



**LATVIJAS UNIVERSITĀTES
ZINĀTNISKIE RAKSTI**

ACTA UNIVERSITATIS LATVIENSIS

562

**МАТЕМАТИКА
МАТЕМАТИКА**

Zinātniskie raksti
Fizikas un matemātikas
fakultāte
Matemātiskās
analīzes katedra

Научные труды
Физико-математической
факультет
Кафедры
математического
анализа

LATVIJAS UNIVERSITĀTE
Fizikas un matemātikas fakultāte
Matemātiskās analīzes katedra

MATEMĀTIKA

Zinātniskie raksti

562. sējums

Latvijas Universitāte
Rīga 1991

ЛАТВИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
Физико-математический факультет
Кафедра математического анализа

МАТЕМАТИКА

Научные труды

Том 562

136 - 1 - 921

Латвийский университет
Рига 1991

Matemātika: Zinātniskie raksti/ Atb.red. A.Lorencs.
Rīga: LU, 1991. - 180 lpp.

Krājumā publicēti zinātniskā darba rezultāti, kas iegūti 1989. - 1990.g. LU matemātikas katedru docētāju darbos. Krājumā ir iekļauti arī dažu citu iestāžu un augstskolu speciālistu darbi, kas iegūti ciešā sadarbībā ar LU matemātiķiem. Krājumā ietvortie raksti netiek recenzēti.

Krājums domāts vecāko kursu matemātikas studentiem, aspirantiem un zinātniskajiem darbiniekiem.

В сборник включены результаты научных работ, полученных сотрудниками математических кафедр Латвийского университета, а также работы специалистов других вузов и учреждений, сотрудничающих с математиками Латвийского университета. Включенные в сборник рукописи, как правило, не рецензируются.

Сборник предназначен для студентов-математиков старших курсов, аспирантов и научных работников.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

А.Лоренц (отв. редактор), С.Асмусс, И.Лапиныш, А.Шостак

© Latvijas
Universitātē,
1991

СОДЕРЖАНИЕ

Теория аппроксимаций

Асмусс С. Точные оценки погрешности приближения двумерными сплайнами	II
Асмусс С. Об одном операторном методе, основанном на преобразовании ступенчатых изображений с помощью сплайнов для локальных средних	27
Лабеев В., Бисон В. Компактная аппроксимация линейных операторов с малыми случайными возмущениями	43

Теория вероятностей и математическая статистика

Ложенц А. Статистические свойства интегрального метода эталонов	53
Иванов И., Царькова Б. Об устойчивости линейных и импульсных систем с марковскими процессами	65
Янкович С. О стохастических дифференциально-разностных уравнениях и их случайных интегральных контрактах	74

Топология

Постак А. К концепции нечеткой категории	85
Заричный М. Функторы, порожденные универсальными отображениями инъективных пределов последовательностей компактов Хаусдорфа	95

Численные методы

Земитис А. О численном решении обратной задачи Синьорины	103
Сютровс Я. Оценка погрешности метода асимптотического расширения интервала при обращении интегрального преобразования Фурье ..	115
Белов М. Асимптотическое решение смешанной параболической задачи с разрывными начальными условиями, I	129

Алгебра

Цибудис А. Теорема об инварианте абстрактной игры и ее применения в анализе математичес- ких игршек	151
---	-----

Функциональный анализ

Галиня И. Существование неподвижной точки для се- мейства отображений в метрическом пространстве	161
Галиня И. Существование общей неподвижной точки для перестановочного семейства нерастя- гивающих отображений в метрическом пространстве	163
Капране И., Лиепиньш А. Неподвижное время песочных часов	167
Лиепиньш А., Капране И. Чаюке Джонатону Ливингстону	171
Лиепиньш А., Кампе Л. Семиллэзия непрерывности	175
Зирвите Р., Копейка Э., Лиепиньш А. Уравновешенный пейзаж с олаками и неподвижными точками	177

SATURA RĀDĪTĀJS

Aproksimāciju teorija

S.Asmuss. Divdimensionālo splainu aproksimācijas kļūdas precīzi novērtējumi	11
S.Asmuss. Par vienu ope. atormetodi, kas izmanto kāppveida attēlu transformāciju ar lokā- lo vidējo splainiem	27
V.Labejevs, V.Janāns. Lineāru operatoru ar mazām gadījumperturbācijām kompakta aproksi- mācija	43

Varbūtību teorija un matemātiskā statistika

A.Lorencs. Integrālās etalonmetodes statistiskas ipašības	53
I.Ivanivs, V.Carkova. Par lineāru impulsu sistēmu ar Markova koeficientiem stabilitāti ...	65
S.Jankoviča. Par stohastiskiem diferenciāl-dife- renču vienādojumiem un to gadījuma in- tegrālajiem kontraktoriem	74

Topoloģija

A.Šostaks. Par fazi-kategorijas koncepciju	85
M.Zaričņijs. Ar Mengerā kompaktu virkņu injektīvu robežu universāliem attēlojumiem indu- cētie funktori	95

Skaitliskās metodes

A.Zemītis. Par inversās Sinjorini problēmas skait- lisko risināšanu	103
J.Smotrovs. Furjē transformācijas inversijas inter- vāla asimptotiskās paplašināšanas metodes kļūdas novērtējums	115
M.Belovs. Jaukta veida paraboliskas problēmas asimptotisks atrisinājums ar pārtrauktām funkcijām sākuma nosacījumos, I	129

Algebra

A.Cibulis. Teorēma par abstraktas spēles invariantu un tās pielietojumi matemātisko rotaļlietu analizē	151
--	-----

Funkcionālā rīze

I.Galiņa. Nekustīga punkta eksistence attēlojumu saimei metriskā telpā	161
I.Galiņa. Kopēja nekustīgā punkta eksistence neizstiepjamo attēlojumu komutatīvai saimei metriskā telpā	163
I.Kaprāne, A.Liepiņš. Smilšu pulksteņa nekustīgais laiks	167
A.Liepiņš, I.Kaprāne. Kaijai Džonatonam Livingstonam	171
A.Liepiņš, L.Kope. Nepārtvauktības semilūzija.....	175
R.Zirvīte, E.Kopeika, A.Liepiņš. Līdzsvarota mākoņaina ainava ar nekustīgiem punktiem ...	177

CONTENTS

Approximation theory

- S. Asmuss. The exact error bounds of bivariate spline approximation 11
- S. Asmuss. An operator method based on the transformation of stepwise images by means of splines for local mean value 27
- V. Labejev, V. Janson. A compact approximation of linear operators with small random perturbations 43

Probability theory and mathematical statistics

- A. Lorenc. Statistical properties of integral approach of prototypes 53
- I. Ivaniv, V. Tsarkova. On the stability of linear impulsive systems with Markov's coefficients 65
- S. Jankovič. On stochastic differential-difference equations and their random integral contractors 74

Topology

- A. Šostak. Towards the concept of a fuzzy category .. 85
- M. Zarichnyi. Functors generated by universal maps of inductive limits of sequences of Menger compacta 95

Numerical Analysis

- A. Zenitin. On the numerical solution of the inverse Signorini problem 103
- J. Smotrova. Estimation of the error of the interval's asymptotical expansion method for the inversion of the Fourier transform .. 115
- V. Ralov. The asymptotic solution of a mixed parabolic problem with discontinuous initial conditions, I 129

Algebra

- A. Cibulis. A theorem about an invariant of the abstract game and its applications to the analysis of mathematical toys 151

Functional analysis

- I. Galipa. On the existence of a common fixed point for a family of mappings in a metric space 161
- I. Galipa. On the existence of a common fixed point for a commutative family of nonexpansive mappings in a metric space 163
- I. Kaprāne, A. Liepiņš. Fixed time of a sand-glass 167
- A. Liepiņš, I. Kaprāne. To Jonathon Livingston seagull .. 171
- A. Liepiņš, L. Kampe. A semi-illusion of continuity 175
- R. Zirvīte, E. Kopeika, A. Liepiņš. A balanced cloudscape with fixed points 177

ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЯ ДВУМЕРНЫМИ СПЛАЙНАМИ

С. Асмусс

Аннотация. Получено интегральное представление погрешности линейной аппроксимации функций двух переменных сплайнами тензорного произведения пространств одномерных сплайнов и доказана достаточная общая теорема, позволяющая на его основе получать оценки погрешности сплайн-аппроксимации, не улучшаемые на достаточно широком классе функций. Такие оценки выражены через ядра интегрального представления, а для задач приближения кусочно-постоянными и эрмитовыми сплайнами указаны точные оценки с числовыми константами. *УДК 517.5.*

Зарекомендовавшим себя аппаратом сплайн-аппроксимации функций двух переменных в прямоугольной области является аппарат тензорного произведения пространств сплайнов одной переменной. Пусть $E = [a^1, b^1] \times [a^2, b^2]$, S^1 и S^2 - конечномерные пространства сплайн-функций, определенных на $[a^1, b^1]$ и $[a^2, b^2]$ соответственно. Их тензорное произведение определяется как множество всех конечных линейных комбинаций функций $S: E \rightarrow \mathbb{R}$ вида

$$s(t^1, t^2) = (s^1 \otimes s^2)(t^1, t^2) = s^1(t^1) s^2(t^2), \quad (t^1, t^2) \in E, \quad \text{где } s^1 \in S^1 \text{ и } s^2 \in S^2.$$

Пусть теперь F^k - векторное пространство функций, определенных на $[a^k, b^k]$, и приближение их сплайнами из S^k задается линейным оператором

$$B^k = (B_1^k, B_2^k, \dots, B_{m_k}^k): F^k \rightarrow \mathbb{R}^{m_k} \quad (m_k = \dim S^k) \quad \text{по правилу}$$

$$f^k \in F^k \rightarrow G^k(f^k) := \sum_{i=1}^{m_k} s_i^k B_i^k f^k, \quad (1)$$

где $s_1^k, s_2^k, \dots, s_{m_k}^k$ - некоторый заранее фиксированный базис пространства S^k , $k=1, 2$. Если класс F состоит из функций $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию

$$(\forall t^1 \in [a^1, b^1] f(t^1, \cdot) \in F^2) \ \& \ (\forall t^2 \in [a^2, b^2] f(\cdot, t^2) \in F^1)$$

и приближения S^1 и S^2 таковы, что

$$\forall f \in F \quad B_{i_k}^2 (B_{i_1}^1 f) = B_{i_1}^1 (B_{i_2}^2 f), \quad i_k = \overline{1, m_k}, \quad k=1, 2, \quad (2)$$

(здесь следует считать, что на f оператор B^1 действует как на функцию переменной t^1 (при фиксированном значении t^2), а оператор B^2 действует на f как на функцию переменной t^2 (при фиксированном значении t^1), сопоставляя ей функцию от t^1), то они задают на F приближение сплайнами тензорного произведения $S^1 \otimes S^2$

$$f \in F \rightarrow \hat{f}(f) := \sum_{i_1=1}^{m_1} \sum_{i_2=1}^{m_2} s_{i_1 i_2} B_{i_1 i_2} f, \quad (3)$$

где оператор $B = (B_{i_1 i_2}) : F \rightarrow \mathbb{R}^{m_1 m_2}$ определяется через B^1 и B^2

$$B_{i_1 i_2} f := B_{i_1}^1 (B_{i_2}^2 f), \quad i_k = \overline{1, m_k}, \quad k=1,2, \quad \text{а сплайны } s_{i_1 i_2} := S_{i_1}^1 \otimes S_{i_2}^2, \quad i_k = \overline{1, m_k}, \quad k=1,2,$$

образуют базис пространства $S^1 \otimes S^2$.

Если с вычислительной точки зрения задача построения таких сплайнов сводится к многократному решению одномерных задач, то их исследование в плане получения эффективных оценок погрешности аппроксимации значительно усложняется по сравнению с одномерным случаем. В связи с этим точных результатов в задачах оценки погрешности многомерной сплайн-аппроксимации мало. При их получении авторы (см. [1, 8-11]) существенно использовали специфику рассматриваемых сплайнов. Н.П.Корнейчук и С.В.Переверзев [6] описали общую схему оценки погрешности приближения функций двух переменных операторами, построенными на базе одномерных операторов. В случае, когда последние допускают интегральное представление погрешности, в [6] получено интегральное представление погрешности двумерной аппроксимации. Оно позволяет оценить сверху погрешность через величины, которые дают оценки в соответствующих одномерных задачах и в некоторых случаях точно вычислены. А.М. Авакян [2] указал класс функций, на котором полученная таким путем оценка будет неулучшаема. Несомненно представляют интерес точные оценки приближения сплайнами других классов функций двух переменных, в частности класса $MW_P^{r_1, r_2}(E)$ (см. (18)), что объясняется тем, что А.М. Авакяном [3] разработан способ вычисления наилучшего приближения этого класса двумерными сплайнами. Предлагаемый в настоящей статье метод дает возможность получать неулучшаемые на $MW_P^{r_1, r_2}(E)$ результаты по оценке погрешности приближения сплайнами тензорного произведения, которые не укладываются в схему, изложенную в [6] и [2].

1. Интегральное представление погрешности приближения двумерными сплайнами и ее оценка

Пусть $L_p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, $\Omega = [a, b] \times E$, - пространство интегрируемых по Лебегу в степени p (при $p = \infty$ - существенно ограниченных) на Ω функций с нормой

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} = \begin{cases} \left(\int_{\Omega} |f(\omega)|^p d\omega \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \sup_{\omega \in \Omega} |f(\omega)|, & p = \infty, \end{cases}$$

$L_p[a, b], 1 \leq p < \infty, \kappa \in \mathbb{N}$, - класс функций $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, у которых производная $f^{(\kappa-1)}$ абсолютно непрерывна, а $f^{(\kappa)} \in L_p[a, b]$.

$L_p^{(\nu_1, \nu_2)}(E), 1 \leq p < \infty, \nu_1, \nu_2 \in \mathbb{N}$, - класс функций $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, у которых частные производные $f^{(\nu_1, \nu_2)}$ при $\nu_1 = \overline{0, \nu_1 - 1}$, $\nu_2 = \overline{0, \nu_2 - 1}$ абсолютно непрерывны по каждой переменной, $f^{(\nu_1, \nu_2)}$ при $\nu_1 = \overline{0, \nu_1 - 1}$ абсолютно непрерывны по переменной t^1 почти для всех $t^2 \in [a^2, b^2]$, $f^{(\nu_1, \nu_2)}$ при $\nu_2 = \overline{0, \nu_2 - 1}$ абсолютно непрерывны по переменной t^2 почти для всех $t^1 \in [a^1, b^1]$.

$f^{(\nu_1, \nu_2)}(a^1, \cdot) \in L_p[a^2, b^2], \nu_1 = \overline{0, \nu_1 - 1}, f^{(\nu_1, \nu_2)}(\cdot, a^2) \in L_p[a^1, b^1], \nu_2 = \overline{0, \nu_2 - 1}, f^{(\nu_1, \nu_2)} \in L_p(E)$, где последние понимаются в обобщенном (по Соболеву) смысле (см. [7] с. 140).

Рассмотрим аппроксимацию \mathcal{G} функций класса $F = L_p^{(\nu_1, \nu_2)}(E), 1 \leq p < \infty, \nu_1, \nu_2 \in \mathbb{N}$ сплайнами тензорного произведения $S^1 \otimes S^2$, построению (см. (3)) на базе одномерных сплайн-аппроксимаций \mathcal{G}^1 и \mathcal{G}^2 (1) функций из

$$F^1 = L_p^{\nu_1}[a^1, b^1], F^2 = L_p^{\nu_2}[a^2, b^2]$$

соответственно. Интегральное представление ее погрешности дает

Теорема 1. Пусть аппроксимация $\mathcal{G}^k, k=1, 2$, точна на классе P_{m_k-1} полиномов степени не выше L_{m_k-1} и функционалы $B_{i_k}^k, i_k = \overline{1, m_k}$ "перестановочны" с интегральным оператором $J_{\tau_k}^k: L_p[a^k, b^k] \rightarrow L_p[a^k, b^k]$

$$(J_{\tau_k}^k g)(t) = \int_{\tau_k}^{b^k} g(\tau) \varphi_{\tau_k-1}(t, \tau) d\tau, t \in [a^k, b^k], g \in L_p[a^k, b^k], \quad (4)$$

$$\varphi_{\tau_k-1}(t, \tau) = \frac{1}{(\tau_k-1)!} (t-\tau)_+^{\tau_k-1} = \begin{cases} \frac{1}{(\tau_k-1)!} (t-\tau)^{\tau_k-1}, & t \geq \tau, \\ 0, & t < \tau, \end{cases}$$

в смысле выполнения равенства

$$B_{i_k}^k J_{\tau_k}^k g = \int_{a^k}^{b^k} g(\tau) B_{i_k}^k \varphi_{\tau_k-1}(\cdot, \tau) d\tau, g \in L_p[a^k, b^k] \quad (5)$$

(запись $B_{i_k}^k \varphi_{\tau_k-1}(\cdot, \tau)$ означает, что функционал $B_{i_k}^k$ действует на φ_{τ_k-1} как на функцию первого аргумента при фиксированном значении τ второго). Тогда для каждой функции $f \in L_p^{(\nu_1, \nu_2)}(E)$ в точке $(t^1, t^2) \in E$

$$\begin{aligned} f(t^1, t^2) - \mathcal{G}(f, t^1, t^2) &= \sum_{l=0}^{\nu_1-1} \frac{1}{l!} (t^1 - a^1)^l \int_{a^2}^{b^2} f^{(l, \nu_2)}(a^1, \tau^2) K_{\nu_2}^2(t^2, \tau^2) d\tau^2 + \\ &+ \sum_{l=0}^{\nu_2-1} \frac{1}{l!} (t^2 - a^2)^l \int_{a^1}^{b^1} f^{(\nu_1, l)}(\tau^1, a^2) K_{\nu_1}^1(t^1, \tau^1) d\tau^1 + \iint_E f^{(\nu_1, \nu_2)}(\tau^1, \tau^2) K_{\nu_1, \nu_2}^1(t^1, \tau^1) K_{\nu_2, \nu_1}^2(t^2, \tau^2) d\tau^1 d\tau^2 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\text{где } K_{\nu_k}^k(t^k, \tau^k) = \varphi_{\tau_k-1}(t^k, \tau^k) - \sum_{l=0}^{m_k-1} s_l^k(t^k) B_{i_k}^k \varphi_{\tau_k-1}(\cdot, \tau^k), k=1, 2, \quad (7)$$

$$K_{\nu_1, \nu_2}^1(t^1, \tau^1, \tau^2) = \varphi_{\tau_1-1}(t^1, \tau^1) \varphi_{\tau_2-1}(\tau^2, a^2) - \sum_{l_1=0}^{m_1-1} \sum_{l_2=0}^{m_2-1} s_{l_1 l_2}^1(t^1, \tau^1) B_{i_1}^1 \varphi_{\tau_1-1}(\cdot, \tau^1) B_{i_2}^2 \varphi_{\tau_2-1}(\cdot, \tau^2). \quad (8)$$

Доказательство. Представим функцию f в виде $f = p + \int_{\mu_1, \mu_2} f^{(\mu_1, \mu_2)}$, где

$$(\int_{\mu_1, \mu_2} g)(t^1, t^2) = \iint_E g(x^1, x^2) \varphi_{\mu_1-1}(t^1, x^1) \varphi_{\mu_2-1}(t^2, x^2) dx^1 dx^2, (t^1, t^2) \in E, g \in L_p(E). \quad (9)$$

Так как $(\int_{\mu_1, \mu_2} f^{(\mu_1, \mu_2)})(t^1, t^2) = f^{(\mu_1, \mu_2)}$, то $p^{(\mu_1, \mu_2)} = 0$.

Интегрированием этого равенства получаем, что функция p представима в виде

$$p(t^1, t^2) = \sum_{l=0}^{\mu_1-1} (t^1 - a^1)^l f_l^2(t^2) + \sum_{l=0}^{\mu_2-1} (t^2 - a^2)^l f_l^1(t^1), \quad (10)$$

где $f_l^k, l = \overline{0, \mu_k-1}$ - некоторые функции из $L_p[a^k, b^k], k=1, 2$. Разложив f_l^k , $l = \overline{0, \mu_k-1}, k=1, 2$, по формуле Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

$$f_l^k(t^k) = \sum_{j=0}^{\mu_k-1} \frac{1}{j!} (f_l^k)^{(j)}(a^k) (t^k - a^k)^j + \int_{a^k}^{b^k} (f_l^k)^{(\mu_k)}(x^k) \varphi_{\mu_k-1}(t^k, x^k) dx^k, t^k \in [a^k, b^k],$$

и обозначив через p_l^k и μ_l^k соответственно полный Тейлор и остаточный член, перепишем (10) в виде $p = p_0 + \tilde{p}$, где

$$p_0(t^1, t^2) = \sum_{l=0}^{\mu_1-1} (t^1 - a^1)^l p_l^2(t^2) + \sum_{l=0}^{\mu_2-1} (t^2 - a^2)^l p_l^1(t^1), \quad (11)$$

$$\tilde{p}(t^1, t^2) = \sum_{l=0}^{\mu_1-1} (t^1 - a^1)^l \mu_l^2(t^2) + \sum_{l=0}^{\mu_2-1} (t^2 - a^2)^l \mu_l^1(t^1).$$

Тогда $f = p_0 + \tilde{p} + \int_{\mu_1, \mu_2} f^{(\mu_1, \mu_2)}$, а следовательно,

$$f - \mathcal{G}(f) = (p_0 - \mathcal{G}(p_0)) + (\tilde{p} - \mathcal{G}(\tilde{p})) + (\int_{\mu_1, \mu_2} f^{(\mu_1, \mu_2)} - \mathcal{G}(\int_{\mu_1, \mu_2} f^{(\mu_1, \mu_2)})). \quad (12)$$

Поскольку

$$1) \forall f^1 \in L_p^{\mu_1}[a^1, b^1] \forall f^2 \in L_p^{\mu_2}[a^2, b^2] \quad f = f^1 \otimes f^2 \Rightarrow \mathcal{G}(f) = \mathcal{G}(f^1) \otimes \mathcal{G}(f^2),$$

$$2) \forall p^k \in P_{\mu_k-1} \quad \mathcal{G}(p^k) = p^k, \quad k=1, 2,$$

то первое слагаемое в (12) равно нулю, ибо $p_0 \in P_{\mu_1-1} \otimes P_{\mu_2-1}$, а второе может быть записано в виде

$$\tilde{p}(t^1, t^2) - \mathcal{G}(\tilde{p}(t^1, t^2)) = \sum_{l=0}^{\mu_1-1} (t^1 - a^1)^l (\mu_l^2(t^2) - \mathcal{G}(\mu_l^2(t^2))) + \sum_{l=0}^{\mu_2-1} (t^2 - a^2)^l (\mu_l^1(t^1) - \mathcal{G}(\mu_l^1(t^1))). \quad (13)$$

Принимая во внимание "перестановочность" B_i^k с $\int_{\mu_k}^k$, $i = \overline{1, m_k}, k=1, 2$ и как следствие ее, "перестановочность" B_{i_1, i_2}^k с \int_{μ_1, μ_2}^k , $i_k = \overline{1, m_k}, k=1, 2$,

$$B_{i_1, i_2}^k \int_{\mu_1, \mu_2} g = \iint_E g(x^1, x^2) B_{i_1}^k \varphi_{\mu_1-1}(\cdot, x^1) B_{i_2}^k \varphi_{\mu_2-1}(\cdot, x^2) dx^1 dx^2, g \in L_p(E),$$

$$(\int_{\mu_k}^k (f_l^k)^{(\mu_k)})(t^k) - \mathcal{G}(\int_{\mu_k}^k (f_l^k)^{(\mu_k)}, t^k) = (\int_{\mu_k}^k (f_l^k)^{(\mu_k)})(t^k) - \sum_{i=1}^{m_k} s_{i_1}^k(t^k) B_{i_1}^k \int_{\mu_k}^k (f_l^k)^{(\mu_k)} = \int_{a^k}^{b^k} (f_l^k)^{(\mu_k)}(x^k) K_{i_1}^k(t^k, x^k) dx^k, \quad (14)$$

$$(\int_{\mu_1, \mu_2} f^{(\mu_1, \mu_2)})(t^1, t^2) - \mathcal{G}(\int_{\mu_1, \mu_2} f^{(\mu_1, \mu_2)}, t^1, t^2) = (\int_{\mu_1, \mu_2} f^{(\mu_1, \mu_2)})(t^1, t^2) -$$

$$- \sum_{i_1=1}^{m_1} \sum_{i_2=1}^{m_2} s_{i_1, i_2}(t^1, t^2) B_{i_1, i_2}^k \int_{\mu_1, \mu_2} f^{(\mu_1, \mu_2)} = \iint_E f^{(\mu_1, \mu_2)}(x^1, x^2) K_{i_1, i_2}(t^1, t^2, x^1, x^2) dx^1 dx^2.$$

Остается выразить $(f_l^k)^{(n_l)}$, $l=0, \dots, n_l-1, k=1, 2$, через функцию f . Дифференцируя (8),

$$\widehat{p}^{(n_l, l)}(t^1, t^2) = \sum_{j=l}^{n_l-1} \frac{j!}{(j-l)!} (t^2 - a^2)^{j-l} (f_l^k)^{(n_l)}(t^1), \quad l=0, \dots, n_l-1,$$

откуда $(f_l^k)^{(n_l)}(t^1) = \frac{1}{l!} \widehat{p}^{(n_l, l)}(t^1, a^2)$, $l=0, \dots, n_l-1$. Так как $\widehat{p}_0^{(n_l, l)}(t^1, a^2) = 0$ и

$$(j_{n_l, n_l} g)^{(n_l, l)}(t^1, a^2) = \int_{a^2}^{b^2} g(t^1, t^2) \varphi_{n_l-1}^{(l)}(t^2, t^2) dt^2 = 0, \quad l=0, \dots, n_l-1,$$

то $\widehat{p}^{(n_l, l)}(t^1, a^2) = f^{(n_l, l)}(t^1, a^2)$, $l=0, \dots, n_l-1$; а значит,

$$(f_l^k)^{(n_l)}(t^1) = \frac{1}{l!} f^{(n_l, l)}(t^1, a^2), \quad l=0, \dots, n_l-1. \quad (15)$$

Аналогично

$$(f_l^k)^{(n_l)}(t^2) = \frac{1}{l!} f^{(n_l, l)}(a^1, t^2), \quad l=0, \dots, n_l-1. \quad (16)$$

Остается (13) - (16) подставить в (12) - теорема доказана.

Применяя к каждому из интегралов в (6) неравенство Гельдера, получим

Следствие 2. В условиях теоремы 1

$$\begin{aligned} |f(t^1, t^2) - G(f, t^1, t^2)| &\leq \sum_{l=0}^{n_1-1} \frac{1}{l!} (t^1 - a^1)^l \|f^{(n_1, l)}(a^1, \cdot)\|_p \|K_{n_1}^2(t^2, \cdot)\|_{p'} + \\ &+ \sum_{l=0}^{n_2-1} \frac{1}{l!} (t^2 - a^2)^l \|f^{(n_2, l)}(\cdot, a^2)\|_p \|K_{n_2}^1(t^1, \cdot)\|_{p'} + \|f^{(n_1, n_2)}\|_p \|K_{n_1, n_2}(t^1, t^2, \cdot)\|_{p'} \end{aligned} \quad (17)$$

(когда это не приводит к нежесткости, через $\|\cdot\|_p$ мы будем обозначать каждую из норм: $\|\cdot\|_{L_p[a^1, b^1]}$, $\|\cdot\|_{L_p[a^2, b^2]}$, $\|\cdot\|_{L_p(E)}$), $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Замечание. Если в (6) допустимо дифференцирование по t^1 и (или) по t^2 , то сходным образом получим интегральное представление и оценку уклонения частной производной функции f от соответствующей частной производной $G(f)$.

Несмотря на то, что каждый из интегралов в (6) мы оцениваем независимо, можно указать класс функций, на котором оценка (17) будет точной. Следуя [2], мы докажем теорему более общего характера, из которой это сразу будет видно.

Зафиксировав положительный вектор $M = (M_0^0, M_0^1, M_0^2, M_1^0, M_1^1, M_1^2, M_2^0, M_2^1, M_2^2) \in \mathbb{R}_+^{n_1+n_2+1}$ зададим класс $MW_p^{n_1, n_2}(E)$ функций $f \in L_p^{n_1, n_2}(E)$, у которых

$$\|f^{(n_1, l)}\|_p \leq M_0^l, \quad \|f^{(n_1, l)}(a^1, \cdot)\|_p \leq M_1^l, \quad l=0, \dots, n_1-1, \quad \|f^{(n_2, l)}(\cdot, a^2)\|_p \leq M_2^l, \quad l=0, \dots, n_2-1. \quad (18)$$

Теорема 3. Если в точ. $(t^1, t^2) \in E$ для $f \in MW_p^{n_1, n_2}(E)$

$$\begin{aligned} Rf(t^1, t^2) &= \sum_{l=0}^{n_1-1} G_l^1(t^1) \int_{a^2}^{b^2} f^{(n_1, l)}(a^1, t^2) G^2(t^2, t^2) dt^2 + \\ &+ \sum_{l=0}^{n_2-1} G_l^2(t^2) \int_{a^1}^{b^1} f^{(n_2, l)}(t^1, a^2) G^1(t^1, t^1) dt^1 + \iint f^{(n_1, n_2)}(t^1, t^2) G^1(t^1, t^1) G^2(t^2, t^2) dt^1 dt^2 \end{aligned}$$

где $G^k(t^k) \in L_p[a^k, b^k]$, $k=1, 2$, $G^k(t^1, t^2, \dots) \in L_p(E)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, а в случае $p=1$ функции $G^k(t^k, \cdot)$, $k=1, 2$, $G(t^1, t^2, \dots)$ к тому же непрерывны почти во всех точках области определения, то

$$\sup_{f \in MW_p^{r, \lambda}(E)} |\mathcal{R}f(t^1, t^2)| = \|G^2(t^2, \cdot)\|_{p'} \sum_{\ell=0}^{n_2-1} M_\ell^1 |G_\ell^1(t^1)| + \|G^1(t^1, \cdot)\|_{p'} \sum_{\ell=0}^{n_1-1} M_\ell^2 |G_\ell^2(t^2)| + \|G(t^1, t^2, \cdot)\|_{p'} M^0. \quad (19)$$

Доказательство. Пусть сначала $1 < p \leq \infty$. Введем в рассмотрение функции

$$g^k(\tau^k) := \begin{cases} \|G^k(t^k, \cdot)\|_{p'}^{1-p'} \|G^k(t^k, \tau^k)\|^{p'-1} \operatorname{sgn} G^k(t^k, \tau^k), \|G^k(t^k, \cdot)\|_{p'} \neq 0, \\ 0, \|G^k(t^k, \cdot)\|_{p'} = 0, \end{cases} \quad \tau^k \in [a^k, b^k], k=1, 2.$$

Легко проверить, что

$$1) \|g^k\|_p = \operatorname{sgn} \|G^k(t^k, \cdot)\|_{p'}, \quad (20)$$

$$2) \int_{a^k}^{b^k} g^k(\tau^k) G^k(t^k, \tau^k) d\tau^k = \|g^k\|_p \|G^k(t^k, \cdot)\|_{p'}. \quad (21)$$

Аналогично для функции

$$g(\tau^1, \tau^2) := \begin{cases} \|G(t^1, t^2, \cdot)\|_{p'}^{1-p'} \|G(t^1, t^2, \tau^1, \tau^2)\|^{p'-1} \operatorname{sgn} G(t^1, t^2, \tau^1, \tau^2), \|G(t^1, t^2, \cdot)\|_{p'} \neq 0, \\ 0, \|G(t^1, t^2, \cdot)\|_{p'} = 0, \end{cases} \quad (\tau^1, \tau^2) \in E,$$

имеем

$$1) \|g\|_p = \operatorname{sgn} \|G(t^1, t^2, \cdot)\|_{p'}, \quad (22)$$

$$2) \int_E g(\tau^1, \tau^2) G(t^1, t^2, \tau^1, \tau^2) d\tau^1 d\tau^2 = \|g\|_p \|G(t^1, t^2, \cdot)\|_{p'}. \quad (23)$$

С помощью функций g^1 , g^2 и g определим (см. (4) и (9))

$$g_0^k := \int_{a^k}^{b^k} g^k g^k, \quad k=1, 2, \quad g_0 := \int_{a_1, a_2}^{b_1, b_2} g g, \quad (24)$$

и положим

$$f_0(\tau^1, \tau^2) := g_0^2(\tau^2) \sum_{\ell=0}^{n_1-1} \frac{1}{\ell!} (\tau^1 - a^1)^\ell M_\ell^1 \operatorname{sgn} G_\ell^1(t^1) + g_0^1(\tau^1) \sum_{\ell=0}^{n_2-1} \frac{1}{\ell!} (\tau^2 - a^2)^\ell M_\ell^2 \operatorname{sgn} G_\ell^2(t^2) + M^0 g_0(\tau^1, \tau^2). \quad (25)$$

Так как $(g^k)^{(n_k)} = g^k$, $k=1, 2$, $g_0^{(n_1, n_2)} = g_0$, $g_0^{(i_1, i_2)}(a^1, \cdot) = 0$ при $i_1 = 0, \dots, n_1-1$ и $g_0^{(i_1, i_2)}(\cdot, a^2) = 0$ при $i_2 = 0, \dots, n_2-1$, то такое построение обесценивает:

$$1) f_0^{(n_1, n_2)} = M^0 g$$

$$2) f_0^{(i_1, i_2)}(a^1, \tau^2) = M_\ell^1 g^2(\tau^2) \operatorname{sgn} G_\ell^1(t^1), \quad \ell = 0, \dots, n_1-1, \quad \tau^2 \in [a^2, b^2],$$

$$f_0^{(i_1, i_2)}(\tau^1, a^2) = M_\ell^2 g^1(\tau^1) \operatorname{sgn} G_\ell^2(t^2), \quad \ell = 0, \dots, n_2-1, \quad \tau^1 \in [a^1, b^1].$$

Учитывая (20) и (22), отсюда получаем, что для f_0 выполняются неравенства (18), а значит, $f_0 \in MW_p^{r, \lambda}(E)$. Принимая во внимание (21) и (23), находим, что значение

$\int_{a_1, a_2}^{b_1, b_2} f_0(t^1, t^2)$ в точности равно правой части (19).

Пусть теперь $p=1$, $p'=\infty$. Тогда для произвольного числа $\varepsilon > 0$ найдутся точки $\hat{t}^k, \hat{t}^k \in [a^k, b^k]$, $k=1,2$, такие, что

1) функции $G^k(t^k, \cdot)$ непрерывны в точке \hat{t}^k и

$$0 \leq \|G^k(t^k, \cdot)\|_{\infty} - |G^k(t^k, \hat{t}^k)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad k=1,2$$

2) функция $G(t^1, t^2, \cdot)$ непрерывна в точке (\hat{t}^1, \hat{t}^2) и

$$0 \leq \|G(t^1, t^2, \cdot)\|_{\infty} - |G(t^1, t^2, \hat{t}^1, \hat{t}^2)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому можно указать такое число $\delta > 0$, что

$$0 \leq \|G^k(t^k, \cdot)\|_{\infty} - |G^k(t^k, \tau^k)| < \varepsilon, \quad \tau^k \in]\hat{t}^k - \frac{1}{2}\delta, \hat{t}^k + \frac{1}{2}\delta[\subset]a^k, b^k[, k=1,2, \quad (27)$$

$$0 \leq \|G(t^1, t^2, \cdot)\|_{\infty} - |G(t^1, t^2, \tau^1, \tau^2)| < \varepsilon, \quad \tau^k \in]\hat{t}^k - \frac{1}{2}\delta, \hat{t}^k + \frac{1}{2}\delta[\subset]a^k, b^k[, k=1,2. \quad (28)$$

Определим функции $g_{\varepsilon}^1, g_{\varepsilon}^2$ и g_{ε} , полагая

$$g_{\varepsilon}^k(\tau^k) = \begin{cases} \delta^{-1} \operatorname{sgn} G^k(t^k, \tau^k), & \text{если } \tau^k \in]\hat{t}^k - \frac{1}{2}\delta, \hat{t}^k + \frac{1}{2}\delta[, \\ 0 & \text{во всех остальных точках } \tau^k \in [a^k, b^k], \end{cases} \quad k=1,2,$$

$$g_{\varepsilon}(\tau^1, \tau^2) = \begin{cases} \delta^{-2} \operatorname{sgn} G(t^1, t^2, \tau^1, \tau^2), & \text{если } \tau^k \in]\hat{t}^k - \frac{1}{2}\delta, \hat{t}^k + \frac{1}{2}\delta[, k=1,2, \\ 0 & \text{во всех остальных точках } (\tau^1, \tau^2) \in E. \end{cases}$$

Легко видеть, что

$$\|g_{\varepsilon}^k\|_1 \leq 1, \quad k=1,2, \quad \|g_{\varepsilon}\|_1 \leq 1. \quad (29)$$

Цепочкой равенств

$$\|G^k(t^k, \cdot)\|_{\infty} - \int_{a^k}^{b^k} G^k(t^k, \tau^k) g_{\varepsilon}^k(\tau^k) d\tau^k = \|G^k(t^k, \cdot)\|_{\infty} - \int_{\hat{t}^k - \frac{1}{2}\delta}^{\hat{t}^k + \frac{1}{2}\delta} G^k(t^k, \tau^k) \operatorname{sgn} G^k(t^k, \tau^k) d\tau^k = \frac{1}{\delta} \int_{\hat{t}^k - \frac{1}{2}\delta}^{\hat{t}^k + \frac{1}{2}\delta} (\|G^k(t^k, \cdot)\|_{\infty} - |G^k(t^k, \tau^k)|) d\tau^k$$

с помощью (27) получаем оценку

$$0 \leq \|G^k(t^k, \cdot)\|_{\infty} - \int_{a^k}^{b^k} G^k(t^k, \tau^k) g_{\varepsilon}^k(\tau^k) d\tau^k \leq \varepsilon, \quad k=1,2. \quad (30)$$

Аналогично на основании (28) находим, что

$$0 \leq \|G(t^1, t^2, \cdot)\|_{\infty} - \iint_E G(t^1, t^2, \tau^1, \tau^2) g_{\varepsilon}(\tau^1, \tau^2) d\tau^1 d\tau^2 \leq \varepsilon. \quad (31)$$

По функциям $g_{\varepsilon}^1, g_{\varepsilon}^2$ и g_{ε} построим функцию f_{ε} тем же способом, которым в случае $1 < p \leq \infty$ пользовались при построении f_0 по g^1, g^2 и g (см. (24), (25)). Оценки (29) с учетом (26) обеспечивают для f_{ε} выполнение неравенств (18), а значит, $f_{\varepsilon} \in M \cap W_p^{1,1}(E)$. При помощи (30) и (31) получим, что

$$0 \leq [\|G^k(t^k, \cdot)\|_{\infty} \sum_{l=0}^{m-1} M_l^k |G_l^k(t^k)| + \|G^k(t^k, \cdot)\|_{\infty} \sum_{l=0}^{m-1} M_l^k |G_l^k(t^k)| - \|G(t^1, t^2, \cdot)\|_{\infty} M^0] - R f_{\varepsilon}(t^1, t^2) = \varepsilon \left[\sum_{l=0}^{m-1} M_l^k |G_l^k(t^k)| + \sum_{l=0}^{m-1} M_l^k |G_l^k(t^k)| + M^0 \right].$$

Следовательно, правая часть (19) превышает величину $R f_{\varepsilon}(t^1, t^2)$ не больше, чем

на $\epsilon \left[\sum_{l=0}^{q_1-1} M_l^1 |G_l^1(t^1)| + \sum_{l=0}^{q_2-1} M_l^2 |G_l^2(t^2)| + M^0 \right]$.

А так как ϵ можно взять произвольно малым, то равенство (19) верно и при $p=1$.

Следствие 4. Пусть условия теоремы 3 выполняются в каждой точке $(t^1, t^2) \in E$. Тогда

$$\sup_{f \in MW_p^{q_1, q_2}(E)} \| \mathcal{R}f \|_\infty = \| G^2(t^2, \cdot) \|_{p'} \sum_{l=0}^{q_1-1} M_l^1 |G_l^1(t^1)| + \| G^1(t^1, \cdot) \|_{p'} \sum_{l=0}^{q_2-1} M_l^2 |G_l^2(t^2)| + \| G(t^1, t^2, \cdot, \cdot) \|_{p'} M^0 \|_\infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

2. О погрешности приближения кусочно-постоянными функциями

Пусть на E задана прямоугольная сетка узлов

$$\Delta := \Delta^1 \times \Delta^2, \quad \text{где } \Delta^k = \{t_0^k, t_1^k, \dots, t_{n_k}^k \mid a^k = t_0^k < t_1^k < \dots < t_{n_k}^k = b^k\}, \quad n_k \in \mathbb{N}, k=1,2. \quad (32)$$

Она разбивает область E на частичные прямоугольники

$$E_{i_1, i_2} :=]t_{i_1-1}^1, t_{i_1}^1] \times]t_{i_2-1}^2, t_{i_2}^2], \quad i_k = \overline{1, n_k}, k=1,2. \quad (33)$$

Рассмотрим пространство кусочно-постоянных функций

$$S := \left\{ s: E \rightarrow \mathbb{R} \mid s = \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} \alpha_{i_1 i_2} \chi_{E_{i_1 i_2}}, \alpha_{i_1 i_2} \in \mathbb{R} \right\}, \quad (34)$$

где χ_E - характеристическая функция множества $E \subseteq E$

$$\chi_E(t^1, t^2) = \begin{cases} 1, & (t^1, t^2) \in E, \\ 0, & (t^1, t^2) \in E \setminus E. \end{cases}$$

А.М.Авакян [3] указал точное значение наилучшего приближения класса

$M_\infty^{1,1}(E)$ такими функциями в случае, когда

$$[a^k, b^k] = [0, 1], \quad t_{i_k-1}^k - t_{i_k-1}^k = h^k, \quad i_k = \overline{1, n_k}, k=1,2, \quad M^0 = M_0^1 = M_0^2 = 1 : \quad (35)$$

$$\sup_{f \in MW_\infty^{1,1}(E)} \inf_{s \in S} \| f - s \|_\infty = h^1 + h^2 - \frac{1}{2} h^1 h^2. \quad (36)$$

Сравним этот результат в погрешностях линейных приближений

$$f \in L_1(E) \rightarrow \mathcal{G}(f) := \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} \chi_{E_{i_1 i_2}} B_{i_1 i_2} f, \quad (37)$$

$$f \in C(E) \rightarrow \mathcal{G}_x(f) := \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} \chi_{E_{i_1 i_2}} B_{i_1 i_2}^x f, \quad (38)$$

которые задаются соответственно:

(37) - при помощи оператора $B: L_1(E) \rightarrow K^{n_1 n_2}$ интерполяции функции $f \in L_1(E)$ по значениям ее интегральных средних :

$$B_{i_1 i_2} f = \frac{1}{|E_{i_1 i_2}|} \iint_{E_{i_1 i_2}} f(t^1, t^2) dt^1 dt^2, \quad i_k = \overline{1, n_k}, k=1,2, \quad (39)$$

где $|E_{i_1 i_2}| = h_{i_1}^1 h_{i_2}^2$, $h_{i_k}^k = t_{i_k}^k - t_{i_k-1}^k$, $i_k = \overline{1, n_k}$, $k=1,2$;

(38) - оператором $B^k: C(E) \rightarrow R^{n_k}$ следа на множестве отмеченных точек $\pi = \pi^1 \times \pi^2$, где $\pi^k = \{\xi_{i_1}^k, \xi_{i_2}^k, \dots, \xi_{i_{n_k}}^k \mid t_{i_{k-1}}^k \leq \xi_{i_k}^k \leq t_{i_k}^k, i_k = \overline{1, n_k}\}$, $k=1, 2$:

$$B_{i_1, i_2}^k f = f(\xi_{i_1}^1, \xi_{i_2}^2), \quad i_k = \overline{1, n_k}, \quad k=1, 2, \quad f \in C(E).$$

Приближение (37) может быть описано как интерполяция сплайнами тензорного произведения $S^1 \otimes S^2$ пространств S^k кусочно-постоянных на $[\alpha^k, \beta^k]$ функций, соответствующих разбиению Δ^k . Интерполяция G^k при этом определяется посредством оператора $B^k: L_1[\alpha^k, \beta^k] \rightarrow R^{n_k}$

$$B_{i_1}^k f := \frac{1}{h_{i_1}^k} \int_{t_{i_1}^k}^{t_{i_1+1}^k} f(t) dt, \quad i_1 = \overline{1, n_k}, \quad f \in L_1[\alpha^k, \beta^k], \quad (40)$$

и сплайнов $S_{i_1}^k := \chi_{[t_{i_1}^k, t_{i_1+1}^k]}$, $i_1 = \overline{1, n_k}$ фундаментального базиса в S^k , $k=1, 2$. Очевидно, что приближения G^1 и G^2 точны на классе постоянных функций и удовлетворяют условию (2). Таким образом, выполняются предпосылки следствия 2 и для всех $(t^1, t^2) \in E$, $p \in [1, \infty[$ справедливо неравенство

$$\sup_{f \in MN_p^1(E)} |f(t^1, t^2) - G(f, t^1, t^2)| \leq M_0 \|K_0(t^1, t^2, \dots)\|_{p'} + M_0' \|K_0'(t^1, t^2, \dots)\|_{p'} + M_0'' \|K_0''(t^2, \dots)\|_{p'}, \quad (41)$$

где, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, а ядра K_0' , K_0'' и K_0 определены в (7) и (8) и, как мы увидим дальше, ограничены и почти всюду непрерывны. По теореме 3 эта оценка не улучшаема в каждой точке $(t^1, t^2) \in E$.

Вычислим нормы $\|K_0(t^1, t^2, \dots)\|_{p'}$, $\|K_0'(t^2, \dots)\|_{p'}$, $k=1, 2$, из правой части (41). Пусть $(t^1, t^2) \in E_{i_1, i_2}$ при некоторых $i_k \in \{1, \dots, n_k\}$, $k=1, 2$. По формулам (7) - (8) с учетом (39), (40) получаем

$$K_0^k(t^k, \tau^k) = \varphi_0(t^k, \tau^k) - (h_{i_k}^k)^{-1} [\varphi_0(t_{i_k}^k, \tau^k) - \varphi_0(t_{i_k-1}^k, \tau^k)] = \begin{cases} (h_{i_k}^k)^{-1} (\tau^k - t_{i_k-1}^k), & \tau^k \in [t_{i_k-1}^k, t_{i_k}^k], \\ -(h_{i_k}^k)^{-1} (t_{i_k}^k - \tau^k), & \tau^k \in [t_{i_k}^k, t_{i_k+1}^k], \\ 0, & \tau^k \notin [t_{i_k-1}^k, t_{i_k+1}^k], \end{cases} \quad k=1, 2,$$

$$K_0(t^1, t^2, \tau^1, \tau^2) = \varphi_0(t^1, \tau^1) \varphi_0(t^2, \tau^2) - E_{i_1, i_2}^{-1} [\varphi_0(t_{i_1}^1, \tau^1) - \varphi_0(t_{i_1-1}^1, \tau^1)] [\varphi_0(t_{i_2}^2, \tau^2) - \varphi_0(t_{i_2-1}^2, \tau^2)] = \begin{cases} K_0^1(t^1, \tau^1), & \tau^1 \in [\alpha^1, t_{i_1+1}^1], \\ K_0^2(t^2, \tau^2), & \tau^2 \in [\alpha^2, t_{i_2+1}^2], \\ \frac{1}{E_{i_1, i_2}} (h_{i_1}^1)^{-1} (t_{i_1}^1 - \tau^1) (h_{i_2}^2)^{-1} (\tau^2 - t_{i_2}^2), & (\tau^1, \tau^2) \in E_{i_1, i_2} \cap ([\alpha^1, t_{i_1}^1] \times [\alpha^2, t_{i_2}^2]), \\ -E_{i_1, i_2}^{-1} (h_{i_1}^1)^{-1} (t_{i_1}^1 - \tau^1) (h_{i_2}^2)^{-1} (\tau^2 - t_{i_2}^2), & (\tau^1, \tau^2) \in E_{i_1, i_2} \cap ([\alpha^1, t_{i_1}^1] \times [\alpha^2, t_{i_2}^2]), \\ 0, & \tau^1 \in [t_{i_1}^1, \beta^1] \text{ или } \tau^2 \in [t_{i_2}^2, \beta^2]. \end{cases}$$

Ясно, что $\|K_0^k(t^k, \dots)\|_{\infty} = \|K_0'(t^2, \dots)\|_{\infty} = 1$, $k=1, 2$. При $1 < p < \infty$ непосредственные вычисления интегралов и последующие несложные преобразования дают

$$\|K_0^k(t, \dots)\|_{p'}^{p'} = (p'+1)^k h_{i_k}^k \Psi_{p'}(u_k), \quad k=1,2,$$

$$\|K_0(t, t_1^2, \dots)\|_{p'}^{p'} = (p'+1)^{-2} h_{i_1}^2 h_{i_2}^2 \Phi_{p'}(u_1, u_2) + (p'+1)^{-1} h_{i_1}^4 (t_1^2 - a^2) \Psi_{p'}(u_1) + (p'+1)^{-1} h_{i_2}^4 (t_2^2 - a^2) \Psi_{p'}(u_2), \quad (42)$$

где $u_k = (h_{i_k}^k)^{-1} (t_{i_k}^k - t^k)$, $\Psi_{p'}(u) = u^{p'+1} + (1-u)^{p'+1}$, $u \in [0,1]$,

$$\Phi_{p'}(u_1, u_2) = u_1^{p'+1} + u_2^{p'+1} - u_1^{p'+1} u_2^{p'+1} + \sum_{l=0}^p C_p^l (p'+1)^{2-l} (l+1)^{-2} (1-u_1^{l+1})(1-u_2^{l+1})$$

$(u_1, u_2) \in [0,1] \times [0,1]$, C_p^l - число сочетаний из p по l .

Подставляя (42) в (41), получаем формулу на классе $MW_p^{(1)}(E)$ точечную оценку ошибки сплайн-интерполяции (37). Для оценки $\|f - \hat{G}(f)\|_{\infty}$ (следствие 4) необходимо найти максимум по t и t^2 норм (42). С этой целью последуем за экстремум функции $\Psi_{p'}$ и $\Phi_{p'}$. Очевидно, что $\max_{u \in [0,1]} \Psi_{p'}(u) = \Psi_{p'}(0) = \Psi_{p'}(1) = 1$. Изучение $\Phi_{p'}$ приводит к выводу:

$$1) \Phi_{p'}^{(1,1)}(u_1, u_2) = (p'+1)^2 ((1-u_1 u_2)^{p'} - u_1^{p'} u_2^{p'}) \Rightarrow \operatorname{sgn} \Phi_{p'}^{(1,1)}(u_1, u_2) = \operatorname{sgn}(u_1 u_2 - 1)$$

$$2) \Phi_{p'}^{(1,0)}(u_1, 1) = \Phi_{p'}^{(0,1)}(1, u_2) = 0,$$

$$3) \Phi_{p'}^{(2,0)}(u_1, u_2), \Phi_{p'}^{(0,2)}(u_1, u_2) > 0, \text{ если } 2u_1 u_2 \leq 1, u_1, u_2 \geq \frac{1}{2},$$

которые позволяют утверждать, что

$$\max_{(u_1, u_2) \in [0,1] \times [0,1]} \Phi_{p'}(u_1, u_2) = \max\{\Phi_{p'}(0,0), \Phi_{p'}(1,1)\} = \Phi_{p'}(0,0).$$

Последнее равенство доказывает цепочка соотношений

$$\begin{aligned} \Phi_{p'}(0,0) &= (p'+1)^2 \sum_{l=0}^p C_p^l (l+1)^{-2} = (p'+1)^2 \int_0^1 \int_0^1 \sum_{l=0}^p C_p^l u_1^l u_2^l du_1 du_2 = \\ &= (p'+1)^2 \int_0^1 \int_0^1 (1-u_1 u_2)^{p'} du_1 du_2 \geq (p'+1)^2 \int_0^1 \int_0^1 (1-u_1)^{p'} (1-u_2)^{p'} du_1 du_2 = 1 = \Phi_{p'}(1,1) \end{aligned}$$

(мы воспользовались неравенством $(1-u_1 u_2)^{p'} \geq (1-u_1)^{p'} (1-u_2)^{p'}$, которое для $u_1, u_2 \in [0,1]$ вытекает из $u_1 + u_2 \geq 2u_1 u_2$).

Поскольку $\Phi_{p'}(u_1, u_2)$, $\Psi_{p'}(u_1)$ и $\Psi_{p'}(u_2)$ достигают своих максимальных значений при одних значениях аргументов u_1 и u_2 , то в случае равномерного разбиения ($h_{i_k}^k = h^k$, $i_k = 1, n_k$, $k=1,2$) мы из (41) получаем точную оценку

$$\sup_{f \in MW_p^{(1)}(E)} \|f - \hat{G}(f)\|_{\infty} = \max_{\substack{i_1=1, n_1 \\ i_2=1, n_2}} \max_{u_1 \in [0,1], u_2 \in [0,1]} ((M_0^1 h^{\frac{1}{p'}} \Psi_{p'}(u_1))^{\frac{1}{p'}} + M_0^2 h^{\frac{1}{p'}} \Psi_{p'}(u_2))^{\frac{1}{p'}} + M_0^0 (p'+1)^{\frac{1}{p'}}$$

$$\times (h^2 h^2 \Phi_{p'}(u_1, u_2) + h^4 (t_{i_1}^2 - a^2) \Psi_{p'}(u_1) + h^4 (t_{i_2}^2 - a^2) \Psi_{p'}(u_2))^{\frac{1}{p'}} (1+p')^{\frac{1}{p'}} = (M_0^1 h^{\frac{1}{p'}} + M_0^2 h^{\frac{1}{p'}} + (p'+1)^{\frac{1}{p'}} \Psi_{p'}(0) + M_0^0 (p'+1)^{\frac{1}{p'}} (h^2 h^2 (p'+1)^{-2} \Phi_{p'}(0,0) - 2\Psi_{p'}(0) + \Psi_{p'}(0)(h^2(b^2 - a^2) + h^2(b-a)^2))^{\frac{1}{p'}})^{\frac{1}{p'}}$$

$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $1 < p \leq \infty$. Если разбиение неравномерное, то заменив в последнем выражении h^k на $\bar{h}^k = \max\{h_{i_k}^k, h_{i_k}^k - h_{i_{k-1}}^k\}$, мы получим оценку величины $\|f - \hat{G}(f)\|_{\infty}$ для $f \in MW_p^{(1)}(E)$ не ухудшаемость которой нельзя

гарантировать. Этим доказана

Теорема 5. Для интерполяции (37) при $1 < p \leq \infty$ справедлива оценка

$$\sup_{f \in MW_{p'}^{1,1}(E)} \|f - G(f)\|_{\infty} \leq M_0'(p'+1)^{\frac{1}{p'}} \overline{h}^{\frac{1}{p'}} + M_0''(p'+1)^{\frac{1}{p'}} \overline{h}^{\frac{1}{p'}} + M_0'' \left(\overline{h}^{\frac{1}{p'}} \overline{h}^{\frac{1}{p'}} \sum_{l=0}^{p'} C_l^e (-1)^l (l+1)^{-2} + 2(p'+1)^{-1} (\overline{h}^{\frac{1}{p'}} (l^2 a^2 - h_{n_k}^2) + \overline{h}^{\frac{1}{p'}} (l^2 a^2 - h_{n_1}^2)) \right)^{\frac{1}{p'}} \quad (43)$$

где $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$. В случае, когда $h_{i_k}^k = \overline{h}^k$, $i_k = 1, n_k$, $k=1, 2, \dots, n$ имеет место равенство.

