LATVIJAS UNIVERSITĀTE
MATEMĀTISKĀS ANALĪZES KATEDRA
INESE BULA

# ATTĒLOJUMU NEKUSTĪGIE PUNKTI IZLIEKTĀS METRISKĀS TELPĀS

PROMOCIJAS DARBS
LR DOKTORA MATEMĀTIKĀ ZINĀTNISKĀ GRĀDA IEGŪŠANAI

Zinātniskais vadītājs -
Dr.mat. Andris Liepiņš

Rīga, 1994

# SATURS

# APZĪMĒJUMU SARAKSTS

$\mathbf{R}$ - reālo skaitļu kopa
$\mathbf{R}_+$ - reālo nenegatīvo skaitļu kopa
$\mathbf{R}_{++}$ - reālo pozitīvo skaitļu kopa
$\mathbf{Z}_{++}$ - veselo pozitīvo skaitļu kopa
$\mathbf{Q}$ - racionālo skaitļu kopa
$\mathbf{I}$ - iracionālo skaitļu kopa
D(f) - attēlojuma f definīcijas kopa
d(x,y) - attālums starp punktiem x un y metriskā telpā
B(x,r) - slēgta lode ar centru punktā x un rādiusu r
:= - vienāds pēc definīcijas
PX - telpas X visu apakškopu sistēma
$\bar{A}$ - kopas A topoloģiskais slēgums
A→B - no apgalvojuma A seko apgalvojums B
convA - kopas A izliektā čaula
$\|x\|_Y$ - vektora $x \in Y$ norma normētā vektoru telpā Y
diamA - kopas A diametrs
$\partial A$ - kopas A robeža
Fixf - attēlojuma f nekustīgo punktu kopa
FixF - attēlojumu saimes F kopīgo nekustīgo punktu kopa
▾ - pierādījuma sākuma atzīme
▴ - pierādījuma beigu atzīme
■ - piemēra sākuma un beigu atzīme

Piezīme.
*kursīvā rakstītais teksts* - zināmie jēdzieni un rezultāti

# IEVADS

Jūsu acu priekšā stāvošais darbs nepretendē uz absolūtu patiesību. Šodien domātais un paveiktais var izrādīties jau senākā pagātnē izdarīts vai arī kads cits nākotnē nodarbosies tieši ar šīm pašām problēmām un iegūs vērtīgākus rezultātus. Nekustīgo punktu teorija pēdējos gadu desmitos ir nepārskatāmi izpletusies, sarakstītas biezu biezās grāmatas, piemēram, F.F.Bonsalls [1962], J.Kronins (Cronin)[1] [1964], D.R.Smarts [1974], S.Svaminathans (red.) [1976], E.Caidlers (Zeidler) [1976], G.Aizenaks (Eisenack), C.Fenske [1978], V.I.Istratesku [1981], K.C.Borders [1982], J.Dugundži, A.Granass [1982], M.R.Taskovičs [1986], K.Šillings (Schilling) [1986], K.Gēbels, V.A.Kirks [1990], A.G.Aksojs, M.A.Kamsi [1990], un tomēr tās neaptver visus iegūtos rezultātus. Šeit Jūs sastapsities tikai ar nelielu daļiņu no tiem jēdzieniem un virzieniem, kuri tiek lietoti un attīstās attēlojumu nekustīgo punktu teorijā.

Jūsu rokās nonākušajam darbam ir divi pamatvirzieni:
1) attēlojumu saimju kopīgo nekustīgo punktu eksistence (I daļa);
2) Bola-Brauera-Šaudera teorēmas attīstības vēsture un stabilitāte (II daļa).

Galvenais vadmotīvs - darbība risinās metriskas telpas (arī Banaha telpa ir metriska!) izliektā apakškopā. Runāt par izliektu kopu pierastajā izpratnē varam tikai tad, ja kopa atrodas vektoru telpā. Ir bijuši vairāki varianti, kā vektoru telpas izliektību pārnest uz telpu, par kuru ir zināms tikai tas, kā tajā uzdota metrika. Līdz ar to rodas jautājums, kādas tad ir būtiskākās izliektības īpašības. Pamatojoties uz K.Mengera [1928], T.Botsa [1942], V.L.Klī (Klee) [1951], D.C.Keja, E.V.Vombla [1971], M.van de Vela [1980] darbiem, kā noturīgākās izliektības pazīmes minamas divas:
1) izliektu kopu šķēlums ir izliekta kopa;

---

[1] Iekavās minēts autora uzvārds orģinālā transkripcijā. Tas tiks darīts arī turpmāk pirmajā reizē sastopoties ar uzvārdu, kura orģinālrakstība būtiski atšķiras no latviskojuma.

2) slēgtas lodes dotajā telpā ir izliektas kopas.

Ja mēs varam šīs īpašības garantēt noteiktā telpā, tad teiksim, ka telpā ir radīta izliektības struktūra. No nekustīgo punktu teorijas mums ir zināmi divi varianti, kā patvaļīgā metriskā telpā tiek ievesta izliektības struktūra. V.Takahaši [1970] rīkojas sekojoši:

*V.Takahaši izliektas metriskas telpas DEFINĪCIJA.*

*Ja $(X,d)$ ir metriska telpa, kurā eksistē tāds attēlojums*

$W: X \times X \times [0;1] \to X$, *ka:*

$\forall x,y \in X\ \forall \lambda \in [0;1]:\ d(u,W(x,y;\lambda)) \le \lambda d(u,x) + (1-\lambda) d(u,y),\ \forall u \in X,$

*tad telpu $X$ sauc par izliektu metrisku telpu.*

*Izliektas metriskas telpas $(X,d,W)$ apakškopu $K$ sauc par izliektu, ja $W(x,y;\lambda) \in K$ visiem $x,y \in K$ un $\lambda \in [0;1]$.*

V.Takahaši izliektā metriskā telpā Takahaši izliektu kopu šķēlums ir izliekta kopa, kā arī lodes ir izliektas kopas. J.P.Penots [1979] darbojas daudz vienkāršāk. Viņš tiešā veidā metriskā telpā (X,d) apskata tādu apakškopu klasi C, kas satur visas telpas X slēgtās lodes un kura ir invarianta pret šķēluma operāciju. Tātad J.P.Penota apakškopu klase C rada izliektības struktūru telpā X. Paturot prātā mūsu mērķi par nekustīgo punktu eksistenci, kurš ir labākais variants?

Kā tālāk būs redzams I daļas apakšnodaļā 2.2., tad tiešā veidā, daļēji kopējot vektoru telpas izliektas kopas definīciju, mēs nenonāksim pie vēlamā rezultāta, proti, var atrast piemērus, kuros lodes nav izliektas kopas (Piemērs 2.2.1.) un izliektu kopu šķēlums nav izliekta kopa (Piemērs 2.2.2.). Vēlamo mēs panāksim ar stingri izliektas metriskas telpas definīcijas palīdzību. Apgalvojums 2.3.1. parādīs, ka stingri izliektas metriskas telpas definīcija Banaha telpas gadījumā ir ekvivalenta ar stingri izliektas Banaha telpas definīciju. Taču stingri izliektas metriskas telpas situācijā joprojām paliek nenoskaidrots jautājums par lodes izliektību. Tāpēc rodas zināmas grūtības pierādīt labus rezultātus.

Mēs piedāvājam izliektības struktūru metriskā telpā definēt ar slēguma operatoru palīdzību (skatīt I daļas apakšnodaļu 3.1.). Tiesa, arī šajā situācijā mēs esam spiesti pieprasīt telpas ložu izliektību, taču slēguma operatora lietošana atvieglina pierādījumu veikšanu. Būtībā tā ir izliektības struktūras, kāda tā parastā nozīmē piemīt vektoru telpām, pārnešana uz noteikta tipa attēlojumu, kuram liekam darboties mums interesējošā metriskajā telpā. Stingri izliektā metriskā telpā, piemēram, slēguma operatoru varam definēt kā tādu, kas katrai kopai no šīs telpas piekārto mazāko izliekto kopu. Tādējādi stingri izliekta metriska telpa ir viens no variantiem metriskai telpai ar tajā uzdotu slēguma operatoru. Ar slēguma operatora lietojumu nekustīgo punktu teorijā sastopamies A.Liepiņa 1983.gada rakstā. Slēguma operatora īpašības A.Liepiņš kopā ar saviem studentiem izpētījis daudzos kursa un diplomdarbos. Šie rezultāti atrodami šeit I daļas apakšnodaļā 3.1.. A.Liepiņš ar 1983.gada rakstu iesācis jaunu virzienu nekustīgo punktu teorijā: tiek meklēti attēlojumu nekustīgie punkti metriskās telpās ar slēguma operatoru.

Kopumā , pārškirstot nekustīgo punktu teorēmu pierādījumus, varam sacīt, ka visbiežāk tiek izmantotas sekojošas izliektu kopu īpašības:

1) definīcija: izliekta kopa satur nogriezni, ja zināms, ka nogriežņa galapunkti pieder kopai (L.E.J.Brauers [1910], R.de Marrs [1963], D.Gēde (Göhde) [1965], K.Gēbels (Goebel) [1969], V.G.Dotsons [1971/72], [1972], N.A.Assads, V.A.Kirks [1972], M.Edelsteins [1974], V.G.Dotsons, H.F.Senters [1974], P.K.F.Kuhfittings [1974], L.F.Gusemans, B.C.Peters [1975], J.Karisti (Caristi) [1976], E.Čandlers (Chandler) [1981], J.Gornickis,M.Kruppels [1992]);

2) ja $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pieder izliektai kopai K, tad punkts

$z=\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ pieder kopai K, kur $\lambda_i \geq 0$, $i=1,2,\ldots,n$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, jeb

convK⊂K (B.Knasters, C.Kuratovskis, S.Mazurkevičs [1929], J.Šauders (Schauder) [1930], A.Tihonovs [1935], S.Kakutani [1941], M.M.Dejs (Day) [1961], K.Fans [1961], R.de Marrs [1963], D.Gēde [1964], L.P.Beljušs (Belluce), V.A.Kirks [1966], M.Edelsteins [1966], T.C.Lims [1974B], M.R.Taskovičs [1980], V.Takahaši [1992]);

3) izliektu kopu šķēlums ir izliekta kopa (V.A.Kirks [1965],

[1981A], F.E.Brauders (Browder) [1965], L.P.Beljuss, V.A.Kirks [1969], V.Takahaši [1970], T.Mitčels (Mitchell) [1970], R.Kannans [1971], [1973], V.G.Dotsons [1972], J.P.Penots [1979], A.Liepiņš [1983], L.Gajiča [1989], N.Sioji (Shioji) [1991]);
4) lodes ir izliektas kopas (V.A.Kirks [1965], [1970], [1981A], [1983], V.Takahaši [1970], K.Gēbels, V.A.Kirks [1972], J.P.Penots [1979], A.Liepiņš [1983], H.K.Hu (Xu) [1991]).

Vairāk vai mazāk arī mēs visas pieminētās īpašības izmantosim mūsu pierādītajās nekustīgo punktu teorēmās: 1.īpašību - I daļas 2.nodaļā; 2.īpašību - I daļas Teorēmā 1.4., II daļas Teorēmā 1.3.1.; 3.un 4.īpašības - visos I daļas 3.nodaļas teorēmu pierādījumos.

Kopas izliektības struktūra ir tikai viens no pamatlīdzekļiem mūsu mērķa sasniegšanai. Un kāds būtu mūsu mērķis? I daļā mēs gribētu parādīt, kādi ir nepieciešamie nosacījumi attēlojumu saimju kopīgā nekustīgā punkta eksistencei un cik efektīvi attēlojumu nekustīgos punktus mēs varam atrast metriskās telpās ar dotu slēguma operatoru. II daļā galvenā vērība tiek pievērsta Bola-Brauera-Šaudera teorēmas stabilitātei. Proti, kā to pierāda piemēri, tad secinājums par nekustīgā punkta eksistenci var būt pilnīgi aplams, ja mēs izmaināmām kādu no teorēmas nosacījumiem attiecībā uz kopas veidu (izliekta un kompakta). Var sacīt, ka pie nelielām kopas struktūras izmaiņām (kā Piemērā 1.1.1.) būtiski izmainās galarezultāts. Savukārt, kā izmainīsies šis pats galarezultāts, ja mēs nedaudz izmainīsim nosacījumu par attēlojuma nepārtrauktību? Atbildi uz šo jautājumu dod Teorēma 1.3.1. Bola-Brauera-Šaudera teorēma spēlē būtisku lomu tirgus ekonomikas modeļu līdzsvara pierādījumos; ir pamats cerēt, ka jaunajam rezultātam arī varētu būt plaši pielietojumi ekonomiskajās teorijās.

Lai atvieglinātu lasītāja darbu, paskaidrosim mazliet piedāvātās lasāmvielas uzbūves struktūru. Doktordarbs sastāv no apzīmējumu saraksta, ievada, divām daļām, pēcvārda un literatūras saraksta. Apzīmējumu sarakstā ietverti tikai tie apzīmējumi, kas varbūt atšķiras no vispārpieņemtajiem un kas specifiski tieši šim darbam. Pirmā daļa ietver 4 nodaļas, otrā daļa 3 nodaļas. Nodaļas vajadzības gadījumā sīkāk iedalītas apakšnodaļās. Galvenie rezultāti formulēti kā teorēmas, mazāk svarīgāki kā apgalvojumi, daži teorēmu palīgrezultāti, kas nesatur, autoresprāt, pārāk patstāvīgu raksturu, formulēti kā lemmas. Literatūras saraksts sakārtots autoru uzvārdu alfabētiskā secībā, atsauces darbā minētas pēc autora uzvārda un raksta publicēšanas gada.

# I DAĻA

# ATTĒLOJUMU SAIMJU KOPĪGIE NEKUSTĪGIE PUNKTI

## 0. PAMATJĒDZIENI, DEFINĪCIJAS, ZINĀMIE REZULTĀTI

Iepazīstoties ar attēlojumu nekustīgo punktu teoriju, var nonākt pie secinājuma, ka šajā teorijā izstrādāti daudzi ļoti atšķirīgi darbi. Viens no veidiem, kā saklasificēt visas attēlojumu nekustīgo punktu eksistences teorēmas, ir pēc attēlojumu skaita. Ir pamats domāt, ka viena attēlojuma gadījumam šī teorija izstrādāta daudz pamatīgāk un gandrīz jebkurai situācijai varētu piemeklēt atbilstošu rezultātu. Ne tik vienkārši ir ar attēlojumu saimēm, īpaši ar saimēm bez apjoma ierobežojuma. Cits variants nekustīgo punktu teorēmu klasifikācijai būtu pēc attēlojumu veida. Vienu no pamatvirzieniem veido neizstiepjošu attēlojumu nekustīgo punktu teorēmas.

Dabīgs vispārinājums saspiedējattēlojumam, kuram nekustīgā punkta eksistence pilnā metriskā telpā pamatota slavenajā Banaha teorēmā, ir neizstiepjošs attēlojums.

*DEFINĪCIJA 0.1. Attēlojumu $f:X\to X$ ($X$ - metriska telpa) sauc par neizstiepjošu, ja visiem $x,y\in X$: $d(f(x),f(y))\le d(x,y)$.*

Vienkārši piemēri parāda, ka vispārīgā gadījumā (piemēram, pilnā metriskā telpā) šādiem attēlojumiem nekustīgā punkta eksistence nav nodrošināta, bet no otras puses, eksistē attēlojumi ar augstāk minēto prasību, kuriem ir nekustīgie punkti.

Piemērs 0.1.

■ $X=\mathbf{R}$ *un* $\forall x\in\mathbf{R}$: $f(x):=x+13$. Skaidrs, ka

$d(f(x),f(y))=|x+13-y-13|=|x-y|\le d(x,y)=|x-y|$,

bet nekustīgā punkta attēlojumam nav.■

Piemērs 0.2.

■ $X=\mathbf{R}$ un $f(x)=x$. Attēlojumam f nekustīgo punktu kopa ir X.■

Interesantus rezultātus neizstiepjošam attēlojumam Banaha telpas izliektās apakškopās ieguvuši M.S.Brodskis un D.P.Milmans [1948], R. de Marrs [1963], D.Gēde [1964], [1965], M.Edelsteins [1964], [1966], V.A.Kirks [1965], [1970], [1981A], [1981B], [1983], F.E.Brauders [1965], L.P.Beljuss, V.A.Kirks [1966], [1969], V.Takahaši [1970], V.G.Dotsons [1971/72], T.C.Lims [1974B], L.F.Gusemans, B.C.Peters [1975]. Kā viens no pamatrezultātiem minama 1965.gada V.A.Kirka teorēma.

*TEORĒMA 0.1.(V.A.Kirks [1965])*
*Pieņemsim, ka dota refleksīva Banaha telpa X, kopa K ir tās izliekta, slēgta, ierobežota apakškopa ar normālu struktūru. Ja attēlojums f, kurš darbojas no kopas K sevī, ir neizstiepjošs, tad attēlojumam f eksistē nekustīgais punkts kopā K.*

Šī teorēma radusies vienā laikā ar F.E.Braudera [1965] tāda paša tipa rezultātu, kas pierādīts vienmērīgi izliektā Banaha telpā[1], kura vienlaicīgi ir gan refleksīva, gan katrai tās izliektai kopai ir normāla struktūra. Tā kā normālas struktūras jēdziens būs mums nepieciešams arī vēlāk, dodam tā formulējumu. Pirmo reizi normālas struktūras definīcija dota M.S.Brodska un D.P.Milmana [1948] kopīgajā darbā.

---

[1] *Banaha telpu X sauc par vienmērīgi izliektu, ja*

$\forall\varepsilon\in]0;2]\ \exists\delta(\varepsilon)>0\ \forall x,y\in B(0;1): \|x-y\|\ge\varepsilon \rightarrow 2(1-\delta(\varepsilon))$.

Šī definīcija ekvivalenta ar sekojošo:

*Banaha telpa ir vienmērīgi izliekta, ja jebkurām divām virknēm* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$, *kurām* $\|x_n\|\le1$, $\|y_n\|\le1$ *un* $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n+y_n\|=1$ *seko, ka* $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-y_n\|=0$.

Vienmērīgi izliekta Banaha telpa ir arī stingri izliekta Banaha telpa. Par stingri izliektu metrisku telpu runāsim 2.nodaļā.

*DEFINĪCIJA 0.2.Izliektai kopai K no Banaha telpas X ir normāla struktūra, ja katrā izliektā, ierobežotā, nevienelementīgā kopā $H \subset K$ eksistē tāds elements $y \in H$, ka:*

$$\sup_{x \in H} \|y-x\| < \operatorname{diam} H = \sup_{x,y \in H} \|x-y\| .$$

Tūlīt pēc Teorēmas 0.1. parādīšanās pasaulē, daudzi matemātiķi mēģinājuši to vispārināt neizstiepjošu attēlojumu saimei un meklējuši tās kopīgo nekustīgo punktu.

*DEFINĪCIJA 0.3.Pieņemsim, ka F ir attēlojumu $f:K \to K$ (K - patvaļīga telpa) saime. Punktu $x^* \in K$ sauc par saimes F kopīgo nekustīgo punktu , ja katram saimes attēlojumam $f \in F$: $f(x^*)=x^*$.*

Dabīgi rodas jautājums, kādai jābūt attēlojumu saimei, kādiem jābūt papildus nosacījumiem, lai, piemēram, sekmīgi vispārinātu V.A.Kirka Teorēmu 0.1.. Viens no variantiem ir prasība, lai attēlojumu saime būtu komutatīva.

*DEFINĪCIJA 0.4.Attēlojumu saimi F sauc par komutatīvu, ja $\forall x \in K$ (K - patvaļīga telpa) izpildās nosacījums, ka $f(g(x))=g(f(x))$, $\forall f,g \in F$.*

Šajā sakarībā radusies interesanta problēma: ja F ir nepārtrauktu komutatīvu attēlojumu saime, kas attēlo intervālu $[0;1]$ sevī, vai tādai eksistē kopīgs nekustīgais punkts? Izrādās, šis jautājums atrisināts negatīvi. V.M.Bouce [1969] pierāda, ka eksistē divas komutējošas nepārtrauktas funkcijas vienības intervālā, kurām nav kopīga nekustīgā punkta. J.P.Huneke [1969] parāda divus veidus, kā šādas funkcijas konstruēt. Bet jau pirmais pozitīvais rezultāts parādījies 1963.gadā. R.de Marrs komutatīvai neizstiepjošu attēlojumu saimei pierāda sekojošo:

*TEORĒMA 0.2.(R.de Marrs [1963])*
*Pieņemsim, ka X ir Banaha telpa un K ir tās izliekta un kompakta apakškopa. Ja komutatīva neizstiepjošu attēlojumu saime F attēlo kopu K sevī , tad tai eksistē kopīgs nekustīgais punkts.*

Jau pieminētajā F.E.Braudera [1965] rakstā atrodam:

*TEORĒMA 0.3.(F.E.Brauders [1965])*
*Pieņemsim, ka X ir vienmērīgi izliekta Banaha telpa un K ir tās izliekta, slēgta un ierobežota apakškopa. Ja komutatīva neizstiepjošu attēlojumu saime F attēlo kopu K sevī, tad tai eksistē kopīgs nekustīgais punkts.*

Taču vispārīgu V.A.Kirka teorēmas analogu ilgāku laiku neizdevās iegūt. Interesants šajā sakarībā ir L.P.Beljusa un V.A.Kirka 1966.gada raksts. Tanī atrodam divus vispārinājumus.

*TEORĒMA 0.4.(L.P.Beljuss, V.A.Kirks [1966])*
*Pieņemsim, ka X ir refleksīva Banaha telpa un K ir tās izliekta, slēgta un ierobežota apakškopa ar normālu struktūru. Ja F ir komutatīva neizstiepjošu attēlojumu, kas kopu K attēlo sevī, galīga saime, tad saimei F eksistē kopīgs nekustīgais punkts.*

*TEORĒMA 0.5.(L.P.Beljuss, V.A.Kirks [1966])*
*Pieņemsim, ka X ir stingri izliekta, refleksīva Banaha telpa un K ir tās izliekta, slēgta un ierobežota apakškopa. Ja F ir komutatīva neizstiepjošu attēlojumu saime, kas attēlo kopu K sevī, un ir zināms, ka $Fixf \neq \emptyset$, $\forall f \in F$, tad saimei F eksistē kopīgs nekustīgais punkts.*

Otro Teorēmu 0.5. būtiski atvieglina pierādīt sekojoša lemma:

*LEMMA 0.1.*
*Pieņemsim, ka X ir stingri izliekta Banaha telpa un K ir tās izliekta un slēgta apakškopa. Ja neizstiepjošs attēlojums f attēlo kopu K sevī, tad attēlojumam f nekustīgo punktu kopa ir izliekta (un arī slēgta).*

Lemmu 0.1. mēs izmantosim arī 2.nodaļā.

Un tikai 1974.gadā T.C.Lims pilnībā vispārinājis V.A.Kirka Teorēmu 0.1. komutatīvai neizstiepjošu attēlojumu saimei bez apjoma ierobežojuma.

*TEORĒMA 0.6.(T.C.Lims [1974B])*
*Pieņemsim, ka X ir refleksīva Banaha telpa, kopa K ir tās izliekta, slēgta, ierobežota apakškopa ar normālu struktūru. Ja*

*komutatīva neizstiepjošu attēlojumu saime F attēlo kopu K sevī, tad tai eksistē kopīgs nekustīgais punkts kopā K.*

Lai nonāktu līdz šim rezultātam, T.C.Lims sīki izpētījis normālās struktūras jēdzienu ([1974A]). Pirms tam šajā virzienā krietni pastrādājuši bija jau L.P.Beljuss, V.A.Kirks un E.F.Šteiners 1968.gada kopīgajā rakstā.

Varētu teikt, ka ar pamatjēdzieniem un rezultātiem mēs esam iepazinušies, varam šķirt tālāk I daļas lapaspuses.

Kopsavilkumus par neizstiepjošiem attēlojumiem un to nekustīgajiem punktiem varat lasīt V.A.Kirka rakstos [1981B], [1983], kā arī attiecīgajās nodaļās D.R.Smarta [1974], V.Istratesku [1981] un J.Dugundži, A.Granass [1982] grāmatās.

# 1.DAŽI IEVADREZULTĀTI PAR ATTĒLOJUMU SAIMJU NEKUSTĪGAJIEM PUNKTIEM

Pievērsīsimies V.A.Kirka Teorēmai 0.1.([1965]). Ar šīs teorēmas vispārinājumu neizstiepjošu attēlojumu komutatīvai saimei mēs jau iepazināmies 0.nodaļā. Taču tur mēs nerunājām par vēl vienu V.A.Kirka [1965] raksta rezultātu, kas ir šīs Teorēmas 0.1. sekas. Proti:

*TEORĒMAS 0.1. SEKAS (V.A.Kirks,[1965])*
*Pieņemsim, ka K ir netukša, izliekta un slēgta apakškopa refleksīvā Banaha telpā X. Pieņemsim, ka kopai K ir normāla struktūra. Ja attēlojums $f:K\to K$ ir neizstiepjošs un eksistē tāds kopas K punkts p, kuram virkne $(f^n(p))_{n\in\mathbf{N}}$ ir ierobežota, tad attēlojumam f eksistē nekustīgais punkts.*

Atšķirībā no Teorēmas 0.1., Teorēmas 0.1.Sekās ir izmainīts nosacījums par kopas K ierobežotību, tas ir aizstāts ar virknes $(f^n(p))_{n\in\mathbf{N}}$ ierobežotību. Var gadīties, ka konkrētā gadījumā varbūt vieglāk ir meklēt tādu punktu p kopā K, kurā virkne $(f^n(p))_{n\in\mathbf{N}}$ ir ierobežota, nekā noskaidrot pašas kopas ierobežotību. Radās ideja Teorēmas 0.1. Sekas vispārināt attēlojumu saimei. Un, atceroties brīnišķīgo T.C.Lima rezultātu [1974B] (Teorēma 0.6.), vispārinājumu izdarīsim neizstiepjošu attēlojumu komutatīvai saimei. Taču uzreiz jāpasaka, ka attēlojumu saimes gadījumā sarežģītāks kļūst ierobežotības nosacījums. Ir izdevies pierādīt sekojošo:

TEORĒMA 1.1.
Pieņemsim:1) X - refleksīva Banaha telpa;
2) K - netukša, izliekta, slēgta X apakškopa;
3) kopai K ir normāla struktūra;
4) F ir neizstiepjošu attēlojumu, kuri darbojas no kopas K sevī, komutatīva saime;
5) eksistē tāds punkts $p\in K$, ka kopa $S=\{(f_1\circ\ldots\circ f_n)(p)\,|\,f_1,\ldots,f_n\in F\,\&\,n\in\mathbf{N}\}$ ir ierobežota.

Pie šiem nosacījumiem attēlojumu saimei F kopīgo nekustīgo punktu kopa nav tukša.

▾Pierādījums.

Tā kā kopa $S=\{(f_1\bullet\ldots\bullet f_n)(p)\,|\,f_1,\ldots,f_n\in F\,\&\,n\in\mathbf{N}\}$ ir ierobežota, tad eksistē tāds $r\in\mathbf{R}_{++}$, ka S ietilpst slēgtā lodē B(p,r) ar centru punktā p un rādiusu r.

Definēsim kopas:

$K_{f_1\bullet\ldots\bullet f_n}:=B((f_1\bullet\ldots\bullet f_n)(p),r)\cap K,\quad f_1,\ldots,f_n\in F\ \&\ n\in\mathbf{N}.$

Šīs kopas būs slēgtas un izliektas kā slēgtu un izliektu kopu šķēlums, un, protams, ierobežotas. Tās būs arī netukšas, jo $p\in K_{f_1\bullet\ldots\bullet f_n}$. Tiešām: tā kā $(f_1\bullet\ldots\bullet f_n)(p)\in B(p,r)$, tad $\|p-(f_1\bullet\ldots\bullet f_n)(p)\|\leq r$.

Apskatīsim kopu:

$W:=\bigcup\{\bigcap\{\bigcap\{K_{f_1\bullet\ldots\bullet f_n}|f_1,\ldots,f_n\}n=k,k+1,\ldots\}k=0,1,2,\ldots\}.$

W ir netukša, jo p∈W. Kopas S ierobežotības dēļ arī kopa $S':=\bigcup\{B(x,r)\,|\,x\in S\}$ ir ierobežota, bet W⊂S'. Tātad kopa W ir ierobežota. Tā ir arī izliekta, jo izliektu kopu virkne $(\bigcap\{\bigcap\{K_{f_1\bullet\ldots\bullet f_n}|f_1,\ldots,f_n\}n=k,k+1,\ldots\})_{n\in\mathbf{N}}$ ir augoša.

Fiksēsim f∈F brīvi. Pierādīsim, ka f:W→W. Izvēlēsimies x∈W, tad eksistēs tāds k∈**N**, ka $x\in\bigcap\{\bigcap\{K_{f_1\bullet\ldots\bullet f_n}|f_1,\ldots,f_n\}n=k,k+1,\ldots\}$.

Tātad: $\|f(x)-f(f_1\bullet\ldots\bullet f_n)(p)\|\leq\|x-(f_1\bullet\ldots\bullet f_n)(p)\|\leq r$ visiem $f_1\bullet\ldots\bullet f_n\in F, n\geq k$.

Esam ieguvuši, ka $f(x)\in\bigcap\{\bigcap\{K_{f_1\bullet\ldots\bullet f_n}|f_1,\ldots,f_n\}n=k+1,k+2,\ldots\}\subset W$.

