Analytische Geometrie

nach

Prof. Dr. F. Schur.

Dorpat. I Sem. 1892.

Alfred Meder.
stud. math.

Coll 1. 22/I 92.

Einleitung.

Die Aufgabe der analytischen Geometrie besteht darin, die Grundbeziehungen geometrischer Figuren in Form von Gleichungen wiederzugeben, diese Gleichungen zu kombinieren und die erhaltenen Resultate wieder geometrisch darzustellen. Aus diesen neu erhaltenen Ausdrücken lassen sich dann mit Leichtigkeit andere bis dahin noch unbekannte Eigenschaften der untersuchten Curve bez. Fläche erkennen.

Der Hauptvorzug der analytischen Geometrie besteht darin, daß wir uns auch von Curven, die wir auf rein geometrischem Wege nicht darstellen können, ein anschauliches Bild machen können, so z. B. von der ballistischen Curve. Die Elemente zur Bestimmung der Curve sind: die Ordinate (ordinatim applicata, die in einer bestimmten Richtung aufgetragene) und die Abscisse (die abgeschnittene). Die Ordinate ist die Entfernung eines beliebigen Punktes der Curve von einer feststehenden Horizontaden geraden Linie und die Abscisse die Entfernung des Fußpunktes dieser Senkrechten von einem bestimmten Anfangspunkte. Die Aufgabe der analytischen Geometrie ist es, die Beziehungen zwischen den Ordinaten und Abscissen aufzufinden. Die Gleichung, die diese Beziehungen darstellt, wird die Gleichung der Curve genannt. Berechnen wir uns nun aus der Gleichung einer Curve mehrere Abscissen nebst den zugehörigen Ordinaten, so können wir uns die Curve in anschaulicher Weise darstellen.

Ehe wir zur eigentlichen analytischen Geometrie übergehen, wollen wir noch einige geschichtliche Daten in's Auge fassen. Als Erfinder der analytischen Geometrie gilt der berühmte französische Mathematiker und Philosoph Descartes (Cartesius) 1596-1650. Im Jahre 1637 gab er ein Werk unter dem Namen „Geometrie" heraus. In diesem Werk hat er zum ersten Mal die Ordinate und Abscisse als Bestimmungsstücke angewandt. Noch in demselben Jahre erschien ein Werk von

Fermat: „Isagoge in locos planos et solidos", in welchem ebenfalls die Idee der Bestimmung von Punkten durch Abscisse und Ordinate durchgeführt ist.

Diese Bestimmung durch Coordinaten finden wir übrigens schon im Altertume bei Apollonius, aber, da damals die Buchstabenrechnung noch nicht erfunden war, nur in reiner geometrischer Bedeutung. Die Bezeichnung ist jedoch genau dieselbe: für Ordinate: τεταγμένως κατηγμένη, und für Abscisse: ἀποτεμνομένη ἀπὸ τῆς διαμέτρου.

Ferner haben sich auf diesem Gebiete hervorgethan Newton und Huyghens. Das erste systematisch geordnete Werk stammt von Euler und erschien im Jahre 1748 unter dem Titel: „introductio in analysin".

Die analytische Geometrie zerfällt, analog der Einteilung der niederen Geometrie in Planimetrie und Stereometrie, in zwei Hauptteile: „Die analytische Geometrie der Ebene" und „die analytische Geometrie des Raumes".

Die analytische Geometrie der Ebene.

Zur Bestimmung eines Punktes in der Ebene teilt man die letztere durch zwei auf einander senkrecht stehende gerade Linien in 4 Quadranten und zwar wird die horizontale Linie die Abscissen- oder x-Axe, die verticale dagegen Ordinaten- oder y-Axe genannt. Beide Axen bilden zusammen das sogenannte Coordinatensystem. Nachdem das System gezogen geschieht die Bestimmung eines Punktes durch Abscisse und Ordinate, die sogenannten Coordinaten. Die Abscisse eines Punktes ist der in der Richtung der x-Axe gemessene Abstand desselben von der y-Axe und die Ordinate ist wiederum der in der Richtung der y-Axe gemessene Abstand von der x-Axe.

Da bei gegebenem C! die Lage eines P! noch variabel sein kann, je nachdem man die Abscisse nach rechts oder links und die Ordinate nach oben oder unten aufträgt, so hat man festgesetzt, die Abscissen, die

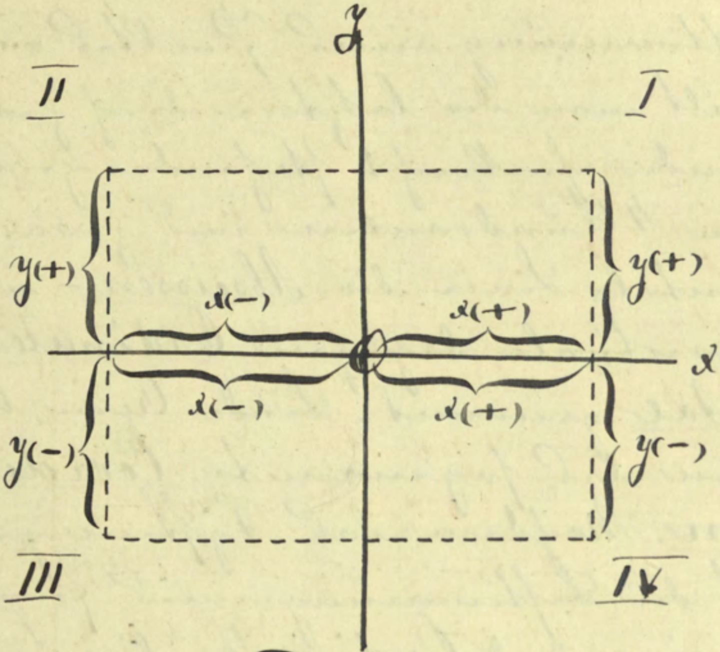

Fig. 1.

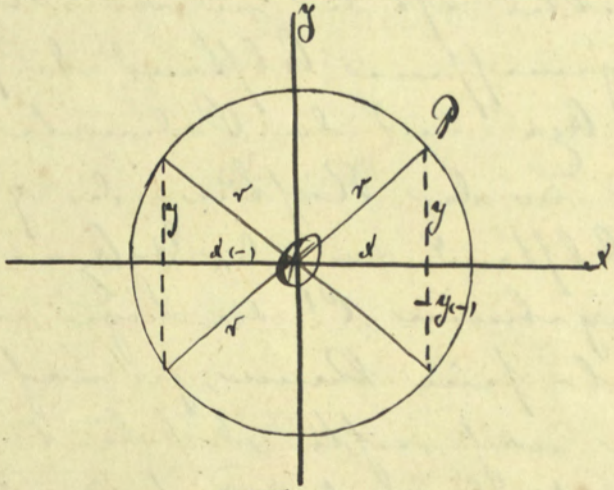

Fig. 2.

rechts von dem Anfangspunkte liegen, als positiv, und die, die links von demselben liegen, als negativ anzunehmen; ebenso rechnet man die Ordinaten oberhalb der Abscissenachse positiv, die unterhalb derselben negativ. Das folgende Schema erläutert diese Beziehungen zur Genüge:

Quadrant	Ordinate	Abscisse
I	positiv (+)	positiv (+)
II	positiv (+)	negativ (−)
III	negativ (−)	negativ (−)
IV	negativ (−)	positiv (+)

Aus folgendem Beispiele kann man sehr gut den Wert des doppelten Vorzeichens erkennen (s. Fig. 2.). Coll. 2 $\frac{23}{1}$ 92.

Wenn wir um den C! Anfangspunkt einen Kreis mit dem Radius r beschreiben, darauf auf der Peripherie desselben einen P! mit den C! x, y annehmen, so erhalten wir die Gleichung des Kreises $x^2+y^2=r^2$. Lösen wir diese Gleichung für y auf, so erhalten wir: $y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$, also für jeden Wert von x zwei

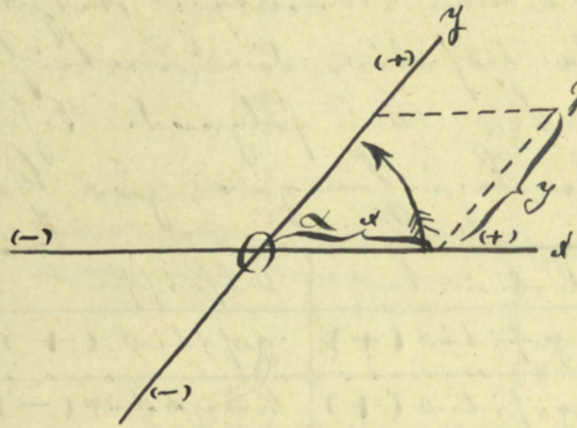

Fig. 3.

Werte von y, wie sie auch aus der Figur zu ersehen ist.

Man hat nicht nur rechtwinklige sondern auch schiefwinklige C.-Systeme. Die Definition der Abscisse und Ordinate ist eine ähnliche, nur kommt hier noch der Winkel in Betracht, den die Axen mit einander bilden, der sog. Coordinatenwinkel.

Anm: Unter dem eingeschlossenen Winkel ist stets derjenige zu verstehen, den die positive Abscissenachse beschreiben muß, um auf dem kürzesten Wege die positive Seite der y-Axe zu erreichen.

Nach diesen Festsetzungen können wir zur Lösung der elementarsten Aufgaben übergehen.

Anm: Bei der analytischen Geometrie ist darauf zu achten, daß die Variabeln auf beiden Seiten der Gleichung stets gleiche Werte haben, da nur in diesem Falle die Gleichung richtig ist.

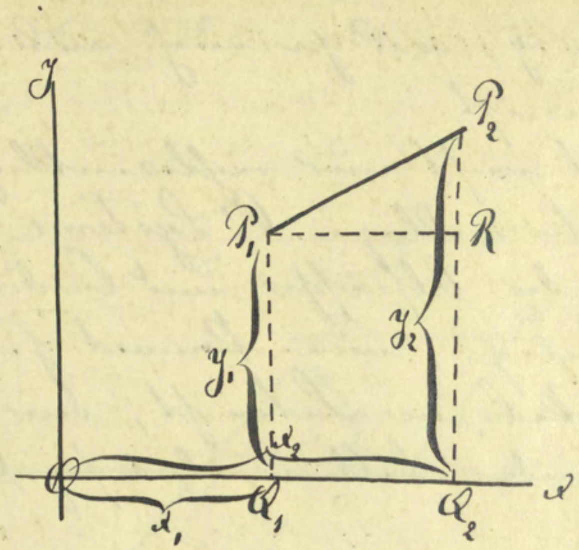

Fig. 4.

<u>Satz 1.</u> Die absolute Entfernung 2 Punkte in der Ebene deren rechtwinkelige C! $x_1 y_1$ u. $x_2 y_2$ sind, ist:

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

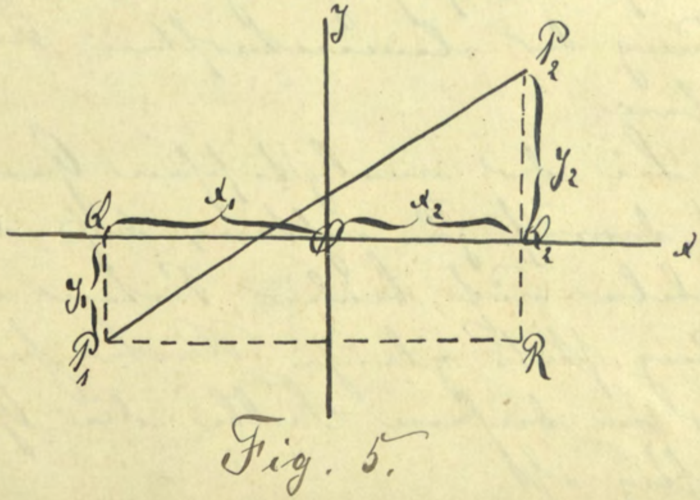

Fig. 5.

Betrachtung von 2 Punkten.

Bisher haben wir uns nur mit einem Punkte beschäftigt, jetzt wollen wir zu zweien übergehen.

Aufgabe: Die Entfernung 2 Punkte P_1 und P_2 zu berechnen. (s. Fig. 4).

P_1 habe die C! x_1 y_1

P_2 " " " x_2 y_2

Man ziehe durch P_1 eine $\parallel$ zu Ox, dann ist:

$$\begin{aligned} P_1P_2^2 &= P_1R^2 + RP_2^2 \\ &= Q_1Q_2^2 + RP_2^2 \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \end{aligned}$$

$$\underline{P_1P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

Daß die Formel auch richtig ist, wenn ~~einer~~ die P! nicht im ersten Quadranten liegen, sehen wir aus Fig. 6.

$$\begin{aligned} \underline{P_1P_2^2} &= P_1R^2 + RP_2^2 \\ &= (Q_1O + OQ_2)^2 + (RQ_2 + Q_2P_2)^2 \\ &= \underline{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \end{aligned}$$

Wir schreiben $x_2 - x_1$ u. $y_2 - y_1$, da hier x_1 u. y_1 negativ sind

Satz 1a. Die Entfernung zweier P! mit derselben Abscisse resp. Ordinate ist der Größe und dem Vorzeichen nach gleich der Differenz der Ordinaten resp. Abscissen dieser Punkte.

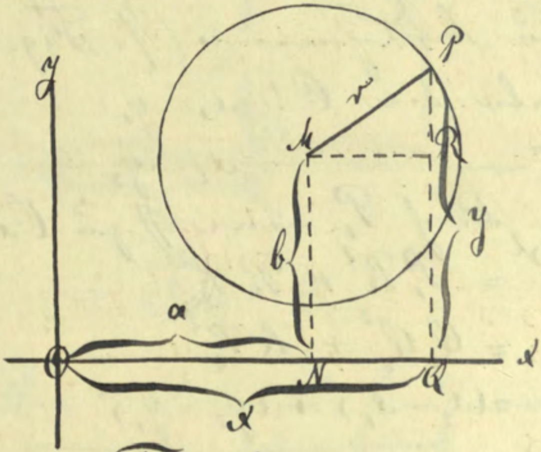

Fig. 6.

Satz 1b. Die Gleichung eines Kreises, der den Radius r und dessen Mittelpunkt die C! a u. b hat, ist:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

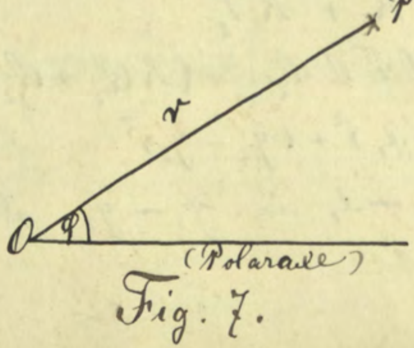

Fig. 7.

Ist $x_1 = x_2$, so wird $P_1P_2 = y_2 - y_1$, und ist wiederum $y_1 = y_2$, so wird $P_1P_2 = x_2 - x_1$.

Aufgabe. Die Gleichung eines beliebigen Kreises herzuleiten. (s. Fig. 6).

Der Mittelpunkt M habe die C! a, b
ein beliebiger P! d. Peripherie " " x, y.

$$MP = r$$

Es ist klar, dass wir, um die Gleichung dieses Kreises zu finden, in der erst gefundenen Gleichung $P_1P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ blos statt P_1P_2 r, statt x_2 u. y_2, x u. y, und statt x_1 u. y_1, a u. b zu setzen haben. Wir erhalten dann die Gleichung des Kreises:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Polarcoordinaten.

Coll. 3 $\frac{27}{1}$ 92.

Außer der Bestimmung eines P! durch ‖C! hat man noch eine andere Methode, um seine Lage festzusetzen. Man mißt nämlich die Entfernung des gesuchten P! von einem festen P!, so wie auch den Winkel, den diese Verbindungslinie oder Radius vector (r) (s. Fig 7.), der immer positiv sein muß, mit einer festen

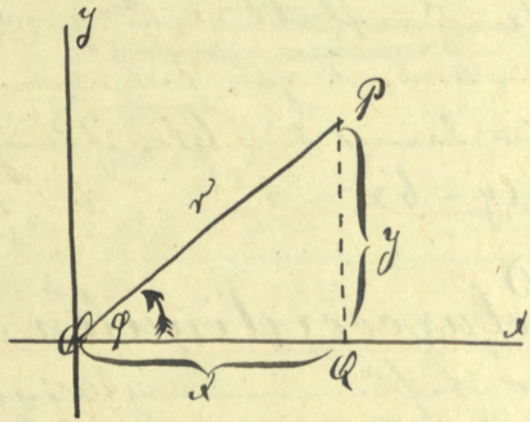

Fig. 8.

Geraden, der Polaraxe, bildet. Der feste P! wird Pol genannt, der Winkel aber Amplitude oder Anomalie. Es ist unter der Amplitude stets derjenige Winkel zu verstehen, welchen der Radius vector entgegengesetzt der Richtung des Uhrzeigers beschreiben muß, um von der Polarlage in die gegebene Lage zu kommen. Ist die Amplitude negativ, so muß die Drehung im Sinne des Uhrzeigers vorgenommen werden.

Der Zusammenhang, der zwischen den rechtwinkligen und den Polar P! besteht, wird durch die folgenden Gleichungen ausgedrückt (s. Fig 8.):

$x = r \cos\varphi$ und umgekehrt $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$y = r \sin\varphi$ $\quad tg\,\varphi = \frac{y}{x}$

Um diese Formeln als allgemein giltig hinzustellen, müssen wir noch eine Definition der trigonometrischen Funktionen geben.

Der sinus resp. cosinus eines Winkels sind die Ordinate resp. Abscisse eines P!

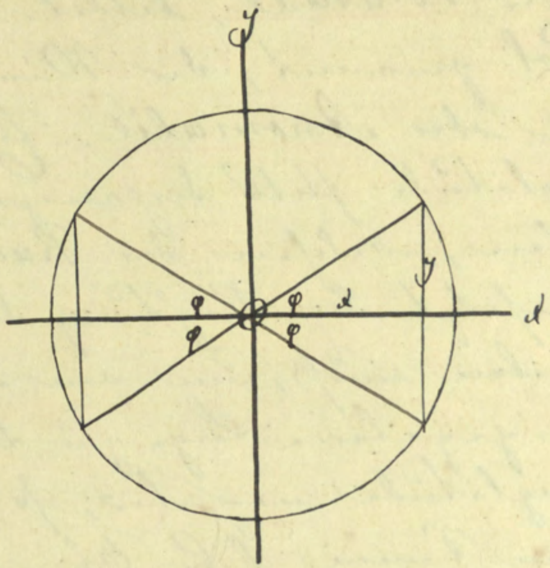

Fig. 9.

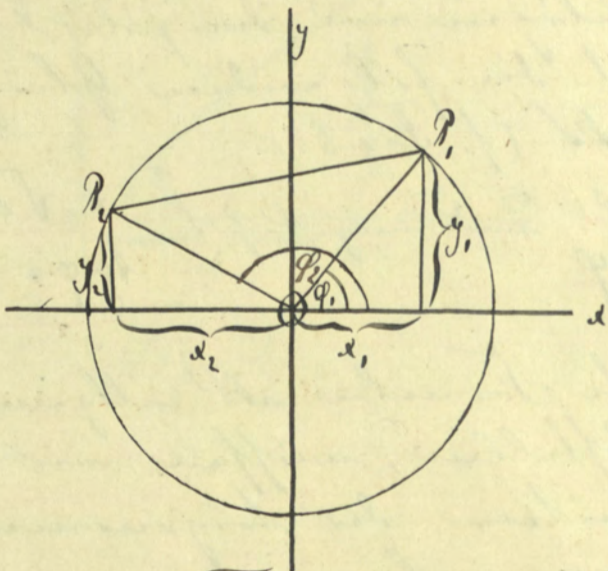

Fig. 10.

der Ebene, der den Radius vector 1 und den gegebenen Winkel als Amplitude hat.

Wie aus Fig. 9 ersichtlich, ist:

$$\sin(180^\circ - \varphi) = \sin\varphi$$
$$\cos(180^\circ - \varphi) = -\cos\varphi$$

ferner $\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$ u. $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$

$$\sin(360^\circ + \varphi) = \sin\varphi$$
$$\cos(360^\circ + \varphi) = \cos\varphi$$
$$\sin(360^\circ - \varphi) = \sin(-\varphi) = -\sin\varphi$$
$$\cos(360^\circ - \varphi) = \cos(-\varphi) = \cos\varphi$$
$$\sin(180^\circ + \varphi) = -\sin\varphi$$
$$\cos(180^\circ + \varphi) = -\cos\varphi$$

Jetzt wollen wir uns noch einige trigonometrische Formeln herleiten, die wir bei einigen Beweisen benutzen werden (s. Fig. 10.).

Der Punkt P_1 habe die C! x_1 u. y_1
" " P_2 " " " x_2 " y_2

$$\underline{P_1P_2^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = x_2^2 + x_1^2 + y_2^2 + y_1^2 - 2x_1x_2 - 2y_1y_2$$

Setzen wir jetzt $x_1 = \cos\varphi_1$; $y_1 = \sin\varphi_1$; $x_2 = \cos\varphi_2$; $y_2 = \sin\varphi_2$, so ist:

$$P_1P_2^2 = \cos^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_1 + \sin^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_1 - 2\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - 2\sin\varphi_1\sin\varphi_2$$
$$= 2 - 2\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - 2\sin\varphi_1\sin\varphi_2$$

Ferner ist: $\underline{P_1P_2^2 = OP_1^2 + OP_2^2 - 2OP_1 \cdot OP_2 \cos P_1OP_2} = 2 - 2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$

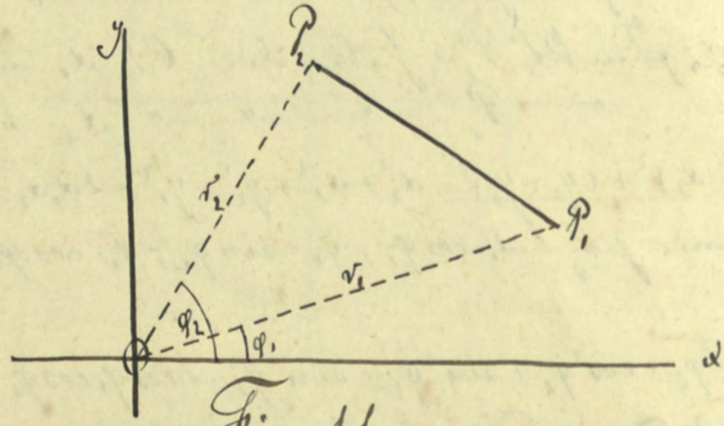

Fig. 11.

folgt: $\underline{\text{I}\ \cos(\varphi_1-\varphi_2) = \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2}$.
Setzen wir jetzt in dieser Formel statt φ_2 $-\varphi_2$, so erhalten wir:

$$\underline{\text{II}\ \cos(\varphi_1+\varphi_2) = \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2}$$ Coll. 4 $\frac{28}{1}$ 92.

Setzen wir jetzt in II $\varphi_1 = 90^\circ+\varphi$, so erhalten wir:

$$\cos(90^\circ+\varphi+\varphi_2) = \cos(90^\circ+\varphi)\cos\varphi_2 - \sin(90^\circ+\varphi)\sin\varphi_2$$

oder: $-\sin(\varphi+\varphi_2) = -\sin\varphi\cos\varphi_2 - \cos\varphi\sin\varphi_2$

$$\underline{\text{III}\ \sin(\varphi_1+\varphi_2) = \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \sin\varphi_2}$$

Ebenso erhalten wir:

$$\underline{\text{IV}\ \sin(\varphi_1-\varphi_2) = \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 - \cos\varphi_1 \sin\varphi_2}$$

Wir sehen also, daß diese trigonometrischen Funktionen ganz denselben Beziehungen unterworfen sind, wie die gewöhnlichen.

Nachdem wir dies vorausgeschickt, können wir übergehen zur Berechnung der

Entfernung 2 P! in Polar-C!

Gegeben sind die beiden Punkte P_1 u. P_2 mit ihren C! $x_1\ y_1$ und $x_2\ y_2$ (s. Fig 11.)

Dann ist nach Satz 1:

$$\underline{P_1P_2 = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}$$

$$= \sqrt{x_2^2+x_1^2+y_2^2+y_1^2-2x_2x_1-2y_2y_1}$$

$$= \sqrt{r_2^2\cos^2\varphi_2+r_1^2\cos^2\varphi_1+r_2^2\sin^2\varphi_2+r_1^2\sin^2\varphi_1-2r_2\cos\varphi_2\, r_1\cos\varphi_1-2r_2\sin\varphi_2\, r_1\sin\varphi_1}$$

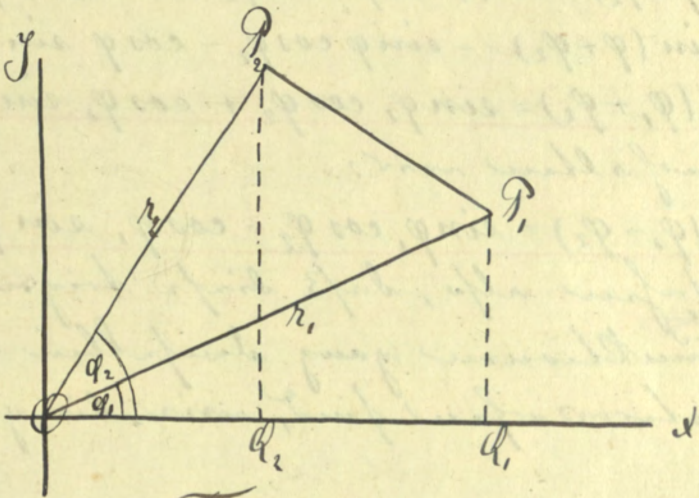

Fig. 12.

$$P_1P_2 = \sqrt{r_2^2 + r_1^2 - 2r_2 r_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

Diese Formel hätten wir auch direct nach dem trigonometrischen cos-Satz herleiten können.

Betrachtung 3 Punkte.

Die wichtigste Aufgabe, die wir hier zu lösen haben, ist die Berechnung des Flächeninhalts eines Dreiecks.

Zunächst wollen wir den einfachen Fall betrachten, daß die eine Spitze des Dreiecks mit dem C!-Anfangspunkt zusammenfällt. (s. Fig. 12.)

$$\Delta OP_1P_2 = \tfrac{1}{2}\, OP_1 \cdot OP_2 \sin P_1OP_2$$

$$\angle P_1OP_2 = \varphi_2 - \varphi_1$$

$$\Delta OP_1P_2 = \tfrac{1}{2}\, r_1 r_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)$$

Anm: Eine in einer bestimmten Richtung durchlaufene Fläche ist als positiv zu betrachten, wenn dieselbe bei der Umlaufung zur Linken bleibt.

Wir wollen jetzt die obige Formel für rechtwinklige C! abändern:

$$\Delta OP_1P_2 = \tfrac{1}{2}\, r_1 r_2 (\sin\varphi_2 \cos\varphi_1 - \cos\varphi_2 \sin\varphi_1)$$

$$\Delta OP_1P_2 = \tfrac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1) = \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}.$$

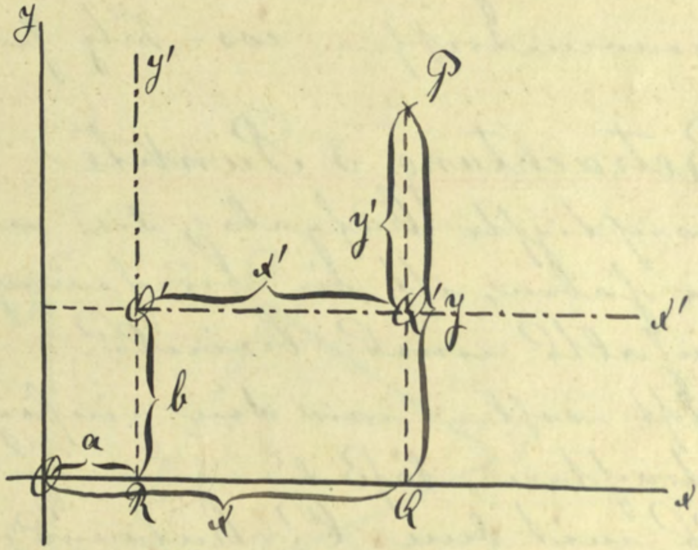

Fig. 13.

<u>Satz 2.</u> Ein P!, der in einem gegebenen Systeme die C! x und y hat, hat in einem andern Systeme, dessen Axen, denen des gegebenen ∥ sind und dessen Anfangspunkt in diesem die C! a u. b besitzt, die C!

$x' = x - a$ und $y' = y - b$

Bevor wir zur Berechnung eines beliebigen Dreiecks schreiten können, müssen wir noch die

Coordinatenverschiebung

betrachten (s. Fig. 13.)

Ein Punkt P habe die C! x u. y. Denken wir uns die Axen dieses Systems || mit sich selbst verschoben, wie können wir dann die neuen C! x' y' dieses P! P durch die alten x, y ausdrücken?

O' habe die C! a und b, dann ist:

$$\underline{x'} = O'Q' = RQ = OQ - OR = \underline{x - a}$$

$$\underline{x' = x - a} \quad \text{desgleichen} \quad \underline{y' = y - b.}$$

Diese Formel haben wir freilich nur für eine specielle Lage bewiesen, da aber die Abscisse eines P! im neuen Systeme stets gleich ist der Entfernung des Fußpunktes der Ordinate des P! vom Fußpunkte der Ordinate des neuen Anfangspunktes und diese Entfernung allgemein stets $= (x - a)$ ist, so folgt daraus, daß obige Formeln auch für alle Fälle richtig sind. Dasselbe gilt auch von der Ordinate.

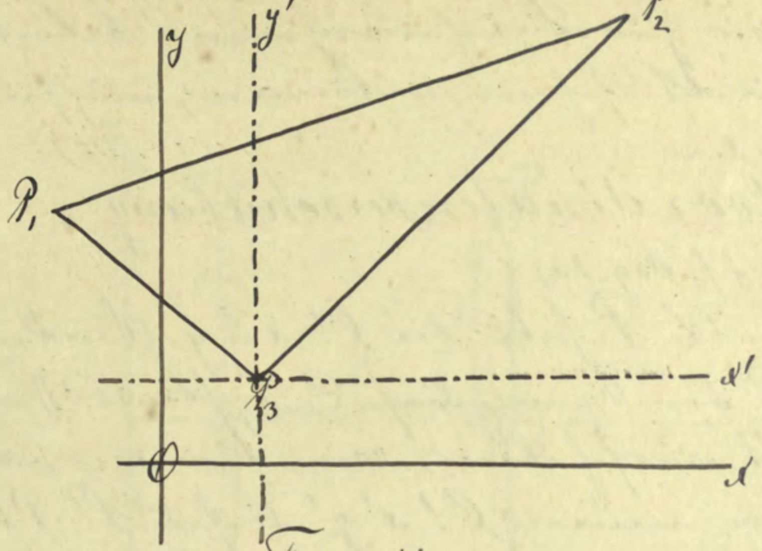

Fig. 14.

Satz 3. Der Flächeninhalt eines Δ^s, dessen Eckpunkte $P_1 P_2 P_3$ die C! $x_1 y_1$; $x_2 y_2$; $x_3 y_3$ haben, ist:

$$= \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_2 y_3 - x_3 y_2 + x_3 y_1 - x_1 y_3)$$

welcher (+) oder (−) ist, je nachdem bei der angegebenen Umlaufungsrichtung der Seiten die Fläche des Δ^s zur Linken oder Rechten liegt.

Satz 4. Die C! x, y eines Punktes P welcher sich auf der Geraden durch die Punkte $P_1 P_2$ mit den C! $x_1 y_1$ u $x_2 y_2$ befindet, genügen der Gleichung

$$x(y_1 - y_2) - y(x_1 - x_2) + x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$$

der sog. Gleichung der geraden Linie.

Aufgabe. Den Flächeninhalt eines Drei- Coll. 5 $\frac{29}{1}$ 92.
ecks zu berechnen, von dem die C! der Eckpunkte gegeben sind (s. Fig. 14).

Denken wir uns den C!-anfangspunkt nach P_3 verlegt, wobei die Axen $\parallel$ den alten bleiben, dann hat:

P_1 im alten Syst. d. C! $x_1\, y_1$ im neuen $x_1 - x_3 = x_1'$ u. $y_1 - y_3 = y_1'$
P_2 " " " " " $x_2\, y_2$ " " $x_2 - x_3 = x_2'$ u. $y_2 - y_3 = y_2'$
P_3 " " " " " $x_3\, y_3$ " " 0 u. 0

$$\Delta P_1 P_2 P_3 = \tfrac{1}{2}(x_1' y_2' - x_2' y_1')$$
$$= \tfrac{1}{2}\left[(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)\right]$$
$$= \tfrac{1}{2}(x_1 y_2 - x_3 y_2 - x_1 y_3 + \cancel{x_3 y_3} - x_2 y_1 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - \cancel{x_3 y_3})$$
$$\Delta = \tfrac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_2 y_3 - x_3 y_2 + x_3 y_1 - x_1 y_3)$$

$$= \tfrac{1}{2}\left\{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix}\right\}$$

In dieser Formel braucht man sich bloß die ersten zwei Glieder zu merken, da sich die andern sofort durch cyclische Vertauschung der Indices aus den ersten ergeben.

Nehmen wir an, die drei Punkte liegen alle in einer Geraden, so verschwindet natürlich der Flächeninhalt des Δs und wir erhalten die Gleichung der geraden Linie:

$$x(y_1 - y_2) - y(x_1 - x_2) + x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0.$$

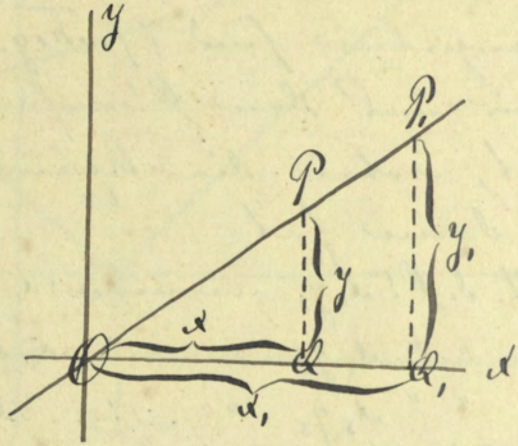

Fig. 15.

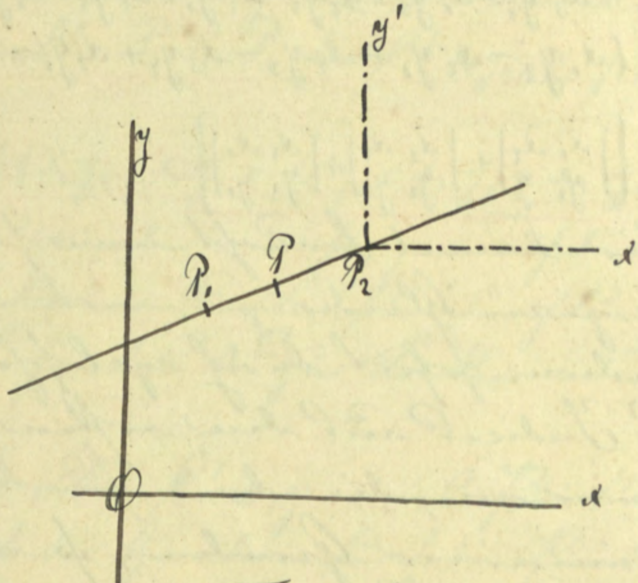

Fig. 16.

Nehmen wir nun an, der Punkt P_2 falle in den Anfangspunkt, dann geht unsere Gleichung über in:

$$xy_1 - yx_1 = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{y}{x} = \frac{y_1}{x_1}$$

was ja auch schon aus Fig. 15 zu ersehen ist.

Wir können von dieser Gleichung ausgehend, wiederum die allgemeine Gleichung der Geraden bestimmen (s. Fig. 14.)

Angenommen die Punkte $P P_1 P_2$ liegen in einer Geraden. Nehmen wir jetzt eine C!=verschiebung nach P_2 vor, so haben P u. P_1 im neuen System die C! $x' = x - x_2$; $y' = y - y_2$ und $x_1' = x_1 - x_2$; $y_1' = y_1 - y_2$. Im neuen System muß aber zwischen P_1 u. P folgende Beziehung stattfinden:

$$x'y_1' - x_1'y' = 0$$

Setzen wir die andern Werte ein, so erhalten wir:

$$(x - x_2)(y_1 - y_2) - (x_1 - x_2)(y - y_2) = 0$$

Lösen wir hier die Klammern auf, so erhalten wir wieder die bekannte Gleichung der geraden Linie.

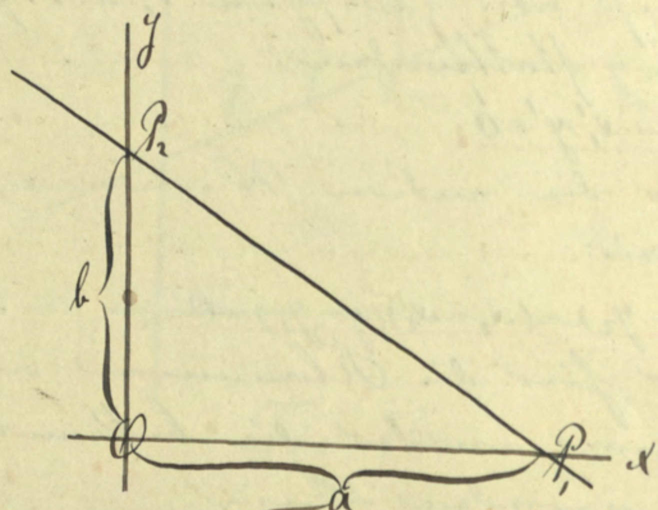

Fig. 17.

Bleiben wir einstweilen noch beim speciellen Falle, daß P_2 mit dem Anfangspunkte zusammenfällt, dann ist:

$$\underline{xy_1 - x_1y = 0}$$

Dies ist eine sogenannte homogene Gleichung zwischen x und y (ohne Konstante).

Haben wir eine Gleichung von der Form $\underline{Ax + By = 0}$, so stellt diese ebenfalls eine gerade Linie dar, die durch den Anfangspunkt geht, denn setzen wir: $\underline{x_1 = -\lambda B}$ u. $\underline{y_1 = \lambda A}$, so erhalten wir $\underline{x\cancel{\lambda} A + y\cancel{\lambda} B = 0.}$ Ebenso umgekehrt $\underline{A = \frac{y_1}{\lambda}}$ und $\underline{B = -\frac{x_1}{\lambda}}$, dann ist $\underline{\frac{xy_1}{\cancel{\lambda}} - \frac{x_1y}{\cancel{\lambda}} = 0}$. Die beiden Gleichungen sind also vollkommen identisch. Die Gleichung $Ax + By = 0$, stellt also auch eine gerade Linie dar, die durch den Anfangspunkt geht. Der Punkt x_1y_1 ist natürlich noch nicht sicher bestimmt, solange λ noch als unbekannte Größe dasteht.

Betrachten wir jetzt einen zweiten Specialfall: (s. Fig. 17).

P_1 liege auf der x-Axe und schneide von ihr das Stück a ab, P_2 liege auf der y-Axe und schneide von ihr das Stück b

Satz 4a. Die C! eines Punktes $x\,y$ einer geraden Linie, welche von den C!-Axen die Stücke a u. b abschneidet, genügen der Gleichung:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Satz 5. Eine lineare Gleichung zwischen den rechtwinkligen C! $x\,y$ eines Punktes P $Ax + By = C$ stellt eine gerade Linie dar, welche auf den C!-Axen die Abschnitte $\frac{C}{A}$ und $\frac{C}{B}$ macht. Ist $C = 0$, geht die gerade Linie also durch den Anfangspunkt, so geht sie durch alle Punkte mit den C! $-\lambda B$ und $+\lambda A$, wo λ eine beliebige Größe ist.

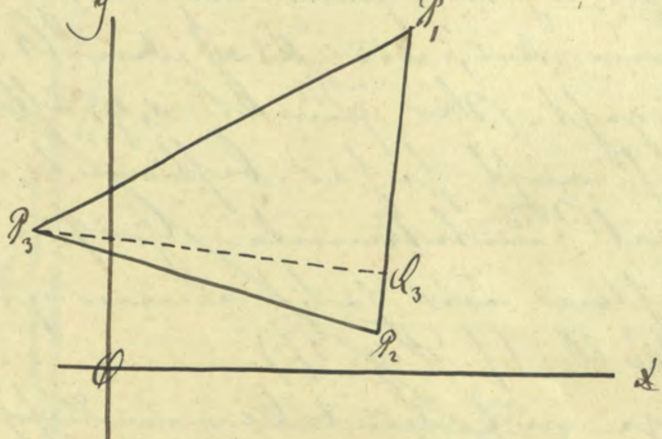

Fig. 18.

ab, dann ist:

$x_1 = a;\ y_1 = 0$ und $x_2 = 0;\ y_2 = b$

Demnach geht unsere allgemeine Gleichung über in:

$$-xb - ya + ab = 0.$$

Dividieren wir durch ab, so erhalten wir:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Haben wir eine Gleichung von der Form: $Ax + By = C$, so kann man sie stets auf die obige Formel zurückführen. Dividieren wir durch C, so erhalten wir: $\frac{Ax}{C} + \frac{By}{C} = 1$ oder $\frac{x}{C/A} + \frac{y}{C/B} = 1$, folglich macht die Gerade auf den C.-axen die Abschnitte C/A und C/B.

Die Entfernung eines Punktes von einer Geraden.

Coll. 6 $\frac{30}{1}$ 92

(s. Fig. 18.) Der Flächeninhalt des Dreiecks $P_1P_2P_3$

$$= \tfrac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3)$$

Nun stellen wir uns die Aufgabe, die Länge des Lotes von P_3 auf P_1P_2 zu berechnen.

$\Delta = \frac{1}{2} P_3Q_3 \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$. Combinieren wir diese Gleichung mit der obigen, so erhalten wir:

$$P_3Q_3 = \frac{x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3}{\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}}.$$

Satz 6. Die Entfernung eines Punktes $x'y'$ von einer geraden $Ax + By = C$ ist:

$$e = \frac{C - Ax' - By'}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}},$$

wo das Vorzeichen so zu wählen ist, daß e positiv resultiert.

Und Vorzeichen muß ein verschiedenes sein, wenn der P! auf der einen oder andern Seite der geraden Linie liegt.

Nehmen wir jetzt ganz allgemein die Gerade $Ax + By = C$ und den Punkt P mit den C! x' u y', dann ist, wenn P_1 u P_2 die Durchschnittspunkte mit den C!-axen sind, $x_1 = \frac{C}{A}$, $y_1 = 0$; $x_2 = 0$, $y_2 = \frac{C}{B}$; $x_3 = x'$, $y_3 = y'$. Setzen wir diese Werte in die oben gefundene Gleichung ein, so erhalten wir: die Entfernung:

$$e = \frac{\frac{C^2}{AB} - \frac{x'C}{B} - \frac{y'C}{A}}{\sqrt{\frac{C^2}{A^2} + \frac{C^2}{B^2}}}$$

durch C dividiert: $e = \dfrac{\frac{C}{AB} - \frac{x'}{B} - \frac{y'}{A}}{\sqrt{\frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2}}}$

$$e = \frac{C - Ax' - By'}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Wollen wir die absolute Entfernung des Anfangspunktes von der Geraden finden, so haben wir nur x' u $y' = 0$ zu setzen und erhalten dann: $e = \dfrac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$

Wollen wir aber die Entfernung des Punktes $P(x'y')$ von der Geraden $Ax + By = 0$ finden, so haben wir zu setzen $x_1 = 0$, $y_1 = 0$; $x_2 = -B$, $y_2 = A$, (λ können wir $= 1$ setzen); $x_3 = x'$, $y_3 = y'$, dann erhalten wir $e = \dfrac{-By' - Ax'}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$, also genau die vorige

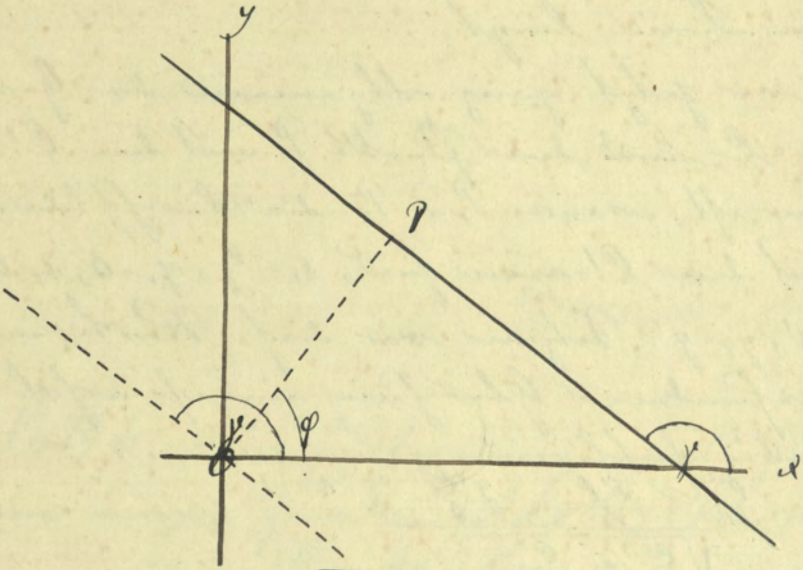

Fig. 19.

Satz 7. Der Winkel γ, welchen die positive x-Achse beschreiben muß, um der Geraden $Ax + By = C$ parallel zu sein ist bestimmt durch:

$$\operatorname{tg} \gamma = -\frac{A}{B}.$$

Formel, nur daß $C = 0$ ist.

Ehe wir die Gleichung des Lotes finden, müssen wir uns noch mit einigen Winkelrelationen der geraden Linien beschäftigen.

Eine gerade Linie sei durch ihre Gleichung $Ax + By = C$ gegeben. Wollen wir die Gleichung in Polar-C! ausgedrückt haben, so brauchen wir nur die Substitution vorzunehmen $x = r\cos\varphi$ u. $y = r\sin\varphi$ und wir erhalten:
$A r\cos\varphi + B r\sin\varphi = C$ oder umgeformt:

$$r = \frac{C}{A\cos\varphi + B\sin\varphi}.$$

Die Gleichung kann uns dazu führen, den Winkel zu berechnen, welchen die Gerade mit der Abscissenaxe bildet (s. Fig. 19). Bezeichnen wir diesen Winkel mit γ, so ist es klar, daß auch die $\parallel$ durch den Anfangspunkt mit der x-Axe den Winkel γ bildet. Ihre Gleichung lautet: $r = \frac{C}{A\cos\gamma + B\sin\gamma}$; setzen wir $r = \infty$, so muß der Nenner dieses Bruches $= 0$ sein, mithin: $A\cos\gamma + B\sin\gamma = 0$, folglich:

$$\operatorname{tg}\gamma = -\frac{A}{B}$$

Wir können jetzt auch eine neue Form der geraden Linie herleiten:
$Ax + By = C$; $y = -\frac{A}{B}x + \frac{C}{B}$; $\frac{C}{B}$ ist aber $= b$

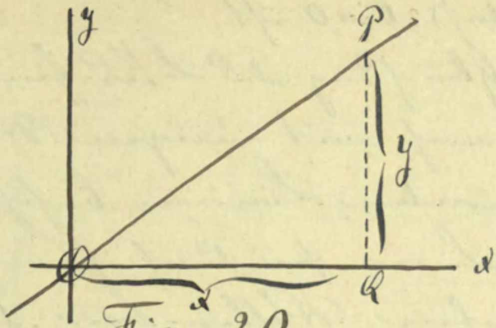

Fig. 20.

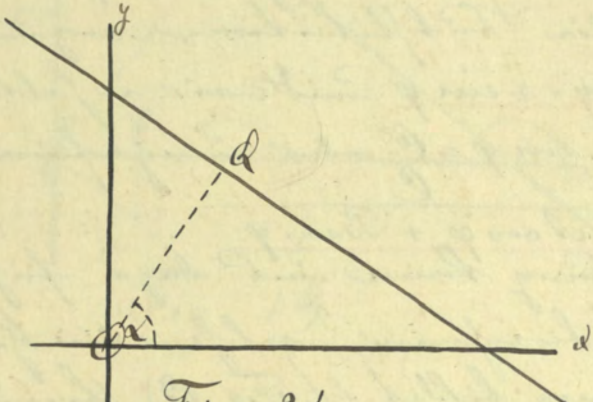

Fig. 21.

Satz 8. Die Amplitude α des Lotes p vom Anfangspunkte auf die Gerade $Ax + By = C$ ist bestimmt durch:

$$\cos\alpha = \pm \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \quad \text{und} \quad \sin\alpha = \pm \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

wo das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem C positiv oder negativ ist.

folgl. ist: $\underline{y = \operatorname{tg}\gamma\, x + b}$

Geht die Gerade durch den Anfangspunkt, dann ist $b = 0$ und wir erhalten:

$$\underline{\operatorname{tg}\gamma = \frac{y}{x}} \text{ (s. Fig. 20.)}$$

Aus der Gleichung der Geraden in Polarcoordinaten können wir zweitens den Winkel bestimmen, welchen das Lot vom Anfangspunkt mit der x-Achse bildet (s. Fig. 21.).

$$r = \underline{\frac{C}{A\cos\alpha + B\sin\alpha}} = OQ = \underline{p}.$$

Ferner $\underline{p = \frac{\pm C}{\sqrt{A^2+B^2}}}$ (Satz b). Zur Bestimmung von α erhalten wir daraus die Gleichung:

$$\underline{A\cos\alpha + B\sin\alpha = \sqrt{A^2+B^2}}$$

daraus folgt: $\underline{\cos\alpha = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}}$ und $\underline{\sin\alpha = \pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}}$.

Ist C positiv, so gilt das obere, ist C negativ, so gilt das untere Vorzeichen, so daß α ganz genau bestimmt ist.

Wenn wir die Gleichung $Ax + By = C$ durch Coll 7 $\frac{3}{II}$ 92
$\sqrt{A^2+B^2}$ dividieren, so erhalten wir:

$$\pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x \pm \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y = \pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}, \text{ daraus folgt}$$

$\underline{x\cos\alpha + y\sin\alpha = p}$ (<u>Hessesche Normalform</u>)

Wir haben bis jetzt drei Formen der geraden Linie kennen gelernt:

$$\underline{1.\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.}$$

2. $y = x \,\mathrm{tg}\, \gamma + b$

3. $x \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha = p.$

Diese 3te Form ist besonders bequem, weil sie uns sofort die Entfernung eines P.t von der Linie angiebt, denn

$$e = \frac{C - Ax' - By'}{\sqrt{A^2 + B^2}} = p - x'\cos\alpha - y'\sin\alpha$$

Wir können jetzt leicht die Gleichung des Lotes ableiten.

Die Gleichung der geraden Linie sei wieder: $Ax + By = C$. Die Amplitude des Lotes ist bestimmt durch $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{B}{A}$. Wenn wir annehmen, das Lot habe die Gleichung $A'x + B'y = C'$, so ist auch $\mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{A'}{B'}$, folgl: $\frac{B}{A} = -\frac{A'}{B'}$.

Setzen wir jetzt in die Gleichung des Lotes $\frac{A'}{B'}x + y = \frac{C'}{B'}$, statt $\frac{A'}{B'} = -\frac{B}{A}$, so geht dieselbe über in:

$$-\frac{B}{A}x + y = \frac{C'}{B'}$$

Um jetzt noch $\frac{C'}{B'}$ zu bestimmen, nehmen wir an, daß Lot solle durch den Punkt $x'y'$ gehen, dann ist: $-\frac{B}{A}x' + y' = \frac{C'}{B'}$.

Setzen wir diesen Wert von $\frac{C'}{B'}$ in die vorige Gleichung ein, so erhalten wir die Gleichung des Lotes: $-\frac{B}{A}x + y = -\frac{B}{A}x' + y'$ oder:

Satz 9. Die Gleichung des Lotes vom Punkte $x'y'$ auf die Gerade $Ax+By=C$ ist:

$$-B(x-x')+A(y-y')=0$$

und die C! des Fußpunktes sind:

$$x=\frac{AC+B^2x'-ABy'}{A^2+B^2} \quad \text{und} \quad y=\frac{BC-ACx'+A^2y'}{A^2+B^2}$$

Satz 10. Der Schnittpunkt der beiden geraden Linien $Ax+By=C$ und $A'x+B'y=C'$ hat die C!:

$$x=\frac{CB'-BC'}{AB'-BA'} \quad \text{und} \quad y=\frac{AC'-CA'}{AB'-BA'}.$$

$$-Bx + Ay = -Bx' + Ay'$$

oder in einer andern Form geschrieben

$$-B(x-x') + A(y-y') = 0$$

Zusammenstellung von 2 Geraden.

Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, den Schnittpunkt der beiden Geraden: $Ax + By = C$ und $A'x + B'y = C'$ zu finden.

Da die C! des Schnittpunktes den beiden Gleichungen genügen müssen, so brauchen wir nur aus den obigen Gleichungen die Werte für x u. y zu berechnen.

$$\begin{array}{l|l|l} Ax + By = C & \times B' & \times A' \\ A'x + B'y = C' & \times B & \times A \end{array}$$

$$x(AB' - BA') = CB' - BC'$$

$$x = \frac{CB' - BC'}{AB' - BA'} = \begin{vmatrix} C & B \\ C' & B' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}$$

$$y(AB' - BA') = AC' - CA'$$

$$y = \frac{AC' - CA'}{AB' - BA'} = \begin{vmatrix} A & C \\ A' & C' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}$$

Jetzt können wir leicht die Bedingung dafür festsetzen, daß 3 Gerade durch denselben Punkt gehen. Die 3te Gerade habe die Gleichung $A''x + B''y = C''$. Wir finden nun zunächst die C! des Schnittpunktes der

Satz 10a. Sollen die 3 Geraden $Ax+By=C$, $A'x+B'y=C'$ und $A''x+B''y=C''$ durch einen Punkt gehen, so ist hierfür die notwendige und hinreichende Bedingung, daß:

$$A''(BC'-CB')+B''(CA'-AC')+C''(AB'-BA')=0.$$

Satz 11. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die beiden Geraden $Ax+By=C$ und $A'x+B'y=C'$ einander parallel sind, ist die, daß:

$$AB'-BA'=0.$$

Satz 11a. Die Gleichungen von 2 parallelen geraden Linien können stets auf eine solche Form gebracht werden, daß sie sich nur durch das constante Glied unterscheiden und umgekehrt.

beiden ersten Geraden. Da nun alle 3 Linien durch denselben P! gehen sollen, so müssen auch die C! des Schnittpunktes der Gleichung der dritten Geraden genügen. Folglich ist:

$$A''\,\frac{CB'-BC'}{AB'-BA'} + B''\,\frac{AC'-CA'}{AB'-BA'} = C'' \text{ oder}$$

$$A''(BC'-CB') + B''(CA'-AC') + C''(AB'-BA') = 0$$

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} = 0.$$

Wenn in den Formeln $x = \frac{CB'-BC'}{AB'-BA'}$ und $y = \frac{AC'-CA'}{AB'-BA'}$ $AB'-BA'=0$ wird, so werden x u. y ∞ groß, der Schnittpunkt liegt also in der Unendlichkeit und die beiden Geraden sind einander parallel.

Aus $AB'-BA'=0$ erhält man $\frac{A}{B} = \frac{A'}{B'}$. Setzt man setzt in die Gleichung $\frac{A}{B}x + y = \frac{C}{B}$ statt $\frac{A}{B}$ $\frac{A'}{B'}$ ein, so erhält man: $\frac{A'}{B'}x + y = \frac{C}{B}$ und hieraus: $A'x + B'y = \frac{CB'}{B}$. Die beiden $\parallel$ Linien $Ax+By=C$ u. $A'x+B'y=C'$ unterscheiden sich also nur durch das constante Glied.

Wird nicht nur $AB'-BA'$ sondern auch $CB'-BC'=0$, hat man also die Gleichungen $\frac{A}{B} = \frac{A'}{B'}$ und $\frac{C}{B} = \frac{C'}{B'}$ u. setzt in die Gleichung $\frac{A}{B}x + y = \frac{C}{B}$ diese Werte ein, so erhält man $\frac{A'}{B'}x + y = \frac{C'}{B'}$ oder $A'x + B'y = C'$,

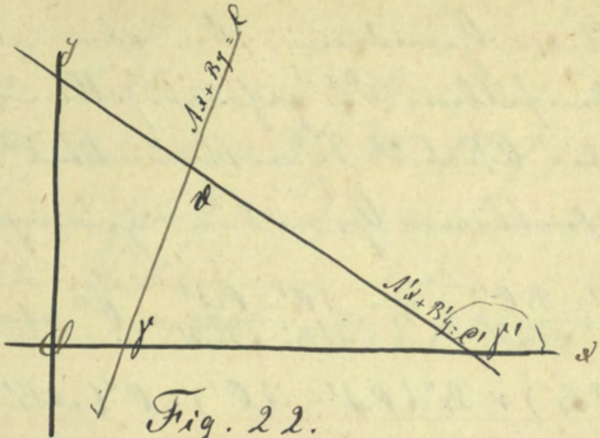

Fig. 22.

Satz 12. Der Winkel, welchen die Gerade $Ax+By=C$ mit der Geraden $A'x+B'y=C'$ bildet, ist bestimmt durch:

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{AB'-BA'}{AA'+BB'}$$

Satz 13. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die beiden Geraden $Ax+By=C$ und $A'x+B'y=C'$ senkrecht auf einander stehen, ist die, daß:

$$AA'+BB'=0.$$

also sind in diesem Falle die beiden Gleichungen identisch, die beiden Geraden fallen also zusammen.

Wir wollen jetzt den Winkel ϑ berechnen, welchen die beiden Geraden $Ax+By=C$ und $A'x+B'y=C'$ mit einander bilden. (s. Fig. 22.).

$$\underline{tg\,\vartheta = tg(\gamma'-\gamma)} = \frac{tg\gamma' - tg\gamma}{1+tg\gamma'\cdot tg\gamma}$$

Setzen wir jetzt $tg\gamma' = -\frac{A'}{B'}$ und $tg\gamma = -\frac{A}{B}$, so geht unsere Gleichung über in:

$$tg\,\vartheta = \frac{-\frac{A'}{B'}+\frac{A}{B}}{1+\frac{AA'}{BB'}}.$$

Multipliciren wir jetzt Zähler und Nenner mit BB', so erhalten wir:

$$\underline{tg\,\vartheta = \frac{AB'-BA'}{AA'+BB'} = \begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A & -B \\ B' & A' \end{vmatrix}}.$$

Wenn nun die beiden Geraden <u>senkrecht</u> auf einander stehen sollen, so ist $\vartheta = 90^0$, also $tg\,\vartheta = \infty$, wenn aber $tg\,\vartheta = \infty$ ist, so muß auch $\underline{AA'+BB'=0}$ sein. Coll. 8 $\frac{4}{II}$ 92

Hieran knüpfen wir jetzt die Ableitung einiger Sätze, die in der Anwendung von großer Bedeutung sind.

Wenn wir die C! der Punkte P_1 u. P_2 kennen, so vermögen wir P zu bestimmen, so=

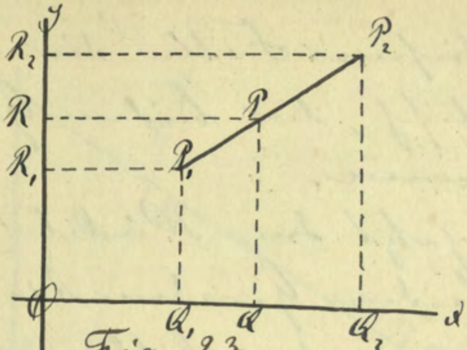

Fig. 23.

Satz 14. Jeder Punkt P einer Geraden durch die $P_1 P_2$, welcher die Strecke P_1P_2 im Verhältnis von $\lambda = \frac{P_1P}{PP_2}$ teilt, hat die C!

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} \quad \text{und} \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$$

Satz 14ª. Der Halbierungspunkt der Strecke P_1P_2 hat die C!

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{und} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

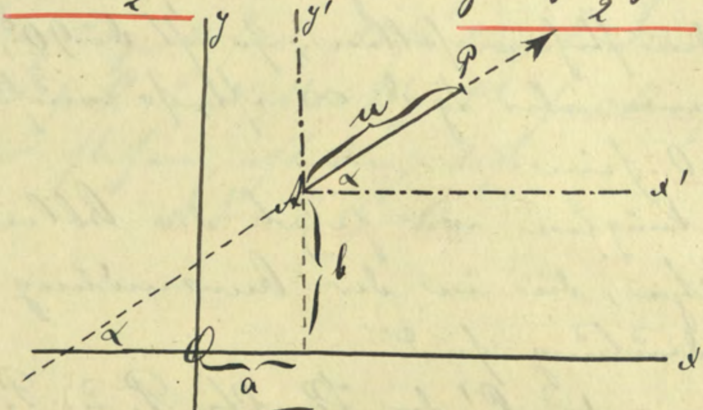

Fig. 24.

bald nur das Verhältnis $\frac{P_1P}{PP_2}$ gegeben ist (s. Fig 23).

$$\frac{P_1P}{PP_2} = \lambda = \frac{Q_1Q}{QQ_2} = \frac{x-x_1}{x_2-x}$$

Wenn wir die Punkte auf die Ordinatenaxe projicieren, so erhalten wir:

$$\lambda = \frac{R_1R}{RR_2} = \frac{y-y_1}{y_2-y}$$

Aus diesen Formeln kann man nun x u. y leicht berechnen.

$$\left.\begin{aligned} \lambda x_2 - \lambda x &= x - x_1 \\ x_1 + \lambda x_2 &= x + \lambda x \end{aligned}\right\} \quad x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda y_2 - \lambda y &= y - y_1 \\ y_1 + \lambda y_2 &= y + \lambda y \end{aligned}\right\} \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}.$$

Wir wollen jetzt die C! des Punktes P festsetzen, der von $A(a,b)$ um u entfernt ist.

Um dieses Ziel zu erreichen, müssen wir zunächst eine C!-verschiebung nach A vornehmen, dann ist: (s. Fig. 24).

$x' = u\cos\alpha$ und $y' = u\sin\alpha$

desgleichen ist aber auch:

$x' = x - a$ und $y' = y - b$

daraus finden wir:

$x = a + u\cos\alpha$ und $y = b + u\sin\alpha$.

Satz 14 b. Jeder Punkt einer Geraden, die durch einen Punkt $A(a,b)$ geht und mit der positiven Abscissenachse den Winkel α bildet, hat die C!

$$x = a + u \cos\alpha \quad \text{und} \quad y = b + u \sin\alpha,$$

wo seine Entfernung u vom Anfangspunkte A der Geraden + oder − zu nehmen ist, je nachdem der Punkt P in der Richtung liegt, welche den Winkel α mißt, oder in der entgegengesetzten.

