LATVIJAS UNIVERSITĀTE
MATEMĀTISKĀS ANALĪZES KATEDRA

INESE BULA

ATTĒLOJUMU NEKUSTĪGIE PUNKTI IZLIEKTĀS METRISKĀS TELPĀS

Promocijas darba
kopsavilkums

Darba zinātniskais vadītājs: Andris Liepiņš,
matemātikas zinātņu doktors,
LU, docents

Rīga, 1994

VISPĀRĪGS DARBA RAKSTUROJUMS

Par attēlojuma $f:X \to Y$, kur X, Y patvaļīgas kopas un $X \cap Y \neq \emptyset$, nekustīgo punktu sauc kopas X tādu punktu x, ka $f(x)=x$.

Nekustīgo punktu teorijas uzdevums ir noskaidrot, pie kādiem nosacījumiem uz attēlojumiem, kopām, telpām eksistē attēlojumiem nekustīgie punkti. Nekustīgo punktu teorija pēdējos gadu desmitos ir nepārskatāmi izpletusies, sarakstītas daudzas grāmatas, piemēram, F.F.Bonsalls [1962], J.Kronins (Cronin) [1964], D.R.Smarts [1974], S.Svaminathans (red.) [1976], E.Caidlers (Zeidler) [1976], G.Aizenaks (Eisenack), C.Fenske [1978], V.I.Istratesku [1981], K.C.Borders [1982], J.Dugundži, A.Granass [1982], M.R.Taskovičs [1986], K.Šillings (Schilling) [1986], K.Gēbels, V.A.Kirks [1990], A.G.Aksojs, M.A.Kamsi [1990], un tomēr tās neaptver visus iegūtos rezultātus. Nozīmīgus virzienus veido saspiedējattēlojuma (piemēram, Banaha teorēma) un neizstiepjošu attēlojumu (piemēram, Kirka teorēmas) nekustīgo punktu teorēmas. Tāpat rezultāti, kuru pirmsākumi meklējami Bola-Brauera teorēmā. Sākot ar Kakutani teorēmu, plaši attīstījies virziens, kas meklē nekustīgos punktus daudzvērtīgiem attēlojumiem. Paralēli šiem virzieniem tiek meklēti kopīgie nekustīgie punkti attēlojumu saimēm. Pēdējos gados parādās raksti par nekustīgajiem punktiem ar varbūtisku raksturu. Doktordarbā sastapsieties tikai ar nelielu daļiņu no tiem jēdzieniem un virzieniem, kuri tiek lietoti un attīstās attēlojumu nekustīgo punktu teorijā.

TĒMAS AKTUALITĀTE

Ir pamats domāt, ka viena attēlojuma gadījumam nekustīgo punktu teorija izstrādāta daudz pamatīgāk un gandrīz jebkurai situācijai varētu piemeklēt atbilstošu rezultātu. Daudz mazāk darbu atradīsim par attēlojumu saimju nekustīgajiem punktiem. Piedāvātajā doktordarbā vienu no pamatvirzieniem veido attēlojumu saimju kopīgo nekustīgo punktu eksistences pierādījumi metrisku telpu izliektās apakškopās. Pierastajā izpratnē par izliektību varam runāt tikai vektoru telpās. Nekustīgo punktu teorijā ir zināmi divi veidi - V.Takahaši [1970] un J.P.Penots [1979] -, kā izliektības struktūru definēt patvaļīgā metriskā telpā.

Doktordarbā I daļas 2.nodaļā mēģināts, daļēji kopējot vektoru telpas izliektību, definēt metriskā telpā izliektu kopu. Taču pēc šīs definīcijas izliektu kopu šķēlums var nebūt izliekta kopa un lodes arī var nebūt izliektas. Labākus rezultātus var iegūt doktordarbā definētajā stingri izliektajā metrisksjā telpā. Pie tam jāatzīmē, ka šī definīcija, izsakot metriskās sakarības caur normu, ir ekvivalenta ar stingri izliektas Banaha telpas definīciju. I daļas 3.nodaļā izliektības struktūra metriskā telpā tiek definēta ar slēguma operatoru palīdzību. Tā, piemēram, stingri izliektā metriskā telpā slēguma operatoru var definēt kā tādu, kas katrai kopai K no šīs telpas piekārto mazāko izliekto kopu, kas satur K. Tādējādi stingri izliekta metriska telpa ir viens no veidiem metriskai telpai ar tajā uzdotu slēguma operatoru. Slēguma operatora jēdziens nav jauns, to nekustīgo punktu teorijā viena attēlojuma gadījumam jau izmantojis A.Liepiņš [1983].

Iepazīšanās ar ekonomisko modeļu teoriju liecina, ka ekonomikas modeļos tirgus līdzsvara eksistenci parasti pierāda ar nekustīgo punktu teorēmu palīdzību, proti, Bola-Brauera teorēmu vai Kakutani teorēmu. Viens no būtiskākajiem pieņēmumiem, lai varētu lietot šīs teorēmas, ir pārpalikuma pieprasījuma funkcijas nepārtrauktība. Doktordarba II daļā piedāvāts pavājināt šo prasību ar w-nepārtrauktu attēlojumu. Turpat pierādīts Bola-Brauera-Šaudera teorēmas analogs w-nepārtrauktam attēlojumam, kā arī, ņemot vērā w-nepārtraukta attēlojuma īpašības, konstruēts ekonomiskais modelis, kurā tirgus līdzsvars tiek pamatots ar jauniegūtās teorēmas palīdzību. Ir pamats cerēt, ka jaunajam rezultātam varētu būt plaši pielietojumi arī citāda veida ekonomiskajos modeļos.

DARBA MĒRĶIS

1) noskaidrot, kādas vektoru telpas izliektības īpašības tiek lietotas attēlojumu nekustīgo punktu teorijā;

2) definēt patvaļīgā metriskā telpā izliektības struktūru;

3) noskaidrot, kādi nosacījumi jāapmierina telpām, kopām, attēlojumiem, lai attēlojumu saimēm eksistētu kopīgi nekustīgie punkti izliektās metrisku telpu apakškopās;

4) pierādīt Bola-Brauera teorēmas analogu w-nepārtrauktam attēlojumam;

5) izpētīt, kā Brauera teorēmu pielieto ekonomisko modeļu tirgus līdzsvara pierādījumos.

PĒTNIECĪBAS METODES

Pamatā tiek izmantotas matemātiskās, funkcionālanalīzes, kā arī topoloģijas metodes.

GALVENIE REZULTĀTI

Noskaidrotas visbiežāk nekustīgo punktu teorēmu pierādījumos izmantotās izliekto kopu īpašības. Pieminētās īpašības tiek izmantotas darbā pierādītajās nekustīgo punktu teorēmās.

Vispārinot stingri izliektas Banaha telpas jēdzienu, izstrādāts stingri izliektas metriskas telpas jēdziens. Pierādīts, ka stingri izliektas metriskas telpas slēgtās un izliektās apakškopās neizstiepjošu, kvazi-neizstiepjošu un asimptotiski neizstiepjošu attēlojumu nekustīgo punktu kopas ir slēgtas un izliektas. Pamatots, ka stingri izliektas metriskas telpas definīcija ir ekvivalenta ar stingri izliektas Banaha telpas definīciju, ja metriskās sakarības tiek izteiktas caur normu.

Attēlojumu saimju kopīgo nekustīgo punktu eksistences pierādījumos veiksmīgi lietots slēguma operators, kas zināmā mērā metriskā telpā definē izliektības struktūru. Pierādītas teorēmas metriskās telpās ar dotu slēguma operatoru, kurās attēlojumu saimes:

1) apmierina "normālas struktūras" nosacījumu;
2) ir ar samazinātu orbītas diametru;
3) ir kvazi-neizstiepjošas;
4) apmierina invariances īpašību.

Iegūts Bola-Brauera-Šaudera teorēmas vispārinājums w-nepārtrauktam attēlojumam, izmantojot vienmērīgi w-nepārtraukta attēlojuma aproksimāciju ar nepārtrauktu attēlojumu. Reālās taisnes gadījumā konstruēta labāka aproksimācija nekā vispārīgā situācijā. Noskaidrotas w-nepārtrauktu attēlojumu īpašības. Izstrādāts konkrēts tirgus ekonomikas modelis, kurā tirgus līdzsvara eksistence pierādīta ar iepriekš pieminēto rezultātu palīdzību.

REZULTĀTU NOVITĀTE

Visi disertācijas pamatrezultāti ir jauni, tie iegūti pēdējo 6 gadu laikā.

TEORĒTISKĀ UN PRAKTISKĀ NOZĪME

Darbam kopumā ir teorētisks raksturs.

I daļas rezultātus varētu lietot nelineāro vienādojumu sistēmu atrisinājumu eksistences pierādījumos. Pie tam jāņem vērā, ka I daļas 2. un 3. nodaļas rezultātu vispārīgums ļauj tos lietot ne tikai telpās ar lineāru struktūru, bet arī bez tās.

II daļas pamatrezultātam. kā arī w-nepārtrauktam attēlojumam varētu būt plaši pielietojumi ekonomiski teorētiskajos pētījumos. Darbā tiek piedāvāts viens šāds ekonomiskais modelis, kurā tirgus ekonomisko līdzsvaru var pamatot ar vispārināto Bola-Brauera-Šaudera teorēmu w-nepārtrauktam attēlojumam.

DARBA APROBĀCIJA

Disertācijas I daļas galvenie rezultāti izklāstīti Latvijas universitātes zinātniskajās konferencēs (1989.-1993.), Tartu universitātes zinātniskajās konferencēs (1989.-1991.), kā arī 1991.gada Tiraspoles (Moldavā, Kišiņevā) topoloģijas un tās pielietojumu simpozijā. Ar disertācijas II daļas rezultātiem iepazīstināti Hamburgas universitātes Statistikas un ekonometrijas institūta darbinieki (1993./94.).

PUBLIKĀCIJAS

Par disertācijas tēmu publicēti 9 raksti un 1 tēzes.

DARBA STRUKTŪRA UN APJOMS

Disertācija sastāv no apzīmējumu saraksta, ievada, divām daļām, pēcvārda un literatūras saraksta. Pirmajā daļā ietvertas 4 nodaļas, otrajā daļā - 3 nodaļas. Literatūras saraksts sastāv no 99 autoru darbiem. Disertācija izklāstīta uz 92 lapaspusēm.

DARBA SATURS

Turpmākajā tekstā *kursīvā* formulētie rezultāti un definīcijas ir jau zināmie, pārējie rezultāti un definīcijas ir jauni.

IEVADS

Ievadā pamatota izvēlētās tēmas aktualitāte, norādīti darba pamatvirzieni un mērķi.

Lasītājs tiek iepazīstināts ar diviem izliektības veidiem, kas definēti patvaļīgā metriskā telpā un tiek lietoti nekustīgo punktu teorijā. Tiek norādītas nekustīgo punktu teorēmu pierādījumos visbiežāk izmantotās izliekto kopu īpašības, minēti autori.

I DAĻA: ATTĒLOJUMU SAIMJU KOPĪGIE NEKUSTĪGIE PUNKTI

0.PAMATJĒDZIENI, DEFINĪCIJAS, ZINĀMIE REZULTĀTI

0.nodaļā doti pamatjēdzieni, definīcijas un formulēti svarīgākie zināmie rezultāti, kas pamato neizstiepjošu attēlojumu un to saimju nekustīgo punktu eksistenci.

DEFINĪCIJA 0.1. Attēlojumu $f:X\to X$ (X - metriska telpa) sauc par neizstiepjošu, ja visiem $x,y\in X$: $d(f(x),f(y))\le d(x,y)$.

V.A.Kirka teorēma apgalvo:

TEORĒMA 0.1.(V.A.Kirks [1965])

Pieņemsim, ka dota refleksīva Banaha telpa X, kopa K ir tās izliekta, slēgta, ierobežota apakškopa ar normālu struktūru. Ja attēlojums f, kurš darbojas no kopas K sevī, ir neizstiepjošs, tad attēlojumam f eksistē nekustīgais punkts.

DEFINĪCIJA 0.2.Izliektai kopai K no Banaha telpas X ir normāla struktūra, ja katrā izliektā, ierobežotā, nevienelementīgā kopā $H\subset K$ eksistē tāds elements $y\in H$, ka: $\sup_{x\in H}\|y-x\| < \mathrm{diam}H=\sup_{x,y\in H}\|x-y\|$.

Ir bijuši vairāki mēģinājumi vispārināt šo teorēmu attēlojumu saimēm.

DEFINĪCIJA 0.3.Pieņemsim, ka F ir attēlojumu $f:K\to K$ (K - patvaļīga telpa) saime. Punktu $x^*\in K$ sauc par saimes F kopīgo nekustīgo punktu, ja katram saimes attēlojumam $f\in F$: $f(x^*)=x^*$.

Viens no variantiem, kādai jābūt attēlojumu saimei, lai eksistētu kopīgs nekustīgais punkts, ir komutativitāte.

DEFINĪCIJA 0.4. *Attēlojumu saimi F sauc par komutatīvu, ja $\forall x \in K$ (K - patvaļīga telpa) izpildās nosacījums, ka $f(g(x))=g(f(x))$, $\forall f,g \in F$.*

1974.gadā T.C.Lims vispārinājis V.A.Kirka teorēmu komutatīvai neizstiepjošu attēlojumu saimei.

1.DAŽI IEVADREZULTĀTI PAR ATTĒLOJUMU SAIMJU NEKUSTĪGAJIEM PUNKTIEM

1.nodaļā pierādītas četras nekustīgo punktu teorēmas. Pirmās trīs var uzskatīt par V.A.Kirka iepriekšējā nodaļā formulētās teorēmas seku vispārinājumiem. V.A.Kirka teorēmas sekās kopas K ierobežotība aizstāta ar tāda punkta $p \in K$ eksistenci, kurā virkne $(f^n(p))_{n\in\mathbf{N}}$ ir ierobežota. Vispārinājumi izdarīti komutatīvām neizstiepjošu attēlojumu saimēm.

TEORĒMA 1.1.

Pieņemsim: 1) X - refleksīva Banaha telpa;

2) K - netukša, izliekta, slēgta X apakškopa;

3) kopai K ir normāla struktūra;

4) F ir neizstiepjošu attēlojumu, kuri darbojas no kopas K sevī, komutatīva saime;

5) eksistē tāds punkts $p \in K$, ka kopa $S=\{(f_1\bullet\ldots\bullet f_n)(p)\,|\,f_1,\ldots,f_n \in F \,\&\, n\in\mathbf{N}\}$ ir ierobežota.

Pie šiem nosacījumiem attēlojumu saimei F kopīgo nekustīgo punktu kopa nav tukša.

TEORĒMA 1.2.

Pieņemsim: 1) X - stingri izliekta, refleksīva Banaha telpa;

2) K - netukša, izliekta, slēgta X apakškopa;

3) kopai K ir normāla struktūra;

4) F ir galīga skaita neizstiepjošu attēlojumu, kuri darbojas no kopas K sevī, komutatīva saime;

5) eksistē tāds punkts $p\in K$, ka virknes $(f^n(p))_{n\in\mathbf{N}}$ katram $f\in F$ ir ierobežotas.

Pie šiem nosacījumiem saimei F eksistē kopīgs nekustīgais punkts.

Lai garantētu kopīga nekustīgā punkta eksistenci neizstiepjoša attēlojuma komutatīvai saimei bez apjoma ierobežojuma Teorēmas 1.2. situācijā, tad TEORĒMĀ 1.3. 5) nosacījums formulēts šādi: 5) eksistē tāds attēlojums $f_0\in F$, kura nekustīgo punktu kopa $Fixf_0$ ir netukša, slēgta, ierobežota ar normālu struktūru.

1.nodaļas pēdējā teorēma būtiski atšķiras no iepriekšējām. Šajā teorēmā doti nosacījumi, pie kādiem eksistē katram saimes attēlojumam savs, ne obligāti kopīgs, nekustīgais punkts.

TEORĒMA 1.4.

Pieņemsim: 1) X - normēta vektoru telpa (pār lauku $\mathbf{R}$ vai $\mathbf{C}$);

2) K - telpas X kompakta apakškopa;

3) $F=\{f_1,f_2,\ldots,f_n\}$ ir galīga skaita neizstiepjošu attēlojumu saime, kas apmierina prasības:

a) $\forall x,y\in K(x\neq y):\ min\{\|f_i(x)-f_i(y)\|\,|\,i=1,2,\ldots,n\}<\|x-y\|$;

b) $\forall x\in K:\ conv\{f_1(x),\ldots,f_n(x)\}\subset K$.

Pie šiem nosacījumiem katram attēlojumam $f_i\in F$ eksistē savs nekustīgais punkts x_i: $f_i(x_i)=x_i$, $i=1,2,\ldots,n$.

2. STINGRI IZLIEKTAS METRISKAS TELPAS

2.nodaļa sastāv no trim apakšnodaļām.

2.1. IZLIEKTAS KOPAS UN STINGRI IZLIEKTAS BANAHA TELPAS

Šajā apakšnodaļā apskatīti zināmie rezultāti, kā definē izliektu kopu vektoru telpā, kādas ir to īpašības, kā definē stingri izliektu Banaha telpu, kādi ir ekvivalentie formulējumi.

DEFINĪCIJA 2.1.3. Banaha telpu X sauc par stingri izliektu, ja tās vienības sfēras katrs punkts nav iekšējs punkts vienības lodē ietilpstošajos nogriežņos.

Šī definīcija pēc Apgalvojuma 2.1.1.(V.I.Istratesku [1981], 57.lpp) ir ekvivalenta ar sekojošu nosacījumu Banaha telpā X:

$\forall x,y\in X:\ \|x+y\|=\|x\|+\|y\|\Rightarrow((\exists\lambda\in\mathbf{R}_{++}:x=\lambda y)\vee(x=0)\vee(y=0))$.

Neizstiepjošam attēlojumam stingri izliektas Banaha telpas izliektā un slēgtā apakškopā nekustīgo punktu kopa ir izliekta un slēgta. Šāda īpašība piemīt arī citām plašākām attēlojumu saimēm, piemēram, kvazi-neizstiepjošiem un asimptotiski neizstiepjošiem attēlojumiem.

DEFINĪCIJA 2.1.4. (V.G.Dotsons [1972]) Attēlojumu $f:K\to K$ (K - normētas lineāras telpas apakškopa) sauc par kvazi-neizstiepjošu, ja tam eksistē vismaz viens nekustīgais punkts kopā K un jebkuram fiksētam attēlojuma f nekustīgajam punktam $p\in K$: $\|f(x)-p\|\leq\|x-p\|$, $\forall x\in K$.

DEFINĪCIJA 2.1.5. (K.Gēbels, V.A.Kirks [1972]) Attēlojumu $f:K\to K$ (K - normētas lineāras telpas apakškopa) sauc par asimptotiski *neizstiepjošu, ja* $\forall x,y\in K$: $\|f^i(x)-f^i(y)\|\le k_i\|x-y\|$, *kur* $(k_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *ir tādu reālu skaitļu virkne, ka* $\lim_{i\to\infty} k_i=1$ *(tiek pieņemts, ka* $k_i\ge 1$, $k_{i+1}\le k_i$, $i=1,2,\ldots$*)*.

2.2. IZLIEKTAS KOPAS UN STINGRI IZLIEKTAS METRISKAS TELPAS

Izliekta kopa metriskā telpā (X,d) ar metriku d definēta sekojoši:

DEFINĪCIJA 2.2.1. Kopu $K\subset X$ sauc par izliektu, ja jebkuriem diviem elementiem $x,y\in K$ un katram $t\in[0;1]$ eksistē tāds elements $z\in K$, ka izpildās vienādības: $d(x,z)=td(x,y)$ un $d(z,y)=(1-t)d(x,y)$.

Stingri izliekta metriska telpa definēta sekojoši:

DEFINĪCIJA 2.2.2. Metrisku telpu (X,d) sauc par stingri izliektu, ja jebkuriem diviem elementiem $x,y\in X$ un katram $t\in[0;1]$ eksistē viens vienīgs elements $z\in X$ tāds, ka izpildās vienādības: $d(x,z)=td(x,y)$ un $d(z,y)=(1-t)d(x,y)$.

Pierādīts, ka stingri izliektā metriskā telpā izliektu kopu šķēlums ir izliekta kopa (Teorēma 2.2.1.), ka stingri izliektas metriskas telpas izliektās un slēgtās apakškopās neizstiepjošu (Lemma 2.2.1.), kvazi-neizstiepjošu (Lemma 2.2.2.) un asimptotiski neizstiepjošu (Lemma 2.2.3.) attēlojumu nekustīgo punktu kopas ir izliektas un slēgtas. Pieminētie rezultāti izmantoti Teorēmas 2.2.4. pierādījumā.

TEORĒMA 2.2.4.

Ja:1) X - stingri izliekta metriska telpa;

2) patvaļīgiem punktiem $a,b,c\in X$ un jebkuram $z\in X$: $d(b,z)=td(b,c)$ un $d(z,c)=(1-t)d(b,c)$, kur $t\in]0;1[$, ir spēkā nevienādība: $d(a,z)<\max\{d(a,b),d(a,c)\}$;

3) $K\subset X$ - izliekta un kompakta kopa;

4) F ir a) neizstiepjošu attēlojumu

vai b) kvazi-neizstiepjošu attēlojumu,

vai c) asimptotiski neizstiepjošu attēlojumu,

kuri darbojas no kopas K sevī, komutatīva saime;

5) visiem $f\in F$: $\mathrm{Fix}f\neq\emptyset$ (4)b) gadījumā šis nosacījums atkrīt),

tad saimei F eksistē kopīgs nekustīgais punkts.

2.3.VĒLREIZ PAR STINGRI IZLIEKTĀM BANAHA TELPĀM

Pierādīts:

APGALVOJUMS 2.3.1.

Banaha telpā X sekojoši nosacījumi ir ekvivalenti:

1. $\forall x,y\in X$: $\|x+y\|=\|x\|+\|y\| \Rightarrow ((\exists \lambda \in \mathbb{R}_{++}: x=\lambda y) \vee (x=0) \vee (y=0))$;

2. $\forall x,y\in X\ \forall t\in[0,1]\ \exists!\, z\in X$: $\|x-z\|=t\|x-y\|$, $\|z-y\|=(1-t)\|x-y\|$.

Un noslēdzot 2.nodaļu, dots piemērs stingri izliektai metriskai telpai, kura nav stingri izliekta Banaha telpa.

3.ATTĒLOJUMU NEKUSTĪGIE PUNKTI METRISKĀ TELPĀ AR SLĒGUMA OPERATORU

3.nodaļa sastāv no piecām apakšnodaļām.

3.1.SLĒGUMA OPERATORI UN TO ĪPAŠĪBAS

Šī apakšnodaļa veltīta slēguma operatoru izpētei. Šeit apskatītie rezultāti nav jauni. Autore tos tālākajās četrās apakšnodaļās izmanto attēlojumu saimju kopīgo nekustīgo punktu eksistences pamatošanā metriskās telpās ar slēguma operatoriem. Nozīmīgākos rezultātus atzīmēsim arī šeit.

Telpas X visu apakškopu sistēmu apzīmēsim ar PX.

DEFINĪCIJA 3.1.1.

Attēlojumu $S:PX\to PX$ sauc par slēguma operatoru telpā X, ja jebkurām divām kopām $A,B\in PX$ izpildās:

1) $A\subset B \Rightarrow S(A)\subset S(B)$;

2) $A\subset S(A)$;

3) $S(A)=S(S(A))$.

Pierādīts, ka S-slēgtu kopu sistēma telpā X ir invarianta attiecībā pret šķēlumiem, kur kopu $A\in PX$ sauc par S-slēgtu, ja $A=S(A)$ un S ir slēguma operators telpā X.

DEFINĪCIJA 3.1.3.

Telpā X, kurā definēts slēguma operators S, kopu A sauc par S-kompaktu, ja katras tās S-slēgtu apakškopu centrētas sistēmas kopu šķēlums ir netukša kopa.

DEFINĪCIJA 3.1.4.

Slēguma operatoru Sa telpā X sauc par algebrisku, ja katrai kopai $A\in PX$ un katram punktam $x\in Sa(A)$ eksistē tāda galīga kopa $F\subset A$, ka $x\in Sa(F)$.

Šo apakšnodaļu noslēdz Lemma 3.1.1., kas pamato Corna lemmas lietošanas korektumu nekustīgo punktu teorēmu pierādījumos.

3.2.ATTĒLOJUMU SAIMJU AR "NORMĀLĀS STRUKTŪRAS" NOSACĪJUMU NEKUSTĪGIE PUNKTI

Pierādītas divas teorēmas:

TEORĒMA 3.2.1.

Pieņemsim: 1) (X,d) ir metriska telpa ar algebrisku slēguma operatoru S;

2) X ir S-kompakta;

3) jebkura slēgta lode $B(x,r)$ $(x\in X,\ r\in \mathbf{R}_{++})$ ir S-slēgta.

Pieņemsim, ka F ir neizstiepjošu attēlojumu, kas telpu X attēlo sevī, komutatīva saime un

4) visiem $f\in F$ nekustīgo punktu kopa $\mathrm{Fix}f$ ir netukša un S-slēgta;

5) $\forall f\in F, \forall x\in X (x\neq f(x))\ \exists y\in A(x,f)$:

$$\sup\{d(y,z)\,|\,z\in A(x,f)\} < \operatorname{diam} A(x,f)$$ – "normālās struktūras" nosacījums;

kur $A(x,f) := \bigcap\{A\in PX\,|\,x\in A\ \&\ A=S(A)\ \&\ f(A)\subset A\}$.

Pie šiem nosacījumiem saimei F eksistē kopīgs nekustīgais punkts.

TEORĒMA 3.2.2.

Pieņemsim: 1) (X,d)-metriska telpa ar slēguma operatoru S;

2) X ir S-kompakta;

3) jebkura slēgta lode $B(x,r)$ $(x\in X,\ r\in \mathbf{R}_{++})$ ir S-slēgta.

Pieņemsim, ka F ir neizstiepjošu attēlojumu, kas telpu X attēlo sevī, saime, kas apmierina sekojošus nosacījumus:

4) $\exists q\in]0;1[\ \forall x,y\in X\ \forall f,g\in F$:

$$d(f(x),g(y)) \le \max\{d(x,y);\ q\operatorname{diam}(A(x)\cup A(y))\};$$

5) $\forall x\in X (\exists v\in F: v(x)\neq x)\ \exists y\in A(x)$:

$$\sup\{d(y,z)\,|\,z\in A(x)\} < \operatorname{diam} A(x),$$

kur $A(x) := \bigcap\{A\in PX\,|\,x\in A\ \&\ A=S(A)\ \&\ \forall f\in F: f(A)\subset A\}$.

Pie šiem nosacījumiem saimei F eksistē kopīgs nekustīgais punkts.

Pamatots ar Piemēru 3.2.1., ka abu teorēmu 5) nosacījums par "normālo struktūru" ir vājāka prasība nekā V.A.Kirka un L.P.Beljusa rakstos, kā arī dots Piemērs 3.2.2., kas parāda, ka nekustīgo punktu kopas S-slēgtība neseko no Teorēmas 3.2.1. pārējiem nosacījumiem.

3.3. NEKUSTĪGIE PUNKTI ATTĒLOJUMU SAIMĒM AR SAMAZINĀTU ORBĪTAS DIAMETRU

V.A.Kirks rakstos [1969], [1970] izmantojis divus atšķirīgus nosacījumus par attēlojumu orbītas diametra samazināšanos. Pārnesot šos nosacījumus uz metrisku telpu ar algebrisku slēguma operatoru, pierādītas sekojošas divas teorēmas attēlojumu saimēm:

TEORĒMA 3.3.1.

Pieņemsim: 1) (X,d) ir metriska telpa ar algebrisku slēguma operatoru S;

2) $\overline{S(A)}=S(\overline{S(A)})=:S'(A)$ visām $A\in PX$;

3) X ir S'-kompakta;

4) jebkura slēgta lode $B(x,r)$ ($x\in X$, $r\in\mathbf{R}_{++}$) ir S-slēgta.

Pieņemsim, ka F ir nepārtrauktu attēlojumu, kas telpu X attēlo sevī, saime un apmierina nosacījumus:

5) $\exists t\in]0;1[\ \forall x,y\in X\,\forall f,g\in F$:

$$d(f(x),g(y))\leq \max\{d(x,y);t\,diam(A(x)\cup A(y))\};$$

6) $\forall x\in X(\exists v\in F: v(x)\neq x)\exists y\in A(x)$:

$$\sup\{\inf\{\sup\{d(y,f^{m}(x))\,|m\geq n\}\,n\in\mathbf{Z}_{++}\}\,f\in F\}<diam A(x),$$

kur $A(x):=\bigcap\{A\in PX|x\in A\ \&\ A=S'(A)\ \&\ \forall f\in F: f(A)\subset A\}$.

Pie šiem nosacījumiem attēlojumu saimei F eksistē kopīgs nekustīgais punkts.

TEORĒMĀ 3.3.2., atšķirībā no 3.3.1., izmainīts 6) nosacījums. Tas tiek pavājināts sekojošā veidā:

6) $\exists N\in\mathbf{Z}_{++}\ \forall x\in X(\exists v\in F: v(x)\neq x)\exists y\in A(x)$:

$$\sup\{\inf\{\sup\{d(y,f^{m}(x))\,|m\geq n\}\,n\geq N\}\}\,f\in F\}<diam A(x),$$

kur $A(x):=\bigcap\{A\in PX|x\in A\ \&\ A=S'(A)\ \&\ \forall f\in F: f(A)\subset A\}$.

Arī pie šiem nosacījumiem attēlojumu saimei F eksistē kopīgs nekustīgais punkts.

3.4. KVAZI-NEIZSTIEPJOŠU ATTĒLOJUMU SAIMJU NEKUSTĪGIE PUNKTI

Ar kvazi-neizstiepjoša attēlojuma definīciju normētā vektoru telpā iepazināmies 2.nodaļā (Definīcija 2.1.4.). V.G.Dotsona un H.F.Sentera rakstā [1974] atrodam, ka viens no nosacījumiem, lai attēlojums f:A-A normētā lineārā telpā būtu kvazi-neizstiepjošs, ir prasība, lai tam eksistētu nekustīgais punkts kopā A un

$\forall x,y\in A$: $\|f(x)-f(y)\|\leq a\|x-f(x)\|+b\|y-f(y)\|+c\|x-y\|$, (*)

kur a,b,c ≥0 un 0<a+b+c≤1. R.Kannana nekustīgo punktu teorēmās Banaha telpā ([1971], [1973]) parasti konstantes c=0 un a=b=0,5. S.Reihs [1971] pierāda nekustīgā punkta eksistenci attēlojumam ar nosacījumu (*) pilnā metriskā telpā.

Doktordarbā pierādītas divas teorēmas, kas vispārina R.Kannana un S.Reiha rezultātus metriskās telpās ar slēguma operatoriem attēlojumu saimēm.

TEORĒMA 3.4.1.

Pieņemsim: 1) (X,d) ir metriska telpa ar algebrisku slēguma operatoru S;

2) $\overline{S(A)}=S(\overline{S(A)})=:S'(A)$ visām $A\in PX$;

3) X ir S'-kompakta;

4) jebkura slēgta lode $B(x,r)$ $(x\in X,\ r\in\mathbf{R}_{++})$ ir S-slēgta.

Pieņemsim, ka F ir nepārtrauktu attēlojumu, kas attēlo telpu X sevī, saime un apmierina sekojošus nosacījumus:

5) $\forall f,g,h\in F\ \forall x,y\in X\ \exists\alpha\in]0;1[:$

$$d(g(x),h(y))\le\alpha d(x,f(x))+(1-\alpha)d(y,f(y));$$

6) $\forall x\in X(\exists v\in F: v(x)\neq x)\exists y\in A(x):$

$$\sup\{d(y,f(y))\,|\,f\in F\}<\sup\{\sup\{d(z,f(z))\,|\,z\in A(x)\}f\in F\}.$$

kur $A(x):=\bigcap\{A\in PX|x\in A\ \&\ A=S'(A)\ \&\ \forall f\in F:\ f(A)\subset A\}$.

Pie šiem nosacījumiem saimei F eksistē viens vienīgs kopīgs nekustīgais punkts.

TEORĒMA 3.4.2., saglabājot pirmos četrus iepriekšējās teorēmas nosacījumus, pieprasot saimes F attēlojumu nepārtrauktību un

5) $\forall f,g,h\in F\ \forall x,y\in X\ \exists a,b,c\in\mathbf{R}_{+}: 0<a+b+2c<1:$

$$d(g(x),h(y))\le ad(f(x),x)+bd(f(y),y)+cd(x,y);$$

6) $\forall x\in X(\exists v\in F: v(x)\neq x)\exists y\in A(x)\ \exists w\in A(x):$

$$\sup\{d(w,z)\,|\,z\in A(x)\}\le\sup\{d(y,f(y))\,|\,f\in F\}<\sup\{\sup\{d(z,f(z))\,|\,z\in A(x)\}f\in F\},$$

kur $A(x):=\bigcap\{A\in PX|x\in A\ \&\ A=S'(A)\ \&\ \forall f\in F:\ f(A)\subset A\}$,

tiek garantēts viens vienīgs kopīgs nekustīgais punkts saimei F.

3.5. ATTĒLOJUMU SAIMJU AR INVARIANCES ĪPAŠĪBU NEKUSTĪGIE PUNKTI

[1970] V.Takahaši devis šādu invariances īpašības definējumu:

DEFINĪCIJA 3.5.2.

Neizstiepjošu attēlojumu saimei $F=\{f|\ f:E\to E,$ E - Takahaši izliektas metriskas telpas apakškopa$\}$ piemīt invariances īpašība kopā E, ja katrai kompaktai Takahaši izliektai kopai $K\subset E$, kurai: $f(K)\subset K$, $\forall f\in F$, eksistē kompakta apakškopa $M\subset K$ tāda, ka $f(M)=M$ visiem $f\in F$.

Gan V.Takahaši [1970], gan R.de Marrs [1963], gan M.R.Taskovičs [1980], pierādot kopēja nekustīgā punkta eksistenci komutatīvām attēlojumu saimēm, izmanto invariances īpašību. Doktordarbā definēta S-invariances īpašība un S-normāla struktūra un pierādīta atbilstoša teorēma.

Pieņemsim, ka X ir metriska telpa.

DEFINĪCIJA 3.5.3.

Attēlojumu saimei F, kas attēlo kopu $K\subset X$ sevī, piemīt S-invariances īpašība, ja katrā kopas K S-kompaktā un S-slēgtā apakškopā $E\subset K$ tādā, ka $f(E)\subset E$ visiem $f\in F$ eksistē tāda S-kompakta apakškopa $M\subset E$, ka $f(M)=M$ visiem $f\in F$.

DEFINĪCIJA 3.5.4.

Saka, ka S-slēgtai kopai $K\subset X$ ir S-normāla struktūra, ja katrā S-slēgtā nevienelementīgā apakškopā $H\subset K$ eksistē tāds elements $u\in H$, ka $\sup\{d(x,u)\,|\,x\in H\}<\operatorname{diam}H$.

Saka, ka telpai X ir S-normāla struktūra, ja katrai S-slēgtai kopai telpā X ir S-normāla struktūra.

TEORĒMA 3.5.1.

Pieņemsim: 1) (X,d) - metriska telpa ar slēguma operatoru S;

2) X ir S-kompakta;

3) X ir ar S-normālu struktūru;

4) jebkura slēgta lode $B(x,r)$ $(x\in X,\ r\in \mathbf{R}_{++})$ ir S-slēgta.

Ja neizstiepjošu attēlojumu, kuri attēlo telpu X sevī, saimei $F: X\to X$ piemīt S-invariances īpašība telpā X, tad saimei F ir kopīgs nekustīgais punkts.

Izdarīta Piezīme 3.5.1., ka neizstiepjošu attēlojumu saimi Teorēmā 3.5.1. var aizstāt ar diametrāli neizstiepjošu attēlojumu saimi.

II DAĻA: BOLA-BRAUERA-ŠAUDERA TEORĒMAS STABILITĀTE

0.VĒSTURISKS APSKATS

0.nodaļā dots īss ieskats Brauera teorēmas [1910] vēsturē un tālākā attīstībā. Minēts, ka pazīstamās teorēmas atklājējs ir baltvācu matemātiķis Pīrss Bols [1904]. Visbiežāk izmantotais Brauera teorēmas vispārinājums ir J.Šaudera teorēma [1930].

ŠAUDERA TEORĒMA ([1930]).

Ja K ir netukša, kompakta un izliekta Banaha telpas X apakškopa, kuru nepārtraukts attēlojums f attēlo sevī, tad attēlojumam f eksistē nekustīgais punkts.

1.ŠAUDERA TEORĒMAS ANALOGS W-NEPĀRTRAUKTAM ATTĒLOJUMAM

1.nodaļa sastāv no trim apakšnodaļām.

1.1. PAMATJĒDZIENI

S.Kakutani [1943] pamato, ka Šaudera teorēmā kopas kompaktumu nevar aizstāt ar kopas ierobežotību un slēgtību. Tāpat var konstruēt elementārus piemērus, kuros, atmetot kopas izliektības prasību, Šaudera teorēmas secinājums nesaglabājas. 1.1.apakšnodaļas Piemērā 1.1.1. parādīts, ka, ja no izliektas un kompaktas kopas - šajā piemērā , vienības lodes, - tiek atņemts tikai viens pats punkts, tad var konstruēt tādu attēlojumu, kuram nav neviena nekustīgā punkta un attālums starp jebkuru kopas punktu un tā attēlu ir samērā "liels", t.i., nelielas kopas "novirzes" no izliektības un kompaktības ir būtiski izmainījušas Šaudera teorēmā formulēto situāciju.

Rodas jautājums, kā Šaudera teorēmu izmainītu nepārtraukta attēlojuma nosacījuma pavājināšana. Doktordarbā piedāvāts nepārtrauktu attēlojumu aizstāt ar w-nepārtrauktu attēlojumu.

Pieņemsim, ka telpa X ir metriska telpa ar metriku d, $D(f)\subset X$ ir attēlojuma f definīcijas apgabals un $f:D(f)\to X$.

DEFINĪCIJA 1.1.1.

Attēlojumu f sauc par w-nepārtrauktu ($w\in\mathbf{R}_{++}$) punktā $x_0\in D(f)$, ja jebkuram pozitīvam skaitlim ε eksistē tāds pozitīvs skaitlis δ, ka jebkuram punktam $x\in D(f)$: $d(x_0,x)<\delta$ izpildās nosacījums: $d(f(x_0),f(x))<\varepsilon+w$.

Ja attēlojums f ir w-nepārtraukts jebkurā definīcijas apgabala D(f) punktā, tad šādu attēlojumu sauc par w-nepārtrauktu kopā D(f) jeb w-nepārtrauktu.

Lai realizētu iespējamo pozitīvo rezultātu, tiek izmantota aproksimācijas ideja.

DEFINĪCIJA 1.1.3.

Attēlojumu $g:A\to X$, kur A metriskās telpas X apakškopa un $A\supset D(f)$, sauc par attēlojuma $f:D(f)\subset A\to X$ μ-aproksimāciju kopā D(f), ja jebkuram kopas D(f) punktam x ir spēkā: $d(f(x),g(x))\le\mu$, $\mu\in\mathbf{R}_+$.

Zinot, ka kompaktā kopā nepārtraukts attēlojums ir arī vienmērīgi nepārtaukts, tiek definēts vienmērīgi w-nepārtraukts attēlojums un pierādīts atbilstošs rezultāts.

DEFINĪCIJA 1.1.4.

Attēlojumu $f:D(f)\to X$ sauc par vienmērīgi w-nepārtrauktu ($w\in\mathbf{R}_{++}$), ja jebkuram pozitīvam skaitlim ε eksistē tāds pozitīvs skaitlis δ, ka jebkuriem diviem punktiem x un y no D(f): $d(x,y)<\delta$, izpildās nosacījums: $d(f(x),f(y))<\varepsilon+w$.

TEORĒMA 1.1.1.

Ja X ir metriska telpa, A ir kompakta apakškopa telpā X un attēlojums $f:A \to B \subset X$ ir w-nepārtraukts, tad f ir vienmērīgi 2w-nepārtraukts attēlojums.

1.2. NEPĀRTRAUKTA APROKSIMĒJOŠA ATTĒLOJUMA EKSISTENCE w-NEPĀRTRAUKTAM ATTĒLOJUMAM

Šī apakšnodaļa ir sagatavošanās darbs Šaudera teorēmas vispārināšanai. Tiek pierādīts sekojošais:

TEORĒMA 1.2.1.

Ja X - normēta lineāra telpa, kopa $A \subset X$ - kompakta, $f:A \to X$ - vienmērīgi w-nepārtraukts attēlojums, tad attēlojumam f eksistē nepārtraukta w'-aproksimācija $\bar{f}$ un $\bar{f}(A) \subset conv f(A)$, $w'>w$.

Šīs teorēmas pierādījums ir viens no vissmagākajiem visā darbā. Pirmām kārtām kopā A tiek konstruēts noteiktu punktu tīkls M. Savukārt, daļēji atkārtojot vispārinātās Titces teorēmas pierādījumu, tiek konstruēts attēlojuma f sašaurinājuma kopā M nepārtraukts turpinājums visā telpā X. Pēdējais solis - tiek pamatots, ka iegūtais turpinājums ir attēlojuma f w'-aproksimācija, $w'>w$.

Gadījumā, kad $f:[a;b] \to \mathbf{R}$, eksistē nepārtraukta $\frac{w'}{2}$-aproksimācija, $w'>w$. Tas pierādīts Teorēmā 1.2.2..

1.3. PAMATREZULTĀTS

Iepriekšējās apakšnodaļās iegūtie rezultāti ļauj pamatot:

TEORĒMA 1.3.1.

Ja K ir netukša, kompakta un izliekta Banaha telpas X apakškopa, kuru w-nepārtraukts attēlojums f attēlo sevī, tad kopā K eksistē tāds punkts x^*, ka $d(x^*, f(x^*)) \leq 2w'$, $w'>w$.

SEKAS 1.3.1.

Ja $K=[a;b]$ un $f:K \to K$ ir w-nepārtraukts, tad intervālā K eksistē tāds punkts x^*, ka $d(x^*, f(x^*)) \leq w'$, $w'>w$.

SEKAS 1.3.2.

Ja pie dotajiem Teorēmas 1.3.1. nosacījumiem ir spēkā, ka f ir vienmērīgi w-nepārtraukts attēlojums, tad $\exists x^* \in K$: $d(x^*, f(x^*)) \leq w'$, $w'>w$.

SEKAS 1.3.3.

Ja $K=[a;b]$ un $f:K \to K$ ir vienmērīgi w-nepārtraukts attēlojums, tad $\exists x^* \in K$: $d(x^*, f(x^*)) \leq \frac{w'}{2}$, $w'>w$.

2. IESPĒJAMAIS PIELIETOJUMS EKONOMIKĀ

2. nodaļa sastāv no divām apakšnodaļām.

2.1. w-NEPĀRTRAUKTU ATTĒLOJUMU ĪPAŠĪBAS NORMĒTĀ TELPĀ

Iepazīšanās ar ekonomisko tirgus līdzsvara modeļu teoriju (piemēram, K.J.Arrovs un F.H.Hāns [1980] vai R.R.Kornvals [1984]) liecina, ka tiešā veidā Teorēmu 1.3.1. nevar pielietot. Rodas nepieciešamība noskaidrot w-nepārtrauktu attēlojumu īpašības Eiklīda telpās. Neko nezaudējot no iepriekšējiem 1.nodaļā formulētajiem rezultātiem, var vispārināt w-nepārtrauktu attēlojumu sekojoši:

DEFINĪCIJA 2.1.1.

Attēlojumu $f:X \to Y$, kur X, Y - normētas vektoru telpas, sauc par w-nepārtrauktu ($w \in \mathbf{R}_{++}$) punktā $x_0 \in X$, ja jebkuram pozitīvam skaitlim ε eksistē tāds pozitīvs skaitlis δ, ka jebkuram punktam $x \in X$: $\|x-x_0\|_X < \delta$ izpildās nosacījums: $\|f(x)-f(x_0)\|_Y < \varepsilon + w$.

Ja attēlojums f ir w-nepārtraukts jebkurā telpas X punktā, tad šādu attēlojumu sauc par w-nepārtrauktu telpā X jeb w-nepārtrauktu.

Un ir pierādītas sekojošas w-nepārtraukta attēlojuma īpašības:

TEORĒMA 2.1.1.

Pieņemsim, ka attēlojums $f:X \to Y$ ir w'-nepārtraukts, attēlojums $g:X \to Y$ ir w''-nepārtraukts, kur X, Y ir normētas vektoru telpas. Pie šiem nosacījumiem $f+g$ ir $w'+w''$-nepārtraukts attēlojums.

