

MĒCHANISMU
KINĒMATIKA

DR. ING. N. ROZENAVERS

LATVIJAS ŪNIVERSITĀTES MĀCĪBAS GRĀMATU SERIJA
Nr. 6.

MĒCHANISMU KINĒMATIKA

Dr. ing. *N. ROZENAUTERS*

LATVIJAS ŪNIVERSITĀTES
MĒCHANIKAS FAKULTĀTES PROFESORS

RĪGĀ, 1938.

Latvijas Ūniversitāte

MĒCHANISMU KINĒMATIKA



Rīgā, Latgales ielā Nr. 11.



1010.0281
444-1361-42

0000
3

2.9.2
44

Priekšvārds.

Šai grāmatā izlietota šāda literatūra:

M. Grübler. Getriebelehre. Berlin. 1917.

A. Christmann und H. Baer. Grundzüge der Kinematik. Berlin. 1910.

F. Wittenbauer. Graphische Dynamik. Berlin. 1923.

R. Beyer. Technische Kinematik. Leipzig. 1931.

R. Müller. Einführung in die theoretische Kinematik. Berlin. 1932.

Th. Pöschl. Einführung in die ebene Getriebelehre. Berlin. 1932.

Jau 4-plakņu kustības polāro ātrumu plānu un paātrinājumu konstrukcijās autors ievēdis savas jaunās metodes, bet n -locekļu kinematisko ķēžu ātrumu un paātrinājumu konstrukciju autors gandrīz pilnīgi izstrādājis, pamatojoties uz saviem pētījumiem.

Attiecīgie autora darbi publicēti Latvijas Universitātes rakstos Mēchanikas fakultātes serijā:

I sējumā № 8 1935. g. un №№ 12, 13, 14, 15 1936. g.,

II sējumā №№ 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8 1937. g. un № 9, 10 1938. g.,
un ārzemes literatūrā:

Schweizerische Bauzeitung Bd. 106, № 26. 1935. g.

Zeitschrift f. angew. Math. und Mech. Bd. 17, Heft 3. 1937.

„ „ „ „ „ „ Bd. 18, Heft 2. 1938.

Maschinenbau. Reuleaux-Mitteilungen Bd. 5, Heft 6. 1937.

Maschinenbau. Reuleaux-Mitteilungen Bd. 6, Heft 1. 1938.

„ „ „ Bd. 6. Heft 3. 1938

Pirms grāmatas lietošanas lasītājam vajadzētu iepazīties ar autora „Ķermeņa kinēmatikas“ lekciju nodaļu par komplāno kustību.

1938. g. janvārī.

Satura rādītājs.

	Lpp.
I nodaļa	11—22
§ 1. Ievads. Kinematiskie pāri	11
§ 2. Atbalstīšanas problēma plaknē	16
Atbalstīšana telpā	18
§ 3. Augstāko pāru iedalīšana	19
Patstāvīgi slēgtie augstākie pāri ar piespiestu kustību . .	19
Trijloka lietojumi praksē	21
II nodaļa.	
§ 4. Kinematiskās ķēdes un to klasifikācija	23—27
III nodaļa.	
§ 5. Komplāna kustība. Poloidu grafiskā konstrukcija	28—38
1.—5. piemēri	32
IV nodaļa.	
Eulera-Savarija nol-ms un tā konstrukcija	39—73
§ 6. Punkta trajektorijas liekuma centra noteikšana. Eulera-Savarija nol-ms	39
§ 7. Eulera-Savarija nol-ms robežās starp polu P un infleksijas punktu W	43
§ 8. Eulera-Savarija nol-ms punktiem, kas atrodas zem pola P	45
§ 9. Eulera-Savarija nol-mi vispārīgā veidā	45
§ 10. Sakars starp punkta stāvokli kustīgā plaknē un trajektorijas liekuma centru	46
§ 11. Trajektoriju izliekums	49
§ 12. Sakars starp r un r_c mainīgām ψ	50
Infleksijas riņķis	51
§ 13. Atgriezes riņķis	52
§ 14. Aptveramās līknes un envelopas. 6. piemērs	53
§ 15. Teorēma par envelopas liekuma centru	54
§ 16. I Aronholda teorēma	56
§ 17. II Aronholda teorēma	58
§ 18. Eulera-Savarija nol-ma pārveidojums	59
§ 19. Grafiskās konstrukcijas. I uzdevums	61
II uzdevums	64
III uzdevums	67
§ 20. Infleksijas centra W_0 konstrukcija pēc dotiem poloidu liekuma centriem uz galvenā stara. 3 gadījumi	69

V nodaļa.

	Lpp.
Infleksijas riņķa konstrukcijas pēc Bobiljē (Bobillier). Kollineācijas ass. Bobiljē (Bobillier) teorēma. Aronholda konstrukcija . . .	74—87
§ 21. I Bobiljē konstrukcija infleksijas riņķa noteikšanai . . .	74
§ 22. Bobiljē (Bobillier) teorēma	75
§ 23. II Bobiljē infleksijas riņķa konstrukcija	76
§ 24. Aronholda konstrukcija	77
7.—10. piemēri	77
§ 25. Teorēma attiecībā uz kollineācijas asi diviem stariem . . .	80
§ 26. Infleksijas riņķa konstrukcija kloķa mēchanismam . . .	81
§ 27. Infleksijas un atgriezes riņķa konstrukcija konchoidografam	82
§ 28. Kleja (Kley) tvaikmašīnu rēgulātors	84
§ 29. Prōlla rēgulātors	85
§ 30. Velšanās un slīdes kustība starp aptveramo un envelopeu	86

VI nodaļa.

Taisnvirzītāji	88—96
§ 31. Precīzais elliptiskais taisnvirzītājs	88
§ 32. Tuvinātais elliptiskais jeb Ēvansa taisnvirzītājs pirmajā veidā	88
§ 33. Tuvinātais elliptiskais jeb Ēvansa taisnvirzītājs otrā veidā	90
§ 34. Tuvinātais elliptiskais jeb Ēvansa taisnvirzītājs trešajā veidā	91
§ 35. Precīzais konchoidālais taisnvirzītājs	93
§ 36. Cikloidālais jeb Čebiševa taisnvirzītājs	94
§ 37. Lemniskoidas jeb Vata (Watt) taisnvirzītājs	94

VII nodaļa.

Ātrums	97—110
§ 38. Dažas grafiskās ātruma konstrukcijas	97
§ 39. Teorēma par taisnes dažādu punktu ortogonāliem ātrumiem	98
§ 40. Sakars starp divu punktu ātrumiem	99
§ 41. Teorēma par figūru, ko veido ātrumu vektoru gali . . .	100
§ 42. Polārais ātrumu plāns	100
§ 43. Pola pārvietošanās ātrums	101
11. un 12. piemērs	102
§ 44. Hartmaņa konstrukcija	102
13.—16. piemēri	103
17. piemērs: Ellipsografa punkta trajektorijas liekuma centra noteikšana	106
§ 45. Ātruma noteikšana pieskares punktam starp aptveramo un envelopeu	108

VIII nodaļa.

Lpp.

Paātrinājums	111—134
§ 46. Tangenciālā un normālā paātrinājuma noteikšana	111
§ 47. Paātrinājums kā 3 komponentu summa	112
§ 48. Paātrinājums kā 2 komponentu summa	114
18. un 19. piemērs	115
§ 49. Pola paātrinājuma konstrukcija	115
§ 50. Paātrinājuma j_w konstrukcija un pola paātrinājuma cita konstrukcija	116
§ 51. Normālā paātrinājuma izteiksme	117
§ 52. Bresa (Bresse) un La Hira riņķi	118
§ 53. Paātrinājumu centrs	119
§ 54. Teorēma par punkta paātrinājumu attiecībā pret paātrinājumu centru	120
§ 55. Punkta paātrinājuma un normālā paātrinājuma grafiskās konstrukcijas	122
§ 56. Sakars starp divu punktu paātrinājumiem	125
§ 57. Paātrinājumu centra konstrukcijas	126
§ 58. Paātrinājuma konstrukcijas otram punktam	127
§ 59. Sakars starp trīs un vairāku punktu paātrinājumiem. Burmestera teorēma	129
§ 60. Polārais paātrinājumu plāns. Mēmkes (Mehmke) teorēma. Paātrinājumu centra konstrukcija	130
§ 61. Citas metodes paātrinājuma konstrukcijai	131
Polārais hodografs. (VS) grafika	131
Lokālais hodografs: 20. piemērs	132
Grüblera paātrinājuma konstrukcija ar lokāliem ortogonāliem hodografiem. 21. piemērs	133

IX nodaļa.

Trīs plakņu relatīvā kustība	135—152
§ 62. Relatīvais pols. Polu taisne	135
§ 63. Relatīvā pola konstrukcija pēc divu punktu ātrumiem	136
§ 64. Relatīvā pola konstrukcija pēc dotiem griezes ātrumu vektoriem	137
§ 65. Relatīvā pola noteikšana, ja kustīgās plaknes savstarpīgi pieskaņas. 22.—24. piemēri	138
§ 66. Relatīvā griezes ātruma noteikšana	140
§ 67. Ātrumu seštūris	143
§ 68. Polu taisnes noteikšana, ja plaknes savienotas ar šarnīru	144
§ 69. Kustīgo plakņu relatīvā slīdes ātruma noteikšana, ja divas plaknes savstarpīgi pieskaņas 25. un 26. piemērs	145
§ 70. Relatīvā ātruma noteikšana, ja plaknes atrodas virzes kustībā un savstarpīgi pieskaņas	147
27. un 28. piemērs	148
§ 71. Griezes paātrinājumi relatīvā kustībā	149
§ 72. Relatīvās kustības paātrinājumi	150
§ 73. Relatīvā paātrinājuma konstrukcija	150
§ 74. Absolūtā paātrinājuma konstrukcija	151

Četru plakņu relatīvā kustība	153—191
§ 75. Relatīvie poli un kollineācijas ass	153
§ 76. Infleksijas riņķi šarnīru četrstūrim	154
§ 77. Šarnīru četrstūra kustīgās plaknes punkta trajektorijas liekuma centra noteikšana	155
§ 78. Ātrumu konstrukcija 4 plakņu kustībā. 29. piemērs . . .	156
I pamatuzdevums. Dažādu relatīvu ātrumu konstrukcija šarnīru četrstūrī	157
30. piemērs. Šarnīru parallēlograms	158
II pamatuzdevums. Ātrumu konstrukcija kloķa mēchanismā	159
III pamatuzdevums. Ātrumu konstrukcija svārstīgā kloķa cilpā	160
IV pamatuzdevums. Ātrumu konstrukcija rotējošā kloķa cilpā	161
IV-a pamatuzdevums. Ātrumu konstrukcija ekscentrīskā rotējošā kloķa cilpā.	162
V pamatuzdevums. Ātrumu konstrukcija četrstūrī ar diviem šarnīriem un diviem piegulošiem slīdpāriem	163
VI pamatuzdevums. Ātrumu konstrukcija četrstūrī ar diviem šarnīriem un diviem pretimgulošiem slīdpāriem	165
§ 79. Ātrumu konstrukcija ar polārā plāna palīdzību	166
§ 80. Polārais ātrumu plāns diviem kustīgiem locekļiem, kas sa- vienoti ar slīdpāri	167
I uzdevums. Polārais ātrumu plāns svārstīgai kloķa cilpai	169
II uzdevums. Polārais ātrumu plāns ekscentriskai rotē- jošai kloķa cilpai	169
§ 81. Paātrinājumu konstrukcija 4 plakņu kustībā	170
I pamatuzdevums. Paātrinājuma konstrukcija šarnīru četrstūrī	171
Cita paātrinājuma konstrukcija ar taisnām līnijām	173
II pamatuzdevums. Paātrinājuma konstrukcija kloķa mē- chanismā	177
Cits atrisinājums ar taisnēm	177
§ 82. Paātrinājumu konstrukcija ar relatīvo normālpaātrinājumu plāna palīdzību	179
I pamatuzdevums. Paātrinājumu konstrukcija šarnīru četrstūrī ar relatīvo normālpaātrinājumu plāna palī- dzību	180
§ 83. Paātrinājumu konstrukcija tādiem mēchanismiem, kas sa- tur slīdpārus kustīgās plaknēs	181
III pamatuzdevums. Paātrinājumu konstrukcija svārstīgā kloķa cilpā	183
IV pamatuzdevums. Paātrinājumu konstrukcija rotējošā kloķa cilpā	185

IV-a pamatzdevums. Paātrinājumu konstrukcija rotējošā kloķa cilpā (cits gadījums)	Lpp. 187
V pamatzdevums. Paātrinājumu konstrukcija četrstūrī ar diviem piegulošiem slīdpāriem	189
VI pamatzdevums. Paātrinājumu konstrukcija četrstūrī ar diviem pretimgulošiem slīdpāriem	190

XI nodaļa.

n-plakņu kinematiskās ķēdes	192—228
§ 84. Polu skaits n-plaknēm	192
§ 85. Polu taisņu skaits n-plaknēm	193
§ 86. Kinematiskās ķēdes ar piespiestu kustību	194
Piespiestās kustības kritērijs	194
§ 87. Minimālais bināru locekļu skaits slēgtās ķēdēs ar vienkāršiem šarnīriem un piespiestu kustību	195
§ 88. Maksimālais šarnīru skaits vienam loceklim slēgtā kinematiskā ķēdē ar piespiestu kustību	196
§ 89. Vispārīgā ķēžu analīze	197
§ 90. 6-locekļu ķēdes	198
§ 91. Vata (J. Watt) mēchanisma polu un polu taisņu noteikšana	200
§ 92. Stivenzona (R. Stephenson) mēchanisma polu un polu taisņu noteikšana	202
§ 93. 8-locekļu kinematiskās ķēdes	203
§ 94. Kinematisko ķēžu pārveidojums ar augstāko šarnīru palīdzību	206
31. piemērs. Pašgrābis	210
§ 95. Noteikumi slīdpāru ievēšanai kinematiskās ķēdēs	210
§ 96. Slīdpāru ķēdes	215
§ 97. Plakanās ķēdes ar augstākiem pāriem	216
§ 98. Piespiestās kustības kritērijs ķēdēm ar augstākiem pāriem	217
32. piemērs. Slīdsviras tvaikdaļa mēchanisms	218
33. piemērs. Prōlla-Švābes tvaikdaļa mēchanisms	219
§ 99. Augstāko pāru ķēdes	220
§ 100. Ķēdes ar mainīgu locekļu skaitu	220
§ 101. Pārāk slēgtās ķēdes	221
Piemēri: Robervalja svāri. Bjukenena dzinējritenis. Pantografs	223
§ 102. Nepatstāvīgas ķēdes ar miera un maiņas punktiem	224
Nepatstāvīgas ķēdes ar maiņas punktiem	225
Relō (Reuleaux) paņēmiens	226
34. piemērs. Ellipsografs	228

XII nodaļa.

Vispārīgās metodes ātrumu konstrukcijai n-plakņu kinematiskās ķēdēs	229—250
§ 103. I pamatgadījums	229
§ 104. II pamatgadījums	229
§ 105. III pamatgadījums	230

	Lpp.
§ 106. IV pamatgadījums	231
§ 107. V pamatgadījums	233
§ 108. 35.—40. piemēri	236
Ātrumu konstrukcija kinēmatiskās ķēdēs, kas nesatur šarnīru četrstūrus. 41. un 42. piemērs	240
Sarežģītāki uzdevumi	242
§ 109. 1. uzdevums. Ātruma konstrukcija slīdsviras tvaikdaļa mēchanismā	242
§ 110. 2. uzdevums. Ātruma konstrukcija Prölla-Švābes tvaikdaļa mēchanismā	243
§ 111. 3. uzdevums. Ātruma konstrukcija slīdsviras tvaikdaļa mēchanismā ar nekustīgu griezes asi	245
§ 112. 4. uzdevums. Heizingera (Heysinger) kulises mēchanisma ātruma konstrukcija	247
§ 113. 5. uzdevums. Ātrumu konstrukcija Heizingera (Heysinger) kulisei atbilstošā kinēmatiskā šarnīru ķēdē	249

XIII nodaļa.

Vispārīgās metodes paātrinājumu konstrukcijai n-plakņu kinēmatiskās ķēdēs	251—268
§ 114. I pamatgadījums	251
§ 115. II pamatgadījums	252
§ 116. III pamatgadījums	252
§ 117. IV pamatgadījums	254
§ 118. V pamatgadījums	256
§ 119. 1. uzdevums. Paātrinājumu konstrukcija Holsta mēchanismā	258
§ 120. 2. uzdevums. Paātrinājumu konstrukcija Shaping-mašīnā	259
§ 121. Paātrinājumu konstrukcija kinēmatiskās ķēdēs, kas satur augstākus pārus. I metode	262
3. uzdevums. Paātrinājumu konstrukcija slīdsviras tvaikdaļa mēchanismā	263
II metode	265
4. uzdevums. Paātrinājumu konstrukcija Zulcera (Sulzer) mēchanismā	265

XIV nodaļa.

Infleksijas un Bresa (Bresse) riņķu konstrukcija kinēmatiskās ķēdes locekļiem ar ātrumu un paātrinājumu vektoru palīdzību	269
---	-----

I n o d a ļ a.

§ 1. Ievads. Kinēmatiskie pāri.

Mēchanismu kinēmatika jeb mēchanismu kustības mācība, kā rāda pats nosaukums, ir mācība par tām ierīcēm jeb mēchanismiem, ar kuŗu palīdzību var sasniegt vajadzīgās kustības, un arī otrādi par tām kustībām, kuŗas izdara dotās ierīces vai to atsevišķās daļas.

Kā vispārīgā kinēmatikā, tā arī mēchanismu kinēmatikā kustību apskata pašu par sevi neatkarīgi no spēkiem, kas to rada.

Jautājumi, ar kādiem nodarbojas mēchanismu kinēmatika, ir: atsevišķo punktu trajektoriju noteikšana, to liekuma radiju, tangentu un normālu, kā arī atsevišķo punktu ātrumu un paātrinājumu noteikšana.

Šinī mēchanikas nozarē strādājuši daudzi zinātnieki, sākot ar Bētankuru (Bétancourt: Essai sur la composition des machines 1808), Ampēru (Ampère: Essai sur la philosophie des sciences 1830), Koriolisu (Coriolis: Mémoire sur les équations du mouvement relatif 1832), Ponselē (Poncelet), kas 1838. g. ievēdis Sorbonnas universitātē kinēmatikas pasniegšanu, Veisbachu (Weissbach: Abänderung der Bewegung 1841), Šaļu (Chasles: Propriétés relatives au déplacement fini quelconque 1860), Puanso (Poinsot: Théorie de la rotation des corps 1834) un Belanzē (Belanger: Traité de cinématique 1864), bet vislielākā nozīme ir vācu zinātnieka F. Relò (F. Reuleaux) darbam: „Theoretische Kinematik“ 1875. g., ko var uzskatīt par pamatu visai modernai mašīnbūvniecībai. Nākošais klasiskais darbs ir L. Burmestera „Lehrbuch der Kinematik“ 1886. g.

Jaunākie darbi ir: W. Hartmaņa: „Die Maschinengetriebe“ 1913, M. Grūblera: „Getriebelehre“ 1917 un F. Vitenbauera (Wittenbauer): „Graphische Dynamik“ 1923.

No tagadējiem zinātniekiem minami: K. Federhofers, H. Alts un R. Beijers (Beyer) ar savu fundamentālo darbu: „Technische Kinematik“ 1931.

Mēchanisma atsevišķās daļas saucas par locekļiem un locekļa atsevišķās daļas, kas savstarpīgi pieskaŗas, saucas par elementiem. Divi elementi, kas pieder dažādiem locekļiem un savstarpīgi pieskaŗas, saucas par elementu pāri jeb kinēmatisko pāri.

Kinēmatiskos pārus var iedalīt vairākās grupās:

- I iedalījums: pēc kustības robežām.
- II „ „ pēc pieskaŗes virsmām.
- III „ „ pēc kustības brīvībām.
- IV „ „ patstāvīgi un nepatstāvīgi slēgtie pāri.
- V „ „ zemākie un augstākie pāri.

I iedalījums: atkarībā no tā, vai viena elementa punktu relatīvās kustības pret otru elementu notiek telpā, uz noteiktas virsmas vai līknes, atšķiram: 1) kinematiskus pārus ar telpas kustībām, 2) kinematiskus pārus ar virsmas kustībām un 3) kinematiskus pārus ar līknes kustībām.

II iedalījums: pēc pieskares virsmām atšķirsim 1) pieskaršanos punktos, 2) pieskaršanos līknēs, 3) pieskaršanos veselās virsmās.

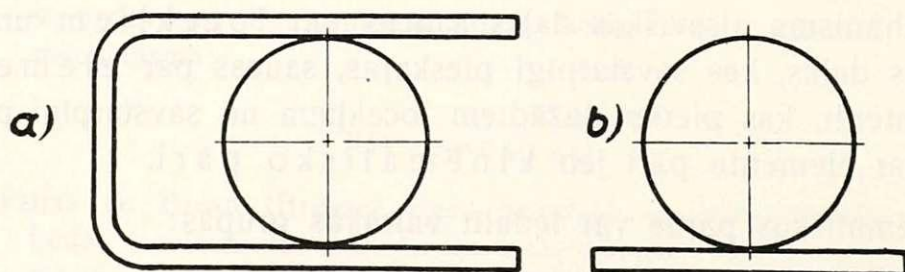
III iedalījums: iedalījumā pēc kustības brīvībām jāņem vērā, ka brīvam ķermenim ir 6 kustības brīvības un atkarībā no tā, cik kustības brīvības atņemtas, paliek 5, 4, 3, 2 un beidzot 1 kustības brīvība.

IV iedalījums: patstāvīgi slēgtie pāri ir tādi, kuŗu savstarpīgā pieskaršanās ir panākta ar pašu konstrukciju. Nepatstāvīgi slēgtie pāri ir tādi, kas slēdzas tikai ar kāda spēka palīdzību, piemēram, ar smaguma vai atsperes spēku (ritens uz sliedes, vagona buksas uz ass u. c.).

V iedalījums: zemākie pāri ir kinematiskie pāri ar līknes kustībām, pie kam katra punkta relatīvā trajektorija ir viena un tā pati līkne neatkarīgi no tā, kuŗam elementam šis punkts pieder. No sacītā seko, ka zemākie pāri ir apgriezami. Augstākie pāri turpretim raksturojas ar to, ka viena un tā paša punkta relatīvās trajektorijas attiecībā pret vienu elementu un attiecībā pret otru elementu ir dažādas.

Visus minētos iedalījumus paskaidrosim ar sekojošiem piemēriem:

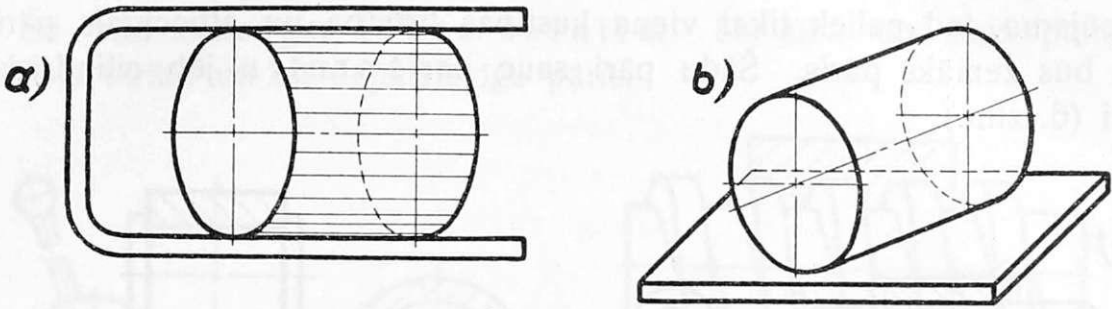
1) *piemērs:* a) Lode starp divām paralēlām plaknēm (1a. zīm.) reprezentē augstāku patstāvīgi slēgtu pāri ar telpas kustībām, pieskaršanos punktos un 5 kustības brīvībām (2 virzes un 3 griezes). b) Lode uz plaknes ir līdzīgs pāris, bet tikai nepatstāvīgi slēgts (1b. zīm.).



1. zīm.

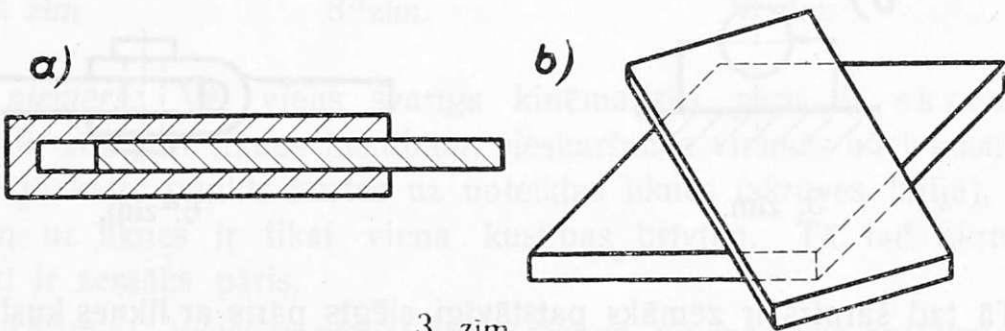
2) *piemērs:* a) Cilindrs starp divām paralēlām plaknēm (2a. zīm.) reprezentē augstāku patstāvīgi slēgtu pāri ar telpas kustībām, pieskar-

šanos taisnēs un 4 kustības brīvībām (2 virzes un 2 griezes). b) Cilindrs uz plaknes ir līdzīgs pāris, bet tikai nepatstāvīgi slēgts (2b. zīm.)



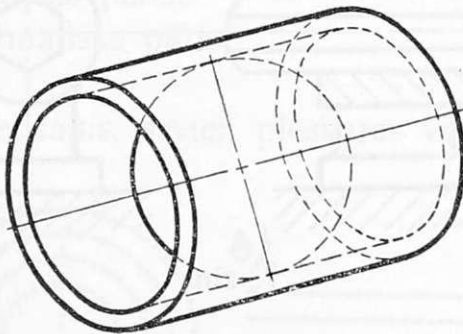
2. zīm.

3) piemērs: a) Plāte starp divām paralēlām plaknēm (3a. zīm.) reprezentē augstāku patstāvīgi slēgtu pāri ar plaknes kustībām, pieskaršanos virsmās un 3 kustības brīvībām (2 virzes un 1 grieze). b) Viena plakne uz otras ir līdzīgs pāris, tikai nepatstāvīgi slēgts (3b. zīm.).



3. zīm.

4) piemērs: Lode cilindrā ir augstāks patstāvīgi slēgts pāris ar telpas kustībām, pieskaršanos līknē un ar 4 kustības brīvībām (1 virze un 3 griezes) (4. zīm.).

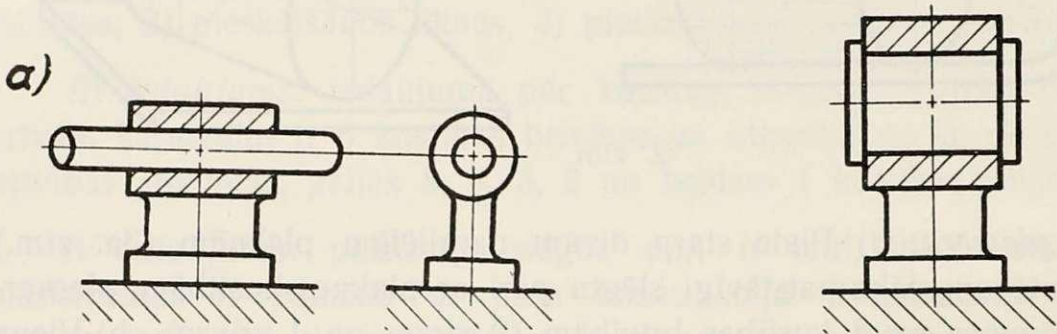


4. zīm.

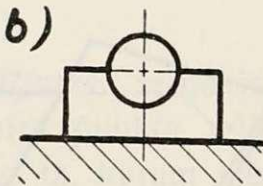
5) piemērs: a) Viens cilindrs otrā jeb divi konaksiāli cilindri ir augstāks patstāvīgi slēgts pāris ar virsmas kustībām, pieskaršanos virsmā

un 2 kustības brīvībām (1 virze un 1 grieze) (5a. zīm.). b) Cilindrs puscilindrā ir līdzīgs pāris, bet nepatstāvīgi slēgts (5b. zīm.).

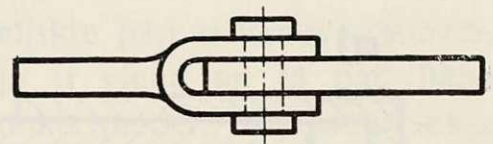
6) *piemērs:* Ja tanī pašā pāri cilindru kustība aksiālā virzienā nav iespējama, tad paliek tikai viena kustības brīvība un attiecīgais pāris jau būs zemāks pāris. Šādu pāri sauc par šarnīru jeb cilindrisku pāri (6. zīm.).



6. zīm.

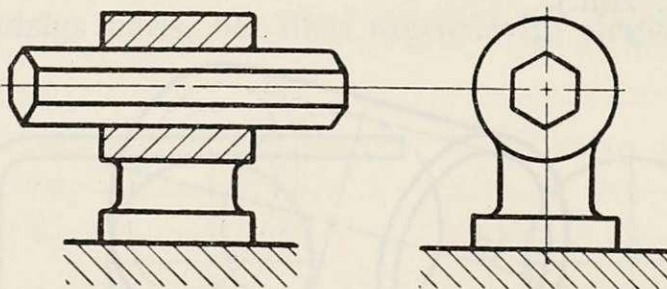


5. zīm.

6.^a zīm.

Tā tad šarnīrs ir zemāks patstāvīgi slēgts pāris ar liknes kustībām, pieskaršanos virsmā un 1 kustības brīvību (1 grieze).

To pašu var izveidot arī tā, kā parādīts 6a. zīm., pie kam ass tad var piederēt vienam vai otram elementam.

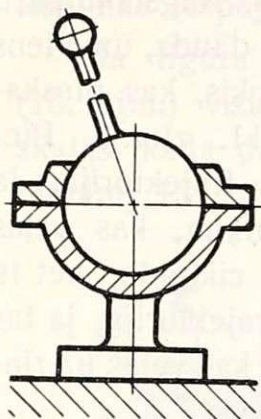


7. zīm.

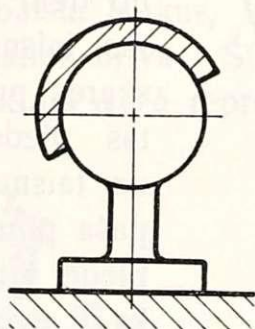
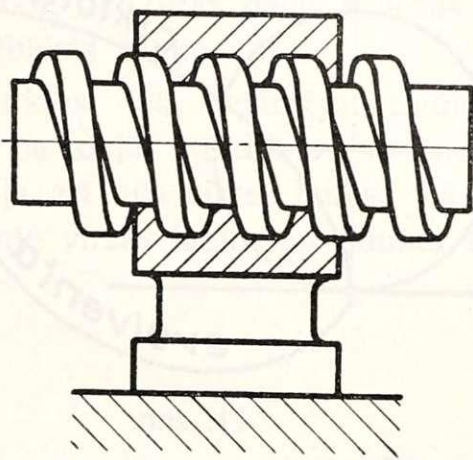
7) *piemērs:* Viena prizma otrā reprezentē zemāku patstāvīgi slēgtu kinematisko pāri ar taisnes kustībām, pieskaršanos virsmās un 1 kustības brīvību (1 virze). Šo pāri sauc par prizmatisku pāri vai slīd-pāri (7. zīm.).

8) *piemērs*: Divas koncentriskas lodes ir augstāks patstāvīgi slēgts pāris ar virsmas kustībām, pieskaršanos virsmā un 3 kustības brīvībām (3 griezes) (8. zīm.).

Šo pāri sauc par lodes šarnīru. 8a. zīm. tas pats pāris, izveidots otrādi un kā nepatstāvīgs pāris.



8. zīm.

8.^a zīm.

9. zīm.

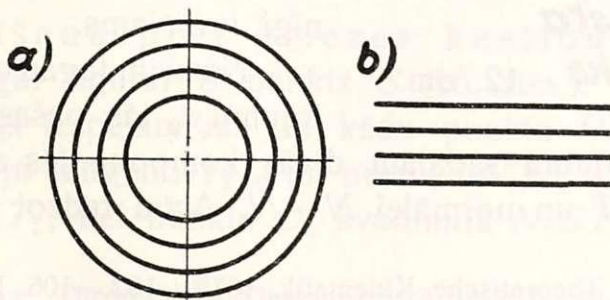
9) *piemērs*: Vēl viens svarīgs kinēmatisks pāris ir skrūves pāris (9. zīm.) ar līknes kustībām, pieskaršanos virsmās un 1 kustības brīvību, jo katrs punkts kustas uz noteiktas līknes (skrūves līnija), bet punktam uz līknes ir tikai viena kustības brīvība. Tā tad skrūves pāris arī ir zemāks pāris.

Piezīme: Visus pārus ar pieskaršanos virsmās var apgriezt, t. i. vienu vai otru elementu padarīt par nekustīgu, pie kam punktu relatīvas kustības ar to nemainīsies.

Zemākie pāri. Saskaņā ar augšā minēto zemāko pāru definīciju, šādu ir tikai trīs:

- 1) šarnīrs jeb cilindrisks pāris,
- 2) slīdpāris jeb prizmatisks pāris,
- 3) skrūves pāris.

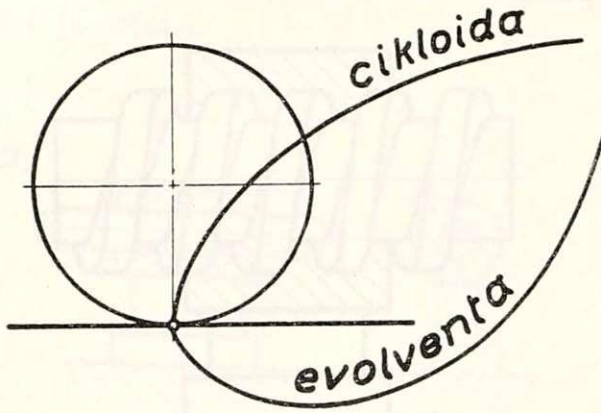
Zemākie pāri, kā redzams, arvien pieskaņas virsmās.



10. zīm

Šarnīra dažādu punktu trajektorijas ir koncentriski riņķi (10a. zīm.). Slīdpāru dažādu punktu trajektorijas ir paralēlas taisnes (10b. zīm.). Skrūves pārim trajektorijas ir skrūves līnijas.

Augstākie pāri: Saskaņā ar definīciju viena un tā paša punkta



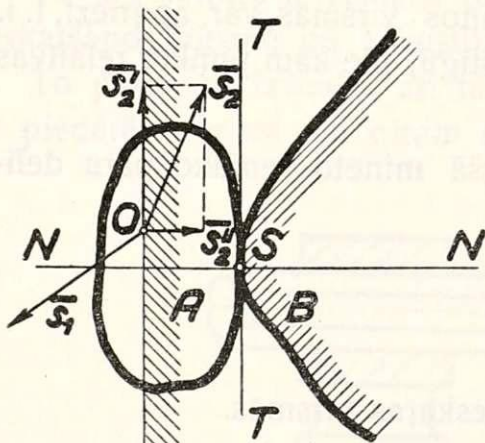
11. zīm.

relatīvās trajektorijas attiecībā pret vienu elementu un pret otru ir dažādas. Augstāku pāru piemēru ir ļoti daudz, un viens no tiem ir riņķis, kas pieskaņas taisnei (11. zīm.). Pieskares punkta trajektorija, ja tas pieder riņķim, kas veļas uz taisnes, ir cikloida, bet tā paša punkta trajektorija, ja tas pieder taisnei, kas veļas uz riņķa, ir evolventa.

Iekams pāriesim uz tālāko augstāku pāru klasifikāciju, apskatīsim atbalstīšanas problēmu plaknē.

§ 2. Atbalstīšanas problēma plaknē.^{1,2}

Atbalstīšana pret virzes kustību. Ņemsim divas figūras A un B , kas pieskaņas punktā S (12. zīm.). Tās reprezentē augstāku pāri.



virzes atbalsta lauks 12. zīm.

Pieņemsim, ka B ir nekustīga, bet A var kustēties. Izpētīsim, kādā virzienā var notikt figūras A kustība. Šim nolūkam iezīmēsim pieskares punktā S kopēju tangenti $T—T$ un normāli $N—N$. Pieņemsim, ka punktam O vēlam dot virzes pārvietojumu \bar{s}_1 , kas atrodas ārējā pusē no taisnes, kuŗa vilkta caur punktu O paralēli tangentei $T—T$. Kā redzams, šāds virzes pārvietojums pilnīgi iespējams.

Ņemsim tagad otru virzes pārvietojumu \bar{s}_2 tās pašas taisnes iekšējā pusē. Šo pārvietojumu sadalām divās komponentēs \bar{s}_2' un \bar{s}_2'' paralēli tangentei $T—T$ un normālei $N—N$. Acīm redzot pārvietojums \bar{s}_2'

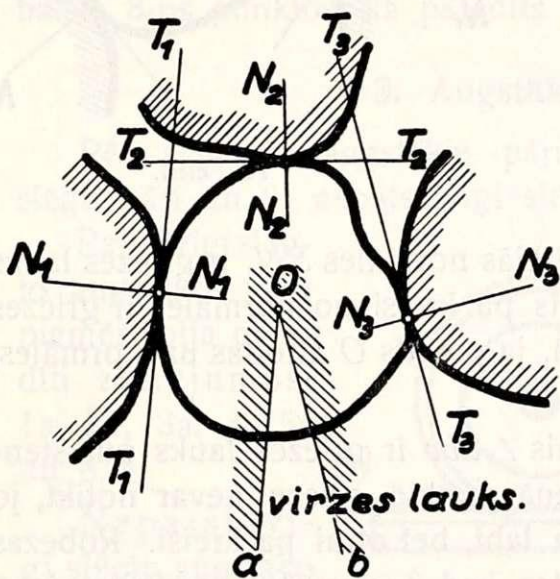
¹ F. Reuleaux. Theoretische Kinematik. 1875. 102.—106. lapp.

² R. Beyer. Technische Kinematik. 1931. 13.—16. lapp.

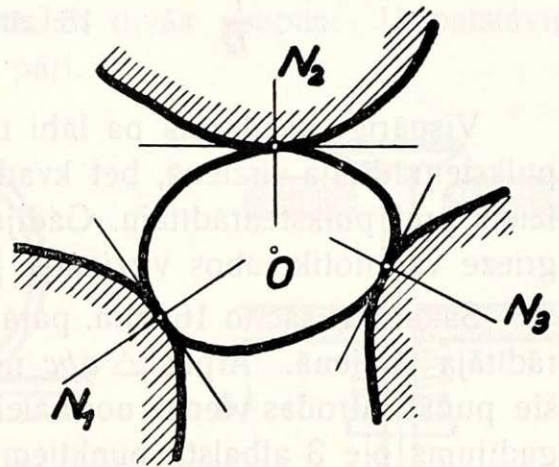
paralēli tangentei $T-T$ pilnīgi iespējams, bet otrs virzes pārvietojums \bar{s}_2 iekšējās normāles virzienā nav iespējams, jo figūra B nekustīga.

Kā redzams, viss lauks ap punktu O sadalās ar taisni, kas vilkta paralēli tangentei, divās daļās. Vienas daļas robežās virzes kustība iespējama, šo daļu sauc par virzes lauku, bet otras daļas robežās kustība nav iespējama, un to sauc par atbalsta lauku.

Ja figūra atbalstās vairākos punktos, tad, iezīmējot punktā O (13. zīm.) visus atbalsta laukus, kas pa daļai pārklās viens otru, jāskatās, kāda daļa paliek brīva. Šī daļa arī būs virzes lauks. Tā, piemēram, 13. zīm. sektors aOb reprezentē virzes lauku ap punktu O .



13. zīm.



14. zīm.

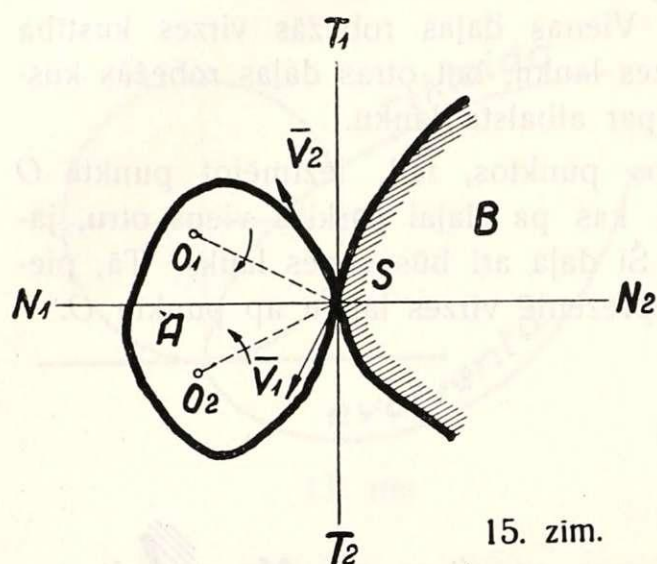
Ja brīva sektora ap punktu O nav, tad figūra pret virzi ir pilnīgi atbalstīta. Tas notiks acīm redzot tad, ja katras divas blakus atrodošās ārējās normāles veidos leņķi mazāku par 180° . Kā redzams 14. zīm., lai pilnīgi atbalstītu kādu figūru pret virzes kustību, vajadzīgi mazākais 3 atbalsta punkti, bet ja divas normāles ir savstarpīgi paralēlas, vajadzīgi mazākais 4 atbalsta punkti.

Atbalstīšana pret griezes kustību^{3,4}. Figūra A pieskaņas nekustīgai figūrai B punktā S (15. zīm.). Izpētīsim figūras A griezes kustības iespējamības ap kādu punktu O . Vilksim pieskares punktā S kopēju tangenti T_1T_2 un normāli N_1N_2 un ņemsim punktu O_1 kvadrantā N_1ST_1 , bet punktu O_2 kvadrantā N_1ST_2 .

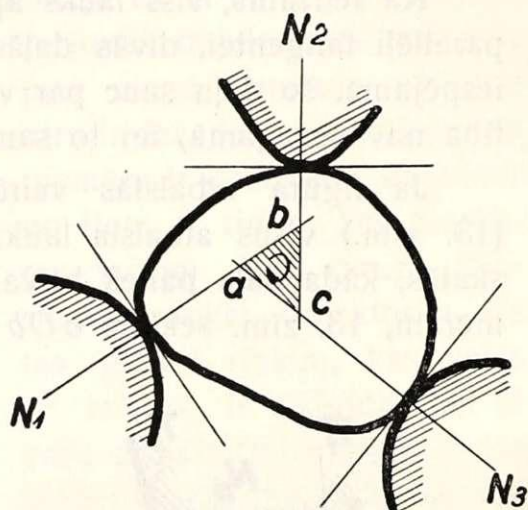
³ F. Reuleaux. Theoretische Kinematik. 1875. 107.—113. lapp.

⁴ R. Beyer. Technische Kinematik. 1931. 15. lapp.

Acīm redzot grieze ap punktu O_1 var notikt tikai pulksteņrādītāja virzienā, jo griezei pret to pretojas nekustīga figūra B . Analogiskā kārtā grieze ap punktu O_2 var notikt tikai pret pulksteņrādītāju.



15. zim.



16. zim.

Vispārīgi kvadrants pa labi no ārējās normāles SN_1 ir griezes lauks pulksteņrādītāja virzienā, bet kvadrants pa kreisi no normāles ir griezes lauks pret pulksteņrādītāju. Gadījumā, ja punkts O atrodas uz normāles, grieze var notikt abos virzienos.

Sakarā ar sacīto 16. zīm. parādītais $\triangle abc$ ir griezes lauks pulksteņrādītāja virzienā. Ārpus $\triangle abc$ nevienā punktā grieze nevar notikt, jo šie punkti atrodas vienai normālei pa labi, bet otrai pa kreisi. Robežas gadījums pie 3 atbalsta punktiem ir tas, kad 3 normāles krustojas vienā punktā. Tad griezes lauks reducējas punktā, bet grieze var notikt abos virzienos.

Kā redzams, 3 atbalsta punkti nav pietiekoši, lai atbalstītu figūru pret griezi, bet vajadzīgi vismaz 4 punkti, lai pārklātu visu lauku pret griezi. Gadījumā, kad trīs normāles krustojas vienā punktā, ir vajadzīgi vēl 2 atbalsta punkti: viens pret griezi pa pulksteņrādītāju un otrs pret griezi pret pulksteņrādītāju, tā tad pavisam 5 punkti.

Kā jau agrāk bija minēts, ja divas normāles ir paralēlas, pret virzi vajadzīgi 4 atbalsta punkti, bet pret griezi vajadzīgi 5 atbalsta punkti.

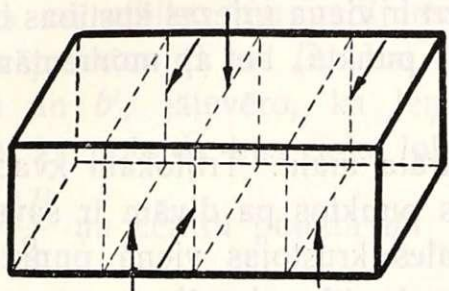
Atbalstīšana telpā^{5, 6}.

Šeit apskatīsim tikai zemāko pāru elementu atbalstīšanu, t. i. prizmas (slīdpāris) un cilindra (šarnīrs).

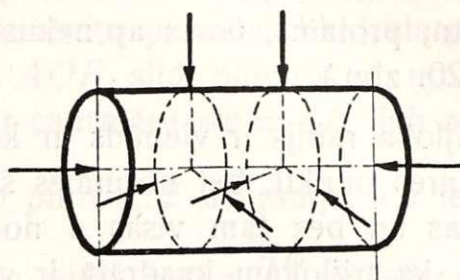
⁵ F. Reuleaux. Theoretische Kinematik. 1875. 116. lapp.

⁶ R. Beyer. Technische Kinematik. 1931. 16. lapp.

Lai atbalstītu prizmu, atstājot tai virzes kustības brīvību aksiālā virzienā, vajadzīgi, kā redzams 17. zīm., 6 atbalsta punkti.



17. zīm.



18. zīm.

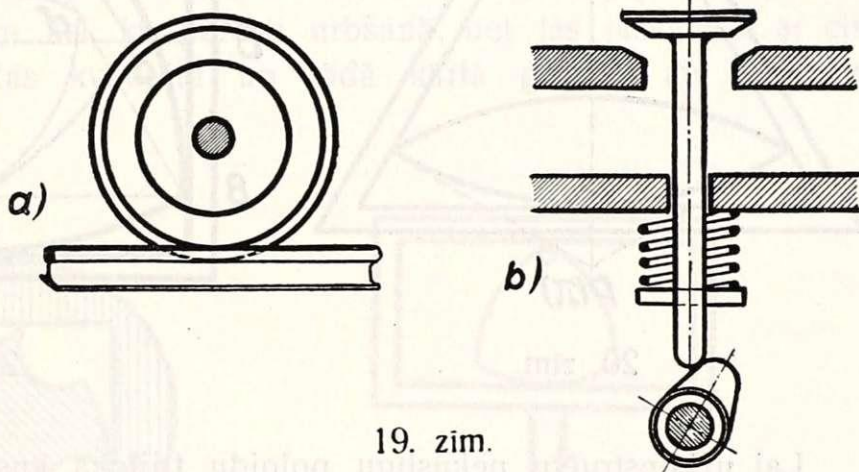
Cilindrs, lai tam paliktu tikai viena griezes kustības brīvība, jāatbalsta 8-os punktos, kā parādīts 18. zīm.

§ 3. Augstāko pāru iedalīšana.

Pēc slēguma augstākie pāri iedalās divās grupās: 1) patstāvīgi slēgti pāri un 2) nepatstāvīgi slēgti pāri.

Patstāvīgi slēgto augstāko pāru piemēri bija parādīti zīmējumos: 1a, 2a, 3a, 4, 5a un 8.

Nepatstāvīgi slēgto augstāko pāru piemēri bija parādīti zīmējumos: 1b, 2b, 3b, 5b, 8a.



19. zīm.

Nepatstāvīgi slēgto pāru slēgumu var panākt ar smaguma spēku, kā piemēram, riteņu pārim uz sliedēm (19a. zīm.), vai arī ar atsperi, kā piemēram, vārstulei ar izcilni (19b. zīm.).

Patstāvīgi slēgtie augstākie pāri ar piespiestu kustību.

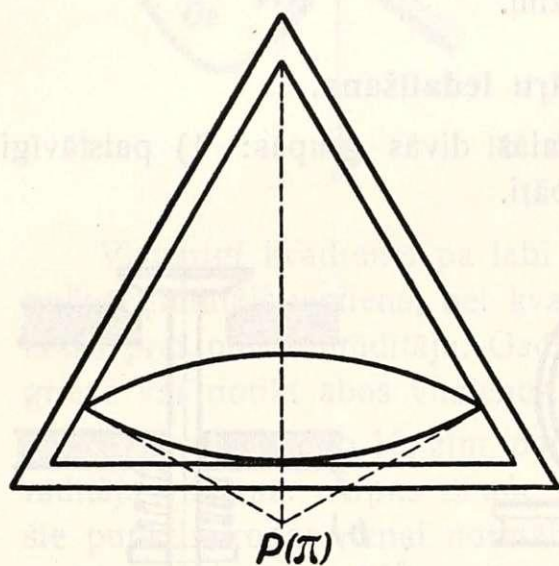
Patstāvīgi slēgtiem pāriem parasti piemīt vairākas kustības brīvības, bet ir vēl viena patstāvīgi slēgto augstāko pāru kategorija ar piespiestu kustību. Šādu pāru piemēri ir: 1) divloks vienādmalu trijstūrī (20. zīm.)⁷ un 2) trijloks kvadrātā (21. zīm.)^{7, 8}.

⁷ F. Reuleaux. Theoretische Kinematik. 1875. 120. lapp. un 132. lapp.

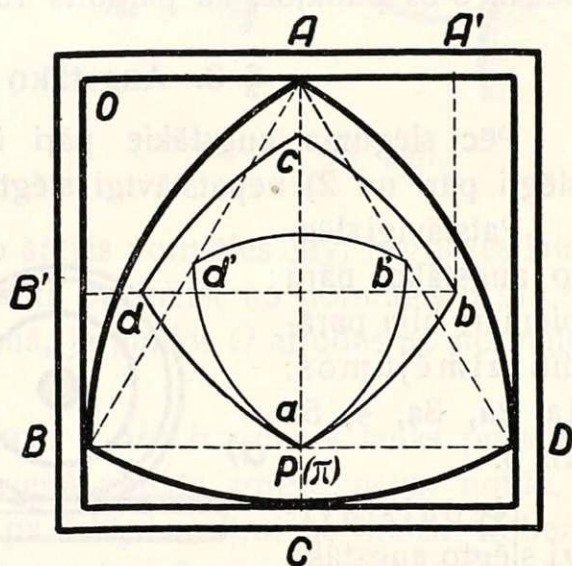
⁸ R. Beyer. Technische Kinematik. 1931. 18. lapp.

Divloka gaņums un radijs ir vienāds ar trijstūŗa augstumu. Divlokam ir trīs pieskaŗes punkti ar trijstūŗi, bet visas trīs normāles krustojas vienā punktā, tas nozīmē, ka divlokam trijstūŗi ir viena griezes kustības brīvība, kaut gan, protams, nevis ap nekustīgu punktu, bet ap momentāno polu $P(\pi)$ (20. zīm.).

Trijloka radijs ir vienāds ar kvadrāta malu. Trijlokam kvadrātā ir 4 pieskaŗes punkti, bet normāles šinīs punktos pa divām ir savstarpīgi paralēlas un bez tam visas 4 normāles krustojas vienā punktā. Tas nozīmē, ka trijlokam kvadrātā ir viena kustības brīvība, protams, atkal nevis ap nekustīgu punktu, bet ap momentāno polu $P(\pi)$, kas atrodas normāļu krustošanās punktā (21. zīm.).



20. zīm.



21. zīm.

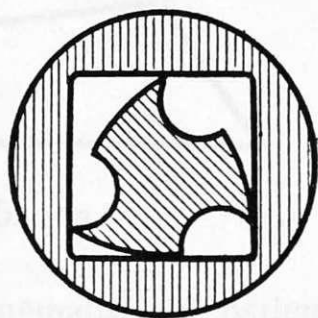
Lai uzkonstruētu nekustīgu poloidu trijloka kustībai, prātosim tā: ja virsotne A atrodas augšējās malas vidū, tad momentānais pols atrodas punktā a . Tādā pašā kārtā atrodam arī nekustīgas poloidas punktus b , c un d . Ja punkts B pāŗies punktā B' , tad punkts A pāŗies punktā A' , pie kam visu laiku abi punkti slīdēs uz divām savstarpīgi perpendikulārām taisnēm, bet nekustīga poloida šādā gadījumā, kā zināms no ellipsografa kustības, ir riņķa loks ar radiju AB un centru kvadrāta virsotnē O . Iezīmēsim šo loku ab un līdzīgā kārtā no pāŗējām kvadrāta virsotnēm iezīmēsim arī lokus bc , cd un da .

Lai uzkonstruētu kustīgu poloidu, lietosim kustības apgriešanas principu, t. i. pieņemsim, ka trijloks paliek mierā, bet kvadrāts slīd tam apkāŗt. Momentānais pols π , kad viena kvadrāta mala ar savu viduspunktu guļ punktā A , ir atrasts, tas sakrīt ar punktu a , kas ir

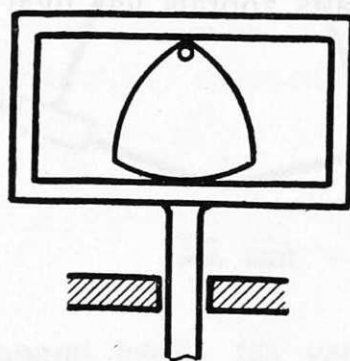
nogriežņa BD viduspunkts. Tādā pašā kārtā atrodami arī meklējamās poloidas punkti b' un d' , kas atrodas nogriežņu AD un AB viduspunktos un atbilst tam gadījumam, kad kvadrāta malas viduspunkts atrodas punktos B un D . Lai noskaidrotu poloidas līkni starp punktiem a un b' , jāievēro, ka leņķis AOB slīd punktos A un B , tas nozīmē, ka poloida būs riņķa loks ar caurmēru $oa = AB$, jeb ar radiju $\frac{oa}{2} = \frac{AB}{2}$ un centru punktā d' . No punkta d' ar radiju $d'a$ ievilkam loku ab' . Tāpat no punkta b' ar to pašu radiju $\frac{AB}{2}$ ievilkam loku ad' un no punkta a loku $b'd'$. Iegūtā nekustīgā poloida $ab'd'$ apgrieztai kustībai būs kustīga poloida īstenai kustībai.

Trijloka lietojumi praksē.⁹

1) *Kvadrātisku caurumu urbšana.* Trijloku var izmantot kā darba rīku kvadrātisku caurumu urbšanai, ja tam izņem robus, veidojot griezošās malas (22. zīm.). Tikai šāda darba rīka grieze, protams, nevar notikt ap nekustīgu asi, kā parasti urbšanā, bet tas jāsavieno ar citu trijloku, kas kustas kvadrātā un tādā kārtā griežas ap vajadzīgo momentāno asi.



22. zīm.

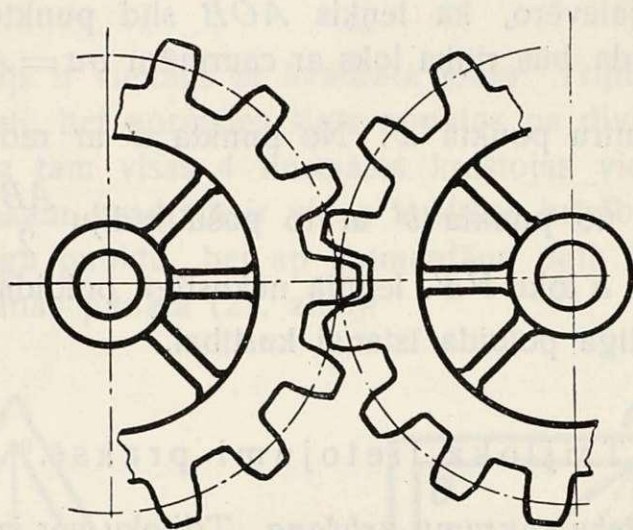


23. zīm.

2) *Nepārtrauktas griezes kustības pārveidošana pārtrauktā virzes kustībā* (23. zīm.). Piespiestu kustību dažos augstākos pāros var sasniegt ar atsevišķu elementu kustību ierobežošanu. Tā piemēram, ņemot trijloku, kas var tikai griezties ap asi vienā no virsotnēm un taisnstūri, kuŗa augstums ir vienāds ar trijloka radiju un kas var kustē-

⁹ R. Beyer. Technische Kinematik. 1931. 18 lapp.

ties tikai virzes kustībā, mēs dabūsim augstāku pāri ar piespiestu kustību. Ar šādas ierīces palīdzību nepārtraukta trijloka griezes kustība rada rāmja pārtrauktu virzes kustību.



24. zīm.

Citi augstākie pāri ar piespiestu kustību.

Visāda veida zobrati arī reprezentē augstākus pārus ar piespiestu kustību, kas sasniegta ar katra elementa kustības ierobežošanu tādējādi, ka katrs zobrats var tikai griezties ap savu asi (24. zīm.).

II nodaļa.

§ 4. Kinēmatiskas ķēdes un to klasifikācija.¹⁰

Kinēmatiska ķēde ir kustīgs ar kinēmatiskiem pāriem savienots atsevišķu locekļu sakopojums.

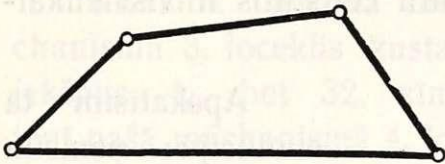
Kinēmatiska ķēde ir slēgta, ja katrs no ķēdes locekļiem savienots vismaz ar diviem citiem locekļiem ar elementu pāriem. Pretējā gadījumā ķēde neslēdzas.

Kinēmatiska ķēde ir vienkārša, ja neviens loceklis nav savienots vairāk kā ar diviem citiem. Pretējā gadījumā ķēde ir sarežģīta.

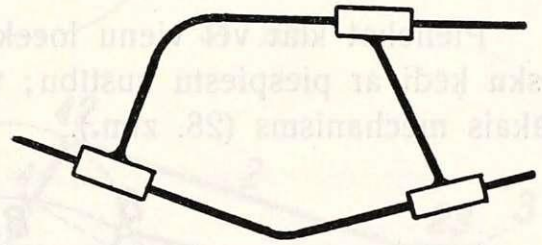
Ķēdes locekļu klasifikācija. Sakarā ar sacīto varam atšķirt singulārus locekļus, t. i. tādus, kas savienoti ar vienu no citiem locekļiem, binārus, kas savienoti ar diviem citiem locekļiem, ternārus, kvaternārus u. t. t.

Saskaņā ar šīm definīcijām slēgtā ķēdē nevar būt singulāru locekļu un vienkāršā ķēdē visi locekļi bināri.

Kinēmatiskas ķēdes var vēl iedalīt plakanās un telpas ķēdēs atkarībā no tā, vai atsevišķu punktu trajektorijas ir plākanas, vai telpas liknes.



25. zīm.



26. zīm.

Pēc kinēmatiskiem pāriem, kas sastopami ķēdēs, tās var iedalīt:

- 1) šarnīru ķēdēs (25. zīm.) un
- 2) slīdpāru ķēdēs (26. zīm.).

Abas šīs ķēdes pieder pie zemākām ķēdēm, jo kā šarnīrs, tā arī slīdpāris ir zemākie elementu pāri.

Turpretim ķēdes, kurās sastopami arī augstākie elementu pāri, saucas par augstākām ķēdēm.

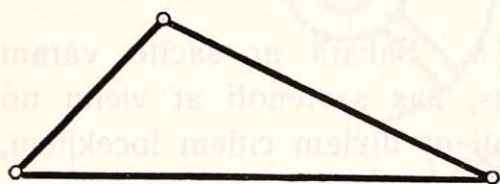
Ievedīsim vēl dažus svarīgus jēdzienus: par kinēmatisku ķēdi ar piespiestu kustību saucim tādu ķēdi, kurā katra

¹⁰ M. Grübler. Getriebelehre. 1917. 6.—8. lapp.

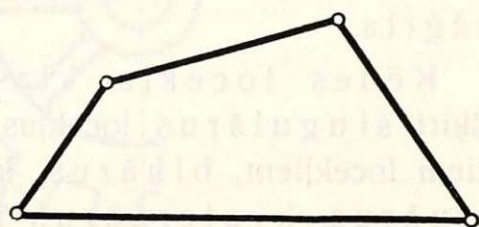
locekļa punkti attiecībā pret citiem locekļiem apraksta pilnīgi noteiktas trajektorijas.

Mēchanisms ir tāda slēgta kinēmatiska ķēde ar piespiestu kustību, kurā viens loceklis nostādīts nekustīgi un kāds cits loceklis piedzen visus pārējos locekļus. Atkarībā no tā, kāds loceklis nostādīts nekustīgi un kāds loceklis piedzen citus, no vienas ķēdes var dabūt vairākus mēchanismus.

Par mašīnu saucim tādu mēchanismu, ar kuŗa palīdzību var pastrādāt zināmu darbu.



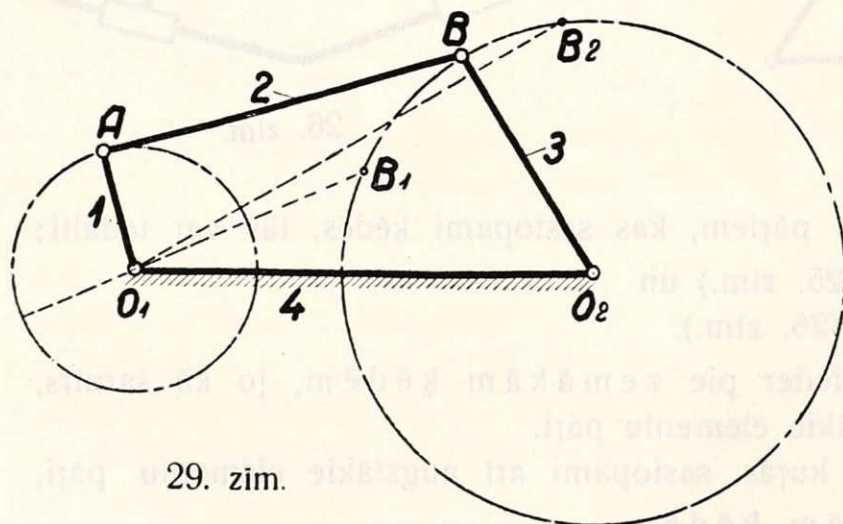
27. zīm.



28. zīm.

Mēchanismu vispārīgo teoriju apskatīsim vēlāk, tagad apstāsimies tikai pie visvienkāršākā šarnīru mēchanisma. Ja ņemsim slēgtu šarnīru ķēdi ar 3 locekļiem (27. zīm.), tad tā nebūs mēchanisms, jo nekādas relatīvas kustības šeit nevar notikt.

Pieliekot klāt vēl vienu locekli, dabūsim slēgtu vienkāršu kinēmatisku ķēdi ar piespiestu kustību; tā tad šarnīru četrstūris ir visvienkāršākais mēchanisms (28. zīm.).

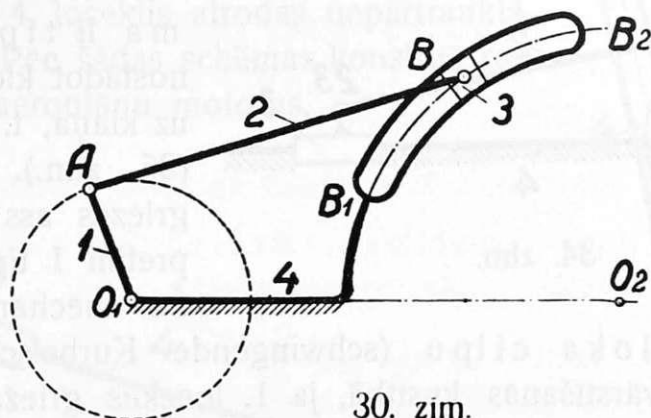


29. zīm.

Apskatīsim tā evolūciju: ņemsim šarnīru četrstūri, kuŗam 4. loceklis paliek nekustīgs, bet 1. loceklis piedzen visu mēchanismu (29. zīm.). Punkts A var aprakstīt riņķi ar radiju O_1A un punkts B riņķi ar radiju O_2B . Ja mēchanismu piedzen

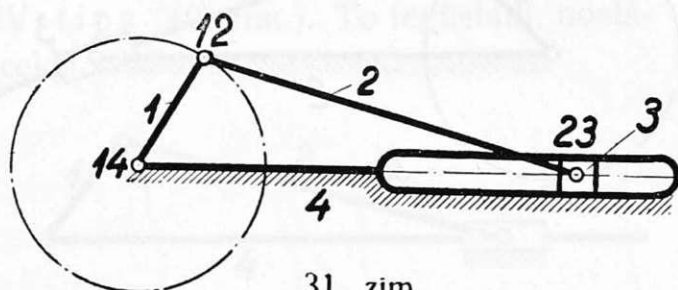
1. loceklis, tad, kā redzams 29. zīm., šim loceklim, izdarot pilnu apgriezību, punkts B neaprakstīs pilnu riņķi, bet tikai loku B_1B_2 . Tamdēļ locekļa AB kustība nemainīsies, ja 3. loekli aizvietosim ar akmeni,

kas slīd lokveidīgā kulisē B_1B_2 ar radiju O_2B . Iegūtais tādā kārtā 30. zīm. mehānisms ir kinematiska ķēde ar 3 šarnīriem un vienu slīdpāri. Tam arī piemīt piespiesta kustība.



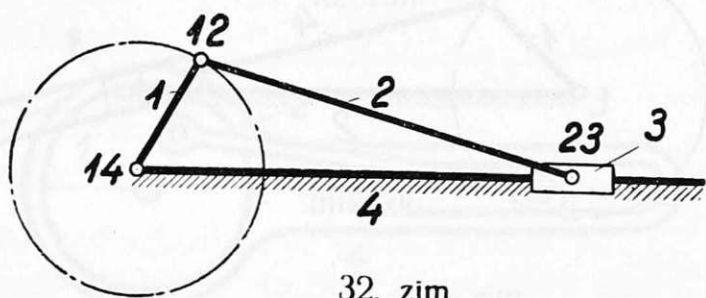
30. zīm.

Iztaisnojot loku B_1B_2 , nonākam pie tā sauktā kloķa mehānisma I tipa (31. zīm.), kas reprezentē slēgtu kinematisku ķēdi ar piespiestu kustību, ar 3 šarnīriem un vienu slīdpāri. Apzīmēsim šeit relatīvo polu 1. locekļa griezes kustībai pret 4. ar P_{14} jeb vienkārši ar 14; relatīvo griezes polu 1 pret 2 ar P_{12} jeb 12 u. t. t.

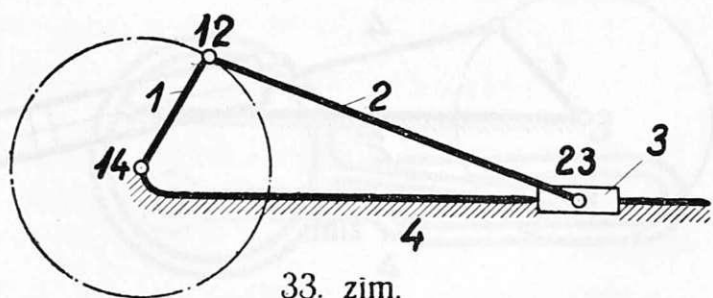


31. zīm.

31. zīm. parādītā mehānismā 3. loceklis kustas iekšpus 4., bet 32. zīm. tanī pašā mehānismā 4. loceklis paliek iekšpus 3. Ja kloķa centrs 14 atrodas uz tās pašas taisnes, uz kuŗas kustas šarnīrs 23, tad attiecīgo kloķa mehānismu sauc par centrisku (31. un 32. zīm.) Pretējā gadījumā kloķa mehānisms ir ekscentriskis (33. un 34. zīm.)



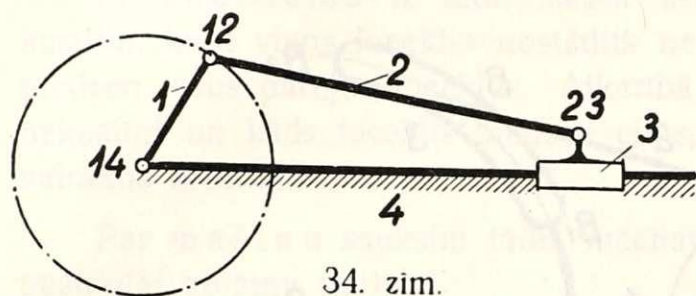
32. zīm.



33. zīm.

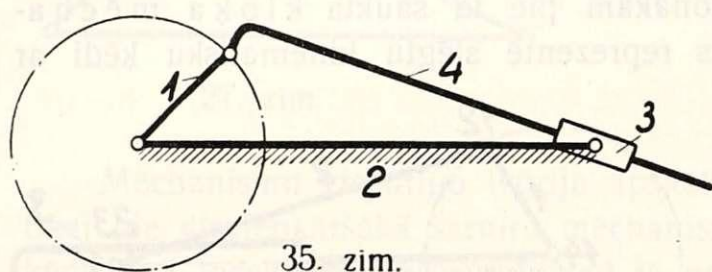
Atkarībā no tā, kāds loceklis piedzen kloķa mehānismu, atšķirsim divus gadījumus: 1) mehānismu piedzen kloķis, kas sastopams sūkņos un kompresoros, un 2) mehānismu piedzen slidošais loceklis, kas sastopams tvaikmašīnās un iekšdegu motoros.

Apskatīto kinēmatisko ķēdi var nostādīt arī uz citiem locekļiem, iegūstot tādā kārtā no tās pašas ķēdes vēl 3 mēchanismus.

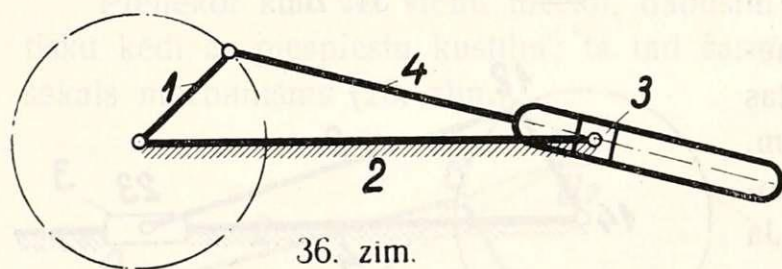


34. zim.

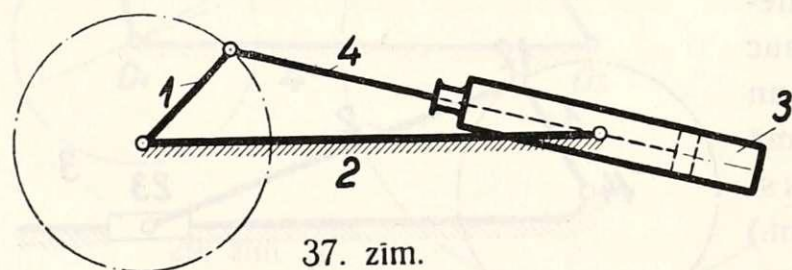
svārstīgo kloķa cilpu (schwingende Kurbelschleife), jo 3. loceklis atrodas svārstīšanās kustībā, ja 1. loceklis griežas ap savu asi. Divas šā mēchanisma pamatschēmas parādītas 35. un 36. zīm., kas



35. zim.



36. zim.



37. zim.

mēchanismu, ko lieto shaping-mašīnās. Šis mēchanisms raksturojams ar to, ka darba gājiens ir lēnāks par tukšo gājienu, 1. loceklim vienmērīgi griežoties.

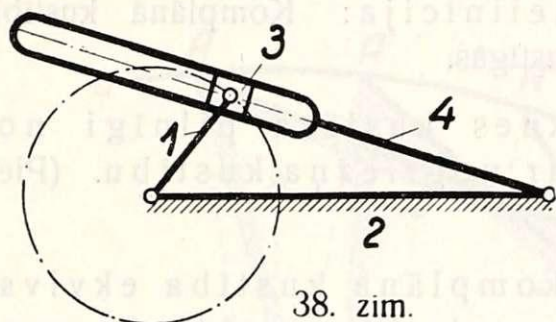
Kloķa mēchanisma II tips. To dabūsim, nostādot kloķa mēchanismu uz klaņa, t. i. uz 2. locekļa (35. zīm.). Šeit 3. locekļa griezes ass nekustīga, turpretim I tipā tā ir kustīga. Šo mēchanismu sauc par

svārstīgo kloķa cilpu (schwingende Kurbelschleife), jo 3. loceklis atrodas svārstīšanās kustībā, ja 1. loceklis griežas ap savu asi. Divas šā mēchanisma pamatschēmas parādītas 35. un 36. zīm., kas iegūtas, nostādot uz otra locekļa 33. un 31. zīm. parādītos kloķa mēchanismus. 35. zīm. 4. loceklis kustas iekš 3, bet 36. zīm. 3. loceklis atrodas iekš 4.

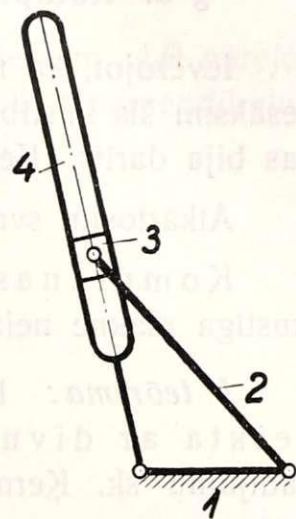
35. zīm. parādīto mēchanismu var izveidot arī citādi, un proti, kā parādīts 37. zīm. Pēc šādas schēmas izveido tvaikmašīnas nelielos tvaikoņos, jo šeit virzulis tieši pāriet uz kloķi un mašīna iznāk īsāka. 3. loceklis šeit ir tvaikmašīnas cilindrs.

Apmainot 36. zīm. mēchanismā 3. un 4. locekļa vietas, dabūjam 38. zīm. parādīto

Kloķa mēchanisma III tips (39. zīm.). To iegūstam, nostādot kloķa mēchanismu uz kloķa. Šo mēchanismu sauc arī par rotējošo kloķa cilpu (rotierende Kurbelschleife), jo 2. un 4. loceklis atrodas nepārtrauktā rotācijas kustībā. Pēc šādas schēmas konstruē rotējošus (Gnôme) aeroplānu motorus.



38. zīm.

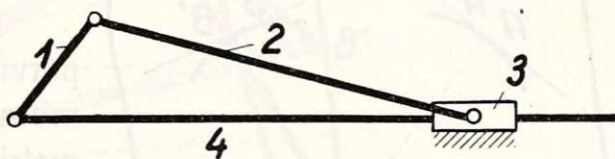


39. zīm.

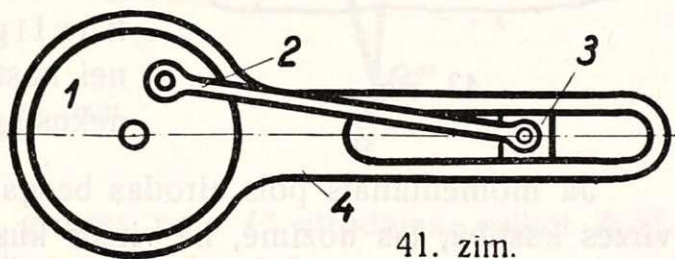
Kloķa mēchanisma IV tips (40. zīm.). To iegūstam, nostādot kloķa mēchanismu uz 3. locekļa.

Locekļu paplašināšana.

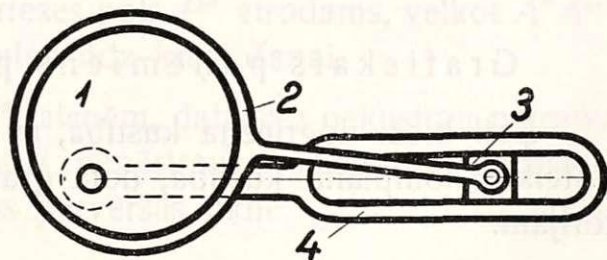
Dažreiz konstruktīvu iemeslu dēļ dažus locekļus paplašina. Tā, piemēram, 41. zīm. parādītais mēchanisms nav nekas cits kā kloķa mēchanisma I tips, tikai 4. loceklis šeit ir paplašināts un pilnīgi aptver 1. locekli, kuŗu var tad izveidot tik īsu, cik tas vajadzīgs. Šādus mēchanismus lieto štancēs un šķērēs.



40. zīm.



41. zīm.



42. zīm.

Parastie ekscentru mēchanismi (42. zīm.) arī nav nekas cits kā tā paša kloķa mēchanisma I tips, bet šeit 2. loceklis ir paplašināts tā, ka tas pilnīgi aptver 1. locekli, kuŗa gaŗumu sakarā ar to var samazināt, cik vien vajadzīgs.

§ 5. Komplāna kustība. Poloidu grafiskā konstrukcija.

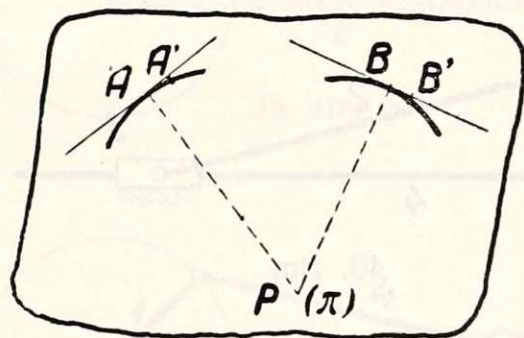
Ievērojot, ka mēchanismu lielākā daļa atrodas komplānā kustībā, iesāksim šīs kustības sīkāku aplūkošanu no ģeometriskā viedokļa, nekā tas bija darīts „Ķermeņa kinēmatikā“.

Atkārtosim svarīgākās komplānās kustības definīcijas un teorēmas.

Komplānas kustības definīcija: Komplānā kustībā kustīga plakne neiziet laukā no nekustīgās.

I teorēma: Kustīgas plaknes kustība pilnīgi noteikta ar divu punktu jeb ar nogriežņa kustību. (Pierādījumu sk. Ķermeņa kinēmatikā.)

II teorēma (Chasles). Katra komplāna kustība ekvivalenta vienai vien griezī ap noteiktu punktu, ko sauc par griezes polu. (Pierādījumu sk. Ķermeņu kinēmatikā.)



43. zīm.

Izlietojot sacīto bezgalīgi maziem pārvietojumiem, nonākam pie (43. zīm.) momentāna pola $P(\pi)$. Šā pola ģeometriskā vieta nekustīgā plaknē ir nekustīga poloida un tā paša pola ģeometriskā vieta kustīgā plaknē ir kustīga poloida. Kustīgai plaknei kustoties, kustīgā poloida veļas uz nekustīgās bez slīdes.

Ja momentānais pols atrodas bezgalībā, tad kustīgā plakne atrodas virzes kustībā, tas nozīmē, ka virzes kustību var uzskatīt par griezi ap bezgalīgi tālu polu.

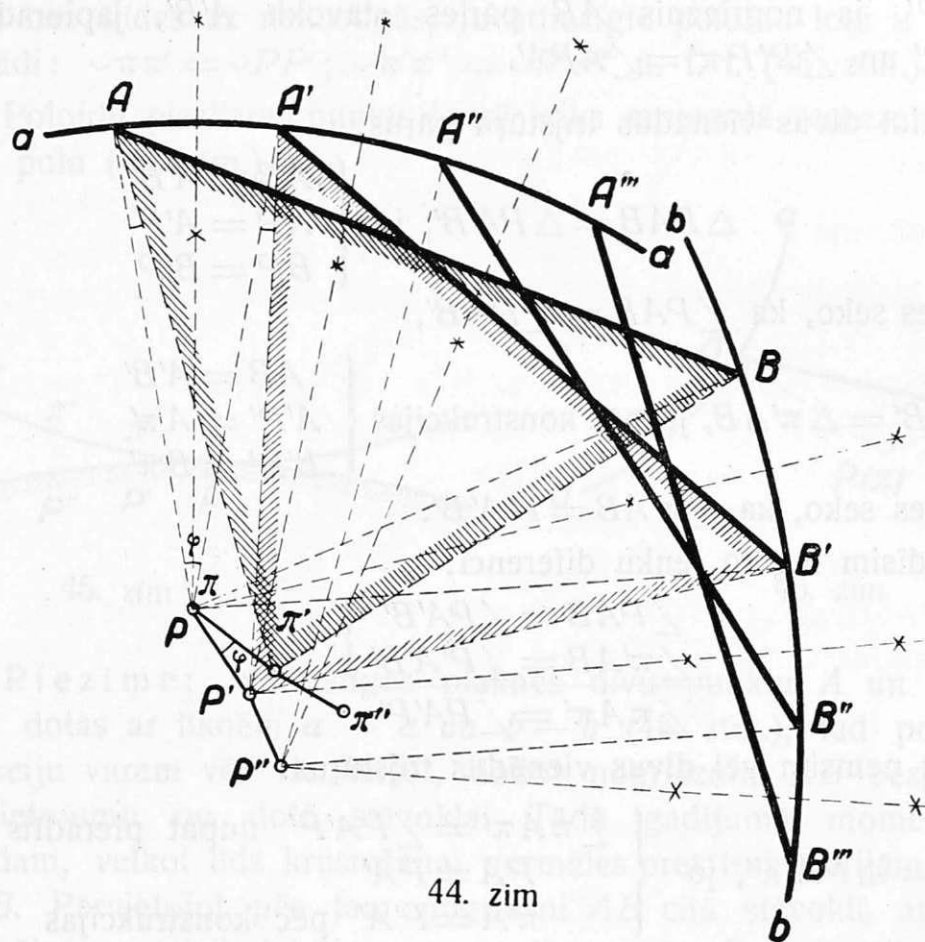
Grafiskais paņēmiens poloidu konstrukcijai.

Ļoti bieži nogriežņa kustība, ar kuŗu, kā jau agrāk bija minēts, ir noteikta komplāna kustība, dota grafiskā veidā ar divu punktu trajektorijām.

Pieņemsim, ka nogriežņa AB galapunktu A un B trajektorijas ir $a-a$ un $b-b$ (44 zīm.). Parādīsim, kā pakāpeniski uzkonstruēt poloidas, pieņemot, ka AB nepārvietojas nepārtraukti, bet lēcieniem no AB uz $A'B'$, pēc tam no $A'B'$ uz $A''B''$ un beidzot no $A''B''$ uz

$A'''B'''$. Katram šādam pārvietojumam atbilst savs pols, tā tad katrai poloidai varēs atrast 3 punktus un, savienojot tos ar taisnēm, iegūt abas poloidas poligōnu veidā.

Nekustīgas poloidas konstrukcija: nogrieznim AB pārejot stāvoklī $A'B'$, attiecīgo griezes polu $P(\pi)$ atrodam, velkot perpendikulus nogriežņu AA' un BB' viduspunktos līdz krustošanai.



44. zim

Pārejai no $A'B'$ uz $A''B''$ griezes pols P' atrodams, velkot $A'A''$ un $B'B''$ viduspunktos perpendikulus līdz krustošanai.

Pārejai no $A''B''$ uz $A'''B'''$ griezes pols P'' atrodams, velkot $A''A'''$ un $B''B'''$ viduspunktos perpendikulus līdz krustošanai.

Savienojot punktus P , P' un P'' taisnēm, dabūsim nekustīgu poloidu poligōna veidā, bet nogrieznim AB nepārtraukti kustoties, poligōna malas kļūst bezgalīgi mazas un tas pārvēršas līknē.

Kustīgas poloidas konstrukcija: Lai dabūtu šīs poloidas punktus, prātosim tā: nogrieznis AB griežas ap polu P , kamēr tas nonāks stāvoklī $A'B'$ un, ja šis nogrieznis kustēsies tālāk, tad pols pāries punktā P' . Pieņemsim tagad, ka taisne $A'B'$ kustas atpakaļ līdz AB

un meklēsim to punktu π' kustīgā plaknē, kas sakrita ar P' tanī momentā, kad AB sakrita ar $A'B'$. Šim nolūkam savienosim punktu P' ar punktiem A' un B' . Trijstūris $P'A'B'$ griežas tad ap polu P , kamēr $A'B'$ nesakritis ar AB . Lai atrastu punktu π' , konstruēsim $\triangle AB\pi' = \triangle A'P'B'$, t. i. vilksim no punkta A loku ar radiju $A'P'$ un no punkta B loku ar radiju $B'P'$. Abu loku krustošanās punkts ir π' .

Pierādījums. Lai pārliecinātos par to, ka punkts π' sakritis ar punktu P' , ja nogrieznis AB pāries stāvoklī $A'B'$, jāpierāda, ka $\pi\pi' = PP'$ un $\angle P'P\pi' = \angle APA'$.

Ņemsim divus vienādus trijstūru pārus:

$$\triangle PAB = \triangle PA'B', \text{ jo } \begin{cases} AB = A'B' \\ AP = A'P \\ BP = B'P \end{cases}$$

no kurienes seko, ka $\angle PAB = \angle PA'B'$,

$$\text{un } \triangle P'A'B' = \triangle \pi'AB, \text{ jo pēc konstrukcijas } \begin{cases} AB = A'B' \\ A'P' = A\pi' \\ B'P' = B\pi' \end{cases}$$

no kurienes seko, ka $\angle \pi'AB = \angle P'A'B'$.

Sastādīsim iegūto leņķu diferenci:

$$\begin{array}{r} \angle PAB = \angle PA'B' \\ \angle \pi'AB = \angle P'A'B' \\ \hline \angle \pi A\pi' = \angle PA'P' \end{array} \quad \text{—}$$

Tālāk ņemsim vēl divus vienādus trijstūrus:

$$\triangle \pi A\pi' = \triangle PA'P', \text{ jo } \begin{cases} \angle \pi A\pi' = \angle PA'P' \text{ nupat pierādīts} \\ PA = PA' \\ \pi'A = P'A' \text{ pēc konstrukcijas} \end{cases}$$

no kurienes seko, ka $\pi\pi' = PP'$

un arī $\angle AP\pi' = \angle A'PP'$; atvilksim šeit abās pusēs

$$\angle A'P\pi' = \angle A'P\pi',$$

paliek $\angle APA' = \angle P'P\pi' = \varphi$ griezes leņķis no AB uz $A'B'$.

Pēc analogijas dabūsim arī kustīgas poloidas punktu π'' , savienojot P'' ar A'' un B'' un ievilkot no punkta A loku ar radiju $A''P''$ līdz krustošanai ar loku, kas vilkts no punkta B ar radiju $B''P''$.

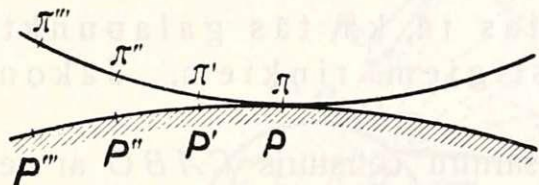
Tāpat kā agrāk, var pierādīt, ka $\pi'\pi'' = P'P''$.

Tādā kārtā esam atraduši griezes pola ģeometriskās vietas nekustīgā plaknē: poligōnu $PP'P''$, kas reprezentē nekustīgo poloidu, un kustīgā plaknē poligōnu $\pi\pi'\pi''$, kas reprezentē kustīgo poloidu.

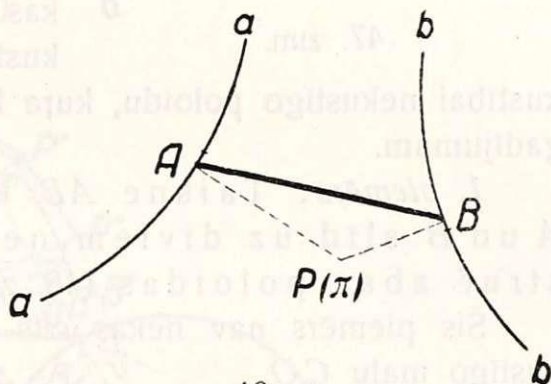
Ja taisne AB pāriet stāvokļos $A'B'$, $A''B''$ un $A'''B'''$, tad kustīgās poloidas poligons $\pi\pi'\pi''$ noveļas bez slīdes uz nekustīgā $PP'P''$, jo poligonu attiecīgās malas ir vienādas: $PP' = \pi\pi'$ un $P'P'' = \pi'\pi''$.

Visa šī konstrukcija un arī pierādījums bija izdarīti galīgiem pārvietojumiem, bet, protams, tie paliek spēkā arī bezgalīgi maziem pārvietojumiem, tikai pēdējā gadījumā dabūsim poligonus ar bezgalīgi mazām malām, t. i. līknes un kustīgas plaknes kustībā, kustīgā poloida veļas bez slīdes uz nekustīgās, jo attiecīgie poloidu loki ir savstarpīgi vienādi: $\cup\pi\pi' = \cup PP'$; $\cup\pi'\pi'' = \cup P'P''$ u. t. t. (45. zīm.).

Poloidu pieskares punkts katrā laika momentā reprezentē momentāno polu (45. zīm.).



45. zīm.



46. zīm.

Piezīme: Ja kustīgas plaknes divu punktu A un B trajektorijas dotas ar līknēm $a - a$ un $b - b$ (46. zīm.), tad poloidu konstrukciju varam vēl vienkāršot, dodot nogriežnim AB bezgalīgi mazu pārvietojumu no dotā stāvokļa. Tādā gadījumā momentāno polu atrodam, velkot līdz krustošanai normāles pret trajektorijām punktos A un B . Pārvietojot pēc tam nogriežni AB citā stāvoklī, atkal velkam normāles un atkal dabūjam momentāno polu. Caur iegūtiem punktiem velkam līkni un atrodam nekustīgo poloidu. Kustīgās poloidas punkti jākonstruē tāpat, kā bija aizrādīts agrāk.

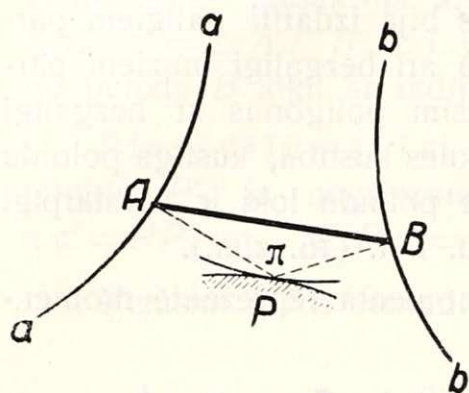
Speciāli gadījumi: 1) Virzes kustība. Kustīga plakne atradīsies virzes kustībā, ja abu trajektoriju normāles arvien krustojas bezgalībā.

2) Griezes kustība. Kustīga plakne atradīsies griezes kustībā, ja viena punkta trajektorija reducējas punktā.

Kustības apgriešanas princips.

Aplūkotā poloidu konstrukcija rāda, ka vieglāki konstruēt nekustīgo poloidu nekā kustīgo, tamdēļ ļoti izdevīgi kustīgās poloidas konstrukcijai lietot kustības apgriešanas principu, uz ko jau bija aizrādīts „Ķermeņa kinēmatikā“.

Šis princips pastāv iekš tam, ka pēc nekustīgās poloidas uzkonstruēšanas jāiedomājas, ka viss tas, kas agrāk bija mierā, tagad kustas, un tas, kas bija kustībā, paliek mierā.



47. zīm.

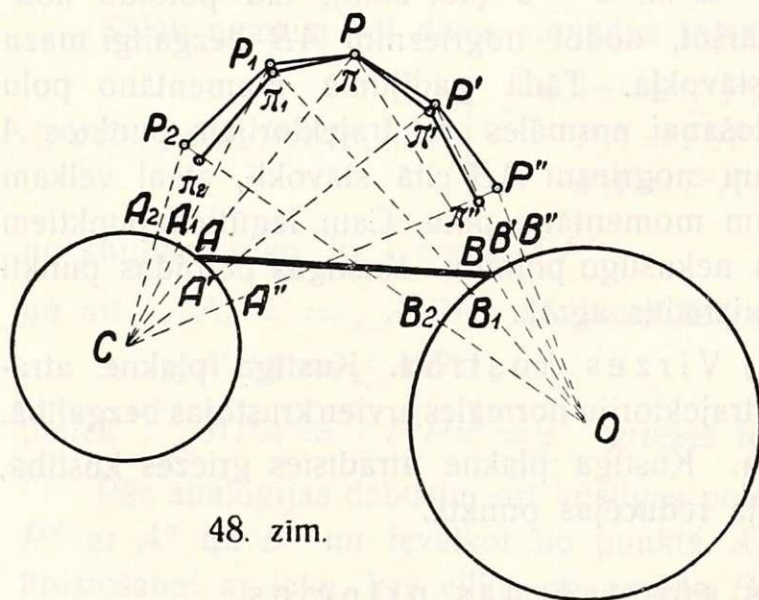
Tā piemēram, ja līknes $a-a$ un $b-b$ (47. zīm.) ir nekustīgas līknes un taisne AB kustas tā, ka punkts A arvien paliek uz līknes $a-a$, bet punkts B uz līknes $b-b$, varam viegli konstruēt nekustīgo poloidu: P —līkni.

Pieņemot tālāk, ka taisne AB paliek nekustīga, bet līknes $a-a$ un $b-b$, kas negrozīgi saistītas savā starpā, sāks kustēties, varam tāpat uzkonstruēt arī šai kustībai nekustīgo poloidu, kuŗa būs savukārt kustīga poloida pirmam gadījumam.

1. piemērs. Taisne AB kustas tā, ka tās galapunkti A un B slīd uz diviem nekustīgiem riņķiem. Jākonstruē abas poloidas (48. zīm.).

Šis piemērs nav nekas cits kā šarnīru četrstūris $CABO$ ar nekustīgo malu CO .

Nekustīgas poloidas konstrukcija: Apzīmēsim doto riņķu centrus ar C un O . Velkam taisnes CA un OB līdz krustošanai



48. zīm.

polā $P(\pi)$. Izvēlamies punktam A abās pusēs no pamatstāvokļa vēl citus A' , A'' un A_1 , A_2 . Ievērojot, ka attālums AB nevar mainīties, atrodam atbilstošus punktus B' , B'' un B_1 , B_2 .

Taišņu CA_1 un OB_1 krustošanas punktā atrodam P_1 , taišņu CA' un OB' krustošanas punktā atrodam P' u. t. t.

Savienojot iegūtos punktus, dabūsim nekustīgo poloidu poligōna veidā, bet nepārtrauktā kustībā ap šo poligōnu jāapraksta līkne, kas 48. zīm. nav izdarīts, lai zīmējums paliktu skaidrāks.

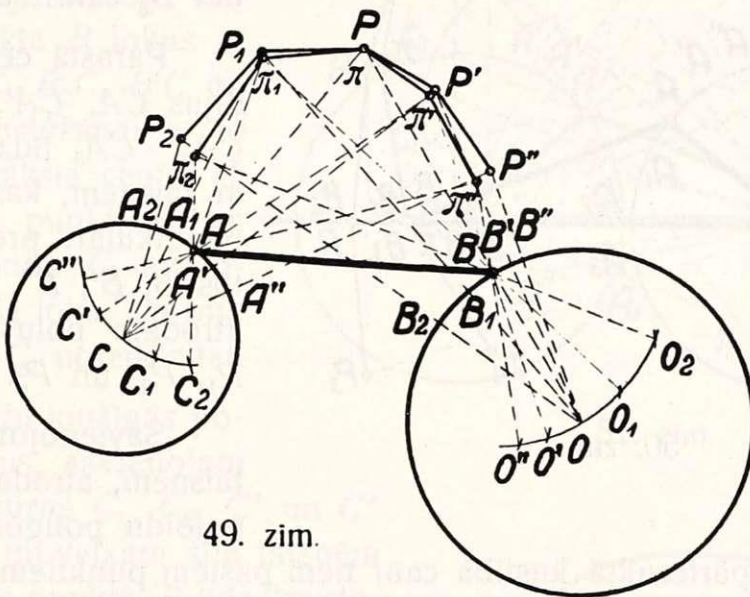
Savienojot iegūtos punktus, dabūsim nekustīgo poloidu poligōna veidā, bet nepārtrauktā kustībā ap šo poligōnu jāapraksta līkne, kas 48. zīm. nav izdarīts, lai zīmējums paliktu skaidrāks.

Kustīgās poloidas tiešā konstrukcija (48. zīm.). Lai dabūtu kustīgās poloidas punktu π_1 , velkam no punkta A loku ar radiju A_1P_1 līdz krustošanai ar loku, kas vilkts no punkta B ar radiju B_1P_1 .

Lai dabūtu kustīgās poloidas punktu π' , velkam no punkta A loku ar radiju $A'P'$ līdz krustošanai ar loku, kas vilkts no punkta B ar radiju $B'P'$.

Tāpat atrodam arī citus kustīgās poloidas punktus π_2 un π'' . Savienojot iegūtos punktus taisnēm, dabūsim kustīgo poloidu poligōna veidā, bet nepārtrauktā kustībā ap šo poligōnu jāapraksta likne, kas atkal 48. zīm. nav izdarīts, lai tas paliktu skaidrāks.

Otrā kustīgās poloidas konstrukcijas metode ar kustības apgriešanu (49. zīm.).



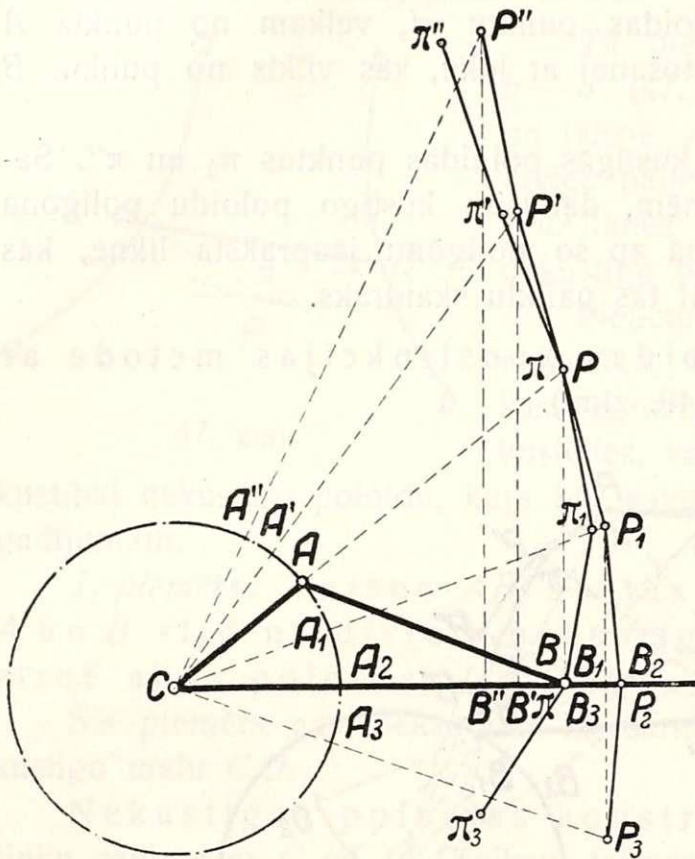
49. zīm.

Vispirms konstruējam tāpat kā agrāk nekustīgo poloidu un apgriežam kustību. Ja AB paliek nekustīgs un abi riņķi kustēsies, tad to centri aprakstīs lokus ar tiem pašiem radijiem, bet ap punktiem A un B . Iezīmēsim šos lokus un meklēsim uz tiem attiecīgus centru stāvokļus. Velkot no punkta B lokus ar radijiem B_1C , B_2C , $B'C$ un $B''C$, atradīsim centrus C_1 , C_2 , C' un C'' . Centra O stāvokļus varētu atrast tāpat, bet var arī, ievērojot, ka attālums CO nevar mainīties, vilkt lokus no C_1 , C_2 , C' un C'' ar radiju CO līdz krustošanai ar punkta O geometrisko vietu.

Beidzot dabūjam C_1A un O_1B krustošanās punktā polu π_1 , C_2A un O_2B krustošanās punktā polu π_2 u. t. t.

Savienojot iegūtos polus taisnēm, dabūjam kustīgo poloidu poligōna veidā, bet nepārtrauktā kustībā caur tiem pašiem punktiem jāvelk likne.

2. piemērs: Konstruēt abas poloidas klaņa kustībai kloķa mēchanisma I tipa (50. zīm.).



50. zīm.

Nekustīgās poloidas konstrukcija: Izvēlamies klaņa AB pamatstāvokli un bez tam vēl dažus punkta A stāvokļus A', A'', A_1, A_2 un A_3 vienā un otrā pusē uz riņķa, ko tas apraksta. Atrodam uz taisnes CB attiecīgus punkta B stāvokļus B', B'' un B_1, B_2 , bet B_3 sakrīt ar B_1 .

Parastā ceļā velkot rādijus $CA, CA', CA'', CA_1, CA_2, CA_3$ līdz krustošanai ar taisnēm, kas vilktas perpendikulāri pret CB punktos B, B', B'', B_1, B_2 un B_3 , atrodam polus P, P', P'', P_1, P_2 , un P_3 .

Savienojot šos punktus taisnēm, atrodam nekustīgo poloidu poligōna veidā (50.

zīm.). Bet nepārtrauktā kustībā caur tiem pašiem punktiem jāvelk līkne. Šai līknei acīm redzot būs infleksijas punkts, jo vertikālam CA virzienam pols aiziet bezgalībā.

Kustīgās poloidas tiešā konstrukcija. Lai iegūtu kustīgās poloidas punktu π_1 , velkam no punkta A loku ar rādiju A_1P_1 līdz krustošanai ar loku, kas vilkts no punkta B ar rādiju B_1P_1 .

Lai atrastu kustīgās poloidas punktu π' , velkam no punkta A loku ar rādiju $A'P'$ līdz krustošanai ar loku, kas vilkts no punkta B ar rādiju $B'P'$.

Tāpat atrodam arī citus kustīgās poloidas punktus π'', π_2 un π_3 . Savienojot iegūtos punktus taisnēm, dabūsim kustīgo poloidu poligōna veidā, bet nepārtrauktā kustībā caur tiem pašiem punktiem jāvelk līkne. Arī šai līknei būs infleksijas punkts: ja nekustīga poloida aiziet bezgalībā, arī kustīgai poloidai jāaiziet bezgalībā.

Otra kustīgās poloidas konstrukcijas metode ar kustības apgriešanu (51. zīm.). Vispirms konstruējam tāpat kā agrāk nekustīgo poloidu un apgriežam kustību. Ja AB paliek nekustīgs, tad riņķis un ar to saistītā taisne CB kustas, pie kam riņķa centrs C apraksta loku ap punktu A ar to pašu radiju AC un taisne CB arvien iet caur nekustīgo punktu B .

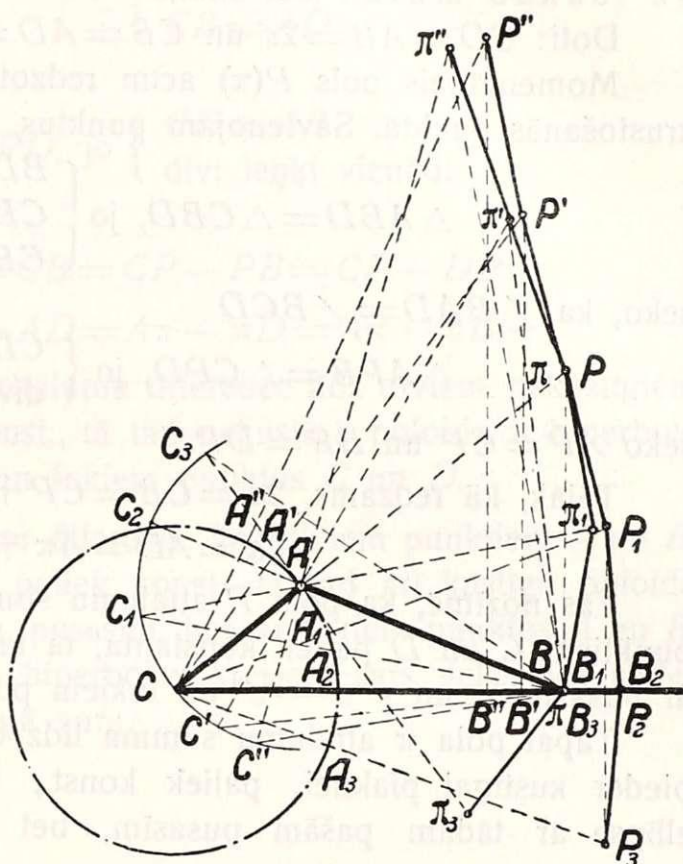
Lai atrastu centra C stāvokļus C_1, C_2, C', C'' , velkam no punkta B lokus ar radijiem $B_1C, B_2C, B'C$ un $B''C$ līdz krustošanai ar to riņķi, ko apraksta centrs C . Ievērojot, ka punkti B_1 un B_3 sakrīt, centrs C_3 atradīsies uz tā paša loka, kas bija vilkts centra C_1 noteikšanai.

Lai iegūtu kustīgās poloidas punktus, savienojam attiecīgos centrus C_1, C_2, C' un C'' ar punktu B un velkam šīm taisnēm perpendikulus punktā B līdz krustošanai ar taisnēm, kas iet caur to pašu centru un punktu A .

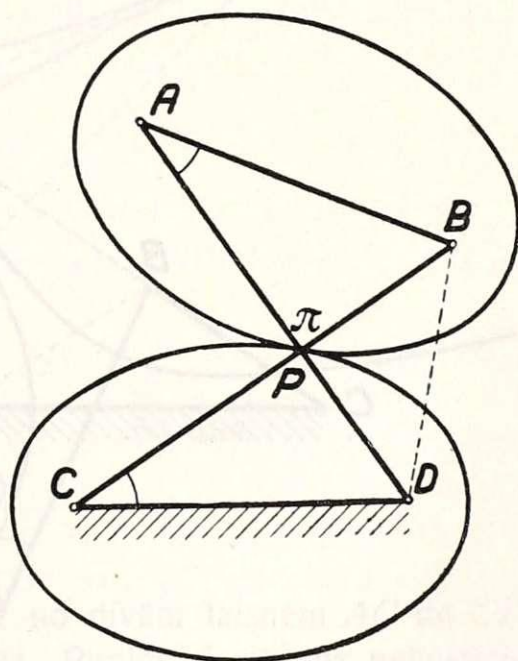
Savienojot iegūtos polus taisnēm, dabūsim kustīgo poloidu poligona veidā, bet nepārtrauktā kustībā caur tiem pašiem punktiem jāvelk līkne.

Poloidu noteikšana uz vienkārša prātojuma pamata.

Dažreiz nav vajadzības konstruēt poloidas pēc punktiem, bet ir iespējams noteikt poloidas uz vienkārša prātojuma pamata.



51. zīm.



52. zīm.

3. piemērs. Noteikt abas poloidas antiparallēlograma malas AB kustībai, ja antiparallēlograms nostādīts uz īsākas malas (52. zīm.).

Doti: $CD=AB=2c$ un $CB=AD=2a$, pie kam $a > c$.

Momentānais pols $P(\pi)$ acīm redzot atrodas locekļu BC un AD krustošanās punktā. Savienojam punktus B un D .

$$\triangle ABD = \triangle CBD, \text{ jo } \begin{cases} BD \text{ kopēja mala} \\ CD = AB \\ CB = AD \end{cases}$$

seko, ka $\angle BAD = \angle BCD$

$$\triangle APB = \triangle CPD, \text{ jo } \begin{cases} CD = AB \\ \text{divi leņķi vienādi} \end{cases}$$

seko $AP = CP$ un $BP = DP$.

Tālāk, kā redzams, $2a = CB = CP + PB = CP + PD$

$$2a = AD = A\pi + \pi D = A\pi + \pi B.$$

Tas nozīmē, ka pola P attālumu summa līdz diviem nekustīgiem punktiem C un D paliek konstanta, tā tad nekustīgā poloida ir ellipse ar pusasīm a un $\sqrt{a^2 - c^2}$ un fokiem punktos C un D .

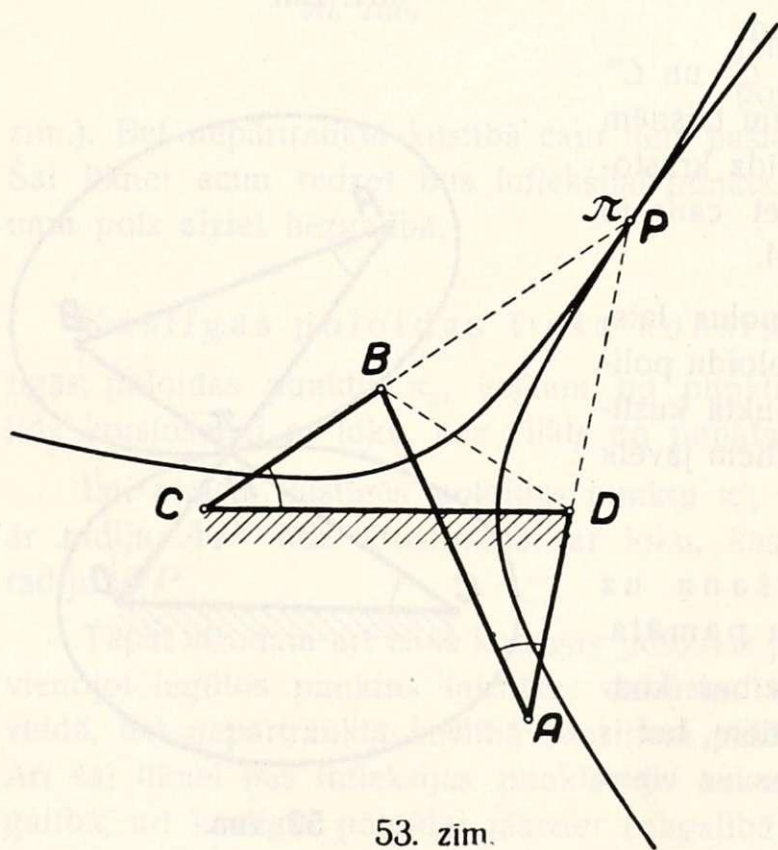
Tāpat pola π attālumu summa līdz diviem punktiem A un B , kas pieder kustīgai plaknei, paliek konst., tā tad arī kustīgā poloida ir ellipse ar tādām pašām pusasīm, bet ar fokiem punktos A un B .

Malai AB kustoties, kustīgā ellipse veļas uz nekustīgās bez slīdes.

4. piemērs. Noteikt abas poloidas antiparallēlograma malas AB kustībai, ja antiparallēlograms nostādīts uz garākās malas (53. zīm.).

Doti: $CD=AB=2c$ un $CB=AD=2a$, pie kam $a < c$.

Momentānais pols $P(\pi)$ acīm redzot atrodas locekļu CB un AD krustošanās punktā. Savienojam punktus B un D .



53. zīm.

Vispirms konstruējam polu $P(\pi)$, velkot caur punktu A taisni perpendikulāri pret $a - a$ un caur punktu B taisni perpendikulāri pret CD .

$$\triangle ACK = \triangle BEK, \text{ jo } \begin{cases} AC = BE \\ \text{divi leņķi vienādi} \end{cases}$$

seko, ka $AK = KB$.

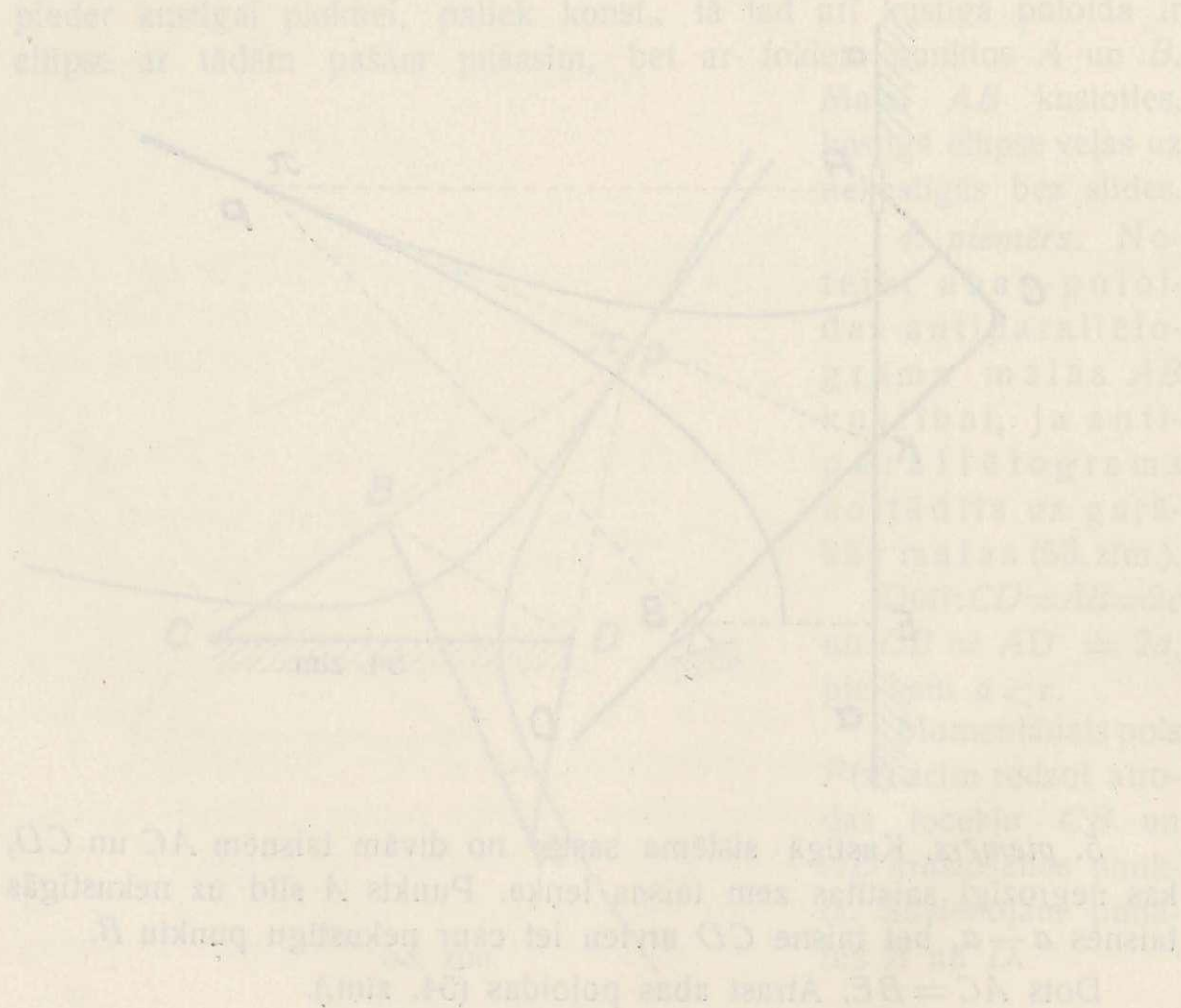
$$\triangle APK = \triangle BPK, \text{ jo } \begin{cases} AK = BK \\ KP \text{ kopēja mala} \\ \text{taisns leņķis} \end{cases}$$

seko $AP = BP$.

Kā redzams, pola P attālums līdz taisnei $a - a$ un līdz nekustīgam punktam B vienādi, tā tad nekustīgā poloida ir parabola ar foku punktā B un direktrisi $a - a$.