Поточечную оценку погрешности приближения (38) дает

Теорема 6. В каждой точке $(t^1, t^2) \in E_{i_1, i_2}$, $i_k = 1, n_k$, $k=1, 2$, при $1 < p \leq \infty$ справедливо равенство

$$\sup_{f \in MW_p^{1,1}(E)} |f(t^1, t^2) - G(f, t^1, t^2)| = M_0' |t^1 - \xi_{i_1}^1|^{\frac{1}{p'}} + M_0'' |t^2 - \xi_{i_2}^2|^{\frac{1}{p'}} + M_0'' (\varphi_1(t^1, \xi_{i_1}^1) \varphi_2(t^2, \xi_{i_2}^2) + (\min\{t^1, \xi_{i_1}^1\} - a)^+ |t^2 - \xi_{i_2}^2| + (\min\{t^2, \xi_{i_2}^2\} - a)^+ |t^1 - \xi_{i_1}^1|)^{\frac{1}{p'}} \quad (44)$$

где p' - сопряженное с p число.

Доказательство. По следствию 2 и теореме 3

$$\sup_{f \in MW_p^{1,1}(E)} |f(t^1, t^2) - G(f, t^1, t^2)| = M_0' \|K_0(t^1, \cdot)\|_{p'} + M_0'' \|K_0(t^1, \cdot)\|_{p'} + M_0'' \|K_0(t^2, \cdot)\|_{p'} \quad (45)$$

$$K_0^k(t^k, \tau^k) = \varphi_0(t^k, \tau^k) - \varphi_0(\xi_{i_k}^k, \tau^k) =$$

$$= \begin{cases} \operatorname{sgn}(t^k - \xi_{i_k}^k) & \text{, если } \tau^k \text{ лежит между } t^k \text{ и } \xi_{i_k}^k, \\ 0 & \text{во всех остальных точках,} \end{cases} \quad k=1, 2,$$

$$K_0(t^1, t^2, \tau^1, \tau^2) = \varphi_0(t^1, \tau^1) \varphi_0(t^2, \tau^2) - \varphi_0(\xi_{i_1}^1, \tau^1) \varphi_0(\xi_{i_2}^2, \tau^2) =$$

$$= \begin{cases} K_0^1(t^1, \tau^1), & \tau^2 < \min\{t^2, \xi_{i_2}^2\}, \\ K_0^2(t^2, \tau^2), & \tau^1 < \min\{t^1, \xi_{i_1}^1\}, \\ -1, & t^k < \tau^k < \xi_{i_k}^k, \quad k=1, 2, \\ 1, & \xi_{i_k}^k < \tau^k < t^k, \quad k=1, 2, \\ 0, & \text{во всех остальных точках.} \end{cases}$$

Ясно, что для $K_0^1(t^1, \cdot)$, $K_0^2(t^2, \cdot)$ и $K_0(t^1, t^2, \cdot, \cdot)$ будем иметь $\| \cdot \|_{p'} = \| \cdot \|_1$.

Поэтому, вычисляя

$$\|K_0^k(t^k, \cdot)\|_1 = |t^k - \xi_{i_k}^k|, \quad k=1, 2,$$

$$\|K_0(t^1, t^2, \cdot, \cdot)\|_1 = \varphi_1(t^1, \xi_{i_1}^1) \varphi_2(t^2, \xi_{i_2}^2) + (\min\{t^1, \xi_{i_1}^1\} - a)^+ |t^2 - \xi_{i_2}^2| + (\min\{t^2, \xi_{i_2}^2\} - a)^+ |t^1 - \xi_{i_1}^1|$$

на основе (45) получаем окончательный результат.

С помощью теоремы 6 для конкретного множества \mathfrak{R} нетрудно подсчитать

$$\sup_{f \in MW_p^{1,1}(E)} \|f - G_{\mathfrak{R}}(f)\|_{\infty}. \quad \text{Так, имеет место}$$

Следствие 7. Пусть Δ - равномерное разбиение

$$\pi_0 = \pi_1 \times \pi_0^2, \quad \pi_0^k = \left\{ t_i^k = \frac{1}{2}(t_{i-1}^k + t_i^k) \mid i = \overline{1, n_k} \right\}, \quad k=1, 2. \quad (46)$$

Тогда при $1 < p \leq \infty$

$$\sup_{f \in MW_p^{1,1}(E)} \|f - \mathcal{G}_{\pi_0}(f)\|_{\infty} = M_0^1 2^{-\frac{1}{p}} h^{\frac{1}{p}} + M_0^2 2^{-\frac{1}{p}} h^{\frac{1}{p}} + 2^{-\frac{1}{p}} M^k (h^1(b^2 - a^2) + h^2(b^1 - a^1) - \frac{1}{2} h^1 h^2)^{\frac{1}{p}}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p} = 1. \quad (47)$$

Замечание. Сравнение (44) и (47) позволяет сделать вывод, что в случае равномерного разбиения

$$\inf_{\pi} \sup_{f \in MW_p^{1,1}(E)} \|f - \mathcal{G}_{\pi}(f)\|_{\infty} = \sup_{f \in MW_p^{1,1}(E)} \|f - \mathcal{G}_{\pi_0}(f)\|_{\infty}, \quad 1 < p \leq \infty, \quad (48)$$

т.е. выбор π_0 отмеченных точек, как и следовало ожидать, является наилучшим.

Замечание. По теоремам 5 и 6 для случая (35), в частности, получаем

$$\sup_{f \in MW_{\text{pol}}^{1,1}(E)} \|f - \mathcal{G}(f)\|_{\infty} = \sup_{f \in MW_{\infty}^{1,1}(E)} \|f - \mathcal{G}(f)\|_{\infty} = h^1 + h^2 - \frac{1}{4} h^1 h^2. \quad (49)$$

Значит, с точки зрения точности на рассматриваемом классе, приближения \mathcal{G} и \mathcal{G}_0 эквивалентны (что имеет место и в одномерном случае). Сравнение (49) с (36) показывает, что они (а в силу (47) и всякая другая аппроксимация типа (38)) не дают наилучшего приближения на рассматриваемом классе функций. Вместе с тем, отличие в точности очень незначительно, а поэтому они предпочтительнее этого последнего, так как эффективно строятся по заданной функции.

3. О погрешности приближения эрмитовыми сплайнами

Пусть S^k - пространство полиномиальных сплайнов степени $2q_k - 1$ дефекта $q_k \in \mathbb{N}$, $k=1, 2$. Рассмотрим эрмитову интерполяцию сплайнами из S^k функций $f \in C^{q_k-1}[a^k, b^k]$ по значениям $f^{(i)}(t_i^k)$, $i = \overline{0, q_k-1}$, в точках разбиения Δ^k (32). Единственный интерполяционный для f сплайн $\mathcal{G}^k(f)$ однозначно определяется свойствами:

- а) $\mathcal{G}^k(f)$ - полином степени $2q_k - 1$ на каждом из интервалов $[t_{i-1}^k, t_i^k]$,
 б) $\mathcal{G}^k(f) \in C^{q_k-1}[a^k, b^k]$ в) $(\mathcal{G}^k(f))^{(i)}(f, t_i^k) = f^{(i)}(t_i^k)$, $i = \overline{0, q_k-1}$. (50)

Если ввести обозначение $P_i^k(h, \cdot)$, $i = \overline{0, q_k-1}$, для функции, определенной на всей числовой прямой, которая вне промежутка $[0, h]$ равна нулю, а на $[0, h]$ есть полином степени $2q_k - 1$, удовлетворяющий условиям

$$(P_i^k)^{(j)}(h, 0) = \delta_{ij}, \quad (P_i^k)^{(j)}(h, h) = 0, \quad j = \overline{0, q_k-1}, \quad \text{где } \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

то сплайн $\mathcal{G}^k(f)$ можно записать в виде

$$G^k(f, t) = \sum_{i=1}^{n_k} \sum_{l=0}^{q_k-1} (f^{(l)}(t_{i-1}^k) p_l^k(h_i^k, t - t_{i-1}^k) + (f^{(l)}(t_i^k) p_l^k(h_i^k, t - t_i^k)) \quad (51)$$

Для $p_l^k, l=0, q_k-1, k=1,2$, на основании интерполяционной формулы Эрмита

$$p_l^k(h, t) = \frac{(h-t)^{q_k}}{l!(q_k-l)!} \sum_{j=0}^{q_k-l-1} \frac{(q_k-l-j)!}{j! h^{q_k-l-j}} t^{l+j}, \quad t \in [0, h].$$

Заметим, что при $t \in [t_{i-1}^k, t_i^k], i=1, n_k$

$$S_{l,i}^k(t) = p_l^k(h_i^k, t - t_{i-1}^k), \quad S_{l,i-1}^k = p_l^k(h_i^k, t - t_{i-1}^k), \quad (52)$$

где $S_{l,i}^k, i=0, q_k-1, i=0, n_k$, - фундаментальные сплайны в $S^k, k=1,2$.

Рассмотрим интерполяцию сплайнами из $S^1 \otimes S^2$ функций f

$f \rightarrow G(f)$ Основным результатом этого параграфа является

Теорема 8. При нечетных q_1 и q_2 в каждой точке $(t^1, t^2) \in E_{1,2}$

$l_k = 1, n_k, k=1,2$, имеет место равенство

$$\sup_{f \in MW_{2q_1, 2q_2}(E)} |f(t^1, t^2) - G(f, t^1, t^2)| = \frac{1}{(2q_1)!} (t^2 - t_{i_2-1}^2)^{q_2} (t_{i_2}^2 - t^2)^{q_2} \sum_{l=0}^{2q_1-1} \frac{1}{l!} M_l^1 (t^1 - a^1)^l +$$

$$+ \frac{1}{(2q_2)!} (t^1 - t_{i_1-1}^1)^{q_1} (t_{i_1}^1 - t^1)^{q_1} \sum_{l=0}^{2q_2-1} \frac{1}{l!} M_l^2 (t^2 - a^2)^l + \frac{1}{(2q_1)! (2q_2)!} M_0^1 M_0^2$$

где $M_{2q_1}^1 = M_0^2 = M_0^1$.

Доказательство. На основании следствия 2 получаем, что

$$\sup_{f \in MW_{2q_1, 2q_2}(E)} |f(t^1, t^2) - G(f, t^1, t^2)| \leq M^0 \|K_{2q_1, 2q_2}(t^1, t^2, \dots)\|_1 +$$

$$+ \sum_{l=0}^{2q_1-1} \frac{1}{l!} M_l^1 (t^1 - a^1)^l \|K_{2q_1, 2q_2}(t^2, \dots)\|_1 + \sum_{l=0}^{2q_2-1} \frac{1}{l!} M_l^2 (t^2 - a^2)^l \|K_{2q_1, 2q_2}(t^1, \dots)\|_1, \quad (53)$$

где

$$K_{2q_k}^k(t^k, r^k) = H^k - r^k)^{2q_k-1} - \sum_{i=0}^{n_k} \sum_{l=0}^{q_k-1} \varphi_{2q_k-1}^{(l)}(t_{i-1}^k, r^k) S_{l,i}^k(t^k), \quad k=1,2,$$

$$K_{2q_1, 2q_2}(t^1, t^2, r^1, r^2) = \varphi_{2q_1-1}(t^1, r^1) \varphi_{2q_2-1}(t^2, r^2) -$$

$$- \sum_{i_1=0}^{n_1} \sum_{i_2=0}^{n_2} \sum_{l_1=0}^{q_1-1} \sum_{l_2=0}^{q_2-1} (\varphi_{2q_1-1}^{(l_1)}(t_{i_1-1}^1, r^1) \varphi_{2q_2-1}^{(l_2)}(t_{i_2-1}^2, r^2) S_{l_1, i_1}^1(t^1) S_{l_2, i_2}^2(t^2)).$$

По теореме 3 эта оценка неулучшаема.

Из (53) следует, что

$$1) K_{2q_k}^k(t^k, r^k) = 0, \text{ если только } r^k \in [t_{i_k-1}^k, t_{i_k}^k], \quad k=1,2, \quad (54)$$

$$2) K_{2q_1, 2q_2}(t^1, t^2, r^1, r^2) = 0, \text{ если } r^1 \notin [t_{i_1-1}^1, t_{i_1}^1] \text{ и } r^2 \notin [t_{i_2-1}^2, t_{i_2}^2]. \quad (55)$$

Принимая во внимание (52), преобразуем выражение для $K_{2q_k}^k(t^k, r^k), k=1,2$, при $r^k \in [t_{i_k-1}^k, t_{i_k}^k]$

$$K_{2q_k}^k(t^k, \tau^k) = \varphi_{2q_k-1}(t^k, \tau^k) - \sum_{l=0}^{q_k-1} \varphi_{2q_k-1}(t_{i_{k-1}}^k, \tau^k) P_l^k(h_{i_{k-1}}^k, t_{i_{k-1}}^k - \tau^k) + (-1)^l \varphi_{2q_k-1}(t_{i_k}^k, \tau^k) P_l^k(h_{i_k}^k, t_{i_k}^k - \tau^k)$$

$$= \begin{cases} - \sum_{l=0}^{q_k-1} \frac{(q_k-1)! (-1)^l}{(q_k-1-l)!} (t_{i_{k-1}}^k - \tau^k)^{q_k-1-l} P_l^k(h_{i_{k-1}}^k, t_{i_{k-1}}^k - \tau^k), & \tau^k < t^k, \\ (t^k - \tau^k)^{2q_k-1} - \sum_{l=0}^{q_k-1} \frac{(q_k-1)! (-1)^l}{(q_k-1-l)!} (t_{i_k}^k - \tau^k)^{q_k-1-l} P_l^k(h_{i_k}^k, t_{i_k}^k - \tau^k), & \tau^k > t^k. \end{cases}$$

Так как интерполяция сплайнами из S^k точна на классе полиномов степени $2q_k$ то из (51) получаем тождество

$$(t^k - \tau^k)^{2q_k-1} = \sum_{l=0}^{q_k-1} \frac{(q_k-1)!}{(q_k-1-l)!} ((t_{i_{k-1}}^k - \tau^k)^{q_k-1-l} P_l^k(h_{i_{k-1}}^k, t_{i_{k-1}}^k - \tau^k) + (-1)^l (t_{i_k}^k - \tau^k)^{q_k-1-l} P_l^k(h_{i_k}^k, t_{i_k}^k - \tau^k))$$

с помощью которого находим, что

$$K_{2q_k}^k(t^k, \tau^k) = \begin{cases} \sum_{l=0}^{q_k-1} \frac{(-1)^{2q_k-l-1}}{(2q_k-l-1)!} (\tau^k - t_{i_{k-1}}^k)^{2q_k-l-1} P_l^k(h_{i_{k-1}}^k, t_{i_{k-1}}^k - \tau^k), & t_{i_{k-1}}^k \leq \tau^k < t^k, \\ \sum_{l=0}^{q_k-1} \frac{(-1)^l}{(2q_k-l-1)!} (t_{i_k}^k - \tau^k)^{2q_k-l-1} P_l^k(h_{i_k}^k, t_{i_k}^k - \tau^k), & t^k < \tau^k \leq t_{i_k}^k. \end{cases} \quad (56)$$

Для функции (56) известно (см. например [5]):

$$1) \operatorname{sgn} K_{2q_k}^k(t^k, \tau^k) = (-1)^{q_k} \quad t_{i_{k-1}}^k < \tau^k < t_{i_k}^k,$$

$$2) \int_{t_{i_{k-1}}^k}^{t_{i_k}^k} |K_{2q_k}^k(t^k, \tau^k)| d\tau^k = (-1)^{q_k} \frac{(t^k - t_{i_{k-1}}^k)^{q_k} (t_{i_k}^k - t^k)^{q_k}}{(2q_k)!}.$$

Ввиду (54) отсюда следует, что

$$\|K_{2q_k}^k(t^k, \cdot)\|_1 = \frac{(t^k - t_{i_{k-1}}^k)^{q_k} (t_{i_k}^k - t^k)^{q_k}}{(2q_k)!}, \quad k=1, 2. \quad (57)$$

С учетом этого вычислим теперь $\|K_{2q_1, 2q_2}^k(t^1, t^2, \cdot, \cdot)\|_1$. Если $\tau^1 \in [t_{i_{k-1}}^1, t_{i_k}^1]$ или $\tau^2 \in [t_{i_{k-1}}^2, t_{i_k}^2]$, то имеем

$$K_{2q_1, 2q_2}^k(t^1, t^2, \tau^1, \tau^2) = \begin{cases} -K_{2q_1}^1(t^1, \tau^1) K_{2q_2}^2(t^2, \tau^2), & \tau^1 > t_{i_{k-1}}^1, \tau^2 > t_{i_k}^2, \\ K_{2q_1}^1(t^1, \tau^1) ((t^2 - \tau^2)^{2q_2-1} - K_{2q_2}^2(t^2, \tau^2)), & \tau^1 > t_{i_{k-1}}^1, \tau^2 \leq t_{i_k}^2, \\ K_{2q_2}^2(t^2, \tau^2) ((t^1 - \tau^1)^{2q_1-1} - K_{2q_1}^1(t^1, \tau^1)), & \tau^1 \leq t_{i_{k-1}}^1, \tau^2 > t_{i_k}^2, \\ (t^2 - \tau^2)^{2q_2-1} K_{2q_1}^1(t^1, \tau^1) + (t^1 - \tau^1)^{2q_1-1} K_{2q_2}^2(t^2, \tau^2) - \\ - K_{2q_1}^1(t^1, \tau^1) K_{2q_2}^2(t^2, \tau^2), & \tau^1 \leq t_{i_{k-1}}^1, \tau^2 \leq t_{i_k}^2. \end{cases}$$

Так как в рассматриваемом случае $\operatorname{sgn} K_{2q}^k(t^k, \tau^k) \leq 0$, то, принимая во внимание (54), получаем:

$$|K_{2q_1, 2q_2}(t^1, t^2, \tau^1, \tau^2)| = \begin{cases} |K_{2q_1}^1(t^1, \tau^1)| |K_{2q_2}^2(t^2, \tau^2)|, & \tau^1 > t^1, \tau^2 > t^2, \\ |K_{2q_1}^1(t^1, \tau^1)| |K_{2q_2}^1(t^2, \tau^1)| + |K_{2q_1}^1(t^1, \tau^1)| (t^2 - \tau^2)^{2q_2-1}, & \tau^1 > t^1, \tau^2 \leq t^2, \\ |K_{2q_1}^1(t^1, \tau^1)| |K_{2q_2}^2(t^2, \tau^2)| + |K_{2q_2}^2(t^2, \tau^2)| (t^1 - \tau^1)^{2q_1-1}, & \tau^1 \leq t^1, \tau^2 > t^2, \\ |K_{2q_1}^1(t^1, \tau^1)| |K_{2q_2}^2(t^2, \tau^2)| + |K_{2q_1}^1(t^1, \tau^1)| (t^2 - \tau^2)^{2q_2-1} \\ \quad + |K_{2q_2}^2(t^2, \tau^2)| (t^1 - \tau^1)^{2q_1-1}, & \tau^1 \leq t^1, \tau^2 \leq t^2, \\ |K_{2q_1}^1(t^1, \tau^1)| (t^2 - \tau^2)^{2q_2-1}, & a^2 \leq \tau^2 \leq t_{i-1}^2, t_{i-1}^1 = \tau^1 \leq t_i^1, \\ |K_{2q_2}^2(t^2, \tau^2)| (t^1 - \tau^1)^{2q_1-1}, & a^1 \leq \tau^1 \leq t_{i-1}^1, t_{i-1}^2 \leq \tau^2 \leq t_i^2, \\ 0 & \text{во всех остальных точках.} \end{cases}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int_E |K_{2q_1, 2q_2}(t^1, t^2, \tau^1, \tau^2)| d\tau^1 d\tau^2 &= \int_{t_{i-1}^1}^{t_i^1} \int_{t_{i-1}^2}^{t_i^2} |K_{2q_1}^1(t^1, \tau^1)| |K_{2q_2}^2(t^2, \tau^2)| d\tau^1 d\tau^2 + \\ &+ \int_{t_{i-1}^1}^{t_i^1} \int_{a^2}^{t_{i-1}^2} |K_{2q_1}^1(t^1, \tau^1)| (t^2 - \tau^2)^{2q_2-1} d\tau^1 d\tau^2 + \int_{a^1}^{t_{i-1}^1} \int_{t_{i-1}^2}^{t_i^2} |K_{2q_2}^2(t^2, \tau^2)| (t^1 - \tau^1)^{2q_1-1} d\tau^1 d\tau^2 \\ &= |K_{2q_1}^1(t^1, \cdot)|_1 |K_{2q_2}^2(t^2, \cdot)|_1 + |K_{2q_1}^1(t^1, \cdot)|_1 (t^2 - a^2)^{2q_2} + |K_{2q_2}^2(t^2, \cdot)|_1 (t^1 - a^1)^{2q_1}, \end{aligned}$$

откуда, учитывая (57), имеем:

$$\begin{aligned} \|K_{2q_1, 2q_2}(t^1, t^2, \cdot, \cdot)\|_1 &= \frac{1}{(2q_1)!(2q_2)!} (t_i^1 - t_{i-1}^1)^{q_1} (t^1 - t_{i-1}^1)^{q_1} (t_{i-1}^2 - t^2)^{q_2} (t^2 - t_{i-1}^2)^{q_2} + \\ &+ \frac{1}{(2q_1)!} (t_i^1 - t^1)^{q_1} (t^1 - t_{i-1}^1)^{q_1} (t^2 - a^2)^{2q_2} + \frac{1}{(2q_2)!} (t^2 - t_{i-1}^2)^{q_2} (t_{i-1}^2 - t^2)^{q_2} (t^1 - a^1)^{2q_1}. \end{aligned} \quad (58)$$

Подставляя (57) - (58) в (53), получаем окончательный результат.

Следствие 9. При нечетных q_1 и q_2 в случае $M_{t_i}^1 = M_{t_i}^2 = M^0, t_i = 0, 2q_i - 1, i = 1, 2$, имеет место равенство

$$\begin{aligned} \sup_{f \in W_{\infty}^{2q_1, 2q_2}} \|f - G(f)\|_{\infty} &= \frac{h^1 h^2}{(2q_1)!(2q_2)!} \left(\sum_{l=0}^{2q_1-1} \frac{1}{l!} M_l^1 (b^1 - a^1)^l + \right. \\ &\left. + \sum_{l=0}^{2q_2-1} \frac{1}{l!} M_l^2 (b^2 - a^2)^l + M^0 \right). \end{aligned}$$

Библиографический список

1. Авакян А.М. Точные оценки погрешности при приближении локальными двумерными сплайнами// Моногенные функции и отображения. - Киев, 1982.- С.122-128.
2. Авакян А.М. О приближении функций двух переменных линейными методами// Укр.мат.журн. - 1983. - Т.35, N 4. - С.409-414.
3. Авакян А.М. Приближение сплайнами на классах дифференцируемых функций: Автореферат дисс. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1983.
4. Асмусс С.В. Оценка ошибки сплайн-интерполяции// Топологические структуры и их отображения. - Рига, 1987. - С. 15-26.
5. Великин В.А. Точные значения приближения эрмитовыми сплайнами на классах дифференцируемых функций// Изв. АН СССР, Сер.матем. - 1973. - Т.37, N 1. - С. 165-185.
6. Корнейчук Н.П., Переверзев С.В. К вопросу о приближении функций двух переменных операторами, построенными на базе одномерных операторов// Теория функций и топология. - Киев, 1983. - С. 43-49.
7. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. - М.: Наука, 1977.
8. Переверзев С.В. Точные значения приближения эрмитовыми сплайнами на одном классе функций двух переменных// Укр. мат.журн. - 1979. - Т.31, N 5. - С. 510-516.
9. Переверзев С.В. Точная оценка приближения эрмитовыми сплайнами на одном классе дифференцируемых функций двух переменных// Изв.вузов Математика. - 1981. - N 12. - С. 58-66.
10. Хижка А.А. Приближение локальными сплайнами функций двух переменных на специальной сетке// Некоторые вопросы анализа и дифференциальной топологии. - Киев, 1988. - С. 103-110.
11. Birkhoff G., Schultz M.N., Varga R.S. Piecewise Hermite interpolation on one and two variables with applications to partial differential equations// Numer.Math. - 1968. V.11, Nr.3. - P.232-256.

S. Asmuss. The exact error bounds of bivariate splines approximation.

Summary. The linear approximation of bivariate functions by splines of tensor product is considered in this paper. An integral representation of the error is obtained and one theorem is proved, that allowed to get estimates, what can't be improved on sufficiently wide class of functions. Such estimates contain the kernels of the error integral representation. In case of approximation by Hermite and piecewise-constant splines results with exact number constants are obtained. AMS Subject classification 65D07.

Кафедра математического анализа
Латвийский Университет
бульв. Райзиса, 19
226098 г. Рига

**ОБ ОДНОМ ОПЕРАТОРНОМ МЕТОДЕ
ОСНОВАННОМ НА ПРЕОБРАЗОВАНИИ СТУПЕНЧАТЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ
С ПОМОЩЬЮ СПЛАЙНОВ ДЛЯ ЛОКАЛЬНЫХ СРЕДНИХ**

С. Асмусс

Аннотация. Параи местные сплайны для локальных средних используются для обоснования численной схемы преобразования ступенчатых изображений функций. На основе полученных для ступенчатых изображений операторных соотношений построен операторный метод решения задачи Коши для линейного дифференциального уравнения, который применим и в том случае, когда коэффициенты являются лишь суммируемыми функциями. Установлены оценки уклонения приближенного решения от точного. УДК 517.5, 519.6.

1. Введение

Пусть на отрезке $[a, b]$ задано равномерное разбиение

$$\Delta_n := \{t_i = a + ih \mid i = \overline{0, n}, h = \frac{b-a}{n}\}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Ступенчатым изображением [2] интегрируемой на $[a, b]$ функции f называется вектор $\mathbb{Z}(f) \in \mathbb{R}^n$ с компонентами

$$\mathbb{Z}_i(f) := \frac{1}{h} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t) dt, \quad i = \overline{1, n}, \quad (2)$$

определяющими интегральные средние функции f на частичных интервалах разбиения. В прикладных дисциплинах, в частности, в теории связи, этот вектор называют также импульсным спектром, так как его компоненты являются коэффициентами в разложении Фурье по системе функций

$$\delta_i(t) := \begin{cases} h^{-1}, & t \in [t_{i-1}, t_i] \\ 0, & t \in [a, b] \setminus [t_{i-1}, t_i] \end{cases}, \quad i = \overline{1, n},$$

называемых импульсами.

Представляют интерес задачи, связанные с определением импульсной реакции системы на внешнее воздействие, которые сводятся к исследованию зависимости импульсного спектра решения дифференциального уравнения, описывающего режим работы системы, от импульсного спектра его правой части. Для линейного дифференциального уравнения

$$x^{(m)}(t) + \sum_{j=1}^m a_j(t) x^{(j)}(t) = y(t), \quad t \in [a, b], \quad (3)$$

с начальными условиями

$$x^{(j)}(a) = \alpha_j, \quad j = \overline{0, m-1}, \quad (4)$$

эта задача может быть решена построением определяющей матрицы G_{Δ_n} :

$$\mathbb{Z}(x) = G_{\Delta_n} \mathbb{Z}(y) + \Delta_n(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}). \quad (5)$$

Определяющая матрица является аналогом коэффициента передачи, умножение

на который в случае линейных систем с постоянными коэффициентами

$$r_j(t) = a_j \in \mathbb{R}, \quad j = \overline{1, m}, \quad (6)$$

позволяет получать частотный спектр реакции системы из частотного спектра воздействия. Если через f^* обозначить изображение функции f при преобразовании Лапласа, то коэффициент передачи в задаче (3) - (4) - это функция $K: x^*(p) = l(p) y^*(p) + l(p, x_0, \dots, x_{m-1})$. В случае (6) она эффективно строится с помощью операционного исчисления по Лапласу. Однако такое решение задачи дает результат лишь в области изображений, т.е. функций комплексной переменной, тогда как ставится она для оригиналов, т.е. функций времени. Отыскание же оригинала x по его изображению x^* относится к числу некорректных задач, и в области создания теории ее приближенного решения в настоящее время делаются лишь первые шаги. В случае же дифференциального уравнения с переменными коэффициентами операционное исчисление, основанное на преобразовании Лапласа, вообще малоприспособлено для исследования.

Г.Е.Пуковым, Г.Я.Береговенко и С.Е.Саухом [2-5] разработан операторный метод, позволяющий осуществить единый подход к анализу линейных с постоянными и переменными параметрами, а также нелинейных систем. По аналогии с операционным исчислением по Лапласу, при котором дифференцированию и интегрированию оригиналов f соответствуют операции умножения и деления изображений f^* на комплексные числа, благодаря чему задача (3) - (4) в случае (6) сводится в классе изображений к алгебраическому уравнению, в [2] строится операционное исчисление на основе ступенчатых изображений. При этом оригиналу f сопоставляется его ступенчатое изображение $\Delta(f)$, а операциям дифференцирования и интегрирования оригиналов - операциям умножения их ступенчатых изображений на матрицы Δ и Π (дифференцирования и интегрирования соответственно):

$$a) \quad \Delta(f') = \Delta \Delta(f), \quad б) \quad \Delta \left(\int_a^t f(\tau) d\tau \right) = \Pi \Delta(f). \quad (7)$$

Ясно, что не существует таких матриц Δ и Π , при которых равенства (7) выполнялись бы точно на достаточно широком классе функций. Поэтому может идти речь только о приближенном операционном исчислении (условимся в соотношениях типа (7) в дальнейшем использовать знак " \approx " приближенного равенства), которое полностью определяется заданием матриц Δ и Π . В [2] их построение основано на полиномиальной интерполяции функции по ее значениям в узлах разбиения Δ_n . В настоящей статье для этой цели применяются сплайны - причем не традиционные, а так называемые сплайны для локальных средних (см., например, [1]), особенностью которых является то, что они строятся по информации о средних значениях (2) приближаемой функции.

Сплайны уже проявили свои прекрасные свойства в численных методах решения дифференциальных уравнений. Но в численных методах отсутствует возможность описания режима работы системы независимо от внешнего воздействия, что приводит к необходимости повторения всей процедуры вычисления при изменении численных значений начальных условий или внешнего воздействия. Такую возможность дает предложенный операторный метод.

2. Операторные соотношения для ступенчатых изображений, основанные на сплайнах для локальных средних

Пусть S обозначает некоторое пространство сплайн-функций $s: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, однозначно определяемых интерполяционными вектором $\tilde{z}(s) = (\tilde{z}_1(s), \dots, \tilde{z}_l(s))$. Пусть \tilde{S} - совокупность функций, получающаяся из пространства S присоединением к нему функций вида

$$v_s(t) := \frac{1}{2}(s'(t_0) + s'(t_1)) \text{ и } \mu_s t := \int_a^t s(\tau) d\tau, \quad t \in [a, b], \quad s \in S.$$

Если каждой функции v_s , где $s \in S$, сопоставлены l чисел $\tilde{z}_1(v_s), \dots, \tilde{z}_l(v_s)$ так, что соответствие $\tilde{z}(s) \rightarrow \tilde{z}(v_s)$ линейно, то возникает линейный оператор

$$[\tilde{A}]: \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^l \quad (\forall s \in S \quad [\tilde{A}] \tilde{z}(s) = \tilde{z}(v_s)).$$

Аналогично, если каждой функции μ_s , где $s \in S$, сопоставлены l чисел $\tilde{z}_1(\mu_s), \dots, \tilde{z}_l(\mu_s)$ так, что соответствие $\tilde{z}(s) \rightarrow \tilde{z}(\mu_s)$ линейно, то возникает линейный оператор

$$[\tilde{H}]: \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^l \quad (\forall s \in S \quad [\tilde{H}] \tilde{z}(s) = \tilde{z}(\mu_s)).$$

Операторы $[\tilde{A}]$ и $[\tilde{H}]$ (матрицы \tilde{A} и \tilde{H}) позволяют построить операционное исчисление, при котором функции f ставятся в соответствие ее изображение $\tilde{z}(f)$, а оригинал восстанавливается по изображению приближенно путем интерполяции сплайнами пространства S .

В качестве S мы возьмем пространство сплайнов степени l дефекта 1 относительно разбиения $\Delta_n(1)$, которое состоит из функций s , обладающих свойствами:

- s - полином второй степени на каждой из интервалов $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \dots, n$, (8)
- s' - непрерывна на $[a, b]$.

и рассмотрим параболические сплайны для локальных средних, т.е. элементы пространства S , которые используются для интерполяции функции по вектору интегральных средних (2). Интерполяционный для функции f сплайн $s(f) \in S$ однозначно определяется условиями

$$\tilde{z}(s(f)) = \tilde{z}(f), \quad s(f, a) = f(a), \quad s'(f, a) = f'(a), \quad (9)$$

а поэтому под изображением функции f мы будем понимать $(l+2)$ -мерный вектор $\tilde{z}(f)$ с компонентами

$$\tilde{z}_i(f) = \tilde{z}_i(f), \quad i = \overline{1, n}, \quad \tilde{z}_{n+1}(f) = f(a), \quad \tilde{z}_{n+2}(f) = f'(a).$$

Следуя описанной схеме, установим связь между $\tilde{z}(f')$ и $\tilde{z}(f)$

$$\tilde{z}(f') \approx \tilde{A} \tilde{z}(f), \quad (10)$$

требовая, чтобы выполнялось соотношение

$$\tilde{A} \tilde{z}(f) = \tilde{z}(s(f)). \quad (11)$$

Сразу заметим, что

$$\tilde{z}_{n+1}(s'(f)) = \tilde{z}_{n+2}(f), \quad \tilde{z}_{n+2}(s(f)) = \frac{6}{h^2}(\tilde{z}_{n+1}(f) - \tilde{z}_{n+1}(f)) - \frac{1}{2}h \tilde{z}_{n+2}(f). \quad (12)$$

А далее воспользуемся формулой Ньютона-Лейбница, согласно которой

$$\tilde{z}_i(s(f)) = \frac{1}{h} \int_{t_{i-1}}^{t_i} s(f, t) dt = \frac{1}{h} (s(f, t_i) - s(f, t_{i-1})), \quad i = \overline{1, n}. \quad (13)$$

Чтобы выразить $\tilde{z}_i(s(f)), i = \overline{1, n}$, через $\tilde{z}(f)$, представим сплайн $s(f)$ в виде

$$s(f) = \sum_{l=1}^n \tilde{z}_l(f) s_l, \quad (14)$$

где сплайны s_1, s_2, \dots, s_{n+2} образуют базис пространства S и определяются интерполяционными условиями

$$\tilde{z}_k(s_l) = \delta_{k,l}, \quad k = \overline{1, n+2}, \quad l = \overline{1, n+2},$$

где $\delta_{k,l}$ - символ Кронекера. Найдем значения базисных сплайнов в узлах разбиения Δ_n . Пусть известны $s_l(t_{i-1}), s_l'(t_{i-1})$ при некотором $i = \overline{1, n}$. Тогда

$$s_l(t_i) = 3\tilde{z}_i(s_l) - 2s_l(t_{i-1}) - \frac{1}{3}s_l'(t_{i-1})h, \quad s_l'(t_i)$$

Поэтому при $i \geq l$

$$s_l(t_i) = a_{i-l}, \quad s_l'(t_i)h = b_{i-l},$$

где

$$a_0 = 3, a_k = -2a_{k-1} - \frac{1}{2}b_{k-1}, \quad k \geq 1, \quad b_0 = 6, b_k = -6a_{k-1} - 2b_{k-1}, \quad k \geq 1.$$

Нетрудно установить, что последовательности $\{a_k\}, \{b_k\}$ могут быть заданы рекуррентным соотношением

$$a_{k+1} = -4a_k - a_{k-1}, \quad b_{k+1} = -4b_k - b_{k-1}, \quad k \geq 1,$$

при начальных условиях

$$a_0 = 3, a_1 = -9, \quad b_0 = 6, b_1 = -30.$$

Следовательно,

$$s_l(t_i) = \begin{cases} 0, & i = \overline{0, l-1}, \\ a_{i-l}, & i = \overline{l, n}, \end{cases} \quad l = \overline{1, n}. \quad (15)$$

Аналогично можно обнаружить, что

$$s_{n+1}(t_i) = c_i, \quad s_{n+2}(t_i) = d_i, \quad i = \overline{0, n}, \quad (16)$$

где $c_0 = 1, c_1 = -2, c_k = -4c_{k-1} - c_{k-2}, k \geq 2,$

$$d_0 = 0, d_1 = -\frac{1}{2}, d_k = -4d_{k-1} - d_{k-2}, \quad k \geq 2.$$

Подставив (15) - (16) в (14), получим

$$s(f, t_i) = \sum_{l=1}^n \tilde{z}_l(f) a_{i-l} + \tilde{z}_{n+1}(f) c_i + \tilde{z}_{n+2}(f) d_i, \quad i = \overline{0, n}.$$

Следовательно, (см. (13))

$$\tilde{z}_i(s'(f)) = \frac{1}{h} \left(\sum_{l=1}^i \tilde{z}_l(f) a_{i-l} - \sum_{l=1}^{i-1} \tilde{z}_l(f) a_{i-l-1} + \tilde{z}_{n+1}(f) (c_i - c_{i-1}) + \tilde{z}_{n+2}(f) (d_i - d_{i-1}) \right),$$

откуда в результате несложных преобразований будем иметь

$$\tilde{z}_i(s'(f)) = \frac{1}{h} \left(\sum_{l=1}^i \tilde{z}_l(f) u_{i-l} + \tilde{z}_{n+1}(f) v_i + \tilde{z}_{n+2}(f) w_i \right), \quad i = \overline{1, n}, \quad (17)$$

$$u_0 = 3, u_1 = -12, u_k = -4u_{k-1} - u_{k-2}, \quad k \geq 2, \quad v_0 = 1, v_1 = -3, v_k = -4v_{k-1} - v_{k-2}, \quad k \geq 2,$$

$$w_0 = 0, w_1 = -\frac{1}{2}, w_k = -4w_{k-1} - w_{k-2}, \quad k \geq 2.$$

Теперь, учитывая (12) и (17), на основании (11) зададим мат. ду \tilde{A} , полагая

$$\tilde{A} = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} u_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & v_1 & w_1 h \\ u_1 & u_0 & 0 & \dots & 0 & v_2 & w_2 h \\ u_2 & u_1 & u_0 & \dots & 0 & v_3 & w_3 h \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n-1} & u_{n-2} & u_{n-3} & \dots & u_0 & v_n & w_n h \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & h \\ 6h^{-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & -6h^{-1} & -3 \end{pmatrix}.$$

Установим теперь связь между изображениями интеграла и подынтегральной функции. Пусть

$$g(t) = g(a) + \int_a^t f(x) dx, \quad t \in [a, b], \quad (18)$$

где f - некоторая функция из $C[a, b]$. Перейдем (18) в эквивалентной форме $g'(t) = f(t)$, $t \in [a, b]$, откуда

$$\tilde{A} \tilde{z}(g) \approx \tilde{z}(f). \quad (19)$$

Мы хотим задать матрицу интегрирования \tilde{V} так, чтобы из (18) следовало

$$\tilde{z}(g) \approx \tilde{z}(g(a)) + \tilde{V} \tilde{z}(f). \quad (20)$$

Ясно, что ее определение должно быть согласовано с определением матрицы \tilde{A} . Принимая во внимание (19) - (20), потребуем, чтобы соотношение

$$\tilde{z}(g) \approx \tilde{z}(g(a)) + \tilde{V} \tilde{A} \tilde{z}(g) \quad (21)$$

было точно на классе рассматриваемых сплайнов.

Пусть S - параболический сплайн дефекта 1. Согласно (8), его производная S' есть непрерывная кусочно-линейная функция. Следовательно, ее поведение полностью определяется ступенчатым изображением $\tilde{z}(S')$ и значением $S'(a)$. Так, при $t \in [t_{i-1}, t_i]$, $i = \overline{1, n}$,

$$S(t) = (S'(a)(t-a))^{i-1} + 2 \sum_{k=1}^{i-1} (-1)^{i-k} \tilde{z}_k(S') \left(\frac{t-t}{h} - \frac{t-t_{i-1}}{h} \right) + 2 \tilde{z}_i(S') \frac{t-t_{i-1}}{h}. \quad (22)$$

Воспользовавшись (22), выразим S через $S(a)$, $S'(a)$, $\tilde{z}(S')$. Из равенства $\tilde{z}_i(S') = h^{-1}(S(t_i) - S(t_{i-1}))$, $i = \overline{1, n}$, вытекает, что

$$S(t_i) = S(a) + h \sum_{k=1}^i \tilde{z}_k(S'), \quad i = \overline{0, n}. \quad (23)$$

Поэтому при $t \in [t_{i-1}, t_i]$, $i = \overline{1, n}$, будем иметь

$$\begin{aligned} S(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^t S'(x) dx &= S(a) + h \left(\sum_{k=1}^{i-1} \tilde{z}_k(S') \right) + (t-a)^{i-1} S'(a) + \\ &+ 2 \sum_{k=1}^{i-1} (-1)^{i-k} \tilde{z}_k(S') \frac{t-t_{i-1}}{h} + (\tilde{z}_i(S') - (-1)^{i-1} S'(a) - 2 \sum_{k=1}^{i-1} (-1)^{i-k} \tilde{z}_k(S')) \frac{(t-t_{i-1})^2}{2}. \end{aligned} \quad (24)$$

Теперь нетрудно в числитель

$$\tilde{z}_i(S') = S(a) + \frac{1}{6} h (-1)^{i-1} S'(a) + \frac{1}{3} h \left(\sum_{k=1}^{i-1} (3 + (-1)^{i-k}) \tilde{z}_k(S') + \tilde{z}_i(S') \right), \quad i = \overline{1, n}.$$

Чтобы обеспечить предъявленные к \tilde{V} требования, следует положить

$$\tilde{U} = \frac{1}{3}h \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0.5 \\ 4 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -0.5 \\ 2 & 4 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0.5 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 3+(-1)^n & 3+(-1)^{n-1} & 3+(-1)^{n-2} & \dots & 1 & 0 & (-1)^{n-1} 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 3h^4 & 0 \end{pmatrix}$$

Если мы оперируем с функциями, для которых их значения и значения их производных в точке a известны (как это имеет место при решении задачи Коши для дифференциального уравнения), то интерес представляют лишь первые компоненты изображений (т.е. ступенчатые изображения) производной и интеграла, при вычислении которых используются все $n+1$ компоненты изображения (т.е. \tilde{x} — изображения исходной функции). Линейным операторам дифференцирования и интегрирования в этом случае соответствуют матрицы размерности $n \times (n+1)$. Для удобства и здесь целесообразно перейти к квадратным матрицам размерности $n \times n$, отражающим зависимость между ступенчатыми изображениями, записав остальную информацию в векторной форме. Так из операторных соотношений (10) и (20) для \tilde{x} изображений вытекают операторные соотношения для ступенчатых изображений

$$a) \tilde{x}(f') \Delta \tilde{x}(f) + f(a)\omega'_\Delta + f'(a)\omega'_\Delta, \quad b) \tilde{x}\left(\int_a^t f(\tau) d\tau\right) \approx U\tilde{x}(f) + f(a)\omega_U, \quad (25)$$

$$U = \frac{1}{3}h \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 4 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 3+(-1)^n & 3+(-1)^{n-1} & 3+(-1)^{n-2} & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad \omega_U = \frac{1}{6}h \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ \dots \\ (-1)^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\Delta = h \begin{pmatrix} u_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ u_1 & u_0 & 0 & \dots & 0 \\ u_2 & u_1 & u_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n-1} & u_{n-2} & u_{n-3} & \dots & u_0 \end{pmatrix}, \quad \omega'_\Delta = \begin{pmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \\ \omega'_3 \\ \dots \\ \omega'_n \end{pmatrix}, \quad \omega'_\Delta = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \dots \\ \sigma_n \end{pmatrix}$$

Как и в случаях, рассмотренных в [2], матрица интегрирования U является нижней треугольной и определяется первым своим столбцом, тогда как остальные столбцы получаются сдвигом предыдущего на один элемент вниз и заполнением "вакантных" мест нулями. Перемножая матрицы интегрирования (вычисляя матрицы $U^q - U U^{q-1}$ интегрирования q -ого порядка, $q = 2, 3, \dots$), мы каждый раз в результате будем получать матрицу, обладающую этим свойством. В дальнейшем будет видно, что это обстоятельство существенно облегчает решение дифференциальных уравнений. Сейчас же только отметим, что благодаря этому свойству хранение информации о самой матрице интегрирования и ее степенях не требует большого объема памяти.

3. Задача Коши для линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим задачу (3) - (4) в случае (6). Ее приближенное решение будем искать в виде параболического сплайна для локальных средних. С этой целью, предполагая, что функция y интегрируема на $[0, b]$, перейдем в (3) к ступичатым изображениям, интегрируя его по частичным интервалам $[t_{j-1}, t_j] = [\tau_j, \tau_{j+1}]$, разбиения Δ_n

$$z(x^{(m)}) + \sum_{j=1}^m a_j z(x^{(m-j)}) = z(y). \quad (26)$$

С помощью операторного соотношения (25а) отсюда получаем (здесь $c_0 = 1$)

$$\sum_{j=0}^{m-1} a_j (\Delta_j^{m-j} z(x)) + \sum_{l=0}^{m-j-1} \Delta_l^{m-j-l-1} (x) \omega_l + x^{(m-j-2)} (x) \omega_{l+1} \eta_{m-j} z(x) \approx z(y). \quad (27)$$

Принимая во внимание, что согласно (25)

$$U = \Delta_1^{-1}, \quad U \omega_{\Delta}^{-1} = -\omega_{\Delta}, \quad U \omega_{\Delta}^{-1} - \omega_{\Delta}^{-1} = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n, \quad (28)$$

и умножая соотношение (27) на матрицу U^m , будем иметь

$$\sum_{j=0}^{m-1} a_j (U^j z(x)) - \sum_{l=0}^{m-j-1} U^{m-l-1} (x^{(m-j-2)} (x) \omega_l + x^{(m-j-2)} (x) \omega_{l+1} \eta_{m-j}) \approx U^m z(y),$$

откуда

$$\sum_{j=0}^{m-1} a_j U^j z(x) \approx U^m z(y) + \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{m-j-1} a_j U^{j+l} (x^{(l)} (x) \omega_l + x^{(l+1)} (x) \omega_{l+1} \eta_{m-j}).$$

Под приближенным решением рассматриваемой задачи m -й будем понимать интерполяционный сплайн S , построенный по вектору интегральных средних $z(S)$, удовлетворяющему соотношению

$$\sum_{j=0}^{m-1} a_j U^j z(S) = U^m z(y) + \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{m-j-1} a_j U^{j+l} (x_l \omega_l + x_{l+1} \omega_{l+1} \eta_{m-j}), \quad (29)$$

и по информации о значении точного решения и его первой производной в точке α

$$S(\alpha) = x_0, \quad S'(\alpha) = x_1. \quad (30)$$

Для его построения надо найти матрицу V^{-1} , обратную матрице

$$V := \sum_{j=0}^{m-1} a_j U^j. \quad (31)$$

Матрица V является нижней треугольной, а постольку матрицы U^j можно задавать лишь первым столбцом, то так же можно образовывать и матрицу V . Обозначим через v_1, v_2, \dots, v_n элементы ее первого столбца. Так как диагональные элементы матриц U^j равны $\delta^j h^j$ соответственно, то

$$\sum_{j=0}^{m-1} a_j \delta^j h^j = 1 + \sum_{j=1}^{m-1} a_j \delta^j h^j, \quad (32)$$

$$v_1(n) := 1 + \sum_{j=1}^{m-1} a_j \delta^j h^j \neq 0 \quad (33)$$

матрица V обратима. Очевидно, что обратная матрица V^{-1} также является нижней треугольной и определяется своим первым столбцом, элементы которого (обозначим их $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \dots, \tilde{v}_n$) вычисляются по формулам

$$\tilde{v}_1 = \tilde{v}_1^{-1}, \quad \tilde{v}_i = -\tilde{v}_1 \sum_{l=1}^{i-1} \tilde{v}_l v_{i-l+1}, \quad i = 2, \dots, n.$$

При помощи матрицы V^{-1} на основе (29) - (30) можно вычислить

$$z(s) = V^{-1} U^m z(y) + V^{-1} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{m-j-1}{j!} a_j U^{j+1} (x_2 \omega + x_{l+1} \omega_H). \quad (34)$$

Матрица $G_{\Delta_n} = V^{-1} U^m$ является определяющей для рассматриваемой задачи.

Пусть $L_p[a, b]$, $1 \leq p \leq \infty$, — как обычно, пространство интегрируемых по Лебегу в степени p (при $p = \infty$ — существенно ограниченных) на $[a, b]$ функций с нормой

$$\|f\|_{L_p[a, b]} = \|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|, & p = \infty, \end{cases}$$

$L_p^{\omega}[a, b]$, $1 \leq p \leq \infty$, $\omega = 1, 2, \dots$, — класс функций $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, у которых производная $f^{(\omega-1)}$ абсолютно непрерывна, а $f^{(\omega)} \in L_p[a, b]$,
 $C_q L_{\infty}^{\omega}[a, b]$, $\omega = 1, 2, \dots$, $q = 1, 2, \dots$, — класс функций $f \in L_{\infty}^{\omega}[a, b]$, у которых производная $f^{(\omega)}$ имеет не более q точек разрыва. Для $f \in C_q L_{\infty}^{\omega}[a, b]$ введем подобную модулю непрерывности характеристику производной $f^{(\omega)}$

$$\tilde{\omega}(f^{(\omega)}, h) = \sup \{ |f^{(\omega)}(t) - f^{(\omega)}(t')| \mid t, t' \in [a, b], 0 \leq t - t' \leq h, f^{(\omega)} \in C_q L_{\infty}^{\omega}[a, b] \}.$$

В пространстве \mathbb{R}^n мы будем рассматривать норму $\|z\| = \max_{i=1, \dots, n} |z_i|$ для $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$. Согласованной с ней нормой в пространстве матриц размерности $n \times n$ является норма

$$\|M\| = \max_{i=1, \dots, n} \left\{ \sum_{j=1}^n |m_{ij}| \mid i=1, \dots, n \right\} \text{ для } M = (m_{ij})_{i=1, \dots, n, j=1, \dots, n}.$$

Относительно предложенной вычислительной схемы справедлива

Теорема 1. Пусть задача (3) - (4), (6), однозначно разрешима. Если ее приближенное решение S вычислено при таком h , что выполняется (33), то

$$\|z(x) - z(s)\| \leq \frac{1}{16(h)} \frac{1}{36} h^2 \sum_{l=1}^m \sum_{j=0}^{m-l} |a_l| (b-a)^{j+l} \|x^{(l+j)}\|_{\infty} + (b-a)^{m-1} h(h), \quad (35)$$

где

$$B(h) = \begin{cases} \frac{1}{36} h^2 ((1+\omega_1)(b-a)) \|x^{(m+1)}\|_{\infty} + (b-a) \|x^{(m+2)}\|_{\infty}, & \text{если } x \in L_{\infty}^{m+2}[a, b], \\ \frac{1}{6} (b-a+3h) (h(1+\omega_1)(b-a)) \|x^{(m)}\|_{\infty} + (b-a) \omega(x^{(m)}, h), & \text{если } x \in L_{\infty}^m[a, b], \\ h \left(\frac{1}{6} (b-a+3h) (1+\omega_1)(b-a) + (1+\frac{2}{3}q)(b-a) \right) \|x^{(m)}\|_{\infty} + \\ + \frac{1}{6} (b-a+3h) (b-a) \tilde{\omega}(x^{(m)}, h), & \text{если } x \in C_q L_{\infty}^m[a, b]. \end{cases}$$

Доказательство опирается на следующие 3 леммы и следствия из них.

Лемма 1. Для функции $f \in L^2[a, b]$ оценку величины

$$\varepsilon(f) := z(f) - U z(f') - f(a)\omega - f(b)\omega_H \quad (36)$$

дает неравенство

$$\|\varepsilon(f)\| \leq \frac{1}{36} h^2 (b-a) \|f''\|_{\infty}. \quad (37)$$

Лемма 2. Если $f \in L^1_{\infty}[a, b]$, то

$$\|\varepsilon(f)\| \leq \frac{1}{6} (b-a+3h) \omega(f', h). \quad (38)$$

Лемма 3. Если $f \in C_q^1 \text{ на } [a, b]$, то

$$\| \mathfrak{L}(f) \| \leq h(1 + \frac{2}{3}q) \| f' \|_{\infty} + \frac{1}{6}(b-a-2qh) \tilde{\omega}(f', h). \quad (39)$$

Доказательство леммы 1. По построению матрица U действует так, что

$$U \mathfrak{L}(f') = \mathfrak{L}(\mathcal{G}(f)) - f(a) \omega - f'(a) \omega_1, \quad (40)$$

где $\mathcal{G}(f)$ — сплайн пространства S , удовлетворяющий условиям

$$\mathfrak{L}(\mathcal{G}(f)) = \mathfrak{L}(f'), \quad \mathcal{G}(f, a) = f(a), \quad \mathcal{G}'(f, a) = f'(a).$$

Поэтому

$$\mathfrak{L}(f) = \mathfrak{L}(f) - \mathfrak{L}(\mathcal{G}(f)).$$

Для оценки величины $\mathfrak{L}_i(f) - \mathfrak{L}_i(\mathcal{G}(f))$, $i = \overline{1, n}$, представим ее в интегральной форме. По формуле Ньютона-Лейбница

$$f(t) = f(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^t f'(x) dx, \quad t \in [t_{i-1}, t_i],$$

откуда

$$\mathfrak{L}_i(f) = f(t_{i-1}) + \frac{1}{h} \int_{t_{i-1}}^{t_i} dt \int_{t_{i-1}}^t f'(x) dx = f(t_{i-1}) + \frac{1}{h} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f'(t)(t_i - t) dt. \quad (41)$$

Аналогично

$$\mathfrak{L}_i(\mathcal{G}(f)) = \mathcal{G}(f, t_{i-1}) + \frac{1}{h} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \mathcal{G}'(f, t)(t_i - t) dt. \quad (42)$$

Вычитая (42) из (41) и учитывая, что в силу (40) значения $f(t_{i-1})$ и $\mathcal{G}(f, t_{i-1})$ совпадают, будем иметь

$$\mathfrak{L}_i(f) - \mathfrak{L}_i(\mathcal{G}(f)) = \frac{1}{h} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (f'(t) - \mathcal{G}'(f, t))(t_i - t) dt. \quad (43)$$

Получим интегральное представление $f'(t) - \mathcal{G}'(f, t)$ при $t \in [t_{i-1}, t_i]$.

