LATVIJAS UNIVERSITĀTES
ZINĀTNISKIE RAKSTI

ACTA UNIVERSITATIS LATVIENSIS

553

МАТЕМАТИКА

Дифференциальные уравнения

Министерство народного образования Латвийской Республики
ЛАТВИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
Институт математики и информатики

МАТЕМАТИКА

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Научные труды
Том 553

Латвийский университет
Рига 1990

УДК 517

МАТЕМАТИКА. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.

Математика. Дифференциальные уравнения: Научные труды/ Отв. ред. Ю.А.Клоков. Т.553. Рига: ЛУ, 1990. - 143 с.

Сборник содержит 16 статей, написанных преподавателями и научными сотрудниками Латвийского университета. Большинство статей посвящено изучению различных актуальных теоретических и прикладных вопросов нелинейных краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. В ряде статей рассматриваются уравнения с частными производными, уравнения с запаздыванием, а также строятся разностные схемы решения начальных и краевых задач.

Сборник предназначен для специалистов по качественной теории дифференциальных уравнений и аспирантов соответствующих специальностей.

М $\frac{1702070000-124у}{М812(11)-90}$ 30.90

УДК 519.21

Л.Е.Энгельсон

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ В СРЕДНЕМ ЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ СО СЛУЧАЙНЫМ ОПЕРАТОРОМ

Пусть $y(t)$ $(t \geqslant 0)$ - однородный марковский процесс с конечным множеством состояний $\bar{N} = \{1, \dots, N\}$. Обозначим C пространство всех непрерывных вектор-функций φ, отображающих отрезок $[-\tau, 0]$ в действительное n-мерное пространство $\mathbb{R}^n$, с обычной нормой $\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(\theta)| : \theta \in [-\tau, 0]\}$.

Пусть задан оператор $F : \bar{N} \times C \to \mathbb{R}^n$, линейный и непрерывный по второму аргументу. Для любой непрерывной функции $x : [-\tau, +\infty[\to \mathbb{R}^n$ обозначим x_t функцию $x_t(\theta) = x(t+\theta)$ $(\theta \in [-\tau, 0])$.

В работе изучается уравнение

$$\dot{x}(t) = F(y(t), x_t). \tag{I}$$

Уравнения такого вида возникают при описании систем, меняющих свою структуру под воздействием случайных факторов. В частности, в таком виде можно записать линейную систему уравнений со случайными запаздываниями и случайными коэффициентами. Несмотря на широкие возможности приложений, уравнения вида (I) мало исследованы. В работе [I] доказаны достаточные условия устойчивости по вероятности уравнения со случайными запаздываниями в терминах функционала Ляпунова. В работе [2] исследуется вопрос об устойчивости по первому приближению нелинейных систем со случайным запаздыванием.

В настоящей работе доказано необходимое и достаточное условие экспоненциальной устойчивости в среднем уравнения (I). С его помощью можно строить точные области устойчивости конкретных уравнений со случайными коэффициентами и запаздываниями.

Определение I. Уравнение (I) называется экспоненциально устойчивым в среднем, если существуют такие постоянные $K>0$ и $\gamma>0$, что при любых начальных условиях $x_0\in C$, $y(0)\in\bar{N}$ для всех $t\geqslant 0$

$$|Ex(t)|\leqslant Ke^{-\gamma t}\|x_0\|, \tag{2}$$

где E - символ математического ожидания.

Для изучения такой устойчивости удобно рассмотреть семейство операторов $\Gamma(t): C^N \to C^N$ $(t>0)$, которые действуют по следующему правилу: набору вектор-функций $\bar{\varphi}=(\varphi_1,\dots,\varphi_N)\in C^N$ ставится в соответствие набор $\Gamma(t)\bar{\varphi}=(\psi_1,\dots,\psi_N)$, причем для всех $\theta\in[-\tau,0]$, $j\in\bar{N}$

$$\psi_j(\theta)=\sum_{i=1}^{N} p_{ij}(t)E(x_t(\theta)|x_0=\varphi_i,\ y(0)=i,\ y(t)=j), \tag{3}$$

где $p_{ij}(t)=P(y(s+t)=j\,|\,y(s)=i)$.

Доопределим $\Gamma(0)=I$.

Легко видеть, что $\Gamma(t)$ - линейные непрерывные операторы.

Наряду с $\Gamma(t)$ рассмотрим сопряженные операторы $\Gamma^*(t)$. Для $\bar{\nu}=(\nu_1,\dots,\nu_N)\in(C^*)^N$ имеем $\Gamma^*(t)\bar{\nu}=(\mu_1,\dots,\mu_N)$, где

$$\langle\varphi,\mu_i\rangle=E(\langle x_t,\nu_{y(t)}\rangle\,|\,x_0=\varphi,\ y(0)=i) \tag{4}$$

для любых $\varphi\in C$, $i\in\bar{N}$.

Как известно [3], операторы сдвига вдоль решений автономного уравнения $\dot{x}(t)=F(i,x_t)$ вполне непрерывны при $t\geqslant\tau$ и образуют сильно непрерывную полугруппу с производящим оператором $A_i\varphi=\varphi'$, определенным на множестве $D(A_i)=\{\varphi\in C:\varphi'\in C,\ \varphi'(0)=F(i,\varphi)\}$. Оказывается, операторы $\Gamma(t)$ обладают аналогичными свойствами.

Пусть $\Lambda=(\lambda_{ij})$ - инфинитезимальная матрица марковского процесса $y(t)$, т.е.

$$p_{ij}(t) = \lambda_{ij} t + o(t) \qquad (i \neq j), \tag{5}$$

$$p_{ii}(t) = 1 + \lambda_{ii} t + o(t), \tag{6}$$

$$\sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} = 0 \qquad (i = 1, \dots, N). \tag{7}$$

Т е о р е м а I. Семейство операторов $\Gamma(t)$ $(t \geq 0)$ является сильно непрерывной полугруппой. Ее производящий оператор $\mathcal{L}\bar{\varphi} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[\Gamma(t)\bar{\varphi} - \bar{\varphi}]$ в пространстве C^N вектор-столбцов $\bar{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_N)^T$ задается матрицей

$$\mathcal{L} = diag(A_1, \dots, A_N) + \Lambda^T I = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \dots & 0 \\ \dots & & \dots \\ 0 & 0 \dots & A_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_{11} I & \dots & \lambda_{N1} I \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{1N} I & \dots & \lambda_{NN} I \end{pmatrix}, \tag{8}$$

где I - тождественный оператор в C .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Полугрупповое свойство удобнее доказывать для семейства $\Gamma^*(t)$. В самом деле, для любых $\varphi \in C$, $i \in \bar{N}$, используя (4), получим

$$\langle \varphi, [\Gamma^*(s)\Gamma^*(t)\nu]_i \rangle = E(\langle x_s, [\Gamma^*(t)\nu]_{y(s)} \rangle | x_0 = \varphi,\ y(0) = i) =$$

$$= E\{E[\langle x_{t+s}, \nu_{y(t+s)} \rangle | (x_s, y(s))] \mid x_0 = \varphi, y(0) = i\} = \langle \varphi, [\Gamma^*(s+t)\nu]_i \rangle,$$

т.к. пара $(x_s, y(s))$ образует однородный марковский процесс [I].

Из равенств (3), (5), (6) следует

$$\psi_j(\theta) - \varphi_j(\theta) = \sum_{i=1}^{N} [\lambda_{ij} t + o(t)] E(x_t(\theta) | x_0 = \varphi_i, y(0) = i,\ y(t) = j), \tag{9}$$

откуда видно, что $\psi_j(\theta) \to \varphi_j(\theta)$ равномерно при $t \to 0$, т.к. все реализации процесса $x(t)$ с начальными условиями $x_0 = \varphi_i$ равномерно ограничены в окрестности точки $t = 0$. Кроме того, поскольку $x_t(\theta) = x_0(\theta + t)$

при $\theta+t<0$ и $x_t(0)=x_0(0)+tF(i,x_0)+o(t)$ при $y(0)=i$, то из равенства (9) вытекает

$$(\mathcal{L}\bar{\varphi})_j(0)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[\psi_j(0)-\varphi_j(0)]=F(j,\varphi_j)+\sum_{i=1}^{N}\lambda_{ij}\varphi_i(0),$$

а при $-\tau\le\theta<0$

$$(\mathcal{L}\bar{\varphi})_j(\theta)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[\psi_j(\theta)-\varphi_j(\theta)]=\varphi_j'(\theta)+\sum_{i=1}^{N}\lambda_{ij}\varphi_i(\theta).$$

Следовательно, выполнено равенство (8), и теорема доказана.

Т е о р е м а 2. При $t\geq\tau$ операторы $\Gamma(t)$ вполне непрерывны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу теоремы Арцела достаточно доказать равностепенную непрерывность семейства функций $\Gamma(\tau)B$, где $B=\{\bar{\varphi}\in C^N: \|\bar{\varphi}\|\le 1\}$. Для $\bar{\varphi}\in B$ положим $\Gamma(\tau)\bar{\varphi}=(\psi_1,\dots\psi_N)$. Из (2) следует

$$|\psi_j(\theta_1)-\psi_j(\theta_2)|\le\sum_{i=1}^{N}p_{ij}(\tau)E(|x_\tau(\theta_1)-x_\tau(\theta_2)|\,|\,x_0=\varphi_i,y(0)=i,y(\tau)=j).$$

Но

$$|x_\tau(\theta_1)-x_\tau(\theta_2)|=|\int_{\theta_1}^{\theta_2}F(y(s),x_s)ds|\le K_1|\theta_1-\theta_2|,$$

где $K_1=\sup\{|F(i,x_s)|: i\in\bar{N},\ \|x_0\|\le 1\}$. Следовательно, $|\psi_j(\theta_1)-\psi_j(\theta_2)|\le NK_1|\theta_1-\theta_2|$, ч.т.д.

Свойство экспоненциальной устойчивости в среднем уравнения (I) можно выразить с помощью полугруппы $\Gamma(t)$.

О п р е д е л е н и е. Полугруппа операторов $\Gamma(t)$ называется экспоненциально устойчивой, если существуют такие $L>0$, $\gamma>0$, что при всех $t\geq 0$

$$\|\Gamma(t)\|\le Le^{-\gamma t}. \tag{I0}$$

Т е о р е м а 3. Уравнение (I) экспоненциально устойчиво в среднем тогда и только тогда, когда полугруппа операторов $\Gamma(t)$ экспоненциально устойчива.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $\nu=(\nu_1,\dots,\nu_N)\in(C^*)^N$, $\Gamma^*(t)\nu=(\mu_1,\dots,\mu_N)$. Из неравенства (2) вытекает $|Ex_t(\theta)|\le Ke^{-\gamma(t-\tau)}\|x_0\|$. Используя (4), получим при всех $i \in \bar{N}$ $|\langle \varphi, \mu_i \rangle| = |E\langle x_t, \nu_{y(t)} \rangle| \leq K e^{-\gamma(t-\tau)} \|\varphi\| \times$ $\times \|\nu_{y(t)}\|$. Следовательно, $\|\Gamma^*(t)\| \leq K N e^{-\gamma(t-\tau)}$.

Обратно, пусть выполнено неравенство (10). Зафиксируем начальное состояние процесса $y(0) = j \in \bar{N}$ и вектор-функцию $x_0 = \varphi_0 = (\varphi^1, \ldots, \varphi^n) \in C$. Составим набор вектор-функций $\bar{\varphi} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_N) \in C^N$, в котором $\varphi_j = \varphi_0$, а остальные φ_i $(i \neq j)$ равны нулю. Пусть $\bar{\nu}^\kappa = (\delta_0^\kappa, \ldots, \delta_0^\kappa) \in (C^*)^N$, где $\langle \psi, \delta_0^\kappa \rangle = \psi^\kappa(0)$ для любой вектор-функции $\psi = (\psi^1, \ldots, \psi^n) \in C$.

Тогда при каждом κ $\langle \Gamma(t)\bar{\varphi}, \nu^\kappa \rangle = \sum_{i=1}^{N} \langle \varphi_i, [\Gamma^*(t)\nu^\kappa]_i \rangle =$ $= E(\langle x_t, \delta_0^\kappa \rangle \mid x_0 = \varphi_0, y(0) = j) = E(x^\kappa(t) \mid x_0 = \varphi_0, y(0) = j)$, где $x(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t))$. Из неравенства (10) получим $|Ex^\kappa(t)| \leq \|\Gamma(t)\| \|\bar{\varphi}\| \|\nu^\kappa\| \leq L N e^{-\gamma t} \|\varphi_0\|$. Следовательно, $|Ex(t)| \leq L N^2 e^{-\gamma t} \|\varphi_0\|$, ч.т.д.

Из доказанных теорем вытекает следующий критерий устойчивости.

Т е о р е м а 4. Уравнение (1) экспоненциально устойчиво в среднем тогда и только тогда, когда у оператора $\mathcal{L}$ нет собственных значений с неотрицательной вещественной частью.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть у оператора $\mathcal{L}$ нет собственных значений λ с $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$. Тогда у оператора $\Gamma(\tau)$ нет собственных значений $\varkappa$ с $|\varkappa| \geq 1$ [4, теорема 16.7.2]. По теореме 2, спектральный радиус $\rho(\Gamma(\tau)) < 1$. Но

$$\rho(\Gamma(\tau)) = \lim_{m \to \infty} \|\Gamma(\tau m)\|^{1/m} = e^{\omega_0 \tau},$$

где $\omega_0 = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \ln \|\Gamma(t)\|$ – тип полугруппы $\Gamma(t)$. Следовательно, $\omega_0 < 0$, что равносильно экспоненциальной устойчивости полугруппы $\Gamma(t)$. По теореме 3, уравнение (1) экспоненциально устойчиво в среднем.

Рассуждая в обратном порядке, завершаем доказательство.

П р и м е р. Рассмотрим скалярное уравнение с запаздыванием

$$\dot{x}(t) = [1 - y(t)] a x(t) + y(t) b x(t-1), \qquad (11)$$

где $y(t)$ $(t \geq 0)$ - однородный марковский процесс с множеством состояний $\bar{N} = \{0, 1\}$ и вероятностями перехода

$$P(y(t+s)=1 \mid y(t)=0) = \lambda s + o(s),$$
$$P(y(t+s)=0 \mid y(t)=1) = æ s + o(s),$$

Заметим, что при $a = b$ уравнение (II) можно рассматривать как уравнение со случайным запаздыванием.

В нашем случае $C = C([-1,0] \to \mathbb{R})$, $F(0,\varphi) = a\varphi(0)$, $F(1,\varphi) = b\varphi(-1)$. По теореме I, оператор $\mathcal{L}$ имеет вид

$$\mathcal{L}\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\varphi_1' - \lambda\varphi_1 + æ\varphi_2\\ \varphi_2' + \lambda\varphi_1 - æ\varphi_2\end{pmatrix} \tag{I2}$$

и определен на таких парах непрерывно дифференцируемых функций $\bar{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2)^T$, что

$$\varphi_1'(0) = a\varphi_1(0), \quad \varphi_2'(0) = b\varphi_2(-1). \tag{I3}$$

Для исследования устойчивости в среднем уравнения (II) воспользуемся теоремой 4. Уравнение $\mathcal{L}\bar{\varphi} = \varkappa\bar{\varphi}$ с начальными условиями (I3) имеет нетривиальное решение лишь в том случае, когда

$$æ(\varkappa - a)(be^{-\lambda - æ - \varkappa} - \lambda - æ - \varkappa) - (\lambda + æ + \varkappa - a)(\varkappa - be^{-\varkappa}) = 0 \tag{I4}$$

Методом $\mathcal{D}$-разбиений [5] можно построить точную область экспоненциальной устойчивости в среднем уравнения (II) в пространстве параметров a и b (рис.I). Она ограничена сверху и справа гиперболой G:

$$b = \frac{æ(\lambda + æ)a}{a(æe^{-\lambda - æ} + \lambda) - \lambda(\lambda + æ)},$$

а снизу - кривой K, которая задается системой уравнений

$$\begin{cases} A(\omega)a^2 + B(\omega)a + C(\omega) = 0,\\ b(æe^{-\lambda - æ} + \lambda)\omega = (\lambda + æ)\omega\cos\omega - \omega^2\cos\omega - a(æ\sin\omega + \omega\cos\omega), \end{cases}$$

где $A(\omega)=(\varkappa e^{-\lambda-\varkappa}+\lambda)(\varkappa\sin\omega+\omega\cos\omega)$,
$B(\omega)=-\lambda(\varkappa+\lambda)(\varkappa\sin\omega+\omega\cos\omega)-\lambda\omega(\varkappa e^{-\lambda-\varkappa}+\lambda)\cos\omega$,
$C(\omega)=(\varkappa+\lambda)\omega^2\varkappa e^{-\lambda-\varkappa}\sin\omega+[(\varkappa+\lambda)^2+\varkappa e^{-\lambda-\varkappa}+\lambda]\lambda\omega\cos\omega$.

При $\varkappa\to 0,\ \lambda\to 0$ область устойчивости сужается, превращаясь в прямоугольник $]-\infty,\lambda[\times]-\frac{\pi}{2},0[$ при $\varkappa=0$ и в прямоугольник $]-\infty,0[\times]\varkappa e^{\varkappa}/\cos\omega,\varkappa e^{\varkappa}[$ при $\lambda=0$, где $\omega\in[\frac{\pi}{2},\pi[$ – решение уравнения $\omega\,\mathrm{ctg}\,\omega=-\varkappa$.

Таким образом, увеличение вероятностей перехода оказывает стабилизирующее в среднем влияние на систему.

Автор выражает благодарность Е.Ф.Царькову за постановку задачи.

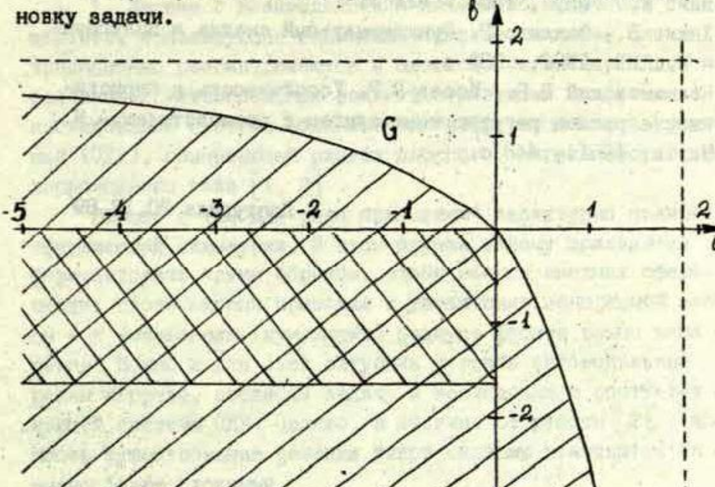

Рис.I. Область устойчивости в среднем уравнения (II) при $\lambda=\varkappa=1$. Дважды заштрихована область устойчивости при $\lambda=\varkappa=0$.

Литература

I. Лидский Э.А. Об устойчивости движений системы со случайными запаздываниями //Дифф. уравнения.-1965.-Т.I.-№ I.-С.447-452.

2. Кац И.Я. Об устойчивости по первому приближению систем со случайным запаздыванием//Прикл.мат. и мех. - Т.3I, вып.3.- С.447-452.

3. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений.-М.: Мир, I984.- 42I с.

4. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы.- М.: ИЛ, I962.- 830 с.

5. Колмановский В.Б., Носов В.Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последствием.- М.: Наука, I98I.- 448 с.

Поступила 20.I2.89

УДК 517.927.4

В.В.Гудков, Н.В.Змитренко

АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ В АВТОМОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ О НАГРЕВЕ СФЕРИЧЕСКОЙ МИШЕНИ

I. Задачи о взаимодействии лазерного излучения с веществом, использующие гидродинамическое описание плазмы, традиционно рассматриваются в плоской постановке. Для определенных автомодельных режимов эти задачи сводятся к исследованию системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), описывающей разлет плоского, нагреваемого, теплопроводного газа [I, 2] .

Вместе с тем для ряда приложений характерно наличие сферической симметрии. В этом случае задачу приходится формулировать таким образом, чтобы нагрев внешних сферических слоев мишени приводил к увеличению испаряемой массы и к уменьшению (кумуляции) радиуса фронта волны испарения. Можно и для этой ситуации указать автомодельный режим нагрева, сводящий задачу к исследованию соответствующей системы ОДУ. Однако, в отличие от работы [2] , вопросы существования решения такой системы становятся заметно более сложными.

Ниже выписана система ОДУ, описывающая поведение величин в разреженной нагретой внешней части сферической мишени. При исследовании поставленной автомодельной краевой задачи в первую очередь следует выяснить, есть ли асимптотики у предпологаемых решений задачи, и лишь после этого можно строить утверждения о существовании решения задачи. Цель настоящей работы - построение асимптотик решений автомодельной краевой задачи.

2. Рассмотрим систему ОДУ

$$\begin{cases} N_0\delta + n_0\xi\delta' - 2\delta^2\alpha\lambda\lambda' - \delta^2\lambda^2\alpha' = 0, \\ (n-1)\alpha - n_0\xi\alpha' + \lambda^2\theta\delta' + \lambda^2\delta\theta' = 0, \\ n_0\xi\lambda' - n\lambda - \alpha = 0, \\ \delta\lambda^2\lambda' + 1 = 0, \\ \tau_1\theta + \tau_2\xi\theta' - 2\delta\theta\alpha\lambda\lambda' - \delta\theta\lambda^2\alpha' - 2\omega\lambda\lambda' - \lambda^2\omega' = 0, \\ \omega - æ_0\delta^{k+1}\lambda^2\theta^m\theta' = 0. \end{cases} \tag{I}$$

Здесь неизвестными являются величины: δ - плотность, λ - радиус, α - скорость, $\beta = \delta\theta$ - давление, θ - температура, ω - поток тепла. Автомодельной переменной является величина ξ - масса, изменяющаяся в диапазоне $[0, \xi_0]$, где $0 < \xi_0 < \infty$. Параметры задачи:

$$N_0 = n(N+1) - n_0,\ N = 2,\ n > 0,\ n_0 < 0,\ m > 0,$$

$$\tau_1 = 2\frac{1-n}{\gamma-1},\ \tau_2 = \frac{n_0}{\gamma-1},\ \gamma > 1,\ æ_0 > 0,\ k \geq 0.$$

Решение системы (I) ищем в виде степенных рядов порознь для случаев $\xi \to 0$ и $\xi \to \xi_0$. На концах интервала $[0, \xi_0]$ решение должно удовлетворять определенным условиям, вытекающим из физики явления. Получено 4 вида асимптотик решений системы (I).

3. Асимптотики решений системы (I) при $\xi \to 0$ будем искать в виде:

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_0\xi^a + \lambda_1\xi^{a_1} + \dots, && a < 0,\ \lambda_0 > 0, \\ \alpha &= \alpha_0\xi^b + \alpha_1\xi^{b_1} + \dots, && b < 0,\ \alpha_0 > 0, \\ \delta &= \delta_0\xi^c + \delta_1\xi^{c_1} + \dots, && c > 0,\ \delta_0 > 0, \\ \omega &= \omega_0\xi^d + \omega_1\xi^{d_1} + \dots, && d > 0,\ \omega_0 < 0, \\ \theta &= \theta_0\xi^l + \theta_1\xi^{l_1} + \dots, && l \leq 0,\ \theta_0 > 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Условия на главные показатели и коэффициенты следуют из краевых условий на функции λ, α, δ, ω, относительно которых предполагается, что при $\xi \to 0$

$$\lambda \to +\infty,\ \alpha \to +\infty,\ \delta \to 0,\ \omega \to -0,$$
$$\theta \to \theta_0\ (-\infty < \theta_0 < \infty)\ \text{либо}\ \theta \to +\infty.$$

Дополнительно из физических соображений следует, что при $\xi \to 0$

$$\beta = \delta\theta \to 0,\ \lambda^2\omega \to -1. \tag{3}$$

Выпишем соответствующие соотношениям (2) выражения для производных:

$$\begin{aligned}
\lambda' &= a\lambda_0\xi^{a-1} + a_1\lambda_1\xi^{a_1-1} + \ldots, && a < a_1 < \ldots\\
\alpha' &= b\alpha_0\xi^{b-1} + b_1\alpha_1\xi^{b_1-1} + \ldots, && b < b_1 < \ldots\\
\delta' &= c\delta_0\xi^{c-1} + c_1\delta_1\xi^{c_1-1} + \ldots, && c < c_1 < \ldots\\
\omega' &= d\omega_0\xi^{d-1} + d_1\omega_1\xi^{d_1-1} + \ldots, && d < d_1 < \ldots\\
\theta' &= e\theta_0\xi^{e-1} + e_1\theta_1\xi^{e_1-1} + \ldots, && e < e_1 < \ldots
\end{aligned} \tag{4}$$

После подстановки выражений (2) и (4) в систему (I) и приравнивания показателей при одинаковых степенях аргумента ξ найдем значения коэффициентов и показателей разложений (2). Начнем с более простых уравнений. Уравнение 4- е в (I) после подстановок превращается в тождество:

$$a\lambda_0^3\delta_0\xi^{3a+c-1} + a_1\lambda_1\lambda_0^2\delta_0\xi^{2a+c+a_1-1} +$$
$$+ a\lambda_0^3\delta_1\xi^{3a+c_1-1} + 2a\lambda_0^2\lambda_1\delta_0\xi^{2a+a_1+c-1} + \ldots + 1 = 0$$

Рассмотрение коэффициента и показателя при нулевой степени позволяет определить

$$c = 1 - 3a,\quad \delta_0 = -\frac{1}{a\lambda_0^3} \tag{5}$$

Рассмотрение следующей степени уже допускает варианты: либо $a_1 = -2a$, либо $a_1 \neq -2a$, но в обоих случаях $a_1 > 0$.

Уравнение 3-е принимает вид

$$n_0 a \lambda_0 \xi^{a} + n_0 a_1 \lambda_1 \xi^{a_1} - n\lambda_0 \xi^{a} -$$

$$- n\lambda_1 \xi^{a_1} - \alpha_0 \xi^{b} - \alpha_1 \xi^{b_1} - \ldots = 0.$$

Полагая $a = b$, находим

$$a = b, \quad \alpha_0 = \lambda_0 (n_0 a - n), \quad a < \frac{n}{n_0}. \qquad (6)$$

Если же допустить, что $a \neq b$, то должно быть $a < b$, $a_1 = b < 0$. Но это противоречит полученному выше неравенству $a_1 > 0$. Следовательно, возможно лишь соотношение (6).

Уравнение I- е принимает вид

$$N_0 \delta_0 \xi^{c} + N_0 \delta_1 \xi^{c_1} + n_0 c \delta_0 \xi^{c} + n_0 c_1 \delta_1 \xi^{c_1} -$$

$$- 2a \lambda_0^2 \alpha_0 \delta_0^2 \xi^{2a-1+b+2a} - b\alpha_0 \delta_0^2 \lambda_0^2 \xi^{2a+2c+b-1} + \ldots = 0$$

Здесь возможен один вариант соотношений, согласующийся с уже полученными в (5) и (6). Это объясняется тем, что одно из 3-х рассмотренных уравнений является следствием 2-х других.

Из 2- го уравнения находим

$$(n-1)\alpha_0 \xi^{b} + (n-1)\alpha_1 \xi^{b_1} - b n_0 \alpha_0 \xi^{b} - b_1 n_0 \alpha_1 \xi^{b_1} +$$

$$+ (c+e)\delta_0 \theta_0 \lambda_0^2 \xi^{2a+e+c-1} + \ldots = 0.$$

Возможны два варианта: первый, когда

$$e=2a,\ c>-e,\ (n-1-n_0 b)\alpha_0+(c+e)\delta_0\theta_0\lambda_0^2=0, \qquad (7)$$

и второй, когда

$$e<2a,\ c=-e,\ e_1=2a. \qquad (8)$$

Из 6-го уравнения находим

$$d=c(k+1)+2a+e(m+1)-1,\ \omega_0=e\varkappa_0\delta_0^{k+1}\theta_0^{m+1}\lambda_0^2. \qquad (9)$$

Наконец, 5- е уравнений позволяет составить тождество

$$\tau_1\theta_0\xi^{e}+\tau_1\theta_1\xi^{e_1}+\tau_2 e\theta_0\xi^{e}+\tau_2 e_1\theta_1\xi^{e_1}-$$

$$-(2a+b)\alpha_0\delta_0\theta_0\lambda_0^2\xi^{2a+b-1+c+e}-(2a+d)\omega_0\lambda_0^2\xi^{2a+d-1}-\ldots=0.$$

Учитывая равентство $2a+b+c-1=0$, здесь возможны 2 варианта: первый, когда $2a+d-1<e$, $(2a+d)\omega_0\lambda_0^2=0$, что выполняется лишь при

$$d=-2a,\quad e>-1, \qquad (10)$$

и второй варианта, когда

$$2a+d-1=e,$$

$$(\tau_1+2a\tau_2)\theta_0-3a\alpha_0\delta_0\theta_0\lambda_0^2-(2a+d)\omega_0\lambda_0^2=0. \qquad (11)$$

Если подставить величину $c=-e$ из (8) в соотношения (10), то окажется, что $c<1$, что противоречит неравенству $1-3a>1$ из (5) при $a<0$. Если же величину $e=-c$ представить в (11), то окажется $d=a<0$, что противоречит первоначальному предположению в (2). Следовательно, 2-е уравнение допускает лишь один вариант (7).

Воспользуемся дополнительными условиями (3), чтобы выбрать реализуемый вариант в 5-м уравнении. Условие $\delta\theta\to 0$ при $\xi\to 0$ удовлетворяется, т.к. $c+e>0$. Условие $\lambda^2\omega\to -1$ при $\xi\to 0$ удовлетворяется при $2a+d=0$, т.е. при $d=-2a$. Непосредственно видно, что это согласуется с первым вариантом (10), причем, учитывая $e=2a$ в (7), оказывается $2a>-1$. Что касается второго варианта (11), то там при $d=2a$ оказывается

$$\tau_1+2a\tau_2+3|a|\alpha_0\delta_0\lambda_0^2=0,$$

но это невозможно, т.к. первое слагаемое

$$\tau_1+2a\tau_2=\frac{2(1-n+n_0a)}{\gamma-1}>0$$

и второе слагаемое тоже положительно. Кстати, именно по этой причине невозможен третий вариант, когда $2a+d-1>e$.

Таким образом, при $\xi\to 0$ возможен лишь один вариант асимптотики (2), коэффициенты и показатели главных членов которой определяются из соотношений (5),(6),(7),(9),(10). Выпишем соответствующие выражения:

$$b=a,\quad c=1-3a,\quad d=-2a,\quad e=2a, \tag{12}$$

$$\alpha_0=\lambda_0(n_0a-n),\quad \theta_0=-a\lambda_0^2\frac{(n_0a-n)(n_0a-n+1)}{1-a},$$
$$\delta_0=-\frac{1}{a\lambda_0^3},\quad \omega_0=2a\varkappa_0\lambda_0^2\delta_0^{k+1}\theta_0^{m+1}. \tag{13}$$

Дополнительное условие (3) в форме $\lambda_0^2\omega_0=-1$ позволяет определить коэффициент λ_0, именно

$$\lambda_0^{3k-2m-3} = 2\ae_0(-a)^{m+1-k}(1-a)^{-m-1}(n_0a-n)^{m+1}(n_0a+1-n)^{m+1}. \qquad (14)$$

Для показателя d есть 2 формулы в (9) и (10), что позволяет определить величину

$$a = \frac{-k}{3+2m-3k}. \qquad (15)$$

Отсюда и из (6) и (10) следуют ограничения на параметры

$$-\frac{1}{2} < \frac{-k}{3+2m-3k} < \frac{n}{n_0}, \quad k>0, \quad m > \frac{3}{2}(k-1). \qquad (16)$$

Формулы (12)-(16) обеспечивают существование асимптотики в нуле решений поставленной краевой задачи.

4. Асимптотики решений системы (I) при $\xi \to \xi_0$ будем искать в виде:

$$\begin{aligned} &\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 x^{a_1} + \ldots, \quad a_1 > 0,\ \lambda_0 > 0, \\ &\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 x^{b_1} + \ldots, \quad b_1 > 0,\ \alpha_0 < 0, \\ &\delta = \delta_0 x^{c} + \delta_1 x^{c_1} + \ldots, \quad c < 0,\ \delta_0 > 0, \\ &\omega = \omega_0 x^{d} + \omega_1 x^{d_1} + \ldots, \quad d > 0,\ \omega_0 < 0, \\ &\theta = \theta_0 x^{e} + \theta_1 x^{e_1} + \ldots, \quad e > 0,\ \theta_0 > 0 \end{aligned} \qquad (17)$$

В этих разложениях $x = \xi_0 - \xi > 0$, показатели и коэффициенты естественно не те, что в предыдущем пункте, хотя мы используем одинаковые обозначения. Условия на показатели и коэффициенты в (17) следуют из краевых условий на функции λ, α, δ, ω, θ, относительно которых предполагается, что при $\xi \to \xi_0$, $\lambda \to \lambda_0 > 0$, $\alpha \to \alpha_0 < 0$, $\delta \to +\infty$, $\theta \to 0$. Дополнительно из физических соображений следует, что при $\xi \to \xi_0$ $\beta = \delta\theta \to \beta_0 < +\infty$.

Выпишем разложения для производных, учитывая, что

$$
\begin{aligned}
&x' = -1\\
&\lambda' = -a_1\lambda_1 x^{a_1-1} - a_2\lambda_2 x^{a_2-1} - \ldots\\
&\alpha' = -b_1\alpha_1 x^{b_1-1} - b_2\alpha_2 x^{b_2-1} - \ldots\\
&\delta' = -c\delta_0 x^{c-1} - c_1\delta_1 x^{c_1-1} - \ldots\\
&\omega' = -d\omega_0 x^{d-1} - d_1\omega_1 x^{d_1-1} - \ldots\\
&\theta' = -e\theta_0 x^{e-1} - e_1\theta_1 x^{e_1-1} - \ldots
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Подставляя выражения (17) и (18) в систему (1), будем последовательно от уравнения к уравнению определять главные показатели и коэффициенты. Начнем с 4-го уравнения

$$
-a_1\lambda_1\lambda_0^2\delta_0 x^{c+a_1-1} - 2a_1\lambda_1^2\lambda_0\delta_0 x^{c+2a_1-1} - \\
-a_1\lambda_1\lambda_0^2\delta_1 x^{a_1-1+c_1} - \ldots + 1 = 0,
$$

отсюда находим

$$
\begin{aligned}
&a_1 = 1-c, \quad \lambda_1 = \frac{1}{a_1\delta_0\lambda_0^2} > 0,\\
&c_1 = 1, \quad \delta_1 = -\frac{2}{a_1\lambda_0^3} < 0.
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Из 3-го уравнения находим

$$
-n_0 a_1\lambda_1\xi x^{a_1-1} - n_0 a_2\lambda_2\xi x^{a_2-1} - n\lambda_0 - \\
-n\lambda_1 x^{a_1} - \alpha_0 - \alpha_1 x^{b_1} - \alpha_2 x^{b_2} - \ldots = 0.
$$

В пределе, учитывая, что $\xi \to \xi_0$, отсюда следует

$$
\begin{aligned}
&b_1 = a_1 - 1, \quad \alpha_0 = -n\lambda_0 < 0, \quad \alpha_1 = \frac{-n_0\xi_0}{\delta_0\lambda_0^2} > 0,\\
&b_2 = a_2 - 1 = a_1, \quad \alpha_2 = -n_0 a_2\lambda_2\xi_0 - n\lambda_1.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Отметим, что случай $a_1=1$, согласно (19), приводит к $c=0$, что противоречит первоначальному условию (17).

Из 1-го уравнения находим

$$N_0\delta_0 x^c - n_0\xi c\delta_0 x^{c-1} + 2a_1\lambda_1\alpha_0\lambda_0\delta_0^2 x^{2c+a_1-1} + b_1\alpha_1\delta_0^2\lambda_0^2 x^{2c+b_1-1} + b_2\alpha_2\delta_0^2\lambda_0^2 x^{2c+b_2-1} + \ldots = 0.$$

Учитывая соотношения для b_1 и b_2 в (20), отметим, что сумма коэффициентов при степенях с показателями $c-1$ и $2c+b_1-1$ тождественно равна нулю, причем $c=-b_1$. Суммируя коэффициенты при одинаковых степенях с показателями c, $2c+a_1-1$, $2c+b_2-1$, найдем коэффициент α_2, который совместно с формулой из (20) позволяет определить

$$\alpha_2=(n_0-n)\lambda_1<0, \quad \lambda_2=\frac{-\lambda_1}{a_2\xi_0}<0. \qquad (21)$$

Из 6-го уравнения находим

$$d=c(k+1)+e(m+1)-1, \quad \omega_0=-e\text{æ}_0\delta_0^{k+1}\theta_0^{m+1}\lambda_0^2. \qquad (22)$$

Уравнение 5-е после подстановок принимает вид:

$$\tau_1\theta_0 x^e + \tau_1\theta_1 x^{e_1} - \tau_2\xi e\theta_0 x^{e-1} - \tau_2\xi e_1\theta_1 x^{e_1-1} + 2a_1\lambda_1\alpha_0\lambda_0\delta_0\theta_0 x^{c+e+a_1-1} + b_1\alpha_1\lambda_0^2\delta_0\theta_0 x^{c+e+b_1-1} + b_1\alpha_1\lambda_0^2\delta_0\theta_1 x^{c+e_1+b_1-1} + b_2\alpha_2\lambda_0^2\delta_0\theta_0 x^{c+e+b_2-1} + 2a_1\lambda_1\lambda_0\omega_0 x^{d+a_1-1} + d\omega_0\lambda_0^2 x^{d-1} + 2d\omega_0\lambda_0\lambda_1 x^{a_1+d-1} + \ldots = 0.$$

Из сравнения показателей и коэффициентов при соответствующих степенях следует

$$d=e, \quad \theta_0=\frac{-d\omega_0\lambda_0^2}{b_1\alpha_1\delta_0\lambda_0^2-\tau_2\xi_0 e}>0. \qquad (23)$$

Следующий шаг сравнения дает возможность определить

$$e_1 = e+1, \qquad d_1 = d+1 \tag{24}$$

и найти формулу, связывающую коэффициенты θ_1 и ω_1. Мы не приводим эту формулу из-за ее громоздкости.

Наконец, из 2-го уравнения находим

$$(n-1)\alpha_0 + (n-1)\alpha_1 x^{b_1} + n_0\xi b_1\alpha_1 x^{b_1-1} + n_0\xi b_2\alpha_2 x^{b_2-1} -$$

$$-(c+e)\delta_0\theta_0\lambda_0^2 x^{c+e-1} - (c+e_1)\delta_0\lambda_0^2\theta_1 x^{c+e_1-1} -$$

$$-(c_1+e)\delta_1\theta_0\lambda_0^2 x^{c_1+e-1} - 2(c+e)\lambda_0\lambda_1\delta_0\theta_0 x^{c+a_1+e-1} - \ldots = 0.$$

Здесь возможны 4 варианта.

I вариант: $c+e-1>0$, $b_1=1$.

В этом случае, используя уже известные соотношения (I9) и (20) для показателей, найдем

$$b_1 = c_1 = 1, \quad b_2 = a_4 = 2, \quad c = -1, \quad a_2 = 3. \tag{25}$$

Коэффициент при нулевой степени позволяет найти

$$\lambda_0^3 = \frac{n_0^2\xi_0^2}{\delta_0 n(1-n)} > 0, \quad n<1. \tag{26}$$

Коэффициент при первой степени позволяет найти

$$\theta_0 = \frac{n_0\xi_0(1+n_0-2n)}{2\delta_0\lambda_0^2} > 0, \quad n > \frac{1+n_0}{2}, \tag{27}$$

при этом

$$c+e=2, \quad e=3, \quad d=3, \quad \kappa = 3m-2. \tag{28}$$

Кроме того, из формул (23) и (27) для θ_0 можно определить коэффициент

$$\delta_0 = \frac{g(\gamma-1)}{2m(\gamma+2)}(-n_0\xi_0)^{m-2}(2n-n_0-1)^m\lambda_0^{4-2m}. \tag{29}$$

II вариант: $c+e-1=0$, $b_1>1$.
В этом случае необходимо $b_1=c+e_1$, а т.к. $e_1=e+1$, то справедливы равенства

$$b_1=2,\ e=d=a_1=3,\ c=-2,\ \kappa=\frac{3}{2}(m-1). \tag{30}$$

Далее, из коэффициента при нулевой степени находим

$$\theta_0=\frac{n(1-n)}{\delta_0\lambda_0}>0,\quad n<1. \tag{31}$$

Эта формула совместно с формулой (23) дает возможность определить

$$\delta_0^{m-\kappa-1}=\frac{9\varkappa(\gamma-1)n^m(1-n)^m}{(2\gamma+1)(-n_0\xi_0)}\lambda_0^{n-m}>0. \tag{32}$$

Из коэффициента при нулевой степени находим

$$\theta_1=\frac{-n_0^2\xi_0^2}{\delta_0^2\lambda_0^4}<0. \tag{33}$$

III вариант: $c+e-1=0$, $b_1=1$.
В этом случае находим показатели

$$b_1=1,\ a_1=e=d=2,\ c=-1,\ \kappa=2(m-1) \tag{34}$$

и определяем значения коэффициентов при $n<1$

$$\theta_0=\frac{n(1-n)\delta_0\lambda_0^3-n_0^2\xi_0^2}{\delta_0^2\lambda_0^4},\quad \lambda_0^3>\frac{n_0^2\xi_0^2}{\delta_0 n(1-n)}. \tag{35}$$

Эта формула совместо с формулой (23) позволяет определить коэффициент δ_0, но мы не приводим это выражение из-за его громоздкости.