Kustīgā sistēmā atkal pola π attālums līdz taisnei CD un līdz punktam A vienādi, tas nozīmē, ka kustīgā poloida arī ir parabola ar foku punktā A un direktrisi CD .

Abas parabolas pieskaras punktā $P(\pi)$, un kustības gadījumā kustīgā parabola veļas uz nekustīgās bez slīdes.



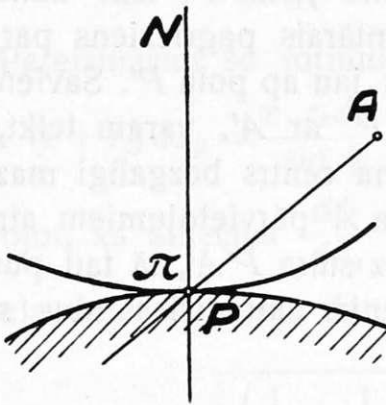
IV nodaļa.

Eulera- Savarija nol-ms un tā konstrukcija.

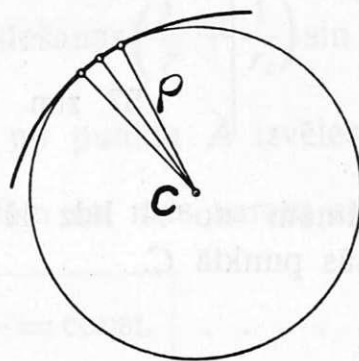
§ 6. Punkta trajektorijas liekuma centra noteikšana. Eulera¹¹-Savarija¹² nol-ms.

Nosauksim abu poloidu kopējo normāli PN , kas vilkta momentānā polā P , par galveno staru (55. zīm.).

Taisni PA , kas savieno kādu kustīgās plaknes punktu A ar momentāno polu P , nosauksim par punkta A staru (55. zīm.).



55. zīm.



56. zīm.

Lai atrastu kādas līknes liekuma centru, kā zināms no diferenciālās ģeometrijas, jāņem uz šīs līknes 3 bezgalīgi tuvi punkti un caur tiem jāvelk riņķis. Ievilkta riņķa centrs C ir tad līknes liekuma centrs un riņķa radijs līknes liekuma radijs ρ (56. zīm.).

Eulera-Savarija nolīdzinājums.

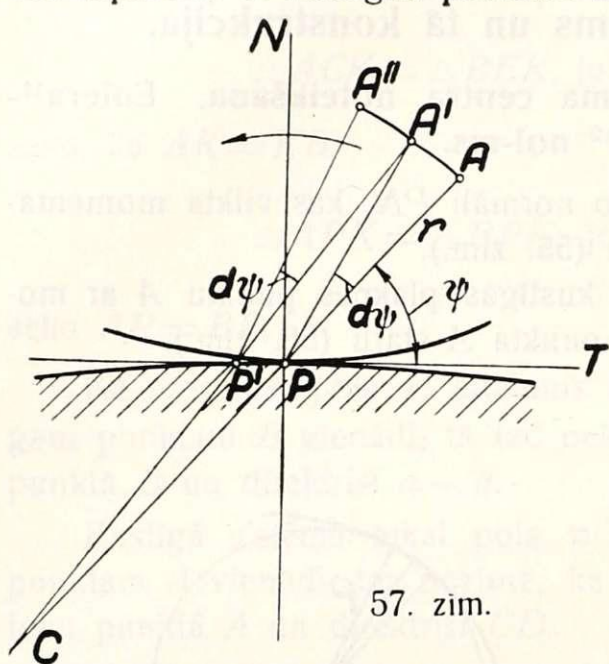
Pieņemsim, ka kustība dota ar abām poloidām, kas pieskaņas momentānā polā. Ievilksim poloidu kopējo tangenti PT un kopējo normāli PN (57. zīm.).

Kāda kustīgas plaknes punkta A stāvokli noteiksim ar attālumu no pola P , ko apzīmēsim ar $PA = r$, un ar leņķi ψ starp tangenti PT un r . Apzīmējumu ψ lietosim tamdēļ, ka ar φ komplānā kustībā bija apzīmēts leņķis starp nekustīgo OX -asi un kustīgo $O'E$ -asi, bet šie leņķi var būt nevienādi. Leņķi ψ atskaitīsim no tangentes PT pret pulksteņrādītāju. Sakarā ar to uzskatīsim kustīgās poloidas velšanās virzienu pret pulksteņrādītāju par pozitīvu.

¹¹ L. Euler. Novi Commentarii Academiae Petropolitanae. 1765.

¹² F. Savary. Journal de Mathématique. 1845.

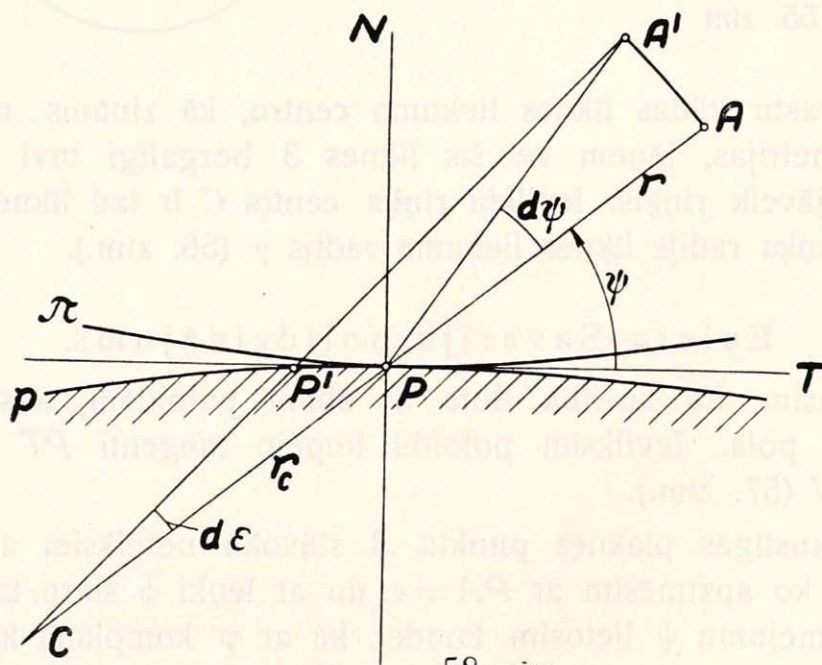
Dosim kustīgai plaknei elementāru pārvietojumu pozitīvā virzienā, kas izpaužas ar kustīgās poloidas novelšanos par bezgalīgi mazu loku PP' uz nekustīgās poloidas.



57. zīm.

PP' uz nekustīgās poloidas. Punkts A pie tam aprakstīs bezgalīgi mazu loku AA' un leņķis ψ dabūs bezgalīgi mazu pieaugumu $d\psi$. Punkta A trajektorijas elementa AA' liekuma centram jāatrodas uz stara PA , jo kustības sākumā grieze notiek ap momentāno polu P , bet nākošais elementārais pagrieziens par $d\psi$ notiks jau ap polu P' . Savienojot polu P' ar A' , varam teikt, ka liekuma centrs bezgalīgi maziem punkta A' pārvietojumiem atradīsies uz stara $P'A'$, tā tad punkta

pārvietojumam no A līdz A' liekuma centrs atradīsies abu staru krustošanās punktā C .



58. zīm.

Ievēdīsim apzīmējumus $PA=r$ un $PC=r_c$ (58. zīm.), tad loka gaņums $AA'=rd\psi$, bet no otras puses $AA'=(r+r_c)d\epsilon$, kur $d\epsilon$ ir punkta A trajektorijas kontingences leņķis. Pielīdzinot abas izteiksmes, dabūsim: $(r+r_c)d\epsilon=rd\psi$. Poloidas bezgalīgi mazu elementu PP' uzskatīsim par taisnu un apzīmēsim ar $PP'=ds_p$.

No $\triangle CPP'$ pēc sinu teorēmas:

$$\frac{PP'}{\sin d\varepsilon} = \frac{PC}{\sin(\pi - \psi - d\varepsilon)} \quad \text{jeb} \quad \frac{ds_p}{\sin d\varepsilon} = \frac{r_c}{\sin(\psi + d\varepsilon)},$$

bet $d\varepsilon$ ir ļoti mazs leņķis, tamdēļ varam likt $\sin d\varepsilon = d\varepsilon$ un $\cos d\varepsilon = 1$,

$$\text{tad} \quad \frac{ds_p}{d\varepsilon} = \frac{r_c}{\sin \psi \cos d\varepsilon + \cos \psi \sin d\varepsilon} \quad \text{jeb} \quad \frac{ds_p}{d\varepsilon} = \frac{r_c}{\sin \psi + \cos \psi d\varepsilon};$$

salīdzinot ar galīgo lielumu $\sin \psi$, atmetīsim bezgalīgi mazo $\cos \psi d\varepsilon$,

$$\text{tad paliek} \quad \frac{ds_p}{d\varepsilon} = \frac{r_c}{\sin \psi}.$$

Pareizināsim šo formulu ar agrāk atrasto: $(r + r_c)d\varepsilon = rd\psi$, tad

$$\text{iznāk} \quad (r + r_c)ds_p = \frac{r \cdot r_c d\psi}{\sin \psi} \quad \text{jeb pēc pārveidošanas} \quad \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_c}\right) \sin \psi = \frac{d\psi}{ds_p}.$$

Ievērojot, ka attiecība $\frac{d\psi}{ds_p}$ nav atkarīga no punkta A izvēles, atrastā formula dotā momentā der visiem punktiem un mēs varam rakstīt:

$$\boxed{\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_c}\right) \sin \psi = \frac{d\psi}{ds_p} = \text{const.}} \quad \dots \dots \dots (1)$$

Šis nolīdzinājums pazīstams ar nosaukumu: „Eulera-Savarija nolīdzinājums“. Labo pusi šeit vēl var pārveidot $\frac{d\psi}{ds_p} = \frac{d\psi}{dt} \cdot \frac{dt}{ds_p} = \frac{\omega}{V_p}$, jo $\frac{d\psi}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} = \omega$, tamdēļ ka griezes ātrums nav atkarīgs no kustīgā koordinātu sākuma izvēles. Izteiksme $\frac{ds_p}{dt} = V_p$ ir pazīstamais pola pārvietošanas ātrums.

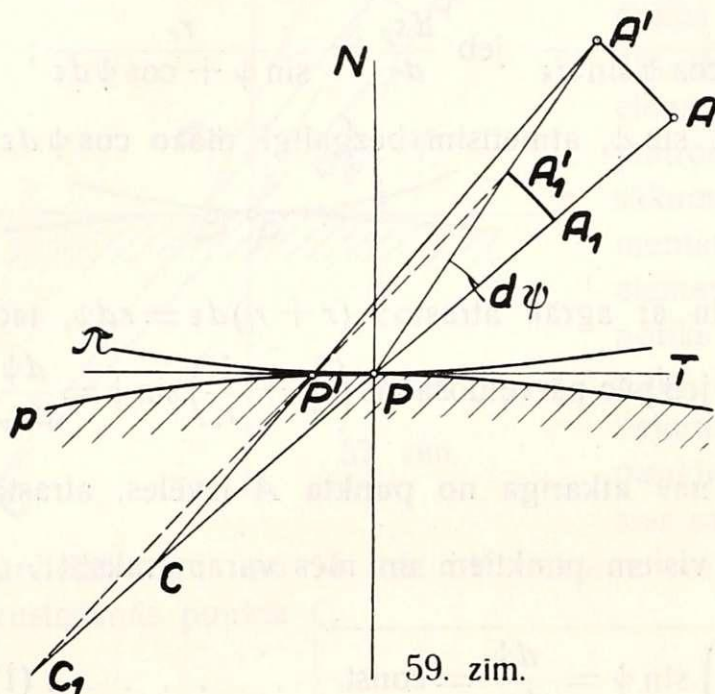
Ar Eulera-Savarija nolīdzinājuma palīdzību var atrast katram kustīgas plaknes punktam trajektorijas liekuma centru, ja zināms liekuma centrs kaut vienam punktam un pola tangente. Tiešām nolīdzinājumu (1), ievērojot, ka labā puse paliek konst. visiem punktiem, varam rakstīt:

$$\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_c}\right) \sin \psi = \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_{c1}}\right) \sin \psi_1 = \frac{\omega}{V_p} = \text{const.}$$

Ja tagad vienam punktam liekuma centrs zināms, tad lielumi r , r_c un ψ ir zināmi. Ņemot vēl klāt otru punktu ar zināmu r_1 un ψ_1 , paliek Eulera nolīdzinājumā tikai viens nezināmais lielums r_{c1} , kuŗu tad var atrast.

Sakars starp liekuma centriem tiem punktiem, kas atrodas uz viena stara.

Dotas abas poloidas, poloidu tangente PT , kāds punkts A un tā stāvoklis A' pēc kustīgās plaknes elementāra pagriežiena ap polu P par leņķi $d\psi$ (59. zīm.). Bez tam zināms liekuma centrs C , kas atrodas staru AP un $A'P'$ krustošanās punktā.



Ņemsim otru punktu A_1 uz tā paša stara, bet tuvāk polam P . Pēc griezes par to pašu leņķi $d\psi$ punkts A_1 pāries punktā A'_1 . Savienojot pēdējo ar jauno momentāno polu P' , dabūsim krustošanās punktā ar staru AP meklējamo liekuma

centru C_1 punkta A_1 trajektorijai. Kā redzams 59. zīm., šis centrs C_1 iznāk tālāk no pola P nekā pirmais liekuma centrs C .

To pašu varētu pateikt arī uz Eulera-Savarija nolīdzinājuma pamata, jo punktiem uz viena stara $\sin \psi$ ir vienāds, tā tad iznāk

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_{c1}} = \text{const.},$$

bet ja divu locekļu summa paliek konst., tad mazākam r atbilst lielāks r_c un otrādi.

Sacītam seko slēdziens: jo tālāk atrodas punkts no pola P , jo tuvāk polam otrā pusē guļ tam atbilstošais trajektorijas liekuma centrs un otrādi, jo tuvāk atrodas punkts polam P , jo tālāk no pēdējā otrā pusē būs trajektorijas liekuma centrs.

Bet atrastam likumam ir tomēr zināms ierobežojums un proti, tas paliek spēkā tikai, kamēr stari PA un $P'A'$ nekļūst paralēli.

Ja kādam punktam W stari būs paralēli $PW \parallel P'W'$ (60. zīm.), tad liekuma centrs atradīsies bezgalībā un punkts W būs savas trajektorijas infleksijas punkts.

Vilksim $PP_0 \perp PW$, tad varam uzskatīt $PP_0W'W$ par taisnstūri. Apzīmēsim $PW = r_w$, tad $WW' = r_w d\psi$, bet $PP_0 = ds_p \cdot \sin \psi$ un $r_w d\psi = ds_p \cdot \sin \psi$, no kurienes

$$\frac{d\psi}{ds_p} = \frac{\sin \psi}{r_w}.$$

Ievietojot šo izteiksmi Eulera nolīdzinājumā (1), varam tanī saīsināt $\sin \psi$, iegūstot Eulera nolīdzinājumu citā veidā

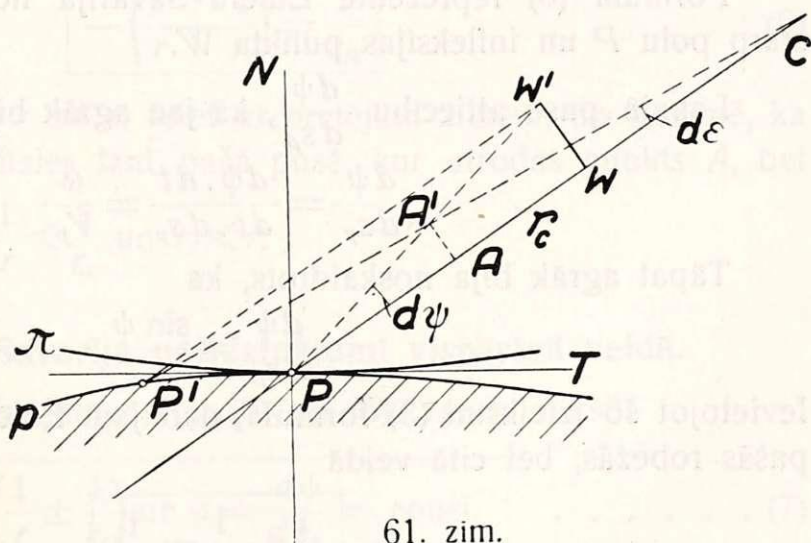
$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r_w} \dots \dots \dots (2)$$

Nolīdzinājums (2) dod iespēju atrast katram staram punktu W , ja būs zināms kāds punkts un tā trajektorijas liekuma centrs, pie kam punkts W , kas atrodas attālumā r_w no pola P , ir savas trajektorijas infleksijas punkts. Katram staram, protams, ir tikai viens tāds punkts.

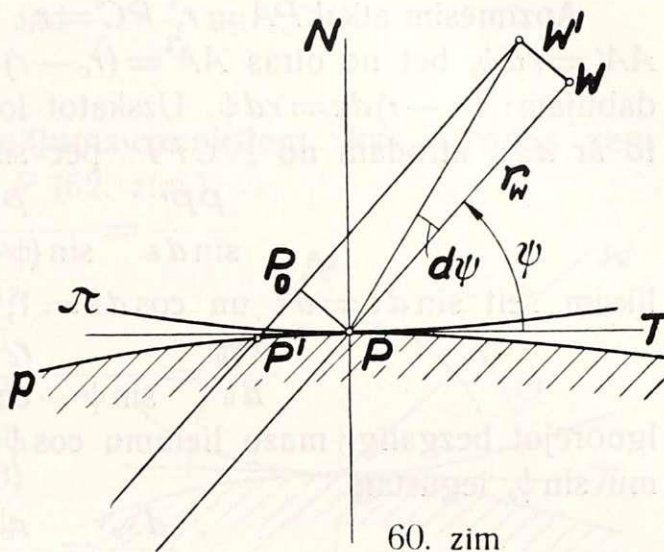
Tālāk noskaidrosim, kur ir trajektoriju liekuma centri tiem punktiem, kas atrodas starp infleksijas punktu W un polu P .

§ 7. Eulera-Savarija nolīdzinājums robežās starp polu P un infleksijas punktu W (61. zīm.).

Dotas abas poloidas, pola tangente un infleksijas punkts W uz izvēlēta stara. Ņemsim punktu A starp P un W . Šis punkts caur elementāru griezi par $d\psi$ ap polu P nonāks punktā A' . Ja punkts W un leņķis $d\psi$ ir zināmi, atrodam punktu W' un, velkot caur W' taisni $W'P' \parallel WP$, atrodam arī punktu P' .



61. zīm.



60. zīm.

Lai dabūtu meklējamo liekuma centru C , jāatrod stara PA krustšanās punkts ar $P'A'$. Kā redzams 61. zīm., punkts C iznāk augšā aiz punkta W .

Apzīmēsim atkal $PA = r$, $PC = r_c$, tad AA' gaņums no vienas puses $AA' = r d\psi$, bet no otras $AA' = (r_c - r) d\varepsilon$. Pielīdzinot abas izteiksmes, dabūjam: $(r_c - r) d\varepsilon = r d\psi$. Uzskatot loku PP' par taisni un apzīmējot to ar ds_p , atrodam no $\triangle CPP'$ pēc sinu teorēmas

$$\frac{PP'}{\sin d\varepsilon} = \frac{PC}{\sin(\psi - d\varepsilon)}$$

liksim šeit $\sin d\varepsilon = d\varepsilon$ un $\cos d\varepsilon = 1$, jo leņķis $d\varepsilon$ ir ļoti mazs, tad

$$\frac{ds_p}{d\varepsilon} = \frac{r_c}{\sin\psi - \cos\psi \cdot d\varepsilon}$$

Ignorējot bezgalīgi mazo lielumu $\cos\psi \cdot d\varepsilon$, salīdzinot ar galīgo lielumu $\sin\psi$, iegūstam

$$\frac{ds_p}{d\varepsilon} = \frac{r_c}{\sin\psi}$$

Pareizinot šo izteiksmi ar agrāk atrasto: $(r_c - r) d\varepsilon = r d\psi$, dabūjam:

$$(r_c - r) ds_p = \frac{r r_c d\psi}{\sin\psi}$$

un pēc pārveidošanas $\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_c}\right) \sin\psi = \frac{d\psi}{ds_p}$.

Ievērojot, ka attiecība $\frac{d\psi}{ds_p}$ nav atkarīga no punkta izvēles, atrastā formula der visiem punktiem starp P un W , un mēs varam rakstīt

$$\boxed{\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_c}\right) \sin\psi = \frac{d\psi}{ds_p} = \text{const.}} \quad \dots \dots \dots (3)$$

Formula (3) reprezentē Eulera-Savarija nolīdzinājumu punktiem starp polu P un infleksijas punktu W .

Labajā pusē attiecību $\frac{d\psi}{ds_p}$, kā jau agrāk bija teikts, var pārveidot

$$\frac{d\psi}{ds_p} = \frac{d\psi \cdot dt}{dt \cdot ds_p} = \frac{\omega}{V_p}$$

Tāpat agrāk bija noskaidrots, ka

$$\frac{d\psi}{ds_p} = \frac{\sin\psi}{r_w}$$

Ievietojot šo izteiksmi (3) formulā, dabūjam Eulera nolīdzinājumu tanīs pašās robežās, bet citā veidā

$$\boxed{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r_w}} \quad \dots \dots \dots (4)$$

Šis nolīdzinājums rāda, ka liekuma centrs C atradīsies tanī pašā pusē, kur atrodas punkts A , bet tālāk no pola P , jo šinī formulā abiem locekļiem kreisajā pusē pretējas zīmes un

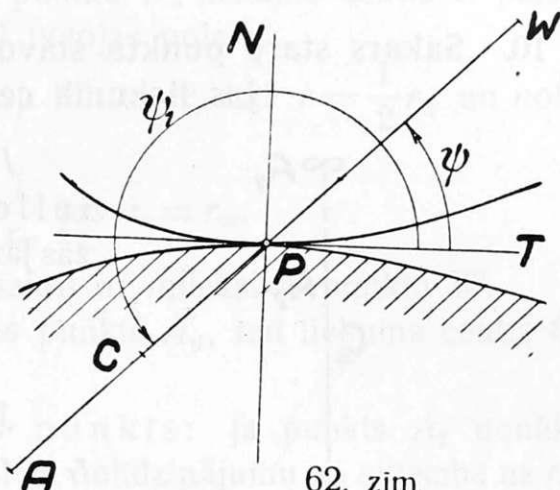
$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r_c} > 0, \text{ tā tad } \frac{1}{r} > \frac{1}{r_c} \text{ un } r_c > r.$$

§ 8. Eulera-Savarija nolīdzinājums punktiem, kas atrodas zem pola P (62. zīm.).

Dotas abas poloidas un kopēja tangente. Ja punkts A uz stara atrodas zem pola nekustīgās poloidas pusē, tad acīm redzot Eulera nolīdzinājumā, kas jāņem ar $(-)$ zīmi, pēc formulas (3) jāliek ψ vietā leņķis $\psi_1 = \pi + \psi$.

$$\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_c}\right) \sin(\pi + \psi) = \frac{d\psi}{ds_p} =$$

= const. un galīgi



62. zīm.

$$\boxed{-\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_c}\right) \sin \psi = \frac{d\psi}{ds_p} = \text{const.}} \quad \dots \dots \dots (5)$$

Nolīdzinājums (5) reprezentē Eulera-Savarija nolīdzinājumu punktiem zem pola P . To var pārveidot, ievērojot, ka

$$\frac{d\psi}{ds_p} = \frac{\sin \psi}{r_w}$$

$$\boxed{-\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_c}\right) = \frac{1}{r_w}} \quad \dots \dots \dots (6)$$

Nolīdzinājumā (6) r un r_c ieiet ar pretējām zīmēm, tas nozīmē, ka liekuma centrs C atradīsies tanī pašā pusē, kur atrodas punkts A , bet būs tuvāk polam, jo $\frac{1}{r} < \frac{1}{r_c}$ un $r_c < r$.

§ 9. Eulera-Savarija nolīdzinājumi vispārīgā veidā.

Apvienojot nolīdzinājumus (1), (3) un (5), varam rakstīt

$$\boxed{\pm\left(\frac{1}{r} \pm \frac{1}{r_c}\right) \sin \psi = \frac{d\psi}{ds_p} = \text{const.}} \quad \dots \dots \dots (7)$$

Tāpat var apvienot arī nolīdzinājumus (2), (4) un (6), iegūstot

$$\pm \left(\frac{1}{r} \pm \frac{1}{r_c} \right) = \frac{1}{r_w} \dots \dots \dots (8)$$

Attiecībā uz zīmēm jāsaaka, ka punktiem, kas atrodas aiz infleksijas punkta, jāņem (+) zīmes; punktiem starp infleksijas punktu un polu jāņem priekšā (+) zīme, bet iekavās (—) zīme un beidzot punktiem zem pola jāņem abas (—) zīmes.

§ 10. Sakars starp punkta stāvokli kustīgā plaknē un trajektorijas liekuma centru (63. zīm.).

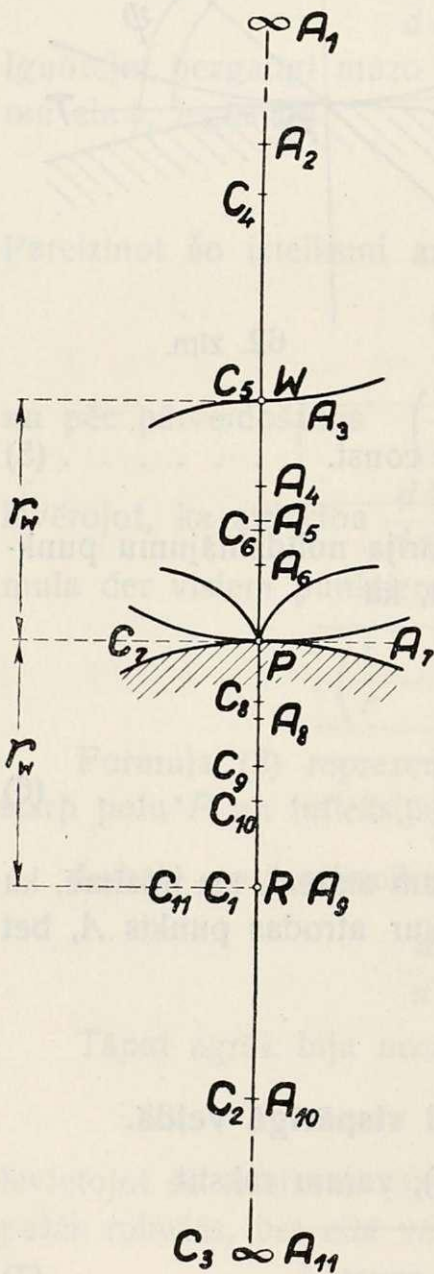
I posms: starp bezgalību un infleksijas punktu *W*. Šinīs robežās jāņem Eulera nolīdzinājuma formula (2)

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r_w} \dots \dots \dots (2)$$

Ja punkts *A*₁ atrodas bezgalībā, tad *r*_c = *r*_w, tas nozīmē, ka liekuma centrs *C*₁ atradīsies tādā pašā attālumā no pola *P* kā infleksijas punkts *W*, bet tikai otrā pusē. Šo punktu *R* sauksim par atgriezes punktu.

Pieņemsim, ka punkts *A* tuvojas polam *P* un atrodas punktā *A*₂, tad *r* samazinās, $\frac{1}{r}$ pieaug, bet dotam staram *r*_w = const., tā tad $\frac{1}{r_c}$ samazinās un *r*_c pieaug, tas nozīmē, ka atbilstošais liekuma centrs *C*₂ attālināsies no pola *P* uz leju.

Kā redzams, nolīdzinājums (2) ir simmetrisks attiecībā uz *r* un *r*_c, tā tad to vērtības var apmainīt un, ja *r* = *r*_w, tad *r*_c = ∞, tas nozīmē, ka punktam *A*₃, kas sakrīt ar infleksijas punktu *W*, attiecīgais liekuma centrs *C*₃ atrodas bezgalībā otrā pusē.



63. zīm.

II posms: starp infleksijas punktu W un polu P .

Šinīs robežās jāņem Eulera nolīdzinājuma formula (4).

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r_w} \dots \dots \dots (4)$$

Šis nolīdzinājums rāda, ka samazinot r , arī r_c samazinās un liekuma centrs tuvojas polam.

Bet agrāk bija pierādīts, ka punkta A_4 stāvoklim starp W un P atbilst liekuma centrs C_4 tanī pašā pusē no pola P , tas nozīmē, ka punktam A , pārejot caur infleksijas punktu W , liekuma centrs C pāriet no $-\infty$ uz $+\infty$ un pēc tam atkal tuvojas polam.

Ja punkts A_5 atrodas vidū starp W un P , tad $r = \frac{1}{2}r_w$ un nolīdzinājums (4) dod:

$$\frac{1}{r_c} = \frac{2}{r_w} - \frac{1}{r_w} = \frac{1}{r_w} \text{ jeb } r_c = r_w.$$

Tas nozīmē, ka tādā gadījumā C_5 sakrīt ar infleksijas punktu W .

Ja punkts A iet tālāk un atrodas punktā A_6 , tad liekuma centrs C_6 seko tam un noiet zem W .

Trajektorijas atgriezes punkts: ja punkts A_7 nonāks polā $P(\pi)$, tad $r = 0$. Atrisināsim Eulera nolīdzinājumu (4) attiecībā uz r_c :

$$\frac{1}{r_c} = \frac{r_w - r}{r \cdot r_w}, \text{ no kurienes } r_c = \frac{r \cdot r_w}{r_w - r};$$

liekot šeit $r = 0$, atrodam, ka arī $r_c = 0$. Tas nozīmē, ka liekuma centrs C_7 sakrīt ar to pašu polu P , punkts griežas pats ap sevi un trajektorijā būs atgriezes punkts. Šādi punkti sastopami visās cikloīdālās liknēs.

III posms: zem pola P līdz bezgalībai.

Šinīs robežās jāņem Eulera-Savarija nolīdzinājuma formula (6)

$$\frac{1}{r_c} - \frac{1}{r} = \frac{1}{r_w}.$$

Kā jau agrāk bija atzīmēts, šinī nolīdzinājumā r un r_c zīmes ir dažādas, tā tad liekuma centrs C atrodas tanī pašā pusē no pola P kā punkts A . Bez tam, ievērojot, ka

$$\frac{1}{r_w} > 0, \text{ iznāk, ka } \frac{1}{r_c} > \frac{1}{r},$$

tā tad $r_c < r$ un punkta A_8 trajektorijas liekuma centrs C_8 arvien paliks tuvāk polam P nekā pats punkts A_8 .

Ja punkts A_9 , ejot tālāk uz leju, sasniegs atgriezes punktu R , kas atrodas attālumā r_w no pola, tad $r = r_w$ un nolīdzinājums (6) dod

$$\frac{1}{r_c} = \frac{2}{r_w} \text{ jeb } r_c = \frac{1}{2}r_w,$$

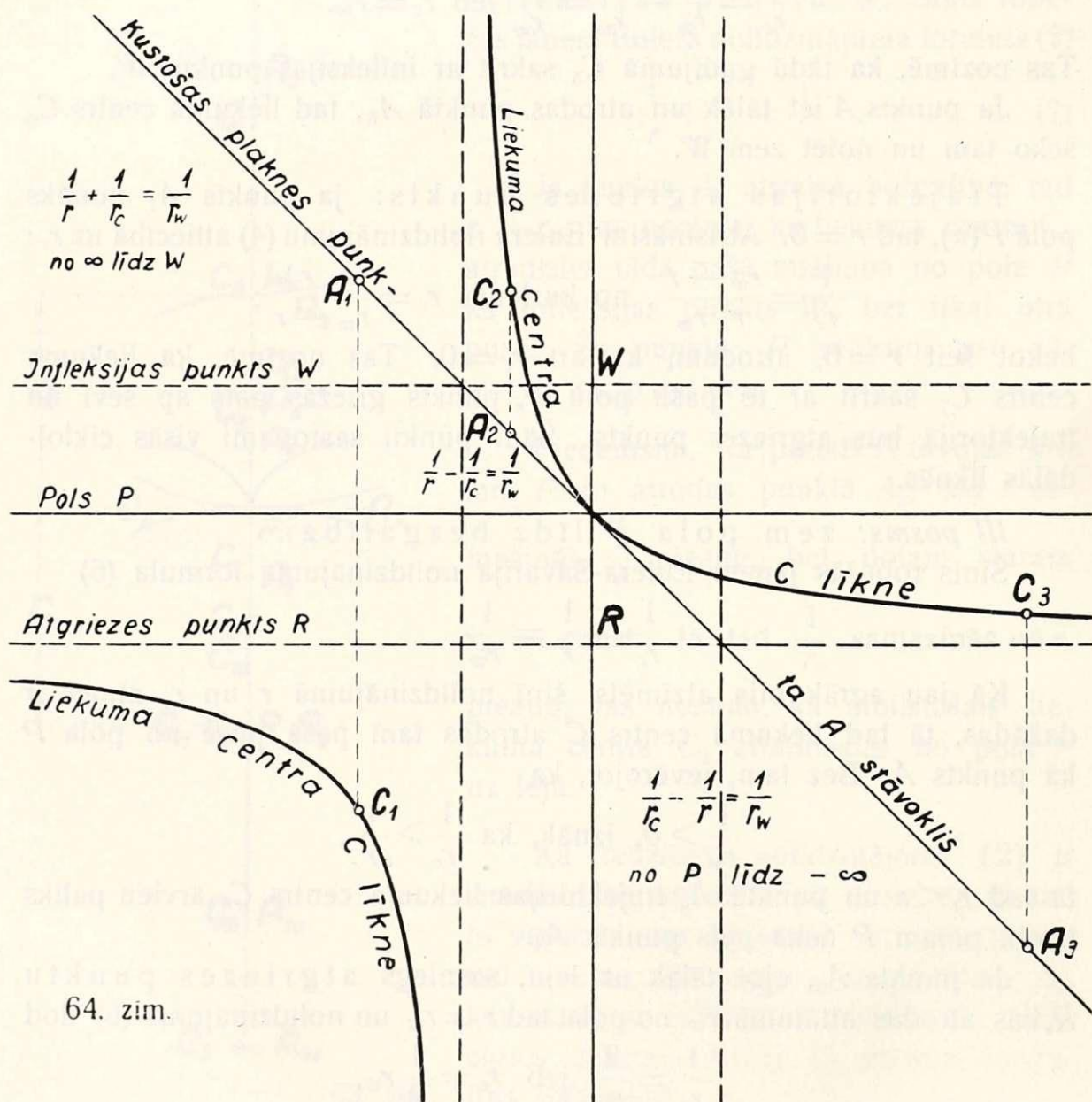
tas nozīmē, ka liekuma centrs C_9 atradīsies vidū starp polu P un atgriezes punktu R .

Ja punkts A ies vēl tālāk un noies līdz A_{10} , tad trajektorijas liekuma centrs sekos tam un noies līdz C_{10} , nesasniedzot atgriezes punktu R , jo tikai pie $r = \infty$ iznāk $r_c = r_w$. Tas nozīmē, ka tikai punktam A_{11} , kas atrodas bezgalībā, liekuma centrs C_{11} sakrīt ar atgriezes punktu R .

Jāpiezīmē, ka arī punktam A_1 , kas bija bezgalībā otrā pusē, trajektorijas liekuma centrs C_1 sakrīt ar atgriezes punktu.

Grafiskais sakars starp kustīgās plaknes punkta A un trajektorijas liekuma centra C stāvokļiem.

Lai ērtāk varētu sekot punkta un atbilstošās trajektorijas liekuma centra stāvokļiem uz attiecīgā stara, iznesīsim punktu no stara laukā



64. zīm.

un atliksim to uz taisnes, kas veido kaut kādu leņķi ar staru, piemēram 45° , bet attiecīgo C atliksim uz vienas vertikāles ar punktu, iegūstot tādā kārtā attiecīgo C -līkni.

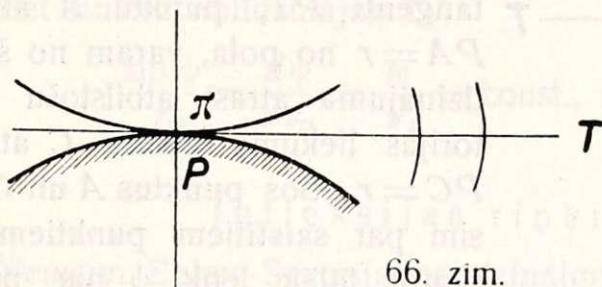
Rezultāti parādīti 64. zīm., pie kam C -līknes ir divi vienādsānu hiperbolas zari, kuŗas asimptotes ir horizontāla taisne caur atgriezes punktu R un vertikāla taisne paralēli staram attālumā r_w no pēdējā.

§ 11. Trajektoriju izliekums.

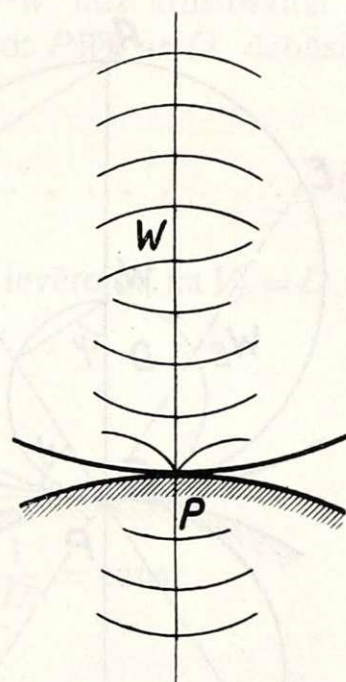
Attiecībā uz trajektorijām, ko apraksta kustīgās plaknes punkti, varam sakarā ar liekumu centru stāvokļiem konstatēt sekojošo likumu: visi kustošās plaknes punkti, izņemot punktus starp P un W , apraksta trajektorijas ar izliekumu no pola, bet punkti starp P un W apraksta trajektorijas ar izliekumu uz pola pusi.

Punkta W trajektorijai, kā zināms, ir infleksijas punkts, bet pola P trajektorijai atgriezes punkts (65. zīm.).

Trajektoriju liekuma centri punktiem, kas atrodas uz poloidu kopējās tangentes (66. zīm.).



66. zīm.



65. zīm.

Eulera-Savarija nolīdzinājumi virs pola:

$$\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_c}\right) \sin \psi = \text{const.} \quad (3)$$

zem pola:

$$-\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_c}\right) \sin \psi = \text{const.} \quad (5)$$

Apvienojot abus nolīdzinājumus, dabūsim

$$\pm \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_c}\right) \sin \psi = \text{const.}$$

Apzīmēsim const. ar c un atrisināsim šo nolīdzinājumu attiecībā uz r_c

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r_c} = \mp \frac{c}{\sin \psi}; \quad \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r} \pm \frac{c}{\sin \psi} \quad \text{jeb} \quad \frac{1}{r_c} = \frac{\sin \psi \pm cr}{r \cdot \sin \psi},$$

no kurienes

$$r_c = \frac{r \cdot \sin \psi}{\sin \psi \pm cr}$$

Liekot šeit $\psi=0$, jo punktiem uz poloidu tangentes tiešām $\psi=0$, atrodam, ka šādiem punktiem $r_c=0$. Tas nozīmē, ka šādu punktu trajektoriju liekuma centri sakrīt ar polu $P(\pi)$ (66. zīm.).

§ 12. Sakars starp r un r_c mainīgam ψ .

Nemsim Eulera-Savarija nolīdzinājumu vispārīgā veidā

$$\pm \left(\frac{1}{r} \pm \frac{1}{r_c} \right) \sin \psi = \frac{d\psi}{ds_p} = \text{const.} \quad \dots \quad (7)$$

Mainīsim $\angle \psi$, paturot prātā, ka $d\psi$ un, protams, arī ds_p pie tam nemainīsies, un pārrakstīsim nolīdzinājumu tā

$$\frac{\sin \psi}{r} \pm \frac{\sin \psi}{r_c} = \text{const.}$$

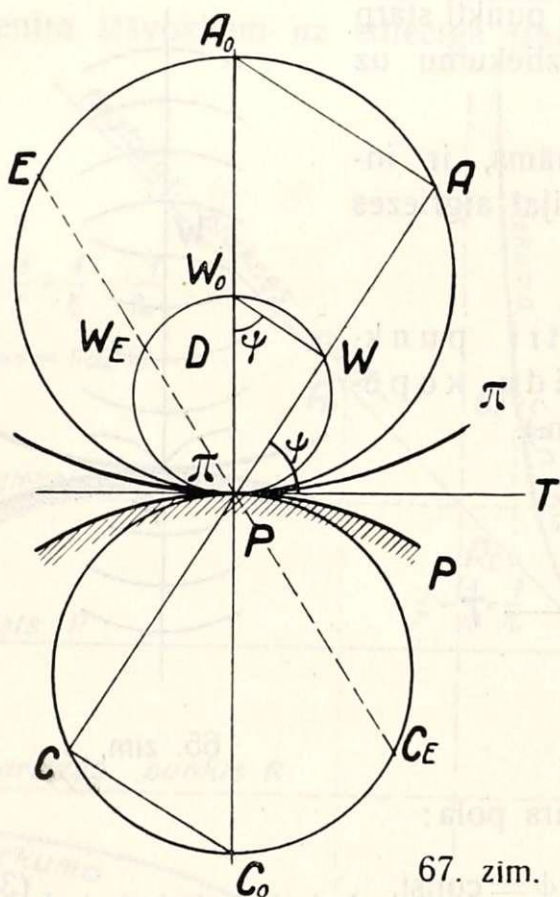
Izvēloties uz kāda stara, kas veido noteiktu leņķi ψ ar poloidu tangenti PT , punktu A attālumā $PA=r$ no pola, varam no šā nolīdzinājuma atrast atbilstošu trajektorijas liekuma centru C attālumā $PC=r_c$. Šos punktus A un C saucim par saistītiem punktiem. Uzskatot tālāk leņķi ψ par mainīgu lielumu, iegūtā nolīdzinājumā būs jau trīs mainīgie, tā tad, lai dabūtu sakaru starp r un r_c mainīgam leņķim

ψ , jāieved vēl kāds ierobežojums. Kā šādu ierobežojumu pieņemsim, ka katrs loceklis atrastā nolīdzinājumā paliek pats par sevi konstants.

Apzīmēsim pirmo const. ar $\frac{1}{a_1}$ un otro ar $\frac{1}{a_2}$, tad

$$\frac{\sin \psi}{r} = \frac{1}{a_1}, \text{ jeb } r = a_1 \sin \psi,$$

bet tas ir polārkoordinātās riņķis ar caurmēru a_1 , kas pieskaņas punktā $P(\pi)$ poloidu tangenti. Caurmēru a_1 varam uzkonstruēt, velkot $AA_0 \perp PA$ līdz krustošanai ar galveno staru.



67. zīm.

Otrs loceklis $\frac{\sin \psi}{r_c} = \frac{1}{a_2}$ jeb $r_c = a_2 \sin \psi$

arī dod polārkoordinātās riņķi ar caurmēru a_2 , kas pieskaņas punktā $P(\pi)$ poloidu tangentei. Šo caurmēru a_2 dabūjam, velkot $CC_0 \perp PC$ līdz krustošanai ar galveno staru.

Abi riņķi iezīmēti 67. zīm., un tos sauc par saistītiem riņķiem.

Piezīme: Ja Eulera-Savarija nolīdzinājumā ir (—) zīme, tad abi saistītie riņķi atrodas tangentes vienā pusē.

Ņemsim uz stara AP infleksijas punktu W , kuŗam trajektorijas liekuma centrs atrodas bezgalībā. Vilksim $WW_0 \perp PW$ līdz krustošanai ar galveno staru, tad $PW = PW_0 \sin \psi$, jeb apzīmējot PW_0 ar D , dabūsim $r_w = D \sin \psi$, kas savukārt dod

$$\boxed{\frac{\sin \psi}{r_w} = \frac{1}{D}} \dots \dots \dots (9)$$

To pašu var dabūt arī citādi no formulas $\frac{\omega}{V_p}$, ievērojot, ka $V_p = D \cdot \omega$, tā tad

$$\frac{\omega}{V_p} = \frac{\omega}{D \omega} = \frac{1}{D}.$$

Bet Eulera nolīdzinājumā

$$\frac{\sin \psi}{r_w} = \frac{d\psi}{ds_p} = \frac{\omega}{V_p} = \text{const.}, \text{ tā tad } \frac{1}{D} = \text{const.}$$

Infleksijas riņķis (67. zīm.).

Ņemsim Eulera-Savarija nolīdzinājumu (1), kuŗa labajā pusē ievēdīsim saskaņā ar formulu (9) lielumu $\frac{1}{D}$:

$$\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_c}\right) \sin \psi = \frac{1}{D}.$$

Meklēsim infleksijas punktu ģeometrisko vietu, ievērojot, ka visiem šiem punktiem $r_c = \infty$, bet tad $\frac{1}{r_c} = 0$ un paliek

$$\frac{\sin \psi}{r} = \frac{1}{D} \text{ jeb } r = D \sin \psi.$$

Šis nolīdzinājums reprezentē polārkoordinātās riņķi ar caurmēru D , kas iet caur polu un kuŗa centrs atrodas uz galvenā stara. Šo riņķi sauc par infleksijas riņķi.

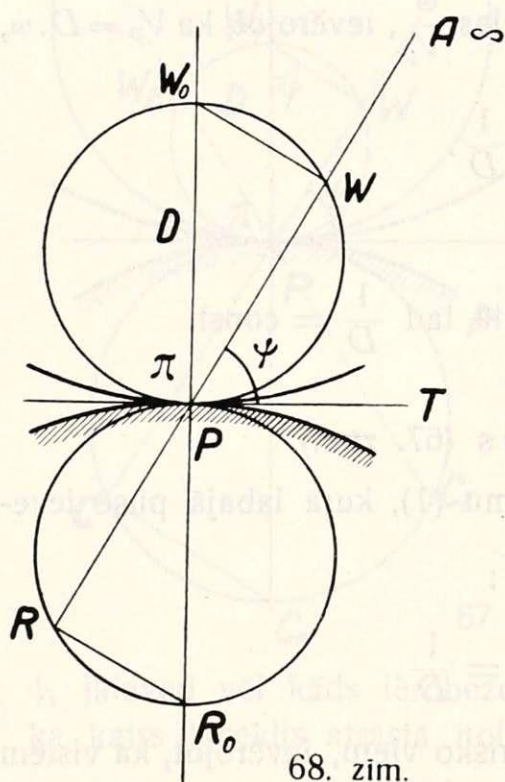
Infleksijas riņķa krustošanās punkts W_0 ar galveno staru ir infleksijas centrs.

Visiem punktiem, kas atrodas uz infleksijas riņķa, trajektorijās ir infleksijas punkti, un to liekuma centri atrodas uz riņķa ar caurmēru ∞ .

Ja visi trīs riņķi iezīmēti, tad, lai atrastu kādam punktam E , kas atrodas uz pirmā riņķa (67. zīm.), trajektorijas liekuma centru un infleksijas punktu, jāvelk tikai caur punktu E un polu P stars PE , kas krustojas ar otro riņķi liekuma centrā C_E un ar infleksijas riņķi šā stara infleksijas punktā W_E .

§ 13. Atgriezes riņķis (68. zīm.).

Pieņemsim, ka kustība dota ar divām poloidām. Meklēsim visiem punktiem, kas atrodas bezgalībā, liekuma centru geometrisku vietu mainīgam ψ .



68. zīm.

Vilksim kādu staru, kas veido leņķi ψ ar poloidu tangenti PT .

Ņemsim uz šā stara infleksijas punktu W un vilksim $WW_0 \perp PW$ līdz krustošanai ar poloidu normāli. Ap caurmēru $PW_0 = D$ aprakstīsim riņķi, kas nav nekas cits kā infleksijas riņķis.

Tālāk ņemsim to pašu Eulera-Savarija nolīdzinājumu (1), kuŗu raktīsim, ievērojot formulu (9), tā

$$\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_c}\right) \sin \psi = \frac{1}{D}.$$

Ja šinī nolīdzinājumā liksim

$$r = \infty, \text{ tad}$$

$$\frac{1}{r} = 0 \text{ un paliek } \frac{\sin \psi}{r_c} = \frac{1}{D},$$

jeb $r_c = D \sin \psi$, bet tas reprezentē polārkoordinātās riņķi ar to pašu caurmēru D . Šo riņķi sauc par atgriezes riņķi, un tas ir vienāds ar infleksijas riņķi, bet atrodas poloidu tangentes otrā pusē.

Atgriezes riņķa krustošanās punktu R_0 ar galveno staru sauc par atgriezes centru.

No sacītā seko: 1) infleksijas riņķis saistīts ar bezgalīgi lielo riņķi nekustīgā plaknē. 2) Atgriezes riņķis saistīts ar bezgalīgi lielo riņķi kustīgā plaknē.

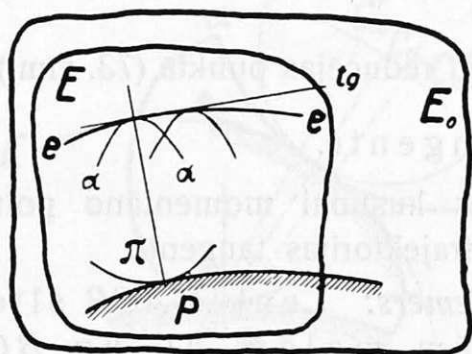
Piezīme. Infleksijas riņķis sadala visu kustīgo plakni divās daļās, kas raksturojas šādi: punkti iekšpus riņķa apraksta trajektorijas ar izliekumu uz polu, bet visi punkti ārpus riņķa apraksta trajektorijas ar izliekumu no pola.

§ 14. Aptveramās līknes un envelopas.

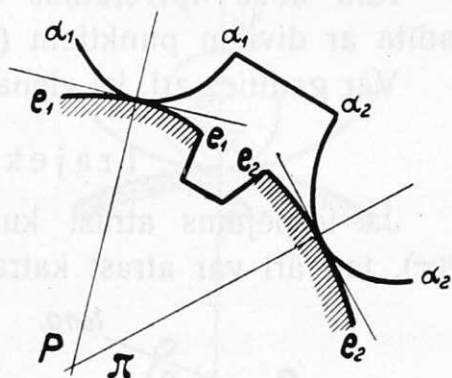
Pieņemsim, ka kustīgā plaknē E iezīmēta kāda līkne $\alpha - \alpha$. Kustīgai plaknei kustoties, kustīgā poloida (π -līkne) veļas bez slīdes uz nekustīgās poloidas (P -līknes). Līdz ar to arī kustīgā plaknē iezīmētā līkne $\alpha - \alpha$ mainīs savu vietu nekustīgā plaknē.

Līkne $e - e$ nekustīgā plaknē, pie kuŗas arvien pieskaŗas līkne $\alpha - \alpha$ savā gaitā, saucas par aptvērēju līkni jeb envelopu.

Pašu veidotāju līkni $\alpha - \alpha$ sauc par aptveŗamo līkni (69. zīm.).

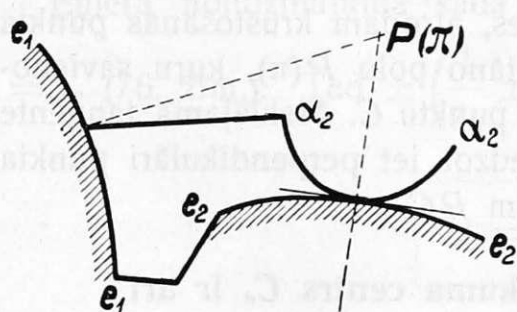


69. zīm.

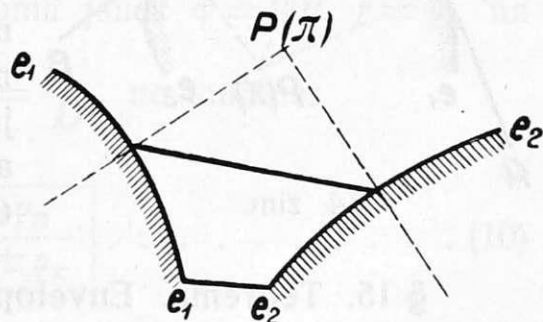


70. zīm.

Iedomāsimies kopēju tangenti diviem bezgalīgi tuviem aptveŗamās līknes stāvokļiem. Ievērojot, ka pārejot no viena stāvokļa otrā notiek grieze ap momentāno polu P , jānāk pie slēdziena, ka minētā tangente



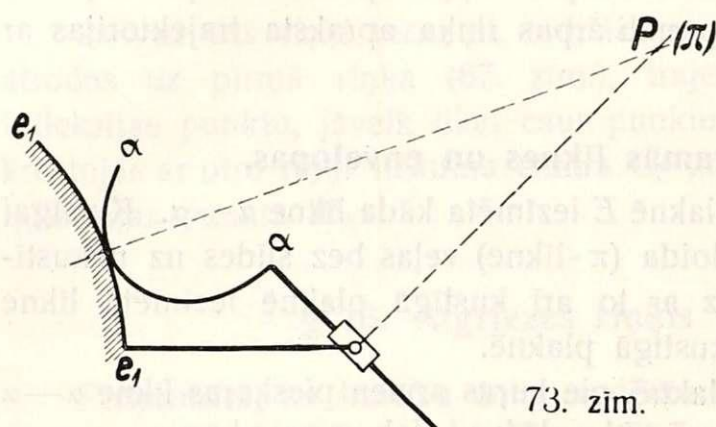
71. zīm.



72. zīm.

ir perpendikulāra attiecīgā staram. No sacītā izriet, ka kopējā normāle aptveŗamās līknes momentānā pieskaŗes punktā ar envelopu arvien iet caur polu $P(\pi)$ (69. zīm.).

Tālākais slēdziens: ar diviem pāriem aptveramo un envelopu momentānais pols ir pilnīgi noteikts, jo velkot pieskares punktos divas tangentes un perpendikulāri tām divas normāles, atradīsim krustošanās punktā momentāno polu $P(\pi)$ (70. zīm.).



73. zīm.

Šādu gadījumu, t. i. ja kustīgās plaknes divas līknes $\alpha_1-\alpha_1$ un $\alpha_2-\alpha_2$ slīd uz divām līknēm e_1-e_1 un e_2-e_2 , kas pieder nekustīgai plaknei, sauksim par vadīšanu ar divām līknēm (70. zīm.).

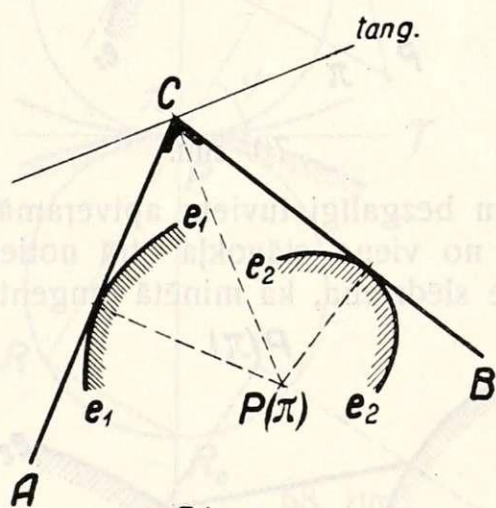
Gadījumā, kad viena no aptveramām līknēm $\alpha-\alpha$ reducējas punktā, kustīgā plakne vadīta ar punktu un līkni (71. zīm.).

Kad abas aptveramās līknes reducējas punktā, kustīgā plakne vadīta ar diviem punktiem (72. zīm.).

Var gadīties arī, ka viena no envelopām reducējas punktā (73. zīm.).

Trajektorijas tangente.

Ja iespējams atrast kustīgas plaknes kustībai momentāno polu $P(\pi)$, tad arī var atrast katram punktam trajektorijas tangenti.



74. zīm.

6. piemērs: Leņķis ACB slīd ar savām malām AC un BC uz divām nekustīgām līknēm e_1-e_1 un e_2-e_2 . Jāatrod virsotnes C trajektorijas tangente (74. zīm.).

Velkot pieskares punktos kopējas normāles, atrodam krustošanās punktā momentāno polu $P(\pi)$, kuru savienojam ar punktu C . Meklējamā tangente acīm redzot iet perpendikulāri punkta C staram PC .

§ 15. Teorēma. Envelopas liekuma centrs C_e ir arī liekuma centrs tai līknei, ko apraksta aptveramās līknes liekuma centrs C_α (75. zīm.).

Aizvietosim aptveramās līknes $\alpha-\alpha$ kustību uz nekustīgās envelopas $e-e$ ar šo līkņu liekuma riņķu kustību. Liekuma riņķiem ar attiecīgām

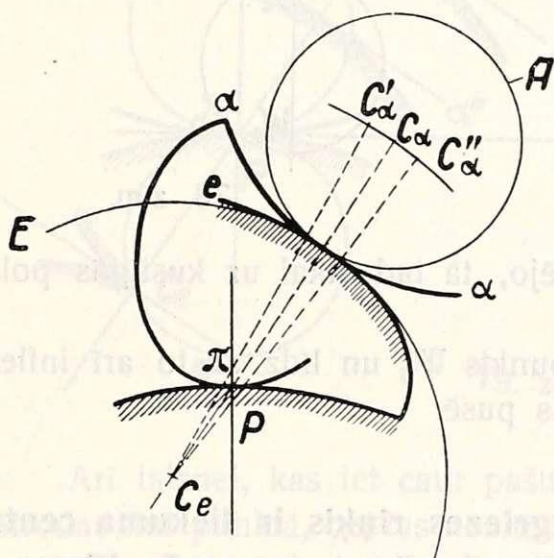
līknēm ir trīs kopīgi punkti un, ja aptveřamās līknes $\alpha-\alpha$ liekuma riņķis slīdēs uz envelopes $e-e$ liekuma riņķa, tad acīm redzot liekuma centra C_α trajektorija trīs bezgalīgi tuvu punktu robežās būs loks $C'_\alpha C_\alpha C''_\alpha$ ar centru punktā C_e . Ar šo teorēma pierādīta.

No šīs teorēmas seko, ka C_α un C_e ir saistīti punkti, jo punkta C_α trajektorijas liekuma centrs ir C_e , bet saistītiem punktiem, kā zināms, ir spēkā Eulera-Savarija nolīdzinājums:

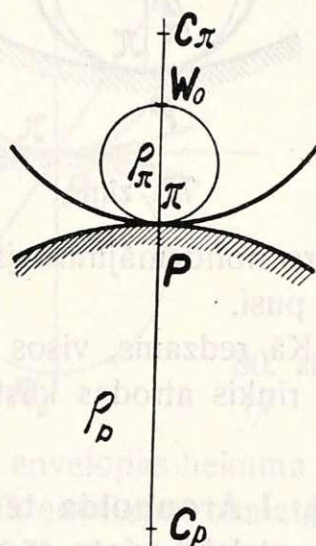
$$\pm \left(\frac{1}{r} \pm \frac{1}{r_c} \right) \sin \psi = \frac{1}{D},$$

kur D ir infleksijas riņķa caurmērs, $r = PC_\alpha$ un $r_c = PC_e$ (75. zīm.).

Tāpat arī pašas poloidas var uzskatīt kā envelope un aptveřamo līkni, kādēļ pierādītā teorēma der arī poloidām.



75. zīm.



76. zīm.

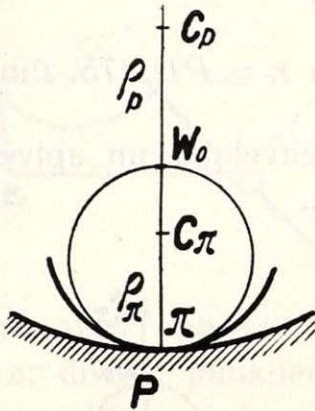
Eulera nolīdzinājumā šādā gadījumā jāliek $\psi = 90^\circ$, $r = \rho_\pi$ un $r_c = \rho_p$ (76. zīm.). Tad $\pm \left(\frac{1}{\rho_\pi} \pm \frac{1}{\rho_p} \right) = \frac{1}{D}$, no kurienes

$$D = \pm \frac{\rho_p \rho_\pi}{\rho_p \pm \rho_\pi} \dots \dots \dots (10)$$

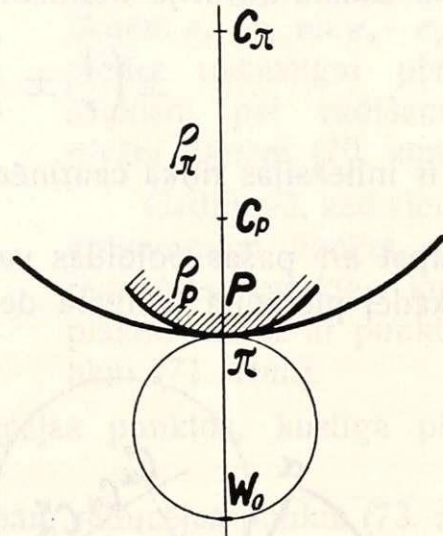
Šī formula pazīstama jau no „Kermeņa kinēmatikas“, pie kam, kad abas poloidas izliektas pretējos virzienos (76. zīm.), formulā (10) jāņem (+) zīmes un $PW_0 = D$ jāatliek uz kustīgās poloidas pusi.

Gadījumā, kad kustīgā poloida veļas iekšpus nekustīgās (77. zīm.), tad $\rho_p > \rho_\pi$, formulā (10) pirmā zīme jāņem (+), bet otrā (—) un $D = PW_0$ jāatliek uz iekšējo pusi, t. i. uz kustīgās poloidas pusi.

Gadījumā, kad abas poloidas izliektas uz vienu pusi, bet kustīgā poloida veļas ārpus nekustīgās (78. zīm.), $\rho_p < \rho_\pi$, formulā (10) jāņem abas (—) zīmes, lai $D = PW_0$ paliktu pozitīvs, bet tas saskaņā ar



77. zīm.



78. zīm.

Eulera nolīdzinājumu jāatliek uz ārējo, tā tad atkal uz kustīgās poloidas pusi.

Kā redzams, visos gadījumos punkts W_0 un līdz ar to arī infleksijas riņķis atrodas kustīgās poloidas pusē.

§ 16. I Aronholda teorēma¹³: Atgriezes riņķis ir liekuma centru ģeometriskā vieta tādām envelopām, kuŗām aptveŗamās līknes ir taisnes (79. zīm.).

Ja kustīgās plaknes kustība dota ar abām poloidām, varam pēc formulas $D = \pm \frac{\rho_p \rho_\pi}{\rho_p \pm \rho_\pi}$, ievērojot poloidu izliekumu, atrast infleksijas riņķa caurmēru $PW_0 = D$. Iezīmēsim infleksijas riņķi un atgriezes riņķi, kas ir tikpat liels, bet atrodas poloidu tangentes otrā pusē.

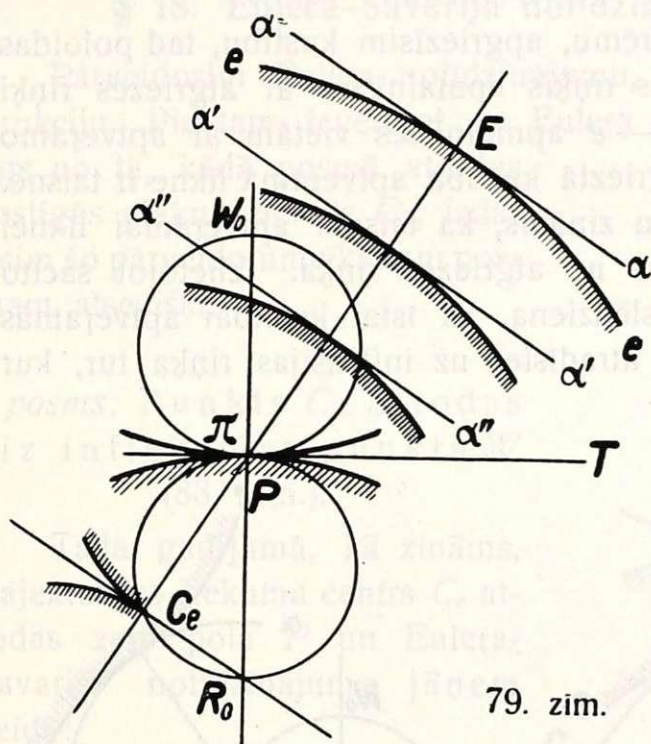
Ņemsim kādu envelopu $e - e$ un pieņemsim, ka aptveŗamā līkne ir taisne $\alpha - \alpha$, kuŗa pieskaŗas envelopai punktā E (79. zīm.).

Pieskaŗes punkts E atrodas uz kopējās envelopas un aptveŗamās līknes normāles, un šai normālei jāiet arī caur polu $P(\pi)$ perpendikulāri $\alpha - \alpha$.

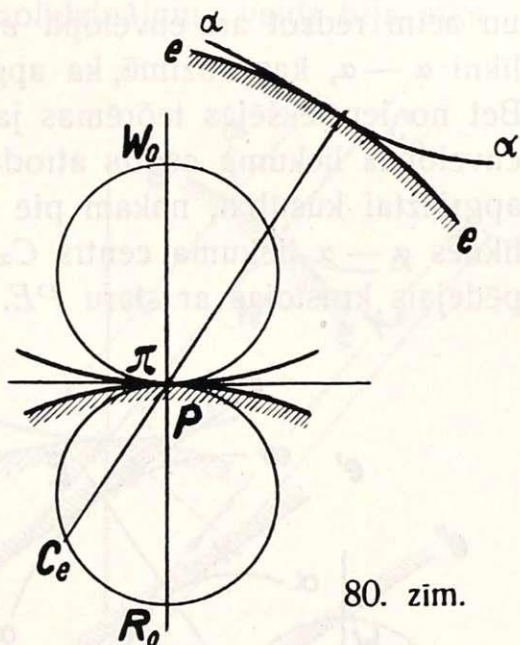
¹³ S. Aronhold: Grundzüge der kinematischen Geometrie. 1872.

Agrāk bija pierādīts, ka aptveřamās un envelopas liekuma centri ir saistīti punkti, bet šeit aptveřamās līknes $\alpha - \alpha$ liekuma centrs atrodas bezgalībā, tā tad attiecīgais saistītais punkts atrodas uz atgriezes riņķa. Tas nozīmē, ka envelopas liekuma centrs C_e atrodams stara PE krustošanās punktā ar atgriezes riņķi.

Ja taisne $\alpha - \alpha$ pārvietosies, paliekot sev paralēla, citās vietās $\alpha' - \alpha'$, $\alpha'' - \alpha''$ u. t. t., tad visām šīm bezgalīgi daudzām taisnēm envelopu liekuma centrs paliek tas pats C_e .



79. zīm.



80. zīm.

Arī taisnei, kas iet caur pašu punktu C_e , envelopas liekuma centrs atrodas šinī punktā, bet tas nozīmē, ka punktā C_e envelopai būs atgriezes punkts un minētā taisne pieskařas savai envelopai tās atgriezes punktā.

Ar citiem vārdiem sakot: ja kāda kustīgas plaknes taisne arvien iet caur nekustīgo punktu (griežas ap to un slīd), tad šis punkts atrodas uz atgriezes riņķa.

Mainot taisnes $\alpha - \alpha$ virzienu, dabūsim citus atgriezes riņķa punktus, tā tad atgriezes riņķis ir visu tādu atgriezes punktu ģeometriskā vieta, un tamdēļ arī šim riņķim dots nosaukums: atgriezes riņķis (79. zīm.).

Punktu R_0 , caur ko iet visas aptveřamās taisnes, kuŗu envelopām ir atgriezes punkts, sauc par atgriezes centru.

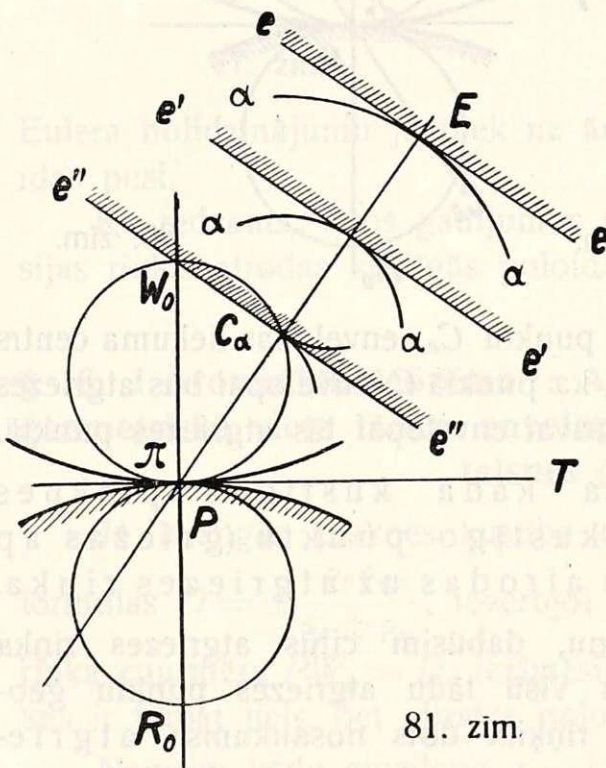
Speciāls gadījums: Atgriezes riņķis ir acīm redzot liekuma centru ģeometriskā vieta arī tādām envelopām, kas pieskařas aptveřamai līknei $\alpha - \alpha$ infleksijas punktā (80. zīm.).

§ 17. II Aronholda teorēma¹⁴: Infleksijas riņķis ir liekuma centru ģeometriskā vieta tādām aptveřamām līknēm, kuŗām envelopes ir taisnes (81. zīm.).

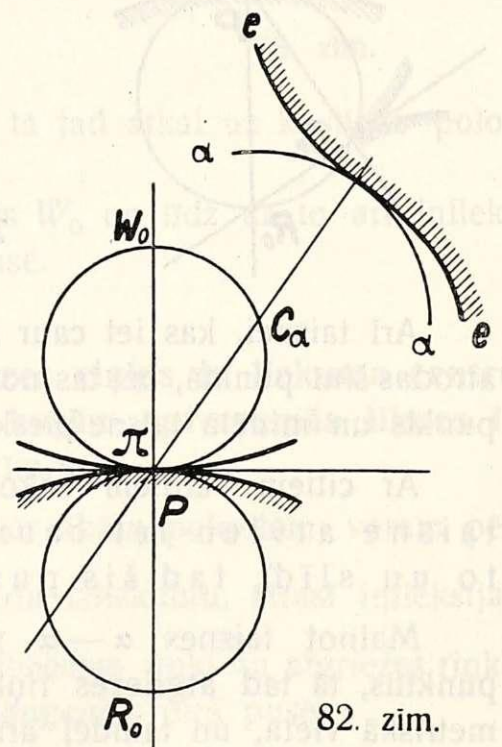
Pieņemsim atkal, ka kustība ir dota ar abām poloidām. Kā jau agrāk bija minēts, infleksijas un atgriezes riņķi tādā gadījumā ir pilnīgi noteikti.

Pieņemsim, ka taisne $e - e$ ir kāda envelope nekustīgā plaknē, kuŗai pieskaŗas kustīgās plaknes aptveřamā līkne $\alpha - \alpha$.

Lai pierādītu formulēto teorēmu, apgriezīsim kustību, tad poloidas apmainīs savas vietas, infleksijas riņķis apmainīsies ar atgriezes riņķi un acīm redzot arī envelope $e - e$ apmainīsies vietām ar aptveřamo līkni $\alpha - \alpha$, kas nozīmē, ka apgrieztā kustībā aptveřamā līkne ir taisne. Bet no iepriekšējas teorēmas jau zināms, ka taisnai aptveřamai līknei envelope liekuma centrs atrodas uz atgriezes riņķa. Izlietojot sacīto apgrieztai kustībai, nākam pie slēdziena, ka īstai kustībai aptveřamās līknes $\alpha - \alpha$ liekuma centrs C_α atradīsies uz infleksijas riņķa tur, kur pēdējais krustojas ar staru PE .



81. zīm.



82. zīm.

Ja taisne $e - e$ pārvietojas, paliekot sev paralēla, tad tomēr visu aptveřamo līkņu $\alpha - \alpha$ liekuma centri paliks punktā C_α .

Ja arī taisne $e - e$ iet caur pašu punktu C_α , tad aptveřamai līknei $\alpha - \alpha$ turpat ir liekuma centrs un līdz ar to arī atgriezes punkts.

¹⁴ S. Aronhold. Grundzüge der kinematischen Geometrie. 1872.

Mainot taisnu envelopu $e-e$ virzienu, arvien aptveramo līkņu liekuma centrus C_α dabūsim uz infleksijas riņķa, kas tādā kārtā būs šo liekuma centru ģeometriskā vieta, ar ko teorēma pierādīta.

Speciāls gadījums: Infleksijas riņķis ir acīm redzot liekuma centru ģeometriskā vietā arī tādām aptveramām līknēm, kas pieskaņas envelopai infleksijas punktā (82. zīm.).

§ 18. Eulera-Savarija nolīdzinājuma pārveidojums.

Pārveidosim Eulera nolīdzinājumu, lai atvieglotu tā grafisko konstrukciju. Pie tam, ievērojot, ka Eulera nolīdzinājuma veids bija atkarīgs no tā, kādā posmā atrodas kustīgās plaknes punkts C_α , izdarīsim šo pārveidojumu katram posmam atsevišķi.

I posms: Punkts C_α atrodas aiz infleksijas punkta W (83. zīm.).

Tādā gadījumā, kā zināms, trajektorijas liekuma centrs C_e atrodas zem pola P un Eulera-Savarija nolīdzinājums jāņem veidā:

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r_w} \dots (2)$$

kur $r = PC_\alpha$, $r_c = PC_e$ un $r_w = PW$. Pievedīsim nolīdzinājumu (2) pie kopēja saucēja $(r_c + r)r_w = r \cdot r_c$.

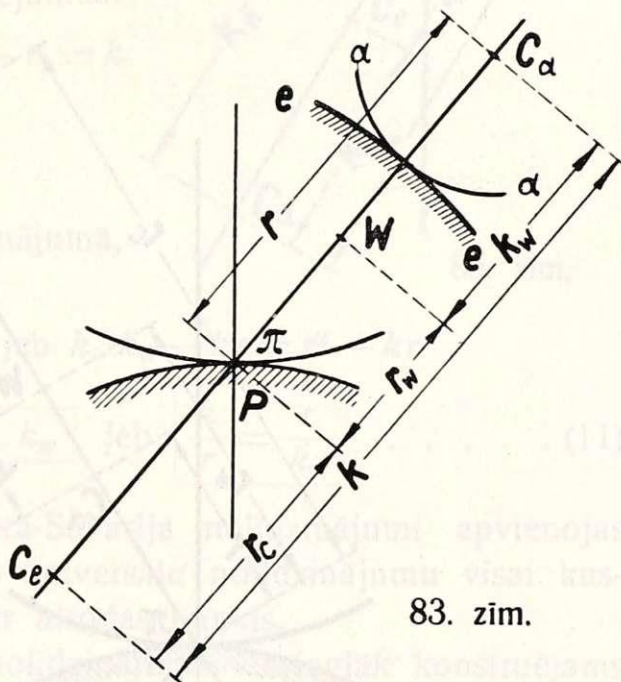
Ievedīsim apzīmējumus: $C_\alpha C_e = k$ un $C_\alpha W = k_w$, tad $r_c + r = k$ un acīm redzot $r_w = r - k_w$ un $r_c = k - r$. Ievietojot šos lielumus nolīdzinājumā, dabūsim

$$k(r - k_w) = r(k - r) \text{ jeb } kr - kk_w = kr - r^2$$

$$\text{un galīgi } \boxed{r^2 = k \cdot k_w} \text{ jeb } \boxed{\frac{k}{r} = \frac{r}{k_w}} \dots (11)$$

kur k apzīmē attālumu starp punktiem C_α un C_e ,

k_w apzīmē infleksijas punkta W attālumu no C_α .



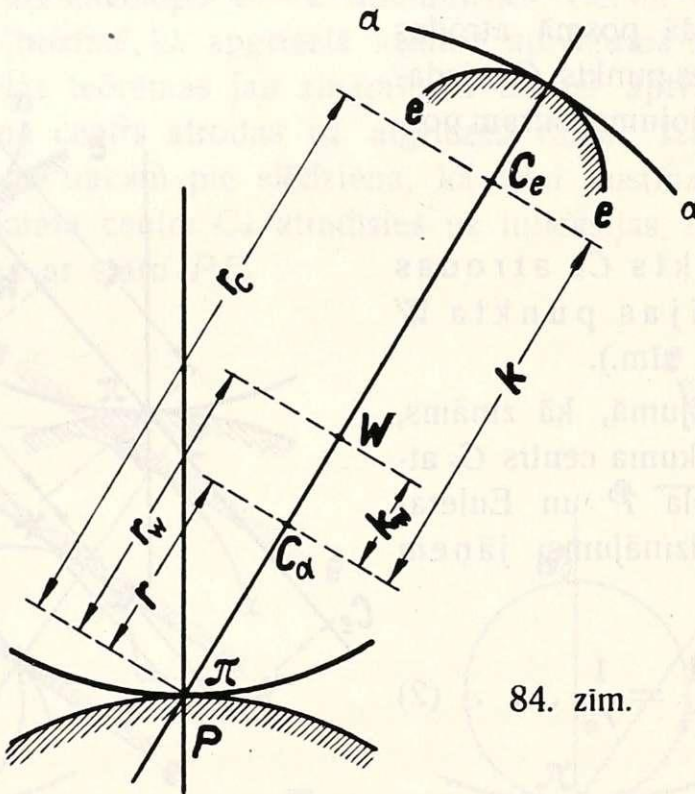
83. zīm.

II posms: Punkts C_α atrodas starp W un polu P (84. zīm.).

Tādā gadījumā, kā zināms, trajektorijas liekuma centrs C_e atrodas augšpus punkta C_α un Eulera-Savarija nolīdzinājums ņemams ar (—) zīmi.

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r_w} \dots \dots \dots (4)$$

kur atkal $r = PC_\alpha$, $r_c = PC_e$ un $r_w = PW$. Pārveidojot nolīdzinājumu (4), iegūstam $(r_c - r)r_w = r \cdot r_c$.



84. zīm.

Ievēsim tos pašus apzīmējumus: $C_\alpha C_e = k$ un $C_\alpha W = k_w$, tad $r_c - r = k$ un acīm redzot $r_w = r + k_w$ un $r_c = r + k$. Ievietojot šos lielumus nolīdzinājumā, iegūstam

$$k(r + k_w) = r(r + k) \text{ jeb } kr + k \cdot k_w = r^2 + kr$$

$$\text{un galīgi } \boxed{r^2 = k \cdot k_w} \text{ jeb } \boxed{\frac{k}{r} = \frac{r}{k_w}} \dots \dots \dots (11)$$

Kā redzams, arī II posmā pārveidotais Eulera nolīdzinājums ir tas pats kā I posmā.

III posms: Punkts C_α atrodas zem pola P (85. zīm.).

Tādā gadījumā trajektorijas liekuma centrs atrodas arī tanī pašā pusē tikai tuvāk polam, pie kam katrā ziņā $PC_e < PW$. Eulera-Savarija nolīdzinājums šinī gadījumā jāņem ar divām (—) zīmēm

$$\frac{1}{r_c} - \frac{1}{r} = \frac{1}{r_w} \dots \dots (6)$$

pie kam

$$r = PC_\alpha, r_c = PC_e \text{ un } r_w = PW.$$

Pārveidojot nolīdzinājumu (6), iegūstam:

$(r - r_c)r_w = r \cdot r_c$. Ievēsim apzīmējumus:

$C_\alpha C_e = k$ un $C_\alpha W = k_w$, tad $r - r_c = k$

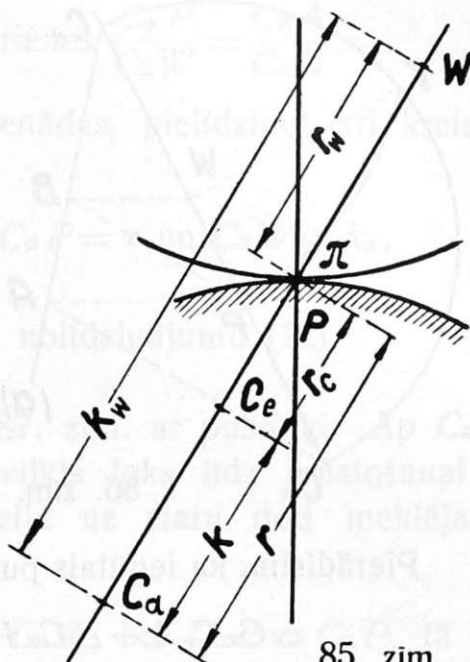
un acīm redzot

$$r_w = k_w - r \text{ un } r_c = r - k.$$

Ievietojot šos lielumus nolīdzinājumā, iegūstam

$$k(k_w - r) = r(r - k) \text{ jeb } k \cdot k_w - kr = r^2 - kr$$

$$\text{un galīgi } \boxed{r^2 = k \cdot k_w} \text{ jeb } \boxed{\frac{k}{r} = \frac{r}{k_w}} \dots \dots (11)$$



85. zīm.

Kā redzams, visi trīs Eulera-Savarija nolīdzinājumi apvienojas vienā (11), ko varam uzskatīt par universālu nolīdzinājumu visai kustīgai plaknei neatkarīgi no tā, kur atrodas punkts.

Šādā veidā Eulera-Savarija nolīdzinājums visvieglāk konstruējams grafiski.

Ievērojot, ka nolīdzinājumā (11) ieiet attālumi starp 4 punktiem: r ir attālums starp polu P un kustīgu punktu C_α , k ir attālums starp kustīgu punktu C_α un trajektorijas liekuma centru C_e un k_w ir attālums no kustīgā punkta C_α līdz infleksijas punktam W , vienmēr var pēc 3 dotiem punktiem konstruēt ceturto punktu.

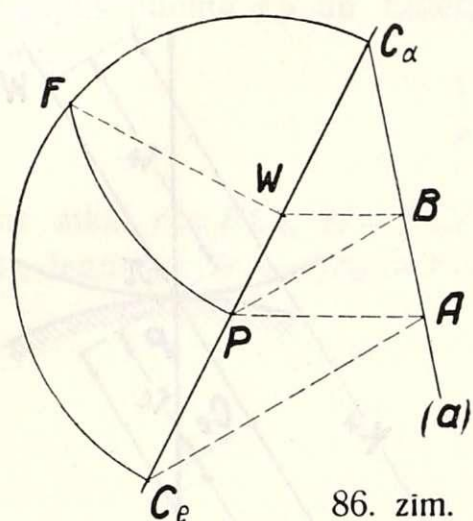
Apskatīsim šos konstrukcijas uzdevumus visādos gadījumos.

§ 19. Grafiskās konstrukcijas.

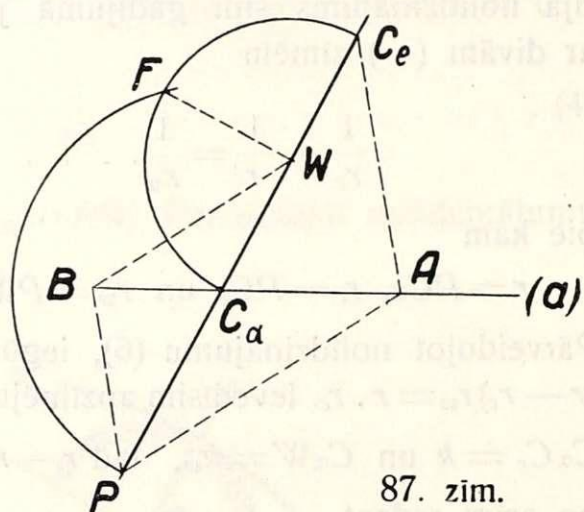
I uzdevums. Doti punkti P , C_α un C_e . Jākonstruē punkts W . Šeit var atšķirt 3 gadījumus:

1) *Gadījums:* Punkti C_α un C_e atrodas dažādās pusēs no pola P (86. zīm.). Caur punktu C_α velkam brīvi kādu taisni (a), uz

šīs taisnes brīvi izvēlamies punktu A , ko savienojam ar polu P un C_e . Tālāk caur polu P velkam taisni $PB \parallel C_e A$ un caur punktu B taisni $BW \parallel AP$, kas krusto staru meklējamā punktā W (86. zīm.).



86. zīm.



87. zīm.

Pierādīsim, ka iegūtais punkts W atbilst Eulerā nolīdzinājumam (11)

$$\triangle C_\alpha C_e A \sim \triangle C_\alpha P B, \text{ no kurienes } \frac{C_\alpha C_e}{C_\alpha P} = \frac{C_\alpha A}{C_\alpha B}$$

$$\triangle C_\alpha P A \sim \triangle C_\alpha W B, \text{ no kurienes } \frac{C_\alpha P}{C_\alpha W} = \frac{C_\alpha A}{C_\alpha B}.$$

Iegūtās proporcijās labās puses vienādas, tā tad arī kreisās varam pielīdzināt, kas dod

$$\frac{C_\alpha C_e}{C_\alpha P} = \frac{C_\alpha P}{C_\alpha W}, \text{ bet } C_\alpha C_e = k, C_\alpha P = r \text{ un } C_\alpha W = k_w,$$

tā tad $\frac{k}{r} = \frac{r}{k_w}$ un punkts W apmierina nolīdzinājumu (11).

Cita konstrukcija izdarīta 86. zīm. stara kreisajā pusē ar pusriņķa palīdzību. Ap $C_\alpha C_e$ aprakstīts pusriņķis un ar radiju $C_\alpha P$ vilkts loks līdz krustošanai ar pusriņķi punktā F . Punkta F projekcija uz staru dod meklējamo punktu W .

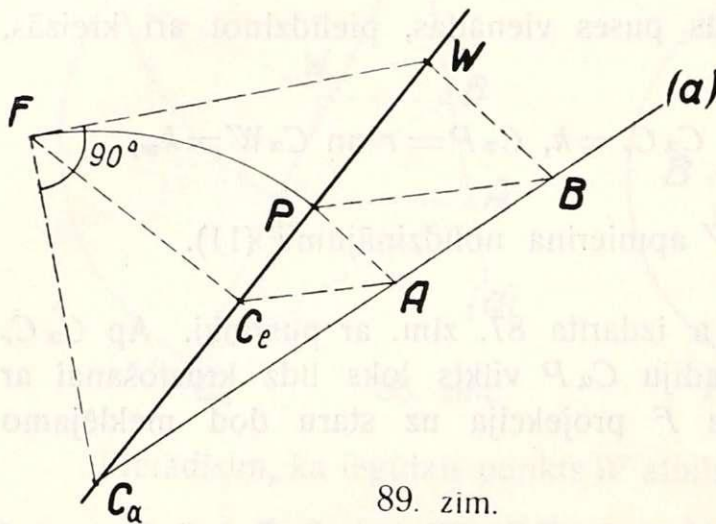
Pierādījums: $(C_\alpha F)^2 = C_\alpha C_e \cdot C_\alpha W$, bet $C_\alpha F = C_\alpha P$, tā tad $(C_\alpha P)^2 = C_\alpha C_e \cdot C_\alpha W$ jeb $r^2 = k \cdot k_w$.

2) *Gadījums*: C_α un C_e atrodas vienā pusē no pola P , bet C_α ir tuvāks polam. Šeit iespējami divi apakšgadījumi.

Apakšgadījums a). $PC_\alpha < C_\alpha C_e$ (87. zīm.).

Caur punktu C_α velkam brīvi kādu taisni (a) , uz kuŗas brīvi izvēlamies punktu A , ko savienojam ar punktiem P un C_e . Tālāk velkam caur polu P taisni $PB \parallel AC_e$ un caur punktu B taisni $BW \parallel PA$, kas krusto staru meklējamā punktā W .

3) *Gadījums:* C_α un C_e atrodas vienā pusē no pola P , bet C_e ir tuvāks polam (89. zīm.). Atkal velkam brīvi caur punktu C_α kādu taisni (a) un uz šīs taisnes izvēlamies brīvi kādu punktu A , ko savienojam ar punktiem P un C_e . Tālāk velkam caur polu P taisni $PB \parallel C_e A$ un caur punktu B taisni $BW \parallel AP$, kas krusto staru meklējamā punktā W .



89. zīm.

Pierādīsim, ka iegūtais punkts W apmierina Eulera nolīdzinājumu (11).

$\triangle C_\alpha C_e A \sim \triangle C_\alpha P B$, no

$$\text{kurienes } \frac{C_\alpha C_e}{C_\alpha P} = \frac{C_\alpha A}{C_\alpha B};$$

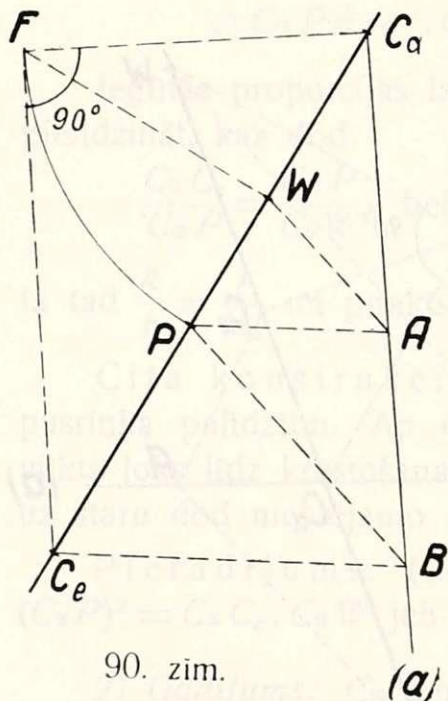
$\triangle C_\alpha P A \sim \triangle C_\alpha W B$, no

$$\text{kurienes } \frac{C_\alpha P}{C_\alpha W} = \frac{C_\alpha A}{C_\alpha B}.$$

Iegūtās proporcijās labās pušes vienādas, pielīdzinot arī kreisās, atrodam

$$\frac{C_\alpha C_e}{C_\alpha P} = \frac{C_\alpha P}{C_\alpha W} \text{ jeb } \frac{k}{r} = \frac{r}{k_w},$$

kas nozīmē, ka nolīdzinājums (11) ar at-rasto punktu W apmierināts.



90. zīm.

Cita konstrukcija izdarīta 89. zīm. stara otrā pusē. Punktā C_e vilkta taisne perpendikulāri staram un ar radiju $C_\alpha P$ loks līdz krustošanai ar minēto taisni punktā F . Beidzot punkti C_α un F savienoti ar taisni un caur punktu F vilkta taisne $FW \perp FC_\alpha$, kas krusto staru meklējamā punktā W .

Pierādījums: $(C_\alpha F)^2 = C_\alpha C_e \cdot C_\alpha W$, bet $C_\alpha F = C_\alpha P$, tā tad $(C_\alpha P)^2 = C_\alpha C_e \cdot C_\alpha W$ jeb $r^2 = k \cdot k_w$.

II uzdevums. Doti punkti P , C_α un W . Jākonstruē punkts C_e . Arī šeit var atšķirt 3 gadījumus:

1) *Gadījums:* Punkts C_α atrodas aiz infleksijas punkta W (90. zīm.). Caur punktu C_α velkam brīvi kādu taisni (a) , uz tās brīvi izvēlamies punktu A , ko savienojam ar punktiem P un W . Caur polu

P velkam taisni $PB \parallel WA$ un caur punktu B taisni $BC_e \parallel AP$, kas krusto staru meklējamā punktā C_e .

Pierādīsim, ka iegūtais punkts C_e apmierina Eulera nolīdzinājumu (11).

$$\triangle C_\alpha C_e B \sim \triangle C_\alpha P A, \text{ no kurienes } \frac{C_\alpha C_e}{C_\alpha P} = \frac{C_\alpha B}{C_\alpha A}$$

$$\triangle C_\alpha P B \sim \triangle C_\alpha W A, \text{ no kurienes } \frac{C_\alpha P}{C_\alpha W} = \frac{C_\alpha B}{C_\alpha A}.$$

Iegūtās proporcijās labās puses vienādas, pielīdzinot arī kreisās, atrodam

$$\frac{C_\alpha C_e}{C_\alpha P} = \frac{C_\alpha P}{C_\alpha W}, \text{ bet } C_\alpha C_e = k, C_\alpha P = r \text{ un } C_\alpha W = k_w,$$

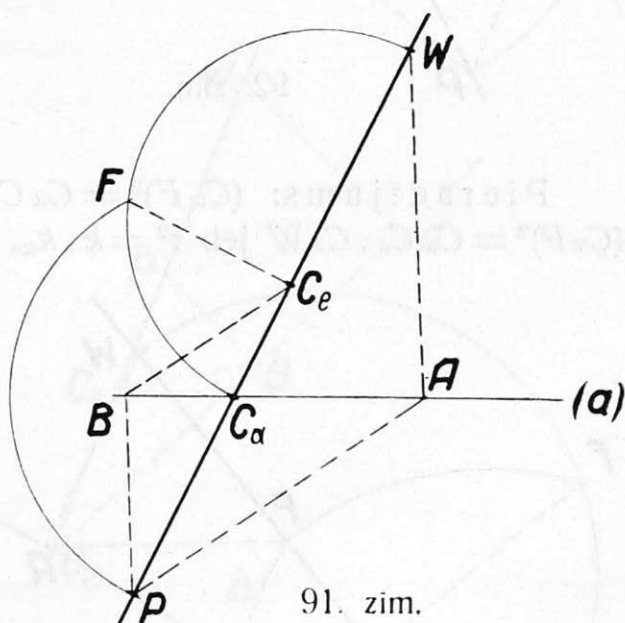
tā tad $\frac{k}{r} = \frac{r}{k_w}$, kas nozīmē, ka punkts C_e apmierina nolīdzinājumu (11).

Cita konstrukcija izdarīta 90. zīm. šādi: Punktā W vilkta taisne perpendikulāri staram un ar radiju $C_\alpha P$ loks līdz krustošanai ar minēto taisni punktā F . Punkti F un C_α savienoti ar taisni, un caur F vilkta taisne $FC_e \perp FC_\alpha$, kas krusto staru meklējamā punktā C_e .

Pierādījums: $(C_\alpha F)^2 = C_\alpha C_e \cdot C_\alpha W$, bet $C_\alpha F = C_\alpha P$, tā tad $(C_\alpha P)^2 = C_\alpha C_e \cdot C_\alpha W$ jeb $r^2 = k \cdot k_w$.

2) *Gadījums:* Punkts C_α atrodas starp P un W . Šeit arī iespējami divi apakšgadījumi.

Apakšgadījums a): $C_\alpha P < C_\alpha W$ (91. zīm.). Caur punktu C_α velkam brīvi kādu taisni (a) , uz tās brīvi izvēlamies punktu A , ko savienojam ar punktiem P un W . Caur polu P velkam taisni $PB \parallel AW$ un caur punktu B taisni $BC_e \parallel PA$, kas krusto staru meklējamā punktā C_e . Pierādīsim, ka iegūtais punkts C_e apmierina Eulera nolīdzinājumu (11).



91. zīm.

$$\triangle C_\alpha C_e B \sim \triangle C_\alpha P A, \text{ no kurienes } \frac{C_\alpha C_e}{C_\alpha P} = \frac{C_\alpha B}{C_\alpha A}$$

$$\triangle C_\alpha P B \sim \triangle C_\alpha W A, \text{ no kurienes } \frac{C_\alpha P}{C_\alpha W} = \frac{C_\alpha B}{C_\alpha A}.$$

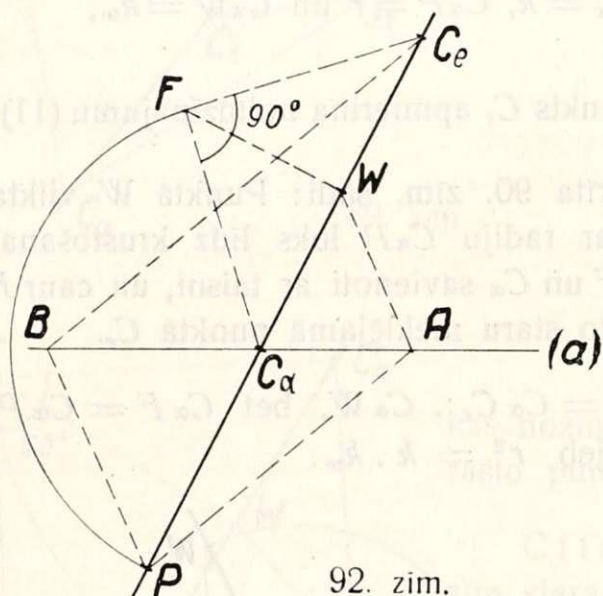
Iegūtās proporcijās labās puses vienādas, pielīdzinot arī kreisās, atrodam

$$\frac{C_\alpha C_e}{C_\alpha P} = \frac{C_\alpha P}{C_\alpha W} \text{ jeb } \frac{k}{r} = \frac{r}{k_w},$$

bet tas nozīmē, ka punkts C_e apmierina nolīdzinājumu (11).

Cita konstrukcija izdarīta tanī pašā 91. zīm. ar pusriņķi. Ap $C_\alpha W$ aprakstīts pusriņķis, un ar radiju $C_\alpha P$ vilkts loks līdz krustošanai ar pusriņķi punktā F . Punkta F projekcija uz staru dod punktu C_e .

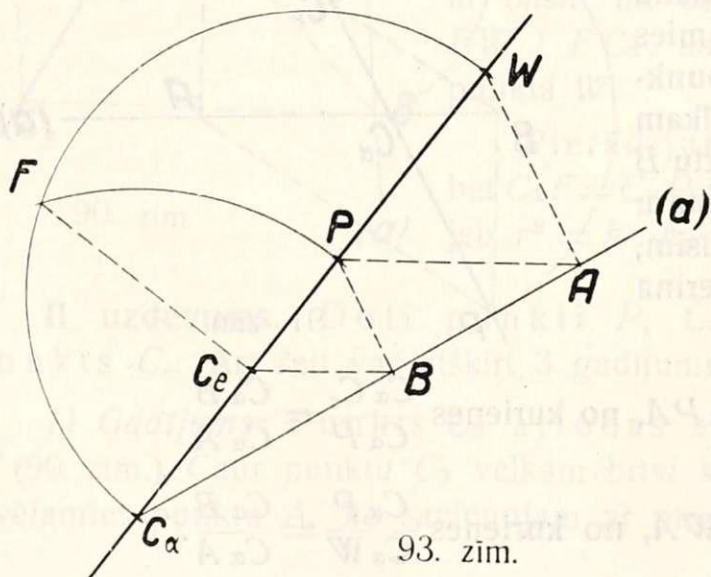
Pierādījums: $(C_\alpha F)^2 = C_\alpha C_e \cdot C_\alpha W$, bet $C_\alpha F = C_\alpha P$, tā tad $(C_\alpha P)^2 = C_\alpha C_e \cdot C_\alpha W$ jeb $r^2 = k \cdot k_w$.



92. zīm.

Apakšgadījums b): $C_\alpha P > C_\alpha W$ (92. zīm.). Ar taisnām līnijām konstrukcija paliek tā pati, tikai punkts C_e iznāk aiz punkta W , turpretim pirmajā apakšgadījumā tas iznāca tuvāk polam nekā punkts W . Cita konstrukcija arī izdarīta 92. zīm. tā: Punktā W vilkta taisne perpendikulāri staram, un ar radiju $C_\alpha P$ vilkts loks līdz krustošanai ar taisni punktā F . Punkti C_α un F savienoti ar taisni, un caur F vilkta taisne $FC_e \perp FC_\alpha$, kas krusto staru meklējamā punktā C_e .

Pierādījums: $(C_\alpha F)^2 = C_\alpha C_e \cdot C_\alpha W$, bet $C_\alpha F = C_\alpha P$, tā tad $(C_\alpha P)^2 = C_\alpha C_e \cdot C_\alpha W$ jeb $r^2 = k \cdot k_w$.



93. zīm.

3) *Gadījums*: Punkts C_α atrodas zem pola (93. zīm.). Atkal caur punktu C_α velkam brīvi kādu taisni (a), uz tās brīvi izvēlamies punktu A , ko savienojam ar punktiem P un W . Caur polu P velkam taisni $PB \parallel WA$ un caur punktu B taisni $BC_e \parallel AP$, kas krusto staru meklējamā punktā C_e .

Pierādījums:

$$\triangle C_\alpha C_e B \sim \triangle C_\alpha P A, \text{ no kurienes } \frac{C_\alpha C_e}{C_\alpha P} = \frac{C_\alpha B}{C_\alpha A}$$

$$\triangle C_\alpha P B \sim \triangle C_\alpha W A, \text{ no kurienes } \frac{C_\alpha P}{C_\alpha W} = \frac{C_\alpha B}{C_\alpha A}$$

Iegūtās proporcijās labās puses vienādas, pielīdzinot arī kreisās, atrodam

$$\frac{C_\alpha C_e}{C_\alpha P} = \frac{C_\alpha P}{C_\alpha W} \text{ jeb } \frac{k}{r} = \frac{r}{k_w}.$$

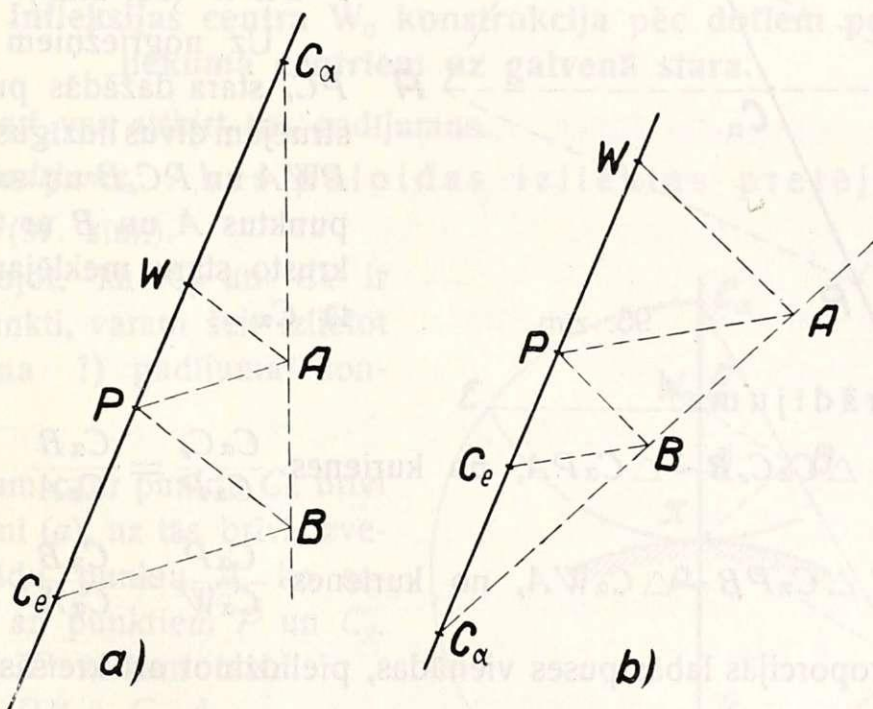
Tas nozīmē, ka punkts C_e apmierina nolīdzinājumu (11).

Cita konstrukcija izdarīta tanī pašā 93. zīm. ar pusriņķa palīdzību: Ap $C_\alpha W$ aprakstīts pusriņķis, un ar radiju $C_\alpha P$ vilkts loks līdz krustošanai punktā F ar pusriņķi. Punkta F projekcija uz staru dod meklējamo punktu C_e .

Pierādījums: $(C_\alpha F)^2 = C_\alpha W \cdot C_\alpha C_e$, bet $C_\alpha F = C_\alpha P$, tā tad $(C_\alpha P)^2 = C_\alpha C_e \cdot C_\alpha W$ jeb $r^2 = k \cdot k_w$.

III uzdevums. Doti punkti P , W un C_e . Jākonstruē punkts C_α . Arī šeit var atšķirt 3 gadījumus:

1) *Gadījums:* Punkts C_e atrodas ārpus PW zem pola P (94. zīm.).



94. zīm.

Uz nogriežņiem PW un PC_e konstruējam stara vienā pusē divus līdzīgus trijstūrus PWA un $PC_e B$. Caur punktiem A un B velkam taisni, kas krusto staru meklējamā punktā C_α .

Pie tam gadījumā, kad $PW < PC_e$, punkts C_α iznāk augšpus punkta W (94a. zīm.), bet kad $PW > PC_e$, punkts C_α iznāk zem pola P (94b. zīm.).

Pierādījums kopīgs abiem gadījumiem:

$$\triangle C_\alpha C_e B \sim \triangle C_\alpha P A, \text{ no kurienes } \frac{C_\alpha C_e}{C_\alpha P} = \frac{C_\alpha B}{C_\alpha A}$$

$$\triangle C_\alpha P B \sim \triangle C_\alpha W A, \text{ no kurienes } \frac{C_\alpha P}{C_\alpha W} = \frac{C_\alpha B}{C_\alpha A}.$$

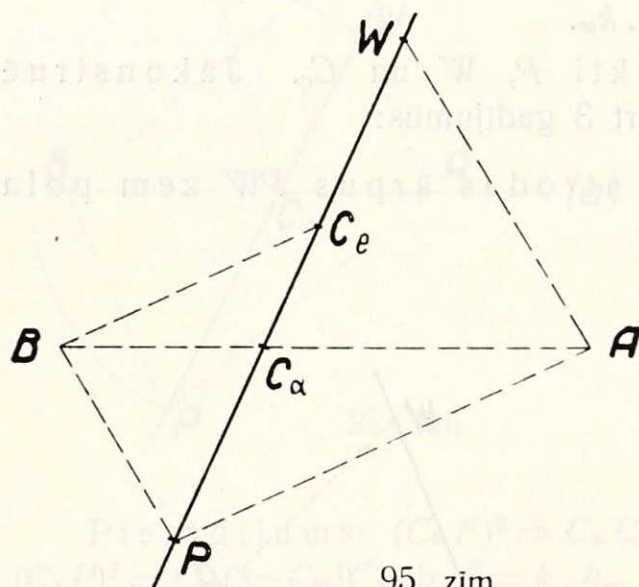
Iegūtās proporcijās labās puses vienādas, pielīdzinot arī kreisās, atrodam

$$\frac{C_\alpha C_e}{C_\alpha P} = \frac{C_\alpha P}{C_\alpha W} \text{ jeb } \frac{k}{r} = \frac{r}{k_w},$$

kas nozīmē, ka punkts C_α apmierina Eulera nolīdzinājumu (11).

2) *Gadījums*: Punkts C_e atrodas starp punktiem P un W (95. zīm.).

Uz nogriežņiem PW un PC_e stara dažādās pusēs konstruējam divus līdzīgus trijstūrus PWA un $PC_e B$ un savienojam punktus A un B ar taisni, kas krusto staru meklējamā punktā C_α .



Pierādījums:

$$\triangle C_\alpha C_e B \sim \triangle C_\alpha P A, \text{ no kurienes } \frac{C_\alpha C_e}{C_\alpha P} = \frac{C_\alpha B}{C_\alpha A}$$

$$\triangle C_\alpha P B \sim \triangle C_\alpha W A, \text{ no kurienes } \frac{C_\alpha P}{C_\alpha W} = \frac{C_\alpha B}{C_\alpha A}.$$

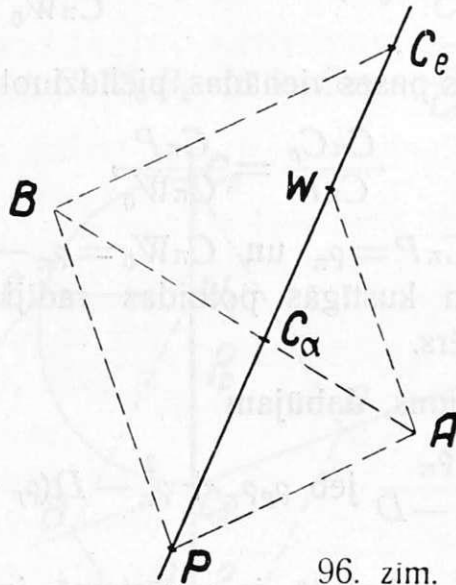
Iegūtās proporcijās labās puses vienādas, pielīdzinot arī kreisās, atrodam

$$\frac{C_\alpha C_e}{C_\alpha P} = \frac{C_\alpha P}{C_\alpha W} \text{ jeb } \frac{k}{r} = \frac{r}{k_w},$$

kas nozīmē, ka punkts C_α apmierina Eulera nolīdzinājumu (11) un ir atrasts pareizi.

3) *Gadījums*: Punkts C_e atrodas ārpus PW aiz punkta W (96. zīm.).

Konstrukcija šeit tāda pati kā otrā gadījumā: uz nogriežņiem PW un PC_e konstruēti stara dažādās pusēs divi līdzīgi trijstūri: PWA un



96. zīm.

PC_eB . Taisne, kas savieno punktus A un B , krusto staru meklējamā punktā C_α . Pierādījums tāds pats kā otrā gadījumā.

§ 20. Infleksijas centra W_0 konstrukcija pēc dotiem poloidu liekuma centriem uz galvenā stara.

Šeit arī var atšķirt trīs gadījumus.

1) *Gadījums*: Abas poloidas izliektas pretējos virzienos (97. zīm.).

Ievērojot, ka C_p un C_π ir saistīti punkti, varam šeit izlietot I uzdevuma 1) gadījuma konstrukciju.

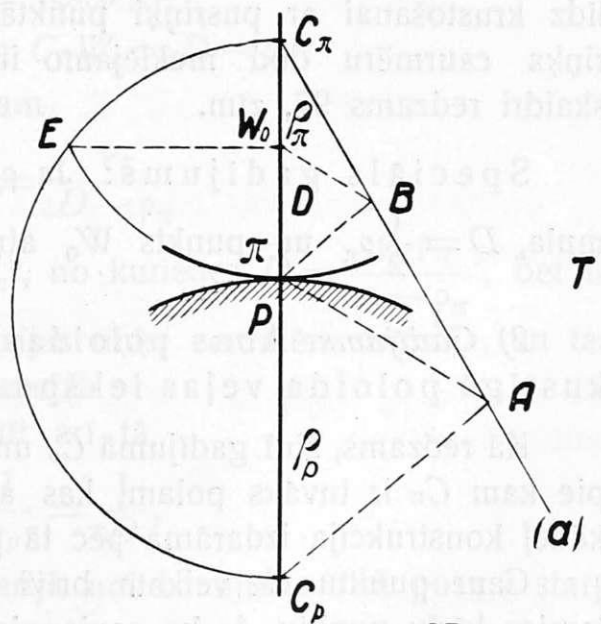
Velkam caur punktu C_π brīvi kādu taisni (a), uz tās brīvi izvēlamies kādu punktu A , ko savienojam ar punktiem P un C_p . Caur polu P velkam taisni

$$PB \parallel C_p A$$

un caur punktu B taisni

$$BW_0 \parallel A P,$$

kas krusto staru meklējamā punktā W_0 .



97. zīm.

Pierādījums:

$$\triangle C_{\pi}C_pA \sim \triangle C_{\pi}PB, \text{ no kurienes } \frac{C_{\pi}C_p}{C_{\pi}P} = \frac{C_{\pi}A}{C_{\pi}B}$$

$$\triangle C_{\pi}PA \sim \triangle C_{\pi}W_0B, \text{ no kurienes } \frac{C_{\pi}P}{C_{\pi}W_0} = \frac{C_{\pi}A}{C_{\pi}B}.$$

Iegūtās proporcijās labās puses vienādas, pielīdzinot arī kreisās, atrodam:

$$\frac{C_{\pi}C_p}{C_{\pi}P} = \frac{C_{\pi}P}{C_{\pi}W_0},$$

bet $C_pC_{\pi} = \rho_p + \rho_{\pi}$, $C_{\pi}P = \rho_{\pi}$ un $C_{\pi}W_0 = \rho_{\pi} - D$, kur ar ρ_p un ρ_{π} apzīmēti nekustīgās un kustīgās poloidas radiji un ar D apzīmēts infleksijas riņķa caurmērs.

Ievietojot šos lielumus, dabūjam

$$\frac{\rho_p + \rho_{\pi}}{\rho_{\pi}} = \frac{\rho_{\pi}}{\rho_{\pi} - D} \text{ jeb } \rho_p \rho_{\pi} + \rho_{\pi}^2 - D(\rho_p + \rho_{\pi}) = \rho_{\pi}^2,$$

no kurienes $D = \frac{\rho_p \rho_{\pi}}{\rho_p + \rho_{\pi}}$, bet tā ir pazīstamā infleksijas riņķa caurmēra formula, un tas nozīmē, ka konstrukcija izdarīta pareizi.

To pašu formulu var uzrakstīt arī tā:

$$\frac{1}{\rho_{\pi}} + \frac{1}{\rho_p} = \frac{1}{D},$$

kas nav nekas cits kā Eulera-Savarija nolīdzinājums.

Otra konstrukcija izdarīta tanī pašā 97. zīm. ar pusriņķa palīdzību: ap C_pC_{π} aprakstīts pusriņķis, un ar radiju $C_{\pi}P$ vilkts loks līdz krustošanai ar pusriņķi punktā E . Punkta E projekcija uz pusriņķa caurmēru dod meklējamo infleksijas centru W_0 . Pierādījums skaidri redzams 97. zīm.

Speciāls gadījums: Ja $\rho_p = \rho_{\pi}$, tad, kā rāda atrastā D formula, $D = \frac{1}{2}\rho_{\pi}$ un punkts W_0 atrodas vidū starp polu P un C_{π} .

2) *Gadījums*: Abas poloidas izliektas vienā virzienā, un kustīgā poloida veļas iekšpus nekustīgās (98. zīm.).

Kā redzams, šinī gadījumā C_p un C_{π} atrodas vienā pusē no pola P , pie kam C_{π} ir tuvāks polam, kas atbilst I uzdevuma 2) gadījumam, kādēļ konstrukcija izdarāma pēc tā paša parauga.

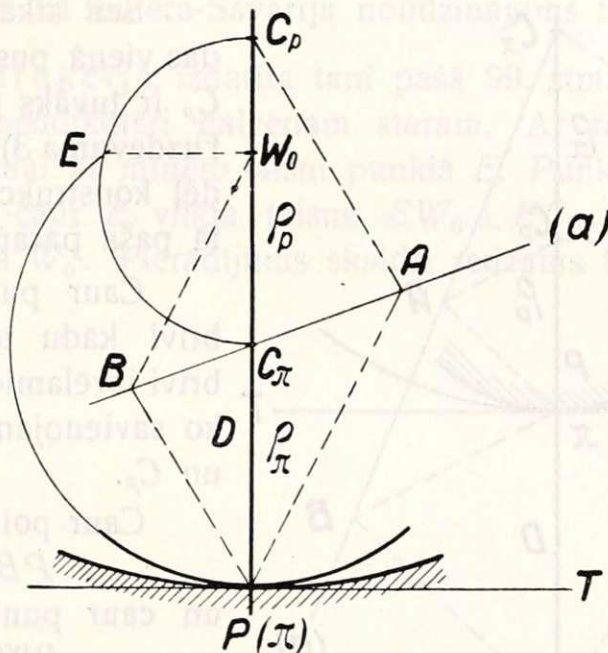
Caur punktu C_{π} velkam brīvi kādu taisni (a), uz tās brīvi izvēlamies kādu punktu A , ko savienojam ar punktiem P un C_p .

Caur polu velkam taisni $PB \parallel AC_p$ un caur punktu B taisni $BW_0 \parallel PA$, kas krusto staru meklējamā punktā W_0 .

Pierādījums:

$$\triangle C_\pi C_p A \sim \triangle C_\pi P B, \text{ no kurienes } \frac{C_\pi C_p}{C_\pi P} = \frac{C_\pi A}{C_\pi B}$$

$$\triangle C_\pi A P \sim \triangle C_\pi W_0 B, \text{ no kurienes } \frac{C_\pi P}{C_\pi W_0} = \frac{C_\pi A}{C_\pi B}.$$



98. zim.