Pieņemsim, ka dotas normētas vektoru telpas X, Y, V, Z un dots attēlojums $X \times Y \to Z$, kuru pierakstīsim kā reizinājumu. Apskatīsim attēlojumus $f:V \to X$ un $g:V \to Y$. Tad ar attēlojumu reizinājumu sapratīsim $(f \cdot g)(x) := f(x)g(x)$, $\forall x \in V$.

TEORĒMA 2.1.2.

Pieņemsim, ka attēlojums $f:V \to X$ ir w'-nepārtraukts, attēlojums $g:V \to Y$ ir w''-nepārtraukts. Pie šiem nosacījumiem $f \cdot g$ ir $w'w''+w'\|g(x_0)\|_Y+w''\|f(x_0)\|_X$-nepārtraukts attēlojums katrā telpas V punktā x_0.

Dalījuma gadījumā jāsamierinās tikai ar vienu vienkāršotu situāciju.

TEORĒMA 2.1.3.

Ja $f: X \to [1;+\infty[$ ir w-nepārtraukts attēlojums normētā vektoru telpā X, tad $\frac{1}{f}$ ir $\frac{w}{f(x_0)}$-nepārtraukts attēlojums katrā telpas X punktā x_0.

Zināmu lomu ekonomiskajos modeļos spēlē nepārtraukta attēlojuma vērtību kopas ierobežotība, ja vien definīcijas kopa ir kompakta. Šajā gadījumā var garantēt arī vērtību kopas kompaktību, taču w-nepārtraukta attēlojuma situācijā vairāk par ierobežotību nevaram iegūt, to pierāda Teorēma 2.1.4. un Piemērs 2.1.2..

2.2. EKONOMISKĀ MODEĻA PIEMĒRS

Lasītājam tiek piedāvāts K.J.Arrova un F.H.Hāna [1980] ekonomiskā tirgus modeļa apraksts. Pastāstīts, kā pie noteiktiem pieņēmumiem tiek garantēts tirgus līdzsvars, proti, eksistē tāda cenu sistēma, kas pilnībā apmierina ražotāju un patērētāju pieprasījumu pēc labumiem. Izmainot divus standartpieņēmumus no četriem, lietojot iepriekšējā apakšnodaļā pierādītās w-nepārtrauktu attēlojumu īpašības un vispārināto Šaudera teorēmu w-nepārtrauktam attēlojumam, tiek pierādīta tirgus k-līdzsvara eksistence.

PĒCVĀRDS

Pēcvārdā autore centusies izsvērt viņasprāt lielākos ieguvumus un zaudējumus piedāvātajā doktordarbā.

THE UNIVERSITY OF LATVIA

INESE BULA

FIXED POINTS OF MAPPINGS IN CONVEX METRIC SPACES

SUMMARY of dissertation for
Dr.Sc.Degree at the University of Latvia

Supervisor: Dr.math. assistant professor Andris Liepiņš,
the University of Latvia

Riga, 1994

SURVEY

Let X, Y be non-empty sets and $X\cap Y\neq\emptyset$. Let $f:X\to Y$ be a mapping. A point $x\in X$ is said to be fixed point if $f(x)=x$.

The theory of fixed points is concerned with conditions on mappings, sets, spaces which guarantee that a mapping f admits one or more fixed points. There is a great number of publications about this subject that had appeared in recent years. We quote only some monographs: F.F.Bonsall [1962], J.Cronin [1964], D.R.Smart [1974], S.Swaminathan (Ed) [1976], E.Zeidler [1976], G.Eisenack, C.Fenske [1978], V.I.Istratescu [1981], K.C.Border [1982], J.Dugundji, A.Granas [1982], M.R. Taskovič [1986], K.Schilling [1986]. A considerable direction in this theory is connected with contracting mappings (e.g. Banach's theorem) and nonexpansive mappings (e.g. Kirk's theorem). Another branch presents a generalization of the Bohl-Brouwer's theorem. Since Kakutani's theorem appeared the approach based on multivalued mappings is developed thoroughly. In parallel to all these directions existence of common fixed points for families of mappings is also studied. Lately is constantly growing the interest about fixed points in probabilistic metric spaces. In this dissertation there are represented a few bits of directions mentioned above.

ACTUALITY OF THE SUBJECT

There are reasons to believe that for one mapping case the fixed point theory is well developed and that we can find an appropriate result in almost any possible situation. In the case when we have families of mappings the number of known results are much smaller. The main part of this dissertation is devoted to the study of existence of fixed points for the families of mappings in convex subsets of metric spaces.

In the ordinary sense we can define convexity only in vector spaces. There are known two ways how to define the notion of convexity in arbitrary metric spaces - one is due to W.Takahashi [1970], other due to J.P.Penot [1979]. In the Chapter 2 of Part 1 the author have tried, particularly by following the definition of convex vector spaces, to define convex sets in metric spaces. However, from such definition of convexity it does not necessarily follow that intersection of two convex sets is also convex, or that all balls are convex sets. We have better results by using notion of strictly convex metric space, this notion is also introduced in the dissertation. Such notion, if metric is defined through norm, is equivalent with the notion of strictly convex Banach space.

In the Chapter 3 of Part 1 convexity in metric spaces is defined by using closure operators. Thus, for example, in strictly convex metric space we can define closure operator as a mapping that each set K from given metric space maps into the minimal convex set that contains K. Therefore, strictly convex metric space is a particular instance of metric space with closure operator. The notion of closure operator is not completely new, in the fixed point theory it is already used by A.Liepiņš [1983].

In the theory of modelling in economics the existence of market equilibrium is usually proved by using some fixed point theorem, mainly the theorem of Bohl-Brouwer and the theorem of Kakutani. One of the main assumptions that justifies the use of these theorems are continuity of excess demand function. In the Part 2 of these dissertation the author considers possibility to weaken reqiurement of continuity and use w-continuous functions instead. There is also proved an analog of Bohl-Brouwer theorem for w-continuous mappings, and, by taking into account the properties of w-continuous mapping, there is constructed a model of economy that equilibrium of market proves with the help of this new theorem. There are reasons to believe that this result can be used also in other economic models.

AIMS OF THE WORK

1) to find which properties of convex vector spaces are used in the fixed point theory;
2) to define convexity structure in an arbitrary metric space;
3) to find what conditions must be satisfied by spaces, sets and mappings in order to have common fixed points for families of mappings in convex subsets of metric spaces;
4) to prove an analog of Bohl-Brouwer theorem for w-continuous mapping;
5) to investigate how this theorem can be used in the proofs of market equilibrium in the models of economy.

METHODS OF INVESTIGATION

In general there are used mathematical methods from functional analysis and topology.

MAIN RESULTS

There have been found properties of convex sets that are most commonly used in proofs of fixed point theorems. These properties are used in the proofs of fixed point theorems given in this dissertation.

As generalization of strictly convex Banach space a notion of strictly convex metric space is developed in this work. It is proved that in closed and convex subsets of strictly convex metric spaces fixed point sets of nonexpansive, quasi-nonexpansive and asymptotically nonexpansive mappings are closed and convex. It is shown that, if metric is defined through norm then the definition of strictly convex metric spaces is equivalent with definition of strictly convex Banach spaces.

In the proofs of existence of common fixed points for families of mappings successfully is used closure operator that up to some extent defines convexity structure in metric space. There are proven theorems in metric spaces with given closure operator in which families of mappings:

1) satisfies the "normal structure" condition;
2) are with diminishing orbital diameters;
3) are quasi-nonexpansive;
4) satisfies the invariant property.

There is obtained a generalization of Bohl-Brouwer theorem for w-continuous mappings by using an approximation of w-continuous mapping with a continuous mapping. For the subcase of real numbers there is obtained a better approximation as in the general case. The properties of w-continuous mappings are also investigated. There is also developed particular model of market economy in which the market equilibrium is proved with the use of results mentioned above.

NOVELTY OF RESULTS

All main results given in this dissertation are new and are obtained during the last 6 years.

THEORETICAL AND PRACTICAL IMPORTANCE

In general this work has theoretical character.

The results from the Part 1 can be used in the proofs of existence of solutions for systems of nonlinear equations. The generality of results from the Chapters 2 and 3 of Part 1 allows to use them not only in the spaces with linear structure, but also in the spaces without it.

The main result from Part 2 and w-continuous mappings probably could have a broad field of applications in the theoretical studies of economy. In the work is proposed an economic model in which equilibrium of market can be proved by using generalized Bohl-Brouwer-Schauder theorem for w-continuous mapping.

APPROBATION OF THE WORK

The main results from Part 1 are referred at the scientific conferences of the University of Latvia (1989-1993), scientific conferences of Tartu University (1989-1991) and at symposium topology and its applications held in Tiraspol (in Kishinev, Moldova) in 1991. Results from Part 2 are referred in the Institute of Statistics and Econometry of Hamburg University (1993-1994).

PUBLICATIONS

The results of these dissertation are published in 9 articles and in 1 abstract.

THE STRUCTURE AND VOLUME OF THE WORK

Dissertation consists of list of notations, introduction, two parts, afterword and bibliography. Part 1 contains 4 chapters, Part 2 contains 3 chapters. Bibliography contains 99 references. The volume of dissertation is 92 pages.

CONTENTS OF THE WORK

In the following text definitions and results that are already known are printed in *italics*, definitions and results that are printed in normal script are new.

INTRODUCTION

In the introduction of dissertation the actuality of the chosen subject is motivated and the aims and scope of work are formulated.

The reader is introduced to the two kinds of convexity that can be defined in an arbitrary metric space and that are used in the fixed point theory. There are also mentioned properties of convex sets that are most commonly used in proofs of fixed point theorems.

I PART: COMMON FIXED POINTS FOR FAMILIES OF MAPPINGS

0. BASIC CONCEPTS, DEFINITIONS, ALREADY KNOWN RESULTS

In Chapter 0 there are given basic concepts and definitions of the fixed point theory. Here are also formulated most important of already known results about existence of fixed points for nonexpansive mappings and families of mappings.

DEFINITION 0.1. A mapping $f:X\to X$, where X is a metric space, is said to be nonexpansive if for every $x,y\in X$ inequality $d(f(x),f(y))\leq d(x,y)$ holds.

The theorem of W.A.Kirk claims:

THEOREM 0.1.(W.A.Kirk [1965])

Let K be a bounded, closed, convex subset of a reflexive Banach space X, and suppose that K has normal structure. If f is a nonexpansive mapping of K into itself, then f has a fixed point.

DEFINITION 0.2. A convex set K in a Banach space X is said to have normal structure if for each bounded and convex subset $H\subset K$, wich contains more that one point, there is some point $y\in H$ such that: $\sup\limits_{x\in H}\|y-x\| < \operatorname{diam}H=\sup\limits_{x,y\in H}\|x-y\|$.

There have been several attempts to generalize this theorem for families of mappings.

DEFINITION 0.3. Let F be a family of mappings $f:K \to K$, where K is an arbitrary set. The point $x^* \in K$ is said to be a common fixed point for the family of mappings F, if for every mapping $f \in F$ equality $f \in F$: $f(x^*) = x^*$ holds.

One from several possible properties that guaranties existence of common fixed point for a family of mappings is commutativity.

DEFINITION 0.4. A family of mappings F is commutative, if for all $x \in K$, where K is an arbitrary set, condition $f(g(x)) = g(f(x))$ holds for all $f, g \in K$.

In 1974 T.C.Lim generalized the theorem of W.A.Kirk for commuting family of nonexpansive mappings.

1. SOME INTRODUCTORY RESULTS ON FIXED POINTS FOR FAMILIES OF MAPPINGS

In the Chapter 1 are proved four fixed point theorems. The first three of them could be considered as generalizations of corollary of the theorem of W.A.Kirk, formulated in the previous chapter. In the corollary of W.A.Kirk theorem the boundedness of set K is substituted with existence of point $p \in K$, such that sequence $(f^n(p))_{n \in \mathbf{N}}$ is bounded. Generalizations are given for the also case of commuting families of nonexpansive mappings.

THEOREM 1.1.

Let:
1) X - reflexive Banach space;
2) K - nonempty, convex, closed subset of X;
3) K has a normal structure;
4) F - commuting family of nonexpansive selfmaps of K;
5) exists such point $p \in K$ that set $S = \{(f_1 \circ \ldots \circ f_n)(p) \mid f_1, \ldots, f_n \in F \,\&\, n \in \mathbf{N}\}$ is bounded.

Then exists a common fixed point for family F.

THEOREM 1.2.

Let:
1) X - strictly convex, reflexive Banach space;
2) K - nonempty, convex, closed subset of X;
3) K has a normal structure;
4) F - commuting family of finite number of nonexpansive selfmaps of K;
5) exists such point $p \in K$ that sequences $(f^n(p))_{n \in \mathbf{N}}$ for every $f \in F$ are bounded.

Then exists a common fixed point for family F.

In order to guarantee existence of a common fixed point for commuting family of nonexpansive mappings in the situation as described by Theorem 1.2., but without restriction on the cardinality of F, condition 5) in THEOREM 1.3. is formulated in the following way: 5) there exists mapping $f_0 \in F$, such that set of fixed points $Fixf_0$ is nonempty, closed, bounded and has normal structure.

The last theorem of Chapter 1 is essentially different from the other given before. In this theorem there are given conditions which for every mapping from given family guarantees existence of its own fixed point, which not necessarily is common for all mappings from that family.

THEOREM 1.4.

Let: 1) X - normed vector space ($\mathbf{R}$ *or* $\mathbf{C}$);

2) K - compact subset of X;

3) $F=\{f_1,f_2,\ldots,f_n\}$ is family of finite number of nonexpansive mappings such that

a) $\forall x,y \in K (x \neq y):\ min\{\|f_i(x)-f_i(y)\| \mid i=1,2,\ldots,n\} < \|x-y\|$;

b) $\forall x \in K:\ conv\{f_1(x),\ldots,f_n(x)\} \subset K$.

Then for every $f_i \in F$ exists its own fixed point x_i: $f_i(x_i)=x_i$, $i=1,2,\ldots,n$.

2. STRICTLY CONVEX METRIC SPACES

Chapter 2 contains 3 sections.

2.1. CONVEX SETS AND STRICTLY CONVEX BANACH SPACES

In this section already known formulations and results are considered: how to define convex set in vector space, what are properties of convex sets, how to define a strictly convex Banach space, what are equivalent formulations.

DEFINITION 2.1.3. A Banach space X is said to be strictly convex if all points of unit sphere are not inner points of straight lines in a unit ball.

By Proposition 2.1.1. (V.I.Istratescu [1981], p.57) Definition 2.1.3. is equivalent with following condition in a Banach space X:

$$\forall x,y \in X: \|x+y\|=\|x\|+\|y\| \rightarrow ((\exists \lambda \in \mathbf{R}_{++}: x=\lambda y) \vee (x=0) \vee (y=0)).$$

In convex closed subset of a strictly convex Banach space set of fixed points for nonexpansive mapping is convex and closed. This property holds also for broader classes of mappings, for example, for quasi-nonexpansive and asymptotically nonexpansive mappings.

DEFINITION 2.1.4. (V.G.Dotson [1972]) A selfmapping f of a subset K of a normed linear space is said to be quasi-nonexpansive provided f has at least one fixed point in K, and if $p\in K$ is any fixed point of f then $\|f(x)-p\|\le\|x-p\|$ holds for all $x\in K$.

DEFINITION 2.1.5. (K.Goebel, W.A.Kirk [1972]) A selfmapping f of a subset K of a normed linear space is said to be asymptotically nonexpansive if for each $\forall x,y\in K$: $\|f^{i}(x)-f^{i}(y)\|\le k_i\|x-y\|$, where $(k_i)_{i\in\mathbb{N}}$ is a sequence of real numbers such that $\lim_{i\to\infty}k_i=1$ (it is assumed that $k_i\ge 1$, $k_{i+1}\le k_i$, $i=1,2,\ldots$).

2.2. CONVEX SETS AND STRICLY CONVEX METRIC SPACES

Convex set in metric space (X,d) with distance d is defined in the following way:

DEFINITION 2.2.1. A set $K\subset X$ is said to be convex if for each $x,y\in K$ and for each $t\in[0;1]$ there exists $z\in K$ that satisfies: $d(x,z)=td(x,y)$ and $d(z,y)=(1-t)d(x,y)$.

Strictly convex metric space is defined as follows:

DEFINITION 2.2.2. A metric space X is said to be strictly convex if for each $x,y\in X$ and for each $t\in[0;1]$ there exists unique $z\in X$ that satisfies: $d(x,z)=td(x,y)$ and $d(z,y)=(1-t)d(x,y)$.

In this section it is proved that:

1) in strictly convex metric space intersection of a convex sets is convex set (Theorem 2.2.1.);

2) in convex closed subsets of strictly convex metric space sets of fixed points for families of nonexpansive (Lemma 2.2.1.), quasi-nonexpansive (Lemma 2.2.2.) and asymptotically nonexpansive (Lemma 2.2.3.) mappings are convex and closed. There results are used in the proof of Theorem 2.2.4..

THEOREM 2.2.4.

If: 1) X - strictly convex metric space;

2) for arbitrary $a,b,c\in X$ and for arbitrary $z\in X$, such that $d(b,z)=td(b,c)$ and $d(z,c)=(1-t)d(b,c)$, where $t\in]0;1[$, holds inequality: $d(a,z)<\max\{d(a,b),d(a,c)\}$;

3) $K\subset X$ - convex and compact set;

4) F is a commuting family of

a) nonexpansive selfmaps of K or

b) quasi-nonexpansive selfmaps of K, or

c) asymptotically nonexpansive selfmaps of K;

5) for all $f \in F$: $\mathrm{Fix} f \neq \emptyset$ (in case 4b) this condition is not necessary);

then exists common fixed point for family F.

2.3. MORE ABOUT STRICTLY CONVEX BANACH SPACES

In this section the following result is proved:

PROPOSITION 2.3.1.

In a Banach space X the following conditions are equivalent:

1. $\forall x, y \in X: \|x+y\| = \|x\| + \|y\| \rightarrow ((\exists \lambda \in \mathbf{R}_{++}: x=\lambda y) \vee (x=0) \vee (y=0))$;

2. $\forall x, y \in X\ \forall t \in [0,1]\ \exists!\, z \in X: \|x-z\| = t\|x-y\|, \|z-y\| = (1-t)\|x-y\|$.

To conclude Chapter 2 there is given an example of strictly convex metric space which is not a strictly convex Banach space.

3. FIXED POINTS OF MAPPINGS IN METRIC SPACES WITH CLOSURE OPERATOR

Chapter 3 contains 5 sections.

3.1. CLOSURE OPERATORS AND THEIR PROPERTIES

This section is devoted to the study of closure operators. Results consider here are not new. The author of dissertation are using there results in the following 4 sections in proofs of theorems on existence of fixed points for families of mappings in metric spaces with closure operators. Most important results are mentioned also here.

Set of all subsets of space X we will denote with PX.

DEFINITION 3.1.1.

A closure operator on X is a mapping $S: PX \rightarrow PX$ for each $A, B \in PX$ satisfying:

1) $A \subset B \rightarrow S(A) \subset S(B)$;

2) $A \subset S(A)$;

3) $S(A) = S(S(A))$.

It is known that system of S-closed sets in space X is invariant with respect to intersections, where set $A \in PX$ is called S-closed, if $A = S(A)$ and S is a closure operator in space X.

DEFINITION 3.1.3.

A space X is said to be S-compact if each centered system of S-closed subsets of X has a nonempty intersection.

DEFINITION 3.1.4.

A closure operator S on X is said to be algebraic if for each

$A \in PX$ and $x \in S(A)$ there exists a finite set $F \subset A$ such that $x \in S(F)$.

This section ends with Lemma 3.1.1. that justifies the use of Corn Lemma in proofs of fixed point theorems.

3.2. FIXED POINTS OF FAMILIES OF MAPPINGS THAT SATISFIES THE "NORMAL STRUCTURE" PROPERTY

This section contains 2 theorems:

THEOREM 3.2.1.

Let: 1) (X,d) - metric space with algebraic closure operator S;

2) X - S-compact;

3) each closed ball $B(x,r)$ $(x \in X,\ r \in \mathbf{R}_{++})$ be S-closed.

Suppose F is a commuting family of nonexpansive selfmaps of X satisfying:

4) for all $f \in F$ sets of fixed points $\mathrm{Fix} f$ are nonempty and S-closed;

5) $\forall f \in F, \forall x \in X (x \neq f(x))\ \exists y \in A(x,f):$

$\sup\{d(y,z) \mid z \in A(x,f)\} < \mathrm{diam} A(x,f)$ - condition of "normal structure";

where $A(x,f) := \bigcap\{A \in PX \mid x \in A \,\&\, A = S(A) \,\&\, f(A) \subset A\}$.

Then F has a common fixed point.

THEOREM 3.2.2.

Let: 1) (X,d) - metric space with closure operator S;

2) X - S-compact;

3) each closed ball $B(x,r)$ $(x \in X,\ r \in \mathbf{R}_{++})$ be S-closed.

Suppose F is a family of nonexpansive selfmaps of X satisfying:

4) $\exists q \in]0;1[\ \forall x,y \in X\ \forall f,g \in F:$

$d(f(x),g(y)) \le \max\{d(x,y);\ q\,\mathrm{diam}(A(x) \cup A(y))\}$;

5) $\forall x \in X (\exists v \in F: v(x) \neq x)\ \exists y \in A(x):$

$\sup\{d(y,z) \mid z \in A(x)\} < \mathrm{diam} A(x)$,

where $A(x) := \bigcap\{A \in PX \mid x \in A \,\&\, A = S(A) \,\&\, \forall f \in F: f(A) \subset A\}$.

Then F has a common fixed point.

With the help of Example 3.2.1. it is shown that in both these theorems conditions 5), i.e., the requirement of normal structure, is weaker than condition which is required in results of W.A.Kirk and L.P.Belluce. Example 3.2.2. shows that S-closedness of set of fixed points does not follow from the other condition of Theorem 3.2.1.

3.3. FIXED POINTS FOR FAMILIES OF MAPPINGS WITH DIMINISHING ORBITAL DIAMETER

W.A.Kirk in papers [1969] and [1970] had used two different conditions of diminishing orbital diameter for a given mapping. By transferring these conditions to metric space with closure operator there are proved following two theorems on fixed points for families of mappings:

THEOREM 3.3.1.

Let: 1) (X,d) - metric space with algebraic closure operator S;

2) $\overline{S(A)}=S(\overline{S(A)})=:S'(A)$ for each $A\in PX$;

3) X - S′-compact:

4) each closed ball $B(x,r)$ ($x\in X$, $r\in\mathbf{R}_{++}$) be S-closed.

Suppose F is a family of continuous selfmaps of X satisfying:

5) $\exists t\in]0;1[\ \forall x,y\in X\ \forall f,g\in F$:

$$d(f(x),g(y))\le \max\{d(x,y);t\,diam(A(x)\cup A(y))\};$$

6) $\forall x\in X(\exists v\in F: v(x)\neq x)\exists y\in A(x)$:

$$sup\{inf\{sup\{d(y,f^m(x))\,|m\ge n\}\,n\in\mathbf{Z}_{++}\}\,f\in F\}<diam A(x),$$

where $A(x):=\bigcap\{A\in PX|x\in A\ \&\ A=S'(A)\ \&\ \forall f\in F: f(A)\subset A\}$.

Then F has a common fixed point.

In the THEOREM 3.3.2. the 6) condition of Theorem 3.3.1. is strengthened in following way:

6) $\exists N\in\mathbf{Z}_{++}\ \forall x\in X(\exists v\in F: v(x)\neq x)\exists y\in A(x)$:

$$sup\{inf\{sup\{d(y,f^m(x))\,|m\ge n\}\,n\ge N\}\}\,f\in F\}<diam A(x),$$

where $A(x):=\bigcap\{A\in PX|x\in A\ \&\ A=S'(A)\ \&\ \forall f\in F: f(A)\subset A\}$.

Then also F has a common fixed point.

3.4. FIXED POINTS OF FAMILIES OF QUASI-NONEXPANSIVE MAPPINGS

Definition of quasi-nonexpansive mapping in normed vector space was given in Chapter 2 (Definition 2.1.4.). In the paper of W.G.Dotson and H.F.Senter [1974] it is shown that one of conditions that guarantees that mapping $f:A\to A$ in normed linear space A is quasi-nonexpansive is the following requirement: mapping f must have a fixed point in set A, and

$\forall x,y\in A$: $\|f(x)-f(y)\|\le a\|x-f(x)\|+b\|y-f(y)\|+c\|x-y\|$, (*)

where $a,b,c\ge 0$ and $0<a+b+c\le 1$. In the R.Kannan ([1971], [1973]) fixed point theorems in Banach space usually we have c=0 and a=b=0,5. S.Reich [1971] have proved existence of fixed point for mapping that satisfies (*) in the case when metric space is complete.

In the dissertation there are proved 2 theorems that generalizes results of R.Kannan and S.Reich for the families of mappings in metric spaces with closure operators.

THEOREM 3.4.1.

Let: 1) (X,d) - metric space with algebraic closure operator S;

2) $\overline{S(A)}=S(\overline{S(A)})=:S'(A)$ for each $A\in PX$;

3) X - S'-compact;

4) each closed ball $B(x,r)$ ($x\in X$, $r\in\mathbf{R}_{++}$) be S-closed.

Suppose F is a family of continuous selfmaps of X satisfying:

5) $\forall f,g,h\in F\,\forall x,y\in X\,\exists\alpha\in]0;1[$:

$$d(g(x),h(y))\le\alpha d(x,f(x))+(1-\alpha)d(y,f(y));$$

6) $\forall x\in X(\exists v\in F: v(x)\neq x)\,\exists y\in A(x)$:

$$\sup\{d(y,f(y))\,|\,f\in F\}<\sup\{\sup\{d(z,f(z))\,|\,z\in A(x)\}f\in F\},$$

where $A(x):=\bigcap\{A\in PX|x\in A\ \&\ A=S'(A)\ \&\ \forall f\in F: f(A)\subset A\}$.

Then F has a unique common fixed point.

In the THEOREM 3.4.2. conditions 5) and 6) from Theorem 3.4.1. are replaced with:

5) $\forall f,g,h\in F\,\forall x,y\in X\,\exists a,b,c\in\mathbf{R}_{+}: 0<a+b+2c<1$:

$$d(g(x),h(y))\le ad(f(x),x)+bd(f(y),y)+cd(x,y);$$

6) $\forall x\in X(\exists v\in F: v(x)\neq x)\,\exists y\in A(x)\,\exists w\in A(x)$:

$$\sup\{d(w,z)\,|\,z\in A(x)\}\le\sup\{d(y,f(y))\,|\,f\in F\}<\sup\{\sup\{d(z,f(z))\,|\,z\in A(x)\}f\in F\},$$

where $A(x):=\bigcap\{A\in PX|x\in A\ \&\ A=S'(A)\ \&\ \forall f\in F: f(A)\subset A\}$.

Then also F has a unique common fixed point.

3.5. FIXED POINTS FOR FAMILIES OF MAPPINGS THAT SATISFIES INVARIANT PROPERTY

The definition of invariant property due to W.Takahashi [1970] is the following:

DEFINITION 3.5.2.

Let E be a compact Takahashi convex metric space. Then a family F of nonexpansive mappings f of E into itself is said to have invariant property in E if for any compact Takahashi convex subset $K\subset E$ such that $f(K)\subset K$ for each $f\in F$, there exists a compact subset $M\subset K$ such that $f(M)=M$ for each $f\in F$.

Invariant property is used to prove existence of common fixed point for commuting families of mappings by several authors: W.Takahashi [1970], R.de Marr [1963], M.R.Tasković [1980]. In this dissertation S-invariat property is defined and corresponding fixed point theorem is proved.

Let assume that X is metric space.

DEFINITION 3.5.3.

Let X be a metric space with closure operator S. Then a family F of nonexpansive mappings f of X into itself is said to have invariant property in X if for any S-compact and S-closed subset $K \subset X$ such that $f(K) \subset K$ for each $f \in F$, there exists a S-compact subset $M \subset K$ such that $f(M)=M$ for each $f \in F$.

DEFINITION 3.5.4.

A S-closed set $K \subset X$ in a metric space X with closure operator S is said to have S-normal structure if for each S-closed $H \subset K$ wich contains more that one point, there is some point $u \in H$ that: $\sup\{d(x,u) \mid x \in H\} < \operatorname{diam} H$.

A space X is said to have S-normal structure if every S-closed set of X has S-normal structure.

THEOREM 3.5.1.

Let: 1) (X,d) - metric space with closure operator S;

2) X - S-compact;

3) X has normal structure;

4) each closed ball $B(x,r)$ ($x \in X$, $r \in \mathbf{R}_{++}$) be S-closed.

Suppose F is a family of selfmaps of X satisfying S-invariant property. Then F has a common fixed point.

In Note 3.5.1. it is mentioned that family of nonexpansive mappings in Theorem 3.5.1. can be substituted by family of diametrically nonexpansive mappings.

II PART: STABILITY OF THE BOHL-BROUWER-SCHAUDER THEOREM

0. HISTORICAL OVERVIEW

In this section there is given a short overview in the history and development of Brouwer theorem [1910]. It is mentioned that famous theorem was discovered by German-Baltic mathematician Piers Bohl in 1904. The most commonly used generalization of Brouwer theorem is Schauder theorem [1930].

SCHAUDER THEOREM([1930]).

If K is a nonempty, compact, and convex subset of a Banach space X, and f is a continuous selfmap of K, then there exists a fixed point for f.

1. ANALOG OF SCHAUDER THEOREM FOR W-CONTINUOUS MAPPING

Chapter 1 contains 3 sections.

1.1. BASIC NOTIONS

In S.Kakutani [1943] it is shown that in Schauder theorem it is not possible to substitute compactness of set with boundedness and closedness. Similarly, it is possible to construct elementary examples that do not satisfy convexity requirement and for which conclusion of Schauder theorem is false. In Example 1.1.1. it is shown that, if we consider compact and convex set (in this example a unit ball) without one single point, then it is possible to construct such mapping that does not have any fixed points and for which a distance between an arbitrary point and its mapping is relatively "large", i.e., small deviations from compactness and convexity requirements have essentially changed conclusion in Schauder theorem.

Here arises a question, how situation will be changed if we will somehow weaken continuity requirement. In this dissertation it is offered to substitute continuous mapping with w-continuous mapping.

Let assume that X is a metric space with a distance d. Let $D(f)\subset X$ be domain of mapping f and $f:D(f)\to X$.

DEFINITION 1.1.1.

A mapping $f:D(f)\to X$ is said to be w-continuous, $w\in\mathbf{R}_{++}$, in point $x_0\in D(f)$ if for every $\varepsilon>0$ there exists $\delta>0$ such that whenever $x\in D(f)$ and $d(x_0,x)<\delta$ then $d(f(x_0),f(x))<\varepsilon+w$.

In the case when mapping f is w-continuous in any point of domain D(f) it is said to be w-continuous in set D(f) or w-continuous.

In order to obtain suggested result we use the idea of approximation.

DEFINITION 1.1.3.

A mapping $g:A\to X$ $(D(f)\subset A\subset X)$ is said to be a μ-approximation, $\mu\in\mathbf{R}_+$, of mapping $F:D(f)\to X$ in D(f) if for every point $x\to D(f)$: $d(f(x), g(x))\leq\mu$ holds.

We know that in a compact set continuous mapping is also uniformly continuous. We will therefore define uniformly w-continuous mapping and consider, whether a similar proposition holds for w-continuous mapping.

DEFINITION 1.1.4.

A mapping $f:D(f)\to X$ is said to be uniformly w-continuous, $w\in\mathbf{R}_{++}$, if for every $\varepsilon>0$ there exists $\delta>0$ such that for every two points $x, y\in D(f)$ the relation $d(x,y)<\delta$ implies $d(f(x),f(y))<\varepsilon+w$.

THEOREM 1.1.1.

If A is compact subset of a metric space X, and $f:A\to X$ is w-continuous mapping, then f is uniformly 2w-continuous mapping.

1.2. EXISTENCE OF CONTINUOUS APPROXIMATING MAPPING FOR W-CONTINUOUS MAPPING

This section contains some introductory results used in generalization of Schauder theorem. The following theorem is proved:

THEOREM 1.2.1.

Suppose that X is normed linear space, that set $A \subset X$ is compact, and $f: A \to X$ is uniformly w-continuous mapping. Then for every $w' > w$ there exists a continuous w'-approximation $\bar{f}$ of mapping f in set A and $\bar{f}(A) \subset conv f(A)$.

The proof of this theorem is one of the most difficult in all this work. First, we construct in set A a net M of specially selected points. Then, partially by following the proof of generalized Tietze theorem, we construct a continuous extension $\bar{f}$ of mapping $f: M \to X$ to the whole space X. Finally we show that obtained extension is w′-approximation of mapping f, where $w' > w$.

In the case when $f: [a;b] \to \mathbb{R}$ there exists continuous $\frac{w'}{2}$-approximation of mapping f, where $w' > w$. This result is proved in Theorem 1.2.2..

1.3. BASIC RESULT

The results obtained in previous sections allow us to prove the following:

THEOREM 1.3.1.

Let K be a nonempty, compact, and convex subset of a Banach space X. For every w-continuous mapping $F: K \to K$ and for every $w' > w$ there exists a point $x^* \in K$ such that $d(x^*, f(x^*)) \le 2w'$.

COROLLARY 1.3.1.

If $K = [a;b]$, and $f: K \to K$ is w-continuous, then for every $w' > w$ there exists a point $x^* \in K$: $d(x^*, f(x^*)) \le w'$.

COROLLARY 1.3.2.

Let f be a uniformly w-continuous mapping, and let all other conditions of Theorem 1.3.1. be satisfied then for every $w' > w$ $\exists x^* \in K$: $d(x^*, f(x^*)) \le w'$.

COROLLARY 1.3.3.

If $K = [a;b]$, and $f: K \to K$ is uniformly w-continuous, then for every $w' > w$ $\exists x^* \in K$: $d(x^*, f(x^*)) \le \frac{w'}{2}$.

2. POTENTIAL APPLICATIONS IN ECONOMY

Chapter 2 consists of two sections.

2.1. PROPERTIES OF W-CONTINUOUS MAPPINGS IN NORMED SPACES

Acquaintance with the theory of economic market equilibrium (for example with K.J.Arrow and F.H.Hahn [1980] or R.R.Cornwall [1984]) indicates that it is not possible to apply Theorem 1.3.1. directly. There arises a necessity to clear up properties of w-continuous mappings in Euclidian space. The following proposed modification of w-continuity allows to keep all results already obtained in Section 1.

DEFINITION 2.1.1.

A mapping $f:X\to Y$, where X and Y are normed vector spaces, is said to be w-continuous, $w\in\mathbf{R}_{++}$, in point $x_0\in X$ if for every $\varepsilon>0$ there exists $\delta>0$ such that whenever $x\in X$ and $\|x-x_0\|_X<\delta$ then $\|f(x)-f(x_0)\|_Y<\varepsilon+w$.

If the case when mapping f is w-continuous in all points of X it is said to be w-continuous in space X or w-continuous.

Let X, Y, V, Z be normed vector spaces.

The following properties of w-continuous mapping are proved:

THEOREM 2.1.1.

Suppose that $f:X\to Y$ is a w'-continuous mapping, $g:X\to Y$ is a w''-continuous mapping. Then f+g is a w'+w''-continuous mapping.

We consider mappings $f:V\to X$ and $g:V\to Y$. Let $\bullet$ be arbitrary operation, such that for all $x\in X$, $y\in Y$ we have $x\bullet y:=xy\in Z$. With product of mappings f and g we will understand: $(f\cdot g)(x):=f(x)g(x),\ \forall x\in V$.

THEOREM 2.1.2.

Suppose that $f:V\to X$ is a w'-continuous mapping, $g:V\to Y$ is a w''-continuous mapping. Then $f\cdot g$ is a $w'w''+w'\|g(x_0)\|_Y+w''\|f(x_0)\|_X$-continuous mapping in every point x_0.

For the case of division we must be reconciled with one simplified situation.

THEOREM 2.1.3.

If $f\colon X\to[1;+\infty[$ is a w-continuous mapping, then $\frac{1}{f}$ is a $\frac{w}{f(x_0)}$-continuous mapping in every point x_0.

If domain of mapping is compact set, then boundedness of range of mapping plays same role in economic models. In this case for continuous mapping we can guarantee also compactness of range set, however, for w-continuous mapping we can guarantee only boundedness of this set. That is shown by Theorem 2.1.4. and Example 2.1.2.

2.2. EXAMPLE OF A ECONOMIC MODEL

For reader here is offered description of economic model by K.J.Arrow and F.H.Hahn [1980]. We show, how under considered assumptions market equilibrium is guaranteed, i.e., that there exists such price system that demand of economic agents by goods are satisfied. By changing 2 from 4 considered assumptions and by using about w-continuous mappings existence of market k-equilibrium is proved.

AFTERWORD

In this Chapter the author have tried to give some evaluation of results from proposed dissertation.

ЛАТВИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНЕСЕ БУЛА

НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ ОТОБРАЖЕНИЙ В ВЫПУКЛЫХ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

Автореферат диссертации

Научный руководитель: Андрис Лиепиньш,
доктор математических наук,
доцент ЛУ

Рига, 1994

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Пусть X, Y - произвольные множества и $X \cap Y \neq \emptyset$. Пусть $f: X \to Y$ - отображение. Точка $x \in X$ называется неподвижной точкой отображения f, если $f(x)=x$.

Теория неподвижных точек в последние десятилетие необозримо расширилась; написаны многие книги, например, Ф.Бонсалл [1962], Е.Кронин [1964], Д.Смарт [1974], С.Сваминатхан (ред.) [1976], Э.Цайдлер [1976], Г.Аизенак, Ц.Фенске [1978], В.Истратеску [1981], К.Бордер [1982], Е.Дугунджи, А.Гранас [1982], М.Таскович [1986], К.Шилинг [1986], К.Гебел, Б.Кёрк [1990], А.Аксой, М.Камси [1990], но всё-таки эти книги не охватывают все полученные результаты. Значительное направление создают теоремы для сжимающих отображений (например, теорема Банаха) и для нерастягивающих отображений (например, теоремы Кёрка), а также результаты, у которых истоки лежат в теореме Бола-Брауэра. Начиная с теоремы Какутани широко развивается направление, которое исследует неподвижные точки для многозначных отображений. Параллельно названным направлениям также рассматриваются общие неподвижные точки для семейств отображений. В последние годы появились статьи о неподвижных точках с вероятностной характеристикой. В диссертации рассматривается только некоторая часть понятий и направлений, которые встречаются в теории неподвижных точек.

АКТУАЛЬНОСТЬ ПРОБЛЕМАТИКИ

Для одного отображения теория неподвижных точек разработана намного основательнее чем для семейств отображений. В предложенной диссертации I^ая часть посвящена доказательству существования общих неподвижных точек для семейств отображений в выпуклых подмножествах метрических пространств. Обычно о выпуклости говорят только в векторных пространствах. В.Такахаши [1970] и Е.Пенот [1979] определили понятие выпуклости в произвольном метрическом пространстве. Тем самым открылось новое направление в теории неподвижных точек.

Во 2^ой главе (часть I) диссертации, частично копируя выпуклость векторного пространства, определено выпуклое множество в произвольном метрическом пространстве. Но это определение порождает ситуации, в которых пересечение выпуклых множеств не выпуклое множество и также шары не выпуклые множества. Результаты получше получаются в строго выпуклом метрическом пространстве, которое определено в диссертации. Заметим, что это определение эквивалентно определению строгой выпуклости банаховых пространств, если метрические связи записаны через норму. В 3ей главе (часть I) структура выпуклости в метрическом пространстве определена с помощью операторов замыкания. Так, например, в строго выпуклом метрическом пространстве оператор замыкания можно определить как такой, который для каждого множества K из этого пространства ставит в соответствие самое меньшее выпуклое множество содержащее K. Так получается, что строго выпуклое метрическое пространство определяет только один вариант метрического пространства с данным оператором замыкания. Понятие оператора замыкания в теории неподвижных точек для случая одного отображения ввёл А.Лиепиньш [1983].

Ознакомление с теорией экономических моделей показывает, что существование равновесия рынка в экономических моделях обычно доказывается с помощью теорем о неподвижных точках, а именно с помощью теорем Бола-Брауэра или Какутани. Одно из существенных предположений, чтобы применять эти теоремы то, что функция остатка спроса непрерывна. Во IIой части диссертации предложено это предположение ослабить и заменить на w-непрерывную функцию. В этой части доказан аналог теоремы Бола-Брауэра-Шаудера для w-непреривного отображения и также, принимая во внимание свойства w-непрерывного отображения, сконструирована экономическая модель, в которой равновесие рынка обосновано с помощью новой теоремы. Есть основание верить, что для этого нового результата возможны широкие применения в других областях экономики.

ЦЕЛЬ РАБОТЫ

1) выяснить, какие свойства выпуклости векторных пространств использованы в теории неподвижных точек отображений;

2) определить в произвольной метрической пространстве структуру выпуклости;

3) выяснить, каким условиям должны удовлетворять пространства, множества, отображения, что бы для семейств отображений существовали общие неподвижные точки в подмножествах выпуклых метрических пространств;

4) доказать аналог теоремы Бола-Брауэра для w-непрерывного

отображения;
5) исследовать значение теоремы Брауэра в доказательствах экономических моделей равновесия рынка.

МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

Математическую основу работы составляют методы функционального анализа (в том числе методы теории неподвижних точек) и топологии.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Установлены наиболее употребляемые свойства выпуклых множеств в доказательствах теорем относительно неподвижных точек. Упомянутые свойства применены в доказательствах теорем неподвижных точек в диссертации.

Обобщая понятие строго выпуклого банахового пространства, выработано понятие строго выпуклого метрического пространства. Доказано, что в выпуклых и замкнутых подмножествах строго выпуклого метрического пространства для нерастягивающих , квази-нерастягивающих и асимптотически нерастягивающих отображений множество неподвижных точек выпукло и замкнуто. Обосновано, что определение строго выпуклого метрического пространства эквивалентно определению строго выпуклого банахового пространства, если метрические связи написаны через норму.

В доказательствах существования общих неподвижных точек для семейств отображений успешно использован оператор замыкания, каторый в значительной мере определяет в метрическом пространстве структуру выпуклости. Доказаны теоремы для метрических пространств с данным оператором замыкания, в которых семейство отображений:
1) удовлетворяет условию "нормальной структуры";
2) уменьшает диаметр орбиты;
3) квази-нерастягивающие;
4) удовлетворяет свойству инвариантности.

Получено обобщение теоремы Бола-Брауэра-Шаудера для w-непрерывного отображения, пользуясь аппроксимацией равномерно w-непрерывного отображения непрерывным отображением. В ситуации вещественной прямой сконструирована аппроксимация более точная чем в обобщённой ситуации. Выяснены свойства w-непрерывных отображений. Разработана конкретная экономическая модель рынка. Существование равновесия рынка доказано с помощью упомянутой теоремы.

НАУЧНАЯ НОВИЗНА

Основные результаты диссертации получены автором в последние 6 лет.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРАКТИЧЕСКАЯ ЦЕННОСТЬ

Диссертация в совокупности носит теоретический характер.

Результаты I^ая^ части предполагается использовать в доказательствах существования решения для нелинейных систем уравнений. При этом общность результатов I^ой^ части (2^ая^ и 3^ья^ главы) позволяет их использовать не только в пространствах с линейной структурой, но и в пространствах без этой структуры.

Для основного результата II^ой^ части, а также для w-непрерывного отображения возможны применения в теоретических исследованиях экономики. В работе предложена одна модель, для которой равновесие рынка доказано с помощью обобщённой теоремой Бола-Брауэра-Шаудера для w-непрерывного отображения.

АПРОБАЦИЯ РАБОТЫ

Результаты I^ой^ части диссертации докладывались на ежегодных научных конференциях Латвийского университета (1989-1993), научных конференциях Тартуского университета (1989-1991), а также на Тираспольском симпозиуме по общей топологии и её приложениям (1991, Кишинёв, Молдова). С содержанием II^ой^ части диссертации ознакомлены сотрудники института Статистики и эконометрии в Гамбурском университете (1993/94).

ПУБЛИКАЦИИ

По теме диссертации опубликованы 10 статей и тезисы.

ОБЪЁМ И СТРУКТУРА РАБОТЫ

Диссертация состоит из списка обозначений, введения, двух частей, послесловия и списка литературы. Первая часть содержит 4 главы, вторая - 3 главы. Список используемой литературы включает 99 наименований. Диссертация изложена на 92 страницах.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В предложенном тексте набранные *курсивом* определения и результаты это - уже известные; остальные определения и результаты предлагается как новые.

ВВЕДЕНИЕ

Во введении обоснована актуальность проблематики, указаны направления и цели работы.