С этой целью разложим функцию f по формуле Тейлора

$$f(t) = f(a) + f'(a)(t-a) + \frac{1}{2} f''(a)(t-a)^2 + r(f, t), \quad t \in [a, b],$$

а остаточный член запишем в интегральной форме

$$r(f, t) = \int_a^b f'''(\tau) \varphi_2(t, \tau) d\tau, \quad \text{где } \varphi_2(t, \tau) = \begin{cases} (t-\tau)^2, & t \geq \tau, \\ 0, & t < \tau. \end{cases}$$

Так как приближение \mathcal{G} линейно и на функции $f(a) + f'(a)(t-a) + \frac{1}{2} f''(a)(t-a)^2$ не дает погрешности, то

$$\mathcal{G}'(f, t) = r'(f, t) = \mathcal{G}(r(f), t). \quad (44)$$

Учитывая, что $r(f, a) = 0$ и

$$\mathfrak{L}_i(r(f)) = \frac{1}{h} \int_{t_{i-1}}^{t_i} dt \int_a^b f'''(\tau) \varphi_2(t, \tau) d\tau = \int_a^b f'''(\tau) \mathfrak{L}_i(\varphi_2, \tau) d\tau, \quad i = \overline{1, n},$$

с помощью формулы (22) получим:

$$\mathcal{G}'(r(f), t) = 2 \sum_{\tau=i-1}^{i-1} (-1)^{i-\tau} \mathfrak{L}_i(r(f)) \left| \frac{t_i - t}{h} - \frac{t - t_{i-1}}{h} \right) + 2 \mathfrak{L}_i(r(f)) \frac{t - t_{i-1}}{h} =$$

$$= \int_a^b f'''(\tau) \left(2 \sum_{i=1}^{i-1} (-1)^{i-1} z_i(\varphi_i(\cdot, \tau)) \left(\frac{t_i-t}{h} - \frac{t-t_{i-1}}{h} \right) + z_i(\varphi_i(\cdot, \tau)) \frac{t-t_{i-1}}{h} \right) d\tau.$$

Принимая во внимание (44), отсюда получаем

$$f(t) - G(f, t) = \int_a^b f'''(\tau) K_i(t, \tau) d\tau, \quad (45)$$

где

$$K_i(t, \tau) = \varphi_i(t, \tau) - 2 \sum_{i=1}^{i-1} (-1)^{i-1} z_i(\varphi_i(\cdot, \tau)) \left(\frac{t_i-t}{h} - \frac{t-t_{i-1}}{h} \right) + z_i(\varphi_i(\cdot, \tau)) \frac{t-t_{i-1}}{h}.$$

Возвращаясь к равенству (43), будем иметь

$$z_i(f) - z_i(G(f)) = \frac{1}{h} \int_a^b f'''(t) \Phi_i(t) dt,$$

где

$$\Phi_i(t) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} K_i(\tau, t) (t_i - \tau) d\tau, \quad t \in \alpha, \beta_1.$$

Поэтому

$$|z_i(f) - z_i(G(f))| \leq \frac{1}{h} \|f'''\|_{\infty} \|\Phi_i\|_1, \quad (46)$$

и остается подсчитать норму $\|\Phi_i\|_1$. Интегрируя, получаем, что

$$\Phi_i(t) = h^3 (\psi_i(t) - \frac{1}{3h} \sum_{i=1}^{i-1} (-1)^{i-1} z_i(\varphi_i(\cdot, t)) - \frac{1}{3h} z_i(\varphi_i(\cdot, t))),$$

$$\text{где } \psi_i(t) = \begin{cases} \frac{t_i-t}{2h} - \frac{1}{3}, & t < t_{i-1}, \\ \frac{(t_i-t)^3}{6h^3}, & t \in [t_{i-1}, t_i], \\ 0, & t > t_i. \end{cases}$$

Обнаружив, что
а затем вычисляя

$$z_i(\varphi_i(\cdot, t)) = \frac{1}{h} (\varphi_i(t, t_i) - \varphi_i(t, t_{i-1})) = \begin{cases} 0, & t > t_i, \\ \frac{(t_i-t)^2}{2h}, & t \in [t_{i-1}, t_i], \\ \frac{t_i+t_{i-1}-2t}{2}, & t < t_{i-1}, \end{cases}$$

$$\text{найдем } \Phi_i(t) = \begin{cases} \frac{(i-1)k^3 h^3}{6} \left(\frac{t_i-t}{h} \right)^2 - 2((i-k)+1) \frac{t_i-t}{h} + ((i-k)^2 + (i-k)), & t \in [t_{i-1}, t_i], k < i, \\ \frac{h^3}{6} \left(\frac{t_i-t}{h} - 1 \right) \left(\frac{t_i-t}{h} \right)^3, & t \in [t_{i-1}, t_i], \\ 0, & t > t_i. \end{cases}$$

Теперь нетрудно подсчитать

$$\|\Phi_i\|_1 = \sum_{k=1}^i \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\Phi_i(t)| dt = \sum_{k=1}^i \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Phi_i(t) dt \right| = \frac{1}{36} \left((i-1) + \frac{1}{2} \right) h^4.$$

Подставив этот результат в (46), получим неравенство

$$|z_i(f) - z_i(G(f))| \leq \frac{1}{36} h^3 \left(i - \frac{1}{2} \right) \|f'''\|_{\infty},$$

из которого сразу следует окончательная оценка.

Доказательство леммы 2. Воспользуемся полученным в ходе доказательства предыдущей леммы интегральным представлением компоненты

$\mathcal{L}_i(f) - \mathcal{L}_i(G(f)), i = \overline{1, n}$ (43), расписав его в виде суммы двух интегралов

$$\mathcal{L}_i(f) - \mathcal{L}_i(G(f)) = \frac{1}{h} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (f'(t) - \mathcal{L}_i(f'))(t_i - t) dt + \frac{1}{h} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\mathcal{L}_i(f) - G(f, t))(t_i - t) dt, \quad (47)$$

каждый из которых мы будем оценивать в отдельности. Поскольку

$$|f'(t) - \mathcal{L}_i(f')| \leq \frac{1}{h} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |f'(t) - f'(a)| dt \leq \omega(f', h), \quad t \in [t_{i-1}, t_i], \quad (48)$$

то

$$\left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (f'(t) - \mathcal{L}_i(f'))(t_i - t) dt \right| \leq \omega(f', h) \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - t) dt = \frac{1}{2} h^2 \omega(f', h). \quad (49)$$

Для оценки второго интеграла прибегнем к формуле (22), в силу которой

$$\mathcal{L}_i(f) - G(f, t) = \sum_{l=1}^i (-1)^l (\mathcal{L}_l(f') - \mathcal{L}_{l-1}(f')) \left(\frac{t_i - t}{h} - \frac{t - t_{i-1}}{h} \right), \quad t \in [t_{i-1}, t_i], \quad \omega(f') = f''$$

Легко видеть, что

$$|\mathcal{L}_i(f') - \mathcal{L}_i(f')| \leq \frac{1}{h} \int_{t_{i-2}}^{t_{i-1}} |f'(t+h) - f'(t)| dt \leq \omega(f', h), \quad (i = \overline{2, n}), \quad |\mathcal{L}_1(f') - \mathcal{L}_0(f')| \leq \omega(f', h). \quad (50)$$

Принимая это во внимание, в результате интегрирования будем иметь

$$\left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\mathcal{L}_i(f) - G(f, t))(t_i - t) dt \right| \leq \omega(f', h) \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left| \frac{t_i - t}{h} - \frac{t - t_{i-1}}{h} \right| (t_i - t) dt = \frac{1}{6} h^2 \omega(f', h). \quad (51)$$

Неравенства (49) и (51) с учетом (47) доказывают оценку (33).

Доказательство леммы 3 отличается от предыдущего лишь тем, что вместо оценки (48) используется

$$|f'(t) - \mathcal{L}_i(f')| \leq 2 \|f'\|_{\infty}, \quad i = \overline{1, n},$$

и для величины $|\mathcal{L}_i(f') - \mathcal{L}_{i-1}(f')|$ при тех значениях ξ , при которых в интервал $(t_{i-2}, t_i) \cap [a, b]$ попала точка разрыва функции f' (а таких ξ не может быть больше, чем 2ω) оценка (50) заменяется на

$$|\mathcal{L}_i(f') - \mathcal{L}_{i-1}(f')| \leq 2 \|f'\|_{\infty}.$$

Следствие 1 Для функции $f \in L^{\infty}_{\omega^2}[a, b]$ оценку величины

$$\mathcal{E}_j(f) = \mathcal{L}_j(f) - H^j(\mathcal{L}_j(f')) = \sum_{i=0}^{j-1} H^i(f^{(i)})(a) \omega + f^{(j)}(a) \omega_j \quad (52)$$

дает неравенство

$$\|\mathcal{E}_j(f)\| \leq \frac{1}{2^j} h^2 \sum_{i=1}^j (i \omega)^i \|f^{(i)}\|_{\infty}. \quad (53)$$

Доказательство. Методом математической индукции установим, что

$$\mathcal{E}_k(f) = \sum_{i=0}^{k-1} H^i(c_i f^{(i)}), \quad k = 1, 2, \dots, j. \quad (54)$$

Предположим, что при k равенство верно на рассматриваемом классе функций (при $k=1$ это очевидно) и докажем его при $k+1$. С этой целью распишем

$$H^{k+1}(\mathcal{L}_j(f')) = H^{k+1}(H^k(\mathcal{L}_j(f'))) = H^k(\mathcal{L}_j(f')) - \sum_{i=0}^{k-1} H^{i+1}(f^{(i)})(a) \omega + f^{(k+1)}(a) \omega_{k+1} = H \mathcal{E}_k(f').$$

В силу выказанного предположения

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{H}^{k+1} \mathcal{Z}(f^{(k)}) = \mathcal{H} \mathcal{Z}(f') - \sum_{l=1}^k \mathcal{H}^l (f^{(l)}(\alpha) \omega + f^{(l+1)}(\alpha) \omega_1) - \sum_{l=0}^k \mathcal{H}^l \mathcal{E}(f^{(l)}) = \mathcal{Z}(f) - f(\alpha) \omega - f'(\alpha) \omega_1 - \mathcal{E}(f) \\
 & - \sum_{l=1}^k \mathcal{H}^l (f^{(l)}(\alpha) \omega + f^{(l+1)}(\alpha) \omega_1) - \sum_{l=0}^k \mathcal{H}^l \mathcal{E}(f^{(l)}) = \mathcal{Z}(f) - \sum_{l=0}^k \mathcal{H}^l (f^{(l)}(\alpha) \omega + f^{(l+1)}(\alpha) \omega_1) - \sum_{l=0}^k \mathcal{H}^l \mathcal{E}(f^{(l)}).
 \end{aligned}$$

Сравнивая полученное равенство с (52), находим, что $\mathcal{E}_{k+1}(f) = \sum_{l=0}^k \mathcal{H}^l \mathcal{E}(f^{(l)})$.

$$\mathcal{E}_j(f) = \sum_{l=0}^{j-1} \mathcal{H}^l \mathcal{E}(f^{(l)}). \quad (55)$$

Из (55) следует неравенство для нормы

$$\|\mathcal{E}_j(f)\| \leq \sum_{l=0}^{j-1} \|\mathcal{H}^l\| \|\mathcal{E}(f^{(l)})\|$$

Оценим норму матрицы \mathcal{H}

$$\|\mathcal{H}\| = \frac{1}{3} h \left(1 + \frac{1}{2} (3+1) h^2 \right) \leq h n = b-a, \quad (56)$$

и воспользовавшись для оценки $\|\mathcal{E}(f^{(l)})\| [l = \overline{0, j-1}]$, леммой 1, получим (53).

По этой же схеме, применяя на заключительном этапе доказательства вместо леммы 1 лемму 2 или 3, могут быть установлены

Следствие 2. Если $f \in L_{\infty}^1 [a, b]$, то

$$\|\mathcal{E}_j(f)\| \leq \frac{1}{36} h^2 \sum_{l=0}^{j-1} (b-a)^l \|f^{(l+1)}\|_{\infty} + \frac{1}{6} h (b-a + 3h)(b-a) \|f^{(2)}\|_{\infty} + \frac{1}{6} (b-a + 3h)(b-a) \omega(f, h). \quad (57)$$

Следствие 3. Если $f \in C_2 L_{\infty}^1 [a, b]$, то

$$\|\mathcal{E}_j(f)\| \leq \frac{1}{36} h^2 \sum_{l=0}^{j-1} (b-a)^l \|f^{(l+1)}\|_{\infty} + \frac{1}{6} h (4+3q)(b-a) + 3h(b-a) \|f^{(2)}\|_{\infty} + \frac{1}{6} (b-a + 3h)(b-a) \omega(f, h). \quad (58)$$

Доказательство теоремы 1. Умножая векторное равенство (26) на матрицу \mathcal{H}^m , будем иметь

$$\mathcal{H}^m \mathcal{Z}(x^{(m)}) = \sum_{j=1}^m a_j \mathcal{H}^j (\mathcal{H}^{m-j} \mathcal{Z}(x^{(m-j)})) = \mathcal{H}^m \mathcal{Z}(y). \quad (59)$$

Принимая во внимание, что

$$\mathcal{H}^j \mathcal{Z}(x^{(j)}) = \mathcal{Z}(x) - \sum_{l=0}^{j-1} \mathcal{H}^l (x^{(l)}(\alpha) \omega + x^{(l+1)}(\alpha) \omega_1) - \mathcal{E}_j(x), \quad j = \overline{1, m},$$

преобразуем равенство (59)

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=0}^m a_j \mathcal{H}^j \mathcal{Z}(x) &= \mathcal{H}^m \mathcal{Z}(y) + \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{m-j-1} a_j \mathcal{H}^{l+j} (x^{(l)}(\alpha) \omega + x^{(l+1)}(\alpha) \omega_1) + \\
 &+ \sum_{j=0}^{m-1} a_j \mathcal{H}^j \mathcal{E}_{m-j}(x).
 \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\mathcal{Z}(x) = V^{-1} \mathcal{H}^m \mathcal{Z}(y) + V^{-1} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{m-j-1} a_j \mathcal{H}^{l+j} (x^{(l)} \omega + x^{(l+1)} \omega_1) + V^{-1} \sum_{j=0}^{m-1} a_j \mathcal{H}^j \mathcal{E}_{m-j}(x). \quad (60)$$

Сравнивая (60) и (34), находим, что

$$\mathcal{Z}(x) - \mathcal{Z}(s) = V^{-1} \sum_{j=0}^{m-1} a_j \mathcal{H}^j \mathcal{E}_{m-j}(x).$$

Поэтому

$$\|\mathcal{Z}(x) - \mathcal{Z}(s)\| \leq \|V^{-1}\| \sum_{j=0}^{m-1} |a_j| \|\mathcal{H}^j\| \|\mathcal{E}_{m-j}(x)\|. \quad (61)$$

Поскольку $\|V\| \geq \|W\| = |\delta(h)| > 0$, то $\|V^{-1}\| \leq |\delta(h)|^{-1}$.
 Учитывая также оценку (56) для нормы матрицы W и (53), (57) или (58) для $\|E_{m-j}(\alpha)\|, j=0, m-1$, из (61) находим окончательный результат.

Теорема доказана.

Замечание. Нетрудно видеть, что $\delta(h) \rightarrow 1$ при $h \rightarrow 0$. Так что величина $\delta(h)$ при малых h ограничена снизу.

4. Задача Коши для линейного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами

Рассмотрим задачу (3) - (4) в случае

$$a_j, y \in L_1[a, b], j = \overline{1, m}, \quad (62)$$

предполагая, что она имеет решение. Интегрируя (4) по частичным интервалам $[t_{i-1}, t_i], i = \overline{1, n}$, разбиения Δ_n , получим

$$z(\alpha^{(m)}) + \sum_{j=1}^m z(a_j \alpha^{(m)j}) = z(y). \quad (63)$$

Для $z(a_j \alpha^{(m)j}), j = \overline{1, m}$, воспользуемся приближением $z_1(a_j \alpha^{(m)j}) \approx z_1(a_j) z_1(\alpha^{(m)j}), i = \overline{1, n}$, (см. [2] с.51), которые запишем в векторной форме

$$z(a_j \alpha^{(m)j}) \approx \tilde{A}_j z(\alpha^{(m)j}),$$

где \tilde{A}_j - диагональная матрица размерности $n \times n$

$$\tilde{A}_j = \begin{pmatrix} z_1(a_j) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z_2(a_j) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & z_3(a_j) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & z_n(a_j) \end{pmatrix}$$

Учитывая это, из (63) будем иметь

$$z(\alpha^{(m)}) + \sum_{j=1}^m \tilde{A}_j z(\alpha^{(m)j}) \approx z(y). \quad (64)$$

С помощью матриц дифференцирования и интегрирования, применяя во внимание (25а), перепишем (64) в виде

$$\sum_{j=0}^{m-1} U^m \tilde{A}_j U^{-m} (U^m \Delta_j^{m,j} z(x)) + \sum_{j=0}^{m-1} U^m \Delta_j^{m,j-1} (a_j) \omega_{j-1}^{(m,j-1)} (U^m \tilde{A}_j U^{-m} U^m z(x)) \approx U^m z(y),$$

из которого, обозначив

$$A_j = U^m \tilde{A}_j U^{-m}, j = \overline{0, m},$$

получим

$$\sum_{j=0}^{m-1} A_j U^m \Delta_j^{m,j} z(x) + \sum_{j=0}^{m-1} U^m \Delta_j^{m,j-1} (a_j) \omega_{j-1}^{(m,j-1)} (a_j) \omega_{j-1}^{(m,j-1)} (U^m \tilde{A}_j U^{-m} U^m z(x)) \approx U^m z(y). \quad (65)$$

Чтобы преобразовать (65), прибегнем к соотношению (28), в силу которого

$$\sum_{j=0}^{m-1} A_j U^m z(x) \approx U^m z(y) + \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{j-1} A_l U^{m-l} (a_l) \omega_{l-1}^{(m,l-1)} (a_l) \omega_{l-1}^{(m,l-1)} (U^m z(x)).$$

Итак, получено приближенное соотношение

$$V \tilde{x}(\alpha) \approx U^m \tilde{x}(\eta) + \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{m-j-1} A_j U^{j+l} (x_l \omega + x_{l+1} \omega_{11}), \quad (66)$$

где $V = \sum_{j=0}^{m-1} A_j U^j$,

связывающее ступенчатое изображение искомого решения со ступенчатым изображением правой части и начальными условиями. Матрица V является нижней треугольной матрицей, так как такими являются матрицы U^j , $j = \overline{1, m}$. Диагональные элементы матриц A_j равны $\tilde{x}_i(a_j)$, $i = \overline{1, n}$, а следовательно у матрицы V на диагонали стоят

$$v_i = 1 + \sum_{j=1}^m \tilde{x}_i^j h^j \tilde{x}_i(a_j), \quad i = \overline{1, n}.$$

Легко видеть, что она обратима, если только выполняется условие

$$B(h) = \min \left\{ 1 + \sum_{j=1}^m \tilde{x}_i^j h^j \tilde{x}_i(a_j) \mid i = \overline{1, n} \right\} \neq 0. \quad (67)$$

В [2, с. 165] дан алгоритм обращения нижней треугольной матрицы, который заключается в вычислении отдельных блоков обратной матрицы по рекуррентной формуле и удобен на практике.

При условии (67) из (66) получаем

$$\tilde{x}(\alpha) \approx G_{\Delta_n} \tilde{x}(\eta) + V^{-1} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{m-j-1} A_j U^{j+l} (x_l \omega + x_{l+1} \omega_{11}),$$

где определяющая матрица задачи (3) - (4) равна

$$G_{\Delta_n} = V^{-1} U^m.$$

По форме записи она не отличается от определяющей матрицы в случае (6), но следует иметь в виду, что матрица V здесь определяется иначе.

Под приближенным решением рассматриваемой задачи мы будем понимать интерполяционный сплайн \tilde{S} , построенный по вектору интегральных средних

$$\tilde{x}(s) = V^{-1} U^m \tilde{x}(\eta) + V^{-1} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{m-j-1} A_j U^{j+l} (x_l \omega + x_{l+1} \omega_{11}) \quad (68)$$

и по информации о значении точного решения и его производной в точке a

$$S(a) = \alpha_0, \quad S'(a) = \alpha_1.$$

Теорема 2. Пусть задача (3)-(4) при условии (62) однозначно разрешима. Если ее приближенное решение \tilde{S} вычислено при таком h , что выполняется (67), то

$$\| \tilde{x}(\alpha) - \tilde{x}(s) \| \leq \frac{1}{B(h)} \left(\frac{1}{3} h^2 \sum_{l=1}^m \sum_{j=0}^{m-l} \| a_j \|_{\infty} \| b-a \|^{l-1} \| x \|_{\infty}^{(l+1)} + (b-a)^{m-1} B(h) \right), \quad (69)$$

где

$$B(h) = \begin{cases} \frac{1}{2} h^2 \left(\frac{1}{3} \| b-a \|_{\infty}^{(m+1)} + \frac{1}{3} (1 + \| a_j \|_{\infty} \| b-a \|) \| x \|_{\infty}^{(m+1)} + \frac{m}{3} \| a_{m-1} \|_{\infty} \| x \|_{\infty}^{(m)} \right), & \text{если } x \in L_{\infty}^m(a, b), a_j \in L_{\infty}^1(a, b), j = \overline{1, m}, \\ \frac{1}{2} h \left(\frac{1}{2} \| b-a \|_{\infty}^2 (1 + \| a_j \|_{\infty} \| b-a \|) \| x \|_{\infty}^{(m)} + (b-a) \sum_{i=1}^m \| a_{m-i} \|_{\infty} \| x \|_{\infty}^{(i)} \right) + \\ + \frac{1}{6} (b-a) \| b-a \| \| \omega \|_{\infty} \| x \|_{\infty}^{(m)}, & \text{если } x \in L_{\infty}^m(a, b), a_j \in L_{\infty}^0(a, b), j = \overline{1, m}, \\ \frac{1}{3} h \left(\frac{1}{2} \| b-a \|_{\infty}^2 (1 + \| a_j \|_{\infty} \| b-a \|) + (3 + 2 \| \omega \|_{\infty}) \| x \|_{\infty}^{(m)} + (b-a) \sum_{i=1}^m \| a_{m-i} \|_{\infty} \| x \|_{\infty}^{(i)} \right) + \\ + \frac{1}{6} \| b-a \|_{\infty} \| \omega \|_{\infty} \| x \|_{\infty}^{(m)}, & \text{если } x \in C_{\infty}^m(a, b), a_j \in C_{\infty}^0(a, b), j = \overline{1, m}. \end{cases}$$

Доказательству предположим одно вспомогательное утверждение.

Лемма 4. Если $f \in L^p[a, b]$, $g \in L^q[a, b]$, то для вектора $\varepsilon(f, g)$, где $\varepsilon_i(f, g) = z_i(f)z_i(g) - z_i(fg)$, $i = \overline{1, n}$, где (70) справедлива оценка

$$\|\varepsilon(f, g)\| \leq \frac{2}{(p+1)!} h^{p+1} \|f\|_{\infty}^p \|g\|_{\infty}^{p+1}, \quad p=0, 1. \quad (71)$$

Доказательство. Пусть сначала $p=0$. Тогда

$$\begin{aligned} |\varepsilon_i(f, g)| &= \left| \frac{1}{h^2} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t) dt \int_{t_{i-1}}^{t_i} g(x) dx - \frac{1}{h} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(x)g(x) dx \right| = \frac{1}{h^2} \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} g(x) (f(t) - f(x)) dt dx \right| \\ &\leq \frac{1}{h^2} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |g(x)| |f(t) - f(x)| dt dx \leq \frac{1}{h^2} \|g\|_{\infty} \|f'\|_{\infty} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |t-x| dt dx = \frac{1}{3} h \|g\|_{\infty} \|f'\|_{\infty}. \end{aligned}$$

В случае $p=1$ функции f и g представим в виде

$$f(t) = f(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^t f'(\alpha) \varphi_0(\alpha, \tau) d\alpha, \quad g(t) = g(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^t g'(\alpha) \varphi_0(\alpha, \tau) d\alpha, \quad t \in [t_{i-1}, t_i].$$

Тогда

$$\varepsilon_i(f, g) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} f'(\alpha) z_i(\varphi_0(\alpha, \tau)) d\alpha \int_{t_{i-1}}^{t_i} g'(\mu) z_i(\varphi_0(\alpha, \mu)) d\mu - \int_{t_{i-1}}^{t_i} g'(\alpha) z_i(\varphi_0(\alpha, \tau) \varphi_0(\alpha, \mu)) d\alpha.$$

Учитывая это, получим оценку

$$|\varepsilon_i(f, g)| \leq \|f'\|_{\infty} \|g'\|_{\infty} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |z_i(\varphi_0(\alpha, \tau)) z_i(\varphi_0(\alpha, \mu)) - z_i(\varphi_0(\alpha, \tau) \varphi_0(\alpha, \mu))| d\tau d\mu.$$

Вычисление интеграла

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |z_i(\varphi_0(\alpha, \tau)) z_i(\varphi_0(\alpha, \mu)) - z_i(\varphi_0(\alpha, \tau) \varphi_0(\alpha, \mu))| d\tau d\mu = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left| \frac{t_i - \tau}{h} \frac{t_i - \mu}{h} - \frac{t_i - \max(\tau, \mu)}{h} \right| d\tau d\mu = \frac{h^2}{12}.$$

приводит к окончательному результату.

Доказательство теоремы 2. С учетом (70) перепишем векторное равенство (63) в виде

$$z(x^{(m)}) + \sum_{j=1}^m \tilde{A}_j z(x^{(m-j)}) = z(y) + \sum_{j=1}^m \varepsilon(x^{(m-j)}, \alpha_j),$$

из которого, принимая во внимание определение \tilde{A}_j , получим

$$\sum_{j=0}^m \tilde{A}_j H^j H^{m-j} z(x^{(m-j)}) = H^m z(y) + H^m \sum_{j=1}^m \varepsilon(x^{(m-j)}, \alpha_j).$$

С помощью обозначения (52) придадим последнему равенству вид

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^m \tilde{A}_j H^j z(x) &= H^m z(y) + \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{m-j-1} \tilde{A}_j H^{j+l} (x^{(l)} \omega + x^{(l+m)} \omega_l) \\ &\quad + \sum_{j=0}^{m-1} \tilde{A}_j H^j \varepsilon_{m-j}(x) + H^m \sum_{j=1}^m \varepsilon(x^{(m-j)}, \alpha_j). \end{aligned}$$

Следовательно

$$\begin{aligned} z(x) &= V^{-1} H^m z(y) + V^{-1} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{m-j-1} \tilde{A}_j H^{j+l} (x_l \omega + x_{l+m} \omega_l) + \\ &\quad + V^{-1} \sum_{j=0}^{m-1} \tilde{A}_j H^j \varepsilon_{m-j}(x) + V^{-1} H^m \sum_{j=1}^m \varepsilon(x^{(m-j)}, \alpha_j). \end{aligned} \quad (72)$$

Сравняя (72) с (68), найдем, что

$$z(x) - z(s) = V^{-1} \sum_{j=0}^{m-1} \tilde{A}_j H^j \varepsilon_{m-j}(x) + V^{-1} H^m \sum_{j=1}^m \varepsilon(x^{(m-j)}, \alpha_j).$$

Поэтому

$$\|A(x) - z(s)\| \leq \|V^{-1}\| \left(\sum_{j=0}^{m-1} \|A_j\| \|V\| \|V^{-1}\| \|\epsilon_{m-j}(x)\| + \|V\| \sum_{j=1}^m \|\epsilon(x^{(m-j)}, a_j)\| \right). \quad (73)$$

Так как $\|V\| \geq \max\{\|V\|, \|V^{-1}\|\} = \delta(h) > 0$, то $\|V^{-1}\| \leq \delta(h)^{-1}$.

Учитывая также оценку (56) для нормы матрицы V (71) - для $\|\epsilon(x^{(m-j)}, a_j)\|$ и (53), (57) или (58) для $\|\epsilon_{m-j}(x)\|$ из (73) получаем (71).

Теорема доказана.

Простота предложенного алгоритма, наличие оценок скорости сходимости приближенного решения к точному указывают на целесообразность использования результатов как для качественного анализа импульсной реакции линейных систем, так и в вычислительной практике.

Библиографический список

1. Асмусс С.В. Об интерполяции и сглаживании интегральных средних параболическими сплайнами// Топологические пространства и их отображения. - Рига, 1989. - С. 13-35.
2. Береговенко Г.Я., Пулов Г.Е. Ступенчатые изображения и их применение. - Киз: Наукова думка, 1983.
3. Береговенко Г.Я., Саух С.Е. Особенности операторов, преобразующих ступенчатые изображения при решении систем дифференциальных уравнений// Электронное моделирование. - 1984. - Т.5, N 6. - С. 7-10
4. Береговенко Г.Я., Саух С.Е. Численные схемы преобразования ступенчатых изображений функций двух переменных и их применение для решения уравнения нестационарного течения газа в трубах// Электронное моделирование. - 1986. - Т. 8, N 3. - С. 55-61
5. Береговенко Г.Я., Саух С.Е. Параметрическая схема преобразования ступенчатых изображений и многошаговые методы решения дифференциальных уравнений// Электронное моделирование. - 1987. - Т. 9, N 5. - С. 7-11.

S. Asmus. One operator method on base of the transformation of stepwise images by means of splines for local mean values

Quadratic splines for local mean values are used to construct the numerical circuit for transformation of stepwise images of functions. On this basis one operator method for the solution of the Cauchy problem of linear differential equation is suggested.

AMS Subject classification 65D07.

Кафедра математического анализа
Латвийский Университет
бульв. Райниса, 19
226098, г. Рига

КОМПАКТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

С МАЛЫМИ СЛУЧАЙНЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

В. Лабеев, В. Янсон

Аннотация. В данной статье рассматривается устойчивость спектра линейных операторов с малыми случайными возмущениями

типа $A_n + \varepsilon B(\xi(t))$, где $\xi(t)$ — одноуступная цепь Маркова с базисом пространства $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n, \dots\}$. Основной результат позволяет обновить применимость широкого класса приближенных методов (механических квадратур, коллокации и др.) с учетом случайной ошибки округления.

Компактная аппроксимация операторов является естественным и конструктивным обобщением сходимости операторов по норме. Впервые эта аппроксимационная схема, с учетом потребностей приближенных методов была рассмотрена Г.М.Вайнштейн и независимо от него П.М.Анселом (под названием коллективной компактности и только для вполне непрерывных отображений). Многие классические схемы вычислительной математики и приближенных методов (метод механических квадратур, коллокации, некоторые разностные методы и т.д.) укладываются в схему компактной аппроксимации. С другой стороны, являясь достаточно абстрактным понятием, компактная аппроксимация позволяет обобщить многие классические свойства линейных операторов, связанные с сходимостью операторов по норме.

Определение 1. Пусть X и Y — банаховы пространства,

Последовательность операторов (линейных непрерывных отображений) $(A_n) \subset L(X, Y)$ компактно аппроксимирует (К.А.) оператор $A \in L(X, Y)$, если

а) $\forall x \in X \quad \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x = Ax;$

б) для любой ограниченной последовательности векторов $(x_n) \subset X$ последовательность векторов $(A_n x_n - A x_n)$ относительно компактна в пространстве Y .

Замечание 1. Требования полноты пространств и непрерывности отображений связаны исключительно с конкретной ситуацией, рассматриваемой в статье, и не являются существенными. В работе [3] рассматривается аппроксимационная схема, связанная с компактной аппроксимацией линейных замкнутых отображений.

Замечание 2. Условия а) поточечной сходимости последовательности операторов (A_n) к оператору A является естественным с точки зрения приближенных методов, но в доказательстве некоторых теорем бесполезно.

Таким образом, К.А. занимает промежуточное положение между поточечной сходимостью и сходимостью операторов по норме (во втором случае для любой ограниченной последовательности векторов $(x_n) \subset X$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n x_n - A x_n\| = 0$). Приведем примеры операторов в ℓ_2 , показывающие различие этих сходимостей.

Пример 1. Пусть (e_n) - стандартный базис в ℓ_2 .

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \ell_2 \quad A_n x = (x | e_n) e_n.$$

Тогда $A_n \xrightarrow{\text{к.а.}} \theta$ поточечно, но $A_n \xrightarrow{\text{к.а.}} A$, где θ - нулевой оператор.

Пример 2. Если

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \ell_2 \quad A_n x = (x | e_n) e_1,$$

то $A_n \xrightarrow{\text{к.а.}} \theta$. но $\|A_n\| = 1$ и следовательно $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n\| \neq 0$

Предложение I. Пусть $(A_n), (B_n), A, B \in L(X, Y)$,
 $A_n \xrightarrow{к.а.} A, B_n \xrightarrow{к.а.} B; (C_n), C \in L(Y, Z), C_n \xrightarrow{к.а.} C.$

Тогда

а) $\forall \alpha, \beta \quad \alpha A_n + \beta B_n \xrightarrow{к.а.} \alpha A + \beta B;$

б) $C_n \circ A_n \xrightarrow{к.а.} C \circ A;$

в) если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n x_n = A x_0;$

г) если $(A_{n_k}) \subset (A_n)$, то $A_{n_k} \xrightarrow{к.а.} A;$

д) существует такое число $\epsilon > 0$, что для всех $n \in \mathbb{N}$
 $\|A_n\| \leq \epsilon.$

Лемма I. Пусть $(A_n) \subset L(X, X)$ и $A_n \xrightarrow{к.а.} \theta.$

Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n^2\| = 0.$

Доказательство. Если утверждение леммы не верно, то существует такая подпоследовательность операторов $(A_{n_k}) \subset (A_n)$ и такая ограниченная последовательность векторов $(x_k) \subset X$, что

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \|A_{n_k}^2 x_k\| \geq \epsilon > 0 \quad (I)$$

т.к. $A_n \xrightarrow{к.а.} \theta$, то $A_{n_k} \xrightarrow{к.а.} \theta$, и поэтому последовательность векторов $(A_{n_k} x_k)$ относительно компактна. Значит, из нее можно выделить сходящуюся к некоторому вектору $y_0 \in X$ подпоследовательность $(A_{n_{k_j}} x_{k_j})$. Тогда

$$\lim_{j \rightarrow \infty} A_{n_{k_j}} x_{k_j} = \theta y_0 = 0.$$

Поэтому $\lim_{j \rightarrow \infty} \|A_{n_{k_j}}^2 x_{k_j}\| = 0$, что противоречит неравенству (I).

Лемма 2. Пусть $(A_n) \subset L(X, X)$ и $A_n \xrightarrow{к.а.} \theta$. Тогда для всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ $A_n + I_x \in \text{Isom}(X, X)$.

Доказательство. В силу леммы I существует такое число $n_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geq n_0$ $\|A_n^2\| < 1$. Воспользуемся классической схемой построения обратного к $A_n + I_x$ оператора, для чего достаточно найти оператор $B_n = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k A_n^k$. Действительно, рассмотрим взвешивание числовой ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|A_n^k\| \quad \text{и покажем его сходимость: } \sum_{k=0}^{\infty} \|A_n^k\| =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|A_n^{2k}\| + \sum_{k=0}^{\infty} \|A_n^{2k+1}\| \approx \sum_{k=0}^{\infty} \|A_n^{2k}\| + \|A_n\| \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \|A_n^{2k}\| <$$

$$(1 + \|A_n\|) \sum_{k=0}^{\infty} \|A_n^{2k}\| = \frac{1 + \|A_n\|}{1 - \|A_n^2\|}.$$

Лемма 3. Пусть $(A_n) \subset L(X, X)$ и $A_n \xrightarrow{к.а.} \theta$. Тогда $(A_n + I_X)^{-1} \xrightarrow{к.а.} I_X$.

Доказательство. Согласно лемме 2 оператор $(A_n + I_X)^{-1}$, вообще говоря, существует лишь для всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$, поэтому последовательность $((A_n + I_X)^{-1})$ начинается с некоторого числа $n_0 \in \mathbb{N}$, не обязательно равного единице. Т.к.

$$(A_n + I_X)^{-1} = I_X - A_n + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k A_n^k,$$

то для доказательства леммы достаточно показать, что

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k A_n^k \right\| = 0$. Используя идеи доказательства леммы 2, получим следующую оценку:

$$\left\| \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k A_n^k \right\| \leq \sum_{k=2}^{\infty} \|A_n^k\| \leq \|A_n^2\| \cdot \frac{1 + \|A_n\|}{1 - \|A_n^2\|}.$$

Отсюда и из леммы 1 следует нужное: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k A_n^k \right\| = 0$.

Лемма 1. Пусть $(A_n) \subset L(X, Y)$, $A \in \text{Isom}(X, Y)$. Тогда для всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ $A_n \in \text{Isom}(X, Y)$, при этом $A_n^{-1} \xrightarrow{к.а.} A^{-1}$.

Доказательство. Т.к. $A_n \xrightarrow{к.а.} A$, то $A^{-1} \circ A_n \xrightarrow{к.а.} I_X$. Пусть $B_n = A^{-1} \circ A_n - I_X$. Тогда $B_n \xrightarrow{к.а.} \theta$ и, согласно леммам 2 и 3, $B_n + I_X \in \text{Isom}(X, X)$ и $(B_n + I_X)^{-1} \xrightarrow{к.а.} I_X$. Отсюда $A \circ (B_n + I_X) \in \text{Isom}(X, Y)$, т.е.

$$A \circ (A^{-1} \circ A_n - I_X + I_X) = A_n \in \text{Isom}(X, Y)$$

и $(A \circ (B_n + I_X))^{-1} = A_n^{-1} \xrightarrow{к.а.} A^{-1}$.

Теорема 2. Пусть $A_n \xrightarrow{\text{к.а.}} A \in L(X, X)$. Тогда для любого открытого множества $W \supset \sigma(A)$, где $\sigma(A)$ - спектр оператора A , найдется такое число $n_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geq n_0$ $W \supset \sigma(A_n)$.

Доказательство. Переходя к дополнениям в поле скаляров, теорему 2 можно переформулировать следующим образом: для любого замкнутого подмножества $P \subset \text{Res}(A)$ ($\text{Res}(A)$ - резольвентное множество оператора A) найдется такое число $n_0 \in \mathbb{N}$ что для всех $n \geq n_0$ $P \subset \text{Res}(A_n)$. Далее, т.к.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|A_n\| \leq C = \text{const},$$

то $\sigma(A_n)$ находится в круге радиуса C с центром в нуле. Поэтому, не умаляя общности, дополнительно к замкнутости множества P можно потребовать его компактность.

Допустим, что теорема не верна. Тогда существуют такая подпоследовательность (A_{n_k}) последовательности операторов (A_n) и такая последовательность чисел $(\lambda_k) \subset P$, что

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad A_{n_k} - \lambda_k I_X \notin \text{Res}(A_{n_k}). \quad (2)$$

Из компактности множества P следует существование такой подпоследовательности (λ_{k_j}) последовательности чисел (λ_k) и такого числа $\lambda_0 \in P$, что $\lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_{k_j} = \lambda_0$. Отсюда, в частности, следует, что

$$A_{n_{k_j}} - \lambda_{k_j} I_X \xrightarrow{\text{к.а.}} A - \lambda_0 I_X \in \text{Isom}(X, X).$$

Поэтому, согласно теореме 1, $A_{n_{k_j}} - \lambda_{k_j} I_X \in \text{Isom}(X, X)$ для всех достаточно больших $j \in \mathbb{N}$, что противоречит условию (2). Таким образом, теорема доказана.

Замечание. Фактически нами доказана верхняя непрерывность спектра отображения A при К.А.

Рассмотрим возмущение оператора A_n операторами вида $\varepsilon B(\xi(t))$, где $(\xi(t))$ - однородный марковский процесс с фазовым пространством $Y = \{y_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, причем $\|B(y_n)\| \leq \text{const}$, где ε - малый параметр. Тогда спектр $A_n + \varepsilon B(y_n)$ при достаточно малом ε : $0 < |\varepsilon| < \varepsilon$

будет находиться в сколь угодно близкой к спектру $\sigma(A_n)$ окрестности. Таким образом, учитывая результат теоремы 2, доказана следующая теорема:

Теорема 3. Пусть $A_n \xrightarrow{k.a.} A \in L(X, Y)$. Тогда для любой окрестности $W \supset \sigma(A)$ существует такое число $n_0 \in \mathbb{N}$ и существует такое число $\varepsilon_0 > 0$, что как только $n \geq n_0$ и $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, то $W \supset \sigma(A_n + \varepsilon B(\xi(t)))$.

Основной результат проиллюстрируем примером:

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad (3)$$

где $\sigma(A) \subset \{\lambda: \operatorname{Re} \lambda \leq -d < 0\}$. Пусть известным, укладываемым в схему К.А. методом это уравнение можно заменить аппроксимирующим уравнением

$$\frac{dx}{dt} = A_n x. \quad (4)$$

При решении этого уравнения каким-либо численным методом естественно возникает случайная ошибка округления $\varepsilon B(\xi(t))$, где $\xi(t)$ — однородный марковский процесс, заданный на дискретном множестве значений $Y = \{y_n | n \in \mathbb{N}\}$. Таким образом, исследование устойчивости решения уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A_n x + \varepsilon B(\xi(t)), \quad (5)$$

где ε характеризует точность вычисления. Согласно теореме 3 решение уравнения (5) устойчиво при достаточно малых $|\varepsilon|$ и при всех $n \geq n_0$.

Основная идея этого раздела допускает обобщение на случай стохастической аппроксимации с ошибкой типа гауссовского белого шума, которая может возникать при решении уравнения

$$R(x) = 0$$

при неизвестной функции $R(x)$. Результат измерения $Y_t(x, \omega)$ функции $R(x)$ в точке $x \in \mathbb{R}^n$ и в момент времени t имеет вид

$$Y_t(x(t), \omega) = R(x) + \sigma(t, x) \xi(t), \quad (6)$$

где $\dot{\xi}(t) = \dot{\xi}(t, \omega)$ - гауссовский белый шум. Тогда уравнение, списывающее процедуру стохастической аппроксимации Робинсона - Монро

$$\frac{dx(t)}{dt} = a(t) Y_t(x(t), \omega), \quad (7)$$

можно интерпретировать как стохастическое дифференциальное уравнение

$$dx(t) = a(t)R(x(t))dt + b(t, x(t))d\xi(t). \quad (8)$$

Но на практике не всегда ошибки измерений имеют вид (6). В наиболее общей постановке ошибки измерений имеют вид

$$Y_t(x(t), \omega) = R(y_t, x) + b(y_t, t, x)\xi,$$

где y_t - некоторый марковский процесс. В этом случае процедура стохастической аппроксимации Робинсона - Монро приводит к уравнению вида

$$dx(t) = A(t, y_t, x)dt + B(t, y_t, x)dW(t). \quad (9)$$

В большинстве случаев эту задачу достаточно решить в линейном приближении, которое приводит к уравнению

$$dx(t) = A(t, y_t)dt + B(t, y_t)x dW(t). \quad (10)$$

Функции $A(t, y)$ и $B(t, y)$ непрерывно дифференцируемы по обеим переменным матрицы размера $n \times n$, периодические по t с периодом γ , определенные на $[0, +\infty) \times Y$. y_t - диффузионный процесс, заданный уравнением

$$dy(t) = b(y_t)dt + \sigma(y_t)dW(t). \quad (11)$$

Здесь $b(y)$ - k -мерный вектор; $\sigma(y)$ - матрица размера $k \times n$ элементами которой являются действительные функции, ограничены и удовлетворяющие условию Липшица в форме

$$|b(y_1) - b(y_2)| + \|\sigma(y_1) - \sigma(y_2)\| \leq l \cdot |y_1 - y_2|$$

с некоторой постоянной $l > 0$. $\overline{W}(t)$ - k -мерный винеровский процесс, компоненты которого $W_j(t)$ - независимы в совокупности процессы броуновского движения и независимые от $W(t)$. При этих предположениях [1] уравнения (10) и

(11) удовлетворяют теореме существования и единственности решения стохастических дифференциальных уравнений при заданных начальных условиях $x(0)$, $y(0)$ не зависящих от $\overline{W}(t)$ и

$W(t)$. При этом пара $(x(t), y(t))$ является марков-

ким процессом. Для дальнейшего нам понадобятся дополнительные условия на коэффициенты уравнения (11). Обозначим $a(y) = b^*(y)b(y)$ и предположим, что коэффициенты $b_{ij}(y)$ дважды непрерывно дифференцируемые, $b_j(y)$ — непрерывно дифференцируемая функция, кроме того, существует число $d > 0$ и равномерно по $y \in Y$ выполняется неравенство

$$(a(y)x | x) > d |x|^2, \quad x \in \mathbb{R}^k, \quad x \neq 0.$$

При этих предположениях диффузионный процесс y_t имеет производный дифференциальный оператор

$$L_{of}(y) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k a_{ij}(y) \frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_j} + \sum_{i=1}^k b_i(y) \frac{\partial f}{\partial y_i} \quad (12)$$

и сопряженный оператор

$$L_o^* p(y) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} (a_{ij}(y)p(y)) + \sum_{i=1}^k \frac{\partial}{\partial y_i} (b_i(y)p(y)) \quad (13)$$

процесса y_t эргодический и обладает единственной инвариантной мерой. Эта мера имеет плотность $P_o(y)$, которая определяется как единственное решение задачи

$$L_o^* P_o(y) = 0 \quad \text{при } y \in Y, \quad P_o(y) > 0, \quad \int_Y P_o(y) dy = 1.$$

Пусть фазовым пространством процесса y_t является k -мерный тор, т.е. $Y = T_{0,2\pi}^k$. Предположим, что уравнение (10) мы можем аппроксимировать (схема К.А.) уравнением

$$dx(t) = A_n(t, y_t) x dt + B_n(t, y_t) x dW(t), \quad (14)$$

которое при каждом $n \in \mathbb{N}$ описывается как уравнение (10). Установим критерий экспоненциальной устойчивости в среднем квадратичном тривиального решения уравнения (10). Аналогично работе [2] доказывается аналог теоремы Ляпунова:

Теорема 4. Тривиальное решение уравнения (10) экспоненциально устойчиво в среднем квадратичном тогда и только тогда, когда существует замечество симметричных периодических матриц порядка $n \times n$ периода Y , положительно определенных в смысле скалярного произведения равномерно по $y \in Y$ и удовлетворяющих уравнению

$$\frac{dq(t,y)}{dt} + F_t q(t,y) + L_0 q(t,y) = -I,$$

где

$$F_t q = A^T(t,y)q + qA(t,y) + B^T(t,y)qB(t,y).$$

Используя эту теорему и метод К.А. можно построить алгоритм исследования устойчивости решений уравнения (10), опирающийся на исследование устойчивости решения аппроксимированного уравнения (14), которое в некоторых случаях может быть существенно более простым для исследования, чем исходное уравнение (10).

Библиографический список

1. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. - Киев: Наукова Думка, 1967. - 356 с.
2. Ионин Л.Л., Янсон В.А. Стабилизация динамических систем с периодическими коэффициентами диффузионным процессом // Проблемы случайного поиска. II. Задачи оптимизации и адаптации. - Рига: Зинатне, 1988. - С. 142 - 149.
3. Лабеев В.И. О некоторых свойствах компактной аппроксимации линейных замкнутых отображений // Евклидовы и неевклидовы пространства: Ученые записки ЛГУ им. П.Случки. - 1975. - Т. 222. - С. 38 - 45.

Anotācija. Rakstā aplūkots lineāru stohastiski perturbētu operātoru spektra stabilitāte. Mazu gadījuma rakstura ierosinājuma tips izsakāms ar izteiksmi $EB(\xi(t))$, pie kam $\xi(t)$ ir homogēna Markova ķēde diskrētā fāzu telpā. Raksta mērķis ir pamatot aptuveni metodi izmantošanu (piem., mehāniskās kvadrātures, kollekcijas utt.), ievērojot mērījuma gadījuma raksturu.

V.I. Labejev, V.A. Janson. A compact approximation of linear operators with small random perturbations.

Summary. The stability of the spectrum of linear operators with small random perturbations of the type $A_n + \varepsilon B(\xi(t))$ where $\xi(t)$ is the homogeneous Markov chain with the phase space $Y = \{y_1, \dots, y_n, \dots\}$. The main result of the paper allows to justify the validity of a broad class of approximation methods (including the method of mechanic quadratures, collocation e.a.) with regard of the random round-off error.

Кафедра общей математики
Физико-математический факультет
Латвийский университет
Рига, Латвия

Кафедра прикладной математики
Рижский Технический университет
Рига, Латвия

СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛЬНОГО МЕТОДА ЭТАЛОНОВ

А. Лоренц

Аннотация. Решается задача распознавания статистически образов по методу эталонов в случае, когда пространство изображений состоит из непрерывных функций, представимых в виде линейной комбинации конечного числа базисных функций. Исследуется структура решающих правил при условии, что расстояние изображения до эталона характеризуется интегралом от квадрата их разности. Выводится формула для вычисления вероятности принятия ошибочного решения.

I. Постановка задачи

Предположим, что рассматриваются полутоновые изображения фиксированных размеров, точнее, занимающие определенный прямоугольник $P = [a, b] \times [c, d]$. Очевидно, на практике два различных изображения занимают на плоскости два различных места. Но, если они занимают по своим размерам одинаковые прямоугольники, то их проекции на один и тот же экран, рассмотренные в определенном порядке, дают право говорить об изображениях, занимающих один и тот же прямоугольник P .

Сканируя изображение, т.е. измеряя уровни яркости отдельных точек (отдельных микроучастков картины), мы превращаем его в неотрицательную числовую матрицу. Даже если сканирование происходит при константном, неизменном освещении, нельзя гарантировать получение того же результата при повторном сканировании того же изображения. Вообще говоря, мы должны считаться со случайными воздействиями на процесс сканирования и тем самым, со случайным характером получаемой числовой матрицы. Итак, результат измерения значения уровня яркости данного изображения в произвольной точке $(s, t) \in P$ приводит нас к случайному значению $\chi(s, t)$. Учитывая характер случайных воздействий на процесс измерения, мы вправе (в теоретическом

плана) представить результат измерения некоторой нормально распределенной случайной величиной $X(s, t)$. Если взять другую точку $(s', t') \in P$ и провести измерения уровня яркости в нем, то реальная ситуация описется другой нормально распределенной случайной величиной $X(s', t')$, с той же дисперсией, что и $X(s, t)$. Корреляция между $X(s, t)$ и $X(s', t')$ обычно быстро убывает по мере увеличения расстояния между точками (s, t) и (s', t') . Уже при весьма незначительной отдаленности точек эти величины можно считать практически некоррелированными.

Учитывая изложенные соображения, приходим к заключению, что рассматриваемые изображения в теоретическом плане представим надлежащим образом определенными случайными гауссовскими полями. Если число различных типов изображений равно m , то можно говорить о системе образов $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m$, задаваемых гауссовскими случайными полями $X_{st}^1, X_{st}^2, \dots, X_{st}^m$. В качестве производной характеристики случайного поля X_{st}^i можно ввести неотрицательную функцию f_i , определяемую равенством

$$f_i(s, t) = E(X_{st}^i)^2. \quad (I)$$

В дальнейшем мы предположим, что каждая функция $f_i, i=1, 2, \dots, m$, представима в виде линейной комбинации определенной системы базисных функций $\Psi = (\Psi_0, \Psi_1, \dots, \Psi_k)^T$. Относительно $\Psi_j, j=0, 1, \dots, k$ мы предположим, что для любой пары индексов (g, h) существует интеграл $\int \Psi_g(s, t) \Psi_h(s, t) ds dt$.

Легко сообразить, что введенные нами условия позволяют применить методы регрессионного анализа для формирования новой теоретической модели уже заданной системы образов [1], [2]. Следует зафиксировать конечное множество точек $R, R \subset P$, и упорядочить его элементы в определенном порядке так, чтобы $R = \{(s_1, t_1), (s_2, t_2), \dots, (s_n, t_n)\}$ обладал двумя важными свойствами: 1) случайные величины $X^i(s_u, t_u)$ и $X^i(s_v, t_v)$ одного и того же гауссовского поля X_{st}^i столь слабо коррелированы, что их можно считать практически независимыми; 2) для любой пары индексов $(i, j), 1 \leq i < j \leq m$, множества $\{f_i(s_1, t_1), f_i(s_2, t_2), \dots, f_i(s_n, t_n)\}$ и $\{f_j(s_1, t_1), f_j(s_2, t_2), \dots, f_j(s_n, t_n)\}$ достаточно сильно различаются. Разумеется, множество R можно

рассматривать, как некоторый экспериментальный план и строить плановую матрицу $F_{n \times k+1}$ из элементов $\varphi_j(s_i, t_i)$, $j=0, 1, \dots, k$, $i=1, 2, \dots, n$. Точнее говоря, $F_{n \times k+1}$ определяется как матрица, у которой элементом i -ой строки и j -ого столбца ($i=1, 2, \dots, n$, $j=0, 1, \dots, k$) является число $\varphi_j(s_i, t_i)$. Далее можно построить информационную матрицу $M_{k+1 \times k+1} = F_{n \times k+1}^T F_{n \times k+1}$ и потребовать, чтобы она была обратимой. Разумеется, это условие не выполняется автоматически, а требует выбора экспериментального плана R с учетом специфики базисных функций φ_j . Очень важно, чтобы при одном и том же объеме множества R экспериментальный план максимизировал определитель информационной матрицы $M_{k+1 \times k+1}$. Иногда полезным свойством экспериментального плана считается его ортогональность, то есть способность диагонализировать информационную матрицу.

Примечание. В теории планирования экспериментов [2] понятие экспериментального плана, как известно, имеет более богатое содержание, нежели нами изложенное. Точка дискретного экспериментального плана (s_i, t_i) снабжается, как правило, положительным целым числом γ_i , указывающим объем выборки из соответствующей генеральной совокупности X_{s_i, t_i}^l , $l=1, 2, \dots, m$. Наша трактовка R как экспериментального плана означает, что $\gamma_i = 1$.

Следуя уже установившейся традиции, мы обозначим $X^i(s_u, t_u)$ через Y_u^i . В дальнейшем через \bar{Y}^i мы обозначим вектор-столбец $(Y_1^i, Y_2^i, \dots, Y_n^i)^T$. Очевидно, как матрицы $F_{n \times k+1}$ и $M_{k+1 \times k+1}$, так и вектора \bar{Y}^i , $i=1, 2, \dots, m$, зависят от выбора R . Для упрощения записи мы символ R везде опускаем. По тем же соображениям в дальнейшем будут опущены индексы при матрицах $F_{n \times k+1}$ и $M_{k+1 \times k+1}$.

Определим для каждого i , $i=1, 2, \dots, m$, случайный вектор по формуле

$$\bar{\theta}^i = M^{-1} F^T \bar{Y}^i. \quad (2)$$

Так как вектор \bar{Y}^i является нормально распределенным случайным вектором, у которого все компоненты имеют одинаковую дисперсию, то есть $\mathcal{D}(Y_u^i) = \sigma^2$, и ковариационная матрица C_{Y^i} которого практически диагональная, то в будущем целесообразно отказаться от несущественных условностей и писать:

$$C\bar{Y}^i = \sigma^2 I_{nn}. \quad (3)$$

По определению $\bar{\theta}^i$ является случайным вектором, полученным из нормально распределенного случайного вектора \bar{Y}^i путем линейного преобразования. Поэтому $\bar{\theta}^i$ также является нормально распределенным случайным вектором с параметрами

$$E\bar{\theta}^i = M^{-1} F^T E\bar{Y}^i \quad (4)$$

$$D\bar{\theta}^i = M^{-1} F^T C\bar{Y}^i F M^{-1}. \quad (5)$$

Согласно сделанному предположению, функция f_i выражается линейно при помощи базисных функций φ_j , т.е. для некоторого числового вектора $\bar{\alpha}^i = (\alpha_0^i, \alpha_1^i, \dots, \alpha_k^i)^T$ имеет место равенство

$$f_i(s, t) = \bar{\alpha}^{iT} \bar{\varphi}(s, t). \quad (6)$$

Значит, для любого $i, i=1, 2, \dots, m$, $E\bar{Y}^i$ можно выразить при помощи F и $\bar{\alpha}^i$ следующим образом:

$$E\bar{Y}^i = F\bar{\alpha}^i. \quad (7)$$

Из равенств (3), (4), (5) и (7) далее следует, что

$$E\bar{\theta}^i = \bar{\alpha}^i \quad (4)$$

$$D\bar{\theta}^i = \sigma^2 M^{-1}. \quad (5)$$

Итак, систему первоначальных образов $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m$ в дальнейшем можно заменить (без существенного ущерба для дела) другой системой образов $\Omega'_1, \Omega'_2, \dots, \Omega'_m$, где Ω'_i задается нормально распределенным случайным вектором $\bar{\theta}$ с параметрами $\bar{\alpha}^i$ и $\sigma^2 M^{-1}$. Если к тому же появление образов Ω_i (соответственно Ω'_i) обладает практически устойчивыми частотами, то реальная ситуация с m различными типами плоских полутоновых изображений допускает теоретическое описание через априорные вероятности p_i и апостериорные плотности ψ_i , $i=1, 2, \dots, m$, где ψ_i - нормальные плотности с параметрами $\bar{\alpha}^i$ и $\sigma^2 M^{-1}$. Легко понять, что такое описание системы образов при известных $\bar{\alpha}^i, p_i, \sigma^2$ и M^{-1} позволяет строить оптимальную процедуру распознавания по критерию Байеса. На практике, однако, точные значения $\bar{\alpha}^i, p_i$ и σ^2 неизвестны, и при построении Байесовского классификатора мы вынуждены пользоваться лишь статистическими оценками, полученными на основе достаточно обширного экспериментального материала.

Поэтому теоретическая возможность построения оптимальной процедуры распознавания образов по критерию Байеса на практике превращается в построение лишь более или менее рационального классификатора [3].