IV вариант: $c+e-1<0$, $b_1=1$.
Простое сравнение показателей и коэффициентов при $c+e-1<0$ показывает, что невозможны случаи $b_1<1$ или $b_1>1$. Из обращения в ноль коэффициента при главной степени следует $c+e=0$, благодаря чему легко находят-

ся показатели

$$b_1=1,\ b_2=a_1=2,\ c=-1,\ e=d=1,\ \kappa=m-2. \qquad (36)$$

Коэффициенты δ_0 и λ_0 в данном случае остаются неопределенными, коэффициент θ_1 определяется следующим образом

$$\theta_1=\frac{n(1-n)\delta_0\lambda_0^3-n_0^2\xi_0^2}{\delta_0\lambda_0^2}. \qquad (37)$$

При этом знак величины θ_1 совпадает со знаком числителя выражения (37). В частности, при $n>1$ необходимо $\theta_1<0$.

Дополнительное условие $\delta\theta\to\beta_0$ при $\xi\to\xi_0$ выполняется во всех 4-х вариантах, причем в первых 3-х вариантах $\delta\theta\to 0$ при $\xi\to\xi_0$, т.к. $c+e>0$, а в 4-м варианте $\beta_0=\delta_0\theta_0>0$, т.к. $c+e=0$.

Таким образом при $\xi\to\xi_0$ существуют 4 варианта асимптотик решений (17). Общими для всех 4-х асимптотик являются формулы для показателей

$$a_2=a_1+1,\ b_2=b_1+1,\ c_1=1,\ d_1=d+1,\ e_1=e+1 \qquad (38)$$

и формулы для коэффициентов

$$\alpha_0=-n\lambda_0,\ \alpha_1=\frac{-n_0\xi_0}{\delta_0\lambda_0^2},\ \lambda_1=\frac{1}{a_1\delta_0\lambda_0^2},\ \delta_1=\frac{-2}{a_1\lambda_0^3}, \qquad (39)$$

$$\omega_0=-e\varkappa_0\delta_0^{\kappa+1}\theta_0^{m+1}\lambda_0^2,\qquad \theta_0=\frac{d\omega_0\lambda_0^2}{b_1n_0\xi_0+\tau_2\xi_0e}.$$

Коэффициенты λ_0 и δ_0 могут быть определены в некоторых вариантах асимптотик.

Приведем конкретные значения главных показателей в каждом из 4-х вариантов асимптотик

I) $a_1=2,\ b_1=1,\ c=-1,\ d=e=3.$

Коэффициенты λ_0 и δ_0 определяются по формулам

(26) и (29). Условия на параметры

$$\kappa = 3m-2, \quad 1 > n > \frac{1+n_0}{2}. \tag{40}$$

2) $a_1 = 3,\ b_1 = 2,\ c = -2,\ d = e = 3.$

Коэффициент δ_0 определяется по формуле (32). Условия на параметры

$$\kappa = \frac{3}{2}(m-1), \quad n < 1. \tag{4I}$$

3) $a_1 = 2,\ b_1 = 1,\ c = -1,\ d = e = 2.$

В этом варианте коэффициент δ_0 может быть вычислен, а условия на параметры те же, что и в (4I).

4) $a_1 = 2,\ b_1 = 1,\ c = -1,\ d = e = 1.$

Коэффициенты λ_0 и δ_0 не определяются, условие на параметры $\kappa = m-2$.

Сравнение условий на параметры κ , m , n , n_0 в асимптотиках при $\xi \to 0$ и $\xi \to \xi_0$ показывает, что они не противоречат друг другу. Следовательно искомая задача допускает 4 вида асимптотик решений.

Литература

I. Волосевич П.П., Курдюмов С.П., Леванов Е.И. Различные режимы теплового нагрева при взаимодействии мощных потоков излучения с веществом// Журнал прикладной механики и технической физики. - I972. - № 5. - С. 4I-48.
2. Немчинов И.В. О движении плоского слоя нагреваемого газа и его асимптотиках// Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. - М.: Наука, I972. - С. 337-369.

Поступила 20.09.89.

УДК 517.95

А.Б.Цибулис

НЕ ВСЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ С РАЗРЫВНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ ДОСТИЖИМЫ РЕШЕНИЯМИ СГЛАЖЕННЫХ ЗАДАЧ

Как в теоретических, так и численных исследованиях уравнений с РН (разрывными нелинейностями) широко применяется метод сглаживания (аппроксимации) РН. В случаях, когда решение исходной задачи не единственно, естественно возникает вопрос: все ли решения могут быть получены как предел последовательности решений сглаженных задач ?

В иной ситуации аналогичный вопрос (как открытый) был поставлен Эллиотом [5] , а именно, когда краевая задача для нелинейного уравнения диффузии, имеющая бесконечно много решений, аппроксимируется конечноразностной задачей.

В этой работе, как и в [3] , основным объектом исследования является уравнение $(u'+ æ(u))'=0$, под знаком производной содержащее РН простейшего вида - функцию Хевисайда. В [3] для краевой задачи Дирихле, имеющей континуум решений, доказано, что любое из них достижимо (как предел в смысле равномерной сходимости) решениями подходящим образом сглаженных задач. Однако, для смешанной краевой задачи ответ на поставленный вопрос, как показывается ниже, вообще говоря, отрицательный.

Пусть $\Omega=(a,b)$, $W=\{æ\in W_2^1(\Omega): æ(a)=0\}$

$$æ(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 1, & t>0,\end{cases}$$

и относительно $u \in W$ рассматривается ВР (вариационное равенство)

$$\int_{\Omega} (u_x + æ(u))\varphi_x dx + (1 - æ(u(b)))\varphi(b) = 0 \quad \forall \varphi \in W. \qquad (1)$$

Такое ВР возникает при определении обобщенного решения для формальной краевой задачи

$$u'' + (æ(u))' = 0,$$
$$u(0) = 0, \quad u'(b) = -1.$$

Через $R(æ; v)$ обозначим класс всех измеримых функций $æ^*$ таких, что

$$æ^*(x) \begin{cases} = 0, & v(x) < 0, \\ \in [0,1], & v(x) = 0, \\ = 1, & v(x) > 0, \end{cases}$$

и всюду в дальнейшем разрывные функции будем понимать в смысле реализаций, т.е. как элементы соответствующего класса R.

Определение 1. Функция $u \in W$ называется решением ВР (1), если найдется функция $æ^*$ из $R(æ; u)$ такая, что

$$\int_{\Omega} (u_x + æ^*(x))\varphi_x + (1 - æ^*(b))\varphi(b) = 0 \quad \forall \varphi \in W. \qquad (2)$$

Примечание 1. Такое определение не следует считать искусственным. В литературе решения задач с фазовыми переходами (когда возникают так называемые двухфазные зоны) часто определяются в терминах многозначных операторов (максимально монотонных графов), см., например, [6]. В нашем случае функция $æ^*$ в этой терминологии является ничем иным, как сечением соответствующего многозначного оператора.

Определение 2. Последовательность непрерывных функций $æ^k : \Omega \to [0,1]$, имеющих первые обобщенные производные, назовем естественной аппроксимацией разрывной функции $\varkappa$, если для любого $\delta>0$ при всех достаточно больших k выполняются соотношения

$$(i) \quad \varkappa^k(t) = \varkappa(t), \qquad |t| \geq \delta,$$

$$(ii) \quad \frac{d}{dt}\varkappa^k \geq 0, \qquad t \in \mathbb{R}, \quad (k=1,2,\ldots)$$

Примечание 2. Для сглаживания РН в литературе нередко применяется аппроксимация Иосиды, см., например, [6]. В случае функции Хевисайда аппроксимация Иосиды является естественной и при этом совпадает с аппроксимацией, предложенной в [4]. Другие аппроксимации функции Хевисайда, применявшиеся в [3, 7], тоже являются естественными.

Через $u^k \in W$ обозначим решение естественным образом сглаженной (т.е. согласно определению 2) задачи,

$$\int_\Omega (u_x + \varkappa^k(u))\varphi_x + (1-\varkappa^k(u(b)))\varphi(b) = 0 \quad \forall \varphi \in W \tag{3}$$

и изучим вопрос о сходимости $\{u^k\}$, при $k \to \infty$, к решению u исходной задачи. Для этого нам понадобится-

Лемма I. Пусть $u^k \to 0$ в W. Тогда

$$\varkappa^k(u^k) \to 0 \text{ в } L_2, \quad \varkappa^k(u^k(b)) \to 1 \quad (k\to\infty). \tag{4}$$

Доказательство. Так как $0 \leq \varkappa^k(u^k) \leq 1$, то существуют подмножество M натуральных чисел, функция $\varkappa^0 \in L_2(\Omega \to [0,1])$ и число $\bar{\varkappa} \in [0,1]$ такие, что

$$\varkappa^m(u^m) \to \varkappa^0 \text{ в } L_2, \quad \varkappa^m(u^m(b)) \to \bar{\varkappa}, \quad M \ni m \to \infty.$$

В силу слабой сходимости $u^k \to 0$ в W из (3) получаем

$$\int_\Omega \varkappa^0 \varphi_x dx + (1-\bar{\varkappa})\varphi(b) = 0 \quad \forall \varphi \in W. \tag{5}$$

В качестве φ возьмем функцию

$$\varphi(x) = \int_a^x \text{æ}^0(t)\,dt.$$

Тогда,

$$\int_\Omega (\text{æ}^0)^2 dx + (1-\bar{\text{æ}})\,\varphi(b) = 0.$$

Поскольку $\bar{\text{æ}} \in [0,1]$ и $\varphi(b) \geq 0$, то отсюда заключаем, что $\text{æ}^0 \equiv 0$, и следовательно, см. (5), $\bar{\text{æ}} = 1$. Итак, показано, что предельные элементы æ^0, $\bar{\text{æ}}$, соответственно, последовательностей $\{\text{æ}^k(u^k)\}$ и $\{\text{æ}^k(u^k(b))\}$ определяются однозначно, а этого достаточно для сходимостей (4). Лемма доказана.

Л е м м а 2. Пусть $v^r \to v$ в W. Тогда

$$\int_\Omega (\text{æ}^k(v^k) - \text{æ}(v))(v^k - v)_x\,dx \to 0 \quad (k \to \infty) \tag{6}$$

Приведем д о к а з а т е л ь с т в о, которое справедливо также в многомерном случае.

Из последовательностей $\{v^k\}$, $\{\text{æ}^k(v^k)\}$ можно выделить подпоследовательности $\{v^m\}$, $\{\text{æ}^m(v^m)\}$ такие, что $v^m(x) \to v(x)$ почти всюду, а $\text{æ}^m(v^m) \to \text{æ}^0$ в L_2 при $m \to \infty$.

Так как

$$|\text{æ}^k| \leq 1, \quad \|v^k\|_W \leq const, \tag{7}$$

то, благодаря теореме Егорова [I], без ограничения общности можно считать, что $v^m(x) \to v(x)$ $(m \to \infty)$ равномерно.

Положим

$$w^k(x) = \int_0^{v^k(x)} \text{æ}^k(t)\,dt.$$

Тогда $w_x^k = \varkappa^k(v^k)\, v_x^k$ и

$$w^m(x) \xrightarrow[m\to\infty]{} w^0(x) = \int\limits_0^{v(x)} \varkappa(t)\,dt \qquad (8)$$

Последовательность $\{w^k\}$ ограничена в W и, следовательно, слабо компактна в W. Более того, на основе (8) заключаем, что $w^m \to w^0 \ (m\to\infty)$.

В силу сходимости $v^k \to v$ в W достаточно показать, что $I_1^k - I_2^k \to 0$, $k\to\infty$, где

$$I_1^k \equiv \int\limits_\Omega \varkappa^k(v^k)\, v_x^k\, dx, \qquad I_2^k(\Omega) \equiv \int\limits_\Omega \varkappa^k(v^k)\, v_x\, dx.$$

Справедливы следующие соотношения:

$$I_1^m = \int\limits_\Omega w_x^m\, dx \xrightarrow[m\to\infty]{} \int\limits_\Omega w_x^0\, dx \overset{(8)}{=} \int\limits_\Omega \varkappa(v)\, v_x\, dx,$$

$$I_2^m(\Omega_0) = 0, \qquad \Omega_0 \equiv \{x\in\Omega:\ v(x)=0\}.$$

Здесь не существенно, какие значения на множестве Ω_0 принимает функция $\varkappa$, поскольку для почти всех x из этого множества $v_x = 0$ [2].

Далее, область Ω представим в виде

$$\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_\delta \cup \Omega_\delta', \quad \text{где}$$

$$\Omega_\delta \equiv \{x\in\Omega:\ 0<|v(x)|<\delta\}, \quad \Omega_\delta' = \{x\in\Omega:\ |v(x)|\geq\delta\}.$$

Зададим $\varepsilon > 0$ и выберем числа δ, m_0 такими, что

$$|I_2^m(\Omega_\delta)| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad |v^m(x)| \geq \frac{\delta}{2}$$

при $m \geq m_0$, $x \in \Omega$. Возможность такого выбора гарантируется свойствами: $mes\ \Omega_\delta \to 0$ при $\delta \to 0$; $v^m(x) \to v(x)$ равномерно. Теперь, согласно свойству (i), (см. определение 2) получаем $|I_2^m(\Omega'_\delta)| \leq \varepsilon/2$ для всех достаточно больших m. Итак, $I_1^m - I_2^m \to 0$ при $m \to \infty$. Отсюда в силу оценок (7) немедленно вытекает сходимость к нулю при $k \to \infty$ и всей последовательности $\{I_1^k - I_2^k\}$. Лемма доказана.

С л е д с т в и е. Пусть последовательность $\{u^k\}$ решений сглаженных задач сходится слабо в W_2^1 к решению u ВР (I). Тогда u^k сходится к u сильно в W_2^1.

Действительно, в соотношении

$$\int\limits_\Omega (u_x^k - u_x + \varkappa^k(u^k) - \varkappa(u))\varphi_x - (\varkappa^k(u^k(b)) - \\ - \varkappa(u(b)))\varphi(b) = 0 \qquad \forall \varphi \in W,$$

полученной из (I) и (3), возьмем $\varphi = u^k - u$.

Тогда, благодаря лемме 2,

$$\|u^k - u\|_W \leq const \int\limits_\Omega (u_x^k - u_x)^2 dx \to 0, \quad k \to \infty.$$

Т е о р е м а. Ни при какой естественной аппроксимации функции $\varkappa$ решениями сглаженных задач (3) невозможно приблизиться в L_2 к нулевому решению ВР (I).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проведем от противного, т.е. предположим, что $u^k \to 0$ в L_2.

Поскольку в качестве реализации функции $\varkappa$ можно взять следующую функцию

$$\varkappa^*(x) = \begin{cases} 0, & x \in \Omega, \\ 1, & x = b, \end{cases}$$

то $u \equiv 0$ на самом деле является решением ВР (I).

Для решений ВР (3) имеет место априорная оценка

$$\|u^k\|_W \le const,$$

кроме того, $0 \le æ^k(u^k) \le 1$. Поэтому существуют подмножество N_1 натуральных чисел, функция $u^0 \in W$ и число $æ^0 \in [0,1]$ такие, что $æ^m(u^m(b)) \to æ^0$, $u^m \to u^0$ сильно в L_2 и слабо в W при $m \to \infty$, $m \in N_1$. Более того, $u^m \to u^0$ сильно в W : см. следствие. Теперь, учитывая предположение $u^k \to 0$ в L_2 , заключаем, что $u^0 = 0$.

Далее, в качестве φ взяв функции $\varphi^k = æ^k(u^k)(x-a)$, из ВР (3) после несложных преобразований получим

$$\int_\Omega \Big((æ^k)'(u^k_x)^2(x-a) + \frac{æ^2(u^k)}{2}\Big)dx + \big(1 - æ^k(u^k(b))\big)\varphi^k(b) =$$

$$= -\int_\Omega u^k_x\, æ^k(u^k)\,dx - \frac{(b-a)\,æ^2(u^k(b))}{2}.$$

Левая часть этого равенства не меньше нуля, так как $0 \le æ^k \le 1$, $\varphi^k(b) \ge 0$ и $(æ^k)' \ge 0$.

Поэтому для всех k

$$2\int_\Omega u^k_x\, æ^k(u^k)\,dx + (b-a)\,æ^2(u^k(b)) \le 0.$$

Отсюда в силу сильной сходимости $u^m \to 0$ в W имеем

$$\lim_{N_1 \ni m \to \infty} æ^2(u^m(b)) = (æ^0)^2 \le 0,$$

что противоречит утверждению леммы I.

Теорема доказана.

Примечание 2. Решение ВР (I) неединственно. Функция $u = -x$ является его вторым решением, причем это решение может быть получено как предел (например, в норме W) последовательности решений естественным образом сглаженных задач. Не ясно, можно ли построить пример задачи с РН, решение которой единственно, но тем не менее оно недостижимо решениями сглаженных задач.

Литература

I. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. - М.:Наука, 1976. - 542с.
2. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. - М.:Наука,1973. - 576с.
3. Цибулис А.Б. О влиянии способа аппроксимации на качественное поведение решений задач типа Стефана//Латв. мат.ежегодник. - 1988. - Вып.3I. - С.91-94.
4. Цибулис А.Б. О разрешимости эллиптических уравнений с коэффициентами, терпящими разрывы на поверхностях вида $u = g(x)$ //Латв.мат.ежегодник. - 1985. - Вып.29. - С.100-111.
5. Elliott C.M. The Stefan problem with a non-monotone constitutive relation//IMA J.Appl.Math. - 1985. - No.2. - P.257-264.
6. Kenmochi N., Pawlow I. A class of nonlinear elliptic-parabolic equations with time-dependent constraints// Nonlinear Anal.,Theory, Meth. and Appl. - 1986. - 10 - No.11. - P.1181-1202.
7. Nochetto R.H. A class of non-degenerate two-phase Stefan problems in several space variables//Commun. Part. Differ. Equat. - 1987. - 12 - No. 1. - P.21-45 .

Поступила I2.I2.89

УДК 517.927.4

Виржбицкий Я.В.

О РАЗРЕШИМОСТИ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ОГРАНИЧЕНИЕМ

В работе продолжаются исследования [I-3].

Рассматривается обобщенная разрешимость [4] краевой задачи

$$\begin{cases} x'' = f(t, x, x'), & (1) \\ H_0 x = h_0, & (2) \\ H_1 x = h_1, & (3) \\ \alpha \le x \le \beta, & (4) \end{cases}$$

где $t \in I = [a, b]$, $-\infty < a < b < +\infty$, $f \in Car(I \times \mathbb{R}^2; \mathbb{R})$, $H_j \in C(\mathbb{R}^2 \times \bar{\mathbb{R}}^2; \bar{\mathbb{R}})$, $h_j \in \bar{\mathbb{R}}$, $H_j x = H_j(x(a), x(b), x'(a), x'(b))$,
$j = 0, 1$, $\alpha \in AG(I, \mathbb{R})$, $\beta \in BG(I, \mathbb{R})$, $x \in SG(I, \mathbb{R})$,

здесь AG , BG , SG - множества обобщенных нижних и верхних функций и обобщенных решений уравнения (I) (см. [4]).

В работе при предположении обобщенной разрешимости краевой задачи (см. ниже) выявлены свойства функций H_0 и H_1 , где H_0 является фиксированной. Этим доказана необходимость свойств функций H_0 и H_1 для обобщенной разрешимости краевой задачи. Показано также, что найденные условия для функций H_0 и H_1 гарантируют обобщенную разрешимость краевой задачи в некотором смысле, чем показана достаточность свойств функций H_0 и H_1 для обобщенной разрешимости. Вместе взятые, результаты можно интерпретировать как необходимые и достаточные условия обобщенной разрешимости краевой задачи (I)-(4) при фиксированной функции H_0 и дополнительном ограничении $\alpha'(a) > \beta'(a)$.

Выпишем разные соотношения между α и β в точках a и b :

1. $\alpha(a)=\beta(a)$,
2. $\alpha'(a)<\beta'(a)$,
3. $\alpha'(a)=\beta'(a)$,
4. $\alpha'(a)>\beta'(a)$,
5. $\alpha(b)=\beta(b)$,
6. $\alpha'(b)<\beta'(b)$,
7. $\alpha'(b)=\beta'(b)$,
8. $\alpha'(b)>\beta'(b)$.

В данной работе используется неравенство $\alpha'(a)>\beta'(a)$, имеющее номер 4. Наличие выписанных соотношений будем называть условием и обозначать через U . Например, неравенство $\alpha'(a)>\beta'(a)$ будем обозначать $U=4$.

Введем обозначения. Будем говорить, что функция H четырех аргументов имеет тип монотонности ($\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4$), где $\sigma_i\in\{0,-,+,1\}$, если H по i-му аргументу: при $\sigma_i=0$ не зависит, при $\sigma_i=-$ ($\sigma_i=+$) не возрастает (не убывает), а при $\sigma_i=1$ ограничения не накладываются. Класс монотонности $M(\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4)$ состоит из всех функций из $C(\mathbb{R}^2\times\bar{\mathbb{R}}^2,\bar{\mathbb{R}})$, имеющих тип монотонности ($\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4$). Кстати, $M(1111)=C(\mathbb{R}^2\times\bar{\mathbb{R}}^2,\bar{\mathbb{R}})$. Введем также обозначения обобщенных классов монотонности $MG(\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4)$, где $\sigma_i\in\{0,-,+,1,A,B,C,D,E,F,K,L,X,Y\}$ Поведение функции $H\in MG(\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4)$ при различных σ_i определим лишь для первого аргумента, так как для остальных аналогично. Для $\sigma_1\in\{0,-,+,1\}$ поведение как для классов монотонности, для $\sigma_1=X$ имеется строгое убывание. Для $\sigma_1\in\{A,C,E,K\}$ определим равенствами:

$$MG(A\sigma_2\sigma_3\sigma_4)=MG(1\sigma_2\sigma_3\sigma_4)\setminus MG(-\sigma_2\sigma_3\sigma_4),$$

$$MG(C\sigma_2\sigma_3\sigma_4)=MG(-\sigma_2\sigma_3\sigma_4)\setminus MG(0\sigma_2\sigma_3\sigma_4),$$

$$MG(E\sigma_2\sigma_3\sigma_4)=MG(-\sigma_2\sigma_3\sigma_4)\setminus MG(X\sigma_2\sigma_3\sigma_4),$$

$$MG(K\sigma_2\sigma_3\sigma_4)=MG(E\sigma_2\sigma_3\sigma_4)\setminus MG(0\sigma_2\sigma_3\sigma_4),$$

Для $\sigma_1\in\{Y,B,D,F,L\}$ $H\in MG(\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4)$, если $-H\in MG(\sigma_5\sigma_2\sigma_3\sigma_4)$ при $\sigma_5\in\{X,A,C,E,K\}$ соответственно.

Как правило, классы монотонности будут использованы для описания функции H_1, обощенные классы монотонности – функции H_0.

О п р е д е л е н и е. Набор (H_0, M, U), состоящий из функции H_0, класса монотонности M и набора условий I–8, обозначаемого U, является классом разрешимости ($(H_0, M, U) \in CS$), если для любых $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a, +\infty)$, $f \in Car(I \times \mathbb{R}^2; \mathbb{R})$, $\alpha \in AG(I, \mathbb{R})$, $\beta \in BG(I, \mathbb{R})$, $H_1 \in M$, $h_0, h_1 \in \bar{\mathbb{R}}$ таких, что, если выполнены неравенства $\alpha \le \beta$, $H_j \alpha \le h_j \le H_j \beta$ и условия U, то существует обобщенное решение краевой задачи (I)–(4).

Перейдем к изложению вспомогательных результатов. Доказательства будут приведены в конце работы.

Л е м м а I. Пусть $U = 4$ и $(H_0, M, U) \in CS$. Тогда $H_0 \in MG(111+)$.

Л е м м а I′. Пусть $U = 4$, $(H_0, M, U) \in CS$. Тогда $M \subset MG(111+)$.

Л е м м а 2. Пусть $U = 4$, $(H_0, M, U) \in CS$ и $H_0 \in MG(A111)$. Тогда $M \subset M(-10+)$.

Л е м м а 3. Пусть $U = 4$, $(H_0, M, U) \in CS$ и $H_0 \in MG(1A11)$. Тогда $M \subset M(1-10)$.

Л е м м а 4. Пусть $U = 4$, $(H_0, M, U) \in CS$ и $H_0 \in MG(111D)$. Тогда $M \subset M(1-10)$.

Л е м м а 5. Пусть $U = 4$, $(H_0, M, U) \in CS$. Тогда $M \subset M(1111) \setminus M(+1+1)$.

Л е м м а 6. Пусть $U = 4$, $(H_0, M, U) \in CS$ и $H_0 \in MG(11B1)$. Тогда $M \subset M(-1+1)$.

Л е м м а 7. Пусть $U = 4$, $(H_0, M, U) \in CS$ и $H_0 \in MG_1(-AD+)$. Тогда $M \subset M(-111)$.

Здесь $MG_1(-AD+) = \{F \in MG(-AD+) : (\exists\, u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{21}, u_{22}, u_{23} \in \mathbb{R})(\exists\, u_{31}, u_{32}, u_{33}, u_{41}, u_{42}, u_{43} \in \bar{\mathbb{R}})$ $(u_{11} \le u_{12}, u_{21} \le u_{22}, u_{13} \in [u_{11}, u_{12}], u_{23} \in$ $[u_{21}, u_{22}], u_{31} > u_{32})(F(u_{11}, u_{21}, u_{31}, u_{41}) =$ $= f_1 \le F(u_{12}, u_{22}, u_{32}, u_{42}) = f_2 \wedge$ $F(u_{13}, u_{23}, u_{33}, u_{43}) \bar{\in} [f_1, f_2]\}$,

$MG_2(-AD+) = MG(-AD+) \setminus MG_1(-AD+)$.

Л е м м а 8. Пусть $U = 4$, $(H_0, M, U) \in CS$ и $H_0 \in MG_1(--DD)$. Тогда $M \subset M(-111)$.

Здесь $MG_1(--DD) = \{F \in MG(--DD) : (\exists u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{21}, u_{22}, u_{23} \in R)$ $(\exists u_{31}, u_{32}, u_{33}, u_{41}, u_{42}, u_{43} \in \bar{R})(u_{11} \leq u_{12},$ $u_{21} \leq u_{22}, u_{13} \in [u_{11}, u_{12}], u_{23} \in [u_{21}, u_{22}], u_{31} > u_{32})$ $(F(u_{11}, u_{21}, u_{31}, u_{41}) = f_1 \leq F(u_{12}, u_{22}, u_{32}, u_{42}) = f_2 \wedge$ $F(u_{13}, u_{23}, u_{33}, u_{43}) \bar{\in} [f_1, f_2]\}$,

$MG_2(--DD) = MG(--DD) \setminus MG_1(--DD)$.

Л е м м а 9. Пусть $U = 4$, $(H_0, M, U) \in CS$ и $H_0 \in MG(--LD)$. Тогда $M \subset M(-111)$.

Перейдем к формулировке и доказательству основных результатов. Предположим, что $H_0 \in MG(1111) \setminus MG(A1A1)$.

Т е о р е м а I. Пусть $U = 4$. $(H_0, M, U) \in CS$, тогда и только тогда, если функция H_0 и класс монотонности M принадлежат одному из следующих сочетаний классов функций (H_0 входит в первый класс, M - во второй):

1) $MG(AA-+)$, $M(--00)$,

2) $MG(A--0)$, $M(-10+)$,

3) $MG(A--D)$, $M(--00)$,

4) $MG(-A0+)$, $M(1--0) \cup M(--10)$,

5) $MG(-AB+)$, $M(--+0)$,

6) $MG_1(-AD+)$, $M(--10)$,

7) $MG_2(-AD+)$, $M(1--0) \cup M(--10)$,

8) $MG(--00)$, $M(11-+) \cup M(-11+)$,

9) $MG(--B0)$, $M(-1++)$,

10) $MG(--90)$, $M(1111)$,

11) $MG(--L0)$, $M(-11+)$,

12) $MG(--LD)$, $M(1--0) \cup M(--10)$,

13) $MG_1(--DD)$, $M(--10)$,

14) $MG_2(--DD)$, $M(1--0) \cup M(--10)$.

15) $MG(--BD)$, $M(--+0)$.

Доказательство.

Достаточность. В силу нашего предположения $H_0 \in MG(1111) \setminus MG(A1A1)$. В силу леммы I' имеем $H_0 \in MG(111+) \setminus MG(A1A+)$. Возьмем разбиение

$$
\begin{aligned}
MG(111+) \setminus MG(A1A+) = {} & MG(AA-+) \cup MG(A--0) \cup MG(A--D) \cup \\
& MG(-A0+) \cup MG(-AB+) \cup MG(-AD+) \cup \\
& MG(--00) \cup MG(--B0) \cup MG(--Y0) \cup \\
& MG(--L0) \cup MG(--0D) \cup MG(--DD) \cup \\
& MG(--BD).
\end{aligned}
$$

Так как

$$MG(-AD+) = MG_1(-AD+) \cup MG_2(-AD+),$$
$$MG(--DD) = MG_1(--DD) \cup MG_2(--DD),$$

то в силу последнего и выписанного разбиения получаем окончательно разбиение множества $MG(111+) \setminus MG(A1A+)$ на элементы, которые являются первыми классами в строках I)-I5) формулировки теоремы.

Здесь следует показать, что, если $U = 4$ и $(H_0, M, U) \in CS$, то M необходимо включены в соответствующие классы монотонности. Так как H_0 фиксировано, то необходимо попадает в один из элементов разбиения множества $MG(111+) \setminus MG(A1A+)$ (напоминаем, что случай $H_0 \in MG(A1A+)$ здесь не рассматривается). Исследуя поочередно все различные случаи попадания H_0 в обобщенные классы монотонности и вследствие свойств H_0 получая ограничения на M, мы исчерпаем все возможности, чем и будет доказана необходимость.

Приступим к строкам I)-I5). Рассмотрим I). Имеем: $U = 4$, $H_0 \in MG(AA-+)$; $(H_0, M, U) \in CS$. Тогда в силу лемм 2, 3 имеем:

$$H_0 \in MG(AA-+) \Rightarrow M \subset M(-10+),$$

$$H_0 \in MG(AA-+) \Rightarrow M \subset M(1-10),$$

следовательно, $M \subset M(-10+) \cap M(1-10) = M(--00)$.
Аналогично доказываются 2)-5), 8), 9), II), I2), I3), при этом для доказательства указанных строчек использованы леммы:

2) - лемма 2;
3) - леммы 2, 4;
4) - леммы 3, 5;
5) - леммы 3, 6;
8) - леммы I', 5;
9) - леммы I', 6;
II) - лемма 9;
I2) - леммы 4, 5;
I3) - леммы 4, 6.

Осталось рассмотреть 6), 7), I0).
Возьмем 6). Здесь $H_0 \in MG_1(-AD+)$. В силу леммы 3 и 4 получаем $M \subset M(1-10)$. Применяя лемму 7, получаем $M \subset M(--10)$, что и требовалось показать. Перейдем к 7). Как уже было показано в 6), из лемм 3, 4 получаем $M \subset M(1-10)$. Применяя лемму 5, получаем $M\ (1--0) \cup M\ (--10\ )$, что и требовалось получить. Рассмотрим I0). При $H_0 \in MG\ (--Y0\ )$ (строгое возрастание по третьему аргументу!) при наличии неравенства $\alpha'(a) > \beta'(a)$ имеем $H_0\alpha > H_0\beta$, т.е. неравенство $H_0\alpha \leq H_0\beta$, присутствующее в определении класса разрешимости, не выполнено, поэтому ограничения на M получить невозможно.

Н е о б х о д и м о с т ь. При $U = 4$ для H_0 и M, описанных в строках I)-I5) формулировки теоремы, следует показать, что $(H_0, M, U) \in CS$. Для этого главным образом будут использованы теоремы работы [4, с. 149]. Но в некоторых случаях придется доказать соответствующие теоремы.

Рассмотрим более подробно I). Следует показать, что при $U = 4$ для $H_0 \in MG(AA-+)$ и любых $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a,+\infty)$, $f \in Car(I \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $\alpha \in AG(I,\mathbb{R})$, $\beta \in BG(I,\mathbb{R})$, $H_2 \in M(--00)$, $h_0, h_1 \in \bar{\mathbb{R}}$ таких, что выполнены неравенства $\alpha \le \beta$, $H_j\alpha \le h_j \le H_j\beta$ и условие 4, существует обобщенное решение краевой задачи (I)-(4). Так как $MG(AA-+) \subset M(11-+)$, то требуемое следует из теоремы $T001$ [4, с. I49].

Таким образом доказываются 2)-6), 8), 9), II)-I3), I5), при этом следуют из теорем работы [4] :

2) - T002,
3) - T00I,
4) - T002 и T0I2,
5) - T0II,
6) - T0I2,
8) - T004 и T0I4,
9) - T0I3,
II) - T0I0,
I2) - T003 и T0I2,
I3) - T0I2,
I5) - T0II,

с учетом включений $MG(A--0) \subset M(1--0)$, $MG(A--D) \subset M(11-+)$, $MG(-A0+) \subset M(-10+)$, $MG(-AB+) \subset$ $\subset M(-11+)$, $MG_1(-AD+) \subset M(-1++)$, $MG(--00) =$ $= M(--00)$, $MG(--B0) \subset M(--10)$, $MG(--L0) \subset$ $\subset M(--+0)$, $MG(--0D) \subset M(-10+) \subset M(-1++)$, $MG_1(--DD) \subset M(-1++)$, $MG(--BD) \subset M(-11+)$.
Для 7), I4) будет доказано ниже. Для I0): при выполнении неравенства $\alpha'(a) > \beta'(a)$ всегда $H_0\alpha > H_0\beta$, следовательно, не выполнено неравенство $H_0\alpha \le H_0\beta$, входящее в определение класса разрешимости, поэтому формально $(H_0, M, U) \in CS$ в этом случае.

Т е о р е м а 2. Для $H_0 \in MG_2(-AD+)$ и $M \subset M(1--0)$ $\cup M(--10)$ набор $(H_0, M, 4) \in CS$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для M имеем два случая: $M \subset M(1--0)$ или $M \subset M(--10)$. Если $H_0 \in MG_2(-AD+)$, $M \subset M(--10)$, то $(H_0, M, 4) \in CS$

в силу теоремы ТОI2 [4] (ввиду $MG_2(-AD+) \subset M(-1++)$).
Остается рассмотреть случай $M \subset M(1--0)$.

$$MG_2(-AD+) = \{F \in MG(-AD+) : (\forall u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{21}, u_{22}, u_{23} \in R) \\ (\forall u_{31}, u_{32}, u_{33}, u_{41}, u_{42}, u_{43} \in \bar{R})(u_{11} \le u_{12},\ u_{21} \le u_{22}, \\ u_{13} \in [u_{11}, u_{12}],\ u_{23} \in [u_{21}, u_{22}],\ u_{31} > u_{32}) \\ (F(u_{11}, u_{21}, u_{31}, u_{41}) = f_1 > F(u_{12}, u_{22}, u_{32}, u_{42}) = f_2\ \vee \\ F(u_{13}, u_{23}, u_{33}, u_{43}) \in [f_1, f_2]\}.$$

Принадлежность функции H_0 классу $MG_2(-AD+)$ можно интерпретировать так. Если даны обобщенные функции α и β, такие, что $\alpha \le \beta$, $\alpha'(a) > \beta'(a)$, и дано обобщенное решение x такое, что $\alpha \le x \le \beta$, то $H_0 \in MG_2(-AD+)$ означает, что либо $H_0\alpha > H_0\beta$, либо $H_0 x \in [H_0\alpha, H_0\beta]$.

Пусть $H_0 \in MG_2(-AD+)$, $H_1 \in M(1--0)$. Для рассмотрения случая $M \subset M(1--0)$ остается показать, что для любых $a \in R$, $b \in (a, +\infty)$, $f \in Car(I \times R^2, R)$, $\alpha \in HG(I, R)$, $\beta \in BG(I, R)$, h_0, h_1 таких, что выполнены неравенства $\alpha \le \beta$, $\alpha'(a) > \beta'(a)$, $H_i\alpha \le h_i \le H_i\beta$, существуют обобщенные решение краевой задачи (I)-(4).

Определим индуктивно последовательно $\{\alpha_i\}$ и $\{\beta_i\}$ обобщенных нижних и верхних функций уравнения (I). Пусть $\alpha_1 = \alpha$, $\beta_1 = \beta$. Если α_i и β_i уже определены, то α_{i+1} и β_{i+1} определяются следующим образом. Ищем $u(t)$ - решение (I) с условиями $\alpha_i \le u \le \beta_i$, $u(b) = \frac{1}{2}(\alpha_i(b) + \beta_i(b))$, $H_1 u = h_1$ (существует в силу теоремы [4]). Из определения $H_0 \in MG_2(-AD+)$ и $H_0\alpha_i \le H_0\beta_i$ имеем $H_0 u \in [H_0\alpha_i, H_0\beta_i]$.
Полагаем $\alpha_{i+1} = \alpha_i$, $\beta_{i+1} = u$, если $u'(a) \le \alpha_i'(a)$ и $\alpha_{i+1} = u$, $\beta_{i+1} = \beta_i$ в противном случае. В обоих случаях $H_0\alpha_{i+1} \le H_0\beta_{i+1}$, $\alpha_{i+1}'(a) \ge \beta_{i+1}'(a)$.
Таким образом, последовательно $\{\alpha_i\}$ и $\{\beta_i\}$ построены и имеют пределы α_0 и β_0 (см. [4]), для

которых выполнены соотношения $H_0\alpha_0 \leq H_0\beta_0$, $\alpha_0'(a) \geq \beta_0'(a)$, $\alpha_0(b) = \beta_0(b)$. Но в силу $H_0 \in MG_2(-AD+) \subset M(-1-+)$ имеем $H_0\alpha_0 \geq H_0\beta_0$, что вместе с неравенством $H_0\alpha_0 \leq H_0\beta_0$ дает равенство $H_0\alpha_0 = H_0\beta_0 = h_0$. Так как $\{\alpha_0, \beta_0\} \cap SG(I, R) \neq \emptyset$, то решение x (которое удовлетворяет также условию $H_1 x = h_1$) найдено.

Т е о р е м а 3. Для $H_0 \in MG_2(--DD)$ и $M \subset M(1--0) \cup M(--10)$ набор $(H_0, M, 4) \in CS$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2 и опускается.

Перейдем к доказательству лемм. Лемма I доказывается как лемма I работы [3], лемма I$'$ - как лемма 2 [3], лемма 2 - как лемма 3 [3], лемма 3 - как лемма 4 [3], лемма 4 - как лемма 5 [3], лемма 6 - как лемма 5 [2], лемма 7 - как лемма 6 [3], лемма 8 - как лемма 8 [3], лемма 9 - как лемма 7 [3], лемма 5 - как лемма 2 [3].

Т е о р е м а 4. Пусть $U = 6$ $(\alpha'(b) < \beta'(b))$. $(H_0, M, U) \in CS$ тогда и только тогда, если функция H_0 и класс монотонности M принадлежат одному из следующих сочетаний классов функций:

I) $MG(AA-+)$, $M(--00)$,

2) $MG(-A0+)$, $M(1--0)$,

3) $MG(-AC+)$, $M(--00)$,

4) $MG(A--0)$, $M(-10+) \cup M(--01)$,

5) $MG(A--A)$, $M(--0-)$,

6) $MG_1(A--C)$, $M(--01)$,

7) $MG_2(A--C)$, $M(-10+) \cup M(--01)$,

8) $MG(--00)$, $M(11-+) \cup M(1--1)$,

9) $MG(--0A)$, $M(1---)$,

I0) $MG(--0X)$, $M(1111)$,

II) $MG(--0K)$, $M(1--1)$,

I2) $MG(--C0)$, $M(-10+) \cup M(--01)$,

I3) $MG_1(--CC)$, $M(--01)$,

14) $MG_2(--CC)$, $M(-10+) \cup M(--01)$,

15) $MG(--CA)$, $M(--0-)$.

Эта теорема (и ее формулировка) получается из теоремы I путем замены независимой переменной типа $t \to -t$.

Замечание. Случай $H_0 \in MG(A1A1)$ здесь не рассмотрен. Можно выразить гипотезу, что при $(H_0, M, 4) \in CS$ верно $H_0 \bar{\in} MG(A1A1)$.

Литература

I. Виржбицкий Я.В. Необходимые и достаточные условия разрешимости двухточечной краевой задачи// Краевые задачи обыкновенных дифференциальных уравнений. - Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1987. - С. 53-68.

2. Виржбицкий Я.В. О двухточечной краевой задаче с фиксированным граничным условием// Актуальные вопросы краевых задач. Теория и приложения. - Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1988. - С. 23-34.

3. Виржбицкий Я.В. О разрешимости двухточечной краевой задачи с ограничением $\alpha'(a) < \beta'(a)$ // Теоретические и численные исследования краевых задач. - Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1989. - С. 134-146.

4. Лепин А.Я., Лепин Л.А. Краевые задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. - Рига: Зинатне, 1988. - 211 с.

Поступила 10.10.89.

