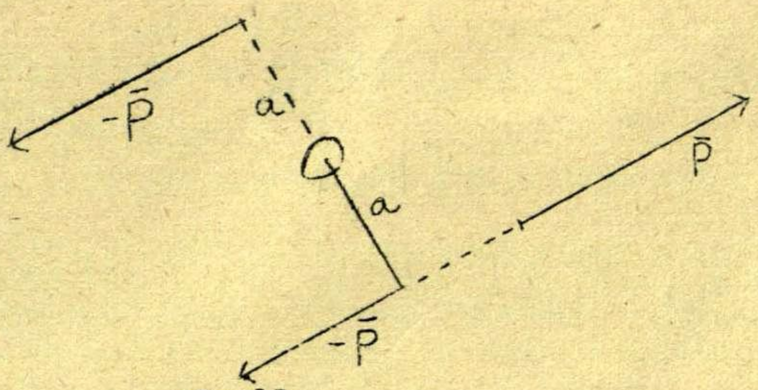
zīm.12.

Kā bija redzams, brīvi plaknē izklaidēto spēku savienošana noveda pie jautājuma par $\bar{R}$ darbības linijas stāvotni, par kuŗu nebija nekādas runas gadijumā, kad spēku darbības linijas krustojās vienā punktā un kad $\bar{R}$ darbības linijas stāvotne tika noteikta caur doto spēku liniju krustojumu punktu. Jautājums par $\bar{R}$ darbības linijas pilnīgu noteikšanu grafostatiskā ceļā arī tika pilnīgi izšķirts. Tagad jāsagatavo ceļš problemas analitiskam atrisinājumam. Pēdējais prasa jēdziena ievešanu par spēka momentu, pie kuŗa noskaidrošanas tagad stājamies.

2. Spēka moments.

A. Spēka statiskais moments.

Par dotā spēka $\bar{P}$ statisko momentu pret doto punktu O (skat.zīm. Nr.13) sauc algebrāisku produktu no spēka vektora garuma (modula) P ar spēka $\bar{P}$ darbības linijas perpendikulāro attālumu no punkta O a, t.i. par šo momentu sauc $\pm$ Pa.



zīm.13.

Šim produktam, kā redzams, tiek piešķirta attiecīga zīme + vai − (t.i. statisko momentu dēfinē kā algebräisku lielumu) tādēļ, ka pretējā gadījumā spēka vektors $(-\bar{P})$, kurš darbojās uz $\bar{P}$ darbības linijas, gūtu vienādu momentu ar $\bar{P}$, kas nebūtu pareizi, jo divi tādi spēki $\bar{P}$ un $-\bar{P}$ nav ekvivalenti (mēchaniskā ziņā vienvērtīgi). Kuŗam no šo divu vektoru statiskam momentam piešķirt zīmi +, kuŗam −, tā ir vienošanās lieta. Ja vektora $\bar{P}$ statiskam momentam mēs piešķirtu zīmi +, tad vektora $-\bar{P}$ statiskam momentam būtu jāpiešķir zīmi −.

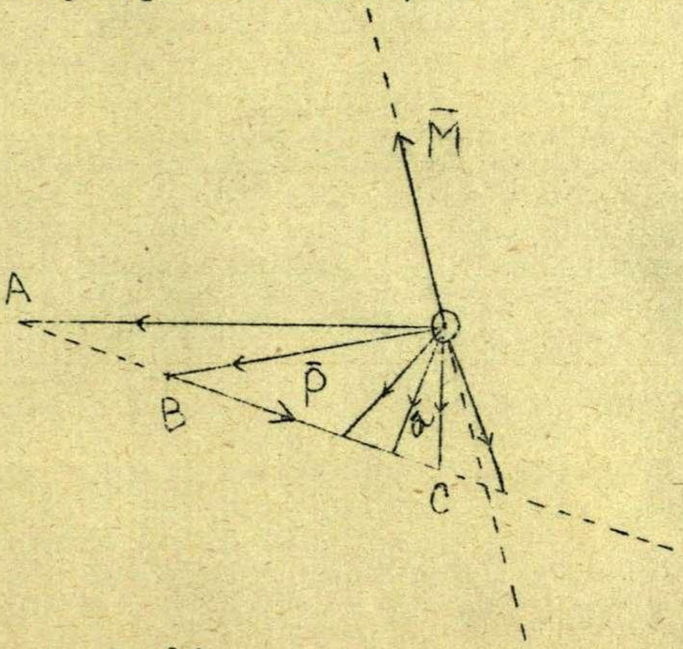
Ja mēs vektoru $-\bar{P}$ pārnestu uz otru pusi no punkta O uz tādu pašu perpendikulāru atstatumu a, tad, neskatoties uz to, ka vektora $-\bar{P}$ zīme tāpat ir pretēja vektora $\bar{P}$ zīmei, tomēr tagad $-\bar{P}$ statiskam momentam pret punktu O būtu jāpiešķir tādu pašu zīmi, kā vektora $\bar{P}$ momentam, jo tagad abi vektori ir ekvivalenti attiecībā uz vienu mēchanisku īpašību, proti, viņi abi cenšās pagriezt ap punktu O to plakni, kurā viņi abi darbojas, pretēji pulksteņa rādītāja kustības virzienam, ja pulksteni tura rokā novērotājs, kurš nostājies abu spēku darbības plaknē ar kājām punktā O. Vienosimies uz priekš skaitīt par pozitivu spēka momentu, kurš cenšās pagriezt viņa darbības plakni ap punktu O pretēji pulksteņa rādītāja kustības virzienam.

Punktu O sauksim par spēka $\bar{P}$ momenta centru, attālumu a par momenta plecu. Apzīmēsim spēka $\bar{P}$ statisko momentu ar $M_o(\bar{P})_{stat.}$, tad varam rakstīt:

$$M_o(\bar{P})_{stat} = \pm Pa$$

B. Spēka vektoriālais moments.

Mēģināsim tagad spēka $\bar{P}$ momentu dēfinēt citādā ceļā, kurš uzrādīs sevišķas priekšrocības, kad nodarbosimies ar telpas statiku. Pieņemsim, ka kādā plaknē ir dots spēka vektors $\bar{P}$. Izvēlēsim brīvi kādu p.O tanī pašā plaknē, kuŗu savienosim ar kaut kādu punktu A uz spēka vektora $\bar{P}$ darbības linijas. Nogriežnim OA piešķirsim noteiktu apakšvirzienu, proti no p.O pret p.A, un uzskatīsim viņu kā vektoru, nosaucot par radiusu-vektoru. Vispāri par radiusu-vektoru sauksim vektoru, kurš savieno divus punktus. No šīs dēfinicijas redzams, ka vispārējā gadījumā radiuss-vektors ir mainīgs lielums, kurš maina kā savu lielumu, tā arī virzienu, atkarībā no p.A stāvotnes. Arī mūsu gadījumā, kā viegli redzams, radiuss-vektors OA maina kā savu lielumu, tā arī virzienu atkarībā no p.A stāvotnes uz vektora $\bar{P}$ darbības linijas.



zīm.14.

Apzīmēdami radiusu-vektoru ar $\bar{r}$, sastādīsim vektoriālu (ārējo) produktu no $\bar{r}$ ar $\bar{P}$, tad dabūsim jaunu vektoru, kuŗu apzīmēsim ar

$$\bar{M}_o(\bar{P}) = [\bar{r},\bar{P}] = [r\sin(\bar{r},\bar{P}),\bar{P}] = [\bar{a},\bar{P}]$$

Noskaidrosim šī vektora $\bar{M}_o(\bar{P})$ visas īpašības, kuŗas viņam kā vektoram piemīt.

1) lielums:

$$\bar{M}_o(\bar{P}) = r\,|\sin(\bar{r},\bar{P})|.P = aP = \pm M_o(\bar{P})_{stat} = \text{Constans.}$$

($\sin(\bar{r},\bar{P})$ ieslēgts divās vertikalās parallēlās strīpiņās $\|$,lai uzsvērtu, ka ņemama vērā $\sin(\bar{r},\bar{P})$ absolūtā vērtība jeb ņemams vērā asa leņķa sin), kur a ir statiskā momenta plecs. Šī pleca garums pie izvēlēta p.0 ir negrozīgs lielums, neskatoties uz radiusa-vektora mainīgumu, jo $r\,|\sin(\bar{r},\bar{P})| = a$ vienmēr.

Lielumu aP var interpretēt arī geometriski: viņš reprezentē trīsstūra OBC dubultotu laukumu,

2/dēfinējumā $\bar{M}_o(\bar{P})$ vektora virziens, kā parasts, ir penpendikulārs pret komplānō vektoru $\bar{r}$ un $\bar{P}$ plakni,

3/vektora $\bar{M}_o(\bar{P})$ stāvotni noteiksim caur p.0, caur kuŗu viņa virziena linijai jāiet,

4/vektora $\bar{M}_o(\bar{P})$ apakšvirzienu noteiksim kā parasts, proti, ka nostājoties šinī apakšvirzienā jāredz pirmo vektoru $\bar{r}$ savienojoties caur rotaciju visīsākā ceļā ar otro $\bar{P}$, pretēji pulksteņa rādītāja kustības virzienam.

Caur šīm 4 īpašībām dēfinējamais vektors $\bar{M}_o(\bar{P})$ pilnīgi viennozīmīgi (nevar būt neviena cita vektora, kuŗam piemīt tās pašas īpašības) noteikts, ja neņem vērā viņa vienīgo brīvību slīdēt neaprobežoti kā uz vienu, tā uz otru pusi no p.0 gar savu darbības liniju ($\bar{M}_o(\bar{P})$ ir slīdošs vektors).

Šādā ceļā dēfinētu vektoru $\bar{M}_o(\bar{P})$ sauksim par spēka $\bar{P}$ vektoriālo momentu pret p.0, pēdējo sauksim par spēka $\bar{P}$ vektoriālā momenta centru, bet garumu a - par šī momenta plecu.

Vektoriāla momenta $\bar{M}_o(\bar{P})$ projekcijas uz negrozīgām asīm (sk. Ievads mēchanikā 43-46 l.p.).

Izvēlēsim X un Y asu plakni parallēlu (0,$\bar{r}$,$\bar{P}$) plaknei jeb pašā (0,$\bar{r}$,$\bar{P}$) plaknē, pēc kam Z ass virziens sakritīs ar normales virzienu pret plakni (0,$\bar{r}$,$\bar{P}$) resp. plakni (0,$\bar{X}$,$\bar{Y}$), kas ļoti vienkāršos vektora $\bar{M}_o(\bar{P})$ projekciju izteiksmes. Kas attiecas uz Z ass apakšvirzienu,tad izvēlēsim viņu tā, lai rastos mums pazīstamā un no mums parasti lietotā labās rokas koordinātu sistema (sk. Ievads,11.un 12. l.p.).Sakarā ar to, ja mēs (0,$\bar{r}$,$\bar{P}$) resp. (0,$\bar{X}$,$\bar{Y}$) plakni uzskatam par horicontālu, zem mūsu acīm atrodošos, tad Z ass izrādīsies virzīta uz augšu (auditorijā,turpretīm, Z ass būs horicontāla,virzīta no melnā dēļa uz auditorijas pusi). Pie tādas asu novietošanas vektors $\bar{M}_o(\bar{P})$ izrādīsies parallēls izvēlētai Z asij, un viņš nedos projekcijas uz X un Y asīm, tā kā

$$/\bar{M}_o(\bar{P})/_x = /\bar{M}_o(\bar{P})/_y = 0, \text{ bet } /\bar{M}_o(\bar{P})/_z = xY - yX = \pm aP =$$

$$= M_o(\bar{P})_{stat}$$

(sk.Ievads, 43-46 l.p.), kur x un y ir spēka P iedarbes,t.i. kaut kuŗa uz $\bar{P}$ darbības linijas punkta koordinātes, bet X un Y spēka $\bar{P}$ projekcijas uz X un Y asīm.

Pie augšā min. koordinātu sistemas izvēles, kā arī $\bar{M}_o(\bar{P})$ apakšvirziena un $M_o(\bar{P})_{stat}$ zīmes noteikšanas paņēmiena $/\bar{M}_o(\bar{P})/_z = xY - yX$

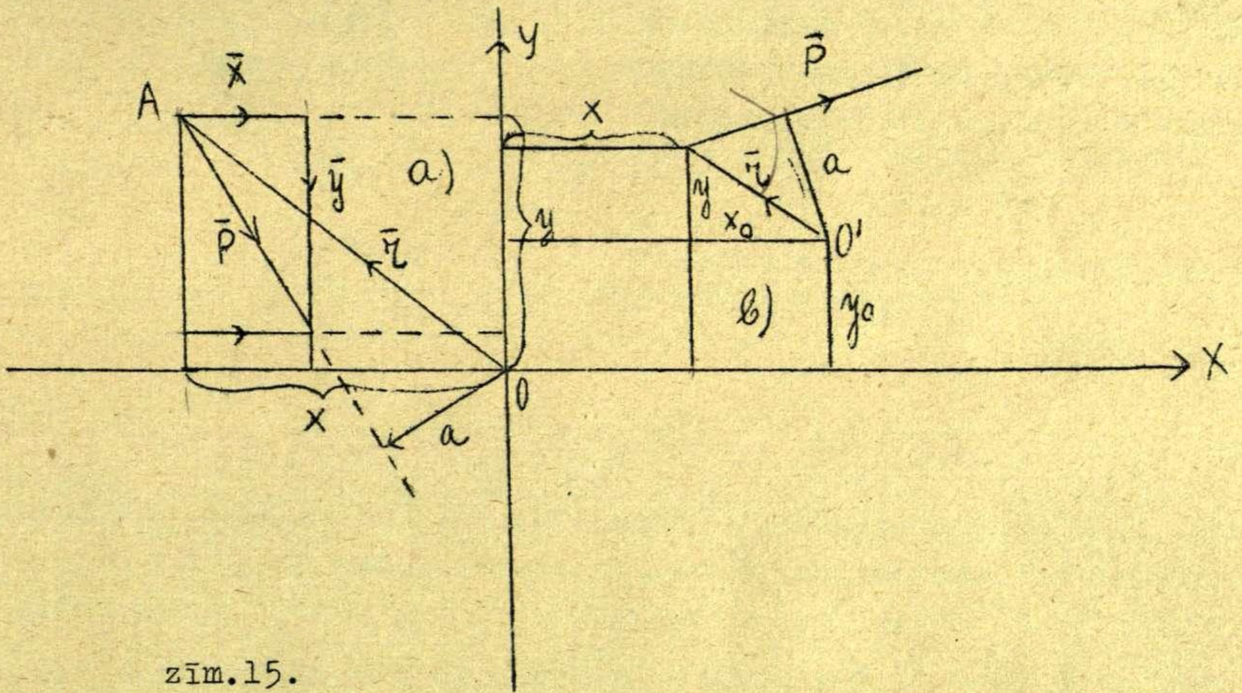
un $M_o(\bar{P})_{stat}$ zīmes vienmēr sakritīs, kas nebūtu, ja, piemēram, atstājot konvenciju par koordinātu sistemas un $\bar{M}_o(\bar{P})$ apakšvirziena izvēlcs negrozītu, attiecībā uz $M_o(\bar{P})_{stat}$ mēs būtu vienojušies skaitīt par pozitīviem tos $M_o(\bar{P})_{stat}$, kuŗi cenšas pagriezt plakni pulksteņa rādītāja kustības virzienā; tad būtu $xY - yX = - M_o(\bar{P})_{stat}$ u.t.t.

No sacītā ir redzams, ka spēku momentus varēs sastādīt divejādā ceļā: vai nu ar spēku iedarbes punktu koordinātu un spēku projekciju palīdzību, jeb ar spēka momenta pleča palīdzību. Pēdējā gadijumā vienmēr ir jākontrolē griezes virziens, lai varētu aP piešķirt vajadzīgo zīmi, kamēr pirmā gadijumā jākontrolē tikai koordinātu x un y un projekciju X un Y zīmes. Kuŗš no viņiem ērtāks, rāda uzdevuma apstākļi.

Piezīme. Uz priekšu, parasti, raksta vienkāršības labā, vienkāršosim momentu apzīmējumus, lietojot $/\bar{M}_o(\bar{P}_i)/_z$ un $M_o(\bar{P}_i)_{stat}$ vietā M_i.

Piemērs. Spēka $\bar{P}$ (sk.zīm.15) moments ir:

$$M = + aP = x(neg)\ Y(neg) - y(poz)\ X(poz)$$



zīm.15.

Ja $\bar{P}$ ir dots, tad arī viņa projekcijas X un Y ir zināmas; tāpat ja ir dots momenta centrs O, tad ir arī kāda uz $\bar{P}$ darbības linijas punkta A (parasti spēka iedarbes punkta) koordinātes x_1 un y_1 zinamas un tādēļ $M = xY - yX$ (x un y - mainīga uz $\bar{P}$ darbības linijas punkta koordinātes) $= x_1Y - y_1X$ (x_1 un y_1 dotā punkta koordinātes - zinami lielumi).

Šis nolīdzinājums ir tipa: $ax + by = c$, kur $a = Y$, $b = -X$ un $c = x_1Y - y_1X$, kas ir taisnes - spēka $\bar{P}$ darbības linijas nolīdzinājums. Tā tad spēka momenta analitiskā izteiksme sniedz spēka darbības linijas nolīdzinājumu.

Ne katru reizi momenta centrs sakrīt ar koordinātu sākumu. Ja momenta centra koordinātes ir x_o un y_o, tad (sk. zīm. 15-b)

$$M = (x - x_o)Y - (y - y_o)X$$

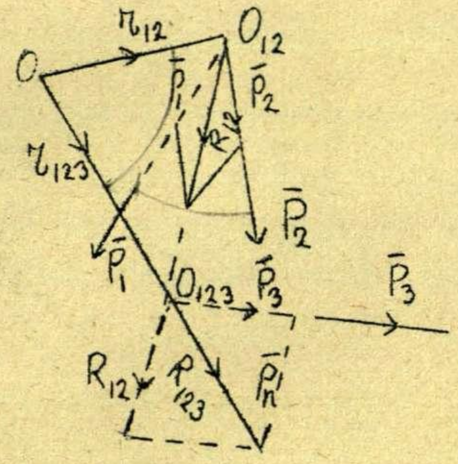
3. Varignona teorēma.

Varignona teorema skan: plaknē kopspēka jeb rezultantes $\bar{R}$ vektoriālais moments pret kādu p.O = doto spēku vektoriālo momentu pret to pašu punktu summai

$$\bar{M}_o(\bar{R}) = \bar{M} = \bar{M}_o(\bar{P}_1) + \ldots + \bar{M}_o(\bar{P}_i) + \ldots + \bar{M}_o(\bar{P}_n) =$$
$$= \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \ldots + \bar{M}_i + \ldots \bar{M}_n =$$
$$= \sum_{i=1}^{i=n} \bar{M}_i$$

Pierādījums. Lai plaknē (skat.zīm.16) atrodās n spēku vektori, kuŗus var parastā kārtā savienot vienā rezultantē

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{P}_i$$



zīm.16.