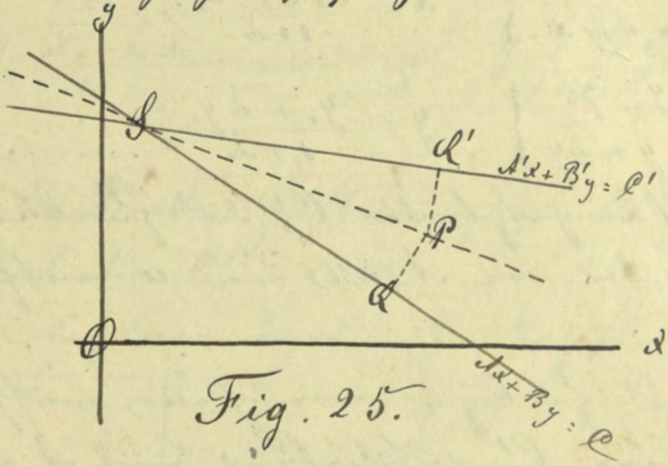

Fig. 25.

Anm.: u kann sowohl positiv als negativ sein.

Aufgabe. Die Gleichung derjenigen Linie zu finden, die durch den Schnittpunkt zweier Geraden geht. (s. Fig. 25.).

Die beiden Geraden seien durch ihre Gleichungen $Ax+By+C$ und $A'x+B'y=C'$ gegeben.

Nehmen wir an, SP sei die gesuchte Linie, dann schlagen wir von S aus eine Strecke von der Länge 1 ab (SP) und fällen von P aus Senkrechte auf die gegebenen Linien PQ u. PQ_1, dann ist:

$$\frac{\sin PSQ}{\sin PSQ'} = \frac{PQ}{PQ'} = \lambda$$

Nun haben wir nur noch die Aufgabe zu lösen, den Ort desjenigen Punktes zu bestimmen, für welche das Verhältnis der Entfernungen von den beiden Geraden gegeben ist.

$$PQ = \frac{C-Ax-By}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}; \qquad PQ' = \frac{C'-A'x-B'y}{\pm\sqrt{A'^2+B'^2}}.$$

$$\frac{PQ}{PQ'} = \lambda = \frac{C-Ax-By}{C'-A'x-B'y}(\pm)\sqrt{\frac{A'^2+B'^2}{A^2+B^2}}$$

wo das obere oder untere Vorzeichen zu wählen ist, je nachdem $\frac{C}{C'}$ positiv oder negativ ist.

Aus der vorigen Gleichung folgt:

Satz 15. Die Gleichung einer Geraden, die durch den Schnittpunkt der beiden Geraden $Ax+By=C$ und $A'x+B'y=C'$ hindurchgeht, ist:

$$(A-\mu A')x+(B-\mu B')y=C-\mu C'$$

wo $\delta = \pm\mu\sqrt{\frac{A'^2+B'^2}{A^2+B^2}}$ das Verhältnis der Entfernungen irgend eines Punktes der Geraden von den beiden gegebenen bedeutet. Soll also die Gerade den Winkel der beiden gegebenen Geraden halbieren, so muß $\delta = 1$ sein.

Coll. $9\frac{5}{II}92.$

$$\frac{C - Ax - By}{C' - A'x - B'y} = \pm\sqrt{\frac{A^2+B^2}{A'^2+B'^2}}\,\lambda = \mu$$

$$C - Ax - By = \mu C' - \mu A'x - \mu B'y$$

$$(A - \mu A')x + (B - \mu B') = C - \mu C'$$

Gehen wir von der Hesseschen Normalform aus, so erhalten wir für die Linie, die durch den Schnittpunkt zweier Geraden geht, die Gleichung:

$$(\cos\alpha - \mu\cos\alpha')x + (\sin\alpha - \mu\sin\alpha')y = p - \mu p'$$

Um die Gleichung der Halbierungslinie des Winkels, den zwei Gerade mit einander bilden, zu finden, brauchen wir nur in unserer Formel $\lambda = 1$, also $\mu = \pm\sqrt{\frac{A^2+B^2}{A'^2+B'^2}}$ zu setzen.

Die Gleichung der Halbierungslinie nach der Hesseschen Normalform würde die Gestalt haben:

$$x(\cos\alpha \pm \cos\alpha') + y(\sin\alpha \pm \sin\alpha') = p \pm p'$$

denn in diesem Falle wäre $\mu = \pm\sqrt{\frac{A^2+B^2}{A'^2+B'^2}}$

$$= \pm\sqrt{\frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha' + \sin^2\alpha'}} = \pm\sqrt{\frac{1}{1}} = \pm 1.$$

Wir können leicht beweisen, daß die beiden Halbierungslinien senkrecht auf einander stehen: $AA' + BB'$ muß $= 0$ sein, also:

$$(\cos\alpha + \cos\alpha')(\cos\alpha - \cos\alpha') + (\sin\alpha + \sin\alpha')(\sin\alpha - \sin\alpha') = 0$$

$$= \cos^2\alpha - \cos^2\alpha' + \sin^2\alpha - \sin^2\alpha' = 1 - 1 = 0.$$

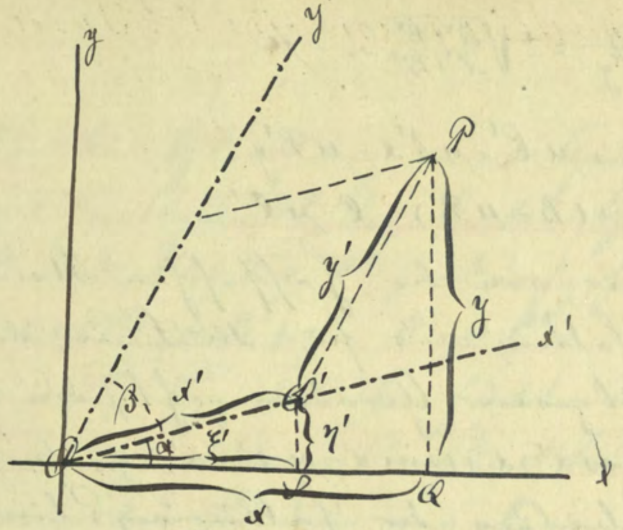

Fig. 26.

Satz 16. Die C! $x'y'$ in einem schiefwinkligen Systeme dessen positive Axen mit einem gegebenen rechtwinkeligen Systeme die Amplituden α und β haben, werden durch die C! $x\,y$ dieses Systems ausgedrückt vermittelst der Formeln:

$$x' = \frac{x \sin\beta - y \cos\beta}{\sin(\beta - \alpha)} \quad \text{und} \quad y' = \frac{-x \sin\alpha + y \cos\alpha}{\sin(\beta - \alpha)}$$

und umgekehrt ist:

$$x = x'\cos\alpha + y'\cos\beta \quad \text{und} \quad y = x'\sin\alpha + y'\sin\beta.$$

Veränderungen des C! Systems.

Aufgabe. Wie werden sich die C! eines Punktes verändern, wenn man die Axen des C! Systems um den Anfangspunkt dreht. (s. Fig. 26.)

P habe die C! $OQ = x$ und $QP = y$ und im neuen Systeme $OQ' = x'$ und $PQ' = y'$

Q' habe die C! $OS = \xi'$ und $SQ_x' = \eta'$ dann ist:

$\xi' = x' \cos\alpha$ und $\eta' = x' \sin\alpha$

PQ' hat, weil durch den Punkt P gehend, die Gleichung

$y = x \, tg\,\beta + b$ und weil PQ' durch Q' geht besteht die Gl!

$$\eta' = \xi' \, tg\,\beta + b$$

$y - \eta' = (x - \xi')\, tg\,\beta$ also, wenn man $\xi' = x'\cos\alpha$ und $\eta' = x' \sin\alpha$ setzt:

$$y - x'\sin\alpha = (x - x'\cos\alpha)\, tg\,\beta$$

$$y\cos\beta - x'\sin\alpha\cos\beta = x\sin\beta - x'\cos\alpha\sin\beta$$

$$x'(\cos\alpha . \sin\beta - \sin\alpha . \cos\beta) = x\sin\beta - y\cos\beta$$

$$x' = \frac{x\sin\beta - y\cos\beta}{\sin(\beta - \alpha)}$$

Ebenso findet man:

$$y' = \frac{-x\sin\alpha + y\cos\alpha}{\sin(\beta - \alpha)}$$

Um die C! des alten Systems wiederum durch die des neuen auszudrücken, multiplicir-

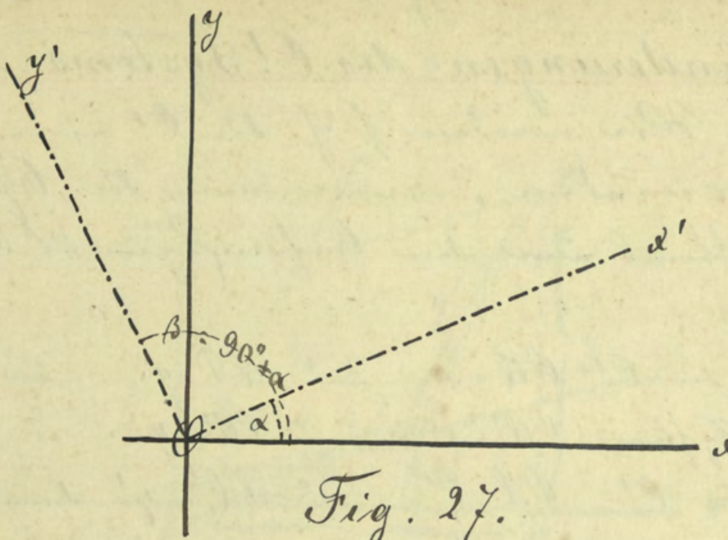

Fig. 27.

Satz 16a. Dreht man die Axen eines gegebenen rechtwinkligen Systems um den Winkel α, so hat der Punkt, dessen C! im alten Systeme x u. y sind, im neuen Systeme die C!:

$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha$$

$$y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha$$

woraus folgt:

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha$$

$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$$

wenn wir zuerst die obere Gleichung mit $\cos\alpha$ und die untere mit $\cos\beta$ und addiren, und hierauf die obere mit $\sin\alpha$ und die untere mit $\sin\beta$ und addiren wiederum. Dann erhalten wir:

$$\underline{x'\cos\alpha + y'\cos\beta} = \frac{x(\sin\beta\cos\alpha - \sin\alpha.\cos\beta)}{\sin(\beta-\alpha)} = \underline{x}$$

$$\underline{x'\sin\alpha + y'\sin\beta} = \frac{y(-\cos\beta\sin\alpha + \sin\beta.\cos\alpha)}{\sin(\beta-\alpha)} = \underline{y}$$

Von besonderer Wichtigkeit ist nun der Fall, daß das neue System auch ein rechtwinkliges ist, also:

$$\underline{\beta = 90^\circ + \alpha} \quad (\text{s. Fig. } 27),$$

dann ist:

$$\underline{x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha}$$
$$\underline{y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha}$$

und:

$$\underline{x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha}$$
$$\underline{y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha}$$

Diese zweite Gruppe wird sogar häufiger gebraucht, als die erste.

Wollen wir uns jetzt die Aufgabe die C! eines Punktes zu berechnen in einem Systeme, das aus dem alten durch Verschiebung und Drehung zugleich entstanden ist (s. F. 28).

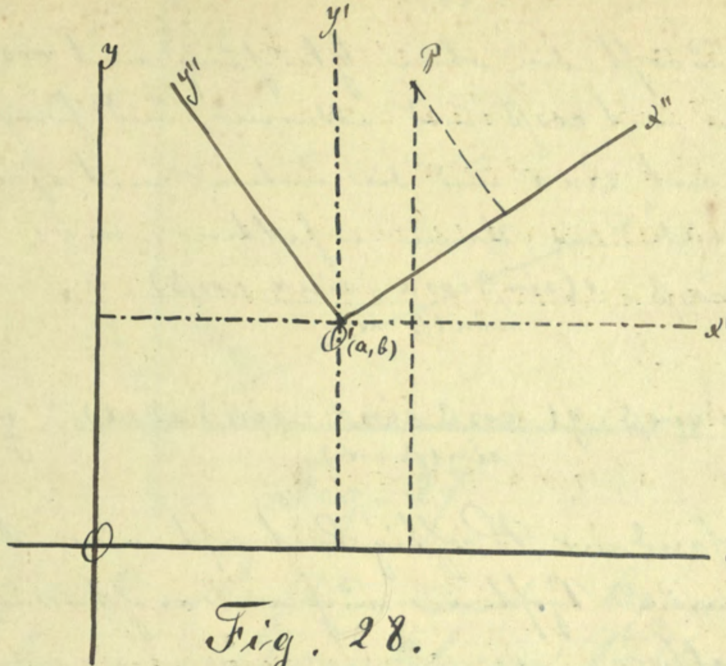

Fig. 28.

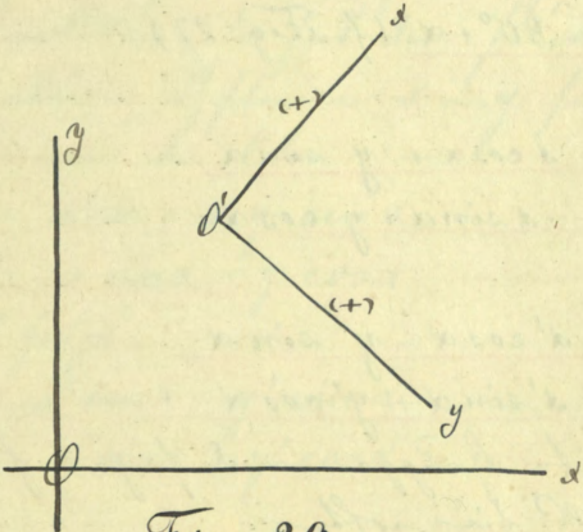

Fig. 29.

$x' = x - a \qquad y' = y - b$

$x'' = x'\cos\alpha + y'\sin\alpha$

$y'' = -x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$

$$\underline{x'' = (x-a)\cos\alpha + (y-b)\sin\alpha}$$

$$\underline{y'' = -(x-a)\sin\alpha + (y-b)\cos\alpha}$$

und umgekehrt,

$$\underline{x = a + x''\cos\alpha - y''\sin\alpha}$$

$$\underline{y = b + x''\sin\alpha + y''\cos\alpha}$$

Streng genommen haben wir noch nicht das allgemeinste System betrachtet. Coll. 10 $\frac{6}{II}$ 92

Es kann z. B. der Fall eintreten, daß niemals durch Verschiebung und Drehung die positive x-Axe mit der positiven x'-Axe und zugleich auch die positive y-Axe mit der positiven y'-Axe zur Deckung gebracht werden können, sondern es muß noch eine Umklappung vorgenommen werden. (s. Fig. 29.)

Analytisch ist diese Umklappung sehr leicht vorzunehmen. Wir brauchen nur $\underline{\beta = 270^\circ + \alpha}$ zu setzen und erhalten dann für's neue System die folgenden Formeln:

$$\underline{x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha}$$

$$\underline{y' = x\sin\alpha - y\cos\alpha}$$

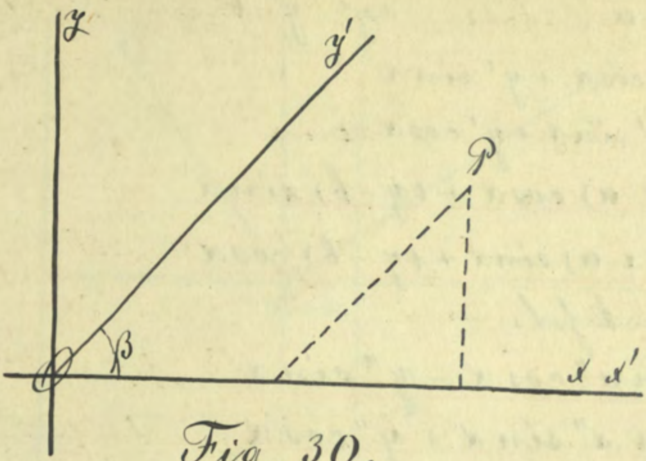

Fig. 30.

Satz 16b. Ein Punkt P., der in einem gegebenen rechtwinkligen Systeme die C! $x\,y$ hat, hat in einem schiefwinkligen, dessen x'-Axe mit der x-Axe zusammenfällt und dessen y-Axe mit derselben den Winkel β bildet, die C!:

$$x' = x - y\,\mathrm{ctg}\,\beta \quad \text{u.} \quad y' = \frac{y}{\sin\beta}$$

oder umgekehrt,

$$x = x' + y'\cos\beta \quad \text{und} \quad y = y'\sin\beta.$$

Umgekehrt erhalten wir genau dieselben Formeln:

$$x = x' \cos\alpha + y' \sin\alpha$$
$$y = x' \sin\alpha - y' \cos\alpha$$

Anm. Die Anwendung dieser Formeln findet sehr selten statt.

Aufgabe. Die C. eines Punktes P in einem Systeme zu berechnen dessen x'-Axe mit der alten x-Axe zusammenfällt, dessen y'-Axe aber mit dieser den Winkel β bildet (s. Fig. 30.).

Die Berechnung ist sehr einfach; wir brauchen nur in den Formeln

$$x' = \frac{x \sin\beta - y \cos\beta}{\sin(\beta - \alpha)} \text{ u. } y' = \frac{-x \sin\alpha + y \cos\alpha}{\sin(\beta - \alpha)}$$

$\alpha = 0$ zu setzen, so erhalten wir:

$$x' = x - y \operatorname{ctg}\beta \qquad x = x' + y' \cos\beta$$
$$y' = \frac{y}{\sin\beta} \qquad y = y' \sin\beta$$

Wir wollen jetzt einige Formeln des alten Systems in das neue übertragen.

I. $$\overline{P_1P_2}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$
$$= [(x_2' - x_1') + (y_2' - y_1')\cos\beta]^2 + (y_2' - y_1')^2 \sin^2\beta$$
$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 2(x_2' - x_1')(y_2' - y_1')\cos\beta.$$

II. $2\triangle OP_1P_2 = x_1y_2 - x_2y_1 = (x_1'+y_1'\cos\beta)\,y_2'\sin\beta - (x_2'+y_2'\cos\beta)\,y_1'\sin\beta$
$= (x_1'y_2' - x_2'y_1')\sin\beta$

III $2\triangle P_1P_2P_3 = (x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3)$
$= (x_1'y_2' - x_2'y_1' + x_2'y_3' - x_3'y_2' + x_3'y_1' - x_1'y_3')\sin\beta$

Weniger vorteilhafte Formeln erhalten wir bei den Winkelbestimmungen.

Die krummen Linien.

Die erste der krummen Linien, die wir betrachten wollen, ist der Kreis. Die Gleichung des Kreises mit dem Mittelpunkt (a, b) und dem Radius R haben wir schon früher kennen gelernt. Sie lautet:

$$(x-a)^2+(y-b)^2 = R^2$$

Diese Gleichung können wir auch in folgender Form schreiben:

$$x^2+a^2-2ax+y^2+b^2-2by-R^2=0$$

Vergleichen wir dieselbe mit der allgemeinen Gleichung zweiten Grades:

$$Ax^2+By^2+2Dx+2Ey+F=0$$

so finden wir daß sie mit dieser identisch ist, wenn wir setzen:

$A=1$, $B=1$, $D=-a$, $E=-b$, $F=a^2+b^2-R^2$.

Damit die zweite Gleichung einen Kreis darstelle, ist es nicht gerade notwendig, daß A u. B

Satz 17. Die Gleichung: $Ax^2 + By^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ stellt, wenn $B = A$, einen Kreis dar, dessen Mittelpunkt die Cd. $-\frac{D}{A}$ u. $-\frac{E}{A}$ hat u. dessen Radius

$$R = \frac{1}{A}\sqrt{D^2 + E^2 - AF}$$ ist.

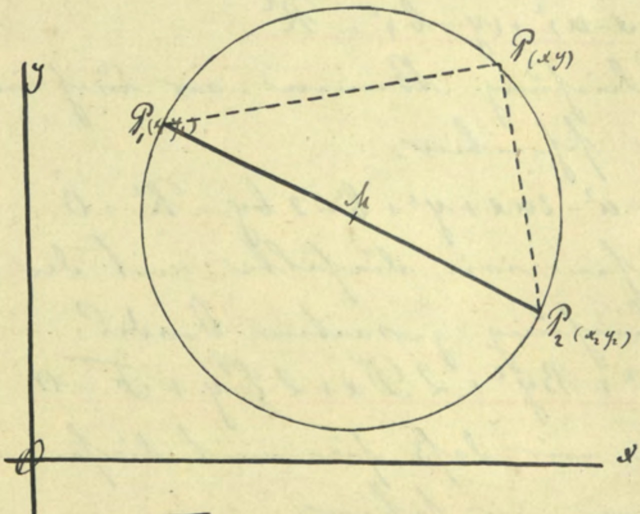

Fig. 31.

gleich 1 sind, wohl aber daß $A=B$ ist, denn im letzteren Falle kann man die Gleichung durch A dividieren und erhält dann bei x^2 und y^2 die Coefficienten 1.

Es fragt sich nun: Wird die Gleichung:
$Ax^2+Ay^2+2Dx+2Ey+F=0$ immer einen Kreis darstellen?

Um dies zu untersuchen, dividieren wir unsere Gleichung durch A, dann erhalten wir:

$$x^2+y^2+2\frac{D}{A}x+2\frac{E}{A}y+\frac{F}{A}=0$$

Hierauf addieren und subtrahieren wir $\left(\frac{D}{A}\right)^2$ und $\left(\frac{E}{A}\right)^2$, dann nimmt die Gleichung die folgende Gestalt an:

$$\left(x+\frac{D}{A}\right)^2+\left(y+\frac{E}{A}\right)^2=\left(\frac{D}{A}\right)^2+\left(\frac{E}{A}\right)^2-\frac{F}{A}.$$

Sie stellt also einen Kreis dar, dessen Mittelpunkt die C' $a=-\frac{D}{A}$ u. $b=-\frac{E}{A}$ hat u. dessen Radius $R=\frac{1}{A}\sqrt{D^2+E^2-AF}$.

Ist $D^2+E^2<AF$, so wird R imaginär. Unsere Gleichung stellt also nur dann einen Kreis dar, wenn $D^2+E^2>AF$ ist.

Aufgabe. Es soll der Ort der Punkte gefunden werden, für den Summe der Quadrate der Entfernungen constant ist. (s. Fig. 31.) Coll. 11 $\frac{10}{II}$ 92

Es soll also: $\overline{PP_1}^2+\overline{PP_2}^2=c^2$ sein, oder:

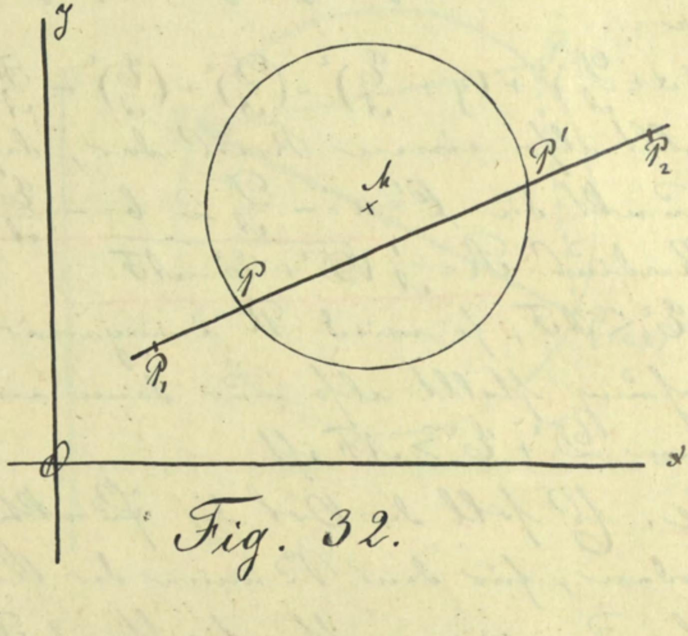

Fig. 32.

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(x-x_2)^2+(y-y_2)^2=c^2$$

$$x^2-2xx_1+x_1^2+y^2-2yy_1+y_1^2+x^2-2xx_2+x_2^2+y^2-2yy_2+y_2^2=c^2$$

Vergleichen wir diese Gleichung mit der allgemeinen Gleichung 2ten Grades, so finden wir:

$A=2$, $B=2$, $D=-x_1-x_2$, $E=-y_1-y_2$, $F=x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2-c^2$

Durch diese Gleichung wird also ein Kreis dargestellt, dessen Mittelpunkt die C! $a=\frac{x_1+x_2}{2}$ und $b=\frac{y_1+y_2}{2}$ hat. Derselbe liegt also auf der Mitte der Strecke P_1P_2. Der Radius dieses Kreises

$$R=\frac{1}{2}\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2-2(x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2-c^2)}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{2c^2+x_1^2+x_2^2+2x_1x_2+y_1^2+y_2^2+2y_1y_2-2x_1^2-2y_1^2-2x_2^2-2y_2^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{2c^2-(x_1-x_2)^2-(y_1-y_2)^2}$$

Aufgabe. Die Schnittpunkte eines Kreises mit einer Geraden, die durch 2 Punkte gegeben ist, analytisch zu bestimmen. (s. Fig. 32).

Die Gleichung des Kreises sei in ihrer allgemeinsten Form gegeben:

$$Ax^2+By^2+2Dx+2Ey+F=0$$

Der Punkt P hat die C! $x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$; $y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$

Diese C! müssen aber auch der Gleichung des Kreises genügen; folglich ist:

$$A\frac{(x_1+\lambda x_2)^2}{(1+\lambda)^2}+B\frac{(y_1+\lambda y_2)^2}{(1+\lambda)^2}+2D\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}+2E\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}+F=0$$

$$A(x_1+\lambda x_2)^2+B(y_1+\lambda y_2)^2+2D(x_1+\lambda x_2)(1+\lambda)+2E(y_1+\lambda y_2)(1+\lambda)$$
$$+F(1+\lambda)^2=0$$

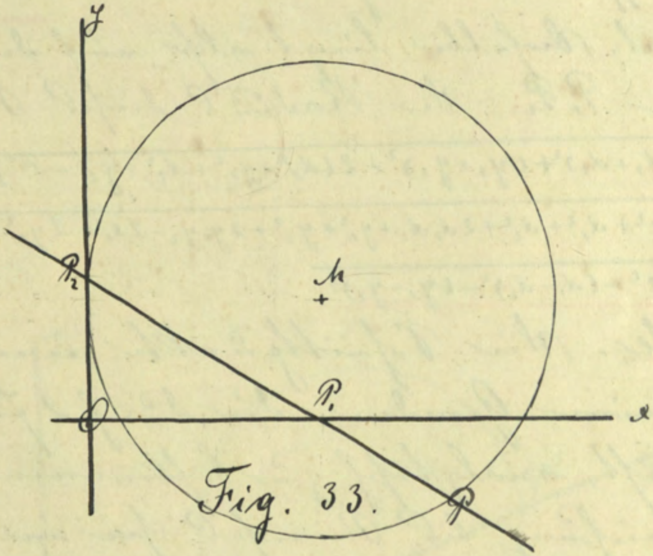

Fig. 33.

Ordnen wir nach Potenzen von λ, so erhalten wir:

$$\lambda^2(Ax_2^2+By_2^2+2Dx_2+2Ey_2+F)+2\lambda(Ax_1x_2+By_1y_2+D(x_1+x_2)+E(y_1+y_2)$$
$$+F)+Ax_1^2+By_1^2+2Dx_1+2Ey_1+F=0$$

Ist die Gerade nicht direkt durch 2 Punkte gegeben, so kann man sich leicht zwei solche construiren.

Beispiel. Man bestimme die Durchschnittspunkte des Kreises $(x-2)^2+(y-1)^2-4=0$ mit der Geraden: $\frac{x}{2}+y=1$. (s. Fig. 33).

Löst man die Klammern in der Gleichung des Kreises auf, so erhält man:

$$x^2+y^2-4x-2y+1=0 \quad \text{folgl. ist:}$$

$$A=B=1,\ D=-2,\ E=-1,\ F=1.$$

Die Durchschnittspunkte der Geraden mit den C.-Axen sind:

P_1 mit den C. $x_1=2$, $y_1=0$; P_2 mit den C. $x_2=0$, $y_2=1$

Wir erhalten also die Gleichung

$$\lambda^2(1-2+1)+2\lambda(-4-1+1)-3=0$$
$$0\lambda^2-8\lambda-3=0$$
$$\lambda=\infty \text{ oder } \lambda=-\frac{3}{8}$$

Der eine Durchschnittspunkt (hat die C. 0 u. 1,) fällt also mit P_2 zusammen, der zweite hat die C. $\frac{16}{5}$ und $-\frac{3}{5}$.

Im allgemeinen erhalten wir also zwei

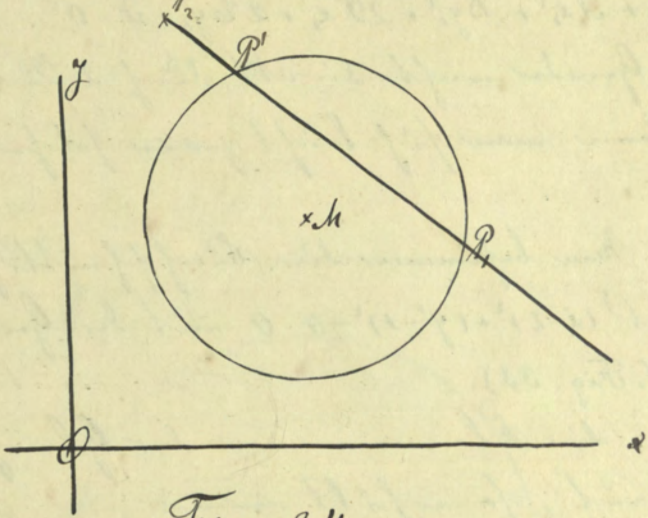

Fig. 34.

Wurzeln für λ, was ja auch der Natur der Sache entspricht, denn ein Kreis hat ja im allgemeinen 2 Punkte mit einer Geraden gemein.

Liegt P. schon auf der Peripherie des Kreises, so braucht man nur noch den andern Schnittpunkt zu bestimmen (s. Fig. 34.). In diesem Falle wird die eine Wurzel von λ = 0, das constante Glied muß also fortfallen und wir erhalten eine lineare Gleichung für λ. Soll die Gerade den Kreis berühren, so muß auch die zweite Wurzel von λ = 0 sein und wir erhalten die Gleichung:

$$Ax_1x_2 + By_1y_2 + D(x_1+x_2) + E(y_1+y_2) + F = 0$$

Setzen wir jetzt noch statt der festen P_2 die variablen x u. y, so erhalten wir die Gleichung der Tangente:

$$x(Ax_1 + D) + y(By_1 + E) + Dx_1 + Ey_1 + F = 0$$

Wir sehen, daß diese Gleichung in der That erfüllt ist, denn setzen wir $x = x_1$ und $y = y_1$, so erhalten wir die Gleichung des Kreises für den Punkt (x_1, y_1). Coll. 12 II 92

Um jetzt die Gleichung der Tangente für den speciellen Fall der Gleichung des Kreises:

Satz 18. Die Gleichung der Tangente im Punkte $x_1 y_1$ an den Kreis: $(x-a)^2+(y-b^2)=R^2$ ist:

$$(x-a)(x_1-a)+(y-b)(y_1-b)=R^2$$

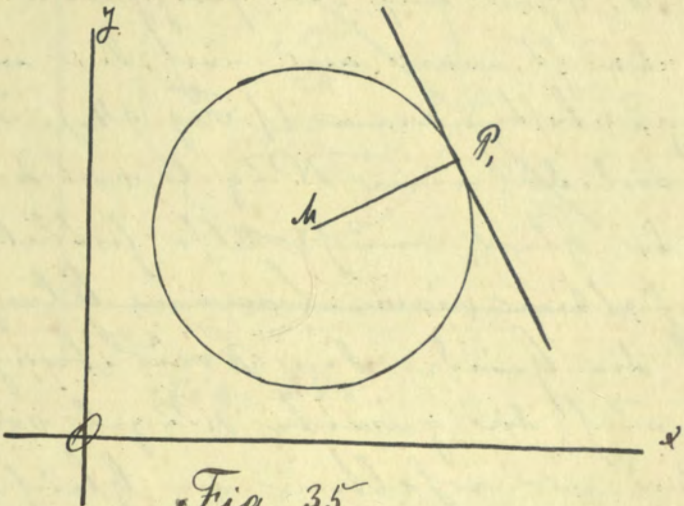

Fig. 35.

Satz 19. Durch die Gleichung:

$$Ax^2+By^2+2Dx+2Ey+F=0$$

ist eine quadratische Linie dargestellt, d.h. eine solche, welche mit einer geraden Linie im Allgemeinen 2 Punkte gemein hat. Die Tangente in einem Punkte $P_1(x_1 y_1)$ derselben hat die Gleichung:

$$x(Ax_1+D)+y(By_1+E)+Dx_1+Ey_1+F=0.$$

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-R^2=0$$

umzuformen, setzen wir:

$A=B=1$, $D=-a$, $E=-b$, $F=a^2+b^2-R^2$ und wir erhalten dann:

$$x(x_1-a)+y(y_1-b)-ax_1-by_1+a^2+b^2-R^2=0$$

$$x(x_1-a)+y(y_1-b)-a(x_1-a)-b(y_1-b)-R^2=0$$

$$(x-a)(x_1-a)+(y-b)(y_1-b)=R^2$$

Wir können nun auch leicht beweisen, dass MP_1 gegeben durch die Gleichung:

$$x(y_1-b)-y(x_1-a)+x_1b-ay_1=0 \qquad \text{(s. Fig. 35.)}$$

auf der Tangente im Punkte P_1 senkrecht steht.
Dann muss $AA'+BB'=0$ sein, also in unserem Falle:

$$(x_1-a)(y_1-b)+(y_1-b)(-x_1+a)=0$$

welche Gleichung auch in der That erfüllt ist.

Wir gingen bei Berechnung der Gleichung der Tangente von der Form: $Ax^2+By^2+2Dx+2Ey+F=0$ aus. Da diese aber nicht nur die Gleichung eines Kreises, sondern überhaupt die einer quadratischen Linie ist, so stellt die Gleichung:

$$x(Ax_1+D)+y(By_1+E)+Dx_1+Ey_1+F=0$$

nicht nur die Tangente an den Kreis, sondern überhaupt die Tangente an eine Kurve obiger Form

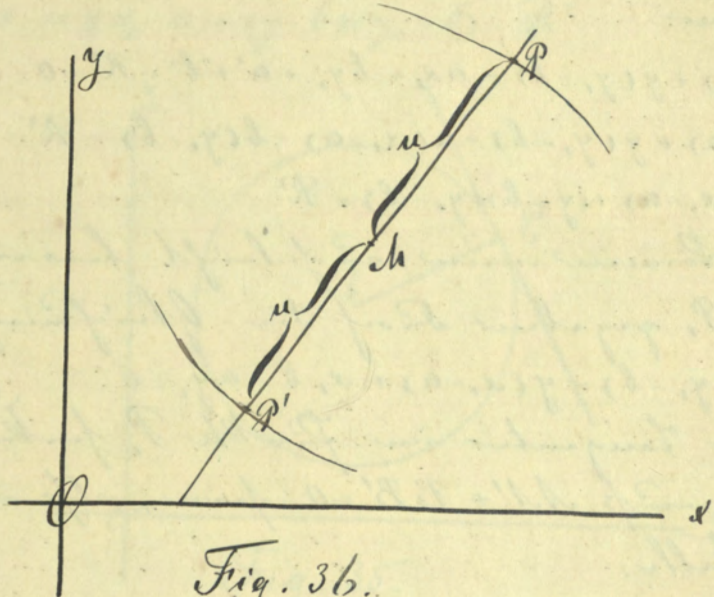

Fig. 36.

dar.

Um uns zuerst ein ungefähres Bild von der quadratischen Curve zu machen, wollen wir jetzt folgende Frage erörtern.

Besitzt die Curve $Ax^2+By^2+2Dx+2Ey+F=0$ einen Punkt, der ähnliche Eigenschaften hat, wie der Mittelpunkt des Kreises, d.h. einen Punkt, in dem sämmtliche Sehnen, die durch denselben gehen, halbiert werden.

Nehmen wir an M sei solch ein Punkt mit den C! l u. m (s. Fig. 36.).

Ziehen wir jetzt durch M eine gerade Linie unter dem $\sphericalangle \vartheta$ so muß P nach Satz 14b die C! $x=l+u\cos\vartheta$ u. $y=m+u\sin\vartheta$ haben. Da aber P ein Punkt der Curve ist, so müssen seine C! auch der obigen Gleichung genügen, also:

$$A(l+u\cos\vartheta)^2+B(m+u\sin\vartheta)^2+2D(l+u\cos\vartheta)+2E(m+u\sin\vartheta)+F=0.$$

Oder nach Potenzen von u geordnet:

$$u^2(A\cos^2\vartheta+B\sin^2\vartheta)$$
$$+2u(Al\cos\vartheta+Bm\sin\vartheta+D\cos\vartheta+E\sin\vartheta)$$
$$+Al^2+Bm^2+2Dl+2Em+F=0$$

Wir erhalten aus dieser Gleichung 2 Werte

Satz 20. Der Mittelpunkt der quadratischen Linie, deren Gleichung:

$$Ax^2 + By^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

der Punkt also, in welchem alle ihn enthaltenden Sehnen halbiert werden hat die C!

$$-\frac{D}{A} \text{ und } -\frac{E}{B}$$

für u. Nun können wir leicht die Bedingung aufstellen, daß M ein Mittelpunkt ist. Es muß unsere quadratische Gleichung 2 Wurzeln besitzen, die sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden

Betrachten wir zunächst folgende quadratische Gleichung:

$$\alpha u^2 + 2\beta u + \gamma = 0$$

$$u^2 + \frac{2\beta}{\alpha} u + \frac{\gamma}{\alpha} = 0$$

$$u = -\frac{\beta}{\alpha} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{\alpha^2} - \frac{\gamma}{\alpha}}$$

Damit sich die beiden Werte von u nur durch das Vorzeichen unterscheiden, muß $\frac{\beta}{\alpha}$ verschwinden, also $\beta = 0$ sein.

Folglich muß in unserer Gleichung der Coefficient von $2u$ verschwinden, also:

$$Al \cos\vartheta + Bm \sin\vartheta + \mathfrak{D} \cos\vartheta + \mathfrak{E} \sin\vartheta = 0$$

Diese Gleichung muß für alle Werte von ϑ erfüllt sein, also auch für $\vartheta = 0^\circ$ und $\vartheta = 90^\circ$, daraus folgt:

$$Al + \mathfrak{D} = 0 \quad \text{und} \quad Bm + \mathfrak{E} = 0$$

Aus diesen Gleichungen können wir l und m berechnen:

$$l = -\frac{\mathfrak{D}}{A} \quad \text{und} \quad m = -\frac{\mathfrak{E}}{B}$$

Eine jede quadratische Linie von der

obigen Form hat also einen solchen Mittelpunkt, es sei denn, daß A oder B = 0 ist.
Den Fall, daß A u. B beide gleich 0 sind, können wir ausschließen, denn dann hätten wir ja keine quadratische Linie mehr, sondern die Gleichung einer Geraden.

Wir wollen jetzt den Fall besonders be- Coll. 13 $\frac{12}{11}$ 92.
trachten, wo $A = 0$.

Unsere Gleichung hat dann die Gestalt

$$By^2 + 2\mathfrak{D}x + 2\mathfrak{E}y + \mathfrak{F} = 0$$

Nehmen wir jetzt eine C.-Verschiebung nach l, m vor, wobei wir anfangs l u. m unbestimmt lassen, dann ist $x = x' + l$ u. $y = y' + m$.
Unsere Gleichung erhält dann folgende Form:

$$B(y'+m)^2 + 2\mathfrak{D}(x'+l) + 2\mathfrak{E}(y'+m) + \mathfrak{F} = 0$$

Nun können wir die beiden willkürlichen Größen stets so annehmen, daß:

$$Bm + \mathfrak{E} = 0 \text{ und } Bm^2 + 2\mathfrak{D}l + 2\mathfrak{E}m + \mathfrak{F} = 0$$

wird. Wenn aber diese Gleichungen bestehen, dann muß auch $By'^2 + 2\mathfrak{D}x' = 0$ sein.

Berechnen wir jetzt l u. m:

$$m = -\frac{\mathfrak{E}}{B};\quad l = -\frac{Bm^2 + 2\mathfrak{E}m + \mathfrak{F}}{2\mathfrak{D}} = -\frac{\frac{\mathfrak{E}^2}{B} - 2\frac{\mathfrak{E}^2}{B} + \mathfrak{F}}{2\mathfrak{D}}$$

$$l = -\frac{\mathfrak{F}B - \mathfrak{E}^2}{2B\mathfrak{D}} = \frac{\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{F}B}{2B\mathfrak{D}}.$$

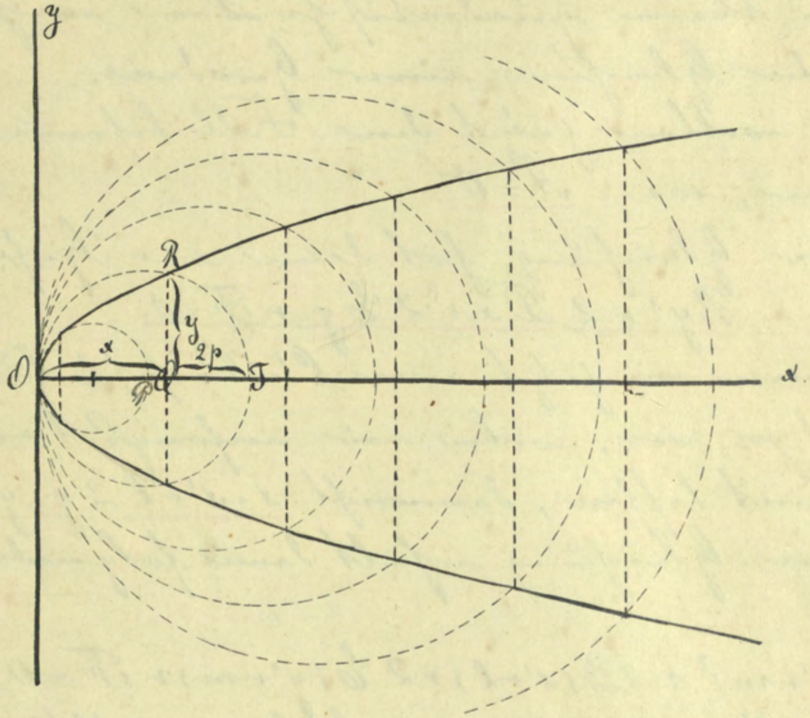

Fig. 37.

Wenn wir jetzt diesen Punkt zum Anfangspunkt machen, dann hat unsere Linie die Gleichung:

$$By'^2 + 2Dx' = 0.$$

Setzen wir jetzt noch $p = -\frac{D}{B}$, so erhält unsere Gleichung folgende Gestalt:

$$y'^2 = 2px'$$

Vermittelst dieser Gleichung können wir uns leicht ein Bild von der Curve machen. (s. Fig. 37.).

Construction: Wir schlagen mit PO als Halbmesser einen Kreis, tragen dann von T aus $2p$ auf (QT), errichten dann in Q eine Senkrechte, dann ist der Durchschnittspunkt R mit dem Kreise ein Punkt unserer Curve, denn: $y^2 = 2px$.

Daß die Curve durch den Anfangspunkt geht und die y-Axe berührt, kann man leicht durch Anwendung der Tangente beweisen.

$$x(Ax_1 + D) + y(By_1 + E) + Dx_1 + Ey_1 + F = 0$$

Wenden wir diese Formel auf die Gleichung $y'^2 = 2px'$ an, so erhalten wir: $-x'p + y'y_1' - px_1' = 0.$

Wenn die Tangente durch den Anfangspunkt geht, dann ist $x_1' = 0$ u. $y_1 = 0$ und wir erhalten

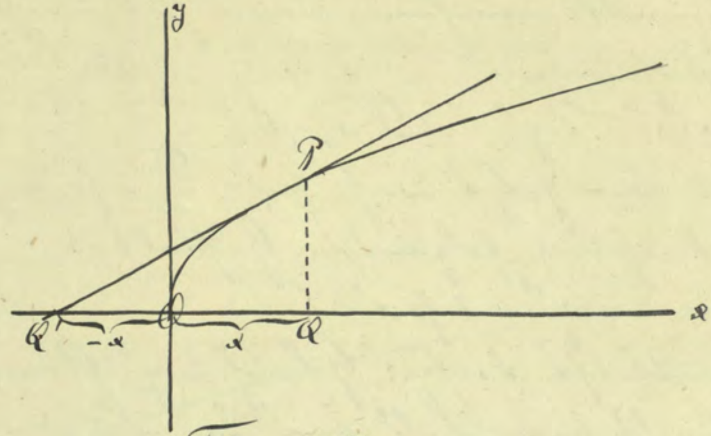

Fig. 38.

Satz 21. Die durch die Gleichung $By^2+2Dx+2Ey+F=0$ dargestellte Linie heißt eine **Parabel**. In einem C.-System, dessen Axen denen des gegebenen parallel sind und dessen Anfangspunkt in diesem die C. $l=\frac{E^2-BF}{2BD}$ und $m=-\frac{E}{B}$ hat, d. h. ihr Scheitelpunkt ist, hat diese Parabel die Gleichung:

$$y'^2=2px',$$

wo $p=-\frac{D}{B}$ der sogenannte Parameter der Parabel ist. Die Parabel erstreckt sich, je nachdem p positiv oder negativ ist, auf der rechten oder linken Seite der y'-Axe ihrer Scheiteltangente und liegt symmetrisch zur x'-Axe, ihrer Hauptaxe.

$x'=0$, d. h. die Tangente fällt mit der y'-Axe zusammen.

Dividiren wir jetzt die obige Gleichung durch px_1', so erhalten wir:

$$-\frac{x'}{x_1'} + y'\frac{y_1'}{2px_1'} = 1$$

Der Abschnitt den die Tangente auf der x'-Axe macht ist also gleich:

$$x' = -x_1'$$

Daraus folgt die Construction der Tangente. (s. Fig. 38.).

Angenommen der Punkt P sei ein Punkt der Parabel. Wir fällen von P eine $\perp$ auf die x-Axe (PQ), dann nehmen wir OQ in den Zirkel und tragen das Stück von O aus nach der andern Seite auf. Verbinden wir den so erhaltenen Punkt Q' mit P, so muß nach der obigen Formel Q'P die Tangente an unsere Parabel sein.

Gehen wir jetzt zu einer andern Construction der Parabel über (s. Fig. 39.).

Wir nehmen einen beliebigen Punkt P_1 an, ziehen darauf OP_1 und ferner durch P_1 eine Parallele zur x-Axe. Wenn wir jetzt in einem beliebigen Punkte R der

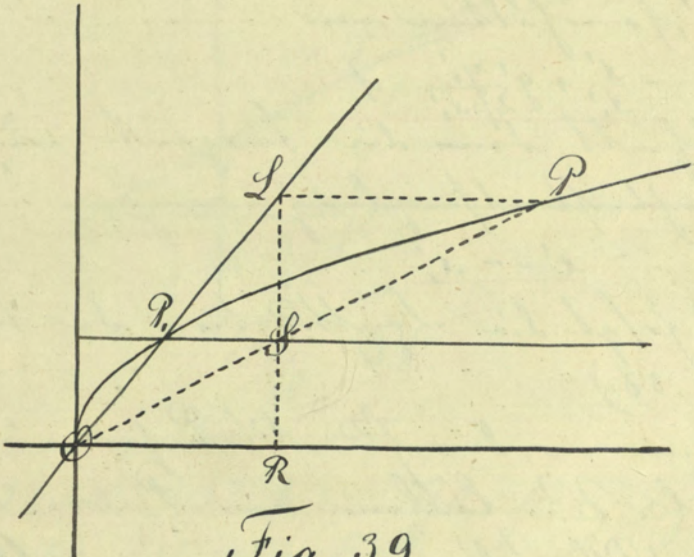

Fig. 39.

x-Axe eine Senkrechte errichten, so erhalten wir die beiden Durchschnittspunkte S u. L. Ziehen wir jetzt durch L eine Parallele zur x-Axe und verbinden wir ferner OS durch eine Gerade, dann ist der Durchschnittspunkt P ein Punkt der Parabel. Auf diese Art können wir uns beliebig viele Punkte der Parabel konstruieren.

Beweis: P, hat die C! x, u. y.
S " " " u " y_1
L " " " u " $\frac{uy_1}{x_1}$

Die Gleichung der Geraden OS ist: $\frac{y}{x} = \frac{y_1}{u}$
" " " LP " $y = \frac{uy_1}{x_1}$.

Multiplicieren wir die erste Gleichung mit der zweiten, so erhalten wir die Beziehungen der C! des Punktes P zu einander, also die Gleichung der gesuchten Curve:

$$\frac{y^2}{x} = \frac{y_1^2}{x_1} \quad \text{oder} \quad y^2 = x\frac{y_1^2}{x_1}.$$

Dieses ist aber die Gleichung einer Parabel mit dem Parameter $\frac{y_1^2}{2x_1}$.

Fernere Discussion der allg. Gleichung 2ten Gr. Coll. 14 $\frac{13}{II}$ 92

Die allgemeine Gleichung 2ten Grades lautete: $Ax^2 + By^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$.

Nachdem wir den Sonderfall der Parabel besprochen haben (A oder $B = 0$) wollen wir wieder zu allgemeineren Fällen zurückkehren, also A u. $B \gtrless 0$.

Wir hatten schon gesehen, daß unsere Curve dann einen Mittelpunkt mit den C! $l = -\frac{D}{A}$ u. $m = -\frac{E}{B}$ besitzt und es ist vorauszusehen, daß unsere Gleichung eine einfachere Gestalt annehmen wird, wenn wir sie auf diesen Mittelpunkt als C!-Anfangspunkt beziehen. Setzen wir also: $x = x' + l = x' - \frac{D}{A}$ u. $y = y' + m = y' - \frac{E}{B}$, so geht unsere allgemeine Gleichung zweiten Grades über in:

$$A\left(x' - \frac{D}{A}\right)^2 + B\left(y' - \frac{E}{B}\right)^2 + 2D\left(x' - \frac{D}{A}\right) + 2E\left(y' - \frac{E}{B}\right) + F = 0$$

$$\begin{aligned} Ax'^2 + By'^2 - 2Dx' - 2Ey' + \frac{D^2}{A} + \frac{E^2}{B} + F & \\ + 2Dx' + 2Ey' - \frac{2D^2}{A} - 2\frac{E^2}{B} & = 0 \end{aligned}$$

$$Ax'^2 + By'^2 - \frac{D^2}{A} - \frac{E^2}{B} + F = 0$$

Hier kommen nur noch die Quadrate von x' u. y' vor. Setzen wir jetzt noch:

$$BD^2 + AE^2 - ABF = \delta$$

so nimmt unsere Gleichung folgende einfache Form an:

$$Ax'^2 + By'^2 = \frac{\delta}{AB}$$

Wenn wir diese Gleichung weiter untersuchen wollen, haben wir 2 Hauptfälle zu unterscheiden:

I A u. B sind beide von demselben Vorzeichen.

α) $\delta = 0$

Dann hat unsere Gleichung die Gestalt: $Ax'^2 + By'^2 = 0$. Dieser Gleichung genügt aber bloß der Punkt mit den C.: $x' = 0$ u. $y' = 0$ oder $x = -\frac{D}{A}$ u. $y = -\frac{E}{B}$.

β) δ von anderem Vorzeichen als A u. B.

In diesem Falle erhalten wir überhaupt keine reelle Linie.

γ) δ von demselben Zeichen wie A u. B.

Dividiren wir unsere Gleichung durch $\frac{\delta}{AB}$, so erhalten wir:

$$\frac{x'^2}{\frac{\delta}{A^2B}} + \frac{y'^2}{\frac{\delta}{AB^2}} = 1$$

Setzen wir jetzt noch $a^2 = \frac{\delta}{A^2B}$ u. $b^2 = \frac{\delta}{AB^2}$ und der Bequemlichkeit wegen statt x' u. y' einfach x u. y, so erhält unsere Gleichung die Form:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Diese Gleichung ist vollkommen befriedigt,

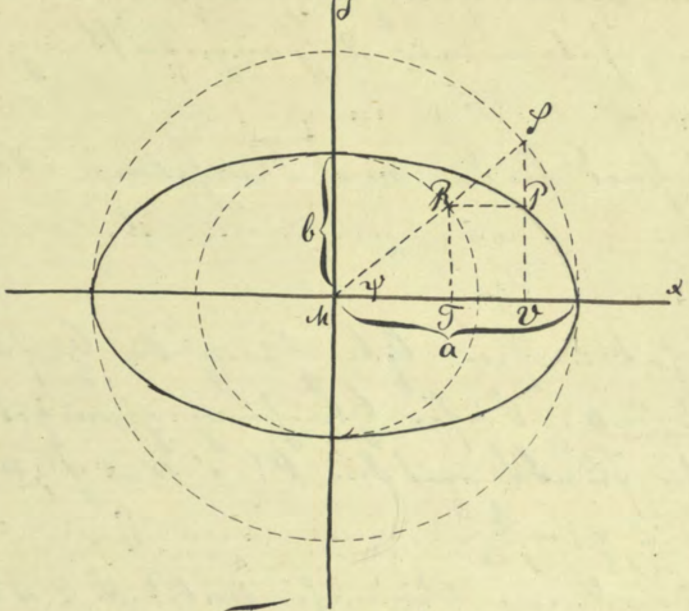

Fig. 40.

<u>Satz 22.</u> Die durch die Gleichung $Ax^2+By^2+2Dx+2Ey+F=0$ dargestellte Linie heißt eine <u>Ellipse</u>, wenn die drei Größen A, B und $\delta = AE^2+BD^2-ABF$ von demselben Vorzeichen sind. Bezogen auf ein System, dessen Anfangspunkt der Mittelpunkt $-\frac{D}{A}$ u. $-\frac{E}{B}$ ist und dessen Axen denen des gegebenen ∥ sind, hat die Ellipse die Gleichung

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1$$

wo $a=\sqrt{\frac{\delta}{A^2B}}$ und $b=\sqrt{\frac{\delta}{AB^2}}$ die beiden Halbaxen der Ellipse sind. Die Ellipse ist ganz zwiwenn wir setzen: $x = a . \cos\varphi$ u. $y = b . \sin\varphi$, denn dann ist $\frac{x}{a} = \cos\varphi$ u. $\frac{y}{b} = \sin\varphi$, also:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1.$$

Jetzt können wir uns leicht ein Bild von der Curve machen. (s. Fig. 40.).

Construction. Wir ziehen zwei concentrische Kreise mit den Radien a u. b, darauf von M aus einen beliebigen Strahl MS. Dann fällen wir von S eine $\perp$ auf die x-Axe und ziehen schließlich durch R eine $\parallel$ zur x-Axe, dann ist der Durchschnittspunkt P dieser beiden Linien ein Punkt unserer Curve, der sogenannten Ellipse. ($x = MV = a . \cos\varphi$ u. $y = PV = RT = b . \sin\varphi$). Die Ellipse liegt im Endlichen und zwar innerhalb des ~~beiden~~ Kreises mit den Radius a, wenn $a > b$ und innerhalb des Kreises mit dem Radius b, wenn $b > a$.

Lösen wir die Gleichung der Ellipse für x u. y auf, so erhalten wir:

$x = \pm a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}$ zu jeder Ordinate gehören 2 Abscissen

$y = \pm b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ " " Abscisse " 2 Ordinaten.

Die Schnittpunkte mit den C.-Axen werden die Scheitelpunkte genannt und haben die schen den Kreisen um ihren Mittelpunkt mit den Radien a u. b enthalten und liegt symmetrisch zu den Axen des neuen Systems, den sogenannten Hauptaxen.

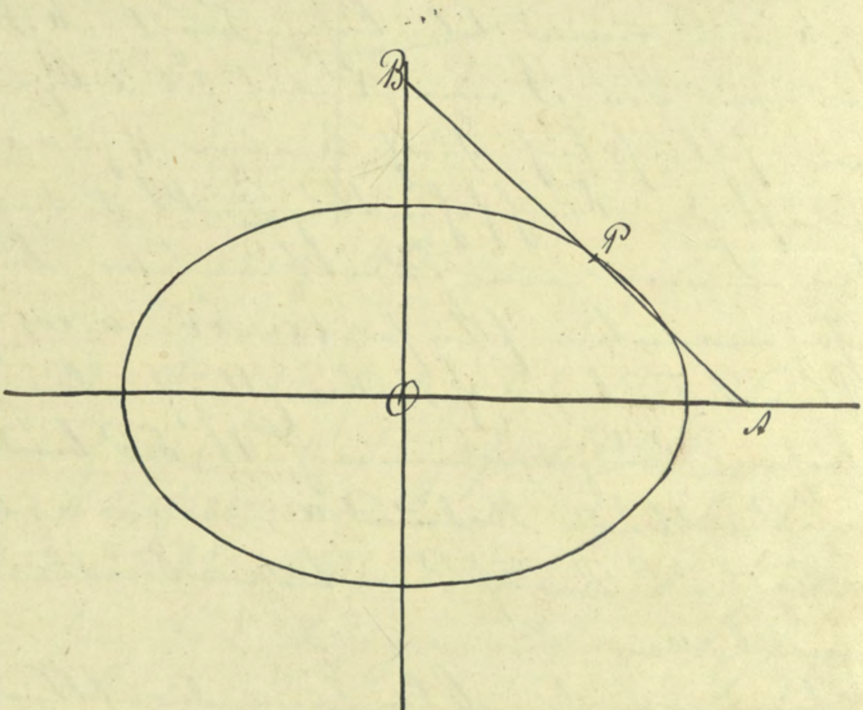

Fig. 41.

C! $x = \pm a$ u. $y = 0$, bzw. $x = 0$ u. $y = \pm b$.

Die Gleichung der Tangente ist:

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 1.$$

Die Tangenten stehen in den Scheitelpunkten $\perp$ zu den C!-Axen.

Aufgabe. Welchen Ort beschreibt ein Punkt einer Geraden, deren Endpunkte auf den C!-Axen gleiten. (s. Fig. 41.)

Der Punkt P teile die Gerade $AB = d$ im Verhältnis $\lambda = \frac{AP}{PB}$.

Der Punkt A hat die C! ξ u. 0

" " B " " " 0 " η

Zwischen ξ, η u. d besteht dann die Gleichung:

$$\xi^2 + \eta^2 = d^2.$$

P hat die C! $x = \frac{\xi}{1+\lambda}$ u. $y = \frac{\lambda\eta}{1+\lambda}$, also:

$$\xi = x(1+\lambda) \text{ u. } \eta = \frac{y}{\lambda}(1+\lambda)$$

Setzen wir diese Werte für ξ u. η in die obige Formel ein, so erhalten wir die Gleichung der gesuchten Curve:

$$x^2(1+\lambda)^2 + \frac{y^2}{\lambda^2}(1+\lambda)^2 = d^2 \text{ oder}$$

$$\frac{x^2}{\left(\frac{d}{1+\lambda}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{\lambda d}{1+\lambda}\right)^2} = 1$$

Die Curve ist also eine Ellipse mit den Halbaxen $a = \frac{d}{1+\lambda}$ und $b = \frac{\lambda d}{1+\lambda}$.

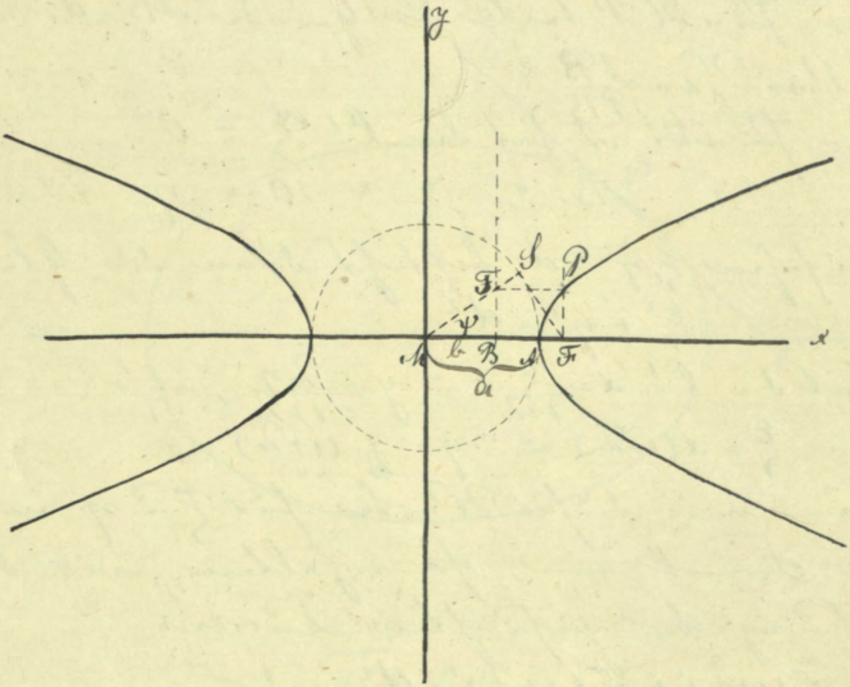

Fig. 42.

Auch diese Konstruktion braucht auch der Ellipsenzirkel.

II. A u. B sind in der Gleichung $Ax'^2 + By'^2 = \frac{\delta}{AB}$ wo Coll 15 $\frac{17}{II}$ 92.
$\delta = AE^2 + BD^2 - ABF$, von verschiedenem Zeichen.

α) B u. δ von demselben Zeichen.

Wir können dann unsere Gleichung schreiben:

$$\frac{x'^2}{\frac{\delta}{A^2B}} - \frac{y'^2}{\frac{\delta}{-AB^2}} = 1$$

Lassen wir jetzt der Bequemlichkeit wegen die Striche weg und setzen wir $\frac{\delta}{A^2B} = a^2$ u. $\frac{-\delta}{AB^2} = b^2$ wobei auch umgekehrt, da $\frac{\delta}{A^2B}$ u. $\frac{-\delta}{AB^2}$ positiv sind, $a = \sqrt{\frac{\delta}{A^2B}}$ u. $b = \sqrt{\frac{-\delta}{AB^2}}$ ist, so erhält unsere Gleichung die Form:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Auch diese Gleichung können wir leicht befriedigen, indem wir setzen:

$$x = \frac{a}{\cos\psi} \quad \text{u.} \quad y = b\,\mathrm{tg}\,\psi,$$ denn dann ist:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{\cos^2\psi} - \frac{\sin^2\psi}{\cos^2\psi} = \frac{1-\sin^2\psi}{\cos^2\psi} = \frac{\cos^2\psi}{\cos^2\psi} = 1$$

Dieses führt uns wiederum zu einer Konstruktion der Linie.