УДК 517.927.4

Л.А.Лепин

ОБ ОТСУТСТВИИ МОНОТОННЫХ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

При изучении автомодельных решений полулинейного уравнения теплопроводности

$$u_t = \Delta u + u^{\beta},$$

где $\beta > 1$, а N - размерность пространства, возникает краевая задача

$$x'' + \frac{N-1}{t}x' - \frac{1}{2}tx' - \frac{1}{\beta-1}x + x^{\beta} = 0, \tag{I}$$

$$x'(0) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} x(t) = 0. \tag{2}$$

С помощью замены переменных

$$x(t) = \varkappa(t)\, t^{-\frac{2}{\beta-1}}, \quad t = e^{s},$$

задача (I)-(2) сводится к задаче

$$\varkappa'' + \left(N-2-\frac{4}{\beta-1}\right)\varkappa' - \frac{2}{\beta-1}\left(N-2-\frac{2}{\beta-1}\right)\varkappa + \varkappa^{\beta} - \frac{1}{2}e^{2s}\varkappa' = 0 \tag{3}$$

$$\lim_{s\to-\infty} \varkappa(s) = 0, \quad \lim_{s\to+\infty} \varkappa(s) < \infty. \tag{4}$$

В работе [I] было показано, что если $N \le 2 + \frac{4}{\beta-1}$, то задача (I)-(2), а следовательно, и задача (3)-(4) решений не имеет. Случай $N > 2 + 4/\beta-1$ исследовался в работах [2, 3]. Там было установлено, что, если

$$2 + \frac{4}{\beta-1} < N < 6 + \frac{4}{\beta-1} + 4\sqrt{\frac{\beta}{\beta-1}},$$

то задача (3)-(4) имеет бесконечное множество решений, а если

$$6+\frac{4}{\beta-1}+4\sqrt{\frac{\beta}{\beta-1}}\leqslant N<10+\frac{6}{\beta-1},$$

то задача (3)-(4) имеет конечное число решений. Различные решения отличаются друг от друга числом экстремумов. При этом открытым оставался вопрос о существовании монотонных решений задачи (3)-(4). Ответ на этот вопрос дан в настоящей работе.

Т е о р е м а. Задача (3)-(4) монотонных решений не имеет.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное, и пусть $\mathcal{X}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ – монотонное решение задачи (3)-(4). Асимптотическое исследование, проведенное способом, аналогичным тому, который применялся в [4], показывает, что решение $\mathcal{X}$ должно иметь асимптотики

$$\mathcal{X}(s)=C_1 e^{\frac{2s}{\beta-1}}(1+\omega_1(s)), \tag{5}$$

$$\mathcal{X}(s)=C_2(1+\omega_2(s)), \tag{6}$$

где C_1 и C_2 – произвольные положительные постоянные, а ω_1 и ω_2 имеют пределы

$$\lim_{s\to-\infty}\omega_1(s)=0,\quad \lim_{s\to-\infty}\omega_1'(s)=0,$$

$$\lim_{s\to+\infty}\omega_2(s)=0,\quad \lim_{s\to+\infty}\omega_2'(s)=0.$$

Сделаем в задаче (3)-(4) замену переменных $y(s)=\frac{\mathcal{X}'(s)}{\mathcal{X}(s)}$. Учитывая асимптотики (5)-(6), получим

$$y''+\left(N-2-\frac{4}{\beta-1}-\frac{1}{2}e^{2s}\right)y'+2\left(N-2-\frac{2}{\beta-1}-\frac{1}{2}e^{2s}\right)y-$$

$$-(\beta-1)\left(N-2-\frac{4}{\beta-1}-\frac{1}{2}e^{2s}\right)y^2-(\beta-3)yy'-(\beta-1)y^3=0, \tag{7}$$

$$\lim_{s\to-\infty} y(s)=\frac{2}{p-1}, \quad \lim_{s\to+\infty} y(s)=0. \qquad (8)$$

Можно показать, что решение y задачи (7)-(8), соответствующее решению $\tilde{z}$ задачи (3)-(4), должно иметь асимптотики

$$y(s)=\frac{2}{p-1}-C_3 e^{2s}(1+\omega_3(s)), \qquad (9)$$

$$y(s)=C_4 e^{-2s}(1+\omega_4(s)), \qquad (10)$$

где C_3 и C_4 - положительные постоянные, а функции ω_3 и ω_4 имеют пределы

$$\lim_{s\to-\infty} \omega_3(s)=0 \quad , \quad \lim_{s\to+\infty} \omega_4(s)=0 \quad .$$

Для дальнейшего доказательства нам потребуется следующая лемма.

Лемма I. Для любого $C_3\in(0, \infty)$ существует единственное решение уравнения (7), имеющего асимптотику (9). Для любого $C_4\in(0,\infty)$ существует единственное решение уравнения (7), имеющее асимптотику (10).

Лемма доказывается путем сведения уравнения (7) к соответствующему интегральному уравнению и применению методов, аналогичных тем, которые применялись в работе [5].

Продолжим доказательство теоремы. Для этого рассмотрим семейство функций

$$y_c=\frac{2}{p-1+ce^{2s}}.$$

Нетрудно проверить, что при любом $C\in(0, \infty)$ функция y_c является нижней функцией (см. [6]) для уравнения (7).

Лемма 2. Возьмем произвольное $C_0\in(0, \infty)$ и точки $s_1, s_2 \in R$, $s_1 < s_2$. Предположим, что $y(s_1) \geqslant y_{c_0}(s_1)$ и $y(s_2) \geqslant y_{c_0}(s_2)$. Тогда $y(s) \geqslant y_{c_0}(s)$ при всех $s \in [s_1, s_2]$.

Доказательство. Предположим, что это не так, и в некоторой точке $s_0 \in (s_1, s_2)$ $y(s_0) > y_{c_0}(s_0)$. Нетрудно убедиться, что $\lim\limits_{c \to +\infty} y_c(s) = 0$ на всей числовой прямой. Поэтому найдется $c \in (0, \infty)$ такое, что $y_c(s) < y(s)$ на интервале $[s_1, s_2]$. Пусть

$$c_1 = \inf \{ c \in (c_0, \infty) : y_c(s) < y(s) \text{ при } s \in [s_1, s_2] \}.$$

Очевидно, что $c_1 > c_0$, $y_{c_1}(s_1) < y(s_1)$, $y_{c_1}(s_2) < y(s_2)$, $y_{c_1}(s) \leqslant y(s)$ на всем интервале $[s_1, s_2]$, и найдется $s_* \in (s_1, s_2)$ такое, что $y_{c_1}(s_*) = y(s_*)$. В точке s_* должно также выполняться равенство $y'_{c_1}(s_*) = y'(s_*)$, а это противоречит единственности решения задачи Коши для уравнения (7). Лемма доказана.

Пусть $c_* = \frac{(\beta-1)^2}{2} C_3$. Тогда y_{c_*} имеет асимптотику

$$y_{c_*}(s) = \frac{2}{\beta - 1} - C_3 e^{2s} (1 + \omega_5(s)),$$

где $\lim\limits_{s \to -\infty} \omega_5(s) = 0$. Покажем, что $y(s) < y_{c_*}(s)$ в некоторой окрестности $-\infty$. Если это не так, то из леммы 2 следует, что $y_{c_*}(s) \leqslant y(s)$ в некоторой окрестности $-\infty$. Отметим, что так как ни при каком c y_c не является решением уравнения (7), то y_{c_*} и y не совпадают. Так как y_{c_*} - нижняя функция для уравнения (7), а y - решение, то согласно [7, с. 146] найдется решение уравнения (7), лежащее между y_{c_*} и y, а следовательно, имеющее на $-\infty$ асимптотику (9) с той же константой C_3 и в то же время не совпадающее с y. Это противоречит лемме 1. Докажем теперь, что $y(s) < y_{c_*}(s)$ на всей числовой прямой. Предположим, что это не так, и пусть $s_0 \in R$ таково, что $y(s_0) = y_{c_*}(s_0)$ и $y(s) < y_{c_*}(s)$ на $(-\infty, s_0)$. Если выбрать $c_0 > c_*$ достаточно близко к c_*, то функция y_{c_0} будет иметь асимптотику

$$y_{c_0}(s) = \frac{2}{\beta-1} - \frac{2}{(\beta-1)^2} c_0 (1 + \omega_6(s)),$$

где $\lim_{s \to -\infty} \omega_6(s) = 0$. Так как $\frac{2}{(\beta-1)^2} c_0 > c_3$, то в окрестности $-\infty$ будет выполняться неравенство $y_{c_0}(s) < y(s)$. В точке s_0 также будет $y_{c_0}(s_0) < y(s_0)$ в силу монотонности семейства y_c по c. С другой стороны, так как y_c непрерывно по c, а c_0 выбрано достаточно близко к c_*, то найдутся точки из интервала $(-\infty, s_0)$, в которых будет справедливо неравенство $y(s) < y_{c_0}(s)$. Это противоречит лемме 2.

Пусть теперь $c^* = \frac{2}{c_4}$. Тогда y_{c^*} имеет асимптотику

$$y_{c^*}(s) = c_4 e^{-2s} (1 + \omega_7(s)),$$

где $\lim_{s \to +\infty} \omega_7(s) = 0$. Так же, как и выше, можно показать, что $y(s) < y_{c^*}(s)$ на всей числовой прямой.

Нетрудно убедиться, что

$$c_* = \sup \{ c \in (0, \infty) : y(s) < y_c(s) \text{ при всех } s \in R \}$$

Точно так же

$$c^* = \sup \{ c \in (0, \infty) : y(s) < y_c(s) \text{ при всех } s \in R \}.$$

Следовательно, $c_* = c^*$. Если теперь выбрать $c_0 \in (c_*, \infty)$ достаточно близко к c_*, то, как и выше, получим, что $y_{c_0}(s) < y(s)$ в окрестностях $-\infty$ и $+\infty$, и в то же время найдутся точки, в которых $y(s) < y_{c_0}(s)$. Это противоречит лемме 2. Теорема доказана.

Литература

1. Giga Y., Kohn R.V. Asymptotically self-similar blow-up of heat equations// Communs Pure and Appl. Math, 1985.- V. 38.- N 3.- P. 297-319.

2. Лепин Л.А. Счетный спектр собственных функций нелинейного уравнения теплопроводности с распределенными параметрами// Дифференц. уравнения.-1988. - Т. 24, № 7. - С. 1226-1234.
3. Лепин Л.А. О количестве решений одной краевой задачи из теории нелинейной теплопроводности// Доклады расширенных заседаний семинара Института прикладной математики им.И.Н.Векуа, 1988. - Т. 3, № 3. - С. 87-90.
4. Адъютов М.М., Клоков Ю.А., Михайлов А.П. Исследование автомодельных тепловых структур в нелинейной среде: Препринт № 108. - М.: ИПМатем. АН СССР, 1982.
5. Гризан Г.П., Клоков Ю.А. Об одной начальной задаче для уравнения второго порядка с несуммируемой особенностью // Латвийский матем. ежегодник, 1984. - Вып. 28. - С. 14-24.
6. Васильев Н.И., Клоков Ю.А. Основы теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений.-Рига: Зинатне, 1978. - 189 с.
7. Лепин А.Я., Лепин Л.А. Краевые задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка.-Рига: Зинатне, 1988. - 211 с.

Поступила 18.10.89.

УДК 517.927

С.А.Беспалова, Ю.А.Клоков

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ УРАВНЕНИЯ ФОЛКНЕРА-СКЕНА.II.

Эта работа является продолжением нашей работы [1]. Рассмотрим задачу

$$x''' = P_2(x, x', x''), \tag{1}$$

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = a, \quad x'(\infty) = \gamma, \tag{2}$$

где $P_2(x, x', x'')$ - полином второй степени, который мы запишем в виде

$$P_2(x, x', x'') = (a_0 + a_1 x + a_2 x' + a_3 x'')x'' + \\ + b_0 + b_1 x + b_2 x' + b_{11} x^2 + b_{12} x x' + b_{22} x'^2, \tag{3}$$

$x_0, a, \gamma, a_0, \ldots, b_{22} \in \mathbb{R}$.

Как было показано в работе [1], если решение задачи (I)-(3) существует для какого-нибудь $\gamma \neq 0$, то необходимо

$$b_1 + \gamma b_{12} = 0, \quad b_{11} = 0 \tag{4}$$

Сделаем дополнительное предположение, что $b_{12} = 0$. Тогда легко показать, что для существования решения задачи (I)-(3) в случае $\gamma \neq 0$ необходимо

$$b_0 + b_2 \gamma + b_{22} \gamma^2 = 0 \tag{5}$$

Действительно, если решение задачи (I)-(3) существует, то, как сказано выше, имеет место (4) и вместе с нашим предположением относительно b_{12} получаем

$$b_{11}=0,\quad b_{12}=0,\quad b_1=0. \tag{6}$$

Таким образом, уравнение (3) принимает вид

$$x'''=(a_0+a_1x+a_2x'+a_3x'')x''+b_0+b_2x'+b_{22}x'^2. \tag{7}$$

Пусть утверждение (5) неверно, и пусть, для определенности, $\gamma=1$. Очевидно, решение $x(t)$ задачи (7), (2) при больших значениях t имеет вид

$$x(t)=t\,(1+\varepsilon_1(t)),$$

а значит

$$x'(t)=1+\varepsilon_2(t),$$

где $\varepsilon_i(t)\to 0,\ i=1,2$ при $t\to\infty$.

Так что уравнение (7) для больших значений t можно записать в виде

$$x'''=(a_0+a_1x+a_2x'+a_3x'')x''+\delta\,(1+\varepsilon_3(t)), \tag{8}$$

где $\delta=b_0+b_2+b_{22}$ (т.к. $\gamma=1$) и $\varepsilon_3(t)\to 0$ при $t\to+\infty$. Пусть $\delta>0$. Тогда из (8) видно, что в точках экстремума $x'(t)$ (где $x''(t)=0$) при больших t может быть только $x'''(t)>0$. Следовательно, при больших t $x'(t)$ изменяется монотонно. С помощью рассуждений, которые были использованы в [I], можно показать, что необходимо $x''(t)\to 0$ при $t\to+\infty$. Если $a_1=0$, то из (8) при больших t следует противоречие, которое доказывает утверждение (5). Если же $a_1\neq 0$, то при больших t уравнение (8) можно записать в виде

$$x'''=a_1\,(1+\varepsilon_4(t))\,t\,x''+\delta\,(1+\varepsilon_3(t)). \tag{9}$$

Выбирая $t_0 > 0$ столь большим, чтобы $|\varepsilon_3(t)| + |\varepsilon_4(t)| < 1/2$ для $t \geq t_0$, и интегрируя (9) от $t = t_0$ до $t \geq t_0$, получим

$$x''(t) = x''(t_0) + a_1 (1 + \varepsilon_5(t))(tx' - x + x(t_0) - \\ - t_0 x'(t)) + \delta t (1 + \varepsilon_6(t)), \tag{10}$$

где $|\varepsilon_5(t)| + |\varepsilon_6(t)| \leq 1/2$ при $t \geq t_0$. Разделив (10) на t и полагая $t \to +\infty$, получим $\delta = 0$. Тем самым утверждение (5) доказано.

Предположим для определенности, что $b_{22} < 0$. Тогда, переобозначив постоянные, запишем (7) в виде

$$x''' = (A + Bx + Cx' + \mathcal{D}x'')x'' - p(x' - \gamma)(x' - q). \tag{11}$$

Ограничимся случаем $q > \gamma > 0$. Рассмотрим вспомогательное уравнение

$$y''' = \mathcal{D}y''^2 - p(y' - \gamma)(y' - q). \tag{12}$$

Л е м м а. Для $\forall a \in (-\infty, \gamma]$ решение задачи (12), (2) существует и единственно. При этом $y''(t) > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$.

Для $a > \gamma$ справедливы следующие утверждения:
(i). Пусть $\mathcal{D}(q - \gamma) < 1$. Тогда существует $\tau > q$ такое, что для $\forall a \in (\gamma, \tau)$ задача (12), (2) имеет два решения, причем только у одного из них вторая производная сохраняет свой знак, а именно $y''(t) < 0$ $\forall t \in \mathbb{R}_+$.

При $a = \tau$ решение задачи (12), (2) существует и единственно.

При $a > \tau$ решение не существует.
(ii). Если $\mathcal{D}(q - \gamma) \geq 1$, то решение задачи (12), (2) существует и единственно для $\forall a \in (\gamma, +\infty)$, при этом $y''(t) < 0$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$.

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы . Сделаем замены $y' = x$, $x' = v$. Тогда на фазовой плоскости (x, v) получаем уравнение

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\mathcal{D} v^2 - p(x-\gamma)(x-q)}{v}.$$

Наконец, сделав еще одну замену $v^2 = \varphi(x)$, получим линейное уравнение

$$\frac{d\varphi}{dx} = 2\mathcal{D}\varphi - 2p(x-\gamma)(x-q),$$

из которого и следует лемма.

Величина τ из утверждения (i) леммы находится при этом из уравнения

$$\int\limits_{\gamma}^{\tau} e^{-2\mathcal{D}s}(s-\gamma)(s-q)\,ds = 0, \quad (\tau < +\infty) \tag{13}$$

Если же $\mathcal{D}(q-\gamma) \geqslant 1$, то из (13) следует, что $\tau = +\infty$.

Т е о р е м а I. Пусть $a \in [0, \gamma]$, $B \leqslant 0$ и

$$A + Bx_0 + C\gamma_0 \leqslant 0, \tag{14}$$

для $\forall \gamma_0 \in [0, \gamma]$.

Тогда решение задачи (11), (2) существует, причем $x'' > 0$ $\forall t \in \mathbb{R}_+$.

Пусть τ - величина, определяемая леммой.

Справедливы следующие утверждения:

(j). Если $\mathcal{D}(q-\gamma) < 1$, $(\tau < +\infty)$, и для $\forall \gamma_0 \in [\gamma, \tau]$ выполняется неравенство (14), то решение задачи (11), (2) существует для любого $a \in [\gamma, \tau]$ и при этом $x''(t) < 0$ $\forall t \in \mathbb{R}_+$;

(jj). Если же $\mathcal{D}(q-\gamma) \geqslant 1$, $(\tau = +\infty)$, и неравенство (14) выполняется для $\forall \gamma_0 \in [\gamma, +\infty)$, тогда решение задачи (11), (2) существует для $\forall a \in [\gamma, \infty)$

и $x''(t)<0 \quad \forall t\in \mathbb{R}_+$.

Доказательство теоремы. Пусть $a\in[0,\gamma]$, и для $\forall \gamma_0\in[0,\gamma]$ выполняется неравенство (I4). Тогда верхняя функция задачи (II), (2) есть $\beta(t)=x_0+\gamma t$, а нижняя функция $\alpha(t)$ есть решение задачи (I2), (2), которое существует согласно лемме. Теперь, используя результаты работы [I] , заключаем, что решение задачи (II), (2) существует.

Пусть $a\in[\gamma,\tau]$, $(\mathcal{D}(q-\gamma)<1)$, и для $\forall \gamma_0\in[\gamma,\tau]$ имеет место неравенство (I4). В этом случае нижняя функция есть $\beta(t)=x_0+\gamma t$, а верхняя $\alpha(t)$ - решение задачи (I2), (2). И опять приходим к существованию решения задачи (II), (2).

Аналогично рассматривается случай $\mathcal{D}(q-\gamma)\geq 1$.

Тем самым теорема доказана.

Замечание. Мы доказали существование только одного решения задачи (II), (2). Между тем при рассматриваемых параметрах $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, C, $\mathcal{D}$, p, γ, q задача (II), (2) может иметь любое, наперед заданное число решений и даже бесконечно много. Соответствующие примеры легко построить.

Теорема 2. Пусть $\mathcal{B}\geq 0$, и для $\forall \gamma_0\in[\gamma,\infty]$ имеет место неравенство

$$\mathcal{A}+\mathcal{B}x_0+C\gamma_0\geq 0. \tag{I5}$$

Тогда решение задачи (II), (2) не существует для $a>\tau$, где τ - величина, определяемая в лемме.

Доказательство теоремы 2. Доказываем от противного, т.е. пусть это не так и решение задачи существует. Тогда оно будет верхним решением, а нижним - решение задачи (I2), (2). Но задача (I2), (2) решения не имеет для $a>\tau$. Пришли к противоречию.

Литература

1. Беспалова С.А., Клоков Ю.А. Об одном обобщении уравнения Фолкнера-Скена //Актуальные вопросы краевых задач. Теория и приложения. - Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1988. - С.99-108.

Поступила 12.10.89

УДК 517.5

А.И.Звягинцев

ОДНА ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ЗАДАЧА, СВЯЗАННАЯ С АПРИОРНЫМИ ОЦЕНКАМИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ

При доказательстве априорной ограниченности производных для дифференциальных неравенств [I] возникает необходимость получения оценок для величины

$$\alpha_{kp}(\ell, M_0, M_n) = \sup\{\|f^{(k)}\|_{L_\infty[0,\ell]} : f \in W^n_{p\infty}[0,\ell],$$

$$\|f\|_{L_p[0,\ell]} \leq M_0,\ \|f^{(n)}\|_{L_\infty[0,\ell]} \leq M_n\}, \qquad (I)$$

где $1 \leq p \leq \infty$, $n \in \{2, 3, \dots\}$, $k \in \{1, \dots, n-1\}$, $0 < \ell < \infty$, $M_0 > 0$, $M_n \geq 0$, $W^n_{p\infty}[0,\ell]$ – пространство функций $f \in L_p[0,\ell]$, у которых $(n-1)$-ая производная абсолютно непрерывна на отрезке $[0,\ell]$ и $f^{(n)} \in L_\infty[0,\ell]$. Норма определена обычным образом

$$\|f\|_{L_p[0,\ell]} = \begin{cases} \left(\int_0^\ell |f(t)|^p dt\right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}_{t \in [0,\ell]} |f(t)|, & p = \infty. \end{cases}$$

Случай $p = \infty$ разобран в работах [2-4]. Рассмотрим случай $1 \leq p < \infty$.

О п р е д е л е н и е. При $1 \leq p < \infty$ для заданных неотрицательных чисел M_0, M_k, M_n набор (ℓ, M_0, M_k, M_n) будем называть допустимым, если существует функция $f \in W^n_{p\infty}[0,\ell]$, удовлетворяющая соотношениям

$$\|f\|_{L_p[0,\ell]}=M_0,\quad \|f^{(k)}\|_{L_\infty[0,\ell]}=M_k,\quad \|f^{(n)}\|_{L_\infty[0,\ell]}=M_n. \quad (2)$$

Будем говорить, что функция $f(t)$ соответствует набору (ℓ, M_0, M_k, M_n), если $f\in W^n_{p\infty}[0,\ell]$ и для нее справедливо (2).

Очевидно, что набор $(\ell, 0, M_k, M_n)$ допустим тогда и только тогда, когда $M_k=M_n=0$, а набор $(\ell, M_0, 0, M_n)$ допустим тогда и только тогда, когда $M_n=0$. Поэтому в дальнейшем считаем, что $M_0>0$, $M_k>0$.

Если функция $f(t)$ соответствует набору (ℓ, M_0, M_k, M_n), то, взяв функцию $g(s)=\alpha f(\beta s)$, получаем следующую лемму.

Л е м м а I. Пусть $1\leq p<\infty$ и набор (ℓ, M_0, M_k, M_n) допустимый. Тогда для любых положительных α, β набор $(\beta^{-1}\ell, \alpha\beta^{-1/p}M_0, \alpha\beta^{k}M_k, \alpha\beta^{n}M_n)$ тоже допустимый.

Т е о р е м а I. Если набор (ℓ, M_0, M_k, M_n) допустимый и $1\leq p<\infty$, $0<\ell'\leq\ell$, $M_0'\geq M_0>0$, $0<M_k'\leq M_k$, $M_n'\geq M_n\geq 0$, то набор $(\ell', M_0', M_k', M_n')$ тоже допустимый.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $p=\infty$ доказательство см. [2,3]. Пусть $1\leq p<\infty$ и функция $f(t)$ соответствует набору (ℓ, M_0, M_k, M_n). Выберем $t_0\in[0,\ell]$ и $\delta\geq 0$ такими, чтобы $|f^{(k)}(t_0)|=M_k$ и $t_0\in[\delta,\delta+\ell']\subset[0,\ell]$. Тогда для функции $g(t)=f(t+\delta)$ имеем

$$\|g\|_{L_p[0,\ell']}\leq M_0,\quad \|g^{(k)}\|_{L_\infty[0,\ell']}=M_k,\quad \|g^{(n)}\|_{L_\infty[0,\ell']}\leq M_n.$$

Если $\|g^{(n)}\|_{L_\infty[0,\ell']}=M_n=M_n'$ и $M_k=M_k'$, то в силу непрерывной зависимости $\|g+\lambda\|_{L_p[0,\ell']}$ от $\lambda\geq 0$ функция $g(t)+\lambda$ при некотором λ соответствует набору $(\ell', M_0', M_k', M_n')$.

Пусть $M_n' > M_n$ или $M_K' < M_K$.

Если $M_n' = M_n = 0$, то функция $g(t)+\lambda$ при некотором $\lambda \geqslant 0$ соответствует набору $(\ell', M_0' M_K / M_K', M_K, 0)$. Тогда при $\alpha = M_K' / M_K$, $\beta = 1$ по лемме I набор $(\ell', M_0', M_K', 0)$ допустимый.

Рассмотрим теперь случай, когда $M_n > 0$ или $M_n' > M_n = 0$, $|g^{(K)}(t)| \not\equiv M_K$. Поскольку $M_K > 0$, то, очевидно, существует отрезок $[\tau-\delta, \tau+\delta] \subset [0, \ell']$, на котором выполняются неравенства $|g(t)| > 0$ и $|g^{(K)}(t)| < M_K$. Выберем $\varepsilon > 0$ таким, чтобы $|g(t)| - \varepsilon > 0$ и $|g^{(K)}(t)| + \varepsilon < M_K$ для $t \in [\tau-\delta, \tau+\delta]$. Нетрудно указать финитную, бесконечно-дифференцируемую функцию $\omega(t)$ такую, что $\operatorname{supp}\omega = [\tau-\delta, \tau+\delta]$, $\|\omega\|_{L_\infty[0,\ell']} < \varepsilon$, $\|\omega^{(K)}\|_{L_\infty[0,\ell']} < \varepsilon$, $\|\omega^{(n)}\|_{L_\infty[0,\ell']} < M_n' M_K / M_K' - M_n$ и $\operatorname{sign} \omega(t) = \operatorname{sign} g(t)$ для $t \in (\tau-\delta, \tau+\delta)$. Для финитной функции $\varphi_\xi(t) = \xi^{-K}\omega(\xi t + \tau - \xi\tau)$ при $\xi \geqslant 1$ имеем $\operatorname{supp}\varphi_\xi = [\tau-\xi^{-1}\delta, \tau+\xi^{-1}\delta] \subset [\tau-\delta, \tau+\delta]$, $\|\varphi_\xi\|_{L_\infty[0,\ell']} < \varepsilon$, $\|\varphi_\xi^{(K)}\|_{L_\infty[0,\ell']} < \varepsilon$, $\lim\limits_{\xi\to\infty} \|\varphi_\xi^{(n)}\|_{L_\infty[0,\ell']} = \infty$. Из свойств функции $\varphi_\xi(t)$ вытекает, что для $t \in (\tau-\xi^{-1}\delta, \tau+\xi^{-1}\delta)$

$$|g(t) - \varphi_\xi(t)|^p < |g(t)|^p, \quad |g^{(K)}(t) - \varphi_\xi^{(K)}(t)| < M_K$$

и для $t \in [0, \tau-\xi^{-1}\delta] \cup [\tau+\xi^{-1}\delta, \ell']$

$$|g(t) - \varphi_\xi(t)|^p = |g(t)|^p, \quad |g^{(K)}(t) - \varphi_\xi^{(K)}(t)| = |g^{(K)}(t)|.$$

Отсюда следует, что $\|g - \varphi_\xi\|_{L_p[0,\ell']} < M_0$, $\|g^{(K)} - \varphi_\xi^{(K)}\|_{L_\infty[0,\ell']} = M_K$. Поскольку при $\xi = 1$ $\|g^{(n)} - \varphi_1^{(n)}\|_{L_\infty[0,\ell']} \leqslant M_n' M_K / M_K'$, то для функции $g(t) - \varphi_\xi(t)$ за счет выбора ξ можно добиться, чтобы $\|g^{(n)} - \varphi_\xi^{(n)}\|_{L_\infty[0,\ell']} = M_n' M_K / M_K'$. Так как $M_0' M_K / M_K' \geqslant M_0$, то найдется $\lambda \geqslant 0$, для которого $\|g - \varphi_\xi + \lambda\|_{L_\infty[0,\ell']} = M_0' M_K / M_K'$. Таким образом построенная функция $\mathscr{x}(t) = g(t) - \varphi_\xi(t) + \lambda$ соответствует набору $(\ell', M_0' M_K / M_K', M_K, M_n' M_K / M_K')$. Взяв $\alpha = M_K' / M_K$, $\beta = 1$, по лемме I заключаем, что набор $(\ell', M_0', M_K', M_n')$ допустимый.

Пусть теперь $M_n' > M_n = 0$ и $g^{(K)}(t) \equiv M_K$ (в случае $g^{(K)}(t) \equiv -M_K$ вместо $g(t)$ надо взять $-g(t)$, то есть $g(t)$ является полиномом степени K. Следовательно, найдутся $\varepsilon > 0$ и отрезок $[\tau - \delta,$

$\tau+\delta] \subset [0,\ell']$, для которых $M_\kappa > 2\varepsilon$ и $(1-\varepsilon/M_\kappa)|g(t)| > \varepsilon$ при $t \in [\tau-\delta, \tau+\delta]$. Повторяя предыдущие рассуждения, построим финитную функцию $\varphi_\varsigma(t)$, у которой $\operatorname{supp}\varphi_\varsigma \subset [\tau-\delta, \tau+\delta]$, $\operatorname{sign}\varphi_\varsigma(t) = \operatorname{sign} g(t)$ для $t \in \operatorname{supp}\varphi_\varsigma$, $\|\varphi_\varsigma\|_{L_\infty[0,\ell']} < \varepsilon$, $\|\varphi_\varsigma^{(\kappa)}\|_{L_\infty[0,\ell']} < \varepsilon$ и $\|\varphi_\varsigma^{(n)}\|_{L_\infty[0,\ell']} = M_n' M_\kappa / M_\kappa'$. Пусть $\tau_0 \in \operatorname{supp}\varphi_\varsigma$ точка, в которой

$$\varphi_\varsigma^{(\kappa)}(\tau_0) = \min\{\varphi_\varsigma^{(\kappa)}(t) : t \in \operatorname{supp}\varphi_\varsigma\}.$$

Так как $\varphi_\varsigma(t)$ знакопостоянная и финитная функция, то $\varphi_\varsigma^{(\kappa)}(\tau_0) < 0$. Для функции

$$x(t) = \left(1 + \frac{\varphi_\varsigma^{(\kappa)}(\tau_0)}{M_\kappa}\right) g(t) - \varphi_\varsigma(t)$$

получаем

$$\|x\|_{L_p[0,\ell']} < \left(1 + \frac{\varphi_\varsigma^{(\kappa)}(\tau_0)}{M_\kappa}\right)\|g\|_{L_p[0,\ell']} < M_0,$$

$$\|x^{(\kappa)}\|_{L_\infty[0,\ell']} = M_\kappa, \quad \|x^{(n)}\|_{L_\infty[0,\ell']} = M_n' M_\kappa / M_\kappa'.$$

Тогда функция $x(t)+\lambda$ за счет выбора $\lambda \geqslant 0$ соответствует набору $(\ell', M_0' M_\kappa / M_\kappa', M_\kappa, M_n' M_\kappa / M_\kappa')$. Полагая $\alpha = M_\kappa'/M_\kappa$, $\beta = 1$, по лемме I получаем допустимый набор $(\ell', M_0', M_\kappa', M_n')$. Теорема доказана.

Известно [5], что в задаче (I) для $\ell > 0$, $M_0 > 0$, $M_n \geqslant 0$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ существует экстремальная функция, то есть функция $f \in W_{p\infty}^n[0,\ell]$, на которой максимизируемый функционал достигает верхней грани. Следовательно, набор $(\ell, \|f\|_{L_p[0,\ell]}, \alpha_{\kappa p}(\ell, M_0, M_n), \|f^{(n)}\|_{L_\infty[0,\ell]})$ является допустимым, и по теореме I набор $(\ell, M_0, \alpha_{\kappa p}(\ell, M_0, M_n), M_n)$ тоже допустимый.

Т е о р е м а 2. Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$; $\ell, M_0, M_\kappa > 0$; $M_n \geqslant 0$. Набор $(\ell, M_0, M_\kappa, M_n)$ является допустимым тогда и только тогда, когда $M_\kappa \leqslant \alpha_{\kappa p}(\ell, M_0, M_n)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из допустимости набора $(\ell, M_0, M_\kappa, M_n)$ по определению величины $\alpha_{\kappa p}(\ell, M_0, M_n)$ следует, что $M_\kappa \leqslant \alpha_{\kappa p}(\ell, M_0, M_n)$. Поскольку набор

$(\ell, M_0, \alpha_{kp}(\ell, M_0, M_n), M_n)$ допустимый, то по теореме I для $M_k \leqslant \alpha_{kp}(\ell, M_0, M_n)$ набор (ℓ, M_0, M_k, M_n) тоже допустимый.

Теорема доказана.

Лемма 2. Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $M_0, M_k, M_n > 0$, набор (ℓ, M_0, M_k, M_n) допустимый и $M_k < \alpha_{kp}(\ell, M_0, M_n)$. Тогда существуют $0 < M_0' < M_0$, $M_k' > M_k$, $0 < M_n' < M_n$, для которых набор (ℓ, M_0', M_k', M_n') допустимый.

Доказательство. Возьмем a такое, что

$$M_k \alpha_{kp}^{-1}(\ell, M_0, M_n) < a < 1.$$

Из допустимости набора $(\ell, M_0, \alpha_{kp}(\ell, M_0, M_n), M_n)$ по лемме I следует допустимость набора $(\ell, aM_0, a\alpha_{kp}(\ell, M_0, M_n), aM_n)$. Таким образом, можно взять $M_0' = aM_0$, $M_k' = a\alpha_{kp}(\ell, M_0, M_n)$, $M_n' = aM_n$. Лемма доказана.

Лемма 3. Для любых $\alpha, \beta, M_0 > 0, M_n \geqslant 0, 1 \leqslant p \leqslant \infty$ справедливо равенство

$$\alpha\beta^k \alpha_{kp}(\ell, M_0, M_n) = \sup\{\|g^{(k)}\|_{L_\infty[0,\beta^{-1}\ell]} : g \in W^n_{p\infty}[0, \beta^{-1}\ell],$$

$$\|g\|_{L_p[0,\beta^{-1}\ell]} \leqslant \alpha\beta^{-\frac{1}{p}} M_0, \|g^{(n)}\|_{L_\infty[0,\beta^{-1}\ell]} \leqslant \alpha\beta^n M_n\}. \quad (3)$$

Доказательство. Обозначим через μ_{kp} правую часть (3). Из допустимости набора $(\ell, M_0, \alpha_{kp}(\ell, M_0, M_n), M_n)$ по лемме I следует допустимость набора $(\beta^{-1}\ell, \alpha\beta^{-1/p} M_0, \alpha\beta^k\alpha_{kp}(\ell, M_0, M_n), \alpha\beta^n M_n)$. Если предположить $\alpha\beta^k\alpha_{kp}(\ell, M_0, M_n) < \mu_{kp}$, то по лемме 2 найдется допустимый набор $(\beta^{-1}\ell, M_0', M_k', M_n')$, где

$$M_0' < \alpha\beta^{-1/p} M_0, \quad M_k' > \alpha\beta^k\alpha_{kp}(\ell, M_0, M_n), \quad M_n' < \alpha\beta^n M_n. \quad (4)$$

Заменив α и β на α^{-1} и β^{-1}, применим к набору $(\beta^{-1}\ell, M_0', M_k', M_n')$ лемму I. Тогда набор $(\ell, \alpha^{-1}\beta^{1/p}M_0', \alpha^{-1}\beta^{-k}M_k', \alpha^{-1}\beta^{-n}M_n')$ допустимый. В силу (4) по теореме I получаем допустимый набор $(\ell, M_0, \alpha^{-1}\beta^{-n}M_k',$

$M_n)$ и $\alpha^{-1}\beta^{-\kappa}M_\kappa' > \alpha_{\kappa p}(\ell, M_0, M_n)$, что противоречит теореме 2.

Предположим теперь, что $\alpha\beta^\kappa\alpha_{\kappa p}(\ell, M_0, M_n) > \mu_{\kappa p}$. Тогда из допустимости набора $(\beta^{-1}\ell, \alpha\beta^{-1/p}M_0, \alpha\beta^\kappa\alpha_{\kappa p}(\ell, M_0, M_n), \alpha\beta^n M_n)$ по теореме I следует допустимость набора $(\beta^{-1}\ell, \alpha\beta^{-1/p}M_0, \mu_{\kappa p}, \alpha\beta^n M_n)$. Заменяя α и β на α^{-1} и β^{-1}, по лемме I получаем допустимый набор $(\ell, M_0, \alpha^{-1}\beta^{-\kappa}\mu_{\kappa p}, M_n)$, в котором $\alpha^{-1}\beta^{-\kappa}\mu_{\kappa p} < \alpha_{\kappa p}(\ell, M_0, M_n)$. Тогда по лемме 2 найдется допустимый набор $(\ell, M_0', M_\kappa', M_n')$, где

$$M_0' < M_0, \quad M_\kappa' > \alpha^{-1}\beta^{-\kappa}\mu_{\kappa p}, \quad M_n' < M_n. \tag{5}$$

По лемме I набор $(\beta^{-1}\ell, \alpha\beta^{-\frac{1}{p}}M_0', \alpha\beta^\kappa M_\kappa', \alpha\beta^n M_n')$ тоже допустимый. Тогда в силу (5) и теоремы I набор $(\beta^{-1}\ell, \alpha\beta^{-1/p}M_0, \alpha\beta^\kappa M_\kappa', \alpha\beta^n M_n)$ допустимый и $\alpha\beta^\kappa M_\kappa' > \mu_{\kappa p}$, что противоречит определению числа $\mu_{\kappa p}$. Лемма доказана.

Л е м м а 4. Пусть $1 \le p \le \infty, \delta \ge \ell, M_0 > 0, M_n \ge 0$ и набор $(\delta, M_0, \alpha_{\kappa p}(\ell, M_0, M_n), M_n)$ допустимый. Тогда

$$\alpha_{\kappa p}(\delta, M_0, M_n) = \alpha_{\kappa p}(\ell, M_0, M_n).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из допустимости набора $(\delta, M_0, \alpha_{\kappa p}(\ell, M_0, M_n), M_n)$ по теореме 2 получаем $\alpha_{\kappa p}(\ell, M_0, M_n) \le \alpha_{\kappa p}(\delta, M_0, M_n)$. Если предположить, что $\alpha_{\kappa p}(\ell, M_0, M_n) < \alpha_{\kappa p}(\delta, M_0, M_n)$, то в силу того, что набор $(\delta, M_0, \alpha_{\kappa p}(\delta, M_0, M_n), M_n)$ допустимый, по теореме I набор $(\ell, M_0, \alpha_{\kappa p}(\delta, M_0, M_n), M_n)$ тоже допустимый и $\alpha_{\kappa p}(\delta, M_0, M_n) > \alpha_{\kappa p}(\delta, M_0, M_n)$, что противоречит теореме 2. Лемма доказана.

Т е о р е м а 3. Пусть $1 \le p \le \infty$, $\delta, M_0, M_n, m_0, m_\kappa, m_n > 0$, набор $(\delta, m_0, m_\kappa, m_n)$ допустимый и $\delta^{n+\frac{1}{p}} m_0^{-1} m_n \ge \ell^{n+1/p} M_0^{-1} M_n$. Тогда

$$m_\kappa \le C_{n\kappa p}\, m_0^{\frac{(n-\kappa)p}{1+np}}\, m_n^{\frac{1+\kappa p}{1+np}},$$

где $C_{nkp} = M_0^{\frac{-(n-k)p}{1+np}} M_n^{-\frac{1+kp}{1+np}} \alpha_{kp}(\ell, M_0, M_n)$.

Доказательство. Положим $\alpha = (m_0^{np} M_0^{-np} \cdot m_n M_n^{-1})^{1/1+np}$, $\beta = (m_0^{-1} M_0 m_n M_n^{-1})^{p/1+np}$. Поскольку набор (δ, m_0, m_k, m_n) допустимый, и $\delta \geqslant \beta^{-1}\ell$, то по теореме I набор $(\beta^{-1}\ell, m_0, m_k, m_n)$ тоже допустимый. В силу леммы 3 набор $(\beta^{-1}\ell, \alpha\beta^{-1/p} M_0, \alpha\beta^k \alpha_{kp}(\ell, M_0, M_n), \alpha\beta^n M_n)$ допустимый и равен $(\beta^{-1}\ell, m_0, \alpha\beta^k\alpha_{kp}(\ell, M_0, M_n), m_n)$. Из (3) заключаем, что $m_k \leqslant \alpha\beta^k\alpha_{kp}(\ell, M_0, M_n)$. Так как $\alpha\beta^k\alpha_{kp}(\ell, M_0, M_n) = C_{nkp} m_0^{\frac{(n-k)p}{1+np}} m_n^{\frac{1+kp}{1+np}}$, то теорема доказана.

Лемма 5. Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Тогда для $\varkappa \geqslant 0$ функция $\Phi_{nkp}(\varkappa) = \alpha_{kp}(1, 1, \varkappa)$ является неубывающей.