Pārnesīsim divus vektorūs $\bar{P}_1$ un $\bar{P}_2$ kopējā krustojuma punktā O_{12} (pielaižama operācija) un uzbūvēsim šo divu spēka vektoru rezultanti

$$\bar{R}_{12} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2$$

Pareizināsim šo nolīdzinājumu vektoriāli uz $\bar{r}_{12}$, tad

$$\left[\bar{r}_{12},\bar{R}_{12}\right] = \bar{M}_o(\bar{R}_{12}) = \left[\bar{r}_{12},(\bar{P}_1+\bar{P}_2)\right] =$$
$$=\left[\bar{r}_{12},\bar{P}_1\right]+\left[\bar{r}_{12},\bar{P}_2\right]= \bar{M}_o(\bar{P}_1) + \bar{M}_o(\bar{P}_2)$$

Pārnesīsim tāļāk $\bar{R}_{12}$ un $\bar{P}_3$ viņu kopējā krustojuma punktā O_{123}, kur $\bar{R}_{123} = \bar{R}_{12} + \bar{P}_3$ un pareizināsim pēdējo nolīdzinājumu vektoriāli uz $\bar{r}_{123}$, tad

$$\left[\bar{r}_{123},\bar{R}_{123}\right]= \bar{M}_o(\bar{R}_{123}) =\left[\bar{r}_{123},(\bar{R}_{12} + \bar{P}_3)\right] = \left[\bar{r}_{123},\bar{R}_{12}\right] +$$
$$+ \left[\bar{r}_{123},\bar{P}_3\right] = \bar{M}_o(\bar{R}_{12}) + \bar{M}_o(\bar{P}_3)$$

Bet tā kā $\bar{M}_o(\bar{R}_{12}) = \bar{M}_o(\bar{P}_1) + \bar{M}_o(\bar{P}_2)$, tad $\bar{M}_o(\bar{R}_{123}) = \bar{M}_o(\bar{P}_1) + \bar{M}_o(\bar{P}_2) + \bar{M}_o(\bar{P}_3)$. Šo operāciju varētu turpināt, kamēr visi n spēki notiktu savienoti, un beidzot dabūt

$$\bar{M}_o(\bar{R}) = \bar{M} = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{M}_o(\bar{P}_i) = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{M}_i$$

Nupat pierādītā teorema attiecas uz tādu spēku sistemu, kuŗu darbības linijas krustojās. Viegli pierādīt, ka šī teorema ir spēkā arī attiecībā uz sistemu, sastāvošu no diviem un vairākiem parallēliem spēkiem. Tiešam, ja mūsu rīcībā ir divi parallēli spēki $\bar{P}_1$ un $\bar{P}_2$, tad sadalot spēku $\bar{P}_1$ kaut kādās komponentēs $\bar{S}_o$ un $\bar{S}_1$ (skat.zīm.9.), tā kā

$\bar{P}_1 = \bar{S}_0 + \bar{S}_1$, mēs reducējam mums doto paralēlo spēku sistemu pie spēkū $\bar{S}_0$, $\bar{S}_1$ un $\bar{P}_2$ sistemas, kuŗu darbības linijas savstarpēji krustojas un kā tādai - Varignona teorema - jau pielietojama, t.i. attiecībā uz kuŗu katru punktu, kā centru, pastāv nolīdzinājums:

$$\bar{M}_o(\bar{R}) = \bar{M}_o(\bar{S}_o) + \bar{M}_o(\bar{S}_1) + \bar{M}_o(\bar{P}_2)$$

Tā kā

$$\bar{M}_o(\bar{S}_o) + \bar{M}_o(\bar{S}_1) = \bar{M}_o(\bar{P}_1)$$

tad rezultātā

$$\bar{M}_o(\bar{R}) = \bar{M}_o(\bar{P}_1) + \bar{M}_o(\bar{P}_2)$$

Pats par sevi saprotams, ka Varignona teorema viegli attiecināma uz kaut kuŗu n parallēlu spēku $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$ ... $\bar{P}_n$ skaitu, kuŗi guļ vienā un tanī pašā plaknē. Tiešam, ja mēs pamatodamies uz nupat pierādīto, aizvietosim papriekšu divus spēkus $\bar{P}_1$ un $\bar{P}_2$ caur viņu rezultanti $\bar{R}_{12}$, tad pret kuŗu katru plaknes punktu pastāv nolīdzinājums

$$\bar{M}_o(\bar{R}_{12}) = \bar{M}_o(\bar{P}_1) + \bar{M}_o(\bar{P}_2)$$

Ja pēc tam mēs aizvietosim spēku $\bar{R}_{12}$ un doto spēku $\bar{P}_3$ caur viņu rezultanti $\bar{R}_{123}$, tad būs spēkā nolīdzinājums:

$$\bar{M}_o(\bar{R}_{123}) = \bar{M}_o(\bar{R}_{12}) + \bar{M}_o(\bar{P}_3) = \bar{M}_o(\bar{P}_1) + \bar{M}_o(\bar{P}_2) + \bar{M}_o(\bar{P}_3)$$

Turpinājot tādā pat garā aizvietot iegūto rezultanti un nākošo no dotiem spēkiem ar jaunu rezultanti, nonāksim beigās pie visu doto spēku rezultantes $\bar{R}$, kuŗas vektoriālais moments pret kuŗu katru plaknes punktu būs vienāds ar doto spēku vektoriālo momentu summu pret to pašu punktu, t.i.

$$\bar{M}_o(\bar{R}) = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{M}_o(\bar{P}_i)$$

Šīs teorēmas secinājums ir: ņemot vērā jau zināmo sakarību starp vektoriāla spēka momenta projekciju uz Z asi un vektoriālo momentu, var rakstīt

$$M = xY - yX = \sum_{i=1}^{i=n} M_i = \sum_{i=1}^{i=n} \pm a_i P_i = \sum_{i=1}^{i=n}\left(x_i Y_i - y_i X_i\right)$$

kur $X = R\cos\varphi$, $Y = R\sin\varphi$, $X_i = P_i\cos\alpha_i$, $Y_i = P_i\sin\alpha_i$, x_i un y_i spēka P_i iedarbes punkta koordinātes. φ ir leņķis, kuŗu veido $\bar{R}$ pozitīvais virziens ar pozitivo $\bar{X}$ ass virzienu, skaitīts pret pulksteņa rādītāja kustības virzienu (skat. Ievads, 30 l.p.), bet α_i ir tāds pats leņķis starp pozitiviem $\bar{P}_i$ un $\bar{X}$ ass virzieniem.

Nolīdzinājums

$$xY - yX = \sum_{i=1}^{i=n} x_i Y_i - y_i X_i$$

ir kopspēka $\bar{R}$ darbības linijas nolīdzinājums, jo šī nolīdzinājuma labā pusē atrodas zinams lielums; kreisā pusē tikai Y un X ir zinami lielumi, jo $\bar{R}$ var iepriekš uziet parastā kārtā. x un y ir taisnes $\bar{R}$ darbības linijas tekošās koordinātes.

Tā tad Varignona teorema noved pie kopspēka $\bar{R}$ darbības linijas nolīdzinājuma:

$$xY - yX = \pm aR = \sum_{i=1}^{i=n} (x_iY_i - y_iX_i) = \sum_{i=1}^{i=n} \pm a_iP_i$$

Apzīmēsim algebrāisko lielumu $\pm$ a ar r, tad:

$$xY - yX = rR = \sum_{i=1}^{i=n} (x_iY_i - y_iX_i) = \sum_{i=1}^{i=n} \pm a_iP_i$$

Apskatīsim tagad jautājumu, kā izmantot šo nolīdzinājumu. Piešķirot šinī nolīdzinājumā x kādu speciālu nozīmi, piemēram, pielīdzinot $x = x_o$, dabūjam attiecīgo y_o nozīmi, t.i. mēs gūstam kāda punkta A uz $\bar{R}$ darbības linijas koordinātes. Šo punktu var skaitīt par spēka $\bar{R}$ iedarbes punktu, jo viņā spēku $\bar{R}$ vienmēr var pārnest, pēdējā darbības linijas virzienā (pielaižama statikā operācija, skat.Ievads mēchanikā,61.un 62.1.p.). Tā tad Varignona teorema sniedz tālāk iespēju noteikt kopspēka $\bar{R}$ iedarbes punktu. Sevišķi ērti ir vienu koordināti pielīdzināt 0. Piemēram, ja x = 0, tad y dos $\bar{R}$ iedarbes punktu uz Y ass, jeb $\bar{R}$ darbības linijas krustojumu ar Y asi. Tāpat

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} x_iY_i - y_iX_i}{R} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} \pm a_iP_i}{R}$$

Spēka $\bar{R}$ iedarbes punkta koordinates vienmēr pārvērš Varignona nolīdzinājumu identitātē. Identitātē viņu pārvērtīs arī šādas x un y nozīmes:

$$x_cY = \sum_{i=1}^{i=n} x_i\,Y_i \quad ; \quad x_c = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} x_iY_i}{Y}, \text{ tāpat}$$

$$y_cX = \sum_{i=1}^{i=n} y_i\,X_i \quad ; \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} y_iX_i}{X}$$

Šim iedarbes punktam (x_c,y_c) piekritīs liela loma paralēlu spēku mēchanikā, par ko runa vēl priekšā.

4. Analitiskās plaknē izklaidētiem spēkiem ekvivalentā spēka $\bar{R}$ (kopspēka) pazīmes.

Mēs redzējam, ka plaknē izklaidēto spēku visvienkāršākā ekvivalentā sistema grafostatiski ir reprezentēta caur kopspēku $\bar{R}$, kuŗu var uziet ar spēku poligona palīdzību, tāpat kā gadijumā, kad spēki darbojas uz vienu punktu (jeb kad viņu darbības linijas krustojas vienā punktā),pie kam

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{P}_i$$

Kas attiecas uz $\bar{R}$ darbības linijas stāvotni, tad viņu arī varēja grafiski atrast pavisam nelietojot jēdzienu par spēka momentu. Analitiskam uzdevuma atrisinājumam Varignona teorema pievieno vēl otru nolīdzinājumu veidā:

$$\bar{M} = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{M}_i$$

Tā tad min. ekvivalentā sistema geometriski ir noteikta caur diviem vektoru nolīdzinājumiem:

$$1)\quad \bar{R} = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{P}_i$$

$$2)\quad \bar{M} = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{M}_i$$

Projektējot (sk. Ievads, 46.l.p.) šos divus vektorus uz 3 savstarpīgi ortogonālām projekciju asīm, $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$, dabūjam analitiskas sakarības:

$$R\cos\varphi = X = \sum_{i=1}^{i=n} X_i = \sum_{i=1}^{i=n} P_i \cos\alpha_i$$

$$R\sin\varphi = Y = \sum_{i=1}^{i=n} Y_i = \sum_{i=1}^{i=n} P_i \sin\alpha_i$$

$$M_z = M = xY - yX = rR = \sum_{i=1}^{i=n}\left(x_iY_i - y_iX_i\right) = \sum_{i=1}^{i=n} \pm a_iP_i$$

Pacelsim abus pirmos nolīdzinājumus otrā potencē un pēc tam saskaitīsim, tad gūstam:

$$R^2\cos^2\varphi = \left(\sum_{i=1}^{i=n} P_i\cos\alpha_i\right)^2$$

$$R^2\sin^2\varphi = \left(\sum_{i=1}^{i=n} P_i\sin\alpha_i\right)^2$$

$$R^2\cos^2\varphi + R^2\sin^2\varphi = R^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = R^2 = \left(\sum_{i=1}^{i=n} P_i\cos\alpha_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{i=n} P_i\sin\alpha_i\right)^2$$

Šis nolīdzinājums dod iespēju uziet vektora $\bar{R}$ garumu (modulu), kurš ir:

$$R = +\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{i=n} P_i\cos\alpha_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{i=n} P_i\sin\alpha_i\right)^2}$$

Vektora $\bar{R}$ virziens ir noteikts caur

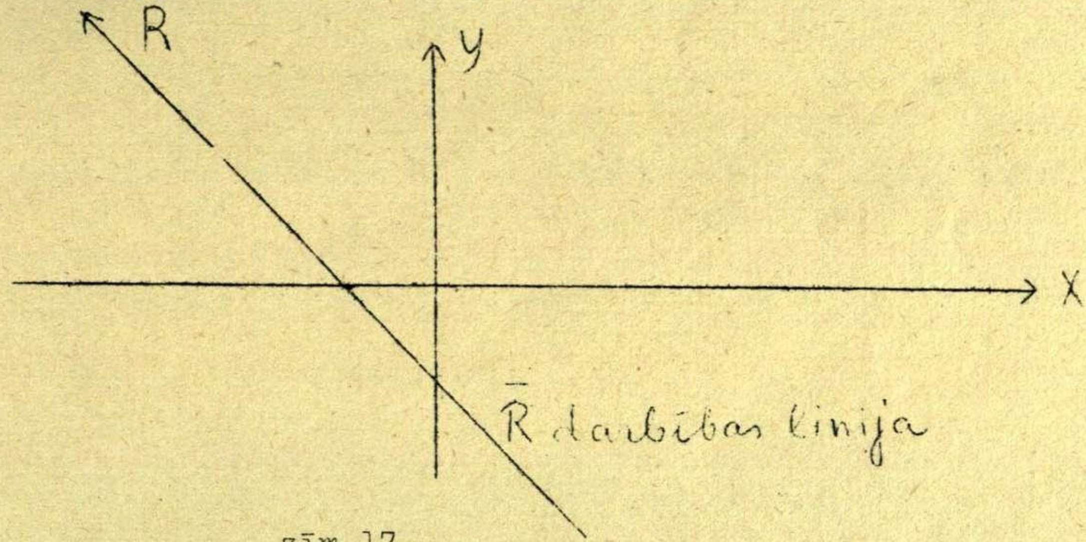
$$\cos\varphi = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} P_i\cos\alpha_i}{R} \quad \text{un} \quad \sin\varphi = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} P_i\sin\alpha_i}{R}$$

kur $\cos\varphi$ un $\sin\varphi$ zīmes noteic tikai skaitītāji

$$\sum_{i=1}^{i=n} P_i\cos\alpha_i \quad \text{un} \quad \sum_{i=1}^{i=n} P_i\sin\alpha_i$$

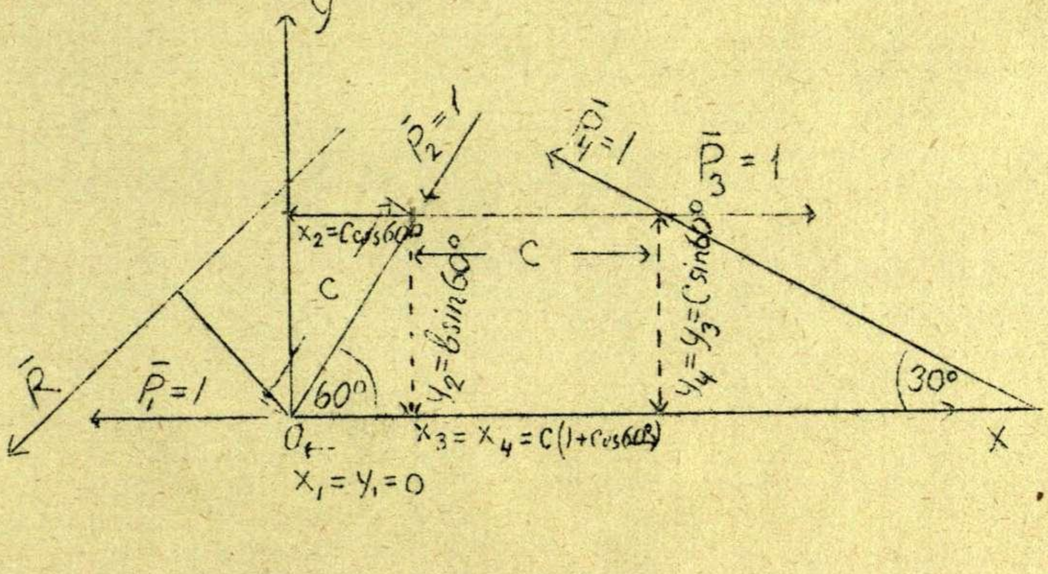
jo R ir absolūts lielums. Vienam $\cos\varphi$ 2π robežās atbilst divi leņķi φ un $2\pi - \varphi$. Jautājumu, kuru no šiem diviem leņķiem izvēlēties, izšķir $\sin\varphi$ zīme. Ja $\cos\varphi$ ir +, tad leņķis var atrasties I jeb IV kvadrantā, bet $\sin\varphi$ šinīs kvadrantos ir dažādas zīmes. Ja nu pie $\cos\varphi$ +, $\sin\varphi$ gūst −, tad leņķis φ atrodas IV kvadrantā. Tā tad jāizrēķina tikai viena trigonometriskā lieluma cos φ jeb sin φ vērtība,un jāņem vērā otra lieluma tikai zīme, lai gūtu viennozīmīgu rezultātu. Trešais, momenta projekcijas, nolīdzinājums izmantojams $\bar{R}$ iedarbes punkta noteikšanai, kā jau tika aizrādīts, jeb $\bar{R}$ darbības linijas stāvotnes noteikšanai, jo kamēr bija tikai φ zinams, tikmēr vēl varēja novilkt nenoteiktu skaitu parallēlu $\bar{R}$ darbības liniju, kuŗām visām ir vienāds virziena leņķis φ pret $\bar{X}$ asi. Bet ja $\bar{R}$ iedarbes linijas nolīdzinājums caur momenta nolīdzinājumu ir dots, ar kuŗa palīdzību var uziet $\bar{R}$ iedarbes punktu, tad $\bar{R}$ darbības linija gūst noteiktu stāvotni, parallēlu kādai linijai, kuŗa vilkta zem leņka φ pret X asi.

Gūtos projekciju nolīdzinājumus vēl var citādi izmantot un proti var prātot tā: momenta nolīdzinājums sniedz $\bar{R}$ darbības liniju, atliek tā tad tikai atrast R garumu un vektora $\bar{R}$ apakšvirzienu, jo vispārējais virziens, kopā ar stāvotni, jau ir zinams, Tad atliek tikai ņemt vērā cos φ jeb sin φ zīmes bez viņu skaitlisko vērtību uziešanas. Piemēram, ja (skat.zīm.17.) pie $\bar{R}$ darbības linijas, kuŗa rādīta uz skices, cos φ dod zīmi –, tad $\bar{R}$ ir virzīts saskaņā ar skicējumu.



zīm.17.

Piemērs.



zīm.18.

$\bar{R} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{P}_3 + \bar{P}_4$, $\bar{M} = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \bar{M}_3 + \bar{M}_4$, kuŗām atbilst:

$$X = R\cos\varphi = P_1\cos\alpha_1 + P_2\cos\alpha_2 + P_3\cos\alpha_3 + P_4\cos\alpha_4 = - P_1 - P_2\cos 60^0 +$$
$$+ P_3 - P_4\cos 30^0 = P_3 - P_1 - \frac{1}{2} P_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} P_4 = - \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3})$$

$$Y = R\sin\varphi = P_1\sin\alpha_1 + P_2\sin\alpha_2 + P_3\sin\alpha_3 + P_4\sin\alpha_4 = - P_2\sin 60^0 +$$
$$+ P_4\sin 30^0 = \frac{1}{2} P_4 - \frac{\sqrt{3}}{2} P_2 = \frac{1}{2} (1 - \sqrt{3})$$

$$R = + \sqrt{(P_3 - P_1 - \frac{1}{2} P_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} P_4)^2 + (\frac{1}{2} P_4 - \frac{\sqrt{3}}{2} P_2)^2} =$$
$$= + \sqrt{(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2})^2} = + \sqrt{2}$$

$$\cos\varphi = \frac{\sum_{i=1}^{i=4} P_i\cos\alpha_i}{R} = \frac{-(1 + \sqrt{3})}{2\sqrt{2}} < 0$$

$$\sin\varphi = \frac{\sum_{i=1}^{i=4} P_i\sin\alpha_i}{R} = \frac{(1 - \sqrt{3})}{2\sqrt{2}} < 0$$

no kā redzams, ka meklējamais leņķis $180^0 \angle \varphi \angle 270^0$.

$$M = xY - yX = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3})x + \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3})y = \sum_{i=1}^{i=4} (x_iY_i - y_iX_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{i=4} x_iP_i\sin\alpha_i - \sum_{i=1}^{i=4} y_iP_i\cos\alpha_i = x_1P_1\sin\alpha_1 + x_2P_2\sin\alpha_2 +$$

$$+ x_3P_3\sin\alpha_3 + x_4P_4\sin\alpha_4 - (y_1P_1\cos\alpha_1 + y_2P_2\cos\alpha_2 + y_3P_3\cos\alpha_3 +$$

$$+ y_4P_4\cos\alpha_4) = 0.0 + b\cos 60^0(-P_2\sin 60^0) + b(1+\cos 60^0)0 +$$

$$+ b(1 + \cos 60^0)P_4\sin 30^0 -$$

$$- \left\{0(-P_1) + b\sin 60^0(-P_2\cos 60^0) + b\sin 60^0 P_3 + b\sin 60^0(-P_4\cos 30^0)\right\} =$$

$$= -bP_2 \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4} bP_4 + bP_2 \frac{\sqrt{3}}{4} - bP_3 \frac{\sqrt{3}}{2} + bP_4 \frac{3}{4} = b(\frac{3}{2}P_4 - \frac{\sqrt{3}}{2}P_3) =$$

$$= \frac{b}{2}(3 - \sqrt{3}) = \frac{b\sqrt{3}}{2} (\sqrt{3} - 1)$$ un beidzot:

$$(1 - \sqrt{3})x + (1 + \sqrt{3})y = \sqrt{3} (\sqrt{3} - 1)b .$$

Šo nolīdzinājumu var reprezentēt zem veida:

$$\frac{x}{-\sqrt{3}\,c} + \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}\,(\sqrt{3}-1)c}\cdot y = 1$$

no kuŗa ir redzams, ka $\bar{R}$ darbības linija nošķeļ uz $\underline{X}$ ass nogriezni $a = -\sqrt{3}\,C$, bet uz Y ass nogriezni $b = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}\,c$. **Uziesim** tagad $\bar{R}$ darbības linijas nolīdzinājumu caur

$$M = rR = \sum_{i=1}^{i=4} \pm a_i P_i$$

Kā redzams no skices $a_1 = a_2 = 0$, jo $\bar{P}_1$ un $\bar{P}_2$ iet caur punktuO.
$a_3 = y_3 = b\sin 60^0$ un $a_4 = 3b\sin 30^0 = \frac{3}{2}\,c$ un .

$$M = rR = P_4 . 3b\sin 30^0 - P_2 b\sin 60^0 = P_4\,\frac{3}{2}\,b - P_3 b\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{b}{2}(3-\sqrt{3}) =$$

$$= \frac{b}{2}\,\sqrt{3}\,(\sqrt{3}-1).$$

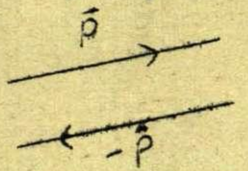
$$r = \frac{\sum_{i=1}^{i=4} \pm a_i P_i}{R} = \frac{b\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\,(\sqrt{3}-1) = \frac{b}{4}\,\sqrt{6}\,(\sqrt{3}-1)$$

Varētu, saprotams, abus momenta aplēses paņēmienus lietot kopā,rakstot

$$xY - yX = \sum_{i=1}^{i=n} \pm a_i P_i$$

Mēģināsim tagad atbildēt uz jautājumu, kā ir virzīta $\bar{R}$ darbības linija pret centru O. r nozīme iznāca pozitiva, kādēļ M = rR ir pozitivs. Iepriekšējā aplēses gaitā mēs konstatējam, ka $180^0 \angle \varphi \angle 270^0$. Izmantojot šos noteikumus kopīgi, mums jānāk pie slēdziena, ka $\bar{R}$ darbības linijai jāiet tā, kā rādīts uz skices, jo šis virziens sastāda ar X asi leņķi φ ,kuŗš apmierina $180 \angle\varphi\angle 270^0$ un bez tam rR ir pozitīvs,jo griež plakni pretīm pulksteņa rādītāja kustības virzienam:novietojot $\bar{R}$ uz otru pusi no p.O,mēs pēdējo noteikumu nebūtu izpildījuši.