Другой подход построения хороших процедур распознавания образов заключается в следующем: вычислять достаточно точные и надежные оценки для векторов $\bar{\alpha}^i$ и строить оптимальную процедуру распознавания образов по критерию минимакса. Легко сообразить, что в этом случае мы можем обойтись без знания $\bar{\sigma}^2$. При $m=2$ оптимальный классификатор по критерию минимакса одновременно является Байесовским классификатором при надлежащих значениях априорных вероятностей p_i [4]. Значит, как Байесовский классификатор, так и классификатор по критерию минимакса сводит задачу распознавания к задаче построения оптимальной разделяющей гиперплоскости. Как известно, конструкция разделяющих гиперплоскостей решает также задачу классификации векторов $\bar{\theta}$ по методу эталонов. Следует лишь рассматривать $\bar{\sigma}$ как возможные значения случайных векторов $\bar{\theta}^i$ и $\bar{\alpha}^i$ как эталоны при евклидовой метрике в пространстве E^{k+1} [5].

2. Метод эталонов при интегральной метрике

Предположим, что точные значения $\bar{\alpha}^i$ нам известны.* Тогда можно определить расстояние ρ между произвольными $\bar{\theta}$ и $\bar{\alpha}^i$ по формуле

$$\rho(\bar{\theta}, \bar{\alpha}^i) = \sqrt{\int_P (\bar{\theta}^T \bar{\varphi}(s, t) - \bar{\alpha}^{iT} \bar{\varphi}(s, t))^2 ds dt}. \quad (8)$$

Аналогичным образом можно определить расстояние ρ между произвольными $k+1$ -мерными векторами $\bar{\theta}$ и $\bar{\theta}'$, а именно,

$$\rho(\bar{\theta}, \bar{\theta}') = \sqrt{\int_P (\bar{\theta}^T \bar{\varphi}(s, t) - \bar{\theta}'^T \bar{\varphi}(s, t))^2 ds dt}. \quad (9)$$

Объяснением для рассмотрения метрики по формуле (9) служат следующие соображения. Функции $f_i, i=1, 2, \dots, m$, согласно нашим предположениям, выражаются, как матричные произведения $\bar{\alpha}^{iT} \bar{\varphi}$, а произведения $\bar{\theta}^{iT} \bar{\varphi}$ можно рассматривать, как статистические приближения для f_i . По близость двух

* На практике мы их заменим достаточно точными и надежными оценками $\hat{\alpha}^i$.

функция f и g , определенных на P , естественно выразить при помощи интеграла $\int_P (f(s,t) - g(s,t))^2 ds dt$.

Итак, классификацию неизвестных векторов $\vec{\theta}$ теперь будем производить по следующему правилу: вектор $\vec{\theta}$ классифицируется, как изображение Ω'_i , тогда и только тогда, когда

$$\min_j \rho(\vec{\theta}, \vec{z}^j) = \rho(\vec{\theta}, \vec{z}^i). \quad (10)$$

Очевидно, возможны случаи, когда $\min_j \rho(\vec{\theta}, \vec{z}^j) = \rho(\vec{\theta}, \vec{z}^i) = \rho(\vec{\theta}, \vec{z}^{i'})$, $i \neq i'$. Тогда правило классификации векторов $\vec{\theta}$, задаваемое соотношением (10) должно быть дополнено некоторым искусственным соглашением. Например, в качестве порядкового номера образа Ω'_i , к которому мы относим $\vec{\theta}$, считается наименьшее (или наибольшее) значение i , удовлетворяющее условию (10). Поскольку такого рода случаи в пространстве E^{k+1} образуют множество точек меры нуль, то в дальнейшем они в расчет не принимаются.

Теорема I. Все точки T , координатные вектора $\vec{\theta}$, которых удовлетворяют неравенству

$$\rho(\vec{\theta}, \vec{z}^i) < \rho(\vec{\theta}, \vec{z}^j) \quad (11)$$

лежат по одну сторону от некоторой гиперплоскости в пространстве E^{k+1} .

Доказательство. Зафиксируем пару индексов (i, j) и предположим, что рассматривается вектор $\vec{\theta}$, удовлетворяющий условию (11). Тогда, согласно равенству (8), вектор $\vec{\theta}$ удовлетворяет неравенству

$$\int_P (\vec{\theta}^T \vec{\varphi}(s,t) - \vec{z}^i{}^T \vec{\varphi}(s,t))^2 ds dt - \int_P (\vec{\theta}^T \vec{\varphi}(s,t) - \vec{z}^j{}^T \vec{\varphi}(s,t))^2 ds dt < 0 \quad (12)$$

Так как для любого l , $l = 0, 1, \dots, k$,

$$\int_P (\vec{\theta}^T \vec{\varphi}(s,t) - \vec{z}^l{}^T \vec{\varphi}(s,t))^2 ds dt = \int_P \vec{\theta}^T \vec{\varphi}(s,t) \vec{\varphi}^T(s,t) \vec{\theta} ds dt - 2 \int_P \vec{\theta}^T \vec{\varphi}(s,t) \vec{\varphi}^T(s,t) \vec{z}^l ds dt + \int_P \vec{z}^l{}^T \vec{\varphi}(s,t) \vec{\varphi}^T(s,t) \vec{z}^l ds dt,$$

то неравенство (12) может быть преобразовано к виду

$$\int_P \vec{\theta}^T \vec{\varphi}(s,t) \vec{\varphi}^T(s,t) \vec{z}^i ds dt - \int_P \vec{\theta}^T \vec{\varphi}(s,t) \vec{\varphi}^T(s,t) \vec{z}^j ds dt > > \frac{1}{2} \int_P \vec{z}^i{}^T \vec{\varphi}(s,t) \vec{\varphi}^T(s,t) \vec{z}^i ds dt - \int_P \vec{z}^j{}^T \vec{\varphi}(s,t) \vec{\varphi}^T(s,t) \vec{z}^j ds dt. \quad (13)$$

В силу того, что $\int_P \varphi_q(s,t) \varphi_p(s,t) ds dt$ существует для любой пары индексов (q, p) , мы можем определить симметричную

матрицу $A_{K+1, K+1} = (a_{gh})$, положив

$$a_{gh} = \int_P \varphi_g(s, t) \varphi_h(s, t) ds dt. \quad (14)$$

Если учесть, что $\bar{\theta}^T \bar{\varphi}(s, t) \bar{\varphi}^T(s, t) \bar{\alpha}^i = \bar{\alpha}^{i^T} \bar{\varphi}(s, t) \bar{\varphi}^T(s, t) \bar{\theta}$ и $\bar{\theta}^T \bar{\varphi}(s, t) \bar{\varphi}^T(s, t) \bar{\alpha}^j = \bar{\alpha}^{j^T} \bar{\varphi}(s, t) \bar{\varphi}^T(s, t) \bar{\theta}$, то из соотношений (13) и (14) можно вывести неравенство (15):

$$(\bar{\alpha}^{i^T} - \bar{\alpha}^{j^T}) A_{K+1, K+1} \bar{\theta} > \frac{1}{2} (\bar{\alpha}^{i^T} - \bar{\alpha}^{j^T}) A_{K+1, K+1} (\bar{\alpha}^i + \bar{\alpha}^j). \quad (15)$$

Полученное неравенство (15) показывает, что каждая точка T пространства E^{K+1} , вектор координат $\bar{\theta}$ которого удовлетворяет неравенству (15), лежит по одну сторону от гиперплоскости, задаваемой уравнением

$$(\bar{\alpha}^i - \bar{\alpha}^j)^T A_{K+1, K+1} \bar{\theta} - \frac{1}{2} (\bar{\alpha}^i - \bar{\alpha}^j)^T A_{K+1, K+1} (\bar{\alpha}^i + \bar{\alpha}^j) = 0. \quad (16)$$

Формула (15) может быть использована также для подсчета вероятности принятия неправильного решения, когда заранее известно, что вектор $\bar{\theta}$ индуцируется либо образом Ω_i^1 , либо Ω_j^1 . Для этой цели вектор $\bar{\theta}$ в соотношении (15) следует интерпретировать, как случайный. Наше решение относительно конкретного значения случайного вектора $\bar{\theta}$ будет ошибочным (в смысле неверного распознавания образов) в двух ситуациях: 1) налицо образ Ω_i^1 , но представляющий его случайный вектор $\bar{\theta}^i$ индуцирует значение $\bar{\theta}$, не удовлетворяющее условию (15); 2) налицо образ Ω_j^1 , но представляющий его случайный вектор $\bar{\theta}^j$ индуцирует значение $\bar{\theta}$, удовлетворяющее условию (15). Значит, мы должны рассматривать два случайных события:

$$U_1 = \{(\bar{\alpha}^i - \bar{\alpha}^j)^T A_{K+1, K+1} \bar{\theta}^i \leq \frac{1}{2} (\bar{\alpha}^i - \bar{\alpha}^j)^T A_{K+1, K+1} (\bar{\alpha}^i + \bar{\alpha}^j)\} \quad \text{и}$$

$$U_2 = \{(\bar{\alpha}^i - \bar{\alpha}^j)^T A_{K+1, K+1} \bar{\theta}^j > \frac{1}{2} (\bar{\alpha}^i - \bar{\alpha}^j)^T A_{K+1, K+1} (\bar{\alpha}^i + \bar{\alpha}^j)\}.$$

Средняя вероятность принятия ошибочного решения P_e тогда вычисляется по формуле

$$P_e = P_i P(U_1) + P_j P(U_2). \quad (17)$$

Легко сообразить, что оценка величины $P(U_1)$ и $P(U_2)$ требует знания средних и дисперсий случайных величин Z_1 и Z_2 , где

$$Z_1 = (\bar{\alpha}^i - \bar{\alpha}^j)^T A_{K+1, K+1} \bar{\theta}^i \quad (18)$$

$$Z_2 = (\bar{\alpha}^i - \bar{\alpha}^j)^T A_{K+1, K+1} \bar{\theta}^j. \quad (19)$$

3. Оценка надежности классификатора

Для упрощения записи ряда формул мы в дальнейшем вместо $\Lambda_{k+1, k+1}$ будем писать A . Тогда, принимая во внимание нормальную распределенность вектора $\bar{\theta}^i$ (соответственно $\bar{\theta}^j$) и формулы (4) и (5), мы можем утверждать, что Z_1 и Z_2 являются нормально распределенными случайными величинами, средние значения и дисперсии которых задаются равенствами:

$$EZ_1 = (\bar{x}^i - \bar{x}^j)^T A \bar{x}^i$$

$$EZ_2 = (\bar{x}^i - \bar{x}^j)^T A \bar{x}^j$$

$$DZ_1 = DZ_2 = (\bar{x}^i - \bar{x}^j)^T A M^{-1} A (\bar{x}^i - \bar{x}^j) \sigma^2.$$

Теорема 2. Если классификатор изображений $\bar{\theta} \in E^{k+1}$, индуцируемых образами Ω_i и Ω_j , работает по методу эталонов при интегральной метрике, то ненадежность классификатора P_e , т.е. средняя вероятность неправильной классификации изображений определяется формулой

$$P_e = \Phi\left(-\frac{1}{2} d(\bar{x}^i, \bar{x}^j)\right),$$

где $d(\bar{x}^i, \bar{x}^j) = \frac{(\bar{x}^i - \bar{x}^j)^T A (\bar{x}^i - \bar{x}^j)}{\sqrt{(\bar{x}^i - \bar{x}^j)^T A M^{-1} A (\bar{x}^i - \bar{x}^j) \sigma^2}}$, а Φ - функция распределения стандартно-нормальной случайной величины.

Доказательство. Из определения случайных величин Z_1 и Z_2 следует, что

$$U_1 = \{Z_1 \leq \frac{1}{2}(\bar{x}^i - \bar{x}^j)^T A (\bar{x}^i + \bar{x}^j)\} \quad \text{и}$$

$$U_2 = \{Z_2 > \frac{1}{2}(\bar{x}^i - \bar{x}^j)^T A (\bar{x}^i + \bar{x}^j)\}.$$

Значит,

$$P(U_1) = P\left\{\frac{Z_1 - EZ_1}{\sqrt{DZ_1}} \leq \frac{\frac{1}{2}(\bar{x}^i - \bar{x}^j)^T A (\bar{x}^i + \bar{x}^j) - EZ_1}{\sqrt{DZ_1}}\right\} \quad (20)$$

$$P(U_2) = P\left\{\frac{Z_2 - EZ_2}{\sqrt{DZ_2}} > \frac{\frac{1}{2}(\bar{x}^i - \bar{x}^j)^T A (\bar{x}^i + \bar{x}^j) - EZ_2}{\sqrt{DZ_2}}\right\} \quad (21)$$

Так как случайные величины $(Z_1 - EZ_1)/\sqrt{DZ_1}$ и $(Z_2 - EZ_2)/\sqrt{DZ_2}$ распределены по стандартно-нормальному закону, то из (17),

(20) и (21) следует, что

$$P_e = p_i \Phi\left(\frac{\frac{1}{2}(\vec{x}^i - \vec{x}^j)^T A (\vec{x}^i + \vec{x}^j) - E \mathcal{Z}_1}{\sqrt{\mathcal{D} \mathcal{Z}_1}}\right) +$$

$$+ p_j \left(1 - \Phi\left(\frac{\frac{1}{2}(\vec{x}^i - \vec{x}^j)^T A (\vec{x}^i + \vec{x}^j) - E \mathcal{Z}_2}{\sqrt{\mathcal{D} \mathcal{Z}_2}}\right)\right). \quad (22)$$

Если теперь учесть выражение для $E \mathcal{Z}_s$ и $\mathcal{D} \mathcal{Z}_s$, $s=1,2$, то формула (22) может быть преобразована к виду

$$P_e = p_i \Phi\left(-\frac{\frac{1}{2}(\vec{x}^i - \vec{x}^j)^T A (\vec{x}^i - \vec{x}^j)}{\sqrt{(\vec{x}^i - \vec{x}^j)^T A M^{-1} A (\vec{x}^i - \vec{x}^j) \sigma^2}}\right) +$$

$$+ p_j \left(1 - \Phi\left(\frac{\frac{1}{2}(\vec{x}^i - \vec{x}^j)^T A (\vec{x}^i - \vec{x}^j)}{\sqrt{(\vec{x}^i - \vec{x}^j)^T A M^{-1} A (\vec{x}^i - \vec{x}^j) \sigma^2}}\right)\right).$$

Поскольку для любого действительного числа c имеет место равенства $1 - \Phi(c) = \Phi(-c)$, то

$$P_e = p_i \Phi\left(-\frac{\frac{1}{2}(\vec{x}^i - \vec{x}^j)^T A (\vec{x}^i - \vec{x}^j)}{\sqrt{(\vec{x}^i - \vec{x}^j)^T A M^{-1} A (\vec{x}^i - \vec{x}^j) \sigma^2}}\right) +$$

$$+ p_j \Phi\left(-\frac{\frac{1}{2}(\vec{x}^i - \vec{x}^j)^T A (\vec{x}^i - \vec{x}^j)}{\sqrt{(\vec{x}^i - \vec{x}^j)^T A M^{-1} A (\vec{x}^i - \vec{x}^j) \sigma^2}}\right) =$$

$$= \Phi\left(-\frac{\frac{1}{2}(\vec{x}^i - \vec{x}^j)^T A (\vec{x}^i - \vec{x}^j)}{\sqrt{(\vec{x}^i - \vec{x}^j)^T A M^{-1} A (\vec{x}^i - \vec{x}^j) \sigma^2}}\right) (p_i + p_j).$$

Если другие образы, кроме Ω_i и Ω_j исключаются из рассмотрения, то-есть их априорные вероятности предполагаются равными нулю, то $p_i + p_j = 1$, и мы окончательно получаем, что

$$P_e = \Phi\left(-\frac{\frac{1}{2}(\vec{x}^i - \vec{x}^j)^T A (\vec{x}^i - \vec{x}^j)}{\sqrt{(\vec{x}^i - \vec{x}^j)^T A M^{-1} A (\vec{x}^i - \vec{x}^j) \sigma^2}}\right).$$

Тем самым теорема 2 доказана.

Легко понять, что надежность классификатора растет с ростом величины $d(\vec{x}^i, \vec{x}^j)$, то-есть $P_e \rightarrow 0$, когда $d(\vec{x}^i, \vec{x}^j) \rightarrow \infty$. Вопрос, однако, заключается в том, существуют ли вообще контролируемые факторы, повышающие надежность классификатора, построенного по методу эталонов. Разумеется, функциональный вектор $\vec{\Psi}$ должен быть образован из независимой системы функций $\Psi_j, j=0,1,\dots,K$. В ряде случаев $\vec{\Psi}$ строится таким образом, чтобы матрица A была диагональной. Хотя это считается ценным свойством вектора $\vec{\Psi}$ (соот-

ответственно матрицы A). значение $d(\bar{x}^i, \bar{x}^j)$ от этого почти не зависит. Главный фактор, влияющий на $d(\bar{x}^i, \bar{x}^j)$, входит в его выражение неявным образом. При помощи приближенного анализа убедимся в том, что решающее влияние на $d(\bar{x}^i, \bar{x}^j)$ оказывает структура и мощность экспериментального плана R .

Предположим, что базисные функции φ_j непрерывно дифференцируемы на P . Тогда экспериментальный план R может быть построен с любой наперед заданной мощностью n , $n = \mu\gamma$, удовлетворяющей следующему условию: каждая точка $(s, t) \in R$ принадлежит одному и только одному из μ прямоугольников, на которые $\mu-1$ горизонталями и $\gamma-1$ вертикалями разбивается прямоугольник P . Если все n прямоугольники конгруэентны между собой, то их стороны соответственно равны $\frac{b-a}{\mu}$ и $\frac{d-c}{\gamma}$. При достаточно больших значениях μ и γ имеет место приближенное равенство

$$\sum_{u=1}^n \varphi_j(s_u, t_u) \varphi_\ell(s_u, t_u) \Delta x \Delta y \approx \int_P \varphi_j(s, t) \varphi_\ell(s, t) ds dt,$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{\mu}, \quad \Delta y = \frac{d-c}{\gamma}.$$

Значит, при достаточно больших значениях μ и γ будем иметь:

$$\frac{\mu(P)}{n} M \approx A, \quad (23)$$

$$\mu(P) = (b-a)(d-c).$$

Принимая во внимание соотношение (23), $d(\bar{x}^i, \bar{x}^j)$ может быть преобразовано к виду

$$\begin{aligned} d(\bar{x}^i, \bar{x}^j) &\approx \frac{(\bar{x}^i - \bar{x}^j)^T A (\bar{x}^i - \bar{x}^j) \sqrt{n}}{\sqrt{(\bar{x}^i - \bar{x}^j)^T A (\bar{x}^i - \bar{x}^j)} \mu(P) \sigma^2} = \\ &= \sqrt{\frac{n(\bar{x}^i - \bar{x}^j)^T A (\bar{x}^i - \bar{x}^j)}{\mu(P) \sigma^2}} \end{aligned}$$

Таким образом, для приближенного вычисления P_e получаем формулу

$$P_e \approx \bar{\Phi} \left(-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{n(\bar{x}^i - \bar{x}^j)^T A (\bar{x}^i - \bar{x}^j)}{\mu(P) \sigma^2}} \right). \quad (24)$$

Рассмотрим теперь общий случай, т.е. систему образов

$\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m$. Очевидно, решение классификатора по методу эталонов, основанному на и. интегральной метрике, будет ошибочным каждый раз, когда налицо Ω_i^1 , но полученный вектор $\bar{\theta}$ для некоторого $j, j \neq i$ приводит к неравенству

$$(\bar{z}^i - \bar{z}^j)^T A \bar{\theta} \leq (\bar{z}^i - \bar{z}^j)^T A (\bar{z}^i + \bar{z}^j).$$

Зафиксируем i , для любого $j \neq i$ определим случайное событие при помощи соотношения

$$A_j = \{(\bar{z}^i - \bar{z}^j)^T A \bar{\theta}^i > \frac{1}{2} (\bar{z}^i - \bar{z}^j)^T A (\bar{z}^i + \bar{z}^j)\}.$$

Очевидно, правильное решение классификатора изображений при наличии с раза Ω_i^1 имеет место только тогда, когда одновременно реализуются все случайные события $A_j, j \neq i$. Тем самым вероятность принятия неверного решения q_i выразится при помощи равенства

$$q_i = 1 - P\left(\bigcap_{j \neq i} A_j\right). \quad (25)$$

Обозначим через $B = (b_{uv})$ $(m-1) \times (k+1)$ матрицу, строками которой являются вектора $(\bar{z}^i - \bar{z}^j)^T, j=1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, m$, а через $\beta_j, j=1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, m$, величину $\frac{1}{2} (\bar{z}^i - \bar{z}^j)^T A (\bar{z}^i + \bar{z}^j)$. Тогда вероятность правильного решения классификатора при наличии Ω_i^1 выразится следующим образом:

$$P\left(\bigcap_{j \neq i} A_j\right) = P\{BA\bar{\theta}^i > \bar{\beta}_i\}, \quad (26)$$

где $\bar{\beta}_i = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{i-1}, \beta_{i+1}, \dots, \beta_m)^T$.

Если предположить, что ранг BA равен $m-1$, то вектор $\bar{z}^i = BA\bar{\theta}^i$ будет нормально распределенным $m-1$ -мерным случайным вектором с параметрами $E\bar{z}^i = BA\bar{z}^i$ и

$$D\bar{z}^i = BAMB^{-1}AB^T\sigma^2.$$

Значит, в этом случае (см. форм. (25), (26)) для вычисления

q_i получаем формулу

$$q_i = 1 - P\{\bar{z}^i > \bar{\beta}_i\}, \quad (27)$$

сводящую процедуру вычисления к интегрированию функции плотности вектора \bar{z}^i .

Библиографический список

1. Прэтт У. Цифровая обработка изображений.-М., 1962.
2. Математическая теория планирования эксперимента // Под ред. С.М.Ермакова.-М., 1983.
3. Фукунага К. Введение в статистическую теорию распознавания образов.-М., 1979.
4. Андерсон Г. Введение в многомерный статистический анализ.-М., 1963.
5. Гу Дх., Гонсалес Р. Принципы распознавания образов.-М., 1978.

A. Lorenz. Statistical properties of integral approach of prototypes.

Summary. The problem of statistical pattern recognition is solved using the approach of prototypes in the case when the space of images consists of continuous functions representable as a linear combination of the finite number of basis functions. Investigated is the structure of decision rules under the condition that the image distance to the prototype is characterized by an integral taken over the square of their difference. A formula for calculating the probability of taking an erroneous decision is derived.

A. Lorenz. Integrālā etalonmetodes statistiskās īpašības.

Anotācija. Risināts statistisku tēlu pazīšanas uzdevums, gadījumā, kad attēlu telpa sastāv no nepārtrauktām funkcijām, kuras izsakāmas kā lineāras kombinācijas no galīga skaita bāziskām funkcijām. Pētīta lēmumkārtošanas struktūra pie nosacījuma, ka attēla distance līdz etalonam raksturojas ar integrāli no atbilstošo funkciju starpības kvadrāta. Izvesta formula kļūdaina lēmuma varbūtības izskaitļošanai.

Кафедра математического анализа
Латвийский университет
бульв. Райниса, 19
E26098 Рига

ON THE STABILITY OF LINEAR IMPULSIVE SYSTEMS

WITH MARKOV'S COEFFICIENTS

I. Ivaniv, V. Tsarkova

Summary. The asymptotic stability properties of the solutions of linear differential equations with Markov's coefficients and Markov's impulsive perturbations are studied. Necessary and sufficient conditions of exponential stability in the mean square are received. AMS Subject classifications 519.21.

Consider a linear differential equation in R^n

$$\frac{dx}{dt} = A(\xi(t))x \quad (1)$$

where $\{\xi(t), t \geq 0\}$ is a homogeneous Feller's Markov's process on the compact Y , $\{A(y), y \in Y\}$ is a continuous on Y matrix function with values in $M_n(R)$. If we denote $\{X(t, \tau), t \geq \tau \geq 0\}$ matrix solution (1) satisfying the conditions $X(\tau, \tau) = I$, where I is a unit from $M_n(R)$, then the solution of Cauchy's problem

$$x(t_0) = x_0 \quad (2)$$

for (1) with all $t \geq t_0 \geq 0$ may be written in the form $X(t, t_0)x_0$. This solution can be considered [1] as the first component of homogeneous Markov's process $\{x(t), \xi(t), t \geq 0\}$ with an infinitesimal operator

$$\begin{aligned} (Lf)(x, y) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [E_{x, y}^{(0)}(f(X(t, 0)x, y(t))) - f(x, y)] = \\ &= (A(y)x, (\nabla_x f)(x, y)) + (L^{(y)}f)(x, y) \end{aligned}$$

where $\nabla_x f$ is a vector consisted of partial derivatives of the function f on the coordinates of the vector $x \in R^n$, and the operator $L^{(y)}$ is an infinitesimal operator of Markov's process $\{y(t)\}$ and is applied to the function $f(x, y)$ with respect to the second argument.

Define impulsive disturbances of the equation (1) as the sequence of the relations

$$x(t_k + 0) \stackrel{\text{def}}{=} x(t_k) = R(\eta_k) x(t_k^-), \quad k \in N, \quad (3)$$

where $t_k = k\Delta + t_0$, $\Delta > 0$, $(\eta_k, k \in N)$ is homogeneous Feller's Markov's chain on the compact H , $(R(h), h \in H)$ is continuous matrix functions with values in $M_n(R)$. This definition corresponds to the ideas and the methods of the monographs [2,3]. Now we may agree that the solution of Cauchy's problem (2) for the impulsive system (1)-(2) is a vector function $(x(t), t \geq t_0)$ satisfying: 1) the differential equation (1) on the intervals (t_{k-1}, t_k) , $k \in N$; 2) the initial condition (2); 3) the condition (3) in the points $t_k = k\Delta + t_0$, $k \in N$. Further everywhere this solution is denoted by $x(t, t_0, x_0)$. It is clear that probabilistic characteristics of the solution (1)-(2)-(3) with determinant initial data x_0 are completely defined by joint probabilistic characteristics of Markov's process $(\xi(t), t \geq 0)$ and Markov's chain $(\eta_k, k \in N)$, as well as the distribution of the pair $(\xi(0), \eta_0)$. Further everywhere we suppose that $(\eta_k, k > 0)$ does not depend on $(\xi(t), t \geq 0)$.

We shall call the impulsive system (1)-(3) exponentially p -stable if there exist such positive numbers M and γ , that with any $y \in Y$, $h \in H$, $x_0 \in R^n$ and $t \geq t_0 > 0$ the inequality

$$E_{y,h}^{(t_0)} \{ |x(t, t_0, x_0)|^p \} \leq M e^{-\gamma(t-t_0)} |x_0|^p \quad (4)$$

is fulfilled.

Here and then the indices t_0, y, h of the mathematical expectation or probability mean that $\xi(t_0) = y$, $\eta_0 = h$. It should be noted that 2-stability is usually called the stability in the mean square (see, f.ex., [4]).

We shall call the impulsive system (1)-(3) uniformly stochastically stable if for any $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ can be shown such $\delta > 0$ that the inequality

$$P_{y,h}^{(t_0)} \left\{ \sup_{t \geq t_0} |x(t, t_0, x_1)| < \varepsilon_2 \right\} < \varepsilon_1 \quad (5)$$

for all $t \geq t_0 > 0$, $y \in Y$, and $h \in H$ follows from $|x_1| < \delta$.

Besides that if with all $t \geq t_0 > 0$ and $\varepsilon > 0$ the relation

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{y \in Y, h \in H} P_{y,h}^{(t_0)} \{ |x(t, t_0, x)| > \varepsilon \} = 0 \quad (6)$$

is fulfilled, the system (1)-(5) will be called uniformly asymptotically stochastically stable.

For measurable function $V: R^n \times Y \times H \rightarrow R^1$ let us define the operator

$$(LV)(x, y, h) = E_{y, h}^{(t_0)} \left\{ V(R(\eta_1)X(t_1, t_0), \xi(t_1), \eta_1) \right\} - V(x, y, h) \quad (7)$$

if the indicated mathematical expectation exists with all $x \in R^n$, $y \in Y$ and $h \in H$. Because of homogeneity of Markov's process $(\xi(t))$ and (η_k) in the formula (7) we can substitute simultaneously $t_0, X(t_1, t_0), \xi(t_1)$ and η_1 respectively for $t_{k-1}, X(t_k, t_{k-1}), \xi(t_k)$ and η_k with any $k \in N$. The operator L will be called Lyapunov's difference due to (1)-(3).

Theorem 1. The impulsive system (1)-(3) exponentially p -stable with $p > 0$ if and only if there exists the continuous function $V(x, y, h)$ satisfying the conditions

$$|x|^p \leq V(x, y, h) \leq c_1 |x|^p \quad (8)$$

$$(LV)(x, y, h) \leq -c_2 |x|^p \quad (9)$$

with some $c_1 > 0$, $c_2 \in (0, 1)$ and all $x \in R^n$, $y \in Y$, $h \in H$.

Proof. For the sake of brevity denote $X_{k-1}^k = R(\eta_k)X(t_k, t_{k-1})$, $k \in N$ and agree to consider $X_k^k \stackrel{\text{def}}{=} I$. Then for the solution (1)-(3) with all integers $k \geq 0$ and $s \geq 0$ it is possible to write the equality

$$X(t_{k+s}, t_s, x) = X_{k+s-1}^{k+s} X_{k+s-2}^{k+s-1} \dots X_s^{s+1} X_s^s x$$

Let the conditions (8) and (9) be fulfilled. We shall define the functions

$$V_k(x, y, h) = E_{y, h}^{(t_s)} \left\{ |X(t_{k+s}, t_s, x)|^p \right\} \quad (10)$$

with $k \geq 0$, where s is arbitrary whole nonnegative number. If the condition (4) is fulfilled, then the function

$$V(x, y, h) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} V_k(x, y, h) \quad (11)$$

satisfies the condition (8), because $V_0(x, y, h) = |x|^p$. Having placed $s=1$ in (10) with every integer $k \geq 0$ it is possible to write

$$\begin{aligned} (LV_k)(x, y, h) &= E_{y, h}^{(t_0)} \left\{ V_k(X_0^1 x, \xi(t_1), \eta_1) \right\} - V_k(x, y, h) = \\ &= E_{y, h}^{(t_0)} \left\{ E_{\xi(t_1), \eta_1}^{(t_1)} \left\{ |X(t_{k+1}, t_1, X_0^1 x)|^p \right\} \right\} - V_k(x, y, h) = \end{aligned}$$

$$= E_{y,h}^{(t_0)} \left\{ E_{\xi(t_1), \eta_1}^{(t_1)} \left[|X_{t_1}^{k+1} \dots X_{t_1}^2 X_{t_1}^1 X_{t_1}^0|^p \right] \right\} - V_k(x, y, h) = \\ = V_{k+1}(x, y, h) - V_k(x, y, h)$$

Thus for V from (11) the equality

$$(LV)(x, y, h) = \sum_{k=0}^{\infty} (LV_k)(x, y, h) = -V_0(x, y, h) = -|x|^p \quad (12)$$

takes place and the necessity of the conditions (8)-(9) for exponential p -stability (1)-(3) has been proved.

Let us prove the sufficiency of the conditions (8)-(9). Due to the homogeneity of Markov's processes $\{\xi(t)\}$ and $\{\eta_k\}$ we have

$$E_{y,h}^{(t_0)} \{V(x(t_k, t_0, x), \xi(t_k), \eta_k)\} = \\ = E_{y,h}^{(t_0)} \left\{ E_{\xi(t_{k-1}), \eta_{k-1}}^{(t_{k-1})} \left\{ (V(X_{t_{k-1}}^k x(t_{k-1}, t_0, x), \xi(t_k), \eta_k)) \right\} \right\} = \\ = E_{y,h}^{(t_0)} \left\{ (LV)(x(t_{k-1}, t_0, x), \xi(t_{k-1}), \eta_{k-1}) \right\} + \\ + E_{y,h}^{(t_0)} \left\{ V(x(t_{k-1}, t_0, x), \xi(t_{k-1}), \eta_{k-1}) \right\}.$$

Now we can use the inequalities (8) and (9):

$$(LV)(x, y, h) \leq -c_2 |x|^p \leq -V(x, y, h) \frac{c_2}{c_1}$$

and from the previous relation obtain the estimate

$$E_{y,h}^{(t_0)} \left\{ V(x(t_k, t_0, x), \xi(t_k), \eta_k) \right\} \leq \\ \leq \left(1 - \frac{c_2}{c_1}\right) E_{y,h}^{(t_0)} \left\{ V(x(t_{k-1}, t_0, x), \xi(t_{k-1}), \eta_{k-1}) \right\}, \text{ i.e.} \\ E_{y,h}^{(t_0)} \left\{ |x(t_k, t_0, x)|^p \right\} \leq E_{y,h}^{(t_0)} \left\{ V(x(t_k, t_0, x), \xi(t_k), \eta_k) \right\} \leq \\ \leq \left(1 - \frac{c_2}{c_1}\right)^k V(x, y, h) \leq c_1 \left(1 - \frac{c_2}{c_1}\right)^k |x|^p$$

for all $k \in \mathbb{N}$. Since $\left(1 - \frac{c_2}{c_1}\right) \in (0, 1)$ and with all $t = (t_k, t_{k-1})$, $k \in \mathbb{N}$ the inequality

$$|x(t, t_k, x(t_k, t_0, x))| \leq \exp \left(\Delta \sup_{y \in Y} |A(y)| \right) |x(t_k, t_0, x)|,$$

takes place, the inequality (4) for the solutions (1)-(3) has been proved.

Let us formulate two obvious corollaries from the proof of Theorem 1.

Corollary 1. The impulsive system (1)-(3) is exponentially p -stable if and only if there exists the function (11) i.e.

$$V(x, y, h) = \sum_{k=0}^{\infty} E_{y, h}^{(t_0)} \left\{ |x(t_k, t_0, x)|^p \right\} \quad (13)$$

Corollary 2. The impulsive system (1)-(3) is exponentially stable in the mean square if and only if there exists positively defined quadratic form

$$V(x, y, h) \stackrel{\text{def}}{=} (q(y, h)x, x) \quad (14)$$

such that due to the system (1)-(3) the difference is negatively defined quadratic form

$$(LV)(x, y, h) = -|x|^2 \quad (15)$$

for all $y \in Y$ and $h \in H$.

The proof follows from the definition of the function $V(x, y, h)$ (10)-(11) in the case $p=2$ and the equality (12). Consider asymptotic stochastic stability.

Theorem 2. If the impulsive system (1)-(3) is exponentially p -stable with some $p > 0$, then it is uniformly asymptotically stochastically stable.

Proof. For any $k \in \mathbb{N}$ from the continuity $A(y)$ and compactness Y the inequality

$$\sup_{t_k \leq t < t_{k+1}} |x(t, t_0, x)|^p \leq |x(t_k, t_0, x)|^p c \quad \text{follows, where}$$

$c = \exp(p \Delta \sup_{y \in Y} |A(y)|)$. Therefore from Chebyshev's inequality

$$P_{y, h}^{(t_0)} \left\{ \sup_{t \geq t_0} |x(t, t_0, x)| > \varepsilon \right\} \leq P_{y, h}^{(t_0)} \left\{ \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{c |x(t_k, t_0, x)|^p > \varepsilon^p\} \right\} \leq$$

$$\varepsilon^{-p} \sum_{k=1}^{\infty} E_{y, h}^{(t_0)} \left\{ c^k |x(t_k, t_0, x)|^p \right\} \leq cM \varepsilon^{-p} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\gamma(k-1)\Delta} |x|^p =$$

$$= \frac{Mc|x|^p}{\varepsilon^p(1-e^{-\Delta\gamma})}$$

there exists the inequality (5) with $\delta = \frac{\varepsilon^{p+1}(1-e^{-\Delta\gamma})}{Mc}$.

Let $k(T)$ be a whole part $\frac{T-t_0}{\Delta}$. Then

$$P_{y, h}^{(t_0)} \left\{ \sup_{t \geq T} |x(t, t_0, x)| > \varepsilon \right\} \leq P_{y, h}^{(t_0)} \left\{ \sup_{t \geq t_{k(T)}} |x(t, t_0, x)| > \varepsilon \right\} \leq$$

$$\leq \sum_{l=1}^{\infty} P_{v,h}^{(t_0)} \left\{ \sup_{k \leq l+1} |X(t_k, t_0, X)|^p > \varepsilon^p \right\} \leq$$

$$\leq \varepsilon^p \sum_{l=k(T)}^{\infty} P_{v,h}^{(t_0)} \left\{ |X(t_l, t_0, X)|^p \right\} \leq \frac{CM |X_0|^p e^{-\gamma k(T)\Delta}}{(1-e^{-\gamma\Delta}) \varepsilon^p} \rightarrow 0$$

with $T \rightarrow \infty$ and the theorem is proved.

Theorem 2. If the impulsive system (1)-(3) is uniformly asymptotically stochastically stable then it is exponentially p -stable with sufficiently small positive p .

Proof. We shall use the methods of proving the similar result from Chapter VI of the monograph [1]. Choose $\alpha > 0$ great enough so that with all $h \in H$ and $k \in N$ the inequality

$$\sup_{t_{k-1} < t \leq t_k} |R(h)X(t, t_{k-1})| \leq 2^\alpha$$

be fulfilled and denote $S_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < |x| \leq 1\}$,

$$S_k = \{x \in \mathbb{R}^n : 2^{-(k-1)\alpha} < |x| \leq 2^{k\alpha}\}, \quad k \in N.$$

Let t_k be a moment of the first getting of the points $X(t_n, t_0, X)$ in the set S_k , $n \in N$, $k \in N$. Then in order that the event

$$A_k(X) = \left\{ \sup_{n \in N} |X(t_n, t_0, X)| > 2^{(k+1)\alpha} \right\}$$

with $t \in S_0$ and $k \in N$ should take place it is necessary that the event $t_k = t_1$ with $l \in N$ should take place and then

$$\left(\sup_{n \in N} |X(t_{n+1}, t_1, X(t_1, t_0, X))| > 2^{(k+1)\alpha} \right).$$

Therefore with $t \in S_0$

$$P_{v,h}^{(t_0)} \left\{ \sup_{n \in N} |X(t_n, t_0, X)| > 2^{(k+1)\alpha} \right\} =$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty} \int \int P_{v,h}^{(t_0)} (t_k = t_l, \xi(t_l) \in dy_1, \eta_2 \in \mathcal{H}_1) \cdot$$

$$\cdot P_{v_1, h_1}^{(t_1)} \left\{ \sup_{n \in N} |X(t_{n+1}, t_1, X(t_1, t_0, X))| >$$

$$> 2^{(k+1)\alpha}, X(t_1, t_0, X) \in S_k \right\} \leq$$

$$\leq \sup_{\nu, \epsilon Y, h, \epsilon H} P_{\nu, h}^{(t_0)} \left\{ \sup_{n \in \mathbb{N}} |x(t_n, t_0, x)| > 2^{(k+1)\alpha} \right\} > 2^{(k+1)\alpha} \sup_{\nu, \epsilon Y, h, \epsilon H} \sum_{l=1}^{\alpha} P_{\nu, h}^{(t_0)} \{ \tau_k = t_l \}. \quad (16)$$

Due to the obvious equality $x(t_n, t_0, x) = |x| x(t_n, t_0, \frac{x}{|x|})$ for any $x \neq 0$ it can be stated that

$$\sup_{\nu, \epsilon Y, h, \epsilon H} P_{\nu, h}^{(t_0)} \left\{ \sup_{n \in \mathbb{N}} |x(t_n, t_0, x)| > 2^{(k+1)\alpha} \right\} = \sup_{\nu, \epsilon Y, h, \epsilon H} P_{\nu, h}^{(t_0)} \left\{ \sup_{n \in \mathbb{N}} |x(t_n, t_0, x)| > 1 \right\}$$

By using the definition of uniform stochastic stability make the number mentioned above less than $\frac{1}{2}$ by increasing α . Now from (16) for

$$c_k \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\nu \in Y, h \in H, |x| \leq 1} P_{\nu, h}^{(t_0)} \left\{ \sup_{n \in \mathbb{N}} |x(t_n, t_0, x)| > 2^{ka} \right\}$$

we can write the inequality

$$c_{k+1} \leq \frac{1}{2} \sup_{\nu \in Y, h \in H, |x| \leq 1} P_{\nu, h}^{(t_0)} \left\{ \tau_k < \alpha \right\} = \frac{1}{2} c_k, \quad k \in \mathbb{N}$$

i.e. $c_k \leq \frac{1}{2^k}$. Let $p \in (0, \frac{1}{\alpha})$ be. Then

$$\sup_{\nu \in Y, h \in H, |x|=1} E_{\nu, h}^{(t_0)} \left\{ \sup_{n \in \mathbb{N}} |x(t_n, t_0, x)|^p \right\} \leq \sum_{k=1}^{\alpha} 2^{pk\alpha} \sup_{\nu \in Y, h \in H, |x|=1} P_{\nu, h}^{(t_0)} \left\{ A_k(x) \right\} \leq \sum_{k=1}^{\alpha} 2^{pk\alpha} 2^{-(k-1)} = K(p)$$

and therefore with all $x \neq 0, y \in Y, h \in H$ the inequality

$$E_{\nu, h}^{(t_0)} \left\{ \sup_{n \in \mathbb{N}} |x(t_n, t_0, x)|^p \right\} \leq |x|^p K(p)$$

takes place. The sequence

$$E_{y,h}^{(t_0)} \left\{ |X(t_m, t_0, X)|^p \right\}$$

with $m \rightarrow \infty$ uniformly aims at zero according to $y \in Y$ and $h \in H$, it follows from Lebesgue's theorem and uniform asymptotic stochastic stability of the impulsive system (1)-(5). Hence it is not difficult to make sure that for every $\gamma \in (0, 1)$ there exists such number m_0 with which the inequality

$$\sup_{\substack{|\tau|=1 \\ y \in Y, h \in H}} E_{y,h}^{(t_1)} \left\{ |X(t_{m_0+\tau}, t_1, X)|^p \right\} < \gamma$$

or

$$\sup_{y \in Y, h \in H} E_{y,h}^{(t_1)} \left\{ |X(t_{m_0+\tau}, t_1, X)|^p \right\} < \gamma |X|^p$$

takes place with all $X \in \mathbb{R}$ and any $\tau \geq 0$. Now we can write the inequality

$$\begin{aligned} & E_{y,h}^{(t_0)} \left\{ |X(t_{(k+1)m_0}, t_0, X)|^p \right\} = \\ & = E_{y,h}^{(t_0)} \left\{ E_{t_{km_0}, \eta_{km_0}}^{(t_{km_0})} \left\{ |X(t_{(k+1)m_0}, t_{km_0}, X(t_{km_0}, t_0, X))|^p \right\} \right\} \leq \\ & \leq \gamma E_{y,h}^{(t_0)} \left\{ |X(t_{km_0}, t_0, X)|^p \right\} \end{aligned}$$

and make sure in the correctness of the estimate

$$E_{y,h}^{(t_0)} \left\{ |X(t_{km_0}, t_0, X)|^p \right\} \leq \gamma^k |X|^p \quad (17)$$

for all $X \in \mathbb{R}^m$, $y \in Y, h \in H$ and $k \in \mathbb{N}$. Since with all $l \in \mathbb{N}$, $t_{l-1} \leq t \leq t_l$ and $\xi(t_l) = y$ the inequality

$$|R(k) X(t, t_{l-1})| \leq \varepsilon^\alpha$$

takes place uniformly with respect to $h \in H$ and $y \in Y$, then

$$\sup_{t_0(k-1) \leq t \leq t_0 k} |x(t, t_0, x)| \leq 2^{m_0 \alpha} |x(t_{m_0}, t_0, x)|$$

and from the estimate (17) it follows that the p -moment of the solution (1)-(3) is tending exponentially to zero uniformly with respect to $y \in Y$ and $h \in H$. The theorem is proved

References.

1. Дынкин Е.Б. Марковские процессы. - М.: Физматгиз, 1963. - 360 с.
2. Халанай А., Екслер Д. Качественная теория импульсных систем. - М.: Мир, 1971. - 307 с.
3. Самойленко А.Н., Перестек Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсными воздействиями. - Киев: Биша школа, 1987. - 288 с.
4. Хасьминский Р.В. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. - М.: Наука, 1969. - 368 с.

Ivaniv I., Čarkova V. Ob ustojčivosti linejnyh impul'snyh sistem s markovskimi koeficientami.

Аннотация. Изучается асимптотическая устойчивость решений линейных дифференциальных уравнений с марковскими коэффициентами при импульсных марковских возмущениях. Получены необходимые и достаточные условия экспоненциальной устойчивости в среднем квадратичном. УДК 619.21.

Ivaniv I., Čarkova V. Par lineāru impulsu sistēmu ar Markova koeficientiem stabilitāti.

Анотācija. Pēta lineāru diferenciālvienādojumu ar Markova koeficientiem atrisinājumu asimptotisko stabilitāti pie impulsu Markova perturbācijām. Iegūti nepieciešamie un pietiekamie nosacījumi eksponenciālajai vidējai kvadratiskajai stabilitātei.

Кафедра дифференциальных уравнений, Черновицкий Государственный университет
ул. Университетская 1,
224000 Черновик

Кафедра математического анализа,
Латвийский университет
б. Райниса 19,
226050 Рига

ON STOCHASTIC DIFFERENTIAL-DIFFERENCE EQUATIONS

AND THEIR RANDOM INTEGRAL CONTRACTORS

Sv. Janković

Abstract. The object of this paper is to study a class of stochastic differential-difference equations whose solutions are discontinuous processes. More precisely, the existence and uniqueness of solutions of these equations by using a principle of bounded random integral contractor are established.

1. Introduction

The concept of integral contractors has been applied first by Altman ([1]) for studying different classes of deterministic equations in Banach spaces. Later, this idea was extended to analyse special classes of stochastic equations, for example, stochastic differential equations ([3]), random nonlinear operator equations ([4]), random integral equations, etc.

In this paper, using a notion of random integral contractor, we consider a class of stochastic differential-difference equations (shorter SDDE) whose solutions are discontinuous processes. Our main results deal with the problems of existence and uniqueness of solutions and generalise similar results of the paper [6] (in which solutions are continuous processes). In fact, some ideas for a class of stochastic differential equations without delay come from the paper [5], where the author studied a similar problem in a somewhat different context.

In Section 2, we state the assumptions required in the study of the SDDE. Section 3, contains the theorem, the proof and some concluding remarks. The proof is based on the method used in [6].

The paper is presented at the Fifth International Conference on Probability Theory and Math. Statistics, Vilnius 1989.

AMS Subject Classification (1980): 60H10 ; UDK 519.218.1.

2. Preliminaries

Throughout the paper, we suppose that all random variables and processes considered here are defined on a fixed complete probability space (Ω, \mathcal{F}, P) . In general, for a stochastic process $x(t)$, denote by $\mathcal{F}_{u,v}^x$ the least Borel algebra for which $x(t)$ is measurable for every $t \in [u, v]$. Let \mathcal{B} be the Borel algebra on \mathbb{R} and let $\Gamma(A)$, $A \in \mathcal{B}$, be a positive bounded measure on the space $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. In the usual way, denote by $p(t, A) = p([0, t], A)$, $t > 0$, $A \in \mathcal{B}$, a random Poisson measure with a parameter $t \cdot \Gamma(A)$, and by $\tilde{p}(t, A) = p(t, A) - t \cdot \Gamma(A)$ the corresponding centered Poisson measure. For a standard Wiener process $W = \{W(t), t \geq 0\}$, independent of the Poisson measure, let $\mathcal{F}_{0,t}(W, \tilde{p})$ be the least Borel algebra for which $W(s)$ and $\tilde{p}(s, A)$ are measurable for every $s \in [0, t]$. For fixed positive numbers r_1, r_2 and r_3 , denote $\max\{r_1, r_2, r_3\} = r$. Let $g(t)$ be a given real-valued stochastic process defined on $[-r, 0]$ with almost surely right continuous trajectories which have left-hand limits, independent of the Wiener process and random Poisson measure. More precisely, the σ -algebras $\mathcal{F}_{-r,0}(g)$ and $\mathcal{F}_{0,\infty}(W, \tilde{p})$ are independent.

Also, we suppose that the given functions $f_1: [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i=1,2$, and $f_3: [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $T = \text{const} > 0$, are continuous and measurable on corresponding σ -algebras on their domains.

We consider the following SDDE

$$dx(t) = f_1(t, x(t), x(t-r_1))dt + f_2(t, x(t), x(t-r_2))dW(t) + \quad (1)$$

$$\int_{\mathbb{R}} f_3(t, x(t), x(t-r_3), u) \tilde{p}(dt, du), \quad 0 \leq t \leq T,$$

with initial condition

$$x(t) = g(t), \quad -r \leq t \leq 0. \quad (2)$$

A stochastic process $x(t)$ is called a solution of the SDDE (1)-(2) if the σ -algebras $\mathcal{F}_{-r,t}(x) \vee \mathcal{F}_{0,t}(W, \tilde{p})$ are independent for every $t \in [0, T]$ (it means that $x(t)$ is a nonanticipating solution with respect to the Wiener process and random Poisson measure) and the corresponding stochastic integral equation

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f_1(s, x(s), x(s-r_1))ds + \int_0^t f_2(s, x(s), x(s-r_2))dW(s) + \quad (3)$$

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} f_3(s, x(s), x(s-r_3), u) \bar{p}(ds, du), \quad 0 \leq t \leq T,$$

holds almost surely for the given initial condition (2).

From the classical theory of stochastic differential equations (see [2]), it is known that there exists a unique solution of the SDDE (1)-(2) if the drift coefficient $f_1(\cdot)$, the diffusion coefficient $f_2(\cdot)$ and the jump coefficient $f_3(\cdot)$ are Lipschitzian in the second and third argument and satisfy a certain growth condition. In order to generalise these conditions, as in the papers [3] and [6], we introduce the notion of bounded random integral contractor and its regularity.

Let D be the collection of real-valued stochastic processes defined on $[-r, T]$, nonanticipating with respect to W , \bar{p} and g , which trajectories are right continuous and have left-hand limits almost surely.

Suppose $G_1: [-r, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i=1,2$, and $G_3: [-r, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ are bounded Borel functions. For arbitrary x, y in D , denote

$$z(t) = y(t) + \int_0^t G_1(s, x(s)) y(s) ds + \int_0^t G_2(s, x(s)) y(s) dW(s) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_3(s, x(s), u) y(s) \bar{p}(ds, du), \quad (4)$$

Also, let there exists a positive constant K , such that, for all $t \in [0, T]$, the inequalities

$$|f_1(t, x(t)+z(t), x(t-r_1)+z(t-r_1)) - f_1(t, x(t), x(t-r_1))| \leq K(\|y(t)\| + \|y(t-r_1)\|), \quad (5)$$

$$|G_1(t, x(t)) y(t)| \leq K(\|y(t)\| + \|y(t-r_1)\|), \quad i=1,2,$$

$$\int_{\mathbb{R}} |f_3(t, x(t)+z(t), x(t-r_3)+z(t-r_3), u) - f_3(t, x(t), x(t-r_3), u)| \leq K(\|y(t)\| + \|y(t-r_3)\|), \quad (6)$$

$$|G_3(t, x(t), u) y(t)| \leq K(\|y(t)\| + \|y(t-r_3)\|),$$

hold almost surely ($\|y(t)\| = \sup_{s \in [0, t]} |y(s)|$).

Now we can give some definitions.

Definition 2.1. If the conditions (5) and (6) are satisfied, then we say

that the functions f_i , $i=1,2,3$, have a bounded random integral contractor.

Definition 2.2. A bounded random integral contractor is said to be regular if the linear stochastic differential equation (4) has a solution y in D for any x and z in D .

Definition 2.3. A function $h: [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ is said to be stochastically closed, if for any x_n, y_n and x, y in D , such that $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$ and $h(\cdot, x_n(\cdot), y_n(\cdot)) \rightarrow z$ in $L^2([0, T] \times \Omega)$, we have $z(t) = h(t, x(t), y(t))$ for every $t \in [0, T]$ almost surely.

Remark 2.1. If the functions f_i , $i=1,2,3$, are Lipschitzian in the second and third argument, then they are stochastically closed and have a regular bounded random integral contractor with $G_i=0$, $i=1,2,3$.

3. Main result

In this section we establish our main result of the existence and uniqueness of the solution of the SDDE (1)-(2).

Theorem 3.1. If the functions f_i , $i=1,2,3$, in the SDDE (1)-(2) are stochastically closed, have a bounded random integral contractor and for any a, b in \mathbb{R} , $\int_0^T |f_1(t, a, b)| dt < \infty$, $\int_0^T f_2^2(t, a, b) dt < \infty$ and $\int_0^T \int_{\mathbb{R}} f_3^2(t, a, b, u) \Gamma(du) dt < \infty$, then the SDDE (1)-(2) has a solution x in D . Moreover, if the bounded random integral contractor is regular, then the solution x in D is unique almost surely.

Proof. The proof is based in the following iterative procedure. For $n \geq 0$,

$$x_{n+1}(t) = x_n(t) - y_n(t) - \int_0^t G_1(s, x_n(s)) y_n(s) ds - \quad (7)$$

$$\int_0^t G_2(s, x_n(s)) y_n(s) dW(s) - \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_3(s, x_n(s), u) y_n(s) \beta(ds, du), \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$x_0(t) = g(t), \quad t \geq 0,$$

$$x_n(t) = g(t), \quad -r \leq t \leq 0;$$

$$y_n(t) = x_n(t) - x(t) - \int_0^t f_1(s, x_n(s), x_n(s-r_1)) ds - \quad (8)$$

$$\int_0^t f_2(s, x_n(s), x_n(s-r_2)) dW(s) - \int_0^t \int_{\mathbb{R}} f_3(s, x_n(s), x_n(s-r_3), u) p(ds, du), \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$y_n(t) = 0, \quad -r \leq t \leq 0.$$

Using (7) in (8), we find

$$\begin{aligned} y_{n+1}(t) = & \int_0^t [f_1(s, x_n(s), x_n(s-r_1)) - G_1(s, x_n(s))y_n(s) - \\ & f_1(s, x_n(s) - z_n(s), x_n(s-r_1) - z_n(s-r_1))] ds + \\ & \int_0^t [f_2(s, x_n(s), x_n(s-r_2)) - G_2(s, x_n(s))y_n(s) - \\ & f_2(s, x_n(s) - z_n(s), x_n(s-r_2) - z_n(s-r_2))] dW(s) + \\ & \int_0^t \int_R [f_3(s, x_n(s), x_n(s-r_3), u) - G_3(s, x_n(s), u)y_n(s) - \\ & f_3(s, x_n(s) - z_n(s), x_n(s-r_3) - z_n(s-r_3), u)] \bar{p}(ds, du). \end{aligned} \quad (9)$$

If we apply the basic properties of the stochastic integrals (see [2]),

$$\begin{aligned} E\left\{\int_0^t f(s) ds\right\}^2 & \leq T \int_0^t E\{f^2(s)\} ds, \quad E\left\{\int_0^t f(s) dW(s)\right\}^2 = \int_0^t E\{f^2(s)\} ds \quad \text{and} \\ E\left\{\int_0^t \int_R f(s, u) \bar{p}(ds, du)\right\}^2 & = \int_0^t \int_R E\{f^2(s, u)\} \bar{p}(du) ds, \quad \text{and from the conditions (5)} \\ \text{and (6), we have finally} \end{aligned}$$

$$E\{\|y_{n+1}(t)\|^2\} \leq 12k^2(T+2) \int_0^t E\{\|y_n(s)\|^2\} ds, \quad 0 \leq t \leq T.$$

By repeating integration, it follows that

$$E\{\|y_n(t)\|^2\} \leq [12k^2(T+2)]^n \int_0^t (T-s)^n E\{\|y_0(s)\|^2\} ds / n!, \quad 0 \leq t \leq T, \quad n=1, 2, \dots$$

where

$$\begin{aligned} y_0(t) = & - \int_0^t f_1(s, g(0), x_0(s-r_1)) ds - \int_0^t f_2(s, g(0), x_0(s-r_2)) dW(s) - \\ & \int_0^t \int_R f_3(s, g(0), x_0(s-r_3), u) \bar{p}(ds, du), \quad 0 \leq t \leq T, \end{aligned}$$

and

$$x_0(s-r_1) = \begin{cases} g(0), & s \geq r_1 \\ g(s-r_1), & s < r_1 \end{cases}, \quad i = 1, 2, 3.$$

From the properties of the functions f_i , $i=1,2,3$, it is easy to show that there exists a positive constant ϕ , such that $E(\|y_0(t)\|^2) \leq \phi$ for $0 \leq t \leq T$. So,

$$E(\|y_n(t)\|^2) \leq \phi [12k^2(T+2)]^n \cdot T^{n+1} / (n+1)!, \quad 0 \leq t \leq T, \quad n=1,2,\dots \quad (10)$$

Rewrite (9) in the form

$$\begin{aligned} y_{n+1}(t) &= \int_0^t [f_1(s, x_n(s), x_n(s-r_1)) - G_1(s, x_n(s))y_n(s) - \\ &\quad f_1(s, x_{n+1}(s), x_{n+1}(s-r_1))] ds + \\ &\int_0^t [f_2(s, x_n(s), x_n(s-r_2)) - G_2(s, x_n(s))y_n(s) - \\ &\quad f_2(s, x_{n+1}(s), x_{n+1}(s-r_2))] dW(s) + \\ &\int_0^t \int_R [f_3(s, x_n(s), x_n(s-r_3), u) - G_3(s, x_n(s), u)y_n(s) - \\ &\quad f_3(s, x_{n+1}(s), x_{n+1}(s-r_3), u)] \tilde{p}(ds, du) = \\ &= \int_0^t \alpha_n(s) ds + \int_0^t \beta_n(s) dW(s) + \int_0^t \int_R \gamma_n(s, u) \tilde{p}(ds, du). \end{aligned}$$

Now we have to estimate each of these integrals. At first,

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |y_{n+1}(t)| \leq \int_0^T |\alpha_n(s)| ds + \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \beta_n(s) dW(s) \right| + \quad (11)$$

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \int_R \gamma_n(s, u) \tilde{p}(ds, du) \right|.$$

For example, using the inequality (6) and the estimation (10), we have

$$P\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \gamma_n(s, u) \bar{\gamma}(ds, du) \right| > 3^{-n-2} \right\} \leq 3^{2n+2} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} E\{| \bar{\gamma}_n(s, u) |^2\} \bar{\pi}(du, ds) \leq \\ 3^{2n+4} (2K)^2 \int_0^T E\{\|y_n(s)\|^2\} ds \leq 3\Theta a^{n+1} / (T+2)(n+1)!,$$

where $a = 108K^2T(T+2)$.