Доказательство. Пусть $\varkappa_2 > \varkappa_1 \geqslant 0$. Поскольку набор $(1, 1, \Phi_{nkp}(\varkappa_1), \varkappa_1)$ допустимый, то по теореме I набор $(1, 1, \Phi_{nkp}(\varkappa_1), \varkappa_2)$ тоже допустимый. Тогда в силу теоремы 2 $\Phi_{nkp}(\varkappa_1) \leqslant \alpha_{kp}(1, 1, \varkappa_2) = \Phi_{nkp}(\varkappa_2)$. Лемма доказана.

Теорема 4. Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\mathscr{E} > 0$. Тогда в случае $0 \leqslant \ell^{n+1/p} M_0^{-1} M_n \leqslant \mathscr{E}$ справедливы оценки

$$M_0 \ell^{-k-\frac{1}{p}} \alpha_{kp}(1,1,0) \leqslant \alpha_{kp}(\ell, M_0, M_n) \leqslant M_0 \ell^{-k-\frac{1}{p}} \alpha_{kp}(1,1,\mathscr{E}), \quad (6)$$

а в случае $\ell^{n+\frac{1}{p}} M_0^{-1} M_n \geqslant \mathscr{E}$

$$M_0^{\frac{(n-k)p}{1+np}} M_n^{\frac{1+kp}{1+np}} \alpha_{kp}(\infty, 1, 1) \leqslant \alpha_{kp}(\ell, M_0, M_n) \leqslant$$

$$\leqslant M_0^{\frac{(n-k)p}{1+np}} M_n^{\frac{1+kp}{1+np}} \alpha_{kp}(\mathscr{E}^{\frac{p}{1+np}}, 1, 1), \quad (7)$$

где $\alpha_{kp}(\infty, 1, 1) = \sup \{ \|f^{(k)}\|_{L_\infty[0,\infty)} : f \in W^n_{p\infty}[0,\infty),$

$$\|f\|_{L_p[0,\infty)} \leqslant 1, \ \|f^{(n)}\|_{L_\infty[0,\infty)} \leqslant 1 \} \quad (8)$$

Доказательство. При $0 \le \ell^{n+\frac{1}{p}} M_0^{-1} M_n \le \varepsilon$ по лемме 5 $\Phi_{nkp}(0) \le \Phi_{nkp}(\ell^{n+1/p} M_0^{-1} M_n) \le \Phi_{nkp}(\varepsilon)$, а в силу леммы 3 $\Phi(\ell^{n+\frac{1}{p}} M_0^{-1} M_n) = \ell^{k+1/p} M_0^{-1} \alpha_{kp}(\ell, M_0, M_n)$. Отсюда следуют неравенства (6).

Поскольку набор $(\ell, M_0, \alpha_{kp}(\ell, M_0, M_n), M_n)$ допустимый, то в случае $\ell^{n+\frac{1}{p}} M_0^{-1} M_n \ge \varepsilon$ по теореме 3 получаем второе неравенство в (7). Известно [5,6], что в задаче (8) при $1 \le p \le \infty$ существует экстремальная функция $f_0(t)$. Взяв ее сужение на отрезок $[0, \delta]$ такой, чтобы $|f_0^{(k)}(t_0)| = \alpha_{kp}(\infty, 1, 1)$, $t_0 \in [0, \delta]$ и $\delta^{n+1/p} \ge \ell^{n+1/p} M_0^{-1} M_n$, имеем $\|f_0\|_{L_p[0,\delta]} \le 1$, $\|f_0^{(n)}\|_{L_\infty[0,\delta]} \le 1$. Следовательно, в силу теоремы I набор $(\delta, 1, \alpha_{kp}(\infty, 1, 1), 1)$ допустимый. Тогда по теореме 3 получаем первое неравенство в (7). Теорема доказана.

Заметим, что в случае $\ell^{n+\frac{1}{p}} M_0^{-1} M_n \ge \varepsilon$ справедлива также оценка $M_0 \ell^{-k-1/p} \alpha_{kp}(1, 1, \varepsilon) \le \alpha_{kp}(\ell, M_0, M_n)$.

Литература

I. Лепин А.Я. Априорная ограниченность производных для дифференциальных неравенств // Краевые задачи обыкновенных дифференциальных уравнений.- Рига: ЛГУ им.П. Стучки, 1987.- С.73-82.

2. Звягинцев А.И. О вариационных задачах для норм функции и ее производных // Нелинейные краевые задачи обыкновенных дифференциальных уравнений.- Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1985.- С.I5-28.

3. Звягинцев А.И. Об одной проблеме А.Н. Колмогорова // Латв.мат. ежегодник.- 1989.- Вып.33.- С.I92-203.

4. Звягинцев А.И. Экстремальная задача о норме промежуточной производной // Мат.заметки (в печати).

5. Габушин В.Н. Наилучшее приближение функционалов на некоторых множествах // Мат.заметки.- 1970.- Т.8, вып.5.- С.551-562.

6. Арестов В.В. О наилучшем приближении операторов дифференцирования в равномерной метрике: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. - Свердловск, 1969.

Поступила 23.12.89

УДК 517.927.4+517.988.5

В.Д.Пономарев

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ДВУХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим системы операторных уравнений

$$fx = \theta, \quad gx = 0, \tag{I}$$

$$fx = \theta, \quad gx = hx, \tag{2}$$

$$fx = \theta, \quad g_0 x = \tau, \tag{3}$$

где $f: E_1 \to E_2$, $g, h, g_0 : E_1 \to E_3$, $\tau \in E_3$, E_1, E_2 - топологические пространства, E_3 - отделимое локально выпуклое пространство и отображения g, g_0, h - непрерывны.

Доказываются две теоремы существования решения системы операторных уравнений (см. также [3-5]). Здесь системы уравнений (или в дальнейшем просто задачи) можно интерпретировать как краевые задачи, где первое уравнение понимается как дифференциальное или функционально-дифференциальное, или и т.д., а второе - как граничное условие.

Введем обозначения. Для $A \subseteq E_3$ положим

$$N_0 = \{x \in E_1 \mid fx = \theta,\ g_0 x = \tau,\ \tau \in A\}.$$

Пусть I тождественное отображение E_3 в себя.

Лемма I. Пусть для любого $\tau \in A$ задача (3) имеет единственное решение. Тогда на множестве A для сужения отображения g_0 на N_0 существует обратное биективное отображение g_0^{-1}.

Доказательство. Покажем, что отображение g_0 на множестве N_0 биективно. Действительно, так как для любого $\tau \in A$ существует решение задачи

(3), то $g_0(N_0)=A$ и, кроме того, если $x_1, x_2 \in N_0$, $x_1 \neq x_2$, $g_0 x_1 = r_1$ и $g_0 x_2 = r_2$, то в силу единственности решения задачи (3) имеем $r_1 \neq r_2$, что и завершает доказательство.

Т е о р е м а I. Пусть A - непустое выпуклое компактное множество; для любого $r \in A$ задача (3) имеет единственное решение, непрерывно зависящее от r, и существует $\kappa \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ такое, что выполняется условие $(I + \kappa g \cdot g_0^{-1})A \subseteq A$. Тогда существует решение $x \in N_0$ задачи (1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия непрерывной зависимости решения задачи (3) от r следует, что отображение g_0^{-1}, определенное в лемме I, непрерывно на A. Поэтому по теореме 3.6.I из [I] найдется $r_0 \in A$ такое, что $(I + \kappa \cdot g \cdot g_0^{-1}) r_0 = r_0$, т.е. $r_0 + \kappa g(g_0^{-1} r_0) = r_0$ или $g(g_0^{-1} r_0) = 0$.

Из соотношения $g_0^{-1} r_0 \in N_0$ следует, что найдется $x \in N_0$ (а именно $x = g_0^{-1} r_0$) со свойством $gx = 0$.

З а м е ч а н и е I. Теорема I остается в силе, если условие на E_3 и A заменить на следующие: $E_3 = \mathbb{R}^n$ и множество A гомеоморфно замкнутому шару из $\mathbb{R}^n$.

Т е о р е м а 2. Пусть $E_3 = \mathbb{R}^n$ и множетсво A гомеоморфно замкнутому шару из $\mathbb{R}^n$, для любого $r \in A$ задача (3) имеет единственное решение, непрерывно зависящее от r, отображение g иньективно на N_0 и $h(N_0) \subseteq g(N_0)$. Тогда существует решение $x \in N_0$ задачи (2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу непрерывной зависимости отображение g_0^{-1} множества A на N_0 непрерывно и по лемме I биективно. По условию отображение g иньективно. Очевидно, что в следующей диаграмме

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "g_0^{-1}"'] & & g(N_0) \\ & N_0 \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

отображение φ при $\varphi = g\, g_0^{-1}$ иньективно.

Поэтому по теореме 3.17.12 из [2] отображения φ и g являются гомеоморфизмами, и, тем самым, множество $g(N_0)$ гомеоморфно множеству A. Отсюда, определяя отображение $g(N_0)$ на $g(N_0)$ формулой $\tau \to (hg^{-1})\tau$, по теореме Боля-Брауэра получаем, что существует такое $\tau_0 \in g(N_0)$, что $\tau_0 = (hg^{-1})\tau_0$. Так как $\tau_0 \in g(N_0)$, то найдется такое $x_0 \in N_0$, что $\tau_0 = gx_0$ или $x_0 = g^{-1}\tau_0$ и окончательно $gh_0 = hx_0$, что и требовалось показать.

З а м е ч а н и е 2. Теорема 2 остается в силе, если условия на A заменить на следующие: E_3 - отделимое локально выпуклое пространство, A - непустое компактное множество и $g(N_0)$ - выпуклое множество.

Литература

1. Эдвардс Р. Функциональный анализ. - М.: Мир, 1969. - 1071 с.
2. Дьедонне Ж. Основы современного анализа. - М.: Мир, 1964. - 430 с.
3. Пономарев В.Д. Существование и непрерывная зависимость решения системы операторных уравнений// Мат.заметки, 1982. - Т. 32. - № 1. - С. 103-114.
4. Пономарев В.Д. Существование решения системы операторных уравнений// Латв.мат.ежегодник, 26. - Рига: Зинатне, 1982. - С. 96-100.
5. Пономарев В.Д. Об одной теореме непрерывной зависимости решений операторных уравнений// Латв.мат.ежегодник, 29. - Рига: Зинатне, 1985. - С. 70-72.

Поступила 05.10.89.

УДК 517.927

Э.И.Лепина

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ БЕЗ МАКСИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ.II.

Настоящая работа является непосредственным продолжением работы [I]. Цель этих работ - при помощи примеров показать, что в работе [2] найдены все теоремы определенного типа о существовании максимального обобщенного решения краевой задачи

$$x''=f(t,x,x'),\ H_1x=h_1,\ H_2x=h_2,\ \alpha\le x\le\beta.$$

Терминология и обозначения взяты из [I] и [2].

Для теоремы TG006 -11+--+0 4 понадобятся следующие примеры.

EM16 00010000

Пусть $a=-1,\ b=1,\ f=x,\ \alpha=0,\ \beta=1+\varepsilon t$ и $H_1x=\gamma_\varepsilon(x'(1))(x'(1)-(1+\varepsilon)\operatorname{cht} 2)$. Тогда $x_1=(1-\varepsilon)\operatorname{ch}^{-1}2\operatorname{ch}(t-1)$ и $x_2=(1+\varepsilon)\operatorname{sh}^{-1}2\operatorname{sh}(t+1)$ являются решениями краевой задачи

$$x''=f(t,x,x'),\ H_1x=0,\ 0\cdot x=0,\ \alpha\le x\le\beta. \tag{I}$$

Если максимальное решение x_m существует, то оно должно удовлетворять условиям $x_m(-1)=1-\varepsilon$ и $x_m(1)=1+\varepsilon$. Но тогда не удовлетворяется граничное условие $H_1x_m=0$.

EM17 00--0000 36

Пусть $\xi\in(0,+\infty)$ - корень уравнения $\operatorname{sh}(\xi-\pi/2)=1$, $-a=b=\xi$; $f=x+2$ для $x\in(-\infty,-1)$, $f=-x$ для $x\in[-1,0]$, $f=x$ для $x\in(0,+\infty)$, $\alpha=-2$, $\beta=1$ для $t\in[-1,0]$, $\beta=\operatorname{ch}^{-1}\varepsilon\xi/2\operatorname{ch}\varepsilon(1-\xi/2)$ для $t\in[0,1]$ и $H_1x=-\gamma_\varepsilon(x'(-\xi))-\gamma_\varepsilon(x'(\xi))+\varphi_\varepsilon(x'(\xi)-\operatorname{th}\xi)$.
Тогда $x_1=0$ и $x_2=-\operatorname{sh}(t+\pi/2)$ для $t\in[-\xi,-\pi/2]$, $x_2=-\cos t$ для $t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ и $x_2=\operatorname{sh}(t-\frac{\pi}{2})$

при $t \in [\pi/2, \xi]$ являются решениями краевой задачи (I). Если максимальное решение x_m существует, то оно должно удовлетворять условиям $x_m(-\xi) = x_m(\xi) = 1$ и $0 = x_m$. Но тогда не удовлетворяется граничное условие $Hx_m = 0$.

EM18 00-+0000 40

Пусть $-a = b = 1$, $f = x$, $-\alpha = \beta = ch^{-1}\varepsilon\, ch\, \varepsilon t$ и $H_1 x = -\delta_\varepsilon(x'(-1)) + \delta_\varepsilon(x'(1))$. Тогда $x_1 = sh^{-1}1\, sh\, t$ и $x_2 = -x_1$ являются решениями краевой задачи (I). Если максимальное решение x_m существует, то оно должно удовлетворять условиям $x_m(-1) = x_m(1) = 1$. Но тогда не удовлетворяется граничное условие $H_1 x_m = 0$.

EM19 -00-0000 20.

Пусть $-a = b = 1$, $f = x$, $\alpha = 0$, $\beta = 1 + \varepsilon t$ и $H_1 x = -\max\{0, x(-1)\} \max\{0, \delta_\varepsilon(x'(1))\}$. Тогда $x_1 = (1-\varepsilon)\, ch^{-1}2\, ch\,(t-1)$ и $x_2 = (1+\varepsilon)\, sh^{-1}2\, sh\,(t+1)$ являются решениями краевой задачи (I). Если максимальное решение существует, то оно должно удовлетворять условиям $x_m(-1) = 1-\varepsilon$ и $x_m(1) = 1+\varepsilon$. Но тогда не удовлетворяется граничное условие $H_1 x_m = 0$.

EM20 0+-00000 40.

Пусть $-a = b = 1$, $f = x$, $-\alpha = \beta = ch^{-1}\varepsilon\, ch\, \varepsilon t$ и $H_1 x = cth\, 1\, x(1) - x'(1)$. Тогда $x_1 = sh^{-1}1\, sh\, t$ и $x_2 = -x_1$ являются решениями краевой задачи (I). Если максимальное решение x_m существует, то оно должно удовлетворять условиям $x_m(-1) = x_m(1) = 1$. Но тогда не удовлетворяется граничное условие $H_1 x_m = 0$

EM21 0++00000 47.

Пусть $-a = b = \pi$, $f = x+2$ для $x \in (-\infty, -1)$, $f = -x$ для $x \in [-1, 0]$ и $f = x$ для $x \in (0, +\infty)$, $\alpha = -2$, $\beta = sh\,\pi\, ch\, \varepsilon(t-\pi)$ и $H_1 x = x(\pi) + sh(\pi) x'(-\pi)$. Тогда $x_1 = ch\, 2\varepsilon\pi\,(sh\,\pi\, ch\,(t+\pi) - sh\,(t-\pi))(1 + 2ch\,\pi)^{-1}$ и $x_2 = sin\, t$ для $t \in [-\pi, 0]$, $x_2 = sh\, t$ для $t \in [0, \pi]$ являются решениями краевой задачи (I). Если максимальное решение x_m существует, то оно должно удовлетворять условиям $x_m(-\pi) = sh\,\pi\, ch\, 2\varepsilon\pi$ и $x_m(\pi) = sh\,\pi$

Но тогда не удовлетворяется граничное условие $H_1 x = 0$.

Если в примерах ЕМ16, ЕМ17, и ЕМ19 сделать замену $t \to -t$, то получим примеры

ЕМ22 0010000 48,

ЕМ23 00++000 47,

ЕМ24 0-+00000 48.

Если в примере ЕМ24 сделать замену $H_1 \leftrightarrow H_2$, то получим пример

ЕМ25 00000-+0 48.

Аналогично тому, как это делалось в [I] для $TG006$, получаем схему:

d01	-11+--+0	4	0010000	4	d02-d03
d02	-1++--+0	4	00++0000	4	d04-d05
d03	-1-+--+0	4	00-+0000	4	d06-d07
d04	-10+--+0	4	00000-+0	4	d08-d09
d05	-1+0--+0	4	0-+00000	4	d10-d11
d06	-10+--+0	4	d04		
d07	-1-0--+0	4	0+-00000	4	d12-d13
d08	-10+-0+0	4	TM12		
d09	-10+--00	4	TM02		
d10	-++0--+0	4	00000-+0	4	d14-d15
d11	-100--+0	4	00000-+0	4	d16-d17
d12	---0--+0	4	00000-+0	4	d18-d19
d13	-100--+0	4	d11		
d14	-++0-0+0	4	0++00000	4	d20-d21
d15	-++0--00	4	0++00000	4	d20-d21
d15	-++0--00	4	0++00000	4	d22-d23
d16	-100-0+0	4	TM12		
d17	-100--00	4	TM02		
d18	---0-0+0	4	TM13		
d19	---0--00	4	TM01		
d20	-0+0-0+0	4	TM16		
d21	-+00-0+0	4	TM12		
d22	-0+0--00	4	TM14		
d23	-+00--00	4	TM02.		

Таким образом, теорема $TG006$ приводит к теоремам

ТМ12, ТМ13, ТМ16 и к частным случаям теорем ТМ01, ТМ02 и ТМ14.

Для теоремы TG007 -1++--10 4 понадобятся следующие примеры:

EM26 00010000 46.

Пусть $-a = b = 1,\ f = x,\ \alpha = 0,\ \beta = \operatorname{ch} \mathscr{E} t$ и $H_1 x = \gamma_6 (x'(6))(x'(6) - \operatorname{ch} \mathscr{E} \operatorname{cth} 2)$. Тогда $x_1 = \operatorname{ch} \mathscr{E} \operatorname{ch}^{-1} 2 \operatorname{ch}(t-1)$ и $x_2 = \operatorname{ch} \mathscr{E} \operatorname{sh}^{-1} 2 \operatorname{sh}(t+1)$ являются решениями краевой задачи (I). Если максимальное решение x_m существует, то оно должно удовлетворять условиям $x_m(-1) = x_m(1) = \operatorname{ch} \mathscr{E}$. Но тогда не удовлетворяется граничное условие $H_1 x_m = 0$.

Если в примере ЕМ26 сделать замену $t \to -t$, получим пример

EM27 00100000 46.

Если в примере ЕМ27 сделать замену $H_1 \leftrightarrow H_2$, то получим пример

EM28 00000010 46.

Из предыдущих примеров используем примеры ЕМ21, ЕМ23 - ЕМ25. Аналогично предыдущему для TG007 получаем схему:

```
e01 -1++--10 4 00000010 4 e02-e03
e02 -1++--+0 4 00++0000 4 e04-e05
e03 -1++---0 4 00++0000 4 e06-e07
e04 -10+--+0 4 00000-+0 4 e08-e09
e05 -1+0--+0 4 0-+00000 4 e10-e11
e06 -10+---0 4 TM02
e07 -1+0---0 4 0-+00000 4 e12-e13
e08 -10+-0+0 4 TM12
e09 -10+--00 4 TM02
e10 -++0--+0 4 00000-+0 4 e14-e15
e11 -100--+0 4 00000-+0 4 e16-e17
e12 -++0---0 4 0++00000 4 e18-e19
e13 -100---0 4 TM02
e14 -++0-0+0 4 0++00000 4 e20-e21
e15 -++0--00 4 0++00000 4 e22-e23
e16 -100-0+0 4 TM12
```

e17 -100--00 4 TM02
e18 -0+0---0 4 TM15
e19 -+00---0 4 TM02
e20 -0+0-0+0 4 TM16
e21 -+00-0+0 4 TM12
e22 -0+0--00 4 TM15
e23 -+00--00 4 TM02

Таким образом, теорема TGD07 приводит к теоремам TM12, TM15, TM16 и к частному случаю теоремы TM02.

Порождающие теоремы TGD08 111+1-10 13 и TG010 11-+11-+ 15 совпадают, соответственно, с теоремами TM31 и TM33. Порождающая теорема TGD09 11111111 14 является технической, так как условия I и 4 одновременно не выполняются.

Для теоремы TG011 1--11--- 16 будут использованы следующие примеры:

EM29 00010000 130

Пусть $a=-0.8$, $b\approx 23.551$ - корень уравнения $x_2(b)=\beta(b)$, $f=12|x|^{1/2}\,\mathrm{sign}\,x$ для $t\in[a,0]$, $x\in(-\infty,+\infty)$, $f=1$ для $t\in[0,1.6]$, $x\in(-\infty,1)$, $f=-x$ для $t\in[0,1.6]$, $x\in[-1,1]$, $f=-1$ для $t\in[0,1.6]$, $x\in(1,+\infty)$, $f=0$, $t\in[1.6,b]$, $x\in(-\infty,+\infty)$, $\alpha=-\beta$, $\beta=(t-a)^4$ для $t\in[a,0]$, $\beta=a^4\cos t-4a^3\sin t$ для $t\in[0,\tau]$, где $\tau\approx 0.30189$ - корень уравнения $a^4\cos\tau-4a^3\sin\tau=1$, $\beta=-2^{-1}(t-\tau)^2+\beta'(\tau)(t-\tau)+1$ для $t\in[\tau,1.6]$, $\beta=\beta(1.6)+\varepsilon(t-1.6)$ для $t\in[1.6,b]$ и $H_1x=x'(b)(x'(b)-x_2'(b))$. Тогда $x_1=0$ для $t\in[a,a_1]$, где $a_1\approx-0.70071$ - корень уравнения $\mathrm{tg}\,(1.6-\sigma)=(4+a_1\sigma)(4\sigma-a_1)^{-1}$, $\sigma=(a_1^8+16a_1^6-1)^{1/2}$, $x_1=(t-a_1)^4$ для $t\in[a_1,0]$, $x_1=a_1^4\cos t-4a_1^3\sin t$ для $t\in[0,\tau_1]$, где $\tau_1\approx 0.62425$ - корень уравнения $a_1^4\cos\tau_1-4a_1^3\sin\tau_1=1$, $x_1=-2^{-1}(t-\tau_1)^2+x_1'(\tau_1)(t-\tau_1)+1$ для $t\in[\tau_1,1.6]$, $x_1=x_1(1.6)$ для $t\in[1.6,b]$ являются решениями краевой задачи (I). Если максимальное решение x_m существуют, то оно должно удовлетворять условиям $x_m(a)=\beta(a)$, $x_m(b)=\beta(b)$ и $0\le x_m$.

Но тогда не удовлетворяется граничное условие

EM30 00--0000 126.

Пусть $\xi \in (0, +\infty)$ - корень уравнения $sh(\xi - \frac{\pi}{2}) = 1$, $-a = b = \xi$, $f = x + 2$ для $x \in (-\infty, -1)$, $f = -x$ для $x \in [-1, 0]$, $f = x$ для $x \in (0, +\infty)$, α - решение задачи Дирихле

$\alpha'' = f(\alpha)$, $\alpha(-\xi) = 1$, $\alpha(\xi) = -2$, $-2 \le \alpha \le 1$, $\beta = 1$ и $H_1 x = \max\{x'(b), 0\}(-x'(-\xi) - x'(\xi) + \varphi_b(x'(\xi) - th\,\xi))$, где φ_b определено в примере $EM10$. Тогда $x_1 = ch^{-1} 2\xi\, ch(t - \xi)$ и $x_2 = -sh(t + \frac{\pi}{2})$ для $t \in [-\xi, -\frac{\pi}{2}]$, $x_2 = -\cos t$ для $t \in [-\frac{\pi}{2}, \pi/2]$ и $x_2 = sh(t - \frac{\pi}{2})$ для $t \in [\frac{\pi}{2}, \xi]$ являются решениями краевой задачи (I). Если максимальное решение x_m существует, то оно должно удовлетворять условиям $x_m(-\xi) = x_m(\xi) = 1$ и $0 < x_m$. Но тогда не удовлетворяется граничное условие $H_1 x_m = 0$.

Если в примере EM30 сделать замену $H_1 \leftrightarrow H_2$, то получим пример

EM31 000000-- 126.

Аналогично предыдущему для $TG011$ получаем схему:

```
f01 1--11--- 16 00010000 16 f02-f03
f02 1--+1--- 16 000000-- 16 f04-f05
f03 1---1--- 16 000000-- 16 f06-f07
f04 1--+1-0- 16 TM34
f05 1--+1--0 16 TM03
f06 1---1-0- 16 00--0000 16 f08-F09
f07 1---1--0 16 00--0000 16 f10-F11
F08 1-0-1-0- 16 TM36
f09 1--01-0- 16 TM34
f10 1-0-1--0 16 TN35
f11 1--01--0 16 TM03
```

Таким образом, теорема $TG011$ приводит к теоремам TM34, TM36 и к частным случаям теорем TM03 и TM35.

Для теоремы $TG012$ $1--11--1$ 17 понадобятся следующие примеры:

ЕМ32 00010000 137.

Этот пример получается из примера ЕМ29 при $\delta = 0$.

ЕМ33 00--0000 27.

Пусть $\xi \in (0, +\infty)$ - корень уравнения $sh(\xi - \pi/2) = 1$, $-a = b = \xi$, $f = x + 2$ для $x \in (-\infty, -1)$, $f = -x$ для $x \in [-1, 0]$, $f = x$ для $x \in (0, +\infty)$, α - минимальное решение краевой задачи

$$\alpha'' = f(\alpha),\ \alpha(-\xi) = 1,\ \alpha'(\xi) = 0,\ -2 \le \alpha \le 1,$$

$\beta = 1$ и $H_1 x = \max\{x'(b), 0\}(-x'(-\xi) - x'(\xi) + {}$ ${} + \varphi_\delta(x'(\xi) - th\,\xi))$. Тогда $x_1 = ch^{-1} 2\xi\, ch(t - \xi)$ и $x_2 = -sh(t + \pi/2)$ для $t \in [-\xi, -\frac{\pi}{2}]$, $x_2 = -\cos t$ для $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ и $x_2 = sh(t - \pi/2)$ для $t \in [\frac{\pi}{2}, \xi]$ являются решениями краевой задачи (I). Если максимальное решение x_m существует, то оно должно удовлетворять условиям $x_m(-\xi) = x_m(\xi) = 1$ и $0 < x_m$. Но тогда не удовлетворяется граничное условие $H_1 x_m = 0$.

Если в примерах ЕМ32 и ЕМ33 сделать замену $H_1 \leftrightarrow H_2$, то получим примеры:

ЕМ34 00000001 137,

ЕМ35 000000-- 127.

Аналогично предыдущему для TGD12 получаем схему:

```
g01  1--11--1  17  00010000  17  g02-g03
g02  1--+1--1  17  00000001  17  g04-g05
g03  1---1--1  17  00000001  17  g06-g07
g04  1--+1--+  17  TM37
g05  1--+1---  17  000000--  17  g08-g09
g06  1---1--+  17  00--0000  17  g10-g11
g07  1---1---  17  00--0000  17  g12-g13
g08  1--+1-0-  17  TM38
g09  1--+1--0  17  TM03
g10  1-0-1--+  17  TM39
g11  1--01--+  17  TM04
g12  1-0-1---  17  000000--  17  g14-g15
g13  1--01---  17  000000--  17  g16-g17
```

g14 1-0-1-0- 17 TM40
g15 1-0-1--0 17 TM39
g16 1--01-0- 17 TM38
g17 1--01--0 17 TM03.

Таким образом, теорема TG012 приводит к теоремам TM37-TM40 и к частным случаям теорем TM03 и TM04.

Теорема TG013 1--+1--+ 18 совпадает с теоремой TM41. Теоремы TG014 11111111 25 и TG015 11111111 24 являются техническими.

Для теоремы TG016 ---1---- 26 понадобятся следующие примеры: EM03, EM16, EM19, EM30, EM31. Если в примере EM19 сделать замену $H_1 \leftrightarrow H_2$, то получим пример

EM36 0000-00- 26.

Аналогично предыдущему для TG016 получаем схему:

h01 ---1---- 26 00010000 26 h02-h03
h02 ---+---- 26 000000-- 26 h04-h05
h03 -------- 26 000000-- 26 h06-h07
h04 ---+--0- 26 00-+0000 26 h08-h09
h05 ---+---0 26 00-+0000 26 h10-h11
h06 ------0- 26 00--0000 26 h12-h13
h07 -------0 26 00--0000 26 h14-h15
h08 --0+--0- 26 0000-00- 26 h16-h17
h09 ---0--0- 26 0000-00- 26 h18-h19
h10 --0+---0 26 TM02
h11 ---0---0 26 TM05
h12 --0---0- 26 0000-00- 26 h20-h21
h13 ---0--0- 26 h09
h14 --0----0 26 -00-0000 26 h22-h23
h15 ---0---0 26 TM05
h16 --0+0-0+ 26 TM20
h17 --0+--00 26 TM02
h18 ---00-0- 26 TM19
h19 ---0--00 26 TM01
h20 --0-0-0- 26 -00-0000 26 h24-h25
h21 --0---00 26 -00-0000 26 h26-h27
h22 0-0----0 26 TM21

h23 --00---0 26 ТМ02

h24 0-0-0-0- 26 ТМ23

h25 --000-0- 26 ТМ19

h26 0-0---00 26 ТМ21

h27 --00--00 26 ТМ01

Таким образом, теорема TGD16 приводит к теоремам ТМ05, ТМ20, ТМ23 и к частным случаям теорем ТМ01, ТМ02, ТМ19 и ТМ21.

Для теоремы TGD17 ---1---1 27 понадобятся примеры ЕМ05, ЕМ07, ЕМ33, ЕМ35, а также пример

ЕМ37 00-+0000 27.

Пусть $-a = b = 1$, $f = x$, $-\alpha = \beta = $
$= \cos^{-1} 2\varepsilon \cos \varepsilon(t-1)$ и $H_1 x = -\gamma_\varepsilon(x'(-1)) + x'(1)$.
Тогда $x_1 = sh^{-1} 1\, sh\, t$ и $x_2 = -x_1$ являются решениями краевой задачи (I). Если максимальное решение x_m существует, то оно должно удовлетворять условиям $x_m(-1) = 1$ и $1 \leq x_m(1) \leq \cos^{-1} 2\varepsilon$. Но тогда не удовлетворяется граничное условие $H_1 x_m = 0$.

Если в примерах ЕМ05, ЕМ07 и ЕМ37 сделать замену $H_1 \leftrightarrow H_2$, то получим примеры:

ЕМ38 00000001 27,

ЕМ39 0000-00- 27

ЕМ40 000000-+ 27.

Аналогично предыдущему для TGD17 получаем схему:

i01	---1---1	27	00010000	27	i02-i03
i02	---+---1	27	00000001	27	i04-i05
i03	-------1	27	00000001	27	i06-i07
i04	---+---+	27	00-+0000	27	i08-i09
i05	---+----	27	00-+0000	27	i10-i11
i06	-------+	27	00--0000	27	i12-i13
i07	--------	27	00--0000	27	i14-i15
i08	--0+---+	27	000000-+	27	i16-i17
i09	---0---+	27	000000-+	27	i18-i19
i10	--0+----	27	000000--	27	i20-i21
i11	---0----	27	000000--	27	i22-i23
i12	--0----+	27	000000-+	27	i24-i25
i13	---0---+	27	000000-+	27	i26-i27

```
i14  --0-----  27  000000--  27  i28-i29
i15  ---0----  27  000000--  27  i30-i31
i16  --0+--0+  27  TM25
i17  --0+---0  27  TM02
I18  ---0--0+  27  TM01
i19  ---0---0  27  TM05
i20  --0+--0-  27  0000-00-  27  i32-i33
i21  --0+---0  27  TM02
i22  ---0--0-  27  0000-00-  27  i34-i35
i23  ---0---0  27  TM05
i24  --0---0+  27  -00-0000  27  i36-i37
i25  --0----0  27  -00-0000  27  i38-i39
i26  ---0--0+  27  TM01
i27  ---0---0  27  TM05
i28  --0---0-  27  -00-0000  27  i40-i41
i29  --0----0  27  -00-0000  27  i42-i43
i30  ---0--0-  27  0000-00-  27  i44-i45
i31  ---0---0  27  TM05
i32  --0+0-0-  27  TM26
i33  --0+--00  27  TM02
i34  ---00-0-  27  TM24
i35  ---0--00  27  TM01
i36  0-0---0+  27  TM28
i37  --00--0+  27  TM01
i38  0-0----0  27  TM27
i39  --00---0  27  TM02
i40  0-0---0-  27  0000-00-  27  i46-i47
i41  --00--0-  27  0000-00-  27  i48-i49
i42  0-0----0  27  TM27
i43  --00---0  27  TM02
i44  ---00-0-  27  TM24
i45  ---0--00  27  TM01
i46  0-0-0-0-  27  TM29
i47  0-0---00  27  TM27
i48  --000-0-  27  TM24
i49  --00--00  27  TM01.
```

Следовательно, теорема TG017 приводит к теоремам ТМ05, ТМ25, ТМ26, ТМ28, ТМ29 и частным случаям теорем ТМ01, ТМ02, ТМ24, и ТМ27.

Для теоремы TG018 ---+---+ 28 понадобятся примеры.

ЕМ41 00-+0000 28.

Пусть $-a = b = 1$, $f = x$, $-\alpha = \beta = \cos^{-1} b \cos bt$ и $H_1 x = -\gamma_b(x'(-1)) + \gamma_b(x'(1))$. Тогда $x_1 = sh^{-1} 1\, sh\, t$ и $x_2 = -x_1$ являются решениями краевой задачи (I). Если максимальное решение x_m существует, то оно должно удовлетворять условиям $x_m(-1) = x_m(1) = 1$. Но тогда не удовлетворяется граничное условие $H_1 x_m = 0$.

Если в примере ЕМ4 сделать замену $H_1 \leftrightarrow H_2$, то получим пример

ЕМ42 000000-+ 28.

Аналогично предыдущему для TG018 получаем схему:

```
j01  ---+---+  28  00-+0000  28  j02-j03
j02  --0+---+  28  000000-+  28  j04-j05
j03  ---0---+  28  000000-+  28  j06-j07
j04  --0+--0+  28  TM30
j05  --0+---0  28  TM02
j06  ---0--0+  28  TM01
j07  ---0---0  28  TM05.
```

Таким образом, теорема TG018 приводит к теоремам ТМ30, ТМ30 и к частным случаям теорем ТМ01 и ТМ02.

Остальные порождающие теоремы работы [3] будут рассмотрены в следующих статьях.

Литература

I. Лепина Э.И. Краевые задачи без максимального решения// Теоретические и численные исследования краевых задач.- Рига: ЛГУ им.П.Стучки, I989.- С.9I-99.

2. Лепина Э.И. О максимальных решениях краевых задач для уравнения второго порядка // Актуальные вопросы крае-

вых задач. Теория и приложения.- Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1988.- С.131-139.

3. Лепин А.Я., Лепин Л.А. Краевые задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка.- Рига: Зинатне, 1988.- 211 с.

Поступила 20.10.89

УДК 517.9II

М.М.Адъютов, Ю.А.Клоков

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДУ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ОСОБЕННОСТЯМИ

В статье [I] доказано существование положительного решения начальной задачи

$$x'' = t^p x^q x'^r \varphi(t,x,x'), \tag{I}$$

$$x(0)=0, \quad \lim_{t\to 0} t^{-\alpha} x(t) = k, \tag{2}$$

для $\quad \varphi_0 = \varphi(0,0,0) > 0 \quad$ и (3)

$$\alpha = \frac{2+p-r}{1-q-r} > 1. \tag{4}$$

Параметр k определяется из выражения

$$k^{1-q-r}(\alpha-1) = \alpha^{r-1}\varphi_0. \tag{5}$$

В данной работе доказана единственность этого решения, а также рассмотрен случай, когда знаменатель в (4) обращается в нуль, т.е.

$$1-q-r=0. \tag{6}$$

Т е о р е м а. Пусть функция φ непрерывна вместе со своими частными производными по второму и третьему аргументу в точке (0,0,0). Тогда

I) если $1-q-r<0$, то задача (I)-(5) имеет бесконечно много решений;

2) если $1-q-r>0$ и $r<1+\frac{\alpha}{\alpha-1}$, то задача

(I)-(5) также имеет бесконечно много решений;

3) если $1-q-r>0$ и $r<1+\frac{\alpha}{\alpha-1}$, то решение задачи (I)-(5) единственно.

Доказательство. Сделаем замену

$$x(t)=kt^{\alpha}u(t).$$

Тогда $x'=k\alpha t^{\alpha-1}u+kt^{\alpha}u'$,

$$x''=k\alpha(\alpha-1)ut^{\alpha-2}+2k\alpha t^{\alpha-1}u'+kt^{\alpha}u''.$$

Подставим в уравнение (I):

$$t^2u''+2\alpha tu'+\alpha(\alpha-1)u=k^{q+r-1}t^{p+\alpha q+r(\alpha-1)-\alpha+2}u^q(tu'+$$

$$+\alpha u)^r\varphi(t,kt^{\alpha}u,k\alpha t^{\alpha-1}u+kt^{\alpha}u').$$

Из (4) и (5) следует

$$k^{q+r-1}=\frac{\alpha-1}{\alpha^{r-1}\varphi_0}\quad и\quad p+\alpha q+r(\alpha-1)-\alpha+2=0.$$

В полученном уравнении сделаем замену независимой переменной $t=e^s$. Тогда имеем

$$\frac{d^2u}{ds^2}+(2\alpha-1)\frac{du}{ds}+\alpha(\alpha-1)u=\frac{\alpha-1}{\alpha^{r-1}\varphi_0}u^q(u'+\alpha u)^r\varphi(e^s,$$

$$ke^{\alpha s}u,k\alpha e^{(\alpha-1)s}u+ke^{(\alpha-1)s}u').$$

Для этого уравнения первое из условий получим из (2):

$$\lim_{s\to-\infty}u(s)=1.$$

Второе условие

$$\lim_{s\to-\infty}u'(s)=0$$

может быть доказано аналогично тому, как это сделано в работе [4]. Замена $u(s)=1+z(s)$ переводит эти условия в условия

$$\lim_{s\to-\infty}z(s)=0\quad и\quad \lim_{s\to-\infty}z'(s)=0, \tag{7}$$

а уравнение принимает вид

$$\varkappa'' + (2\alpha-1)\varkappa' + \alpha(\alpha-1)\varkappa + (\alpha-1)\alpha =$$

$$= \frac{\alpha-1}{\alpha^{r-1}\varphi_0}(1+\varkappa)^q(\varkappa'+\alpha\varkappa+\alpha)^r\varphi(e^s, \tag{8}$$

$$ke^{\alpha s}(1+\varkappa),\ ke^{(\alpha-1)s}(\varkappa'+\alpha\varkappa+\alpha)).$$

Линеаризуя это уравнение в окрестности особой точки (0,0) и обозначая через ε_i, (i = I, 2, 3,...)
слагаемые порядка малости выше первого по $\varkappa$ и $\varkappa'$, получаем:

$$(1+\varkappa)^q = 1 + q\varkappa + \varepsilon_1,$$

$$(\varkappa'+\alpha\varkappa+\alpha)^r = \alpha^r + r\alpha^r\varkappa + r\alpha^{r-1}\varkappa' + \varepsilon_2,$$

$$\varphi(e^s, ke^{\alpha s}(1+\varkappa), ke^{(\alpha-1)s}(\varkappa'+\alpha\varkappa+\alpha)) = \varphi_0 + \varepsilon_3.$$

Отсюда получаем линейную часть уравнения (8):

$$\varkappa'' + (\alpha + (\alpha-1)(1-r))\varkappa' + \alpha(\alpha-1)(1-r-q)\varkappa = 0, \tag{9}$$

характеристическое уравнение для которого

$$n^2 + (\alpha + (\alpha-1)(1-r))n + \alpha(\alpha-1)(1-r-q) = 0.$$

По предположению числа α и $\alpha - 1$ положительные.
Тогда возможны случаи:

I) $1-r-q<0$ - корни характеристического уравнения действительные имеют разные знаки, следовательно, особая точка - седло. и существует траектория, выходящая из этой точки

$$\varkappa' = n_1\varkappa,\quad n_1 > 0,$$

откуда $x = Ce^{n_1 s}$, т.е. существует однопараметрическое семейство решений (9), а следовательно и (8), удовлетворяющих условию (7). Из существования бесконечного множества решений задачи (7), (8) очевидно следует существование бесконечного множества решений задачи (I)-(5);

2) $1-\tau-q>0$ и $\alpha+(\alpha-1)(1-\tau)<0$ - действительная часть обоих корней характеристического уравнения положительна. Особая точка - неустойчивый фокус, поэтому так же, как и в предыдущем случае, существуют траектории, выходящие из особой точки. Следовательно, может быть построено двухпараметрическое семейство решений задичи (7), (8). Отсюда следует существование бесконечного множества решений задачи (I)-(5);

3) $1-\tau-q>0$ и $\alpha+(\alpha-1)(1-\tau)>0$ - действительная часть обоих корней характеристического уравнения отрицательна. Особая точка - устойчивый фокус. Ни одна фазовая траектория не выходит из особой точки, поэтому единственное решение (9), удовлетворяющее (7), это $x(S)\equiv 0$. Согласно [2] , задача (8), (7) (и, следовательно, (I)-(5)) также имеет единственное решение.