Construction: (s. Fig. 42.). Wir ziehen zunächst mit dem Radius a einen Kreis um M, dann tragen wir auf der x-Axe das Stück MB = b ab;

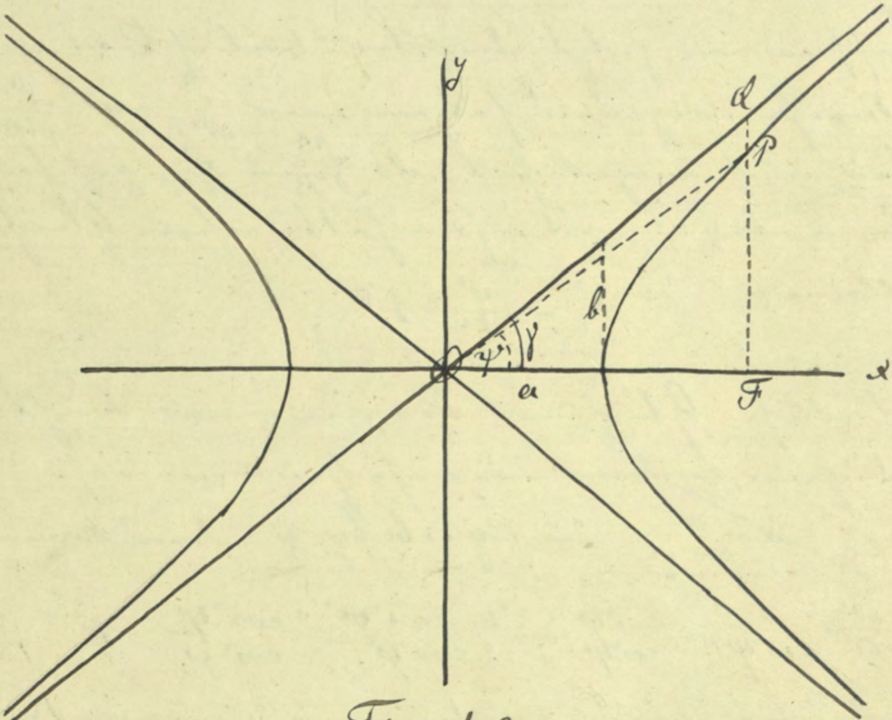

Fig. 43.

Hierauf ziehen wir durch M einen beliebigen Radius MS, dann durch S die Tangente SF und in B u. F je eine $\perp$ zur x-Axe, und zum Schluß noch durch T eine $\parallel$ zur x-Axe, so erhalten wir P einen Punkt unserer Curve.

Beweis: $MS = a = MF \cos\psi = x \cdot \cos\psi$; $x = \dfrac{a}{\cos\psi}$

$y = PF = TB = MB \operatorname{tg}\psi = b \cdot \operatorname{tg}\psi$

Die Curve erstreckt sich nach beiden Seiten in's Unendliche, denn für $\psi = 90°$ ist $x = \infty$ u. $y = \infty$, und wird Hyperbel genannt.

Aus der Construction können wir schon sehen, daß die Hyperbel ganz außerhalb des Kreises mit dem Radius a und symmetrisch zu beiden Seiten der y-Axe liegt.

Es fragt sich nun, ob diese Curve in einer bestimmten Richtung in's Unendliche verläuft.

$$\frac{y}{x} = \frac{b \cdot \operatorname{tg}\psi \cdot \cos\psi}{a} = \frac{b}{a}\sin\psi$$

Wird $\psi = 90°$, so ist $\sin\psi = 1$, also $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$. Die Hyperbel verfolgt also eine bestimmte Richtung in's Unendliche, die bestimmt wird durch die Gerade OQ, welche mit der x-Axe den Winkel γ bildet, so daß $\operatorname{tg}\gamma = \frac{b}{a}$. (s Fig 43)

Wollen wir jetzt untersuchen, wann sich die

Satz 23. Die durch die Gleichung $Ax^2+By^2+2Dx+2Ey+F=0$ dargestellte Linie heißt eine **Hyperbel**, wenn A u. B von entgegengesetztem Vorzeichen sind. Ist dann etwa B von demselben Vorzeichen wie $\delta = AE^2+BD^2-ABF$, so hat die Hyperbel in einem System, dessen Axen denen des gegebenen ∥ sind und dessen Anfangspunkt ihr Mittelpunkt mit den C! $-\frac{D}{A}$ u. $-\frac{E}{B}$ ist, die Gleichung:

$$\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}=1,$$

wo $a=\sqrt{\frac{\delta}{A^2B}}$ und $b=\sqrt{\frac{-\delta}{AB^2}}$ ist.

Die Hyperbel liegt ganz außerhalb des Kreises um den Mittelpunkt mit dem Radius a und innerhalb der Winkel der beiden Geraden $y'\pm\frac{b}{a}x'=0$, der **Asymptoten** der Hyperbel, denen sie sich unausgesetzt nähert, ohne sie je zu erreichen.

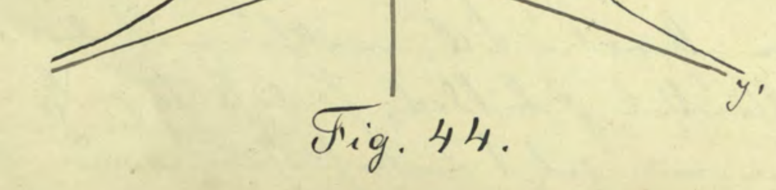

Fig. 44.

Hyperbel und die Gerade schneiden.

$PQ = QF - PF = \frac{xb}{a} - \frac{xb}{a}\sin\psi = \frac{x.b}{a}(1-\sin\psi)$

PQ wird also $= 0$, wenn $1 - \sin\psi = 0$, also $\sin\psi = 1$, oder $\psi = 90^\circ$ ist; für $\psi = 90^\circ$ liegt die Hyperbel aber im Unendlichen, folglich trifft die Gerade die Hyperbel erst in der Unendlichkeit.

Schon die Alten erkannten dieses und nannten deßhalb die beiden Geraden, welche die Hyperbel erst im Unendlichen treffen, die Asymptoten derselben, also die nicht Zusammenfallenden.

Jetzt wird es von besonderem Interesse Coll. 16 $\frac{18}{11}$ 92
sein, zu sehen, wie sich die Gleichung der Hyperbel gestaltet, wenn wir sie auf ihre Asymptoten als Axen beziehen. (s. Fig. 44).

Die Gleichung der Hyperbel im rechtwinkligen System lautete $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Um sie in's schiefwinklige zu übertragen setzen wir nach Satz 16:

$$x = x'\cos\alpha + y'\cos\beta \text{ und}$$

$$y = x'\sin\alpha + y'\sin\beta$$ wo in unserem Falle

$\beta = -\alpha$ ist, also:

$$x = (x'+y')\cos\alpha$$

$$y = (x'-y')\sin\alpha$$

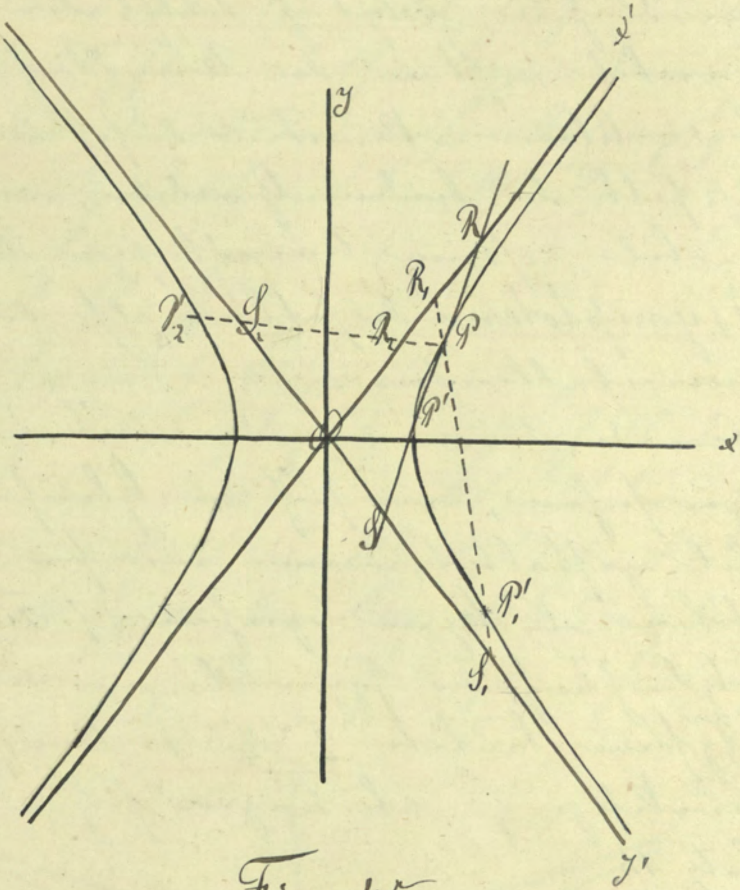

Fig. 45.

oder da: $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ u. $\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$$x = \frac{(x'+y')a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{und} \quad y = \frac{(x'-y')b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Die Gleichung der Hyperbel lautet dann:

$$\frac{(x'+y')^2}{a^2+b^2} - \frac{(x'-y')^2}{a^2+b^2} = 1 \quad \text{oder}$$

$$\cancel{x'^2} + 2x'y' + \cancel{y'^2} - \cancel{x'^2} + 2x'y' - \cancel{y'^2} = a^2+b^2$$

Die Gleichung der Hyperbel hat also auf ihre Asymptoten als Axen bezogen die einfache Form:

$$x'y' = \frac{1}{4}(a^2+b^2)$$

Aufgabe: Die Schnittpunkte irgend einer geraden Linie mit der Hyperbel zu finden. (s. Fig. 45).

Wir benutzen die Gleichung der Hyperbel auf ihre Asymptoten bezogen: $x'y' = \frac{1}{4}(a^2+b^2)$

Der Punkt R habe die C.! ξ u. 0
" " S " " " 0 " η

Ein beliebiger Punkt P auf der Geraden RS hat demnach die C.! $x' = \frac{\xi}{1+\lambda}$ u. $y' = \frac{\lambda\eta}{1+\lambda}$, wo $\lambda = \frac{RP}{PS}$.

Wenn nun P auf der Hyperbel liegen soll, so müssen seine C.! auch der Gleichung derselben genügen, also:

$$\frac{\lambda\xi\eta}{(1+\lambda)^2} = \frac{a^2+b^2}{4}; \quad \frac{4\lambda\xi\eta}{a^2+b^2} = 1+2\lambda+\lambda^2.$$

Satz 24. Jede Gerade schneidet die Hyperbel in zwei Punkten, die gleich weit von den Schnittpunkten der Geraden mit den Asymptoten abstehen.

$\lambda^2 + 2\lambda\left(1 - \frac{2\xi\eta}{a^2+b^2}\right) + 1 = 0$; setzen wir $1 - \frac{2\xi\eta}{a^2+b^2} = \alpha$

$\lambda^2 + 2\lambda\alpha + 1 = 0$. Hieraus finden wir die Schnittpunkte:

$\lambda_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}$

$\lambda_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1}$ also:

$\lambda_1 \lambda_2 = 1.$

Wir wollen jetzt sehen, was dieser Ausdruck $\lambda_1\lambda_2 = 1$ zu bedeuten hat.

$\lambda_1 = \frac{RP}{PS}$ u. $\lambda_2 = \frac{RP'}{P'S}$, wenn nun $\lambda_1\lambda_2 = 1$ ist, so muss $\frac{RP}{PS} = \frac{P'S}{RP'}$ sein; $1 + \frac{RP}{PS} = 1 + \frac{P'S}{RP'}$

$\frac{PS + RP}{PS} = \frac{RP' + P'S}{RP'}$; $\frac{RS}{PS} = \frac{RS}{RP'}$ also:

$PS = RP'$ oder auf beiden Seiten PP' subtrahiert:

$SP' = RP$. d. h. die Abschnitte der Geraden zwischen der Hyperbel und ihren Asymptoten sind auf beiden Seiten gleich.

Hieraus folgt eine neue Construction der Hyperbel.

Construction: (s. Fig. 45). Wir nehmen an, der Punkt P liege auf der Hyperbel. Nun verfahren wir folgendermaßen: Wir ziehen durch P eine beliebige Gerade RS. Darauf tragen wir das Stück RP von S aus auf die Gerade auf (SP'), dann muss P' auch ein Punkt der Hyperbel sein. Auf diese Weise können

wir beliebig viele Punkte der Hyperbel finden.

Um noch eine neue Construction der Hyperbel zu finden, wollen wir jetzt die Tangentengleichung derselben ableiten.

Die allgemeine Gleichung der Tangente lautet:

$$(Ax_1+D)x+(By_1+E)y+Dx_1+Ey_1+F=0$$

Setzen wir jetzt: $A=\frac{1}{a^2}$, $B=\frac{1}{b^2}$, $D=0$, $E=0$, $F=-1$, so erhalten wir die Tangentengleichung der Hyperbel:

$$\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1$$

Jetzt wollen wir die Gleichung für die Asymptoten als Coord.-Axen umformen, also haben wir zu setzen: $\frac{x}{a}=\frac{x'+y'}{\sqrt{a^2+b^2}}$ u. $\frac{y}{b}=\frac{x'-y'}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Unsere Gleichung geht dann über in:

$$\frac{(x'+y')(x_1'+y_1')}{a^2+b^2}-\frac{(x'-y')(x_1'-y_1')}{a^2+b^2}=1$$

$$2x'y_1'+2y'x_1'=a^2+b^2$$

$x_1'y_1'$ soll aber ein Punkt der Hyperbel sein, folgl.:

$$\cancel{2}x'y_1'+\cancel{2}y'x_1'=(a^2+b^2)=2\cancel{2}x_1'y_1'$$

$$\frac{x'}{2x_1'}+\frac{y'}{2y_1'}=1$$

Der Abschnitt auf der x'-Axe $=2x_1'$

„ „ „ „ y' „ $=2y_1'$

Satz 25. Die Tangenten der Hyperbel bestimmen mit den Asymptoten Dreiecke constanten Inhalts.

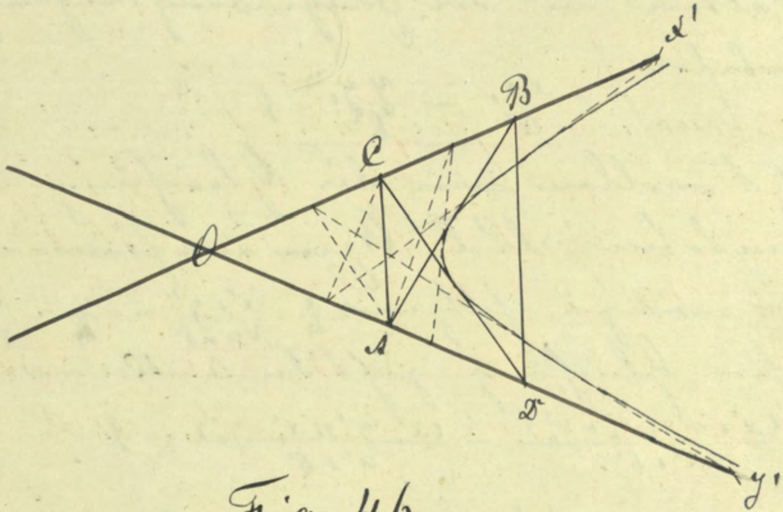

Fig. 46.

Die Tangente eines Punktes macht also auf Coll. 17 $\frac{19}{II}$ 92.
den Asymptoten doppelt so große Abschnitte, als die C! des Punktes betragen. Da aber $x'y' = \frac{a^2+b^2}{4}$ also constant ist, so muß das Produkt der Abschnitte stets constant $= a^2+b^2$ sein. Der Inhalt eines Dreiecks, das von der Tangente und den Asymptoten eingeschlossen ist, ist gleich $2x'y'\sin\alpha$, wo α der Winkel ist, den die Asymptoten mit einander bilden, also $= \underline{\frac{a^2+b^2}{2}\sin\alpha}$, also auch constant.

<u>Construction</u>: (s. Fig. 46.). Wir zeichnen uns zunächst zwei beliebige Asymptoten Ox' u. Oy; dann die Tangente AB, hierauf AC beliebig, dann $BD \parallel AC$. CD muß dann nach Satz 25 auch eine Tangente sein, denn $\Delta OAB = \Delta OAC + \Delta ACB = \Delta OAC + \Delta ACD = \Delta OCD$. Wenn man auf diese Weise genügend viele Tangenten gezogen hat, wird die Hyperbel ganz von selbst ausgeschieden.

<u>II. β)</u> <u>A</u> u. <u>B</u> in der Gleichung $\underline{Ax^2+By^2+2Dx+2Ey+F=0}$ von <u>verschiedenen</u> Zeichen und $\underline{\delta = AE^2+BD^2-ABF=0}$.

Auf den Anfangspunkt $\underline{l=-\frac{D}{A}}$ u. $\underline{m=-\frac{E}{B}}$ bezogen, haben wir also die Gleichung:

$$\underline{Ax'^2+By'^2=0.}$$

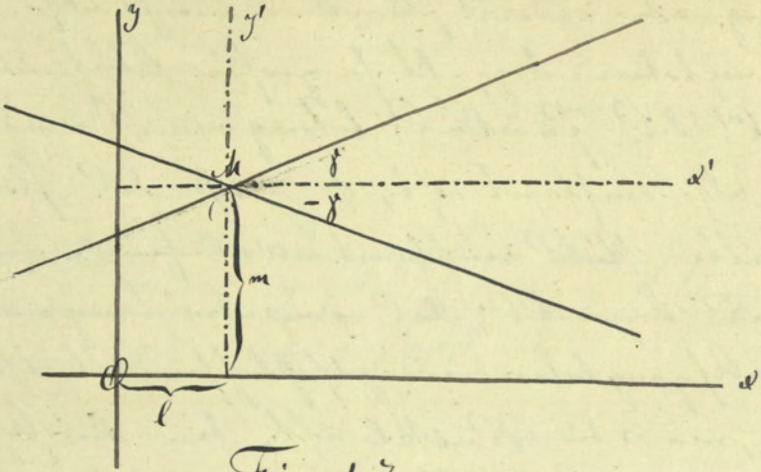

Fig. 47.

Satz 26. Die durch die Gleichung $Ax^2+By^2+2Dx+2Ey+F=0$ dargestellte Linie besteht, falls A u. B von entgegengesetztem Zeichen u. $\delta = AE^2+BD^2-ABF=0$, aus 2 Geraden, welche durch den Punkt $-\frac{D}{A}$ u. $-\frac{E}{B}$ gehen und mit der x-Axe den durch $-\frac{A}{B}=tg^2\gamma$ bestimmten Winkel γ bilden.

Da nun A u. B von verschiedenem Vorzeichen sind, so können wir setzen $\sqrt{-\frac{A}{B}} = tg\,\gamma$. Folglich:

$y'^2 - x'^2\,tg^2\gamma = 0$ oder $(y' - x'\,tg\,\gamma)(y' + x'\,tg\,\gamma) = 0$

Diese Gleichung ist aber befriedigt, wenn wir:

1) $y' = x'\,tg\,\gamma$

und 2) $y' = -x'\,tg\,\gamma$ setzen.

Die obige quadratische Gleichung stellt also 2 gerade Linien dar, die mit der x'-Axe die Winkel γ u. $-\gamma$ bilden. (s. Fig. 47).

Rücken die beiden Scheitelpunkte einer Hyperbel bei denselben Asymptoten immer näher zusammen, so gehen zuletzt die beiden Zweige derselben, wenn $a = \sqrt{\frac{F}{A\cdot B}} = 0$ wird in die Asymptoten über, welche dann durch die Gleichung $Ax'^2 + By'^2 = 0$ ausgedrückt werden.

Andere Eigenschaften der quadrat. Linien.

Bis jetzt haben wir uns, ausgehend von der allgemeinen Gleichung 2ten Grades, ein Bild von den quadratischen Curven Parabel, Ellipse und Hyperbel gemacht. Wir wollen nun für alle 3 Curven eine einheitliche Art der Erzeugung finden.

Aufgabe. Es ist der Ort derjenigen Punkte zu finden, für welche das Verhältnis der Entfer-

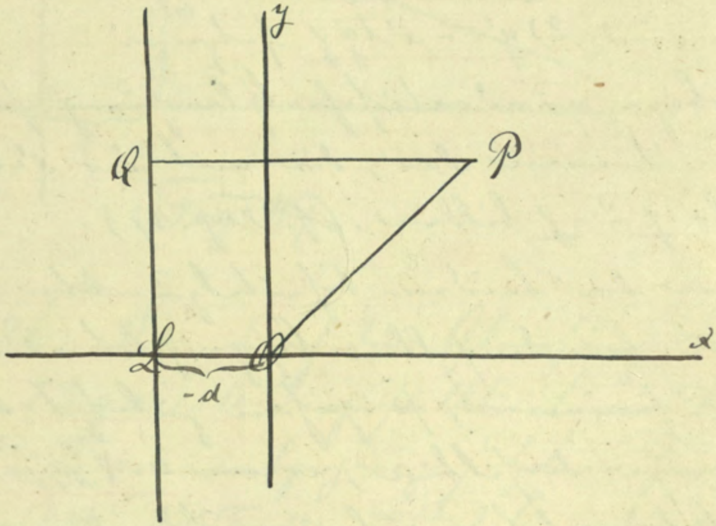

Fig. 48.

nungen von einem festen Punkte und einer festen Geraden constant ist. (s. Fig. 48.)

Es liegt nahe den festen Punkt O zum Anfangspunkt des C! Systems zu machen. Dann hat die feste Gerade LL (Leitlinie) die Gleichung: $x+d=0$.

Wenn nun P ein Punkt des gesuchten Ortes ist, so ist auch das Verhältnis $\frac{OP}{PQ}=\varepsilon$ gegeben.

oder: $\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{d+x}=\varepsilon$, folgl.

$$x^2+y^2-\varepsilon^2(d+x)^2=0$$

Die Gleichung des gesuchten Ortes ist also:

$$x^2(1-\varepsilon^2)+y^2-2\varepsilon^2dx-\varepsilon^2d^2=0$$

Der gesuchte Ort ist also eine quadratische Linie. Um nun zu untersuchen, was für eine Linie es ist, vergleichen wir die oben gefundene Gleichung mit der allgemeinen Gleichung 2ten Grades: $Ax^2+By^2+2Dx+2Ey+F=0$.

$A=1-\varepsilon^2$, $B=1$, $D=-\varepsilon^2d$, $E=0$, $F=-\varepsilon^2d^2$

$$\delta = AE^2+BD^2-ABF=\varepsilon^4d^2+\varepsilon^2d^2(1-\varepsilon^2)=\varepsilon^2d^2$$

Der gesuchte Ort kann also eine Parabel, Ellipse oder Hyperbel sein, jenachdem ε gleich, kleiner oder größer als 1 ist.

Wir wollen jetzt jeden einzelnen dieser Fälle näher untersuchen.

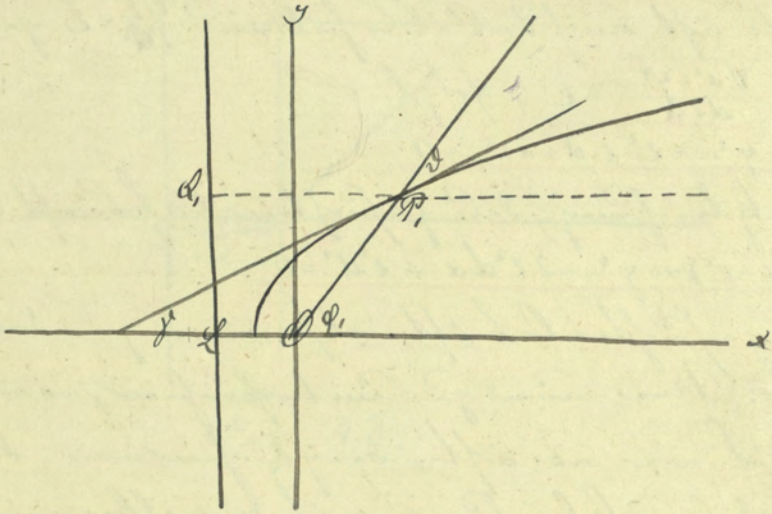

Fig. 49.

I. Fall. $\varepsilon = 1$. $A = 0$, folglich haben wir eine Parabel.

Unsere Gleichung nimmt folgende einfache Gestalt an:

$$y^2 = 2dx + d^2$$

Die C! des Scheitelpunktes sind: $l = \frac{E^2 - BF}{2BD} = \frac{-d^2}{2d} = -\frac{d}{2}$

$$m = -\frac{E}{B} = 0$$

Der Scheitelpunkt liegt also in der Mitte zwischen O u. L.

Der Parameter $p = -\frac{D}{B} = d$.

Wir wollen jetzt im Allgemeinen den Coll. 18 20/II 92. Winkel berechnen, den die Tangente im einem Punkte einer quadratischen Linie mit dem Radius vector, der durch denselben Punkt geht, bildet. (s. Fig. 49).

Die Gleichung der Tangente in einem Punkte $x_1 y_1$ an die Linie $Ax^2 + By^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ war:

$$x(Ax_1 + D) + y(By_1 + E) + Dx_1 + Ey_1 + F = 0.$$

Also in unserem Falle:

$$x((1-\varepsilon^2)x_1 - \varepsilon^2 d) + yy_1 - \varepsilon^2 d x_1 - \varepsilon^2 d^2 = 0$$

folgl: $\operatorname{tg} \gamma = -\frac{(1-\varepsilon^2)x_1 - \varepsilon^2 d}{y_1} = \frac{\varepsilon^2(x_1 + d) - x_1}{y_1}$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{y_1}{x_1}$$

Satz 27. Jede Parabel $y^2 = 2px$ ist der Ort derjenigen Punkte, welche von einem innerhalb derselben auf der x-Axe gelegenen und vom Scheitelpunkte um $\frac{p}{2}$ entfernten Punkte, ihrem Brennpunkte, und einer außerhalb derselben zur x-Axe senkrechten und vom Scheitelpunkte um die Strecke $-\frac{p}{2}$ entfernten Geraden, ihrer Leitlinie, gleichweit entfernt sind. Jeder $\parallel$ zur x-Axe einfallende Lichtstrahl wird in ihrem Brennpunkt reflectirt.

$$\operatorname{tg}\vartheta = \operatorname{tg}(\varphi_1 - \gamma) = \frac{\operatorname{tg}\varphi_1 - \operatorname{tg}\gamma}{1 + \operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\gamma} = \frac{\frac{y_1}{x_1} - \frac{\varepsilon^2(x_1+d) - x_1}{y_1}}{1 + \frac{\varepsilon^2(x_1+d) - x_1}{x_1}}$$

$$= \frac{y_1^2 + x_1^2 - \varepsilon^2 x_1(x_1+d)}{y_1(x_1 + \varepsilon^2(x_1+d) - x_1)} \quad \text{und da } x_1^2 + y_1^2 = \varepsilon^2(x_1+d)^2$$

$$\underline{\operatorname{tg}\vartheta} = \frac{\varepsilon^2(x_1+d)^2 - \varepsilon^2 x_1(x_1+d)}{y_1 \varepsilon^2 (x_1+d)} = \underline{\frac{d}{y_1}}$$

Im Falle wir eine Parabel haben ist aber $\underline{\operatorname{tg}\gamma} = \frac{\varepsilon^2(x_1+d) - x_1}{y_1}$ auch $= \underline{\frac{d}{y_1}}$, folgl. ist $\underline{\vartheta = \gamma}$.

Der Winkel, den die Tangente in einem Punkte der Parabel mit der x-Axe bildet, ist also gleich dem Winkel, den sie mit dem Radius vector, der durch denselben Punkt geht, bildet.

Aus der Physik wissen wir, daß ein Lichtstrahl der eine Gerade trifft, von dieser unter demselben Winkel reflectirt wird. Bei der Parabel haben wir also den interessanten Fall, daß alle Lichtstrahlen, die $\parallel$ zur x-Axe die Parabel treffen, durch diese in den Punkt O reflectirt werden. Dieser Punkt wird daher auch der **Brennpunkt** der Parabel genannt.

Jetzt wollen wir untersuchen, wohin überhaupt ein Lichtstrahl, der durch den Punkt O geht, reflectirt wird (s. Fig. 50.)

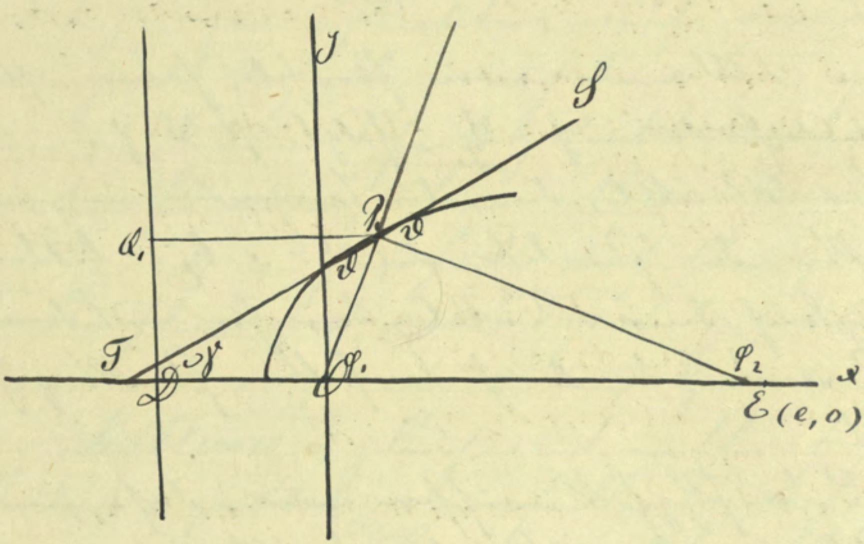

Fig. 50.

$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\varepsilon^2(x_1+d) - x_1}{y_1}$, $\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{y_1}{x_1 - e}$, $\operatorname{tg} T P_1 O = \operatorname{tg}\vartheta = \frac{d}{y_1}$

$$\operatorname{tg} S P_1 E = \operatorname{tg}\vartheta = \operatorname{tg}(\gamma + 180^\circ - \varphi_2) = \operatorname{tg}(\gamma - \varphi_2) = \frac{\operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\varphi_2}{1 + \operatorname{tg}\gamma \cdot \operatorname{tg}\varphi_2}$$

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{\frac{\varepsilon^2(x_1+d) - x_1}{y_1} - \frac{y_1}{x_1 - e}}{1 + \frac{\varepsilon^2(x_1+d) - x_1}{x_1 - e}} = \frac{\varepsilon^2 x_1(x_1+d) - x_1^2 - y_1^2 - e(\varepsilon^2(x_1+d) - x_1)}{(x_1 - e + \varepsilon^2(x_1+d) - x_1)y_1}$$

und da $x_1^2 + y_1^2 = \varepsilon^2(x_1+d)^2$

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{\varepsilon^2 x_1(x_1+d) - \varepsilon^2(x_1+d)^2 - e(\varepsilon^2(x_1+d) - x_1)}{y_1(\varepsilon^2(x_1+d) - e)}$$

Da nun SP_1E gleich sein soll TP_1O, so ist auch $\operatorname{tg} SP_1E = \operatorname{tg} TP_1O$ also:

$$\frac{\varepsilon^2 x_1(x_1+d) - \varepsilon^2(x_1+d)^2 - e(\varepsilon^2(x_1+d) - x_1)}{y_1(\varepsilon^2(x_1+d) - e)} = \frac{d}{y_1}$$

$$\frac{-\varepsilon^2 d(x_1+d) - e(\varepsilon^2(x_1+d) - x_1)}{\varepsilon^2(x_1+d) - e} = d$$

$$\varepsilon^2 d(x_1+d) - ed = -\varepsilon^2 d(x_1+d) - e(\varepsilon^2(x_1+d) - x_1)$$

$$e(\varepsilon^2(x_1+d) - x_1 - d) = -2\varepsilon^2 d(x_1+d)$$

$$e(\varepsilon^2 - 1) = -2\varepsilon^2 d$$

$$e = \frac{2\varepsilon^2 d}{1 - \varepsilon^2}$$

Da in dieser Formel die C! des beliebig angenommenen Punktes P_1 x_1 u. y_1 nicht vorkommen, so folgt daraus, dass jeder von O ausgehende Lichtstrahl von der Curve 2ten Grades so reflectirt wird, dass er durch den ganz bestimmten Punkt E mit den C! $\frac{2\varepsilon^2 d}{1-\varepsilon^2}$ u. 0, den zweiten Brennpunkt geht.

Haben wir eine Parabel, so ist $\varepsilon = 1$ und e

unendlich groß; die Gerade P_1E ist dann also $\parallel$ zur x-Axe, was wir ja auch erst gefunden hatten.

Bei einer Ellipse ist $\varepsilon < 1$, e also positiv, der Punkt E liegt also nach rechts von O.

Bei einer Hyperbel dagegen ist $\varepsilon > 1$, e negativ, E liegt also auf der linken Seite der x-Axe.

Wir wollen jetzt auch die Beziehungen der Axen und der Größen ε u. e für die Ellipse und Hyperbel feststellen.

II Fall. $\varepsilon < 1$. Wir haben es also mit einer Ellipse zu thun.

Die Gleichung lautete:

$$x^2(1-\varepsilon^2)+y^2-2\varepsilon^2 dx-\varepsilon^2 d^2=0$$

Auf den Brennpunkt O als Cᵗ. Anfangspunkt bezogen hat also der Mittelpunkt die Cᵗ.:

$$l=-\frac{D}{A}=\frac{\varepsilon^2 d}{1-\varepsilon^2} \quad \text{u.} \quad m=-\frac{E}{B}=0$$

$$a^2=\frac{\Delta}{A^2B}=\frac{\varepsilon^2 d^2}{(1-\varepsilon^2)^2} \qquad b^2=\frac{\Delta}{AB^2}=\frac{\varepsilon^2 d^2}{1-\varepsilon^2}$$

Die beiden Axen der Ellipse sind also:

$$a=\frac{\varepsilon d}{1-\varepsilon^2} \quad \text{u.} \quad b=\frac{\varepsilon d}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

$e=\dfrac{2\varepsilon^2 d}{1-\varepsilon^2}=2l$, wie wir schon früher gefunden

haben.

Der zweite Brennpunkt liegt also gleichweit vom Mittelpunkt entfernt, wie der erste. Dies war ja auch schon vorauszusehen, da ja die Ellipse eine vollständig symmetrisch gebildete Figur ist.

$$a^2-b^2=\frac{\varepsilon^2 d^2}{(1-\varepsilon^2)^2}-\frac{\varepsilon^2 d^2}{1-\varepsilon^2}=\frac{\varepsilon^2 d^2(1-1+\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2)^2}=\frac{\varepsilon^4 d^2}{(1-\varepsilon^2)^2}$$

$$\sqrt{a^2-b^2}=\frac{\varepsilon^2 d}{1-\varepsilon^2}=c$$

Die Strecke $\sqrt{a^2-b^2}$, welche gewöhnlich durch c bezeichnet wird, ist also gleich der Entfernung des Brennpunktes vom Mittelpunkte.

Wir müssen jetzt umgekehrt ε und d durch die Größen a, b und c ausdrücken.

Wie leicht zu sehen ist, ist:

$$\varepsilon=\frac{c}{a}$$

$$d=\frac{(1-\varepsilon^2)a}{\varepsilon}=\frac{(1-\frac{c^2}{a^2})a}{c/a}=\frac{a^2-c^2}{c}=\frac{b^2}{c}$$

Ausgehend von der Mittelpunktsgleichung Coll 19 $\frac{24}{11}$ 92. der Ellipse $\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1$, können wir jetzt auch leicht die Gleichung derselben, bezogen auf den Brennpunkt, herleiten.

Wir brauchen nur zu setzen: $x'=x-c$ und $y'=y$, dann erhalten wir:

$$\frac{(x-c)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

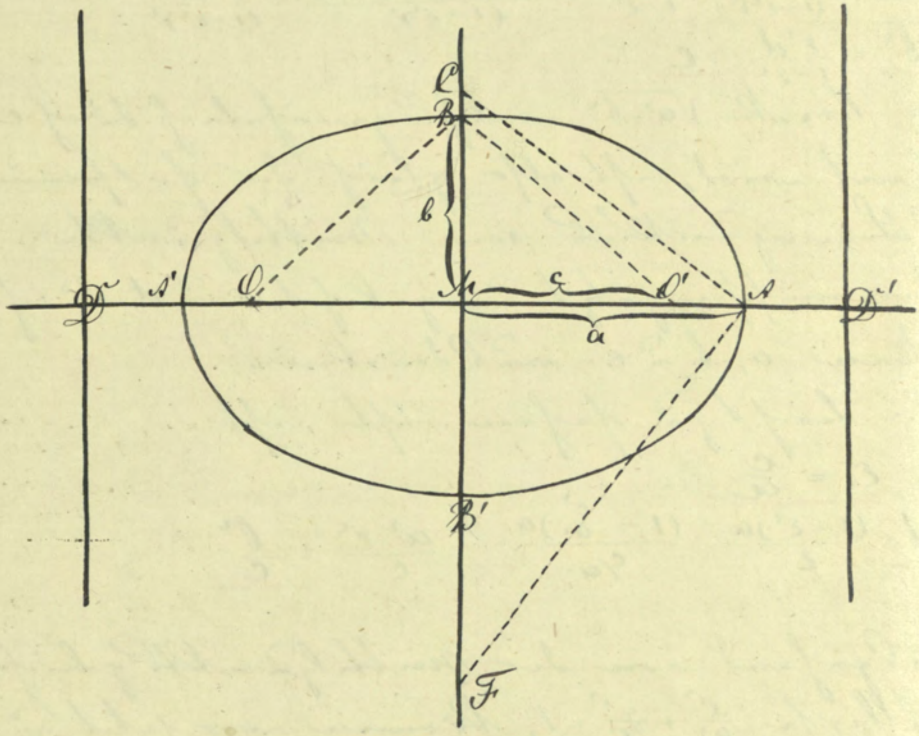

Fig. 51.

$(x-c)^2 b^2 + y^2 a^2 = a^2 b^2$

$x^2 b^2 - 2xcb^2 + c^2 b^2 + y^2 a^2 = a^2 b^2$ addiren wir jetzt auf beiden Seiten $x^2 a^2$

$a^2(x^2+y^2) = x^2 c^2 + 2xcb^2 + b^4$

$x^2+y^2 = \frac{x^2c^2}{a^2} + 2x\frac{c}{a}\frac{b^2}{a} + \frac{b^4}{a^2} = x^2\varepsilon^2 + 2\varepsilon^2 xd + \varepsilon^2 d^2 = \varepsilon^2(x+d)^2$

Wir sind also wieder auf die Gleichung des Orts derjenigen Punkte gekommen, für welche das Verhältniß der Entfernungen von einem festen Punkte und einer festen Geraden constant ist.

Wir wollen jetzt, wenn die Ellipse gegeben ist, ihre beiden Brennpunkte und die Leitlinie construiren. (s. Fig. 51).

Wir haben oben gefunden, daß die Entfernung des Brennpunktes vom Mittelpunkte $=\sqrt{a^2-b^2}=c$ ist. Um den Brennpunkt zu erhalten, brauchen wir also nur die Strecke a in den Zirkel zu nehmen und von B aus auf der großen Axe aufzutragen.

$DM = d+c = \frac{b^2}{c}+c = \frac{b^2+c^2}{c} = \frac{a^2}{c}$

Um D zu erhalten, tragen wir das Stück MC $=c$ auf der kleinen Axe auf, verbinden A mit C, richten auf AC in A ein $\perp$ bis zum Schnitt mit der verlängerten kleinen Axe, dann ist

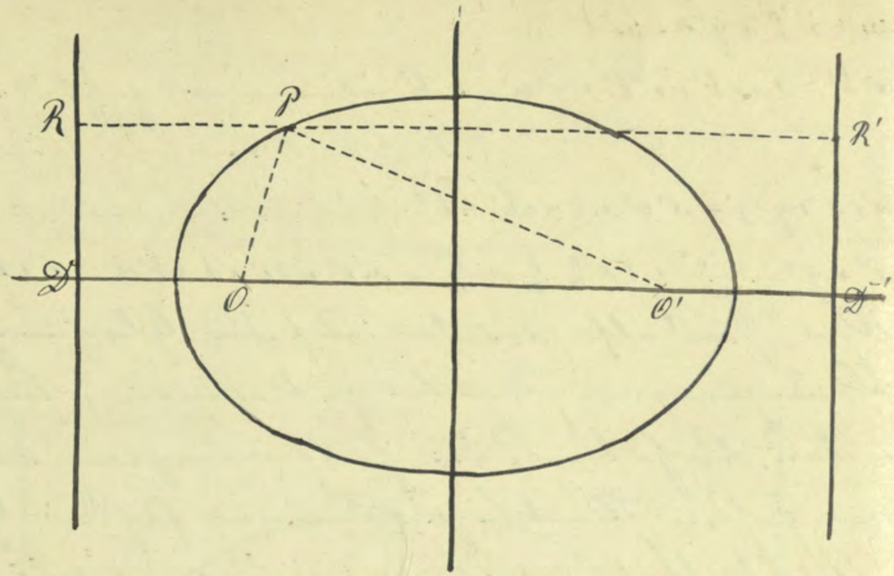

Fig. 52.

Satz 28. Die **Ellipse** ist der Ort derjenigen Punkte, für welche das Verhältnis der Entfernungen von jedem ihrer Brennpunkte zu der von der zugehörigen Leitlinie (**Directrix**) $= \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$, der numerischen **Excentricität** der Ellipse ist. Die Brennpunkte liegen auf der großen Axe gleich weit vom Mittelpunkte um $\sqrt{a^2-b^2}$ entfernt und die Leitlinien liegen senkrecht zur großen Axe und sind gleich weit vom Mittelpunkt um das Stück $\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$ entfernt. Die Summe der Entfernungen eines jeden Punktes der Ellipse von den beiden Brennpunkten ist gleich der

$MF = \frac{a^2}{c} = DM.$

Da die Ellipse eine symmetrische Figur ist, können wir noch eine zweite Leitlinie D', die zum Brennpunkte O' gehört annehmen.

Es bleibt noch übrig, eine besonders wichtige Eigenschaft der Ellipse kennen zu lernen. (s. Fig. 52.).

$$OP = \varepsilon\, PR$$
$$O'P = \varepsilon\, PR'$$
$$OP + O'P = \varepsilon\,(PR + PR') = \varepsilon\, RR' = \varepsilon\, DD' = 2\varepsilon\, MD^0 =$$
$$= 2\varepsilon \frac{a^2}{c} = 2\frac{c}{a} \cdot \frac{a^2}{c} = 2a$$

d. h.: Die Summe der Entfernungen eines jeden Punktes der Ellipse von den beiden Brennpunkten ist gleich der großen Axe.

Auf diesem Satze beruht auch die einfache Konstruktion einer Ellipse vermittelst eines Fadens.

Befestigt man in den beiden Brennpunkten O u. O' die Enden eines Fadens, dessen Länge größer als OO' ist, und führt einen Stift so, daß er den Faden fortwährend gespannt erhält, so beschreibt dieser Stift eine Ellipse.

III Fall: $\varepsilon > 1$. Die Kurve $x^2(1-\varepsilon^2)+y^2-2\varepsilon^2 dx-\varepsilon^2 d^2=0$

großen Achse. Jeder von einem Brennpunkte ausgehende Lichtstrahl wird durch die Ellipse in den andern reflektiert.

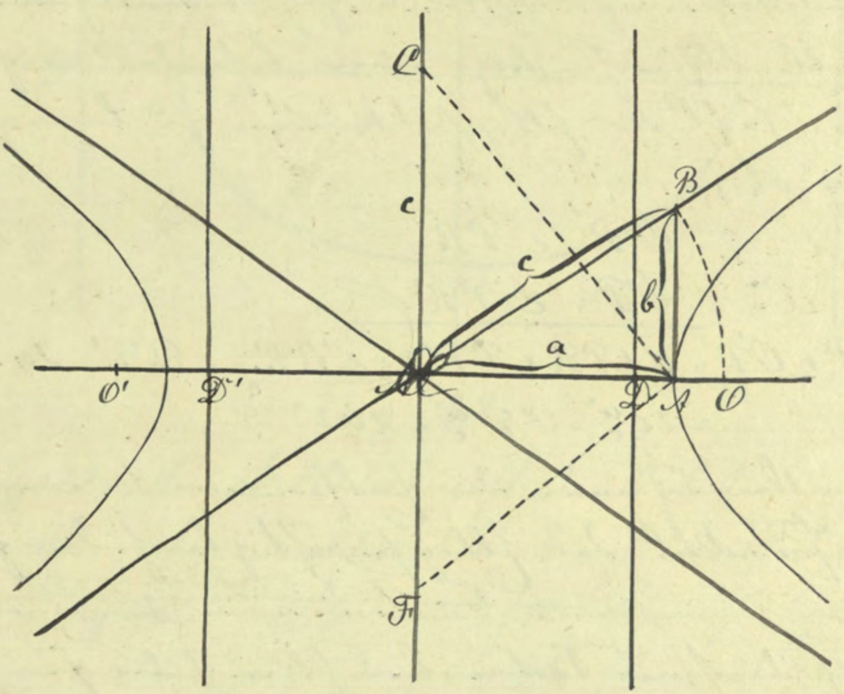

Fig. 53.

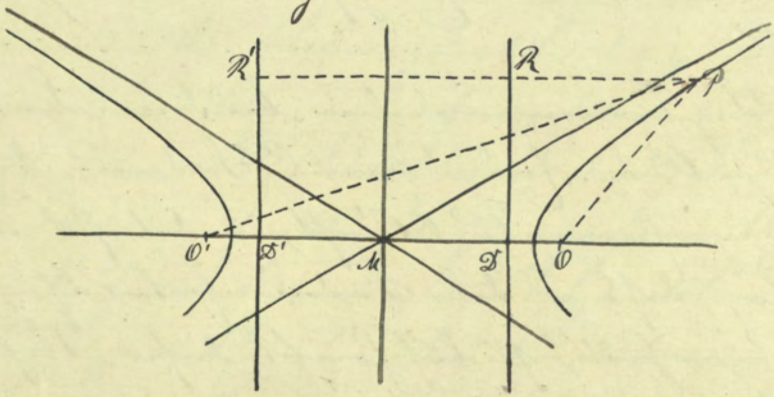

Fig. 54.

ist also eine Hyperbel.

Der Mittelpunkt der Hyperbel hat die C.!

$$l = -\frac{D}{A} = \frac{\varepsilon^2 d}{1-\varepsilon^2} = -\frac{\varepsilon^2 d}{\varepsilon^2-1} \; ; \; m = -\frac{E}{B} = 0$$

Der Mittelpunkt liegt also links vom Brennpunkte.

$$a^2 = \frac{\varepsilon^2 d^2}{(1-\varepsilon^2)^2} \; ; \qquad b^2 = \frac{\varepsilon^2 d^2}{\varepsilon^2-1}$$

$$a^2+b^2 = \frac{\varepsilon^2 d^2}{(\varepsilon^2-1)^2} + \frac{\varepsilon^2 d^2}{\varepsilon^2-1} = \frac{\varepsilon^4 d^2}{(\varepsilon^2-1)^2} = c^2$$

$$\varepsilon = \frac{c}{a}$$

$$d = \frac{a(\varepsilon^2-1)}{\varepsilon} = \frac{b^2}{c}$$

Die Entfernung der Leitlinie vom Mittelpunkte beträgt $c-d = c - \frac{b^2}{c} = \frac{c^2-b^2}{c} = \frac{a^2}{c}$.

Wenn die Hyperbel mit ihren Asymptoten gegeben ist, so kann man sich also die Brennpunkte und Leitlinien in ganz analoger Weise construiren wie bei der Ellipse. (s. Fig. 53).

Wir haben erst gefunden, daß bei einer Ellipse die Summe der Entfernungen eines Punktes derselben von den beiden Brennpunkten gleich der großen Axe ist. Die Hyperbel hat eine ähnliche Eigenschaft: (s. Fig. 54).

$$PO = \varepsilon\, PR$$
$$PO' = \varepsilon\, PR'$$

$$PO' - PO = \varepsilon(PR' - PR) = \varepsilon\, RR' = \varepsilon\, DD' = 2\varepsilon\, MD = 2\varepsilon \cdot \frac{a^2}{c} = \frac{2ca^2}{ac} = 2a$$

Satz 29. Die **Hyperbel** ist der Ort derjenigen Punkte, für welche das Verhältnis der Entfernung von jedem ihrer Brennpunkte zu der von der zugehörigen Leitlinie $= \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$ ist. Der Brennpunkt liegt auf der reellen Axe und vom Mittelpunkt um das Stück $\pm\sqrt{a^2+b^2}$ entfernt. Die Leitlinie steht senkrecht zur reellen Axe und ist vom Mittelpunkt um das Stück $\frac{\pm a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ entfernt. Die Differenz der Entfernungen jedes Punktes der Hyperbel von den beiden Brennpunkten ist gleich $2a$, der reellen Axe. Jeder von einem Brennpunkte ausgehende Lichtstrahl wird durch die Hyperbel, rückwärts verlängert, in dem andern Brennpunkt reflectiert.

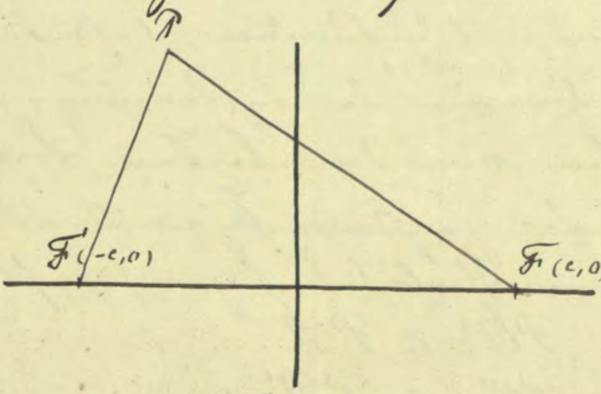

Fig. 55.

d. h. die Differenz der Entfernungen eines Punktes der Hyperbel von den beiden Brennpunkten ist gleich der reellen Axe $2a$.

Wir wollen jetzt umgekehrt die Gleichung des Ortes derjenigen Punkte aufstellen, für welche die Summe resp. Differenz der Entfernungen von zwei festen Punkten constant ist. (s. Fig. 55.) Coll. 20 $\frac{25}{II}$ 92.

$$FP \pm F'P = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} \pm \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a$$

$$(x-c)^2+y^2+(x+c)^2+y^2 \pm 2\sqrt{(x^2+y^2+c^2-2xc)(x^2+y^2+c^2+2xc)} = 4a^2$$

$$\cancel{2}x^2+\cancel{2}y^2+\cancel{2}c^2 \pm \cancel{2}\sqrt{(x^2+y^2+c^2-2xc)(x^2+y^2+c^2+2xc)} = \cancel{4}2a^2$$

$$x^2+y^2+c^2-2a^2 = \mp\sqrt{(x^2+y^2+c^2)^2-4x^2c^2}$$

$$\cancel{(x^2+y^2+c^2)^2}+4a^4-4a^2(x^2+y^2+c^2) = \cancel{(x^2+y^2+c^2)^2}-4x^2c^2$$

$$a^4 = x^2(a^2-c^2)+y^2a^2+a^2c^2$$

$$x^2(a^2-c^2)+y^2a^2 = a^2(a^2-c^2)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2} = 1$$

Wir erhalten also, trotzdem daß eigentlich nach zwei geometrischen Orten gefragt wurde nur eine Gleichung. Ist $a > c$, so stellt dieselbe eine Ellipse dar. In diesem Falle kann aber nur $FP + F'P = 2a$ sein; denn $FP - F'P$ ist immer kleiner als FF', also

auch $< 2c$. Wir hätten dann $2a < 2c$, was unmöglich gleichzeitig mit $a > c$ der Fall sein kann. Ist umgekehrt wieder $a < c$, dann kann wieder nur die Gleichung $FP - F'P = 2a$ bestehen, denn $FP + F'P = 2a$ ist größer als $FF' > 2c$. Im letzteren Falle stellt unsere Gleichung eine Hyperbel dar.

Die Entstehung der Namen der Linien zweiten Grades.

Die Namen stammen, wie schon ihr Wortklang zeigt, aus dem Griechischen. Die Alten fanden die Kurven als Durchschnittslinien einer Ebene und eines Kegels und nannten sie deshalb „κονικά" d. h. Kegelschnitte.

Um die Bedeutung dieser Namen: Parabel, Ellipse und Hyperbel, kennen zu lernen, müssen wir alle diese Kurven auf ihren Scheitelpunkt als Anfangspunkt beziehen. Gehen wir von der Gleichung:

$$x^2 + y^2 = \varepsilon^2 (x + d)^2$$ aus.

Um diese Gleichung auf den Scheitelpunkt zu transformieren, haben wir zu setzen:

$$x = x' - \frac{\varepsilon d}{1 + \varepsilon} \quad u. \quad y = y'$$

$x+d = x' - \frac{\varepsilon d}{1+\varepsilon} + d = x' + \frac{d}{1+\varepsilon}$

Unsere Gleichung geht dann über in:

$$x'^2 - \frac{2x'\varepsilon d}{1+\varepsilon} + \frac{\varepsilon^2 d^2}{(1+\varepsilon)^2} + y'^2 = \varepsilon^2 x'^2 + \frac{2\varepsilon^2 d x'}{1+\varepsilon} + \frac{\varepsilon^2 d^2}{(1+\varepsilon)^2}$$

$$\underline{y'^2 = 2x'\varepsilon d - x'^2(1-\varepsilon^2)}$$

εd ist aber die Ordinate die im Brennpunkte errichtet ist, denn setzen wir in der Gleichung $x^2+y^2=\varepsilon^2(x+d)^2$ $x=0$, so erhalten wir $y=\varepsilon d$.

Diese Größe wird aber Parameter genannt und durch p bezeichnet. Unsere Gleichung lautet dann:

$$\underline{y'^2 = 2x'p - x^2(1-\varepsilon^2)}$$

Die Alten verstanden unter dem Parameter die Größe $2p$ und drückten infolge dessen diese Gleichung durch den Satz aus:

„Das Quadrat der Ordinate ist gleich
„dem Rechteck aus dem Parameter und
„der Abscisse vermindert um das Flä-
„chenstück $x'^2(1-\varepsilon^2)$."

Je nachdem $\varepsilon \overset{=}{\lessgtr} 1$ war, erhielten sie eine Parabel, Ellipse oder Hyperbel.

Bei der <u>Parabel</u> war das Quadrat genau gleich dem Rechteck, daher nannten sie die Kurve: <u>παραβολή (Gleichheit)</u>.

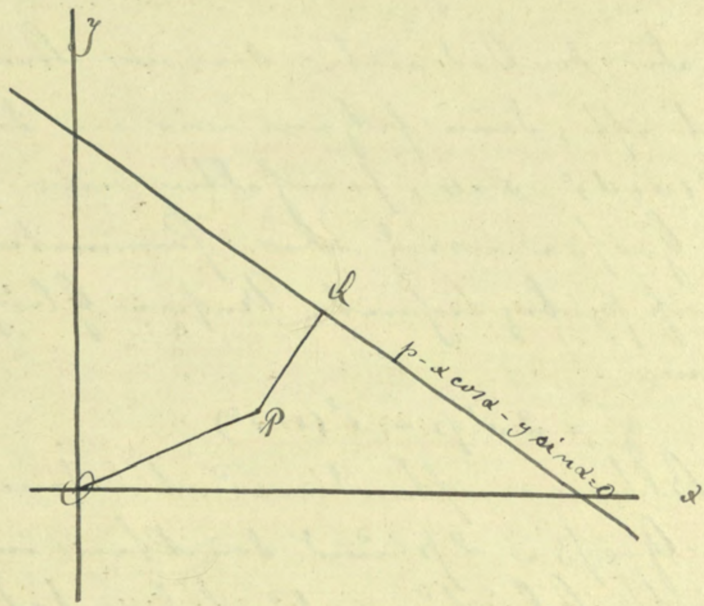

Fig. 56.

Bei der Ellipse fehlte noch etwas, daher der Name ἔλλειψις (Fehlbetrag).
Bei der Hyperbel kam noch etwas hinzu, daher ὑπερβολή (Ueberschuss).
Die Curven verdanken also nur der zufälligen Form, in welcher die Alten sie ausdrückten.
Bei unserer bisherigen Betrachtung nahmen wir die feste Gerade (immer) als senkrecht auf der x-Axe stehend an und kamen so zu der Gleichung:

$$x^2+y^2=\varepsilon^2(x+d)^2$$

Wir wollen nun den Fall betrachten, wo die

Directrix nicht senkrecht auf der x-Axe

steht, sondern die Gleichung hat (s. Fig. 56.)

$$p-x\cos\alpha-y\sin\alpha=0$$

Den Punkt O lassen wir noch der Bequemlichkeit halber als Anfangspunkt bestehen.

$$PO=\varepsilon\,.\,PQ$$

$$PO=\sqrt{x^2+y^2}\;;\quad PQ=p-x\cos\alpha-y\sin\alpha$$

$$x^2+y^2=\varepsilon^2(p-x\cos\alpha-y\sin\alpha)^2$$

$$=\varepsilon^2(p^2-2px\cos\alpha+x^2\cos^2\alpha-2py\sin\alpha+2xy\cos\alpha\sin\alpha+y^2\sin^2\alpha)$$

Ordnen wir die Gleichung nach Potenzen von x und y.

$$x^2(1-\varepsilon^2\cos^2\alpha)+y^2(1-\varepsilon^2\sin^2\alpha)-2xy\,\varepsilon^2\cos\alpha.\sin\alpha+2x\varepsilon^2p\cos\alpha$$
$$+2y\varepsilon^2p\sin\alpha-\varepsilon^2p^2=0$$

In der allgemeinsten Form hat die Gleichung die Gestalt:

$$\underline{Ax^2+By^2+2Cxy+2Dx+2Ey+F=0}$$

In dieser Gleichung kommt das Glied xy vor, welches wir bei unseren bisherigen Betrachtungen nicht hatten.

Es fragt sich nun: Stellt die obige Gleichung, wenn wir den Coefficienten A, B, C, D, E, F beliebige Werte beilegen, in jedem Falle einen Kegelschnitt dar?

Wir müssen also probieren, eine solche C! Transformation vorzunehmen, daß der Coefficient von xy verschwindet. Gelingt uns dieses, so stellt die Gleichung in der That immer einen Kegelschnitt dar.

Setzen wir also: Coll 21 $\frac{27}{II}$ 92.

$$\underline{x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha}$$
$$\underline{y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha}$$

so geht unsere Gleichung über in:

$$A(x'^2\cos^2\alpha + y'^2\sin^2\alpha - 2x'y'\cos\alpha\cdot\sin\alpha)$$
$$+ B(x'^2\sin^2\alpha + y'^2\cos^2\alpha + 2x'y'\cos\alpha\cdot\sin\alpha)$$
$$+ 2C(x'^2\cos\alpha\cdot\sin\alpha - y'^2\cos\alpha\cdot\sin\alpha + x'y'(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha))$$
$$+ 2D(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha) + 2E(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) + F = 0$$

oder allgemein ausgedrückt:

$A'x'^2 + B'y'^2 + 2C'x'y' + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0$, wo:

$$A' = A\cos^2\alpha + B\sin^2\alpha + C\sin 2\alpha$$
$$B' = A\sin^2\alpha + B\cos^2\alpha - C\sin 2\alpha$$
$$C' = -\frac{A+B}{2}\sin 2\alpha + C\cos 2\alpha$$
$$D' = D\cos\alpha + E\sin\alpha$$
$$E' = -D\sin\alpha + E\cos\alpha$$
$$F' = F$$

α kann ganz willkürlich angenommen werden. Wenn wir nun α so bestimmen, dass $C' = 0$ wird, so erhalten wir:

$$\frac{B-A}{2}\sin 2\alpha + C\cos 2\alpha = 0\ ;\ \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2C}{A-B}$$

Wenn wir also dem Winkel α einen solchen Wert geben, dass $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2C}{A-B}$ ist, so verschwindet C' aus unserer Gleichung. Da wir aber α immer so bestimmen können, so stellt unsere Gleichung auch immer einen Kegelschnitt dar.

Durch die oben gefundene Formel ist der Winkel α jedoch nur bis auf Vielfa-

Bilden wir jetzt das Produkt der beiden Größen:

$$A'B' = \tfrac{1}{4}\left((A+B)^2-(A-B)^2-4C^2\right)$$

$$\underline{A'B' = AB - C^2}$$

Aus dieser Formel können wir schon die Entscheidung treffen, in welchem Falle wir es mit einer Parabel zu thun haben.

Unsere Gleichung 2ten Grades hatte die Form erhalten:

$$\underline{A'x'^2 + B'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0}$$

Wenn dieselbe eine Parabel darstellen soll, so muß A' oder $B' = 0$ sein, mithin auch $\underline{A'B' = 0}$, also:

$$\underline{AB = C^2}$$

Setzen wir nun den Fall, daß $A' = 0$, dann ist:

$$A \cos^2\alpha + B \sin^2\alpha + 2C \sin\alpha \cdot \cos\alpha = 0$$

mit A multipliciert:

$$A^2 \cos^2\alpha + AB \sin^2\alpha + 2AC \sin\alpha \cdot \cos\alpha = 0,$$

oder da $AB = C^2$

$$A^2 \cos^2\alpha + C^2 \sin^2\alpha + 2AC \cos\alpha \cdot \sin\alpha = 0$$

$$(A \cos\alpha + C \sin\alpha)^2 = 0, \text{ folgl. auch:}$$

$$A \cos\alpha + C \sin\alpha = 0, \text{ also:}$$

Satz 30. Die Gleichung $Ax^2+By^2+2Cxy+2Dx+2Ey+F=0$ stellt, sobald $AB=C^2$ ist eine Parabel dar, deren Axe den durch $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{A}{C}=-\frac{C}{B}$ bestimmten Winkel mit der x-Axe bildet.