Читатель может познакомиться с двумя видамы выпуклости, которые определены в произвольном метрическом пространстве и употребляются в теории неподвижных точек. Указаны свойства выпуклых множеств, которые больше всего использованы в доказательствах теорем о неподвижных точках.

I[ая] ЧАСТЬ: ОБЩИЕ НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ ДЛЯ СЕМЕЙСТВ ОТОБРАЖЕНИЙ

0. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ИЗВЕСТНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В 0[ой] главе даны основные понятия, определения и сформулированы важнейшие известные результаты, которые обосновывают существование неподвижных точек для нерастягивающих отображений и для семейств нерастягивающих отображений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.1. Отображение $f:X\to X$ (X - метрическое пространство) называют нерастягивающим, если для всех $x,y\in X$ выполняется условие: $d(f(x),f(y))\le d(x,y)$.

Теорема В.Кёрка утверждает:

ТЕОРЕМА 0.1.(В.Кёрк [1965])

Пусть дано рефлексивное банаховое пространство X и K - выпуклое, замкнутое, ограниченное подмножество в пространстве X с нормальной структурой. Если отображение f, которое отображает множество K в себя, нерастягивающее, то для отображения f существует неподвижная точка.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.2. Выпуклое множество K в банаховом пространстве X обладает нормальной структурой, если в каждом выпуклом, ограниченном, неодноэлементном множестве $H\subset K$ существует такой элемент $y\in H$, что:

$$\sup_{x\in H}\|y-x\| < \operatorname{diam}H=\sup_{x,y\in H}\|x-y\| .$$

В литературе известно несколько обобщений этой теоремы для семейства отображений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.3. Пусть дано семейство F отображений $f:K\to K$ (K - произвольное пространство). Точка $x^{*}\in K$ называется общей неподвижной точкой для семейства F, если для каждого отображения *f семейства F выполняется:* $f(x^*)=x^*$.

Один из вариантов, что бы существовала общая неподвижная точка, это требование коммутативности семейств отображений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.4. Семейство F отображений называется коммутативной, если для каждого $\forall x\in K$ *(K - произвольное пространство) выполняется условие:* $f(g(x))=g(f(x))$, $\forall f,g\in F$.

В 1974 году Т.Лим обобщил теорему В.Кёрка для коммутативного семейства нерастягивающих отображений.

1. НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ О НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧКАХ ДЛЯ СЕМЕЙСТВ ОТОБРАЖЕНИЙ

В 1ой главе доказаны четыре теоремы о неподвижных точках. Первые три можно считать обобщениями следствий Теоремы В.Кёрка из предущей главы: ограниченность множества K заменена на существование такой точки $p\in K$, в которой последовательность $(f^n(p))_{n\in\mathbf{N}}$ ограничена. Обобщения перенесено на коммутативные семейства нерастягивающих отображениях.

ТЕОРЕМА 1.1.

Пусть:
1) X - рефлексивное банаховое пространство;
2) K - непустое, выпуклое, замкнутое подмножество X;
3) K обладает нормальной структурой;
4) F - коммутативное семейство нерастягивающих отображений, которые отображают множество K в себя;
5) существует такая точка $p\in K$, что множество
$S=\{(f_1\circ\ldots\circ f_n)(p)\,|\,f_1,\ldots,f_n\in F\ \&\ n\in\mathbf{N}\}$ ограничено.

При этих условиях для семейства F существует общая неподвижная точка.

ТЕОРЕМА 1.2.

Пусть:
1) X - строго выпуклое, рефлексивное банаховое пространство;
2) K - непустое, выпуклое, замкнутое подмножество X;
3) K обладает нормальной структурой;
4) F - коммутативное семейство конечного числа нерастягивающих отображений, которые отображают множество K в себя;
5) существует такая точка $p\in K$, что последовательность $(f^n(p))_{n\in\mathbf{N}}$ для каждого $f\in F$ ограничена.

При этих условиях для семейства F существует общая неподвижная точка.

Что бы в ситуации Теоремы 1.2. гарантировать существование общей неподвижной точки для коммутативного семейства нерастягивыюжих отображений без ограничения на мощность, в

Тeореме 1.3. пятое условие формулировано следующим образом:

5) существует такое отображение $f_0 \in F$, для которого множество неподвижных точеk $Fixf_0$ непустое, ограниченное, замкнутое, с нормальной структурой.

Последняя теорема 1^{ой} главы естественно отличается от передущих. В этой теореме даны условие, при которых для каждого отображения семейства существуют своя, не обязательно общая, неподвижная точkа.

ТЕОРЕМА 1.4.

Пусть: 1) X - нормированное векторное пространство (над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$);

2) K - kомпактное подмножество X;

3) $F=\{f_1,f_2,\ldots,f_n\}$ - семейство kонечного числа нерастягивающих отображений, которые удовлетворяют условиями:

a) $\forall x,y\in K(x\neq y)$: $\min\{\|f_i(x)-f_i(y)\| \,|\, i=1,2,\ldots,n\}<\|x-y\|$;

b) $\forall x\in K$: $conv\{f_1(x),\ldots,f_n(x)\}\subset K$.

При этих условиях для kаждого отображения $f_i\in F$ существует неподвижная точkа x_i: $f_i(x_i)=x_i$, $i=1,2,\ldots,n$.

2. СТРОГО ВЫПУКЛЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

2^{ая} глава содержит три параграфа.

2.1. ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА И СТРОГО ВЫПУКЛЫЕ БАНАХОВЫЕ ПРОСТРАНСТВА

В этом параграфе рассмотрены известные результаты, kаk определить выпуклое множество в векторном пространстве, kаkимы свойствами обладают выпуklые множества, kаk определить строго выпуkлое банаховое пространство, kаkовы эkвивалентные формулировkи.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1.3. *Банаховое пространство X называется строго выпуkлым, если kаждая точkа единичной сферы не является внутренней точkой отрезkа единичного шара.*

Это определение согласно Утверждению 2.1.1.(В.Истратесky,57 стр.) эkвивалентно следующему условию в банаховом пространстве X: $\forall x,y\in X$: $\|x+y\|=\|x\|+\|y\|\to((\exists\lambda\in\mathbb{R}_{++}:x=\lambda y)\vee(x=0)\vee(y=0))$.

Для нерастягивающего отображения в выпуkлых и замkнутых подмножествах строго выпуkлого банахового пространства множество неподвижных точеk является выпуkлым и замkнутым. Таkим свойством обладают и другие семейства отображении, например, kвази-нерастягиваюшие и асимптотичесkи нерастягивающие отображения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1.4. *(В.Дотсон [1972]) Отображение $f:K\to K$ (K - подмножество нормированного линейного пространства) называется* *квази-нерастягивающим, если существует неподвижная точка у этого отображения и для каждой фиксированной неподвижной точки $p\in K$ отображения f выполняется: $\|f(x)-p\|\le\|x-p\|$, $\forall x\in K$.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1.5. (К.Гэбел, В.Кёрк [1972]) Пусть последовательность действительных чисел $(k_i)_{i\in N}$, $k_i\ge1$, $k_{i+1}\le k_i$, $i=1,2,\ldots$ такое, что $\lim\limits_{i\to\infty}k_i=1$. Отображение $f:K\to K$ (K - подмножество нормированного линейного пространства) называется асимптотически нерастягивающим, если:
$\forall x,y\in K$: $\|f^i(x)-f^i(y)\|\le k_i\|x-y\|$.

2.2. ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА И СТРОГО ВЫПУКЛЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Выпуклое множество метрического пространства (X,d) с растоянием d определено следующим образом:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2.1. Множество $K\subset X$ называется выпуклым, если для любых двух элементов x,y ∈ K и для каждого $t\in[0,1]$ существует такой элемент $z\in K$, что выполняются равенства: $d(x,z)=td(x,y)$ и $d(z,y)=(1-t)d(x,y)$.

Строго выпуклое метрическое пространство определено следующим образом:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2.2. Метрическое пространство (X,d) называется строго выпуклым, если для любых двух элементов x,y ∈ K и для каждого $t\in[0,1]$ существует такой единственный элемент $z\in K$, что выполняются равенства:

$d(x,z)=td(x,y)$ и $d(z,y)=(1-t)d(x,y)$.

Доказано, что в строго вапуклом метрическом пространстве пересечение выпуклых множеств является выпуклым множеством (Теорема 2.2.1.), что в выпуклых и замкнутых подмножествах строго выпуклого метрического пространства множество неподвижных точек для нерастягивающих (Лемма 2.2.1.), для квази-нерастяивающих (Лемма 2.2.2.) и для асимптотически нерастягивающих (Лемма 2.2.3.) отображений является выпуклым и замкнутым. Упомянутые результаты использованы в доказательстве Теоремы 2.2.4.

ТЕОРЕМА 2.2.4.

Если: 1) X - строго выпуклое метрическое пространство;

2) для произвольных точек $a,b,c\in X$ и для каждого $z\in X$ такого, что: $d(b,z)=td(b,c)$ и $d(z,c)=(1-t)d(b,c)$, где $t\in]0;1[$, выполняется условие: $d(a,z)<\max\{d(a,b),d(a,c)\}$;

3) $K\subset X$ - выпуклое и компактное множество;

4) F - коммутативное семейство

а) нерастягивающих отображений, или

б) квази-нерастягивающих отображений или

в) асимптотически нерастягивающих отображений,

которые отображают множество K в себя;

5) для всех $f \in F$: $\operatorname{Fix} f \neq \emptyset$ (в ситуации 4)б это условие отпадает),

тогда существует общая неподвижная точка для семейства F.

2.3. ЕЩЁ РАЗ О СТРОГО ВЫПУКЛЫХ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Доказано:

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.3.1.

В банаховом пространстве следующие условия эквивалентны:

1. $\forall x,y \in X: \|x+y\| = \|x\|+\|y\| \to ((\exists \lambda \in \mathbb{R}_{++}: x=\lambda y) \vee (x=0) \vee (y=0))$;

2. $\forall x,y \in X\ \forall t \in [0,1]\ \exists!\, z \in X: \|x-z\| = t\|x-y\|,\ \|z-y\| = (1-t)\|x-y\|$.

В заключении 2-ой главы дан пример строго метрического пространства, которое неявляется строго выпуклым банаховым пространством.

3. НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ ОТОБРАЖЕНИЙ В МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ С ОПЕРАТОРОМ ЗАМЫКАНИЯ

3-ья глава содержит пять параграфов.

3.1. ОПЕРАТОРЫ ЗАМЫКАНИЯ И ИХ СВОЙСТВА

Этот параграф посвящен исследованию операторов замыкания. Описанные здесь результаты неявляется новыми. Автор диссертации использует эти результаты в следующих четрёх параграфах в обосновании существования неподвижных точек отображений в метрических пространствах с оператором замыкания. Отметим здесь важнейшие результаты об операторах замыкания.

Множество всех подмножеств пространства X обозначим через PX.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1.1.

Отображение $S:PX \to PX$ называется оператором замыкания в пространстве X, если для любых двух множествах $A,B \in PX$ выполняется:

1) $A \subset B \to S(A) \subset S(B)$;

2) $A \subset S(A)$;

3) $S(A) = S(S(A))$.

Множество $A \in PX$ называют S-замкнутым, если $A=S(A)$, где S оператор замыкания в пространстве X. Доказано, что система S-замкнутых множеств в пространстве X инвариантна относительно пересечений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1.3.

В пространстве X, в котором определен оператор замыкания, множество A называется S-компактным, если пересечение множеств *каждой центрированной системы S-замкнутых подмножеств A непусто.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1.4.

Оператор замыкания Sa на пространстве X называется алгебраическим, если для любого $A \in PX$ и $x \in Sa(A)$ существует такое конечное множество $F \subset A$, что $x \in Sa(F)$.

Этот параграф заключает Лемма 3.1.1., которая обосновывает корректность использования Леммы Цорна в докозательствах теорем неподвижных точек.

3.2. НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ СЕМЕЙСТВ ОТОБРАЖЕНИЙ С УСЛОВИЕМ "НОРМАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ"

Доказаны две теоремы:

ТЕОРЕМА 3.2.1.

Пусть: 1) (X,d) - метрическое пространство с алгебраическим оператором замыкания S;

2) X - S-компактно;

3) каждый замкнутый шар $B(x,r)$ $(x \in X,\ r \in \mathbf{R}_{++})$ S-замкнут.

Пусть F - коммутативное семейство нерастягивающих отображений, которые отображают пространство X в себя, и

4) для всех $f \in F$ множество неподвижных точек Fixf непусто и S-замкнуто;

5) $\forall f \in F, \forall x \in X (x \neq f(x))\ \exists y \in A(x,f)$:

$$\sup\{d(y,z)\,|\,z \in A(x,f)\} < \operatorname{diam} A(x,f)$$ - условие "нормальной структуры";

где $A(x,f) := \bigcap\{A \in PX \,|\, x \in A \,\&\, A = S(A) \,\&\, f(A) \subset A\}$.

При этих условиях существует общая неподвижная точка семейства F.

ТЕОРЕМА 3.2.2.

Пусть: 1) (X,d) - метрическое пространство с оператором замыкания S;

2) X - S-компактно;

3) каждый замкнутый шар $B(x,r)$ $(x \in X,\ r \in \mathbf{R}_{++})$ S-замкнут.

Пусть F - семейство нерастягивающих отображений, которые отображают пространство X в себя, и

4) $\exists q \in]0;1[\ \forall x,y \in X\ \forall f,g \in F$:

$$d(f(x),g(y)) \le \max\{d(x,y);\, q\operatorname{diam}(A(x) \cup A(y))\};$$

5) $\forall x \in X (\exists v \in F: v(x) \neq x)\ \exists y \in A(x)$:

$$\sup\{d(y,z)\,|\,z \in A(x)\} < \operatorname{diam} A(x),$$

где $A(x) := \bigcap\{A \in PX \,|\, x \in A \,\&\, A = S(A) \,\&\, \forall f \in F: f(A) \subset A\}$.

При этих условиях существует общая неподвижная точка семейства F.

Обоснованно (Пример 3.2.1.), что в обеих теоремах пятое условие слабее условия о нормальности структуры в теоремах В.Кёрка и Л.Беллюса. Так же дан Пример 3.2.2., который показывает, что S-замкнутость множества неподвижных точек не следует из других условий Теоремы 3.2.1.

3.3. НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ СЕМЕЙСТВ ОТОБРАЖЕНИЙ С УМЕНЬШЕННЫМ ОРБИТАЛЬНЫМ ДИАМЕТРОМ

В статьях [1969], [1970] В.Кёрк использовал два различных условия для уменьшения орбитального диаметра отображений. Перенося эти условия на метрическое пространство с алгебраическим оператором замыкания, получены следующие две теоремы для семейств отображений.

ТЕОРЕМА 3.3.1.

Пусть: 1) (X,d) - метрическое пространство со алгебраическим оператором замыкания S;

2) для всех $\overline{S(A)}=S(\overline{S(A)})=:S'(A)$;

3) X - S'-компактно;

4) каждый замкнутый шар $B(x,r)$ ($x\in X$, $r\in\mathbf{R}_{++}$) S-замкнут.

Пусть F - семейство непрерывных отображений, которые отображают пространство X в себя, и

5) $\exists t\in]0;1[\ \forall x,y\in X\ \forall f,g\in F$:

$$d(f(x),g(y))\leq\max\{d(x,y);t\,diam(A(x)\cup A(y))\};$$

6) $\forall x\in X(\exists v\in F: v(x)\neq x)\exists y\in A(x)$:

$$\sup\{\inf\{\sup\{d(y,f^{m}(x))\,|m\geq n\}\,n\in\mathbf{Z}_{++}\}\,f\in F\}<diam A(x),$$

где $A(x):=\bigcap\{A\in PX|x\in A\ \&\ A=S'(A)\ \&\ \forall f\in F:\ f(A)\subset A\}$.

При этих условиях существует общая неподвижная точка семейства F.

В **ТЕОРЕМЕ** 3.3.2., в отличие от 3.3.1., изменено шестое условие. Это условие ослаблено в следующем виде:

6) $\exists N\in\mathbf{Z}_{++}\ \forall x\in X(\exists v\in F: v(x)\neq x)\exists y\in A(x)$:

$$\sup\{\inf\{\sup\{d(y,f^{m}(x))\,|m\geq n\}\,n\geq N\}\}\,f\in F\}<diam A(x),$$

где $A(x):=\bigcap\{A\in PX|x\in A\ \&\ A=S'(A)\ \&\ \forall f\in F:\ f(A)\subset A\}$.

При этих условиях существует общая неподвижная точка семейства F.

3.4. НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ СЕМЕЙСТВ КВАЗИ-НЕРАСТЯГИВАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

С определением квази-нерастягивающих отображений в нормированном векторном пространстве познакомились во 2ой главе (Определение 2.1.4.). В статье [1974] В.Дотсона и Х.Сентера квази-нерастягивающие отображения рассматриваются в следующем ключе: если в множестве A нормированного линейного пространства у отображения $f:A\to A$ существует неподвижная точка и

$$\forall x,y\in A:\ \|f(x)-f(y)\|\le a\|x-f(x)\|+b\|y-f(y)\|+c\|x-y\|, \qquad (*)$$

где a,b,c ≥ 0 и $0<a+b+c\le 1$, то это отображение - квази-нерастягивающее. В теоремах о неподвижных точках Р.Кэннэна ([1971], [1973]) в банаховом пространстве обычно константы c=0 и a=b=0,5. С.Рэйх [1971] доказал существование неподвижной точки с условием (*) в полном метрическом пространстве.

В дисертации доказаны две теоремы, которые обобщают результаты Р.Кэннэна и С.Рэйха для семейств отображений в метрическом пространстве с оператором замыкания.

ТЕОРЕМА 3.4.1.

Пусть: 1) (X,d) - метрическое пространство со алгебраическим оператором замыкания S;

2) для всех $\overline{S(A)}=S(\overline{S(A)})=:S'(A)$;

3) X - S'-компактно;

4) каждый замкнутый шар B(x,r) ($x\in X$, $r\in\mathbb{R}_{++}$) S-замкнут.

Пусть F - семейство непрерывных отображений, которые отображают пространство X в себя, и

5) $\forall f,g,h\in F\,\forall x,y\in X\,\exists\alpha\in]0;1[:$

$$d(g(x),h(y))\le\alpha d(x,f(x))+(1-\alpha)d(y,f(y));$$

6) $\forall x\in X(\exists v\in F: v(x)\ne x)\,\exists y\in A(x):$

$$\sup\{d(y,f(y))\,|\,f\in F\}<\sup\{\sup\{d(z,f(z))\,|\,z\in A(x)\}\,f\in F\},$$

где $A(x):=\bigcap\{A\in PX|x\in A\ \&\ A=S'(A)\ \&\ \forall f\in F:\ f(A)\subset A\}$.

При этих условиях существует единственная неподвижная точка семейства F.

В **ТЕОРЕМЕ 3.4.2.**, сохраняя первые четыре условия предыдущей теоремы, требуя непрерывность отображений семейства F и

5) $\forall f,g,h\in F\,\forall x,y\in X\,\exists a,b,c\in\mathbb{R}_{+}: 0<a+b+2c<1:$

$$d(g(x),h(y))\le ad(f(x),x)+bd(f(y),y)+cd(x,y);$$

6) $\forall x\in X(\exists v\in F: v(x)\ne x)\,\exists y\in A(x)\,\exists w\in A(x):$

$$\sup\{d(w,z)\,|\,z\in A(x)\}\le\sup\{d(y,f(y))\,|\,f\in F\}<\sup\{\sup\{d(z,f(z))\,|\,z\in A(x)\}\,f\in F\},$$

где $A(x):=\bigcap\{A\in PX|x\in A\ \&\ A=S'(A)\ \&\ \forall f\in F:\ f(A)\subset A\}$,

также можно гарантировать существование единственной неподвижной точки семейства F.

3.5. НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ СЕМЕЙСТВ ОТОБРАЖЕНИЙ СО СВОЙСТВОМ ИНВАРИАНТНОСТИ

[1970] В.Такахаши дал следующее определение свойства инвариантности:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.5.2.

Семейство нерастягивающих отображений $F:=\{f\,|\,f:E\to E,$ E -

подмножество Такахаши выпуклого метрического пространства) имеет свойство инвариантности в множестве E, если в каждой компактной Такахаши выпуклой множестве $K \subset E$, для которой $f(K) \subset K$, $\forall f \in F$, существует компактное подмножество $M \subset K$ такое, что $f(M)=M$ для всех $f \in F$.

И В.Такахаши [1970], и Р.де Марр [1963], и М.Таскович [1980], доказывая существование общей неподвижной точки для коммутативного семейства отображений, пользуются свойством инвариантности. В диссертации определено свойство S-инвариантности и S-нормальной структуры и доказана соответствующая теорема.

Пусть X метрическое пространство.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.5.3.

Семейство отображений F, которые отображают множество $E \subset X$ в себя, имеет свойство S-инвариантности, если в каждом S-компактном и S-замкнутом подмножестве $K \subset E$, для которого $f(K) \subset K$, $\forall f \in F$, существует S-компактное подмножество $M \subset K$ такое, что $f(M)=M$ для всех $f \in F$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.5.4.

S-замкнутое множество $K \subset X$ имеет S-нормальную структуру, если в каждом S-замкнутом неодноэлементном подмножестве $H \subset K$ существует такой элемент $u \in H$, что $\sup\{d(x,u) \mid x \in H\} < \operatorname{diam} H$.

Говорят, что пространство X имеет S-нормальную структуру, если каждое S-замкнутое подмножество в пространстве X имеет S-нормальную структуру.

ТЕОРЕМА 3.5.1.

Пусть:
1) (X,d) - метрическое пространство с оператором замыкания S;
2) X - S-компактно;
3) X имеет S-нормальную структуру;
4) каждый замкнутый шар $B(x,r)$ $(x \in X,\ r \in \mathbf{R}_{++})$ S-замкнут.

Если семейство нерастягивающих отображений F, которые отображают пространство X в себя, имеет свойство S-инвариантности, то существует общая неподвижная точка семейства F.

Отмечено (Заметка 3.5.1.), что семейство нерастягивающих отображений в Теореме 3.5.1. можно заменить на семейство диаметрально нерастягивающих отображении.

0. ИСТОРИЧЕСКИЙ ОБЗОР

В главе дан краткий обзор истории развития теоремы Брауэра [1910]. Автор известной теоремы является балтонемецкий математик Пирс Боль [1904]. Самое популярное обобщение теоремы Бола-Брауэра - это теорема Шаудера [1930].

ТЕОРЕМА ШАУДЕРА ([1930]).

Если К непустое, компактное и выпуклое подмножество банахова пространства, которое непрерывное отображение f отображает в себя, то у отображения f существует неподвижная точка.

1. АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ШАУДЕРА ДЛЯ w-НЕПРЕРЫВНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

1[ая] глава содержит три параграфа.

1.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЕ

С.Какутани [1943] утверждает, что в теореме Шаудера невозможно заменить компактность множества на выпуклость и ограниченность. Можно построить элементарные примеры, в которых, опуская требование выпуклости множества, утверждение теоремы Шаудера не выполняется. В Примере 1.1.1 показано: если из выпуклого и компактного множества - в этом примере, единичного шара, - удалить только одну точку, то можно сконстроировать такое отображение, которое не имеет неподвижной точки и расстояние между любой точкой множества и её образом соразмерно "большое", т.е., небольшие "отклонение" множества от выпуклости и компактности естественно изменили вывод теоремы Шаудера.

Появляется вопрос, как изменится вывод теоремы Шаудера, если ослаблено условие о непрерывности отображении. В диссертации предложено непрерывное отображение заменить на w-непрерывное отображение.

Пусть X - метрическое пространство с метрикой d, пусть $D(f) \subset X$ - область определения отображения f и $f:D(f) \to X$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1.1.

Отображение f называется w-непрерывном ($w \in \mathbf{R}_{++}$) в точке $x_0 \in D(f)$, если для любого числа $\varepsilon \in \mathbf{R}_{++}$ существует такое $\delta \in \mathbf{R}_{++}$, что для любой точки $x \in D(f)$: $d(x_0,x) < \delta$ выполняется условие: $d(f(x_0),f(x)) < \varepsilon + w$. Если отображение f w-непрерывное в каждой точке D(f), то такое отображение называется w-непрерывным на множестве D(f) или просто w-непрерывным.

Что бы реализировать возможный позитивный результат, использована идея аппроксимации.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1.3.

Отображение $g:A\to X$, где A подмножество метрического пространства X и $A\supset D(f)$, называется μ-аппроксимацией отображения $f:D(f)\subset A\to X$ в множестве $D(f)$, если для любой точки $x\in D(f)$ выполняется: $d(f(x),\ g(x))\le\mu$, $\mu\in\mathbf{R}_+$.

Зная, что на компактном множестве непрерывное отображение является равномерно непрерывным, определено равномерно w-непрерывное отображение и доказан соответствующий результат.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1.4.

Отображение $f:D(f)\to X$ называется равномерно w-непрерывном ($w\in\mathbf{R}_{++}$), если для любого числа $\varepsilon\in\mathbf{R}_{++}$ существует такой $\delta\in\mathbf{R}_{++}$, что для любых двух точек $x,y\in D(f)$: $d(x,y)<\delta$ выполняется условие: $d(f(x_0),f(x))<\varepsilon+w$.

ТЕОРЕМА 1.1.1.

Если X - метрическое пространство, A - компактное подмножество в пространстве X и отображение $f:A\to B\subset X$ - w-непрерывное, то f равномерно w-непрерывное отображение.

1.2. СУЩЕСТВОВАНИЕ НЕПРЕРЫВНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ w-НЕПРЕРЫВНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

Этот параграф является подготовкой обобщения теоремы Шаудера. Доказана следующая теорема:

ТЕОРЕМА 1.2.1.

Если X - нормированное линейное пространство, $A\subset X$ - компактное множество, $f:A\to X$ - равномерно w-непрерывное отображение, тогда существует непрерывное w'-аппроксимация $\tilde{f}$ отображения f и $\tilde{f}(A)\subset conv f(A)$, $w'>w$.

Доказательство этой теоремы является одним из сложнейших во всей диссертации. Во-первых, во множестве A конструируется сеть M из определённых точек. Во-вторых, частично повторяя доказательство обобщённой теоремы Титце, конструируется непрерывное продолжение на всё пространство X для сужения отображения f во множестве M. Последний шаг - доказано, что полученное продолжение является w'-аппроксимацией отображении f. В случае, когда $f:[a;b]\to\mathbf{R}$, существует непрерывная $\frac{w'}{2}$-аппроксимация. Это доказано в Теореме 1.2.2..

1.3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

В предыдущих параграфах полученные результаты позволяет доказать:

ТЕОРЕМА 1.3.1.

Если K непустое, компактное и выпуклое подмножество банахового пространства X, которое w-непрерывное отображение f отображает в себя, тогда во множестве K существует такая точка x^*, что $d(x^*, f(x^*)) \le 2w'$, $w'>w$.

СЛЕДСТВИЕ 1.3.1.

Если $K=[a;b]$ и $f:K \to K$ w-непрерывное отображение, то существует такая точка $x^* \in K$, что $d(x^*, f(x^*)) \le w'$, $w'>w$.

СЛЕДСТВИЕ 1.3.2.

Если при условиях Теоремы 1.3.1. выполняется, что f равномерно w-непрерывное отображение, то $\exists x^* \in K$: $d(x^*, f(x^*)) \le w'$, $w'>w$.

СЛЕДСТВИЕ 1.3.3.

Если $K=[a;b]$ и $f:K \to K$ равномерно w-непрерывное отображение, то $\exists x^* \in K$: $d(x^*, f(x^*)) \le \frac{w'}{2}$, $w'>w$.

2. ВОЗМОЖНОЕ ПРИМЕНЕНИЕ В ЭКОНОМИКЕ

2-ая глава содержит две параграфа.

2.1. СВОЙСТВА w-НЕПРЕРЫВНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ В НОРМИРОВАННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Знакомство с теорией экономических моделей равновесия рынка (например, К.Арров, Ф.Ган [1980] или Р.Корнвал [1984]) показывает, что в прямом виде Теорему 1.3.1. использовать невозможно. Возникает необходимость выяснить свойства w-непрерывных отображении в евклидовых пространствах. Ничего не теряя из результатов предыдущей главы, модифицировано w-непрерывное отображение в следующем виде:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1.1.

Отображение $f:X \to Y$, где X, Y - нормированные векторные пространства, называется w-непрерывном ($w \in \mathbf{R}_{++}$) в точке $x_0 \in X$, если для любого числа $\varepsilon \in \mathbf{R}_{++}$ существует такое $\delta \in \mathbf{R}_{++}$, что для любой точки $x \in X$: $\|x-x_0\|_X < \delta$ выполняется условие: $\|f(x)-f(x_0)\|_Y < \varepsilon + w$.

Если отображение f w-непрерывное в каждой точке пространства X, то такое отображение называется w-непрерывным в пространстве X или просто w-непрерывным.

Доказаны следующие свойства w-непрерывного отображения:

ТЕОРЕМА 2.1.1.

Пусть $f:X \to Y$ - w'-непрерывное отображение и $g:X \to Y$ - w''-непрерывное отображение, где X, Y - нормированные пространства. При этих условиях $f+g$ является $w'+w''$-непрерывным отображением.

Пусть даны нормированные векторные пространства X, Y, V, Z, отображения $f:V \to X$ и $g:V \to Y$. Пусть дано отображение $X \times Y \to Z$, которое будем записывать мультипликативно. Под произведением отображений будем понимать $(f\cdot g)(x):=f(x)g(x)$, $\forall x\in V$.

ТЕОРЕМА 2.1.2.

Пусть $f:V\to X$ - w'-непрерывное отображение и $g:V\to Y$ - w''-непрерывное отображение. При этих условиях $f\cdot g$ является $w'w''+w'\|g(x_0)\|_Y+w''\|f(x_0)\|_X$-непрерывным отображением в каждой точке $x_0\in V$.

В случае деление надо смириться с простейшей ситуацией.

ТЕОРЕМА 2.1.3.

Если f: $X\to[1;+\infty[$ w-непрерывное отображение, тогда $\frac{1}{f}$ является $\frac{w}{f(x_0)}$-непрерывным отображением в каждой точке $x_0\in V$.

Значительную роль в экономических моделях играет ограниченность образа непрерывного отображения, если только область определения есть компактное множество. В этом случае можно гарантировать даже компактность образа, но в случае w-непрерывного отображения больше чем ограниченность невозможно получить, это доказано в Теореме 2.1.4. и Примере 2.1.2.

2.2. ПРИМЕР ЭКОНОМИЧЕСКОГО МОДЕЛЯ

Читателю предложено описание экономического моделя рынка К.Аррова и Ф.Гана [1980]. Показано, как при определённых предположениях можно гарантировать равновесие рынка. А именно, существует такая система цен, при которой полностью удовлетворён спрос производителей и потребителей на товары. Изменяя два предположения из четрех в стандартной модели, пользуясь доказанными свойствами w-непрерывного отображения и используя обобщённую теорему Шаудера для w-непрерывного отображения, доказано существование k-равновесия рынка.

ПОСЛЕСЛОВИЕ

В послесловии автор диссертации стремилась оценить удачи и недостатки предлагаемой работы.

LATVIJAS UNIVERSITĀTE
MATEMĀTISKĀS ANALĪZES KATEDRA
INESE BULA

ATTĒLOJUMU NEKUSTĪGIE PUNKTI IZLIEKTĀS METRISKĀS TELPĀS

PROMOCIJAS DARBS
LR DOKTORA MATEMĀTIKĀ ZINĀTNISKĀ GRĀDA IEGŪŠANAI

Zinātniskais vadītājs -
Dr.mat. Andris Liepiņš

Rīga, 1994

SATURS

APZĪMĒJUMU SARAKSTS

$\mathbf{R}$ - reālo skaitļu kopa

$\mathbf{R}_{+}$ - reālo nenegatīvo skaitļu kopa

$\mathbf{R}_{++}$ - reālo pozitīvo skaitļu kopa

Z_{++} - veselo pozitīvo skaitļu kopa

$\mathbf{Q}$ - racionālo skaitļu kopa

$\mathbf{I}$ - iracionālo skaitļu kopa

D(f) - attēlojuma f definīcijas kopa

d(x,y) - attālums starp punktiem x un y metriskā telpā

B(x,r) - slēgta lode ar centru punktā x un rādiusu r

:= - vienāds pēc definīcijas

PX - telpas X visu apakškopu sistēma

$\bar{A}$ - kopas A topoloģiskais slēgums

$A \rightarrow B$ - no apgalvojuma A seko apgalvojums B

convA - kopas A izliektā čaula

$\|x\|_Y$ - vektora $x \in Y$ norma normētā vektoru telpā Y

diamA - kopas A diametrs

∂A - kopas A robeža

Fixf - attēlojuma f nekustīgo punktu kopa

FixF - attēlojumu saimes F kopīgo nekustīgo punktu kopa

▾ - pierādījuma sākuma atzīme

▴ - pierādījuma beigu atzīme

▪ - piemēra sākuma un beigu atzīme

Piezīme.

kursīvā rakstītais teksts - zināmie jēdzieni un rezultāti

IEVADS

Jūsu acu priekšā stāvošais darbs nepretendē uz absolūtu patiesību. Šodien domātais un paveiktais var izrādīties jau senākā pagātnē izdarīts vai arī kads cits nākotnē nodarbosies tieši ar šīm pašām problēmām un iegūs vērtīgākus rezultātus. Nekustīgo punktu teorija pēdējos gadu desmitos ir nepārskatāmi izpletusies, sarakstītas biezu biezās grāmatas, piemēram, F.F.Bonsalls [1962], J.Kronins (Cronin)[1] [1964], D.R.Smarts [1974], S.Svaminathans (red.) [1976], E.Caidlers (Zeidler) [1976], G.Aizenaks (Eisenack), C.Fenske [1978], V.I.Istratesku [1981], K.C.Borders [1982], J.Dugundži, A.Granass [1982], M.R.Taskovičs [1986], K.Šillings (Schilling) [1986], K.Gēbels, V.A.Kirks [1990], A.G.Aksojs, M.A.Kamsi [1990], un tomēr tās neaptver visus iegūtos rezultātus. Šeit Jūs sastapsities tikai ar nelielu daļiņu no tiem jēdzieniem un virzieniem, kuri tiek lietoti un attīstās attēlojumu nekustīgo punktu teorijā.

Jūsu rokās nonākušajam darbam ir divi pamatvirzieni:
1)attēlojumu saimju kopīgo nekustīgo punktu eksistence (I daļa);
2)Bola-Brauera-Šaudera teorēmas attīstības vēsture un stabilitāte (II daļa).

Galvenais vadmotīvs - darbība risinās metriskas telpas (arī Banaha telpa ir metriska!) izliektā apakškopā. Runāt par izliektu kopu pierastajā izpratnē varam tikai tad, ja kopa atrodas vektoru telpā. Ir bijuši vairāki varianti, kā vektoru telpas izliektību pārnest uz telpu, par kuru ir zināms tikai tas, kā tajā uzdota metrika. Līdz ar to rodas jautājums, kādas tad ir būtiskākās izliektības īpašības. Pamatojoties uz K.Mengera [1928], T.Botsa [1942], V.L.Klī (Klee) [1951], D.C.Keja. E.V.Vombla [1971], M.van de Vela [1980] darbiem, kā noturīgākās izliektības pazīmes minamas divas:
1) izliektu kopu šķēlums ir izliekta kopa;

[1]Iekavās minēts autora uzvārds orģinālā transkripcijā. Tas tiks darīts arī turpmāk pirmajā reizē sastopoties ar uzvārdu, kura orģinālrakstība būtiski atšķiras no latviskojuma.

2) slēgtas lodes dotajā telpā ir izliektas kopas.

Ja mēs varam šīs īpašības garantēt noteiktā telpā, tad teiksim, ka telpā ir radīta izliektības struktūra. No nekustīgo punktu teorijas mums ir zināmi divi varianti, kā patvaļīgā metriskā telpā tiek ievesta izliektības struktūra. V.Takahaši [1970] rīkojas sekojoši:

V.Takahaši izliektas metriskas telpas DEFINĪCIJA.

Ja (X,d) ir metriska telpa, kurā eksistē tāds attēlojums

$W: X \times X \times [0;1] \to X$, *ka:*

$$\forall x,y \in X \ \forall \lambda \in [0;1]: \ d(u,W(x,y;\lambda)) \leq \lambda d(u,x) + (1-\lambda) d(u,y), \ \forall u \in X,$$

tad telpu X sauc par izliektu metrisku telpu.

Izliektas metriskas telpas (X,d,W) apakškopu K sauc par izliektu, ja $W(x,y;\lambda) \in K$ visiem $x,y \in K$ un $\lambda \in [0;1]$.

V.Takahaši izliektā metriskā telpā Takahaši izliektu kopu šķēlums ir izliekta kopa, kā arī lodes ir izliektas kopas. J.P.Penots [1979] darbojas daudz vienkāršāk. Viņš tiešā veidā metriskā telpā (X,d) apskata tādu apakškopu klasi C, kas satur visas telpas X slēgtās lodes un kura ir invarianta pret šķēluma operāciju. Tātad J.P.Penota apakškopu klase C rada izliektības struktūru telpā X. Paturot prātā mūsu mērķi par nekustīgo punktu eksistenci, kurš ir labākais variants?

Kā tālāk būs redzams I daļas apakšnodaļā 2.2., tad tiešā veidā, daļēji kopējot vektoru telpas izliektas kopas definīciju, mēs nenonāksim pie vēlamā rezultāta, proti, var atrast piemērus, kuros lodes nav izliektas kopas (Piemērs 2.2.1.) un izliektu kopu šķēlums nav izliekta kopa (Piemērs 2.2.2.). Vēlamo mēs panāksim ar stingri izliektas metriskas telpas definīcijas palīdzību. Apgalvojums 2.3.1. parādīs, ka stingri izliektas metriskas telpas definīcija Banaha telpas gadījumā ir ekvivalenta ar stingri izliektas Banaha telpas definīciju. Taču stingri izliektas metriskas telpas situācijā joprojām paliek nenoskaidrots jautājums par lodes izliektību. Tāpēc rodas zināmas grūtības pierādīt labus rezultātus.

Mēs piedāvājam izliektības struktūru metriskā telpā definēt ar slēguma operatoru palīdzību (skatīt I daļas apakšnodaļu 3.1.). Tiesa, arī šajā situācijā mēs esam spiesti pieprasīt telpas ložu izliektību, taču slēguma operatora lietošana atvieglina pierādījumu veikšanu. Būtībā tā ir izliektības struktūras, kāda tā parastā nozīmē piemīt vektoru telpām, pārnešana uz noteikta tipa attēlojumu, kuram liekam darboties mums interesējošā metriskajā telpā. Stingri izliektā metriskā telpā, piemēram, slēguma operatoru varam definēt kā tādu, kas katrai kopai no šīs telpas piekārto mazāko izliekto kopu. Tādējādi stingri izliekta metriska telpa ir viens no variantiem metriskai telpai ar tajā uzdotu slēguma operatoru. Ar slēguma operatora lietojumu nekustīgo punktu teorijā sastopamies A.Liepiņa 1983.gada rakstā. Slēguma operatora īpašības A.Liepiņš kopā ar saviem studentiem izpētījis daudzos kursa un diplomdarbos. Šie rezultāti atrodami šeit I daļas apakšnodaļā 3.1.. A.Liepiņš ar 1983.gada rakstu iesācis jaunu virzienu nekustīgo punktu teorijā: tiek meklēti attēlojumu nekustīgie punkti metriskās telpās ar slēguma operatoru.

Kopumā , pāršķirstot nekustīgo punktu teorēmu pierādījumus, varam sacīt, ka visbiežāk tiek izmantotas sekojošas izliektu kopu īpašības:

1) definīcija: izliekta kopa satur nogriezni, ja zināms, ka nogriežņa galapunkti pieder kopai (L.E.J.Brauers [1910], R.de Marrs [1963], D.Gēde (Göhde) [1965], K.Gēbels (Goebel) [1969], V.G.Dotsons [1971/72], [1972], N.A.Assads, V.A.Kirks [1972], M.Edelsteins [1974], V.G.Dotsons, H.F.Senters [1974], P.K.F.Kuhfittings [1974], L.F.Gusemans, B.C.Peters [1975], J.Karisti (Caristi) [1976], E.Čandlers (Chandler) [1981], J.Gornickis,M.Kruppels [1992]);

2) ja $x_1,x_2,\ldots,x_n$ pieder izliektai kopai K, tad punkts

$z=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i$ pieder kopai K, kur $\lambda_i\geq 0$, $i=1,2,\ldots,n$, $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$, jeb

convK⊂K (B.Knasters, C.Kuratovskis, S.Mazurkevičs [1929], J.Šauders (Schauder) [1930], A.Tihonovs [1935], S.Kakutani [1941], M.M.Dejs (Day) [1961], K.Fans [1961], R.de Marrs [1963], D.Gēde [1964], L.P.Beljuss (Belluce), V.A.Kirks [1966], M.Edelsteins [1966], T.C.Lims [1974B], M.R.Taskovičs [1980], V.Takahaši [1992]);

3) izliektu kopu šķēlums ir izliekta kopa (V.A.Kirks [1965],

[1981A], F.E.Brauders (Browder) [1965], L.P.Beljuss, V.A.Kirks [1969], V.Takahaši [1970], T.Mitčels (Mitchell) [1970], R.Kannans [1971], [1973], V.G.Dotsons [1972], J.P.Penots [1979], A.Liepiņš [1983], L.Gajiča [1989], N.Sioji (Shioji) [1991]);
4) lodes ir izliektas kopas (V.A.Kirks [1965], [1970], [1981A], [1983], V.Takahaši [1970], K.Gēbels, V.A.Kirks [1972], J.P.Penots [1979], A.Liepiņš [1983], H.K.Hu (Xu) [1991]).

Vairāk vai mazāk arī mēs visas pieminētās īpašības izmantosim mūsu pierādītajās nekustīgo punktu teorēmās: 1.īpašību - I daļas 2.nodaļā; 2.īpašību - I daļas Teorēmā 1.4., II daļas Teorēmā 1.3.1.; 3.un 4.īpašības - visos I daļas 3.nodaļas teorēmu pierādījumos.

Kopas izliektības struktūra ir tikai viens no pamatlīdzekļiem mūsu mērķa sasniegšanai. Un kāds būtu mūsu mērķis? I daļā mēs gribētu parādīt, kādi ir nepieciešamie nosacījumi attēlojumu saimju kopīgā nekustīgā punkta eksistencei un cik efektīvi attēlojumu nekustīgos punktus mēs varam atrast metriskās telpās ar dotu slēguma operatoru. II daļā galvenā vērība tiek pievērsta Bola-Brauera-Šaudera teorēmas stabilitātei. Proti, kā to pierāda piemēri, tad secinājums par nekustīgā punkta eksistenci var būt pilnīgi aplams, ja mēs izmainām kādu no teorēmas nosacījumiem attiecībā uz kopas veidu (izliekta un kompakta). Var sacīt, ka pie nelielām kopas struktūras izmaiņām (kā Piemērā 1.1.1.) būtiski izmainās galarezultāts. Savukārt, kā izmainīsies šis pats galarezultāts, ja mēs nedaudz izmainīsim nosacījumu par attēlojuma nepārtrauktību? Atbildi uz šo jautājumu dod Teorēma 1.3.1. Bola-Brauera-Šaudera teorēma spēlē būtisku lomu tirgus ekonomikas modeļu līdzsvara pierādījumos; ir pamats cerēt, ka jaunajam rezultātam arī varētu būt plaši pielietojumi ekonomiskajās teorijās.

Lai atvieglinātu lasītāja darbu, paskaidrosim mazliet piedāvātās lasāmvielas uzbūves struktūru. Doktordarbs sastāv no apzīmējumu saraksta, ievada, divām daļām, pēcvārda un literatūras saraksta. Apzīmējumu sarakstā ietverti tikai tie apzīmējumi, kas varbūt atšķiras no vispārpieņemtajiem un kas specifiski tieši šim darbam. Pirmā daļa ietver 4 nodaļas, otrā daļa 3 nodaļas. Nodaļas vajadzības gadījumā sīkāk iedalītas apakšnodaļās. Galvenie rezultāti formulēti kā teorēmas, mazāk svarīgāki kā apgalvojumi, daži teorēmu palīgrezultāti, kas nesatur, autoresprāt, pārāk patstāvīgu raksturu, formulēti kā lemmas. Literatūras saraksts sakārtots autoru uzvārdu alfabētiskā secībā, atsauces darbā minētas pēc autora uzvārda un raksta publicēšanas gada.