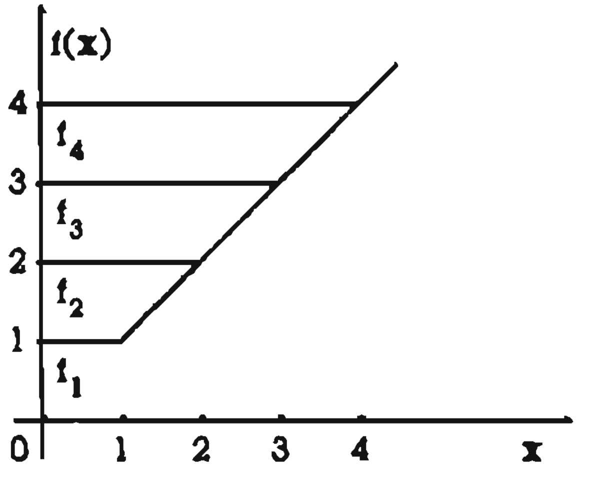
Tātad f:W→W. Tā kā f ir nepārtraukts attēlojums, tad $f:\overline{W}\to\overline{W}$.

Iegūta situācija: F - neizstiepjošu attēlojumu, kas attēlo kopu $\overline{W}$ sevī, komutatīva saime; $\overline{W}$ - netukša, izliekta, slēgta un ierobežota kopa refleksīvā Banaha telpā; kopai $\overline{W}$ ir normāla struktūra ($\overline{W}\subset K$). Varam lietot T.C.Lima Teorēmu 0.6. un secināt, ka attēlojumu saimei F ir kopīgs nekustīgais punkts.▴

Kā rāda nākošais piemērs, kopas S ierobežotības nosacījums Teorēmā 1.1. ir būtisks.

Piemērs 1.1.

■Intervālā $[0;+\infty[$ apskatīsim attēlojumus, kurus definēsim sekojoši: $f_n(x):=max\{x,n\}$, $n=1,2,...$ (zīm. 1.1.). Kaut arī visi Teorēmas 1.1. nosacījumi ir izpildīti, izņemot nosacījumu par kopas S ierobežotību, saimei $F:=\{f_n|n=1,2,...\}$ kopīga nekustīgā punkta nav. Skaidrs, ka katram attēlojumam atsevišķi nekustīgo punktu kopa nav tukša: $Fix(f_n)=[n;+\infty[$, tāpat arī galīgam skaitam šādu attēlojumu kopīgo nekustīgo punktu kopa nav tukša: $Fix(f_{n_1},f_{n_2},...,f_{n_m})=$ $=[max\{n_1,n_2,...,n_m\},+\infty[$, bet bezgalīga attēlojumu skaita gadījumā kopīgu nekustīgo punktu nav. Pie tam, ievērosim, ka šie attēlojumi veido komutatīvu saimi. Piemērs pamācošs tanī nozīmē, ka neierobežotas kopas gadījumā, neiespējami pamatot kopīga nekustīgā punkta eksistenci. Mums nepieciešama papildus informācija.■




zīm.1.1.

Šī piemēra iedvesmoti apskatīsim galīga skaita attēlojumu saimi stingri izliektā Banaha telpā. Kā jau 0.nodaļā tika minēts, tad V.Kirka Teorēmu 0.1. stingri izliektā Banaha telpā attēlojumu saimei bez apjoma ierobežojuma vispirms izdevies vispārināt 1966.gadā(L.P.Beljuss, V.A.Kirks [1966]). Izrādās, saimes galīgums un telpas stingrā izliektība atvieglina prasību par ierobežotību.

TEORĒMA 1.2.

Pieņemsim: 1) X - stingri izliekta, refleksīva Banaha telpa;

2) K - netukša, izliekta, slēgta X apakškopa;

3) kopai K ir normāla struktūra;

4) F ir galīga skaita neizstiepjošu attēlojumu, kuri darbojas no kopas K sevī, komutatīva saime;

5) eksistē tāds punkts $p \in K$, ka virknes $(f^n(p))_{n \in N}$ katram $f \in F$ ir ierobežotas.

Pie šiem nosacījumiem saimei F eksistē kopīgs nekustīgais punkts.

▾Pierādījums.

Pēc V.Kirka 0.1.Teorēmas Sekām zināms, ka $Fixf \neq \emptyset$, $\forall f \in F$. Un tā kā X— stingri izliekta telpa, $K \subset X$ - izliekta un slēgta, $f:K \to K$ - neizstiepjoši attēlojumi ($f \in F$), tad pēc Lemmas 0.1. kopas Fixf visiem $f \in F$ ir izliektas. Tā kā visi attēlojumi $f \in F$ ir nepārtraukti, tās būs arī slēgtas kopas. Pieņemsim, ka $F = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$, un pierādīsim, ka

$$FixF = \bigcap \{ Fixf_i | i=1,2,\dots,m\} \neq \emptyset.$$

Pierādījumu veiksim ar matemātiskās indukcijas metodi pēc attēlojumu skaita.

Indukcijas bāze: m=1 - apgalvojums patiess, jo sakrīt ar V.A.Kirka Teorēmas 0.1. Sekām.

Induktīvais pieņēmums: m=n un $FixF = \bigcap \{ Fixf_i | i=1,2,\dots,n\} \neq \emptyset$.

Induktīvā pāreja. Apzīmēsim $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ ar F' un $f_{n+1}$ ar f. Jāpierāda, ka

$$FixF = FixF' \cap Fixf = \bigcap \{ Fixf_i | i=1,2,\dots,n+1\} \neq \emptyset.$$

Pēc induktīvā pieņēmuma $FixF' \neq \emptyset$. Ņemsim $x \in FixF'$, tad: $f_i(x)=x$, $\forall i \in \{1,2,\dots,n\}$. Vienādības $f(x) = f(f_i(x)) = f_i(f(x))$, $\forall i \in \{1,2,\dots,n\}$ pierāda, ka $f(x) \in Fixf_i$, $i=1,2,\dots,n$, jeb $f(x) \in FixF'$ un tātad $f:FixF' \to FixF'$. Kopas $Fixf_i$, $i=1,2,\dots,n$ ir netukšas, slēgtas un izliektas, tāpēc kopa FixF' ir slēgta un izliekta kā slēgtu un izliektu kopu šķēlums un pēc induktīvā pieņēmuma arī netukša.

Izvēlēsimies brīvi $z \in Fixf$. Funkcionālis $f(y) := \|z-y\|$, $y \in K$ ir no apakšas vāji pusnepārtraukts un līdz ar to sasniedz savu mazāko vērtību katrā netukšā, slēgtā un izliektā refleksīvas Banaha telpas apakškopā (skatīt, piemēram, V.A.Trenogins [1980], 475. lpp), tātad arī kopā FixF'. Tā kā telpa X ir stingri izliekta, tad punktam z kopā FixF' eksistējošais tuvākais punkts $z_0$ ir noteikts viennozīmīgi.

Tā kā $f:FixF' \to FixF'$, tad līdz ar to:

$$\|z-z_0\| = inf\{\|z-y\| | y \in FixF'\} \leq \|z-f(z_0)\| = \|f(z)-f(z_0)\| \leq \|z-z_0\|.$$

Secinām, ka $f(z_0)=z_0$. Tātad

$$z_0 \in (\bigcap\{Fixf_i \mid i=1,2,\ldots,n\}) \bigcap Fixf = FixF \neq \emptyset.$$

Teorēma pierādīta.▲

Atzīmēsim, ka rezultātu nevar vispārināt bezgalīga apjoma saimei F, jo pietrūkst zināšanu par kopu K. Taču visu "smagumu" varam pārnest uz attēlojumu saimi jeb precīzāk uz vienu saimes attēlojumu.

**TEOREMA 1.3.**

Pieņemsim: 1) X - stingri izliekta, refleksīva Banaha telpa;

2) K - netukša, izliekta, slēgta X apakškopa;

3) kopai K ir normāla struktūra;

4) F ir neizstiepjošu attēlojumu, kuri darbojas no kopas K telpā X, komutatīva saime;

5) eksistē tāds attēlojums $f_0 \in F$, kura nekustīgo punktu kopa $Fixf_0$ ir netukša, slēgta, ierobežota ar normālu struktūru.

Pie šiem nosacījumiem saimei F eksistē kopīgs nekustīgais punkts.

▼Pierādījums.

Viegli ievērot, ka visi attēlojumi $f \in F$ kopu $Fixf_0$ attēlo sevī: ja $x \in Fixf_0$ un $f \in F$, tad $f(x)=f(f_0(x))=f_0(f(x))$ jeb $f(x) \in Fixf_0$. Savukārt bez jau esošās informācijas par kopu $Fixf_0$, pēc Lemmas 0.1. ir zināms, ka tā ir arī izliekta kopa. Pēc V.A.Kirka Teorēmas 0.1. varam secināt, ka jebkuram attēlojumam $f \in F$ eksistē nekustīgais punkts kopā $Fixf_0$. Taču tagad varam atsaukties uz L.P.Beljusa un V.A.Kirka Teorēmu 0.5. un secināt, ka saimes F kopīgo nekustīgo punktu kopa nav tukša.▲

Iepriekšējie rezultāti garantē attēlojumu saimes kopīga nekustīgā punkta eksistenci. Taču tikpat labi var izrādīties noderīgi tie attēlojumu nekustīgie punkti, kas nav kopīgi. Uz šāda tipa rezultātu mūs pamudina iepazīšanās ar D.R.Smarta [1961], M.Edelsteina [1962] un V.G.Dotsona [1971/2] darbiem. Iegūtais vispār ir netradicionāls rezultāts tieši ar to, ka garantē nekustīgo punktu eksistenci katram saimes attēlojumam atsevišķi.

TEORĒMA 1.4.

Pieņemsim: 1) X - normēta vektoru telpa (pār lauku $\mathbf{R}$ vai $\mathbf{C}$);

2) K - telpas X kompakta apakškopa;

3) $F=\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ ir galīga skaita neizstiepjošu attēlojumu saime, kas apmierina prasības:

a) $\forall x, y \in K (x \neq y): \min\{\|f_i(x)-f_i(y)\| | i=1,2,\ldots,n\} < \|x-y\|$;

b) $\forall x \in K$: $conv\{f_1(x), \ldots, f_n(x)\} \subset K$.

Pie šiem nosacījumiem katram attēlojumam $f_i \in F$ eksistē savs nekustīgais punkts $x_i$: $f_i(x_i)=x_i$, $i=1,2,\ldots,n$.

▾Pierādījums.

Definēsim attēlojumus $t_i$ sekojošā veidā:

$$t_i(x) := \|x-f_i(x)\|, \ i=1,2,\ldots,n, \ \forall x \in X.$$

Pēc Veierštrāsa teorēmas seko, ka

$$\exists x_i \in X: \ t_i(x_i) = \inf t_i(K), \ i=1.2,\ldots,n.$$

Pierādīsim, ka $\inf t_i(X)=0$, $i=1,2,\ldots,n$.

Apskatīsim attēlojumu

$$h_\alpha(x) := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x), \ \forall x \in K \ (\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n), \alpha_i>0, i=1,2,\ldots,n, \sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1).$$

No nosacījuma b) seko, ka $h_\alpha$: $K \to K$.

Izvēlēsimies $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ un $\varepsilon \in \mathbf{R}_{++}$ brīvi. Pierādīsim, ka eksistē tāds $\alpha$ $(\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n), \alpha_j>0, j=1,2,\ldots,n, \sum_{j=1}^{n}\alpha_j=1)$, ka visiem $x \in X$: $\|f_i(x)-h_\alpha(x)\| < \varepsilon$.

Ir spēkā nevienādības:

$$\|f_i(x)-h_\alpha(x)\| = \|f_i(x)-\sum_{j=1}^{n}\alpha_j f_j(x)\| = \|(1-\alpha_i)f_i(x) - \sum_{j=1, j\neq i}^{n}\alpha_j f_j(x)\| \leq$$

$$\leq (1-\alpha_i)\|f_i(x)\| + \|\sum_{j=1, j\neq i}^{n}\alpha_j f_j(x)\|.$$

K ir kompakta kopa vektoru telpā, tātad tā ir ierobežota, no šejienes seko, ka:

$$\exists c \in \mathbf{R}_{++} \forall x \in X: \ \|f_i(x)\| \leq c.$$

Turpinot iepriekšējos novērtējumus, iegūsim:

$$\|f_i(x)-h_\alpha(x)\| \leq (1-\alpha_i)c+(1-\alpha_i)c = 2c(1-\alpha_i).$$

Mēs varam izvēlēties tādu $\alpha_i \in ]0;1[$, $ka\ 2c(1-\alpha_i) < \varepsilon$, un ņemam

$$\alpha_j := \frac{1-\alpha_i}{n-1},\ j=1,2,\ldots,n,\ j\neq i.$$

Pierādīsim, ka attēlojums $h_\alpha$ ir stingri neizstiepjošs. Patiešām: brīvi izvēlētiem x,y∈K (x≠y) izpildās sakarības

$$\|h_\alpha(x)-h_\alpha(y)\| = \|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i(x) - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i(y)\| =$$

$$= \|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i (f_i(x)-f_i(y))\| \le \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\|f_i(x)-f_i(y)\|$$

un tā kā visi attēlojumi $f_i$ ir neizstiepjoši un izpildās a), tad

$$\|h_\alpha(x)-h_\alpha(y)\| < \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\|x-y\| = \|x-y\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = \|x-y\|.$$

Pēc Edelsteina teorēmas [1962] seko, ka

$$\exists x_i \in X:\ h_\alpha(x_i) = x_i.$$

No augstāk iegūtajām nevienādībām $\|f_i(x_i)-h_\alpha(x_i)\| < \varepsilon$, i=1,2,...,n un tikko iegūtās vienādības seko, ka $\|f_i(x_i)-x_i\| < \varepsilon$. Savukārt no šejienes: $\inf t_i(X) = 0$. ▲

Nosacījumu a) gribētos nosaukt par kompensācijas principu, jo tieši tas, ka jebkuram nesakrītošam punktu pārim x un y varam piemeklēt tādu saimes F attēlojumu f, kurš punktu x un y attēlus "savelk" tuvāk, atļauj pierādījumā atsaukties uz Edelsteina teorēmas lietojumu. Varbūt var atrast vēl citus kompensācijas nosacījumus? Iespējams, taču ar to šeit nenodarbosimies. Mūsu mērķis šajā nodaļā bija iepazīties ar dažām attēlojumu saimju nekustīgo punktu teorēmām, ar to gaisotni, kas sastopama šāda rakstura rezultātos. Turpmāk mēs pieturēsimies pie pirmajās trijās teorēmās iesāktā ceļa - meklēsim saimju kopīgos nekustīgos punktus.

# 2. STINGRI IZLIEKTAS METRISKAS TELPAS

## 2.1. IZLIEKTAS KOPAS UN STINGRI IZLIEKTAS BANAHA TELPAS

Šajā apakšnodaļā apskatīsim jau zināmus rezultātus. Tas darīts ar nolūku, lai pēc tam varētu salīdzināt ar iegūtajiem jaunajiem jēdzieniem un lai redzētu atšķirību starp tiem.

Pieņemsim, ka dota vektoru telpa X un divi tās punkti $x,y\in X$.

*DEFINĪCIJA 2.1.1. Par slēgtu nogriezni, kas savieno punktus $x,y\in X$, sauc visu to punktu z kopumu, kuriem ir spēkā sakarība $z=tx+(1-t)y$, $t\in[0,1]$. Punktus $z=tx+(1-t)y$, kur $t\in]0;1[$, sauc par iekšējiem nogriežņa punktiem.*

*DEFINĪCIJA 2.1.2. Kopu $K\subset X$ sauc par izliektu, ja līdz ar jebkuriem diviem punktiem $x,y\in K$ šai kopai pieder arī šos punktus savienojošais slēgtais nogrieznis.*

Atcerēsimies, ka jebkura slēgta lode $B(x,r)=\{y\in X|\|x-y\|\le r\}, x\in X, r\in\mathbf{R}_{++}$ ir izliekta kopa, kā arī izliektu kopu šķēlums ir izliekta kopa. Taču, kā vēlāk būs redzams, patvaļīgā metriskā telpā šādas īpašības nevar garantēt. Tāpēc apskatīsim daudz smagāku telpas nosacījumu - stingro izliektību.

*DEFINĪCIJA 2.1.3. Banaha telpu X sauc par stingri izliektu, ja tās vienības sfēras katrs punkts nav iekšējs punkts vienības lodē ietilpstošajos nogriežņos.*

*APGALVOJUMS 2.1.1. (V. I. Istratesku [1981], 57. lpp) Banaha telpā X sekojoši nosacījumi ir ekvivalenti:*

1. *X - stingri izliekta telpa;*
2. $\forall x,y\in B(0,1)\ (x\neq y): \|x+y\|<2$;
3. $\forall x,y\in X: \|x+y\|=\|x\|+\|y\|\Rightarrow((\exists\lambda\in\mathbf{R}_{++}: x=\lambda y)\vee(x=0)\vee(y=0))$.

Atzīmēsim, ka Hilberta telpa, $l_p$ un $L_p$, $p>1$, ir stingri izliektas telpas. Atcerēsimies arī 0.nodaļā formulēto Lemmu 0.1.! Šo Lemmu 0.1. bieži izmanto attēlojumu nekustīgo punktu eksistences pierādījumos stingri izliektās Banaha telpās (piemēram, M.Edelsteins [1964], [1974], L.P.Beljuss, V.A.Kirks [1966], Z.Opials [1967], P.K.F.Kunfittings [1974]).

Taču ne tikai neizstiepjošam attēlojumam stingri izliektas Banaha telpas izliektā un slēgtā apakškopā nekustīgo punktu kopa ir izliekta un slēgta (neizstiepjošs attēlojums ir nepārtraukts!)! Šāda īpašība piemīt arī citām plašākām attēlojumu saimēm, piemēram, kvazi-neizstiepjošiem un asimptotiski neizstiepjošiem attēlojumiem.

*DEFINĪCIJA 2.1.4. (V.G.Dotsons [1972]) Attēlojumu $f:K\to K$ (K - normētas lineāras telpas apakškopa) sauc par kvazi-neizstiepjošu, ja tam eksistē vismaz viens nekustīgais punkts kopā K un jebkuram fiksētam attēlojuma f nekustīgajam punktam* $p\in K$: $\|f(x)-p\|\le\|x-p\|$, $\forall x\in K$.

*DEFINĪCIJA 2.1.5. (K.Gēbels, V.A.Kirks [1972]) Attēlojumu $f:K\to K$ (K - normētas lineāras telpas apakškopa) sauc par asimptotiski neizstiepjošu, ja*

$$\forall x,y\in K:\ \|f^i(x)-f^i(y)\|\le k_i\|x-y\|,$$

*kur $(k_i)_{i\in\mathbf{N}}$ ir tādu reālu skaitļu virkne, ka $\lim\limits_{i\to\infty}k_i=1$ (tiek pieņemts, ka $k_i\ge1$, $k_{i+1}\le k_i$, $i=1,2,\dots$).*

Kā šos jēdzienus un rezultātus aprakstīt patvaļīgā metriskā telpā ?

## 2.2. IZLIEKTAS KOPAS UN STINGRI IZLIEKTAS METRISKAS TELPAS

Pieņemsim, ka dota metriska telpa $(X,d)$ ar metriku $d$.

DEFINĪCIJA 2.2.1. Kopu $K\subset X$ sauc par izliektu, ja jebkuriem diviem elementiem $x,y\in K$ un katram $t\in[0,1]$ eksistē tāds elements $z \in K$, ka izpildās vienādības:

$d(x,z)=td(x,y)$ un $d(z,y)=(1-t)d(x,y)$.

Atzīmēsim, ka šīs definīcijas nozīmē slēgtas lodes var nebūt izliektas kopas, kā arī izliektu kopu šķēlums ir ne vienmēr izliekta kopa.

Piemērs 2.2.1.

▪Apskatīsim diskrētu metrisku telpu $X$: $d(x,y)=0$, ja $x=y$, un $d(x,y)=1$, ja $x \neq y$, visiem $x,y \in X$. Tad $B(u,r)=\{u\}$, ja $r<1$, un $B(u,r)=X$, ja $r \geq 1$, katram $u \in X$. Otrajā gadījumā lode nav izliekta kopa.▪

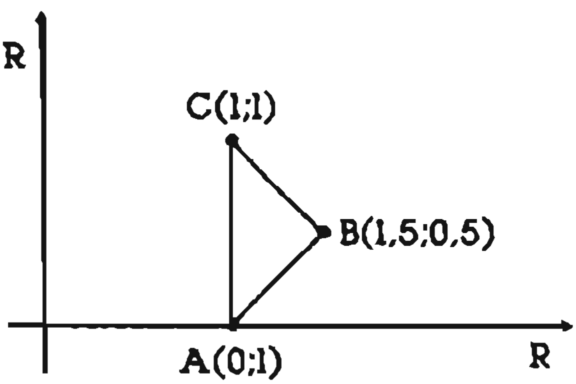
Piemērs 2.2.2.

▪Apskatīsim telpu $\mathbf{R}^2$ ar maksimuma metriku:

$$d(x,y)=\max\{|y_i-x_i|\,|\,i=1,2\},$$

$$\forall x=(x_1,x_2),\, y=(y_1,y_2) \in \mathbf{R}^2.$$

Tad lauztā līnija ABC un nogrieznis AC ir izliektas kopas, bet to šķēlums {A,C} nav izliekta kopa (skatīt zīm.2.2.2.).▪




zīm.2.2.2.

DEFINĪCIJA 2.2.2.[1] Metrisku telpu $(X,d)$ sauc par stingri izliektu, ja jebkuriem diviem elementiem $x,y \in X$ un katram $t \in [0,1]$ eksistē viens vienīgs elements $z \in X$ tāds, ka izpildās vienādības: $d(x,z)=td(x,y)$ un $d(z,y)=(1-t)d(x,y)$.

---

[1]Kad jēdziens par stingri izliektu metrisku telpu bija jau izstrādāts, autore šādu definīciju atrada arī Takahaši [1970] rakstā. Taču nekāda dziļāka analīze tur nav dota. Autors izmanto šo jēdzienu Takahaši izliektā metriskā telpā, kurā laimīgā kārtā ne tikai izliektu kopu šķēlums ir izliekta kopa, bet arī lodes ir izliektas kopas, kā arī stingri izliektā metriskā telpā neizstiepjoša attēlojuma nekustīgo punktu kopa ir Takahaši izliekta kopa.

No šīs Definīcijas 2.2.2., piemēram, seko, ka telpa $\mathbb{R}^2$ ar Eiklīda metriku ir stingri izliekta, bet ar maksimuma metriku tā nav stingri izliekta.

Stingri izliektā metriskā telpā ir spēkā sekojošs rezultāts:

**TEORĒMA** 2.2.1. Ja $\mathbf{K}$ ir izliektu kopu saime stingri izliektā metriskā telpā $(X,d)$, tad $\bigcap\{K|K\in\mathbf{K}\}$ ir izliekta kopa.

▾Pierādījums.

Pieņemsim, ka $x,y\in\bigcap\{K|K\in\mathbf{K}\}$ un $t\in[0,1]$. Tad $x,y\in K$ jebkurai kopai $K\in\mathbf{K}$ un tāpēc eksistē tāds punkts $z\in K$, ka izpildās sakarības:

$d(x,z)=td(x,y)$ un $d(z,y)=(1-t)d(x,y)$.

Tā kā X ir stingri izliekta telpa, tad šāds z ir viens vienīgs. Tāpēc $z\in\bigcap\{K|K\in\mathbf{K}\}$ un teorēma pierādīta.▴

Stingri izliektā metriskā telpā ir spēkā Lemmas 0.1. sekojošs vispārinājums:

**LEMMA** 2.2.1. Pieņemsim, ka X ir stingri izliekta metriska telpa. Ja attēlojums $f:X\to X$ ir neizstiepjošs, tad tā nekustīgo punktu kopa Fixf ir izliekta.

▾Pierādījums.

Apskatīsim divus brīvi izvēlētus punktus x un y no attēlojuma f nekustīgo punktu kopas: $x,y\in \mathrm{Fix}f$. Izvēlēsimies $t\in[0,1]$. Sameklēsim punktiem x,y un konstantei t atbilstošo $z\in X$ tādu, ka: $d(x,z)=td(x,y)$ un $d(z,y)=(1-t)d(x,y)$. Telpas X stingrās izliektības dēļ tāds $z\in X$ eksistē, pie tam viens vienīgs.

Novērtēsim attālumu starp punktu x un y attēliem pie attēlojuma f:

$d(f(z),f(x))\le d(z,x)=td(x,y)$.

Tā kā $x\in\mathrm{Fix}f$, tad $d(f(z),x)\le td(x,y)$.

Līdzīgi: $d(f(z),f(y))\le d(z,y)=(1-t)d(x,y)$,

$d(f(z),y)\le(1-t)d(x,y)$.

Izmantojot trijstūra nevienādību, attālumu starp x un y varam novērtēt sekojoši:

$$d(x,y)\leq d(x,f(z))+d(f(z),y)\leq td(x,y)+(1-t)d(x,y)=d(x,y).$$

No šejienes seko, ka:

$$d(x,f(z)) = td(x,y) \text{ un } d(f(z),y) = (1-t)d(x,y).$$

No telpas X stingrās izliektības seko, ka $z=f(z)$ un $z\in Fixf$.▲

Ja Definīcijās 2.1.4. un 2.1.5. normētu vektoru telpu aizstājam ar metrisku telpu un līdz ar to normas vietā lietojam metriku, varam pierādīt sekojošus rezultātus.

LEMMA 2.2.2.
Pieņemsim, ka K ir slēgta un izliekta kopa stingri izliektā metriskā telpā X. Ja attēlojums $f:K\to K$ ir kvazi-neizstiepjošs tad tā nekustīgo punktu kopa Fixf ir slēgta un izliekta.

▼Pierādījums.

Tā kā attēlojums f ir kvazi-neizstiepjošs, tad $Fixf\neq\emptyset$ un f ir nepārtraukts attēlojums visos savos nekustīgajos punktos. Pieņemsim, ka Fixf nav slēgta kopa. Tad $\exists x\in \delta Fixf$: $x\notin Fixf$. Kopas K slēgtības dēļ $x\in K$. Un tā kā $x\notin Fixf$, tad $f(x)\neq x$.

Definēsim $r:=⅓d(f(x),x)>0$. Tad eksistēs tāds $y\in Fixf$, ka $d(x,y)\leq r$. Tā kā f ir kvazi-neizstiepjošs attēlojums, tad $d(f(x),y)\leq d(x,y)\leq r$, un mēs iegūstam:

$$3r=d(f(x),x)\leq d(f(x),y)+d(y,x)\leq 2r.$$

Šī pretruna parāda, ka sākotnējais pieņēmums bijis aplams.

Pamatosim, ka Fixf ir izliekta kopa. Pieņemsim, ka $x,y\in Fixf$, $x\neq y$ un $t\in]0;1[$. Mums jāpierāda, ka tad punkts $z\in X$, kurš izvēlēts sekojoši: $d(x,z)=td(x,y)$ un $d(z,y)=(1-t)d(x,y)$, pieder kopai Fixf. Tā kā kopa K ir izliekta, tad $z\in K$. Un tā kā f ir kvazi-neizstiepjošs, tad

$$d(f(z),x)\leq d(z,x) \text{ un } d(f(z),y)=d(z,y).$$

Savukārt $d(x,z)=td(x,y)$ un $d(z,y)=(1-t)d(x,y)$, tāpēc

$$d(x,y)\leq d(x,f(z))+d(f(z),y)\leq$$
$$\leq d(z,x)+d(z,y)=td(x,y)+(1-t)d(x,y)=d(x,y).$$

Ieguvām: $d(x,f(z))=d(z,x)=td(x,y)$,

$$d(f(z),y)=d(z,y)=(1-t)d(x,y).$$

No stingrās izliektības seko, ka $z=f(z)$ (z unitāte!), tātad $z\in Fixf$, t.i., Fixf ir izliekta kopa.▲

LEMMA 2.2.3.
Pieņemsim, ka K ir slēgta un izliekta kopa stingri izliektā

metriskā telpā X. Ja attēlojums $f:K\to K$ ir asimptotiski neizstiepjošs, tad tā nekustīgo punktu kopa Fixf ir slēgta un izliekta.

▾Pierādījums.

Kopas Fixf slēgtība seko no attēlojuma f nepārtrauktības.

Izvēlamies divus punktus x,y no Fixf, $x\neq y$, tad arī $f^i(x),\ f^i(y)\in Fixf,\ i=1,2,\ldots$.

Nofiksējam patvaļīgu $t\in]0;1[$ un atrodam tam atbilstošo $z\in K$: $d(x,z)=td(x,y)$, $d(z,y)=(1-t)d(x,y)$. Tā kā telpa ir stingri izliekta, tad šāds z ir viens vienīgs. Mums jāpierāda, ka $z\in Fixf$ jeb $z=f(z)$.

No asimptotiski neizstiepjoša attēlojuma definīcijas seko, ka

$$d(f^i(z),x)=d(f^i(z),f^i(x))\leq k_i d(z,x)=tk_i d(x,y),\qquad (2.2.3.1)$$

$$d(f^i(z),y)=d(f^i(z),f^i(y))\leq k_i d(z,y)=(1-t)k_i d(x,y).\qquad (2.2.3.2)$$

Izmantojot trijstūra nevienādību un iepriekšējās divas nevienādības, iegūsim:

$$\begin{aligned}&d(x,y)\leq d(x,f^i(z))+d(f^i(z),y)\leq\\&\leq tk_i d(x,y)+(1-t)k_i d(x,y)=d(x,y)\end{aligned}.$$

Liekot i tiekties uz bezgalību, robežgadījumā iegūsim:

$$d(x,\lim_{i\to\infty}f^i(z))+d(\lim_{i\to\infty}f^i(z),y)=td(x,y)+(1-t)d(x,y).$$

No (2.2.3.1) un (2.2.3.2) seko, ka

$$\begin{aligned}&d(x,\lim_{i\to\infty}f^i(z))=td(x,y),\\&d(\lim_{i\to\infty}f^i(z),y)=(1-t)d(x,y),\ i=1,2,\ldots.\end{aligned}$$

z unitātes dēļ: $\lim_{i\to\infty}f^i(z)=z$. Taču

$$z=\lim_{i\to\infty}f^i(z)=\lim_{i\to\infty}f^{i+1}(z)=f(\lim_{i\to\infty}f^i(z))=f(z).$$

Tātad Fixf ir izliekta kopa.▴

1.nodaļā mēs iepazināmies ar dažām teorēmām stingri izliektās Banaha telpās. Iedvesmojoties no Teorēmām 1.2. un 1.3., pamēģināsim iegūt jaunu rezultātu stingri izliektā metriskā telpā.