Similarly, for the other integrals, we get

$$P\left\{\int_0^T |d\alpha_n(s)| ds > 3^{-n-2}\right\} \leq 3\Theta a^{n+1} / (T+2)(n+1)!$$

and

$$P\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \beta_n(s) dW(s) \right| > 3^{-n-2}\right\} \leq 3\Theta a^{n+1} / (T+2)(n+1)!$$

Finally, from (11) and the preceding estimations, it follows

$$P\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} |y_{n+1}(t)| > 3^{-n-1}\right\} \leq \quad (12)$$

$$P\left\{\int_0^T |\alpha_n(s)| ds > 3^{-n-2}\right\} + P\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \beta_n(s) dW(s) \right| > 3^{-n-2}\right\} + \\ P\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \gamma_n(s, u) \bar{\gamma}(ds, du) \right| > 3^{-n-2}\right\} \leq 3\Theta a^{n+1} / (n+1)!$$

From (7) we have

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |x_{n+1}(t) - x_n(t)| \leq \sup_{0 \leq t \leq T} |y_n(t)| + \int_0^T |G_1(s, x_n(s)) y_n(s)| ds + \\ \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t C_2(s, x_n(s)) y_n(s) dW(s) \right| + \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_3(s, x_n(s), u) y_n(s) \bar{\gamma}(ds, du) \right|.$$

Denote by

$$s_1 = \sup\{|G_1(t, x)|, t \in [0, T], x \in \mathbb{R}\}, \quad i=1, 2,$$

$$s_2 = \sup\{|G_2(t, x, u)|, t \in [0, T], x, u \in \mathbb{R}\}$$

and

$$\int_{\mathbb{R}} |G_3(t, x, u)|^2 \pi(du) \leq s_3'^2 \pi(\mathbb{R}) = s_3^2 .$$

Using (10), we have, for example,

$$P \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_3(s, x_n(s), u) y_n(s) \tilde{p}(ds, du) \right| > 3^{-n} \right\} \leq$$

$$3^{2n} E_1 \int_0^T \int_{\mathbb{R}} |G_3(s, x_n(s), u) y_n(s)|^2 \pi(du) ds \leq$$

$$s_3^2 \cdot 3^{2n} \Theta [12K^2(T+2)]^n \cdot T^{n+2} / (n+1)! = s_3^2 \Theta T^2 a^n / (n+1)! ,$$

and analogously

$$P \left\{ \left| \int_0^T G_1(s, x_n(s)) y_n(s) ds \right| > 3^{-n} \right\} \leq s_1^2 \Theta T^3 a^n / (n+1)! ,$$

$$P \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t G_2(s, x_n(s)) y_n(s) dW(s) \right| > 3^{-n} \right\} \leq s_2^2 \Theta T^2 a^n / (n+1)! .$$

From (7), (12) and from the last estimations, we obtain

$$P \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} |x_{n+1}(t) - x_n(t)| > 4 \cdot 3^{-n} \right\} \leq$$

$$\Theta T [1 + T(Ts_1^2 + s_2^2 + s_3^2)] \cdot a^n / (n+1)! .$$

By Borel-Cantelli's lemma, we get

$$P \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |x_{n+1}(t) - x_n(t)| > 4 \cdot 3^{-n} \right) = 0 , \right.$$

i.e., for large n

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |x_{n+1}(t) - x_n(t)| \leq 4 \cdot 3^{-n} \quad \text{almost surely.}$$

Therefore, the sequence $\{x_n(t), n=1,2,\dots\}$ converges almost surely to the stochastic process $x^*(t)$. According to the Weierstrass uniform convergence

theorem, it follows that this convergence is uniform in $[0, T]$. If we complete the definition of $x^*(t)$ by setting $x^*(t) = g(t)$ for $t < 0$, we have that trajectories of $x^*(t)$ are almost surely right continuous and have left-hand limits on $[-r, T]$. Moreover, in accordance with the definition of the sequences $\{x_n(t), n=1, 2, \dots\}$ and $\{y_n(t), n=1, 2, \dots\}$, it follows that they are nonanticipating with respect to the given Wiener process and the random Poisson measure. So, for each $t, t \in [-r, T]$, $x^*(t)$ is nonanticipating. Hence, $x^*(t)$ is in D .

In order to prove that $x^*(t)$ is indeed a solution of the SDDE (1)-(2), we shall show, first, that $x_n(t) \rightarrow x^*(t)$ as $n \rightarrow \infty$ in L^2 sense. From (13) we have

$$E \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} |x^*(t) - x_n(t)|^2 \right\} \leq E \left\{ \limsup_{m \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t \leq T} |x_{n+m}(t) - x_n(t)|^2 \right\} \leq$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} E \left\{ \sum_{k=n}^{n+m-2} \sup_{0 \leq t \leq T} |x_{k+1}(t) - x_k(t)|^2 \right\} \leq 4 \cdot \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=n}^{n+m-2} 3^{-k} \right)^2 \rightarrow 0$$

as $n \rightarrow \infty$.

So, $x_n(t) \rightarrow x^*(t)$ as $n \rightarrow \infty$ in L^2 sense.

Now, using the fact that the functions $f_i, i=1, 2, 3$, are stochastically closed, it follows that, for all $t \in [0, T]$,

$$f_1(t, x_n(t), x_n(t-r_1)) \rightarrow f_1(t, x^*(t), x^*(t-r_1)), \quad i=1, 2,$$

$$f_3(t, x_n(t), x_n(t-r_3), u) \rightarrow f_3(t, x^*(t), x^*(t-r_3), u)$$

almost surely. Hence,

$$E \left\{ \left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}} f_3(s, x_n(s), x_n(s-r_3), u) \tilde{p}(ds, du) - \right. \right.$$

$$\left. \int_0^t \int_{\mathbb{R}} f_3(s, x^*(s), x^*(s-r_3), u) \tilde{p}(ds, du) \right|^2 \Big\} =$$

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} E \left\{ \left| f_3(s, x_n(s), x_n(s-r_3), u) - f_3(s, x^*(s), x^*(s-r_3), u) \right|^2 \right\} \tilde{p}(du) ds \rightarrow 0$$

as $n \rightarrow \infty$.

and similarly for the other integrals.

By taking the L^2 -limits on the both sides on (7), we have that for each $t \in [0, T]$

$$x^*(t) = x(0) + \int_0^t f_1(s, x^*(s), x^*(s-r_1)) ds + \\ \int_0^t f_2(s, x^*(s), x^*(s-r_2)) dW(s) + \int_0^t \int_R f_3(s, x^*(s), x^*(s-r_3), u) \bar{\mu}(ds, du)$$

holds almost surely, and $x^*(t) = g(t)$ for $-r \leq t \leq 0$. Also, both sides of the last equality are right continuous and have left-hand limits almost surely. Therefore, this equality holds for all $t \in [-r, T]$ almost surely and $x^*(t)$ is a solution of the SDDE (1)-(2).

The proof of the uniqueness of the solution will be given without details. Note that it is based on the procedure used in [3] and on the comments in [6]. Essentially, we assume that there exist two solutions $x_1(t)$ and $x_2(t)$ of the SDDE (1)-(2) and that the bounded random integral contractor is regular. If we put $x(t) = x_1(t)$, $z(t) = x_2(t) - x_1(t)$ in (4), then there exists $y(t)$ in D as a solution of the equation

$$x_2(t) - x_1(t) = y(t) + \int_0^t G_1(s, x_1(s)) y(s) ds + \\ \int_0^t G_2(s, x_1(s)) y(s) dW(s) + \int_0^t \int_R G_3(s, x_1(s), u) y(s) \bar{\mu}(ds, du) .$$

Expressing $x_1(t)$ and $x_2(t)$ on the left side with (3) and using the inequalities (5) and (6), we obtain finally $E\{\|y(t)\|^2\} = 0$ for all $t \in [0, T]$. So, for each $t \in [0, T]$, $P\{x_1(t) \neq x_2(t)\} = 0$. By the continuity on the right of these processes, it follows that $x_1(t) = x_2(t)$ on $[0, T]$ almost surely. Therefore, the solution is unique. This finishes the proof of the theorem.

Remark 3.1. If the jump coefficient is zero, we get the SDDE described in the paper [6]. In this case, all considerations are in the space of almost surely continuous stochastic processes.

Remark 3.2. In the present paper we confine ourselves to the one-dimensional case for easier notation. The multidimensional case can be treated analogously.

Recall that some other more general stochastic equations, for example,

some types of stochastic integrodifferential equations with delay, stochastic hereditary equations and others, may be investigated also using the method of random integral contractor.

References

1. Altman M. Inverse differentiability, contractors and equations in Banach spaces// *Studia Math.* - 1973. - V. 46. - P. 1-15.
2. Gihman I.I., Skorohod A.V. *Stochastic Differential Equations and Their Applications.* - Naukova Dumka, -Kiev, 1982. (In Russian)
3. Kuc H.H. On integral contractors// *Journal of Integral Equations.* - 1979. - P. 35-46.
4. Padgett W.J. The method of random contractors and its applications to random nonlinear equations// *Probab. Analysis and Related Topics.* - 1983. - V. 3. - P. 195-225.
5. Stoyanov J. Random integral contractors for a class of stochastic differential equations// *Proc. of the 3rd Conf. "Rousse '85".* - Rousse, Bulgaria. - 1987. - V. 2. - P. 939-942.
6. Zhang B.G., Padgett W.J. The existence and uniqueness of solutions to stochastic differential-difference equations// *Stochastic Analysis and Appl.* - 1984. - V. 2(3). - P. 335-346.

С. Янкович. О стохастических дифференциально-разностных уравнениях и их случайных интегральных контракторах.

Аннотация. В данной работе изучается класс стохастических дифференциально-разностных уравнений, решения которых являются разрывными процессами. При помощи принципа ограниченных случайных интегральных контракторов устанавливается существование и единственность решения этих уравнений.

S. Jankoviča. Par stohastiskiem diferenciāl-diferencu vienādojumiem un to gadījuma integrālajiem kontraktoriem.

Анотация. Rakstā ir pētīts stohastisku diferenciāl-diferencu vienādojumu klase, kuru risinājumi ir pārtrauktie procesi. Ar ierobežotu gadījuma integrālo kontraktoru principa palīdzību pierādīts, ka tādiem vienādojumiem eksistē vienīgais atrisinājums.

Jankovic Svetlana

Department of Mathematics

Faculty of Philosophy

Civil and Methodius 2

40000 Naš, Yugoslavia.

TOWARDS THE CONCEPT OF A FUZZY CATEGORY

A Šostak

Summary. The concept of a fuzzy category and some related notions are introduced. A fuzzy category K essentially is a fuzzy subclass σ (of a certain class $Ob(K)$) of objects and a fuzzy subclass μ (of a certain class $M(K)$) of morphisms which are mutually connected by certain axioms; these axioms can be viewed upon as fuzzy analogues of the standard axioms used in the definition of a usual (classical) category. Some examples of fuzzy categories are given. Among them is the fuzzification FT of the category FT of fuzzy topological spaces introduced earlier by the author. AMS Subject Classification 54A40, 18A99.

0. Introduction

Specialists working in theoretical chapters of fuzzy mathematics proceed usually from the following general conceptual scheme:

Let a classical (i.e. non-fuzzy) category \mathcal{C} of structured sets be given (e.g. $\mathcal{C} = \text{Top}$, $\mathcal{C} = \text{Prox}$, $\mathcal{C} = \text{Unif}$, $\mathcal{C} = \text{Group}$, etc.). As a fuzzy counterpart of this category is taken a category \mathcal{C}' (again a usual, i.e. non-fuzzy one) of structured sets, whose structures are obtained by "fuzzifying" in some way the crisp structures of the objects from the original category \mathcal{C} . Besides a functor or some "natural" functors from the category \mathcal{C} into the category \mathcal{C}' are either explicitly given or subtended. (Certainly, for a given category \mathcal{C} such a scheme can be realized in many different and "natural" ways.) We illustrate this idea by the following three known examples which will be needed also in the sequel. (Many other examples can be found e.g. in [5].) In each case we start from the category $\mathcal{C} = \text{Top}$ of topological spaces.

0.1. The category CFT of Chang fuzzy topological spaces [1].

The objects of CFT are pairs (X, τ) where X is a set and $\tau \subset I^X$ satisfies the following three conditions:

- (1) $0, 1 \in \tau$;
- (2) if $U, V \in \tau$, then $U \wedge V \in \tau$;
- (3) if $U_a \in \tau$ for all $a \in A$, then $\bigvee_a U_a \in \tau$.

The morphisms of CFT are mappings $f: X \rightarrow Y$, where $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y) \in \text{Ob}(\text{CFT})$, such that $f^{-1}(V) \in \tau_X$ for each $V \in \tau_Y$.

Since each topological space in a trivial way can be interpreted as a Chang fuzzy topological space, natural embedding can be taken as a functor $F: \text{Top} \rightarrow \text{CFT}$.

0.2. The category LCFT of Lowen fuzzy topological spaces [3], [4]. The category LCFT can be characterized as the full subcategory of CFT the objects (X, τ) of which satisfy the following additional condition:

- (1') τ contains all constants $c \in I$.

As a functor $F: \text{Top} \rightarrow \text{LCFT}$ one can take Lowen's functor ω replacing each $(X, \tau) \in \text{Ob}(\text{Top})$ by Lowen fuzzy topological space $(X, \omega\tau)$, where $\omega\tau$ is the family of all lower-semicontinuous functions from (X, τ) into the usual unit interval I , and leaving the morphisms unchanged.

0.3. The category FT of (general) fuzzy topological spaces [6], [7]. The objects of FT are pairs (X, \mathcal{F}) where X is a set and $\mathcal{F}: I^X \rightarrow I$ satisfies the following three conditions:

- (1) $\mathcal{F}(0) = \mathcal{F}(1) = 1$;
- (2) $\mathcal{F}(U \wedge V) \geq \mathcal{F}(U) \wedge \mathcal{F}(V)$ for any $U, V \in I^X$;
- (3) $\mathcal{F}(\bigvee_a U_a) \geq \bigwedge_a \mathcal{F}(U_a)$ for any family $\{U_a: a \in A\} \subset I^X$.

The morphisms of FT are mappings $f: X \rightarrow Y$, where $(X, \mathcal{F}_X), (Y, \mathcal{F}_Y) \in \text{Ob}(\text{FT})$, such that $\mathcal{F}_X(f^{-1}(V)) \geq \mathcal{F}_Y(V)$ for each $V \in I^Y$.

Various "natural" functors from Top into FT are considered in [6], [7], [8].

The aim of this note is to introduce the concept of a fuzzy category (Section 1) and some related notions which are essentially fuzzy (as different from "fuzzy" categories obtained when one applies the scheme expounded at the beginning). The informal meaning of the introduced notion is discussed in Section 2. Some concrete examples of fuzzification of classical (i.e. non-fuzzy) categories will be given in Section 4.

The main attention here will be paid to the fuzzification of the category FT described above.

1. Basic definitions

A fuzzy category \mathcal{K} consists of a class $\text{Ob}(\mathcal{K})$ of objects together with a fuzzy subclass of objects $\sigma: \text{Ob}(\mathcal{K}) \rightarrow I$ and a class $M(\mathcal{K})$ of morphisms together with a fuzzy subclass of morphisms $\mu: M(\mathcal{K}) \rightarrow I$ which are mutually connected by the following three conditions:

1°. To each ordered pair $(X, Y) \in \text{Ob}(\mathcal{K}) \times \text{Ob}(\mathcal{K})$ a set $M(X, Y)$ is assigned in such a way that each morphism $f \in M(\mathcal{K})$ belongs to a unique set $M(X, Y)$ and besides $\mu(f) \leq \sigma(X) \wedge \sigma(Y)$ for each $f \in M(X, Y)$.

2°. If $f \in M(X, Y)$, $g \in M(Y, Z)$ then there exists a unique morphism $g \circ f \in M(X, Z)$ called the product, or the composition, of f and g , such that $\mu(g \circ f) \geq \mu(g) + \mu(f) - 1$. Besides, the product is to be associative: if $h \in M(Z, W)$, where $W \in \text{Ob}(\mathcal{K})$, then $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

3°. To each $X \in \text{Ob}(\mathcal{K})$ a morphism $\varepsilon_X \in M(X, X)$ (called the identity morphism) is assigned such that $\mu(\varepsilon_X) = \sigma(X)$ and besides $\varepsilon_X \circ g = g$ and $f \circ \varepsilon_X = f$ for each $f \in M(X, Y)$ and each $g \in M(Z, X)$.

Let \mathcal{K}, \mathcal{L} be fuzzy categories. By a covariant functor from \mathcal{K} to \mathcal{L} we understand a pair of mappings from $\text{Ob}(\mathcal{K})$ into $\text{Ob}(\mathcal{L})$ and from $M(\mathcal{K})$ to $M(\mathcal{L})$ (both of which will be denoted by the same letter F) such that

$$(1) \sigma_{\mathcal{K}}(X) \leq \sigma_{\mathcal{L}}(F(X));$$

$$(2) \mu_{\mathcal{K}}(f) \leq \mu_{\mathcal{L}}(F(f));$$

$$(3) F(\varepsilon_X) = \varepsilon_{F(X)}$$

for all $X \in \text{Ob}(\mathcal{K})$, $f \in M(\mathcal{K})$, and besides

$$(4) F(g \circ f) = F(g) \circ F(f) \text{ whenever } g \circ f \text{ is defined in } \mathcal{K}.$$

Replacing the last condition in this definition by the condition

$$(4') F(g \circ f) = F(f) \circ F(g) \text{ whenever } g \circ f \text{ is defined in } \mathcal{K},$$

we come to the definition of a contravariant functor.

Let \mathcal{K} and \mathcal{L} be fuzzy categories. A functor F from \mathcal{K} to \mathcal{L} is called an isomorphism if $\sigma_{\mathcal{K}}(x) = \sigma_{\mathcal{L}}(F(x))$ and $\mu_{\mathcal{K}}(f) = \mu_{\mathcal{L}}(F(f))$ for all $x \in \text{Ob}(\mathcal{K})$, $f \in M(\mathcal{K})$ and besides the product $g \circ f$ is defined in \mathcal{K} iff the product $F(g) \circ F(f)$ is defined in \mathcal{L} . Two fuzzy categories \mathcal{K} and \mathcal{L} are called isomorphic if there exists an isomorphism from \mathcal{K} to \mathcal{L} . Obviously the relation of isomorphism is the equivalence relation on the class of all fuzzy categories.

Let \mathcal{K} be a fuzzy category and $\sigma: \text{Ob}(\mathcal{K}) \rightarrow I$ and $\mu: M(\mathcal{K}) \rightarrow I$ be its fuzzy classes of objects and morphisms respectively. By a (fuzzy) subcategory of \mathcal{K} we call a fuzzy category \mathcal{K}' , whose fuzzy classes of objects and morphisms are $\sigma': \text{Ob}(\mathcal{K}') \rightarrow I$ and $\mu': M(\mathcal{K}') \rightarrow I$ respectively, such that:

1) $\text{Ob}(\mathcal{K}') \subset \text{Ob}(\mathcal{K})$, $M(\mathcal{K}') \subset M(\mathcal{K})$ and besides for each ordered pair $(X, Y) \in \text{Ob}(\mathcal{K}') \times \text{Ob}(\mathcal{K}')$ the set $M'(X, Y)$ assigned in \mathcal{K}' is just the intersection $M(X, Y) \cap M(\mathcal{K})$;

2) $\sigma' \leq \sigma$, $\mu' \leq \mu$;

3) the operation of product in $M(\mathcal{K}')$ is induced by the operation of product in $M(\mathcal{K})$ and besides $\mu'(g \circ f) \geq \mu'(g \circ f) \wedge \mu'(f) \wedge \mu'(g)$ whenever the product $g \circ f$ is defined;

4) if $X \in \text{Ob}(\mathcal{K}')$, then $\varepsilon_X \in M(\mathcal{K}')$ and $\mu'(\varepsilon_X) = \sigma'(X)$.

(Notice that without loss of generality one can assume that in the above definition $\text{Ob}(\mathcal{K}') = \text{Ob}(\mathcal{K})$ and $M(\mathcal{K}')$ and $M(\mathcal{K})$.)

A subcategory \mathcal{K}' of a fuzzy category \mathcal{K} is called full if $\mu'(f) = \mu(f) \wedge \sigma'(X) \wedge \sigma'(Y)$ for each $f \in M(X, Y)$.

Patterned after these definitions one can introduce the fuzzy counterparts of many other notions and constructions of the classical category theory.

2. Discussion

The concept of a fuzzy category \mathcal{K} can be interpreted in the following informal way. $\text{Ob}(\mathcal{K})$ is the class of potential objects of the fuzzy category \mathcal{K} and the value $\sigma(x)$ is the degree to which a potential object x belongs to \mathcal{K} (or the degree to which x can be identified in \mathcal{K}). Similarly, $M(\mathcal{K})$ is the class of potential morphisms of \mathcal{K} and the value $\mu(f)$

is the degree to which f is indeed a morphism of \mathcal{K} (or the degree to which f can be identified in \mathcal{K}). Developing this interpretation one can explain informally all concepts introduced in Section 1.

One can propose to replace the condition $\mu(g \circ f) \geq \mu(g) + \mu(f) - 1$ in 2^0 (Section 1) by a stronger condition $\mu(g \circ f) \geq \mu(g) \wedge \mu(f)$. However we accept the weaker condition because in most of concrete non-trivial examples of fuzzy categories known to us (see e.g. Section 4) the stronger condition does not generally hold.

3. Special case: the class of objects is crisp

In this note we pay the main attention to the special case when the class of objects is crisp, i.e. $\sigma : \text{Ob}(\mathcal{K}) \rightarrow \{1\} \subset I$ (as it is in the classic situation) and only the class of morphisms $\mu : M(\mathcal{K}) \rightarrow I$ is allowed to be essentially fuzzy. In this case we prefer to deal not with μ itself but with its complement $\mu^c : M(\mathcal{K}) \rightarrow I$; the value $\mu^c(f)$ can be interpreted as the degree of defectiveness of a potential morphism f .

Notice that

the condition $\mu(f) \leq \sigma(X) \wedge \sigma(Y)$ is superfluous in this case;

the condition $\mu(\varepsilon_X) = \sigma(X)$ just means that $\mu^c(\varepsilon_X) = 0$;
the condition $\mu(g \circ f) \geq \mu(g) + \mu(f) - 1$ can be rewritten as $\mu^c(g \circ f) \leq \mu^c(g) + \mu^c(f)$.

4. Examples

4.1. The fuzzification $\widetilde{\text{CFT}}$ of the category CFT (cf [2],[7]).

Let $\text{Ob}(\widetilde{\text{CFT}}) = \text{Ob}(\text{CFT})$ and $\sigma : \text{Ob}(\widetilde{\text{CFT}}) \rightarrow \{1\}$; for all $X, Y \in \text{Ob}(\widetilde{\text{CFT}})$ let $M(X, Y) = Y^X$ and let $\mu^c : M(X, Y) \rightarrow I$ be defined by the equality $\mu^c(f) = \sup_{V \in \mathcal{T}_Y} \sup_{x \in X} (f^{-1}(V) - \text{Int } f^{-1}(V))(x)$ where $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y) \in \text{Ob}(\text{CFT})$, $f \in M(X, Y)$ and $\text{Int } A$ is the interior of a fuzzy set $A \in I^+$ in the fuzzy space (X, \mathcal{T}_X) . It is easy to notice that $\mu^c(g \circ f) \leq \mu^c(g) + \mu^c(f)$ whenever product $g \circ f$ is defined and hence a fuzzy category $\widetilde{\text{CFT}}$ is thus obtained. The number $\mu^c(f) := \text{cd}(f)$ is called the (horizontal) continuity defect of the mapping f . Obviously f is continuous (i.e. f is

a morphism in CFT) iff $cd(f) = 0$; for a mapping which is not continuous the value $cd(f)$ may be any number in $(0, 1]$.

The continuity defect of a mapping of Chang fuzzy topological spaces was first defined in [2], see also [7]. In [2] some statements about continuity defect were established. For the sake of completeness we shall reproduce the most important of these statements below.

4.1.1. Theorem [2]. If X, Y are Chang fuzzy topological spaces and $f: X \rightarrow Y$ is a mapping, then

$$cd(f) = \sup_{B \in \mathcal{T}_Y^c} \sup_{x \in X} (\overline{f^{-1}(B)} - f^{-1}(B))(x) = \sup_{M \in \mathcal{I}_X} \sup_{y \in Y} (f(\overline{M}) - \overline{f(M)})(y)$$

where \mathcal{T}_Y^c is the set of closed fuzzy subsets in Y .

4.1.2. Theorem [2]. Let (X, τ) be a Chang fuzzy space, $\{(Y_a, \tau_a) : a \in A\}$ be a family of Chang fuzzy spaces and for each $a \in A$ let $f_a: X \rightarrow Y_a$ be a mapping. Then $cd(\Delta f_a) = \bigvee_a cd(f_a)$ where $\Delta f_a: X \rightarrow Y := \prod Y_a$ is the diagonal of these mappings. ($\prod Y_a$ is the product in CFT.)

4.1.3. Theorem [2]. Let $\{(X_a, \sigma_a) : a \in A\}$ and $\{(Y_a, \tau_a) : a \in A\}$ be two families of Chang fuzzy spaces and let $X = \prod X_a, Y = \prod Y_a$ be their products (in CFT). For each $a \in A$ consider a mapping $f_a: X_a \rightarrow Y_a$ and let $f := \prod f_a: X \rightarrow Y$ be the Cartesian product of these mappings. Then $cd(f) = \bigvee_a cd(f_a)$.

4.1.4. Theorem [2]. Let $\{(X_a, \sigma_a) : a \in A\}, \{(Y_a, \tau_a) : a \in A\}$ be two families of fuzzy spaces and let $X = \bigoplus X_a, Y = \bigoplus Y_a$ be the direct sums of these families (in CFT). For each $a \in A$ consider a mapping $f_a: X_a \rightarrow Y_a$ and let $f := \bigoplus f_a: X \rightarrow Y$ be the direct sum of these mappings. Then $cd(f) = \bigvee_a cd(f_a)$.

4.2. The fuzzification LCFT of the category LCFT. Applying the scheme used in 4.1 to LCFT one gets a fuzzy category $\widetilde{\text{LCFT}}$. This fuzzy category can be characterized also as the full subcategory of CFT whose fuzzy class of objects $\sigma: \text{Ob}(\widetilde{\text{LCFT}}) \rightarrow I$ is the restriction of the fuzzy class of objects $c: \text{Ob}(\text{CFT}) \rightarrow I$ of the fuzzy category CFT.

Obviously, the analogues of statements 4.1.1 - 4.1.4 are valid also in the category $\widetilde{\text{LCFT}}$.

4.2.1. Theorem (cf [2]). For a mapping $f: X \rightarrow Y$, where $X, Y \in \text{Ob}(\text{Top})$, let \widetilde{f} denote the same mapping when it is con-

sidered as a mapping from ωX into ωY . Then $cd(\omega f) = 0$ iff f is continuous; otherwise $cd(\omega f) = 1$.

4.2.2. Theorem (cf [2]). For a mapping $f: X \rightarrow Y$, where $X, Y \in \text{Ob}(\text{LOFT})$, let ιf denote the same mapping when it is considered as the mapping from the topological space ιX into the topological space ιY ($\iota: \text{LOFT} \rightarrow \text{Top}$ is Lowen's iota functor [4]). If ιf is continuous, then $cd(f) = 0$. The converse does not generally hold.

4.3. The fuzzification $\hat{\text{FT}}$ of the category FT . Let $\text{Ob}(\hat{\text{FT}}) = \text{Ob}(\text{FT})$ and let $\sigma: \text{Ob}(\hat{\text{FT}}) \rightarrow \{1\}$. (In the sequel the objects of $\hat{\text{FT}}$ are called fuzzy topological spaces.) For all $X, Y \in \text{Ob}(\hat{\text{FT}})$ let $M(X, Y) = I^X$ and let $\mu^c: M(X, Y) \rightarrow I$ be defined by the equality $\mu^c(f) = \sup_{V \in I^Y} (\mathcal{T}_Y(V) - \mathcal{T}_X(f^{-1}(V)))$. It is easy to show (see 4.3.1 below) that $\mu^c(g \circ f) \leq \mu^c(g) + \mu^c(f)$ whenever the product $g \circ f$ is defined and hence a fuzzy category $\hat{\text{FT}}$ is indeed thus obtained. The number $\mu^c(f) =: \text{vcd}(f)$ is called the vertical continuity defect of f .

4.3.1. Proposition. Let $f \in M(X, Y)$ and $g \in M(Y, Z)$ where X, Y, Z are fuzzy topological spaces. Then $\text{vcd}(g \circ f) \leq \text{vcd}(g) + \text{vcd}(f)$.

$$\begin{aligned} \text{Proof. } \text{vcd}(g \circ f) &= \sup_{W \in I^Z} (\mathcal{T}_Z(W) - \mathcal{T}_X(f^{-1}(g^{-1}(W)))) = \\ &= \sup_{W \in I^Z} (\mathcal{T}_Z(W) - \mathcal{T}_Y(g^{-1}(W)) + \mathcal{T}_Y(g^{-1}(W)) - \mathcal{T}_X(f^{-1}(g^{-1}(W)))) \leq \\ &\leq \sup_{W \in I^Z} (\mathcal{T}_Z(W) - \mathcal{T}_Y(g^{-1}(W))) + \sup_{V \in I^Y} (\mathcal{T}_Y(V) - \mathcal{T}_X(f^{-1}(V))) = \\ &= \text{vcd}(g) + \text{vcd}(f). \end{aligned}$$

For a family $\beta \subset I^X$ and a mapping $f \in M(X, Y)$ let $\text{vcd}(f, \beta) = \sup_{V \in \beta} (\mathcal{T}_Y(V) - \mathcal{T}_X(f^{-1}(V)))$. Obviously, $\text{vcd}(f, I^X) = \text{vcd}(f)$.

A family $\beta \subset I^X$ where $(f, \mathcal{T}_Y) \in \text{Ob}(\text{FT})$ will be called a base for the fuzzy topology \mathcal{T}_Y if for each $U \in I^X$ there exists a family $\mathcal{U}_U \subset \beta$ such that $U = \bigvee \mathcal{U}_U$ and $\mathcal{T}(U) = \bigwedge \{\mathcal{T}(V) : V \in \mathcal{U}_U\}$. A family $\beta \subset I^X$ will be called a subbase for the fuzzy topology \mathcal{T}_Y if the family $\beta = \{U \in I^X : \exists \mathcal{U}_U = \{V_1, \dots, V_n\} \subset \beta$

such that $U = V_1 \wedge \dots \wedge V_n$ and $\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(V_1) \wedge \dots \wedge \mathcal{F}(V_n)$ is its base.

4.3.2. Proposition. Let $(X, \mathcal{F}_X), (Y, \mathcal{F}_Y) \in \text{Ob}(\text{FT})$ and $f \in \mathcal{M}(X, Y)$. If $\beta \subset I^Y$ is a base for \mathcal{F}_Y , then $\text{vcd}(f, \beta) = \text{vcd}(f)$.

Proof. Obviously, $\text{vcd}(f, \beta) \leq \text{vcd}(f)$. Assume that $\text{vcd}(f, \beta) < \text{vcd}(f)$ and choose $U \in I^Y$ such that $\mathcal{F}_Y(U) - \mathcal{F}_X(f^{-1}(U)) > \text{vcd}(f, \beta)$. From the definition of a base it follows that there exists a family $\{V_a : a \in A\} \subset \beta$ such that $U = \bigvee_a V_a$ and $\mathcal{F}_Y(U) = \bigwedge_a \mathcal{F}_Y(V_a)$ and hence

$$\mathcal{F}_Y(U) - \mathcal{F}_X(f^{-1}(U)) = \bigwedge_a \mathcal{F}_Y(V_a) - \mathcal{F}_X(f^{-1}(\bigvee_a V_a)) \leq$$

$$\bigwedge_a \mathcal{F}_Y(V_a) - \bigwedge_a \mathcal{F}_X(f^{-1}(V_a)) \leq \bigwedge_a (\mathcal{F}_Y(V_a) - \mathcal{F}_X(f^{-1}(V_a))) = \text{vcd}(f, \beta).$$

However this contradicts our assumption.

4.3.3. Proposition. Let $(X, \mathcal{F}_X), (Y, \mathcal{F}_Y) \in \text{Ob}(\text{FT})$ and $f \in \mathcal{M}(X, Y)$. If $\delta \subset I^Y$ is a subbase for \mathcal{F}_Y , then $\text{vcd}(f, \delta) = \text{vcd}(f)$.

Proof. Let $\beta = \{U \in I^Y : \exists V_U = \{V_1, \dots, V_n\} \subset \delta \text{ such that } U = V_1 \wedge \dots \wedge V_n \text{ and } \mathcal{F}_Y(U) = \mathcal{F}_Y(V_1) \wedge \dots \wedge \mathcal{F}_Y(V_n)\}$. Since β is a base for \mathcal{F}_Y , it follows from 4.3.2. that $\text{vcd}(f, \beta) = \text{vcd}(f)$. Hence to prove the Proposition it suffices to show that $\text{vcd}(f, \beta) = \text{vcd}(f, \delta)$.

The inequality $\text{vcd}(f, \delta) \leq \text{vcd}(f, \beta)$ is obvious. Assume that $\text{vcd}(f, \delta) < \text{vcd}(f, \beta)$ and choose $U \in \beta$ such that $\text{vcd}(f, \delta) < \mathcal{F}_Y(U) - \mathcal{F}_X(f^{-1}(U))$. Then there exist $V_1, \dots, V_n \in \delta$ such that $U = V_1 \wedge \dots \wedge V_n$ and $\mathcal{F}_Y(U) = \mathcal{F}_Y(V_1) \wedge \dots \wedge \mathcal{F}_Y(V_n)$. It follows now that $\mathcal{F}_Y(U) - \mathcal{F}_X(f^{-1}(U)) = \mathcal{F}_Y(V_1) \wedge \dots \wedge \mathcal{F}_Y(V_n) - \mathcal{F}_X(f^{-1}(V_1) \wedge \dots \wedge f^{-1}(V_n)) \leq \mathcal{F}_Y(V_1) \wedge \dots \wedge \mathcal{F}_Y(V_n) - \mathcal{F}_X(f^{-1}(V_1)) \wedge \dots \wedge \mathcal{F}_X(f^{-1}(V_n)) \leq \bigvee_{i=1}^n (\mathcal{F}_Y(V_i) - \mathcal{F}_X(f^{-1}(V_i))) \leq \text{vcd}(f, \delta)$. However this contradicts the choice of U .

4.3.4. Proposition. Let $(X, \mathcal{F}_X), (Y, \mathcal{F}_Y) \in \text{Ob}(\text{FT})$ and $f \in \mathcal{M}(X, Y)$. Let $X' \subset X$ and \mathcal{F}'_X be the restriction of \mathcal{F}_X to X' and let $f' : X' \rightarrow Y$ be the restriction of $f : X \rightarrow Y$ to the fuzzy space (X', \mathcal{F}'_X) . Then $\text{vcd}(f') \leq \text{vcd}(f)$.

Proof is obvious.

4.3.5. Theorem. Let $(X, \mathcal{T}_X) \in \text{Ob}(\text{FT})$ and $\{(Y_a, \mathcal{T}_a) : a \in A\} \subset \text{Ob}(\text{FT})$. For each $a \in A$ consider a mapping $f_a: X \rightarrow Y_a$ and let $f := \Delta f_a: X \rightarrow \prod Y_a$ be the diagonal of these mappings (where $\prod Y_a$ is the product in FT). Then $\text{vcd}(f) = \bigvee_a \text{vcd}(f_a)$.

Proof. It is easy to notice that the family $\delta = \bigcup_{a \in A} \delta_a$ where $\delta_a = \{U_a \times \prod_{a' \neq a} Y_{a'} : U_a \in I^{Y_a}\}$ is a subbase for the product fuzzy topology on $\prod Y_a$. Hence applying proposition 4.3.3 we easily obtain that $\text{vcd}(f) = \bigvee_a \text{vcd}(f, \delta_a)$. To complete the proof notice that

$$\begin{aligned} \text{vcd}(f, \delta_a) &= \sup_{U_a \in I^{Y_a}} (\mathcal{T}_a(U_a \times \prod_{a' \neq a} Y_{a'}) - \mathcal{T}_X(f^{-1}(U_a \times \prod_{a' \neq a} Y_{a'}))) = \\ &= \sup_{U_a \in I^{Y_a}} (\mathcal{T}_a(U_a) - \mathcal{T}_X(f_a^{-1}(U_a))) = \text{vcd}(f_a). \end{aligned}$$

In a similar way one can establish also the following

4.3.6. Theorem. Let $\{(X_a, \mathcal{J}_a) : a \in A\}, \{(Y_a, \mathcal{T}_a) : a \in A\}$ be two families of fuzzy topological spaces and for each $a \in A$ let $f_a: X_a \rightarrow Y_a$ be a mapping. If $f := \prod f_a: \prod X_a \rightarrow \prod Y_a$ is the cartesian product of these mappings, then $\text{vcd}(f) = \bigvee_a \text{vcd}(f_a)$.

4.3.7. Theorem. Let $\{(X_a, \mathcal{J}_a) : a \in A\}$ and $\{(Y_a, \mathcal{T}_a) : a \in A\}$ be two families of fuzzy topological spaces and for each $a \in A$ let $f_a: X_a \rightarrow Y_a$ be a mapping. If $f = \bigoplus f_a: X \rightarrow Y$ is the direct sum of these mappings (where $(X, \mathcal{J}_X) = \bigoplus (X_a, \mathcal{J}_a)$, $(Y, \mathcal{T}_Y) = \bigoplus (Y_a, \mathcal{T}_a)$ are the direct sums in FT), then $\text{vcd}(f) = \bigvee_a \text{vcd}(f_a)$.

Proof. From Proposition 4.3.4. it follows that $\bigvee_a \text{vcd}(f_a) \leq \text{vcd}(f)$. Conversely, take any $U \in I^Y$ and let $U_a = U \wedge Y_a$. Then $\mathcal{T}_Y(U) = \mathcal{J}_X(f^{-1}(U)) = \mathcal{T}_Y(\bigwedge_a U_a) = \mathcal{J}_X(\bigwedge_a f_a^{-1}(U_a)) = \bigwedge_a \mathcal{T}_Y(U_a) = \bigwedge_a \mathcal{J}_X(f_a^{-1}(U_a)) \leq \bigvee_a (\mathcal{T}_Y(U_a) - \mathcal{J}_X(f_a^{-1}(U_a))) = \bigvee_a (\mathcal{T}_a(U_a) - \mathcal{J}_a(f_a^{-1}(U_a))) \leq \bigvee_a \text{vcd}(f_a)$. It easily follows now that $\text{vcd}(f) \leq \bigvee_a \text{vcd}(f_a)$.

References

1. Chang C.L. Fuzzy topological spaces. J. Math. Anal. Appl. - 1968. - V. 24. - P. 1 - 16.
2. Jorolajeva I., Ćostak A. On continuity defect of mappings of fuzzy spaces. Appl. Math. Proc. Techn. Univ. Sofia (to appear).

3. Lower R. Fuzzy topological spaces and fuzzy compactness // J. Math. Anal. Appl. - 1976. - V. 56. - P. 621 - 633.
4. Lowen R. Initial and final fuzzy topologies and the fuzzy Tychonoff theorem // J. Math. Anal. Appl. - 1977. - V. 58. - P. 11 - 21.
5. Negoita C. V., Ralescu D.A. Applications of Fuzzy Sets to System Analysis. - Basel & Stuttgart, 1975.
6. Šostak A. On a fuzzy topological structure. // Suppl. Rend. Circ. Matem. Palermo, Ser. II. - 1985. - N 11. - P.89-103.
7. Šostak A. Twenty years of fuzzy topology: basic ideas, notions and results // Russian Math. Surveys. - 1989. - V. 44, N 6. - P. 125 - 186.
8. Šostak A. On some modifications of fuzzy topologies // Matem. Veznik. - 1989. - V. 41, N 1. - P- 51 - 64.

A. Šostaks. Fazi-kategorijas koncepciju.

Анотация. Тіок дафинēта фазі-категоріјас концепціја. Тā неісклаујас паразто (класіско) категоріју теоріјā un пēс бѣтї-баг састāв no објекту фазі-класес $\sigma : Ob(K) \rightarrow I$ un морфізмu фазі-класес $\mu : M(K) \rightarrow I$ kas savā стarpā ir саістїті ar даѣам аксіомān; šіе аксіомес var узтvert kā класіскās категоріјас дафїнцијā detїлпстошу аксіому фазі-аналогіјас. Даrbā ir attїс-тїті фазі-категоріју теоріјас раматї, kā арї ізклāстїті даѣāда рактсura пїемēрї, таї скaitā топологїску тelpu категоріјас varдkas фазїфїкācijas.

A. П. Шостак. К концепции нечеткой категории.

Аннотация. В заметке вводится концепция нечеткой категории и определяются некоторые связанные с ней понятия. Нечеткая категория, по-существу, состоит из нечеткого подкласса σ (некоторого класса $Ob(K)$) объектов и нечеткого подкласса μ (некоторого класса $M(K)$) морфизмов, связанных между собой определенными аксиомами; эти аксиомы мы рассматриваем как нечеткие аналоги стандартных аксиом, используемых в определении обычной (классической) категории. Приведен ряд примеров, в т.ч. нечеткая модификация категории FT нечетких топологических пространств, введенной автором ранее. Удк 515.12.

Department of Mathematics

Latvian University

226098 Riga

ФУНКТОРЫ, ПОРОЖДЕННЫЕ УНИВЕРСАЛЬНЫМИ ОТОБРАЖЕНИЯМИ
ИНЪЕКТИВНЫХ ПРЕДЕЛОВ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ КОМПАКТОВ МЕНГЕРА

М. Заричный

Аннотация. Строится универсальное отображение $\varphi_n: \mu_n^\infty \rightarrow Q^\infty$, где $\mu_n^\infty / Q^\infty /$ - инъективный предел последовательности n -мерных компактов Менгера / гильбертовых кубов / и Z -вложений. Показано, что операция взятия прообразов при отображении является функториальной в подходящей категории. УДК 515.12

Через μ_n обозначается n -мерный универсальный компакт Менгера / см., например, [1] /. В работах М. Бествина [2] и А. Н. Дранитшикова [3] заложены основы теории μ_n -многообразий, которая оказалась во многом параллельной теории многообразий, моделированных над гильбертовым кубом Q / Q -многообразий / [4].

Напомним, что замкнутое подмножество A метризуемого компакта X называется Z -множеством в X , если тождественное отображение 1_X аппроксимируется отображениями, образы которых лежат в $X \setminus A \subset X$, а отображение $f: X \rightarrow Y$ называется Z -отображением, если его образ $f(X)$ является Z -множеством в Y .

Через μ_n^∞ обозначается инъективный предел последовательности

$$\mu_n^{(1)} \xrightarrow{i_1} \mu_n^{(2)} \xrightarrow{i_2} \mu_n^{(3)} \xrightarrow{i_3} \dots,$$

где пространства $\mu_n^{(k)}$ гомеоморфны μ_n , а отображения i_k являются Z -вложениями.

Через $M \text{Comp}_n^\infty$ обозначается класс пространств X , для которых существует представление $X = \varinjlim \{X_i\}$, где $X_1 \subset X_2 \subset \dots$ - последовательность метризуемых компактов размерности $\leq n$.

Определение 1. Пространство X называется сильно n -универсальным, если для любой метризуемой компактной пары (A, B) , $\dim A \leq n$ и любого вложения $f: B \rightarrow X$ существует вложение $\tilde{f}: A \rightarrow X$, продолжающее f .

Следующая теорема является n -мерным аналогом характеристической теоремы К. Сакаи [5].

Теорема 1. Пространство $X \in MComp_n^\infty$ гомеоморфно μ_n^∞ , если и только если оно является сильно n -универсальным.

Доказательство проводится по схеме доказательства характеристических теорем для R^∞ и Q^∞ [5]; необходимые для этого свойства пространства μ_n установлены в [2]. Напомним, что через R^∞ /соответственно, Q^∞ / обозначен прямой предел $\varinjlim \{R^k\}$ /соответственно, $\varinjlim \{Q^k\}$ /.

Определение 2 [6]. отображения $f, g: X \rightarrow Y$ называются n -гомотопными /обозначается $f \stackrel{n}{\sim} g$ /, если для любого метризуемого компакта A , $\dim A \leq n$ и любого отображения $h: A \rightarrow X$ гомотопны композиции $f \circ h$ и $g \circ h$.

Обозначим через $(n-1)\text{-Homot}_n^\infty$ категорию, объектами которой является пространства класса $MComp_n^\infty$, а морфизмами - $(n-1)$ -гомотопические классы отображений.

А.Н. Дранишников построил в [3] n -обратимое отображение $f_n: \mu_n \rightarrow Q$, универсальное в классе отображений

n -мерных метризуемых компактов в метризуемые компакты. При этом отображение $f: X \rightarrow Y$ называется n -обратимым [3],

если для любого метризуемого пространства A размерности $\leq n$ и любого отображения $g: A \rightarrow Y$ существует отображение $\tilde{g}: A \rightarrow X$ такое, что $f \circ \tilde{g} = g$.

Лемма. Для любого отображения $f: X \rightarrow Q$, где X - метризуемый компакт размерности $\leq n$ существует метризуемый компакт \tilde{X} размерности $\leq n$, вложение $i: X \rightarrow \tilde{X}$ и отображение $\tilde{f}: \tilde{X} \rightarrow Q$ такие, что $\tilde{f} \circ i = f$ и выполнено свойство:

/*/ для любой метризуемой компактной пары (A, B) , метризуемого компакта Y , вложения $\alpha: B \rightarrow X$ и отображений $\beta: A \rightarrow Y$, $\gamma: Y \rightarrow Q$ таких, что $f \circ \alpha = \gamma \circ \beta|_A$, существует вложение $\tilde{\alpha}: A \rightarrow \tilde{X}$ такое, что $\tilde{\alpha}|_B = i \circ \alpha$ и $\tilde{f} \circ \tilde{\alpha} = \gamma \circ \beta$.

Доказательство. Пусть \mathcal{F} - множество шестерок вида $S = (A, B, Y, \alpha, \beta, \gamma)$, где A, B, Y - метризуемые компакты, $A \supset B$, $\dim A \leq n$, $\alpha: B \rightarrow X$ - вложение и $\beta: A \rightarrow Y$, $\gamma: Y \rightarrow Q$ - такие отображения, что $f \circ \beta = \gamma \circ \alpha|_B$. Для каждого $S \in \mathcal{F}$ выберем n -обратимое отображение $f_S: X_S \rightarrow Q$ метризуемого компакта X_S размерности n /см. [3]/, а также отображение $g_S: A \xrightarrow{S} X_S$ такое, что $f_S \circ g_S = \gamma \circ \beta$. На пространстве $X \cup (\cup \{X_S | S \in \mathcal{F}\})$ введем отношение эквивалентности, полагая $\alpha(b) \sim g_S(b)$, $b \in B$, $S \in \mathcal{F}$. Пусть \hat{X} - полученное факторпространство и $\beta\hat{X}$ - его стоун-чеховское расширение. Обозначим через $j: X \rightarrow \beta\hat{X}$ и $j_S: X_S \rightarrow \beta\hat{X}$, $S \in \mathcal{F}$ естественные вложения и через $p: \beta\hat{X} \rightarrow Q$ - отображение, порожденное отображениями f и f_S , $S \in \mathcal{F}$.

Поскольку $\dim \beta\hat{X} \leq n$ [7], из факторизационной теоремы Мардешича [8] и спектральной теоремы Е.В.Щепина [9] вытекает, что существует метризуемый компакт X' размерности n и отображения $q: \beta\hat{X} \rightarrow X'$, $f': X' \rightarrow Q$ такие, что $p = f' \circ q$ и отображение $i' = q \circ j$ является вложением.

Обозначим через $\lambda: X' \rightarrow X' \times Q$ вложение, определяемое формулой $\lambda(x) = (x, 0)$, $x \in X'$, и пусть $\tau: K \rightarrow X' \times Q$ - n -обратимое отображение метризуемого компакта K размерности n [3]. Определим отношение эквивалентности на K , полагая $k_1 \sim k_2$, если $\tau(k_1) = \tau(k_2) = (x, 0)$ для некоторого $x \in X'$. Пусть \tilde{X} - факторпространство пространства K , $\tilde{q}: K \rightarrow \tilde{X}$ - факторотображение и $h: \tilde{X} \rightarrow X' \times Q$ - такое отображение, что $h \circ \tilde{q} = \tau$. Обозначим через $\bar{\lambda}: X' \rightarrow K$ такое отображение, что $\tau \circ \bar{\lambda} = \lambda$ и положим $i = \tilde{q} \circ \bar{\lambda} \circ i'$. Определим отображение $f: \tilde{X} \rightarrow Q$ как композицию $f = f' \circ p \circ h$.

Проверим, что выполнено условие $1^*/1$. Пусть $S = (A, B, Y, \alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{F}$. Определим отображение $\alpha': A \rightarrow X'$, полагая $\alpha' = q \circ j_S \circ g_S$. Пусть $\xi: A \rightarrow A/B$ - факторотображение и $\eta: A/B \rightarrow Q$ - такое вложение, что $\eta(\{B\}) = 0$.

Определим вложение $\theta: A \rightarrow X' \times Q$, полагая $\theta(a) = (\alpha'(a), \eta \circ \xi(a))$, $a \in A$. Из n -обратимости отображения τ , вытекает, что существует отображение $\bar{\theta}: A \rightarrow K$

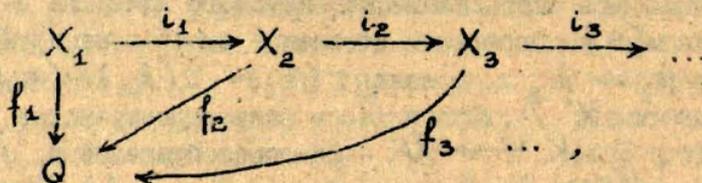
такое, что $\tau \circ \bar{\theta} = \theta$. Положим $\tilde{\alpha} = \tilde{q} \circ \bar{\theta}$. Очевидно, что отображение $\tilde{\alpha}$ является вложением и для любого $b \in B$ имеем $\tilde{\alpha}(b) = \tilde{q} \circ \bar{\theta}(b) = \tilde{q} \circ \bar{s} \circ \alpha'(l) = \tilde{q} \circ \bar{s} \circ q \circ j_s \circ g_s(b) = \tilde{q} \circ \bar{s} \circ q \circ j \circ \alpha(b) = \tilde{q} \circ \bar{s} \circ i' \circ \alpha(b) = i \circ \alpha(b)$, т.е. $\tilde{\alpha}|_B = i \circ \alpha$.

Кроме того, $\tilde{f} \circ i = \tilde{f} \circ p \circ r_1 \circ h \circ \tilde{q} \circ \bar{s} \circ i' = \tilde{f}' \circ p \circ r_1 \circ s \circ i' = \tilde{f}' \circ i' = \tilde{f}' \circ q \circ j = p \circ j = \tilde{f}$ и $\tilde{f} \circ \tilde{\alpha} = \tilde{f}' \circ p \circ r_1 \circ h \circ \tilde{q} \circ \bar{\theta} = \tilde{f}' \circ p \circ r_1 \circ \tau \circ \bar{\theta} = \tilde{f}' \circ \alpha' = \tilde{f}' \circ q \circ j_s \circ g_s = p \circ j_s \circ g_s = f_s \circ g_s = \gamma \circ \beta$.
Лемма доказана.

Определение 3. Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется сильно (n, ∞) -универсальным, если для любой метризуемой компактной пары (A, B) , $\dim A \leq n$, метризуемого компакта C , вложения $\alpha: B \rightarrow Y$ и отображений $\beta: A \rightarrow C$, $\gamma: C \rightarrow Y$ таких, что $f \circ \alpha = \gamma \circ \beta|_B$, существует вложение $\tilde{\alpha}: A \rightarrow X$ такое, что $\tilde{\alpha}|_B = \alpha$ и $f \circ \tilde{\alpha} = \gamma \circ \beta$.

Теорема 2. Существует единственное с точностью до гомеоморфизма сильно (n, ∞) -универсальное отображение $\mu_n: \mu_n^\infty \rightarrow Q^\infty$.

Доказательство. Положим $X_1 = \mu_n$ и пусть $f_1: X_1 \rightarrow Q$ - универсальное отображение А.Н. Драпанишкова [3]. Используя лемму, индукцией по k построим коммутативную диаграмму



в которой:

- 1/ все X_k - метризуемые компакты размерност. n ;
- 2/ все i_k - вложения;

3/ для каждого k выполнено условие $*/$ леммы с заменой $X = X_k$, $\tilde{X} = X_{k+1}$, $i = i_k$, $f = f_k$, $\tilde{f} = f_{k+1}$.

Пусть $Q_1 \subset Q_2 \subset \dots$ - последовательность подпространств в Q , причем каждое Q_k гомеоморфно Q и является Z -множеством в Q_{k+1} . Положим $X'_k = f_k^{-1}(Q_k)$, тогда $i_k(X'_k) = X'_{k+1}$.

Пологая $X = \varinjlim \{X'_k, i_k|X'_k\}$, $Y' = \varinjlim \{Q_k\}$, определим отображение $f': X' \rightarrow Y'$ как инъективный предел

последовательности отображений $\{f_k! f_k^{-1}(Q_k)\}$. Из теоремы I и характеристической теоремы К. Сакаи [5] вытекает, что $X' \cong \mu_n^\infty$, $Y' \cong Q^\infty$, а из условий I/3/ и леммы несложно вывести, что отображение $\mu_n^\infty \xrightarrow{f'} Y' \cong Q^\infty$ /которое и является искомым отображением φ_n / является сильно (n, ∞) -универсальным.

