Латвийский ордена Трудового Красного Знамени
государственный университет им.П.Стучки
Вычислительный центр

На правах рукописи

Цибулис Андрей Брониславович

УДК 517.95

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ С РАЗРЫВНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ И НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

01.01.02 - дифференциальные уравнения и математическая физика

Диссертация на соискание
ученой степени кандидата
физико-математических наук

C. bul.

Научный руководитель -
канд.физ.-мат.наук
РАЙТУМ У.Ё.

Рига - 1982

ОБОЗНАЧЕНИЯ

На протяжении всей работы использованы следующие обозначения.

E_n - n -мерное евклидово пространство,

$x=(x_1,\dots,x_n)$ - произвольная точка в нем,

Ω - ограниченная область в E_n, т.е. открытое связное множество, содержащееся в каком-нибудь шаре достаточно большого радиуса,

q - фиксированное число, большее n,

∂G - граница множества G,

$\bar{G}$ - замыкание G.

Для обозначения функции p использована следующая запись $p=p(y)$ или $y\to p(y)$, или $p(\cdot)$,

$p(y)$ - значение функции p в точке y,

$\mathcal{D}(p)$ - область определения функции p,

$\equiv$ - равно по определению или тождественно равно,

$$p(x,t\pm)\equiv\lim_{\substack{\varepsilon\to0\\ \varepsilon>0}}p(x,t\pm\varepsilon),$$

$N=\{1;2,\dots\}$ - множество натуральных чисел,

$E\equiv E_1$, $K\equiv\{1;2;\dots;n\}$,

$\|\cdot\|_\Omega$ - норма в пространстве $W_2^1(\Omega)$,

$\|\cdot\|_{r,\Omega}$ - норма в пространстве $L_r(\Omega)$.

Определения функциональных пространств

$L_r(\Omega)$, $W_r^l(\Omega)$, $\overset{\circ}{W}{}_r^l(\Omega)$, $C^\alpha(\bar{\Omega})$, $\dot{C}^\infty(\Omega)$

берутся из работы [23].

Если не могут возникнуть недоразумения, символ Ω в обозначениях норм и пространств опускается.

Буквой c с индексами или без них обозначаются постоянные, конкретные значения которых в данном контексте несущественны, причем буквой c с одним и тем же индексом или просто без индекса могут обозночаться различные постоянные

$$F_0 \equiv L_{\frac{2q}{q+2}}(\Omega) \times \underbrace{L_2(\Omega) \times \ldots \times L_2(\Omega)}_{n} \times L_{\frac{2(q-1)}{q}}(\Gamma).$$

ВВЕДЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена исследованию вопросов разрешимости смешанной краевой задачи для эллиптических уравнений второго порядка с разрывными нелинейностями (РН)

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\gamma_{ij}(x,u)u_{x_j}+\gamma_i(x,u)\right]+\sum_{i=1}^{n}\varkappa_i(x,u)u_{x_i}+$$

$$+\varkappa(x,u)=f(x)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_i} \qquad (0.I)$$

и изучению вопросов существования решения в задачах оптимального управления для эллиптических уравнений с РН.

Термин "разрывные нелинейности", вошедший в литературу в последние годы, употребляется для подчеркивания того факта, что функции, входящие в уравнение (или в граничное условие) могут быть не только нелинейными, но и разрывными по u.

Изложение ведется в терминах вариационных равенств, соответствующих определению обобщенных решений краевых задач для уравнения (0.I) в смысле книги О.А.Ладыженской и Н.Н. Уральцевой [23].

В рамках уравнений с РН могут быть изучены многие физические процессы (процессы кристаллизации и плавления, фильтрации, широкий круг задач со свободными границами). До сих пор уравнения с РН, несмотря на их практическую важность, изучены недостаточно. Это отчасти объясняется математической сложностью таких уравнений, которая, разумеется, зависит от характера нелинейностей и разрывов, а также от того, каким образом разрывные нелинейности входят в рассматриваемое уравнение.

В большинстве работ, относящихся к эллиптическим уравнениям с РН, рассматриваются или уравнения вида

$$Lu + \varkappa(u) = f(x) \qquad (0.2)$$

где L - линейный равномерно эллиптический оператор, т.е. уравнения, разрывная нелинейность в которых не входит под знаком дифференцирования, или квазистационарные задачи типа Стефана. В частности, краевую задачу Дирихле для уравнений вида (0.2) изучали I. Massabo, C. A. Stuart, J.F. Toland [39,42,43].

В настоящей работе основное внимание уделяется эллиптическим уравнениям, разрывная нелинейность в которых входит под знаком дифференцирования. Такие уравнения возникают, например, при изучении процессов кристаллизации.

В литературе обычно различают две постановки задач с фазовыми переходами (задач типа Стефана) - классическую, когда неизвестная граница раздела фаз ищется в виде однозначной, достаточно гладкой поверхности, и обобщенную, в которой (в отличие от первой) допускается существование так называемой двухфазной зоны (дисперсной области), т.е. множества ненулевой меры точек пространства, где температура среды совпадает с равновесной температурой.

Имеется обширная литература, посвященная задачам с фазовыми переходами. Так задачи (типа) Стефана в классической постановке изучались, например, в работах Б.В.Базалий [2, 3], М.А.Бородин [7, 8] , И.И.Данилюк [11, 12] , А.М.Мейрманов [26], У.Фельгенхауэр [34], L. Caffarelli [36], A. Friedman, D. Kinderlehrer [37], J.-F. Rodrigues [44]. Теория обобщенного решения задач Стефана для описания процессов кристаллизации развита в монографии Н.А.Авдонина [1]. В частности, в этой работе указывается, что в задачах кристаллизации при возникновении двухфазной зоны классическое решение перестает существовать, а обобщенное решение достаточно полно описывает двухфазную зону. А.М.Мейрмановым [27] построен пример нестационарной двухфазной задачи Стефана (с достаточно гладкой правой частью), которая имеет только обобщенное решение в смысле О.А.Олейник [28] (для одномерных эллиптических уравнений, как это следует из результатов § 3 главы П, построение примеров, для которых существует лишь обобщенные решения, совсем несложно). Этим обосновывается целесообразность исследования многих физических процессов с точки зрения неклассических (обобщенных) постановок.

Вкратце остановимся на некоторых методах исследования уравнений с РН.

В литературе имеется множество работ (например, А.Д.Ляшко, И.Б.Бадриев, М.М.Карчевский [25], В.Н.Павленко [30]), в которых уравнения с РН изучаются методом монотонных операторов. Систематическое изложение этого метода дано в монографии М.М.Вайнберга [10]. В частности, этим методом в [30] доказаны теоремы разрешимости абстрактных уравнений с разрывными операторами, которые затем применяются при изучении задачи Дирихле для уравнений вида (0.2).

К методу монотонных операторов тесно примыкает интенсивно развивающийся метод применения вариационных неравенств (Г.Дюво и Ж.-Л.Лионс [16], Ж.-Л.Лионс [24], D. Kinderlehrer [38]).

Как показывают работы М.А.Бородина, то (основываясь на предложенной К.Байокки и Э.Мадженесом [5] идее - подходящим образом заменить неизвестную функцию), к вариационному неравенству с монотонным оператором удается свести также некоторые эллиптические краевые задачи, разрывная нелинейность в которых входит под знак дифференцирования. Так в работе [8] этим методом установлены существование и единственность решения двумерной однофазной квазистационарной задачи Стефана. Кроме того, показана также аналитичность свободной границы. Этим же методом изучена аналогичная трехмерная однофазная квазистационарная задача Стефана J-F Rodrigues [44]. Здесь уместно отметить, что одним из классов задач с РН, для изучения которого методика применения вариационных неравенств разработана наиболее полно, являются краевые задачи с разрывной нелинейностью, входящей лишь в граничное условие. Вопросы регулярности решения таких краевых задач для общего квазилинейного эллиптического уравнения рассмотрены А.Домаркасом [15].

Для исследования (как теоретического, так и численного) задач (типа) Стефана применяется, предложенный И.И.Данилюком и В.Е.Кашкахой [13] вариационный метод (см.также Б.В.Базалий и В.Ю.Шелепов [4], И.И.Данилюк [11], В.Е.Кашкаха [19]). Этот метод основан на сведении исходной задачи к задаче отыскания стационарных точек интегрального функционала с переменной областью интегрирования. Однако применение этого метода требует некоторой гладкости границы раздела фаз.

Другим методом близкие задачи с РН исследовались Е.В.Радкевичем [31], Е.В.Радкевичем и А.С.Меликуловым [32].

Разрешимость некоторых частных случаев задачи (2.4) главы I отмечена в работе О.А.Олейник [29].

Для более точного охарактеризования полученных в настоящей работе результатов разрешимости необходимо остановиться на некоторых особенностях математических моделей (в нашем случае вариационное равенство (2.4) главы I), допускающих переходные зоны ненулевой меры. Указанные особенности проиллюстрируем на краевой задаче

$$-\Delta u(x) + c\,u(x) = \varkappa(u(x)) + p(x) \quad , x \in \Omega \tag{0.3}$$

$$u(x) = 0 \quad , x \in \partial\Omega \tag{0.4}$$

исследованной C. A. Stuart [42].

Ради удобства изложения предположим, что функция $t \to \varkappa(t)$, $t \in E \setminus \{t_0\}$ имеет только одну точку $t = t_0$ разрыва первого рода и через $I(t_0)$ обозначим замкнутый интервал с концевыми точками $\varkappa(t_0-), \varkappa(t_0+)$. Тогда переходная зона определяется как множество Ω_0, состоящее из всех тех точек x области Ω, при которых $u(x) = t_0$. Если мера множества Ω_0 больше нуля, то искомой, вообще говоря, является также функция $x \to \varkappa(u(x))$ для $x \in \Omega_0$. В силу этой особенности различают "однозначное" и "многозначное" решение или, соответственно, решение типа I и типа П. А именно, о решении типа П (на множестве Ω_0) говорят в том случае, когда априори предполагается, что множество значений $R(\varkappa)$ искомой функции $x \to \varkappa(u(x))$, $x \in \Omega_0$ содержится в интервале $I(t_0)$, и о решении типа I - если кроме того, предполагается, что множество значений $R(\varkappa)$, $x \in \Omega_0$ состоит только из одной точки. Ясно, что любое решение типа I является также и решением типа П.

Необходимость введения решений типа П обосновывается примерами C. A. Stuart [42], показывающими, что решение типа I существует далеко не всегда. В этой же работе приводятся условия, при выполнении которых задача (0.3)-(0.4) имеет решение $u \in W^2_{2m}$

- типа I,

- типа П, но не имеет решения типа I.

Таким образом, обобщенное решение той или иной краевой задачи для столь общего уравнения - как (0.I) - следует понимать как решение типа П.

Здесь уместно отметить, что в литературе, как правило, считается, что разрывные функции, входящие в рассматриваемое уравнение или в граничное условие, имеют лишь конечное число точек разрыва первого рода по функциональному аргументу u . Большой интерес представляют также случаи, когда исходная функция $\varkappa = \varkappa(x,t)$ терпит разрыв на некоторой поверхности $t = g(x) \not\equiv const$. В литературе уравнения с РН такого типа практически не исследованы. Однако, исследования в этом направлении могут иметь применения в задачах Стефана для термодиффузионной системы уравнений (постановка таких задач дана Н.А.Авдониным [1]), которая в квазистационарном и упрощенном случае рассматривается в § 9 главы I.

В диссертации методом сглаживания (аппроксимации) исходных разрывных нелинейностей и осуществлением предельного перехода доказывается существование обобщенного решения (типа П) в пространстве $W_2^1(\Omega) \cap C^{\alpha}(\bar{\Omega})$ для достаточно широкого класса смешанных краевых задач для уравнения (0.I).

Отметим, что теоремы существования классического решения для ряда двухфазных квазистационарных задач Стефана получены, например, Б.В.Базалием [2] , М.А.Бородиным [7] , В.Е.Кашкахой [19] . Теоремы существования и единственности обобщенного решения для многофазных нестационарных задач Стефана в одних из наиболее широких функциональных классов даны О.А.Олейник [28], и также в книге О.А.Ладыженской, В.А.Солонникова, Н.Н. Уральцевой [22]. Тем не менее, эти теоремы существования и единственности обобщенного решения не переносятся на соответствующие квазистационарные задачи Стефана. Трудности, которые возникают при попытке перенести указанные теоремы, в некоторой степени освещаются в § I главы П.

В литературе проблема единственности решения краевых задач для уравнения (0.I) в обобщенной постановке в сколь-нибудь общих случаях не исследована. Примеры неединственности, построенные в § 2 главы П, показывают, что класс единственности решения вариационного равенства (2.4) главы I не является столь обширным, как класс существования. Особого внимания заслуживает работа И.И.Данилюка [12], в которой показано возникновение неединственности решения двухфазной квазистационарной задачи Стефана, моделирующей реальный физический процесс. Однако, примеры неединственности, построенные в § 2 главы П для более простой задачи (см.также замечание 2.3 главы П), не являются следствием результатов И.И.Данилюка.

Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Литература упорядочена по алфавиту, сначала советские авторы, а потом - иностранные. В библиографии включены только цитированные книги и статьи.

Текст в каждой из трех глав разбит на параграфы. Формулы нумеруются, независимо в каждой из глав, т.е. формула (i,j) является j -ой формулой i -го параграфа. При ссылках на формулы другой главы указывается номер соответствующей главы. Та же система нумерации принята и для определений, лемм, теорем, замечаний и следствий.

Первая глава диссертационной работы посвящена изучению (в неклассической постановке) вопросов существования решения смешанной краевой задачи для эллиптических уравнений второго порядка с РН. Понятие обобщенного решения вводится в § 2 при помощи вариационного равенства (2.4). Основным результатом главы I являются теоремы существования (теоремы 7.I и 10.I). В главе I также показано, что исходную задачу (2.4) можно аппроксимировать так, что последовательность решений аппроксимированных задач сходится сильно в пространстве $W_2^1(\Omega)$ к некоторому решению исходной задачи. В § 9, основываясь на методику доказательства теоремы 7.I, устанавливается существование обобщенного решения (определяемого подходящим образом) краевой задачи для упрощенной термодиффузионной системы уравнений в квазистационарном случае.

В главе II обсуждаются вопросы единственности решения вариационного равенства (2.4) главы I. Приводятся примеры, показывающие, что решение указанной задачи (2.4) неединственно даже в том случае, когда допускаются лишь зоны перехода нулевой меры. Выделяются также некоторые классы единственности обобщенного решения для уравнения

$$\Delta u + \frac{\partial}{\partial x_n}(\mathcal{H}(u)) = f \quad , x \in \Omega .$$

Глава III посвящена некоторым приложениям результатов разрешимости уравнения (0.I) в задачах оптимального управления. Основное содержание этой главы составляют теоремы существования оптимального управления эллиптическими уравнениями с разрывными нелинейностями. В § 3 приводятся также необходимые условия экстремума для сглаженной задачи оптимального управления.

На защиту выносятся следующие результаты:

1. Разрешимость в обобщенной постановке достаточно широкого класса эллиптических уравнений второго порядка с разрывными нелинейностями.

2. Существование оптимального управления для достаточно широкого класса эллиптических уравнений второго порядка с разрывными нелинейностями.

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю У.Е.Райтуму.

Глава I. СУЩЕСТВОВАНИЕ ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ

В этой главе исследуются вопросы существования решения для достаточно общего вариационного равенства, в рамках которого могут быть изучены (в неклассической постановке) краевые задачи для уравнений с разрывными нелинейностями вида (0.I).

Основной результат главы I (а также всей работы) - теорема существования (7.I).

В § 9 метод доказательства теоремы 7.I применяется для установления разрешимости (в определенном смысле) упрощенной термодиффузионной системы в квазистационарном случае.

Некоторые результаты главы I (теоремы 4.2 и 8.I) представляют также самостоятельный интерес)

§ I. Основные обозначения, термины и предположения

Пусть Ω - ограниченная строго липшицева область евклидова пространства E_n, $n \geq 2$ с границей $\partial\Omega = \Gamma \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_*$, $\Gamma \cap \Gamma_0 = \varnothing$, где Γ_0, Γ - открытые множества в смысле $n-1$ -мерной топологии на $\partial\Omega$, а Γ_* - замкнутое множество нулевой меры (относительно $n-1$ -мерной топологии и $n-1$ -мерной меры на $\partial\Omega$). Допускается также случай $mes\,\Gamma_0 = 0$.

Через $K_\rho(x^0)$ обозначается шар радиуса ρ с центром в точке x^0, т.е. множество $\{x \in E_n : |x - x^0| < \rho\}$. Там, где не могут возникнуть недоразумения, вместо $K_\rho(x^0)$ пишется K_ρ.

Непоясненные в тексте термины и обозначения понимаются как в работе [23].

Определение I.I. Согласно [23] область $\Omega \subset E_n$ называется строго липшицевой, если для $\forall x^0 \in \partial\Omega$ можно ввести координаты $y_k = C_{k\ell}(x_\ell - x_\ell^0)$, где $(C_{k\ell})$ - ортогональная матрица, так, что пересечение $\partial\Omega$ с замыканием цилиндра

$$Ц_{R,L} \equiv \left\{ x \in E_n : \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 < R^2, -2LR < x_n < 2LR \right\}$$

соответствующим координатам $y_1, \dots, y_n$, задается уравнением

$$y_n = \omega(y_n'), \quad y_n' \equiv (y_1, \dots, y_{n-1}),$$

где $\omega(y_n')$ есть липшицева функция для $|y_n'| \le R$ с константой Липшица, не превосходящей L, а

$$\bar{\Omega} \cap \bar{Ц}_{R,L} = \left\{ y \in E_n : |y_n'| \le R, \ \omega(y_n') \le y_n \le 2RL \right\}.$$

Введем пространства

$$F \equiv L_{\frac{q}{2}}(\Omega) \times \underbrace{L_q(\Omega) \times \dots \times L_q(\Omega)}_{n} \times L_q(\Gamma)$$

с элементами $f \equiv (f_0, f_1, \dots, f_{n+1})$ и W - пространство всех тех элементов $z \in W_2^1(\Omega)$, которые равны нулю на Γ_0 в смысле теорем вложения.

Пространство F снабдим какой-нибудь нормой $\|\cdot\|_F$, например,

$$\|f\|_F \equiv \max \left\{ \|f_0\|_{\frac{q}{2},\Omega}, \dots, \|f_{n+1}\|_{q,\Gamma} \right\}.$$

Для $f \in F$ и $z \in W$ определим билинейную форму $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$

$$\langle\langle f,z\rangle\rangle \equiv \int\limits_{\Omega}\Big(\sum_{i=1}^{n} f_i z_{x_i} + f_0 z\Big)dx + \int\limits_{\Gamma} f_{n+1} z\, d\Gamma.$$

Пусть A, B – множества в нормированном пространстве. Запись $A \Subset B$ означает, что множество A является строго внутренним подмножеством множества B, т.е. $A \subset B$ и расстояние $d(A, \partial B)$ больше нуля.

Пусть заданы конечные множество $T \equiv \{t_1; \dots; t_l\} \subset E$ и для $x \in \Omega$, $x' \in \Gamma$, $t \in E \setminus T$ действительные функции $\lambda_{ij} = \lambda_{ij}(x,t)$, $\lambda_i = \lambda_i(x,t)$, $\beta_i = \beta_i(x,t)$, $\beta = \beta(x,t)$, $\sigma_2 = \sigma_2(x',t)$, $b_i = b_i(x)$, $\alpha_i = \alpha_i(x)$, $\alpha = \alpha(x)$, $\sigma_1 = \sigma_1(x')$, $i,j \in K$

такие, что:

I°. Для почти всех (п.в.) $x \in \Omega$ и п.в. $x' \in \Gamma$ функции $\lambda_{ij}, \lambda_i, \beta_i, \beta, \sigma_2$, $i,j \in K$ равномерно непрерывны по t в каждом интервале $(-\infty, t_1), (t_1, t_2), \dots, (t_{l-1}, t_l), (t_l, \infty)$ и для каждого $t \in E \setminus T$ функции $\lambda_{ij}, \lambda_i, \beta_i, \beta, b_i, \alpha_i$, α, $i,j \in K$ измеримы по $x \in \Omega$, а функции σ_1, σ_2 измеримы по $x' \in \Gamma$. Кроме того, существуют неотрицательные функции

$$h_1 \in L_{\frac{q}{2}}(\Omega),\ h_2 \in L_q(\Omega),\ h_3 \in L_q(\Gamma)$$

такие, что для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такой, что для всех $t \in (\tau, \tau+\delta)$ и $s \in (\tau-\delta, \tau)$, п.в. $x \in \Omega$ и п.в. $x' \in \Gamma$

$$|\lambda_{ij}(x,\tau+) - \lambda_{ij}(x,t)| < \varepsilon,$$

$$|\lambda_{ij}(x,\tau-)-\lambda_{ij}(x,s)| < \varepsilon,$$

$$|\lambda_i(x,\tau+)-\lambda_i(x,t)| < \varepsilon h_2(x),$$

$$|\lambda_i(x,\tau-)-\lambda_i(x,s)| < \varepsilon h_2(x),$$

$$|\beta_i(x,\tau+)-\beta_i(x,t)| < \varepsilon h_2(x),$$

$$|\beta_i(x,\tau-)-\beta_i(x,s)| < \varepsilon h_2(x),$$

$$|\beta(x,\tau+)-\beta(x,t)| < \varepsilon h_1(x),$$

$$|\beta(x,\tau-)-\beta(x,s)| < \varepsilon h_1(x),$$

$$|\sigma_2(x',\tau+)-\sigma_2(x,t)| < \varepsilon h_3(x'),$$

$$|\sigma_2(x',\tau-)-\sigma_2(x,s)| < \varepsilon h_3(x'),$$

$\tau \in T,\ i,j \in K.$

Через $\Lambda(\nu_1,\nu_2)$ обозначим класс всех симметрических матриц (a_{ij}), элементы $a_{ij}=a_{ij}(x)$, $i,j=1,\dots,n$ которых являются измеримыми по $x\in\Omega$ функциями, удовлетворяющими условию равномерной эллиптичности с постоянными $\nu_1,\nu_2>0$, т.е. для всех $x\in\Omega$ и $\xi\in E_n$

$$\nu_1|\xi|^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \le \nu_2|\xi|^2$$

2°. Существуют постоянные $\nu_1,\nu_2>0$ такие, что при каждом фиксированном $t\in E\setminus T$ матрица $(\lambda_{ij})=(\lambda_{ij}(x,t))$ принадлежит классу $\Lambda(\nu_1,\nu_2)$.

3°. $b_i,\ a_i,\ a^2\in L_q(\Omega),\ \sigma_1\in L_q(\Gamma),\ \sigma_1\ge 0,\ i\in K.$

4°. Существуют неотрицательные функции

$$h_4 \in L_{\frac{q}{2}}(\Omega),\ h_5 \in L_q(\Omega),\ h_6 \in L_q(\Gamma)$$

такие, что для п.в. $x \in \Omega$, п.в. $x' \in \Gamma$ и всех $t \in E \setminus T$

$$|\beta(x,t)| \le h_4(x), \quad |\sigma_2(x',t)| \le h_6(x'),$$

$$|\beta_i(x,t)| \le h_5(x), \quad |\lambda_i(x,t)| \le h_5(x), \quad i \in K.$$

Замечание I.I. Условие I^0 обеспечивает существование конечных правых и левых пределов $\lambda_{ij}(x,\tau\pm)$, $\lambda_i(x,\tau\pm)$, $\beta_i(x,\tau\pm)$, $\beta(x,\tau\pm)$, $\sigma_2(x',\tau\pm)$ для всех $\tau \in T$, п.в. $x \in \Omega$ и п.в. $x' \in \Gamma$.

§ 2. Определение обобщенного решения

Пусть рассматривается краевая задача

$$-\Delta u(x) + f(x) = \varkappa(u(x)), \quad x \in \Omega \tag{2.I}$$

$$u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \tag{2.2}$$

где относительно заданной функции $\varkappa : E \to E$ предполагается существование конечных правых и левых пределов $\varkappa(t+)$, $\varkappa(t-)$, $t \in E$, удовлетворяющих неравенству

$$\varkappa(t+) \le \varkappa(t-) \quad \forall t.$$

Покажем, как для задачи (2.I)-(2.2) согласно работе [42] вводится решения двух типов:

Функция $u \in \overset{\circ}{W}{}^2_2(\Omega)$ называется решением задачи (2.I)-(2.2) типа I, если для п.в. $x \in \Omega$ выполнено равенство (2.I), и - типа II, если для п.в. $x \in \Omega$

$$-\Delta u(x) + f(x) \in \hat{\varkappa}(u(x)) \tag{2.3}$$

где

$$\hat{\varkappa}(t) = \begin{cases} \{\varkappa(t)\}, & \varkappa(t+) = \varkappa(t-) \\ [\varkappa(t+), \varkappa(t-)], & \varkappa(t+) < \varkappa(t-) \end{cases}$$

Как отмечалось во введении, решение (в неклассической постановке) той или иной краевой задачи для уравнения (0.I) следует понимать как решение типа П. Более того, для задач с РН, решения которых естественно рассматривать как элементы класса W_2^1 в основу определения решения необходимо положить более общие соотношения по сравнению с соотношениями типа (2.3).

В качестве них рассмотрены вариационные равенства, в определенном смысле соответствующие интегральным тождествам, лежащим в основе определения обобщенных решений.

Для функций $\gamma_{ij} = \gamma_{ij}(x,t)$, $\gamma_i = \gamma_i(x,t)$, $\varkappa_i = \varkappa_i(x,t)$, $\varkappa = \varkappa(x,t)$, $i,j \in K$, непрерывных по аргументу $t \in E$ обобщенное решение уравнения (0.I) в классе W_2^1 определяется общепринятым интегральным тождеством (вариационным равенством). Если же указанные функции разрывны по t, то, вообще говоря, интегральное тождество определено некорректно. Например, пусть функции $\gamma_{ij}, \gamma_i, \varkappa_i, i,j \in K$ непрерывны по (x,t), а функция $\varkappa : E \setminus \{0\} \to E$ имеет различные правый и левый пределы в точке нуль, и пусть мера множества $\Omega_0 \equiv \{ x : u(x) = 0 \}$ больше нуля. Тогда интегральное тождество определено некорректно из-за неопределенности величины $\varkappa(u(x))$ для $x \in \Omega_0$

Чтобы придать смысл величинам типа $\varkappa(u(x))$ для $x \in \Omega_0$ введем понятие реализации функции, а потом с помощью этого понятия решение краевой задачи для уравнений вида (0.I) определим как решение соответствующего вариационного равенства.

Определение 2.2. Пусть вещественная функция ρ, определенная на декартовом произведении $X \times Y$ множеств $X \subset E_n$, $Y = E \setminus T$ измерима по $x \in X$ для всех $t \in Y$ и равномерно непрерывна по t в каждом интервале $(-\infty, t_1)$, $(t_1, t_2), \ldots, (t_{l-1}, t_l), (t_l, \infty)$

Реализацией функции ρ при фиксированной функции $V: X \to E$ будем называть измеримую функцию $\rho^*: X \to E$ такую, что $\rho^*(x) \in I^*(\rho, x)$, где $I^*(\rho, x)$ - замкнутый интервал с концевыми точками $\rho(x, V(x)+), \rho(x, V(x)-)$.

Через $B(\rho; V)$ обозначим класс всех возможных реализаций функции ρ при фиксированной функции V.

Замечание 2.I. Из определения 2.2 немедленно следует, что $\rho^*(x) = \rho(x, V(x))$ для всех тех $x \in X$, при которых $V(x) \notin T$.

Определение 2.3. Пусть $\lambda_{ij}^*, \lambda_i^*, \beta_i^*, \beta^*, \sigma_2^*$ — реализации соответственно функций $\lambda_{ij}, \lambda_i, \beta_i, \beta, \sigma_2$ при фиксированном $u \in W$. Элемент

$$(u, \lambda_{11}^*, \ldots, \lambda_{nn}^*, \lambda_1^*, \ldots, \lambda_n^*, \beta_1^*, \ldots, \beta_n^*, \beta^*, \sigma_2^*)$$

назовем решением вариационного равенства

$$\int_\Omega [\lambda_{ij}(x,u) u_{x_j} \eta_{x_i} + a_i u \eta_{x_i} + \beta_i(x,u) \eta_{x_i} +$$

$$+ b_i u_{x_i} \eta + \lambda_i(x,u) u_{x_i} \eta + a u \eta + \beta(x,u) \eta] dx +$$

$$+\int_\Gamma [\sigma_1 u\eta + \sigma_2(x,u)\eta]\,d\Gamma = \langle\langle f,\eta\rangle\rangle \quad \forall \eta \in W, \tag{2.4}$$

если соотношение (2.4) выполняется для реализаций λ_{ij}^*, $\lambda_i^*, \beta_i^*, \beta^*, \sigma_2^*, i,j \in K$ (подставленных соответственно вместо функций $\lambda_{ij}(\cdot, u(\cdot))$, $\lambda_i(\cdot, u(\cdot))$, $\beta_i(\cdot, u(\cdot))$, $\beta(\cdot, u(\cdot))$, $\sigma_2(\cdot, u(\cdot))$).

Здесь и всюду в дальнейшем под парами одинаковых нижних индексов понимается суммирование в пределах от 1 до n, в частности,

$$\lambda_{ij}(x,u)u_{x_j}\eta_{x_i} \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_{ij}(x,u)u_{x_j}\eta_{x_i}.$$

Определение 2.4. Функция $u \in W$ называется решением вариационного равенства (2.4), если соотношение (2.4) выполняется для некоторых реализаций $\rho^* \in B(\rho; u)$, $\rho = \lambda_{ij}$, $\lambda_i, \beta_i, \beta, \sigma_2$, $i,j \in K$.

Замечание 2.2. Решение вариационного равенства (2.4) (в смысле определения 2.3 или 2.4) является решением типа П, поскольку функции $\lambda_{ij}(\cdot, u(\cdot))$, $\lambda_i(\cdot, u(\cdot))$, $\beta_i(\cdot, u(\cdot))$, $\beta(\cdot, u(\cdot))$, $\sigma_2(\cdot, u(\cdot))$, $i,j \in K$ на множестве, где $u(x) \in T$ определяются не обязательно как постоянные функции (см. введение).