Iegūtās proporcijās labās puses vienādas, pielīdzinot arī kreisās, atrodam:

$$\frac{C_\pi C_p}{C_\pi P} = \frac{C_\pi P}{C_\pi W_0},$$

bet $C_\pi C_p = \rho_p - \rho_\pi$, $C_\pi P = \rho_\pi$ un $C_\pi W_0 = D - \rho_\pi$.

Ievietojot šos lielumus, dabūjam

$$\frac{\rho_p - \rho_\pi}{\rho_\pi} = \frac{\rho_\pi}{D - \rho_\pi}$$

jeb $(\rho_p - \rho_\pi) D - \rho_p \rho_\pi + \rho_\pi^2 = \rho_\pi^2$, no kurienes $D = \frac{\rho_p \rho_\pi}{\rho_p - \rho_\pi}$, bet tā ir šim gadījumam atbilstoša infleksijas riņķa caurmēra formula, un tas nozīmē, ka konstrukcija izdarīta pareizi.

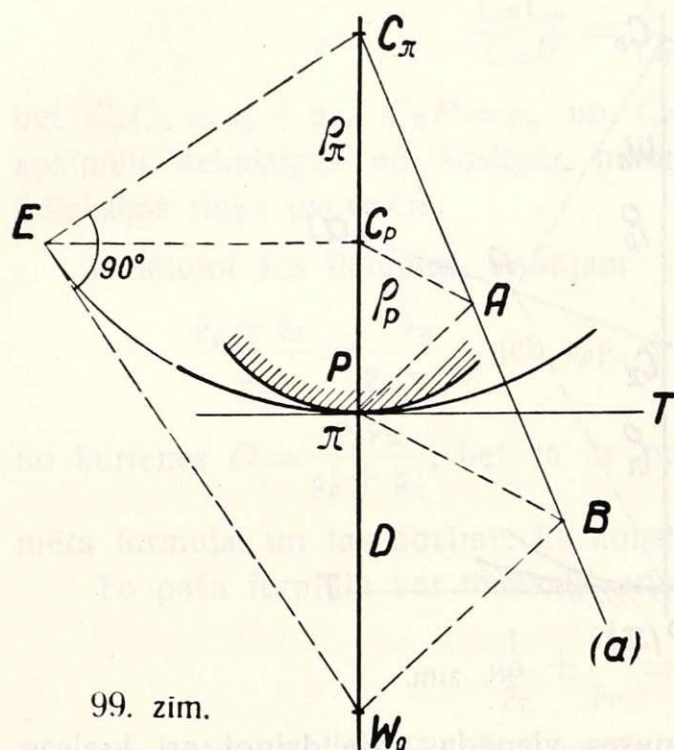
To pašu formulu var uzrakstīt arī tā

$$\frac{1}{\rho_\pi} - \frac{1}{\rho_p} = \frac{1}{D},$$

kas nav nekas cits kā Eulera-Savarija nolīdzinājums otrā posmā starp infleksijas punktu un polu.

Otra konstrukcija izdarīta tanī pašā 98. zīm. ar pusriņķa palīdzību: ap $C_p C_\pi$ apvilks pusriņķis un ar radiju $C_\pi P$ vilkts loks līdz krustošanai punktā E ar pusriņķi. Punkta E projekcija uz pusriņķa caurmēru dod meklējamo punktu W_0 . Pierādījums skaidri redzams 98. zīmējumā.

3) *Gadījums*: Abas poloidas izliektas vienā virzienā un kustīga poloida veļas ārpus nekustīgās (99. zīm.).



99. zīm.

Šeit atkal C_π un C_p atrodas vienā pusē no pola P , bet C_p ir tuvāks polam, kas atbilst I uzdevuma 3) gadījumam, tamdēļ konstrukcija izdarāma pēc tā paša parauga.

Caur punktu C_π velkam brīvi kādu taisni (a), uz tās brīvi izvēlamies kādu punktu A , ko savienojam ar punktiem P un C_p .

Caur polu P velkam taisni $PB \parallel C_p A$ un caur punktu B taisni $BW_0 \parallel AP$, kas krusto staru meklējamā punktā W_0 .

Pierādījums:

$$\triangle C_\pi C_p A \sim \triangle C_\pi P B, \text{ no kurienes } \frac{C_\pi C_p}{C_\pi P} = \frac{C_\pi A}{C_\pi B}$$

$$\triangle C_\pi P A \sim \triangle C_\pi W_0 B, \text{ no kurienes } \frac{C_\pi P}{C_\pi W_0} = \frac{C_\pi A}{C_\pi B}.$$

Iegūtās proporcijās labās puses vienādas, pielīdzinot arī kreisās, atrodam:

$$\frac{C_\pi C_p}{C_\pi P} = \frac{C_\pi P}{C_\pi W_0},$$

bet $C_\pi C_p = \rho_\pi - \rho_p$; $C_\pi P = \rho_\pi$ un $C_\pi W_0 = D + \rho_\pi$. Ievietojot šos lielumus, dabūjam:

$$\frac{\rho_\pi - \rho_p}{\rho_\pi} = \frac{\rho_\pi}{D + \rho_\pi}$$

jeb $(\rho_\pi - \rho_p) D + \rho_\pi^2 - \rho_p \rho_\pi = \rho_\pi^2$, no kurienes $D = \frac{\rho_p \rho_\pi}{\rho_\pi - \rho_p}$, bet tā ir

šim gadījumam atbilstoša infleksijas riņķa caurmēra formula, un tas nozīmē, ka konstrukcija izdarīta pareizi.

To pašu formulu var uzrakstīt arī tā:

$$\frac{1}{\rho_p} - \frac{1}{\rho_\pi} = \frac{1}{D},$$

kas nav nekas cits kā Eulera-Savarija nolīdzinājums trešajā posmā.

Otra konstrukcija izdarīta tanī pašā 99. zīm. šādi: punktā C_p vilkta taisne perpendikulāri galvenam staram. Ar radiju $C_\pi P$ vilkts loks līdz krustošanai ar minēto taisni punktā E . Punkti C_π un E savienoti ar taisni un caur E vilkta taisne $EW_0 \perp EC_\pi$, kas krusto staru meklējamā punktā W_0 . Pierādījums skaidri redzams 99. zīm.

**Infleksijas riņķa konstrukcijas pēc Bobiljē (Bobillier).
Kolineācijas ass. Bobiljē (Bobillier) teorēma.
Aronholda konstrukcija.**

§ 21. I Bobiljē konstrukcija infleksijas riņķa noteikšanai¹⁵ (100. zīm.).

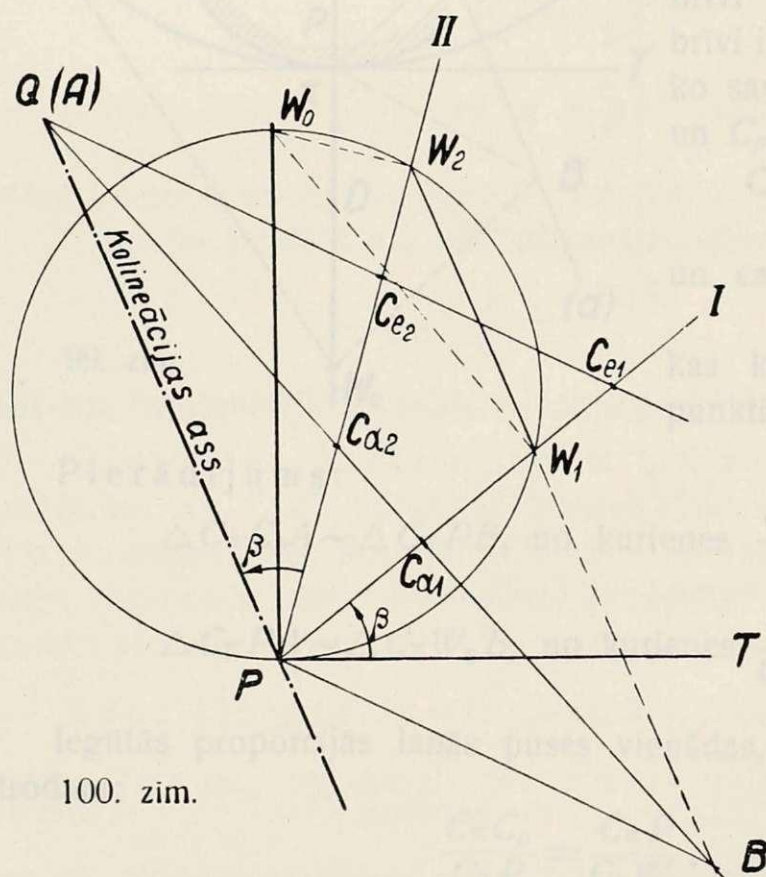
Dots pols P un divi pāri envelope un aptveramo ar to liekuma centriem $C_{\alpha 1}$, C_{e1} un $C_{\alpha 2}$, C_{e2} .

Jākonstruē infleksijas riņķis un pola tangente.

Punkti $C_{\alpha 1}$, C_{e1} un $C_{\alpha 2}$, C_{e2} atrodas vienā pusē no pola P uz dažādiem stariem I un II. Infleksijas riņķis būs noteikts, ja bez pola

P atradīsim vēl divus infleksijas punktus uz stariem I un II. Šo infleksijas punktu konstrukciju varētu izdarīt atsevišķi katram staram ar agrāk apskatītiem paņēmieniem, bet izdevīgāki būs abas konstrukcijas apvienot.

Šim nolūkam pirmo taisni caur punktu $C_{\alpha 1}$ nevelkam brīvi, bet tūlīt caur abiem punktiem $C_{\alpha 1}$ un $C_{\alpha 2}$. Uz šīs taisnes punktu A atkal neņemam brīvi, bet tanī vietā, kur taisne $C_{\alpha 1}C_{\alpha 2}$ krustojas ar taisni $C_{e1}C_{e2}$. Šo punktu tagad apzīmējam ar Q .



100. zīm.

Punktu Q savienojam ar polu P un velkam taisni $PB \parallel QC_e$ līdz krustošanai ar taisni QC_α punktā B . Taisne, kas vilkta caur punktu B paralēli PQ , krusto abus starus infleksijas punktus W_1 un W_2 .

¹⁵ E. Bobillier. Cours de Géométrie. 1870.

Ievērojot, ka visas taisnes, kas iet perpendikulāri stariem infleksijas punktos, iet caur infleksijas centru W_0 , atrodam pēdējo, velkot taisni W_1W_0 perpendikulāri pirmajam staram līdz krustošanai ar taisni W_2W_0 , kas vilkta perpendikulāri otram staram.

Savienojot polu P ar atrasto punktu W_0 , dabūjam infleksijas riņķa caurmēru PW_0 , ap kuŗu 100. zīm. aprakstīts infleksijas riņķis.

Taisne, kas vilkta caur polu P perpendikulāri PW_0 , dod poloidu tangenti PT .

Taisni PQ sauc par kollineācijas asi diviem aptveŗamo un envelope pāŗiem jeb arī diviem stariem I un II.

Kā redzams 100. zīm., kollineācijas ass PQ paralēla taisnei W_1W_2 , kas savieno divus infleksijas punktus. Bez tam arī taisne $C_{\alpha 1}C_{\alpha 2}$ ar taisni $C_{e1}C_{e2}$ krustojas uz kollineācijas ass punktā Q .

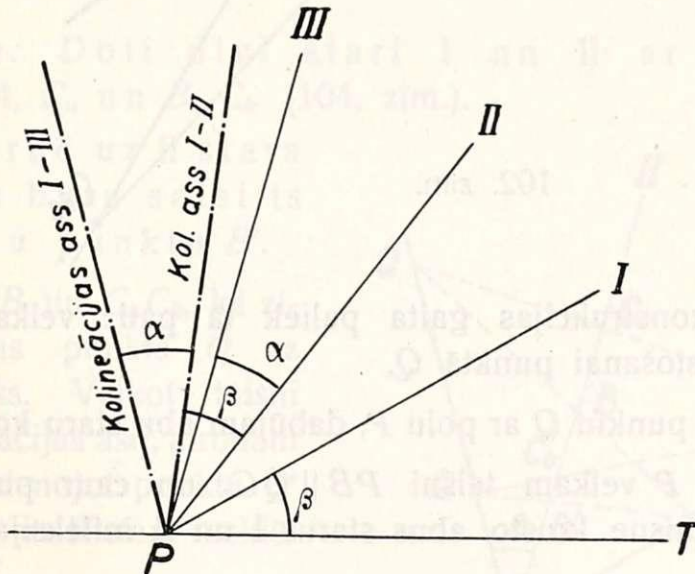
§ 22. Bobiljē (Bobillier) teōrēma¹⁶: Leņķis, ko veido pola tangente PT ar vienu staru, ir vienāds ar leņķi, ko veido otrs stars ar abu staru kollineācijas asi, pie kam abi leņķi atskaitāmi vienā virzienā.

Pierādījums skaidri redzams 100. zīm.:

$$\angle TPW_1 = \angle PW_2W_1,$$

$$\angle QPW_2 = \angle PW_2W_1,$$

no kurienes seko: $\angle TPW_1 = \angle W_2PQ = \beta$.



101. zīm.

Secinājums: No Bobiljē teōrēmas seko, ka, aizvietojot II staru ar kādu citu III staru, kollineācijas ass arī mainīs savu virzienu, pie

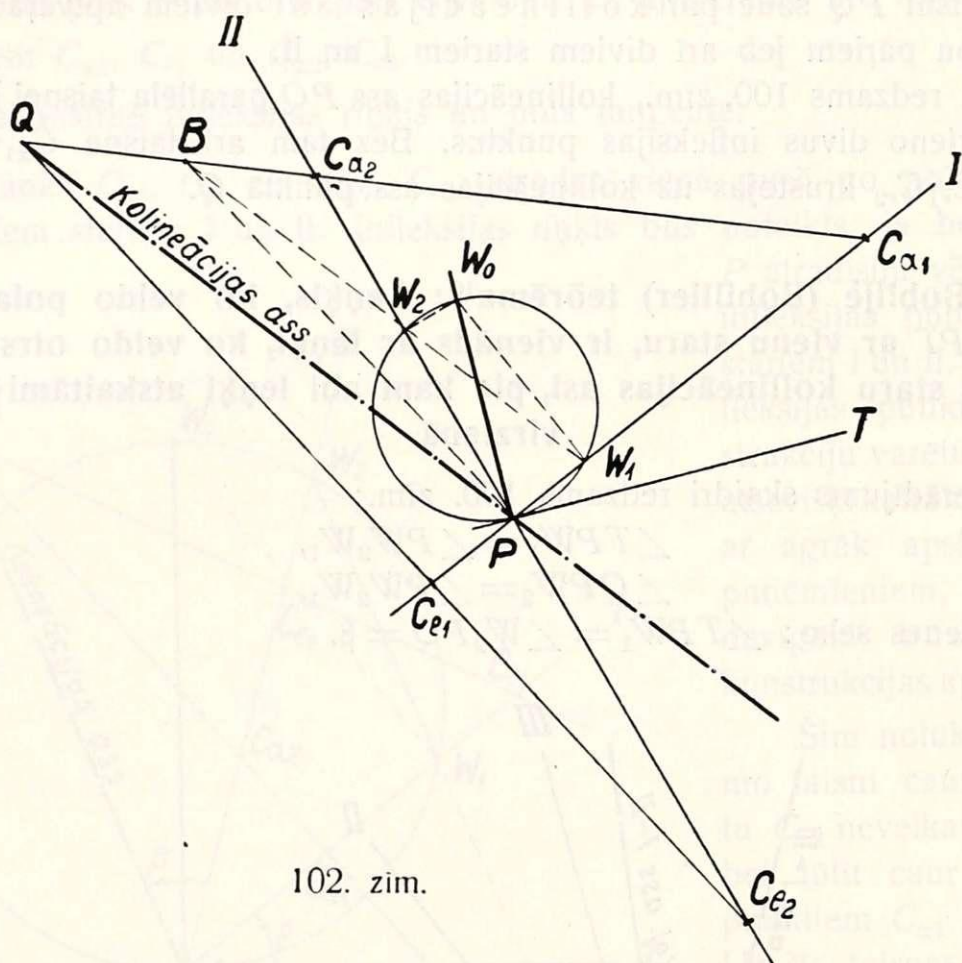
¹⁶ E. Bobillier. Cours de Géométrie. 1870.

kam leņķis α starp II un III staru būs vienāds ar leņķi starp kollineācijas asīm I—II un I—III (101. zīm.).

§ 23. II Bobiljē infleksijas riņķa konstrukcija (102. zīm.).

Doti: pols P , C_{α_1} , C_{e_1} un C_{α_2} , C_{e_2} . Jākonstruē infleksijas riņķis.

Punkti C_{α_1} un C_{e_1} , kā arī C_{α_2} un C_{e_2} atrodas uz stariem I un II, bet dažādās pusēs no pola P .



102. zīm.

Principā konstrukcijas gaita paliek tā pati: velkam $C_{\alpha_1}C_{\alpha_2}$ un $C_{e_1}C_{e_2}$ līdz krustošanai punktā Q .

Savienojot punktu Q ar polu P , dabūjam abu staru kollineācijas asi.

Caur polu P velkam taisni $PB \parallel QC_e$ un caur punktu B taisni $BW \parallel PQ$. Šī taisne krusto abus starus I un II infleksijas punktos W_1 un W_2 .

Infleksijas centru W_0 atrodam, velkot līdz krustošanai $W_1W_0 \perp PW_1$ un $W_2W_0 \perp PW_2$.

Riņķis, kas apvilks ap caurmēru PW_0 , ir infleksijas riņķis un taisne $PT \perp PW_0$ ir pola tangente.

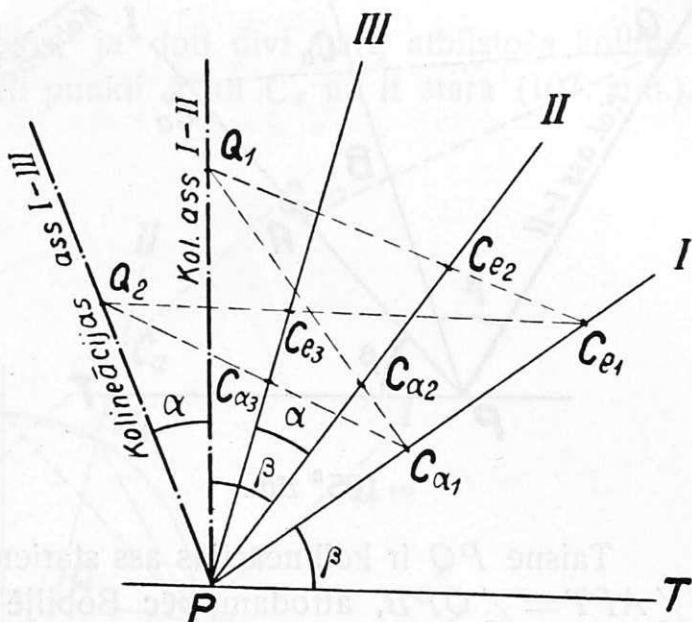
§ 24. Aronholda konstrukcija¹⁷.

Doti saistīti punkti C_α un C_e uz diviem stariem I un II (103. zīm.).
Jāatrod saistīti punkti uz III stara.

Vilksim taisnes $C_{\alpha_1}C_{\alpha_2}$ un $C_{e_1}C_{e_2}$ līdz krustošanai punktā Q_1 .
Savienojot punktu Q_1 ar polu P , atrodam kollineācijas asi I—II.

Ievērojot, ka leņķis α starp stariem II un III ir vienāds ar leņķi starp kollineācijas asīm I—II un I—III, atrodam kollineācijas asi I—III, atliekot šo leņķi α no kollineācijas ass I—II tanī pašā virzienā.

Izvēloties uz šīs ass kaut kādu punktu Q_2 un savienojot to ar punktiem C_{α_1} un C_{e_1} , atrodam uz III stara divus saistītus punktus C_{α_3} un C_{e_3} .



103. zīm.

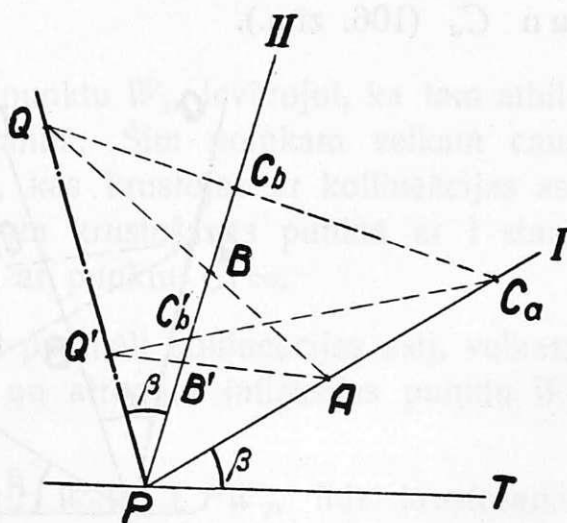
Kā redzams, tādu punktu var dabūt bezgalīgi daudz.

7. piemērs: Doti divi stari I un II ar saistītiem punktiem A, C_a un B, C_b (104. zīm.).

Jākonstruē uz II stara punkts, kas būtu saistīts ar kādu citu punktu B' .

Taisnes AB un C_aC_b , kā zināms, krustojas punktā Q uz kollineācijas ass. Velkot taisni AB' līdz kollineācijas asij, atrodam punktu Q' . Savienojot punktu Q' ar C_a , atrodam uz II stara meklējamo punktu C'_b .

Poloidu tangenti atrodam, atliekot $\angle APT = \angle QPB = \beta$.

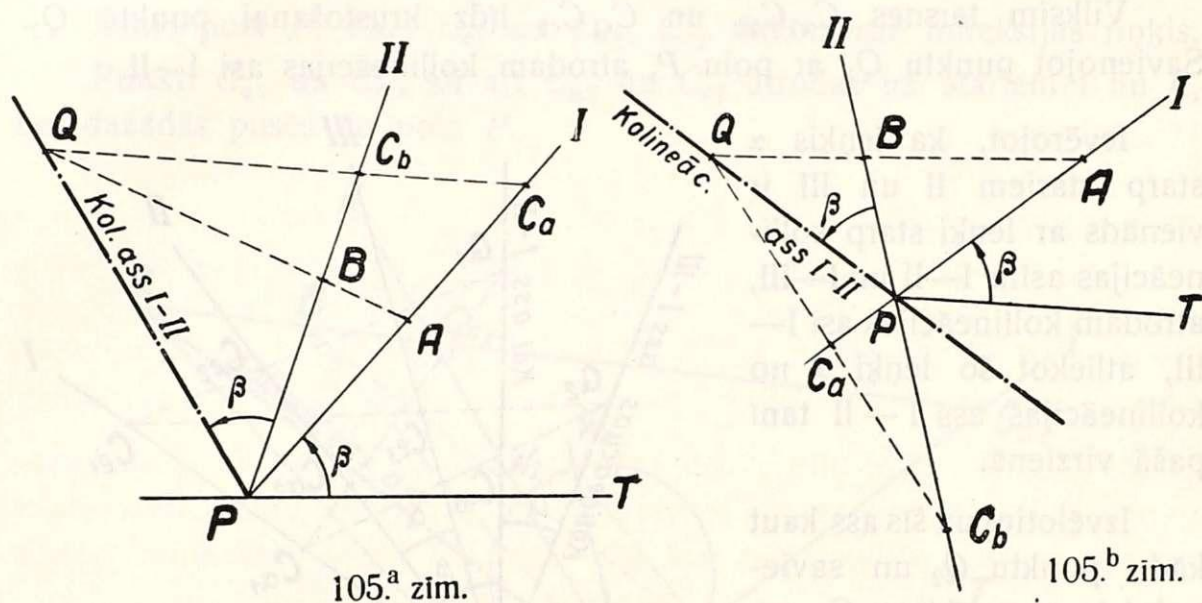


104. zīm.

¹⁷ S. Aronhold. Grundzüge der kinematischen Geometrie. 1872.

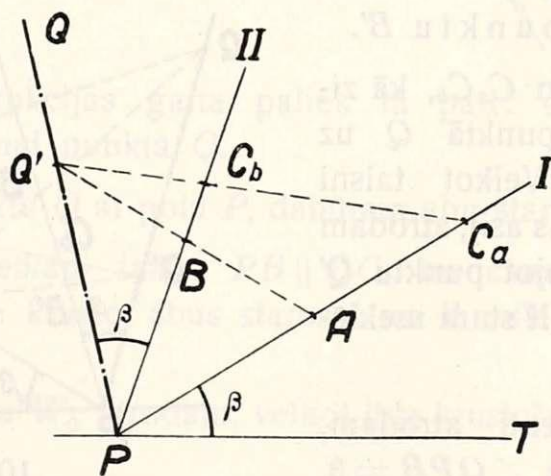
8. piemērs: Dotti divi stari I un II ar saistītiem punktiem A, C_a un B, C_b . (105. zīm.) Jākonstruē pola tangente PT .

Velkot taisnes AB un $C_a C_b$ līdz krustošanai, atrodam punktu Q .

105.^a zīm.105.^b zīm.

Taisne PQ ir kollineācijas ass stariem I—II, un, atliekot no I stara $\angle APT = \angle QPB$, atrodam pēc Bobiljē teorēmas pola tangenti PT . Šī konstrukcija izdarīta divos gadījumos: ja punkti atrodas vienā pusē no pola 105a. zīm. un ja punkti atrodas dažādās pusēs no pola 105b. zīm.

9. piemērs: Dots pola tangente PT un divi stari I un II, pie kam uz I stara ir divi saistīti punkti A un C_a (106. zīm.).



106. zīm.

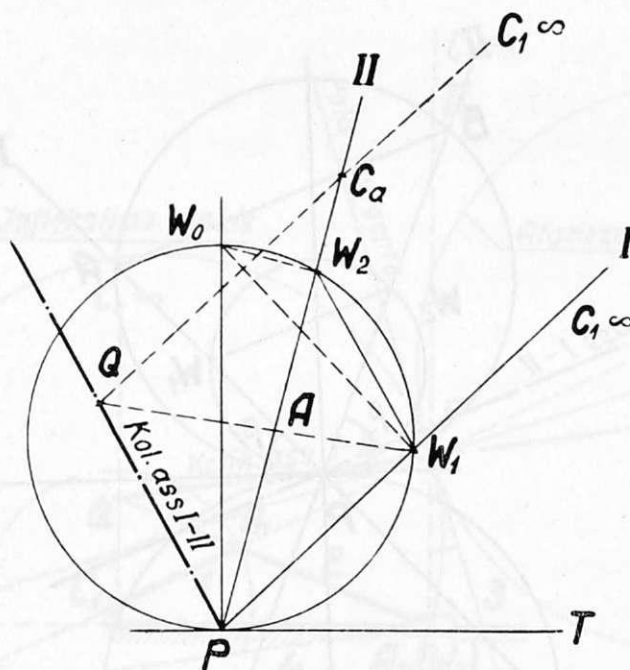
Jākonstruē uz II stara punkts, kas būtu saistīts ar B .

Vispirms pēc Bobiljē teorēmas konstruējam kollineācijas ass I—II atliekot $\angle BPQ = \angle TPA$.

Velkot taisni AB , atrodam uz kollineācijas ass punktu Q' . Beidzot taisne $Q'C_a$ krusto II staru meklējamā punktā C_b .

10. piemērs: Infleksijas riņķa konstrukcija.

Jākonstruē infleksijas riņķis, ja doti divi stari, atbilstoša kollineācijas ass I—II un divi saistīti punkti A un C_a uz II stara (107. zīm.).



107. zīm.

Meklēsim uz I stara infleksijas punktu W_1 , ievērojot, ka tam atbilstošais liekuma centrs atrodas bezgalībā. Šim nolūkam velkam caur punktu C_a taisni paralēli I staram, kas krustojas ar kollineācijas asi punktā Q . Velkot taisni QA , atrodam krustošanās punktā ar I staru infleksijas punktu W_1 , kas ir saistīts ar punktu $C_{1\infty}$.

Ņemot vērā, ka taisne W_1W_2 iet paralēli kollineācijas asij, velkam caur punktu W_1 taisni $W_1W_2 \parallel PQ$ un atrodam infleksijas punktu W_2 uz II stara.

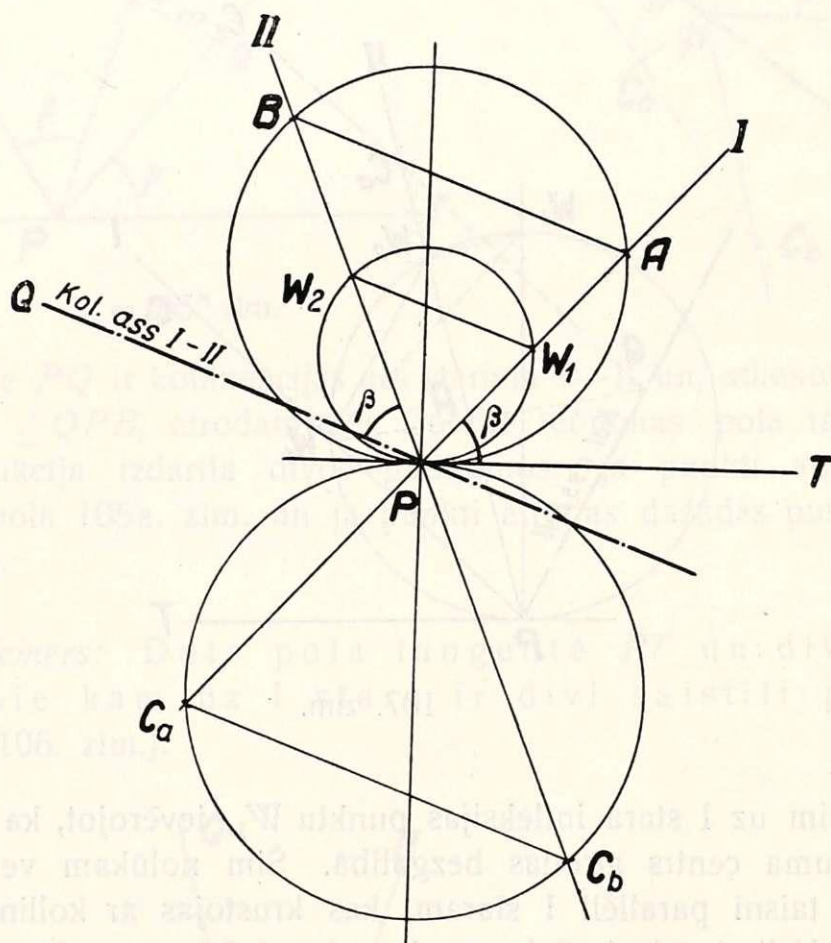
Tālāk velkam $W_1W_0 \perp PW_1$, un $W_2W_0 \perp PW_2$, līdz krustošanai punktā W_0 .

Riņķis, kas apvilks ap PW_0 , kā caurmēru, ir infleksijas riņķis, un $PT \perp PW_0$ ir pola tangente.

§ 25. Teorēma: Taisne AB , kas savieno divus staru krustošanās punktus ar riņķi, kas pieskaņas pola tangentei polā, ir paralēla kollineācijas asiņ minētiem diviem stariem (108. zīm.).

Pieņemsim, ka pola tangente dota. Vilksim brīvi divus starus I un II. Iezīmēsim kaut kādu riņķi, kas pieskaņas pola tangentei punktā P un apzīmēsim ar A un B staru krustošanās punktus ar minēto riņķi.

Tālāk konstruēsim kollineācijas asi PQ stariem I—II, atliekot pēc Bobiljē teorēmas $\angle BPQ = \angle TPA = \beta$.



108. zīm.

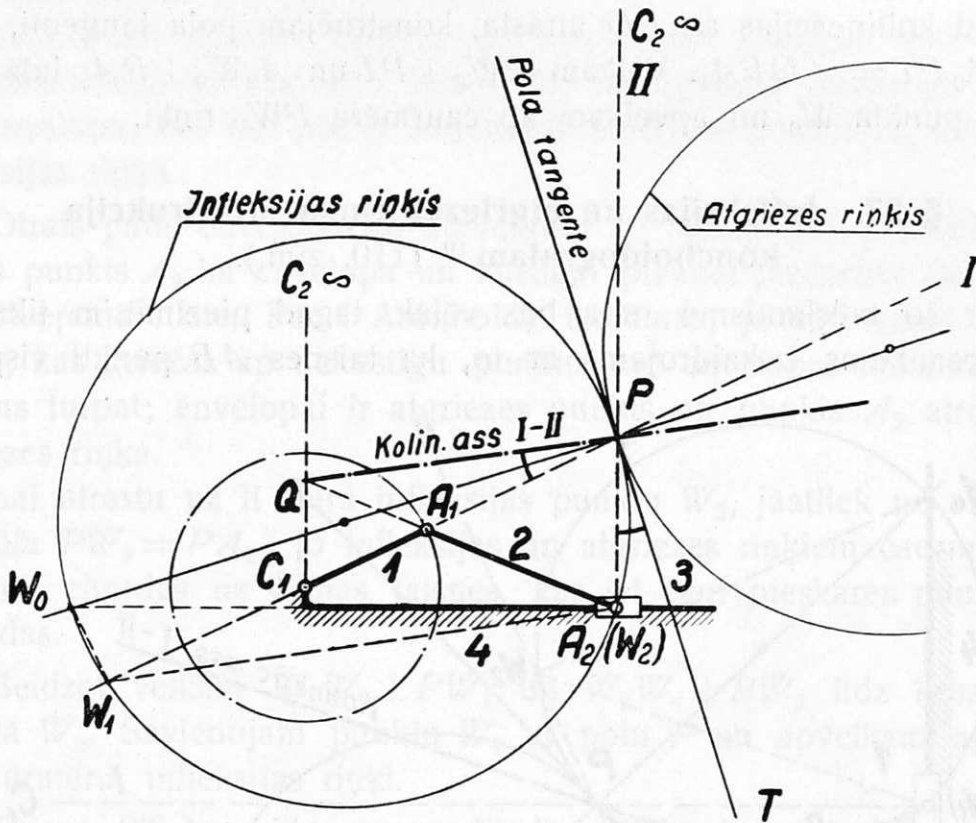
Punktus A un B savienojam ar taisni un konstatējam, ka $\angle ABP = \angle TPA = \beta = \angle BPQ$, bet tas nozīmē, ka $AB \parallel PQ$.

Tas pats sakāms arī par taisni $C_a C_b$, kas savieno punktus, kas saistīti ar A un B , jo šie punkti arī atrodas uz riņķa, kas pieskaņas pola tangentei punktā P . Ja $AB \parallel PQ$, tad AB krustojas ar kollineācijas asi bezgalībā, bet turpat jākrustojas ar kollineācijas asi taisnei $C_a C_b$, kas nozīmē, ka $C_a C_b \parallel PQ$.

Iezīmējot infleksijas riņķi ar infleksijas punktiem W_1 un W_2 , nākam pie slēdziena, ka arī $W_1W_2 \parallel PQ$, kas bija pierādīts jau agrāk, bet no tā seko, ka arī $W_1W_2 \parallel AB$.

§ 26. Infleksijas riņķa konstrukcija kloķa mēchanismam¹⁸ (109. zīm.).

Uzzīmētā kloķa mēchanisma 4. loceklis paliek nekustīgs, 1. loceklis griežas ap nekustīgo punktu C_1 un 3. loceklis atrodas virzes kustībā. Tikai 2. locekļa (klaņa) kustība ir komplicētāka, tamdēļ konstruēsim šai kustībai infleksijas riņķi un pola tangenti.



109. zīm.

Momentāno polu P atrodam, pagarinot C_1A_1 līdz krustošanai ar taisni, kas vilkta normāli punkta A_2 trajektorijai. Caur polu P tagad iet divi stari: PA_1 , ko apzīmēsim ar I, un PA_2 , ko apzīmēsim ar II.

Uz I stara redzami divi saistīti punkti A_1 un tā trajektorijas liekuma centrs C_1 . II stara, punkta A_2 trajektorija ir taisne, tā tad liekuma centrs C_2 atrodas bezgalībā.

Lai dabūtu punktu Q , velkam taisnes A_1A_2 un C_1C_2 līdz krustošanai. Taisne PQ ir kollineācijas ass stariem I un II.

¹⁸ M. Grübler. Getriebelehre. 1917. 122. lapp.

Tālāk meklējam uz šiem stariem infleksijas punktus: vispirms konstatējam, ka punkts W_2 sakrīt ar A_2 , jo tā trajektorijas liekuma centrs atrodas bezgalībā, un tad velkam taisni $W_2W_1 \parallel PQ$ līdz krustšanai ar I staru punktā W_1 .

Taisne W_1W_0 , kas vilkta perpendikulāri I staram ar taisni W_2W_0 , kas vilkta perpendikulāri II staram, kā zināms, krustojas infleksijas centrā W_0 . PW_0 reprezentē infleksijas riņķa caurmēru D , ap kuŗu aprakstām pašu riņķi un $PT \perp PW_0$ dod pola tangenti.

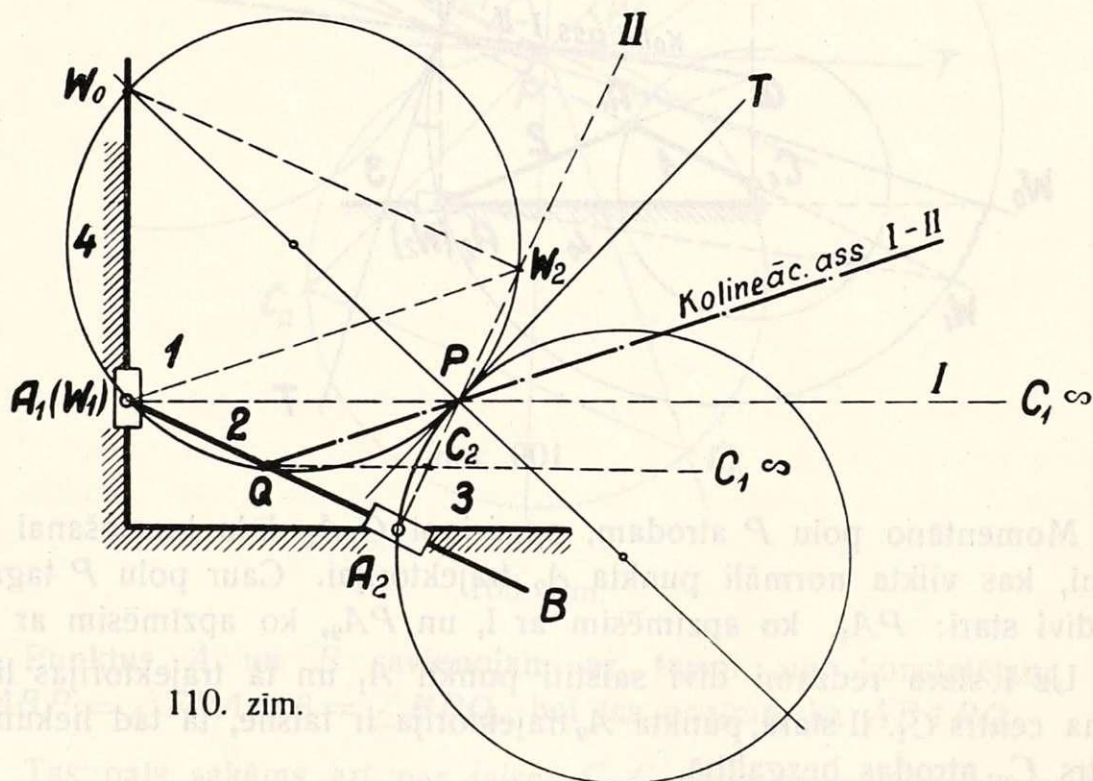
Atgriezes riņķis ir tikpat liels, bet pieskaŗas pola tangentei PT otrā pusē (109. zīm.).

Cita konstrukcija ar Bobiljē teorēmas palīdzību.

Kad kollineācijas ass PQ atrasta, konstruējam pola tangenti, atliekot $\angle A_2PT = \angle QPA_1$. Velkam $PW_0 \perp PT$ un $A_2W_0 \perp PA_2$ līdz krusttošanai punktā W_0 un apvelkam ap caurmēru PW_0 riņķi.

§ 27. Infleksijas un atgriezes riņķa konstrukcija konchoidogrfam¹⁹ (110. zīm.).

Par šo mēchanismu runa būs vēlāk, tagad piezīmēsim tikai, ka šāds nosaukums izskaidrojams ar to, ka taisnes AB punkti vispārīgi



110. zīm.

apraksta konchoidas. Šis mēchanisms satur divus šarnirus un divus slīdpāŗus. Punkts A_1 ar šarnīru piestiprināts uz māvai 1, kas slīd uz

¹⁹ M. Grübler. Getriebelehre. 1917. 123. lapp.

vertikālas nekustīgas taisnes 4, bet taisne A_1B slīd caur uznavu 3, kas griežas ap nekustīgu punktu A_2 . Jākonstruē 2. locekļa kustībai infleksijas un atgriezes riņķis, kā arī pola tangente.

Momentāno polu atrodam, velkot punktā A_1 normāli tā trajektorijai līdz krustošanai ar normāli taisnei A_1B punktā A_2 . Caur atrasto polu P iet divi stari: PA_1 , kas apzīmēts ar I, un PA_2 , kas apzīmēts ar II.

Meklējam uz šiem stariem infleksijas punktus.

Punkta A_1 trajektorija nekustīgā plaknē ir taisne, tas nozīmē, ka ar A_1 saistītais punkts C_1 atrodas bezgalībā un pats punkts A_1 ir arī infleksijas punkts W_1 uz sava stara.

Varam arī uzskatīt punktu A_1 , kas pieder kustīgai plaknei, par aptveřamo līkni un vertikālo taisni, ko tas apraksta nekustīgā plaknē, par envelopu, bet tad pēc II Aronholda teorēmas punkts A_1 atrodas uz infleksijas riņķa.

Otrais pāris envelopu un aptveřamo ir: nekustīgai plaknei piederošais punkts A_2 kā envelope un kustīgai plaknei piederoša taisne A_1B kā aptveřamā līkne. Pēc I Aronholda teorēmas, ja aptveřamā līkne ir taisne, kas griežas ap nekustīgu punktu, tad envelopas liekuma centrs atrodas turpat; envelopai ir atgriezes punkts un punkts A_2 atrodas uz atgriezes riņķa.

Lai atrastu uz II stara infleksijas punktu W_2 , jāatliek uz otru pusi no pola $PW_2 = PA_2$, jo infleksijas un atgriezes riņķiem caurmēri vienādi un chordas uz vienas taisnes, kas iet caur pieskares punktu, arī vienādas.

Beidzot velkam $W_1W_0 \perp PW_1$ un $W_2W_0 \perp PW_2$ līdz krustošanai punktā W_0 . Savienojam punktu W_0 ar polu P un apvelkam ap PW_0 , kā caurmēru, infleksijas riņķi.

Taisne PT , kas vilkta perpendikulāri PW_0 , dod pola tangenti. Iezīmējot pola tangentes otrā pusē tikpat lielu riņķi kā infleksijas riņķis, dabūjam atgriezes riņķi.

Kollineācijas asi stariem I un II atrodam, velkot caur polu P taisni paralēli W_1W_2 .

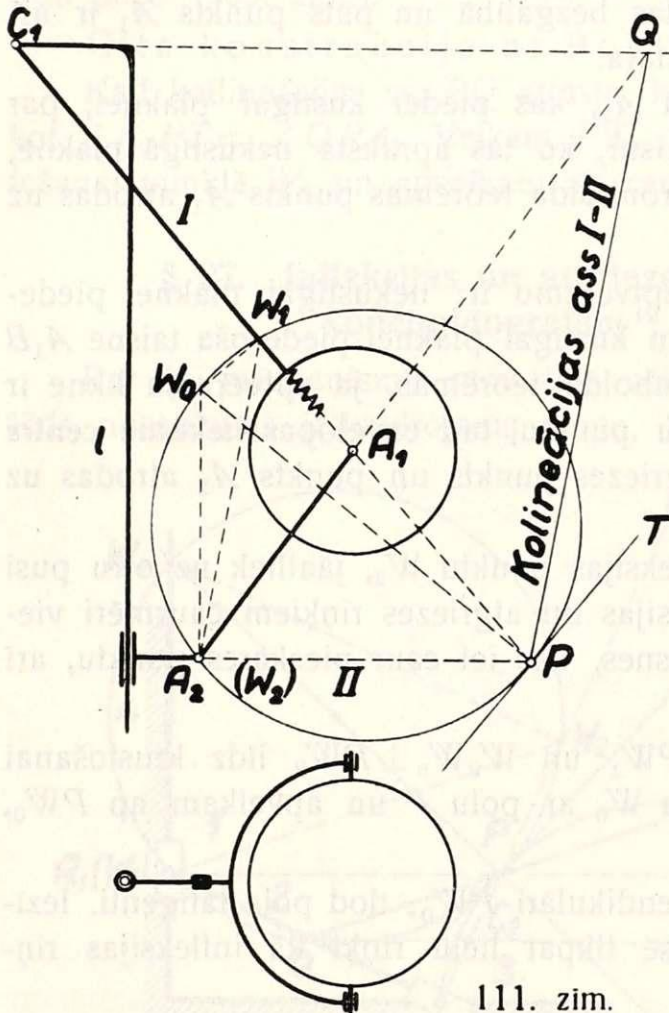
Cita kollineācijas ass konstrukcija: Kollineācijas asi varam noteikt, meklējot punktu Q , kur krustojas taisne A_1A_2 ar taisni, kas savieno saistītus ar A_1 un A_2 punktus. Punkts C_1 , kas saistīts ar punktu A_1 , atrodas bezgalībā uz I stara.

Kustīgas plaknes punktam, kas dotā momentā sakrīt ar punktu A_2 un atrodas uz atgriezes riņķa, saistītais punkts, t. i. trajektorijas liekuma centrs C_2 atrodas vidū starp A_2 un P .

Velkot taisni caur punktu C_2 un C_1 , kas atrodas bezgalībā uz I stara, t. i. taisni paralēli I staram, dabūsim krustošanās punktā ar A_1A_2 punktu Q , kas atrodas uz kollineācijas ass. Savienojot punktu P ar Q , iegūstam arī pašu kollineācijas asi I—II.

§ 28. Kleja (Kley) tvaikmašīnu rēgulātors (111. zīm.).

Šis aparāts rēgulē tvaika ieplūdi cilindrā, tas sastāv no gaŗa stieņa l , kas savienots ar mašīnas vārpstu ar kāda mēchanisma palīdzību, kas dod šim stienim griezes kustību ap savu asi. Augšgalā ar zināmu eks-



111. zīm.

centricitāti novietots šarnīrs C_1 , ap kuŗu var griezties otrs stienis C_1A_1 ar smagu lodi galā. Stienis C_1A_1 ar lodi savienots negrozīgi, parasti ieskrūvēts lodē.

Trešais stienis A_1A_2 , kas punktā A_2 piestiprināts ar šarnīru pie uznavas, kas var slīdēt gar stieni l , otrā galā izveidots dakšu veidā tā, lai tas varētu brīvi griezties ap horizontālu asi caur lodes centru, kā tas parādīts 111. zīm.

Ja tvaikmašīna sāk darboties, tad vārpstas kustība rada vertikāla stieņa l griezi, bet kopā ar stieni griežas arī lode un visa aprakstītā stieņu sistēma. Atkarībā no apgriezienu skaita

lodes centrifugālais spēks palielinās vai samazinās, un līdz ar to lode ceļas uz augšu vai nokrīt zemāk. Šo lodes kustību izlieto tvaika ieplūdes rēgulēšanai.

Kustības pētīšana. Izpētīsim šeit tikai locekļa A_1A_2 kustību, jo C_1A_1 atrodas griezes kustībā ap C_1 un uznavas ar punktu A_2 slīd gar stieni l .

Momentāno polu P locekļa A_1A_2 kustībai atrodam, turpinot taisni C_1A_1 līdz krustošanai ar normāli punkta A_2 trajektorijai, kas ir taisne paralēli stienim l .

Caur atrasto polu P iet divi stari PA_1 un PA_2 , kas apzīmēti ar I un II, uz kuriem saistītie punkti ir A_1 ar C_1 un A_2 ar punktu C_2 , kas atrodas bezgalībā. Meklēsim šiem stariem kollineācijas asi. Šim nolūkam savienojam punktu C_1 ar $C_2 \infty$, t. i. velkam caur C_1 taisni paralēli staram PA_2 līdz krustošanai punktā Q ar taisni $A_2 A_1$. Savienojot polu P ar punktu Q , iegūstam kollineācijas asi.

Punkts A_2 ir sava stara infleksijas punkts W_2 , jo punkta A_2 trajektorijas liekuma centrs atrodas bezgalībā. Velkot taisni $W_2 W_1 \parallel PQ$, atrodam stara PA_1 infleksijas punktu W_1 . Divas taisnes $W_1 W_0 \perp PW_1$ un $W_2 W_0 \perp PW_2$ dod krustošanās punktā infleksijas centru W_0 . Riņķis, kas apvilks ap PW_0 , kā caurmēru, ir infleksijas riņķis locekļa $A_1 A_2$ kustībai un taisne $PT \perp PW_0$ ir pola tangente.

Nupat aprakstīto Kleja (Kley) rēgulātoru šādā veidā tomēr vairs nelieto, jo nepieciešamai rēgulātorā jūtībai stieņa l gaņums iznāk pārāk liels, kas neērti konstruktīvā ziņā. Vajadzīgā jūtība ir 20% un pat vēl mazāka, tas nozīmē, ka vārpstai izdarot 100 apgr./min. un rēgulātoram ieņemot zināmu stāvokli, tam jāreaģē ar 98 vai 102 apgr./min.

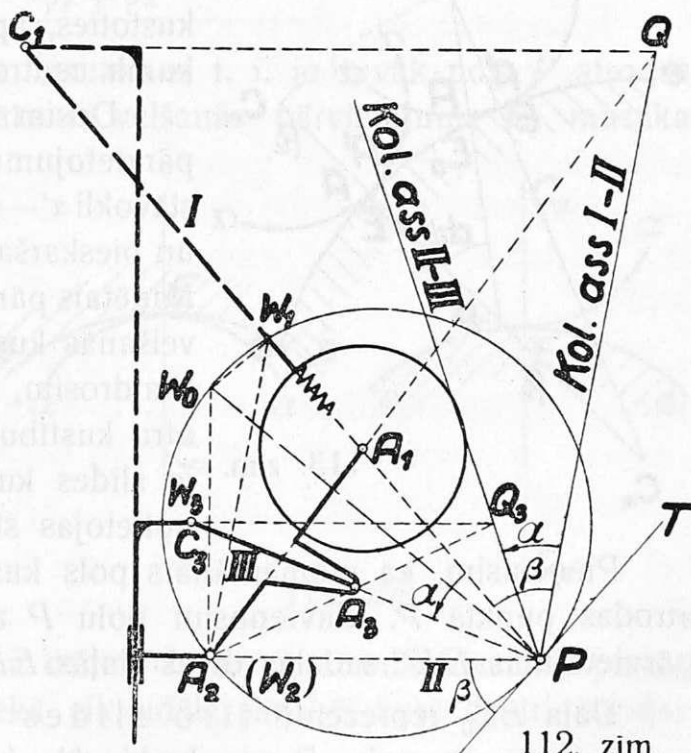
§ 29. Prölla rēgulātors (112. zīm.).

Lai izvairītos no minētā Kleja (Kley) rēgulātorā trūkuma, Prölls (Pröll) izlietoja Bobiljē teorēmu un saisināja stieņu l un $C_1 A_1$ gaņumus, nesamazinot aparāta jūtību.

Šim nolūkam Prölls aizvietoja punkta A_1 griezes centru C_1 ar kādu citu centru C_3 , kas atrodas zemāk.

Lai atrastu šo centru, vispirms atkārtotam veco konstrukciju, nosakot punktu Q , kollineācijas asi I—II un pola tangenti, ievērojot, ka leņķis β starp kollineācijas asi PQ un I staru vienāds ar leņķi β starp II staru un pola tangenti PT .

Tālāk aizvietojam I staru ar kādu citu staru III tā, lai saistītie punkti atrastos tuvāk viens otram. Uz III stara izvēlamies centru C_3 un meklējam punktu, kas būtu saistīts ar C_3 . Šim nolūkam jāatrod jauna



kolineācijas ass II—III, atliekot leņķi α , ko veido I stars ar III, tanī pašā virzienā no PQ . Tad punkts C_3 jāsavieno ar punktu $C_2 \infty$, t. i. jāvelk caur punktu C_3 taisne paralēli II staram. Šī taisne krustojas ar kolineācijas asi II—III punktā Q_3 . Savienojot beidzot punktu A_2 ar Q_3 , atrodam krustošanās punktā ar III staru meklējamo punktu A_3 .

Šinī punktā, kas jāiekārto tā, lai tas piederētu loceklim A_2A_1 , jāievieto šarnīrs un tad locekli C_1A_1 var aizvietot ar jaunu locekli C_3A_3 , pie tam zināmās robežās kustīgas plaknes A_1A_2 kustība būs tāda pat kā pirmajā gadījumā, bet mēchanisms iznāk kompaktāks.

Stienis A_2A_1 vai nu jāizliec, kā tas parādīts 112. zīm., vai arī to taisa tik platu, lai šarnīru A_3 varētu novietot stieņa robežās.

Jaunam mēchanismam uzrādītā stāvoklī ir tas pats pols P un tas pats infleksijas riņķis.

§ 30. Velšanās un slīdes kustība starp aptveřamo un envelopu (113. zīm.).

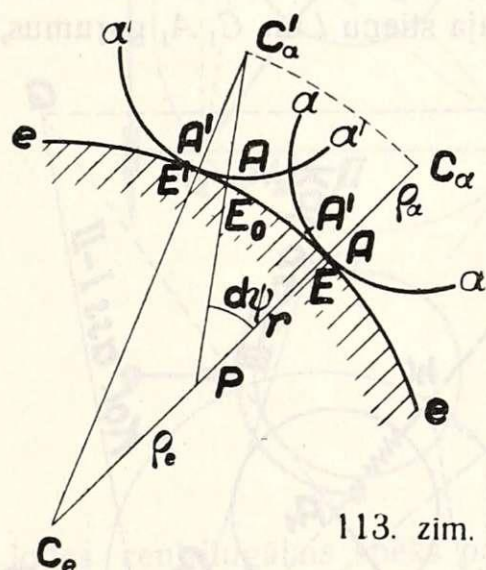
ņemsim kustīgā plaknē kādu aptveřamo līkni $\alpha - \alpha$ un tai atbilstošo envelopu $e - e$ nekustīgā plaknē, pie kam aptveřamā līkne ar punktu A pieskaras envelopai punktā E .

Liekuma centri C_α un C_e , kā zināms ir saistīti punkti, pie kam C_α , līknei $\alpha - \alpha$ kustoties, apraksta trajektoriju, kuŗas liekuma centrs arī atrodas punktā C_e .

Dosim kustīgai plaknei kādu mazu pārvietojumu, pēc kuŗa līkne $\alpha - \alpha$ ieņems stāvokli $\alpha' - \alpha'$, punkts C_α pāries punktā C'_α un pieskaršanās punkts E pāries punktā E' . Minētais pārvietojums var notikt pa daļai ar velšanās kustību un pa daļai ar slīdi. Noskaidrosim, kādi apstākļi veicina vienu vai otru kustību. Šis jautājums ir ļoti svarīgs, jo slīdes kustībā attiecīgās mašīnu daļas nolietojas stiprāk nekā velšanās kustībā.

Pieņemsim, ka momentānais pols kustīgas plaknes pārvietojumam atrodas punktā P . Savienosim polu P ar punktu C'_α , tad punkta E pārvietojums EE' sadalās divās daļās EE_0 un E_0E' .

Daļa EE_0 reprezentē tīro slīdes kustību no kustīgās plaknes griezes ap polu P par leņķi $d\psi$, bet tālāko pārvietojumu E_0E' nevar realizēt ar griezi ap polu, un tas reprezentē pārvietojumu no līknes $\alpha - \alpha$ velšanās kustības uz $e - e$.



113. zīm.

Varam prātot arī tā: ievērojot, ka $\alpha - \alpha$ īstenā pārvietojumā notiek slīdes un velšanās kustība, ar punktu E' nāks saskaršanās nevis punkts A , bet kāds cits punkts A' . Novelsim $\alpha' - \alpha'$ atpakaļ tik tālu, kamēr pie $e - e$ pieskarsies punkts A , tad mēs dabūsim uz pārvietojuma EE' punktu E_0 , kas sadala šo pārvietojumu divās daļās.

Apzīmēsim: $C_\alpha E = \rho_\alpha$, $C_e E = \rho_e$ un $PE = r$, tad $\cup C_\alpha C'_\alpha = (r + \rho_\alpha)d\psi$, bet

$$\frac{EE'}{C_\alpha C'_\alpha} = \frac{\rho_e}{\rho_e + \rho_\alpha},$$

no kurienes

$$EE' = \frac{\rho_e}{\rho_e + \rho_\alpha} (r + \rho_\alpha) d\psi.$$

Tīras slīdes pārvietojums acīm redzot:

$$\boxed{EE_0 = rd\psi} \dots \dots \dots (12)$$

Tā tad velšanās pārvietojumam paliek: $E_0E' = EE' - EE_0$

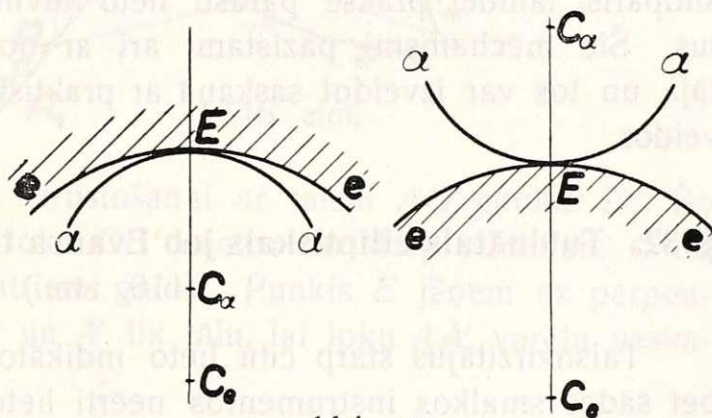
$$E_0E' = \frac{\rho_e(r + \rho_\alpha)}{\rho_e + \rho_\alpha} \cdot d\psi - rd\psi = \frac{\rho_e r + \rho_e \rho_\alpha - \rho_e r - r \rho_\alpha}{\rho_e + \rho_\alpha} \cdot d\psi$$

un galīgi

$$\boxed{E_0E' = \frac{\rho_e - r}{\rho_e + \rho_\alpha} \cdot \rho_\alpha \cdot d\psi} \dots \dots \dots (13)$$

Šīs formulas rāda: 1) jo mazāks r , t. i. jo tuvāk pols P atrodas pieskares punktam E , jo lielāks ir velšanās pārvietojums un mazāka slīde; 2) jo mazāks saucējs $\rho_e + \rho_\alpha$, t. i. attālums starp liekuma centriem $C_\alpha C_e$, jo lielāks ir velšanās pārvietojums un mazāka slīde.

No sacītā seko, ka slīde ir mazāka, ja abi liekuma centri atrodas vienā pusē no pieskares punkta E nekā gadījumā, kad liekuma centri guļ dažādās pusēs (114. zīm.).



114. zīm.

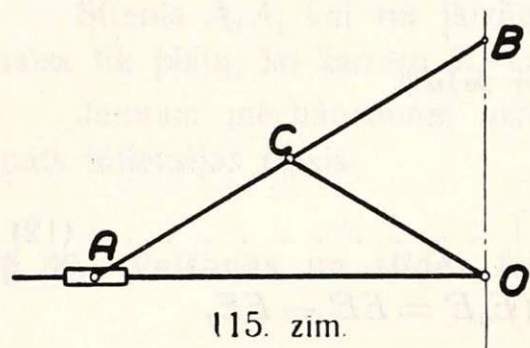
Evolventes sazobē liekuma centri C_α un C_e atrodas dažādās pusēs, tamdēļ šeit slīde ir lielāka nekā cikloidālā sazobē, kuŗā centri atrodas vienā pusē.

Taisnvirzītāji.

§ 31. Precīzais eliptiskais taisnvirzītājs.

Taisnvirzītājs ir tāds mēchanisms, kuŗā kāds noteikts punkts apraksta taisnu līniju.

Atceroties elļipsografa kustību, šādu mēchanismu var viegli uzkonstruēt. Līksim punktam A kustēties uz horizontālas taisnes un savienosim šarnīrveidīgi AB viduspunktu C



ar koordinātu sākumu O ar stieņa $OC = \frac{1}{2} AB$ palīdzību, kas var brīvi griezties ap punktu O (115. zīm.).

Locekļa AB kustības poloidas, kā zināms no „Ķermeņa kinēmatikas“, ir: nekustīgā poloida — riņķis ar radiju AB un centru punktā O ,

bet kustīgā — riņķis ar radiju $\frac{AB}{2}$ un centru punktā C .

Punkts B savā kustībā apraksta vertikālu taisni, kas iet caur punktu O .

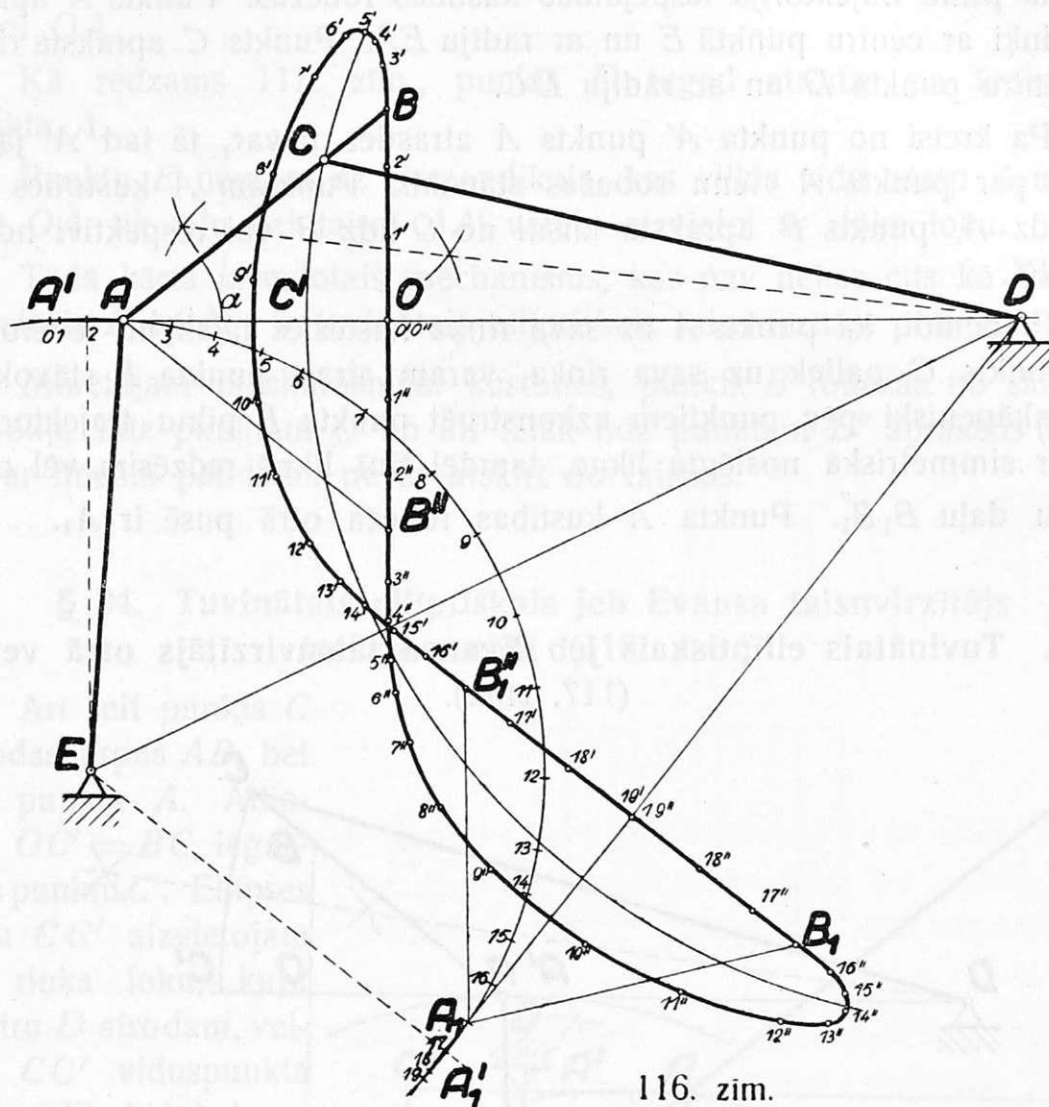
Aprakstītais aparāts ir precīzais elļiptiskais taisnvirzītājs, jo punkts B apraksta matēmatiski precīzu taisni, bet tā trūkums ir tas, ka punkts O atrodas uz pašas aprakstāmās taisnes un ka punktā A ir slīdpāris, tamdēļ praksē parasti lieto tuvinātus elļiptiskus taisnvirzītājus. Šie mēchanismi pazīstami arī ar nosaukumu Evansa taisnvirzītāji, un tos var izveidot saskaņā ar praktiskām vajadzībām trīs dažādos veidos.

§ 32. Tuvinātais elļiptiskais jeb Evansa taisnvirzītājs pirmajā veidā (116. zīm.).

Taisnvirzītājus starp citu lieto indikātoru rakstāmos mēchanismos, bet šādos smalkos instrumentos neērti lietot slīdpārus, tamdēļ vienīgo slīdpāri punktā A aizvieto ar pietiekoši garu stienīti AE , kuŗam griezes ass E atrodas nevis bezgalībā, bet tik tālu, lai punkta A trajektoriju varētu uzskatīt par taisni.

Punktu C ņemsim arī nevis AB viduspunktā, bet tuvāk punktam B , tad, kā zināms, punkts C , ja punkti A un B slid uz divām savstarpīgi perpendikulārām taisnēm, apraksta elļipsi.

Šo ellipses loku aizvietosim ar riņņa loku, kuŗa centru dabūsim tā: ja punkts B nonāks punktā O , tad punkts A pāries punktā A' un punkts C punktā C' . Savienosim punktu C ar C' un vilksim vidū



perpendikulu pret CC' līdz krustošanai ar taisni AO punktā D . Šo punktu D izvēlējamies par loka CC' centru un starp punktiem C un D ievietojam stienīti ar šarnīriem galos. Punkts E jāņem uz perpendikula pret AO vidū starp A un A' tik tālu, lai loku AA' varētu uzskatīt par taisni.

Šāds mēchanisms, kas pēc būtības nav nekas cits kā šarnīru četrstūris $EACD$, ir tuvināts elliptisks taisnvirzītājs pirmajā veidā.

Minētajam mēchanismam kustoties, punkts B robežās no sākuma stāvokļa līdz punktam O un simetrijas dēļ arī tālāk līdz B'' , kas atrodas attālumā $B''O = OB$, aprakstīs līniju, ko ar lineāla palīdzību nevar atšķirt no taisnes.

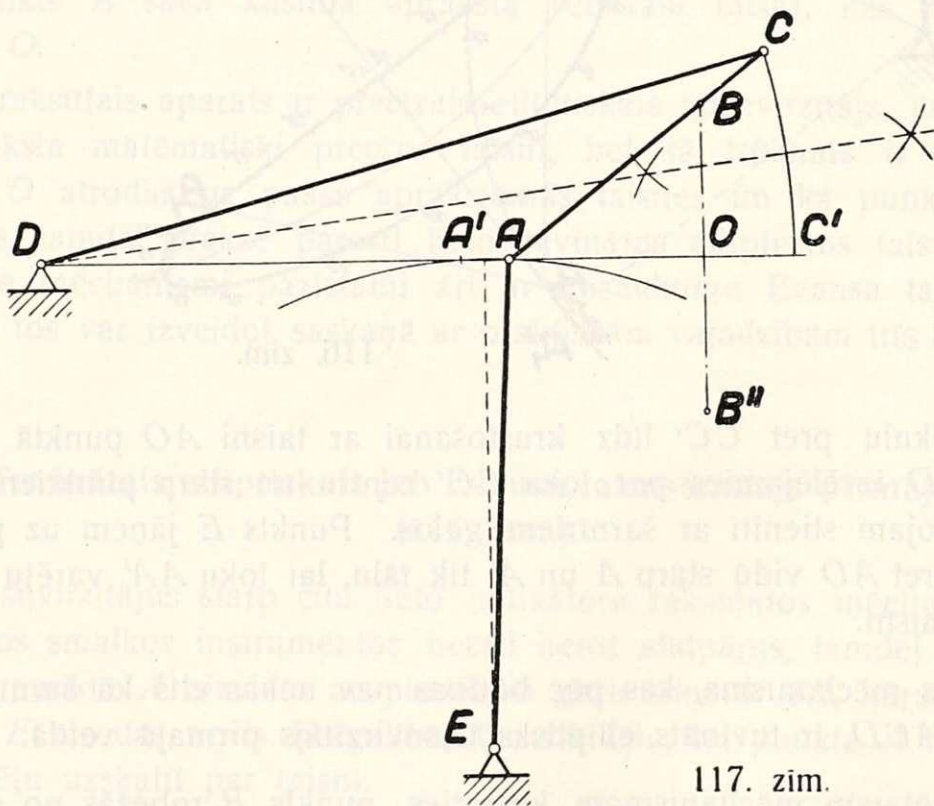
Leņķis α parasti nepārsniedz 45° , jo citādi ellīpses loku nevar aizvietot ar riņķa loku.

Lai gūtu jēdzienu par punkta B tālāko kustību, 116. zīm. konstruēta pilna trajektorija iespējamās kustības robežās. Punkts A apraksta riņķi ar centru punktā E un ar radiju EA . Punkts C apraksta riņķi ar centru punktā D un ar radiju DC .

Pa kreisi no punkta A' punkts A atrasties nevar, tā tad A' jāuzskata par punkta A vienu robežas stāvokli. Punktam A kustoties no A' līdz A , punkts B apraksta taisni no O līdz B vai respektīvi no O līdz B'' .

Pieņemot, ka punkts A uz sava riņķa kustēsies tālāk, un ievērojot, ka punkts C paliek uz sava riņķa, varam atrast punkta B stāvokļus un pakāpeniski pēc punktiem uzkonstruēt punkta B pilnu trajektoriju, kas ir simmetriskā noslēgta likne, tamdēļ šinī liknē redzēsīm vēl otru taisnu daļu $B_1B''_1$. Punkta A kustības robeža otrā pusē ir A'_1 .

§ 33. Tuvinātais elliptiskais jeb Evansa taisnvirzītājs otrā veidā (117. zīm.).



117. zīm.

Ņemsim tagad punktu C ārpus AB aiz punkta B un prātosim tādā pašā kārtā. Punkts C , aprakstot ellīpses loku, pāries punktā C' ,

ja punkts B pāriet punktā O un punkts A , paliekot uz taisnes AO , pāriet punktā A' .

Ellipses loku CC' aizvietojam ar riņķa loku, kuŗa centru D atrodam, velkot perpendikulu pret CC' tā viduspunktā līdz krustošanai ar taisni OA .

Kā redzams 117. zīm., punkts D tagad atrodas pa kreisi no punkta A .

Punktu E ņemam uz perpendikula, kas vilkts vidū starp A un A' pret OA , tik tālu, lai taisni AA' varētu aizvietot ar riņķa loku.

Tādā kārtā izveidotais mēchanisms, kas nav nekas cits kā šarnīru četrstūris $EACD$, ir tuvinātais ellīptiskais taisnvirzītājs otrā veidā.

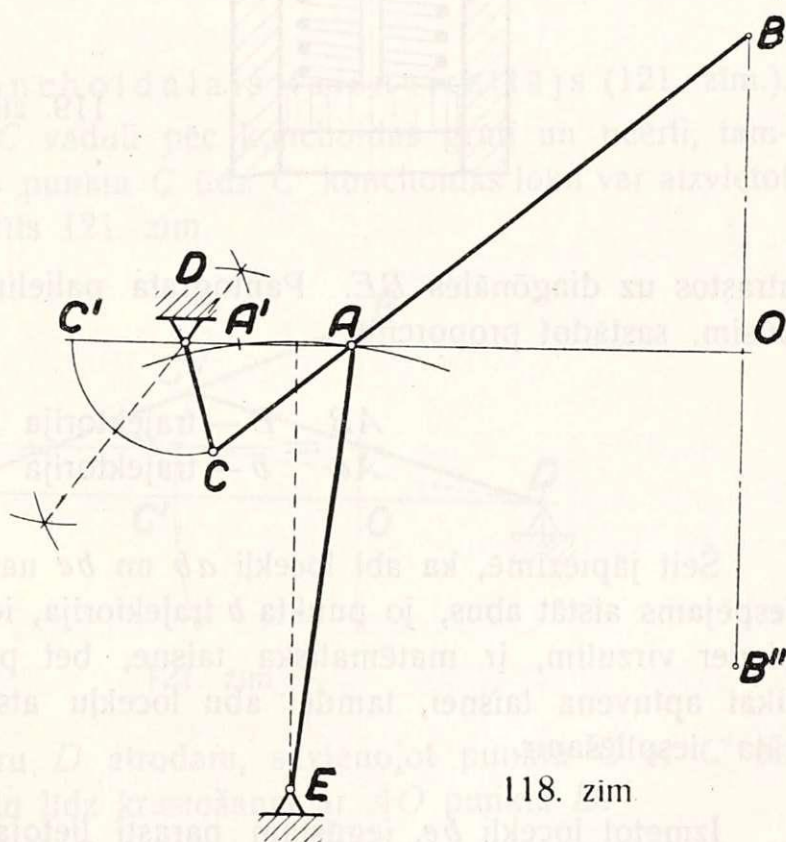
Minētajam mēchanismam kustoties, punkts B robežās no sākuma stāvokļa līdz punktam O un arī tālāk līdz punktam B'' aprakstīs līniju, ko ar līneāla palīdzību nevar atšķirt no taisnes.

§ 34. Tuvinātais ellīptiskais jeb Evansa taisnvirzītājs trešajā veidā (118 zīm.).

Arī šeit punkts C atrodas ārpus AB , bet aiz punkta A . Atliekot $OC' = BC$, iegūstam punktu C' . Ellipses loku CC' aizvietojam ar riņķa loku, kuŗa centru D atrodam, velkot CC' viduspunktā perpendikulu līdz krustošanai ar OA . Starp punktiem C un D ievieojam stieni CD ar šarnīriem galos un iegūstam tādā kārtā šarnīru četrstūri $EACD$ ar nekustīgo malu ED .

Punkts B robežās no B līdz B'' ar pietiekošu precīzītāti aprakstīs taisni.

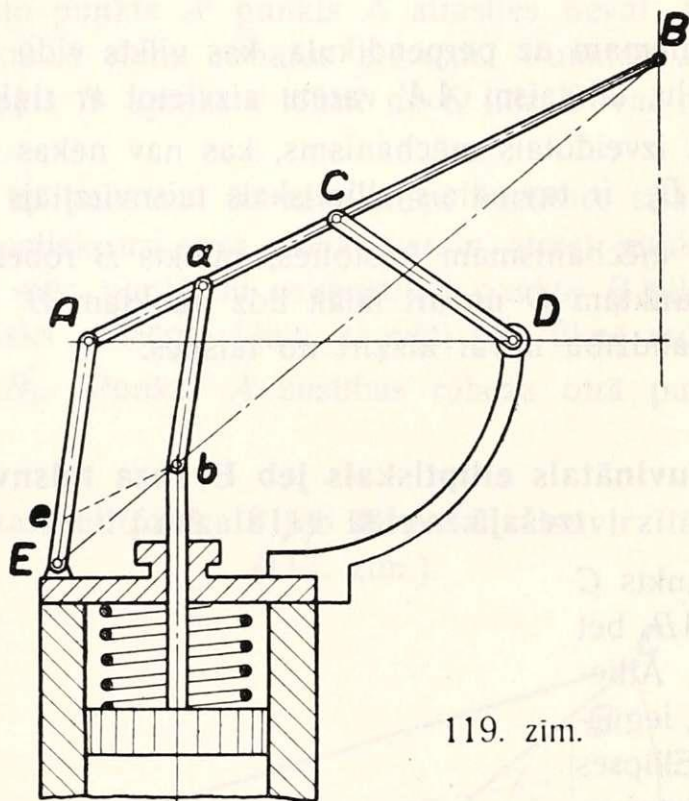
Šini gadījumā, kā redzams, mēchanisms ir kompaktāks.



118. zīm.

Elliptiska taisnvirzītāja lietošana indikātoriem (119. zīm.).

Indikātora virzuļa svārstīšanās amplitūda parasti ir tikai apm. 1 cm, bet, lai dabūtu diagrammu palielinātā veidā, var izmantot pantografa principu, iekonstruējot $\angle BAE$ paralēlogramu $Aabe$ tā, lai virsotne b



119. zīm.

atrastos uz diagonāles BE . Pantografa palielināšanas koeficientu dabūsim, sastādot proporciju:

$$\frac{AB}{Aa} = \frac{B - \text{trajektorija}}{b - \text{trajektorija}}$$

Šeit jāpiezīmē, ka abi locekļi ab un be nav vajadzīgi, un nav pat iespējams atstāt abus, jo punkta b trajektorija, ievērojot, ka šis punkts pieder virzulim, ir matemātiska taisne, bet punkta B trajektorija ir tikai aptuvena taisnei, tamdēļ abu locekļu atstāšana radīs tikai aparāta iespilēšanu.

Izmetot locekli be , iegūstam parasti lietojamo indikātora mēchanismu. Locekli be varētu atstāt tikai tad, ja punkta B trajektorija būtu matemātiska taisne.

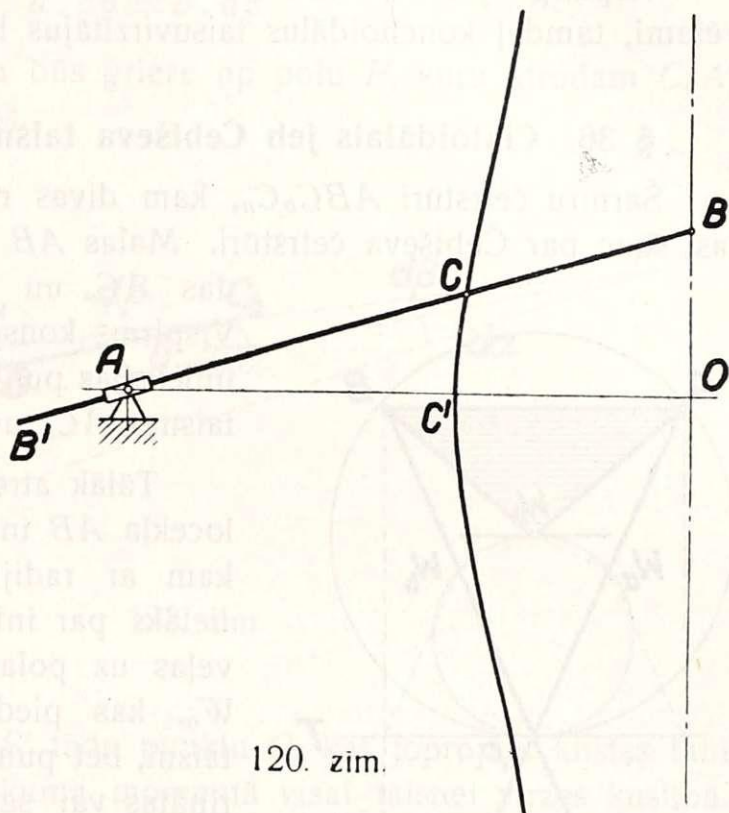
§ 35. Precīzais konchoidālais taisnvirzītājs (120. zīm.).

Konchoidas nolīdzinājums polārkoordinātās ir:

$$r = a + \frac{b}{\cos \varphi}$$

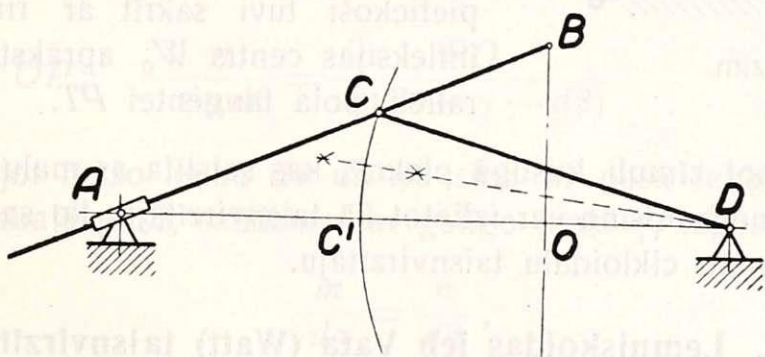
Konchoidai piemīt šāda īpašība: ierakstot nogriezni $C'O$ dažādās vietās starp konchoidu un vertikālo asi punktā O , visas šīs taisnes iet caur noteiktu punktu A .

Šo īpašību var izlietot taisnvirzītāja konstrukcijai: novietosim punktā A slīdpāri, caur kuŗu var slīdēt stienis $B'B$. Punktam C jāizveido vadule konchoida, un tad punkts B aprakstīs precīzu taisni.



Tuvinātais konchoidālais taisnvirzītājs (121. zīm.).

Izveidot punktam C vaduli pēc konchoidas grūti un neērti, tamdēļ vēlamās robežās no punkta C līdz C' konchoidas loku var aizvietot ar riņķa loku, kā parādīts 121. zīm.



Minētā riņķa centru D atrodam, savienojot punktu C ar C' un velkot vidū perpendikulu līdz krustošanai ar AO punktā D .

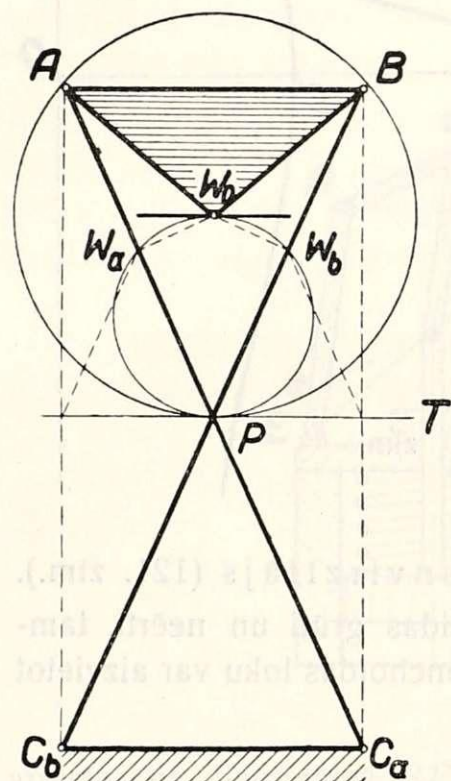
Starp punktiem C un D ievietojam stieni ar šarnīriem galos, ar ko šis mēchanisms pārvēršas par svārstīgo kloķa cilpu DCA , kuŗai

loceklis DA paliek nekustīgs, bet slidošā locekļa punkts B ar zināmu tuvinājumu aprakstīs taisni BO .

Vispārīgi jāsaprot, ka šādos smalkos mēchanismos slīdpaņi nav vēlamī, tamdēļ konchoidālus taisnvirzītājus lieto samērā reti.

§ 36. Cikloidālais jeb Čebiševa taisnvirzītājs (122. zīm.).

Šarnīru četrstūri ABC_bC_a , kam divas malas AC_a un BC_b krustojas, sauc par Čebiševa četrstūri. Malas AB momentānais pols P atrodas AC_a un BC_b krustošanās punktā. Vispirms konstruējam stariem PA un PB infleksijas punktus W_a un W_b , izmantojot taisnes AC_b un BC_a .



122. zīm.

Tālāk atrodam kustīgās plaknes, t. i. locekļa AB infleksijas centru W_0 un velkam ar radiju W_0P riņķi, kas divreiz lielāks par infleksijas riņķi. Ja šis riņķis veļas uz pola tangentes PT , tad punkts W_0 , kas pieder loceklim AB , apraksta taisni, bet punkti A un B apraksta pagarinātas vai saīsinātas cikloidas, atkarībā no tā, vai punkti A un B atrodas ārpus vai iekšpus riņķa.

Faktiski turpretim punkti A un B apraksta riņķu lokus ar centriem C_a un C_b . No sacītā izriet: kamēr cikloidu loki pietiekoši tuvi sakrīt ar riņķu lokiem, infleksijas centrs W_0 apraksta taisni paralēli pola tangentei PT .

Piestiprinot zīmuli kustīgā plaknē, kas saistīta ar malu AB , punktā W_0 , minēto mēchanismu var izlietot kā taisnvirzītāju, ko sauc par Čebiševa jeb tuvinātu cikloidālu taisnvirzītāju.

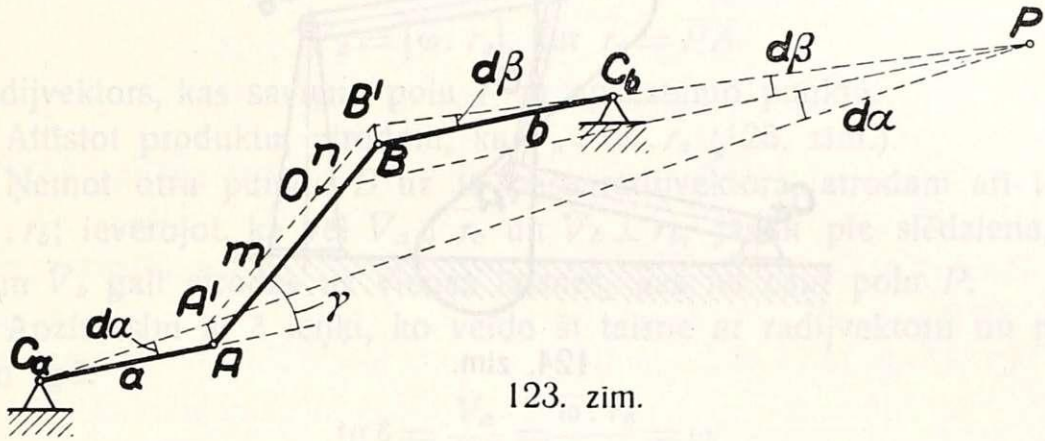
§ 37. Lemniskoidas jeb Vata (Watt) taisnvirzītājs.

Pagriezīsim šarnīru četrstūri C_aABC_b (123. zīm.) malas tā, lai AC_a un BC_b atrastos dažādās pusēs no nekustīgās malas C_aC_b , tad vienmēr var atrast tādu stāvokli, lai $AC_a \parallel BC_b$. Šādā stāvoklī locekļa AB momentānais pols atrodas bezgalībā, un ja loekli AC_a pagriezīsim par kādu mazu leņķi $d\alpha$, loceklis AB pāries stāvoklī $A'B'$ virzes kustībā.

Apzīmējot locekļa BC_b mazo pagriezes leņķi ar $d\beta$ un malu garumus $AC_a = a$ un $BC_b = b$, varam rakstīt

$$a \cdot d\alpha = b \cdot d\beta$$

Tālākā AB kustība jau būs grieze ap polu P , kuŗu atrodam C_aA' un C_bB' krustošanās punktā.



123. zīm.

Meklēsim tagad uz $A'B'$ tādu punktu O , kas joprojām kustas tanī pašā virzienā, kāds bija sākuma momentā visai taisnei virzes kustībā. Šo punktu O atradīsim acīm redzot, velkot taisni $PO \parallel C_bB \parallel C_aA$.

Apzīmēsim punkta O attālumus $A'O = m$ un $B'O = n$ un meklēsim šīs vērtības. Ievēdot leņķi $\pi - C_aAB = \gamma$, varam uzrakstīt pēc sinu teorēmas

$$\text{no } \triangle A'OP: \quad \frac{m}{\sin d\alpha} = \frac{PO}{\sin(\gamma - d\alpha)}$$

$$\text{no } \triangle B'OP: \quad \frac{n}{\sin d\beta} = \frac{PO}{\sin(\pi - \gamma - d\beta)}$$

Aizvietojot mazo leņķu $d\alpha$ un $d\beta$ sinu ar pašu leņķi un atmetot šos leņķus labajā pusē, salīdzinot ar galīgo leņķi γ , iegūstam

$$\frac{m}{d\alpha} = \frac{n}{d\beta},$$

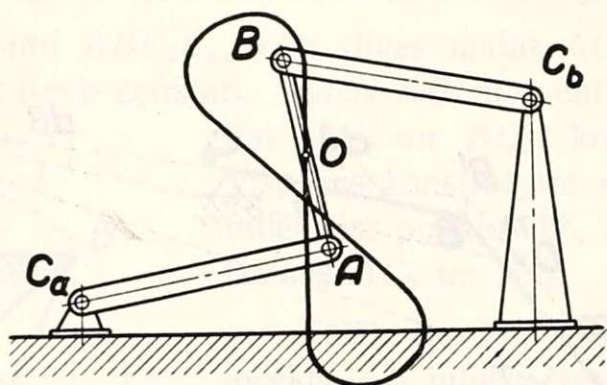
pareizinot šo ar agrāk atrasto: $a \cdot d\alpha = b \cdot d\beta$, iegūstam $am = bn$, no kurienes:

$$\frac{m}{n} = \frac{b}{a}$$

Tas nozīmē, ka punkts O dala locekli AB pretēji proporcionāli pārējo locekļu BC_b un AC_a garumiem. Šis punkts O aprakstīs taisni,

kamēr leņķi $d\alpha$ un $d\beta$ ir tik mazi, ka to sinus var aizvietot ar pašiem leņķiem, kā arī atņemt tos, salīdzinot ar γ .

Speciāls gadījums: Ja $a=b$, tad punkts O atrodas AB viduspunktā. Punkta O trajektorija (124. zīm.) ir slēgta līkne, kas



124. zīm.

pazīstama ar nosaukumu lemniskoida un kuŗas ievērojama daļa ļoti tuva taisnei. Tamdēļ dažreiz Vata taisnvirzītāju sauc arī par lemniskoidas taisnvirzītāju.

VII nodaļa.

Ātrums.

§ 38. Dažas grafiskās ātruma konstrukcijas.

Ievērojot, ka komplāna kustība ekvivalenta momentānai griezes kustībai ap momentāno polu P , varam katra punkta momentāno ātrumu rakstīt vektorprodukta veidā

$$\vec{V}_a = [\vec{\omega} \cdot \vec{r}_a], \text{ kur } \vec{r}_a = \overline{PA}$$

ir radijvektors, kas savieno polu P ar apskatāmo punktu.

Attīstot produktu, atrodam, ka $V_a = \omega \cdot r_a$ (125. zīm.).

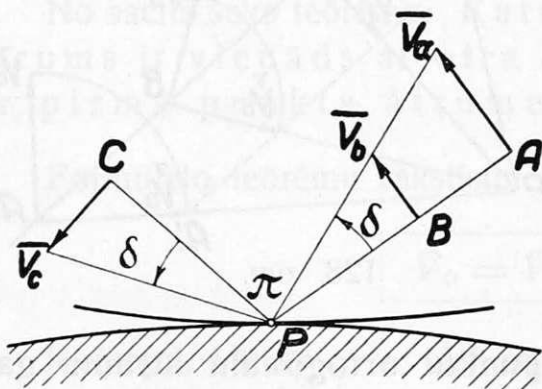
Ņemot otru punktu B uz tā paša radijvektora, atrodam arī $V_b = \omega \cdot r_b$; ievērojot, ka vēl $\vec{V}_a \perp \vec{r}_a$ un $\vec{V}_b \perp \vec{r}_b$, jānāk pie slēdziena, ka \vec{V}_a un \vec{V}_b gali atrodas uz vienas taisnes, kas iet caur polu P .

Apzīmēsim ar δ leņķi, ko veido šī taisne ar radijvektoru un meklēsim $\text{tg } \delta$.

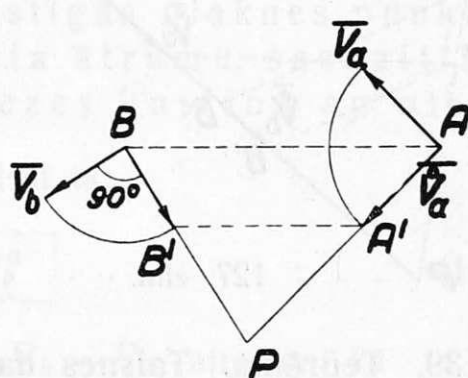
$$\text{tg } \delta = \frac{V_a}{PA} = \frac{\omega \cdot r_a}{r_a} = \omega.$$

Kā redzams, šis leņķis δ neatkarīgs no punkta stāvokļa kustošā plaknē un visiem punktiem vienāds.

No sacītā seko, ka kādam citam punktam C ātrumu dabūsim, atliekot $\angle \delta$ no PC tanī pašā virzienā un velkot caur punktu C perpendikulu pret PC līdz krustošanai ar minētā $\angle \delta$ malu (125. zīm.).



125. zīm.



126. zīm.

Cita ātruma konstrukcija (126. zīm.). Ja vienam punktam A ātrums V_a dots un pola P stāvoklis zināms, tad katram citam kustīgās plaknes punktam B ātrumu var viegli konstruēt šādā kārtā: pagriežam punkta A ātrumu tā, lai tas sakristu ar staru PA . Šo pagriežto ātrumu $\overline{AA'}$ sauksim par ortogonālo ātrumu un apzīmēsim ar \vec{V}_a . Tālāk savienojam punktu B ar A un velkam caur ortogō-

nālā ātruma \vec{V}_a galu taisni paralēli AB . Šī taisne no stara PB nogriež punkta B ortogonālo ātrumu $\overline{BB'} = \vec{V}_b$, kas tikai jāpagriež par 90° tādā pašā virzienā, kā būtu jāpagriež \vec{V}_a uz \vec{V}_a .

Pierādījums: Vispārīgi $V_a = \omega \cdot PA$ un $V_b = \omega \cdot PB$, no kurienes

$$V_b = \frac{PB}{PA} V_a, \text{ bet no 126. zīm. } \frac{BB'}{PB} = \frac{AA'}{PA},$$

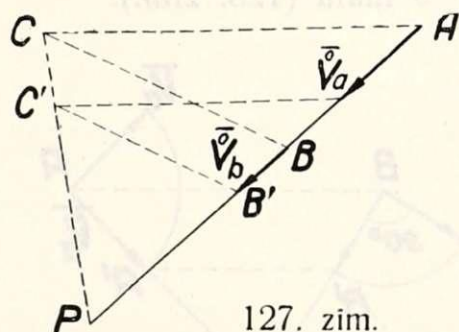
no kurienes $BB' = \frac{PB}{PA} \cdot AA' = \frac{PB}{PA} \cdot V_a$.

Salīdzinot abas izteiksmes, redzams, ka $BB' = V_b$.

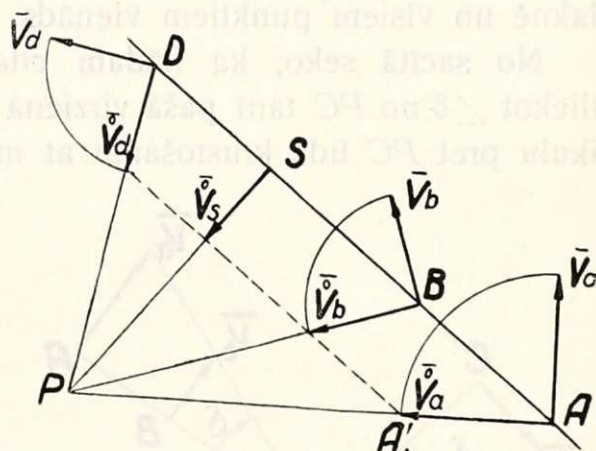
Speciāls gadījums. Dots punkta A ortogonālais ātrums \vec{V}_a un pols P (127. zīm.).

Jākonstruē ortogonālais ātrums punktam B , kas atrodas uz tā paša stara.

Izvēlamies brīvi kādu punktu C ārpus stara PA , savienojam to ar polu P un ar punktiem A un B . Caur \vec{V}_a galu velkam taisni paralēli AC , iegūstot punktu C' , caur kuņu velkam taisni paralēli CB . Šī taisne nogriež punkta B meklējamo ortogonālo ātrumu $\overline{BB'} = \vec{V}_b$.



127. zīm.



128. zīm.

§ 39. Teorēma. Taisnes dažādu punktu ortogonālo ātrumu gali atrodas uz otras taisnes, kas iet paralēli dotai, attālumā V_s no tās (128. zīm.).

Lai pārietu no punkta A ātruma uz kādu citu taisnes punkta B vai D ātrumu pēc augšā parādītās konstrukcijas, jāvelk caur punktu A' taisne paralēli dotai, tā tad visu citu punktu ortogonālo ātrumu gali atrodas uz šīs taisnes, pie kam attālums starp taisnēm acīm redzot vienāds ar tāda punkta S ātrumu V_s , kas iegūts, velkot $PS \perp AD$. Ātrumu V_s sauc par taisnes slīdes ātrumu.

§ 40. Sakars starp divu punktu ātrumiem.

Pieņemsim, ka taisne AB (129. zīm.) atrodas komplānā kustībā. Šī kustība ekvivalenta griezei ap momentāno polu P , pie kam $V_a = \omega \cdot PA$ un $V_b = \omega \cdot PB$.

Sadalīsim $\overline{Bb} = \overline{V}_b$ divās komponentēs, no kuŗām viena $\overline{Ba} = \overline{V}_a$.

Ņemsim līdzīgus trijstūrus

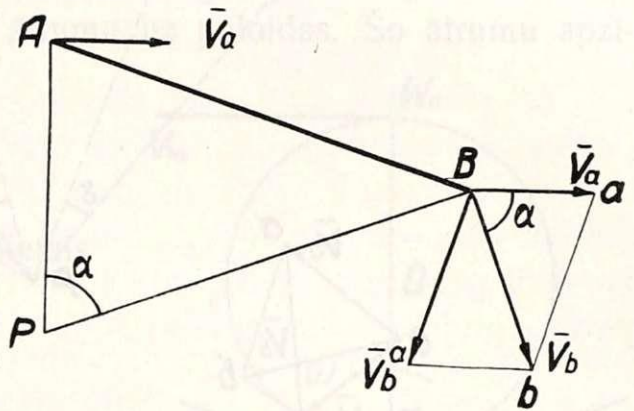
$$\triangle Bab \sim \triangle PAB, \text{ jo } \begin{cases} \angle APB = \angle aBb = \alpha \\ \frac{Ba}{PA} = \frac{Bb}{PB} = \omega, \end{cases}$$

no kurienes seko, pirmkārt, ka $ab \perp AB$, jo arī $Ba \perp PA$ un $Bb \perp PB$

un otrkārt, ka

$$\frac{ab}{AB} = \frac{Ba}{PA} = \omega \text{ jeb } ab = \omega \cdot AB.$$

Tas nozīmē, ka ab nav nekas cits kā punkta B relatīvais ātrums griezes kustībā ap punktu A ar to pašu griezes ātrumu ω . Šim ātrumam ievadam šādu apzīmējumu $\overline{ab} = \overline{V}_b^a$, ko lasīsim tā: ātrums B pret A .



129. zīm.

No sacītā seko teorēma: Katra kustīgās plaknes punkta ātrums ir vienāds ar otra punkta ātrumu, saskaitītu ar pirmā punkta ātrumu griezes kustībā ap otro.

Formulēto teorēmu rakstīsim simboliski tā:

$$\boxed{\overline{V}_b = \overline{V}_a + \overline{V}_b^a} \dots \dots \dots (14)$$

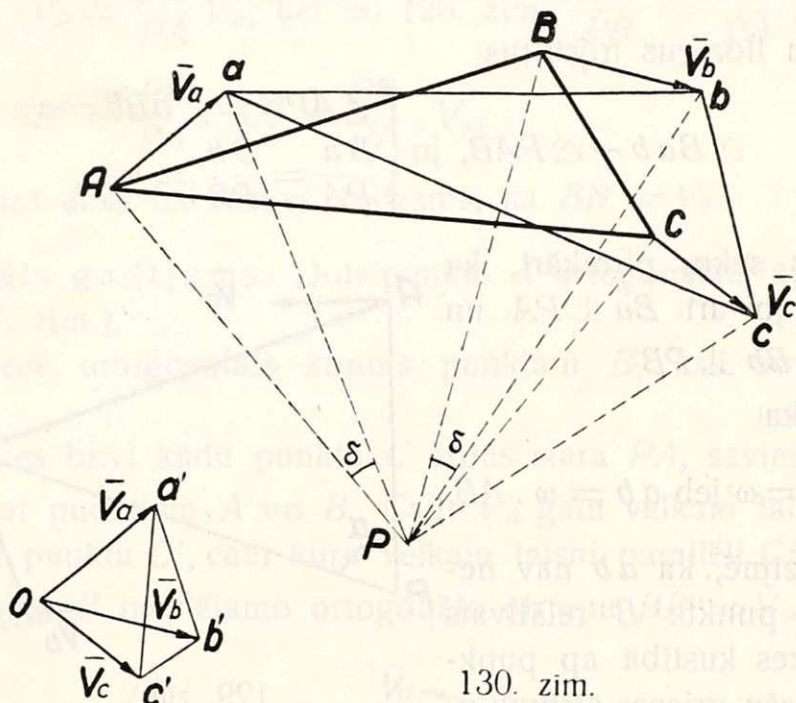
Ievērojot, kā $ab = \omega \cdot AB$ un $\overline{ab} = \overline{V}_b - \overline{V}_a$, atrodam, ka

$$\boxed{\omega = \frac{|\overline{V}_b - \overline{V}_a|}{AB}} \dots \dots \dots (15)$$

Šī formula izsaka, ka kādas taisnes griezes ātrums ω ir vienāds ar divu punktu ātrumu ģeometriskas differences moduli, izdalītu ar attālumu starp šiem punktiem.

§ 41. Teorēma. Savienojot kustīgā plaknē vairāku punktu ātrumu vektoru galus taisnēm, dabūsim figūru, līdzīgu tai, ko veido paši punkti, kas savienoti taisnēm.

Pierādīsim teorēmu trīs punktiem, pēc tam to varēs izplatīt arī uz vairākiem punktiem (130. zīm.).



130. zīm.

Apzīmēsim \bar{V}_a , \bar{V}_b un \bar{V}_c galus ar a , b , c un savienosim tos. Savienosim vēl punktus A , B , C , kā arī a , b , c ar polu P un apskatīsim trijstūrus:

$$\triangle PAB \sim \triangle Pab, \text{ jo } \begin{cases} \angle APB = \angle aPb \\ \frac{AP}{aP} = \frac{BP}{bP} = \cos \delta, \text{ no kurienes} \end{cases}$$

seko, ka $\frac{AB}{ab} = \frac{AP}{aP} = \cos \delta$. Analogiskā kārtā varam pierādīt, ka arī

$\frac{BC}{bc} = \cos \delta$ un $\frac{AC}{ac} = \cos \delta$, tā tad $\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc} = \frac{AC}{ac}$, bet tas nozīmē, ka $\triangle abc \sim \triangle ABC$, ar ko teorēma pierādīta.

§ 42. Polārais ātrumu plāns.

Konstruējot no kāda punkta O ātrumu vektorus $\overline{oa'} = \bar{V}_a$, $\overline{ob'} = \bar{V}_b$, $\overline{oc'} = \bar{V}_c$ un savienojot punktus a' , b' , c' taisnēm (130. zīm.), iegūstam tā saukto polāro ātrumu plānu.

Pierādīsim, ka polārais ātrumu plāns arī līdzīgs dotai figūrai. Kā redzams zīmējumā: $\overline{a'b'} = \overline{ob'} - \overline{oa'} = \bar{V}_b - \bar{V}_a$, bet $\bar{V}_b - \bar{V}_a = \bar{V}_b^a$, tā tad $\overline{a'b'} = \bar{V}_b^a$ un pēc analogijas arī $\overline{b'c'} = \bar{V}_c^b$ un $\overline{a'c'} = \bar{V}_c^a$. Izrādās, ka

trijstūra $a'b'c'$ malas reprezentē trijstūra ABC virsotņu relatīvos ātrumus, bet, ievērojot, ka šie ātrumi perpendikulāri $\triangle ABC$ malām, nākam pie slēdziena, ka $\triangle a'b'c' \sim \triangle ABC$.

Tas nozīmē, ka polārais ātrumu plāns līdzīgs dotai figūrai, bet pagriezts attiecībā pret to par 90° .

§ 43. Pola pārvietošanās ātrums.

Kustīgās plaknes punktam, kas dotā momentā sakrīt ar momentāno polu P , ātrums ir nulle, jo $\vec{V} = [\vec{\omega} \cdot \vec{r}]$ pie $r=0$ dod $V=0$, bet pols P ar laiku maina savu vietu uz nekustīgās poloidas, tā tad varam arī runāt par pola pārvietošanās ātrumu uz poloidas. Šo ātrumu apzīmēsim ar V_p , un tas ir

$$V_p = \frac{ds_p}{dt},$$

kur ds_p ir laika sprīdī dt noietais nekustošās poloidas elements.

No Eulera nolīdzinājuma

$$\frac{d\psi}{ds_p} = \frac{\sin\psi}{r_\omega} = \frac{1}{D}$$

seko $ds_p = D \cdot d\psi$. Izdalot šo nolīdzinājumu ar dt , atrodam

$$\boxed{V_p = \omega \cdot D} \dots \dots \dots (16)$$

kur D ir infleksijas riņķa caurmērs un saskaņā ar formulu (10)

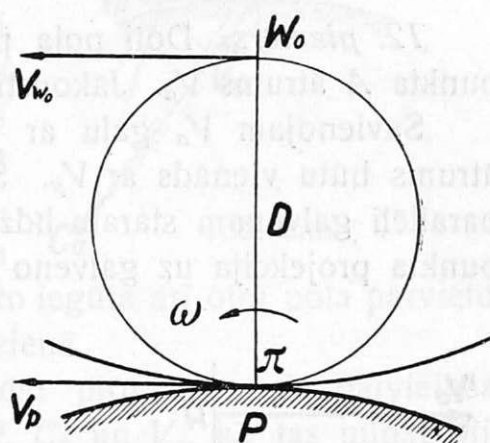
$$D = \pm \frac{\rho_p \rho_\pi}{\rho_p \pm \rho_\pi} \dots \dots \dots (10)$$

(16) formula izsaka, ka pola pārvietošanās ātrums V_p ir vienāds ar griezes ātrumu ω , reizinātu ar infleksijas riņķa caurmēru D .

Meklējot infleksijas centra W_0 ātrumu (131. zīm.), atrodam, ka $V_{w_0} = \omega \cdot D$, un salīdzinot šo formulu ar (16), redzam, ka

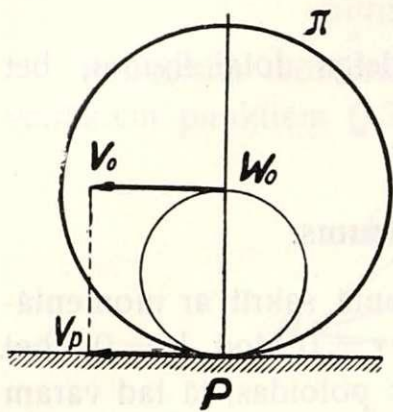
$$\boxed{V_p = V_{w_0}} \dots \dots \dots (17)$$

Tas nozīmē, ka pola pārvietošanās ātrums uz poloidas V_p ir vienāds ar infleksijas centra W_0 kustības ātrumu.



131. zīm.

11. piemērs. Riņķis veļas uz nekustīgās taisnes tā, ka centra ātrums ir V_0 . Atrast infleksijas riņķi (132. zīm.).



132. zīm.

Uzskatīsim taisni par nekustīgo poloidu un pašu riņķi par kustīgo poloidu.

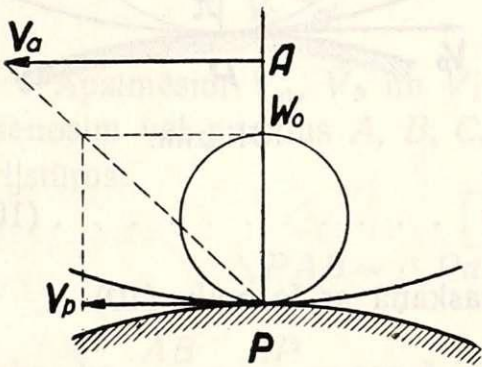
Ja riņķa centra ātrums ir V_0 , tad pieskares punkta P ātrums ir tikpat liels:

$$V_p = V_0, \text{ bet pēc (17) } V_{w_0} = V_p = V_0.$$

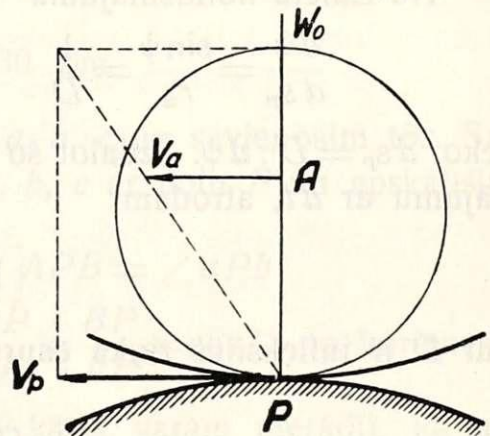
Tas nozīmē, ka infleksijas centrs W_0 sakrīt ar riņķa centru un infleksijas riņķa caurmērs D ir vienāds ar riņķa radiju (132. zīm.).

12. piemērs. Doti pola pārvietošanās ātrums V_p un galvenā stara punkta A ātrums V_a . Jākonstruē infleksijas riņķis.

Savienojam V_a galu ar polu P un meklējam tādu punktu, kam ātrums būtu vienāds ar V_p . Šim nolūkam velkam taisni caur V_p galu paralēli galvenam staram līdz krustošanai ar pirmo taisni. Krustošanās punkta projekcija uz galveno staru dod W_0 .



133. zīm.



134. zīm.

133. zīm. parādīts atrisinājums, kad $V_a > V_p$.

134. zīm. parādīts atrisinājums, kad $V_a < V_p$.

§ 44. Hartmaņa konstrukcija²⁰ (135. zīm.).

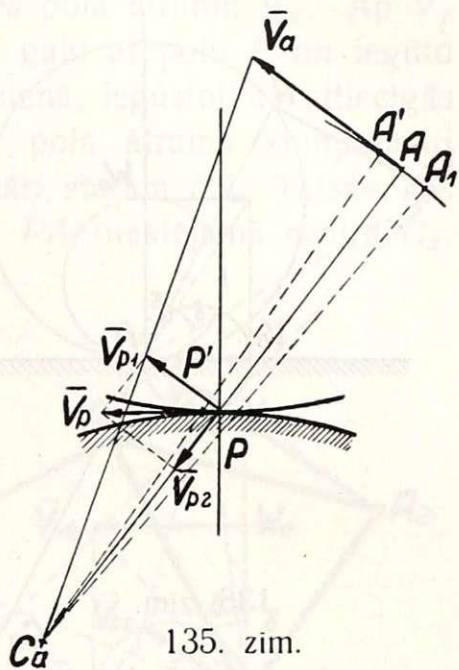
Ņemsim kustīgā plaknē kādu punktu A , kam trajektorijas liekuma centrs atrodas punktā C_a . Šis liekuma centrs paliek turpat trīs bezgalīgi tuviem punkta A stāvokļiem A_1 , A un A' , tā tad šinīs robežās var uzskatīt, ka taisne C_aA ir saistīta ar punktu A un kustas līdz ar to, t. i. griežas ap punktu C_a .

²⁰ W. Hartmann. Krümmungsmittelpunkte der Rast- und Gangpolbahn. V. D. I. 1893. 95. lapp.

Pols P atrodas uz taisnes $C_a A$, kamēr punkts atrodas punktā A , bet ja punkts pāriet stāvoklī A' , tad arī pols P pāriet citā punktā P' , pie kam tas var pārvietoties kā līdz ar taisni $C_a A$, tā arī uz pašas taisnes.

Ievērojot, ka šie pārvietojumi ir bezgalīgi mazi, Hartmanis lika priekšā operēt ar galīgiem lielumiem, un proti, ar ātrumiem.

Atliekam tamdēļ punkta A ātrumu \bar{V}_a attiecīgā virzienā un savienojam tā galu ar punktu C_a . Pola pārvietošanās ātruma komponenti \bar{V}_{p1} kustībā līdz ar taisni $C_a A$ atrodam, velkot caur polu P taisni paralēli \bar{V}_a līdz krustošanai ar taisni, kas savieno C_a ar \bar{V}_a galu. Ievērojot, ka pilns pola pārvietošanās ātrums \bar{V}_p iet pola tangentes virzienā, atrodam to, velkot caur \bar{V}_{p1} galu taisni paralēli staram līdz krustošanai ar pola tangenti. Līdz ar to iegūta arī otrā pola pārvietošanās ātruma komponente \bar{V}_{p2} stara virzienā.



135. zīm.

Sacīto var izmantot divos gadījumos: pirmkārt, pola pārvietošanās ātruma noteikšanai pēc dotiem A , P , C_a un V_a , kā tas nupat bija izdarīts 135. zīm., un otrkārt, punkta A trajektorijas liekuma centra C_a noteikšanai pēc dotiem A , P , V_a un V_p .

Šinī pēdējā gadījumā \bar{V}_p jāsadala divās komponentēs, V_{p1} perpendikulāri staram un V_{p2} stara virzienā; tad taisne, kas vilkta caur \bar{V}_a un \bar{V}_{p1} galiem, krusto staru punktā C_a (135. zīm.).

Aprakstītā konstrukcija pieder Hartmanim un pirmo reizi publicēta žurnālā V. D. I. 1893. g., bet pēc tam tā sastopama visās mācības grāmatās.

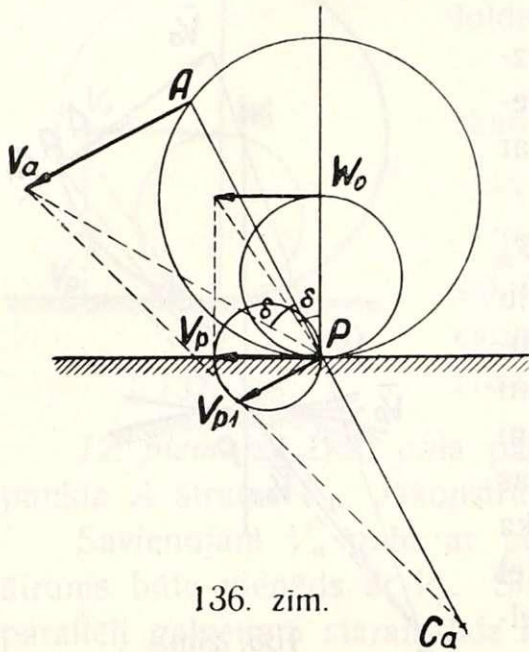
Piezīme: Minētie prātojumi nav attiecināmi uz punktu A un kādu citu punktu B , kas atrodas uz tā paša stara, jo C_b un C_a atrodas uz stara dažādās vietās.

13. piemērs. Konstruēt cikloidas punktam A trajektorijas liekuma centru C_a pēc Hartmaņa metodes (136. zīm.).