TEORĒMA 2.2.4.

Ja: 1) X - stingri izliekta metriska telpa;

2) patvaļīgiem punktiem $a,b,c\in X$ un jebkuram $z\in X$: $d(b,z)=td(b,c)$ un $d(z,c)=(1-t)d(b,c)$, kur $t\in]0;1[$, ir spēkā nevienādība: $d(a,z)<\max\{d(a,b),d(a,c)\}$;

3) $K\subset X$ - izliekta un kompakta kopa;

4) F ir neizstiepjošu attēlojumu, kuri darbojas no kopas K sevī, komutatīva saime;

5) visiem $f\in F$: $Fixf\neq\emptyset$,

tad saimei F eksistē kopīgs nekustīgais punkts.

▾Pierādījums.

Pierādījumu veiksim ar matemātiskas indukcijas metodi pēc attēlojumu skaita.

Indukcijas bāze: n=1 - apgalvojums seko no teorēmas piektā nosacījuma.

Induktīvais pieņēmums: n=k - $\bigcap_{i=1}^{k} Fixf_i\neq\emptyset$.

Induktīvā pāreja. Jāpierāda, ka $\bigcap_{i=1}^{k+1} Fixf_i\neq\emptyset$. Pēc induktīvā pieņēmuma $\bigcap_{i=1}^{k} Fixf_i\neq\emptyset$. Izvēlamies $x\in\bigcap_{i=1}^{k} Fixf_i\neq\emptyset$, tad $f_i(x)=x$, $\forall i\in\{1,2,...,k\}$. Vienādības $f_{k+1}(x)=f_{k+1}(f_i(x))=f_i(f_{k+1}(x))$, $\forall i\in\{1,2,...,k\}$ pamato, ka $f_{k+1}(x)\in\bigcap_{i=1}^{k} Fixf_i$, tātad $f_{k+1}:\bigcap_{i=1}^{k} Fixf_i\to\bigcap_{i=1}^{k} Fixf_i$. Jāpamato, ka attēlojumam $f_{k+1}$ eksistē nekustīgais punkts kopā $\bigcap_{i=1}^{k} Fixf_i$.

Kopas $Fixf_i$, $i=1,2,...,k$ ir netukšas, izliektas (Lemma 2.2.1.) un slēgtas ($f_i$ -nepārtraukti attēlojumi!), tāpēc kopa $\bigcap_{i=1}^{k} Fixf_i$ ir slēgta un izliekta kā slēgtu un izliektu kopu šķēlums, un netukša pēc induktīvā pieņēmuma, tā ir kompakta kopa kā kompaktas kopas slēgta apakškopa. Izvēlamies $z\in Fixf_{k+1}$. Nepārtraukta reālā mainīgā funkcija $T(y):=d(z,y)$, $y\in\bigcap_{i=1}^{k} Fixf_i$ sasniedz savu mazāko vērtību katrā kompaktā kopā, pieņemsim punktā $z_0$. Tā kā izpildās otrais nosacījums, tad punktam z kopā $\bigcap_{i=1}^{k} Fixf_i$ eksistējošais tuvākais elements $z_0$ ir noteikts viennozīmīgi (▼ no pretējā, pieņem, ka eksistē vēl otrs $z_0'$, kuram $d(z,z_0') = inf\{d(z,y) \mid y \in \bigcap_{i=1}^{k} Fixf_i\}$. Kopa $\bigcap_{i=1}^{k} Fixf_i$ ir izliekta, tāpēc jebkuram $t \in ]0;1[$ atradīsies tāds $z_0'' \in \bigcap_{i=1}^{k} Fixf_i$, ka $d(z_0, z_0'') = td(z_0, z_0')$ un $d(z_0'', z_0') = (1-t)\, d(z_0, z_0')$.

Ņemot vērā otro nosacījumu:

$$d(z, z_0'') < max\{d(z, z_0), d(z, z_0')\} = inf\{d(z,x) \mid x \in \bigcap_{i=1}^{k} Fixf_i\}.$$

Esam ieguvuši, ka $z_0''$ atrodas tuvāk punktam z nekā punkti $z_0$ un $z_0'$. Iegūtā pretruna liecina, ka pieņēmums par vairāku tuvāko punktu eksistenci bijis aplams ▲).

Tā kā $f_{k+1}: \bigcap_{i=1}^{k} Fixf_i \to \bigcap_{i=1}^{k} Fixf_i$, tad:

$$d(z, z_0) = inf\{d(z,y) \mid y \in \bigcap_{i=1}^{k} Fixf_i\} \le d(z, f_{k+1}(z_0)) =$$

$$= d(f_{k+1}(z), f_{k+1}(z_0)) \le d(z, z_0). \qquad (2.2.4.1)$$

Tā kā pirms tam jau pārliecinājāmies, ka tuvākais elements $z_0$ ir noteikts viennozīmīgi, tad atliek secināt, ka $f_{k+1}(z_0) = z_0$. Tātad $\bigcap_{i=1}^{k+1} Fixf_i \neq \emptyset$.

No kopas K kompaktības seko, ka nekustīgo punktu kopu šķēlums ir netukša kopa arī patvaļīgam attēlojumu skaitam.▲

PIEZĪME 2.2.1.

Ja Teorēmas 2.2.4. 4) nosacījumā neizstiepjošu attēlojumu saimi aizstājam ar kvazi-neizstiepjošu attēlojumu saimi un atmetam 5) nosacījuumu (tas automātiski seko no kvazi-neizstiepjoša attēlojuma definīcijas), tad Teorēmas 2.2.4. apgalvojums paliek spēkā. Nevienādības (2.2.4.1) pierādījums saglabājas.

Līdzīgi, ja Teorēmas 2.2.4. 4) nosacījumā neizstiepjošu attēlojumu saimi aizstājam ar asimptotiski neizstiepjošu attēlojumu saimi, tad Teorēmas 2.2.4. apgalvojums paliek spēkā. Nevienādību (2.2.4.1) varam pamatot sekojoši:

$$d(z,z_0)=\inf\{d(z,y)\,|\,y\in\bigcap_{i=1}^{n}Fixf_i\}\le$$
$$\le d(z,f^{i}_{k+1}(z_0))=d(f^{i}_{k+1}(z),f^{i}_{k+1}(z_0))\le k_i d(z,z_0),\ i=1,2,\ldots$$

Robežgadījumā, kad $\lim_{i\to\infty}k_i=1$, iegūsim, ka

$$d(z,z_0)=d(z,\lim_{i\to\infty}f^{i}_{k+1}(z_0)).$$

No punkta $z_0$ unitātes seko, ka $z_0=\lim_{i\to\infty}f^{i}_{k+1}(z_0)$. Un tā kā

$$z_0=\lim_{i\to\infty}f^{i}_{k+1}(z_0)=\lim_{i\to\infty}f^{i+1}_{k+1}(z_0)=f\left(\lim_{i\to\infty}f^{i}_{k+1}(z_0)\right)=f(z_0),$$

tad Teorēma 2.2.4. arī šim gadījumam ir pierādīta ▲.

PIEZĪME 2.2.2.
Teorēmas 2.2.4. otrais nosacījums izliektā metriskā telpā X nozīmē, ka lodes ir izliektas kopas un sfēras nesatur "nogriežņus", t.i., no nosacījuma, ka $\forall a,b,c\in X\ \forall t\in]0;1[\ \exists z\in X$: $d(b,z)=td(b,c)$, $d(z,c)=(1-t)d(b,c)$ un ir spēkā nevienādība: $d(a,z)<\max\{d(a,b),d(a,c)\}$, seko nosacījums, ka $B(a,r):=\{y|d(a,y)\le r\}$, $r\in\mathbf{R}_{++}$, ir izliekta kopa Definīcijas 2.2.1. nozīmē un $\forall b,c\in B\ \forall t\in]0;1[$ atbilstošais $z\in B$: $d(b,z)=td(b,c)$ un $d(z,c)=(1-t)d(b,c)$, no lodes centra a atrodas stingri mazākā attālumā par doto rādiusu r.

## 2.3. VĒLREIZ PAR STINGRI IZLIEKTĀM BANAHA TELPĀM

Stingri izliektas metriskas telpas Definīcijā 2.2.2.mēs nelietojām lodes jēdzienu. Pārfrazējot vektoru telpas jēdzienos Definīciju 2.2.2., iegūsim:

DEFINĪCIJA 2.3.1. Banaha telpu X sauc par stingri izliektu, ja:
$\forall x,y\in X\ \forall t\in[0,1]\ \exists!\, z\in X$: $\|x-z\|=t\|x-y\|$, $\|z-y\|=(1-t)\|x-y\|$.

Patiešām, šī Definīcija 2.3.1. ir ekvivalenta ar

Definīciju 2.1.3.. To mēs pamatosim, izmantojot zināmo Apgalvojumu 2.1.1..

APGALVOJUMS 2.3.1.

Banaha telpā X sekojoši nosacījumi ir ekvivalenti:

1. $\forall x,y\in X: \|x+y\|=\|x\|+\|y\| \rightarrow ((\exists\lambda\in\mathbf{R}_{++}: x=\lambda y)\vee x=0\vee y=0)$;

2. $\forall x,y\in X\ \forall t\in[0,1]\ \exists!\, z\in X: \|x-z\|=t\|x-y\|, \|z-y\|=(1-t)\|x-y\|$.

▾Pierādījums.

$\Longrightarrow$ Vispirms pamatosim, ka no pirmā nosacījuma seko otrais.

Izvēlamies brīvi $x,y\in X$ un $t\in[0,1]$. Ja $z=(1-t)x+ty$, tad:

$\|x-z\|=\|x-((1-t)x+ty)\|=t\|x-y\|$,

$\|z-y\|=\|(1-t)x+ty-y\|=(1-t)\|x-y\|$.

Pie tam šāds punkts z ir viens vienīgs. Pamatosim to. Pieņemsim, ka ir divi tādi punkti $z_1, z_2 (z_{1,2}\neq x, z_{1,2}\neq y)$, kuriem izpildās sakarības:

$$\|x-z_{1,2}\|=t\|x-y\|, \|z_{1,2}-y\|=(1-t)\|x-y\|. \qquad (2.3.1.1)$$

Ievērosim, ka:

$$\|x-y\|=\|x-z_{1,2}+z_{1,2}-y\|\le\|x-z_{1,2}\|+\|z_{1,2}-y\|=t\|x-y\|+(1-t)\|x-y\|=\|x-y\|.$$

Tāpēc $\|(x-z_{1,2})+(z_{1,2}-y)\|=\|x-z_{1,2}\|+\|z_{1,2}-y\|$.

Ievērojot Apgalvojuma 2.3.1. pirmo nosacījumu, secinām, ka:

$$\exists\lambda\in\mathbf{R}_{++}: x-z_1=\lambda(z_1-y)\vee x-z_1=0\vee z_1-y=0; \qquad (2.3.1.2)$$

$$\exists\mu\in\mathbf{R}_{++}: x-z_2=\mu(z_2-y)\vee x-z_2=0\vee z_2-y=0. \qquad (2.3.1.3)$$

No (2.3.1.2) seko, ka $z_1=\frac{1}{\lambda+1}x+\frac{\lambda}{\lambda+1}y$

un no (2.3.1.3) - $z_2=\frac{1}{\mu+1}x+\frac{\mu}{\mu+1}y$.

Bet $z_1$ un $z_2$ apmierina (2.3.1.1), tāpēc:

$$\|x-z_1\|=\|x-(\frac{1}{\lambda+1}x+\frac{\lambda}{\lambda+1}y)\|=\frac{\lambda}{\lambda+1}\|x-y\|=t\|x-y\|,$$

$$\|z_1-y\|=\|\frac{1}{\lambda+1}x+\frac{\lambda}{\lambda+1}y-y\|=\frac{1}{\lambda+1}\|x-y\|=(1-t)\|x-y\|.$$

No šejienes seko, ka $\lambda=\frac{t}{1-t}$.

Līdzīgi varam secināt, ka $\mu=\frac{t}{1-t}$.

Tātad $\lambda=\mu$ un $z_1=z_2$.

← Tagad pamatosim, ka no otrā nosacījuma seko pirmais.

Izvēlamies $x,y\in X$: $\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$.

Izvēlamies $z\in X$, $u=x+z$ un $v=z-y$. Tad $x=u-z$ un $y=z-v$.

Tāpēc $\|u-z\|+\|z-v\|=\|u-z+z-v\|=\|u-v\|$.

Tātad eksistē tāds $t\in[0,1]$, ka: $\|u-z\|=t\|u-v\|$,

$\|z-v\|=(1-t)\|u-v\|$.

Ja $z_1=(1-t)u+tv$, tad tas apmierina augstāk minētās prasības, bet z unitātes dēļ:

$z=z_1=(1-t)u+tv$.

Tātad: $z=(1-t)u+tv=(1-t)(x+z)+t(z-y)=$

$=(1-t)x+(1-t)z+tz-ty=(1-t)x-ty+z$.

No šejienes seko, ka $0=(1-t)x-ty$, un tātad $x=\dfrac{t}{1-t}y$.

Ja $t=0$, tad $z=u$ un $x=0$; ja $t=1$, tad $z=v$ un $y=0$.▲

Apgalvojuma 2.3.1. iespaidā nevajadzētu domāt, ka visas stingri izliektās metriskās telpas ir arī stingri izliektas Banaha telpas.

Piemērs 2.3.1.

■Apskatīsim metrisku telpu $X:=\{[a;1[\,|\,0<a<1\}$, $d(x,y):=|a_1-a_2|$, kur $x=[a_1;1[$ un $y=[a_2;1[$ telpas X elementi, un kura acīmredzot nav pat vektoru telpa.

Patvaļīgiem $x=[a_1;1[$, $y=[a_2;1[\in X$ un jebkuram $t\in[0;1]$ atbilstošo z meklējam sekojošā formā $z:=[(1-t)a_1+ta_2;1[$. Skaidrs, ka

$d(x,z)=|a_1-(1-t)a_1-ta_2|=t|a_1-a_2|=td(x,y)$,

$d(z,y)=|(1-t)a_1+ta_2-a_2|=(1-t)|a_1-a_2|=(1-t)d(x,y)$.

Arī unitāte ir nodrošināta: ▼ pieņemsim, ka eksistē vēl otrs elements $\gamma=[a_3;1[\in X$, kuram $d(x,\gamma)=td(x,y)$ un $d(\gamma,y)=(1-t)d(x,y)$, tātad $|a_1-a_3|=t|a_1-a_2|$ un $|a_3-a_2|=(1-t)|a_1-a_2|$. Ertības labad pieņemsim, ka $a_1\geq a_2$ (pretējo gadījumu apskata analoģiski). Iespējamas trīs situācijas: 1) $a_3\leq a_2\leq a_1$; 2) $a_2\leq a_1\leq a_3$; 3) $a_2\leq a_3\leq a_1$.

Pirmajā situācijā: $\begin{cases} a_1-a_3=ta_1-ta_2 \\ -a_3+a_2=(1-t)a_1-(1-t)a_2 \end{cases}$,

$$\begin{cases} (1-t)a_1+ta_2=a_3 \\ (2-t)a_2-(1-t)a_1=a_3 \end{cases}$$ - pretrunīga sistēma.

Otrajā situācijā: $$\begin{cases} -a_1+a_3=ta_1-ta_2 \\ a_3-a_2=(1-t)a_1-(1-t)a_2 \end{cases},$$

$$\begin{cases} (t+1)a_1-ta_2=a_3 \\ (1-t)a_1+ta_2=a_3 \end{cases}$$ - pretrunīga sistēma.

Trešajā situācijā: $$\begin{cases} a_1-a_3=ta_1-ta_2 \\ a_3-a_2=(1-t)a_1-(1-t)a_2 \end{cases},$$

$$\begin{cases} (1-t)a_1+ta_2=a_3 \\ (1-t)a_1+ta_2=a_3 \end{cases}$$ iegūstam,ka $\gamma=z$. ▲ ■

Ar ko Definīcija 2.3.1. labāka par Definīciju 2.1.3.? Katrā noteiktā situācijā var izmantot konkrētajam gadījumam piemērotāko. Taču vispārīgi, izsakoties mazliet poētiskāk, ja līdz šim, apskatot stingri izliektu Banaha telpu, darbojošos personu balsis bija tikai dzirdamas, tad tagad aizkars ir atvērts un redzami paši aktieri. Tomēr jāatzīst, ka stingri izliektās metriskās telpās, lai pierādītu attēlojumu nekustīgo punktu eksistenci, blakus tradicionālajiem nosacījumiem nākas uzlikt citus nosacījumus. Piemēram, prasību par slēgtas lodes izliektību. Pie tam jebkurā stingri izliektā metriska telpā var uzdot slēguma operatoru, kas patvaļīgai kopai A piekārto mazāko izliekto kopu, kura ietver A. Par slēguma operatoriem runāsim nākošajā nodaļā. Līdz ar to varam sacīt, ka stingri izliekta metriska telpa ir metriskas telpas ar slēguma operatoru apakšgadījums.

# 3.ATTĒLOJUMU NEKUSTĪGIE PUNKTI METRISKĀ TELPĀ AR SLĒGUMA OPERATORU

## 3.1.SLĒGUMA OPERATORI UN TO ĪPAŠĪBAS

Telpas X visu apakškopu sistēmu apzīmēsim ar PX.

*DEFINĪCIJA 3.1.1.*
*Attēlojumu $S:PX \to PX$ sauc par slēguma operatoru telpā X, ja jebkurām divām kopām $A,B \in PX$ izpildās:*

*1) $A \subset B \to S(A) \subset S(B)$;*

*2) $A \subset S(A)$;*

*3) $S(A)=S(S(A))$.*

Piemērs 3.1.1.

▪Pats vienkāršākais slēguma operators ir tāds, kas dotajai kopai jebkāda veida telpā piekārto to pašu kopu; acīmredzami visas trīs īpašības ir izpildītas.▪

*DEFINĪCIJA 3.1.2.*
*Telpā X, kurā definēts slēguma operators S, kopu $A \in PX$ sauc par S-slēgtu, ja $A=S(A)$.*

Piemērs 3.1.2.

▪No Piemērā 3.1.1. definētā slēguma operatora seko, ka šajā telpā X visas kopas ir S-slēgtas.▪

Piemērs 3.1.3.

▪Ja telpā $\mathbb{R}$ slēguma operatoru definējam kā tādu, kas katrai $\mathbb{R}$ apakškopai piekārto slēgto izliekto čaulu (=mazāko slēgto nogriezni, kas satur šīs apakškopas punktus), tad telpā $\mathbb{R}$ par S-slēgtām kopām uzskatīsim slēgtus sakarīgus nogriežņus un kopas, kas satur tikai vienu punktu.▪

*APGALVOJUMS 3.1.1.*
*Pieņemsim, ka S ir slēguma operators telpā X. S-slēgto kopu sistēma telpā X ir invarianta attiecībā pret šķēlumiem.*

▾Pierādījums.

Apskatīsim patvaļīgas S-slēgtas kopas $A_1, A_2, \ldots, A_\alpha$ telpā X, kur $\alpha$ no patvaļīgas indeksu kopas $\mathbf{A}$.

Mums jāpierāda, ka $\bigcap\{A_\alpha|\alpha\in\mathbf{A}\}$ ir S-slēgta kopa, t.i.,

$\bigcap\{A_\alpha|\alpha\in\mathbf{A}\}=S(\bigcap\{A_\alpha|\alpha\in\mathbf{A}\})$.

Pēc slēguma operatora otrās īpašības

$\bigcap\{A_\alpha|\alpha\in\mathbf{A}\}\subset S(\bigcap\{A_\alpha|\alpha\in\mathbf{A}\})$.

Tātad atliek vienīgi pamatot, ka

$\bigcap\{A_\alpha|\alpha\in\mathbf{A}\}\supset S(\bigcap\{A_\alpha|\alpha\in\mathbf{A}\})$.

Fiksēsim brīvi $\alpha_0\in\mathbf{A}$. *Tad* $\bigcap\{A_\alpha|\alpha\in\mathbf{A}\}\subset A_{\alpha_0}$. No slēguma operatora definīcijas pirmās īpašības seko, ka

$S(\bigcap\{A_\alpha|\alpha\in\mathbf{A}\})\subset S(A_{\alpha_0})=A_{\alpha_0}$ ($A_{\alpha_0}$ ir S-slēgta!).

Bet $\alpha_0$ kopā $\mathbf{A}$ fiksējām brīvi, tāpēc

$\bigcap\{A_\alpha|\alpha\in\mathbf{A}\}\supset S(\bigcap\{A_\alpha|\alpha\in\mathbf{A}\})$.▴

Pieņemsim, ka $Q\subset PX$ ir kopu sistēma, kas invarianta attiecībā pret šķēlumiem (ar to saprotot, ka arī $X\in Q, \bigcap\emptyset:=X$). Attēlojumu $S_Q$: $PX\to PX$ definēsim ar vienādību

$S_Q(A):=\bigcap\{B\in Q|B\supset A\}$ katrai kopai $A\in PX$.

*APGALVOJUMS 3.1.2.*
*Pieņemsim, ka kopu sistēma $Q\subset PX$ ir invarianta attiecībā pret šķēlumiem. Tādā gadījumā $S_Q$ ir slēguma operators kopā X un $S_Q(PX)=Q$.*

▾Pierādījums.

Slēguma operatora definīcijas pirmās divas īpašības attēlojumam $S_Q$ piemīt saskaņā ar tā konstrukciju.

Pierādīsim, ka arī trešā definīcijas īpašība ir apmierināta. Saskaņā ar otro īpašību:

$S_Q(A)\subset S_Q(S_Q(A))$ katrai kopai $A\in PX$.

Savukārt pēc $S_Q$ konstrukcijas:

$S_Q(S_Q(A)) = \bigcap\{B\in Q | B\supset S_Q(A)\}$ un

$S_Q(A) = \bigcap\{B\in Q | B\supset A\}$ jebkurai kopai A∈PX.

Tā kā kopu sistēma Q ir invarianta attiecībā pret šķēlumiem, tad $S_Q(A)\in Q$. Līdz ar to $S_Q(S_Q(A))\subset S_Q(A)$, kas arī bija jāpierāda.

Vēl jāpamato, ka $S_Q(PX) = Q$. Tā kā Q ir kopu sistēma, kas invarianta attiecībā pret šķēlumiem, tad saskaņā ar $S_Q$ konstrukciju: $S_Q(PX)\subset Q$.

Fiksēsim brīvi A∈Q. Pēc $S_Q$ konstrukcijas:

$S_Q(A) = \bigcap\{B\in Q | B\supset A\}$.

Tā kā A∈Q, tad līdz ar to $S_Q(A)\subset A$. Izmantojot slēguma operatora $S_Q$ otro īpašību, secinām, ka $A=S_Q(A)$. Tad $A\in S_Q(PX)$ un $Q\subset S_Q(PX)$. ▲

Pamatojoties uz šo Apgalvojumu 3.1.2., telpas X apakškopu sistēmā Q, ja tā invarianta attiecībā pret šķēlumiem, varam definēt slēguma operatoru $S_Q$. Šo slēguma operatoru sauc par kopu sistēmas Q radīto slēguma operatoru.

Piezīme 3.1.1.

1) V.Takahaši izliekto kopu sistēma rada slēguma operatoru;
2) J.P.Penots [1979], kā arī V.Kirks [1981A], [1983] pieprasa, lai metriskas telpas apakškopu sistēma būtu invarianta attiecībā pret šķēlumiem, tātad arī viņi patiesībā strādā metriskā telpā ar slēguma operatoru;
3) iepriekšējā 2.nodaļā definētajā stingri izliektajā telpā izliektas kopas rada slēguma operatoru;
4) pieņemsim, ka f:X→X. Tad, kā to viegli pārbaudīt, kopu sistēma {A⊂X | f(A)⊂A} ir invarianta attiecībā pret šķēlumiem un rada slēguma operatoru, kuru pieņemts apzīmēt ar $S_f$.

   (▼ Ja $x\in\{A\in X | f(A)\subset A\}$, tad tas nozīmē, ka x pieder visām kopām A, kuras ir kopas vai telpas X apakškopas un kuras attēlojums f attēlo sevī. Tas nozīmē, ka f(x) arī pieder visām tām pašām kopām A jeb $f(x)\in\bigcap\{A\in X | f(A)\subset A\}$. ▲)

Tātad varam sacīt, ka, ja telpā ir uzdots slēguma operators, tad telpā daļēji ir uzdota izliektības struktūra. Nepieciešams pieprasīt ložu S-slēgtību.Tādējādi, atgriežoties atpakaļ pie nekustīgo punktu teorijas, varam mēģināt zināmos rezultātus no Banaha telpas izliektām apakškopām pārnest uz telpām, kurās definēti slēguma operatori. Pirms ķeramies pie šī darba, vēl daži jēdzieni un rezultāti.

Principiāli nozīmīgs turpmākajā būs kopas kompaktuma jedziens telpās ar slēguma operatoru. Šis jēdziens ir analoģisks topoloģiskas telpas kompaktuma jēdzienam. Vispirms atgādināsim, ka kopu sistēmu sauc par centrētu, ja katras tās galīgas apakšsistēmas kopu šķēlums ir netukša kopa.

*DEFINĪCIJA 3.1.3.*
*Telpā X, kurā definēts slēguma operators S, kopu A sauc par S-kompaktu, ja katras tās S-slēgtu apakškopu centrētas sistēmas kopu šķēlums ir netukša kopa.*

Izrādās, ka bez parastajiem slēguma operatoriem, mums būs nepieciešamība izmantot tā saucamos algebriskos slēguma operatorus. Kas tie tādi? Un ar ko tie atšķiras no iepriekšējiem?

*DEFINĪCIJA 3.1.4.*
*Slēguma operatoru Sa telpā X sauc par algebrisku, ja katrai kopai $A \in PX$ un katram punktam $x \in Sa(A)$ eksistē tāda galīga kopa $F \subset A$, ka $x \in Sa(F)$.*

Piemērs 3.1.4.

▪Ja $X:=\mathbb{R}^2$, definējam

$$Sa(A):=convA=\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i \mid n\in\mathbf{N};\ x_i\in A;\ \alpha_i\geq 0,\ \sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1\},\ \forall A\in PX.▪$$

Nekustīgo punktu teorēmu pierādījumos mēs izmantosim sekojošu algebriskā slēguma operatora būtisku īpašību, kuru nevaram garantēt parastajam, iepriekš apskatītajam slēguma operatoram.

*APGALVOJUMS 3.1.3.*
*Pieņemsim, ka Sa ir algebrisks slēguma operators telpā X. Ja kopas $A_i, i=1,2,\ldots$ ir Sa slēgtas un $A_1\subset A_2\subset\ldots$, tad to apvienojums $\cup\{A_i \mid i=1,2,\ldots\}$ ir Sa-slēgta kopa.*

▼Pierādījums.

Kopu $\bigcup\{A_i|i=1,2,\dots\}$ sauc par Sa-slēgtu, ja

$$\bigcup\{A_i|i=1,2,\dots\}=Sa(\bigcup\{A_i|i=1,2,\dots\}).$$

Pēc slēguma operatora definīcijas:

$$\bigcup\{A_i|i=1,2,\dots\}\subset Sa(\bigcup\{A_i|i=1,2,\dots\}),$$

tāpēc pierādīsim pretējo iekļāvumu.

Izvēlamies patvaļīgu punktu $x\in Sa(\bigcup\{A_i|i=1,2,\dots\})$; mums jāpierāda, ka šis punkts pieder kopai $\bigcup\{A_i|i=1,2,\dots\}$. Pēc algebriskā slēguma operatora definīcijas eksistē tāda galīga kopa $F\subset\bigcup\{A_i|i=1,2,\dots\}$, ka $x\in Sa(F)$. Pieņemsim , ka $F=\{x_1,x_2,\dots,x_k\}$. Pēc F definīcijas atradīsies tādas kopas $A_j$, $j=1,2,\dots,m$, $m\leq k$, kurām pieder galīgās kopas F elementi. Tātad

$$F\subset\bigcup\{A_j|j=1,2,\dots,m\}\subset A_m.$$

Pēc slēguma operatora definīcijas

$$Sa(F)\subset Sa(A_m)=A_m.$$

Secinām, ka, ja $x\in Sa(F)$, tad $x\in A_m$ un tātad $x\in\bigcup\{A_i|i=1,2,\dots\}$.▲

Atzīmēsim, ka jebkurš telpas slēguma operators nebūt nav algebrisks (šāda sakritība ir spēkā diskrētajās topoloģiskajās telpās).

Piemērs 3.1.5.

■$X:=[0;1]$, $S(A):=[0;1]$, $\forall A\in PX$.

Ja, piemēram, apskatam kopu $A:=]0;1]\subset X$, tad $x:=0\in S(A)=[0;1]$. Bet neeksistē tāda galīga kopa $F\subset]0;1]$, ka $0\in S(F)$.■

Gribētos lasītājus pārliecināt, ka šajā paragrāfā apskatītais slēguma operators nesakrīt ar topoloģisko slēguma operatoru. Atcerēsimies (A.Šostaks, M.Zandere, [1977], 20.lpp):

*DEFINĪCIJA 3.1.5.*

*Operatoru, kas katrai kopai $A\in PX$ piekārto kopu $\overline{A}\in PX$ tā, ka:*

1) $A\subset\overline{A}$;

2) $\overline{A}=\overline{\overline{A}}$;

3) $\overline{\emptyset}=\emptyset$;

*4)* $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ *jebkurām kopām* $A,B\in PX$,

*sauc par topoloģisko slēguma operatoru kopā X.*

*APGALVOJUMS 3.1.4.*

*Ja S ir topoloģiskais slēguma operators kopā X, tad S ir slēguma operators.*

▼Pierādījums.