Замечание 2.3. Утверждения

(i): Вариационное равенство (ВР) (2.4) разрешимо в смысле определения 2.3,

(ii): ВР (2.4) разрешимо в смысле определения 2.4, эквивалентны, т.е. $(i) \Leftrightarrow (ii)$.

Однако, из единственности в смысле определения 2.4 не следует единственность в смысле определения 2.3.

Замечание 2.4. В вариационном равенстве (2.4), соответствующем уравнению (0.I), линейные (относительно u) слагаемые выделены для удобства изложения.

Замечание 2.5. Всюду в дальнейшем (если особо не оговорено другое) выражения, содержащие разрывные нелинейности, понимаются в смысле реализаций. Например, выражение: "Рассмотрим ВР (2.4)" означает, что ВР (2.4) рассматривается для фиксированного u в произвольных фиксированных реализаций

$$\lambda_{ij}^*, \lambda_i^*, \beta_i^*, \beta^*, \sigma_2^*, \; i,j \in K.$$

Доказательство разрешимости вариационного равенства (2.4) будем проводить по следующей схеме:

- принадлежность решения к пространству Гёльдера $C^\alpha(\bar\Omega)$
- получение априорной оценки решения,
- разрешимость сглаженного вариационного равенства,
- обоснование предельного перехода.

§ 3. О принадлежности решения к $C^\alpha(\bar\Omega)$

Для установления принадлежности решения вариационного равенства (2.4) к пространству Гёльдера $C^\alpha(\bar\Omega)$ в основу положим результаты работы [23], в частности, оценку [23, стр. 238]

$$\int\limits_{A_{k,\rho}} |\nabla u|^2 \xi^2 dx \le \gamma \int\limits_{A_{k,\rho}} (u-k)^2 |\nabla \xi|^2 dx + \gamma'(k^2+1)\,\mathrm{mes}^{1-\frac{2}{q}} A_{k,\rho}, \qquad (3.I)$$

где ζ – любая срезающая для произвольного шара $K_\rho \subset \Omega$ функция,

$A_{k,\rho}$ – множество точек x из K_ρ, где $u(x) > k$,

γ, γ', k – постоянные,

и следующее утверждение.

Лемма 3.I. Пусть $\Omega \subset E_n$ строго липшицева область, $r > 1$, $\Gamma \subset \partial\Omega$, φ – заданная функция из $L_r(\partial\Omega)$. Тогда найдутся функции $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n$, принадлежащие пространству $L_r(\Omega)$ такие, что для любого $\eta \in W_2^1(\Omega)$

$$\int_\Gamma \eta\varphi\, dS = \int_\Omega \left(\psi_0\eta + \sum_{i=1}^n \psi_i \eta_{x_i}\right) dx, \tag{3.2}$$

причем

$$\|\psi_i\|_{r,\Omega} \le C(n,\Omega,r)\,\|\varphi\|_{r,\partial\Omega}, \quad i=0,\ldots,n. \tag{3.3}$$

Лемму докажем, исходя из более простого утверждения.

Лемма 3.2. Пусть φ, Ω удовлетворяют условиям леммы 3.I, кусок границы $\Gamma \subset \partial\Omega$ задается уравнением $x_n = 0$ и область, примыкающая к Γ, лежит в полупространстве $x_n \ge 0$. Тогда для любого куска границы $S \subset \Gamma$ с положительным расстоянием $d(\partial\Gamma, \partial S)$ найдутся функции ψ_1, ψ_2 из пространства $L_r(\Omega)$, удовлетворяющие условию (3.3) и равенству

$$\int_S \varphi\eta\, dS = \int_\Omega (\psi_1\eta + \psi_2\eta_{x_n})\, dx. \tag{3.4}$$

Доказательство. Выберем число $\varepsilon > 0$ таким, что множество $S \times \{\varepsilon\}$ содержится в Ω, это возможно в силу строгой липшицевости области Ω.

Пусть непрерывно дифференцируемая функция $g: E \to E$ обладает свойствами: $g(0)=1$, $g(t)=0$ при $t \geq \varepsilon$.

Выберем произвольную последовательность $\{\varphi^k\} \subset \dot{C}^\infty(S)$, сходящуюся к функции φ по норме пространства $L_r(S)$ и положим

$$\Psi^k(x) \equiv -g(x_n)\varphi^k(x_1, \dots, x_{n-1}). \tag{3.5}$$

Тогда для любого $\eta \in W_2^1(\Omega)$

$$\int_\Omega (\Psi^k_{x_n}\eta + \Psi^k \eta_{x_n})\,dx = \int_S \varphi^k \eta\, dS, \quad k \in N. \tag{3.6}$$

Из определения (3.5) следует ограниченность последовательностей $\{\Psi^k_{x_n}\}$, $\{\Psi^k\}$ в пространстве $L_r(\Omega)$, поэтому из них можно выделить подпоследовательности $\{\Psi^{\bar k}_{x_n}\}$, $\{\Psi^{\bar k}\}$, $\bar k \in N_1 \subset N$, сходящиеся слабо в $L_r(\Omega)$ соответственно к некоторым элементам $\Psi_1, \Psi_2 \in L_r(\Omega)$. Переходя к пределу при $\bar k \to \infty, \bar k \in N_1$, в соотношении (3.6), получим равенство (3.4).

Лемма доказана.

Установим справедливость леммы 3.1. Она непосредственно следует из того, что в силу строгой липшицевости области Ω границу $\partial\Omega$ можно разбить на куски $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ так, что существует взаимно однозначное непрерывное преобразование координат $z^m = (z_1^m(x), \dots, z_n^m(x))$, $m \in \{1; \dots; k\}$ (с якобианом, ограниченным и отличным от нуля), распрямляющее кусок Γ_m, т.е. в новых координатах кусок Γ_m задается уравнением $z_n^m = 0$, а часть области, примыкающая к нему, располагается в полупространстве $z_n^m \geq 0$.

Пусть $u \in W_2^1(\Omega)$. Согласно работе [23] справедливость неравенства (3.I) для любого шара K_ρ, лежащего в некоторой не "очень плохой" области G, обеспечивает принадлежность функции u к классу $C^{\alpha_0}(G')$, $\alpha_0 > 0$, для произвольной области $G' \Subset G$.

Пусть u - решение вариационного равенства (2.4). Докажем, что для любого шара $K_\rho \subset \hat{\Omega}$, где $\hat{\Omega}$ - строго липшицева область такая, что $\Omega \Subset \hat{\Omega}$ и расстояние $d(\Omega, \partial\hat{\Omega})$ достаточно мало, имеет место неравенство (3.I). Для этого необходимо в силу результатов работы [23] еще рассмотреть только шары K_ρ вблизи границы $\partial\Omega$.

Выберем произвольную точку $x^0 \in \partial\Omega$, и, не ограничивая общности, будем считать, что часть границы $\Gamma(x^0) \equiv \equiv \mathcal{U}(x^0) \cap \partial\Omega$, где $\mathcal{U}(x^0)$ - некоторая окрестность точки x^0 задается уравнением $x_n = 0$, а область $\Omega_1 \equiv \mathcal{U}(x^0) \cap \Omega$ лежит в полупространстве $x_n \geq 0$.

Пусть φ - произвольная функция из пространства W, равная нулю вблизи $\partial\Omega_1 \setminus \Gamma(x^0)$.

ВР (2.4) при $\eta = \varphi$, в котором граничный интеграл от $\sigma_2(x,u)\eta$ заменен интегралом

$$\int_\Omega \left(\Psi_0 \eta + \sum_{i=1}^n \Psi_i \eta_{x_i}\right) dx,$$

продолжим через границу $\Gamma(x^0)$ на область $\Omega_2 \equiv \{x \in E_n : -x_n \in \Omega_1\}$ так, что функции $u, \lambda_{ij}, a, \beta, \sigma_1, f_0, \Psi_0, f_{n+1}$ продолжаются четным, а функции $a_i, b_i, \lambda_i, \beta_i, f_i, \Psi_i, i,j \in K$

Helderbeitédes PR-ht bar Korr.

нечетным образом относительно x_n . В результате такого продолжения получим ВР, определенное в $\Omega_1 \cup \Omega_2$, коэффициенты которого удовлетворяют условиям I°– 4°, поэтому, учитывая, что $\sigma_1 \geq 0$, и повторяя выкладки работы [23], получим, что $u \in C^{\alpha_1}(\Omega_3)$ для любой $\Omega_3 \Subset \Omega_1 \cup \Omega_2$.

Отсюда, так как x^0 – произвольная точка границы строго липшицевой области Ω , следует, что $u \in C^{\alpha}(\bar{\Omega})$.

Полученный результат, учитывая величины, от которых зависят α и норма функции u в пространстве $C^{\alpha}(\bar{\Omega})$ сформулируем в виде теоремы.

Теорема 3.I. Пусть выполнены условия I°– 4°. Тогда решение u вариационного равенства (2.4) принадлежит классу $C^{\alpha}(\bar{\Omega})$ с некоторым $\alpha > 0$, зависящим от $\nu_1, \nu_2, q, n, \Omega$, а норма решения u в пространстве $C^{\alpha}(\bar{\Omega})$ зависит от величин $n, \Omega, \nu_1, \nu_2, q, \|a_i, b_i, h_5, f_i\|_{q,\Omega}$, $\|a, f, h_4\|_{\frac{q}{2},\Omega}$, $\|\sigma_1, h_6\|_{q,\Gamma}$, $\|u\|_{2,\Omega}$, $i \in K$.

Эта теорема неоднократно понадобится для установления некоторых результатов о разрешимости вариационных равенств.

§ 4. Априорная оценка

В дальнейшем предполагается, что

5°. Существуют постоянные c_0, $0 < \nu_1' \leq \nu_1$, $\nu_2' \geq \nu_2$ такие, что для каждого $v \in L_2(\Omega)$ и произвольных фиксированных реализаций $\lambda_{ij}^* \in B(\lambda_{ij}; v)$, $(\lambda_{ij}^*) \in \Lambda(\nu_1', \nu_2')$, $\lambda_i^* \in B(\lambda_i; v)$ вариационное равенство

$$\int_\Omega [\lambda_{ij}^*(x,v) u_{x_j} \eta_{x_i} + a_i u \eta_{x_i} + \lambda_i^*(x,v) u_{x_i} \eta + b_i u_{x_i} \eta +$$

$$+ a u \eta \Big] dx + \int\limits_{\Gamma} \sigma_1 u \eta \, d\Gamma = \langle\langle f, \eta \rangle\rangle \quad \forall \eta \in W \tag{4.1}$$

однозначно разрешимо относительно $u \in W$ при любом $f \in F$ и имеет место априорная оценка

$$\| u \|_W \le C_0 \Big(\sum_{i=0}^{n} \| f_i \|_{2,\Omega} + \| f_{n+1} \|_{2,\Gamma} \Big). \tag{4.2}$$

Замечание 4.1. При выполнении условий 1^0–5^0 из теоремы 3.1 следует, что для $\forall v \in L_2(\Omega)$, $\forall w \in L_2(\Gamma)$ и любого f, принадлежащего ограниченному множеству пространства F решение u вариационного равенства

$$\int\limits_{\Omega} [\lambda_{ij}(x,v) u_{x_j} \eta_{x_i} + a_i u \eta_{x_i} + \beta_i(x,v) \eta_{x_i} +$$

$$+ b_i u_{x_i} \eta + \lambda_i (x,v) u_{x_i} \eta + a u \eta + \beta(x,v) \eta] dx +$$

$$+ \int\limits_{\Gamma} [\sigma_1 u \eta + \sigma_2 (x,w) \eta] d\Gamma = \langle\langle f, \eta \rangle\rangle \quad \forall \eta \in W \tag{4.3}$$

принадлежит ограниченному множеству пространства $C^{\alpha}(\bar{\Omega})$, $\alpha > 0$.

Ниже указаны некоторые частные случаи, когда условие 5^0 выполнено.

Теорема 4.1. Пусть функции $\lambda_{ij} = \lambda_{ij}(x)$, $i,j \in K$ удовлетворяют условию 2^0, $b_i, a^2 \in L_q(\Omega)$, $i \in K$, $a \ge 0$, $\varkappa \in L_{q-1}(\Gamma)$, $\varkappa \ge 0$ и по крайней мере одна из функций $a, \varkappa$ не равна тождественно нулю. Кроме того, относительно

$u \in W$ имеет место ВР

$$\int_\Omega (\lambda_{ij} u_{x_j} \eta_{x_i} + b_i u_{x_i} \eta + a u \eta)\, dx +$$

$$+ \int_\Gamma \varkappa u \eta \, d\Gamma = 0 \quad \forall \eta \in W \qquad (4.4)$$

тогда $u \equiv 0$ в $\bar{\Omega}$.

Если же $a \equiv 0$ и $\varkappa \equiv 0$, то функция u тождественно равна некоторой постоянной.

<u>Доказательство</u>, изложенное ниже, по характеру близко к доказательству принципа максимума для эллиптических вариационных равенств и неравенств [2 3].

Для фиксированного решения u вариационного равенства (4.4) положим

$$M \equiv \max_{x \in \bar{\Omega}} u(x).$$

Поскольку $\varkappa \geqslant 0$, то в силу теоремы 3.I $u \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ поэтому число M определено корректно. Предположим, что $M > 0$ и введем следующие множества

$$\Omega_0 \equiv \{x \in \bar{\Omega} : u(x) = M\}, \quad \Omega_\varepsilon \equiv \{x \in \bar{\Omega} : u(x) > M - \varepsilon\},$$

где $\varepsilon \in (0, M)$.

В качестве η возьмем функцию $\max\{0, u - M + \varepsilon\}$. Такая функция η обращается в нуль вне множества Ω_ε, причем

$$\nabla \eta = \nabla u \text{ при } x \in \Omega_\varepsilon, \quad \nabla \eta = 0 \text{ при } x \in \Omega \setminus \Omega_\varepsilon \qquad (4.5)$$

В силу свойств (4.5) из соотношения (4.4) получаем

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} \nu_1 |\nabla u|^2 dx \le \int\limits_{\Omega_\varepsilon} |b_i u_{x_i} \eta| dx \tag{4.6}$$

так как для $u \in W_2^1(\Omega)$ справедливо равенство $\nabla u = 0$ почти всюду в Ω_0 [23], то из (4.6) следует, что

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0} \nu_1 |\nabla u|^2 dx \le \int\limits_{\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0} |b_i u_{x_i} \eta| dx \tag{4.7}$$

Рассмотрим два случая.

I) Существует точка $x^0 \in \partial\Omega$ такая, что $u(x^0) < M$.

Тогда в силу непрерывности функции u найдется окрестность $\mathcal{U}(x^0)$ такая, что $u(x) < M$ для любой точки $x \in \bar{A}$, где $A \equiv \mathcal{U}(x^0) \cap \Omega$. Следовательно, для достаточно малых ε $\eta = 0$ на части $\partial\Omega \cap \bar{A}$ границы $\partial\Omega$. Согласно известной теореме вложения (см., например, [23]) и свойствами (4.5) имеем

$$\|\eta\|_{q', \Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0} \le \|\eta\|_{q', \Omega} \le C_1 \|\nabla \eta\|_{2, \Omega} =$$

$$= C_1 \|\nabla u\|_{2, \Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0}, \quad q' = \frac{2q}{q-2}, \tag{4.8}$$

где постоянная C_1 зависит только от n, q, Ω.

Оценивая правую часть соотношения (4.7) по неравенству Гёльдера, вследствие соотношений (4.8) получаем

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0} |b_i u_{x_i} \eta| dx \le$$

$$\leq c_1 \sum_{i=1}^{n} \|b_i\|_{q, \Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0} \|\nabla u\|^2_{2, \Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0}.$$

Так как $mes(\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ и $b_i \in L_q(\Omega), i \in K$, то из соотношения (4.7) вытекает неравенство

$$\|\nabla u\|^2_{2, \Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0} \leq 0,$$

справедливое для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, где $\varepsilon_0 > 0$ некоторое достаточно малое число.

Отсюда $u \equiv const$ на множестве $\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0$, что противоречит тому, что $M-\varepsilon < u(x) < M$ для $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ и $\forall x \in \Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0$.

Рассмотрим второй случай.

2) Для каждой точки $x \in \partial\Omega$: $u(x) = M$.

Положим

$$m \equiv \min_{x \in \bar{\Omega}} u(x)$$

и будем считать, что $m < M$ (в противном случае справедливость теоремы очевидна). Тогда найдутся числа $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_1 > 0$ такие, что $m + \varepsilon_1 < M - \varepsilon_0$. Пусть $x^0 \in \Omega$ точка, в которой $u(x^0) = m$. Выберем радиус $\rho > 0$ шара $K_\rho(x^0)$ настолько малым, что $u \leq m + \varepsilon_1$ во всем шаре $K_\rho(x^0)$. Тогда, поскольку $u < M - \varepsilon$ в шаре $K_\rho(x^0)$ при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, функция η обращается в нуль в шаре $K_\rho(x^0)$, поэтому справедлив следующий аналог соотношений (4.8)

$$\|\eta\|_{q',\Omega_\varepsilon\setminus\Omega_0} \le \|\eta\|_{q',\Omega\setminus K_\rho(x^0)} \le C_2\|\nabla\eta\|_{2,\Omega\setminus K_\rho(x^0)} \le$$

$$\le C_2\|\nabla\eta\|_{2,\Omega} = C_2\|\nabla u\|_{2,\Omega_\varepsilon\setminus\Omega_0}.$$

Теперь, повторяя те же рассуждения, что и в случае I), приходим к противоречию. Это означает, что исходное предположение $M>0$ (при условии, что по крайней мере одна из функций $a, \varkappa$ тождественно не равна нулю) неверно. Таким образом, $u\le 0$ в $\bar\Omega$. Вполне аналогично доказывается неравенство $u\ge 0$ в $\bar\Omega$. Следовательно, $u\equiv 0$ в $\bar\Omega$ и тем самым теорема доказана.

<u>Замечание 4.2</u>. Теорема справедлива также и при $q=n$ если $n\ge 3$.

Требованием $q>n$ мы воспользовались для того, чтобы с помощью теоремы 3.I установить принадлежность решения u к классу $C^\alpha(\bar\Omega)$. Однако в силу замечания [23, стр. 240] принадлежность решения вариационного равенства (4.4) нетрудно установить и в случае $q=n, n\ge 3$.

Для заданных чисел ν_3, ν_4, ν_5 через $\Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4$ обозначим множества, состоящие из всех тех элементов пространств $L_q(\Omega), L_{q/2}(\Omega), L_q(\Gamma)$, соответственно, для которых нормы в указанных пространствах ограничены числами ν_3, ν_4, ν_5.

<u>Теорема 4.2</u>. Пусть выполнены все условия теоремы 4.I. Тогда вариационное равенство

$$\int_\Omega (\lambda_{ij}u_{x_j}\eta_{x_i} + b_i u_{x_i}\eta + au\eta)\,dx +$$

$$+\int_{\Gamma} \varkappa u \eta \, d\Gamma = \langle\langle f, \eta \rangle\rangle \quad \forall \eta \in W \tag{4.9}$$

однозначно разрешимо относительно $u \in W$ при любом $f \in F_o$. Более того, существует постоянная c, зависящая лишь от $n, \Omega, \Gamma, q, \nu_i, \ i=1,\dots,5$, такая, что для всех элементов $(\lambda_{ij}), b_i, a, \varkappa$, соответственно, из множеств $\Lambda, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4$ имеет место априорная оценка

$$\|u\|_W \le c \|f\|_{F_o}. \tag{4.10}$$

Доказательство первого утверждения теоремы проводится общеизвестным методом. Поскольку $q > n$, то соотношение (4.9) определяет линейное уравнение с вполне непрерывным оператором, которое, а, следовательно, и ВР (4.9), однозначно разрешимо в силу теоремы 4.I.

Второе утверждение теоремы не удается доказать известным приемом получения априорных оценок, поэтому для получения оценки (4.I0) применяется малоизвестный способ, связанный с использованием так называемой G-сходимости дифференциальных операторов. По поводу вопросов G-сходимости см. обзорную статью [17].

ВР (4.9) запишем в форме $Lu = f$, где $L : W \to F_o$ линейный ограниченный оператор. В силу однозначной разрешимости вариационного равенства (4.9) и теоремы Банаха (об обратном операторе) существует обратный оператор $L^{-1} : F_o \to W$, являющийся линейным и ограниченным. Если норма $\|L^{-1}\|$ ограничена постоянной, не зависящей от элементов множеств ($\Lambda_1 \equiv \Lambda$ $\Lambda_i, \ i=1,\dots,4$, то справедливость теоремы следует из неравенства

$$\|u\| \leq \|L^{-1}\| \cdot \|Lu\|. \tag{4.11}$$

Согласно этому предположим, что существуют последовательности $\{(\lambda_{ij}^k)\}$, $\{b_i^k\}$, $\{a^k\}$, $\{\varkappa^k\}$ соответственно из множеств $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4$ такие, что $\|L_k^{-1}\| \to \infty$ при $k \to \infty$, где через L_k обозначен линейный ограниченный оператор, порожденный вариационным равенством

$$\int_\Omega (\lambda_{ij}^k u_{x_j} \eta_{x_i} + b_i^k u_{x_i} \eta + a^k u \eta)\, dx + \int_\Gamma \varkappa^k u \eta \, d\Gamma = \langle\langle f, \eta \rangle\rangle \quad \forall \eta \in W \tag{4.12}$$

Заметим, что из предположения $\|L_k^{-1}\| \to \infty (k \to \infty)$ следует существование последовательности $\{f^k\} \subset F_0$ такой, что

$$\|f^k\| \xrightarrow[k \to \infty]{} 0, \quad \|u^k\| = 1, \quad k = 1, 2, \ldots$$

где u^k - решение вариационного равенства (4.12) с $f = f^k$, $k = 1, 2, \ldots$.

Из последовательности $\{u^k\}$ выделим подпоследовательность $\{u^m\}$, где m принадлежит некоторому подмножеству N_1 натуральных чисел, сходящуюся слабо в пространстве W и сильно в пространствах

$$L_{\frac{2q}{q-2}}(\Omega), \quad L_{\frac{2(q-1)}{q-2}}(\Gamma) \tag{4.13}$$

к некоторому элементу $u^\circ \in W$ (это возможно в силу известных теорем вложения).

Рассмотрим два случая.

I) $u^\circ = 0$.

Зафиксируем $m \in N_1$ и в соотношении (4.I2) в качестве η возьмем функцию u^m. Тогда после несложных преобразований левой части вариационного равенства (4.I2), вследствие сходимости последовательности $\{u^m\}$ к нулю в указанных пространствах, получим, что

$$\int_\Omega \nu_1 |\nabla u^m|^2 dx \to 0 \quad (m \to \infty)$$

а это противоречит условию $\|u^m\|_W = 1$.

Покажем, что невозможен также случай

2) $u^\circ \neq 0$.

Для этого воспользуемся результатами работ [17, 33], из которых, в частности, следует, что существуют

$$(\lambda^\circ_{ij}) \in \Lambda, \quad b^\circ_i \in L_q(\Omega), \quad i \in K,$$

$$a^\circ \in L_{\frac{q}{2}}(\Omega), \quad a^\circ \geq 0, \quad \varkappa^\circ \in L_q(\Gamma), \quad \varkappa^\circ \geq 0$$

такие, что

$$\int_\Omega \lambda^m_{ij} u^m_{x_j} \eta_{x_i} dx \to \int_\Omega \lambda^\circ_{ij} u^\circ_{x_j} \eta_{x_i} dx \quad (m \to \infty),$$

$$\int_\Omega (b^m_i u^m_{x_i} + a^m u^m)\eta dx \to$$

$$\to \int_\Omega (b^\circ_i u^\circ_{x_i} + a^\circ u^\circ)\eta dx \quad (m \to \infty),$$

$$\int\limits_{\Gamma} \varkappa^m u^m \eta \, d\Gamma \to \int\limits_{\Gamma} \varkappa^\circ u^\circ \eta \, d\Gamma \quad (m \to \infty),$$

где m принадлежит некоторому подмножеству множества N_1

Благодаря таким сходимостям и переходя к пределу в соотношении (4.I2) с $f = f^m$, получаем ВР вида (4.4), для которого согласно теореме 4.I имеет место тождество $u^\circ \equiv 0$, что противоречит предположению 2). Таким образом, предположение $\| L_k^{-1} \| \to \infty$ при $k \to \infty$ неверно и, следовательно, в силу неравенства (4.II) теорема доказана.

<u>Следствие 4.I</u>. Теорема 4.2 справедлива также для следующего вариационного равенства

$$\ell_2(v, \varphi) \equiv \int\limits_{\Omega} (\lambda_{ij} v_{x_j} \varphi_{x_i} + b_i v \varphi_{x_i} + a v \varphi) \, dx +$$

$$+ \int\limits_{\Gamma} \varkappa v \varphi \, d\Gamma = \langle\langle f, \varphi \rangle\rangle \quad \forall \varphi \in W \qquad (4.I4)$$

относительно $v \in W$.

В самом деле, пусть v^1, v^2 - два решения вариационного равенства (4.I4), а u - решение вариационного равенства

$$\ell_1(u, \eta) = \int\limits_{\Omega} (w_{x_i} \eta_{x_i} + w \eta) \, dx + \int\limits_{\Gamma} w \eta \, d\Gamma \qquad \forall \eta \in W,$$

где $w \equiv v^1 - v^2$, а через $\ell_1(u, \eta)$ обозначена левая часть соотношения (4.9). Тогда

$$\ell_1(u, w) - \ell_2(w, u) =$$

$$= \int\limits_{\Omega} [(w_{x_i})^2 + w^2] \, dx + \int\limits_{\Gamma} w^2 \, d\Gamma = 0,$$

откуда $V^1 \equiv V^2$. Отсюда справедливость следствия немедленно вытекает из доказательства теоремы 4.2.

§ 5. Разрешимость сглаженной задачи

В этом параграфе докажем разрешимость вариационного равенства (2.4), предполагая, что функции $\lambda_{ij}, \lambda_i, \beta_i, \beta, \sigma_2$, $i, j \in K$ непрерывны по аргументу t.

<u>Теорема 5.1</u>. Пусть выполнены условия $1^0 - 5^0$ и функции $\lambda_{ij}, \lambda_i, \beta_i, \beta, \sigma_2$, $i, j \in K$ непрерывны по t. Тогда существует по крайней мере одно решение вариационного равенства (2.4).

<u>Доказательство</u>. Для $u, \eta \in W$, $v \in L_2(\Omega)$, $w \in L_2(\Gamma)$ через $L(u, v, w, \eta)$ обозначим левую часть соотношения (4,3) и положим

$$V_0 \equiv \left\{ v \in L_2(\Omega) : \| v \|_{C^\alpha(\bar{\Omega})} \le C_0 \right\},$$

где постоянная C_0 берется из априорной оценки (4.2). Тогда для каждого $v \in V_0$ определен элемент $w \in L_2(\Gamma)$ как след [6] функции v на Γ и в силу линейности L по u и условий $1^0 - 5^0$ существует единственное решение $u = u(v)$ вариационного равенства (4.3). Таким образом, определен оператор $A : V_0 \to V_0$, действующий по закону $Av = u(v)$.

Рассмотрим уравнение

$$Av = v$$

и, применяя принцип Шаудера (см., например, [18]), покажем, что оно имеет решение.

Заметим, что оператор A выпуклое, замкнутое, компактное (в пространстве $L_2(\Omega)$) множество V_0 переводит в себя. Для установления непрерывности оператора A, т.е., что

$$\|Av^k - Av\|_{2,\Omega} \to 0 \quad \text{при} \quad \|v^k - v\|_{2,\Omega} \to 0 \ (k \to \infty),$$

выберем некоторую последовательность $\{z^k\} \subset V_0$, сходящуюся по норме пространства $L_2(\Omega)$ к некоторому элементу $z \in L_2(\Omega)$. Через u^k, u обозначим решения вариационного равенства (4.3) при $v = z^k, z$, соответственно. В силу условия 5^0 последовательность $\{u^k\}$ ограничена в пространстве W, поэтому на основе теорем вложения из нее можно выделить подпоследовательность $\{u^m\}$, где m пробегает некоторое подмножество N_1 натуральных чисел, сходящуюся к некоторому $u^0 \in W$ слабо в W и сильно в пространствах (4.13).

Покажем, что u^0 является решением вариационного равенства (4.3) при $v = z$, где w (как уже отмечалось) - след функции v на Γ. Для этого составим разность

$$\Delta L \equiv L(u^m, z^m, w^m, \eta) - L(u^0, z, w, \eta),$$

которую представим в виде

$$\Delta L = \sum_{j=1}^{9} I_j(G),$$

где $G = \Omega$ для $j \in \{1; \dots; 7\}$ и $G = \Gamma$ для $j \in \{8; 9\}$,

$$I_1(\Omega) \equiv \int_\Omega [\lambda_{ij}(x, z^m) u^m_{x_j} - \lambda_{ij}(x, z) u^0_{x_j}] \eta_{x_i} dx,$$

$$I_2(\Omega) \equiv \int_\Omega a_i (u^m - u^0) \eta_{x_i} dx,$$

. . . .

$$I_9(\Gamma) \equiv \int_\Gamma [\sigma_2(x, w^m) - \sigma_2(x, w)] \eta \, d\Gamma.$$

Убедимся, что каждое слагаемое $I_j(G), j \in \{1; \cdots; 9\}$ стремится к нулю при $m \to \infty, m \in N_1$. В дальнейшем изложении доказательства не будем указывать, что $m \in N_1$. Слагаемое $I_1(\Omega)$ перепишем в виде $I_{11}(\Omega) + I_{12}(\Omega)$, где

$$\Delta \lambda_{ij}^m \equiv \lambda_{ij}(x, z^m) - \lambda_{ij}(x, z),$$

$$I_{11}(\Omega) \equiv \int_\Omega \Delta \lambda_{ij}^m u_{x_j}^m \eta_{x_i} dx, \tag{5.I}$$

$$I_{12}(\Omega) \equiv \int_\Omega \lambda_{ij}(x, z)(u_{x_j}^m - u_{x_j}^0) \eta_{x_i} dx.$$

Известно, что из сходимости $\| z^k - z \|_{2,\Omega} \to 0$ при $k \to \infty$ вытекает, что для п.в. $x \in \Omega$: $z^{k'}(x) \to z(x)$ $(k' \to \infty)$. Отсюда в силу непрерывности функций λ_{ij}, $i, j \in K$ имеем, что для п.в. $x \in \Omega$: $\Delta \lambda_{ij}^m \longrightarrow 0$ при $m \longrightarrow \infty, m \in N_1'$. Построим последовательность множеств $\Omega_s \subset \Omega$ таких, что i) $mes(\Omega \setminus \Omega_s) \longrightarrow 0$ $(s \longrightarrow \infty)$,

ii) в каждом множестве Ω_s последовательность функций $\{\Delta \lambda_{ij}^m\}$, $i, j \in K$ сходится к нулю равномерно.