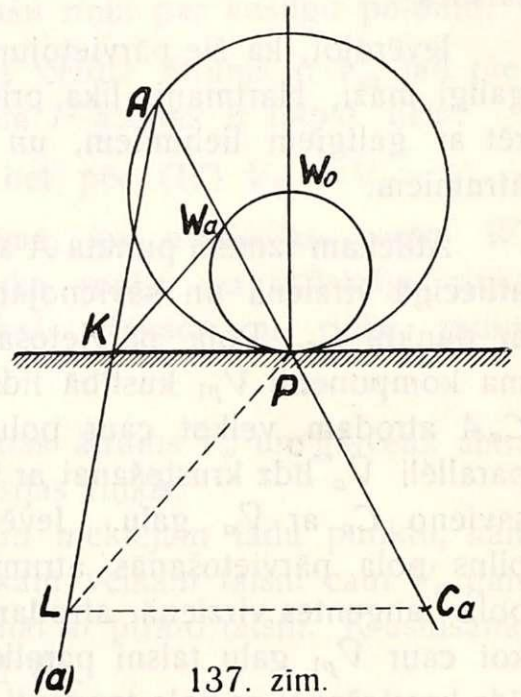
Cikloidu veido kāds riņķa punkts A , ja riņķis veļas uz taisnes. Infleksijas riņķis šādā gadījumā, kā zināms, ir divreiz mazāks, tā tad W_0 sakrīt ar riņķa centru.

Pieņemam brīvi kaut kādu ātrumu \bar{V}_p un, ievērojot, ka $\bar{V}_{w_0} = \bar{V}_p$, konstruējam parastā kārtā punkta A ātrumu \bar{V}_a .

Tālāk konstruējam arī \bar{V}_p komponenti \bar{V}_{p1} perpendikulāri staram PA . Visērtāk tas izdarāms, aprakstot ap \bar{V}_p riņķi un ievielkot šinī riņķī chordu perpendikulāri staram PA . Šī chorda dod \bar{V}_{p1} .



136. zīm.



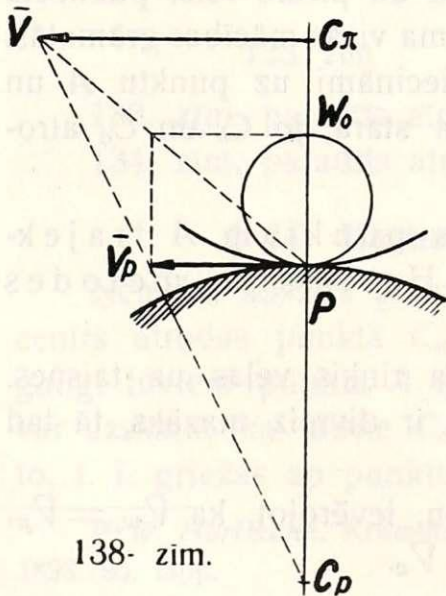
137. zīm.

Beidzot taisne, kas vilkta caur \bar{V}_a un \bar{V}_{p1} galiem, krusto staru meklējamā centrā C_a (136. zīm.).

Salīdzināšanai tas pats jautājums atrisināts ar Eulera konstrukciju (137. zīm.).

Vispirms iezīmēts infleksijas riņķis, kas ir divreiz mazāks par doto riņķi, tad caur punktu A brīvi vilkta taisne (a) . Uz šīs taisnes brīvi ņemts punkts K , kas savienots ar W_a un polu P .

Divas taisnes $PL \parallel W_a K$ un $LC_a \parallel KP$ dod meklējamo punktu C_a .



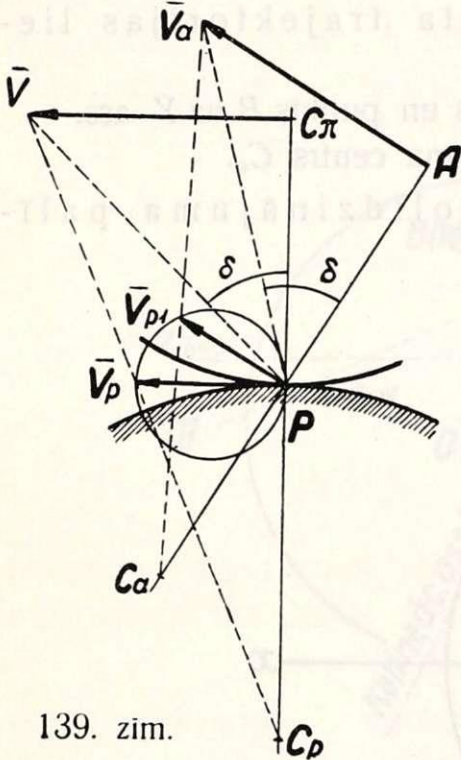
138. zīm.

14. piemērs. Doti: P , C_π un C_p . Jākonstruē infleksijas riņķis pēc Hartmaņa metodes (138. zīm.).

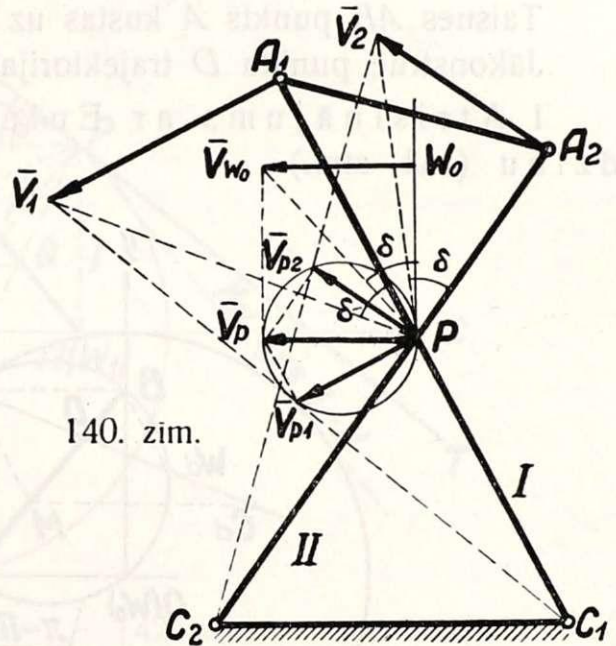
Pieņemam brīvi kaut kādu ātrumu \bar{V} punktam C_π . Savienojam \bar{V} galu ar C_p un atrodam pola tangentē V_p . Pēc tam savienojam \bar{V} galu ar polu P un meklējam tādu punktu, kuŗa ātrums būtu vienāds ar V_p . Šis punkts ir infleksijas centrs W_0 , un ap PW_0 apvelkam infleksijas riņķi (138. zīm.).

15. piemērs. Dots pols P , C_π un C_p . Jākonstruē C_a pēc Hartmaņa metodes (139. zīm.).

Pieņemam brīvi kaut kādu ātrumu \bar{V} punktam C_π . Savienojot \bar{V} galu ar C_p , atrodam uz pola tangentes pola ātrumu \bar{V}_p . Ap \bar{V}_p kā caurmēru apvelkam riņķi. Savienojam \bar{V} galu ar polu P un iegūto leņķi δ atliekam no stara PA tanī pašā virzienā, iegūstot uz attiecīgās taisnes punkta A ātrumu \bar{V}_a . Konstruējam pola ātruma komponenti \bar{V}_{p1} , velkot caur P riņķa chordu perpendikulāri staram PA . Taisne, kas vilkta caur \bar{V}_a un \bar{V}_{p1} galiem, krusto staru PA meklējamā centrā C_a .



139. zīm.



140. zīm.

16. piemērs. Konstruēt Čebiševa četrstūņa loceklim A_1A_2 infleksijas centru W_0 pēc Hartmaņa metodes (140. zīm.).

Punktam A_1 pieņemam brīvi kaut kādu ātrumu \bar{V}_1 . Savienojot \bar{V}_1 galu ar punktu C_1 un velkot caur polu P , kas atrodas A_1C_1 un A_2C_2 krustošanās punktā, taisni perpendikulāri I staram, atrodam pola ātruma projekciju V_{p1} uz virzienu perpendikulāri I staram.

Tālāk savienojam \bar{V}_1 galu ar polu P un iegūto leņķi δ atliekam punktā P tanī pašā virzienā no II stara. Konstruējam punkta A_2 ātrumu \bar{V}_2 , savienojam tā galu ar C_2 un atkal konstruējam pola ātruma projekciju \bar{V}_{p2} , bet tagad uz virzienu perpendikulāri II staram.

Pašu pola ātrumu \bar{V}_p var konstruēt divējādi: 1) velkot caur \bar{V}_{p1} un \bar{V}_{p2} galiem tiem perpendikulāras taisnes līdz krustošanai vai arī 2) apvelkot ap šīm projekcijām riņķi, kas iet caur polu P . Iegūtā riņķa caurmērs dod \bar{V}_p .

Līdz ar to ir arī noteikts pola tangentes virziens PT . Beidzot velkam caur polu P galveno staru perpendikulāri pola tangentei un no tā atliekam to pašu leņķi δ . Velkot caur \bar{V}_p galu taisni paralēli galvenam staram, atrodam uz tā tādu punktu, kuŗa ātrums būtu vienāds ar \bar{V}_p . Šis punkts nav nekas cits kā meklējamais infleksijas centrs W_0 loceklim A_1A_2 .

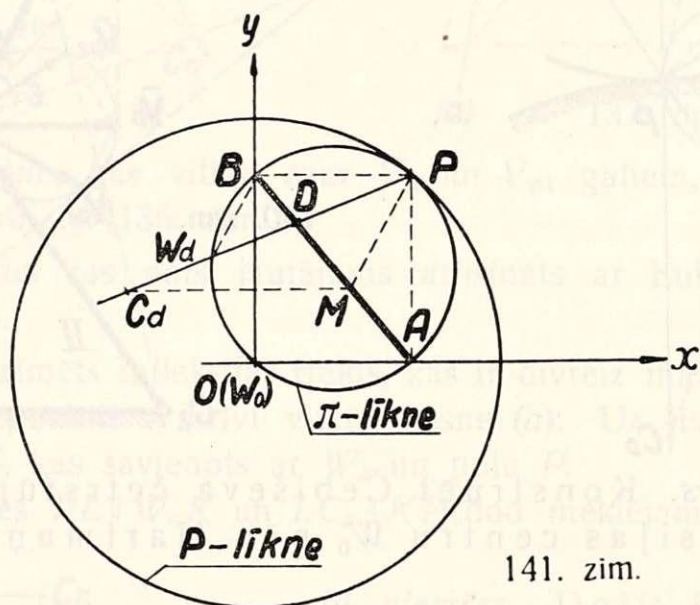
Lai varētu salīdzināt dažādas metodes punkta trajektorijas liekuma centra noteikšanai, atrisināsim nākošo piemēru ar Eulera, Bobiljé (Bobillier) un Hartmaņa metodēm.

17. piemērs. Ellīpsografa punkta trajektorijas liekuma centra noteikšana.

Taisnes AB punkts A kustas uz X -ass un punkts B uz Y -ass.

Jākonstruē punkta D trajektorijas liekuma centrs C_d .

I Atrisinājums ar Eulera nolīdzinājuma palīdzību (141. zīm.).



141. zīm.

Nekustīgā poloida, kā zināms, ir riņķis ar radiju AB un centru punktā O . Kustīgā poloida ir riņķis ar radiju $\frac{AB}{2}$ un centru AB viduspunktā.

Punktu A un B trajektoriju liekuma centri atrodas bezgalībā, tā tad šie punkti atrodas uz infleksijas riņķa un infleksijas riņķis sakrīt ar kustošo poloidu.

Velkam staru PD un atrodam šā stara infleksijas punktu W_d tā krustošanās punktā ar infleksijas riņķi. Tālāk izlietojam Eulera II uzdevuma 2) gadījuma konstrukciju, savienojot W_d ar B un velkot $PM \parallel BW_d$ un pēc tam $MC_d \parallel PB$.

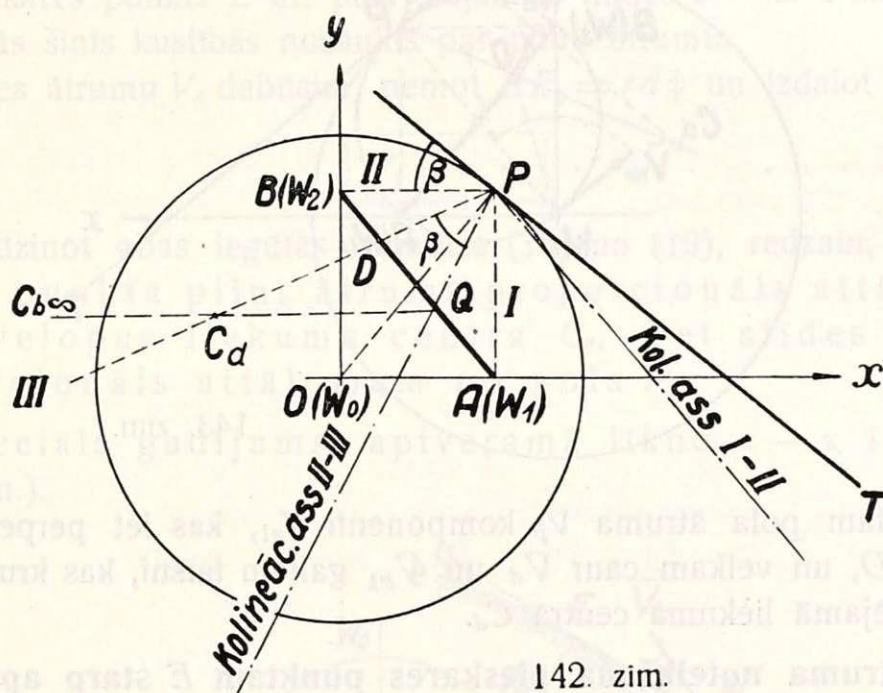
Kontrole:

$$\frac{W_d D}{PD} = \frac{DB}{DM} \quad \text{un} \quad \frac{PD}{DC_d} = \frac{DB}{DM},$$

no kurienes

$$\frac{W_d D}{PD} = \frac{PD}{DC_d} \quad \text{jeb} \quad \frac{k_w}{r} = \frac{r}{k}.$$

II Atrisinājums ar Bobiljè (Bobillier) teorēmas palīdzību (142. zīm.).



142. zīm.

Tāpat kā agrāk atrodam polu P un iezīmējam nekustīgo poloidu un pola tangenti PT .

Staru PA apzīmējam ar I

„ PB „ „ II

„ PD „ „ III

Kollineācijas ass I — II ir paralēla taisnei $W_1 W_2$, t. i. pašai taisnei AB .

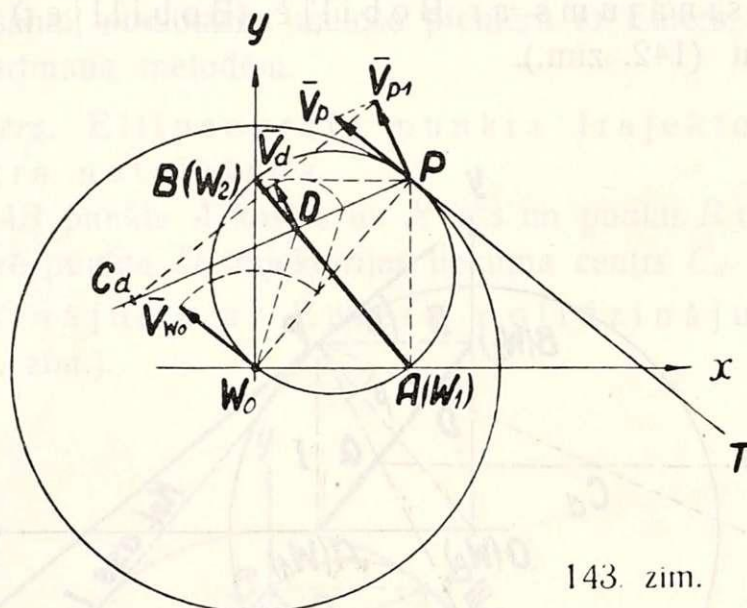
Konstruējam kollineācijas asi II — III, atliekot no III stara $\angle \beta$, ko veido PT ar II staru. Taisne BD krusto kollineācijas asi II — III punktā Q . Šo punktu Q savienojam ar C_b , kas atrodas bezgalībā, un atrodam krustošanās punktā ar III staru meklējamo centru C_d .

III Atrisinājums: pēc Hartmaņa metodes (143. zīm.).

Tāpat kā agrāk atrodam polu P un iezīmējam infleksijas riņķi.

Pieņemam brīvi kaut kādu ātrumu polam \bar{V}_p pola tangentes virzienā.

Ievērojot, ka infleksijas centra W_0 kustības ātrums ir tikpat liels, atliekam \bar{V}_{w_0} un ar tā palīdzību konstruējam punkta D ātrumu \bar{V}_d .



143. zīm.

Atrodam pola ātruma V_p komponenti V_{p1} , kas iet perpendikulāri staram PD , un velkam caur \bar{V}_d un \bar{V}_{p1} galiem taisni, kas krusto staru PD meklējamā liekuma centrā C_d .

§ 45. Ātruma noteikšana pieskares punktam E starp aptveramo un envelope (144. zīm.).

Pieņemam, ka $e - e$ ir envelope ar liekuma centru C_e , $\alpha - \alpha$ ir aptveramā likne ar liekuma centru punktā C_α . Minēto likņu pieskares punkts ir E .

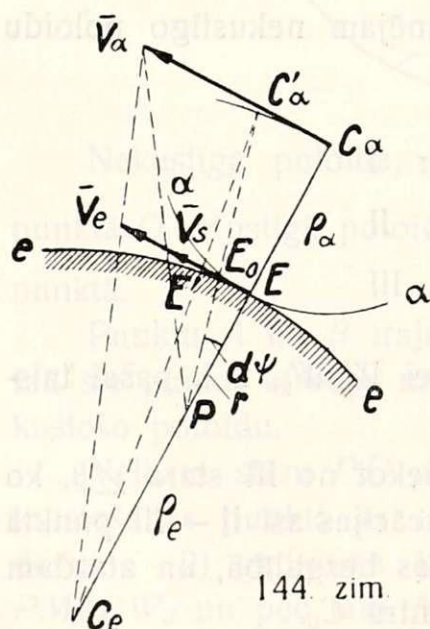
No iepriekšējā zināms, ka kustīgai plaknei kustoties, punkta C_α trajektorijas liekuma centrs atrodas punktā C_e .

Ievedsim apzīmējumus:

$$EC_e = \rho_e, C_\alpha E = \rho_\alpha \text{ un } PE = r.$$

Ja kustīgā plakne par laika sprīdi dt izdarījusi kādu mazu pārvietojumu, pagriežoties ap polu P par $d\psi$, varam noteikt, tāpat kā agrāk,

$$C_\alpha C_\alpha' = (r + \rho_\alpha) d\psi$$



144. zīm.

$$\frac{EE'}{C_\alpha C_\alpha'} = \frac{\rho_e}{\rho_e + \rho_\alpha}, \text{ no kurienes } EE' = \frac{r + \rho_\alpha}{\rho_e + \rho_\alpha} \cdot \rho_e d\psi.$$

Izdalot abas puses ar dt un ievērojot, ka $\frac{EE'}{dt} = V_e$, atrodam pieskares punkta pilnu ātrumu:

$$V_e = \frac{r + \rho_\alpha}{\rho_e + \rho_\alpha} \cdot \rho_e \cdot \omega \quad \dots \dots \dots (18)$$

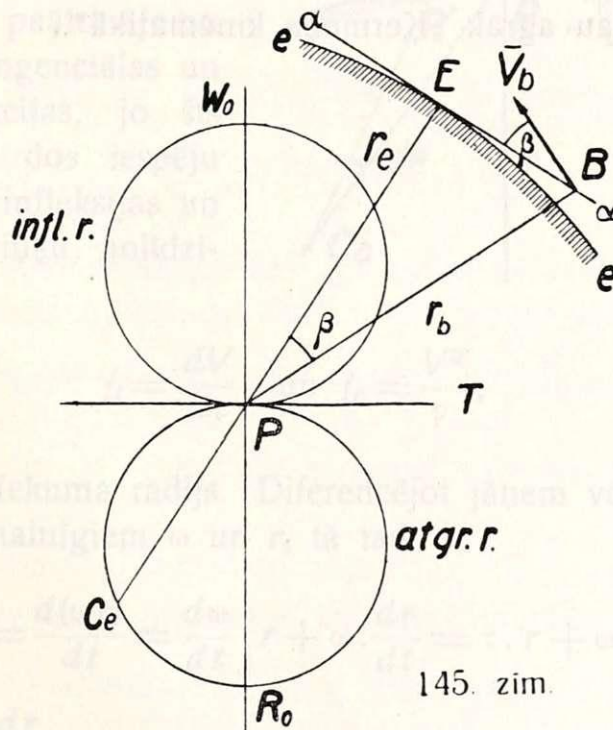
Šis ātrums rodas no tā, ka aptveņamā līkne $\alpha - \alpha$ slīd uz envelopas $e - e$ ar ātrumu V_s , bet bez tam vēl, aptveņamai līknei veļoties, pats pieskares punkts E arī pārvietojas uz līknes $e - e$. Punkta E ātrums abās šīs kustībās nosaukts par pilnu ātrumu.

Slīdes ātrumu V_s dabūsim, ņemot $EE_0 = r d\psi$ un izdalot to ar dt :

$$V_s = r \cdot \omega \quad \dots \dots \dots (19)$$

Salīdzinot abas iegūtās formulas (18) un (19), redzam, ka pieskares punkta pilns ātrums proporcionāls attālumam no envelopas liekuma centra C_e , bet slīdes ātrums proporcionāls attālumam no pola P .

Speciāls gadījums: aptveņamā līkne $\alpha - \alpha$ ir taisne (145. zīm.).



145. zīm.

Šādā gadījumā, ka zināms, C_α atrodas bezgalībā, bet C_e uz atgrieztes riņķa.

Ņemsim formulu (18) un liksim $\rho_\alpha = \infty$

$$V_e = \frac{r + \rho_\alpha}{\rho_e + \rho_\alpha} \cdot \rho_e \omega = \frac{\frac{r}{\rho_\alpha} + 1}{\frac{\rho_e}{\rho_\alpha} + 1} \cdot \rho_e \omega = \frac{\frac{r}{\infty} + 1}{\frac{\rho_e}{\infty} + 1} \cdot \rho_e \omega,$$

no kurienes

$$\boxed{V_e = \rho_e \omega} \dots \dots \dots (20).$$

Slīdes ātrums, tāpat kā agrāk, izteikts ar formulu:

$$\boxed{V_s = r \cdot \omega} \dots \dots \dots (19).$$

Kā redzams, gadījumā, kad likne $\alpha - \alpha$ ir taisne, pieskares punkta E pilns ātrums V_e ir vienāds ar ω , pareizinātam ar attālumu līdz envelopas liekuma centram C_e , bet slīdes ātrums V_s vienāds ar ω , pareizinātam ar attālumu līdz momentānam polam P .

Ņemsim kādu citu taisnes punktu B . Šā punkta ātrums $V_b = \omega \cdot PB$. Projecēsīm šo ātrumu uz pašu taisni

$$V_b \cos \beta = \omega \cdot PB \cdot \cos \beta = \omega \cdot r_b \cos \beta = \omega \cdot r_e = V_s.$$

Tas nozīmē, ka visu taisnes punktu ātrumu projekcijas uz pašu taisni ir vienādas un reprezentē taisnes slīdes ātrumu V_s . Šis apstāklis bija noskaidrots jau agrāk „Ķermeņa kinēmatikā“.

VIII nodaļa.

Paātrinājums.

§ 46. Tangenciālā un normālā paātrinājuma noteikšana.

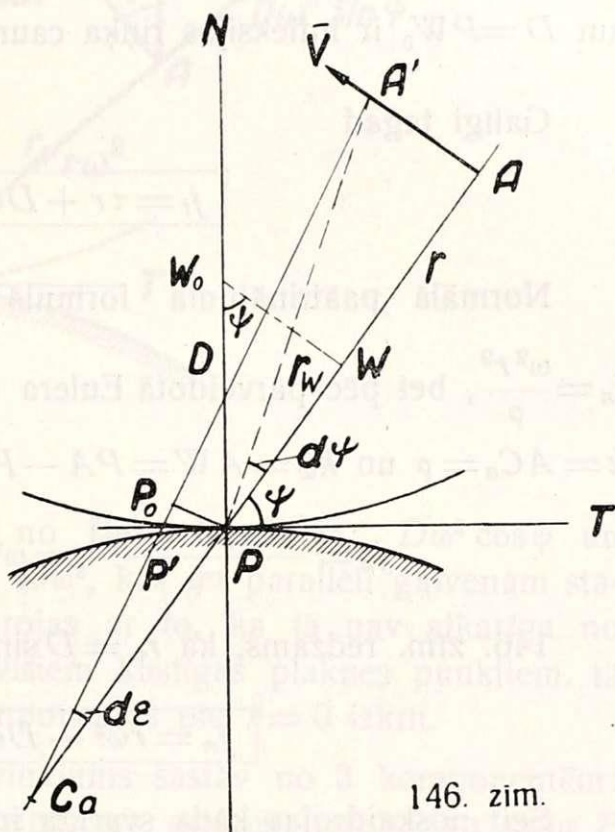
Pieņemsim, ka kustīgās plaknes kustība noteikta ar abām poloidām, griezes ātrumu ω un paātrinājumu τ .

Meklēsim punktam A , kas noteikts ar $r = PA$ un $\angle \psi$, ko veido r ar pola tangenti PT , paātrinājumu \vec{j} (146. zīm.).

Ja kustīgā plakne izdarīs elementāru pārvietojumu, punkts A pāries punktā A' , pols P arī mainīs savu vietu uz poloidas un pāries punktā P' , pie kam staru PA un $P'A'$ krustošanās punktā atradīsies punkta A trajektorijas liekuma centrs C_a .

Punkta A ātrums, kā zināms, ir $\vec{V} = [\omega \cdot \vec{r}]$, bet attīstot produktu, dabūjam $V = \omega \cdot r$.

Punkta A paātrinājumu meklēsim pēc tangenciālas un normālas projekcijas, jo šīs projekcijas vēlāk dos iespēju ļoti viegli atrast infleksijas un Bresa (Bresse) riņķu nolīdzinājumus



146. zīm.

$$j_t = \frac{dV}{dt} \quad \text{un} \quad j_n = \frac{V^2}{\rho},$$

kur $\rho = AC_a$ ir liekuma radijs. Diferencējot jāņem vērā, ka V ir funkcija no diviem mainīgiem ω un r , tā tad

$$j_t = \frac{d(\omega r)}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \cdot r + \omega \cdot \frac{dr}{dt} = \tau \cdot r + \omega \frac{dr}{dt}.$$

Lai atrastu $\frac{dr}{dt}$, atzīmēsim, ka $PA = r$ un $P'A' = r + dr$. Vilkšim $PP_0 \perp P'A'$, tad no $\triangle PP_0P'$, apzīmējot $PP' = ds_p$, iznāk

$P'P_0 = PP' \cos PP'P_0 = ds_p \cos(\psi + d\varepsilon)$, kur $d\varepsilon$ ir punkta A trajektorijas kontingences leņķis, ko var, salīdzinot ar galīgo leņķi ψ , atņemt, un tad $P'P_0 = ds_p \cos \psi$.

Bez lielas kļūdas var tālāk pieņemt, ka $PA = P_0A' = r$, tad no otras puses $P'P_0 = P'A' - P_0A' = r + dr - r = dr$.

Salīdzinot abas $P'P_0$ izteiksmes, atrodam $dr = ds_p \cos \psi$ un, izdalot to ar dt , iegūstam

$$\frac{dr}{dt} = \frac{ds_p}{dt} \cdot \cos \psi = V_p \cos \psi = D\omega \cos \psi,$$

kur $D = PW_0$ ir infleksijas riņķa caurmērs.

Galīgi tagad

$$\boxed{j_t = \tau r + D\omega^2 \cos \psi} \quad \dots \dots \dots (21)$$

Normālā paātrinājuma formulā $j_n = \frac{V^2}{\rho}$ liksim $V = \omega r$, tad $j_n = \frac{\omega^2 r^2}{\rho}$, bet pēc pārveidotā Eulera nolīdzinājuma (11) $r^2 = k \cdot k_w$, kur $k = AC_a = \rho$ un $k_w = AW = PA - PW = r - r_w$, no kurienes

$$j_n = \frac{\omega^2 \cdot \rho (r - r_w)}{\rho} = \omega^2 (r - r_w) = \omega^2 \cdot AW.$$

146. zīm. redzams, ka $r_w = D \sin \psi$ un tad galīgi

$$\boxed{j_n = r\omega^2 - D\omega^2 \sin \psi} \quad \dots \dots \dots (22)$$

Šeit noskaidrojas kāda svarīga infleksijas riņķa īpašība: ja punkts atrodas uz infleksijas riņķa, tad $AW = k_w = 0$ un līdz ar to arī $j_n = 0$.

Tas pats redzams arī formulā $j_n = \frac{V^2}{\rho}$, jo punktam uz infleksijas riņķa $\rho = \infty$, bet tad $j_n = \frac{V^2}{\infty} = 0$.

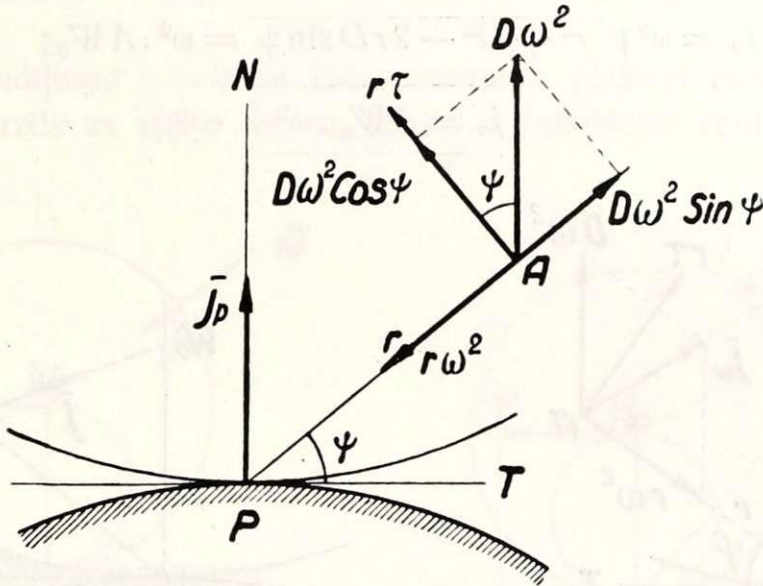
§ 47. Paātrinājums kā 3 komponentu summa.

Paātrinājuma komponentes j_t un j_n formulās (21) un (22) sastāv no diviem locekļiem.

$$j_t = \tau \cdot r + D\omega^2 \cos \psi \quad \dots \dots \dots (21)$$

$$j_n = r\omega^2 - D\omega^2 \sin \psi \quad \dots \dots \dots (22)$$

Atliekam katru locekli atsevišķi attiecīgā virzienā, ievērojot, ka komplānā kustība ir momentāna grieze ap polu P un ka j_n iet caur polu, bet j_t ir perpendikulārs staram PA un virzīts pret pulksteņrādītāju, ja τ ir pozitīvs (147. zīm.).



147. zīm.

Saskaitot ģeometriski divus no šiem locekļiem: $D\omega^2 \cos \psi$ un $D\omega^2 \sin \psi$, dabūjam vienu vektoru $D\omega^2$, kas iet paralēli galvenam staram PN . Šī komponente raksturojas ar to, ka tā nav atkarīga no punkta radijvektora r un piemīt visiem kustīgās plaknes punktiem, tā tad arī polam, kuŗam pārējās komponentes pie $r=0$ izkrit.

Kā redzams, punkta A paātrinājums sastāv no 3 komponentēm: 1) $\tau \cdot r$, kas ir tangenciālais paātrinājums griezes kustībā ap polu P un virzīts perpendikulāri staram PA .

2) $r\omega^2$, kas ir normālais paātrinājums griezes kustībā ap polu P un virzīts uz polu pretim radijvektoram r .

3) $D\omega^2$, kas iet galvenā stara virzienā un reprezentē pola paātrinājumu j_p .

Pola paātrinājumu $D\omega^2$ var pārveidot, ievērojot, ka $D\omega = V_p$, tad $j_p = D\omega \cdot \omega = V_p \omega$ un vektoriālā veidā

$$\bar{j}_p = [\bar{V}_p \cdot \bar{\omega}].$$

Sakarā ar sacīto paātrinājumu \bar{j} var uzrakstīt arī vektoriālā veidā

$$\bar{j} = [\bar{V}_p \cdot \bar{\omega}] + [\bar{\tau} \cdot \bar{r}] - \bar{r} \cdot \omega^2 \quad \dots \dots \dots (23)$$

§ 48. Paātrinājums kā 2 komponentu summa.

No atrastām 3 paātrinājuma komponentēm: $\tau \cdot r$, $r\omega^2$ un $D\omega^2$ geometriski saskaitīsim divas pēdējās, apzīmējot rezultātu ar \vec{j}_w (148. zīm.).

Tad

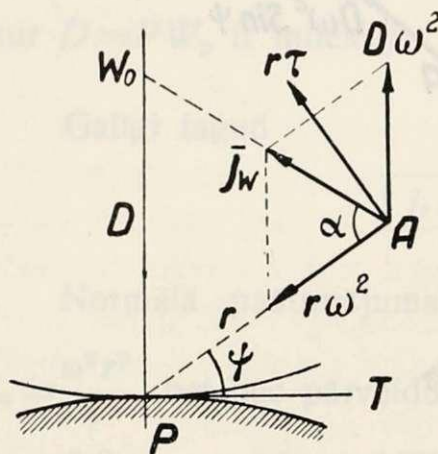
$$j_w = \omega^2 \sqrt{r^2 + D^2 + 2rD \cos\left(\frac{\pi}{2} + \psi\right)}$$

jeb

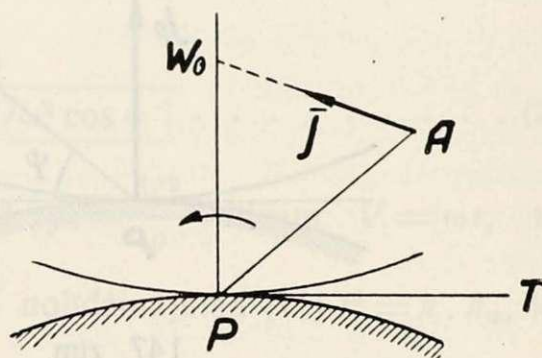
$$j_w = \omega^2 \sqrt{r^2 + D^2 - 2rD \sin \psi} = \omega^2 \cdot AW_0;$$

tā tad

$$\boxed{j_w = AW_0 \cdot \omega^2} \dots \dots \dots (24)$$



148. zīm.



149. zīm.

Pierādīsim, ka \vec{j}_w ir virzīts uz punktu W_0 . Pieņemsim, ka tas nav tā un ka AW_0 veido ar AP leņķi α , bet \vec{j}_w veido ar AP leņķi α_1 , tad pēc sinu teorēmas no $\triangle PAW_0$ seko

$$\frac{D}{\sin \alpha} = \frac{AW_0}{\cos \psi},$$

bet no mazā trijstūrā

$$\frac{D\omega^2}{\sin \alpha_1} = \frac{AW_0 \cdot \omega^2}{\cos \psi};$$

salīdzinot abas proporcijas, redzams, ka $\angle \alpha = \angle \alpha_1$.

Sacītam seko, ka paātrinājuma vektoru var sastādīt arī no divām komponentēm

$$\boxed{\vec{j} = [\tau \cdot r] + \vec{j}_w} \dots \dots \dots (25),$$

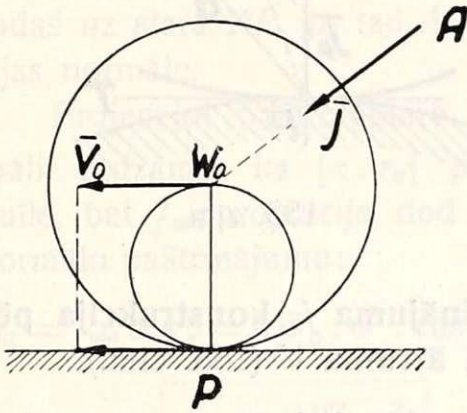
no kurām viena $[\tau \cdot r]$ ir tangenciālais paātrinājums griezes kustībā ap polu P , bet otra \vec{j}_w ir normālais paātrinājums griezes kustībā ap infleksijas centru W_0 .

Speciāls gadījums: $\omega = \text{const.}$ un grieze ir vienmērīga (149. zīm.).

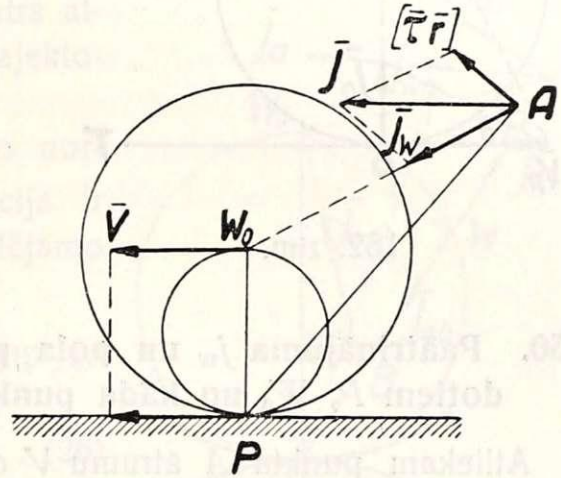
Tādā gadījumā $\tau = \frac{d\omega}{dt} = 0$ un $\vec{j} = \vec{j}_w$. Tas nozīmē, ka tad kustīgā plaknē visu punktu paātrinājumi iet caur infleksijas centru W_0 (149. zīm.).

18. piemērs. Riņķis veļas vienmērīgi uz taisnes (150. zīm.).

Šādā gadījumā $\tau = 0$ un katra kustošās plaknes punkta A paātrinājums \vec{j} virzīts uz riņķa centru, jo tas ir infleksijas centrs W_0 .



150. zīm.



151. zīm.

19. piemērs. Riņķis veļas nevienmērīgi uz taisnes (151. zīm.).

Katram kustīgās plaknes punktam ir divi paātrinājumi: τr perpendikulārs PA un $j_w = AW_0 \cdot \omega^2$, kas virzīts uz riņķa centru. Saskaitot tos iegūstam pilnu paātrinājumu $\vec{j} = [\tau r] + \vec{j}_w$.

Sacitam seko, ka komplānu kustību katrā laika momentā var aizvietot ar tāda riņķa veļšanos uz pola tangentes, kuŗš divreiz lielāks par infleksijas riņķi.

§ 49. Pola paātrinājuma \vec{j}_p konstrukcija pēc P , W_0 un V_p ²¹ (152. zīm.).

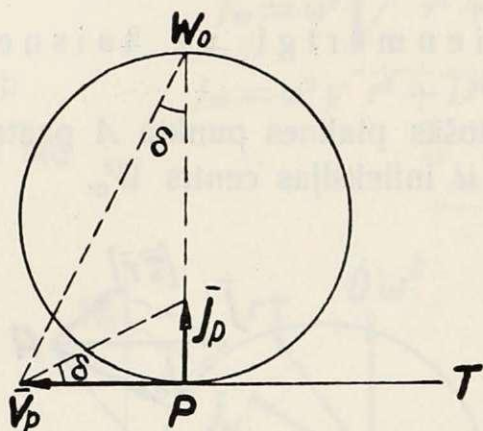
Savienojot \vec{V}_p galu ar W_0 , redzam, ka

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{V_p}{D} = \frac{D\omega}{D} = \omega.$$

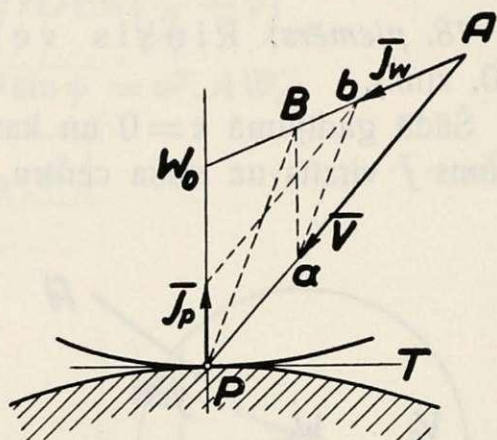
²¹ N. Rozenauers: Jauna slīdsviras tvaikdaļa mēchanisma (Wälzhebelsteuerung) paātrinājuma konstrukcija. L. Ū. R. Mēch. fak. serija. II № 8.

Velkam caur \bar{V}_p galu taisni zem $\angle \delta$ pret pola tangenti. Šī taisne uz galvenā stara nogriež pola paātrinājumu j_p , jo

$$j_p = D\omega^2 = V_p \omega = V_p \operatorname{tg} \delta.$$



152. zim.



153. zim.

§ 50. Paātrinājuma j_w un pola paātrinājuma j_p konstrukcija pēc dotiem P , W_0 un kāda punkta A ātruma V (153. zīm.).

Atliekam punkta A ātrumu V ortogonālā virzienā un apzīmējam tā galu ar a . Velkam $aB \parallel PW_0$, savienojam punktu P ar B un velkam $ab \parallel PB$.

Pierādīsim, ka Ab reprezentē meklējamo paātrinājumu j_w .

No līdzīgiem trijstūriem:

$$\triangle Aba \sim \triangle ABP \quad \text{un} \quad \triangle ABa \sim \triangle AW_0P$$

seko proporcijas:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{Ab}{AB} = \frac{V}{AP} \\ \frac{AB}{AW_0} = \frac{V}{AP} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{pareizinot abas proporcijas, iegūstam} \\ \frac{Ab}{AW_0} = \left(\frac{V}{AP}\right)^2, \text{ bet } \frac{V}{AP} = \omega, \text{ un tad iznāk} \\ Ab = AW_0 \cdot \omega^2. \text{ Tas nozīmē, ka tiešām } \overline{Ab} = \bar{j}_w. \end{array}$$

Ievērojot \bar{j}_w konstrukciju (148. zīm.), taisne, kas vilkta caur \bar{j}_w galu paralēli staram AP , no galvenā stara nogriež pola paātrinājumu \bar{j}_p , kas tādā kārtā viegli atrodams (153. zīm.).

Vajadzības gadījumā var atrast arī $r\omega^2$, veidojot diferenci $\bar{j}_w - \bar{j}_p$, bet to nedrīkst sajaukt ar normālo paātrinājumu \bar{j}_n , kuŗa izteiksme apskatīta § 51.

Piezīme: Ja grieze vienmērīga, $\omega = \text{const.}$ un $\tau = 0$, tad $\overline{Ab} = \bar{j}$ reprezentē pilnu paātrinājumu.

§ 51. Normālā paātrinājuma izteiksme ar punkta attālumu no tā paša stara infleksijas punkta.

Kā zināms, punkta A pilns paātrinājums sastādās no divām komponentēm

$$\vec{j}_a = [\vec{\tau} \cdot \vec{r}_a] + \vec{j}_{wa} \dots \dots \dots (25),$$

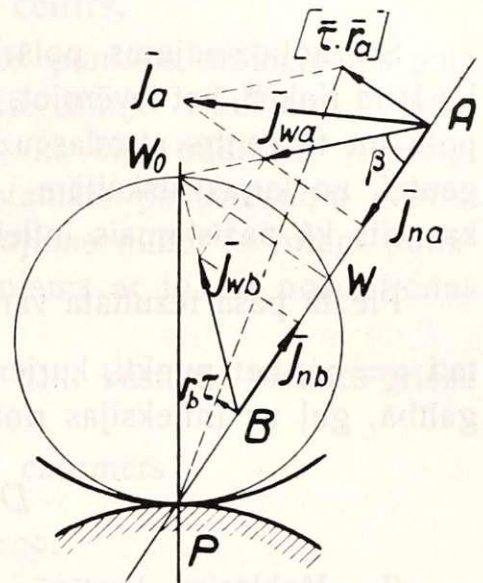
kur $[\vec{\tau} \cdot \vec{r}_a] \perp \overline{PA}$ un $j_{wa} = AW_0 \cdot \omega^2$ virzīts uz infleksijas centru W_0 (154. zīm.).

Meklēsim normālo paātrinājumu j_{na} . Punkta A trajektorijas liekuma centrs atrodas uz stara AP , tā tad AP ir trajektorijas normāle.

Projecējot paātrinājumu uz šo normāli, redzams, ka $[\vec{\tau} \cdot \vec{r}_a]$ projekcija ir nulle, bet \vec{j}_{wa} projekcija dod meklējamo normālo paātrinājumu:

$$j_{na} = j_{wa} \cos \beta = AW_0 \cdot \omega^2 \cdot \cos \beta = AW \cdot \omega^2$$

$$\boxed{j_{na} = AW \cdot \omega^2} \dots \dots (26)$$



154. zīm.

Tas nozīmē, ka komplānā kustībā kāda punkta normālais paātrinājums vienlīdzīgs ar griezes ātruma kvadrātu, pareizinātu ar punkta attālumu līdz tā paša stara infleksijas punktam W , un ir virzīts uz infleksijas punktu.

To pašu rezultātu var iegūt arī citā ceļā, ievērojot, ka vispārīgi

$$j_n = \frac{V^2}{\rho}, \text{ bet } V = r \cdot \omega \text{ un } r^2 = k \cdot k_w = \rho \cdot AW, \text{ tā tad}$$

$$j_n = \frac{r^2 \omega^2}{\rho} = \frac{\rho \cdot AW \cdot \omega^2}{\rho} = AW \cdot \omega^2.$$

1. piezīme. Ja punkts atrodas uz infleksijas riņķa, tad $AW = 0$ un līdz ar to arī $j_n = 0$.

2. piezīme. Ja punkts atrodas iekšpus infleksijas riņķa, kā piemēram, punkts B (154. zīm.), tad $j_{bn} = BW \cdot \omega^2$ un ir virzīts uz infleksijas punktu, bet no pola P .

§ 52. Bresa (Bresse) un La Hira riņķi.

I. Meklēsim kustīgā plaknē tādu punktu ģeometrisko vietu, kuriem $j_n = 0$. Šim nolūkam ņemsim formulu

$$j_n = r\omega^2 - D\omega^2 \sin \psi \dots \dots \dots (22)$$

Pielīdzinot šeit $j_n = 0$, atrodam $r\omega^2 - D\omega^2 \sin \psi = 0$ jeb

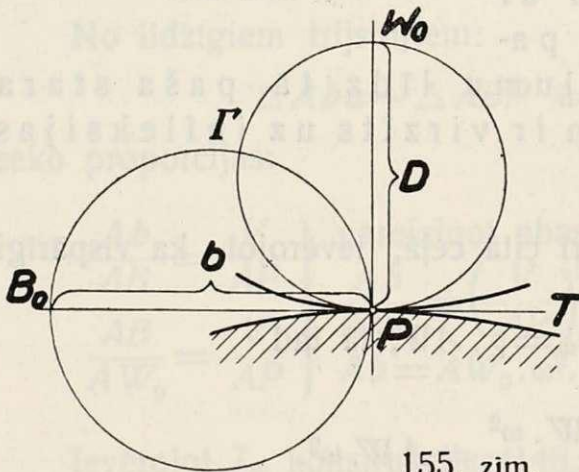
$$\boxed{r = D \sin \psi} \dots \dots \dots (27)$$

Šis nolīdzinājums polārkoordinātās reprezentē riņķi, ko sauc par La Hira riņķi²², bet ievērojot, ka tā caurmērs ir D , ka pats riņķis iet caur polu un tā centrs atrodas uz taisnes, kas iet perpendikulāri pola tangentei, no kuņas atskaitām $\angle \psi$, nākam pie slēdziena, ka tas nav nekas cits kā pazīstamais infleksijas riņķis (155. zīm.).

Pie tā paša rezultāta varētu nonākt arī citādi: $j_n = \frac{V^2}{\rho}$ un ja $j_n = 0$, tad $\rho = \infty$, bet punkti, kuriem trajektorijas liekuma centrs atrodas bezgalībā, guļ uz infleksijas riņķa, kuņa caurmērs

$$D = \pm \frac{\rho_p \rho_\pi}{\rho_p \pm \rho_\pi}$$

II. Meklēsim kustīgā plaknē tādu punktu ģeometrisko vietu, kuriem $j_t = 0$.



Šim nolūkam ņemsim formulu

$$j_t = \tau r + D\omega^2 \cos \psi \dots (21)$$

Pielīdzinot $j_t = 0$, atrodam

$$\tau r + D\omega^2 \cos \psi = 0$$

jeb

$$r = -\frac{D\omega^2}{\tau} \cdot \cos \psi.$$

Apzīmējot

$$\text{vēl } \frac{D\omega^2}{\tau} = b, \text{ iegūstam}$$

$$\boxed{r = -b \cos \psi} \dots \dots \dots (28)$$

Šis nolīdzinājums polārkoordinātās arī reprezentē riņķi ar caurmēru b , bet ar centru uz pola tangentes PT pa kreisi no pola P , ja

²² De la Hire. Traité des roulettes. 1706.

leņķis ψ atskaitīts no PT labās puses. Šis riņķis ir no „Ķermeņa kinēmatikas“ pazīstamais Bresa riņķis²³. Bresa riņķis, tāpat kā La Hira riņķis, iet caur polu (155. zīm.).

Piezīme: Ja τ negatīvs, t. i. griezes kustība ap polu palēnināta, tad nolīdzinājumā (28) būs (+) zīme un Bresa riņķis atradīsies labajā pusē.

Bresa riņķa krustošanās punkts ar pola tangenti apzīmēts ar B_0 , $PB_0 = b$ tad ir Bresa riņķa caurmērs.

§ 53. Paātrinājumu centrs.

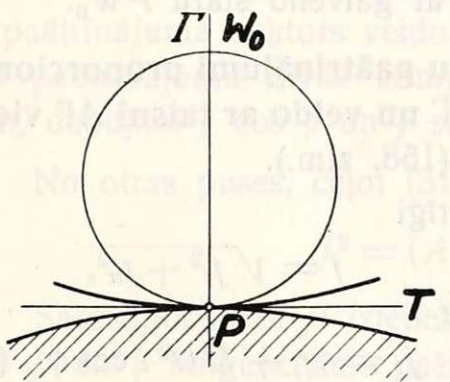
Bresa un La Hira riņķi krustojas divos punktos momentānā polā P un otrā punktā, kas apzīmēts ar Γ (155. zīm.). Punktam Γ acīm redzot $j_n = 0$ un $j_t = 0$, bet tas nozīmē, ka šim punktam vispārīgi $j = 0$ un ka tas nav nekas cits kā pazīstamais paātrinājumu centrs. Punkts Γ ir vienīgais punkts, kam paātrinājums nulle, jo otram punktam P , kā zināms, $j_p = D\omega^2$, kas izskaidrojams ar to, ka pols atrodas savas trajektorijas atgriezes punktā.

Speciāls gadījums: $\omega = \text{const.}$, t. i. kustīgās plaknes grieze vienmērīga (156. zīm.).

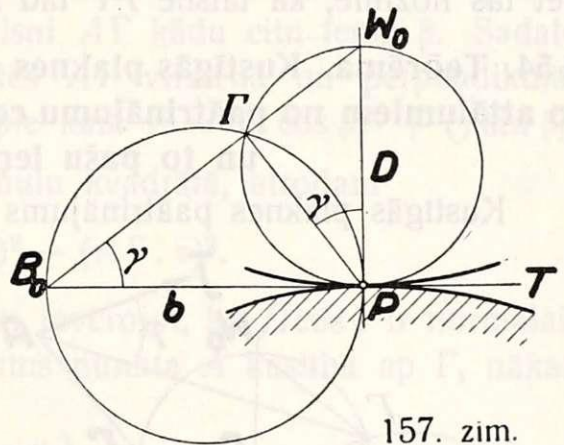
Tādā gadījumā $\tau = 0$ un Bresa riņķa caurmērs

$$b = \frac{D\omega^2}{\tau} = \frac{D\omega^2}{0} = \infty.$$

Kā redzams, Bresa riņķa caurmērs kļūst bezgalīgi liels un tā krustošanās punkts ar La Hira riņķi Γ sakrīt ar infleksijas centru W_0 .



156. zīm.



157. zīm.

Teorēma. Punkti W_0 , Γ un B_0 atrodas uz vienas taisnes (157. zīm.).

Savienojam paātrinājuma centru Γ ar polu P , ar infleksijas centru W_0 un ar B_0 .

²³ Bresse. Mémoire sur un théorème nouveau concernant les mouvement plans. Journ. de l'école polytechnique. 1853.

$$\angle P\Gamma W_0 = \frac{\pi}{2}, \text{ jo tas atbalstās uz caurmēra } PW_0,$$

$$\angle P\Gamma B_0 = \frac{\pi}{2}, \text{ jo tas atbalstās uz caurmēra } PB_0.$$

Sacītam seko, ka $W_0\Gamma$ ar ΓB_0 veido vienu taisni, un teorēma pierādīta.

Meklēsim tālāk attālumu $P\Gamma$ starp polu P un punktu Γ .

$\triangle PW_0B_0$ laukums no vienas puses $S = \frac{1}{2}b \cdot D$, bet no otras puses

$$S = \frac{1}{2}P\Gamma \cdot B_0W_0. \text{ Pielīdzinot abas izteiksmes, atrodam}$$

$$P\Gamma \cdot B_0W_0 = b \cdot D, \text{ bet } B_0W_0 = \sqrt{b^2 + D^2}, \text{ tā tad } P\Gamma = \frac{bD}{\sqrt{b^2 + D^2}}.$$

Aizvietojojt šeit $b = \frac{D\omega^2}{\tau}$, iegūstam $P\Gamma = \frac{D\omega^2 \cdot D}{\tau \sqrt{\frac{D^2\omega^4}{\tau^2} + D^2}}$ un

galīgi

$$P\Gamma = \frac{D\omega^2}{\sqrt{\omega^4 + \tau^2}} \dots \dots \dots (29)$$

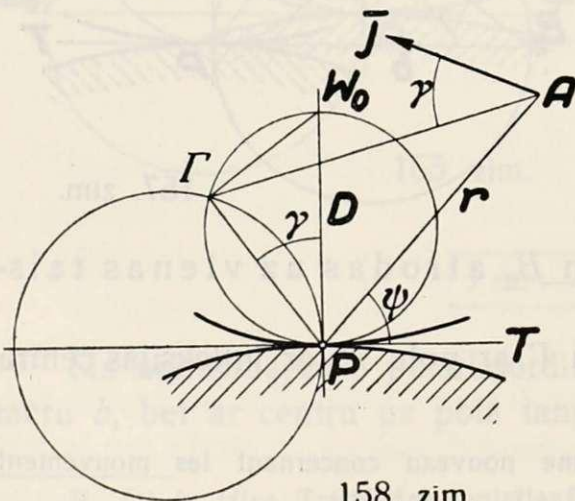
Apzīmēsim vēl $\angle W_0P\Gamma = \gamma$, bet $\angle W_0P\Gamma = \angle PB_0W_0 = \gamma$,

no kurienes $tg\gamma = \frac{D}{b} = \frac{D \cdot \tau}{D\omega^2}$ jeb $tg\gamma = \frac{\tau}{\omega^2} \dots \dots \dots (30)$

Arī šī formula aizrāda uz to, ka pie $\tau = 0$ arī $tg\gamma = 0$ un $\angle \gamma = 0$, bet tas nozīmē, ka taisne $P\Gamma$ tad sakrīt ar galveno staru PW_0 .

§ 54. Teorēma. Kustīgās plaknes punktu paātrinājumi proporcionāli to attālumiem no paātrinājumu centra Γ un veido ar taisni $A\Gamma$ vienu un to pašu leņķi γ (158. zīm.).

Kustīgās plaknes paātrinājums vispārīgi



158. zīm.

kur $j = \sqrt{j_t^2 + j_n^2},$
 $j_t = \tau r + D\omega^2 \cdot \cos \psi \cdot (21)$
 $j_n = r\omega^2 - D\omega^2 \cdot \sin \psi \cdot (22)$

Bez tā

$$tg \gamma = \frac{\tau}{\omega^2},$$

no kurienes

$$\tau = \omega^2 \cdot tg \gamma.$$

Ievietojot visu šo paātrinājuma formulā, iegūstam

$$\begin{aligned} j &= \sqrt{(r\omega^2 \operatorname{tg} \gamma + D\omega^2 \cos \psi)^2 + (r\omega^2 - D\omega^2 \sin \psi)^2} = \\ &= \omega^2 \sqrt{r^2(1 + \operatorname{tg}^2 \gamma) + D^2 - 2rD(\sin \psi - \operatorname{tg} \gamma \cos \psi)} = \\ &= \omega^2 \sqrt{\frac{r^2}{\cos^2 \gamma} + D^2 - 2rD \frac{\sin \psi \cos \gamma - \sin \gamma \cos \psi}{\cos \gamma}} = \\ &= \frac{\omega^2}{\cos \gamma} \sqrt{r^2 + (D \cos \gamma)^2 - 2rD \cos \gamma \cdot \sin(\psi - \gamma)}, \end{aligned}$$

bet $D \cos \gamma = P\Gamma$ un $\cos \Gamma PA = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \psi + \gamma\right) = \sin(\psi - \gamma)$, tā tad

$$j = \frac{\omega^2}{\cos \gamma} \sqrt{r^2 + (P\Gamma)^2 - 2r(P\Gamma) \cdot \cos \Gamma PA} = \frac{\omega^2}{\cos \gamma} \cdot A\Gamma.$$

Ar šo jau pierādīts, ka punkta A paātrinājums proporcionāls attālumam no punkta Γ , bet atrasto formulu var vēl pārveidot, aizvietojo

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\tau^2}{\omega^4}}} = \frac{\omega^2}{\sqrt{\omega^4 + \tau^2}},$$

no kurienes

$$\boxed{j = A\Gamma \cdot \sqrt{\omega^4 + \tau^2}} \dots \dots \dots (31)$$

Tālāk noskaidrosim paātrinājuma virzienu. Pieņemsim, ka punkta A paātrinājuma vektors veido ar taisni $A\Gamma$ kādu citu leņķi β . Sadalot tad paātrinājumu divās komponentēs $A\Gamma$ virzienā un perpendikulāri tam, dabūjam $j \cos \beta$ un $j \sin \beta$, pie kam $j^2 = (j \cos \beta)^2 + (j \sin \beta)^2$.

No otras puses, ceļot (31) formulu kvadrātā, atrodam

$$j^2 = (A\Gamma \cdot \omega^2)^2 + (A\Gamma \cdot \tau)^2.$$

Salīdzinot abas j^2 izteiksmes un ievērojot, ka $j \cdot \cos \beta$ ir normālais, bet $j \cdot \sin \beta$ tangenciālais paātrinājums punkta A kustībā ap Γ , nākam pie slēdziena, ka

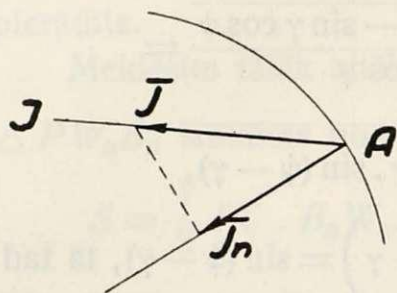
$$\left. \begin{aligned} j \cos \beta &= A\Gamma \cdot \omega^2 \\ j \sin \beta &= A\Gamma \cdot \tau \end{aligned} \right\} \text{izdalot otru ar pirmo, atrodam}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\tau}{\omega^2}, \text{ bet arī } \operatorname{tg} \gamma = \frac{\tau}{\omega^2},$$

tā tad $\beta = \gamma$ un visu punktu paātrinājumu vektori veido ar taisni, kas savieno punktu ar paātrinājuma centru, vienu un to pašu leņķi γ .

§ 55. Punkta paātrinājuma un normālā paātrinājuma grafiskās konstrukcijas.

I uzdevums. Dots j_n un pilna paātrinājuma virziens AJ . Jākonstruē pilns paātrinājums j (159. zīm.).



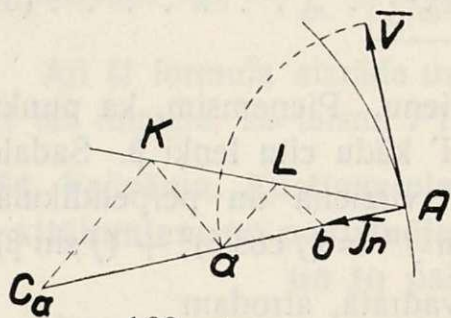
159. zīm.

Ievērojot, ka j_n ir paātrinājuma j projekcija uz trajektorijas normāli, paātrinājuma noteikšanai caur j_n galu jāvelk taisne perpendikulāri pret j_n . Šī taisne no AJ nogriež meklējamo paātrinājumu j .

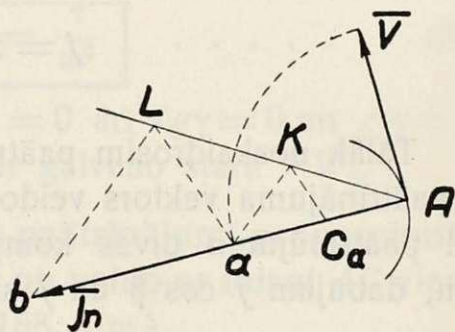
II uzdevums. Doti punkta A trajektorijas liekuma centrs C_a un ātrums \vec{V} . Jākonstruē j_n (160., 161. zīm.).

Šeit atšķiram divus gadījumus: 1) $V < \rho$ (160. zīm.) un 2) $V > \rho$ (161. zīm.).

Pagriezām ātrumu \vec{V} ortogonālā virzienā, iegūstot Aa . Caur punktu A velkam brīvi kādu taisni un uz tās izvēlamies brīvi kādu punktu K , ko savienojam ar a un C_a . Tālāk velkam taisnes $aL \parallel C_a K$ un $Lb \parallel Ka$. Nogrieznis Ab tad reprezentē meklējamo paātrinājumu j_n .



160. zīm.



161. zīm.

Pierādījums. No līdzīgiem trijstūriem rakstām proporcijas:

$$\frac{Ab}{Aa} = \frac{AL}{AK} \quad \text{un} \quad \frac{Aa}{AC_a} = \frac{AL}{AK}.$$

Labās puses vienādas, pielīdzinot arī kreisās, iegūstam

$$\frac{Ab}{Aa} = \frac{Aa}{AC_a},$$

no kurienes

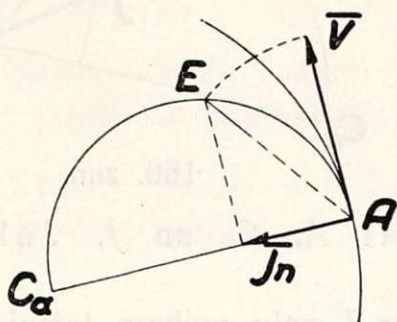
$$Ab = \frac{Aa^2}{AC_a} = \frac{V^2}{\rho} = j_n.$$

Konstrukcija der abiem gadījumiem, tikai pirmajā gadījumā izrādās, ka $j_n < V$, bet otrā $j_n > V$.

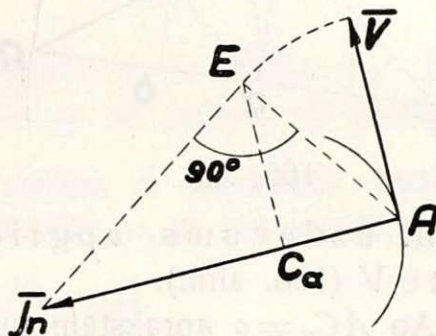
II uzdevums. Cita konstrukcija. Doti A , C_a un \bar{V} . Jākonstruē j_n .

1) gadījums $V < \rho$ (162. zīm.). Ap AC_a apvelkam pusriņķi un ar radiju V loku līdz krustošanai ar pusriņķi punktā E . Punkta E projekcija uz caurmēru dod j_n galapunktu. Pierādījums šeit, kā arī nāko-

šās konstrukcijās, ar formulu $j_n = \frac{V^2}{\rho}$ skaidri redzams 162. zīm.



162. zīm.



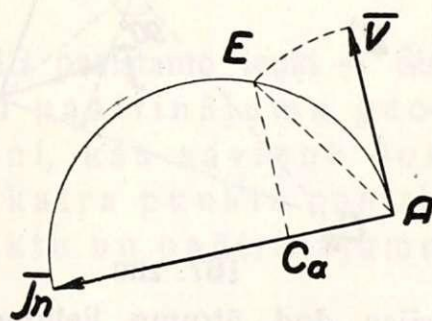
163. zīm.

2) gadījums $V > \rho$ (163. zīm.). Punktā C_a velkam taisni perpendikulāri staram. Ar radiju V aprakstām loku līdz krustošanai ar šo taisni punktā E . Punktu E savienojam ar punktu A un caur to velkam taisni perpendikulāri EA . Šī taisne no stara nogriež meklējamo j_n (163. zīm.).

II uzdevums apgriezts. Doti A, C_a un j_n . Jākonstruē V .

1) gadījums $j_n < \rho$ (162. zīm.). Ap $AC_a = \rho$ apvelkam pusriņķi un caur j_n galu velkam taisni perpendikulāri staram AC_a līdz krustošanai ar pusriņķi punktā E . AE pēc lieluma dod ātrumu V , bet tas tikai jāapgriež perpendikulāri staram (162. zīm.).

2) gadījums $j_n > \rho$ (164. zīm.). Ap j_n apvelkam pusriņķi. Punktā C_a velkam taisni perpendikulāri staram AC_a līdz krustošanai ar pusriņķi punktā E . AE pēc lieluma dod ātrumu V , tikai tas jāapgriež perpendikulāri staram AC_a (164. zīm.).

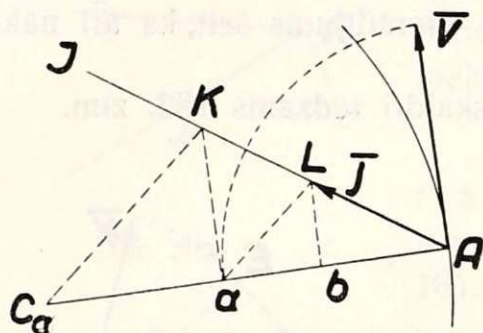


164. zīm.

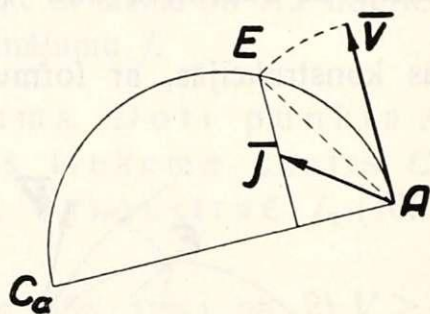
III uzdevums: Doti A , C_a , \bar{V} un pilna paātrinājuma virziens AJ . Jākonstruē j (165. zīm.).

Šinī gadījumā izdevīgāki neņemt punktu K brīvi, bet pēc ortogonālā ātruma Aa konstrukcijas vilkt taisni $aK \perp AC_a$. Tālāk savienojam punktu K ar C_a un velkam $aL \parallel C_aK$. Nogrieznis $\overline{AL} = \bar{j}$.

Pierādījums seko no tā apstākļa, ka taisne $Lb \parallel Ka$ saskaņā ar II uzdevumu nogriež normālo paātrinājumu $j_n = Ab$.



165. zīm.



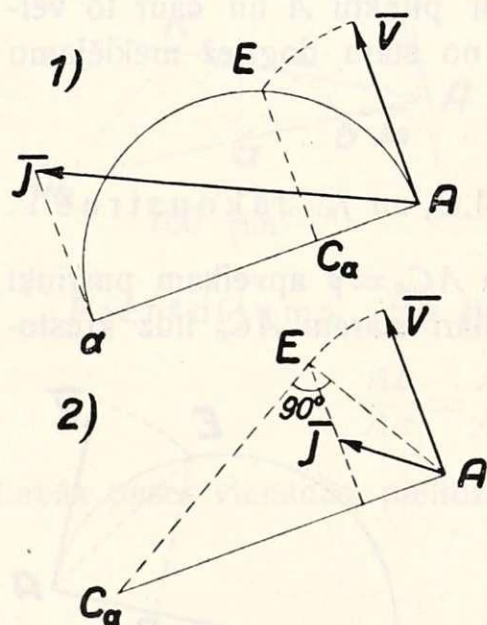
166. zīm.

III uzdevums apgriezts. Doti A , C_a un \bar{j} . Jākonstruē V (166. zīm.).

Ap $AC_a = \rho$ aprakstām pusriņķi. Caur \bar{j} galu velkam taisni perpendikulāri staram līdz krustošanai ar pusriņķi punktā E . Nogrieznis AE pēc lieluma dod ātrumu, bet tas tikai jāpagriež perpendikulāri staram.

IV uzdevums: Doti A , \bar{V} un \bar{j} . Jākonstruē C_a .

Šeit atkal var izšķirt divus gadījumus.



167. zīm.

konstrukcijas dod ātruma lielumu, bet nedod iespēju izšķirt, uz kuņu pusi ātrums tangētē ir virzīts.

1) gadījums: $j_n > V$ (167. zīm.1).
Atrodam $j_n = Aa$ un ap to apvelkam pusriņķi. Ar radiju V velkam loku līdz krustošanai ar pusriņķi punktā E . Punkta E projekcija uz staru dod meklējamo C_a .

2) gadījums: $j_n < V$ (167. zīm. 2).
Ar radiju V aprakstām loku un caur \bar{j} galu velkam taisni perpendikulāri staram līdz krustošanai ar loku punktā E . Šo punktu savienojam ar A un caur to velkam taisni $EC_a \perp EA$, kas krusto staru meklējamā punktā C_a .

Piezīme: Visos uzdevumos, kur bija jākonstruē ātrums V , šīs konstrukcijas dod ātruma lielumu, bet nedod iespēju izšķirt, uz kuņu pusi ātrums tangētē ir virzīts.

§ 56. Sakars starp divu punktu paātrinājumiem.

Ņemsim punktu A un B (168. zīm.) paātrinājumu izteiksmes ar formulu (23)

$$\bar{j}_a = [\bar{V}_p \bar{\omega}] + [\bar{\tau} \cdot \bar{r}_a] - \bar{r}_a \omega^2$$

$$\bar{j}_b = [\bar{V}_p \bar{\omega}] + [\bar{\tau} \cdot \bar{r}_b] - \bar{r}_b \omega^2$$

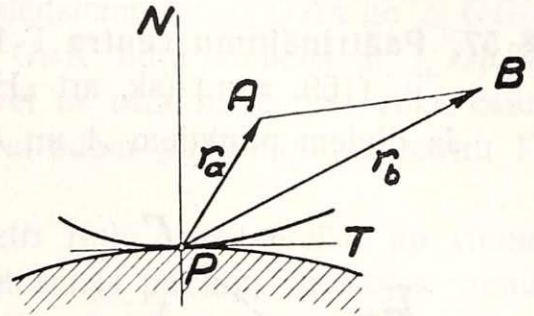
un atvilksim otro no pirmās

$$\bar{j}_a - \bar{j}_b = [\bar{\tau} (\bar{r}_a - \bar{r}_b)] - (\bar{r}_a - \bar{r}_b) \omega^2,$$

bet $\bar{r}_a - \bar{r}_b = \overline{BA}$,

tā tad

$$\bar{j}_a - \bar{j}_b = [\bar{\tau} \cdot \overline{BA}] - \overline{BA} \cdot \omega^2.$$



168. zīm.

Apskatot katru locekli atsevišķi, redzam, ka $[\bar{\tau} \cdot \overline{BA}] = \bar{j}_{at}^b$ reprezentē punkta A tangenciālo paātrinājumu ar to pašu τ ap punktu B .

Tāpat $-\overline{BA} \omega^2 = \overline{AB} \omega^2 = \bar{j}_{an}^b$ ir punkta A normālais paātrinājums griezes kustībā ap B ar to pašu ātrumu ω , tā tad vispārīgi:

$$\bar{j}_a - \bar{j}_b = \bar{j}_{at}^b + \bar{j}_{an}^b = \bar{j}_a^b$$

jeb $\boxed{\bar{j}_a = \bar{j}_b + \bar{j}_a^b}$ un pēc analogijas $\boxed{\bar{j}_b = \bar{j}_a + \bar{j}_b^a}$. . (32)²⁴

Formulas (32) dod teorēmu: katra punkta paātrinājums ir vienāds ar otrā punkta paātrinājumu, saskaitītu ģeometriski ar pirmā punkta paātrinājumu griezes kustībā ap otro ar to pašu ω un τ , kas piemīt kustošai plaknei.

Noskaidrosim tālāk, kādu leņķi veido paātrinājumu difference

$$\bar{j}_a - \bar{j}_b = \bar{j}_a^b \text{ ar pašu taisni } AB.$$

Acīm redzot

$$\text{tg} (\overline{AB}, \bar{j}_a^b) = \frac{\bar{j}_{at}^b}{\bar{j}_{an}^b} = \frac{\tau \cdot BA}{\omega^2 \cdot BA} = \frac{\tau}{\omega^2} = \text{tg } \gamma.$$

Kā redzams, $\bar{j}_a - \bar{j}_b$ veido ar taisni AB pazīstamo leņķi γ . Šis apstāklis dod otru teorēmu: divu punktu paātrinājumu ģeometriskā difference veido ar taisni, kas savieno šos punktus, to pašu leņķi γ , ko veido katra punkta paātrinājums ar taisni, kas savieno punktu un paātrinājumu centru Γ .

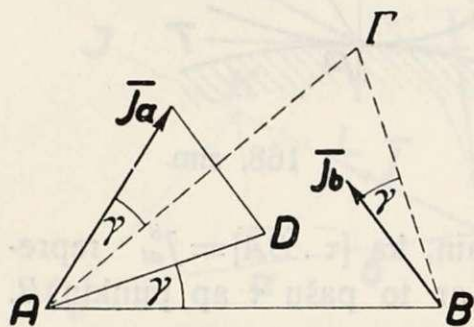
²⁴ R. Beyer. Technische Kinematik. 1931. 236.—237. lapp. formula (218a).

Šo teorēmu pirmais formulējis pazīstamais krievu zinātnieks N. Žukovskis, kaut gan viņa dotais pierādījums bija daudz komplicētāks par šo pierādījumu.²⁵

§ 57. Paātrinājumu centra Γ konstrukcija pēc Žukovska teorēmas
(169. zīm.) (sk. arī „Hütte“ I 1925. g. 301. lapp.).

Ja diviem punktiem A un B paātrinājumu vektori \vec{j}_a un \vec{j}_b doti, konstruējam šo vektoru ģeometrisku diferenci

$$\overline{AD} = \vec{j}_a - \vec{j}_b.$$

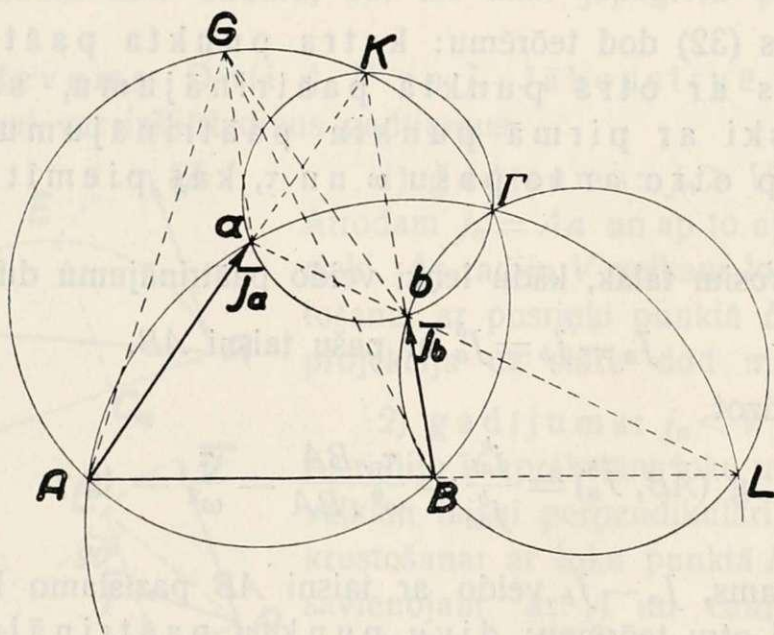


169. zīm.

Pēc Žukovska teorēmas \overline{AD} veido ar taisni AB leņķi γ . Atliekot šo leņķi $DAB = \gamma$ no paātrinājumu vektoriem tanī pašā virzienā, kā tas bija iegūts no AD līdz AB , atrodam krustošanās punktā paātrinājumu centru Γ .

Paātrinājumu centra konstrukcija ar 4 riņķiem²⁶ (170. zīm.).

Ja diviem punktiem A un B paātrinājumu vektori \vec{j}_a un \vec{j}_b doti, tad turpinām tos līdz krustošanai punktā K . Caur punktiem A , B un K



170. zīm.

velkam riņķi. Katrs riņķa punkts G apmierina prasību, lai taisnes GA

²⁵ N. Rosenauer. Ein graphoanalytisches Verfahren zur Bestimmung des Beschleunigungspoles und der Beschleunigungspolkurven der ebenen Bewegung. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. Bd. 18. Heft 2. 1938.

²⁶ R. Beyer. Technische Kinematik. 1931. 239 lapp.

un GB veidotu ar \vec{j}_a un \vec{j}_b to pašu leņķi, bet ne katrs punkts apmierina prasību, lai attālumi GA un GB būtu proporcionāli paātrinājumiem j_a un j_b .

Ievērojot otro prasību, jānāk pie slēdziena, ka $\triangle GAa$ un $\triangle GBb$ jābūt līdzīgiem, bet tas prasa, lai $\angle GaK$ būtu vienāds ar $\angle GbK$, kas nozīmē, ka punktam Γ jāatrodas vēl uz otra riņķa, kas vilkts caur punktiem a , b un K . Galīgi tā tad atrodam paātrinājumu centru Γ abu šo riņķu krustošanās punktā.

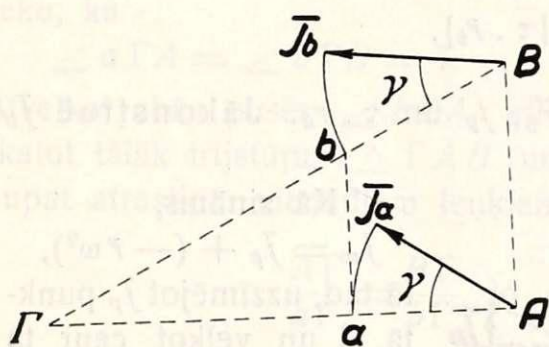
No ģeometrijas zināms, ka visi četri riņķi, kas apvilkti ap vienu četrstūra malu un piegulošo malu krustošanas punktu, krustojas vienā punktā.

Tas nozīmē, ka vēl divi riņķi, kas vilkti caur punktiem A , a , L un B , b , L , arī iet caur to pašu punktu Γ .

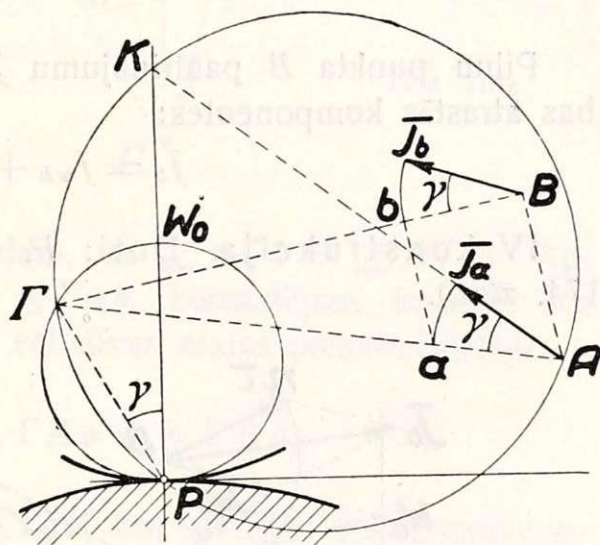
§ 58. Paātrinājuma konstrukcijas otram punktam.

I konstrukcija. Doti \vec{j}_a un Γ . Jākonstruē \vec{j}_b (171. zīm.).

Savienojam abus punktus A un B ar Γ . Pagriežam \vec{j}_a tā, lai tas sakristu ar ΓA . Caur iegūto punktu a velkam $ab \parallel AB$. Nogrieznis Bb dod i_b pēc lieluma, bet, pagriežot to atpakaļ par $\angle \gamma$, iegūstam \vec{j}_b pēc lieluma un virziena.



171. zīm.



172. zīm.

II konstrukcija. Doti P , W_0 un \vec{j}_a . Jākonstruē \vec{j}_b (172. zīm.).

Turpinām paātrinājuma vektoru \vec{j}_a līdz krustošanai ar galveno staru punktā K . Caur punktiem P , A un K velkam riņķi. Šis riņķis krustojas ar infleksijas riņķi paātrinājumu centrā Γ . Lai pierādītu šo apgalvojumu, savienojam krustošanās punktu ar P un A , tad, kā redzams 172. zīm., $\angle KA\Gamma = \angle W_0P\Gamma = \angle \gamma$, kas nozīmē, ka tiešām šis punkts ir paātrinājumu centrs Γ .

$cd \parallel AB$ līdz PB . Nogriežni Bd pagriežam attiecīgā virzienā par 90° un iegūstam paātrinājuma komponenti $\tau \cdot r_b$.

Saskaitot ģeometriski \vec{j}_{wb} un $\tau \cdot r_b$, dabūjam meklējamo paātrinājumu

$$\vec{j}_b = \vec{j}_{wb} + [\vec{\tau} \cdot \vec{r}_b].$$

§ 59. Sakars starp trīs un vairāku punktu paātrinājumiem.

Burmestera teorēma: Komplānā kustībā paātrinājumu vektoru gali, savienoti taisnēm, veido figūru, līdzīgu tai, ko veido paši punkti, savienoti taisnēm (175. zīm.).

Pierādīsim teorēmu trīs punktiem, un pēc tam to varēs paplašināt arī vairāk punktiem.

Savienojam punktus A, B, C un to paātrinājumu galus a, b, c ar paātrinājumu centru Γ .

Ja iedomāsimies punktu A pagrieztu ap punktu Γ tā, lai tas nonāktu taisnē ΓB , tad arī punkts a nonāks taisnē Γb , no kurienes seko, ka

$$\angle a\Gamma A = \angle b\Gamma B = \delta.$$

Atvelkot abās pusēs $\angle b\Gamma A$, atrodam, ka $\angle a\Gamma b = \angle A\Gamma B$. Apskatot tālāk trijstūrus $\triangle \Gamma AB$ un $\triangle \Gamma ab$, konstatējam, ka tanīs bez nupat atrastiem vienādiem leņķiem vēl divas malas proporcionālas:

$$\frac{A\Gamma}{a\Gamma} = \frac{B\Gamma}{b\Gamma}, \text{ jo } \triangle \Gamma Aa \sim \triangle \Gamma Bb,$$

no kurienes seko, ka arī $\triangle \Gamma AB \sim \triangle \Gamma ab$, kas savukārt dod proporciju:

$$\frac{AB}{ab} = \frac{A\Gamma}{a\Gamma} = \frac{B\Gamma}{b\Gamma}.$$

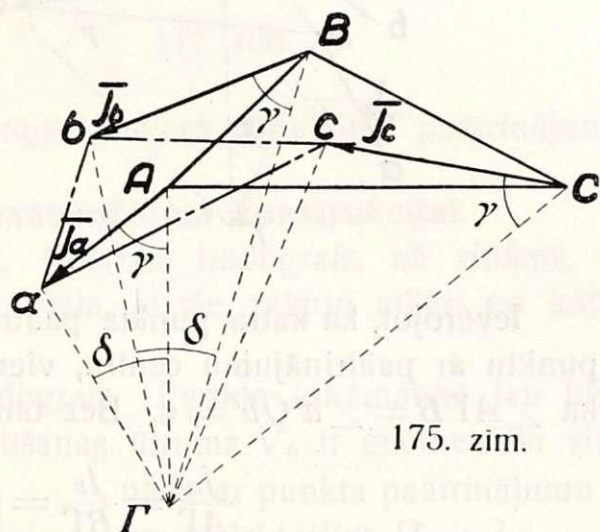
Līdzīgā kārtā var pierādīt, ka arī

$$\frac{BC}{bc} = \frac{B\Gamma}{b\Gamma} \text{ un } \frac{AC}{ac} = \frac{A\Gamma}{a\Gamma},$$

bet tad vispārīgi

$$\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc} = \frac{AC}{ac},$$

kas nozīmē, ka $\triangle abc \sim \triangle ABC$.

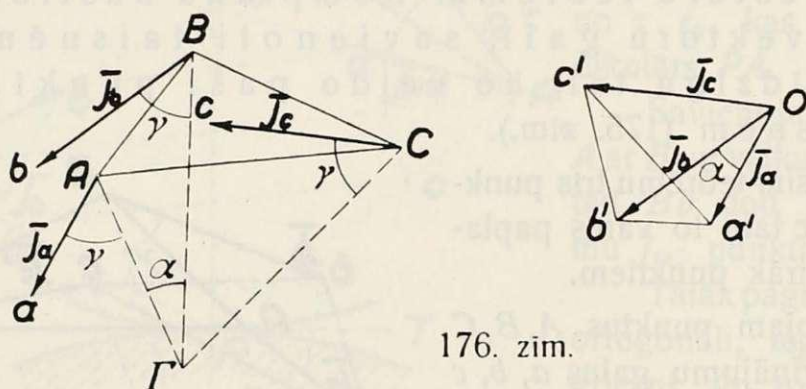


175. zīm.

§ 60. Polārais paātrinājumu plāns.

Atliekot dažādu punktu paātrinājumu vektorus no kāda brīvi izvēlēta punkta O un savienojot to galus taisnēm, iegūstam tā saukto polāro paātrinājumu plānu (176. zīm.).

Mēmkes (Mehmke) teorēma. Polārais paātrinājumu plāns līdzīgs tai figūrai, ko veido paši punkti (176. zīm.).



176. zīm.

Ievērojot, ka katra punkta paātrinājums veido ar taisni, kas savieno punktu ar paātrinājumu centru, vienu un to pašu leņķi γ , varam teikt, ka $\angle A\Gamma B = \angle a'O b' = \alpha$. Bez tam arī

$$\frac{j_a}{A\Gamma} = \frac{j_b}{B\Gamma} = \sqrt{\omega^4 + \tau^2},$$

no kurienes seko, ka $\triangle Oa'b' \sim \triangle \Gamma AB$ un arī

$$\frac{a'b'}{AB} = \frac{j_a}{A\Gamma} = \sqrt{\omega^4 + \tau^2}.$$

Līdzīgā kārtā var pierādīt, ka arī

$$\frac{b'c'}{BC} = \sqrt{\omega^4 + \tau^2} \quad \text{un} \quad \frac{a'c'}{AC} = \sqrt{\omega^4 + \tau^2},$$

bet tad vispārīgi

$$\frac{a'b'}{AB} = \frac{b'c'}{BC} = \frac{a'c'}{AC},$$

kas nozīmē, ka $\triangle a'b'c' \sim \triangle ABC$.

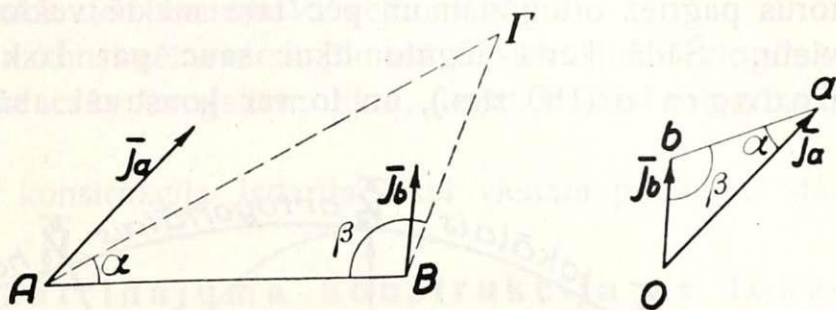
Paātrinājumu centra konstrukcija.

Uz Mēmkes teorēmas pamata var konstruēt paātrinājumu centru Γ , ja diviem punktiem A un B paātrinājumu vektori doti (177. zīm.).

Brīvi izvēlētā punktā O atliekam abus paātrinājumu vektorus:

$$\overline{Oa} = \vec{j}_a \text{ un } \overline{Ob} = \vec{j}_b.$$

Savienojam punktu a ar b un uz nogriežņa AB konstruējam trijstūri, kas līdzīgs $\triangle Oab$. Šim nolūkam atliekam $\angle Oab = \angle \alpha$ no taisnes AB punktā A un $\angle Oba = \angle \beta$ punktā B tanī pašā virzienā, kā šie leņķi plānā atskaitīti no malas ab . Trešā trijstūra virsotne tad dod paātrinājumu centru Γ , jo punktam O plānā paātrinājums ir nulle, un tamdēļ arī kustīgās plaknes punktam Γ paātrinājums ir nulle.

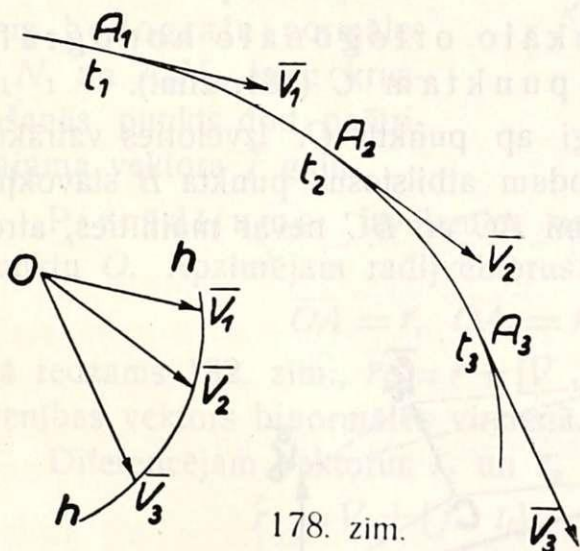


177. zīm.

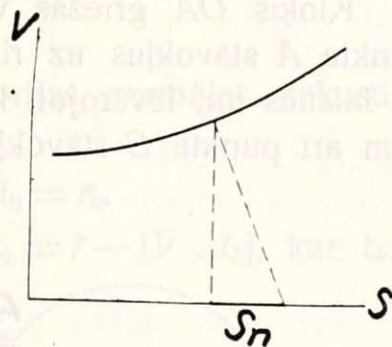
§ 61. Citas metodes paātrinājuma konstrukcijai.

I Polārais hodogرافs. Polārais hodogرافs, kā zināms, ir ātrumu vektoru galu ģeometriskā vieta, ja šie vektori atlikti no kāda nekustīga punkta O (pola).

h — h līkne 178. zīm. ir hodogرافs. Punkta kinēmatikā jau bija noskaidrots, ka hodogرافa aprakstīšanas ātrums \overline{V}_h ir ģeometriski vienāds ar punkta paātrinājumu \vec{j} uz trajektorijas $\overline{V}_h = \vec{j}$.



178. zīm.



179. zīm.

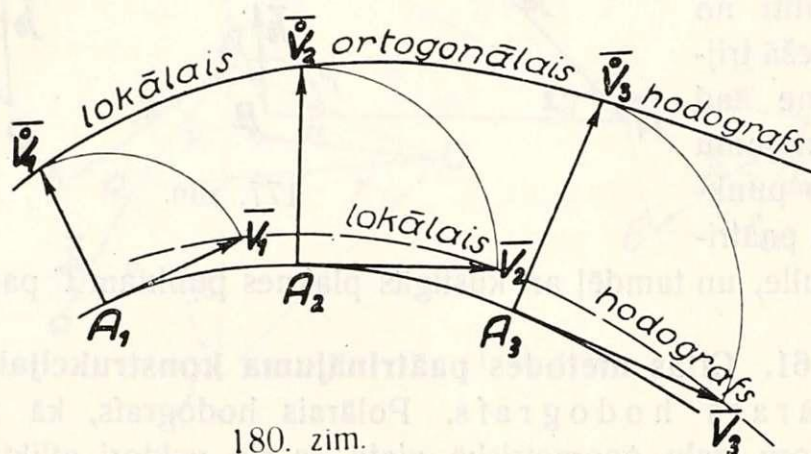
Ja ātrumi $\overline{V}_1, \overline{V}_2, \overline{V}_3 \dots$ attiecināti uz zināmiem laika momentiem $t_1, t_2, t_3 \dots$, tad šis apstāklis dod iespēju noteikt paātrinājumu.

II (VS) grafika. Taisnvirziena kustībā paātrinājumu var viegli atrast, konstruējot ātruma—ceļa grafiku (VS).

Šinī grafikā, kā zināms, paātrinājums reprezentējas ar subnormāles S_n gaļumu (179. zīm.).

III Lokālais hodografs. Par lokālo hodografu sauc ātrumu vektoru galu ģeometrisku vietu, ja ātrumu vektori konstruēti attiecīgā vietā uz pašas trajektorijas (180. zīm.).

Lai gūtu labāku pārskatu par ātrumu maiņu, parasti ātrumu vektorus pagriež ortogonāli un pēc tam meklē vektoru galu ģeometrisko vietu. Šādā kārtā iegūto līkni sauc par lokālo ortogonālo hodografu (180. zīm.), un to var konstruēt abās trajektorijas pusēs.

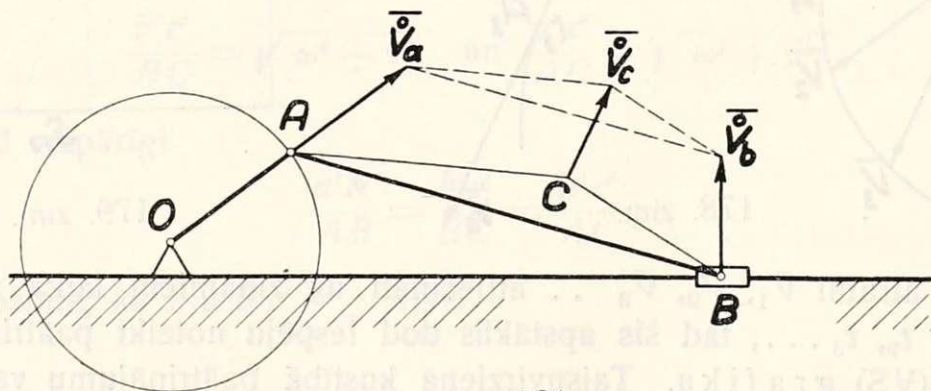


180. zīm.

Līkumainā kustībā lokālais ortogonālais hodografs aizvieto (VS) grafiku, un ar tā palīdzību arī var konstruēt paātrinājumu. Šis jautājums būs apskatīts zemāk.

20. piemērs. Konstruēt lokālo ortogonālo hodografu kļoņa mēchanisma kļoņa punktam C (181. zīm.).

Kļoķis OA griežas vienmērīgi ap punktu O . Izvēloties vairākus punkta A stāvokļus uz riņķa, atrodam atbilstošus punkta B stāvokļus uz taisnes un, ievērojot, ka attālumi AC un BC nevar mainīties, atrodam arī punkta C stāvokļus.



181. zīm.

Lai iegūtu ortogonālo hodografu punktam C , atliekam virzienā OA punkta A ortogonālo ātrumu \vec{V}_a , velkam caur \vec{V}_a galu taisni paral-

līni AB . Šī taisne nogriezīs uz normāles, kas vilkta pret punkta B trajektoriju, punkta B ortogonālo ātrumu \vec{V}_b .

Tālāk savienojam punktus A un B ar C un velkam caur ortogonālo ātrumu vektoru \vec{V}_a un \vec{V}_b galiem taisnes paralēli AC un BC , kuŗu krustošanās punkts dod ātruma \vec{V}_c vektora galu.

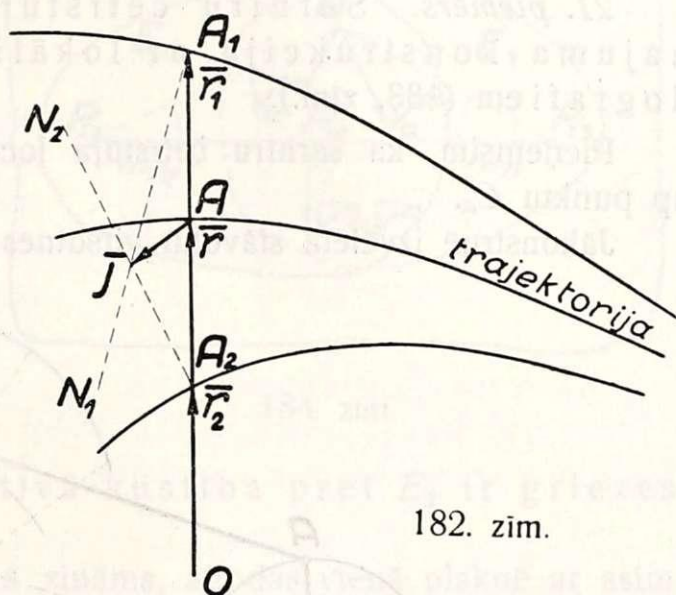
Tādā kārtā var uzkonstruēt visiem punkta C stāvokļiem ortogonālos ātrumus un velkot caur to galiem līkni, iegūt lokālo ortogonālo hodografu.

181. zīm. šāda konstrukcija izdarīta tikai vienam punkta C stāvoklim.

Grüblera paātrinājuma konstrukcija ar lokāliem ortogonāliem hodografiem^{27, 28, 29}.

Uzkonstruēsim trajektorijas abās pusēs lokālos ortogonālos hodografus (182. zīm.). Tanī vietā, kur meklējams paātrinājums, velkam trajektorijas normāli un apzīmējam šīs normāles un hodografu krustošanās punktus ar A_1 un A_2 .

Punktos A_1 un A_2 velkam hodografu normāles A_1N_1 un A_2N_2 , kuŗu krustošanās punkts dod paātrinājuma vektora \vec{j} galu.



182. zīm.

Pierādījums: Izvēlamies uz trajektorijas normāles nekustīgu punktu O . Apzīmējam radijvektorus:

$$\overline{OA} = \vec{r}, \quad \overline{OA_1} = \vec{r}_1 \quad \text{un} \quad \overline{OA_2} = \vec{r}_2.$$

Kā redzams 182. zīm., $\vec{r}_1 = \vec{r} + [\vec{V} \cdot \vec{l}_b]$ un $\vec{r}_2 = \vec{r} - [\vec{V} \cdot \vec{l}_b]$, kur \vec{l}_b ir vienības vektors binormāles virzienā.

Diferencējam vektorus \vec{r}_1 un \vec{r}_2 pēc laika

$$\dot{\vec{r}}_1 = \vec{V} + [\vec{j} \cdot \vec{l}_b]; \quad \dot{\vec{r}}_2 = \vec{V} - [\vec{j} \cdot \vec{l}_b],$$

pareizinām abas formulas vektoriāli ar \vec{l}_b

$$[\dot{\vec{r}}_1 \cdot \vec{l}_b] = [\vec{V} \cdot \vec{l}_b] + [[\vec{j} \cdot \vec{l}_b] \vec{l}_b], \quad [\dot{\vec{r}}_2 \cdot \vec{l}_b] = [\vec{V} \cdot \vec{l}_b] - [[\vec{j} \cdot \vec{l}_b] \vec{l}_b],$$

$$\text{bet } [[\vec{j} \cdot \vec{l}_b] \vec{l}_b] = \vec{l}_b (\vec{j} \cdot \vec{l}_b) - \vec{j} (\vec{l}_b \cdot \vec{l}_b) = -\vec{j}.$$

²⁷ M. Grübler: Lehrbuch der technischen Mechanik. I. 1921. 44. lapp.

²⁸ M. Grübler: Getriebelehre. 1917. 52. lapp.

²⁹ M. Grübler: Zur graphischen Ermittlung der Beschleunigung. Z. A. M. M. Bd. 4. 1924. g. 521. lapp.

Ievietojot atrasto trīs vektoru produkta vērtību, atrodam

$$[\vec{r}_1 \cdot \vec{t}_b] = [\vec{V} \cdot \vec{t}_b] - \vec{j} \text{ un } [\vec{r}_2 \cdot \vec{t}_b] = [\vec{V} \cdot \vec{t}_b] + \vec{j},$$

no kurienes

$$\vec{j} = [\vec{V} \cdot \vec{t}_b] - [\vec{r}_1 \cdot \vec{t}_b] \text{ un } \vec{j} = -[\vec{V} \cdot \vec{t}_b] + [\vec{r}_2 \cdot \vec{t}_b]$$

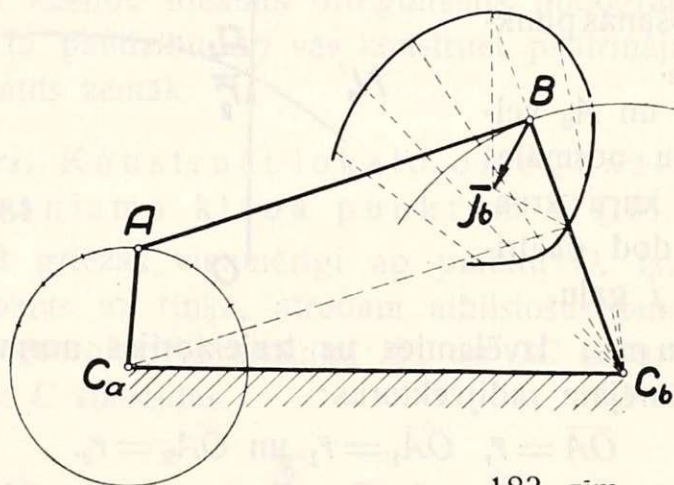
Šādi rezultāti rāda, ka no vienas puses \vec{j} sastādās no $[\vec{V} \cdot \vec{t}_b] = \overline{AA_1}$ un otra vektora, kas iet A_1N_1 virzienā, bet no otras puses no $-[\vec{V} \cdot \vec{t}_b] = \overline{AA_2}$ un otra vektora, kas iet A_2N_2 virzienā, bet tas nozīmē, ka paātrinājuma \vec{j} vektora gals atrodams normāļu A_1N_1 un A_2N_2 krustošanās punktā.

Šo paātrinājuma konstrukciju atradis prof. M. Grüblers, bet pierādījumu vektoros devis prof. Laufers (Lauffer. Graz).

21. piemērs. Šarnīru četrstūra virsotnes B paātrinājuma konstrukcija ar lokāliem ortogonāliem hodografiem (183. zīm.).

Pieņemsim, ka šarnīru četrstūra loceklis C_aA griežas vienmērīgi ap punktu C_a .

Jākonstruē izvēlētā stāvoklī virsotnes B paātrinājums \vec{j}_b .



183. zīm.

Izvēlamies dažus punkta A stāvokļus pa labi un pa kreisi no pamatstāvokļa.

Pieņemot punkta A ātruma mērogu tādu, lai ortogonālais ātrums \vec{V}_a reprezentētos ar attālumu AC_a , konstruējam ortogonālos ātrumus punktam B un atliekam tos normāli trajektorijai abās pusēs.

Velkot caur iegūtiem punktiem līknes, dabūjam abus lokālos ortogonālos hodografus.

Beidzot velkam hodografiem normāles tanīs punktos, kur tos krusto attiecīgā trajektorijas normāle, un atrodam normāļu krustošanās punktā meklējamā paātrinājuma vektora \vec{j}_b galu.

IX nodaļa.

Trīs plakņu relatīvā kustība.

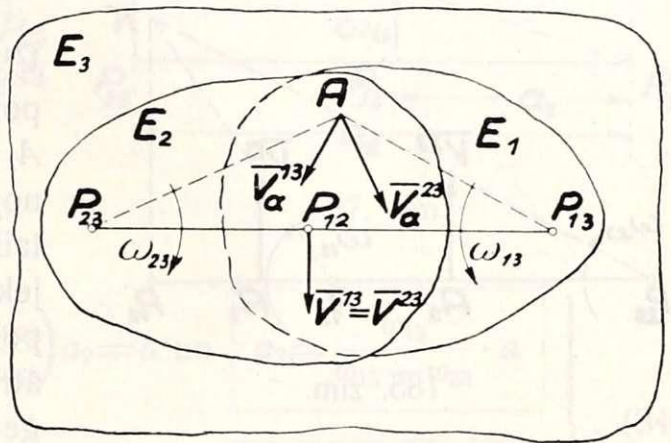
§ 62. Relatīvais pols. Polu taisne.

Divas kustīgās plaknes E_1 un E_2 griežas attiecībā pret trešo nekustīgo E_3 ap poliem P_{13} un P_{23} ar ātrumiem ω_{13} un ω_{23} (184. zīm.).

Meklēsim plaknes E_1 relatīvo kustību pret plakni E_2 . Šo kustību redzēs novērotājs, kas atrodas uz E_2 un neievēro tās pašas kustību.

Iedomāsimies plakni E_2 , apturētu savā kustībā, tad, lai neizmainītos šīs plaknes relatīvā kustība pret E_3 , plaknei E_3 jādod grieze ap polu P_{23} pretējā virzienā ar to pašu ātrumu $-\omega_{23}$.

Tādā gadījumā plakne E_1 ņem dalību divās griezes kustībās ap polu P_{13} pret plakni E_3 ar ātrumu ω_{13} un ap polu P_{23} ar plakni E_3 un ātrumu $-\omega_{23}$, bet divas griezes ap parallēlām asīm vispārīgi arī dod griezi, tā tad plaknes E_1 relatīvā kustība pret E_2 ir griezes kustība.



184. zīm.

Šīs griezes kustības ass, kā zināms, atrodas vienā plaknē ar asīm punktos P_{23} un P_{13} , no kurienes seko, ka poli P_{13} , P_{23} un P_{12} visi atrodas uz vienas taisnes, ko sauc par polu taisni.

Lai noteiktu pola P_{12} stāvokli uz šīs taisnes, ņemsim vispārīgo sakaru starp kāda punkta ātrumiem: $\vec{V}^{13} = \vec{V}^{12} + \vec{V}^{23}$ kur \vec{V}^{13} ir punkta ātrums 1. plaknes kustībā pret 3., \vec{V}^{12} ir punkta ātrums 1. plaknes kustībā pret 2. Izlietosim to relatīvam polam P_{12} , kuŗam acīm redzot ātrums $V_{12}^{12} = 0$, bet tad paliek:

$$\boxed{\vec{V}_{12}^{13} = \vec{V}_{12}^{23}} \dots \dots \dots (33)$$

Kā redzams, relatīvais pols raksturojas ar to, ka kustīgo plakņu E_1 un E_2 punktu, ar kuŗiem dotā momentā šis pols sakrīt, ātrumi geometriski vienādi.

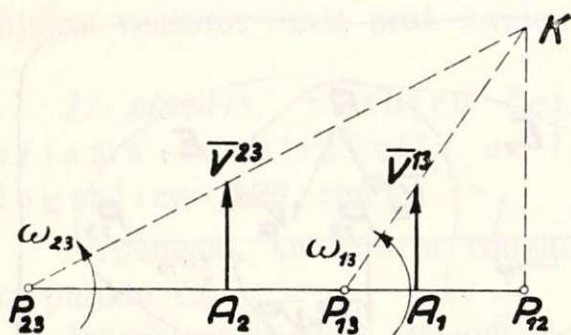
184. zīm. skaidri redzams, ka katram citam punktam, piemēram A , ātrumi vairs nevar būt geometriski vienādi.

Poli P_{13} un P_{23} pārvietojas uz attiecīgām poloidām, sakarā ar to pārvietojas arī pols P_{12} , veidojot plaknēs E_1 un E_2 zināmas ģeometriskās vietas — poloidas.

§ 63. Relatīvā pola konstrukcija pēc divu punktu ātrumiem.

1. gadījums. Abas griezes notiek vienā virzienā (185. zīm.).

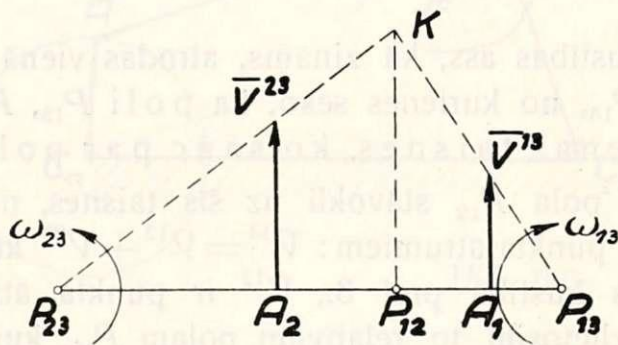
Dota polu taisne ar poliem P_{13} un P_{23} , bez tās doti plaknes E_1 punkts A_1 ar ātrumu \vec{V}^{13} un plaknes E_2 punkts A_2 ar ātrumu \vec{V}^{23} , pie kam abas griezes notiek vienā virzienā.



185. zīm.

Jākonstruē relatīvais pols P_{12} . Iezīmējam punkta A_1 ātrumu \vec{V}^{13} un savienojam tā galu ar polu P_{13} ; tāpat iezīmējam punkta A_2 ātruma vektoru \vec{V}^{23} un savienojam tā galu ar polu P_{23} . Abu taisņu krustošanās punkta K projekcija uz polu taisni dod relatīvo polu P_{12} , jo acīm redzot šā punkta ātrumi griezē ap P_{13} un P_{23} ir ģeometriski vienādi.

Kā redzams, gadījumā, kad abas plaknes griežas vienā virzienā, relatīvais pols P_{12} atrodas ārpus nogriežņa $P_{13}P_{23}$ tanī pusē, kur griezes ātrums lielāks.



186. zīm.

Piezīme: Ja griezes ātrumi vienādi $\omega_{13} = \omega_{23}$, tad abas taisnes ir paralēlas, pols P_{12} aiziet bezgalībā, un relatīvā kustība ir virze.

2. gadījums. Abas griezes notiek pretējos virzienos (186. zīm.).

Ja abas plaknes griežas pretējos virzienos, tad, izdarot to pašu konstrukciju, iegūstam punktu K un līdz ar to arī polu P_{12} starp poliem P_{23} un P_{13} .

§ 64. Relatīvā pola konstrukcija pēc dotiem griezes ātrumu vektoriem.

1. gadījums. Griezes notiek vienā virzienā (187. zīm.).

Doti ω_{13} , ω_{23} un attālums a . Jākonstruē relatīvais pols P_{12} .

Kā zināms, relatīvais pols raksturojas ar to, ka tam ātrumi griezes kustībā ap P_{23} un ap P_{13} ģeometriski vienādi:

$$\bar{V}_{12}^{23} = \bar{V}_{12}^{13}.$$

Apzīmējot pola P_{12} attālumus no pola P_{13} ar a_1 un no pola P_{23} ar a_2 , atrodam, ievērojot augšā sacīto,

$a_1 \cdot \omega_{13} = a_2 \cdot \omega_{23}$, no kurienes

$$a_1 = \frac{\omega_{23}}{\omega_{13}} \cdot a_2,$$

bet $a_2 - a_1 = a$, tā tad $\left(1 - \frac{\omega_{23}}{\omega_{13}}\right) a_2 = a$ un

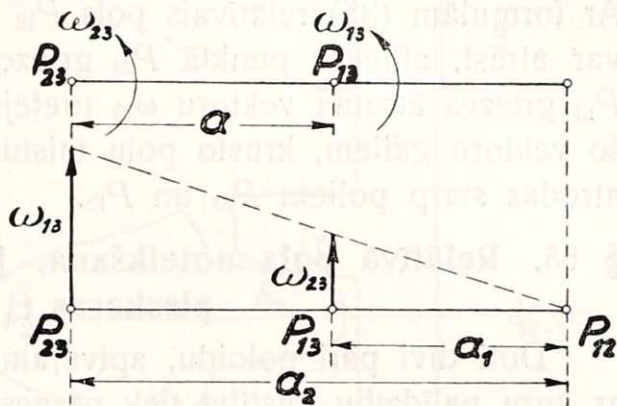
$$a_2 = \frac{\omega_{13}}{\omega_{13} - \omega_{23}} \cdot a$$

Nemot formulu $a_1 = \frac{\omega_{23}}{\omega_{13}} a_2$, atrodam arī

$$a_1 = \frac{\omega_{23}}{\omega_{13} - \omega_{23}} \cdot a$$

(34)

Ar formulām (34) relatīvais pols P_{12} noteikts analitiski, bet grafiski to var atrast, atliekot punktā P_{23} griezes ātruma vektoru ω_{13} , bet punktā P_{13} griezes ātruma vektoru ω_{23} tanī pašā virzienā. Taisne, kas vilkta caur šo vektoru galiem, krusto polu taisni meklējamā punktā P_{12} .



187. zīm.

2. gadījums. Griezes notiek pretējos virzienos (188. zīm.).

Doti ω_{13} , ω_{23} un attālums a .

Jākonstruē relatīvais pols P_{12} .

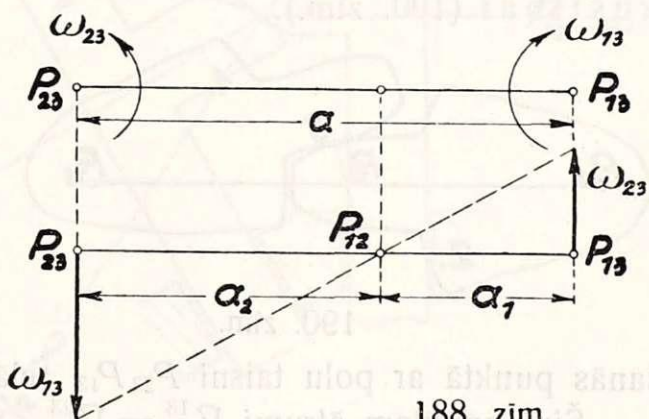
Izlietojot to pašu noteikumu, ka polam P_{12} ātrumi

$$\bar{V}_{12}^{23} = \bar{V}_{12}^{13},$$

atrodam: $a_1 \omega_{13} = a_2 \omega_{23}$, no kurienes

$$a_1 = \frac{\omega_{23}}{\omega_{13}} \cdot a_2,$$

bet $a_1 + a_2 = a$, tā tad



188. zīm.

$$\left(\frac{\omega_{23}}{\omega_{13}} + 1\right)a_2 = a \text{ un}$$

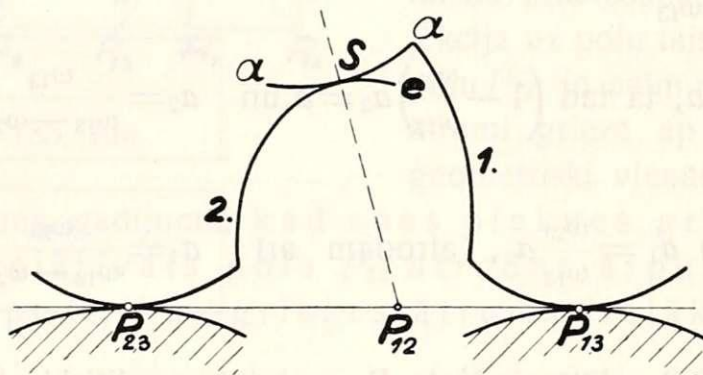
$$\boxed{a_2 = \frac{\omega_{13}}{\omega_{13} + \omega_{23}} \cdot a} \text{ kā arī } \boxed{a_1 = \frac{\omega_{23}}{\omega_{13} + \omega_{23}} \cdot a} \dots (35)$$

Ar formulām (35) relatīvais pols P_{12} noteikts analitiski, bet grafiski to var atrast, atliekot punktā P_{23} griezes ātruma vektoru ω_{13} , bet punkta P_{13} griezes ātruma vektoru ω_{23} pretējā virzienā. Taisne, kas vilkta caur šo vektoru galiem, krusto polu taisni meklējamā punktā P_{12} , kas tagad atrodas starp poliem P_{23} un P_{13} .

§ 65. Relatīvā pola noteikšana, ja kustīgās plaknes savstarpīgi pieskaņas (189. zīm.).

Doti divi pāri poloidu, aptveramā līkne $\alpha - \alpha$ un envelope $e - e$, ar kuŗu palīdzību kustība tiek pārnesta no 1. plaknes uz 2.