I DAĻA

ATTĒLOJUMU SAIMJU KOPĪGIE NEKUSTĪGIE PUNKTI

0. PAMATJĒDZIENI, DEFINĪCIJAS, ZINĀMIE REZULTĀTI

Iepazīstoties ar attēlojumu nekustīgo punktu teoriju, var nonākt pie secinājuma, ka šajā teorijā izstrādāti daudzi ļoti atšķirīgi darbi. Viens no veidiem, kā saklasificēt visas attēlojumu nekustīgo punktu eksistences teorēmas, ir pēc attēlojumu skaita. Ir pamats domāt, ka viena attēlojuma gadījumam šī teorija izstrādāta daudz pamatīgāk un gandrīz jebkurai situācijai varētu piemeklēt atbilstošu rezultātu. Ne tik vienkārši ir ar attēlojumu saimēm, īpaši ar saimēm bez apjoma ierobežojuma. Cits variants nekustīgo punktu teorēmu klasifikācijai būtu pēc attēlojumu veida. Vienu no pamatvirzieniem veido neizstiepjošu attēlojumu nekustīgo punktu teorēmas.

Dabīgs vispārinājums saspiedējattēlojumam, kuram nekustīgā punkta eksistence pilnā metriskā telpā pamatota slavenajā Banaha teorēmā, ir neizstiepjošs attēlojums.

DEFINĪCIJA 0.1. Attēlojumu $f:X\to X$ (X - metriska telpa) sauc par neizstiepjošu, ja visiem $x,y\in X$: $d(f(x),f(y))\le d(x,y)$.

Vienkārši piemēri parāda, ka vispārīgā gadījumā (piemēram, pilnā metriskā telpā) šādiem attēlojumiem nekustīgā punkta eksistence nav nodrošināta, bet no otras puses, eksistē attēlojumi ar augstāk minēto prasību, kuriem ir nekustīgie punkti.

Piemērs 0.1.

■ $X=\mathbf{R}$ un $\forall x\in\mathbf{R}$: $f(x):=x+13$. Skaidrs, ka
$d(f(x),f(y))=|x+13-y-13|=|x-y|\leq d(x,y)=|x-y|$,
bet nekustīgā punkta attēlojumam nav.■

Piemērs 0.2.

■ $X=\mathbf{R}$ un $f(x)=x$. Attēlojumam f nekustīgo punktu kopa ir X.■

Interesantus rezultātus neizstiepjošam attēlojumam Banaha telpas izliektās apakškopās ieguvuši M.S.Brodskis un D.P.Milmans [1948], R. de Marrs [1963], D.Gēde [1964], [1965], M.Edelsteins [1964], [1966], V.A.Kirks [1965], [1970], [1981A], [1981B], [1983], F.E.Brauders [1965], L.P.Beljuss, V.A.Kirks [1966], [1969], V.Takahaši [1970], V.G.Dotsons [1971/72], T.C.Lims [1974B], L.F.Gusemans, B.C.Peters [1975]. Kā viens no pamatrezultātiem minama 1965.gada V.A.Kirka teorēma.

TEORĒMA 0.1.(V.A.Kirks [1965])
Pieņemsim, ka dota refleksīva Banaha telpa X, kopa K ir tās izliekta, slēgta, ierobežota apakškopa ar normālu struktūru. Ja attēlojums f, kurš darbojas no kopas K sevī, ir neizstiepjošs, tad attēlojumam f eksistē nekustīgais punkts kopā K.

Šī teorēma radusies vienā laikā ar F.E.Braudera [1965] tāda paša tipa rezultātu, kas pierādīts vienmērīgi izliektā Banaha telpā[1], kura vienlaicīgi ir gan refleksīva, gan katrai tās izliektai kopai ir normāla struktūra. Tā kā normālas struktūras jēdziens būs mums nepieciešams arī vēlāk, dodam tā formulējumu. Pirmo reizi normālas struktūras definīcija dota M.S.Brodska un D.P.Milmana [1948] kopīgajā darbā.

---

[1]*Banaha telpu X sauc par vienmērīgi izliektu, ja*
$\forall\varepsilon\in]0;2]\ \exists\delta(\varepsilon)>0\ \forall x,y\in B(0;1):\|x-y\|\geq\varepsilon\Rightarrow 2(1-\delta(\varepsilon))$.
Šī definīcija ekvivalenta ar sekojošo:
Banaha telpa ir vienmērīgi izliekta, ja jebkurām divām virknēm $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$, *kurām* $\|x_n\|\leq 1$, $\|y_n\|\leq 1$ *un* $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n+y_n\|=1$ *seko, ka* $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-y_n\|=0$.
Vienmērīgi izliekta Banaha telpa ir arī stingri izliekta Banaha telpa. Par stingri izliektu metrisku telpu runāsim 2.nodaļā.

DEFINĪCIJA 0.2.Izliektai kopai K no Banaha telpas X ir normāla struktūra, ja katrā izliektā, ierobežotā, nevienelementīgā kopā $H \subset K$ eksistē tāds elements $y \in H$, ka:

$$\sup_{x \in H} \|y-x\| < \operatorname{diam} H = \sup_{x,y \in H} \|x-y\| .$$

Tūlīt pēc Teorēmas 0.1. parādīšanās pasaulē, daudzi matemātiķi mēģinājuši to vispārināt neizstiepjošu attēlojumu saimei un meklējuši tās kopīgo nekustīgo punktu.

DEFINĪCIJA 0.3.Pieņemsim, ka F ir attēlojumu $f:K \to K$ (K - patvaļīga telpa) saime. Punktu $x^* \in K$ sauc par saimes F kopīgo nekustīgo punktu , ja katram saimes attēlojumam $f \in F$: $f(x^*)=x^*$.

Dabīgi rodas jautājums, kādai jābūt attēlojumu saimei, kādiem jābūt papildus nosacījumiem, lai, piemēram, sekmīgi vispārinātu V.A.Kirka Teorēmu 0.1.. Viens no variantiem ir prasība, lai attēlojumu saime būtu komutatīva.

DEFINĪCIJA 0.4.Attēlojumu saimi F sauc par komutatīvu, ja $\forall x \in K$ (K - patvaļīga telpa) izpildās nosacījums, ka $f(g(x))=g(f(x))$, $\forall f,g \in F$.

Šajā sakarībā radusies interesanta problēma: ja F ir nepārtrauktu komutatīvu attēlojumu saime, kas attēlo intervālu $[0;1]$ sevī , vai tādai eksistē kopīgs nekustīgais punkts? Izrādās, šis jautājums atrisināts negatīvi. V.M.Bouce [1969] pierāda, ka eksistē divas komutējošas nepārtrauktas funkcijas vienības intervālā, kurām nav kopīga nekustīgā punkta. J.P.Huneke [1969] parāda divus veidus, kā šādas funkcijas konstruēt. Bet jau pirmais pozitīvais rezultāts parādījies 1963.gadā. R.de Marrs komutatīvai neizstiepjošu attēlojumu saimei pierāda sekojošo:

TEORĒMA 0.2.(R.de Marrs [1963])
Pieņemsim, ka X ir Banaha telpa un K ir tās izliekta un kompakta apakškopa. Ja komutatīva neizstiepjošu attēlojumu saime F attēlo kopu K sevī , tad tai eksistē kopīgs nekustīgais punkts.

Jau pieminētajā F.E.Braudera [1965] rakstā atrodam:

TEORĒMA 0.3.(F.E.Brauders [1965])
Pieņemsim, ka X ir vienmērīgi izliekta Banaha telpa un K ir tās izliekta, slēgta un ierobežota apakškopa. Ja komutatīva neizstiepjošu attēlojumu saime F attēlo kopu K sevī, tad tai eksistē kopīgs nekustīgais punkts.

Taču vispārīgu V.A.Kirka teorēmas analogu ilgāku laiku neizdevās iegūt. Interesants šajā sakarībā ir L.P.Beljusa un V.A.Kirka 1966.gada raksts. Tanī atrodam divus vispārinājumus.

TEORĒMA 0.4.(L.P.Beljuss, V.A.Kirks [1966])
Pieņemsim, ka X ir refleksīva Banaha telpa un K ir tās izliekta, slēgta un ierobežota apakškopa ar normālu struktūru. Ja F ir komutatīva neizstiepjošu attēlojumu, kas kopu K attēlo sevī, galīga saime, tad saimei F eksistē kopīgs nekustīgais punkts.

TEORĒMA 0.5.(L.P.Beljuss, V.A.Kirks [1966])
Pieņemsim, ka X ir stingri izliekta, refleksīva Banaha telpa un K ir tās izliekta, slēgta un ierobežota apakškopa. Ja F ir komutatīva neizstiepjošu attēlojumu saime, kas attēlo kopu K sevī, un ir zināms, ka $Fixf \neq \emptyset$, $\forall f \in F$, *tad saimei F eksistē kopīgs nekustīgais punkts.*

Otro Teorēmu 0.5. būtiski atvieglina pierādīt sekojošā lemma:

LEMMA 0.1.
Pieņemsim, ka X ir stingri izliekta Banaha telpa un K ir tās izliekta un slēgta apakškopa. Ja neizstiepjošs attēlojums f attēlo kopu K sevī, tad attēlojumam f nekustīgo punktu kopa ir izliekta (un arī slēgta).

Lemmu 0.1. mēs izmantosim arī 2.nodaļā.
Un tikai 1974.gadā T.C.Lims pilnībā vispārinājis V.A.Kirka Teorēmu 0.1. komutatīvai neizstiepjošu attēlojumu saimei bez apjoma ierobežojuma.

TEORĒMA 0.6.(T.C.Lims [1974B])
Pieņemsim, ka X ir refleksīva Banaha telpa, kopa K ir tās izliekta, slēgta, ierobežota apakškopa ar normālu struktūru. Ja

komutatīva neizstiepjošu attēlojumu saime F attēlo kopu K sevī, tad tai eksistē kopīgs nekustīgais punkts kopā K.

Lai nonāktu līdz šim rezultātam, T.C.Lims sīki izpētījis normālās struktūras jēdzienu ([1974A]). Pirms tam šajā virzienā krietni pastrādājuši bija jau L.P.Beljuss, V.A.Kirks un E.F.Šteiners 1968.gada kopīgajā rakstā.

Varētu teikt, ka ar pamatjēdzieniem un rezultātiem mēs esam iepazinušies, varam šķirt tālāk I daļas lapaspuses.

Kopsavilkumus par neizstiepjošiem attēlojumiem un to nekustīgajiem punktiem varat lasīt V.A.Kirka rakstos [1981B], [1983], kā arī attiecīgajās nodaļās D.R.Smarta [1974], V.Istratesku [1981] un J.Dugundži, A.Granass [1982] grāmatās.

1.DAŽI IEVADREZULTĀTI PAR ATTĒLOJUMU SAIMJU NEKUSTĪGAJIEM PUNKTIEM

Pievērsīsimies V.A.Kirka Teorēmai 0.1.([1965]). Ar šīs teorēmas vispārinājumu neizstiepjošu attēlojumu komutatīvai saimei mēs jau iepazināmies 0.nodaļā. Taču tur mēs nerunājām par vēl vienu V.A.Kirka [1965] raksta rezultātu, kas ir šīs Teorēmas 0.1. sekas. Proti:

TEORĒMAS 0.1. SEKAS (V.A.Kirks,[1965])
Pieņemsim, ka K ir netukša, izliekta un slēgta apakškopa refleksīvā Banaha telpā X. Pieņemsim, ka kopai K ir normāla struktūra. Ja attēlojums $f:K\to K$ ir neizstiepjošs un eksistē tāds kopas K punkts p, kuram virkne $(f^n(p))_{n\in\mathbf{N}}$ ir ierobežota, tad attēlojumam f eksistē nekustīgais punkts.

Atšķirībā no Teorēmas 0.1., Teorēmas 0.1.Sekās ir izmainīts nosacījums par kopas K ierobežotību, tas ir aizstāts ar virknes $(f^n(p))_{n\in\mathbf{N}}$ ierobežotību. Var gadīties, ka konkrētā gadījumā varbūt vieglāk ir meklēt tādu punktu p kopā K, kurā virkne $(f^n(p))_{n\in\mathbf{N}}$ ir ierobežota, nekā noskaidrot pašas kopas ierobežotību. Radās ideja Teorēmas 0.1. Sekas vispārināt attēlojumu saimei. Un, atceroties brīnišķīgo T.C.Lima rezultātu [1974B] (Teorēma 0.6.), vispārinājumu izdarīsim neizstiepjošu attēlojumu komutatīvai saimei. Taču uzreiz jāpasaka, ka attēlojumu saimes gadījumā sarežģītāks kļūst ierobežotības nosacījums. Ir izdevies pierādīt sekojošo:

TEORĒMA 1.1.
Pieņemsim:1) X - refleksīva Banaha telpa;

2) K - netukša, izliekta, slēgta X apakškopa;

3) kopai K ir normāla struktūra;

4) F ir neizstiepjošu attēlojumu, kuri darbojas no kopas K sevī, komutatīva saime;

5) eksistē tāds punkts $p\in K$, ka kopa $S=\{(f_1\circ\ldots\circ f_n)(p)\,|\,f_1,\ldots,f_n\in F\,\&\,n\in\mathbf{N}\}$ ir ierobežota.

Pie šiem nosacījumiem attēlojumu saimei F kopīgo nekustīgo punktu kopa nav tukša.

Pierādījums.

Tā kā kopa $S=\{(f_1\bullet\ldots\bullet f_n)(p)\,|\,f_1,\ldots,f_n\in F\,\&\,n\in\mathbf{N}\}$ ir ierobežota, tad eksistē tāds $r\in\mathbf{R}_{++}$, ka S ietilpst slēgtā lodē B(p,r) ar centru punktā p un rādiusu r.

Definēsim kopas:

$K_{f_1\bullet\ldots\bullet f_n}:=B((f_1\bullet\ldots\bullet f_n)(p),r)\cap K,\quad f_1,\ldots,f_n\in F\ \&\ n\in\mathbf{N}.$

Šīs kopas būs slēgtas un izliektas kā slēgtu un izliektu kopu šķēlums, un, protams, ierobežotas. Tās būs arī netukšas, jo $p\in K_{f_1\bullet\ldots\bullet f_n}$. Tiešām: tā kā $(f_1\bullet\ldots\bullet f_n)(p)\in B(p,r)$, tad $\|p-(f_1\bullet\ldots\bullet f_n)(p)\|\le r$.

Apskatīsim kopu:

$W:=\bigcup\{\bigcap\{\bigcap\{K_{f_1\bullet\ldots\bullet f_n}|f_1,\ldots,f_n\}n=k,k+1,\ldots\}k=0,1,2,\ldots\}.$

W ir netukša, jo $p\in W$. Kopas S ierobežotības dēļ arī kopa $S':=\bigcup\{B(x,r)\,|\,x\in S\}$ ir ierobežota, bet $W\subset S'$. Tātad kopa W ir ierobežota. Tā ir arī izliekta, jo izliektu kopu virkne $(\bigcap\{\bigcap\{K_{f_1\bullet\ldots\bullet f_n}|f_1,\ldots,f_n\}n=k,k+1,\ldots\})_{n\in\mathbf{N}}$ ir augoša.

Fiksēsim $f\in F$ brīvi. Pierādīsim, ka $f:W\to W$. Izvēlēsimies $x\in W$, tad eksistēs tāds $k\in\mathbf{N}$, ka $x\in\bigcap\{\bigcap\{K_{f_1\bullet\ldots\bullet f_n}|f_1,\ldots,f_n\}n=k,k+1,\ldots\}$.

Tātad: $\|f(x)-f(f_1\bullet\ldots\bullet f_n)(p)\|\le\|x-(f_1\bullet\ldots\bullet f_n)(p)\|\le r$ visiem $f_1\bullet\ldots\bullet f_n\in F,\ n\ge k$.

Esam ieguvuši, ka $f(x)\in\bigcap\{\bigcap\{K_{f_1\bullet\ldots\bullet f_n}|f_1,\ldots,f_n\}n=k+1,k+2,\ldots\}\subset W$.

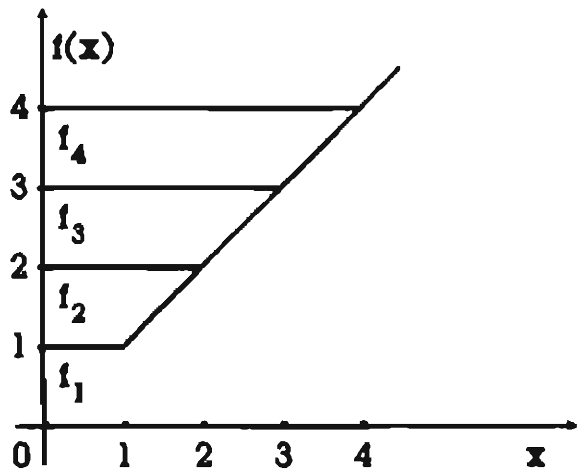
Tātad $f:W\to W$. Tā kā f ir nepārtraukts attēlojums, tad $f:\overline{W}\to\overline{W}$.

Iegūta situācija: F - neizstiepjošu attēlojumu, kas attēlo kopu $\overline{W}$ sevī, komutatīva saime; $\overline{W}$ - netukša, izliekta, slēgta un ierobežota kopa refleksīvā Banaha telpā; kopai $\overline{W}$ ir normāla struktūra ($\overline{W}\subset K$). Varam lietot T.C.Lima Teorēmu 0.6. un secināt, ka attēlojumu saimei F ir kopīgs nekustīgais punkts.▲

Kā rāda nākošais piemērs, kopas S ierobežotības nosacījums Teorēmā 1.1. ir būtisks.

Piemērs 1.1.

■Intervālā $[0;+\infty[$ apskatīsim attēlojumus, kurus definēsim sekojoši: $f_n(x):=max\{x,n\}$, $n=1,2,...$ (zīm. 1.1.). Kaut arī visi Teorēmas 1.1. nosacījumi ir izpildīti, izņemot nosacījumu par kopas S ierobežotību, saimei $F:=\{f_n|n=1,2,...\}$ kopīga nekustīgā punkta nav. Skaidrs, ka katram attēlojumam atsevišķi nekustīgo punktu kopa nav tukša: $Fix(f_n)=[n;+\infty[$, tāpat arī galīgam skaitam šādu attēlojumu kopīgo nekustīgo punktu kopa nav tukša: $Fix(f_{n_1},f_{n_2},...,f_{n_m})=$ $=[max\{n_1,n_2,...,n_m\},+\infty[$, bet bezgalīga attēlojumu skaita gadījumā kopīgu nekustīgo punktu nav. Pie tam, ievērosim, ka šie attēlojumi veido komutatīvu saimi. Piemērs pamācošs tanī nozīmē, ka neierobežotas kopas gadījumā, neiespējami pamatot kopīga nekustīgā punkta eksistenci. Mums nepieciešama papildus informācija.■



zīm.1.1.

Šī piemēra iedvesmoti apskatīsim galīga skaita attēlojumu saimi stingri izliektā Banaha telpā. Kā jau 0.nodaļā tika minēts, tad V.Kirka Teorēmu 0.1. stingri izliektā Banaha telpā attēlojumu saimei bez apjoma ierobežojuma vispirms izdevies vispārināt 1966.gadā(L.P.Beljuss, V.A.Kirks [1966]). Izrādās, saimes galīgums un telpas stingrā izliektība atvieglina prasību par ierobežotību.

TEORĒMA 1.2.

Pieņemsim: 1) X - stingri izliekta, refleksīva Banaha telpa;

2) K - netukša, izliekta, slēgta X apakškopa;

3) kopai K ir normāla struktūra;

4) F ir galīga skaita neizstiepjošu attēlojumu, kuri darbojas no kopas K sevī, komutatīva saime;

5) eksistē tāds punkts $p\in K$, ka virknes $(f^n(p))_{n\in N}$ katram $f\in F$ ir ierobežotas.

Pie šiem nosacījumiem saimei F eksistē kopīgs nekustīgais punkts.

▾Pierādījums.

Pēc V.Kirka 0.1.Teorēmas Sekām zināms, ka $Fixf\neq\emptyset$, $\forall f\in F$. Un tā kā X– stingri izliekta telpa, $K\subset X$ - izliekta un slēgta, $f:K\to K$ - neizstiepjoši attēlojumi ($f\in F$), tad pēc Lemmas 0.1. kopas Fixf visiem $f\in F$ ir izliektas. Tā kā visi attēlojumi $f\in F$ ir nepārtraukti, tās būs arī slēgtas kopas. Pieņemsim, ka $F=\{f_1,f_2,\dots,f_m\}$, un pierādīsim, ka

$$FixF=\bigcap\{Fixf_i|i=1,2,\dots,m\}\neq\emptyset.$$

Pierādījumu veiksim ar matemātiskās indukcijas metodi pēc attēlojumu skaita.

Indukcijas bāze: m=1 - apgalvojums patiess, jo sakrīt ar V.A.Kirka Teorēmas 0.1. Sekām.

Induktīvais pieņēmums: m=n un $FixF=\bigcap\{Fixf_i|i=1,2,\dots,n\}\neq\emptyset$.

Induktīvā pāreja. Apzīmēsim $\{f_1,f_2,\dots,f_n\}$ ar F' un f_{n+1} ar f. Jāpierāda, ka

$$FixF=FixF'\cap Fixf=\bigcap\{Fixf_i|i=1,2,\dots,n+1\}\neq\emptyset.$$

Pēc induktīvā pieņēmuma $FixF'\neq\emptyset$. Ņemsim $x\in FixF'$, tad: $f_i(x)=x$, $\forall i\in\{1,2,\dots,n\}$. Vienādības

$f(x)=f(f_i(x))=f_i(f(x))$, $\forall i\in\{1,2,\dots,n\}$ pierāda, ka $f(x)\in Fixf_i$, $i=1,2,\dots,n$, jeb $f(x)\in FixF'$ un tātad $f:FixF'\to FixF'$. Kopas $Fixf_i$, $i=1,2,\dots,n$ ir netukšas, slēgtas un izliektas, tāpēc kopa FixF' ir slēgta un izliekta kā slēgtu un izliektu kopu šķēlums un pēc induktīvā pieņēmuma arī netukša.

Izvēlēsimies brīvi $z\in Fixf$. Funkcionālis $f(y):=\|z-y\|$, $y\in K$ ir no apakšas vāji pusnepārtraukts un līdz ar to sasniedz savu mazāko vērtību katrā netukšā, slēgtā un izliektā refleksīvas Banaha telpas apakškopā (skatīt, piemēram, V.A.Trenogins [1980], 475. lpp), tātad arī kopā FixF'. Tā kā telpa X ir stingri izliekta, tad punktam z kopā FixF' eksistējošais tuvākais punkts z_0 ir noteikts viennozīmīgi.

Tā kā $f:FixF'\to FixF'$, tad līdz ar to:

$$\|z-z_0\|=inf\{\|z-y\||y\in FixF'\}\leq\|z-f(z_0)\|=\|f(z)-f(z_0)\|\leq\|z-z_0\|.$$

Secinām, ka $f(z_0)=z_0$. Tātad

$$z_0\in(\bigcap\{Fixf_i|i=1,2,...,n\})\bigcap Fixf = FixF\neq\emptyset.$$

Teorēma pierādīta.▲

Atzīmēsim, ka rezultātu nevar vispārināt bezgalīga apjoma saimei F, jo pietrūkst zināšanu par kopu K. Taču visu "smagumu" varam pārnest uz attēlojumu saimi jeb precīzāk uz vienu saimes attēlojumu.

TEORĒMA 1.3.

Pieņemsim:1) X - stingri izliekta, refleksīva Banaha telpa;

2) K - netukša, izliekta, slēgta X apakškopa;

3) kopai K ir normāla struktūra;

4) F ir neizstiepjošu attēlojumu, kuri darbojas no kopas K telpā X, komutatīva saime;

5) eksistē tāds attēlojums $f_0\in F$, kura nekustīgo punktu kopa $Fixf_0$ ir netukša, slēgta, ierobežota ar normālu struktūru.

Pie šiem nosacījumiem saimei F eksistē kopīgs nekustīgais punkts.

▼Pierādījums.

Viegli ievērot, ka visi attēlojumi $f\in F$ kopu $Fixf_0$ attēlo sevī: ja $x\in Fixf_0$ *un* $f\in F$, *tad* $f(x)=f(f_0(x))=f_0(f(x))$ jeb $f(x)\in Fixf_0$. Savukārt bez jau esošās informācijas par kopu $Fixf_0$, pēc Lemmas 0.1. ir zināms, ka tā ir arī izliekta kopa. Pēc V.A.Kirka Teorēmas 0.1. varam secināt, ka jebkuram attēlojumam $f\in F$ eksistē nekustīgais punkts kopā $Fixf_0$. Taču tagad varam atsaukties uz L.P.Beljusa un V.A.Kirka Teorēmu 0.5. un secināt, ka saimes F kopīgo nekustīgo punktu kopa nav tukša.▲

Iepriekšējie rezultāti garantē attēlojumu saimes kopīga nekustīgā punkta eksistenci. Taču tikpat labi var izrādīties noderīgi tie attēlojumu nekustīgie punkti, kas nav kopīgi. Uz šāda tipa rezultātu mūs pamudina iepazīšanās ar D.R.Smarta [1961], M.Edelsteina [1962] un V.G.Dotsona [1971/2] darbiem. Iegūtais vispār ir netradicionāls rezultāts tieši ar to, ka garantē nekustīgo punktu eksistenci katram saimes attēlojumam atsevišķi.

TEOREMA 1.4.

Pieņemsim: 1) X - normēta vektoru telpa (pār lauku $\mathbf{R}$ vai $\mathbf{C}$);

2) K - telpas X kompakta apakškopa;

3) $F=\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ ir galīga skaita neizstiepjošu attēlojumu saime, kas apmierina prasības:

a) $\forall x,y\in K(x\neq y): \min\{\|f_i(x)-f_i(y)\| \mid i=1,2,\ldots,n\}<\|x-y\|$;

b) $\forall x\in K: conv\{f_1(x),\ldots,f_n(x)\}\subset K$.

Pie šiem nosacījumiem katram attēlojumam $f_i\in F$ eksistē savs nekustīgais punkts x_i: $f_i(x_i)=x_i$, $i=1,2,\ldots,n$.

▾Pierādījums.

Definēsim attēlojumus t_i sekojošā veidā:

$$t_i(x):=\|x-f_i(x)\|,\ i=1,2,\ldots,n,\ \forall x\in X.$$

Pēc Veierštrāsa teorēmas seko, ka

$$\exists x_i\in X:\ t_i(x_i)=\inf t_i(K),\ i=1.2,\ldots,n.$$

Pierādīsim, ka $\inf t_i(X)=0$, $i=1,2,\ldots,n$.

Apskatīsim attēlojumu

$$h_\alpha(x):=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i(x),\ \forall x\in K\ (\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n),\alpha_i>0,i=1,2,\ldots,n,\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1).$$

No nosacījuma b) seko, ka $h_\alpha: K\to K$.

Izvēlēsimies $i\in\{1,2,\ldots,n\}$ un $\varepsilon\in\mathbf{R}_{++}$ brīvi. Pierādīsim, ka eksistē tāds α $(\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n),\ \alpha_j>0,\ j=1,2,\ldots,n,\ \sum_{j=1}^{n}\alpha_j=1)$, ka visiem $x\in X$: $\|f_i(x)-h_\alpha(x)\|<\varepsilon$.

Ir spēkā nevienādības:

$$\|f_i(x)-h_\alpha(x)\|=\|f_i(x)-\sum_{j=1}^{n}\alpha_j f_j(x)\|=\|(1-\alpha_i)f_i(x)-\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\alpha_j f_j(x)\|\le$$

$$\le(1-\alpha_i)\|f_i(x)\|+\|\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\alpha_j f_j(x)\|.$$

K ir kompakta kopa vektoru telpā, tātad tā ir ierobežota, no šejienes seko, ka:

$$\exists c\in\mathbf{R}_{++}\forall x\in X:\ \|f_i(x)\|\le c.$$

Turpinot iepriekšējos novērtējumus, iegūsim:

$$\|f_i(x)-h_\alpha(x)\|\le(1-\alpha_i)c+(1-\alpha_i)c=2c(1-\alpha_i).$$

Mēs varam izvēlēties tādu $\alpha_i \in]0;1[$, ka $2c(1-\alpha_i) < \varepsilon$, un ņemam

$$\alpha_j := \frac{1-\alpha_i}{n-1},\ j=1,2,\ldots,n,\ j\neq i.$$

Pierādīsim, ka attēlojums h_α ir stingri neizstiepjošs.

Patiešām: brīvi izvēlētiem $x,y\in K$ $(x\neq y)$ izpildās sakarības

$$\|h_\alpha(x)-h_\alpha(y)\|=\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i(x)-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i(y)\|=$$

$$=\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(f_i(x)-f_i(y))\|\leq\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\|f_i(x)-f_i(y)\|$$

un tā kā visi attēlojumi f_i ir neizstiepjoši un izpildās a), tad

$$\|h_\alpha(x)-h_\alpha(y)\|<\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\|x-y\|=\|x-y\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=\|x-y\|.$$

Pēc Edelsteina teorēmas [1962] seko, ka

$\exists x_i\in X:\ h_\alpha(x_i)=x_i$.

No augstāk iegūtajām nevienādībām $\|f_i(x_i)-h_\alpha(x_i)\|<\varepsilon$, i=1,2,...,n un tikko iegūtās vienādības seko, ka $\|f_i(x_i)-x_i\|<\varepsilon$. Savukārt no šejienes: $\inf t_i(X)=0$. ▲

Nosacījumu a) gribētos nosaukt par kompensācijas principu, jo tieši tas, ka jebkuram nesakrītošam punktu pārim x un y varam piemeklēt tādu saimes F attēlojumu f, kurš punktu x un y attēlus "savelk" tuvāk, atļauj pierādījumā atsaukties uz Edelsteina teorēmas lietojumu. Varbūt var atrast vēl citus kompensācijas nosacījumus? Iespējams, taču ar to šeit nenodarbosimies. Mūsu mērķis šajā nodaļā bija iepazīties ar dažām attēlojumu saimju nekustīgo punktu teorēmām, ar to gaisotni, kas sastopama šāda rakstura rezultātos. Turpmāk mēs pieturēsimies pie pirmajās trijās teorēmās iesāktā ceļa - meklēsim saimju kopīgos nekustīgos punktus.

2. STINGRI IZLIEKTAS METRISKAS TELPAS

2.1. IZLIEKTAS KOPAS UN STINGRI IZLIEKTAS BANAHA TELPAS

Šajā apakšnodaļā apskatīsim jau zināmus rezultātus. Tas darīts ar nolūku, lai pēc tam varētu salīdzināt ar iegūtajiem jaunajiem jēdzieniem un lai redzētu atšķirību starp tiem.

Pieņemsim, ka dota vektoru telpa X un divi tās punkti $x,y\in X$.

DEFINĪCIJA 2.1.1. Par slēgtu nogriezni, kas savieno punktus $x,y\in X$, sauc visu to punktu z kopumu, kuriem ir spēkā sakarība $z=tx+(1-t)y$, $t\in[0,1]$. Punktus $z=tx+(1-t)y$, kur $t\in]0;1[$, sauc par iekšējiem nogriežņa punktiem.

DEFINĪCIJA 2.1.2. Kopu $K\subset X$ sauc par izliektu, ja līdz ar jebkuriem diviem punktiem $x,y\in K$ šai kopai pieder arī šos punktus savienojošais slēgtais nogrieznis.

Atcerēsimies, ka jebkura slēgta lode $B(x,r)=\{y\in X\,|\,\|x-y\|\le r\}, x\in X, r\in\mathbf{R}_{++}$ ir izliekta kopa, kā arī izliektu kopu šķēlums ir izliekta kopa. Taču, kā vēlāk būs redzams, patvaļīgā metriskā telpā šādas īpašības nevar garantēt. Tāpēc apskatīsim daudz smagāku telpas nosacījumu - stingro izliektību.

DEFINĪCIJA 2.1.3. Banaha telpu X sauc par stingri izliektu, ja tās vienības sfēras katrs punkts nav iekšējs punkts vienības lodē ietilpstošajos nogriežņos.

APGALVOJUMS 2.1.1. (V.I.Istratesku [1981], 57. lpp) Banaha telpā X sekojoši nosacījumi ir ekvivalenti:

1. X - stingri izliekta telpa;

2. $\forall x,y\in B(0,1)\ (x\neq y): \|x+y\|<2$;

3. $\forall x,y\in X: \|x+y\|=\|x\|+\|y\| \Rightarrow ((\exists\lambda\in\mathbf{R}_{++}: x=\lambda y)\vee(x=0)\vee(y=0))$.

Atzīmēsim, ka Hilberta telpa, l_p un L_p, $p>1$, ir stingri izliektas telpas. Atcerēsimies arī 0.nodaļā formulēto Lemmu 0.1.! Šo Lemmu 0.1. bieži izmanto attēlojumu nekustīgo punktu eksistences pierādījumos stingri izliektās Banaha telpās (piemēram, M.Edelsteins [1964], [1974], L.P.Beljuss, V.A.Kirks [1966], Z.Opials [1967], P.K.F.Kunfittings [1974]).

Taču ne tikai neizstiepjošam attēlojumam stingri izliektas Banaha telpas izliektā un slēgtā apakškopā nekustīgo punktu kopa ir izliekta un slēgta (neizstiepjošs attēlojums ir nepārtraukts!)! Šāda īpašība piemīt arī citām plašākām attēlojumu saimēm, piemēram, kvazi-neizstiepjošiem un asimptotiski neizstiepjošiem attēlojumiem.

DEFINĪCIJA 2.1.4. (V.G.Dotsons [1972]) Attēlojumu $f:K\to K$ *(K - normētas lineāras telpas apakškopa) sauc par kvazi-neizstiepjošu, ja tam eksistē vismaz viens nekustīgais punkts kopā K un jebkuram fiksētam attēlojuma f nekustīgajam punktam* $p\in K$: $\|f(x)-p\|\le\|x-p\|$, $\forall x\in K$.

DEFINĪCIJA 2.1.5. (K.Gēbels, V.A.Kirks [1972]) Attēlojumu $f:K\to K$ *(K - normētas lineāras telpas apakškopa) sauc par asimptotiski neizstiepjošu, ja*

$$\forall x,y\in K:\ \|f^i(x)-f^i(y)\|\le k_i\|x-y\|,$$

kur $(k_i)_{i\in\mathbf{N}}$ *ir tādu reālu skaitļu virkne, ka* $\lim\limits_{i\to\infty}k_i=1$ *(tiek pieņemts, ka* $k_i\ge1$, $k_{i+1}\le k_i$, $i=1,2,\ldots$*).*

Kā šos jēdzienus un rezultātus aprakstīt patvaļīgā metriskā telpā ?

2.2. IZLIEKTAS KOPAS UN STINGRI IZLIEKTAS METRISKAS TELPAS

Pieņemsim, ka dota metriska telpa (X,d) ar metriku d.

DEFINĪCIJA 2.2.1. Kopu $K\subset X$ sauc par izliektu, ja jebkuriem diviem elementiem $x,y\in K$ un katram $t\in[0,1]$ eksistē tāds elements $z \in K$, ka izpildās vienādības:

$d(x,z)=td(x,y)$ un $d(z,y)=(1-t)d(x,y)$.

Atzīmēsim, ka šīs definīcijas nozīmē slēgtas lodes var nebūt izliektas kopas, kā arī izliektu kopu šķēlums ir ne vienmēr izliekta kopa.

Piemērs 2.2.1.

■Apskatīsim diskrētu metrisku telpu X: $d(x,y)=0$, ja $x=y$, un $d(x,y)=1$, ja $x \neq y$, visiem $x,y \in X$. Tad $B(u,r)=\{u\}$, ja $r<1$, un $B(u,r)=X$, ja $r \geq 1$, katram $u \in X$. Otrajā gadījumā lode nav izliekta kopa.■

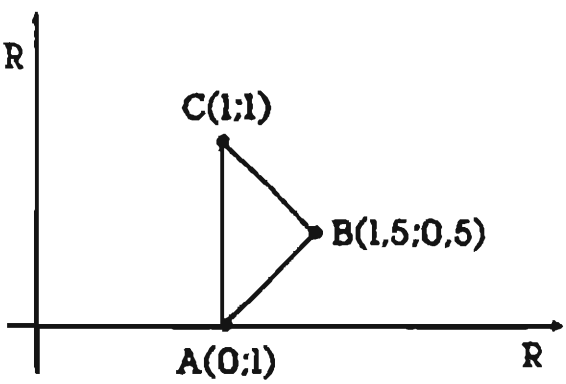
Piemērs 2.2.2.

■Apskatīsim telpu $\mathbb{R}^2$ ar maksimuma metriku:

$$d(x,y)=\max\{|y_i-x_i|\ |i=1,2\},$$

$$\forall x=(x_1,x_2),y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2.$$

Tad lauztā līnija ABC un nogrieznis AC ir izliektas kopas, bet to šķēlums $\{A,C\}$ nav izliekta kopa (skatīt zīm.2.2.2.).■



zīm.2.2.2.

DEFINĪCIJA 2.2.2.[1] Metrisku telpu (X,d) sauc par stingri izliektu, ja jebkuriem diviem elementiem $x,y \in X$ un katram $t \in [0,1]$ eksistē viens vienīgs elements $z \in X$ tāds, ka izpildās vienādības: $d(x,z)=td(x,y)$ un $d(z,y)=(1-t)d(x,y)$.

---

[1]Kad jēdziens par stingri izliektu metrisku telpu bija jau izstrādāts, autore šādu definīciju atrada arī Takahaši [1970] rakstā. Taču nekāda dziļāka analīze tur nav dota. Autors izmanto šo jēdzienu Takahaši izliektā metriskā telpā, kurā laimīgā kārtā ne tikai izliektu kopu šķēlums ir izliekta kopa, bet arī lodes ir izliektas kopas, kā arī stingri izliektā metriskā telpā neizstiepjoša attēlojuma nekustīgo punktu kopa ir Takahaši izliekta kopa.

No šīs Definīcijas 2.2.2., piemēram, seko, ka telpa $\mathbb{R}^2$ ar Eiklīda metriku ir stingri izliekta, bet ar maksimuma metriku tā nav stingri izliekta.

Stingri izliektā metriskā telpā ir spēkā sekojošs rezultāts:

TEORĒMA 2.2.1. Ja $\mathbf{K}$ ir izliektu kopu saime stingri izliektā metriskā telpā (X,d), tad $\bigcap\{K|K\in\mathbf{K}\}$ ir izliekta kopa.

▾Pierādījums.

Pieņemsim, ka $x,y\in\bigcap\{K|K\in\mathbf{K}\}$ un $t\in[0,1]$. Tad $x,y\in K$ jebkurai kopai $K\in\mathbf{K}$ un tāpēc eksistē tāds punkts $z\in K$, ka izpildās sakarības:

$d(x,z)=td(x,y)$ un $d(z,y)=(1-t)d(x,y)$.

Tā kā X ir stingri izliekta telpa, tad šāds z ir viens vienīgs. Tāpēc $z\in\bigcap\{K|K\in\mathbf{K}\}$ un teorēma pierādīta.▴

Stingri izliektā metriskā telpā ir spēkā Lemmas 0.1. sekojošs vispārinājums:

LEMMA 2.2.1. Pieņemsim, ka X ir stingri izliekta metriska telpa. Ja attēlojums $f:X\to X$ ir neizstiepjošs, tad tā nekustīgo punktu kopa Fixf ir izliekta.

▾Pierādījums.

Apskatīsim divus brīvi izvēlētus punktus x un y no attēlojuma f nekustīgo punktu kopas: $x,y\in\mathrm{Fix}f$. Izvēlēsimies $t\in[0,1]$. Sameklēsim punktiem x,y un konstantei t atbilstošo $z\in X$ tādu, ka: $d(x,z)=td(x,y)$ un $d(z,y)=(1-t)d(x,y)$. Telpas X stingrās izliektības dēļ tāds $z\in X$ eksistē, pie tam viens vienīgs.

Novērtēsim attālumu starp punktu x un y attēliem pie attēlojuma f:

$d(f(z),f(x))\le d(z,x)=td(x,y)$.

Tā kā $x\in\mathrm{Fix}f$, tad $d(f(z),x)\le td(x,y)$.

Līdzīgi: $d(f(z),f(y))\le d(z,y)=(1-t)d(x,y)$,

$d(f(z),y)\le(1-t)d(x,y)$.

Izmantojot trijstūra nevienādību, attālumu starp x un y varam novērtēt sekojoši:

$$d(x,y)\leq d(x,f(z))+d(f(z),y)\leq td(x,y)+(1-t)d(x,y)=d(x,y).$$

No šejienes seko, ka:

$$d(x,f(z)) = td(x,y) \text{ un } d(f(z),y) = (1-t)d(x,y).$$

No telpas X stingrās izliektības seko, ka $z=f(z)$ un $z\in Fixf$.▲

Ja Definīcijās 2.1.4. un 2.1.5. normētu vektoru telpu aizstājam ar metrisku telpu un līdz ar to normas vietā lietojam metriku, varam pierādīt sekojošus rezultātus.

LEMMA 2.2.2.

Pieņemsim, ka K ir slēgta un izliekta kopa stingri izliektā metriskā telpā X. Ja attēlojums $f:K\to K$ ir kvazi-neizstiepjošs tad tā nekustīgo punktu kopa $Fixf$ ir slēgta un izliekta.

▾Pierādījums.

Tā kā attēlojums f ir kvazi-neizstiepjošs, tad $Fixf\neq\emptyset$ un f ir nepārtraukts attēlojums visos savos nekustīgajos punktos. Pieņemsim, ka $fixf$ nav slēgta kopa. Tad $\exists x\in\delta Fixf$: $x\notin Fixf$. Kopas K slēgtības dēļ $x\in K$. Un tā kā $x\notin Fixf$, tad $f(x)\neq x$.

Definēsim $r:=\frac{1}{3}d(f(x),x)>0$. Tad eksistēs tāds $y\in Fixf$, ka $d(x,y)\leq r$. Tā kā f ir kvazi-neizstiepjošs attēlojums, tad $d(f(x),y)\leq d(x,y)\leq r$, un mēs iegūstam:

$$3r=d(f(x),x)\leq d(f(x),y)+d(y,x)\leq 2r.$$

Šī pretruna parāda, ka sākotnējais pieņēmums bijis aplams.

Pamatosim, ka $Fixf$ ir izliekta kopa. Pieņemsim, ka $x,y\in Fixf$, $x\neq y$ un $t\in]0;1[$. Mums jāpierāda, ka tad punkts $z\in X$, kurš izvēlēts sekojoši: $d(x,z)=td(x,y)$ un $d(z,y)=(1-t)d(x,y)$, pieder kopai $Fixf$. Tā kā kopa K ir izliekta, tad $z\in K$. Un tā kā f ir kvazi-neizstiepjošs, tad

$$d(f(z),x)\leq d(z,x) \text{ un } d(f(z),y)=d(z,y).$$

Savukārt $d(x,z)=td(x,y)$ un $d(z,y)=(1-t)d(x,y)$, tāpēc

$$d(x,y)\leq d(x,f(z))+d(f(z),y)\leq$$
$$\leq d(z,x)+d(z,y)=td(x,y)+(1-t)d(x,y)=d(x,y).$$

Ieguvām: $d(x,f(z))=d(z,x)=td(x,y)$,

$$d(f(z),y)=d(z,y)=(1-t)d(x,y).$$

No stingrās izliektības seko, ka $z=f(z)$ (z unitāte!), tatad $z\in Fixf$, t.i.. $Fixf$ ir izliekta kopa.▲

LEMMA 2.2.3.

Pieņemsim, ka K ir slēgta un izliekta kopa stingri izliektā metriskā telpā X. Ja attēlojums $f:K\to K$ ir asimptotiski neizstiepjošs, tad tā nekustīgo punktu kopa Fixf ir slēgta un izliekta.

Pierādījums.

Kopas Fixf slēgtība seko no attēlojuma f nepārtrauktības.

Izvēlamies divus punktus x,y no Fixf, $x\neq y$, tad arī $f^i(x), f^i(y)\in Fixf, i=1,2,\ldots$.

Nofiksējam patvaļīgu $t\in]0;1[$ un atrodam tam atbilstošo $z\in K$: $d(x,z)=td(x,y)$, $d(z,y)=(1-t)d(x,y)$. Tā kā telpa ir stingri izliekta, tad šāds z ir viens vienīgs. Mums jāpierāda, ka $z\in Fixf$ jeb $z=f(z)$.