Существование такой последовательности $\{\Omega_s\}$ следует из теоремы Егорова (см., например, [20]).

Зафиксируем функцию $\eta \in W$ и число $\varepsilon > 0$. Тогда в силу условий 2^0, i) и ограниченности последовательности $\{u^m\}$

в W число s можно выбрать настолько большим, что $I_{11}(\Omega\setminus\Omega_s) \le \varepsilon/2$ для любого m. Далее, вследствие свойства ii) найдется число m_0 такое, что для всех $m \geq m_0$: $I_{11}(\Omega_s) \le \varepsilon/2$. Отсюда имеем, что $I_{11}(\Omega)\to 0$ при $m\to\infty$, следовательно, $I_1(\Omega)\to 0$ при $m\to\infty$, поскольку $I_{12}(\Omega)\to 0$ при $m\to\infty$ в силу слабой сходимости последовательности $\{u^m\}$ в пространстве W.

Аналогично на основе условия 4° доказывается сходимость к нулю величин $I_j(G)$, $j\in\{3;5;7;9\}$ при $m\to\infty$.

В силу условия 3° сходимость к нулю оставшихся величин $I_j(G)$, $j\in\{2;4;6;8\}$ немедленно следует из сильной сходимости последовательности $\{u^m\}$ в пространствах (4.13).

Итак, показано, что $\Delta L\to 0$ при $m\to\infty$, откуда заключаем, что u^0 является решением вариационного равенства (4.3). Так как решение последнего единственно, то $u^0=u$, а это означает, что последовательность имеет единственную предельную точку (в смысле сходимости по норме $L_2(\Omega)$), следовательно, вся последовательность $\{u^k\}$ сходится к u сильно в пространстве $L_2(\Omega)$ или, что то же самое,

$$\|Av^k-Av\|_{2,\Omega}\to 0 \quad (k\to\infty).$$

Таким образом, установлена непрерывность оператора A и тем самым теорема доказана.

§ 6. Вспомогательные предложения

Докажем несколько вспомогательных результатов (лемм), на основе которых в дальнейшем будем осуществлять предельный переход в вариационном равенстве (2.4) при аппроксимации исходных разрывных нелинейностей непрерывными по t функциями.

Лемма 6.I. Пусть $\rho \in L_2(\Omega)$, последовательность $\{V^k\} \subset W$ сходится слабо в W и сильно в $C(\bar{\Omega})$ к некоторой функции V. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся числа $\delta_0 > 0$ и $k_0(\delta_0)$ такие, что при любом $\delta \in (0, \delta_0)$ и любом $k \geq k_0(\delta_0)$

$$\left| \int_{\Omega_{k\delta}} \rho(x) V^k_{x_i}\, dx \right| < \varepsilon, \quad i \in K,$$

где $\Omega_{k\delta} \equiv \{ x \in \Omega : |V^k(x)| < \delta \}$.

Доказательство. Пусть $\delta > 0$ некоторое число. Положим $\Omega' \equiv \{ x \in \Omega : V(x) = 0 \}$ и множество $\Omega_{k\delta}$ представим в виде

$$\Omega_{k\delta} = \overset{1}{\Omega}_{k\delta} \cup \overset{2}{\Omega}_{k\delta}$$

где

$$\overset{1}{\Omega}_{k\delta} = \Omega_{k\delta} \setminus \Omega', \quad \overset{2}{\Omega}_{k\delta} = \Omega' \cap \Omega_{k\delta}$$

Покажем, что для достаточно больших k множество Ω' содержится в $\Omega_{k\delta}$.

Действительно, пусть $\delta_3 < \delta$. Тогда в силу сильной сходимости $V^k \to V$ в пространстве $C(\bar{\Omega})$ найдется $k_1 \in N$ такой, что для всех $k \geq k_1$

$$|V^k(x) - V(x)| \leq \delta_3 \quad \forall x \in \Omega \tag{6.I}$$

Если $x \in \Omega'$, то непосредственно из неравенства (6.I) следует, что x принадлежит также множеству $\Omega_{k\delta}$. Таким образом,

$$\Omega' \subset \Omega_{k\delta} \quad \forall k \geq k_1 \tag{6.2}$$

Из определения множества $\Omega^2_{k\delta}$ согласно соотношению (6.2) имеем $\Omega^2_{k\delta} = \Omega'$, при $k \geq k_1$, поэтому

$$\int\limits_{\Omega^2_{k\delta}} \rho(x) V^k_{x_i}\, dx \longrightarrow 0 \quad (k \to \infty). \tag{6.3}$$

Здесь мы воспользовались слабой сходимостью $V^k \to V$ в W и тем фактом, что $\nabla V = 0$ для п.в. $x \in \Omega'$.

Далее, для произвольного $\delta_1 > 0$ положим

$$\Omega_{\delta_1} \equiv \left\{ x \in \Omega \;:\; 0 < |V(x)| < \delta_1 \right\}$$

и покажем, что для всех достаточно малых δ и достаточно больших k имеет место включение

$$\Omega^1_{k\delta} \subset \Omega_{\delta_1} \tag{6.4}$$

Для этого выберем $\delta_2 < \delta_1/2$ и число $k_2 \in N$ такое, что для всех $k \geq k_2$ и всех $x \in \Omega$

$$|V^k(x) - V(x)| < \frac{\delta_1}{4} \tag{6.5}$$

что возможно в силу сильной сходимости последовательности $\{V^k\}$ в $C(\bar{\Omega})$. Тогда для $\forall \delta \in (0, \delta_2)$ $\forall k \geq k_2$ $\forall x \in \Omega^1_{k\delta}$ получаем соотношение

$$|v^k(x)| < \delta_2 \quad , \quad v(x) \neq 0,$$

откуда вследствие неравенства (6.5) имеем, что $|v| < \delta_2 + \delta_1/4$ для любого $x \in \Omega^1_{k\delta}$, а это и означает справедливость включения (6.4).

Заметим, что последовательность $\{v^k\}$ в силу ее слабой сходимости ограничена в пространстве W. Заметим также, что норма $\|p\|_{2,\Omega_{\delta_1}}$ сходится к нулю при $\delta_1 \to 0$, поскольку мера множества Ω_{δ_1} стремиться к нулю при $\delta_1 \to 0$. Поэтому, благодаря включению (6.4), правую часть (а тем более, левую) следующего неравенства

$$\int\limits_{\Omega^1_{k\delta}} p v^k_{x_i} dx \leq \Big(\int\limits_{\Omega^1_{k\delta}} p^2 dx \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int\limits_{\Omega^1_{k\delta}} (v^k_{x_i})^2 dx \Big)^{\frac{1}{2}}$$

можно сделать сколь угодно малой. Таким образом, учитывая сходимость (6.3), лемма доказана.

Функции, принадлежащие множеству $K_1 \equiv \{\lambda_{ij}; \lambda_i; \beta_i; \beta; \sigma_2, i,j \in K\}$ будем аппроксимировать непрерывными по t функциями $\lambda^k_{ij}, \lambda^k_i, \beta^k_i, \beta^k, \sigma^k_2$ такими, что

6°. Матрица (λ^k_{ij}), $k \in N$ принадлежит классу $\Lambda(\nu_1, \nu_2)$ и для $\forall k \in N$, $\forall x \in \Omega \ (x \in \Gamma)$ и всех t таких, что $|t-\tau| < 1/k$, $\tau \in T$:

$$p^k(x,t) \in \Big[\inf_{s \in I_k \setminus T} p(x,s) \, , \ \sup_{s \in I_k \setminus T} p(x,s) \Big]$$

где $I_k \equiv (\tau - \frac{1}{k}, \tau) \cup (\tau, \tau + \frac{1}{k})$, $p \in K_1$.

7°. Для всех $k \in N$ и всех t таких, что $|t-\tau| \geq \frac{1}{k}$

$\forall \tau \in T$:
$$p^*(x,t) = p(x,t)\ ,\ p \in K_1 .$$

Отметим, что в аппроксимации исходных функций $p \in K_1$ существует большой произвол, но указанный способ (свойства $6^0 - 7^0$), по-видимому, наиболее удобный при осуществлении предельного перехода.

Через $\ell(v,u,\eta)$ обозначим левую часть соотношения (4.I) и введем обозначение

$$\ell_k(v,u,\eta) \equiv \int\limits_{\Omega} [\lambda_{ij}^k(x,v)u_{x_j}\eta_{x_i} + a_i u \eta_{x_i} +$$

$$+\lambda_i^k(x,v)u_{x_i}\eta + b_i u_{x_i}\eta + a u\eta]\,dx + \int\limits_{\Gamma} \sigma_1 u \eta\, d\Gamma .$$

Тогда справедлива

Лемма 6.2. Пусть выполнены условия $I^0 - 7^0$. Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется $k_0 \in N$ такой, что для любого $k > k_0$ и любого $z \in L_2(\Omega)$ существуют $v \in L_2(\Omega)$, $\lambda_{ij}^* \in B(\lambda_{ij}; V)$, $(\lambda_{ij}^*) \in \Lambda(\nu_1', \nu_2')$, $\lambda_i^* \in B(\lambda_i; V)$ такие, что

$$\sup |\ell_k(z,u,\eta) - \ell(v,u,\eta)| \le \varepsilon ,$$

где точная верхняя грань берется по всем $u, \eta \in W$ такими, что $\|u\| \le 1$, $\|\eta\| \le 1$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольное число. Для любых фиксированных $k \in N$, $z \in L_2(\Omega)$ разность $\ell_k(z,u,\eta) - \ell(v,u,\eta)$ представим в виде $I_1(\Omega) + I_2(\Omega)$, где

$$I_1(\Omega) \equiv \int\limits_{\Omega} [\lambda_{ij}^k(x,z) - \lambda_{ij}(x,v)]\, u_{x_j}\eta_{x_i}\, dx ,$$

$$I_2(\Omega) \equiv \int\limits_{\Omega} [\lambda_i^k(x,z) - \lambda_i(x,v)] u_{x_i} \eta \, dx,$$

и в качестве v возьмем функцию

$$v(x) = \begin{cases} z(x) & , x \in \Omega^* \\ t_i & , x \in \Omega_i^* \end{cases}$$

где

$$\Omega_i^* \equiv \{ x \in \Omega : z(x) \in (t_i, t_i + \tfrac{1}{k}) \}, i=1,\dots,l,$$

$$\Omega^* \equiv \Omega \setminus (\Omega_1^* \cup \dots \cup \Omega_l^*)$$

Через $\hat{\lambda}_{ij}(x)$ обозначим замкнутый интервал с концевыми точками $\lambda_{ij}(x, v(x)+), \lambda_{ij}(x, v(x)-)$, а через $\hat{\lambda}_i(x)$ – замкнутый интервал с концевыми точками $\lambda_i(x, v(x)+), \lambda_i(x, v(x)-)$, $x \in \Omega, i,j \in K$ и для $x \in \Omega \setminus \Omega^*$ реализации $\lambda_{ij}^* \in B(\lambda_{ij}; v), \lambda_i^* \in B(\lambda_i; v)$ выберем следующим образом (см. определение 2.2 и замечание 2.5):

$$\lambda_{ij}^*(x) \equiv \begin{cases} \lambda_{ij}^k(x, z(x)), & \text{если } \lambda_{ij}^k(x, z(x)) \in \hat{\lambda}_{ij}(x) \\ d_{ij} & , \text{если } \lambda_{ij}^k(x, z(x)) \notin \hat{\lambda}_{ij}(x) \end{cases}$$

$$\lambda_i^*(x) \equiv \begin{cases} \lambda_i^k(x, z(x)), & \text{если } \lambda_i^k(x, z(x)) \in \hat{\lambda}_i(x) \\ d_i(x) & , \text{если } \lambda_i^k(x, z(x)) \notin \hat{\lambda}_i(x), \end{cases}$$

где для каждого x из $\Omega \setminus \Omega^*$ числа $d_{ij}(x), d_i(x)$ определяются из условий

$$|\lambda_{ij}^k(x, z(x)) - d_{ij}(x)| = \min_{c \in \hat{\lambda}_{ij}(x)} |\lambda_{ij}^k(x, z(x)) - c|,$$

$$|\lambda_i^k(x, z(x)) - d_i(x)| = \min_{c \in \hat{\lambda}_i(x)} |\lambda_i^k(x, z(x)) - c|, \; i,j \in K,$$

т.е. $d_{ij}(x)$ $\left(d_i(x)\right)$ определяется как одна из концевых точек интервала $\hat{\lambda}_{ij}(x)$ $(\hat{\lambda}_i(x))$.

Пусть $\lambda_{ij}^-(x)$, $\lambda_i^-(x)$ - левые, а $\lambda_{ij}^+(x)$, $\lambda_i^+(x)$ - правые концевые точки, соответственно, интервалов $\hat{\lambda}_{ij}(x)$, $\hat{\lambda}_i(x)$.

Тогда в силу условий I^0, 6^0- 7^0 для произвольного $\varepsilon_1 > 0$ найдется $k_0 \in N$ такое, что для всех $k \geqslant k_0$ и всех $x \in \Omega \setminus \Omega^*$

$$\lambda_{ij}^-(x) - \varepsilon_1 \leq \lambda_{ij}^k(x, z(x)) \leq \lambda_{ij}^+(x) + \varepsilon_1 ,$$

$$\lambda_i^-(x) - \varepsilon_1 h_2(x) - \varepsilon_1 \leq \lambda_i^k(x, z(x)) \leq \lambda_i^+(x) + \varepsilon_1 h_2(x) + \varepsilon_1 .$$

Отсюда в силу выбора реализаций λ_{ij}^*, λ_i^*, $ij \in K$ вытекает, что ε_1 можно выбрать настолько малым, что для любого $k \geqslant k_0(\varepsilon_1)$: $(\lambda_{ij}^k) \in \Lambda(\nu_1', \nu_2')$ и

$$I_1(\Omega) = I_1(\Omega \setminus \Omega^*) \leq$$

$$\leq \sum_{i,j=1}^{n} \sup_{x \in \Omega \setminus \Omega^*} |\lambda_{ij}^k(x, z) - \lambda_{ij}^*(x)| C_1 \|\nabla u\| \|\nabla \eta\| \leq \frac{\varepsilon}{2} ,$$

$$I_2(\Omega) = I_2(\Omega \setminus \Omega^*) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \|\lambda_i^k(x, z) - \lambda_i^*(x)\|_{q, \Omega \setminus \Omega^*} \cdot C_2 \|\nabla u\| \cdot \|\nabla \eta\| \leq \frac{\varepsilon}{2} ,$$

тем самым лемма доказана.

Пусть $[\mathcal{L}_k(\nu)]^{-1} : F \to W$ - оператор, который элементу $f \in F$ ставит в соответствие элемент $u \in W$ такой, что

$$\ell_k(\nu, u, \eta) = \langle\langle f, \eta \rangle\rangle \quad \forall \eta \in W$$

Тогда из леммы 6.2 и обобщения теоремы Банаха [18, стр. 212] немедленно вытекает

Следствие 6.1. Пусть выполнены условия 1° – 5° и непрерывные функции $\lambda_{ij}^k, \lambda_i^k, i,j \in K$ удовлетворяют условиям 6°– 7°. Тогда существуют $c \in E$ и $k_0 \in N$ такие, что для любого $v \in L_2(\Omega)$ и всех $k \geq k_0$ справедлива оценка

$$\| [\mathcal{L}_k(v)]^{-1} \|_W \leq c.$$

Лемма 6.3. Функции $\beta_i, i \in K$ удовлетворяющие условиям 1°, 4°, можно аппроксимировать непрерывными по t функциями $\rho_i^k, k \in N$ так, что выполнены условия 6°– 7° и для любой последовательности $\{v^k\} \subset \bar{W}$, сходящейся слабо в W и сильно в $C(\bar{\Omega})$ к некоторому элементу v, для любых $\tau \in E, \varepsilon > 0$ найдутся числа $\delta_0 > 0$ и $k_0(\delta_0)$ такие, что для всех $\delta \in (0, \delta_0)$ и всех $k \geq k(\delta_0)$

$$\Big| \int_{\Omega_{k\delta}} \beta_s^k (x, v^k) v_{x_s}^k \, dx \Big| < \varepsilon, \quad s \in K, \tag{6.6}$$

где $\Omega_{k\delta} \equiv \{ x \in \Omega : |v^k(x) - \tau| < \delta \}$.

Доказательство. Через I_j обозначим j-ый элемент последовательности интервалов $(-\infty, t_1), (t_1, t_2), \dots, (t_\ell, \infty)$ и для аппроксимации функций $\beta_i, i \in K$ введем непрерывные по $t \in E$ функции $\rho_{ij}, j = 1, \dots, \ell+1$ такие, что для всех $x \in \Omega$: $\rho_{ij}(x,t) = \beta_i(x,t), \quad t \in I_j$ и $\rho_{ij}(x,t) \in \{ \beta_i(x, t_1 \pm); \dots; \beta_i(x, t_\ell \pm) \}$ для $t \notin I_j$.

Далее, для $j = 1, \dots, \ell+1$ введем функцию $\varphi_j^k : E \to [0, 1]$, отличную от нуля только в интервале I_{jk}, где
$I_{jk} = (t_{j-1} - \frac{1}{k}, t_j + \frac{1}{k}), \quad t_0 \equiv -\infty, \quad t_{\ell+1} \equiv \infty$

$$\varphi_j^k(t) \equiv \begin{cases} \frac{k}{2}(t-t_{j-1})+\frac{1}{2}, & t_{j-1}-\frac{1}{k} < t < t_{j-1}+\frac{1}{k} \\ 1, & t_{j-1}+\frac{1}{k} \le t \le t_j - \frac{1}{k} \\ -\frac{k}{2}(t-t_j)+\frac{1}{2}, & t_j-\frac{1}{k} < t < t_j+\frac{1}{k} \end{cases}$$

для $j \in \{2; 3; \ldots; l\}$,

$$\varphi_j^k(t) \equiv \begin{cases} 1, & t \le t_j - \frac{1}{k} \\ -\frac{k}{2}(t-t_j)+\frac{1}{2}, & t_j-\frac{1}{k} < t < t_j+\frac{1}{k} \end{cases}$$

для $j=1$ и, наконец

$$\varphi_j^k(t) \equiv \begin{cases} \frac{k}{2}(t-t_{j-1})+\frac{1}{2}, & t_{j-1}-\frac{1}{k} < t < t_{j-1}+\frac{1}{k} \\ 1, & t \geq t_{j-1}+\frac{1}{k} \end{cases}$$

для $j=l+1$.

Теперь в качестве $\beta_i^k, i \in K$ возьмем функцию, определенную по формуле

$$\beta_i^k(x,t) = \varphi_1^k(t)\rho_{i1}(x,t) + \ldots + \varphi_{l+1}^k(t)\rho_{i\,l+1}(x,t) \tag{6.7}$$

В силу свойств функций φ_j^k, ρ_{ij} такая функция β_i^k является непрерывной по $t \in E$ и удовлетворяет условиям 6^0– 7^0.

Без ограничения общности, оценку (6.6) докажем для одного какого-нибудь слагаемого из правой части равенства (6.7). Ради определенности возьмем первое слагаемое и, кроме того, будем опускать индекс "1", т.е. вместо $\varphi_1^k(t)$, $\rho_{i1}(x,t)$ будем писать $\varphi^k(t)$, $\rho_i(x,t)$. Тогда

$$J(\Omega_{k\delta}) \equiv \int\limits_{\Omega_{k\delta}} \varphi^k(V^k)\rho_i(x,V^k)V^k_{x_i}\,dx = J(\Omega^1_{k\delta}) + J(\Omega^2_{k\delta}),$$

где $\Omega' \equiv \{ x \in \Omega : V(x) = \tau \}$, а

$$\Omega^1_{k\delta} \equiv \Omega_{k\delta} \setminus \Omega' , \quad \Omega^2_{k\delta} \equiv \Omega' \cap \Omega_{k\delta}.$$

Из доказательства леммы 6.I следует, что при достаточно малых δ и достаточно больших k

I) $\Omega^2_{k\delta} = \Omega'$

2) $\Omega^1_{k\delta} \subset \Omega_{\delta_1}$, где $mes\, \Omega_{\delta_1} \longrightarrow 0$ при $\delta_1 \to 0$

В силу условия 4^0 и ограниченности (единицей) последовательности $\{ \varphi^k(V^k(\cdot)) \}$ имеем

$$J(\Omega^1_{k\delta}) \le \| h_3 \|_{q,\Omega} \cdot \| \nabla V^k \|_{2,\Omega} (mes\, \Omega^1_{k\delta})^{q_1}$$

где $q_1 = (q-2)/(2q)$. Отсюда, пользуясь свойством 2) и учитывая ограниченность слабо сходящейся последовательности $V^k \rightharpoonup V$ в W , получаем требуемую оценку (6.6) по множеству $\Omega^1_{k\delta}$.

Далее, интеграл $J(\Omega')$ представим в виде $J_1(\Omega') + J_2(\Omega')$, где

$$J_1(\Omega') = \int_{\Omega'} \varphi^k(V^k)[P_i(x, V^k) - P_i(x, V)] V^k_{x_i} dx,$$

$$J_2(\Omega') = \int_{\Omega'} P_i(x, V) \varphi^k(V^k) V^k_{x_i} dx.$$

Заметим, что последовательность непрерывных (по построению) функций $P_{ij}(\cdot, V^k(\cdot))$ сходится почти всюду к функции $P_{ij}(\cdot, V(\cdot))$, при $k \to \infty$, более того, согласно условию 4^0, последовательность $\{ P_{ij}(\cdot, V^k(\cdot)) \}$ имеет мажоранту в пространстве L_q . Следовательно, в силу теоремы Лебега [14] она сходится к функции $P_{ij}(\cdot, V(\cdot))$ при $k \to \infty$ сильно в пространстве L_q. Поэтому, оценивая интеграл $\mathcal{J}_1(\Omega')$ по неравенству Гёльдера, получим, что $\mathcal{J}_1(\Omega')$ стремится к нулю при $k \to \infty$.

Для установления сходимости $\mathcal{J}_2(\Omega') \to 0$ при $k \to \infty$ введем вспомогательные функции $W^k,\ k \in N$ по следующей формуле

$$W^k(x) \equiv \int\limits_0^{V^k(x)} \varphi^k(t)\,dt. \tag{6.8}$$

Тогда вследствие сильной сходимости $V^k \to V$ в $C(\bar{\Omega})$ (здесь достаточно и поточечной сходимости $V^k(x) \to V(x)$)

$$W^k(x) \longrightarrow W(x) \equiv \int\limits_0^{V(x)} \varphi(t)\,dt,$$

где $\varphi(\cdot)$ - предел (в смысле поточечной сходимости) последовательности $\varphi^k(\cdot)$ при $k \to \infty$, т.е. φ равна единице при $t \in I_1$ (напомним, что $\varphi \equiv \varphi_1$) и φ обращается в нуль всюду вне интервала $\bar{I}_1$. Таким образом, имеем, что $W = V \cdot \varphi(V)$.

Из определения (6.8) вытекает, что функция $W^k,\ k \in N$ имеет все производные (обобщенные) первого порядка, причем

$$W^k_{x_i} = \varphi^k(V^k)\,V^k_{x_i}. \tag{6.9}$$

В самом деле, как известно из классического анализа, равенство (6.9) справедливо для достаточно гладких функций V^k. Поэтому функцию V^k аппроксимируем гладкими функциями $V^{km},\ m \in N$, что возможно на основе того факта, что пространство гладких функций $C^\infty(\bar\Omega)$ плотно в $W_2^1(\Omega)$ для областей с не "слишком плохой" границей, например, для строго липшицевых областей. Далее перейдем к пределу при $m\to\infty$ в соотношении

$$\int\limits_\Omega W^{km}\psi_{x_i}\,dx=-\int\limits_\Omega \varphi^k(V^{km})V^{km}_{x_i}\psi\,dx\quad \forall\psi\in\dot C^\infty(\Omega),$$

лежащим в основе определения обобщенных производных, и, таким образом, получим равенство (6.9).

Непосредственно из равенств (6.8)-(6.9) вытекает, что последовательность $\{W^k\}$ ограничена в пространстве W, следовательно, из нее можно выделить подпоследовательность $\{W^m\}$, $m\in N_1\subset N$ такую, что $W^m\rightharpoonup W^\circ$ слабо в W и $W^m(x)\to W^\circ(x)$ почти всюду. Поскольку $W^k(x)\to W(x)$ почти всюду, то $W=W^\circ$. А это означает, что последовательность $\{W^k\}$ имеет только одну единственную предельную точку в смысле слабой сходимости в пространстве W, следовательно, $W^k\rightharpoonup W$ слабо в W.

Итак, имеем

$$J_2(\Omega')=\int\limits_{\Omega'}P_i(x,V)W^k_{x_i}\,dx\xrightarrow[k\to\infty]{}\int\limits_{\Omega'}P_i(x,V)W_{x_i}\,dx$$

Так как $W=V$ и $\nabla V=0$ для п.в. $x\in\Omega'$, то интеграл $J_2(\Omega')$ стремится к нулю при $k\to\infty$. Таким образом, лемма доказана.

<u>Замечание 6.I</u>. Оценку (6.6) можно доказать и при более слабых ограничениях (чем условие 4°) на рост функций β_i. Однако при ослаблении условия 4° может оказаться неверной теорема 3.I.

Пусть $v \in W$ и через $K_2(v)$ обозначается множество функций $\lambda_{ij}(\cdot, v(\cdot))$, $\lambda_i(\cdot, v(\cdot))$, $\beta_i(\cdot, v(\cdot))$, $\beta(\cdot, v(\cdot))$, $\Gamma_2(\cdot, v(\cdot))$, $i,j \in K$. Пусть функции $\rho \in K_1$ аппроксимируются непрерывными функциями ρ^k, $k \in N$, удовлетворяющими условиям 6^0– 7^0. Тогда левую часть вариационного равенства (2.4), в котором вместо функции $\rho(\cdot, u(\cdot))$ из множества $K_2(u)$ подставлена функция $\rho^k(\cdot, u(\cdot))$, обозначим через $H^k(u, \eta)$.

Решение сглаженной задачи, т.е. вариационного равенства

$$H^k(u,\eta) = \langle\langle f, \eta \rangle\rangle \quad \forall \eta \in W \tag{6.10}$$

обозначим через u^k.

Следующая лемма устанавливает важное свойство решений сглаженной задачи.

<u>Лемма 6.4</u>. Пусть удовлетворены условия 1^0– 7^0 и функции β_i, $i \in K$ аппроксимируются так, что имеет место лемма 6.3 (например, β_i аппроксимируется по формуле (6.7)). Тогда для любого $\tau \in E$

$$\int\limits_{\Omega_\tau} (u^k_{x_i})^2 dx \longrightarrow 0 \quad (k \to \infty), \tag{6.11}$$

где $\Omega_\tau \equiv \{ x \in \Omega : u(x) = \tau \}$, u – предельный элемент последовательности $\{u^k\}$ в смысле слабой сходимости в пространстве W.

<u>Доказательство</u>. Сначала рассмотрим случай $\tau > 0$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем достаточно малым число δ из интервала $(0, \tau)$ (малость δ будет уточнена по ходу

изложения доказательства) и положим

$$\eta^k(u^k) \equiv \begin{cases} 0 \quad , & u^k \le \tau-\delta \\ u^k-\tau+\delta, & |u^k-\tau| < \delta \\ 2\delta \quad , & \tau+\delta \le u^k, \end{cases} \tag{6.12}$$

где $k \in N$.

Легко видеть, что функция $x \to \eta^k(u^k(x))$, $x \in \Omega$, принадлежит пространству W, причем $|\eta^k| \le 2\delta$.

Поскольку последовательность решений u^k вариационного равенства (6.10) ограничена в пространствах W и $C^\alpha(\bar\Omega)$ (см. замечание 4.1 и следствие 6.1), то из нее можно выделить подпоследовательность $\{u^m\}$ (где m принадлежит некоторому подмножеству натуральных чисел), обладающую свойствами

$$\begin{cases} u^m \rightharpoonup u^0 \text{ слабо в } W, \\ u^m \to u^0 \text{ сильно в пространствах } C^\alpha(\bar\Omega), \\ \qquad L_{\frac{2q}{q-2}}(\Omega), \ L_{\frac{2(q-1)}{q-2}}(\Gamma) \end{cases} \tag{6.13}$$

Заметим, что сходимость (6.11) достаточно доказать для всех тех подпоследовательностей последовательности $\{u^k\}$, которые обладают свойствами (6.13). Поэтому, не ограничивая общности, считаем, что вся последовательность $\{u^k\}$ обладает свойствами (6.13).

Непосредственно из определения (6.12) следует, что $\nabla\eta^k=0$ вне множества $\Omega_{k\delta} \equiv \{x \in \Omega : |u^k(x)-\tau| < \delta\}$ и $\nabla\eta^k = \nabla u^k$ при $x \in \Omega_{k\delta}$. В качестве η при фиксированном k в вариационном равенстве (6.10) возьмем функцию (6.12). Тогда в силу условий 3°- 4° и того, что $|\eta^k| \le 2\delta$, имеем

$$\int\limits_{\Omega_{k\delta}} [\lambda_{ij}^k(x,u^k)u_{x_j}^k u_{x_i}^k + a_i u^k u_{x_i}^k +$$
$$+\beta_i^k(x,u^k)u_{x_i}^k - f_i u_{x_i}^k]\,dx \le c\delta,$$

где c - некоторая постоянная, не зависящая от k. Применяя леммы 6.I и 6.3, соответственно, для интегралов от $f_i u_{x_i}^k$ и $\beta_i^k(x,u^k)u_{x_i}^k$, получаем неравенство

$$\int\limits_{\Omega_{k\delta}} (\nu_1 u_{x_i}^k u_{x_i}^k + a_i u^k u_{x_i}^k)\,dx \le c\,\delta + \frac{\varepsilon\nu_1}{4}, \qquad (6.14)$$

справедливое для всех достаточно больших k, где постоянная c не зависит от u^k, δ.