Noslēdzot nodaļu par ekvivalentas sistemas atrašanu plaknē,minēsim vēl tos atsevišķos veidus, kuŗus var gūt ekvivalenta spēku sistema.$\bar{R}$ var gūt nozīmi $\bar{R} = 0$, pie $\bar{M}_o(\bar{R}) = M_o(C) \neq 0$. Šī sistema rodas,kad doto spēku sistema galīgi reducējas pie diviem vienādiem antiparallēliem spēkiem, kuŗu darbības linijas nekrīt vienā kopējā taisnē (sk.zīm.19).



zīm.19.

Šādu sistemu sauc par spēku pāri un viņu momentu par pāra momentu. Pāra īpašības tiks vēlāk pētītas. Tāļāk var būt $\bar{R} \neq 0$, $\bar{M}_o(\bar{R}) = 0$: kopspēks krusto momenta centru.Trešais gadījums: $\bar{R} = 0$, $\bar{M}_o(\bar{R}) = 0$ ir spēku līdzsvara gadījums, par kuŗu iet runa nākamā nodalijumā.

5.Plaknē izklaidētu spēku sistemas līdzsvara noteikumi.

Lai spēki, kuŗi izklaidēti plaknē, atrastos līdzsvara stāvoklī, ir nepieciešams un pietiekoši, ja:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{P}_i = 0 \quad \text{un} \quad \bar{M} = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{M}_i = 0 .$$

Katrs no šiem noteikumiem ir nepieciešams,bet nav pietiekošs kā viens pats.Tā,piemēram,ja

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{P}_i = 0$$

tad var rasties gadījums, kad spēku sistema reducējas galīgi pie diviem vienādiem antiparallēliem spēkiem, bet ne ar kopēju darbības liniju $(\bar{P}, -\bar{P})$ /skat.zīm.19).

Šī divu spēku sistema, lai gan dod $\bar{R} = \bar{P} + (-\bar{P}) = 0$, nedod

$$M_o = M_o(\bar{P}) + M_o(-\bar{P}) = M_o\bar{R} = \bar{M}_o(0) = 0$$

(spēku pāri). Kā novērojumi rāda, tāda plakne, kuŗā darbojas spēku pāris, veido rotacijas kustību un tādēļ līdzsvara nav. Bet tāpat

$$\bar{M} = \sum_{i=1}^{i=n} M_i = 0$$

kā vienīgais noteikums, arī nav pietiekošs, jo pie tam var būt

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{P}_i \neq 0$$

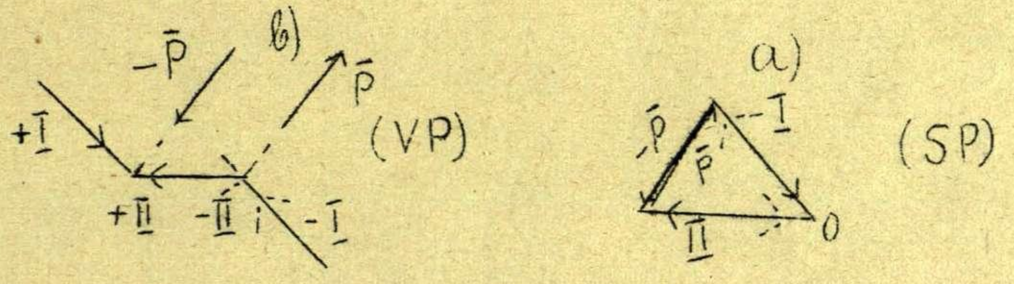
un plakne var veidot translacijas kustību: še moments M varēja gūt nozīmi $M = 0$ tādēļ ka $\bar{R}$ varēja nejauši iet caur momenta centru O.

6. Grafostatiskās līdzsvara pazīmes.

tā kā

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{P}_i = 0$$

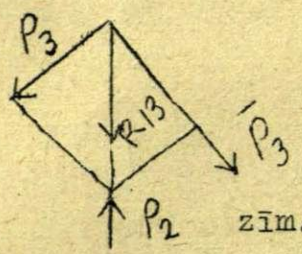
tad spēka poligonam jānoslēdzās. Bet šis noteikums nav pietiekošs.Kā redzējam, šinī gadījumā var būt $M \neq 0$ un līdzsvara nav. Ņemsim,piemēram, spēku pāri $(\bar{P}, -\bar{P})$ un uzbūvēsim viņam spēku poligonu. Kā re-



zīm.20.

dzams (skat.zīm.20-a) spēku poligons (SP) noslēdzās, bet virves poligons (VP) nē, jo beidzamie stari + I un - I tāpat veido spēku pāri. Tā tad pilna spēku līdzsvara nodrošināšanai jānoslēdzās kā (SP), tā arī (VP). Grafostatiskais paņēmiens attiecībā uz 3 spēku $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$ un $\bar{P}_3$ līdzsvaru viegli noved pie slēdziena, ka šo spēku darbības linijām jākrustojas kopējā punktā. Tiešam, balstoties uz parallēlogramma likuma, var savienot divus no dotiem spēkiem,piemēram, $\bar{P}_1$ un $\bar{P}_3$, viņu kopējā rezultante $\bar{P}_1 + \bar{P}_3 = \bar{R}_{13}$. Tad paliek pāri vēl tikai divi spēki

$\bar{R}_{13}$ un $\bar{P}_2$, kuŗiem jādod $\bar{R}_{13} + \bar{P}_2 = 0$. Šādiem spēkiem jādarbojas uz kopējās taisnes, kuŗa ies caur spēku $\bar{P}_1$ un $\bar{P}_3$ krustojuma punktu un teorēma ir pierādīta (skat.zīm.21).



zīm.21.

7. Plaknē izklaidēto spēku līdzsvara analitiskās pazīmes.

Ar projekcijas metodes palīdzību (sk.Ievads mēchanikā,46.l.p.)no

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{P}_i = 0 \quad \text{un} \quad \bar{M} = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{M}_i \quad \text{gūstam}$$

$$1) \quad \sum_{i=1}^{i=n} X_i = \sum_{i=1}^{i=n} P_i.\cos\alpha_i = 0$$

$$2) \quad \sum_{i=1}^{i=n} Y_i = \sum_{i=1}^{i=n} P_i.\sin\alpha_i = 0$$

$$3) \quad M_z = M = \sum_{i=1}^{i=n} (x_iY_i - y_iX_i) = \sum_{i=1}^{i=n} (x_iP_i\sin\alpha_i - y_iP_i\cos\alpha_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{i=n} \pm a_iP_i = 0$$

Pievesto 3 nolīdzinājumu vietā var uzstādīt 3 citas analitiskās līdzsvara izteiksmes.

Ņemsim vērā plaknē 3 punktus A,B un C, kuŗi neatrodas uz vienas taisnes un apzīmēsim dotās spēku sistemas momentus pret p.A ar M_A, pret punktu B ar M_B un pret punktu C ar M_C. Tad ir saprotams,ka, ja $M_A = 0$, tad doto spēku sistema nekādā ziņā nevar reducēties pie spēku pāra, jo pāra moments vienmēr atšķirās no 0, kādēļ jāpieņem, ka, vai nu sistema atrodas līdzsvarā, vai viņa reducējas pie kopspēka $\bar{R} \neq 0$, kuŗš iet caur punktu A. Ja nu vienā laikā $M_A = 0$, $M_B = 0$, tad doto spēku sistema vai nu atrodas līdzsvarā, vai reducējas pie kopspēka $\bar{R} \neq 0$, kuŗš iet caur abiem punktiem A un B.

Beidzot, ja vienā laikā $M_A = 0$, $M_B = 0$ un $M_C = 0$, tad ir iespējams tikai līdzsvars, tāpēc, ka $\bar{R} \neq 0$ nevar vienā laikā krustot visus 3 uz vienas taisnes neatrodošos punktus. Tā tad plakanas spēku sistemas līdzsvara noteikumus varam uzrakstīt arī zem veida:

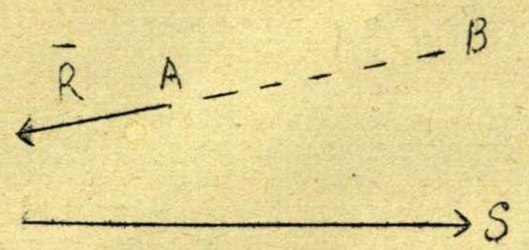
$$1) \quad M_A = 0$$

$$2) \quad M_B = 0$$

$$3) \quad M_C = 0$$

Var arī izteikt spēku sistemas plaknē līdzsvara noteikumus caur diviem spēku momentu, pret diviem dažādiem punktiem, nolīdzinājumiem un vienu spēku projekciju nolīdzinājumu uz kaut kādu asi.

Ja attiecībā pret diviem punktiem A un B doto spēku momentu summas ir 0 un bez tam, viņu projekciju summa uz kaut kādu asi S, kuŗa nav perpendikulāra pret taisni AB, ir arī 0, tad, acimredzot, dotā spēku sistema atrodas līdzsvara stāvoklī. Tā tad iegūstam trešā veida spēku sistemas līdzsvara noteikuma nolīdzinājumus



zīm.22.

1) $\bar{M}_A = 0$

2) $\bar{M}_B = 0$

3) $\sum_{i=1}^{i=n} \bar{F}_{i_s} = 0$

Tādā ceļā esam ieguvuši plakanas spēku sistemas triju veidu līdzsvara noteikumus. Pirmā veidā ietilpst viens, trešā - divi un otrā - trīsi momentu nolīdzinājumi. Uzstādīt plakanai, brīvi izklaidētai spēku sistemai līdzsvara noteikumus, kuŗos neietilpst neviena momenta nolīdzinājuma, nav iespējams, jo netiktu izslēgta iespēja šiem spēkiem reducēties pie spēku pāra.

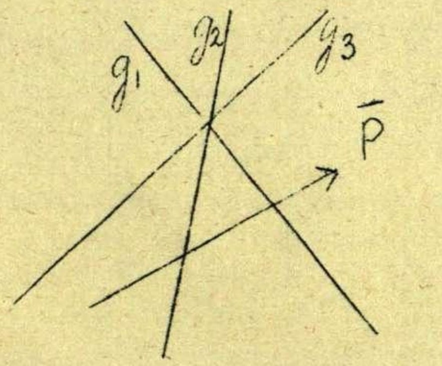
Ja dotā spēku sistema sastāv tikai no trim spēkiem $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$ un $\bar{F}_3$, tad tieši no noteikuma, ka līdzsvara stāvoklī spēku momentu summai pret kaut kuŗu plaknes punktu jābūt 0, seko, ka šo spēku līdzsvars iespējams vienīgi tad, ja šo spēku darbības linijas krustojās vienā punktā, jo par momentu centru var pieņemt divu spēku krustojuma punktu. Tad, tā kā

$$M_o(\bar{F}_1) + M_o(\bar{F}_2) + M_o(\bar{F}_3) = 0$$

seko, ka pie $M_o(\bar{F}_1) = M_o(\bar{F}_2) = 0$ arī $M_o(\bar{F}_3) = 0$, kas nozīmē, ka arī $\bar{F}_3$ iet caur to pašu punktu.

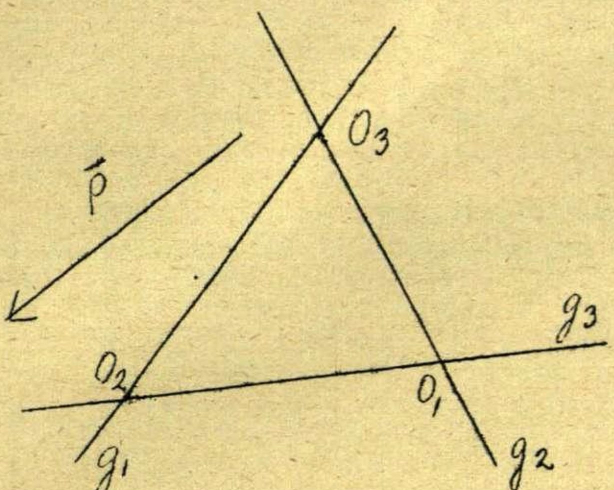
Līdzsvara noteikumu pielietošana.

Otrais līdzsvara noteikumu veids sevišķi ērtş kāda uzdevuma, kuŗš praksē bieži atgadās, analitiskai atrisināšanai. Šis uzdevums ir: līdzsvarot doto spēku $\bar{F}$ (jeb doto spēku sistemu) ar trim nezināmiem spēkiem $\bar{Q}_1$, $\bar{Q}_2$ un $\bar{Q}_3$. kuŗi lai darbotos gar dotām taisnēm g_1, g_2 un g_3. Lai šis uzdevums kļūtu noteikts, nepieciešami, lai taisnes g_1, g_2 un g_3 krustotos trijos dažādos punktos. Pretējā gadijumā, t.i. ja taisnes g_1, g_2 un g_3 krustojās vienā punktā un šis punkts guļ ārpus spēka $\bar{F}$ darbības linijas, uzdevums kļūst neiespējams un ja taisnes g_1, g_2 un g_3 krustojās uz spēka $\bar{F}$ darbības linijas, tad uzdevumam iespējams bezgalīgi liels skaits atrisinājumu. Ja dotais uzdevums atrisinams analitiskā ceļā, tad, saprotams, arī doto taišņu stāvotnēm jābūt noteiktām analitiski. Tas iespējams, piemēram, dodot katrai taisnei viņas



zīm.23.

krustpunkta ar X asi koordināti un viņas leņķi ar X asi jeb krustpunktu ar abām asīm - koordinātes. Izejot no šiem datiem, ir iespējams noteikt taišņu krustpunktus un šo punktu atstatums līdz dotām taisnēm un dotam spēkam $\bar{P}$. Apzīmēsim taišņu g_1 un g_2 krustpunktu ar O_3, taišņu g_2 un g_3 krustpunktu ar O_1 un taišņu g_3 un g_1 krustpunktu ar O_2. Uzstādīsim tagad dotā spēka $\bar{P}$ un meklējamo spēku $\bar{Q}$ līdzsvara noteikumus triju momentu nolīdzinājumu pret punktiem O_1, O_2 un O_3 veidā, t.i. uzrakstīsim nolīdzinājumus

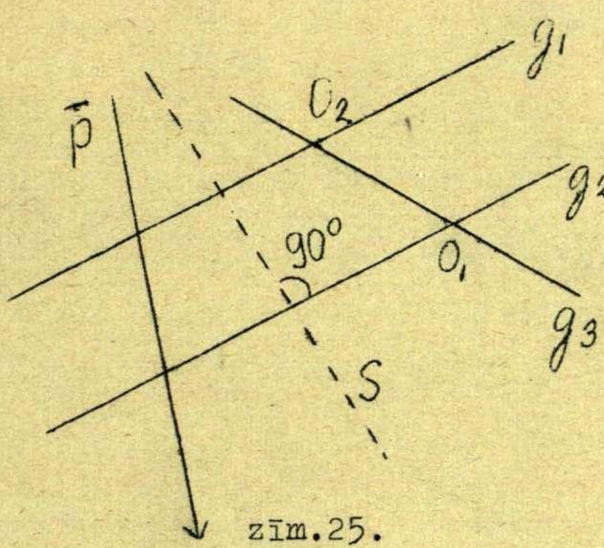


zīm.24.

$$\bar{M}_1 = 0,\ \bar{M}_2 = 0,\ \bar{M}_3 = 0$$

Pirmā no šiem momentu summas nolīdzinājumiem ietilps tikai dotais spēks $\bar{P}$ un meklējamais spēks $\bar{Q}_1$, bet spēki $\bar{Q}_2$ un $\bar{Q}_3$ neietilps tādēļ, ka viņu momenti pret punktu O_1 ir nulles. Tā paša iemesla dēļ otrā nolīdzinājumā ietilps tikai spēki $\bar{P}$ un $\bar{Q}_2$ un trešā nolīdzinājumā - tikai spēki $\bar{P}$ un $\bar{Q}_3$. Minēto trīs nolīdzinājumu priekšrocība tā tad ir tas apstāklis, ka katrā no viņiem ietilps tikai viens nezināmais spēks, kādēļ vienkāršojās šo nezinamo noteikšana.

Var gadīties, ka divas no dotām taisnēm, piemēram, g_1 un g_2 ir savstarpīgi parallēlas, bet krusto trešo taisni g_3 un arī spēka $\bar{P}$ darbības liniju. Šinī gadijumā krustpunkts O_3 atrodas bezgalībā un nolīdzinājums $\bar{M}_3 = 0$ zaudē savu nozīmi. Šinī gadijumā tomēr ir iespējams sastādīt nolīdzinājumus $\bar{M}_1 = 0$ un $\bar{M}_2 = 0$ un no viņiem noteikt spēkus $\bar{Q}_1$ un $\bar{Q}_2$. Zinot šos divus spēkus ir iespējams sastādīt momentu nolīdzinājumu pret kuru katru punktu, kurā tad ietilps tikai viens nezināmais spēks $\bar{Q}_3$, jo tagad $\bar{Q}_1$ un $\bar{Q}_2$ jau būs noteikti. Tomēr arī šinī gadijumā mums ir iespējams sastādīt tādu trešo līdzsvara noteikumu, kurā spēki $\bar{Q}_1$ un $\bar{Q}_2$ nemaz neietilpst. Šim nolūkam projecēsim visus spēkus $\bar{P}$, $\bar{Q}_1$, $\bar{Q}_2$ un $\bar{Q}_3$ uz kaut kādu



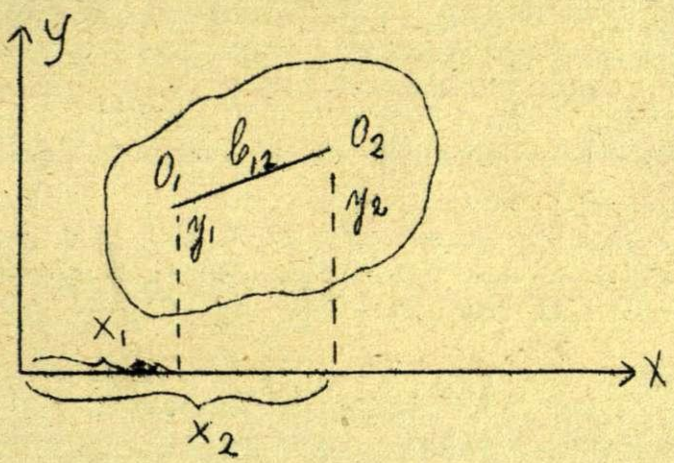
zīm.25.

asi S, perpendikulāru taisnēm g_1 un g_2, t.i. pielietosim līdzsvara noteikumu trešo veidu:

$$\bar{M}_1 = 0,\ \bar{M}_2 = 0 \quad \text{un} \quad \bar{S} = 0$$

Trešā nolīdzinājumā spēki $\bar{Q}_1$ un $\bar{Q}_2$ neietilps tādēļ, ka viņu projekcijas uz asi S ir nulles. Pievestos līdzsvara noteikumus var izmantot divejādi. Pirmkārt, līdzīgi iepriekšējam uzdevumam, ir iespējams kuŗu katru doto spēku jeb doto spēku sistemu, kuŗa pate par sevi neatrodas līdzsvarā, līdzsvarot, pievienojot viņai jaunus spēkus, kuŗiem nezināmi viņu trīsi elementi, jo mūsu rīcībā ir 3 nolīdzinājumi, no kuŗiem šos elementus ir iespējams noteikt. Kā nezinams elements var figurēt jaunievedamā spēka moduls, viņa virziens, noteikts caur virziena leņķi α, jeb spēka darbības linijas attālums no koordinātu sākuma punkta. Otrkārt, tādos gadijumos, kur uz ķermeni darbojošies spēki atkarājās no ķermeņa stāvotnes, izmantojot līdzsvara noteikumus, ir iespējams noteikt ķermeņa līdzsvara stāvotni, t.i. to viņa stāvotni, kuŗā atrodoties ķermenim, uz viņu darbojošies spēki atradīsies līdzsvarā. Attiecībā uz šo līdzsvara noteikumu izmantošanas veidu piezīmējams vēl sekojošais.