Рассмотрим случай (6). При этом $\tau = 1-q$, и уравнение (I) принимает вид

$$x'' = t^p x^q x'^{1-q} \varphi(t,x,x').$$

Преобразуем это уравнение

$$1-\frac{x''x}{x'^2} = 1-t^p\frac{x^{q+1}}{x'^{q+1}}\varphi(t,x,x')$$

и обозначим $u = xx'^{-1}$. Получаем

$$u' = 1-t^p u^{q+1}\varphi(t,x,x') \qquad . \quad (10)$$

В окрестности нуля

$$\frac{x(t)}{x'(t)} = \frac{\int_0^t x'(s)ds}{x'(t)} \leq \frac{x'(t)t}{x'(t)} = t \qquad (11)$$

или

$$u(0) = 0. \qquad (12)$$

Если $\lim\limits_{t\to 0} u'(t) = 1$, то мы получаем решения с $\alpha = 1$ в (4), о которых все известно [1, 3]. Такие решения получаются, когда $p+q+1>0$. Никаких других решений в этом случае получить нельзя, что непосредственно следует из оценки (11).

При $p+q+1=0$ существует решение (10), представимое в окрестности нуля в виде

$$u(t) = At\,(1+O(1)), \qquad (13)$$

где A - положительный корень уравнения

$$1 - A^{-p}\varphi_0 = A.$$

Несложно показать, что если последнее уравнение не имеет положительных корней, то нет и решений у задачи (10), (12). Для этого достаточно заметить, что при $p+q+1=0$ получается уравнение с разделяющимися переменными. Из (13) получаем в окрестности нуля

$$x(t) = Ct^{1/A}\,(1+O(1)),$$

где C - произвольная постоянная.

При $p+q+1<0$ решение уравнения (10) с условием (12) представимо вблизи нуля в виде

$$u(t) = t^{-\frac{p}{1+q}}\,(1+O(1))$$

или

$$x(t) = C\exp\left(t^{\frac{p}{1+q}}\right)(1+O(1)),$$

где C - произвольная постоянная. Т.к. $\frac{p}{1+q} < 0$, то существует бесконечно много решений, стремящихся к нулю. К нулю стремятся и производные этих решений, но ни для одного из них не выполняется второе из условий (4) ни при каких значениях K и α.

Есть гипотеза, что единственность задачи (1)-(5) в случае $1-q-r>0$, $r<1+\frac{\alpha}{\alpha-1}$ имеет место, если φ непрерывна и удовлетворяет локальному условию Липшица по x и x'. Этот факт заведомо верен, если, например, $p=r=0$, $-1<q<1$. Заметим, что при этом условие Липшица является существенным [5].

Литература

1. Адъютов М.М., Клоков Ю.А. Об одной начальной задаче для ОДУ второго порядка с особенностями// Дифференциальные уравнения. 1989. - Т. 25. - № 7. - С.1268-1270.
2. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. - М., 1958. - 474 с.
3. Гризанс Г.П., Клоков Ю.А. Об одной начальной задаче для уравнения второго порядка с несуммируемой особенностью // Латв.мат.ежегодник. - Рига: Зинатне, 1984. - Вып. 28. - С. 14-24.
4. Клоков Ю.А. Одна предельная краевая задача для уравнения $\ddot{x}+\dot{x}f(x,\dot{x})+\varphi(x)=0$ // Известия ВУЗов. Математика.-1959. - № 6 (13). - С. 72-79.
5. Адъютов М.М., Клоков Ю.А. О единственности положительного решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка// Краевые задачи обыкновенных дифференциальных уравнений. - Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1987. - С. 3-11.
6. Демидов М.А., Клоков Ю.А., Михайлов А.П. О некоторых сингулярных задачах для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка// Дифференциальные уравнения. 1987. - Т. 23. - № 7. - С. 1278-1282.
7. Демидов М.А., Клоков Ю.А., Михайлов А.П. Структуры при безударном сферическом сжатии газа с произвольных распределением энтропии// ИПМ им.М.В.Келдыша АН СССР. Препринт № 73. - М., 1985.
8. Демидов М.А., Михайлов А.П. Локализация и структуры при адиабатическом сжатии конечной массы газа в режиме с обострением// ИПМ им.М.В.Келдыша АН СССР. Препринт № 8. - М., 1983.

Поступила 07.12.89.

УДК 517.927

Ф.Ж.Садырбаев

ДВУХТОЧЕЧНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

I. В статье рассматривается краевая задача вида

$$x^{(4)}=f(t,x), \tag{1}$$

$$x(a)=A,\ x'(a)=A_1,\ x''(a)=A_2,\ x(b)=B, \tag{2}$$

где функция f предполагается непрерывной вместе с производной f_x на множестве $[a,b]\times\mathbb{R}$, $[a,b]=I$ - конечный интервал. Некоторые утверждения формулируются в терминах соответствующего уравнения в вариациях относительно решения ξ.

$$y^{(4)}=f_x(t,\xi(t))y. \tag{3}$$

В связи с этим в п.3 приводятся сведения из теории линейных уравнений вида

$$y^{(4)}=p(t)y. \tag{4}$$

2. Здесь доказывается теорема существования для задачи (I), (2), в которой используются понятия нижней и верхней функций. Полученный результат аналогичен теореме существования из работы [I], в которой изучалась краевая задача для (I) с симметричными граничными условиями.

Л е м м а I (принцип максимума). Функция $u\in C^4[a,b]$, удовлетворяющая в интервале I неравенству $u^{(4)}\geqslant 0$ и неравенствам на концах интервала $u(a)\leqslant 0,\ u'(a)\leqslant 0,\ u''(a)\leqslant 0,\ u(b)\leqslant 0$, не может иметь в I положительного максимума.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $u(t_0)=\max\{u(t): t\in I\}>0$. Тогда, ввиду условия $u(a)\leqslant 0$, найдется $t_1\in(a,t_0)$ такое, что $u(t_1)>0,\ u'(t_1)>0$.

Поскольку $u'(a) \leq 0$, найдется $t_2 \in (a, t_1)$ такое, что $u''(t_2) > 0$.

С другой стороны, $u''(a) \leq 0$, $u''(t_0) \leq 0$ и, т.к. $(u'')'' \geq 0$ в интервале I (т.е. функция $u''(t)$ – вогнутая), должно выполняться неравенство $u''(t) \leq 0$ при $t \in (a, t_0)$. Но это противоречит тому, что $u''(t_2) > 0$.

Доказательство завершено.

Изменением неравенств на противоположные получаем принцип минимума.

Теорема I. Пусть существуют функции $\alpha, \beta \in C^4[a, b]$, удовлетворяющие условиям:

I) $\alpha(t) \leq \beta(t)$, $t \in I$;

2) $\alpha^{(4)} \geq f(t, x)$, $\beta^{(4)} \leq f(t, x)$, $(t, x) \in \omega = \{(t, x) : t \in I, \alpha \leq x \leq \beta\}$;

3) $\alpha(a) \leq A \leq \beta(a)$, $\alpha'(a) \leq A_1 \leq \beta'(a)$, $\alpha''(a) \leq A_2 \leq \beta''(a)$, $\alpha(b) \leq B \leq \beta(b)$.

Тогда существует решение $x(t)$ задачи (I), (2), удовлетворяющее оценке $\alpha \leq x \leq \beta$.

Доказательство. Определим ограниченную непрерывную функцию F равенством $F(t, x) = f(t, \delta(\alpha, x, \beta))$, где $\delta(\alpha, x, \beta)$ – "срезка". Так как уравнение $x^{(4)} = 0$ имеет лишь тривиальное решение, удовлетворяющее однородным краевым условиям вида (2), существует решение x уравнения $x^{(4)} = \mathcal{F}(t, x)$, удовлетворяющее граничным условиям (2). Разность $u(t) = x(t) - \beta(t)$, ввиду $u^{(4)}(t) = x^{(4)} - \beta^{(4)} \geq f(t, \delta(\alpha, x(t), \beta)) - f(t, \delta(\alpha, x(t), \beta)) = 0$, удовлетворяет условиям леммы I и, следовательно, не имеет положительного максимума. Аналогично отрицательного минимума не имеет функция $\alpha - x$, и, следовательно, решение $x(t)$ принимает значения между значениями α и β, где функции f и $\mathcal{F}$ совпадают.

Доказательство завершено.

3. Формулировка дальнейших результатов требует некоторых сведений из теории линейных уравнений вида (4), которые будут приведены, следуя работам [2–5].

Согласно [2], [5] n-ой сопряженной к $t = a$ точкой (обозначается η_n) относительно уравнения (4) называется наименьшее значение $b>a$ такое, что существует нетривиальное решение (4) с $n+3$ нулями (считая кратности) в $[a,b]$, обращающееся в нуль при $t=a$ и $t=b$.

В работе [3] исследовались случаи $p>0$ и $p<0$. Было показано, что в первом случае значения η_n (если они существуют) совпадают с двойными нулями решений, имеющих двойной нуль в $t=a$, а во втором - с нулями первого главного решения, т.е. решения, определяемого начальными данными

$$y(a)=y'(a)=y''(a)=0, \quad y'''(a)=1. \qquad (5)$$

Все нули такого решения, лежащие в $(a,+\infty)$, могут быть только простыми. Более того, в [3] показано, что при $p<0$ любое нетривиальное решение уравнения (4) имеет не более одного двойного нуля.

Это же будет верно для случая, когда коэффициент $p(t)$ может принимать положительные значения, оставаясь достаточно малым.

В работе [2], где изучалось более общее, чем (4), линейное уравнение четвертого порядка, среди прочего содержится следующий результат.

Т е о р е м а 2. Пусть уравнение вида (4) обладает свойством P: не существует нетривиального решения, обладающего двумя кратными нулями (под кратным нулем понимается точка, где обращаются в нуль как само решение, так и его производная).

Тогда:

1) сопряженная к $t=a$ точка η_n (если она существует, т.е. если уравнение имеет решение с $n+3$ нулями) совпадает с n-м в интервале $(a,+\infty)$ нулем первого главного решения уравнения (4), т.е. решения, определяемого начальными данными $y(a)=y'(a)=y''(a)=0,\ y'''(a)=1$,

2) сопряженные к $t=a$ точки η_n непрерывно зависят от коэффициента p.

4. Докажем теперь результаты о свойствах решений краевой задачи (I), (2), выражаемых в терминах линейного уравнения в вариациях (3), составленного относительно данного решения.

Наряду с уравнением (3) будем рассматривать семейство линейных уравнений

$$y^{(4)} = \varphi_\gamma(t) y, \tag{6}$$

где $y = x - \xi$, ξ - некоторое фиксированное решение краевой задачи (I), (2), x - решение уравнения (I), определяемое начальными данными

$$x(a) = A, \; x'(a) = A_1, \; x''(a) = A_2, \; x'''(a) = \xi''' + \gamma,$$

где γ - числовой параметр,

$$\varphi_\gamma(t) = \begin{cases} \dfrac{f(t, x(t)) - f(t, \xi(t))}{x(t) - \xi(t)}, & x \neq \xi \\ f_x(t, \xi(t)), & x = \xi \end{cases}$$

Заметим, что любому нетривиальному решению (6), удовлетворяющему однородным краевым условиям вида (2), соответствует некоторое решение задачи (I), (2).

Если $f_x < 0$, то любое из уравнений (6), ввиду определения коэффициента φ_γ, обладает свойством P, т.е. не существует нетривиального решения с двумя двойными нулями.

На этих двух замечаниях основаны дальнейшие рассуждения.

Напомним, что уравнение n-го порядка называется неколеблемым на интервале (a, b), если данный интервал не содержит точки, сопряженной к $t = a$.

Т е о р е м а 3. Пусть $f_x < 0$, и выполняются условия теоремы I.

Тогда существует решение краевой задачи (I), (2) $\xi(t)$ такое, что $\alpha \le \xi \le \beta$ и линейное уравнение в вариациях (3) неколеблемо на интервале (a, b).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим последовательность вспомогательных краевых задач следующим образом. Пусть $\mathcal{E}(t,x)$ – функция, обладающая свойствами:

I) $\mathcal{E}(t,x)=0,\ (t,x)\in\omega$;

2) $\mathcal{E}$ непрерывна вместе с частной производной $\mathcal{E}_x$ в областях $x>\beta,\ x<\alpha$;

3) $\mathcal{E}(t,\beta)=0,\ \mathcal{E}(t,\alpha)=0,\ \mathcal{E}_x(t,x)<0,\ x>\beta,\ x<\alpha$;

4) $\mathcal{E}_x(t,\beta(t))=f_x(t,\beta(t)),\ \mathcal{E}_x(t,\alpha(t))=f_x(t,\alpha(t))$;

5) $0>\mathcal{E}>-\frac{1}{n},\ \ x>\beta$;

$\frac{1}{n}>\mathcal{E}>0,\ \ x<\alpha$.

Очевидно, что для любого натурального n такая функция $\mathcal{E}$ может быть построена.

Определим теперь ограниченную функцию F_n как сумму $f(t,\delta(\alpha,x,\beta))+\mathcal{E}(t,x)$, а функции α_n,β_n – равенствами $\alpha_n=\alpha+h_1,\ \beta_n=\beta+h_2$, где h_1,h_2 – решения уравнений $h_1^{(4)}=\frac{1}{n},\ h_2^{(4)}=-\frac{1}{n}$ удовлетворяющие однородным краевым условиям вида (2). Для β_n получаем $\beta_n^{(4)}=\beta^{(4)}-\frac{1}{n}\leqslant f(t,\delta(\alpha,x,\beta))+\mathcal{E}(t,x)$, т.е. β_n является верхней функцией для уравнения

$$x^{(4)}=F_n(t,x),\tag{7}$$

так же, как α_n – нижней функцией. Поскольку для разностей $u_n=x_n-\beta_n,\ \ v_n=\alpha_n-x_n$, где x_n – любое решение этого уравнения, удовлетворяющее условиям (2), справедливы условия принципов максимума и минимума соответственно (лемма I), любое решение x_n удовлетворяет оценке $\alpha_n\leqslant x_n\leqslant\beta_n$.

Поскольку функция F_n ограничена, множество возможных решений задачи (7), (2) равномерно ограничено, и, следовательно, существует решение ξ с максимальным значением третьей производной в точке $t=a$. Если решений краевой задачи конечное число, то это очевидно, а если бесконечное, то, взяв в качестве начального значения $\xi'''(a)$ верхнюю грань значений в $t=a$ третьих производных решений и используя компактность в C^3 множества решений задачи (7), (2), предельным переходом получаем

ξ. Покажем, что это решение будет обладать требуемым свойством.

Доопределим функцию $F_n(t,x)$ при $t>b$ так, чтобы сохранить непрерывность F_n и частной производной по x в полупространстве $t>0$, $x\in\mathbb{R}$, а также ограниченность F_n в этом же полупространстве. Рассмотрим теперь определенное относительно функции F_n семейство линейных уравнений вида (6).

Пусть $\eta_1(\gamma)$ - первая сопряженная к $t=a$ точка уравнения (6). Эта точка, согласно линейной теории, реализуется решением $y(t)$, определяемым начальными данными $y(a)=y'(a)=y''(a)=0$, $y'''(a)=\gamma$. Это решение совпадает с разностью $x(t)-\xi(t)$, где x - решение уравнения (7), имеющее те же начальные значения производных до второго порядка включительно, что и ξ, и удовлетворяющее условию $x'''(a)-\xi'''(a)=\gamma$. Если решение ξ не обладает требуемым свойством, т.е. уравнение в вариациях не является неколеблемым в (a,b), то для малых значений γ справедливо неравенство $\eta_1(\gamma)<b$. Заметим теперь, что главное решение $\tilde{y}$ уравнения (7), получающееся из $y(t)$ делением на γ, удовлетворяет, как видно из (6), соотношению

$$\tilde{y}^{(4)}=(F_n(t,y(t))-F_n(t,\xi(t)))/\gamma \quad , \qquad (7)$$

и, следовательно, при увеличении γ стремится к решению уравнения $y^{(4)}=0$, удовлетворяющему условиям (5). При этом точка $\eta_1(\gamma)$, непрерывно изменяясь вместе с γ, должна покинуть интервал $[a,b]$. Значению $\gamma>\xi'''(a)$, при котором $\eta_1(\gamma)=b$, соответствует решение $x(t)$ краевой задачи (7), (2), что противоречит выбору решения ξ, как решению задачи (7), (2) с максимальным значением третьей производной в $t=a$

Таким образом, каждому натуральному n соответствует решение ξ_n краевой задачи (7), (2), обладающее свойством: уравнение в вариациях, составленное относительно ξ_n, неколеблемо в (a,b). Существует равномерная по n оценка норм производных решений ξ_n (это следует, например, из [6], гл.8), откуда вытекает компактность последовательности $\{\xi_n\}$ в пространстве $C^3[a,b]$. Предельный элемент этой последовательности ξ является решением краевой задачи (I), (2), обладающим требуемым свойством.

Аналогичный результат о существовании решения, обладающего свойством локальной неколеблемости (в смысле неколеблемости на данном интервале соответствующего уравнения в вариациях) в задаче Дирихле для уравнения второго порядка был получен в работе [7].

По сходной схеме может быть доказан также следующий результат.

Т е о р е м а 4. Пусть $f_x < 0$, и выполняются условия теоремы I. Пусть существует решение ξ задачи (I), (2), удовлетворяющее оценке $\alpha \le \xi \le \beta$ и обладающее свойством: интервал (a,b) содержит k точек, сопряженных к $t=a$ относительно уравнения в вариациях (3).

Тогда существует еще не менее $2k$ решений краевой задачи (I), (2).

Схема доказательства. Как и выше, строятся функции $F_n(t,x)$ и рассматриваются уравнения (7) и связанные с ними семейства линейных уравнений вида (6). При изменении γ сопряженные точки $\eta_i(\gamma)$, $i=1,2,\dots,k$, изменяются непрерывно, отделены друг от друга, пока значения γ отделены от бесконечности (это следует из непрерывной зависимости η от коэффициента $\mathcal{C}_\gamma$). Поскольку функции F_n ограничены, можно показать, что $\eta_i(\gamma)$ стремятся к бесконечности при стремлении к бесконечности и, следовательно, переходят через $t=b$. Фиксируя максимальные значения γ, при которых $\eta_i(\gamma) = b$, получаем k решений x_{n_i} задачи (7), (2). Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим k решений исходной краевой задачи. При изменении γ в отрицательной полуоси $(-\infty, 0)$ получаем еще k решений.

Аналогичные результаты для уравнений второго порядка приводятся в книге [8, гл.I5].

Литература

I. Dunninger D.R. Existence of Positive Solutions for Fourth Order Nonlinear Problems // Bolletino Unione Mat. Ital., 1987, 1-B, 7, 1129-1138.
2. Peterson A.C. The Distribution of Zeros of Extremal Solutions of a Fourth Order Differential Equation for the n-th Conjugate Point // J. of Differential Equations, 1970, v.8, 502-511.
3. Leighton W., Nehari Z. On the oscillation of solutions of self-adjont linear differential equations of the fourth order // Trans. Amer. Math. Soc., 1958, v.89, N 2, p.325-377.
4. Кондратьев В.А. О колеблемости решений линейных уравнений третьего и четвертого порядка // Труды Московского математ. общества.-1959.-Т.8.-С.259-28I.
5. Левин А.Ю. Некоторые вопросы осцилляции решений линейных дифференциальных уравнений // ДАН СССР.-1963.-Т.148, I 3.-С.5I2-5I5.
6. Васильев Н.И., Клоков Ю.А. Основы теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений - Рига: Зинатне, 1978.- 183 с.
7. Jackson L., Schrader K. Comparison Theorems for Nonlinear Differential Equations // J. of Differential Equations, 1967, v.3, N 2, P.248-255.
8. Красносельский М.А., Перов А.И., Поволоцкий А.Г., Забрейко П.П. Векторные поля на плоскости - М.: Физматгиз, 1963.- 245 с.

Поступила 12.12.89

УДК 517.927

А.Я.Лепин

РАЗРЕШИМОСТЬ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С УСЛОВИЕМ ШРЕДЕРА

Рассмотрим краевые задачи:

$$x''=f(t,x,x'),\ H_1x=h_1,\ H_2x=h_2,\ \alpha\le x\le\beta, \tag{1}$$

$$x''=f(t,x,x'),\ H_1x=h_1,\ H_2x=h_2,\ \alpha\le x\le\beta,\quad \alpha'(a)\ge x'(a)\ge\beta'(a), \tag{2}$$

$$x''=f(t,x,x'),\ H_1x=h_1,\ H_2x=h_2,\ \alpha\le x\le\beta,\quad \alpha'(a)\ge x'(a)\ge\beta'(a),\ \alpha'(b)\le x'(b)\le\beta'(b), \tag{3}$$

где $f: I\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ удовлетворяет условиям Каратеодори, $I=[a,b]$, $a\in\mathbb{R}$, $b\in(a,\infty)$, $H_{1,2}\in C(C_1(I,\mathbb{R}),\mathbb{R})$, $h_{1,2}\in\mathbb{R}$, $\alpha\in A(I,\mathbb{R})$, $\beta\in B(I,\mathbb{R})$, $A(I,\mathbb{R})$ - множество нижних функций, а $B(I,\mathbb{R})$ - множество верхних функций уравнения $x''=f(t,x,x')$ (см. [1-2]). В [3] приводятся теоремы о разрешимости краевых задач (1-3) при дополнительных предположениях: ограниченность правой части уравнения суммируемой функцией и единственность решения задачи Коши. Наша цель-избавиться от этих предположений, заменив их условием Шредера: для любых $t_1\in[a,b)$, $t_2\in(t_1,b]$ и любого решения $x:(t_1,t_2)\to\mathbb{R}$ уравнения $x''=f(t,x,x')$ из $\alpha(t)\le x(t)\le\beta(t)$, $t\in(t_1,t_2)$ следует ограниченность $\{x'(t): t\in(t_1,t_2)\}$.

Покажем, что условие Шредера эквивалентно ограниченности правой части. Действительно, из условия Шредера следует существование $M\in(0,\infty)$ такого, что для

$$f_*(t,x,x')=f(t,\delta(\alpha(t),x,\beta(t)),\delta(-M,x',M))$$

$$\alpha\in A_{f_*}(I,\mathbb{R}),\quad \beta\in B_{f_*}(I,\mathbb{R})\quad и$$

$$\{x\in S_f(I,\mathbb{R}): \alpha\le x\le \beta\} = \{x\in S_{f_*}(I,\mathbb{R}): \alpha\le x\le \beta\},$$

где

$$\delta(x,y,z) = (x+|x-y|-|y-z|+z)2^{-1}, \quad \text{а} \quad S_f(I,\mathbb{R}) =$$

$= S(I,\mathbb{R})$ – множество решений уравнения $x'' = f(t,x,x')$. В дальнейшем будем считать, что $f = f_*$.

Пусть $\beta_\kappa = \beta + \kappa^{-1}$, $\kappa\in\mathbb{N}$. Тогда $\beta_\kappa\in B(I,\mathbb{R})$ и $\alpha<\beta_\kappa$, $\kappa\in\mathbb{N}$. Теперь аппроксимируем правую часть так, чтобы была единственность решения задачи Коши. Пусть для $\kappa\in\mathbb{N}$, $m\in\{4\kappa, 4\kappa+1,\dots\}$, $n\in\{m, m+1,\dots\}$, $t\in I$, $x,y,z\in\mathbb{R}$

$$\varphi(z) = 2^{-1}|z-2| - |z-1| + |z+1| - 2^{-1}|z+2|,$$

$$\psi(z) = 2^{-1}(|z-2| - |z-1| - |z+1| + |z+2|),$$

$$\varphi_m(z) = m^{-1}\varphi(mz), \qquad \psi_m(z) = \psi(mz),$$

$$f_{\kappa m}(t,x,y) = f(t, x-\varphi_m(x-\alpha(t))\psi_m(y-\alpha'(t)) -$$

$$-\varphi_m(x-\beta_\kappa(t))\psi_m(y-\beta'(t)),\ y-\varphi_m(y-\alpha'(t))\psi_m(x-\alpha(t)) -$$

$$-\varphi_m(y-\beta'(t))\psi_m(x-\beta_\kappa(t))),$$

$$f_{\kappa mn}(t,x,y) = (2n)^{-2}\int\limits_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}}\int\limits_{y-\frac{1}{n}}^{y+\frac{1}{n}} f_{\kappa m}(t,u,v)\,du\,dv.$$

При фиксированном $t\in I$ функция $f_{\kappa m}$ отличается от f только в $2m^{-1}$ окрестностях точек $(\alpha(t),\alpha'(t))$, $(\beta_\kappa(t),\beta'(t))$, равна $f(t,\alpha(t),\alpha'(t))$ в m^{-1} окрестности точки $(\alpha(t),\alpha'(t))$ и $f(t,\beta_\kappa(t),\beta'(t))$ в m^{-1} окрестности точки $(\beta_\kappa(t),\beta'(t))$. Функция $f_{\kappa mn}$ удовлетворяет обобщенному условию Липшица по второму и третьему аргументам, $\alpha\in A_{f_{\kappa mn}}(I,\mathbb{R})$ и $\beta_\kappa\in B_{f_{\kappa mn}}(I,\mathbb{R})$.

Т е о р е м а I. Пусть $\alpha \le \beta$ выполняется условие Шредера, и для любого $x \in S(I, \mathbb{R})$ из $\alpha \le x \le \beta$ следует:

$$x(a)=\alpha(a) \wedge x(b)=\alpha(b) \Rightarrow H_1x \le h_1 \vee H_2x \le h_2,$$

$$x(a)=\alpha(a) \wedge H_2x=h_2 \Rightarrow H_1x \le h_1,$$

$$x(a)=\alpha(a) \wedge x(b)=\beta(b) \Rightarrow H_1x \le h_1 \vee H_2x \ge h_2,$$

$$x(b)=\beta(b) \wedge H_1x=h_1 \Rightarrow H_2x \ge h_2,$$

$$x(a)=\beta(a) \wedge x(b)=\beta(b) \Rightarrow H_1x \ge h_1 \vee H_2x \ge h_2,$$

$$x(a)=\beta(a) \wedge H_2x=h_2 \Rightarrow H_1x \ge h_1,$$

$$x(a)=\beta(a) \wedge x(b)=\alpha(b) \Rightarrow H_1x \ge h_1 \vee H_2x \le h_2,$$

$$x(b)=\alpha(b) \wedge H_1x=h_1 \Rightarrow H_2x \le h_2.$$

Тогда существует решение краевой задачи (I).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим случай, когда найдется $k_0 \in N$ такое, что для $k \in \{k_0, k_0+1, \dots\}$, $m \in \{4k, 4k+1, \dots\}$ и $n \in \{m, m+1, \dots\}$ для любого $x \in S_{f_{kmn}}(I, \mathbb{R})$ из $\alpha \le x \le \beta_k$ следует:

$$x(a)=\alpha(a) \wedge x(b)=\alpha(b) \Rightarrow H_1x \le h_1 \vee H_2x \le h_2,$$

$$x(a)=\alpha(a) \wedge H_2x=h_2 \Rightarrow H_1x \le h_1,$$

$$x(a)=\alpha(a) \wedge x(b)=\beta_k(b) \Rightarrow H_1x \le h_1 \vee H_2x \ge h_2,$$

$$x(b)=\beta_k(b) \wedge H_1x=h_1 \Rightarrow H_2x \ge h_2,$$

$$x(a)=\beta_k(a) \wedge x(b)=\beta_k(b) \Rightarrow H_1x \ge h_1 \vee H_2x \ge h_2,$$

$$x(a)=\beta_k(a) \wedge H_2x=h_2 \Rightarrow H_1x \ge h_1,$$

$$x(a)=\beta_k(a) \wedge x(b)=\alpha(b) \Rightarrow H_1x \ge h_1 \vee H_2x \le h_2,$$

$$x(b)=\alpha(b) \wedge H_1x=h_1 \Rightarrow H_2x \le h_2$$

Тогда из [3] следует существование решения x_{kmn} краевой задачи

$$x'' = f_{kmn}(t, x, x'),\ H_1 x = h_1,\ H_2 x = h_2,\ \alpha \le x \le \beta_k. \quad (4)$$

Из x_{kmn} можно выделить сходящуюся последовательность $x_i \to x \in S(I, \mathbb{R})$ такую, что $\alpha \le x \le \beta$, $H_1 x = h_1$ и $H_2 x = h_2$.

Рассмотрим случай, когда найдется последовательность $x_i \in S_{f_{k_i m_i n_i}}(I, \mathbb{R})$, $i = 1, 2, \ldots$ такая, что $k_i \to \infty$, $4k_i \le m_i \le n_i$, $\alpha \le x_i \le \beta_{k_i}$, $i = 1, 2, \ldots$ и $x_i \to x \in S(I, \mathbb{R})$, для которой не выполняются условия

$$x_i(a) = \alpha(a) \wedge x_i(b) = \alpha(b) \Rightarrow H_1 x_i \le h_1 \vee H_2 x_i \le h_2,$$

$$x_i(a) = \alpha(a) \wedge H_2 x_i = h_2 \Rightarrow H_1 x_i \le h_1,$$

$$x_i(a) = \alpha(a) \wedge x_i(b) = \beta_{k_i}(b) \Rightarrow H_1 x_i \le h_1 \vee H_2 x_i \ge h_2,$$

$$x_i(b) = \beta_{k_i}(b) \wedge H_1 x_i = h_1 \Rightarrow H_2 x_i \ge h_2,$$

$$x_i(a) = \beta_{k_i}(a) \wedge x_i(b) = \beta_{k_i}(b) \Rightarrow H_1 x_i \ge h_1 \vee H_2 x_i \ge h_2,$$

$$x_i(a) = \beta_{k_i}(a) \wedge H_2 x_i = h_2 \Rightarrow H_1 x_i \ge h_1,$$

$$x_i(a) = \beta_{k_i}(a) \wedge x_i(b) = \alpha(b) \Rightarrow H_1 x_i \ge h_1 \vee H_2 x_i \le h_2,$$

$$x_i(b) = \alpha(b) \wedge H_1 x_i = h_1 \Rightarrow H_2 x_i \le h_2.$$

Без ограничения общности можно считать, что нарушается одно из этих условий. Если $x_i(a) = \alpha(a)$, $x_i(b) = \alpha(b)$, $H_1 x_i > h_1$ и $H_2 x_i > h_2$ для $i = 1, 2, \ldots$, то решение краевой задачи (I). Действительно, $x(a) = \alpha(a)$, $x(b) = \alpha(b)$, $H_1 x \ge h_1$ и $H_2 x \ge h_2$. Из условий теоремы имеем $H_1 x \le h_1$ или $H_2 x \le h_2$. Следовательно, $H_1 x = h_1$ или $H_2 x = h_2$. Если $H_1 x = h_1$, то из условий теоремы следует $H_2 x \le h_2$. Следовательно, $H_2 x = h_2$. Если $H_2 x = h_2$, то из условий теоремы следует $H_1 x \le h_1$. Следовательно, $H_1 x = h_1$.

Если $x_i(a)=\alpha(a)$, $H_2x_i=h_2$ и $H_1x_i>h_1$ для $i=1,2,\ldots$, то x решение краевой задачи (I). Действительно, $x(a)=\alpha(a)$, $H_2x=h_2$ и $H_1x\geq h_1$. Из условий теоремы имеем $H_1x\leq h_1$. Следовательно, $H_1x=h_1$.

Аналогично доказывается следующие утверждения. Если $x_i(a)=\alpha(a)$, $x_i(b)=\beta_{K_i}(b)$, $H_1x_i>h_1$ и $H_2x_i<h_2$, $i=1,2,\ldots$, то x решение краевой задачи (I). Если $x_i(b)=\beta_{K_i}(b)$, $H_1x_i=h_1$ и $H_2x_i<h_2$, $i=1,2,\ldots$, то x решение краевой задачи (I). Если $x_i(a)=\beta_{K_i}(a)$, $H_2x_i=h_2$ и $H_1x_i<h_1$, $i=1,2,\ldots$, то x решение краевой задачи (I). Если $x_i(a)=\beta_{K_i}(a)$, $x_i(b)=\alpha(b)$, $H_1x_i<h_1$ и $H_2x_i>h_2$, $i=1,2,\ldots$, то x решение краевой задачи (I). Если $x_i(b)=\alpha(b)$, $H_1x_i=h_1$ и $H_2x_i>h_2$, $i=1,2,\ldots$, то x решение краевой задачи (I). Если $x_i(a)=\beta_{K_i}(a)$, $x_i(b)=\beta_{K_i}(b)$ и $H_1x_i<h_1$, $H_2x_i<h_2$, то x решение краевой задачи (I).

Т е о р е м а 2. Пусть $\alpha\leq\beta$, выполняется условие Шредера и для любого $x\in S(I,\mathbb{R})$ из $\alpha\leq x\leq\beta$ следует:

$$x(a)=\alpha(a)\wedge x(b)=\alpha(b)\Rightarrow H_1x+H_2x\leq h_1+h_2\ \vee\ H_1x-H_2x\geq h_1-h_2,$$

$$x(a)=\alpha(a)\wedge H_1x-H_2x=h_1-h_2\Rightarrow H_1x\leq h_1,$$

$$x(a)=\alpha(a)\wedge x(b)=\beta(b)\Rightarrow H_1x+H_2x\leq h_1+h_2\ \vee\ H_1x-H_2x\leq h_1-h_2.$$

$$x(b)=\beta(b)\wedge H_1x+H_2x=h_1+h_2\Rightarrow H_1x\leq h_1,$$

$$x(a)=\beta(a)\wedge x(b)=\beta(b)\Rightarrow H_1x+H_2x\geq h_1+h_2\ \vee\ H_1x-H_2x\leq h_1-h_2.$$

$$x(a)=\beta(a)\wedge H_1x-H_2x=h_1-h_2\Rightarrow H_1x\geq h_1,$$

$$x(a)=\beta(a) \wedge x(b)=\alpha(b) \Rightarrow H_1x+H_2x \geq h_1+h_2 \vee$$
$$H_1x-H_2x \geq h_1-h_2,$$
$$x(b)=\alpha(b) \wedge H_1x+H_2x=h_1+h_2 \Rightarrow H_1x \geq h_1.$$

Тогда существует решение краевой задачи (I).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим случай, когда найдется $k_0 \in N$ такое, что для $k \in \{k_0, k_0+1, \ldots\}$, $m \in \{4k, 4k+1, \ldots\}$ и $n \in \{m, m+1, \ldots\}$ для любого $x \in S_{f_{kmn}}(I, R)$ из $\alpha \leq x \leq \beta_k$ следует:

$$x(a)=\alpha(a) \wedge x(b)=\alpha(b) \Rightarrow H_1x+H_2x \leq h_1+h_2 \vee$$
$$H_1x-H_2x \geq h_1-h_2,$$
$$x(a)=\alpha(a) \wedge H_1x-H_2x=h_1-h_2 \Rightarrow H_1x \leq h_1,$$
$$x(a)=\alpha(a) \wedge x(b)=\beta_k(b) \Rightarrow H_1x+H_2x \leq h_1+h_2 \vee$$
$$H_1x-H_2x \leq h_1-h_2,$$
$$x(b)=\beta_k(b) \wedge H_1x+H_2x=h_1+h_2 \Rightarrow H_1x \leq h_1,$$
$$x(a)=\beta_k(a) \wedge x(b)=\beta_k(b) \Rightarrow H_1x+H_2x \geq h_1+h_2 \vee$$
$$H_1x-H_2x \leq h_1-h_2,$$
$$x(a)=\beta_k(a) \wedge H_1x-H_2x=h_1-h_2 \Rightarrow H_1x \geq h_1,$$
$$x(a)=\beta_k(a) \wedge x(b)=\alpha(b) \Rightarrow H_1x+H_2x \geq h_1+h_2 \vee$$
$$H_1x-H_2x \geq h_1-h_2,$$
$$x(b)=\alpha(b) \wedge H_1x+H_2x=h_1+h_2 \Rightarrow H_1x \geq h_1$$

Тогда из [3] следует существование решения x_{kmn} краевой задачи (4). Из x_{kmn} можно выделить сходящуюся последовательность $x_i \to x \in S(I, R)$ такую, что $\alpha \leq x \leq \beta$, $H_1x=h_1$ и $H_2x=h_2$.

Рассмотрим случай, когда найдется последовательность $x_i \in S_{4k_i m_i n_i}(I, R)$, $i = 1, 2, \dots$ такая, что $k_i \to \infty$, $4k_i \le m_i \le n_i$, $\alpha \le x_i \le \beta_{k_i}$, $i = 1, 2, \dots$ и $x_i \to x \in S(I, R)$, для которой не выполняются условия:

$$x_i(a) = \alpha(a) \wedge x_i(b) = \alpha(b) \Rightarrow H_1 x_i + H_2 x_i \le h_1 + h_2 \vee H_1 x_i - H_2 x_i \ge h_1 - h_2,$$

$$x_i(a) = \alpha(a) \wedge H_1 x_i - H_2 x_i = h_1 - h_2 \Rightarrow H_1 x_i \le h_1,$$

$$x_i(a) = \alpha(a) \wedge x_i(b) = \beta_{k_i}(b) \Rightarrow H_1 x_i + H_2 x_i \le h_1 + h_2 \vee H_1 x_i - H_2 x_i \le h_1 - h_2,$$

$$x_i(b) = \beta_{k_i}(b) \wedge H_1 x_i + H_2 x_i = h_1 + h_2 \Rightarrow H_1 x_i \le h_1,$$

$$x_i(a) = \beta_{k_i}(a) \wedge x_i(b) = \beta_{k_i}(b) \Rightarrow H_1 x_i + H_2 x_i \ge h_1 + h_2 \vee H_1 x_i - H_2 x_i \le h_1 - h_2,$$

$$x_i(a) = \beta_{k_i}(a) \wedge H_1 x_i - H_2 x_i = h_1 - h_2 \Rightarrow H_1 x_i \ge h_1,$$

$$x_i(a) = \beta_{k_i}(a) \wedge x_i(b) = \alpha(b) \Rightarrow H_1 x_i + H_2 x_i \ge h_1 + h_2 \vee H_1 x_i - H_2 x_i \ge h_1 - h_2,$$

$$x_i(b) = \alpha(b) \wedge H_1 x_i + H_2 x_i = h_1 + h_2 \Rightarrow H_1 x_i \ge h_1.$$

Без ограничения общности можно считать, что нарушается одно из этих условий. Если $x_i(a) = \alpha(a)$, $x_i(b) = \alpha(b)$, $H_1 x_i + H_2 x_i > h_1 + h_2$ и $H_1 x_i - H_2 x_i < h_1 - h_2$ для $i = 1, 2, \dots$, то x решение краевой задачи (I). Действительно, $x(a) = \alpha(a)$, $x(b) = \alpha(b)$, $H_1 x + H_2 x \ge h_1 + h_2$ и $H_1 x - H_2 x \le h_1 - h_2$. Из условий теоремы имеем $H_1 x + H_2 x \le h_1 + h_2$ или $H_1 x - H_2 x \ge h_1 - h_2$. Следовательно, $H_1 x + H_2 x = h_1 + h_2$ или $H_1 x - H_2 x = h_1 - h_2$. Если $H_1 x + H_2 x = h_1 + h_2$, то из условий теоремы следует $H_1 x \ge h_1$. Откуда $H_2 x \le h_2$, $H_1 x - H_2 x \ge h_1 - h_2$ и $H_1 x - H_2 x = h_1 - h_2$. Следовательно, $H_1 x = h_1$ и $H_2 x = h_2$. Если $H_1 x - H_2 x = h_1 - h_2$, то из условий теоремы следует $H_1 x \le h_1$. Откуда $H_2 x \le h_2$.

$H_1 x + H_2 x \leqslant h_1 + h_2$ и $H_1 x + H_2 x = h_1 + h_2$. Следовательно, $H_1 x = h_1$ и $H_2 x = h_2$.

Если $x_i(a) = \alpha(a)$, $H_1 x_i - H_2 x_i = h_1 - h_2$ и $H_1 x_i > h_1$ для $i = 1, 2, \ldots$, то x решение краевой задачи (I). Действительно, $x(a) = \alpha(a)$, $H_1 x - H_2 x = h_1 - h_2$ и $H_1 x \geqslant h_1$. Из условий теоремы имеем $H_1 x \leqslant h_1$. Следовательно, $H_1 x = h_1$ и $H_2 x = h_2$.