Поскольку $a_i u^0 \in L_2(\Omega)$, $i \in K$, то из представления

$$\int\limits_{\Omega_{k\delta}} a_i u^k u_{x_i}^k\,dx = \int\limits_{\Omega_{k\delta}} [a_i(u^k - u^0)u_{x_i}^k + a_i u^0 u_{x_i}^k]\,dx$$

и леммы 6.I вытекает, что найдутся числа $\delta_1 \in E$, $k_1 \in N$ такие, что для всех $\delta \in (0,\delta_1)$ и всех $k \ge k_1$

$$\Bigl|\int\limits_{\Omega_{k\delta}} a_i u^k u_{x_i}^k\,dx\Bigr| < \frac{\varepsilon\nu_1}{2}.$$

Отсюда на основе оценки (6.14), выбрав $\delta_0 = \min\{\delta_1, \frac{\varepsilon\nu_1}{4c}\}$, получаем неравенство

$$\int\limits_{\Omega_{k\delta}} (u_{x_i}^k)^2\,dx < \varepsilon,$$

справедливое для любого $\delta \in (0,\delta_0)$ и всех достаточно больших k. Теперь сходимость (6.II) немедленно следует из того факта, что $\Omega_\tau \subset \Omega_{k\delta}$ для всех достаточно больших k (см. доказательство включения (6.2)).

Лемма аналогично доказывается и в случае $\tau \leq 0$. Если $\tau < 0$, то в качестве η^k берем функцию

$$\eta^k(u^k) \equiv \begin{cases} 0, & u^k \geq \tau + \delta \\ u - \tau - \delta, & |u^k - \tau| < \delta \\ -2\delta, & u^k \leq \tau - \delta \end{cases}$$

где $\delta \in (0, -\tau)$. Если же $\tau = 0$, то полагаем

$$\eta^k(u^k) \equiv \begin{cases} \delta, & u^k \geq \delta \\ u^k, & |u^k| < \delta \\ -\delta, & u^k \leq -\delta \end{cases}$$

и повторяем те же рассуждения, что и в случае $\tau > 0$.

§ 7. Обоснование предельного перехода

В этом параграфе на основе предыдущего материала устанавливается разрешимость вариационного равенства (2.4).

<u>Теорема 7.I</u>. Пусть выполнены условия I^0– 5^0. Тогда вариационное равенство (2.4) имеет по крайней мере одно решение.

<u>Доказательство</u>. Разрывные функции $\lambda_{ij}, \lambda_i, \beta_i, \beta, \sigma_2, i,j \in K$ аппроксимируем непрерывными функциями $\lambda_{ij}^k, \lambda_i^k, \beta_i^k, \beta^k, \sigma_2^k, i,j \in K, k \in N$, удовлетворяющими условиям 6^0– 7^0, и, кроме того, предположим, что функции β_i аппроксимированы по формуле 6.7. Как и раньше, через u^k обозначим решение сглаженной (аппроксимированной) задачи (6.I0) и, без

ограничения общности, будем считать, что последовательность $\{u^k\}$ обладает свойствами (6.I3).

Цель дальнейших рассуждений - показать, что предел u^0 последовательности $\{u^k\}$ является решением вариационного равенства (2.4).

Рассмотрим соотношение

$$\Delta H \equiv H^k(u^k;\eta) - H(u^0;\eta), \tag{7.I}$$

где через $H(u,\eta)$ обозначена левая часть вариационного равенства (2.4), и представим ее в виде

$$\Delta H = \sum_{j=1}^{9} J_j(G,\eta), \tag{7.2}$$

где $G = \Omega$ для $j \in \{1;\dots;7\}$ и $G = \Gamma$ для $j \in \{8;9\}$,

$$\begin{aligned}
J_1(\Omega,\eta) &\equiv \int_\Omega [\lambda_{ij}^k(x,u^k)u_{x_j}^k - \lambda_{ij}(x,u^0)u_{x_j}^0]\eta_{x_i}\,dx,\\
J_2(\Omega,\eta) &\equiv \int_\Omega a_i(u^k-u^0)\eta_{x_i}\,dx,\\
J_3(\Omega,\eta) &\equiv \int_\Omega [\beta_i^k(x,u^k)-\beta_i(x,u^0)]\eta_{x_i}\,dx,\\
J_4(\Omega,\eta) &\equiv \int_\Omega b_i(u_{x_i}^k-u_{x_i}^0)\eta\,dx,\\
J_5(\Omega,\eta) &\equiv \int_\Omega [\lambda_i^k(x,u^k)u_{x_i}^k-\lambda_i(x,u^0)u_{x_i}^0]\eta\,dx,\\
J_6(\Omega,\eta) &\equiv \int_\Omega a(u^k-u^0)\eta\,dx,
\end{aligned} \tag{7.3}$$

$$J_7(\Omega,\eta) \equiv \int\limits_{\Omega} [\beta^k(x,u^k) - \beta(x,u^0)]\eta\, dx,$$

$$J_8(\Gamma,\eta) \equiv \int\limits_{\Gamma} \sigma_1(u^k - u^0)\eta\, d\Gamma,$$

$$J_9(\Gamma,\eta) \equiv \int\limits_{\Gamma} [\sigma_2^k(x,u^k) - \sigma_2(x,u^0)]\eta\, d\Gamma$$

В дальнейшем там, где не могут возникнуть недоразумения, ради краткости в обозначениях вместо $J_j(G,\eta)$ будем писать $J_j(G)$.

Заметим, что для доказательства теоремы достаточно показать, что найдутся реализации (см.замечание 2.5) функций $\lambda_{ij}, \lambda_i, \beta_i, \beta, \sigma_2,\ i,j \in K$ при фиксированной функции u^0 такие, что для любого $\eta \in W$ величина ΔH стремится к нулю при $k \to \infty$.

Сначала покажем, что интеграл $J_1(\Omega)$ сходится к нулю при $k \to \infty$. Для этого указанный интеграл перепишем в виде $J_{11}(\Omega) + J_{12}(\Omega)$, где

$$J_{11}(\Omega) = \int\limits_{\Omega} [\lambda_{ij}^k(x,u^k) - \lambda_{ij}(x,u^0)]\, u^k_{x_j}\, \eta_{x_i}\, dx,$$

$$J_{12}(\Omega) = \int\limits_{\Omega} \lambda_{ij}(x,u^0)(u^k_{x_j} - u^0_{x_j})\,\eta_{x_i}\, dx.$$

Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и область Ω представим в виде

$$\Omega = \Omega'_\varepsilon \cup \Omega_\varepsilon \cup \Omega_T, \tag{7.4}$$

где

$$\Omega'_\varepsilon = \{ x \in \Omega : |u^\circ(x) - \tau| \geq \varepsilon, \tau \in T \},$$

$$\Omega_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{\ell} \{ x \in \Omega : 0 < |u^\circ(x) - t_i| < \varepsilon, t_i \in T \},$$

$$\Omega_T = \{ x \in \Omega : u^\circ(x) \in T \},$$

и положим

$$G_k \equiv \{ x \in \Omega : |u^k(x) - \tau| \geq \frac{1}{k}, \tau \in T \}.$$

В силу сильной сходимости последовательности $\{u^k\}$ в $C(\bar\Omega)$ имеет место включение $\Omega'_\varepsilon \subset G_k$, справедливое для всех достаточно больших k. Поскольку $\lambda^k_{ij} = \lambda_{ij}$ для $x \in G_k$ (см.условие 7^0), то отсюда имеем

$$J_{11}(\Omega'_\varepsilon) = \int_{\Omega'_\varepsilon} [\lambda_{ij}(x,u^k) - \lambda_{ij}(x,u^\circ)] u^k_{x_j} \eta_{x_i} dx$$

Так как функции λ_{ij} непрерывны на множестве Ω'_ε, то сходимость $J_{11}(\Omega'_\varepsilon) \to 0$ при $k \to \infty$ доказывается так же как и сходимость к нулю при $k \to \infty$ величины (5.I). Вследствие леммы 6.4 имеем, что $J_{11}(\Omega_T) \to 0$ при $k \to \infty$. Далее, сходимость $J_{11}(\Omega_\varepsilon) \to 0$ при $k \to \infty$ вытекает из того, что $mes\, \Omega_\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Наконец, $J_{12}(\Omega) \to 0$ при $k \to \infty$ в силу слабой сходимости $u^k \rightharpoonup u^\circ$ в W.

Итак, показано, что $J_1(\Omega) \to 0$ при $k \to \infty$. Отметим, что этот факт установлен для произвольной реализации функции λ_{ij}, $i,j \in K$.

Сходимость к нулю при $k \to \infty$ интеграла $J_2(\Omega)$ вследствие свойств (6.I3) следует из неравенства

$$|J_2(\Omega)| \leq \|u^k - u^\circ\|_{\frac{2q}{q-2}} \cdot \sum_{i=1}^{n} \|a_i\|_q \cdot \|\eta_{x_i}\|_2 .$$

Рассмотрим интеграл (7.3).

Поскольку сходимость $J_3(\Omega_\varepsilon \cup \Omega'_\varepsilon) \to 0$ при $k \to \infty$ устанавливается так же, как и (уже доказанная) сходимость $J_1(\Omega_\varepsilon \cup \Omega'_\varepsilon) \to 0$ при $k \to \infty$, то более подробно рассмотрим интеграл $J_3(\Omega_T)$. Согласно условиям 4^0 и 6^0, последовательность функций $\beta_i^k(\cdot, u^k(\cdot))$ ограничена в пространстве $L_q(\Omega_T)$. В рефлексивном банаховом пространстве каждая ограниченная последовательность имеет слабо сходящуюся подпоследовательность [14]. Следовательно, по теореме Рисса о представлении линейного функционала найдется подпоследовательность $\{\beta_i^m(\cdot, u^m(\cdot))\}$, $m \in N_1 \subset N$ и функция $\beta_i^0 \in L_q(\Omega_T)$ такие, что для каждого φ из пространства $L_{q'}$, сопряженного к пространству L_q

$$\int\limits_{\Omega_T} [\beta_i^m(x, u^m(x)) - \beta_i^0]\varphi\, dx \to 0 \quad (m \to \infty).$$

Так как для любой функции $\eta \in W$:

$$\eta_{x_i} \in L_{q'}(\Omega), \quad i \in N, \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1,$$

то сходимость $J_3(\Omega_T) \to 0$ при $m \to \infty$ установлена.

Предыдущие рассуждения сохраняют силу и для подпоследовательности $\{u^m\} \subset \{u^k\}$.

Положим

$$\beta_i^*(x) \equiv \begin{cases} \beta_i(x, u^0(x)), & x \notin \Omega_T \\ \beta_i^0(x), & x \in \Omega_T \end{cases}$$

Тогда β_i^* является реализацией функции β_i (см.определение 2.2).

В самом деле, в силу условия I^0 и сильной сходимости $u^k \to u^0$ в $C(\bar{\Omega})$ для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется $k_0 \in N$ такой, что для всех $k \geq k_0$ и всех $x \in \Omega$:

$$\beta_i^-(x) - \varepsilon h_2(x) - \varepsilon \leq \beta_i^k(x, u^k(x)) \leq \beta_i^+(x) + \varepsilon h_2(x) + \varepsilon \qquad (7.5)$$

где через $\beta_i^-(x)\ (\beta_i^+(x))$ обозначена минимальная (максимальная) из величин

$$\beta_i(x, u^0(x)+),\ \beta_i(x, u^0(x)-)\ ,\ i \in K. \qquad (7.6)$$

Легко видеть, что соотношение (7.5) справедливо и для слабого предела β_i^0 последовательности $\{\beta_i^k(\cdot, u^k(\cdot))\}$ при $x \in \Omega_T$. Таким образом (поскольку ε произвольно), значения $\beta_i^0(x)$ содержатся в замкнутом интервале с концевыми точками (7.6).

Итак, показано, что существует реализация β_i^*, $i \in K$, обеспечивающая сходимость к нулю при $m \to \infty$ величины $J_3(\Omega)$.

Аналогично доказывается сходимость к нулю всех оставшихся интегралов $J_j(G)$, $j \in \{4; \cdots; 9\}$.

Теорема доказана.

§ 8. Сильная сходимость в пространстве W_2^1 решений сглаженных задач

Существование решения вариационного равенства (2.4) можно доказать и без применения леммы 6.4, но эта лемма весьма полезна для установления следующего важного (как с точки зрения численных методов решения задач с разрывными нелинейностями, так и приложений в главе Ш) результата.

Теорема 8.I. Пусть выполнены условия I°– 7°, функции β_i аппроксимируются по формуле (6.7), u^0 – решение вариационного равенства (2.4) и пусть u^0 является предельной точкой в смысле слабой сходимости в пространстве W последовательности решений u^k сглаженной задачи (6.I0). Тогда последовательность $\{u^k\}$ содержит подпоследовательность, сходящуюся сильно в пространстве W к элементу u^0.

Доказательство. Без ограничения общности, будем считать, что последовательность $\{u^k\}$ обладает свойствами (6.I3). Покажем, что $\|u^k - u\| \longrightarrow 0$ при $k \to \infty$. Для этого, аналогично, как и при доказательстве теоремы 7.I, рассмотрим разность левых частей вариационных равенств (6.I0) и (2.4), т.е. соотношение (7.I) и убедимся, что для каждого $i \in \{2; 3; \dots; 9\}$ интеграл $J_i(G, u^k - u^0)$ (см.представление (7.2)) стремится к нулю при $k \to \infty$.

Сначала рассмотрим интеграл $J_5(\Omega, u^k - u^0)$, т.е.

$$\int_\Omega [\lambda_i^k(x, u^k) u^k_{x_i} - \lambda_i(x, u^0) u^0_{x_i}] (u^k - u^0) dx$$

Поскольку последовательность $\{u^k\}$ ограничена в пространстве W, то в силу условия 4° и неравенства Гельдера имеем

$$J_5(\Omega, u^k - u^0) \le c \|h_5\|_q \cdot \|u^k - u^0\|_{\frac{2q}{q-2}},$$

откуда вследствие свойств (6.I3) $J_5(\Omega, u^k - u^0) \to 0$ при $k \to \infty$.

Таким же образом доказывается сходимость к нулю при $k\to\infty$ следующих интегралов $J_j(G, u^k-u^0)$, $j\in\{2;4;6;7;8;9\}$.

Для доказательства сходимости $J_3(\Omega, u^k-u^0)\longrightarrow 0$ при $k\to\infty$ область Ω представим в виде (7.4) и рассмотрим в отдельности три слагаемых $J_3(X, u^k-u^0)$, $X=\Omega_T, \Omega_\varepsilon, \Omega'_\varepsilon$.

Так как $\nabla u^0=0$ для п.в. $x\in\Omega_T$, то согласно условию 4^0 и неравенству Гёльдера :

$$J_3(\Omega_T, u^k-u^0)\le \alpha\Big(\int\limits_{\Omega_T}|h_5|^2dx\Big)^{\frac12}\Big(\int\limits_{\Omega_T}(u^k_{x_i})^2dx\Big)^{\frac12},$$

откуда на основе леммы 6.4 $J_3(\Omega_T, u^k-u^0)\to 0$ при $k\to\infty$.

Поскольку последовательность $\{u^k\}$ ограничена в W и $mes\,\Omega_\varepsilon\longrightarrow 0$ при $\varepsilon\to 0$, то $J_3(\Omega_\varepsilon, u^k-u^0)\to 0\ (k\to\infty)$.

Заметим, что в множестве Ω'_ε, где $\beta_i^k(x,u^k)=\beta_i(x,u^k)$, последовательность $\{\hat\beta_i^k\}\equiv\{\beta_i(\cdot, u^k(\cdot))-\beta_i(\cdot, u^0(\cdot))\}$ сходится к нулю при $k\to\infty$ почти всюду. Кроме этого, согласно условию 4^0 указанная последовательность имеет мажоранту из пространства $L_q(\Omega'_\varepsilon)$. Поэтому последовательность $\{\hat\beta_i^k\}$ сходится к нулю при $k\to\infty$ сильно в $L_q(\Omega'_\varepsilon)$. Отсюда, пользуясь неравенством Гёльдера, заключаем, что $J_3(\Omega'_\varepsilon, u^k-u^0)\longrightarrow 0\ (k\to\infty)$.

Для завершения доказательства интеграл $J_1(\Omega, u^k-u^0)$ представим в виде суммы следующих двух интегралов

$$J_{13}(\Omega)\equiv\int\limits_{\Omega}[\lambda_{ij}^k(x,u^k)-\lambda_{ij}(x,u^0)]\,u^0_{x_j}(u^k_{x_i}-u^0_{x_i})\,dx,$$

$$J_{14}(\Omega)\equiv\int\limits_{\Omega}\lambda_{ij}^k(x,u^k)(u^k_{x_j}-u^0_{x_j})(u^k_{x_i}-u^0_{x_i})\,dx.$$

Поскольку $\nabla u^{\circ}=0$ для п.в. $x\in\Omega_T$ и, кроме того, $mes\,\Omega_\varepsilon\to 0$ при $\varepsilon\to 0$, то $J_{13}(\Omega_T\cup\Omega_\varepsilon)\to 0\,(k\to\infty)$, а сходимость $J_{13}(\Omega'_\varepsilon)\to 0\quad(k\to\infty)$ доказывается также как и сходимость к нулю при $k\to\infty$ величины (5.I).

Так как u° - решение вариационного равенства (2.4), то разность (7.I) равна нулю. Следовательно, учитывая представление (7.2), имеем

$$J_{14}(\Omega)=-\sum_{j=2}^{9}J_j(G,u^k-u^{\circ})-J_{13}(\Omega)$$

Выше показано, что правая часть этого равенства стремится к нулю при $k\to\infty$, поэтому в силу условия равномерной эллиптичности получаем, что

$$\int_\Omega \nu_1(u^k_{x_i}-u^{\circ}_{x_i})^2dx\le J_{14}(\Omega)\to 0\quad(k\to\infty).$$

Теорема доказана.

§ 9. О разрешимости термодиффузионной задачи

В этом параграфе покажем, как предыдущие результаты могут быть применены к доказательству разрешимости (разрешимость понимается в смысле определения 9.I) упрощенной термодиффузионной задачи в квазистационарном случае.

Введем ряд обозначений.

Пусть $\Omega=S^-\times(0,b)$ - цилиндрическая область евклидова пространства E_n, $n\geq 3$ с основаниями S^-, S^+ и боковой поверхностью Γ. Пусть заданы положительные постоянные $L,\lambda_1,\lambda_2,\varkappa_1,\varkappa_2,\nu_1,\gamma,\rho,t_A,\ m\in[0,1]$

и непрерывная функция $s: E \to [0,1]$

$$s(t) = \begin{cases} 1, & t < 0 \\ 0, & t > t_A . \end{cases} \qquad (9.1)$$

Пусть, кроме этого, заданы функции $\eta, \lambda, \varkappa, \bar{\eta}$ с помощью следующих соотношений

$$\eta(t,\tau) = \begin{cases} 1, & \tau > s(t) \\ 0, & \tau < s(t), \end{cases} \qquad (9.2)$$

$$\left. \begin{aligned} &\lambda = \lambda_1 \eta + \lambda_2 (1-\eta), \quad \varkappa = \varkappa_1 \eta + \varkappa_2 (1-\eta) \\ &\bar{\eta} = 1 - \eta + m\eta \end{aligned} \right\} \qquad (9.3)$$

Рассмотрим задачу определения неизвестных функций u, w в области Ω, исходя из уравнений

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\lambda(u,w) u_{x_i}) - L v_1 \frac{\partial u}{\partial x_n} + v_1 \gamma \rho \frac{\partial}{\partial x_n} \eta(u,w) = 0 \qquad (9.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\varkappa(u,w) w_{x_i}) - v_1 \frac{\partial}{\partial x_n}(\bar{\eta}(u,w) w) = 0 \qquad (9.5)$$

и некоторых, например, следующих граничных условий

$$\frac{\partial u}{\partial N} = -g, \quad w = w_0, \quad 0 \le w_0(x) \le 1, \quad x \in S^- \qquad (9.6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial N} + \alpha(u - u_0) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial N} = 0, \quad x \in S^+ \cup \Gamma, \qquad (9.7)$$

где $\alpha > 0$, $g \in L_q(S^-)$, $w_0 \in W_q^1(\Omega)$, $u_0 \in L_q(S^+ \cup \Gamma)$ заданные величины.

Отметим, что более общая постановка термодиффузионной задачи приведена в работе [1]. В этой работе также описан физический смысл здесь введенных величин.

Поскольку функция η терпит разрыв на линии S, то задача (9.4)-(9.7) является задачей с разрывными нелинейностями. Следовательно, необходимо ввести подходящее понятие решения. Для этого соотношения (9.4)-(9.5), учитывая граничные условия (9.6)-(9.7), после несложных формальных преобразований сведем к следующим формальным интегральным соотношениям

$$\int\limits_{\Omega}(\lambda u_{x_i}\varphi_{x_i}+\gamma_0\eta\varphi_{x_n})dx+\ell(u,\eta,\varphi)=0 \quad \forall\varphi\in W_2^1(\Omega) \tag{9.8}$$

$$\int\limits_{\Omega}(\varkappa w_{x_i}\psi_{x_i}-v_1\eta w\psi_{x_n})dx+\int\limits_{S^+}v_1\eta w\psi dS=0 \quad \forall\psi\in W \tag{9.9}$$

где $\gamma_0\equiv v_1\gamma\rho$,

$$\ell(u,\eta,\varphi)\equiv\int\limits_{\Omega}Lv_1u_{x_n}\varphi dx+\int\limits_{\Gamma}\alpha(u-u_0)\varphi d\Gamma+$$

$$+\int\limits_{S^+}[\alpha(u-u_0)-\gamma_0\eta]\varphi dS+\int\limits_{S^-}(g+\gamma_0\eta)\varphi dS,$$

W - пространство всех тех элементов $z\in W_2^1(\Omega)$, которые равны нулю на S^- в смысле теорем вложения.

Через $\lambda^-, \varkappa^-, \lambda^+, \varkappa^+$ обозначим соответственно $\min\{\lambda_1,\lambda_2\}$, $\min\{\varkappa_1,\varkappa_2\}$, $\max\{\lambda_1,\lambda_2\}$, $\max\{\varkappa_1,\varkappa_2\}$ и положим

$$\Omega_S\equiv\{x\in\bar\Omega:\ w(x)=s(u(x))\}.$$

В отличие от понятия решения, введенного в § 2 для одного уравнения (вариационного равенства), здесь оно понадобится в более широком смысле.

Определение 9.I. Пару $(u, w) \in W_2^1(\Omega) \times W_2^1(\Omega)$, $w = w_0$ на S^- будем называть решением задачи (9.4)-(9.7) (или задачи (9.8)-(9.9)), если существуют матрицы $(\lambda_{ij}) \in \Lambda(\lambda^-, \lambda^+)$, $(\varkappa_{ij}) \in \Lambda(\varkappa^-, \varkappa^+)$, функции $\eta_1, \eta_2 : \partial\Omega \to [0, 1]$, $\eta_i^*, \gamma_i^* : \Omega \to [-1, 1]$, $i = 1, \dots, n$ такие, что

$$\int_\Omega (\lambda_{ij} u_{x_j} \varphi_{x_i} + \gamma_0 \eta_i^* \varphi_{x_i}) dx + l(u, \eta_1, \varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in W_2^1(\Omega) \tag{9.I0}$$

$$\int_\Omega (\varkappa_{ij} w_{x_j} \psi_{x_i} - v_1 \gamma_i^* w \psi_{x_i}) dx + \int_{S^+} v_1 \eta_2 w \psi dS = 0 \quad \forall \psi \in W \tag{9.II}$$

причем для $x \notin \Omega_S$:

$$\lambda_{ij} = \lambda \delta_{ij}, \quad \varkappa_{ij} = \varkappa \delta_{ij}, \quad \eta_k^* = \gamma_k^* = 0, \ k = 1, \dots, n-1,$$

$$\eta_n^* = \eta, \quad \gamma_n^* = \bar{\zeta}, \quad \eta_1 = \zeta, \quad \eta_2 = \bar{\zeta}$$

где δ_{ij} - символ Кронекера.

Непосредственно из теоремы 4.2 и ее следствия 4.I вытекает, что для решения задачи (9.8)-(9.9) имеет место априорная оценка

$$\| u, w \|_{W_2^1(\Omega)} \le C_0 \tag{9.I2}$$

и, кроме этого, в силу теоремы 3.I функции u, w принадлежат ограниченному множеству пространства $C^{\alpha_0}(\bar{\Omega})$ с некоторым $\alpha_0 > 0$.

Отметим, что величина w, характеризующая концентрацию вещества, по своему физическому смыслу должна принимать значения из интервала $[0, 1]$. Покажем, что математическая модель (9.10) -(9.11), в самом деле, удовлетворяет этому требованию.

Введем множество $\Omega^+ = \{ x \in \bar{\Omega} : W(x) > 1 \}$ и покажем, что $mes\,\Omega^+ = 0$. Предположим, что $mes\,\Omega^+ > 0$.

Пусть $x^0 \in \Omega^+$ точка, в которой функция W достигает свое максимальное значение. Так как на границе S^- : $W(x) \in [0, 1]$ то непосредственно из доказательства теоремы 4.1 (см. случай 1)) вытекает, что $x^0 \notin \partial\Omega$.

Без ограничения общности, будем считать, что в любой окрестности точки x^0 существует точка x, в которой $W(x) < W(x^0)$.

Поскольку функция W непрерывна, то найдется шар $K_\rho(x^0)$, содержащийся в $\Omega \cap \Omega^+$. В силу определений (9.1) - (9.2) имеем, что $\eta(u, W) = 1$ для $x \in K_\rho(x^0)$. Поэтому, учитывая (9.3), из соотношения (9.11) получаем ВР

$$\int\limits_{K_\rho(x^0)} (\mathscr{X}_1 W_{x_i} \psi_{x_i} - V_1 m \psi_{x_n}) dx = 0 \qquad (9.13)$$

справедливое для любого $\psi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(K_\rho(x^0))$. В силу результатов работы [23] из (9.13) следует, что для любого $x \in K_\rho(x^0)$:

$$\mathscr{X}_1 \Delta W - V_1 m W_{x_n} = 0$$

Отсюда согласно принципу максимума $W(x) \equiv W(x^0)$, $x \in K_\rho(x^0)$, что противоречит тому, что $mes\,\Omega^+ > 0$. Итак установлено, что мера множества Ω^+ равна нулю. Вполне аналогично доказывается, что мера множества тех x, где $W(x)<0$, равна нулю.

Итак, показано, что $W(x)\in[0,1],\ x\in\bar{\Omega}$.

Разрешимость сглаженной задачи по существу доказывается так же, как и теорема 5.I.

Предположим, что функции $\rho=\rho(x),\ r=r(x)$ принадлежат пространству $L_2(\Omega)$. Тогда вариационные равенства (9.8)-(9.9), в которых вместо $\eta(u,W)$ подставлена непрерывная функция $\eta(\rho,r)$, становятся линейными относительно u и W, следовательно, в силу теоремы 4.2, они однозначно разрешимы при каждой фиксированной паре (ρ,r). Таким образом, определен оператор $A_1: L_2\times L_2\to W_2^1\times W_2^1$, действующий по закону $(\rho,r)\to(u(\rho,r),W(\rho,r))$, т.е. каждому элементу (ρ,r) оператор A_1 ставит в соответствие пару (u,W), компонентами которой являются решения вариационных равенств (9.8)-(9.9) с функцией $\eta(\rho,r)$. Теперь, аналогично, как и при доказательстве теоремы 5.I, устанавливается, что оператор A_1 имеет неподвижную точку.

Функцию (9.2) будем аппроксимировать непрерывными функциями η^k такими, что $\eta^k(t,\tau)\in[0,1]$, причем $\eta^k=\eta$ для всех точек $(t,\tau)\in E_2$, не принадлежащих множеству

$$\left\{(t,\tau)\in E_2:\ s(t)-\frac{1}{k}<\tau<s(t)+\frac{1}{k}\right\}.$$

Решения вариационных равенств (9.8)-(9.9), в которых вместо функции $\eta(u,W)$ подставлена функция $\eta^k(u,W)$ обозначим через u^k, W^k, соответственно. Тогда

$$\int_\Omega[\lambda(\eta^k)u^k_{x_i}\varphi_{x_i}+\gamma_0\eta^k\varphi_{x_n}]dx+\ell(u^k,\eta^k,\varphi)=0 \qquad (9.14)$$

$$\int\limits_{\Omega}[\varkappa(\eta^k)W^k_{x_i}\psi_{x_i}-V_1\xi^k\psi_{x_n}]dx+\int\limits_{S^+}V_1\xi^k W^k\psi dS=0 \qquad (9.15)$$

для любых $\varphi\in W_2^1(\Omega)$, $\psi\in W$.

Поскольку последовательности $\{u^k\}$, $\{W^k\}$ ограничены в пространствах $W_2^1(\Omega)$, $C^\alpha(\bar\Omega)$, а последовательность $\{\eta^k(u^k,W^k)\}$ ограничена (по построению) единицей, то найдутся функции $u^\circ, W^\circ, \eta^\circ$ и последовательности $\{u^m\}, \{W^m\}, \{\eta^m(u^m,W^m)\}$, где m принадлежит некоторому подмножеству натуральных чисел, такие, что сходимости $u^m\to u^\circ$, $W^m\to W^\circ$ $(m\to\infty)$ обладают свойствами (6.13), а последовательность $\{\eta^m(u^m,W^m)\}$ сходится к η° слабо в пространстве $L_r(\Omega)$ для любого r из интервала $(1,\infty)$. Без ограничения общности будем считать, что такими сходимостями обладают исходные последовательности, т.е. вместо m будем писать k. Основываясь на указанных сходимостях, предельный переход в соотношениях (9.14)-(9.15) при $x\in\Omega\setminus\Omega_S^\circ$, где $\Omega_S^\circ=\{x\in\bar\Omega : W^\circ(x)= = S(u^\circ(x))\}$, осуществляется так же, как и соответствующий предельный переход при доказательстве теоремы 7.1. Отметим, что при $x\in\Omega_S^\circ$ обоснование предельного перехода в указанных соотношениях связано с дополнительными трудностями, которые с математической точки зрения возникают из-за наличия (в данном случае) более сложных коэффициентов при старших производных. Для обоснования предельного перехода в соотношениях (9.14)-(9.15) будем применять некоторые результаты о G-сходимости дифференциальных операторов.