Aplūkojamā ķermeņa stāvotne telpā kļūs noteikta tiklīdz būs zināma šī ķermeņa kaut kāda plakana šķēliena stāvotne, piemēram, viņa šķēliena ar plakni, ejoša caur doto spēku darbības linijām, stāvotne. Dotie spēki censās pārvietot šo šķēlienu plaknē, kuŗa sakrīt ar doto spēku darbības plakni, t.i. nekustīgā plaknē, kuŗa sakrīt ar minētā šķēliena plakni (p.p. zīmējuma plakne). Šinī plaknē arī izvēlēsim nekustīgu koordinātu sistemu XY. Tad, lai pilnīgi noteiktu aplūkojamā ķermeņa stāvotni telpā, pietiek noteikt aplūkojamā šķēliena stāvotni plaknē XY. Šim nolūkam ir pietiekoši dot kaut kādu šī ķermeņa aplūkojamā šķēlienā gulošu divu punktu, piemēram O_1 un O_2 koordinātes. Apzīmēsim šo punktu koordinates ar x_1, y_1 un x_2, y_2. Izejot no mūsu pieņēmuma, uz ķermeņa darbojošies spēki ir atkarīgi no ķermeņa stāvotnes, t.i. tieši no koordinātēm x_1, y_1, x_2, y_2. Tādēļ šīs koordinātes ietilps darbojošos spēku līdzsvara noteikumos kā nezināmi lielumi.



zīm.26.

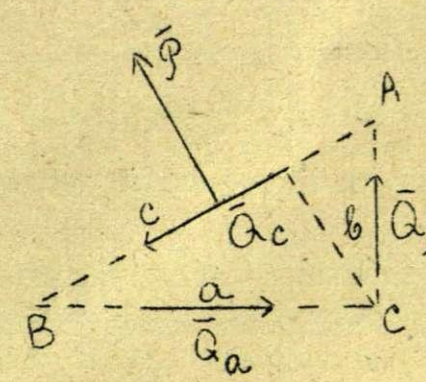
Šādā ceļā mūsu rīcībā atradīsies trīs nolīdzinājumi ar 4 nezinamiem lielumiem. Bet nezinamie lielumi x_1, y_1, x_2, y_2 ir saistīti vēl ar vienu geometriskas dabas noteikumu un proti to, ka attālums starp punktiem O_1 un O_2 katrā ķermeņa stāvotnē paliek negrozīgs - vienāds ar b_{12}. Šis noteikums ietērpjas sekošā nolīdzinājumā

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = b_{12}^2$$

kur b_{12} ir dots konstants lielums. Pievienojot šo nolīdzinājumu 3 līdzsvara noteikumiem, gūstam 4 nolīdzinājumus, saturošus 4 nezinamos lielumus x_1, y_1, x_2, y_2, kuŗi noteic ķermeņa līdzsvara stāvotni.

Šī ķermeņa stāvotni, t.i. aplūkojamā viņa plakanā šķēliena stāvotni plaknē XY, var noteikt arī citā ceļā, piemēram, noteicot viena punkta koordinātes un vienas taisnes virzienu. Pieņemot, piemēram, punkta O_1 koordinātes un novelkot caur šo punktu kaut kādu taisni, gulošu aplūkojamā šķēliena plaknē un dodot šīs taisnes veidoto leņķi ar X asi, esam viennozīmīgi noteikuši aplūkojamā šķēliena stāvotni plaknē XY un līdz ar to visa ķermeņa stāvotni telpā. Katrā gadijumā aplūkojamā šķēliena stāvotne noteicās caur trijiem, neatkarīgiem viens no otra, lielumiem, kuŗi arī ietilpst kā nezināmi lielumi darbojošos spēku līdzsvara noteikumos.

Piemērs. Uz taisnleņķa trīsstūra plakni darbojās dotais spēks $\bar{P}$, pielikts hipotenuzas vidus punktā un virzīts stateniski pret pēdējo uz plaknes ārieni. Tiek prasīts līdzsvarot šo doto spēku ar 3 spēkiem, kuŗi darbotos gar dotā trīsstūra malām.



zīm.27.

Atrisinājums. Apzīmēsim dotā trīsstūra katetus ar a un b, viņa hipotenuzu ar c, bet attiecīgos meklējamos spēkus ar $\bar{Q}_a$, $\bar{Q}_b$, $\bar{Q}_c$. Iepriekš mums nav zinams, kādā trīsstūra malu apakšvirzienā darbosies attiecīgie spēki. Pieņemsim, tomēr, ka šie spēki darbojas ar šautriņu uz zīmējuma atzīmētos apakšvirzienos. Ja kāds no šiem spēkiem faktiski darbojās pretējā, nekā no mums patvaļīgi pieņemts, apakšvirzienā, tad šī spēka moduļa vērtība sekos no līdzsvara noteikumiem, kā negatīvs lielums.

Pielietosim līdzsvara noteikumus viņu otrā veidā, t.i. 3 momentu nolīdzinājumu veidā, kuŗus sastādīsim pēc kārtas pret dotā trīsstūra virsotnēm A,B,C. Tad gūsim nolīdzinājumus:

$$\bar{M}_a = Q_a . b - P \frac{c}{2} = 0, \text{ no kuŗienes } Q_a = \frac{Pc}{2b}$$

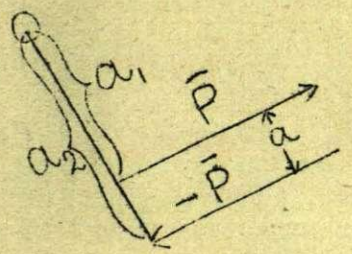
$$\bar{M}_b = Q_b . a + P \frac{c}{2} = 0, \text{ un tad } Q_b = - \frac{Pc}{2a}$$

$$\bar{M}_c = Q_c \frac{ab}{c} - P\left(\frac{a^2}{c} - \frac{c}{2}\right) = 0 \text{ un } Q_c = \frac{P(2a^2 - c^2)}{2ab} = \frac{P(a^2 - b^2)}{2ab}$$

Kā redzams, spēks $\bar{Q}_b$ guva negativu vērtību, tā tad faktiski darbojās pretējā virzienā, nekā tas bija iepriekš pieņemts, t.i. šī spēka apakšvirziens nebija pareizi izvēlēts. Spēka $\bar{Q}_c$ zīme atkarājās no tā, vai a būs lielāks jeb mazāks par b. Pirmā gadijumā $\bar{Q}_c$ apakšvirziens sakritīs ar no mums iepriekš pieņemto, bet otrā gadījumā apakšvirziens būs vēlams pretējā tam, kā pieņemts.

8. Spēku pāru īpašības.

Par spēku pāri sauc divu vienādu, pretēji virzītu (antiparallēlu), bet ne ar kopēju darbības liniju, spēku sistemu ($\bar{P}$, $-\bar{P}$) /skat.zīm.28/.



zīm.28.

Saskaņā ar šo dēfiniciju šo divu spēku sistema dod $\bar{R} = \bar{P} + (-\bar{P}) = 0$, bet

$$M_o(\bar{R}) = M_o(0) \neq 0$$

pieņemot, ka pāra moments tiek sastādīts ar Varignona teorēmas

$$\bar{M}_o(\bar{R}) = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{M}_o(\bar{P}_i)$$

palīdzību. Bet Varignona teorēmu mēs pierādījām attiecībā uz spēkiem, kuŗu darbības linijas krustojās jeb arī attiecībā uz parallēlu spēku sistemu, kuŗi nereducējās pie

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{P}_i = 0$$

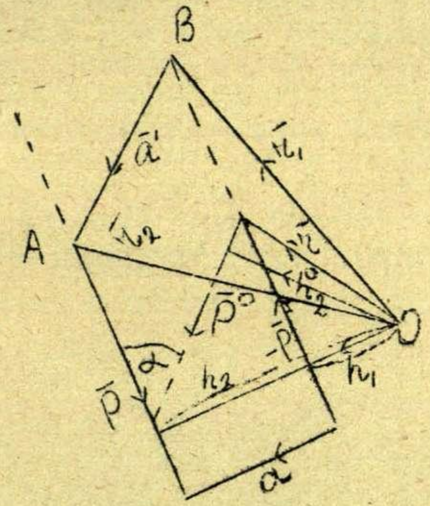
pāra veidā. Tad, kā tika rādīts, bija iespējams parallēlu spēku sistemu pārveidot krustojošos spēku sistemā, attiecībā uz kuŗu Varignona teorema jau bija pierādīta. Ne tā tas ir gadijumā, kad parallēlo spēku sistema reducējas pie pāra ar $\bar{R} = 0$. Šinī gadijumā visi parallēlu spēku salikšanas gadījumi, beidzot tomēr vienmēr novedīs pie pāra ar nekrustojošām spēku darbības linijām, kad nebūs iespējams pielietot attiecību

$$[\bar{r}.\bar{R}_{12}] = [\bar{r}(\bar{P}_1 + \bar{P}_2)] = [\bar{r}.\bar{P}_1] + [\bar{r}.\bar{P}_2]$$

uz kuŗu dibinājas Varignona teorēma, jo, ja mēs gribētu pāra gadījumā pielietot minēto attiecību, tad gūtu

$$[\infty.0] = \infty P - \infty P$$

kam nav jēgas. Bet lai tomēr pierādītu, ka pāra momenta sastādīšanai ar Varignona teoremas palīdzību ir raison d'être, rīkosimies tā: vienu no pāra spēkiem (skat.zīm.29) pagriezīsim par leņķi α, lai gūtu divu krustojošos spēku sistemu, attiecībā uz kuŗu mēs varam piemērot Varignona teoremu. Tādā ceļā gūsim:



zīm.29.

$$\bar{R}' = \bar{P}' + (-\bar{P})$$

$$[\bar{r}\bar{R}'] = \bar{M}(\bar{P}' + -\bar{P}) = [\bar{r}(\bar{P}' + -\bar{P})] =$$
$$= [\bar{r},\bar{P}'] - [\bar{r},\bar{P}] = [\overline{r\sin(\bar{r},\bar{P}')},\bar{P}'] -$$
$$- [\overline{r\sin(\bar{r},\bar{P})},\bar{P}] = [\bar{h}_2', \bar{P}'] - [\bar{h}_1,\bar{P}]$$

Tagad meklēsim robežu, kuŗai tuvosies $\bar{M}(\bar{P}' + (-\bar{P}))$ kad $\alpha \to 0$, tad

$$\lim_{\alpha\to 0} \bar{M}(\bar{P}' + -\bar{P}) = \bar{M}(\lim_{\alpha\to 0} \bar{P}' + -\bar{P}) =$$
$$= M(\bar{P} = -\bar{P}) = \bar{M}(0) \text{ /pāra moments/} =$$
$$= \lim_{\alpha\to 0}[\bar{h}_2',\bar{P}'] - [\bar{h}_1,\bar{P}] = [\bar{h}_2,\bar{P}] - [\bar{h}_1,\bar{P}] =$$
$$= [(\bar{h}_2 - \bar{h}_1),\bar{P}] = [\bar{a},\bar{P}]$$

kuŗa ir perpendikulārais atstatums starp abu spēku darbības linijām. Bet ā var atvietot ar kuŗu katru radiusu-vektoru ā, kas vieno divus punktus A un B uz min. darbības linijām, jo $a'\sin(\bar{a}'\ \bar{P}) = a.P$. Tad

$$[\bar{a},\bar{P}] = [\bar{a}',\bar{P}] = [(\bar{r}_2 - \bar{r}_1)\bar{P}] = [\bar{r}_2\bar{P}] - [\bar{r}_1\bar{P}] = [\bar{r}_2,\bar{P}] + [\bar{r}_1(-\bar{P})]$$

un Varignona teorema ir pilnīgi pielietojama arī attiecībā uz spēku pāriem. Šis konstatējums dod iespēju uziet dotu pāru koppāri un apskatīt vēl citas pāriem piemītošas īpašības. Piemēram, pieņemsim, ka ir dota n pāru sistema, un mūs interesē tā visvienkāršākā spēku sistema, kas dotu pāru sistemu atvieto. Tad varam tagad tieši pielietot Varignona teoremu un rakstīt:

$$\bar{M}(0) = \sum_{i=1}^{i=n} [\bar{r}_{i2},\bar{P}_i] + \sum_{i=1}^{i=n} [\bar{r}_{i1}(-\bar{P}_i)] = \sum_{i=1}^{i=n} [(\bar{r}_{i2} - \bar{r}_{i1}),\bar{P}_i] = \sum_{i=1}^{i=n} [\bar{a}_i,\bar{P}_i] =$$

$$= \sum_{i=1}^{i=n} \bar{M}_i(O)$$

t.i. koppāris kā vektors ir vienāds ar atsevišķu pāru ģeometrisku (vektoriālu) summu, ko var viegli pārvest aļģebras valodā: koppāris ir vienāds ar doto pāru algebrāisku summu.

Bet parasti statikas kursi seko citai metodei. Proti, klusi ciešot, viņi iziet no pāra momenta dēfinicijas

$$M_i(O) = h_2P - h_1P = \pm a_iP_i$$

un tad apskata dažādas pāra īpašības. Saprotams, ka līdz ar to tiek Varignona teorēmas vispārība traucēta, bet, negribēdami ieviesušos tradiciju lauzt, arī mēs sekosim šai parastai metodei. Kā izteiksme

$$\bar{M}(O) = [\bar{a},\bar{P}] = \pm aP\bar{i}_z$$

kur $\bar{i}_z$ ir vienības vektors Z ass virzienā, rāda, pāra momentam nepiemīt noteikta centra, kādēļ viņa moments ir brīvs vektors, kuŗu var pārnest pēc patikas kaut kuŗā citā stāvotnē, parallēlā pirmatnējai, pretēji atsevišķa spēka vektoriālam momentam, kuŗš ir saistīts caur momenta centru, caur kuŗu šim vektoram vienmēr jāiet.

Spēku pāri var brīvi pārnest viņa darbības plaknē, bez kā viņa mēchaniskais efekts caur to mainītos. Tiešam, par šo īpašību jau varēja slēgt, ņemot vērā, ka pāra momentam nepiemīt noteikta centra. Tomēr pierādīsim šo īpašību, izejot no spēku sistemas ekvivalences (vienvērtības) jēdziena. Divas spēku sistemas S_1 un S_2, kuŗa katra par sevi līdzsvaro trešo S ir savā starpā ekvivalentas $S_1 \backsim S_2$. Pieņemsim, ka kādā plaknē darbojās spēku sistema, sastāvoša no pāriem M(O) un $M_1(O)$. Šīs sistemas līdzsvara noteikumi ir parastie

$$\sum_{i=1}^{i=n} X_i = 0\ , \quad \sum_{i=1}^{i=n} Y_i = 0\ , \quad \sum_{i=1}^{i=n} M_i = 0$$

Mūsu gadījumā projekciju nolīdzinājumi sniedz divas attiecīgas identitates 0 = 0, jo katrā pārī $\bar{R} = \bar{P} + (-\bar{P}) = 0$. Attiek pāra momentu nolīdzinājums

$$\sum_{i=1}^{i=n} M_i(O) = M(O) + M_1(O)$$

no kurienes $M_1(O) = -M(O)$. Tāpat, ja mēs vēlētu citu pāri $M_2(O)$ no kuŗa arī prasītu līdzsvara noteikumu, mēs nāktu pie slēdziena $M_2(O) = -M(O)$, kādēļ $M_1(O) = M_2(O)$. Bet šie abi pāri ir ekvivalenti, jo viņi katris par sevi līdzsvaro doto spēku sistemu M(O). Slēdziens: aļģebrāiski skaitliski vienādi pāri ir ekvivalenti. Tas nozīmē, ka katru pāri var pārnest viņa darbības plaknē pēc patikas, bez kā viņš zaudētu savas ekvivalences īpašības, pie kam viņu var arī pārveidot pēc patikas ar vienu noteikumu, lai tikai viņa momenta skaitliskā vērtība paliktu negrozīga, t.i. pāri M(O):

$$a_1P_1 = a_2P_2 = \dots = a_nP_n$$

visi ir ekvivalenti.

Uz pāru $M(O) = a_1P_1 = a_2P_2 = \dots = a_nP_n$ ekvivalences pamata ir dibināta operācija, kuŗu sauc par pāra reducēšanu pie dotā pleca a. Ja pāri M(O) jāreducē pie dotā pleca, tad uz ekvivalences pazīmes pamata $aP = M(O)$, no kuŗienes jaunā pāra spēks $P = \frac{M(O)}{a}$

Tāpat var arī reducēt pāri pie dotā spēka, tad uzejams ir plecs

$$a = \frac{M(0)}{P}$$

Vairāku spēku pāru savienošana.

Pamatojoties uz nupat teikto, ir iespējams aizvietot kaut kuŗu spēku paru sistemu, darbojošos vienā un tanī pašā plaknē, ar vienkāršāko viņai ekvivalento sistemu.

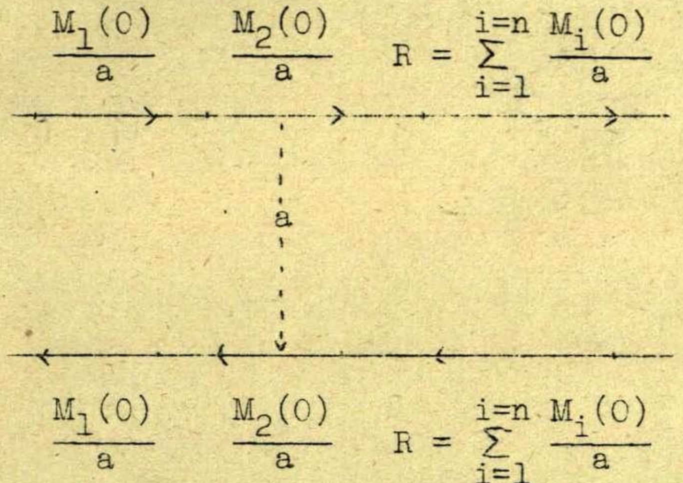
Šim nolūkam reducēsim visus dotos spēku pārus, kuŗu momenti ir $M_1(0)$, $M_2(0)$... $M_n(0)$, pie viena un tā paša pleca a, pie kam pārveidoto šādi spēku pāru spēki gūs vērtības:

$$\frac{M_1(0)}{a},\ \frac{M_2(0)}{a},\ \frac{M_n(0)}{a}$$

Pēc tam pārvietosim katru spēku pāri dotā viņu darbības plaknē tā, lai visu doto spēku pāru spēki darbojās gar divām savstarpīgi parallēlām taisnēm, kuŗu atstatums savā starpā ir a. Aizvietojot visus spēkus, kuŗi darbojas gar vienu un to pašu taisni, ar vienu rezultanti, kuŗa ir vienāda ar visu, gar taisni darbojošos spēku algebrāisko summu un rezultātā mēs iegūsim divus vienādus, pretēji virzītus parallēlus spēkus

$$R = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{M_i(0)}{a} = \frac{1}{a} \sum M_1(0)$$

kuŗi darbojas gar jau minētām taisnēm. Šie divi rezultējošie spēki sastāda rezultējošo spēku pāri, kuŗu moments



zīm.30.

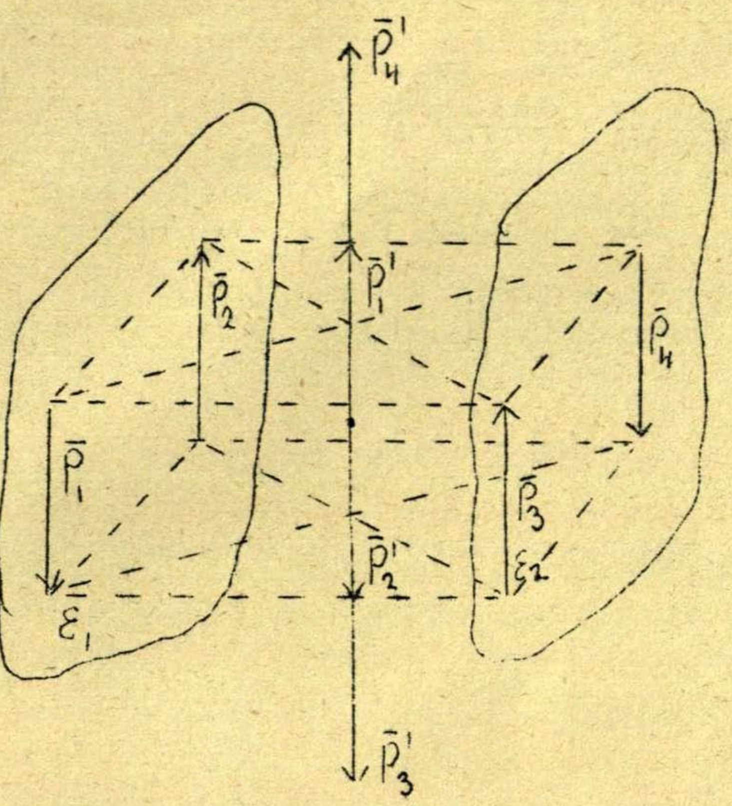
$$M(0) = Ra = \sum M_i(0)$$

Tādā ceļā esam nonākuši pie slēdziena, ka kuŗa katra spēku pāru, darbojošos vienā un tanī pašā plaknē, sistema var tikt aizvietota ar rezultējošu spēku pāri, kuŗš darbojas tanī pašā plaknē un kura moments ir vienāds doto spēku pāru momentu algebrāiskai summai.