Аналогично доказываются следующие утверждения. Если $x_i(a) = \alpha(a)$, $x_i(b) = \beta_{k_i}(b)$, $H_1 x_i + H_2 x_i > h_1 + h_2$ и $H_1 x_i + H_2 x_i > h_1 - h_2$ для $i = 1, 2, \ldots$, то x решение краевой задачи (I). Если $x_i(a) = \beta_{k_i}(a)$, $x_i(b) = \beta_{k_i}(b)$, $H_1 x_i + H_2 x_i < h_1 + h_2$ и $H_1 x_i - H_2 x_i > h_1 - h_2$ для $i = 1, 2, \ldots$ то x решение краевой задачи (I). Если $x_i(a) = \beta_{k_i}(a)$, $H_1 x_i - H_2 x_i = h_1 - h_2$ и $H_1 x_i < h_1$ для $i = 1, 2, \ldots$, то x решение краевой задачи (I). Если $x_i(b) = \beta_{k_i}(b)$, $H_1 x_i + H_2 x_i = h_1 + h_2$ и $H_1 x_i > h_1$ для $i = 1, 2, \ldots$, то x решение краевой задачи (I). Если $x_i(a) = \beta_{k_i}(a)$, $x_i(b) = \alpha(b)$, $H_1 x_i + H_2 x_i < h_1 + h_2$ и $H_1 x_i - H_2 x_i < h_1 - h_2$ для $i = 1, 2, \ldots$, то x решение краевой задачи (I). Если $x_i(b) = \alpha(b)$, $H_1 x_i + H_2 x_i = h_1 + h_2$ и $H_1 x_i < h_1$ для $i = 1, 2, \ldots$, то x решение краевой задачи (I).

Т е о р е м а 3. Пусть $\alpha \leqslant \beta$, выполняется условие Шредера и для любого $x \in S(I, \mathbb{R})$ из $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$ следует:

$$x(a) = \alpha(a) \wedge x(b) = \alpha(b) \Rightarrow H_1 x + H_2 x \leqslant h_1 + h_2,$$

$$(x(a) = \alpha(a) \vee x(b) = \beta(b)) \wedge H_1 x + H_2 x = h_1 + h_2 \Rightarrow H_1 x \leqslant h_1,$$

$$x(a) = \beta(a) \wedge x(b) = \beta(b) \Rightarrow H_1 x + H_2 x \geqslant h_1 + h_2,$$

$$(x(a) = \beta(a) \vee x(b) = \alpha(b)) \wedge H_1 x + H_2 x = h_1 + h_2 \Rightarrow H_1 x \geqslant h_1.$$

Тогда существует решение краевой задачи (I).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим случай, когда найдется $k_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для $k \in \{k_0, k_0+1, \ldots\}$,

$m \in \{4k, 4k+1, \dots\}$ и $n \in \{m, m+1, \dots\}$ для любого $x \in S_{fkmn}(I, \mathbb{R})$ из $\alpha \le x \le \beta_k$ следует

$$x(a) = \alpha(a) \wedge x(b) = \alpha(b) \Rightarrow H_1 x + H_2 x \le h_1 + h_2,$$

$$(x(a) = \alpha(a) \vee x(b) = \beta_k(b)) \wedge H_1 x + H_2 x = h_1 + h_2 \Rightarrow H_1 x \le h_1,$$

$$x(a) = \beta_k(a) \wedge x(b) = \beta_k(b) \Rightarrow H_1 x + H_2 x \ge h_1 + h_2,$$

$$(x(a) = \beta_k(a) \vee x(b) = \alpha(b)) \wedge H_1 x + H_2 x = h_1 + h_2 \Rightarrow H_1 x \ge h_1.$$

Тогда из [3] следует существование решения x_{kmn} краевой задачи (4). Из x_{kmn} можно выделить сходящуюся последовательность $x_i \to x \in S(I, \mathbb{R})$ такую, что $\alpha \le x \le \beta$, $H_1 x = h_1$ и $H_2 x = h_2$.

Рассмотрим случай, когда найдется последовательность $x_i \in S_{fk_i m_i n_i}(I, \mathbb{R})$, $i = 1, 2, \dots$ такая, что $k_i \to \infty$, $4k_i \le m_i \le n_i$, $\alpha \le x_i \le \beta_{k_i}$, $i = 1, 2, \dots$ и $x_i \to x \in S(I, \mathbb{R})$, для которой не выполняются условия:

$$x_i(a) = \alpha(a) \wedge x_i(b) = \alpha(b) \Rightarrow H_1 x_i + H_2 x_i \le h_1 + h_2,$$

$$(x_i(a) = \alpha(a) \vee x_i(b) = \beta_{k_i}(b)) \wedge H_1 x_i + H_2 x_i = h_1 + h_2 \Rightarrow H_1 x_i \le h_1,$$

$$x_i(a) = \beta_{k_i}(a) \wedge x_i(b) = \beta_{k_i}(b) \Rightarrow H_1 x_i + H_2 x_i \ge h_1 + h_2,$$

$$(x_i(a) = \beta_{k_i}(a) \vee x_i(b) = \alpha(b)) \wedge H_1 x_i + H_2 x_i = h_1 + h_2 \Rightarrow H_1 x_i \ge h_1.$$

Без ограничения общности можно считать, что нарушается одно из этих условий. Если $x_i(a) = \alpha(a)$, $x_i(b) = \alpha(b)$ и $H_1 x_i + H_2 x_i > h_1 + h_2$ для $i = 1, 2, \dots$, то x решение краевой задачи (I). Действительно, $x(a) = \alpha(a)$, $x(b) = \alpha(b)$ и $H_1 x + H_2 x \ge h_1 + h_2$. Из условий теоремы имеем $H_1 x + H_2 x \le h_1 + h_2$. Следовательно, $H_1 x + H_2 x = h_1 + h_2$. Из условий теоремы следует $H_1 x \le h_1$ и $H_1 x \ge h_1$. Следовательно, $H_1 x = h_1$ и $H_2 x = h_2$.

Если $x_i(a) = \alpha(a)$ или $x_i(b) = \beta_{k_i}(b)$, $H_1 x_i + H_2 x_i = h_1 + h_2$ и $H_1 x_i > h_1$ для $i = 1, 2, \dots$, то x

решение краевой задачи (I). Действительно, $x(a)=\alpha(a)$ или $x(b)=\beta(b)$, $H_1x+H_2x=h_1+h_2$ и $H_1x\geqslant h_1$. Из условий теоремы имеем $H_1x\leqslant h_1$. Следовательно, $H_1x=h_1$ и $H_2x=h_2$.

Аналогично доказываются следующие утверждения. Если $x_i(a)=\beta_{k_i}(a)$, $x_i(b)=\beta_{k_i}(b)$ и $H_1x_i+H_2x_i<$ $<h_1+h_2$ для $i=1,2,\ldots$, то x решение краевой задачи (I). Если $x_i(a)=\beta_{k_i}(a)$ или $x_i(b)=\alpha(b)$, $H_1x_i+H_2x_i=h_1+h_2$ и $H_1x_i<h_1$ для $i=1,2,\ldots$, то x решение краевой задачи (I).

Аналогично теоремам I–3 доказываются следующие две теоремы.

Теорема 4. Пусть $\alpha\leqslant\beta$, $\alpha'(a)>\beta'(a)$, выполняется условие Шредера и для любого $x\in S(I,\mathbb{R})$ из $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$ и $\alpha'(a)\geqslant x'(a)\geqslant\beta'(a)$ следует справедливость одной из групп условий:

$$x'(a)=\alpha'(a)\wedge x(b)=\alpha(b)\Rightarrow H_1x\leqslant h_1\vee H_2x\leqslant h_2,$$

$$x'(a)=\alpha'(a)\wedge H_2x=h_2\Rightarrow H_1x\leqslant h_1,$$

$$x'(a)=\alpha'(a)\wedge x(b)=\beta(b)\Rightarrow H_1x\leqslant h_1\vee H_2x\geqslant h_2,$$

$$x(b)=\beta(b)\wedge H_1x=h_1\Rightarrow H_2x\geqslant h_2$$

$$x'(a)=\beta'(a)\wedge x(b)=\beta(b)\Rightarrow H_1x\geqslant h_1\vee H_2x\geqslant h_2,$$

$$x'(a)=\beta'(a)\wedge H_2x=h_2\Rightarrow H_1x\geqslant h_1,$$

$$x'(a)=\beta'(a)\wedge x(b)=\alpha(b)\Rightarrow H_1x\geqslant h_1\vee H_2x\leqslant h_2,$$

$$x(b)=\alpha(b)\wedge H_1x=h_1\Rightarrow H_2x\leqslant h_2;$$

$$x'(a)=\alpha'(a)\wedge x(b)=\alpha(b)\Rightarrow H_1x+H_2x\leqslant h_1+h_2\vee$$
$$H_1x-H_2x\geqslant h_1-h_2,$$

$$x'(a)=\alpha'(a)\wedge H_1x-H_2x=h_1-h_2\Rightarrow H_1x\leqslant h_1,$$

$$x'(a)=\alpha'(a)\wedge x(b)=\beta(b)\Rightarrow H_1x+H_2x\leqslant h_1+h_2\vee$$
$$H_1x-H_2x\leqslant h_1-h_2,$$

$$x(b)=\beta(b) \wedge H_1x+H_2x=h_1+h_2 \Rightarrow H_1x\le h_1,$$

$$x'(a)=\beta'(a) \wedge x(b)=\beta(b) \Rightarrow H_1x+H_2x\ge h_1+h_2 \vee$$

$$H_1x-H_2x\le h_1-h_2,$$

$$x'(a)=\beta'(a) \wedge H_1x-H_2x=h_1-h_2 \Rightarrow H_1x\ge h_1,$$

$$x'(a)=\beta'(a) \wedge x(b)=\alpha(b) \Rightarrow H_1x+H_2x\ge h_1+h_2 \vee$$

$$H_1x-H_2x\ge h_1-h_2,$$

$$x(b)=\alpha(b) \wedge H_1x+H_2x=h_1+h_2 \Rightarrow H_1x\ge h_1;$$

$$x'(a)=\alpha'(a) \wedge x(b)=\alpha(b) \Rightarrow H_1x+H_2x\le h_1+h_2,$$

$$(x'(a)=\alpha'(a) \vee x(b)=\beta(b)) \wedge H_1x+H_2x=h_1+h_2 \Rightarrow H_1x\le h_1,$$

$$x'(a)=\beta'(a) \wedge x(b)=\beta(b) \Rightarrow H_1x+H_2x\ge h_1+h_2,$$

$$(x'(a)=\beta'(a) \vee x(b)=\alpha(b)) \wedge H_1x+H_2x=h_1+h_2 \Rightarrow H_1x\ge h_1.$$

Тогда существует решение краевой задачи (2).

Теорема 5. Пусть $\alpha\le\beta$, $\alpha'(a)>\beta'(a)$, $\alpha'(b)<\beta'(b)$ выполняется условие Шредера и для любого $x\in S(I,\mathbb{R})$ из $\alpha\le x\le\beta$, $\alpha'(a)\ge x'(a)\ge\beta'(a)$ и $\alpha'(b)\le x'(b)\le\beta'(b)$ следует справедливость одной из групп условий

$$x'(a)=\alpha'(a) \wedge x'(b)=\alpha'(b) \Rightarrow H_1x\le h_1 \vee H_2x\le h_2,$$

$$x'(a)=\alpha'(a) \wedge H_2x=h_2 \Rightarrow H_1x\le h_1,$$

$$x'(a)=\alpha'(a) \wedge x'(b)=\beta'(b) \Rightarrow H_1x\le h_1 \vee H_2x\ge h_2,$$

$$x'(b)=\beta'(b) \wedge H_1x=h_1 \Rightarrow H_2x\ge h_2,$$

$$x'(a)=\beta'(a) \wedge x'(b)=\beta'(b) \Rightarrow H_1x\ge h_1 \vee H_2x\ge h_2,$$

$$x'(a)=\beta'(a) \wedge H_2x=h_2 \Rightarrow H_1x \geq h_1,$$

$$x'(a)=\beta'(a) \wedge x'(b)=\alpha'(b) \Rightarrow H_1x \geq h_1 \vee H_2x \leq h_2,$$

$$x'(b)=\alpha'(b) \wedge H_1x=h_1 \Rightarrow H_2x \leq h_2;$$

$$x'(a)=\alpha'(a) \wedge x'(b)=\alpha'(b) \Rightarrow H_1x+H_2x \leq h_1+h_2 \vee$$
$$H_1x-H_2x \geq h_1-h_2,$$

$$x'(a)=\alpha'(a) \wedge H_1x-H_2x=h_1-h_2 \Rightarrow H_1x \leq h_1,$$

$$x'(a)=\alpha'(a) \wedge x'(b)=\beta'(b) \Rightarrow H_1x+H_2x \leq h_1+h_2 \vee$$
$$H_1x-H_2x \leq h_1-h_2,$$

$$x'(b)=\beta'(b) \wedge H_1x+H_2x=h_1+h_2 \Rightarrow H_1x \leq h_1,$$

$$x'(a)=\beta'(a) \wedge x'(b)=\beta'(b) \Rightarrow H_1x+H_2x \geq h_1+h_2 \vee$$
$$H_1x-H_2x \leq h_1-h_2,$$

$$x'(a)=\beta'(a) \wedge H_1x-H_2x=h_1-h_2 \Rightarrow H_1x \geq h_1,$$

$$x'(a)=\beta'(a) \wedge x'(b)=\alpha'(b) \Rightarrow H_1x+H_2x \geq h_1+h_2 \vee$$
$$H_1x-H_2x \geq h_1-h_2,$$

$$x'(b)=\alpha'(b) \wedge H_1x+H_2x=h_1+h_2 \Rightarrow H_1x \geq h_1;$$

$$x'(a)=\alpha'(a) \wedge x'(b)=\alpha'(b) \Rightarrow H_1x+H_2x \leq h_1+h_2,$$

$$(x'(a)=\alpha'(a) \vee x'(b)=\beta'(b)) \wedge H_1x+H_2x=h_1+h_2 \Rightarrow H_1x \leq h_1,$$

$$x'(a)=\beta'(a) \wedge x'(b)=\beta'(b) \Rightarrow H_1x+H_2x \geq h_1+h_2,$$

$$(x'(a)=\beta'(a) \vee x'(b)=\alpha'(b)) \wedge H_1x+H_2x=h_1+h_2 \Rightarrow H_1x \geq h_1.$$

Тогда существует решение краевой задачи (3).

Литература

1. Лепин Л.А. Обобщенные решения и разрешимость краевых задач для дифференциального уравнения второго порядка // Дифф. уравн.- 1982.- Т.18.- № 8.- С.1323-1330.
2. Лепин А.Я., Лепин Л.А. Краевые задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка.- Рига: Зинатне, 1988.- 211 с.
3. Лепин А.Я. Краевые задачи для уравнения второго порядка // Доклады расширенных заседаний семинара Института прикладной математики им. И.Н.Векуа, 1988.- Т.3.- № 3.- С.83-86.

Поступила 20.09.89

УДК 517.927

Я.В.Цепитис

О СУЩЕСТВОВАНИИ ОГРАНИЧЕННОГО РЕШЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С НЕСУММИРУЕМЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ

Пусть имеем систему дифференциальных уравнений

$$x'' = f(t, x, x'), \tag{I}$$

$T \in (0, +\infty)$, для любого $\delta \in (0, T)$. $f: [\delta, T] \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет локальному условию Каратеодори, а при $t = 0$ функция f имеет, быть может, несуммируемую особенность.

В настоящей заметке исследуется вопрос о существовании ограниченного вместе с производной решения $x: [0, T] \to \mathbb{R}^n$ системы уравнений (I), удовлетворяющего условию

$$x(0) = 0. \tag{2}$$

Отметим, что под решением системы уравнений (I) на $(0, T]$ будем понимать вектор-функцию $x: (0, T] \to \mathbb{R}^n$ с абсолютно непрерывной на $(0, T]$ первой производной, которая почти всюду на $(0, T]$ удовлетворяет уравнению (I). Относительно решения $x: [0, T] \to \mathbb{R}^n$ задачи (I), (2) будет предполагаться непрерывная дифференцируемость на области определения и то, что сужение x на $(0, T]$ является решением системы уравнений (I).

В дальнейшем индекс i будет всегда пробегать все натуральные значения от 1 до n, а индекс j - множество $\{1, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}$, и предположим существование вектор-функций $\alpha, \beta: [0, T] \to \mathbb{R}^n$ таких, что компоненты α_i, β_i этих функций непрерывны, и на области определения выполняются неравенства

$$\alpha_i(t) \le \beta_i(t).$$

О п р е д е л е н и е I. Будем говорить, что выполняется условие $(\mathcal{E},\gamma)$, если существуют число $\sigma \in (0,T]$ и функции $\mathcal{E}_i, \gamma_i : (0,\sigma] \to [0,+\infty)$ для каждого $\delta \in (0,\sigma)$, суммируемые на $[\delta,\sigma]$ такие, что

$$\lim_{t\to 0+} \mathcal{E}_i(t) = 0,$$

$$\lim_{t\to 0+} \gamma_i(t) = +\infty, \tag{3}$$

$$\lim_{t\to 0+} \gamma_i(t) \exp\left(-\int_t^\sigma \gamma_i(\tau)\,d\tau\right) < +\infty, \tag{4}$$

$$\lim_{t\to 0+} \int_t^\sigma \mathcal{E}_i(\xi) \exp\left(\int_\xi^\sigma \gamma_i(\tau)\,d\tau\right) d\xi < +\infty, \tag{5}$$

и для любых $t_0 \in (0,\sigma)$, $t_1 \in (t_0,\sigma]$ и решения $x_i : [t_0,t_1] \to \mathbb{R}$ уравнения

$$x_i'' = f_i(t, y_1, \ldots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_{i-1}', x_i', y_{i+1}', \ldots, y_n') \tag{6}$$

при произвольном наборе параметров $y_j \in [\alpha_j(t), \beta_j(t)]$, $y_j' \in \mathbb{R}$, удовлетворяющего на области определения оценкам

$$\alpha_i(t) \le x_i(t) \le \beta_i(t), \tag{7}$$

из неравенства

$$|x_i'(t_0) - \gamma_i(t_0) x_i(t_0)| \le \mathcal{E}_i(t_0)$$

следует выполнение для $t \in (t_0, t_1]$ неравенства

$$|x_i'(t) - \gamma_i(t) x_i(t)| \le \mathcal{E}_i(t).$$

О п р е д е л е н и е 2. Будем говорить, что выполняется условие Б, если для любых $t_0 \in (0,T)$, $t_1 \in (t_0,T]$ существуют постоянные $N_i \in (0,+\infty)$, такие, что для произвольного решения $x : [t_0,t_1) \to \mathbb{R}^n$ системы уравний (I), компоненты которого на области определения удовлетворяют оценкам (7), имеет место

$$\sup\{|x_i'(t)| : t\in[t_0, t_1)\} < N_i.$$

В дальнейшем относительно системы уравнений (I) предположим также выполнение условий (δ, γ) и Б.

Определение 3. Будем говорить, что выполняется условие А, если вектор-функции $\alpha, \beta : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ имеют компоненты, удовлетворяющие следующим требованиям:

I) $\alpha_i(0) \leq 0 \leq \beta_i(0)$,

2) если $\alpha_i(0) = 0$, то для некоторого $\xi_i \in (0,T]$ имеет смысл и выполняется неравенство
$$\alpha_i'(t) - \gamma_i(t)\alpha_i(t) \geq -\delta_i(t),\ t\in(0,\xi_i],$$

3) если $\beta_i(0) = 0$, то для некоторого $\eta_i \in (0,T]$ имеет смысл и выполняется неравенство
$$\beta_i'(t) - \gamma_i(t)\beta_i(t) \leq \delta_i(t),\quad t\in(0,\eta_i], \tag{8}$$

4) для любых $t_0 \in (0,T)$, $t_1 \in (t_0, T]$ α_i и β_i, соответственно, являются обобщенными нижней и верхней функциями скалярного уравнения (6) на $[t_0, t_1]$ при произвольном наборе параметров $y_j \in [\alpha_j(t), \beta_j(t)]$, $y_j' \in [-N_j, N_j]$.

Определения и соответствующие свойства обобщенных нижних и верхних функций см., например, в [I].

Лемма I. Пусть выполняется условие А, тогда без нарушения общности можем считать, что

$$\alpha_i(0) = 0 = \beta_i(0). \tag{9}$$

Доказательство. Пусть равенства (9) не выполняются. Покажем, что в таком случае мы можем компоненты α_i и β_i вектор-функций α и β заменить такими функциями $\tilde{\alpha}_i$ и $\tilde{\beta}_i$, что действительно имеют место

$$\tilde{\alpha}_i(0) = 0 = \tilde{\beta}_i(0)$$

и для которых выполняются и все остальные предположения условия А.

Сначала рассмотрим случай, когда

$$\alpha_i(0) < 0 < \beta_i(0).$$

Пусть $t_i < \sigma$ такое, что

$$\alpha_i(t_i) < \beta_i(t_i) \tag{10}$$

и u_i, v_i, соответственно, решения следующих задач Коши

$$u_i' - \gamma_i(t) u_i = \delta_i(t), \quad u_i(t_i) = \alpha_i(t_i), \tag{11}$$

$$v_i' - \gamma_i(t) v_i = -\delta_i(t), \quad v_i(t_i) = \beta_i(t_i).$$

Имеем $u_i(t) = \alpha_i(t_i) \exp\left(-\int_t^{t_i} \gamma(\tau) d\tau\right) -$

$$- \int_t^{t_i} \delta_i(\xi) \exp\left(\int_\xi^t \gamma(\tau) d\tau\right) d\xi,$$

$$v_i(t) = \beta_i(t_i) \exp\left(-\int_t^{t_i} \gamma(\tau) d\tau\right) +$$

$$+ \int_t^{t_i} \delta_i(\xi) \exp\left(\int_\xi^t \gamma(\tau) d\tau\right) d\xi,$$

$$\lim_{t \to 0+} u_i(t) = \lim_{t \to 0+} v_i(t) = 0,$$

$$u_i(t) < v_i(t), \quad t \in (0, t_i].$$

В силу соотношений (4) и (5) конечными являются и следующие пределы:

$$\lim_{t \to 0^+} u_i(t) \exp\left(\int_t^{t_i} \gamma(\tau) d\tau\right) = a_i^{[1]},$$

$$\lim_{t \to 0^+} v_i(t) \exp\left(\int_t^{t_i} \gamma(\tau) d\tau\right) = a_i^{[2]},$$

при этом $a_i^{[1]} < a_i^{[2]}$.

Если $k = 1, 2$ и $y_j \in [\alpha_j(t), \beta_j(t)]$, $y_j' \in \mathbb{R}$ произвольные, то согласно результатам работы [2], решения $x_i^{[k]}$ уравнения (6), удовлетворяющие условиям

$$x_i(0) = 0, \quad \lim_{t \to 0^+} \exp\left(\int_t^{t_i} \gamma_i(\tau) d\tau\right) x_i(t) = a_i^{[k]},$$

существуют, и для некоторых $s_i^{[k]} \in (0, t_i]$ имеют место неравенства:

$$\alpha_i(t) \le x_i^{[1]}(t) \le u_i(t), \quad t \in [0, s_i^{[1]}], \tag{12}$$

$$\vartheta_i(t) \le x_i^{[2]}(t) \le \beta_i(t), \quad t \in [0, s_i^{[2]}], \tag{13}$$

$$|x_i^{[k]'}(t) - \gamma_i(t) x_i^{[k]}(t)| \le \varepsilon_i(t), \quad t \in [0, s_i^{[k]}]$$

Положим

$$\bar{\alpha}_i(t) = \begin{cases} x_i^{[1]}(t), & t \in [0, s_i^{[1]}], \\ \alpha_i(t), & t \in [s_i^{[1]}, T], \end{cases}$$

$$\tilde{\alpha}_i(t) = \sup \{ \bar{\alpha}_i(t) : y_j \in [\alpha_j(t), \beta_j(t)], \ y_j' \in \mathbb{R} \}$$

Функция $\tilde{\alpha}_i$ существует в силу оценок (12) и является искомой. Аналогично, положим

$$\bar{\beta}_i(t) = \begin{cases} x_i^{[2]}(t), & t \in [0, s_i^{[2]}], \\ \beta_i(t), & t \in [s_i^{[2]}, T], \end{cases}$$

$$\tilde{\beta}_i(t) = \inf \{ \bar{\beta}_i(t) : y_j \in [\alpha_j(t), \beta_j(t)], \ y_j' \in R \}.$$

Функция $\tilde{\beta}_i$ существует в силу оценок (13) и также является искомой.

Пусть теперь для определенности

$$\alpha_i(0) < 0 = \beta_i(0)$$

(Случай соотношений $\alpha_i(0) = 0 < \beta_i(0)$ рассматривается по такой же схеме). Вышеуказанным способом построим функцию $\tilde{\alpha}_i$. Нам необходимо лишь убедиться, что

$$\tilde{\alpha}_i(t) \le \beta_i(t), \quad t \in (0, T]$$

Для этого, учитывая оценки (I2), достаточно установить справедливость неравенства

$$u_i(t) < \beta_i(t), \quad t \in (0, t_i],$$

которое легко усматривается из соотношений (8), (I0), (II). Лемма доказана.

Л е м м а 2. Пусть выполняется условие А, $b_i \in [\alpha_i(T), \beta_i(T)]$, тогда для любого $\tau \in (0, \sigma]$ существует решение $x : [\tau, T] \to \mathbb{R}^n$ системы уравнений (I), компоненты которого удовлетворяют условиям

$$|x_i'(\tau) - \gamma_i(\tau) x_i(\tau)| \leq \delta_i(\tau), \quad x_i(T) = b_i$$

и для $t \in [\tau, T]$ – оценкам (7).

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы проводится аналогично доказательству леммы 2 из работы [3].

Т е о р е м а. Пусть выполняется условие А, тогда задача (I), (2) имеет решение $x : [0, T] \to \mathbb{R}^n$, компоненты которого на области опрделения удовлетворяют оценкам (7).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно лемме I можем считать, что выполняются равенства (9). Выберем произвольные $b_i \in [\alpha_i(T), \beta_i(T)]$ и последовательность точек $k \to t_k$ такое, что $t_k \in [0, \sigma]$, $\lim\limits_{k \to \infty} t_k = 0$. По лемме 2 существуют решение $x^{[k]} : [t_k, T] \to \mathbb{R}^n$ системы уравнений (I), компоненты которых удовлетворяют условиям

$$|x_i^{[k]\prime}(t_k) - \gamma_i(t_k) x_i^{[k]}(t_k)| \leq \delta_i(t_k), \quad x_i(T) = b_i$$

и для $t \in [t_k, T]$ – оценкам (7). Из имеющихся условий легко устанавливаются равномерная ограниченность и равностепенная непрерывность последовательностей функций $k \to x^{[k]}$ и $k \to x^{[k]\prime}$. Следовательно, согласно теореме Арцела, имеем возможность выделить сходящуюся подпоследовательность $k_n \to x^{[k_n]}$, предел $x : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ которой является решением задачи (I), (2), компоненты которого на области определения удовлетворяют оценкам (7). Теорема доказана.

Замечание. Теорема сохраняет силу и в случае, когда условие (2) дополняются условиями на правом конце рассматриваемого промежутка

$$k_i x_i(T) + l_i x_i'(T) < B_i,$$

где $k_i \in \mathbb{R}$, $l_i \in [0, +\infty)$, $k_i^2 + l_i^2 \neq 0$, $B_i \in \mathbb{R}$ если в условие А дополнительно потребовать выполнение неравенств

$$k_i \alpha_i(T) + l_i \alpha_i'(T) \leq B_i \leq k_i \beta_i(T) + l_i \beta_i'(T).$$

Отметим, что, пользуясь методикой, изложенной в работе [4], нетрудно убедиться в выполнении условия $(\mathcal{E}, \gamma)$ для широкого класса систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

В частности, если $\gamma_i : [0, T] \to \mathbb{R}$ абсолютно непрерывные функции, удовлетворяющие соотношениям (3), (4), и функция

$$t \to \int_0^t \exp\left(\int_\xi^1 \gamma_i(\tau)\, d\tau\right)$$

суммируемы на $[0, \sigma]$, то для системы уравнений

$$(x_i' - \gamma_i(t) x_i)' + g_i(t)(x_i' - \gamma_i(t) x_i) = h_i(t, \tilde{x}, \tilde{x}'), \qquad \text{(I4)}$$

где $\tilde{x} = \left(\exp\left(\int_t^\sigma \gamma_1(\tau) d\tau\right) x_1, \ldots, \exp\left(\int_t^\sigma \gamma_n(\tau) d\tau\right) x_n\right)$,

$$\tilde{x}' = \left(\int_0^t \exp\left(\int_\xi^\epsilon \gamma_1(\tau) d\tau\right) d\xi \cdot x_1', \ldots, \int_0^t \exp\left(\int_\xi^\sigma \gamma_n(\tau) d\tau\right) d\xi \cdot x_n'\right),$$

для любого $\delta \in (0, T)$ $g_i : [\delta, T] \to \mathbb{R}$ суммируемы и для некоторых $c_i \in [0; 1)$ отрицательные части функции $t \to (g_i(t) + c_i/t)$ суммируемы на $[0, T]$, $h_i : [0, T] \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$ непрерывные функции, имеет место условие $(\mathcal{E},\gamma)$.

Системой уравнений такого вида является, например, возникшая в приложениях система двух уравнений второго порядка

$$x_1'' + \frac{1}{t}x_1' - \frac{1}{t^2}x_1 = x_1\left(x_1^2 - 1 + x_2^2 - \frac{2}{t}x_2\right), \tag{15}$$

$$x_2'' + \frac{1}{t}x_2' - \frac{1}{t^2}x_2 = x_1^2\left(x_2 - \frac{1}{t}\right), \tag{16}$$

которая в работе [5] рассматривается совместно с краевыми условиями

$$x_1(0) = 0, \quad x_1'(T) = 0, \tag{17}$$

$$x_2(0) = 0, \quad x_2(T) = b \tag{18}$$

Действительно, положим

$$\gamma_1(t) = \gamma_2(t) = \frac{1}{t}, \quad g_1(t) = g_2(t) = \frac{2}{t},$$

тогда уравнения системы (15),(16) запишется так:

$$\left(x_1' - \frac{1}{t}x_1\right)' + \frac{2}{t}\left(x_1' - \frac{1}{t}x_1\right) = x_1\left(x_1^2 - 1 + x_2^2 - \frac{2}{t}x_2\right),$$

$$\left(x_2' - \frac{1}{t}x_2\right)' + \frac{2}{t}\left(x_2' - \frac{1}{t}x_2\right) = x_1\left(x_1x_2 - \frac{x_1}{t}\right),$$

откуда легко усматривается возможность представления этой системы в форме (14). Так как эта система линейна по переменным x_1' и x_2', то автоматически выполняется условие Б.

Далее, положим:

$$\alpha_1(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le \frac{\pi T}{5}, \\ \frac{c}{2}\left(1 - \cos\frac{10t}{T}\right), & \frac{\pi T}{5} < t \le \frac{3\pi T}{10}, \\ c, & \frac{3\pi T}{10} < t \le T, \end{cases}$$

где $c\in(0,\sqrt{1/2-b^2})$,

$$\beta_1(t)=1,\ \alpha_2(t)=0,\ \beta_2(t)=b,\ t\in[0,T].$$

Непосредственной проверкой устанавливается, что для $T\in[10,+\infty)$ и $b\in[\frac{1}{2},\sqrt{2}/2)$ в таком случае выполняется и условие A.

Следовательно, при указанных значениях параметров T и b краевая задача (15)-(18) имеет решение x, компоненты которого удовлетьорямт оценкам (7).

Литература

1. Лепин А.Я., Лепин Л.А. Краевые задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка.- Рига: Зинатне, 1988.- 210 с.
2. Цепитис Я.В. О существовании ограниченного решения для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с несуммируемой особенностью // Актуальные вопросы краевых задач. Теория и приложения.- Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1988.- С.59-68.
3. Цепитис Я.В. Нижние и верхние функции и разрешимость смешанной краевой задачи для системы уравнений второго порядка // Нелинейные краевые задачи обыкновенных дифференциальных уравнений.- Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1985.- С.35-42.
4. Цепитис Я.В. Разрешимость краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения с нессуммируемой особенностью // Дифференц.уравнения.- 1983.- Т.19.- № 12.- С.2071-2075.
5. Rentrop P. Numerical solution of the singular Ginzburg-Landau equations by multiple shooting // Computing.- 1976.- Vol.16.- P.61-67.

Поступила 07.09.89

УДК 517.927.4

Я.В.Виржбицкий, Д.Ю.Пономарев

ОБОБЩЕННАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ОДНОГО КЛАССА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} x'' = f(t, x, x'), & (1) \\ H_1 x = H_1(x(a), x(b), x'(a), x'(b)) = h_1, & \\ H_2 x = H_2(x(a), x(b), x'(a), x'(b)) = h_2, & (2) \\ \alpha \le x \le \beta & \end{cases}$$

и условия :

1. $\alpha(a) = \beta(a)$, 5. $\alpha(b) = \beta(b)$,
2. $\alpha'(a) < \beta'(a)$, 6. $\alpha'(b) < \beta'(b)$,
3. $\alpha'(a) = \beta'(a)$, 7. $\alpha'(b) = \beta'(b)$,
4. $\alpha'(a) > \beta'(a)$, 8. $\alpha'(b) > \beta'(b)$,

9'. $(\forall x, y \in SG(I, \mathbb{R}))((x \le y \wedge x'(a) \ge y'(a) \Rightarrow x'(b) \ge y'(b)) \wedge (x \le y \wedge x'(b) \le y'(b) \Rightarrow x'(a) \le y'(a)))$,

A. $\alpha \in SG(I, \mathbb{R})$ B. $\beta \in SG(I, \mathbb{R})$,

где $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a, +\infty)$, $I = [a, b]$, $f \in Car(I \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $H_1, H_2 \in C(\mathbb{R}^2 \times \bar{\mathbb{R}}^2, \bar{\mathbb{R}})$, $\bar{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$, $h_1, h_2 \in \bar{\mathbb{R}}$,

$\alpha \in AG(I, \mathbb{R})$, $\beta \in BG(I, \mathbb{R})$, $Car(I \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ - класс функций $f: I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию Каратеодори, $AG(I, \mathbb{R})$ и $BG(I, \mathbb{R})$ - множества обобщенных нижних и верхних функций уравнения (1), $SG(I, \mathbb{R})$ - множество обобщенных решений уравнения (1). Обозначения и определения смотрите в работе [1].

В данной работе в отличие от [1] взято условие 9', которое отличается от условия 9 [1]. Аналогично, как и в [1], строится для приведенного набора условий 1-8, 9',

A, B множество максимальных теорем $T'm$. Оказалось, что это множество состоит из 107 элементов. Первые 72 элемента $T'm$ совпадают с 72 теоремами [1, с. 149] Т001-Т072. Эти теоремы доказаны в [1]. Остаются 35 элеметов, которые нуждаются в доказательстве. Оказывается, что эти 35 теорем можно задать множеством так называемых порождающих теорем. В итоге доказательство требуется только для порождающих теорем, количество которых меньше 35. Так как некоторые порождающие теоремы, содержащие условия 3 или 4, имеют аналогичные доказательства, то путем объединения условий можно получить множество так называемых базовых теорем, которые и будут здесь доказаны.

Опишем множество базовых теорем $T'b$ для множества $T'm$. Первые 24 элемента совпадают с Tb01 - Tb24 [1, с. 55]. Далее следуют 9 теорем:

Tb'25	-11+--1+	39'
Tb'26	11-+--0+	3v49'
Tb'27	-11+--++	49'
Tb'28	-1++--1+	49'
Tb'29	111+1-1+	139'
Tb'30	11111111	3v469'
Tb'31	1111--11	379'
Tb'32	1----1++	379'
Tb'33	11111-11	1379'

и, наконец, следует добавить 4 элемента, совпадающие Tb89-Tb92 [1, с. 55].

Перейдем к доказательству базовых теорем.

Т е о р е м а. Tb'25 -11+--1+ 39'.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предварительно докажем, что теоремой является -11+--1+ 39'AB.
Из теоремы Т009 -11+--10 3 [1] следует существование обобщенного решения $y(t)$ краевой задачи

$$y'' = f(t, y, y'),$$
$$H_1 y = h_1,$$
$$y'(a) = \alpha'(a),$$

$$\alpha \le y \le \beta,$$

где $H_1 \in M(-11+)$.
Имеем $\alpha, y, \beta \in SG(I, R)$, $\alpha \le y \le \beta$, $\alpha'(a) = y'(a) = \beta'(a)$, откуда в силу условия 9' получаем $\alpha'(b) \ge y'(b) \ge \beta'(b)$.
На основании $H_2 \in M(--1+)$ имеем $H_2\alpha \ge H_2 y \ge H_2\beta$, с учетом неравенства $H_2\alpha \le h_2 \le H_2\beta$ получаем $H_2 y = h_2$.

Таким образом, $y(t)$ является обобщенным решением краевой задачи вида (I), (2). Теперь, если выполнено условие 3, $H_1 \in M(-11+)$, $H_2 \in M(--1+)$, то найдутся решения α_*, β_*, удовлетворяющие условиям 3, A, B, $H_1\alpha_* \le h_1 \le H_1\beta_*$, $H_2\alpha_* \le h_2 \le H_2\beta_*$, $\alpha \le \alpha_* \le \beta_* \le \beta$, т.е. условиям теоремы $-11+--1+\ 39'AB$. Действительно, из Т002 $1--0-10+$ [I] существуют обобщенные решения краевых задач:

$$x'' = f(t,x,x'),\quad -x'(a) = -\alpha'(a),\quad x(b) = \alpha(b),\quad \alpha \le x \le \beta,$$

$$y'' = f(t,x,x'),\quad -y'(a) = -\beta'(a),\quad y(b) = \beta(b),\quad x \le y \le \beta.$$

Обозначим $x = \alpha_*$, $y = \beta_*$, $\alpha_*, \beta_* \in SG(I, R)$.
Так как $H_1 \in M(-11+)$, $H_2 \in M(--1+)$, то $\alpha_*'(a) = \alpha'(a)$ и из $\alpha_*(b) = \alpha(b)$, $\alpha \le \alpha_*$ следует $\alpha_*'(b) \le \alpha'(b)$, то $H_i\alpha_* \le H_i\alpha$, $i = 1,2$.
Аналогично из $\beta_*'(a) = \beta'(a)$, $\beta_*'(b) \ge \beta'(b)$ (последнее неравенство следует из $\beta_*(b) = \beta(b)$, $\beta_* \le \beta$) и $H_1 \in M(-11+)$, $H_2 \in M(--1+)$ получаем $H_i\beta \le H_i\beta_*$, $i = $ I, 2. В итоге имеем $H_i\alpha_* \le H_i\alpha \le h_i \le H_i\beta \le H_i\beta_*$, $i = $ I, 2. Из $\alpha'(a) = \beta'(a)$ следует $\alpha_*'(a) = \beta_*'(a)$, при этом $\alpha \le \alpha_* \le \beta_* \le \beta$, $\alpha_*, \beta_* \in SG(I, R)$.
Следовательно, существует обобщенное решение краевой задачи

$$\begin{cases} x'' = f(t, x, x'), \\ H_1 x = h_1,\quad H_2 x = h_2, \\ \alpha_* \le x \le \beta_* \end{cases}$$

при $H_1 \in M(-11+)$, $H_2 \in M(--1+)$ и условиях $3, 9', A, B$.
Так как $\alpha \le \alpha_* \le x \le \beta_* \le \beta$, то полученное решение $x(t)$ является решением краевой задачи вида (I), (2) при тех же H_1, H_2 и условиях 3, 9', при этом $\alpha \le x \le \beta$.

Теорема доказана.

Т е о р е м а Tb'26. 11-+--0+ 3v49.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предварительно докажем, что 11-+--0+ 3 4 9' AB является теоремой. Определим индуктивно последовательности α_k, β_k, $k = 1,2,\ldots$. Пусть $\alpha_1 = \alpha$, $\beta_1 = \beta$. Из T002 1--0-10+ [I] следует существование обобщенного решения $y(t)$ краевой задачи

$$
\begin{aligned}
&y'' = f(t, y, y'),\\
&-y'(a) = -\varphi(\alpha_k'(a), \beta_k'(a)),\\
&y(b) = (\alpha_k(b) + \beta_k(b))\cdot 2^{-1},\\
&\alpha_k \le y \le \beta_k,
\end{aligned}
$$

где

$$
\varphi(x,y) = \begin{cases}
(x+y)\cdot 2^{-1}, & x, y \in \mathbb{R},\\
y-1, & x = -\infty, y \in \mathbb{R},\\
y+1, & x = +\infty, y \in \mathbb{R},\\
x-1, & x \in \mathbb{R}, y = -\infty,\\
x+1, & x \in \mathbb{R}, y = +\infty,\\
-\infty, & x = -\infty, y = -\infty,\\
+\infty, & x = +\infty, y = +\infty,\\
0, & x = -\infty, y = +\infty \vee x = +\infty, y = -\infty.
\end{cases}
$$

Если $H_1 y \le h_1$, то полагаем $\alpha_{k+1} = y$, $\beta_{k+1} = \beta_k$. В противном случае $\alpha_{k+1} = \alpha_k$, $\beta_{k+1} = y$. Из [I] следует, что при $k > 1$ $\alpha_k, \beta_k \in SG(I, \mathbb{R})$, $\alpha \le \alpha_1 \le \alpha_2 \le \ldots \le \beta_2 \le \beta_1 = \beta$, $\alpha'(a) = \alpha_1'(a) \ge \alpha_2'(a) \ge \ldots \ge \beta_2'(a) \ge \beta_1'(a) = \beta'(a)$, откуда в силу условия 9' получаем неравенства

$$\alpha'(b) = \alpha_1'(b) \ge \alpha_2'(b) \ge \ldots \ge \beta_2'(b) \ge \beta_1'(b) = \beta'(b).$$

Из условия $H_2 \in M(--0+)$ имеем $H_2\alpha \ge H_2\beta$, вместе с неравенствами $H_2\alpha \le h_2 \le H_2\beta$ это дает равенство $H_2\alpha = H_2\beta = h_2$. Предполагая равенства $H_2\alpha_k = H_2\beta_k = h_2$ для α_{k+1} и β_{k+1}, получаем $H_2\alpha_k \ge H_2\alpha_{k+1} \ge H_2\beta_{k+1} \ge H_2\beta_k = h_2$, откуда следует $H_2\alpha_{k+1} = H_2\beta_{k+1} = h_2$, т.е. для всех k

имеем $H_2\alpha_k = H_2\beta_k = h_2$, $H_1\alpha_k \le h_1 \le H_1\beta_k$, а пределы $\alpha_k \to \alpha_0$, $\beta_k \to \beta_0$ удовлетворяют условиям $\alpha_0, \beta_0 \in SG(I, \mathbb{R})$, $\alpha_0(a) \le \beta_0(a)$, $\alpha_0(b) = \beta_0(b)$, $\alpha_0'(a) = \beta_0'(a)$, $\alpha_0'(b) \ge \beta_0'(b)$, $H_1\alpha_0 \le h_1 \le H_1\beta_0$, $H_2\alpha_0 = H_2\beta_0 = h_2$. Из Т015 11-+-10+ 5 [I] и $H_1 \in M(11-+)$, $H_2 \in M(--0+) \subset M(-10+)$ следует существование обобщенного решения $x(t)$ краевой задачи

$$x'' = f(t, x, x'),$$
$$H_1x = h_1, \quad H_2x = h_2,$$
$$\alpha_0 \le x \le \beta_0.$$

Учитывая, что $\alpha \le \alpha_0 \le \beta_0 \le \beta$, получаем, что x является обобщенным решением краевой задачи вида (1), (2) при $H_1 \in M(11-+)$, $H_2 \in M(--0+)$ и условиях 3 или 4, 9', A, B.