Введем вспомогательную функцию $V^k=u^k+cx_n$, где

$c=\gamma_0/(\lambda_1-\lambda_2)$. Тогда соотношение (9.I4) преобразуется к виду

$$\int\limits_{\Omega}[\lambda(\tilde{\zeta}^k)V^k_{x_i}\varphi_{x_i}-c\lambda_2\varphi_{x_n}]dx+\ell(V^k,\tilde{\zeta}^k,\varphi)=0 \qquad (9.I6)$$

для любого $\varphi\in W_2^1(\Omega)$, где $\tilde{\zeta}^k=\zeta^k(V^k-cx_n,W^k)$. Заметим, что интегральное выражение $\ell(V^k,\tilde{\zeta}^k,\varphi)$ не содержит слагаемых с производными функции φ, поэтому из результатов работ [I7, 33] о G-сходимости вытекает, что существует матрица $(\lambda_{ij})\in\Lambda(\lambda^-,\lambda^+)$ такая, что

$$\int\limits_{\Omega}\lambda(\tilde{\zeta}^k)V^k_{x_i}\varphi_{x_i}dx\longrightarrow\int\limits_{\Omega}\lambda_{ij}V^0_{x_j}\varphi_{x_i}dx \quad (k\to\infty),$$

причем в $\Omega\setminus\Omega_s^0$: $\lambda_{ij}=0$, $i\neq j$ и $\lambda_{ii}=\lambda$, $i,j\in K$, где V^0 слабый предел последовательности $\{V^k\}$ в пространстве W_2^1.

Легко видеть, что $\ell(V^k,\tilde{\zeta}^k,\varphi)\to\ell(V^0,\tilde{\zeta}^0,\varphi)$ при $k\to\infty$, где $\tilde{\zeta}^0=\zeta^0(U^0-cx_n,W^0)$. Поскольку $\zeta^k(U^k(x),W^k(x))\in[0,1]$ для любого $x\in\Omega$, то этим же свойством обладает и слабый предел ζ^0. Таким образом, переходя к пределу при $k\to\infty$ в соотношении (9.I6), получаем

$$\int\limits_{\Omega}[\lambda_{ij}V^0_{x_j}\varphi_{x_i}-c\lambda_2\varphi_{x_n}]dx+\ell(V^0,\tilde{\zeta}^0,\varphi)=0 \qquad (9.I7)$$

Так как $V^0=U^0+cx_n$, то непосредственно из соотношения (9.I7), учитывая, что

$$\int\limits_{\Omega}\lambda_{ij}V^0_{x_j}\varphi_{x_i}dx=\int\limits_{\Omega}(\lambda_{ij}U^0_{x_j}\varphi_{x_i}+\lambda_{in}c\varphi_{x_i})dx$$

получаем вариационное равенство (9.10), где

$$\eta_i^* = \frac{\lambda_{in} c}{\gamma_0} = \frac{\lambda_{in}}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad i \in K.$$

Заметим, что $|\eta_i^*| \leq 1$, поскольку из условия равномерной эллиптичности немедленно следует, что

$$\lambda^- \leq \lambda_{ii} \leq \lambda^+, \quad |\lambda_{ij}| \leq \lambda^+ - \lambda^- \ (i \neq j), \ i,j \in K.$$

Вполне аналогично обосновывается предельный переход в соотношении (9.15).

Итак, разрешимость термодиффузионной задачи (9.4) - (9.7) в смысле определения 9.1 доказана.

<u>Замечание</u> 9.1. По-видимому, привлечение полных матриц $(\lambda_{ij}), (\varkappa_{ij}), x \in \Omega_s$ для определения решения задачи (9,4) - (9.7) оправдано для моделирования физических процессов с фазовыми переходами в тех случаях, когда переходная зона обладает свойством анизотропности.

§ 10. Некоторые обобщения

До сих пор рассматривались только ситуации, когда функции $\lambda_{ij}, \lambda_i, \beta_i, \beta, \Gamma_2$ могут иметь разрывы при фиксированных значениях $t = t_s$, $s = 1, \ldots, \ell$. В настоящем параграфе теорема существования решения (теорема 7.1) распространяется также на случаи, когда указанные функции терпят разрывы на поверхностях $t = g_s(x) \not\equiv const$.

Определение 10.1. Функция $p: \mathcal{D}(p) \subset G \times E \to E$ принадлежит классу $P_1(G)$, если существуют функции $g_1, \ldots, g_\ell \in C(G) \cap L_2(G)$, $g_{s-1}(x) - g_s(x) > 0$ $\forall x \in G$, $s = 2, \ldots, \ell$, такие, что

$$Q_s \equiv \{(x,t) : x \in G,\ g_s(x) < t < g_{s-1}(x)\} \subset \mathcal{D}(p),$$

$s = 1, \ldots, \ell+1$, $g_0 = \infty$, $g_{\ell+1} = -\infty$, причем в каждом множестве Q_s $(s = 1, \ldots, \ell+1)$ функция p измерима по x при фиксированных t и для п.в. $x \in G$ равномерно непрерывна по t. Иногда вместо $P_1(G)$ будем писать $P_1(G; g_1, \ldots, g_\ell)$.

Определение 10.2. Функция $p: \mathcal{D}(p) \subset G \times E \to E$ принадлежит классу $P_2(G)$, если множество $\bar{G}$ представимо в виде $\cup \bar{G}_s$ конечного числа попарно непересекающихся областей G_s, $mes(\bar{G}_s \setminus G_s) = 0$, таких, что в каждом множестве $G_s \times E$ функция p принадлежит классу $P_1(G_s)$. Множество точек (x, t) разрыва по t функции p будем обозначать через $R_0(p)$.

Определение 10.3. Реализацией функции $p \in P_2(G)$ при фиксированной функции $V = V(x)$ будем называть произвольную измеримую функцию $p^*: G \to E$ такую, что $p^*(x) \in \hat{p}(x)$

для п.в. $x \in G$, где $\hat{p}(x)$ - замкнутый интервал с концевыми точками $p(x, v(x)+)$, $p(x, v(x)-)$ Класс всех возможных реализаций функции p при фиксированной функции v как и раньше будем обозначать через $B(p; v)$.

Определение 10.4. Реализацией матрицы $A = A(x,t) = (a_{ij}(x,t))$, $a_{ij} \in P_2(G)$ при фиксированной функции $v = v(x)$ будем называть произвольную матрицу $A^* = A^*(x)$ с измеримыми элементами такую, что для п.в. $x \in G$ матрица A^* представима в виде

$$\theta(x) A(x, v(x)+) + (1-\theta(x)) A(x, v(x)-)$$

с некоторой измеримой функцией $\theta : G \to [0, 1]$. Класс всех возможных реализаций матрицы A при фиксированной функции v будем обозначать через $B(A; v)$.

Определение 10.5. В этом параграфе $\Lambda(\nu_1, \nu_2)$ - класс всех симметрических матриц с элементами $a_{ij} \in P_2(G)$ такими, что для любого (x,t), принадлежащего одновременно всем множествам $\mathcal{D}(a_{ij}) \setminus R_0(a_{ij})$, $i,j \in K$, выполнено условие

$$\nu_1 |\xi|^2 \le a_{ij}(x,t) \xi_i \xi_j \le \nu_2 |\xi|^2 \quad \forall \xi \in E_n .$$

Замечание 10.1. Пусть $A = (a_{ij}) \in \Lambda(\nu_1, \nu_2)$. Тогда любая реализация A^* из $B(A; v)$ также принадлежит $\Lambda(\nu_1, \nu_2)$. Но матрица (a^*_{ij}), $a^*_{ij} \in B(a_{ij}; v)$, вообще говоря, не принадлежит $\Lambda(\nu_1, \nu_2)$, и тем более - классу $B(A; v)$.

Предположим, что выполнены следующие условия

I. $\lambda_{ij}, \lambda_i, \beta_i, \beta \in P_2(\Omega)$, $\sigma_2 \in P_2(\Gamma)$, причем $R_0(\lambda_{ij}) = R_0(\lambda_i)$, $i,j \in K$. Если в множестве $G \times E$ функции λ_{ij} принадлежат классу $P_1(G; g_1, \dots, g_l)$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такой, что при всех (x,t) из множества

$$Q_{s\delta} \equiv \{(x,t)\in Q_s : g_s(x) < t < g_s(x)+\delta\}, \quad s=1,\dots,l,$$

справедливо неравенство

$$|\lambda_{ij}(x,g(x)+) - \lambda_{ij}(x,t)| < \varepsilon, \quad i,j\in K. \qquad (10.1)$$

II. $(\lambda_{ij}) \in \Lambda(\nu_1,\nu_2)$, $\nu_1>0$.

III. Существуют неотрицательные функции $h_4\in L_q(\Omega)$, $h_5\in L_q(\Omega)$, $h_6\in L_q(\Gamma)$такие, что при каждом $(x,t)\in \mathcal{D}(\overset{2}{z_s})\setminus R_0(z_s)$ выполнены неравенства $|z_s(x,t)| \le h_s(x)$; $s=4,5,6$, для $z_4=\beta$; $z_5=\lambda_i,\beta_i$; $z_6=\sigma_2$.

IV. Существует постоянная c_0 такая, что для каждого $v\in L_2(\Omega)$ и произвольных фиксированных реализаций $\lambda_{ij}^*\in B(\lambda_{ij};v)$, $(\lambda_{ij}^*)\in\Lambda(\nu_1,\nu_2)$, $\lambda_i^*\in B(\lambda_i;v)$ вариационное равенство (4.I) однозначно разрешимо относительно $u\in W$ при любом $f\in F$ и имеет место оценка (4.2).

Замечание I0.2. Вместо неравенства (I0.I) можно потребовать выполнение неравенства

$$|\lambda_{ij}(x,g(x)-) - \lambda_{ij}(x,t)| < \varepsilon, \quad i,j\in K,$$

для $(x,t)\in\{(x,t)\in Q_{s+1} : g_s(x)-\delta < t < g_s(x)\}$, $s=1,\dots,l$.

Определение I0.6. Решением вариационного равенства (2.4) (в условиях I–III, 3°) назовем функцию $u\in W$, если соотношение (2.4) выполняется для некоторых реализаций $\rho^*\in B(\rho;u)$, $\rho=(\lambda_{ij}),\ \lambda_i,\ \beta_i,\ \beta,\ \sigma_2$.

Для доказательства разрешимости ВР (2.4) в случае, когда коэффициенты терпят разрыв на поверхностях $t=g(x)\not\equiv const$ нам понадобится ряд вспомогательных результатов. В отличие от § 6 здесь разрывные (по t) функции будем аппроксимировать более специальным образом.

Пусть $\rho\in P_1(G;g_1,\dots,g_l)$. Введем функции

$P_1, \dots, P_{l+1}$; φ^k, $\psi^k \equiv 1 - \varphi^k$.

$$P_1(x,t) = \begin{cases} p(x,t), & t > g_1(x) \\ p(x, g_1(x)+), & t \le g_1(x) \end{cases}$$

$$P_2(x,t) = \begin{cases} p(x, g_1(x)-), & t \geq g_1(x) \\ p(x,t), & g_2(x) < t < g_1(x) \\ p(x, g_2(x)+), & t \le g_2(x) \end{cases}$$

$$P_s(x,t) = \begin{cases} P_{s-1}(x,t), & t > g_{s-2}(x) \\ p(x, g_{s-2}(x)-)\,\alpha_s(x,t) + p(x, g_{s-1}(x)-)(1-\alpha_s(x,t)), & \\ \qquad g_{s-1}(x) \le t \le g_{s-2}(x) & \\ p(x,t), & g_s(x) < t < g_{s-1}(x) \\ p(x, g_s(x)+), & t \le g_s(x) \end{cases}$$

где $\alpha_s(x,t) = \dfrac{t - g_{s-1}(x)}{g_{s-2}(x) - g_{s-1}(x)}$, $s = 3, 4, \dots, l+1$

$$\varphi^k(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ kt, & 0 \le t \le \frac{1}{k} \\ 1, & t > \frac{1}{k} \end{cases} \tag{10.2}$$

Функцию p будем аппроксимировать непрерывными по t (для п.в. x) функциями $p^k \equiv P_l^k$, $k = 1, 2, \dots$, определяемыми соотношениями

$$P_s^k(x,t) = P_{s-1}^k(x,t)\cdot\varphi^k(t - g_s(x)) + P_{s+1}(x,t)\cdot\psi^k(t - g_s(x)), \tag{10.3}$$

$P_0^k \equiv P_1$, $s = 1, 2, \dots, l$, или, что равносильно, формулой

$$\rho^k = (\rho_1 - \rho_2)\varphi_1^k \times \dots \times \varphi_\ell^k + (\rho_2 - \rho_3)\varphi_2^k \times \dots \times \varphi_\ell^k +$$

$$+ \dots + (\rho_\ell - \rho_{\ell+1})\varphi_\ell^k + \rho_{\ell+1}, \qquad (10.4)$$

где $\varphi_s^k(x,t) \equiv \varphi^k(t - g_s(x))$.

Из (10.3) или (10.4) легко выводятся следующие свойства аппроксимационных функций

$i1.$ $(a_{ij}) \in \Lambda(\nu_1, \nu_2) \Rightarrow (a_{ij}^k) \in \Lambda(\nu_1, \nu_2)$ $\forall k \in N$.

$i2.$ Для всех $k \in N$ и $(x,t) \in Q_s$ число $\rho^k(x,t)$ принадлежит замкнутому интервалу с концевыми точками $\rho(x,t)$, $\rho_{s+1}(x,t)$, $s = 1, \dots, \ell$, причем $\rho^k = \rho$ при $(x,t) \in Q_{\ell+1}$.

$i3.$ Для любого $\delta > 0$ найдется $k_0 \in N$ такой, что при всех $k \geq k_0$ и $s \in \{1; \dots; \ell\}$:

$$\rho^k = \rho \quad , \quad (x,t) \in Q_s \setminus Q_{s\delta}.$$

$i4.$ $\rho^k(x, g_s(x)) = \rho(x, g_s(x)-)$ $\forall k \in N$, $s = 1, \dots, \ell$.

Лемма 10.1. (см. лемму 6.2). Пусть выполнены условия I - IV, 3^0 и функции λ_{ij}, λ_i аппроксимируются функциями λ_{ij}^k, λ_i^k $(k = 1, 2, \dots)$ согласно (10.4). Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется $k_0 \in N$ такой, что для любого $z \in L_2(\Omega)$ и любого $k \geq k_0$ существуют $v \in L_2(\Omega)$ и реализации $\lambda_{ij}^* \in B(\lambda_{ij}; v)$, $\lambda_i^* \in B(\lambda_i; v)$ такие, что $(\lambda_{ij}^*) \in \Lambda(\nu_1, \nu_2)$ и

$$\sup_{u, \eta \in \bar{W}_1} |\ell_k(z, u, \eta) - \ell(v, u, \eta)| < \varepsilon, \qquad (10.5)$$

где $\bar{W}_1 = \{ h \in W_2^1(\Omega) : \|h\| \leq 1 \}$.

Доказательство. Заметим, что лемму достаточно доказать для $\lambda_{ij}, \lambda_i \in P_1(G; g_1, \dots, g_\ell)$ где $G \subset \Omega$ - произвольная область. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Для фиксированного $z \in L_2(G)$ положим

$$G_s \equiv \{x \in G : (x, z(x)) \in Q_s\}, \quad G_s^0 \equiv \{x \in G : z(x) = g_s(x)\},$$
$$G_{s\delta} \equiv \{x \in G : (x, z(x)) \in Q_{s\delta}\}.$$

Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ достаточно малые числа, близость к нулю которых уточняется по ходу изложения доказательства. Выберем $\delta_1 > 0$ так (см. условие I), что при $(x,t) \in Q_{s\delta_1}$, $s = 1, \ldots, l$, и всех $\rho \in \{\lambda_{ij} : i,j \in K\}$:

$$|\rho(x, g_s(x)+) - \rho(x,t)| \le \varepsilon_1. \tag{I0.6}$$

Далее, выберем $\delta_2 > 0$ таким, что для любого $s = 1, \ldots, l$

$$\delta_2 \sup_{x \in G} \sum_{i,j=1}^{n} |\lambda_{ij}(x, g_{s-1}(x)-) - \lambda_{ij}(x, g_s(x)-)| \le \delta_1 \varepsilon_1$$

$$4n \|h_s\|_{q, G_{s\delta_2}} \le \varepsilon \varepsilon_2 \tag{I0.7}$$

Возможность выбора такого δ_2 следует из условий $I - III$ и того, что $mes\, G_{s\delta} \to 0$ когда $\delta \to 0$.

Множество G_s $(s = 1, \ldots, l)$ представим в виде объединения следующих трех множеств

$$G_s^1 = G_s^1(\delta_1) \equiv \{x \in G_s : g_{s-1}(x) - g_s(x) \le \delta_1\}$$

$$G_s^2 = G_s^2(\delta_1, \delta_2) \equiv \{x \in G_s \setminus G_s^1 : g_s(x) < z(x) < g_s(x) + \delta_2\}$$

$$G_s^3 = G_s^3(\delta_1, \delta_2) \equiv G_s \setminus (G_s^1 \cup G_s^2)$$

В качестве $v \in L_2(G)$ возьмем

$$v(x) = \begin{cases} z(x), & x \in G_s^3 \cup G_{l+1} \\ g_s(x), & x \in G_s^1 \cup G_s^2 \cup G_s^0, \quad s = 1, \ldots, l. \end{cases}$$

Через $\hat{\lambda}_{ij}(x)$ обозначим замкнутый интервал с концевыми точками $\lambda_{ij}(x, v(x)+)$, $\lambda_{ij}(x, v(x)-)$ и введем функции β_{ij}^*, λ_i^* при помощи следующих соотношений

$$\min_{c_{ij} \in \hat{\lambda}_{ij}(x)} |\lambda_{ij}^*(x, v(x)) - c_{ij}| = |\lambda_{ij}^*(x, v(x)) - \beta_{ij}^*(x)|, \ x \in G \tag{I0.8}$$

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} \lambda_i(x, v(x)) , & x \in G_s^3 \cup G_{\ell+1} \\ \lambda_i(x, v(x)-) , & x \in G_s^1 \cup G_s^2 \cup G_s^0 , \quad s = 1, \dots, \ell \end{cases}$$

Ясно, что так определенные функции являются реализациями, т.е. $\beta_{ij}^* \in B(\lambda_{ij}; V)$, $\lambda_i^* \in B(\lambda_i; V)$.

Применяя неравенство Гельдера в силу теорем вложения для всех $u, \eta \in W_1$ имеем

$$\int_G |(\lambda_{ij}^k(x, z(x)) - \beta_{ij}^*(x)) u_{x_j} \eta_{x_i}| dx \le$$

$$\le C_1 \sum_{i,j=1}^n \sup_{x \in G} |\lambda_{ij}^k(x, z(x)) - \beta_{ij}^*(x)|,$$

$$\int_G |[\lambda_i^k(x, z(x)) - \lambda_i^*(x)] u_{x_i} \eta| dx \le \sum_{i=1}^n \|\lambda_i^k - \lambda_i^*\|_q \times$$

$$\times \|u_{x_i}\|_2 \cdot \|\eta\|_{\frac{2q}{q-2}} \le C_2 \sum_{i=1}^n \|\lambda_i^k - \lambda_i^*\|_q$$

где постоянные C_1, C_2 не зависят от u, η, k.

Для $(x,t) \in Q_{s\delta_1}^1 \equiv \{(x,t) \in Q_s : g_{s-1}(x) - g_s(x) \le \delta_1\}$:

$$|\rho(x, g_{s-1}(x)-) - \rho(x,t)| \le |\rho(x, g_{s-1}(x)-) - \rho(x, g_s(x)+)| +$$

$$+ |\rho(x, g_s(x)+) - \rho(x,t)| \le \varepsilon_1 + \varepsilon_1 = 2\varepsilon_1 .$$

Поэтому в $Q_{s\delta_1}^1$

$$\rho_{s+1}(x,t) \le \max\{\rho(x, g_{s-1}(x)-) ; \rho(x, g_s(x)-)\} \le$$

$$\le \max\{\rho(x,t) + 2\varepsilon_1 ; \rho(x, g_s(x)-)\},$$

и аналогично,

$$\rho_{s+1}(x,t) \ge \min\{\rho(x,t) - 2\varepsilon_1 ; \rho(x, g_s(x)-)\}.$$

Отсюда в силу $i2$, (10.6) при $(x,t) \in Q_{s\delta_1}^1$

$$\rho^k(x,t) \le \max\{\rho(x,t) ; \rho_{s+1}(x,t)\} \le$$

$$\le \max\{\rho(x,t) + 2\varepsilon_1 ; \rho(x, g_s(x)-)\} \le$$

$$\le \max\{\rho(x, g_s(x)+) + 3\varepsilon_1 ; \rho(x, g_s(x)-)\},$$

и $\quad p^{k}(x,t) \geqslant \min\{p(x, g_s(x)+) - 3\varepsilon_1;\ p(x, g_s(x)-)\} \equiv m_s(x)$.

Таким образом

$$m_s(x) \leq \lambda^{k}_{ij}(x, z(x)) \leq M_s(x)\ ,\ x \in G^1_s\ ,\quad \forall k \in N,$$

поскольку $(x, z(x)) \in Q^1_{s\delta_1}$, если $x \in G^1_s$.

Так как число $\beta^{*}_{ij}(x) \in \hat{\lambda}_{ij}(x)$ выбрано как ближайшее к числу $\lambda^{k}_{ij}(x, z(x))$, причем $\hat{\lambda}_{ij}(x) \subset [m_s(x), M_s(x)]$, $x \in G_{s\delta_2}$, то

$$\sup_{x \in G^1_s \cap G_{s\delta_2}} |\lambda^{k}_{ij}(x, z(x)) - \beta^{*}_{ij}(x)| \leq 3\varepsilon_1.$$

Для установления аналогичного неравенства по множеству G^2_s заметим, что при $(x,t) \in Q_{s\delta_2} \setminus Q^1_{s\delta_1}$

$$|p_{s+1}(x,t) - p(x, g_s(x)-)| = |p(x, g_{s-1}(x)-) - p(x, g_s(x)-)| \cdot \alpha_{s+1}(x,t) \leq$$

$$\leq \sup_{x \in G} |p(x, g_{s-1}(x)-) - p(x, g_s(x)-)| \frac{\delta_2}{\delta_1} \leq \varepsilon_1$$

Поэтому при $(x,t) \in Q_{s\delta_2} \setminus Q^1_{s\delta_1}$ на основе $i2$, (10.6)

$$p^{k}(x,t) \leq \max\{p(x,t);\ p(x, g_s(x)-) + \varepsilon_1\} \leq$$

$$\leq \max\{p(x, g_s(x)+) + \varepsilon_1;\ p(x, g_s(x)-) + \varepsilon_1\}$$

и после аналогичных преобразований

$$p^{k}(x,t) \geqslant \min\{p(x, g_s(x)+) - \varepsilon_1;\ p(x, g_s(x-) - \varepsilon_1\}.$$

Следовательно справедливо неравенство

$$\sup_{x \in G^2_s} |\lambda^{k}_{ij}(x, z(x)) - \beta^{*}_{ij}(x)| \leq \varepsilon_1 \qquad \forall k \in N,$$

поскольку $(x, z(x)) \in Q_{s\delta_2} \setminus Q^1_{s\delta_1}$, если $x \in G^2_s$.

Так как при $x \in (G_s \setminus G_{s\delta_2}) \cup G_{\ell+1}$ для всех k больших некоторого k_1 имеют место равенства (см. свойства $i3, i2$) $p^{k}(x, z(x)) = p(x, v(x))$, $p = \lambda_{ij}, \lambda_i$, $ij \in K$, то, учитывая $i4$, (10.8) получаем

$$\lambda_{ij}^{k}(x, z(x)) = \beta_{ij}^{*}(x), \; x \in (G_s \setminus G_{s\delta_2}) \cup G_s^{o}, \qquad k \geq k_1,$$

$$\lambda_{i}^{k}(x, z(x)) = \lambda_i^{*}(x), \; x \in (G_s \setminus G_{s\delta_2}) \cup G_s^{o}, \qquad k \geq k_1.$$

Отсюда, поскольку вышеприведенные выкладки справедливы при любом $s = 1, \ldots, \ell$,

$$\sup_{x \in G} |\lambda_{ij}^{k}(x, z(x)) - \beta_{ij}^{*}(x)| \leq 3\varepsilon_1. \tag{I0.9}$$

Кроме этого, учитывая произвольность числа ε_2 (будем считать, что $\varepsilon_2 \cdot C_2 \leq 1$) неравенства(I0.7), $\|\lambda_i^k - \lambda_i^*\|_{q,G} \leq$ $\leq 2\|h_5\|_{q,G}$, $i = 1, \ldots, n$, имеем

$$C_2 \sum_{i=1}^{n} \|\lambda_i^k - \lambda_i^*\|_{q,G} \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{I0.I0}$$

Заметим, что

$$0 \leq \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \xi_j \leq n|\xi|^2 \qquad \forall \xi \in E_n,$$

поэтому из (I0.9) в силу свойства $i1$ вытекает

$$(\nu_1 - 3n\varepsilon_1)|\xi|^2 \leq \lambda_{ij}^{k} \xi_i \xi_j + (\beta_{ij}^{*} - \lambda_{ij}^{k})\xi_i \xi_j \leq (\nu_2 + 3n\varepsilon_1)|\xi|^2,$$

т.е.

$$(\beta_{ij}^{*}) \in \Lambda(\nu_1 - 3n\varepsilon_1, \nu_2 + 3n\varepsilon_1). \tag{I0.II}$$

Будем считать, что число $\varepsilon_1 \in \left(0, \frac{\varepsilon}{12n^2}\right)$ выбрано настолько малым, что из (I0.II) следует неравенство

$$\sup_{x \in G} |\beta_{ij}^{*}(x) - \lambda_{ij}^{*}(x)| \leq \frac{\varepsilon}{4n^2}, \tag{I0.I2}$$

справедливое для некоторой матрицы $(\lambda_{ij}^{*}) \in \Lambda(\nu_1, \nu_2)$, $\lambda_{ij}^{*} \in B(\lambda_{ij}; V)$. Возможность выбора такого ε_1 следует из того, что класс $\Lambda(\nu_1, \nu_2)$ мало изменяется при малых изменениях параметров ν_1, ν_2, т.е. для любого $\varepsilon_3 > 0$ найдется $\delta_0 > 0$ такой, что для любого $\delta \le \delta_0$ и любой матрицы $A=(a_{ij}) \in \Lambda(\nu_1-\delta, \nu_2+\delta)$ существует матрица $\tilde{A}=(\tilde{a}_{ij}) \in \Lambda(\nu_1, \nu_2)$ такая, что

$$\sup_{i_j \in K, x \in G} |a_{ij}(x) - \tilde{a}_{ij}(x)| \le \varepsilon_3 .$$

Так как $|\lambda_{ij}^k(x,z(x)) - \lambda_{ij}^*(x)| \le |\lambda_{ij}^k(x,z(x)) - \beta_{ij}^*(x)| + |\beta_{ij}^*(x) - \lambda_{ij}^*(x)|$, то в силу неравенств (10.9), (10.12) и выбора ε_2

$$c_1 \sum_{i,j=1}^{n} \sup_{x \in G} |\lambda_{ij}^k(x,z(x)) - \lambda_{ij}^*(x)| \le \frac{\varepsilon}{2},$$

что наряду с (10.10) и устанавливает неравенство (10.5). Лемма доказана.

<u>Следствие</u> 10.1. (см. следствие 6.1). Лемма 10.1 обеспечивает выполнение априорной оценки $\|u^k\| \le const$, где u^k - решение сглаженной задачи (6.10).

<u>Лемма</u> 10.2. Пусть $g \in L_2(G)$, функция $\rho: G \times E \to E$ ограничена по (x,t) и для п.в. $x \in G$ непрерывна по t, $v^k \rightharpoonup v$ слабо в $W_2^1(G)$ и $v^k(x) \to v(x)$ для п.в. $x \in G$ и пусть $\varphi^k(v^k-g) \rightharpoonup \varphi^0(v-g)$ слабо в $L_r(G)(r>1)$ при $k \to \infty$. Тогда для любого $\eta \in W_2^1(G)$

$$\int_G [\rho(x,v^k)\varphi^k(v^k-g)v^k_{x_j} - \rho(x,v)\varphi^0(v-g)v_{x_j}]\eta_{x_i}\,dx \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \qquad (10.13)$$

<u>Доказательство</u>. Без ограничения общности будем считать, что $\{v^k(x)\}$, $\{\rho(x,v^k(x))\}$ сходятся равномерно по x соответственно к $v(x)$, $\rho(x,v(x))$ при $k \to \infty$. Действительно, согласно теореме Егорова G можно представить в виде $G' \cup (G \setminus G')$ так, что указанные последовательности сходятся равномерно на G', а мера множества $G \setminus G'$ сколь угодно мало отличается от нуля. Учитывая это, для доказательства (10.13) достаточно установить лишь сходимость

$$I^k(G) \equiv \int_G \rho(x,v)[\varphi^k(v^k-g)v^k_{x_j} - \varphi^0(v-g)v_{x_j}]\eta_{x_i}\,dx \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 .$$

Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное фиксированное число. G представим в виде объединения следующих трех множеств

$$G_\delta = \{ x \in G : 0 < | v(x) - g(x) | < \delta \},$$

$$G_\delta^1 = \{ x \in G : | v(x) - g(x) | \geq \delta \}, \quad G_0 = \{ x \in G : v(x) = g(x) \}$$

где число $\delta > 0$ выбрано настолько малым, что

$$| I^k (G_\delta) | < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall k \in N.$$

Возможность выбора такого δ вытекает из того, что $mes\, G_\delta \to 0$ когда $\delta \to 0$. Пусть $k_1 \in N$ такой, что при $k \geq k_1$: $| v^k - v | \leq \delta / 2$. Тогда

$$| v^k - g | \geq | v - g | - | v - v^k | \geq \delta - \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2}, \quad x \in G_\delta^1.$$

Поэтому при всех k больших некоторого $k_2 \geq k_1$ согласно (10.2) справедливо равенство

$$\varphi^k (v^k - g) = \varphi^0 (v - g) = \begin{cases} 0, & v - g < 0 \\ 1, & v - g > 0 \end{cases}, \quad x \in G_\delta^1.$$

Отсюда в силу слабой сходимости $v^k \to v$ в $W_2^1 (G)$ справедливо неравенство

$$| I^k (G_\delta^1) | < \frac{\varepsilon}{3}$$

для всех достаточно больших k.