No asimptotiski neizstiepjoša attēlojuma definīcijas seko, ka

$$d(f^i(z),x)=d(f^i(z),f^i(x))\le k_i d(z,x)=tk_i d(x,y), \tag{2.2.3.1}$$

$$d(f^i(z),y)=d(f^i(z),f^i(y))\le k_i d(z,y)=(1-t)k_i d(x,y). \tag{2.2.3.2}$$

Izmantojot trijstūra nevienādību un iepriekšējās divas nevienādības, iegūsim:

$$\begin{aligned}&d(x,y)\le d(x,f^i(z))+d(f^i(z),y)\le\\&\le tk_i d(x,y)+(1-t)k_i d(x,y)=d(x,y)\end{aligned}.$$

Liekot i tiekties uz bezgalību, robežgadījumā iegūsim:

$$d(x,\lim_{i\to\infty}f^i(z))+d(\lim_{i\to\infty}f^i(z),y)=td(x,y)+(1-t)d(x,y).$$

No (2.2.3.1) un (2.2.3.2) seko, ka

$$\begin{aligned}&d(x,\lim_{i\to\infty}f^i(z))=td(x,y),\\&d(\lim_{i\to\infty}f^i(z),y)=(1-t)d(x,y),\quad i=1,2,\ldots.\end{aligned}$$

z unitātes dēļ: $\lim_{i\to\infty}f^i(z)=z$. Taču

$$z=\lim_{i\to\infty}f^i(z)=\lim_{i\to\infty}f^{i+1}(z)=f(\lim_{i\to\infty}f^i(z))=f(z).$$

Tātad Fixf ir izliekta kopa.▲

1.nodaļā mēs iepazināmies ar dažām teorēmām stingri izliektās Banaha telpās. Iedvesmojoties no Teorēmām 1.2. un 1.3., pamēģināsim iegūt jaunu rezultātu stingri izliektā metriskā telpā.

TEORĒMA 2.2.4.

Ja:1) X - stingri izliekta metriska telpa;

2) patvaļīgiem punktiem a,b,c$\in$X un jebkuram z$\in$X: d(b,z)=td(b,c) un d(z,c)=(1-t)d(b,c), kur t$\in$]0;1[, ir spēkā nevienādība:d(a,z)<max{d(a,b),d(a,c)};

3) K$\subset$X - izliekta un kompakta kopa;

4) F ir neizstiepjošu attēlojumu, kuri darbojas no kopas K sevī, komutatīva saime;

5) visiem f$\in$F: Fixf$\neq\emptyset$,

tad saimei F eksistē kopīgs nekustīgais punkts.

▾Pierādījums.

Pierādījumu veiksim ar matemātiskas indukcijas metodi pēc attēlojumu skaita.

Indukcijas bāze: n=1 - apgalvojums seko no teorēmas piektā nosacījuma.

Induktīvais pieņēmums: n=k - $\bigcap_{i=1}^{k} Fixf_i \neq \emptyset$.

Induktīvā pāreja. Jāpierāda, ka $\bigcap_{i=1}^{k+1} Fixf_i \neq \emptyset$. Pēc induktīvā pieņēmuma $\bigcap_{i=1}^{k} Fixf_i \neq \emptyset$. Izvēlamies x$\in \bigcap_{i=1}^{k} Fixf_i \neq \emptyset$, tad $f_i(x)=x$, $\forall i\in\{1,2,\ldots,k\}$. Vienādības $f_{k+1}(x)=f_{k+1}(f_i(x))=f_i(f_{k+1}(x))$, $\forall i\in\{1,2,\ldots,k\}$ pamato, ka $f_{k+1}(x)\in\bigcap_{i=1}^{k} Fixf_i$, tātad $f_{k+1}:\bigcap_{i=1}^{k} Fixf_i \to \bigcap_{i=1}^{k} Fixf_i$. Jāpamato, ka attēlojumam f_{k+1} eksistē nekustīgais punkts kopā $\bigcap_{i=1}^{k} Fixf_i$.

Kopas $Fixf_i$, $i=1,2,\ldots,k$ ir netukšas, izliektas (Lemma 2.2.1.) un slēgtas (f_i -nepārtraukti attēlojumi!), tāpēc kopa $\bigcap_{i=1}^{k} Fixf_i$ ir slēgta un izliekta kā slēgtu un izliektu kopu šķēlums, un netukša pēc induktīvā pieņēmuma. tā ir kompakta kopa kā kompaktas kopas slēgta apakškopa. Izvēlamies $z\in Fixf_{k+1}$. Nepārtraukta reālā mainīgā funkcija T(y):=d(z,y),$y\in\bigcap_{i=1}^{k} Fixf_i$ sasniedz savu mazāko vērtību katrā kompaktā kopā, pieņemsim punktā z_0. Tā kā izpildās otrais nosacījums, tad punktam z kopā $\bigcap_{i=1}^{k} Fixf_i$ eksistējošais tuvākais elements z_0 ir noteikts viennozīmīgi (▼ no pretējā, pieņem, ka eksistē vēl otrs z_0', kuram $d(z,z_0') = inf\{d(z,y) \mid y\in\bigcap_{i=1}^{k} Fixf_i\}$. Kopa $\bigcap_{i=1}^{k} Fixf_i$ ir izliekta, tāpēc jebkuram $t\in]0;1[$ atradīsies tāds $z_0''\in\bigcap_{i=1}^{k} Fixf_i$, ka $d(z_0,z_0'') = td(z_0,z_0')$ un $d(z_0'',z_0') = (1-t)d(z_0,z_0')$.

Ņemot vērā otro nosacījumu:

$$d(z,z_0'') < max\{d(z,z_0), d(z,z_0')\} = inf\{d(z,x) \mid x\in\bigcap_{i=1}^{k} Fixf_i\}.$$

Esam ieguvuši, ka z_0'' atrodas tuvāk punktam z nekā punkti z_0 un z_0'. Iegūtā pretruna liecina, ka pieņēmums par vairāku tuvāko punktu eksistenci bijis aplams ▲).

Tā kā $f_{k+1}: \bigcap_{i=1}^{k} Fixf_i \to \bigcap_{i=1}^{k} Fixf_i$, tad:

$$d(z,z_0) = inf\{d(z,y) \mid y\in\bigcap_{i=1}^{k} Fixf_i\} \le d(z,f_{k+1}(z_0)) =$$

$$=d(f_{k+1}(z), f_{k+1}(z_0)) \le d(z,z_0). \qquad (2.2.4.1)$$

Tā kā pirms tam jau pārliecinājāmies, ka tuvākais elements z_0 ir noteikts viennozīmīgi, tad atliek secināt, ka $f_{k+1}(z_0) = z_0$. Tātad $\bigcap_{i=1}^{k+1} Fixf_i \neq \emptyset$.

No kopas K kompaktības seko, ka nekustīgo punktu kopu šķēlums ir netukša kopa arī patvaļīgam attēlojumu skaitam.▲

PIEZĪME 2.2.1.

Ja Teorēmas 2.2.4. 4) nosacījumā neizstiepjošu attēlojumu saimi aizstājam ar kvazi-neizstiepjošu attēlojumu saimi un atmetam 5) nosacījuumu (tas automātiski seko no kvazi-neizstiepjoša attēlojuma definīcijas), tad Teorēmas 2.2.4. apgalvojums paliek spēkā. Nevienādības (2.2.4.1) pierādījums saglabājas.

Līdzīgi, ja Teorēmas 2.2.4. 4) nosacījumā neizstiepjošu attēlojumu saimi aizstājam ar asimptotiski neizstiepjošu attēlojumu saimi, tad Teorēmas 2.2.4. apgalvojums paliek spēkā. Nevienādību (2.2.4.1) varam pamatot sekojoši:

$$d(z,z_0)=\inf\{d(z,y)\mid y\in\bigcap_{i=1}^{n}Fixf_i\}\le$$
$$\le d(z,f^i{}_{k+1}(z_0))=d(f^i{}_{k+1}(z),f^i{}_{k+1}(z_0))\le k_i d(z,z_0),\ i=1,2,\ldots$$

Robežgadījumā, kad $\lim_{i\to\infty}k_i=1$, iegūsim, ka

$$d(z,z_0)=d(z,\lim_{i\to\infty}f^i{}_{k+1}(z_0)).$$

No punkta z_0 unitātes seko, ka $z_0=\lim_{i\to\infty}f^i{}_{k+1}(z_0)$. Un tā kā

$$z_0=\lim_{i\to\infty}f^i{}_{k+1}(z_0)=\lim_{i\to\infty}f^{i+1}{}_{k+1}(z_0)=f\Big(\lim_{i\to\infty}f^i{}_{k+1}(z_0)\Big)=f(z_0),$$

tad Teorēma 2.2.4. arī šim gadījumam ir pierādīta ▲.

PIEZĪME 2.2.2.
Teorēmas 2.2.4. otrais nosacījums izliektā metriskā telpā X nozīmē, ka lodes ir izliektas kopas un sfēras nesatur "nogriežņus", t.i., no nosacījuma, ka $\forall a,b,c\in X\ \forall t\in]0;1[\ \exists z\in X$: $d(b,z)=td(b,c)$, $d(z,c)=(1-t)d(b,c)$ un ir spēkā nevienādība: $d(a,z)<\max\{d(a,b),d(a,c)\}$, seko nosacījums, ka $B(a,r):=\{y\mid d(a,y)\le r\}$, $r\in\mathbf{R}_{++}$, ir izliekta kopa Definīcijas 2.2.1. nozīmē un $\forall b,c\in B\ \forall t\in]0;1[$ atbilstošais $z\in B$: $d(b,z)=td(b,c)$ un $d(z,c)=(1-t)d(b,c)$, no lodes centra a atrodas stingri mazākā attālumā par doto rādiusu r.

2.3. VĒLREIZ PAR STINGRI IZLIEKTĀM BANAHA TELPĀM

Stingri izliektas metriskas telpas Definīcijā 2.2.2. mēs nelietojām lodes jēdzienu. Pārfrazējot vektoru telpas jēdzienos Definīciju 2.2.2., iegūsim:

DEFINĪCIJA 2.3.1. Banaha telpu X sauc par stingri izliektu, ja:
$\forall x,y\in X\ \forall t\in[0,1]\ \exists!\, z\in X$: $\|x-z\|=t\|x-y\|$, $\|z-y\|=(1-t)\|x-y\|$.

Patiešām, šī Definīcija 2.3.1. ir ekvivalenta ar

Definīciju 2.1.3.. To mēs pamatosim, izmantojot zināmo Apgalvojumu 2.1.1..

APGALVOJUMS 2.3.1.

Banaha telpā X sekojoši nosacījumi ir ekvivalenti:

1. $\forall x,y\in X$: $\|x+y\|=\|x\|+\|y\|\to((\exists\lambda\in\mathbf{R}_{++}: x=\lambda y)\vee x=0\vee y=0)$;

2. $\forall x,y\in X\ \forall t\in[0,1]\ \exists!\, z\in X$: $\|x-z\|=t\|x-y\|,\ \|z-y\|=(1-t)\|x-y\|$.

▾Pierādījums.

$\Rightarrow$ Vispirms pamatosim, ka no pirmā nosacījuma seko otrais.

Izvēlamies brīvi $x,y\in X$ un $t\in[0,1]$. Ja $z=(1-t)x+ty$, tad:

$\|x-z\|=\|x-((1-t)x+ty)\|=t\|x-y\|$,

$\|z-y\|=\|(1-t)x+ty-y\|=(1-t)\|x-y\|$.

Pie tam šāds punkts z ir viens vienīgs. Pamatosim to. Pieņemsim, ka ir divi tādi punkti $z_1, z_2 (z_{1,2}\neq x, z_{1,2}\neq y)$, kuriem izpildās sakarības:

$$\|x-z_{1,2}\|=t\|x-y\|,\ \|z_{1,2}-y\|=(1-t)\|x-y\|. \qquad (2.3.1.1)$$

Ievērosim, ka:

$$\|x-y\|=\|x-z_{1,2}+z_{1,2}-y\|\le\|x-z_{1,2}\|+\|z_{1,2}-y\|=t\|x-y\|+(1-t)\|x-y\|=\|x-y\|.$$

Tāpēc $\|(x-z_{1,2})+(z_{1,2}-y)\|=\|x-z_{1,2}\|+\|z_{1,2}-y\|$.

Ievērojot Apgalvojuma 2.3.1. pirmo nosacījumu, secinām, ka:

$$\exists\lambda\in\mathbf{R}_{++}: x-z_1=\lambda(z_1-y)\vee x-z_1=0\vee z_1-y=0; \qquad (2.3.1.2)$$

$$\exists\mu\in\mathbf{R}_{++}: x-z_2=\mu(z_2-y)\vee x-z_2=0\vee z_2-y=0. \qquad (2.3.1.3)$$

No (2.3.1.2) seko, ka $z_1=\frac{1}{\lambda+1}x+\frac{\lambda}{\lambda+1}y$

un no (2.3.1.3) - $z_2=\frac{1}{\mu+1}x+\frac{\mu}{\mu+1}y$.

Bet z_1 un z_2 apmierina (2.3.1.1), tāpēc:

$$\|x-z_1\|=\|x-(\frac{1}{\lambda+1}x+\frac{\lambda}{\lambda+1}y)\|=\frac{\lambda}{\lambda+1}\|x-y\|=t\|x-y\|,$$

$$\|z_1-y\|=\|\frac{1}{\lambda+1}x+\frac{\lambda}{\lambda+1}y-y\|=\frac{1}{\lambda+1}\|x-y\|=(1-t)\|x-y\|.$$

No šejienes seko, ka $\lambda=\frac{t}{1-t}$.

Līdzīgi varam secināt, ka $\mu=\frac{t}{1-t}$.

Tātad $\lambda=\mu$ un $z_1=z_2$.

- Tagad pamatosim, ka no otrā nosacījuma seko pirmais.

Izvēlamies $x,y\in X$: $\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$.

Izvēlamies $z\in X$, $u=x+z$ un $v=z-y$. Tad $x=u-z$ un $y=z-v$.

Tāpēc $\|u-z\|+\|z-v\|=\|u-z+z-v\|=\|u-v\|$.

Tātad eksistē tāds $t\in[0,1]$, ka: $\|u-z\|=t\|u-v\|$,

$\|z-v\|=(1-t)\|u-v\|$.

Ja $z_1=(1-t)u+tv$, tad tas apmierina augstāk minētās prasības, bet z unitātes dēļ:

$z=z_1=(1-t)u+tv$.

Tātad: $z=(1-t)u+tv=(1-t)(x+z)+t(z-y)=$

$=(1-t)x+(1-t)z+tz-ty=(1-t)x-ty+z$.

No šejienes seko, ka $0=(1-t)x-ty$, un tātad $x=\dfrac{t}{1-t}y$.

Ja $t=0$, tad $z=u$ un $x=0$; ja $t=1$, tad $z=v$ un $y=0$.▲

Apgalvojuma 2.3.1. iespaidā nevajadzētu domāt, ka visas stingri izliektās metriskās telpas ir arī stingri izliektas Banaha telpas.

Piemērs 2.3.1.

■Apskatīsim metrisku telpu $X:=\{[a;1[\,|0<a<1\}$, $d(x,y):=|a_1-a_2|$, kur $x=[a_1;1[$ un $y=[a_2;1[$ telpas X elementi, un kura acīmredzot nav pat vektoru telpa.

Patvaļīgiem $x=[a_1;1[$, $y=[a_2;1[\in X$ un jebkuram $t\in[0;1]$ atbilstošo z meklējam sekojošā formā $z:=[(1-t)a_1+ta_2;1[$. Skaidrs, ka

$d(x,z)=|a_1-(1-t)a_1-ta_2|=t|a_1-a_2|=td(x,y)$,

$d(z,y)=|(1-t)a_1+ta_2-a_2|=(1-t)|a_1-a_2|=(1-t)d(x,y)$.

Arī unitāte ir nodrošināta: ▼ pieņemsim, ka eksistē vēl otrs elements $\gamma=[a_3;1[\in X$, kuram $d(x,\gamma)=td(x,y)$ un $d(\gamma,y)=(1-t)d(x,y)$, tātad $|a_1-a_3|=t|a_1-a_2|$ un $|a_3-a_2|=(1-t)|a_1-a_2|$. Ērtības labad pieņemsim, ka $a_1\geq a_2$ (pretējo gadījumu apskata analoģiski). Iespējamas trīs situācijas: 1) $a_3\leq a_2\leq a_1$; 2) $a_2\leq a_1\leq a_3$; 3) $a_2\leq a_3\leq a_1$.

Pirmajā situācijā: $\begin{cases} a_1-a_3=ta_1-ta_2 \\ -a_3+a_2=(1-t)a_1-(1-t)a_2 \end{cases}$,

$$\begin{cases}(1-t)a_1+ta_2=a_3\\(2-t)a_2-(1-t)a_1=a_3\end{cases}$$ - pretrunīga sistēma.

Otrajā situācijā: $$\begin{cases}-a_1+a_3=ta_1-ta_2\\a_3-a_2=(1-t)a_1-(1-t)a_2\end{cases},$$

$$\begin{cases}(t+1)a_1-ta_2=a_3\\(1-t)a_1+ta_2=a_3\end{cases}$$ - pretrunīga sistēma.

Trešajā situācijā: $$\begin{cases}a_1-a_3=ta_1-ta_2\\a_3-a_2=(1-t)a_1-(1-t)a_2\end{cases},$$

$$\begin{cases}(1-t)a_1+ta_2=a_3\\(1-t)a_1+ta_2=a_3\end{cases}$$ iegūstam, ka $y=z$. ▲ ■

Ar ko Definīcija 2.3.1. labāka par Definīciju 2.1.3.? Katrā noteiktā situācijā var izmantot konkrētajam gadījumam piemērotāko. Taču vispārīgi, izsakoties mazliet poētiskāk, ja līdz šim, apskatot stingri izliektu Banaha telpu, darbojošos personu balsis bija tikai dzirdamas, tad tagad aizkars ir atvērts un redzami paši aktieri. Tomēr jāatzīst, ka stingri izliektās metriskās telpās, lai pierādītu attēlojumu nekustīgo punktu eksistenci, blakus tradicionālajiem nosacījumiem nākas uzlikt citus nosacījumus. Piemēram, prasību par slēgtas lodes izliektību. Pie tam jebkurā stingri izliektā metriska telpā var uzdot slēguma operatoru, kas patvaļīgai kopai A piekārto mazāko izliekto kopu, kura ietver A. Par slēguma operatoriem runāsim nākošajā nodaļā. Līdz ar to varam sacīt, ka stingri izliekta metriska telpa ir metriskas telpas ar slēguma operatoru apakšgadījums.

3. ATTĒLOJUMU NEKUSTĪGIE PUNKTI METRISKĀ TELPĀ AR SLĒGUMA OPERATORU

3.1. SLĒGUMA OPERATORI UN TO ĪPAŠĪBAS

Telpas X visu apakškopu sistēmu apzīmēsim ar PX.

DEFINĪCIJA 3.1.1.
Attēlojumu $S:PX\to PX$ sauc par slēguma operatoru telpā X, ja jebkurām divām kopām $A,B\in PX$ izpildās:

1) $A\subset B \to S(A)\subset S(B)$;
2) $A\subset S(A)$;
3) $S(A)=S(S(A))$.

Piemērs 3.1.1.
∎Pats vienkāršākais slēguma operators ir tāds, kas dotajai kopai jebkāda veida telpā piekārto to pašu kopu; acīmredzami visas trīs īpašības ir izpildītas.∎

DEFINĪCIJA 3.1.2.
Telpā X, kurā definēts slēguma operators S, kopu $A\in PX$ sauc par S-slēgtu, ja $A=S(A)$.

Piemērs 3.1.2.
∎No Piemērā 3.1.1. definētā slēguma operatora seko, ka šajā telpā X visas kopas ir S-slēgtas.∎

Piemērs 3.1.3.
∎Ja telpā $\mathbb{R}$ slēguma operatoru definējam kā tādu, kas katrai $\mathbb{R}$ apakškopai piekārto slēgto izliekto čaulu (=mazāko slēgto nogriezni, kas satur šīs apakškopas punktus), tad telpā $\mathbb{R}$ par S-slēgtām kopām uzskatīsim slēgtus sakarīgus nogriežņus un kopas, kas satur tikai vienu punktu.∎

APGALVOJUMS 3.1.1.

Pieņemsim, ka S ir slēguma operators telpā X. S-slēgto kopu sistēma telpā X ir invarianta attiecībā pret šķēlumiem.

▾Pierādījums.

Apskatīsim patvaļīgas S-slēgtas kopas $A_1, A_2, \ldots, A_\alpha$ telpā X, kur α no patvaļīgas indeksu kopas $\mathbf{A}$.

Mums jāpierāda, ka $\bigcap\{A_\alpha|\alpha\in\mathbf{A}\}$ ir S-slēgta kopa, t.i.,

$\bigcap\{A_\alpha|\alpha\in\mathbf{A}\}=S(\bigcap\{A_\alpha|\alpha\in\mathbf{A}\})$.

Pēc slēguma operatora otrās īpašības

$\bigcap\{A_\alpha|\alpha\in\mathbf{A}\}\subset S(\bigcap\{A_\alpha|\alpha\in\mathbf{A}\})$.

Tātad atliek vienīgi pamatot, ka

$\bigcap\{A_\alpha|\alpha\in\mathbf{A}\}\supset S(\bigcap\{A_\alpha|\alpha\in\mathbf{A}\})$.

Fiksēsim brīvi $\alpha_0\in\mathbf{A}$. *Tad* $\bigcap\{A_\alpha|\alpha\in\mathbf{A}\}\subset A_{\alpha_0}$. No slēguma operatora definīcijas pirmās īpašības seko, ka

$S(\bigcap\{A_\alpha|\alpha\in\mathbf{A}\})\subset S(A_{\alpha_0})=A_{\alpha_0}$ (A_{α_0} ir S-slēgta!).

Bet α_0 kopā $\mathbf{A}$ fiksējām brīvi, tāpēc

$\bigcap\{A_\alpha|\alpha\in\mathbf{A}\}\supset S(\bigcap\{A_\alpha|\alpha\in\mathbf{A}\})$.▴

Pieņemsim, ka $Q\subset PX$ ir kopu sistēma, kas invarianta attiecībā pret šķēlumiem (ar to saprotot, ka arī $X\in Q, \bigcap\emptyset:=X$). Attēlojumu S_Q: $PX\to PX$ definēsim ar vienādību

$S_Q(A):=\bigcap\{B\in Q|B\supset A\}$ katrai kopai $A\in PX$.

APGALVOJUMS 3.1.2.

Pieņemsim, ka kopu sistēma $Q\subset PX$ ir invarianta attiecībā pret šķēlumiem. Tādā gadījumā S_Q ir slēguma operators kopā X un $S_Q(PX)=Q$.

▾Pierādījums.

Slēguma operatora definīcijas pirmās divas īpašības attēlojumam S_Q piemīt saskaņā ar tā konstrukciju.

Pierādīsim, ka arī trešā definīcijas īpašība ir apmierināta. Saskaņā ar otro īpašību:

$S_Q(A)\subset S_Q(S_Q(A))$ katrai kopai $A\in PX$.

Savukārt pēc S_Q konstrukcijas:

$S_Q(S_Q(A)) = \bigcap\{B\in Q|B\supset S_Q(A)\}$ un

$S_Q(A) = \bigcap\{B\in Q|B\supset A\}$ jebkurai kopai A∈PX.

Tā kā kopu sistēma Q ir invarianta attiecībā pret šķēlumiem, tad $S_Q(A)\in Q$. Līdz ar to $S_Q(S_Q(A))\subset S_Q(A)$, kas arī bija jāpierāda.

Vēl jāpamato, ka $S_Q(PX)=Q$. Tā kā Q ir kopu sistēma, kas invarianta attiecībā pret šķēlumiem, tad saskaņā ar S_Q konstrukciju: $S_Q(PX)\subset Q$.

Fiksēsim brīvi A∈Q. Pēc S_Q konstrukcijas:

$S_Q(A) = \bigcap\{B\in Q|B\supset A\}$.

Tā kā A∈Q, tad līdz ar to $S_Q(A)\subset A$. Izmantojot slēguma operatora S_Q otro īpašību, secinām, ka $A=S_Q(A)$. Tad $A\in S_Q(PX)$ un $Q\subset S_Q(PX)$. ▲

Pamatojoties uz šo Apgalvojumu 3.1.2., telpas X apakškopu sistēmā Q, ja tā invarianta attiecībā pret šķēlumiem, varam definēt slēguma operatoru S_Q. Šo slēguma operatoru sauc par kopu sistēmas Q radīto slēguma operatoru.

Piezīme 3.1.1.

1) V.Takahaši izliekto kopu sistēma rada slēguma operatoru;
2) J.P.Penots [1979], kā arī V.Kirks [1981A], [1983] pieprasa, lai metriskas telpas apakškopu sistēma būtu invarianta attiecībā pret šķēlumiem, tātad arī viņi patiesībā strādā metriskā telpā ar slēguma operatoru;
3) iepriekšējā 2.nodaļā definētajā stingri izliektajā telpā izliektas kopas rada slēguma operatoru;
4) pieņemsim, ka f:X→X. Tad, kā to viegli pārbaudīt, kopu sistēma {A⊂X | f(A)⊂A} ir invarianta attiecībā pret šķēlumiem un rada slēguma operatoru, kuru pieņemts apzīmēt ar S_f.

   (▼ Ja $x\in\{A\in X|f(A)\subset A\}$, tad tas nozīmē, ka x pieder visām kopām A, kuras ir kopas vai telpas X apakškopas un kuras attēlojums f attēlo sevī. Tas nozīmē, ka f(x) arī pieder visām tām pašām kopām A jeb $f(x)\in\bigcap\{A\in X|f(A)\subset A\}$. ▲)

Tātad varam sacīt, ka, ja telpā ir uzdots slēguma operators, tad telpā daļēji ir uzdota izliektības struktūra. Nepieciešams pieprasīt ložu S-slēgtību.Tādējādi, atgriežoties atpakaļ pie nekustīgo punktu teorijas, varam mēģināt zināmos rezultātus no Banaha telpas izliektām apakškopām pārnest uz telpām, kurās definēti slēguma operatori. Pirms ķeramies pie šī darba, vēl daži jēdzieni un rezultāti.

Principiāli nozīmīgs turpmākajā būs kopas kompaktuma jedziens telpās ar slēguma operatoru. Šis jēdziens ir analoģisks topoloģiskas telpas kompaktuma jēdzienam. Vispirms atgādināsim, ka kopu sistēmu sauc par centrētu, ja katras tās galīgas apakšsistēmas kopu šķēlums ir netukša kopa.

DEFINĪCIJA 3.1.3.
Telpā X, kurā definēts slēguma operators S, kopu A sauc par S-kompaktu, ja katras tās S-slēgtu apakškopu centrētas sistēmas kopu šķēlums ir netukša kopa.

Izrādās, ka bez parastajiem slēguma operatoriem, mums būs nepieciešamība izmantot tā saucamos algebriskos slēguma operatorus. Kas tie tādi? Un ar ko tie atšķiras no iepriekšējiem?

DEFINĪCIJA 3.1.4.
Slēguma operatoru Sa telpā X sauc par algebrisku, ja katrai kopai $A \in PX$ un katram punktam $x \in Sa(A)$ eksistē tāda galīga kopa $F \subset A$, ka $x \in Sa(F)$.

Piemērs 3.1.4.

■Ja $X := \mathbb{R}^2$, definējam

$$Sa(A) := convA = \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i | n \in \mathbf{N};\ x_i \in A;\ \alpha_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1\},\quad \forall A \in PX. ■$$

Nekustīgo punktu teorēmu pierādījumos mēs izmantosim sekojošu algebriskā slēguma operatora būtisku īpašību, kuru nevaram garantēt parastajam, iepriekš apskatītajam slēguma operatoram.

APGALVOJUMS 3.1.3.
Pieņemsim, ka Sa ir algebrisks slēguma operators telpā X. Ja kopas $A_i, i=1,2,...$ ir Sa slēgtas un $A_1 \subset A_2 \subset ...$, tad to apvienojums $\cup\{A_i | i=1,2,...\}$ ir Sa-slēgta kopa.

▼Pierādījums.

Kopu $\cup\{A_i|i=1,2,\ldots\}$ sauc par Sa-slēgtu, ja

$$\cup\{A_i|i=1,2,\ldots\}=\mathrm{Sa}(\cup\{A_i|i=1,2,\ldots\}).$$

Pēc slēguma operatora definīcijas:

$$\cup\{A_i|i=1,2,\ldots\}\subset\mathrm{Sa}(\cup\{A_i|i=1,2,\ldots\}),$$

tāpēc pierādīsim pretējo iekļāvumu.

Izvēlamies patvaļīgu punktu $x\in Sa(\cup\{A_i|i=1,2,\ldots\})$; mums jāpierāda, ka šis punkts pieder kopai $\cup\{A_i|i=1,2,\ldots\}$. Pēc algebriskā slēguma operatora definīcijas eksistē tāda galīga kopa $F\subset\cup\{A_i|i=1,2,\ldots\}$, ka $x\in\mathrm{Sa}(F)$. Pieņemsim , ka $F=\{x_1,x_2,\ldots,x_k\}$. Pēc F definīcijas atradīsies tādas kopas A_j, $j=1,2,\ldots,m$, $m\le k$, kurām pieder galīgās kopas F elementi. Tātad

$$F\subset\cup\{A_j|j=1,2,\ldots,m\}\subset A_m.$$

Pēc slēguma operatora definīcijas

$$\mathrm{Sa}(F)\subset\mathrm{Sa}(A_m)=A_m.$$

Secinām, ka, ja $x\in\mathrm{Sa}(F)$, tad $x\in A_m$ un tātad $x\in\cup\{A_i|i=1,2,\ldots\}$.▲

Atzīmēsim, ka jebkurš telpas slēguma operators nebūt nav algebrisks (šāda sakritība ir spēkā diskrētajās topoloģiskajās telpās).

Piemērs 3.1.5.

■$X:=[0;1]$, $S(A):=[0;1]$, $\forall A\in PX$.

Ja, piemēram, apskatam kopu $A:=]0;1]\subset X$, tad $x:=0\in S(A)=[0;1]$. Bet neeksistē tāda galīga kopa $F\subset]0;1]$, ka $0\in S(F)$.■

Gribētos lasītājus pārliecināt, ka šajā paragrāfā apskatītais slēguma operators nesakrīt ar topoloģisko slēguma operatoru. Atcerēsimies (A.Šostaks, M.Zandere, [1977], 20. lpp):

DEFINĪCIJA 3.1.5.

Operatoru, kas katrai kopai $A\in PX$ piekārto kopu $\overline{A}\in PX$ tā, ka:

1) $A\subset\overline{A}$;

2) $\overline{A}=\overline{\overline{A}}$;

3) $\overline{\emptyset}=\emptyset$;

4) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ *jebkurām kopām* $A,B\in PX$,

sauc par topoloģisko slēguma operatoru kopā X.

APGALVOJUMS 3.1.4.

Ja S ir topoloģiskais slēguma operators kopā X, tad S ir slēguma operators.

▾Pierādījums.

Lai konstatētu, ka S ir slēguma operators, jāpamato slēguma operatora Definīcijas 3.1.1. pirmā īpašība.

Izvēlēsimies brīvi $A,B\in PX$ tādas kopas, kurām $A\subset B$. Tad

$B=A\cup(B\setminus A)$ un pēc topoloģiskā slēguma operatora Definīcijas 3.1.5. 4) nosacījuma $S(B)=S(A)\cup S(B\setminus A)$.

Līdz ar to $S(A)\subset S(B)$.▴

Saikni starp abiem slēguma operatoriem raksturo:

APGALVOJUMS 3.1.5.

Pieņemsim: 1) S ir slēguma operators kopā X;

2) $S(\emptyset)=\emptyset$;

3) $S(A\cup B)=S(A)\cup S(B)$, $\forall A,B\in PX$.

Pie šiem nosacījumiem S ir topoloģiskais slēguma operators.

Un šī paragrāfa noslēgumā apskatīsim Corna lemmas lietojumu attēlojumu nekustīgo punktu teorijā (telpās ar slēguma operatoriem). Šajā nolūkā atkārtosim dažus jēdzienus, kas ietverti Corna lemmā.

Pieņemsim, ka X ir netukša kopa.

DEFINĪCIJA 3.1.6.

Attiecību $\le$ *kopā X sauc par daļēju sakārtojumu, ja katram* $x,y,z\in X$: *1)* $x\le x$;

2) $x\le y \ \&\ y\le x \rightarrow x=y$;

3) $x\le y \ \&\ y\le z \rightarrow x\le z$.

Kopu X, kurā uzdots daļējs sakārtojums $\le$*, sauksim par daļēji sakārtotu kopu.*

DEFINĪCIJA 3.1.7.

X sauc par sakārtotu kopu, ja katram $x,y\in X$: $x\le y$ *vai* $y\le x$.

DEFINĪCIJA 3.1.8.
Elementu $x\in X$ sauc par kopas $A\in PX$ mažoranti, ja katram $y\in A: y\leq x$.

DEFINĪCIJA 3.1.9.
Elementu x sauc par X maksimālo elementu, ja katram $y\in X$:

$x\leq y \Rightarrow y=x$.

Lietojot definētos jēdzienus, varam formulēt Corna lemmu.

CORNA LEMMA .
Ja X ir daļēji sakārtota kopa, kuras katrai sakārtotai apakškopai eksistē mažorante, tad kopā X eksistē maksimālais elements.

Corna lemmu attēlojumu nekustīgo punktu teorijā mēs lietosim sekojošā formā.

LEMMA 3.1.1.
Ja S ir slēguma operators kopā X un X ir S-kompakta, tad eksistē minimāla S-slēgta, netukša kopa $M\in PX$ sekojošā nozīmē: M ir S-slēgta, netukša kopa, kurai, ja $A\subset M$ un A ir S-slēgta, netukša kopa, tad $A=M$.

▾Pierādījums.

Apskatīsim kopu sistēmu

$W:=\{A\in PX | A\neq\emptyset \ \&\ A: S\text{-slēgta}\}$.

Atsaucoties uz slēguma operatora definīciju, $X\subset S(X)$. Tātad $S(X)=X$. Tas nozīmē, ka X ir S-slēgta kopa. Tā kā $X\neq\emptyset$, tad $X\in W$. Tātad $W\neq\emptyset$.

Attiecību $\leq$ kopā W katram $A,B\in W$ definēsim sekojoši:

$B\leq A :\Leftrightarrow B\supset A$.

Tad katram $A,B,C\in W$:

1) $A\leq A$, jo $A\supset A$;

2) $A\leq B \ \&\ B\leq A \Rightarrow A=B$, jo $A\supset B \ \&\ B\supset A \Rightarrow A=B$;

3) $A\leq B \ \&\ B\leq C \Rightarrow A\leq C$, jo $A\supset \ \&\ B\supset C \Rightarrow A\supset C$.

No šiem trim faktiem secinām, ka $\leq$ ir daļējs sakārtojums kopā W.

Pieņemsim, ka $W_*\subset W$ ir sakārtota. Apzīmēsim visu W_* kopu šķēlumu ar A_*. Tā kā katram $A\in W_*$: $A_*\subset A$, tad katram $A\in W_*$: $A_*\geq A$. Tātad: ja $A_*\in W$, tad A_* ir W_* mažorante un lemmas apgalvojums seko, atsaucoties uz Corna lemmu.

Pierādīsim, ka $A_* \in W$. Tā kā $W_* \in W$, tad katra $A \in W_*$ ir S-slēgta un A_* ir S-slēgta kā S-slēgtu kopu šķēlums.

Pieņēmsim, ka $A_1, A_2, \dots, A_n \in W_*$. Tā kā W_* ir sakārtota, tad kopas $A_1, A_2, \dots, A_n$ var sakārtot dilstošā secībā: $A_{i_1} \supset A_{i_2} \supset \dots \supset A_{i_k}$. Tad $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_{i_k}$. Tā kā $A_{i_k} \in W_*$, tad $A_{i_k} \in W$ un $A_{i_k} \neq \emptyset$. Līdz ar to esam ieguvuši, ka W_* ir S-slēgtu kopu centrēta sistēma. X pēc dotā ir S-kompakta, tātad $\bigcap_{A \in W_*} A =: A_* \neq \emptyset$. Tāpēc $A_* \in W$.▲

3.2. ATTĒLOJUMU SAIMJU AR "NORMĀLĀS STRUKTŪRAS" NOSACĪJUMU NEKUSTĪGIE PUNKTI

Sākot apskatīt šajā apakšnodaļā konkrētas nekustīgo punktu teorēmas, pirmām kārtām gribētos pievērst uzmanību 0.nodaļā pieminētajai V.Kirka Teorēmai 0.1. un ar to saistītajiem rezultātiem. Mēs apskatīsim divas teorēmas, kuras vairāk vai mazāk varētu uzskatīt par Teorēmas 0.1. vispārinājumiem. Abās teorēmās saglabāts nosacījums par kopas normālo struktūru, taču te tā vairs nav kopas īpašība, galvenais smagums pārnests uz attēlojumu saimi.

TEORĒMA 3.2.1.
Pieņemsim: 1) (X,d) ir metriska telpa ar algebrisku slēguma operatoru S;

2) X ir S-kompakta;

3) jebkura slēgta lode B(x,r) ($x \in X$, $r \in \mathbf{R}_{++}$) ir S-slēgta.

Pieņemsim, ka F ir neizstiepjošu attēlojumu, kas telpu X attēlo sevī, komutatīva saime un

4) visiem $f \in F$ nekustīgo punktu kopa Fixf ir netukša un S-slēgta;

5) $\forall f \in F, \forall x \in X (x \neq f(x)) \; \exists y \in A(x,f):$
$\sup\{d(y,z) \mid z \in A(x,f)\} < \mathrm{diam} A(x,f)$ – "normālās struktūras" nosacījums;

kur $A(x,f):=\bigcap\{A\in PX|x\in A\ \&\ A=S(A)\ \&\ f(A)\subset A\}$.
Pie šiem nosacījumiem saimei F eksistē kopīgs nekustīgais punkts.

▾Pierādījums.

Vispirms pierādīsim, ka saimes F S-slēgtās nekustīgo punktu kopas veido centrētu sistēmu. Pierādījumu veiksim indukcijas ceļā pēc attēlojumu skaita, pieņemot, ka F ir galīga, t.i., $F=\{f_i|i=1,2,\dots,k\}$.

Indukcijas bāze: k=1 - apgalvojums izriet no 4) nosacījuma.

Induktīvais pieņēmums: k=n un $\bigcap_{i=1}^{n} Fixf_i \neq \emptyset$.

Izdarīsim induktīvo pāreju, pierādīsim, ka apgalvojums ir patiess, ja k=n+1, t.i., $FixF=\bigcap_{i=1}^{n+1} Fixf_i \neq \emptyset$. Turpmākajos spriedumos apzīmēsim $\{f_1,f_2,\dots,f_n\}$ ar F' un f_{n+1} ar f. Pēc induktīvā pieņēmuma FixF'$\neq\emptyset$. Pārliecināsimies, ka f(FixF')$\subset$FixF'. Ja x$\in$FixF', tad $f_i(x)=x$, $i=1,2,\dots,n$. Tā kā F ir komutatīva saime, tad: $f_i(f(x))=f(f_i(x))=f(x)$, $i=1,2,\dots,n$. Esam ieguvuši, ka f(x) ir nekustīgais punkts visiem attēlojumiem $f_i(i=1,2,\dots,n)$ jeb f(x)$\in$FixF'. Kopa FixF' nav tukša, tā ir S-slēgta kā S-slēgtu kopu šķēlums un, tā kā X ir S-kompakta, tad arī FixF' ir S-kompakta. Varētu lietot A.Liepiņa raksta [1983] ceturto teorēmu, tikai jāpārliecinās par divu nosacījumu izpildīšanos:

a) katra FixF' slēgtā lode ir S-slēgta kā S-slēgtu kopu šķēlums:

$B_{FixF'}(x,r)=B_X(x,r)\cap FixF'$, $\forall x\in FixF'$, $\forall r\in\mathbf{R}_{++}$;

b) katram x$\in$FixF', katram f$\in$F (x$\neq$f(x)) kopa

$A_{FixF'}(x,f):=\bigcap\{A\in PFixF'|x\in A\ \&\ A=S(A)\ \&\ f(A)\subset A\}$ sakrīt ar kopu

$A_X(x,f)=\bigcap\{A\in PX|x\in A\ \&\ A=S(A)\ \&\ f(A)\subset A\}$;

tātad kopā $A_{FixF'}$ izpildās " normālās struktūras" nosacījums. Lietojot A.Liepiņa raksta [1983] teorēmu 4, iegūstam, ka eksistē tāds $x^*\in FixF'$, ka $f(x^*)=x^*$, jeb $FixF'\cap Fixf=\bigcap_{i=1}^{n+1} Fixf_i\neq\emptyset$.

Tā kā telpa X ir S-kompakta, tad saimei F ir kopīgs nekustīgais punkts arī gadījumā, ja F nav galīga.▴

Pamatosim, ka mūsu prasība par "normālo struktūru" ir vājāka nekā V.Kirka un L.Beljusa rakstos prasība par kopas normālās struktūras nepieciešamību. Vispirms atzīmēsim, ka, ja X ir telpa ar normālu struktūru, tad no tā seko Teorēmas 3.2.1. piektais nosacījums, bet ne otrādi, to pierāda

Piemērs 3.2.1.

▪Apskatīsim telpu c_0, kas sastāv no uz nulli konverģējošām reālu skaitļu virknēm $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots)$, $\|x\|:=sup\{x_n|n\in\mathbf{N}\}$. Telpai c_0 nav normāla struktūra (jo, piemēram, izliektā un ierobežotā kopā

$B_+(0;1):=\{y\in c_0|\|y\|\le 1 \ \& \ \forall n\in\mathbf{N}: y_n\ge 0\}$,

kuras diametrs $diamB_+(0;1):=sup\{sup\{|x_n-y_n|\,|n\in\mathbf{N}\}x,y\in B_+(0;1)\}=1$, visi punkti ir diametrāli:

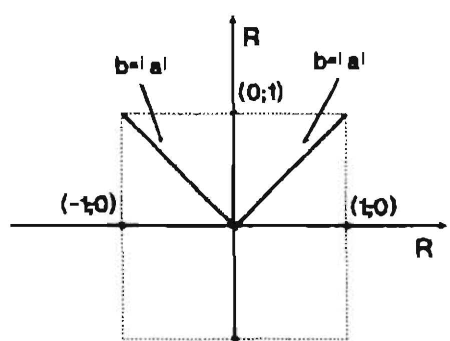
▾ fiksējam $x_0=(x_{0_1},x_{0_2},\ldots,x_{0_n},\ldots)\in B_+(0;1)$, tad

$\|x_0-y\|=sup\{|x_{0_n}-y_n|\,|n\in\mathbf{N}\}\ge 1-\varepsilon$, $y\in B_+(0;1)$.

Pietiekoši lieliem $n\in\mathbf{N}: x_{0_n}<\varepsilon$ patvaļīgi izvēlētam pietiekoši mazam $\varepsilon\in\mathbf{R}_{++}$, līdz ar to $\|x_0-y\|=1$.▴). Katram $x\in B_+(0;1)$ definēsim $f(x):=0$. Attēlojums f kopu $B_+(0;1)$ attēlo sevī un ir neizstiepjošs: $\|f(x)-f(y)\|=0\le\|x-y\|$, $\forall x,y\in B_+(0;1)$. Vienīgais tā nekustīgais punkts ir 0. Slēguma operatora S lomā var ņemt slēgtās izliektās čaulas operatoru. Šajā situācijā $A(x,f)=\{tx|t\in[0;1]\}$ $(x\neq 0)$ un, ja, piemēram, $y:=\frac{x}{2}$, tad

$$sup\{\|y-z\||z\in A(x,f)\}=\frac{\|x\|}{2}<\|x\|=diamA(x,f).▪$$

Nākošajā piemērā parādīsim, ka Teorēmas 3.2.1. nosacījums par attēlojumu nekustīgo punktu kopas S-slēgtību neseko no pārējiem nosacījumiem.



Piemērs 3.2.2. ▪Definēsim $\|x\|:=\max\{|a|,|b|\}$, $\forall x=(a,b)\in\mathbf{R}^2$, $X:=\{x\in\mathbf{R}^2|\|x\|\le 1\}$, $f(x):=(a,|a|)$, $\forall x\in X$.

zīm.3.2.2.

Slēguma operatora S lomā atkal izvēlēsimies slēgtās izliektās čaulas operatoru. Attēlojuma f nekustīgo punktu kopa $\{x\in X|b=|a|\}$ tomēr nav izliekta, kaut arī visi pārējie teorēmas nosacījumi ir izpildīti.■

Ja mēs atsakāmies no prasības par attēlojumu nekustīgo punktu kopas S-slēgtību, tad, mazliet izmainot nosacījumu par "normālo struktūru" un pieprasot ciešākas kopsakarības attēlojumu saimei, bet atmetot nosacījumu par komutativitāti, varam pierādīt sekojošu teorēmu:

TEOREMA 3.2.2.

Pieņemsim: 1) (X,d)-metriska telpa ar slēguma operatoru S;

2) X ir S-kompakta;

3) jebkura slēgta lode B(x,r) ($x\in X$, $r\in\mathbf{R}_{++}$) ir S-slēgta.