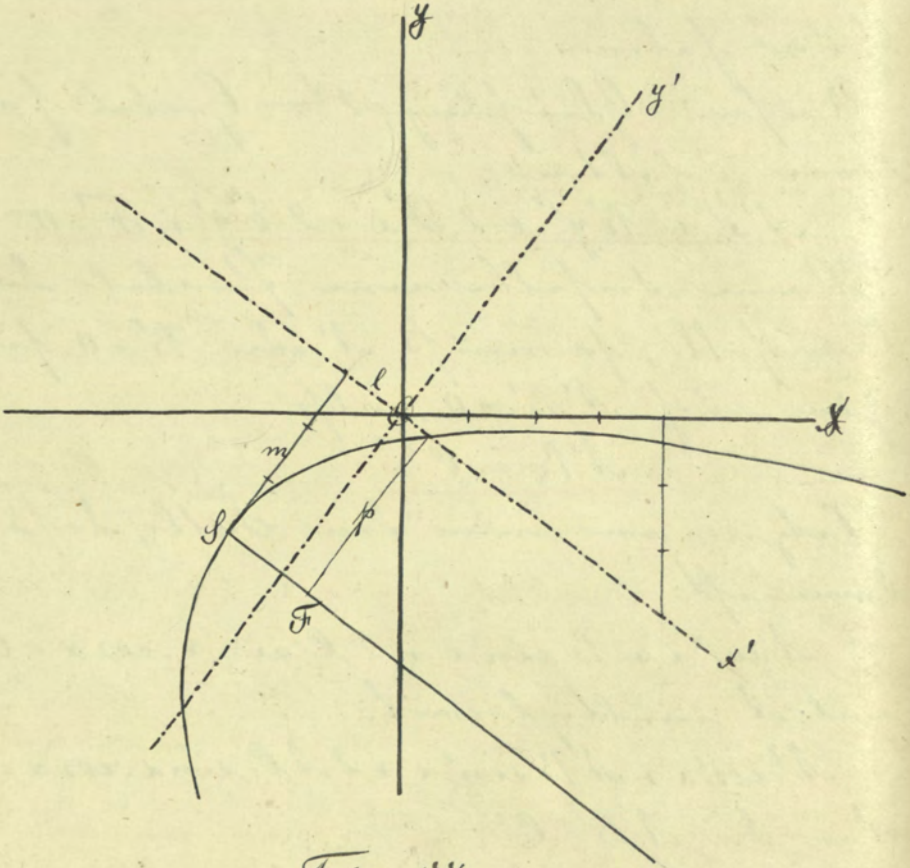

Fig. 57.

$tg\,a = -\frac{A}{C} = -\frac{C}{B}$

So haben wir jetzt also auch den Winkel berechnet, den die Axe der Parabel mit der x-Axe bildet.

Beispiel: $9x^2+24xy+16y^2-30x+210y+75=0.$ Coll $22\frac{3}{III}92$

$A=9;\ B=16;\ C=12;\ D=-15;\ E=105;\ F=75.$

$AB = 9.16 = 144 = 12.12 = C^2$ folglich haben wir es mit einer **Parabel** zu thun.

$$tg\,\alpha = -\frac{A}{C} = -\frac{3}{4}$$

$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}} = \frac{4}{5}$

$\sin\alpha = tg\,\alpha.\cos\alpha = -\frac{3}{5}.$

$A' = 0$

$B' = A+B = 25$

$D' = D\cos\alpha + E\sin\alpha = -75$

$E' = -D\sin\alpha + E\cos\alpha = 75$

$F' = F = 75.$

Wenn wir das C! System um den Winkel α drehen, geht unsere Gleichung also über in:

$25y'^2 - 2.75x' + 2.75y' + 75 = 0$ oder

$y'^2 - 6x' + 6y' + 3 = 0$

Die C! des Scheitelpunktes im neuen System sind:

$l' = \frac{E'^2 - B'F'}{2D'B'} = -1$ und $m' = -\frac{E'}{B'} = -3$

im ursprünglichen System:

$l = l'\cos\alpha - m'\sin\alpha = -\frac{13}{5}$; $m = l'\sin\alpha + m'\cos\alpha = -\frac{9}{5}.$

Der Parameter $p = -\dfrac{\mathfrak{D}'}{\mathfrak{B}'} = 3$.

Die Parabel hat also die Gestalt, wie Fig 57 zeigt.

Wir wollen jetzt dazu übergehen δ' zu berechnen.

$$\delta' = A'\mathfrak{E}'^2 + B'\mathfrak{D}'^2 - A'B'\mathfrak{F}'$$

$$A'\mathfrak{E}'^2 + B'\mathfrak{D}'^2 = \tfrac{1}{2}\left\{(A+B)(\mathfrak{E}'^2+\mathfrak{D}'^2) + \sqrt{(A-B)^2+4C^2}\,(\mathfrak{E}'^2-\mathfrak{D}'^2)\right\}$$

$$\mathfrak{E}'^2 = \mathfrak{D}^2\sin^2\alpha + \mathfrak{E}^2\cos^2\alpha - 2\mathfrak{D}\mathfrak{E}\sin\alpha.\cos\alpha$$

$$\underline{\mathfrak{D}'^2 = \mathfrak{D}^2\cos^2\alpha + \mathfrak{E}^2\sin^2\alpha + 2\mathfrak{D}\mathfrak{E}\sin\alpha.\cos\alpha}$$

$$\mathfrak{E}'^2 + \mathfrak{D}'^2 = \mathfrak{E}^2 + \mathfrak{D}^2$$

$$\mathfrak{E}'^2 - \mathfrak{D}'^2 = \mathfrak{E}^2\cos 2\alpha - \mathfrak{D}^2\cos 2\alpha - 2\mathfrak{D}\mathfrak{E}\sin 2\alpha$$

$$= \frac{(\mathfrak{E}^2-\mathfrak{D}^2)(A-B) - 4C\mathfrak{D}\mathfrak{E}}{\sqrt{(A-B)^2+4C^2}}$$

$$A'\mathfrak{E}'^2 + B'\mathfrak{D}'^2 = \tfrac{1}{2}\left\{(A+B)(\mathfrak{D}^2+\mathfrak{E}^2) + (\mathfrak{E}^2-\mathfrak{D}^2)(A-B) - 4C\mathfrak{D}\mathfrak{E}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\begin{matrix} A\mathfrak{D}^2 + B\mathfrak{D}^2 + A\mathfrak{E}^2 + B\mathfrak{E}^2 - 4C\mathfrak{D}\mathfrak{E} \\ -A\mathfrak{D}^2 + B\mathfrak{D}^2 + A\mathfrak{E}^2 - B\mathfrak{E}^2 \end{matrix}\right\}$$

$$= A\mathfrak{E}^2 + B\mathfrak{D}^2 - 2C\mathfrak{D}\mathfrak{E}.$$

$$\delta' = \Delta = A\mathfrak{E}^2 + B\mathfrak{D}^2 - 2C\mathfrak{D}\mathfrak{E} - \mathfrak{F}(AB - C^2)$$

Anm.: Die Größe Δ wird die **Discriminante** des Kegelschnitts genannt.

Mit Hilfe dieser Größen können wir jetzt die Curve vollständig darstellen.

$$\frac{1}{a^2} = \frac{A'^2B'}{\delta'} = \frac{AB-C^2}{\Delta}A' \;;\quad \frac{1}{b^2} = \frac{A'B'^2}{\delta'} = \frac{AB-C^2}{\Delta}B'$$

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2} = \frac{AB-C^2}{\Delta}(A'+B') = \frac{AB-C^2}{\Delta}(A+B)$$

$$\frac{1}{a^2b^2} = \frac{(AB-C^2)^2}{\Delta^2}A'B' = \frac{(AB-C^2)^3}{\Delta^2}$$

Wir können auch die Axen direct durch A, B, C u. Δ ausdrücken:

$$a^2 = \frac{\delta'}{A'^2B'} = \frac{\delta'}{A'^2B'^2}B' = \frac{\Delta}{2(AB-C^2)^2}\left(A+B-\sqrt{(A-B)^2+4C^2}\right)$$

$$b^2 = \frac{\Delta}{2(AB-C^2)^2}\left(A+B+\sqrt{(A-B)^2+4C^2}\right)$$

Die quadratische Linie ist eine Ellipse, wenn A', B' u. δ' von demselben Zeichen sind. Dann ist aber $A'B'$ positiv, und $A'+B'$ u. δ von demselben Zeichen. Wenn die Linie also eine Ellipse sein soll, so muß $AB-C^2$ positiv und $A+B$ von demselben Zeichen wie Δ sein.

Eine Hyperbel wird dargestellt, wenn $A'B'$, also $AB-C^2$ negativ ist und Δ von 0 verschieden.

Ist $AB-C^2$ negativ und $\Delta = 0$, so stellt die Gleichung ein Paar gerader Linien dar.

Wir wollen jetzt die C! des Mittelpunktes berechnen. Coll 23 $\frac{4}{III}$ 92. Wir könnten in den Formeln $l' = -\frac{D'}{A'}$ u. $m' = -\frac{E'}{B'}$, l', m', A', B', D', E' durch l, m, A, B, D, E ausdrücken, wir kommen aber viel schneller zum Ziele, wenn wir ein ähnliches Ver-

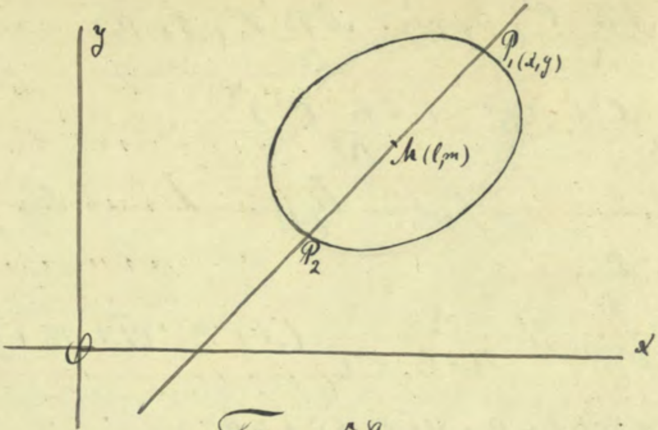

Fig. 58.

Satz 31. Die Gleichung $Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0$ stellt eine Ellipse dar, wenn $AB - C^2$ positiv und $A + B$ und $\Delta = AE^2 + BD^2 - 2CDE - F(AB - C^2)$ von demselben Zeichen, eine Hyperbel, wenn $AB - C^2$ negativ und Δ von 0 verschieden, zwei gerade Linien, wenn $AB - C^2$ negativ und $\Delta = 0$ ist.
Der Mittelpunkt dieser Linie hat in jedem Falle die C!

$$l = \frac{EC - BD}{AB - C^2} \quad \text{und} \quad m = \frac{CD - AE}{AB - C^2}$$

und seine Hauptachse bildet mit der x-Achse den Winkel α, der bestimmt ist durch die Formel:

$$\cos 2\alpha = \frac{A - B}{\sqrt{(A-B)^2 + 4C^2}}.$$

fahren werden, wie bei der Berechnung der Mittelpunktscoordinaten der quadratischen Linie $Ax^2+By^2+2Dx+2Ey+F=0$. (s. Fig. 58).

Der Punkt P_1 hat die C! $\underline{x=l+u\cos\alpha}$ und

$\underline{y=m+u\sin\alpha}$

Da P_1 aber auch ein Punkt unserer Curve ist, so muß er der Gleichung derselben genügen, also:

$$A(l+u\cos\alpha)^2+B(m+u\sin\alpha)^2+2C(l+u\cos\alpha)(m+u\sin\alpha)$$
$$+2D(l+u\cos\alpha)+2E(m+u\sin\alpha)+F=0$$

Nach Potenzen von u geordnet:

$$Al^2+Bm^2+2Clm+2Dl+2Em+F$$
$$+2u(Al\cos\alpha+Bm\sin\alpha+Cl\sin\alpha+Cm\cos\alpha+D\cos\alpha+E\sin\alpha)$$
$$+u^2(A\cos^2\alpha+B\sin^2\alpha+2C\sin\alpha\cdot\cos\alpha)=0$$

Soll nun l, m ein Mittelpunkt sein, so dürfen sich die beiden Werte von u nur durch das Vorzeichen von einander unterscheiden. Wenn das aber der Fall ist, so muß das Glied mit 2u verschwinden, also:

$$Al\cos\alpha+Bm\sin\alpha+Cl\sin\alpha+Cm\cos\alpha+D\cos\alpha+E\sin\alpha=0$$
$$\underline{(Al+Cm+D)\cos\alpha+(Bm+Cl+E)\sin\alpha=0}$$

Dieser Ausdruck muß für jeden Wert von α gleich 0 sein, also auch für $\alpha=0°$ u. $\alpha=90°$. So erhalten wir:

Ist die Gleichung der Linie auf den Mittelpunkt und die Hauptaxen bezogen:

$$\frac{\xi^2}{a^2} \pm \frac{\eta^2}{b^2} = 1,$$ so ist:

$$a^2 = \frac{\Delta}{2(AB - C^2)^2}\left(A + B - \sqrt{(A-B)^2 + 4C^2}\right)$$

$$b^2 = \frac{\Delta}{2(AB - C^2)^2}\left(A + B + \sqrt{(A-B)^2 + 4C^2}\right).$$

$$Al + Cm + D = 0$$
$$Cl + Bm + E = 0$$
$$l(AB - C^2) + BD - CE = 0$$
$$l = \frac{CE - BD}{AB - C^2}$$
$$m(AB - C^2) + AE - CD = 0$$
$$m = \frac{CD - AE}{AB - C^2}$$

Wenn die beiden Axen einer Hyperbel gleich groß sind, so wird sie eine gleichseitige genannt. Ihre Gleichung ist $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$. Der halbe Asymptotenwinkel ist dann bestimmt durch $tg\,\alpha = \frac{a}{a} = 1$ d.h. die Asymptoten stehen senkrecht auf einander.

Beispiel: $52x^2 - 72xy + 73y^2 + 32x + 74y - 47 = 0$

$A = 52$; $B = 73$; $C = -36$; $D = 16$; $E = 37$; $F = -47$.

$AB - C^2 = 3796 - 1296 = 2500$

$A + B = 125$

$\Delta = 71188 + 18688 + 42624 + 117500 = 250000$.

$AB - C^2$ ist positiv, $A + B$ und Δ sind von demselben Vorzeichen, folgl. haben wir eine Ellipse.

$a^2 = \frac{250000}{2 \cdot 2500^2}(125 - 75) = 1$ $\qquad a = 1$

$b^2 = \frac{1}{50}(125 + 75) = 4$ $\qquad b = 2$

Wir müssen jetzt den Winkel berechnen,

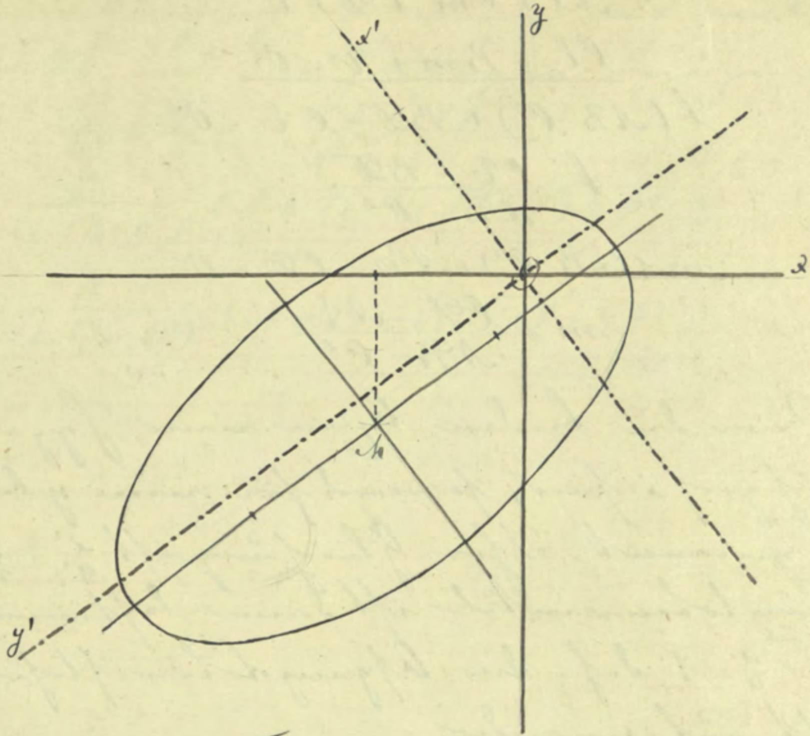

Fig. 59.

Satz 31a. Die Gleichung $Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0$ stellt einen Kreis dar, wenn $A = B$ und $C = 0$, eine gleichseitige Hyperbel oder 2 zu einander senkrechte Geraden, wenn $A + B = 0$ ist.

den die a-Axe der Ellipse mit der Abscissenaxe bildet.

$$\cos 2\alpha = \frac{-21}{75} = -\frac{7}{25} \qquad \sin 2\alpha = \frac{-72}{75} = -\frac{24}{25}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{\cos 2\alpha + 1}{2}} = \sqrt{\frac{54}{2\cdot 75}} = \frac{3}{5}\ ; \quad \sin\alpha = \frac{4}{5}$$

Die C! des Mittelpunktes sind:

$$l = \frac{-1332 - 1168}{2500} = -1 \text{ u. } m = \frac{-576 - 1924}{2500} = -1$$ (s. Fig. 59.)

Wir wollen jetzt untersuchen, wann die Coll. 24 5/III 92.
Gleichung $Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0$ einen Kreis und wann sie eine gleichseitige Hyperbel darstellt?

Die Gleichung stellt einen Kreis dar, wenn $A' = B'$, also:

$$2A' = A + B \qquad 4A'^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$$A'^2 = AB - C^2 \qquad 4A'^2 = 4AB - 4C^2$$

$$A^2 - 2AB + B^2 + 4C^2 = 0$$

$$(A - B)^2 + 4C^2 = 0$$

Die Summe zweier Quadrate kann aber nur dann $= 0$ sein, wenn jeder Summand $= 0$ ist. Die Bedingung dafür, daß die allgemeine Gleichung zweiten Grades einen Kreis darstellt, ist also:

$$A = B \text{ und } C = 0.$$

Soll die Gleichung eine gleichseitige Hyperbel

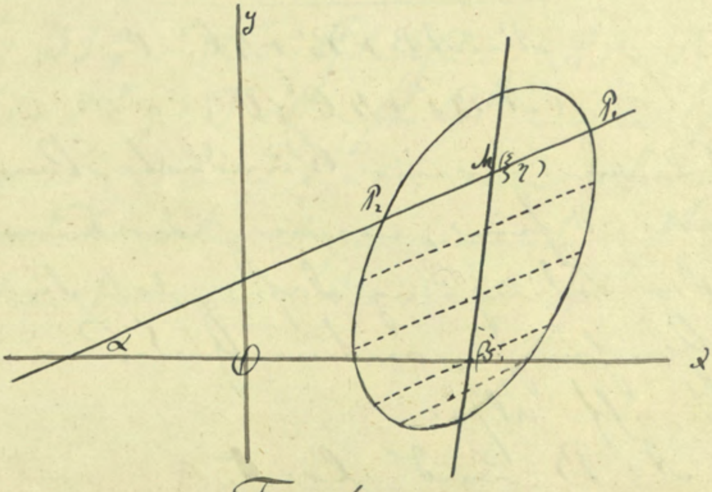

Fig. 60.

darstellen, so muß, da a^2 und b^2 von entgegengesetzten Vorzeichen sind einander gleich sind, $a^2+b^2=0$ sein, also auch, wenn man für a^2 u. b^2 ihre Werte einsetzt:

$$A+B=0$$

Soll die Gleichung ein Paar sich schneidender geraden Linien darstellen, so muß $\Delta=0$ sein. Die geraden Linien bilden mit der x'-Achse die durch $tg\,\gamma = \pm\sqrt{-\frac{A'}{B'}}$ bestimmten Winkel. Mit einander bilden sie also den Winkel, der bestimmt wird durch:

$$tg\,2\gamma = \frac{2\,tg\,\gamma}{1-tg^2\gamma} = \frac{2\sqrt{-\frac{A'}{B'}}}{1+\frac{A'}{B'}} = \frac{2\sqrt{-A'B'}}{A'+B'} = \frac{2\sqrt{C^2-AB}}{A+B}$$

Sollen die beiden Geraden senkrecht aufeinander stehen, so muß $tg\,2\gamma=\infty$, also $A+B=0$ sein.

Conjugierte Durchmesser.

Aufgabe. Den Ort der Mittelpunkte paralleler Sehnen der Curve $Ax^2+By^2+2Cxy+2Dx+2Ey+F=0$ zu finden. (s. Fig. 60).

M sei ein Punkt unserer Curve und habe die C.! ξ u. η.

P_1 hat dann die C.! $x_1=\xi+u\cos\alpha$, $y_1=\eta+u\sin\alpha$

P_2 " " " $x_2=\xi-u\cos\alpha$, $y_2=\eta-u\cos\alpha$

Dann muß aber, wie wir früher (Seite 75) gefunden haben:

$$(A\xi + C\eta + D)\cos\alpha + (C\xi + B\eta + E)\sin\alpha = 0 \text{ sein}$$

Die Gleichung des gesuchten Ortes ist also:

$$\underline{\xi(A\cos\alpha + C\sin\alpha) + \eta(C\cos\alpha + B\sin\alpha) + D\cos\alpha + E\sin\alpha = 0}$$

Da diese Gleichung aber vom ersten Grade ist, so ist der Ort der Mittelpunkte paralleler Sehnen eine gerade Linie. Da dieselbe auch die durch den Mittelpunkt gehende Sehne halbieren muß, so folgt daraus, daß sie selbst durch den Mittelpunkt geht.

Der Winkel β, den die Gerade mit der x-Axe bildet, ist gegeben durch:

$$\underline{tg\beta} = -\frac{A\cos\alpha + C\sin\alpha}{B\sin\alpha + C\cos\alpha} = \underline{-\frac{A + C\,tg\alpha}{C + B\,tg\alpha}}$$

Wir wollen jetzt umgekehrt α durch β ausdrücken:

$$tg\beta(C + B\,tg\alpha) = -A - C\,tg\alpha$$

$$\underline{C(tg\alpha + tg\beta) + B\,tg\alpha . tg\beta + A = 0}$$

Diese Gleichung ist aber für α u. β symmetrisch, also wird α durch β genau in derselben Art ausgedrückt, wie β durch α:

$$\underline{tg\alpha = -\frac{A + C\,tg\beta}{C + B\,tg\beta}}$$

zwei Durchmesser, deren Winkel mit der x-Axe in obiger Abhängigkeit von einander stehen, werden conjungierte Durchmesser genannt.

Zwei Durchmesser sind also conjungiert, wenn der eine der Ort der Mittelpunkte der dem andern parallelen Sehnen ist.

Wir wollen jetzt die Gleichungen für Ellipse und Hyperbel auf zwei conjugierte Durchmesser als Axen beziehen. Wenn die Gleichung der Kegelschnitte gegeben ist in der allgemeinen Form: $Ax^2+By^2+2Cxy+2Dx+2Ey+F=0$, so sind die C.' des Mittelpunkts:

$$l=\frac{CE-BD}{AB-C^2} \quad \text{und} \quad m=\frac{CD-AE}{AB-C^2}$$

Soll derselbe der C.' Anfangspunkt sein, so muß $l=m=0$ sein, folgl.:

$$\begin{array}{r|l} CE-BD=0 & \times A \\ AE-CD=0 & \times C \\ \hline (-AB+C^2)D=0 & \end{array}$$

$D=0$ ebenso findet man:

$E=0$

Das constante Glied können wir $=1$ setzen, indem wir durch dasselbe dividieren.

Die Gleichung nimmt dann die Gestalt an:

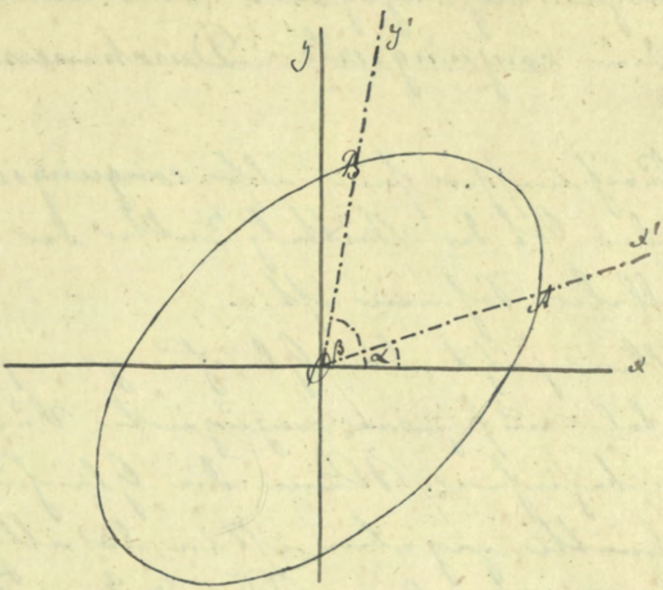

Fig. 61.

$$Ax^2+By^2+2Cxy=1$$

Die Beziehung, die zwischen den Winkeln der conjugirten Durchmesser mit der Abscissenaxe besteht, war ausgedrückt durch:

$$A+C(tg\alpha+tg\beta)+B\,tg\alpha\,.\,tg\beta=0$$

Beziehen wir jetzt die Gleichung auf zwei conjugirte Durchmesser, so haben wir zu setzen: (s. Fig. 61.) Coll. 25/III 92.

$$x=x'\cos\alpha+y'\cos\beta$$

$$y=x'\sin\alpha+y'\sin\beta$$

$$A(x'^2\cos^2\alpha+y'^2\cos^2\beta+2x'y'\cos\alpha\,.\,\cos\beta)+B(x'^2\sin^2\alpha+y'^2\sin^2\beta+2x'y'\sin\alpha\sin\beta)+2C(x'^2\cos\alpha\sin\alpha+y'^2\cos\beta\sin\beta$$
$$+x'y'(\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta)=1$$

Unsere Gleichung hat also die Form:

$$A'x'^2+B'y'^2+2C'x'y'=1,\ \text{wo:}$$

$$A'=A\cos^2\alpha+B\sin^2\alpha+2C\sin\alpha\cos\alpha$$

$$B'=A\cos^2\beta+B\sin^2\beta+2C\sin\beta\cos\beta$$

$$C'=A\cos\alpha\,.\,\cos\beta+B\sin\alpha\,.\,\sin\beta+C(\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta)$$
$$=\cos\alpha\,.\,\cos\beta\,(A+B\,tg\alpha\,.\,tg\beta+C(tg\beta+tg\alpha))=0$$

Unsere Kegelschnitte haben also, auf zwei conjugirte Durchmesser bezogen, die Form:

$$A'x'^2+B'y'^2=1$$

Um jetzt wieder umgekehrt A, B u. C durch A' u. B' auszudrücken, machen wir die entge-

gegengesetzten Transformation:

$$x' = \frac{x\sin\beta - y\cos\beta}{\sin(\beta-\alpha)} \; ; \; y' = \frac{-x\sin\alpha + y\cos\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}$$

$$\frac{A'}{\sin^2(\beta-\alpha)}(x\sin\beta - y\cos\beta)^2 + \frac{B'}{\sin^2(\beta-\alpha)}(-x\sin\alpha + y\cos\alpha)^2 = 1$$

$$\frac{x^2}{\sin^2(\beta-\alpha)}(A'\sin^2\beta + B'\sin^2\alpha) + \frac{y^2}{\sin^2(\beta-\alpha)}(A'\cos^2\beta + B'\cos^2\alpha)$$

$$- \frac{2xy}{\sin^2(\beta-\alpha)}(A'\sin\beta\cos\beta + B'\sin\alpha\cos\alpha) = 1$$

Folglich ist:

$$A = \frac{A'\sin^2\beta + B'\sin^2\alpha}{\sin^2(\beta-\alpha)}$$

$$B = \frac{A'\cos^2\beta + B'\cos^2\alpha}{\sin^2(\beta-\alpha)}$$

$$C = -\frac{A'\sin\beta\cos\beta + B'\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2(\beta-\alpha)}$$

Addieren wir jetzt die beiden Werte von A und B, so erhalten wir:

$$A + B = \frac{A' + B'}{\sin^2(\beta-\alpha)}$$

Bilden wir jetzt $AB - C^2$.

$$AB - C^2 = \frac{1}{\sin^4(\beta-\alpha)}\left\{\begin{array}{l} A'^2\sin^2\beta\cos^2\beta + B'^2\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha + A'B'(\sin^2\beta\cos^2\alpha + \cos^2\beta\sin^2\alpha) \\ - A'^2\sin^2\beta\cos^2\beta - B'^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha - 2A'B'\sin\beta\cos\beta\sin\alpha\cos\alpha \end{array}\right\}$$

$$= \frac{A'B'(\sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha)^2}{\sin^4(\beta-\alpha)}$$

$$AB - C^2 = \frac{A'B'}{\sin^2(\beta-\alpha)}$$

$$\frac{A+B}{AB-C^2} = \frac{A'+B'}{A'B'} = \frac{1}{A'} + \frac{1}{B'}$$

Setzen wir in der Gleichung:

Satz 32. Je zwei Durchmesser einer Ellipse oder Hyperbel sind derartig einander zugeordnet, daß der eine der Ort der Mittelpunkte der Sehnen ist, welche dem andern parallel sind; sie heißen **conjugierte Durchmesser**. Auf ein Paar conjugierter Durchmesser als Axen bezogen hat die Gleichung der Ellipse oder Hyperbel die Form:

$$\frac{x'^2}{a'^2} \pm \frac{y'^2}{b'^2} = 1$$

Bei einer Ellipse ist für alle Paare conjugierter Halbmesser constant die Summe der Quadrate ihrer Längen und der Flächeninhalt des von ihnen gebildeten Dreiecks.

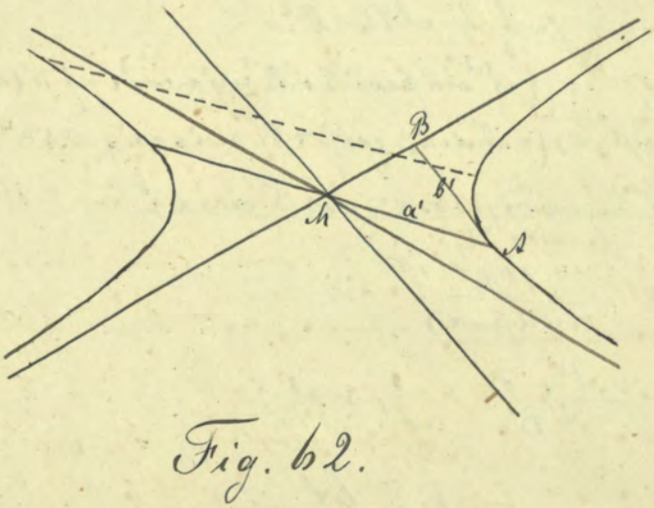

Fig. 62.

$$A'x'^2 + B'y'^2 = 1$$

$y' = 0$, so finden wir: $x' = \frac{1}{\sqrt{A'}}$, dagegen für $x' = 0$ ist $y' = \frac{1}{\sqrt{B'}}$. Bezeichnen wir mit a' u. b' die beiden Durchmesser, auf welche unsere Gleichung bezogen ist, so ist:

$$a' = \frac{1}{\sqrt{A'}} \quad \text{u.} \quad b' = \frac{1}{\sqrt{B'}}, \text{ folgl.}$$

$$\frac{A+B}{AB-C^2} = a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2$$

d. h. die Summe der Quadrate je zweier conjugierter Durchmesser ist constant.

$$\frac{1}{A'} \cdot \frac{1}{B'} \sin^2(\beta - \alpha) = \frac{1}{AB - C^2}$$

$$a'^2 b'^2 \sin^2(\beta - \alpha) = \frac{1}{AB - C^2}$$

$$\frac{1}{2} a'b' \sin(\beta - \alpha) = \frac{1}{2\sqrt{AB - C^2}} = \frac{1}{2} ab.$$

d. h. der Inhalt der von conjugierten Durchmessern eingeschlossenen Dreiecke ist constant.

Anm: Wir erhalten die Hauptaxen der Kegelschnitte, sobald wir $(\beta - \alpha) = 90^\circ$ setzen. Bei der Hyperbel ist der eine Durchmesser imaginär, wie ja auch die eine Hauptaxe imaginär genannt wurde. Man erhält die Länge des imaginären conjugierten Durchmessers, wenn man das Stück von der Tangente im Punkte A bis zur Asymptote mißt (s. Fig. 62)

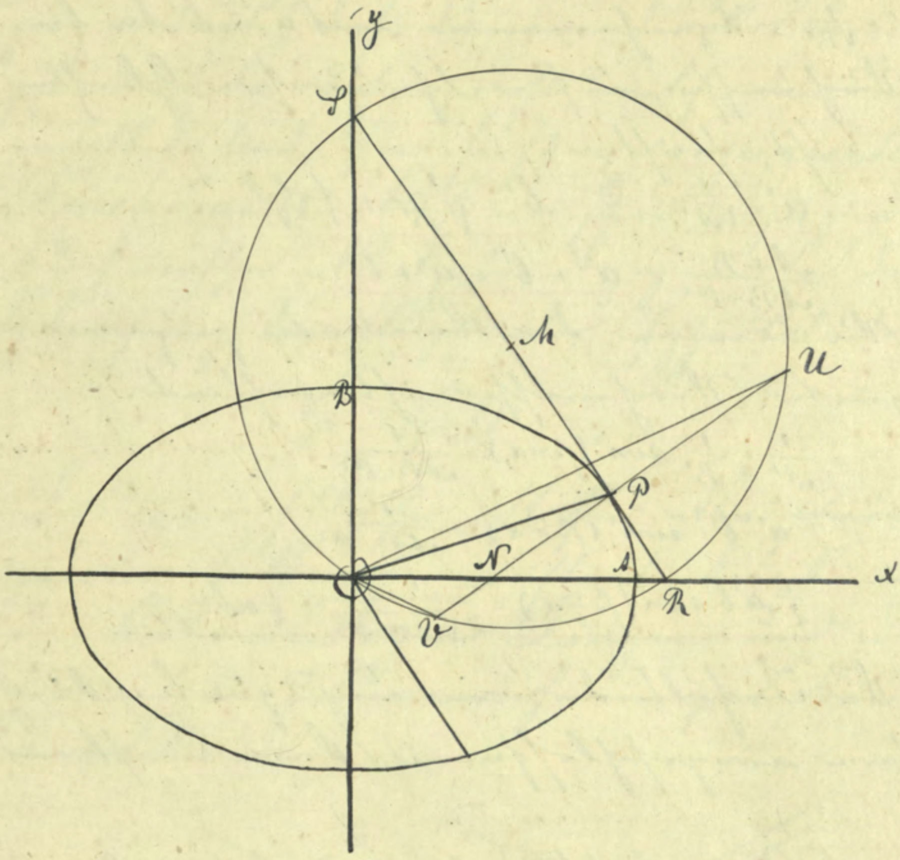

Fig. 63.

Wir wollen jetzt übergehen zur Coll. 26 $\frac{10}{III}$ 92.

Construction der Hauptaxen einer Ellipse, wenn die Länge und Richtung zweier conjugierter Durchmesser gegeben ist (s. Fig. 43.).

Die Gleichung der Ellipse sei gegeben in der Form:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ist OP der eine Halbmesser, so ist der ihm conjugierte OQ parallel zur Tangente RS im Punkte P der Ellipse, denn OP soll der Mittelpunktsort der zu OQ parallelen Sehnen sein, die Tangente ist aber eine Sehne, deren beide Schnittpunkte zusammenfallen.

Der Punkt P habe die C.: $a\cos\varphi$, $b\sin\varphi$ wobei wir den Wert von φ nicht näher zu untersuchen brauchen.

Die Gleichung der Tangente an eine Ellipse ist: $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$, folgl. die Gleichung der Tangente

$$SR:\ \frac{x\cos\varphi}{a} + \frac{y\sin\varphi}{b} = 1$$

Die Gleichung der Normale

$$PN:\ \frac{x\sin\varphi}{b} - \frac{y\cos\varphi}{a} = \frac{a}{b}\sin\varphi\cos\varphi - \frac{b}{a}\sin\varphi\cos\varphi$$

$$PN:\ \frac{x\sin\varphi}{b} - \frac{y\cos\varphi}{a} = \frac{a^2-b^2}{ab}\sin\varphi\cos\varphi$$

Setzen wir in der Gleichung der Tangente zuerst $y=0$ und darauf $x=0$, so erhalten wir die C! von R u. S.

$$R: \; x = \frac{a}{\cos\gamma} \; ; \quad S: \; x = 0$$
$$\quad y = 0 \qquad\qquad y = \frac{b}{\sin\gamma}$$

Errichten wir jetzt über SR als Durchmesser einen Kreis, so hat derselbe im allgemeinen die Gleichung:

$$x^2+y^2+2Dx+2Ey+F=0.$$

Da derselbe durch den Anfangspunkt geht, so muß die Gleichung auch bestehen für $x=0$ u. $y=0$, folgl.

$$F=0$$

Das constante Glied verschwindet also und die Gleichung nimmt die Gestalt an:

$$x^2+y^2+2Dx+2Ey+F=0$$

Setzen wir statt x u. y die C! des Punktes R ein, so erhalten wir

$$D = -\frac{x}{2} = -\frac{a}{2\cos\gamma}$$

Ebenso finden wir, da der Kreis auch durch S geht:

$$E = -\frac{b}{2\sin\gamma}$$

Die Gleichung des Kreises ist also:

$$x^2+y^2-\frac{ax}{\cos\gamma}-\frac{by}{\sin\gamma}=0$$

Wir wollen jetzt beweisen, daß $PU = PV =$ dem conjugierten Halbmesser OQ ist.

Der Bequemlichkeit halber führen wir Polarcoordinaten ein: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$

Die Normale PN hat dann die Gleichung:

$$\frac{r\sin\gamma\cos\varphi}{b} - \frac{r\cos\gamma\sin\varphi}{a} = \frac{a^2-b^2}{ab}\cos\gamma\sin\gamma$$

$$r(a\sin\gamma\cos\varphi - b\cos\gamma\sin\varphi) = (a^2-b^2)\cos\gamma\sin\gamma$$

$$\underline{PN:}\ \underline{r = \frac{(a^2-b^2)\cos\gamma\sin\gamma}{a\sin\gamma\cos\varphi - b\cos\gamma\sin\varphi}}$$

Die Gleichung des Kreises geht über in:

$$r^2 - \frac{a r\cos\varphi}{\cos\gamma} - \frac{b r\sin\varphi}{\sin\gamma} = 0$$

$$\underline{r = \frac{a\sin\gamma\cos\varphi + b\cos\gamma\sin\varphi}{\cos\gamma\sin\gamma}}$$

Wir finden die C. von U und V, wenn wir die beiden Werte für r einander gleichsetzen. Dann muß $\underline{\varphi = \pm\gamma}$ sein. Im ersten Falle erhalten wir $\underline{r = a+b}$ im zweiten $\underline{r = a-b}$. Folgl. $OU =$ der Summe, $OV =$ d. Differenz d. Halbachsen

U hat also die C.: $r = a+b$, $\varphi = \gamma$; $x = (a+b)\cos\gamma$, $y = (a+b)\sin\gamma$

V " " $r = a-b$, $\varphi = -\gamma$; $x = (a-b)\cos\gamma$, $y = (a-b)\sin\gamma$

Bezeichnen wir jetzt OQ mit a', OP mit b', so ist:

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2$$

$$OP^2 = \underline{b'^2 = a^2\cos^2\gamma + b^2\sin^2\gamma}$$

$$OQ^2 = a'^2 = a^2+b^2-b'^2 = a^2+b^2-a^2\cos^2\gamma - b^2\sin^2\gamma$$

$$a'^2 = a^2\sin^2\gamma + b^2\cos^2\gamma$$

$$PU^2 = PV^2 = ((a+b)\cos\gamma - a\cos\gamma)^2 + ((a+b)\sin\gamma - b\sin\gamma)^2$$

$$= b^2\cos^2\gamma + a^2\sin^2\gamma = a'^2 = OQ^2$$

Die Resultate, die wir gefunden haben, können wir zusammenfassen mit den Worten: „Wenn wir in irgend einem Punkte einer Ellipse die Tangente und Normale ziehen und über denjenigen Stück der Tangente als Durchmesser, welches zwischen beiden Hauptaxen liegt, einen Kreis beschreiben, so schneidet derselbe die Normale in zwei Punkten, deren Entfernung vom Anfangspunkt gleich der Summe oder Differenz der Halbaxen ist. Ferner ist die Entfernung dieser Punkte von der Tangente gleich dem Halbmesser, welcher dem durch den Berührungspunkt mit der Tangente gezogenen conjugirt ist.

Jetzt können wir leicht, wenn zwei conjugirte Durchmesser gegeben sind, die beiden Hauptaxen construiren. (s. Fig 64)

OQ und OP seien die der Richtung und Größe nach gegebenen conjugirten Halb-

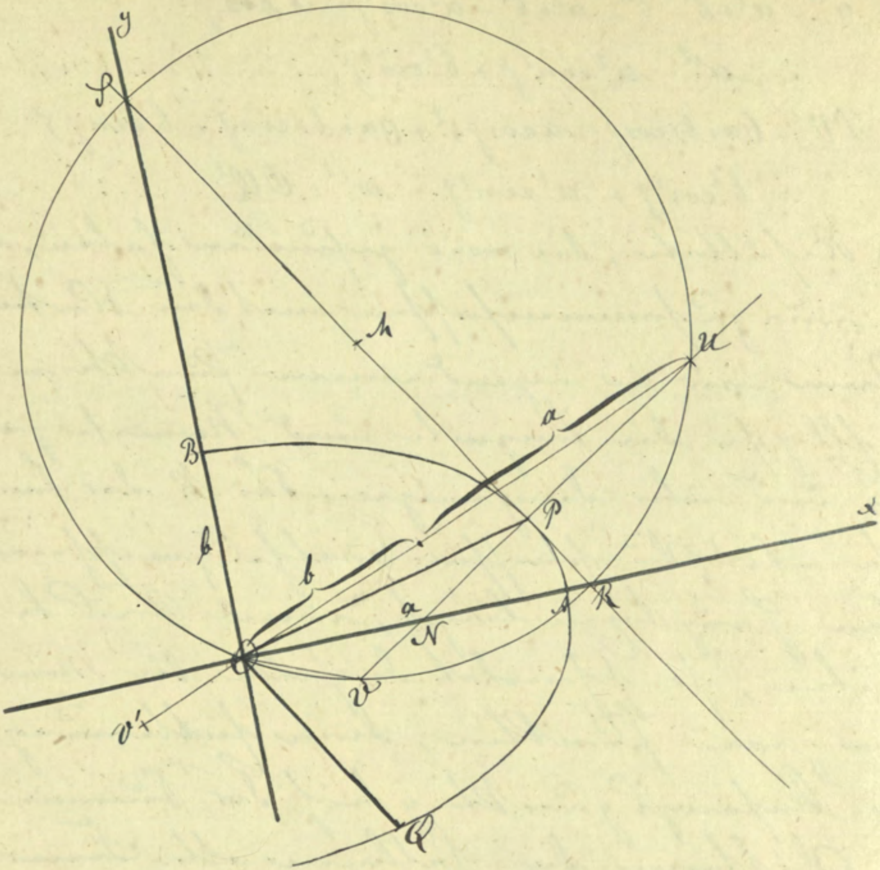

Fig 64.

messer.

Wir ziehen zuerst durch P eine ∥ zu OQ, dann ist dieselbe eine Tangente an die Ellipse. Auf dieser errichten wir in P nach beiden Seiten Senkrechte und machen dieselben $PU = PV = OQ$. Dann ist OU gleich der Summe, OV gleich der Differenz der beiden Halbaxen. Um die Richtung derselben zu finden, legen wir durch U, V u. O einen Kreis, der die Tangente in R u. S schneidet. Dann sind OR u. OS die Richtungen der Hauptaxen. Es fragt sich nun, wo wir die große und wo die kleine Axe auftragen. Sind a u. b die beiden Halbaxen, wobei $a > b$, so macht die Tangente auf der x-Axe das Stück $\frac{a}{\cos\varphi}$, die Normale dagegen: $\frac{a^2-b^2}{a}\cos\varphi$; auf der y-Axe die Tangente das Stück $\frac{b}{\sin\varphi}$, die Normale $-\frac{a^2-b^2}{b}\sin\varphi$.

Tangente und Normale schneiden also die große Axe auf derselben Seite des Anfangspunktes, die kleine dagegen auf verschiedenen.

Auf unserer Figur haben wir also die große Axe auf OR, die kleine dagegen

auf OS aufzutragen.

Nachdem wir jetzt die Lage und die Größe der beiden Axen gefunden haben, können wir leicht die ganze Ellipse zeichnen.

Diese Construction ist von großer Wichtigkeit, denn wenn wir einen Kreis oder eine Ellipse im Raume perspectivisch darstellen wollen, so kommt diese Aufgabe immer darauf hinaus, eine Ellipse zu zeichnen, von der zwei conjugirte Durchmesser gegeben sind.

Bei unseren bisherigen Betrachtungen haben wir uns nur mit den sogenannten Coll. 27/III 92.
Mittelpunkts Kegelschnitten Ellipse und Hyperbel beschäftigt. War die Gleichung des Kegelschnittes: $Ax^2+By^2+2Cxy+2Dx+2Ey+F=0$, so war die Gleichung des Durchmessers:

$$(A\cos\alpha+C\sin\alpha)\xi+(B\sin\alpha+C\cos\alpha)\eta+D\cos\alpha+E\sin\alpha=0$$

Der Winkel, den derselbe mit der x-Axe bildet ist also:

$$\operatorname{tg}\beta=-\frac{A\cos\alpha+C\sin\alpha}{B\sin\alpha+C\cos\alpha}=-\frac{A^2\cos\alpha+AC\sin\alpha}{AB\sin\alpha+AC\cos\alpha}$$

Im Falle einer Parabel ist aber $AB=C^2$, folgt.

$$tg\beta = -\frac{A^2\cos\alpha + AC\sin\alpha}{C^2\sin\alpha + AC\cos\alpha} = -\frac{A(A\cos\alpha + C\sin\alpha)}{C(C\sin\alpha + A\cos\alpha)}$$

$$\underline{tg\beta = -\frac{A}{C}}$$

$-\frac{A}{C}$ ist aber gleich $tg\,\alpha$, gleich dem tg des Winkels, den die Hauptaxe mit der Abscissenaxe bildet. Folglich sind alle Durchmesser einer Parabel der Hauptaxe parallel.

Wir wollen jetzt die C! des Durchschnittspunktes eines Durchmessers mit der Parabel in einem System, dessen x-Axe $\parallel$ der Hauptaxe ist, berechnen.

Die Gleichung der Parabel ist:

$$By^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

Folgl: die Gleichung eines Durchmessers:

$$B\eta\sin\alpha + D\cos\alpha + E\sin\alpha = 0$$

$$\underline{\eta = -\frac{D\cos\alpha + E\sin\alpha}{B\sin\alpha}}$$

Setzen wir diesen Wert von η statt y in die Gleichung der Parabel, so erhalten wir die Abscisse des gesuchten Durchschnittspunktes.

$$\frac{D^2\cos^2\alpha + E^2\sin^2\alpha + 2DE\cos\alpha\sin\alpha}{B\sin^2\alpha} + 2D\xi - \frac{2ED\cos\alpha + 2E^2\sin\alpha}{B\sin\alpha} + F = 0$$

$$D^2\cos^2\alpha + E^2\sin^2\alpha + 2DE\cos\alpha\sin\alpha + 2B\xi\sin^2\alpha - 2DE\cos\alpha\sin\alpha - 2E^2\sin^2\alpha + FB\sin^2\alpha = 0$$

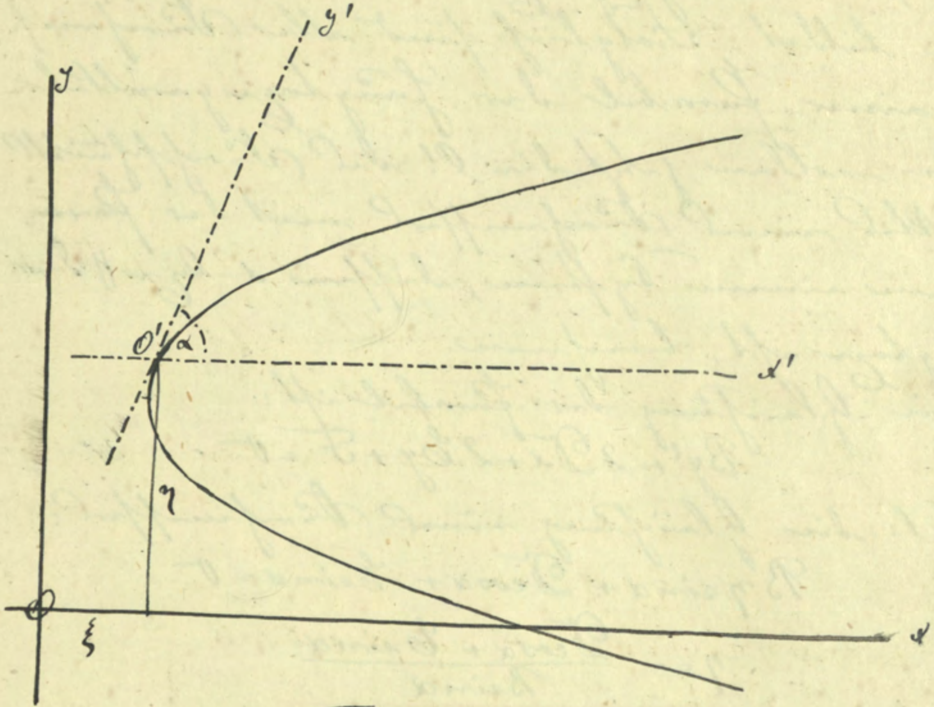

Fig 65.

$$\xi = -\frac{D^2\cos^2\alpha - E^2\sin^2\alpha + FB\sin^2\alpha}{2BD\sin^2\alpha}$$

Wie wir früher die Gleichung der Ellipse und Hyperbel, bezogen auf zwei conjugierten Durchmesser aufgestellt haben, wollen wir jetzt die Gleichung der Parabel herleiten, wenn dieselbe bezogen ist auf einen Durchmesser und die Tangente, welche im Schnittpunkte der Parabel mit dem Durchmesser an erstere gelegt ist. (s. Fig. 65).

Die Gleichung der Parabel ist:

$$By^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

Um sie transformieren, müssen wir setzen:

$$x = \xi + x' + y'\cos\alpha$$

$$y = \eta + y'\sin\alpha$$

$$\left.\begin{aligned} &B\eta^2 + 2B\eta y'\sin\alpha + By'^2\sin^2\alpha + 2Dx' \\ &+2D\xi + 2Dy'\cos\alpha \\ &+2E\eta + 2Ey'\sin\alpha \\ &+F \end{aligned}\right\} = 0$$

Die ersten beiden Verticalreihen sind = 0, denn die erste ist die Gleichung der Parabel für den Punkt ($\xi\eta$), die zweite dagegen $2y'$ multipliziert mit der Gleichung des Durchmessers für denselben Punkt. Es bleibt also übrig:

Satz 33. Alle Durchmesser, d. h. die Orte der Mittelpunkte paralleler Sehnen einer Parabel sind einander parallel und die Parabel hat, bezogen auf eine unter dem Winkel α gezogene Tangente als Ordinatenaxe und den zugehörigen Durchmesser als Abscissenaxe die Gleichung:

$$y^2 = \frac{2px}{\sin^2\alpha}.$$

$$By'^2\sin^2\alpha + 2\mathfrak{D}x' = 0$$

Setzen wir jetzt noch $-\frac{\mathfrak{D}}{B} = p$, so nimmt die Gleichung die Gestalt an:

$$\underline{y'^2\sin^2\alpha = 2px'}$$

Ist $\alpha = 90^\circ$, so erhalten wir die ursprüngliche Gleichung $y'^2 = 2px'$.

Wir wären jetzt mit der Behandlung der quadratischen Linien fertig. Von mit geringerer Wichtigkeit sind die Curven dritten und vierten Grades. Viel interessanter ist dagegen die Diskussion besonderer Linien z. B. der Cycloide und der Tractrix, wo nicht nur algebraische sondern auch trigonometrische und logarithmische Funktionen vorkommen. Da man jedoch diese Linien schwer ohne die Differential- und Integralrechnung untersuchen kann, so werden dieselben auch in den Grundlehren der höheren Analysis behandelt.

Wir wollen daher jetzt zur analytischen Geometrie des Raumes übergehen.

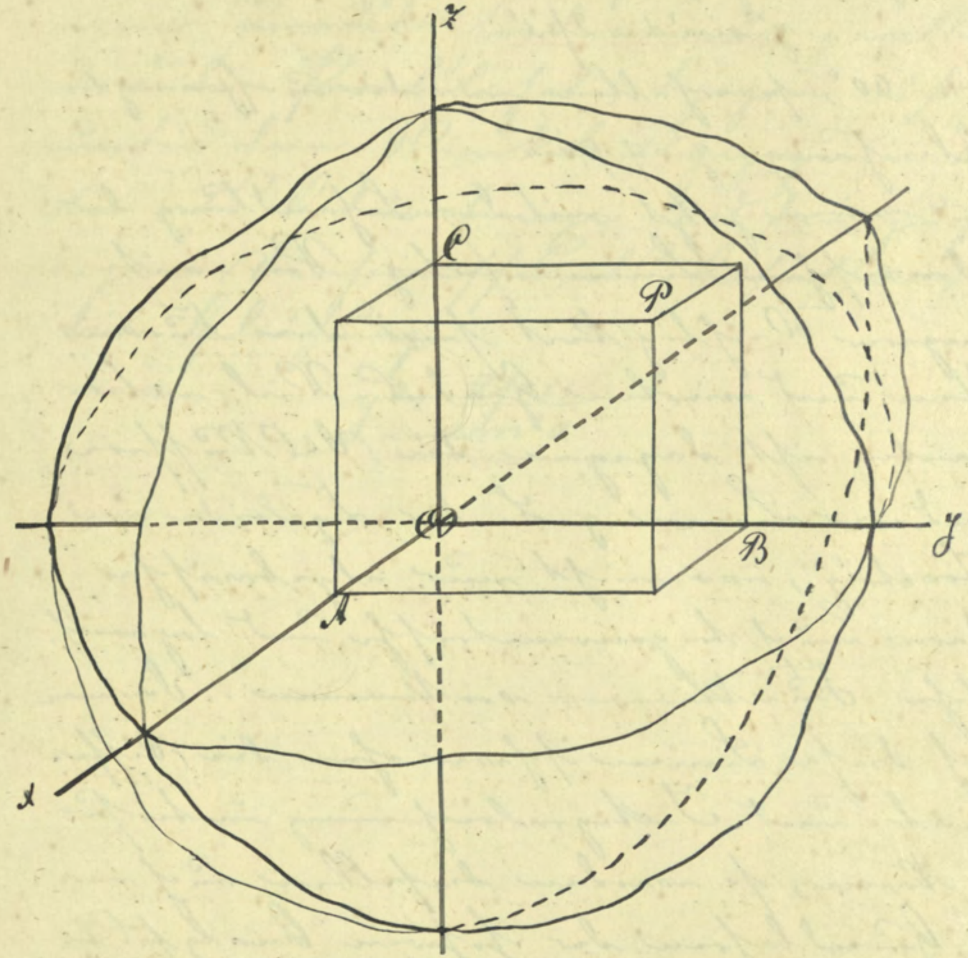

Fig. 66.

Die analytische Geometrie des Raumes. Coll. 28 12/III 92.

So wie man in der analytischen Geometrie der Ebene die Lage eines Punktes dadurch bestimmen kann, daß man ihn auf ein System ebener Parallelcoordinaten bezieht, so benutzt man zur Fixierung eines Punktes im Raume ein analoges System räumlicher Parallelcoordinaten, welches auf folgende Weise zustandekommt. (s. Fig. 66). Wir legen durch O drei zu einander senkrechte Ebenen: Oxy, Oxz und Oyz. Oxz nennt man die Horizontalebene, Oxy die hintere Verticalebene, Oyz die seitliche Verticalebene. Alle drei Ebenen haben den gemeinsamen Namen Coordinatenebenen.

Ein Punkt im Raume ist bestimmt durch die Abschnitte, welche die durch denselben zu den 3 C.-Ebenen parallel gelegten Ebenen auf den C.-Axen machen, d. h. auf den Schnittlinien der C.-Ebenen.

$x = OA$, $y = OB$, $z = OC$

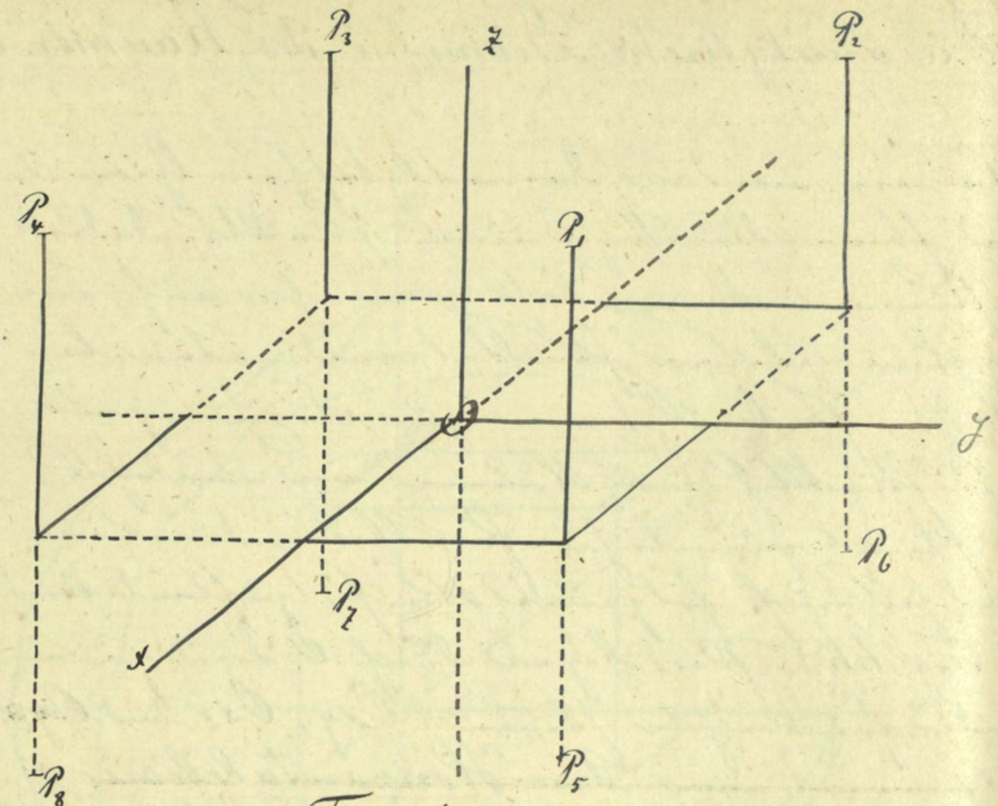

Fig. 67.

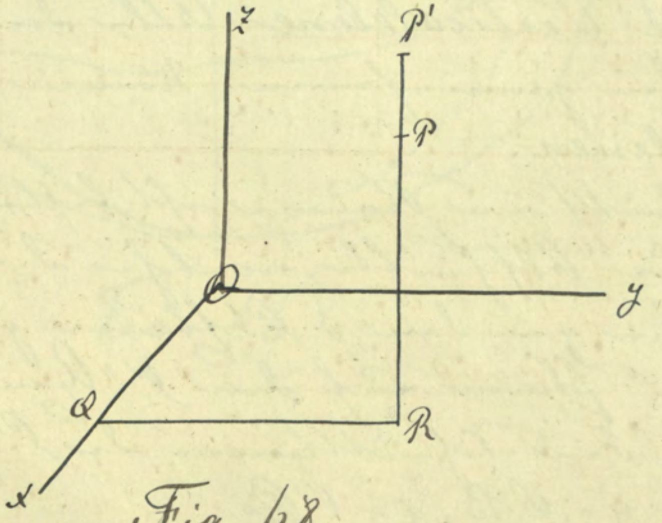

Fig. 68.

Wir können auch die C! des Punktes P dadurch bestimmen, daß wir zuerst seine Entfernung von der Horizontalebene messen (z). und darauf die C! des Fußpunktes (x, y) bestimmen.

Das Vorzeichen von x u. y wird ebenso, wie in der ebenen Geometrie gewählt, z ist positiv oberhalb und negativ unterhalb der x y Ebene.

Je nachdem, in welchem Octanten der Punkt liegt, ist also das Vorzeichen nach folgendem Schema zu wählen (s. Fig 67)

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8
x	+	−	−	+	+	−	−	+
y	+	+	−	−	+	+	−	−
z	+	+	+	+	−	−	−	−

Betrachtung 2 Punkte im Raume.

(s. Fig 68) Wenn der Punkt P die C! $x = OQ$, $y = QR$, $z = RP$, P' dagegen die C! $x' = OQ$, $y' = QR$, $z' = RP'$ hat, so ist es klar, daß $PP' = z' - z$ ist.

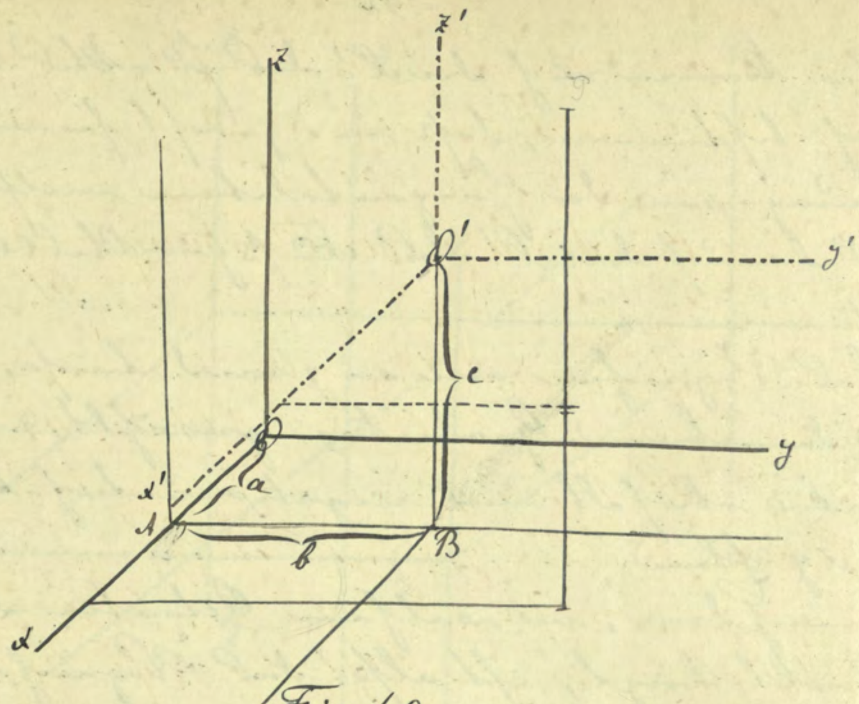

Fig 69.