Как и в предыдущей теореме, освободимся от условий A и B. Действительно, из Т002 1--0-10+ [I] существуют обобщенные решения краевых задач

$$x'' = f(t, x, x'), \; x(a) = \alpha(a), \; x(b) = \alpha(b), \; \alpha \le x \le \beta,$$
$$y'' = f(t, y, y'), \; y(a) = \beta(a), \; y(b) = \beta(b), \; x \le y \le \beta.$$

Обозначим $x = \alpha_*$, $y = \beta_*$, $\alpha_*, \beta_* \in SG(I, \mathbb{R})$.
Имеем $\alpha_*(a) = \alpha(a)$, $\alpha_*(b) = \alpha(b)$, $\alpha \le \alpha_*$, откуда следуют неравенства $\alpha_*'(a) \ge \alpha'(a)$, $\alpha_*'(b) \le \alpha'(b)$.
Из соотношений $\beta_*(a) = \beta(a)$, $\beta_*(b) = \beta(b)$, $\beta_* \le \beta$ следуют неравенства $\beta_*'(a) \le \beta'(a)$, $\beta_*'(b) \ge \beta'(b)$. Из $H_1 \in M(11-+)$, $H_2 \in M(--0+)$ имеем в силу полученных неравенств соотношения $H_i\alpha_* \le H_i\alpha \le h_i \le H_i\beta \le H_i\beta_*$, $i = 1, 2$, из условий 3 или 4 – неравенства $\alpha_*'(a) \ge \beta_*'(a)$, $\alpha \le \alpha_* \le \beta_* \le \beta$, $\alpha_*, \beta_* \in SG(I, \mathbb{R})$. Следовательно, существуют в силу уже доказанной теоремы 11-+--0+ 3V49'AB обобщенное решение краевой задачи

$$\begin{cases} x'' = f(t, x, x'), \\ H_1x = h_1, \quad H_2x = h_2, \\ \alpha_* \le x \le \beta_*. \end{cases}$$

Из $\alpha \leq \alpha_* \leq \beta_* \leq \beta$ получаем, что x - обобщенное решение краевой задачи (I)-(2). Теорема доказана.

Теорема. $T\acute{b}'27$ $-11+--++$ $49'$

Доказательство. Предварительно докажем, что теоремой является $-11+--++$ $49'$ AB. Из теоремы $T011$ $-11+--+0$ 4 [I] следует теорема $T011$ с $\forall\exists$ и заменой $H_2 \to -H_2$, т.е. $T011$ с $\forall\exists$ $-11+++-0$ 4 (см. [I, с. 53]), из которой следует существование обобщенного решения $y(t)$ краевой задачи

$$\begin{cases} y'' = f(t, y, y'), \\ H_1 y = h_1, \\ -\alpha'(a) \leq -y'(a) \leq -\beta'(a), \\ \alpha \leq y \leq \beta. \end{cases}$$

Для $y(t)$ имеем: $\alpha'(a) \geq y'(a) \geq \beta'(a)$, $\alpha \leq y \leq \beta$. $\alpha, y, \beta \in SG(I, \mathbb{R})$, откуда в силу условия $9'$ следует $\alpha'(b) \geq y'(b) \geq \beta'(b)$. Из $H_2 \in M(--++)$ тогда имеем неравенство $H_2\alpha \geq H_2 y \geq H_2 \beta$, что с учетом $H_2\alpha \leq h_2 \leq H_2\beta$ дает равенство $H_2 y = h_2$. Таким образом, $y(t)$ является искомым обобщенным решением. Далее следует, как в доказательстве теоремы $T\acute{b}'25$, освободиться от условий A и B, чем завершается доказательство.

Теорема $T\acute{b}'28$ $-1++--1+$ $49'$

Доказательство. Предварительно докажем, что теоремой является $-1++--1+$ $49'$ AB. Определим индуктивно последовательности α_k, β_k, $k =$ I,2,... . Пусть $\alpha_1 = \alpha$, $\beta_1 = \beta$. Если α_k и β_k уже определены, то α_{k+1} и β_{k+1} определяются следующим образом. Из $T012$ $-1++--10$ 4 следует существование обобщенного решения $y(t)$ краевой задачи

$$\begin{cases} y'' = f(t, y, y'), \\ H_1 y = h_1, \\ -y'(a) = -\varphi(\alpha_k'(a), \beta_k'(a)), \\ \alpha_k \leq y \leq \beta_k, \end{cases}$$

где φ определено выше.

Если $H_2 y \leqslant h_2$, то полагаем $\alpha_{k+1} = y$, $\beta_{k+1} = \beta_k$, иначе $\alpha_{k+1} = \alpha_k$, $\beta_{k+1} = y$. Из [I] следует, что α_k, $\beta_k \in SG(I, \mathbb{R})$, $\alpha = \alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots \leqslant \beta_2 \leqslant \beta_1 = \beta$,

$\beta'(a) = \beta_1'(a) \leqslant \beta_2'(a) \leqslant \ldots \leqslant \alpha_2'(a) \leqslant \alpha_1'(a) = \alpha'(a)$,

$H_2 \alpha_k \leqslant h_2 \leqslant H_2 \beta_k$, $H_1 \alpha_k = h_1$ или $H_1 \beta_k = h_1$ при $k \geqslant 2$, $H_1 \alpha_k \leqslant h_1 \leqslant H_1 \beta_k$, а пределы $\alpha_k \to \alpha_0$, $\beta_k \to \beta_0$ удовлетворяют условиям $\alpha \leqslant \alpha_0 \leqslant \beta_0 \leqslant \beta$, $\beta'(a) \leqslant \beta_0'(a) = \alpha_0'(a) \leqslant \alpha'(a)$, $H_1 \alpha_0 = h_1$ или $H_1 \beta_0 = h_1$,

$H_2 \alpha_0 \leqslant h_2 \leqslant H_2 \beta_0$, $\alpha_0, \beta_0 \in SG(I, \mathbb{R})$.

Из условия 9' следует неравенство $\alpha_0'(b) \geqslant \beta_0'(b)$. Из условий монотонности $H_2 \in M(--1+)$ имеем $H_2\alpha_0 \geqslant H_2\beta_0$, из чего следует вместе с противоположным неравенством соотношение $H_2\alpha_0 = H_2\beta_0 = h_2$. Таким образом, α_0 и β_0 являются обобщенными решениями краевой задачи (I), (2). Тем самым доказано, что $-1++--1+\ 49'AB$ является теоремой. Далее, как и в доказательстве теоремы $Tb'25$, освобождается от условий A и B.

Т е о р е м а $Tb'29$ $111+1-1+\ 139'$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем:

$$H_1(\alpha(a), \cdot, \alpha'(a), \cdot) \in M(010+),$$

$$H_2(\alpha(a), \cdot, \alpha'(a), \cdot) \in M(0-0+).$$

Воспользуемся теоремой $Tb'25$ $-11+--1+\ 39$, из которой следует существование обобщенного решения $x(t)$ краевой задачи

$$\begin{cases} x'' = f(t, x, x'), \\ H_1(\alpha(a), x(b), \alpha'(a), x'(b)) = h_1, \\ H_2(\alpha(a), x(b), \alpha'(a), x'(b)) = h_2, \\ \alpha \leqslant x \leqslant \beta. \end{cases}$$

Из $\alpha(a) = \beta(a)$, $\alpha'(a) = \beta'(a)$ следует $\alpha(a) = x(a) = \beta(a)$ и $\alpha'(a) = x'(a) = \beta'(a)$. Отсюда получаем:

$$H_1 x = H_1(\alpha(a), x(b), \alpha'(a), x'(b)) = h_1,$$

$$H_2 x = H_2(\alpha(a), x(b), \alpha'(a), x'(b)) = h_2.$$

Таким образом, x - обобщенное решение краевой задачи (I), (2). Теорема доказана.

Теорема $Tb'30$ 11111111 $3V4\,69'$

Доказательство. По теореме $T002$ 1--0-10+ [I] существует обобщенное решение краевых задач:

$$x''=f(t,x,x'),\ x(a)=\alpha(a),\ x(b)=\alpha(b),\ \alpha\le x\le\beta,$$

$$y''=f(t,y,y'),\ y(a)=\beta(a),\ y(b)=\beta(b),\ x\le y\le\beta$$

Обозначим $x=\alpha_*$, $y=\beta_*$, $\alpha_*,\beta_*\in SG(I,\mathbb{R})$. Имеем $\alpha_*(a)=\alpha(a)$, $\alpha_*(b)=\alpha(b)$, $\alpha\le\alpha_*$, откуда следует $\alpha_*'(a)\ge\alpha'(a)$, $\alpha_*'(b)\le\alpha'(b)$. Аналогично из $\beta_*(a)=\beta(a)$, $\beta_*(b)=\beta(b)$ и $\beta_*\le\beta$, откуда следует $\beta_*'(a)\le\beta'(a)$, $\beta_*'(b)\ge\beta'(b)$. Условия 3 или 4 означают с учетом вышеприведенных неравенств выполнение соотношения $\alpha_*'(a)\ge\beta_*'(a)$, откуда в силу $\alpha_*,\beta_*\in SG(I,\mathbb{R})$, $\alpha_*\le\beta_*$ и условия 9' следует $\alpha_*'(b)\ge\beta_*'(b)$. Последнее неравенство в силу вышеприведенных неравенств предполагает выполнение $\alpha'(b)\ge\beta'(b)$, а это противоречит условию 6. $\alpha'(b)<\beta'(b)$. Следовательно, условие $U=3V4\,69'$ противоречиво, что показывает истинность теоремы $Tb'30$. Теорема доказана.

Теорема $Tb'31$ 1111--11 $379'$

Доказательство. Предварительно докажем, что 1111--11 $379'AB$ является теоремой. Из теоремы $Tb02$ 11-+--0+ $3V49$ [I] следует существование обобщенного решения $y(t)$ краевой задачи

$$\begin{cases} y''(t)=f(t,y,y'),\\ H_1(y(a),y(b),\alpha'(a),\alpha'(b))=h_1,\\ y'(b)-\alpha'(b)=\beta'(b),\\ \alpha\le y\le\beta. \end{cases}$$

Имеем $y'(a)=\alpha'(a)=\beta'(a)$. Действительно, из $\alpha'(b)=y'(b)=\beta'(b)$, $\alpha\le y\le\beta$, α, y, $\beta\in SG$ в силу условия 9' следует неравенство $\alpha'(a)\le y'(a)\le\beta'(a)=\alpha'(a)$, с учетом чего $H_1y=h_1$. На основании $H_2\in M(--11)$

получаем $H_2\alpha \geqslant H_2 y \geqslant H_2\beta$, что вместе с неравенствами $H_2\alpha \leqslant h_2 \leqslant H_2\beta$ дает $H_2 y = h_2$. Таким образом, $y(t)$ является решением краевой задачи (I), (2) при $H_1 \in M(1111)$, $H_2 \in M(--11)$ и условиях 3, 7, 9$'$, A, B.

Освободимся от условий A и B. Покажем, что если выполнены условия 3, 7, 9$'$, $H_1 \in M(1111)$, $H_2 \in M(--11)$, то найдутся α_*, β_*, удовлетворяющие условиям 3, 7, A, B, $H_i\alpha_* \leqslant h_i \leqslant H_i\beta_*$, $i=1,2$, $\alpha \leqslant \alpha_* \leqslant \beta_* \leqslant \beta$, т.е. условиям теоремы $1111--11\ 379'AB$. Действительно, из $T002\ 1--0-10+$ [I] существуют обобщенные решения краевых задач:

$$x'' = f(t,x,x'),\ x(a) = \alpha(a),\ x(b) = \alpha(b),\ \alpha \leqslant x \leqslant \beta,$$

$$y'' = f(t,y,y'),\ y(a) = \beta(a),\ y(b) = \beta(b),\ x \leqslant y \leqslant \beta$$

Обозначим $x = \alpha_*$, $y = \beta_*$, $\alpha_*, \beta_* \in SG(I, \mathbb{R})$
Имеем $\alpha_* \leqslant \beta_*$, I) $\alpha_*'(a) \geqslant \alpha'(a) = \beta'(a) \geqslant \beta_*'(a)$, 2) $\alpha_*'(b) \leqslant \alpha'(b) = \beta'(b) \leqslant \beta_*'(b)$. Из I) в силу условия 9$'$ следует $\alpha_*'(b) \geqslant \beta_*'(b)$, что вместе с 2) дает $\alpha_*'(b) = \beta_*'(b)$. Аналогично получаем $\alpha_*'(a) = \beta_*'(a)$. Таким образом, $H_i\alpha_* = H_i\alpha \leqslant h_i \leqslant H_i\beta = H_i\beta_*$, $i = 1,2$. Следовательно, существует обобщенное решение краевой задачи

$$x'' = f(t,x,x'),$$
$$H_1 x = h_1,\ H_2 x = h_2,$$
$$\alpha_* \leqslant x \leqslant \beta_*$$

Из $\alpha \leqslant \alpha_* \leqslant \beta_* \leqslant \beta$ получаем, что x – обобщенное решение краевой задачи (I), (2). Теорема доказана.

Теорема $Tb'32\ 1----1++\ 379'$

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы $Tb'31$ достаточно показать, что $1---$ $-1++\ 379'AB$ является теоремой. Справедливость этой теоремы следует из работы [2]. Теорема доказана.

Теорема $Tb'33\ 11111-11\ 1379'$

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы $Tb'31$ достаточно показать, что $11111-11$ $1379'AB$ является теоремой.

Из ТООZ 1--0-10+ [1] следует существование обобщенного решения краевой задачи

$$\begin{cases} x'' = f(t, x, x'), \\ H_1(\alpha(a), x(b), \alpha'(a), \alpha'(b)) = h_1, \\ H_2(\alpha(a), x(b), \alpha'(a), \alpha'(b)) = h_2, \\ \alpha \leq x \leq \beta. \end{cases}$$

Из условия I. $\alpha(a) = \beta(a)$ и неравенства $\alpha \leq x \leq \beta$ следует $\alpha(a) = x(a) = \beta(a)$, $\alpha'(a) = x'(a) = \beta'(a)$, в силу $\alpha, x, \beta \in SG(I, \mathbb{R})$ и условия 9' имеем $\alpha'(b) \geq x'(b) \geq \geq \beta'(b) = \alpha'(b)$, т.е. $\alpha'(b) = x'(b) = \beta'(b)$. Следовательно,

$$H_1 x = H_1(\alpha(a), x(b), \alpha'(a), \alpha'(b)) = h_1,$$

$$H_2 x = H_2(\alpha(a), x(b), \alpha'(a), \alpha'(b)) = h_2.$$

Таким образом, x является обобщенным решением краевой задачи (I), (2). Теорема доказана.

Литература

I. Лепин А.Я., Лепин Л.А. Краевые задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. - Рига: Зинатне, 1988. - 2II с.

2. Лепин А.Я. Краевые задачи для уравнения второго порядка// Доклады расширенных заседаний семинара ИПМ им. И.Н.Векуа. - Тбилиси: ТГУ, 1988. - № 3.- Т. 3. - С. 83-86.

Поступила 13.10.89

УДК 517.938.4

Л.Д.Сермоне, А.А.Рейнфелд

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

Рассмотрим две нелинейные системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f_1(x), \quad t \neq \tau_i \tag{1}$$

$$\Delta x\big|_{t=\tau_i} = x(\tau_i+0) - x(\tau_i-0) = B_i x(\tau_i-0) + I_i(x(\tau_i-0)),$$

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f_2(x), \quad t \neq \tau_i \tag{2}$$

$$\Delta x\big|_{t=\tau_i} = x(\tau_i+0) - x(\tau_i-0) = B_i x(\tau_i-0) + K_i(x(\tau_i-0)),$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $A, B_i \in Hom(\mathbb{R}^n)$, $i \in \mathbb{Z}$, $\det(E+B_i) \neq 0$, последовательность моментов τ_i занумерована в возрастающем порядке множеством целых чисел $\mathbb{Z}$ так, что $\tau_i \to -\infty$ при $i \to -\infty$ и $\tau_i \to +\infty$ при $i \to +\infty$, функции f_1, f_2, $I_i, K_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — липшицевы.

Решение системы (1) можно представить:

$$x_1(t, t_0, x_0) = X(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} X(t,\tau) f_1(x(\tau, t_0, x_0))d\tau + \sum_{t_0<\tau_i<t} X(t,\tau_i) I_i(x(\tau_i, t_0, x_0)),$$

где

$$X(t, t_0) = U(t, \tau_{j+k})(E+B_{j+k}) \prod_{\nu=k}^{1} U(\tau_{j+\nu}, \tau_{j+\nu-1}) \times (E+B_{j+\nu-1}) U(\tau_j, t_0),$$

$$\tau_{j-1} < t_0 \leq \tau_j < \tau_{j+k} < t \leq \tau_{j+k+1}.$$

а $\mathcal{U}(t,\tau)$ - решение матричной задачи Коши

$$\frac{d\mathcal{U}}{dt} = A\mathcal{U}, \quad \mathcal{U}(\tau,\tau) = E,$$

решение системы (2):

$$x_2(t,t_0,x_0) = X(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} X(t,\tau) f_2(x(\tau,t_0,x_0))\,d\tau + \sum_{t_0<\tau_i<t} X(t,\tau_i) K_i(x(\tau_i,t_0,x_0))$$

Определение. Системы дифференциальных уравнений (I) и (2) строго динамически эквивалентны в целом, если существует гомеоморфизм $H(t_0,\cdot): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, такой, что

$$H(t,x_1(t,t_0,x_0)) = x_2(t,t_0,H(t_0,x_0)) \tag{3}$$

Предположим, что существует кусочно непрерывная функция $G: \mathbb{R}^2 \to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$ такая, что:

а) $G(\cdot,\tau)$ непрерывно дифференцируемо и удовлетворяет системе

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad t \neq \tau_i, \quad t \neq \tau$$
$$\Delta x\big|_{t=\tau_i} = x(\tau_i+0) - x(\tau_i-0) = B_i x(\tau_i-0), \tag{4}$$

б) $G(\tau+0,\tau) - G(\tau-0,\tau) = E, \quad \tau \neq \tau_i$

в) $$\sup_{t_0}\Big[\int_{-\infty}^{+\infty} |G(t_0,\tau)|\,d\tau + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |G(t_0,\tau_i)|\Big] = M < +\infty \tag{5}$$

$$\|f_1(x) - f_2(x)\| \leq P < +\infty \tag{6}$$

$$\|I_i(x) - K_i(x)\| \leq P < +\infty \tag{7}$$

$$\|f_1(x) - f_1(x')\| \leq \varepsilon\,\|x - x'\| \tag{8}$$

$$\|f_2(x) - f_2(x')\| \leq \varepsilon\,\|x - x'\| \tag{9}$$

$$\| I_i(x) - I_i(x') \| \leqslant \mathcal{E} \| x - x' \| \tag{10}$$

$$\| K_i(x) - K_i(x') \| \leqslant \mathcal{E} \| x - x' \| \tag{11}$$

Теорема. Пусть G кусочно-непрерывна, $M\mathcal{E}<1$, и выполняются условия (6)-(11). Тогда системы (1) и (2) строго динамически эквивалентны.

Доказательство. Рассмотрим оператор F , определяемый с помощью формулы

$$Fh(t_0,x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t_0,\tau)[f_2(x_1(\tau,t_0,x_0) + h(\tau,x_1(\tau,t_0,x_0))) - f_1(x_1(\tau,t_0,x_0))]d\tau + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} G(t_0,\tau_i)[K_i(x_1(\tau_i,t_0,x_0) + h(\tau_i,x_1(\tau_i,t_0,x_0))) - I_i(x_1(\tau_i,t_0,x_0))]$$

Возьмем произвольное $h \in \mathbb{C}$, где $\mathbb{C}$ - пространство ограниченных, кусочно-непрерывных по t с разрывами первого рода при $t_0 = \tau_i$ и непрерывных по x функции. В силу ограниченности разностей $f_1 - f_2$ и $I_i - K_i$, липшицевости f_2 и K_i , и условий теоремы — $Fh \in \mathbb{C}$.

Оценим разность $|Fh(t_0,x_0) - Fh'(t_0,x_0)|$:

$$|Fh(t_0,x_0) - Fh'(t_0,x_0)| = |\int_{-\infty}^{+\infty} G(t_0,\tau)[f_2(x_1(\tau,t_0,x_0) + h(\tau, x_1(\tau,t_0,x_0))) - f_2(x_1(\tau,t_0,x_0) + h'(\tau,x_1(\tau,t_0,x_0)))]d\tau + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} G(t_0, \tau_i)[K_i(x_1(\tau_i,t_0,x_0) + h(\tau_i,x_1(\tau_i,t_0,x_0))) - K_i(x_1(\tau_i,t_0,x_0) + h'(\tau_i,x_1(\tau_i,t_0,x_0)))]| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |G(t_0,\tau)| \mathcal{E} |h(\tau,x_1(\tau,t_0,x_0)) - h'(\tau, x_1(\tau,t_0,x_0))| d\tau + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |G(t_0,\tau_i)| \mathcal{E} |h(\tau,x_1(\tau_i,t_0,x_0)) - h'(\tau, x_1(\tau_i,t_0,x_0))| \leqslant \mathcal{E} \| h - h' \| \sup_{t_0} [\int_{-\infty}^{+\infty} |G(t_0,\tau)| d\tau + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |G(t_0,\tau_i)|] = \mathcal{E}M \| h - h' \|.$$

Из последнего неравенства следует, что F - оператор сжатия, и существует одно единственное решение в $\mathfrak{C}$, которое удовлетворяет функциональному уравнению

$$Fh(t_0, x_0) = h(t_0, x_0).$$

Имеем :

$$h(t, x_1(t, t_0, x_0)) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,\tau)[f_2(x_1(\tau, t, x_1(t, t_0, x_0)) + h(\tau, x_1(\tau, t, x_1(t, t_0, x_0)))) + f_1(x_1(\tau, t, x_1(t, t_0, x_0)))]\,d\tau + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} G(t,\tau_i)[K_i(x_1(\tau_i, t, x_1(t, t_0, x_0)) + h(\tau_i, x_1(\tau_i, t, x_1(t, t_0, x_0)))) - I_i(x_1(\tau_i, t, x_1(t, t_0, x_0)))] =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,\tau)[f_2(x_1(\tau, t_0, x_0) + h(\tau, x_1(\tau, t_0, x_0))) - f_1(x_1(\tau, t_0, x_0))]\,d\tau + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} G(t,\tau_i)[K_i(x_1(\tau_i, t_0, x_0) + h(\tau_i, x_1(\tau_i, t_0, x_0))) - I_i(x_1(\tau_i, t_0, x_0))].$$

Проверим, что

$$\eta(t) = x_1(t, t_0, x_0) + h(t, x_1(t, t_0, x_0))$$

удовлетворяет системе (2), поэтому найдем производную функции x_1 :

$$\frac{d}{dt} x_1(t, t_0, x_0) = Ax_1(t, t_0, x_0) + f_1(x_1(t, t_0, x_0)), \quad t \neq \tau_i.$$

Скачок, соответственно, при $t = \tau_i$:

$$\Delta x_1(t, t_0, x_0) = x_1(\tau_i + 0, t_0, x_0) - x_1(\tau_i - 0, t_0, x_0) = B_i x_1(\tau_i - 0, t_0, x_0) + I_i(x_1(\tau_i - 0, t_0, x_0))$$

Производная функции h равна:

$$\frac{d}{dt}h(t,x_1(t,t_0,x_0))=\frac{d}{dt}\Big[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G(t,\tau)[f_2(x_1(\tau,t_0,x_0)+$$
$$+h(\tau,x_1(\tau,t_0,x_0)))-f_1(x_1(\tau,t_0,x_0))]\,d\tau\Big]+$$
$$+\frac{d}{dt}\Big[\sum_{i=-\infty}^{+\infty}G(t,\tau_i)[K_i(x_1(\tau_i,t_0,x_0)+h(\tau_i,x_1(\tau_i,t_0,x_0)))-$$
$$-I_i(x_1(\tau_i,t_0,x_0))]\Big]=f_2(x_1(t,t_0,x_0)+h(t,x_1(t,t_0,x_0)))-$$
$$-f_1(x_1(t,t_0,x_0))+A\Big[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G(t,\tau)[f_2(x_1(\tau,t_0,x_0)+$$
$$+h(\tau_1,x_1(\tau,t_0,x_0)))-f_1(x_1(\tau,t_0,x_0))]\,d\tau+$$
$$+\sum_{i=-\infty}^{+\infty}G(t,\tau_i)[K_i(x_1(\tau_i,t_0,x_0)+h(\tau_i,x_1(\tau_i,t_0,x_0)))-$$
$$-I_i(x_1(\tau_i,t_0,x_0))]\Big]=f_2(x_1(t,t_0,x_0)+h(t,x_1(t,t_0,x_0)))-$$
$$-f_1(x_1(t,t_0,x_0))+Ah(t,x_1(t,t_0,x_0)).$$

Окончательно имеем:

$$\frac{d}{dt}\eta(t)=Ax_1(t,t_0,x_0)+f_1(x_1(t,t_0,x_0))+f_2(x_1(t,t_0,x_0)+$$
$$+h(t,x_1(t,t_0,x_0)))-f_1(x_1(t,t_0,x_0))+Ah(t,x_1(t,t_0,x_0))=$$
$$=Ax_1(t,t_0,x_0)+f_2(x_1(t,t_0,x_0)+h(t,x_1(t,t_0,x_0)))+$$
$$+Ah(t,x_1(t,t_0,x_0))=A\eta(t)+f_2(\eta(t))$$

при $t\neq\tau_i$. (I2)

Но при $t=\tau_i$ имеем

$$\Delta h(t,x_1(t,t_0,x_0))=h(\tau_i+0,x_1(\tau_i+0,t_0,x_0))-h(\tau_i-0,$$
$$x_1(\tau_i-0,t_0,x_0))=B_i h(\tau_i-0,x_1(\tau_i-0,t_0,x_0))+$$

$$+ K_i(x_1(\tau_i-0,t_0,x_0) + h(\tau_i-0,x_1(\tau_i-0,t_0,x_0)))-$$
$$- I_i(x_1(\tau_i-0,t_0,x_0)).$$

Окончательно :

$$\Delta[x_1(t,t_0,x_0)+h(t,x_1(t,t_0,x_0))] = B_i x_1(\tau_i-0,t_0,x_0) + I_i(x_1(\tau_i-0,t_0,x_0)) + B_i h(\tau_i-0,x_1(\tau_i-0,t_0,x_0)) + K_i(x_1(\tau_i-0,t_0,x_0)+h(\tau_i-0,x_1(\tau_i-0,t_0,x_0))) - I_i(x_1(\tau_i-0,t_0,x_0)) = B_i(x_1(\tau_i-0,t_0,x_0)+h(\tau_i-0,x_1(\tau_i-0,t_0,x_0))) + K_i(x_1(\tau_i-0,t_0,x_0)+h(\tau_i-0,x_1(\tau_i-0,t_0,x_0))). \tag{13}$$

Из (12) и (13) следует, что

$$\eta(t) = x_1(t,t_0,x_0) + h(t,x_1(t,t_0,x_0))$$

удовлетворяет системе (2) и

$$\eta(t_0) = x_0 + h(t_0,x_0)$$ **, поэтому**

$$x_1(t,t_0,x_0) + h(t,x_1(t,t_0,x_0)) = x_2(t,t_0,x_0+h(t_0,x_0)).$$

Меняя ролями f_1 **и** f_2 **, и** K_i **и** I_i **, таким же способом докажем существование**

$$h'(t,x_2(t,t_0,x_0)) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,\tau)[f_1(x_2(\tau,t_0,x_0)+$$

$$+h'(\tau, x_2(\tau, t_0, x_0)) - f_2(x_2(\tau, t_0, x_0))]d\tau + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} G(t,$$

$$\tau_i)[I_i(x_2(\tau_i, t_0, x_0) + h'(\tau_i, x_2(\tau_i, t_0, x_0))) - K_i(x_2(\tau_i, t_0, x_0))],$$

удовлетворяющего равенству

$$x_2(t, t_0, x_0) + h'(t, x_2(t, t_0, x_0)) = x_1(t, t_0, x_0 + h'(t_0, x_0)).$$

Обозначая

$$H(t_0, x_0) = x_0 + h(t_0, x_0),$$

$$H'(t_0, x_0) = x_0 + h'(t_0, x_0),$$

получаем

$$H' \circ H(t, x_1(t, t_0, x_0)) = x_1(t, t_0, H' \circ H(t_0, x_0)),$$

учитывая единственность отображения $H' \circ H = id$ в $\mathbb{C}$, имеем $H' \circ H = id$, и следовательно, это гомеоморфизм, устанавливающий строгую динамическую эквивалентность систем (1) и (2) в целом.

Литература

1. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием.-Киев:Вища школа, 1987. - 288 с.
2. Рейнфелд А.А. Обобщенная теорема Гробмана-Хартмана // Латв. мат. ежегодник, 1985. - Вып.29. - С.84-88.

Поступила 13.12.1989

УДК 517.95

Х.Э.Калис

АБСОЛЮТНО УСТОЙЧИВАЯ ЯВНАЯ, УТОЧНЕННАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

В литературе известные разностные схемы (явные, неявные) отличаются между собой порядком точности, сложностью реализации и запасом устойчивости [I]. Как правило, неявные разностные схемы второго порядка-точности абсолютно устойчивые, но сложно реализуемые на ЭВМ, т.е. надо решать системы алгебраических уравнений, а явные схемы - условно устойчивы и легко реализуемы на ЭВМ. Здесь построена абсолютно устойчивая, явная разностная схема, которая точна по времени для уравнения теплопроводности постоянными коэффициентами.

Рассматривается начально-краевая задача для решения уравнения теплопроводности

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \nu \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a \dfrac{\partial u}{\partial x}, \quad x \in (0,\ell),\ t>0 \\ u|_{x=0} = u|_{x=\ell} = 0, \quad u|_{t=0} = \varphi(x), \end{cases} \qquad (I)$$

где $\varphi = \varphi(x)$ - непрерывная функция в промежутке $[0,\ell]$,
$\varphi(0) = \varphi(\ell) = 0$,
$\nu > 0$; a - постоянные коэффициенты.

Для разработки специальных методов решения важно рассматривать случай, когда коэффициент a - большой параметр по модулю или ν - малый параметр. Решение задачи (I) можно построить аналитически в виде тригонометрических рядов методом разложения переменных

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(x), \qquad (2)$$

где $X_к(x)$ - собственные функции краевой задачи

$$\begin{cases} X_к''(x) + bX_к'(x) + \lambda_к X_к(x) = 0, \quad x \in (0, l) \\ X_к(0) = X_к(l) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

$$b = a/\nu, \quad X_к' = dX_к/dx, \quad X_к'' = d^2X_к/dx^2,$$

а $T_к(t)$ - решение задачи Коши

$$\begin{cases} \dot T_к(t) + \lambda_к \nu T_к(t) = 0 \\ T_к(0) = a_к \equiv (\varphi, \bar X_к) = \int_0^l \varphi(x) \bar X_к(x) dx, \end{cases} \tag{4}$$

$$\dot T_к = dT_к/dt,$$

$\bar X_к(x)$ - собственные функции сопряженной краевой задачи

$$\begin{cases} \bar X_к''(x) - bX_к'(x) + \lambda_к \bar X_к(x) = 0, \quad x \in (0, l) \\ \bar X_к(0) = \bar X_к(l) = 0, \end{cases} \tag{5}$$

$$к = 1, 2, \ldots .$$

Следовательно, имеем систему биортонормированных собственных функций и собственных значений в виде:

$$X_к(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \exp(-bx/2) \sin \frac{к\pi x}{l},$$

$$\bar X_к(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \exp(bx/2) \sin \frac{к\pi x}{l},$$

$$\lambda_к = \left(\frac{к\pi}{l}\right)^2 + \frac{b^2}{4}, \tag{6}$$

где $(X_k, \bar{X}_m) = \int_0^l X_k(x)\bar{X}_m(x)\,dx = \delta_{km}$ – символ Кронекера.

Решения задач (4), (2) имеют вид:

$$T_k(t) = a_k \exp(-\lambda_k \nu t),$$

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \exp(-\lambda_k \nu t)\, X_k(x). \tag{7}$$

Для разностной аппроксимации вводится равномерная сетка по пространству

$$\omega_h = \{x_i : x_i = ih,\ i = \overline{1,N-1},\ l = Nh\},$$

где h – шаг по пространству.
После дискретизации по пространству задача (I) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$$\begin{cases} \dfrac{du_i(t)}{dt} = \gamma\nu u_{x\bar{x}_i}(t) + a u_{\overset{\circ}{x}_i}(t) \\ u_0(t) = u_N(t) = 0, \quad u_i(0) = \varphi_i, \quad t > 0, \end{cases} \tag{8}$$

где $u_i(t) = u(t, x_i)$, $\varphi_i = \varphi(x_i)$,

$$u_{x\bar{x}_i}(t) = (u_{i+1}(t) - 2u_i(t) - u_{i-1}(t))h^{-2},$$

$$u_{\overset{\circ}{x}_i}(t) = (u_{i+1}(t) - u_{i-1}(t))(2h)^{-1}, \quad i = \overline{1,N-1},$$

$\gamma = \frac{R_h}{2} \operatorname{cth} \frac{R_h}{2}$ – возмущенный коэффициент разностной схемы А.П.Ильина [2],

$R_h = ah/\nu$ – сеточное число Рейнольдса. В стационарном случае $(d/dt \equiv 0)$ разностная схема (8) точна.

Решение разностно-дифференциальной задачи (8) можно получить методом разделения переменных в виде конечных рядов Фурье

$$u_i(t) = \sum_{K=1}^{N-1} T^{(K)}(t) X^{(K)}(x_i), \tag{9}$$

где $X^{(K)}(x_i)$ - собственные функции разностной задачи

$$\begin{cases} \gamma X^{(K)}_{x_i \bar{x}_i} + b X^{(K)}_{\overset{\circ}{x}_i} + \tilde{\lambda}_K X^{(K)}_i = 0 \\ X^{(K)}_0 = X^{(K)}_N = 0, \quad X^{(K)}_i \equiv X^{(K)}(x_i), \quad i = \overline{1, N-1} \end{cases} \tag{10}$$

а $T^{(K)}(t)$ - решение задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{T}^{(K)}(t) + \tilde{\lambda}_K \nu T^{(K)}(t) = 0 \\ T^{(K)}(0) = \tilde{a}_K = (\varphi, \bar{X}^{(K)}) \equiv \sum_{j=1}^{N-1} \varphi_j \bar{X}^{(K)}(x_j), \end{cases} \tag{11}$$

$\bar{X}^{(K)}(x_i)$ - собственные функции сопряженной разностной задачи

$$\begin{cases} \bar{X}^{(K)}_{x \bar{x}_i} - b \bar{X}^{(K)}_{\overset{\circ}{x}_i} + \tilde{\lambda}_K \bar{X}^{(K)}_i = 0 \\ \bar{X}^{(K)}_0 = \bar{X}^{(K)}_N = 0, \quad \bar{X}^{(K)}_i \equiv \bar{X}^{(K)}(x_i), \quad i = \overline{1, N-1}, \end{cases} \tag{12}$$

$K = 1, 2, \ldots$

Следовательно, имеем систему дискретных биортонормированных собственных функций и собственных значений в виде:

$$X^{(K)}(x_i) = \sqrt{\frac{2h}{l}} \exp(-bx_i/2) \sin \frac{K\pi x_i}{l},$$

$$\bar{X}^{(K)}(x_i) = \sqrt{\frac{2h}{l}} \exp(bx_i/2) \sin \frac{K\pi x_i}{l},$$

$$\tilde{\lambda}_K = R_h h^{-2} \left(ch \frac{R_h}{2} - \cos \frac{K\pi h}{l}\right) sh^{-1} \frac{R_h}{2}, \tag{13}$$

где

$$(X^{(K)}, \bar{X}^{(m)}) \equiv \sum_{i=1}^{N-1} X^{(K)}(x_i) \bar{X}^{(m)}(x_i) = \delta_{Km}.$$

Таким образом, наличие коэффициента γ в (8) обеспечивает точность собственных функций, т.е.

$$\mathcal{X}^{(k)}(x_i) = \sqrt{h}\, X_k(x_i), \quad \bar{\mathcal{X}}^{(k)}(x_i) = \sqrt{h}\, \bar{X}_k(x_i),$$

(множитель $\sqrt{h}$ связан нормировкой собственных функций в разностной норме). Решение задачи Коши (II) имеет вид (7), где λ_k, a_k заменены на $\tilde{\lambda}_k, \tilde{a}_k$,

$$u_i(t) = \sum_{k=1}^{N-1} \exp(-\tilde{\lambda}_k \nu t)\, \mathcal{X}^{(k)}(x_i) \sum_{j=1}^{N-1} \bar{\mathcal{X}}^{(k)}(x_j)\, \varphi(x_j), \qquad i = \overline{1, N-1}. \tag{14}$$

После дискретизации по времени (сетка $\omega_\tau = \{t_n = n\tau,\ n = 0, 1, \dots\}$, τ - шаг времени) для решения (8) можно рассматривать явную разностную схему вида

$$\begin{cases} (u_i^{n+1} - u_i^n)\tau^{-1} = \gamma \nu u^n_{x\bar{x}_i} + a u^n_{\overset{\circ}{x}_i} \\ u_0^n = u_N^n = 0, \quad u_i^0 = \varphi_i, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad n \geq 0, \end{cases} \tag{15}$$

где $u_i^n \approx u(t_n, x_i)$.

Разложение (9) теперь имеет вид

$$u_i^n = \sum_{k=1}^{N-1} T_k^n \mathcal{X}_i^{(k)}, \quad n \geq 0,$$

где коэффициенты T_k^n определяются из разностной задачи

$$\begin{cases} (T_k^{n+1} - T_k^n)\tau^{-1} + \tilde{\lambda}_k \nu T_k^n = 0, \quad n \geq 0, \\ T_k^0 = \tilde{a}_k, \quad k = \overline{1, N-1}, \end{cases} \tag{16}$$

т.е. $T_k^n = \tilde{a}_k (\rho_k)^n$, $\rho_k = 1 - \tau \tilde{\lambda}_k \nu$.

Для разности $\delta u_i^n = u_i^n - u_i(t_n)$ следует оценка

$$\delta u_i^n = \sum_{k=1}^{N-1} \widetilde{a}_k \left[(1-\tau\nu\widetilde{\lambda}_k)^n - \exp(-\widetilde{\lambda}_k \nu n\tau) \right] X_i^{(k)} =$$

$$= O(\tau), \quad \text{при} \quad \tau \to 0,$$

т.е. разностная схема (I5) имеет только первый порядок точности по времени.