Pieņemsim, ka F ir neizstiepjošu attēlojumu, kas telpu X attēlo sevī, saime, kas apmierina sekojošus nosacījumus:

4) $\exists q\in]0;1[\ \forall x,y\in X\ \forall f,g\in F$:

$d(f(x),g(y))\leq\max\{d(x,y);q\,diam(A(x)\cup A(y))\}$;

5) $\forall x\in X(\exists v\in F: v(x)\neq x)\exists y\in A(x)$:

$sup\{d(y,z)\,|z\in A(x)\}< diam A(x)$,

kur $A(x):=\bigcap\{A\in PX|x\in A\ \&\ A=S(A)\ \&\ \forall f\in F:\ f(A)\subset A\}$.

Pie šiem nosacījumiem saimei F eksistē kopīgs nekustīgais punkts.

▾Pierādījums.

Pēc Corna lemmas S-kompaktā telpā X var konstruēt tādu minimālu, netukšu, S-slēgtu kopu M, kas ir invarianta attiecībā pret visiem saimes F attēlojumiem.

Izvēlamies punktu $a\in M$ un pieņemsim, ka eksistē tāds attēlojums $f\in F$, ka $f(a)\neq a$. Tā kā $A(a)\subset M$, tad M minimalitātes dēļ M sakrīt ar A(a). Pēc teorēmas piektā nosacījuma eksistē tāds punkts y kopā A(a)=M, ka:

$r_0:=sup\{d(y,z)\,|z\in M\}< diam M$.

Izvēlamies $r\in]\max\{r_0,q\,diam M\};diam M[$.

Apskatīsim kopu $A:=(\bigcap\{B(x,r)\,|x\in M\})\cap M$ - tā nav tukša, jo $y\in A$, tā ir S-slēgta kā S-slēgtu kopu šķēlums. Jāpamato, ka tā ir invarianta visiem saimes F attēlojumiem f. No pretējā - pieņemsim, ka $\exists z\in A\ \exists g\in F$: $g(z)\notin A$. Tad eksistē tāds $w\in M$, ka

$w \notin B(g(z),r)$ - tātad kopa $A_1:=B(g(z),r)\cap M$ ir kopas M īsta apakškopa. A_1 ir invarianta pret visiem saimes F attēlojumiem, jo brīvi izvēlētam $x\in A_1$ un $f\in F$ izpildās:

$$d(f(x),g(z))\leq \max\{d(x,z);q\,\mathrm{diam}(A(x)\cup A(z))\}\leq$$
$$\leq \max\{r;q\,\mathrm{diam}M\}=r \quad (z\in A \text{ un } x\in A_1\subset M).$$

Kopa A_1 nav tukša ($g(z)\in A_1$) un tā ir S-slēgta. Kopas M minimalitātes dēļ $A_1=M$. Bet A_1 ir īsta M apakškopa, iegūta pretruna, tālab $f(A)\subset A$, $\forall f\in F$. Kopas M minimalitātes dēļ: A=M. Taču (skat. Piezīmi 3.2.1.):

$$\mathrm{diam}A\leq r<\mathrm{diam}A(a)=\mathrm{diam}M$$

Iegūta pretruna, sākotnējais pieņēmums, ka $\exists f\in F: f(a)\neq a$, ir aplams.▲

PIEZĪME 3.2.1.
Ja $A=(\bigcap\{B(x,r)\,|\,x\in M\})\cap M$, tad $\mathrm{diam}A\leq r, \forall r\in \mathbf{R}_{++}$.

▼Pierādījums.

Jebkuriem diviem punktiem u un v no A izpildās sakarības: $u\in B(v,r)$ un $v\in B(u,r)$, t.i., $d(u,v)\leq r$ jeb

$$\mathrm{diam}A=\sup\{d(u,v)\,|\,u,v\in A\}\leq r.$$ ▲

3.3. NEKUSTĪGIE PUNKTI ATTĒLOJUMU SAIMĒM AR SAMAZINĀTU ORBĪTAS DIAMETRU

Otrs nosacījumu komplekss, ko V.Kirks izmantojis savos rakstos [1969], [1970], ir attēlojumu orbītas diametra samazināšanās nosacījums. Līdzīgi kā iepriekšējā paragrāfā kopas normālas struktūras gadījumā, arī šeit orbītas diametra samazināšanās prasību izmainīsim atbilstoši metriskai telpai ar slēguma operatoru.

TEORĒMA 3.3.1.
Pieņemsim: 1) (X,d) ir metriska telpa ar algebrisku slēguma operatoru S;

2) $\overline{S(A)}=S(\overline{S(A)})=:S'(A)$ visām $A\in PX$;

3) X ir S'-kompakta;

4) jebkura slēgta lode $B(x,r)$ $(x\in X,\ r\in \mathbf{R}_{++})$ ir S-slēgta.

Pieņemsim, ka F ir nepārtrauktu attēlojumu, kas telpu X attēlo sevī, saime un apmierina nosacījumus:

5) $\exists t\in]0;1[\ \forall x,y\in X\ \forall f,g\in F$:

$d(f(x),g(y))\leq \max\{d(x,y);tdiam(A(x)\cup A(y))\}$;

6) $\forall x\in X(\exists v\in F: v(x)\neq x)\exists y\in A(x)$:

$sup\{inf\{sup\{d(y,f^m(x))\,|m\geq n\}n\in \mathbf{Z}_{++}\}f\in F\} < diamA(x)$,

kur $A(x):=\bigcap\{A\in PX|x\in A\ \&\ A=S'(A)\ \&\ \forall f\in F:\ f(A)\subset A\}$.

Pie šiem nosacījumiem attēlojumu saimei F eksistē kopīgs nekustīgais punkts.

▾Pierādījums.

Pēc Corna lemmas S'-kompaktā telpā X var atrast tādu minimālo kopu M, kas ir netukša, S'-slēgta un invarianta attiecībā pret saimi F.

Izvēlamies $a\in M$, pieņemsim, ka $\exists f\in F: f(a)\neq a$. Tā kā $M=A(a)$ (jo $A(a)\subset M$, bet M minimālā kopa), tad pēc sestā nosacījuma eksistēs tāds punkts $a_0\in M$, ka:

$$q:=sup\{inf\{sup\{d(a_0,f^m(a))\,|m\geq n\}n\in \mathbf{Z}_{++}\}f\in F\} < diamA(x).$$

Izvēlamies $r\in]\max\{q;tdiamM\};\ diamM[$ un apskatīsim kopu

$$A:=\bigcup\{\bigcap\{\bigcap\{B(f^m(a),r)\cap M|m\geq n\}f\in F\}n\in \mathbf{Z}_{++}\}.$$

A ir netukša, jo $a_0\in A$, un S-slēgta kā augošas S-slēgtu X apakškopu virknes apvienojums (S ir algebriskais slēguma operators, skatīt Apgalvojumu 3.1.3.). Pierādīsim, ka $f:A\to A$, $\forall f\in F$. Šim nolūkam izvēlamies $y\in \bigcap\{\bigcap\{B(f^m(a),r)\cap M|m\geq n\}f\in F\}$ pie fiksēta $n\in \mathbf{Z}_{++}$. Tad

$$d(y,f^m(a))\leq r,\ \forall m\geq n,\ \forall f\in F.$$

Varam secināt, ka

$$d(f(y),f(f^m(a)))\leq \max\{d(y,f^m(a)),tdiam(A(x)\cup A(y))\}\leq$$
$$\leq \max\{r,tdiamM\}=r,\ \forall m\geq n,\ \forall f\in F.$$

Tātad $f(y)\in \bigcap\{\bigcap\{B(f^m(a),r)\cap M|m\geq n+1\}f\in F\}n\in \mathbf{Z}_{++}\}$ un $f(A)\subset A$, $\forall f\in F$.

f nepārtrauktības dēļ: $f:\overline{A}\to\overline{A}$, $\forall f\in F$.

M minimalitātes dēļ $\overline{A}=M$. Izvēlamies $p\in M$ brīvi. Tad $p\in\overline{A}$ un katram $\varepsilon\in \mathbf{R}_{++}$ eksistēs tāds $p_0\in A$: $d(p,p_0)<\varepsilon$.

Tad eksistēs arī tāds $n_0 \in \mathbf{Z}_{++}$: $d(p_0, f^m(a)) \le r$, $m \ge n_0$, $\forall f \in F$.

Tātad $d(p, f^m(a)) \le r+\varepsilon$, $m \ge n_0$, $\forall f \in F$, un

$$S(\bigcup\{\bigcup\{f^m(a) \,|m \ge n_0\}\, f \in F\}) \subset B(p, r+\varepsilon) .$$

Tā kā ε ir izvēlēts patvaļīgi, tad

$$\bigcap\{S(\bigcup\{\bigcup\{f^m(a) \,|m \ge n\}\, f \in F\})\, n \in \mathbf{Z}^{++}\} \subset B(p, r) .$$

Izvēlamies $z \in \bigcap\{S(\bigcup\{\bigcup\{f^m(a) \,|m \ge n\}\, f \in F\})\, n \in \mathbf{Z}_{++}\}$,

tad $z \in B(p,r)$ un $z \in \bigcap\{B(p,r) \,|p \in M\}$, jo p sākotnēji izvēlēts patvaļīgi. Tātad $z \in \bigcap\{B(p,r) \cap M | p \in M\} =: A_1$,

kur A_1 ir netukša, S-slēgta kā S-slēgtu kopu šķēlums. Pamatosim, ka A_1 ir invarianta attiecībā pret saimi F. Pieņemsim, ka $\exists h \in F$ un $x \in A_1$, ka $h(x) \notin A_1$, t.i., $\exists y \in M$: $y \notin B(h(x), r)$. Tas nozīmē, ka $A_2 := B(h(x), r) \cap M$ ir īsta M apakškopa. Bet:

1) $A_2 \ne \emptyset$ $(h(x) \in A_2)$;

2) A_2 ir S'-slēgta kā S'-slēgtu kopu šķēlums;

3) A_2 ir invarianta attiecībā pret attēlojumu saimi F, jo katram $z \in A_2$ un katram $g \in F$:

$$d(h(x), g(z)) \le \max\{d(x,z), t\operatorname{diam}(A(x) \cup A(z))\} \le$$
$$\le \max\{r, t\operatorname{diam} M\} = r.$$

Tātad $M = A_2$ kopas M minimalitātes dēļ. Tā kā tas nav iespējams, tad $f(A_1) \subset A_1$, $\forall f \in F$. Kopas M minimalitātes dēļ $M = A_1$. Savukārt $A_1 \le r < \operatorname{diam} M$. Šī pretruna noraida pieņēmumu, ka $\exists f \in F$: $f(a) \ne a$. ▲

Rakstā [1970] V.Kirks apskata salīdzinājumā ar rakstu [1969] mazliet vispārīgāku situāciju, proti, attēlojums samazina orbītas diametru sākot no kaut kādas pakāpes N. Bez īpašām grūtībām līdzīgu teorēmu var apskatīt metriskā telpā ar slēguma operatoru.

TEORĒMA 3.3.2.

Pieņemsim: 1) (X,d) ir metriska telpa ar algebrisku slēguma operatoru S;

2) $\overline{S(A)} = S(\overline{S(A)}) =: S'(A)$ visām $A \in PX$;

3) X ir S'-kompakta;

4) jebkura slēgta lode $B(x,r)$ $(x \in X,\ r \in \mathbf{R}_{++})$ ir S-slēgta.

Pieņemsim, ka F ir nepārtrauktu attēlojumu, kas telpu X attēlo sevī, saime un apmierina nosacījumus:

5) $\exists t\in]0;1[\ \forall x,y\in X\ \forall f,g\in F$:

$d(f(x),g(y))\leq \max\{d(x,y);t\,diam(A(x)\cup A(y))\}$;

6) $\exists N\in \mathbf{Z}_{++}\ \forall x\in X(\exists v\in F: v(x)\neq x)\ \exists\, y\in A(x)$:

$sup\{inf\{sup\{d(y,f^{m}(x))\,|m\geq n\}\,n\geq N\}\}\,f\in F\} < diamA(x)$,

kur $A(x):=\bigcap\{A\in PX|x\in A\ \&\ A=S'(A)\ \&\ \forall f\in F:\ f(A)\subset A\}$.

Pie šiem nosacījumiem attēlojumu saimei F eksistē kopīgs nekustīgais punkts.

▾Pierādījums.

Lietojot Corna lemmu, S'-kompaktā telpā X var konstruēt tādu minimālo kopu M, kas ir netukša, S'-slēgta un invarianta attiecībā pret attēlojumu saimi F.

Pēc Teorēmas 3.3.1. saimei $F^{N}=\{f^{N}|f\in F\}$ ir kopīgs nekustīgais punkts $x^{*}\in$M. Mēs parādīsim, ka šis x^{*} ir arī saimes F kopīgais nekustīgais punkts.

Atzīmēsim, ka no M minimalitātes seko, ka M=A(x^{*}).

Pieņemsim, ka eksistē tāds attēlojums f$\in$F: f(x^{*})$\neq x^{*}$. Tad pēc sestā nosacījuma eksistē tāds punkts y$\in$A(x^{*})=M, ka:

$q:=sup\{inf\{sup\{d(y,f^{m}(x))\,|m\geq n\}\,n\geq N\}\}\,f\in F\} < diamM$.

Apskatīsim kopu $A_0:=\{x^{*},f(x^{*}),\ldots,f^{N-1}(x^{*})\,|f\in F\}$.

Tad $q=sup\{d(y,z)\,|z\in A_0\} < diamM$.

Izvēlēsimies r$\in$]max{q;tdiamM}; diamM[, tad $S(A_0)\subset B(y,r)$.

Apskatīsim kopu $A:=(\bigcap\{B(w,r)\,|w\in M\})\bigcap M$.

Tad: 1)A$\neq\emptyset$, jo y$\in$A; 2)A ir S-slēgta kā S-slēgtu kopu šķēlums; 3)A ir invarianta attiecībā pret saimi F: ▾ patiešām, ja eksistē tāds u$\in$A un g$\in$F, ka g(u)$\notin$A, tad B(g(u),r)$\cap$M ir īsta M apakškopa. Kopa B(g(u),r)$\cap$M ir S-slēgta, netukša (g(u)$\in$B(g(u),r)$\cap$M) un invarianta attiecībā pret F, jo brīvi izvēlētam z$\in$B(g(u),r)$\cap$M un h$\in$F: d(g(u),h(z)) $\leq$ max{d(u,z),tdiam(A(u)$\cup$A(z))}$\leq$

$\leq$ max{r,tdiamM}=r.

No M minimalitātes seko, ka M=B(g(u),r)$\cap$M. Šī pretruna pabeidz 3) nosacījuma pierādījumu.▴

Savukārt tagad no M minimalitātes seko, ka M=A.

Bet diamA $\leq$ r < diamM. Šī pretruna parāda, ka sākotnējais pieņēmums, ka x^{*} nav attēlojumu saimes kopīgais nekustīgais punkts, ir aplams.▴

3.4. KVAZI-NEIZSTIEPJOŠU ATTĒLOJUMU SAIMJU NEKUSTĪGIE PUNKTI

Ar kvazi-neizstiepjoša attēlojuma dažām labām īpašībām iepazināmies jau 2.nodaļā (skatīt: Definīciju 2.1.4., Lemmu 2.2.2., Piezīmi 2.2.1.).

V.G.Dotsona un H.F.Sentera rakstā [1974] atrodam, ka viens no nosacījumiem, lai attēlojums $f:A\to A$ normētā lineārā telpā būtu kvazi-neizstiepjošs, ir prasība, lai tam eksistētu nekustīgais punkts kopā A un

$$\forall x,y\in A:\ \|f(x)-f(y)\|\le a\|x-f(x)\|+b\|y-f(y)\|+c\|x-y\|, \qquad (*)$$

kur $a,b,c\ \ge 0$ un $0<a+b+c\le 1$. Mēs tuvāk apskatīsim divu autoru - R.Kannana un S.Reiha - rezultātus, kuros pierādīta nekustīgā punkta eksistence attēlojumiem, kas apmierina nosacījumu (*). R.Kannana teorēmās [1971], [1973] parasti konstantes $c=0$ un $a=b=0,5$, piemēram,

TEORĒMA (R.Kannans, [1973]).
Pieņemsim, ka X ir refleksīva Banaha telpa un K ir tās netukša, slēgta, izliekta, ierobežota apakškopa. Ja attēlojums T attēlo kopu K sevī un izpildās nosacījumi:

1) $\|Tx-Ty\|\le\frac{1}{2}(\|x-Tx\|+\|y-Ty\|)$, $x,y\in K$;

2) katrai nevienelementīgai, slēgtai un izliektai apakškopai F no kopas K, kuru attēlojums T attēlo sevī, eksistē tāds elements $x\in F$, *ka* $\|x-Tx\|<\sup\{\|y-Ty\|\,|\,y\in F\}$,
tad pie šiem nosacījumiem attēlojumam T eksistē viens vienīgs nekustīgais punkts kopā K.

Varam atgādināt, ka mums jau labi zināmais V.Kirks [1965] ir pierādījis līdzīga rakstura teorēmu neizstiepjošam attēlojumam, lietojot normālas struktūras jēdzienu otrā nosacījuma vietā, taču unitāte viņa teorēmā netiek garantēta.

Mēs gribam pierādīt nekustīgā punkta eksistenci attēlojumu saimei ar vispārinātu R.Kannana teorēmas 1) nosacījumu metriskā telpā ar slēguma operatoru. Tiesa gan, kaut kā jāmēģina apiet 2) nosacījums, bet, kā to izdarīt, zinām jau no iepriekšējiem rezultātiem. Viena attēlojuma gadījumam subsimetriskā topoloģiskā telpā ar slēguma operatoru R.Kannana teorēmas vispārinājumu ir jau veicis A.Liepiņš [1983].

TEORĒMA 3.4.1.

Pieņemsim: 1) (X,d) ir metriska telpa ar algebrisku slēguma operatoru S;

2) $\overline{S(A)}=S(\overline{S(A)})=:S'(A)$ visām $A\in PX$;

3) X ir S'-kompakta;

4) jebkura slēgta lode $B(x,r)$ ($x\in X$, $r\in\mathbf{R}_{++}$) ir S-slēgta.

Pieņemsim, ka F ir nepārtrauktu attēlojumu saime, kas apmierina sekojošus nosacījumus:

5) $\forall f,g,h\in F\,\forall x,y\in X\,\exists\alpha\in]0;1[$:

$d(g(x),h(y))\le\alpha d(x,f(x))+(1-\alpha)d(y,f(y))$;

6) $\forall x\in X(\exists v\in F\colon v(x)\neq x)\exists y\in A(x)$:

$\sup\{d(y,f(y))\,|\,f\in F\}<\sup\{\sup\{d(z,f(z))\,|\,z\in A(x)\}f\in F\}$,

kur $A(x):=\bigcap\{A\in PX|x\in A\;\&\;A=S'(A)\;\&\;\forall f\in F\colon f(A)\subset A\}$.

Pie šiem nosacījumiem saimei F eksistē viens vienīgs kopīgs nekustīgais punkts.

▾ Pierādījums.

Pēc Corna lemmas un telpas X S'-kompaktības var atrast tādu minimālu, netukšu, S'-slēgtu kopu M, kas ir invarianta attiecībā pret visiem saimes F attēlojumiem.

Izvēlamies punktu $a\in M$ un pieņemsim, ka eksistē tāds attēlojums $f\in F$, ka $f(a)\neq a$. Tā kā $A(a)\subset M$, tad pēc M minimalitātes seko, ka $M=A(a)$. Pēc 6) teorēmas nosacījuma eksistē tāds punkts $a_1\in A(a)=M$, ka:

$r:=\sup\{d(a_1,f(a_1))\,|\,f\in F\}<\sup\{\sup\{d(z,f(z))\,|\,z\in A(a)\}f\in F\}$.

Apskatīsim kopas

$A:=\{x\in M|d(x,f(x))\le r,\forall f\in F\}$ un $A_1:=S(\bigcup\{f(A)\,|\,f\in F\})$,

kuras abas ir netukšas, jo $a_1\in A$ un $f(a_1)\in A_1,\forall f\in F$.

Tā kā S ir algebriskais slēguma operators, tad brīvi izvēlētam $x\in A_1$ eksistē tāda galīga kopa $W\subset\bigcup\{f(A)\,|\,f\in F\}$, ka $x\in S(W)$.

Pieņemsim, ka $q:=\sup\{\max\{d(f(x),y)\,|y\in W\}f\in F\}$, tad $W\subset\bigcap\{B(f(x),q)\,|\,f\in F\}$. Tā kā $\bigcap\{B(f(x),q)\,|\,f\in F\}$ ir S-slēgta kopa kā S-slēgtu kopu šķēlums, tad $S(W)\subset\bigcap\{B(f(x),q)\,|\,f\in F\}$ un tātad arī

$x\in\bigcap\{B(f(x),q)\,|f\in F\}$, t.i., $d(x,f(x))\le q,\forall f\in F$.

Fiksēsim attēlojumu $f\in F$ brīvi. Brīvi izvēlētam $\varepsilon\in\mathbf{R}_{++}$ eksistēs tādi attēlojumi $g,h\in F$, ka:

$q-\varepsilon\le max\{d(g(x),y)\,|y\in W\}=d(g(z),h(z))$, kur $z\in A$.

Līdz ar to $d(x,f(x))\le q\le d(g(x),h(z))+\varepsilon$. (3.4.1.1)

No nosacījumiem 5), no (3.4.1.1) un no tā, ka $z\in A$, seko, ka

$$d(x,f(x))\le d(z,f(z))+\frac{\varepsilon}{1-\alpha}\to_{\varepsilon\to0}\le d(z,f(z))\le r\ -$$

tas ir spēkā brīvi izvēlētam attēlojumam $f\in F$, tātad arī pārējiem saimes F attēlojumiem iegūsim analogus novērtējumus, tāpēc $x\in A$ un līdz ar to $A_1\subset A$ un $f(x)\in A_1,\forall f\in F$. No šejienes seko ka $f:A_1\to A_1,\forall f\in F$.

Apskatīsim kopu $A_2:=\overline{A_1}=\overline{S(\bigcup\{f(A)\,|f\in F\})}$. Tā nav tukša kopa, tā ir S'-slēgta un saimes F attēlojumu nepārtrauktības dēļ tā ir arī invarianta attiecībā pret jebkuru saimes F attēlojumu. Kopas M minimalitātes dēļ $M=A_2$. Bet $A_2=\overline{A_1}\subset\overline{A}=A$ (f un d - nepārtraukti!), savukārt

$sup\{sup\{d(x,f(x))\,|x\in A\}f\in F\}=r<sup\{sup\{d(z,f(z))\,|z\in M\}f\in F\}$.

Iegūta pretruna. Tātad $f(a)=a,\forall f\in F$.

Unitāte seko no 5) nosacījuma: pieņemsim, ka ir divi nekustīgie punkti

$$x_1,x_2\in X,\ tad\,\forall f,g,h\in F\,\exists\alpha\in]0;1[:$$
$$d(g(x_1),h(x_2))=d(x_1,x_2)\le\alpha d(x_1,f(x_1))+(1-\alpha)d(x_2,f(x_2))=$$
$$=\alpha d(x_1,x_1)+(1-\alpha)d(x_2,x_2)=0\ .\blacktriangle$$

Esam pierādījuši teorēmu, kas patiesībā garantē, ka nepārtraukti attēlojumi, kas apmierina Teorēmas 3.4.1. nosacījumu 5), metriskā telpā ar algebrisku slēguma operatoru veido kvazi-neizstiepjošu attēlojumu saimi, kurai ir kopīgs nekustīgais punkts.

S.Reihs attēlojumam, kas apmierina nosacījumu (*), pierādījis sekojošu rezultātu

TEORĒMA (S.Reihs, [1971]).
Ja X ir pilna metriska telpa un attēlojums $T:X\to X$ apmierina nosacījumu (*), tad tam eksistē viens vienīgs nekustīgais punkts.

Mazliet sašaurinot nosacījumu (*) un neprasot metriskas telpas pilnību, bet gan tās S–kompaktību, varam atrast citu attēlojumu saimi ar vienu vienīgu kopīgo nekustīgo punktu.

TEORĒMA 3.4.2.

Pieņemsim: 1) (X,d) ir metriska telpa ar algebrisku slēguma operatoru S;

2) $\overline{S(A)}=S(\overline{S(A)})=:S'(A)$ visām $A\in PX$;

3) X ir S'-kompakta;

4) jebkura slēgta lode $B(x,r)$ $(x\in X,\ r\in \mathbf{R}_{++})$ ir S-slēgta.

Pieņemsim, ka F ir nepārtrauktu attēlojumu saime, kas apmierina nosacījumus:

5) $\forall f,g,h\in F\ \forall x,y\in X\ \exists a,b,c\in \mathbf{R}_{+}: 0< a+b+2c<1:$

$$d(g(x),h(y))\le ad(f(x),x)+bd(f(y),y)+cd(x,y);$$

6) $\forall x\in X(\exists v\in F: v(x)\ne x)\ \exists\, y\in A(x)\ \exists w\in A(x):$

$$\sup\{d(w,z)\,|\,z\in A(x)\}\le \sup\{d(y,f(y))\,|\,f\in F\}<\sup\{\sup\{d(z,f(z))\,|\,z\in A(x)\}\,f\in F\}$$

kur $A(x):=\bigcap\{A\in PX|\,x\in A\ \&\ A=S'(A)\ \&\ \forall f\in F:\ f(A)\subset A\}$.

Pie šiem nosacījumiem saimei F eksistē viens vienīgs nekustīgais punkts.

Pierādījums.

Pamatā tiek atkārtots iepriekšējās Teorēmas 3.4.1. pierādījums. Mainās nevienādību (3.4.1.1) secinājumu pamatojums:

$$d(x,f(x))\le q\le d(g(x),h(z))+\varepsilon\le$$
$$\le ad(x,f(x))+bd(z,f(z))+cd(x,z)+\varepsilon \text{ jeb}$$

$$d(x,f(x))\le \frac{bd(z,f(z))+cd(x,z)}{1-a}+\frac{\varepsilon}{1-a}\to_{\varepsilon\to 0}\le \frac{bd(z,f(z))+cd(d(x,z)}{1-a}.$$

Zināms, ka $d(z,f(z))\le r$, jo $z\in A$; savukārt $d(x,z)\le 2r$, jo $z\in A\subset M$ un $x\in A_1\subset M$, tātad $x,z\in M$ un pēc Teorēmas 6) nosacījuma

$\exists w\in M=A(a): \sup\{d(w,v)\,|\,v\in M\}\le r$, t.i.,

$\operatorname{diam} M\le 2\sup\{d(w,v)\,|\,v\in M\}\le 2r$, tāpēc $d(x,z)\le 2r$.

Secinām, ka $d(x,f(x))\le \dfrac{br+2rc}{1-a}=r\dfrac{b+2c}{1-a}\le r$, jo

$$0<a+b+2c<1 \to b+2c<1-a \to \frac{b+2c}{1-a}<1.$$

Tālākais kā iepriekšējā pierādījumā.

Unitāte seko no 5) nosacījuma: pieņemsim, ka ir divi nekustīgie punkti $x_1, x_2 \in X$, tad $\forall f,g,h \in F\ \exists a,b,c \in \mathbf{R}_+$: $0<a+b+2c<1$:

$$d(g(x_1),h(x_2))=d(x_1,x_2)\leq$$
$$\leq ad(f(x_1),x_1)+bd(f(x_2),x_2)+cd(x_1,x_2)=0+0+cd(x_1,x_2).$$

Tā kā $0\leq c<1$, tad $d(x_1,x_2)=0$ ▲

3.5. ATTĒLOJUMU SAIMJU AR INVARIANCES ĪPAŠĪBU NEKUSTĪGIE PUNKTI

Interesējoties par neizstiepošu attēlojumu komutatīvu saimju kopīgo nekustīgo punktu, atceramies labi zināmo R.de Marra teorēmu ([1963], skatīt 0.nodaļā Teorēmu 0.2.). Līdzīga rakstura rezultātu ir pierādījis arī M.R.Taskovičs [1980] diametrāli neizstiepjošu attēlojumu komutatīvai saimei.

DEFINĪCIJA 3.5.1.

Attēlojumu $f:E\to E$ (E - Banaha telpa) sauc par diametrāli neizstiepjošu, ja:

$$\|f(x)-f(y)\|\leq\varphi(\sup\{\|x-z\| \mid z\in E\}),\ \forall x,y\in E,$$

kur $\varphi:\mathbf{R}_{++}\to\mathbf{R}_{++}$ ar īpašību $\varphi(t)\leq t, \forall t\in\mathbf{R}_{++}$.

Atzīmēsim, ka katrs neizstiepjošs attēlojums ir arī diametrāli neizstiepjošs (pieņemot, ka φ vienāds ar identisko attēlojumu).

Gan R. de Marra teorēmā, gan M.R.Taskoviča gadījumā tiek izmantota būtiska šo saimju īpašība: invariance.

DEFINĪCIJA 3.5.2.

Neizstiepjošu attēlojumu saimei $F=\{f \mid f:E\to E, E$ - Takahaši izliekta metriska telpa$\}$ piemīt invariances īpašība kopā E, ja katrai kompaktai Takahaši izliektai E apakškopai K, kurai: $f(E)\subset E, \forall f\in F$, eksistē kompakta apakškopa $M\subset K$ tāda, ka $f(M)=M$ visiem $f\in F$.

Pirmo reizi šī definīcija atrodama V.Takahaši darbā [1970], kurā pierādīta arī sekojošā teorēma:

TEORĒMA (V.Takahaši, [1970]).
Ja K ir kompakta Takahaši izliektas metriskas telpas apakškopa un F ir neizstiepjošu attēlojumu saime ar invariances īpašību kopā K , tad saimei F eksistē kopīgs nekustīgais punkts.

Atzīmēsim, ka mūsu jēdziens par S-slēgtu kopu ir vispārīgāks jēdziens kā izliekta kopa Takahaši iziektā metriskā telpā, tāpēc apskatīsim metrisku telpu ar slēguma operatoru, kurā dota attēlojumu saime ar invariances īpašību un, noskaidrosim jautājumu par šīs saimes kopīgo nekustīgo punktu. Šim nolūkam mums būs nepieciešmas divas jaunas definīcijas.

Pieņemsim, ka X ir metriska telpa.

DEFINĪCIJA 3.5.3.
Attēlojumu saimei F, kas attēlo kopu $K\subset X$ sevī, piemīt S-invariances īpašība, ja katrā kopas K S-kompaktā un S-slēgtā apakškopā $E\subset K$ tādā, ka $f(E)\subset E$ visiem $f\in F$, eksistē tāda S-kompakta apakškopa $M\subset E$, ka $f(M)=M$ visiem $f\in F$.

Piemērs 3.5.1.
■$X=\mathbf{R}$, $d(x,y)=|x-y|$, S - izliektās un slēgtās čaulas operators; $F=\{f(x):kx\ |x\in X, k\in]0;1]\}$ un, $E=[a;b], \forall a,b\in\mathbf{R}(a<b)$ un $0\in[a;b]$. Šajā gadījumā $M=\{0\}$, kas ir arī šīs saimes F kopīgais nekustīgais punkts.■

DEFINĪCIJA 3.5.4.
Saka, ka S-slēgtai kopai $K\subset X$ ir S-normāla struktūra, ja katrā S-slēgtā nevienelementīgā apakškopā $H\subset K$ eksistē tāds elements $u\in H$, ka $\sup\{d(x,u)\ |x\in H\}<\operatorname{diam}H$.
Saka, ka telpai X ir S-normāla struktūra, ja katrai S-slēgtai kopai telpā X ir S-normāla struktūra.

Atzīmēsim, ka katrai izliektai un kompaktai kopai K Banaha telpā X ir S-normāla struktūra (V.I.Istratesku, [1981], 60.lpp), ja telpā X slēguma operators S tiek definēts kā izliektās un slēgtās čaulas operators.

Ņemot vērā jaunos jēdzienus, varam pierādīt:

TEORĒMA 3.5.1.
Pieņemsim:1) (X,d) - metriska telpa ar slēguma operatoru S;

2) X ir S-kompakta;

3) X ir ar S-normālu struktūru;

4) jebkura slēgta lode $B(x,r)$ $(x\in X,\ r\in\mathbf{R}_{++})$ ir S-slēgta.

Ja neizstiepjošu attēlojumu saimei $F:X\to X$ piemīt S-invariances īpašība telpā X, tad saimei F ir kopīgs nekustīgais punkts.

▾Pierādījums.

Izmantojot Corna lemmu un telpas S-kompaktumu, varam atrast minimālo netukšo S-slēgto un attiecībā pret saimi F invarianto telpas X apakškopu M.

Pieņemsim, ka M satur vairāk nekā vienu punktu, un pieņemsim, ka ir tāds punkts $a\in M$, kuram eksistē tāds saimes F attēlojums f, ka $f(a)\neq a$. Pēc saimes F S-invariances īpašības telpā X seko, ka eksistē tāda S-kompakta kopa $M_1\subset M$, ka $f(M_1)=M_1, \forall f\in F$. Ja $diamM_1>0$, tad no telpas X S-normālās struktūras seko, ka eksistē tāds elements $u\in S(M_1)=M_1$, ka

$$r:=sup\{d(u,x)\,|x\in M_1\}<diamM_1\le diamM.$$

Apskatīsim kopu $M_0:=(\bigcap\{B(x,r)\,|x\in M_1\})\cap M_1$. Tā nav tukša, jo $u\in M_0$, tā ir S-slēgta kā S-slēgtu kopu šķēlums un tā ir S-kompakta. Pierādīsim, ka M_0 ir invarianta attiecībā pret saimi F. Izvēlēsimies brīvi $z\in M_0$ un $f\in F$. Brīvi izvēlētam $x\in M_0\subset M_1$ - jo $f(M_1)=M_1$ - eksistē tāds $w\in M_1$, ka $x=f(w)$. Tāpēc

$$d(f(z),x)=d(f(z),f(w))\le d(z,w)\le r \quad (\text{jo } z\in M_0, w\in M_1). \qquad (3.5.1.1)$$

Šādas nevienādības būs spēkā visiem $z\in M_0$, visiem $f\in F$ un visiem $x\in M_0$, t.i., $f(M_0)\subset M_0, \forall f\in F$. No M minimalitātes seko, ka $M=M_0$, bet $diamM_0\le r<diamM_1\le diamM$. Pretruna radusies no pieņēmuma, ka kopā M ir vairāk nekā viens punkts.▴

PIEZĪME 3.5.1.

Ja attēlojumu saime F ir diametrāli neizstiejoša, teorēmas apgalvojums paliek spēkā. Pierādījumā atliek pamatot nevienādību (3.5.1.1):

$$d(f(z),x)=d(f(z),f(w))\le\varphi(sup\{d(z,u)\,|u\in M_1\})\le sup\{d(z,u)\,|u\in M_1\}\le r.$$

II DAĻA

BOLA-BRAUERA-ŠAUDERA TEORĒMAS STABILITĀTE

0.VĒSTURISKS APSKATS

Viena no ievērojamākajām nekustīgā punkta eksistences teorēmām tika iegūta 20.gs. sākumā, un šobrīd plašākai matemātiķu saimei tā pazīstama kā holandiešu matemātiķa L.Brauera teorēma. Sākotnējā formulējumā šī teorēma apgalvoja (pēc J.Dugundži un A.Granass [1982], 46.lpp):

BRAUERA TEORĒMA ([1910], pierādīta 1909.gadā, gadījumā, ja n=3).
Ja $V^n:=\{x|x=\{x_1,x_2,...\},x_i=0,\forall i>n,\sum_{j=1}^{n}|x_j|\le 1\}$ *un nepārtraukts attēlojums f attēlo* V^n *sevī, tad attēlojumam f eksistē nekustīgais punkts.*

Taču, kā pamatojuši A.D. Miškis un I.M.Rabinovičs [1955](un ne tikai viņi vien!), tad pirmsākumi šīs teorēmas idejai meklējami baltvācu matemātiķa Pīrsa Bola darbā [1904]. J.Dugundži un A.Granass [1982] grāmatā (46.lpp) pierādīts, ka P.Bola un L.E.J.Brauera teorēmu formulējumi ir ekvivalenti.

BOLA TEORĒMA ([1904], gadījumā, ja n=3).
Pieņemsim, ka nepārtraukts attēlojums f attēlo kopu V^n *kopā* $E^n:=\{x|x=\{x_1,x_2,...\},x_i=0,\forall i>n\}$. *Tad vai nu* $\exists x^*\in V^n: f(x^*)=x^*$, *vai arī* $\exists x\in\delta V^n: x=\lambda f(x)$, $0<\lambda<1$.

P.Bols šo teorēmu iegūst kā pastarpinātu rezultātu, un tāpēc ilgu laiku matemātiskajās aprindās tas netiek pamanīts. Teorēmu P.Bols izmanto pierādījumā, lai pamatotu, ka diferenciālvienādojumu sistēmai ar noteiktām īpašībām eksistē atrisinājums, līdz ar to pirms tam iegūto rezultātu par nekustīgā punkta eksistenci viņš īpaši neizceļ.

Taču V.I.Istratesku [1981] raksta (113.lpp), ka ekvivalenta rezultāta formulējums atrodams arī H.Puankarē 1886.gada darbā.

Laika gaitā Bola-Brauera teorēma ir vairākkārt vispārināta. Vispirms Ž.Adamārs (J.Hadamard [1910]) devis pirmo pierādījumu galīgdimensionālā telpā $\mathbf{R}^n (n \in \mathbf{N})$, izmantojot Kronekera indeksus. 1912.gadā Brauers devis citu pierādījumu, izmantojot simpleksu aproksimācijas tehniku. Vēl citu sameklēsim J.V.Aleksandera [1922] un G.D.Birkhoffa, O.D.Kelloga [1922] rakstos. Populārāko Bola-Brauera teorēmas pierādījumu izstrādājuši Knasters-Kuratovskis-Mazurkevičs [1929], tas balstīts uz E.Špernera lemmu [1928]. Šodienas matemātiķi pazīst sekojošu formulējumu:

ŠAUDERA TEORĒMA([1930]).
Ja nepārtraukts attēlojums f netukšu, kompaktu un izliektu Banaha telpas apakškopu attēlo sevī, tad attēlojumam f eksistē nekustīgais punkts.

Šīs teorēmas pierādījumu atradīsim J.Šaudera [1930] rakstā. Bet vēsture ar to vēl nav beigusies. 1935.gadā A.Tihonovs Šaudera teorēmas analogu pierādījis lokāli izliektā topoloģiskā vektoru telpā. Ar 1941.gada rakstu S.Kakutani iesāk Bola-Brauera-Šaudera teorēmas iespējamos vispārinājumus daudzvērtīgiem attēlojumiem. Savukārt V.L.Klī 1955.gadā pamatojis, ka katram nepārtrauktam attēlojumam lokāli izliektās topoloģiskās vektoru telpas izliektā apakškopā eksistē tikai tad nekustīgais punkts, ja šī kopa ir arī kompakta. 1967.gadā H.E.Scarfs izstrādājis algoritmu (bāzētu uz Špernera lemmu) tuvinātai nekustīgā punkta atrašanai, kuru var lietot nekustīgā punkta meklēšanā ar kompjūtera palīdzību.

Ir zināmi vairāki Brauera un Šaudera teorēmu pierādījumu veidi. Ar tiem varam iepazīties, piemēram, E.Burgera [1959], C.B.Tompkina [1964], H.Nikaido [1968, 1970], E.Kleina [1973], D.Smarta [1974], J.Franklina [1980], K.J.Arrova, F.H.Hāna (Hahn) [1980], L.Lusternika, V.Soboļeva [1982], K.C.Bordera [1985] darbos. Samērā izsmeļošu informāciju par Bola-Brauera-Šaudera teorēmas attīstības gaitu varam atrast J.Dugundži, A.Granass [1982] un V.I.Istratesku [1981] grāmatās. Taču slavenākā nekustīgo punktu teorēma joprojām nedod mieru matemātiķu prātiem. Tā, piemēram, vēl 1981.gadā K.Grogera rakstā parādījies jauns Brauera teorēmas pierādījums, kā arī 1991.gada N.Sioji rakstā tiek vispārināta Knastera-Kuratovska-Mazurkeviča teorēma. Un droši vien tie nav pēdējie tezultāti.

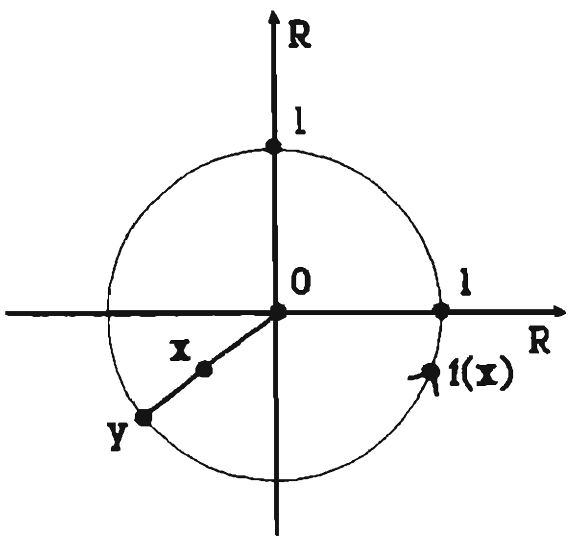
1. ŠAUDERA TEORĒMAS ANALOGS W-NEPĀRTRAUKTAM ATTĒLOJUMAM

1.1. PAMATJĒDZIENI

Gribētos uzsvērt, ka kopas K kompaktums un izliektība Šaudera teorēmā ir būtiskas prasības. S.Kakutani rakstā [1943] un I.Kronina (Cronin) grāmatā [1964] (124.lpp) atradīsim piemērus, kas parāda, ka Šaudera teorēmā kopas kompaktuma prasību nevar aizstāt ar ierobežotību un slēgtību.

Apskatīsim vienu interesantu piemēru.

Piemērs 1.1.1.



zīm.1.1.1.

▪$K=B(0;1)\setminus\{0\}\subset\mathbf{R}^2$. Šī kopa nav ne kompakta, ne izliekta, un mēs varam uzdot kopā K tādu attēlojumu $f:K\to K$, kurš ir nepārtraukts, bet kuram nav nekustīgā punkta. Attēlojumu f definējam sekojošā veidā: jebkuram $x\in K$ atrodam stara, kas iziet no 0 punkta un iet caur x, krustpunktu y ar riņķa līniju, un "pārbīdam" šo y pa loku ar garumu h, $0<h<2\pi$. Iegūtais punkts tad arī ir $f(x)$ (skatīt zīm.1.1.1.).▪

Piemērs parāda, ka, kaut kopai K līdz izliektai un kompaktai kopai $B(0;1)$ pietrūkst viena paša punkta, secinājums par nekustīgā punkta eksistenci nepārtrauktam attēlojumam var būt aplams. Tātad pie nelielām kopas $B(0;1)$ struktūras izmaiņām var panākt, ka attālums starp x un $f(x)$ ir "liels" visiem $x\in K$.

Bet kā izmainītos Šaudera teorēmas secinājums, ja nepārtraukta attēlojuma vietā mēs apskatītu ne noteikti nepārtrauktu attēlojumu? Bet, piemēram, tādu, kam ir iespējami pārtraukuma punkti?

Pieņemsim, ka X ir metriska telpa ar metriku d, $D(f)\subset X$ ir attēlojuma f definīcijas kopa un $f:D(f)\to X$.

DEFINĪCIJA 1.1.1.
Attēlojumu f sauc par w-nepārtrauktu ($w\in\mathbf{R}_{++}$) punktā $x_0\in D(f)$, ja katram pozitīvam skaitlim ε eksistē tāds pozitīvs skaitlis δ, ka visiem punktiem $x\in D(f)$: $d(x_0,x)<\delta$ izpildās nosacījums: $d(f(x_0),f(x))<\varepsilon+w$.

DEFINĪCIJA 1.1.2.
Ja attēlojums f ir w-nepārtraukts jebkurā definīcijas apgabala D(f) punktā, tad šādu attēlojumu sauc par w-nepārtrauktu kopā D(f) jeb w-nepārtrauktu.

Ja pieņemam, ka w=0, iegūstam nepārtraukta attēlojuma definīciju. Ideja par w-nepārtrauktu attēlojumu nav jauna. Piemēram, M.Burgina un A.Šostaka rakstā [1992] mēs sastopamies ar jēdzienu "nepārtrauktības defekts". Salīdzinot definīcijas, jānonāk pie secinājuma, ka Definīcijās 1.1.1. un 1.1.2. minētais lielums w nav nekas cits kā šis "nepārtrauktības defekts" pie nosacījuma, ka w ir iespējamais mazākais skaitlis, kas apmierina Definīciju 1.1.1. visos D(f) punktos.