<u>Satz 34.</u> Ein Punkt mit den rechtwinkligen C! x, y, z hat in einem andern Systeme, dessen Axen denen des gegebenen parallel sind und dessen Anfangspunkt in diesem die C! a, b, c hat, die C!

$$\underline{x' = x - a}, \quad \underline{y' = y - b}, \quad \underline{z' = z - c}$$

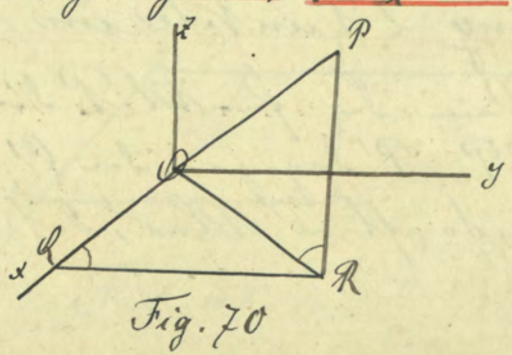

Fig. 70

Haben 2 Punkte zu 2 gleiche entsprechende C!, so ist ihre Entfernung gleich der Differenz ihrer ungleichen C!

Coordinatenverschiebung. Coll. 29 $\frac{16}{III}$ 92.

Welches sind die C! eines Punktes, in einem Systeme, dessen Axen denen des gegebenen parallel laufen? (s. Fig. 69.).
Der Punkt P habe im ursprünglichen Systeme die C! x, y, z, der Anfangspunkt des neuen Systems habe die C! a, b, c. Verschieben wir zunächst die yz Ebene, bis O auf A fällt, so ist in diesem Systeme $x' = x - a$, während y u. z unverändert bleiben. Verschieben wir jetzt die xz Ebene, bis A auf B fällt, so wird $y' = y - b$, während die andern C! $x - a$ u. z bleiben. Verschieben wir zuletzt noch die Horizontalebene bis O', so geht z in $z - a$ über. Der Punkt P hat also im neuen Systeme die C! $x' = x - a$, $y' = y - b$, $z' = z - c$.

Entfernung 2 Punkte im Raume.

Berechnen wir zuerst die Entfernung eines Punktes vom Anfangspunkte (s. Fig 70).
PR steht $\perp$ auf der Oxy-Ebene, folglich

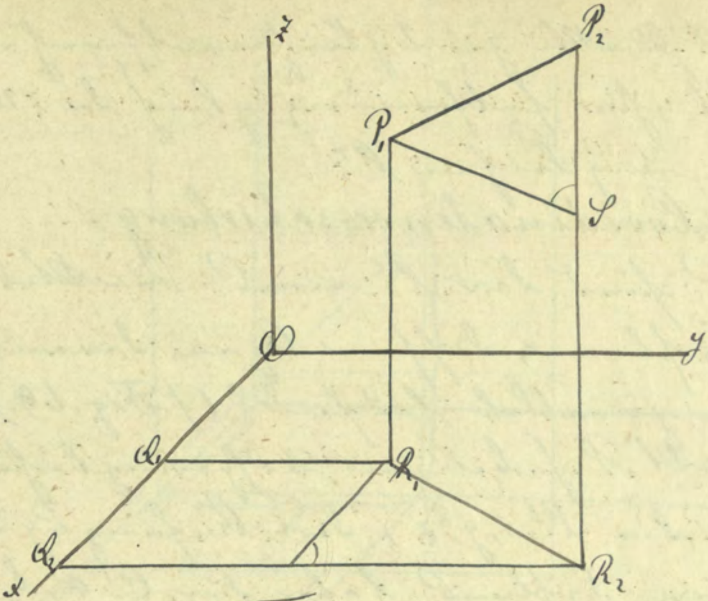

Fig. 71.

Satz 35. Die Entfernung zweier Punkte P_1P_2 mit den C! $x_1y_1z_1$ und $x_2y_2z_2$ ist:

$$P_1P_2 = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

Satz 35a. Die Gleichung einer Kugeloberfläche, deren Mittelpunkt die C! a, b, c hat und deren Radius $= R$ ist, ist:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = R^2$$

ist Winkel ORP ein Rechter.

$$OP^2 = OR^2 + RP^2 = OQ^2 + QR^2 + RP^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\underline{OP = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Jetzt können wir daran gehen, die Entfernung zweier beliebig im Raume liegender Punkte zu berechnen (s. Fig 71).

Ziehen wir P_1R_1 u. $P_2R_2 \perp$ zur xy Ebene und $P_1S \parallel R_1R_2$, dann ist $\sphericalangle P_1SP_2 = R$, folgl:

$$P_1P_2^2 = P_1S^2 + SP_2^2 = R_1R_2^2 + (z_2 - z_1)^2$$

$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

Wir können diese Formel auch dadurch herleiten, daß wir uns das C! System nach P_1 verlegt denken, dann hat P_2 die C! $x' = x_2 - x_1$, $y' = y_2 - y_1$ und $z' = z_2 - z_1$

$$P_1P_2^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

$$\underline{P_1P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$

Wenn wir jetzt in obiger Gleichung die C! des Punktes P_1 mit a, b, c bezeichnen und die Entfernung $P_1P_2 = R$ setzen, so erhalten wir sogleich die Formel für die Oberfläche einer Kugel:

$$\underline{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2}$$

Wir sehen also, daß wir in der Ebene

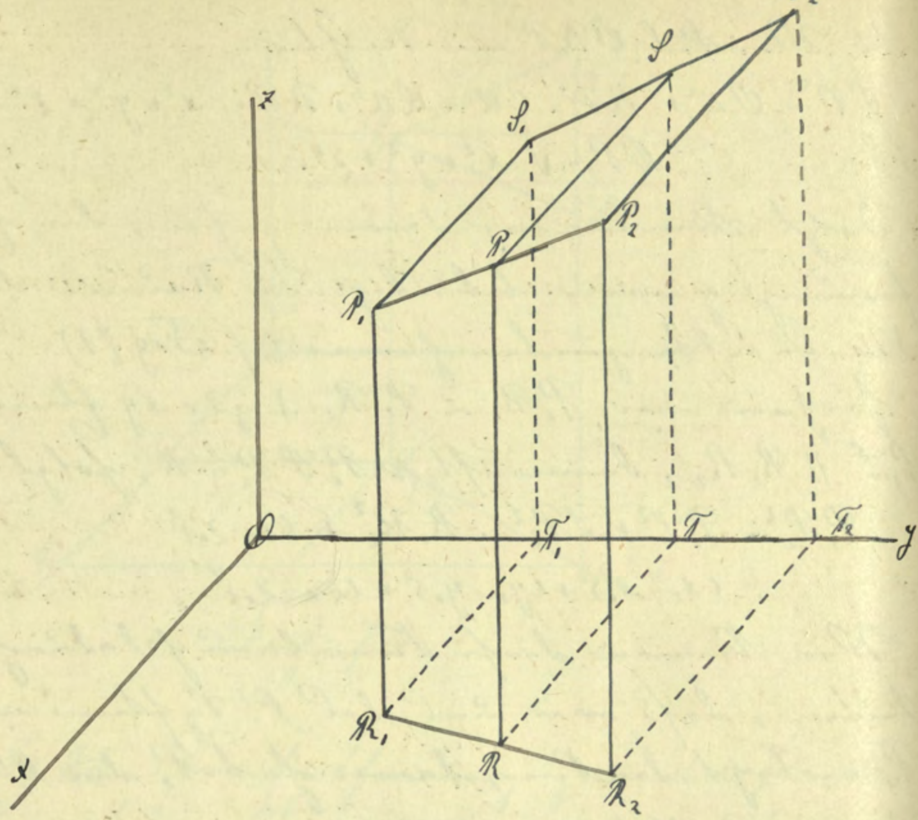

Fig 73.

Satz 36. Teilt der Punkt P die Strecke P_1P_2 im Verhältnis von $\lambda = \frac{P_1P}{PP_2}$, so hat er die C!

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}\,, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} \quad \text{u.} \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}$$

eine Linie durch eine Gleichung zwischen y u. x dargestellt wird, im Raume eine Fläche stets durch eine Relation zwischen x, y u. z ausgedrückt wird.

Betrachtung 3 Punkte im Raume.

Man bestimme die C! des Punktes P, der auf der Geraden P_1P_2 liegt, wenn das Theilungsverhältnis $\frac{P_1P}{PP_2}=\lambda$ gegeben ist (s. Fig 72).

Projiciren wir die Punkte $P_1\,P\,P_2$ auf die xy Ebene, so treffen sie dieselbe in $R_1\,R\,R_2$, welche ebenfalls in einer Geraden liegen.

Ferner ist:

$$\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{R_1R}{RR_2}=\lambda$$

Folglich hat der Punkt R die C!:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\;;\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$$

Projiciren wir jetzt $P_1\,P\,P_2$ auf die yz Ebene, so ist ebenfalls:

$$\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{S_1S}{SS_2}=\lambda$$

und S hat die C!

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\,,\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$$

Die C! xy des Punktes R sind aber gleich den entsprechenden C! von P, ebenso die C! yz

Satz 36a. Der Halbierungspunkt der Strecke P_1P_2 hat die K!

$$x = \frac{x_1+x_2}{2}\,,\quad y = \frac{y_1+y_2}{2}\,,\quad z = \frac{z_1+z_2}{2}$$

des Punktes S.
Folglich hat P die C!

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

Halbiert der Punkt P die Strecke P_1P_2, so ist $\lambda = 1$ und die C! des Halbierungspunktes sind:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

Winkelmessung im Raume.

In der analytischen Geometrie der Ebene wurden die Winkel immer in einer bestimmten Richtung und zwar in der dem Gange des Uhrzeigers entgegengesetzten gemessen. Bei der analytischen Geometrie des Raumes ist eine solche Bestimmung nicht möglich. Wenn wir einen in einer beliebigen Ebene liegenden Winkel in einer bestimmten Richtung messen, so kann dieser positiv oder negativ sein, je nachdem auf welcher Seite der Ebene wir uns befinden. Deswegen hat man über die Winkel im Raume folgende Festsetzung getroffen:

„Unter dem Winkel zweier Geraden im
„Raume versteht man den unter 180° gele-
„genen Winkel, den die als positiv fest-
„gesetzten Richtungen der beiden Geraden
„mit einander bilden."

Der Winkel ist also dann, aber auch nur dann eindeutig bestimmt, wenn man auf beiden Geraden eine positive Richtung festgesetzt hat.

Unter dem Winkel zweier sich nicht schneidenden Geraden versteht man denjenigen Winkel, den die durch einen beliebigen Punkt im Raume zu den beiden Geraden parallel gezogenen Linien mit einander bilden.

Projection einer Strecke auf eine Gerade. Coll. 30 $\frac{17}{III}$ 92.

Die orthogonale Projection $A'B'$ der Strecke AB der Geraden g auf die Gerade g' ist immer

$$A'B' = AB \cos (gg'),$$

wie auch die positiven Richtungen auf g u. g' festgesetzt sein mögen. (s. Fig. 74)

Anm. Die Richtungen der Geraden sind durch die Pfeile angedeutet.

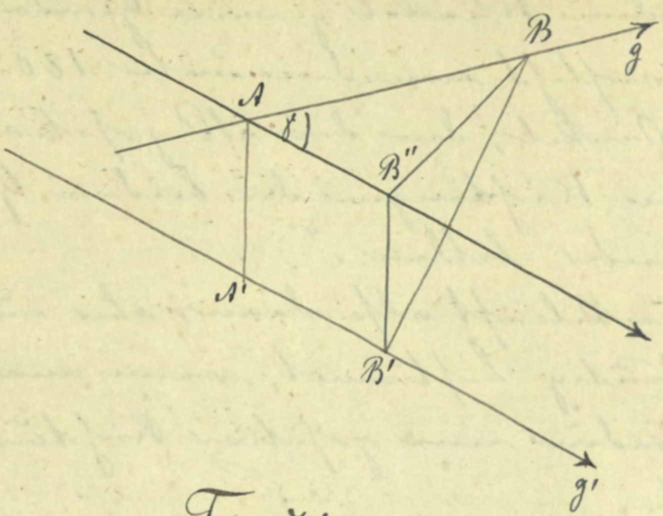

Fig 74.

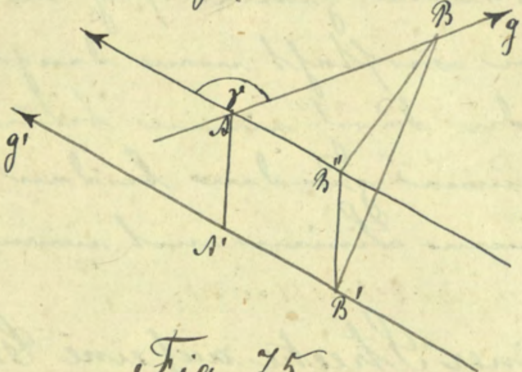

Fig. 75.

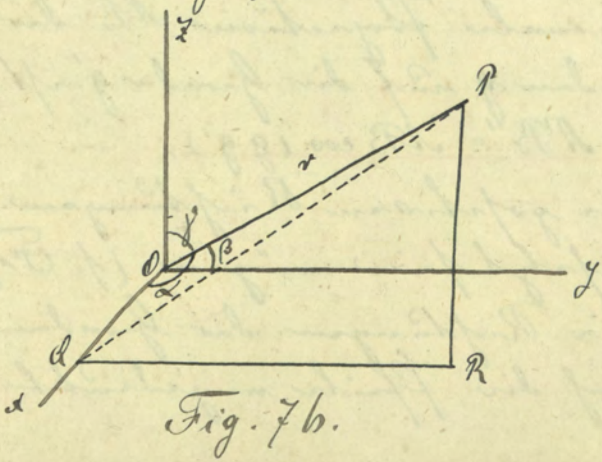

Fig. 76.

Nach der Voraussetzung ist $AA' \perp g'$ und $BB' \perp g'$; Ziehen wir jetzt durch B' eine $\parallel$ zu $A'A$ und ebenso durch A zu $A'B'$, dann ist $AB'' = A'B'$ und steht $\perp$ auf der Ebene $BB'B''$, folgl. ist $\angle A'B''B = R$. Also:

$$A'B' = AB'' = AB \cos\gamma = AB \cos(gg').$$

Nehmen wir jetzt an $A'B'$ habe die Richtung, wie Fig. 75 zeigt, dann ist $A'B'$ negativ, γ dagegen ein stumpfer Winkel, also $\cos\gamma$ ebenfalls negativ, folglich ist wieder:

$$A'B' = AB \cos(gg').$$

Wie man auch die Richtungen der beiden Geraden annimmt, immer ist der oben bewiesene Satz richtig.

Polarcoordinaten.

Wir können uns einen Punkt statt durch seine rechtwinkligen C! auch gegeben denken durch seine Entfernung vom Anfangspunkte, den radius vector, und die Winkel, welche dieser radius vector mit den C! Axen bildet. (s. Fig 76).

Den Radius vector OP wollen wir r nennen, den Winkel, den derselbe mit der x Axe

Satz 37. Die Summe der Quadrate der cos der Winkel, welche irgend eine Gerade mit 3 zu einander senkrechten Geraden bildet ist stets = 1.

bildet α, den mit der y Achse β, und den mit der z Achse γ. Also:

$$\alpha = \angle(r,x)$$
$$\beta = \angle(r,y)$$
$$\gamma = \angle(r,z)$$

$OQ = x$ ist aber die orthogonale Projection des Radiusvector auf die x Achse, denn $PR \parallel Oz$, $Oz \perp Ox$, $QR \perp Ox$, folgl. auch $Ox \perp$ auf Ebene PQR, also $PQ \perp Ox$. Ebenso findet man dass die C! y u. z des Punktes P die orthogonalen Projectionen des Radiusvector auf die y- resp. z-Achse sind. Folglich ist nach dem vorigen Satz:

$$\underline{x = r\cos\alpha}$$
$$\underline{y = r\cos\beta}$$
$$\underline{z = r\cos\gamma}$$

$$x^2+y^2+z^2 = r^2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)$$

$x^2+y^2+z^2$ ist aber nach Satz 35, wenn P der Anfangspunkt ist $= r^2$, also:

$$\underline{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma = 1}$$

Hieraus folgt:

$$\cos\gamma = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}$$

Wenn α u. β gegeben sind so kennen wir also auch $\cos\gamma$ bis auf das Vorzeichen,

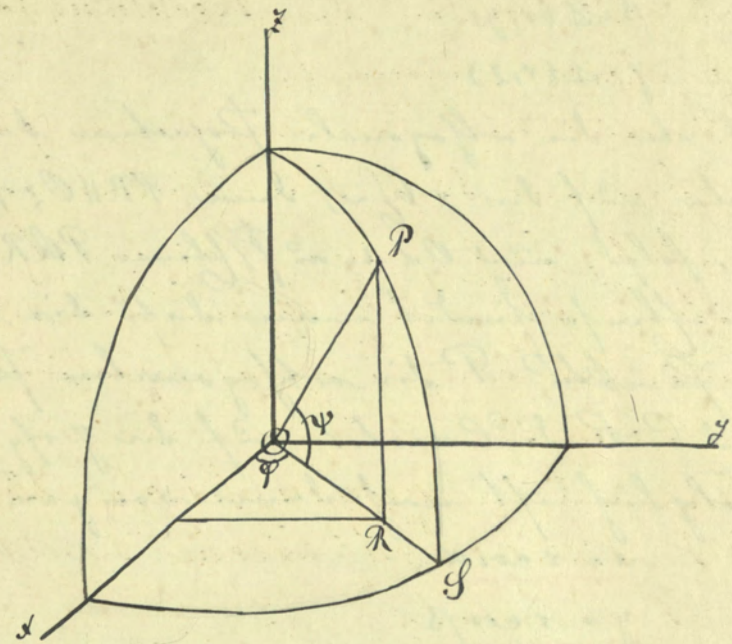

Fig. 77.

d. h. es bleibt dann noch unbestimmt, ob P oberhalb oder unterhalb der Horizontalebene liegt.

$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ werden die Richtungscoss des radius vector genannt.

Wir können uns ferner einen Punkt gegeben denken durch den Radius vector, den Winkel, den seine Horizontalprojection mit der x Axe bildet (φ), und den Winkel, den er mit seiner Horizontalprojection bildet (ψ). (s. Fig. 77)

$\varphi = \angle\, xOR$ wird die geographische Länge

$\psi = \angle\, ROP$ die geographische Breite des Punktes P genannt.

Radius vector, geographische Länge und geographische Breite bilden die räumlichen Polarcoordinaten des Punktes P.

Wir wollen jetzt die rechtwinkligen C. durch die räumlichen Polarcoordinaten ausdrücken und umgekehrt

$$\left.\begin{aligned} x &= OR\cos\varphi \\ y &= OR\sin\varphi \end{aligned}\right\} OR = r\cos\psi$$

$$z = RP = r\sin\psi$$

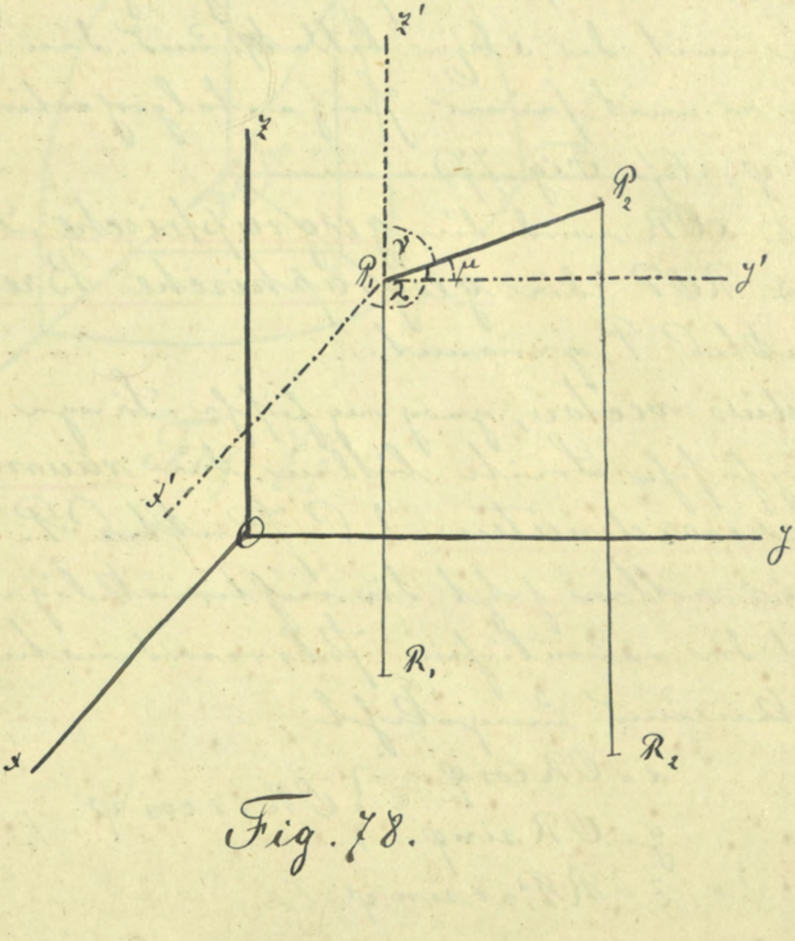

Fig. 78.

$$x = r\cos\psi\cos\varphi \qquad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$
$$y = r\cos\psi\sin\varphi \qquad \sin\psi = \frac{z}{r}$$
$$z = r\sin\psi \qquad \cos\varphi = \frac{x}{r\cos\psi},\ \sin\varphi = \frac{y}{r\cos\psi}$$

Anm: φ bewegt sich zwischen den Grenzen $0°$ u. $360°$, ψ dagegen zwischen $-90°$ u. $+90°$.

Legt man um O als Mittelpunkt eine Kugel, so nennt man die Durchschnittslinie einer Verticalebene mit derselben **Meridian**, dagegen den Durchschnittskreis der Kugel mit der xy Ebene den **Aequator** der Kugel.

Aufgabe. Die Winkel zu bestimmen, die die Verbindungslinie zweier Punkte mit den C! Axen bildet. (s. Fig. 78.) Coll. 31/III 92.

Denken wir uns das C! System nach P_1 verschoben, dann hat P_2 die C!

$$x_2' = x_2 - x_1$$
$$y_2' = y_2 - y_1$$
$$z_2' = z_2 - z_1$$

Bezeichnen wir die Winkel, die P_1P_2 mit den C!-Axen bildet, durch λ, μ, ν, so ist:

Satz 38. Die Richtungscoss der Strecke P_1P_2 sind:

$$\cos\lambda = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}$$

$$\cos\mu = \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}$$

$$\cos\nu = \frac{z_2 - z_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}$$

wo die Wurzel positiv zu nehmen ist.

Satz 39. Die C! aller Punkte der Geraden, welche den Punkt P_1 enthält und mit der x-Axe die Winkel λ, μ, ν bildet, werden erhalten, wenn man setzt:

$$x = x_1 + u\cos\lambda$$

$$y = y_1 + u\cos\mu$$

$$z = z_1 + u\cos\nu,$$

wo die Entfernung u des variabelen Punktes von dem festen Punkte P_1 alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ zu durchlaufen hat.

$$x_2' = P_1P_2 \cos\lambda \qquad \cos\lambda = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}$$

$$y_2' = P_1P_2 \cos\mu \qquad \cos\mu = \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}$$

$$z_2' = P_1P_2 \cos\nu \qquad \cos\nu = \frac{z_2 - z_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}$$

Da die Wurzel im Nenner den Radius vector bedeutet, so ist sie immer positiv zu nehmen.

Wir können jetzt leicht die C! von P_2 ausdrücken durch die C! von P_1 und die Richtungs-cos der Strecke $P_1P_2 = u$.

$x_2 - x_1 = u \cos\lambda$ folglich:

$$x_2 = x_1 + u\cos\lambda$$
$$y_2 = y_1 + u\cos\mu$$
$$z_2 = z_1 + u\cos\nu$$

Anm: u kann positiv oder negativ sein, jenachdem welche Richtung man als die positive annimmt.

Betrachtung zweier Geraden im Raume.

Aufgabe. Man bestimme den Winkel, den zwei gegebene Gerade mit einander bilden. (s. Fig. 79)

LM und L_1M_1 seien die beiden Linien im

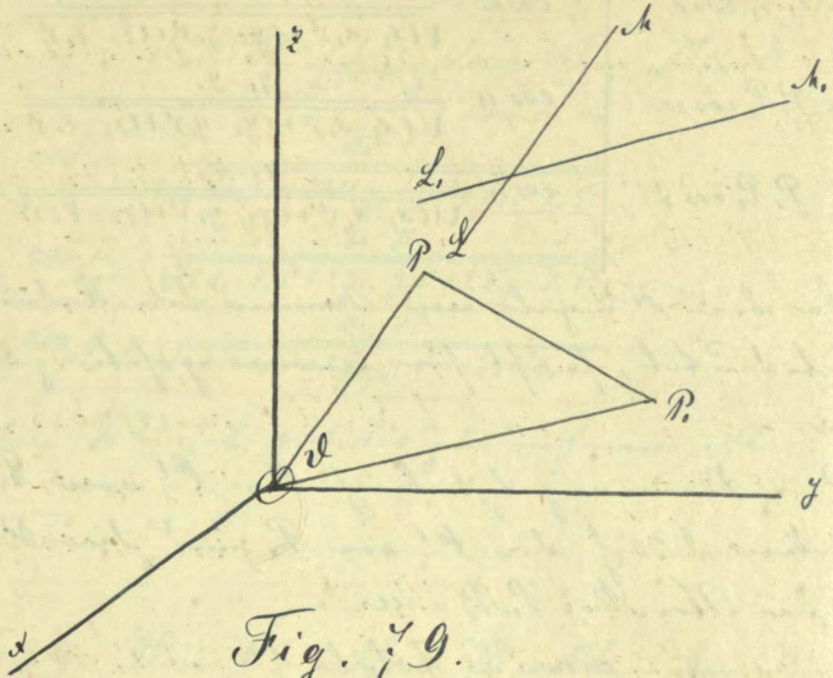

Fig. 79.

Satz 40. Der Winkel ϑ zweier geraden Linien, welche mit den Axen resp. die Winkel $\lambda\,\mu\,\nu$ und $\lambda_1\,\mu_1\,\nu_1$ bilden, ist bestimmt durch:

$$\cos\vartheta = \cos\lambda\cos\lambda_1 + \cos\mu\cos\mu_1 + \cos\nu\cos\nu_1$$

Satz 41. Sollen zwei gerade Linien, welche mit den C! Axen resp. die Winkel $\lambda\,\mu\,\nu$ und $\lambda_1\,\mu_1\,\nu_1$ bilden, senkrecht auf einander stehen, so ist hierfür die hinreichende u. notwendige Bedingung, daß

$$\cos\lambda\cos\lambda_1 + \cos\mu\cos\mu_1 + \cos\nu\cos\nu_1 = 0$$

Raume.

Lk bilde mit den Axen die Winkel $\lambda\, \mu\, \nu$ u.
$L_1 k_1$ " " " " " λ_1, μ_1, ν_1.
Wir ziehen $OP \parallel Lk$ und $OP_1 \parallel L_1 k_1$, dann ist $\angle POP_1 = \vartheta$ auch der Richtungsunterschied der beiden Geraden Lk und $L_1 k_1$.

Ist $OP = r$ und $OP_1 = r_1$, dann hat P die C!

$x = r\cos\lambda$ $\quad$ P_1 hat die C! $x_1 = r_1 \cos\lambda_1$

$y = r\cos\mu$ $\quad$ $y_1 = r_1\cos\mu_1$

$z = r\cos\nu$ $\quad$ $z_1 = r_1\cos\nu_1$

Im Dreieck $P O P_1$ ist:

$$\underline{PP_1^2 = OP^2 + OP_1^2 - 2\, OP.\, OP_1 \cos\vartheta}$$

$$(x_1-x)^2+(y_1-y)^2+(z_1-z)^2 = r^2+r_1^2-2rr_1\cos\vartheta$$

$$\cancel{x_1^2+y_1^2+z_1^2} + \cancel{x^2+y^2+z^2} - 2(x_1 x + y y_1 + z z_1) = \cancel{r^2+r_1^2} - 2rr_1\cos\vartheta$$

$$rr_1(\cos\lambda\cos\lambda_1 + \cos\mu\cos\mu_1 + \cos\nu\cos\nu_1) = rr_1\cos\vartheta$$

$$\underline{\cos\vartheta = \cos\lambda\cos\lambda_1 + \cos\mu\cos\mu_1 + \cos\nu\cos\nu_1}$$

Sollen die beiden Geraden senkrecht auf einander stehen, so muß $\cos\vartheta = 0$ sein, also:

$$\underline{\cos\lambda\cos\lambda_1 + \cos\mu\cos\mu_1 + \cos\nu\cos\nu_1} = 0$$

Aufgabe. Den Ort der Geraden zu finden, welche mit einer gegebenen festen Axe in einem festen Punkt einen

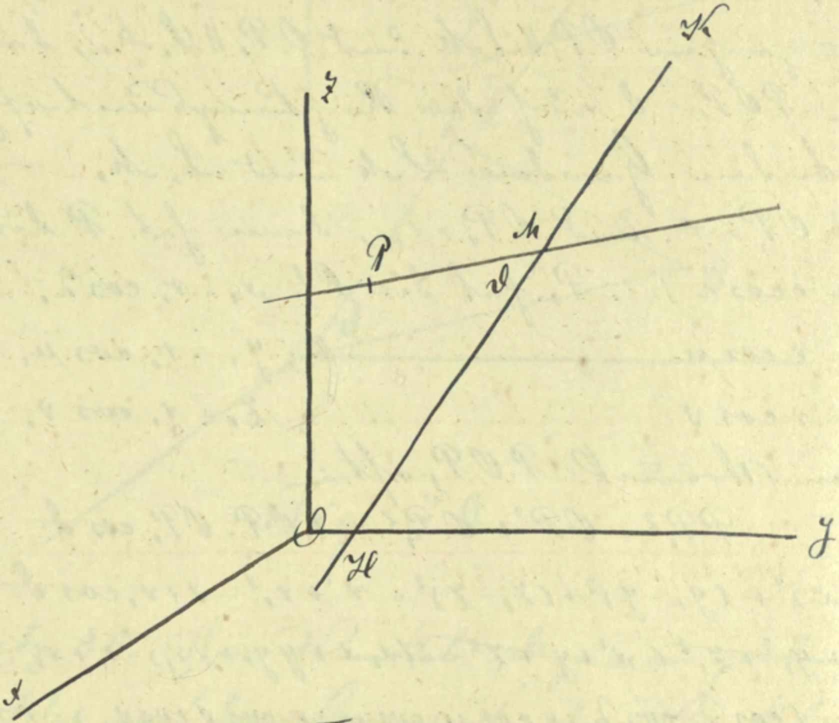

Fig. 80.

festen Winkel ϑ bilden, oder mit andern Worten

die Gleichung des Kreiskegels

aufzustellen. (s. Fig. 80.).

Der Punkt $M(a,b,c)$ sei der feste Punkt auf der Axe HK, also die Spitze des Kegels. Die Axe bilde mit den C. Axen die Winkel α, β, γ. MP sei eine Gerade, welche mit HK den Winkel ϑ bildet; dieselbe bilde mit den C. Axen die Winkel λ, μ, ν.

P habe die variabeln C. x, y, z.

Dann ist nach Satz 38:

$$\cos\lambda = \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}\,;\quad \cos\mu = \frac{y-b}{\sqrt{---}}\,;\quad \cos\nu = \frac{z-c}{\sqrt{---}}$$

Nach Satz 40.

$$\cos\vartheta = \cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu$$

$$\cos\vartheta = \frac{(x-a)\cos\alpha + (y-b)\cos\beta + (z-c)\cos\gamma}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$$

Dieses quadriert giebt die Gleichung des Kreiskegels:

$$\left[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\right]\cos^2\vartheta = \left[(x-a)\cos\alpha+(y-b)\cos\beta+(z-c)\cos\gamma\right]^2$$

Nachdem wir diese Gleichung aufgestellt haben, ist es auch nicht schwer zu beweisen, daß sämmtliche Linien 2ten Grades

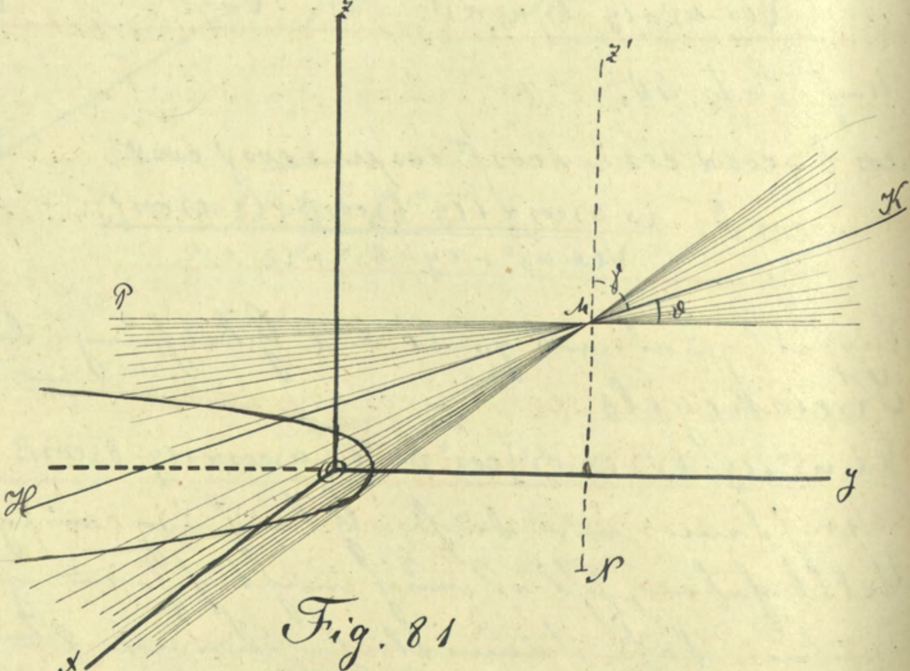

Fig. 81

Kegelschnitte

sind.

Nehmen wir an, unsere Schnittebene sei die Horizontalebene, also $z = 0$.

Dann geht unsere Gleichung über in:

$$\{(x-a)^2+(y-b)^2+c^2\}\cos^2\vartheta = \{(x-a)\cos\alpha+(y-b)\cos\beta-c\cos\gamma\}^2.$$

Die Schnittlinie ist also eine quadratische Curve.

Wie wir früher bei der Discussion der allgemeinen Gleichung 2ten Grades:

$$Ax^2+By^2+2Cxy+2Dx+2Ey+F=0$$

gesehen haben, stellt diese Gleichung eine Parabel, Ellipse oder Hyperbel dar, jenachdem $AB-C^2$ gleich, größer oder kleiner als 0 ist. Also kommt es bei unserer Untersuchung nur auf den Ausdruck $AB-C^2$ an.

$$A=\cos^2\vartheta-\cos^2\alpha$$

$$B=\cos^2\vartheta-\cos^2\beta$$

$$C=-\cos\alpha\cos\beta$$

$$\begin{aligned}AB-C^2 &= (\cos^2\vartheta-\cos^2\alpha)(\cos^2\vartheta-\cos^2\beta)-\cos^2\alpha\cos^2\beta\\ &= \cos^2\vartheta(\cos^2\vartheta-\cos^2\alpha-\cos^2\beta)\end{aligned}$$

Nun ist aber $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$, also:

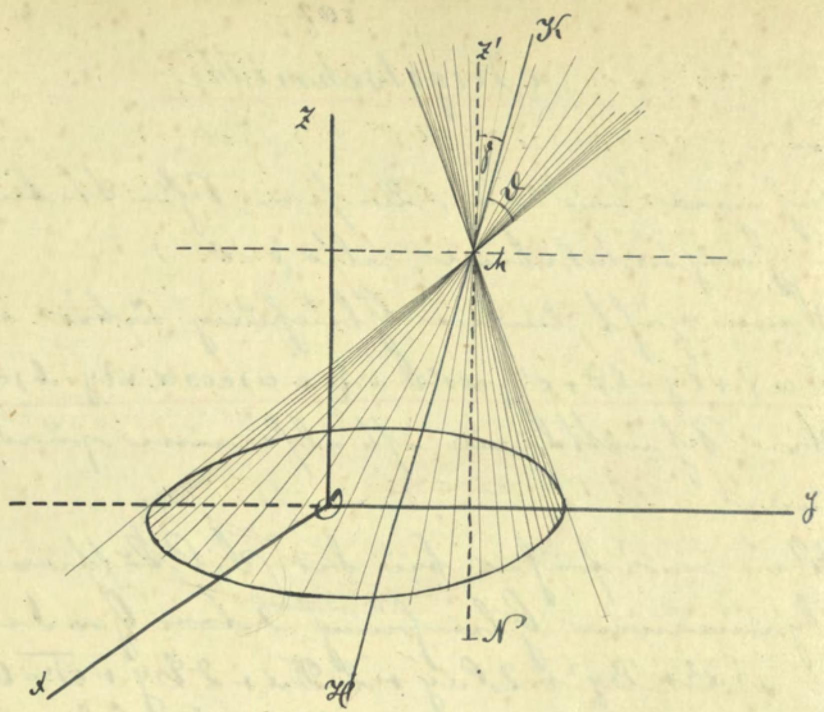

Fig. 82.

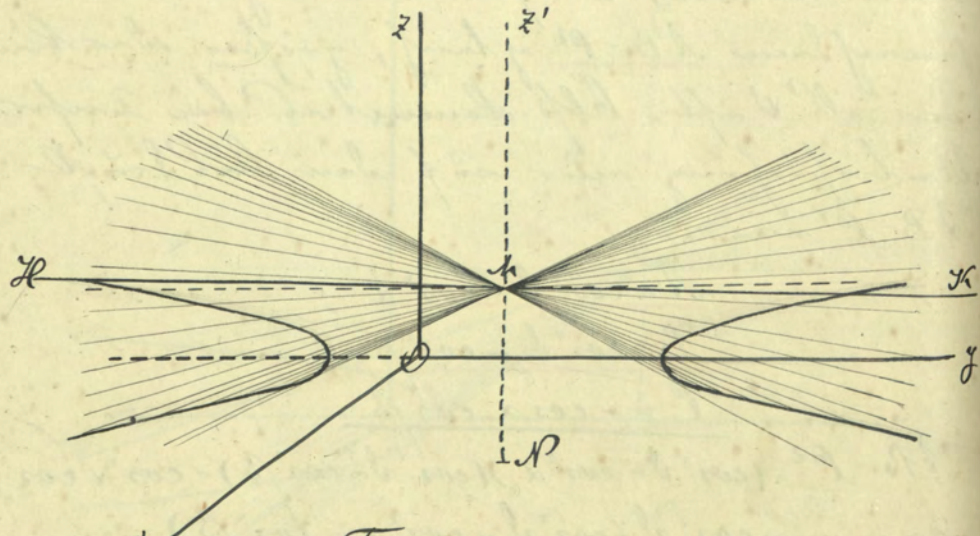

Fig. 83.

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1 - \cos^2\gamma = \sin^2\gamma$$

ferner: $\cos^2\vartheta = \sin^2(90^\circ - \vartheta)$ folgt:

$$AB - C^2 = \cos^2\vartheta\,(\sin^2(90^\circ - \vartheta) - \sin^2\gamma)$$

I Fall: $AB - C^2 = 0$ (**Parabel**) Coll. 32 19/III 92.

Dann muß: $90^\circ - \vartheta = \gamma$ sein (s. Fig. 81).
d. h. die Schnittebene verläuft parallel der Kante des Kegels.

II Fall: $AB - C^2 > 0$ (**Ellipse**)

Dann ist: $90^\circ - \vartheta > \gamma$. (s. Fig 82)
In diesem Falle liegt die Parallelebene zur Schnittebene, die durch die Spitze des Kegels geht, ganz außerhalb desselben.

III Fall. $AB - C^2 < 0$ (**Hyperbel**)

Dann ist: $90^\circ - \vartheta < \gamma$. (s. Fig 83.)
Die durch die Spitze des Kegels gehende zur Schnittebene parallele Ebene muß den Kegel schneiden.

Die Schnittlinie eines geraden Kegels mit einer Ebene ist also eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, jenachdem die durch die Spitze des Kegels parallel zur Schnittebene gezogene Ebene den Kegel gar nicht trifft, berührt oder schneidet.

Satz 42. Die Gleichung einer Ebene, welche den Punkt a, b, c enthält und mit den C! Ebenen die Winkel α, β, γ bildet, ist:

$$(x-a)\cos\alpha + (y-b)\cos\beta + (z-c)\cos\gamma = 0$$

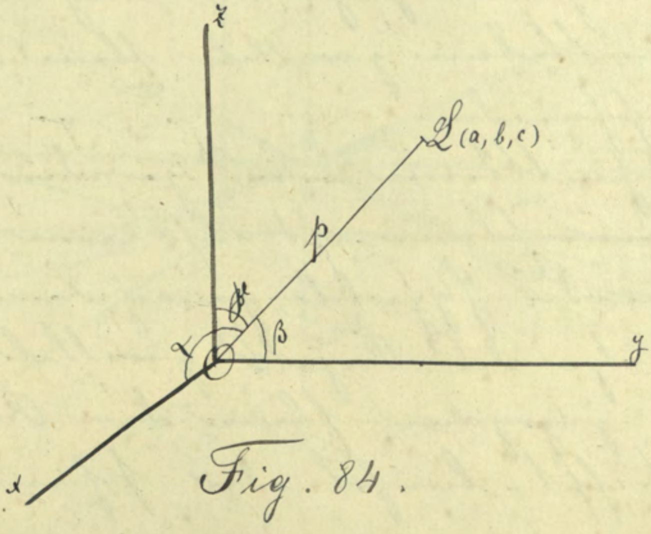

Fig. 84.

Setzen wir in die Gleichung des Kegels:

$$[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]\cos^2\vartheta = [(x-a)\cos\alpha+(y-b)\cos\beta+(z-c)\cos\gamma]^2$$

$\vartheta = 90^\circ$ so geht der Kegel über in eine Ebene und wir erhalten die

Gleichung der Ebene,

wenn wir $\cos\vartheta = 0$ setzen:

$$(x-a)\cos\alpha+(y-b)\cos\beta+(z-c)\cos\gamma = 0,$$

wo $\alpha\,\beta\,\gamma$ die Winkel sind, die das Lot auf die Ebene mit den C! Axen bildet.

Wir müssen jetzt auch definieren, was man unter dem Winkel zweier Ebenen versteht.

Unter dem Winkel zweier Ebenen wird derjenige Winkel verstanden, welchen die positiven Richtungen der Lote auf ihnen mit einander bilden.

Wir müssen also auch hier für die Lote eine ganz bestimmte Richtung als die positive festsetzen.

In unserer Gleichung der Ebene sind also α, β, γ die Winkel, welche dieselbe mit den C! Ebenen bildet.

Nehmen wir an, es sei in Fig. 84 $OL = p$

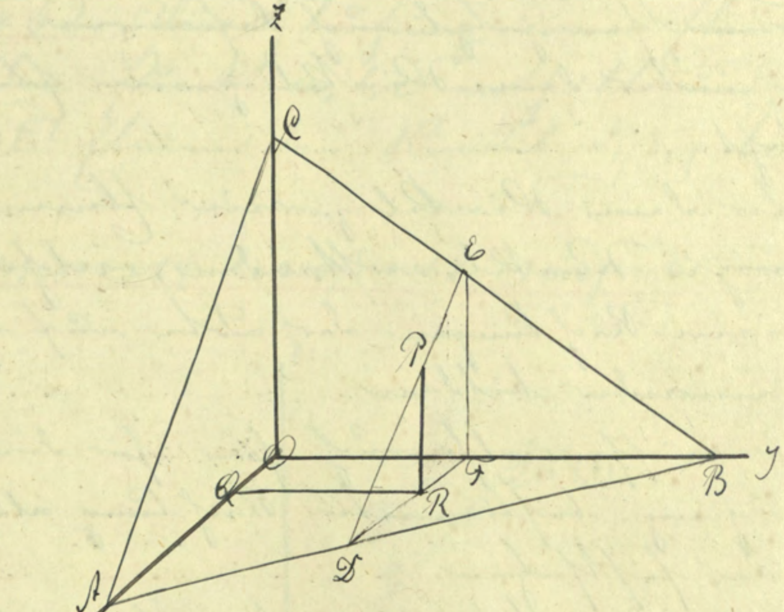

Fig. 85.

das Lot auf eine Ebene und L hatte die C! $a = p\cos\alpha$, $b = p\cos\beta$, $c = p\cos\gamma$, so ist die Gleichung der Ebene:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) = 0$$

oder, da: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ ist:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p$$

die sogenannte Hessesche Normalform der Gleichung der Ebene, welche für $z = 0$ genau die Hessesche Normalform für die Gleichung der geraden Linie giebt.

Wir wollen jetzt einige Aufgaben behandeln, Coll. 33 $\frac{23}{III}$ 92.
die eigentlich in die descriptive Geometrie gehören, aber für die Zeichnung der Figuren in der analytischen Geometrie von Wichtigkeit sind.

I. Die C! eines Punktes, der auf einer Ebene liegt, zu zeichnen. (s. Fig. 85.)

Die Ebene selbst stellt man sich am besten durch ihre Durchschnittslinien mit den C!ebenen, die sogenannten Spuren dar.

Die Spuren seien AB, BC u. CA. P sei der gegebene Punkt der Ebene. Wir legen irgend eine Ebene durch P, die $\perp$ auf der xy Ebene

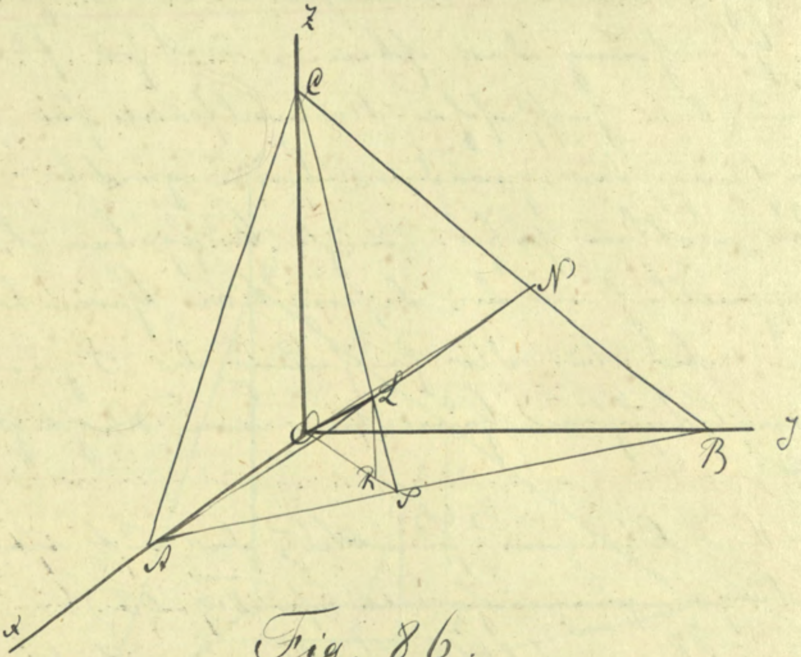

Fig. 86.

steht, d.h. wir ziehen durch P eine Gerade bis zum Schnitt mit den Spuren AB u. BC, hierauf ziehen wir EF ∥ OC u. verbinden D mit F, dann sind DE, EF u. FD die Schnittlinien der neuen Ebene mit der ursprünglichen und mit den C. Ebenen. Ziehen wir jetzt PR ∥ EF so ist PR die gesuchte Höhe des Punktes. Abscisse und Ordinate desselben findet man dann natürlich, indem man RQ ∥ FO zieht.

II. Das Lot vom Anfangspunkte auf eine Ebene zu zeichnen. (s. Fig. 86.)

Nehmen wir an, wir hätten das Lot schon gezeichnet; dasselbe sei OL. Wir legen durch die z-Axe und L eine Ebene OCS, hierauf ziehen wir LR ∥ CO, dann ist OR die orthogonale Projektion des Lotes auf die xy Ebene. Es ist jetzt leicht zu zeigen, dass OS ⊥ AB steht. Aus der Geometrie wissen wir: „Steht eine Gerade senkrecht auf einer Ebene, so steht sie auch senkrecht auf jeder Geraden, die in dieser Ebene liegt." OL steht ⊥ auf der Ebene ABC, folglich auch:

$$OL \perp AB$$

Da ferner $LR \perp$ steht auf der xy Ebene, heißt auch

$$LR \perp AB$$

Folglich steht AB senkrecht auf der Ebene OLS also auch $\perp$ auf OS.
Ziehen wir jetzt die Gerade ALN und verbinden N mit O, so ist auf dieselbe Art u. Weise zu zeigen, daß $ON \perp BC$ steht.
Wir finden also den Punkt L, d.h. den Fußpunkt des Lotes vom Anfangspunkte auf die Ebene ABC, indem wir $ON \perp BC$ u. $OS \perp AB$ ziehen und hierauf A mit N und C mit S verbinden.
ONB ist auch in der Perspective ein rechter Winkel, schwieriger ist es $OS \perp AB$ zu zeichnen. (s. Fig. 87). Wir nehmen bei unseren Zeichnungen an, daß die Strecken auf der x-Axe auch ihrer Größe nach richtig sind (Cavalier-perspective). Denken wir uns die xy-Ebene nach unten umgeklappt, so entspricht dem Punkte A der Punkt A'. Ziehen wir jetzt $OS' \perp A'B$, so entspricht S' dem Punkte S in der vorigen Figur. Ziehen wir jetzt noch

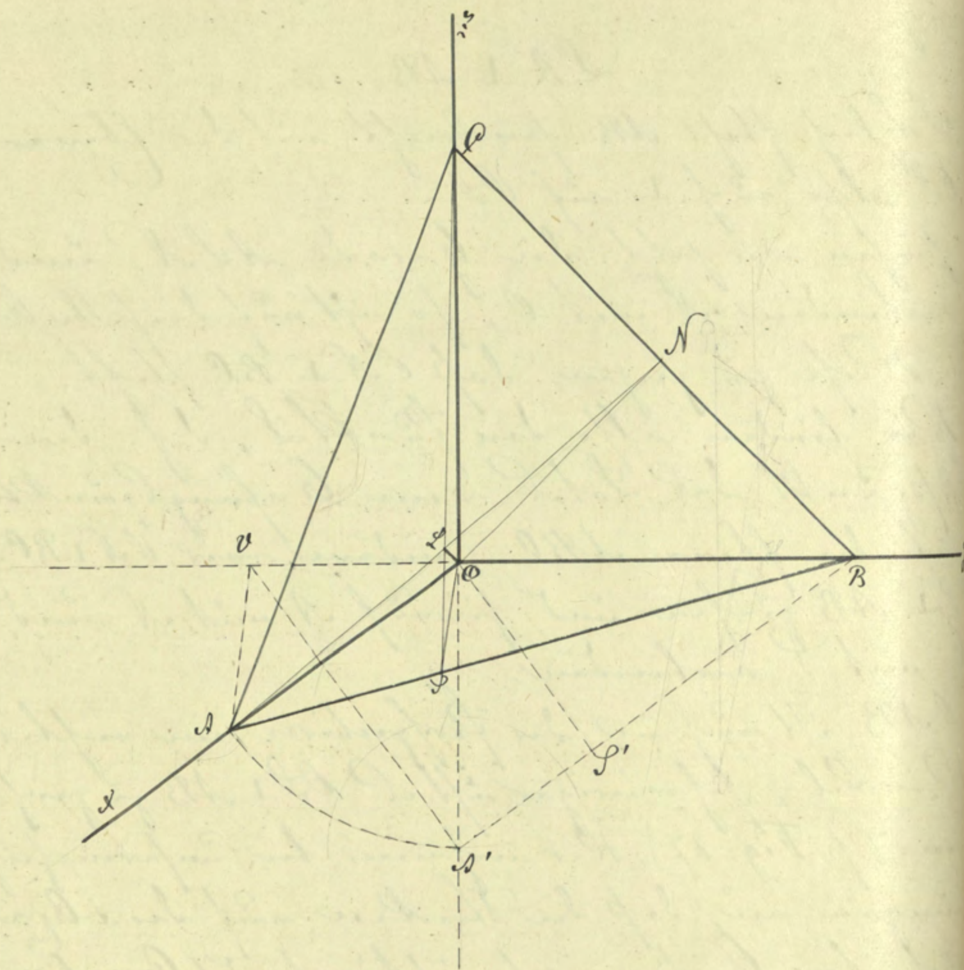

Fig. 87.

$A'V \parallel S'O$ so giebt AV die Richtung der horizontalen Projection des Lotes an. Wir ziehen also $OS \parallel VA$ u. verbinden S mit C, N mit A, so ist der Durchschnittspunkt dieser Linien der Fußpunkt des gesuchten Lotes.

Jetzt ist es auch leicht von irgend einem Punkte P_1 außerhalb der Ebene das Lot auf dieselbe zu fällen.

Ist U der Fußpunkt von P_1, so ziehen wir $UH \parallel OS$, $HK \parallel OC$, verbinden K mit D und ziehen $P_1F \parallel OL$, so ist P_1F das gesuchte Lot.

Wir wollen jetzt dieselbe Aufgabe analytisch behandeln, d. h.

die Länge des Lotes

von irgend einem Punkte auf eine Ebene berechnen.

Bezeichnen wir die Länge des Lotes mit l, die C! von P_1 mit $x_1\, y_1\, z_1$ so sind die C! des Fußpunktes F:

$$x = x_1 + l\cos\alpha$$

$$y = y_1 + l\cos\beta$$

$$z = z_1 + l\cos\gamma$$

Da der Punkt auf der Ebene ABC liegt, so

muß er auch der Gleichung derselben genügen,
also:

$$(x_1 + l\cos\alpha)\cos\alpha + (y_1 + l\cos\beta)\cos\beta + (z_1 + l\cos\gamma)\cos\gamma = p$$

$$x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma + l(\underline{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma}) = p$$

$$\underline{l = p - x_1\cos\alpha - y_1\cos\beta - z_1\cos\gamma}$$

Discussion der Gleichung I Grades. Coll. 34 $\frac{26}{III}$ 92.

Denken wir uns eine beliebige lineare Gleichung:

$$\underline{Ax + By + Cz = D}$$

gegeben, so können wir leicht erkennen, daß sie stets eine Ebene darstellt.
Dividieren wir die Gleichung durch $\sqrt{A^2+B^2+C^2}$, so erhalten wir:

$$\pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}x \pm \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}y \pm \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}z = \pm\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Soll diese Gleichung identisch sein mit:

$$\underline{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p}$$

so muß sein:

$$\underline{\cos\alpha = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}},\quad \underline{\cos\beta = \pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}},\quad \underline{\cos\gamma = \pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}$$

und $\underline{p = \pm\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}$

$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ sind die Richtungcoss von p, folgl. muß die Summe ihrer Quadrate $= 1$ sein,

Satz 43. Die Gleichung $Ax + By + Cz = D$ stellt eine Ebene dar, welche mit den Achsen die Winkel α, β, γ bildet, welche bestimmt sind durch:

$$\cos\alpha = \frac{\pm A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\beta = \frac{\pm B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{\pm C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

und welche vom Anfangspunkte um das Stück:

$$p = \frac{\pm D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

entfernt ist, wo das obere oder untere Vorzeichen gilt, jenachdem D positiv oder negativ ist.

Die Entfernung eines beliebigen Punktes $P(x,y,z)$ von dieser Ebene ist:

$$l = \frac{D - Ax - By - Cz}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

wie es auch in der That der Fall ist. Das Vorzeichen ist immer so zu wählen, daß p positiv wird.

Errichten wir jetzt im Endpunkt dieser Geraden eine zu ihr senkrechte Ebene, so erhalten wir wiederum:

$$Ax + By + Cz = D.$$

Folglich stellt diese Gleichung immer eine Ebene dar.

Die Entfernung eines Punktes von dieser Ebene ist:

$$l = \frac{D - x_1 A - y_1 B - z_1 C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Der Fußpunkt des Lotes vom Anfangspunkte hat die C.!

$$a = p\cos\alpha = \frac{AD}{A^2+B^2+C^2}$$

$$b = p\cos\beta = \frac{BD}{A^2+B^2+C^2}$$

$$c = p\cos\gamma = \frac{CD}{A^2+B^2+C^2}.$$

Um die Gleichungen der Spuren aufzustellen brauchen wir nur in der Gleichung der Ebene der Reihe nach $x, y, z = 0$ zu setzen, so erhalten wir für die:

und es macht die Ebene auf den C. Axen die Abschnitte:

$$\underline{a = \frac{D}{A}}, \quad \underline{b = \frac{D}{B}}, \quad \underline{c = \frac{D}{C}},$$

so dass ihre Gleichung auch die Form hat:

$$\underline{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1}$$

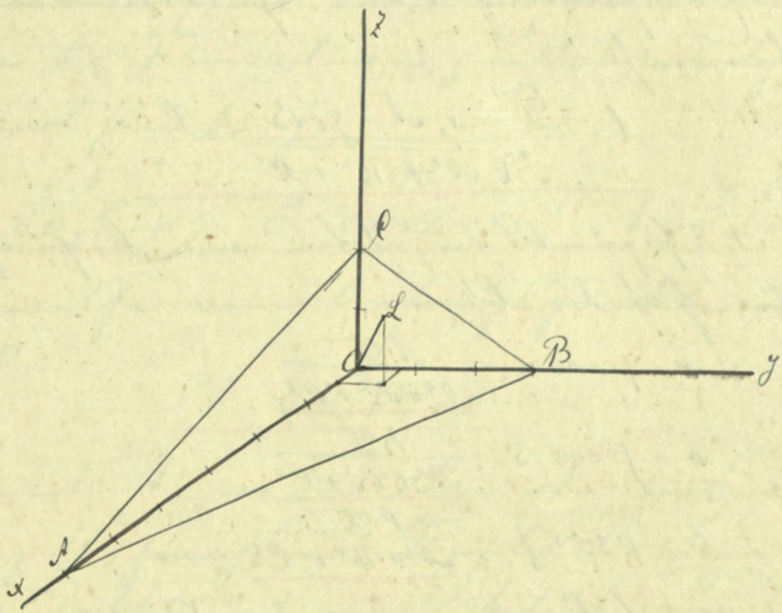

Fig. 88.

Horizontalspur, der sog. Grundriss: $Ax + By = D$
Verticalspur " " Aufriss: $By + Cz = D$
Seitl. Verticalsp. " " Seitenriss: $Ax + Cz = D$

Hieraus findet man sofort die Abschnitte, die die Ebene auf den C! Axen macht:

$$a = \frac{D}{A}, \quad b = \frac{D}{B}, \quad c = \frac{D}{C}.$$

Wenn wir diese Bezeichnungen einführen, können wir auch die Gleichung der Ebene schreiben in der Form:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Beispiel: Man bestimme die Richtungscos, die Länge des Lotes vom Anfangspunkte und die C! des Fußpunktes dieses Lotes auf die Ebene: $x + 2y + 3z = 6$

$$p = \frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{6}{\sqrt{14}}$$

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

$$\cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{2}{\sqrt{14}}$$

$$\cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{3}{\sqrt{14}}$$

$$a = \frac{AD}{A^2+B^2+C^2} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}, \quad b = \frac{BD}{A^2+B^2+C^2} = \frac{12}{14} = \frac{6}{7}, \quad c = \frac{CD}{A^2+B^2+C^2} = \frac{18}{14} = \frac{9}{7}$$

(s. Fig. 88.).

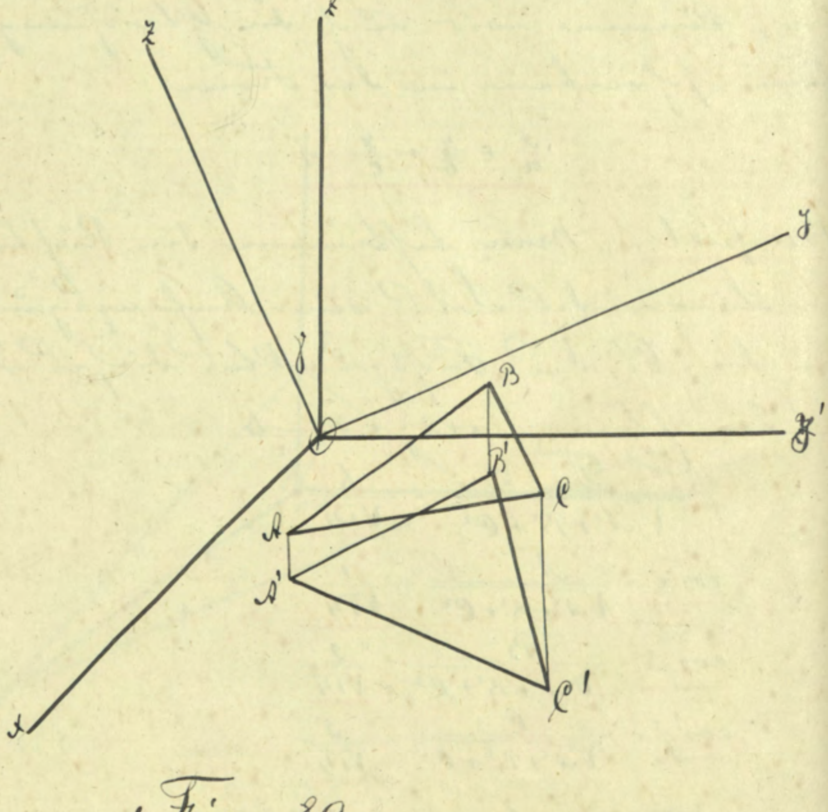

Fig. 89.

Ehe wir an die Berechnung des Flächeninhaltes eines Dreiecks im Raume gehen, müssen wir noch einige Bestimmungen hinsichtlich des Vorzeichens treffen.

Um jede Zweideutigkeit zu vermeiden, nehmen wir auf jeder Ebene eine positive und eine negative Seite an, und die Fläche einer Ebene wird alsdann als positiv oder negativ betrachtet, jenachdem sie von der positiven Seite aus gesehen entgegengesetzt oder in dem Sinne des Uhrzeigers umlaufen wird.

Analog dem Satze über die orthogonale Projection einer Strecke auf eine Gerade, haben wir folgenden Satz:

Die orthogonale Projection $A'B'C'$ der Fläche des Dreiecks ABC der Ebene ε auf die Ebene ε' ist immer, auch dem Zeichen nach

$$\Delta A'B'C' = \Delta ABC \cos(\varepsilon\varepsilon')$$

wie auch die positiven Seiten der beiden Ebenen festgesetzt sein mögen. (s. Fig. 89).