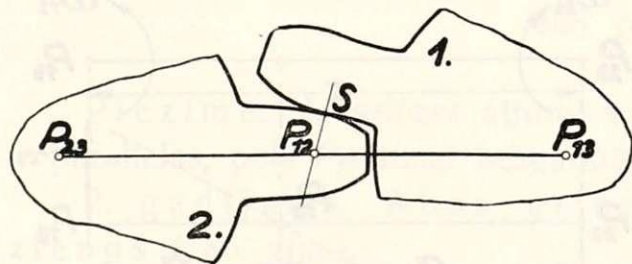
Jākonstruē relatīvās kustības pols P_{12} .



189. zīm.

Pols P_{12} vispirms atrodas uz polu taisnes $P_{23}P_{13}$ un tad arī uz kopējās normāles pieskares punktā S , tamdēļ, velkot šo normāli līdz krustošanai ar polu taisni, atrodam relatīvo polu P_{12} .

22. piemērs. Atrast relatīvo polu divu zobratu (1. un 2.) kustībai (190. zīm.).



190. zīm.

Zobratiem poloidas pārvēršas par punktiem P_{23} un P_{13} , kas sakrīt ar zobratu centriem. Aptveramā un envelope ir zobu virsmas un, velkot caur zobu pieskares punktu S kopējo normāli, atrodam krusto-

šanās punktā ar polu taisni $P_{23}P_{13}$ relatīvo polu P_{12} .

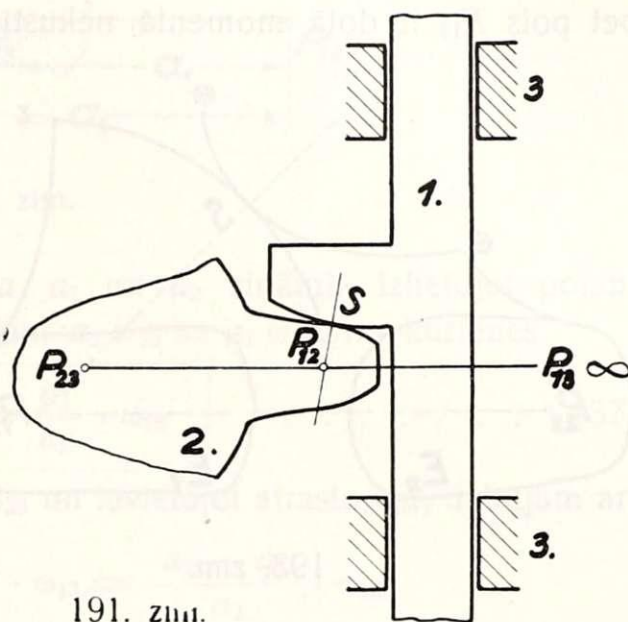
Šim punktam ātrumi $\vec{V}_{12}^{13} = \vec{V}_{12}^{23}$.

23. piemērs. Atrast relatīvo polu P_{12} zobrata sažobei ar zobu stieni (191. zīm.)

Zobu stienis var kustēties tikai virzes kustībā, tā tad pols P_{13} atrodas bezgalībā uz taisnes perpendikulāras kustības virzienam.

Novelkot šo taisni caur polu P_{23} , atrodam polu taisni. Kopējā normāle pieskares punktā S krusto polu taisni meklējamā relatīvā polā P_{12} .

Neskatoties uz to, ka stienis atrodas virzes kustībā, novērotājam, kas atrodas uz zobrata, izliksies, ka stienis 1. it kā griežas ap punktu P_{12} , jo relatīvā kustība ir grieze.



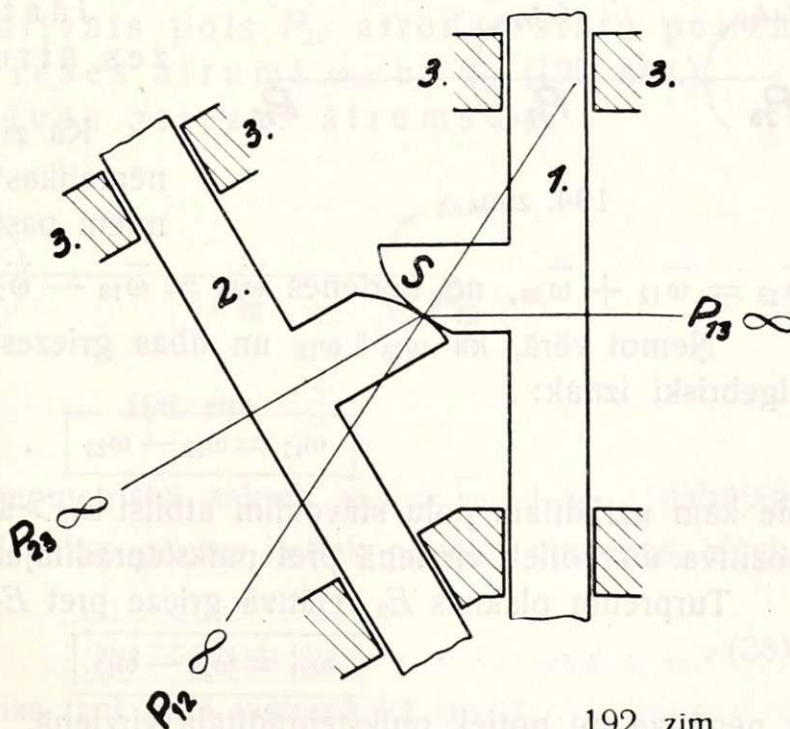
191. zīm.

24. piemērs. Atrast relatīvo polu P_{12} diviem zobu stieņiem, kas var kustēties tikai virzes kustībā (192. zīm.).

Pols P_{13} atrodas bezgalībā uz taisnes, kas iet perpendikulāri 1. stieņa kustības virzienam.

Pols P_{23} arī atrodas bezgalībā uz taisnes, kas iet perpendikulāri 2. stieņa kustības virzienam.

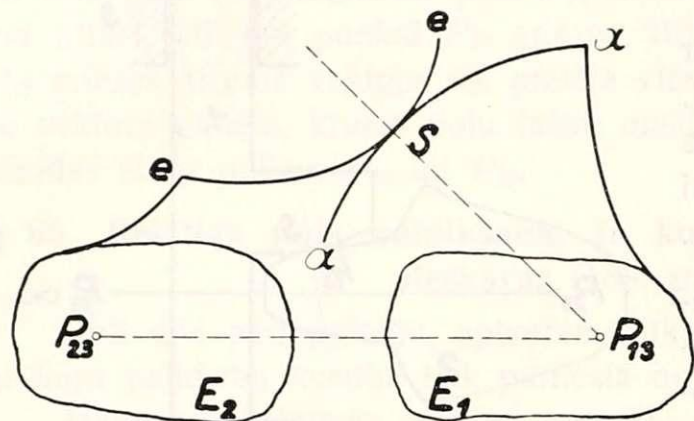
Tas nozīmē, ka visa taisne $P_{13}P_{23}$ atrodas bezgalībā un normāle pieskares punktā S krusto šo taisni arī bezgalībā. Pols P_{12} tā tad atrodas bezgalībā un relatīvā kustība ir virzes kustība.



192. zīm.

Speciāls gadījums. Normāle līkņu α un e pieskares punktā S iet caur vienu no poliem, piemēram, caur P_{13} (193. zīm.).

Tādā gadījumā relatīvais pols P_{12} momentāni sakrīt ar polu P_{13} , bet pols P_{13} ir dotā momentā nekustīgs attiecībā pret E_3 , tā tad līdz



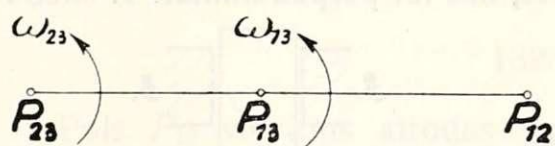
193. zīm.

ar to arī pols P_{12} momentāni ir nekustīgs pret plakni E_3 ; tas nozīmē, ka plaknei E_2 ir divi nekustīgi punkti P_{23} un P_{12} un tā vispārīgi ir nekustīga, bet kustas tikai plakne E_1 . 193. zīmējumā arī skaidri redzams: kamēr pastāv pieskaršanās starp līknēm α un e un kamēr kopējā normāle iet caur polu P_{13} ,

plakne E_2 nevar griezties, bet var griezties tikai plakne E_1 .

§ 66. Relatīvā griezes ātruma noteikšana.

1. gadījums. Plaknes E_1 un E_2 griežas vienā virzienā, un relatīvais pols atrodas ārpus $P_{23}P_{13}$. Doti griezes ātrumi ω_{23} un ω_{13} (194. zīm.).



194. zīm.

Jāatrod relatīvās griezes ātrums ω_{12} .

Kā zināms no „Ķermeņa kinēmatikas“ starp griezes ātrumiem pastāv sakars:

$$\bar{\omega}_{13} = \bar{\omega}_{12} + \bar{\omega}_{23}, \text{ no kurienes } \bar{\omega}_{12} = \bar{\omega}_{13} - \bar{\omega}_{23}.$$

Nemot vērā, ka $\bar{\omega}_{23} \parallel \bar{\omega}_{13}$ un abas griezes notiek vienā virzienā, algebriski iznāk:

$$\boxed{\omega_{12} = \omega_{13} - \omega_{23}} \dots \dots \dots (36),$$

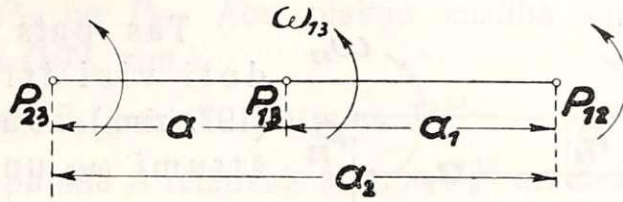
pie kam uzrādītam polu stāvoklim atbilst $\omega_{13} > \omega_{23}$, tā tad grieze ω_{12} ir pozitīva un notiek virzienā pret pulksteņrādītāju.

Turpretim plaknes E_2 relatīvā grieze pret E_1 ar ātrumu

$$\boxed{\omega_{21} = \omega_{23} - \omega_{13}}$$

ir negatīva un notiek pulksteņrādītāja virzienā.

Tas pats gadījums, bet doti visi trīs poli un ω_{13} . Jāatrod griezes ātrumi ω_{23} un ω_{12} (195. zīm.).



195. zīm.

Ja poli doti, tad attālumi a , a_1 un a_2 zināmi. Izlietojot polam P_{12} noteikumu $\bar{V}_{12}^{23} = \bar{V}_{12}^{13}$, atrodam $a_2 \omega_{23} = a_1 \omega_{13}$, no kurienes

$$\omega_{23} = \frac{a_1}{a_2} \cdot \omega_{13} \quad \dots \dots \dots (37)$$

Ņemot formulu $\omega_{12} = \omega_{13} - \omega_{23}$ un ievietojot atrasto ω_{23} , dabūjam arī

$$\omega_{12} = \left(1 - \frac{a_1}{a_2}\right) \cdot \omega_{13} = \frac{a_2 - a_1}{a_2} \cdot \omega_{13}$$

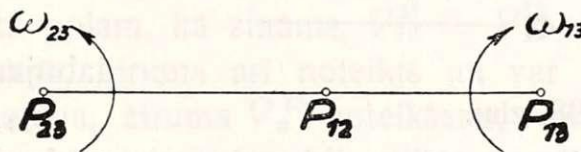
un galīgi

$$\omega_{12} = \frac{a}{a_2} \cdot \omega_{13} \quad \dots \dots \dots (37)$$

Kā redzams, ja $a_2 > a_1$, griezes ātrums ω_{12} ir pozitīvs, un grieze notiek virzienā pret pulkstenrādītāju.

2. gadījums. Plaknes E_1 un E_2 griežas pretējos virzienos, un relatīvais pols P_{12} atrodas starp poliem P_{23} un P_{13} . Doti griezes ātrumi ω_{23} un ω_{13} (196. zīm.).

Jāatrod relatīvās griezes ātrums ω_{12} .



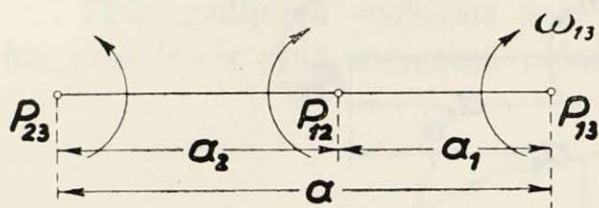
196. zīm.

Izejot atkal no geometriskā sakara $\bar{\omega}_{13} = \bar{\omega}_{12} + \bar{\omega}_{23}$, dabūjam $\bar{\omega}_{12} = \bar{\omega}_{13} - \bar{\omega}_{23}$, bet ja abas griezes notiek pretējos virzienos, algebriski atrodam

$$\omega_{12} = \omega_{13} + \omega_{23} \quad \dots \dots \dots (38),$$

pie kam grieze ω_{12} notiks tanī pašā virzienā kā ω_{13} .

Apskatot plaknes E_2 griezes kustību pret E_1 , atrodam, ka $\bar{\omega}_{21} = \bar{\omega}_{23} - \bar{\omega}_{13}$ un algebriski atkal $\omega_{21} = \omega_{23} + \omega_{13}$, bet grieze ω_{21} notiek tanī pašā virzienā kā ω_{23} .



197. zīm.

Tas pats gadījums, bet doti visi trīs poli un ω_{13} (197. zīm.). Jāatrod griezes ātrumi ω_{23} un ω_{12} .

Ja poli doti, tad attālumi a , a_1 un a_2 zināmi. Izlietojot atkal polam P_{12} noteikumu

$\bar{V}_{12}^{23} = \bar{V}_{12}^{13}$, atrodam: $a_2 \omega_{23} = a_1 \omega_{13}$, no kurienes

$$\omega_{23} = \frac{a_1}{a_2} \cdot \omega_{13} \dots \dots \dots (39)$$

Nemot formulu $\omega_{12} = \omega_{13} + \omega_{23}$ un ievietojot ω_{23} , atrodam

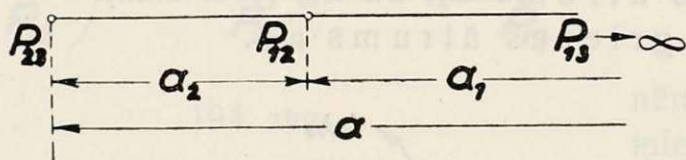
$$\omega_{12} = \left(1 + \frac{a_1}{a_2}\right) \cdot \omega_{13} = \frac{a_2 + a_1}{a_2} \cdot \omega_{13}$$

un galīgi

$$\omega_{12} = \frac{a}{a_2} \cdot \omega_{13} \dots \dots \dots (39),$$

pie kam grieze ω_{12} notiek tanī pašā virzienā kā ω_{13} un $\omega_{12} > \omega_{13}$.

Speciāls gadījums. Pols P_{13} atrodas bezgalībā (198. zīm.).



198. zīm.

Šādā gadījumā

$$a = \infty \text{ un } a_1 = \infty.$$

Saskaņā ar noteikumu

$$\bar{V}_{12}^{23} = \bar{V}_{12}^{13}$$

dabūjam

$$\omega_{23} \cdot a_2 = \omega_{13} \cdot a_1,$$

no kurienes

$$\omega_{13} = \frac{a_2}{a_1} \cdot \omega_{23} = \frac{a_2}{\infty} \cdot \omega_{23} = 0, \text{ bet } \bar{\omega}_{13} = \bar{\omega}_{12} + \bar{\omega}_{23},$$

tā tad $\bar{\omega}_{12} + \bar{\omega}_{23} = 0$, jeb

$$\bar{\omega}_{12} = -\bar{\omega}_{23}.$$

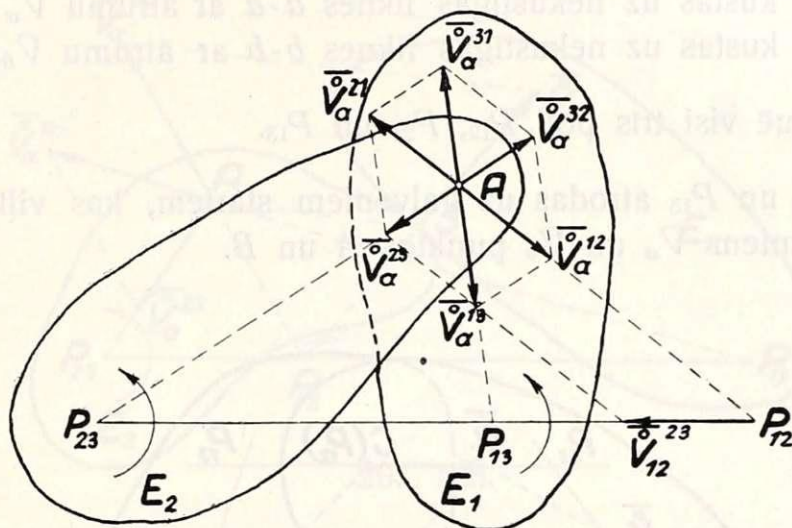
Tas nozīmē, ka relatīvais ātrums $\bar{\omega}_{12}$ pēc lieluma vienāds ar pārnesamo, bet iet pretējā virzienā.

§ 67. Ātrumu sešstūris.

Divas plaknes E_1 un E_2 griežas attiecībā pret nekustīgo plakni E_3 ap poliem P_{13} un P_{23} . Abu plakņu kustība saistīta, un relatīvais pols P_{12} zināms (199. zīm.).

Dots plaknes E_2 punkta A ātrums \vec{V}_a^{23} .

Jākonstruē punkta A relatīvais ātrums \vec{V}_a^{12} un absolūtais ātrums \vec{V}_a^{13} .



199. zīm.

Atliekam doto ātrumu V_a^{23} ortogonālā virzienā un meklējam pola P_{12} , kā plaknes E_2 punkta, ātrumu \vec{V}_{12}^{23} . Šim nolūkam savienojam punktu A ar polu P_{12} un caur \vec{V}_a^{23} galu velkam taisni paralēli AP_{12} . Šī taisne no polu taisnes nogriež ortogonālo ātrumu \vec{V}_{12}^{23} .

Bet relatīvam polam, kā zināms, $\vec{V}_{12}^{23} = \vec{V}_{12}^{13}$. Ar to polam P_{12} , kā plaknes E_1 punktam, ātrums arī noteikts un var pāriet uz punkta A , kā plaknes E_1 punkta, ātruma \vec{V}_a^{13} noteikšanu, velkot staru AP_{13} līdz krustošanai ar to pašu taisni, kas bija vilkta paralēli AP_{12} .

Ievērojot tālāk vektoriālo sakaru starp ātrumiem $\vec{V}_a^{13} = \vec{V}_a^{12} + \vec{V}_a^{23}$, atrodam arī $\vec{V}_a^{12} = \vec{V}_a^{13} - \vec{V}_a^{23}$.

Kā viegli redzams 199. zīm., tos pašus ātrumus varēja konstruēt tieši uz vektoriāla sakara pamata, neņemot nemaz palīgā pola P_{12} ātrumus.

Ievērojot, ka $\vec{V}_a^{12} = -\vec{V}_a^{21}$, atliekam visus ātrumu vektorus arī pretējos virzienos un savienojam to galus taisnēm. Iegūtā figūra saucas par

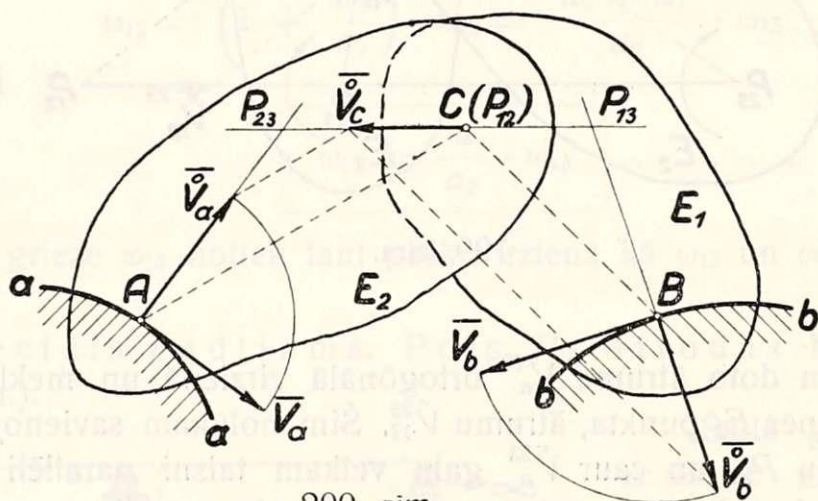
ātrumu sešstūri, kuŗam liela nozīme relatīvo ātrumu noteikšanai, jo ar tā palīdzību var atrast visus iespējamus relatīvos ātrumus; pie tam sešstūŗa konstrukcijai pietiek zināt vienu malu un trīs polus.

§ 68. Polu taisnes noteikšana, ja plaknes savienotas ar šarnīru (200. zīm.).

Divas plaknes E_2 un E_1 savienotas ar šarnīru punktā C . Plaknes E_2 punkts A kustas uz nekustīgās līknes $a-a$ ar ātrumu \vec{V}_a un plaknes E_1 punkts B kustas uz nekustīgās līknes $b-b$ ar ātrumu \vec{V}_b .

Jākonstruē visi trīs poli P_{12} , P_{23} un P_{13} .

Poli P_{23} un P_{13} atrodas uz galveniem stariem, kas vilkti perpendikulāri ātrumiem \vec{V}_a un \vec{V}_b punktos A un B .



200. zīm.

Šarnīrs C ir relatīvais pols P_{12} , kas pieder abām plaknēm, tā tad polu taisne iet caur punktu C .

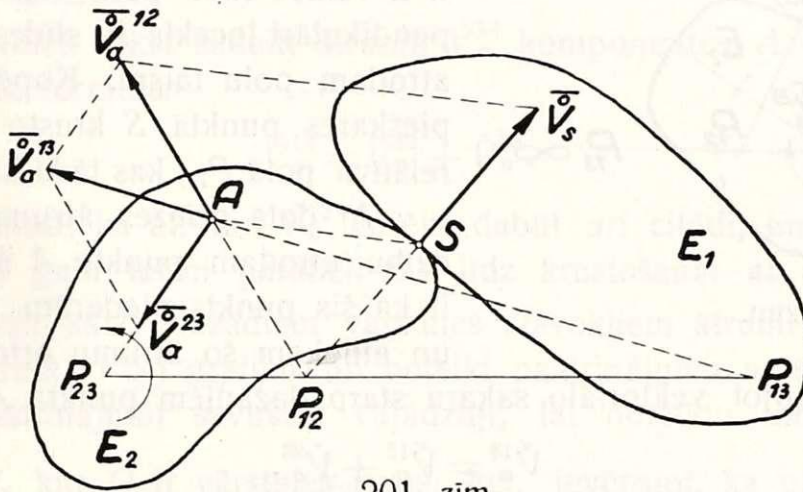
Bez tam relatīvā pola P_{12} ātrumi abās plaknēs ģeometriski vienādi: $\vec{V}_{12}^{23} = \vec{V}_{12}^{13}$ un ortogonālie ātrumi sakrīt ar polu taisni. Lai izmantotu šo apstākli, savienojam punktu C ar A un B , pagriežam abus ātrumus \vec{V}_a un \vec{V}_b ortogonāli vienā virzienā un velkam caur \vec{V}_a galu taisni paralēli AC un caur \vec{V}_b galu taisni paralēli BC . Abas taisnes krustojas vektora \vec{V}_c galā, kuŗa virziens arī nosaka polu taisnes virzienu. Turpinot polu taisni līdz krustošanai ar minētiem galveniem stariem, atrodam polus P_{23} un P_{13} .

§ 69. Kustīgo plakņu relatīvā slīdes ātruma noteikšana, ja divas plaknes savstarpīgi pieskaņas (201. zīm.).

Doti poli P_{23} un P_{13} , kā arī punkta A ortogonālais ātrums \vec{V}_a^{23} . Jākonstruē \vec{V}_a^{12} , \vec{V}_s un jāatrod griezes ātrums ω_{13} .

Pieņemam, ka plakne E_2 griežas pret pulksteņrādītāju ap polu P_{23} un abas plaknes savstarpīgi pieskaņas.

Relatīvo polu P_{12} atrodam, velkot pieskares punktā S kopējo normāli līdz krustošanai ar polu taisni.



201. zīm.

Atliekam doto ātrumu \vec{V}_a^{23} ortogonālā virzienā, savienojam punktu A ar poliem P_{12} un P_{13} un konstruējam ar vektoriāla sakara $\vec{V}_a^{13} = \vec{V}_a^{12} + \vec{V}_a^{23}$ palīdzību relatīvo ortogonālo ātrumu \vec{V}_a^{12} un absolūto ortogonālo ātrumu \vec{V}_a^{13} .

Ortogonālo ātrumu \vec{V}_a^{13} un \vec{V}_a^{23} virzieni 201. zīm. rāda, ka plaknes E_1 un E_2 griežas pretējos virzienos.

Relatīvo slīdes ātrumu starp abām plaknēm pieskares punktā S atrodam, savienojot punktu A ar S un velkot caur \vec{V}_a^{12} galu taisni paralēli AS . Šī taisne uz stara $P_{12}S$ nogriež slīdes ātrumu \vec{V}_s .

Beidzot atrodam arī plaknes E_1 griezes ātrumu, izdalot V_a^{13} ar attālumu AP_{13} :

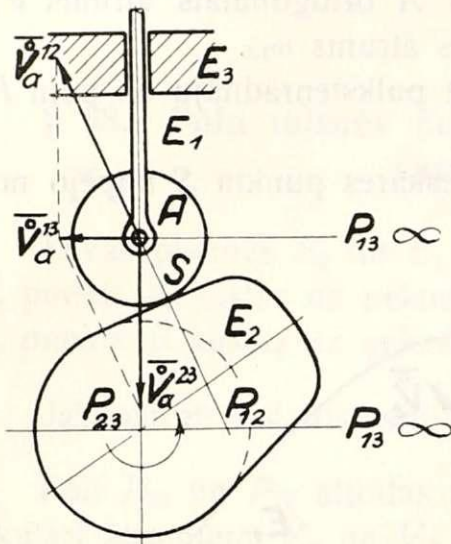
$$\omega_{13} = \frac{V_a^{13}}{AP_{13}}.$$

Piezīme: Par absolūto ātrumu varētu uzskatīt nevis \vec{V}^{13} , bet arī \vec{V}^{23} , tikai tad relatīvais ātrums jāatrod ar formulu $\vec{V}^{23} = \vec{V}^{21} + \vec{V}^{13}$.

25. piemērs. Vārstules slīdes ātruma noteikšana pēc izcilņa griezes ātruma (202. zīm.).

Iekšdegu motoru vārstuļu kustību panāk ar izcilņa E_2 griezes kustību ap asi P_{23} . Izcilnim arvien pieskaņas loceklis E_1 , kas var kustēties tikai virzes kustībā.

Lai pārvērstu pieskares punktā S slīdes kustību velšanās kustībā, dažreiz locekļa E_1 galā novieto mazu riteni.



202. zīm.

Dots griezes ātrums ω_{23} . Jāatrod slīdes ātrums V^{13} .

Pols P_{23} zināms, bet pols P_{13} atrodas bezgalībā uz taisnes, kas iet perpendikulāri locekļa E_1 virzes kustībai. Savienojot polu P_{23} ar polu $P_{13} \infty$, t. i. velkot caur polu P_{23} taisni perpendikulāri locekļa E_1 slīdes virzienam, atrodam polu taisni. Kopējā normāle pieskares punktā S krusto polu taisni relatīvā polā P_{12} , kas tādā kārtā atrasts.

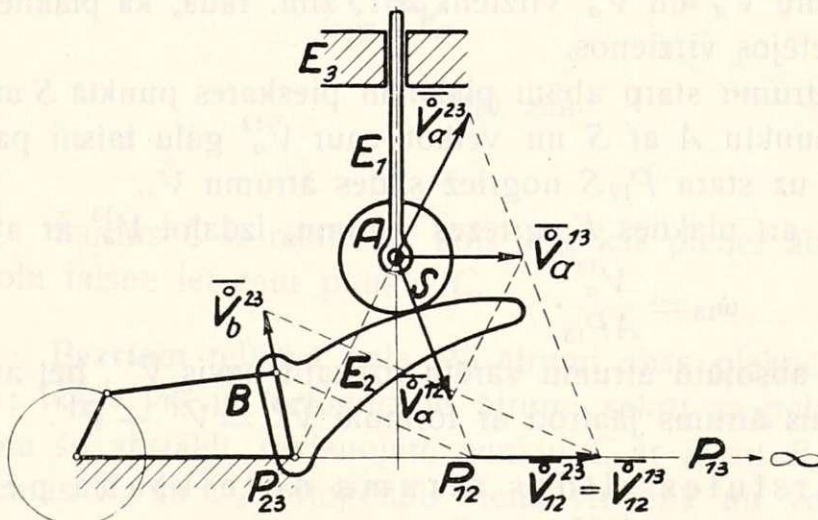
Ar dotā griezes ātruma ω_{23} palīdzību atrodam punkta A ātrumu V_a^{23} , it kā šis punkts piederētu plaknei E_2 , un atliekam šo ātrumu ortogonālā virzienā.

Ievērojot vektoriālo sakaru starp dažādiem punkta A ātrumiem

$$\vec{V}_a^{13} = \vec{V}_a^{12} + \vec{V}_a^{23},$$

konstruējam attiecīgo paralēlogramu un atrodam meklējamo vārstules E_1 slīdes ātrumu \vec{V}_a^{13} pret E_3 .

26. piemērs. Tas pats mēchanisms, tikai izciļņa vietā ir speciāli izveidots loceklis E_2 , ko piedzen ar kloķi (203. zīm.).



203. zīm.

Plaknes E_2 griezes pols ir P_{23} . Šinī plaknē piedzīts punkts B ar ātrumu \vec{V}_b^{23} , kas dots.

Jākonstruē punkta A ātrumi V_a^{13} un V_a^{12} .

Plaknei E_1 pret E_3 iespējama tikai virzes kustība, tā tad pols P_{13} atrodas bezgalībā uz taisnes,

kas perpendikulāra virzes kustības virzienam.

Polu taisni dabūjam, savienojot polu P_{23} ar polu P_{13} bezgalībā.

Relātīvo polu P_{12} atrodam, velkot kopējo normāli pieskares punktā S līdz krustošanai ar polu taisni.

Pāreju no plaknes E_2 punktu ātrumiem uz plaknes E_1 punktu ātrumiem var izdarīt caur relātīvo polu P_{12} , jo tas pieder abām plaknēm. Taisne, kas vilkta caur \bar{V}_b^{23} galu paralēli BP_{12} , no polu taisnes nogriež pola P_{12} ātrumu \bar{V}_{12}^{23} , kas ir arī ģeometriski vienāds ar \bar{V}_{12}^{13} . Ievērojot vēl, ka plaknes E_1 pret E_3 kustība ir virze, visiem šīs plaknes punktiem minētā kustībā ātrumi ģeometriski vienādi un arī punkta A ātrums $\bar{V}_a^{13} = \bar{V}_{12}^{13}$.

Tālāk atliek tikai sadalīt ātrumu \bar{V}_a^{13} komponentēs AP_{12} un AP_{23} virzienos pēc formulas

$$\bar{V}_a^{13} = \bar{V}_a^{12} + \bar{V}_a^{23}.$$

Piezīmēsim, ka ātrumu \bar{V}_a^{23} varēja dabūt arī citādi, un proti: velkot caur \bar{V}_b^{23} galu taisni paralēli BA līdz krustošanai ar staru $P_{23}A$.

Kad tādā kārtā dažādiem vārstules stāvokļiem ātrumi \bar{V}_a^{13} atrasti, var uzkonstruēt (VS) grafiku un noteikt paātrinājumu ar subnormāles metodi. Paātrinājumi savukārt vajadzīgi, lai noteiktu inerces spēku $m_j = \frac{Q}{g} \cdot j$, kur Q ir vārstules svars, bet, ievērojot, ka parasti $j > g$, arī $m_j > Q$, un virs vārstules jānovieto atspere, kas nodrošinātu pieskaršanos starp E_1 un E_2 .

Lai mēchanisms strādātu mierīgi, bez lieliem triecieniem, vārstules nosēšanās ātrums nedrīkst pārsniegt 0,1—0,15 m/sec. To var panākt ar attiecīgo locekļa E_2 izveidošanu.

§ 70. Relātīvā ātruma noteikšana, ja plaknes atrodas virzes kustībā un savstarpīgi pieskaņas (204. zīm.).

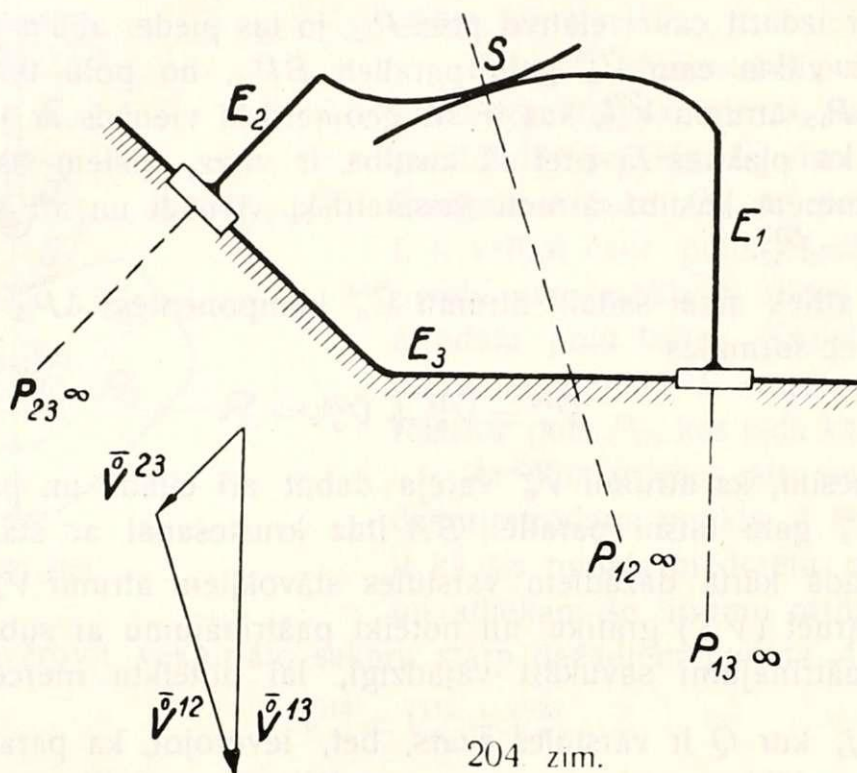
Dots plaknes E_1 virzes kustības ātrums V^{13} . Jākonstruē ātrumi V^{12} un V^{23} .

Ja abas plaknes E_1 un E_2 pret trešo E_3 var kustēties tikai virzes kustībā, tad visa polu taisne atrodas bezgalībā. Līdz ar to arī relātīvais pols P_{12} atrodas bezgalībā uz kopējās normāles, kas vilkta pieskares punktā S .

Atliekam doto ātrumu V^{13} ortogonālā virzienā un sadalām to komponentēs uz pārējiem virzieniem saskaņā ar formulu

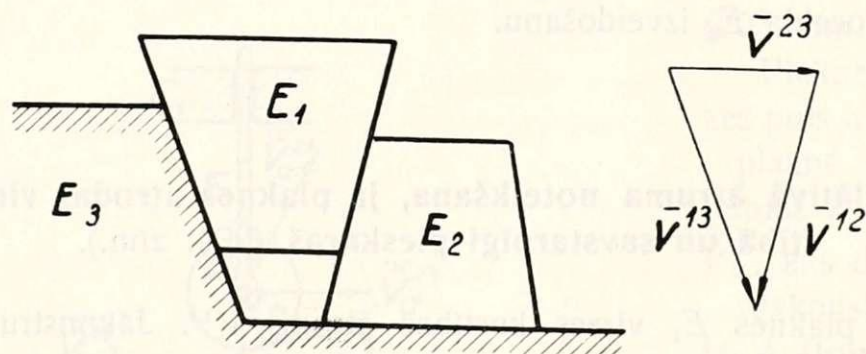
$$\bar{V}^{13} = \bar{V}^{12} + \bar{V}^{23}.$$

Piezīme: Ja savstarpīgās plakņu kustības ir virzes, tad var sadalīt ne tikai ortogonālos, bet arī pašus ātrumus, kā tas izdarīts nākošā piemērā.



204. zīm.

27. piemērs. Ķīļa kustība (205. zīm.). Dots ātrums \bar{V}^{13} . Jākonstruē ātrumi \bar{V}^{12} un \bar{V}^{23} .



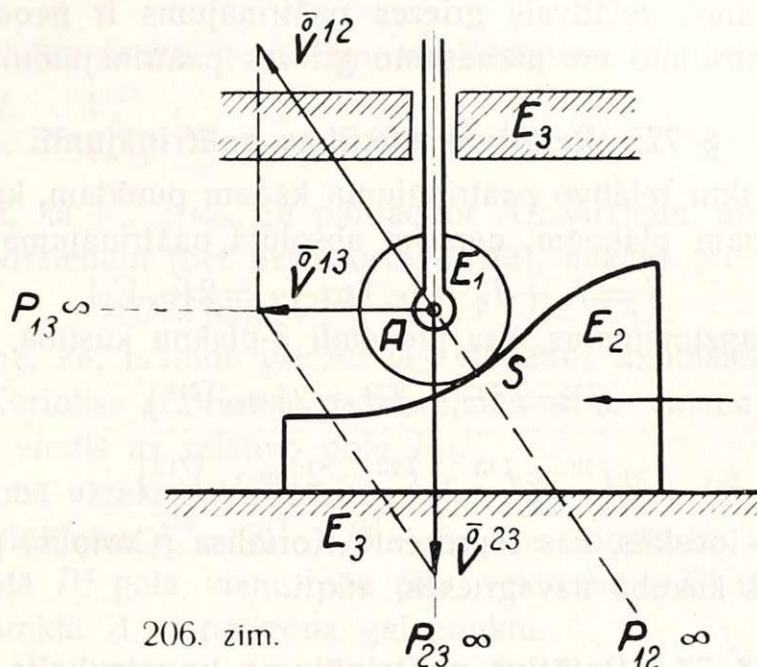
205. zīm.

Atliekam doto ātrumu \bar{V}^{13} zināmā mērogā un sadalām to komponentēs attiecīgos slīdes virzienos, iegūstot meklējamos ātrumus \bar{V}^{12} un \bar{V}^{23} .

28. piemērs. Vārstules iedarbes mēchanisms ar slīdošu locekli (206. zīm.).

Dots plaknes E_2 slīdes ātrums \vec{V}^{23} pret E_3 . Jākonstruē ātrumi \vec{V}^{13} un \vec{V}^{23} .

Plakne E_2 pārvietojas pret E_3 virzes kustībā, tā tad pols P_{23} atrodas bezgalībā.



206. zim.

Tāpat E_1 pret E_3 arī pārvietojas virzes kustībā, un arī pols P_{13} atrodas bezgalībā. Līdz ar to visa polu taisne un arī pols P_{12} atrodas bezgalībā, pie tam pols P_{12} atrodas vēl uz kopējās normāles pieskares punktā S .

Pēc tam, kad visi virzieni AP_{13} , AP_{12} un AP_{23} noskaidroti, atliekam doto slīdes ātrumu ortogonālā virzienā un konstruējam paralēlogramu tā, lai

$$\vec{V}^{13} = \vec{V}^{12} + \vec{V}^{23}.$$

§ 71. Griezes paātrinājumi relatīvā kustībā.

Agrāk atrastas paātrinājumu projekcijas j_n un j_t (formulas 21 un 22) atkarībā no ω , τ un D .

Šīs formulas var lietot arī relatīvā paātrinājuma noteikšanai, bet tad jāzina ω_{12} , τ_{12} un D_{12} , kur D_{12} ir relatīvās kustības infleksijas riņķa caurmērs.

Vispārīgi, kā zināms, $\bar{\omega}_{13} = \bar{\omega}_{12} + \bar{\omega}_{23}$, no kurienes

$$\bar{\omega}_{12} = \bar{\omega}_{13} - \bar{\omega}_{23}.$$

Komplānā kustībā visi griezes ātrumu vektori stāv perpendikulāri kustības plaknei, tamdēļ vektoru zīmes var nerakstīt, bet tikai jāievēro, ka ω var būt pozitīvs vai negatīvs.

Griezes ātrumi ar laiku var mainīties, tas nozīmē, ka tie ir laika funkcijas, un tos var pēc laika diferencēt

$$\frac{d\bar{\omega}_{12}}{dt} = \frac{d\bar{\omega}_{13}}{dt} - \frac{d\bar{\omega}_{23}}{dt} \text{ jeb } \bar{\tau}_{12} = \bar{\tau}_{13} - \bar{\tau}_{23}.$$

Kā redzams, relatīvais griezes paātrinājums ir ģeometriskā difference starp absolūto un pārnesamo griezes paātrinājumu.

§ 72. Relatīvas kustības paātrinājumi.

Lai noteiktu relatīvo paātrinājumu kādam punktam, kas pieder vienai no kustīgām plaknēm, ņemsim absolūtā paātrinājuma izteiksmi

$$\bar{j} = \bar{j}_\sigma + \bar{j}_k + \bar{j}_\gamma, \text{ kur } \bar{j}_\gamma = 2[\bar{\omega}_k \bar{V}_\sigma],$$

jeb, lietojot apzīmējumus, kas pieņemti 3-plakņu kustībā,

$$\bar{j}^{13} = \bar{j}^{12} + \bar{j}^{23} + 2[\bar{\omega}_{23} \bar{V}^{12}],$$

no kurienes

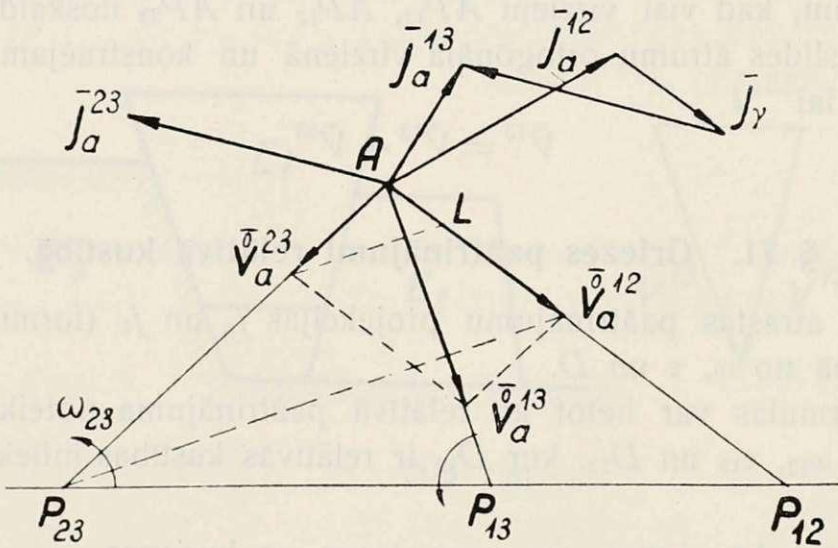
$$\bar{j}^{12} = \bar{j}^{13} - \bar{j}^{23} - 2[\bar{\omega}_{23} \cdot \bar{V}^{12}] \dots \dots \dots (40)$$

Pēdējais loceklis, kas reprezentē Koriolisa (Coriolis) paātrinājumu, ja pārnesamā kustībā nav griezes, atkrīt.

§ 73. Relatīvā paātrinājuma konstrukcija.

Doti poli P_{23} , P_{13} un P_{12} , punkta A ātrums V_a^{23} un paātrinājumi \bar{j}_a^{23} un \bar{j}_a^{13} . Jākonstruē punkta A relatīvais paātrinājums \bar{j}_a^{12} (207. zīm.).

Paātrinājumu pamatformula 3-plakņu kustībā: $\bar{j}_a^{13} = \bar{j}_a^{12} + \bar{j}_a^{23} + \bar{j}_\gamma$.



207. zīm.

Savienojam punktu A ar visiem trīs poli, atliekam doto ātrumu V_a^{23} ortogonālā virzienā un konstruējam pēc formulas $\bar{V}_a^{13} = \bar{V}_a^{12} + \bar{V}_a^{23}$ ātrumu paralēlogramu tā, lai \bar{V}_a^{13} būtu paralēlograma diagonāle.

Tālāk konstruējam Koriolisa (Coriolis) paātrinājumu, savienojot pārnesamo polu P_{23} ar ortogonālā relatīvā ātruma \bar{V}_a^{12} galu un velkot caur ortogonālā pārnesamā ātruma \bar{V}_a^{23} galu paralēlu taisni. Šī taisne no relatīvā stara nogriež AL , kas reprezentē pusi Koriolisa (Coriolis) paātrinājuma.

Lai pierādītu sacīto, sastādām no līdzīgiem trijstūriem proporciju

$$\frac{AL}{\bar{V}_a^{12}} = \frac{V_a^{23}}{AP_{23}}, \text{ bet } \frac{V_a^{23}}{AP_{23}} = \omega_{23}, \text{ tā tad } AL = \omega_{23} \cdot \bar{V}_a^{12}.$$

Ievērojot, ka $\bar{V}_a^{12} \perp \omega_{23}$, un pārbaudot \overline{AL} virzienu, atbilstošu īstenā ātruma \bar{V}_a^{12} virzienam (bet nevis ortogonālā), nākam pie slēdziena, ka

$$\overline{AL} = [\omega_{23} \cdot \bar{V}_a^{12}], \text{ tā tad } \bar{j}_\gamma = 2\overline{AL}.$$

Jāpiezīmē, ka, mainot griezes ω_{23} virzienu, mainīsies arī \bar{V}_a^{12} virziens, bet Koriolisa (Coriolis) paātrinājums savu virzienu paturēs un būs vienmēr virzīts uz relatīvo polu P_{12} .

No sākumā uzrakstītās pamatformulas $\bar{j}_a^{13} = \bar{j}_a^{12} + \bar{j}_a^{23} + \bar{j}_\gamma$ atrodam relatīvo paātrinājumu $\bar{j}_a^{12} = \bar{j}_a^{13} - \bar{j}_a^{23} - \bar{j}_\gamma$, kas konstruēts 207. zīm., atliekot no dotā \bar{j}^{13} gala vienu pēc otra vektorus $-\bar{j}^{23}$ un $-2\overline{AL}$ un savienojot punktu A ar poligona galapunktu.

§ 74. Absolūtā paātrinājuma konstrukcija.

Doti poli P_{23} , P_{13} un P_{12} , punkta A ātrums V_a^{23} un paātrinājumi \bar{j}_a^{23} un \bar{j}_a^{12} . Jākonstruē punkta A absolūtais paātrinājums \bar{j}_a^{13} (208. zīm.).

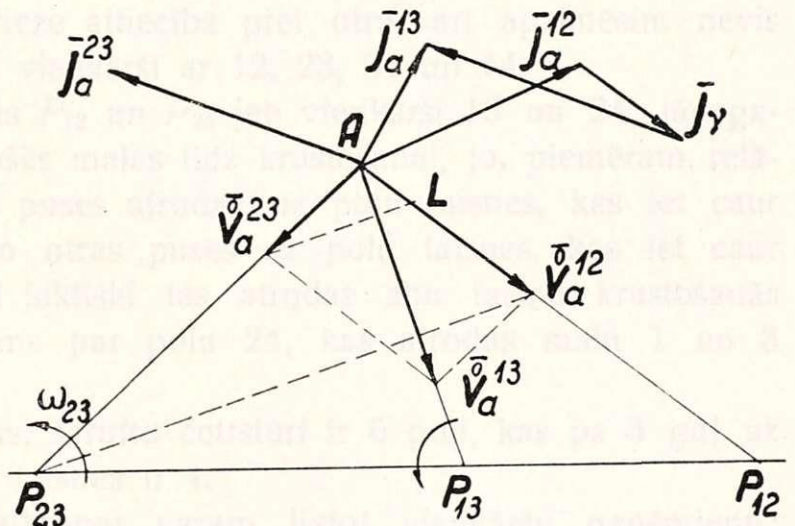
Paātrinājumu pamatformula 3-plakņu kustībā: $\bar{j}_a^{13} = \bar{j}_a^{12} + \bar{j}_a^{23} + \bar{j}_\gamma$. Savienojam punktu A ar visiem trīs poli, atliekam dato ātrumu V_a^{23} ortogonālā virzienā un konstruējam pēc formulas

$$\bar{V}_a^{13} = \bar{V}_a^{12} + \bar{V}_a^{23}$$

ātrumu paralēlogramu tā, lai \bar{V}_a^{13} būtu paralēlograma diagonāle.

Koriolisa (Coriolis) paātrinājuma noteikšanai savienojam pārnesamo polu P_{23} ar relatīvā ortogonālā ātruma \bar{V}_a^{12} galu un

velkam caur pārnesamā ortogonālā ātruma \bar{V}_a^{23} galu paralēlu taisni.



208. zīm.

Šī taisne no relatīvā stara nogriež pusi Koriolisa (Coriolis) paātrinājuma \overline{AL} .

Pierādījums. No līdzīgiem trijstūriem seko proporcija

$$\frac{AL}{V_a^{12}} = \frac{V_a^{23}}{AP_{23}}, \text{ bet } \frac{V_a^{23}}{AP_{23}} = \omega_{23}, \text{ tā tad } AL = \omega_{23} \cdot V_a^{12}.$$

Pārbaudot virzienus, atrodam, ka

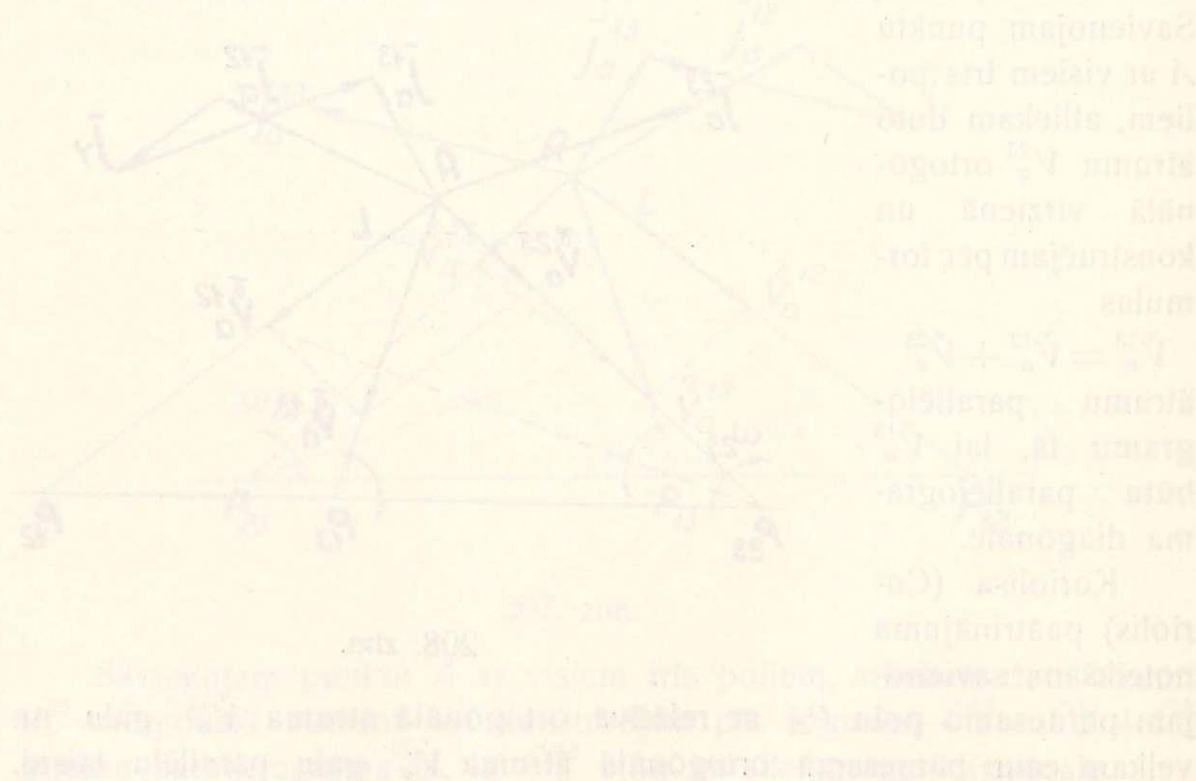
$$\overline{AL} = [\overline{\omega}_{23} \cdot \overline{V}_a^{12}] = \frac{1}{2} \overline{J}_\gamma.$$

Tad $\overline{J}_\gamma = 2\overline{AL}$ un virzīts uz relatīvo polu P_{12} .

Sākumā uzrakstīto paātrinājumu pamatformulu

$$\overline{j}_a^{13} = \overline{j}_a^{12} + \overline{j}_a^{23} + \overline{j}_\gamma$$

konstruējam, atliekot no \overline{j}_a^{12} gala vienu pēc otra vektorus \overline{j}_a^{23} un $2\overline{AL}$ un savienojot punktu A ar poligona galapunktu.

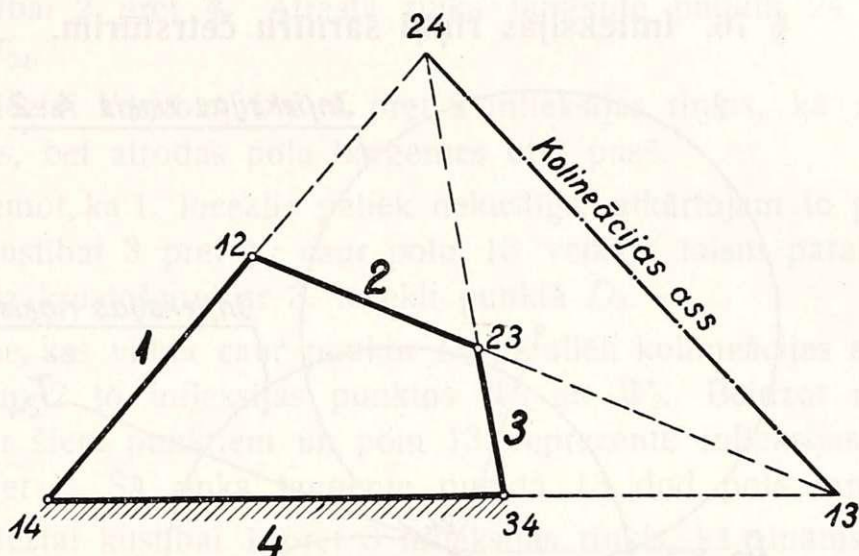


X nodaļa.

Četru plakņu relatīvā kustība.

§ 75. Relatīvie poli un kollineācijas ass.

Ņemsim pamata mēchanismu ar 4 plaknēm, t. i. šarnīru četrstūri. Vienkāršības dēļ plaknes E_1 , E_2 , E_3 un E_4 apzīmēsim tagad ar skaitļiem 1, 2, 3 un 4 (209. zīm.).



209. zīm.

Tāpat četrstūra šarnīrus, kas reprezentē relatīvos polus, jo ap tiem notiek vienas plaknes grieze attiecībā pret otru, arī apzīmēsim nevis ar P_{12} , P_{23} , P_{34} , P_{14} , bet vienkārši ar 12, 23, 34 un 14.

Lai atrastu vēl polus P_{13} un P_{24} jeb vienkārši 13 un 24, jāpagarina četrstūra pretimgulošās malas līdz krustošanai, jo, piemēram, relatīvais pols 13 no vienas puses atrodas uz polu taisnes, kas iet caur poliem 14 un 34, bet no otras puses uz polu taisnes, kas iet caur poliem 12 un 23, tā tad faktiski tas atrodas abu taisņu krustošanās punktā. Tas pats sakāms par polu 24, kas atrodas malu 1 un 3 krustošanās punktā.

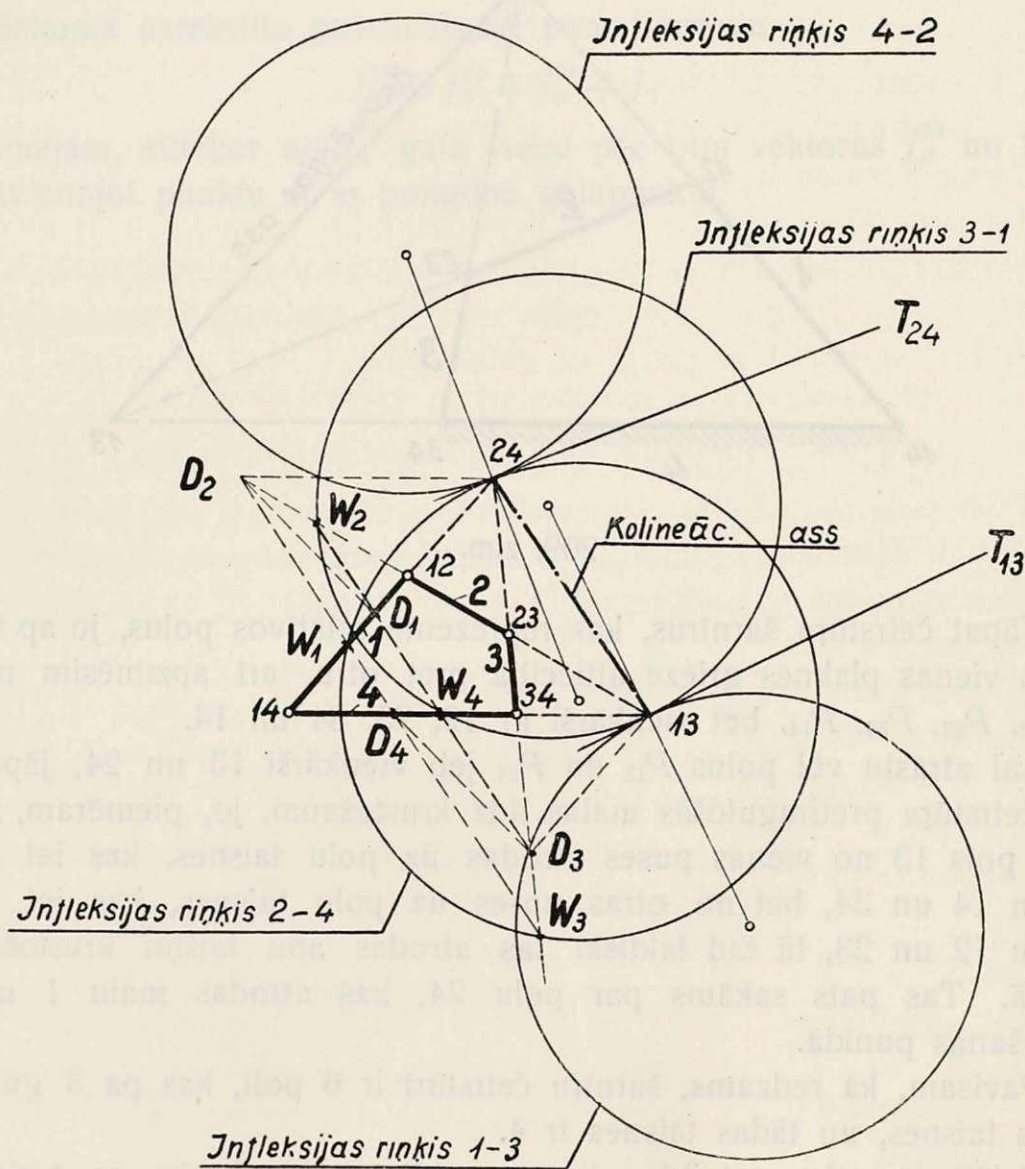
Pavisam, kā redzams, šarnīru četrstūrī ir 6 poli, kas pa 3 guļ uz vienas taisnes, un tādas taisnes ir 4.

Relatīvo polu noteikšanai varam lietot vienkāršu paņēmieni: jāvelk līdz krustošanai divas tādas taisnes, lai pēc vienādu ciparu nostrīpošanas paliktu pola apzīmējums; piemēram:

$$\left| \begin{array}{c} 14 - 34 \\ 12 - 23 \end{array} \right| \rightarrow 13 \quad \left| \begin{array}{c} 12 - 14 \\ 23 - 34 \end{array} \right| \rightarrow 24.$$

Attiecībā uz kollineācijas ass noteikšanu šarnīru četrstūra kustībā jāpiezīmē, ka šeit var būt runa tikai par kollineācijas asīm kustībās 2 pret 4 vai 3 pret 1 un otrādi, jo pārējās kustības ir vienkāršas griezes, bet ja pols atrodas punktā 24, tad Q punkts sakrīt ar 13, un ja pols atrodas punktā 13, tad Q punkts sakrīt ar 24. Tas nozīmē, ka šarnīru četrstūra dažādu malu kustībām ir tikai viena kollineācijas ass neatkarīgi no tā, kāda mala paliek nekustīga, un šī ass savieno pretīmgulošo malu relatīvos polus (209. zīm.).

§ 76. Infleksijas riņķi šarnīru četrstūrī.



210. zīm.

Iezīmēsim dotajā šarnīru četrstūrī polus 24 un 13, kā arī kollineācijas asi (210. zīm.).

Ja 4. loceklis paliek nekustīgs, infleksijas riņķis iet caur polu 24. Meklēsim vēl divus infleksijas punktus uz stariem 1 un 3, kas iet caur to pašu polu.

Šim nolūkam pēc Bobiljē (Bobillier) konstrukcijas velkam caur polu 24 taisni paralēli 4. loceklim līdz krustošanai punktā D_2 ar 2. loekli. Taisne, kas vilkta caur punktu D_2 paralēli kollineācijas asij, krusto starus 1 un 3 to infleksijas punktus W_1 un W_3 .

Velkot riņķi caur šiem punktiem un polu 24, iegūstam infleksijas riņķi kustībai 2 pret 4. Atrastā riņķa tangente punktā 24 dod pola tangenti T_{24} .

Apdzīstai kustībai, t. i. 4 pret 2 infleksijas riņķis, kā zināms, ir tikpat liels, bet atrodas pola tangentes otrā pusē.

Pieņemot, ka 1. loceklis paliek nekustīgs, atkārtotam to pašu konstrukciju kustībai 3 pret 1: caur polu 13 velkam taisni paralēli 1. loceklim līdz krustošanai ar 3. loekli punktā D_3 .

Taisne, kas vilkta caur punktu D_3 paralēli kollineācijas asij, krusto starus 4 un 2 to infleksijas punktus W_4 un W_2 . Beidzot riņķis, kas vilkts caur šiem punktiem un polu 13, reprezentē infleksijas riņķi kustībai 3 pret 1. Šā riņķa tangente punktā 13 dod pola tangenti T_{13} .

Apdzīstai kustībai 1 pret 3 infleksijas riņķis, kā zināms, ir tikpat liels, bet atrodas pola tangentes T_{13} otrā pusē.

Apzīmējot vēl vilkto taisņu krustošanās punktu ar 4. loekli ar D_4 un krustošanās punktu ar 1. loekli ar D_1 , atrodam, ka saskaņā ar konstrukciju

$$\overline{D_2 D_4} = \overline{24 - 13} \text{ un } \overline{D_1 D_3} = \overline{24 - 13}, \text{ tā tad } \overline{D_2 D_4} = \overline{D_1 D_3}.$$

Tas nozīmē, ka četrstūris $D_2 D_4 D_3 D_1$ ir paralēlograms un taisnes, kas savieno divus pretimgulošo malu infleksijas punktus, krusto pārējās malas punktus, kas veido paralēlogramu.

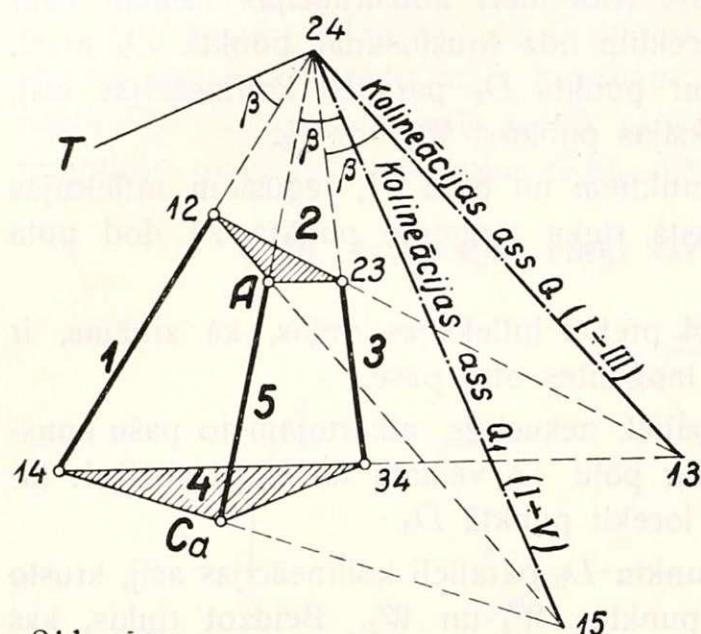
Šo apstākli var izlietot infleksijas punktu noteikšanai gadījumos, kad atsevišķie punkti atrodas ārpus zīmējuma robežām.

§ 77. Šarnīru četrstūra kustīgās plaknes punkta A trajektorijas liekuma centra noteikšana (211. zīm.).

Konstruējam šarnīru četrstūra relatīvos polus 24 un 13 un, savienojot tos ar taisni, atrodam kollineācijas asi Q (I—III) stariem 1. un 3.

Pēc Bobiljē (Bobillier) teorēmas atrodam pola tangenti T , atliekot leņķi β , ko veido kollineācijas ass Q ar 3. staru, tanī pašā virzienā no 1. stara.

Caur punktu A , kas pieder 2. plaknei, un polu 24 velkam jaunu staru, ko apzīmējam ar 5. Stariem 1 un 5 atbilstošo kollineācijas asi $Q_1(I-V)$ dabūjam, atliekot to pašu leņķi β no 5. stara.



211. zim.

Tālāk pagarinām taisni $12-A$ līdz krustošanai ar jauno kollineācijas asi Q_1 punktā 15, ko savienojam ar punktu 14, un krustošanās punktā ar 5. staru atrodam punkta A trajektorijas meklējamo liekuma centru C_a .

Ievietojot stieni AC_a , dabūjam 5-locekļu šarnīru ķēdi, kas sastāv no 2 trijstūriem un 3 stieņiem. Šī ķēde ir grozīga, jo punkts A var ieņemt trīs bezgalīgi tuvas stāvokļus,

griežoties ap C_a ; bet ja punktu A savieno ar kādu citu 4. plaknes punktu, tad iegūtā sistēma ir negrozīga.

No šarnīru četrstūra $14-12-23-34$ sekojošā kārtā var izveidot divus jaunus četrstūrus: 1) atmetot 3. locekli un ievietojot locekli AC_a , iegūstam četrstūri $14-12-A-C_a$, kuŗa punkts 23 aprakstīs trīs bezgalīgi tuvas punktus kopējus ar tiem, kuŗus aprakstītu punkts 23 četrstūrī $14-12-23-34$.

2) Atmetot 1. locekli un ievietojot locekli AC_a , dabūjam četrstūri $34-23-A-C_a$, kuŗa punkts 12 aprakstīs trīs bezgalīgi tuvas punktus kopējus ar tiem, ko aprakstītu punkts 12 četrstūrī $14-12-23-34$.

§ 78. Ātrumu konstrukcijas 4 plakņu kustībā, t. i. šarnīru četrstūrī un no tā atvasinātos mēchanismos.

29. piemērs. Šarnīru četrstūra kustīgo plakņu punktu ātrumu noteikšana kustībā pret nekustīgo plakni.

Dots punkta 12 ortogonālais ātrums \vec{V}_{12}^{14} (212. zīm.).

Jākonstruē punktu A un B ātrumi kustībā pret nekustīgo 4. plakni.

Šeit indekss apakšā apzīmē, kādam punktam ātrums pieder, bet indekss augšā apzīmē, kādas plaknes kustībā un pret kādu plakni šis ātrums rodas.

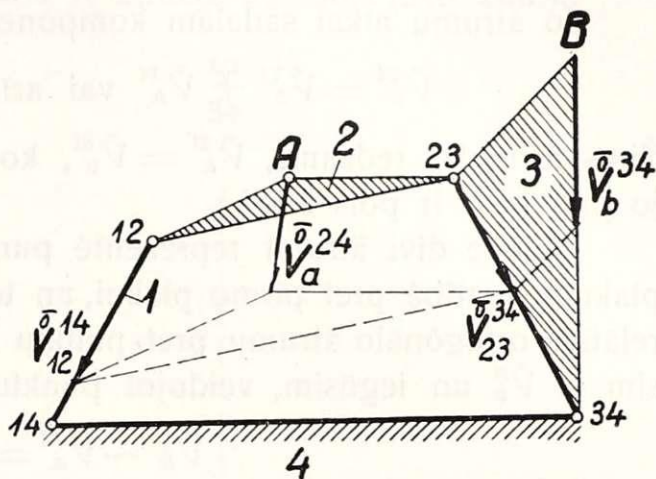
Ievērojot, ka punkts 23 pieder kā 2., tā arī 3. plaknei, tā ortogonālais ātrums iet caur polu 34. No otras puses, kādas taisnes dažādu punktu ortogonālo ātrumu gali atrodas uz parallēlas taisnes. Tamdēļ taisne, kas vilkta caur vektora

$$\vec{V}_{12}^{24} = \vec{V}_{12}^{34},$$

galu parallēli 12—23, nogriež no taisnes 23—34 punkta 23 ortogonālo ātrumu

$$\vec{V}_{23}^{24} = \vec{V}_{23}^{34}.$$

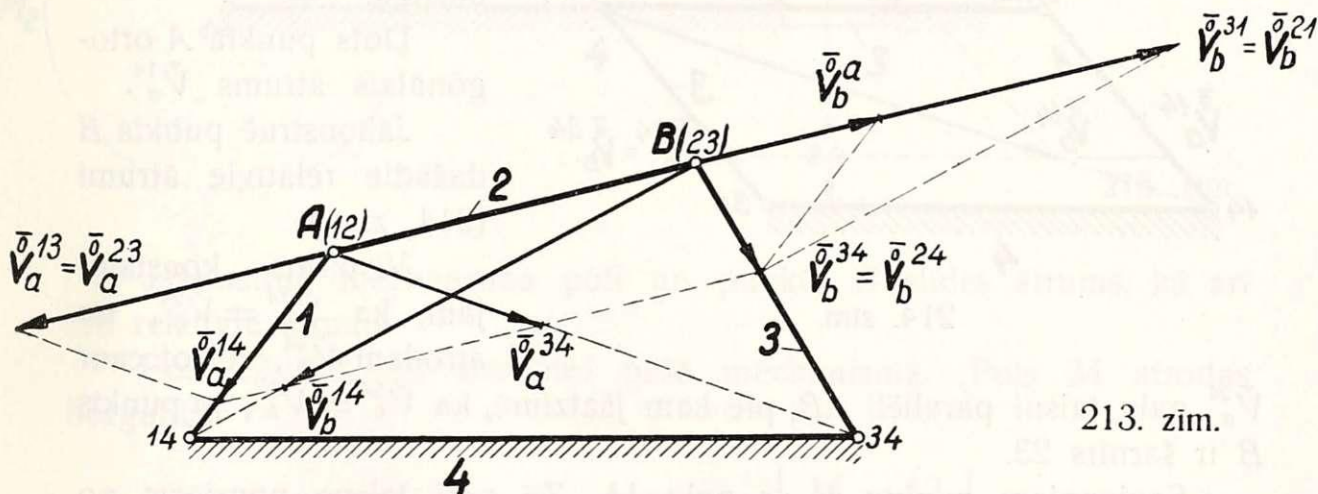
Lai iegūtu punkta A ortogonālo ātrumu, no vienas puses, jāvelk caur \vec{V}_{12}^{24} galu taisne parallēli taisnei 12—A un, no otras puses, caur \vec{V}_{23}^{24} galu jāvelk taisne parallēli taisnei 23—A, tā tad ātruma \vec{V}_a^{24} gals atradīsies abu taisņu krustošanās punktā.



212. zīm.

Punkta B ortogonālo ātrumu atrodam, velkot vienkārši caur \vec{V}_{23}^{34} galu taisni parallēli 23—B līdz krustošanai ar B—34.

I pamatzdevums. Dažādu relatīvu ātrumu konstrukcija šarnīru četrstūrī (213. zīm.). Šarnīru četrstūra 4. loceklis paliek nekustīgs.



213. zīm.

Dots punkta A(12) ortogonālais ātrums \vec{V}_a^{14} . Jākonstruē punktu A un B dažādie relatīvie ātrumi.

Vispirms konstatējam, ka $\vec{V}_a^{14} = \vec{V}_a^{24}$, jo punkts A ir pols 12, un sadalām to komponentēs pēc formulas

$$\vec{V}_a^{14} = \vec{V}_a^{13} + \vec{V}_a^{34} \text{ vai } \vec{V}_{a_1}^{24} = \vec{V}_a^{23} + \vec{V}_a^{34}.$$

Šinīs formulās redzams, ka $\bar{V}_a^{13} = \bar{V}_a^{23}$, ko varēja paredzēt jau iepriekš.

Tālāk velkam caur $\bar{V}_a^{14} = \bar{V}_a^{24}$ galu taisni paralēli AB , kas nogriež no B — 34 punkta B ortogonālo ātrumu $\bar{V}_b^{24} = \bar{V}_b^{34}$.

Šo ātrumu atkal sadalām komponentēs pēc formulas:

$$\bar{V}_b^{24} = \bar{V}_b^{21} + \bar{V}_b^{14} \text{ vai arī } \bar{V}_b^{34} = \bar{V}_b^{31} + \bar{V}_b^{14}.$$

Šinīs formulās redzams, $\bar{V}_b^{21} = \bar{V}_b^{31}$, ko arī varēja pateikt jau iepriekš, jo punkts B ir pols 23.

Pēdējie divi ātrumi reprezentē punkta B ātrumus otrās vai trešās plaknes kustībā pret pirmo plakni, un tos nedrīkst sajaukt ar punkta B relatīvo ortogonālo ātrumu pret punktu A kustībā 2 pret 4, ko apzīmēsim ar \bar{V}_b^a un iegūsim, veidojot punktu A un B ģeometrisku diferenci

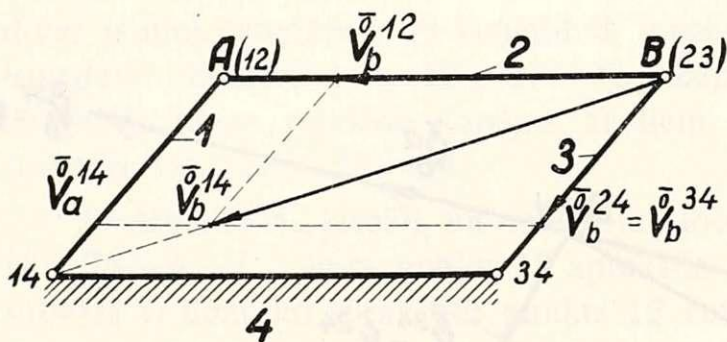
$$\bar{V}_b^{24} - \bar{V}_a^{24} = \bar{V}_b^a.$$

Ar šo ātrumu sastapsimies vēlāk paātrinājumu konstrukcijās.

Kas attiecas uz griezes ātrumiem,

$$\text{tad } \omega_{24} = \frac{V_b^a}{BA}, \text{ bet } \omega_{21} = \frac{V_b^{21}}{BA} \text{ un } \omega_{31} = \frac{V_b^{31}}{B-31}.$$

30. piemērs. Ātrumu konstrukcija šarnīru paralēlogramā (214. zīm.).



214. zīm.

Šarnīru paralēlograma 4. loceklis paliek nekustīgs.

Dots punkta A ortogonālais ātrums \bar{V}_a^{14} .

Jākonstruē punkta B dažādie relatīvie ātrumi (214. zīm.).

Vispirms konstatējam, ka $\bar{V}_a^{14} = \bar{V}_a^{24}$, un atrodam \bar{V}_b^{24} , velkot caur

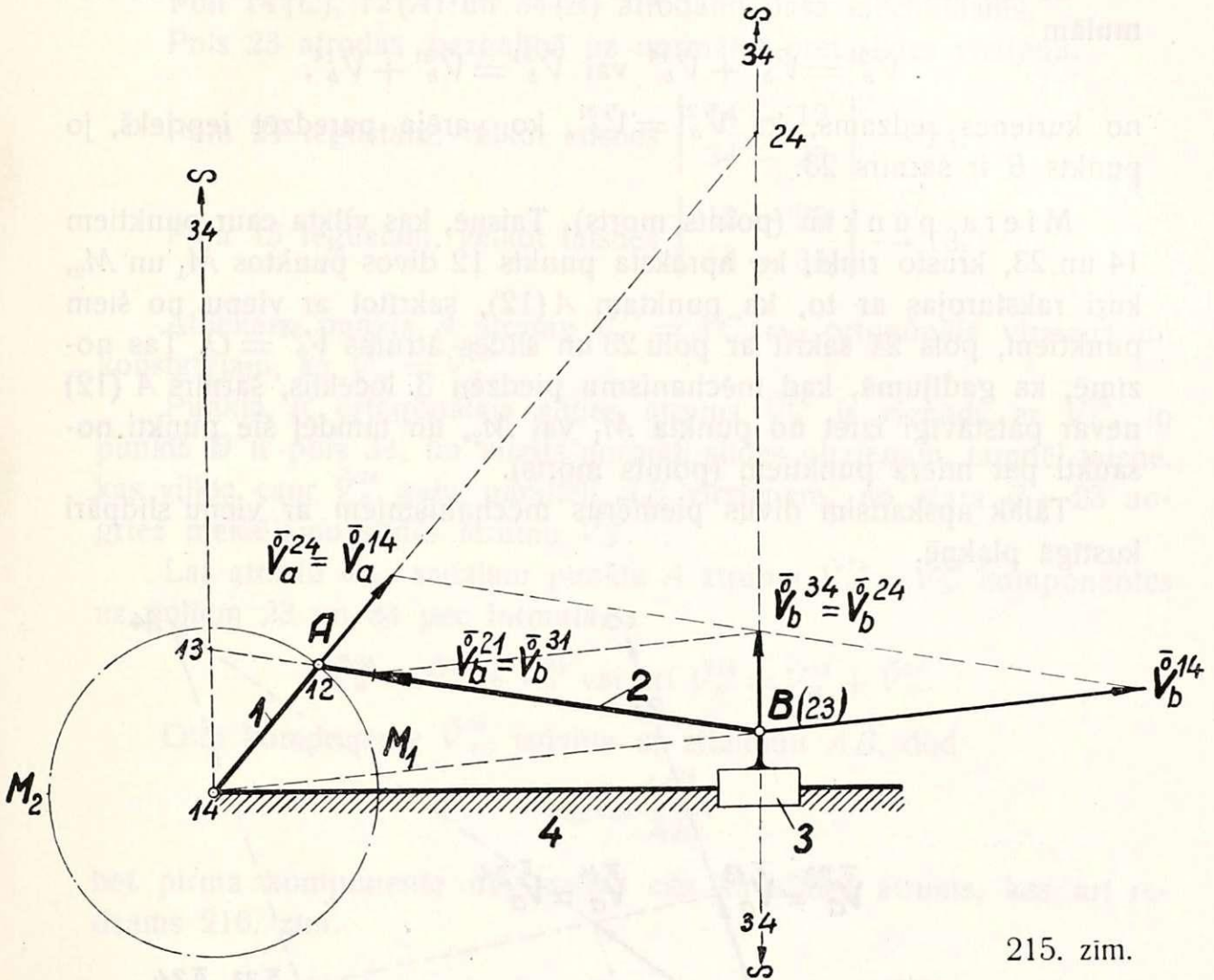
\bar{V}_a^{24} galu taisni paralēli AB , pie kam jāatzīmē, ka $\bar{V}_b^{24} = \bar{V}_b^{34}$, jo punkts B ir šarnīrs 23.

Savienojam punktu B ar polu 14. Tā pati taisne nogriezīs no B — 14 ātrumu \bar{V}_b^{14} .

Ievērojot sakaru starp punkta B ātrumiem $\bar{V}_b^{14} = \bar{V}_b^{12} + \bar{V}_b^{24}$, atrodam \bar{V}_b^{12} . Punkta B ātrums kustībā 2 pret 1 ir tikpat liels, bet pretēji virzīts $\bar{V}_b^{21} = -\bar{V}_b^{12}$. Turpretim punkta B ātrums pret punktu A kustībā 2 pret 4: $\bar{V}_b^a = \bar{V}_b^{24} - \bar{V}_a^{24} = 0$. Tas nozīmē, ka 2. loceklim $\omega_{24} = 0$, un tas atrodas virzes kustībā pret 4. locekli.

II pamatzdevums. Ātrumu konstrukcija kloķa mēchanismā (215. zīm.).

Kloķa mēchanisma 4. loceklis paliek nekustīgs, bet 1. loceklis piedzen mēchanismu, pie kam punkta A ātrums V_a^{14} dots (215. zīm.).



215. zīm.

Jākonstruē mēchanisma poli un punkta B slīdes ātrums, kā arī citi relatīvie ātrumi.

Poli 12, 23, 14 atrodami pašā mēchanismā. Pols 34 atrodas bezgalībā.

$$\text{Polu 24 iegūstam, velkot taisnes } \left| \begin{array}{cc} 14 & - & 12 \\ 23 & - & 34 \end{array} \right| \rightarrow 24.$$

$$\text{Polu 13 iegūstam, velkot taisnes } \left| \begin{array}{cc} 12 & - & 23 \\ 14 & - & 34 \end{array} \right| \rightarrow 13.$$

Atliekam doto punkta A ātrumu V_a^{14} ortogonālā virzienā un konstatējam, ka $\bar{V}_a^{14} = \bar{V}_a^{24}$.

Punkta B ortogonālais slīdes ātrums virzīts perpendikulāri slīdes virzienam uz polu 34, kas atrodas bezgalībā, tamdēļ taisne, kas vilkta caur \vec{V}_a^{24} galu paralēli AB virzienam, no stara $B-34$ nogriež meklējamo slīdes ātrumu $\vec{V}_b^{24} = \vec{V}_b^{34}$.

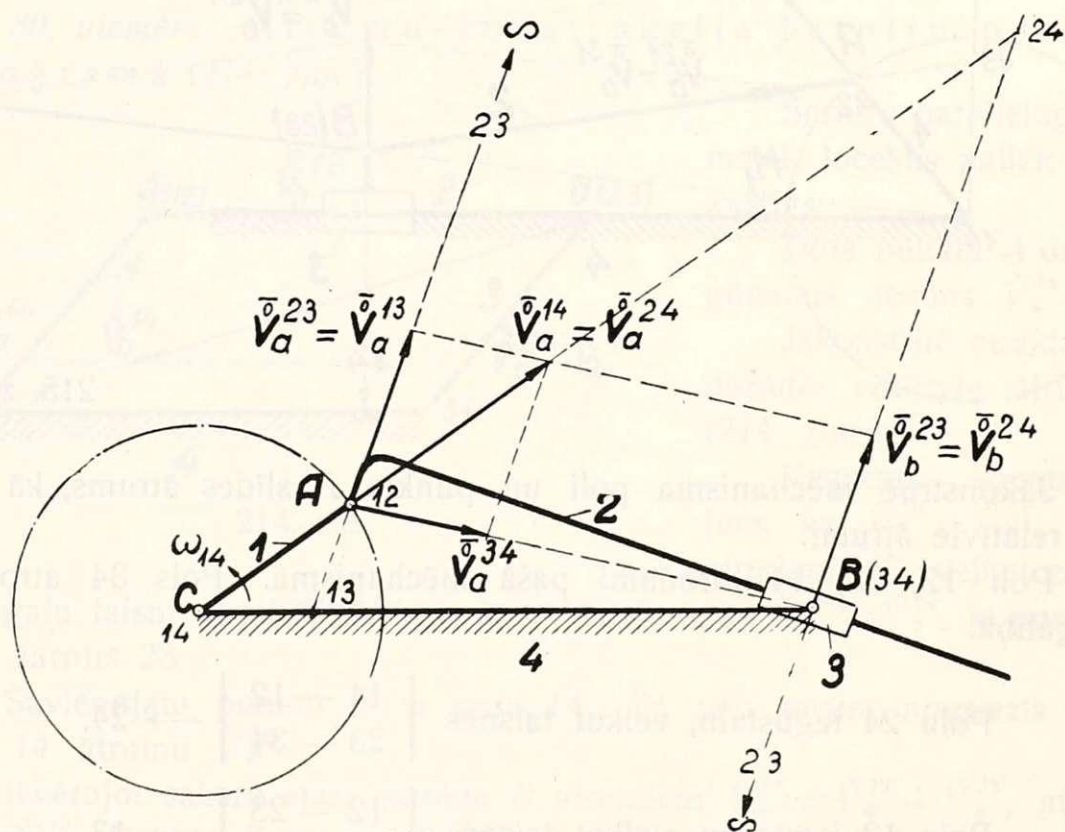
Šo ātrumu var sadalīt komponentēs uz poliem 14 un 12 pēc formulām

$$\vec{V}_b^{24} = \vec{V}_b^{21} + \vec{V}_b^{14} \quad \text{vai} \quad \vec{V}_b^{34} = \vec{V}_b^{31} + \vec{V}_b^{14},$$

no kurienes redzams, ka $\vec{V}_b^{21} = \vec{V}_b^{31}$, ko varēja paredzēt iepriekš, jo punkts B ir šarnīrs 23.

Miera punkti (points morts). Taisne, kas vilkta caur punktiem 14 un 23, krusto riņķi, ko apraksta punkts 12 divos punktos M_1 un M_2 , kuŗi raksturojas ar to, ka punktam $A(12)$, sakrītot ar vienu no šiem punktiem, pols 24 sakrīt ar polu 23 un slīdes ātrums $V_b^{34} = O$. Tas nozīmē, ka gadījumā, kad mēchanismu piedzen 3. loceklis, šarnīrs $A(12)$ nevar patstāvīgi iziet no punkta M_1 vai M_2 , un tamdēļ šie punkti nosaukti par miera punktiem (points morts).

Tālāk apskatīsim divus piemērus mēchanismiem ar vienu slīdpāri kustīgā plaknē.



216. zīm.

III pamatuzdevums. Ātrumu konstrukcija svārstīgā kloķa cilpā (216. zīm.).

Ērtības dēļ atkal nekustīgais loceklis apzīmēts ar 4.

Mēchanismu piedzen 1. loceklis ar doto ātrumu ω_{14} .

Jākonstruē visi poli, slīdes ātrums \bar{V}^{23} otram loceklim pret trešo un jāatrod 3. locekļa griezes ātrums ω_{34} .

Poli 14(C), 12(A) un 34(B) atrodami pašā mēchanismā.

Pols 23 atrodas bezgalībā uz normāles pret slīdes virzienu.

$$\text{Polu 24 iegūstam, velkot taisnes } \left| \begin{array}{c} 14 - 12 \\ 34 - 23 \end{array} \right| \rightarrow 24.$$

$$\text{Polu 13 iegūstam, velkot taisnes } \left| \begin{array}{c} 12 - 23 \\ 14 - 34 \end{array} \right| \rightarrow 13.$$

Atliekam punkta A ātrumu $V_a^{14} = AC \cdot \omega_{14}$ ortogonālā virzienā un konstatējam, ka $\bar{V}_a^{14} = \bar{V}_a^{24}$.

Punkta B ortogonālais slīdes ātrums \bar{V}_b^{23} ir vienāds ar \bar{V}_b^{24} , jo punkts B ir pols 34, un virzīts normāli slīdes virzienam, tamdēļ taisne, kas vilkta caur \bar{V}_a^{24} galu paralēli AB virzienam, no stara B—23 nogriež meklējamo slīdes ātrumu \bar{V}_b^{23} .

Lai atrastu ω_{34} , sadalām punkta A ātrumu $\bar{V}_a^{14} = \bar{V}_a^{24}$ komponentēs uz poliem 23 un 34 pēc formulas

$$\bar{V}_a^{24} = \bar{V}_a^{23} + \bar{V}_a^{34} \text{ vai arī } \bar{V}_a^{14} = \bar{V}_a^{13} + \bar{V}_a^{34}.$$

Otrā komponente \bar{V}_a^{34} , izdalīta ar attālumu AB, dod

$$\omega_{34} = \frac{V_a^{34}}{AB},$$

bet pirmā komponente nav nekas cits kā slīdes ātrums, kas arī redzams 216. zīm.

IV pamatzdevums. Ātrumu konstrukcija rotējošā kļoķa cilpā (217. zīm.).

Nekustīgais loceklis apzīmēts ar 4.

1. loceklis piedzen mēchanismu ar doto ātrumu ω_{14} .

Jākonstruē visi poli, slīdes ātrums \bar{V}^{23} un jāatrod 3. locekļa griezes ātrums ω_{34} .

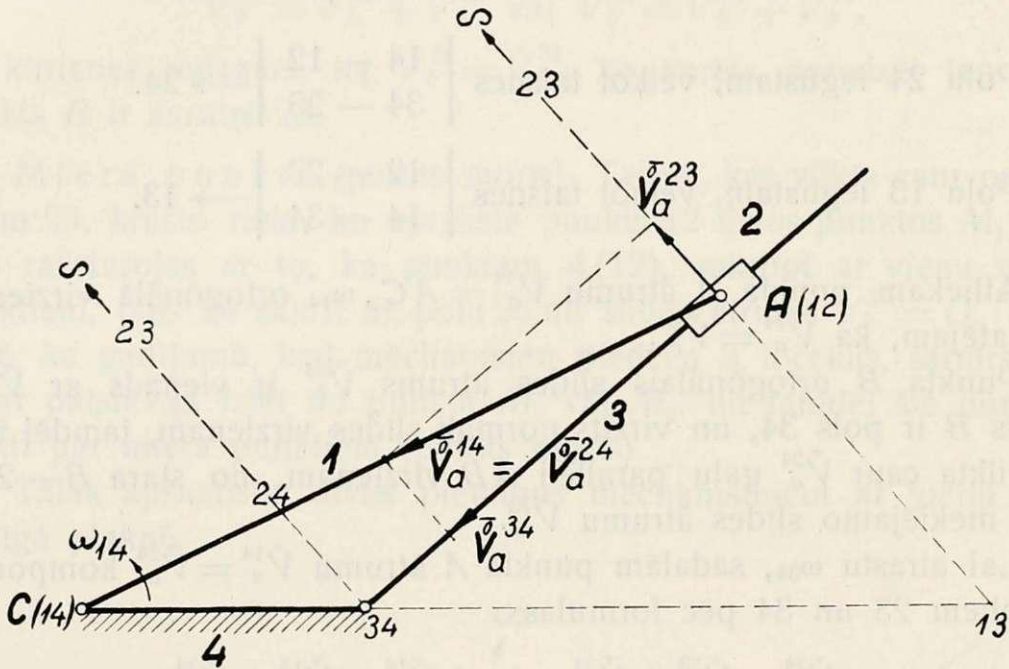
Pašā mēchanismā atrodami poli 14(C), 12(A) un 34.

Pols 23 atrodas bezgalībā uz normāles pret slīdes virzienu.

$$\text{Polu 24 iegūstam, velkot taisnes } \left| \begin{array}{c} 14 - 12 \\ 34 - 23 \end{array} \right| \rightarrow 24.$$

$$\text{Polu 13 iegūstam, velkot taisnes } \left| \begin{array}{c} 14 - 34 \\ 12 - 23 \end{array} \right| \rightarrow 13.$$

Atliekam punkta A ātrumu $V_a^{14} = AC \cdot \omega_{14}$ ortogonālā virzienā un konstatējam, ka $\bar{V}_a^{14} = \bar{V}_a^{24}$. Šo ātrumu sadalām komponentēs uz poliem 34 un 23 saskaņā ar formulu $\bar{V}_a^{24} = \bar{V}_a^{23} + \bar{V}_a^{34}$.



217. zim.

Komponente \bar{V}_a^{23} ir meklējamais slīdes ātrums.

Meklējamo 3. locekļa griezes ātrumu atrodam ar formulu:

$$\omega_{34} = \frac{V_a^{34}}{A-34}.$$

Bet 2. locekļa griezes ātrums:

$$\omega_{24} = \frac{V_a^{14}}{A-24} = \frac{AC}{A-24} \cdot \omega_{14} \text{ un } \omega_{24} = \omega_{34}.$$

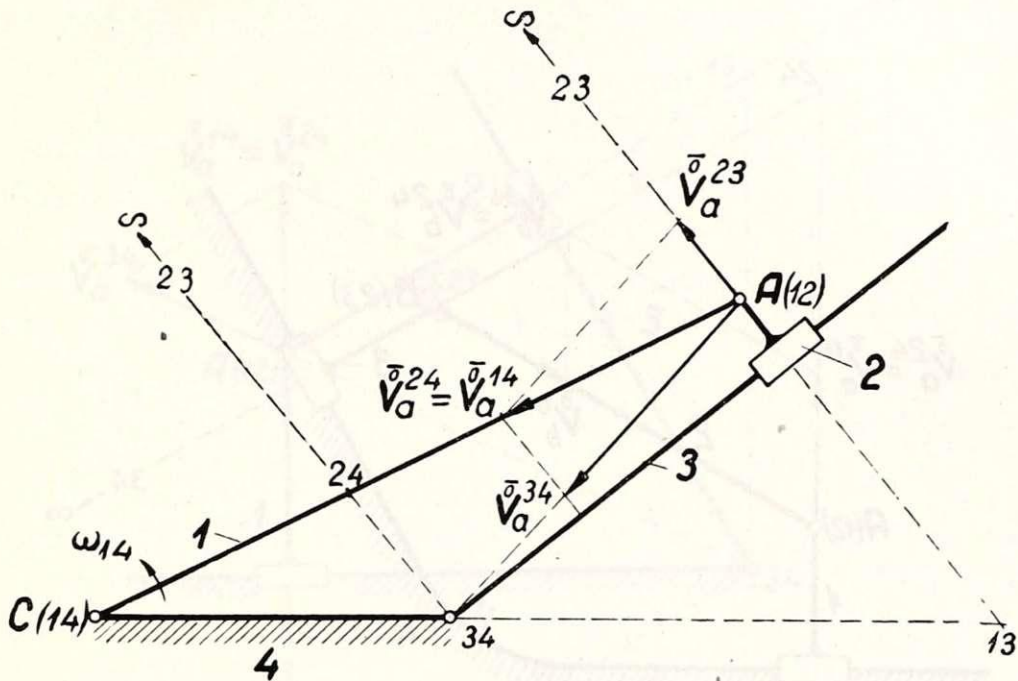
Šādu rezultātu varēja paredzēt jau iepriekš, jo 2. un 3. loceklis savienoti ar slīdpāri un tamdēļ to griezes ātrumiem jābūt vienādiem.

IVa pamatuzdevums. Ātrumu konstrukcija ekscentriskā rotējošā kloķa cilpā (218. zim.).

Dots ω_{14} . Jākonstruē poli, slīdes ātrums V^{23} un jāatrod 3. locekļa griezes ātrums ω_{34} .

Atrisinājums principā neatšķiras no iepriekšējā uzdevuma atrisinājuma. Tāpat atrodami poli 24 un 13. Tāpat sadalāms ātrums

$$V_a^{14} = V_a^{24} = AC \cdot \omega_{14}$$



218. zīm.

uz poliem 34 un 23 saskaņā ar formulu

$$\vec{V}_a^{24} = \vec{V}_a^{23} + \vec{V}_a^{34}.$$

Pirmā komponente \vec{V}_a^{23} dod ortogonālo slīdes ātrumu, bet otrā, izdalīta ar $A-34$, dod

$$\omega_{34} = \frac{V_a^{34}}{A-34}.$$

Tālāk apskatīsim divus mēchanismus ar diviem slīdpāriem.

V pamatzdevums. Ātrumu konstrukcija četrstūrī ar diviem šarnīriem un diviem piegulošiem slīdpāriem (219. zīm.).

Nekustīgais loceklis apzīmēts ar 4. Dots punkta A slīdes ātrums V_a^{14} .

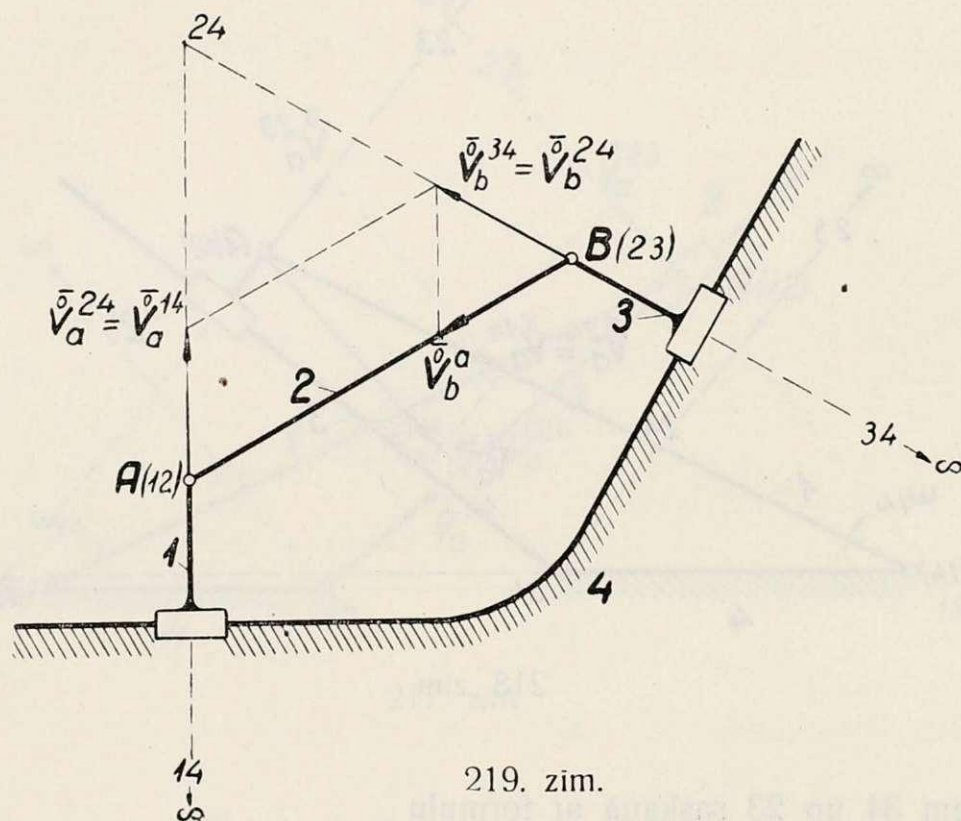
Jākonstruē visi poli, punkta B slīdes ātrums V_b^{34} un 2. locekļa griezes ātrums ω_{24} (219. zīm.).

Poli 12(A) un 23(B) atrodami pašā mēchanismā.

Poli 14 un 34 atrodas bezgalībā.

Lai iegūtu polu 24, jāvelk taisnes $\left| \begin{array}{l} 12 - 14 \\ 23 - 34 \end{array} \right| \rightarrow 24.$

Pola 13 noteikšanai būtu jāvelk $\left| \begin{array}{l} 12 - 23 \\ 14 - 34 \end{array} \right| \rightarrow 13,$



bet visa taisne 14—34 atrodas bezgalībā, tā tad arī pols 13 atrodas uz taisnes AB bezgalībā. Tas nozīmē, ka 3. loceklis atrodas virzes kustībā pret 1. loekli.

Atliekam doto punkta A ātrumu ortogonālā virzienā, un konstatējam, ka $\bar{V}_a^{14} = \bar{V}_a^{24}$.

Ievērojot, ka punkta B ortogonālais slīdes ātrums iet normāli slīdes virzienam uz polu 34, taisne, kas vilkta caur \bar{V}_a^{24} galu paralēli AB virzienam, no stara $B-34$ nogriež meklējamo slīdes ātrumu $\bar{V}_b^{24} = \bar{V}_b^{34}$.

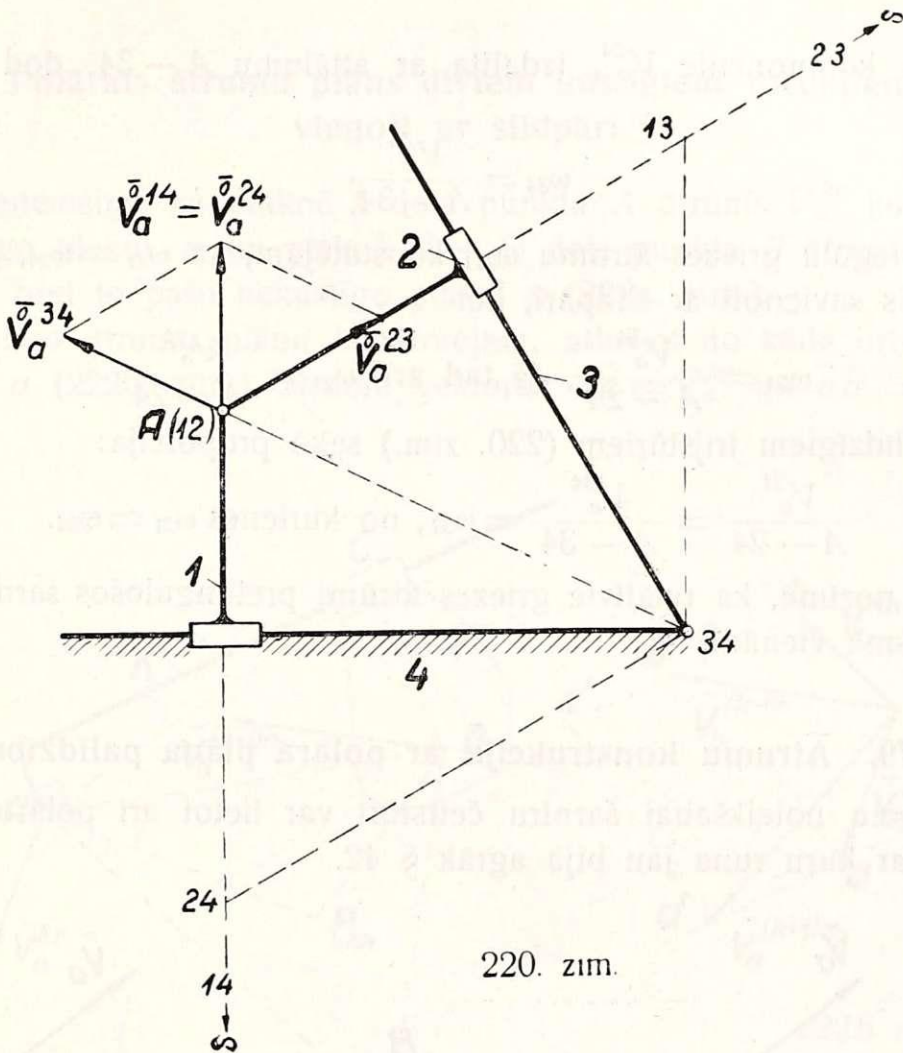
Lai iegūtu 2. locekļa griezes ātrumu, veidojam $\bar{V}_b^{24} - \bar{V}_a^{24} = \bar{V}_b^a$ un izdalām to ar AB :

$$\omega_{24} = \frac{V_b^a}{AB}.$$

To pašu var dabūt arī citā ceļā:

$$\omega_{21} = \omega_{24} = \frac{V_a^{24}}{A-24}.$$

VI pamatzdevums. Ātrumu konstrukcija četrstūrī ar diviem šarnīriem un diviem pretimgulošiem slīdpāriem (220. zīm.).



220. zīm.

Nekustīgais loceklis apzīmēts ar 4. Dots slīdes ātrums V^{14} .

Jākonstruē visi poli, slīdes ātrums V^{23} un 3. un 2. locekļa griezes ātrumi ω_{34} un ω_{21} .

Poli 12 (A) un 34 atrodas pašā mēchanismā, bet poli 14 un 23 atrodas bezgalībā.

$$\text{Pola 24 noteikšanai velkam taisnes } \begin{vmatrix} 12 - 14 \\ 34 - 23 \end{vmatrix} \rightarrow 24.$$

$$\text{Pola 13 noteikšanai velkam taisnes } \begin{vmatrix} 12 - 23 \\ 34 - 14 \end{vmatrix} \rightarrow 13.$$

Atliekam doto slīdes ātrumu no punkta A ortogonālā virzienā, kon-

statējam, ka $\bar{V}_a^{14} = \bar{V}_a^{24}$, un sadalām pēdējo komponentēs uz poliem 23 un 34 pēc formulas

$$\bar{V}_a^{24} = \bar{V}_a^{23} + \bar{V}_a^{34}.$$

Pirmā komponente \bar{V}_a^{23} reprezentē meklējamo ortogonālo slīdes ātrumu.

Otra komponente V_a^{34} , izdalīta ar attālumu $A-34$, dod griezes ātrumu

$$\omega_{34} = \frac{V_a^{34}}{A-34}.$$

Lai iegūtu griezes ātrumu ω_{21} , konstatējam, ka $\omega_{21} = \omega_{24}$, jo 1. un 4. loceklis savienoti ar slīdpāri, bet

$$\omega_{24} = \frac{V_a^{24}}{A-24}, \text{ tā tad arī } \omega_{21} = \frac{V_a^{24}}{A-24}.$$

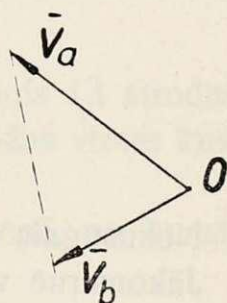
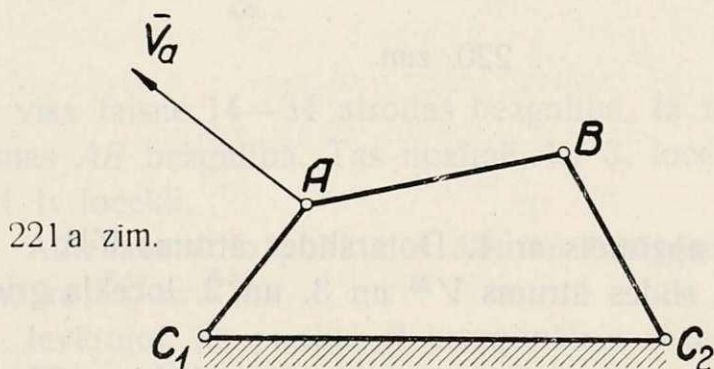
No līdzīgiem trijstūriem (220. zīm.) seko proporcija:

$$\frac{V_a^{24}}{A-24} = \frac{V_a^{34}}{A-34} = \omega_{34}, \text{ no kurienes } \omega_{21} = \omega_{34}.$$

Tas nozīmē, ka relatīvie griezes ātrumi pretīngulošos šarnīros šinī mēchanismā vienādi.

§ 79. Ātrumu konstrukcija ar polārā plāna palīdzību.*

Ātrumu noteikšanai šarnīru četrstūrī var lietot arī polāro ātrumu plānu, par kuŗu runa jau bija agrāk § 42.



221 b zīm.

Pieņemsim, ka šarnīru četrstūrī dots punkta A ātrums \bar{V}_a (221 a. zīm.). Jākonstruē punkta B ātrums \bar{V}_b .

Atliekam kādā brīvi izvēlētā punktā O (221 b. zīm.) doto ātrumu \bar{V}_a , un iezīmējam arī punkta B ātruma virzienu, kas iet perpendikulāri C_2B .

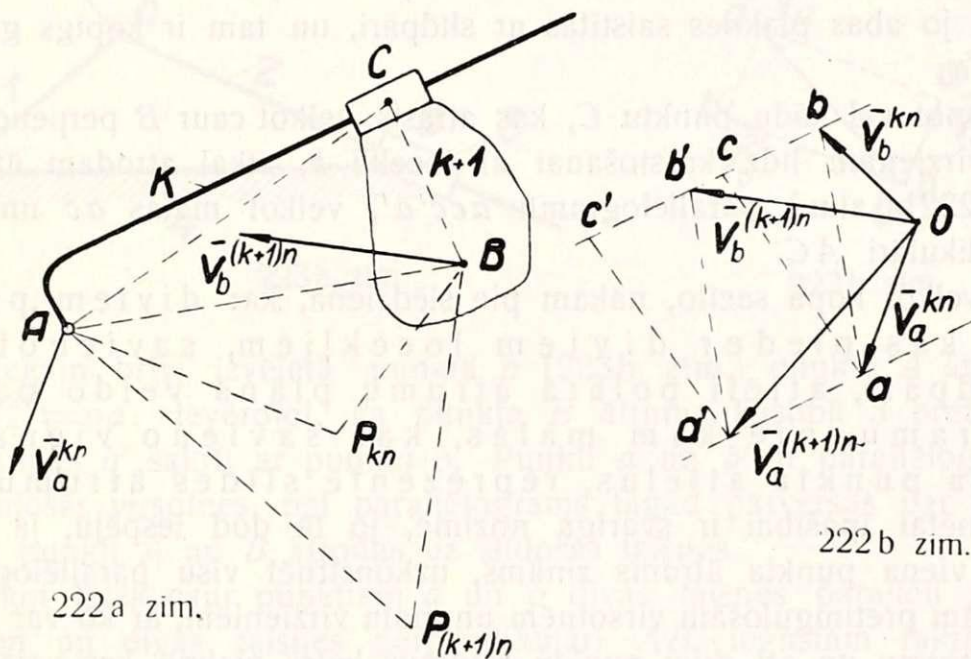
* sk. arī *N. Rosenauer*: Geschwindigkeitspläne kinematischer Ketten ohne Verwendung ähnlicher Punktreihen. Maschinenbau. Reuleaux-Mitteilungen. Bd. 6 Heft 1. 1938.

Ievērojot, ka taisnes AB dažādu punktu ātrumu projekcijas uz AB virzienu vienādas, velkam caur \vec{V}_a galu taisni perpendikulāri pret AB . Šī taisne no punkta B ātruma virziena nogriež meklējamo punkta B ātrumu \vec{V}_b .

§ 80. Polārais ātrumu plāns diviem kustīgiem locekļiem, kas savienoti ar slīdpāri.³⁰

Pieņemsim, ka plaknē k dots punkta A ātrums \vec{V}_a^{kn} kustībā pret nekustīgo plakni n un plaknē $(k+1)$ dots punkta B ātrums $\vec{V}_b^{(k+1)n}$ kustībā pret to pašu nekustīgo plakni n (222a. zīm.).

Polāro ātrumu plānu konstruējam, atliekot no kāda brīvi izvēlēta punkta o (222b. zīm.) ātrumu vektorus $\vec{oa} = \vec{V}_a^{kn}$ un $\vec{ob}' = \vec{V}_b^{(k+1)n}$.



222 a zīm.

222 b zīm.

Ievērojot, ka visiem punktiem, kas pieder taisnei AB , ātrumu projekcijas uz šīs taisnes virzienu ir vienādas, velkam caur punktiem a un b' divas taisnes perpendikulāri AB .

No otras puses, slīdes virziens zināms, un tamdēļ caur tiem pašiem punktiem a un b' velkam vēl divas taisnes paralēli slīdes virzienam. Šīs taisnes ar iepriekš ievilkām veido paralēlogramu $aa'b'b$, kuŗa pārējās virsotnes a' un b savienotas ar punktu o , kā rāda nolīdzinājumi

³⁰ N. Rozenauers. Polāro ātrumu plānu raksturīgā īpašība kinēmatiskās ķēdēs ar slīdpāriem kustošās plaknēs. L. U. R. Mēch. fak. serija II № 3. 1937.

$$\bar{V}_a^{kn} = \bar{V}_a^{k(k+1)} + \bar{V}_a^{(k+1)n}$$

$$\bar{V}_b^{kn} = \bar{V}_b^{k(k+1)} + \bar{V}_b^{(k+1)n},$$

dod $\bar{o}b = \bar{V}_b^{kn}$, $\bar{o}a' = \bar{V}_a^{(k+1)n}$ un $\bar{a}'a = \bar{b}'b = \bar{V}^{k(k+1)}$.

Tas nozīmē, ka divas parallēlograma virsotnes a un b reprezentē punktu A un B ātrumu vektoru galus, ja šie punkti pieder loceklim k , un pārējās divas virsotnes a' un b' dod to pašu punktu ātrumu vektoru galus, ja šie punkti pieder loceklim $(k+1)$.

Parallēlograma malas $\bar{a}'a = \bar{b}'b$ dod locekļa k slīdes ātrumu pret locekli $(k+1)$. Pārējās divas malas $\bar{a}b = \bar{a}'b'$, kā rāda nolīdzinājums

$$\bar{V}_b = \bar{V}_a + \bar{V}_b^a \dots \dots \dots (14),$$

reprezentē punkta B relatīvo ātrumu \bar{V}_b^a kustībā pret punktu A , kas savukārt nav atkarīgs no tā, vai abi punkti pieder plaknei k , vai $(k+1)$, jo abas plaknes saistītas ar slīdpāri, un tam ir kopīgs griezes ātrums ω .

Nemot vēl kādu punktu C , kas atrasts, velkot caur B perpendikulu slīdes virzienam līdz krustošanai ar locekli k , atkal atrodam ātrumu plānā (222b. zīm.) parallēlogramu $acc'a'$, velkot malas ac un $a'c'$ perpendikulāri AC .

Savelkot kopā sacīto, nākam pie slēdziena, ka: diviem punktiem, kas pieder diviem locekļiem, savienotiem ar slīdpāri, attēli polārā ātrumu plānā veido parallēlogramu, pie kam malas, kas savieno viena un tā paša punkta attēlus, reprezentē slīdes ātrumu.

Minētai īpašībai ir svarīga nozīme, jo tā dod iespēju, ja katrā plaknē viena punkta ātrums zināms, uzkonstruēt visu parallēlogramu pēc divām pretīngulošām virsotnēm un malu virzieniem, ar ko var atrast slīdes ātrumu un arī divu punktu ātrumus katrā plaknē, kas vajadzīgi, lai attiecīgās plaknes ātrumu stāvoklis būtu pilnīgi noteikts.

Tālāk vēl jāpiezīmē, ka gadījumā, kad abi punkti atrodas uz taisnes, kas iet parallēli slīdes virzienam, minētais parallēlograms pārvēršas par taisnstūri, jo tad malu virzieni kļūst perpendikulāri; bet gadījumā, kad abi punkti atrodas uz taisnes, kas iet perpendikulāri slīdes virzienam, parallēlograms pārvēršas par taisni, kā tas notiek, piemēram, ar parallēlogramu $bcc'b'$ (222b. zīm.).

Ātrumu kontrolei un arī citām vajadzībām var viegli atrast abu plakņu momentānos polus kustībā pret nekustīgo plakni. Taisne, kas vilkta caur punktu $A \perp \bar{V}_a^{kn}$, ar taisni caur punktu $B \perp \bar{V}_b^{kn}$ krustojas polā P_{kn} . Tāpat taisne caur punktu $A \perp \bar{V}_a^{(k+1)n}$ ar taisni caur punktu

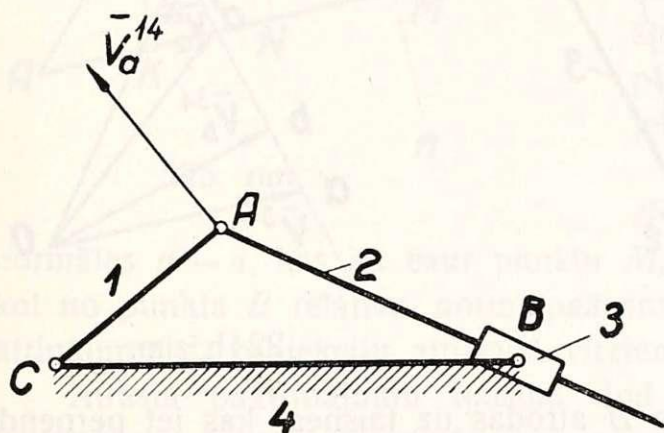
$B \perp \bar{V}_b^{(k+1)n}$ krustojas polā $P_{(k+1)n}$. Taisnei, kas savieno abus atrastos polus P_{kn} un $P_{(k+1)n}$, jābūt perpendikulārai slīdes virzienam, jo uz tās atrodas arī relatīvais pols $P_{k(k+1)}$.