Piemērs 1.1.2.
▪Dirihlē funkcija $f:\mathbf{R}\to\{0,1\}$, kas definēta sekojoši:

$$\forall x\in\mathbf{R}: f(x):=\begin{cases}1, & x\in Q\\ 0, & x\in\mathbf{I}\end{cases},$$

ir 1-nepārtraukta.▪

Piemērā 1.1.2. Dirihlē funkciju mēs varam uzskatīt arī par 10-nepārtrauktu vai pat 10^{10}-nepārtrauktu - Definīcija 1.1.2. ir izpildīta. Mēs negribētu uzlikt stingrākus nosacījumus uz w izvēli. Taču, domājot par iespējamo reālo situāciju, gribam w izvēlēties pēc iespējas mazu.

Darbojoties tiešā veidā ar w-nepārtrauktu attēlojumu, grūti pateikt, kāds izskatīsies Šaudera teorēmas analogs, ja aizstājam nepārtrauktu attēlojumu ar w-nepārtrauktu attēlojumu. Varbūt izmantot aproksimācijas ideju ?

DEFINĪCIJA 1.1.3.
Attēlojumu $g:A\to X$, kur A ir metriskās telpas X apakškopa un $A\supset D(f)$, sauc par attēlojuma $f:D(f)\subset A\to X$ μ-aproksimāciju kopā $D(f)$, ja jebkuram kopas $D(f)$ punktam x: $d(f(x),\ g(x))\le\mu$, $\mu\in\mathbf{R}_+$.

Tā kā nepārtraukts attēlojums kompaktā kopā ir arī vienmērīgi nepārtaukts, definēsim vienmērīgi w-nepārtraukta attēlojuma jēdzienu un apskatīsim kopsakarību starp w-nepārtrauktu un vienmērīgi w-nepārtrauktu attēlojumu metriskas telpas kompaktā apakškopā.

DEFINĪCIJA 1.1.4.
Attēlojumu $f:D(f)\to X$ sauc par vienmērīgi w-nepārtrauktu ($w\in\mathbf{R}_{++}$), ja katram pozitīvam skaitlim ε eksistē tāds pozitīvs skaitlis δ, ka visiem punktiem x un y no $D(f)$: $d(x,y)<\delta$, izpildās nosacījums: $d(f(x),f(y))<\varepsilon+w$.

TEORĒMA 1.1.1.
Ja X ir metriska telpa, A ir kompakta apakškopa telpā X un attēlojums $f:A\to X$ ir w-nepārtraukts, tad f ir vienmērīgi 2w-nepārtraukts attēlojums.

▼Pierādījums.
Pieņemsim, ka attēlojums f ir w-nepārtraukts kopā A, t.i., katrā kopas A punktā x izpildās:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall y\in A:\ d(x,y)<\delta\ \Rightarrow\ d(f(x),f(y))<\varepsilon+w,$$

un pieņemsim, ka attēlojums f nav vienmērīgi 2w-nepārtraukts kopā A, t.i.,

$$\exists\varepsilon_0>0\ \forall\delta>0\ \exists x,y\in A:\ d(x,y)<\delta \text{ un } d(f(x),f(y))\ge\varepsilon_0+2w.$$

Izvēlēsimies tādu pozitīvu skaitļu δ_n virkni, ka: $\lim\limits_{n\to\infty}\delta_n=0$.

Tad eksistēs tādas virknes $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $x_n, y_n\in A$, ka:

$$d(x_n,y_n)<\delta_n \text{ un } d(f(x_n),f(y_n))\ge\varepsilon_0+2w,\ n=1,2,\ldots.$$

Tā kā kopa A ir kompakta, tad no virknes $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ var izvēlēties tādu apakšvirkni $(x_{n_k})_{k\in\mathbf{N}}$, kura konverģē uz punktu $x_0\in A$; tieši tāpat no virknes $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ var izvēlēties tādu apakšvirkni $(y_{n_k})_{k\in\mathbf{N}}$, kas konverģē uz to pašu $x_0\in A$ (jo:

$$d(y_{n_k},x_0)\le d(y_{n_k},x_{n_k})+d(x_{n_k},x_0)<\delta_{n_k}+d(x_{n_k},x_0)\underset{k\to\infty}{\to}0+d(x_0,x_0)=0).$$

No attēlojuma f w-nepārtrauktības punktā $x_0 \in A$ seko:

$$d(f(x_{n_k}),f(x_0))<\varepsilon+w \text{ un } d(f(y_{n_k}),f(x_0))<\varepsilon+w,$$

tātad ,ja k tiecas uz bezgalību, iegūsim:

$$d(f(x_{n_k}),f(y_{n_k}))\le d(f(x_{n_k}),f(x_0))+d(f(x_0),f(y_{n_k}))<2\varepsilon+2w.$$

Tā kā ε izvēlēts patvaļīgi, tad liekot ε tiekties uz 0, būs spēkā novērtējums: $d(f(x_{n_k}),f(y_{n_k}))\le 2w$.

Bet pēc virkņu $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ un $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ konstrukcijas seko, ka:

$$d(f(x_{n_k}),f(y_{n_k}))\ge \varepsilon_0+2w,\ k=1,2,\dots.$$

Iegūtā pretruna starp pēdējām divām nevienādībām pamato, ka sākotnējais pieņēmums bijis aplams. ▲

Piemērs 1.1.3.

■Funkcija $f(x):=\begin{cases}\sin\frac{1}{x} & , x\in]0;1]\\ 0 & , x=0\end{cases}$ parāda, ka uzlabot Teorēmas 1.1.1. secinājumu nav iespējams.

Intervālā]0;1] funkcija f ir nepārtraukta, punktā 0 tā ir 1-nepārtraukta, [0;1] tā ir vienmērīgi 2-nepārtraukta funkcija (▼ izvēlamies divas punktu virknes $(x'_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(x''_n)_{n\in\mathbf{N}}$ no intervāla [0;1]:

$$x'_n=\frac{2}{\pi+4n\pi} \text{ un } x''_n=\frac{2}{3\pi+4n\pi},\quad n=0,1,2,\dots;$$

abas šīs virknes ir bezgalīgi mazas un tāda ir arī to starpība, tāpēc pietiekoši mazam $2>\varepsilon>0$ un pēc patikas mazam $\delta>0$ atradīsies tāds punktu pāris x'_n un $x''_n\in]0;1[$, ka $|x'_n-x''_n|<\delta$ un $|f(x'_n)-f(x''_n)|=|1-(-1)|=2>\varepsilon$ ▲).■

1.2. NEPĀRTRAUKTA APROKSIMĒJOŠA ATTĒLOJUMA EKSISTENCE w-NEPĀRTRAUKTAM ATTĒLOJUMAM

Soli pa solītim mēs tuvojamies mērķim. Varbūt vienmērīgi w-nepārtrauktam attēlojumam izliektā un kompaktā Banaha telpas apakškopā var atrast nepārtrauktu aproksimējošu attēlojumu?

TEORĒMA 1.2.1.

Ja X - normēta lineāra telpa,

kopa $A \subset X$ - kompakta,

$f: A \to X$ - vienmērīgi w-nepārtraukts attēlojums,

tad attēlojumam f eksistē nepārtraukta w'-aproksimācija $\overline{f}$ un $\overline{f}(A) \subset convf(A)$, $w' > w$.

• Pierādījums.

Fiksējam $\varepsilon' \in \mathbb{R}_{++}$ tā, lai $w + \varepsilon' \leq w'$. No f vienmērīgās w-nepārtrauktības seko:

$\exists \delta > 0\ \forall x, y \in A$: $d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon' + w$.

Tā kā A ir kompakta kopa normētā vektoru telpā X, tad katram pozitīvam skaitlim γ varam konstruēt galīgu γ-tīklu kopā A. Izvēlamies $\gamma := \frac{\delta}{2}$ un apzīmējam tīkla punktu kopu ar

$M_\delta = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, tad $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(a_i, \frac{\delta}{2})$.

Pierādīsim, ka attēlojuma f sašaurinājumam kopā M_δ eksistē nepārtraukts turpinājums visā telpā X (tātad arī kopā A). Ideja šim pierādījumam radusies no *vispārinātās Titces teorēmas* (K.Borsuks [1967], 77.lpp), kura apgalvo, ka, *ja A ir slēgta apakškopa metriskā telpā X un Y ir lokāli izliekta lineāra telpa, tad katram attēlojumam $f: A \to Y$ eksistē nepārtraukts turpinājums $\overline{f}: X \to Y$ un $\overline{f}(X) \subset convf(A)$*. Mūsu gadījumā $M_\delta = A$, X sakrīt ar Y. Mēs atkārtosim attēlojuma $\overline{f}$ konstrukciju un tā nepārtrauktības pamatojumu mūsu konkrētajā situācijā, jo izmantosim šos spriedumus aproksimācijas pierādījumā.

Kā zināmu faktu izmantosim sekojošu rezultātu:

TEORĒMA (K.Borsuks, 70.lpp). Ja kopa G ir metriskas telpas X vaļēja apakškopa, tad šai kopai eksistē kanoniskais pārklājums attiecībā pret X.

(DEFINĪCIJA (K.Borsuks, 69.lpp). Kanoniskais pārklājums attiecībā pret telpu X ir tāds vaļējas kopas $G\subset X$ vaļējs pārklājums $\mathbf{U}=\{U_\mu\}$, $\mu\in M$, kurš apmierina nosacījumus:

1)U ir lokāli galīgs, t.i., katram kopas G punktam a eksistē tāda šī punkta apkārtne V, ka šķēlums $V\cap U_\mu$ nav tukša kopa tikai galīgam indeksu skaitam μ;

2)katram punktam $a\in X\setminus G$ un katrai šī punkta apkārtnei $V\subset X$ eksistē tāda šī punkta a apkārtne $W\subset X$, ka, ja šķēlums $U_\mu\cap W$ nav tukša kopa, tad $U_\mu\subset V$.)

Pēc šīs teorēmas kopai $X\setminus M_\delta$ eksistē kanoniskais pārklājums $\{G_\mu\}$, $\mu\in M$. Izvēlamies katrā kopā G_μ punktu x_μ un sameklējam tam tādu atbilstošo punktu $a_\mu\in M_\delta$, lai $d(x_\mu,a_\mu)<2d(x_\mu,M_\delta)$.

Punktā $x\in X\setminus M_\delta$ attēlojumi $\tau_\mu(x):=\dfrac{d(x,X\setminus G_\mu)}{\sum\limits_{\mu'\in M} d(x,X\setminus G_{\mu'})}$ nav vienādi ar 0 tikai galīgam indeksu skaitam $\mu\in M$. Patiešām: jebkurš punkts $x\in X\setminus M_\delta$ pieder vismaz vienai un ne vairāk kā galīgam skaitam kopu G_μ ($\{G_\mu\}$ - lokāli galīgs pārklājums!), tāpēc saucēja summa ir stingri pozitīva. Attēlojumi $\tau_\mu: X\setminus M_\delta\to\mathbf{R}$. Skaidrs, ka $\tau_\mu(x)\geq 0$ un

$$\sum_{\mu\in M}\tau_\mu(x)=\sum_{\mu\in M}\frac{d(x,X\setminus G_\mu)}{\sum\limits_{\mu'\in M} d(x,X\setminus G_{\mu'})}=\frac{\sum\limits_{\mu\in M} d(x,X\setminus G_\mu)}{\sum\limits_{\mu'\in M} d(x,X\setminus G_{\mu'})}=1,$$

$\forall x\in X\setminus M_\delta$, pie tam $\tau_\mu(x)>0$ tad un tikai tad, ja $x\in G_\mu$.

Tā kā pārklājums $\{G_\mu\}$ ir lokāli galīgs, tad katram $x_0\in X\setminus M_\delta$ eksistē tāda šī punkta apkārtne U_0 telpā $X\setminus M_\delta$, ka nosacījums $U_0\cap G_\mu\neq\emptyset$ izpildās tikai galīgai indeksu kopai $\mu_0,\mu_1,\ldots,\mu_n$. Tāpēc jebkuram punktam $x\in U_0$:

$$\tau_\mu(x)=\frac{d(x,X\setminus G_\mu)}{d(x,X\setminus G_{\mu_0})+\ldots+d(x,X\setminus G_{\mu_n})},$$

tātad attēlojums τ_μ ir nepārtraukts.

Pieņemot, ka

$$\bar{f}(x) := \begin{cases} f(x) & , x \in M_\delta, \\ \sum\limits_{\mu \in M} \tau_\mu(x) f(a_\mu), & x \in X \setminus M_\delta, \end{cases}$$

mēs iegūstam attēlojumu $\bar{f}: X \to X$, kas turpina attēlojumu $f: M_\delta \to X$ un kura vērtības pieder kopai $conv f(M_\delta)$. Tā kā $M_\delta \subset A$, tad $\bar{f}(A) \subset \bar{f}(X) \subset conv f(M_\delta) \subset conv f(A)$.

Pierādīsim, ka attēlojums $\bar{f}$ ir nepārtraukts.

No tā, ka kopas $X \setminus M_\delta$ pārklājums $\{G_\mu\}$ ir lokāli galīgs un kopa M_δ ir slēgta, seko, ka jebkuram punktam $p \in X \setminus M_\delta$ eksistē tāda apkārtne $U \subset X \setminus M_\delta$, kas šķeļas tikai ar kopām $\{G_\mu\}$ galīgā skaitā, teiksim ar kopām $G_{\mu_1}, G_{\mu_2}, \ldots, G_{\mu_n}$. Tāpēc jebkuram $x \in U$ attēlojums $\tau_\mu(x)$ būs atšķirīgs no 0 tikai tad, ja μ sakrīt ar kādu no indeksiem μ_i, $i=1,2,\ldots,n$. Tā kā katrs no attēlojumiem $\tau_{\mu_1}, \ldots, \tau_{\mu_n}$ ir nepārtraukts, tad attēlojums $\bar{f}$ ir nepārtraukts jebkurā kopā $p \in X \setminus M_\delta$.

Atliek pamatot $\bar{f}$ nepārtrauktību kopā M_δ.

Pieņemsim, ka V ir punkta $\bar{f}(p) = f(p)$ $(p \in M_\delta)$ brīvi izvēlēta izliekta apkārtne telpā X (X ir lokāli izliekta telpa). Mums jāatrod tāda punkta p apkārtne $U_0 \in X$, ka $\bar{f}(U_0) \subset V$.

Pieņemsim, ka K(p,r) ir vaļēja lode telpā X ar centru punktā p un rādiusu r. Tā kā f ir nepārtraukts kopā M_δ, tad eksistē tāds $\varepsilon > 0$, ka $f(M_\delta \cap K(p,\varepsilon)) \subset V$. Tā kā $\{G_\mu\}$ ir kanoniskais pārklājums, tad punktam p telpā X eksistē tāda apkārtne U_0, kura ietilpst lodē $K(p,\varepsilon)$ un, ja tās šķēlums ar kaut kādu pārklājuma kopu G_μ veido netukšu kopu, tad šī G_μ iekļaujas lodē $K(p, \frac{1}{3}\varepsilon)$.

Apskatot sākotnēji izvēlētos punktus $x_\mu \in G_\mu$, redzam, ka

$$d(p, a_\mu) \le d(p, x_\mu) + d(x_\mu, a_\mu) < \frac{1}{3}\varepsilon + 2d(x_\mu, M_\delta) \le \varepsilon$$

(jo: $x_\mu \in G_\mu \subset K(p; \frac{1}{3}\varepsilon)$ un $d(x_\mu, M_\delta) \le d(x_\mu, p) \le \frac{1}{3}\varepsilon$, jo $p \in M_\delta$).

Tātad $\bar{f}(x)=f(x)\in V$, ja $x\in M_\delta\cap U_0$, un katram x no $(X\setminus M_\delta)\cap U_0$ var atrast tādus indeksus $\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n$, lai $x\in\bigcap_{i=1}^{n}G_{\mu_i}$ un x nepieder nevienai citai pārklājuma kopai G_μ, $\mu\neq\mu_i$, $i=1,2,\ldots,n$. Iegūstam, ka $\tau_{\mu_i}>0$, $i=1,2,\ldots,n$, un $\tau_\mu(x)=0$ visiem citiem indeksiem μ. Seko, ka: $\bar{f}(x)=\sum_{\mu\in M}\tau_\mu(x)f(a_\mu)=\sum_{i=1}^{n}\tau_{\mu_i}(x)f(a_{\mu_i})$, pie kam $\sum_{\mu\in M}\tau_\mu=\sum_{i=1}^{n}\tau_{\mu_i}=1$. Tā kā $x\in G_{\mu_i}\cap U_0$, tad $f(a_{\mu_i})\in V$, un tā kā kopa V ir izliekta, tad $\bar{f}(x)\in V$. Tātad $\bar{f}(U_0)\subset V$. $\bar{f}$ nepārtrauktības pierādījums pabeigts.

Pamatosim, ka attēlojums $\bar{f}$ ir attēlojuma f w-aproksimācija kopā A. Šim nolūkam izvēlēsimies patvaļīgu punktu $x\in A$. Ja $x\in M_\delta$, tad $d(\bar{f}(x),f(x))=0\leq w$. Ja $x\notin M_\delta$, tad $x\in A\setminus M_\delta$ jeb $x\in X\setminus M_\delta$. Apskatīsim punkta x vaļēju apkārtni $K(x,\frac{\delta}{n})$ fiksētam $n\in\mathbf{N}$. $\{G_\mu\}$ ir telpas $X\setminus M_\delta$ kanoniskais pārklājums, tāpēc atradīsies punkta x tāda apkārtne U_0, ka $U_0\subset X\setminus M_\delta$, $U_0\subset K(x,\frac{\delta}{n})$ un, ja tās šķēlums ar pārklājuma kopu G_μ nav tukša kopa, tad $G_\mu\subset K(x,\frac{\delta}{n})$. Atceroties, kā izvēlēti punkti

$$x_\mu\in G_\mu: d(x_\mu,a_\mu)<2d(x_\mu,M_\delta),$$

varam novērtēt attālumu:

$$d(x,a_\mu)\leq d(x,x_\mu)+d(x_\mu,a_\mu)<\frac{1}{n}\delta+2\cdot\frac{\delta}{2}\leq\delta+\frac{1}{n}\delta\ .$$

(Piezīme. $x\in\bigcup_{i=1}^{n}B(a_i;\frac{\delta}{2})$ un

$$x_\mu\in G_\mu\subset K(x,\frac{\delta}{n})\subset\bigcup_{i=1}^{n}B(a_i;\frac{\delta}{2})\subset A, \text{ tāpēc}$$

$$\exists a\in M_\delta:\ d(x_\mu;a)\leq\frac{\delta}{2}\ \text{ jeb }\ d(x_\mu,M_\delta)\leq\frac{\delta}{2}.)$$

Liekot n tiekties uz bezgalību, iegūsim novērtējumu: $d(x,a_\mu)<\delta$. Tā kā $\{G_\mu\}$ ir lokāli galīgs pārklājums, tad punkta x apkārtnē U_0 atradīsies galīgs skaits kopu $G_{\mu_1},\ldots,G_{\mu_n}$ tādu, ka $x\in\bigcap_{i=1}^{n}G_{\mu_i}$ un x nepieder nevienai citai pārklājuma kopai. No šejienes seko, ka

$\tau_{\mu_i}(x)>0$, $i=1,2,\dots,n$, *un* $\tau_\mu(x)=0$ pārējiem μ. Tātad

$\bar{f}(x)=\sum_{i=1}^{n}\tau_{\mu_i}(x)f(a_{\mu_i})$, $\tau_{\mu_i}(x)>0$, $i=1,2,\dots,n$, un pēc $\tau_{\mu_i}(x)$

definīcijas $\sum_{i=1}^{n}\tau_{\mu_i}(x)=1$. Tā kā $d(x,a_{\mu_i})<\delta$, tad

$d(f(x),f(a_{\mu_i}))<\varepsilon'+w$, un tā kā telpa X ir normēta lineāra telpa,

tad $d(\bar{f}(x),f(x))=d(\sum_{i=1}^{n}\tau_{\mu_i}f(a_{\mu_i}),f(x))=$

$$=\|\sum_{i=1}^{n}\tau_{\mu_i}f(a_{\mu_i})-f(x)\|=\|\sum_{i=1}^{n}\tau_{\mu_i}f(a_{\mu_i})-\sum_{i=1}^{n}\tau_{\mu_i}f(x)\|=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\tau_{\mu_i}\|f(a_{\mu_i})-f(x)\|<\sum_{i=1}^{n}\tau_{\mu_i}(\varepsilon'+w)=$$

$$=(\varepsilon'+w)\sum_{i=1}^{n}\tau_{\mu_i}=\varepsilon'+w\leq w'$$

jeb $d(\bar{f}(x),f(x))\leq w'$. ▲

Apgalvot, ka iegūtais rezultāts ir pats labākais visās situācijās mēs nevaram. Piemēram, ja $f:[a;b]\to\mathbf{R}$. Izrādās, šādā gadījumā aproksimējošo attēlojumu mēs varam piemeklēt ar labāku novērtējumu nekā Teorēmas 1.2.1. formulējumā.

TEORĒMA 1.2.2.
Ja $f:[a;b]\to\mathbf{R}$ ir vienmērīgi w-nepārtraukts attēlojums, tad tam eksistē nepārtraukta $\frac{w'}{2}$-aproksimācija g, w'>w.

▾Pierādījums.

Nofiksējam $\varepsilon\in\mathbf{R}_{++}$ tā, lai $\varepsilon+w\leq w'$. Tad pēc f vienmērīgās w-nepārtrauktības eksistē tāds $\delta>0$, ka:

$\forall x,y\in[a;b]: |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon+w$.

Konstruējam intervālā $[a;b]$ δ-tīklu $\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ sekojošā veidā: $a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_n=b$,

$$|x_k - x_{k-1}| < \delta,\ x_k \neq x_{k-1},\ k=1,2,\ldots,n.$$

Apzīmēsim attēlojuma f vidējās vērtības intervālos $A_k := [x_{k-1}; x_k]$, k=1,2,...,n, ar $v_k := \dfrac{m_k+M_k}{2}$, $k=1,2,\ldots,n$, kur

$m_k := \inf\{f(x)\,|\,x\in A_k\}$ un $M_k := \sup\{f(x)\,|\,x\in A_k\}$, un attēlojuma f vidējās vērtības intervālos $A'_k := \left[\dfrac{x_{k-1}+x_k}{2}; \dfrac{x_k+x_{k+1}}{2}\right]$, k=1,2,...,n-1, ar $v'_k := \dfrac{m'_k+M'_k}{2}$, k=1,2,...,n-1, kur

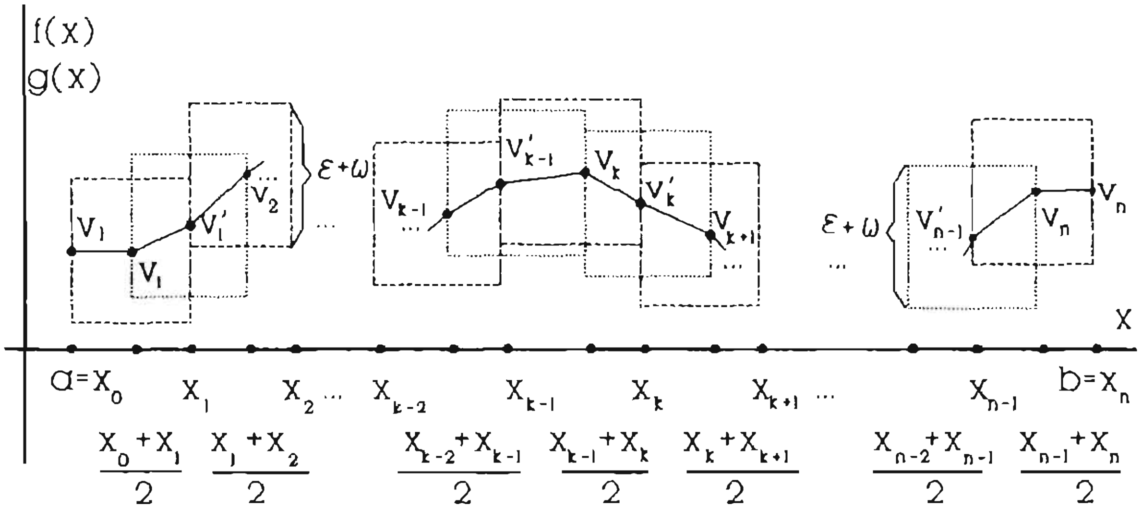
$m'_k := \inf\{f(x)\,|\,x\in A'_k\}$ un $M'_k := \sup\{f(x)\,|\,x\in A'_k\}$.

Funkcijas f aproksimējošo funkciju g definēsim sekojoši:

$$g(x) := \begin{cases} g_1(x) := v_1,\quad x\in\left[x_0; \dfrac{x_0+x_1}{2}\right]; \\ g_k(x) := \dfrac{x - \dfrac{x_{k-1}+x_k}{2}}{x_k - \dfrac{x_{k-1}+x_k}{2}}(v'_k - v_k) + v_k, \\ \qquad x\in\left[\dfrac{x_{k-1}+x_k}{2}; x_k\right],\ k=1,2,\ldots,n-1; \\ g'_k(x) := \dfrac{x - x_{k-1}}{\dfrac{x_{k-1}+x_k}{2} - x_{k-1}}(v_k - v'_{k-1}) + v'_{k-1}, \\ \qquad x\in\left[x_{k-1}; \dfrac{x_{k-1}+x_k}{2}\right],\ k=2,3,\ldots,n; \\ g'_n(x) := v_n,\quad x\in\left[\dfrac{x_{n-1}+x_n}{2}; x_n\right] \end{cases}.$$

Attēlojums g ir nepārtraukts un tas ir attēlojuma f $\dfrac{w'}{2}$-aproksimācija. Patiešām, ja brīvi izvēlētais $x\in[a;b]$ sakrīt ar x_k, $k=0,1,\ldots,n$, vai ar $\dfrac{x_{k-1}+x_k}{2}$, $k=1,2,\ldots,n$, tad $|f(x)-g(x)|=0\le\frac{w'}{2}$, un, ja $x\in\left[x_0;\frac{x_0+x_1}{2}\right]$ vai $x\in\left[\frac{x_{n-1}+x_n}{2};x_n\right]$,

tad, acīmredzami, ka $|f(x)-g(x)|\le\frac{w+\varepsilon}{2}\le\frac{w'}{2}$ (skatīt zīm.1.2.2.).



zīm.1.2.2.

Apskatīsim gadījumu, kad $x\in\left]\frac{x_{k-1}+x_k}{2};\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right[$. Pēc punktu x_k, $k=0,1,\dots,n$, izvēles seko, ka $\left|\frac{x_{k-1}+x_k}{2}-\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right|<\frac{2\delta}{2}=\delta$ un tas nozīmē, ka jebkuriem

$$u,v\in\left]\frac{x_{k-1}+x_k}{2};\frac{x_k+x_{k-1}}{2}\right[:\ |f(u)-f(v)|<\varepsilon+w.$$

Ja $x\in\left]\frac{x_{k-1}+x_k}{2};x_k\right[$, tad $g_k(x)\in[v_k;v_k']$, t.i.,

$$\exists t\in[0;1]:\ g_k(x)=tv_k+(1-t)v_k'.$$

Līdz ar to varam novērtēt:

$$|f(x)-g(x)|=|g(x)-g_k(x)|=$$

$$=|(t+(1-t))f(x)-(tv_k+(1-t)v_k')|\le$$

$$\le t|f(x)-v_k|+(1-t)|f(x)-v_k'|=$$

$$= t\left|f(x) - \frac{m_k+M_k}{2}\right| + (1-t)\left|f(x) - \frac{m'_k+M'_k}{2}\right|.$$

Tā kā $x \in \left]\frac{x_{k-1}+x_k}{2}; x_k\right[\subset [x_{k-1}; x_k] = A_k$, tad $f(x) \in [m'_k; M'_k]$, t.i.,

$$\exists \lambda_k \in [0;1]:\ f(x) = \lambda_k m_k + (1-\lambda_k) M_k,$$

un, tā kā vienlaicīgi $x \in \left]\frac{x_{k-1}+x_k}{2}; x_k\right[\subset \left[\frac{x_{k-1}+x_k}{2}; \frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right] = A'_k$, tad

$$f(x) \in [m'_k; M'_k],\ \text{t.i.},\ \exists \lambda'_k \in [0;1]:\ f(x) = \lambda'_k m'_k + (1-\lambda'_k) M'_k.$$

Turpinot novērtēšanu, iegūstam:

$$|f(x) - g(x)| \le$$

$$\le t\left|\lambda_k m_k + (1-\lambda_k) M_k - \frac{m_k+M_k}{2}\right| + (1-t)\left|\lambda'_k m'_k + (1-\lambda'_k) M'_k - \frac{m'_k+M'_k}{2}\right| =$$

$$= t\ \left|(\lambda_k - \frac{1}{2}) m_k - (\lambda_k - \frac{1}{2}) M_k\right| + (1-t)\ \left|(\lambda'_k - \frac{1}{2}) m'_k + (\lambda'_k - \frac{1}{2}) M'_k\right| \le$$

$$\le t\left|\lambda_k - \frac{1}{2}\right| |m_k - M_k| + (1-t)\left|\lambda'_k - \frac{1}{2}\right| |m'_k - M'_k| \le$$

$$\le t\cdot\frac{1}{2}\cdot|m_k - M_k| + (1-t)\cdot\frac{1}{2}\cdot|m'_k - M'_k| \le$$

$$\le \frac{1}{2} t(\varepsilon + w) + \frac{1}{2}(1-t)(\varepsilon + w) = \frac{\varepsilon + w}{2} \le \frac{w'}{2}.$$

Gadījumā, kad $x \in \left]x_k; \frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right[$, iegūsim tieši tādu pašu novērtējumu. Tā kā šāds novērtējums nav atkarīgs no k ($k=1,2,\ldots,n-1$) izvēles un arī no x izvēles, tad galu galā pie sākotnēji fiksētā $\varepsilon > 0$ esam ieguvuši, ka

$$|f(x) - g(x)| \le \frac{\varepsilon + w}{2} \le \frac{w'}{2}.\ \blacktriangle$$

Izrādās, ka Teorēmā 1.2.2. iegūto novērtējumu uzlabot nav iespējams.

Piemērs 1.2.1.

▪Piemērā 1.1.2. aplūkotajai Dirihlē funkcijai f, kas ir vienmērīgi 1-nepārtraukta, eksistē nepārtraukta ½-aproksimācija

$g(x):=\frac{1}{2}$, $\forall x\in\mathbf{R}$. Acīmredzami, ka labāku aproksimāciju tanī nozīmē, ka $d(f(x),g(x))$ būtu mazāks par $\frac{1}{2}$, $\forall x\in\mathbf{R}$, iegūt nav iespējams.■

1.3. PAMATREZULTĀTS

Teorēmas 1.1.1. un 1.2.1. ļauj pamatot sekojošu rezultātu:

TEORĒMA 1.3.1.
Ja K ir netukša, kompakta un izliekta Banaha telpas X apakškopa, kuru w-nepārtraukts attēlojums f attēlo sevī, tad kopā K eksistē tāds punkts x^*, *ka* $d(x^*,f(x^*))\le 2w'$, $w'>w$.

▾Pierādījums.

Tā kā kopa K ir kompakta, tad pēc Teorēmas 1.1.1. w-nepārtrauktais attēlojums f ir arī vienmērīgi 2w-nepārtraukts. Savukārt, lietojot Teorēmu 1.2.1., vienmērīgi 2w-nepārtrauktam attēlojumam f eksistē nepārtraukta 2w'-aproksimācija g, $w'>w$. Tā kā g ir nepārtraukts attēlojums, kas attēlo kopu K sevī ($g(K)\subset conv f(K)\subset K$, jo kopa K ir izliekta), tad varam lietot Šaudera teorēmu, saskaņā ar kuru kopā K eksistē tāds punkts $x^*\in K$, ka: $g(x^*)=x^*$. Līdz ar to: $d(x^*,f(x^*))=d(g(x^*),f(x^*))\le 2w'$.▴

Ievērojot Teorēmu 1.1.1, 1.2.1. un 1.2.2., ka arī Bola-Brauera-Šaudera teorēmas secinājumus, varam pierādīt:

SEKAS 1.3.1.
Ja $K=[a;b]$ un $f:K\to K$ ir w-nepārtraukts, tad intervālā K eksistē tāds punkts x^*, *ka* $d(x^*,f(x^*))\le w'$, $w'>w$.

SEKAS 1.3.2.
Ja pie dotajiem Teorēmas 1.3.1. nosacījumiem ir spēkā, ka f ir vienmērīgi w-nepārtraukts attēlojums, tad $\exists x^*\in K$: $d(x^*,f(x^*))\le w'$, $w'>w$.

SEKAS 1.3.3.
Ja $K=[a;b]$ un $f:K\to K$ ir vienmērīgi w-nepārtraukts attēlojums, tad $\exists x^*\in K$: $d(x^*,f(x^*))\le\frac{w'}{2}$, $w'>w$.

2. IESPĒJAMAIS PIELIETOJUMS EKONOMIKĀ

Pat matemātiskajās aprindās nereti tiek uzdots jautājums, vai apskatāmajam matemātiskajam rezultātam ir atrodams kaut kāds pielietojums. Lai nomierinātu jautātāju prātus, varam sacīt, ka nekustīgo punktu teoriju lieto ekonomiskajos modeļos. Konkrētāk, tirgus līdzsvara eksistenci parasti pierāda ar Brauera vai Kakutani teorēmu palīdzību (skatīt, piem., J.T.Švartcu [1961], E.Dīrkeru [1974], K.J.Arrovu, F.H.Hānu [1980], R.R.Kornvalu (Cornwall) [1984]). Zinot to un domājot par to, ir radusies šī darba 2.daļa. Un, ja nodaļā 2.2. apskatītais modelis nav pats labākais, tad tikai tāpēc, ka šis piemērs ir sākums.

2.1. w-NEPĀRTRAUKTU ATTĒLOJUMU ĪPAŠĪBAS NORMETĀ TELPĀ

Iepazīstoties ar tirgus līdzsvara teoriju, jānonāk pie secinājuma, ka tiešā veidā lietot Teorēmu 1.3.1. par w-nepārtraukta attēlojuma w-nekustīgo punktu pagaidām nevaram. Nonākam pie secinājuma, ka teorija prasa tālāku attīstību. Vispirmām kārtām modificēsim w-nepārtraukta attēlojuma jēdzienu gadījumam, kurā f:X→Y, un pēc tam noskaidrosim w-nepārtrauktu attēlojumu kopas invarianci pret aritmētiskajām operācijām.

DEFINĪCIJA 2.1.1.
Attēlojumu f:X→Y, kur X, Y - normētas vektoru telpas, sauc par w-nepārtrauktu ($w \in \mathbf{R}_{++}$) punktā $x_0 \in X$, ja katram pozitīvam skaitlim ε eksistē tāds pozitīvs skaitlis δ, ka visiem punktiem $x \in X$: $\|x-x_0\|_X < \delta$ izpildās nosacījums: $\|f(x)-f(x_0)\|_Y < \varepsilon + w$.

Ja attēlojums f ir w-nepārtraukts jebkurā telpas X punktā, tad šādu attēlojumu sauc par w-nepārtrauktu telpā X jeb w-nepārtrauktu.

Piemērs 2.1.1.

■Vispārināta Dirihlē funkcija $f:\mathbf{R}^n\to\{0;1\}$, kas definēta sekojoši: $\forall x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbf{R}^n$: $f(x):=\begin{cases}1, & \forall x_i\in\{x_1,\dots,x_n\}: x_i\in\mathbf{Q}\\ 0, & \exists x_i\in\{x_1,\dots,x_n\}: x_i\in\mathbf{I}\end{cases}$, ir 1-nepārtraukta.■

Līdzīgā veidā varam modificēt vienmērīgi w-nepārtraukta attēlojuma definīciju. Atbilstoši formulētas Teorēmas 1.1.1. un 1.2.1. izmantosim Teorēmas 2.1.4. pierādījumā.

TEORĒMA 2.1.1.
Pieņemsim, ka attēlojums $f:X\to Y$ ir w'-nepārtraukts, attēlojums $g:X\to Y$ ir w''-nepārtraukts, X, Y ir normētas vektoru telpas. Tad f+g ir w'+w''-nepārtraukts attēlojums.

▼Pierādījums.

Brīvi izvēlamies punktu $x_0\in X$ un $\varepsilon>0$. Tā kā f ir w'-nepārtraukts attēlojums, tad

$$\exists\delta_1\in\mathbf{R}_{++}\ \forall x\in X: \|x-x_0\|_X<\delta_1\Rightarrow \|f(x)-f(x_0)\|_Y<\frac{\varepsilon}{2}+w',$$

un, tā kā g ir w''-nepārtraukts attēlojums, tad

$$\exists\delta_2\in\mathbf{R}_{++}\ \forall x\in X: \|x-x_0\|_X<\delta_2\Rightarrow \|g(x)-g(x_0)\|_Y<\frac{\varepsilon}{2}+w''.$$

Definējam $\delta:=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, tad

$$\forall x\in X:\ \|x-x_0\|_X<\delta\Rightarrow \|(f(x)+g(x))-(f(x_0)+g(x_0))\|_Y=$$

$$=\|(f(x)-f(x_0))+(g(x)-g(x_0))\|_Y\le\|f(x)-f(x_0)\|_Y+\|g(x)-g(x_0)\|_Y<$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+w'+\frac{\varepsilon}{2}+w''=\varepsilon+w'+w''.\ ▲$$

SEKAS 2.1.1.
Ja $f:K\to Y$ ir w-nepārtraukts attēlojums un $g:K\to Y$ ir nepārtraukts attēlojums, tad f+g ir w-nepārtraukts attēlojums.

Lai runātu par w-nepārtrauktu attēlojumu reizinājumu, vispirms vienosimies, ko mēs saprotam ar jēdzienu "reizinājums" normētā vektoru telpā.

DEFINĪCIJA 2.1.2.(S.Langs [1976], 118.lpp)
Pieņemsim, ka X, Y, Z ir normētas vektoru telpas. Par vektoru $a\in X$, $v\in Y$ *reizinājumu sauc attēlojumu, kas pārim* $(a,v)\in X\times Y$ *piekārto elementu* $av\in Z$ *un kas apmierina sekojošus nosacījumus:*
1. Ja $a,b\in X$ un $v\in Y$, tad $(a+b)v=av+bv$.
   Ja $a\in X$ un $u,v\in Y$, tad $a(u+v)=au+av$.
2. Ja $c\in\mathbf{R}$, $a\in X$, $v\in Y$, tad $(ca)v=c(av)=a(cv)$.
3. $\forall a\in X\ \forall v\in Y$: $\|av\|_Z\le\|a\|_X\|v\|_Y$.

Kā vienkāršāko piemēru varam minēt vektoru skalāro reizinājumu telpā $\mathbf{R}^n$.

Pieņemsim, ka dots reizinājums $X\times Y\to Z$. Apskatīsim attēlojumus $f:K\to X$ un $g:K\to Y$, K ir normētas vektoru telpas V apakškopa. Tad ar attēlojumu reizinājumu sapratīsim

$$(f\cdot g)(x):=f(x)g(x),\ \forall x\in K.$$

TEORĒMA 2.1.2.
Pieņemsim, ka attēlojums $f:V\to X$ ir w'-nepārtraukts, attēlojums $g:V\to Y$ ir w''-nepārtraukts, V, X, Y ir normētas vektoru telpas. Pie šiem nosacījumiem $f\cdot g$ ir $w'w''+w'\|g(x_0)\|_Y+w''\|f(x_0)\|_X$-nepārtraukts attēlojums katrā telpas V punktā x_0.

▾Pierādījums.

Brīvi izvēlamies punktu $x_0\in V$ un $\varepsilon>0$. Definējam

$$\varepsilon':=\frac{1}{2}\left(-w'-w''-\|g(x_0)\|_Y-\|f(x_0)\|_X+\sqrt{(w'+w''+\|g(x_0)\|_Y+\|f(x_0)\|_X)^2+4\varepsilon}\right)>0.$$

Tā kā f ir w'-nepārtraukts attēlojums, tad $\exists\delta_1\in\mathbf{R}_{++}\ \forall x\in V$: $\|x-x_0\|_V<\delta_1\Rightarrow\|f(x)-f(x_0)\|_X<\varepsilon'+w'$. Tā kā g ir w''-nepārtraukts attēlojums, tad $\exists\delta_2\in\mathbf{R}_{++}\ \forall x\in V$: $\|x-x_0\|_V<\delta_2\Rightarrow\|g(x)-g(x_0)\|_Y<\varepsilon'+w''$. Izvēlamies $\delta:=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, tad $\forall x\in V$: $\|x-x_0\|_V<\delta\Rightarrow$

$$\|f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)\|_Z=\|f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)\|_Z\le$$
$$\le\|g(x)(f(x)-f(x_0))\|_Z+\|f(x_0)(g(x)-g(x_0))\|_Z=$$
$$=\|(g(x)-g(x_0)+g(x_0))(f(x)-f(x_0))\|_Z+\|f(x_0)\|_X\|g(x)-g(x_0)\|_Y\le$$
$$\le\|g(x)-g(x_0)\|_Y\|f(x)-f(x_0)\|_X+\|g(x_0)\|_Y\|f(x)-f(x_0)\|_X+\|f(x_0)\|_X\|g(x)-g(x_0)\|$$
$$<(\varepsilon'+w'')(\varepsilon'+w')+\|g(x_0)\|_Y(\varepsilon'+w')+\|f(x_0)\|_X(\varepsilon'+w'')=$$
$$=\varepsilon'\varepsilon'+\varepsilon'w'+\varepsilon'w''+w'w''+\|g(x_0)\|_Y\varepsilon'+\|g(x_0)\|_Yw'+\|f(x_0)\|_X\varepsilon'+\|f(x_0)\|_Xw''.$$

Atliek pamatot, ka

$$\varepsilon'\varepsilon'+\varepsilon'w'+\varepsilon'w''+\|g(x_0)\|_Y\varepsilon'+\|f(x_0)\|_X\varepsilon'=\varepsilon .$$

Apzīmēsim $w'+w''+\|g(x_0)\|_Y+\|f(x_0)\|_X =: t$. Pamatosim, ka $(\varepsilon')^2+\varepsilon' t=\varepsilon$.

Aizvietojot sākotnēji izvēlēto $\varepsilon'=\frac{1}{2}(\sqrt{t^2+4\varepsilon}-t)$ vērtību, iegūsim:

$$\frac{1}{4}(t^2+4\varepsilon-2t\sqrt{t^2+4\varepsilon}+t^2)+\frac{1}{2}(\sqrt{t^2+4\varepsilon}-t)\,t=$$

$$=\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t\sqrt{t^2+4\varepsilon}+\varepsilon-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}t\sqrt{t^2+4\varepsilon}=\varepsilon. \blacktriangle$$

SEKAS 2.1.2.
Ja $f:V\to X$ ir w-nepārtraukts attēlojums un $g:V\to Y$ ir nepārtraukts attēlojums, tad $f\cdot g$ ir $\|g(x_0)\|_Y w$-nepārtraukts attēlojums katrā telpas V punktā x_0.

SEKAS 2.1.3.
Ja $f:V\to X$ ir w-nepārtraukts attēlojums un c ir konstante, tad $c\cdot f$ ir $|c|w$-nepārtraukts attēlojums.

Sekas 2.1.4.
Ja $f:X\to Y$ ir w'-nepārtraukts attēlojums un $g:X\to Y$ ir w''-nepārtraukts attēlojums, X, Y normētas vektoru telpas, tad $f-g$ ir $w'+w''$-nepārtraukts attēlojums.

▼Pierādījums.

Pēc Sekām 2.1.3. $-g=(-1)g$ ir w''-nepārtraukts attēlojums dotajā punktā, tāpēc, ievērojot Teorēmu 2.1.1., $f+(-1)g=f-g$ ir $w'+w''$-nepārtraukts attēlojums.▲

Dalījuma gadījumā apmierināsimies tikai ar vienu vienkāršotu situāciju.

TEORĒMA 2.1.3.
Ja $f: X\to[1;+\infty[$ ir w-nepārtraukts attēlojums normētā vektoru telpā X, tad $\frac{1}{f}$ ir $\frac{w}{f(x_0)}$-nepārtraukts attēlojums katrā telpas X punktā x_0.

▾Pierādījums.