Wir machen die Schnittlinie der beiden Ebenen zur x-Axe; das Dreieck ABC liege in der xy-, das $\Delta A'B'C'$ in der xy'-Ebene, dann ist:

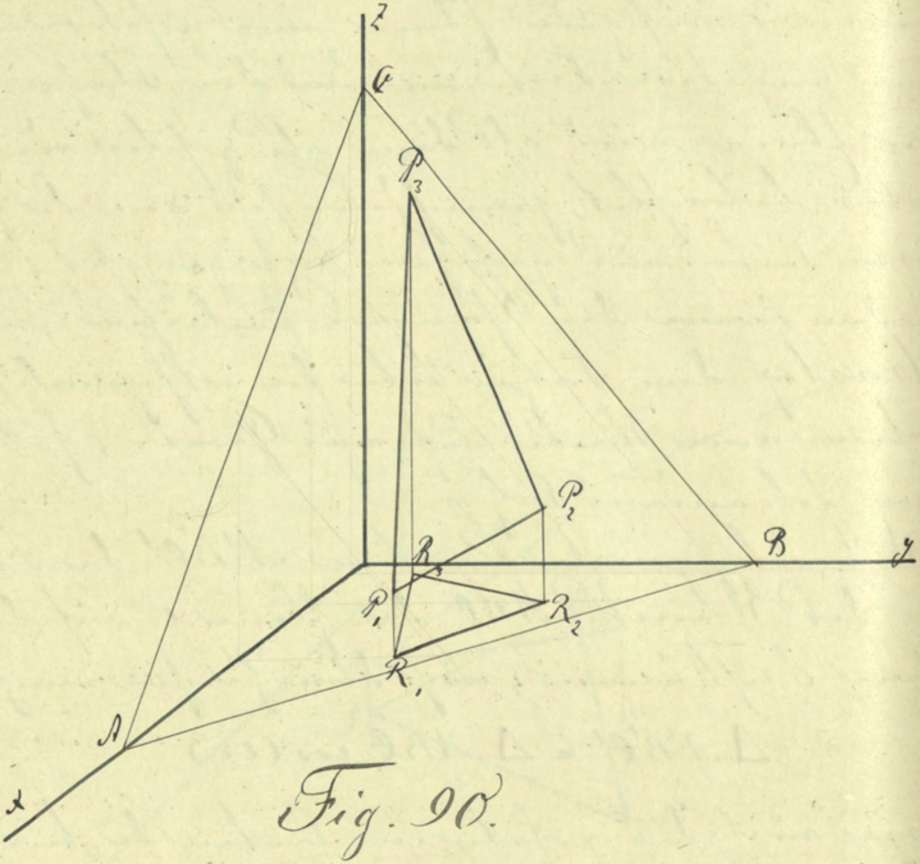

Fig. 90.

$$2\Delta ABC = x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3$$

Nun ist aber $y = \frac{y'}{\cos\gamma}$, folgl:

$$\Delta ABC = \frac{1}{2}\cdot\frac{x_1y_2' - x_2y_1' + x_2y_3' - x_3y_2' + x_3y_1' - x_1y_3'}{\cos\gamma}$$

$$\Delta ABC = \frac{\Delta A'B'C'}{\cos\gamma}$$ &

Der Winkel $(\varepsilon\varepsilon')$ ist aber $=\gamma$; also:

$$\Delta A'B'C' = \Delta ABC \cos(\varepsilon\varepsilon').$$

Ist $\angle(\varepsilon\varepsilon')$ spitz, so hat $A'B'C'$ dasselbe Vorzeichen, wie ABC, ist $\angle(\varepsilon\varepsilon')$ dagegen stumpf, das entgegengesetzte. Dass dieses in der That so sein muss, können wir aus der Figur ersehen, denn im ersten Falle geschieht die Umlaufung der beiden Dreiecke in derselben, im zweiten in entgegengesetzter Richtung.

Wir können jetzt leicht den Coll. 35 $\frac{13}{IV}$ 92.

Flächeninhalt eines Dreiecks

berechnen, wenn die C! seiner Eckpunkte $(x_1y_1z_1,\ x_2y_2z_2,\ x_3y_3z_3)$ gegeben sind (s. Fig. 90).

Ist $P_1P_2P_3$ das gegebene Dreieck und $R_1R_2R_3$ seine Horizontalprojection, so ist, wie wir oben bewiesen haben:

$$\Delta P_1P_2P_3 \cos\gamma = \Delta R_1R_2R_3$$

Satz 44. Das Quadrat des Flächeninhalts eines Dreiecks ist gleich der Summe der Quadrate seiner Projectionen auf die C.'Ebenen.

Satz 45. Das Volumen des Tetraeders $OP_1P_2P_3$ ist =

$$\frac{1}{6}\left(x_1(y_2z_3-y_3z_2)+y_1(z_2x_3-z_3x_2)+z_1(x_2y_3-x_3y_2)\right)$$

wobei in unserem Falle $\cos\gamma$ der Richtungs-cos des Lotes OL mit der z Axe ist:

$$\underline{2\Delta P_1P_2P_3\cos\gamma} = x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3\text{, ebenso:}$$

$$\underline{2\Delta P_1P_2P_3\cos\alpha} = y_1z_2 - y_2z_1 + y_2z_3 - y_3z_2 + y_3z_1 - y_1z_3$$

$$\underline{2\Delta P_1P_2P_3\cos\beta} = z_1x_2 - z_2x_1 + z_2x_3 - z_3x_2 + z_3x_1 - z_1x_3$$

wenn wir jetzt quadrieren, addieren und hierauf die Wurzel ziehen, so erhalten wir:

$$\underline{2\Delta P_1P_2P_3 = \sqrt{(x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3)^2 + (y_1z_2 - y_2z_1 + y_2z_3 - y_3z_2 + y_3z_1 - y_1z_3)^2 + (z_1x_2 - z_2x_1 + z_2x_3 - z_3x_2 + z_3x_1 - z_1x_3)^2}}$$

Wenn wir jetzt die erste der 3 obigen Gleichungen mit z_1, die zweite mit x_1 und die dritte mit y_1 multiplicieren, hierauf alle 3 addieren und dabei berücksichtigen, dass $\underline{x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma = p}$ = dem Lote vom Anfangspunkte ist, so erhalten wir:

$$2p\Delta P_1P_2P_3 = x_1y_2z_3 - x_1y_3z_2 + x_2y_3z_1 - x_2y_1z_3 + x_3y_1z_2 - x_3y_2z_1$$
$$= x_1(y_2z_3 - y_3z_2) + y_1(z_2x_3 - z_3x_2) + z_1(x_2y_3 - x_3y_2)$$

$2p\Delta P_1P_2P_3$ ist aber das 6fache Volumen des Tetraeders $OP_1P_2P_3$, folglich ist das Volumen des Tetraeders

$$\underline{OP_1P_2P_3} = \underline{\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}}$$

Wollen wir das Volumen eines belie-

Satz 46. Die Gleichung einer Ebene durch die 3 Punkte $P_1 P_2 P_3$ ist $Ax+By+Cz=D$, wo A, B, C die Projectionen des Inhalts des Dreiecks $P_1 P_2 P_3$ auf die 3 C.-Ebenen und D das 3fache Volumen des Tetraeders $OP_1 P_2 P_3$ bedeutet.

ligen Tetraeders $P_1P_2P_3P_4$ finden, so brauchen wir nur eine C! Verschiebung nach $x_4\, y_4\, z_4$ vorzunehmen, indem wir setzen:

$x_1 = x_1 - x_4$, $y_1 = y_1 - y_4$, $z_1 = z_1 - z_4$ etc, dann erhalten wir:

$$\underline{P_1P_2P_3P_4} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Die Gleichung der Ebene ist:

$$\underline{x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma = p}$$

oder mit $2\Delta\, P_1P_2P_3$ multiplicirt:

$$x \cdot 2\Delta\, P_1P_2P_3 \cos\alpha + y\, 2\Delta \cos\beta + z\, 2\Delta \cos\gamma = 2p\Delta$$

Setzen wir jetzt für die einzelnen Glieder die früher gefundenen Werte ein, so erhalten wir die Gleichung der Ebene, die durch 3 Punkte geht:

$$\underline{x(y_1z_2 - y_2z_1 + y_2z_3 - y_3z_2 + y_3z_1 - y_1z_3) + y(z_1x_2 - z_2x_1 + z_2x_3 - z_3x_2 + z_3x_1 - z_1x_3)}$$
$$\underline{+ z(x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3) - x_1(y_2z_3 - y_3z_2) - y_1(z_2x_3 - z_3x_2) - z_1(x_2y_3 - x_3y_2) = 0}$$

oder in Determinantenform geschrieben:

$$\underline{\begin{vmatrix} x & x_1 & x_2 & x_3 \\ y & y_1 & y_2 & y_3 \\ z & z_1 & z_2 & z_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0}$$

Wir können jetzt übergehen zur Coll. 36 $\frac{14}{IV}$ 92.

Betrachtung zweier Ebenen im Raume.

Zuerst wollen wir folgende Aufgabe lösen:

Aufgabe. Die Gleichung des Ortes derjenigen Punkte zu finden, für welche das Verhältniss der Entfernungen von 2 festen Punkten constant ist.

Die beiden Ebenen seien gegeben durch die Gleichungen:

$$Ax + By + Cz = D \text{ und}$$
$$A'x + B'y + C'z = D'$$

Bezeichnen wir das gegebene Verhältniss durch μ, so ist:

$$\frac{\dfrac{D - Ax - By - Cz}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}{\dfrac{D' - A'x - B'y - C'z}{\pm\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}} = \mu$$

Setzen wir jetzt:

$$\frac{\pm\mu\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}} = \lambda$$

so geht unsere Gleichung über in:

$$\frac{D - Ax - By - Cz}{D' - A'x - B'y - C'z} = \lambda$$

Satz 47. Jede Ebene durch die Schnittlinie der beiden Ebenen $Ax + By + Cz = D$ und $A'x + B'y + C'z = D'$ hat die Gleichungsform:

$$(A - \lambda A')x + (B - \lambda B')y + (C - \lambda C')z = D - \lambda D'$$

$$D - Ax - By - Cz = \lambda(D' - A'x - B'y - C'z)$$

$$x(A - \lambda A') + y(B - \lambda B') + z(C - \lambda C') = D - \lambda D'$$

Der gesuchte Ort ist also eine Ebene und zwar geht dieselbe durch die Schnitt~~punkt~~linie der beiden gegebenen Ebenen, da die Gleichungen derselben in der letzten enthalten sind.

Soll die Ebene noch durch einen bestimmten Punkt $x'y'z'$ gehen, so ist auch λ vollkommen bestimmt.

Aufgabe. Den Winkel zu bestimmen, den zwei gegebenen Ebenen mit einander bilden.

Unter dem Winkel zweier Ebenen versteht man ja bekanntlich den Winkel den die Lote auf die Ebenen mit einander bilden, wir müssen also zuerst die Richtungscoss der Lote vom Anfangspunkte bestimmen:

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\beta = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Desgleichen:

$$\cos\alpha' = \frac{A'}{\pm\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}, \quad \cos\beta' = \frac{B'}{\pm\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}, \quad \cos\gamma' = \frac{C'}{\pm\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}$$

Satz 48. Der Winkel δ zweier Ebenen $Ax+By+Cz=D$ und $A'x+B'y+C'z=D'$ ist gegeben durch:

$$\cos\delta = \frac{AA'+BB'+CC'}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}$$

Satz 49. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die beiden Ebenen $Ax+By+Cz=D$ und $A'x+B'y+C'z=D'$ senkrecht auf einander stehen, ist die, daß:

$$AA'+BB'+CC'=0$$

folglich, wenn ϑ der Winkel ist, den die Lote mit einander bilden:

$$\cos\vartheta = \cos\alpha \cdot \cos\alpha' + \cos\beta \cdot \cos\beta' + \cos\gamma \cdot \cos\gamma'$$

$$= \frac{AA' + BB' + CC'}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2} \cdot \sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}$$

Sollen die Ebenen senkrecht auf einander stehen, so ist $\vartheta = 90^\circ$, $\cos\vartheta = 0$, mithin:

$$AA' + BB' + CC' = 0$$

Wir wollen jetzt die Spurpunkte der Schnittlinie der beiden Ebenen, d.h. die Durchschnittspunkte derselben mit den C.-Ebenen berechnen.

Den Spurpunkt in der xy Ebene finden wir indem wir $z = 0$ setzen und aus den so erhaltenen Gleichungen:

$$Ax + By = D$$
$$A'x + B'y = D'$$

x u. y berechnen. Wir finden dann:

$$x_1 = \frac{DB' - D'B}{AB' - A'B}, \quad y_1 = \frac{AD' - A'D}{AB' - A'B}, \quad z_1 = 0$$

Die übrigen Spurpunkte findet man genau in derselben Weise.

Es ist von Interesse, nicht nur die Spu=

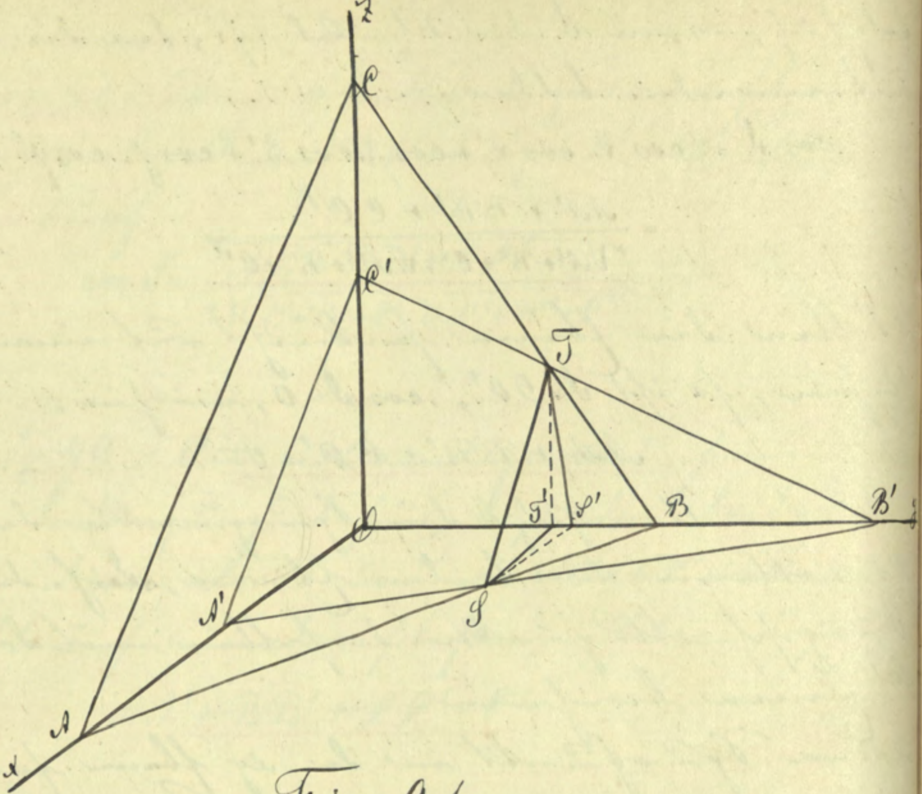

Fig. 91.

nen, sondern auch die Projectionen der Schnitt-
linie zu finden. (s. Fig. 91.)

Wir finden die Horizontalprojection ST', indem wir durch ST eine Ebene senkrecht zur xy-Ebene legen. Die Gleichung dieser Ebene ist dann jedenfalls:

$$x(A-\lambda A')+y(B-\lambda B')+z(C-\lambda C')=D-\lambda D'$$

Wir brauchen jetzt nur λ zu bestimmen.

Da das Lot auf die Ebene senkrecht auf der z Axe steht, so muß der Coefficient von z verschwinden, denn:

$$\cos\gamma=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Ist $\gamma=90^\circ$ so ist $C=0$, also in unserem Falle:

$$C-\lambda C'=0 \quad \text{folgl.}$$

$$\lambda=\frac{C}{C'}$$

Setzen wir diesen Wert in unsere Gleichung ein, so erhalten wir die Gleichung der Horizontalprojection:

$$ST': \underline{x(AC'-CA')+y(BC'-CB')=DC'-CD'}$$

Die hintere Verticalprojection finden wir indem wir durch ST eine Ebene zur yz-Ebene legen. In diesem Falle ist:

$$A-\lambda A'=0$$

$$\lambda = \frac{A}{A'}$$

und die Gleichung der Verticalprojection

$$TS': \; y(BA'-AB')+z(CA'-AC') = DA'-AD'$$

Diese beiden Gleichungen sind nur in einem Falle sinnlos, wenn nämlich die Coefficienten von x u. y beide $=0$ sind, also

$$AC'-CA'=0$$

$$BC'-CB'=0$$

Dann ist aber:

$$A:B:C = A':B':C'$$

d.h. die Coefficienten der Variabeln der einen Gleichung entstehen aus den Coefficienten der Variabeln der andern Gleichung durch Multiplication mit einem constanten Factor; also:

$$A'=kA\,,\quad B'=kB\,,\quad C'=kC$$

Die erste Ebene bildet mit den C.-Axen die Winkel:

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,,\quad \cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,,\quad \cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

die zweite dagegen:

$$\cos\alpha' = \frac{A'}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}} = \frac{kA}{\sqrt{k^2A^2+k^2B^2+k^2C^2}} = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \cos\alpha\,,$$ ebenso:

$\cos\beta' = \cos\beta$ und $\cos\gamma' = \cos\gamma$.

Satz 51. Die Richtungscoss der durch die beiden Ebenen $Ax+By+Cz=D$ und $A'x+B'y+C'z=D'$ bestimmten Geraden sind gegeben durch:

$$\cos\lambda : \cos\mu : \cos\nu = BC'-CB' : CA'-AC' : AB'-BA'$$

und ihre Horizontalspur hat die C.:

$$x_1 = \frac{DB'-BD'}{AB'-BA'} \; ; \; y_1 = \frac{AD'-DA'}{AB'-BA'} \; ; \; z_1 = 0.$$

$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1 = \frac{(BC'-CB')^2+(CA'-AC')^2+(AB'-BA')^2}{M^2}$$

so ist:

$$M = \pm\sqrt{(BC'-CB')^2+(CA'-AC')^2+(AB'-BA')^2}$$

Wir haben also folgende Darstellungen einer geraden Linie im Raume gefunden:

1) Durch die drei Gleichungen

$$x = x_1 + u\cos\lambda$$
$$y = y_1 + u\cos\mu$$
$$z = z_1 + u\cos\nu$$

Dieses ist die sogenannte Parameterdarstellung der geraden Linie, da außer den Variabeln x, y, z noch der willkürliche Parameter u vorkommt.

2) Durch die Gleichungen zweier Ebenen, deren Schnittlinie sie ist.

3) Durch ihre Spurpunkte

4) Durch ihre Projectionen

Wie wir für die gerade Linie in der analytischen Geometrie der Ebene verschiedene Darstellungsarten gefunden haben, so können auch die Gleichungen für die Gerade im Raume in verschiedener Weise gegeben sein.

Es seien z. B. die Gleichungen der Horizontal- und Verticalprojection gegeben in der Form:

$$y = x\,\mathrm{tg}\,\rho + b$$
$$z = y\,\mathrm{tg}\,\sigma + c$$

Vergleichen wir diese Gleichungen mit den allgemeinen: $Ax + By + Cz = D$ und $A'x + B'y + C'z = D'$ so ist:

$$A = \mathrm{tg}\,\rho\,,\quad B = -1\,,\quad C = 0\,,\quad D = -b$$
$$A' = 0\,,\quad B' = \mathrm{tg}\,\sigma\,,\quad C' = -1\,,\quad D' = -c$$

Die C. der Horizontalspur sind dann:

$$x_1 = \frac{-b\,\mathrm{tg}\,\sigma - c}{\mathrm{tg}\,\rho\;\mathrm{tg}\,\sigma}\,,\quad y_1 = \frac{-c}{\mathrm{tg}\,\sigma}\,,\quad z_1 = 0$$

Ebenso können wir die Richtungcoss finden:

$$\cos\lambda : \cos\mu : \cos\nu = 1 : \mathrm{tg}\,\rho : \mathrm{tg}\,\rho\,.\,\mathrm{tg}\,\sigma.$$

Eine andere Darstellung der Projectionen finden wir, indem wir, indem wir aus der Parameterdarstellung der geraden Linie u eliminieren. Wir erhalten dann für die

Horizontalprojection: $\frac{x-x_1}{\cos\lambda} = \frac{y-y_1}{\cos\mu}$ und für die

Verticalprojection: $\frac{y-y_1}{\cos\mu} = \frac{z-z_1}{\cos\nu}$

Die gerade Linie ist also vollkommen be-

stimmt durch:

$$\frac{x-x_1}{\cos\lambda} = \frac{y-y_1}{\cos\mu} = \frac{z-z_1}{\cos\nu}$$

Eine gerade Linie im Raume muß also immer durch mindestens zwei Gleichungen zwischen x, y, z gegeben sein.

Ebenso ist es mit jeder beliebigen Curve im Raume. Eine Gleichung:

$$z = f(x,y)$$

stellt immer nur eine Fläche dar. Um nun eine Linie zu erhalten ist mindestens noch eine Gleichung:

$$z = \varphi(x,y)$$

nötig. Die Durchschnittslinie dieser beiden Flächen ist dann die gewünschte Curve.

Daß nicht immer zwei Gleichungen genügen ist leicht einzusehen, da es ja vorkommen kann, daß sich zwei Flächen in mehreren Curven schneiden. Es muß dann noch durch eine oder mehrere besondere Gleichungen ausgedrückt werden welche Durchschnittslinie die gewünschte ist.

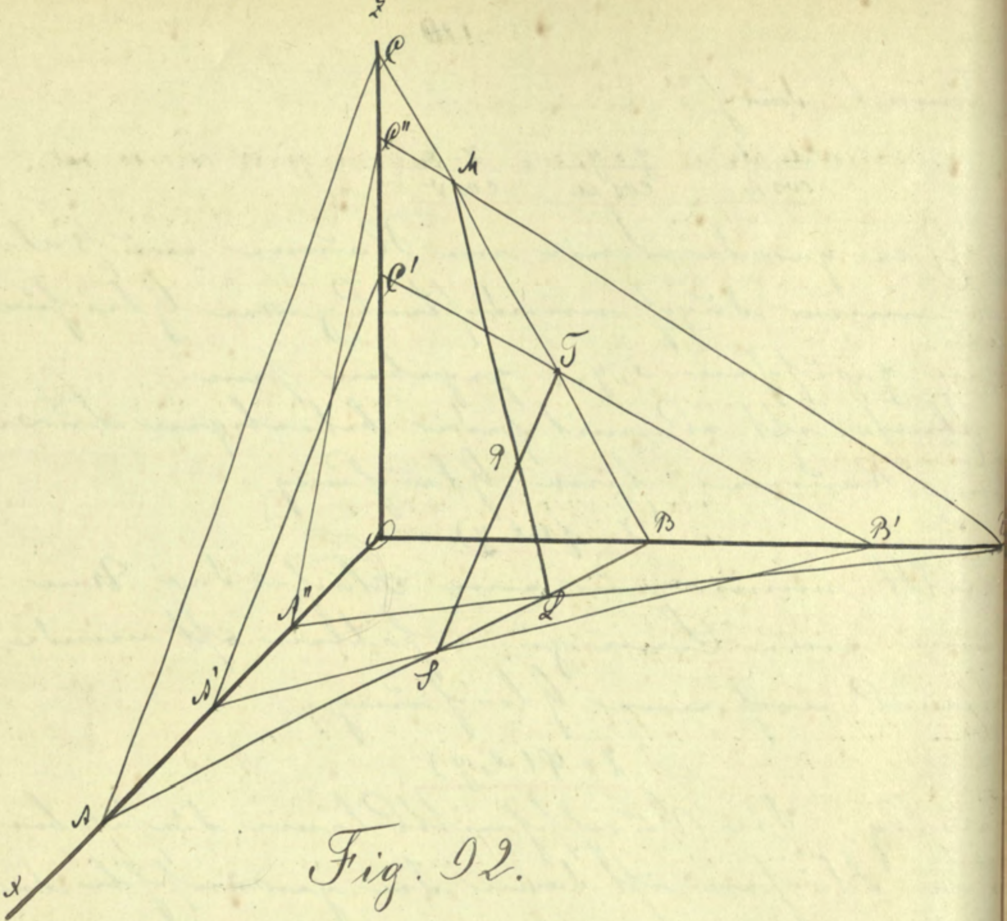

Fig. 92.

Wir wenden uns jetzt zur Coll. 38 $\frac{16}{IV}$ 92.

Betrachtung dreier Ebenen im Raume.

Zunächst können wir uns die Aufgabe stellen die C! des Schnittpunktes dreier Ebenen zu berechnen. (s. Fig. 92).

Die 3 Ebenen seien gegeben durch die Gleichungen:

$$\frac{A_1}{D_1}x + \frac{B_1}{D_1}y + \frac{C_1}{D_1}z = 1$$
$$\frac{A_2}{D_2}x + \frac{B_2}{D_2}y + \frac{C_2}{D_2}z = 1$$
$$\frac{A_3}{D_3}x + \frac{B_3}{D_3}y + \frac{C_3}{D_3}z = 1$$

Aus diesen 3 Gleichungen brauchen wir nur x, y, z zu berechnen und unsere Aufgabe ist gelöst. Da aber die Elimination der Unbekannten große Rechnungen erfordert, so wollen wir einen andern Weg einschlagen, um zum Ziele zu gelangen.

Die Gleichung der Ebene, die durch 3 Punkte geht, ist:

$$
\begin{aligned}
& x(y_2 z_3 - z_2 y_3 + y_3 z_1 - z_3 y_1 + y_1 z_2 - z_1 y_2) \\
& + y(z_2 x_3 - x_2 z_3 + z_3 x_1 - x_3 z_1 + z_1 x_2 - x_1 z_2) \\
& + z(x_2 y_3 - x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_3 y_1 + x_1 y_2 - x_1 y_2) \\
& = x_1(y_2 z_3 - z_2 y_3) + x_2(y_3 z_1 - z_3 y_1) + x_3(y_1 z_2 - z_1 y_2)
\end{aligned}
$$

Wir können diese Gleichung auch schreiben in der Form:

$$\frac{A}{D}x + \frac{B}{D}y + \frac{C}{D}z = 1, \text{ wo}$$

$$\frac{A}{D} = \frac{y_2z_3 - z_2y_3 + y_3z_1 - z_3y_1 + y_1z_2 - z_1y_2}{x_1(y_2z_3 - z_2y_3) + x_2(y_3z_1 - z_3y_1) + x_3(y_1z_2 - z_1y_2)}$$

$\frac{B}{D}$ und $\frac{C}{D}$ entstehen durch cyclische Vertauschung von x, y, z.

Da die drei Punkte $x_1y_1z_1$, $x_2y_2z_2$, $x_3y_3z_3$ auf der Ebene liegen, so müssen sie auch der Gleichung derselben genügen, also:

$$\frac{A}{D}x_1 + \frac{B}{D}y_1 + \frac{C}{D}z_1 = 1$$
$$\frac{A}{D}x_2 + \frac{B}{D}y_2 + \frac{C}{D}z_2 = 1$$
$$\frac{A}{D}x_3 + \frac{B}{D}y_3 + \frac{C}{D}z_3 = 1$$

Betrachten wir diese 3 Gleichungen als Gleichungen mit den Unbekannten $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$ u. $\frac{C}{D}$, so ergeben sich offenbar für diese, die oben angeführten Ausdrücke.

Da dieses Gleichungssystem aber genau dieselbe Form hat, wie dasjenige, das wir auflösen wollen, so werden wir offenbar die Werte für x, y, z finden, indem wir in die Ausdrücke $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$ und $\frac{C}{D}$ setzen:

Satz 52. Die C! des Schnittpunktes der 3 Ebenen: $A_1x + B_1y + C_1z = D_1$; $A_2x + B_2y + C_2z = D_2$ und $A_3x + B_3y + C_3z = D_3$ sind:

$$x = \frac{D_1(B_2C_3 - C_2B_3) + D_2(B_3C_1 - C_3B_1) + D_3(B_1C_2 - C_1B_2)}{A_1(B_2C_3 - C_2B_3) + A_2(B_3C_1 - C_3B_1) + A_3(B_1C_2 - C_1B_2)} \text{ etc}$$

wo die Formeln für die andern beiden C! aus dieser durch cyclische Vertauschung der Buchstaben A, B, C zu finden sind.

statt: $x_1, y_1, z_1;\ x_2, y_2, z_2;\ x_3, y_3, z_3;\ \frac{A}{D}, \frac{B}{D}, \frac{C}{D}$.

die Werte: $\frac{A_1}{D_1}, \frac{B_1}{D_1}, \frac{C_1}{D_1};\ \frac{A_2}{D_2}, \frac{B_2}{D_2}, \frac{C_2}{D_2};\ \frac{A_3}{D_3}, \frac{B_3}{D_3}, \frac{C_3}{D_3};\ x, y, z$.

Dann erhalten wir die C! des Durchschnitts-punktes der drei Ebenen:

$$\underline{x} = \frac{D_1(B_2C_3 - C_2B_3) + D_2(B_3C_1 - C_3B_1) + D_3(B_1C_2 - C_1B_2)}{A_1(B_2C_3 - C_2B_3) + A_2(B_3C_1 - C_3B_1) + A_3(B_1C_2 - C_1B_2)}$$

$$\underline{y} = \frac{D_1(C_2A_3 - A_2C_3) + D_2(C_3A_1 - A_3C_1) + D_3(C_1A_2 - A_1C_2)}{N}$$

$$\underline{z} = \frac{D_1(A_2B_3 - B_2A_3) + D_2(A_3B_1 - B_3A_1) + D_3(A_1B_2 - B_1A_2)}{N}$$

Anm: Der Nenner ist in allen drei Ausdrücken derselbe.

Um zu untersuchen, wann eine 4te Ebene

$$\underline{A_4x + B_4y + C_4z = D_4}$$

durch den Schnittpunkt dreier anderen Ebenen hindurchgeht, brauchen wir nur für x, y, z die eben gefundenen Werte einzusetzen und erhalten die gesuchte Bedingung. Man erhält dabei einen sehr complicirten Ausdruck. Es ist aber leicht zu beweisen, daß eine Ebene, die durch den Schnittpunkt dreier anderen Ebenen durchgeht, notwendigerweise die Gleichungsform haben muß:

$$\underline{(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3)x + (\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 + \lambda_3 B_3)y + (\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \lambda_3 C_3)z}$$
$$\underline{= \lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2 + \lambda_3 D_3}$$

Satz 53. Jede Ebene, welche durch den Schnittpunkt der 3 Ebenen: $A_1 x + B_1 y + C_1 z = D_1$, $A_2 x + B_2 y + C_2 z = D_2$ und $A_3 x + B_3 y + C_3 z = D_3$ hindurchgeht, hat die Gleichungsform:

$$(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3)x + (\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 + \lambda_3 B_3)y$$
$$+ (\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \lambda_3 C_3)z = \lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2 + \lambda_3 D_3$$

Daß diese Gleichung eine Ebene darstellt, ist ja sofort klar. Ebenso kann man gleich sehen, daß eine Ebene dargestellt wird, die durch den Schnittpunkt der drei gegebenen Ebenen geht. Um das zu zeigen, brauchen wir nur die Gleichung zu schreiben in der Form:

$$\lambda_1(A_1x+B_1y+C_1z-D_1)+\lambda_2(A_2x+B_2y+C_2z-D_2)+\lambda_3(A_3x+B_3y+C_3z-D_3)=0$$

Wir erkennen sofort, daß die Gleichungen aller drei Ebenen hierin enthalten sind.

Es erübrigt noch, zu zeigen, daß jede durch den Schnittpunkt dreier Ebenen gehende Ebene in dieser Form dargestellt werden kann.

Soll die betreffende Ebene genau bestimmt sein, so müssen noch zwei Punkte gegeben sein, durch welche sie hindurch geht. Sind dieselben $x_1y_1z_1$ und $x_2y_2z_2$, so ist:

$$\lambda_1(A_1x_1+B_1y_1+C_1z_1-D_1)+\lambda_2(A_2x_1+B_2y_1+C_2z_1-D_2)+\lambda_3(A_3x_1+B_3y_1+C_3z_1-D_3)=0$$

$$\lambda_1(A_1x_2+B_1y_2+C_1z_2-D_1)+\lambda_2(A_2x_2+B_2y_2+C_2z_2-D_2)+\lambda_3(A_3x_2+B_3y_2+C_3z_2-D_3)=0$$

Schreiben wir die Gleichungen der Kürze wegen in der Form:

$$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3=0$$
$$\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2+\lambda_3\beta_3=0$$

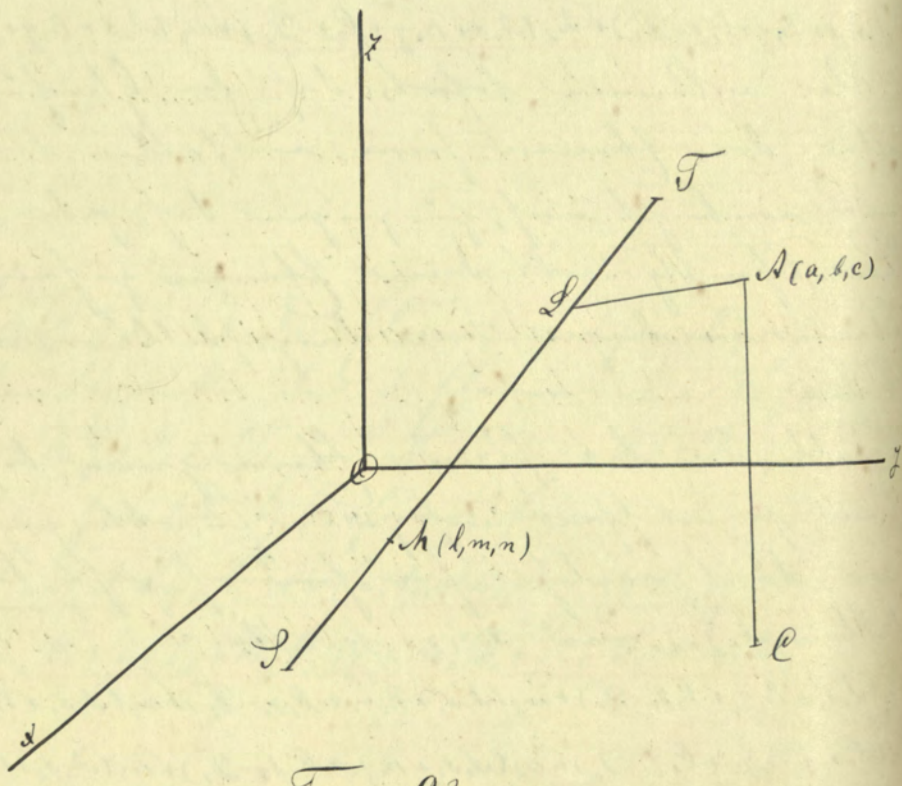

Fig. 93.

so finden wir:

$$\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 : \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3 : \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$$

Wir können also $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ immer bestimmen, womit auch unser Satz bewiesen ist.

Nachdem wir jetzt die Beziehungen von 2 Punkten im Raume und ebenso von 2 Ebenen betrachtet haben, wollen wir zur Betrachtung der Beziehungen, welche zwischen einem Punkte und einer Geraden, ferner zwischen einer Ebene und einer geraden Linie und endlich zwischen zwei geraden Linien bestehen, übergehen. Coll. 39 $\frac{20}{II}$ 92.

Punkt und gerade Linie.

Eine gerade Linie sei gegeben durch die Gleichungen:

$$x = l + u\cos\lambda$$
$$y = m + u\cos\mu$$
$$z = n + u\cos\nu$$

Der Punkt habe die C! a, b, c (s. Fig. 93.)

Wir können uns folgende Aufgaben stellen:

Aufgabe 1. Den Fußpunkt (L) des Lotes vom Punkte A(a, b, c) auf die Gerade zu finden.

Diese Aufgabe werden wir am leichtesten

stens lösen, indem wir den Schnittpunkt der durch den Punkt A zu ST senkrechten Ebene mit dieser Geraden berechnen.

Die Gleichung der Ebene ist:

$$\underline{(x-a)\cos\lambda + (y-b)\cos\mu + (z-c)\cos\nu = 0}$$

Setzen wir ML = v, so ist, da L auf der Ebene liegt:

$$(l+v\cos\lambda-a)\cos\lambda + (m+v\cos\mu-b)\cos\mu + (n+v\cos\nu-c)\cos\nu = 0$$

$$(l-a)\cos\lambda + (m-b)\cos\mu + (n-c)\cos\nu + v = 0$$

$$\underline{v = (a-l)\cos\lambda + (b-m)\cos\mu + (c-n)\cos\nu}$$

Hierdurch ist der Punkt L vollkommen bestimmt.

<u>Aufgabe 2</u>. Die Länge (e) des Lotes AL zu finden.

Da $\angle$ ALM ein Rechter ist, so ist:

$$\underline{e^2} = MA^2 - v^2 = \underline{(a-l)^2 + (b-m)^2 + (c-n)^2 - v^2}$$

<u>Aufgabe 3.</u> Die Richtungscoss von AL zu bestimmen.

Dieselben sind:

$$\underline{\frac{l+v\cos\lambda-a}{e}}, \quad \underline{\frac{m+v\cos\mu-b}{e}}, \quad \underline{\frac{n+v\cos\nu-c}{e}}$$

<u>Aufgabe 4</u>. Die Ebene zu bestimmen, welche durch die Gerade ST und den Punkt

Satz 54. Das Lot vom Punkte a, b, c auf die gerade Linie:

$$x = l + u\cos\lambda$$
$$y = m + u\cos\mu$$
$$z = n + u\cos\nu$$

hat als C. des Fußpunktes:

$$l + v\cos\lambda \text{ etc}, \text{ wo}$$

$$v = (a-l)\cos\lambda + (b-m)\cos\mu + (c-n)\cos\nu$$

als Richtungscoss.

$$\frac{l-a+v\cos\lambda}{e}, \quad \frac{m-b+v\cos\mu}{e}, \quad \frac{n-c+v\cos\nu}{e}$$

wo:

$$e = \sqrt{(a-l)^2 + (b-m)^2 + (c-n)^2 - v^2}$$

die Länge des Lotes ist.

Die Ebene durch den Punkt und die Gerade hat die Gleichung:

$$(x-a)\{(m-b)\cos\nu - (n-c)\cos\mu\} + (y-b)\{(n-c)\cos\lambda - (l-a)\cos\nu\}$$
$$+ (z-c)\{(l-a)\cos\mu - (m-b)\cos\lambda\} = 0$$

A geht.

Dieselbe hat jedenfalls die Form:

$$(x-a)\cos\alpha+(y-b)\cos\beta+(z-c)\cos\gamma=0$$

Da sie durch den Punkt M geht, so ist auch:

$$(l-a)\cos\alpha+(m-b)\cos\beta+(n-c)\cos\gamma=0$$

Ferner ist:

$$\cos\lambda.\cos\alpha+\cos\mu.\cos\beta+\cos\nu.\cos\gamma=0,$$ folgl.

$$\cos\alpha\big((l-a)\cos\nu-(n-c)\cos\lambda\big)+\cos\beta\big((m-b)\cos\nu-(n-c)\cos\mu\big)=0$$

$$\cos\beta\big((m-b)\cos\lambda-(l-a)\cos\mu\big)+\cos\gamma\big((n-c)\cos\lambda-(l-a)\cos\nu\big)=0$$

$$\cos\alpha:\cos\beta:\cos\gamma=(m-b)\cos\nu-(n-c)\cos\mu:(n-c)\cos\lambda-(l-a)\cos\nu$$
$$:(l-a)\cos\mu-(m-b)\cos\lambda$$

Die Gleichung der Ebene AS ist demnach:

$$(x-a)\{(m-b)\cos\nu-(n-c)\cos\mu\}+(y-b)\{(n-c)\cos\lambda-(l-a)\cos\nu\}$$
$$+(z-c)\{(l-a)\cos\mu-(m-b)\cos\lambda\}=0$$

Hiermit hätten wir alle Aufgaben, die sich auf einen Punkt und eine gerade Linie beziehen, gelöst.

Gerade Linie und Ebene.

Aufgabe. Den Durchschnittspunkt der geraden Linie: $x=l+u\cos\lambda$, $y=m+u\cos\mu$, $z=n+u\cos\nu$ mit der Ebene: $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=p$ zu finden. (s. Fig. 94.)

Ist U der gesuchte Durchschnittspunkt

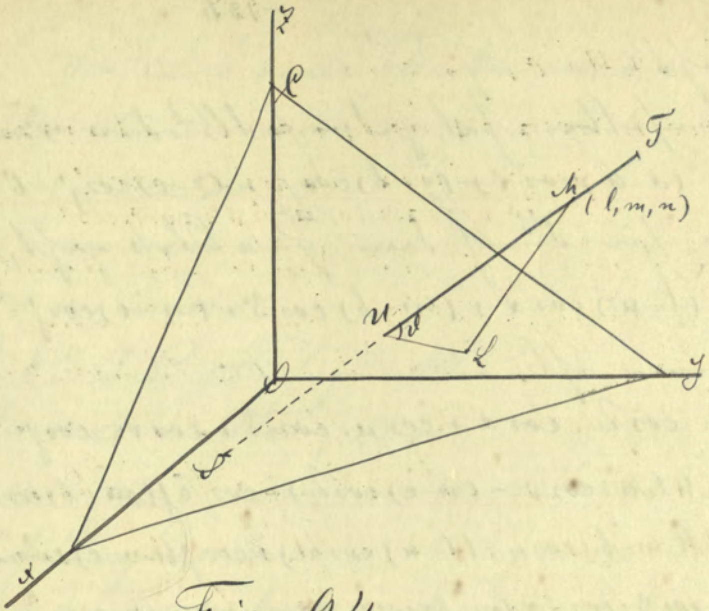

Fig. 94.

Satz 55. Der Neigungswinkel der Ebene

$$x \cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p$$

gegen die Gerade:

$$x = l + u\cos\lambda$$
$$y = m + u\cos\mu$$
$$z = n + u\cos\nu$$

ist bestimmt durch:

$$\sin\vartheta = \pm(\cos\lambda\cos\alpha + \cos\mu\cos\beta + \cos\nu\cos\gamma)$$

und der Schnittpunkt der Ebene mit der Geraden durch:

$$u = \frac{p - l\cos\alpha - m\cos\beta - n\cos\gamma}{\cos\lambda\cdot\cos\alpha + \cos\mu\cos\beta + \cos\nu\cdot\cos\gamma}.$$

und $AU = v$, so ist:

$$(l + v\cos\lambda)\cos\alpha + (m + v\cos\mu)\cos\beta + (n + v\cos\nu)\cos\gamma = p$$

$$v = \frac{p - l\cos\alpha - m\cos\beta - n\cos\gamma}{\cos\lambda\cos\alpha + \cos\mu\cos\beta + \cos\nu\,.\cos\gamma}$$

Nachdem wir die Aufgabe analytisch gelöst haben, wollen wir uns auch geometrisch klarmachen, was der Ausdruck bedeutet.

Der Zähler desselben ist offenbar das Lot AL von A aus auf die Ebene. Der Nenner dagegen ist $= \cos UAL$ oder $= \sin\vartheta$, wo ϑ der Winkel ist, den die Gerade ST mit der Ebene bildet.

Anm: Der Winkel, den eine Gerade mit einer Ebene bildet, ist derjenige Winkel, den die Gerade mit ihrer Projection in der Ebene bildet.

Da nun dieser Winkel immer ein spitzer ist, so ist:

$$\sin\vartheta = \pm(\cos\lambda\,.\cos\alpha + \cos\mu\,.\cos\beta + \cos\nu\,.\cos\gamma)$$

wobei das Vorzeichen so zu wählen ist, daß $\sin\vartheta$ positiv resultiert.

Zwei gerade Linien.

Coll. 40 $\frac{21}{IV}$ 92.

Aufgabe. Die kürzeste Entfernung zwischen zwei geraden Linien zu finden (s. Fig. 95)

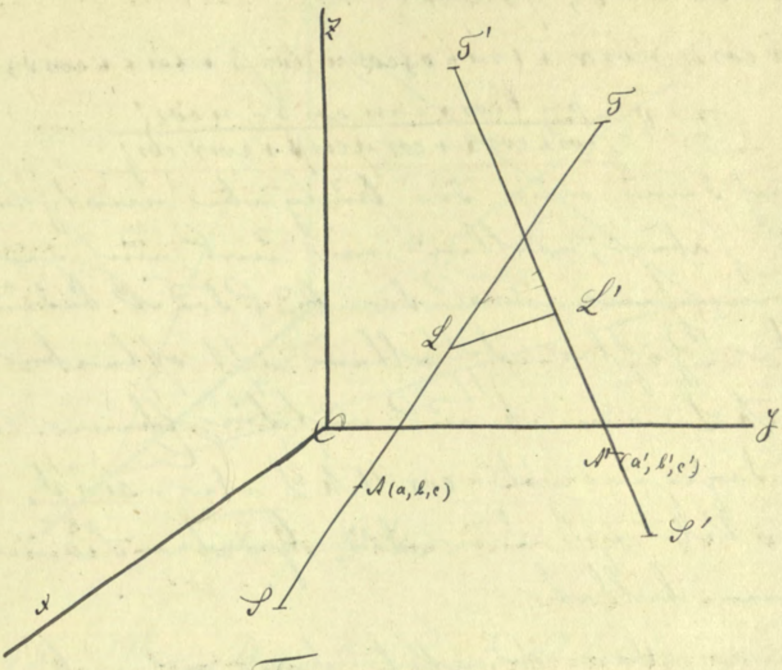

Fig. 95.

Wir können immer die beiden Geraden in zwei parallelen Ebenen liegend annehmen. Die Entfernung dieser Ebenen von einander ist ihr senkrechter Abstand. Derselbe ist zugleich ebenfalls auch die kürzeste Entfernung der beiden Geraden von einander. Die kürzeste Entfernung der beiden Geraden ist also die Gerade, welche auf den gegebenen senkrecht steht.

Ist $AL = u$ und $A'L' = u'$, so sind die Geraden gegeben durch:

$$\left|\begin{array}{l} x = a + u\cos\alpha \\ y = b + u\cos\beta \\ z = c + u\cos\gamma \end{array}\right. \quad \text{und} \quad \left|\begin{array}{l} x = a' + u'\cos\alpha' \\ y = b' + u'\cos\beta' \\ z = c' + u'\cos\gamma' \end{array}\right.$$

Sind die Richtungscoss von LL' $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$, so ist also, da $LL' \perp ST$ und $\perp S'T'$:

$$\underline{\cos\lambda \cdot \cos\alpha + \cos\mu \cdot \cos\beta + \cos\nu \cdot \cos\gamma = 0}$$

$$\underline{\cos\lambda \cdot \cos\alpha' + \cos\mu \cdot \cos\beta + \cos\nu \cdot \cos\gamma' = 0} \quad \text{hieraus:}$$

$$\cos\lambda(\cos\alpha \cdot \cos\gamma' - \cos\gamma \cdot \cos\alpha') + \cos\mu(\cos\beta \cdot \cos\gamma' - \cos\gamma \cdot \cos\beta') = 0$$

$$\cos\mu(\cos\beta \cdot \cos\alpha' - \cos\alpha \cdot \cos\beta') + \cos\nu(\cos\gamma \cdot \cos\alpha' - \cos\alpha \cdot \cos\gamma') = 0$$

$$\underline{\cos\lambda : \cos\mu : \cos\nu} = \underline{\cos\beta \cdot \cos\gamma' - \cos\gamma \cdot \cos\beta' : \cos\gamma \cdot \cos\alpha' - \cos\alpha \cdot \cos\gamma'}$$

$$: \underline{\cos\alpha \cdot \cos\beta' - \cos\beta \cdot \cos\alpha'}$$

$$\cos\lambda = \frac{\cos\beta \cdot \cos\gamma' - \cos\gamma \cdot \cos\beta'}{N}, \quad \cos\mu = \frac{\cos\gamma \cdot \cos\alpha' - \cos\alpha \cdot \cos\gamma'}{N}$$

$$\cos\nu = \frac{\cos\alpha \cdot \cos\beta' - \cos\beta \cdot \cos\alpha'}{N}$$

wo, da $\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1$:

$$N^2 = (\cos\beta\cdot\cos\gamma' - \cos\gamma\cdot\cos\beta')^2 + (\cos\gamma\cdot\cos\alpha' - \cos\alpha\cdot\cos\gamma')^2 + (\cos\alpha\cdot\cos\beta' - \cos\beta\cos\alpha')^2$$

Im allgemeinen ist:

$$(mn' - nm')^2 + (nl' - ln')^2 + (lm' - ml')^2 =$$

$$= m^2n'^2 + n^2m'^2 + n^2l'^2 + l^2n'^2 + l^2m'^2 + m^2l'^2 + l^2l'^2 + m^2m'^2 + n^2n'^2$$

$$-2(mnm'n' + lnl'n' + lml'm') - l^2l'^2 - m^2m'^2 - n^2n'^2$$

$$= (l^2+m^2+n^2)(l'^2+m'^2+n'^2) - (ll'+mm'+nn')^2$$

also in unserem Falle:

$$N^2 = (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)(\cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma') - (\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma')^2$$

$$= 1 - \cos^2\vartheta = \sin^2\vartheta, \text{ wo } \vartheta = \angle(ST, S'T')$$

$$\underline{N = \pm\sin\vartheta.}$$

Hat L die C.: x, y, z, L' dagegen x', y', z', so ist, wenn $LL' = d$

$$\cos\lambda = \frac{x'-x}{d}, \quad \cos\mu = \frac{y'-y}{d}, \quad \cos\nu = \frac{z'-z}{d}$$

$$\begin{array}{l|l|l}
d\cos\lambda = a'-a + u'\cos\alpha' - u\cos\alpha & \cdot\cos\alpha & \cdot\cos\alpha' \\
d\cos\mu = b'-b + u'\cos\beta' - u\cos\beta & \cdot\cos\beta & \cdot\cos\beta' \\
d\cos\nu = c'-c + u'\cos\gamma' - u\cos\gamma & \cdot\cos\gamma & \cdot\cos\gamma'
\end{array}$$

und addirt:

$$0 = (a'-a)\cos\alpha + (b'-b)\cos\beta + (c'-c)\cos\gamma + u'\cos\vartheta - u$$

$$0 = (a'-a)\cos\alpha' + (b'-b)\cos\beta' + (c'-c)\cos\gamma' + u' - u\cos\vartheta$$

$$u - u'\cos\vartheta = (a'-a)\cos\alpha + (b'-b)\cos\beta + (c'-c)\cos\gamma = l$$

$$u\cos\vartheta - u' = (a'-a)\cos\alpha' + (b'-b)\cos\beta' + (c'-c)\cos\gamma' = l'$$

$$\underline{u\sin^2\vartheta = l - l'\cos\vartheta}$$

$$\underline{u'\sin^2\vartheta = l\cos\vartheta - l'}$$

Satz 56. Die kürzeste Entfernung der beiden Geraden:

$$x = a + u\cos\alpha \qquad \text{und} \qquad x = a' + u'\cos\alpha'$$
$$y = b + u\cos\beta \qquad\qquad\quad y = b' + u'\cos\beta'$$
$$z = c + u\cos\gamma \qquad\qquad\quad z = c' + u'\cos\gamma' \text{ ist:}$$

$$d = \frac{(a'-a)(\cos\beta\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\beta') + (b'-b)(\cos\gamma\cos\alpha' - \cos\alpha\cos\gamma') + (c'-c)(\cos\alpha\cos\beta' - \cos\beta\cos\alpha')}{\pm\sin\vartheta}$$

wo ϑ der Winkel der beiden Geraden ist.

Durch diese beiden Gleichungen sind u und u' eindeutig bestimmt; es giebt also nur eine Gerade, welche auf zwei gegebenen Geraden senkrecht steht.

Um d zu finden, multipliciren wir unsere 3 Gleichungen mit $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ und addiren:

$$d = (a'-a)\cos\lambda + (b'-b)\cos\mu + (c'-c)\cos\nu$$

$$d = \frac{(a'-a)(\cos\beta\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\beta') + (b'-b)(\cos\gamma\cos\alpha' - \cos\alpha\cos\gamma') + (c'-c)(\cos\alpha\cos\beta' - \cos\beta\cos\alpha')}{\pm\sin\vartheta}$$

Wir gehen jetzt über zur

Coordinatentransformation

und zwar werden wir uns beschäftigen mit dem Übergange von einem rechtwinkligen C! systeme zu einem andern mit demselben Anfangspunkte.

Wir können unsere Formeln herleiten, indem wir uns das C! System zuerst um die z Axe, darauf um die neue y Axe und zuletzt um die neue x Axe gedreht denken.

Dann ist: I. $x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha$

$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$

$z = z'$

II. $x' = x''\cos\beta + z''\sin\beta$ III. $x'' = x'''$

$y' = y''$ $y'' = y'''\cos\gamma - z'''\sin\gamma$

$z' = -x''\sin\beta + z''\cos\beta$ $z'' = y'''\sin\gamma + z'''\cos\gamma$

Setzen wir jetzt in die Formeln I die Werte aus II und darauf aus III ein, so erhalten wir die C.! des ursprünglichen Systems ausgedrückt durch die des neuen.

Ebenso können wir auch die C.! des neuen Systems ausdrücken durch die des alten. Denken wir uns das System um die z-Axe um den Winkel α gedreht, so ist: Coll. 41 $\frac{22}{IV}$ 92.

$$1.\quad x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha$$
$$y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha$$
$$z' = z$$

Drehen wir jetzt um die x'-Axe:

$$2.\quad x'' = x'$$
$$y'' = y'\cos\beta + z'\sin\beta$$
$$z'' = -y'\sin\beta + z'\cos\beta \quad \text{oder:}$$

$$x'' = x\cos\alpha + y\sin\alpha$$
$$y'' = -x\sin\alpha.\cos\beta + y\cos\alpha\cos\beta + z\sin\beta$$
$$z'' = x\sin\alpha.\sin\beta - y\cos\alpha\sin\beta + z\cos\beta$$

Endlich machen wir noch eine letzte Drehung um die y''-Axe:

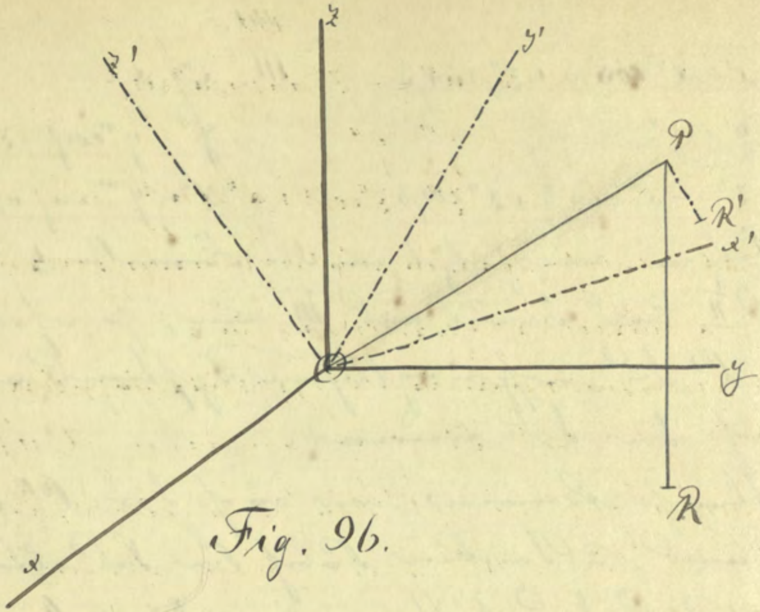

Fig. 96.

Satz 57. Der Übergang von einem System mit den Axen Ox, Oy, Oz zu einem andern mit den Axen Ox', Oy', Oz' wird vermittelt durch die Formeln:

$$x' = x\cos(x',x) + y\cos(x',y) + z\cos(x',z)$$
$$y' = x\cos(y',x) + y\cos(y',y) + z\cos(y',z)$$
$$z' = x\cos(z',x) + y\cos(z',y) + z\cos(z',z)$$

und umgekehrt:

$$x = x'\cos(x,x') + y'\cos(x,y') + z'\cos(x,z')$$
$$y = x'\cos(y,x') + y'\cos(y,y') + z'\cos(y,z')$$
$$z = x'\cos(z,x') + y'\cos(z,y') + z'\cos(z,z')$$

$$3.\quad x''' = -z''\sin\gamma + x''\cos\gamma$$
$$y''' = y''$$
$$z''' = z''\cos\gamma + x''\sin\gamma$$

$$x''' = x(\cos\alpha\cdot\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\cdot\sin\gamma) + y(\sin\alpha\cdot\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma) - z\cos\beta\sin\gamma$$
$$y''' = -x\sin\alpha\cdot\cos\beta + y\cos\alpha\cdot\cos\beta + z\sin\beta$$
$$z''' = x(\cos\alpha\sin\gamma + \sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\gamma) + y(\sin\alpha\cdot\sin\gamma + \cancel{\cos}\alpha\sin\beta\cos\gamma) + z\cos\beta\cos\gamma$$

Diese sind die sogenannten **Eulershen Formeln** für die C! transformation, die namentlich für die Mechanik von Bedeutung sind. Bedeutend einfachere Formeln erhalten wir auf folgende Art und Weise: (s. Fig. 96.)

Wir setzen $OP = r$, $\sphericalangle(xOP) = \sphericalangle(x, r)$ etc., dann ist:

$$x = r\cos(x, r) \qquad x' = r\cos(x', r)$$
$$y = r\cos(y, r) \qquad y' = r\cos(y', r)$$
$$z = r\cos(z, r) \qquad z' = r\cos(z', r)$$

$$x' = r\cos(x', r) = r(\cos(x', x)\cos(r, x) + \cos(x', y)\cos(r, y) + \cos(x', z)\cos(r, z))$$

$$x' = x\cos(x', x) + y\cos(x', y) + z\cos(x', z)$$ ebenso:
$$y' = x\cos(y', x) + y\cos(y', y) + z\cos(y', z)$$
$$z' = x\cos(z', x) + y\cos(z', y) + z\cos(z', z)$$

Ebenso finden wir umgekehrt:

$$x = x'\cos(x, x') + y'\cos(x, y') + z'\cos(x, z')$$
$$y = x'\cos(y, x') + y'\cos(y, y') + z'\cos(y, z')$$
$$z = x'\cos(z, x') + y'\cos(z, y') + z'\cos(z, z')$$

Setzen wir jetzt der Kürze wegen: die Richtungscoss:

der		x' Axe	y' Axe	z' Axe
		bezogen auf	das alte	System
x Axe		$\cos(x, x') = f$	$\cos(x, y') = f'$	$\cos(x, z') = f''$
y Axe	im neuen System	$\cos(y, x') = g$	$\cos(y, y') = g'$	$\cos(y, z') = g''$
z Axe		$\cos(z, x') = h$	$\cos(z, y') = h'$	$\cos(z, z') = h''$

so nehmen unsere Formeln die Gestalt an:

$$x' = fx + gy + hz \qquad x = fx' + f'y' + f''z'$$
$$y' = f'x + g'y + h'z \qquad y = gx' + g'y' + g''z'$$
$$z' = f''x + g''y + h''z \qquad z = hx' + h'y' + h''z'$$

Da $f, g, h;\ f', g', h';\ f'', g'', h''$ Richtungscoss sind, so finden zwischen ihnen folgende Relationen statt:

$$f^2 + g^2 + h^2 = 1 \qquad f^2 + f'^2 + f''^2 = 1$$
$$f'^2 + g'^2 + h'^2 = 1 \qquad g^2 + g'^2 + g''^2 = 1$$
$$f''^2 + g''^2 + h''^2 = 1 \qquad h^2 + h'^2 + h''^2 = 1$$

Ferner, da die beiden Systeme rechtwinklig sind, also die Axen senkrecht auf einander stehen:

$$ff' + gg' + hh' = 0 \qquad fg + f'g' + f''g'' = 0$$
$$f'f'' + g'g'' + h'h'' = 0 \qquad gh + g'h' + g''h'' = 0$$
$$f''f + g''g + h''h = 0 \qquad hf + h'f' + h''f'' = 0$$

Satz 58. Die Richtungscoss $f,g,h;\ f',g',h';\ f'',g'',h''$ der Axen irgend eines rechtwinkligen Systems genügen die Gleichungen:

$$
\begin{array}{l|l|l}
 & & f = \pm(g'h''-h'g'') \\
f^2+g^2+h^2=1 & ff'+gg'+hh'=0 & g = \pm(h'f''-f'h'') \\
f'^2+g'^2+h'^2=1 & f'f''+g'g''+h'h''=0 & h = \pm(f'g''-g'f'') \\
f''^2+g''^2+h''^2=1 & f''f+g''g+h''h=0 & f' = \pm(g''h-h''g) \\
 & & g' = \pm(h''f-f''h) \\
f^2+f'^2+f''^2=1 & fg+f'g'+f''g''=0 & h' = \pm(f''g-g''f) \\
g^2+g'^2+g''^2=1 & gh+g'h'+g''h''=0 & f'' = \pm(gh'-hg') \\
h^2+h'^2+h''^2=1 & hf+h'f'+h''f''=0 & g'' = \pm(hf'-fh') \\
 & & h'' = \pm(fg'-gf')
\end{array}
$$

wo das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem das neue C.system dem alten congruent ist, oder nur symmetrisch.