I uzdevums. Polārais ātrumu plāns svārstīgai kloķa cilpai (223. zīm.).

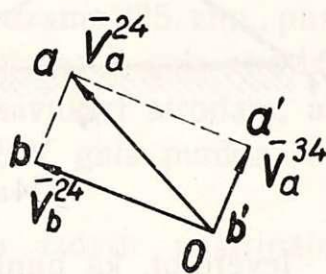
Nekustīgais loceklis apzīmēts ar 4.

Mēchanismu piedzen 1. loceklis, kas griežas ap punktu C , pie kam punkta A ātrums \bar{V}_a^{14} dots (223a. zīm.).

Jākonstruē slīdes ātrums \bar{V}^{23} ar polāra plāna palīdzību un jāatrod 3. locekļa griezes ātrums ω_{34} .



223a zīm.



223b zīm.

Atliekam brīvi izvēlētā punktā o (223b. zīm.) punkta A ātrumu $\bar{V}_a^{14} = \bar{V}_a^{24} = \overline{oa}$. Ievērojot, ka punkta B ātrums kustībā 3 pret 4 ir nulle, punkts b' sakrīt ar punktu o . Punkti a un b' ir paralēlograma pretīngulošās virsotnes, bet paralēlograms tagad pārvēršas par taisnstūri, jo punkti A un B atrodas uz slīdošās taisnes.

Velkot tālāk caur punktiem a un o divas taisnes paralēli slīdes virzienam un divas taisnes perpendikulāri AB , iegūstam raksturīgo taisnstūri $abb'a'$. Šā taisnstūra malas $a'a = b'b$ reprezentē slīdes ātrumu \bar{V}^{23} , bet oa' dod punkta A ātrumu kustībā 3 pret 4: $oa' = \bar{V}_a^{34}$.

Izdalot to ar AB , atrodam $\omega_{34} = \frac{V_a^{34}}{AB}$.

II uzdevums. Polārais ātrumu plāns ekscentriskai rotējošai kloķa cilpai (224. zīm.).

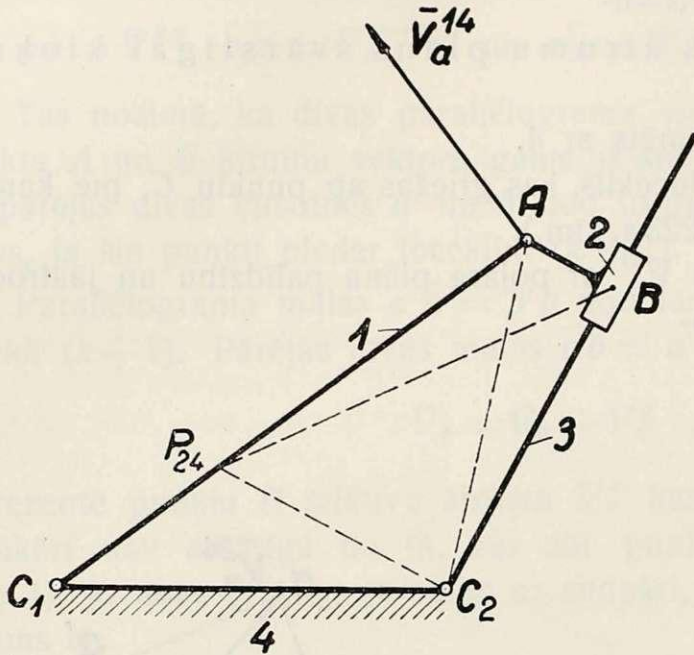
Nekustīgais loceklis apzīmēts ar 4.

Mēchanismu piedzen 1. loceklis, griežoties ap punktu C , pie kam punkta A ātrums \bar{V}_a^{14} dots (224a. zīm.).

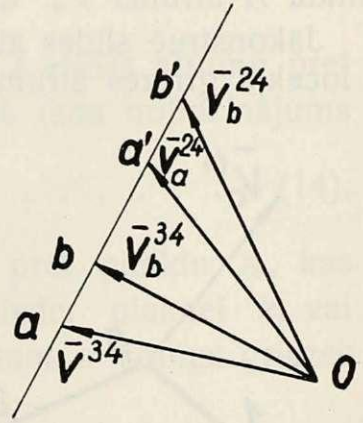
Jākonstruē slīdes ātrums \bar{V}^{23} , un jāatrod trešā locekļa griezes ātrums ω_{34} .

Atliekam brīvi izvēlētā punktā o (224b. zīm.) punkta A ātrumu

$$\vec{V}_a^{14} = \vec{V}_a^{24} = \vec{oa}'.$$



224a zīm.



224b zīm.

Ievērojot, ka punkti A un B atrodas uz taisnes, kas iet perpendikulāri slīdes virzienam, minētais paralēlograms pārvēršas par taisni, kuŗu velkam caur punktu a' paralēli slīdes virzienam.

Uz šīs taisnes atrodas visas paralēlograma virsotnes. Virsotni b dabūjam, velkot $ob \perp BC_2$, un virsotni a , velkot $oa \perp AC_2$. Beidzot atliekam $a'b' = ab$ un atrodam arī punktu b' .

Tagad $aa' = bb'$ reprezentē slīdes ātrumu \vec{V}^{23} ; oa un ob ir punktu A un B , kā 3. locekļa punktu, ātrumi, un ob' ir punkta B , kā 2. locekļa punkta, ātrums.

Kā kontroli var izlietot to apstākli, ka ob' jābūt perpendikulāram taisnei BP_{24} , kur P_{24} ir 2. locekļa momentānais griezes pols.

Meklējamais 3. locekļa griezes ātrums

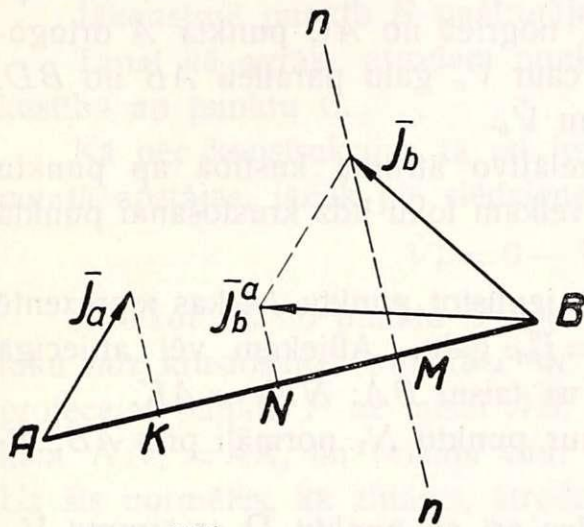
$$\omega_{34} = \frac{V_b^{34}}{BC_2} = \frac{ob}{BC_2}.$$

§ 81. Paātrinājumu konstrukcijas 4-plakņu kustībā, t. i. šarnīru četrstūrī un no tā atvasinātos mēchanismos.

Pirms pārejas uz paātrinājumu konstrukciju pašā šarnīru četrstūrī noskaidrosim, ko dod pazīstamais sakars starp divu punktu A un B paātrinājumiem

$$\vec{j}_b = \vec{j}_a + \vec{j}_b^a \dots \dots \dots (32),$$

kur \bar{j}_b^a ir punkta B paātrinājums griezes kustībā ap punktu A ar to pašu ω un τ , kādi piemīt kustīgai plaknei.



225. zīm.

Konstruējot šo formulu 225. zīm. un projicējot to uz taisnes BA virzienu, atrodam

$$BM = BN - NM,$$

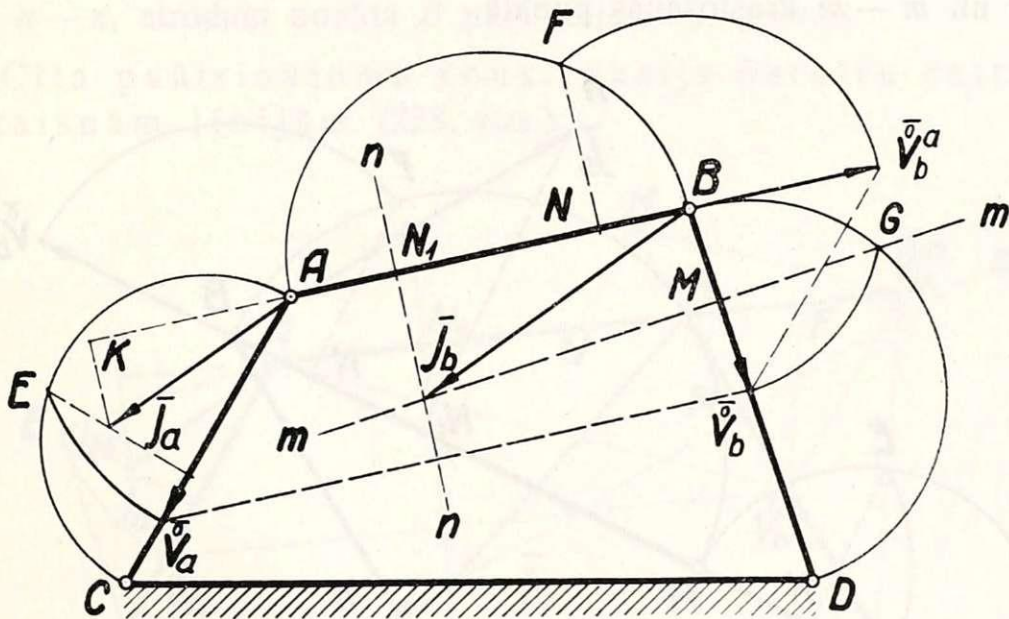
bet $NM = AK$, tā tad

$$BM = BN - AK.$$

Šeit BN ir punkta B normālpāātrinājums griezes kustībā ap A , kas viegli atrodams ar relatīvā ātruma palīdzību, un $-AK$ ir punkta A paātrinājuma \bar{j}_a projekcija uz BA virzienu.

Kā redzams 225. zīm., punkta B paātrinājuma \bar{j}_b gals atrodas uz normāles $n-n$, kas iet caur punktu M , kuŗu savukārt atrodam, atliekot no punkta B relatīva normālpāātrinājuma BN gala punkta A paātrinājuma \bar{j}_a projekciju attiecīgā virzienā.

Atrastā paātrinājumu īpašība dod iespēju izdarīt paātrinājumu konstrukciju šarnīru četrstūrī.



226. zīm.

I pamatzdevums. Paātrinājuma konstrukcija šarnīru četrstūrī (226. zīm.).

Dots punkta A paātrinājums \bar{j}_a . Jākonstruē punkta B paātrinājums \bar{j}_b .

Ja punkta A paātrinājums dots, tad ar to punkta A ātrums pilnīgi noteikts. Lai atrastu pēdējo, velkam caur \vec{j}_a galu normāli pret AC līdz krustošanai punktā E ar pusriņķi, kas apvilks ap AC . Loks, kas aprakstīts no centra A ar radiju AE , nogriež no AC punkta A ortogonālo ātrumu \vec{V}_a . Taisne, kas vilkta caur \vec{V}_a galu paralēli AB no BD , nogriež punkta B ortogonālo ātrumu \vec{V}_b .

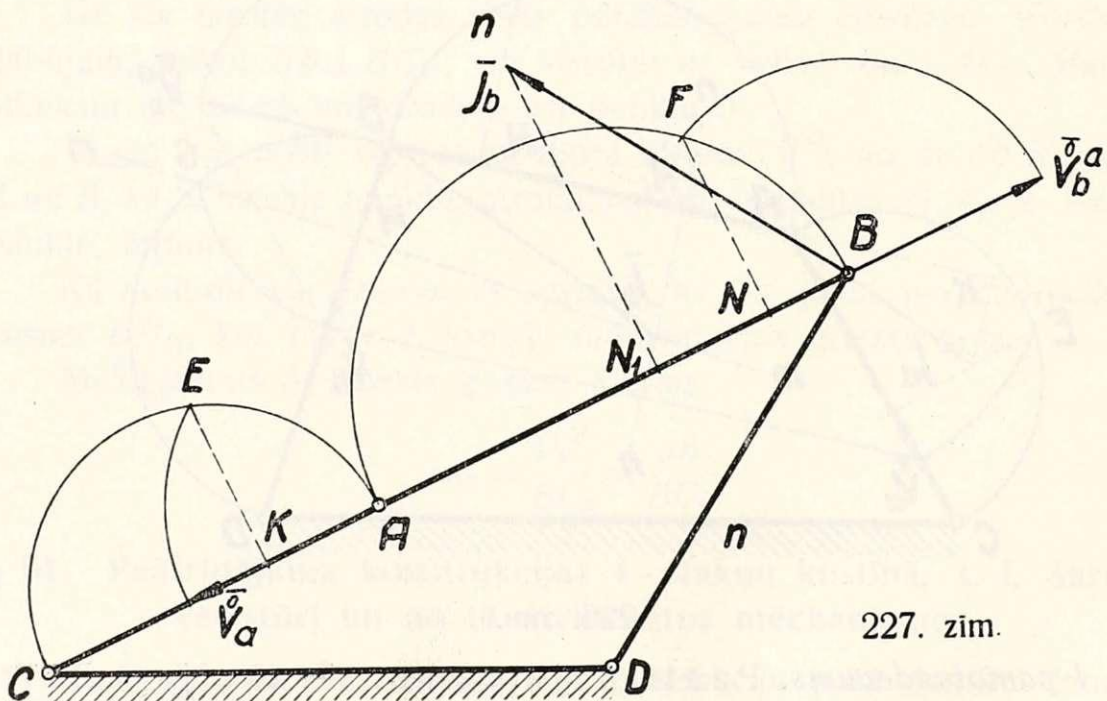
Tālāk konstruējam punkta B relatīvo ātrumu kustībā ap punktu A : $\vec{V}_b - \vec{V}_a = \vec{V}_b^a$ un ar radiju \vec{V}_b^a velkam loku līdz krustošanai punktā F ar pusriņķi, kas apvilks ap AB .

Punktu F noprojecējam uz AB , iegūstot punktu N , kas reprezentē punkta B normālpāātrinājumu $BN = \vec{j}_{bn}^a$ galu. Atliekam vēl attiecīgā virzienā paātrinājuma \vec{j}_a projekciju uz taisni BA : $NN_1 = AK$.

Uz taisnes $n - n$, kas vilkta caur punktu N_1 normāli pret AB , atrodas, kā zināms, \vec{j}_b gals.

No otras puses, punkts B griežas arī ap punktu D ar ātrumu \vec{V}_b . Atrodam normālpāātrinājumu šī kustībā, velkot loku ar radiju \vec{V}_b līdz krustošanai punktā G ar pusriņķi, kas apvilks ap BD . Caur punktu G velkam normāli $m - m$ pret BD . Šī normāle no BD nogriež normālpāātrinājumu BM , un uz tās pašas normāles atrodas arī paātrinājuma \vec{j}_b gals.

Galīgi tā tad atrodam paātrinājuma vektora \vec{j}_b galu abu normāļu $n - n$ un $m - m$ krustošanās punktā.



227. zīm.

Speciāls gadījums. Punkti C , A un B atrodas uz vienas taisnes (227. zīm.).

Dots punkta A ortogonālais ātrums \vec{V}_a tanī momentā, kad punkti C , A un B atrodas uz vienas taisnes.

Jākonstruē punkta B paātrinājums \vec{j}_b .

Tāpat kā agrāk, atrodam punkta A normālpāātrinājumu $j_{an} = AK$ kustībā ap punktu C .

Kā pēc konstrukcijas, tā arī ievērojot, ka punkts B apskatāmā momentā apstājas, jānāk pie slēdziena, ka $V_b = 0$, no kurienes seko, ka

$$\vec{V}_b^a = 0 - \vec{V}_a = -\vec{V}_a.$$

Atliekot \vec{V}_b^a no punkta B taisnes AB virziena, velkam ar šo radiju loku līdz krustošanai punktā F ar pusriņķi, kas apvilks ap AB . Noprojecējot punktu F uz taisni AB , iegūstam punktu N , no kuŗa atliekam $NN_1 = AK$, un velkam caur punktu N_1 normāli $n-n$ pret AB . Uz šīs normāles, kā zināms, atrodas \vec{j}_b gals.

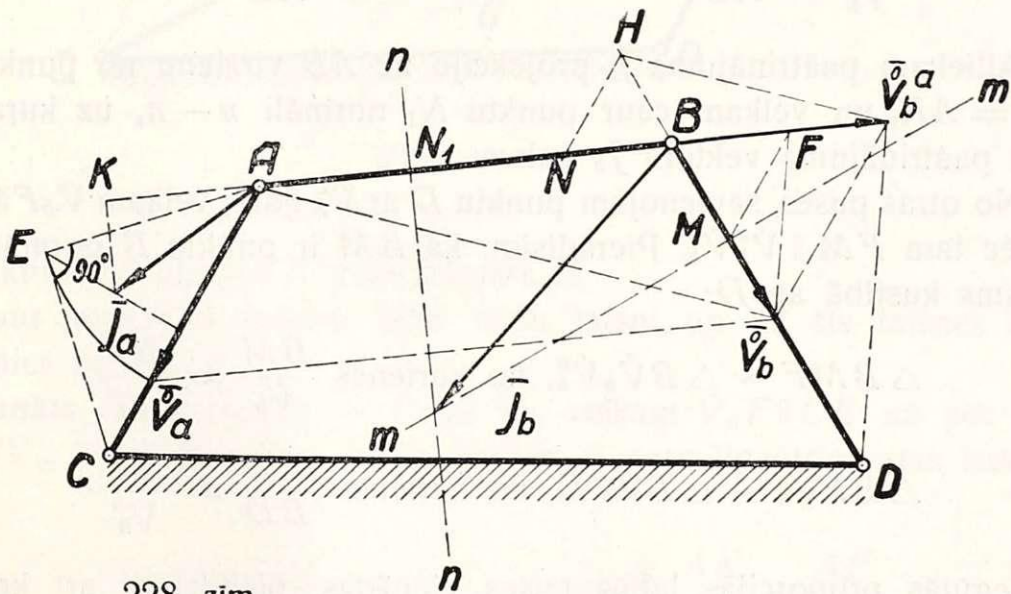
No otras puses, punkta B ātrums kustībā ap punktu D $V_b = 0$ un līdz ar to arī normālpāātrinājums tanī pašā kustībā

$$j_{bn} = \frac{V_b^2}{BD} = 0,$$

bet tas nozīmē, ka pats paātrinājums \vec{j}_b iet tangentiālā virzienā.

Velkot tamdēļ caur punktu B taisni $\perp BD$ līdz krustošanai ar normāli $n-n$, atrodam punkta B paātrinājuma \vec{j}_b galu.

Cita paātrinājuma konstrukcija šarnīru četrstūrī ar taisnām līnijām (228. zīm.).



228. zīm.

Ievērojot šarnīru četrstūra paātrinājuma konstrukcijas lielo nozīmi, dosim vēl vienu konstrukciju ar vienīgi taisnām līnijām.

Dots punkta A paātrinājums \vec{j}_a . Jākonstruē punkta B paātrinājums \vec{j}_b .

Konstruējam punkta A ātrumu: velkam caur \vec{j}_a galu normāli pret AC , konstruējam taisnu leņķi, kas atbalstās uz AC tā, lai tā virsotne atrastos uz minētās normāles, tad AE pēc lieluma dod punkta A ātrumu, kas tikai jāpagriež ortogonālā virzienā.

Taisne, kas vilkta caur \vec{V}_a galu paralēli AB no BD , nogriež punkta B ortogonālo ātrumu \vec{V}_b .

Veidojot $\vec{V}_b - \vec{V}_a = \vec{V}_b^a$, atrodam punkta B relatīvo ortogonālo ātrumu \vec{V}_b^a kustībā pret punktu A .

Vienosimies tālāk vienkāršības dēļ ar simboliem \dot{V}_b un \dot{V}_b^a saprast arī vektoru \vec{V}_b un \vec{V}_b^a galus.

Savienojam punktu A ar \dot{V}_b galu, un velkam $\dot{V}_b^a H \parallel \dot{V}_b A$, pēc tam vēl $HN \parallel \dot{V}_b^a \dot{V}_b$. Pierādīsim, ka nogrieznis BN ir punkta B normālpāātrinājums kustībā ap punktu A :

$$\triangle BNH \sim \triangle B\dot{V}_b^a\dot{V}_b, \text{ no kurienes } \frac{BN}{V_b^a} = \frac{BH}{V_b}$$

$$\triangle BH\dot{V}_b^a \sim \triangle AB\dot{V}_b, \text{ no kurienes } \frac{V_b^a}{AB} = \frac{BH}{V_b}.$$

Iegūto proporciju labās puses vienādas, pielīdzinot arī kreisās, atrodam:

$$\frac{BN}{V_b^a} = \frac{V_b^a}{AB}, \text{ no kurienes } BN = \frac{(V_b^a)^2}{AB} = j_{bn}^a.$$

Atliekam paātrinājuma \vec{j}_a projekciju uz AB virzienu no punkta N : $NN_1 = AK$, un velkam caur punktu N_1 normāli $n-n$, uz kuŗas atrodas paātrinājuma vektora \vec{j}_b gals.

No otras puses, savienojam punktu D ar \dot{V}_b^a galu, velkam $\dot{V}_b F \parallel D\dot{V}_b^a$ un pēc tam $FM \parallel \dot{V}_b^a \dot{V}_b$. Pierādīsim, ka BM ir punkta B normālpāātrinājums kustībā ap D :

$$\triangle BMF \sim \triangle B\dot{V}_b\dot{V}_b^a, \text{ no kurienes } \frac{BM}{V_b} = \frac{BF}{V_b^a}$$

$$\triangle BF\dot{V}_b \sim \triangle B\dot{V}_b^a D, \text{ no kurienes } \frac{V_b}{BD} = \frac{BF}{V_b^a}.$$

Iegūtās proporcijās labās puses vienādas, pielīdzinot arī kreisās, atrodam:

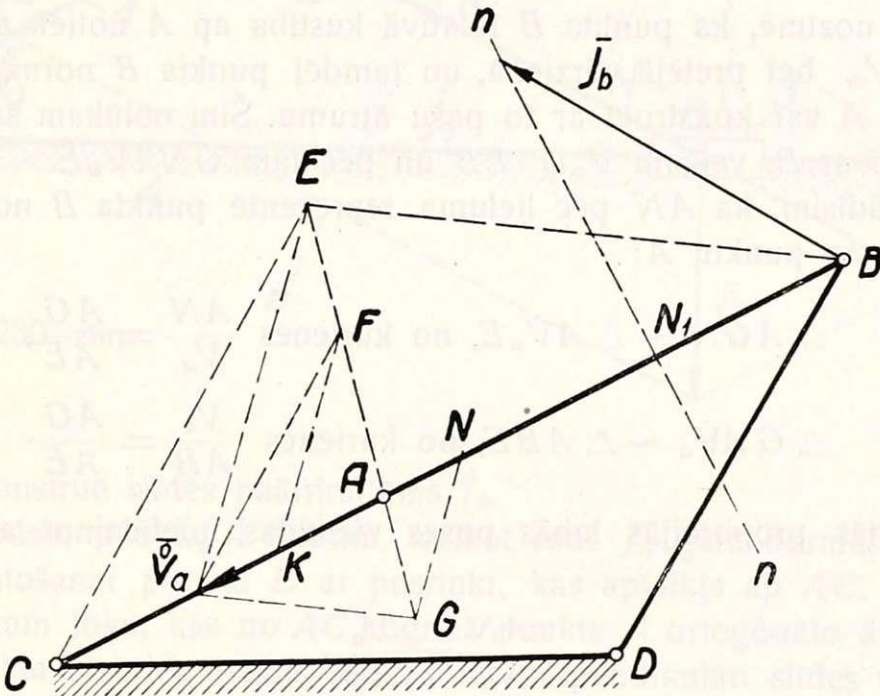
$$\frac{BM}{V_b} = \frac{V_b}{BD}, \text{ no kurienes } BM = \frac{V_b^2}{BD}.$$

Tas nozīmē, ka tiešām BM ir normālpātrinājums punkta B kustībā ap D , un otrā normāle $m-m$ pret BD jāvelk caur punktu M .

Meklējamā pātrinājuma \vec{j}_b gals tā tad atrodas abu normāļu $n-n$ un $m-m$ krustošanās punktā.

Cits atrisinājums ar taisnām līnijām speciālam gadījumam, kad punkti C , A un B atrodas uz vienas taisnes (229. zīm.).

Dots punkta A ortogonālais ātrums \vec{V}_a tanī momentā, kad punkti C , A un B atrodas uz vienas taisnes.



229. zīm.

Jākonstruē punkta B pātrinājums \vec{j}_b .

Caur punktu A velkam brīvi kādu taisni, un uz šīs taisnes brīvi izvēlamies punktu E .

Punktu E savienojam ar C un \vec{V}_a , velkam $\vec{V}_a F \parallel CE$ un pēc tam $FK \parallel E\vec{V}_a$. Pierādīsim, ka AK ir punkta A normālpātrinājums kustībā ap C .

$$\triangle AKF \sim \triangle A\vec{V}_a E, \text{ no kurienes } \frac{AK}{V_a} = \frac{AF}{AE}$$

$$\triangle A\vec{V}_a F \sim \triangle ACE, \text{ no kurienes } \frac{V_a}{AC} = \frac{AF}{AE}$$

Iegūtās proporcijās labās puses vienādas, pielīdzinot arī kreisās, atrodam:

$$\frac{AK}{V_a} = \frac{V_a}{AC},$$

no kurienes

$$AK = \frac{V_a^2}{AC} = j_{an}.$$

Kā jau agrāk bija noskaidrots, apskatāmā momentā punkta B ātrums kustībā ap punktu D

$$V_b = 0, \text{ tā tad } \vec{V}_b^a = \vec{V}_b - \vec{V}_a = 0 - \vec{V}_a = -\vec{V}_a.$$

Tas nozīmē, ka punkta B relatīvā kustība ap A notiek ar to pašu ātrumu V_a , bet pretējā virzienā, un tamdēļ punkta B normālpātrinājumu ap A var konstruēt ar to pašu ātrumu. Šim nolūkam savienojam punktu E ar B , velkam $\vec{V}_a G \parallel EB$ un pēc tam $GN \parallel \vec{V}_a E$.

Pierādīsim, ka AN pēc lieluma reprezentē punkta B normālpātrinājumu ap punktu A :

$$\triangle AGN \sim \triangle A\vec{V}_a E, \text{ no kurienes } \frac{AN}{V_a} = \frac{AG}{AE};$$

$$\triangle G A\vec{V}_a \sim \triangle ABE, \text{ no kurienes } \frac{V_a}{AB} = \frac{AG}{AE}.$$

Iegūtās proporcijās labās puses vienādas, pielīdzinot arī kreisās, atrodam

$$\frac{AN}{V_a} = \frac{V_a}{AB},$$

no kurienes:

$$AN = \frac{V_a^2}{AB} = j_{bn}^a.$$

Kā zināms, no punkta B virzienā uz A jāatliek abi pātrinājumi j_{bn}^a un arī j_{an} , tamdēļ atliekam vienkārši $BN_1 = NK$ un velkam caur punktu N_1 pret AB normāli $n-n$, uz kuŗas atrodas \vec{j}_b gals.

No otras puses, ievērojot, ka $V_b = 0$, punkta B normālpātrinājums kustībā ap D :

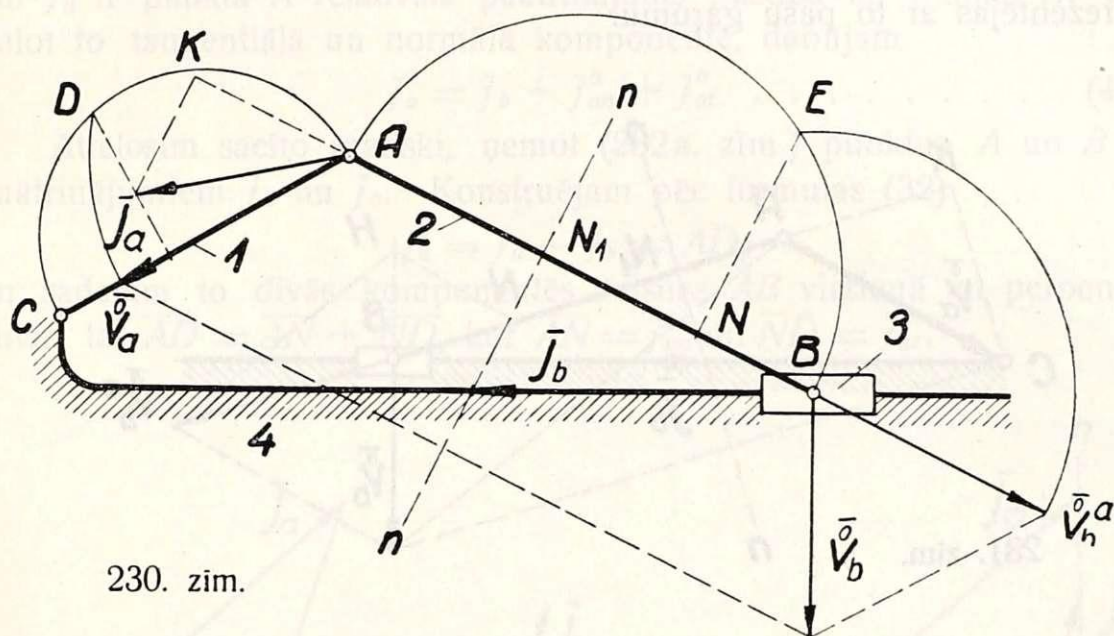
$$j_{bn} = \frac{V_b^2}{BD} = 0,$$

tā tad \vec{j}_b iet tangentiālā virzienā, t. i. perpendikulāri BD . Velkot šo perpendikulu caur punktu B pret BD līdz krustošanai ar normāli $n-n$, atrodam \vec{j}_b .

II pamatzdevums. Paātrinājuma konstrukcija kloķa mēchanismā (230. zīm.).

Nekustīgais loceklis apzīmēts ar 4.

1. loceklis piedzen mēchanismu, pie kam punkta A paātrinājums \vec{j}_a dots.



230. zīm.

Jākonstruē slīdes paātrinājums \vec{j}_b .

Atrrodam punkta A ātrumu, velkot caur \vec{j}_a galu normāli pret AC līdz krustošanai punktā D ar pusriņķi, kas apvilks ap AC . Ar radiju AD velkam loku, kas no AC nogriež punkta A ortogonālo ātrumu \vec{V}_a .

Punkta B ortogonālais ātrums iet perpendikulāri slīdes virzienam, un to nogriež taisne, kas vilkta caur \vec{V}_a galu paralēli AB .

Veidojot $\vec{V}_b - \vec{V}_a = \vec{V}_b^a$, atrodam punkta B relatīvo ātrumu ap punktu A . Ar šo ātrumu, kā radiju, velkam loku līdz krustošanai punktā E ar pusriņķi, kas apvilks ap AB . Punktu E noprojecējam uz AB , iegūstot punktu N , kas reprezentē punkta B kustībā ap A relatīvā normālpāātrinājuma $BN = \vec{j}_{bn}^a$ galu.

No punkta N atliekam attiecīgā virzienā \vec{j}_a projekciju uz AB : $NN_1 = AK$, un velkam caur punktu N_1 normāli $n - n$ pret AB . Uz šīs normāles atrodas paātrinājuma \vec{j}_b gals, bet no otras puses \vec{j}_b virziens ir noteikts ar slīdes virzienu, tā tad normāle $n - n$ tieši nogriež meklējamo paātrinājumu \vec{j}_b .

Cits atrisinājums ar taisnēm (231. zīm.).

Vienkāršības dēļ pieņemsim, ka kloķa mēchanisms ir centriskis un ka kloķis AC griežas vienmērīgi ar doto ātrumu V_a .

§ 82. Paātrinājumu konstrukcija ar relatīvo normālpāātrinājumu plāna palīdzību.³¹

Ņemsim pazīstamo sakaru starp divu punktu A un B paātrinājumiem formulā (32)

$$\bar{j}_a = \bar{j}_b + \bar{j}_a^b \dots \dots \dots (32)$$

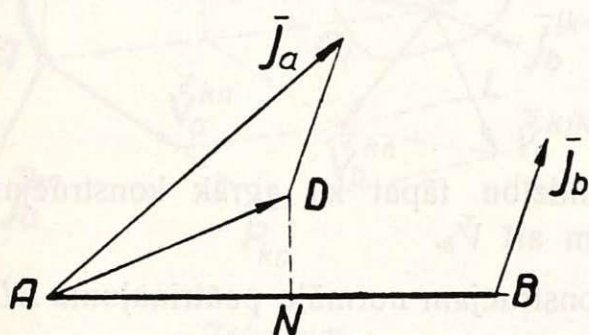
kur \bar{j}_a^b ir punkta A relatīvais paātrinājums kustībā ap punktu B . Sadalot to tangentiālā un normālā komponentē, dabūjam

$$\bar{j}_a = \bar{j}_b + \bar{j}_{an}^b + \bar{j}_{at}^b \dots \dots \dots (41).$$

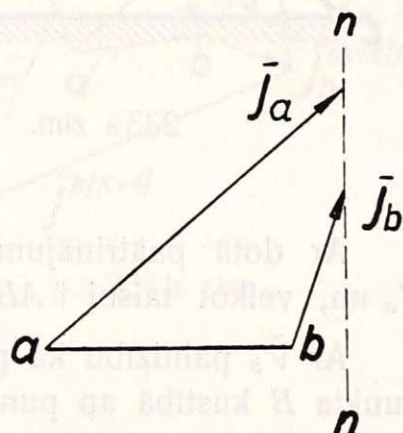
Attēlosim sacīto grafiski, ņemot (232a. zīm.) punktus A un B ar paātrinājumiem \bar{j}_a un \bar{j}_b . Konstruējam pēc formulas (32)

$$\bar{j}_a^b = \bar{j}_a - \bar{j}_b = \overline{AD},$$

un sadalām to divās komponentēs taisnes AB virzienā un perpendikulāri tai $\overline{AD} = \overline{AN} + \overline{ND}$, kur $\overline{AN} = \bar{j}_{an}^b$ un $\overline{ND} = \bar{j}_{at}^b$.



232a zīm.



232b zīm.

Atliekam kaut kur (232b. zīm.) $\overline{ab} = \overline{AN} = \bar{j}_{an}^b$, un konstruējam punktā a paātrinājumu \bar{j}_a un punktā b paātrinājumu \bar{j}_b . Ievērojot, ka $\bar{j}_{at}^b = \overline{ND}$ perpendikulārs taisnei AB , nākam uz nolīdzinājuma (41) pamata pie slēdziena, ka nupat konstruēto paātrinājumu \bar{j}_a un \bar{j}_b gali atrodas uz normāles $n-n$ pret taisni AB .

Šo apstākli var izmantot paātrinājuma konstrukcijai šarnīru mēchanismos, ja zināmi attiecīgo punktu relatīvie normālpāātrinājumi, bet pēdējie viegli atrodami ar relatīvo ātrumu palīdzību.

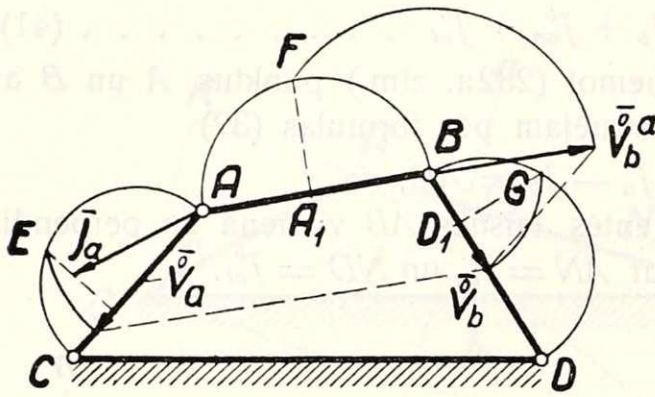
Konstruējot kāda mēchanisma šarnīru punktu relatīvos normālpāātrinājumus vienu pēc otra attiecīgos virzienos, iegūto figūru var nosaukt par „relatīvo normālpāātrinājumu plānu“.

³¹ sk. *N. Rozenauers*: „Paātrinājumu konstrukcija ar relatīvo normālpāātrinājumu plāna palīdzību sarežģītās kinēmatiskās ķēdēs. L. U. R. Mēch. fak. serija, II sējums № 4. 1937.

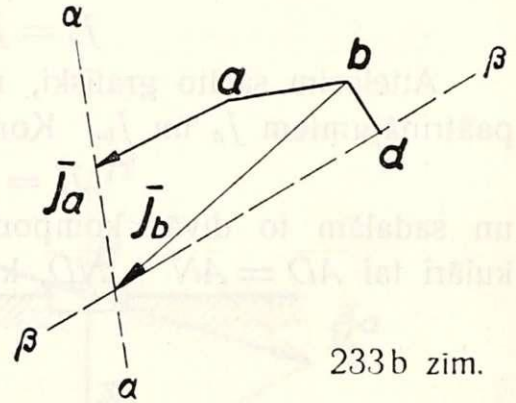
I pamatzdevums. Paātrinājuma konstrukcija šarnīru četrstūrī ar relatīvo normālpaātrinājumu plāna palīdzību (233. zīm.).

Dots punkta A paātrinājums \vec{j}_a .

Jākonstruē punkta B paātrinājums \vec{j}_b (233a. zīm.).



233a zīm.



233b zīm.

Ar dotā paātrinājuma \vec{j}_a palīdzību tāpat kā agrāk konstruējam \vec{V}_a un, velkot taisni $\parallel AB$, atrodam arī \vec{V}_b .

Ar \vec{V}_b palīdzību kā parasti konstruējam normālo paātrinājumu BD_1 punkta B kustībā ap punktu D .

Veidojot ātrumu diferenci $\vec{V}_b - \vec{V}_a = \vec{V}_b^a$, atrodam punkta B relatīvo ātrumu \vec{V}_b^a kustībā ap A un ar tā palīdzību konstruējam punkta B relatīvo normālpaātrinājumu BA_1 tanī pašā kustībā.

Tagad pārejam uz relatīvo normālpaātrinājumu plāna konstrukciju: brīvi izvēlēta punktā (233b. zīm.) atliekam $\overline{ba} = \overline{BA_1}$ un $\overline{bd} = \overline{BD_1}$. Iegūtais poligons abd ir relatīvo normālpaātrinājumu plāns šarnīru četrstūrī $CABD$. Mala ca šinī poligonā nav vajadzīga, jo punkta A paātrinājums \vec{j}_a dots.

Tālāk atliekam punktā a doto paātrinājumu \vec{j}_a un caur tā galu velkam taisni $\alpha-\alpha$ perpendikulāri ab . Uz šīs taisnes atrodas arī paātrinājuma \vec{j}_b gals.

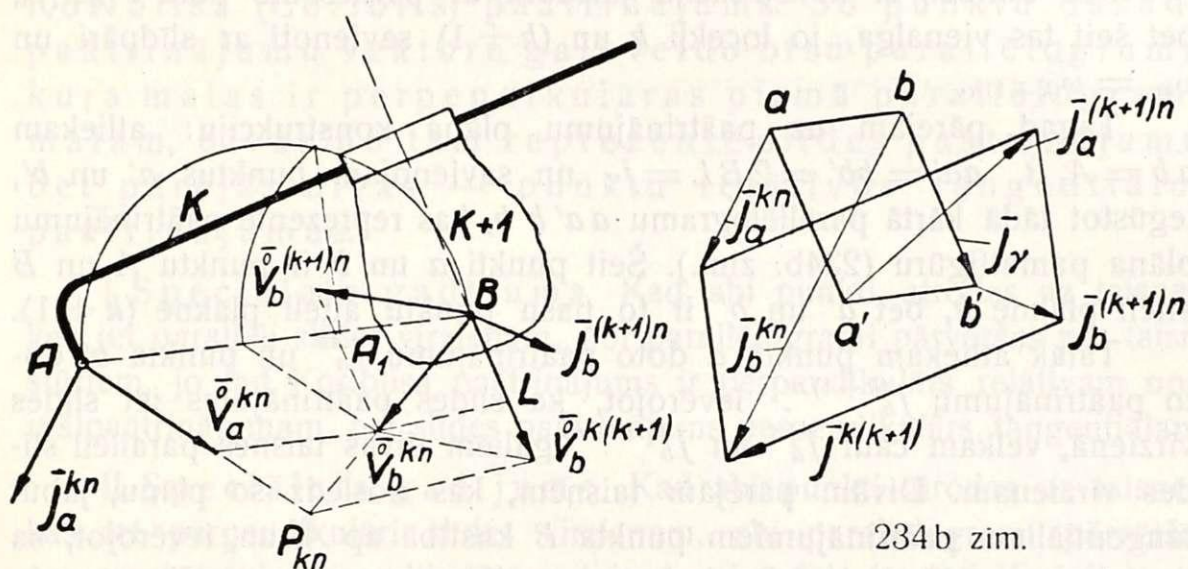
No otras puses punkta D paātrinājums ir nulle, tamdēļ otra taisne $\beta-\beta$ jāvelk tieši caur punktu d perpendikulāri bd .

Savienojot punktu b ar taisņu $\alpha-\alpha$ un $\beta-\beta$ krustošanās punktu, iegūstam meklējamo punkta B paātrinājumu \vec{j}_b .

§ 83. Paātrinājumu konstrukcija tādiem mēchanismiem, kas satur slīdpārus kustīgās plaknēs.³²

Pie šādiem mēchanismiem pieder svārstīgā un rotējošā kloķa cilpa un arī citi.

Pirms pārejas uz paātrinājumu konstrukciju šinīs mēchanismos, apskatīsim atsevišķi divus locekļus k un $(k+1)$, kas savienoti ar slīdpāri, pie kam katrā plaknē viena punkta ātrums un paātrinājums zināms (234a. zīm.).



234a zīm.

234b zīm.

Pieņemsim, ka plaknē k doti punkta A ortogonālais ātrums \vec{V}_a^{kn} un paātrinājums \vec{j}_a^{kn} kustībā pret nekustīgo plakni n , bet plaknē $(k+1)$ doti punkta B ortogonālais ātrums $\vec{V}_b^{(k+1)n}$ un paātrinājums $\vec{j}_b^{(k+1)n}$ tanī pašā kustībā (234a. zīm.).

Vispirms konstruējam \vec{V}_b^{kn} un slīdes ātrumu $\vec{V}^{k(k+1)}$, velkot caur \vec{V}_a^{kn} galu taisni paralēli AB un caur $\vec{V}_b^{(k+1)n}$ galu taisni perpendikulāri slīdes virzienam līdz krustošanai.

Sakaru starp iegūtiem ātrumiem dod formula

$$\vec{V}_b^{kn} = \vec{V}_b^{k(k+1)} + \vec{V}_b^{(k+1)n}.$$

Pēc tam ar punktu A un B relatīvā ātruma $\vec{V}_b^{kn} - \vec{V}_a^{kn}$ palīdzību konstruējam šo punktu relatīvo normālpāātrinājumu BA_1 . Turpinot \vec{V}_a^{kn} un \vec{V}_b^{kn} līdz krustošanai, atrodam arī polu P_{kn} .

³² sk. N. Rozenauers: Īpaša paātrinājumu konstrukcija kinēmatiskās ķēdēs, kas satur slīdpārus kustīgās plaknēs. L. Ū. R. Mēch. fak. serija. II sējums № 5. 1937.

Savienojot relatīvā ortogonālā ātruma vektora $\bar{V}_b^{k(k+1)}$ galu ar at-rasto polu P_{kn} un velkot caur \bar{V}_b^{kn} galu paralēlu taisni līdz krustoša-nai ar relatīvo staru punktā L , iegūstam, kā rāda proporcija

$$\frac{BL}{V^{k(k+1)}} = \frac{V_b^{kn}}{BP_{kn}} = \omega_{kn},$$

pusi Koriolisa (Coriolis) paātrinājuma BL , jo

$$\overline{BL} = [\omega_{k,l} \bar{V}^{k(k+1)}] = \frac{1}{2} \bar{j}_\gamma.$$

Pēc būtības šī konstrukcija jāizdara ar pārneseamo polu $P_{(k+1)n}$, bet šeit tas vienalga, jo locekļi k un $(k+1)$ savienoti ar slīdpāri un $\omega_{kn} = \omega_{(k+1)n}$.

Tagad pārejām uz paātrinājumu plāna konstrukciju: atliekam $\overline{ab} = \overline{A_1B}$, $\overline{aa'} = \overline{bb'} = 2\overline{BL} = \bar{j}_\gamma$ un savienojam punktus a' un b' , iegūstot tādā kārtā paralēlogramu $\overline{aa'bb'}$, kas reprezentē paātrinājumu plāna pamatfigūru (234b. zīm.). Šeit punkti a un b ir punktu A un B attēli plaknē k , bet a' un b' ir to pašu punktu attēli plaknē $(k+1)$.

Tālāk atliekam punktā a doto paātrinājumu \bar{j}_a^{kn} un punktā b' do-to paātrinājumu $\bar{j}_b^{(k+1)n}$. Ievērojot, ka slīdes paātrinājums iet slīdes virzienā, velkam caur \bar{j}_a^{kn} un $\bar{j}_b^{(k+1)n}$ galiem divas taisnes paralēli slī-des virzienam. Divām pārējām taisnēm, kas noslēdz šo plānu, jābūt tangentiāliem paātrinājumiem punkta B kustībā ap A , un, ievērojot, ka tie iet perpendikulāri AB virzienam, velkam caur tiem pašiem punk-tiem vēl divas taisnes $\perp AB$, iegūstot tādā kārtā otru paralēlogramu.

Savienojot punktus a' un b ar otrā paralēlograma jauniegūtām virsotnēm tā, lai arvien taisne, kas savieno punktu attēlus, būtu per-pendikulāra taisnei, kas iet caur paātrinājumu galiem, atrodam paātri-nājumus $\bar{j}_a^{(k+1)n}$ un \bar{j}_b^{kn} .

Otrā paralēlograma malas, kas vilkta paralēli slīdes virzienam, dod slīdes paātrinājumu.

234b. zīmējumā var viegli pārliecināties par to, ka iegūtais paātri-nājumu plāns apmierina visus 4 nolīdzinājumus, kas saista dažādus punktu A un B paātrinājumu vektorus.

- 1) $\bar{j}_a^{kn} = \bar{j}_a^{k(k+1)} + \bar{j}_a^{(k+1)n} + \bar{j}_\gamma$
- 2) $\bar{j}_b^{kn} = \bar{j}_b^{k(k+1)} + \bar{j}_b^{(k+1)n} + \bar{j}_\gamma$
- 3) $\bar{j}_b^{kn} = \bar{j}_a^{kn} + \bar{j}_{bn}^a + \bar{j}_{bt}^a$
- 4) $\bar{j}_b^{(k+1)n} = \bar{j}_a^{(k+1)n} + \bar{j}_{bn}^a + \bar{j}_{bt}^a,$

kur $\bar{j}_\gamma = \overline{aa'} = \overline{bb'} = 2[\omega_{(k+1)n} \bar{V}^{k(k+1)}]$ ir Koriolisa (Coriolis) paātri-nājums, $\bar{j}_{bn}^a = \overline{ba} = \overline{b'a'}$ ir punkta B normālpāātrinājums kustībā ap

A un \bar{j}_{bt}^a ir tangentiālais paātrinājums tanī pašā kustībā. Šie divi pēdējie paātrinājumi acīm redzot nav atkarīgi no tā, vai abi punkti pieder plaknei k , vai $(k+1)$, jo šīs plaknes savienotas ar slīdpāri. Slīdes paātrinājumi $\bar{j}_a^{k(k+1)}$ un $\bar{j}_b^{k(k+1)}$, protams, arī ir vienādi, un tamdēļ indeksus apakšā varētu nerakstīt.

Savelkot kopā visu sacīto, redzams, ka paātrinājumu plānā, ja divas plaknes savienotas ar slīdpāri, divu punktu attēli veido paralēlogramu, kuŗam divas malas ir relatīvais normālpaātrinājums, bet pārējās divas ir Koriolisa (Coriolis) paātrinājums. Šo punktu dažādu paātrinājumu vektoru gali veido otru paralēlogramu, kuŗa malas ir perpendikulāras pirmā paralēlograma malām, divas no tām reprezentē slīdes paātrinājumu, bet pārējās divas — punktu relatīvos tangentiālos paātrinājumus.

I Speciālais gadījums. Kad abi punkti atrodas uz taisnes, kas iet paralēli slīdes virzienam, abi paralēlogrami pārvēršas par taisnstūriem, jo tad Koriolisa paātrinājums ir perpendikulārs relatīvam normālpaātrinājumam, bet slīdes paātrinājums perpendikulārs tangentiālam.

II Speciālais gadījums. Kad abi punkti atrodas uz taisnes, kas iet perpendikulāri slīdes virzienam, abi paralēlogrami pārvēršas par savstarpīgi perpendikulārām taisnēm tamdēļ, ka tad Koriolisa paātrinājuma virziens sakrīt ar relatīvā normālpaātrinājuma virzienu un tāpat slīdes paātrinājuma virziens sakrīt ar tangentiālā paātrinājuma virzienu.

Aprakstīto paātrinājuma konstrukcijas metodi izlietosim svārstīgā un rotējošā kloķu cilpā, kā arī n — locekļu ķēdēs.

III pamatzdevums. Paātrinājumu konstrukcija svārstīgā kloķa cilpā (235. zīm.).

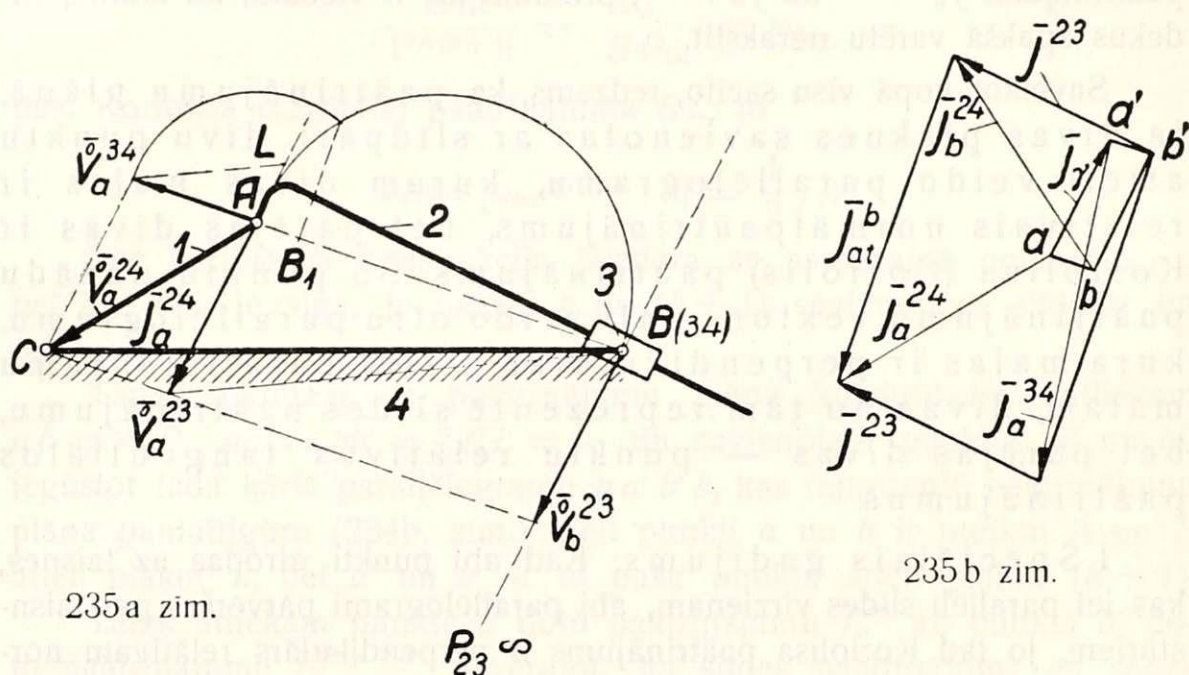
Nekustīgais loceklis apzīmēts ar 4, bet 1. loceklis, vienmērīgi griežoties ap punktu C ar doto ātrumu $\omega_{14} = \text{const.}$, piedzen mēchanismu (235a. zīm.).

Jānosaka 2. un 3. locekļa paātrinājuma stāvoklis un jāatrod slīdes paātrinājums.

Vienkāršības dēļ ātrumu mērogs pieņemts tāds, lai punkta A ortogonālais ātrums $\bar{V}_a^{14} = \bar{V}_a^{24} = \omega_{14} \cdot AC$ reprezentētos ar attālumu AC . Tādā gadījumā arī paātrinājums $\bar{j}_a^{14} = \bar{j}_a^{24} = AC$.

Punktu B savienojam ar polu P_{24} , kas atrodas uz normāles pret slīdes virzienu tāpat kā P_{23} . Taisne, kas vilkta caur punktu C paral-

līni AB , nogriež punkta B ātrumu \vec{V}_b^{24} , kas ir arī slīdes ātrums \vec{V}_b^{23} , jo punkts B ir pols P_{34} . Punkta A slīdes ātrums ir, protams, tikpat liels $\vec{V}_a^{23} = \vec{V}_b^{23}$.



235 a zīm.

235 b zīm.

Ievērojot sakaru starp punkta A ātrumiem

$$\vec{V}_a^{24} = \vec{V}_a^{23} + \vec{V}_a^{34},$$

atrodam ātrumu \vec{V}_a^{34} , kas ir arī punkta A relatīvais ātrums pret punktu B , jo punkta B ātrums $\vec{V}_b^{34} = 0$.

Velkot loku ar radiju V_a^{34} līdz krustošanai ar pusriņķi, kas apvilktis ap AB , un noprojēcējot krustošanas punktu uz caurmēru AB , atrodam punkta A normālpaātrinājumu AB_1 kustībā ap punktu B .

Savienojot ortogonālā relatīvā ātruma \vec{V}_a^{23} galu ar pārnesamo polu 34 (punkts B) un velkot caur pārnesamā ortogonālā ātruma \vec{V}_a^{34} galu paralēlu taisni, iegūstam uz relatīvā stara nogriezni AL , kas, kā rāda proporcija:

$$\frac{AL}{V_a^{23}} = \frac{V_a^{34}}{AB} = \omega_{34},$$

ir puse Koriolisa (Coriolis) paātrinājuma:

$$\overline{AL} = [\omega_{34} \vec{V}_a^{23}] = \frac{1}{2} \vec{J}_\gamma.$$

Tagad pāejam uz paātrinājuma plāna konstrukciju: konstruējam (235b. zīm.) paralēlogramu $aa'b'b$ ar malām $ab = a'b' = AB_1$ un $aa' = bb' = 2\overline{AL} = \vec{J}_\gamma$. Šis paralēlograms reprezentē paātrinājumu plāna pamatfigūru, kuŗā izdarīsim pašu paātrinājumu konstrukciju ar otra paralēlograma palīdzību.

Atliekam punkta a paātrinājumu $\bar{j}_a^{24} = \overline{AC}$, kuŗa gals ir viena no otrā paralēlograma virsotnēm, bet pretim guļošā virsotne atrodas punktā b' , jo punkta B paātrinājums $\bar{j}_b^{34} = 0$. Tamdēļ otrā paralēlograma iegūšanai velkam caur minētiem punktiem divas taisnes paralēli slīdes virzienam un divas taisnes perpendikulāri AB .

Savienojot punktus a' un b ar jaunatrastām paralēlograma virsotnēm tā, lai taisne, kas savieno punktu attēlus, būtu perpendikulāra taisnei, kas savieno paātrinājumu galus, iegūstam paātrinājumus \bar{j}_a^{34} un \bar{j}_b^{24} .

Bez tam otrā paralēlograma malas, paralēlas slīdes virzienam, dod slīdes paātrinājumu \bar{j}^{23} , bet pārējās malas dod punkta A tangenciālo paātrinājumu kustībā pret punktu B : \bar{j}_{at}^b , kas virzīts uz leju.

Atrastais paātrinājumu plāns, pirmkārt, apmierina visus 4 nol-mus, kas saista dažādus punktu A un B paātrinājumus:

- 1) $\bar{j}_a^{24} = \bar{j}_a^{23} + \bar{j}_a^{34} + \bar{j}_\gamma$
- 2) $\bar{j}_b^{24} = \bar{j}_b^{23} + \bar{j}_\gamma \dots \dots \dots$ (jo šeit $\bar{j}_b^{34} = 0$)
- 3) $\bar{j}_a^{24} = \bar{j}_b^{24} + \bar{j}_{an}^b + \bar{j}_{at}^b$
- 4) $\bar{j}_a^{34} = \bar{j}_{an}^b + \bar{j}_a^{bt} \dots \dots \dots$ (jo šeit $\bar{j}_b^{34} = 0$)

un otrkārt, nosaka 2. un 3. locekļa paātrinājuma stāvokli, jo 2. loceklim bez dotā paātrinājuma \bar{j}_a^{24} iegūts vēl punkta B paātrinājums \bar{j}_b^{24} , bet 3. loceklim atrasts punkta A paātrinājums \bar{j}_a^{34} , kas pietiek paātrinājuma stāvokļa noteikšanai, jo šis loceklis griežas ap nekustīgo punktu B .

Ievērojot, ka 2. un 3. loceklis saistīti ar slīdpāri, abiem locekļiem griezes ātrumi un griezes paātrinājumi vienādi

$$\omega_{24} = \omega_{34} = \frac{V_a^{34}}{AB} \text{ un } \tau_{24} = \tau_{34} = \frac{j_{at}^b}{AB}.$$

IV pamatzdevums. Paātrinājumu konstrukcija rotējošā kloķa cilpā (236. zīm.).

Nekustīgais loceklis apzīmēts ar 4, bet 1. loceklis, vienmērīgi griežoties ap punktu C ar doto ātrumu $\omega_{14} = \text{const.}$, piedzen mēchanismu (236a. zīm.).

Jānosaka 2. un 3. locekļa paātrinājumu stāvoklis un jāatrod slīdes paātrinājums.

Atliekam punkta A ātrumu $V_a^{14} = V_a^{24} = \omega_{14} \cdot AC$ ortogonālā virzienā un sadalām to komponentēs saskaņā ar formulu: $\bar{V}_a^{24} = \bar{V}_a^{23} + \bar{V}_a^{34}$.

Savienojot punktus a' un b ar pārējām otrā taisnstūra virsotnēm tā, lai taisne, kas savieno punktu attēlus plānā, būtu perpendikulāra taisnei, kas iet caur paātrinājumu galiem, iegūstam arī paātrinājumus \bar{j}_a^{34} un \bar{j}_b^{24} .

Ar šo 2. un 3. locekļa paātrinājuma stāvoklis noteikts, jo 2. loceklim bez dotā paātrinājuma \bar{j}_a^{24} atrasts vēl \bar{j}_b^{24} , bet 3. loceklim, kas griežas ap nekustīgu punktu, atrasts punkta A paātrinājums \bar{j}_a^{34} .

Atrastais paātrinājumu plāns apmierina visus 4 nolīdzinājumus, kas saista dažādus punktu A un B paātrinājumus:

- 1) $\bar{j}_a^{14} = \bar{j}_a^{24} = \bar{j}^{23} + \bar{j}_a^{34} + \bar{j}_\gamma$
- 2) $\bar{j}_b^{24} = \bar{j}^{23} + \bar{j}_\gamma \dots \dots \dots$ (jo šeit $\bar{j}_b^{34} = 0$)
- 3) $\bar{j}_a^{24} = \bar{j}_b^{24} + \bar{j}_{an}^b + \bar{j}_{at}^b$
- 4) $\bar{j}_a^{34} = \bar{j}_{an}^b + \bar{j}_{at}^b \dots \dots \dots$ (jo šeit $\bar{j}_b^{34} = 0$).

Otrā taisnstūra malas, kas iet paralēli slīdes virzienam, dod slīdes paātrinājumu \bar{j}^{23} , kas virzīts uz augšu.

Ja 1. loceklis griežas vienmērīgi pret pulksteņrādītāju, tad punkta A tangentiālā paātrinājumā \bar{j}_{at}^b virziens kustībā pret B rāda, ka 3. locekļa grieze ir palēnināta ar

$$\tau_{34} = \frac{j_{at}^b}{AB},$$

bet ja 1. loceklis griežas pa pulksteņrādītāju, tad 3. locekļa grieze paātrināta ar to pašu τ_{34} .

Jāpiezīmē vēl, ka sakarā ar to, ka 2. un 3. loceklis savienoti ar slīdpari, griezes ātrumi $\omega_{24} = \omega_{34}$ un griezes paātrinājumi $\tau_{24} = \tau_{34}$.

Iva pamatzdevums. Paātrinājumu konstrukcija rotējošā kloķa cilpā (cits gadījums) (237. zīm.).

Šinī piemērā apskatām gadījumu, kad mēchanismu piedzen 3. loceklis, vienmērīgi griežoties ap punktu B ar doto ātrumu $\omega_{34} = \text{const.}$ (237 a. zīm.).

Jānosaka 1. un 2. locekļa paātrinājuma stāvoklis un jāatrod slīdes paātrinājums.

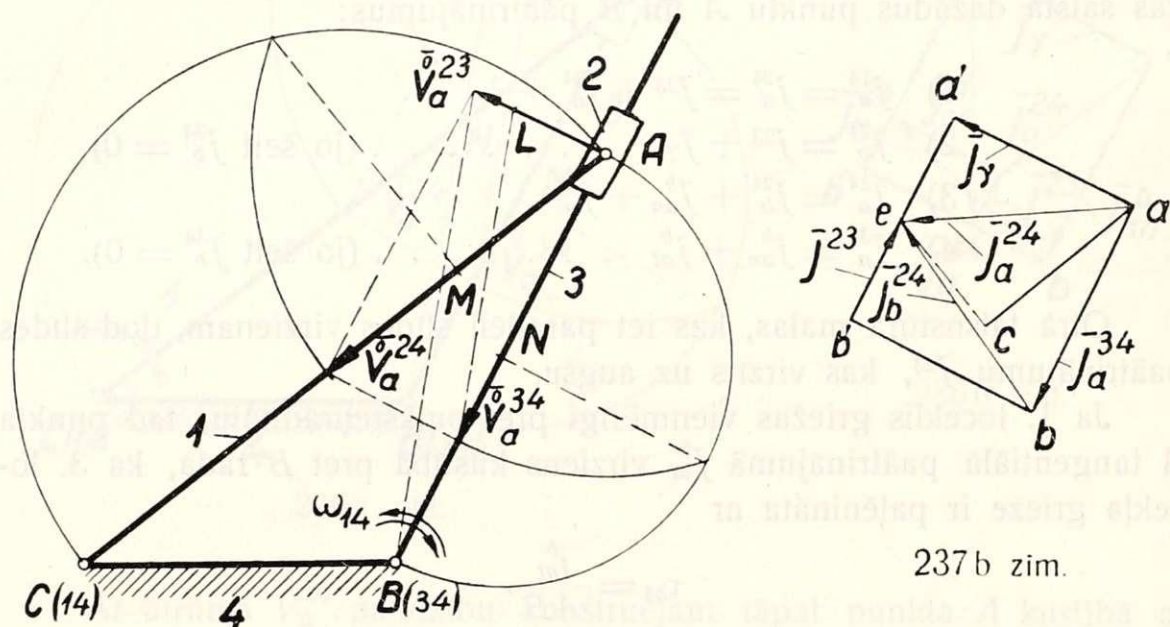
Atliekam punkta A ātrumu $V_a^{34} = \omega_{34} \cdot AB$ ortogonālā virzienā un konstruējam formulu

$$\bar{V}_a^{24} = \bar{V}_a^{23} + \bar{V}_a^{34}.$$

Ar ātruma V_a^{34} palīdzību, lietojot pusriņķi, konstruējam punkta A kustībā ap punktu B normālpāātrinājumu AN , kas, ievērojot, ka $\omega_{34} = \text{const.}$, ir arī pilns paātrinājums $\bar{j}_a^{34} = \overline{AN}$.

Ar ātruma V_a^{24} palīdzību konstruējam punkta A kustībā ap punktu C normālpaātrinājumu AM .

Tāpat kā agrāk atrodam Koriolisa (Coriolis) paātrinājumu, savienojot relatīvā ortogonālā ātruma \vec{V}_a^{23} galu ar pārnesamo polu 34 (punkts B) un velkot caur pārnesamā ātruma \vec{V}_a^{34} galu paralēlu taisni, kas no relatīvā stara nogriež $\overline{AL} = \frac{1}{2}\vec{j}_\gamma$.



237 a zim.

237 b zim.

Paātrinājumu konstrukcijai atkal izmantojam punktus A un B , kas atrodas uz slidošās taisnes. Tamdēļ šeit paātrinājumu plāna pamatfigūra ir tas pats taisnstūris $abb'a'$, kas konstruēts (237 b. zīm.) ar malām $\overline{ab} = \overline{a'b'} = \overline{AN}$ un $\overline{aa'} = \overline{bb'} = 2\overline{AL} = \vec{j}_\gamma$.

Otrs taisnstūris tagad pārvēršas par taisni, kas iet paralēli slīdes virzienam, jo punkta A tangenciālais paātrinājums pret punktu B , 3. loceklim vienmērīgi griežoties, ir nulle. Tas nozīmē, ka otrā taisnstūra platums ir nulle, un taisnstūris sakrīt ar malu $a'b'$, tā tad paātrinājuma $\vec{j}_a^{14} = \vec{j}_a^{24}$ gals atrodas uz taisnes $a'b'$.

Lai atrastu to, ņemam palīgā vēl punktu C , kuŗa paātrinājums kustībā 1 pret 4 $\vec{j}_c^{14} = 0$.

Atliekam plānā punkta A relatīvo normālpaātrinājumu $\overline{ac} = \overline{AM}$ un velkam caur punktu c normāli pret ac , uz kuŗas arī atrodas punkta A paātrinājuma $\vec{j}_a^{14} = \vec{j}_a^{24}$ gals.

Galīgi tā tad atrodam to minētās normāles krustošanās punktā e ar $a'b'$.

Savienojot punktu b ar to pašu krustošanās punktu e , iegūstam arī \bar{j}_b^{24} , jo otrā taisnstūra platums ir nulle.

Beidzot attālums $b'e$ dod meklējamo slīdes paātrinājumu \bar{j}^{23} , kas virzīts uz augšu un līdz ar to reprezentē arī otrā taisnstūra augstumu.

Atrastais plāns, kā redzams 237b. zīm., apmierina visus 4 nolīdzinājumus, kas saista dažādus punktu A un B paātrinājumus.

- 1) $\bar{j}_a^{14} = \bar{j}_a^{24} = \bar{j}^{23} + \bar{j}_a^{34} + \bar{j}_\gamma$
- 2) $\bar{j}_b^{24} = \bar{j}^{23} + \bar{j}_\gamma$ (jo šeit $\bar{j}_b^{34} = 0$)
- 3) $\bar{j}_a^{24} = \bar{j}_b^{24} + \bar{j}_{an}$ (jo šeit $\bar{j}_{at} = 0$)
- 4) $\bar{j}_a^{34} = \bar{j}_{an}^b$ (jo šeit $\bar{j}_b^{34} = 0$ un $\bar{j}_{at}^b = 0$)

Ja 3. loceklis griežas vienmērīgi pret pulksteņrādītāju, tad 1. loceklis griežas paātrināti ar

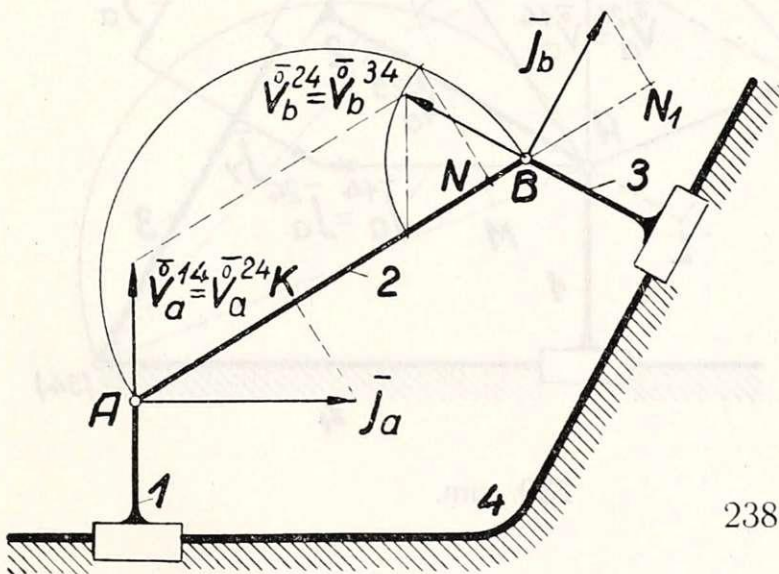
$$\tau_{14} = \frac{j_{at}^c}{AC} = \frac{ce}{AC},$$

bet ja 3. loceklis griežas vienmērīgi pa pulksteņrādītāju, tad 1. locekļa grieze ir palēnināta ar to pašu τ_{14} .

V pamatuzdevums. Paātrinājumu konstrukcija četrstūrī ar diviem pieguļošiem slīdpāriem (238. zīm.).

Doti punkta A ātrums \bar{V}_a^{14} un paātrinājums \bar{j}_a .

Jākonstruē punkta B paātrinājums \bar{j}_b .



238. zīm.

Šinī mehānismā slīdpāru kustīgās plaknēs nav, tamdēļ nav arī Koriolisa (Coriolis) paātrinājuma, un meklējamo paātrinājumu \bar{j}_b var viegli konstruēt bez atsevišķa plāna palīdzības tāpat kā šarnīru četrstūrī.

Atliekam doto ātrumu $V_a^{14} = V_a^{24}$ ortogonālā virzienā. Velkot caur

tā galu taisni paralēli AB , atrodam punkta B ortogonālo ātrumu $\vec{V}_b^{24} = \vec{V}_b^{34}$.

Veidojam ātrumu diferenci $\vec{V}_b^{24} - \vec{V}_a^{24} = \vec{V}_b^a$ un konstruējam ar pusriņķi punkta B normālpāātrinājumu BN kustībā ap A .

Projecējam \vec{j}_a uz AB virzienu un atliekam šo projekciju AK attiecīgā virzienā no punkta N : $\overline{NN}_1 = \overline{AK}$. Caur iegūto punktu N_1 velkam normāli pret AB līdz krustošanai ar punkta B slīdes virzienu un iegūstam meklējamo paātrinājumu \vec{j}_b .

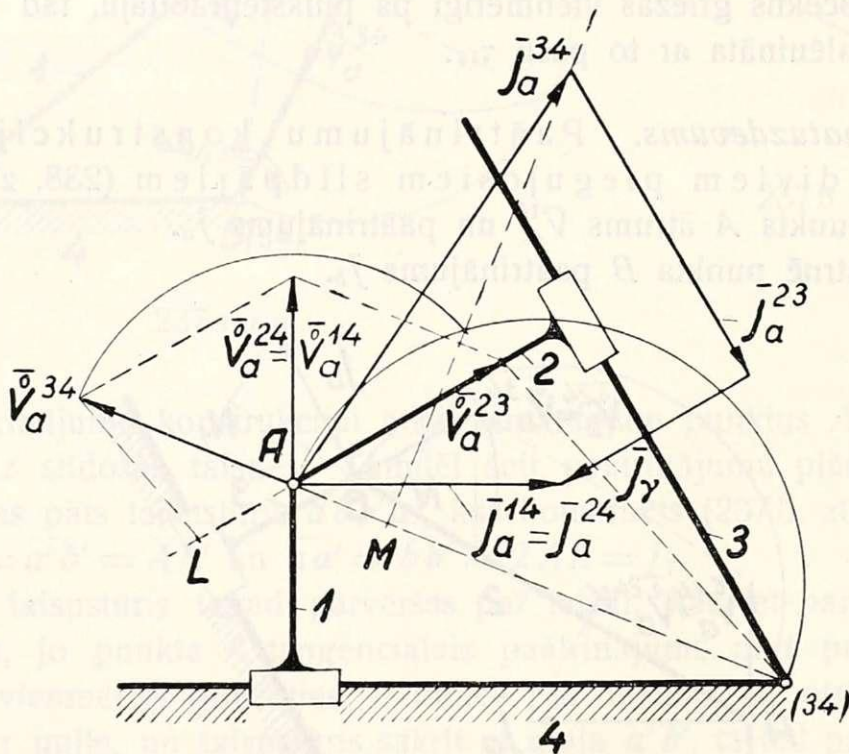
VI pamatzdevums. Paātrinājumu konstrukcija četrstūrī ar diviem pretimgulošiem slīdpāriem (239. zīm.).

Doti punkta A ātrums V_a^{14} un paātrinājums \vec{j}_a^{14} .

Jākonstruē slīdes paātrinājums \vec{j}^{23} un jāatrod griezes paātrinājums τ_{34} .

Atliekam V_a^{14} ortogonālā virzienā un konstatējam, ka $\vec{V}_a^{14} = \vec{V}_a^{24}$.

Sadalām \vec{V}_a^{24} komponentēs saskaņā ar formulu $\vec{V}_a^{24} = \vec{V}_a^{23} + \vec{V}_a^{34}$.



239. zīm.

Konstruējam Koriolisa (Coriolis) paātrinājumu, savienojot relatīvā ortogonālā ātruma \vec{V}_a^{23} galu un pārnesamo polu 34 un velkot caur pārnesamā ortogonālā ātruma \vec{V}_a^{34} galu paralēlu taisni, kas no relatīvā stara nogriež pusi Koriolisa paātrinājuma AL , jo, kā redzams no līdzīgiem trijstūriem,

$$\frac{AL}{V_a^{23}} = \frac{V_a^{34}}{A-34} = \omega_{34}, \text{ no kuņienes } \overline{AL} = [\omega_{34} \cdot \overline{V_a^{23}}] = \frac{1}{2} \bar{j}_\gamma.$$

Izlietojot ātrumu V_a^{34} , konstruējam ar pusriņķa palīdzību punkta A normālpātrinājumu AM kustībā ap punktu 34.

Apskatāmā gadījumā pātrinājumu konstrukcija punktam A ir tik vienkārša, ka nav vajadzības lietot atsevišķu pātrinājumu plānu.

Konstrukcijas pamatā liekam nolīdzinājumu

$$\begin{aligned} \bar{j}_a^{14} &= \bar{j}_a^{24} = \bar{j}_a^{23} + \bar{j}_a^{34} + \bar{j}_\gamma, \\ \text{no kurienes } \bar{j}_a^{34} &= \bar{j}_a^{24} - \bar{j}_\gamma - \bar{j}_a^{23}. \end{aligned}$$

No vienas puses, \bar{j}_a^{34} gals atrodas uz normāles, kas vilkta punktā M pret $A-34$.

No otras puses, sākam konstruēt atrasto nolīdzinājumu, atliekot no $\bar{j}_a^{14} = \bar{j}_a^{24}$ gala Koriolisa (Coriolis) pātrinājumu pretējā virzienā: $-\bar{j}_\gamma = -2\overline{AL}$, un caur iegūto punktu velkam taisni paralēli slīdes virzienam līdz krustošanai ar agrāk minēto normāli. Savienojot punktu A ar atrasto krustošanās punktu, iegūstam pātrinājumu \bar{j}_a^{34} .

Polīgona mala, kas vilkta paralēli slīdes virzienam, dod meklējamo slīdes pātrinājumu \bar{j}_a^{23} .

3. locekļa griezes pātrinājumu atrodam, izdalot pātrinājuma \bar{j}_a^{34} tangentiālo komponenti ar attālumu $A-34$: $\tau_{34} = \frac{j_{at}^{34}}{A-34}$.

n-plakņu kinematiskās ķēdes.**§ 84. Polu skaits n-plaknēm.**

Pieņemsim, ka no visām n -plaknēm viena ir nekustīga, tad paliek $(n-1)$ kustīga plakne, un katrai no tām attiecībā pret nekustīgo plakni ir viens pols, tā tad pavisam $(n-1)$ pols.

Pieņemot, ka otrā plakne ir nekustīga, atkal pārējām $(n-1)$ plaknēm būs $(n-1)$ pols.

Izdarot to pašu n reiz ar visām plaknēm, dabūsim pavisam $n(n-1)$ polu.

Bet tādā kārtā katrs pols skaitīts divas reizes, jo nekustīgai E_a plaknei pret kustīgo E_b plakni relatīvais pols P_{ba} sakrīt ar relatīvo polu P_{ab} , kustīgai E_a plaknei pret nekustīgo E_b plakni.

Sacītam seko, ka polu skaits n -plaknēm ir

$$P = \frac{n(n-1)}{2} \dots \dots \dots (42)$$

Ar šo formulu atrodam polu skaitu

kinematiskai ķēdei ar 3 plaknēm	$P = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3$	poli
„ „ „ 4 „	$P = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$	„
„ „ „ 5 „	$P = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$	„
„ „ „ 6 „	$P = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$	„
„ „ „ 7 „	$P = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$	„
„ „ „ 8 „	$P = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$	„
„ „ „ 9 „	$P = \frac{9 \cdot 8}{2} = 36$	„
„ „ „ 10 „	$P = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$	„

Apskatot tuvāk iegūtos skaitļus, redzams, ka

3	plaknēm	polu skaits	tikpat liels
5	„	„	divreiz lielāks
7	„	„	trīsreiz „
9	„	„	četrreiz „

§ 85. Polu taišņu skaits n -plaknēm.

No n -plaknēm izņemsim divas E_a un E_b ar relatīvo polu P_{ab} . Pāri paliek vēl $(n-2)$ plaknes. Ņemsim vienu no pāri palikušām plaknēm, piemēram, E_c . Šai plaknei attiecībā pret divām pirmajām relatīvie poli ir P_{ca} un P_{cb} , kas atrodas uz vienas taisnes ar polu P_{ab} . Tālāk plaknes E_c vietā ņemsim pēc kārtas visas $(n-2)$ pārējās, no kurām katrā ir divi poli uz vienas taisnes ar P_{ab} .

No sacītā seko, ka caur polu P_{ab} iet $(n-2)$ taisnes un, ievērojot, ka polu skaits

$$P = \frac{n(n-1)}{2},$$

nākam pie slēdziena, ka taišņu skaits būtu

$$\frac{n(n-1)}{2} (n-2).$$

Bet tādā kārtā katra taisne skaitīta 3 reizes līdz ar katru polu, kas atrodas uz tās, tā tad galīgi taišņu skaits izrādās

$$T = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \dots \dots \dots (43)$$

Ar šo formulu atrodam taišņu skaitu

kinematiskai ķēdei ar 3 plaknēm $T = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 1$ taisne

" " " 4 " $T = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4$ taisnes

" " " 5 " $T = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$ "

" " " 6 " $T = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$ "

" " " 7 " $T = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$ "

" " " 8 " $T = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56$ "

" " " 9 " $T = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 84$ "

" " " 10 " $T = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$ "

§ 86. Kinematiskās ķēdes ar piespiestu kustību.

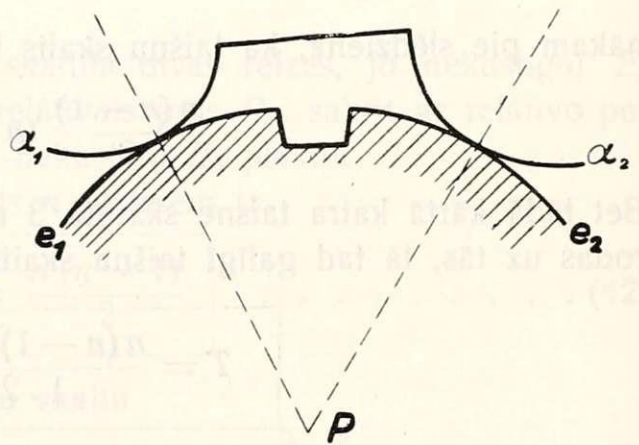
Ja kinematiskā ķēdē viens loceklis jeb viena plakne paliek nekustīga, bet kāds cits loceklis piedzen ķēdi, pie kam visas kustīgās plaknes iegūst pilnīgi noteiktas kustības, tad tāda ķēde saucas par kinematisko ķēdi ar piespiestu kustību. Kā piemērs var nodēret šarnīru četrstūris.

Ja vienas plaknes iekustināšana nerada visu pārējo kustīgo plakņu kustību, tad tādai ķēdei nav piespiestas kustības un tā nevar būt mehānisms. Kā uz piemēru var aizrādīt uz šarnīru piecstūri.

Aptveřamo un envelopeu aizvietošana ar šarnīru.

Pieņemsim, ka kustība dota ar diviem pāriem aptveřamo un envelopeu un ka pa visu kustības laiku pols P nemaina savu vietu.

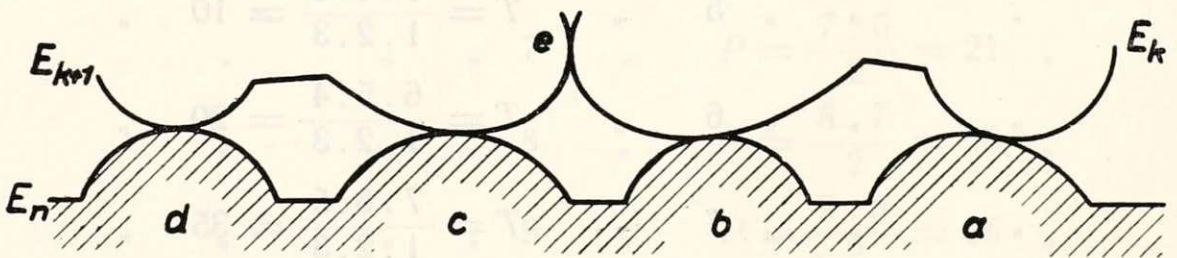
Acīm redzot tādā gadījumā divus pārus aptveřamo un envelopeu var aizvietot ar vienu šarnīru punktā P . Vispārīgi var teikt, ka kinematiskais pāris atvieto divus pārus aptveřamo un envelopeu (240. zīm.).



240. zīm.

Piespiestas kustības kritērijs kinematiskās ķēdēs.

Izņemsim no ķēdes, kas sastāv no n locekļiem, 3 locekļus E_k , E_{k+1} un E_n , kur E_n reprezentē nekustīgo locekli, attiecībā pret kuŗu



241. zīm.

kustas E_k un E_{k+1} , pie kam kustība no plaknes E_k tiek pārnesta uz E_{k+1} .

Kustības pārnešanu varam iedomāties panāktu ar aptveřamām un envelopeām. Tādā gadījumā plaknes E_{k+1} iekustināšanai vajadzīgais

aptveramo un envelope pāru skaits ir 3 (c , d un e) (241. zīm.). Bet visu $(n-2)$ palikušo plakņu iekustināšanai vajadzīgais pāru skaits, ieskaitot arī pirmos divus (a un b), ir $p = (n-2)3 + 2 = 3n - 4$.

Ievērojot, ka viens šarnīrs atvieto divus pārus, vajadzīgais šarnīru skaits būs divreiz mazāks

$$g = \frac{3n}{2} - 2 \quad \dots \dots \dots (44)$$

Šī formula dod nepieciešamo šarnīru skaitu, lai n -locekļu ķēdei būtu piespiesta kustība.

Atrastā formula aizrāda arī uz to, ka šarnīru ķēdē ar piespiestu kustību locekļu skaitam jābūt pārskaitlīm.

Formulu (44) var pārveidot, pareizinot to ar 2 un pārnesot visus locekļus vienā pusē.

$$2g - 3n + 4 = 0 \quad \dots \dots \dots (45)$$

Šādā veidā formula saucas par piespiestas kustības kritēriju n -locekļu ķēdei ar g šarnīriem.

§ 87. Minimālais bināru locekļu skaits slēgtās ķēdēs ar vienkāršiem šarnīriem un piespiestu kustību.

Vispirms konstatējam, ka slēgtās ķēdēs locekļu ar vienu šarnīru jeb singulāru locekļu nav.

Tad ņemsim formulu (45), kas dod sakaru starp locekļu skaitu n un šarnīru skaitu g .

$$2g - 3n + 4 = 0.$$

Apzīmēsim bināru locekļu skaitu ķēdē ar n_2 .

” ternāru ” ” ” ” n_3 .

” kvaternāru ” ” ” ” n_4 .

.....

.....

Apzīmēsim locekļu skaitu ar i šarnīriem ar n_i .

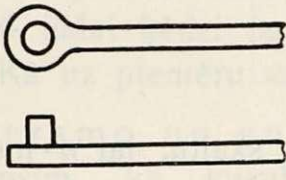
$$\text{Tad } n = n_2 + n_3 + n_4 + \dots \dots \dots + n_i = \sum_2^i n_i$$

$$n = \sum_2^i n_i \quad \dots \dots \dots (46)$$

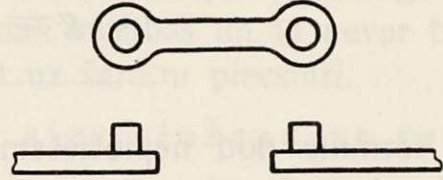
Katrs šarnīrs sastāv no diviem elementiem (242a. zīm.); apzīmējot elementu skaitu ar e , atrodam

$$e = 2g.$$

Katrā locekļī, kas satur divus šarnīrus, ir arī tikai divi elementi (242b. zīm.), jo pārējie divi pieder citiem locekļiem.



242a zīm.



242b zīm.

Tāpat loceklim, kas satur 3 šarnīrus, ir 3 elementi.

„ „ „ „ 4 „ „ 4 „

.....

Ja tagad saskaitīsim visus elementus ķēdē, tad elementu skaits

$$e = 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 + \dots + in_i = \sum_2^i (in_i).$$

Ievērojot, ka $e = 2g$, atrodam

$$2g = \sum_2^i (in_i) \dots \dots \dots (47).$$

Ievietojot n un $2g$ formulā (45), atrodam

$$2n_2 + 3n_3 + 4n_4 + 5n_5 + \dots - 3(n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + \dots) + 4 = 0,$$

no kurienes $n_2 = 4 + n_4 + 2n_5 + \dots$

jeb

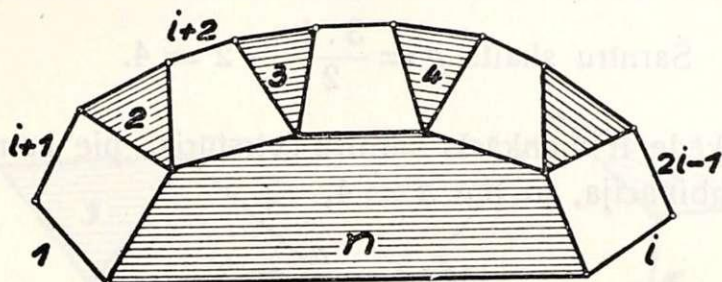
$$n_2 = 4 + \sum_4^i (i-3)n_i \dots \dots \dots (48).$$

Šī formula rāda, ka slēgtā kinēmatiskā ķēdē ar piespiestu kustību minimālais bināru locekļu skaits neatkarīgi no citu locekļu skaita ir 4.

§ 88. Maksimālais šarnīru skaits vienam loceklim slēgtā kinēmatiskā ķēdē ar piespiestu kustību.

Lai noskaidrotu, kādu vērtību var sasniegt i slēgtā kinēmatiskā ķēdē ar piespiestu kustību, t. i. kāds var būt maksimālais šarnīru skaits vienam loceklim, veidosim slēgtu ķēdi ar piespiestu kustību, ņemot pamatā vienu locekli ar i šarnīriem un pievienojot tam pēc iespējas mazu locekļu skaitu.

Šis loceklis (243. zīm.) apzīmēts ar n , un tam pievienoti vēl i locekļi — katrā šarnīrā pa vienam. Lai saistītu savā starpā pievienotos locekļus, tie jāsavieno vēl ar $(i-1)$ locekli, veidojot $(i-1)$ četrstūrus.



243. zīm.

Locekļu skaits izveidotā ķēdē: $n = 1 + i + (i-1) = 2i$.

Šarnīru skaits: $g = i + 2 + (i-2) \cdot 2 = 3i - 2$.

Ievietojot šīs vērtības formulā (45), dabūjam

$$2g - 3n + 4 = 2(3i - 2) - 6i + 4 = 0.$$

Rezultāts nulle nozīmē, ka veidotai ķēdei piemīt piespiesta kustība, pie tam $n = 2i$, tā tad

$$\boxed{\max i = \frac{n}{2}} \dots \dots \dots (49).$$

Formula (49) rāda, ka maksimālais šarnīru skaits vienam loceklim slēgtā ķēdē ar piespiestu kustību ir puse no visu locekļu skaita.

§ 89. Vispārīgā ķēžu analīze.

Apskatīsim tikai slēgtās ķēdes ar piespiestu kustību, tādām ķēdēm bija atrastas formulas:

$$g = \frac{3n}{2} - 2 \dots \dots \dots (44)$$

$$\max i = \frac{n}{2} \dots \dots \dots (49)$$

$$n = \sum_2^i n_i = n_2 + n_3 + n_4 + \dots \dots \dots + n_i \dots \dots (46)$$

$$2g = \sum_2^i i n_i = 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 + \dots \dots \dots + i n_i \dots \dots (47)$$

Atgādināsim vēl, ka slēgtās ķēdēs ar piespiestu kustību locekļu skaits var būt tikai pārskaitlis, jo citādi šarnīru skaits neiznāk veselos skaitļos.

Izpētīsim iespējamās kombinācijas, sākot ar

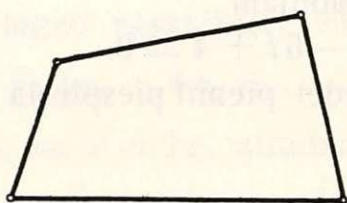
I) $n = 2$. Šarnīru skaits $g = \frac{3 \cdot 2}{2} - 2 = 1$, tā tad dabūjam vienkāršu kinematisku pāri, t. i. šarnīru.

II) $n = 4$. Šarnīru skaits $g = \frac{3 \cdot 4}{2} - 2 = 4$.

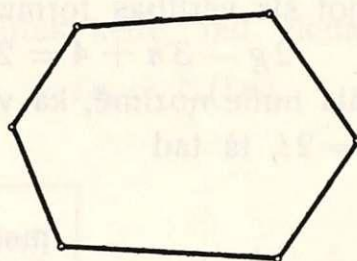
Attiecīgā ķēde ir vienkāršs šarnīru četrstūris, pie kam tā ir vienīgi iespējamā kombinācija, jo pie $n = 4$,

$$\max i = \frac{n}{2} = 2.$$

Tas nozīmē, ka šinī ķēdē nevar būt ternāru vai augstāku locekļu; bez tam arī bija noskaidrots, ka minimālais bināru locekļu skaits ir 4, tā tad visi locekļi ir bināri (244. zīm.).



244. zīm.



245. zīm.

§ 90. 6-locekļu ķēdes.

$n = 6$. Šarnīru skaits 6-locekļu ķēdēs:

$$g = \frac{3 \cdot 6}{2} - 2 = 7 \text{ un } \max i = \frac{n}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

Tas nozīmē, ka 6-locekļu ķēdē sastopami arī ternāri locekļi.

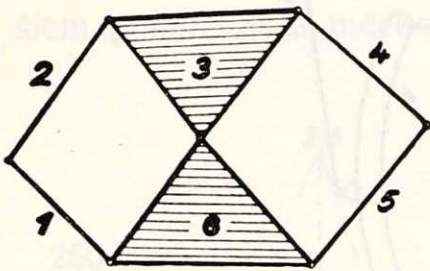
Lai noskaidrotu, cik ķēdē būs ternāru un cik bināru locekļu, izlietosim formulas (46) un (47).

$$\begin{array}{l|l|l} n_2 + n_3 = 6 & 2n_2 + 2n_3 = 12 & n_3 = 2 \text{ un} \\ 2n_2 + 3n_3 = 2 \cdot 7 & 2n_2 + 3n_3 = 14 & n_2 = 4. \end{array}$$

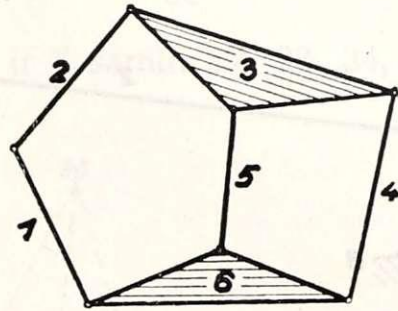
Tas nozīmē, ka apskatāmā ķēdē ir 2 ternāri un 4 bināri locekļi. Lai noskaidrotu meklējamās ķēdes veidu, ņemsim vienkāršu šarnīru 6-stūri (245. zīm.), kas satur 6 šarnīrus un kam nav piespiestās kustī-

bas, jo saskaņā ar formulu (44) tam trūkst viena šarnīra. Bez tam arī diviem locekļiem jābūt ternāriem.

Lai apmierinātu šīs prasības, acīm redzot starp diviem pretimguļošiem locekļiem jāievieto viens šarnīrs. Šādā ceļā iegūtais mēchanisms (246. zīm.) pazīstams ar nosaukumu Vata (James Watt) mēchanisms.

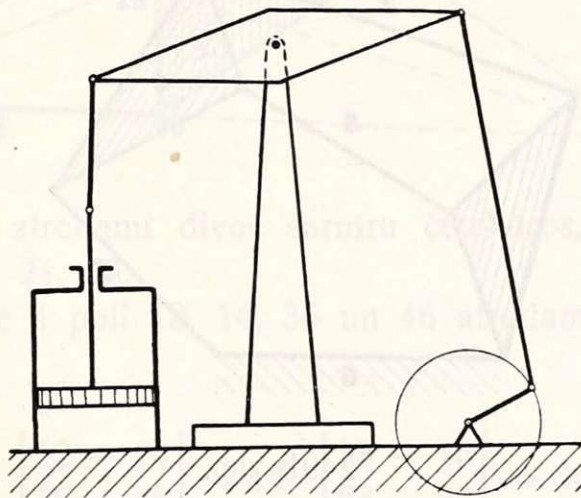


246. zīm.



247. zīm.

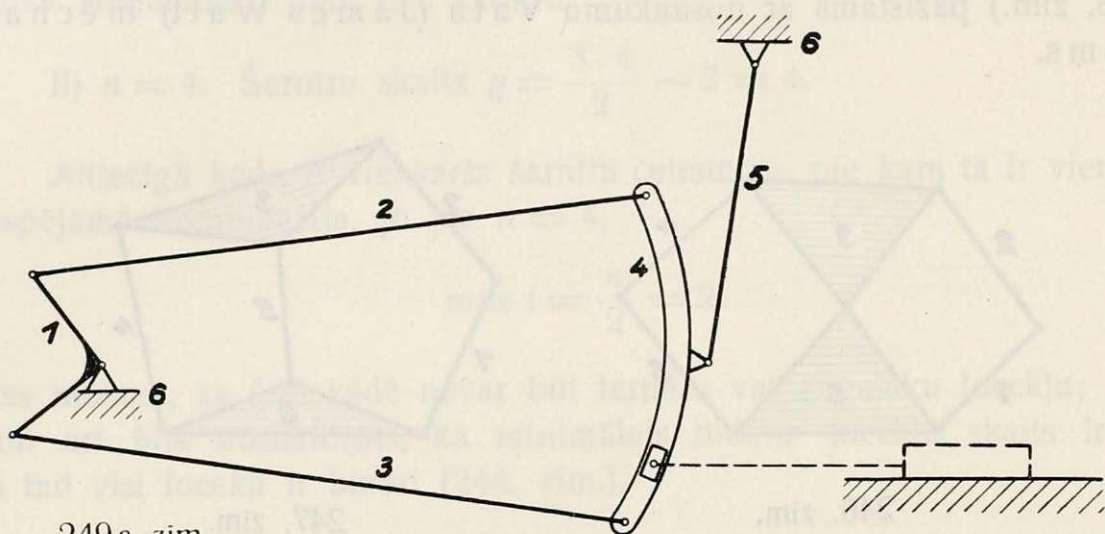
Nemainot locekļu un šarnīru skaitu, pārveidosim Vata (J. Watt) mēchanismu, ievietojot 5. locekli starp 3. un 6. Tādā kārtā iegūtais mēchanisms pazīstams ar nosaukumu Stivenzona (Robert Stephenson) mēchanisms.



248. zīm.

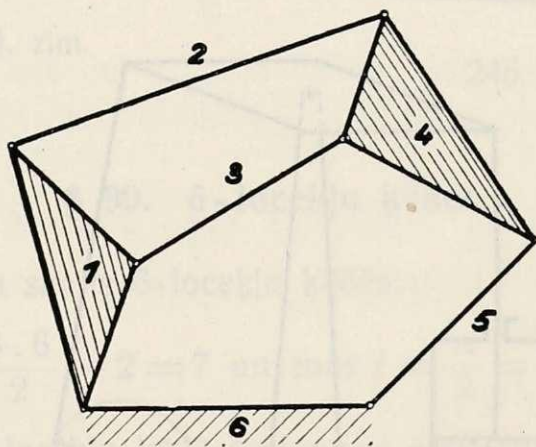
Jāpiezīmē, ka savus nosaukumus šie mēchanismi dabūjuši nevis tamdēļ, ka Vats (Watt) vai Stivensons (Stephenson) tos atraduši, bet tikai šiem vīriem par godu. Vata (Watt) mēchanisms ir viņa izgudrotai tvaikmašīnai (248. zīm.) atbilstošā kinēmatiskā šarnīru ķēde.

Tāpat Stivensona (Stephenson) mēchanisms ir pazīstamam Stiven-sona (Stephenson) lokomotīves kulises mēchanismam (249a. zīm.) atbilstošā kinēmatiskā šarnīru ķēde (249b. zīm.).



249a zīm.

Bez tam vēl jāpiezīmē, ka Vata (J. Watt) un Stivensona (Stephenson) mēchanisms ir vienīgās slēgtās 6-locekļu kinēmatiskās ķēdes ar piespiestu kustību un vienkāršiem šarnīriem.



249b zīm.

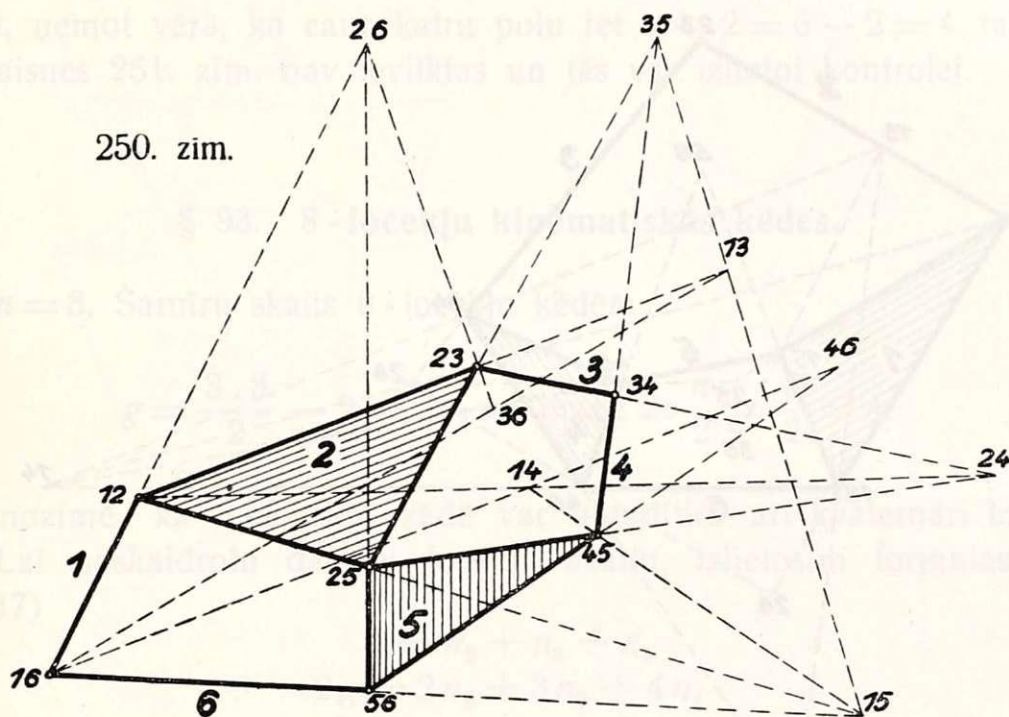
§ 91. Vata (J. Watt) mēchanisma polu un polu taisņu noteikšana (250. zīm.).

Šinī mēchanismā ir $P = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ polu un $T = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$ polu taisnes.

Izrakstīsim visus polus pēc sekošas shēmas, neatkārtojot tos pašus polus divreiz

12	13	14	15	16
	23	24	25	26
		34	35	36
			45	46
			56	

No šiem poliem pašā mēchanismā ir 7 šarnīri 12, 23, 34, 45, 56, 16, 25.



Tālāk viegli atrodami divos šarnīru četrstūros, kas redzami 250. zīm., poli 26, 15, 24, 35.

Pāri palikušie 4 poli 13, 14, 36 un 46 atrodami, velkot attiecīgās taisnes.

$$\left| \begin{array}{l} 12 - 23 \\ 15 - 35 \end{array} \right| \rightarrow 13 \quad \left| \begin{array}{l} 12 - 24 \\ 15 - 45 \end{array} \right| \rightarrow 14 \quad \left| \begin{array}{l} 13 - 16 \\ 23 - 26 \end{array} \right| \rightarrow 36 \quad \left| \begin{array}{l} 14 - 16 \\ 45 - 56 \end{array} \right| \rightarrow 46$$

Polu taisnes ievilkas: šarnīru četrstūros 8 un četrū polu noteikšanai vēl 8, tā tad kopā 16.

Pāri palikušās 4 taisnes:

35 — 36 — 56, 24 — 26 — 46, 13 — 14 — 34 un 34 — 36 — 46 var atrast, ņemot vērā, ka caur katru polu iet $n - 2 = 6 - 2 = 4$ taisnes. Šīs taisnes 250. zīm. nav ievilkas, un tās var izlietot kontrolei.

$$\left| \begin{array}{c} 12 - 23 \\ 14 - 43 \end{array} \right| \rightarrow 13 \quad \left| \begin{array}{c} 12 - 14 \\ 23 - 34 \end{array} \right| \rightarrow 24 \quad \left| \begin{array}{c} 12 - 15 \\ 24 - 45 \end{array} \right| \rightarrow 25$$

$$\left| \begin{array}{c} 12 - 16 \\ 24 - 46 \end{array} \right| \rightarrow 26 \quad \left| \begin{array}{c} 13 - 15 \\ 34 - 45 \end{array} \right| \rightarrow 35 \quad \left| \begin{array}{c} 13 - 16 \\ 34 - 46 \end{array} \right| \rightarrow 36.$$

Polu taisnes ievilkta šarnīru četrstūrī 4 un pēdējo 6 polu noteikšanai vēl $2 \cdot 6 = 12$, t. i. kopā 16.

Pāri palikušās 4 taisnes:

23 — 25 — 35, 23 — 26 — 36, 25 — 26 — 56 un 35 — 36 — 56 var atrast, ņemot vērā, ka caur katru polu iet $n - 2 = 6 - 2 = 4$ taisnes. Šīs taisnes 251. zīm. nav ievilkta un tās var izlietot kontrolei.

§ 93. 8-locekļu kinēmatiskās ķēdes.

$n = 8$. Šarnīru skaits 8-locekļu ķēdēs:

$$g = \frac{3 \cdot 8}{2} - 2 = 10 \quad \text{un} \quad \max i = \frac{n}{2} = \frac{8}{2} = 4.$$

Tas nozīmē, ka 8-locekļu ķēdē var atgādīties arī kvaternāri locekļi.

Lai noskaidrotu dažādu locekļu skaitu, izlietosim formulas (46) un (47)

$$\begin{aligned} n &= n_2 + n_3 + n_4 \\ 2g &= 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 \end{aligned}$$

un ieliksīm $n = 8$ un $g = 10$

$$\begin{aligned} n_2 + n_3 + n_4 &= 8 \\ 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 &= 20. \end{aligned}$$

Iegūtā nolīdzinājumu sistēmā ir 3 nezināmie, bet atrisinājumi ierobežoti ar to, ka $\min n_2 = 4$.

Sistēmas atrisināšanai izslēgsim n_4

$$\left. \begin{aligned} 4n_2 + 4n_3 + 4n_4 &= 32 \\ 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 &= 20 \end{aligned} \right\} \text{---}$$

$$2n_2 + n_3 = 12, \quad \text{no kurienes } n_3 = 12 - 2n_2.$$

Šā nolīdzinājuma atrisinājumi veselos pozitīvos skaitļos, ievērojot, ka $\min n_2 = 4$, iespējami tikai 3:

n_2	n_3	n_4
4	4	0
5	2	1
6	0	2

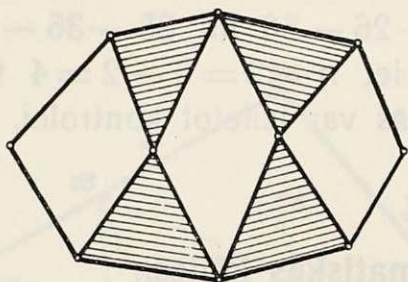
$n_2 = 4$, $n_2 = 5$ un $n_2 = 6$.
Attiecīgie n_3 lielumi ir tad

$n_3 = 4$, $n_3 = 2$ un $n_3 = 0$.

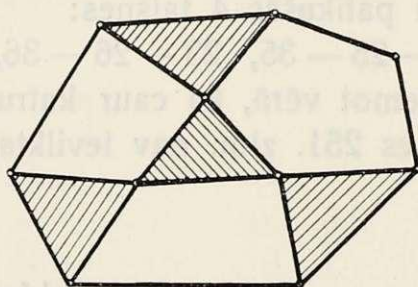
Ievērojot, ka $n = 8$, atrodam arī

$n_4 = 0$, $n_4 = 1$ un $n_4 = 2$.

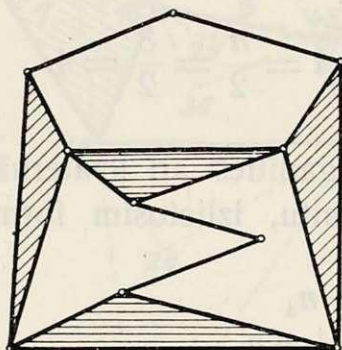
Iegūtie rezultāti sakopoti tabulā. Kā redzams, pie $n = 8$, iespējamas 3 dažādas kombinācijas



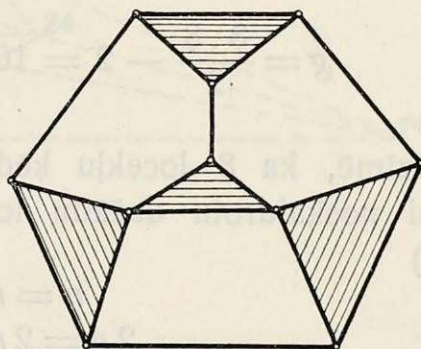
252a zīm.



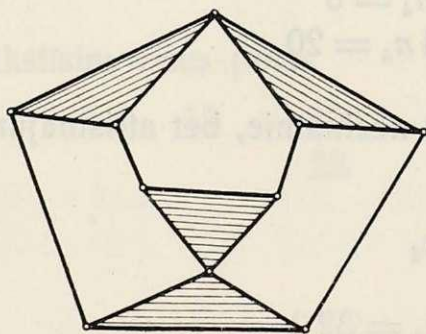
252b zīm.



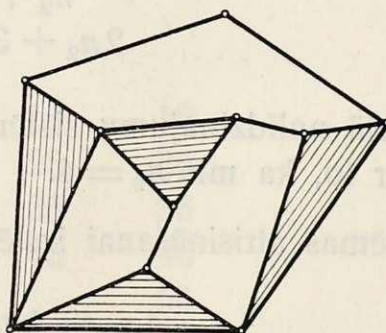
252c zīm.



252d zīm.



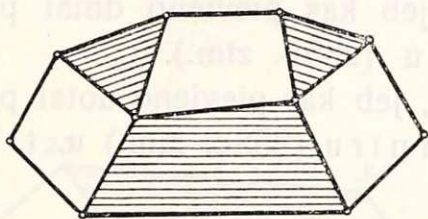
252e zīm.



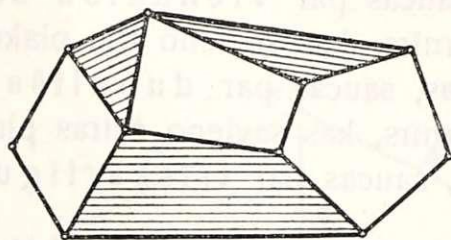
252f zīm.

1) kombinācija. 4 bināri un 4 ternāri locekļi. Šādu ķēžu ir 6 dažādi tipi, kas attēloti 252. zīm.

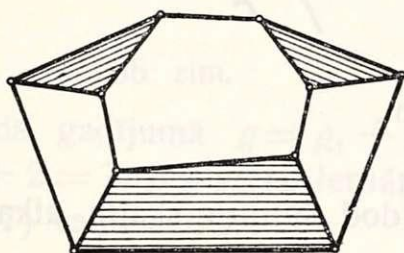
2) kombinācija. 5 bināri, 2 ternāri un 1 kvaternārs loceklis. Šādu ķēžu ir 4 dažādi tipi, kas parādīti 253. zīm.



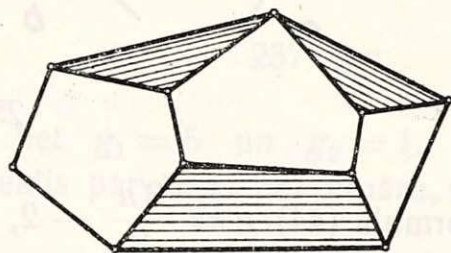
253a zīm.



253b zīm.

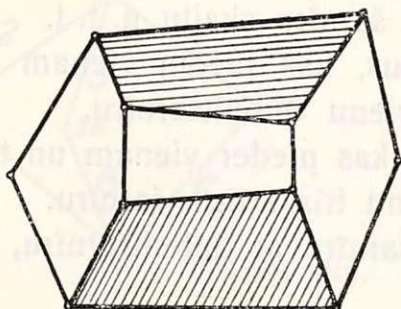


253c zīm.

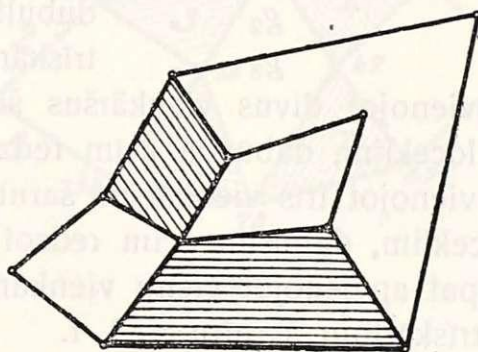


253d zīm.

3) kombinācija 6 bināri un 2 kvaternāri locekļi. Šādu ķēžu, tāpat kā 6-locekļu ķēžu, ir 2 tipi, kas parādīti 254. zīm.



254a zīm.



254b zīm.

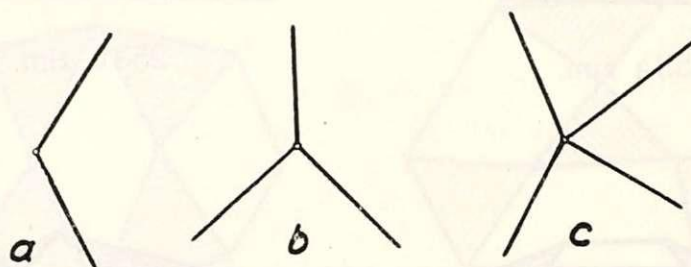
Ar šo dažādās 8-locekļu ķēdes uzrādītas, bet ķēdes ar $n = 10$ un $n = 12$ neapskatīsim, jo tur ir vēl vairāk dažādu kombināciju.

§ 94. Kinēmatisko ķēžu pārveidojums ar augstāko šarnīru palīdzību.

Šarnīrs, kas savieno divas plaknes, jeb kas pievieno vienu plakni otrai, saucas par vienkāršu šarnīru (255a. zīm.).

Šarnīrs, kas savieno trīs plaknes, jeb kas pievieno dotai plaknei vēl divas, saucas par dubultšarnīru (255b. zīm.).

Šarnīrs, kas savieno četras plaknes, jeb kas pievieno dotai plaknei vēl trīs, saucas par trīskārtīgu šarnīru (255c. zīm.) u. t. t.



255. zīm.

Formula (44) $g = \frac{3n}{2} - 2$, kas dod šarnīru skaitu atkarībā no locekļu skaita slēgtās ķēdēs ar piespiestu kustību, attiecas tikai uz vienkāršiem šarnīriem.

Ja ķēdē sastopami arī augstāki šarnīri, tad g vietā jāņem

$$g = g_1 + 2g_2 + 3g_3 + \dots \dots \dots (50),$$

kur g_1 apzīmē vienkāršu šarnīru skaitu,

g_2 „ dubultšarnīru skaitu,

g_3 „ trīskārtīgu šarnīru skaitu u. t. t.

Apvienojot divus vienkāršus šarnīrus, kas pieder vienam un tam pašam loceklim, dabūsim acīm redzot vienu dubultšarnīru.

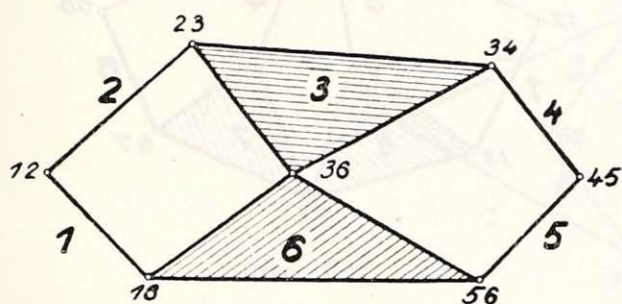
Apvienojot trīs vienkāršus šarnīrus, kas pieder vienam un tam pašam loceklim, dabūsim acīm redzot vienu trīskārtīgu šarnīru.

Tāpat apvienojot vienu vienkāršu šarnīru ar dubultšarnīru, arī dabūsim trīskārtīgu šarnīru u. t. t.

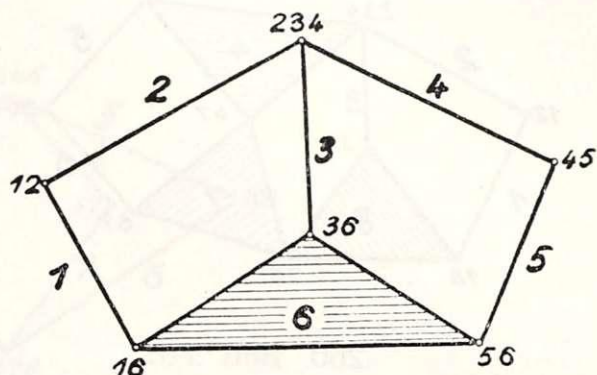
Bet šādai apvienošanai ir tomēr zināmi ierobežojumi: nedrīkst apvienot bināru locekļu šarnīrus, jo tad pats loceklis izkrit un ķēdē mainās locekļu skaits; tā tad var apvienot šarnīrus ternāriem, kvaternāriem u. t. t. locekļiem ar $i > 2$. Pie tam arī nedrīkst apvienot visus šarnīrus, bet jāatstāj vismaz divi šarnīri, t. i. šarnīru apvienošanu var turpināt tik tālu, kamēr loceklis ar $i > 2$ pārvēršas par bināru.

Vata (J. Watt) mēchanisma pārveidojums.