Пусть $h: \mu_n^\infty \rightarrow Q^\infty$ - сильно (n, ∞) -универсальное отображение, $\mu_n^\infty = \varinjlim \{Y_i\}$, где Y_i - метризуемые компакты. Используя свойство сильной (n, ∞) -универсальности, несложно построить последовательности натуральных чисел $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots$, $\beta_1 < \beta_2 < \dots$ и вложения $p_k: X_{\alpha_k}' \rightarrow Y_{\beta_k}$, $q_k: Y_{\beta_k} \rightarrow X_{\alpha_{k+1}}'$ такие, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X_{\alpha_k}' & \xrightarrow{\quad} & X_{\alpha_{k+1}}' \\ p_k \downarrow & \nearrow q_k & \downarrow p_{k+1} \\ Y_{\beta_k} & \xrightarrow{\quad} & Y_{\beta_{k+1}} \end{array}$$

коммутативна, $\varphi_n | X_{\alpha_k}' = h \circ p_k$, $h | Y_{\beta_k} = \varphi_n \circ q_k$. Но тогда отображение $\rho = \varinjlim \{p_k\}$ является послойным гомеоморфизмом пространства μ_n^∞ в μ_n^∞ /с обратным $q = \varinjlim \{q_k\}$ /. Теорема доказана.

Из доказательства теоремы 2 легко вытекает, что топологический тип пространства $\varphi_n^{-1}(Y)$ зависит только от топологического типа компакта $Y \subset Q^\infty$, а не зависит от конкретного выбора вложения Y в Q^∞ .

Определим функтор $\Phi_n: MComp \rightarrow (n-1)\text{-Homot}_n^\infty$, полагая $\Phi_n(Y) = \varphi_n^{-1}(Y)$. Если $f: Y \rightarrow Y'$ - непрерывное отображение, то из сильной (n, ∞) -универсальности отображения φ_n вытекает, что существует отображение f' : $\varphi_n^{-1}(Y) \rightarrow \varphi_n^{-1}(Y')$ такое, что $\varphi_n \circ f' = f \circ \varphi_n | \varphi_n^{-1}(Y)$. Полагаем $\Phi_n(f) = [f']_{n-1}$ / $(n-1)$ -гомотопический класс отображения f' /. Для проверки корректности такого определения выберем еще одно отображение f'' : $\varphi_n^{-1}(Y) \rightarrow \varphi_n^{-1}(Y')$, для которого $\varphi_n \circ f'' = f \circ \varphi_n | \varphi_n^{-1}(Y)$. Тогда для любого метризуемого компакта A размерности $\leq n-1$ и отображения $g: A \rightarrow \varphi_n^{-1}(Y)$ получаем в силу сильной (n, ∞) -универсальности отображения φ_n , что существует отображение $\bar{g}: A \times I \rightarrow \varphi_n^{-1}(Y')$

такое, что $\bar{g}(a, 0) = f' \circ h(a)$, $\bar{g}(a, 1) = f'' \circ h(a)$, $a \in A$,
 т.е. $f' \stackrel{n-1}{\approx} f''$ и $[f']_{n-1} = [f'']_{n-1}$.

Таким образом, $\Phi_n: MComp \rightarrow (n-1)\text{-Homot}_n^\infty$
 является функтором. Этот функтор можно рассматривать как аналог
 операции произведения в категории n мерных пространств. От-
 метим, что функтор Φ_n переводит метризуемые LC^{n-1} -компакт-
 ы в пространства, локально гомеоморфные $\mu_n^\infty / \mu_n^\infty$ -много-
 образия/.

Следует также, что операцию взятия прообраза при отобра-
 жении φ_n можно рассматривать как функтор $\hat{\Phi}$ из категории
 $MComp$ в категорию $MComp_n^\infty$. Действительно,
 пусть X - отрезок, лежащий в Q_n^∞ , и $f: X \rightarrow 1$ - ото-
 бражение в точку. Тогда $(\hat{\Phi}(f), \varphi_n): \varphi_n^{-1}(X) \rightarrow \hat{\Phi}(1) \times X \cong$
 $\cong \mu_n^\infty \times X$ - биективное непрерывное отображение в про-
 странство размерности $n+1$, что невозможно, поскольку
 $\dim \varphi_n^{-1}(X) = n$.

Определение 4. Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется силь-
 но (ω, ∞) -универсальным, если для любой конечномерной мет-
 ризуемой компактной пары (A, B) , метризуемого компакта C ,
 вложения $\alpha: B \rightarrow X$ и отображений $\beta: A \rightarrow C$, $\gamma: C \rightarrow Y$
 таких, что $f \circ \alpha = \gamma \circ \beta|_B$, существует вложение
 $\tilde{\alpha}: A \rightarrow X$ такое, что $\tilde{\alpha}|_B = \alpha$ и $f \circ \tilde{\alpha} = \gamma \circ \beta$.

Теорема 5. Существует единственное с точностью до гомео-
 морфизма сильно (ω, ∞) -универсальное отображение $\varphi_\omega:$
 $R^\infty \rightarrow Q^\infty$.

Доказательство. Из сильной (k, ∞) -универсальности ото-
 бражений φ_k вытекает, что существует вложения $\beta_k:$
 $\mu_k^\infty \rightarrow \mu_{k+1}^\infty$ такие, что $\varphi_{k+1} \circ \beta_k = \varphi_k$. Из харак-
 теризационной теоремы К. Сакаи [5] вытекает, что $\varinjlim \{\mu_k^\infty, \beta_k\}$
 $\cong R^\infty$. Положим $\varphi_\omega = \varinjlim \{\varphi_k\}: R^\infty \rightarrow Q^\infty$.
 Как и в доказательстве теоремы 2 показывается, что φ_ω - силь-
 но (ω, ∞) -универсальное отображение.

Аналогично, как выше, можно определить функтор $\Phi_\omega:$
 $MComp \rightarrow \text{Homot}_\omega^\infty$ / объектами категории $\text{Homot}_\omega^\infty$
 являются пространства X , представимые в виде $\varinjlim \{X_i, f_i\}$,
 где $X_1 \subset X_2 \subset \dots$ - последовательность конечномерных мет-
 ризуемых компактов; морфизмами - гом-опические классы отобра-
 жений/. Для каждого метризуемого LC^∞ -компакта Y прост-

пространство $\Phi_\omega(Y) = \varphi^{-1}(Y)$ гомеоморфно \mathbb{R}^ω -многообразию.

Пространства \mathbb{R}^ω и \mathbb{Q}^ω являются неметризуемыми аналогами пространств $\mathcal{Z} = \{(x_i) \in \mathbb{R}^\omega \mid \text{только конечное число } x_i \text{ отлично от нуля}\}$ и $\Sigma = \{(x_i) \in \mathbb{R}^\omega \mid \sup\{|x_i| \mid i < \omega\} < \infty\}$.

Вопрос 1. Существует ли отображение $f: \mathcal{Z} \rightarrow \Sigma$, универсальное в классе отображений в метризуемые сепарабельные пространства метризуемых пространств, являющихся объединениями счетных семейств конечномерных компактов?

Вопрос 2. Определяет ли операция взятия прообраза вдоль универсального отображения А.Н. Дранишникова $f_n: \mu_n \rightarrow Q$ функтор из категории $MComp$ метризуемых компактов в категорию $(n-1)$ -*Homot*_n n -мерных компактов и $(n-1)$ -гомотопических классов отображений?

Библиографический список

1. Engelking R. Dimension theory. - Warszawa: Polish Scientific Publishers, 1978. - 314 p.
2. Bestvina M. Characterizing k -dimensional universal Menger compacta // Memoirs of the AMS. - 1988. - № 380. - P. 110.
3. Дранишников А.Н. Универсальные менгеровские компакты и универсальные отображения // Матем. сборник. - 1986. - Т. 129, № 1. - С. 17-30.
4. Чепмэн Т. Лекции о \mathbb{Q} -многообразиях. - М.: Мир, 1981. - 156 с.
5. Sakai K. On \mathbb{R}^ω -manifolds and \mathbb{Q}^ω -manifolds I // Topol. and its Appl. - 1984. - V. 18, № 1. - P. 69-80.
6. Чигогидзе А.Ч. n -шейпы и n -гомотопические группы компактов // Матем. сборник. - 1989. - Т. 180, № 3. - С. 322-335.
7. Энгелькинг Р. Общая топология. - М.: Мир. - 752 с.
8. Александров П.С., Цаснгов Б.А. Введение в теорию размерности. - М.: Наука, 1973.
9. Щепин Е.В. Функторы и несчетные степени компактов // Успехи матем. наук. - 1981. - Т. 36, Вып. 3. - С. 3-62.

M.M. Zarichnyi. Functors generated by universal maps of injective limits of sequences of Menger compacta.

Summary. An universal map $\varphi_n: \mu_n^\infty \rightarrow Q^\infty$ is constructed, where (μ_n^∞, Q^∞) is the injective limit of a sequence of n -dimensional Menger compacta (Hilbert cubes) and Q^∞ -embeddings. It is shown that the operation of taking preimage under φ_n is functorial in suitable category.

AMS Subject Classification 54F65, 54B30.

Anotācija. Konstruēts universālais attēlojums $\varphi_n: \mu_n^\infty \rightarrow Q^\infty$ kur (μ_n^∞, Q^∞) ir n -dimensionālo Mengerā kompakta (Hilberta kubi) un Q^∞ -ielikumu virknes injektīva robeža. Pierādīts, ka pāreja pie šī attēlojuma pirattēliem ir funkcionāla operācija attiecīgajā kategorijā.

Кафедра математического моделирования

Львовский университет

Университетская, 1

30002 Львов

Украина

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ СИНЬБОРИНЫ

А. Земитис

Аннотация. Предложен численный метод расчета обратной задачи Синьорины, который позволяет отделить постоянные Ляме однородного изотропного эластического материала по контактным давлениям, которые возникают в зоне контакта твердого препятствия с упругим материалом (силами трения пренебрегаем). Приведены результаты расчетов, метод реализуем на персональных компьютерах.
УДК 519.63

0. Введение

Контактные задачи в теории упругости привлекают внимание многих исследователей (смотрите литературу в [2], [3]). Это нелинейные задачи, которые интересны как с чисто математической, так и с прикладной точки зрения. Вопросы существования и единственности решений подобных прямых задач рассмотрены в [2]. Там обосновано также применение метода конечных элементов для решения прямых контактных задач. Отметим, что теоретические исследования в данном направлении сопряжены с огромными трудностями. Упомянутые теоретические результаты получены только в случае линеаризованных условий на контакте. Понятно, что вопрос о постановке корректных обратных задач в этом случае тем более остается открытым.

В данной работе излагается численный метод решения одной обратной задачи, которая может служить аппроксимацией обратной задачи Синьорины.

Еще отметим, что формулировка прямой задачи в основном берется из [2]. Идея об аппроксимации многомерной функции в некотором направлении полиномом многократно использовалась различными авторами. Смотрите, например, [1].

1. Формулировка задачи

Из практических соображений может быть интересной следующая задача. Найти постоянные $\lambda, \mu > 0$, для которых достигается ми-

нимума функционала

$$J(\lambda, \mu) = \int_0^1 (\bar{\sigma}_n(x_1, \delta) - \theta(x_1 + u_1(x_1, \delta)))^2 \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \Big|_{\delta_1}\right) dx_1 \quad (1)$$

при условии

$$\int_0^1 \bar{\sigma}_n(x_1, \delta) \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \Big|_{\delta_1}\right) dx_1 = \int_0^1 \theta(x_1) dx_1 = -p < 0, \quad (2)$$

где $\theta(x_1)$ - заданная функция, $\bar{\sigma}_n(x_1, \delta)$ - нормальное напряжение верхней части рассматриваемой области, которое получается решением следующей задачи о пренебрежении

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \quad (x_1, x_2) \in G, \quad (3)$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0, \quad (x_1, x_2) \in G, \quad (4)$$

$$G = \{(x_1, x_2) \mid 0 < x_1 < 1, -\delta < x_2 < \delta\},$$

$$u_1(0, x_2) = u_2(0, x_2) = u_1(1, x_2) = u_2(1, x_2) = 0, \quad x_2 \in [-\delta, \delta], \quad (5)$$

$$u_1(x_1, -\delta) = u_2(x_1, -\delta) = 0, \quad x_1 \in [0, 1], \quad (6)$$

$$\delta + u_2(x_1, \delta) \leq \psi(x_1 + u_1(x_1, \delta)), \quad x_1 \in (0, 1), \quad (7)$$

$$\bar{\sigma}_n \Big|_{\delta_1} = 0, \quad (8)$$

$$\bar{\sigma}_n \Big|_{\delta_1} (\delta + u_2(x_1, \delta) - \psi(x_1 + u_1(x_1, \delta))) = 0, \quad x_1 \in (0, 1), \quad (9)$$

$$\bar{\sigma}_n \Big|_{\delta_1} \leq 0, \quad (10)$$

где $u_i(x_1, x_2)$, $i=1, 2$ - функция перемещений в i -ом направлении; $\psi(x_1)$ - известная функция, задающая границу пренебрежения; δ_1 - верхняя граница прямоугольника G , соответствующая $x_2 = \delta$; $\bar{\sigma}_n \Big|_{\delta_1}$, $(\bar{\sigma}_t \Big|_{\delta_1})$ - нормальное (тангенциальное) напряжение на верхней границе δ_1 в деформированном состоянии.

Как уже выше было сказано, вопрос корректности задачи (7)-(10) остается открытым. Не говоря об обратной задаче в целом, здесь возникает еще проблема существования нормального напряжения на границе области в прямой задаче, что требует существо-

производных от перемещений u_1, u_2 на границе области. Условия, при которых гарантируется нужная гладкость решения, автору не известны.

Задача (I)-(10) возникла из одной проблемы в индустрии. А именно, необходимо определить свойства материала сидений таким образом, чтобы в контактной зоне возникли определенные контактные давления. Второе возможное применение связано с идентификацией параметров Ляме для данного однородного изотропного упругого материала по данным эксперимента с твердым препятствием.

2. Модификация функционала

В дальнейшем предполагаем, что решение прямой задачи обладает достаточной гладкостью. Функционал (I) можно также рассматривать как функцию двух аргументов λ, μ . Учитывая сложность зависимости нормального напряжения на верхней границе от λ и μ , мы не можем рассчитывать на применение градиентных методов при построении минимизирующей последовательности. Сказывается, что в данном случае удается модифицировать функционал (I) и прийти к тому, что минимизацию необходимо осуществить только по одному параметру.

Важно заметить, что уравнения (3), (4) однородны, и тем самым, если рассматривать задачу Дирихле для уравнений (3), (4), то ее решение зависит от соотношения $\frac{\lambda}{\mu}$, а не от каждого параметра в отдельности.

Однако функционал $J(\lambda, \mu)$ явно зависит от обоих параметров так как

$$G_n|_{x_1} = ((\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial u_2}{\partial x_2}) n_1^2 + 2\mu (\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}) n_1 n_2 + \quad (11)$$

$$+ ((\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial u_1}{\partial x_1}) n_2^2, \quad \text{где все величины в правой}$$

части рассчитываются в соответствующей точке верхней границы и

$$n_1 = - \frac{\frac{\partial u_2}{\partial x_1}}{\sqrt{1 + (\frac{\partial u_1}{\partial x_1})^2 + (\frac{\partial u_2}{\partial x_1})^2}} \quad n_2 = \frac{1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}}{\sqrt{1 + (\frac{\partial u_1}{\partial x_1})^2 + (\frac{\partial u_2}{\partial x_1})^2}} \quad (12)$$

Рассмотрим функционал вида

$$J_n = \left(\int_0^1 \frac{G_n(x_1, \bar{\sigma})}{\int_0^1 G_n(x_1, \bar{\sigma}) / (1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}) dx_1} - \frac{\theta(x_1 + u_1(x_1, \bar{\sigma}))^2}{\int_0^1 \theta(x_1) dx_1} \right) \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) dx_1 \quad (13)$$

Легко видеть, что значения этого функционала явно не зависят от λ и μ , а только от их соотношения. Так как члены u_1, u_2 зависят только от отношения $\frac{\lambda}{\mu}$, то и в целом функционал \mathcal{F}_1 зависит только от $\frac{\lambda}{\mu}$.

Теперь предположим, что при заданной функции препятствия $\varphi(x)$ и функции распределения контактного давления $\theta(x)$ существует минимум для \mathcal{F}_1 , и он достигается при некотором соотношении $\frac{\lambda}{\mu} = \tau_0$.

$$\min_{\frac{\lambda}{\mu}} \mathcal{F}_1\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) = \mathcal{F}_1\left(\frac{\lambda_0}{\mu_0}\right). \quad (14)$$

Тогда можно постараться при постоянном соотношении $\tau_0 = \frac{\lambda}{\mu}$ искать такие значения λ и μ , для которых

$$\int_0^1 \sigma_n(x, \delta) \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) dx_1 = -P. \quad (15)$$

Действительно, если задано τ_0 и соответствующее решение задачи препятствия, тогда определены u_1, u_2 и соответствующие производные на верхней границе, которые не меняются, если менять λ и μ при постоянном соотношении $\tau_0 = \frac{\lambda}{\mu}$.

При постоянном τ_0 из (11) будем иметь

$$\begin{aligned} S(\lambda, \mu) = & \int_0^1 \sigma_n \Big|_{x_1} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \Big|_{x_1}\right) dx_1 = \mu \left[\tau_0 \int_0^1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \Big|_{x_1} n_1^2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \Big|_{x_1} n_2^2 \right) \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \Big|_{x_1}\right) dx_1 + \right. \\ & + (\tau_0 + 2) \int_0^1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \Big|_{x_1} n_1^2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \Big|_{x_1} n_2^2 \right) \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \Big|_{x_1}\right) dx_1 + \\ & \left. + 2 \int_0^1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \Big|_{x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \Big|_{x_1} \right) n_1 n_2 \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \Big|_{x_1}\right) dx_1 \right]. \quad (16) \end{aligned}$$

Откуда следует

$$S(\lambda, \mu) = \mu \cdot C, \quad (17)$$

где постоянная C зависит только от соотношения τ_0 .

Лемма 1.

Если существует какое-нибудь достаточно гладкое решение прямой задачи (3)-(10) с заданной функцией φ и с определенными $\sigma_n^0, \lambda_0, \tau_0$, то при любом $P > C$ существует λ, μ при которых решение прямой задачи (3)-(10) удовлетворяет условию

$$S(\lambda, \mu) = -P. \quad (18)$$

Справедливость результата следует из (17).

Задачу минимизации теперь можно решать следующим образом:

а) сначала определяем $\pi_0 = \frac{A_0}{\pi_0}$, при котором достигается минимум $J_1(\frac{A}{\pi})$, определяем $S(\lambda_0, \pi_0)$,

б) определяем λ и π , которые удовлетворяют условию (2):

$$\pi = -\frac{P \pi_0}{S(\lambda_0, \pi_0)}, \quad (19)$$

$$\lambda = \pi_0 / \pi.$$

3. Численный метод

Схема решения задачи минимизации ясна, так как мы фактически получили задачу минимизации функции одного аргумента. Однако вычисление значений этой функции связано еще с решением задачи о препятствии, которая требует относительно больших вычислительных затрат. Итерационный метод решения задачи основан на решении последовательности задач Дирихле для системы Ляме с последующим уточнением перемещений верхней границы прямоугольника.

Предполагается, что решение системы Ляме можно искать в виде

$$u_1(x_1, x_2) = \sum_{i=0}^k A_i(x_1) x_2^i,$$

$$u_2(x_1, x_2) = \sum_{i=0}^k B_i(x_1) x_2^i, \quad (20)$$

где $A_i(x_1), B_i(x_1)$ — неизвестные функции. Пусть известны k -тые приближения перемещений верхней границы

$$u_1(x_1, \delta) = f(x_1), \quad u_2(x_1, \delta) = g(x_1).$$

Тогда для представления решения (20) имеем 4 интерполяционных условия (напомним $u_1(x_1, -\delta) = u_2(x_1, -\delta) = 0$), которые позволяют исключить 4 неизвестных. Функции $A_0(x_1), A_1(x_1), B_0(x_1), B_1(x_1)$ (индекс k для простоты в дальнейшем пропустим):

$$A_0(x_1) = \frac{1}{2}(f(x_1) - 2A_2(x_1)\delta^2),$$

$$A_1(x_1) = \frac{1}{2\delta}(-f(x_1) - 2A_3(x_1)\delta^3),$$

$$B_0(x_1) = \frac{1}{2}(g(x_1) - 2B_2(x_1)\delta^2),$$

$$B_1(x_1) = \frac{1}{2\delta}(-g(x_1) - 2B_3(x_1)\delta^3). \quad (21)$$

Остальные уравнения для определения функций $A_2(x_1), A_3(x_1), B_2(x_1), B_3(x_1)$ получаем после постановки (20) в уравнения (3), (4), требуя их выполнения в среднем по слою $(-\delta, \delta)$, а также чтобы невязка бы-

ла ортогональной x_2 в слое $-\delta < x_2 < \delta$ в смысле скалярного произведения в $L_2(-\delta, \delta)$.

В итоге можно получить следующую систему уравнений:

$$-\frac{4}{3}(\lambda+2\mu)\delta^3 \frac{d^3 A_1}{dx_2^3} + 4\mu\delta^2 A_1 = -((\lambda+2\mu)\delta \frac{d^2 f}{dx_2^2} - (\lambda+\mu) \frac{df}{dx_2}), \quad (22)$$

$$-\frac{4}{3}\mu\delta^3 \frac{d^3 B_1}{dx_2^3} + (\lambda+2\mu)4\delta B_1 = -\left(4\delta \frac{d^2 g}{dx_2^2} - (\lambda+\mu) \frac{dg}{dx_2}\right), \quad (23)$$

$$-\frac{4}{15}(\lambda+2\mu)\delta^3 \frac{d^3 A_2}{dx_2^3} + 4\mu\delta A_2 = -\left(-\frac{(\lambda+2\mu)\delta^2 f}{3} + (\lambda+\mu) \frac{4}{3}\delta \frac{df}{dx_2}\right), \quad (24)$$

$$-\frac{4}{15}\mu\delta^3 \frac{d^3 B_2}{dx_2^3} + 4\delta(\lambda+2\mu)B_2 = -\left(-\frac{\mu\delta^2 g}{3} + \frac{4}{3}\delta(\lambda+\mu) \frac{dg}{dx_2}\right), \quad (25)$$

В нашем случае граничные условия принимают вид:

$$\begin{aligned} A_1(0) = A_1(1) = B_1(0) = B_1(1) = 0, \\ A_2(0) = A_2(1) = B_2(0) = B_2(1) = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Привлекательность системы (22)–(25) заключается в том, что уравнения (22), (23) можно решить независимо с уравнений (24) и (25). После нахождения функций $A_1(x_2)$, $B_1(x_2)$ без трудностей из (24) и (25) определяется $A_2(x_2)$, $B_2(x_2)$.

Численно задачу (22)–(26) можно решить разностным методом. Для этого введем сетку

$$\bar{\omega}_h = \{x_i(i) | x_i(i) = ih, i = \overline{0, n}, h = 1/n\}.$$

Для обозначения приближенного решения в точках сетки будем использовать соответствующие малые буквы, например,

$$\begin{aligned} a^i &= a_1(x_i(i)), & f^i &= f(x_i(i)), \\ b^i &= b_1(x_i(i)), & g^i &= g(x_i(i)). \end{aligned} \quad (27)$$

Учитывая эти обозначения, аппроксимируя дифференциальные уравнения разностными, получим следующую разностную схему:

$$-\frac{4}{3}(\lambda+2\mu)\delta^3 \frac{a_2^{i+1} - 2a_2^i + a_2^{i-1}}{h^3} + 4\mu\delta a_2^i = -\left((\lambda+2\mu)\delta \frac{f^{i+1} - 2f^i + f^{i-1}}{h^2} - (\lambda+\mu) \frac{f^{i+1} - f^{i-1}}{2h}\right), \quad (28)$$

$$-\frac{4}{3}\mu\delta^3 \frac{b_2^{i+1} - 2b_2^i + b_2^{i-1}}{h^3} + (\lambda+2\mu)4\delta b_2^i = -\left(\mu\delta \frac{g^{i+1} - 2g^i + g^{i-1}}{h^2} + (\lambda+\mu) \frac{g^{i+1} - g^{i-1}}{2h}\right), \quad (29)$$

$$-\frac{4}{15}(\lambda+2\gamma)\delta^3 \frac{a_3^{i+1}-2a_3^i+a_3^{i-1}}{h^2} + 4\delta\mu a_3^i = -\left(-\frac{(\lambda+2\gamma)}{3} \frac{f^{i+1}-2f^i+f^{i-1}}{h^2} + \right. \\ \left. + (\lambda+\gamma) \frac{4}{3} \frac{f_2^{i+1}-6_2^{i-1}}{2h}\right), \quad (30)$$

$$-\frac{4}{15}\mu\delta^3 \frac{b_3^{i+1}-2b_3^i+b_3^{i-1}}{h^2} + 4\delta(\lambda+\gamma)b_3^i = -\left(-\frac{4}{3} \frac{q^{i+1}-2q^i+q^{i-1}}{h^2} + \right. \\ \left. + \frac{4}{3}\delta(\lambda+\gamma) \frac{a_2^{i+1}-a_2^{i-1}}{2h}\right), \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (31)$$

$$\alpha_2^0 = \alpha_2^n = b_2^0 = b_2^n = 0, \quad \alpha_3^0 = \alpha_3^n = b_3^0 = b_3^n = 0. \quad (32)$$

Система разностных уравнений решается прямо, путем четырех прогонок. Легко видеть, что разностная схема монотонна, и тем самым легко решаются вопросы о существовании и устойчивости разностного решения.

Необходимые для уточнения перемещений верхней границы величины нормального и тангенциального напряжения вычисляются по формулам:

$$\sigma_n^i = ((\lambda+2\gamma) \sum_{j=0}^3 \frac{a_j^{i+1}-a_j^{i-1}}{2h} \delta^j + \sum_{j=0}^2 (j+1) b_{j+1}^i \delta^j) (n_1^i)^2 + \\ + 2\gamma \left(\sum_{j=0}^2 (j+1) a_{j+1}^i \delta^j + \sum_{j=0}^3 \frac{b_j^{i+1}-b_j^{i-1}}{2h} \delta^j \right) n_1^i n_2^i + \\ + ((\lambda+2\gamma) \sum_{j=0}^2 (j+1) b_{j+1}^i \delta^j + \lambda \sum_{j=0}^3 \frac{a_j^{i+1}-a_j^{i-1}}{2h} \delta^j) (n_2^i)^2, \quad (33)$$

$$\sigma_t^i = ((\lambda+2\mu) \sum_{j=0}^3 \frac{a_j^{i+1}-a_j^{i-1}}{2h} \delta^j + \lambda \sum_{j=0}^2 (j+1) b_{j+1}^i \delta^j) n_1^i n_2^i + \\ + \mu \left(\sum_{j=0}^2 (j+1) a_{j+1}^i \delta^j + \sum_{j=0}^3 \frac{b_j^{i+1}-b_j^{i-1}}{2h} \delta^j \right) (n_2^i)^2 - (n_1^i)^2 - \\ - ((\lambda+2\mu) \sum_{j=0}^2 (j+1) b_{j+1}^i \delta^j + \lambda \sum_{j=0}^3 \frac{a_j^{i+1}-a_j^{i-1}}{2h} \delta^j) n_2^i n_1^i, \quad (34)$$

где

$$n_1^i = -\frac{q^{i+1}-q^{i-1}}{2h} \sqrt{\left(1 + \frac{f^{i+1}-f^{i-1}}{2h}\right)^2 + \left(\frac{q^{i+1}-q^{i-1}}{2h}\right)^2}, \quad (35)$$

$$n_x^i = \frac{1 + \frac{f^{i+1} - f^{i-1}}{2h}}{\sqrt{\left(1 + \frac{f^{i+1} - f^{i-1}}{2h}\right)^2 + \left(\frac{q^{i+1} - q^{i-1}}{2h}\right)^2}} \quad (36)$$

Итак, опишем подробнее метод решения задачи о препятствии. За начальное приближение перемещений верхней границы $\hat{f}^i(x), \hat{q}^i(x)$ берем такие две гладкие функции, которые гарантируют выполнение условия (7). Далее решаем систему (28)–(32) и определяем по формулам (33)–(36) нормальные и тангенциальные напряжения на верхней границе области. Новые приближения для $f(x_i)$ и $q(x_i)$ получаем

$$\hat{f}^i = \hat{f}^i + \Delta_n n_1^i + \Delta_t n_2^i,$$

$$\hat{q}^i = \hat{q}^i + \Delta_n n_2^i - \Delta_t n_1^i,$$

где

$$\Delta_n = -G_n \tau, \quad (37)$$

$$\Delta_t = -G_t \tau. \quad (38)$$

τ — итерационный параметр.

Однако \hat{f}^i, \hat{q}^i является новым приближением лишь в том случае, если выполняется условие

$$\delta + \hat{q}^i \leq \varphi(x_1(i) + \hat{f}^i).$$

в противном случае точку надо проецировать на поверхность препятствия. Если обозначить координаты проекции через $(x_1^*, \varphi(x_1^*))$, то значение x_1^* можно найти из уравнения

$$x_1(i) + \hat{f}^i - x_1^* + (\delta + \hat{q}^i - \varphi(x_1^*)) \varphi'(x_1^*) = 0, \quad (39)$$

и тогда действительное новое приближение для $f(x_1)$ и $q(x_1)$ определяется следующим образом:

$$\hat{f}^i = x_1^* - x_1(i),$$

$$\hat{q}^i = \varphi(x_1^*) - \delta.$$

Для решения уравнения (39) можно использовать, например, метод Ньютона. Если точка находится на препятствии, то необходимо исследовать знак G_n . Если $G_n < 0$, то точка в нормальном направлении не передвигается, т.е. $\Delta_n = 0$.

После нахождения новых приближений для $f_1(x_i), g(x_i)$ можно приступить к следующей итерации. Уточнение перемещений верхней границы прекращается тогда, когда σ_2 на всей верхней границе и σ_n вне зоны контакта достаточно малы.

4. Результаты расчетов

Сначала были рассмотрены модельные задачи, на которых изучалась правомерность замены функций перемещений в одном направлении кубическими полиномами. Двумерная задача Дирихле для системы Ляме на каждом итерационном шаге решалась также двумерным разностным методом. Оказалось, что даже при величине деформации 50% различия между решениями задачи о препятствии стлечались незначительно. Сказанное иллюстрируем конкретными числами. Пусть имеем прямую задачу о препятствии, где $\lambda=1, \mu=3, \sigma=0.12$, уравнение препятствия

$$x_2 = 2(x_1 - 0.5)^2.$$

В первом варианте расчеты проводятся по упрощенной модели, т.е. u_1, u_2 в направлении x_2 предполагаются кубическими. Число узловых точек в направлении x_1 $n=40$.

Во втором варианте для решения системы Ляме используется двумерная разностная аппроксимация с сеткой 41×11 .

Необходимо отметить что различие в перемещениях не превосходит 1%. Теперь сравним нормальные напряжения по своим вариантам в окрестности контакта.

Таблица 1. Нормальные напряжения.

$x_1(i)$	σ_{11}	
	Вариант 1	Вариант 2
0.275	-0.492E-06	-0.920E-06
0.300	-0.165E+01	-0.155E+01
0.325	-0.231E+01	-0.231E+01
0.350	-0.276E+01	-0.280E+01
0.375	-0.318E+01	-0.322E+01
0.400	-0.357E+01	-0.361E+01
0.425	-0.393E+01	-0.395E+01
0.450	-0.423E+01	-0.422E+01
0.475	-0.444E+01	-0.443E+01
0.500	-0.451E+01	-0.450E+01

Самое большое различие наблюдается на границе контактной зоны, где различие достигает 6,5%. Это естественно, так как использована равномерная разностная сетка и, конечно, нельзя гарантировать, что граница контактной зоны будет совпадать с узловой точкой. В остальных же точках это различие не превосходит 1-2%.

Перейдем к обсуждению результатов обратной задачи. Сначала несколько замечаний по поводу минимизации функционала. Как уже было сказано, $F(\lambda, \mu)$ можно рассматривать как двухаргументную функцию. Поэтому была сделана попытка использовать для минимизации программу *EQ47AF* из программного комплекса *NAG*. Эта программа реализует квазиньютоновский метод по минимизации функции многих аргументов и не требует задания компонент градиента в аналитическом виде. Однако эта программа, которая хорошо работает для всяких экзотических примеров, для функции $F(\lambda, \mu)$ не действовала. Это объясняется тем, что точность расчета напряжений в нашем случае более груба, чем чувствительность заложенного алгоритма минимизации.

Для минимизации функционала поэтому была составлена программа, реализующая комбинированный алгоритм - квазиньютоновский метод и метод дихотомии.

Перейдем к обсуждению результатов по решению обратной задачи. Из равенств (19) следует, что главной задачей в нашем случае является определение оптимального соотношения $\gamma_0 = \frac{\lambda_0}{\mu_0}$ или соотношения Пуассона ν_0 , которое определяется:

$$\nu_0 = \frac{\gamma_0}{2(\gamma_0 + 1)}.$$

Следующий этап определения λ, μ , которые гарантировали бы выполнения условия (2), соответствует определению модуля Юнга, который выражается:

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}.$$

Для проверки работоспособности алгоритма данные таблицы I использовались в качестве входных данных для обратной задачи. При начальных приближениях $\lambda = 1, \mu = 1$ и при минимизации на первом этапе по λ (μ остается постоянным) с последующим применением формул (19) получены $\lambda_0 = 1.0055, \mu_0 = 2.9971$. Если брать

за начальные приближения $\lambda = 3$, $\mu = 1$, то соответствующее число Пуассона $\nu = 0.375$. Отметим, что для исходных данных число Пуассона $\nu = 0.125$. Так же, как и в первом расчете, мы можем сначала искать отношение $\frac{\lambda}{\mu}$, оставляя μ постоянным и равным 1, однако в этом случае отличие от первого расчета лишь в количестве итераций. Если оставить постоянным λ и минимизировать функционал по μ , то получим $\lambda_0 = 3$, $\mu_0 = 9.0756$, откуда по формуле (19) в итоге получаем $\lambda = 0.9924$, $\mu = 3.0022$. Для рассматриваемого примера в процессе минимизации значение функционала (13) уменьшается на 4 порядка.

Необходимо отметить, что погрешность порядка 1% в определении параметров Ляме связана с выбранной точностью расчета прямой задачи Сильборина.

Важно подчеркнуть, что аппроксимация перемещений в одном направлении кубическими полиномами привела к существенной экономии машинного времени при решении задачи Дирихле для уравнений Ляме. Однако итерационный процесс для уточнения положения верхней границы сходится медленно. Так, для рассматриваемого примера на первоначальной стадии требуется около 150-200 итераций, чтобы σ_1 везде и σ_2 вне контакта были бы величинами порядка 10^{-5} .

Практический интерес вызывает задача об оптимизации упругих свойств материала с целью достижения определенных давлений в контактной зоне. Так как в нашей постановке λ , μ во всем упругом теле постоянны, то множество достигаемых распределений давлений в контактной зоне весьма ограничено. Если за исходные данные использовать распределение контактных давлений, которые недостижимы в рамках однородных изотропных упругих материалов, то у функционала (13) могут наблюдаться несколько локальных минимумов. Упомянутые выводы сделаны на основе численных экспериментов, поэтому здесь остается большое поле деятельности для теоретической работы.

В конце автор хочет выразить свою искреннюю благодарность моему бывшему коллеге Д. Соколеску за постоянную поддержку во время выполнения работы.

Библиографический список

1. Буйкис А.А. Вычисление коэффициентов интегрального параболического сплайна // Латв.мат.ежегодник.- Рига,1986.- Вып. 30.- С.228-232.
2. Главачек И., Гаслингер Я., Нечас И., Левишек Я. Решение вариационных неравенств в механике. - М.,1986.
3. Kikuchi N., Oden J.T. Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods / SIAM. - Philadelphia, 1988.

A.Zemītis. On the numerical solution of inverse Signorini problem.

Summary. A numerical method for one inverse two-dimensional Signorini problem is developed. The Lamé coefficients are determined in dependence of distribution of pressure in contact zone of hard obstacle with linearly elastic material. The displacements are approximated with cubic polynomials in one direction. Numerical examples are discussed.

AMS Subject classification 65H,73U.

A.Zemītis. Par inversās Signorini problēmas skaitlisko risināšanu.

Anotācija. Darbā piedāvāta skaitliska metode divdimensionālās inversās Signorini problēmas risināšanai, kas ļauj noteikt Lamé konstantes pēc spiediena sadalījuma kontakta zonā, kas veidojas cietam šķērslim deformējot homogēnu, izotropu elastīgu materiālu.

Кафедра дифференциальных
уравнений и приближенных
методов
Латвийский университет
бульвар Райниса 19
226098 а/я 129 г.Рига

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ МЕТОДА АСИМПТОТИЧЕСКОГО РАСШИРЕНИЯ ИНТЕРВАЛА ПРИ ОБРАЩЕНИИ ИНТЕГРАЛЬ- НОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Я. Смирнов

Аннотация. Для алгоритма вычисления оригинала Фурье методом асимптотического расширения интервала доказана устойчивость, дана оценка погрешности и найдено оптимальное значение параметра метода. Рассмотрен также случай разрывного оригинала. УДК 517.44 + 519.54

Введение

Рассмотрим задачу приближенного вычисления интеграла Фурье

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ixz) F(z) dz, \quad (0.1)$$

где функция $F(z)$ (преобразование Фурье функции $f(x)$) известна с некоторой погрешностью $\Delta F(z)$, т.е., при практическом счете (0.1) вместо $F(z)$ берется $G(z) = F(z) + \Delta F(z)$. Такая задача [1] является некорректной. Например, если относительно погрешности $\Delta F(z)$ известно лишь, что $|\Delta F(z)| \leq \varepsilon$ для всех $z \in \mathbb{R}$, то интеграл Фурье от функции G , вообще говоря, даже расходится. В [1] предложен набор алгоритмов устойчивого вычисления интеграла (0.1). Все они базируются на введении под знак интеграла дополнительной функции (так называемого стабилизирующего множителя), которая достаточно быстро стремится к нулю на бесконечности. В работах [2, 3] предложен алгоритм, метод асимптотического расширения интервала (метод АРИ), относящийся к тому же набору, но позволяющий помимо введения стабилизирующего множителя использовать центральную идею методов решения некорректных задач — учет в численном алгоритме некоторой дополнительной аналитической информации. В разделе I настоящей статьи для алгоритма вычисления оригинала Фурье, основанного на

методе АРМ, доказана устойчивость при выборе достаточно широкого класса опорных функций, дана оценка погрешности и найдено оптимальное значение параметра метода.

Однако весь этот широкий спектр алгоритмов обладает одним общим недостатком: каждый такой алгоритм позволяет получить устойчивое и равномерное приближение к $f(x)$ лишь на участках непрерывности $f(x)$. В окрестности же точек разрыва $f(x)$ равномерного приближения нет. Это вполне понятно. В (О.И) разрывы функции $f(x)$ в основном определяются поведением $F(z)$ при $z \rightarrow \pm \infty$. Стабилизирующие же множители стремятся к нулю на бесконечности и подавляя высшие гармоники уничтожают разрывы.

Для получения устойчивого и равномерного приближения $f(x)$ на классах разрывных функций необходимо учесть в алгоритме дополнительную аналитическую информацию - о структуре разрывов $f(x)$. Одним из вариантов введения такой информации в алгоритм вычисления интеграла (О.И), предложенный в [4], базируется на технике интегральных операторов с ядром типа Фейера [5]. В разделе 2 данной статьи дан алгоритм счёта (О.И) с использованием метода АРМ и сглаженного оригинала Фурье, позволяющий учесть структуру разрывов $f(x)$.

I. Оценка погрешности алгоритма нахождения оригинала Фурье методом АРМ

Рассмотрим следующий класс \mathcal{K} опорных функций [5].

Определение I. Рациональная функция $\Psi(z)$ комплексного переменного принадлежит классу \mathcal{K} , если выполнены условия:

1) $\Psi(0) = 1$, $\Psi(\infty) = 0$,

2) все полюсы функции $\Psi(z)$ z_1, z_2, \dots, z_p расположены симметрично относительно оси $\text{Im } z = 0$ на окружности $|z| = 1$ и попарно имеют одинаковые порядки (допускаются также точки $z = \pm 1$ как симметричные сами себе),

3)
$$\Psi(z) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{k+s}, \quad |z| < 1,$$

$$\Psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^{-k-\ell}, \quad |z| > 1,$$

$a_0 \neq 0, b_0 \neq 0, s, \ell > 0$ - целые числа.

Дадим основные формулы для реализации метода АРИ [2,3].

Пусть
$$F(z) = 1/\sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-izx} dx, \quad (I.1)$$

где $F(z)$ — изображение Фурье, допускает факторизацию

$$F(z) = F_+(z) + F_-(z):$$

$$F_+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(\tau) d\tau}{\tau - z}, \quad F_-(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(\tau) d\tau}{\tau - z} -$$

аналитические соответственно в верхней $\text{Im } z > 0$ и нижней $\text{Im } z < 0$ полуплоскостях.

Согласно методу АРИ для $x \in [-T, T]$ и $\epsilon > 0, T > 0$ оригинал преобразования Фурье $f(x)$ находится по формуле

$$f(x) = -i\sqrt{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_k \gamma_{kn} [F_+(z) e^{ixz} \psi_1(e^{izT}); \gamma_{kn}] + R_+(x, T) + i\sqrt{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_m \eta_{mn} [F_-(z) e^{ixz} \psi_2(e^{-izT}); \eta_{mn}] + R_-(x, T), \quad (I.2)$$

где

$$R_+(x, T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty - i\epsilon}^{+\infty - i\epsilon} F_+(z) e^{ixz} \psi_1(e^{izT}) dz, \quad (I.3)$$

$$R_-(x, T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty + i\epsilon}^{+\infty + i\epsilon} F_-(z) e^{ixz} \psi_2(e^{-izT}) dz, \quad (I.4)$$

а $\psi_1(u), \psi_2(v)$ — опорные функции срезания оригинала, имеющие особые точки u_k и v_m соответственно, при этом

$$\gamma_{kn} = \frac{\arg u_k + 2\pi n}{T}, \quad \eta_{mn} = \frac{-\arg v_m + 2\pi n}{T}.$$

Пусть λ — относительная погрешность вычисления заданного изображения на действительной оси, т.е.

$$|\Delta F(y)| \leq \lambda |F(y)|. \quad (I.5)$$

Если

$$\psi_1(u) = \psi_2(1/u) = \frac{1}{1+u^2}, \quad (I.6)$$

то после объединения суммы по вычетам в (I.2), получим

$$f(x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{T} \sum_{n=0}^{+\infty} F\left(\frac{n\pi}{T} + \frac{\pi}{2T}\right) \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2T} + R_+(x, T) + R_-(x, T). \quad (I.7)$$

Теорема I.

Пусть выполнены следующие условия:

1) $x \in [-T, T], T > 0$;

2) оригинал $f(x)$ при $x \rightarrow \pm \infty$ имеет асимптотические представления

$$f(x) = V_{\pm}(x) + g_{\pm}(x), \quad (I.8)$$

где $V_{\pm}(x)$ - асимптотическое выражение, а $g_{\pm}(x)$ - остаток асимптотического разложения. Тогда

$$R_{\pm}(x, T) = V_{\pm}(x, T) + g_{\pm}(x, T), \quad (I.9)$$

где

$$V_{\pm}(x, T) = \sum_{\ell=1}^{\infty} (-1)^{\ell-1} v_{\pm}(x \pm 2T\ell), \quad (I.10)$$

$$g_{\pm}(x, T) = \sum_{\ell=1}^{\infty} (-1)^{\ell-1} g_{\pm}(x \pm 2T\ell). \quad (I.11)$$

$V_{\pm}(x, T)$ - асимптотические поправки метода АРМ при выбранных Ψ_1 и Ψ_2 , которые учтены при практических вычислениях оригинала $f(x)$.

Проведем оценку погрешности алгоритма (I.7) с учетом (I.5). Для этого введем следующие обозначения:

$$f(x) \equiv f(x, T) = \tilde{f}(x, T) + \Delta f(x, T), \quad (I.12)$$

где $\tilde{f}(x, T)$ - практическое приближение оригинала $f(x)$ на $[-T, T]$ полученное методом АРМ по формуле

$$\tilde{f}(x, T) = \frac{1}{T} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{F}\left(\frac{n\pi}{T} + \frac{\pi}{2T}\right) \exp\left[ix\left(\frac{n\pi}{T} + \frac{\pi}{2T}\right)\right] + V_+(x, T) + V_-(x, T), \quad (I.13)$$

$$\tilde{F}(y) = F(y) + \Delta F(y), \quad (I.14)$$

а $\Delta f(x, T)$ - погрешность приближения, которая определяется формулой

$$\Delta f(x, T) = -\frac{1}{T} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Delta F\left(\frac{n\pi}{T} + \frac{\pi}{2T}\right) \exp\left[ix\left(\frac{n\pi}{T} + \frac{\pi}{2T}\right)\right] + g_+(x, T) + g_-(x, T). \quad (I.15)$$

Отсюда с учетом (I.5) получаем:

$$|\Delta f(x, T)| \leq \frac{\lambda}{T} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| F\left(\frac{n\pi}{T} + \frac{\pi}{2T}\right) \right| + |g_+(x, T)| + |g_-(x, T)|. \quad (I.16)$$

Для оценки погрешности (I.16) будет использована следующая дополнительная информация об оригинале и изображении Фурье.

Известно, что

$$I) |g_{\pm}(x)| \leq D / |x|^{1+\gamma} \text{ при } |x| \geq T_0, \gamma > 0, D > 0. \quad (I.17)$$

Тогда при $T > T_0$

$$|\xi_{\pm}(x, T)| \leq D_1 / T^{1+\gamma}, \quad (I.18)$$

где

$$D_1 = D \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{(2\ell-1)^{1+\gamma}}.$$

Отсюда $|\xi_+(x, T)| + |\xi_-(x, T)| \leq D_0 / T^{1+\gamma}$, $D_0 = 2D_1$.

$$2) F(y) = O(1/|y|^{1+\alpha}), \quad |y| \rightarrow \infty, \quad \alpha > 0. \quad (I.19)$$

Тогда существует $y_0 > 0$ такое, что при $|y| > y_0$

$$|F(y)| \leq A/|y|^{1+\alpha}, \quad A > 0 \quad \text{т.е., существует такое } N = \left[\frac{T y_0}{\pi} - \frac{1}{2} \right],$$

что при $|n| > N$

$$|F\left(\frac{n\pi}{T} + \frac{\pi}{2T}\right)| \leq AT^{1+\alpha} / \left[\left| \frac{2n+1}{2} \pi \right| \right]^{1+\alpha}. \quad (I.20)$$

$$\text{Если } F_0 = \sup_{|n| \leq N} |F\left(\frac{n\pi}{T} + \frac{\pi}{2T}\right)|, \quad (I.21)$$

$$\text{то } \frac{1}{T} \sum_{n=-N}^N |F\left(\frac{n\pi}{T} + \frac{\pi}{2T}\right)| \leq F_0 (2N+1)/T \leq \frac{2F_0 y_0}{\pi}. \quad (I.22)$$

Учитывая приведенные соотношения, если удовлетворены соотношения $T \geq T_0 > 0$ и $N = \left[\frac{T y_0}{\pi} - \frac{1}{2} \right]$ получена следующая оценка погрешности:

$$|\Delta f(x, T)| \leq \lambda T^{-\alpha} B / \pi^{\alpha} + \lambda F_0 y_0 \sqrt{\frac{\pi}{T}} + D_0 / T^{1+\gamma}, \quad (I.23)$$

$$\text{где } A \sqrt{\frac{\pi}{T}} \sum_{n=N+1}^{\infty} 1/(n+1)^{1+\alpha} = B_N \leq B.$$

Тогда оптимальным T в смысле минимальности суммы слагаемых в правой части формулы (I.23) является

$$T_{\lambda} = (D_0 (1+\gamma) \pi^{\alpha} / \lambda B \alpha)^{\frac{1}{\alpha+\gamma+1}}. \quad (I.24)$$

Полагая в (I.23) $T = T_{\lambda}$, для $x \in]-T_{\lambda}, T_{\lambda}[$ получим оценку погрешности приближенного вычисления оригинала $f(x)$ по методу АРМ:

$$|\Delta f(x, T)| \leq \left\{ \left[\frac{D_0 (1+\gamma)}{\alpha} \right]^{\frac{\alpha}{\alpha+\gamma+1}} + D_0^{\frac{\alpha}{\alpha+\gamma+1}} \left(\frac{\alpha}{1+\gamma} \right)^{\frac{\gamma+1}{\alpha+\gamma+1}} \right\} \left(\frac{\lambda B}{\pi^{\alpha}} \right)^{\frac{\alpha+\gamma+1}{\alpha+\gamma+1}} + \lambda F_0 y_0 \sqrt{\frac{\pi}{T}}. \quad (I.25)$$

Для $|x| \geq T_\lambda$ пригодна оценка

$$|\xi(x) - v_\pm(x)| \leq D_0 / |x|^{1+\delta}. \quad (I.26)$$

Из (I.25) и (I.26) следует, что погрешность аппроксимации оригинала $\xi(x)$ методом АРИ на промежутке $[-T_\lambda, T_\lambda]$ и асимптотической формулы $\xi(x) \sim v_\pm(x)$ при $|x| \geq T_\lambda$ стремится к нулю равномерно относительно x если относительная погрешность вычисления изображения $\lambda \rightarrow +0$. Таким образом, метод АРИ дает устойчивый алгоритм обращения.

Полученная оценка пригодна и в случае, если изображение Фурье $F(z)$ (I.1) имеет особенности на действительной оси $\text{Im } z = 0$, если только выполнены условия (I.17).

Если изображение $F(z)$ аналитично в полосе $-\delta_1 < \text{Im } z < \delta_2$, $\delta_1, \delta_2 > 0$, то в (I.17) с неизбежностью появляется экспоненциальный множитель, т.е. оно имеет вид:

$$|g_\pm(x)| \leq D e^{-\varepsilon|x|} / |x|^{1+\delta}, \quad |x| > T_0, \quad (I.27)$$

где $\varepsilon \leq \min\{\delta_1, \delta_2\}$.

Тем самым сходимость алгоритма улучшается, но для нахождения оптимального $T = T_\lambda$ необходимо решать трансцендентное уравнение. Наиболее простой способ доказательства устойчивости алгоритма обращения — это сведение к ранее рассмотренному случаю, используя неравенство $\exp(-\varepsilon|x|) < 1$ с помощью которого (I.27) сводится к (I.17).

Рассмотрим далее общий случай выбора опорных функций Ψ_1 и Ψ_2 с одним простым полюсом, представляющий наиболее широкий класс таких функций, для которых возможно объединение сумм по вычетам в (I.2). Так как гнетный вид многих формул сохраняется, изложение дадим в сокращенном виде.

Пусть

$$\Psi_1(u) = -\frac{e^{i\varphi_0}}{u - e^{i\varphi_0}}, \quad \Psi_2(1/u) = \frac{u}{u - e^{i\varphi_0}}, \quad (I.28)$$

то $-\pi < \varphi_0 \leq \pi$ причём

$$\Psi_1(e^{i2\pi}) = -\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\rho[-i(2\pi - \varphi_0)(k+i)]}; \quad \text{Im } z \rightarrow -\infty, \quad (I.29)$$

$$\Psi_2(e^{-izT}) = -\sum_{k=0}^{\infty} \exp[i(zT - \varphi_0)(k+1)], \quad \text{Im} z \rightarrow +\infty. \quad (\text{I.30})$$

После объединения сумм по вычетам в (I.2) и при выполнении условий:

$$1) \quad x \in [-(1-\delta)T, (1-\delta)T], \quad 0 < \delta < 1, \quad T > 0,$$

2) оригинал $\xi(x)$ при $x \rightarrow \pm \infty$ имеет асимптотические представления

$$\xi(x) = v_{\pm}(x) + g_{\pm}(x), \quad (\text{I.31})$$

где обозначения такие же, как и раньше, получим:

$$\xi(x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F\left(\frac{\varphi_0 + 2\pi n}{T}\right) \exp\left[\frac{ix}{T}(\varphi_0 + 2\pi n)\right] + R_+(x, T) + R_-(x, T). \quad (\text{I.32})$$

Здесь $R_{\pm}(x, T) = V_{\pm}(x, T) + g_{\pm}(x, T)$,

$$V_{\pm}(x, T) = -\sum_{k=0}^{\infty} \exp\left[\mp i\varphi_0(k+1)\right] v_{\pm}[x \pm T(k+1)], \quad (\text{I.33})$$

$$g_{\pm}(x, T) = -\sum_{k=0}^{\infty} \exp\left[\mp i\varphi_0(k+1)\right] g_{\pm}[x \pm T(k+1)]. \quad (\text{I.34})$$

Аналогично предыдущему для погрешности приближения $\Delta \xi(x, T)$ получим формулу:

$$\Delta \xi(x, T) = -\frac{\sqrt{2\pi}}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Delta F\left(\frac{\varphi_0 + 2\pi n}{T}\right) \exp\left[\frac{ix}{T}(\varphi_0 + 2\pi n)\right] + g_+(x, T) + g_-(x, T). \quad (\text{I.35})$$

Учитывая (I.5),

$$|\Delta \xi(x, T)| \leq \frac{\lambda \sqrt{2\pi}}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| F\left(\frac{\varphi_0 + 2\pi n}{T}\right) \right| + |g_+(x, T)| + |g_-(x, T)|. \quad (\text{I.36})$$

Если известно, что

$$|g_{\pm}(x)| \leq D e^{-\epsilon|x|/|x|^{1+\delta}}, \quad \text{при } |x| > T_0, \quad -|x| \geq \delta T \geq T_0, \quad \delta > 0, \quad D > 0, \quad (\text{I.37})$$

$$|g_+(x, T)| + |g_-(x, T)| \leq D_0 / T^{1+\delta}, \quad D_0 = 2D \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\delta + k)^{1+\delta}}.$$

Если

$$F(y) = O(1/|y|^{1+\alpha}), \quad y \rightarrow \infty, \quad \alpha > 0, \quad (\text{I.38})$$

то существует $y_0 > 0$ такое, что при $|y| > y_0$ $|F(y)| \leq A/|y|^{1+\alpha}$, $A > 0$ т.е., существует такое $N = \left[\frac{y_0 T - \varphi_0}{2\pi} \right]$, что при $|n| > N$

$$|F(\frac{\varphi_0 + 2\pi n}{T})| \leq AT^{1+\alpha} / |\varphi_0 + 2\pi n|^{1+\alpha}. \quad (I.39)$$

Пусть $F_0 = \sup_{|n| \leq N} |F(\frac{\varphi_0 + 2\pi n}{T})|$, тогда

$$\sum_{n=-N}^N |F(\frac{\varphi_0 + 2\pi n}{T})| \leq F_0 (2N+1) = F_0 \theta T, \quad (I.40)$$

где при $T > 1 - \varphi_0 / \pi$ имеет место неравенство $\varphi_0 / \pi < \theta < \varphi_0 / \pi + 1$, $|\varphi_0| \leq \pi$.

Для $|\Delta f(x, T)|$ получаем следующую оценку:

$$|\Delta f(x, T)| \leq \lambda T^\alpha B / (2\pi)^{\alpha} + \lambda \sqrt{2\pi} F_0 \theta + D_0 / T^{1+\delta}, \quad (I.41)$$

где $A \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=N+1}^{+\infty} (n + \frac{\varphi_0}{2\pi})^{-1-\alpha} = B_N \leq B$.