Früher schon (Seite 138) haben wir gefunden:
„Wenn zwei gerade Linien mit den Richtungscoss $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ und $\cos\alpha', \cos\beta', \cos\gamma'$ mit einander den Winkel δ bilden, so sind die Richtungscoss der Geraden, die senkrecht auf beiden steht:

$$\underline{\cos\lambda} = \frac{\cos\beta . \cos\gamma' - \cos\gamma . \cos\beta'}{\pm \sin\delta}$$

$$\underline{\cos\mu} = \frac{\cos\gamma . \cos\alpha' - \cos\alpha . \cos\gamma'}{\pm \sin\delta}$$

$$\underline{\cos\nu} = \frac{\cos\alpha . \cos\beta' - \cos\beta . \cos\alpha'}{\pm \sin\delta}\text{.“}$$

Diese Formeln können wir dazu benutzen, die Richtungscoss je einer der neuen Axen auszudrücken durch die Richtungscoss der beiden andern Axen; wir müssen dann $\delta = 90°$ setzen:

$f = \pm(g'h'' - h'g'')$	$f' = \pm(g''h - h''g)$	$f'' = \pm(gh' - hg')$
$g = \pm(h'f'' - f'h'')$	$g' = \pm(h''f - f''h)$	$g'' = \pm(hf' - fh')$
$h = \pm(f'g'' - g'f'')$	$h' = \pm(f''g - g''f)$	$h'' = \pm(fg' - gf')$

Um die Unbestimmtheit, die noch in dem Coll. 42. $\frac{23}{IV}$92.
Vorzeichen liegt, wegzuschaffen, multipliciren wir die erste Gleichung mit f, die darunterstehende mit g und die letzte dieser Verticalreihe mit h und addiren sie. Dann finden wir:

$$\underline{1 = \pm\left(f(g'h'' - h'g'') + g(h'f'' - f'h'') + h(f'g'' - g'f'')\right)}$$

Wir müssen also das Vorzeichen so wählen,

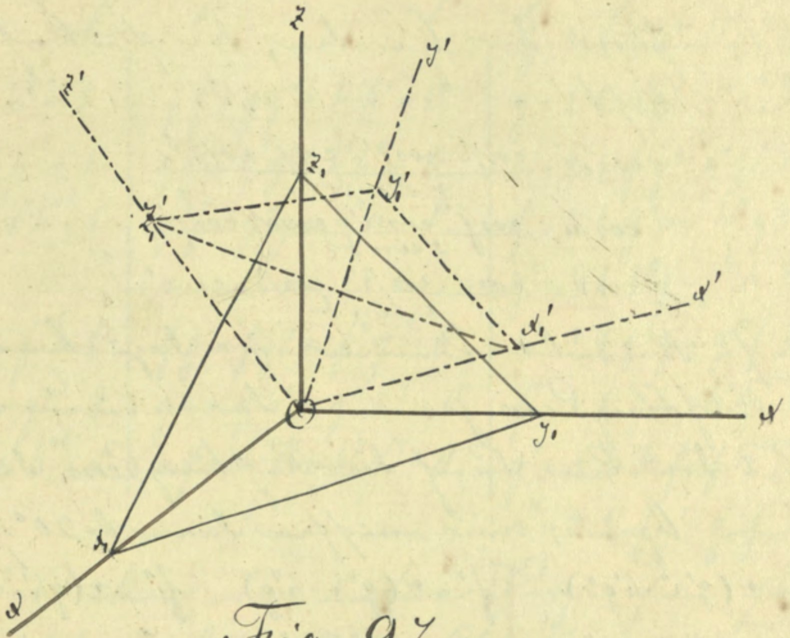

Fig. 97.

daß dieser Ausdruck $= +1$ wird.

Wir wollen uns jetzt auch über die geometrische Bedeutung dieses ~~Ausdrucks~~ klar machen. (f, g, h) sind offenbar die C. des Punktes auf der x' Axe, welcher vom Anfangspunkt die Entfernung 1 hat. Ebenso sind $(f' g' h')$ und $(f'' g'' h'')$ diejenigen Punkte der y' resp. z' Axe, welche vom C. Anfangspunkt um das Stück 1 entfernt sind.

Nach Satz 45 ist dieser Ausdruck dann das 6fache Volumen des Tetraeders $Ox'y'z'$, dasselbe ist positiv oder negativ, jenachdem das Δ $x'y'z'$ von O aus gesehen im Sinne des Uhrzeigers umlaufen wird oder nicht. (s. Fig. 97.)

Oder wir können auch sagen: Ist das neue System aus dem alten nur durch Drehung entstanden, so gilt das obere Vorzeichen, kommt hingegen noch eine Spiegelung hinzu, das andere. Denn denken wir uns das Tetraeder $Ox_1y_1z_1$ construirt, so ist dasselbe jedenfalls positiv, kann man nun durch bloße Drehung das eine System in das andere überführen, so ist das Volumen von $Ox'y'z'$ = dem von $Ox_1y_1z_1$

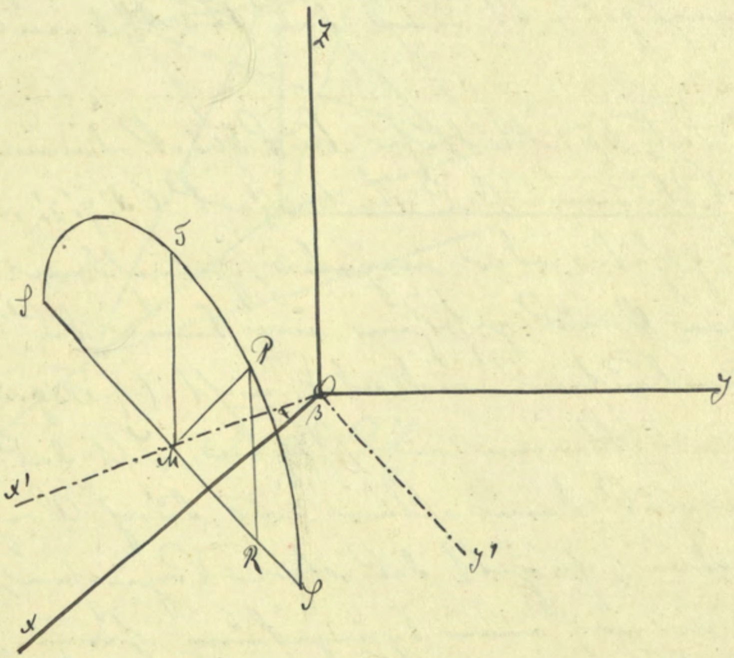

Fig. 98.

muß man jedoch noch eine Spiegelung vor-
nehmen, so geht auch das Volumen in das
entgegengesetzte über.

Nachdem wir nun auch die C. transformation
behandelt haben, wollen wir übergehen zur

Theorie der Flächen 2ten Grades.

Wir erhalten sofort alle Flächen 2ten Gra-
des, wenn wir folgende Aufgabe lösen:

Aufgabe. Den Ort derjenigen Kreise zu
finden, welche über parallelen Sehnen eines
Kegelschnittes als Durchmesser in zur Ebene
des Kegelschnittes senkrechten Ebenen errich-
tet sind. (s. Fig. 98.)

Wir denken uns den Kegelschnitt, auf
den Mittelpunkt und die Hauptaxen bezogen,
gegeben durch die Gleichung:

$$Ax^2 + By^2 = F$$

Sind die parallelen Sehnen unter dem Win-
kel β bezogen und ist α der Ort der Mittel-
punkte der Kreise unter dem Winkel α
zur x-Axe geneigt, so besteht die Relation:

$$A\cos\alpha \cdot \cos\beta + B\sin\alpha\sin\beta = 0$$

Beziehen wir jetzt den Kegelschnitt auf

auf die conjugirten Durchmesser, so haben wir zu setzen:

$$x = x'\cos\alpha + y'\cos\beta$$
$$y = x'\sin\alpha + y'\sin\beta$$

$$Ax^2 + By^2 = A(x'^2\cos^2\alpha + y'^2\cos^2\beta + 2x'y'\cos\alpha\cos\beta) + B(x'^2\sin^2\alpha + y'^2\sin^2\beta + 2x'y'\sin\alpha\sin\beta) = A'x'^2 + B'y'^2 = F,$$

wo:
$$A' = A\cos^2\alpha + B\sin^2\alpha$$
$$B' = A\cos^2\beta + B\sin^2\beta$$

Aus der Figur ist zu ersehen:
$$MR^2 + RP^2 = MS^2$$

S hat die C! $x' = OM$, $y' = MS$
$$A'x'^2 + B'y'^2 = F \quad \text{folgl.}$$
$$A'\cdot OM^2 + B'\cdot MS^2 = F$$
$$A'\cdot OM^2 + B'\cdot MR^2 + B'\cdot RP^2 = F$$

P hat die C! $x' = OM$, $y' = MR$, $z = RP$
$$A'x'^2 + B'y'^2 + B'z^2 = F$$

Oder da $A'x'^2 + B'y'^2 = Ax^2 + By^2$, so erhalten wir als Gleichung des gesuchten Ortes:
$$Ax^2 + By^2 + B'z^2 = F$$
wo: $B' = A\cos^2\beta + B\sin^2\beta$ ist

Wir können jetzt mehrere Specialfälle Coll. 43. $\frac{27}{IV}$ 92. unterscheiden:

I. Der gegebene Kegelschnitt ist die

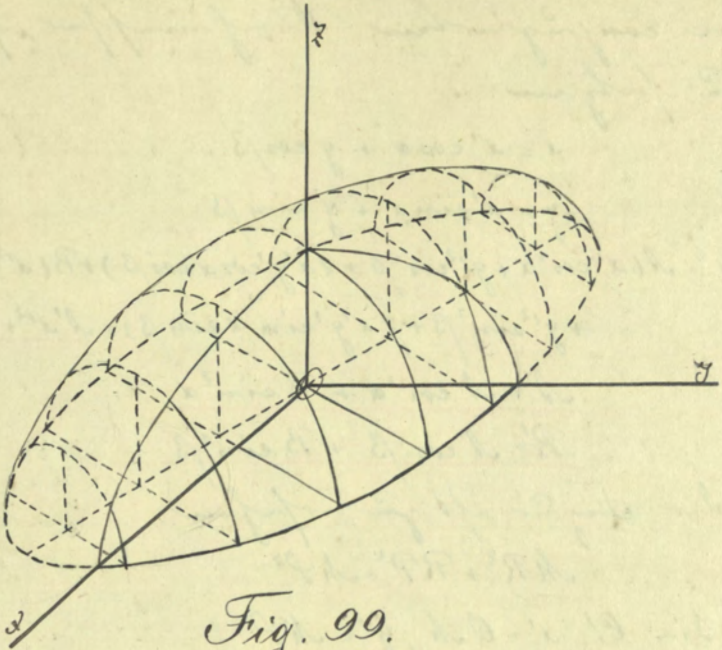

Fig. 99.

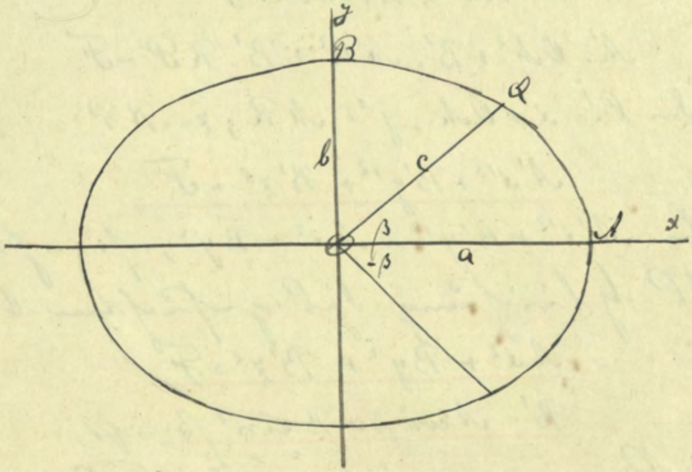

Fig. 100.

Ellipse:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$a^2=\frac{F}{A}$, $b^2=\frac{F}{B}$

Der gesuchte Ort ist das sogenannte **Ellipsoid**:
(s. Fig. 99.)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

wo:

$$\frac{1}{c^2}=\frac{B'}{F}=\frac{\cos^2\beta}{a^2}+\frac{\sin^2\beta}{b^2}$$

c ist der Abschnitt, den das Ellipsoid auf der z Axe macht und muß daher gleich sein dem halben Durchmesser der Ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, welcher unter dem Winkel β gegen die x Axe geneigt ist, was wir in der That bestätigt finden; denn setzen wir

$$x=r\cos\beta\,,\quad y=r\sin\beta\,,\ \text{so ist}$$

$$\frac{1}{r^2}=\frac{\cos^2\beta}{a^2}+\frac{\sin^2\beta}{b^2}$$

also der rad. vector, der mit der x-Axe den Winkel β bildet $= c$. (s. Fig 100.)

Da aber $\cos^2\beta=\cos^2(-\beta)$ und $\sin^2\beta=\sin^2(-\beta)$ ist, so erhält man dasselbe Ellipsoid, wenn die Durchmesser der Kreise mit der x Axe den Winkel $-\beta$ bilden.

c muß immer zwischen a u. b liegen. Ist dies jedoch nicht der Fall, z. B. ist $a>b>c$, so liegt die Ellipse, aus welcher man das Ellipsoid er-

Satz 59. Sind 3 Strecken $a > c > b$ gegeben, so findet man folgendermaßen das durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

dargestellte **Ellipsoid.**

Man construire in der Horizontalebene die Ellipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

und suche in dieser einen der beiden Durchmesser von der Länge $2c$, dann ist die Fläche der Ort der Kreise, welche über den diesen Durchmesser parallelen Sehnen der Ellipse in Verticalebenen construirt werden können.

Je nachdem $c = a$ oder $= b$ ist, heißt das Ellipsoid ein abgeplattetes oder ein gestrecktes **Rotationsellipsoid.**

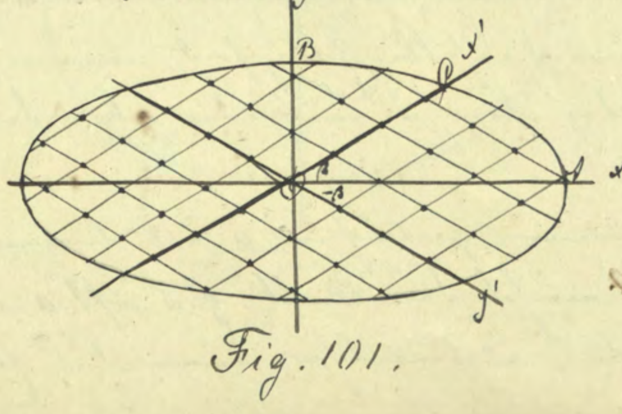

Fig. 101.

fällt in der seitlichen Verticalebene.

Ist $a=c$, so ist $\beta=0^\circ$ und wir können uns das Ellipsoid entstanden denken durch Rotation der Ellipse um ihre kleine Axe; ist dagegen $c=b$, so ist $\beta=90^\circ$ und wir erhalten das gestreckte Rotationsellipsoid, welches durch Rotation der Ellipse um ihre grosse Axe entsteht.

Ist $a=b$, so ist auch $b=c$ und wir erhalten die Kugelfläche.

Denken wir uns die Durchmesser der Kreise in ihren Schnittpunkten mit einander fest verknüpft und die Grundellipse dann theilweise in sich selbst verschoben und construiren dann über den jetzigen Durchmessern die Verticalkreise, so hat das so entstandene Ellipsoid dieselbe Höhe, wie das ursprüngliche. (s. Fig. 101.)

Beziehen wir die Ellipse auf die x' u. y' Axe, so haben wir zu setzen:

$$x=(x'+y')\cos\beta$$

$$y=(x'-y')\sin\beta\,.$$

$$\frac{(x'+y')^2\cos^2\beta}{a^2}+\frac{(x'-y')^2\sin^2\beta}{b^2}=1$$

Jetzt können wir uns die Ellipse dadurch verschoben denken, dass alle Durchmesser sich

um den Punkt drehen, den sie mit der y-Axe gemein haben, dann bleiben die C. eines Punktes dieselben, also auch die Gleichung, nur sind die Axenwinkel und Hauptaxen anders:

$$\frac{(x'+y')^2\cos^2\gamma}{a'^2} + \frac{(x'-y')^2\sin^2\gamma}{b'^2} = 1, \text{ folglich}$$

$$\frac{\cos^2\gamma}{a'^2} = \frac{\cos^2\beta}{a^2} \text{ und } \frac{\sin^2\gamma}{b'^2} = \frac{\sin^2\beta}{b^2}$$

$$\frac{1}{c'^2} = \frac{\cos^2\gamma}{a'^2} + \frac{\sin^2\gamma}{b'^2} = \frac{\cos^2\beta}{a^2} + \frac{\sin^2\beta}{b^2} = \frac{1}{c^2}$$

$$c = c', \text{ was zu beweisen war.}$$

Wir waren ausgegangen von der Gleichung Coll. 44 28/IV 92. des Kegelschnittes

$$Ax^2 + By^2 = F$$

und fanden als Gleichung unserer Fläche

$$Ax^2 + By^2 + B'z^2 = F$$

wo $B' = A\cos^2\beta + B\sin^2\beta$

Ist jetzt unser Kegelschnitt:

II die Hyperbel:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

so ist: $\frac{1}{a^2} = \frac{A}{F}$, $\frac{1}{b^2} = -\frac{B}{F}$ und wir erhalten als Gleichung unserer Fläche

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{B'}{F}z^2 = 1$$

wo: $\frac{B'}{F} = \frac{\cos^2\beta}{a^2} - \frac{\sin^2\beta}{b^2} = \frac{\cos^2\beta}{b^2}\left(\frac{b^2}{a^2} - tg^2\beta\right)$

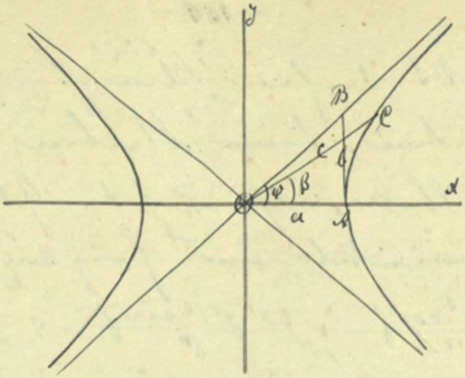

Fig. 102.

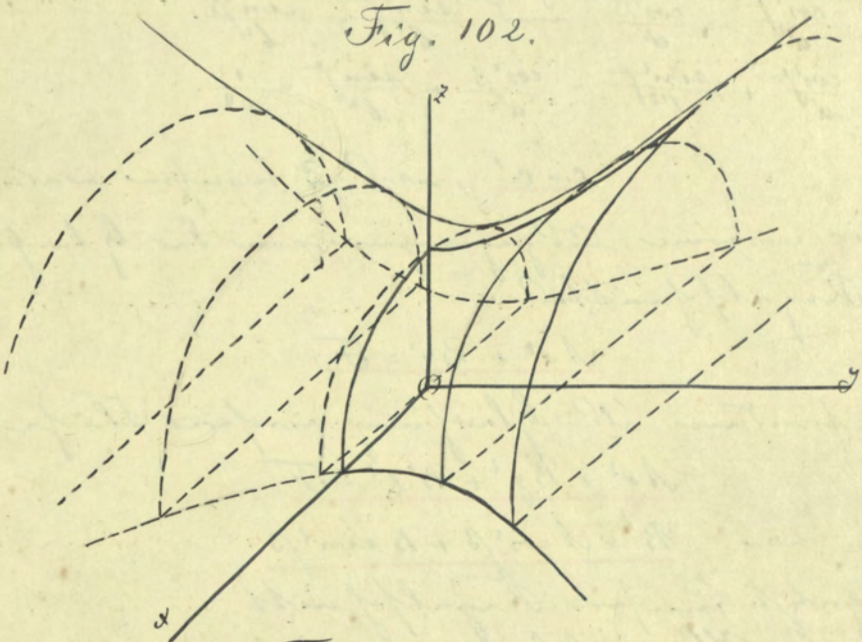

Fig. 103.

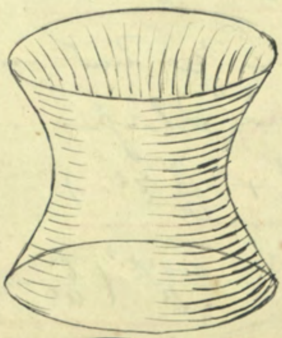

Fig. 104.

Wir müssen nun 2 Fälle unterscheiden

1) $\underline{tg^2\beta < \frac{b^2}{a^2}}$

2) $\underline{tg^2\beta > \frac{b^2}{a^2}}$

Nun ist $\frac{b^2}{a^2} = tg^2\varphi$, wo φ der halbe Asymptotenwinkel ist.

Im ersten Falle ist also $\beta < \varphi$. (s. Fig. 102.)

Wir können dann setzen

$$\underline{\frac{\cos^2\beta}{a^2} - \frac{\sin^2\beta}{b^2} = \frac{1}{c^2}}$$

Es läßt sich leicht zeigen, daß c derjenige rad. vector der Hyperbel ist, welcher unter dem Winkel β geneigt ist; denn setzen wir:

$$x = r\cos\beta$$

$$y = r\sin\beta,$$ so finden wir

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2\beta}{a^2} - \frac{\sin^2\beta}{a^2}$$

Wenn also die 3 Größen $b, c > a$ gegeben sind, so construirt man zuerst die Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, zieht hierauf den Halbmesser c, derselbe bildet mit der x Axe den Winkel β, und errichtet auf den zu c parallelen Durchmessern Kreise, so bilden dieselben das <u>einschalige Hyperboloid</u> (s. Fig. 103 und 104)

Die Schnittlinien desselben sind mit der xy-Ebene eine Hyperbel, ebenso mit der yz-Ebene, Satz 60. Sind 3 Strecken a, b, c gegeben, wo $c > a$, so findet man folgendermaßen das durch die Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

dargestellte einschalige Hyperboloid.

Man construire zuerst in der Horizontalebene die Hyperbel:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

suche die Durchmesser derselben von der Länge $2c$ und construire über den diesen Durchmessern parallelen Sehnen als Durchmessern Kreise in Verticalebenen.

Ist $a = c$, so heißt die Fläche ein einschaliges Rotationshyperboloid.

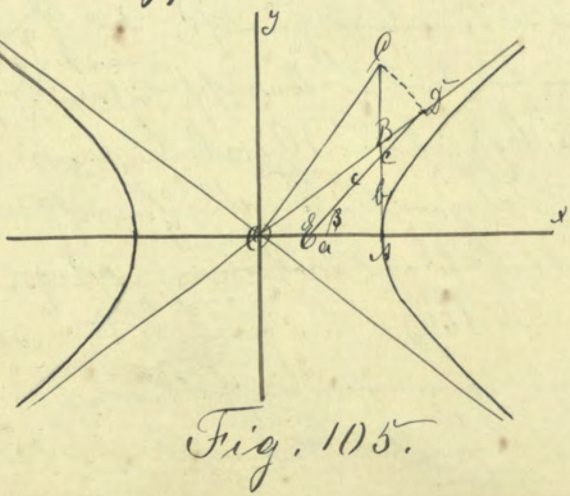

Fig. 105.

mit der xz Ebene dagegen eine Ellipse, die sogenannte Kehlellipse.

Ist $a = c$, so ist $\beta = 0°$, und wir erhalten das einschalige Rotationshyperboloid.

Wir betrachten jetzt den Fall, wo

$$tg^2\beta > \frac{b^2}{a^2} \quad (\text{s. Fig. } 105)$$

dann haben wir zu setzen:

$$\frac{\cos^2\beta}{a^2} - \frac{\sin^2\beta}{b^2} = -\frac{1}{c^2}$$

und die Fläche hat die Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Die Fläche besteht aus 2 getrennten Teilen, denn setzen wir $x = 0$, so erhalten wir:

$$-\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

also eine imaginäre Durchschnittslinie. Es lässt sich dasselbe übrigens auch aus der Figur ersehen.

Die Construction von β ist in diesem Falle nicht so einfach. Wir haben:

$$\frac{1}{c^2} = \frac{\sin^2\beta}{b^2} - \frac{\cos^2\beta}{a^2}$$

$$a^2b^2 = a^2c^2\sin^2\beta - b^2c^2\cos^2\beta$$

$$a^2b^2 = a^2c^2 - (a^2c^2 + b^2c^2)\cos^2\beta$$

$$\cos^2\beta = \frac{a^2(c^2 - b^2)}{c^2(a^2 + b^2)}$$

$$\cos\beta = \frac{a}{c}\sqrt{\frac{c^2 - b^2}{a^2 + b^2}}$$

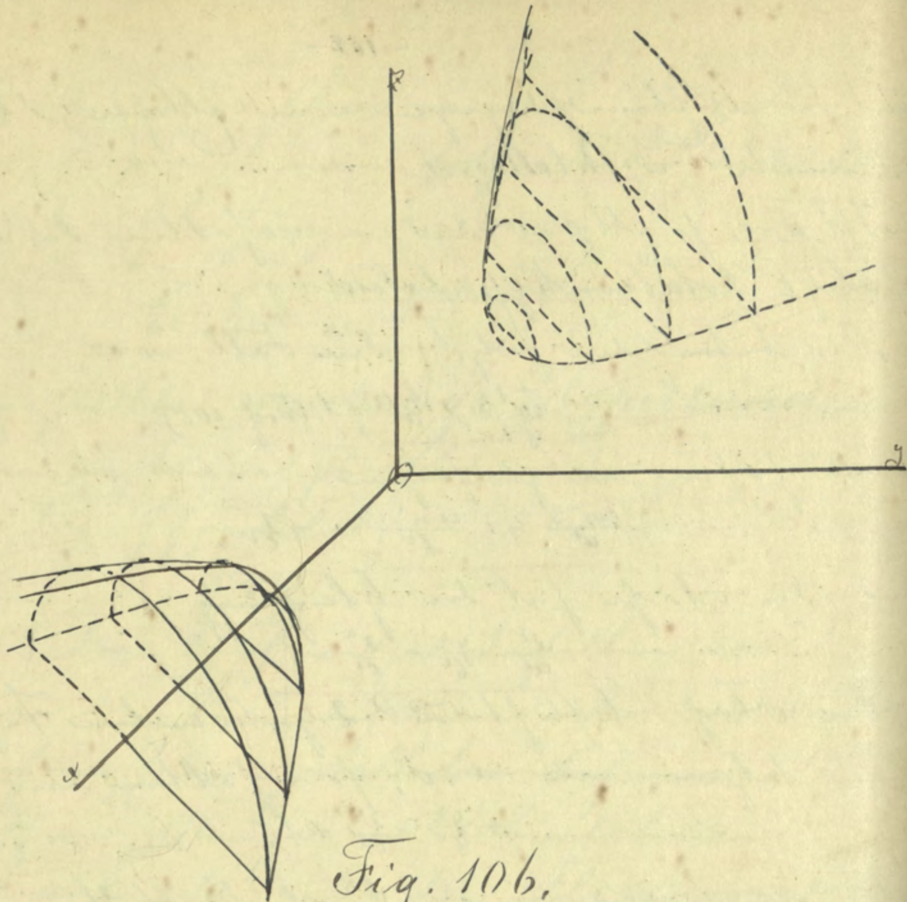

Fig. 106.

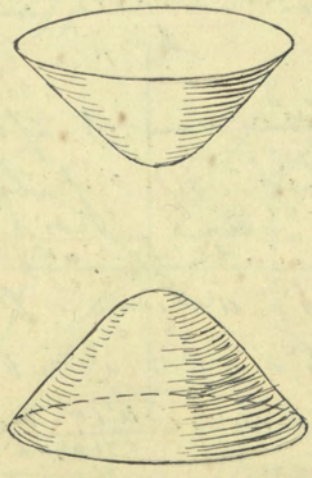

Fig. 107.

Dieser Ausdruck ist nur reell, wenn $c > b$. Wir müssen noch zeigen, daß er auch < 1 ist. Zu dem Zweck bilden wir $\sin\beta$:

$$a^2b^2 = (a^2c^2 + b^2c^2)\sin^2\beta - b^2c^2$$

$$\sin\beta = \frac{b}{c}\sqrt{\frac{a^2+c^2}{a^2+b^2}}$$

$$\cos^2\beta + \sin^2\beta = \frac{a^2c^2 - a^2b^2 + a^2b^2 + b^2c^2}{c^2(a^2+b^2)} = 1$$

$\cos^2\beta + \sin^2\beta$ ist also in der That $= 1$, also sowohl $\cos\beta$, als auch $\sin\beta < 1$.

Wir können uns nun β auf folgende Art construieren:

Wir tragen auf AB die Strecke $AC = c$ auf, verbinden O mit C, dann ist $OC = \sqrt{a^2+c^2}$, hierauf machen ~~wir~~ $OD = OC$, schlagen mit dem Radius c einen Kreis um D als Mittelpunkt, derselbe trifft die Axe in E, dann ist $\angle DEA = \beta$. Denn dann ist:

$$\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\frac{\sin\beta}{\sin\varphi} = \frac{\sqrt{a^2+c^2}}{c} \text{ also:}$$

$$\sin\beta = \frac{b}{c}\sqrt{\frac{a^2+c^2}{a^2+b^2}}$$

Die entstandene Fläche heißt das zweischalige ~~Rotations~~Hyperboloid (s. Fig. 106 u. 107)

Gehen wir jetzt von der Gleichung: Coll. 45. $\frac{29}{IV}$ 92.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

aus – dieselbe stellt bekanntlich das Asymptotenpaar der Hyperbel: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ dar – und errichten unter dem Winkel β die Verticalkreise, so hat die entstandene Fläche die Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + B' z^2 = 0$$

wo $B' = \frac{\cos^2\beta}{a^2} - \frac{\sin^2\beta}{b^2} = -\frac{1}{c^2}$, also

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Die Fläche ist, wie sich leicht zeigen läßt, eine Kegelfläche.

Nehmen wir auf der Fläche einen Punkt (ξ, η, ζ) an, so ist:

$$\frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} - \frac{\zeta^2}{c^2} = 0$$

und die Richtungscos der rad. vect. nach diesem Punkte

$\cos\alpha = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}}$, $\cos\beta = \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}}$, $\cos\gamma = \frac{\zeta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}}$, folgl.

$$\frac{\cos^2\alpha}{a^2} - \frac{\cos^2\beta}{b^2} - \frac{\cos^2\gamma}{c^2} = 0.$$

Haben wir die Geraden: $x = r\cos\alpha$, $y = r\cos\beta$, $z = r\cos\gamma$ und setzen wir diese Werte für x, y, z in die Gleichung unserer Fläche ein, so erhalten wir ebenfalls:

$$\frac{\cos^2\alpha}{a^2} - \frac{\cos^2\beta}{b^2} - \frac{\cos^2\gamma}{c^2} = 0$$

Satz 61. Sind 3 Strecken a, b, c, wo $b < c$, gegeben, so konstruiere man folgendermaßen das durch die Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

dargestellte **zweischalige Hyperboloid**, resp. dessen **Asymptotenkegel**.

Man konstruiere in der Horizontalebene die Hyperbel:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

nebst ihren Asymptoten, suche das Dreieck, von dem eine Seite auf der reellen Axe liegt, die andere $= \sqrt{a^2+c^2}$ auf einer Asymptote und die dritte die Länge c hat und konstruiere die Kreise über denjenigen Sehnen der Hyperbel resp. des Asymptotenpaares als Durchmesser, welche dieser dritten Seite parallel sind, in verticalen Ebenen.

Ist $b = c$, so ist die Fläche ein **zweischaliges Rotationshyperboloid** resp. ein **Rotationskegel**.

d. h. alle Punkte dieser Geraden liegen auf der Fläche, diese ist also von lauter geraden Linien begrenzt, also eine Kegelfläche.

Setzen wir $x=h$, dann erhalten wir:

$$\frac{h^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$$

Jeder Schnitt parallel der yz-Ebene in der Entfernung h ist also eine Ellipse mit den Axen $\frac{bh}{a}$ u. $\frac{ch}{a}$

Um den Zusammenhang des Kegels mit dem Hyperboloid zu finden ziehen wir im letzteren irgend einen rad. vector r, dann ist:

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2\alpha}{a^2} - \frac{\cos^2\beta}{b^2} - \frac{\cos^2\gamma}{c^2}$$

Soll nun dieser rad. vect. auch auf dem Kegel liegen, so ist die rechte Seite der Gleichung $=0$, also $\frac{1}{r^2}=0$, $r=\infty$, d. h. der Kegel trifft das Hyperboloid erst in der Unendlichkeit. Er wird daher auch der <u>Asymptoten-Kegel</u> genannt.

Auch das einschalige Hyperboloid besitzt einen Asymptotenkegel von der Form:

$$\underline{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0.}$$

Bei unseren bisherigen Betrachtungen haben wir nur die Mittelpunkts Kegelschnitte, Ellipse und Hyperbel, berücksich-

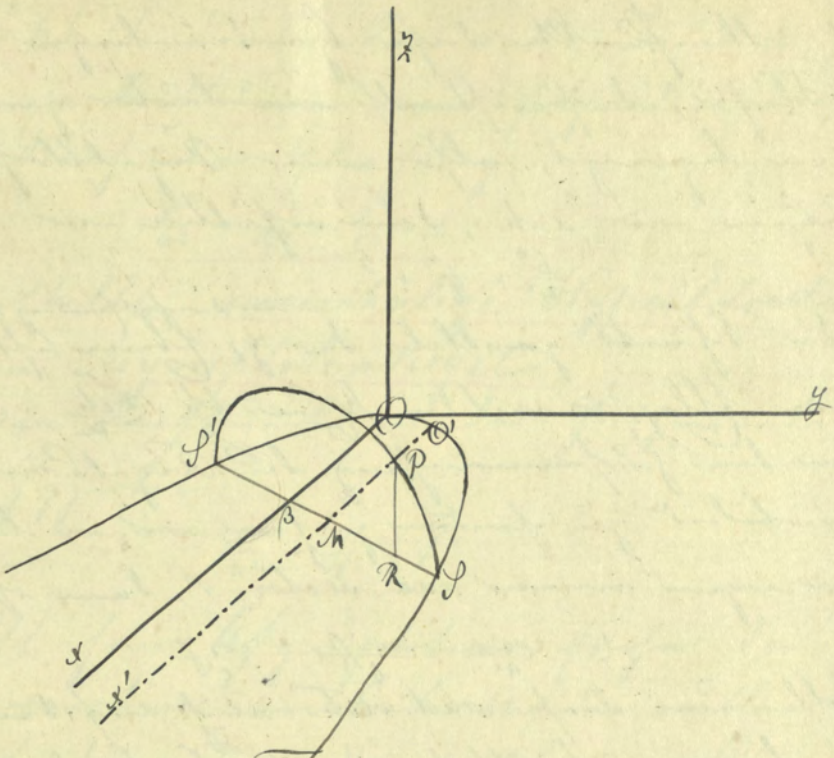

Fig. 108.

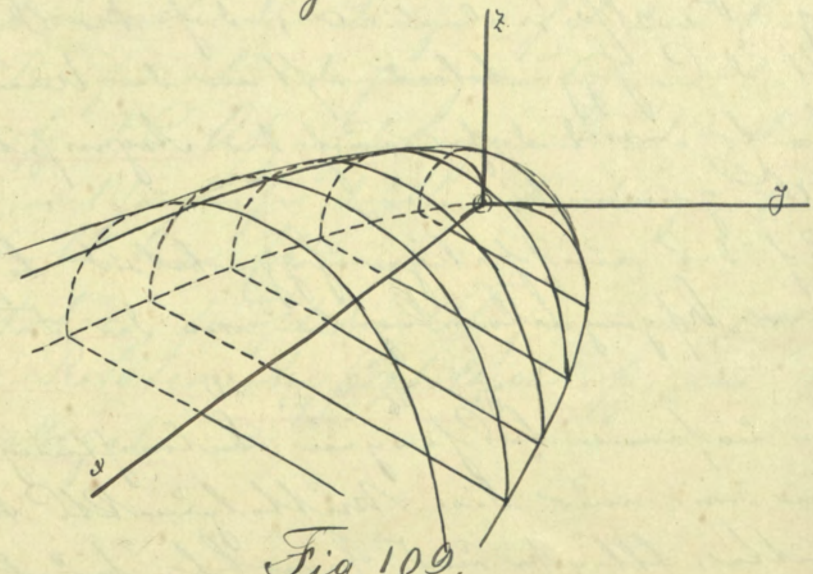

Fig 109.

tigt. Wenden wir uns jetzt der Parabel zu.
(s. Fig. 108.)

Die Parabel habe die Gleichung:

$$y^2-2px=0$$

Wir ziehen unter dem Winkel β die Sehne SS', halbieren dieselbe in M und ziehen den Durchmesser MO'. Hat O' die C! a, b, so müssen wir, um die Parabel auf O' als Anfangspunkt und $O'M$ als x-Axe zu transformieren, setzen:

$$x=a+x'+y'\cos\beta$$

$$y=b+y'\sin\beta$$

$$y^2-2px=b^2+y'^2\sin^2\beta+2y'b\sin\beta-2pa-2px'-2py'\cos\beta$$

$$=y'^2\sin^2\beta-2px'$$

Denn: $2y'b\sin\beta-2p\,y'\cos\beta=0$

da: $\operatorname{tg}\beta=\frac{p}{b}$

R hat die C! $x'=O'M$, $y'=MR$ Coll. 46 $\frac{30}{IV}$92.

S " " " $x'=O'M$, $y'=MS$

$$y^2-2px=MR^2\sin^2\beta-2p\,O'M$$

Da S ein Punkt der Parabel ist:

$$MS^2\sin^2\beta-2p\,O'M=0$$

$$MR^2\sin^2\beta+RP^2\sin^2\beta-2p\,O'M=0$$

$$y^2-2px+z^2\sin^2\beta=0$$

Die Gleichung des gesuchten Ortes ist also.

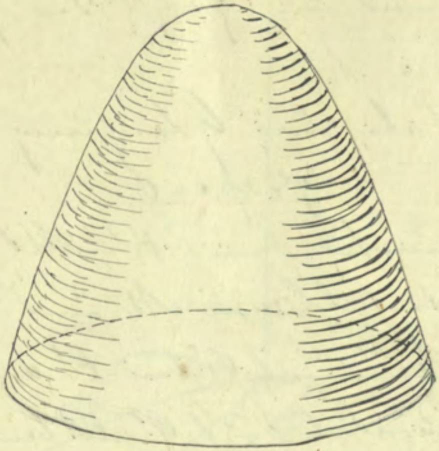

Fig. 110.

Satz 62. Sind 2 Strecken $q > p$ gegeben, so erhält man folgendermaßen das durch die Gleichung:

$$\frac{y^2}{p^{\cancel{2}}} + \frac{z^2}{q^{\cancel{2}}} = 2x$$

bestimmte elliptische Paraboloid.

Man ziehe in der Horizontalebene die Parabel:

$$y^2 = 2px$$

und construire über den unter dem Winkel $\pm\beta$, dessen $\sin = \pm\sqrt{\frac{p}{q}}$ ist, gegen die x Axe geneigten Sehnen als Durchmessern Kreise in Verticalebenen.

Diese Fläche wird ein Rotationsparaboloid, wenn $p = q$.

$$y^2 + z^2 \sin^2\beta = 2px$$

oder wenn wir $q = \frac{p}{\sin^2\beta}$ $(\geqq p)$ setzen

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2x$$

Die Fläche ist ein sogenanntes elliptisches Paraboloid (s. Fig. 109 u. 110)

Sind p u. q gegeben, so findet man β sehr leicht vermittelst der Relation:

$$\sin\beta = \pm\sqrt{\tfrac{p}{q}}$$

Setzen wir $x = h$, so erhält man:

$$\frac{y^2}{2ph} + \frac{z^2}{2qh} = 1$$

d.h. jeder Schnitt parallel der xAxe ist eine Ellipse. Die Halbaxen derselben sind: $a = \sqrt{2ph}$ und $b = \sqrt{2qh}$, wo $b > a$, da $q > p$.

Discussion der Gleichung 2ten Grades.

Wir haben bis jetzt folgende Flächen gefunden:

1) Das Ellipsoid: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

2) Das einschal. Hyperb: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

3) Das 2schal. Hyperb: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

4) Die Kegelfläche: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

5) Das elliptische Parab: $\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} - 2x = 0$

Alle diese Flächen sind enthalten in der Gleichung

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dx + 2Ey + 2Fz + G = 0$$

Es fragt sich nun, stellt diese Gleichung nur diese Flächen dar, oder sind noch andere Formen in ihr enthalten?

Um dieses zu untersuchen, machen wir eine solche C! verschiebung, daß die Glieder mit den ersten Potenzen von x, y, z fortfallen. Wir setzen:

$$x = x' + u$$

$$y = y' + v$$

$$z = z' + w$$

Dann geht unsere Gleichung über in:

$$Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2 + 2Aux' + 2Bvy' + 2Cwz'$$
$$+ 2Dx' + 2Ey' + 2Fz' + Au^2 + Bv^2 + Cw^2 + 2Du$$
$$+ 2Ev + 2Fw + G = 0$$

Sollen die Glieder mit x', y', z' fortfallen, so muß sein:

$$u = -\frac{D}{A}, \quad v = -\frac{E}{B}, \quad w = -\frac{F}{C}$$

Diese Annahme ist jedoch nur dann erlaubt, wenn:

I. $A, B, C \gtrless 0$

Unsere Gleichung wird dann die Form annehmen:

$$Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2 = -G'$$

wo: $G' = \frac{D^2}{A} + \frac{E^2}{B} + \frac{F^2}{C} - 2\frac{D^2}{A} - 2\frac{E^2}{B} - 2\frac{F^2}{C} + G$

$$= G - \frac{D^2}{A} - \frac{E^2}{B} - \frac{F^2}{C}.$$

Satz 63. Sind die 3 Größen A, B, C sämtlich von 0 verschieden, so ist durch die Gleichung

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dx+2Ey+2Fz+G=0$$

entweder gar keine reelle Fläche, oder ein Ellipsoid, oder ein einschaliges Hyperboloid oder ein zweischaliges Hyperboloid, oder eine Kegelfläche dargestellt, deren Mittelpunkt die C!

$$-\frac{D}{A},\ -\frac{E}{B},\ -\frac{F}{C}$$ hat.

Wir können jetzt 2 Unterfälle unterscheiden:

Ia. $G' \gtrless 0$.

Dann können wir setzen:

$$\alpha = -\frac{G'}{A}, \quad \beta = -\frac{G'}{B}, \quad \gamma = -\frac{G'}{C}$$

und unsere Gleichung erhält die Form:

$$\frac{x'^2}{\alpha} + \frac{y'^2}{\beta} + \frac{z'^2}{\gamma} = 1$$

Sind α, β, γ sämtlich negativ, so erhält man überhaupt keine reelle Fläche.

Sind α, β, γ sämtlich positiv, so kann man setzen $\alpha = a^2$, $\beta = b^2$, $\gamma = c^2$ und man erhält das Ellipsoid.

Sind 2 von den Größen z. B. α u. γ positiv, β dagegen negativ, so können wir setzen $\alpha = a^2$, $\beta = -b^2$; $\gamma = c^2$ und wir erhalten das einschalige Hyperboloid.

Ist dagegen eine Größe (α) positiv und die beiden andern (β, γ) negativ, so erhalten wir, wenn wir $\alpha = a^2$, $\beta = -b^2$, $\gamma = -c^2$ setzen, das zweischalige Hyperboloid.

Ib. $G' = 0$

Unsere Gleichung hat die Form:

$$Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2 = 0$$

Sind A, B, C alle von demselben Zeichen, so

wird nur ein reeller Punkt dargestellt.

Wir können also immer eine Größe positiv annehmen und die beiden andern negativ, z. B. $A = \frac{1}{a^2}$, $B = -\frac{1}{b}$, $C = -\frac{1}{c}$, erhalten also immer eine Regelfläche.

Wenn also A, B, C von 0 verschieden sind, Coll 47 4/V 92.
so erhalten wir keine neue Fläche. Nehmen wir jetzt an einer der 3 Größen, z. B. C sei $= 0$.

II $C = 0$.

Die Gleichung ist dann:

$$Ax^2 + By^2 + 2Dx + 2Ey + 2Fz + G = 0$$

Wir müssen jetzt versuchen durch eine C.-verschiebung die Gleichung des Paraboloids

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$$

zu erhalten. Zu dem Zwecke setzen wir:

$$x = x' + u$$
$$y = y' + v$$
$$z = z' + w$$

und erhalten:

$$Ax'^2 + By'^2 + 2Dx' + 2Ey' + 2Fz' + G$$
$$+ 2Aux' + 2Bvy' \quad + Au^2 + Bv^2 + 2Du + 2Ev + 2Fw = 0$$

Für u, v, w finden wir also die Werte:

$$u = -\frac{\mathfrak{D}}{A}, \quad v = -\frac{\mathfrak{E}}{B}$$

Diese Werte gelten natürlich nur dann, wenn A u. $B \gtrless 0$ sind; ebenso muß $\mathfrak{F} \gtrless 0$ sein, denn sonst käme z überhaupt nicht in der Gleichung vor.

$$w = -\frac{1}{2\mathfrak{F}}(Au^2 + Bv^2 + 2\mathfrak{D}u + 2\mathfrak{E}v + \mathfrak{G})$$

$$= -\frac{1}{2\mathfrak{F}}\left(\frac{\mathfrak{D}^2}{A} + \frac{\mathfrak{E}^2}{B} - \frac{2\mathfrak{D}^2}{A} - \frac{2\mathfrak{E}^2}{B} + \mathfrak{G}\right)$$

$$w = -\frac{1}{2\mathfrak{F}}\left(\mathfrak{G} - \frac{\mathfrak{D}^2}{A} - \frac{\mathfrak{E}^2}{B}\right)$$

Die Gleichung der Fläche nimmt die Gestalt an:

$$Ax'^2 + By'^2 + 2\mathfrak{F}z' = 0$$

Auch hier müssen wir 2 Fälle unterscheiden:

II a. $AB > 0$.

d. h. A u. B sind von demselben Vorzeichen.

Wir können dann setzen $\frac{\mathfrak{F}}{A} = -p$, $\frac{\mathfrak{F}}{B} = -q$ und erhalten

$$\frac{x'^2}{p} + \frac{y'^2}{q} = 2z'$$

also das elliptische Paraboloid.

II b. $AB < 0$.

In diesem Falle ist kein elliptisches Paraboloid möglich. Da p u. q von verschiedenen Zeichen sind, können wir setzen

$$\frac{p}{q} = -\alpha^2$$

und die Gleichung erhält die Form:

Satz 64. Sind die Größen A, B, F sämtlich von 0 verschieden, so stellt die Gleichung

$$Ax^2+By^2+2Dx+2Ey+2Fz+G=0$$

ein elliptisches Paraboloid dar, wenn A und B dasselbe Zeichen haben, sonst ein hyperbolisches Paraboloid. Im letzteren Falle kann die Gleichung der Fläche durch C!verschiebung auf die Form:

$$x^2-\alpha^2y^2=2pz$$

gebracht werden, welche von den beiden Scharen paralleler Ebenen

$$x-\alpha y=\frac{2p}{\lambda} \text{ und } x+\alpha y=\frac{2p}{\mu}$$

in zwei Scharen von Geraden geschnitten wird von der Art, daß jede Gerade der einen Schar jede der anderen trifft, daß sich dagegen niemals 2 Gerade derselben Schar treffen.

$$x^2 - \alpha^2 y^2 = 2pz$$

oder: $(x-\alpha y)(x+\alpha y) = \lambda z \cdot \frac{2p}{\lambda}$

Die Gleichung ist vollkommen befriedigt, wenn wir setzen:

$$x - \alpha y = \lambda z$$

$$x + \alpha y = \frac{2p}{\lambda}$$

Diese beiden Gleichungen stellen aber, wenn man λ alle möglichen Werte durchlaufen läßt, zwei Scharen von Ebenen dar, von denen die eine immer parallel zur z Axe ist. Die Durchschnittslinien je zweier dieser Ebenen müssen vollständig in unserer Fläche enthalten sein.

Ebenso läßt sich leicht zeigen, daß die Fläche noch eine andere Schar von Geraden enthält, denn die Gleichung derselben wird auch befriedigt, wenn wir setzen:

$$x + \alpha y = \mu z$$

$$x - \alpha y = \frac{2p}{\mu}$$

Zwei gerade Linien einer Schar können nie einen Punkt gemeinschaftlich haben, da sie in zwei parallelen Ebenen liegen, dagegen muß jede Gerade der einen Schar

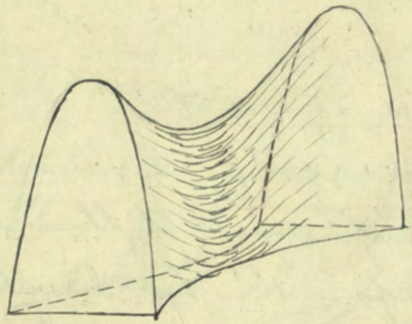

Fig. 111.

Satz 65. Das einschalige Hyperboloid enthält 2 Scharen von Geraden derart, daß jede Gerade der einen Schar jede Gerade der andern Schar trifft, dagegen niemals 2 Gerade derselben Schar sich schneiden.

jede Gerade der andern Schar treffen und der Schnittpunkt je zweier Geraden ist dabei:

$$x = p\,\frac{\lambda+\mu}{\lambda\mu}\,,\quad y = \frac{p}{\alpha}\,\frac{\mu-\lambda}{\lambda\mu}\,,\quad z = \frac{2p}{\lambda\mu}$$

Die betrachtete Fläche heißt das hyperbolische Paraboloid. (s. Fig. 111.)

Auch das einschalige Hyperboloid enthält gerade Linien, denn man kann die Gleichung desselben auch schreiben in der Form: Coll. 48 $\frac{5}{V}$ 92.

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right) = \left(1-\frac{z}{c}\right)\left(1+\frac{z}{c}\right)$$

Das Hyperboloid enthält also die folgenden beiden Scharen von Geraden:

1) $\frac{x}{a}-\frac{y}{b} = \lambda\left(1-\frac{z}{c}\right)$, $\quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b} = \frac{1}{\lambda}\left(1+\frac{z}{c}\right)$

2) $\frac{x}{a}-\frac{y}{b} = \mu\left(1+\frac{z}{c}\right)$, $\quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b} = \frac{1}{\mu}\left(1-\frac{z}{c}\right)$

Zwei Gerade derselben Schar treffen sich niemals, denn, denken wir uns einen Punkt (x,y,z) gegeben, so finden wir für denselben:

$$\lambda = \frac{\frac{x}{a}-\frac{y}{b}}{1-\frac{z}{c}} \quad\text{und}\quad \lambda = \frac{1+\frac{z}{c}}{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}}$$

Jedem Punkte entspricht also ein ganz bestimmter Wert von λ, also geht keine andere Gerade durch diesen Punkt. Wir würden nur dann noch andere Werte von λ finden, wenn alle Zähler

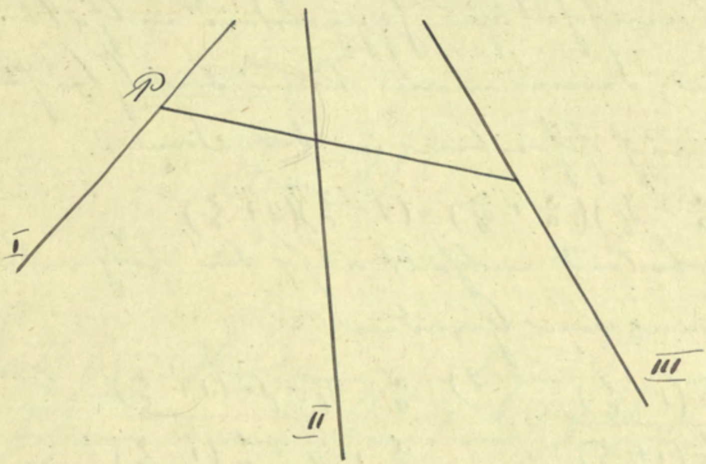

Fig. 112.

und Nenner = 0 sind; das kann aber offenbar niemals der Fall sein.

Auch hier trifft jede Gerade der einen Schar jede Gerade der andern Schar. Der Schnittpunkt hat die C.:

$$x = a\frac{1+\lambda\mu}{\lambda+\mu}, \quad y = b\frac{1-\lambda\mu}{\lambda+\mu}, \quad z = c\frac{\lambda-\mu}{\lambda+\mu}$$

Anm: Man kann sich leicht davon überzeugen, dass diese Werte allen 4 Gleichungen genügen.

Sind 3 Gerade (s. Fig 112.) I, II, III der einen Schar gegeben, so muss jede Gerade der andern Schar diese 3 treffen. Man construiert nun eine solche durch P gehende Gerade, indem man durch P u. II und hierauf durch P und III eine Ebene legt, dann ist die Durchschnittslinie die gesuchte Gerade, denn sie geht sowohl durch I als auch durch II und III. Auf diese Weise können wir uns das ganze Hyperboloid construieren.

Fernere Discussion der Gleichung 2ten Grades.

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dx+2Ey+2Fz+G=0$$

Ist $C=0$ und $F=0$, so erhalten wir eine Gleichung, die von z unabhängig ist. Wenn wir also z beliebige Werte beilegen, so erhalten

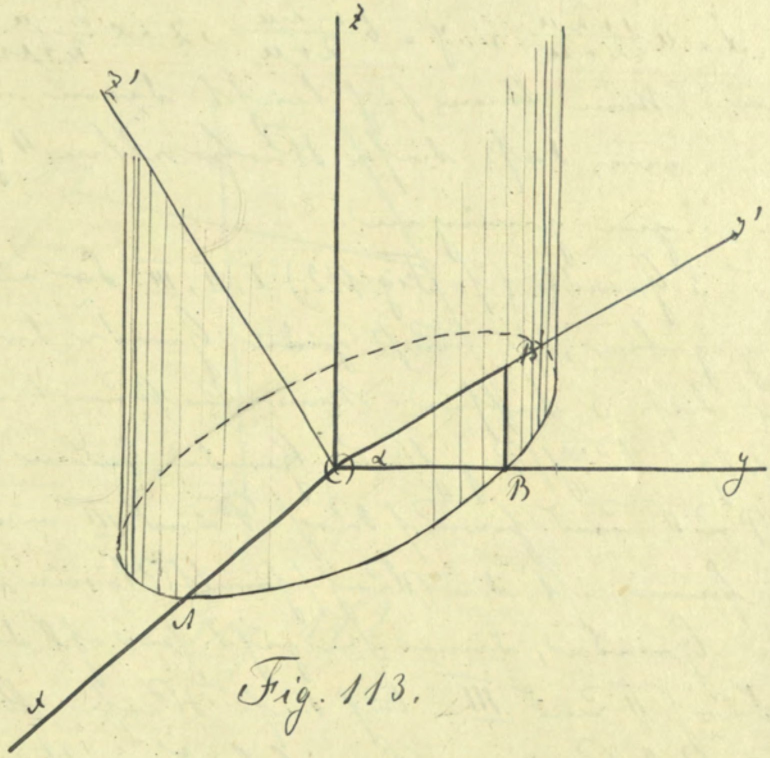

Fig. 113.

wir immer denselben Kegelschnitt:

$$Ax^2+By^2+2Dx+2Ey+G=0.$$

Die Gleichung stellt folglich eine **Cylinderfläche** dar. Jenachdem sie eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel darstellt, nennt man den Cylinder einen elliptischen, hyperbolischen oder parabolischen.

Der parabolische Cylinder wird von jeder Ebene in einer Parabel geschnitten, der hyperbolische in einer Hyperbel, der elliptische kann jedoch als Durchschnittsfigur einen Kreis besitzen.

Der elliptische Cylinder sei gegeben durch die Gleichung: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(b<a)$ (s. Fig. 113)

Wir können ihn durch eine Ebene schneiden, die durch die x Achse geht. Nennen wir den Durchschnitt dieser Ebene mit der yz-Ebene (OB') zur y' Achse und die Senkrechte auf sie zur z' Achse, so haben wir zu setzen:

$$x = x'$$
$$y = y'\cos\alpha - z'\sin\alpha$$
$$z = y'\sin\alpha + z'\cos\alpha \qquad \text{folgl:}$$

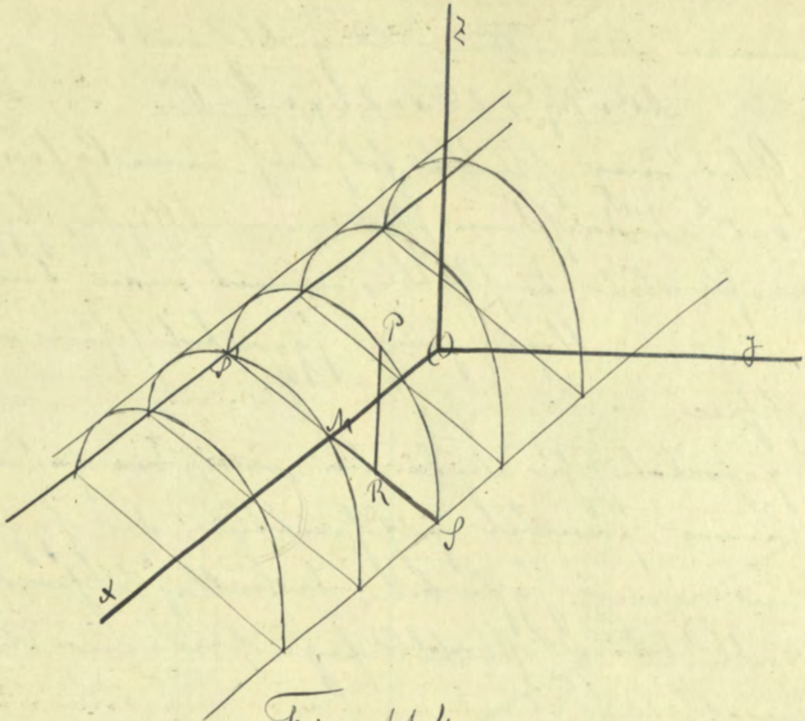

Fig. 114.

Satz 66. Die Gleichung:

$$Ax^2+By^2+2Dx+2Ey+G=0$$

stellt eine Cylinderfläche dar, deren Kanten parallel zur z-Axe und deren Basis ein Kegelschnitt in der xy-Ebene ist.

Ist diese Basis elliptisch, so kann der Cylinder auch durch 2 Scharen von Kreisen beschrieben werden, deren Ebenen parallel der großen Axe der Ellipse und deren Durchmesser gleich derselben ist.

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{(y'\cos\alpha - z'\sin\alpha)^2}{b^2} = 1$$

Setzen wir $z'=0$, so erhalten wir die Schnittlinie mit AOB':

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2\cos^2\alpha}{b^2} = 1$$

Soll dieselbe ein Kreis sein, so ist:

$$a^2 = \frac{b^2}{\cos^2\alpha}, \quad \cos\alpha = \pm\frac{b}{a} \text{ also } OB' = a.$$

Wir können also auch den elliptischen Cylinder dadurch erhalten, daß wir den Ort derjenigen Kreise aufsuchen, welche über parallelen Verbindungslinien zweier paralleler Geraden als Durchmesser in Verticalebenen errichtet sind. (s. Fig. 114)

Die parallelen Geraden seien gegeben durch die Gleichung:

$$y^2 - b = 0$$

Ziehen wir unter dem Winkel β gegen die x-Axe Gerade und machen die durch den Anfangspunkt gehende zur y'-Axe, so haben wir zu setzen:

$$x = x' + y'\cos\beta$$

$$y = y'\sin\beta$$

$$y^2 - b^2 = y'^2\sin^2\beta - b$$

$MR^2 + RP^2 = MS^2 = \frac{b}{\sin\beta}$, da S ein Punkt einer der gegebenen Geraden.

Satz 67. Die Gleichung:

$$By^2 + 2Dx + 2Ey + 2Fz + G = 0$$

stellt einen **parabolischen Cylinder** dar, dessen Kanten die Richtungscoss

$$-\frac{F}{\sqrt{D^2+F^2}}, \; 0, \; \frac{D}{\sqrt{D^2+F^2}}$$

haben.

$$MR^2\sin^2\beta + RP^2\sin^2\beta - b^2 = 0$$

$$y^2 - b^2 + z^2\sin^2\beta = 0$$

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2/\sin^2\beta} = 1$$

Wir erhalten also als Grundfläche des Cylinders eine Ellipse mit den Axen $\frac{b}{\sin\beta}$ u. b.

Bei unseren bisherigen Betrachtungen der allgemeinen Gleichung 2ten Grades: Coll. 49 $\frac{7}{V}$ 92.

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dx + 2Ey + 2Fz + G = 0$$

haben wir noch nicht den Fall untersucht, wo 2 der Größen A, B, C verschwinden. Nehmen wir jetzt an, daß $A = 0$ und $C = 0$. Wir drehen das C! System um den Winkel β um die y Axe, wo:

$$\cos\beta = \frac{D}{\sqrt{D^2+F^2}}\,, \quad \sin\beta = \frac{F}{\sqrt{D^2+F^2}}$$

$$x = x'\cos\beta - z'\sin\beta = \frac{Dx' - Fz'}{\sqrt{D^2+F^2}}\,,\ y = y'\,,\ z = x'\sin\beta + z'\cos\beta = \frac{Fx' + Dz'}{\sqrt{D^2+F^2}}$$

Dann erhalten wir:

$$By'^2 + \frac{2D^2x'}{\sqrt{D^2+F^2}} - \frac{2DFz'}{\sqrt{D^2+F^2}} + 2Ey' + \frac{2F^2x'}{\sqrt{D^2+F^2}} + \frac{2DFz'}{\sqrt{D^2+F^2}} + G = 0$$

$$By'^2 + 2\sqrt{D^2+F^2}\,x' + 2Ey' + G = 0$$

Wir können jetzt die Richtungscoss der Kanten berechnen. Die Kanten stehen senkrecht auf der Ebene $z' = 0$

$$\sqrt{D^2+F^2}\,z' = -xF + zD = 0$$

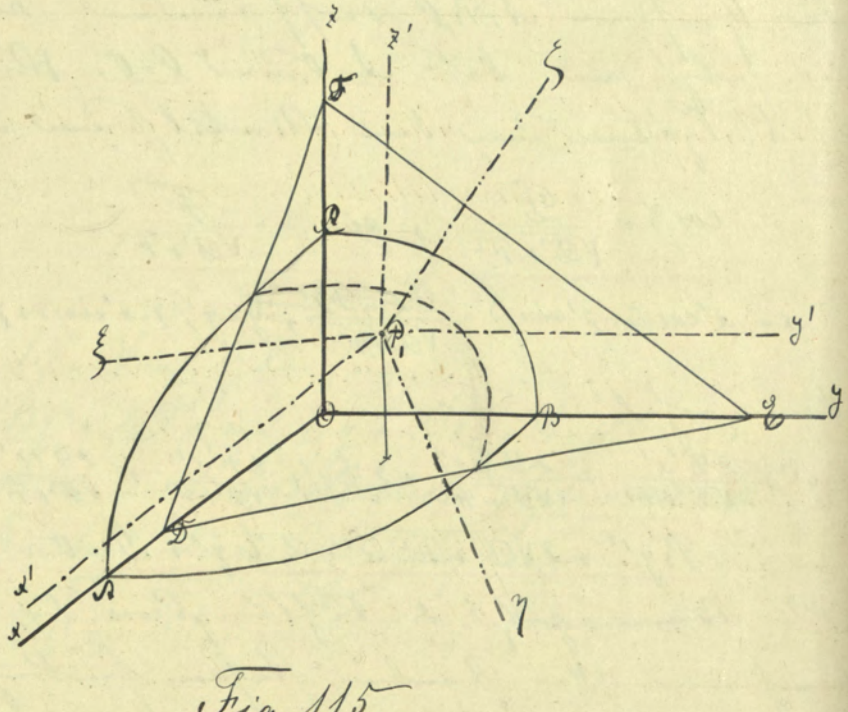

Fig. 115.

folglich sind die Richtungscoss:

$$-\frac{F}{\sqrt{D^2+F^2}},\ 0,\ \frac{D}{\sqrt{D^2+F^2}}$$

Der Gleichung: $Ax^2+By^2+Cz^2+2Dx+2Ey+2Fz+G=0$ genügen also folgende 9 Flächen:

	Kreise enthaltende	Gerade Linien enthaltende	
$A, B, C \gtrless 0$	Ellipsoid, 2sch. Hyperb.	1sch. Hyperb. Kegelfl.	
$C=0, F\gtrless 0$	Ellipt. Paraboloid		Hyperb. Parab.
$C=0, F=0$		Ellipt. Cylinder	Parab. u. Hyp. Cyl.
$A=0, C=0$			Parab. Cyl.