Tā tad spēku pāri, kuŗi darbojās vienā un tanī pašā plaknē, saskaitītās pēc tā paša likuma, kā atsevišķi spēki, kuŗi darbojās gar vienu un to pašu taisni, tikai ar to starpību, ka spēku lielumu vietā nāk pāru momentu lielumi. Secinājumā varam teikt, ka dotā spēku pāru sistema atrodās līdzsvarā tad, ja šo momentu algebrāiskā summa ir 0.

Spēku pāru, darbojošos parallēlās plaknēs, savienošana.

Lai pārietu uz spēku pāriem, kuŗi darbojās dažādās viena un tā paša cieta ķermeņa plaknēs, aplūkosim pa priekšu divus spēku pārus, kuŗi darbojās parallēlās plaknēs E_1 un E_2. Attiecībā uz šādiem spēku pāriem nav grūti pierādīt, ka šādi pāri līdzsvarojas, ja viņu momenti vienādi, bet paši spēku pāri darbojās pretējos virzienos, raugoties uz darbības plaknēm no vienas un tās pašas puses. Lai teikto pierādītu, reducēsim abus spēku pārus pie vienādiem pleciem. Tad, tā kā abu pāru momenti ir vienādi, arī reducēto pāru spēki būs vienādi. Pārvietosim



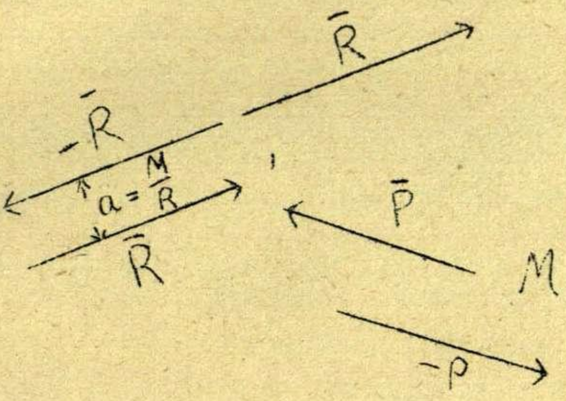
zīm.31.

spēku pārus savās darbības plaknēs tik daudz, lai gogriežņi, kuŗi grafiski attēlo spēkus, kļūtu par taisna leņķa parallēlopipeda šķautnēm. Apzīmēsim šos reducēto pāru spēkus ar $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{P}_4$, pie kam $P_1 = P_2 = P_3 = P_4$.

Pielietosim paņēmienu, kuŗu uz priekšu bieži nāksies pielietot. Šis paņēmiens pastāv iekš tam, ka mēs pievienojam doto spēku sistemai citus, jaunus spēkus, kuŗi paši par sevi ņemti atrodas līdzsvarā. Pats par sevi saprotams, ka šādu līdzsvarā esošu spēku pievienošana dotai spēku sistemai, nekādā ziņā neiespaido dotās spēku sistemas iedarbi uz aplūkojamo ķermeni. Ja varēsim konstatēt, ka dotā spēku sistema, ņemta kopā ar pieņemto, līdzsvarā esošo jauno spēku sistemu, atrodas līdzsvarā, tad varam secināt slēdzienu, ka dotā spēku sistema pate par sevi arī atrodas līdzsvarā. Pievienosim dotiem spēkiem $\bar{P}_1 \ldots \bar{P}_4$ vēl četrus citus spēkus, kuŗu darbības linija lai sakristu ar mūsu doto spēku veidotā parallēlopipeda diagonalo šķēlienu krustliniju, pie kam šo spēku vektoru pārējos elementus, lai noteiktu nolīdzinājumi $\bar{P}_1' = -\bar{P}_1$, $\bar{P}_2' = -\bar{P}_2$, $\bar{P}_3' = -\bar{P}_3$ un $\bar{P}_4' = -\bar{P}_4$,kur ar $\bar{P}_1', \bar{P}_2', \bar{P}_3', \bar{P}_4'$ apzīmēti jaunievestie spēki. Kā redzams, tagad vienā no parallēlopipeda diagonālām plaknēm darbojas spēku pāri $(\bar{P}_1, -\bar{P}_1')$ un $(\bar{P}_4, -\bar{P}_4')$, kuŗu momenti ir vienādi, bet pretēji virzīti, tā tad savstarpēji līdzsvarojās. Arī otrā parallēlopipeda diagonālā plaknē darbojas divi spēku pāri $(\bar{P}_2, -\bar{P}_2')$ un$(\bar{P}_3, -\bar{P}_3')$, kuŗu momenti arī vienādi, bet pretēji virzīti, tā tad arī šie pāri savstarpīgi līdzsvarojas. No sacītā seko, ka abi dotie spēku pāri, ņemti kopā ar jaunievestiem spēkiem, kuŗi paši par sevi atradās līdzsvarā, atrodās līdzsvara stāvoklī, kurš nekādā ziņā neizjuks, ja atvienosim ievestos palīgspēkus, t.i. dotie spēku pāri paliks līdzsvarā. No nupat pierādītā seko, ka divi spēku pāri, kuŗi darbojas savstarpīgi parallēlās plaknēs, uzlūkojami par ekvivalentiem, ja viņu momenti ir vienādi un darbojās vienā un tanī pašā virzienā, raugoties uz viņu darbības plaknēm no vienas un tās pašas puses. Tādēļ mēs varam doto spēku pāri pārvietot pēc patikas ne tik vien šī pāra darbības plaknē, bet pārnest arī viņa darbību kuŗā katrā plaknē, parallēlā dotā pāra pirmatnējai darbības plaknei, negrozot šī pāra darbības efektu uz aplūkojamo ķermeni. Pārnesot spēku pāri parallēlās plaknēs, nedrīkstam tikai mainīt viņa momenta lielumu. Runājot vektora valodā, varam spēka pāra vektoriālo momentu uzlūkot kā brīvu vektoru, kuŗa darbības liniju var ne tik vien pārnest brīvi parallēli sev, bet bez tam pats vektors var vēl slīdēt gar savu darbības liniju pēc patikas.

Tas apstāklis, ka spēku pārus var pārnest kuŗā katrā plaknē, parallēlā dotai viņa darbības plaknei, atļauj likumu, kuŗu mēs pielietojam vairāku spēku pāru, kuŗi darbojās vienā un tanī pašā plaknē, savienošanai rezultējošā spēku pārī, pielietot arī tādu spēku pāru savienošanai, kuŗi darbojās savstarpīgi parallēlās plaknēs, t.i. varam teikt, ka arī šādus spēku pārus savienojot iegūstam rezultējošu spēku pāri, kuŗa darbības plakne ir parallēla doto spēku pāru darbības plaknēm un kuŗa moments ir vienāds doto spēku pāru algebrāiskai summai.

9. Spēku pāra un atsevišķa spēka savienošana ekvivalentā sistēmā.



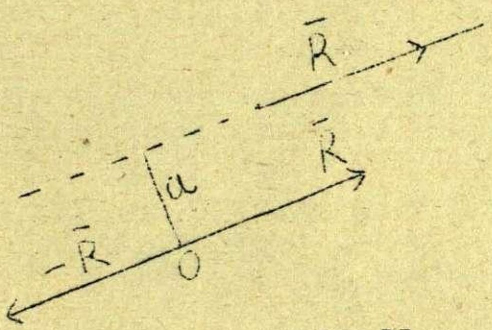
zīm.32.

Reducējam doto pāri pie spēka R, tad viņa plecs

$$a = \frac{M(O)}{R}$$

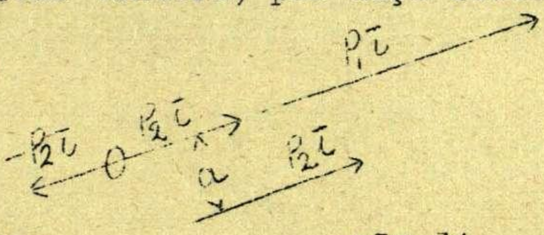
jauno pāri novietojam tā, lai $-\bar{R}$ darbības linija sakristu ar $\bar{R}$ darbības liniju (sk.zīm.32). Tad $\bar{R} + (-\bar{R}) = 0$, paliek spēks $\bar{R}$ pārbīdīts par $a = \frac{M(O)}{R}$ uz labo pusi (ja pāra momenta zīmi pārmainītu uz pretējo, tad $\bar{R}$ izrādītos pārbīdīts par $a = \frac{M(O)}{R}$ uz kreiso pusi no $\bar{R}$ pirmatnējas stāvotnes). Tā tad sistema, sastāvoša no spēku pāra M(O) un atsevišķa spēka $\bar{R}$, ir ekvivalenta pēdējam, pārbīdam par $a = \frac{M}{R}$ uz vienu jeb otru pusi, parallēli sev, no viņa pirmatnējas stāvotnes.

Otrādi, ar spēku pāra palīdzību var pārnest doto spēku $\bar{R}$ kaut kuŗā plaknes punktā. Tiešam (sk.zīm.33), ja spēku $\bar{R}$ jāpārnes jaunā punktā O, tad no statikas viedokļa ir atļauta operacija pielikt O divus vienādus un pretēji virzītus spēka vektorus $\bar{R}$ un $-\bar{R}$, pie kam rodas pāris $M(R + /-R/) = M(O) = -aR$ un spēks $\bar{R}$ pielikts jaunā punktā O. Jaunā spēku sistema /$\bar{R}$,M(O)/ ir ekvivalenta pirmai ($\bar{R}$).

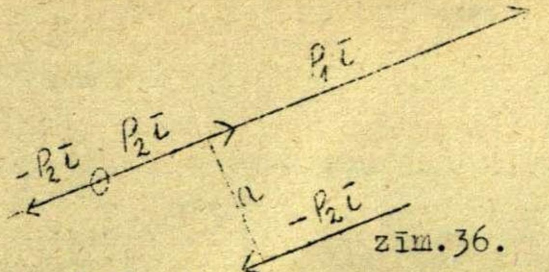


zīm.33.

1.Uzdevums: Pārveidot vienkāršākā spēku sistemu ($P_1\bar{i}, P_2\bar{i}$). Skat. zīm.34. (Ja parallēlu spēku moduli ir dažādi, tad ir ērti ievest vienības vektoru, par kuŗa lietošanu skat. Ievads mēchanikā, 39-40.l.p.) Pieliekam uz $P_1\bar{i}$ darbības linijas divus spēkus $P_2\bar{i}$ un $-P_2\bar{i}$. Tagad rodas spēku pāris $M(O) = aP_2$ un atsevišķs spēks $\bar{R} = (P_1 + P_2)\bar{i}$, caur ko uzdevums ir reducēts pie jau augstāk iztirzātā.



zīm.34.



zīm.36.

2.Uzdevums: Pārveidot vienkāršākā spēku sistemu $(P_1\bar{i}, -P_2\bar{i})$. Sk. zīm.35. Tāds pats paņēmiens noved pie $M(O) = -aP_2$ un $\bar{R}(P_1-P_2)\bar{i}$, pie kam tāļākajā uzdevuma atrisināšanas gaita ir skaidra.

3.Uzdevums. Reducēt doto plaknē spēka sistemu pie viņai ekvivalentās ar pāra palīdzību.

Izvēlam plaknē brīvu punktu O, caur kuŗu novelkam linijas, paralēlas visiem dotiem spēkiem. Pēc tam pie šī punkta O uz linijas, kuŗa parallēla spēka $\bar{P}_i$ darbības linijai, pieliekam spēkus $\bar{P}_i$ un $-\bar{P}_i$, caur ko līdzsvars netiek traucēts. Bet caur šo operāciju ir radies atsevišķs spēks, nonests p.O un bez spēka pāris $\bar{M}_1(O)$. Līdzīgā kārtā pie p.O nonesam visus pārējos spēkus, tā kā beidzot visi spēki izrādīsies pielikti p.O un ~~mmm~~ būs radīti n spēku pāri. Atsevišķi pielikti p.O spēki reducējas pie

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{P}_i$$

bet radušies pāri savienojas koppārī

$$M(O) = \sum_{i=1}^{i=n} M_i(O)$$

pie kam problēma reducējas pie jau apskatītā, atsevišķa spēka un spēku pāra savienošanas vienā ekvivalentā sistemā.

10. Plakanas (atrodošas vienā plaknē) parallēlu spēku sistemas savienošana.

Kā redzējam (skat.§) doto kādā plaknē parallēlu spēku sistemai ekvivalenta spēku sistema ir noteikta caur diviem vektoriem:

$$1) \quad \bar{R} = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{P}_i = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{i}\, P_i = \bar{i} \sum_{i=1}^{i=n} P_i$$

kur $\bar{i}$ ir vienības vektors ar virzienu parallēlu kopējam doto parallēlu spēku virzienam, un

$$2) \quad \bar{M}_o(\bar{R}) = \bar{i}_z(xY - yX) = \bar{i}_z rR = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{M}_o(\bar{P}_i) = \bar{i}_z \sum_{i=1}^{i=n} \pm a_i P_i =$$

$$= \bar{i}_z \sum_{i=1}^{i=n} (x_i Y_i - y_i X_i)$$

kā no $\bar{R} = \bar{i} \sum_{i=1}^{i=n} P_i$ redzams, $\bar{R}$ virziens ir vienāds ar $\bar{i}$ virzienu, t.i. $\bar{R}$ ir parallēls doto parallēlu spēku virzienam, sakarā ar ko var rakstīt: $\bar{R} = \bar{i}R$, kur R ir algebrāisks lielums, $\bar{R}$ vektora projekcija uz $\bar{i}$ virzienu.

Tā tad

$$\bar{i}R = \bar{i} \sum_{i=1}^{i=n} P_i$$

Saīsinājot uz $\bar{1}$ gūstam algebrāisku sakarību:

$$R = \sum_{i=1}^{i=n} P_i .$$

Šī vektora $\bar{1}R$ projekcija uz virzienu, perpendikulāru pret $\bar{1}$ virzienu, dotu $0 = 0$, t.i. dotu identitāti. Caur šo mēs konstatējam, ka parallēliem spēkiem viena projekcijas nolīdzinājuma trūkst samērā pret vispārējo plakano spēku gadijumu, kur tādu, kā redzējam, bija divi.

Momenta vektoru arī noprojektējot uz $\bar{Z}$ virzienu, gūstam:

$$M_z = M = xY - yX = rR = \sum_{i=1}^{i=n} (x_i Y_i - y_i X_i) = \sum_{i=1}^{i=n} \pm a_i P_i$$

Tūlēt redzēsim, kādas īpatnības piemīt parallēlo spēku momenta vektoram. Pirmkārt, mēs konstatējam, ka parallēlu spēku sistemas kopspēka $\bar{R} = \bar{1}R = \bar{1}\sum_{i=1}^{i=n} P_i$ projekcijas var gūt, noprojecējot uz $\bar{X}$ resp $\bar{Y}$ ass virzienu vienīgi $\bar{1}$ vektoru. Ja apzīmēsim šī vektora virziena leņķi pret X asi ar α, tad gūstam:

$$X = R.1.\cos(\bar{X},\bar{1}) = R.\cos\alpha = 1.\cos(\bar{X},\bar{1}) \sum_{i=1}^{i=n} P_i = \cos\alpha \sum_{i=1}^{i=n} P_i ,$$

tāpat $\quad Y = R.\sin\alpha = \sin\alpha \sum_{i=1}^{i=n} P_i \quad$ un

$$M = x.R.\sin\alpha - y.R.\cos\alpha = x.\sin\alpha \sum_{i=1}^{i=n} P_i - y.\cos\alpha \sum_{i=1}^{i=n} P_i =$$

$$= \sin\alpha \sum_{i=1}^{i=n} x_i P_i - \cos\alpha \sum_{i=1}^{i=n} y_i P_i$$

kas reprezentē $\bar{R}$ darbības linijas nolīdzinājumu, ko var dažādi izmantot un starp citu izlietot $\bar{R}$ iedarbes punktu uziešanai, kuŗu ir nenoteikts daudzums uz $\bar{R}$ darbības linijas. Bet starp šiem $\bar{R}$ iedarbes punktiem viens pelna sevišķu ievērību. Viņš ir noteikts tā:

$$x_c \sin\alpha \sum_{i=1}^{i=n} P_i = \sin\alpha \sum_{i=1}^{i=n} x_i P_i \;, \quad x_c = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} x_i P_i}{\sum_{i=1}^{i=n} P_i}$$

$$y_c \cos\alpha \sum_{i=1}^{i=n} P_i = \cos\alpha \sum_{i=1}^{i=n} y_i P_i \;, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} y_i P_i}{\sum_{i=1}^{i=n} P_i}$$

Šo punktu sauc par parallēlu spēku centru. Viņam piemīt tā ievērojamā īpašība, ka viņa stāvotne plaknē, noteikta caur koordinātēm x_c, y_c, ir neatkarīga no parallēlu spēku sistemas virziena leņķa α. Sakarā ar to, visu doto parallēlu spēku sistemu var pagriezt ap sistemas spēku iedarbes punktiem par vienu un to pašu leņķi, bez kā tas atsauktos uz punkta (x_c, y_c) stāvotni.

Sakarības:

$$x_c \sum_{i=1}^{i=n} P_i = x_c R = \sum_{i=1}^{i=n} x_i P_i$$

$$y_c \sum_{i=1}^{i=n} P_i = y_c R = \sum_{i=1}^{i=n} y_i P_i$$

dod iespēju apskatīt kādus savdabīgus momentus. Šīs izteiksmes ir tagad kādu skalaru lielumu momenti, jo virziena elements, kuŗš izpaudās leņķa trigonometriskās funkcijās, ir zudis caur attiecīgu saīsinājumu. Tādu lielumu momenti visā mēchanikā spēlē lielu lomu un viņus sauc par attiecīgo skalaro lielumu (masas,tilpumu,laukumu u.t.t.) statiskiem momentiem pret attiecīgām momentu asīm, pie kam par momenta asi skaitās tā ass, no kuŗas tiek skaitītas attiecīgā skalarā lieluma centra koordinates. Tā,piemēram, $x_i P_i$ ir skalara lieluma P_i koncentrēta p. $(x_i y_i)$, statiskais moments pret asi Y, bet $y_i P_i$ - pret asi X.

Ja ir izvēlēta speciāla koordinatu sistema, ar kuŗas vienu asi sakrīt parallēlo spēku virziens, piemēram ar Y asi ($\alpha = \frac{\pi}{2}$), tad:

$$M = xR = rR = \sum_{i=1}^{i=n} x_i P_i = \sum_{i=1}^{i=n} \pm a_i P_i$$

no kurienes viegli var uziet attiecīgu x resp.

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} x_i P_i}{\sum_{i=1}^{i=n} P_i} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} \pm a_i P_i}{\sum_{i=1}^{i=n} P_i} = x_c$$

11. Plakanas parallēlu spēku sistemas līdzsvara noteikumi.

A. Grafostatiskie noteikumi.

Jānoslēdzās abiem poligoniem, SP un VP. SP noslēgšanās vien nav pietiekošs noteikums pilnam līdzsvaram, jo var rasties spēku pāris M(O), kuŗš VP nenoslēdz. Pilna līdzsvaram tā tad nepieciešams, lai arī VP noslēgtos.

B.Līdzsvara analitiskie noteikumi.

Doto parallēlo spēku plakana sistema atradīsies līdzsvarā tad,ja viņas rezultante R ir nulle un bez tam visu doto spēku momentu summa, pret kuŗu katru plaknes punktu, piemēram, koordinātu sākuma punktu,ir nulle. Pēdējais noteikums nepieciešams tādēļ, ka pretējā gadijumā nebūtu izslēgta varbūtība, ka dotā parallēlo spēku sistema reducējas pie spēku pāra. Tā tad plakanai parallēlu spēku sistemai nepieciešami divi, viens no otra neatkarīgi, līdzsvara noteikumi:

$$R = \sum_{i=1}^{i=n} P_i = 0 \quad \text{un} \quad M = \sum_{i=1}^{i=n} x_iY_i - y_iX_i = \sin\alpha \sum_{i=1}^{i=n} x_iP_i -$$

$$- \cos\alpha \sum_{i=1}^{i=n} y_iP_i = \sum_{i=1}^{i=n} \pm a_iP_i = 0,$$ no kurienes seko, dalot

$\sin \sum_{i=1}^{i=n} x_iP_i - \cos\alpha \sum_{i=1}^{i=n} y_iP_i$ uz $\sin\alpha\cos\alpha$:

$$\frac{\sum_{i=1}^{i=n} x_iP_i}{\cos\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} y_iP_i}{\sin\alpha}$$

Ja $\alpha = \frac{\pi}{2}$, tad $\sum_{i=1}^{i=n} x_iP_i = \sum_{i=1}^{i=n} \pm a_iP_i = 0$. Tā tad parallēlo spēku statisko līdzsvaru nodrošina divi analitiskie noteikumi, no kuŗiem viens ir

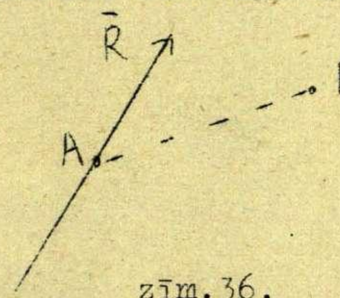
$$1) \quad \sum_{i=1}^{i=n} P_i = 0$$

bet otrs var gūt divējādu formu:

$$2) \quad \frac{\sum_{i=1}^{i=n} x_iP_i}{\cos\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} y_iP_i}{\sin\alpha} \quad \text{jeb} \quad \sum_{i=1}^{i=n} x_iP_i = \sum_{i=1}^{i=n} \pm a_iP_i = 0$$

atkarībā no projekciju asu virziena.