Тогда оптимальным T в смысле минимальности суммы слагаемых в правой части (I.41) является

$$T_\lambda = ((2\pi)^\alpha (1+\delta) D_0 / \alpha B \lambda)^{\frac{1}{\alpha+\delta+1}}. \quad (I.42)$$

Полагая $T = T_\lambda$, для $x \in [-(1-\delta)T_\lambda, (1-\delta)T_\lambda]$, $0 < \delta < 1$ (из (I.41)) получим оценку погрешности приближенного вычисления оригинала $f(x)$ по методу АРИ:

$$|\Delta f(x, T)| \leq \left(\frac{B \alpha}{(2\pi)^\alpha (1+\delta)} \right)^{\frac{\alpha+1}{\alpha+\delta+1}} D_0^{\frac{\alpha}{\alpha+\delta+1}} \frac{\alpha+\delta+1}{\alpha} \lambda^{\frac{\alpha+1}{\alpha+\delta+1}} + \sqrt{2\pi} F_0 \theta \lambda. \quad (I.43)$$

Для $|x| \geq T_\lambda$ пригодна оценка

$$|f(x) - v_\pm(x)| \leq D e^{-\lambda T_\lambda} / T_\lambda^{\delta+1}. \quad (I.44)$$

Из (I.43) и (I.44) следует, что погрешность аппроксимации оригинала $f(x)$ методом АРИ на промежутке $[-(1-\delta)T_\lambda, (1-\delta)T_\lambda]$ и асимптотической формулы $f(x) \sim v_\pm(x)$ при $x \geq T_\lambda$ и $x \leq -T_\lambda$ стремится к нулю равномерно относительно x , если $\lambda \rightarrow +\infty$.

Таким образом, метод АРИ дает устойчивый алгоритм обращения.

2. Примечание метода АРИ для вычисления сглаженного оригиналаФурье

Исследуем алгоритм нахождения оригинала Фурье $\xi(x)$ в случае, когда $\xi(x)$ принадлежит к достаточно простому классу разрывных функций M_n [4].

Определение 2.

M_n - это множество функций $\xi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что:

- 1) ξ на \mathbb{R} имеет не более чем конечное число точек разрыва первого рода $x_1 < x_2 < \dots < x_m$ где $x_j = x_j(\xi)$, $m = m(\xi)$;
- 2) на каждом промежутке $]-\infty, x_1[$, $[x_1, x_2[$, \dots , $[x_m, +\infty[$ функция ξ имеет непрерывные производные до порядка $2n$ включительно (в конечных точках по непрерывности);

- 3) для каждого $x \in \mathbb{R}$ $|\xi^{(2k)}(x)| \leq E_k < +\infty$, $k = 1, 2, \dots, n$, где E_k не зависит от ξ , причем

$$\xi^{(j)}(x) = \frac{1}{2} [\xi^{(j)}(x+0) + \xi^{(j)}(x-0)], \quad j = 0, 1, \dots, 2n.$$

После предварительного сглаживания оригинала с помощью ядра Вейерштрасса $K(x) = \exp(-x^2)/\sqrt{\pi}$ [4,5] имеем

$$\xi_{\sigma}(x) = \frac{\sigma^{+2n}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-s^2(x-t)^2] \xi(t) dt \quad (2.1)$$

или

$$\xi_{\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(iz - \frac{z^2}{4\sigma^2}\right) F(z) dz, \quad (2.2)$$

где $\sigma > 0$, а $F(z)$ - изображение Фурье функции $\xi(x)$.

Для удобства обозначим:

$$F_{\sigma}(z) = \exp(-z^2/4\sigma^2) F(z), \quad (2.3)$$

Пусть $\xi \in M_n$ и имеют место формулы (2.1) и (2.2). В [4] дан следующий алгоритм вычисления оригинала $\xi(x)$:

$$\xi = \xi_{\sigma} + P_{\sigma,n} - \Omega_{\sigma,n} - \rho_{\sigma,n}, \quad (2.4)$$

где

$$\Omega_{\sigma,n} = \Omega_{\sigma,n}(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\xi^{(2k)}(x)}{(2\sigma)^{2k} k!}, \quad (\Omega_{\sigma,1} = 0), \quad (2.5)$$

$$P_{\tau, n} = P_{\tau, n}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{j=0}^{2n-1} \frac{(-1)^j}{(2\tau)^j} \sum_{k=1}^m \Delta_j(x_k) W_j(x-x_k), \quad (2.6)$$

$$W_{2p-1}(x) = \exp(-\tau^2 x^2) \Psi(p, \frac{1}{2}; \tau^2 x^2), \quad (2.7)$$

$$W_{2p}(x) = \operatorname{sgn} x \exp(-\tau^2 x^2) \Psi(p+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \tau^2 x^2), \quad (2.8)$$

$$\Delta_j(x_k) = f^{(j)}(x_k+0) - f^{(j)}(x_k-0), \quad (2.9)$$

$$g_{\tau, n} = g_{\tau, n}(x) = \frac{\tau}{(2\tau)^{2n} n!} \int_{-\infty}^{+\infty} K_n(\tau(x-t)) f^{(2n)}(t) dt, \quad (2.10)$$

$$K_n(x) = \frac{n!}{\sqrt{\pi}} \exp(-x^2) \Psi(n, \frac{1}{2}; x^2), \quad (2.11)$$

$\Psi(a, c; x)$ - вырожденная гипергеометрическая функция:

$$\Psi(a, c; x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} \exp(-xt) t^{a-1} (1+t)^{c-a-1} dt, \quad (2.12)$$

а функция $\operatorname{sgn}(x)$ равна -1 ; 0 ; 1 соответственно при $x < 0$, $x = 0$ и $x > 0$.

Функция разрывов $P_{\tau, n}$ полностью определяется набором точек разрыва функции f $\{x_j\}$, скачками $\{\Delta_j(x_j)\}$ f и её производных в точках разрыва. Её учет соответственно вводит в численный алгоритм дополнительную аналитическую информацию о структуре разрывов $f(x)$, которая считается известной.

Функция $\Omega_{\tau, n}$ определяется через производные искомого функции $f(x)$. $\Omega_{\tau, 1} = 0$, а $\Omega_{\tau, n}$, $n > 1$ может быть исключена последовательными экстраполяциями по Ричардсону [4].

Для остатка $g_{\tau, n}(x)$ справедлива равномерная по x оценка $|g_{\tau, n}(x)| \leq E_n / (2\tau)^{2n} n!$, причем на любом замкнутом промежутке, не содержащем точек разрыва $f^{(2n)}(x)$,

$$g_{\tau, n}(x) = (1 / (2\tau)^{2n} n!) [f^{(2n)}(x) + o(1)], \quad \tau \rightarrow +\infty. \quad (2.13)$$

В работе [4] доказано, что погрешность алгоритма вычисления оригинала Фурье (2.4) равномерна на \mathbb{R} при условии, что погрешность $\Delta F(z)$ задания изображения Фурье $F(z)$ для всех $z \in \mathbb{R}$ удовлетворяет оценке $|\Delta F(z)| \leq \lambda$.

Изучим возможности применения вышеизложенных результатов к обращению преобразования Фурье на базе метода АРИ.

Легко доказать следующие леммы.

Лемма 1. Если $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$, то и $f_T(x), F_T(z) \in L^2(\mathbb{R})$.

Лемма 2. Если изображение $F(z) \in C^1(\mathbb{R})$, то $F_T(z) \in C^1(\mathbb{R})$ и удовлетворяет на действительной оси условию Гельдера, т.е. $F_T(z) \in H(\mathbb{R})$.

Если выполнены условия лемм 1 и 2, то по терминологии работы [6] $F_T \in \{0\}$, $f_T \in \{0\}$ и изображение $F_T(z)$ допускает факторизацию

$$F_T(z) = F_T^+(z) + F_T^-(z), \quad (2.14)$$

где $F_T^+(z)$ и $F_T^-(z)$ аналитичны соответственно при $\text{Im } z > 0$ и $\text{Im } z < 0$, а

$$f_T(x) = f_T^-(x) + f_T^+(x), \quad (2.15)$$

где $f_T^-(x) = f_T(x) \cdot \eta(-x)$, $f_T^+(x) = f_T(x) \cdot \eta(x)$, $\eta(x)$ — единичная функция. Тем самым обосновано применение метода АРИ для определения $f_T(x)$.

На основании результатов работы [3] сформулируем следующую теорему:

Теорема 2. Пусть при $T > 0$, $x \in [-T, T]$, $T > 0$ выполнено:

1) $f \in M_n$ и измерима на \mathbb{R} ,

2) $f(x)/(1+x^2)$ суммируема на \mathbb{R} , а f суммируема с квадратом на \mathbb{R} ,

3) изображение $F(z)$ аналитично в полосе $-\delta_1 < \text{Im } z < \delta_2$, $\delta_1, \delta_2 > 0$ и в этой полосе стремится к нулю при $z \rightarrow \infty$, тогда для каждой функции $\Psi(z) \in \mathcal{K}$ имеет место формула

$$f_T(x) = S_T(x, T) + R_T^+(x, T) + R_T^-(x, T), \quad (2.16)$$

где

$$S_T(x, T) = -i\sqrt{2\pi} \sum_{k=1}^p \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \operatorname{res} \left[F(z) e^{-\frac{z^2}{4T^2} + i\alpha z} \Psi(e^{i\tau z}); \frac{\alpha \tau z_k + 2\pi n}{T} \right], \quad (2.17)$$

$$R_T^+(x, T) = -\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \xi_T^+ [x + T(k+s)], \quad (2.18)$$

$$R_T^-(x, T) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k \xi_T^- [x - T(k+l)]. \quad (2.19)$$

Пусть $\xi \in M_n$ и $\alpha = \max_m |x_m|$, где x_m - точки разрыва ξ . На основании (2.2) и (2.4) при $T > \alpha\epsilon$ и $T \rightarrow \infty$ получаем

$$\xi_T^\pm(x \pm T(k + \frac{s}{\epsilon})) = \xi(x \pm T(k + \frac{s}{\epsilon})) + \sum_{j=1}^n \frac{\xi^{(2j)}(x \pm T(k + \frac{s}{\epsilon}))}{(2\tau)^{2j} j!} + O(e^{-(T-\alpha\epsilon)\frac{2^2}{T^2}}). \quad (2.20)$$

Заметим, что основные суммы $S_T(x, T)$ содержат стабилизирующий множитель $\exp(-z^2/4T^2)$, обеспечивающий устойчивое суммирование. Кроме того, эти суммы содержат только известные функции.

При $T > \alpha\epsilon$, учитывая (2.20), получаем

Теорема 3. Если $\xi(x) \sim v^\pm(x)$ при $x \rightarrow \pm\infty$, и это разложение можно почленно дифференцировать $2n$ раз, то при $T \rightarrow +\infty$:

$$R_T^\pm(x, T) \sim U_T^\pm(x, T) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k v_T^\pm [x \pm T(k + \frac{s}{\epsilon})], \quad (2.21)$$

где

$$v_T^\pm [x \pm T(k + \frac{s}{\epsilon})] = v^\pm [x \pm T(k + \frac{s}{\epsilon})] + \sum_{j=1}^n \frac{v^{(2j)} [x \pm T(k + \frac{s}{\epsilon})]}{(2\tau)^{2j} j!}. \quad (2.22)$$

Различные достаточные условия для дифференцирования асимптотических разложений функций даны в [7].

Здесь информация об асимптотическом поведении искомого оригинала $\xi(x)$ считается известной.

Для $\xi \in M_2$

$$v_T^\pm [x \pm T(k + \frac{s}{\epsilon})] = v^\pm [x \pm T(k + \frac{s}{\epsilon})] + \frac{v^{(2)} [x \pm T(k + \frac{s}{\epsilon})]}{4\tau^2}. \quad (2.23)$$

Если известна асимптотика оригинала и его производных до $2n$ -го порядка, то условие дифференцирования асимптотического разло-

жения оригинала в теореме 3 можно опустить.

Учитывая (2.4), (2.16) и (2.21), имеем следующий алгоритм вычисления оригинала $f(x)$:

$$f(x) = \varphi_T(x, T) + r_T(x, T), \quad (2.24)$$

где
$$\varphi_T = S_T + U_T^+ + U_T^- + P_{T,n} - \Omega_{T,n}. \quad (2.25)$$

В частном случае при $\Psi(u) = \frac{1}{1+u^2} \in \mathcal{K}$ (см. опр. I) вместо (2.17 - 2.19) получаем

$$S_T(x, T) = \frac{\sqrt{2\pi}}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F\left[\frac{\pi(2n+1)}{2T}\right] \exp\left[ix \frac{\pi(2n+1)}{2T} - \frac{\pi^2(2n+1)^2}{16T^2T^2}\right], \quad (2.26)$$

$$R_T^\pm(x, T) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} f_{\sigma}^\pm(x \pm 2kT), \quad (2.27)$$

$$U_T^\pm(x, T) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} v_{\sigma}^\pm(x \pm 2kT). \quad (2.28)$$

Пусть $f(x) \in M_1$ и погрешность изображения Фурье $F(z)$ для всех $z \in \mathbb{R}$ удовлетворяет оценке $|\Delta F(z)| \leq \lambda$, а также имеют место соотношения (1.3), (1.17), (1.18) и выполнены условия теоремы 3. Исследуем в первом приближении поведение первых трех слагаемых в (2.25). Для погрешности приближения $\Delta f_T(x, T)$ при $T > x$ получаем оценку:

$$|\Delta f_T(x, T)| \leq \frac{\lambda}{T} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{\pi^2(2n+1)^2}{16T^2T^2}\right] + \sum_{k=1}^{\infty} |g^+(x+2kT)| + \sum_{k=1}^{\infty} |g^-(x-2kT)| \quad (2.29)$$

или
$$|\Delta f_T(x, T)| < 4\sigma^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lambda T + D_0 / T^{1+\gamma}, \quad D_0 = \text{const}, \quad (2.30)$$

Тогда оптимальным T в смысле минимельности суммы слагаемых является:

$$T_\lambda = \left[\frac{(1+\gamma) D_0 \sqrt{\frac{2}{\pi}}}{4\sigma^2 \lambda} \right]^{\frac{1}{2+\gamma}}. \quad (2.31)$$

Полагая в (2.30) $T = T_\lambda$, получим

$$|\Delta f_{T_\lambda}(x, T)| < A (\sigma^2 \lambda)^{\frac{1+\gamma}{2+\gamma}} + B (\sigma^2 \lambda)^{\frac{1}{2+\gamma}}, \quad A, B = \text{const} > 0. \quad (2.32)$$

Таким образом, метод АРМ дает устойчивые алгоритмы вычисления $f_T(x)$, а учитывая исследование алгоритма (2.4) в [4], устойчив и алгоритм (2.25). Оценка (2.30) завышена, после её уточнения для T_λ можно получить формулу пригодную для практических вычислений.

Библиографический список

1. Тихонов А. П., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. - М.: Наука, 1979. - 238 с.
2. Смотров Я. А. Обращение преобразования Фурье методом асимптотического расширения интервала // Вопросы электродинамики и механики сплошных сред. - Рига: ИГУ, 1978. - IV. - С. 128 - 142.
3. Смотров Я. А., Нирулис Т. Т. Применение асимптотических разложений для обращения преобразования Фурье // Латвийский математический ежегодник. - Рига, 1981. - Вып. 25. - С. 195 - 210.
4. Балов Ч. А. Устойчивое вычисление рядов и интегралов Фурье для разрывных функций // Латвийский математический ежегодник. - Рига, 1990. - Вып. 33. - С. 125 - 133.
5. Ахизер Ч. К. Лекции по теории аппроксимации. - М.: Наука, 1965. - 407 с.
6. Гехов Ф. Д., Черский Ю. И. Уравнения типа свертки. - М.: Наука, 1979. - 295 с.
7. Звехотиньш Э. Я. Асимптотические разложения интегралов. - Рига: Зинатне, 1974. - Т. I. - 390 с.

J. Smitrovs. Estimation of the error of the interval's asymptotical expansion's method for the inversion of the Fourier transform.

Summary. For the algorithm of the Fourier original's calculation by the method of the interval's asymptotical expansion the stability is proved, estimation of the error is given and the optimal value of the method's parameter is found. Also the case of the discontinuous original is considered.

J. Smitrovs. Furjē transformācijas inversijas intervāla asimptotiskās paplašināšanas metodes kļūdas novērtējums.

Anotācija. Tiek apskatīta intervāla asimptotiskās paplašināšanas metode Furjē transformācijas inversijai. Pierādīta metodes algoritma stabilitāte, dots kļūdes novērtējums kā arī atraste metodes parametrs c tīnālā vērtība. Apskatīts arī gadījums, kad Furjē oriģinālam ir pirmā veida pārtraukuma punkti.

ULK 517.44 + 519.64.

Катедра общей математики
Латвийского университета
Сулг. Радиса, 19
226098 г. Рига

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ С РАЗРЫВНЫМИ НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ. I

М. Белов

Аннотация. На основе техники решения бисингулярных задач строится асимптотическое ($t \rightarrow +0$) решение смешанной параболической задачи, начальные условия которой имеют разрывы второго рода. Рассмотрены приложения полученных результатов для построения: асимптотических разложений — рядов Фурье и некоторых интегралов; алгоритмов устойчивого суммирования рядов Фурье функций с разрывами второго рода; возможных модификаций алгоритмов численного решения параболических задач с разрывными начальными условиями. В первой части работы получено формальное асимптотическое решение. Обоснование и приложения результатов будут даны во второй части. УДК 519.651

I. Постановка задачи

Строится равномерное ($x \in [a, b]$) асимптотическое ($t \rightarrow +0$) решение задачи:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = Lu, \quad x \in]a, b[, \quad t > 0;$$

где $\Lambda_1 u|_{x=a} = 0, \Lambda_2 u|_{x=b} = 0; u|_{t=0} = f(x), \quad (I.1)$

$$Lu = \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial x} \right) - qu, \quad \Lambda_1 u = h_1 u + h_2 \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\Lambda_2 u = H_1 u + H_2 \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \rho = \rho(x) > 0, \quad \rho = \rho(x) > 0$$

$$\forall x \in [a, b]; \quad |h_1| + |h_2| > 0, \quad |H_1| + |H_2| > 0. \quad (I.2)$$

Функции ρ, ρ и q достаточно гладкие. При построе-

ним формального асимптотического решения (ФАР) будем допускать, что p , q и q аналитические функции, причём расстояние от $[a, b]$ до ближайших особых точек функций p , q и q больше $\delta - a$. В дальнейшем это ограничение будет ослаблено.

Начальные значения $u = u(x, 0)$, т.е. функция $f(x)$ может иметь разрывы второго рода. Случай наличия разрывов первого рода изучен в [1]. Конкретно рассмотрим:

$$f(x) = \begin{cases} (x-a)^\alpha g_a(x), & x \in]a, x_j - \Delta[, \\ (x_j - x)^{\beta_j} g_{-j}(x), & x \in [a + \Delta, x_j[, \\ (x - x_j)^{\alpha_j} g_+(x), & x \in]x_j, b - \Delta], \\ (b - x)^{\beta} g_b(x), & x \in [x_j + \Delta, b[, \end{cases} \quad (1.3)$$

где α, β, α_j и $\beta_j > -1$, а $\Delta > 0$ достаточно мало. Функция $f(x)$ имеет лишь один внутренний разрыв в точке $x = x_j \in]a, b[$. Это ограничение несущественно. Полученные ниже результаты легко распространяются и на случай любого конечного числа внутренних точек разрыва. При построении ФАР будем допускать, что

$$g_a(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k^a \cdot (x-a)^k, \quad x \in [a, x_j - \Delta]; \quad g_k^a = g_a^{(k)}(a)/k!, \quad (1.4)$$

$$g_b(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k^b \cdot (b-x)^k, \quad x \in [x_j + \Delta, b]; \quad g_k^b = (-1)^k g_b^{(k)}(b)/k!, \quad (1.5)$$

$$g_+(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k^+ \cdot (x-x_j)^k, \quad x \in [x_j, b - \Delta]; \quad g_k^+ = g_+^{(k)}(x_j)/k!, \quad (1.6)$$

$$g_{-j}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k^- \cdot (x_j - x)^k, \quad x \in [a + \Delta, x_j]; \quad g_k^- = (-1)^k g_{-j}^{(k)}(x_j)/k!. \quad (1.7)$$

Если эти ограничения будут несколько ослаблены.

В дальнейшем предполагается, что расстояния Δ_a и Δ_b

от точки внутреннего разрыва x_j до граничных точек a и b (а также расстояния между внутренними точками разрывов, если их несколько) достаточно велики ($\Delta_{a,j} \gg \sqrt{t}$). Таким образом, взаимодействие отдельных точек разрыва не рассматривается. Это ограничение ниже не снимается.

В задаче (I.I) источник имеется лишь в начальном условии. Это не ограничивает общности результатов, т.к. задача с источниками в уравнении и в граничных условиях известными методами легко сводится к решению соответствующих задач с источником в начальном условии.

2. Регулярная асимптотика

Если ЭДР уравнения задачи (I.I) при $t \rightarrow +0$ искать в виде ряда по степеням t , то легко получаем так называемую регулярную асимптотику:

$$U(x, t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} L_*^k f, \quad L_* = \frac{1}{\rho} L. \quad (2.1)$$

Регулярная асимптотика (2.1), вообще говоря, не определена в точках $x = a$, $x = b$ и $x = x_j$ разрыва функции $f = f(x)$, определённой формулой (1.3).

Лемма I. Имеют место следующие разложения:

$$L_*^k f = \frac{(x-a)^\alpha}{(x-a)^{2k}} \sum_{\mu=0}^{+\infty} \omega_{k,\mu}^a (x-a)^\mu, \quad x \in]a, x_j - \Delta], \quad (2.2)$$

$$L_*^k f = \frac{(b-x)^\beta}{(b-x)^{2k}} \sum_{\mu=0}^{+\infty} \omega_{k,\mu}^b (b-x)^\mu, \quad x \in [x_j + \Delta, b[, \quad (2.3)$$

$$L_*^k f = \frac{(x-x_j)^{\alpha_j}}{(x-x_j)^{2k}} \sum_{\mu=0}^{+\infty} \omega_{k,\mu}^+ (x-x_j)^\mu, \quad x \in]x_j, b - \Delta], \quad (2.4)$$

$$L_*^k f = \frac{(x_j-x)^\beta_j}{(x_j-x)^{2k}} \sum_{\mu=0}^{+\infty} \omega_{k,\mu}^- (x_j-x)^\mu, \quad x \in [a + \Delta, x_j[, \quad (2.5)$$

причём $\omega_{k,\mu}^a$ вычисляется согласно алгоритму

$$P_1(\omega_{m,n}^a | \alpha, a_k, b_k, c_k, g_k^a) \quad (\text{см. Приложение I}), \text{ где}$$

$$a_0^2 = \rho(a)/\rho(a), \quad a_k = \rho^{(k)}(a)/(\rho(a)k!), \quad k=1, 2, \dots;$$

$$b_k = \rho^{(k)}(a)/(\rho(a)k!), \quad c_k = q^{(k)}(a)/(\rho(a)k!),$$

$$g_k^a = g_a^{(k)}(a)/k!, \quad k=0, 1, 2, \dots; \quad (2.6)$$

аналогично $\omega_{k,\mu}^b$ вычисляются по алгоритму

$$P_1(\omega_{m,n}^b | \beta, a_k, b_k, c_k, g_k^b), \text{ где теперь}$$

$$a_0^2 = \rho(b)/\rho(b), \quad a_k = (-1)^k \rho^{(k)}(b)/(\rho(b)k!), \quad k=1, 2, \dots;$$

$$b_k = (-1)^k \rho^{(k)}(b)/(\rho(b)k!), \quad c_k = (-1)^k q^{(k)}(b)/(\rho(b)k!),$$

$$g_k^b = (-1)^k g_b^{(k)}(b)/k!, \quad k=0, 1, 2, \dots; \quad (2.7)$$

$\omega_{k,\mu}^+$ — по алгоритму $P_1(\omega_{m,n}^+ | \alpha_j, a_k, b_k, c_k, g_k^+)$, где

$$a_0^2 = \rho(x_j)/\rho(x_j), \quad a_k = \rho^{(k)}(x_j)/(\rho(x_j)k!), \quad k=1, 2, \dots;$$

$$b_k = \rho^{(k)}(x_j)/(\rho(x_j)k!), \quad c_k = q^{(k)}(x_j)/(\rho(x_j)k!),$$

$$g_k^+ = g_+^{(k)}(x_j)/k!, \quad k=0, 1, 2, \dots; \quad (2.8)$$

и $\omega_{k,\mu}^-$ — по алгоритму $P_1(\omega_{m,n}^- | \beta_j, a_k, b_k, c_k, g_k^-)$, где

$$a_0^2 = \rho(x_j)/\rho(x_j), \quad a_k = (-1)^k \rho^{(k)}(x_j)/(\rho(x_j)k!), \quad k=1, 2, \dots;$$

$$b_k = (-1)^k \rho^{(k)}(x_j)/(\rho(x_j)k!), \quad c_k = (-1)^k q^{(k)}(x_j)/(\rho(x_j)k!),$$

$$g_k^- = (-1)^k g_-^{(k)}(x_j)/k!, \quad k=0, 1, 2, \dots. \quad (2.9)$$

Из леммы I следует, что регулярная асимптотика (2.1) не является равномерной в окрестностях точек разрыва функции f , и задача построения асимптотического (при $t \rightarrow +0$) решения задачи (I.1) относится, таким образом, к классу бисингулярных [2].

Ниже используются некоторые общие технические приёмы решения

задач такого типа, изложенные в [2].

3. Локальные асимптотические решения

Поскольку регулярная асимптотика (2.1) не пригодна в окрестностях точек разрыва функции f , то в них необходимо построить иную форму асимптотической аппроксимации решений задачи (1.1). Для этого вводим "быстрое" время $\tau = t/\varepsilon$, $\varepsilon \rightarrow +0$ — параметр. При этом задача (1.1) переходит в

$$\rho \frac{\partial u}{\partial \tau} = \varepsilon L u, \quad x \in]a, b[, \quad \tau > 0;$$

$$\Lambda_1 u|_{x=a} = 0, \quad \Lambda_2 u|_{x=b} = 0, \quad u|_{\tau=0} = f(x). \quad (3.1)$$

3.1. В окрестности границы $x = a$ ФАР задачи (3.1) ищется в виде:

$$V_a = \varepsilon^{\alpha/2} \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^{k/2} V_{k,a}(\xi, \tau), \quad \xi = (x-a)/\sqrt{\varepsilon}. \quad (3.2)$$

Подставляя (3.2) в (3.1) (переходя предварительно в (3.1) к аргументу ξ) и проводя разложения по степеням малого параметра ε , получаем задачу $S_1(V_{k,a} | \alpha, a_k, b_k, c_k, g_k^a)$ (см. Приложение 2.) для определения функций $V_{k,a}$. В этом пункте a_k, b_k, c_k и g_k^a определены формулами (2.6). К задаче S_1 добавляются граничные условия:

$$h_2 \frac{\partial}{\partial \xi} V_{0,a} |_{\xi=0} = 0; \quad (h_1 V_{k,a} + h_2 \frac{\partial}{\partial \xi} V_{k+1,a}) |_{\xi=0} = 0, \quad (3.3)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

порожденные граничным условием $\Lambda_1 u|_{x=a} = 0$ задачи (3.1) (условие $\Lambda_2 u|_{x=b} = 0$ здесь игнорируется).

Для определения функций $V_{k,a}$ используется автомодельное представление:

$$V_{k,a}(\xi, \tau) = \tau^{\frac{\alpha+k}{2}} (2a_0)^k \mathcal{V}_{k,a}(z), \quad z = \frac{\xi^2}{4a_0^2 \tau}. \quad (3.4)$$

При этом ФАР (3.2) принимает вид:

$$V_a = \sum_{k=0}^{+\infty} \tau^{\frac{\alpha+k}{2}} (2a_0)^k \mathcal{V}_{k,a}(z), \quad z = \frac{(x-a)^2}{4\varepsilon a_0^2 t}, \quad (3.5)$$

(возвращаемся к исходным аргументам t и x), а для определения функций $U_{k,\alpha}(z)$ получаем задачу $S_2(U_{k,\alpha} | \alpha, a_k, b_k, c_k, g_k^a)$, причём дополнительные граничные условия (3.3) преобразуются к виду:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow +0} U_{k,\alpha}(z) &= 0, \quad h_2 = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \\ \lim_{z \rightarrow +0} z^{1/2} U'_{0,\alpha}(z) &= 0, \quad \lim_{z \rightarrow +0} [2h_2 z^{1/2} U'_{k,\alpha} + h_1 U_{k-1,\alpha}] = 0, \\ h_2 &\neq 0, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.6)$$

В итоге для функций $U_{k,\alpha}(z)$ получены представления в виде степенных рядов (с радиусом сходимости $R = \infty$) вида:

$$U_{k,\alpha}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{k,n}^a z^{n/2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.7)$$

Детали вычисления $U_{k,\alpha}(z)$ даны алгоритмом

$$P_2(U_{k,\alpha} = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{k,n}^a z^{n/2} | \alpha, a_k, b_k, c_k, g_k^a, h_1, h_2)$$

В частности,

$$U_{0,\alpha}(z) = A_0 e^{-z} \Phi\left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{1}{2}; z\right) + B_0 e^{-z} \Psi\left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{1}{2}; z\right), \quad (3.8)$$

где $\Phi(\nu, \mu; z)$ и $\Psi(\nu, \mu; z)$ — вырожденные гипергеометрические функции,

$$A_0 = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) (2a_0)^\alpha g_a(0), \quad (3.9)$$

а $B_0 = 0$ при $h_2 \neq 0$ и

$$B_0 = -\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + 1\right) A_0, \quad h_2 = 0. \quad (3.10)$$

Формулы (3.5), (3.7) и дают искомое ФАР задачи (I.1) в окрестности границы $x = a$.

3.2. В окрестности границы $x = b$ ФАР задачи (I.1) строится аналогично предыдущему. В итоге получаем:

$$V_\beta = \sum_{k=0}^{+\infty} t^{\frac{\beta+k}{2}} (2a_0)^k U_{k,\beta}(z), \quad z = \frac{(b-x)^2}{4a_0^2 t}, \quad (3.11)$$

Функция $U_{k,\beta}(\bar{z})$ определяется алгоритмом

$$P_2(v_{k,\beta} = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{k,n} \bar{z}^{n/2} | \beta, a_k, b_k, c_k, g_k^{\beta}, H_1, -H_2),$$

где a_k, b_k, c_k и g_k^{β} заданы формулами (2.7).

3.3. Для построения ФАР V_j задачи (3.1) в окрестности внутренней точки разрыва $x = x_j$ полагаем $V_j = V_{\alpha_j} + V_{\beta_j}$ и, разбивая (3.1) на две задачи, получаем

$$\rho \frac{\partial V_{\alpha_j}}{\partial \tau} = \varepsilon L V_{\alpha_j}, \quad V_{\alpha_j}|_{\tau=0} = \begin{cases} (x-x_j)^{\alpha_j} g_+(x), & x > x_j, \\ 0, & x < x_j, \end{cases} \quad (3.12)$$

$$\rho \frac{\partial V_{\beta_j}}{\partial \tau} = \varepsilon L V_{\beta_j}, \quad V_{\beta_j}|_{\tau=0} = \begin{cases} (x_j-x)^{\beta_j} g_-(x), & x < x_j, \\ 0, & x > x_j \end{cases} \quad (3.13)$$

Граничные условия задачи (3.1) здесь игнорируются.

3.3.1. ФАР задачи (3.12) ищется в виде:

$$V_{\alpha_j} = \begin{cases} \varepsilon^{\alpha_j/2} \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^{k/2} V_{k,\alpha_j}^+(\bar{F}, \tau), & \bar{F} = \frac{x-x_j}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad x > x_j, \\ \varepsilon^{\alpha_j/2} \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^{k/2} V_{k,\alpha_j}^-(\bar{F}, \tau), & \bar{F} = \frac{x_j-x}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad x < x_j. \end{cases} \quad (3.14)$$

Как и в п.3.1. для нахождения функций V_{k,α_j}^{\pm} получаем задачу: $S_1(V_{k,\alpha_j}^+ | \alpha_j, a_k, b_k, c_k, g_k^+)$, где a_k, b_k, c_k и g_k^+ определены (2.8), а для V_{k,α_j}^- — задачу: $S_1(V_{k,\alpha_j}^- | \alpha_j, a_k, b_k, c_k, 0)$ где теперь a_k, b_k и c_k определены (2.9). Условия согласования

$$V_{\alpha_j}|_{x=x_j-0} = V_{\alpha_j}|_{x=x_j+0}, \quad \tau > 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} V_{\alpha_j}|_{x=x_j-0} = \frac{\partial}{\partial x} V_{\alpha_j}|_{x=x_j+0}, \quad \tau > 0 \quad (3.15)$$

приводят к следующим дополнительным условиям на функции V_{k, α_j}^+ и V_{k, α_j}^-

$$V_{k, \alpha_j}^+|_{\xi=+0} = V_{k, \alpha_j}^-|_{\xi=+0}, \quad \tau > 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} V_{k, \alpha_j}^+|_{\xi=+0} = -\frac{\partial}{\partial \xi} V_{k, \alpha_j}^-|_{\xi=+0}, \quad \tau > 0, \quad (3.16)$$

$k = 0, 1, 2, \dots$

Для определения функций V_{k, α_j}^+ и V_{k, α_j}^- используются автомодельные представления:

$$V_{k, \alpha_j}^+(\xi, \tau) = \tau^{\frac{\alpha_j + k}{2}} (2a_0)^k v_{k, \alpha_j}^+(z), \quad z = \frac{\xi^2}{4a_0^2 \tau}; \quad (3.17)$$

$$V_{k, \alpha_j}^-(\xi, \tau) = \tau^{\frac{\alpha_j + k}{2}} (2a_0)^k v_{k, \alpha_j}^-(z), \quad z = \frac{\xi^2}{4a_0^2 \tau}, \quad (3.18)$$

где $a_0^2 = \rho(x_j)/\rho(x_j)$. При этом ДАР (3.14) принимает вид:

$$V_{\alpha_j} = \begin{cases} \sum_{k=0}^{+\infty} t^{\frac{\alpha_j + k}{2}} (2a_0)^k v_{k, \alpha_j}^+(z), & x > x_j, \\ \sum_{k=0}^{+\infty} t^{\frac{\alpha_j + k}{2}} (2a_0)^k v_{k, \alpha_j}^-(z), & x < x_j, \end{cases} \quad (3.19)$$

где $z = (x - x_j)^2 / (4a_0^2 t)$ (возвращаемся к исходным аргументам t и x). Для функций $v_{k, \alpha_j}^+(z)$ получаем задачу: $S_2(v_{k, \alpha_j}^+ | \alpha_j, a_k, b_k, c_k, g_k^+)$, где a_k, b_k, c_k и g_k^+ определены (2.8), а для $v_{k, \alpha_j}^-(z)$ — задачу: $S_2(v_{k, \alpha_j}^- | \alpha_j, a_k, b_k, c_k, 0)$, где a_k, b_k и c_k определены (2.9). Условия (3.16) принимают вид:

$$v_{k, \alpha_j}^+|_{z=+0} = v_{k, \alpha_j}^-|_{z=+0},$$

$$z^{1/2} \frac{d}{dz} v_{k, \alpha_j}^+|_{z=+0} + z^{1/2} \frac{d}{dz} v_{k, \alpha_j}^-|_{z=+0} = 0, \quad (3.20)$$

$k = 0, 1, 2, \dots$

В итоге получены представления функций $v_{k, \alpha_j}^+(z)$ в виде степенных рядов (с радиусом сходимости $R = \infty$) вида

$$v_{k, \alpha_j}^+(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{k,n}^{\alpha_j} z^{n/2}, \quad k=0, 1, 2, \dots \quad (3.21)$$

Детали вычисления $v_{k, \alpha_j}^+(z)$ даны алгоритмом

$$P_4(v_{k, \alpha_j}^+ = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{k,n}^{\alpha_j} z^{n/2} | \alpha_j, a_k, b_k, c_k, g_k^+),$$

где a_k, b_k, c_k и g_k^+ определены (2.8). В частности,

$$v_{0, \alpha_j}^+ = \frac{1}{\sqrt{x}} \Gamma\left(\frac{\alpha_j+1}{2}\right) (2a_0)^{\alpha_j} g_+(x_j) e^{-z} \Phi\left(\frac{\alpha_j+1}{2}, \frac{1}{2}; z\right) - \\ - \frac{1}{2\sqrt{x}} a_0^{\alpha_j} g_+(x_j) \Gamma(\alpha_j+1) e^{-z} \Psi\left(\frac{\alpha_j+1}{2}, \frac{1}{2}; z\right). \quad (3.22)$$

Функции же $v_{k, \alpha_j}^-(z)$ имеют представление

$$v_{k, \alpha_j}^-(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \alpha_{k,n}^{\alpha_j} z^{n/2}, \quad k=0, 1, \dots \quad (3.23)$$

Например,

$$v_{0, \alpha_j}^- = \frac{1}{2\sqrt{x}} a_0^{\alpha_j} g_+(x_j) \Gamma(\alpha_j+1) e^{-z} \Psi\left(\frac{\alpha_j+1}{2}, \frac{1}{2}; z\right). \quad (3.24)$$

3.3.2. ФАР задачи (3.13) строится аналогичным образом.

В итоге получаем:

$$V_{\beta_j} = \begin{cases} \sum_{k=0}^{+\infty} t^{\frac{\beta_j+k}{2}} (2a_0)^k v_{k, \beta_j}^+(z), & x > x_j, \\ \sum_{k=0}^{+\infty} t^{\frac{\beta_j+k}{2}} (2a_0)^k v_{k, \beta_j}^-(z), & x < x_j, \end{cases} \quad (3.25)$$

где $a_0^2 = p(x_j)/r(x_j)$, $z = (x-x_j)^2/(4a_0^2 t)$.

Функции $v_{k, \beta_j}^-(z)$ определяются алгоритмом

$$P_4(v_{k, \beta_j}^- = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{k,n}^{\beta_j} z^{n/2} | \beta_j, a_k, b_k, c_k, g_k^-),$$

где α_k, β_k, c_k и g_k^- заданы формулами (2.9), а

$$v_{k, \beta_j}^+ (z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \alpha_{k, n}^{\beta_j} z^{n/2}, \quad k=0, 1, \dots \quad (3.26)$$

В частности,

$$v_{0, \beta_j}^- = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{\beta_j+1}{2}\right) (2a_0)^{\beta_j} g_-(x_j) e^{-z} \Phi\left(\frac{\beta_j+1}{2}, \frac{1}{2}; z\right) - \\ - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} a_0^{\beta_j} g_-(x_j) \Gamma(\beta_j+1) e^{-z} \Psi\left(\frac{\beta_j+1}{2}, \frac{1}{2}; z\right), \quad (3.27)$$

$$v_{0, \beta_j}^+ = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} a_0^{\beta_j} g_-(x_j) \Gamma(\beta_j+1) e^{-z} \Psi\left(\frac{\beta_j+1}{2}, \frac{1}{2}; z\right). \quad (3.28)$$

В итоге имеем следующие локальные САР задачи (I.I) :

1) В окрестности границы $x = a$

$$V_a = t^{\alpha/2} \sum_{k=0}^{+\infty} (\tau_a t)^{k/2} v_{k, a}(z), \quad z = \frac{(x-a)^2}{\tau_a t}; \quad (3.29)$$

2) в окрестности границы $x = b$

$$V_b = t^{\beta/2} \sum_{k=0}^{+\infty} (\tau_b t)^{k/2} v_{k, b}(z), \quad z = \frac{(b-x)^2}{\tau_b t}; \quad (3.30)$$

3) в окрестности внутренней точки разрыва $x = x_j$

$$V_j = V_{\alpha_j} + V_{\beta_j} =$$

$$= t^{\alpha_j/2} \sum_{k=0}^{+\infty} (\tau_j t)^{k/2} v_{k, \alpha_j}(z) + t^{\beta_j/2} \sum_{k=0}^{+\infty} (\tau_j t)^{k/2} v_{k, \beta_j}(z), \quad (3.31)$$

где

$$v_{k, \alpha_j}(z) = \begin{cases} v_{k, \alpha_j}^+(z), & x \geq x_j, \\ v_{k, \alpha_j}^-(z), & x \leq x_j, \end{cases} \quad (3.32)$$

$$v_{\kappa, \beta_j}(z) = \begin{cases} v_{\kappa, \beta_j}^+(z), & x \geq x_j, \\ v_{\kappa, \beta_j}^-(z), & x < x_j, \end{cases} \quad (3.23)$$

$z = (x - x_j)^2 / (\tau_j t)$. причём здесь введены обозначения

$$\tau_a = 4\rho(a)/\rho'(a), \tau_b = 4\rho(b)/\rho'(b), \tau_j = 4\rho(x_j)/\rho'(x_j). \quad (3.24)$$

4. Свойства локальных асимптотических решений

В дальнейшем потребуются ряд свойств функций, входящих в полученные выше ФАР.

Лемма 2. При $z \rightarrow +\infty$ имеют место следующие асимптотические разложения:

$$v_{\kappa, a}(z) \sim z^{\frac{\alpha + \kappa}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\omega_{n, \kappa}^a}{n! \tau_a^{n - \alpha/2} z^n}, \quad (4.1)$$

$$v_{\kappa, b}(z) \sim z^{\frac{\beta + \kappa}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\omega_{n, \kappa}^b}{n! \tau_b^{n - \beta/2} z^n}, \quad (4.2)$$

$$v_{\kappa, \alpha_j}^+(z) \sim z^{\frac{\alpha_j + \kappa}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\omega_{n, \kappa}^+}{n! \tau_j^{n - \alpha_j/2} z^n}, \quad (4.3)$$

$$v_{\kappa, \beta_j}^-(z) \sim z^{\frac{\beta_j + \kappa}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\omega_{n, \kappa}^-}{n! \tau_j^{n - \beta_j/2} z^n}, \quad (4.4)$$

допускаемые почленно дифференцирование. Константы $\omega_{n, \kappa}^a$, $\omega_{n, \kappa}^b$, $\omega_{n, \kappa}^+$ и $\omega_{n, \kappa}^-$ определены соответственно в формулах (2.2) — (2.5).

Лемма 3. При $z \rightarrow +\infty$ имеет место асимптотическое разложение

$$v_{\kappa, \alpha_j}^- \sim \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-z}}{z^{\delta_{\kappa, n}}} \sum_{\mu=0}^{\kappa} z_{\kappa, n, \mu} \ln^{\mu} z, \quad (4.5)$$

константы $\gamma_{k,n}$ и $z_{k,n,\mu}$ определяются алгоритмом

$P_5(\gamma_{k,n}; z_{k,n,\mu} | \alpha_j, \tau_k, \nu_k, \sigma_k, \varrho_k^+)$, где α_k, ν_k и σ_k заданы формулами (2.9), а ϱ_k^+ — (2.8).

Лемма 4. При $z \rightarrow +\infty$ имеет место асимптотическое разложение

$$v_{k,\rho_j}^+ \sim \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-z}}{z^{\gamma_{k,n}}} \sum_{\mu=0}^k z_{k,n,\mu} \ln^\mu z, \quad (4.6)$$

константы $\gamma_{k,n}$ и $z_{k,n,\mu}$ определяются алгоритмом

$P_5(\gamma_{k,n}; z_{k,n,\mu} | \beta_j, \alpha_k, \nu_k, \sigma_k, \varrho_k^-)$, где α_k, ν_k и σ_k заданы формулами (2.8), а ϱ_k^- — (2.9).

Разложения (4.5) и (4.6) допускают почленное дифференцирование. Доказательства лемм проводятся стандартными методами [3].

Выше получено два вида ФАР: регулярное (2.1) и локальные (3.29) — (3.31) для окрестностей соответствующих критических точек $x = a$, $x = b$ и $x = x_j$. В дальнейшем будем работать не с формальными асимптотическими рядами, а с конечными суммами следующего вида:

$$A_{n,x} U = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} L_k^* f, \quad (4.7)$$

$$A_{m,z_a} V_a = t^{\alpha/2} \sum_{k=0}^m (\tau_a t)^{k/2} \mathcal{U}_{k,\alpha}(z_a), \quad z_a = \frac{(x-a)^2}{\tau_a t}, \quad (4.8)$$

$$A_{m,z_b} V_b = t^{\beta/2} \sum_{k=0}^m (\tau_b t)^{k/2} \mathcal{U}_{k,\beta}(z_b), \quad z_b = \frac{(b-x)^2}{\tau_b t}, \quad (4.9)$$

$$A_{m,z_j} V_j = t^{\alpha_j} \sum_{k=0}^m (\tau_j t)^{k/2} \mathcal{U}_{k,\alpha_j}(z_j) + t^{\beta_j/2} \sum_{k=0}^m (\tau_j t)^{k/2} \mathcal{U}_{k,\beta_j}(z_j), \quad z_j = \frac{(x-x_j)^2}{\tau_j t}, \quad (1.10)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$; $m = 0, 1, 2, \dots$

Для согласования отдельных асимптотических разложений вводятся функции: $A_{m, z_a} A_{n, x} U$, $A_{m, z_j} A_{n, x} U$, $A_{m, z_j} A_{n, x} U$, $A_{n, x} A_{m, z_a} V_a$, $A_{n, x} A_{m, z_b} V_b$ и $A_{n, x} A_{m, z_j} V_j$.

Функция $A_{m, z_j} A_{n, x} U$ определяется следующим образом: в (4.7) L_n^k разлагается в ряд (обычные или асимптотические) по степеням $x - x_j$ (при $x \rightarrow x_j + 0$ и $x \rightarrow x_j - 0$ соответственно), $x - x_j$ выражает через $z_j = (x - x_j)^2 / (\tau_j t)$ и в полученном таким образом выражении удерживает лишь m первых (главных) слагаемых относительно степеней $t \rightarrow +0$. В итоге получаем:

$$A_{m, z_j} A_{n, x} U = \begin{cases} \sum_{\mu=0}^m (\tau_j t)^{\frac{\alpha_j + \mu}{2}} \sum_{k=0}^n \frac{\omega_{n, \mu}^+ z_j^{\frac{\alpha_j + \mu}{2}}}{\tau_j^k k! z_j^k}, & x > x_j \\ \sum_{\mu=0}^m (\tau_j t)^{\frac{\beta_j + \mu}{2}} \sum_{k=0}^n \frac{\omega_{n, \mu}^- z_j^{\frac{\beta_j + \mu}{2}}}{\tau_j^k k! z_j^k}, & x < x_j. \end{cases} \quad (4.11)$$

Функции $A_{n, z_a} A_{n, x} U$ и $A_{m, z_b} A_{n, x} U$ строятся аналогично.

Функция $A_{n, x} A_{m, z_j} V_j$ определяется так: в (4.10) функции, зависящие от z_j , разлагается в ряд по степеням z_j при $z_j \rightarrow +\infty$ (соответственно для $x > x_j$ и $x < x_j$ см. (3.32) и (3.33)), z_j выражается через $x - x_j$ и в полученном таким образом выражении удерживает n первых (главных) слагаемых относительно степеней t . Аналогичным образом определяются и функции: $A_{n, x} A_{m, z_a} V_a$ и $A_{n, x} A_{m, z_b} V_b$.

После конструктивного построения этих функций уже легко убедиться в их пригодности для дальнейшего согласования с другими и с квантовыми асимптотическими разложениями.

Теорема I. Для $\forall n=0,1,2,\dots$ и $\forall m=0,1,2,\dots$

$$A_{n,x} A_{m,z_a} V_a \equiv A_{m,z_a} A_{n,x} U =$$

$$= \sum_{\mu=0}^m (\tau_a t)^{\frac{\alpha+\mu}{2}} \sum_{k=0}^n \frac{\omega_{k,\mu}^a z_a^{\frac{\alpha+\mu}{2}}}{\tau_a^k k! z_a^k}, \quad (4.12)$$

$$A_{n,x} A_{m,z_b} V_b \equiv A_{m,z_b} A_{n,x} U =$$

$$= \sum_{\mu=0}^m (\tau_b t)^{\frac{\beta+\mu}{2}} \sum_{k=0}^n \frac{\omega_{k,\mu}^b z_b^{\frac{\beta+\mu}{2}}}{\tau_b^k k! z_b^k}, \quad (4.13)$$

$$A_{n,x} A_{m,z_j} V_j \equiv A_{m,z_j} A_{n,x} U =$$

$$= \begin{cases} \sum_{\mu=0}^m (\tau_j t)^{\frac{\alpha_j+\mu}{2}} \sum_{k=0}^n \frac{\omega_{k,\mu}^+ z_j^{\frac{\alpha_j+\mu}{2}}}{\tau_j^k k! z_j^k}, & x > x_j, \\ \sum_{\mu=0}^m (\tau_j t)^{\frac{\beta_j+\mu}{2}} \sum_{k=0}^n \frac{\omega_{k,\mu}^- z_j^{\frac{\beta_j+\mu}{2}}}{\tau_j^k k! z_j^k}, & x < x_j. \end{cases} \quad (4.14)$$

Обоснование ФАР и приложения полученных результатов будут даны во второй части работ.

Приложение 1

1.1. $P_1(\omega_{m,n} | \alpha, a_k, b_k, c_k, q_k)$ — алгоритм вычисления $\omega_{m,n}$, $m=0,1,2,\dots$, $n=0,1,2,\dots$ согласно рекуррентным формулам: $\omega_{0,n} = q_n$, $n=0,1,2,\dots$;

$$\omega_{m,n} = (\alpha - 2m + n + 1)(\alpha - 2m + n + 2) a_0^2 \omega_{m-1,n} +$$

$$+ (\alpha - 2m + n + 1) \sum_{s=0}^{n-1} (\alpha - 2m + s + 2) a_{n-s} \omega_{m-t, s} - \\ - \sum_{s=0}^{n-2} c_{n-2-s} \omega_{m-1, s} - \sum_{s=0}^{n-1} b_{n-s} \omega_{m, n} .$$

Здесь и везде ниже $\sum_{s=m}^n = 0$ при $n < m$.

1.2. $P_2(v_k = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{k,n} z^{n/2} | \alpha, a_k, b_k, c_k, g_k, h_1, h_2)$
— алгоритм вычисления $v_k(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{k,n} z^{n/2}$, $k=0, 1, 2, \dots$

согласно соотношениям:

$$v_k(z) = A_k e^{-z} \Phi\left(\frac{\alpha+k+1}{2}, \frac{1}{2}; z\right) + B_k e^{-z} \psi\left(\frac{\alpha+k+1}{2}, \frac{1}{2}; z\right) +$$

$$+ S_k(z) = A_k \sum_{n=0}^{+\infty} \omega_{k,n} z^n + B_k \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_{k,n} z^{n/2} +$$

$$+ \sum_{n=2}^{+\infty} \Delta_{k,n} z^{n/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{k,n} z^{n/2}, \quad k=0, 1, 2, \dots;$$

$$\alpha_{k,2n} = A_k \omega_{k,n} + B_k \lambda_{k,2n} + \Delta_{k,2n}, \quad n=0, 1, 2, \dots;$$

$$\alpha_{k,2n+1} = B_k \lambda_{k,2n+1} + \Delta_{k,2n+1}, \quad n=0, 1, 2, \dots;$$

$$\Delta_{k,0} = \Delta_{k,1} = 0, \quad k=0, 1, 2, \dots, \quad \Delta_{0,n} = 0, \quad n=0, 1, 2, \dots;$$

где

$$A_k = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \Gamma\left(\frac{\alpha+k+1}{2}\right) (2\alpha_0)^\alpha g_k,$$

$$B_k = \begin{cases} -A_k / \lambda_{k,0}, & h_2 = 0, \\ -\frac{h_1}{h_2 \lambda_{k,1}} \alpha_{k-1,0}, & h_2 \neq 0, \end{cases}$$

$$(\alpha_{-1,0} = 0), \quad k=0, 1, 2, \dots;$$

$\Phi(\nu, \mu; z) = \psi(\nu, \mu; z)$ — вырожденные гипергеометри-

ческие функции;

$$\lambda_{k,2n} = \frac{\sqrt{n} \omega_{k,n}}{\Gamma\left(\frac{\alpha+k}{2} + 1\right)}, \quad \lambda_{k,2n+1} = -\frac{2\sqrt{x} \beta_{k,n}}{\Gamma\left(\frac{\alpha+k+1}{2}\right)};$$

$$\omega_{k,n} = \sum_{\ell=0}^n \frac{(-1)^\ell}{\ell!} S_{k,n-\ell}, \quad S_{k,n} = \frac{\left(\frac{\alpha+k+1}{2}\right)_n}{(1/2)_n n!};$$

$$\beta_{k,n} = \sum_{\ell=0}^n \frac{(-1)^\ell}{\ell!} \gamma_{k,n-\ell}, \quad \gamma_{k,n} = \frac{\left(\frac{\alpha+k}{2} + 1\right)_n}{(3/2)_n n!}.$$

Константы $\Delta_{k,n}$ вычисляются согласно алгоритму

$P_3(\Delta_{k,n} | \alpha, a_k, b_k, c_k, x_{k,n})$. Последовательность вычисления следующая. Так как $\Delta_{0,n} = 0, n=0,1,2,\dots$ ($S_0(z) \equiv 0$), то сначала вычисляются все $x_{0,n}$, затем из алгоритма P_3 определяются $\Delta_{1,n}$, после чего находятся $x_{1,n}$, а из P_3 $\Delta_{2,n}$ и т.д.

1.3. $P_3(\Delta_{k,n} | \alpha, a_k, b_k, c_k, x_{k,n})$ — алгоритм вычисления $\Delta_{k,n}$, $k=0,1,2,\dots$, $n=0,1,2,\dots$ по рекуррентным формулам: $\Delta_{0,n} = 0, n=0,1,2,\dots$; для последующих $k=1,2,\dots$ имеем

$$\Delta_{k,0} = \Delta_{k,1} = 0;$$

$$\frac{(n+1)(n+2)}{4} \Delta_{k,n+2} + \frac{n-\alpha-k}{2} \Delta_{k,n} = \delta_{k,n},$$

$$n=0, 1, 2, \dots,$$

где

$$\begin{aligned} \delta_{k,n} = & \frac{1}{2}(\alpha+k-n) \sum_{\ell=1}^{\min(n,k)} b_\ell x_{k-\ell,n-\ell} + \frac{1}{4a_0^2} \sum_{\ell=1}^{\min(n,k-2)} c_\ell x_{k-2-\ell,n-\ell} - \\ & - \frac{n+1}{4a_0^2} \sum_{\ell=1}^{\min(n+1,k)} (n+2-\ell) a_\ell x_{k-\ell,n+2-\ell}. \end{aligned}$$

$$I.4. P_4(\nu_k = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{k,n} z^{n/2} | \alpha, a_k, b_k, c_k, g_k)$$

— алгоритм вычисления $\nu_k(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{k,n} z^{n/2}, k=0,1,2,\dots$

согласно соотношениям:

$$\nu_k(z) = A_k e^{-z} \Phi\left(\frac{\alpha+k+1}{2}, \frac{1}{2}; z\right) + B_k e^{-z} \Psi\left(\frac{\alpha+k+1}{2}, \frac{1}{2}; z\right) +$$

$$+ S_k(z) = A_k \sum_{n=0}^{+\infty} \omega_{k,n} z^n + B_k \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_{k,n} z^{n/2} +$$

$$+ \sum_{n=2}^{+\infty} \Delta_{k,n} z^{n/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{k,n} z^{n/2}, k=0,1,2,\dots;$$

$$A_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{\alpha+k+1}{2}\right) (2a_0)^k g_k,$$

$$B_k = -\frac{1}{2^{k+1} \sqrt{\pi}} a_0^\alpha g_k \Gamma(\alpha+k+1), k=0,1,2,\dots;$$

$$\alpha_{k,2n} = \frac{\omega_{k,n}}{2\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{\alpha+k+1}{2}\right) (2a_0)^\alpha \eta_k + \Delta_{k,2n}, n=0,1,\dots,$$

$$\alpha_{k,2n+1} = \frac{\beta_{k,n}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{\alpha+k}{2} + 1\right) (2a_0)^\alpha g_k + \Delta_{k,2n+1}, n=0,1,\dots,$$

$$\lambda_{k,2n} = \frac{\sqrt{\pi} \omega_{k,n}}{\Gamma\left(\frac{\alpha+k}{2} + 1\right)}, \lambda_{k,2n+1} = -\frac{2\sqrt{\pi} \beta_{k,n}}{\Gamma\left(\frac{\alpha+k+1}{2}\right)};$$

$$\beta_{k,n} = \sum_{s=0}^n \frac{(-1)^s}{s!} \delta_{k,n-s}, \delta_{k,n} = \frac{\left(\frac{\alpha+k}{2} + 1\right)_n}{(3/2)_n n!};$$

$$\omega_{k,n} = \sum_{s=0}^n \frac{(-1)^s}{s!} z_{k,n-s}, z_{k,n} = \frac{\left(\frac{\alpha+k+1}{2}\right)_n}{(1/2)_n n!}.$$

Константы $\Delta_{k,n}$ вычисляются согласно алгоритму

$P_3(\Delta_{k,n} | \alpha, a_k, b_k, c_k, x_{k,n})$. Последовательность вычисления следующая. Так как $\Delta_{0,n} = 0, n=0,1,2,\dots (S_0(z) \equiv 0)$, то сначала вычисляются все $x_{0,n}$. Затем из алгоритма P_3 определяются $\Delta_{1,n}$. После этого находятся $x_{1,n}$, а из P_3 $\Delta_{2,n}$ и т. д. .