Wir gehen jetzt dazu über, die

Schnittcurve einer allgemeinen Fläche 2ten Grades mit einer beliebigen Ebene

zu finden.

Die Fläche habe die Gleichung:

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dx+2Ey+2Fz+G=0$$

die Ebene: $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=d$

Wir müssen versuchen die Ebene durch C.! Transformation zur xy-Ebene zu machen. Zuerst nehmen wir eine C.! Verschiebung nach $P_1(x_1y_1z_1)$ vor, welcher in der gegebenen Ebene liegt, so daß also:

$$x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta+z_1\cos\gamma=d \quad \text{(s. Fig. 115)}$$

$$x = x' + x_1 \,,\quad y = y' + y_1 \,,\quad z = z' + z_1$$

$$A x'^2 + 2A x' x_1 + A x_1^2 + B y'^2 + 2B y' y_1 + B y_1^2 + C z'^2 + 2C z' z_1 + C z_1^2 + 2D x_1 + 2E y_1 + 2F z_1 + G = 0$$
$$+ 2D x' \qquad + 2E y' \qquad + 2F z'$$

$$\underline{A x'^2 + B y'^2 + C z'^2 + 2(A x_1 + D) x' + 2(B y_1 + E) y' + 2(C z_1 + F) z' + G_1 = 0}$$

wobei: $\underline{G_1 = A x_1^2 + B y_1^2 + C z_1^2 + 2D x_1 + 2E y_1 + 2F z_1 + G}$

Damit die gegebene Ebene zur Horizontalebene wird, müssen wir noch eine C! Drehung vornehmen:

$$\left.\begin{aligned} x' &= f\xi + f'\eta + f''\zeta \\ y' &= g\xi + g'\eta + g''\zeta \\ z' &= h\xi + h'\eta + h''\zeta \end{aligned}\right\}$$

wo $f, g, h;\ f', g', h';\ f'', g'', h''$ die Richtungs-cos der neuen ξ, η, ζ-Axen sind, also: $f'' = \cos\alpha$, $g'' = \cos\beta$, $h'' = \cos\gamma$

Da wir nur den Schnitt finden wollen, so können wir $\zeta = 0$ setzen und erhalten dann:

$$A(f^2\xi^2 + 2ff'\xi\eta + f'^2\eta^2) + B(g^2\xi^2 + 2gg'\xi\eta + g'^2\eta^2) + C(h^2\xi^2 + 2hh'\xi\eta + h'^2\eta^2)$$
$$+ 2(A x_1 + D)(f\xi + f'\eta) + 2(B y_1 + E)(g\xi + g'\eta) + 2(C z_1 + F)(h\xi + h'\eta) + G_1 = 0$$

$$(Af^2 + Bg^2 + Ch^2)\xi^2 + (Af'^2 + Bg'^2 + Ch'^2)\eta^2 + 2(Aff' + Bgg' + Chh')\xi\eta$$
$$+ 2((A x_1 + D)f + (B y_1 + E)g + (C z_1 + F)h)\xi + 2((A x_1 + D)f' + (B y_1 + E)g' + (C z_1 + F)h')\eta + G_1 = 0$$

Setzen wir jetzt:

$$\underline{\underline{A} = Af^2 + Bg^2 + Ch^2}$$
$$\underline{\underline{B} = Af'^2 + Bg'^2 + Ch'^2}$$
$$\underline{\underline{\Gamma} = Aff' + Bgg' + Chh'}$$

so kommt es nur auf das Vorzeichen von $\underline{\underline{A}\,\underline{B} - \Gamma^2}$ an, was für einen Kegelschnitt wir erhalten.

$$\underline{A}\,\underline{B} - \Gamma^2 = (Af^2 + Bg^2 + Ch^2)(Af'^2 + Bg'^2 + Ch'^2) - (Aff' + Bgg' + Chh')^2$$

Satz 68. Eine Ebene schneidet ein Ellipsoid entweder in einer Ellipse oder gar nicht.

$$AB-\Gamma'^2 = BC(gh'-hg')^2 + CA(hf'-fh')^2 + AB(fg'-gf')^2$$

wovon man sich durch Ausrechnung überzeugen kann.

Die Größen in den Klammern sind aber nach Satz 58 gleich f'', g'', h'', folgt:

$$\underline{AB-\Gamma'^2 = BC\cos^2\alpha + CA\cos^2\beta + AB\cos^2\gamma}$$

Im Falle eines Ellipsoids sind A, B, C alle Coll. 50 $\frac{11}{V}$ 92. positiv, folglich auch $AB-\Gamma'^2$ positiv. Ein Ellipsoid kann also durch eine Ebene nur in einer Ellipse geschnitten werden.

Wir müssen jetzt die Schnittcurven eines Hyperboloids und einer Kegelfläche bestimmen. Da in dem Ausdruck $AB-\Gamma'^2$ das constante Glied d der Gleichung der Ebene nicht vorkommt, so heißt das, parallele Ebenen schneiden immer einen bestimmten Kegelschnitt aus. Wir können also als Schnittebene diejenige Ebene annehmen, welche durch den Mittelpunkt $\left(-\frac{D}{A}, -\frac{E}{B}, -\frac{F}{C}\right)$ der Fläche geht; dieselbe ist:

$$\underline{\left(x+\frac{D}{A}\right)\cos\alpha + \left(y+\frac{E}{B}\right)\cos\beta + \left(z+\frac{F}{C}\right)\cos\gamma = 0}$$

Ferner können wir statt der Fläche den Asymptotenkegel einführen, da in demselben die Coefficienten der quadratischen Glie-

der A, B, C dieselben sind. Um dieselben zu bestimmen, müssen wir untersuchen, wie wir einen radius vector durch den Mittelpunkt eines Hyperboloids legen müssen, damit er dasselbe in der Unendlichkeit trifft.

Der Radius vector hat die Gleichung:

$$x = -\frac{D}{A} + u\cos\lambda$$
$$y = -\frac{E}{B} + u\cos\mu$$
$$z = -\frac{F}{C} + u\cos\nu$$

Substituiren wir diese Werte in die allgemeine Gleichung 2ten Grades:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dx + 2Ey + 2Fz + G = 0$$

$$\frac{D^2}{A} - 2Du\cos\lambda + Au^2\cos^2\lambda + \frac{E^2}{B} - 2Eu\cos\mu + Bu^2\cos^2\mu + \frac{F^2}{C}$$
$$- 2Fu\cos\nu + Cu^2\cos^2\nu - \frac{2D^2}{A} + 2Du\cos\lambda - \frac{2E^2}{B} + 2Eu\cos\mu$$
$$- \frac{2F^2}{C} + 2Fu\cos\nu + G = 0$$

$$u^2(A\cos^2\lambda + B\cos^2\mu + C\cos^2\nu) = \frac{D^2}{A} + \frac{E^2}{B} + \frac{F^2}{C} - G$$

Soll $u = \infty$ sein, so ist:

$$\underline{A\cos^2\lambda + B\cos^2\mu + C\cos^2\nu = 0}$$

Setzen wir jetzt in diese Gleichung die Werte für $\cos\lambda, \cos\mu, \cos\nu$:

$$\cos\lambda = \frac{1}{u}\left(x + \frac{D}{A}\right)$$
$$\cos\mu = \frac{1}{u}\left(y + \frac{E}{B}\right)$$

$$\cos\nu = \frac{1}{u}\left(z + \frac{F}{C}\right)$$

ein, so erhalten wir die Gleichung des Asymptotenkegels:

$$A\left(x + \frac{D}{A}\right)^2 + B\left(y + \frac{E}{B}\right)^2 + C\left(z + \frac{F}{C}\right)^2 = 0$$

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dx + 2Ey + 2Fz + \frac{D^2}{A} + \frac{E^2}{B} + \frac{F^2}{C} = 0.$$

Beziehen wir jetzt den Asymptotenkegel auf dasselbe System, wie früher die quadratische Fläche und setzen wir wieder $\zeta = 0$, so erhalten wir als Gleichung des Kegelschnittes:

$$A\xi^2 + B\eta^2 + 2\Gamma\xi\eta = 0$$

Daß dieses in der That ein Paar gerade Linien ist, können wir durch eine einfache Umformung zeigen. Wir können statt der obigen Gleichung schreiben:

$$\frac{1}{A}\left(A^2\xi^2 + 2A\Gamma\xi\eta + \Gamma^2\eta^2 + (AB - \Gamma^2)\eta^2\right) = 0$$

$$(A\xi + \Gamma\eta)^2 - (\Gamma^2 - AB)\eta^2 = 0$$

$$\left(A\xi + \Gamma\eta + \sqrt{\Gamma^2 - AB}\,\eta\right)\left(A\xi + \Gamma\eta - \sqrt{\Gamma^2 - AB}\,\eta\right) = 0$$

Jeder Factor repräsentirt eine gerade Linie. Sind beide Factoren reell, d. h. schneidet eine Ebene durch die Spitze des Kegels denselben, so ist $AB - \Gamma^2$ negativ, also eine Ebene parallel dieser schneidet auf dem

C

Satz 69. Eine Ebene schneidet ein Hyperboloid oder einen Kegelfläche in einer Hyperbel, Parabel, oder Ellipse (resp. gar nicht), je nachdem die ihr parallele Ebene durch den Mittelpunkt den Asymptotenkegel resp. die Kegelfläche selbst schneidet, berührt, oder überhaupt nicht trifft.

Satz 70. Eine Ebene schneidet ein elliptisches Paraboloid in einer Parabel, wenn sie der Axe parallel ist, sonst in einer Ellipse resp. gar nicht.

Satz 71. Eine Ebene schneidet ein hyperbolisches Paraboloid in einer Parabel, wenn sie dessen Axe parallel ist, sonst in einer Hyperbel.

Satz 72. Eine Ebene schneidet einen Cylinder, je nachdem derselbe elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch ist, in einer

Hyperboloid, resp. Asymptotenkegel, eine Hyperbel aus.

Wir erhalten als Schnittcurve eine Ellipse, wenn $AB - \Gamma^2$ positiv ist. Dann sind aber die beiden Factoren imaginär, d.h. die Parallelebene zur Schnittebene geht bloß durch die Spitze des Kegels.

Endlich erhalten wir eine Parabel, wenn $AB - \Gamma^2 = 0$, also beide Gerade zusammenfallen, d.h. die Parallelebene den Kegel berührt.

Im Falle eines Paraboloides ist $C = 0$, $AB - \Gamma^2$ reduciert sich auf:

$$\underline{AB - \Gamma^2 = AB\cos\gamma}$$

Beim elliptischen Paraboloid ist AB positiv, die Schnittlinie also eine Ellipse, beim hyperbolischen negativ, die Schnittlinie eine Hyperbel. Nur wenn $\cos\gamma = 0$, $\underline{\gamma = 90^\circ}$ ist, d.h. wenn die Schnittlinie parallel zur z-Achse verläuft, erhalten wir eine Parabel.

Bei der Zylinderfläche ist $\underline{C = 0}$ u. $\underline{F = 0}$. AB ist positiv, negativ oder 0, jenachdem der Zylinder elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch ist und wir erhalten als Schnittlinien die

Ellipse, Parabel oder Hyperbel.

entsprechenden Kurven. Natürlich schneiden diese Ebenen parallel zur z Axe gerade Linien aus.

Gleichung der Tangentialebene.

Coll. 51 $\frac{12}{V}$ 92.

Bei unseren bisherigen Betrachtungen waren wir ausgegangen von der Gleichung 2ten Grades:

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dx+2Ey+2Fz+G=0$$

und der Ebene: $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=d$

hierauf nahmen wir die Transformation vor:

$$x=x_1+\xi f+\eta f'$$
$$y=y_1+\xi g+\eta g'$$
$$z=z_1+\xi h+\eta h'$$

wo x_1,y_1,z_1 der Gleichung der Ebene genügen. [Wir] erhielten dann die Durchschnittslinie

$$\begin{aligned}A\xi^2+B\eta^2+2\Gamma\xi\eta&+2\xi\big((Ax_1+D)f+(By_1+E)g+(Cz_1+F)h\big)\\&+2\eta\big((Ax_1+D)f'+(By_1+E)g'+(Cz_1+F)h'\big)\\&+Ax_1^2+By_1^2+Cz_1^2+2Dx_1+2Ey_1+2Fz_1+G=0\end{aligned}$$

Soll die Ebene die quadratische Fläche berühren, so muß dieser Kegelschnitt degenerieren, also muß er sich reducieren auf:

$$A\xi^2+B\eta^2+2\Gamma\xi\eta=0$$

denn dann können wir ihn zerlegen in:

$$\frac{1}{A}\left(A\xi+\Gamma\eta+\sqrt{\Gamma^2-AB}\,\eta\right)\left(A\xi+\Gamma\eta-\sqrt{\Gamma^2-AB}\,\eta\right)=0$$

Dann muß aber auch sein:

$$\mathfrak{A}x_1^2 + \mathfrak{B}y_1^2 + \mathfrak{C}z_1^2 + 2\mathfrak{D}x_1 + 2\mathfrak{E}y_1 + 2\mathfrak{F}z_1 + \mathfrak{G} = 0$$

$$(\mathfrak{A}x_1 + \mathfrak{D})f + (\mathfrak{B}y_1 + \mathfrak{E})g + (\mathfrak{C}z_1 + \mathfrak{F})h = 0 \quad \times h' \quad \times f'$$

$$(\mathfrak{A}x_1 + \mathfrak{D})f' + (\mathfrak{B}y_1 + \mathfrak{E})g' + (\mathfrak{C}z_1 + \mathfrak{F})h' = 0 \quad \times h \quad \times f$$

$$(\mathfrak{A}x_1 + \mathfrak{D})(fh' - hf') + (\mathfrak{B}y_1 + \mathfrak{E})(gh' - hg') = 0$$

$$(\mathfrak{B}y_1 + \mathfrak{E})(gf' - fg') + (\mathfrak{C}z_1 + \mathfrak{F})(hf' - fh') = 0$$

Folglich, da: $f'' = gh' - hg'$

$g'' = hf' - fh'$

$h'' = fg' - gf'$

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = \mathfrak{A}x_1 + \mathfrak{D} : \mathfrak{B}y_1 + \mathfrak{E} : \mathfrak{C}z_1 + \mathfrak{F}$$

$$\cos\alpha = \frac{\mathfrak{A}x_1 + \mathfrak{D}}{N}, \quad \cos\beta = \frac{\mathfrak{B}y_1 + \mathfrak{E}}{N}, \quad \cos\gamma = \frac{\mathfrak{C}z_1 + \mathfrak{F}}{N}$$

wo: $N^2 = (\mathfrak{A}x_1 + \mathfrak{D})^2 + (\mathfrak{B}y_1 + \mathfrak{E})^2 + (\mathfrak{C}z_1 + \mathfrak{F})^2$

Setzen wir die Werte für $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ in die Gleichung der Ebene ein, so erhalten wir die Tangentialebene:

$$x(\mathfrak{A}x_1 + \mathfrak{D}) + y(\mathfrak{B}y_1 + \mathfrak{E}) + z(\mathfrak{C}z_1 + \mathfrak{F}) = dN$$

d können wir leicht bestimmen, da der Punkt $x_1 y_1 z_1$ in der Ebene liegt. Folglich:

$$x(\mathfrak{A}x_1 + \mathfrak{D}) + y(\mathfrak{B}y_1 + \mathfrak{E}) + z(\mathfrak{C}z_1 + \mathfrak{F}) = \mathfrak{A}x_1^2 + \mathfrak{D}x_1 + \mathfrak{B}y_1^2 + \mathfrak{E}y_1 + \mathfrak{C}z_1^2 + \mathfrak{F}z_1$$

$$= -\mathfrak{D}x_1 - \mathfrak{E}y_1 - \mathfrak{F}z_1 - \mathfrak{G}$$

$$x(\mathfrak{A}x_1 + \mathfrak{D}) + y(\mathfrak{B}y_1 + \mathfrak{E}) + z(\mathfrak{C}z_1 + \mathfrak{F}) + \mathfrak{D}x_1 + \mathfrak{E}y_1 + \mathfrak{F}z_1 + \mathfrak{G} = 0$$

Um zu sehen, ob die Tangentialebenen die Fläche in einem Punkte oder einer oder

Satz 73. Die Gleichung der Tangentialebene der Fläche: $Ax^2+By^2+Cz^2+2Dx+2Ey+2Fz+G=0$ im Punkte $x_1 y_1 z_1$ lautet:

$$x(Ax_1+D)+y(By_1+E)+z(Cz_1+F)+Dx_1+Ey_1+Fz_1+G=0.$$

Dieselbe berührt die Fläche in einem Punkte, wenn die Fläche ein Ellipsoid, ein zweischaliges Hyperboloid oder ein elliptisches Paraboloid ist, schneidet sie in zwei geraden Linien, wenn die Fläche ein einschaliges Hyperboloid oder ein hyperbolisches Paraboloid ist und berührt sie längs einer Geraden, wenn die Fläche eine Kegel- oder Zylinderfläche ist.

zwei graden Linien trifft müssen wir die Gleichung $AB-\Gamma^2 = \Delta$ untersuchen.

$$\Delta = AB - \Gamma^2 = BC\cos^2\alpha + CA\cos^2\beta + AB\cos^2\gamma$$

$$\underline{\Delta N^2} = BC(Ax_1+D)^2 + CA(By_1+E)^2 + AB(Cz_1+F)^2$$

$$= ABC(Ax_1^2+2Dx_1+By_1^2+2Ey_1+Cz_1^2+2Fz_1)+BCD^2+CAE^2+ABF^2$$

$$= \underline{BCD^2 + CAE^2 + ABF^2 - ABCG}$$

Für einen bestimmten ~~Kegelschnitt~~ Fläche, hat ΔN^2 also auch Δ ein ganz bestimmtes Vorzeichen, d. h. wenn eine beliebige Tangentialebene die Fläche in einem Punkte trifft, thun es auch alle andern etc.

Wir wollen jetzt die einzelnen Fälle untersuchen:

Fläche	Gleichung derselben	Wert von ΔN^2	die Tangentialebene trifft die Fläche
Ellipsoid	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	$\Delta N^2 = \frac{1}{a^2b^2c^2}(+)$	in 1. Punkte
1schal. Hyperbol.	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	$\Delta N^2 = -\frac{1}{a^2b^2c^2}(-)$	in 2 graden Linien
2schal. Hyperbol.	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	$\Delta N^2 = \frac{1}{a^2b^2c^2}(+)$	in 1. Punkte
Kegelfläche	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	$\Delta N^2 = 0$	in 1 graden Lin.
Ellipt. Parabol.	$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}-2z=0$	$\Delta N^2 = \frac{1}{pq}(+)$	in 1 Punkte
Hyperb. Parab.	$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{p}-2z=0$	$\Delta N^2 = -\frac{1}{pq}(-)$	in 2 graden Lin.
Ellipt. Cylinder	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$	$\Delta N^2 = 0$	in 1 graden Linie
Hyperb. Cylinder	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$	$\Delta N^2 = 0$	in 1 graden Linie
Parab. Cylinder	$y^2-2px=0$	$\Delta N^2 = 0$	in 1 graden Linie

Wir wollen jetzt untersuchen, wann überhaupt Coll. 52 13/V 92.
eine Ebene ein Ellipsoid, zweischaliges Hyperboloid oder elliptisches Paraboloid schneidet.

Ist die Gleichung der Fläche:

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dx+2Ey+2Fz+G=0$$

so ist die Gleichung der Tangentialebene:

$$x(Ax_1+D)+y(By_1+E)+z(Cz_1+F)+Dx_1+Ey_1+Fz_1+G=0.$$

Betrachten wir zuerst die beiden Mittelpunktsflächen, das Ellipsoid und zweischalige Hyperboloid. Auf den Mittelpunkt bezogen haben sie die Gleichung:

$$Ax^2+By^2+Cz^2=1$$

und ihre Tangentialebene:

$$Axx_1+Byy_1+Czz_1=1$$

Die Gleichung der schneidenden Ebene sei

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=d$$

dann ist die zu ihr parallele Tangentialebene:

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=e$$

wo d u. e bekanntlich die Abstände der Ebenen vom Anfangspunkte sind.

Bringen wir jetzt die Gleichung $Axx_1+Byy_1+Czz_1=1$ auf die Hessesche Normalform.

Ist $\quad N^2=A^2x_1^2+B^2y_1^2+C^2z_1^2$, so ist:

Satz 74. Das Ellipsoid $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ wird von der Ebene $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=d$ dann und nur dann geschnitten, wenn:

$$d^2 < a^2\cos^2\alpha+b^2\cos^2\beta+c^2\cos^2\gamma$$

Satz 75. Das zweischalige Hyperboloid $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ wird von der Ebene $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=d$ nur dann nicht geschnitten, wenn

$$d^2 < a^2\cos^2\alpha+b^2\cos^2\beta+c^2\cos^2\gamma$$

$$\cos\alpha = \frac{Ax_1}{N},\ \cos\beta = \frac{By_1}{N},\ \cos\gamma = \frac{Cz_1}{N},\ e = \frac{1}{N}$$

$$x_1 = \frac{N\cos\alpha}{A},\ y_1 = \frac{N\cos\beta}{B},\ z_1 = \frac{N\cos\gamma}{C}$$

Da $x_1 y_1 z_1$ auf der Fläche liegt

$$1 = Ax_1^2 + By_1^2 + Cz_1^2 = N^2\left(\frac{\cos^2\alpha}{A} + \frac{\cos^2\beta}{B} + \frac{\cos^2\gamma}{C}\right)$$

$$e^2 = \frac{\cos^2\alpha}{A} + \frac{\cos^2\beta}{B} + \frac{\cos^2\gamma}{C} = \frac{BC\cos^2\alpha + CA\cos^2\beta + AB\cos^2\gamma}{ABC} = \frac{\Delta}{ABC}$$

Wir erhalten also, wie es auch sein muß, zwei Werte für e, zwei Tangentialebenen.

Haben wir ein Ellipsoid, so ist: $A = \frac{1}{a^2}, B = \frac{1}{b^2}, C = \frac{1}{c^2}$, e ist also wirklich reell und

$$e^2 = a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma$$

Soll nun die Ebene $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = d$ die Fläche treffen, so muß offenbar $d < e$ sein, oder:

$$d^2 < a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma$$

Im Falle eines zweischaligen Hyperboloids ist $A = \frac{1}{a^2}, B = -\frac{1}{b^2}, C = -\frac{1}{c^2}$, e wieder reell und

$$e^2 = a^2\cos^2\alpha - b^2\cos^2\beta - c^2\cos^2\gamma$$

Soll die Ebene die Fläche treffen, so muß $d > e$ sein, oder

$$d^2 > a^2\cos^2\alpha - b^2\cos^2\beta - c^2\cos^2\gamma$$

Wir wollen jetzt dieselben Betrachtungen mit dem elliptischen Paraboloid anstellen. Letzteres hat die Gleichung:

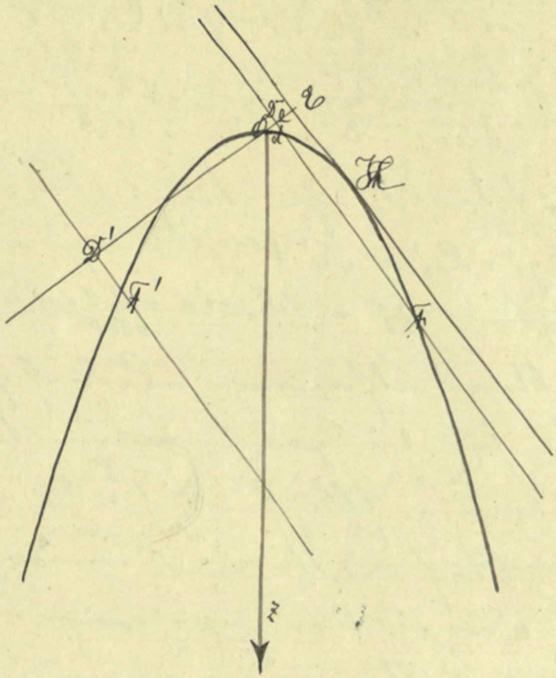

Fig. 116.

Satz 76. Das elliptische Paraboloid $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$ wird von der Ebene $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=d$ nur dann nicht geschnitten, wenn $\gamma>90^\circ$ und zugleich

$$d>-\frac{1}{2\cos\gamma}\left(p\cos^2\alpha+q\cos^2\beta\right)$$

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} - 2z = 0$$

die Tangentialebene: $\frac{xx_1}{p} + \frac{yy_1}{q} - z - z_1 = 0$

Ist: $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = d$

irgend eine Ebene, so muß die ihr parallele Tangentialebene die Gleichung haben:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = e$$

Um die vorige Gleichung mit dieser zu identificieren, müssen wir setzen:

$$N^2 = \frac{x_1^2}{p^2} + \frac{y_1^2}{q^2} + 1$$

$$\cos\alpha = \frac{x_1}{pN}, \quad \cos\beta = \frac{y_1}{qN}, \quad \cos\gamma = -\frac{1}{N}, \quad e = -\frac{z_1}{N}$$

$$N = \frac{-1}{\cos\gamma}, \quad x_1 = pN\cos\alpha = -\frac{p\cos\alpha}{\cos\gamma}, \quad y_1 = qN\cos\beta = -\frac{q\cos\beta}{\cos\gamma}, \quad z_1 = eN = \frac{-e}{\cos\gamma}$$

Da $x_1 y_1 z_1$ auf der Fläche liegt, so ist:

$$2z_1 = \frac{x_1^2}{p} + \frac{y_1^2}{q}$$

$$\frac{-2e}{\cos\gamma} = \frac{p\cos^2\alpha}{\cos^2\gamma} + \frac{q\cos^2\beta}{\cos^2\gamma}$$

$$e = \frac{-1}{2\cos\gamma}\left(p\cos^2\alpha + q\cos^2\beta\right)$$

Zeichnen wir uns einen Schnitt der durch die z Achse und das Lot auf die Ebenen geht (s. Fig 116) so sehen wir folgendes:

Ist $\gamma > 90^\circ$, so muß, damit die Ebene DF das Paraboloid trifft d kleiner sein als e. Ist $\gamma < 90^\circ$, so ist e negativ; die Schnittebene (D'F') liegt auf der andern Seite des Anfangspunktes und trifft auch sicher das Paraboloid.

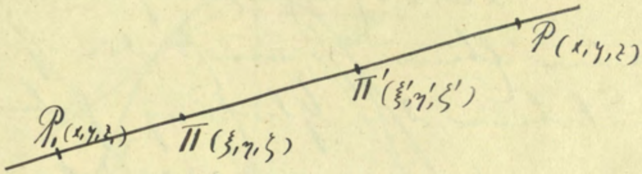

Fig. 117.

Wir können die Gleichung der Tangentialebene auch dadurch herleiten, daß wir die Tangentialebene als den Ort der geraden Linien betrachten, welche die Fläche in einem Punkte berühren. (s. Fig. 117.)

Sind $P(x,y,z)$ und $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 2 Punkte einer geraden Linie, welche die Fläche

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dx+2Ey+2Fz+G=0$$

in $\Pi(\xi,\eta,\zeta)$ und $\Pi'(\xi',\eta',\zeta')$ trifft, so ist:

$\xi=\frac{x_1+\lambda x}{1+\lambda}$, $\eta=\frac{y_1+\lambda y}{1+\lambda}$, $\zeta=\frac{z_1+\lambda z}{1+\lambda}$; $\xi'=\frac{x_1+\lambda' x}{1+\lambda}$ etc

ξ,η,ζ müssen der Gleichung der Fläche genügen:

$$A(x_1+\lambda x)^2+B(y_1+\lambda y)^2+C(z_1+\lambda z)^2+2D(x_1+\lambda x)(1+\lambda)$$
$$+2E(y_1+\lambda y)(1+\lambda)+2F(z_1+\lambda z)(1+\lambda)+G(1+\lambda)^2=0$$

Nach Potenzen von λ geordnet:

$$Ax_1^2+By_1^2+Cz_1^2+2Dx_1+2Ey_1+2Fz_1+G$$
$$+2\lambda\left(x(Ax_1+D)+y(By_1+E)+z(Cz_1+F)+Dx_1+Ey_1+Fz_1+G\right)$$
$$+\lambda^2\left(Ax^2+By^2+Cz^2+2Dx+2Ey+2Fz+G\right)=0$$

Ist P_1 ein Punkt der Fläche, so fällt das constante Glied weg und die eine Wurzel der Gleichung ist $\lambda=0$. Fällt Π auch auf P_1, so muß, da $\lambda=\frac{P_1\Pi}{\Pi P}$, auch der andere Wert von $\lambda=0$ sein, also, damit dieses

der Fall ist, der Coefficient von 2λ verschwinden. Wir erhalten so die Gleichung der Tangentialebene:

$$x(Ax_1+D)+y(By_1+E)+z(Cz_1+F)+Dx_1+Ey_1+Fz_1+G=0$$

Wir können uns jetzt die Frage stellen: Coll. 53 $\frac{18}{V}$ 92.

Was für eine Fläche muß P,P beschreiben, damit sie immer die quadratische Fläche berührt?

Offenbar müssen dann Π u. Π' also auch beide Wurzeln von λ zusammenfallen. Haben wir die Gleichung:

$$\alpha+2\beta\lambda+\gamma\lambda^2=0, \text{ so ist: } \lambda=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-\alpha\gamma}}{\gamma}$$

Sollen nun beide Werte zusammenfallen, so ist: $\beta^2-\alpha\gamma=0$, also in unserem Falle:

$$(x(Ax_1+D)+y(By_1+E)+z(Cz_1+E)+Dx_1+Ey_1+Fz_1+G)^2$$
$$-(Ax_1^2+By_1^2+Cz_1^2+2Dx_1+2Ey_1+2Fz_1+G)(Ax^2+By^2$$
$$+Cz^2+2Dx+2Ey+2Fz+G)=0$$

In dieser Gleichung kommen außer den ersten und zweiten Potenzen von x, y, z noch Glieder mit xy, yz, zx vor. Wir müssen nun untersuchen, ob wir sie durch eine C! transformation auf die bisher betrachtete Form bringen können.

Das Problem, zu untersuchen, ob man die Fläche

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2A'yz + 2B'zx + 2C'xy + 2Dx + 2Ey + 2Fz + G = 0$$

durch die O! Transformation:

$$x = f\xi + f'\eta + f''\zeta$$
$$y = g\xi + g'\eta + g''\zeta$$
$$z = h\xi + h'\eta + h''\zeta$$

auf eine Form bringen kann, wo die Glieder mit yz, zx, xy fehlen, nennt man das

Hauptaxenproblem der Flächen 2ten Grades.

Die Transformation der linearen Glieder macht keine Schwierigkeiten:

$$2(Dx + Ey + Fz) = 2\big(\xi(Df + Eg + Fh) + \eta(Df' + Eg' + Fh') + \zeta(Df'' + Eg'' + Fh'')\big)$$

Die übrigen Glieder erfordern unbequeme Rechnungen. Wir wollen daher einen andern Weg einschlagen. Wir setzen:

$$\Phi(x,y,z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2A'yz + 2B'zx + 2C'xy$$
$$\varphi(x,y,z) = Ax + C'y + B'z$$
$$\psi(x,y,z) = C'x + By + A'z$$
$$\chi(x,y,z) = B'x + A'y + Cz$$

Dann ist, wie man sich leicht durch Ausrechnen überzeugen kann:

$$\Phi(x,y,z) = x\,\varphi(x,y,z) + y\,\psi(x,y,z) + z\,\chi(x,y,z)$$

$$x'\varphi(x,y,z) + y'\psi(x,y,z) + z'\chi(x,y,z) = x\varphi(x',y',z') + y\psi(x',y',z') + z\chi(x',y',z')$$

Machen wir jetzt die Transformation:

$$\varphi(x,y,z) = A(f\xi + f'\eta + f''\zeta) + C'(g\xi + g'\eta + g''\zeta) + B'(h\xi + h'\eta + h''\zeta)$$

$$= \xi(Af + C'g + B'h) + \eta(Af' + C'g' + B'h') + \zeta(Af'' + C'g'' + B'h'')$$

$$\varphi(x,y,z) = \xi\,\varphi(f,g,h) + \eta\,\varphi(f',g',h') + \zeta\,\varphi(f'',g'',h'')$$

$$\psi(x,y,z) = \xi\,\psi(f,g,h) + \eta\,\psi(f',g',h') + \zeta\,\psi(f'',g'',h'')$$

$$\chi(x,y,z) = \xi\,\chi(f,g,h) + \eta\,\chi(f',g',h') + \zeta\,\chi(f'',g'',h'')$$

Multipliciren wir jetzt

die erste Gleichung mit $x = f\xi + f'\eta + f''\zeta$

" zweite " " $y = g\xi + g'\eta + g''\zeta$

" dritte " " $z = h\xi + h'\eta + h''\zeta$

und addiren sie zu einander, so erhalten wir

$$\Phi(x,y,z) = \underline{A}\,\xi^2 + \underline{B}\,\eta^2 + \underline{\Gamma}\,\zeta^2 + 2\underline{A}'\eta\zeta + 2\underline{B}'\zeta\xi + 2\underline{\Gamma}'\xi\eta$$

wo:

$$\underline{A} = \Phi(f,g,h)\,, \quad \underline{B} = \Phi(f',g',h')\,, \quad \underline{\Gamma} = \Phi(f'',g'',h'')$$

$$2\underline{\Gamma}' = f'\varphi(f,g,h) + g'\psi(f,g,h) + h'\chi(f,g,h) + f\varphi(f',g',h') + g\psi(f',g',h') + h\chi(f',g',h')$$

oder da die Summe der drei ersten Glieder gleich der Summe der drei letzten ist:

$$\underline{\Gamma}' = f'\varphi(f,g,h) + g'\psi(f,g,h) + h'\chi(f,g,h)$$

$$\underline{B}' = f''\varphi(f,g,h) + g''\psi(f,g,h) + h''\chi(f,g,h)$$

$$\underline{A}' = f'\varphi(f'',g'',h'') + g'\psi(f'',g'',h'') + h'\chi(f'',g'',h'')$$

Durch diese Transformation sollen die Glieder mit den Producten der Variabeln wegfal-

ben. Wir nehmen an, es sei zunächst nur $\mathcal{B}'$ und $\Gamma' = 0$.

$$\begin{aligned} f\,\varphi(f,g,h) + g\,\psi(f,g,h) + h\,\chi(f,g,h) &= A \\ f'\varphi(f,g,h) + g'\psi(f,g,h) + h'\chi(f,g,h) &= 0 \\ f''\varphi(f,g,h) + g''\psi(f,g,h) + h''\chi(f,g,h) &= 0 \end{aligned}$$

Multipliciren wir jetzt der Reihe nach Coll. 54 $\frac{12}{V}$ 92.

die erste Gleichung mit f, g, h

" zweite " " f', g', h'

" dritte " " f'', g'', h''

und addiren sie mit Berücksichtigung, daß:

$$\begin{array}{l|l} f^2 + f'^2 + f''^2 = 1 & fg + f'g' + f''g'' = 0 \\ g^2 + g'^2 + g''^2 = 1 & fh + f'h' + f''h'' = 0 \\ h^2 + h'^2 + h''^2 = 1 & gh + g'h' + g''h'' = 0 \end{array}$$

so erhalten wir:

$$\underline{\varphi(f,g,h) = A f}$$
$$\underline{\psi(f,g,h) = A g}$$
$$\underline{\chi(f,g,h) = A h}$$

oder wenn wir für die Functionszeichen ihre Ausdrücke einsetzen:

$$\begin{array}{l|c|l|l|l} \mathcal{A}f + \mathcal{C}'g + \mathcal{B}'h = A f & & f(\mathcal{A}-A) + g\mathcal{C}' + h\mathcal{B}' = 0 & \times\mathcal{A}' & \times\mathcal{C}' \\ \mathcal{C}'f + \mathcal{B}g + \mathcal{A}'h = A g & (\alpha) & f\mathcal{C}' + g(\mathcal{B}-A) + h\mathcal{A}' = 0 & \times\mathcal{B}' & \times \mathcal{A}-A \\ \mathcal{B}'f + \mathcal{A}'g + \mathcal{C}h = A h & & f\mathcal{B}' + g\mathcal{A}' + h(\mathcal{C}-A) = 0 & & \end{array}$$

$$f(\mathcal{A}'(\mathcal{A}-A) - \mathcal{B}'\mathcal{C}') + g(\mathcal{A}'\mathcal{C}' - \mathcal{B}'(\mathcal{B}-A)) = 0$$

$$g(\mathfrak{C}'^2-(\mathfrak{A}-A)(\mathfrak{B}-A))+h(\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'-\mathfrak{A}'(\mathfrak{A}-A))=0$$

$$f:g:h=\mathfrak{B}'(\mathfrak{B}-\underline{A})-\mathfrak{A}'\mathfrak{C}' : \mathfrak{A}'(\mathfrak{A}-A)-\mathfrak{B}'\mathfrak{C}' : \mathfrak{C}'^2-(\mathfrak{A}-A)(\mathfrak{B}-A)$$

Wenn A bekannt wäre könnte man jetzt schon f, g, h bestimmen. Um $\underline{A}$ zu finden, setzen wir die Werte von f, g, h in die dritte Gleichung ein:

$$\mathfrak{B}'(\mathfrak{B}'(\mathfrak{B}-A)-\mathfrak{A}'\mathfrak{C}')+\mathfrak{A}'(\mathfrak{A}'(\mathfrak{A}-A)-\mathfrak{B}'\mathfrak{C}')+(\mathfrak{C}-A)(\mathfrak{C}'^2-(\mathfrak{A}-A)(\mathfrak{B}-A))=0$$

$$(\mathfrak{A}-\underline{A})(\mathfrak{B}-\underline{A})(\mathfrak{C}-\underline{A})-\mathfrak{A}'^2(\mathfrak{A}-A)-\mathfrak{B}'^2(\mathfrak{B}-A)-\mathfrak{C}'^2(\mathfrak{C}-\underline{A})+2\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'=0$$

Denken wir uns A so gewählt, daß es dieser Gleichung genügt, so sind auch f, g, h bestimmt und unsere Gleichung erhält die Form:

$$\underline{A}\xi^2+\underline{B}\eta^2+\underline{\Gamma}\zeta^2+2\underline{A}'\eta\zeta+2\mathfrak{D}'\xi+2\mathfrak{E}'\eta+2\mathfrak{F}'\zeta+\mathfrak{G}=0$$

Um $\underline{A}'$ wegzuschaffen, machen wir noch eine C. Drehung um die ξ Achse:

$$\xi=\xi'$$
$$\eta=\eta'\cos\delta-\zeta'\sin\delta$$
$$\zeta=\eta'\sin\delta+\zeta'\cos\delta$$

wo: $$\operatorname{tg} 2\delta=\frac{2\underline{A}'}{\underline{B}-\underline{\Gamma}}$$

Unser Problem ist also gelöst wenn die cubische Gleichung für $\underline{A}$ eine reelle Wurzel besitzt. Daß sie eine solche besitzt läßt sich am einfachsten auf geometrischem We-

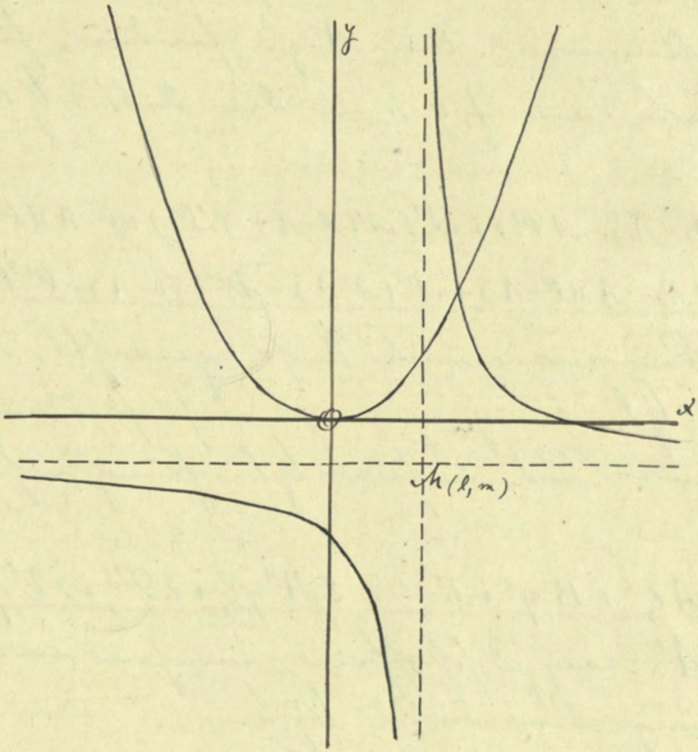

Fig. 118.

zu zeigen.

Haben wir die cubische Gleichung

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

so können wir sie betrachten als Eliminationsresultat der beiden Gleichungen:

$$axy + by + cx + d = 0$$

$$y = x^2$$

Beide Gleichungen stellen Kegelschnitte dar. Läßt es sich zeigen, daß sie einen reellen Schnittpunkt haben, so ist unsere Aufgabe gelöst. (s. Fig. 118.)

Die zweite Gleichung stellt eine Parabel dar, deren Scheitelpunkt der Anfangspunkt und deren Hauptaxe die y-Axe ist.

Die erste Gleichung ist, wie sich leicht zeigen läßt, die einer Hyperbel. Um das Glied mit xy wegzuschaffen nehmen wir eine C.-Drehung um einen Winkel von 45° vor:

$$x = \frac{x'-y'}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{x'+y'}{\sqrt{2}}$$

$$a(x'^2 - y'^2) + \sqrt{2}\, b(x'+y') + \sqrt{2}\, c(x'-y') + 2d = 0$$

$$a(x'^2 - y'^2) + 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(b+c)x' + 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(b-c)y' + 2d = 0$$

Die C. des Mittelpunkts sind

$$x' = -\frac{b+c}{a\sqrt{2}}, \quad y' = \frac{b-c}{\sqrt{2}}$$

im ursprünglichen System:

$$l = -\frac{b}{a}\,,\quad m = -\frac{c}{a}$$

Die Asymptoten der Hyperbel liegen parallel zu den Achsen, die eine muß also notwendig die Parabel treffen, folglich trifft auch die Hyperbel die Parabel in wenigstens einem Punkte, die cubische Gleichung hat also mindestens eine reelle Lösung.

Ebenso können wir die Bedingung auf- Coll. 55 $\frac{20}{V}$ 92.
stellen, daß Λ' und Γ' fortfallen, dann erhalten wir für $f\ g\ h$ Ausdrücke derselben Art und dieselbe cubische Gleichung.
Unsere Gleichung hat also 3 reelle Wurzeln, welche $\Lambda, \mathrm{B}, \Gamma$ gleich sind.

Unsere Aufgabe ist also gelöst, außer für den Fall, daß die Verhältnisse $f:g:h$ gleich 0 sind. Das tritt dann ein, wenn die 3 Gleichungen (α) sich auf eine reducieren, d. h. wenn:

$$A-\Lambda : C' : B' = C' : B-\Lambda : A' = B' : A' : C-\Lambda$$

Hieraus folgt:

$$0 = (A-\Lambda)(B-\Lambda) - C'^2 = (A-\Lambda)A' - B'C' = (B-\Lambda)B' - A'C'$$
$$= (A-\Lambda)(C-\Lambda) - B'^2 = (C-\Lambda)C' - A'B' = (B-\Lambda)(C-\Lambda) - A'^2$$

Satz 78. Die Gleichung 2ten Grades:

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2A'yz+2B'zx+2C'xy+2Dx+2Ey+2Fz+G=0$$

kann stets durch eine rechtwinklige Transformation

$$x = f\xi + f'\eta + f''\zeta$$
$$y = g\xi + g'\eta + g''\zeta$$
$$z = h\xi + h'\eta + h''\zeta$$

auf die Form:

$$\mathbf{A}\xi^2+\mathbf{B}\eta^2+\Gamma\zeta^2+2D'\xi+2E'\eta+2F'\zeta+G=0$$

gebracht werden.

Hierzu bestimme man zuerst $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \Gamma$ als Wurzeln der cubischen Gleichung

$$(A-u)(B-u)(C-u)-A'^2(A-u)-B'^2(B-u)-C'^2(C-u)+2A'B'C'=0$$

Alsdann sind die Verhältnisse der Richtungscoss fgh, $f'g'h'$, $f''g''h''$ bestimmt durch die Gleichungen

$$(A-u)f + C'g + B'h = 0$$
$$C'f + (B-u)g + A'h = 0$$
$$B'f + A'g + (C-u)h = 0$$

wenn man darin der Reihe nach u gleich $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \Gamma$ setzt. Hieraus sind diese Richtungscoss nur dann nicht bestimmt wenn $\mathbf{A} = \mathbf{B}$. Dies tritt, falls A', B', C'

Wir können jetzt 2 Fälle unterscheiden

I. $A'B'C' \gtrless 0$.

$$A = \mathfrak{A} - \frac{B'C'}{A'} \qquad \mathfrak{A} - A = \frac{B'C'}{A'}$$

$$A = \mathfrak{B} - \frac{A'C'}{B'} \qquad \mathfrak{B} - A = \frac{A'C'}{B'}$$

$$A = \mathfrak{C} - \frac{A'B'}{C'} \qquad \mathfrak{C} - A = \frac{A'B'}{C'}$$

Vergleichen wir die Gleichung (α)

$$f(\mathfrak{A}-A) + gC' + hB' = 0$$

mit:

$$ff'' + gg'' + hh'' = 0$$

so können wir setzen:

$$f'':g'':h'' = \mathfrak{A}-A : C' : B' = \frac{B'C'}{A'} : C' : B' = B'C' : A'C' : A'B'$$

Das Verhältnis $f':g':h'$ bleibt völlig unbestimmt. Da dasselbe aber durch dieselbe Formel angegeben wird, wie $f:g:h$, nur daß man B statt A zu setzen hat, und $f:g:h$ auch unbestimmt ist, so ist

$$A = B$$

und wir erhalten die Gleichung einer Rotationsfläche

$$A(\xi^2+\eta^2) + \Gamma\zeta^2 + 2\mathfrak{D}\xi + 2\mathfrak{E}\eta + 2\mathfrak{F}\zeta + \mathfrak{G} = 0$$

Da bei einer Rotationsfläche zwei Axen immer willkürlich angenommen werden können, so ist es ganz natürvon 0 verschieden sind, dann ein, wenn:

$$A = B = A - \frac{B'C'}{A'} = B - \frac{C'A'}{B'} = C - \frac{A'B'}{C'}$$

Als dann ist:

$$f'' : g'' : h'' = B'C' : A'C' : A'B'$$

während fgh und $f'g'h'$ die Richtungscos irgend zweier unter einander und auf $f''g''h''$ senkrechter Axen sind.

Sind $A'B'C'$ nicht alle von 0 verschieden, so tritt dasselbe ein, falls zwei derselben, etwa $A = B = 0$ sind und gleichzeitig

$$(A - C)(B - C) = C'^2$$

Dann ist:

$$f'' : g'' : h'' = A - C : C' : 0$$

während fgh und $f'g'h'$ wie oben bestimmt sind.

In beiden Fällen und nur in diesen ist die Fläche eine **Rotationsfläche**.

lich, daß auch 2 Verhältnisse $f:g:h$ u. $f':g':h'$ unbestimmt bleiben.

$\underline{II \; A' = 0}$

Dann muß vermöge der Gleichungen auf Seite 187 auch B' oder $C' = 0$ sein. Es sei:

$\underline{B' = 0}$; $\underline{C' \gtrless 0}$. Dann ist:

$\underline{A = C}$; $\underline{(A-C)(B-C) - C'^2 = 0}$

$\underline{f'':g'':h''} = A - A : C' : B' = \underline{A - C : C' : 0}$

Die Rotationsaxe steht senkrecht auf der z Axe.

Beispiel: Man transformiere die Gleichung Coll. 5b $\frac{21}{V}$ 92.

$$\underline{11x^2 + 11y^2 + 27z^2 - 18yz - 18xz + 14xy = 36}$$

auf die Hauptaxen.

$A = 11$, $B = 11$, $C = 27$, $A' = -9$, $B' = -9$, $C' = 7$

Die Gleichung zur Bestimmung von A, B, Γ ist:

$$(11-u)(11-u)(27-u) - 81(11-u) - 81(11-u) - 49(27-u) + 2 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 7 = 0$$

$\underline{A = 9}$, $\underline{B = 36}$, $\underline{\Gamma = 4}$

Die transformierte Gleichung hat die Gestalt:

$$\underline{9\xi^2 + 36\eta^2 + 4\zeta^2 = 36}$$

oder, wie die Gleichung des Ellipsoides gewöhnlich geschrieben wird:

$$\frac{\xi^2}{2^2} + \frac{\eta^2}{1^2} + \frac{\zeta^2}{3^2} = 1$$

$$f : g : h = A'C' - B'(B-u) : B'C' - A'(A-u) : (A-u)(B-u) - C'^2$$

$$= -7\cdot 9 + 9\cdot 2 : -7\cdot 9 + 9\cdot 2 : 4 - 49$$

$$= -5 : -5 : -5 = 1 : 1 : 1$$

$$f = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad g = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad h = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$f' : g' : h' = -7\cdot 9 - 9\cdot 25 : -7\cdot 9 - 9\cdot 25 : 25\cdot 25 - 49$$

$$= -32 : -32 : 64 = -1 : -1 : 2$$

$$f' = -\frac{1}{\sqrt{6}}, \quad g' = -\frac{1}{\sqrt{6}}, \quad h' = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$f'' : g'' : h'' = -7\cdot 9 + 9\cdot 7 : -7\cdot 9 + 9\cdot 7 : 49 - 49 = 0 : 0 : 0$$

Da uns dies nicht zum Ziel führt brauchen wir die 2te und 3te Gleichung.

$$f'' : g'' : h'' = (B-u)(C-u) - A'^2 : A'B' - C'(C-u) : A'C' - B'(B-u)$$

$$= 7\cdot 23 - 81 : 81 - 7\cdot 23 : -7\cdot 9 + 9\cdot 7 = 1 : -1 : 0$$

$$f'' = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad g'' = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad h'' = 0$$

Die Drehung lautet:

$$x = \frac{\xi}{\sqrt{3}} - \frac{\eta}{\sqrt{6}} + \frac{\zeta}{\sqrt{2}}$$

$$y = \frac{\xi}{\sqrt{3}} - \frac{\eta}{\sqrt{6}} - \frac{\zeta}{\sqrt{2}}$$

$$z = \frac{\xi}{\sqrt{3}} + \frac{2\eta}{\sqrt{6}}$$

Finis!

Aufgaben.

1. Von einem Dreieck, dessen Ecken die C. $x_1=-56$, $y_1=-36$; $x_2=-28$, $y_2=60$; $x_3=28$, $y_3=27$ haben, bestimme man die Gleichungen und Längen der Seiten, der Höhen, der Mitteltransversalen, die C. des Höhenschnittpunktes und des Schwerpunktes, sowie den Flächeninhalt.
2. Man bestimme die PolarC. der Punkte mit den rechtwinkligen C. $x=0$, $y=5$; $x=1$, $y=-\sqrt{3}$
3. Man bestimme die rechtwinkligen C., deren PolarC. $r=3$, $\varphi=210^\circ$; $r=2$, $\varphi=315^\circ$.
4. Man beweise daß die Formel für den Flächeninhalt eines Dreiecks durch die C. der Eckpunkte durch Verschiebung des C.systems ihre Gestalt nicht ändert.
5. Man bestimme die verschiedenen Formen der Gleichungen der geraden Linien $3x+4y=6$ und $12x-5y=-26$ und die Entfernungen derselben vom Punkte $(-7,1)$.
6. Bestehen zwischen den Coefficienten der Gleichungen der geraden Linien $Ax+By=C$, $A'x+B'y=C'$ und $A''x+B''y=C''$ die Bedingungen $A''=\lambda A+\lambda' A'$; $B''=\lambda B+\lambda' B'$; $C''=\lambda C+\lambda' C'$, so soll

bewiesen werden, daß die dritte Gerade durch den Schnittpunkt der ersten beiden hindurchgeht.

7. Wenn die C.' der Eckpunkte eines Dreiecks gegeben sind, so bestimme man die Gleichungen der Mitteltransversalen und beweise, daß dieselben sich in einem Punkte schneiden.

8. Den Ort der Punkte zu bestimmen, für welche die Differenz der Quadrate der Entfernungen von zwei festen Punkten constant ist.

9. Es sind die C.' desjenigen Punktes P zu bestimmen, dessen Verbindungslinien mit 2 festen Punkten P_1 und P_2 mit der Verbindungslinie dieser 2 gegebene Winkel bilden, nämlich $\angle(PP_2, P_1P) = \alpha$ u. $\angle(P_2P, P_2P_1) = \alpha_1$.

10. Die Gleichungen der beiden Geraden zu bestimmen, welche durch den Punkt mit den C.' $3, -5$ gehen und die Gerade $7x+2y=4$ unter einem Winkel von 45^0 schneiden.

11. Es ist der Ort der Punkte zu suchen, welche von einem festen Punkte durch 2 fe-

ste Geraden harmonisch getrennt sind.

12. Kennt man von einem Dreieck 2 Seiten und den eingeschlossenen Winkel, so berechne man in dem von diesen beiden Seiten gebildeten schiefwinkligen Systeme die C. der merkwürdigen Punkte des Dreiecks.

13. Man bestimme die Durchschnittspunkte des Kreises $64x^2+64y^2-272x+128y-272=0$ mit der geraden Linie $3x-4y=1$.

14. Man bestimme die Gleichung der Tangente im Punkte 5,4 an den Kreis $x^2+y^2-4x-6y+3=0$

15. Man discutire die Lage und Gestalt der folgenden quadratischen Linien $3y^2-6x-30y+33=0$; $4x^2+9y^2-24x+72y+144=0$; $3x^2-4y^2+66x+40y+251=0$; $-x^2+4y^2+6x+8y-5=0$

16. Man bestimme den Ort der Durchschnittspunkte derjenigen Tangenten einer Parabel, welche einen gegebenen Winkel mit einander bilden.

17. Man bestimme den Ort der Spitzen eines Dreiecks, wenn die Basis gegeben ist und der eine Basiswinkel doppelt so groß als der andere.

18. Es sind gegeben ein Punkt S auf der Abscissenaxe und zwei symmetrisch zu derselben gelegene Punkte A u. A'. Schneidet dann irgend ein Radius vector die Geraden SA u. SA' in B u. B', so soll der Ort der Schnittpunkte der Geraden AB' u. A'B bei beweglichem rad. vect. gefunden werden.

19–23. Es sind die folgenden Sätze zu beweisen.

19. Wenn 2 feste Punkte einer Hyperbel mit einem veränderlichen Punkte derselben durch gerade Linien verbunden werden, so schneiden dieselben auf jeder der beiden Asymptoten Strecken constanter Länge ab.

20. Zwei feste Tangenten einer Parabel schneiden auf einer veränderlichen Tangente derselben ein Stück ab, welches vom Brennpunkt aus unter constantem Winkel gesehen wird.

21. Die Brennpunkte einer Ellipse oder Hyperbel liegen auf einem Kreise über demjenigen Stücke einer Tangente als Durchmesser, welches zwischen den Scheitel-

tangenten der großen Axe liegt.

22. Tangente und Normale einer Ellipse oder Hyperbel schneiden von der großen resp. reellen Axe Stücke ab, deren Product gleich dem Quadrate der linearen Excentricität ist.

23. Die Tangenten einer Ellipse, Hyperbel oder Parabel in den Endpunkten einer durch den Brennpunkt gehenden Sehne schneiden sich in einem Punkte, dessen Verbindungslinie mit dem Brennpunkt auf dieser senkrecht steht.

24. Man bestimme die Hauptelemente der folgenden beiden Kegelschnitte: $25x^2-120xy+144y^2-338x=0$ und $5x^2+26xy+5y^2-16x+16y-88=0$

25. Welchen Ort beschreibt irgend ein Punkt einer Strecke, deren Endpunkte sich auf irgend 2 Geraden bewegen?

26. Man suche den Ort der Spitzen derjenigen Dreiecke, welche auf gegebener Basis stehen und deren Basiswinkel eine gegebene Differenz haben.

27. Man bestimme den Ort der Fußpunkte der Lote vom Brennpunkt auf die Tan-

punkten einer Parabel.

28. Man bestimme den Ort der Durchschnittspunkte zu einander senkrechter Tangenten eines Kegelschnittes.

29. Man transformire die Gleichung $10x^2+6xy+5y^2=10$ für $\cos(\beta-\alpha)$ auf die Hauptaxen.

30. Man bestimme die einander gleichen conjugirten Durchmesser einer Ellipse.

31. Diejenigen Sehnen einer Ellipse oder Hyperbel, welche einen Punkt derselben mit den Endpunkten eines Durchmessers verbinden, sind 2 conjugirten Durchmessern parallel.

32. Diejenige Parabel zu finden, welche die Y Axe berührt und einen gegebenen Brennpunkt hat.

33. Es ist gegeben ein fester Punkt und eine feste Gerade und es werde jedem Punkte P der Ebene derjenige Punkt P' zugeordnet, welcher mit P und dem festen Punkt in einer Geraden liegt und von P durch den festen Punkt und die feste Gerade harmonisch getrennt ist. Welche Linie beschreibt dann der Punkt P, wenn P' irgend einen Kreis beschreibt?

34. Man bestimme die Entfernung der beiden Punkte mit den C! 3, −1, 7 u. −3, −7, 1, sowie die Winkel ihrer Verbindungslinie mit den Axen.
35. Man bestimme die räumlichen Polar C! des Punktes mit den rechtwinkligen C! 20, 48, 39.
36. Man bestimme die Ecken eines gleichseitigen Parallelogramms, die auf 4 Kanten des Tetraeders mit den Ecken: 1, 2, 1; 2, −3, 1; −2, 3, −2; −4, −5, −2 liegen.
37. Man bestimme die Ellipse, in welche ein Kreis der xy-Ebene übergeht, wenn er in der Richtung α, β, γ auf die xz-Ebene projiciert wird und beweise, daß je 2 rechtwinklige Durchmesser des Kreises in 2 conjugierte Durchmesser der Ellipse übergehen.
38. Den Ort der Punkte zu bestimmen, für welche das Verhältnis der Entfernungen von irgend 2 festen Punkten constant ist.
39. Man beweise, daß die eine Hauptaxe der durch einen geraden Kegel aus einer Ebene ausgeschnittenen Linie die orthogonale Projection der Axe des Kegels auf die Ebene ist.
40. Man bestimme die Hauptelemente derjenigen Kegelschnitte, in welchen der gerade

Kegel, dessen Spitze der Punkt 3, 4, 12, dessen Axe der rad. vect. nach diesem Punkt und dessen Winkel mit der Kante bestimmt ist durch $\sin \delta = \frac{4}{13}$, die C! Ebenen trifft.

41. Man bestimme die Ebene und den Flächeninhalt des Dreiecks durch die 3 Punkte 1, 2, 3; 1, 1, 1; 5, 4, 3.

42. Man bestimme die Spurpunkte, Projectionen und Richtungscoss der Schnittlinie der beiden Ebenen $x+2y+3z=4$; $3x+2y+z=4$

43. Welches ist der Ort der Punkte, für welche die Summe resp. Differenz der Entfernungen von 2 gegebenen Ebenen constant ist.

? 44. Man bestimme den Winkel, den die Gerade $\frac{x-10}{9} = \frac{y-167}{168} = \frac{z+15}{16}$ mit der Ebene $97x+177y+128z=48$ bildet und den gemeinsamen Punkt.

45. Man bestimme die kürzeste Entfernung der beiden Geraden $15x+20y-32$, $75x-80z=44$ u. $15x+20y=18$, $25x+15z=-7$ und transformiere diese Gleichungen auf ein System, dessen Anfangspunkt die Mitte dieser kürzesten Entfernung, dessen eine Axe die kürzeste Entfernung ist, während die anderen Axen die Winkel der beiden Geraden halbieren.

46. Man beweise, daß das Sechsfache Volumen eines Tetraeders gleich dem Product aus je 2 gegenüberliegenden Kanten und der kürzesten Entfernung derselben und dem sin des von ihnen eingeschlossenen Winkels ist.

47. Es sind zwei Ebenen gegeben und in einer derselben ein Kreis. Es soll der Ort der Punkte bestimmt werden, von denen aus dieser Kreis auf die andere Ebene wieder als Kreis projicirt wird.

48. Man suche den Ort der Halbirungspunkte der durch einen festen Punkt gehenden Sehnen eines Ellipsoids.

49. Auf einer Geraden sind gegeben 3 feste Punkte. Welchen Ort beschreibt irgend ein anderer fester Punkt derselben, wenn die Gerade sich so bewegt, daß die 3 festen Punkte sich in den 3 C. Ebenen bewegen.

50. Man suche den Ort der Durchschnittslinien derjenigen Ebenen, die sich um 2 feste Axen so bewegen, daß sie stets senkrecht auf einander stehen.

51. Man bestimme den Ort, den Mittelpunkt, die Axe, Kreisschnitte und eventuell die geraden Linien, der

durch die Gleichungen $25x^2+100y^2+52z^2+10x+40y+104z-43=0$ und $20x^2-5y^2+4z^2-20x-10y+4z-19=0$ dargestellten Flächen zweiten Grades.

52. Es ist der Ort derjenigen Punkte zu untersuchen, für welche das Verhältniß der Entfernungen von einem festen Punkt u. einer festen Ebene constant ist?

53. Es ist der Ort derjenigen Punkte zu untersuchen, für welche das Verhältniß der Entfernungen von einem festen Punkt u. einer festen Geraden constant ist?

54. Es ist der Ort derjenigen Punkte zu untersuchen, für welche das Verhältniß der Entfernungen von einer festen Ebene und einer festen Geraden constant ist?

55. Welchen Ort beschreibt irgend eine Gerade, welche sich um die fest mit ihr verbundene z-Axe dreht?

56. Zu entscheiden, in welcher Kurve sich die Flächen $36x^2+9y^2+4z^2+72x+36y+24z+72=0$ u. $12x+3y+4z+10=0$, ferner $9x^2+25y^2+16z^2-24xz-40x-30z=0$ u. $52x+15y-36z+5=0$ schneiden.

57. Man suche den Ort der Punkte, für welche das Verhältniß der Entfernungen von irgend 2 Geraden constant ist.