Для получения нужной оценки по множеству G_0 введем вспомогательные функции

$$w^k(x) = \int_0^{v^k(x) - v(x)} \varphi^k(t) dt, \quad x \in G.$$

Отсюда

$$w^k(x) \to 0 \quad \text{п.в. в } G \text{ при } k \to \infty, \tag{10.14}$$

$$w^k_{x_j} = \varphi^k (v^k - v) \cdot (v^k - v)_{x_j}.$$

Так как последовательность $\{w^k\}$ ограничена в пространстве $W_2^1(G)$, то из нее можно выделить подпоследовательность $\{w^m\}$, $m \in M \subset N$, такую, что
$w^m \rightharpoonup w^0$ в $W_2^1(G)$ и $w^m(x) \to w^0(x)$ п.в. Учитывая (10.14) заключаем, что $w^k \rightharpoonup 0$ в $W_2^1(G)$, и следовательно, $|I^k(G_0)| < \varepsilon/3$ при всех достаточно больших k. Лемма доказана.

<u>Лемма 10.3</u>. Пусть $v^k \rightharpoonup v$ слабо в $W_2^1(G)$ и $v^k(x) \to v(x)$ для п.в. $x \in G$, ограниченная функция $\rho \in P_1(G; g_1, \dots, g_\ell)$ аппроксимируется по формуле (10.4). Тогда существует бесконечное подмножество $M \subset N$ такое, что для любой $\eta \in W_2^1(G)$

$$I^m(G) \equiv \int\limits_G [\rho^m(x, v^m) v^m_{x_j} - \rho^0(x, v) v_{x_j}] \eta_{x_i} dx \xrightarrow[M \ni m \to \infty]{} 0, \tag{10.15}$$

где

$$\rho^0(x, v(x)) = \begin{cases} \rho(x, v(x)), & v(x) \notin \{g_1(x); \dots; g_\ell(x)\} \\ \rho(x, g_s(x)+)\varphi_s^0(x) + \rho(x, g_s(x)-)(1-\varphi_s^0(x)), & v(x) = g_s(x), \end{cases} \tag{10.16}$$

а φ_s^0 - слабый предел в L_r $(r>1)$ последовательности $\{\varphi^m(v^m - g_s)\}$, $s = 1, \dots, \ell$.

<u>Доказательство</u>. Как и при доказательстве предыдущей леммы без ограничения общности будем считать, что $v^k \to v$ $(k \to \infty)$ равномерно по x. Кроме этого, и также не теряя общности, будем считать, что для некоторого $\alpha > 0$ и всех $x \in G$

$$g_{s-1}(x) - g_s(x) \geqslant \alpha, \quad s = 2, \dots, \ell. \tag{10.17}$$

Действительно, так как $\rho \in P_1(G)$ и $|\rho^k(x, v^k)| \leq const$ $\forall k$, то G можно представить в виде $G' \cup (G \setminus G')$ так, что на множестве G' выполнено (10.17), а мера множества $G \setminus G'$ как угодно мало отличается от нуля.

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и G представим в виде объединения следующих трех множеств

$$G_\delta = \bigcup_{s=1}^{\ell} \{x \in G : 0 < |v(x) - g_s(x)| < \delta\},$$

$$G_0 = \bigcup_{s=1}^{\ell} \{x \in G : v(x) = g_s(x)\}, \quad G'_\delta = G \setminus (G_\delta \cup G_0),$$

где $\delta > 0$ выбрано таким, что

$$|J^k(G_\delta)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall k \in N.$$

Выбор такого δ возможен в силу того, что $|p^k(x, v^k)| \leq const$ и того, что $mes\, G_\delta \to 0 \, (\delta \to 0)$. Поскольку $v^k \to v \; (k \to \infty)$ равномерно, то для достаточно больших k на множестве G'_δ справедливо равенство $p^k(x, v^k) = p(x, v^k)$, см. свойство $i3$. Поэтому, принимая во внимание сходимость $p(x, v^k) \to p(x, v)$ для $x \in G'_\delta$ и применяя теорему Егорова, получаем неравенство

$$|J^k(G')| < \frac{\varepsilon}{3},$$

справедливое для всех достаточно больших k.

Далее, заметим, что существует $k_1 \in N$ такой, что при всех $k \geqslant k_1$ и $x \in G_{0s} \equiv \{x \in G : v(x) = g_s(x)\}$

$$p^k(x, v^k) = p_s(x, v^k)\varphi^k(v^k - g_s) + p_{s+1}(x, v^k)\psi^k(v^k - g_s), \quad s = 1, \ldots, \ell.$$

На самом деле, при $x \in G_{0s}$ для достаточно больших k имеют место неравенства, см. (10.17),

$$v^k - g_i < 0, \quad i = 1, \ldots, s-1; \quad v^k - g_i > \frac{\alpha}{2}, \quad i = s+1, \ldots, \ell,$$

и следовательно, согласно (10.2) для всех k больших некоторого k_2 - равенства

$$\varphi^k(v^k - g_i) = 0, \quad i = 1, \ldots, s-1$$

$$\varphi^k(v^k - g_i) = 1, \quad i = s+1, \ldots, \ell.$$

Теперь непосредственно из (10.4) получаем

$$p^k(x,v^k)=(P_s-P_{s+1})\varphi^k(v^k-g_s)+(P_{s+1}-P_{s+2})+\cdots+(P_\ell-P_{\ell+1})+$$

$$+P_{\ell+1}=P_s(x,v^k)\varphi^k(v^k-g_s)+P_{s+1}(x,v^k)(1-\varphi^k(v^k-g_s)) \qquad (10.18)$$

Из последовательности $\{\varphi^k(v^k-g_s)\}$ (ограниченной единицей) можно выделить подпоследовательность $\{\varphi^m(v^m-g_s)\}$, $m\in M\subset N$, сходящуюся слабо в $L_r(G)$ $(r>1)$ к некоторому $\varphi^0\in L_r(G)$. Поэтому в силу леммы 10.2 и (10.18)

$$\int\limits_{G_{os}} p^m(x,v^m)v^m_{x_j}\eta_{x_i}dx \xrightarrow[m\to\infty]{} \int\limits_{G_{os}}[P_s(x,v)\varphi^0(v-g_s)+$$

$$+P_{s+1}(x,v)(1-\varphi^0(v-g_s))]v_{x_j}\eta_{x_i}\,dx. \qquad (10.19)$$

Согласно построению функций $P_1,\dots,P_{\ell+1}$ при $v=g_s$ имеем $P_s(x,v)=p(x,g_s(x)+)$, $P_{s+1}(x,v)=p(x,g_s(x)-)$. Отсюда и того, что (10.19) имеет место при любом $s\in\{1;\dots;\ell\}$, получаем неравенсвво $|\mathcal{J}^m(G_0)|<\varepsilon/3$, справедливое при всех достаточно больших $m\in M$. Лемма доказана.

Из доказательства леммы 10.3 немедленно вытекает

<u>Лемма 10.4</u>. Пусть $v^k(x)\to v(x)$ для п.в. $x\in G$, функция p из $P_1(G;g_1,\dots,g_\ell)$ в каждом множестве Q_s $(s=1,\dots,\ell+1)$ удовлетворяет неравенству $|p(x,t)|\le h(x)$, $h\in L_2(G)$ и аппроксимируется по формуле (10.4). Тогда существует бесконечное подмножество $M\subset N$ такое, что для любой $\eta\in L_2(G)$

$$\int\limits_G[p^m(x,v^m)-p^0(x,v)]\eta\,dx \xrightarrow[M\ni m\to\infty]{} 0,$$

где p^0 определяется соотношением (10.16).

<u>Теорема 10.1</u>. Пусть выполнены условия I - IV, 3°. Тогда вариационное равенство (2.4) имеет по крайней мере одно решение.

<u>Доказательство.</u> Согласно условию I множества Ω и Γ могут быть представлены в виде $\bar\Omega=\cup\Omega_s$, $\Gamma=\cup\Gamma_s$, так

что в каждом множестве $\Omega_s \times E$ функции $\lambda_{ij}, \lambda_i, \beta_i, \beta$ принадлежат классу $P_1(\Omega_s)$ и в каждом множестве $\Gamma_s \times E$ функция σ_2 принадлежит $P_1(\Gamma_s)$. В каждом множестве $\Omega_s \times E$ функции $\lambda_{ij}, \lambda_i, \beta_i, \beta$ и в каждом множестве $\Gamma_s \times E$ функцию σ_2 будем аппроксимировать функциями $\lambda_{ij}^k, \lambda_i^k, \beta_i^k, \beta^k, \sigma_2^k$ по формуле (10.4). Решение сглаженной задачи, см. (6.10), обозначим через u^k. Благодаря лемме 10.1 имеет место априорная оценка

$$\|u^k\|_{W_2^1(\Omega)} \le const,$$

в силу которой разрешимость сглаженной задачи доказывается вполне аналогично как и теорема 5.1.

На основе оприорной оценки и теорем вложения из последовательности $\{u^k\}$ можно выделить подпоследовательность $\{u^{k'}\}$, обладающую свойствами

$$\left.\begin{aligned} &u^{k'} \rightharpoonup u^0 \quad \text{слабо в } W_2^1(\Omega) \\ &u^{k'} \to u^0 \quad \text{сильно в } L_{q\cdot q_1}(\Omega), \\ &\qquad L_{q_1(q-1)}(\Gamma), \quad q_1 \equiv 2/(q-2) \\ &u^{k'}(x) \to u^0(x) \quad \text{для п.в. } x \in \Omega \end{aligned}\right\} \qquad (10.20)$$

при $k' \to \infty$, $k' \in K' \subset N$.

Теперь справедливость предельного перехода, см. (7.1),

$$H^m(u^m; \eta) \longrightarrow H(u^0; \eta), \quad m \to \infty, \; m \in M \subset K'$$

для некоторого $M \subset N$ непосредственно вытекает из лемм 10.3-10.4. Теорема доказана.

<u>Теорема 10.2</u>. Пусть выполнены условия I-$\underline{IV}$, 3°. Тогда исходную задачу (2.4) можно аппроксимировать так, что $u^k \to u^0$, $k \to \infty$ сильно в $W_2^1(\Omega)$, где u^k - решение аппроксимированной задачи (6.10), а u^0 - решение задачи (2.4).

Доказательство. Не теряя общности будем считать, что последовательность $\{u^k\}$ обладает свойствами (10.20). Кроме того, и также не теряя общности (в силу условия I), будем считать, что $a_{ij}, \lambda_i, \beta_i, \beta \in P_1(\Omega)$, $\sigma_2 \in P_1(\Gamma)$.

В соотношении, см. (7.2)

$$\sum_{s=1}^{9} J_s(G,\eta) = 0$$

в качестве η возьмем $u^k - u^0$. Тогда на основе сильной сходимости $u^k \to u^0$ в пространствах $L_{qq_1}(\Omega)$, $L_{q_1(q-1)}(\Gamma)$ и условий 3°, $\underline{III}$ имеем

$$J_s(G, u^k - u^0) \to 0 \; (k \to \infty), \; s = 2,4,5,6,7,8,9 \qquad (10.21)$$

Интеграл $J_1(\Omega,\eta)$, как и при доказательстве теоремы 7.I., представим в виде $J_{11}(\Omega,\eta) + J_{12}(\Omega,\eta)$.

В силу лемм 10.3 - 10.4 и слабой сходимости $u^k \to u^0$ в W_2^1 соотношения (10.21.) справедливы также при $s = 3, 11$ и k принадлежащего некоторому $M \subset N$.

Потому

$$\nu_1 \int_\Omega |\nabla(u^k - u^0)|^2 dx \le J_{12}(\Omega, u^k - u^0) =$$

$$= -\sum_{s=2}^{9} J_s(G, u^k - u^0) - J_{11}(\Omega, u^k - u^0) \xrightarrow[M \ni k \to \infty]{} 0$$

Теорема доказана.

Глава П. ВОПРОСЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ

В этой главе обсуждаются вопросы единственности решения вариационного равенства (2.4) главы I.

Приводятся несложные примеры, показывающие, что решение вариационного равенства (2.4) главы I неединственно даже в том случае, когда допускаются зоны перехода лишь нулевой меры. Приводятся также сравнительно простые примеры единственности, в которых мера зоны перехода не обязательно равна нулю.

Следует отметить, что в многомерном случае далеко не ясно, при каких дополнительных условиях на коэффициенты и свободные члены можно ожидать единственность решения вариационного равенства (2.4) главы I.

§ I. Обсуждение некоторых методов доказательства теорем единственности

Теоремы единственности решения в одних из наиболее широких классах для многофазных нестационарных задач Стефана получены в работах [22, 28], тем не менее, они не переносятся на соответствующие квазистационарные задачи.

Для пояснения, где именно возникают принципиальные трудности (в квазистационарных задачах), рассмотрим следующее вариационное равенство (ВР)

$$\int_\Omega (u_{x_i}\varphi_{x_i} + \varkappa(u)\varphi_{x_n})\,dx = \int_\Omega f\varphi\,dx \qquad \forall\varphi\in \dot{C}^\infty \tag{I.I}$$

относительно $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1$.

Здесь, как и в указанных работах, предполагается, что разрывная функция $\varkappa$ является монотонной по u.

Пусть u, v – два решения вариационного равенства (I.I). Тогда

$$\int_\Omega [(u-v)_{x_i}\varphi_{x_i} + (\varkappa(u)-\varkappa(v))\varphi_{x_n}]\,dx = 0$$

или после интегрирования по частям

$$\int_\Omega [\varkappa(v)-\varkappa(u)](a\Delta\varphi - \varphi_{x_n})\,dx = 0 \quad \forall \varphi \in \overset{\circ}{C}{}^\infty \tag{I.2}$$

где $a = (u-v)/[\varkappa(u)-\varkappa(v)]$.

Напомним, что в нестационарном случае интегральному соотношению (I.2) соответствует соотношение вида

$$\int_Q [\varkappa(t,u)-\varkappa(t,v)](a\Delta\psi + \psi_t)\,dQ = 0 \quad \forall \psi \tag{I.3}$$

и что основная идея доказательства единственности – выбор функции ψ как решения некоторой краевой задачи для вспомогательного уравнения

$$\psi_t + a^k \Delta\psi = \phi \tag{I.4}$$

Здесь a^k – коэффициент, аппроксимирующий определенным образом исходный "плохой" коэффициент, а ϕ – произвольная фиксированная гладкая функция.

Эта идея осуществляется так. Для решений ψ^k, $k \in N$ уравнения (I.4) показывается оценка

$$\int\limits_Q a^k (\Delta \Psi^k)^2 dQ < c$$

с константой c , не зависящей от k , на основе которой из соотношения (I.3), в силу монотонности функции $\varkappa$, нетрудно выводится, что $u \equiv V$.

Оказывается, что аналогичная оценка

$$\int\limits_\Omega a^k (\Delta \varphi^k)^2 dx < c \tag{I.5}$$

для решений φ^k ($\varphi^k = 0$ на $\partial\Omega$) уравнения

$$a^k \Delta \varphi - \varphi_{x_n} = \Phi$$

может не иметь места.

Действительно, пусть φ^k решение следующей задачи.

$$\begin{cases} \varepsilon^k \Delta \varphi - \varphi_{x_n} = \Phi, & x \in \Omega \\ \varphi = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

где числовая последовательность $\{\varepsilon^k\}$, $\varepsilon^k > 0$ сходится к нулю при $k \to \infty$.

Предположим, что оценка (I.5) имеет место. Тогда

$$\int\limits_\Omega \varepsilon^k \Delta \varphi^k dx = \int\limits_\Omega \frac{\varepsilon^k}{\sqrt{\varepsilon^k}} (\sqrt{\varepsilon^k} \Delta \varphi^k) dx \leq \leq \sqrt{\varepsilon^k c \, mes\, \Omega} \to 0 \quad (k \to \infty). \tag{I.6}$$

Но с другой стороны

$$\int\limits_{\Omega} \varepsilon^k \Delta\varphi^k dx = \int\limits_{\Omega} \varphi_{x_n} dx + \int\limits_{\Omega} \Phi\, dx = \int\limits_{\Omega} \Phi\, dx,$$

что противоречит соотношению (I.6), если $\int\limits_{\Omega} \Phi\, dx \neq 0$.

В теории нелинейных уравнений широко применяется метод монотонных операторов, систематическое изложение которого дано в монографии [10]. С помощью этого метода удается установить однозначную разрешимость многих задач с разрывными нелинейностями. В работе [30] изучаются уравнения вида $A_1 u + A_2 u$, где A_1 - максимально монотонный, а A_2 - монотонный (или полумонотонный) операторы.

Однако, задачи, в которых разрывные нелинейные функции входят под знак дифференцирования, вообще говоря, не описываются в рамках таких уравнений. Даже следующая простейшая задача

$$\int\limits_0^2 [u_x \varphi_x + \varkappa(u)\varphi_x]\,dx = \int\limits_0^2 f\varphi\, dx \quad \forall \varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1$$

относительно $u \in W_2^1$, $u(0) = a > 0$, $u(2) = b < 0$, где

$$\varkappa(u) = \begin{cases} 1, & u \geq 0 \\ 0, & u < 0 \end{cases}$$

не сводится к уравнению с монотонным оператором.

Действительно, неравенство, по которому определяется монотонность

$$\int\limits_0^2 [(u_x^1 - u_x^2)^2 + (u_x^1 - u_x^2)(\varkappa(u^1) - \varkappa(u^2))]\,dx \geq 0 \quad \forall u^1, u^2$$

не выполняется, например, для функций

$$u^1 = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + a(1-2x), & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ \frac{(1-x)^2}{2}\left[1 + (x-\frac{1}{2})(x-1)\right], & x \in (\frac{1}{2}, 1) \\ \frac{1}{3}(x-1)(x-2) + b(x-1), & x \in [\frac{2}{2}, 2], \end{cases}$$

$$u^2 = \begin{cases} a(1-2x), & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ \frac{(1-x)^2}{2}(x-\frac{1}{2})(x-1), & x \in (\frac{1}{2}, 1) \\ b(x-1), & x \in [1, 2]. \end{cases}$$

Однозначная разрешимость широкого круга краевых задач может быть установлена с помощью теории вариационных неравенств, Однако, задачи, разрывная нелинейность в которых входит под знак дифференцирования, лишь в частных случаях сводятся к уже исследованным вариационным неравенствам. К таким частным случаям относятся некоторые однофазные квазистационарные задачи Стефана.

Здесь необходимо также отметить, что для исследования задач Стефана применяется вариационный метод, который основывается на идее сведения исходной задачи к отысканию стационарных точек интегрального функционала с переменной областью интегрирования. Применение этого метода требует некоторой гладкости границы раздела фаз, но в обобщенной постановке (предложенной в диссертационной работе) никакие свойства гладкости границы раздела фаз не предполагаются.

§ 2. Примеры неединственности

Проблема единственности в смысле определения 2.3 главы I не представляет интереса, поскольку следующая тривиальная задача

$$\int\limits_{\Omega} \lambda(u) u_x \varphi_x \, dx = 0 \qquad \forall \varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$$

относительно $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, где

$$\lambda(u) = \begin{cases} \lambda_1, & u > 0 \\ \lambda_2, & u < 0 \end{cases}$$

$\lambda_1 < \lambda_2$, допускает бесконечно много решений вида $(0, \lambda^*)$ где λ^* – произвольная постоянная из интервала $[\lambda_1, \lambda_2]$

Тем не менее, решение этой задачи единственно в смысле определения 2.4 главы I.

Неединственность решения (в указанном смысле) вызвана тем фактом, что мера множества $\{ x \in \Omega : \ u(x) = 0 \}$ больше нуля.

По этому поводу отметим работу [43], в которой изучается краевая задача Дирихле для уравнений вида (0.2) из введения и, в частности, утверждается, что существование решения u, обладающего свойством $i)$ (т.е., что мера множества всех тех x, при которых $u(x)$ принадлежит множеству точек разрыва функции $t \to \varkappa(t)$, $t \in \mathcal{D}(\varkappa) \subset E$ больше нуля) во многих случаях обеспечивает существование других решений, не обладающих свойством $i)$.

Ниже приведем примеры неединственности решения в смысле определения 2.4 главы I.

Рассмотрим следующую краевую задачу Дирихле

$$\begin{cases} u_{xx} + (\varkappa(u))_x = f_x \\ u(0) = u_0 > 0 \\ u(1) = 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

где функция $\varkappa : E \to E$ задана по формуле

$$\varkappa(t) = \begin{cases} \lambda t + 1, & t \geq 0 \\ \lambda t, & t < 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

λ - некоторое положительное число.

Решение задачи (2.I) будем понимать как решение следующего вариационного равенства

$$\int_0^1 [u_x + \varkappa(u)]\varphi_x \, dx = \int_0^1 f \varphi_x dx \quad \forall \varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(I) \tag{2.3}$$

относительно $u \in W_2^1(I)$, $u(0) = u_0$, $u(1) = 0$, где через I обозначен интервал $(0,1)$.

Оказывается, что единственность решения вариационного равенства (2.3) зависит от функции f. Например, как показано в § 3 настоящей главы, решение единственно при $f = 0$.

Для построения примера неединственности введем несколько вспомогательных величин. Выберем число α из интервала I таким, что

$$u_0 \leq \frac{(2-a)\alpha}{1-\alpha},$$

где

$$a = \frac{e^{\lambda(1-\alpha)} - 1}{e^{\lambda(1-\alpha)} - e^{-\lambda\alpha}}$$

Заметим, что $0 < a < 1$.

В качестве f возьмем непрерывную в интервале $[0, 1]$ функцию, определенную по формуле

$$f = \begin{cases} V_x + \lambda V + 1, & x \in (0, \alpha) \\ V_x + \lambda V, & x \in (\alpha, 1), \end{cases} \tag{2.4}$$

где

$$V = \begin{cases} \left[\dfrac{(a-2)\alpha + u_0}{\alpha^2} \cdot x - \dfrac{u_0}{\alpha}\right](x-\alpha), & x \in [0, \alpha] \\[2ex] \dfrac{1-a}{1-\alpha}(x-\alpha)(x-1), & x \in (\alpha, 1] \end{cases} \tag{2.5}$$

Тогда, учитывая следующие свойства функции V

$V > 0$ при $x \in (0, \alpha)$

$V < 0$ при $x \in (\alpha, 1)$

легко видеть, что решением вариационного равенства (2.3) является функция $u = V$, а также функция $u = V + W$, где

$$W = \begin{cases} \dfrac{a}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda x}\right), & x \in [0, \alpha] \\[2ex] \dfrac{a-1}{\lambda}\left(1 - e^{\lambda(1-x)}\right), & x \in (\alpha, 1] \end{cases} \tag{2.6}$$

Действительно, в силу определения величины a функция W непрерывна в точке $x = \alpha$, следовательно,

$$V + W = u \in W_2^1(I),$$

причем $u(0) = u_0$ и $u(1) = 0$.

Покажем, что функция $u = v+w$ удовлетворяет вариационному равенству (2.3).

Для этого заметим, что

$$w_x + \lambda w = a \quad , \quad x \in (0,\alpha) \tag{2.7}$$

$$w_x + \lambda w = a-1 \quad , \quad x \in (\alpha, 1). \tag{2.8}$$

Поскольку $v>0$ и $w>0$ при $x \in (0,\alpha)$, то

$$u_x + \varkappa(u) = v_x + w_x + \lambda v + \lambda w + 1 \qquad \forall x \in (0,\alpha),$$

поэтому в силу соотношения (2.7) и выбора функции f имеем

$$\int_0^\alpha [u_x + \varkappa(u)] \varphi_x \, dx = \int_0^\alpha (a+f)\varphi_x \, dx \tag{2.9}$$

для любой функции $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(I)$.

Далее, для $x \in E$ положим

$$g(x) \equiv (1-a)\left[\frac{(x-\alpha)(x-1)}{1-\alpha} + \frac{e^{\lambda(1-x)}-1}{\lambda} \right].$$

Так как вторая производная g'' функции g больше нуля, то функция g' возрастающая. Отсюда, поскольку $g'(1)=0$, немедленно заключаем, что точка $x=1$ является единственной точкой минимума функции g , поэтому

$$g(x) \geq g(1) = 0 \qquad \forall x \in [\alpha, 1].$$

Заметим, что $g = v+w$ при $x \in [\alpha, 1]$, следовательно, $v+w \geq 0$ при $x \in [\alpha, 1]$ и

$$u_x + \varkappa(u) = v_x + w_x + \lambda v + \lambda w + 1 \qquad \forall x \in [\alpha, 1].$$

Поэтому в силу соотношения (2.8) и выбора функции f получаем равенство

$$\int_{\alpha}^{1} [u_x + \varkappa(u)] \varphi_x \, dx = \int_{\alpha}^{1} (a+f) \varphi_x \, dx,$$

справедливое для любой функции $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(I)$, из которого наряду с (2.9) следует требуемое вариационное равенство (2.3).

Итак, показано, что в зависимости от свободного члена f решение вариационного равенства (2.3) может быть неединственным.

Замечание 2.I. Учитывая, что функция f, определенная по формуле (2.4), принадлежит пространству $W_2^1(I)$, получен пример неединственности также для следующего вариационного равенства

$$\int_{0}^{1} [u_x + \varkappa(u)] \varphi_x \, dx = \int_{0}^{1} f_1 \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(I),$$

где $f_1 = -f_x$.

Замечание 2.2. Оба вышеприведенные решения вариационного равенства (2.3) являются классическими.

Далее построим пример неединственности для смешанной краевой задачи.

Рассмотрим краевую задачу (2.I), в которой условие $u(0)=u_0$ заменено, например, условием $u'(0) = u_0 < -1$ и решение последней определим, как обычно, с помощью следующего вариационного равенства

$$\int_{0}^{1} [u_x + \varkappa(u)] \varphi_x \, dx + [u_0 + \varkappa(u(0))] \varphi(0) =$$

$$= \int_0^1 f \varphi_x \, dx \qquad \forall \varphi \in W, \tag{2.10}$$

где

$$W = \{ z \in W_2^1(I) \ : \ z(1) = 0 \}.$$

Как и в предыдущем примере, выберем α из интервала $(0,1)$ и в качестве f возьмем функцию (2.4), где теперь

$$V = \begin{cases} \dfrac{u_1 + \beta\alpha}{\alpha^2}(x-\alpha)^2 + \beta(x-\alpha), & x \in [0,\alpha] \\ w_2(x)(x-\alpha)(x-1), & x \in (\alpha, 1] \end{cases}$$

Здесь

$$\beta = \frac{a}{\lambda}(\alpha-1) - 1, \quad a = 1 - e^{\lambda(\alpha-1)}, \quad u_1 = -\frac{u_0+1}{\lambda},$$

$$w_2(x) = \frac{a-1}{\lambda}\left(1 - e^{\lambda(1-x)}\right).$$

Тогда решением вариационного равенства (2.10) является функция $u = V$.

Действительно,

$$V \in W \quad \text{и} \quad V(0) = -\frac{u_0+1}{\lambda} > 0,$$

поэтому $\varkappa(V(0)) = \lambda V(0) + 1 = -u_0$. Следовательно, в силу выбора такого f функция V удовлетворяет вариационному равенству (2.10).

Покажем, что функция $u = V + w$, где

$$w = \begin{cases} \dfrac{a}{\lambda}, & x \in [0,\alpha] \\ w_2(x), & x \in (\alpha, 1], \end{cases}$$

также является решением вариационного равенства (2.I0).

Поскольку $V>0$ и $W>0$ при $x\in[0,\alpha)$, то $\varkappa(V+W)=\lambda V+\lambda W+1$, поэтому согласно определению (2.4) имеем

$$\int_0^\alpha [u_x+\varkappa(u)]\varphi_x\,dx=\int_0^\alpha (f+a)\varphi_x\,dx \quad \forall\varphi\in W \tag{2.II}$$

Заметим, что $V+W>0$ и $W_x+\lambda W=a-1$ при $x\in(\alpha,1)$, следовательно, на основе формулы (2.4)

$$\int_\alpha^1 [u_x+\varkappa(u)]\varphi_x\,dx=\int_\alpha^1 (f+a)\varphi_x\,dx \quad \forall\varphi\in W \tag{2.I2}$$

Так как $V(0)+W(0)>0$, то $u_0+\varkappa(u(0))=a$, откуда в силу соотношений (2.II), (2.I2) и получаем ВР (2.I0).

Легко видеть, что замечания (2.I),(2.2) переносятся также на ВР (2.I0).

Построенные примеры, несмотря на их искусственный характер, показывают, что единственность может не иметь места уже в простейших частных случаях вариационного равенства (2.4) главы I.

<u>Замечание 2.3</u>. В работе [12] построен пример неединственности решения (u_1,u_2,h) для двухфазной квазистационарной задачи Стефана, исходя из уравнений

$$u_i''+a_iu'-b_iu_i=0\,,\quad x\in\Delta_i\,,\quad i=1,2$$

$$\Delta_1=(-\infty,h)\,,\quad \Delta_2=(h,0)\,;\quad 0<a_i,b_i\in E,$$

и условий

$$u_1(-\infty)=0\,,\quad u_1(h)=u_2(h)=1\,,\quad u_2'(0)=b>0,$$

$$u_1'(h) - \lambda u_2'(h) = \varkappa \ , \quad 0 < \lambda, \varkappa \in E.$$

Однако вышепостроенные примеры неединственности не являются частными случаями примера И.И.Данилюка.

<u>Замечание</u> 2.4. Вышеприведенные примеры неединственности характеризуются той особенностью, что граничное значение $u(1)$ совпадает с точкой разрыва функции $\varkappa$.

В литературе, посвященной изучению вопросов разрешимости задач с разрывными нелинейностями, такого типа особенности, как правило, не допускаются.