Šos divus nolīdzinājumus iespējams arī aizvietot ar diviem citiem nolīdzinājumiem. Mēs varam,piemēram, projektēt dotos spēkus uz kuŗu katru asi un sastādīt viņu momentu summu pret kuŗu katru punktu. Spēki atradīsies līdzsvarā, ja, kā projekciju summa, tā arī momentu summa būs vienādas ar nulli. Katrā gadījienā vienam no nolīdzinājumiem jābūt momentu nolīdzinājumam. Mēs varam abus līdzsvara noteikumus izteikt divu momentu nolīdzinājumu veidā. Tiešam, dotā spēku sistema atradīsies līdzsvarā, ja dotās parallēlo spēku sistemas momentu summas pret diviem dažādiem punktiem A un B, kuŗus savienojošā taisne krusto doto spēku darbības linijas, katra atsevišķi būs vienādas nullei. Ja doto spēku moments pret punktu A ir nulle,tad šie spēki nevar vairs reducēties pie spēku pāra, bet viņiem jāatrodas līdzsvarā jeb jāreducējas pie rezultantes $\bar{R}$, ejošas caur punktu A. Tādā pat kārtā, ja doto spēku moments pret punktu B ir nulle, tad šiem spēkiem vai nu jālīdzsvarojās jeb jāreducējās pie vienas rezultantes, kuŗas darbības linijai jāiet caur punktu B. Ja nu vienā un tanī pašā laikā doto spēku momenti pret punktiem A un B ir nulles, tad tā iemesla dēļ, ka spēku rezultante nevar iet reizē caur abiem punktiem A un B, jo taisne AB nav parallēla doto spēku darbības virzienam,jānāk pie slēdziena, ka dotai spēku sistemai tikai iespējams atrasties līdzsvarā.

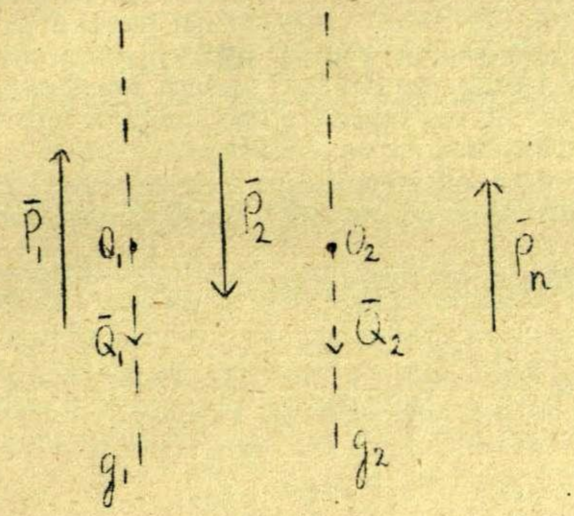


zīm.36.

Tā tad plakanas parallēlu spēku sistemas līdzsvara noteikumi var tikt izteikti nolīdzinājumiem: $M_A = 0$, $M_B = 0$, kur M_A ir doto spēku momentu summa pret punktu A un M_B – to pašu spēku momentu summa pret punktu B, kuŗš guļ uz taisnes AB, kuŗa nav parallēla doto spēku darbības liniju virzienam.

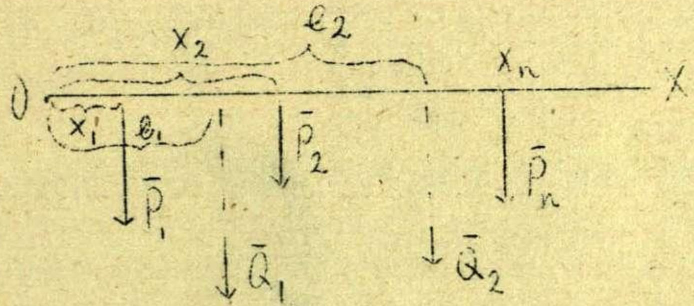
Šie pēdējie nolīdzinājumi ļoti ērti šāda uzdevuma atrisināšanai: līdzsvarot doto plakano parallēlo spēku $\bar{P}_1, \bar{P}_2 \ldots \bar{P}_n$ sistemu ar dieviem spēkiem $\bar{Q}_1, \bar{Q}_2$, kuŗi darbojās gar divām dotām taisnēm g_1 un g_2, parallēlām dotās sistemas spēku darbības linijām.

Šī uzdevuma atrisināšanai, uzstādīsim doto spēku $\bar{P}_1, \bar{P}_2 \ldots \bar{P}_n$ un meklēto spēku $\bar{Q}_1, \bar{Q}_2$ līdzsvara noteikumus divu momentu nolīdzinājumu veidā, pie kam vienu momentu summas nolīdzinājumu sastādīsim pret punktu O_1, guļošu uz taisnes g_1 un otru pret punktu O_2, guļošu uz taisnes g_2. Katrā no šādā ceļā iegūtiem nolīdzinājumiem ietilps tikai pa vienam nezinamam spēkam. Sastādot momentu nolīdzinājumus, meklējamo spēku apakšvirzienus var izvēlēt pēc patikas. Ja faktiskais attiecīgā spēka apakšvirziens sakritīs ar izvēlēto, tad momentu nolīdzinājums sniegs šim spēkam pozitivu vērtību, bet pretējā gadijumā - negativu vērtību. Paskaidrosim sacīto ar piemēru.



zīm.37.

Piemērs. Uz horicontālu stingru taisni OX darbojās vertikali n spēki $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots \bar{P}_n$, kuŗu iedarbes punkti atrodas atstatumos $x_1, x_2 \ldots x_n$ no taisnes sākuma punkta O. Tiek prasīts līdzsvarot dotos spēkus ar diviem vertikaliem spēkiem $\bar{Q}_1, \bar{Q}_2$, kuŗu iedarbes punktu atstatumi no punkta O lai būtu e_1 un e_2.



zīm.38.

Lai noteiktu meklējamo spēku $\bar{Q}_1$ un $\bar{Q}_2$ lielumus, pieņemsim, ka šie spēki virzīti uz leju un sastādīsim doto un meklējamo spēku līdzsvara noteikumus divu momentu nolīdzinājumu veidā, ņemot šīm momentu summas reiz pret spēka $\bar{Q}_2$ un otru reizi pret spēka $\bar{Q}_1$ iedarbes punktiem. Šādā ceļā iegūtie nolīdzinājumi būs:

$$P_1(e_2 - x_1) + P_2(e_2 - x_2) + \ldots + P_n(e_2 - x_n) + Q_1(e_2 - e_1) = 0$$

no kurienes:

$$Q_1 = -\frac{P_1(e_2 - x_1) + \ldots + P_n(e_2 - x_n)}{e_2 - e_1}$$ un Q_2

$$-P_1(x_1 - e_1) - P_2(x_2 - e_1) - \ldots - P_n(x_n - e_1) - Q_2(e_2 - e_1) = 0,$$

no kurienes:

$$Q_2 = -\frac{P_1(x_1 - e_1) + \ldots + P_n(x_n - e_1)}{e_2 - e_1}$$

Tā kā spēku Q_1 un Q_2 izteiksmju skaitītājos atrodās kā pozitivi, tā arī negativi lielumi, tad kā Q_1, tā arī Q_2 vērtības var iznākt vai nu pozitivas vai arī negativas, t.i. katra šo spēku apakšvirziens var sakrist ar no mums izvēlēto, jeb būt viņam pretējs.

Nupat aprakstītā veida līdzsvars izjūk tikko parallēlu spēku sistemu pagriež ap spēku iedarbes punktiem par kādu leņķi. Var uzstādīt arī tāda līdzsvara noteikumus, kuŗš ir neatkarīgs no minētā pagrieziena leņķa. Šādu līdzsvaru sauc par astatisku un pie viņa mēs nonākam, uzrakstot noteikumu, ka momentam pie kaut kuŗa leņķa α jāiznīcinājās. Uzrakstīsim statiska līdzsvara momenta noteikumu:

$$\sin\alpha \sum_{i=1}^{i=n} x_i P_i - \cos\alpha \sum_{i=1}^{i=n} y_i P_i = 0$$

Ja šim noteikumam jātiek izpildītam pie kaut kuŗa leņķa α nozīmes, tad tas ir tikai tad, ja atsevišķi

$$\sum_{i=1}^{i=n} x_i P_i = 0 \quad \text{un} \quad \sum_{i=1}^{i=n} y_i P_i = 0$$

Tiešam, minētam noteikumam jāpastāv starp citiem arī pie leņķa $\alpha = \frac{\pi}{2}$ tad:

$$\sum_{i=1}^{i=n} x_i P_i = 0$$

bet viņam jāpastāv arī pie leņķa $\alpha = 0$, tad

$$\sum_{i=1}^{i=n} y_i P_i = 0$$

Tā tad astatiskā līdzsvara analitiskie noteikumi ir:

$$1) \quad \sum_{i=1}^{i=n} P_i = 0$$

$$2) \quad \sum_{i=1}^{i=n} x_i P_i = 0$$

$$3) \quad \sum_{i=1}^{i=n} y_i P_i = 0$$

§ 3. Par smaguma centru.

Atsevišķu punktu sistemas smaguma centrs.

Vispirms aplūkosim sistemu, sastāvošu no atsevišķiem materiālie punktiem, kuŗi ieņem zināmas stāvotnes plaknē. Apzīmēsim kaut kuŗa punkta koordinātes caur x_i un y_i, un viņu svaru caur G_i (katrā punktā var būt koncentrēts dažāds vielas daudzums un tāpēc arī viņu svars var būt dažāds). Visu spēku G_i rezultējošais spēks, t.i. visas materiālo punktu sistemas kopējs svars, lai ir G un viņa pielikšanas punkta koordinātes ξ un η ,tad, pamatojoties uz iegūtām, paralēlos spēkus apskatot, formulām, varam rakstīt, ka

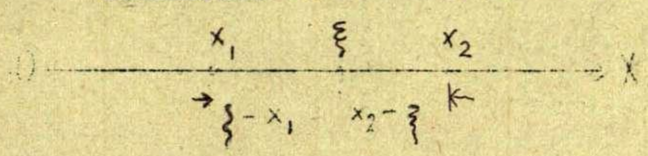
$$G = \sum_{i=1}^{i=n} G_i \;; \qquad \xi = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} G_i x_i}{\sum_{i=1}^{i=n} G_i} \quad \text{un} \quad \eta = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} G_i y_i}{\sum_{i=1}^{i=n} G_i}$$

jeb citādi (divu momentu nolīdzinājumu veidā):

$$G\xi = \sum_{i=1}^{i=n} G_i x_i \,, \quad G\eta = \sum_{i=1}^{i=n} G_i y_i \,, \quad \text{kur} \quad G = \sum_{i=1}^{i=n} G_i$$

Ja visi dotie punkti atrodas uz vienas taisnes, tad viņu smaguma centrs attiecīgi atradīsies uz tās pašas taisnes, kur atrodas minētie punkti un noteiksies caur vienu nolīdzinājumu.

Piemēri. 1) Uz ass OX attālumos x_1 un x_2 no viņas sākuma O atrodas divi materiāli punkti, kuŗu svars ir G_1 un G_2. Šo punktu smaguma centra attālums no koordinātu sākuma izteiksies šādi:



$$\xi = \frac{G_1 x_1 + G_2 x_2}{G_1 + G_2}$$

zīm.39.

no kurienes:

$$\xi - x_1 = \frac{G_2(x_2 - x_1)}{G_1 + G_2} \quad \text{un} \quad x_2 - \xi = \frac{G_1(x_2 - x_1)}{G_1 + G_2}$$

un tā tad:

$$(\xi - x_1) : (x_2 - \xi) = G_2 : G_1$$

t.i., ka doto punktu smaguma centrs sadala attālumu starp viņiem daļās, kuŗas pretēji proporcionālas punktu svariem (mazākais nogrieznis atrodas tajā pusē, kur smagākais punkts.

2) Ja uz ass OX attālumos $x_1 \ldots x_n$ no sākuma O atrodās n vienāda svara materiālu punktu, tad viņu smaguma centra attālums no O

$$\xi = \frac{Gx_1 + \ldots + Gx_n}{Gn} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

tā tad smaguma centra attālums no sākuma O šinī gadījumā ir vidējais aritmetiskais no visu doto punktu atsevišķiem attālumiem.

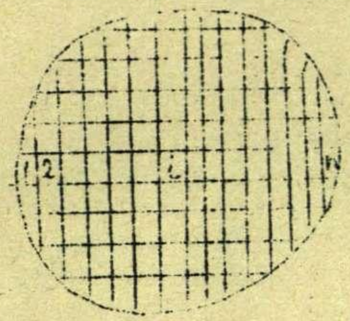
3) Tāpat arī kuŗas katras vienāda svara materiālu punktu sistemas, atrodošas plaknē, smaguma centra koordinātes, kā vidējie aritmetiskie no attiecīgām punktu koordinātēm.

Veselu materiālu virsmu un liniju smaguma centri.

Pieņemsim, kā dotie materiālie punkti nepārtraukti piepilda zinamu plakni, veidodami veselu materiālu plakni. Lai atrastu šādas plaknes smaguma centru, sadalīsim viņu mazās daļiņās. Pirms iet tālāk, apskatīsim jēdzienu par noteikto integrali.

Noteiktais integrāls un viņa loma mēchanikā.

Ņemsim vērā fig. laukumu (sk. zīm. 40). Šo laukumu var saskaldīt laukuma strēmelēs, kuŗu skaits lai ir n. Apzīmēsim strēmeles, kuŗas kārtas numurs N ir i, laukumu ar ΔF_i, kur ir grieķu burts "delta" (mūsu D).



zīm. 40.

Ar šo apzīmējumu mēs pastrīpojam, ka ΔF_i ir figuras laukuma elements (daļa). Kā saprotams, figuras laukumu gūstam, summējot strēmeļu laukumus, ar citiem vārdiem, figuras laukums F ir n strēmeļu laukumu summa, t.i.

$$F = \sum_{i=1}^{i=n} \Delta F_i$$

Ja mēs strēmeļu skaitu n palielinātu, tad tāpat vienmēr būtu:

$$F = \sum_{i=1}^{i=n} \Delta F_i$$

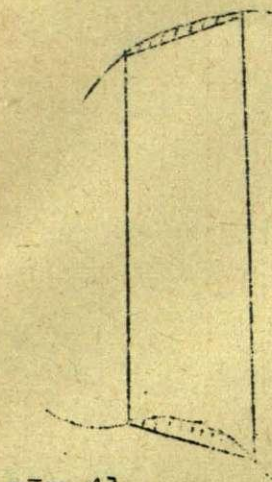
Bet šai strēmeļu skaita palielināšanai nav robežu, mēs varam izvēlēties strēmeļu skaitu, kuŗš pārkāptu katru skaitli, cik liels viņš arī nebūtu. Šinī procesā, līdz ar strēmeļu skaita palielināšanos, strēmeļu laukumi samazinātos, pie kam samazināšanai arī nebūs robežas, t.i. strēmeļu laukumi neaprobežoti tuvosies 0 līdz ar strēmeļu skaita neaprobežotu palielināšanos, bet figuras laukums F paliks viens un tas pats, t.i.

$$F = \sum_{i=1}^{i=n\to\infty} \Delta F_i$$

kur $n - \infty$ apzīmē, ka n tagad ir skaitlis, kuŗš var pārkāpt katru skaitli, cik liels viņš arī nebūtu. Šai savdabīgai summai, sastādītai no bezgalīgi liela skaita ($n \to \infty$) bezgalīgi mazu summandu ($\Delta F_i \to 0$), ir liela nozīme mēchanikā un vispār dabas un techniskās disciplīnās. Viņu sauc par noteiktu integralu, ņemtu noteiktās robežās, mūsu gadījumā figūras kontura robežās. Lielumu, kuŗš neaprobežoti tuvojas 0 (bezgalīgi mazu lielumu) apzīmēsim ar d un viņu sauc par attiecīgā lieluma diferenciālu, tā tad ΔF_i vietā jālieto dF_i laukuma diferenciālu. Arī simbols $\sum_{i=1}^{n\to\infty}$ tiek atvietots ar integrāla simbolu $\int$ un tiek rakstīts $F = \int^{F} dF_i$, kuŗu jālasa: " figuras laukums F ir dF integrals, izplatīts uz visu figuras laukumu F".

Tāpat arī attiecībā uz figuras laukuma smagumu resp. svaru (par starpību starp smagumu un svaru sk. Ievads mēchanikā 70. l.p.) var teikt, ka šis smagums resp. svars ir noteikti integraļi, sastādīti un ņemti noteiktās figuras kontura robežās.

Iepriekšējā integrālā ietilpa strēmeļu laukumi, kuŗus gan bija viegli apzīmēt ar ΔF_i resp. dF, bet nebija iespējams šo strēmeļu laukumus aprēķināt; šīs strēmeles izrādijās galos norobežotas ar līkņu elementiem.



zīm.41.

Mēs varējam gan šīs strēmeles atvietot ar trapecēm (sk.zīm.41), kuŗu laukumi nesakrīt pilnīgi ar ΔF_i resp. dF laukumiem, bet jāatzīst, ka šī diference var palikt mazāka par katru skaitli, lai cik mazs viņš arī nebūtu, ja mēs sāktu strēmeļu skaitu neaprobežoti palielināt. Šinī procesā šo elementāro trapecū, kuŗu skaits ir bezgalīgi liels, summas robeža, kā viegli saprotams, ir figuras laukums F, kādēļ varētu rakstīt:

$$F = \lim \sum_{i=1}^{i=n\to\infty} \Delta F_i = \int^F dF$$

kur ΔF_i resp. dF tagad ir kādas elementāras trapeces laukuma apzīmējums.

Ja vienosimies, tāļāk poligona malu skaitu neaprobežoti palielināt, tad sapratīsim, ka zem tādiem apstākļiem, poligona laukums F neaprobežoti tuvosies dotas figuras laukumam F, tā kā F varēs uzskatīt par F robežu, kad poligona malu skaitu neaprobežoti sāksim palielināt. Līdz ar šo arī varēs rakstīt:

$$\xi = \lim \xi' = \lim \frac{\sum_{i=1}^{i=n\to\infty} \Delta G_i}{G} = \frac{\int^F x dG}{G}$$

(kur ξ ir dotās figuras laukuma smaguma centra koordināte, un ξ' ir poligona laukuma smaguma centra koordinate) ; tāpat arī:

$$\eta = \lim \eta' = \frac{\int^F y dG}{G}$$

Augšā izvestas figuras laukuma smaguma centra koordinātu izteiksmes var pārveidot, ievedot jēdzienu par laukuma resp. garuma vienības smagumu. Tad, piemēram,

$$\Delta G_i = \sigma_i . \Delta F_i$$

kur σ_i, proporcionālitātes koeficients, ir laukuma resp. garuma vienības smagums. Vispārējā gadījumā σ_i ir punkta koordinātu funkcija: $\sigma_i = \sigma_i(x,y)$. Pēdējā gadījumā kādas rūtiņas smaguma ir nenoteikts, jo rūtiņas robežās atrodās daudz punktu, kuŗu katrs punkts var noteikt σ_i vērtību, bet ir saprotams, ka līdz ar rūtiņas neaprobežotu samazināšanos, šī nenoteiktība zūd un robežā pie $\lim F_i = 0$ viņa galīgi pazudīs, jo tad ΔF_i pārvēršās punktā ar noteiktu σ_i vērtību, kādēļ atkal:

$$\xi = \lim \xi' = \frac{\int^F \sigma . dF . x}{\int^F \sigma . dF} \quad \text{resp.} \quad \eta = \lim \eta' = \frac{\int^F \sigma . dF . y}{\int^F \sigma . dF}$$

Iepriekšējas formulas ir iespējams vēl tālāk pārveidot, pieņemot, ka aplūkojamais ķermenis ir homogens, t.i. ka visu viņa vienādu tilpuma daļu svari arī ir vienādi. Tādā gadījumā augšā minētais proporcionālitātes koeficients ir pastāvīgs (konstants) lielums. Sakarā ar šo, liekot $\sigma = \sigma_0 = Const.$, gūstam:

$$G = \sum_{i=1}^{i=n} \sigma_0 \cdot \Delta F_i = \sigma_0 \sum_{i=1}^{i=n} \Delta F_i = \sigma_0 F \ , \quad \sigma_0 = \frac{G}{F} \quad \text{un}$$

$$\xi = \lim \frac{\sigma_0 \sum_{i=1}^{i=n\to\infty} x_i \Delta F_i}{\sigma_0 F} = \frac{\int^F xdF}{F} \ , \quad \eta = \frac{\int^F ydF}{F}$$

$\xi F = \int^F xdF$, $\eta F = \int^F ydF$, kur beidzamās izteiksmes sauc par attiecīgu figuru laukumu statiskiem momentiem pret asi Y resp. X. Ir saprotams, ka, ja asis pārnes smaguma punktā, kur $\xi = \eta = 0$, tad statiskie momenti pāriet 0. Uz priekšu tilpumu īpatnējo svaru apzīmēsim ar γ , laukumu ar σ un liniju ar χ .