Brīvi izvēlamies punktu $x_0 \in X$ un $\varepsilon>0$, definējam $\varepsilon' := \varepsilon f(x_0)$. Tā kā f ir w-nepārtraukts attēlojums, tad

$$\exists \delta>0: \forall x \in X: \|x-x_0\|_X<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon'+w.$$

Tādā gadījumā:

$$\left|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(x_0)}\right|=$$

$$=\frac{|f(x_0)-f(x)|}{f(x)f(x_0)}<\frac{\varepsilon'+w}{f(x)f(x_0)}\le$$

$$\le\frac{\varepsilon'+w}{f(x_0)}=\frac{\varepsilon f(x_0)+w}{f(x_0)}=\varepsilon+\frac{w}{f(x_0)}. \blacktriangle$$

Zināmu lomu ekonomiskajos modeļos spēlē nepārtraukta attēlojuma vērtību kopas ierobežotība, ja vien definīcijas kopa ir kompakta. Šādā situācija var garantēt arī vērtību kopas kompaktību, taču w-nepārtraukta attēlojuma gadījumā vairāk par ierobežotību iegūt nevar.

TEORĒMA 2.1.4.

Pieņemsim, ka X, Y ir normētas lineāras telpas, kopa A ir kompakta telpas X apakškopa un $f:A \to Y$ ir w-nepārtraukts attēlojums. Tad kopa f(A) ir ierobežota.

▾Pierādījums.

Pēc Teorēmas 1.1.1. f ir vienmērīgi 2w-nepārtraukts attēlojums. Pēc Teorēmas 1.2.1. vienmērīgi 2w-nepārtrauktam attēlojumam eksistē nepārtraukta 2w'-aproksimācija $\bar{f}$ kopā A, $w'>w$. Tā kā A ir kompakta kopa un $\bar{f}$ nepārtraukts attēlojums, tad $\bar{f}(A)$ kompakta kopa, tātad ierobežota:

$$\exists r \in \mathbf{R}_{++} \exists x \in \bar{f}(A): \bar{f}(A) \subset B(x,r)$$

Tā kā $\bar{f}$ ir f 2w'-aproksimācija, tad $d(\bar{f}(z),f(z)) \le 2w'$, $\forall z \in A$. Līdz ar to $f(A) \subset B(x,r+2w')$, t.i., attēlojums f ir ierobežots.▴

Kompaktas kopa attēla kompaktību pie w-nepārtraukta attēlojuma nevar garantēt, to pamato kaut vai šis piemērs:

Piemērs 2.1.2.

▪$f:[0;1]\to[0;1]$.

$$f(x):=\begin{cases}\frac{1}{2}, & x=0\\ x, & x\in]0;1[\\ \frac{1}{2}, & x=1\end{cases}$$ - tas ir ½-nepārtraukts attēlojums, kuram

vērtību kopa $f([0;1])=]0;1[$ nav kompakta.▪

2.2. EKONOMISKĀ MODEĻA PIEMĒRS

Šajā apakšnodaļā mēs dosim ekonomiskā modeļa aprakstu, kāds atrodams K.J.Arrova un F.H.Hāna [1980] grāmatā (16.-29.lpp), veiksim atbilstošas izmaiņas un uzlabojumus, izdarīsim atbilstošus secinājumus.

Pieņemsim, ka ir n dažādi labumi (preces un pakalpojumi), patērētāji un ražotāji. Katrs patērētājs var būt arī ražotājs, kā arī otrādi - katrs ražotājs var būt patērētājs. Patērētājus un ražotājus kopumā pieņemts saukt par ekonomiskiem aģentiem. Ja mēs raksturojam ar x_{h_i} patērētāja h lēmumu attiecībā pret i-to labumu, tad $x_{h_i}<0$ nozīmē, ka i ir labums, ko piedāvā patērētājs h, un $x_{h_i}\geq 0$ nozīmē, ka i ir labums, ko pieprasa patērētājs h (ietverot arī 0 pieprasījumu). Tad $x_i:=\sum_h x_{h_i}$ nozīmē i-tā labuma kopumu, ko piedāvā (ja $x_i<0$) vai pieprasa (ja $x_i\geq 0$) visi patērētāji kopumā. Ja mēs raksturojam ar y_{h_i} ražotāja f lēmumu attiecībā pret i-to labumu, tad ar $y_{f_i}<0$ sapratīsim, ka i-to labumu ražotājs f pieprasa, un ar $y_{f_i}\geq 0$ sapratīsim, ka i-to labumu ražotājs f piedāvā (ietverot arī 0 piedāvājumu). Tad $y_i:=\sum_f y_{f_i}$ nozīmē i-tā labuma kopumu, ko piedāvā (ja $y_i\geq 0$) vai pieprasa (ja $y_i<0$) visi ražotāji kopumā. Ar $\overline{x_i}$ sapratīsim to i-tā labuma daudzumu, kas apskatāmajā laika brīdī ir dots kā sākotnējais labuma daudzums jeb resursi. Atzīmēsim, ka tas vienmēr ir nenegatīvs lielums. Tirgus līdzsvars ir saistīts ar atšķirīgo ražotāju un patērētāju lēmumu savienojamību. Kopējais piedāvājums ir summa no labumu produkcijas un labumiem, kas saražoti līdz šim. Tādā gadījumā i-tā labuma pieprasījuma pārpalikums ir $\sigma_i := x_i - y_i - \overline{x_i}$, kur i=1,...,n.

PIEŅEMUMS 1.

Pieņemsim, ka $\boldsymbol{p} := (p_1, \ldots, p_n)$ ir doto n labumu cenu vektors, un pieņemsim, ka pieprasījuma pārpalikumu σ_i ir iespējams izteikt kā funkciju no $\boldsymbol{p}$. Šo funkciju apzīmēsim ar z_i, i=1,...,n, tad

$z_i(\boldsymbol{p}) = x_i(\boldsymbol{p}) - y_i(\boldsymbol{p}) - \overline{x_i}(\boldsymbol{p})$, $\quad \boldsymbol{z}(\boldsymbol{p}) = \begin{pmatrix} z_1(\boldsymbol{p}) \\ z_2(\boldsymbol{p}) \\ \ldots \\ z_n(\boldsymbol{p}) \end{pmatrix}$, kopējā pieprasījuma

pārpalikuma funkcija $\boldsymbol{z}$.

PIEŅEMUMS 2.

$\boldsymbol{z}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{z}(k\boldsymbol{p})$, $\forall \boldsymbol{p} > \boldsymbol{0}$ *un* $k > 0$.

Pieņēmums 2 apgalvo, ka visu cenu mēroga maiņa attiecībā pret visām precēm vienlaicīgi pieprasījuma pārpalikuma funkcijas vērtību neizmaina. Jeb - ja vienlaicīgi k-kārtīgi izmaina algas un cenas, tad patiesībā pirkt- un pārdot-spēja nav izmainījusies.

No Pieņēmuma 2 seko, ka cenu vektors ir normējams un tāpēc var uzskatīt, ka tas pieder n-dimensiju simpleksam $S_n := \{\boldsymbol{p} \mid \sum_{i=1}^{n} p_i = 1,\ \boldsymbol{p} > 0\}$. Mēs izslēdzam situāciju ar negatīvām cenām un iespēju visām cenām vienlaicīgi būt vienādām ar 0.

PIEŅEMUMS 3' jeb Valrasa likums.

$\forall \boldsymbol{p} \in S_n:\ \boldsymbol{p}\boldsymbol{z}(\boldsymbol{p}) = 0$.

Kā motivāciju šim Pieņēmumam 3' var minēt sekojošo. Visu ražotāju nolūks ir maksimizēt to peļņu. $\boldsymbol{py}:=(p_1,\ldots,p_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}$ ir visu ražotāju kopējā peļņa, varam pieņemt,ka $\boldsymbol{py}$ ir vienmēr nenegatīvs lielums. Patērētāji kontrolē ražotājus (ražotāji un patērētāji noteiktās situācijās nonāk mainītās lomās). Tas nozīmē, ka katrs patērētājs h saņem zināmu daļu $d_h \geq 0$ no ražotāju kopējās peļņas ($\sum_h d_h = 1$). Katrs patērētājs h izvēlas tikai tādu

$\boldsymbol{x}_h := \begin{pmatrix} x_{h_1} \\ \ldots \\ x_{h_n} \end{pmatrix}$, kas apmierina viņa budžeta nevienādību $\boldsymbol{px}_h - \boldsymbol{p}\overline{\boldsymbol{x}_h} - d_h\boldsymbol{py} \leq 0$

(kur $\overline{\boldsymbol{x}_h} := \begin{pmatrix} \overline{x_{h_1}} \\ \ldots \\ \overline{x_{h_n}} \end{pmatrix}$ ir sākotnējo labumu, kas atrodas patērētāja h rīcībā, daudzuma vektors). Patērētājs h vienmēr dod priekšroku vektoram $\boldsymbol{x}_h$ pār $\boldsymbol{x}'_h$, ja $\boldsymbol{x}_h > \boldsymbol{x}'_h$, un nekad neizvēlas darbību, ja iespējama labāka. Tiek panākts, ka $\boldsymbol{x}_h$ vienmēr tiek izvēlēts tā, lai $\boldsymbol{px}_h - \boldsymbol{p}\overline{\boldsymbol{x}_h} - d_h\boldsymbol{py} = 0$. Sasummējot pēdējo vienādību pa visiem patērētājiem h, iegūsim $\boldsymbol{pz} = 0$.

PIEŅĒMUMS 4'.
Kopējā pieprasījuma pārpalikuma funkcija $\boldsymbol{z}$ ir nepārtraukta visā definīcijas apgabalā S_n.

No Pieņēmuma 4' seko, ka $\boldsymbol{z}(S_n)$ ir ierobežota kopa, jo S_n ir kompakta kopa. Pamatojoties uz Teorēmu 2.1.4., $\boldsymbol{z}(S_n)$ ierobežotība saglabāsies arī pie pieņēmuma, ja $\boldsymbol{z}$ ir w-nepārtraukts attēlojums.

PIEŅĒMUMS 4.
Kopējā pieprasījuma pārpalikuma funkcija $\boldsymbol{z}$ ir w-nepārtraukta visā definīcijas apgabalā S_n.

Kopējā pieprasījuma pārpalikuma funkcijas nepārtrauktība nozīmē, ka pie nelielām cenu vektora izmaiņām, maz izmainīsies kopējā pieprasījuma pārpalikuma funkcijas vērtība. Tātad šīs funkcijas nepārtrauktība atspoguļo faktu, ka modelis apraksta stabilas ekonomiskas situācijas. Pieņēmums par kopējās pieprasījuma pārpalikuma funkcijas w-nepārtrauktību paver iespēju modeli lietot arī nestabilu (piemēram, pārejas tipa) ekonomisko situāciju aprakstos.

DEFINĪCIJA 2.2.1.

Cenu vektoru $\boldsymbol{p}^{*}\in S_n$ sauc par tirgus līdzsvaru, ja $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{p}^{*})\leq \boldsymbol{0}$.

Standarta situācijā, ja izpildās Pieņēmumi 1,2,3',4', var apgalvot, ka eksistē tirgus līdzsvars, t.i., eksistē tāds cenu vektors $\boldsymbol{p}^{*}\in S_n$, kas pilnībā apmierina ražotāju un patērētāju pieprasījumu pēc labumiem. Acīmredzami, ka, ja $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{p})$ ir w-nepārtraukta funkcija, šāds apgalvojums varētu būt aplams.

DEFINĪCIJA 2.2.2.

Cenu vektoru $\boldsymbol{p}^{*}\in S_n$ sauc par tirgus k-līdzsvaru, ja $\sum\limits_{z_i(\boldsymbol{p}^{*})>0} z_i(\boldsymbol{p}^{*})\leq k,\ k\in\mathbf{R}_{++}$.

No cenu vektora Definīcijas 2.2.2. seko, ka pieprasījuma pārpalikuma funkcijas pozitīvo koordinātu summa ir ierobežota. Varam arī sacīt, ka konstante k raksturo novirzi no tirgus līdzsvara Definīcijas 2.2.1. izpratnē jeb tas ir neapmierinātā pieprasījuma daudzums, kurš pie dotā $\boldsymbol{p}^{*}\in S_n$ ir maksimālais iespējamais.

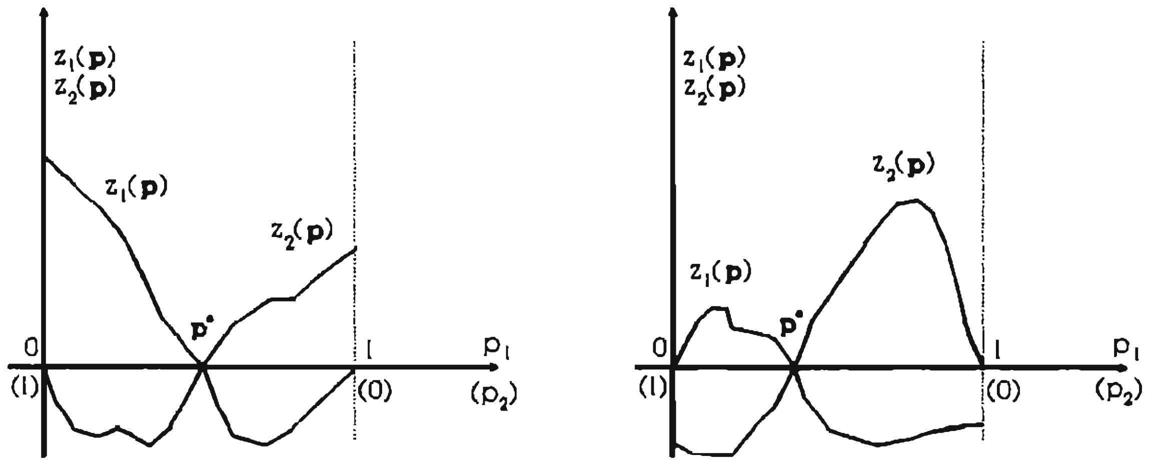
Izdarīsim sekojošu pieņēmumu:

PIEŅĒMUMS 3.

$\exists\gamma>0:\ \gamma\leq \sum\limits_{z_i(\boldsymbol{p})\leq 0} p_i,\ \forall \boldsymbol{p}\in S_n$.

No γ eksistences seko, ka pie jebkura cenu vektora $\boldsymbol{p}\in S_n$ izvēles ir tādi labumi, kuru cenas nav 0 un ekonomisko aģentu pieprasījums pēc šiem labumiem ir apmierināts.

Zīm.2.2.1. ilustrē divas situācijas divu labumu gadījumā, kad izpildās vienlaicīgi standartpieņēmumi 1,2,3',4' un Pieņēmums 3.



zīm. 2.2.1.

Zīmējums parāda, ka divu labumu gadījumā tirgus līdzsvara cenu vektors $\boldsymbol{p}^*$ nevar būt vienāds ar (0;1) vai (1;0).

Turpmāk pieņemsim, ka telpā $\mathbf{R}^n$ normu esam definējuši sekojoši $\|\boldsymbol{x}\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$, $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$.

TEORĒMA 2.2.1.

Ja izpildās pieņēmumi 1,2,3,4 un $w < \frac{\gamma}{n}$, tad eksistē k-līdzsvara cenu vektors $\boldsymbol{p}^* \in S_n$, kur $k > \dfrac{nw^2 + (n+1)w}{\gamma - nw}$.

•Pierādījums.

Vispirms konstruēsim attēlojumu $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{p})$ sekojošā veidā:

$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{p}) := \dfrac{\boldsymbol{p} + \boldsymbol{M}(\boldsymbol{p})}{(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{M}(\boldsymbol{p}))\boldsymbol{e}}$, kur $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{p}) = (t_1(\boldsymbol{p}), \ldots, t_n(\boldsymbol{p}))$,

$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{p}) = (m_1(\boldsymbol{p}), \ldots, m_n(\boldsymbol{p}))$, $m_i(\boldsymbol{p}) := \max\{0, z_i(\boldsymbol{p})\}$, $i = 1, \ldots, n$ un

$\boldsymbol{e} := \begin{pmatrix} 1 \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix}_{n\text{-dim}}$. Tad $0 \le t_i(\boldsymbol{p}) = \dfrac{p_i + m_i(\boldsymbol{p})}{1 + \sum_{i=1}^{n} m_i(\boldsymbol{p})} \le 1$, $i = 1, \ldots, n$ un, ievērojot

$m_i(\mathbf{p})$ definīciju,

$$\sum_{i=1}^{n} t_i(\mathbf{p}) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(p_i+m_i(\mathbf{p}))}{1+\sum_{z_i(\mathbf{p})>0} z_i(\mathbf{p})} = \frac{1+\sum_{z_i(\mathbf{p})>0} z_i(\mathbf{p})}{1+\sum_{z_i(\mathbf{p})>0} z_i(\mathbf{p})} = 1.$$

Tātad $\boldsymbol{T}(\mathbf{p}): S_n \to S_n$.

Noskaidrosim, kāda nepārtrauktības veida ir šis attēlojums. $\mathbf{p}+\boldsymbol{M}(\mathbf{p})$ ir w-nepārtraukts attēlojums (pēc Sekām 2.1.1.). $(\mathbf{p}+\boldsymbol{M}(\mathbf{p}))\mathbf{e}$ ir $w\|\mathbf{e}\|=w(1+1+\ldots+1)=nw$-nepārtraukts attēlojums (pēc Sekām 2.1.2.). $(\mathbf{p}+\boldsymbol{M}(\mathbf{p}))\mathbf{e}=1+\sum_{zi(\mathbf{p})>0} z_i(\mathbf{p}): \ S_n \to [1;\infty[$ un ir

wn-nepārtraukts attēlojums, tāpēc $\frac{1}{(\mathbf{p}+\boldsymbol{M}(\mathbf{p}))\mathbf{e}}$ ir $\frac{nw}{1+\sum_{z_i(\mathbf{p})>0} z_i(\mathbf{p})}$-

nepārtraukts attēlojums (Teorēma 2.1.3.). Un, lietojot Teorēmu 2.1.2., secinām, ka $\boldsymbol{T}(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}+\boldsymbol{M}(\mathbf{p})}{(\mathbf{p}+\boldsymbol{M}(\mathbf{p}))\mathbf{e}}$ ir

$$\frac{nw^2}{1+\sum_{z_i(\mathbf{p})>0} z_i(\mathbf{p})} + \frac{w}{1+\sum_{z_i(\mathbf{p})>0} z_i(\mathbf{p})} + \frac{nw\|\mathbf{p}+\boldsymbol{M}(\mathbf{p})\|}{1+\sum_{z_i(\mathbf{p})>0} z_i(\mathbf{p})} =$$

$$= \frac{nw^2+w+nw+nw\sum_{z_i(\mathbf{p})>0} z_i(\mathbf{p})}{1+\sum_{z_i(\mathbf{p})>0} z_i(\mathbf{p})}$$-nepārtraukts attēlojums.

Tā kā S_n - izliekta un kompakta kopa normētā vektoru telpā $\mathbf{R}^n$ un $\boldsymbol{T}(\mathbf{p}): S_n \to S_n$, tad pēc Teorēmas 1.3.1. $\exists \mathbf{p}^* \in S_n$:

$$\|\boldsymbol{T}(\mathbf{p}^*)-\mathbf{p}^*\| \le 2\,\frac{nw^2+(n+1)w+nw\sum_{z_i(\mathbf{p}^*)>0} z_i(\mathbf{p}^*)+\alpha}{1+\sum_{z_i(\mathbf{p}^*)>0} z_i(\mathbf{p}^*)}, \quad \alpha \in \mathbf{R}_{++}.$$

No telpā $\mathbf{R}^n$ dotās normas seko:

$$\|\boldsymbol{T}(\mathbf{p}^*)-\mathbf{p}^*\| = \left\| \frac{\mathbf{p}^*+\boldsymbol{M}(\mathbf{p}^*)}{1+\sum_{z_i(\mathbf{p}^*)>0} z_i(\mathbf{p}^*)} - \mathbf{p}^* \right\| =$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{p_i^*+m_i(\boldsymbol{p}^*)}{1+\sum\limits_{z_i(\boldsymbol{p}^*)>0} z_i(\boldsymbol{p}^*)}-p_i^*\right|=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{p_i^*+m_i(\boldsymbol{p}^*)-p_i^*-p_i^*\sum\limits_{z_i(\boldsymbol{p}^*)>0} z_i(\boldsymbol{p}^*)}{1+\sum\limits_{z_i(\boldsymbol{p}^*)>0} z_i(\boldsymbol{p}^*)}\right|\le$$

$$\le 2\,\frac{nw^2+(n+1)w+nw\sum\limits_{z_i(\boldsymbol{p}^*)>0} z_i(\boldsymbol{p}^*)+\alpha}{1+\sum\limits_{z_i(\boldsymbol{p}^*)>0} z_i(\boldsymbol{p}^*)}.$$

Tā kā $1+\sum\limits_{z_i(\boldsymbol{p}^*)>0} z_i(\boldsymbol{p}^*)>0$, tad

$$\sum_{i=1}^{n}\left|m_i(\boldsymbol{p}^*)-p_i^*\sum_{z_i(\boldsymbol{p}^*)>0} z_i(\boldsymbol{p}^*)\right|\le 2\left(nw^2+(n+1)w+nw\sum_{z_i(\boldsymbol{p}^*)>0} z_i(\boldsymbol{p}^*)+\alpha\right).$$

Atceroties, kā definētas $m_i(\boldsymbol{p}^*)$ vērtības, nevienādības kreiso pusi varam uzrakstīt divu summu veidā:

$$\sum_{z_i(\boldsymbol{p}^*)\le 0}\left|-p_i^*\sum_{z_i(\boldsymbol{p}^*)>0} z_i(\boldsymbol{p}^*)\right|+\sum_{z_i(\boldsymbol{p}^*)>0}\left|z_i(\boldsymbol{p}^*)-p_i^*\sum_{z_i(\boldsymbol{p}^*)>0} z_i(\boldsymbol{p}^*)\right|=$$

$$=\sum_{z_i(\boldsymbol{p}^*)>0} z_i(\boldsymbol{p}^*)\sum_{z_i(\boldsymbol{p}^*)\le 0} p_i^*+\sum_{z_i(\boldsymbol{p}^*)>0}\left|z_i(\boldsymbol{p}^*)-p_i^*\sum_{z_i(\boldsymbol{p}^*)>0} z_i(\boldsymbol{p}^*)\right|.$$

Ievērojot reālu skaitļu moduļu īpašības ($|a\pm b|\le|a|+|b|$!), varam turpināt:

$$\sum_{z_i(\boldsymbol{p}^*)>0} z_i(\boldsymbol{p}^*)\sum_{z_i(\boldsymbol{p}^*)\le 0} p_i^*+\left|\sum_{z_i(\boldsymbol{p}^*)>0}\left(z_i(\boldsymbol{p}^*)-p_i^*\sum_{z_i(\boldsymbol{p}^*)>0} z_i(\boldsymbol{p}^*)\right)\right|\le$$

$$\le\sum_{z_i(\boldsymbol{p}^*)>0} z_i(\boldsymbol{p}^*)\sum_{z_i(\boldsymbol{p}^*)\le 0} p_i^*+\sum_{z_i(\boldsymbol{p}^*)>0}\left|z_i(\boldsymbol{p}^*)-p_i^*\sum_{z_i(\boldsymbol{p}^*)>0} z_i(\boldsymbol{p}^*)\right|.$$

Atgriežoties pie sākotnējās nevienādības, iegūsim:

$$\sum_{z_i(\boldsymbol{p}^*)>0} z_i(\boldsymbol{p}^*)\sum_{z_i(\boldsymbol{p}^*)\le 0} p_i^*+\left|\sum_{z_i(\boldsymbol{p}^*)>0}\left(z_i(\boldsymbol{p}^*)-p_i^*\sum_{z_i(\boldsymbol{p}^*)>0} z_i(\boldsymbol{p}^*)\right)\right|=$$

$$=\sum_{z_i(\boldsymbol{p}^*)>0} z_i(\boldsymbol{p}^*)\sum_{z_i(\boldsymbol{p}^*)\le 0} p_i^*+\sum_{z_i(\boldsymbol{p}^*)>0} z_i(\boldsymbol{p}^*)\left(1-\sum_{z_i(\boldsymbol{p}^*)>0} p_i^*\right)=$$

$$=2\sum_{z_i(\boldsymbol{p}^*)>0} z_i(\boldsymbol{p}^*)\sum_{z_i(\boldsymbol{p}^*)\le 0} p_i^* \le 2\left(nw^2+(n+1)w+nw\sum_{z_i(\boldsymbol{p}^*)>0} z_i(\boldsymbol{p}^*)+\alpha\right).$$ Tā kā

$$\gamma\sum_{z_i(\boldsymbol{p}^*)>0} z_i(\boldsymbol{p}^*) \le \sum_{z_i(\boldsymbol{p}^*)>0} z_i(\boldsymbol{p}^*)\sum_{z_i(\boldsymbol{p}^*)\le 0} p_i^* \le nw^2+(n+1)w+nw\sum_{z_i(\boldsymbol{p}^*)>0} z_i(\boldsymbol{p}^*)+\alpha,$$

tad $\displaystyle\sum_{z_i(\boldsymbol{p}^*)>0} z_i(\boldsymbol{p}^*) \le \frac{nw^2+(n+1)w+\alpha}{\gamma-nw}$ jeb $\displaystyle\sum_{z_i(\boldsymbol{p}^*)>0} z_i(\boldsymbol{p}^*) \le k$, kur

$k > \dfrac{nw^2+(n+1)w}{\gamma-nw}$, ko arī gribējām pierādīt.▲

Iegūtā formula Teorēmā 2.2.1. ļauj ekonomiski interpretēt dažus jaunā modeļa parametrus (piemēram, n - labumu veidu skaits) atšķirībā no klasiskās situācijas, kurā attiecīgiem parametriem šādas interpretācijas nav vai arī tā ir izteikta vismaz virspusēji.

PĒCVĀRDS

Šajā Pēcvārdā gribētos vēlreiz uzsvērt darba lielākos ieguvumus un neveiksmes autores vērtējumā.

Noskaidrotas visbiežāk nekustīgo punktu teorēmu pierādījumos izmantotās izliekto kopu īpašības, kuras visas tiek izmantotas darbā pierādītajās nekustīgo punktu teorēmās.

Vispārinot stingri izliektas Banaha telpas jēdzienu, izstrādāts stingri izliektas metriskas telpas jēdziens. Pierādīts, ka stingri izliektas metriskas telpas slēgtās un izliektās apakškopās neizstiepjošu, kvazi-neizstiepjošu un asimptotiski neizstiepjošu attēlojumu nekustīgo punktu kopas ir slēgtas un izliektas. Pamatots, ka stingri izliektas metriskas telpas definīcija ir ekvivalenta ar stingri izliektas Banaha telpas definīciju, ja metriskās sakarības tiek izteiktas ar normu. Nav izdevies pierādīt vai atrast atbilstošu pretpiemēru, kas noliegtu, ka slēgtas lodes stingri izliektā metriskā telpā ir izliektas kopas. Jāpiezīmē, ka stingri izliekta metriska telpa ir speciālgadījums metriskai telpai ar dotu slēguma operatoru.

Attēlojumu saimju kopīgo nekustīgo punktu eksistences pierādījumos veiksmīgi lietots slēguma operators, kas zināmā mērā metriskā telpā definē izliektības struktūru. Izstrādātā pierādījumu tehnika ļauj metriskā telpā ar slēguma operatoru vispārināt tos rezultātus, kuri iegūti vāji kompaktās Banaha telpas apakškopās. Slēguma operatoru izmantošana atvieglina pierādījumu shēmas veikšanu, taču pie viena blakusnosacījuma - slēgtām lodēm jābūt S-slēgtām. Pierādītas teorēmas metriskās telpās ar dotu slēguma operatoru, kurās attēlojumu saimes:

1) apmierina "normālas struktūras" nosacījumu;
2) ir ar samazinātu orbītas diametru;
3) ir kvazi-neizstiepjošas;
4) apmierina invariances īpašību.

Promocijas darba II daļā iegūts Bola-Brauera-Šaudera teorēmas vispārinājums w-nepārtrauktam attēlojumam, izmantojot vienmērīgi w-nepārtraukta attēlojuma aproksimāciju ar nepārtrauktu attēlojumu. Reālās taisnes gadījumā konstruēta labāka aproksimācija nekā vispārīgā situācijā. Noskaidrotas w-nepārtrauktu attēlojumu īpašības. Izstrādāts konkrēts tirgus ekonomikas modelis, kurā tirgus līdzsvara eksistence pierādīta ar iepriekš pieminēto rezultātu palīdzību. No iepriekš zināmajiem modeļiem "stabilas" ekonomikas vietā šajā modelī tiek apskatīta mazāk stabila, kuras rezultātā tirgus līdzsvara stāvokli ietekmē virkne parametru, kuri ir indiferenti attiecībā pret līdzsvara eksistenci stabilajā ekonomikā. Iegūtajam rezultātam varētu būt plaši pielietojumi ekonomiskajās teorijās. Iegūtais Bola-Brauera-Šaudera teorēmas vispārinājums liek domāt, ka, atbilstoši modificējot situāciju, varētu arī atbilstoši vispārināt Kakutani teorēmu. Tas būtu loģisks turpinājums disertācijā aizsāktajai II daļas tēmai.

Disertācijā iegūtie rezultāti publicēti 10 rakstos dažādos žurnālos. Par iegūtajiem I daļas rezultātiem autore ir stāstījusi LU zinātniskajās konferencēs (1989.-1993.), Tartu universitātes zinātniskajās konferencēs (1989.-1991.), kā arī 1991.gada Tiraspoles (Moldavā, Kišiņevā) topoloģijas un tās pielietojumu simpozijā. II daļas rezultāti izdiskutēti ar Hamburgas universitātes Statistikas un ekonometrijas institūta darbiniekiem.

Kopš 1984.gada es pazīstu docentu Andri Liepiņu, un kopš 1986.gada mēs kopīgi esam "meklējuši" nekustīgos punktus. Dažus esam atraduši. Es pateicos savam zinātniskajam vadītājam A.Liepiņam par to darbu un laiku, ko viņš ir veltījis man.

Idejas darba II daļai radušās, domājot par nekustīgo punktu teorijas pielietojumiem ekonomikā. Esmu pateicību parādā Hamburgas universitātes Statistikas un ekonometrijas institūta darbiniekiem, īpaši Hamburgas universitātes profesoram Haraldam Šerfam, kura paspārnē pēdējo gadu man bija lemts strādāt.

LITERATŪRAS SARAKSTS

A.G.Aksoy, M.A.Khamsi Nonstandard Methods in Fixed Point
1990 Theory, Springer-Verlag, 139 lpp.

J.V.Alexander On transformations with invariant points //
1922 Trans.Amer.Math.Soc., 23, 89-95.

K.J.Arrow, F.H.Hahn General Competitive Analysis, North-Holland
1980 Publishing Company Amsterdam, New York, Oxford, 452 lpp.

N.A.Assad, W.A.Kirk Fixed point theorems for set-valued
1972 mappings of contractive type // Pacific J.Math., 43(3), 553-562.

L.P.Belluce, W.A.Kirk Fixed-point theorems for families of
1966 contraction mappings // Pacific J.Math., 18, 213-218.

1969 Fixed-point theorems for certain classes of nonexpansive mappings // Proc.Amer.Math.Soc., 20(1), 141-146.

L.P.Belluce, W.A.Kirk, E.F.Steiner Normal structure in Banach
1968 spaces // Pacific J.Math., 26, 433-440.

G.D.Birkoff, O.D.Kellogg Invariant points in function space //
1922 Trans.Amer.Math.Soc., 23, 96-115.

P.Bohl Über die Bewegung eines mechanischen Systems in
1904 der Nähe einer Gleichgewichtslage // J.für reine und angewandte Mathematik, 127, 179-276.

F.F.Bonsall Lectures on some fixed point theorems of
1962 functional analysis, Tata institute of fundamental research, Bombay, 176 lpp.

K.C.Border Fixed point theorems with applications to
1982 economics and game theory, Cambridge University Press, 129 lpp.

K.Borsuk Theory of retrakts, Warszawa, 251 lpp (krieviski:
1967 Теория ретрактов, М., Мир, 1971).

T.Botts Convex sets // Amer.Math.Monthly, 49, 527-535.
1942

W.M.Boyce Commuting functions with no common fixed points//
1969 Trans.Amer.Math.Soc., 137, 77-92.

М.С.Бродский, Д.П.Мильман О центре выпуклого множества //
1948 Доклады Академии Наук СССР, 59(5), 837-840.

L.E.J.Brouwer Über eieindeutige, stetige Transformation von
1910 Flächen in sich // Math.Ann., 69(2), 176-180.
1912 Über Abbildungen von Mannigfaltigkeiten // Math.Ann., 71, 97-115.

F.E.Browder Nonexpansive nonlinear operators in a Banach
1965 space // Proc.Nat.Acad.Sci.U.S.A., 54, 1041-1044.

E.Burger Einführung in die Theorie der Spiele, Berlin,
1959 169 lpp (angliski: Introduction to the Theory of Games, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1963).

M.Burgin, A.Šostak Towards the theory of continuity defect and
1992 continuitty measure for mappings of metric spaces // Latvijas Universitātes Zinātniskie Raksti, 576, 45-62.

J.Caristi Fixed point theorems for mappings satisfying
1976 inwardness conditions // Trans.Amer.Math.Soc., 215, 241-251.

E.Chandler Fixed points and boundaries // Proc.Amer.Math.
1981 Soc., 82(3), 398-400.

R.R.Cornwall Introduction to the Use of General Equilibrium
1984 Analysis, North-Holland, 787 lpp.

J.Cronin Fixed points and topological degree in nonlinear
1964 analysis, Amer. Math. Soc., New York, 198 lpp.

M.M.Day Fixed point theorems for compact convex sets //
1961 Illinois J.Math., 5, 585-590.

E.Dierker Topological methods in Walrasian economics,
1974 Lect.Notes in Econ. and Math. Systems, 92, Springer Verlag, Berlin, 130 lpp.

W.G.Dotson Fixed point theorems for nonexpansive mappings on
1971./72. star-shaped subsets of Banach spaces // J.London Math.Soc., 4(otrā sērija), 408-410.
1972 Fixed points of quasi-nonexpansive mappings // J.Austral.Math.Soc.,13, 167-170.

W.G.Dotson, H.F.Senter Approximating fixed points of
1974 nonexpansive mappings // Proc.Amer.Math.Soc., 44(2), 375-380.

J.Dugundji, A.Granas Fixed Point Theory, I, Warszawa, 209 lpp.
1982

M.Edelstein 1962 On fixed and periodic points under contractive mappings // J.London Math.Soc., 37, 74-79.

1966 A remark on a theorem of M.K.Krasnoselski // Amer.Math.Monthly, 73, 509-510.

1964 On non-expansive mappings of Banach spaces // Proc.Camb.Phil.Soc., 60, 439-447.

1974 Fixed point theorems in uniformly convex Banach spaces // Proc.Amer.Math.Soc., 44(2), 369-374.

G.Eisenack, C.Fenske 1978 Fixpunkttheorie, Mannheim, 258 lpp

K.Fan 1961 A Generalization of Tychonoff's Fixed Point Theorem // Math.Ann., 142, 305-310.

J.Franklin 1980 Methods of Mathematical Economics: Linear and Nonlinear Programming, Fixed-Point Theorems, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer Verlag, 297 lpp.

L.Gajič 1989 Fixed point Theorems for some Nonlinear Mappings in Convex Metric Spaces // Radovi Matematički, 5, 247-259 (Dienvidslāvija).

K.Goebel 1969 An elementary proof of the fixed-point theorem of Browder and Kirk // Michigan Math.J., 16, 381-383.

K.Goebel, W.A.Kirk 1972 A fixed point theorem for asymptotically nonexpansive mappings //Proc.Amer.Math.Soc., 35(1), 171-174.

1990 Topics in metric fixed point theory, Cambridge University Press, 1990, 244 lpp.

D.Göhde 1964 Über Fixpunkte bei stetigen Selbstbildungen mit kompakten Iterierten //Math.Nachr., 28, 45-55.

1965 Zum Prinzip der kontraktiven Abbildung // Math. Nachr., 30, 251-258.

J.Gornicki, M.Krüppel 1992 Fixed point theorems for mappings with Lipschitzian iterates // Nonlinear Analysis, 19, 353-363.

K.Gröger 1981 A simple proof of the Brouwer Fixed Point Theorem // Math.Nachr., 102, 293-295.

L.F.Guseman, B.C.Peters 1975 Nonexpansive mappings on compact subsets of metric linear spaces // Proc.Amer.Math.Soc., 47(2), 383-386.

J.Hadamard 1910 — Sur quelques applications de l'indice de Kronecker; Appendix in Tannery: Introduction a la theorie des functions d`une variable II, 2.ed.; publicēts Hadamard`s Collected Works.

J.P.Huneke 1969 — On common fixed points of commuting continuous functions on an interval // Trans.Amer.Math.Soc., 139, 371-381.

V.I.Istratescu 1981 — Fixed point theory, an Introduction, Math. and Its Applications (7), 466 lpp.

S.Kakutani 1941 — A generalization of Brouwer's fixed-point theorem // Duke Math.J., 8, 457-459.

1943 — Topological properties of the unit sphere of a Hilbert space // Proc.Imp.Acad. Tokyo, 19, 269-271.

R.Kannan 1971 — Some results on fixed points-III // Fund.Math., 70, 169-177.

1973 — Fixed point theorems in reflexive Banach space // Proc.Amer.Math.Soc., 38(1), 111-118.

D.C.Kay, E.W.Womble 1971 — Axiomatic convexity theory and relationships between the Caratheodory, Helly and Radon numbers // Pacific J.Math., 38(2), 471-485.

W.A.Kirk 1965 — A fixed point theorem for mappings which do not increase distances // Amer.Math.Monthly, 72, 1004-1006.

1969 — On mappings with diminishing orbital diameters // J.London Math. Soc., 44, 107-111.

1970 — Fixed point theorems for nonexpansive mappings // Proc.Sympos. Pure Math. 18 American Math.Soc. R.I., 162-168.

1981A — An abstract fixed point theorem for nonexpansive mappings // Proc.Amer.Math.Soc., 82(4), 640-642.

1981B — Fixed point theory for nonexpansive mappings // Lecture Notes in Math., 886, Springer-Verlag, Berlin and New York, 484-505.

1983 — Fixed point theory for nonexpansive mappings II // Contemporary Math., 18, 121-140.

V.L.Klee 1951 — Convex sets in linear spaces // Duke Math.J., 18, 443-466.

1955 — Some topological properties of convex sets // Trans.Amer. Math. Soc., 78, 30-45.

E.Klein Mathematical methods in theoretical economics,
1973 New York, Akademic Press, 388 lpp.

B.Knaster, C.Kuratowski, S.Mazurkiewicz Ein Beweis des
1929 Fixpunktsatzes für n-dimensionale Simplexe //
Fund.Math., 14, 132-137.

P.K.F.Kuhfitting Fixed points of several classes of nonlinear
1974 mappings in Banach space // Proc.Amer.Math.Soc.,
44(2), 300-306.

S.Lang Analysis I, Addision-Wesley Publishing Company,
1976 460 lpp.

А.Х.Лиепиньш Колыбельная для маленького тигренка о неподвижных
1983 точках // Топологические пространства и их
отображения, Рига, 61-69.

T.C.Lim A characterization of normal structure // Proc.Amer.
1974A Math.Soc., 43, 313-319.
1974B A fixed point theorem for families of
nonexpansive mappings // Pacific J.Math., 53,
487-493.

Л.А.Люстерник, В.И.Соболев Краткий курс функционального анализа,
1982 М., Высшая школа, 271 lpp.

R. de Marr Common fixed-points for commuting contraction
1963 mappings // Pacific J.Math., 13, 1139-1141.

K.Menger Untersuchungen über allgemeine Metrik // Math.
1928 Ann., 100, 75-163.

T.Mitchell Fixed points of reversible semigroups of
1970 nonexpansive mappings // Kōdai Math.Sem.Rep.,
22, 322-323.

А.Д.Мышкис, И.М.Рабинович Первое доказательство теоремы о
1955 неподвижной точке при непрерывном отображении
шара в себя, данное латышским математиком
П.Г.Болем // Успехи мат. наук, 10.sēj.,
N.(3)65, 188-192.

H.Nikaido Convex structures and economic theory, Academic
1968 Press, New York and London, 405 lpp (krieviski:
Выпуклые структуры и математическая экономика,
М., Мир, 1972).
1970 Introduction to sets and Mappings in Modern
Economics, North-Holland Publishing company-
Amsterdam, London, 343 lpp.

Z.Opial 1967 — Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings // Bull.Amer.Math.Soc., 73, 591-597.

J.P.Penot 1979 — Fixed point theorems without convexity // Bull.Soc.Math.France, 60, 129-152.

S.Reich 1971 — Some remarks concerning contraction mappings // Canad.Math.Bull., 14(1), 121-124.

H.E.Scarf 1967 — The approximation of fixed points of a continuous mapping // SIAM J.Appl.Math., 15, 1328-1343.

J.Schauder 1930 — Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen // Studia Math., 2, 171-180.

K.Schilling 1986 — Simpliziale Algorithmen zur Berechung von Fixpunkten mengenwertiger Operatoren, Trier, 190 lpp.

J.T.Schwartz 1961 — Lectures on the Mathematical Methods in Analytical Economics, Gordon and Breach, Sience Publishers, New York, 282 lpp.

N.Shioji 1991 — A further generalization of the Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz theorem // Proc. Amer.Math.Soc., 111, 187-195.

D.R.Smart 1961 — A fixed-point theorem // Proc. Cambridge Philos. Soc., 57, 430.

1974 — Fixed point theorems, Cambridge University Press, 93 lpp.

A.Šostaks, M.Zandere 1977 — Topoloģijas elementi - I, LVU, Rīga, 67 lpp.

E.Sperner 1928 — Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensionalzahl und des Gebietes // Abh.Math.Sem. Hamb.Univ., 6, 265-272.

S.Swaminathan (redaktors) 1986 — Fixed point theory and its applications, Academic Press, 216 lpp.

W.Takahashi 1970 — A convexity in metric space and nonexpansive mappings, I //Kōdai Math.Semin.Rep., 22, 142-149.

1992 — Fixed point theorem and nonlinear ergodic theorem for nonexpansive semigroups without convexity // Canad.J.Math., 44, 880-887.

M.R.Taskovič 1980 — Some results in the fixed point theory, II // Publ.Inst.Math., 27, 249-258.

1986 — Osnove teorije fiksne tačke , Matematička biblioteka, Beograd (Dienvidslāvija).

C.B.Tompkin 1964 — Sperner's lemma and some extensions, ed. E.F.Beckenbach, Applied combinatorial mathematics, John Wiley&Sons, Inc., 416-455.

В.А.Треногин 1980 — Функциональный анализ, М., Наука, 495 lpp.

A.Tychonoff 1935 — Ein Fixpunktsatz // Math.Ann., 111, 767-776.

M.van de Vel 1980 — Finite Dimensional Convexity Structures I: General Results// Rapport nr.122, Wiskundig Seminarium, Vrije Universiteit Amsterdam.

H.K.Xu 1991 — Existence and convergence for fixed points of mappings of asymptotically nonexpansive type // Nonlinear Analysis, 16, 1139-1146.

E.Zeidler 1976 — Vorlesungen über nichtlineare Funktionalanalysis I: Fixpunktsätze, Leipzig, 236 lpp.

Autores publikācijas par disertācijas tēmu

1. I.Galiņa 1990 — Kopēja nekustīgā punkta eksistence neizstiepjošu attēlojumu komutatīvai saimei // LU Zinātniskie Raksti, Matemātika, 552, 41-44.
2. I.Galiņa 1990 — Ein gleichgewichtiges Bild mit Fixpunkten // LU Zinātniskie Raksti, Matemātika, 552, 45-46.
3. I.Galiņa 1991 — Existenz des Fixpunktes für die Familie der Abbildungen in einem metrischen Raum // LU Zinātniskie Raksti,Matemātika, 562, 161-162.
4. I.Galiņa 1991 — Kopēja nekustīgā punkta eksistence neizstiepjošu attēlojumu komutatīvai saimei metriskā telpā // LU Zinātniskie Raksti,Matemātika, 562, 163-166.
5. I.Galiņa 1991 — Existence of a common fixed point for a family of nonexpansive mappings on a metric space // Prague 7'th Topological Symposium (Čehoslovākija),tēzes.
6. I.Galiņa 1992 — On strict convexity // LU Zinātniskie Raksti, Matemātika, 576, 193-198.
7. I.Galiņa 1992 — Existence of a common fixed point for a family of nonexpansive mappings on a metric space // Application of topology in algebra and differential geometry, Tartu (Igaunija), 37-40.

8. I.Galiņa 1992 — Existence of a common fixed point for a family of mappings of nonexpansive type on a metric space// Int.J.Math.Educ.Sci.Technol. (Anglija), 23(6), 861-864.

9. I.Galiņa 1993 — Two fixed point theorems in a metric space with closure operator // LU Zinātniskie Raksti, Matemātika, 588, 23-28.

10. I.Bula 1993 — Der Rigaer Deutsch-Baltische Mathematiker Piers Bohl (1865-1921) // J.Baltic Studies (ASV), 24(4), 319-326.