§ 3. Некоторые классы единственности

В начале параграфа покажем, что наличие особенности, указанной в замечании 2.4, не всегда вызывает неединственность решения. Для этого положим

$$W \equiv \{ z \in W_2^1(I) \ : \ z(0) = u_0 > 0 \ , \ z(1) = 0 \},$$

где $I = (0,1)$, и в качестве f ради простоты возьмем $f = 0$.

Тогда вариационное равенство (2.3) сводится к отысканию пары $(u, c) \in W \times E$ такой, что для п.в. $x \in I$

$$u_x + \varkappa(u) = c. \tag{3.1}$$

Докажем, что при указанных условиях функция u и постоянная c определяются однозначно. Для этого на основании теорем вложения заметим, что u является непрерывной функцией.

Через x_m обозначим одну из точек (несущественно какую), в которой функция u принимает свое наименьшее значение, и предположим, что

$$u(x_m) < 0. \qquad (3.2)$$

Тогда в силу непрерывности функции u найдется интервал $(x_1, x_2) \subset I$ такой, что

$$u(x_1) = u(x_2) = 0 \qquad (3.3)$$

и $u(x) < 0$ для всех $x \in (x_1, x_2)$, поэтому из соотношения (3.I), согласно определению (2.2) функции $\varkappa$ получаем

$$u_x + \lambda u = c \qquad \forall x \in (x_1, x_2),$$

откуда вследствие условия (3.3) $u \equiv 0$ и $c = 0$, что противоречит предположению (3.2).

Итак, $u \geqslant 0$ для всех $x \in [0, 1]$. Теперь из соотношения (3.I) и формулы (2.2) получим уравнение

$$u_x + \lambda u + 1 = c, \quad x \in (0,1),$$

откуда в силу граничных условий постоянная c и функция u определяется однозначно.

Далее докажем некоторые теоремы единственности.

<u>Теорема 3.I</u>. При любых $f, g \in L_2(I)$, $I = (0,1)$; $u_0, u_1 \in E$, $u_0 \cdot u_1 \neq 0$ решение вариационного равенства

$$\int_0^1 [u_x + \varkappa(u)] \varphi_x \, dx = \int_0^1 (f \varphi_x + g\varphi) \, dx \qquad \forall \varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(I) \qquad (3.4)$$

единственно относительно $u \in W$, где

$$W = \{ z \in W_2^1(I) : z(0) = u_0, \ z(1) = u_1 \},$$

а функция $\mathcal{H}$ определена соотношением (2.2).

<u>Доказательство</u>. Пусть u, v – два решения вариационного равенства (3.4).

Тогда

$$\int_0^1 [(u-v)_x + \mathcal{H}(u) - \mathcal{H}(v)] \varphi_x \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in \mathring{W}_2^1(I),$$

откуда вытекает, что для п.в. $x \in I$

$$(u-v)_x + \mathcal{H}(u) - \mathcal{H}(v) = c, \tag{3.5}$$

где c – некоторая постоянная.

Без ограничения общности предположим, что $c \geqslant 0$ (в противном случае с тем же успехом рассматривается соотношение $(v-u)_x + \mathcal{H}(v) - \mathcal{H}(u) = -c$) и введем обозначение $w = u - v$.

Тогда

$$w(0) = w(1) = 0. \tag{3.6}$$

На основе теорем вложения u, v являются непрерывными функциями в интервале I.

Для определенности предположим, что $u_0 > 0$, $u_1 < 0$ (другие случаи рассматриваются аналогично). Тогда в силу граничных условий функции u и v положительны вблизи точки $x = 0$ и отрицательны вблизи точки $x = 1$. Следовательно, найдутся точки $\tau_1, \tau_2 \in I$, $\tau_1 < \tau_2$ такие, что для всех $x \in [0, \tau_1] \cup [\tau_2, 1]$: $\varkappa(u) - \varkappa(v) = \lambda W$.

Таким образом, из равенства (3.5) получаем, что для п.в. $x \in [0, \tau_1] \cup [\tau_2, 1]$: $W_x + \lambda W = C$, откуда вследствие условий (3.6)

$$W(x) = -\frac{C}{\lambda} e^{-\lambda x} + \frac{C}{\lambda}, \quad x \in [0, \tau_1] \tag{3.7}$$

$$W(x) = -\frac{C}{\lambda} e^{\lambda} e^{-\lambda x} + \frac{C}{\lambda}, \quad x \in [\tau_2, 1] \tag{3.8}$$

Прежде всего рассмотрим случай

I) $C > 0$.

Тогда из соотношений (3.7),(3.8) имеем, что $W > 0$ при $x \in (0, \tau_1]$ и $W < 0$ при $x \in [\tau_2, 1)$. Поэтому в силу непрерывности функции W найдется точка $\tau_0 \in (\tau_1, \tau_2)$ такая, что $W(\tau_0) = 0$ и $W(x) < 0$ для любого x из интервала (τ_0, τ_2).

Так как функция W имеет обобщенную производную W_x в интервале I, то она представима в виде

$$W(x) = W(x_0) + \int_{x_0}^{x} W_x(t)\,dt, \tag{3.9}$$

где x_0 - произвольная точка из интервала I.

Пусть $x_0 = \tau_0$, тогда из представления (3.9) получаем неравенство

$$\int_{\tau_0}^{x} W_x(t)\,dt < 0,$$

справедливое для любого $x \in (\tau_0, \tau_2)$, из которого немедленно следует, что найдется множество $\Omega_0 \subset (\tau_0, \tau_2)$ такое, что для любого $x \in \Omega_0$: $W_x < 0$, причем мера множества Ω_0 больше нуля. Теперь, согласно равенству (3.5) имеем

$$\mathcal{H}(U) - \mathcal{H}(V) = C - W_x > 0$$

для п.в. $x \in \Omega_0$. Отсюда в силу монотонности функции $\mathcal{H}$ заключаем, что $U > V$. Следовательно, $W > 0$, что противоречит условию $W(\tau_0) = 0$.

Итак, возможен лишь случай

2) $C = 0$.

Поскольку функция W непрерывна в интервале $[0, 1]$, то найдется точка $x_M \in [0, 1]$, в которой функция W принимает свое наибольшее значение.

Предположим, что $W(x_M) > 0$.

Тогда найдется точка $x_1 \in [0, x_M)$ такая, что $W(x_1) = 0$ и $W(x) > 0$ для каждого x из интервала (x_1, x_M). Далее, непосредственно из соотношения

$$W(x) = W(x_1) + \int_{x_1}^{x} W_x(t)\,dt$$

(см.представление (3.9)) получим неравенство

$$\int_{x_1}^{x} W_x(t)\,dt > 0,$$

справедливое для всех x из интервала (x_1, x_M). Отсюда вытекает, что существует некоторое множество $\Omega_1 \subset (x_1, x_M)$ с мерой больше нуля такое, что $W_x > 0$ при $x \in \Omega_1$. Поэтому из равенства $W_x + \varkappa(u) - \varkappa(v) = 0$, учитывая монотонность функции $\varkappa$, получаем, что для п.в. $x \in \Omega_1$: : $u < v$, что противоречит условию $W > 0$ для любого $x \in (x_1, x_M)$.

Итак, показано, что для всех $x \in [0,1]$: $W \leq 0$. Аналогично показывается неравенство $W \geq 0$, $x \in [0,1]$. Следовательно, $W \equiv 0$ в интервале $[0,1]$ и тем самым теорема доказана.

Следствие 3.I. Теорема и ее доказательство сохраняют силу также и для следующей функции $\varkappa$

$$\varkappa(t) = \begin{cases} \lambda t + 1, & t > 0 \\ \lambda t, & t < 0 \end{cases} \tag{3.10}$$

где величина $\varkappa(u)$, входящая в вариационное равенство (3.4), понимается в смысле реализации (см. замечание 2.5).

Действительно, в доказательстве теоремы нигде не используются значения функции $\varkappa$ в точке $t = 0$.

Замечание 3.I. Единственность решения вариационного равенства (3.4) установлена, не предполагая, что множество точек x, где $u(x) = 0$, имеет меру нуль.

Справедлив также следующий аналиг теоремы 3.I для смешанной краевой задачи

Теорема 3.2. При любых $u_0, u_1 \in E$, $u_1 \neq 0$, $f, g \in L_2(I)$, $I = (0,1)$ решение вариационного равенства

$$\int_0^1 [u_x + \varkappa(u)]\varphi_x dx + [u_0 + \varkappa(u(0))]\varphi(0) =$$

$$= \int_0^1 (f\varphi_x + g\varphi)dx = 0 \quad \forall \varphi \in W_2^1(I),\ \varphi(1) = 0 \tag{3.11}$$

единственно относительно $u \in W$, где

$$W = \{z \in W_2^1(I) : z(1) = u_1\},$$

а функция $t \to \varkappa(t)$ задана по формуле (3.10).

Доказательство. Пусть u, v – два решения вариационного равенства (3.11). Тогда

$$\int_0^1 [(u-v)_x + \varkappa(u) - \varkappa(v)]\varphi_x dx +$$

$$+[\varkappa(u(0)) - \varkappa(v(0))]\varphi(0) = 0 \quad \forall \varphi \in W_2^1(I),\ \varphi(1) = 0.$$

Отсюда вытекает, что для п.в. $x \in I$

$$(u-v)_x + \varkappa(u) - \varkappa(v) = C \tag{3.12}$$

$$\varkappa(u(0)) - \varkappa(v(0)) = C, \tag{3.13}$$

где C – некоторая постоянная.

Через w обозначим разность $u - v$ и заметим, что достаточно рассмотреть только случай $C > 0$.

В самом деле, если $C = 0$, то из условия (3.13) в силу монотонности функции $\varkappa$ следует, что $u(0) = v(0)$. Поскольку теперь $w(0) = w(1) = 0$, то справедливость теоремы немедленно вытекает из рассуждений случая 2) теоремы 3.1.

Если же $C < 0$, то исходные равенства (3.12),(3.13) умножением на минус единицу приводятся к равенствам такого же типа с постоянной C больше нуля.

Итак, пусть $C>0$.

Предположим, что

$$W(0)<0 \tag{3.14}$$

и рассмотрим следующие случаи

I) $V(0)>0$.

Тогда из соотношений (3.10) и (3.13) получим, что $\mathscr{H}(U(0))=C+\lambda V(0)+1>1$. Поэтому $U(0)>0$ и, следовательно, из равенства (3.13) имеем: $\lambda[U(0)-V(0)]=C>0$, что противоречит предположению (3.14)

2) $V(0)<0$.

Тогда $U(0)=W(0)+V(0)<0$. Поэтому в силу соотношений (3.10) и (3.13) $\lambda W(0)=C>0$, что противоречит предположению (3.14).

3) $V(0)=0$.

Тогда $U(0)=W(0)<0$ и вследствие равенства (3.13) $\mathscr{H}(0)=\lambda U(0)-C<0$, что противоречит условию $\mathscr{H}(0)\in[0,1]$, см.определение 2.2 главы I.

Итак, предположение (3.14) неверно, следовательно, $W(0)\geq 0$.

Поскольку $U(1)=V(1)=U_1\neq 0$, то в силу непрерывности функций U, V найдется точка $x_0\in]$ такая, что для любого $x\in(x_0,1)$

$$U(x)>0 \text{ и } V(x)>0, \text{ если } U_1>0$$

$$U(x)<0 \text{ и } V(x)<0, \text{ если } U_1<0$$

Поэтому из соотношения (3.12) получаем уравнение $W_x+\lambda W=C$, $x\in(x_0,1)$, откуда

$$W(x) = \frac{c}{\lambda}\left(1 - e^{\lambda(1-x)}\right)$$

Так как $c > 0$, то функция W отрицательна в интервале $(x_0, 1)$, следовательно, найдется точка $x_m \in I$, в которой функция W принимает свое наименьшее значение.

Поскольку $W(x_m) < 0$ и $W(0) \geq 0$, то рассуждая аналогично, как и при доказательстве теоремы 3.I, получим, что найдется множество $\Omega_0 \subset I$ ненулевой меры такое, что для всех $x \in \Omega_0$: $W < 0$ и $W_x < 0$. Поэтому согласно равенству (3.I2) $\varkappa(u) - \varkappa(v) > 0$, откуда $u > v$, что противоречит условию $W < 0$ для $x \in \Omega_0$. Тем самым теорема доказана.

Ниже при некоторых дополнительных предположениях приведем пример единственности решения многомерной смешанной краевой задачи для уравнения

$$\Delta u + \frac{\partial}{\partial x_n}\left[\varkappa(u)\right] = f.$$

Введем ряд обозначений.

Пусть S - строго липшицева область евклидова пространства E_{n-1}, $n \geq 2$; $\Omega = S \times (0, b)$ - цилиндр в пространстве E_n; $\Gamma = \partial S \times (0, b)$ - боковая поверхность цилиндра Ω; S^+ - верхнее основание цилиндра Ω; S_1 - некоторый кусок (ненулевой $n-2$ -мерной меры) границы ∂S; $\Gamma_1 = \bar{S}_1 \times [0, b]$; $\Gamma_2 = \Gamma \setminus \Gamma_1$; $\Gamma_3 = \Gamma_1 \cup S$.

Будем считать, что ось Ox_n перпендикулярна основанию S и направлена так, что уравнение $x_n = 0$ $(x_n = b)$ задает нижнее (верхнее) основание цилиндра Ω.

Пусть также заданы функции

$u_0 \in L_q(\Gamma_3)$, $\sigma_1 \in L_q(S^+)$, $\sigma_2 \in L_q(\Gamma_2)$, $g \in L_{\frac{q}{2}}(\Omega)$.

Рассмотрим следующее вариационное равенство относительно $u \in W$

$$\int\limits_{\Omega} [u_{x_i} \varphi_{x_i} + \varkappa(u) \varphi_{x_n}]\, dx + \int\limits_{S^+} [\sigma_1(x) - \varkappa(u)] \varphi\, dS_+$$

$$+ \int\limits_{\Gamma_2} \sigma_2(x) \varphi\, dS = \int\limits_{\Omega} g \varphi\, dx \quad \forall \varphi \in W_2^1(\Omega),\ \varphi|_{\Gamma_3} = 0, \tag{3.15}$$

где W - пространство всех тех элементов $z \in W_2^1(\Omega)$, которые равны (в смысле теорем вложения) элементу u_0 на Γ_3, функция $t \to \varkappa(t)$ определена по формуле (3.10).

Покажем, что решение вариационного равенства (3.15) единственно, например, при выполнении следующих условий.

3.1°. Постоянная λ из определения (3.10) функции $\varkappa$ достаточно мала.

3.2°. Любое решение вариационного равенства (3.15) отлично от нуля вблизи верхнего основания S^+.

В самом деле, пусть u, v - два решения вариационного равенства (3.15). Тогда

$$\int\limits_{\Omega} [(u-v)_{x_i} \varphi_{x_i} + (\varkappa(u) - \varkappa(v)) \varphi_{x_n}]\, dx +$$

$$+ \int\limits_{S^+} [\varkappa(v) - \varkappa(u)] \varphi\, dS = 0 \quad \forall \varphi \in W_2^1(\Omega),\ \varphi|_{\Gamma_3} = 0. \tag{3.16}$$

В качестве φ возьмем функцию (см., например, [8])

$$\varphi(x) = \int\limits_0^{x_n} [u(x_1, \ldots, x_{n-1}, t) - v(x_1, \ldots, x_{n-1}, t)]\, dt.$$

Заметим, что такая функция является допустимой и обладает свойствами

$$\varphi_{x_i} = \int_0^{x_n} (u-v)_{x_i}\, dt \quad , i = 1, \ldots, n-1, \tag{3.17}$$

$$\varphi_{x_n} = u - v, \tag{3.18}$$

поэтому

$$I_1 \equiv \int_\Omega \sum_{i=1}^{n-1} (u-v)_{x_i} \varphi_{x_i}\, dx = \int_\Omega \sum_{i=1}^{n-1} \varphi_{x_n x_i} \varphi_{x_i}\, dx =$$

$$= \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} (\varphi_{x_i})^2 \cos(n, x_n)\, dS.$$

Поскольку согласно равенству (3.17)

$$\varphi_{x_i} = 0 \text{ на } S, \quad i = 1, \ldots, n-1$$

и, кроме этого, вектор нормали, проведенный к Γ, перпендикулярен оси Ox_n, то

$$I_1 = \int_{S^+} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} (\varphi_{x_i})^2\, dS. \tag{3.19}$$

После аналогичных преобразований получаем, что

$$I_2 \equiv \int_\Omega (u-v)_{x_n} \varphi_{x_n}\, dx = \int_{S^+} \frac{1}{2} (\varphi_{x_n})^2\, dS. \tag{3.20}$$

Далее, в силу условия 3.2^0 и равенства (3.18)

$$I_3 \equiv \int\limits_{S^+} [\varkappa(v) - \varkappa(u)] \varphi \, dS = -\int\limits_{S^+} \lambda \varphi_{x_n} \varphi \, dS$$

Так как функция φ равна нулю на части границы S^+, то пользуясь неравенством Гёльдера и известной теоремой вложения, имеем

$$I_3 \leq \lambda \Big(\int\limits_{S^+} (\varphi_{x_n})^2 dS \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int\limits_{S^+} \varphi^2 dS \Big)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \lambda c \int\limits_{S^+} (\varphi_{x_i})^2 dS,$$

где постоянная c зависит лишь от S^+, n.

Согласно условию 3.I^0 предположим, что $2\lambda c \leq 1$. Тогда вследствие соотношений (3.I9) и (3.20) получим, что $I_1 + I_2 + I_3 \geq 0$, поэтому непосредственно из соотношений (3.I6),(3.I8) вытекает, что

$$\int\limits_{\Omega} [\varkappa(u) - \varkappa(v)] (u - v) \, dx = 0.$$

Отсюда на основе монотонности функции $\varkappa$ следует, что $u = v$.

Итак, показано, что при выполнении условий 3.I^0- 3.2^0 решение вариационного равенства (3.I5) единственно.

Глава Ш. ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

В этой главе даются некоторые приложения результатов главы I к задачам оптимального управления.

Основной результат - получено существование оптимального управления для эллиптических уравнений с разрывными нелинейностями. Получены также необходимые условия экстремума для сглаженной задачи.

Любая задача оптимального управления характеризуется следующими основными данными:

- множество V допустимых управлений $v \in V$,

- состояние $u = u(v)$ системы, определяемое как решение некоторого уравнения

$$A u(v) = 0 \qquad (*)$$

где оператор A зависит от выбора v из V ,

- функционал J - мера (критерий) оптимальности.

В качестве уравнения (*) мы будем рассматривать вариационное равенство (2.4) главы I с управлением, входящим лишь в правую часть соотношения (2.4) главы I, а в качестве функционала J - произвольный слабо полунепрерывный снизу или полунепрерывный снизу на W функционал.

Множество конкретных практически важных примеров задач оптимального управления можно найти в монографии [9].

Как отмечалось во введении, уравнения с РН изучены недостаточно, тем более это относится к задачам оптимального управления такими уравнениями. Вопросы существования оптимального управления для двухфазных нестационарных задач Стефана изучены в классической постановке, например, в [21, 40], а в обобщенной постановке в [41]. В работе [35] при выполнении некоторых условий монотонности установлены необходимые условия экстремума для задачи оптимального управления уравнением вида (0.2)

§ I. Существование оптимального управления

Пусть

$$V_1 \equiv \{ f \in F : \|f\|_F \leq c \}$$

множество допустимых управлений, где c некоторое заданное число, а пространства F, W определены в § I главы I.

Для сокращения записей левую часть вариационного равенства (2.4) главы I обозначим через $H(u,\eta)$ и введем множество

$$U_1 \equiv \{ u \in W : (H(u,\eta) = \langle\langle f,\eta \rangle\rangle \ \forall \eta \in W), f \in V_1 \}.$$

<u>Определение I.I</u>. Пусть X банахово пространство. Говорят, что функционал $J : X \to E$ полунепрерывен снизу (пн.сн.) в точке $x^0 \in X$ (слабо пн.сн.), если для любой последовательности $\{x^k\}$, сходящейся сильно (слабо) в пространстве X к элементу x^0 имеет место неравенство

$$J(x^0) \leq \underline{\lim} J(x^k) \equiv \lim_{n\to\infty} \inf_{k \geq n} J(x^k) \qquad (I.I)$$

Говорят, что функционал пн.сн. (слабо пн.сн.), если он пн. сн. (слабо пн.сн.) в каждой точке $x \in X$.

<u>Определение I.2</u>. Пусть функционал J отображает некоторое множество X в E. Последовательность $\{x^k\} \subset X$ называется минимизирующей (относительно функционала J), если

$$J(x^k) \to \inf_{x \in X} J(x) \quad (k \to \infty) \tag{I.2}$$

Непосредственно из этого определения следует, что минимизирующая последовательность существует всегда, если только множество X не пусто.

Пусть полунепрерывный снизу функционал J отображает банахово пространство X в E и минимизирующая последовательность $\{x^k\} \subset X$ сходится слабо к некоторому элементу $x^0 \in X$. Как показывают простые примеры этих условий недостаточно для того, чтобы выполнялось равенство

$$\inf_{x \in X} J(x) = J(x^0).$$

Легко заметить, что такая ситуация не возникает для слабо пн.сн.функционала. Однако теорема существования оптимального управления ниже доказывается также и для пн.сн. функционала.

<u>Теорема I.I.</u> Пусть выполнены условия I^0- 5^0 главы I и задан слабо пн.сн. функционал $J_1 : U_1 \to E$. Тогда найдется $u^0 \in U_1$ такой, что

$$\inf_{u \in U_1} J_1(u) = J_1(u^0). \tag{I.3}$$

<u>Доказательство</u>. Согласно теореме 7.I главы I для каждого $f \in F$ определен элемент $u(f) \in U_1$, следовательно, множество U_1 не пусто. Выберем некоторую минимизирующую последовательность $\{u^k\} \subset U_1$. В силу априорной оценки реше-

ния вариационного равенства (2.4) главы I последовательность $\{u^k\}$ ограничена в пространстве W и также в пространстве $C^\alpha(\bar\Omega)$ с некоторым $\alpha > 0$. Поэтому из нее можно извлечь подпоследовательность, обладающую свойствами (6.I3) главы I. Без ограничения общности будем считать, что сама последовательность $\{u^k\}$ обладает этими свойствами.

Согласно определению множества U_1 найдется последовательность $\{f^k\} \subset V_1$ такая, что $u(f^k) = u^k$, где $u(f^k)$ решение вариационного равенства

$$H(u,\eta) = \langle\langle f^k, \eta \rangle\rangle \quad \forall \eta \in W.$$

Поскольку последовательность $\{f^k\}$ ограничена в рефлексивном пространстве F, то из нее можно выделить подпоследовательность, сходящуюся слабо к некоторому элементу $f^0 \in F$.

Предположим (опять-таки без ограничения)общности), что сама последовательность $\{f^k\}$ сходится слабо к f^0. Так как функционал $\mathcal{J}_1$ слабо пн.сн., для установления равенства (I.3) достаточно показать, что слабый предел u^0 последовательности $\{u^k\}$ является решением вариационного равенства

$$H(u,\eta) = \langle\langle f^0, \eta \rangle\rangle \quad \forall \eta \in W. \tag{I.4}$$

Для этого заметим, что при любом фиксированном $\eta \in W$

$$\langle\langle f^k, \eta \rangle\rangle \to \langle\langle f^0, \eta \rangle\rangle \quad (k \to \infty).$$

Поэтому достаточно проверить, что

$$\Delta H \equiv H(u^k;\eta) - H(u^0;\eta) \to 0 \quad (k \to \infty). \tag{I.5}$$

Величину ΔH представим в виде

$$\Delta H = \sum_{j=1}^{9} I_j(G),$$

где $G = \Omega$ для $j \in \{1; 2; \dots; 7\}$ и $G = \Gamma$ для $j \in \{8; 9\}$,

$$I_1(\Omega) \equiv \int_\Omega [\lambda_{ij}(x, u^k) u^k_{x_j} - \lambda_{ij}(x, u^0) u^0_{x_j}] \eta_{x_i} \, dx,$$

$$I_3(\Omega) \equiv \int_\Omega [\beta_i(x, u^k) - \beta_i(x, u^0)] \eta_{x_i} \, dx,$$

$$I_5(\Omega) \equiv \int_\Omega [\lambda_i(x, u^k) u^k_{x_i} - \lambda_i(x, u^0) u^0_{x_i}] \, dx,$$

$$I_7(\Omega) \equiv \int_\Omega [\beta(x, u^k) - \beta(x, u^0)] \eta \, dx,$$

$$I_9(\Gamma) \equiv \int_\Gamma [\sigma_2(x, u^k) - \sigma_2(x, u^0)] \eta \, d\Gamma,$$

а интегралы $I_j(G)$, $j \in \{2; 4; 6; 8\}$ определяются так же как и интегралы $\mathcal{I}_j(G, \eta)$ из § 7 главы I.

Сходимость к нулю интегралов $I_j(G)$, $j \in \{2; 4; 6; 8\}$, т.е. интегралов, не содержащих разрывных нелинейностей, немедленно следует из свойств (6.I3) главы I.

Напомним, что разрывные (по второму аргументу) функции понимаются в смысле реализаций.

Интеграл $I_1(\Omega)$ перепишем в виде $I_{11}(\Omega) + I_{12}(\Omega)$, где

$$I_{11}(\Omega) \equiv \int_\Omega [\lambda_{ij}(x, u^k) - \lambda_{ij}(x, u^0)] u^k_{x_j} \eta_{x_i} \, dx,$$

$$I_{12}(\Omega) \equiv \int_\Omega \lambda_{ij}(x,u^\circ)(u^k_{x_j} - u^\circ_{x_j})\eta_{x_i}\,dx.$$

Интеграл $\bar{I}_{12}(\Omega)$ стремится к нулю при $k\to\infty$ в силу слабой сходимости $u^k \to u^\circ$ в пространстве W, а для установления сходимости $\bar{I}_{11}(\Omega)\to 0$ при $k\to\infty$ область Ω разобьем на две части $\Omega_T \equiv \{x\in\Omega : u^\circ(x)\in T\}$ и $\Omega\setminus\Omega_T$. Заметим, что

$$\int_\Omega \beta_i(x,u^k)u^k_{x_i}\,dx \to 0 \quad (k\to\infty),$$

поэтому из доказательства леммы 6.4 главы I вытекает, что $u^k\to u^\circ$ сильно в $W(\Omega_T)$, следовательно $\bar{I}_{11}(\Omega_T)\to 0$ при $k\to\infty$.

Поскольку для точек $x\in\Omega\setminus\Omega_T$ последовательность

$$\left\{\left[\lambda_{ij}(x,u^k(x)) - \lambda_{ij}(x,u^\circ(x))\right]\eta_{x_i}\right\}, \quad i,j\in K$$

сходится к нулю при $k\to\infty$, то $\bar{I}_{11}(\Omega\setminus\Omega_T)\to 0$ при $k\to\infty$.

Далее, рассмотрим интеграл $\bar{I}_3(\Omega)$.

То, что интеграл $\bar{I}_3(\Omega\setminus\Omega_T)$ сходится к нулю при $k\to\infty$ следует из предыдущих рассуждений, а сходимость $\bar{I}_3(\Omega_T)\to 0$ при $k\to\infty$ доказывается аналогично сходимости к нулю при $k\to\infty$ величины (7.3), рассмотренной в главе I.

Таким же образом устанавливается сходимость к нулю оставшихся величин $\bar{I}_j(G)$, $j\in\{5;7;9\}$. Теорема доказана.

Из определения I.I ясно, что любой слабо пн.сн. функционал является также полунепрерывным снизу, но обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

В реальных задачах оптимального управления какой-либо априори известный критерий оптимальности не всегда удается моделировать слабо полунепрерывным снизу функционалом, поэтому желательно установить существование оптимального управления для более широкого класса функционалов. Следующая теорема показывает, что при некоторых дополнительных ограничениях, оптимальное управление существует также для полунепрерывних снизу функционалов.

Пусть заданы ограниченные, замкнутые, выпуклые множества $F_1 \subset L_{q/2}(\Omega)$, $F_2 \subset L_q(\Gamma)$. Пусть

$$V_2 \equiv \{ f \in F : f_0 \in F_1,\ f_{n+1} \in F_2,\ f_i = 0,\ i=1,\dots,n \}$$

– множество допустимых управлений и

$$U_2 \equiv \{ u \in W : (H(u,\eta) = \langle\langle f,\eta \rangle\rangle\ \forall \eta \in W),\ f \in V_2 \},$$

тогда справедлива

<u>Теорема I.2</u>. Пусть выполнены условия I^0–5^0 главы I и задан полунепрерывный снизу функционал $J_2 : U_2 \to E$. Тогда существует элемент $u^0 \in U_2$ такой, что

$$\inf_{u \in U_2} J_2(u) = J_2(u^0) \tag{I.6}$$

<u>Доказательство</u>. Пусть $\{u^k\} \subset U_2$ минимизирующая последовательность относительно функционала J_2. Аналогично как и при доказательстве теоремы I.I, показывается, что некоторая предельная точка u^0 (в смысле слабой сходимости в пространстве W) удовлетворяет соотношению (I.5) и, следовательно, является решением вариационного равенства (I.4).

Если последовательность $\{u^k\}$ сходится к элементу u^0 сильно в пространстве W, то согласно определению полунепрерывного снизу функционала имеет место соотношение (I.I), которое наряду с соотношением (I.2) дает требуемое равенство (I.6). Итак, достаточно установить сильную сходимость $u^k \to u^0$ в пространстве W.

Заметим, что из предположений $f_i^k = 0$, $i \in K$, $k \in N$ следует сходимость

$$\langle\langle f^k, \eta^k \rangle\rangle \to \langle\langle f^0, \eta^0 \rangle\rangle \quad (k \to \infty)$$

если последовательности $\{f^k\}$ и $\{\eta^k\}$ сходятся слабо, соответственно, в пространствах F и W. Поэтому сильная сходимость $u^k \to u^0$ в пространстве W почти непосредственно вытекает из доказательства теоремы 8.I главы I.

Теорема доказана.

Замечание I.I. Близким способом могут быть исследованы также случаи, когда управляющие функции входят в коэффициенты a, σ_1, a_i, $i \in K$.

§ 2. Постановка экстремальной задачи для сглаженного уравнения

Сглаживание (аппроксимация) является одним из широко применяемых подходов при решении задач математической физики, в том числе и задач с разрывными нелинейностями. При реализации этого подхода большой интерес представляет сходимость решений аппроксимирующих задач к решению исходной задачи. В нашем случае такая сходимость (в известном смысле) обеспечивается теоремой 8.I главы I.