Skaitliski ķermeņa īpatnējais svars ir vienāds ar aplūkotā ķermeņa tilpuma vienības svaru (jo pie V = 1, $\gamma = G$). Pēc savas būtības īpatnējais svars (pareizāki smagums) ir smaguma spēka attiecība pret tilpumu, un tāpēc viņa mēra vienība ir spēka vienības attiecība pret tilpuma vienību. Izteicot spēku G (t.i. aplūkojamā ķermeņa smagumu (svaru) grammos un tilpumu V kubikcentimetros, dabūsim īpatnējā svara vienības apzīmējumu $[gr/cm^3]$. Pie šādas vienību izvēles ūdens īpatnējais svars gūst nozīmū 1 (jo 1 cm^3 ūdens sver 1 gr) un kuŗa katra cita ķermeņa īpatnējais svars ir vienāds ar viņa relatīvo svaru attiecībā pret ūdeni, t.i. ar ķermeņa svara attiecību pret vienāda tilpuma ūdens svara. Visās fizikas un ķimijas tabelēs īpatnējie ķermeņu svari parasti tiek doti kā relatīvie svari un tā tad šo relatīvo svaru vērtības skaitliski sakrīt ar attiecīgo tilpuma vienības svaru $[gr/cm^3]$ vienībās (lai gan tabelēs šī vienība parasti netiek minēta. Ja mēs izteiktu ķermeņa svaru kilogrammos un tilpumu atstātu izteiktu kb.centimetros, tad gūsim ķermeņa īpatnējo svaru vienībās $[kg/cm^3]$ un pie šīs vienības ūdens īpatnējais svars būs 0,001 un tādā pašā attiecībā samazināsies arī citu ķermeņu īpatnējie svari. Tā tad kuŗa katra ķermeņa īpatnējā svara skaitliskā nozīme atkarājās no spēka un tilpuma vienību izvēles, bet relatīvais svars ir abstrakts skaitlis, pilnīgi neatkarīgs no mērīšanas vienībām.

Tā kā materiāls ķermenis vienmēr ir reālāks jēdziens, ne kā materiāla plakne un linija, tad iepriekšējo jēdzienu noskaidrošanai lietojam materiālu ķermeni; saprotams, ka vis sacītais attiecas arī uz materiālām plaknēm un linijām ar attiecīgu vienības svara (dimenzijas) maiņu.

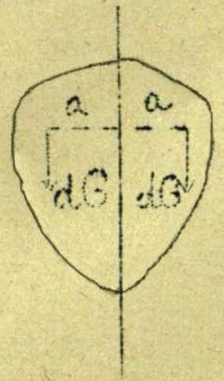
Dažas teorēmas par smaguma centra stāvotni.

Iepriekšējo izteiksmju summas sastāv no bezgalīgi daudziem bezgalīgi maziem locekļiem un tā tad patiesībā, kā teikts, ir noteiktie integraļi, kādēļ vispārīgi kuŗa katra ķermeņa smaguma centra noteikšana piekrīt integrālrēķiniem. Daudzos gadījumos tomēr ir iespējams atrast homogenu ķermeņu smaguma centru bez integrālrēķinu palīdzības. Atstājot pagaidām jautājumu par ķermeņu smaguma centru uziešanu atklātu, piegriezīsimies jautājumam par figuru laukumu un liniju smaguma centru uziešanu.

Sekojoši likumi mums palīdzēs atrisināt uzstādīto jautājumu, vienkāršus paņēmienus lietojot.

"Ja homogenam figuras laukumam piemīt simmetrijas ass,tad viņa smaguma centram jāatrodas uz šīs ass".

Lai to pierādītu, iedomāsimies, ka figuras laukuma simmetrijas ass ir vertikala. Aplūkosim tagad kaut kādu laukuma daļiņu, atrodošos a attālumā no simmetrijas ass un viņas svaru apzīmēsim ar dG. Tā kā plakne ir homogena un simmetriska, tad katrai aplūkojamai daļiņai atbilst tik pat smaga daļiņa, kuŗa atradīsies laukuma simmetrijas ass otrā pusē tādā pat attālumā a no minētās ass. Abiem spēku dG momentiem adG pret simmetrijas asi ir vienādas absolūtās vērtības,bet pretējas zīmes un tādēļ viņu algebrāiskā summa ir vienāda ar 0. No šejienes seko, ka visu spēku dG kopējam statiskam momentam



$$\sum_{i=1}^{i=n} adG$$

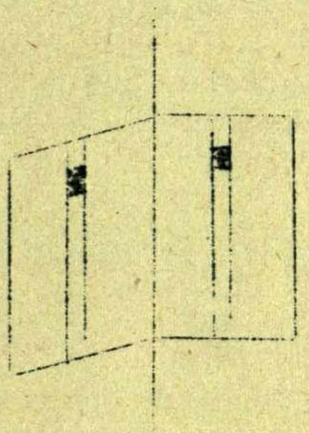
zīm.42.

pret simmetrijas asi, attiecinātam uz visām laukuma daļiņām, jābūt vienādam ar nulli, jo katram šīs summas pozitivam loceklim atbilst tāds pats negatīvs loceklis. No otras puses,

$$\sum_{i=1}^{i=n} adG$$

līdzinājās kopējā svara G momentam, tā tad viņa reizinājumam ar smaguma centra attālumu no simmetrijas ass. Ja šis reizinājums līdzinājās nullei, tad minētam attālumam jābūt vienādam ar 0 (jo $G \neq 0$), tā tad figuras laukuma smaguma centram jāatrodas uz viņas simmetrijas ass.

No pievestā pierādijuma seko ļoti svarīgs izteiktās teoremas paplašinājums. Nav vajadzīgs, lai ass, no kuŗas mēram daļiņu attālumus, būtu matemātiskā nozīmē simmetrijas ass, t.i. lai ikkatras divas attiecīgās daļiņas atrastos uz taisnes, statoniskas pret viņu, bet pilnīgi pietiek, ja katrai daļiņai, kas atrodas uz vienu pusi no minētās ass, atbilstu otrā pusē tādā pašā attālumā no viņas atrodošā tik pat smaga otra daļiņa. Taisne, kuŗa savieno šīs abas daļiņas var ar minēto asi veidot kaut kādu leņķi. Ja, piemēram, aplūkojamais figuras laukums sastāv no diviem četrstūriem (taisnstūra un parallēlogramma), kuŗiem kopējs pamats un vienādi augstumi, tad kopējais pamats nav matemātiskā nozīmē simmetrijas ass, bet smaguma centram tomēr uz viņas jāatrodas, jo mēs varam sadalīt doto laukumu ar šķelošām linijām, parallēlām kopējam pamatam, bezgalīgi plānās strēmelēs,pie kam kaut kuŗai no viņām, kas atrodās pa vienu pusi no kopējā pamata, atbilst tāda paša svara un tādā pašā attālumā atrodošā strēmele otrā pusē. Tāļāk abas strēmeles varam sadalīt attiecīgās daļiņās, pa pāriem, kuŗu attiecīgie momenti pret kopējo asi ir 0.



Tādu asi, kuŗa sadala laukumu tā,ka katrai daļiņai, kuŗa atrodās vienā pusē no viņas, atbilst tik pat smaga daļiņa tādā pat attālumā no ass viņas otrā pusē, sauksim par simmetrijas asi mēchaniskā nozīmē.

zīm.43.

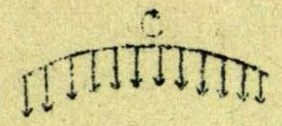
Ja plaknei piemīt divas simmetrijas asis, tad viņas smaguma centram jāatrodas uz katras no viņām, tā tad minēto asu krustošanās punktā.

Pierādītā teorema atļauj noteikt bez kāda aprēķina daudzu regulāras formas homogenu figuru laukumu smaguma centrus. Vēl daudz vairāku laukumu smaguma centrus varēsim noteikt, ja ievērosim sekojošu noteikumu: daudzreiz ir iespējams sadalīt doto laukumu noteikta daudzuma daļas, kuŗu svari un smaguma centri zināmi, un tādā kārtā atrast kopējo smaguma centru bez integrālrēķinu palīdzības. Minētais noteikums piemērojams kā homogeniem, tā arī heterogenām plaknēm. Pieliekot atsevišķo daļu smaguma centros spēkus, vienādus ar šo daļu svariem, dabūsim noteikta skaita parallēlu spēku sistemu, kuŗas centrs būs arī laukuma meklētais smaguma centrs. Apzīmējot kaut kādas laukuma daļas svaru ar G_i un viņas smaguma centra koordinātes ar ξ_i un η_i, gūsim sekojošas kopējā, visa laukuma smaguma centra koordinātu izteiksmes

$$\xi = \frac{\sum\limits_{i=1}^{i=n} G_i \xi_i}{\sum\limits_{i=1}^{i=n} G_i} \quad \text{un} \quad \eta = \frac{\sum\limits_{i=1}^{i=n} G_i \eta_i}{\sum\limits_{i=1}^{i=n} G_i} \quad \text{jeb}$$

$$G\xi = \sum^{n=1} G_i \xi_i \quad \text{un} \quad G\eta = \sum_{i=1}^{i=n} G_i \eta_i \text{, kur } G = \sum_{i=1}^{i=n} G_i$$

Ja plakne homogena, tad , kā redzējam, atsevišķu plaknu daļu svarus G_i varam aizvietot ar viņu laukumiem F_i un kopējo svaru G - ar kopējo, visas figuras laukumu F. Homogenāmmateriālām linijām var katras daļas svaru aizvietot attiecīgi ar viņas garumu. Atsevišķā gadijumā, ja visu to daļu, kuŗās mēs sadalijām doto laukumu, smaguma centrām jāatrodās uz tās pašas taisnes jeb uz tās pašas linijas. Šis likums paliek spēkā arī tad, ja laukums sadalīts bezgalīgi daudzās daļās. Dažreiz ir iespējams sadalīt doto laukumu bezgalīgi daudzās vienlīdzīgās daļās, kuŗu smaguma centri vienmērīgi sadalīti pa kaut kādu līkni C, tā tad atrodās vienādos attālumos viens no otra. Atsevišķo daļu smagumi, pielikti pie attiecīgiem smaguma centriem, sastāda tādu pašu parallēlu spēku sistemu, itkā kad līkne C būtu bijusi homogena materiāla līkne, uz kuŗas darbojās viņas atsevišķu daliņu svari. Šajā gadijumā skaidri redzams, ka dotā laukuma smaguma centrs sakrīt ar iegūtās līknes C smaguma centru.

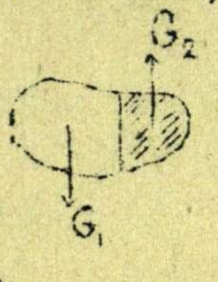


zīm.44.

Beidzot piezīmēsim, ka pievestie momentu nolīdzinājumi $G\xi = \Sigma G_i \xi_i$ u.t.t. der arī tad, ja izteiksmē $G = \Sigma G_i$ ieiet arī negatīvi locekļi, kas atgadās tad, kad aplūkojamais laukums tiek uzskatīts kā veidots no kāda cita laukuma, atņemot pēdējam noteiktas daļas. Piemēram, ja no laukuma, kuŗa svars G_1, atņemam daļu, kuŗas svars G_2, tad pārpalikušais laukuma daļas svars $G = G_1 - G_2$ un viņas smaguma centra koordinātes seko no nolīdzinājumiem

$$G\xi = G_1\xi_1 - G_2\xi_2 , \quad G\eta = G_1\eta_1 - G_2\eta_2$$

kur ξ_1 un η_1 ir visa laukuma smaguma centra koordinātes un ξ_2 un η_2 - atņemtās daļas smaguma centra koordinātes.



zīm.45.

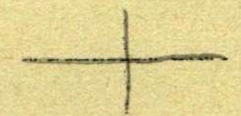
Sašvītrotās daļas atņemšana atstāj tādu pašu iespaidu, kādu atstātu spēks G_2, pielikts šīs daļas smaguma centrā, bet virzīts vertikāli uz augšu, tādā kārtā atsvērdams sašvītrotas daļas svaru. Paliekošās daļas smaguma centrs ir parallēlo spēku G_1 un G_2 centrs, kuŗš noteicās pēc iepriekš pievestām izteiksmēm.

Dažu homogenu liniju smaguma centri.

Pielietosim minētos likumus ievērojamāko homogenu materiālu liniju un plakanu figuru laukumu smaguma centru atrašanai. Iesāksim ar materiālām linijām.

Taisnes nogrieznis.

Mēchanikā par taisnes nogriezni var pieņemt kuŗu katru tievu stieni jeb taisnu stiepuli, ja viņu šķērsmēri neievērojami. Skaidrs, ka tāda taisnes nogriežņa smaguma centram jāatrodās viņa viduspunktā



zīm. 46.

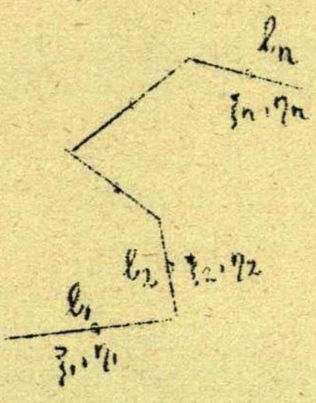
Lauzta linija.

Ja dota lauzta linija, tad pēc augšā minētā likuma atradīsim viņas katras malas smaguma centrus. Apzīmēsim šo malu smaguma centru koordinātes ar $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \ldots$ un attiecīgo malu svarus ar $G_1, G_2, \ldots$, atradīsim linijas kopējo smaguma centru no momentu nolīdzinājumiem:

$$G\xi = \Sigma G_i \xi_i, \quad G\eta = \Sigma G_i \eta_i, \quad \text{kur } G = \Sigma G_i$$

ir visas dotās linijas svars.

Ja dotā lauztā linija būtu homogena, tā tad katras malas svars būtu proporcionāls viņas garumam, tad, ievietojot iepriekšējās izteiksmēs svaru vietā attiecīgo malu garumus, gūtu nolīdzinājumus:

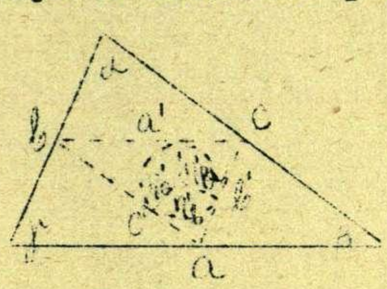


zīm.47.

$l\xi = \Sigma l_i \xi_i$, $l\eta = \Sigma l_i \eta_i$, kur l_i - kaut kādas malas garums un l - visas lauztās linijas garums.

Trīsstūra perimetrs.

Pielietosim izvestās izteiksmes tam atsevišķam gadijumam, kad lauztā linija ir trīsstūra perimetrs, kuŗa malas ir a,b,c un viņām pretimguļošie leņķi - α, β un γ. Perimetra smaguma centrs atrodās trīsstūra plaknē un mēs viņa stāvotni varam noteikt caur viņa attālumiem no trīsstūra malām. Apzīmēsim šos attālumus ar η_a, η_b un η_c. Lai atrastu η_a, uzrakstīsim momentu nolīdzinājumu attiecībā uz malu a:



zīm.48.

$$(a + b + c)\eta_a = a.0 + b\,\frac{b}{2}\sin\gamma + c\,\frac{c}{2}\sin\beta$$

no kurienes:

$$\eta_a = \frac{b^2\sin\gamma + c^2\sin\beta}{2(a+b+c)} = \frac{(b+c)h_a}{2(a+b+c)}$$

kur h_a - trīsstūra augstums pret pamatu a. Tāpat atradīsim, ka

$$\eta_b = \frac{c^2\sin\alpha + a^2\sin\beta}{2(a+b+c)} = \frac{(c+a)h_b}{2(a+b+c)}$$

$$\eta_c = \frac{a^2\sin\beta + b^2\sin\alpha}{2(a+b+c)} = \frac{(a+b)h_c}{2(a+b+c)}$$

Vēl pārskatamākus rezultātus gūsim, ja sastādīsim momentu nolīdzinājumus pret trim jaunām asīm a', b' un c' ,ejošām caur dotā trīsstūra malu viduspunktiem (pie kam $a' \parallel a$, $b' \parallel b$ un $c' \parallel c$). Momentu nolīdzinājumus pret asi a' būs:

$$(a+b+c)\,\eta'_a = a\frac{h_a}{2} + b.0 + c.0$$, no kurienes

$$\eta'_a = \frac{ah_a}{2(a+b+c)} = \frac{f}{u}$$

kur f - dotā trīsstūra laukums un u - viņa perimetrs. Tāpat meklējamā smaguma centra attālumus no asīm b' un c' atradīsim sekojoši:

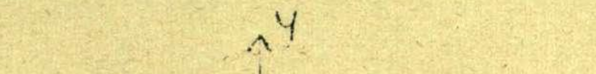
$$\eta'_b = \frac{bh_b}{2(a+b+c)} = \frac{f}{u}$$

$$\eta'_c = \frac{ch_c}{2(a+b+c)} = \frac{f}{u}$$

Tā tad $\eta'_a = \eta'_b = \eta'_c = \frac{f}{u}$,ko varam formulēt sekojoši: kuŗa katra trīsstūra perimetra, pieņemta par homogenu materiālu liniju, smaguma centrs sakrīt ar tā riņķa centru, kurš ierakstīts trīsstūrī, kuŗa virsotnes atrodās dotā trīsstūra vidus punktos.

Regulāra daudzstūra perimetrs un riņķa loks.

Aplūkosim tādu homogenas lauztas linijas atsevišķu gadījumu, kad viņa ir regulāra daudzstūra daļa, tā tad, viņas visas malas vienādas un virsotnes guļ uz kāda riņķa aploces. Novietosim koordinātu sistemas sākumu šī riņķa centrā un novilksim Y asi caur dotās lauztās linijas vidus punktu. Ja dotai lauztai linijai būs pāru malu skaits, tad Y ass ies caur viņas virsotni, bet ja ne pāra malu skaits, tad caur malas vidus punktu. Abos gadījumos tomēr Y ass būs lauztās linijas simmetrijas ass un tāpēc viņas smaguma centrs atradīsies uz šīs ass. Mums atliek tikai noteikt šī centra attālumu no koordinātu sistemas sākuma punkta. Lai to noteiktu, pielietosim momentu nolīdzinājumu:



zīm.49.

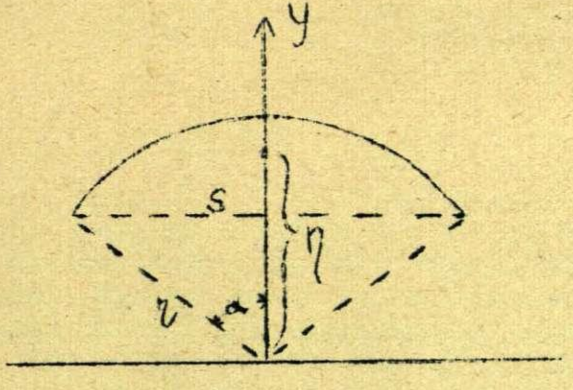
$$l\eta = \Sigma\, l_i \eta_i$$

kur l_i - kaut kuŗas malas garums un η_i - viņas smaguma centra attālums no X ass. Savienosim aplūkojamās malas smaguma centru ar koordinātu sākuma punktu, apzīmējot šo attālumu ar r. Kā redzams, visām malām attālums r ir viens un tas pats, būdams vienlīdzīgs dotā daudzstūrī ierakstītā riņķa radiusam. Novelkot no malas l_i galu punktiem taisnes, parallēlas koordinātu asīm, un apzīmējot dabūtos nogriežņus ar a_i un b_i, gūsim divus švītrotus trīsstūrus, kuŗi ir līdzīgi. No viņu līdzības seko, ka $a_i : l_i = \eta_i : r$, no kurienes $l_i \eta_i = a_i r$ un tad iepriekšējais momentu nolīdzinājums izteiksies sekojoši:

$$l\eta = \Sigma\, a_i r = r\, \Sigma\, a_i$$

Novelkot caur visu malu galu punktiem attiecīgos nogriežņus a_i un b_i, redzam, ka Σa_i ir vienlīdzīga dotās lauztās linijas hordai, t.i. nogrieznim, kuŗš savieno viņas abus galu punktus. Apzīmējot šīs hordas garumu ar s, dabūsim galīgu izteiksmi:

$\eta = \dfrac{rs}{l}$, kur l - dotās lauztās linijas garums, t.i. visu viņas malu summa, s - hordas garums un r - dotā lauztā linijā ierakstītā riņķa radiuss. Iegūtā izteiksme nav atkarīga no dotās lauztās linijas malu skaita. Tāpēc viņa der arī tad, ja šī linija sastāv no bezgalīgi daudzām bezgalīgi mazām malām, kas tā pārveidosies riņķa lokā. Šinī gadijumā r izteic dotā riņķa radiusu. Lai noteiktu loka garumu l un hordas garumu s, apzīmēsim dotā loka centrālā leņķa (t.i. leņķi, ieslēgtu starp simmetrijas asi un radiusu, ejošu caur loka vienu gala punktu) pusi ar α. Tad, izteicot leņķi α loka mērā gūsim $l = 2r\alpha$ un $s = 2r.\sin\alpha$. Ievietojot iegūtās vērtības, dabūsim, ka



zīm.50.

$$\eta = \frac{r.\sin\alpha}{\alpha}$$

Ja atsevišķā gadījumā dotais loks ir pusaploce, tad $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\sin\alpha = 1$, tā tad $\eta = \frac{2r}{\pi} = 0{,}6366r$. Ceturtdaļaploce (kvadranta lokam) gūsim $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\eta = \frac{2\sqrt{2}r}{\pi} = 0{,}9003r$

Aploces sestai daļai (sekstanta lokam) būs:

$$\alpha = \frac{\pi}{6},\ \sin\alpha = \frac{1}{2},\ \eta = \frac{3r}{\pi} = 0{,}9549r$$

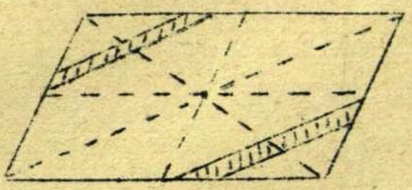
Ar cita veida materiālām linijām nenodarbosimies, bet pāriesim uz dažu materiālu virsmu smaguma centru noteikšanu.