Ņemsim Vata (Watt) mēchanismu (256. zīm.) un apvienosim šarnīrus 23 un 34 vienā dubultšarnīrā, kā parādīts 257. zīm. Šo dubultšarnīru apzīmēsim ar 234 pēc visām plaknēm, kas šinī šarnīrā savienotas.



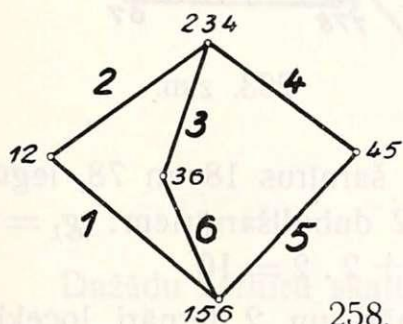
256. zīm.



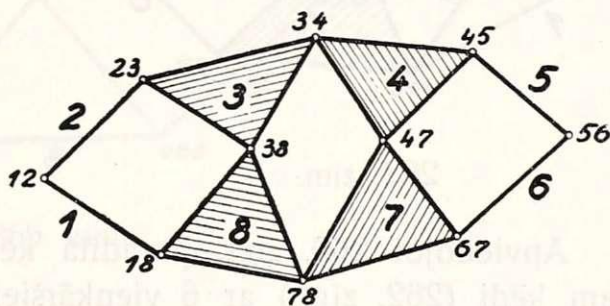
257. zīm.

Tādā gadījumā $g = g_1 + 2g_2$, bet $g_1 = 5$ un $g_2 = 1$, tā tad $g = 5 + 2 = 7$, bet viens ternārs loceklis pārvēršas par bināru, un formula (47) vairs neder.

Apvienojot vēl šarnīrus 16 un 56 vienā dubultšarnīrā 156, dabūsim mēchanismu (258. zīm.), kas sastāv tikai no bināriem locekļiem, bet satur divus dubultšarnīrus un 3 vienkāršus, tā tad atkal izpildīts noteikums formulā (50) $g = 3g_1 + 2g_2 = 3 + 4 = 7$.



258. zīm.



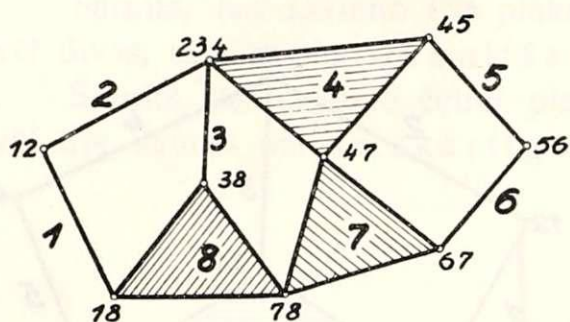
259. zīm.

8-locekļu ķēdes pārveidojums.

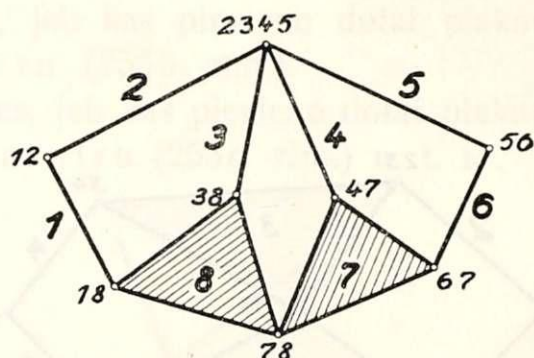
Ņemsim 8-locekļu ķēdi (259. zīm.), kas agrāk bija attēlota 252a. zīm. Šarnīru skaits šeit saskaņā ar formulu (44) ir

$$g = \frac{3n}{2} - 2 = \frac{3 \cdot 8}{2} - 2 = 10.$$

Apvienojot šarnīrus 23 un 34, iegūstam 260. zīm. parādīto ķēdi ar 8 vienkāršiem un 1 dubultšarnīru: $g_1 = 8$ un $g_2 = 1$, tā tad $g = g_1 + 2g_2 = 8 + 2 = 10$. Bināru locekļu skaits ir $n_2 = 5$ un ternāru $n_3 = 3$, bet formula (47) $2g = 2n_2 + 3n_3$ vairs neder.

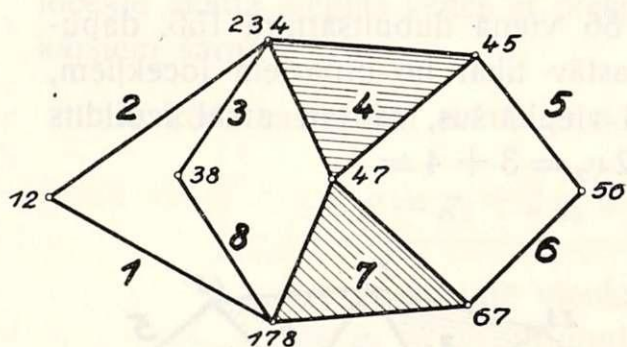


260. zīm.

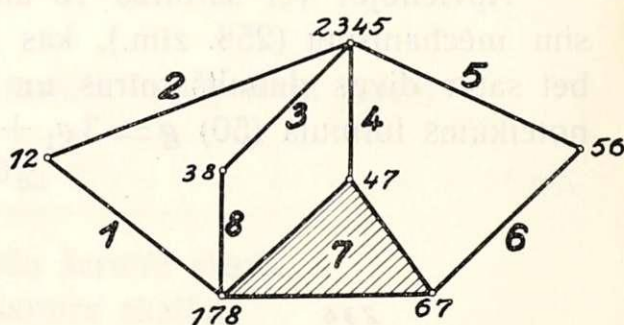


261. zīm.

Pievienojot šarnīram 234 vēl šarnīru 45, iegūstam 261. zīm. parādīto ķēdi ar 7 vienkāršiem un vienu trīskārtīgu šarnīru 2345. $g_1 = 7$ un $g_3 = 1$, tā tad $g = g_1 + 3g_3 = 7 + 3 = 10$. Bināru locekļu skaits $n_2 = 6$ un ternāru $n_3 = 2$, bet formula (47) $2g = 2n_2 + 3n_3$ atkal neder.



262. zīm.



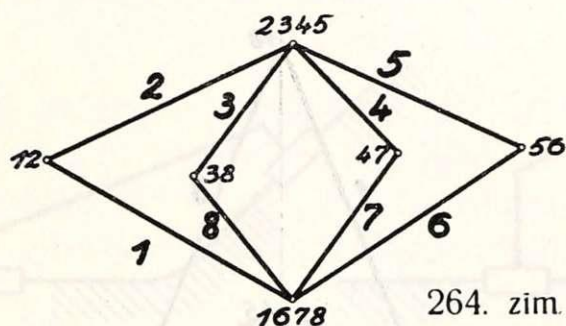
263. zīm.

Apvienojot 260. zīm. parādītā ķēdē vēl šarnīrus 18 un 78, iegūstam ķēdi (262. zīm.) ar 6 vienkāršiem un 2 dubultšarnīriem: $g_1 = 6$ un $g_2 = 2$, kas atkal dod $g = g_1 + 2g_2 = 6 + 2 \cdot 2 = 10$.

Tāpat kā iepriekšējā ķēdē šeit ir 6 bināri un 2 ternāri locekļi, bet formula (47) neder.

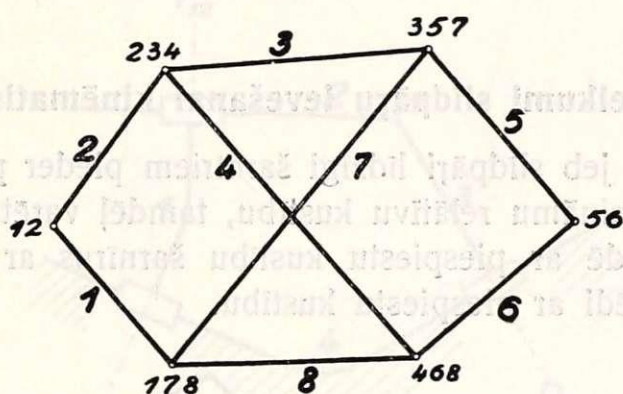
Apvienojot 261. zīm. parādītā ķēdē šarnīrus 18 un 78, vai arī 262. zīm. ķēdē šarnīrus 234 un 45, iegūstam ķēdi ar 5 vienkāršiem, vienu dubultšarnīru un vienu trīskārtīgu šarnīru (263. zīm.). $g_1 = 5$, $g_2 = 1$ un $g_3 = 1$, kas atkal dod $g = g_1 + 2g_2 + 3g_3 = 5 + 2 + 3 = 10$. Šeit ir 7 bināri un 1 ternārs locekļis, bet formula (47) neder.

Apvienojot 263. zīm. parādītā ķēdē vēl šarnīrus 178 un 67, iegūstam ķēdi ar 4 vienkāršiem un 2 triskārtīgiem šarnīriem: $g_1 = 4$, $g_3 = 2$, tā tad atkal $g = g_1 + 3g_3 = 4 + 3 \cdot 2 = 10$. Šī ķēde raksturīga ar to, ka tai visi locekļi bināri (264. zīm.).



264. zīm.

Vēl viena ķēde ar visiem bināriem locekļiem parādīta 265. zīm. Šeit ir tikai 2 vienkārši un 4 dubultšarnīri: $g_1 = 2$ un $g_2 = 4$, tā tad atkal $g = g_1 + 2g_2 = 2 + 2 \cdot 4 = 10$.



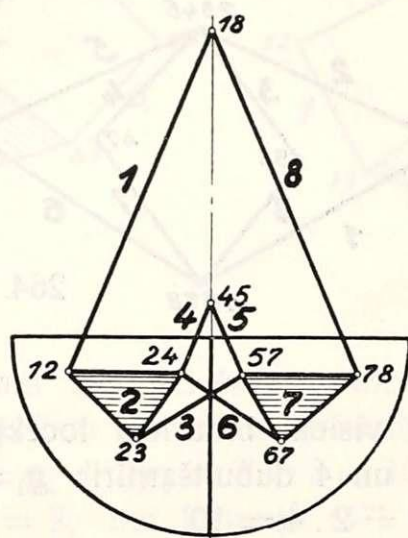
265. zīm.

Dažādu šarnīru skaits visās apskatītās ķēdēs sakopots tabulā:

zīm.	259	260	261	262	263	264	265
g_1	10	8	7	6	5	4	2
g_2	—	1	—	2	1	—	4
g_3	—	—	1	—	1	2	—

31. piemērs. Pašgrābis, kas parādīts 266. zīm., sastāv no 8 locekļiem un satur kā ternārus locekļus, tā arī augstākus šarnīrus: $n_2 = 6$; $n_3 = 2$; $n = 8$. $g_1 = 6$ un $g_2 = 2$; $g = g_1 + 2g_2 = 6 + 2 \cdot 2 = 10$.

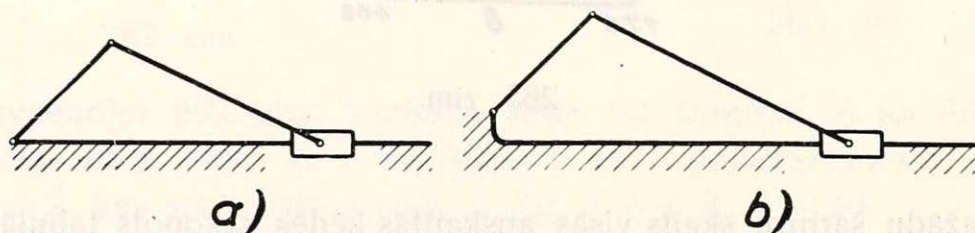
Piespiestas kustības kritērijs $2g - 3n + 4 = 0$ apmierināts: $2 \cdot 10 - 3 \cdot 8 + 4 = 0$, bet formula (47) $2g = 2n_2 + 3n_3$ šeit arī neder.



266. zīm.

§ 95. Noteikumi slīdpāru ievēšanai kinēmatiskās ķēdēs.

Prizmatiskie jeb slīdpāri līdzīgi šarnīriem pieder pie zemākiem pāriem un pielaiž zināmu relatīvu kustību, tamdēļ varētu domāt, ka, aizvietojot kādā ķēdē ar piespiestu kustību šarnīrus ar slīdpāriem, mēs atkal dabūsim ķēdi ar piespiestu kustību.

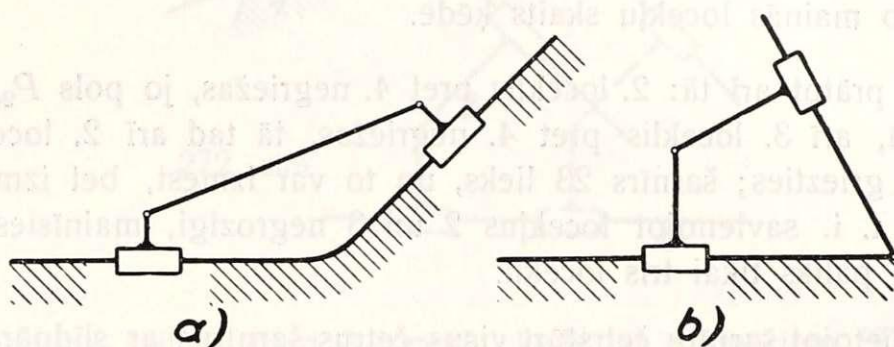


267. zīm.

Iztirzāsim šo jautājumu sīkāk.

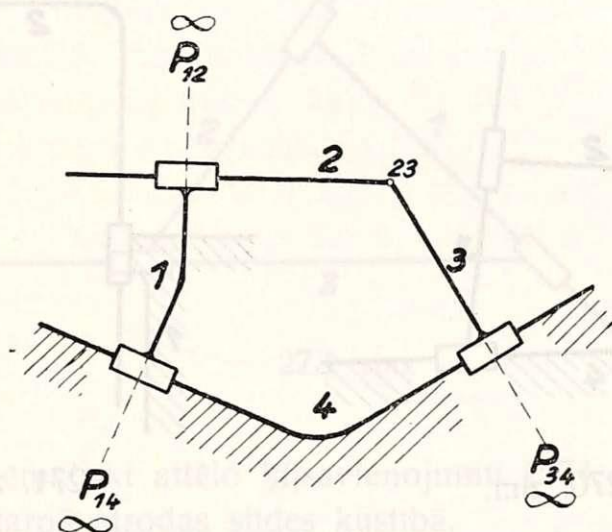
Aizvietojot pamata mēchanismā, šarnīra četrstūrī vienu šarnīru ar slīdpāri, nonākam pie pazīstamā kloķa mēchanisma, ko var izveidot centriski (267a. zīm.) vai arī ekscentriski (267b. zīm.). Šim mēchanismam acīm redzot piemīt piespiesta kustība.

Aizvietojo vēl vienu šarnīru ar slīdpāri, nonākam pie jau pazīstamiem diviem mēchanismiem — četrstūriem ar diviem slīdpāriem, pie kam 268a. zīm. slīdpāri pieguļ vienai malai, bet 268b. zīm. slīdpāri ir pretīnguloši. Šiem mēchanismiem acīm redzot arī piemīt piespiesta kustība, kas nozīmē, ka vienu vai divus šarnīrus var aizvietot ar slīdpāriem, netraucējot piespiesto kustību.



268. zīm.

Iesim vēl tālāk un aizvietosim arī trešo šarnīru ar slīdpāri. Tad 3 poli P_{14} , P_{12} un P_{34} atrodas bezgalībā (269. zīm.).



269. zīm.

Meklēsim citus polus. Lai atrastu polu P_{13} , jāvelk taisnes

$$\begin{vmatrix} 12 & - & 23 \\ 14 & - & 34 \end{vmatrix} \rightarrow 13,$$

bet šis pols iznāk bezgalībā, jo visa taisne 14—34 atrodas bezgalībā.

Pola P_{24} noteikšanai jāvelk taisnes

$$\begin{vmatrix} 12 & - & 14 \\ 23 & - & 34 \end{vmatrix} \rightarrow 24,$$

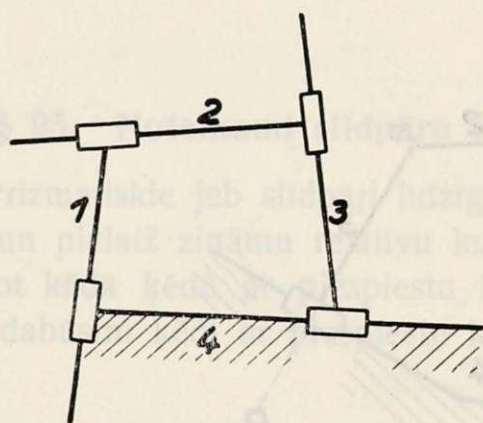
bet arī tas iznāk bezgalībā, jo taisne 12—14 atrodas bezgalībā.

No visiem četrstūriņā $\frac{3n}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$ poliem 5 izrādās bezgalībā, tā
 tad visas $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4$ polu taisnes atrodas bezgalībā un sestajam

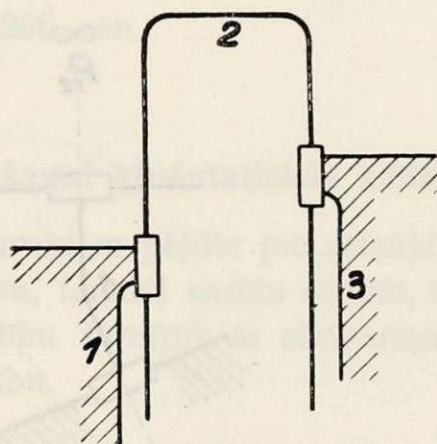
polam arī jābūt bezgalībā. Tas nozīmē, ka griezes ap šarnīru 23 nebūs un pols P_{23} atrodas bezgalībā, bet tad šarnīru 23 var izņemt un līdz ar to mainās locekļu skaits ķēdē.

Var prātot arī tā: 2. loceklis pret 4. negriežas, jo pols P_{24} atrodas bezgalībā, arī 3. loceklis pret 4. negriežas, tā tad arī 2. loceklis pret 3. nevar griezties; šarnīrs 23 lieks, un to var izņemt, bet izņemot šarnīru 23, t. i. savienojot locekļus 2 un 3 negrozīgi, mainīsies locekļu skaits, jo paliks tikai trīs locekļi.

Aizvietojot šarnīru četrstūrī visus četrus šarnīrus ar slīdpāriem, mēs vairs nedabūsim ķēdi ar piespiestu kustību (270. zīm.), jo tad ķēdē var, piemēram, kustināt 2. un 3. locekli, atstājot 4. un 1. mierā.



270. zīm.



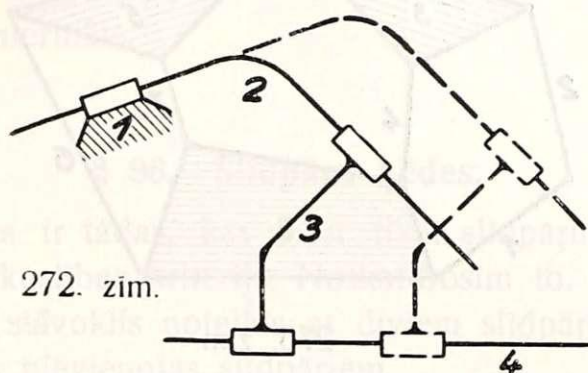
271. zīm.

Kā redzams, aizvietojot šarnīrus ar slīdpāriem, ķēde var zaudēt savu piespiesto kustību.

Tālāk noskaidrosim, kādos apstākļos ķēde paturēs piespiesto kustību, izejot no ierobežojumiem, kādi jāievēro, aizvietojot šarnīrus ar slīdpāriem.

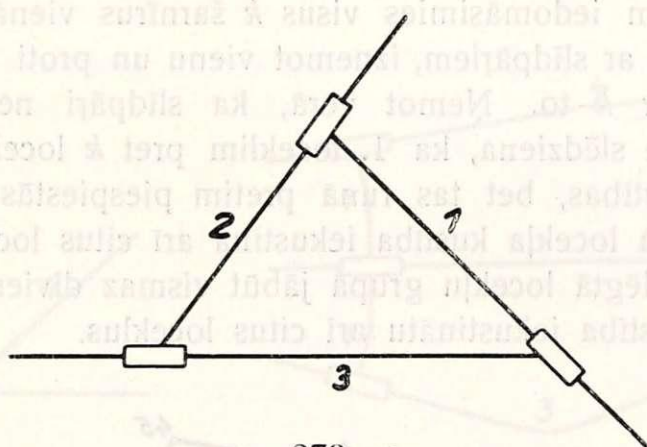
1) ierobežojums. Ja kāds loceklis pievienots ķēdei ar diviem slīdpāriem (271. zīm.), tad slīdes virzieni nedrīkst būt paralēli, jo citādi šo locekli varētu kustināt, neiekustinot citus locekļus.

2) ierobežojums. Divi bināri locekļi ar abiem slīdpāriem nedrīkst kinēmatiskā ķēdē atrasties viens blakus otram, jo, kā redzams 272. zīm., locekļus 2 un 3 var pārbīdīt, atstājot 1. un 4. mierā.



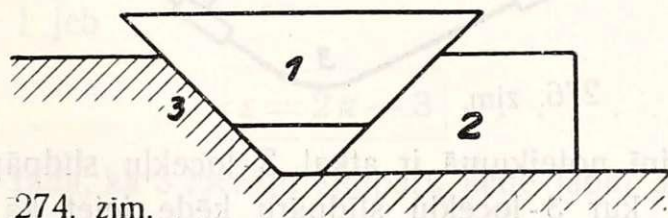
272. zīm.

Izņēmums šeit ir tikai 3 locekļu ķēde ar slīdpāriem (273. zīm.), kurai tomēr piemīt piespiestā kustība.



273. zīm.

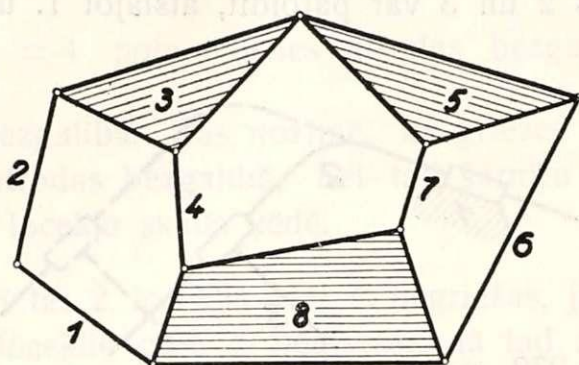
Šī ķēde schēmatiski attēlo ķīļsavienojumu (274. zīm.), jo tanī visi 3 locekļi savā starpā atrodas slīdes kustībā.



274. zīm.

3) ierobežojums. Lai formulētu to pēc iespējas vienkārši, vienosimies atšķirt sarežģītā kinēmatiskā ķēdē slēgtās locekļu gru-

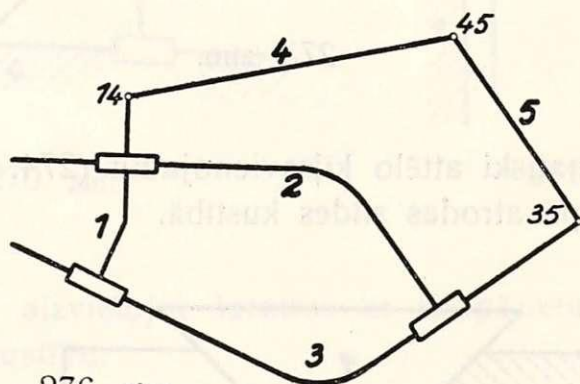
p a s. Tā, piemēram, 275. zīm. parādītā 8-locekļu ķēdē locekļi 12348, 34875, 5687 veido slēgtas locekļu grupas.



275. zīm.

Tagad formulēsim trešo ierobežojumu tā: aizvietojojt kinematiskā šarnīru ķēdē ar piespiestu kustību vienu daļu šarnīru ar slīdpāriem, jāraugās, lai katrā slēgtā locekļu grupā paliktu vismaz divi šarnīri.

Pierādījumam iedomāsimies visus k šarnīrus vienā slēgtā locekļu grupā aizvietotus ar slīdpāriem, izņemot vienu un proti to, kas savieno pirmo locekli ar k -to. Ņemot vērā, ka slīdpāri nepielaiž virziena maiņu, jānāk pie slēdziena, ka 1. loceklim pret k locekli nebūs nekādas relatīvas kustības, bet tas runā pretim piespiestās kustības noteikumam, ka viena locekļa kustība iekustina arī citus locekļus. Tas nozīmē, ka katrā slēgtā locekļu grupā jābūt vismaz diviem šarnīriem, lai katra locekļa kustība iekustinātu arī citus locekļus.



276. zīm.

Izņēmums šinī noteikumā ir atkal 3-locekļu slīdpāru ķēde un visas citas ķēdes, kur 3-locekļu slīdpāru ķēde ieiet kā slēgtā locekļu grupa (276. zīm.).

Šādām ķēdēm piespiestās kustības kritērijs ir cits un proti:

$$2z - 3n + 4 = \gamma,$$

kur γ apzīmē slēgto slīdpāru grupu skaitu un z apzīmē zemāko pāru, t. i. šarnīru un slīdpāru kopskaitu.

276. zīm. parādītā ķēdē $n=5$, $z=6$ un $\gamma=1$, tā tad

$$2 \cdot 6 - 3 \cdot 5 + 4 = 1,$$

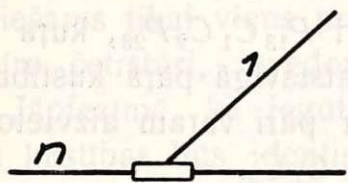
ar ko kritērijs apmierināts.

§ 96. Slīdpāru ķēdes.

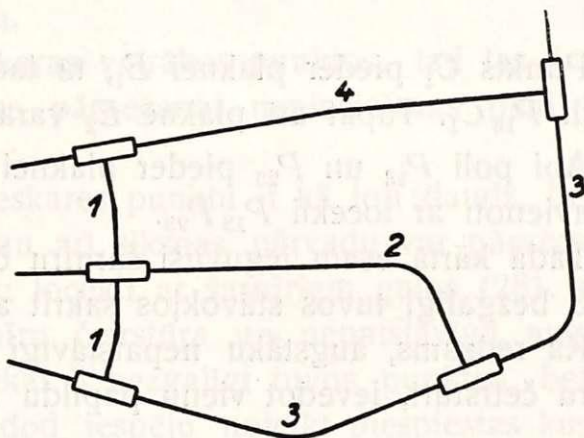
Slīdpāru ķēdes ir tādas, kas satur tikai slīdpārus. Šādām ķēdēm ir cits piespiestās kustības kritērijs. Noskaidrosim to.

Katra locekļa stāvoklis noteikts ar diviem slīdpāru elementiem, ar kuriem šis loceklis pievienojas slīdpāriem.

Iedomāsimies tagad divus locekļus (277. zīm.) vienu nekustīgu n un otru kustīgu 1, savienotus ar slīdpāri, no kuriem 1. loceklis pievienojas pārējos $(n-2)$ locekļus.



277. zīm.



278. zīm.

Katra locekļa piedzišanai vajadzīgi 2 slīdpāri, tā tad slīdpāru skaits, ievērojot, ka viens slīdpāris bija jau starp locekļiem n un 1, iznāk: $s = 2(n-2) + 1$ jeb

$$s = 2n - 3 \quad \dots \dots \dots (51)$$

Šī formula rāda, ka 3 locekļu slīdpāru ķēdē jābūt $s = 2 \cdot 3 - 3 = 3$ slīdpāriem.

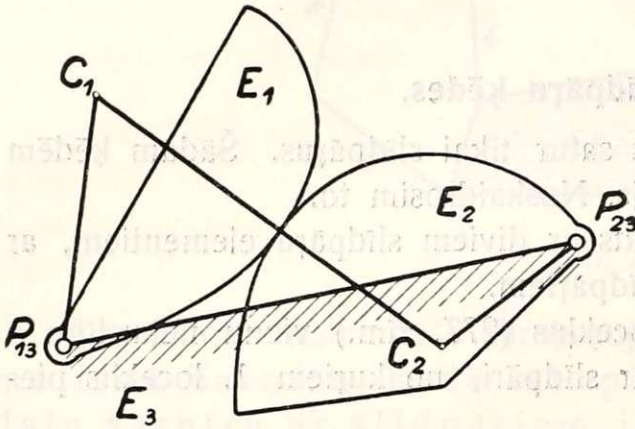
4-locekļu slīdpāru ķēdē jābūt $s = 2 \cdot 4 - 3 = 5$ slīdpāriem.

Šādas ķēdes piemērs parādīts 278. zīm., bet slīdpāru ķēdes lielās pretestības dēļ vispārīgi maz lieto, un tamdēļ tās tālāk arī neapskatīsim.

§ 97. Plakanas ķēdes ar augstākiem pāriem.

Piespiestās kustības kritēriju ķēdēm ar augstākiem pāriem dabūsim, reducējot šos pārus šarnīru ķēdēs, nemainot savstarpējo kustību.

Nepatstāvīgi slēgta augstāka pāra aizvietošana ar šarnīru četrstūri (279. zīm.).



279. zīm.

Šis pāris sastāv no divām plaknēm E_1 un E_2 , kas savstarpīgi pieskaņas, pie kam šīs plaknes attiecībā pret trešo plakni E_3 griežas ap poliem P_{13} un P_{23} .

Atzīmēsim uz pieskares punktā vilktās normāles abu līkņu liekuma centrus C_1 un C_2 , un iedomāsimies tur ievietotos šarnīrus, savienotus ar papildu locekli $C_1 C_2$.

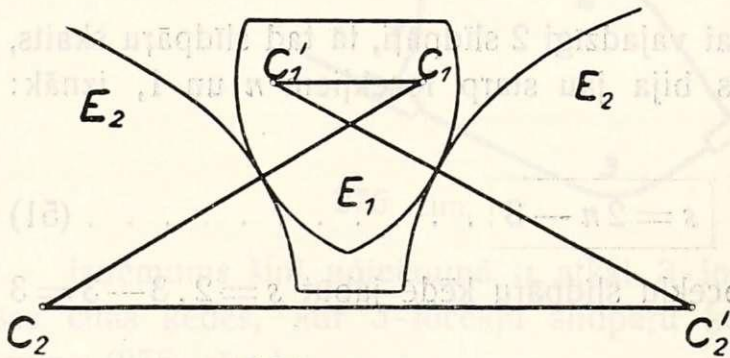
Punkts C_1 pieder plaknei E_1 , tā tad šīnī plaknē varam iedomāties locekli $P_{13} C_1$. Tāpat arī plaknē E_2 varam iedomāties locekli $P_{23} C_2$.

Abi poli P_{13} un P_{23} pieder plaknei E_3 , tamdēļ varam uzskatīt, ka tie savienoti ar locekli $P_{13} P_{23}$.

Tādā kārtā esam ieguvuši šarnīru četrstūri $P_{13} C_1 C_2 P_{23}$, kuŗa kustība 3 bezgalīgi tuvos stāvokļos sakrīt ar nepatstāvīgā pāra kustību.

Kā redzams, augstāku nepatstāvīgi slēgtu pāri varam aizvietot ar šarnīru četrstūri, ievēdot vienu papildu locekli $C_1 C_2$.

Patstāvīgi slēgta augstāka pāra aizvietošana ar šarnīru četrstūri (280. zīm.)



280. zīm.

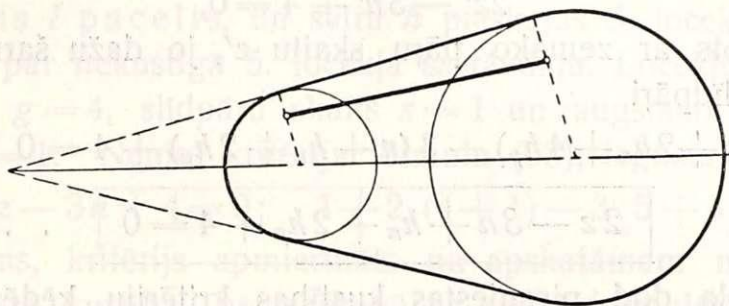
Šeit viena plakne E_1 pieskaņas otrai E_2 divos punktos.

Atzīmēsim uz pieskares punktos vilktām normālēm attiecīgo līkņu liekuma centrus C_1 , C_2 un C_1' , C_2' , kā arī iedomāsimies šos punktus savienotus ar stieņiem $C_1 C_2$ un $C_1' C_2'$, kam galos šarnīri.

Pievienojot šiem locekļiem vēl $C_1 C_1'$, kas pieder plaknei E_1 , un

$C_2 C_2'$, kas pieder plaknei E_2 , nonākam atkal pie šarnīru četrstūra $C_1 C_1' C_2' C_2$, kas dotā momentā var aizvietot augstāku pāri.

Kā redzams, augstāka patstāvīgi slēgta pāra aizvietošanai ar šarnīru četrstūri jāieved divi papildu locekļi.



281. zīm.

Visi zobrati, berzes riteņi un siksnas pārvadi arī nav nekas cits kā nepatstāvīgi slēgti augstāki pāri, jo abu riteņu griezes ass parasti pieder kādam trešajam loceklim.

Ja arī dažreiz zobrati pieskaņas vairākos punktos, tad tas ir tikai zobu veida sekas, bet kustības pārvešanai nepieciešams tikai viens punkts.

Tāpat siksnu pārvados pieskares punktu ir kā ļoti daudz, bet nepieciešams tikai viens punkts, un arī siksnas pārvadu var pārvērst par šarnīru četrstūri, ievēdot vienu locekli ar šarnīriem galos (281. zīm.).

Jāpiezīmē, ka iegūtā šarnīru četrstūra un nepatstāvīgā augstākā pāra kustības būs identiskas tikai 3 bezgalīgi tuvos punktos, bet aizvietošana ar šarnīru četrstūri dod iespēju noteikt piespiestas kustības kritēriju ķēdēm ar augstākiem pāriem, kā arī konstruēt attiecīgiem locekļiem momentānos ātrumus un paātrinājumus.

§ 98. Piespiestās kustības kritērijs ķēdēm ar augstākiem pāriem.

Pieņemsim, ka ķēdē, kas sastāv no n -locekļiem, ir

h_n — nepatstāvīgi slēgto augstāko pāru un

h_p — patstāvīgi " " "

Ievērojot, ka katram nepatstāvīgi slēgtam pārim jāieved viens papildu loceklis un katram patstāvīgi slēgtam pārim divi locekļi, dabūjam, izdarot šādu ievēšanu, jaunu locekļu skaitu

$$n' = n + h_n + 2h_p.$$

Ja tanī pašā ķēdē zemāko pāru skaits bija $z = g + s$, kur g ap-

zīmē šarnīru skaitu un s apzīmē slīdpāru skaitu, tad pēc jaunu locekļu ievēšanas zemāko pāru skaits būs

$$z' = z + 2h_n + 4h_p,$$

jo katrs jaunievedamais loceklis jāpievieno ar diviem šarnīriem.

Šis izteiksmes ieliksīm pazīstamā kritērija formulā (45):

$$2z' - 3n' + 4 = 0,$$

kur g aizvietots ar zemāko pāru skaitu z' , jo dažu šarnīru vietā var gadīties arī slīdpāri

$$2(z + 2h_n + 4h_p) - 3(n + h_n + 2h_p) + 4 = 0 \text{ jeb}$$

$$\boxed{2z - 3n + h_n + 2h_p + 4 = 0} \dots \dots \dots (52)$$

Šī formula dod piespiestas kustības kritēriju ķēdēm ar augstākiem pāriem, bet to vēl var vienkāršot, ievēdot apzīmējumu $h_n + 2h_p = h$

$$\boxed{h + 2z - 3n + 4 = 0} \dots \dots \dots (53),$$

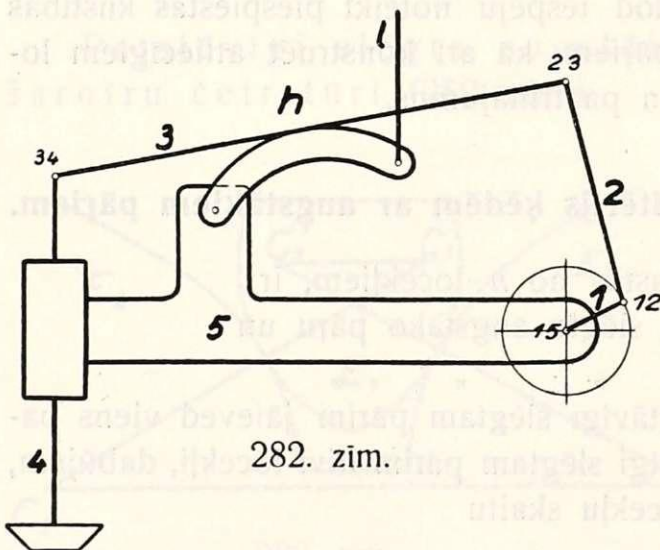
kur h apzīmē augstāko pāru skaitu, bet patstāvīgi slēgtos pārus pie tam jāskaita divreiz.

Piezīmes. 1) Ķēdēs ar augstākiem pāriem un piespiestu kustību locekļu skaits n var būt arī nepārskaitlis.

2) Maksimālais elementu skaits vienam loceklim tādā ķēdē ir

$$\max i = \frac{n + h}{2}.$$

3) Minimālais elementu skaits loceklim, kas pieder augstākam pārim, $\min i = 3$, jo citādi šim loceklim nebūs piespiestas kustības.



32. piemērs. Slīdsviras tvaikdaļa mēchanisms (282. zīm.).

Izpētīsim, vai šim mēchanismam piemīt piespiesta kustība. Mēchanismu pie-dzen ekscentrs punktā 15, ko vienkāršības dēļ aizvieto-jam ar kloķi 1.

Mēchanismā ir četri šarnīri: 15, 12, 23, 34, viens slīdpāris 45 un viens augstāks pāris h , kuŗu pēc va-

jadzības var izslēgt, nolaižot stieni l . Sakarā ar to izšķīrsim divus gadī-jumus.

1) Stienis l nolaists, un svira h nepieskaņas 3. loceklim. Mēchanisms reprezentē šarnīru piecstūri, un 1. locekļa kustība pāriet tikai uz 2. un 3. locekli, bet šarnīrs 34, kā arī 4. loceklis pret 5. paliek mierā, jo šarnīru piecstūrim nav piespiestas kustības. Šāds stāvoklis vajadzīgs tvaika izplešanās un izplūdes laikā.

2) Stienis l pacelts, un svira h pieskaņas 3. loceklim. Svira h uzskatām tad par nekustīgā 5. locekļa sastāvdaļu. Locekļu skaits $n=5$, šarnīru skaits $g=4$, slīdpāru skaits $s=1$ un augstāko nepatstāvīgo pāru skaits $h=1$. Ņemot kritērija formulu (53), iegūstam

$$h + 2z - 3n + 4 = 0; \quad 1 + 2(4 + 1) - 3 \cdot 5 + 4 = 0.$$

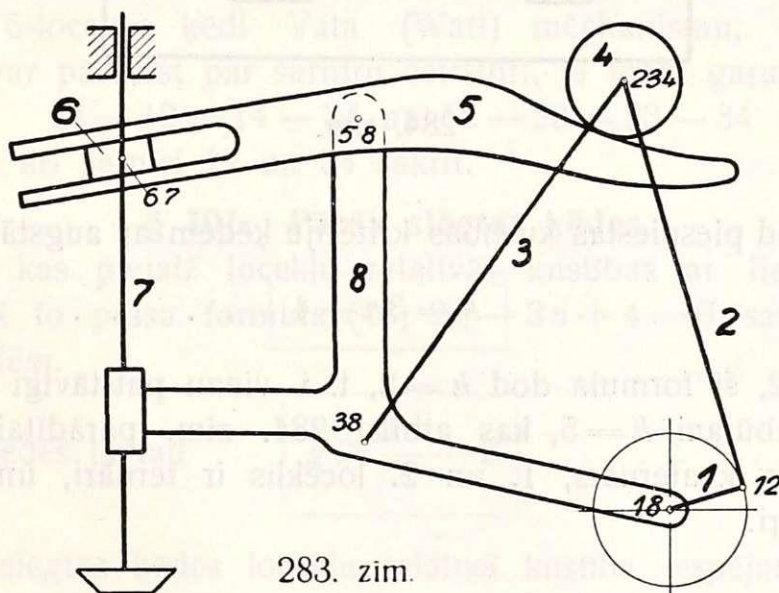
Kā redzams, kritērijs apmierināts un apskatāmajam mēchanismam piemīt piespiesta kustība, bet saskaņā ar augšā formulētām piezīmēm $n=5$ ir nepārskaitlis,

$$\max i = \frac{n + h}{2} = \frac{5 + 1}{2} = 3 \text{ un } \min i = 3.$$

Nosaukums slīdsviras tvaikdalis izskaidrojams ar to, ka 3. locekli var uzskatīt par sviru, kas darbības laikā veļas un slīd uz nekustīgās līknes, pēc kuņas izveidots h .

33. piemērs. Prōlla-Švābes tvaikdaļa mēchanisms.

Mēchanismu piedzen ekscentrs punktā 18, ko vienkāršības dēļ aizvietojam ar kloķi. Viena mēchanisma sastāvdaļa ir ritenis 4, kas veļas



uz sviras 5. Riteņa ass sakrīt ar šarnīru 23, tā tad šinī punktā ir dubultšarnīrs, bet locekļi 4 un 5 savienoti ar patstāvīgi slēgtu augstāku pāri.

Locekļu skaits mēchanismā $n = 8$. Vienkārši šarnīri: 18, 12, 38, 58, 67 tā tad $g_1 = 5$. Dubultšarnīrs viens: 234, tā tad $g_2 = 1$. Šarnīru skaits: $g = g_1 + 2g_2 = 5 + 2 = 7$. Slīdpāri ir 65 un 78, tā tad $s = 2$. Zemāko pāru skaits $z = g + s = 7 + 2 = 9$, bet $h = 2h_p = 2$, jo augstākais pāris ir patstāvīgi slēgts.

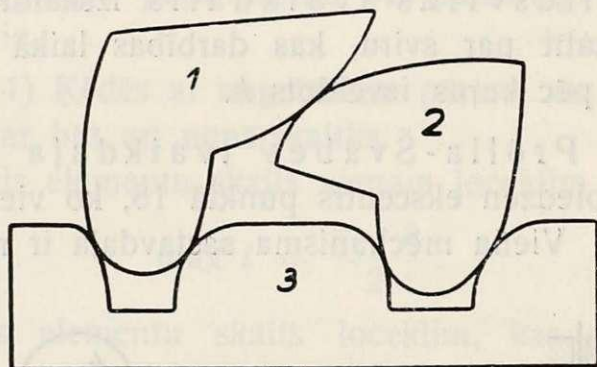
Kritērija formula (53) $h + 2z - 3n + 4 = 0$ šinī gadījumā dod $2 + 2 \cdot 9 - 3 \cdot 8 + 4 = 0$. Kā redzams, kritērijs apmierināts, un mēchanismam piemīt piespiesta kustība.

Svira 5 izveidota tā, lai tvaika izplešanās laikā ritenis 4 tikai veļas uz 5. locekļa, bet nekustinātu to, tad arī 6. un 7. loceklis paliek mierā un mēchanisms reducējas par šarnīru četrstūri 1238.

§ 99. Augstāko pāru ķēdes.

Ja ķēde satur tikai augstākus pārus, tad formula (53)

$$h + 2z - 3n + 4 = 0$$



284. zīm.

pie $z = 0$ dod piespiestas kustības kritēriju ķēdēm ar augstākiem pāriem

$$h = 3n - 4 \quad \dots \dots \dots (54)$$

Ja $n = 2$, šī formula dod $h = 2$, t. i. vienu patstāvīgi slēgtu pāri. Ja $n = 3$, dabūjam $h = 5$, kas atbilst 284. zīm. parādītai ķēdei, kur 3. loceklis ir kvaternārs, 1. un 2. loceklis ir ternāri, un ķēdē ir 5 augstākie pāri.

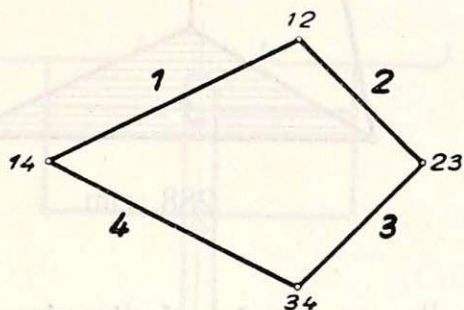
§ 100. Ķēdes ar mainīgu locekļu skaitu.

Agrāk jau bija noskaidrots, ka kinēmatiskās ķēdēs ar augstākiem pāriem var mainīties locekļu skaits atkarībā no tā, vai augstākā pāri notiek pieskaršanās, vai ne.

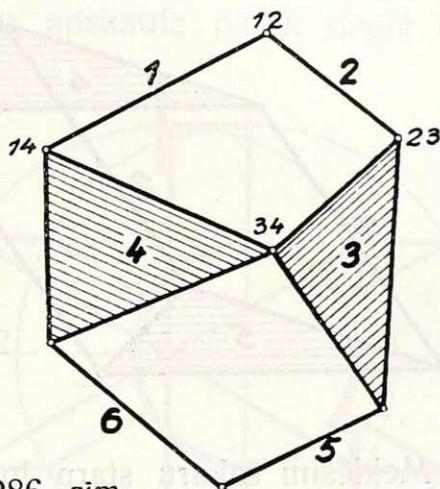
Bez tam vēl sastopamas citas ķēdes, kuŗām ar savu specifisko veidu piemīt īpašība mainīt locekļu skaitu.

Pie šādām ķēdēm pieder tā sauktais Galoveja (Galloway) mēchanisms, kas sastāv no šarnīru četrstūŗa ar ik pa divi vienāda gaŗuma malām: $1 = 4$ un $2 = 3$.

Ja nu gadās, ka šarnīri 12 un 34 zināmā momentā sakrīt, tad arī locekļi 1 un 4 sakrīt un tālāk var kustēties kopā kā viens.



285. zīm.



286. zīm.

Tas pats attiecas arī uz locekļiem 2 un 3.

Tādā kārtā, kamēr šarnīri 12 un 34 sakrīt, ķēdē paliek tikai divi locekļi četrū vietā.

Tāpat 6-locekļu ķēdi Vata (Watt) mēchanismu, kas parādīts 286. zīm., var pārvērst par šarnīru četrstūŗi, ja malu gaŗumi

$$14 - 12 = 14 - 34 \text{ un } 12 - 23 = 23 - 34$$

un bez tam arī šarnīri 12 un 34 sakrīt.

§ 101. Pārāk slēgtās ķēdes.

Ķēdes, kas pielaiž locekļu relatīvās kustības ar lielāku šarnīru skaitu, nekā to prasa formula (45) $2g - 3n + 4 = 0$, sauc par pārāk slēgtām ķēdēm.

Šinīs ķēdēs tā tad

$$g > \frac{3n}{2} - 2 \quad \dots \dots \dots (55)$$

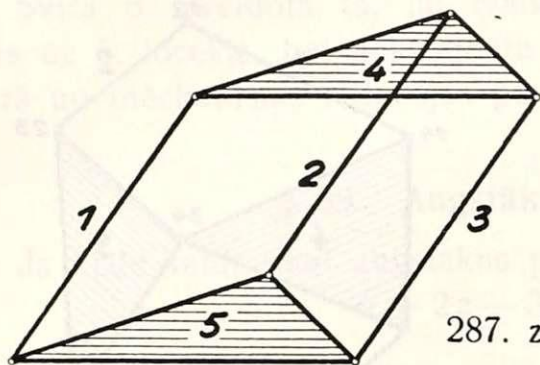
Pārāk slēgtās ķēdēs locekļu relatīvā kustība iespējama tikai tad, ja zināmiem locekļiem noteiktas dimensijas. Mainot locekļu dimensijas, dabūjam no pārāk slēgtās ķēdes negrozāmu sistēmu.

Šādas ķēdes piemērs ir tā sauktā trijparallēlkloķu ķēde (287. zīm.), kas raksturīga ar to, ka locekļi 1, 2 un 3 ir vienādā gaŗumā un savstarpīgi paralēli.

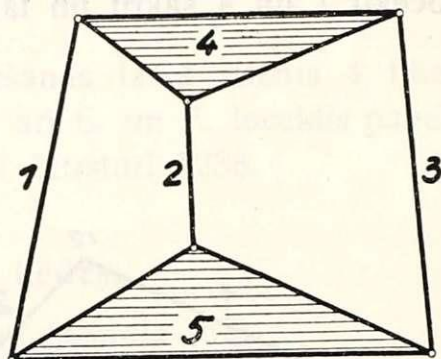
Locekļu skaits šinī ķēdē $n=5$, bet šarnīru skaits $g=6$, tā tad

$$\frac{3n}{2} - 2 = \frac{3 \cdot 5}{2} - 2 = 5,5 \text{ un } g > \frac{3n}{2} - 2.$$

Mainot tanī pašā ķēdā locekļu 1, 2 vai 3 gaļumus vai virzienus, dabūjam negrozāmu sistēmu (288. zīm.).



287. zīm.



288. zīm.

Meklēsim sakaru starp locekļu skaitu un šarnīru skaitu, ja pārāk slēgtā ķēdē ir lieki locekļi.

Viens lieks loceklis prasa divus liekus šarnīrus

$$\begin{array}{l} n_1 = n + 1 \\ g_1 = g + 2 \end{array} \left| \begin{array}{l} n = n_1 - 1 \\ g = g_1 - 2 \end{array} \right. \text{ieliksim šīs vērtības formulā} \\ g = \frac{3n}{2} - 2, \text{ tad } g_1 - 2 = \frac{3}{2}(n_1 - 1) - 2$$

$$\text{jeb } g_1 = \frac{3n_1}{2} - \frac{3}{2} \dots \dots \dots (55a)$$

Divi lieki locekļi prasa četrus liekus šarnīrus

$$\begin{array}{l} n_2 = n + 2 \\ g_2 = g + 4 \end{array} \left| \begin{array}{l} n = n_2 - 2 \\ g = g_2 - 4 \end{array} \right. \text{ieliksim šīs vērtības formulā} \\ g = \frac{3n}{2} - 2, \text{ tad } g_2 - 4 = \frac{3}{2}(n_2 - 2) - 2$$

$$\text{jeb } g_2 = \frac{3n_2}{2} - 1 \dots \dots \dots (55b)$$

Kā redzams, iegūtās formulas (55a) un (55b) atšķiras no pamatformulas (44) tikai ar brīvo locekli, pie kam vienam liekam loceklim ķēdē atbilst nolīdzinājumā brīvais loceklis: $-\frac{3}{2}$, bet diviem liekiem locekļiem ķēdē atbilst brīvais loceklis nolīdzinājumā: -1 .

No līdzīgiem trijstūriem seko proporcija

$$\frac{od}{oD} = \frac{bd}{BD} = \frac{ob}{oB}.$$

Šī proporcija paliek spēkā, arī pantografam kustoties, bet attiecības

$$\frac{od}{oD} = \frac{bd}{BD} = k$$

ir konst. un kustības laikā nemainās, tā tad arī attiecība

$$\frac{ob}{oB} = k,$$

un ja ar punktu b apvilksim kādu figūru, tad punkts B aprakstīs līdzīgu figūru.

To pašu var teikt arī attiecībā uz punktiem B_1' un B_2' , kas atrodas uz pantografa ass. Šie punkti arī aprakstīs līdzīgas figūras, tikai ar citiem koeficientiem

$$\frac{od}{oD_1} = \frac{ob}{oB_1'} = k_1 \quad \text{un} \quad \frac{od}{oD_2} = \frac{ob}{oB_2'} = k_2.$$

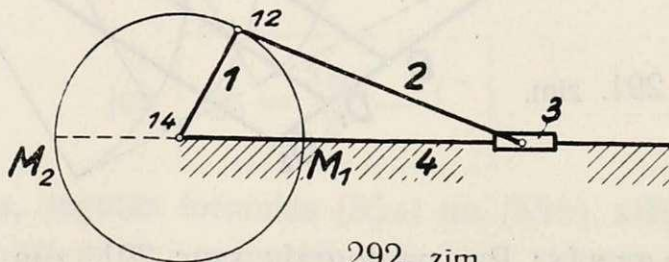
Pārbaudīsim 291. zīm. parādīto pantografu pēc kritērija formulām (55). Locekļu skaits $n = 8$, šarnīru skaits $g = 11$, tā tad nolīdzinājumā (55) brīvais loceklis

$$x = g - \frac{3n}{2} = 11 - \frac{3 \cdot 8}{2} = -1.$$

Šāds rezultāts atbilst formulai (55b) un nozīmē, ka ķēdē ir divi lieki locekļi.

§ 102. Nepatstāvīgas ķēdes ar miera un maiņas punktiem.

Par nepatstāvīgu ķēdi sauksim tādu, kuŗā kāds loceklis var apstāties vai mainīt kustības virzienu neatkarīgi no tā locekļa, kas piedzen mēchanismu.



292. zīm.

Ķēdi, kas patstāvīgi atrodas noteiktā kustībā, kamēr to piedzen, sauc par patstāvīgu ķēdi.

Viena un tā pati ķēde var būt patstāvīga vai nepatstāvīga atkarībā no tā, kāds loceklis to piedzen.

Ņemsim parasto kloķa mēchanismu (292. zīm.).

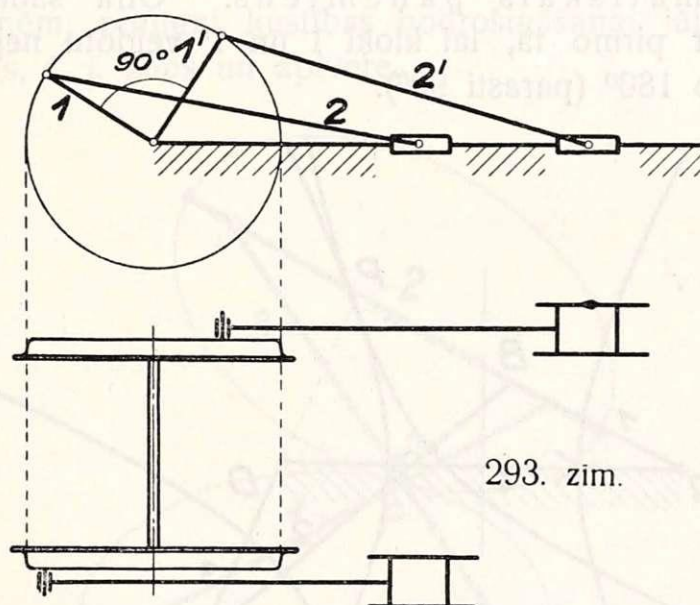
Ja nostādām to uz 4. locekļa un piedzenam 1. locekli, kas notiek sūkņos, ēvelmašīnās, štancēs un taml., tad ķēde ir patstāvīga.

Turpretim nostādot mēchanismu uz tā paša 4. locekļa un piedzenot 3. locekli, kas notiek tvaikmašīnās, iekšdegu motoros un taml., dabūjam nepatstāvīgu ķēdi, jo tai punktos M_1 un M_2 ir miera punkti, no kuriem šarnīrs 12 nevar noiet bez ārējās palīdzības.

Jāatzīmē, ka tanīs pašos punktos var mainīties arī 1. locekļa griezes kustības virziens, tā tad tur būs arī tā sauktie maiņas punkti.

Lai nodrošinātu nepatstāvīgās ķēdes kustību, var lietot dažādus paņēmienus, kā dinamiskus, tā arī kinēmatiskus:

1) **Dinamiskais paņēmieniens:** Uz griezes ass 14 piestiprina smagu spara ratu, kuŗa kinētiskā enerģija pārved 1. locekli caur minētiem punktiem. Šādu paņēmienu lieto tvaikmašīnās un iekšdegu motoros.



2) **Kinēmatiskais paņēmieniens:** Divus šādus mēchanismus savieno negrozīgi vienu ar otru tā, lai tiem miera punkti nesakristu.

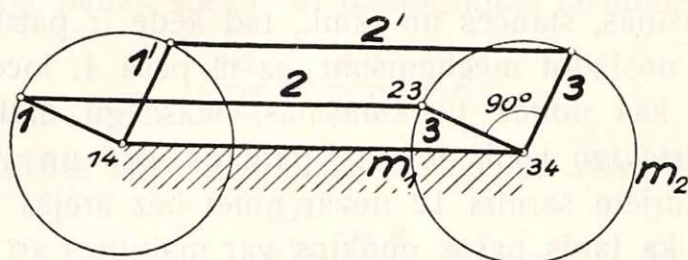
Parasti abu mēchanismu kloķi 1 un 1' veido savā starpā $\angle 90^\circ$ (293. zīm.).

Šo paņēmienu lieto lokomotīvēs.

Nepatstāvīgās ķēdes ar maiņas punktiem.

Dažās nepatstāvīgās ķēdēs miera punktu nav, bet paliek maiņas punkti.

Ņemsim, piemēram, šarnīru parallēlogramu (294. zīm.), ko piedzen kloķis 1, kas griežas ap punktu 14. Kloķis 3 parasti tad griežas līdzī tanī pašā virzienā, bet ja šarnīrs 23 nonāks punktā m_1 vai m_2 , tad

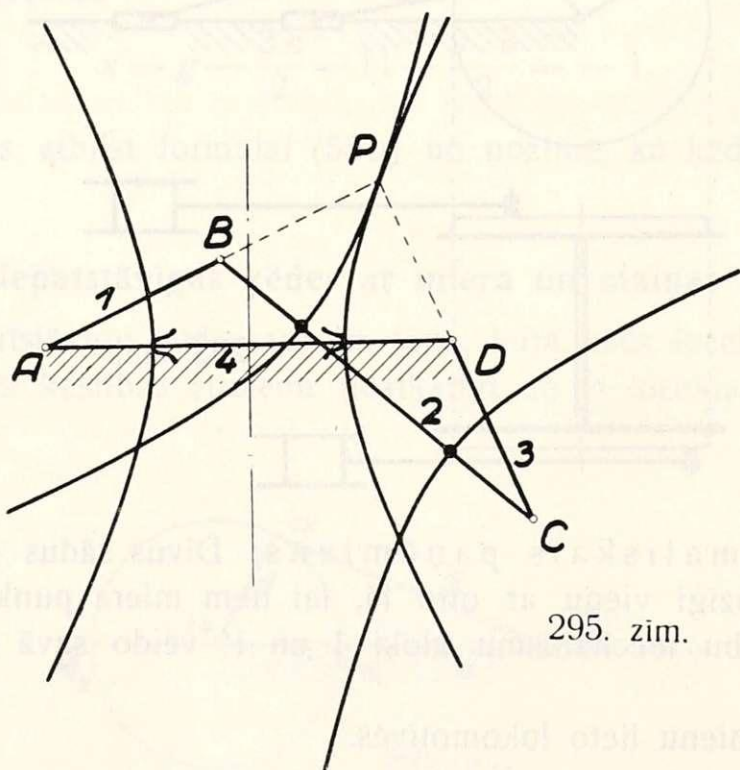


294. zīm.

kloķa 3 griezes virziens var mainīties. Šāda parādība mašīnās nav vēlama, un tās novēršanai var lietot tos pašus paņēmienus, kādus lieto mēchanismu pārvešanai pāri miera punktiem.

1) Dinamiskais paņēmieni. Smaga spara rata piestiprināšana uz ass 34, kuŗa kinētiskā enerģija nepielaiž kloķa 3 griezes virziena maiņu.

2) Kinēmatiskais paņēmieni. Otra šāda mēchanisma savienošana ar pirmo tā, lai kloķi 1 un 1' veidotu negrozāmu leņķi, kas atšķīras no 180° (parasti 90°).



295. zīm.

3) Relò (Reuleaux) paņēmieni: Šis paņēmieni arī pieder pie kinēmatiskiem, bet tam ir vairāk teōrētiska nozīme nekā praktiska, jo tas lietojams tikai tad, ja spēki, kas darbojas mēchanismā, nav lieli.

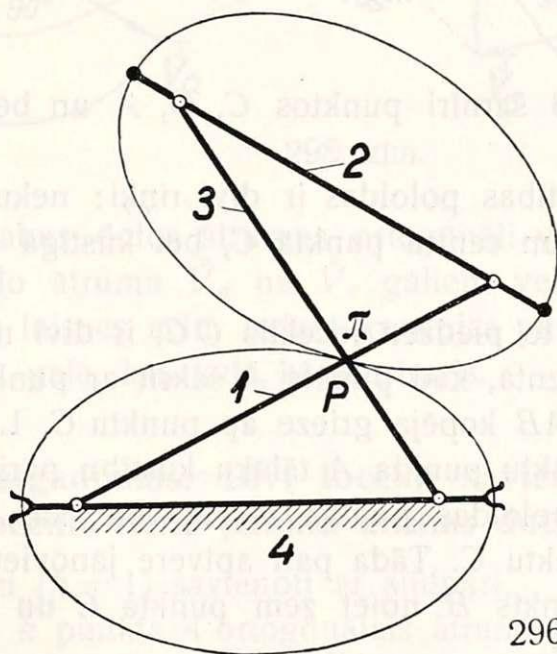
Lai iepazītos ar šo paņēmieni, ņemsim antiparallēlogramu $ABCD$, kas nostādīts uz lielākas malas AD , pie kam $AD = BC = 2c$ un $AB = CD = 2a$.

Poloidas malas BC kustībai, kā zināms no 4. piemēra, ir divas vienādas hiperbolas, kas savstarpīgi pieskaņas punktā P (295. zīm.).

Ja kloķis AB , griežoties ap punktu A , piedzen zināmā virzienā mēchanismu, tad kloķis CD griežas pretējā virzienā, bet tanī momentā, kad poloidas pieskaņas ar savām virsotnēm, un visas antiparallēlograma malas sakrīt, kloķis CD varētu sākt griezties tanī pašā virzienā kā kloķis AB . Lai kloķa CD griezes virziena maiņa nevarētu notikt, Relò (Reuleaux) lika priekšā locekļiem BC un AD poloidu pieskares punktus ievietot zobu un aptveri, kuŗā zobs iekļautos tanī momentā, kad punkts B nonāks uz AD . Mala BC tad darbojas kā svira ar atbalstu punktu aptverē un piespiež punktus B un C griezties pretējos virzienos.

Ievietotais zobs un aptvere reprezentē augstāku pāri, un tamdēļ šo paņēmieni sauc arī par ķēdes slēgšanu ar augstāku pāri.

Ievērojot, ka kloķa CD kustības virziena maiņa viena apgrieziena laikā var notikt vēl vienā stāvoklī, kad pieskaņas citi hiperbolu zari ar savām virsotnēm, pilnīgai kustības nodrošināšanai jāievieto vēl viens augstāks pāris, t. i. zobs un aptvere.



296. zīm.

Jāatzīmē, ka smagās mašīnās šāds paņēmieni nepraktisks, jo tas lietojams tikai nelieliem spēkiem.

To pašu paņēmieni, t. i. slēgšanu ar augstāku pāri var izlietot arī antiparallēlogramā, kas nostādīts uz īsākas malas. Šādā gadījumā 2. locekļa kustībai poloidas ir divas vienādas ellīpses (296. zīm.). Kloķi

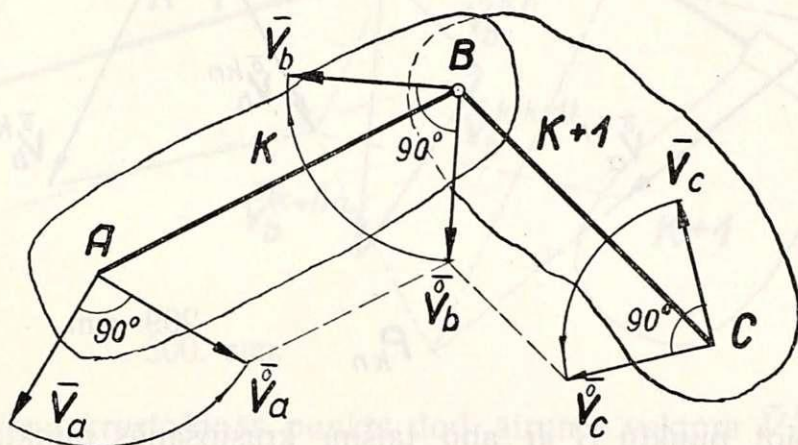
XII nodaļa.

Vispārīgās metodes ātrumu konstrukcijai n -plakņu kinēmatiskās ķēdēs.

Ātrumu konstrukciju metodu noskaidrošanai apskatīsim vairākus pamatgadījumus.

§ 103. I pamatgadījums. Divi locekļi savienoti ar šarnīru un katrā loceklī viena punkta ātrums dots (298. zīm.).

Locekļi k un $(k+1)$ savienoti ar šarnīru punktā B .
Doti punkta A ātrums \vec{V}_a un punkta C ātrums \vec{V}_c .
Jākonstruē punkta B ātrums \vec{V}_b .



298. zīm.

Pagriezām abus dotos ātrumus ortogonāli vienā virzienā un caur iegūto ortogonālo ātrumu \vec{V}_a un \vec{V}_c galiem velkam taisnes paralēli AB un CB . Šīs taisnes acīm redzot krustojas punkta B ortogonālā ātruma vektora \vec{V}_b galā, kas tādā kārtā atrasts.

§ 104. II pamatgadījums. Divi locekļi savienoti ar slīdpāri un katrā loceklī viena punkta ātrums dots (299. zīm.).

Locekļi k un $(k+1)$ savienoti ar slīdpāri.

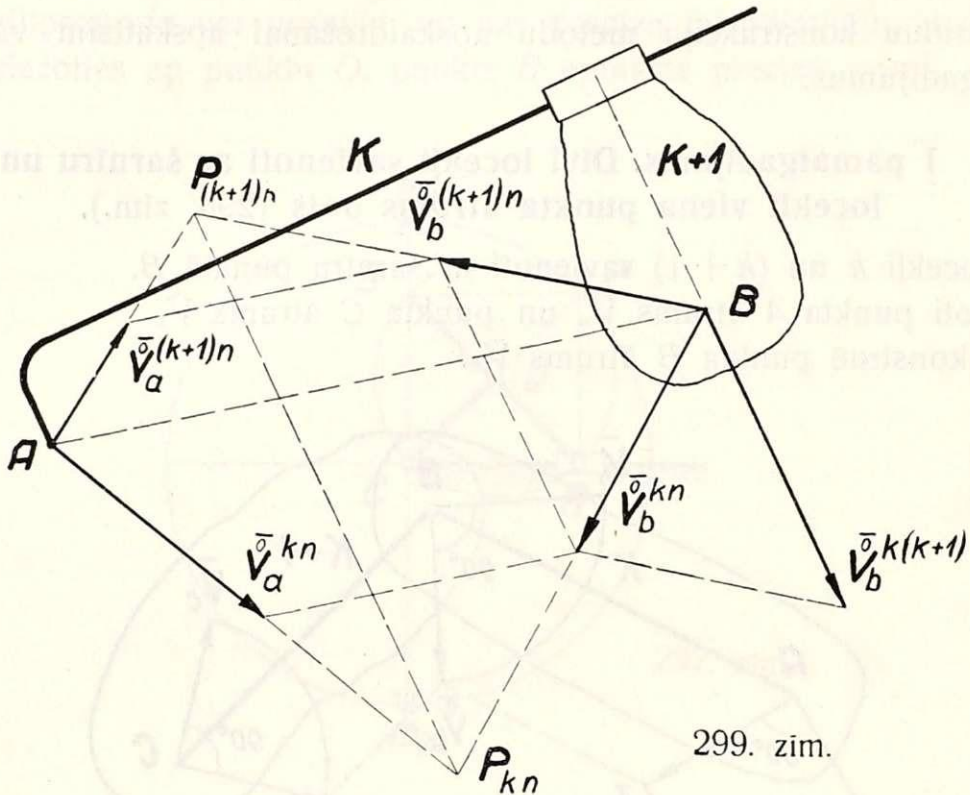
Doti plaknē k punkta A ortogonālais ātrums \vec{V}_a^{kn} un plaknē $(k+1)$ punkta B ortogonālais ātrums $\vec{V}_b^{(k+1)n}$ kustībā pret nekustīgo plakni n .

Jākonstruē ortogonālais slīdes ātrums $\vec{V}^{k(k+1)}$, abi poli P_{kn} un $P_{(k+1)n}$ un ortogonālie ātrumi $\vec{V}_a^{(k+1)n}$, \vec{V}_b^{kn} .

Izlietosim sakaru starp ātrumiem

$$\vec{V}_b^{kn} = \vec{V}_b^{k(k+1)} + \vec{V}_b^{(k+1)n}.$$

Caur \vec{V}_a^{kn} galu velkam taisni paralēli AB virzienam. Uz šīs taisnes atrodas arī \vec{V}_b^{kn} gals. Ievērojot, ka ortogonālais slīdes ātrums iet perpendikulāri slīdes virzienam, velkam šinī virzienā otru taisni caur vektora $\vec{V}_b^{(k+1)n}$ galu.



299. zīm.

Savienojot punktu B ar abu taisņu krustošanās punktu, atrodam \vec{V}_b^{kn} un līdz ar to arī poligōnu, kas atbilst uzstādītam nolīdzinājumam. Poligōna mala, kas iet perpendikulāri slīdes virzienam, reprezentē meklējamo slīdes ātrumu $\vec{V}^{k(k+1)n}$, kas 299. zīm. pārnests uz punktu B .

Turpinot ātrumus \vec{V}_a^{kn} un \vec{V}_b^{kn} līdz krustošanai, atrodam polu P_{kn} . Polu taisne diviem apskatāmiem locekļiem iet perpendikulāri slīdes virzienam, jo relatīvais pols $P_{k(k+1)}$ atrodas bezgalībā. Velkot doto ātrumu $\vec{V}_b^{(k+1)n}$ līdz krustošanai ar šo taisni, atrodam arī polu $P_{(k+1)n}$. Beidzot savienojam šo polu ar punktu A un atrodam parastā kārtā arī punkta A ātrumu $\vec{V}_a^{(k+1)n}$.

§ 105. III pamatgadījums. Divi locekļi savienoti ar šarnīru, bet vienam no tiem ir slīdpāris (300. zīm.).

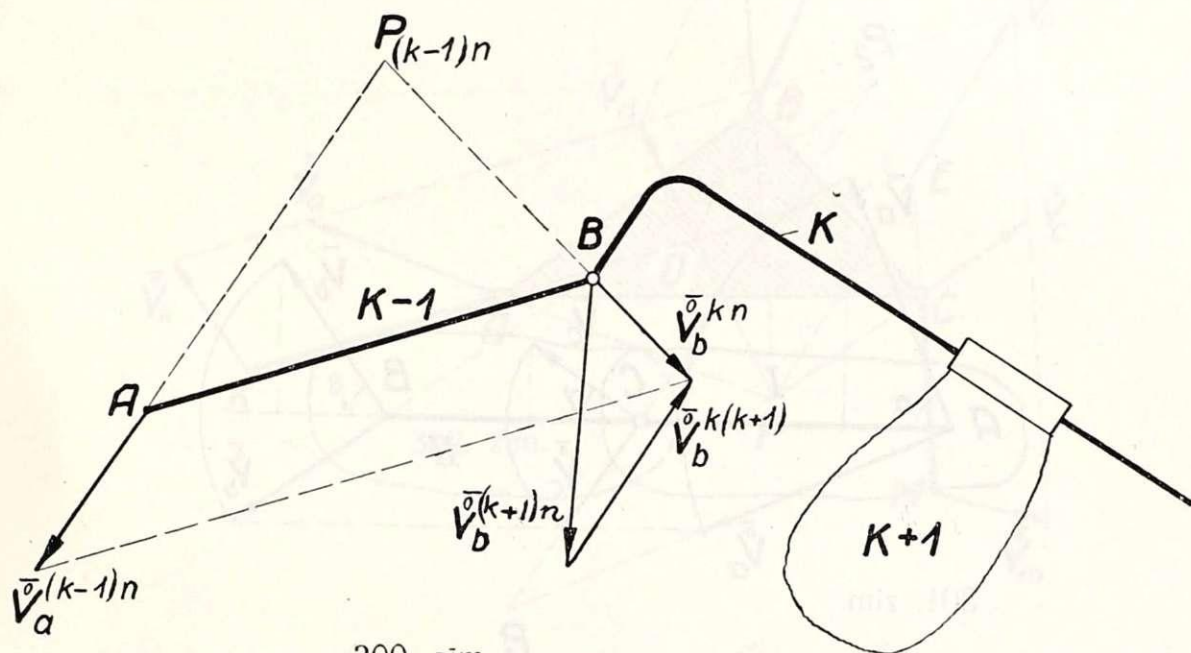
Locekļi $(k-1)$ un k savienoti ar šarnīru B , bet starp locekļiem k un $(k+1)$ ir slīdpāris. Doti: punkta A ātrums $\vec{V}_a^{(k-1)n}$ un punkta B ātrums $\vec{V}_b^{(k+1)n}$, kā plaknes $(k+1)$ punkta, kustībā pret nekustīgo plakni n .

Jākonstruē slīdes ātrums $\vec{V}^{k(k+1)}$.

Arī šeit izlietojam sakaru starp ortogonāliem ātrumiem

$$\vec{V}_b^{kn} = \vec{V}_b^{k(k+1)} + \vec{V}_b^{(k+1)n}.$$

Ievērojot, ka $\vec{V}_b^{kn} = \vec{V}_b^{(k-1)n}$, ātruma \vec{V}_b^{kn} gals atrodas uz taisnes, kas vilkta caur $\vec{V}_a^{(k-1)n}$ galu paralēli AB . No otras puses velkam caur $\vec{V}_b^{(k+1)n}$ galu taisni perpendikulāri slīdes virzienam, jo šādā virzienā iet ortogonālais slīdes ātrums.



300. zīm.

Abu taisņu krustošanās punkts dod ātruma vektora \vec{V}_b^{kn} galu, bet iegūtā poligona trešā mala dod meklējamo ortogonālo slīdes ātrumu $\vec{V}_b^{k(k+1)}$.

Turpinot $\vec{V}_a^{(k-1)n}$ un $\vec{V}_b^{(k-1)n} = \vec{V}_b^{kn}$ līdz krustošanai, atrodam locekļa $(k-1)$ polu $P_{(k-1)n}$.

§ 106. IV pamatgadījums. Ātrumu konstrukcija kinēmatiskas ķēdes loceklim ABC , kas savienots šarnīriem ar trīs citiem AK , BL un CM (302. zīm.).

Doti punktu K , L un M ātrumi \vec{V}_k , \vec{V}_l , un \vec{V}_m .

Jākonstruē punktu A , B un C ātrumi \vec{V}_a , \vec{V}_b un \vec{V}_c .

Šinī jautājumā lietojam autora konstrukcijas paņēmieni^{33, 34, 35}, kas

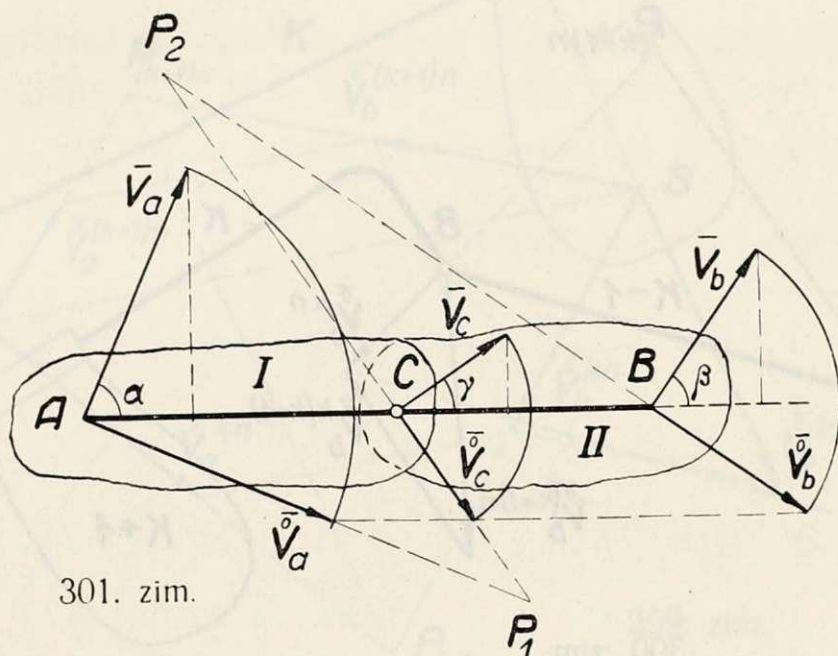
³³ *N. Rozenauers*: Jauns paņēmieni ātrumu konstrukcijai sarežģītās kinēmatiskās ķēdēs. L. Ū. R. Mēch. fak. serija. TI № 14. 1936.

³⁴ *N. Rosenauer*: Ein direktes Verfahren zur Geschwindigkeitskonstruktion kinematischer Ketten. Schweiz. Bauzeitung. Bd. 106 № 26. 1935.

³⁵ *N. Rosenauer*: Über die Geschwindigkeitskonstruktion kinematischer Ketten. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. Bd. 17 Heft 3. 1937.

dibināts uz pazīstamās teorēmas: „komplāni kustošās taisnes dažādu punktu ātrumu projekcijas uz taisnes virzienā ir vienādas“ paplašinājuma tādā ziņā, ka taisne var iet caur šarnīru, kas savieno divas plaknes, bet teorēma paliek spēkā neatkarīgi no tā, vai punkti pieder vienai vai otrai plaknei.

Pierādījums: Ņemsim divas plaknes I un II (301. zīm.), kas savienotas ar šarnīru C.



301. zīm.

Vilksim taisni AB caur šo punktu un apskatīsim trīs punktus: A , kas pieder I plaknei, B , kas pieder II plaknei un šarnīru C , kas pieder abām plaknēm.

Izlietojot minēto teorēmu, taisnes daļai AC varam rakstīt $V_a \cos \alpha = V_c \cos \gamma$. Tāpat daļai BC dabūjam $V_b \cos \beta = V_c \cos \gamma$, no kurienes seko $V_a \cos \alpha = V_b \cos \beta$.

Piezīme. Kas attiecas uz to pašu punktu ortogonāliem ātrumiem, tad jāatzīmē, ka to vektoru \vec{V}_a , \vec{V}_b un \vec{V}_c gali atrodas uz taisnes, kas iet paralēli AB . Bez tam abu plakņu momentānie poli P_1 un P_2 atrodas uz vienas taisnes ar šarnīru C , kas ir šo plakņu relatīvais pols.

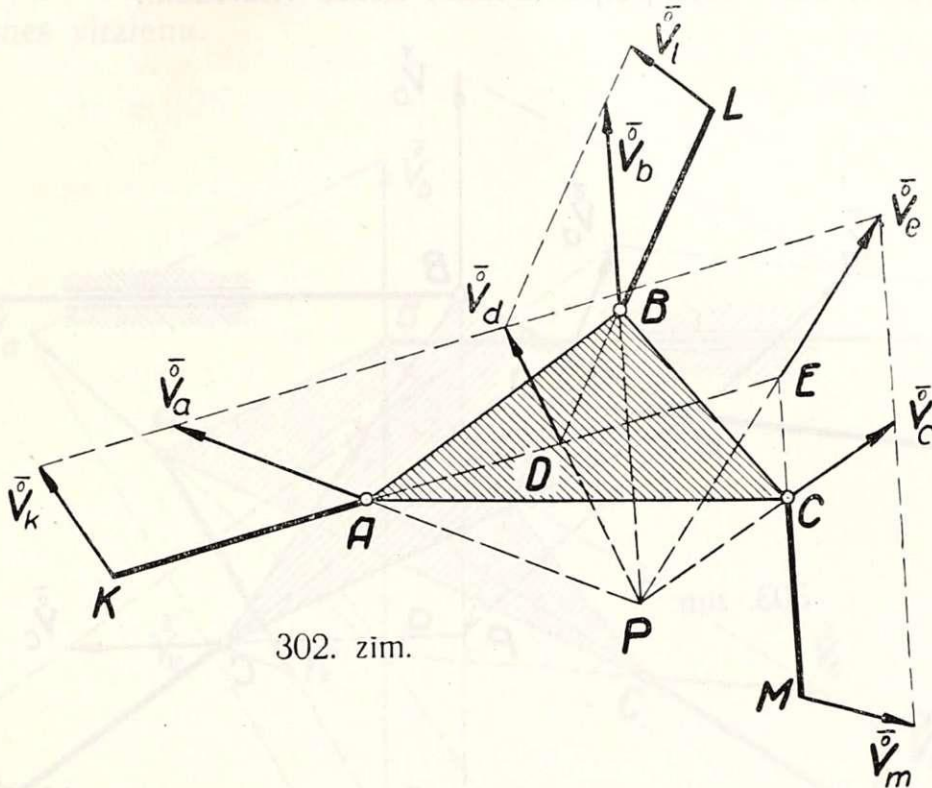
Tagad pārejam uz uzstādītā jautājuma atrisinājumu (302. zīm.).

Atliksim dotos ātrumus ortogonālā virzienā, iegūstot \vec{V}_k , \vec{V}_l un \vec{V}_m .

Turpinām KA līdz krustošanai ar BL un CM punktos D un E , kuŗus uzskatīsim par plaknes ABC punktiem.

Pēc formulētās teorēmas atrodam punkta D ortogonālā ātruma vektora \vec{V}_d galu, velkot caur \vec{V}_k galu taisni paralēli KA un caur \vec{V}_l galu taisni paralēli LB līdz krustošanai.

Līdzīgā kārtā atrodam \vec{V}_e galu, velkot caur \vec{V}_m galu taisni paralēli CM līdz krustošanai ar taisni, kas bija vilkta paralēli KA .



302. zim.

Velkot iegūtos ortogonālos ātrumus \vec{V}_d un \vec{V}_e līdz krustošanai, atrodam plaknes ABC momentāno griezes polu P .

Beidzot savienojam polu P ar punktiem A , B un C un iegūstam parastā kārtā šo punktu ortogonālos ātrumus \vec{V}_a , \vec{V}_b un \vec{V}_c .

§ 107. V pamatgadījums. Ātrumu konstrukcija kinēmatiskās ķēdes loceklim ABC , kas šarnīriem savienots ar trīs citiem AK , BL un CM , no kuriem vienam loceklim BL ir slīdpāris pret nekustīgo plakni.

Doti punktu K un M ātrumi \vec{V}_k un \vec{V}_m .

Jākonstruē punktu A un C ātrumi \vec{V}_a un \vec{V}_c , kā arī slīdes ātrums \vec{V}_b . Apskatāmā jautājumā autors dod divus atrisinājumus.

1) atrisinājums^{36, 37, 38} (303. zīm.).

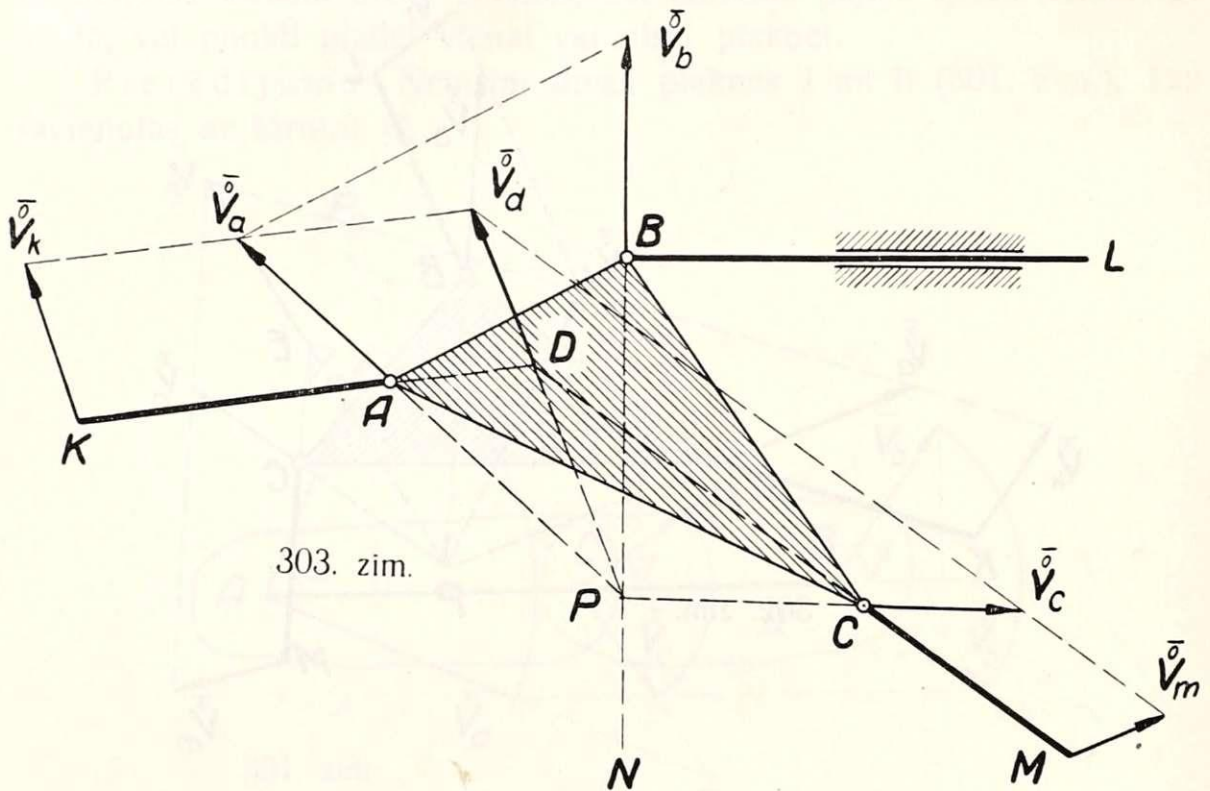
³⁶ N. Rozenauers: Jauns paņēmieni ātrumu konstrukcijai sarežģītās kinēmatiskās ķēdēs. L. Ū. R. Mēch. fak. serija. T I № 14. 1936.

³⁷ N. Rosenauer: Ein direktes Verfahren zur Geschwindigkeitskonstruktion kinematischer Ketten. Schweiz. Bauzeitung. Bd. 106. № 26. 1935.

³⁸ N. Rosenauer: Über die Geschwindigkeitskonstruktion kinematischer Ketten. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. Bd. 17. Heft. 3. 1937.

Atliekam dotos ātrumus ortogonālā virzienā, iegūstot \vec{V}_k un \vec{V}_m .

Punkta B ortogonālā ātruma virziens noteikts ar slīdpāri un sakrīt ar taisni BN , kas vilkta perpendikulāri slīdes virzienam.



303. zim.

Sacītam seko, ka plaknes ABC momentānais griezes pols arī atrodas uz taisnes BN .

Tālāk velkam taisnes KA un MC līdz krustošanai punktā D . Šā punkta ortogonālā ātruma vektora \vec{V}_d galu atrodam, velkot caur \vec{V}_k galu taisni paralēli AK un caur \vec{V}_m galu taisni paralēli MC līdz krustošanai.

Turpinot atrasto \vec{V}_d virzienu līdz krustošanai ar taisni BN , atrodam plaknes ABC momentāno griezes polu P .

Beidzot savienojam polu P ar punktiem A un C un iegūstam, kā parasti, meklējamos ortogonālos ātrumus \vec{V}_a un \vec{V}_c un pēc tam arī \vec{V}_b , velkot caur \vec{V}_a galu taisni paralēli AB .

2) atrisinājums^{39, 40} (304. zīm.).

Tāpat kā agrāk atliekam dotos ātrumus \vec{V}_k un \vec{V}_m ortogonālā virzienā, iegūstot \vec{V}_k un \vec{V}_m .

³⁹ N. Rozenauers: Heizingera (Heysinger von Waldegg) kulises tiešais ātruma konstrukcijas paņēmieni. L. Ū. R. Mēch. fak. serija T. I № 15. 1936.

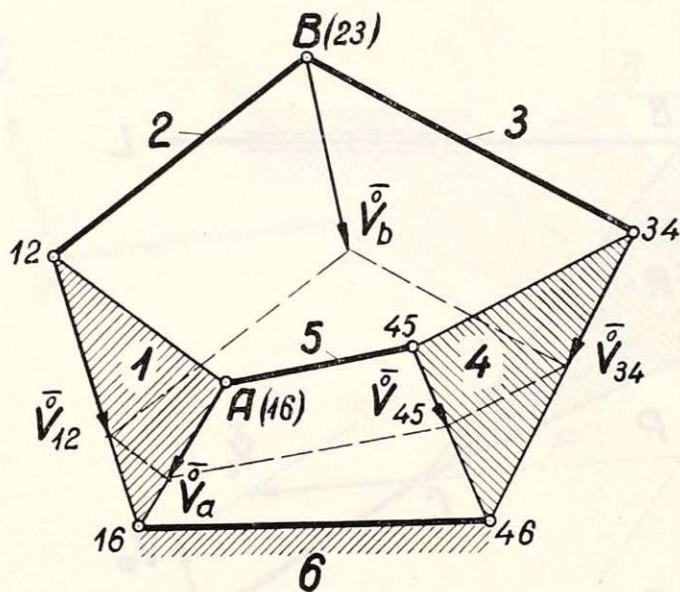
⁴⁰ N. Rosenauer: Über die Geschwindigkeitskonstruktion kinematischer Ketten. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. Bd. 17. Heft 3. 1937.

§ 108. Piemēri.

35. piemērs. Ātrumu konstrukcija Stivensona (Stephenson) mēchanismā, kas nostādīts uz šarnīru četrstūra binārās malas (305. zīm.).

Dots punkta A ātrums V_a .

Jākonstruē punkta B ātrums V_b .

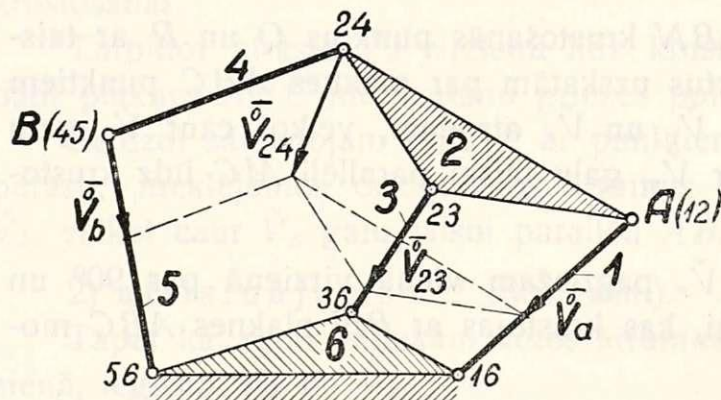


305. zīm.

$A-45-34-B$ malām, iegūstot tādā kārtā ātrumus \vec{V}_{45} un \vec{V}_{34} .

Poligona beidzamās malas krustošanās punkts ar taisni, kas bija vilkta $\parallel 12-B$, dod meklējamā ortogonālā ātruma \vec{V}_b galu.

Jāpiezīmē, ka šis vektors \vec{V}_b sakrīt ar polu taisni $23-36-26$.



306. zīm.

Atliekam doto ātrumu ortogonālā virzienā, iegūstot \vec{V}_a , un atrodam tieši punkta 23 ortogonālo ātrumu \vec{V}_{23} , velkot caur \vec{V}_a galu taisni paralēli $A-23$.

Atliekam doto ātrumu V_a ortogonālā virzienā, iegūstot \vec{V}_a , caur tā galu velkam taisni paralēli $A-12$, kas no stara $12-16$ nogriež punkta 12 ortogonālo ātrumu \vec{V}_{12} , caur kuŗa galu velkam tālāk taisni paralēli $12-B$. Uz šīs taisnes atrodas punkta B ortogonālā ātruma gals, bet lai to atrastu, konstrukcija jāturpina citā virzienā, un proti, caur ātruma \vec{V}_a galu velkam 305. zīm. redzamo poligonu ar malām, paralēlām poligona

36. piemērs. Ātrumu konstrukcija Stivensona (Stephenson) mēchanismā, kas nostādīts uz ternāra locekļa (306. zīm.).

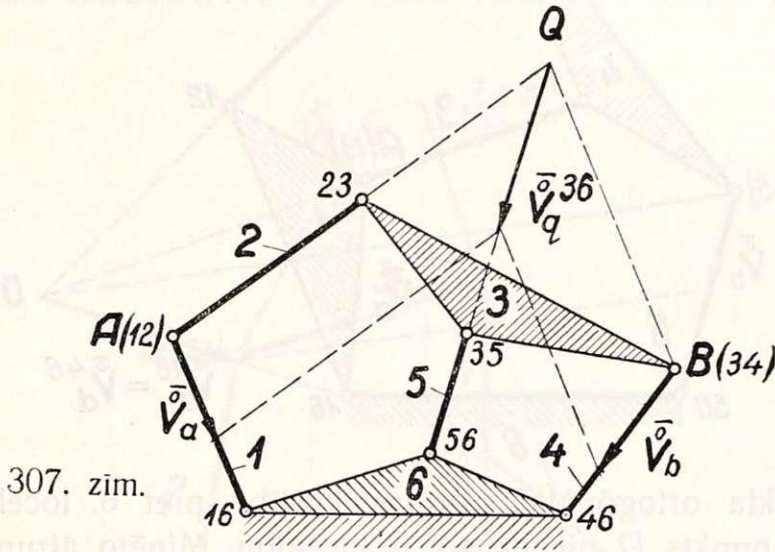
Dots punkta A ātrums V_a .

Jākonstruē punkta B ātrums V_b .

Atliekam doto ātru-

Tālāk atrodam punkta 24 ortogonālo ātrumu \vec{V}_{24} , velkot līdz krustošanai divas taisnes: vienu caur \vec{V}_a galu paralēli $A-24$ un otru caur \vec{V}_{23} galu paralēli $23-24$.

Beidzot taisne, kas vilkta caur \vec{V}_{24} galu paralēli $24-B$ no stara $B-56$, nogriež meklējamo ortogonālo ātrumu \vec{V}_b .



37. piemērs. Ātrumu konstrukcija Stivenzona (Stephenson) mēchanismā, kas nostādīts uz ternārā locekļa (307. zīm.).

Tas pats uzdevums, bet punkti A un B apmainīti vietām.

Dots punkta A ātrums V_a .

Jākonstruē punkta B ātrums V_b .

Atliekam doto ātrumu ortogonālā virzienā. Velkam locekļus 2 un 5 līdz krustošanai punktā Q , ko uzskatām par 3. locekļa punktu.

Ievērojot, ka punkta 56 ātrums ir nulle, jānāk pie slēdziena, ka punkta Q ortogonālais ātrums sakrīt ar 5. locekļa virzienu.

Šo ātrumu \vec{V}_q^{36} kustībā 3 pret 6 atrodam, velkot caur \vec{V}_a galu taisni paralēli AQ .

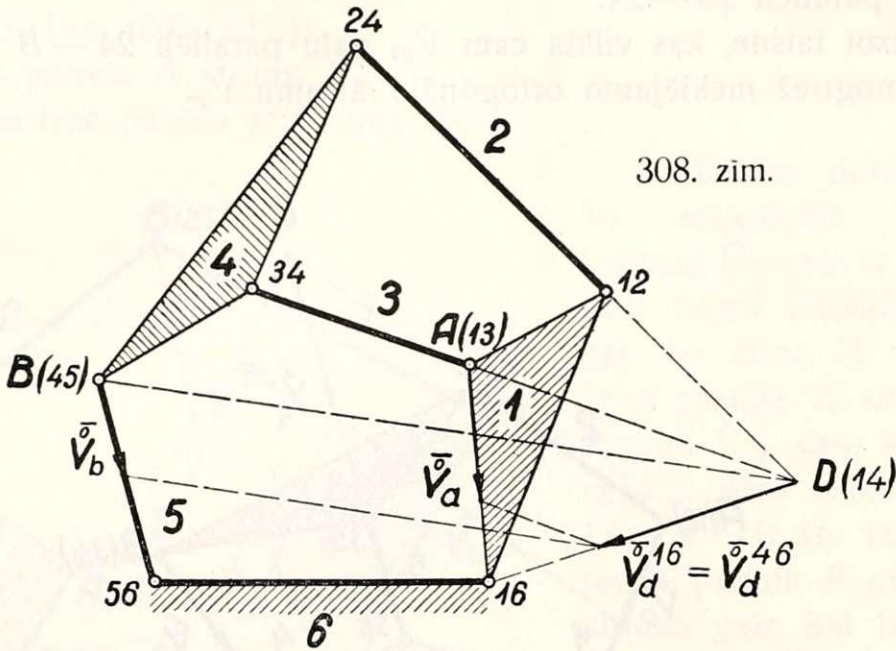
Beidzot savienojam punktu Q ar B un velkam caur \vec{V}_q^{36} galu taisni paralēli QB , kas no stara $B-46$ nogriežis meklējamo ortogonālo ātrumu \vec{V}_b .

38. piemērs. Ātrumu konstrukcija Stivenzona (Stephenson) mēchanismā, kas nostādīts uz piecstūra binārās malas (308. zīm.).

Dots punkta A ātrums V_a .

Jākonstruē punkta B ātrums V_b .

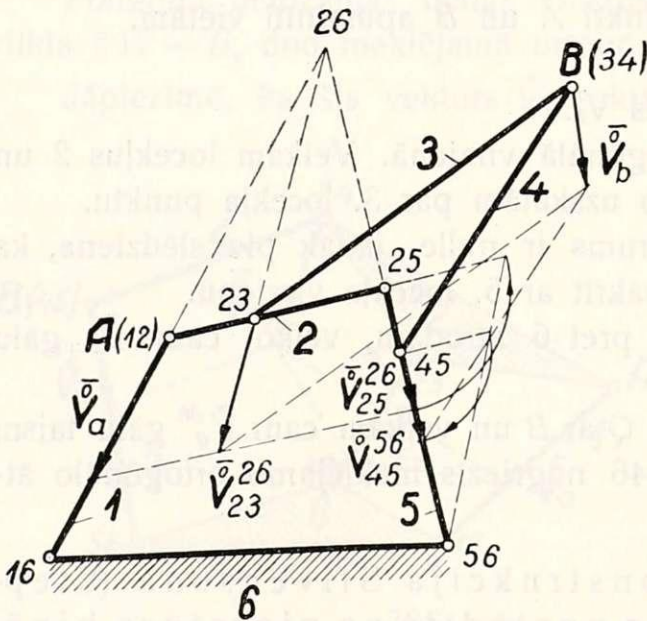
Atliekam doto ātrumu ortogonālā virzienā, iegūstot \vec{V}_a .
Turpinām locekļus 2 un 3 līdz krustošanai punktā D , kas ir pols 14.



308. zīm.

Šā punkta ortogonālais ātrums kustībā pret 6. locekli virzīts uz polu 16, jo punkts D pieder arī 1. loceklim. Minēto ātrumu \vec{V}_d^{16} atrodam, velkot caur \vec{V}_a galu taisni paralēli AD .

Tālāk konstatējam, ka $\vec{V}_d^{16} = \vec{V}_d^{46}$, savienojam punktu B ar D un velkam caur \vec{V}_d^{46} galu taisni paralēli DB , kas no stara $B-56$ nogriež meklējamo ātrumu \vec{V}_b .



309. zīm.

39. piemērs. Ātrumu konstrukcija Vata (Watt) mēchanismā, kas nostādīts uz binārās malas (309. zīm.).

Šeit izvēlētā mēchanismā ternāros locekļos visi trīs šarnīri atrodas uz vienas taisnes.

Dots punkta A ātrums V_a .

Jākonstruē punkta B ātrums V_b .

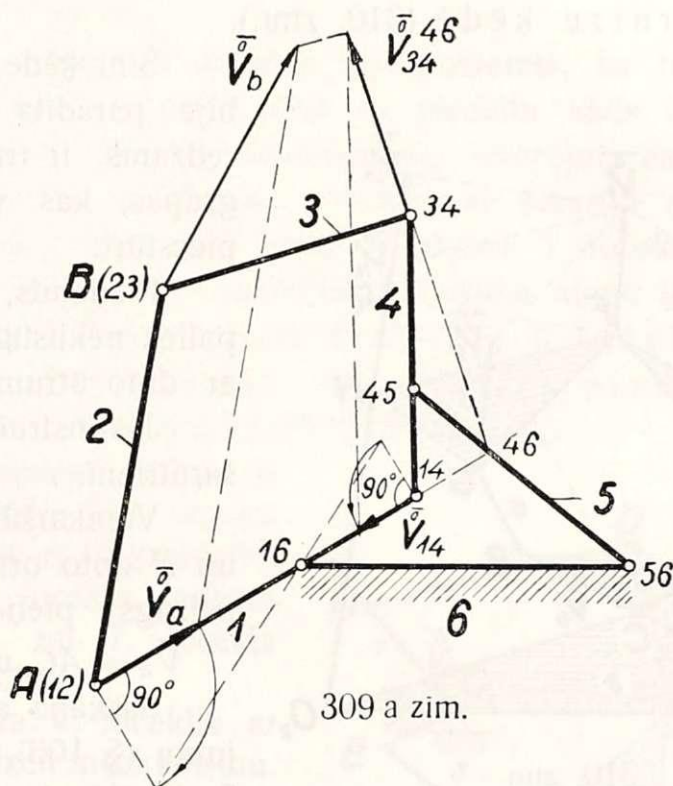
Vispirms atrodam polu 26, pagarinot malas 1 un 5.

Atliekam doto ātrumu ortogonālā virzienā un caur tā galu velkam taisni paralēli $A-23-25$, kas no attiecīgiem stariem nogriež punktu 23 un 25 ātrumus \vec{V}_{23}^{26} un \vec{V}_{25}^{26} .

Ar atrastā ātruma \vec{V}_{25}^{26} palīdzību konstruējam ātrumu \vec{V}_{45}^{56} punktam 45, kas atrodas uz tā paša 5. locekļa.

Velkot caur \vec{V}_{23}^{26} galu taisni paralēli 3. loceklim un caur \vec{V}_{45}^{56} galu taisni paralēli 4. loceklim, atrodam krustošanās punktā meklējamā ortogonālā ātruma \vec{V}_b galu.

40. piemērs. Ātrumu konstrukcija tanī pašā mēchanismā, kas nostādīts uz cita locekļa (309a. zīm.).



Dots punkta A ātrums V_a .

Jākonstruē punkta B ātrums V_b .

Ja punkta A ātrums \vec{V}_a dots ortogonāli, tad pagriežam to par 90° un meklējam punkta 14 ātrumu V_{14} , velkot taisni caur polu 16.

Atrasto ātrumu pagriežam ortogonāli un meklējam 4. locekļa polu 46, velkot taisnes

$$\left| \begin{array}{cc} 16 & - 14 \\ 45 & - 56 \end{array} \right| \rightarrow 46.$$

Taisne, kas vilkta caur \vec{V}_{14} galu paralēli 4. loceklim, no stara 46—34 nogriež punkta 34 ātrumu \vec{V}_{34}^{46} .

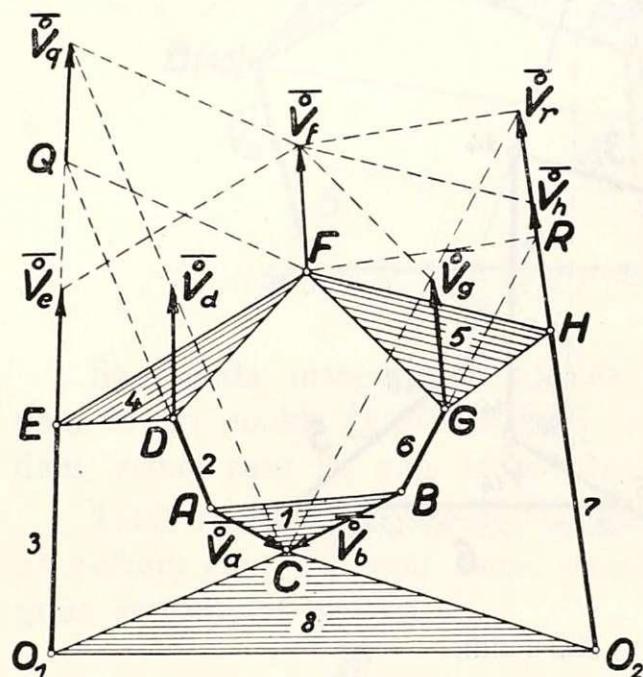
Beidzot velkam caur \vec{V}_{34}^{46} galu taisni paralēli 34— B un caur \vec{V}_a galu taisni paralēli AB . Abas taisnes krustojas meklējamā \vec{V}_b vektora galā.

Tālāk apskatīsim vēl dažus sarežģītākus uzdevumus:

Ātrumu konstrukcija kinematiskās ķēdēs, kas nesatur šarnīru četrstūrus.^{41, 42}

Kā bija redzams līdz šim apskatītos piemēros, ātrumu konstrukcija slēgtās locekļu grupās, kas reprezentē šarnīru piecstūrus, nav tik vienkārša kā šarnīru četrstūrus. Šinī ziņā sevišķu ievēribu pelna tādas ķēdes, kurās šarnīru četrstūru nemaz nav. Ātrumu konstrukcijas metodi šādās ķēdēs paskaidrosim ar diviem piemēriem.

41. piemērs. Ātrumu konstrukcija 8-locekļu kinematiskā šarnīru ķēdē (310. zīm.).



310. zīm.

Q , ko uzskatām par 4. locekļa punktu, kā arī 6. un 7. locekļa krustošanās punktu R , ko uzskatām par 5. locekļa punktu.

Punkta O_1 ātrums ir nulle, tamdēļ punkta Q ortogonālais ātrums sakrīt ar taisni O_1E , un to atrodam, velkot caur punktu C taisni paralēli AQ līdz krustošanai ar O_1Q .

Tāpat punkta O_2 ātrums arī ir nulle, tamdēļ punkta R ortogonālais ātrums sakrīt ar taisni O_2H , un to atrodam, velkot caur punktu C taisni paralēli BR līdz krustošanai ar O_2R .

Pēc tam kad viena punkta ātrums katrā no plaknēm 4. un 5. atrasts, pārejām uz šarnīru F , kas savieno šīs plaknes. Savienojot

Šinī ķēdē, kas agrāk jau bija parādīta 252e zīm., kā redzams, ir trīs slēgto locekļu grupas, kas visas ir šarnīru piecstūri.

Pieņemts, ka 8. loceklis paliek nekustīgs, bet 1. loceklis ar doto ātrumu piedzen ķēdi.

Jākonstruē ātrumi visiem šarnīriem.

Vienkāršības dēļ punktu A un B doto ortogonālo ātrumu mērogs pieņemts tāds, lai $\vec{V}_a = \overline{AC}$ un $\vec{V}_b = \overline{BC}$.

Saskaņā ar IV pamatgadījumu (§ 106), atrodam 2. un 3. locekļa krustošanās punktu

⁴¹ N. Rozenauers. Ātrumu konstrukcija sarežģītās kinematiskās ķēdēs, kas nesatur šarnīru četrstūrus. L. Ū. R. Mēch. fak. serija T. II N 7. 1937.

⁴² N. Rosenauer. Koppeltriebe ohne Gelenkvierecke. Maschinenbau. Reu-leaux-Mitteilungen. Bd. 6. Heft 3. 1938.

punktus Q un R ar F un velkot caur \vec{V}_q un \vec{V}_r galiem taisnes paralēli QF un RF , iegūstam arī \vec{V}_f .

Ievērojot, ka punkta E ortogonālais ātrums sakrīt ar taisni O_1E , atrodam \vec{V}_e , velkot caur \vec{V}_f galu taisni paralēli FE .

Punktu D , A un Q ortogonālo ātrumu vektoru gali atrodas uz vienas taisnes, tamdēļ iegūstam \vec{V}_d , velkot caur to pašu \vec{V}_f galu taisni paralēli FD .

Tādā pašā kārtā atrodam otrā pusē arī punktu H un G ortogonālos ātrumus \vec{V}_h un \vec{V}_g .

Piezīme. Apskatītā piemērā bija pieņemts, ka to piedzen ternārs loceklis 1., bet gadījumā, kad to piedzītu kāds binārs loceklis, piemēram, 3. vai 7., ātrumu konstrukciju, ievērojot, ka relatīvo polu stāvokļi un līdz ar to arī ātrumu virzieni nav atkarīgi no ātruma lieluma, varētu izdarīt tādā pašā kārtā, pieņemot 1. loceklim brīvi kaut kādu ātrumu un pēc tam ar paralēlām taisnēm atrast īstenos ātrumus.

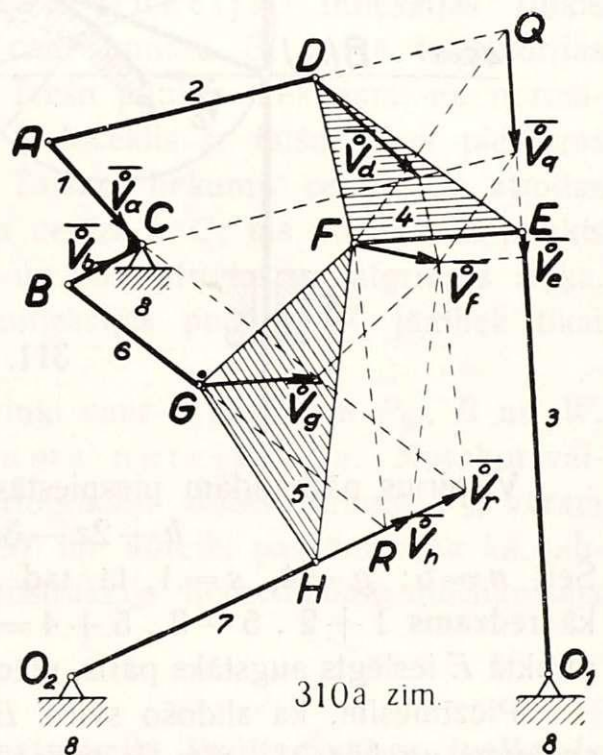
42. piemērs. Ātrumu konstrukcija 8-locekļu šarnīru mēchanismā, kas atbilst iepriekšējā piemērā apskatītai kinēmatiskai ķēdei^{43,44} (310a zīm.).

Šinī mēchanismā tāpat ir tikai trīs piecstūri, bet šarnīru četrstūru nav, un ar tā palīdzību var pārvērst 1. locekļa griezes kustību divās 3. un 7. locekļa svārstīšanās kustībās.

Pieņemts, ka 1. loceklis ar doto ātrumu piedzen mēchanismu.

Jākonstruē ātrumi visiem šarnīriem.

Ātrumu konstrukcija šinī mēchanismā, kas izdarīta 310a zīm. izejot no punktu A un B ātrumiem, principā neatšķiras no ātrumu konstrukcijas nupat apskatītā kinēmatiskā ķēdē (310. zīm.), pie kam ievērojot, ka abos zīmējumos apzīmējumi saskan, tie paši paskaidrojumi attiecināmi arī uz šo mēchanismu.



310a zīm.

⁴³ N. Rozenauers. Ātrumu konstrukcija sarežģītās kinēmatiskās ķēdēs, kas nesatur šarnīru četrstūrus. L. Ū. R. Mēch. fak. serija T. II № 7. 1937.

⁴⁴ N. Rosenauer. Koppeltriebe ohne Gelenkvierecke. Maschinenbau. Reuleaux-Mitteilungen. Bd. 6. Heft. 3. 1938.

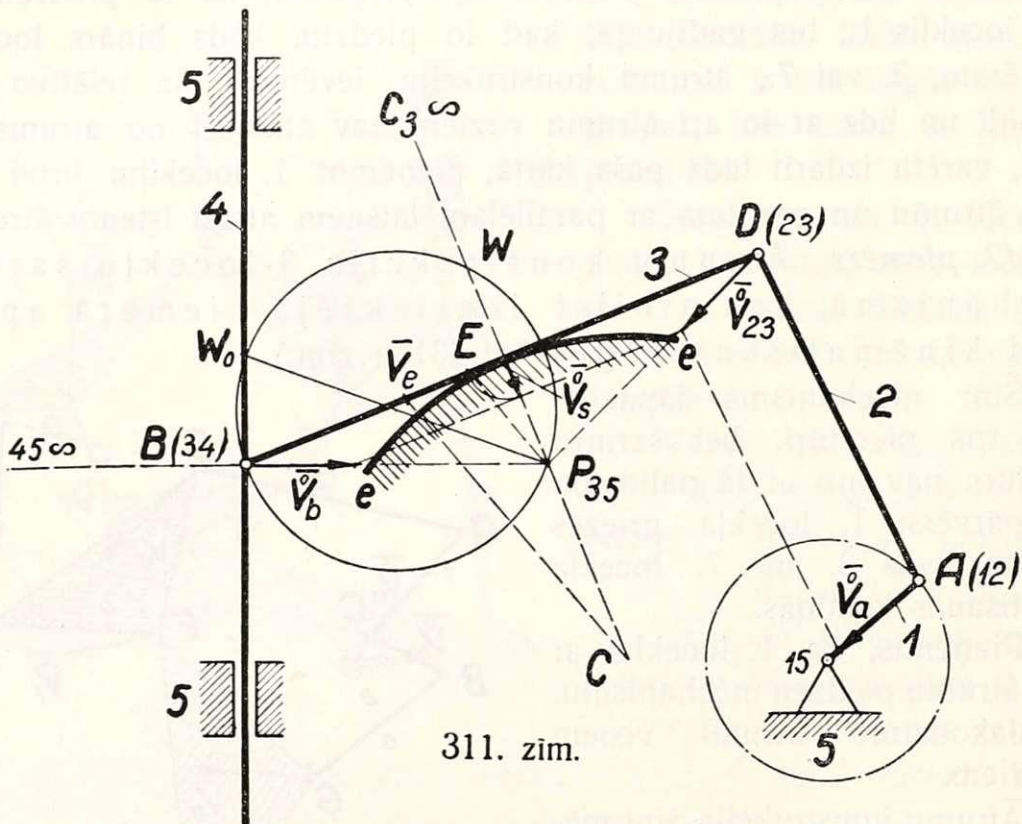
SAREŽĢĪTĀKI UZDEVUMI.

§ 109. 1. uzdevums. Ātruma konstrukcija slīdsviras tvaikdaļa mēchanismā (Wälzhebelsteuerung) (311. zīm.).

Mēchanisms satur vienu augstāko pāri un sastāv no 5 locekļiem, no kuņiem 1. loceklis to piedzen.

Dots punkta A ātrums V_a .

Jākonstruē: 1) punkta B ātrums V_b , 2) slīdes un pilns ātrums punktā E , 3) infleksijas riņķis 3. locekļa kustībai, 4) paātrinājums punktam B .



311. zīm.

Vispirms pārbaudām piespiestās kustības kritēriju

$$h + 2z - 3n + 4 = 0 \dots \dots \dots (53)$$

Šeit $n = 5$; $g = 4$, $s = 1$, tā tad $z = g + s = 5$ un $h = 1$. Tiešām, kā redzams $1 + 2 \cdot 5 - 3 \cdot 5 + 4 = 0$; tas nozīmē, ka tanī laikā, kad punktā E ieslēgts augstāks pāris, mēchanismam piemīt piespiesta kustība.

Piezīmēsim, ka slīdošo sviru BD , no kuņas cēlies mēchanisma nosaukums un kas 311. zīm. ir taisna, var izveidot arī liku (sk. 324. zīm.).

1) Ātruma V_b noteikšana. Atliekam doto ātrumu V_a ortogonālā virzienā un meklējam 3. locekļa polu P_{35} , lai varētu pāriet uz punkta $D(23)$ ātruma noteikšanu. Šis pols atrodas uz normāles pieskares punktā E un uz taisnes $34 - 45$, kas iet perpendikulāri slīdes virzienam 4 pret 5, jo pols 45 atrodas bezgalībā.

Savienojam punktu $D(23)$ ar atrasto polu P_{35} un velkam caur \bar{V}_a galu taisni paralēli AD , kas no stara DP_{35} nogriež punkta $D(23)$ ātrumu \bar{V}_{23} .