Учитывая, что основным инструментом теоретического анализа задач оптимального управления и конструирования методов их приближенного решения является вычисление функциональных производных, рассмотрим более сильное требование на коэффициенты сглаженной задачи (по сравнению с требованием лишь непрерывности нелинейных коэффициентов), а именно - требования, обеспечивающие дифференцируемость по Фреше оператора, который порождается сглаженным вариационным равенством.

Введем ряд обозначений и определений, учитывая, что величины q, Ω, Γ, W введены уже раньше.

Пусть задано пространство

$$V \equiv \underbrace{L_2(\Omega) \times \cdots \times L_2(\Omega)}_{n} \times L_{q'}(\Omega) \times L_{q''}(\Gamma),$$

с элементами $f \equiv (f_1, \ldots, f_{n+2})$, где

$$q' = \frac{2q}{q+2}, \quad q'' = \frac{2(q-1)}{q}$$

Пространство V снабдим какой-нибудь нормой, например,

$$\|f\|_V \equiv \max\{\|f_1\|_{2,\Omega}, \ldots, \|f_{n+2}\|_{q'',\Gamma}\}.$$

Пусть задан оператор $A : W \to V$, действующий по закону

$$Az \equiv \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}(x) z_{x_j} + a_1(x,z), \ldots,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{nj}(x) z_{x_j} + a_n(x,z),\ a(x,z),\ \sigma(x,z)\Big). \qquad (2.1)$$

Условия, налагаемые на коэффициенты a_{ij}, a_i, a, σ, приводятся ниже.

Пусть также задан функционал $I: W\times V\to E$, имеющий первую производную Фреше по $(z,f)\in W\times V$. Рассмотрим задачу минимизации функционала I при ограничениях

$$z\in W,\ f\in V,\quad \langle\langle Az-f,\eta\rangle\rangle_1=0\quad \forall\eta\in W, \tag{2.2}$$

где через $\langle\langle f,\eta\rangle\rangle_1$ обозначается

$$\langle\langle f,\eta\rangle\rangle_1\equiv\int_\Omega\Big(\sum_{i=1}^n f_i\eta_{x_i}+f_{n+1}\eta\Big)dx+\int_\Gamma f_{n+2}\eta\, d\Gamma,$$

$$f\in V,\ \eta\in W.$$

Предполагается, что выполнены следующие условия.

I.I^0. Функции $a_{ij}=a_{ij}(x),\ i,j\in K$ заданы и измеримы на Ω. Для п.в. $x\in\Omega$: $a_{ij}(x)=a_{ji}(x),\ i,j\in K$ и для всех $\xi\in E_n$

$$\nu_1|\xi|^2\le a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\le\nu_2|\xi|^2,$$

где ν_1,ν_2 – некоторые положительные постоянные.

I.2^0. Для каждого $t\in E$ функции

$$a=a(x,t),\ \sigma=\sigma(x',t),\ a_i=a_i(x,t),\ i\in K$$

измеримы по $x\in\Omega$ и $x'\in\Gamma$, причем

$$a(\cdot,0)\in L_{q'}(\Omega),\quad \sigma(\cdot,0)\in L_{q''}(\Gamma),$$

$$a_i(\cdot,0)\in L_2(\Omega),\quad i\in K.$$

I.3^0. Функции $a,\ \sigma,\ a_i,\ i\in K$ непрерывно дифференцируемы по t для п.в. $x\in\Omega$ и п.в. $x'\in\Gamma$ и существуют функции

$$h_1 \in L_{\frac{\bar q}{2}}(\Omega),\ h_2 \in L_{\bar q}(\Omega),\ h_3 \in L_{\bar q - 1}(\Gamma),\ \bar q > q$$

такие, что для п.в. $x \in \Omega$, п.в. $x' \in \Gamma$ и всех $t \in E$

$$0 \le \frac{\partial}{\partial t} a(x,t) \le h_1(x) + |t|^{2\alpha} \tag{2.3}$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial t} a_i(x,t)\right| \le h_2(x) + |t|^{\alpha},\ i \in K \tag{2.4}$$

$$0 \le \frac{\partial}{\partial t} \sigma(x',t) \le h_3(x') + |t|^{\alpha}, \tag{2.5}$$

где α некоторое число из интервала $[0, \bar q_1)$, $\bar q_1 = 2/(\bar q - 2)$.

Замечание 2.I. То, что в условии I.2^0 особо выделена точка $t = 0$, несущественно, так как с тем же успехом можно потребовать принадлежность функций $a(\cdot, \tau_1)$, $\sigma(\cdot, \tau_2)$, $a_i(\cdot, \tau_3)$, $i \in K$ к соответствующим пространствам для произвольных наперед фиксированных чисел $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in E$.

Убедимся, что при выполнении условий I.I^0– I.3^0 оператор A в самом деле отображает пространство W в пространство V. Для этого сначала рассмотрим первую компоненту $(Az)_1$ элемента Az и покажем, что

$$I_1 \equiv \int_\Omega \Big[\sum_{j=1}^{n} a_{1j}(x) z_{x_j} + a_1(x,z) \Big]^2 dx \le C. \tag{2.6}$$

Заметим, что непосредственно из соотношения (2.4) следует, что

$$|a_1(x,t)| \le |h_2(x) t| + |t|^{\alpha+1} + |a_1(x,0)|. \tag{2.7}$$

Поэтому в силу неравенства

$$\left(\sum_{j=1}^{m} \tau_j\right)^2 \le m \sum_{j=1}^{m} \tau_j^2,$$

справедливого для всех действительных чисел, имеем

$$I_1 \le (n+1) \sum_{j=1}^{n} \int_{\Omega} (a_{1j}\, z_{x_j})^2 dx +$$

$$+ 3(n+1) \int_{\Omega} \left[(h_2 z)^2 + |z|^{2(\alpha+1)} + |a_1(x,0)|^2 \right] dx.$$

Отсюда, пользуясь тем фактом, что любой элемент $z \in W$ принадлежит также пространству $L_{q \cdot q_1}(\Omega)$, и неравенством Гёльдера для оценки интеграла от $(h_2 z)^2$ в силу условий I.I^0– I.2^0 и того, что $\alpha < q_1$, получим требуемую оценку (2.6).

Совершенно аналогично показываются необходимые оценки для компонент $(Az)_2, \dots, (Az)_n$.

Далее рассмотрим компоненту $(Az)_{n+1}$. Из соотношения (2.3) легко следует аналог неравенства (2.7)

$$|a(x,t)| \le |h_1 t| + |t|^{2\alpha+1} + |a(x,0)|$$

Поэтому в силу известного неравенства

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \tau_i\right)^p \le m^{p-1} \sum_{i=1}^{m} |\tau_i|^p, \qquad (2.8)$$

справедливого для всех действительных чисел $\tau_1, \dots, \tau_m$ при $m \geq 1$ и $p \geq 1$, получим

$$I_{n+1} \equiv \int_{\Omega} |a(x,z)|^{q'} dx \le$$

$$\le 3^{q'-1} \int_{\Omega} \left(|h_1 z|^{q'} + |z|^{(2\alpha+1)q'} + |a(x,0)|^{q'} \right) dx. \qquad (2.9)$$

Учитывая, что $(2\alpha+1)q' < q \cdot q_1$ и применяя неравенство Гёльдера для первого слагаемого из правой части неравенства (2.9) заключаем, что I_{n+1} не превосходит некоторой постоянной.

Наконец, необходимая оценка для последней компоненты $(Az)_{n+2}$ усганавливается аналогично как и соответствующая оценка для компоненты $(Az)_{n+1}$, так как в силу теорем вложения элемент $z \in W$ принадлежит также пространству $L_{q_1(q-1)}(\Gamma)$.

Итак, показано, что оператор A определен корректно.

Замечание 2.2. Оператор A определен корректно также и при $\alpha = q_1$, но в этом случае (как будет видно из дальнейших рассуждений) оператор A может быть не дифференцируем по Фреше.

§ 3. Дифференцируемость по Фреше

Дифференцируемость по Фреше оператора A нужна для получения необходимых условий экстремума для сглаженной задачи оптимального управления.

Лемма 3.I. Если выполнены условия I.I^0– I.3^0, то оператор A имеет первую производную Фреше $A'(z)$ по $z \in W$, причем

$$A'(z)h = \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}(x) h_{x_j} + \frac{\partial}{\partial t} a_1(x,z)h, \ldots,$$

$$\ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{nj}(x) h_{x_j} + \frac{\partial}{\partial t} a_n(x,z)h,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} a(x,z)h, \ \frac{\partial}{\partial t} \sigma(x,z)h\Big) \quad , \ h \in W. \tag{3.I}$$

__Доказательство__. Если оператор $A'(z) : W \to V$ действует по закону (3.I), то он, очевидно, является линейным, а в силу условий I.I^0– I.3^0 также ограниченным. Поэтому достаточно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти число $\delta > 0$ такое, что из неравенства $\|h\| < \delta$ следует неравенство

$$\|A(z+h) - A(z) - A'(z)h\|_V \le \varepsilon \|h\| \tag{3.2}$$

Неравенство (3.2) сначала докажем для нормы

$$I(a) \equiv \|a(x, z+h) - a(x,z) - \frac{\partial}{\partial t} a(x,z)h\|_{q',\Omega} .$$

Для этого положим

$$a^*(x,h,\tau) \equiv \frac{\partial}{\partial t} a(x, z+\tau h) - \frac{\partial}{\partial t} a(x,z),$$

$$v = v(x,h) \equiv \int_0^1 a^* d\tau$$

Тогда

$$I(a) = \|v \cdot h\|_{q',\Omega} \le \|v\|_{\frac{q}{2},\Omega} \cdot \|h\|_{\frac{2q}{q-2},\Omega} .$$

Здесь использовано неравенство Гёльдера, поскольку при любой фиксированной функции $h \in W$ в силу неравенств (3.2), (2.8) функция V принадлежит пространству $L_{\frac{q}{2}}(\Omega)$.

Далее, вследствие теорем вложения имеем

$$I(a) \le C_1 \|V\|_{\frac{q}{2},\Omega} \cdot \|h\|_W,$$

где постоянная C_1 не зависит от h.

Теперь покажем, что

$$\|V\|_{\frac{q}{2},\Omega} \to 0 \text{ при } \|h\| \to 0 \qquad (3.3)$$

Известно, что из сходимости $\|h\| \to 0$ следует сходимость $h(x) \to 0$ почти всюду. Поэтому в силу непрерывной дифференцируемости функции a по t получим, что функция V тоже сходится к нулю почти всюду при $\|h\| \to 0$.

Поскольку функция V может не иметь мажоранты, не зависящей от h, то для установления справедливости соотношения (3.3) одной лишь поточечной сходимости $V(x,h) \to 0$ при $\|h\| \to 0$ недостаточно. Здесь существенно требование $\alpha < q_1$ (см. замечание 2.2).

Предположим, что сходимость (3.3) не имеет места. Тогда найдется $\varepsilon_1 > 0$ и последовательность $\{h^k\}$, сходящаяся к нулю по норме пространства W при $k \to \infty$ такие, что

$$\|V^k\|_{\frac{q}{2},\Omega} > \varepsilon_1 \qquad (3.4)$$

для всех k больше некоторого $k_0 \in N$, где через V^k обозначено $V(x,h^k)$.

Без ограничения общности будем считать, что $\|h^k\| \le 1$ при любом $k \ge k_0$. Тогда в силу условия I.3^0 последовательность $\{V^k\}$ ограничена в пространстве $L_{\bar q/2}(\Omega)$.

Положим

$$\Omega_{k\delta} \equiv \{ x \in \Omega : |V^k| \geq \delta \},$$

где $\delta > 0$ выбрано настолько малым, что

$$\delta (mes\, \Omega)^{\frac{2}{q}} < \frac{\varepsilon_1}{2}.$$

Тогда

$$\| V^k \|_{\frac{q}{2}, \Omega \setminus \Omega_{k\delta}} \leq \left[\delta^{\frac{q}{2}} mes (\Omega \setminus \Omega_{k\delta}) \right]^{\frac{2}{q}} < \frac{\varepsilon_1}{2}. \qquad (3.5)$$

Из сходимости к нулю почти всюду последовательности $\{V^k\}$ вытекает, что для любых положительных чисел δ, ε_2 найдется $k_1 \in N$ такое, что

$$mes\, \Omega_{k\delta} < \varepsilon_2 \quad \forall k \geq k_1. \qquad (3.6)$$

Так как

$$\| V^k \|_{\frac{q}{2}, \Omega_{k\delta}} \leq \| V^k \|_{\frac{\bar q}{2}, \Omega_{k\delta}} (mes\, \Omega_{k\delta})^{q_2} \leq$$

$$\leq \| V^k \|_{\frac{\bar q}{2}, \Omega} (mes\, \Omega_{k\delta})^{q_2},$$

где $q_2 = 2/q - 2/\bar q$, то согласно соотношению (3.6) и ограниченности последовательности $\{V^k\}$ в пространстве $L_{\bar q/2}(\Omega)$ число ε_2 можно выбрать настолько малым, что

$$\| V^k \|_{\frac{q}{2}, \Omega_{k\delta}} < \frac{\varepsilon_1}{2} \quad \forall k \geq k_1.$$

Отсюда, учитывая соотношение (3.5), получим неравенство, противоречащее неравенству (3.4).

Итак, установлена сходимость (3.3) и тем самым неравенство (3.2) для нормы $I(a)$.

Для всех оставшихся компонент нормы $\|A(z+h)-A(z)-A'(z)h\|_V$ неравенство (3.2) доказывается по той же схеме.

Лемма доказана.

§ 4. Необходимые условия экстремума для сглаженной задачи

Обычный путь (которому и будем следовать) получения необходимых условий экстремума, таков:

I) находится первая производная от функционала, подлежащего минимизации (максимизации)

2) для найденной производной применяются хорошо известные неравенства типа

$$\langle \mathcal{J}'(u), u-v\rangle \geq 0 \qquad \forall v$$

$$\langle \mathcal{J}'(u), u-v\rangle \geq \mathcal{J}(u)-\mathcal{J}(v) \qquad \forall v,$$

характеризующие экстремальный элемент u.

Для реализации указанного пути понадобятся некоторые вспомогательные результаты.

<u>Лемма 4.I</u>. Пусть выполнены условия I.I^0- I.3^0 и $z\in W$. Тогда для любого $f\in V$ вариационное равенство

$$\langle\langle A'(z)h-f,\eta\rangle\rangle_1=0 \qquad \forall\eta\in W$$

однозначно разрешимо относительно $h\in W$, причем

$$\|h\|_W \leq c\|f\|_V,$$

где постоянная C зависит только от $\nu_1, \nu_2, n, \Omega, \alpha$ и норм

$$\left\| \frac{\partial}{\partial z} a(x,z) \right\|_{\frac{q}{2},\Omega}, \quad \left\| \frac{\partial}{\partial z} \sigma(x,z) \right\|_{q-1,\Gamma},$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial z} a_i(x,z) \right\|_{q,\Omega}, \quad i \in K.$$

<u>Доказательство</u>. Справедливость сформулированного утверждения непосредственно вытекает из следствия 4.I главы I.

<u>Определение 4.I</u>. Если для некоторого множества $F_1 \subset V$ вариационное равенство (2.2) однозначно разрешимо в некотором подпространстве пространства W, то будем говорить, что вариационное равенство (2.2) определяет на F_1 неявную функцию $z = g(f)$.

<u>Теорема 4.I</u>. Пусть выполнены условия I.I^0– I.3^0, $f^0 \in V$ и вариационное равенство (2.2) имеет решение z^0 при $f = f^0$. Тогда в некоторой окрестности точки f^0 определена неявная функция $z = g(f)$, принимающая значения из некоторой окрестности точки z^0. Более того, функция g имеет первую производную Фреше, причем

$$\| g' \| \le C. \tag{4.I}$$

<u>Доказательство</u>. Убедимся, что удовлетворены все те условия, при выполнении которых справедлива известная теорема о неявной функции (см., например, [18]).

Для этого определим оператор $\mathcal{P} : V \to W$, который каждому элементу $f \in V$ сопоставляет элемент $z = \mathcal{P} f \in W$, сообщающий минимум по $z \in W$ следующему функционалу

$$\int_{\Omega}(|\nabla z|^2+z^2-2f_i z_{x_i}-2f_{n+1}z)dx+\int_{\Gamma}(z^2-2zf_{n+2})d\Gamma.$$

Оператор $\mathcal{P}$ является линейным и ограниченным и вариационное равенство (2.2) эквивалентно уравнению (см., например, [33])

$$\mathcal{P}Az-\mathcal{P}f=0.$$

Далее определим оператор $P: W\times V\to W,$

$$P(z,f)\equiv\mathcal{P}(Az-f-Az^{\circ}+f^{\circ})$$

и заметим, что выполнение для него условий теоремы о неявной функции достаточно проверить в окрестности точки $(z^{\circ},f^{\circ})\in W\times V.$

Так как оператор $\mathcal{P}$ является линейным и ограниченным, то в силу леммы 3.I оператор P дифференцируем по Фреше по совокупности переменных. Легко видеть, что непрерывность частной производной $P_z'(z,f)$ по z равносильна непрерывности производной Фреше $A'(z)$ по z, поэтому покажем непрерывность $A'(z)$ по z, т.е. что

$$\|A'(z^k)-A'(z^*)\|_V\to 0\quad(k\to\infty)\tag{4.2}$$

при

$$\|z^k-z^*\|\to 0\quad(k\to\infty)\tag{4.3}$$

Для этого рассмотрим следующую величину

$$A_1\equiv\sup_{\|h\|\le 1}\|\Delta a_1^k h\|_{2,\Omega}$$

где

$$\Delta a_1^k \equiv \frac{\partial}{\partial t} a_1(x, z^k) - \frac{\partial}{\partial t} a_1(x, z^*).$$

Поскольку $z^k(x) \to z^*(x)$ при $k \to \infty$ почти всюду, что следует из условия (4.3), то в силу непрерывной дифференцируемости функции a_1 (условие I.3^0) последовательность $\{\Delta a_1^k\}$ сходится к нулю при $k \to \infty$ почти всюду. Кроме того, вследствие неравенства (2.4) и условия (4.3), последовательность $\{\Delta a_1^k\}$ имеет мажоранту в пространстве L_q. Следовательно, она сходится сильно в $L_q(\Omega)$. Поэтому, используя неравенство Гёльдера, имеем

$$A_1 \le \sup_{\|h\| \le 1} \left(\|\Delta a_1^k\|_{q,\Omega} \cdot \|h\|_{\frac{2q}{q-2},\Omega} \right) \to 0 \ (k \to \infty).$$

Соотношение (4.2) доказывается вполне аналогично и для всех других компонент элемента $A'(z)h$.

Итак, установлена непрерывность по z оператора P_z'.

В силу леммы 4.I оператор $P_z'(z^\circ, f^\circ) \equiv \mathcal{P}A'(z^\circ)$ отображающий пространство W в W имеет ограниченный обратный оператор

$$\left[P_z'(z^\circ, f^\circ)\right]^{-1} : W \to W.$$

Поскольку оператор P является аффинным (т.е. представим в виде суммы линейного и постоянного оператора) и ограниченным по f, то в некоторой окрестности точки (z°, f°) выполнены все условия теоремы о неявной функции, определяемой уравнением

$$P(z, f) = 0.$$

Следовательно, в некоторой окрестности точки f° существует функция $g = g(f)$, имеющая первую производную Фреше на элементе f°, причем

$$g'(f^{\circ}) = -\left[P_z'(z^{\circ};f^{\circ})\right]^{-1} P_f'(z^{\circ};f^{\circ}) = \left[\mathcal{P}A'(z^{\circ})\right]^{-1}\mathcal{P}. \qquad (4.4)$$

Непосредственно отсюда и из леммы 4.I вытекает справедливость оценки (4.I).

Теорема доказана.

Пусть $X^{*} \equiv \mathcal{L}(X,E)$ - сопряженное пространство к пространству X. Тогда через $\langle \ell, x\rangle$ обозначим значение функционала $\ell \in X^{*}$ на элементе $x \in X$.

Теорема 4.2. Пусть выполнены условия I$^{\circ}$- 3° и z° - решение вариационного равенства (2.2) при $f = f^{\circ}$. Тогда функционал J, определенный по формуле $J(f) = I(g(f), f)$, имеет первую производную Фреше J' в точке f° и для любого $\delta f \in V$

$$\langle J'(f^{\circ}), \delta f\rangle = \langle I_f'(z^{\circ},f^{\circ}), \delta f\rangle + \langle\langle \delta f, \psi\rangle\rangle_{1}, \qquad (4.5)$$

где ψ - решение вариационного равенства

$$\int\limits_{\Omega}\left[a_{ij}(x)\psi_{x_i}\eta_{x_j} + \frac{\partial}{\partial t}a_i(x,z^{\circ})\psi_{x_i}\eta + \frac{\partial}{\partial t}a(x,z^{\circ})\psi\eta\right]dx +$$
$$+\int\limits_{\Gamma}\frac{\partial}{\partial t}\sigma(x,z^{\circ})\psi\eta\, d\Gamma = \langle I_z'(z^{\circ},f^{\circ}),\eta\rangle \quad \forall \eta\in W. \qquad (4.6)$$

Доказательство. Поскольку функционал I имеет первую производную Фреше по (z, f) и неявная функция g согласно теорема 4.I дифференцируема по Фреше в точке f°, то существует производная Фреше $\mathcal{J}'(f^\circ)$, причем

$$\mathcal{J}'(f^\circ) = I'_f(z^\circ;f^\circ) + I'_z(z^\circ;f^\circ)g'(f^\circ), \qquad (4.7)$$

где

$$I'_f \in V^*, \quad I'_z \in W^*, \quad g'(f^\circ) \in \mathcal{L}(V,W).$$

Определим $\psi \in W$ как решение следующего вариационного равенства

$$\langle\langle A'(z^\circ)\eta, \psi\rangle\rangle_1 = \langle I'_z(z^\circ;f^\circ), \eta\rangle \quad \forall \eta \in W,$$

т.е. как решение вариационного равенства (4.6), разрешимость которого следует из леммы 4.I. Тогда, учитывая соотношение (4.4), имеем, что

$$I'_z(z^\circ;f^\circ)g'(f^\circ)\delta f = \langle I'_z(z^\circ;f^\circ), g'(f^\circ)\delta f\rangle =$$

$$= \langle\langle A'(z^\circ)g'(f^\circ)\delta f, \psi\rangle\rangle_1 = \langle\langle A'(z^\circ)([\mathcal{J}A'(z^\circ)]^{-1}\mathcal{J})\delta f, \psi\rangle\rangle_1 =$$

$$= \langle\langle \delta f, \psi\rangle\rangle_1,$$

откуда, согласно равенству (4.7) получаем соотношение (4.5).

Теорема доказана.

<u>Следствие 4.I</u>. Если множество $F_3 \subset V$ выпукло и f° решение экстремальной задачи $I(z,f) \to min$, то

$$\langle \mathcal{J}'(f^\circ), f - f^\circ\rangle \geqslant 0 \quad \forall f \in F_3.$$

Следствие 4.2. Пусть выполнены условия следствия 4.I и функционал I является выпуклым по f. Тогда

$$I(z^0;f)+\langle\langle f,\psi\rangle\rangle_1 \geq I(z^0;f^0)+\langle\langle f^0,\psi\rangle\rangle_1 \quad \forall f\in F_3,$$

где ψ - решение вариационного равенства (4.6).

Справедливость сформулированных утверждений немедленно вытекает из хорошо известных неравенств, характеризующих экстремальный элемент.

ЛИТЕРАТУРА

1. Авдонин Н.А. Математическое описание процессов кристаллизации. - Рига, Зинатне, 1980, 180 с.
2. Базалий Б.В. Об одной квазистационарной задаче Стефана. - ДАН Укр.ССР, 1976, сер.А, № 1, с.3-5.
3. Базалий Б.В. Устойчивость гладких решений двухфазной задачи Стефана. - ДАН СССР, 1982, т.262, № 2, с.265-269.
4. Базалий Б.В., Шелепов В.Ю. Вариационные методы в смешанной задаче теплового равновесия со свободной границей. - В кн.: Краевые задачи математической физики. Киев, Наукова думка, 1978, с.39-58.
5. Байокки К., Idадженес Э. О задачах со свободной границей, связанных с течением жидкости через пористые материалы. - УМН, 1974, т.29, вып.2(176), с.50-69.
6. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. - М., Наука, 1975, 480 с.
7. Бородин М.А. О разрешимости двухфазной квазистационарной задачи Стефана. - ДАН Укр.ССР, 1982, сер.А, № 2, с.3-5.
8. Бородин М.А. Однофазная квазистационарная задача Стефана. - В кн.: Краевые задачи для уравнений в частных производных. Киев, Наукова думка, 1979, с.13-21.
9. Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. - М., Наука, 1975, 568 с.
10. Вайнберг М.М. Вариационный метод и метод монотонных операторов. - М., Наука, 1972, 416 с.

11. Данилюк И.И. Об одной квазистационарной задаче типа Стефана. - В кн.: Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 11. Записки научн.семинаров Ленингр.отд.Мат.ин-та АН СССР, 1979, т.84, с.26-34.

12. Данилюк И.И. О двухфазной квазистационарной задаче Стефана. - ДАН Укр.ССР, 1982, сер.А, № 1, с.6-10.

13. Данилюк І.І., Кашкаха В.Ю. Про одну нелінійну просторову задачу з вильною границею. - Доп.АН УРСР. Сер.А, 1973, № 2, с.119-123.

14. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория. - М., ИЛ, 1962, 896 с.

15. Домаркас А. Односторонние задачи для квазилинейных эллиптических уравнений. - Литовский матем.сб., 1981, № 4, с.83-96.

16. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. - М., Наука, 1980, 384 с.

17. Жиков В.В., Козлов С.М., Олейник О.А., Ха Тьен Нгоан. Усреднение и G-сходимость дифференциальных операторов. - УМН, 1979, т.34, вып.5(209), с.65-133.

18. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. - М., Наука, 1977, 744 с.

19. Кашкаха В.Е. О методе Ритца исследования двухфазной квазистационарной задачи типа Стефана. - В кн.: Математическая физика. Киев, Наукова думка, 1975, вып.17, с.128-137.

20. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. - М., Наука, 1976, 544 с.

21. Костылева В.Д. Существование решения оптимальной задачи

Стефана. - В кн.: Математический сборник. Киев, Наукова думка, 1976, с. 86-90.

22. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. - М., Наука, 1967, 736 с.

23. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. - М., Наука, 1973, 576 с.

24. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. - М., Мир, 1972, 588 с.

25. Ляшко А.Д., Бадриев И.Б., Карчевский М.М. О вариационном методе для уравнений с монотонными разрывными операторами. - Известия вузов. Матем., 1978, № 2, с.63-69.

26. Мейрманов А.М. О классическом решении многомерной задачи Стефана для квазилинейных параболических уравнений. - Матем. сб., 1980, т.112, вып.2(6), с. 170-192.

27. Мейрманов А.М. Пример несуществования классического решения задачи Стефана. - ДАН СССР, 1981, т.258, № 3, с. 547-549.

28. Олейник О.А. Об одном методе решения общей задачи Стефана. - ДАН СССР, 1960, т.135, № 5, с. 1054-1057.

29. Олейник О.А. О некоторых задачах теории дифференциальных уравнений. - В кн.: Первая летняя математическая школа 2, г.Канев; Киев, Наукова думка, 1964, с. 117-255.

30. Павленко В.Н. Существование решений нелинейных уравнений с разрывными полумонотонными операторами. - Укр. матем. ж., 1981, т.33, № 4, с. 547-551.

31. Радкевич Е.В. Об условиях существования стационарной пресной линзы при наличии инфильтрации. - ДАН СССР, 1982.

т.263, № I, с.40-44.

32. Радкевич Е.В., Меликулов А.С. О разрешимости двухфазной квазистационарной задачи кристаллизации. - ДАН СССР, 1982, т.265, № I, с.58-62.

33. Райтум У.Ё. К G-сходимости почти линейных эллиптических операторов с неограниченными младшими коэффициентами. - Латвийский матем.ежегодник, 1982, вып.26, с.101-113.

34. Фельгенхауер У. Об одной однофазной нестационарной задаче Стефана. - ДАН Укр.ССР, 1981, Сер.А, № I, с.30-32.

35. Barbu V. Necessary conditions for nonconvex distributed control problems governed by elliptic variational inequalities. - J.Math.Anal.and Appl., 1981, v.80, N 2, p.566-597.

36. Caffarelli L.A. Some aspects of the one-phase Stefan problem. - Indiana Univ.Math.J., 1978, v.27, N 1, p.73-77.

37. Friedman A., Kinderlehrer D. A one phase Stefan problem. - Indiana Univ.Math.J., 1975, v.24, N 11, p.1005-1035.

38. Kinderlehrer D. Variational inequalities and free boundary problems. - Bull.Amer.Math.Soc., 1978, v.84, N 1, p.7-26.

39. Massabo I., Stuart C.A. Elliptic eigenvalue problems with discontinuous nonlinearities. - J.Math.Anal.and Appl., 1978, v.66, N 2, p.261-281.

40. Niezgodka M. Some methods of solving optimal control problems for free boundary processes. - Abh.Akad.Wiss.DDR. Abt.Math., Naturwiss.Techn., 1981, N 2N, p.375-378.

41. Pawlow I. Parabolic Problems with free boundaries: existence and properties of solutions; optimal control problems. - Abh.Akad.Wiss.DDR. Abt.Math., Naturwiss. Techn. 1981, N 2N, p.221-231.

42. Stuart C.A. Maximal and minimal solutions of elliptic differential equations with discontinuous non-linearities. - Math.Z., 1978, v.163, N 3, p.239-249.

43. Stuart C.A., Toland J.F. A property of solutions of elliptic differential equations with discontinuous nonlinearities. - J.London Math.Soc., 1980, v.21, N 2, p. 329-335.

44. Rodrigues J.-F. Sur un probleme à frontiére libre stationnaire traduisant la cristallisation d'un métal. - C.R. Acad.Sci.Paris, 1980, v.290(5), p.823-825.

ОГЛАВЛЕНИЕ