Lai konstatētu, ka S ir slēguma operators, jāpamato slēguma operatora Definīcijas 3.1.1. pirmā īpašība.

Izvēlēsimies brīvi $A,B\in PX$ tādas kopas, kurām $A\subset B$. Tad

$B=A\cup(B\setminus A)$ un pēc topoloģiskā slēguma operatora Definīcijas 3.1.5. 4) nosacījuma $S(B)=S(A)\cup S(B\setminus A)$.

Līdz ar to $S(A)\subset S(B)$.▲

Saikni starp abiem slēguma operatoriem raksturo:

*APGALVOJUMS 3.1.5.*

*Pieņemsim: 1) S ir slēguma operators kopā X;*

*2)* $S(\emptyset)=\emptyset$;

*3)* $S(A\cup B)=S(A)\cup S(B)$, $\forall A,B\in PX$.

*Pie šiem nosacījumiem S ir topoloģiskais slēguma operators.*

Un šī paragrāfa noslēgumā apskatīsim Corna lemmas lietojumu attēlojumu nekustīgo punktu teorijā (telpās ar slēguma operatoriem). Šajā nolūkā atkārtosim dažus jēdzienus, kas ietverti Corna lemmā.

Pieņemsim, ka X ir netukša kopa.

*DEFINĪCIJA 3.1.6.*

*Attiecību* $\leq$ *kopā X sauc par daļēju sakārtojumu, ja katram* $x,y,z\in X$: *1)* $x\leq x$;

*2)* $x\leq y$ & $y\leq x \rightarrow x=y$;

*3)* $x\leq y$ & $y\leq z \rightarrow x\leq z$.

*Kopu X, kurā uzdots daļējs sakārtojums* $\leq$, *sauksim par daļēji sakārtotu kopu.*

*DEFINĪCIJA 3.1.7.*

*X sauc par sakārtotu kopu, ja katram* $x,y\in X$: $x\leq y$ *vai* $y\leq x$.

*DEFINĪCIJA 3.1.8.*
*Elementu $x \in X$ sauc par kopas $A \in PX$ mažoranti, ja katram $y \in A : y \leq x$.*

*DEFINĪCIJA 3.1.9.*
*Elementu x sauc par X maksimālo elementu, ja katram $y \in X$:*
$x \leq y \rightarrow y = x$.

Lietojot definētos jēdzienus, varam formulēt Corna lemmu.

*CORNA LEMMA .*
*Ja X ir daļēji sakārtota kopa, kuras katrai sakārtotai apakškopai eksistē mažorante, tad kopā X eksistē maksimālais elements.*

Corna lemmu attēlojumu nekustīgo punktu teorijā mēs lietosim sekojošā formā.

*LEMMA 3.1.1.*
*Ja S ir slēguma operators kopā X un X ir S-kompakta, tad eksistē minimāla S-slēgta, netukša kopa $M \in PX$ sekojošā nozīmē: M ir S-slēgta, netukša kopa, kurai, ja $A \subset M$ un A ir S-slēgta, netukša kopa, tad $A = M$.*

▾Pierādījums.

Apskatīsim kopu sistēmu

$W := \{A \in PX | A \neq \emptyset \ \& \ A\text{:S-slēgta}\}$.

Atsaucoties uz slēguma operatora definīciju, $X \subset S(X)$. Tātad $S(X) = X$. Tas nozīmē, ka X ir S-slēgta kopa. Tā kā $X \neq \emptyset$, tad $X \in W$. Tātad $W \neq \emptyset$.

Attiecību $\leq$ kopā W katram $A, B \in W$ definēsim sekojoši:

$B \leq A : \rightarrow B \supset A$.

Tad katram $A, B, C \in W$:

1) $A \leq A$, jo $A \supset A$;

2) $A \leq B \ \& \ B \leq A \rightarrow A = B$, jo $A \supset B \ \& \ B \supset A \rightarrow A = B$;

3) $A \leq B \ \& \ B \leq C \rightarrow A \leq C$, jo $A \supset \ \& \ B \supset C \rightarrow A \supset C$.

No šiem trim faktiem secinām, ka $\leq$ ir daļējs sakārtojums kopā W.

Pieņemsim, ka $W_* \subset W$ ir sakārtota. Apzīmēsim visu $W_*$ kopu šķēlumu ar $A_*$. Tā kā katram $A \in W_*$ : $A_* \subset A$, tad katram $A \in W_*$: $A_* \geq A$. Tātad: ja $A_* \in W$, tad $A_*$ ir $W_*$ mažorante un lemmas apgalvojums seko, atsaucoties uz Corna lemmu.

Pierādīsim, ka $A_* \in W$. Tā kā $W_* \in W$, tad katra $A \in W_*$ ir S-slēgta un $A_*$ ir S-slēgta kā S-slēgtu kopu šķēlums.

Pieņemsim, ka $A_1, A_2, \ldots, A_n \in W_*$. Tā kā $W_*$ ir sakārtota, tad kopas $A_1, A_2, \ldots, A_n$ var sakārtot dilstošā secībā: $A_{i_1} \supset A_{i_2} \supset \ldots \supset A_{i_k}$.

Tad $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_{i_k}$. Tā kā $A_{i_k} \in W_*$, tad $A_{i_k} \in W$ un $A_{i_k} \neq \emptyset$. Līdz ar to esam ieguvuši, ka $W_*$ ir S-slēgtu kopu centrēta sistēma. X pēc dotā ir S-kompakta, tātad $\bigcap_{A \in W_*} A =: A_* \neq \emptyset$. Tāpēc $A_* \in W$. ▲

## 3.2. ATTĒLOJUMU SAIMJU AR "NORMĀLĀS STRUKTŪRAS" NOSACĪJUMU NEKUSTĪGIE PUNKTI

Sākot apskatīt šajā apakšnodaļā konkrētas nekustīgo punktu teorēmas, pirmām kārtām gribētos pievērst uzmanību 0.nodaļā pieminētajai V.Kirka Teorēmai 0.1. un ar to saistītajiem rezultātiem. Mēs apskatīsim divas teorēmas, kuras vairāk vai mazāk varētu uzskatīt par Teorēmas 0.1. vispārinājumiem. Abās teorēmās saglabāts nosacījums par kopas normālo struktūru, taču te tā vairs nav kopas īpašība, galvenais smagums pārnests uz attēlojumu saimi.

TEORĒMA 3.2.1.

Pieņemsim: 1) (X,d) ir metriska telpa ar algebrisku slēguma operatoru S;

2) X ir S-kompakta;

3) jebkura slēgta lode B(x,r) ($x \in X$, $r \in \mathbf{R}_{++}$) ir S-slēgta.

Pieņemsim, ka F ir neizstiepjošu attēlojumu, kas telpu X attēlo sevī, komutatīva saime un

4) visiem $f \in F$ nekustīgo punktu kopa Fixf ir netukša un S-slēgta;

5) $\forall f \in F, \forall x \in X (x \neq f(x))\ \exists y \in A(x,f):$

$\sup\{d(y,z) \mid z \in A(x,f)\} < \operatorname{diam} A(x,f)$ - "normālās struktūras" nosacījums;

kur $A(x,f):=\bigcap\{A\in PX|x\in A \,\&\, A=S(A) \,\&\, f(A)\subset A\}$.
Pie šiem nosacījumiem saimei F eksistē kopīgs nekustīgais punkts.

▾Pierādījums.

Vispirms pierādīsim, ka saimes F S-slēgtās nekustīgo punktu kopas veido centrētu sistēmu. Pierādījumu veiksim indukcijas ceļā pēc attēlojumu skaita, pieņemot, ka F ir galīga, t.i., $F=\{f_i|i=1,2,\ldots,k\}$.

Indukcijas bāze: k=1 - apgalvojums izriet no 4) nosacījuma.

Induktīvais pieņēmums: k=n un $\bigcap_{i=1}^{n} Fixf_i \neq \emptyset$.

Izdarīsim induktīvo pāreju, pierādīsim, ka apgalvojums ir patiess, ja k=n+1, t.i., $FixF=\bigcap_{i=1}^{n+1} Fixf_i \neq \emptyset$. Turpmākajos spriedumos apzīmēsim $\{f_1,f_2,\ldots,f_n\}$ ar F' un $f_{n+1}$ ar f. Pēc induktīvā pieņēmuma FixF'$\neq\emptyset$. Pārliecināsimies, ka f(FixF')$\subset$FixF'. Ja x$\in$FixF', tad $f_i(x)=x$, $i=1,2,\ldots,n$. Tā kā F ir komutatīva saime, tad: $f_i(f(x))=f(f_i(x))=f(x)$, $i=1,2,\ldots,n$. Esam ieguvuši, ka f(x) ir nekustīgais punkts visiem attēlojumiem $f_i(i=1,2,\ldots,n)$ jeb f(x)$\in$FixF'. Kopa FixF' nav tukša, tā ir S-slēgta kā S-slēgtu kopu šķēlums un, tā kā X ir S-kompakta, tad arī FixF' ir S-kompakta. Varētu lietot A.Liepiņa raksta [1983] ceturto teorēmu, tikai jāpārliecinās par divu nosacījumu izpildīšanos:

a) katra FixF' slēgtā lode ir S-slēgta kā S-slēgtu kopu šķēlums:

$B_{FixF'}(x,r)=B_X(x,r)\cap FixF'$, $\forall x\in FixF'$, $\forall r\in\mathbf{R}_{++}$;

b) katram x$\in$FixF', katram f$\in$F (x$\neq$f(x)) kopa

$A_{FixF'}(x,f):=\bigcap\{A\in PFixF'|x\in A \,\&\, A=S(A) \,\&\, f(A)\subset A\}$ sakrīt ar kopu

$A_X(x,f)=\bigcap\{A\in PX|x\in A \,\&\, A=S(A) \,\&\, f(A)\subset A\}$;

tātad kopā $A_{FixF'}$ izpildās " normālās struktūras" nosacījums. Lietojot A.Liepiņa raksta [1983] teorēmu 4, iegūstam, ka eksistē tāds $x^*\in FixF'$, ka $f(x^*)=x^*$, jeb $FixF'\cap Fixf=\bigcap_{i=1}^{n+1} Fixf_i \neq \emptyset$.

Tā kā telpa X ir S-kompakta, tad saimei F ir kopīgs nekustīgais punkts arī gadījumā, ja F nav galīga.▴

Pamatosim, ka mūsu prasība par "normālo struktūru" ir vājāka nekā V.Kirka un L.Beljusa rakstos prasība par kopas normālās struktūras nepieciešamību. Vispirms atzīmēsim, ka, ja X ir telpa ar normālu struktūru, tad no tā seko Teorēmas 3.2.1. piektais nosacījums, bet ne otrādi, to pierāda

Piemērs 3.2.1.

■Apskatīsim telpu $c_0$, kas sastāv no uz nulli konverģējošām reālu skaitļu virknēm $x=(x_1,x_2,\dots,x_n,\dots)$, $\|x\|:=sup\{x_n|n\in\mathbf{N}\}$. Telpai $c_0$ nav normāla struktūra (jo, piemēram, izliektā un ierobežotā kopā

$B_+(0;1):=\{y\in c_0|\|y\|\le 1\ \&\ \forall n\in\mathbf{N}: y_n\ge 0\}$,

kuras diametrs $diamB_+(0;1):=sup\{sup\{|x_n-y_n|\ |n\in\mathbf{N}\}x,y\in B_+(0;1)\}=1$, visi punkti ir diametrāli:

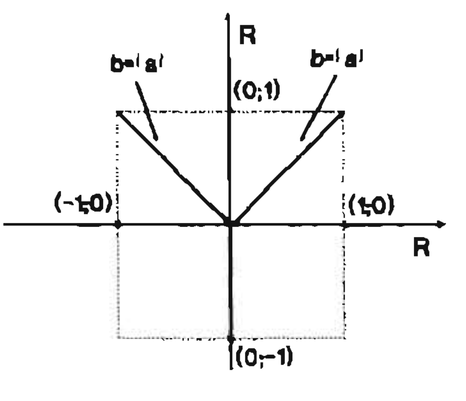
▾ fiksejam $x_0=(x_{0_1},x_{0_2},\dots,x_{0_n},\dots)\in B_+(0;1)$, tad

$\|x_0-y\|=sup\{|x_{0_n}-y_n|\ |n\in\mathbf{N}\}\ge 1-\varepsilon,\ y\in B_+(0;1)$.

Pietiekoši lieliem $n\in\mathbf{N}: x_{0_n}<\varepsilon$ patvaļīgi izvēlētam pietiekoši mazam $\varepsilon\in\mathbf{R}_{++}$, līdz ar to $\|x_0-y\|=1$.▴). Katram $x\in B_+(0;1)$ definēsim f(x):=0. Attēlojums f kopu $B_+(0;1)$ attēlo sevī un ir neizstiepjošs: $\|f(x)-f(y)\|=0\le\|x-y\|,\ \forall x,y\in B_+(0;1)$. Vienīgais tā nekustīgais punkts ir 0. Slēguma operatora S lomā var ņemt slēgtās izliektās čaulas operatoru. Šajā situācijā $A(x,f)=\{tx|t\in[0;1]\}$ $(x\neq 0)$ un, ja, piemēram, $y:=\frac{x}{2}$, tad

$$sup\{\|y-z\||z\in A(x,f)\}=\frac{\|x\|}{2}<\|x\|=diamA(x,f).■$$

Nākošajā piemērā parādīsim, ka Teorēmas 3.2.1. nosacījums par attēlojumu nekustīgo punktu kopas S-slēgtību neseko no pārējiem nosacījumiem.




zīm.3.2.2.

Piemērs 3.2.2. ■Definēsim $\|x\|:=\max\{|a|,|b|\},\ \forall x=(a,b)\in\mathbf{R}^2$, $X:=\{x\in\mathbf{R}^2|\|x\|\le 1\}$, $f(x):=(a,|a|),\ \forall x\in X$.

Slēguma operatora S lomā atkal izvēlēsimies slēgtās izliektās čaulas operatoru. Attēlojuma f nekustīgo punktu kopa $\{x\in X|b=|a|\}$ tomēr nav izliekta, kaut arī visi pārējie teorēmas nosacījumi ir izpildīti.▪

Ja mēs atsakāmies no prasības par attēlojumu nekustīgo punktu kopas S-slēgtību, tad, mazliet izmainot nosacījumu par "normālo struktūru" un pieprasot ciešākas kopsakarības attēlojumu saimei, bet atmetot nosacījumu par komutativitāti, varam pierādīt sekojošu teorēmu:

TEORĒMA 3.2.2.

Pieņemsim: 1) $(X,d)$-metriska telpa ar slēguma operatoru S;

2) X ir S-kompakta;

3) jebkura slēgta lode $B(x,r)$ ($x\in X$, $r\in\mathbf{R}_{++}$) ir S-slēgta.

Pieņemsim, ka F ir neizstiepjošu attēlojumu, kas telpu X attēlo sevī, saime, kas apmierina sekojošus nosacījumus:

4) $\exists q\in]0;1[\ \forall x,y\in X\ \forall f,g\in F$:

$d(f(x),g(y))\le\max\{d(x,y);q\,diam(A(x)\cup A(y))\}$;

5) $\forall x\in X(\exists v\in F: v(x)\ne x)\exists y\in A(x)$:

$sup\{d(y,z)|z\in A(x)\}< diam A(x)$,

kur $A(x):=\bigcap\{A\in PX|x\in A\ \&\ A=S(A)\ \&\ \forall f\in F: f(A)\subset A\}$.

Pie šiem nosacījumiem saimei F eksistē kopīgs nekustīgais punkts.

▾Pierādījums.

Pēc Corna lemmas S-kompaktā telpā X var konstruēt tādu minimālu, netukšu, S-slēgtu kopu M, kas ir invarianta attiecībā pret visiem saimes F attēlojumiem.

Izvēlamies punktu $a\in M$ un pieņemsim, ka eksistē tāds attēlojums $f\in F$, ka $f(a)\ne a$. Tā kā $A(a)\subset M$, tad M minimalitātes dēļ M sakrīt ar $A(a)$. Pēc teorēmas piektā nosacījuma eksistē tāds punkts $y$ kopā $A(a)=M$, ka:

$r_0:=sup\{d(y,z)|z\in M\}< diam M$.

Izvēlamies $r\in]\max\{r_0,q\,diam M\};diam M[$.

Apskatīsim kopu $A:=(\bigcap\{B(x,r)|x\in M\})\cap M$ - tā nav tukša, jo $y\in A$, tā ir S-slēgta kā S-slēgtu kopu šķēlums. Jāpamato, ka tā ir invarianta visiem saimes F attēlojumiem f. No pretējā - pieņemsim, ka $\exists z\in A\ \exists g\in F: g(z)\notin A$. Tad eksistē tāds $w\in M$, ka

$w \notin B(g(z),r)$ - tātad kopa $A_1 := B(g(z),r) \cap M$ ir kopas M īsta apakškopa. $A_1$ ir invarianta pret visiem saimes F attēlojumiem, jo brīvi izvēlētam $x \in A_1$ un $f \in F$ izpildās:

$$d(f(x),g(z)) \leq \max\{d(x,z);q\,\mathrm{diam}(A(x) \cup A(z))\} \leq$$
$$\leq \max\{r;q\,\mathrm{diam}M\} = r \quad (z \in A \text{ un } x \in A_1 \subset M).$$

Kopa $A_1$ nav tukša ($g(z) \in A_1$) un tā ir S-slēgta. Kopas M minimalitātes dēļ $A_1 = M$. Bet $A_1$ ir īsta M apakškopa, iegūta pretruna, tālab $f(A) \subset A$, $\forall f \in F$. Kopas M minimalitātes dēļ: $A=M$. Taču (skat. Piezīmi 3.2.1.):

$$\mathrm{diam}A \leq r < \mathrm{diam}A(a) = \mathrm{diam}M$$

Iegūta pretruna, sākotnējais pieņēmums, ka $\exists f \in F: f(a) \neq a$, ir aplams.▲

PIEZĪME 3.2.1.
Ja $A = (\bigcap\{B(x,r) \mid x \in M\}) \cap M$, tad $\mathrm{diam}A \leq r, \forall r \in \mathbf{R}_{++}$.

▼Pierādījums.
Jebkuriem diviem punktiem u un v no A izpildās sakarības: $u \in B(v,r)$ un $v \in B(u,r)$, t.i., $d(u,v) \leq r$ jeb

$$\mathrm{diam}A = \sup\{d(u,v) \mid u,v \in A\} \leq r.$$▲

## 3.3. NEKUSTĪGIE PUNKTI ATTĒLOJUMU SAIMĒM AR SAMAZINĀTU ORBĪTAS DIAMETRU

Otrs nosacījumu komplekss, ko V.Kirks izmantojis savos rakstos [1969], [1970], ir attēlojumu orbītas diametra samazināšanās nosacījums. Līdzīgi kā iepriekšējā paragrāfā kopas normālas struktūras gadījumā, arī šeit orbītas diametra samazināšanās prasību izmainīsim atbilstoši metriskai telpai ar slēguma operatoru.

TEORĒMA 3.3.1.
Pieņemsim: 1) (X,d) ir metriska telpa ar algebrisku slēguma operatoru S;

2) $\overline{S(A)}=S(\overline{S(A)})=:S'(A)$ visām $A\in PX$;

3) X ir S'-kompakta;

4) jebkura slēgta lode $B(x,r)$ $(x\in X,\ r\in\mathbf{R}_{++})$ ir S-slēgta.

Pieņemsim, ka F ir nepārtrauktu attēlojumu, kas telpu X attēlo sevī, saime un apmierina nosacījumus:

5) $\exists t\in]0;1[\ \forall x,y\in X\ \forall f,g\in F$:

$d(f(x),g(y))\leq\max\{d(x,y);t\,diam(A(x)\cup A(y))\}$;

6) $\forall x\in X(\exists v\in F: v(x)\neq x)\exists y\in A(x)$:

$sup\{inf\{sup\{d(y,f^m(x))\,|m\geq n\}\,n\in\mathbf{Z}_{++}\}\,f\in F\}<diam A(x)$,

kur $A(x):=\bigcap\{A\in PX|x\in A\ \&\ A=S'(A)\ \&\ \forall f\in F: f(A)\subset A\}$.

Pie šiem nosacījumiem attēlojumu saimei F eksistē kopīgs nekustīgais punkts.

▾Pierādījums.

Pēc Corna lemmas S'-kompaktā telpā X var atrast tādu minimālo kopu M, kas ir netukša, S'-slēgta un invarianta attiecībā pret saimi F.

Izvēlamies $a\in M$, pieņemsim, ka $\exists f\in F: f(a)\neq a$. Tā kā $M=A(a)$ (jo $A(a)\subset M$, bet M minimālā kopa ), tad pēc sestā nosacījuma eksistēs tāds punkts $a_0\in M$, ka:

$$q:=sup\{inf\{sup\{d(a_0,f^m(a))\,|m\geq n\}\,n\in\mathbf{Z}_{++}\}\,f\in F\}<diam A(x).$$

Izvēlamies $r\in]\max\{q;t\,diamM\};\ diamM[$ un apskatīsim kopu

$$A:=\bigcup\{\bigcap\{\bigcap\{B(f^m(a),r)\cap M|m\geq n\}\,f\in F\}\,n\in\mathbf{Z}_{++}\}.$$

A ir netukša, jo $a_0\in A$, un S-slēgta kā augošas S-slēgtu X apakškopu virknes apvienojums ( S ir algebriskais slēguma operators, skatīt Apgalvojumu 3.1.3.). Pierādīsim, ka $f:A\to A$, $\forall f\in F$. Šim nolūkam izvēlamies $y\in\bigcap\{\bigcap\{B(f^m(a),r)\cap M|m\geq n\}\,f\in F\}$ pie fiksēta $n\in\mathbf{Z}_{++}$. Tad

$$d(y,f^m(a))\leq r,\ \forall m\geq n,\ \forall f\in F.$$

Varam secināt, ka

$$d(f(y),f(f^m(a)))\leq\max\{d(y,f^m(a)),t\,diam(A(x)\cup A(y))\}\leq$$
$$\leq\max\{r,t\,diamM\}=r,\ \forall m\geq n,\ \forall f\in F.$$

Tātad $f(y)\in\bigcap\{\bigcap\{B(f^m(a),r)\cap M|m\geq n+1\}\,f\in F\}\,n\in\mathbf{Z}_{++}\}$ un $f(A)\subset A$, $\forall f\in F$.

f nepārtrauktības dēļ: $f:\overline{A}\to\overline{A}$, $\forall f\in F$.

M minimalitātes dēļ $\overline{A}=M$. Izvēlamies $p\in M$ brīvi. Tad $p\in\overline{A}$ un katram $\varepsilon\in\mathbf{R}_{++}$ eksistēs tāds $p_0\in A$: $d(p,p_0)<\varepsilon$.

Tad eksistēs arī tāds $n_0\in \mathbf{Z}_{++}$: $d(p_0,f^m(a))\le r$, $m\ge n_0$, $\forall f\in F$.

Tātad $d(p,f^m(a))\le r+\varepsilon$, $m\ge n_0$, $\forall f\in F$, un

$$S(\bigcup\{\bigcup\{f^m(a)\,|m\ge n_0\}\,f\in F\})\subset B(p,r+\varepsilon)\ .$$

Tā kā $\varepsilon$ ir izvēlēts patvaļīgi, tad

$$\bigcap\{S(\bigcup\{\bigcup\{f^m(a)\,|m\ge n\}\,f\in F\})\,n\in \mathbf{Z}^{++}\}\subset B(p,r)\ .$$

Izvēlamies $z\in\bigcap\{S(\bigcup\{\bigcup\{f^m(a)\,|m\ge n\}\,f\in F\})\,n\in \mathbf{Z}_{++}\}$,

tad $z\in B(p,r)$ un $z\in\bigcap\{B(p,r)\,|p\in M\}$, jo p sākotnēji izvēlēts patvaļīgi. Tātad $z\in\bigcap\{B(p,r)\cap M|p\in M\}=:A_1$,

kur $A_1$ ir netukša, S-slēgta kā S-slēgtu kopu šķēlums. Pamatosim, ka $A_1$ ir invarianta attiecībā pret saimi F. Pieņemsim, ka $\exists h\in F$ un $x\in A_1$, ka $h(x)\notin A_1$, t.i., $\exists y\in M$: $y\notin B(h(x),r)$. Tas nozīmē, ka $A_2:=B(h(x),r)\cap M$ ir īsta M apakškopa. Bet:

1) $A_2\ne\emptyset$ $(h(x)\in A_2)$ ;

2) $A_2$ ir S'-slēgta kā S'-slēgtu kopu šķēlums;

3) $A_2$ ir invarianta attiecībā pret attēlojumu saimi F, jo katram $z\in A_2$ un katram $g\in F$:

$$d(h(x),g(z))\le \max\{d(x,z),t\mathrm{diam}(A(x)\cup A(z))\}\le$$
$$\le \max\{r,\ t\mathrm{diam}M\} = r.$$

Tātad $M=A_2$ kopas M minimalitātes dēļ. Tā kā tas nav iespējams, tad $f(A_1)\subset A_1$, $\forall f\in F$. Kopas M minimalitātes dēļ $M=A_1$. Savukārt $A_1\le r<\mathit{diam}M$. Šī pretruna noraida pieņēmumu, ka $\exists f\in F$: $f(a)\ne a$. ▲

Rakstā [1970] V.Kirks apskata salīdzinājumā ar rakstu [1969] mazliet vispārīgāku situāciju, proti, attēlojums samazina orbītas diametru sākot no kaut kādas pakāpes N. Bez īpašām grūtībām līdzīgu teorēmu var apskatīt metriskā telpā ar slēguma operatoru.

TEOREMA 3.3.2.

Pieņemsim: 1) (X,d) ir metriska telpa ar algebrisku slēguma operatoru S;

2) $\overline{S(A)}=S(\overline{S(A)})=:S'(A)$ visām $A\in PX$;

3) X ir S'-kompakta;

4) jebkura slēgta lode $B(x,r)$ $(x\in X,\ r\in \mathbf{R}_{++})$ ir S-slēgta.

Pieņemsim, ka F ir nepārtrauktu attēlojumu, kas telpu X attēlo sevi, saime un apmierina nosacījumus:

5) $\exists t\in]0;1[\ \forall x,y\in X\ \forall f,g\in F$:

$d(f(x),g(y))\leq\max\{d(x,y);t\,diam(A(x)\cup A(y))\}$;

6) $\exists N\in\mathbb{Z}_{++}\ \forall x\in X(\exists v\in F: v(x)\neq x)\exists y\in A(x)$:

$sup\{inf\{sup\{d(y,f^m(x))\,|m\geq n\}\,n\geq N\}\}\,f\in F\}<diamA(x)$,

kur $A(x):=\bigcap\{A\in PX|x\in A\ \&\ A=S'(A)\ \&\ \forall f\in F: f(A)\subset A\}$.

Pie šiem nosacījumiem attēlojumu saimei F eksistē kopīgs nekustīgais punkts.

▾Pierādījums.

Lietojot Corna lemmu, S'-kompaktā telpā X var konstruēt tādu minimālo kopu M, kas ir netukša, S'-slēgta un invarianta attiecībā pret attēlojumu saimi F.

Pēc Teorēmas 3.3.1. saimei $F^N=\{f^N|f\in F\}$ ir kopīgs nekustīgais punkts $x^*\in$M. Mēs parādīsim, ka šis $x^*$ ir arī saimes F kopīgais nekustīgais punkts.

Atzīmēsim, ka no M minimalitātes seko, ka M=A($x^*$).

Pieņemsim, ka eksistē tāds attēlojums f$\in$F: f($x^*$)$\neq x^*$. Tad pēc sestā nosacījuma eksistē tāds punkts y$\in$A($x^*$)=M, ka:

$q:=sup\{inf\{sup\{d(y,f^m(x))\,|m\geq n\}\,n\geq N\}\}\,f\in F\}<diamM$.

Apskatīsim kopu $A_0:=\{x^*,f(x^*),\ldots,f^{N-1}(x^*)\,|f\in F\}$.

Tad $q=sup\{d(y,z)\,|z\in A_0\}<diamM$.

Izvēlēsimies r$\in$]max{q;tdiamM}; diamM[, tad $S(A_0)\subset B(y,r)$.

Apskatīsim kopu $A:=(\bigcap\{B(w,r)\,|w\in M\})\cap M$.

Tad: 1)A$\neq\emptyset$, jo y$\in$A; 2)A ir S-slēgta kā S-slēgtu kopu šķēlums; 3)A ir invarianta attiecībā pret saimi F: ▾ patiešām, ja eksistē tāds u$\in$A un g$\in$F, ka g(u)$\notin$A, tad B(g(u),r)$\cap$M ir īsta M apakškopa. Kopa B(g(u),r)$\cap$M ir S-slēgta, netukša (g(u)$\in$B(g(u),r)$\cap$M) un invarianta attiecībā pret F, jo brīvi izvēlētam z$\in$B(g(u),r)$\cap$M un h$\in$F: $d(g(u),h(z))\leq\max\{d(u,z),t\,diam(A(u)\cup A(z))\}\leq$

$\leq\max\{r,t\,diamM\}=r$.

No M minimalitātes seko, ka M=B(g(u),r)$\cap$M. Šī pretruna pabeidz 3) nosacījuma pierādījumu.▴

Savukārt tagad no M minimalitātes seko, ka M=A.

Bet diamA $\leq$ r $<$ diamM. Šī pretruna parāda, ka sākotnējais pieņēmums, ka $x^*$ nav attēlojumu saimes kopīgais nekustīgais punkts, ir aplams.▴

## 3.4. KVAZI-NEIZSTIEPJOŠU ATTĒLOJUMU SAIMJU NEKUSTĪGIE PUNKTI

Ar kvazi-neizstiepjoša attēlojuma dažām labām īpašībām iepazināmies jau 2.nodaļā (skatīt: Definīciju 2.1.4., Lemmu 2.2.2., Piezīmi 2.2.1.).