Vispirms aplūkosim dažas homogenas plaknes, ierobežotas no dotām geometriskām figurām (plakanas virsmas).

Dažu plakanu virsmu smaguma centri.

Parallēlogramms.

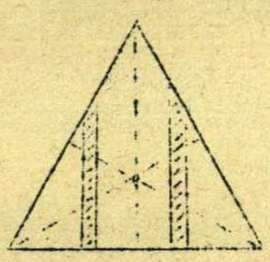
Pats par sevi saprotams, ka parallēlogramma plaknes smaguma centrs atrodas viņa diagonaļu krustpunktā, jo katra diagonale ir viņa simmetrijas ass mēchaniskā viņas nozīmē (katrai parallēlogramma strēmelei, parallēlai viņa diagonālei, otrpus diagonales tādā pašā attālumā no viņas, atrodās gluži tāda paša lieluma strēmele). Tā kā parallēlogramma diagonales krustpunktā šķēļās uz pusēm, tad var teikt, ka viņa smaguma centrs atrodās katras diagonāles vidus punktā. Tāpat arī viņš atrodās medianu krustpunktā jeb katras medianas vidus punktā, ja par mediānām saucam taisnes, kuŗas savieno pretējo malu vidus punktus. Ja dotas parallēlogramma divu pretējo virsotņu koordinātes, tad viņa smaguma centra koordinātes izteicās kā vidējie aritmetiskie no attiecīgām šo virsotņu koordinātēm.



zīm.51.

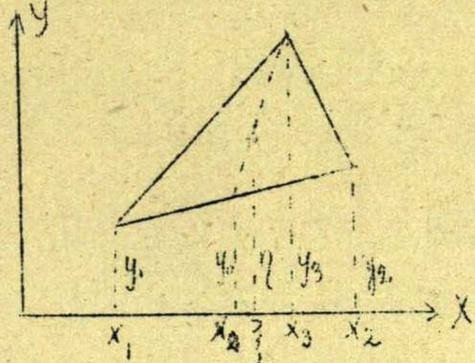
Trīsstūris.

Novilksim kaut kādu trīsstūra mediānu, t.i. savienosim kaut kuŗu virsotni ar pretējās malas vidus punktu, tad šī linija būs trīsstūra simmetrijas ass mēchaniskā viņas nozīmē. Tā tad trīsstūra smaguma centrs atrodās mediānu krustpunktā. No geometrijas zinams, ka šis krustpunkts dala medianu divās nogriežņos, no kuŗiem mazākais – vienlīdzīgs lielākā pusei jeb vienai trešdaļai no visas medianas. Tāpēc mēs varam teikt, ka trīsstūra smaguma centrs atrodās uz kaut kuŗas viņa mediānas, viņas vienas trešdaļas garuma attālumā no trīsstūra pamata (jeb divas trešdaļas medianas garuma attālumā no trīsstūra virsotnes). Ja no smaguma centra novilksim perpendikulāru pret kaut kuŗu no trīsstūra malām, tad viņš būs vienlīdzīgs vienai trešdaļai no trīsstūra augstuma, vilkta pret to pašu malu. Tā tad trīsstūra smaguma centrs atrodās vienas trešdaļas augstuma attālumā no katras attiecīgās malas.



zīm.52.

Ja dotas trīsstūra virsotņu koordinātes sistemā XY, kuŗa atrodās trīsstūra plaknē, tad šī trīsstūra smaguma centra koordinātes izteiksies sekojoši:



zīm.53.

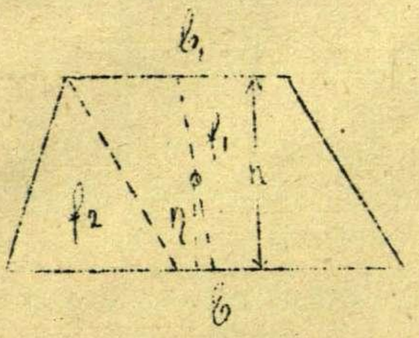
$$\xi = x_0 + \frac{1}{3}(x_3 - x_0) = \frac{2}{3}x_0 + \frac{1}{3}x_3 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \text{ un}$$

$$\eta = y_0 + \frac{1}{3}(y_3 - y_0) = \frac{2}{3}y_0 + \frac{1}{3}y_3 = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

jo $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$ un $y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}$. Kā redzams, trīsstūra smaguma centra koordinātes ir vidējie aritmetiskie no attiecīgām virsotņu koordinātēm. Šis likums der arī tad, ja trīsstūra koordinātes ņemtas trīs asu koordinātu sistēmā XYZ.

Trapece.

Kā nākošo piemēru aplūkosim kaut kādas trapeces plaknes smaguma centra atrašanu. Apzīmēsim viņas parallēlās malas ar b un b' un attālumu starp viņām (trapeces augstumu) ar h. Novilksim trapeces medianu, t.i. taisni, kas savieno abu parallēlo malu vidus punktus. Viņa ir trapeces simmetrijas ass mēchaniskā viņas nozīmē un tāpēc smaguma centrs atrodās uz medianas. Apzīmēsim šī punkta attālumu no malas b ar η un noteiksim viņu. Sadalīsim trapeci, kā parādīts zīm.54, parallēlogrammā un trīsstūrī. Apzīmēsim parallēlogramma laukumu ar f_1 un trīsstūra laukumu ar f_2 un šo figuru attiecīgos smaguma centru attālumus no pamata b ar η_1 un η_2. Tad



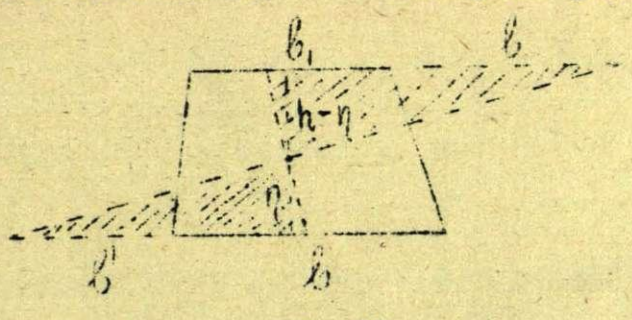
zīm.Nr.54

$$f_1 = b'h \ , \quad \eta_1 = \frac{h}{2} \ , \quad f_2 = \frac{(b - b')h}{2} \quad \text{un} \quad \eta_2 = \frac{h}{3}$$

Pielietojot momentu nolīdzinājumu $f\eta = f_1\eta_1 + f_2\eta_2$, kur $f = f_1 + f_2$ un ievietojot iepriekšējās vērtības, gūsim:

$$\eta = \frac{\frac{b'h^2}{2} + \frac{(b - b')h^2}{6}}{b'h + \frac{(b - b')h}{2}} = \frac{3b'h^2 + bh^2 - b'h^2}{6b'h + 3bh - 3b'h} = \frac{h}{3} \cdot \frac{b + 2b'}{b + b'}$$

No šīs izteiksmes izriet sekojošs geometrisks paņēmiens smaguma centra atrašanai. Vispirms novelkam trapeces mediānu. Pēc tam turpinām parallēlās malas pretējos virzienos un no b' gala uz viņas turpinājuma atliekam nogriezni vienlīdzīgu b un uz b turpinājuma no b gala - nogriezni vienlīdzīgu b'. Savienojot abu nogriežņu galu punktus, šīs taisnes krustpunkts ar medianu būs meklētais smaguma centrs.



zīm.55.

Pierādījums. No švītroto trīsstūru līdzības seko attiecība:

$$\left(b' + \frac{b}{2}\right) : \eta = \left(b + \frac{b'}{2}\right) : (h - \eta) \quad \text{jeb}$$

$$\eta\left(b + \frac{b'}{2}\right) = \left(b' + \frac{b}{2}\right)(h - \eta). \text{ Atrisinot pēc } \eta \text{ dabūsim:}$$

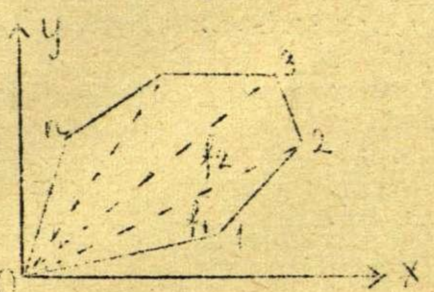
$$\eta\left(b + \frac{b'}{2} + b' + \frac{b}{2}\right) = \left(b' + \frac{b}{2}\right)h \ , \text{ no kurienes}$$

$$\eta = h \frac{b' + \frac{b}{2}}{3\frac{b}{2} + 3\frac{b'}{2}} = \frac{h}{3} \cdot \frac{b + 2b'}{b + b'} \ , \text{kas atbilst iepriekš izvestai}$$

izteiksmei.

Daudzstūris.

Kuŗa katra daudzstūra plakni varam sadalīt ar diagonālēm trīsstūros. Zinot atsevišķo trīsstūru laukumus un viņu smaguma centru koordinātes, varam ar momenta likuma palīdzību atrast visa daudzstūra smaguma centru. Ērtības labad novietosim koordinātu sākumu vienā no daudzstūra virsotnēm un pārējās apzīmēsim ar cipariem 1,2,3...n, un viņu koordinātes ar x_1, y_1, x_2, y_2, ...x_n,y_n. Novilksim diagonales caur punktu 0, caur ko gūsim trīsstūrus, kuŗu laukumi pēc zinamām analitiskās geometrijas formulām izteicās:



zīm.56.

$$f_1 = \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1), \quad f_2 = \frac{1}{2}(x_2y_3 - x_3y_2).$$

Šo trīsstūru smagumu centru koordinātu vērtības būs:

$$\xi_1 = \frac{x_1 + x_2}{3}, \quad \eta_1 = \frac{y_1 + y_2}{3}, \quad \xi_2 = \frac{x_2 + x_3}{2}, \quad \eta_2 = \frac{y_2 + y_3}{3} \quad \ldots$$

Visa daudzstūra smaguma centra koordinātēm gūstam izteiksmes:

$$f\xi = \Sigma f_i \xi_i = \frac{1}{6}\left\{(x_1+x_2)(x_1y_2-x_2y_1) + (x_2+x_3)(x_2y_3-x_3y_2) + \ldots\right\} \quad \text{un}$$

$$f\eta = \Sigma f_i \eta_i = \frac{1}{6}\left\{(y_1+y_2)(x_1y_2-x_2y_1) + (y_2+y_3)(x_2y_3-x_3y_2) + \ldots\right\}$$

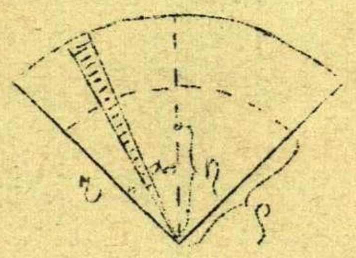
kur f – visa daudzstūra laukums un

$$f = \frac{1}{2}(x_1y_1 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + \ldots).$$

Iepriekšējos piemēros plaknes bija ierobežotas tikai no taisnēm. Aplūkosim tagad dažus piemērus, kur dotās plaknes norobežojumā ietilpst arī līknes.

Riņķa sektors.

Riņķa sektors ir plaknes daļa, ierobežota no riņķa loka un diviem riņķa radiusiem, ejošiem caur loka galiem. Šī sektora smaguma centrs atrodās uz viņa simmetrijas ass, t.i. taisnes, kuŗa savieno riņķa centru ar loka vidus punktu. Atliek tikai noteikt šī centra attālumu no riņķa centra.



zīm.57.

Sadalīsim sektora loku vienāda garuma bezgalīgi mazās daļiņās un pieņemsim katru šādu gabaliņu par elementāra trīsstūra pamatu, kuŗa virsotne atrodās riņķa centrā. Šādu trīsstūru smaguma centri visi atrodās vienādā attālumā no riņķa centra – uz loka, kuŗa radiuss $\rho = \frac{2}{3}$ r. Elementāro trīsstūru smaguma centri atrodās vienādos attālumos viens no otra un tā kā šo trīsstūru svari arī vienādi, tad pieliekot viņus pie attiecīgiem smaguma centriem, gūsim parallēlu spēku sistemu, kādu sastādītu loks radiusā ρ, ja viņā būtu koncentrēta visa dotā sektora viela, kā homogenā materiālā lokā. Tāpēc sektora smaguma centrs sakritīs ar loka, radiusā ρ, smaguma centru un tādēļ, ņemot vērā agrāk dabūto izteiksmi:

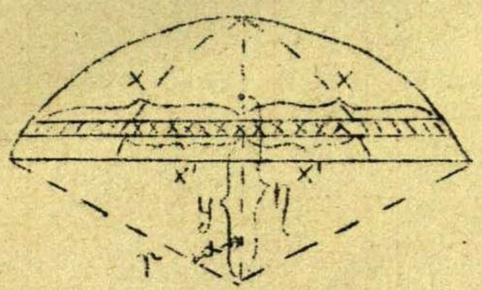
$$\eta = \rho \frac{\sin\alpha}{\alpha} = \frac{2}{3}\cdot\frac{r\sin\alpha}{\alpha}$$

kur α - puse no leņķa, kuŗš ieslēgts no dotā sektora malām. Atsevišķā gadijumā pusriņķim dabūsim:

$\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\sin\alpha = 1$, $\eta = \frac{4r}{3\pi} = 0{,}4244r$, ceturtdaļriņķim (kvadrantam): $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\eta = \frac{4\sqrt{2}.r}{3\pi} = 0{,}6002r$, riņķa sestai daļai (sektantam): $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, $\eta = \frac{2r}{\pi} = 0{,}6366r$.

Riņķa un elliptiskais segments.

Aplūkosim riņķa segmentu, t.i. tādu riņķa daļu, kuŗa ierobežota no riņķa loka un viņa hordas. Kā redzams, viņa laukums ir starpība starp riņķa sektora un vienādsānu trīsstūra laukumiem. Meklējamais smaguma centrs atrodās uz segmenta simmetrijas ass, t.i. uz perpendikulāra, kas vilkts no riņķa centra pret segmenta pamatu. Smaguma centra stāvotne uz šīs ass noteiksies caur viņa attālumu η no riņķa centra. Šo attālumu atradīsim ar momentu likuma palīdzību. Apzīmēsim sektora laukumu ar f_1, trīsstūra laukumu ar f_2 un viņu smaguma centru attālumus no riņķa centra - attiecīgi ar η_1 un η_2.



zīm.58.

Tad segmenta laukums $f = f_1 - f_2$ un $f\eta = f_1\eta_1 - f_2\eta_2$, pie kam

$f_1 = r^2\alpha$, $\eta_1 = \frac{2}{3}\cdot\frac{r.\sin\alpha}{\alpha}$, $f_2 = r^2\sin\alpha\cos\alpha$ un $\eta_2 = \frac{2}{3}r.\cos\alpha$.

Ieliekot šīs vērtības, dabūsim:

$$\eta = \frac{\frac{2}{3}r^3\sin\alpha - \frac{2}{3}r^3\sin\alpha\cos^2\alpha}{r^2\alpha - r^2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{2}{3}r\cdot\frac{\sin^3\alpha}{\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}$$

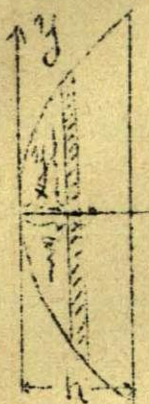
No riņķa segmenta var ļoti viegli izveidot elliptisko segmentu, velkot sekantes paralēli riņķa segmenta pamatam un dalot viņas, sākot no segmenta simmetrijas ass, vienā un tanī pašā attiecībā (tā, lai $x' = \mu x$, kur μ - konstants reizulis). Apzīmējot elliptiskā segmenta smaguma centra attālumu no riņķa centra ar η' un attiecīgo riņķa segmenta attālumu ar η, varam uzrakstīt vispārējās izteiksmes:

$$\eta' = \frac{\sum y df'}{\sum df'} \quad \text{un} \quad \eta = \frac{\sum y df}{\sum df}$$, kur df' - strēmeles, garumā $2x'$ laukums, df - strēmeles, garumā $2x$ un y - abu strēmeļu attālums no riņķa centra. Tā kā $df' = \mu df$, kur μ - konstants reizulis, tad $\eta' = \eta$. Tā tad tāda elliptiska segmenta smaguma centrs, kuŗa pamats statenisks pret vienu no ellipses asīm, sakrīt ar tāda riņķa segmenta smaguma centru, kuŗa pamats un virsotne sakrīt ar elliptiskā segmenta pamatu un virsotni un riņķa centrs sakrīt ar ellipses centru.

Parabolisks segments.

Visos iepriekšējos piemēros smaguma centra stāvotni bija iespējams noteikt bez integrālrēķinu palīdzības. Aplūkosim tagad piemēru, kur iepriekš pielietotie elementārie paņēmieni nepietiekoši, lai pilnīgi noteiktu smaguma centru, tā kā jāpielieto noteiktie integrāļi.

Pieņemsim, ka aplūkojamā plaknes daļa ierobežota no parabolas loka un hordas, kuŗa stateniska pret parabolas asi. Pieņemsim parabolas asi par X asi un Y asi novilksim caur parabolas virsotni, tad parabolas nolīdzinājums būs $y = \sqrt{2px}$, kur p - parabolas parametrs. Aplūkojamā segmenta smaguma centrs, kā redzams, atrodās uz X ass - atliek tikai noteikt viņa attālumu ξ no koordinātu sākuma. Lai to panāktu, sadalīsim doto segmentu bezgalīgi šaurās strēmelēs, paralēli pamatam. Šādas strēmeles attālums no Y ass ir x, viņas garums - 2y un platums dx, tā tad strēmeles laukums $df = 2ydx = 2\sqrt{2px}.dx$. Meklējamais attālums ξ iegūstams caur momentu nolīdzinājuma $f\xi = \Sigma\, xdf$,



zīm.59.

no kurienes:

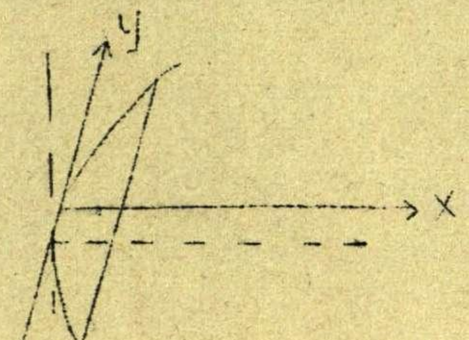
$$\xi = \frac{\Sigma\, xdf}{\Sigma\, df} = \frac{\Sigma 2x\sqrt{2px}.dx}{\Sigma 2\sqrt{2px}.dx} = \frac{\Sigma\, x\sqrt{x}.dx}{\Sigma \sqrt{x}.dx}$$

Šīs summas ir noteiktie integrāļi, izplatīti uz dotā segmenta visām strēmelēm. Tā tad:

$$\xi = \frac{\int_0^h x^{\frac{3}{2}}dx}{\int_0^h x^{\frac{1}{2}}dx} = \frac{\frac{2}{5}(x^{\frac{5}{2}})_0^h}{\frac{2}{3}(x^{\frac{3}{2}})_0^h} = \frac{\frac{2}{5}h^{\frac{5}{2}}}{\frac{2}{3}h^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{5}h$$

un varam teikt, ka dotā paraboliskā segmenta smaguma centrs atrodās uz viņa simmetrijas ass trīs piektdaļas augstuma attālumā no segmenta virsotnes (jeb divpiektdaļas augstuma attālumā no segmenta pamata).

Ja paraboliskā segmenta pamats sastāda kaut kādu leņķi ar parabolas asi, tad segmenta smaguma centrs atradīsies uz taisnes, ejošas caur pamata vidus punktu, parallēli parabolas asij, attālumā no segmenta pamata, kuŗš vienlīdzīgs $\frac{2}{5}$ šīs taisnes garumam. Šo teorēmu var pierādīt attiecinot parabolu uz slīpleņķa koordinātu sistemu, kuŗas X ass iet caur pamata vidus punktu parallēli parabolas asij un Y ass sakrīt ar parabolas pieskari, ejošu parallēli segmenta pamatam. Šajā koordinātu sistemā parabolas nolīdzinājums arī būs $y = \sqrt{2px}$. Sadalot doto segmentu strēmelēs, parallēlās viņa pamatam, iegūsim gluži tādas pašas izteiksmes kā iepriekšējā gadijumā.



zīm.60