Caur ātruma \bar{V}_{23} galu velkam tālāk taisni paralēli DB , kas no stara BP_{35} nogriež meklējamo ortogonālo ātrumu \bar{V}_b .

2) Slīdes un pilna ātruma noteikšana. Tā pati taisne no normāles EC nogriež 3. locekļa ortogonālo slīdes ātrumu \bar{V}_s .

Bet 3. loceklis savā kustībā ne tikai slīd, bet arī veļas uz nekustīgās liknes $e-e$, tamdēļ pieskares punkts E pats pārvietojas. Lai atrastu pilnu punkta E ātrumu, izlietojam formulas (19) un (20):

$$V_s = r\omega \quad \text{un} \quad V_e = \rho\omega.$$

Apzīmējot liknes $e-e$ liekuma centru ar C , dabūjam

$$V_s = EP_{35} \cdot \omega \quad \text{un} \quad V_e = EC \cdot \omega$$

Šīs formulas dod iespēju konstruēt V_e šādi: pagriežam V_s tangenciālā virzienā, savienojam tā galu ar polu P_{35} un velkam caur punktu C paralēlu taisni, kas no 3. locekļa nogriež V_e . Jāpiezīmē, ka atrastā V_e virziens uz tangentes atkarīgs no 1. locekļa griezes virziena.

3) Infleksijas riņķa konstrukcija. Infleksijas riņķis 3. loceklim iet caur polu P_{35} un caur punktu B , jo tā trajektorijas liekuma centrs atrodas bezgalībā. Trešo punktu meklējam uz normāles EP_{35} liknei $e-e$, prātojot tā: 3. loceklis ir taisne, kas pieskaņas nekustīgai liknei $e-e$ punktā E . Taisnes liekuma centrs C_3 atrodas bezgalībā, bet liknes $e-e$ liekuma centrs ir C ; tas nozīmē, ka punkts C saistīts ar bezgalīgi tālo punktu un pats atrodas uz atgriezes riņķa.

Lai atrastu uz tā paša stara infleksijas punktu W , jāatliek tikai $P_{35}W = P_{35}C$.

Beidzot ievēlam infleksijas riņķi caur 3 punktiem P_{35} , B un W .

4) Punkta B paātrinājuma noteikšana. Nosakot vairākiem mēchanisma stāvokļiem ortogonālo slīdes ātrumu \bar{V}_b , varam uzzīmēt ātruma ceļa grafiku (V, S) un noteikt paātrinājumu kā subnormāli. Cita tieša paātrinājuma konstrukcija momentānam mēchanisma stāvoklim tiks dota tālāk § 121.

§ 110. 2. uzdevums. Ātruma konstrukcija Prōlla-Švābes tvaikdaļa mēchanismā (312. zīm.).

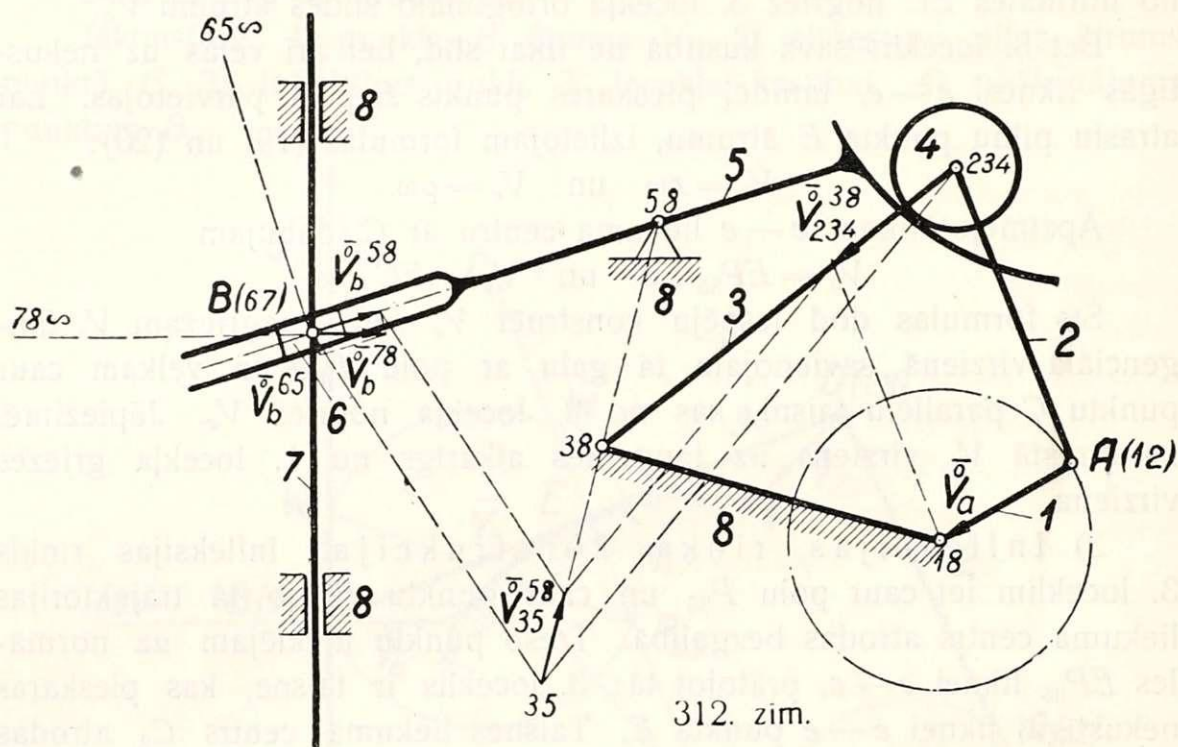
Šis mēchanisms, kas satur vienu patstāvīgu augstāko pāri, bija jau agrāk pārbaudīts (283. zīm.) pēc piespiestas kustības kritērija, tamdēļ tagad aprobežosimies ar ātruma konstrukciju.

Mēchanisms sastāv no 8 locekļiem, un to piedzen 1. loceklis.

Dots punkta A ātrums V_a .

Jākonstruē punkta B slīdes ātrums V_b^{78} kustībā 7 pret 8.

Atliekam doto ātrumu V_a ortogonālā virzienā un velkam caur tā galu taisni paralēli $A-234$, kas no stara $234-38$ nogriež ortogonālo ātrumu \vec{V}_{234}^{38} .



312. zim.

Lai pārietu tālāk ar ātruma konstrukciju uz 5. locekli, meklējam polu 35, kas atrodas uz normāles pieskares punktā starp 4. un 5. locekli, kā arī uz taisnes $58-38$.

Taisne, kas vilkta caur \vec{V}_{234}^{38} galu paralēli taisnei $234-35$, no taisnes $35-38$ nogriež pola 35 ortogonālo ātrumu \vec{V}_{35}^{38} kustībā 3 pret 8, bet tas pats ātrums ir šim punktam arī kustībā 5 pret 8: $\vec{V}_{35}^{38} = \vec{V}_{35}^{58}$.

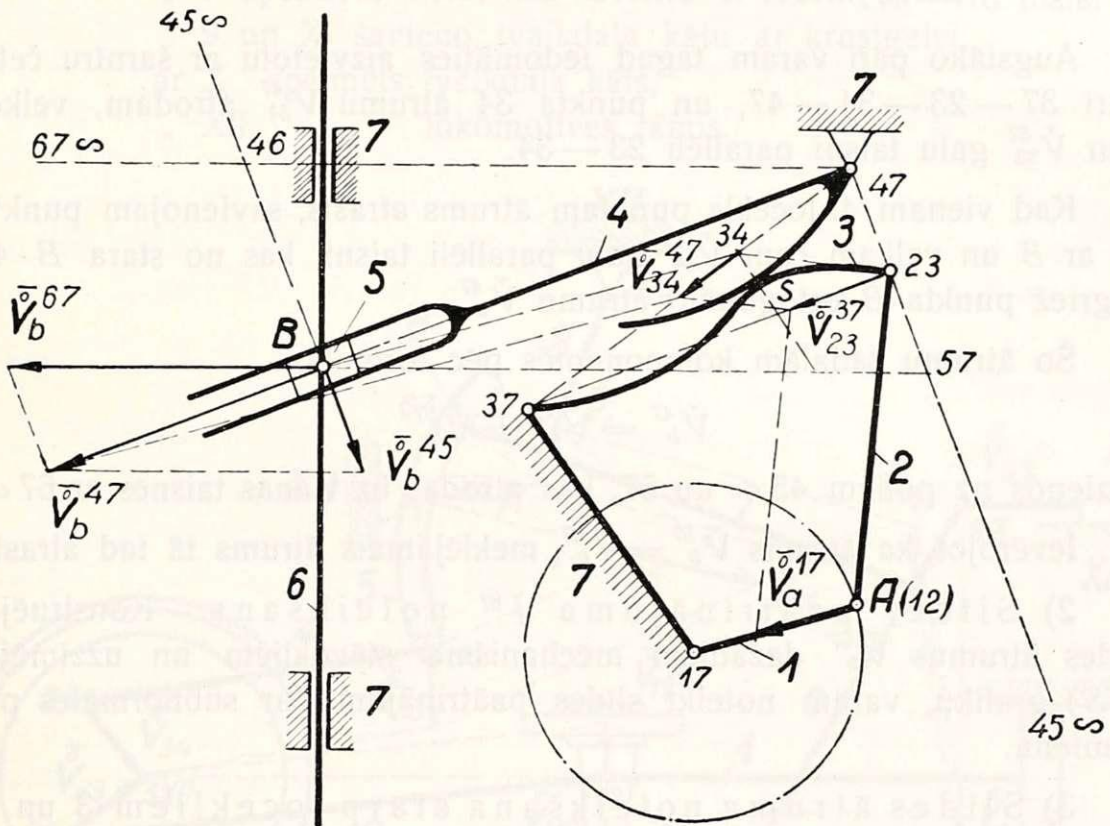
Kad tādā kārtā vienam 5. locekļa punktam ātrums atrasts, meklējam ortogonālo ātrumu \vec{V}_b^{58} kustībā 5 pret 8, savienojot punktu B ar 35 un velkot caur \vec{V}_{35}^{58} galu taisni paralēli $35-B$, kas no stara $B-58$ nogriež ātrumu \vec{V}_b^{58} .

Ievērojot, ka relatīvās kustības 6 pret 5 un 7 pret 8 ir virzes kustības un poli 65 un 78 atrodas bezgalībā uz normālēm pret slīdes virzieniem, konstruējam pēc formulas $\vec{V}_b^{68} = \vec{V}_b^{65} + \vec{V}_b^{58}$ taisnstūri uz atrastā ortogonālā ātruma \vec{V}_b^{58} tā, lai taisnstūra diagonāle būtu virzīta uz polu 78. Šī diagonāle tad reprezentēs meklējamo ortogonālo ātrumu $\vec{V}_b^{68} = \vec{V}_b^{78}$.

Arī šeit, nosakot ātrumus \vec{V}_b^{78} dažādos mēchanisma stāvokļos un uzzīmējot (V_S) grafiku, iespējams atrast punkta B paātrinājumu kā subnormāli.

§ 111. 3. uzdevums. Ātruma konstrukcija slīdsviras tvaikdaļa mēchanismā ar nekustīgu griezes asi (313. zīm.)

Šis mēchanisms raksturojams ar to, ka slīdsvirai 4 ir nekustīga griezes ass punktā 47, turpretim attiecīgai slīdsvirai (3. loceklis) mēchanismā, kas parādīts 311. zīm., nekustīgās griezes ass nebija.



313. zīm.

Mēchanisms sastāv no 7 locekļiem, no kuriem 1. loceklis to piedzen. Dots punkta A ātrums V_a^{17} .

Jākonstruē: 1) slīdes ātrums V^{67} ,

2) slīdes paātrinājums \vec{j}^{67} ,

3) slīdes ātrums starp 3. un 4. locekli.

Vispirms pārbaudām piespiestās kustības kritēriju pēc formulas:

$$h + 2z - 3n + 4 = 0 \dots \dots \dots (53)$$

Locekļu skaits $n = 7$, šarnīru $g = 6$, slīdpāru $s = 2$, tā tad zemāko pāru skaits $z = g + s = 2 + 6 = 8$ un augstāko pāru $h = 1$.

Ievietojot šos skaitļus, iegūstam tiešām

$$1 + 2 \cdot 8 - 3 \cdot 7 + 4 = 0.$$

Tas nozīmē, ka mēchanismam piemīt piespiesta kustība.

1) Slīdes ātruma V^{67} konstrukcija. Atliekam doto ātrumu V_a^{17} ortogonālā virzienā un velkam caur tā galu taisni paralēli 2. loceklim, kas no stara 23—37 nogriež punkta 23 ortogonālo ātrumu $\vec{V}_{23}^{27} = \vec{V}_{23}^{37}$.

Lai pārietu ar ātruma konstrukciju no 3. locekļa uz 4., meklējam relatīvo polu 34, kas atrodams kopējās normāles krustošanās punktā ar taisni 37—47.

Augstāko pāri varam tagad iedomāties aizvietotu ar šarnīru četrstūri 37—23—34—47, un punkta 34 ātrumu \vec{V}_{34}^{47} atrodam, velkot caur \vec{V}_{23}^{37} galu taisni paralēli 23—34.

Kad vienam 4. locekļa punktam ātrums atrasts, savienojam punktu 34 ar B un velkam caur \vec{V}_{34}^{47} galu paralēli taisni, kas no stara B -47 nogriež punkta B ortogonālo ātrumu \vec{V}_b^{47} .

Šo ātrumu sadalām komponentēs pēc formulas

$$\vec{V}_b^{47} = \vec{V}_b^{45} + \vec{V}_b^{57}$$

virzienos uz poliem 45∞ un 57 , kas atrodas uz vienas taisnes ar 67∞ .

Ievērojot, ka ātrums $\vec{V}_b^{57} = \vec{V}_b^{67}$, meklējamais ātrums tā tad atrasts.

2) Slīdes paātrinājuma \vec{j}^{67} noteikšana. Konstruējot slīdes ātrumus \vec{V}_b^{67} dažādiem mēchanisma stāvokļiem un uzzīmējot (VS) grafiku, varam noteikt slīdes paātrinājumu ar subnormāles paņēmieni.

3) Slīdes ātruma noteikšana starp locekļiem 3 un 4. Punkta S slīdes ātrums $V_s = (S-34) \cdot \omega_{43}$, bet ω_{43} var atrast no formulas $\omega_{47} = \omega_{43} + \omega_{37}$, no kurienes $\omega_{43} = \omega_{47} - \omega_{37}$ un tad

$$V_s = (S-34) (\omega_{47} + \omega_{37}),$$

kur savukārt

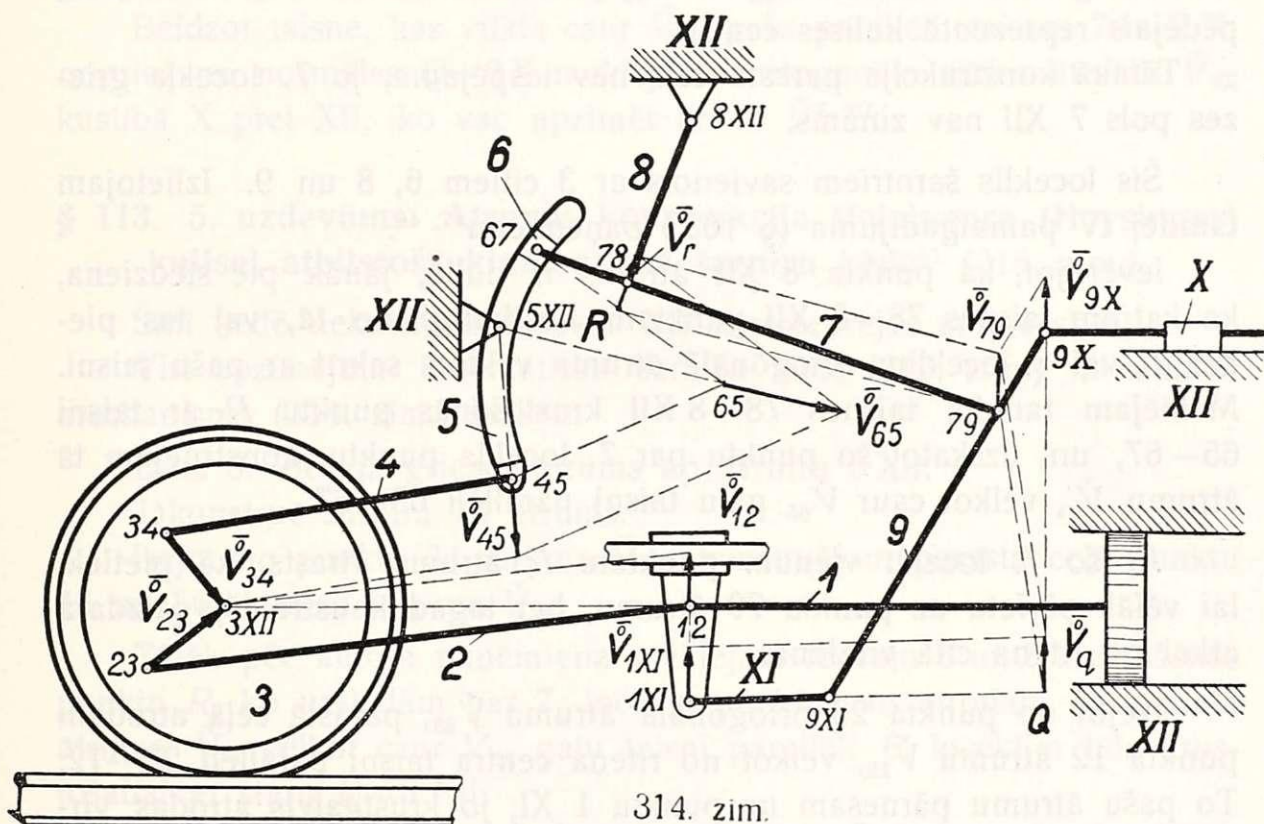
$$\omega_{47} = \frac{V_b^{47}}{B-47} \text{ un } \omega_{37} = \frac{V_{23}^{37}}{23-37}.$$

Kā redzams, slīdes ātrums ir jo lielāks, jo lielāks attālums starp pieskares punktu S un polu 34, bet lielāka slīde veicina attiecīgo daļu dilšanu, tamdēļ jācenšas slīdes ātrumu samazināt, un to var panākt, izveidojot 3. un 4. locekli tā, lai punkts S būtu pēc iespējas tuvāk taisnei 37—47.

§ 112. 4. uzdevums. Heizingera (Heysinger) kulises mēchanisma ātruma konstrukcija^{45, 46} (314. zīm.).

Heizingera kulises mēchanisms sastāv no 12 locekļiem, kas apzīmēti saskaņā ar 314. zīm.

- ar 1 apzīmēts virzulis un krustgalvis,
- „ 2 „ klanis, kas piedzen riteni,
- „ 3 „ dubultkloķis vai pats ritenis,
- „ 4 apzīmēta svira, kas savieno riteni ar kulisi,
- „ 5 „ kulise,
- „ 6 apzīmēts kulises akmens,
- „ 7 apzīmēta svira, kas savieno 6. loekli ar 9,
- 9 un XI savieno tvaikdaļa kātu ar krustgalvi,
- ar X apzīmēts tvaikdaļa kāts,
- „ XII „ lokomotīves rāmis.



314. zīm.

8. locekļa piekares punktu mašinists var pacelt vai nolaist un tādā kārtā rēgulēt tvaika ieplūdi cilindros, lai mainītu lokomotīves gaitu, tamdēļ momentāni jāpieņem, ka šis loceklis ar savu šarnīru piestiprināts pie nekustīgā locekļa, lokomotīves rāmja.

⁴⁵ N. Rozenauers: Heizingera (Heysinger von Waldegg) kulises mēchanisma tiešais ātruma konstrukcijas paņēmieni. L. Ū. R. Mēch. fak. serija. T1 № 15. 1936.

⁴⁶ N. Rosenauer: „Über die Geschwindigkeitskonstruktion kinematischer Ketten.“ Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. Bd. 17. Heft 3. 1937.

Locekļu skaits $n = 12$.

Šarnīri: 12, 23, 3 XII, 34, 45, 5 XII, 67, 78, 8 XII, 79, 9 X, 9 XI, 1 XI, kopā $g = 13$.

Slīdpāri: 1 XII, 65, X XII, kopā $s = 3$.

Zemāko pāru skaits: $z = g + s = 13 + 3 = 16$.

Pārbaudot piespiestas kustības kritēriju: $2z - 3n + 4 = 0$, atrodam, ka tiešām $2 \cdot 16 - 3 \cdot 12 + 4 = 0$, tas nozīmē, ka mēchanismam piemīt piespiesta kustība.

Jautājums uzstādīts tā: pēc riteņa ātruma jākonstruē tvaikdaļa slīdes ātrums $V^{X XII}$.

Vienkāršības dēļ izvēlamies tādu ātruma mērogu, lai riteņa punkta ortogonālais ātrums reprezentētos ar punkta attālumu no riteņa centra. Ar to punktu 23 un 34 ātrumi \vec{V}_{23} un \vec{V}_{34} noteikti.

Izejot no punkta 34 ortogonālā ātruma \vec{V}_{34} , konstruējam parastā ceļā ortogonālos ātrumus \vec{V}_{45} un \vec{V}_{65} punktiem 45 un 65, no kuriem pēdējais reprezentē kulises centru.

Tālākā konstrukcija parastā ceļā nav iespējama, jo 7. locekļa griezes pols 7 XII nav zināms.

Šis loceklis šarnīriem savienots ar 3 citiem 6, 8 un 9. Izlietojam tamdēļ IV pamatgadījuma (§ 106.) paņēmienu^{47, 48}.

Ievērojot, ka punkta 8 XII ātrums ir nullē, jānāk pie slēdziena, ka katram taisnes 78—8 XII punktam neatkarīgi no tā, vai tas pieder 7., vai 8. loceklim, ortogonālā ātruma vektors sakrīt ar pašu taisni. Meklējam tamdēļ taisnes 78—8 XII krustošanās punktu R ar taisni 65—67, un, uzskatot šo punktu par 7. locekļa punktu, konstruējam tā ātrumu \vec{V}_7 , velkot caur \vec{V}_{65} galu taisni paralēli 65—67.

Ar šo 7. locekli vienam punktam R ātrums atrasts, kā pietiek, lai vēlāk pārietu uz punkta 79 ātrumu, bet tagad konstrukcija jāizdara atkal no riteņa citā virzienā.

Izejot no punkta 23 ortogonāla ātruma \vec{V}_{23} , parastā ceļā atrodam punkta 12 ātrumu \vec{V}_{12} , velkot no riteņa centra taisni paralēli 23—12. To pašu ātrumu pārnesam uz punktu 1 XI, jo krustgalvis atrodas virzes kustībā; bet tālākā konstrukcija atkal parastā ceļā neizdodas, jo arī 9. locekļa griezes pols 9 XII nav zināms, tamdēļ atkal pārejam uz autora paņēmienu.

⁴⁷ N. Rozenauers: Jauns paņēmiens ātrumu konstrukcijai sarežģītās kinēmatiskās ķēdēs. L. Ū. R. Mēch. fak. serija T. I № 15. 1936.

⁴⁸ N. Rosenauer: Über die Geschwindigkeitskonstruktion kinematischer Ketten. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. Bd. 17. Heft 3. 1937.

9. loceklis šarnīriem savienots ar 3 citiem locekļiem 7., XI un X, no kuriem X loceklim ir slīdpāris pret nekustīgo plakni, kas tieši atbilst § 107 apskatītam V. pamatgadījumam^{49, 50}. Caur punktu 9 X velkam normāli slīdes virzienam. Visiem punktiem, kas atrodas uz šīs normāles, ortogonālais ātrums sakrīt ar pašas normāles virzienu. Tamdēļ atzīmējot taisnes 1 XI—9 XI krustošanās punktu Q ar minēto normāli, atrodam šā punkta ortogonālo ātrumu \vec{V}_q , velkot caur \vec{V}_{1XI} galu taisni paralēli taisnei 1 XI—9 XI.

Punktu Q uzskatām par 9. locekļa punktu, un tādā kārtā esam ieguvuši vienam 9. locekļa punktam ortogonālo ātrumu.

Ievērojot, ka arī 7. locekli punktam R ortogonālais ātrums atrasts, varam pāriet uz šarnīra 79 ātruma noteikšanu. Savienojam punktus R un Q ar punktu 79, un velkam caur \vec{V}_r un \vec{V}_q galiem taisnes paralēli R —79 un Q —79. Abas taisnes krustojas ortogonālā ātruma \vec{V}_{79} galā, kas tādā kārtā atrasts.

Beidzot taisne, kas vilkta caur \vec{V}_{79} galu paralēli taisnei 79—9 X, nogriež no normāles Q —9 X meklējamo ortogonālo slīdes ātrumu \vec{V}_{9X} kustībā X pret XII, ko var apzīmēt arī ar $\vec{V}^{X XII}$.

§ 113. 5. uzdevums. Atrumu konstrukcija Heizingera (Heysinger) kulisei atbilstošā kinēmatiskā šarnīru ķēdē⁵¹ (315. zīm.).

Šīnī ķēdē nekustīgais loceklis XII reprezentējas ar piecstūri.

Visi apzīmējumi kinēmatiskā šarnīru ķēdē (315. zīm.) un kulises mēchanismā (314. zīm.) saskan.

Dots 3. locekļa griezes ātrums ap šarnīru 3 XII.

Jākonstruē šarnīra 79 ātrums.

Izejot no punkta 34 ātruma \vec{V}_{34} , konstruējam parastā ceļā punktu 45 un 56 ātrumus \vec{V}_{45} un \vec{V}_{56} .

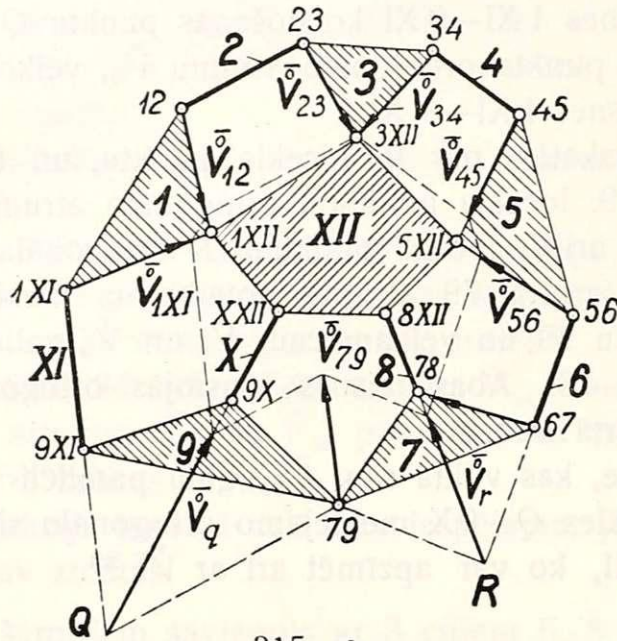
Tālāk pēc autora paņēmienu meklējam locekļu 6 un 8 krustošanās punktu R , ko uzskatām par 7. locekļa punktu, un atrodam šā punkta ātrumu \vec{V}_r , velkot caur \vec{V}_{56} galu taisni paralēli 6. loceklim līdz krustošanai ar staru R —8 XII.

Pēc tam, kad vienam 7. locekļa punktam R ātrums atrasts, turpinām konstrukciju no 3. locekļa citā virzienā. Izejot no punkta 23 ātruma \vec{V}_{23} , atrodam parastā kārtā punktu 12 un 1 XI ātrumus \vec{V}_{12} un \vec{V}_{1XI} .

^{49 51} N. Rozenauers. Heizingera (Heysinger von Waldegg) kulises mēchanisma tiešais ātruma konstrukcijas paņēmiens. L. Ū. R. Mēch. fak. serija T. I № 15. 1936.

⁵⁰ N. Rosenauer. Über die Geschwindigkeitskonstruktion kinematischer Ketten. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. Bd. 17. Heft 3. 1937.

Tālāk pēc autora paņēmienu meklējam XI un X locekļa krustošanās punktu Q , ko uzskatām par 9. locekļa punktu, un atrodam šā punkta ātrumu \vec{V}_q , velkot caur $\vec{V}_{1\text{XI}}$ galu taisni paralēli XI loceklim līdz krustošanai ar staru $Q - X\text{ XII}$.



315. zim.

Beidzot savienojam punktus R un Q ar šarnīru 79 un velkam caur \vec{V}_r un \vec{V}_q galiem taisnes paralēli $R-79$ un $Q-79$, kas krustojas meklējamā ortogonālā ātruma vektora \vec{V}_{79} galā.

Citu atrisinājumu ar ātrumu plāna palīdzību autors publicējis^{52, 53}.

⁵² N. Rozenauers. Ātrumu plānu konstrukcijas sarežģītās kinēmatiskās ķēdēs bez līdzīgām punktu rindām. L. Ū. R. Mēch. fak. serija II N2. 1937.

⁵³ N. Rosenauer. Geschwindigkeitspläne kinematischer Ketten ohne Verwendung ähnlicher Punktreihen. Maschinenbau. Reuleaux-Mitteilungen. Band 6. Heft 1. Januar 1938.

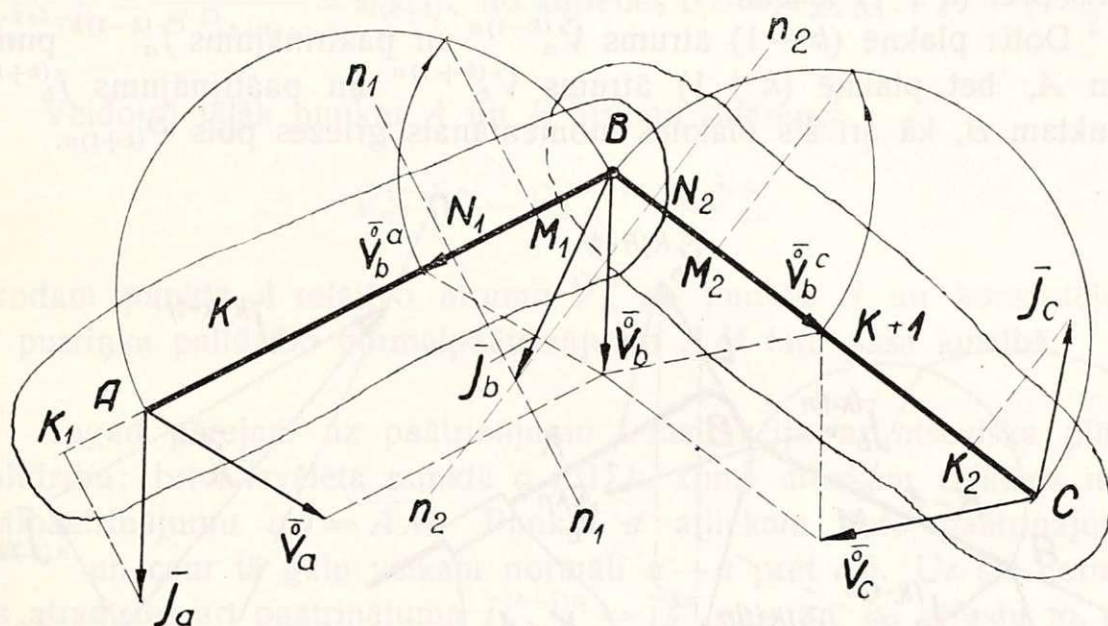
Vispārīgās metodes paātrinājumu konstrukcijai n -plakņu kinematiskās ķēdēs.

Paātrinājumu konstrukciju dažādu metodu noskaidrošanai apskatīsim vairākus pamatgadījumus.

§ 114. I pamatgadījums. Divi locekļi k un $(k+1)$ savienoti ar šarnīru B un katrā loceklī dots viena punkta ātrums un paātrinājums (316. zīm.).

Doti punktu A un C ātrumi \vec{V}_a un \vec{V}_c un paātrinājumi \vec{J}_a un \vec{J}_c . Jākonstruē punkta B paātrinājums \vec{J}_b .

Vispirms jāizdara jau pazīstamā ātrumu konstrukcija.



316. zīm.

Atliekam dotos ātrumus ortogonālos virzienos, iegūstot \vec{V}_a un \vec{V}_c , un caur to galiem velkam paralēli AB un CB taisnes, kuŗu krustšanās punkts dod punkta B ortogonālā ātruma vektora \vec{V}_b galu, kas tādā kārtā noteikts.

Paātrinājumu konstrukcijai izlietojam formulas

$$\vec{J}_b = \vec{J}_a + \vec{J}_b^a \text{ un } \vec{J}_b = \vec{J}_c + \vec{J}_b^c \dots \dots \dots (32)$$

Veidojam relatīvos ātrumus punkta B kustībā pret A un pret C : $\vec{V}_b^a = \vec{V}_b - \vec{V}_a$ un $\vec{V}_b^c = \vec{V}_b - \vec{V}_c$ un konstruējam ar pusriņķu palīdzību punkta B normālpāātrinājumu BM_1 kustībā pret A un BM_2 kustībā pret C . Šiem normālpāātrinājumiem pieskaitām klāt attiecīgos

virzienos punktu A un C paātrinājumu \bar{j}_a un \bar{j}_c projekcijas $M_1 N_1 = AK_1$ uz taisni BA un $M_2 N_2 = CK_2$ uz taisni BC .

Caur punktu N_1 velkam normāli $n_1 - n_1$ taisnei AB un caur punktu N_2 normāli $n_2 - n_2$ taisnei BC . Abas normāles krustojas meklējamā paātrinājuma \bar{j}_b galā, kas tādā kārtā atrasts.

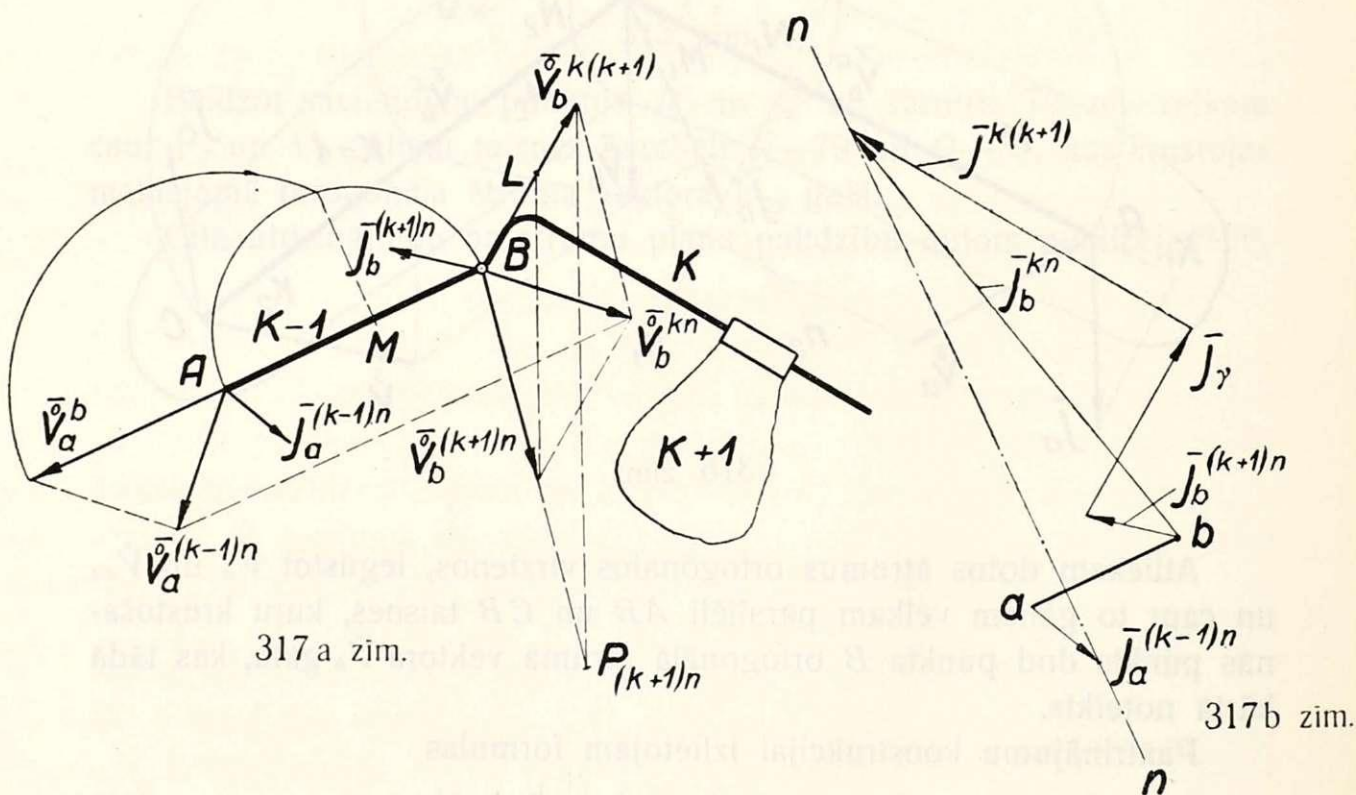
§ 115. II pamatgadījums. Divi locekļi savienoti ar slīdpāri un katrā loceklī dots viena punkta ātrums un paātrinājums.

Šis gadījums apskatīts jau X nodaļā par 4-plakņu relatīvo kustību § 83. 181. lapp. (234. zīm.).

§ 116. III pamatgadījums. Divi locekļi savienoti ar šarnīru, bet vienam no tiem ir slīdpāris ar nākošo locekli (317. zīm.).

Locekļi $(k-1)$ un k savienoti ar šarnīru B , bet loceklim k ir slīdpāris pret $(k+1)$ locekli.

Doti: plaknē $(k-1)$ ātrums $\bar{V}_a^{(k-1)n}$ un paātrinājums $\bar{j}_a^{(k-1)n}$ punktam A , bet plaknē $(k+1)$ ātrums $\bar{V}_b^{(k+1)n}$ un paātrinājums $\bar{j}_b^{(k+1)n}$ punktam B , kā arī šīs plaknes momentānais griezes pils $P_{(k+1)n}$.



317 a zīm.

317 b zīm.

Jākonstruē punkta B paātrinājums $\bar{j}_b^{kn} = \bar{j}_b^{(k-1)n}$ un slīdes paātrinājums $\bar{j}^{k(k+1)}$.

Ātrumu konstrukcija šādā gadījumā bija apskatīta jau agrāk § 105. (300. zīm.), un to pašu izdarām arī šeit, velkot caur $\bar{V}_a^{(k-1)n}$ galu taisni

paralēli AB līdz krustošanai ar taisni, kas vilkta caur $\bar{V}_b^{(k+1)n}$ galu normāli slīdes virzienam. Krustošanās punkts dod ātruma $\bar{V}_b^{kn} = \bar{V}_b^{(k-1)n}$ galu, un izmantojot sakaru starp punkta B dažādiem ātrumiem

$$\bar{V}_b^{kn} = \bar{V}_b^{k(k+1)} + \bar{V}_b^{(k+1)n},$$

atrodam arī slīdes ātrumu.

Tālāk pārejam uz Koriolisa (Coriolis) paātrinājuma konstrukciju. Šim nolūkam savienojam relatīvā ātruma $\bar{V}_b^{k(k+1)}$ galu ar pārnesamo polu $P_{(k+1)n}$ un velkam caur pārnesamā ātruma $\bar{V}_b^{(k+1)n}$ galu paralēlu taisni, kas no relatīvā stara nogriež pusi Koriolisa (Coriolis) paātrinājuma BL , kā tas redzams no proporcijas:

$$\frac{BL}{V_b^{k(k+1)}} = \frac{V_b^{(k+1)n}}{BP_{(k+1)n}} = \omega_{(k+1)n}, \text{ no kurienes } \overline{BL} = [\overline{\omega}_{(k+1)n} \cdot \bar{V}_b^{k(k+1)}] = \frac{1}{2} \bar{j}_\gamma.$$

Veidojot tālāk punktu A un B ātrumu diferenci

$$\bar{V}_a^{(k-1)n} - \bar{V}_b^{(k-1)n} = \bar{V}_a^b,$$

atrodam punkta A relatīvo ātrumu \bar{V}_a^b ap punktu B un konstruējam ar pustiņķa palīdzību normālpāātrinājumu AM tanī pašā kustībā.

Tagad pārejam uz paātrinājumu konstrukciju ar atsevišķa plāna palīdzību: brīvi izvēlētā punktā a (317b. zīm.) atliekam relatīvo normālpāātrinājumu $ab = AM$. Punktā a atliekam doto paātrinājumu $\bar{j}_a^{(k-1)n}$ un caur tā galu velkam normāli $n-n$ pret ab . Uz šīs normāles atradīsies arī paātrinājuma $\bar{j}_b^{(k-1)n} = \bar{j}_b^{kn}$ gals un, lai atrastu to, ņemam palīgā sakaru starp punkta B dažādiem paātrinājumiem:

$$\bar{j}_b^{kn} = \bar{j}_b^{k(k+1)} + \bar{j}_b^{(k+1)n} + \bar{j}_\gamma.$$

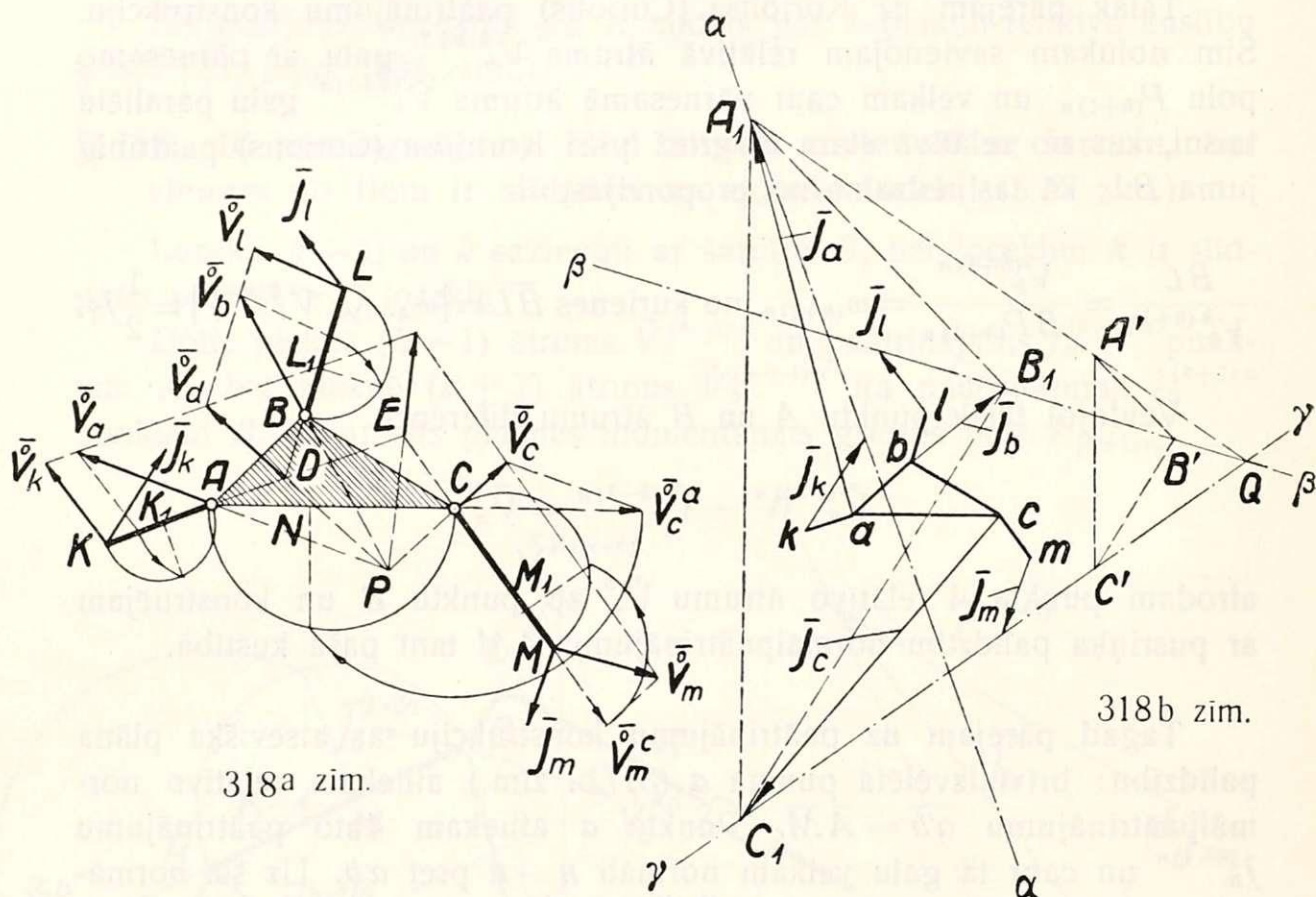
No šiem paātrinājumiem $\bar{j}_b^{(k+1)n}$ dots, \bar{j}_γ atrasts un paātrinājuma $\bar{j}_b^{k(k+1)}$ virziens noteikts ar slīdes virzienu. Tamdēļ atliekam punktā b paātrinājumu $\bar{j}_b^{(k+1)n}$, kuŗa galā piekonstruējam \bar{j}_γ , un caur tā galu velkam taisni paralēli slīdes virzienam līdz krustošanai ar agrāk ievilkto normāli $n-n$.

Savienojot punktu b ar šo krustošanās punktu, atrodam meklējamo paātrinājumu $\bar{j}_b^{kn} = \bar{j}_b^{(k-1)n}$, bet iegūtā poligōna mala, kas vilkta paralēli slīdes virzienam, dod slīdes paātrinājumu $\bar{j}^{k(k+1)}$.

§ 117. IV pamatgadījums. Paātrinājumu konstrukcija kinēmatiskās ķēdes loceklim ABC , kas savienots šarnīriem ar trīs citiem AK , BL un CM ⁵⁴ (318. zīm.).

Doti punktu K , L un M ātrumi \vec{V}_k , \vec{V}_l un \vec{V}_m un paātrinājumi \vec{J}_k , \vec{J}_l un \vec{J}_m .

Jākonstruē punktu A , B un C paātrinājumi \vec{J}_a , \vec{J}_b , \vec{J}_c .



318a zīm.

318b zīm.

Vispirms pēc autora metodes⁵⁵ konstruējam punktu A , B un C ātrumus. Šim nolūkam turpinām KA līdz krustošanai ar LB un MC punktos D un E (§ 106. 302. zīm.).

Šos punktus uzskatām par plaknes ABC punktiem un to ātrumus \vec{V}_d un \vec{V}_e atrodam, velkot caur \vec{V}_k galu taisni paralēli KA līdz krustošanai ar taisnēm, kas vilktas caur \vec{V}_l un \vec{V}_m galiem paralēli LB un MC .

⁵⁴ N. Rozenauers. Paātrinājumu konstrukcija sarežģītās kinēmatiskās ķēdēs ar relatīvo normālpāātrinājumu plāna palīdzību. L. Ū. R. Mēch. fak. serija T. II № 4, 1937.

⁵⁵ N. Rozenauers. Jauns paņēmiens ātrumu konstrukcijai sarežģītās kinēmatiskās ķēdēs. L. Ū. R. Mēch. fak. serija T. I № 14, 1936.

Ātrumu \vec{V}_d un \vec{V}_e krustošanās punktā atrodam plaknes ABC momentāno polu P , kuŗu savienojam ar punktiem A, B un C un atrodam šo punktu ātrumus \vec{V}_a, \vec{V}_b un \vec{V}_c .

Tālāk pārejam uz relatīvo normālpaātrinājumu konstrukciju. Veidojam ātrumu diferenci $\vec{V}_c - \vec{V}_a = \vec{V}_c^a$, kas reprezentē punkta C relatīvo ātrumu kustībā ap A , un ar pusriņķa palīdzību konstruējam relatīvo normālpaātrinājumu \overline{CN} tanī pašā kustībā. Piezīmēsim, ka tas pats pretējā virzienā, t. i. \overline{NC} reprezentē punkta A relatīvo normālpaātrinājumu ap punktu C , tā tad vispārīgi CN var uzskatīt par malas AC relatīvo normālpaātrinājumu.

Tādā pašā kārtā, veidojot ātrumu diferences $\vec{V}_a - \vec{V}_k, \vec{V}_b - \vec{V}_l$ un $\vec{V}_m - \vec{V}_c$, konstruējam ar pusriņķu palīdzību relatīvos normālpaātrinājumus AK_1, BL_1 un MM_1 locekļiem AK, BL un CM .

Pirms pārejas uz relatīvo normālpaātrinājumu plāna konstrukciju jāpiezīmē, ka kāda ternāra locekļa šarnīru relatīvie normālpaātrinājumi acīm redzot proporcionāli trijstūŗa malām, kuŗu veido šarnīri, ar proporcionālītātes koeficientu ω^2 , kur ω ir attiecīgā locekļa griezes ātrums. Tas nozīmē, ka šie normālpaātrinājumi veido trijstūŗi, kas līdzīgs dotam.

Normālpaātrinājumu plāna iegūšanai atliekam $\overline{ac} = \overline{NC}$ (318b. zīm.), konstruējam $\triangle abc \sim \triangle ABC$ un atliekam $\overline{ak} = \overline{AK_1}, \overline{bl} = \overline{BL_1}$ un $\overline{cm} = \overline{M_1M}$.

Pašu paātrinājumu konstrukciju iegūtā plānā izdarām šādi: atliekam punktā k doto paātrinājumu \vec{j}_k un velkam caur tā galu normāli pret KA taisni $\alpha - \alpha$, uz kuŗas atrodas meklējamā paātrinājuma \vec{j}_a gals.

Tāpat punktā l atliekam doto paātrinājumu \vec{j}_l un caur tā galu velkam normāli pret BL taisni $\beta - \beta$, uz kuŗas atrodas paātrinājuma \vec{j}_b gals.

Beidzot arī punktā m atliekam paātrinājumu \vec{j}_m un caur tā galu velkam normāli pret CM taisni $\gamma - \gamma$, uz kuŗas atrodas paātrinājuma \vec{j}_c gals.

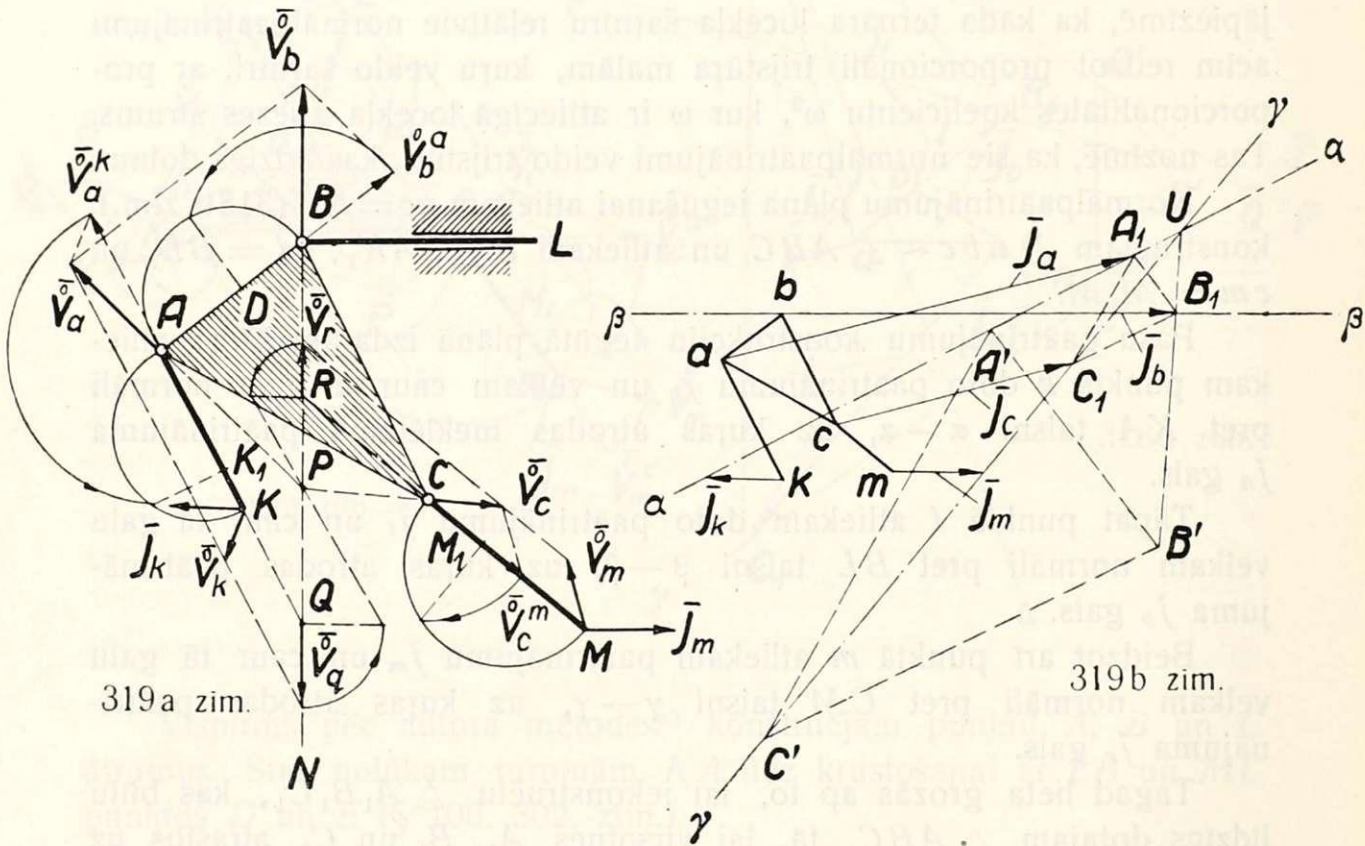
Tagad lieta grozās ap to, lai iekonstruētu $\triangle A_1B_1C_1$, kas būtu līdzīgs dotajam $\triangle ABC$, tā, lai virsotnes A_1, B_1 un C_1 atrastos uz taisnēm $\alpha - \alpha, \beta - \beta$ un $\gamma - \gamma$ un bez tam trijstūŗu malas būtu savstarpīgi perpendikulāras. To var izdarīt tīri ģeometriskā ceļā: kaut kur starp taisnēm $\beta - \beta$ un $\gamma - \gamma$ velkam $B'C' \perp BC$ un caur punktiem B' un C' taisnes $B'A' \perp BA$ un $C'A' \perp CA$. Caur iegūto punktu A' un taisņu $\beta - \beta$ un $\gamma - \gamma$ krustošanās punktu Q velkam taisni, kas savukārt krustojas punktā A_1 ar taisni $\alpha - \alpha$.

Savienojot punktu a ar A_1 , iegūstam meklējamo paātrinājumu $\overline{aA_1} = \vec{j}_a$.

Beidzot konstruējam $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A'B'C'$, velkot $A_1C_1 \parallel A'C'$ līdz taisnei $\gamma-\gamma$ un $A_1B_1 \parallel A'B'$ līdz taisnei $\beta-\beta$. Savienojot vēl punktus b un c ar B_1 un C_1 , iegūstam arī pārējos meklējamos paātrinājumus $\vec{b}B_1 = \vec{j}_b$ un $\vec{c}C_1 = \vec{j}_c$.

§ 118. V pamatgadījums. Paātrinājumu konstrukcija kinēmatiskās ķēdes loceklim ABC , kas savienots šarnīriem ar trīs citiem AK , BL un CM , no kuriem vienam loceklim BL ir slīdpāris pret nekustīgo plakni⁵⁶ (319. zīm.).

Doti punktu K un M ātrumi \vec{V}_k un \vec{V}_m un paātrinājumi \vec{j}_k un \vec{j}_m . Jākonstruē punktu A un C paātrinājumi \vec{j}_a , \vec{j}_c un slīdes paātrinājums \vec{j}_b .



319b zīm.

Vispirms pēc § 107. aprakstītās metodes^{57, 58} konstruējam punktu A un C ātrumus, kā arī slīdes ātrumu. Šim nolūkam velkam AK un

⁵⁶ N. Rozenauers. Paātrinājumu konstrukcija sarežģītās kinēmatiskās ķēdēs ar relatīvo normālpāātrinājumu plānu palīdzību. L. Ū. R. Mēch. fak. serija T. II № 4. 1937.

⁵⁷ N. Rozenauers. Heizingera (Heysinger von Waldegg) kulises mēchanisma tiešais ātruma konstrukcijas paņēmiens. L. Ū. R. Mēch. fak. serija T. I № 15. 1936.

⁵⁸ N. Rosenauer: Über die Geschwindigkeitskonstruktion kinematischer Ketten. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. Bd. 17. Heft 3. 1937.

MC līdz krustošanai punktos Q un R ar taisni BN , kas vilkta normāli slīdes virzienam. Šos punktus uzskatām par plaknes ABC punktiem, un to ortogonālie ātrumi sakrīt ar taisni BN . Minētos ātrumus \vec{V}_q un \vec{V}_r atrodam, velkot caur \vec{V}_k un \vec{V}_m galiem taisnes paralēli AK un MC .

Pagriežot ortogonālos ātrumus \vec{V}_q un \vec{V}_r par 90° vienā virzienā un savienojot galus ar taisni, atrodam šīs taisnes krustošanās punktā ar BN plaknes ABC momentāno griezes polu P . Atrasto polu P savienojam ar punktiem A un C un iegūstam šo punktu ortogonālos ātrumus \vec{V}_a , \vec{V}_c un pēc tam arī slīdes ātrumu \vec{V}_b , velkot caur \vec{V}_a galu taisni paralēli AB .

Tālāk pārejam uz relatīvo normālpaātrinājumu konstrukciju: veidojam ātrumu diferenci $\vec{V}_b - \vec{V}_a = \vec{V}_b^a$ un ar pusriņķa palīdzību konstruējam relatīvo normālpaātrinājumu BD malai AB . Ievērojot, ka ternāram loceklim relatīvie normālpaātrinājumi proporcionāli malu garumiem, pārējo $\triangle ABC$ malu normālpaātrinājumu noteikšana nav vajadzīga.

Veidojot ātrumu diferences $\vec{V}_a - \vec{V}_k = \vec{V}_a^k$ un $\vec{V}_c - \vec{V}_m = \vec{V}_c^m$, konstruējam ar pusriņķu palīdzību relatīvos normālpaātrinājumus AK_1 un CM_1 locekļiem AK un CM .

Normālpaātrinājumu plāna iegūšanai atliekam $\overline{ab} = \overline{DB}$ (319b. zīm.), konstruējam $\triangle abc \sim \triangle ABC$ un atliekam $\overline{ak} = \overline{AK_1}$ un $\overline{cm} = \overline{CM_1}$.

Pašu paātrinājumu konstrukciju iegūtā plānā izdarām šādi: atliekam punktā k doto paātrinājumu \vec{j}_k un velkam caur tā galu perpendikulāri pret KA taisni $\alpha - \alpha$, uz kuņas atrodas meklējamā paātrinājuma \vec{j}_a gals.

Tāpat punktā m atliekam paātrinājumu \vec{j}_m un caur tā galu velkam perpendikulāri pret CM taisni $\gamma - \gamma$, uz kuņas atrodas meklējamā paātrinājuma \vec{j}_c gals.

Trešā taisne $\beta - \beta$ iet tieši caur punktu b paralēli slīdes virzienam, jo slīdes paātrinājums ar šo virzienu sakrīt.

Tagad lieta grozās ap to, lai iekonstruētu $\triangle A_1B_1C_1$, kas būtu līdzīgs dotajam $\triangle ABC$ tā, lai virsotnes A_1 , C_1 un B_1 atrastos uz taisnēm $\alpha - \alpha$, $\gamma - \gamma$ un $\beta - \beta$ un trijstūru malas būtu savstarpīgi perpendikulāras. To var, kā jau agrāk bija aizrādīts, izdarīt tīri ģeometriskā ceļā: kaut kur starp taisnēm $\alpha - \alpha$ un $\gamma - \gamma$ velkam taisni $A'C' \perp AC$ un tālāk caur punktiem A' un C' velkam $A'B' \perp AB$ un $C'B' \perp CB$. Caur iegūto punktu B' un taisni $\alpha - \alpha$ un $\gamma - \gamma$ krustošanās punktu U velkam taisni, kas no taisnes $\beta - \beta$ tieši nogriež slīdes paātrinājumu $\overline{bB_1} = \vec{j}_b$.

Beidzot konstruējam $\triangle B_1A_1C_1 \sim \triangle A'B'C'$, velkot $B_1A_1 \parallel B'A'$ līdz taisnei $\alpha - \alpha$ un $B_1C_1 \parallel B'C'$ līdz taisnei $\gamma - \gamma$.

Savienojot vēl punktus a un c ar A_1 un C_1 , iegūstam arī pārējos meklējamos paātrinājumus

$$\overline{aA_1} = \bar{j}_a \quad \text{un} \quad \overline{cC_1} = \bar{j}_c.$$

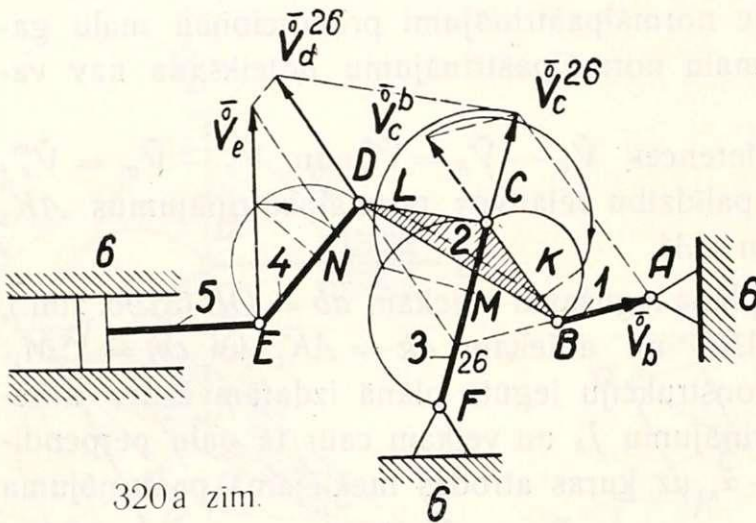
Apskatītos paņēmienus izlietosim sekojošos uzdevumos.

§ 119. 1. uzdevums. Paātrinājumu konstrukcija Holsta mēchanismā. (320. zīm.)⁵⁹

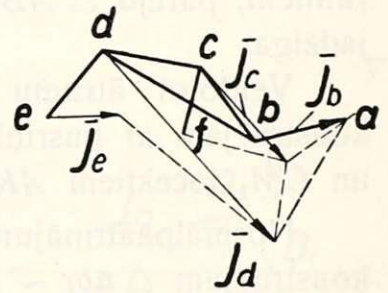
Holsta mēchanisms sastāv no 6 locekļiem, no kuriem 1. loceklis, vienmērīgi griežoties ap punktu A , to piedzen.

Dots ātrums $V_b = \text{const}$.

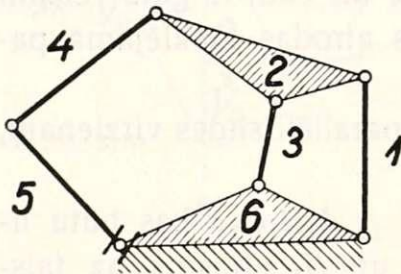
Jākonstruē paātrinājums \bar{j}_e kustībā 5 pret 6.



320a zīm.



320b zīm.



321. zīm.

Holsta mēchanismam atbilstošā kinēmatiskā šarnīru ķēde ir Stīvensona (Stephenson) mēchanisms, kas nostādīts uz tērnāra 6. locekļa un kuřam šarnīrs 56 aizvietots ar slīdpāri. Tamdēļ jau iepriekš var pateikt, ka Holsta mēchanismam ar sešiem šarnīriem un vienu slīdpāri piemīt piespiesta kustība.

Pirms paātrinājumu konstrukcijas nepieciešami izdarīt ātrumu konstrukciju. Vienkāršības dēļ ātrumu mērogs izvēlēts tādējādi, lai dotais punkta B ortogonālais ātrums reprezentētos ar attālumu BA : $\vec{V}_b = \overline{BA}$; tādā gadījumā arī $\bar{j}_b = \overline{BA}$. Ātrumu konstrukcijai vajadzīgs 2. locekļa pols 26, kas atrodas uz taisnēm 16—12 un 36—32,

⁵⁹ N. Rozenauers. Paātrinājumu konstrukcija ar relatīvo normālpāātrinājumu plāna palīdzību sarežģītās kinēmatiskās ķēdēs. L. Ū. R. Mēch. fak. serija T. II. N 4. 1937.

jeb vienkārši AB un CF krustošanās punktā. Polu 26 savienojam ar punktu D un, ievērojot, ka punkta E ortogonālais ātrums iet normāli slīdes virzienam, iegūstam punktu C , D un E ortogonālos ātrumus \vec{V}_c^{26} , \vec{V}_d^{26} un \vec{V}_e , velkot caur punktu A poligōnu, kuŗa malas ir paralēlas poligōna $BCDE$ malām.

Tālāk veidojot ātrumu diferenci $\vec{V}_c - \vec{V}_b = \vec{V}_c^b$, kas ir punkta C relatīvais ātrums kustībā ap B , konstruējam ar pusriņķa palīdzību malas BC relatīvo normālpāātrinājumu CK . Velkot taisni $KL \parallel BD$, atrodam arī pārējo $\triangle ABC$ malu relatīvos normālpāātrinājumus.

Tāpat ar pusriņķi, kas apvilks ap CF , un ātrumu \vec{V}_c^{26} konstruējam locekļa CF relatīvo normālpāātrinājumu CM . Veidojot ātrumu diferenci $\vec{V}_e - \vec{V}_d$, konstruējam ar pusriņķa palīdzību arī locekļa ED relatīvo normālpāātrinājumu EN .

Paātrinājumu konstrukciju izdarām ar relatīvo normālpāātrinājumu plāna palīdzību, kuŗu iegūstam, konstruējot 320b. zīm. $\overline{bc} = \overline{KC}$, $\triangle bcd = \triangle KCL$, un atliekot $\overline{cf} = \overline{CM}$, $\overline{de} = \overline{NE}$ un $\overline{ba} = \overline{BA} = \overline{j}_b$.

Punkta C paātrinājuma \overline{j}_c galu dabūjam plānā, velkot caur punktu a taisni perpendikulāri bc līdz krustošanai ar taisni, kas vilkta caur punktu f perpendikulāri cf . Savienojot punktu c ar minēto krustošanās punktu, iegūstam \overline{j}_c .

Paātrinājuma \overline{j}_d noteikšanai velkam caur \overline{j}_c galu taisni $\perp cd$ un caur punktu a taisni $\perp bd$. Savienojot punktu d ar šo taisņu krustošanās punktu, iegūstam \overline{j}_d .

Beidzot, ievērojot, ka \overline{j}_e iet slīdes virzienā, taisne, kā vilkta caur \overline{j}_d galu perpendikulāri de , nogriež meklējamo slīdes paātrinājumu \overline{j}_e .

§ 120. 2. uzdevums. Paātrinājumu konstrukcija Shaping-mašīnā (322. zīm.)⁶⁰.

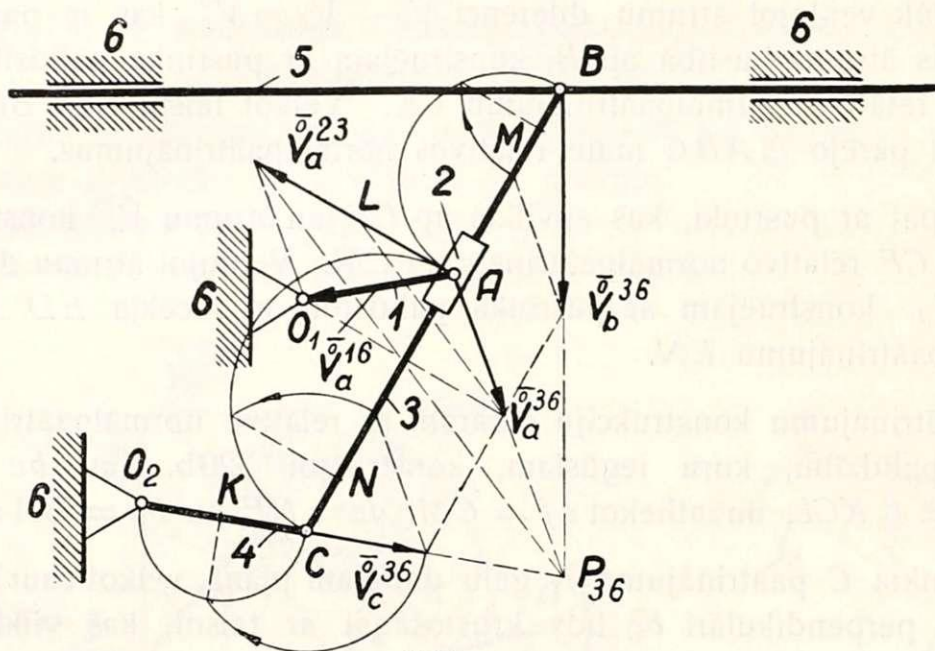
Shaping-mašīnas mēchanisms sastāv no 6 locekļiem, no kuŗiem 1. loceklis, vienmērīgi griežoties ap punktu O_1 , piedzen mēchanismu.

Dots punkta A ātrums $V_a^{16} = V_a^{26} = \text{const.}$ (322a. zīm.).

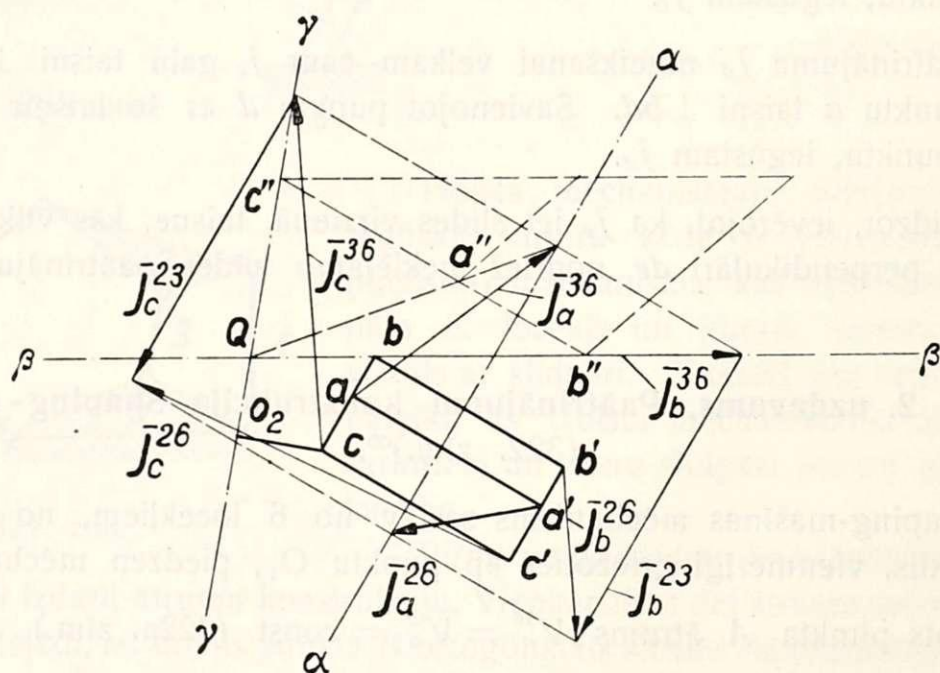
Jākonstruē slīdes paātrinājums 2 pret 3 un 5 pret 6, kā arī citi punktu A , B un C paātrinājumi.

⁶⁰ N. Rozenauers. Īpaša paātrinājumu konstrukcija kinēmatiskās ķēdēs, kas satur slīdpārus kustošās plaknēs. L. Ū. R. Mēch. fak. serija. T. II. N 5. 1937.

Piezīmēsim, ka shaping-mašīnas mēchanismam atbilstošā kinēmatiskā šarnīru ķēde arī nav nekas cits kā Stivenzona (Stephenson) mēchanisms (323. zīm.), kuŗā šarnīri 23 un 56 aizvietoti ar slīdpāriem. Tamdēļ arī šeit var jau iepriekš pateikt, ka shaping-mašīnas mēchanismam piemīt piespiesta kustība.



322a zīm.



322b zīm.

Pirms pārejas uz paātrinājumu konstrukciju, nepieciešami izdarīt ātrumu konstrukciju. Šim nolūkam atrodam polu P_{36} (322a. zīm.),

velkot punktā B normāli slīdes virzienam līdz krustošanai ar 4. locekli, jo šis pols atrodas uz taisnēm

$$\begin{vmatrix} 35 & -56 \\ 34 & -46 \end{vmatrix} \rightarrow 36.$$

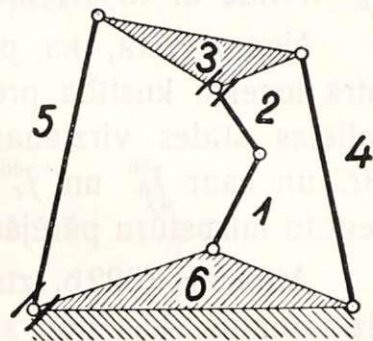
Doto ātrumu atliekam ortogonālā virzienā un vienkāršības dēļ pieņemam tādu mērogu, lai $\vec{V}_a^{16} = \vec{V}_a^{26} = \overline{AO}_1$. Šo ātrumu sadalām komponentēs pēc formulas

$$\vec{V}_a^{26} = \vec{V}_a^{23} + \vec{V}_a^{36},$$

no kuņām \vec{V}_a^{23} ir ortogonālais relatīvais slīdes ātrums.

Šā ātruma \vec{V}_a^{23} galu savienojam ar pārnesamo polu P_{36} un caur pārnesamā ortogonālā ātruma \vec{V}_a^{36} galu velkam paralēlu taisni, kas krusto relatīvo staru punktā L . Nogrieznis AL ir puse Koriolisa (Coriolis) paātrinājuma, jo proporcija

$$\frac{AL}{V_a^{23}} = \frac{V_a^{36}}{AP_{36}} = \omega_{36} \quad \text{dod} \quad \overline{AL} = [\omega_{36} V_a^{23}] = \frac{1}{2} \bar{j}_\gamma.$$



323. zīm.

Tālāk, velkot caur \vec{V}_a^{36} galu taisni paralēli BC , atrodam punktu B un C ortogonālos ātrumus \vec{V}_b^{36} un \vec{V}_c^{36} , no kuņiem pirmais reprezentē arī ortogonālo slīdes ātrumu 5 pret 6.

Veidojot ātrumu diferences $\vec{V}_c^{36} - \vec{V}_a^{36}$ un $\vec{V}_b^{36} - \vec{V}_a^{36}$, konstruējam ar pusriņķu palīdzību punktu C un B relatīvos normālpaātrinājumus CN un BM kustībā pret punktu A .

Tāpat ar ātrumu \vec{V}_c^{36} palīdzību konstruējam punkta C relatīvo normālpaātrinājumu CK kustībā pret punktu O_2 un pārejam uz paātrinājuma plāna konstrukciju.

Ievērojot, ka punkti A , B un C atrodas uz pašas slīdošas taisnes, paātrinājuma plāna pamatfigūra būs sastādīta no taisnstūriem. Konstruējam šos taisnstūrus (322b. zīm.) ar pamatiem $\overline{a'b'} = \overline{MB}$ un $\overline{a'c'} = \overline{NC}$ un ar kopīgu augstumu $\overline{a'a} = \overline{b'b} = \overline{c'c} = 2\overline{AL} = \bar{j}_\gamma$. Punktā c atliekam vēl relatīvo normālpaātrinājumu $co_2 = CK$ un pārejam uz pašu paātrinājumu konstrukciju.

Ievērojot, ka punkts A griežas vienmērīgi ap punktu O_1 un ka $\vec{V}_a^{16} = \vec{V}_a^{26} = \overline{AO}_1$, arī $\bar{j}_a^{16} = \bar{j}_a^{26} = \overline{AO}_1$. Šo paātrinājumu atliekam punktā a' un caur tā galu velkam paralēli slīdes virzienam 2 pret 3 taisni $\alpha-\alpha$. Caur punktu O_2 velkam perpendikulāri CO_2 taisni $\gamma-\gamma$ un caur punktu b paralēli slīdes virzienam 5 pret 6 taisni $\beta-\beta$.

Uz taisnēm $\alpha-\alpha$, $\beta-\beta$ un $\gamma-\gamma$ atrodami punktu A , B un C , kā 3. locekļa punktu, paātrinājumu vektoru gali. Lai atrastu tos, velkam

kaut kur starp $\beta-\beta$ un $\gamma-\gamma$ taisni $b''c'' \perp BC$ un sadalām to proporcionāli attālumiem BA un AC , iegūstot punktu a'' , kuŗu savienojam ar taisni $\beta-\beta$ un $\gamma-\gamma$ krustošanās punktu Q . Taisnes Qa'' krustošanās punkts ar taisni $\alpha-\alpha$ dod paātrinājuma \bar{j}_a^{36} galu. Velkot caur to pašu punktu taisni perpendikulāri BC līdz krustošanai ar $\beta-\beta$ un $\gamma-\gamma$, atrodam arī \bar{j}_b^{36} un \bar{j}_c^{36} galus. Pirmais no šiem paātrinājumiem \bar{j}_b^{36} ir līdz ar to arī meklējamais slīdes paātrinājums 5 pret 6.

Ņemot vērā, ka punktu A , B un C paātrinājumu gali trešā un otrā locekļa kustībā pret sesto veido taisnstūrus, kuŗu divas malas parallēlas slīdes virzienam, velkam caur \bar{j}_a^{26} galu taisni perpendikulāri BC un caur \bar{j}_b^{36} un \bar{j}_c^{36} galiem taisnes parallēli slīdes virzienam 2 pret 3. Iegūto taisnstūru pārējās virsotnēs atrodam paātrinājumu \bar{j}_b^{26} un \bar{j}_c^{26} galus.

Atrastais (322b. zīm.) paātrinājumu plāns ietver sevī visus 9 nolīdzinājumus, kas dod sakaru starp dažādiem punktu A , B un C paātrinājumiem:

- 1) $\bar{j}_a^{26} = \bar{j}_a^{23} + \bar{j}_a^{36} + \bar{j}_\gamma$
- 2) $\bar{j}_b^{26} = \bar{j}_b^{23} + \bar{j}_b^{36} + \bar{j}_\gamma$
- 3) $\bar{j}_c^{26} = \bar{j}_c^{23} + \bar{j}_c^{36} + \bar{j}_\gamma$
- 4) $\bar{j}_a^{36} = \bar{j}_b^{36} + \bar{j}_{an}^b + \bar{j}_{at}^b$
- 5) $\bar{j}_a^{36} = \bar{j}_c^{36} + \bar{j}_{an}^c + \bar{j}_{at}^c$
- 6) $\bar{j}_b^{36} = \bar{j}_c^{36} + \bar{j}_{bn}^c + \bar{j}_{bt}^c$
- 7) $\bar{j}_a^{26} = \bar{j}_b^{26} + \bar{j}_{an}^b + \bar{j}_{at}^b$
- 8) $\bar{j}_a^{26} = \bar{j}_c^{26} + \bar{j}_{an}^c + \bar{j}_{at}^c$
- 9) $\bar{j}_b^{26} = \bar{j}_c^{26} + \bar{j}_{bn}^c + \bar{j}_{bt}^c$

No pirmajiem 3 nolīdzinājumiem redzams, ka attālums starp \bar{j}_a^{36} un \bar{j}_a^{26} galiem dod slīdes paātrinājumu \bar{j}^{23} , kas visiem 3 punktiem vienāds.

No 4) nolīdzinājuma redzams, ka attālums starp \bar{j}_b^{36} un \bar{j}_a^{36} galiem dod tangenciālo paātrinājumu \bar{j}_{at}^b punkta A kustībā ap B .

Tāpat no 5) nolīdzinājuma redzams, ka attālums starp \bar{j}_c^{36} un \bar{j}_a^{36} galiem dod tangenciālo paātrinājumu \bar{j}_{at}^c punkta A kustībā ap C u. t. t.

§ 121. Paātrinājumu konstrukcija kinēmatiskās ķēdēs, kas satur augstākus pārus.

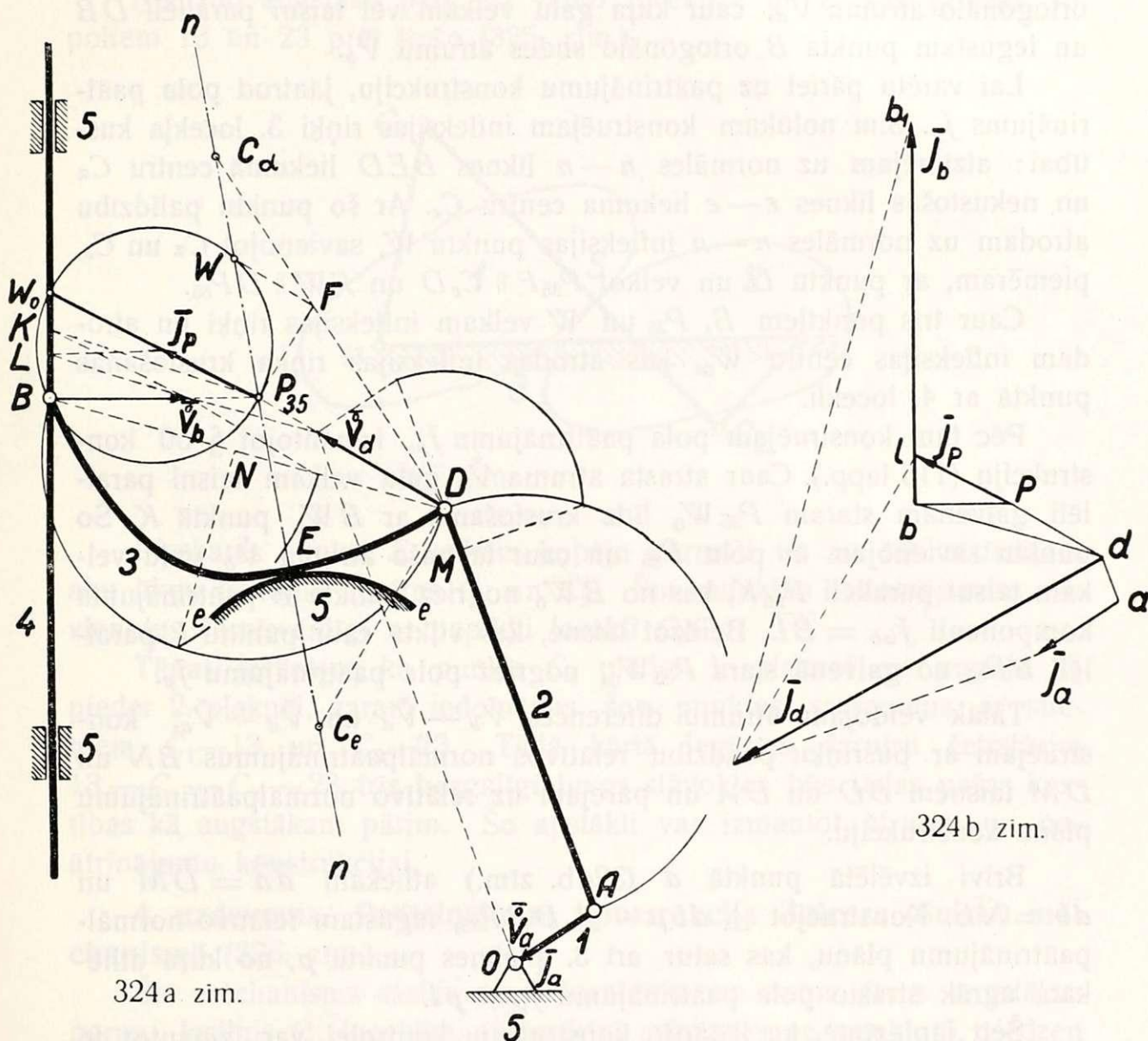
I metode pastāv iekš tam, ka loceklim, kas savienots ar augstāku pāri, atrod infleksijas iņķi un nosaka pola paātrinājumu, kas dod iespēju konstruēt paātrinājumus ar relatīvo normālpaātrinājumu plāna palīdzību. Aprakstīto metodi izlietosim sekojošā uzdevumā.

3. uzdevums. Paātrinājumu konstrukcija slīdsviras tvaikdaļa mēchanismā (Wälzhebelsteuerung)⁶¹ (324. zīm.).

Mēchanisms sastāv no 5 locekļiem un satur vienu augstāku pāri starp locekļiem 3 un 5. Nekustīgais loceklis apzīmēts ar 5, bet 1. loceklis, vienmērīgi griežoties ap punktu O , piedzen mēchanismu.

Dots punkta A ātrums: $V_a = \text{const}$.

Jākonstruē slīdes paātrinājums \bar{j}_b kustībā 4 pret 5.



324a zīm.

324b zīm.

Šeit 324a. zīm. parādītais mēchanisms atšķiras no agrāk apskatītā (311. zīm.) ar to, ka šeit svira 3 ir izliekta, bet tur tā bija taisna, sakarā ar ko infleksijas punkta konstrukcijai būs jālieto cits paņēmiens.

⁶¹ N. Rozenauers. Jauna slīdsviras tvaikdaļa mēchanisma (Wälzhebelsteuerung) paātrinājuma konstrukcija. L. Ū. R. Mēch. fak. serija. T. II № 8. 1937.

Dotā ātruma mērogu vienkāršības dēļ izvēlamies tādu, lai ortogonālais ātrums reprezentētos ar attālumu AO : $\vec{V}_a = \overline{AO}$. Tādā gadījumā arī paātrinājums $\vec{j}_a = \overline{AO}$.

Atrodam 3. locekļa momentāno polu P_{35} , velkot punktā B normāli slīdes virzienam līdz krustošanai ar 3. un 5. locekļa kopējo normāli $n-n$, kas vilkta šo locekļu pieskares punktā E .

Ātrumu konstrukcijai savienojam punktu D ar polu P_{35} un velkam caur punktu O taisni paralēli AD , kas no DP_{35} nogriež punkta D ortogonālo ātrumu \vec{V}_d , caur kuŗa galu velkam vēl taisni paralēli DB un iegūstam punkta B ortogonālo slīdes ātrumu \vec{V}_b .

Lai varētu pāriet uz paātrinājumu konstrukciju, jāatrod pola paātrinājums \vec{j}_p . Šim nolūkam konstruējam infleksijas riņķi 3. locekļa kustībai: atzīmējam uz normāles $n-n$ līknes BED liekuma centru C_α un nekustošās līknes $e-e$ liekuma centru C_e . Ar šo punktu palīdzību atrodam uz normāles $n-n$ infleksijas punktu W , savienojot C_α un C_e , piemēram, ar punktu D un velkot $P_{35}F \parallel C_eD$ un $FW \parallel DP_{35}$.

Caur trīs punktiem B , P_{35} un W velkam infleksijas riņķi un atrodam infleksijas centru W_0 , kas atrodas infleksijas riņķa krustošanās punktā ar 4. locekli.

Pēc tam konstruējam pola paātrinājumu \vec{j}_p , izmantojot § 50 konstrukciju (116 lapp.). Caur atrastā ātruma \vec{V}_b galu velkam taisni paralēli galvenam staram $P_{35}W_0$ līdz krustošanai ar BW_0 punktā K . Šo punktu savienojam ar polu P_{35} un caur tā paša ātruma \vec{V}_b galu velkam taisni paralēli $P_{35}K$, kas no BW_0 nogriež punkta B paātrinājuma komponenti $\vec{j}_{wb} = \overline{BL}$. Beidzot taisne, kas vilkta caur punktu L paralēli BP_{35} no galvenā stara $P_{35}W_0$, nogriež pola paātrinājumu \vec{j}_p .

Tālāk veidojam ātrumu diferences $\vec{V}_b - \vec{V}_d$ un $\vec{V}_d - \vec{V}_a$, konstruējam ar pusriņķu palīdzību relatīvos normālpāātrinājumus BN un DM taisnēm BD un DA un pārejām uz relatīvo normālpāātrinājumu plāna konstrukciju.

Brīvi izvēlētā punktā d (324b. zīm.) atliekam $\overline{da} = \overline{DM}$ un $\overline{db} = \overline{NB}$. Konstruējot $\triangle dbp \sim \triangle DBP_{35}$, iegūstam relatīvo normālpāātrinājumu plānu, kas satur arī 3. plaknes punktu p , no kuŗa atliekam agrāk atrasto pola paātrinājumu $\vec{j}_p = \overline{pl}$.

Šeit jāpiezīmē, ka izdarīto konstrukciju kontrolei var izmantot to apstākli, ka \vec{j}_p galam jāatrodas uz taisnes, kas iet caur punktu b perpendikulāri bp un ka $\overline{bl} = \overline{BL}$.

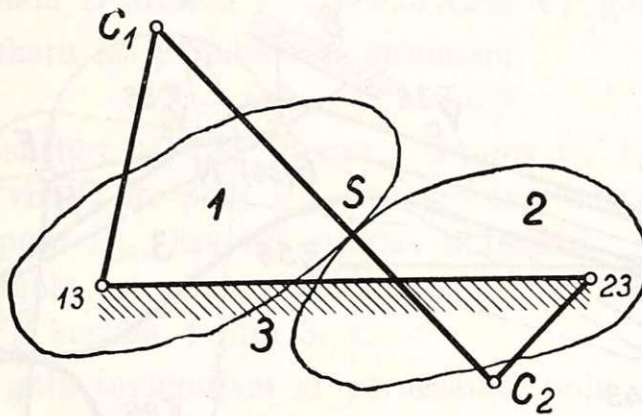
Punktā a atliekam paātrinājumu \vec{j}_a un caur tā galu velkam taisni $\perp ad$ līdz krustošanai ar taisni, kas vilkta caur \vec{j}_p galu $\perp dp$. Krustošanās punktu savienojam ar punktu d un iegūstam punkta D paātrinājumu \vec{j}_d .

Ievērojot beidzot, ka punkta B paātrinājuma virziens sakrīt ar slīdes virzienu, velkam caur \bar{j}_d galu taisni $\perp bd$, kas no attiecīgā virziena taisnes nogriež meklējamo slīdes paātrinājumu $\bar{j}_b = \overline{bb_1}$.

Piezīme. Iegūtā paātrinājuma \bar{j}_b daļa lb_1 nav nekas cits kā punkta B paātrinājums $r\tau = P_{35}B \cdot \tau$ 3. locekļa kustībā.

II metode. Katru augstāko pāri aizvieto ar attiecīgo šarnīru četrstūri, kurā izdara paātrinājumu konstrukciju.

Ņemsim augstāko pāri, ko veido locekļi 1 un 2, kas griežas ap poliem 13 un 23 pret trešo (325. zīm.).



325. zīm.

Pieskares punktā S velkam kopējo normāli un uz tās atzīmējam abu likņu liekuma centrus C_1 un C_2 . Šos punktus iedomājamies savienotus šarnīrveidīgi ar papildu locekli C_1C_2 .

Tāpat, ievērojot, ka punkts C_1 pieder 1. plaknei un punkts C_2 pieder 2. plaknei, varam iedomāties šos punktus savienotus ar stieņiem C_1-13 un C_2-23 . Tādā kārtā iegūtam šarnīru četrstūrim $13-C_1-C_2-23$ trīs bezgalīgi tuvos stāvokļos būs tādas pašas kustības kā augstākam pārim. Šo apstākli var izmantot ātrumu un paātrinājumu konstrukcijai.

4. uzdevums. Paātrinājumu konstrukcija Zulcera (Sulzer) mēchanismā (326. zīm.).

Šis mēchanisms sastāv no 6 locekļiem un satur divus augstākus pārus. Izcilnis (1. loceklis), vienmērīgi griežoties ap punktu 0, piedzen mēchanismu.

Dots punkta A , kas ir liekuma centrs pieskares punktā, ātrums $V_a = \text{const}$.

Jākonstruē punkta B slīdes paātrinājums \bar{j}_b^{56} kustībā 5 pret 6.

Pārbaudām piespiestas kustības kritēriju

$$h + 2z - 3n + 4 = 0 \dots \dots \dots (53)$$

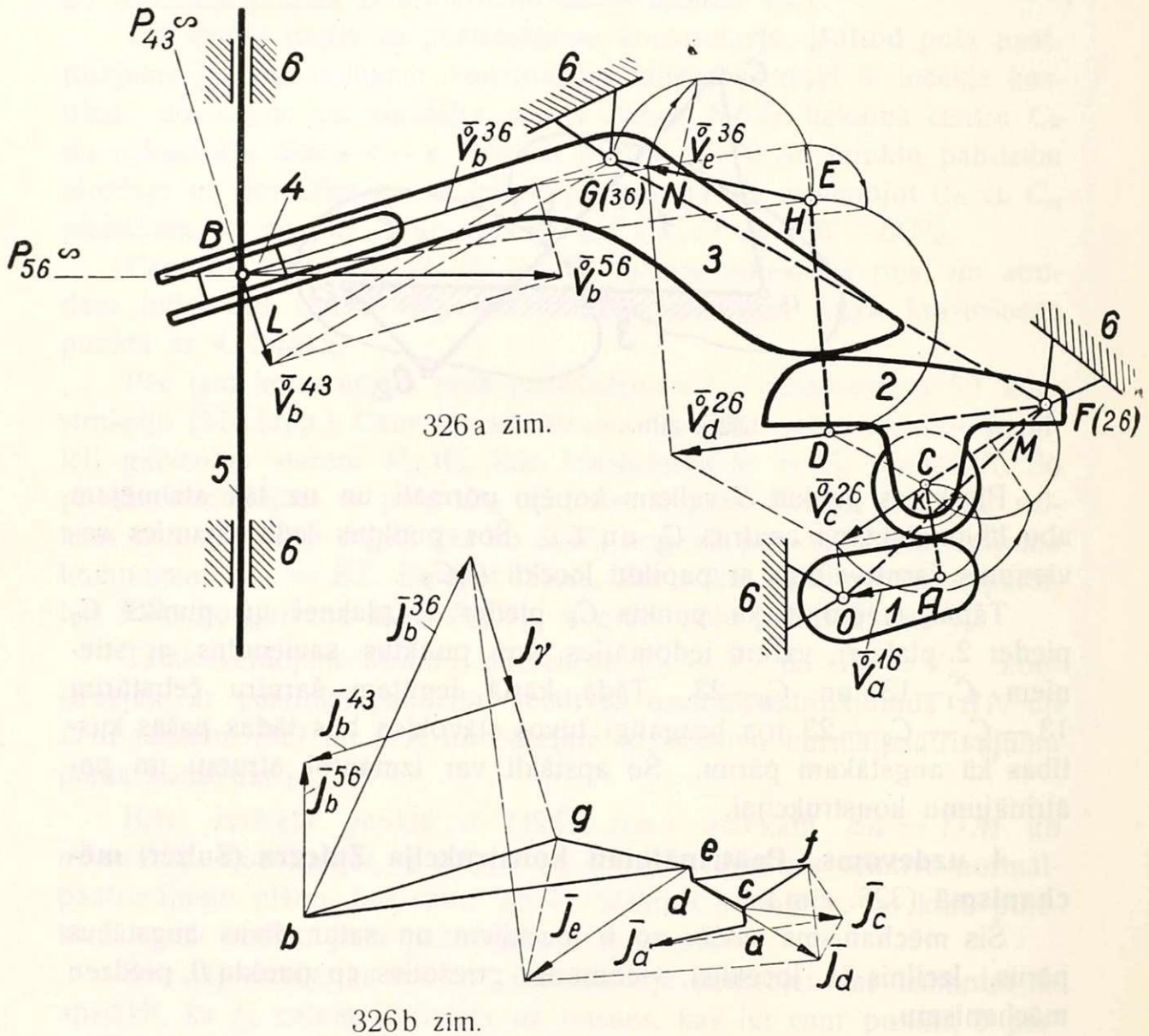
Šeit augstāko nepatstāvīgo pāru skaits $h=2$, locekļu skaits $n=6$, šarnīru skaits $g=4$, slīdpāru skaits $s=2$, tā tad zemāko pāru $z=g+s=6$.

Ievietojot šos skaitļus kritērija formulā, tiešām iznāk

$$2 + 2 \cdot 6 - 3 \cdot 6 + 4 = 0;$$

tas nozīmē, ka mēchanismam piemīt piespiestā kustība.

Lai pārvērstu augstākā pāri starp 1. un 2. locekli slīdes kustību velšanās kustībā, 2. locekli ievietots ritenītis ar centru punktā C.



Lai būtu iespējams izdarīt paātrinājumu konstrukciju, iepriekš jāizdara ātruma konstrukcija.

Dotā ātruma mērogu vienkāršības dēļ izvēlamies tādu, lai ortogonālais ātrums $\vec{V}_a^{16} = \vec{AO}$, tad arī $\vec{j}_a = \vec{AO}$.

Šarnīru četrstūris, ar kuŗu aizvietojam augstāko pāri starp 1. un 2. locekli, ir $ACFO$. Velkot tamdēļ caur punktu O taisni paralēli AC , atrodam uz stara FC punkta C ātrumu \bar{V}_c^{26} .

Pieskares punktā starp 2. un 3. locekli velkam kopējo normāli un atzīmējam uz tās abus liekuma centrus D un E . Tad augstāko pāri starp šiem locekļiem var aizvietot ar šarnīru četrstūri $DEGF$.

Izmantojot atrasto punkta C ātrumu \bar{V}_c^{26} , atrodam tam pašam loceklim piederoša punkta D ātrumu \bar{V}_d^{26} . Velkot caur tā galu taisni paralēli DE , atrodam otrā šarnīru četrstūrī punkta E ātrumu \bar{V}_e^{36} kustībā 3 pret 6. Tālāk pārejam uz punktu B , kas arī pieder 3. loceklim, un atrodam punkta B ātrumu \bar{V}_b^{36} , velkot caur \bar{V}_e^{36} galu taisni $\parallel EB$.

Ievērojot sakaru starp punkta B ātrumiem

$$\bar{V}_b^{56} = \bar{V}_b^{46} = \bar{V}_b^{43} + \bar{V}_b^{36},$$

konstruējam taisnstūri tā, lai atrastais ātrums \bar{V}_b^{36} būtu viena mala, otra mala būtu virzīta uz polu P_{43} , kas atrodas bezgalībā, bet diagonāle virzīta uz polu P_{56} , kas arī atrodas bezgalībā. Iegūtā taisnstūra diagonāle reprezentē ortogonālo slīdes ātrumu \bar{V}_b^{56} , bet otrā mala dod slīdes ātrumu \bar{V}_b^{43} kustībā 4 pret 3.

Šā ātruma galu savienojam ar pārnesamo polu G (36) un caur \bar{V}_b^{36} galu velkam paralēlu taisni, kas krustojas ar relatīvo staru punktā L . Nogrieznis BL ir puse Koriolisa (Coriolis) paātrinājuma, jo proporcija

$$\frac{BL}{\bar{V}_b^{43}} = \frac{V_b^{36}}{BG} = \omega_{36},$$

kuŗa seko no līdzīgiem trijstūriem, dod

$$\overline{BL} = [\bar{\omega}_{36} \cdot \bar{V}^{43}] = \frac{1}{2} \bar{J}_\gamma.$$

Paātrinājumus varētu konstruēt pašā mēchanisma zīmējumā, bet lai tas paliktu skaidrāks, paātrinājumu konstrukcija šeit izdarīta atsevišķi (326b. zīm.) ar relatīvo normālpaātrinājumu plāna palīdzību.

Minētā plāna iegūšanai konstruējam vispirms vajadzīgos relatīvos normālpaātrinājumus: veidojam ātrumu diferenci $\bar{V}_c - \bar{V}_a$ un konstruējam ar pusriņķa palīdzību locekļa AC relatīvo normālpaātrinājumu CK ; ar ātrumu \bar{V}_c^{26} konstruējam taisnes CF relatīvo normālpaātrinājumu CM . Veidojot ātrumu diferenci $\bar{V}_e - \bar{V}_d$, konstruējam locekļa DE relatīvo normālpaātrinājumu EH un ar ātrumu \bar{V}_e^{36} konstruējam taisnes EG relatīvo normālpaātrinājumu EN .

Tagad pārejam uz relatīvo normālpaātrinājumu plāna konstrukciju: brīvi izvēlētā punktā c (326b. zīm.) konstruējam $\overline{ca} = \overline{CK}$, $\overline{cf} = \overline{CM}$, un $\triangle cfd \sim \triangle CFD$; tālāk atliekam $\overline{de} = \overline{HE}$, $\overline{eg} = \overline{EN}$ un konstruējam $\triangle egb \sim \triangle EGB$, ar ko minētais plāns iegūts.

Pašu paātrinājumu konstrukciju plānā izdarām šādi: punktā a atliekam \vec{j}_a un caur tā galu velkam taisni $\perp AC$ līdz krustošanai ar taisni, kas vilkta caur punktu f perpendikulāri CF ; savienojot krustošanās punktu ar punktu c , iegūstam \vec{j}_c .

Caur tā galu velkam taisni $\perp CD$ līdz krustošanai ar taisni, kas vilkta caur punktu f perpendikulāri DF ; savienojot krustošanās punktu ar punktu d , iegūstam \vec{j}_d .

Caur tā galu velkam taisni $\perp DE$ līdz krustošanai ar taisni, kas vilkta caur punktu g perpendikulāri EG ; savienojot krustošanās punktu ar e , iegūstam \vec{j}_e .

Caur tā galu velkam taisni $\perp EB$ līdz krustošanai ar taisni, kas vilkta caur punktu g perpendikulāri BG ; savienojot krustošanās punktu ar punktu b , iegūstam punkta B paātrinājumu \vec{j}_b^{36} kustībā 3 pret 6.

Lai atrastu meklējamo slīdes paātrinājumu, lietojam formulu, kas dod sakaru starp dažādiem punkta B paātrinājumiem:

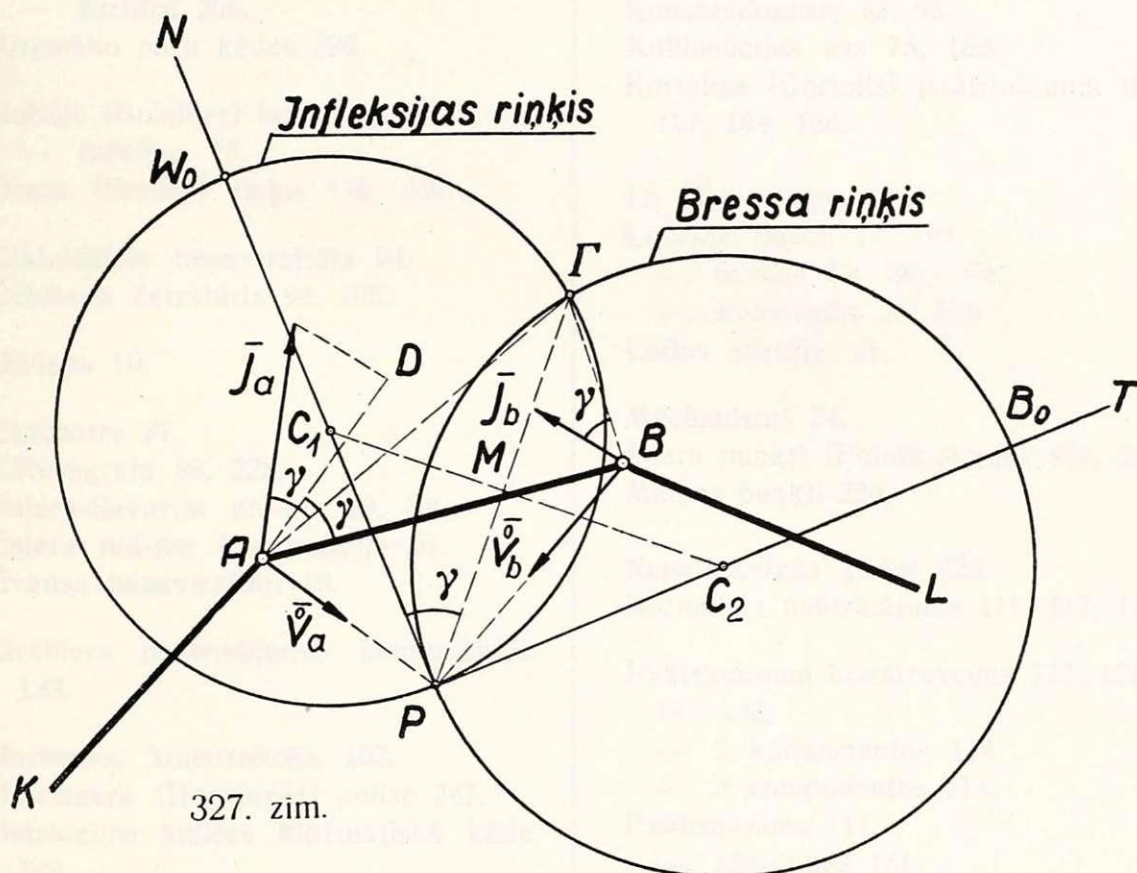
$$\vec{j}_b^{56} = \vec{j}_b^{46} = \vec{j}_b^{43} + \vec{j}_b^{36} + \vec{j}_\gamma.$$

Saskaņā ar to atliekam no iegūtā paātrinājuma \vec{j}_b^{36} gala Koriolisa (Coriolis) paātrinājumu $\vec{j}_\gamma = 2BL$ un velkam caur tā galu taisni paralēli slīdes virzienam 4 pret 3 līdz krustošanai ar taisni, kas vilkta caur punktu b paralēli slīdes virzienam 5 pret 6. Poligōna mala šinī virzienā reprezentē meklējamo slīdes paātrinājumu $\vec{j}_b^{56} = \vec{j}_b^{46}$, bet poligōna mala, kas iet paralēli BG , dod slīdes paātrinājumu \vec{j}_b^{43} kustībā 4 pret 3.

Infleksijas un Bresa (Bresse) riņķu konstrukcija kinematiskās ķēdes locekļiem ar ātrumu un paātrinājumu vektoru palīdzību.⁶²

Infleksijas riņķis ir svarīgs faktors punktu trajektoriju liekuma centru noteikšanai, tamdēļ parādīsim šeit, kā konstruēt infleksijas un līdz ar to arī Bresa (Bresse) riņķi kinematiskās ķēdes locekļiem ar ātrumu un paātrinājumu vektoru palīdzību, kuŗu konstrukcijas ir jau plaši apskatītas.

Katra locekļa ātruma un paātrinājuma stāvoklis noteikts, ja zināmi ātrumi un paātrinājumi diviem locekļa punktiem, tamdēļ pieņemsim, ka kinematiskās ķēdes loceklim AB (327. zīm.) doti punktu A un B ātrumi V_a , V_b un paātrinājumi \bar{J}_a un \bar{J}_b .



327. zīm.

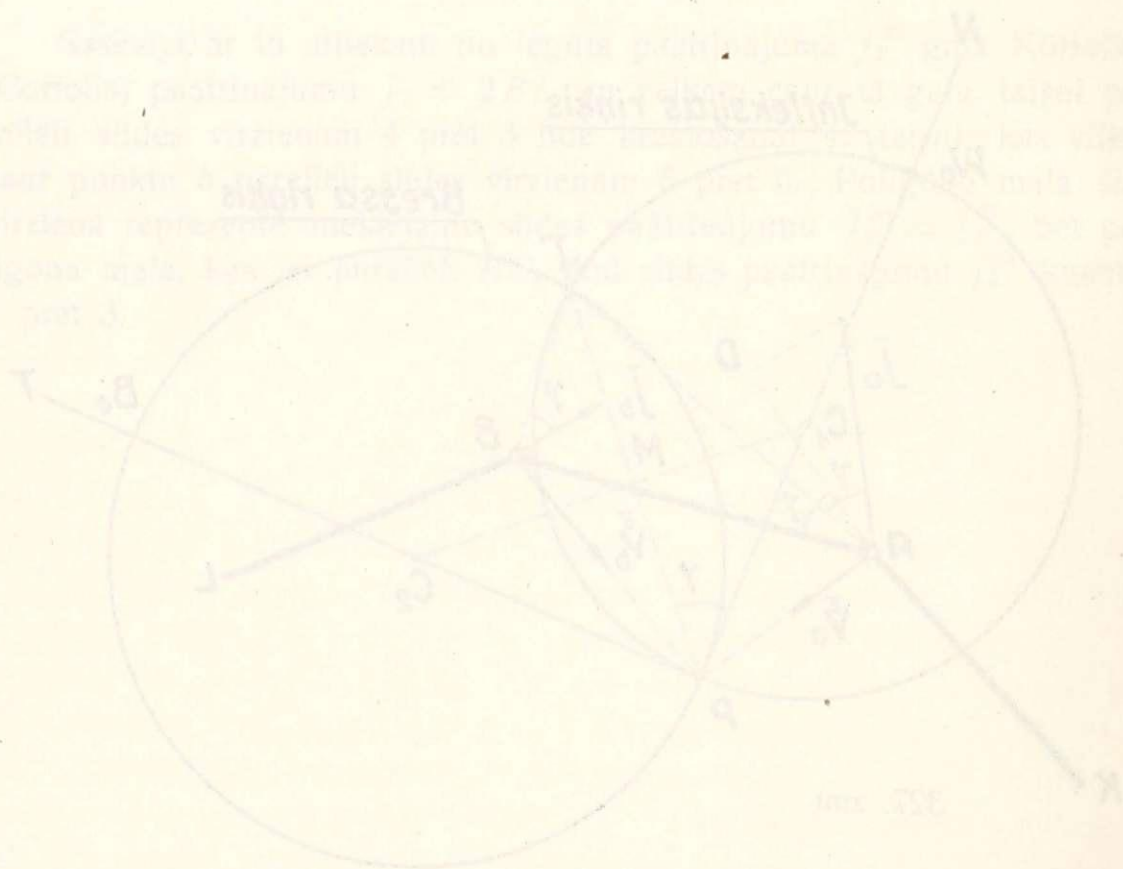
Atliekot dotos ātrumus ortogonālā virzienā un turpinot tos līdz krustošanai, atrodam locekļa AB momentāno griezes polu P .

⁶² N. Rozenauers. Infleksijas un Bresa riņķu konstrukcija kinematiskās ķēdes locekļiem ar ātrumu un paātrinājumu vektoru palīdzību. L. U. R. Mēch. fak. serija T. I № 13. 1936.

Paātrinājumu centru Γ atrodam, veidojot paātrinājumu diferenci $\vec{j}_a - \vec{j}_b = \vec{AD}$ un atliekot no paātrinājumu vektoriem $\angle DAB = \angle \gamma$ tanī pašā virzienā, kā tas iegūts no paātrinājumu diferences AD līdz taisnei AB . Šādā ceļā iegūtas divas taisnes, kā zināms, krustojas paātrinājumu centrā Γ .

Tālāk savienojam polu P ar Γ un atliekam to pašu $\angle \gamma$ no taisnes $P\Gamma$ pretējā virzienā. Iegūtā taisne ir galvenais stars jeb pola normāle PN . Perpendikulāri šai normālei velkam pola tangenti PT .

Beidzot atrodam abu riņķu centrus, dalot $P\Gamma$ uz pusēm un velkot viduspunktā M taisni perpendikulāri $P\Gamma$, kas krusto PN infleksijas riņķa centrā C_1 un PT Bresa riņķa centrā C_2 . No atrastiem centriem velkam abus riņķus caur punktiem P un Γ .



Nosaukumu rādītājs.

- Absolūtais paātrinājums 151.
Antiparallēlograms 36, 227.
Aptveramā un envelope 53, 86, 103.
Aronholda konstrukcija 77.
— teorēmas 56, 58.
Atbalstīšana pret griezi 17.
— pret virzi 16.
Atgriezes riņķis 52.
— punkts 46.
Ātrums 97.
—, relatīvais slīdes 145.
Ātrumu sešstūris 143.
Augstākie pāri 16, 19, 22, 216.
— šarnīru 206.
Augstāko pāru ķēdes 220.
- Bobiljè (Bobillier) konstrukcija 74, 76.
— teorēma 75.
Bresa (Bresse) riņķis 118, 269.
- Cikloidālais taisnvirzītājs 94.
Čebiševa četrstūris 94, 105.
- Divloks 19.
- Ekscentrs 27.
Ellīpsografts 88, 228.
Eulera-Savarija nol-ms 39, 59.
Eulera nol-ma konstrukcija 61.
Ēvansa taisnvirzītāji 88.
- Grüblera paātrinājuma konstrukcija 133.
- Hartmaņa konstrukcija 102.
Heizingera (Heysinger) kulise 247.
Heizingera kulises kinēmatiskā ķēde 249.
Hodografts, polārais 131.
—, lokālais 132.
Holst'a mēchanisms 258.
- Infleksijas centrs 69.
— punkts 43.
— riņķis 51, 81, 154, 269.
- Ķēžu analīze 197.
Kinēmatiskās ķēdes 23.
— ķēdes, 6 locekļu 198.
— ķēdes, 8 locekļu 203, 207.
— ķēdes, n locekļu 192.
— ķēdes, nepatstāvīgās 224.
— ķēdes bez šarnīru četrstūriem 240.
— ķēdes, pārāk slēgtas 221.
- Kinēmatiskie pāri 11.
Kleja (Kley) rēgulātors 84.
Kloķa mēchanisms 25, 34, 81, 159, 177.
Konchoidālais taisnvirzītājs 93.
Konchoidografts 82, 93.
Kollineācijas ass 75, 153.
Koriolisa (Coriolis) paātrinājums 150, 182, 184, 186.
- La Hira riņķis 118.
Locekļi, bināri 23, 195.
—, ternāri 23, 198, 204.
—, kvaternāri 23, 205.
Lodes šarnīrs 15.
- Mēchanisms 24.
Miera punkti (Points morts) 160, 224.
Maiņas punkti 224.
- Nepatstāvīgās ķēdes 224.
Normālais paātrinājums 111, 117, 122.
- Paātrinājuma konstrukcijas 122, 127, 131, 133.
— 2 komponentes 114.
— 3 komponentes 112.
- Paātrinājums 111.
—, absolūtais 151.
—, relatīvais 149.
—, Koriolisa 150, 182, 184, 186.
- Paātrinājumu centrs 119.
— centra konstrukcijas 126, 130.
- Pantografts 92, 223.
Pašgrābis 210.
Piespiestās kustības kritērijs 194, 217

Pola pārvietošanas ātrums 101.
 Pola paātrinājuma konstrukcijas 115,
 116.
 Polārais ātrumu plāns 100, 166, 167.
 — paātrinājumu plāns 130.
 Poloidas 28.
 Polu taisne 135, 144, 193, 200, 202.
 Prölla rēgulātors 85.
 Prölla-Švābes mēchanisms 219, 243.

Relatīvais slīdes ātrums 145.
 — griezes ātrums 140.
 — paātrinājums 149.
 — pōls 135, 153.
 Relatīvo normālpāātrinājumu plāns
 179.
 Rotējošā kloķa cilpa 27, 161, 185, 187.

Saistītie riņķi 51.
 Shaping-mašīna 259.
 Skrūves pāris 15.
 Slīdpāris 14, 167, 181, 210, 229.
 Slīdpāru ķēdes 23, 215.
 Slīdsviras mēchanisms 218, 242, 245,
 263.

Stivensona (Stephenson) mēchanisms
 199, 202, 236.
 — kulise 200.
 Svārstīgā kloķa cilpa 26, 160, 169,
 183.

Šarnīrs 14.
 Šarnīru četrstūris 24, 153, 157, 171,
 180.
 — ķēdes 23, 197.
 — paralēlograms 158.

Trijloks 20.
 Trijparalēlkloķu ķēde 221.
 Taisnvirzītāji 88.
 — Evansa 88.
 — cikloidālais 94.
 — konchoidālais 93.
 — Vata (Watt) 94.
 Trajektoriju izliekums 49.

Vata (Watt) mēchanisms 199, 207, 238.
 — mašīna 199.

Zemākie pāri 15.
 Zulcera mēchanisms 265.