V.G.Dotsona un H.F.Sentera rakstā [1974] atrodam, ka viens no nosacījumiem, lai attēlojums f:A→A normētā lineārā telpā būtu kvazi-neizstiepjošs, ir prasība, lai tam eksistētu nekustīgais punkts kopā A un

$$\forall x,y\in A:\ \|f(x)-f(y)\|\le a\|x-f(x)\|+b\|y-f(y)\|+c\|x-y\|, \qquad (*)$$

kur a,b,c ≥0 un 0<a+b+c≤1. Mēs tuvāk apskatīsim divu autoru - R.Kannana un S.Reiha - rezultātus, kuros pierādīta nekustīgā punkta eksistence attēlojumiem, kas apmierina nosacījumu (*). R.Kannana teorēmās [1971], [1973] parasti konstantes c=0 un a=b=0,5, piemēram,

*TEORĒMA (R.Kannans, [1973]).*
*Pieņemsim, ka X ir refleksīva Banaha telpa un K ir tās netukša, slēgta, izliekta, ierobežota apakškopa. Ja attēlojums T attēlo kopu K sevī un izpildās nosacījumi:*

*1)* $\|Tx-Ty\|\le\frac{1}{2}(\|x-Tx\|+\|y-Ty\|)$, $x,y\in K$;

*2) katrai nevienelementīgai, slēgtai un izliektai apakškopai F no kopas K, kuru attēlojums T attēlo sevī, eksistē tāds elements* $x\in F$, *ka* $\|x-Tx\|<\sup\{\|y-Ty\| \mid y\in F\}$,
*tad pie šiem nosacījumiem attēlojumam T eksistē viens vienīgs nekustīgais punkts kopā K.*

Varam atgādināt, ka mums jau labi zināmais V.Kirks [1965] ir pierādījis līdzīga rakstura teorēmu neizstiepjošam attēlojumam, lietojot normālas struktūras jēdzienu otrā nosacījuma vietā, taču unitāte viņa teorēmā netiek garantēta.

Mēs gribam pierādīt nekustīgā punkta eksistenci attēlojumu saimei ar vispārinātu R.Kannana teorēmas 1) nosacījumu metriskā telpā ar slēguma operatoru. Tiesa gan, kaut kā jāmēģina apiet 2) nosacījums, bet, kā to izdarīt, zinām jau no iepriekšējiem rezultātiem. Viena attēlojuma gadījumam subsimetriskā topoloģiskā telpā ar slēguma operatoru R.Kannana teorēmas vispārinājumu ir jau veicis A.Liepiņš [1983].

TEORĒMA 3.4.1.
Pieņemsim: 1) (X,d) ir metriska telpa ar algebrisku slēguma operatoru S;

2) $\overline{S(A)}=S(\overline{S(A)})=:S'(A)$ visām $A\in PX$;

3) X ir S'-kompakta;

4) jebkura slēgta lode $B(x,r)$ ($x\in X$, $r\in\mathbf{R}_{++}$) ir S-slēgta.

Pieņemsim, ka F ir nepārtrauktu attēlojumu saime, kas apmierina sekojošus nosacījumus:

5) $\forall f,g,h\in F\,\forall x,y\in X\,\exists\alpha\in]0;1[:$
$d(g(x),h(y))\le\alpha d(x,f(x))+(1-\alpha)d(y,f(y))$;

6) $\forall x\in X(\exists v\in F: v(x)\ne x)\exists\, y\in A(x):$
$\sup\{d(y,f(y))\,|\,f\in F\}<\sup\{\sup\{d(z,f(z))\,|\,z\in A(x)\}f\in F\}$,

kur $A(x):=\bigcap\{A\in PX|x\in A\,\&\,A=S'(A)\,\&\,\forall f\in F: f(A)\subset A\}$.

Pie šiem nosacījumiem saimei F eksistē viens vienīgs kopīgs nekustīgais punkts.

▾ Pierādījums.

Pēc Corna lemmas un telpas X S'-kompaktības var atrast tādu minimālu, netukšu, S'-slēgtu kopu M, kas ir invarianta attiecībā pret visiem saimes F attēlojumiem.

Izvēlamies punktu $a\in M$ un pieņemsim, ka eksistē tāds attēlojums $f\in F$, ka $f(a)\ne a$. Tā kā $A(a)\subset M$, tad pēc M minimalitātes seko, ka $M=A(a)$. Pēc 6) teorēmas nosacījuma eksistē tāds punkts $a_1\in A(a)=M$, ka:

$r:=\sup\{d(a_1,f(a_1))\,|\,f\in F\}<\sup\{\sup\{d(z,f(z))\,|\,z\in A(a)\}f\in F\}$.

Apskatīsim kopas

$A:=\{x\in M|d(x,f(x))\le r,\forall f\in F\}$ un $A_1:=S(\bigcup\{f(A)\,|\,f\in F\})$,

kuras abas ir netukšas, jo $a_1\in A$ un $f(a_1)\in A_1,\forall f\in F$.

Tā kā S ir algebriskais slēguma operators, tad brīvi izvēlētam $x\in A_1$ eksistē tāda galīga kopa $W\subset\bigcup\{f(A)\,|\,f\in F\}$, ka $x\in S(W)$.

Pieņemsim, ka $q:=\sup\{\max\{d(f(x),y)\,|y\in W\}f\in F\}$, tad $W\subset\bigcap\{B(f(x),q)\,|\,f\in F\}$. Tā kā $\bigcap\{B(f(x),q)\,|\,f\in F\}$ ir S-slēgta kopa kā S-slēgtu kopu šķēlums, tad $S(W)\subset\bigcap\{B(f(x),q)\,|\,f\in F\}$ un tātad arī

$x\in\bigcap\{B(f(x),q)\,|f\in F\}$, t.i., $d(x,f(x))\le q,\forall f\in F$.

Fiksēsim attēlojumu $f\in F$ brīvi. Brīvi izvēlētam $\varepsilon\in\mathbf{R}_{++}$ eksistēs tādi attēlojumi $g,h\in F$, ka:

$q-\varepsilon\le max\{d(g(x),y)\,|y\in W\}=d(g(z),h(z))$, kur $z\in A$.

Līdz ar to $d(x,f(x))\le q\le d(g(x),h(z))+\varepsilon$. (3.4.1.1)

No nosacījumiem 5), no (3.4.1.1) un no tā, ka $z\in A$, seko, ka

$$d(x,f(x))\le d(z,f(z))+\frac{\varepsilon}{1-\alpha}\rightarrow_{\varepsilon\to 0}\le d(z,f(z))\le r\text{ -}$$

tas ir spēkā brīvi izvēlētam attēlojumam $f\in F$, tātad arī pārējiem saimes F attēlojumiem iegūsim analogus novērtējumus, tāpēc $x\in A$ un līdz ar to $A_1\subset A$ un $f(x)\in A_1,\forall f\in F$. No šejienes seko ka $f:A_1\to A_1,\forall f\in F$.

Apskatīsim kopu $A_2:=\overline{A_1}=\overline{S(\bigcup\{f(A)\,|f\in F\})}$. Tā nav tukša kopa, tā ir S'-slēgta un saimes F attēlojumu nepārtrauktības dēļ tā ir arī invarianta attiecībā pret jebkuru saimes F attēlojumu. Kopas M minimalitātes dēļ $M=A_2$. Bet $A_2=\overline{A_1}\subset\overline{A}=A$ (f un d - nepārtraukti!), savukārt

$sup\{sup\{d(x,f(x))\,|x\in A\}f\in F\}=r<sup\{sup\{d(z,f(z))\,|z\in M\}f\in F\}$.

Iegūta pretruna. Tātad $f(a)=a,\forall f\in F$.

Unitāte seko no 5) nosacījuma: pieņemsim, ka ir divi nekustīgie punkti

$x_1,x_2\in X, tad\,\forall f,g,h\in F\,\exists\alpha\in]0;1[:$

$d(g(x_1),h(x_2))=d(x_1,x_2)\le\alpha d(x_1,f(x_1))+(1-\alpha)d(x_2,f(x_2)=$

$=\alpha d(x_1,x_1)+(1-\alpha)d(x_2,x_2)=0$ .▲

Esam pierādījuši teorēmu, kas patiesībā garantē, ka nepārtraukti attēlojumi, kas apmierina Teorēmas 3.4.1. nosacījumu 5), metriskā telpā ar algebrisku slēguma operatoru veido kvazi-neizstiepjošu attēlojumu saimi, kurai ir kopīgs nekustīgais punkts.

S.Reihs attēlojumam, kas apmierina nosacījumu (*), pierādījis sekojošu rezultātu

*TEORĒMA (S.Reihs, [1971]).*
*Ja X ir pilna metriska telpa un attēlojums $T:X\to X$ apmierina nosacījumu (*), tad tam eksistē viens vienīgs nekustīgais punkts.*

Mazliet sašaurinot nosacījumu (*) un neprasot metriskas telpas pilnību, bet gan tās S-kompaktību, varam atrast citu attēlojumu saimi ar vienu vienīgu kopīgo nekustīgo punktu.

TEORĒMA 3.4.2.

Pieņemsim: 1) (X,d) ir metriska telpa ar algebrisku slēguma operatoru S;

2) $\overline{S(A)}=S(\overline{S(A)})=:S'(A)$ visām $A\in PX$;

3) X ir S'-kompakta;

4) jebkura slēgta lode $B(x,r)$ ($x\in X$, $r\in\mathbf{R}_{++}$) ir S-slēgta.

Pieņemsim, ka F ir nepārtrauktu attēlojumu saime, kas apmierina nosacījumus:

5) $\forall f,g,h\in F\forall x,y\in X\exists a,b,c\in\mathbf{R}_{+}:0< a+b+2c<1:$

$$d(g(x),h(y))\le ad(f(x),x)+bd(f(y),y)+cd(x,y);$$

6) $\forall x\in X(\exists v\in F: v(x)\neq x)\exists y\in A(x)\ \exists w\in A(x):$

$$\sup\{d(w,z)\,|\,z\in A(x)\}\le\sup\{d(y,f(y))\,|\,f\in F\}<\sup\{\sup\{d(z,f(z))\,|\,z\in A(x)\}\,f\in F\}$$

kur $A(x):=\bigcap\{A\in PX\,|\,x\in A\ \&\ A=S'(A)\ \&\ \forall f\in F:\ f(A)\subset A\}$.

Pie šiem nosacījumiem saimei F eksistē viens vienīgs nekustīgais punkts.

▾Pierādījums.

Pamatā tiek atkārtots iepriekšējās Teorēmas 3.4.1. pierādījums. Mainās nevienādību (3.4.1.1) secinājumu pamatojums:

$$d(x,f(x))\le q\le d(g(x),h(z))+\varepsilon\le$$
$$\le ad(x,f(x))+bd(z,f(z))+cd(x,z)+\varepsilon \text{ jeb}$$

$$d(x,f(x))\le\frac{bd(z,f(z))+cd(x,z)}{1-a}+\frac{\varepsilon}{1-a}\to_{\varepsilon\to0}\le\frac{bd(z,f(z))+cd(d(x,z)}{1-a}.$$

Zināms, ka $d(z,f(z))\le r$, jo $z\in A$; savukārt $d(x,z)\le 2r$, jo $z\in A\subset M$ un $x\in A_1\subset M$, tātad $x,z\in M$ un pēc Teorēmas 6) nosacījuma

$\exists w\in M=A(a):\ \sup\{d(w,v)\,|\,v\in M\}\le r$, t.i.,

$\operatorname{diam}M\le 2\sup\{d(w,v)\,|\,v\in M\}\le 2r$, tāpēc $d(x,z)\le 2r$.

Secinām, ka $d(x,f(x))\le\dfrac{br+2rc}{1-a}=r\dfrac{b+2c}{1-a}\le r$, jo

$$0<a+b+2c<1\to b+2c<1-a\to\frac{b+2c}{1-a}<1.$$

Tālākais kā iepriekšējā pierādījumā.

Unitāte seko no 5) nosacījuma: pieņemsim, ka ir divi nekustīgie punkti $x_1, x_2 \in X$, tad $\forall f,g,h \in F\ \exists a,b,c \in \mathbf{R}_+$: $0<a+b+2c<1$:

$$d(g(x_1),h(x_2))=d(x_1,x_2)\leq$$

$$\leq ad(f(x_1),x_1)+bd(f(x_2),x_2)+cd(x_1,x_2)=0+0+cd(x_1,x_2).$$

Tā kā $0\leq c<1$, tad $d(x_1,x_2)=0$ ▲

## 3.5. ATTĒLOJUMU SAIMJU AR INVARIANCES ĪPAŠĪBU NEKUSTĪGIE PUNKTI

Interesējoties par neizstiepošu attēlojumu komutatīvu saimju kopīgo nekustīgo punktu, atceramies labi zināmo R.de Marra teorēmu ([1963], skatīt 0.nodaļā Teorēmu 0.2.). Līdzīga rakstura rezultātu ir pierādījis arī M.R.Taskovičs [1980] diametrāli neizstiepjošu attēlojumu komutatīvai saimei.

*DEFINĪCIJA 3.5.1.*
*Attēlojumu $f:E\to E$ (E - Banaha telpa) sauc par diametrāli neizstiepjošu, ja:*

$$\|f(x)-f(y)\|\leq\varphi(\sup\{\|x-z\| \mid z\in E\}),\forall x,y\in E,$$

*kur $\varphi:\mathbf{R}_{++}\to\mathbf{R}_{++}$ ar īpašību $\varphi(t)\leq t, \forall t\in\mathbf{R}_{++}$.*

Atzīmēsim, ka katrs neizstiepjošs attēlojums ir arī diametrāli neizstiepjošs (pieņemot, ka $\varphi$ vienāds ar identisko attēlojumu).

Gan R. de Marra teorēmā, gan M.R.Taskoviča gadījumā tiek izmantota būtiska šo saimju īpašība: invariance.

*DEFINĪCIJA 3.5.2.*
*Neizstiepjošu attēlojumu saimei $F=\{f \mid f:E\to E$, E - Takahaši izliekta metriska telpa$\}$ piemīt invariances īpašība kopā E, ja katrai kompaktai Takahaši izliektai E apakškopai K, kurai: $f(E)\subset E$, $\forall f\in F$, eksistē kompakta apakškopa $M\subset K$ tāda, ka $f(M)=M$ visiem $f\in F$.*

Pirmo reizi šī definīcija atrodama V.Takahaši darbā [1970], kurā pierādīta arī sekojoša teorēma:

*TEORĒMA (V.Takahaši, [1970]).*
*Ja K ir kompakta Takahaši izliektas metriskas telpas apakškopa un F ir neizstiepjošu attēlojumu saime ar invariances īpašību kopā K , tad saimei F eksistē kopīgs nekustīgais punkts.*

Atzīmēsim, ka mūsu jēdziens par S-slēgtu kopu ir vispārīgāks jēdziens kā izliekta kopa Takahaši iziektā metriskā telpā, tāpēc apskatīsim metrisku telpu ar slēguma operatoru, kurā dota attēlojumu saime ar invariances īpašību un, noskaidrosim jautājumu par šīs saimes kopīgo nekustīgo punktu. Šim nolūkam mums būs nepieciešmas divas jaunas definīcijas.

Pieņemsim, ka X ir metriska telpa.

DEFINĪCIJA 3.5.3.
Attēlojumu saimei F, kas attēlo kopu $K\subset X$ sevī, piemīt S-invariances īpašība, ja katrā kopas K S-kompaktā un S-slēgtā apakškopā $E\subset K$ tādā, ka $f(E)\subset E$ visiem $f\in F$, eksistē tāda S-kompakta apakškopa $M\subset E$, ka $f(M)=M$ visiem $f\in F$.

Piemērs 3.5.1.
▪$X=\mathbb{R}$, $d(x,y)=|x-y|$ , S - izliektās un slēgtās čaulas operators; $F=\{f(x):kx\ |x\in X, k\in]0;1]\}$ un, $E=[a;b],\forall a,b\in\mathbb{R}(a<b)$ un $0\in[a;b]$. Šajā gadījumā $M=\{0\}$, kas ir arī šīs saimes F kopīgais nekustīgais punkts.▪

DEFINĪCIJA 3.5.4.
Saka, ka S-slēgtai kopai $K\subset X$ ir S-normāla struktūra, ja katrā S-slēgtā nevienelementīgā apakškopā $H\subset K$ eksistē tāds elements $u\in H$, ka $\sup\{d(x,u)\ |x\in H\}<\operatorname{diam}H$.
Saka, ka telpai X ir S-normāla struktūra, ja katrai S-slēgtai kopai telpā X ir S-normāla struktūra.

Atzīmēsim, ka katrai izliektai un kompaktai kopai K Banaha telpā X ir S-normāla struktūra (V.I.Istratesku, [1981], 60.lpp), ja telpā X slēguma operators S tiek definēts kā izliektās un slēgtās čaulas operators.

Ņemot vērā jaunos jēdzienus, varam pierādīt:

TEOREMA 3.5.1.
Pieņemsim:1) (X,d) - metriska telpa ar slēguma operatoru S;

2) X ir S-kompakta;

3) X ir ar S-normālu struktūru;

4) jebkura slēgta lode $B(x,r)$ ($x \in X$, $r \in \mathbb{R}_{++}$) ir S-slēgta.

Ja neizstiepjošu attēlojumu saimei $F: X \to X$ piemīt $\mathcal{S}$-invariances īpašība telpā X, tad saimei F ir kopīgs nekustīgais punkts.

▾Pierādījums.

Izmantojot Corna lemmu un telpas S-kompaktumu, varam atrast minimālo netukšo S-slēgto un attiecībā pret saimi F invarianto telpas X apakškopu M.

Pieņemsim, ka M satur vairāk nekā vienu punktu, un pieņemsim, ka ir tāds punkts $a \in M$, kuram eksistē tāds saimes F attēlojums f, ka $f(a) \neq a$. Pēc saimes F S-invariances īpašības telpā X seko, ka eksistē tāda S-kompakta kopa $M_1 \subset M$, ka $f(M_1) = M_1, \forall f \in F$. Ja $diam M_1 > 0$, tad no telpas X S-normālās struktūras seko, ka eksistē tāds elements $u \in S(M_1) = M_1$, ka

$r := sup\{d(u,x) \mid x \in M_1\} < diam M_1 \leq diam M$. $M_0 \subset M_1 \subset$

Apskatīsim kopu $M_0 := (\bigcap \{B(x,r) \mid x \in M_1\}) \cap M_1$. Tā nav tukša, jo $u \in M_0$, tā ir S-slēgta kā S-slēgtu kopu šķēlums un tā ir S-kompakta. Pierādīsim, ka $M_0$ ir invarianta attiecībā pret saimi F. Izvēlēsimies brīvi $z \in M_0$ un $f \in F$. Brīvi izvēlētam $x \in M_0 \subset M_1$ - jo $f(M_1) = M_1$ - eksistē tāds $w \in M_1$, ka $x = f(w)$. Tāpēc

$$d(f(z),x) = d(f(z),f(w)) \leq d(z,w) \leq r \quad (\text{jo } z \in M_0, w \in M_1). \qquad (3.5.1.1)$$

Šādas nevienādības būs spēkā visiem $z \in M_0$, visiem $f \in F$ un visiem $x \in M_0$, t.i., $f(M_0) \subset M_0, \forall f \in F$. No M minimalitātes seko, ka $M = M_0$, bet $diam M_0 \leq r < diam M_1 \leq diam M$. Pretruna radusies no pieņēmuma, ka kopā M ir vairāk nekā viens punkts.▴

PIEZĪME 3.5.1.

Ja attēlojumu saime F ir diametrāli neizstiejoša, teorēmas apgalvojums paliek spēkā. Pierādījumā atliek pamatot nevienādību (3.5.1.1):

$$d(f(z),x) = d(f(z),f(w)) \leq \varphi(sup\{d(z,u) \mid u \in M_1\} \leq sup\{d(z,u) \mid u \in M_1\} \leq r.$$

# II DAĻA

# BOLA-BRAUERA-ŠAUDERA TEORĒMAS STABILITĀTE

## 0.VĒSTURISKS APSKATS

Viena no ievērojamākajām nekustīgā punkta eksistences teorēmām tika iegūta 20.gs. sākumā, un šobrīd plašākai matemātiķu saimei tā pazīstama kā holandiešu matemātiķa L.Brauera teorēma. Sākotnējā formulējumā šī teorēma apgalvoja (pēc J.Dugundži un A.Granass [1982], 46.lpp):

*BRAUERA TEORĒMA ([1910], pierādīta 1909.gadā, gadījumā, ja n=3).*
*Ja* $V^n:=\{x|x=\{x_1,x_2,...\},x_i=0,\forall i>n,\sum_{j=1}^{n}|x_j|\leq 1\}$ *un nepārtraukts attēlojums f attēlo* $V^n$ *sevī, tad attēlojumam f eksistē nekustīgais punkts.*

Taču, kā pamatojuši A.D. Miškis un I.M.Rabinovičs [1955](un ne tikai viņi vien!), tad pirmsākumi šīs teorēmas idejai meklējami baltvācu matemātiķa Pīrsa Bola darbā [1904]. J.Dugundži un A.Granass [1982] grāmatā (46.lpp) pierādīts, ka P.Bola un L.E.J.Brauera teorēmu formulējumi ir ekvivalenti.

*BOLA TEORĒMA ([1904], gadījumā, ja n=3).*
*Pieņemsim, ka nepārtraukts attēlojums f attēlo kopu* $V^n$ *kopā* $E^n:=\{x|x=\{x_1,x_2,...\},x_i=0,\forall i>n\}$. *Tad vai nu* $\exists x^*\in V^n$: $f(x^*)=x^*$, *vai arī* $\exists x\in\partial V^n$: $x=\lambda f(x)$, $0<\lambda<1$.

P.Bols šo teorēmu iegūst kā pastarpinātu rezultātu, un tāpēc ilgu laiku matemātiskajās aprindās tas netiek pamanīts. Teorēmu P.Bols izmanto pierādījumā, lai pamatotu, ka diferenciālvienādojumu sistēmai ar noteiktām īpašībām eksistē atrisinājums, līdz ar to pirms tam iegūto rezultātu par nekustīgā punkta eksistenci viņš īpaši neizceļ.

Taču V.I.Istratesku [1981] raksta (113.lpp), ka ekvivalenta rezultāta formulējums atrodams arī H.Puankarē 1886.gada darbā.

Laika gaitā Bola-Brauera teorēma ir vairākkārt vispārināta. Vispirms Ž.Adamārs (J.Hadamard [1910]) devis pirmo pierādījumu galīgdimensionālā telpā $\mathbf{R}^n(n\in\mathbf{N})$, izmantojot Kronekera indeksus. 1912.gadā Brauers devis citu pierādījumu, izmantojot simpleksu aproksimācijas tehniku. Vēl citu sameklēsim J.V.Aleksandera [1922] un G.D.Birkhoffa, O.D.Kelloga [1922] rakstos. Populārāko Bola-Brauera teorēmas pierādījumu izstrādājuši Knasters-Kuratovskis-Mazurkevičs [1929], tas balstīts uz E.Špernera lemmu [1928]. Šodienas matemātiķi pazīst sekojošu formulējumu:

*ŠAUDERA TEORĒMA([1930]).*
*Ja nepārtraukts attēlojums f netukšu, kompaktu un izliektu Banaha telpas apakškopu attēlo sevī, tad attēlojumam f eksistē nekustīgais punkts.*

Šīs teorēmas pierādījumu atradīsim J.Šaudera [1930] rakstā. Bet vēsture ar to vēl nav beigusies. 1935.gadā A.Tihonovs Šaudera teorēmas analogu pierādījis lokāli izliektā topoloģiskā vektoru telpā. Ar 1941.gada rakstu S.Kakutani iesāk Bola-Brauera-Šaudera teorēmas iespējamos vispārinājumus daudzvērtīgiem attēlojumiem. Savukārt V.L.Klī 1955.gadā pamatojis, ka katram nepārtrauktam attēlojumam lokāli izliektās topoloģiskās vektoru telpas izliektā apakškopā eksistē tikai tad nekustīgais punkts, ja šī kopa ir arī kompakta. 1967.gadā H.E.Scarfs izstrādājis algoritmu (bāzētu uz Špernera lemmu) tuvinātai nekustīgā punkta atrašanai, kuru var lietot nekustīgā punkta meklēšanā ar kompjūtera palīdzību.

Ir zināmi vairāki Brauera un Šaudera teorēmu pierādījumu veidi. Ar tiem varam iepazīties, piemēram, E.Burgera [1959], C.B.Tompkina [1964], H.Nikaido [1968, 1970], E.Kleina [1973], D.Smarta [1974], J.Franklina [1980], K.J.Arrova, F.H.Hāna (Hahn) [1980], L.Lusternika, V.Soboļeva [1982], K.C.Bordera [1985] darbos. Samērā izsmeļošu informāciju par Bola-Brauera-Šaudera teorēmas attīstības gaitu varam atrast J.Dugundži, A.Granass [1982] un V.I.Istratesku [1981] grāmatās. Taču slavenākā nekustīgo punktu teorēma joprojām nedod mieru matemātiķu prātiem. Tā, piemēram, vēl 1981.gadā K.Grogera rakstā parādījies jauns Brauera teorēmas pierādījums, kā arī 1991.gada N.Sioji rakstā tiek vispārināta Knastera-Kuratovska-Mazurkeviča teorēma. Un droši vien tie nav pēdējie tezultāti.

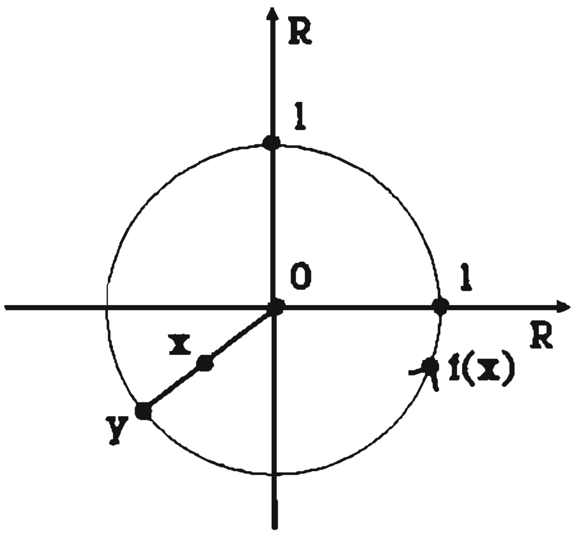
# 1. ŠAUDERA TEORĒMAS ANALOGS W-NEPĀRTRAUKTAM ATTĒLOJUMAM

## 1.1. PAMATJĒDZIENI

Gribētos uzsvērt, ka kopas K kompaktums un izliektība Šaudera teorēmā ir būtiskas prasības. S.Kakutani rakstā [1943] un I.Kronina (Cronin) grāmatā [1964] (124.lpp) atradīsim piemērus, kas parāda, ka Šaudera teorēmā kopas kompaktuma prasību nevar aizstāt ar ierobežotību un slēgtību.

Apskatīsim vienu interesantu piemēru.

Piemērs 1.1.1.




zīm.1.1.1.

▪$K=B(0;1)\setminus\{0\}\subset\mathbb{R}^2$. Šī kopa nav ne kompakta, ne izliekta, un mēs varam uzdot kopā K tādu attēlojumu $f:K\to K$, kurš ir nepārtraukts, bet kuram nav nekustīgā punkta. Attēlojumu f definējam sekojošā veidā: jebkuram $x\in K$ atrodam stara, kas iziet no 0 punkta un iet caur x, krustpunktu y ar riņķa līniju, un "pārbīdam" šo y pa loku ar garumu h, $0<h<2\pi$. Iegūtais punkts tad arī ir f(x) (skatīt zīm.1.1.1.).▪

Piemērs parāda, ka, kaut kopai K līdz izliektai un kompaktai kopai B(0;1) pietrūkst viena paša punkta, secinājums par nekustīgā punkta eksistenci nepārtrauktam attēlojumam var būt aplams. Tātad pie nelielām kopas B(0;1) struktūras izmaiņām var panākt, ka attālums starp x un f(x) ir "liels" visiem $x\in K$.

Bet kā izmainītos Šaudera teorēmas secinājums, ja nepārtraukta attēlojuma vietā mēs apskatītu ne noteikti nepārtrauktu attēlojumu? Bet, piemēram, tādu, kam ir iespējami pārtraukuma punkti?

Pieņemsim, ka X ir metriska telpa ar metriku d, $D(f) \subset X$ ir attēlojuma f definīcijas kopa un $f: D(f) \to X$.

DEFINĪCIJA 1.1.1.
Attēlojumu f sauc par w-nepārtrauktu ($w \in \mathbf{R}_{++}$) punktā $x_0 \in D(f)$, ja katram pozitīvam skaitlim $\varepsilon$ eksistē tāds pozitīvs skaitlis $\delta$, ka visiem punktiem $x \in D(f)$: $d(x_0, x) < \delta$ izpildās nosacījums: $d(f(x_0), f(x)) < \varepsilon + w$.

DEFINĪCIJA 1.1.2.
Ja attēlojums f ir w-nepārtraukts jebkurā definīcijas apgabala D(f) punktā, tad šādu attēlojumu sauc par w-nepārtrauktu kopā D(f) jeb w-nepārtrauktu.

Ja pieņemam, ka w=0, iegūstam nepārtraukta attēlojuma definīciju. Ideja par w-nepārtrauktu attēlojumu nav jauna. Piemēram, M.Burgina un A.Šostaka rakstā [1992] mēs sastopamies ar jēdzienu "nepārtrauktības defekts". Salīdzinot definīcijas, jānonāk pie secinājuma, ka Definīcijās 1.1.1. un 1.1.2. minētais lielums w nav nekas cits kā šis "nepārtrauktības defekts" pie nosacījuma, ka w ir iespējamais mazākais skaitlis, kas apmierina Definīciju 1.1.1. visos D(f) punktos.