Для повышения точности перепишем систему ОДУ (8) в векторном виде

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{u}}{dt} = A\vec{u} \\ \vec{u}(0) = \vec{\varphi}, \end{cases} \qquad \text{(I7)}$$

где $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_{N-1})$, $\vec{\varphi} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_{N-1})$ — векторы столбцы, содержащие значения сеточных функций $u_i(t)$, φ_i, $i = \overline{1, N-1}$;

A – трехдиагональная матрица $(N-1)$ -ого порядка с элементами $a_{i,i+1} = \alpha = \gamma\nu/h^2 + a/(2h) = ah^{-1}(1-\exp(-R_h))^{-1} > 0$,

$$a_{i,i-1} = \beta = \gamma\nu/h^2 - a/(2h) = \exp(-R_h)\alpha > 0,$$

$$a_{i,i} = -(\alpha+\beta) < 0.$$

Собственные значения матрицы $(-A)$ простые и равны

$$\lambda^{(k)} = \widetilde{\lambda}_k\nu = \alpha\left[1 - \exp(-R_h) - 2\exp\left(-\frac{R_h}{2}\right)\cos\frac{k\pi}{N}\right] > 0, \quad \text{(I8)}$$
$$k = \overline{1, N-1},$$

а собственные векторы

$$\vec{X}_k = (X_1^{(k)}, \ldots, X_{N-1}^{(k)})$$

расположены по столбцам некоторой матрицы $\mathcal{X}$, т.е.

$$-A\mathcal{X} = \mathcal{X}D, \qquad \text{(I9)}$$

где D – диагональная матрица с элементами $\lambda^{(k)}$, $k = \overline{1, N-1}$.
При замене $\vec{u} = \mathcal{X}\vec{z}$ из (I7) следует задача Коши для расщепляющейся системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{z}}{dt} = \mathcal{X}^{-1}A\mathcal{X}\vec{z} \equiv -D\vec{z} \\ \vec{z}(0) = \mathcal{X}^{-1}\vec{\varphi} = \vec{z}_0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_k(t) = -\lambda^{(k)}\alpha_k(t), & t>0 \\ \alpha_k(0) = \alpha_{k0}, & k=\overline{1,N-1}, \end{cases} \tag{20}$$

где $\alpha_k, \dot{\alpha}_k, \alpha_{k0}$ – составляющие векторов $\vec{\alpha}$, $\frac{d\vec{\alpha}}{dt}$, $\vec{\alpha}_0$. Точное решение системы (20) имеет вид

$$\alpha_k(t) = \exp(-\lambda^{(k)}t)\alpha_{k0}, \quad k=\overline{1,N-1}$$

или

$$\vec{\alpha}(t) = \exp(-Dt)\vec{\alpha}_0, \quad \vec{u}(t) = \mathcal{X}\exp(-Dt)\mathcal{X}^{-1}\vec{\varphi} = \exp(-At)\vec{\varphi}.$$

Для решения скалярных задач Коши (20) строятся точные, явные, двухслойные, абсолютно-устойчивые разностные схемы в виде [3]

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha_k^{n+1} - \alpha_k^n}{\tau} = -\tilde{\gamma}_k\lambda^{(k)}\alpha_k^n, & n\geq 0 \\ \alpha_k^0 = \alpha_{k0}, & k=\overline{1,N-1}, \end{cases} \tag{21}$$

где $\tilde{\gamma}_k = (1-\exp(-\tau\lambda^{(k)}))/(\tau\lambda^{(k)}) > 0$ – возмущенный коэффициент явной схемы Эйлера, $\alpha_k^n = \alpha_k(t_n)$. Разностную схему (21) можно переписать в векторном виде: $(\vec{\alpha} = \mathcal{X}^{-1}\vec{u})$

$$\begin{cases} \dfrac{\vec{\alpha}^{n+1} - \vec{\alpha}^n}{\tau} = -GD\vec{\alpha}^n, & n\geq 0 \\ \vec{\alpha}^0 = \vec{\alpha}_0, \end{cases} \tag{22}$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{\vec{u}^{n+1} - \vec{u}^n}{\tau} = \Gamma A\vec{u}^n, & n\geq 0 \\ \vec{u}^0 = \vec{\varphi}, \end{cases} \tag{23}$$

где $\Gamma = \mathcal{X}G\mathcal{X}^{-1}$ – матрица возмущенных коэффициентов, G – диагональная матрица с элементами $\tilde{\gamma}_k$.

$$\vec{\alpha}^n = \vec{\alpha}(t_n), \quad \vec{u}^n = \vec{u}(t_n), \quad n\geq 0.$$

Матрицу ΓA можно также представить в виде $-\mathcal{X}\tilde{\sigma}\mathcal{X}^{-1}$, где $\tilde{\sigma} = \sigma D$ – диагональная матрица с элементами $\lambda^{(k)}\tilde{\gamma}_k$.

Явная схема (23) абсолютно устойчива, т.к. разностные уравнения имеют модуль перехода [I]

$$1 - \tau\tilde{\gamma}_k\lambda^{(k)} = \exp(-\lambda^{(k)}\tau) < 1, \quad k = \overline{1, N-1}.$$

Матричные выкладки можно упростить, если использовать подстановку

$$u_i = \exp(-bx_i/2)y_i \quad \text{или} \quad \vec{u} = \tilde{E}\vec{y},$$

где $\tilde{E}$ – диагональная матрица с элементами $\exp(-bx_k/2)$, $k = \overline{1, N-1}$.

Тогда задача Коши (I7) примет вид

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = \tilde{A}\vec{y}, \quad \vec{y}(0) = \tilde{E}^{-1}\vec{\varphi}, \tag{24}$$

где $\tilde{A} = \tilde{E}^{-1}AE$.

Так как $\mathcal{X} = \tilde{E}\tilde{\mathcal{X}}$,

где $\tilde{\mathcal{X}}$ – матрица с элементами

$$\tilde{\mathcal{X}}_{ik} = \tilde{X}^{(k)}(x_i) = \sqrt{\frac{2h}{l}}\sin\frac{ik\pi h}{l}, \quad i, k = \overline{1, N-1},$$

то

$$\tilde{A} = \tilde{E}^{-1}\mathcal{X}(-D)\mathcal{X}^{-1}\tilde{E} = \tilde{\mathcal{X}}(-D)\tilde{\mathcal{X}}^{-1}.$$

Матрицы A и $\tilde{A}$ подобны, и собственные значения их совпадают с $\lambda^{(k)}$, $k = \overline{1, N-1}$, а собственные векторы матрицы $\tilde{A}$ расположены в столбцах симметричной матрицы $\tilde{\mathcal{X}}$, причем они ортонормированны, т.е.

$$\sum_{i=1}^{N-1}\tilde{X}^{(k)}(x_i)\,\tilde{X}^{(m)}(x_i) = \delta_{km}$$

или $\tilde{\mathcal{X}}^T\tilde{\mathcal{X}} = E$,

где E – единичная матрица,

$\tilde{\mathcal{X}}^T$ – транспонированная $\tilde{\mathcal{X}}$ матрица.

Следовательно, $\tilde{\mathcal{X}}^{-1} = \tilde{\mathcal{X}}^T = \tilde{\mathcal{X}}$.

Разностная схема (23) относительно вектора $\vec{y}$ имеет вид:

$$\begin{cases} \vec{y}^{\,n+1} - \vec{y}^{\,n} = -\tau\tilde{\mathcal{X}}\tilde{G}\tilde{\mathcal{X}}\vec{y}^{\,n}, & n \geq 0 \\ \vec{y}^{\,0} = \vec{y}(0). \end{cases} \qquad (25)$$

Если в разностных схемах (23), (25) заменить $\lambda^{(k)}$ на λ_k (собственные значения дифференциальной задачи), $k=\overline{1,N-1}$ то получим разностные схемы с точным спектром [4]. В этом случае матрица $\tilde{\mathcal{X}}D\tilde{\mathcal{X}}^{-1}$ не будет трехдиагональной, т.к. $\tilde{\mathcal{X}}D\tilde{\mathcal{X}}^{-1}=-A$ только тогда, когда диагональ матрицы D содержит собственные значения матрицы A.

Разностную схему (25) можно решить аналитически, если ввести преобразования

$$\vec{y} = \tilde{\mathcal{X}}\vec{z}, \quad \vec{z} = \tilde{\mathcal{X}}\vec{y}.$$

Тогда из (25) следует расщепляющаяся система уравнений (21) и

$$z_k^n = \exp(-\lambda^{(k)}\tau n)z_k^0, \quad z_k^0 = \sum_{j=1}^{N-1}\tilde{\mathcal{X}}^{(j)}(x_k)y_j(0),$$

$$y_i^n = \sum_{k=1}^{N-1}\tilde{\mathcal{X}}^{(k)}(x_i)z_k^n, \quad u_i^n = \exp(-bx_i/2)y_i^n,$$

или в матричной форме

$$\vec{z}^{\,n} = D_n\tilde{\mathcal{X}}\tilde{E}^{-1}\vec{\varphi}, \quad D_n = \exp(-Dt_n),$$

$$\vec{u}^{\,n} = \tilde{E}\tilde{\mathcal{X}}\vec{z}^{\,n} = \tilde{E}\tilde{\mathcal{X}}D_n\tilde{\mathcal{X}}\tilde{E}^{-1}\vec{\varphi} = \mathcal{X}D_n\mathcal{X}^{-1}\vec{\varphi}. \qquad (26)$$

Точное решение дифференциально-разностной задачи (17) можно представить в виде

$$\vec{u}(t_n) = \exp(At_n)\vec{\varphi}.$$

Так как $A=\mathcal{X}(-D)\mathcal{X}^{-1}$, то матрица-экспонента $\exp(At_n)=\mathcal{X}D_n\mathcal{X}^{-1}$, т.е. получено точное решение задачи.

В случае разностной схемы с точным спектром решение принимает вид (26), где $\lambda^{(k)}$ заменено на λ_k.

В работе [5] приведена уточненная по времени разностная схема при $a \neq const$ при помощи двух возмущенных коэффициентов $\tilde{\gamma}$ и γ в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{\tilde{u}^{n+1}(x_i)-\tilde{u}^n(x_i)}{\tau\tilde{\gamma}} = \nu\gamma\tilde{u}^n_{x\bar{x}_i} + a(x_i)u^n_{\hat{x}_i}, \quad n \geq 0 \\ \tilde{u}^0(x_i) = \varphi(x_i), \quad x_i \in \omega_h, \end{cases} \tag{27}$$

где $\gamma = \gamma(x) = \dfrac{R_h(x)}{2}\,\mathrm{cth}\,\dfrac{R_h(x)}{2}, \quad R_h(x) = \dfrac{a(x)h}{\nu},$

$$\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}(x) = (1-\exp(-2\nu\tau\gamma h^{-2}))(2\nu\tau\gamma h^{-2})^{-1}.$$

Из оценок $\gamma \geq R_h/2, \quad \tilde{\gamma} \leq (2\nu\tau\gamma h^{-2})^{-1}$ следует абсолютная устойчивость разностной схемы (27). В случае $a = const$ для разности $\delta u^n = u^n(x) - \tilde{u}^n(x)$ из разложений по собственным функциям $X^{(k)}(x)$ следует, что

$$\delta u^n(x) = \sum_{k=1}^{N-1} \tilde{a}_k \left[(1-\lambda^{(k)}\tilde{\gamma}_k\tau)^n - (1-\lambda^{(k)}\tilde{\gamma}\tau)^n\right] X^{(k)}(x),$$

$$x \in \omega_h,$$

т.е. $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_k$ только при $k = N/2$.

Следовательно, решение разностной задачи (27) в случае постоянных коэффициентов совпадает с решением дифференциальной задачи только для начальной функции $\varphi(x)$, которая пропорциональна собственной функции $X^{(N/2)}(x)$.

Предложенный метод построения уточненной явной разностной схемы можно применять также для решения уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами, применяя для вычисления спектра матриц A такие мощные современные методы решения полной задачи о собственных значениях, как LR алгоритм [6].

Литература

1. Самарский А.А. Теория разностных схем. - М.: Наука, 1977.- 656 с.
2. Ильин А.М. Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной// Математ. заметки. - 1969.- Т.6.- Вып.2.- С.234-248.
3. Калис Х.Э. Специальные разностные методы решения задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений// Латв.мат.ежегодник.- Рига: Зинатне, 1984.- Вып.28.- С.39-61.
4. Макаров В.Л., Гаврилюк И.П. О построении наилучших сеточных схем с точным спектром // ДАН УССР, серия А.- 1975.- № 12.- 22с.
5. Chien J.C. A general finite-difference formulation with application to Naver-Stokes equations // J. of comp. phys.- 1976.- Vol.20.- N 3.- P.268-278.
6. Уилкинсон Дж.Х., Райнш С. Справочник алгоритмов на языке АЛГОЛ. Линейная алгебра. - М.: Машиностроение, 1976.- 390 с.

Поступила 14.01.90

ОГЛАВЛЕНИЕ

I. Энгельсон Л.Е. Об устойчивости в среднем линейного функционально-дифференциального уравнения со случайным оператором....3
2. Гудков В.В., Змитренко Н.В. Асимптотики решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений, возникающей в автомодельной задаче о нагреве сферической мишени....II
3. Цибулис А.Б. Не все решения уравнения с разрывной нелинейностью достижимы решениями сглаженных задач....24
4. Виржбицкий Я.В. О разрешимости двухточечной краевой задачи с ограничениями....32
5. Лепин Л.А. Об отсутствии монотонных решений одной нелинейной краевой задачи....42
6. Беспалова С.А., Клоков Ю.А. Об одном обобщении уравнения Фолкнера-Скена. П....48
7. Звягинцев А.И. Одна экстремальная задача, связанная с априорными оценками решений дифференциальных неравенств....54
8. Пономарев В.Д. Существование решения системы двух операторных уравнений....63
9. Лепина Э.И. Краевые задачи без максимального решения. II....66
I0. Адъютов М.М., Клоков Ю.А. Единственность решения начальной задачи для ОДУ второго порядка с особенностями....78
II. Садырбаев Ф.Ж. Двухточечная краевая задача для уравнения четвертого порядка....84
I2. Лепин А.Я. Разрешимость краевых задач для уравнения второго порядка с условием Шредера....92
I3. Цепитис Я.В. О существовании ограниченного решения для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с несуммируемыми особенностями....I05

I4. Виржбицкий Я.В., Пономарев Д.Ю. Обобщенная разрешимость одного класса краевых задач для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка....................................I14

I5. Сермоне Л.Д., Рейнфельд А.А. Эквивалентность дифференциальных уравнений с импульсным воздействием....................................I24

I6. Калис Х.Э. Абсолютно устойчивая явная, уточненная разностная схема для решения начально-краевой задачи уравнения теплопроводности....................................I3I

МАТЕМАТИКА

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Научные труды

Том 553

Рецензенты: Н.И.Васильев, канд.физ.-мат.наук, ст.науч. сотр. Ин-та математики и информатики ЛУ;

Л.Э.Рейзинь, д-р физ.-мат.наук, проф. Ин-та физики АН Латвии;

Е.Ф.Царьков, д-р физ.-мат.наук, проф. РТУ

Редакторы: Ю.Клоков, О.Гордеева
Технический редактор С.Лининя
Корректор И.Балоде

Подписано к печати 26.09.1990. Ф/б 60x84/16.
Бумага №I. I0,3 физ.печ.л. 9,6 усл.печ.л. 7,4 уч.-изд.л.
Тираж 290 экз. Зак. № 724 Цена I р. 50 к.

Латвийский университет
226098 Рига, б. Рейниса, I9
Отпечатано на ротапринте ЛУ
226050 Рига, ул.Вейденбаума,5

УДК 519.21

Энгельсон Л.Е. ОБ УСТОЙЧИВОСТИ В СРЕДНЕМ ЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ СО СЛУЧАЙНЫМ ОПЕРАТОРОМ // Математика. Дифференциальные уравнения: Научные труды. - Рига: ЛУ, 1990. - С.3-10.

Вопрос об устойчивости уравнения запаздывающего типа, управляемого марковским процессом, сводится к исследованию спектра некоторого замкнутого оператора.
Ил.I, библиогр. 5 назв.

Engelsons L. PAR LINEĀRA FUNKCIONĀL-DIFERENCIĀLA VIENĀDOJUMA AR GADĪJUMA OPERATORU STABILITĀTI VIDĒJĀ NOZĪMĒ.

Vienādojuma, kuru nosaka Markova process, stabilitātes noteikšana reducējas uz kāda slēgta operatora spektra izvietojuma pētīšanu.

Engelson L. ON AVERAGE STABILITY OF THE LINEAR FUNCTIONAL-DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH STOCHASTIC OPERATOR.

Problem of stability of delated equation controlled by Markov's process is reduced to the investigation of the spectrum of closed operator.

УДК 517.924.4

Гудков В.В., Змитренко Н.В. АСИМПТОТИКА РЕШЕНИИ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИИ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ В АВТОМОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ О НАГРЕВЕ СФЕРИЧЕСКОЙ МИШЕНИ // Математика. Дифференциальные уравнения: Научные труды. - Рига: ЛУ, 1990. - С.II-23.

Рассмотрена автомодельная краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений 6-го порядка, описывающая поведение величин в разреженной нагретой внешней части сферической мишени. Получены 4 вида асимптотик решений на правом конце интервала и I вид асимптотик решений в нуле.
Библиогр. 2 назв.

Gudkovs V., Zmitrenko N. PARASTO DIFERENCIĀLVIENĀDOJUMU SISTĒMAS, KURAS RODAS AUTOMODEĻA UZDEVUMĀ PAR SFĒRISKA MĒRĶA SILDĪŠANU, ATRISINĀJUMU ASIMPTOTIKAS.

Tiek apskatīta automodeļa robežproblēma 6-tās kārtas parasto diferenciālvienādojumu sistēmai, kura apraksta fizisku lielumu izturēšanos retinātā sasildītā sfēriska mērķa ārējā daļā. Intervāla labajā pusē iegūtas atrisinājumu 4 veidu asimptotikas un viena asimptotika nullē.

Gudkov. V., Zmitrenko N. ASIMPTOTICS OF SOLUTIONS FOR SYSTEM OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS, ARISING IN THE AUTOMODELLED PROBLEM ON A HEATING OF SPHERICAL TARGET.

There is considered automodelled boundary value problem for 6-order system of ordinary differential equations, which describe behaviour of physical values in heating rarefied extermal part of spherical target. There are given 4 types of asymptotics of solutions on right end of interval and asymptotic of solution on zero.

УДК 517.95

Цибулис А.Б. НЕ ВСЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ С РАЗРЫВНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ ДОСТИЖИМЫ РЕШЕНИЯМИ СГЛАЖЕННЫХ ЗАДАЧ // Математика. Дифференциальные уравнения: Научные труды. - Рига: ЛУ, 1990. - С.24-31.

Приведен пример краевой задачи для уравнения $(u' + \varkappa(u))' = 0$, где $\varkappa$ - функция Хевисайда, к нулевому решению которого невозможно приблизиться (в L_2) решениями естественным образом сглаженных задач.
Библиогр. 7 назв.

Cibulis A. NE VISI VIENĀDOJUMA AR PĀRTRAUKTU NELINEARITĀTI ATRISINĀJUMI AR NOGLUDINĀTU UZDEVUMU ATRISINĀJUMIEM.

Konstruēts robežproblēmas piemērs vienādojumam $u' + (\varkappa(u))' = 0$, kur $\varkappa$ - Hevisaida funkcija, kura nulles atrisinājums nav iegūstams kā dabiskā veidā nogludinātu uzdevumu atrisinājumu robeželements telpā L_2 .

Cibulis A. NOT ALL SOLUTIONS OF THE EQUATION WITH DISCONTINUOUS NONLINEARITY OBTAINABLE BY SOLUTIONS OF SMOOTHED PROBLEMS.

An example of boundary value problem for the equation $(u' + \varkappa(u))' = 0$ with Heaviside's function $\varkappa$ is constructed, so that its null solution is not obtainable as a limit in L_2 by the solutions of naturally smoothed problems.

УДК 517.927.4

Вирзбицкий Я.В. О РАЗРЕШИМОСТИ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ОГРАНИЧЕНИЕМ // Математика. Дифференциальные уравнения: Научные труды. - Рига: ЛУ 1990. - С. 32-41.

Изучается обобщенная разрешимость краевой задачи

$$\begin{cases} x''=f(t,x,x'), \\ H_j(x(a),x(b),x'(a),x'(b))=h_j, \\ \alpha\le x\le\beta,\ \alpha'(a)>\beta'(a), \end{cases}$$

при $f\in Car(I\times\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$, $j=0,1$, H_0 – фиксирована. Доказаны необходимые и достаточные условия разрешимости.
Библиогр. 4 назв.

Viržbickis J. PAR DIVPUNKTU ROBEŽPROBLĒMAS ATRISINĀMĪBU PIE IEROBEŽOJUMA

Tiek studēta vispārināta atrisināmība robežproblēmai

$$\begin{cases} x''=f(t,x,x'), \\ H_j(x(a),x(b),x'(a),x'(b))=h_j, \\ \alpha\le x\le\beta,\ \alpha'(a)>\beta'(a), \end{cases}$$

pie $f\in Car(I\times\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$, $j=0,1$, H_0 – fiksēta. Pierādīti atrisināmības nepieciešamie un pietiekamie nosacījumi.

Wirzhbitsky Y. ON SOLVABILITY OF TWO POINT BOUNDARY VALUE PROBLEM UNDER ASSUMPTIONS

The general solvability of boundary value problem

$$\begin{cases} x''=f(t,x,x'), \\ H_j(x(a),x(b),x'(a),x'(b))=h_j, \\ \alpha\le x\le\beta,\ \alpha'(a)>\beta'(a), \end{cases}$$

where $f\in Car(I\times\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$, $j=0,1$, H_0 – fixed, is studied. The necessary and sufficient conditions of solvability are stated.

УДК 517.927.4

Лепин Л.А. ОБ ОТСУТСТВИИ МОНОТОННЫХ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ // Математика. Дифференциальные уравнения: Научные труды. – Рига: ЛУ, 1990. – С. 42–47.

Для краевой задачи

$$x'' + \left(N-2-\frac{4}{\beta-1}\right)x' - \frac{2}{\beta-1}\left(N-2-\frac{2}{\beta-1}\right)x + x^{\beta} - \frac{1}{2}e^{2s}x' = 0,$$

$$\lim_{s\to-\infty} x(s) = 0, \quad \lim_{s\to+\infty} x(s) < \infty,$$

где $\beta > 1$, $N \geq 1$, встречающейся в теории нелинейной теплопрсводности, доказано отсутствие монотонных решений. Библиогр. 7 назв.

Ļepins L. PAR KĀDAS NELINEĀRAS ROBEŽPROBLĒMAS MONOTONA ATRISINĀJUMA NEEKSISTENCI.

Robežproblēmai

$$x'' + \left(N-2-\frac{4}{\beta-1}\right)x' - \frac{2}{\beta-1}\left(N-2-\frac{2}{\beta-1}\right)x + x^{\beta} - \frac{1}{2}e^{2s}x' = 0,$$

$$\lim_{s\to-\infty} x(s) = 0, \quad \lim_{s\to+\infty} x(s) < \infty,$$

kur $\beta > 1$, $N \geq 1$, sastopamai nelineāras siltumvadāmības teorijā, pierādīta monotona atrisinājuma neeksistence.

Lepin L. ON NONEXISTENCE OF MONOTONOUS SOLUTIONS OF ONE NON-LINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEM.

For boundary value problem

$$x'' + \left(N-2-\frac{4}{\beta-1}\right)x' - \frac{2}{\beta-1}\left(N-2-\frac{2}{\beta-1}\right)x + x^{\beta} - \frac{1}{2}e^{2s}x' = 0,$$

$$\lim_{s\to-\infty} x(s) = 0, \quad \lim_{s\to+\infty} x(s) < \infty,$$

with $\beta > 1$, $N \geq 1$, arising in theory of non-linear heat conductivity, the nonexistence of monotonous solutions is proved.

УДК 517.927

Беспалова С.А., Клоков Ю.А. ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ УРАВНЕНИЯ ФОЛКНЕРА-СКЕНА. П // Математика. Дифференциальные уравнения: Научные труды. - Рига: ЛУ, 1990. - С.48-53.

Изучается существование и единственность решения задачи

$$x''' = P_2(x, x', x'')$$
$$x(0) = x_0,\ x'(0) = a,\ x'(\infty) = \gamma,$$

где $P_2(x, x', x'')$ – полином второй степени.
Библиогр. 1 назв.

Bespalova S., Klokovs J. PAR KĀDU FOLKNERA-SKENA DIFERENCIĀLVIENĀDOJUMA VISPĀRINĀJUMU. II

Apskatīta atrisinājuma eksistence un unitāte robežproblēmai

$$x''' = P_2(x, x', x'')$$
$$x(0) = x_0,\ x'(0) = a,\ x'(\infty) = \gamma,$$

kur $P_2(x, x', x'')$ ir otrās pakāpes polinoms.

Bespalova S., Klokov. J. ON GENERALIZATION OF THE FOLKNER-SKAN EQUATION. II.

Existence and uniquences of the solution of the problem

$$x''' = P_2(x, x', x'')$$
$$x(0) = x_0,\ x'(0) = a,\ x'(\infty) = \gamma,$$

Where $P_2(x, x', x'')$ is a polynomial of secondorder are studied.

УДК 517.5

Звягинцев А.И. ОДНА ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ЗАДАЧА, СВЯЗАННАЯ С АПРИОРНЫМИ ОЦЕНКАМИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ // Математика. Дифференциальные уравнения: Научные труды. - Рига: ЛУ, 1990. - С.54-62.

Приводятся нижние и верхние оценки для величины

$$\sup\{\|f^{(k)}\|_{L_\infty[0,\ell]} : f \in W^n_{p\infty}[0,\ell],\ \|f\|_{L_p[0,\ell]} \le M_0,\ \|f^{(n)}\|_{L_\infty[0,\ell]} \le M_n\},$$

где $1 \le p \le \infty$, $n \in \{2, 3, \dots\}$, $k \in \{1, \dots, n-1\}$, $0 < \ell < \infty$, $M_0 > 0$, $M_n \ge 0$, $W^n_{p\infty}[0,\ell]$ – пространство Соболева.
Библиогр. 6 назв.

Zvjaginceva A. VIENS EKSTREMĀLS UZDEVUMS, SAISTĪTS AR DIFERENCIĀLNEVIENĀDĪBU ATRISINĀJUMU APRIORIEM NOVĒRTĒJUMIEM.

Atrasti apakšējie un augšējie novērtējumi lielumiem

$$\sup\{\|f^{(k)}\|_{L_\infty[0,\ell]} : f\in W^n_{p\infty}[0,\ell],\ \|f\|_{L_p[0,\ell]}\le M_0,\ \|f^{(n)}\|_{L_\infty[0,\ell]}\le M_n\},$$

kur $1\le p\le\infty$, $n\in\{2,3,\dots\}$, $k\in\{1,\dots,n-1\}$, $0<\ell<\infty$, $M_0>0$, $M_n\ge 0$, $W^n_{p\infty}[0,\ell]$ – Soboļeva telpa.

Zvyginsev A. ON EXTREMAL PROBLEM ASSOCIATED WITH A PRIORI ESTIMATES FOR SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL INEQUALITY //

Upper and lower bounds for

$$\sup\{\|f^{(k)}\|_{L_\infty[0,\ell]} : f\in W^n_{p\infty}[0,\ell],\ \|f\|_{L_p[0,\ell]}\le M_0,\ \|f^{(n)}\|_{L_\infty[0,\ell]}\le M_n\},$$

are derived, where $1\le p\le\infty$, $n\in\{2,3,\dots\}$, $k\in\{1,\dots,n-1\}$, $0<\ell<\infty$, $M_0>0$, $M_n\ge 0$, $W^n_{p\infty}[0,\ell]$ – Sobolev space.

УДК 517.927.4+517.988.5

Пономарев В.Д. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ДВУХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ // Математика. Дифференциальные уравнения: Научные труды. - Рига: ЛУ, 1990. - С.63-65.

Изучается существование решения системы операторных уравнений

$$fx=\theta,\quad gx=0,$$

где $f: E_1\to E_2$, $g: E_1\to E_3$, E_i - топологические пространства, $i=1,2,3$.
Библиогр. 5 назв.

Ponomarjovs V. DIVU OPERATORVIENĀDOJUMU SISTĒMAS ATRISINĀJUMA EKSISTENCE.

Tiek studētas operatorvienādojumu sistēmas

$$fx=\theta,\quad gx=0,$$

kur $f: E_1\to E_2$, $g: E_1\to E_3$, E_i - topologiskas telpas, $i=1,2,3$, atrisinājuma eksistence.

Ponomarev V. THE EXISTENCE OF SOLUTION OF THE SYSTEM OF TWO OPERATOR EQUATIONS.

The existence of solution of the system of operator equations

$$fx = \theta \ , \qquad gx = 0 \ ,$$

is investigated, where $f: E_1 \to E_2$, $g: E_1 \to E_3$, E_i - topological spaces, $i = 1, 2, 3$.

УДК 517.927

Лепина Э.И. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ БЕЗ МАКСИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ.II. // Математика. Дифференциальные уравнения: Научные труды. - Рига: ЛУ,1990. - С.66-77.

Вторая часть работы, в которой при помощи построения примеров доказывается полнота системы теорем о существовании максимального обобщенного решения краевой задачи

$$x'' = f(t,x,x'),\ H_1x = h_1,\ \ H_2x = h_2,\ \alpha \le x \le \beta.$$

Библиогр. 3 назв.

Ļepina E. ROBEŽPROBLĒMAS BEZ MAKSIMĀLĀ ATRISINĀJUMA II.

Otrā daļa darbam, kurā ar piemēru konstrukcijas palīdzību tiek pierādīta teorēmu sistēmas pilnība par maksimālā vispārinātā atrisinājuma eksistencē robežproblēmai

$$x'' = f(t,x,x'),\ H_1x = h_1,\ \ H_2x = h_2,\ \alpha \le x \le \beta.$$

Lepina E. BOUNDARY VALUE PROBLEM WITHOUT EXISTENCE OF MAXIMUM SOLUTION II.

The second part of the work is represented, in which the completeness of theorema system of existence of maximum solution for boundary value problem

$$x'' = f(t,x,x'),\ H_1x = h_1,\ \ H_2x = h_2,\ \alpha \le x \le \beta.$$

is proved by examples construction.

УДК 517.911

Адьютов М.М., Клоков Ю.А. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДУ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ОСОБЕННОСТЯМИ // Математика. Дифференциальные уравнения: Научные труды. - Рига: ЛУ, 1990. - С.78-83.

Для решения начальной задачи

$$x'' = t^p x^q x'^r \varphi(t, x, x'),$$

$$x(0) = 0, \quad \lim_{t\to 0} t^{-\alpha} x(t) = \kappa,$$

$$\varphi_0 = \varphi(0,0,0) > 0, \quad \alpha = \frac{2+p-r}{1-q-r} > 1, \quad \kappa^{1-q-r}(\alpha-1) = \alpha^{r-1}\varphi_0$$

при условии непрерывности функции φ вместе с производными по второму и третьему аргументу получены условия единственности. Рассмотрен ранее не изученный случай, когда $1-q-r=0$.
Библиогр. 8 назв.

Adjutovs M., Klokovs J. OTRĀS KĀRTAS PARASTĀ DIFERENCIĀLVIENĀDOJUMA AR SINGULARITĀTI KOŠĪ PROBLĒMAS ATRISINĀJUMA UNITĀTE.

Košī problēmas atrisinājumam

$$x'' = t^p x^q x'^r \varphi(t, x, x'),$$

$$x(0) = 0, \quad \lim_{t\to 0} t^{-\alpha} x(t) = \kappa,$$

$$\varphi_0 = \varphi(0,0,0) > 0, \quad \alpha = \frac{2+p-r}{1-q-r} > 1, \quad \kappa^{1-q-r}(\alpha-1) = \alpha^{r-1}\varphi_0$$

pierādīta unitāte pie funkcijas φ un tās atvasinājumu nepārtrauktības pēc 2 un 3 argumenta. Aprakstīts agrāk nestudētais gadījums $1-q-r=0$.

Adyutov M., Klokov Yu. UNIQUENESS OF THE SOLUTION OF INITIAL VALUE PROBLEM FOR THE SECOND-ORDER ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION WITH SINGULARITIES.

The conditions for the uniqueness of a solution to the initial value problem

$$x'' = t^p x^q x'^r \varphi(t, x, x'),$$

$$x(0) = 0, \quad \lim_{t\to 0} t^{-\alpha} x(t) = \kappa,$$

$$\varphi_0 = \varphi(0,0,0) > 0, \quad \alpha = \frac{2+p-r}{1-q-r} > 1, \quad \kappa^{1-q-r}(\alpha-1) = \alpha^{r-1}\varphi_0$$

are derived, provided that φ is continuous function together with it's derivatives with respect both second and the third arguments. The case $1-q-\tau=0$ is considered, which have not been investigated previously.

УДК 517.927

Садырбаев Ф.Ж. ДВУХТОЧЕЧНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА // Математика. Дифференциальные уравнения: Научные труды. - Рига: ЛУ, 1990. - С.84-91.

Рассматривается двухточечная краевая задача для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка. Получены теоремы существования решений нижних и верхних функций. Изучается вопрос о числе решений. При этом значительную роль играют вспомогательные линейные задачи.
Библиогр. 8 назв.

Sadirbajevs F. DIVPUNKTU ROBEŽPROBLĒMA CETURTĀS KĀRTAS DIFERENCIĀLVIENĀDOJUMAM.

Pierādītas atrisinājuma eksistences teorēmas robežproblēmai

$$x^{(4)}=f(t,x),\ x(a)=A,\ x'(a)=A_1,\ x''(a)=A_2,\ x(b)=B\ .$$

Tiek dots atrisinājumu skaita novērtējums.

Sadyrbaev F. TWO-POINT BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR FOURTH ORDER DIFFERENTIAL EQUATION

An existence results for the boundary value problem

$$x^{(4)}=f(t,x),\ x(a)=A,\ x'(a)=A_1,\ x''(a)=A_2,\ x(b)=B$$

are stated. The estimate of a number of solutions is presented.

УДК 517.927

Лепин А.Я. РАЗРЕШИМОСТЬ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С УСЛОВИЕМ ШРЕДЕРА // Математика. Дифференциальные уравнения: Научные труды. - Рига: ЛУ, 1990. - С.92-104.

Для краевых задач

$$x''=f(t,x,x'),\ H_1x=h_1,\ H_2x=h_2,\ \alpha\le x\le\beta;$$

$$x''=f(t,x,x'),\ H_1x=h_1,\ H_2x=h_2,\ \alpha\le x\le\beta,$$
$$\alpha'(a)\ge x'(a)\ge\beta'(a);$$

$$x''=f(t,x,x'),\ H_1x=h_1,\ H_2x=h_2,\ \alpha\le x\le\beta,$$
$$\alpha'(a)\ge x'(a)\ge\beta'(a),\ \alpha'(b)\le x'(b)\le\beta'(b),$$

где α - нижняя функция, а β - верхняя функция, даны условия существования решения.
Библиогр. 3 назв.

Lepins A. ROBEŽPROBLĒMU ATRISINĀMĪBA OTRĀS KĀRTAS VIENĀDOJUMAM AR ŠRĒDERA NOSACĪJUMU

Robežproblēmām

$$x''=f(t,x,x'),\ H_1x=h_1,\ H_2x=h_2,\ \alpha\le x\le\beta;$$

$$x''=f(t,x,x'),\ H_1x=h_1,\ H_2x=h_2,\ \alpha\le x\le\beta,$$
$$\alpha'(a)\ge x'(a)\ge\beta'(a);$$

$$x''=f(t,x,x'),\ H_1x=h_1,\ H_2x=h_2,\ \alpha\le x\le\beta,$$
$$\alpha'(a)\ge x'(a)\ge\beta'(a),\ \alpha'(b)\le x'(b)\le\beta'(b),$$

kur α - apakšējā funkcija, bet β - augšējā funkcija, doti atrisinājumi eksistences nosacījumam.

Lepin A. SOLVABILITY OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR SECOND ORDER DIFFERENTIAL EQUATION UNDER SCHRADER CONDITION.

For boundary value problems

$$x''=f(t,x,x'),\ H_1x=h_1,\ H_2x=h_2,\ \alpha\le x\le\beta;$$

$$x''=f(t,x,x'),\ H_1x=h_1,\ H_2x=h_2,\ \alpha\le x\le\beta,$$
$$\alpha'(a)\ge x'(a)\ge\beta'(a);$$

$$x''=f(t,x,x'),\ H_1x=h_1,\ H_2x=h_2,\ \alpha\le x\le\beta,$$
$$\alpha'(a)\ge x'(a)\ge\beta'(a),\ \alpha'(b)\le x'(b)\le\beta'(b).$$

where α is lower function and β is upper function, the conditions of solvability are given.

УДК 517.927

Цепитис Я.В. О СУЩЕСТВОВАНИИ ОГРАНИЧЕННОГО РЕШЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С НЕСУММИРУЕМЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ //Математика.Дифференциальные уравнения: Научные труды. - Рига: ЛУ,1990.- С.105-113.

Приведены условия, обеспечивающие априорную оценку решений двухточечных краевых задач для системы уравнений $x'' = f(t, x, x')$, с условиями на левом конце рассматриваемого промежутка $x(0) = 0$, где функция f при $t = 0$ имеет, быть может, несуммируемые особенности.
Библиогр. 5 назв.

Cepītis J. PAR IEROBEŽOTA ATRISINĀJUMA EKSISTENCI OTRĀS KĀRTAS PARASTO DIFERENCIĀLVIENĀDOJUMU SISTĒMĀM AR NEINTEGRĒJAMĀM SINGULARITĀTĒM.

Formulēti nosacījumi, kuri nodrošina atrisinājuma aprioro novērtējumu divpunktu robežproblēmām vienādojumu sistēmai

$$x'' = f(t, x, x')$$

ar nosacījumu aplūkojamā intervāla kreisajā galapunktā $x(0) = 0$, ja funkcijai f pie $t = 0$, iespējams, ir neintegrējamas singularitātes.

Cepītis J. ON THE EXISTENCE OF BOUNDED SOLUTIONS FOR SECOND-ORDER SYSTEM OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH NONSUMMABLE SINGULARITIES.

There are formulated conditions for a priori estimates on solutions of two point boundary value problems for the system of equations

$$x'' = f(t, x, x')$$

with condition on the left side of interval $x(0) = 0$, if the function f at the point $t = 0$ has, may be, nonsummable singularities.

УДК 517.927.4

Виржбицкий Я.В., Пономарев Д.Ю. ОБОБЩЕННАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ОДНОГО КЛАССА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА // Математика. Дифференциальные уравнения: Научные труды. - Рига: ЛУ, 1990. - С.114-123.

Доказано 9 теорем об обобщенной разрешимости двухточечной краевой задачи

$$x'' = f(t, x, x'), \quad H_1 x = h_1, \quad H_2 x = h_2, \quad \alpha \le x \le \beta$$

при наличии дополнительных условий.
Библиогр. 2 назв.

Viržbickis J., Ponomarjovs D. KĀDAS ROBEŽPROBLĒMU KLASES OTRĀS KĀRTAS PARASTAJAM DIFERENCIĀLVIENĀDOJUMAM VISPĀRINĀTĀ ATRISINĀMĪBA.

Pierādītas 9 teorēmas par vispārinātu atrisināmību divpunktu robežproblēmai

$$x'' = f(t, x, x'), \quad H_1 x = h_1, \quad H_2 x = h_2, \quad \alpha \le x \le \beta$$

pie papildu nosacījumiem.

Wirzhbitsky Ya., Ponomariov D. GENERAL SOLVABILITY OF SOME CLASS OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR SECOND ORDER DIFFERENTIAL EQUATION.

9 theorems on general solvability for two point boundary value problem

$$x'' = f(t, x, x'), \quad H_1 x = h_1, \quad H_2 x = h_2, \quad \alpha \le x \le \beta$$

under some additional assumption are proved.

УДК 517.938.4

Сермоне Л.Д., Рейнфелд А.А. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ // Математика. Дифференциальные уравнения: Научные труды. - Рига: ЛУ, 1990. - С. 124-130.

Доказано, что две нелинейные системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием строго динамически эквивалентны в целом, если существует функция Грина и нелинейные члены удовлетворяют условию Липшица с достаточно малой постоянной.
Библиогр. 2 назв.

Sermone L., Reinfelds A. EKVIVALENCE DIFERENCIĀLVIENĀDOJUMIEM AR IMPULSU IEDARBĪBU.

Pierādīts, ka divas diferenciālvienādojumu sistēmas ar impulsu iebarbību ir globāli stingri dinamiski ekvivalentas, ja eksistē Grīna funkcija un nelineārie locekļi apmierina Lipšica nosacījumus ar pietiekoši mazu konstanti.

Sermone L., Reinfelds A. EQUIVALENCE OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH IMPULSIVE PERTURBATION.

In the article is proved that two differential equations with impulsive perturbations are strictly dinamical equivalent in the large, if there exsist a mapping of Green and nonlinear terms satisfy a Lipschitz condition with sufficiently small constant.

УДК 517.95

Калис Х.Э. АБСОЛЮТНО УСТОЙЧИВАЯ ЯВНАЯ, УТОЧНЕННАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ // Математика. Дифференциальные уравнения: Научные труды. - Рига: ЛУ, 1990. - С. 131-141.

Построена абсолютно устойчивая уточненная, явная, двухслойная разностная схема решения начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами в случае однородных граничных условий на прямой. Библиогр. 6 назв.

Kalis H. ABSOLŪTI STABILA, ATKLĀTA, PRECĪZĀKA DIFERENČU SHĒMA JAUKTA VEIDA ROBEŽPROBLĒMAI SILTUMA VADĪŠANAS VIENĀDOJUMAM RISINĀŠANAI.

Jaukta veida problēmai siltuma vadīšanas vienādojumam ar konstantiem koeficientiem un homogēniem robežnosacījumiem uz taisnes ir konstruēta absolūti stabila, atklāta, divslāņu diferenču shēma.

Kalis H. ABSOLUTELY STABLE EXPLICIT MORE PRECIOUS DIFFERENCE SCHEME FOR SOLVING MIXED BOUNDARY PROBLEMS OF HEAT TRANSFER EQUATION.

Stable absolutely explicit two-level difference scheme for one-dimensional heat transfer equation with constant coefficients in the case of homogeneous boundary conditions is constructed.