Piemērs 1.1.2.
■Dirihlē funkcija $f: \mathbf{R} \to \{0,1\}$, kas definēta sekojoši:

$$\forall x \in \mathbf{R}: f(x) := \begin{cases} 1, & x \in Q \\ 0, & x \in \mathbf{I} \end{cases},$$

ir 1-nepārtraukta.■

Piemērā 1.1.2. Dirihlē funkciju mēs varam uzskatīt arī par 10-nepārtrauktu vai pat $10^{10}$-nepārtrauktu - Definīcija 1.1.2. ir izpildīta. Mēs negribētu uzlikt stingrākus nosacījumus uz w izvēli. Taču, domājot par iespējamo reālo situāciju, gribam w izvēlēties pēc iespējas mazu.

Darbojoties tiešā veidā ar w-nepārtrauktu attēlojumu, grūti pateikt, kāds izskatīsies Šaudera teorēmas analogs, ja aizstājam nepārtrauktu attēlojumu ar w-nepārtrauktu attēlojumu. Varbūt izmantot aproksimācijas ideju ?

DEFINĪCIJA 1.1.3.
Attēlojumu $g:A\to X$, kur $A$ ir metriskās telpas $X$ apakškopa un $A\supset D(f)$, sauc par attēlojuma $f:D(f)\subset A\to X$ $\mu$-aproksimāciju kopā $D(f)$, ja jebkuram kopas $D(f)$ punktam $x$: $d(f(x), g(x))\le\mu$, $\mu\in\mathbf{R}_+$.

Tā kā nepārtraukts attēlojums kompaktā kopā ir arī vienmērīgi nepārtaukts, definēsim vienmērīgi w-nepārtraukta attēlojuma jēdzienu un apskatīsim kopsakarību starp w-nepārtrauktu un vienmērīgi w-nepārtrauktu attēlojumu metriskas telpas kompaktā apakškopā.

DEFINĪCIJA 1.1.4.
Attēlojumu $f:D(f)\to X$ sauc par vienmērīgi w-nepārtrauktu ($w\in\mathbf{R}_{++}$), ja katram pozitīvam skaitlim $\varepsilon$ eksistē tāds pozitīvs skaitlis $\delta$, ka visiem punktiem $x$ un $y$ no $D(f)$: $d(x,y)<\delta$, izpildās nosacījums: $d(f(x), f(y))<\varepsilon+w$.

TEORĒMA 1.1.1.
Ja $X$ ir metriska telpa, $A$ ir kompakta apakškopa telpā $X$ un attēlojums $f:A\to X$ ir w-nepārtraukts, tad $f$ ir vienmērīgi 2w-nepārtraukts attēlojums.

▼Pierādījums.

Pieņemsim, ka attēlojums $f$ ir w-nepārtraukts kopā $A$, t.i., katrā kopas $A$ punktā $x$ izpildās:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall y\in A:\ d(x,y)<\delta \Rightarrow d(f(x), f(y))<\varepsilon+w,$$

un pieņemsim, ka attēlojums $f$ nav vienmērīgi 2w-nepārtraukts kopā $A$, t.i.,

$$\exists\varepsilon_0>0\ \forall\delta>0\ \exists x,y\in A:\ d(x,y)<\delta \text{ un } d(f(x), f(y))\ge\varepsilon_0+2w.$$

Izvēlēsimies tādu pozitīvu skaitļu $\delta_n$ virkni, ka: $\lim_{n\to\infty}\delta_n=0$.

Tad eksistēs tādas virknes $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $x_n, y_n\in A$, ka:

$$d(x_n,y_n)<\delta_n \text{ un } d(f(x_n), f(y_n))\ge\varepsilon_0+2w,\ n=1,2,\ldots.$$

Tā kā kopa $A$ ir kompakta, tad no virknes $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ var izvēlēties tādu apakšvirkni $(x_{n_k})_{k\in\mathbf{N}}$, kura konverģē uz punktu $x_0\in A$; tieši tāpat no virknes $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ var izvēlēties tādu apakšvirkni $(y_{n_k})_{k\in\mathbf{N}}$, kas konverģē uz to pašu $x_0\in A$ (jo:

$$d(y_{n_k},x_0)\le d(y_{n_k},x_{n_k})+d(x_{n_k},x_0)<\delta_{n_k}+d(x_{n_k},x_0)\xrightarrow[k\to\infty]{}0+d(x_0,x_0)=0).$$

No attēlojuma f w-nepārtrauktības punktā $x_0\in A$ seko:

$$d(f(x_{n_k}),f(x_0))<\varepsilon+w \text{ un } d(f(y_{n_k}),f(x_0))<\varepsilon+w,$$

tātad ,ja k tiecas uz bezgalību, iegūsim:

$$d(f(x_{n_k}),f(y_{n_k}))\le d(f(x_{n_k}),f(x_0))+d(f(x_0),f(y_{n_k}))<2\varepsilon+2w.$$

Tā kā $\varepsilon$ izvēlēts patvaļīgi, tad liekot $\varepsilon$ tiekties uz 0, būs spēkā novērtējums: $d(f(x_{n_k}),f(y_{n_k}))\le 2w$.

Bet pēc virkņu $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ un $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ konstrukcijas seko, ka:

$$d(f(x_{n_k}),f(y_{n_k}))\ge \varepsilon_0+2w,\ k=1,2,\ldots.$$

Iegūtā pretruna starp pēdējām divām nevienādībām pamato, ka sākotnējais pieņēmums bijis aplams. ▲

Piemērs 1.1.3.

■Funkcija $f(x):=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & x\in]0;1]\\ 0, & x=0\end{cases}$ parāda, ka uzlabot Teorēmas 1.1.1. secinājumu nav iespējams.

Intervālā ]0;1] funkcija f ir nepārtraukta, punktā 0 tā ir 1-nepārtraukta, [0;1] tā ir vienmērīgi 2-nepārtraukta funkcija (▼ izvēlamies divas punktu virknes $(x_n')_{n\in\mathbf{N}}$, $(x_n'')_{n\in\mathbf{N}}$ no intervāla [0;1]:

$$x_n'=\frac{2}{\pi+4n\pi} \text{ un } x_n''=\frac{2}{3\pi+4n\pi},\ n=0,1,2,\ldots;$$

abas šīs virknes ir bezgalīgi mazas un tāda ir arī to starpība, tāpēc pietiekoši mazam $2>\varepsilon>0$ un pēc patikas mazam $\delta>0$ atradīsies tāds punktu pāris $x_n'$ un $x_n''\in]0;1[$, ka $|x_n'-x_n''|<\delta$ un $|f(x_n')-f(x_n'')|=|1-(-1)|=2>\varepsilon$ ▲ ).■

# 1.2. NEPĀRTRAUKTA APROKSIMĒJOŠA ATTĒLOJUMA EKSISTENCE w–NEPĀRTRAUKTAM ATTĒLOJUMAM

Soli pa solītim mēs tuvojamies mērķim. Varbūt vienmērīgi w-nepārtrauktam attēlojumam izliektā un kompaktā Banaha telpas apakškopā var atrast nepārtrauktu aproksimējošu attēlojumu?

TEOREMA 1.2.1.

Ja $X$ - normēta lineāra telpa,

kopa $A \subset X$ - kompakta,

$f: A \to X$ - vienmērīgi w-nepārtraukts attēlojums,

tad attēlojumam $f$ eksistē nepārtraukta $w'$-aproksimācija $\bar{f}$ un $\bar{f}(A) \subset convf(A)$, $w'>w$.

▾Pierādījums.

Fiksējam $\varepsilon' \in \mathbf{R}_{++}$ tā, lai $w+\varepsilon' \le w'$. No $f$ vienmērīgās w-nepārtrauktības seko:

$\exists \delta>0\ \forall x,y \in A$: $d(x,y)<\delta \Rightarrow d(f(x),f(y))<\varepsilon'+w$.

Tā kā $A$ ir kompakta kopa normētā vektoru telpā $X$, tad katram pozitīvam skaitlim $\gamma$ varam konstruēt galīgu $\gamma$-tīklu kopā $A$. Izvēlamies $\gamma := \frac{\delta}{2}$ un apzīmējam tīkla punktu kopu ar

$M_\delta = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, tad $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(a_i, \frac{\delta}{2})$.

Pierādīsim, ka attēlojuma $f$ sašaurinājumam kopā $M_\delta$ eksistē nepārtraukts turpinājums visā telpā $X$ (tātad arī kopā $A$). Ideja šim pierādījumam radusies no *vispārinātās Titces teorēmas* (K.Borsuks [1967], 77.lpp), kura apgalvo, ka, *ja $A$ ir slēgta apakškopa metriskā telpā $X$ un $Y$ ir lokāli izliekta lineāra telpa, tad katram attēlojumam $f: A \to Y$ eksistē nepārtraukts turpinājums $\bar{f}: X \to Y$ un $\bar{f}(X) \subset convf(A)$*. Mūsu gadījumā $M_\delta = A$, $X$ sakrīt ar $Y$. Mēs atkārtosim attēlojuma $\bar{f}$ konstrukciju un tā nepārtrauktības pamatojumu mūsu konkrētajā situācijā, jo izmantosim šos spriedumus aproksimācijas pierādījumā.

Kā zināmu faktu izmantosim sekojošu rezultātu:

*TEORĒMA (K.Borsuks, 70.lpp). Ja kopa $G$ ir metriskas telpas $X$ vaļēja apakškopa, tad šai kopai eksistē kanoniskais pārklājums attiecībā pret $X$.*

*(DEFINĪCIJA (K.Borsuks, 69.lpp). Kanoniskais pārklājums attiecībā pret telpu $X$ ir tāds vaļējas kopas $G\subset X$ vaļējs pārklājums $\mathbf{U}=\{U_\mu\}$, $\mu\in M$, kurš apmierina nosacījumus:*

*1)$U$ ir lokāli galīgs, t.i., katram kopas $G$ punktam $a$ eksistē tāda šī punkta apkārtne $V$, ka šķēlums $V\cap U_\mu$ nav tukša kopa tikai galīgam indeksu skaitam $\mu$;*

*2)katram punktam $a\in X\setminus G$ un katrai šī punkta apkārtnei $V\subset X$ eksistē tāda šī punkta $a$ apkārtne $W\subset X$, ka, ja šķēlums $U_\mu\cap W$ nav tukša kopa, tad $U_\mu\subset V$.)*

Pēc šīs teorēmas kopai $X\setminus M_\delta$ eksistē kanoniskais pārklājums $\{G_\mu\}$, $\mu\in M$. Izvēlamies katrā kopā $G_\mu$ punktu $x_\mu$ un sameklējam tam tādu atbilstošo punktu $a_\mu\in M_\delta$, lai $d(x_\mu,a_\mu)<2d(x_\mu,M_\delta)$.

Punktā $x\in X\setminus M_\delta$ attēlojumi $\tau_\mu(x):=\dfrac{d(x,X\setminus G_\mu)}{\sum\limits_{\mu'\in M} d(x,X\setminus G_{\mu'})}$ nav vienādi ar 0 tikai galīgam indeksu skaitam $\mu\in M$. Patiešām: jebkurš punkts $x\in X\setminus M_\delta$ pieder vismaz vienai un ne vairāk kā galīgam skaitam kopu $G_\mu$ ( $\{G_\mu\}$ - lokāli galīgs pārklājums! ), tāpēc saucēja summa ir stingri pozitīva. Attēlojumi $\tau_\mu: X\setminus M_\delta\to\mathbf{R}$. Skaidrs, ka $\tau_\mu(x)\geq 0$ un

$$\sum_{\mu\in M}\tau_\mu(x)=\sum_{\mu\in M}\frac{d(x,X\setminus G_\mu)}{\sum\limits_{\mu'\in M} d(x,X\setminus G_{\mu'})}=\frac{\sum\limits_{\mu\in M} d(x,X\setminus G_\mu)}{\sum\limits_{\mu'\in M} d(x,X\setminus G_{\mu'})}=1,$$

$\forall x\in X\setminus M_\delta$, pie tam $\tau_\mu(x)>0$ tad un tikai tad, ja $x\in G_\mu$.

Tā kā pārklājums $\{G_\mu\}$ ir lokāli galīgs, tad katram $x_0\in X\setminus M_\delta$ eksistē tāda šī punkta apkārtne $U_0$ telpā $X\setminus M_\delta$, ka nosacījums $U_0\cap G_\mu\neq\emptyset$ izpildās tikai galīgai indeksu kopai $\mu_0,\mu_1,\ldots,\mu_n$. Tāpēc jebkuram punktam $x\in U_0$:

$$\tau_\mu(x)=\frac{d(x,X\setminus G_\mu)}{d(x,X\setminus G_{\mu_0})+\ldots+d(x,X\setminus G_{\mu_n})},$$

tātad attēlojums $\tau_\mu$ ir nepārtraukts.

Pieņemot, ka

$$\bar{f}(x) := \begin{cases} f(x) & , x \in M_\delta , \\ \sum_{\mu \in M} \tau_\mu(x) f(a_\mu) , & x \in X \setminus M_\delta , \end{cases}$$

mēs iegūstam attēlojumu $\bar{f}: X \to X$, kas turpina attēlojumu $f: M_\delta \to X$ un kura vērtības pieder kopai $conv f(M_\delta)$. Tā kā $M_\delta \subset A$, tad $\bar{f}(A) \subset \bar{f}(X) \subset conv f(M_\delta) \subset conv f(A)$.

Pierādīsim, ka attēlojums $\bar{f}$ ir nepārtraukts.

No tā, ka kopas $X \setminus M_\delta$ pārklājums $\{G_\mu\}$ ir lokāli galīgs un kopa $M_\delta$ ir slēgta, seko, ka jebkuram punktam $p \in X \setminus M_\delta$ eksistē tāda apkārtne $U \subset X \setminus M_\delta$, kas šķeļas tikai ar kopām $\{G_\mu\}$ galīgā skaitā, teiksim ar kopām $G_{\mu_1}, G_{\mu_2}, \ldots, G_{\mu_n}$. Tāpēc jebkuram $x \in U$ attēlojums $\tau_\mu(x)$ būs atšķirīgs no 0 tikai tad, ja $\mu$ sakrīt ar kādu no indeksiem $\mu_i$, $i=1,2,\ldots,n$. Tā kā katrs no attēlojumiem $\tau_{\mu_1}, \ldots, \tau_{\mu_n}$ ir nepārtraukts, tad attēlojums $\bar{f}$ ir nepārtraukts jebkurā kopā $p \in X \setminus M_\delta$.

Atliek pamatot $\bar{f}$ nepārtrauktību kopā $M_\delta$.

Pieņemsim, ka V ir punkta $\bar{f}(p) = f(p)$ ($p \in M_\delta$) brīvi izvēlēta izliekta apkārtne telpā X (X ir lokāli izliekta telpa). Mums jāatrod tāda punkta p apkārtne $U_0 \in X$, ka $\bar{f}(U_0) \subset V$.

Pieņemsim, ka K(p,r) ir vaļēja lode telpā X ar centru punktā p un rādiusu r. Tā kā f ir nepārtraukts kopā $M_\delta$, tad eksistē tāds $\varepsilon > 0$, ka $f(M_\delta \cap K(p,\varepsilon)) \subset V$. Tā kā $\{G_\mu\}$ ir kanoniskais pārklājums, tad punktam p telpā X eksistē tāda apkārtne $U_0$, kura ietilpst lodē $K(p,\varepsilon)$ un, ja tās šķēlums ar kaut kādu pārklājuma kopu $G_\mu$ veido netukšu kopu, tad šī $G_\mu$ iekļaujas lodē $K(p, \frac{1}{3}\varepsilon)$.

Apskatot sākotnēji izvēlētos punktus $x_\mu \in G_\mu$, redzam, ka

$$d(p, a_\mu) \le d(p, x_\mu) + d(x_\mu, a_\mu) < \frac{1}{3}\varepsilon + 2d(x_\mu, M_\delta) \le \varepsilon$$

(jo: $x_\mu \in G_\mu \subset K(p; \frac{1}{3}\varepsilon)$ un $d(x_\mu, M_\delta) \le d(x_\mu, p) \le \frac{1}{3}\varepsilon$, jo $p \in M_\delta$).

Tātad $\bar{f}(x)=f(x)\in V$, *ja* $x\in M_\delta\cap U_0$, un katram x no $(X\setminus M_\delta)\cap U_0$

var atrast tādus indeksus $\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n$, *lai* $x\in\bigcap_{i=1}^{n}G_{\mu_i}$ un x nepieder

nevienai citai pārklājuma kopai $G_\mu$, $\mu\neq\mu_i$, $i=1,2,\ldots,n$. Iegūstam, ka $\tau_{\mu_i}>0$, $i=1,2,\ldots,n$, un $\tau_\mu(x)=0$ visiem citiem indeksiem $\mu$. Seko,

ka: $\bar{f}(x)=\sum_{\mu\in M}\tau_\mu(x)f(a_\mu)=\sum_{i=1}^{n}\tau_{\mu_i}(x)f(a_{\mu_i})$, pie kam $\sum_{\mu\in M}\tau_\mu=\sum_{i=1}^{n}\tau_{\mu_i}=1$. Tā

kā $x\in G_{\mu_i}\cap U_0$, *tad* $f(a_{\mu_i})\in V$, un tā kā kopa V ir izliekta, tad $\bar{f}(x)\in V$. Tātad $\bar{f}(U_0)\subset V$. $\bar{f}$ nepārtrauktības pierādījums pabeigts.

Pamatosim, ka attēlojums $\bar{f}$ ir attēlojuma f w-aproksimācija kopā A. Šim nolūkam izvēlēsimies patvaļīgu punktu $x\in A$. Ja $x\in M_\delta$, tad $d(\bar{f}(x),f(x))=0\le w$. Ja $x\notin M_\delta$, *tad* $x\in A\setminus M_\delta$ *jeb* $x\in X\setminus M_\delta$. Apskatīsim

punkta x vaļēju apkārtni $K(x,\frac{\delta}{n})$ fiksētam $n\in\mathbf{N}$. $\{G_\mu\}$ ir telpas $X\setminus M_\delta$

kanoniskais pārklājums, tāpēc atradīsies punkta x tāda apkārtne

$U_0$, ka $U_0\subset X\setminus M_\delta$, $U_0\subset K(x,\frac{\delta}{n})$ un, ja tās šķēlums ar pārklājuma kopu $G_\mu$

nav tukša kopa, tad $G_\mu\subset K(x,\frac{\delta}{n})$. Atceroties, kā izvēlēti punkti

$$x_\mu\in G_\mu : d(x_\mu,a_\mu)<2d(x_\mu,M_\delta),$$

varam novērtēt attālumu:

$$d(x,a_\mu)\le d(x,x_\mu)+d(x_\mu,a_\mu)<\frac{1}{n}\delta+2\cdot\frac{\delta}{2}\le\delta+\frac{1}{n}\delta .$$

(Piezīme. $x\in\bigcup_{i=1}^{n}B(a_i;\frac{\delta}{2})$ un

$$x_\mu\in G_\mu\subset K(x,\frac{\delta}{n})\subset\bigcup_{i=1}^{n}B(a_i;\frac{\delta}{2})\subset A, \text{ tāpēc}$$

$$\exists a\in M_\delta:\ d(x_\mu;a)\le\frac{\delta}{2} \text{ jeb } d(x_\mu,M_\delta)\le\frac{\delta}{2}.)$$

Liekot n tiekties uz bezgalību, iegūsim novērtējumu: $d(x,a_\mu)<\delta$. Tā kā $\{G_\mu\}$ ir lokāli galīgs pārklājums, tad punkta x apkārtnē $U_0$

atradīsies galīgs skaits kopu $G_{\mu_1},\ldots,G_{\mu_n}$ tādu, ka $x\in\bigcap_{i=1}^{n}G_{\mu_i}$ un x

nepieder nevienai citai pārklājuma kopai. No šejienes seko, ka

$\tau_{\mu_i}(x)>0$, $i=1,2,\ldots,n$, un $\tau_\mu(x)=0$ pārējiem $\mu$. Tātad

$\bar{f}(x)=\sum_{i=1}^{n}\tau_{\mu_i}(x)f(a_{\mu_i})$, $\tau_{\mu_i}(x)>0$, $i=1,2,\ldots,n$, un pēc $\tau_{\mu_i}(x)$

definīcijas $\sum_{i=1}^{n}\tau_{\mu_i}(x)=1$. Tā kā $d(x,a_{\mu_i})<\delta$, tad

$d(f(x),f(a_{\mu_i}))<\varepsilon'+w$, un tā kā telpa X ir normēta lineāra telpa,

tad $d(\bar{f}(x),f(x))=d(\sum_{i=1}^{n}\tau_{\mu_i}f(a_{\mu_i}),f(x))=$

$$=\|\sum_{i=1}^{n}\tau_{\mu_i}f(a_{\mu_i})-f(x)\|=\|\sum_{i=1}^{n}\tau_{\mu_i}f(a_{\mu_i})-\sum_{i=1}^{n}\tau_{\mu_i}f(x)\|=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\tau_{\mu_i}\|f(a_{\mu_i})-f(x)\|<\sum_{i=1}^{n}\tau_{\mu_i}(\varepsilon'+w)=$$

$$=(\varepsilon'+w)\sum_{i=1}^{n}\tau_{\mu_i}=\varepsilon'+w\leq w'$$

jeb $d(\bar{f}(x),f(x))\leq w'$. ▲

Apgalvot, ka iegūtais rezultāts ir pats labākais visās situācijās mēs nevaram. Piemēram, ja $f:[a;b]\to\mathbf{R}$. Izrādās, šādā gadījumā aproksimējošo attēlojumu mēs varam piemeklēt ar labāku novērtējumu nekā Teorēmas 1.2.1. formulējumā.

TEOREMA 1.2.2.
Ja $f:[a;b]\to\mathbf{R}$ ir vienmērīgi $w$-nepārtraukts attēlojums, tad tam eksistē nepārtraukta $\frac{w'}{2}$-aproksimācija $g$, $w'>w$.

•Pierādījums.

Nofiksējam $\varepsilon\in\mathbf{R}_{++}$ tā, lai $\varepsilon+w\leq w'$. Tad pēc f vienmērīgās $w$-nepārtrauktības eksistē tāds $\delta>0$, ka:

$\forall x,y\in[a;b]:|x-y|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon+w$.

Konstruējam intervālā $[a;b]$ $\delta$-tīklu $\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ sekojošā veidā: $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$,

$|x_k - x_{k-1}| < \delta,\ x_k \neq x_{k-1},\ k=1,2,\dots,n.$

Apzīmēsim attēlojuma f vidējās vērtības intervālos $A_k := [x_{k-1}; x_k]$, k=1,2,...,n, ar $v_k := \frac{m_k + M_k}{2}$, $k=1,2,\dots,n$, kur

$m_k := \inf\{f(x)\,|\,x\in A_k\}$ un $M_k := \sup\{f(x)\,|\,x\in A_k\}$, un attēlojuma f vidējās vērtības intervālos $A'_k := \left[\frac{x_{k-1}+x_k}{2}; \frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right]$, k=1,2,...,n-1,

ar $v'_k := \frac{m'_k + M'_k}{2}$, k=1,2,...,n-1, kur

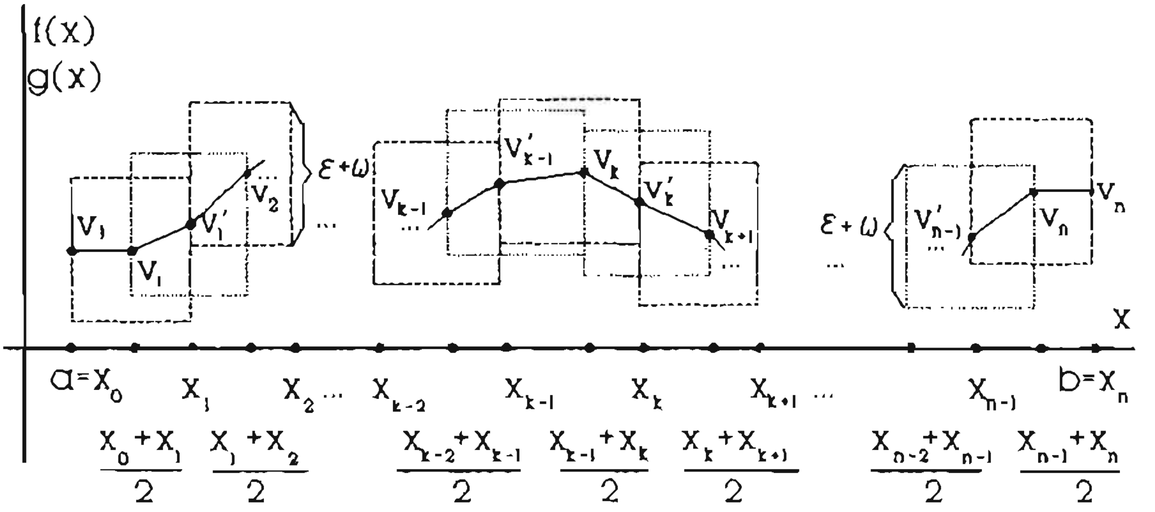
$m'_k := \inf\{f(x)\,|\,x\in A'_k\}$ un $M'_k := \sup\{f(x)\,|\,x\in A'_k\}$.

Funkcijas f aproksimējošo funkciju g definēsim sekojoši:

$$g(x) := \begin{cases} g_1(x) := v_1, \quad x\in\left[x_0; \frac{x_0+x_1}{2}\right]; \\ g_k(x) := \dfrac{x - \frac{x_{k-1}+x_k}{2}}{x_k - \frac{x_{k-1}+x_k}{2}}(v'_k - v_k) + v_k, \\ \qquad x\in\left[\frac{x_{k-1}+x_k}{2}; x_k\right],\ k=1,2,\dots,n-1; \\ g'_k(x) := \dfrac{x - x_{k-1}}{\frac{x_{k-1}+x_k}{2} - x_{k-1}}(v_k - v'_{k-1}) + v'_{k-1}, \\ \qquad x\in\left[x_{k-1}; \frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right],\ k=2,3,\dots,n; \\ g'_n(x) := v_n, \quad x\in\left[\frac{x_{n-1}+x_n}{2}; x_n\right] \end{cases}.$$

Attēlojums g ir nepārtraukts un tas ir attēlojuma f $\frac{w'}{2}$-aproksimācija. Patiešām, ja brīvi izvēlētais $x\in[a;b]$ sakrīt ar $x_k$, $k=0,1,\dots,n$, vai ar $\frac{x_{k-1}+x_k}{2}$, $k=1,2,\dots,n$, tad $|f(x)-g(x)|=0\leq\frac{w'}{2}$, un, ja $x\in\left[x_0;\frac{x_0+x_1}{2}\right]$ vai $x\in\left[\frac{x_{n-1}+x_n}{2};x_n\right]$,

tad, acīmredzami, ka $|f(x)-g(x)|\leq\frac{w+\varepsilon}{2}\leq\frac{w'}{2}$ (skatīt zīm.1.2.2.).




zīm.1.2.2.

Apskatīsim gadījumu, kad $x\in\left]\frac{x_{k-1}+x_k}{2};\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right[$. Pēc punktu

$x_k$, $k=0,1,\ldots,n$, izvēles seko, ka $\left|\frac{x_{k-1}+x_k}{2}-\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right|<\frac{2\delta}{2}=\delta$ un tas

nozīmē, ka jebkuriem

$$u,v\in\left]\frac{x_{k-1}+x_k}{2};\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right[:\ |f(u)-f(v)|<\varepsilon+w.$$

Ja $x\in\left]\frac{x_{k-1}+x_k}{2};x_k\right[$, tad $g_k(x)\in[v_k;v_k']$, t.i.,

$$\exists t\in[0;1]:\ g_k(x)=tv_k+(1-t)v_k'.$$

Līdz ar to varam novērtēt:

$$|f(x)-g(x)|=|g(x)-g_k(x)|=$$

$$=|(t+(1-t))f(x)-(tv_k+(1-t)v_k')|\leq$$

$$\leq t|f(x)-v_k|+(1-t)|f(x)-v_k'|=$$

$$= t\left|f(x) - \frac{m_k+M_k}{2}\right| + (1-t)\left|f(x) - \frac{m'_k+M'_k}{2}\right|.$$

Tā kā $x \in \left]\frac{x_{k-1}+x_k}{2}; x_k\right[ \subset [x_{k-1}; x_k] = A_k$, tad $f(x) \in [m'_k; M'_k]$, t.i.,

$$\exists \lambda_k \in [0;1]:\ f(x) = \lambda_k m_k + (1-\lambda_k) M_k,$$

un, tā kā vienlaicīgi $x \in \left]\frac{x_{k-1}+x_k}{2}; x_k\right[ \subset \left[\frac{x_{k-1}+x_k}{2}; \frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right] = A'_k$, tad

$$f(x) \in [m'_k; M'_k],\ \ t.i.,\ \exists \lambda'_k \in [0;1]:\ f(x) = \lambda'_k m'_k + (1-\lambda'_k) M'_k.$$

Turpinot novērtēšanu, iegūstam:

$$|f(x) - g(x)| \le$$

$$\le t\left|\lambda_k m_k + (1-\lambda_k) M_k - \frac{m_k+M_k}{2}\right| + (1-t)\left|\lambda'_k m'_k + (1-\lambda'_k) M'_k - \frac{m'_k+M'_k}{2}\right| =$$

$$= t\ |(\lambda_k - \tfrac{1}{2}) m_k - (\lambda_k - \tfrac{1}{2}) M_k| + (1-t)\ |(\lambda'_k - \tfrac{1}{2}) m'_k + (\lambda'_k - \tfrac{1}{2}) M'_k| \le$$

$$\le t\,|\lambda_k - \tfrac{1}{2}|\ |m_k - M_k| + (1-t)\ |\lambda'_k - \tfrac{1}{2}|\ |m'_k - M'_k| \le$$

$$\le t\cdot\frac{1}{2}\cdot|m_k - M_k| + (1-t)\cdot\frac{1}{2}\cdot|m'_k - M'_k| \le$$

$$\le \frac{1}{2}t(\varepsilon + w) + \frac{1}{2}(1-t)(\varepsilon + w) = \frac{\varepsilon + w}{2} \le \frac{w'}{2}.$$

Gadījumā, kad $x \in \left]x_k; \frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right[$, iegūsim tieši tādu pašu novērtējumu. Tā kā šāds novērtējums nav atkarīgs no k ($k=1,2,\ldots,n-1$) izvēles un arī no x izvēles, tad galu galā pie sākotnēji fiksētā $\varepsilon>0$ esam ieguvuši, ka

$$|f(x) - g(x)| \le \frac{\varepsilon + w}{2} \le \frac{w'}{2}.\ \blacktriangle$$

Izrādās, ka Teorēmā 1.2.2. iegūto novērtējumu uzlabot nav iespējams.

Piemērs 1.2.1.

▪Piemērā 1.1.2. aplūkotajai Dirihlē funkcijai f, kas ir vienmērīgi 1-nepārtraukta, eksistē nepārtraukta ½-aproksimācija

$g(x):=½$, $\forall x\in\mathbf{R}$. Acīmredzami, ka labāku aproksimāciju tanī nozīmē, ka $d(f(x),g(x))$ būtu mazāks par ½, $\forall x\in\mathbf{R}$, iegūt nav iespējams.∎

## 1.3. PAMATREZULTĀTS

Teorēmas 1.1.1. un 1.2.1. ļauj pamatot sekojošu rezultātu:

TEORĒMA 1.3.1.
Ja K ir netukša, kompakta un izliekta Banaha telpas X apakškopa, kuru w-nepārtraukts attēlojums f attēlo sevī, tad kopā K eksistē tāds punkts $x^*$, ka $d(x^*,f(x^*))\le 2w'$, $w'>w$.

▾Pierādījums.
Tā kā kopa K ir kompakta, tad pēc Teorēmas 1.1.1. w-nepārtrauktais attēlojums f ir arī vienmērīgi 2w-nepārtraukts. Savukārt, lietojot Teorēmu 1.2.1., vienmērīgi 2w-nepārtrauktam attēlojumam f eksistē nepārtraukta 2w'-aproksimācija g, $w'>w$. Tā kā g ir nepārtraukts attēlojums, kas attēlo kopu K sevī ($g(K)\subset conv f(K)\subset K$, jo kopa K ir izliekta), tad varam lietot Šaudera teorēmu, saskaņā ar kuru kopā K eksistē tāds punkts $x^*\in K$, ka: $g(x^*)=x^*$. Līdz ar to: $d(x^*,f(x^*))=d(g(x^*),f(x^*))\le 2w'$.▴

Ievērojot Teorēmu 1.1.1, 1.2.1. un 1.2.2., ka arī Bola-Brauera-Šaudera teorēmas secinājumus, varam pierādīt:

SEKAS 1.3.1.
Ja $K=[a;b]$ un $f:K\to K$ ir w-nepārtraukts, tad intervālā K eksistē tāds punkts $x^*$, ka $d(x^*,f(x^*))\le w'$, $w'>w$.

SEKAS 1.3.2.
Ja pie dotajiem Teorēmas 1.3.1. nosacījumiem ir spēkā, ka f ir vienmērīgi w-nepārtraukts attēlojums, tad $\exists x^*\in K$: $d(x^*,f(x^*))\le w'$, $w'>w$.

SEKAS 1.3.3.
Ja $K=[a;b]$ un $f:K\to K$ ir vienmērīgi w-nepārtraukts attēlojums, tad $\exists x^*\in K$: $d(x^*,f(x^*))\le \frac{w'}{2}$, $w'>w$.

# 2. IESPĒJAMAIS PIELIETOJUMS EKONOMIKĀ

Pat matemātiskajās aprindās nereti tiek uzdots jautājums, vai apskatāmajam matemātiskajam rezultātam ir atrodams kaut kāds pielietojums. Lai nomierinātu jautātāju prātus, varam sacīt, ka nekustīgo punktu teoriju lieto ekonomiskajos modeļos. Konkrētāk, tirgus līdzsvara eksistenci parasti pierāda ar Brauera vai Kakutani teorēmu palīdzību (skatīt, piem., J.T.Švartcu [1961], E.Dīrkeru [1974], K.J.Arrovu, F.H.Hānu [1980], R.R.Kornvalu (Cornwall) [1984]). Zinot to un domājot par to, ir radusies šī darba 2.daļa. Un, ja nodaļā 2.2. apskatītais modelis nav pats labākais, tad tikai tāpēc, ka šis piemērs ir sākums.

## 2.1. w-NEPĀRTRAUKTU ATTĒLOJUMU ĪPAŠĪBAS NORMĒTĀ TELPĀ

Iepazīstoties ar tirgus līdzsvara teoriju, jānonāk pie secinājuma, ka tieši veidā lietot Teorēmu 1.3.1. par w-nepārtraukta attēlojuma w-nekustīgo punktu pagaidām nevaram. Nonākam pie secinājuma, ka teorija prasa tālāku attīstību. Vispirmām kārtām modificēsim w-nepārtraukta attēlojuma jēdzienu gadījumam, kurā f:X→Y, un pēc tam noskaidrosim w-nepārtrauktu attēlojumu kopas invarianci pret aritmētiskajām operācijām.

DEFINĪCIJA 2.1.1.

Attēlojumu f:X→Y, kur X, Y - normētas vektoru telpas, sauc par w-nepārtrauktu ($w\in\mathbf{R}_{++}$) punktā $x_0\in X$, ja katram pozitīvam skaitlim $\varepsilon$ eksistē tāds pozitīvs skaitlis $\delta$, ka visiem punktiem $x\in X$: $\|x-x_0\|_X<\delta$ izpildās nosacījums: $\|f(x)-f(x_0)\|_Y<\varepsilon+w$.

Ja attēlojums f ir w-nepārtraukts jebkurā telpas X punktā, tad šādu attēlojumu sauc par w-nepārtrauktu telpā X jeb w-nepārtrauktu.

Piemērs 2.1.1.

■Vispārināta Dirihlē funkcija $f:\mathbf{R}^n\to\{0;1\}$, kas definēta sekojoši: $\forall x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbf{R}^n$: $f(x):=\begin{cases}1, & \forall x_i\in\{x_1,\ldots,x_n\}: x_i\in\mathbf{Q}\\ 0, & \exists x_i\in\{x_1,\ldots,x_n\}: x_i\in\mathbf{I}\end{cases}$, ir 1-nepārtraukta.■

Līdzīgā veidā varam modificēt vienmērīgi w-nepārtraukta attēlojuma definīciju. Atbilstoši formulētas Teorēmas 1.1.1. un 1.2.1. izmantosim Teorēmas 2.1.4. pierādījumā.

TEOREMA 2.1.1.
Pieņemsim, ka attēlojums f:X→Y ir w'-nepārtraukts, attēlojums g:X→Y ir w''-nepārtraukts, X, Y ir normētas vektoru telpas. Tad f+g ir w'+w''-nepārtraukts attēlojums.

▼Pierādījums.

Brīvi izvēlamies punktu $x_0\in X$ un $\varepsilon>0$. Tā kā f ir w'-nepārtraukts attēlojums, tad

$$\exists\delta_1\in\mathbf{R}_{++}\ \forall x\in X: \|x-x_0\|_X<\delta_1\to\|f(x)-f(x_0)\|_Y<\frac{\varepsilon}{2}+w',$$

un, tā kā g ir w''-nepārtraukts attēlojums, tad

$$\exists\delta_2\in\mathbf{R}_{++}\ \forall x\in X: \|x-x_0\|_X<\delta_2\to\|g(x)-g(x_0)\|_Y<\frac{\varepsilon}{2}+w''.$$

Definējam $\delta:=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, tad

$$\forall x\in X:\ \|x-x_0\|_X<\delta\Rightarrow\|(f(x)+g(x))-(f(x_0)+g(x_0))\|_Y=$$
$$=\|(f(x)-f(x_0))+(g(x)-g(x_0))\|_Y\le\|f(x)-f(x_0)\|_Y+\|g(x)-g(x_0)\|_Y<$$
$$<\frac{\varepsilon}{2}+w'+\frac{\varepsilon}{2}+w''=\varepsilon+w'+w''.\ \blacktriangle$$

SEKAS 2.1.1.
Ja f:K→Y ir w-nepārtraukts attēlojums un g:K→Y ir nepārtraukts attēlojums, tad f+g ir w-nepārtraukts attēlojums.

Lai runātu par w-nepārtrauktu attēlojumu reizinājumu, vispirms vienosimies, ko mēs saprotam ar jēdzienu "reizinājums" normētā vektoru telpā.

*DEFINĪCIJA 2.1.2.(S.Langs [1976], 118.lpp)*
*Pieņemsim, ka X, Y, Z ir normētas vektoru telpas. Par vektoru $a\in X$, $v\in Y$ reizinājumu sauc attēlojumu, kas pārim $(a,v)\in X\times Y$ piekārto elementu $av\in Z$ un kas apmierina sekojošus nosacījumus:*
*1.Ja $a,b\in X$ un $v\in Y$, tad $(a+b)v=av+bv$.*
*Ja $a\in X$ un $u,v\in Y$, tad $a(u+v)=au+av$.*
*2.Ja $c\in\mathbf{R}$, $a\in X$, $v\in Y$, tad $(ca)v=c(av)=a(cv)$.*
*3.$\forall a\in X\ \forall v\in Y$: $\|av\|_Z\le\|a\|_X\|v\|_Y$.*

Kā vienkāršāko piemēru varam minēt vektoru skalāro reizinājumu telpā $\mathbf{R}^n$.

Pieņemsim, ka dots reizinājums $X\times Y\to Z$. Apskatīsim attēlojumus $f:K\to X$ un $g:K\to Y$, K ir normētas vektoru telpas V apakškopa. Tad ar attēlojumu reizinājumu sapratīsim

$$(f\cdot g)(x):=f(x)g(x),\ \forall x\in K.$$

TEORĒMA 2.1.2.
Pieņemsim, ka attēlojums $f:V\to X$ ir $w'$-nepārtraukts, attēlojums $g:V\to Y$ ir $w''$-nepārtraukts, V, X, Y ir normētas vektoru telpas. Pie šiem nosacījumiem $f\cdot g$ ir $w'w''+w'\|g(x_0)\|_Y+w''\|f(x_0)\|_X$-nepārtraukts attēlojums katrā telpas V punktā $x_0$.

▾Pierādījums.

Brīvi izvēlamies punktu $x_0\in V$ un $\varepsilon>0$. Definējam

$$\varepsilon':=\frac{1}{2}\left(-w'-w''-\|g(x_0)\|_Y-\|f(x_0)\|_X+\sqrt{(w'+w''+\|g(x_0)\|_Y+\|f(x_0)\|_X)^2+4\varepsilon}\right)>0.$$

Tā kā f ir $w'$-nepārtraukts attēlojums, tad $\exists\delta_1\in\mathbf{R}_{++}\ \forall x\in V$: $\|x-x_0\|_V<\delta_1\Rightarrow\|f(x)-f(x_0)\|_X<\varepsilon'+w'$. Tā kā g ir $w''$-nepārtraukts attēlojums, tad $\exists\delta_2\in\mathbf{R}_{++}\ \forall x\in V$: $\|x-x_0\|_V<\delta_2\Rightarrow\|g(x)-g(x_0)\|_Y<\varepsilon'+w''$. Izvēlamies $\delta:=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, tad $\forall x\in V$: $\|x-x_0\|_V<\delta\Rightarrow$

$$\|f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)\|_Z=\|f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)\|_Z\le$$
$$\le\|g(x)(f(x)-f(x_0))\|_Z+\|f(x_0)(g(x)-g(x_0))\|_Z=$$
$$=\|(g(x)-g(x_0)+g(x_0))(f(x)-f(x_0))\|_Z+\|f(x_0)\|_X\|g(x)-g(x_0)\|_Y\le$$
$$\le\|g(x)-g(x_0)\|_Y\|f(x)-f(x_0)\|_X+\|g(x_0)\|_Y\|f(x)-f(x_0)\|_X+\|f(x_0)\|_X\|g(x)-g(x_0)\|$$
$$<(\varepsilon'+w'')(\varepsilon'+w')+\|g(x_0)\|_Y(\varepsilon'+w')+\|f(x_0)\|_X(\varepsilon'+w'')=$$
$$=\varepsilon'\varepsilon'+\varepsilon'w'+\varepsilon'w''+w'w''+\|g(x_0)\|_Y\varepsilon'+\|g(x_0)\|_Yw'+\|f(x_0)\|_X\varepsilon'+\|f(x_0)\|_Xw''.$$

Atliek pamatot, ka

$$\varepsilon'\varepsilon'+\varepsilon'w'+\varepsilon'w''+\|g(x_0)\|_Y\varepsilon'+\|f(x_0)\|_X\varepsilon'=\varepsilon .$$

Apzīmēsim $w'+w''+\|g(x_0)\|_Y+\|f(x_0)\|_X =: t$. Pamatosim, ka $(\varepsilon')^2+\varepsilon't=\varepsilon$.

Aizvietojot sākotnēji izvēlēto $\varepsilon'=\frac{1}{2}(\sqrt{t^2+4\varepsilon}-t)$ vērtību, iegūsim:

$$\frac{1}{4}\left(t^2+4\varepsilon-2t\sqrt{t^2+4\varepsilon}+t^2\right)+\frac{1}{2}\left(\sqrt{t^2+4\varepsilon}-t\right)t=$$

$$=\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t\sqrt{t^2+4\varepsilon}+\varepsilon-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}t\sqrt{t^2+4\varepsilon}=\varepsilon. \blacktriangle$$

SEKAS 2.1.2.
Ja $f:V\to X$ ir w-nepārtraukts attēlojums un $g:V\to Y$ ir nepārtraukts attēlojums, tad $f\cdot g$ ir $\|g(x_0)\|_Y w$-nepārtraukts attēlojums katrā telpas V punktā $x_0$.

SEKAS 2.1.3.
Ja $f:V\to X$ ir w-nepārtraukts attēlojums un c ir konstante, tad $c\cdot f$ ir $|c|w$-nepārtraukts attēlojums.

Sekas 2.1.4.
Ja $f:X\to Y$ ir w'-nepārtraukts attēlojums un $g:X\to Y$ ir w''-nepārtraukts attēlojums, X, Y normētas vektoru telpas, tad f-g ir w'+w''-nepārtraukts attēlojums.

$\blacktriangledown$Pierādījums.
Pēc Sekām 2.1.3. -g= (-1)g ir w''-nepārtraukts attēlojums dotajā punktā, tāpēc, ievērojot Teorēmu 2.1.1., f+(-1)g=f-g ir w'+w''-nepārtraukts attēlojums.$\blacktriangle$

Dalījuma gadījumā apmierināsimies tikai ar vienu vienkāršotu situāciju.

TEORĒMA 2.1.3.
Ja $f: X\to[1;+\infty[$ ir w-nepārtraukts attēlojums normētā vektoru telpā X, tad $\frac{1}{f}$ ir $\frac{w}{f(x_0)}$-nepārtraukts attēlojums katrā telpas X punktā $x_0$.

▾Pierādījums.

Brīvi izvēlamies punktu $x_0 \in X$ un $\varepsilon > 0$, definējam $\varepsilon' := \varepsilon f(x_0)$. Tā kā f ir w-nepārtraukts attēlojums, tad

$$\exists \delta > 0: \ \forall x \in X: \|x - x_0\|_X < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon' + w.$$

Tādā gadījumā:

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}\right| =$$

$$= \frac{|f(x_0) - f(x)|}{f(x)\, f(x_0)} < \frac{\varepsilon' + w}{f(x)\, f(x_0)} \le$$

$$\le \frac{\varepsilon' + w}{f(x_0)} = \frac{\varepsilon f(x_0) + w}{f(x_0)} = \varepsilon + \frac{w}{f(x_0)}. ▴$$

Zināmu lomu ekonomiskajos modeļos spēlē nepārtraukta attēlojuma vērtību kopas ierobežotība, ja vien definīcijas kopa ir kompakta. Šādā situācija var garantēt arī vērtību kopas kompaktību, taču w-nepārtraukta attēlojuma gadījumā vairāk par ierobežotību iegūt nevar.

TEORĒMA 2.1.4.
Pieņemsim, ka X, Y ir normētas lineāras telpas, kopa A ir kompakta telpas X apakškopa un $f: A \to Y$ ir w-nepārtraukts attēlojums. Tad kopa f(A) ir ierobežota.

▾Pierādījums.

Pēc Teorēmas 1.1.1. f ir vienmērīgi 2w-nepārtraukts attēlojums. Pēc Teorēmas 1.2.1. vienmērīgi 2w-nepārtrauktam attēlojumam eksistē nepārtraukta 2w'-aproksimācija $\bar{f}$ kopā A, $w' > w$. Tā kā A ir kompakta kopa un $\bar{f}$ nepārtraukts attēlojums, tad $\bar{f}(A)$ kompakta kopa, tātad ierobežota:

$$\exists r \in \mathbf{R}_+ , \exists x \in \bar{f}(A): \ \bar{f}(A) \subset B(x, r)$$

Tā kā $\bar{f}$ ir f 2w'-aproksimācija, tad $d(\bar{f}(z), f(z)) \le 2w'$, $\forall z \in A$. Līdz ar to $f(A) \subset B(x, r+2w')$, t.i., attēlojums f ir ierobežots.▴

Kompaktas kopa attēla kompaktību pie w-nepārtraukta attēlojuma nevar garantēt, to pamato kaut vai šis piemērs:

Piemērs 2.1.2.

■ $f:[0;1]\to[0;1]$.

$$f(x):=\begin{cases}\frac{1}{2}, & x=0\\ x, & x\in]0;1[\\ \frac{1}{2}, & x=1\end{cases}$$ - tas ir ½-nepārtraukts attēlojums, kuram

vērtību kopa $f([0;1])=]0;1[$ nav kompakta.■

## 2.2. EKONOMISKĀ MODEĻA PIEMĒRS

Šajā apakšnodaļā mēs dosim ekonomiskā modeļa aprakstu, kāds atrodams K.J.Arrova un F.H.Hāna [1980] grāmatā (16.-29.lpp), veiksim atbilstošas izmaiņas un uzlabojumus, izdarīsim atbilstošus secinājumus.

Pieņemsim, ka ir n dažādi labumi (preces un pakalpojumi), patērētāji un ražotāji. Katrs patērētājs var būt arī ražotājs, kā arī otrādi - katrs ražotājs var būt patērētājs. Patērētājus un ražotājus kopumā pieņemts saukt par ekonomiskiem aģentiem. Ja mēs raksturojam ar $x_{h_i}$ patērētāja h lēmumu attiecībā pret i-to labumu, tad $x_{h_i}<0$ nozīmē, ka i ir labums, ko piedāvā patērētājs h, un $x_{h_i}\geq 0$ nozīmē, ka i ir labums, ko pieprasa patērētājs h (ietverot arī 0 pieprasījumu). Tad $x_i:=\sum_h x_{h_i}$ nozīmē i-tā labuma kopumu, ko piedāvā (ja $x_i<0$) vai pieprasa (ja $x_i\geq 0$) visi patērētāji kopumā. Ja mēs raksturojam ar $y_{h_i}$ ražotāja f lēmumu attiecībā pret i-to labumu, tad ar $y_{f_i}<0$ sapratīsim, ka i-to labumu ražotājs f pieprasa, un ar $y_{f_i}\geq 0$ sapratīsim, ka i-to labumu ražotājs f piedāvā (ietverot arī 0 piedāvājumu). Tad $y_i:=\sum_f y_{f_i}$ nozīmē i-tā labuma kopumu, ko piedāvā (ja $y_i\geq 0$) vai pieprasa (ja $y_i<0$) visi ražotāji kopumā. Ar $\overline{x_i}$ sapratīsim to i-tā labuma daudzumu, kas apskatāmajā laika brīdī ir dots kā sākotnējais labuma daudzums jeb resursi. Atzīmēsim, ka tas vienmēr ir nenegatīvs lielums. Tirgus līdzsvars ir saistīts ar atšķirīgo ražotāju un patērētāju lēmumu savienojamību. Kopējais piedāvājums ir summa no labumu produkcijas un labumiem, kas saražoti līdz šim. Tādā gadījumā i-tā labuma pieprasījuma pārpalikums ir $\sigma_i := x_i - y_i - \overline{x_i}$, kur i=1,...,n.

PIEŅEMUMS 1.
Pieņemsim, ka $\mathbf{p} := (p_1, \ldots, p_n)$ ir doto n labumu cenu vektors, un pieņemsim, ka pieprasījuma pārpalikumu $\sigma_i$ ir iespējams izteikt kā funkciju no $\mathbf{p}$. Šo funkciju apzīmēsim ar $z_i$, i=1,...,n, tad

$$z_i(\mathbf{p}) = x_i(\mathbf{p}) - y_i(\mathbf{p}) - \overline{x_i}(\mathbf{p}), \qquad \mathbf{z}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} z_1(\mathbf{p}) \\ z_2(\mathbf{p}) \\ \ldots \\ z_n(\mathbf{p}) \end{pmatrix},$$ kopējā pieprasījuma

pārpalikuma funkcija $\mathbf{z}$.

PIEŅEMUMS 2.
$\mathbf{z}(\mathbf{p}) = \mathbf{z}(k\mathbf{p})$, $\forall \mathbf{p} > \mathbf{0}$ *un* $k > 0$.

Pieņēmums 2 apgalvo, ka visu cenu mēroga maiņa attiecībā pret visām precēm vienlaicīgi pieprasījuma pārpalikuma funkcijas vērtību neizmaina. Jeb - ja vienlaicīgi k-kārtīgi izmaina algas un cenas, tad patiesībā pirkt- un pārdot-spēja nav izmainījusies.

No Pieņēmuma 2 seko, ka cenu vektors ir normējams un tāpēc var uzskatīt, ka tas pieder n-dimensiju simpleksam $S_n := \{\mathbf{p} \mid \sum_{i=1}^{n} p_i = 1,\ \mathbf{p} > 0\}$. Mēs izslēdzam situāciju ar negatīvām cenām un iespēju visām cenām vienlaicīgi būt vienādām ar 0.

PIEŅEMUMS 3' jeb Valrasa likums.
$\forall \mathbf{p} \in S_n$: $\mathbf{p}\mathbf{z}(\mathbf{p}) = 0$.

Kā motivāciju šim Pieņēmumam 3' var minēt sekojošo. Visu ražotāju nolūks ir maksimizēt to peļņu. $\boldsymbol{py}:=(p_1,\ldots,p_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}$ ir visu ražotāju kopējā peļņa, varam pieņemt,ka $\boldsymbol{py}$ ir vienmēr nenegatīvs lielums. Patērētāji kontrolē ražotājus (ražotāji un patērētāji noteiktās situācijās nonāk mainītās lomās). Tas nozīmē, ka katrs patērētājs h saņem zināmu daļu $d_h \geq 0$ no ražotāju kopējās peļņas ($\sum_h d_h=1$). Katrs patērētājs h izvēlas tikai tādu

$\boldsymbol{x}_h:=\begin{pmatrix} x_{h_1} \\ \ldots \\ x_{h_n} \end{pmatrix}$, kas apmierina viņa budžeta nevienādību $\boldsymbol{px}_h-\boldsymbol{p}\overline{\boldsymbol{x}_h}-d_h\boldsymbol{py}\leq 0$

(kur $\overline{\boldsymbol{x}_h}:=\begin{pmatrix} \overline{x_{h_1}} \\ \ldots \\ \overline{x_{h_n}} \end{pmatrix}$ ir sākotnējo labumu, kas atrodas patērētāja h

rīcībā, daudzuma vektors). Patērētājs h vienmēr dod priekšroku vektoram $\boldsymbol{x}_h$ pār $\boldsymbol{x}'_h$, ja $\boldsymbol{x}_h>\boldsymbol{x}'_h$, un nekad neizvēlas darbību, ja iespējama labāka. Tiek panākts, ka $\boldsymbol{x}_h$ vienmēr tiek izvēlēts tā, lai $\boldsymbol{px}_h-\boldsymbol{p}\overline{\boldsymbol{x}_h}-d_h\boldsymbol{py}=0$. Sasummējot pēdējo vienādību pa visiem patērētājiem h, iegūsim $\boldsymbol{pz}=0$.

PIEŅEMUMS 4'.
Kopējā pieprasījuma pārpalikuma funkcija $\boldsymbol{z}$ ir nepārtraukta visā definīcijas apgabalā $S_n$.

No Pieņēmuma 4' seko, ka $\boldsymbol{z}(S_n)$ ir ierobežota kopa, jo $S_n$ ir kompakta kopa. Pamatojoties uz Teorēmu 2.1.4., $\boldsymbol{z}(S_n)$ ierobežotība saglabāsies arī pie pieņēmuma, ja $\boldsymbol{z}$ ir w-nepārtraukts attēlojums.

PIEŅEMUMS 4.
Kopējā pieprasījuma pārpalikuma funkcija $\boldsymbol{z}$ ir w-nepārtraukta visā definīcijas apgabalā $S_n$.

Kopējā pieprasījuma pārpalikuma funkcijas nepārtrauktība nozīmē, ka pie nelielām cenu vektora izmaiņām, maz izmainīsies kopējā pieprasījuma pārpalikuma funkcijas vērtība. Tātad šīs funkcijas nepārtrauktība atspoguļo faktu, ka modelis apraksta stabilas ekonomiskas situācijas. Pieņēmums par kopējās pieprasījuma pārpalikuma funkcijas w-nepārtrauktību paver iespēju modeli lietot arī nestabilu (piemēram, pārejas tipa) ekonomisko situāciju aprakstos.

DEFINĪCIJA 2.2.1.
Cenu vektoru $\boldsymbol{p}^* \in S_n$ sauc par tirgus līdzsvaru, ja $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{p}^*) \leq \boldsymbol{0}$.

Standarta situācijā, ja izpildās Pieņēmumi 1,2,3',4', var apgalvot, ka eksistē tirgus līdzsvars, t.i., eksistē tāds cenu vektors $\boldsymbol{p}^* \in S_n$, kas pilnībā apmierina ražotāju un patērētāju pieprasījumu pēc labumiem. Acīmredzami, ka, ja $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{p})$ ir w-nepārtraukta funkcija, šāds apgalvojums varētu būt aplams.

DEFINĪCIJA 2.2.2.
Cenu vektoru $\boldsymbol{p}^* \in S_n$ sauc par tirgus k-līdzsvaru, ja $\sum_{z_i(\boldsymbol{p}^*)>0} z_i(\boldsymbol{p}^*) \leq k,\ k \in \mathbf{R}_{++}$.

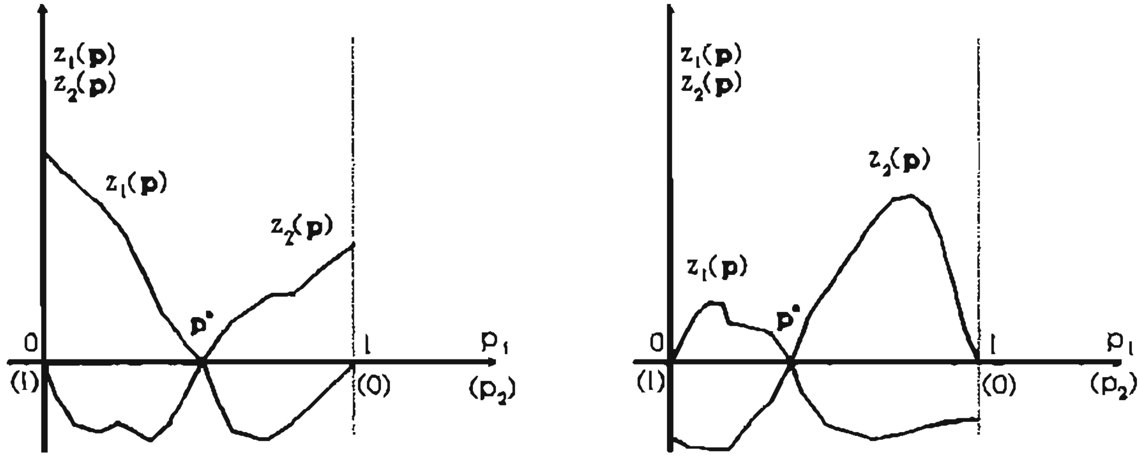
No cenu vektora Definīcijas 2.2.2. seko, ka pieprasījuma pārpalikuma funkcijas pozitīvo koordinātu summa ir ierobežota. Varam arī sacīt, ka konstante k raksturo novirzi no tirgus līdzsvara Definīcijas 2.2.1. izpratnē jeb tas ir neapmierinātā pieprasījuma daudzums, kurš pie dotā $\boldsymbol{p}^* \in S_n$ ir maksimālais iespējamais.

Izdarīsim sekojošu pieņēmumu:

PIEŅĒMUMS 3.
$\exists \gamma > 0:\ \gamma \leq \sum_{z_i(\boldsymbol{p}) \leq 0} p_i,\ \forall \boldsymbol{p} \in S_n$.

No $\gamma$ eksistences seko, ka pie jebkura cenu vektora $\boldsymbol{p} \in S_n$ izvēles ir tādi labumi, kuru cenas nav 0 un ekonomisko aģentu pieprasījums pēc šiem labumiem ir apmierināts.

Zīm.2.2.1. ilustrē divas situācijas divu labumu gadījumā, kad izpildās vienlaicīgi standartpieņēmumi 1,2,3',4' un Pieņēmums 3.




zīm. 2.2.1.

Zīmējums parāda, ka divu labumu gadījumā tirgus līdzsvara cenu vektors $\boldsymbol{p}^*$ nevar būt vienāds ar (0;1) vai (1;0).

Turpmāk pieņemsim, ka telpā $\mathbf{R}^n$ normu esam definējuši sekojoši $\|\boldsymbol{x}\|=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$, $\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbf{R}^n$.

TEOREMA 2.2.1.

Ja izpildās pieņēmumi 1,2,3,4 un $w<\dfrac{\gamma}{n}$, tad eksistē k-līdzsvara cenu vektors $\boldsymbol{p}^*\in S_n$, kur $k>\dfrac{nw^2+(n+1)w}{\gamma-nw}$.

▾Pierādījums.

Vispirms konstruēsim attēlojumu $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{p})$ sekojošā veidā:

$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{p}):=\dfrac{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{M}(\boldsymbol{p})}{(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{M}(\boldsymbol{p}))\boldsymbol{e}}$, kur $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{p})=(t_1(\boldsymbol{p}),\ldots,t_n(\boldsymbol{p}))$,

$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{p})=(m_1(\boldsymbol{p}),\ldots,m_n(\boldsymbol{p}))$, $m_i(\boldsymbol{p}):=\max\{0,z_i(\boldsymbol{p})\}$, $i=1,\ldots,n$ un

$\boldsymbol{e}:=\begin{pmatrix}1\\ \ldots\\ 1\end{pmatrix}_{n\text{-}dim}$. Tad $0\le t_i(\boldsymbol{p})=\dfrac{p_i+m_i(\boldsymbol{p})}{1+\sum_{i=1}^{n}m_i(\boldsymbol{p})}\le 1$, $i=1,\ldots,n$ un, ievērojot

$m_i(\mathbf{p})$ definīciju,

$$\sum_{i=1}^{n} t_i(\mathbf{p}) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(p_i+m_i(\mathbf{p}))}{1+\sum_{z_i(\mathbf{p})>0} z_i(\mathbf{p})} = \frac{1+\sum_{z_i(\mathbf{p})>0} z_i(\mathbf{p})}{1+\sum_{z_i(\mathbf{p})>0} z_i(\mathbf{p})} = 1 .$$

Tātad $\mathbf{T}(\mathbf{p}) : S_n \to S_n$.

Noskaidrosim, kāda nepārtrauktības veida ir šis attēlojums. $\mathbf{p}+\mathbf{M}(\mathbf{p})$ ir $w$-nepārtraukts attēlojums (pēc Sekām 2.1.1.). $(\mathbf{p}+\mathbf{M}(\mathbf{p}))\mathbf{e}$ ir $w\|\mathbf{e}\|=w(1+1+\ldots+1)=nw$-nepārtraukts attēlojums (pēc Sekām 2.1.2.). $(\mathbf{p}+\mathbf{M}(\mathbf{p}))\mathbf{e}=1+\sum_{zi(\mathbf{p})>0} z_i(\mathbf{p}) : S_n \to [1;\infty[$ un ir

$wn$-nepārtraukts attēlojums, tāpēc $\frac{1}{(\mathbf{p}+\mathbf{M}(\mathbf{p}))\mathbf{e}}$ ir $\frac{nw}{1+\sum_{z_i(\mathbf{p})>0} z_i(\mathbf{p})}$-

nepārtraukts attēlojums (Teorēma 2.1.3.). Un, lietojot Teorēmu 2.1.2., secinām, ka $\mathbf{T}(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}+\mathbf{M}(\mathbf{p})}{(\mathbf{p}+\mathbf{M}(\mathbf{p}))\mathbf{e}}$ ir

$$\frac{nw^2}{1+\sum_{z_i(\mathbf{p})>0} z_i(\mathbf{p})} + \frac{w}{1+\sum_{z_i(\mathbf{p})>0} z_i(\mathbf{p})} + \frac{nw\|\mathbf{p}+\mathbf{M}(\mathbf{p})\|}{1+\sum_{z_i(\mathbf{p})>0} z_i(\mathbf{p})} =$$

$$= \frac{nw^2+w+nw+nw\sum_{z_i(\mathbf{p})>0} z_i(\mathbf{p})}{1+\sum_{z_i(\mathbf{p})>0} z_i(\mathbf{p})}$$ -nepārtraukts attēlojums.

Tā kā $S_n$ - izliekta un kompakta kopa normētā vektoru telpā $\mathbf{R}^n$ un $\mathbf{T}(\mathbf{p}) : S_n \to S_n$, tad pēc Teorēmas 1.3.1. $\exists \mathbf{p}^* \in S_n$:

$$\|\mathbf{T}(\mathbf{p}^*)-\mathbf{p}^*\| \le 2\frac{nw^2+(n+1)w+nw\sum_{z_i(\mathbf{p}^*)>0} z_i(\mathbf{p}^*)+\alpha}{1+\sum_{z_i(\mathbf{p}^*)>0} z_i(\mathbf{p}^*)}, \quad \alpha \in \mathbf{R}_{++}.$$

No telpā $\mathbf{R}^n$ dotās normas seko:

$$\|\mathbf{T}(\mathbf{p}^*)-\mathbf{p}^*\| = \left\| \frac{\mathbf{p}^*+\mathbf{M}(\mathbf{p}^*)}{1+\sum_{z_i(\mathbf{p}^*)>0} z_i(\mathbf{p}^*)} - \mathbf{p}^* \right\| =$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{p_i^*+m_i(\mathbf{p}^*)}{1+\sum\limits_{z_i(\mathbf{p}^*)>0} z_i(\mathbf{p}^*)}-p_i^*\right|=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{p_i^*+m_i(\mathbf{p}^*)-p_i^*-p_i^*\sum\limits_{z_i(\mathbf{p}^*)>0} z_i(\mathbf{p}^*)}{1+\sum\limits_{z_i(\mathbf{p}^*)>0} z_i(\mathbf{p}^*)}\right|\le$$

$$\le 2\,\frac{nw^2+(n+1)w+nw\sum\limits_{z_i(\mathbf{p}^*)>0} z_i(\mathbf{p}^*)+\alpha}{1+\sum\limits_{z_i(\mathbf{p}^*)>0} z_i(\mathbf{p}^*)}\,.$$

Tā kā $1+\sum\limits_{z_i(\mathbf{p}^*)>0} z_i(\mathbf{p}^*)>0$, tad

$$\sum_{i=1}^{n}\left|m_i(\mathbf{p}^*)-p_i^*\sum_{z_i(\mathbf{p}^*)>0} z_i(\mathbf{p}^*)\right|\le 2\left(nw^2+(n+1)w+nw\sum_{z_i(\mathbf{p}^*)>0} z_i(\mathbf{p}^*)+\alpha\right).$$

Atceroties, kā definētas $m_i(\mathbf{p}^*)$ vērtības, nevienādības kreiso pusi varam uzrakstīt divu summu veidā:

$$\sum_{z_i(\mathbf{p}^*)\le 0}\left|-p_i^*\sum_{z_i(\mathbf{p}^*)>0} z_i(\mathbf{p}^*)\right|+\sum_{z_i(\mathbf{p}^*)>0}\left|z_i(\mathbf{p}^*)-p_i^*\sum_{z_i(\mathbf{p}^*)>0} z_i(\mathbf{p}^*)\right|=$$

$$=\sum_{z_i(\mathbf{p}^*)>0} z_i(\mathbf{p}^*)\sum_{z_i(\mathbf{p}^*)\le 0} p_i^*+\sum_{z_i(\mathbf{p}^*)>0}\left|z_i(\mathbf{p}^*)-p_i^*\sum_{z_i(\mathbf{p}^*)>0} z_i(\mathbf{p}^*)\right|.$$

Ievērojot reālu skaitļu moduļu īpašības ($|a\pm b|\le|a|+|b|$!), varam turpināt:

$$\sum_{z_i(\mathbf{p}^*)>0} z_i(\mathbf{p}^*)\sum_{z_i(\mathbf{p}^*)\le 0} p_i^*+\left|\sum_{z_i(\mathbf{p}^*)>0}\left(z_i(\mathbf{p}^*)-p_i^*\sum_{z_i(\mathbf{p}^*)>0} z_i(\mathbf{p}^*)\right)\right|\le$$

$$\le\sum_{z_i(\mathbf{p}^*)>0} z_i(\mathbf{p}^*)\sum_{z_i(\mathbf{p}^*)\le 0} p_i^*+\sum_{z_i(\mathbf{p}^*)>0}\left|z_i(\mathbf{p}^*)-p_i^*\sum_{z_i(\mathbf{p}^*)>0} z_i(\mathbf{p}^*)\right|.$$

Atgriežoties pie sākotnējās nevienādības, iegūsim:

$$\sum_{z_i(\mathbf{p}^*)>0} z_i(\mathbf{p}^*)\sum_{z_i(\mathbf{p}^*)\le 0} p_i^*+\left|\sum_{z_i(\mathbf{p}^*)>0}\left(z_i(\mathbf{p}^*)-p_i^*\sum_{z_i(\mathbf{p}^*)>0} z_i(\mathbf{p}^*)\right)\right|=$$

$$=\sum_{z_i(\mathbf{p}^*)>0} z_i(\mathbf{p}^*)\sum_{z_i(\mathbf{p}^*)\le 0} p_i^*+\sum_{z_i(\mathbf{p}^*)>0} z_i(\mathbf{p}^*)\left(1-\sum_{z_i(\mathbf{p}^*)>0} p_i^*\right)=$$

$$=2\sum_{z_i(\mathbf{p}^*)>0} z_i(\mathbf{p}^*)\sum_{z_i(\mathbf{p}^*)\le 0} p_i^* \le 2\left(nw^2+(n+1)w+nw\sum_{z_i(\mathbf{p}^*)>0} z_i(\mathbf{p}^*)+\alpha\right).$$ Tā kā

$$\gamma\sum_{z_i(\mathbf{p}^*)>0} z_i(\mathbf{p}^*) \le \sum_{z_i(\mathbf{p}^*)>0} z_i(\mathbf{p}^*)\sum_{z_i(\mathbf{p}^*)\le 0} p_i^* \le nw^2+(n+1)w+nw\sum_{z_i(\mathbf{p}^*)>0} z_i(\mathbf{p}^*)+\alpha,$$

tad $\sum_{z_i(\mathbf{p}^*)>0} z_i(\mathbf{p}^*) \le \frac{nw^2+(n+1)w+\alpha}{\gamma-nw}$ jeb $\sum_{z_i(\mathbf{p}^*)>0} z_i(\mathbf{p}^*)\le k$, kur

$k>\frac{nw^2+(n+1)w}{\gamma-nw}$, ko arī gribējām pierādīt.▲

Iegūtā formula Teorēmā 2.2.1. ļauj ekonomiski interpretēt dažus jaunā modeļa parametrus (piemēram, n - labumu veidu skaits) atšķirībā no klasiskās situācijas, kurā attiecīgiem parametriem šādas interpretācijas nav vai arī tā ir izteikta vismaz virspusēji.

# PĒCVĀRDS

Šajā Pēcvārdā gribētos vēlreiz uzsvērt darba lielākos ieguvumus un neveiksmes autores vērtējumā.

Noskaidrotas visbiežāk nekustīgo punktu teorēmu pierādījumos izmantotās izliekto kopu īpašības, kuras visas tiek izmantotas darbā pierādītajās nekustīgo punktu teorēmās.

Vispārinot stingri izliektas Banaha telpas jēdzienu, izstrādāts stingri izliektas metriskas telpas jēdziens. Pierādīts, ka stingri izliektas metriskas telpas slēgtās un izliektās apakškopās neizstiepjošu, kvazi-neizstiepjošu un asimptotiski neizstiepjošu attēlojumu nekustīgo punktu kopas ir slēgtas un izliektas. Pamatots, ka stingri izliektas metriskas telpas definīcija ir ekvivalenta ar stingri izliektas Banaha telpas definīciju, ja metriskās sakarības tiek izteiktas ar normu. Nav izdevies pierādīt vai atrast atbilstošu pretpiemēru, kas noliegtu, ka slēgtas lodes stingri izliektā metriskā telpā ir izliektas kopas. Jāpiezīmē, ka stingri izliekta metriska telpa ir speciālgadījums metriskai telpai ar dotu slēguma operatoru.

Attēlojumu saimju kopīgo nekustīgo punktu eksistences pierādījumos veiksmīgi lietots slēguma operators, kas zināmā mērā metriskā telpā definē izliektības struktūru. Izstrādātā pierādījumu tehnika ļauj metriskā telpā ar slēguma operatoru vispārināt tos rezultātus, kuri iegūti vāji kompaktās Banaha telpas apakškopās. Slēguma operatoru izmantošana atvieglina pierādījumu shēmas veikšanu, taču pie viena blakusnosacījuma - slēgtām lodēm jābūt S-slēgtām. Pierādītas teorēmas metriskās telpās ar dotu slēguma operatoru, kurās attēlojumu saimes:

1) apmierina "normālas struktūras" nosacījumu;
2) ir ar samazinātu orbītas diametru;
3) ir kvazi-neizstiepjošas;
4) apmierina invariances īpašību.

Promocijas darba II daļā iegūts Bola-Brauera-Šaudera teorēmas vispārinājums w-nepārtrauktam attēlojumam, izmantojot vienmērīgi w-nepārtraukta attēlojuma aproksimāciju ar nepārtrauktu attēlojumu. Reālās taisnes gadījumā konstruēta labāka aproksimācija nekā vispārīgā situācijā. Noskaidrotas w-nepārtrauktu attēlojumu īpašības. Izstrādāts konkrēts tirgus ekonomikas modelis, kurā tirgus līdzsvara eksistence pierādīta ar iepriekš pieminēto rezultātu palīdzību. No iepriekš zināmajiem modeļiem "stabilas" ekonomikas vietā šajā modelī tiek apskatīta mazāk stabila, kuras rezultātā tirgus līdzsvara stāvokli ietekmē virkne parametru, kuri ir indiferenti attiecībā pret līdzsvara eksistenci stabilajā ekonomikā. Iegūtajam rezultātam varētu būt plaši pielietojumi ekonomiskajās teorijās. Iegūtais Bola-Brauera-Šaudera teorēmas vispārinājums liek domāt, ka, atbilstoši modificējot situāciju, varētu arī atbilstoši vispārināt Kakutani teorēmu. Tas būtu loģisks turpinājums disertācijā aizsāktajai II daļas tēmai.

Disertācijā iegūtie rezultāti publicēti 10 rakstos dažādos žurnālos. Par iegūtajiem I daļas rezultātiem autore ir stāstījusi LU zinātniskajās konferencēs (1989.-1993.), Tartu universitātes zinātniskajās konferencēs (1989.-1991.), kā arī 1991.gada Tiraspoles (Moldavā, Kišiņevā) topoloģijas un tās pielietojumu simpozijā. II daļas rezultāti izdiskutēti ar Hamburgas universitātes Statistikas un ekonometrijas institūta darbiniekiem.

Kopš 1984.gada es pazīstu docentu Andri Liepiņu, un kopš 1986.gada mēs kopīgi esam "meklējuši" nekustīgos punktus. Dažus esam atraduši. Es pateicos savam zinātniskajam vadītājam A.Liepiņam par to darbu un laiku, ko viņš ir veltījis man.

Idejas darba II daļai radušās, domājot par nekustīgo punktu teorijas pielietojumiem ekonomikā. Esmu pateicību parādā Hamburgas universitātes Statistikas un ekonometrijas institūta darbiniekiem, īpaši Hamburgas universitātes profesoram Haraldam Šerfam, kura paspārnē pēdējo gadu man bija lemts strādāt.

# LITERATŪRAS SARAKSTS


A.G.Aksoy, M.A.Khamsi Nonstandard Methods in Fixed Point
1990 Theory, Springer-Verlag, 139 lpp.

J.V.Alexander On transformations with invariant points //
1922 Trans.Amer.Math.Soc., 23, 89-95.

K.J.Arrow, F.H.Hahn General Competitive Analysis, North-Holland
1980 Publishing Company Amsterdam, New York, Oxford, 452 lpp.

N.A.Assad, W.A.Kirk Fixed point theorems for set-valued
1972 mappings of contractive type // Pacific J.Math., 43(3), 553-562.

L.P.Belluce, W.A.Kirk Fixed-point theorems for families of
1966 contraction mappings // Pacific J.Math., 18, 213-218.

1969 Fixed-point theorems for certain classes of nonexpansive mappings // Proc.Amer.Math.Soc., 20(1), 141-146.

L.P.Belluce, W.A.Kirk, E.F.Steiner Normal structure in Banach
1968 spaces // Pacific J.Math., 26, 433-440.

G.D.Birkoff, O.D.Kellogg Invariant points in function space //
1922 Trans.Amer.Math.Soc., 23, 96-115.

P.Bohl Über die Bewegung eines mechanischen Systems in
1904 der Nähe einer Gleichgewichtslage // J.für reine und angewandte Mathematik, 127, 179-276.

F.F.Bonsall Lectures on some fixed point theorems of
1962 functional analysis, Tata institute of fundamental research, Bombay, 176 lpp.

K.C.Border Fixed point theorems with applications to
1982 economics and game theory, Cambridge University Press, 129 lpp.

K.Borsuk Theory of retrakts, Warszawa, 251 lpp (krieviski:
1967 Теория ретрактов, М., Мир, 1971).

T.Botts Convex sets // Amer.Math.Monthly, 49, 527-535.
1942

W.M.Boyce Commuting functions with no common fixed points//
1969 Trans.Amer.Math.Soc., 137, 77-92.

М.С.Бродский. Д.П.Мильман О центре выпуклого множества //
1948 Доклады Академии Наук СССР, 59(5), 837-840.

L.E.J.Brouwer Über eieindeutige, stetige Transformation von
1910 Flächen in sich // Math.Ann., 69(2), 176-180.
1912 Über Abbildungen von Mannigfaltigkeiten //
Math.Ann., 71, 97-115.

F.E.Browder Nonexpansive nonlinear operators in a Banach
1965 space // Proc.Nat.Acad.Sci.U.S.A., 54, 1041-1044.

E.Burger Einführung in die Theorie der Spiele, Berlin,
1959 169 lpp (angliski: Introduction to the Theory of Games, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1963).

M.Burgin, A.Šostak Towards the theory of continuity defect and
1992 continuitty measure for mappings of metric spaces // Latvijas Universitātes Zinātniskie Raksti, 576, 45-62.

J.Caristi Fixed point theorems for mappings satisfying
1976 inwardness conditions // Trans.Amer.Math.Soc., 215, 241-251.

E.Chandler Fixed points and boundaries // Proc.Amer.Math.
1981 Soc., 82(3), 398-400.

R.R.Cornwall Introduction to the Use of General Equilibrium
1984 Analysis, North-Holland, 787 lpp.

J.Cronin Fixed points and topological degree in nonlinear
1964 analysis, Amer. Math. Soc., New York, 198 lpp.

M.M.Day Fixed point theorems for compact convex sets //
1961 Illinois J.Math., 5, 585-590.

E.Dierker Topological methods in Walrasian economics,
1974 Lect.Notes in Econ. and Math. Systems, 92, Springer Verlag, Berlin, 130 lpp.

W.G.Dotson Fixed point theorems for nonexpansive mappings on
1971./72. star-shaped subsets of Banach spaces // J.London Math.Soc., 4(otrā sērija), 408-410.
1972 Fixed points of quasi-nonexpansive mappings //
J.Austral.Math.Soc.,13, 167-170.

W.G.Dotson, H.F.Senter Approximating fixed points of
1974 nonexpansive mappings // Proc.Amer.Math.Soc., 44(2), 375-380.

J.Dugundji, A.Granas Fixed Point Theory, I, Warszawa, 209 lpp.
1982

M.Edelstein On fixed and periodic points under contractive
1962 mappings // J.London Math.Soc., 37, 74-79.
1966 A remark on a theorem of M.K.Krasnoselski // Amer.Math.Monthly, 73, 509-510.
1964 On non-expansive mappings of Banach spaces // Proc.Camb.Phil.Soc., 60, 439-447.
1974 Fixed point theorems in uniformly convex Banach spaces // Proc.Amer.Math.Soc., 44(2), 369-374.

G.Eisenack, C.Fenske Fixpunkttheorie, Mannheim, 258 lpp
1978

K.Fan A Generalization of Tychonoff's Fixed Point
1961 Theorem // Math.Ann., 142, 305-310.

J.Franklin Methods of Mathematical Economics: Linear and
1980 Nonlinear Programming, Fixed-Point Theorems, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer Verlag, 297 lpp.

L.Gajič Fixed point Theorems for some Nonlinear Mappings
1989 in Convex Metric Spaces // Radovi Matematički, 5, 247-259 (Dienvidslāvija).

K.Goebel An elementary proof of the fixed-point theorem
1969 of Browder and Kirk // Michigan Math.J., 16, 381-383.

K.Goebel, W.A.Kirk A fixed point theorem for asymptotically
1972 nonexpansive mappings //Proc.Amer.Math.Soc., 35(1), 171-174.
1990 Topics in metric fixed point theory, Cambridge University Press, 1990, 244 lpp.

D.Göhde Über Fixpunkte bei stetigen Selbstbildungen mit
1964 kompakten Iterierten //Math.Nachr., 28, 45-55.
1965 Zum Prinzip der kontraktiven Abbildung // Math. Nachr., 30, 251-258.

J.Gornicki, M.Krüppel Fixed point theorems for mappings with
1992 Lipschitzian iterates // Nonlinear Analysis, 19, 353-363.

K.Gröger A simple proof of the Brouwer Fixed Point
1981 Theorem // Math.Nachr., 102, 293-295.

L.F.Guseman, B.C.Peters Nonexpansive mappings on compact subsets
1975 of metric linear spaces // Proc.Amer.Math.Soc., 47(2), 383-386.

J.Hadamard 1910 — Sur quelques applications de l'indice de Kronecker; Appendix in Tannery: Introduction a la theorie des functions d`une variable II, 2.ed.; publicēts Hadamard`s Collected Works.

J.P.Huneke 1969 — On common fixed points of commuting continuous functions on an interval // Trans.Amer.Math.Soc., 139, 371-381.

V.I.Istratescu 1981 — Fixed point theory, an Introduction, Math. and Its Applications (7), 466 lpp.

S.Kakutani
1941 — A generalization of Brouwer's fixed-point theorem // Duke Math.J., 8, 457-459.
1943 — Topological properties of the unit sphere of a Hilbert space // Proc.Imp.Acad. Tokyo, 19, 269-271.

R.Kannan
1971 — Some results on fixed points-III // Fund.Math., 70, 169-177.
1973 — Fixed point theorems in reflexive Banach space // Proc.Amer.Math.Soc., 38(1), 111-118.

D.C.Kay, E.W.Womble 1971 — Axiomatic convexity theory and relationships between the Caratheodory, Helly and Radon numbers // Pacific J.Math., 38(2), 471-485.

W.A.Kirk
1965 — A fixed point theorem for mappings which do not increase distances // Amer.Math.Monthly, 72, 1004-1006.
1969 — On mappings with diminishing orbital diameters // J.London Math. Soc., 44, 107-111.
1970 — Fixed point theorems for nonexpansive mappings // Proc.Sympos. Pure Math. 18 American Math.Soc. R.I., 162-168.
1981A — An abstract fixed point theorem for nonexpansive mappings // Proc.Amer.Math.Soc., 82(4), 640-642.
1981B — Fixed point theory for nonexpansive mappings // Lecture Notes in Math., 886, Springer-Verlag, Berlin and New York, 484-505.
1983 — Fixed point theory for nonexpansive mappings II // Contemporary Math., 18, 121-140.

V.L.Klee
1951 — Convex sets in linear spaces // Duke Math.J., 18, 443-466.
1955 — Some topological properties of convex sets // Trans.Amer. Math. Soc. 78, 30-45.

E.Klein — Mathematical methods in theoretical economics,
1973 — New York, Akademic Press, 388 lpp.

B.Knaster, C.Kuratowski, S.Mazurkiewicz — Ein Beweis des
1929 — Fixpunktsatzes für n-dimensionale Simplexe // Fund.Math., 14, 132-137.

P.K.F.Kuhfitting — Fixed points of several classes of nonlinear
1974 — mappings in Banach space // Proc.Amer.Math.Soc., 44(2), 300-306.

S.Lang — Analysis I, Addision-Wesley Publishing Company,
1976 — 460 lpp.

А.Х.Лиепиньш — Колыбельная для маленького тигренка о неподвижных
1983 — точках // Топологические пространства и их отображения, Рига, 61-69.

T.C.Lim — A characterization of normal structure // Proc.Amer.
1974A — Math.Soc., 43, 313-319.
1974B — A fixed point theorem for families of nonexpansive mappings // Pacific J.Math., 53, 487-493.

Л.А.Люстерник, В.И.Соболев — Краткий курс функционального анализа,
1982 — М., Высшая школа, 271 lpp.

R. de Marr — Common fixed-points for commuting contraction
1963 — mappings // Pacific J.Math., 13, 1139-1141.

K.Menger — Untersuchungen über allgemeine Metrik // Math.
1928 — Ann., 100, 75-163.

T.Mitchell — Fixed points of reversible semigroups of
1970 — nonexpansive mappings // Kōdai Math.Sem.Rep., 22, 322-323.

А.Д.Мышкис, И.М.Рабинович — Первое доказательство теоремы о
1955 — неподвижной точке при непрерывном отображении шара в себя, данное латышским математиком П.Г.Болем // Успехи мат. наук, 10.sēj., N.(3)65, 188-192.

H.Nikaido — Convex structures and economic theory, Academic
1968 — Press, New York and London, 405 lpp (krieviski: Выпуклые структуры и математическая экономика, М., Мир, 1972).
1970 — Introduction to sets and Mappings in Modern Economics, North-Holland Publishing company-Amsterdam, London, 343 lpp.

Z.Opial 1967 Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings // Bull.Amer.Math.Soc., 73, 591-597.

J.P.Penot 1979. Fixed point theorems without convexity // Bull.Soc.Math.France, 60, 129-152.

S.Reich 1971 Some remarks concerning contraction mappings // Canad.Math.Bull., 14(1), 121-124.

H.E.Scarf 1967 The approximation of fixed points of a continuous mapping // SIAM J.Appl.Math., 15, 1328-1343.

J.Schauder 1930 Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen // Studia Math., 2, 171-180.

K.Schilling 1986 Simpliziale Algorithmen zur Berechung von Fixpunkten mengenwertiger Operatoren, Trier, 190 lpp.

J.T.Schwartz 1961 Lectures on the Mathematical Methods in Analytical Economics, Gordon and Breach, Sience Publishers, New York, 282 lpp.

N.Shioji 1991 A further generalization of the Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz theorem // Proc. Amer.Math.Soc., 111, 187-195.

D.R.Smart 1961 A fixed-point theorem // Proc. Cambridge Philos. Soc., 57, 430.

1974 Fixed point theorems, Cambridge University Press, 93 lpp.

A.Šostaks, M.Zandere 1977 Topoloģijas elementi - I, LVU, Rīga, 67 lpp.

E.Sperner 1928 Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensionalzahl und des Gebietes // Abh.Math.Sem. Hamb.Univ., 6, 265-272.

S.Swaminathan (redaktors) 1986 Fixed point theory and its applications, Academic Press, 216 lpp.

W.Takahashi 1970 A convexity in metric space and nonexpansive mappings, I //Kōdai Math.Semin.Rep., 22, 142-149.

1992 Fixed point theorem and nonlinear ergodic theorem for nonexpansive semigroups without convexity // Canad.J.Math., 44, 880-887.

M.R.Taskovič 1980 Some results in the fixed point theory, II // Publ.Inst.Math., 27, 249-258.

1986 Osnove teorije fiksne tačke , Matematička biblioteka, Beograd (Dienvidslāvija).

C.B.Tompkin 1964 Sperner`s lemma and some extensions, ed. E.F.Beckenbach, Applied combinatorial mathematics, John Wiley&Sons, Inc., 416-455.

В.А.Треногин 1980 Функциональный анализ, М., Наука, 495 lpp.

A.Tychonoff 1935 Ein Fixpunktsatz // Math.Ann., 111, 767-776.

M.van de Vel 1980 Finite Dimensional Convexity Structures I: General Results// Rapport nr.122, Wiskundig Seminarium, Vrije Universiteit Amsterdam.

H.K.Xu 1991 Existence and convergence for fixed points of mappings of asymptotically nonexpansive type // Nonlinear Analysis, 16, 1139-1146.

E.Zeidler 1976 Vorlesungen über nichtlineare Funktionalanalysis I: Fixpunktsätze, Leipzig, 236 lpp.

## Autores publikācijas par disertācijas tēmu

1. I.Galiņa 1990 Kopēja nekustīgā punkta eksistence neizstiepjošu attēlojumu komutatīvai saimei // LU Zinātniskie Raksti, Matemātika, 552, 41-44.
2. I.Galiņa 1990 Ein gleichgewichtiges Bild mit Fixpunkten // LU Zinātniskie Raksti, Matemātika, 552, 45-46.
3. I.Galiņa 1991 Existenz des Fixpunktes für die Familie der Abbildungen in einem metrischen Raum // LU Zinātniskie Raksti,Matemātika, 562, 161-162.
4. I.Galiņa 1991 Kopēja nekustīgā punkta eksistence neizstiepjošu attēlojumu komutatīvai saimei metriskā telpā // LU Zinātniskie Raksti,Matemātika, 562, 163-166.
5. I.Galiņa 1991 Existence of a common fixed point for a family of nonexpansive mappings on a metric space // Prague 7'th Topological Symposium (Čehoslovākija),tēzes.
6. I.Galiņa 1992 On strict convexity // LU Zinātniskie Raksti, Matemātika, 576, 193-198.
7. I.Galiņa 1992 Existence of a common fixed point for a family of nonexpansive mappings on a metric space // Application of topology in algebra and differential geometry. Tartu (Igaunija), 37-40.

8. I.Galiņa 1992 — Existence of a common fixed point for a family of mappings of nonexpansive type on a metric space// Int.J.Math.Educ.Sci.Technol. (Anglija), 23(6), 861-864.

9. I.Galiņa 1993 — Two fixed point theorems in a metric space with closure operator // LU Zinātniskie Raksti, Matemātika, 588, 23-28.

10. I.Bula 1993 — Der Rigaer Deutsch-Baltische Mathematiker Piers Bohl (1865-1921) // J.Baltic Studies (ASV), 24(4), 319-326.