I.5. $P_5(x_{k,n}; z_{k,n}, \mu | \alpha, a_k, b_k, c_k, g_k)$

— алгоритм вычисления $x_{k,n}$ и $z_{k,n}, \mu$ $k=0,1,2,\dots$, $n=0,1,2,\dots$, $\mu=0,1,2,\dots, k$ согласно следующим соотношениям:

$$x_{k,n} = n + (\alpha + 1 - 3k)/2 ;$$

$$z_{0,n,0} = \frac{(-1)^n}{2\sqrt{\pi}} a_0^\alpha g_0 \int_0^{\frac{\Gamma(\alpha+2n+1)}{4^n n!}} , n=0,1,2,\dots ;$$

для $k=1,2,3,\dots$

$$z_{k,n,0} = \begin{cases} \delta_{k,n,0} & , n=0,1,\dots, 2k-1 ; \\ \delta_{k,n,0} + \frac{(-1)^n a_0^\alpha g_k \Gamma(\alpha+2n-3k+1)}{2^{2n-3k+1} \sqrt{\pi} (n-2k)!} & , n \geq 2k ; \end{cases}$$

$$z_{k,n,\mu} = \delta_{k,n,\mu} , n=0,1,2,\dots ; \mu=1,2,\dots, k .$$

Константы $\delta_{k,n,\mu}$ определяются следующим образом ($k=1,2,\dots$).

Для $n=0,1,2,\dots, 2k-1$:

$$\delta_{k,n,k} = 0 ,$$

$$\delta_{k,n,\mu} = \frac{1}{2k-n} \left\{ \delta_{k,n-1,\mu}'' + \frac{1}{2} \delta_{k,n-1,\mu}' - \right.$$

$$\left. - (\mu+1) \delta_{k,n,\mu+1} - \Delta_{k,n,\mu} \right\} , \mu=k-1, k-2, \dots, 0 ;$$

для $n=2k$:

$$\delta_{k,2k,0} = 0 ,$$

$$\delta_{k, 2k, \mu+1} = \frac{1}{\mu+1} \left\{ \delta_{k, 2k-1, \mu}'' + \frac{1}{2} \delta_{k, 2k-1, \mu}' - \Delta_{k, 2k, \mu} \right\}, \mu = 0, 1, \dots, k-1;$$

для $n = 2k+1, 2k+2, \dots$:

$$\delta_{k, n, k} = \frac{1}{2k-n} \left\{ \delta_{k, n-1, k}'' + \frac{1}{2} \delta_{k, n-1, k}' \right\}.$$

$$\delta_{k, n, \mu} = \frac{1}{2k-n} \left\{ \delta_{k, n-1, \mu}'' + \frac{1}{2} \delta_{k, n-1, \mu}' - (\mu+1) \delta_{k, n, \mu+1} - \Delta_{k, n, \mu} \right\}, \mu = k-1, k-2, \dots, 0;$$

здесь $\delta_{k, -s, \mu} = 0, s = 1, 2, \dots$.

$$\delta_{k, n, k}' = -\gamma_{k, n} \delta_{k, n, k},$$

$$\delta_{k, n, \mu}' = (\mu+1) \delta_{k, n, \mu+1}' - \gamma_{k, n} \delta_{k, n, \mu}', \mu = 0, 1, \dots, k-1;$$

$$\delta_{k, n, k}'' = -(1 + \gamma_{k, n}) \delta_{k, n, k}'.$$

$$\delta_{k, n, \mu}'' = (\mu+1) \delta_{k, n, \mu+1}'' - (1 + \gamma_{k, n}) \delta_{k, n, \mu}'', \mu = 0, 1, \dots, k-1;$$

$$\Delta_{k, n, \mu} = \Delta_{k, n, \mu}^{(1)} + \Delta_{k, n, \mu}^{(2)} - \Delta_{k, n, \mu}^{(3)} + \Delta_{k, n, \mu}^{(4)},$$

$k = 1, 2, \dots; n = 0, 1, 2, \dots; \mu = 0, 1, \dots, k-1;$

$$\Delta_{k, n, \mu}^{(1)} = \sum_{m=1}^{M_1} s_m z_{k-m, n+1-m, \mu},$$

$$M_1 = M_1(k, n, \mu) = \min(k, n+1, k-\mu);$$

$$\Delta_{k, n, \mu}^{(2)} = \sum_{m=1}^{M_2} (\alpha_{k, m} z_{k-m, n-m, \mu} + \beta_m z'_{k-m, n-m, \mu}),$$

$$M_2 = M_2(k, n, \mu) = \min(k, n, k-\mu);$$

$$\Delta_{k, n, \mu}^{(3)} = \sum_{m=1}^{M_3} (\epsilon_m z''_{k-m, n-m-1, \mu} + \zeta_m z'_{k-m, n-m-1, \mu}),$$

$$M_3 = M_3(k, n, \mu) = \min(k, n-1, k-\mu);$$

$$\Delta_{k,n,\mu}^{(4)} = \sum_{m=0}^{M_4} d_m z_{k-2-m, n-m-3, \mu},$$

$$M_4 = M_4(k, n, \mu) = \min(k-2, n-3, k-2-\mu);$$

$$z'_{m,n,m} = -\gamma_{m,n} z_{m,n,m};$$

$$z'_{m,n,\mu} = -\gamma_{m,n} z_{m,n,\mu} + (\mu+1) z_{m,n,\mu+1},$$

$$\mu = 0, 1, \dots, m-1;$$

$$z''_{m,n,m} = -(1+\gamma_{m,n}) z'_{m,n,m};$$

$$z''_{m,n,\mu} = (\mu+1) z'_{m,n,\mu+1} - (1+\gamma_{m,n}) z'_{m,n,\mu},$$

$$\mu = 0, 1, \dots, m-1;$$

$$a_{k,m} = \frac{1}{2}(\alpha+k-m) \beta_m + \frac{m+1}{2a_0^2} a_m;$$

$$s_m = \beta_m - \frac{a_m}{a_0^2}; \quad t_m = \frac{2a_m}{u_0^2} - \beta_m;$$

$$e_m = \frac{a_m}{a_0^2}; \quad f_m = \frac{(m+1)a_m}{2u_0^2};$$

$$d_m = \frac{c_m}{4u_0^2}.$$

Приложение 2

2.1. $S_1(V_k | \alpha, a_k, b_k, L_k, \gamma_k)$

— задача:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} V_k = a_0^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} V_k + F_k, \quad \xi > 0, \quad \tau > 0;$$

$$F_k = \sum_{m=1}^k a_m \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi^m \frac{\partial}{\partial \xi} V_{k-m} \right) - \sum_{m=1}^k b_m \xi^m \frac{\partial}{\partial \tau} V_{k-m} - \sum_{m=0}^{k-2} c_m \xi^m V_{k-m-2};$$

$$V_k|_{\tau=0} = q_k \xi^{k+\alpha}, \quad k=0, 1, 2, \dots$$

для определения функций $V_k = V_k(\xi, \tau)$, $k=0, 1, 2, \dots$.

2.2. $S_2(\psi_k | \alpha, a_k, b_k, c_k, q_k)$ — задача:

$$z \psi_k'' + (z + \frac{1}{2}) \psi_k' - \frac{\alpha+k}{2} \psi_k = \Omega_k, \quad z > 0$$

$$\begin{aligned} \Omega_k &= \sum_{m=0}^{k-1} b_{k-m} z^{\frac{k-m}{2}} \left(\frac{1}{2} (\alpha+m) \psi_m - z \psi_m' \right) + \\ &+ \frac{1}{4a_0^2 z} \sum_{m=0}^{k-1} c_{k-2-m} z^{\frac{k-m}{2}} \psi_m - \\ &- \frac{1}{2a_0^2} \sum_{m=0}^{k-1} a_{k-m} z^{\frac{k-m}{2}} (2z \psi_m'' + (k-m+1) \psi_m'), \end{aligned}$$

$$\psi_k(z) = (2a_0)^{-k} q_k z^{\frac{\alpha+k}{2}} + o\left(z^{\frac{\alpha+k}{2}}\right), \quad z \rightarrow +\infty,$$

$$k=0, 1, 2, \dots$$

для определения функций $\psi_k = \psi_k(z)$, $k=0, 1, 2, \dots$

Библиографический список

1. Белов М.А. Устойчивое численное решение рядов и интегралов Бурье для разрывных функций // Докл. мат. спецтеорет. — 1989. — Вып. 33. — С. 125-132.
2. Ильин А.М. Согласованные асимптотические разложения решений краевых задач. — М.: Наука, 1983. — 236 с.

3. Эрдеи А. Асимптотические разложения. — М.: Наука, 1962.
— 127 с.

M.A. Belov. Jaukta veida paraboliskas problēmas asimptotisks atrisinājums ar pārtrauktām funkcijām sākuma nosacījumos. 1.

Anotācija. Izņemotot bisingulāru uzdevumu risināšanas metodes, ir atrasts asimptotisks ($t \rightarrow +0$) atrisinājums jaukta veida paraboliskai problēmai ar otrā veida pārtrauktām funkcijām sākuma nosacījumos. Aplūkoti iegūto rezultātu pielietojumi: Furjē rindu un dažu integrāļu asimptotiskajos attīstījumos; stabīlos Furjē rindu ar otrā veida pārtraukumiem summēšanas algoritmos; skaitlisko algoritmu modificēšanai parabolisko problēmu risināšanā ar pārtrauktām funkcijām sākuma nosacījumos. Darba 1. daļā iegūts formāls asimptotisks atrisinājums. Metodes pamatojums un rezultātu praktiskie pielietojumi tiks doti darba 2. daļā.

M.A. Belov. The asymptotic solution of a mixed parabolic problem with discontinuous initial conditions. 1.

Summary. Basing on the solution technique of bisingular problems, the asymptotic ($t \rightarrow +0$) solution of a mixed parabolic problem whose initial conditions can have second order gaps is constructed. The obtained results are applied: 1) to construct asymptotic decompositions of Fourier series and some integrals, 2) to construct algorithms for stable summation of Fourier series of functions which may have second order gaps; 3) to construct possible modifications of algorithms for a numerical solution of parabolic problems with discontinuous initial conditions. In the first part of the work the formal asymptotic solution is given. The justification and some applications of these results are the subject of the second part.

Кафедра общей математики
Физико-математический факультет
Латвийский университет
226098 Рига, Латвия

ТЕОРЕМА ОБ ИНВАРИАНТЕ АБСТРАКТНОЙ ИГРЫ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ В АНАЛИЗЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ИГРУШЕК

А. Цибулис

Аннотация. Доказывается теорема, позволяющая единообразно анализировать определенные свойства математических игрушек. Приводятся некоторые новые результаты. При этом изложение ведется на достаточно элементарном уровне.
УДК 51.001.8

Математические игрушки (МИ) настолько разнообразны, что для них не разработана даже удовлетворительная терминология, тем более — классификация. Среди них можно выделить отдельные классы, поддающиеся изучению известными математическими средствами. С другой стороны, для многих МИ не известны почти никакие содержательные результаты.

В литературе, в которой отводится место для МИ, сравнительно редко даются достаточно строгие и полные доказательства тех или иных свойств рассматриваемых МИ. Такие доказательства [1, 2, 3], как правило, опираются на аппарат высшей математики, обладающий тем достоинством, что позволяет с единых позиций анализировать определенный класс МИ.

В данной статье предлагается другой подход, отличающийся по простоте, но тем не менее, не теряющий названного достоинства.

Пусть $n \geq 2$, $Z_n = \{1, 2, \dots, n\}$. \mathcal{P} — набор всех элементов (a_1, \dots, a_n) с между собой различными компонентами из Z_n . Через U обозначим игру, в которой состояние a (точку $a \in \mathcal{P}$) требуется перевести в другое состояние $b \in \mathcal{P}$, соблюдая следующие правила:

(u1) Из рассматриваемого состояния $a \in \mathcal{P}$ перейти в следующее можно, только поменяв местами две компоненты (любые) точки a .

Такая перестановка компонент называется одним ходом.

(u2) Конечное состояние b (цель игры) должно быть получено за

четное число ходов.

Цель игры достижима не всегда. В частности, при $n=2$ точка $(1, 2)$ не может быть переведена в точку $(2, 1)$ за четное число ходов.

Для фиксированного элемента $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{P}$ через $\bar{I}(x)$ обозначим произведение разностей его компонент, т.е.

$$\bar{I}(x) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j). \quad (I)$$

По существу, интерес представляет не само число $\bar{I}(x)$, а его знак $z(x) \equiv \text{sign } \bar{I}(x)$, который по определению равен 1 , если $\bar{I}(x) > 0$, и -1 , если $\bar{I}(x) < 0$.

Лемма I. Если $x \in \mathcal{P}$ отличается от $y \in \mathcal{P}$ только двумя компонентами, то $\bar{I}(x) = -\bar{I}(y)$.

Доказательство. Ради определенности будем считать, что $x_i = y_j$, $x_j = y_i$, $i < j$. Правую часть (I) представим в виде

$$\bar{I}(x) = \prod_1 (x_i, x_j) \prod_2 (x_i, x_j),$$

где $\prod_1 (x_i, x_j)$ — произведение разностей, содержащих x_i или x_j , а \prod_2 — произведение разностей, не содержащих ни x_i ни x_j .

После несложных преобразований —

$$\begin{aligned} \prod_1 (x_i, x_j) &= \prod_{k < i} (x_k - x_i) \cdot \prod_{k > i} (x_i - x_k) \cdot \prod_{\substack{k < j \\ k \neq i}} (x_k - x_j) \cdot \prod_{k > j} (x_j - x_k) = \\ &= (-1)^{(i-1)} \prod_{k \neq i} (x_k - x_i) \cdot (-1)^{(j-2)} \prod_{\substack{k \neq i \\ k \neq j}} (x_j - x_k) = \\ &= (-1)^{i+j} (x_i - x_j) \prod_{k \neq i, k \neq j} (x_k - x_i) (x_j - x_k) \end{aligned}$$

ясно, что перестановка x_i и x_j меняет знак $\prod_1 (x_i, x_j)$ и, следовательно, знак величины $\bar{I}(x)$.

Следствие I. Четное число перестановок не изменяет знак величины $\bar{I}(x)$, другими словами, \bar{I} (или z) служит инвариантом игры \mathcal{U} .

Пусть запись $x \sim y$ означает, что то ли $x, y \in \mathcal{P}$ переводимы друг в друга (согласно правилам игры U).

Необходимое условие для того, чтобы одно состояние было бы переводимо в другое, дает

Лемма 2. Если $x \sim y$, то $Z(x) = Z(y)$.

Доказательство. Пусть $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$ последовательность ходов, при помощи которых x переводится в y , т.е.

$\tau_1 x, \dots, \tau_k \tau_1 x = y$. Отсюда в силу леммы 1

$$Z(y) = Z(\tau_k \dots \tau_2 \tau_1 x) = (-1)^{2k} Z(x) = Z(x).$$

Для игры U справедливо и обратное утверждение.

Лемма 3. Если $x, y \in \mathcal{P}$ и $Z(x) = Z(y)$, то $x \sim y$.

Доказательство. Очевидно, что для любых $x, y \in \mathcal{P}$ всегда найдется последовательность ходов $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$ таких, что $\tau_k \dots \tau_1 x = y$. Поэтому, согласно лемме 1,

$$Z(y) = Z(\tau_k \dots \tau_1 x) = (-1)^k Z(x).$$

Если k нечетное, то $Z(y) = -Z(x)$, что противоречит условию леммы (так как $Z \neq 0$).

Итак, k четное. Тем самым лемма доказана.

Леммы 2 и 3 сформулируем в виде теоремы.

Теорема. Состояния $x, y \in \mathcal{P}$ переводимы друг в друга по правилам игры U тогда и только тогда, когда $Z(x) = Z(y)$.

Более кратко это запишем так

$$Z(x) = Z(y) \Leftrightarrow x \sim y. \quad (2)$$

Замечание 1. Теорема сохраняет силу и в более абстрактном случае, когда в качестве Z_n , см. определение набора \mathcal{P} , берется конечное множество, состоящее из элементов произвольной природы.

Замечание 2. Более длинным путем и в другой формулировке теорема доказывается в курсе высшей алгебры, см. также [1, 2, 3].

Покажем, как эта теорема может быть применена в анализе определенных свойств ММ. В частности, для многих ММ из этой теоремы легко следует вывод о невозможности перевода одного состояния в другое.

I. Кубик Рубика

Предполагается, что читатель знаком с правилами перемещения элементов кубика и других ММ, рассмотренных ниже. Достаточно обширный материал по ММ собран в [1, 4], где можно найти также исторические сведения и информацию по техническому оформлению ММ.

Пусть $y_j, c_j, j = 1, 2, 3, 4$, соответственно угловые и средние элементы грани (слоя) Γ ,

$$\Gamma \equiv \begin{pmatrix} y_1 & c_1 & y_2 \\ c_4 & \square & c_2 \\ y_4 & c_3 & y_3 \end{pmatrix}, \quad R(\Gamma) \equiv \begin{pmatrix} y_4 & c_4 & y_1 \\ c_3 & \square & c_1 \\ y_3 & c_2 & y_2 \end{pmatrix}$$

Поворот R грани Γ представляет собой две операции:

$y_1 \rightarrow y_2 \rightarrow y_3 \rightarrow y_4 \rightarrow y_1$, $c_1 \rightarrow c_2 \rightarrow c_3 \rightarrow c_4 \rightarrow c_1$,
каждую из которых можно задать тремя ходами, см. (41). Это означает, что любому повороту грани кубика соответствует четное число ходов игры U . Поэтому согласно теореме менять местами лишь два (любых) элемента этого кубика невозможно. Таким же образом этот факт может быть показан и для кубиков Рубика любого более высокого порядка.

2. Игра "15"

Эта игра в свое время была не менее популярна, чем знаменитый кубик Рубика. Страсти вокруг нее угасли после того, когда математическими средствами была установлена неразрешимость предложенной задачи. А именно, невозможность расстановку Q фишек (см. рис.1) перевести в конечное состояние b (см. рис.2).

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

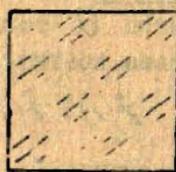


Рис.1.

Рис.2.

Рис.3.

Фиктивную фишку (пустое место) обозначим числом 16, а вместо утверждения $H(a, b)$: Состояние $a = (1, 2, \dots, 13, 15, 14, 16)$ невозможно перевести в состояние $b = (1, 2, \dots, 14, 15, 16)$ по правилам игры "15".

Докажем более общее утверждение $H(x, y)$, т.е. когда вместо a, b берутся произвольные состояния x, y с $Z(x) \neq Z(y)$. Это условие заведомо выполняется для $x = a, y = b$, что следует из леммы I или же может быть легко проверено непосредственным вычислением. Без ограничения общности будем считать, что

$x_{16} = y_{16} = 16$, и заметим, что переход от x к y невозможен за нечетное число ходов. Это следует, например, из "принципа раскраски шахматной доски", см. рис.3. Здесь можно рассуждать и так, как это делается во многих работах. Фишка 16 должна совершить столько же ходов вверх, сколько вниз, и столько же вправо, сколько влево, иначе она не вернулась бы назад. Другими словами, она должна сделать четное число ходов. Таким образом соблюдено условие (α2), поэтому справедливость утверждения $H(x, y)$ следует из теоремы.

Замечание 3. На самом деле утверждение $H(x, y)$ доказано при более слабых предположениях по сравнению с допустимыми ходами в игре "15". А именно, и тогда, когда разрешается переставлять местами любые две фишки, лишь бы число таких перестановок было бы четным.

Для более полного анализа игры "15" еще покажем, что, как и в случае игры U , выполнено (2). Согласно выведенному из $x \sim y$ (по правилам игры "15") следует, что $Z(x) = Z(y)$. Однако обратное утверждение $Z(x) = Z(y) \Rightarrow x \sim y$ не вытекает из теоремы.

Любую расстановку фишек игры "15" можно свести к состоянию a либо к b , см. рис.1-2. Это следует непосредственно из того, что для игры "15" можно поменять местами лишь три фишки (любые). В частности, перестановку трех фишек $2 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 2$ можно осуществить по следующей схеме

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc} 4 & 1 & 2 \\ 5 & & 3 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc} 1 & & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc} 1 & 5 & 2 \\ 4 & & 3 \end{array} .$$

Итак, ($x \sim a$ либо $x \sim b$) и ($y \sim a$ либо $y \sim b$). Но, поскольку $Z(a) \neq Z(b)$, то отсюда при предположении $Z(x) = Z(y)$ получаем ($x \sim a$, $y \sim a$) либо ($x \sim b$, $y \sim b$), а это значит, что $x \sim y$.

3. Пространственный аналог игры "15" -- K-26

Так обозначено ИИ, в котором перемещение единичных кубиков происходит в пределах куба $3 \times 3 \times 3$, см. рис.4.

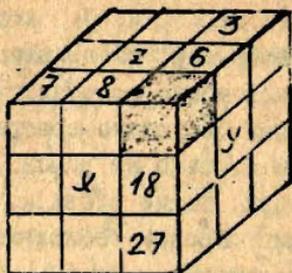


Рис. 4.

7	8		6	3
	x	18	y	
		27		

Рис. 5.

Задачу упорядочения 19 подвижных кубиков осложняет то, что центральный кубик каждого слоя зафиксирован. Можно ли поменять местами только два кубика? Нет. В силу рассуждений из пункта 2 этого невозможно было бы добиться и тогда, когда все 26 кубиков были бы подвижными. А вот поменять местами лишь три кубика, несмотря на препятствия из-за неподвижных кубиков, все же можно.

Пусть S^x означает, что фиктивный кубик (пустое место) перемещается в слое S на x единиц по направлению движения x соевой стрелки, а в случае противоположного направления будем писать S^{-x} . Через X, Y, Z обозначим слои, которые определяются их центральными кубиками x, y, z , см. рис. 4. В этих обозначениях операция (выполнимая слева направо) $T = QZ^2QZ^{-2}$, где $Q = Y^4X^{-4}Y^{-4}X^4$, меняет местами лишь три кубика $6 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 6$. Отметим, что операция Q ($6 \leftrightarrow 8, 18 \leftrightarrow 27$), т.е. переставляющая кубики 6 и 8, 18 и 27, может быть весьма полезной для ускорения процесса упорядочения кубиков.

Замечание 4. Решение задачи упорядочения кубиков К-26 можно найти также на основе плоской (двумерной) ММ, в которой две фишки — x и y — закреплены, см. рис. 5. В [4, стр. 90] утверждается "тот, кто решит эту трудную задачу, легко справится и с объемным "минус-кубиком", однако решение не приводится. В качестве ключа к решению этой задачи, охарактеризованной как трудная, предложим операцию $T_1 = QP$ (с тем же результатом действия: $6 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 6$, что и T), где

$$P = X^4Y^8X^{-2}Y^{-3}X^{-3}Y^4Y^2Y^{-8}X^{-4} \quad (7 \leftrightarrow 8, 18 \leftrightarrow 27)$$

Замечание 5. К-26 относится к так называемым минус-кубикам. В книге [1] из минус-кубиков анализируются лишь самые простые. Дополнительные сведения, а также ошибочные утверждения относи-

тельно минус-кубиков можно найти в [4].

4. Башни

Идея — переходить из одного состояния в другое, не обязательно используя пустое место; открывает более широкие возможности (по сравнению с игрой "15") создавать новые, содержательные и достаточно сложные V . Однако в "башнях", встречающихся в продаже, эта идея, как правило, не реализована. Наличие многих между собой не различаемых элементов "башен" делает задачу их упорядочения почти тривиальной.

Аналогично, как при решении задачи упорядочения элементов $K-26$ можно было переходить из соответствующей двумерной MI , так и при анализе "башен" можно рассматривать соответствующие им плоские варианты.

Пусть игровое поле состоит из $m \times k + 1$ ($m \geq 2, k \geq 2$) клеток, где m число рядов с k клетками в каждой, а клетка α , см. рис. 6, соответствует пустому месту в начальном и конечном состояниях.

α
 β
 γ

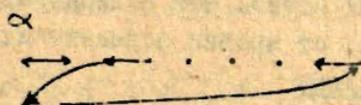


Рис. 6.

Рис. 7.

Пусть при упорядочении k элементов в отличие от игры "15" еще допускается циклическая перестановка элементов любого ряда, т.е. операция

$$C_i(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}) = (x_{i2}, x_{i1}, x_{i3}, \dots, x_{ik}, x_{i1})$$

Введем операции

$$F = \beta \gamma C_i^{-1} \beta \alpha C_i, \quad G = \beta \gamma C_i^{-2} \beta \alpha C_i,$$

где запись V ($V = \alpha, \beta, \gamma$) указывает, что в пустое место следует передвигать элемент из места V . Операция F , независимо от

m, k , меняет местами лишь три элемента $x_{11} \rightarrow x_{12} \rightarrow x_{21} \rightarrow x_{11}$, а действие операции G показано на рис. 7. Непосредственно отсюда заключаем, что для $k=2k$ (для "башен" это соответствует четному числу "подъездов") операция G^{2k-1} меняет местами лишь два элемента x_{11} и x_{12} .

Покажем, что при нечетных k поменять местами лишь два элемента невозможно. Для этого достаточно проверить, что те изменения в правилах перемещения элементов, которые здесь рассматриваемую игру отличают от игры "15", а именно, — циклические перестановки — также соответствуют условию (42).

На самом деле,

$$C_j(x_{11}, \dots, x_{1k}) = \tau_{k-1} \dots \tau_1(x_{11}, \dots, x_{1k}),$$

где τ_j означает, что на j -м ходу меняется x_{1j} с x_{1k} , $j=1, \dots, k-1$. Поэтому при нечетных k циклическая перестановка C_j эквивалентна четному числу ходов, и следовательно, в силу теоремы поменять местами лишь два элемента невозможно.

Таким образом, среди "И" типа "башен" существуют такие, для которых поменять местами лишь два элемента невозможно, и такие — для которых можно. Это зависит от четности числа "подъездов" и, разумеется, от правил перемещения элементов.

5. Кольца

Последнее утверждение и соответствующие рассуждения из пункта 4 справедливы также для "колец". В качестве примера "колец", для которых можно поменять местами лишь два элемента, рассмотрим "И" известную под названием РОТОС, см. рис. 8.

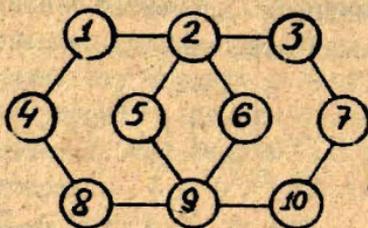


Рис. 8.

При упорядочении элементов РОТОСА разрешается вращать два кольца (диска), содержащих по 6 элементов каждый. Другими

словами, допустимы только операции

$$K(1, 2, 6, 9, 8, 4) = (4, 1, 2, 6, 9, 8)$$

$$L(2, 3, 7, 10, 9, 5) = (5, 2, 3, 7, 10, 9)$$

и их комбинации.

В [1] приводятся три операции соответственно с длинами 42, 20, 19, меняющие местами лишь два элемента. Последние две операции, которые в обозначениях K, L имеют вид:

$$B_{20} = (K^2 L^2 K^{-2})^5, \quad B_{19} = (LK)^{-2} L K^2 (LK)^{-2} L^2 K L K^{-2} (K L^3)^2,$$

охарактеризованы в этой работе следующими словами: "А для подлинных ценителей приведем две операции - изюминки, найденные Д. Ваквареловым для перестановки фишек I и 8 РОТОСА".

На самом деле операция B_{19} меняет местами не 1 и 8, как утверждается, а 6 и 7. Эта изюминка существенно уступает следующей формуле длины 11

$$L^{-2} K^3 L^{-2} K L^{-2} K^{-2} L^{-2} K L^{-2} K^3 L^{-2} \quad (6 \leftrightarrow 7).$$

В свою очередь, длину операции, меняющей местами только 1 и 8, можно сократить по крайней мере до 15. В качестве такой операции длины 15 служит, например,

$$K L^3 K^{-2} L^3 K^2 L K^{-2} L K^2 L^3 K^2 L^{-2} K^{-2} L^3 K^{-2}.$$

Замечание 6. В сотрудничестве с Э. Везисом при помощи компьютера найдены все операции длины 10, меняющие местами лишь два элемента РОТОСА. Одна из них

$$K^3 L^2 K^{-2} L^2 K^3 L^2 K L^{-2} K L^2 \quad (7 \leftrightarrow 2).$$

Длина 10 минимальная, т. е. ни одна операция, меняющая местами лишь два элемента, не может быть меньше длины.

Замечание 7. Относительно того, какие вообще перестановки могут возникнуть в кольцах (пересекающихся циклах), в [1, стр. 95] без доказательств, в частности, утверждается: "Если оба цикла содержат нечетное число элементов, то достигимы все четные перестановки, и только они". Если не накладывать дополнительных ограничений, такое утверждение ошибочно.

Библиографический список

1. Дубровский В.Н., Калинин А.Т. Математические головоломки.- М., 1990.
2. Калужний Л.А., Суцанский В.И. Преобразования и перестановки.- М., 1985.
3. Tuma J. Matematické hlavolamy a zaklady teorie grup.- Praha, 1988.
4. Игра? Игра! // Состав. В.Н. Белов.- Л., 1987.

A. Cibulis. Theorem of invariant of the abstract game and its applications to the analysis of mathematical toys.

Summary. Theorem, which is useful for the unified analysis of the certain properties of mathematical toys, is proved. Some new results are given. Besides account is carried out on a sufficiently elementary level.

A. Cibulis. Teorēma par abstraktas spēles invariantu un tās pielietojumi matemātisko rotālietu analizē.

Anotācija. Pierādīta teorēma, kas ļauj vierveidīgi analizēt noteiktas matemātisko rotālietu īpašības. Doti daži jauni rezultāti. Pie tās izvedumi tiek izklāstīti pietiekoši elementāra līmenī.

Институт математики и информатики

Латвийского университета, Рига

буль. Райниса 29

EXISTENZ DES FIXPUNKTES FÜR DIE FAMILIE DER ABBILDUNGEN IN EINEM METRISCHEN RAUM

I. Galipa

Zusammenfassung. In diesem Artikel ist ein Fixpunktsatz für Abbildungen der Familie in einem metrischen Raum mit einem abgeschlossenen Operator bewiesen.

AMS Subjectclassification 54H25

0. Einleitung

X sei ein metrischer Raum mit der Entfernung d und mit dem abgeschlossenen Operator S .

Definition. Die Abbildung $S:PX \rightarrow PX$ (PX ist die Menge der Untermengen des Raumes X) heißt der abgeschlossene Operator, wenn jeden zwei Mengen $A, B \in PX$ die drei Bedingungen genügen: 1) $A \subset B \Rightarrow S(A) \subset S(B)$; 2) $A \subset S(A)$; 3) $S(S(A)) = S(A)$.

Wir nehmen an, daß die Selbstabbildungen der Familie in dem Raum X definiert ist. Im Satz I des Artikel [1] ist bei bestimmten Bedingungskomplett für jede Selbstabbildung der Familie die Existenz des Fixpunktes bewiesen. Wir interessieren uns über den gemeinsamen Fixpunkt der Abbildungsfamilie und bekommen folgendes Ergebnis.

I. Ergebnis

Satz. Es sei, daß: 1) in einem metrischen Raum (X, d) ein abgeschlossener Operator definiert ist und der Raum X S -kompakt ist; 2) jede abgeschlossene Kugel $B(x, r)$ mit dem Zentrum im Punkt x und dem Radius $r \in \mathbb{R}$ S -abgeschlossen ist; 3) für jede Abbildung $f: X \rightarrow X$ der Familie \mathcal{F} genügen folgende Bedingungen:

- a) $\forall x, y \in X : d(f(x), f(y)) \leq \max \{ d(x, f(x)), d(y, f(y)) \}$;
b) $\forall x \in X (\exists f \in \mathcal{F} : f(x) \neq x) \sup_{x \in A} \sup_{y \in S(A)} d(y, f(y)) < \text{diam } A(x)$,
wo $A(x) := \bigcap \{ A \in PX / x \in A \ \& \ A = S(A) \ \& \ \forall f \in \mathcal{F} : f(A) \subset A \}$.

Dann gibt es einen einzigen Fixpunkt von der Abbildungsfamilie \mathcal{F} .

▼ Beweis. Von der Axiom des Conn konstruieren wir solche minimale Menge M , wo: 1) $M \neq \emptyset$; 2) $M = S(M)$; 3) $f(M) \subset M, \forall f \in \mathcal{F}$.

Es seien $a \in M$ gegeben. Da $A(a) \subset M$ ist, dann folgt von Minimality $M \setminus A(a) = M$. Wenn $f(a) = a$ für jede $f \in \mathcal{F}$ ist, dann ist der Satz bewiesen. Es sei, daß $f \in \mathcal{F}$ existiert, für den $a \neq f(a)$ ist. Von der Bedingung 3b folgt, daß

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \sup_{x \in M} d(x, f(x)) =: r < \text{diam } M \text{ ist.}$$

Es seien $x \in M$ gegeben. Wir setzen die Menge $A1 =$

$A1 := (\bigcap_{f \in \mathcal{F}} B(f(x), r)) \cap M$. $A1$ ist keine leere Menge, weil $x \in A1$ ist. $A1$ ist S -abgeschlossene Menge als Kreuzung von S -abgeschlossenen Mengen. Wir geben $y \in A1$ und wählen frei $f \in \mathcal{F}$. Aus 3a folgt: $d(f(x), f(y)) \leq \max \{d(x, f(x)), d(y, f(y))\} \leq r$. So wie jeden $f \in \mathcal{F}$: $d(f(x), f(y)) \leq r$, dann $f(y) \in A1$ ist. Folglich stellt jede Abbildung $f \in \mathcal{F}$ die Menge $A1$ in sich dar. Da $A1 \subset M$ ist, dann folgt wegen Minimality M , daß $A1 = M$ ist. Folglich von jeder $x, y \in M$ und $f \in \mathcal{F}$: $d(y, f(x)) \leq r$. Wenn $A2 := (\bigcap_{y \in M} B(y, r)) \cap M$, dann $f(M) \subset A2$ ist. Da $A2 \subset M$ ist, ist dann $f(A2) \subset A2$. Daraus folgt, daß $M = A2$ ist (wegen M Minimality). Andererseits: $\text{diam } A2 \leq r < \text{diam } M$. Das ist ein Widerspruch. Folglich ist a ein gemeinsamer Fixpunkt der Abbildungsfamilie \mathcal{F} .

Die Unität des Fixpunkts folgt von Bedingung 3a des Satzes. ▲

Literatur

I. A. X. Лиепиньш Кольбельная для маленького тигренка о неподвижных точках // Топологические пространства и их отображения - Рига- 1963. - С. 61-69.

И. Галина Существование неподвижной точки для семейства отображений в метрическом пространстве.

АННОТАЦИЯ. В работе доказана теорема о неподвижной точке для семейства отображений в метрическом пространстве, где задан оператор замыкания. УДК 517.96

I. Galina Existence of common fixed point for family of mappings in metric space.

Summary. Fixed point theorem for family of mappings in metric space with closure operator is proved.

AMS Subject classification 54K25

Boulevard Raina 19
Universitāt Lettland

KOPLĒJA NEKUSTĪGĀ PUNKTA EKZISTENCE NEIZSTIEPĪOŠU
ATTĒLOJUMU KOMUTATĪVAI SAIMEI METRISKĀ TĒLPĀ

I. Galiņa

Anotācija. Darbā pierādīta nekustīgā punkta teorēma neizstiepjošu attēlojumu komutatīvai saimei metriskā telpā, kurā dots slēguma operators. UDK 517.98

0. Ievads

Nekustīgo punktu teorijā lielu interesi ir izraisījis darbs [1]. Tajā tiek aplūkots neizstiepjoša attēlojums refleksīvas Banaha telpas apakškopā ar normālu struktūru. Vēlākā laikā daudzi matemātiķi centušies vispārināt šo teorēmu neizstiepjošu attēlojumu komutatīvai saimei. Arī pats V.A. Kirko kopā ar L.P. Beļjusu vispārinājis savu rezultātu darbā [2]. Smeļoties pa domai no šiem diviem darbiem un iedvesmojoties no [3], iegūts jauns rezultāts slēguma operatoru valodā. Tikai, prātojot par [3], gribētos piebilst :

Tiģerens

Sēž nabozies un malo ķepu sūka,

Bot zūlās ačeles jau ļauni zib,

Jā kā lai nosēž ednu mikstās pūkās,

Ja jirda tik daudz no nezināmā grīb !

(O.Vācietais krājumā "Ugunis")

1. Pamatjēdzieni

Darbosimies metriski telpā X . Definēsim ūajā telpā slēguma operatoru S . Ar PX apzīmēsim X visu apakškopu saimi.

Definīcija I. Attēlojumu $S:PX \rightarrow PX$ saucēsim par slēguma operatoru telpā X , ja katrām divām telpas X apakškopām A un B izpildās :

$$1) A < B \Rightarrow S(A) < S(B);$$

$$2) A < S(A);$$

$$3) S(A) = S(S(A)).$$

Definicija 2. Telpu X saucim par S -kompaktu, ja katrai telpas X S -slēgtu kopu centrētai sistēmai ir netakās šķēlums.

Atgādināsim, ka attēlojumu $f: X \rightarrow X$ sauc par neizstiepjošu, ja katriem diviem telpas X punktiem x un y :

$$d(f(x), f(y)) \leq d(x, y).$$

Attēlojumu saimi \mathcal{F} , kuru veidojošie attēlojumi telpu X attēlo sevi, saucim par komutatīvu, ja :

$$f(g(x)) = g(f(x)), \forall x \in X, \forall x, g \in \mathcal{F}.$$

Pirmajā piemērā saskarsimies ar normālas struktūras $j\delta$ -dzienu. Teiksim, ka normālas vektoru telpas X izliektai apakškopai K ir normāla struktūra, ja tās katrā ierobežotā un izliektā nevienelementīgā apakškopā H eksistē tāds punkts y , ka:

$$\sup_{x \in H} d(y, x) < \text{diam } H.$$

2. Rezultāts

Teorēma. Pieņemsim, ka X ir metriskā telpa, S ir slēguma operators telpā X un X ir S -kompakta. Pieņemsim, ka jebkura slēgta lode $B(x, r)$ ar centru punktā x un rādiusu r ir S -slēgta. Pieņemsim, ka \mathcal{F} ir neizstiepjošu attēlojumu, kas telpu X attēlo sevi, komutatīva saime un katrā saimē \mathcal{F} ietilpstošā attēlojuma f nekustīgo punktu kopa $\text{Fix}(f)$ ir S -slēgta. Katram attēlojumam $f \in \mathcal{F}$ un katram punktam $x \in X$ ($x, f(x)$) apskatīsim kopu $A(x, f) := \bigcap \{A \in \mathcal{P}X / x \in A \ \& \ A = S(A) \ \& \ f(A) \subset A\}$ un pieņemsim, ka tajā eksistē punkts y ar īpašību :

$$\sup_{z \in A(x, f)} d(y, z) < \text{diam } A(x, f) \text{ ("normālas struktūras" nosacījums)}.$$

Tad attēlojumu saimei \mathcal{F} nekustīgo punktu kopa $\text{Fix } \mathcal{F} := \bigcap_{f \in \mathcal{F}} \text{Fix}(f)$ nav tukša.

▼ Pierādījums. Vispirms pierādīsim, ka saimes \mathcal{F} S -slēgtās nekustīgo punktu kopas veido centrētu sistēmu.

Pierādījumu veiksime indukcijas ceļā pēc attēlojumu skaita, pieņemot, ka \mathcal{F} ir galīga, t.i., $\mathcal{F} = \{f_i / i=1, \dots, k\}$.

Indukcijas bāze : $k=1$, apgalvojums izriet no raksta [3] teorēmas 4.

Induktīvais pieņēmums : $k=n$, apgalvojums patiesi, ja attēlojumu ir skaitā n .

Izdarīsim induktīvo pāreju, pierādīsim, ka apgalvojums ir patiesi, ja $k=n+1$, t. i., $\text{Fix } \mathcal{F} = \bigcap_{i=1}^{n+1} \text{Fix}(f_i) \neq \emptyset$. Turpmākajos spriedumos apzīmēsim $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ ar \mathcal{F}' un f_{n+1} ar f . Pēc induktīvā pieņēmuma : $\text{Fix } \mathcal{F}' = \bigcap_{i=1}^n \text{Fix}(f_i) \neq \emptyset$. Pārlicināsimies, ka $f(\text{Fix } \mathcal{F}') \subset \text{Fix } \mathcal{F}'$. Ja $x \in \text{Fix } \mathcal{F}'$, tad $f_i(x) = x$, $i=1, 2, \dots, n$. Tā kā \mathcal{F} ir komutatīva saime, tad : $f_i(f(x)) = f(f_i(x)) = f(x)$, $i=1, \dots, n$.

Esam ieguvuši, ka $f(x)$ ir nekustīgais punkts visiem attēlojumiem f_i ($i=1, 2, \dots, n$) jeb $f(x) \in \text{Fix } \mathcal{F}'$. Kopā $\text{Fix } \mathcal{F}'$ nav tukša. Tā ir S -slēgta kā S -slēgtu kopu šķēluma un, tā kā X ir S -kompakta, tad arī $\text{Fix } \mathcal{F}'$ ir S -kompakta. Varētu lietot vēlreiz [3] teorēmu 4. Pārlicināsimies par divi nosacījumu izpildi :

a) katrā $\text{Fix } \mathcal{F}'$ slēgta lode ir S -slēgta kā S -slēgtu kopu šķēlums : $B_{F, \mathcal{F}'}(x, r) = B_X(x, r) \cap \text{Fix } \mathcal{F}'$, $\forall x \in \text{Fix } \mathcal{F}'$, $\forall r \in \mathbb{R}_+$;

b) katrām $x \in \text{Fix } \mathcal{F}'$ ($x \neq f(x)$) kopu

$A_{F, \mathcal{F}'}(x, f) := \bigcap \{A \in \text{PFix } \mathcal{F}' / x \in A \text{ \& } A = S(A) \text{ \& } f(A) \subset A\}$ sakrīt ar kopu $A_X(x, f) = \bigcap \{A \in \text{PX} / x \in A \text{ \& } A = S(A) \text{ \& } f(A) \subset A\}$;

tātad kopā $\{B_{F, \mathcal{F}'}, A_{F, \mathcal{F}'}\}$ izpildās "normālās struktūras" nosacījums.

Lietojot [3] teorēmu 4, iegūstam, ka eksistē tāds $x \in \text{Fix } \mathcal{F}'$, ka $f(x) = x$, jeb $\text{Fix } \mathcal{F} \cap \text{Fix}(f) = \bigcap_{i=1}^{n+1} \text{Fix}(f_i) \neq \emptyset$. Tā kā telpa X ir S -kompakta, tad attēlojumu saimei \mathcal{F} ir kopīgs nekustīgais punkts arī gadījumā, ja \mathcal{F} nav galīga. \blacktriangle

3. Piemēri

V. A. Kirka un L. P. Doljusa rakstā [2] tiek lietots nosacījums, ka telpai X ir normāla struktūra. Var pamatot, ka mūsu prasības ir vajākas. Vispirms atzīmēsim, ka, ja X ir telpa ar normālu struktūru, tad no tā seko mūsu teorēmas "normālās struktūras" nosacījums. Bet ne otrādi, to parāda

Piemērs 1. Apskatīsim telpu c_0 , kas sastāv no uz nulli konverģējošā reālu skaitļu virknēm $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$, $\|x\| := \sup\{|x_n| / n \in \mathbb{N}\}$. Telpai c_0 nav normālas struktūras. Katram $x \in B_+(0, 1) := \{y \in c_0 / \|y\| \leq 1 \text{ \& } \forall n \in \mathbb{N} : y_n \geq 0\}$ definēsim $f(x) := 0$. Attēlojums f kopu $B_+(0, 1)$ attēlo sevī un ir neizstiepjošs : $\|f(x) - f(y)\| = 0 \leq \|x - y\|$, $\forall x, y \in B_+(0, 1)$. Vienīgais tā nekustīgais punkts ir 0. Slēguma operatora S lomā

ņemsim slēgtās izliektās čaulas operatoru. Šajā situācijā $A(x, f) = \{tx / t \in [0, 1]\}$ ($x \neq 0$) un, ja, piem., $y = \frac{x}{2}$, tad $\sup \{ \|y - z\| / z \in A(x, f) \} = \frac{\|x\|}{2} < \|x\| = \text{diam } A(x, f)$.

Ēkkošajā piemērā parādīsim, ka teorēmas nosacījums par attēlojumu nekustīgo punktu kopas S -slēgtību neseko no pārējiem nosacījumiem.

Piemērs 2. Definēsim: $\|x\| := \max \{ |a|; |b| \}$, $\forall x = (a, b) \in \mathbb{R}^2$; $X := \{ x \in \mathbb{R}^2 / \|x\| \leq 1 \}$; $f(x) := (a, |a|)$, $\forall x \in X$. Slēguma operatora S lomā atkal izvēlēsimies slēgtās izliektās čaulas operatoru. Attēlojuma f nekustīgo punktu kopa $\{ x \in X / b = |a| \}$ tomēr nav izliekta, kaut arī visi pārējie teorēmas nosacījumi izpildīti.

Literatūra

1. Kirk W.A. A fixed point theorem for mappings which do not increase diameters // Amer. Math. Monthly - 1965. - V. 72. - P. 1004-1006.
2. Belluce L.P., Kirk W.A. Fixed point theorems for certain classes of nonexpansive mappings // Proc. of Amer. Math. Soc. - 1969. - V. 20. - P. 141-146.
3. А.Х. Лиешинъ Колебѣльная для маленького тигеренка о неподвижных точках // Топологические пространства и их отображения - Рига - 1983. - С. 61-69.

I. Galina Existence of common fixed point for commutative family of nonexpansive mappings in metric space.

Summary. Fixed point theorem for commutative family of nonexpansive mappings in metric space with closure operator is proved. AMS Subject classification 54H25

И. Галина Существование общей неподвижной точки для перестановочного семейства нестягивающих отображений в метрическом пространстве.

Аннотация. В работе доказана теорема о неподвижной точке для перестановочного семейства нестягивающих отображений в метрическом пространстве, где задан оператор замыкания.

УДК 517.96

Latvijas Universitāte

Fizikas un matemātikas fakultāte

Matemātiskās analīzes katedra

226098 Rīga, Raiņa bulv. 19

SMILSU PULKSTĒŅA NEKUSTĪGAIS LAIKS ²

I. Kaprāns, A. Liepiņš

Anotācija. Pierādīta nekustīgā punkta teorēmas neizstiepjošā tipa attēlojumam topoloģiskās telpās.

Vispārinošajā laikā atbilstoši [1], [2] un [3].

Pieņemsim, ka X ir kopa. Kopas X visu apakškopu sistēmu apzīmēsim ar EX .

Definīcija 1. Attēlojumu $W: EX \rightarrow EX$ saucsim par slēguma operatoru kopā X , ja katrām divām X apakškopām A un B :

$$1) A \subset B \Rightarrow W(A) \subset W(B) ;$$

$$2) A \subset W(A) ;$$

$$3) W(W(A)) = W(A) .$$

Definīcija 2. Teiksim, ka slēguma operators W kopā X ir algebrisks, ja katrai X apakškopai A un katram $X \in W(A)$ eksistē tāda galīga A apakškopa B , ka $X \in W(B)$.

Ja X apakškopai $A: A = W(A)$, tad A saucsim par W - slēgtu.

Ar \mathbb{R}^+ apzīmēsim visu reālo pozitīvo skaitļu kopu, ar \mathbb{R}^+ - visu reālo nonegatīvo skaitļu kopu. $(0, 1, 2, \dots) =: \mathbb{Z}^+$.

Definīcija 3. Attēlojumu $S: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ saucsim par simetriku kopā X , ja katriem diviem kopas X punktiem x un y :

$$1) s(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y ;$$

$$2) s(x, y) = s(y, x) .$$

Ja S ir simetrika kopā X , tad katram $x \in X$ un katram $r \in \mathbb{R}_+^!$

$$B(x, r) := \{ y \in X \mid s(y, x) < r \} ;$$

katrai X apakškopai A :

$$\text{diam } A := \sup \{ s(x, y) \mid x, y \in A \} .$$

Topoloģiskas telpas X punkta x visu apkārtņu sistēmu apzināšim ar $U(x)$.

Definīcija 4. Teiksim, ka topoloģiska telpa X ar tajā definētu simetriku B un algebrisku slēguma operatoru W ir līdzīga smilšu pulkstenim, ja:

- 1) $\forall A \in PX: W(\overline{W(A)}) = \overline{W(A)} =: W'(A)$;
- 2) $\forall x \in X \forall r \in \mathbb{R}_+ : W'(R(x,r)) = B(x,r)$;
- 3) $\forall x \in X \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists U \in U(x) \forall y \in U \forall z \in X: |s(y,z) - s(x,z)| < \varepsilon$.

Pieņemsim, ka funkcija f topoloģisku telpu X , kas ir līdzīga smilšu pulkstenim, attēlo sevi. Ja $X = \bar{X}$, tad:

$$O(x) := \{f^n(x) \mid n \in \mathbb{Z}^+\};$$

$$A(x) := \{B \in PX \mid x \in B \ \& \ B = W'(B) \ \& \ f(B) \subset B\}.$$

Definīcija 5. Teiksim, ka funkcija f ir līdzīga steidzīgai, bet ne pārāk nepacietīgai rokaī, ja:

- 1) f ir nepārtraukta;
- 2) $\exists q \in]0,1[\forall x, y \in X: s(f(x), f(y)) < \max\{s(x,y), q \operatorname{diam}(A(x) \cup A(y))\}$;
- 3) $\forall x \in X (x \neq f(x)) \exists y \in A(x): \inf\{\sup\{s(y, f^m(x)) \mid m \geq n\} \mid n \in \mathbb{Z}^+\} < \operatorname{diam} A(x)$.

Definīcija 6. Teiksim, ka topoloģiskas telpas X , kas ir līdzīga smilšu pulkstenim un kuru funkcija f attēlo sevi, apakškopa Y zied kā rases lāse, ja:

- 1) Y ir W' -kompakta (t.i., katrai centrātai W' -slēgtu Y apakškopu sistēmai ir netukšs šķēlums);
- 2) $\forall x \in X: W'(O(x)) \cap Y \neq \emptyset$.

Teorema. Topoloģisku telpu X , kas ir līdzīga smilšu pulkstenim, sevi attēlo funkcija f , kas ir līdzīga steidzīgai, bet ne pārāk nepacietīgai rokaī.

Ja attēlojumam f telpā X kā rases lāse uzdied apakškopa Y , tad attēlojumam f eksistē nekustīgais punkts.

Pierādījums. Saskaņā ar Corna aksiomu konstruēsim minimālu netukšu, W' -slēgtu telpas X apakškopu M , kuru f attēlo sevi. Doma par Corna aksiomu, protams, atvērjo no X apakškopas Y rases

lāses zieda. Bet turpmākajā vājainais laiks oga pierimis nekustīgajā (varbūt tikai pieklusušajā) smilšu pulksteņa pasaules piesaulē.

Pieņemsim, ka $a \in M$ (vai pat: $a \in M \cap Y$). Pierādīsim, ka $B = f(a)$. Pieņemsim pretējo. Ar funkcijas f steidzīgajām rokām (bet ne pārāk nepacietīgi) sameklēsim tādu $b \in A(a) = M$, ka

$$r' := \inf(\sup(\exists(b, f^m(a)) \mid m \geq n) \mid n \in \mathbb{Z}^+) < \text{diam } M.$$

Pieņemsim, ka $r = \max(r', q \text{ diam } M)$, diam M ,

$$A_n := \cap \{ B(f^m(a), r) \cap M \mid m \geq n \} \text{ un}$$

$$A := \cup \{ A_n \mid n \in \mathbb{Z}^+ \}.$$

(Ar $1 \leq q \leq 1$ slēdžas f plauktā.) Tā kā $D \in A$, tad $A \neq \emptyset$ un $\bar{A} \neq \emptyset$. Kopa \bar{A} ir W' - slēgta, jo telpa X ir smilšpulksteņīga. Tā kā $f(A_n) \subset A_{n+1}$ ($n \in \mathbb{Z}^+$), tad $f(\bar{A}) \subset \bar{A}$ un $f(\bar{A}) \subset \bar{A}$. Kopa M ir minimāla, tāpēc $M = \bar{A}$.

Pieņemsim, ka $X \in M$ un $\epsilon \in \mathbb{R}^+$. Telpas X smilšu pulksteņa laiks veido punktem X tādu apkārtni U , ka $|\delta(y, z) - \delta(x, z)| < \epsilon$ visiem $y \in U$ un visiem $z \in X$. Atrodas kāds $y \in U \cap A$, un kādam $n \in \mathbb{Z}^+$: $y \in A_n$.

$$B(y, r) \supset \{ f^m(a) \mid m \geq n \} =: F_n.$$

Smilšu pulksteņa zvanam atskatot,

$$W'(F_n) \subset B(y, r),$$

$W'(F_n) \subset B(x, r + \epsilon)$ klusumā pēc tam. Klusumā tuvosimies un pietuvosimies:

$W'(F_n) \subset B(x, r)$, jo reālā pozitīvā skaitļa ϵ izvēle ir tik brīva, ka ϵ reizē var atgādināt gan skaitli 3, gan priedēkli - prievārdu "pie" un būt līdzīgs oranžam atklāsmas priekam. Jā,

$$B(x, r) \supset \cap \{ W'(F_n) \cap Y \mid n \in \mathbb{Z}^+ \} =: A' \neq \emptyset,$$

bet nepietuvosimies punktam x . Arī viņa sīkā smilšu glaudu dvēselīte ir brīva:

$$A' \subset \cap \{ B(x, r) \cap M \mid x \in M \} =: B \neq \emptyset.$$

$B = M$? Ja atrastos tāds $x \in B$, ka $f(x) \in B$, tad

$C = B(f(x), r) \cap M$ būtu M ista apakškopa. Bet smiltīta ierakstīte:

$C = M$, jo C - netukša, W' - slēgta kopa, kuru f attēlo sevi.

$B = M$!

Neesošas ciparnīcas blāznā:
 $\text{diam } B \leq r < \text{diam } M,$

š ir f n. kustīgais punkts.

tur rokām var steidzināt nekustīgu pulksteņu nekustīgo laiku.

Literatūra

1. Belluce L.P., Kirk W.A. Fixed point theorems for certain classes of nonexpansive mappings || Proc. Amer. Math. Soc. - 1969. - V.20. - P.141-146.
2. Лиепине А. Колебательная для маленького тигренка о неподвижных точках || Топологические пространства и их отображения. - Р., 1983.
3. Kaprāne I., Liepiņš A. The adventures from Mr. Fixed Point's life: the first adventure || Problems of pure and applied mathematics. - Tartu, 1990.

I.Kaprāne, A.Liepiņš. Fixed time of a sand-glass.

Abstract. A fixed point theorem for mappings of nonexpansive type in topological spaces is proved. AMS Subject classification 54B25.

М.Капране, А.Лиепине. Неподвижное время песчаных часов.

Аннотация. Доказана теорема о неподвижной точке для отображений нестягиваемого типа в топологических пространствах.

УДК 517.98.

Matem.iskās analīzes katedra,
 Latvijas universitāte,
 Raiņa bulvāris 19,
 226098 Rīga

TO JONATHAN LIVINGSTON SEAGULL*

A. Liepiņš, I. Kaprāne

Abstract. A fuzzy generalization of Weierstrass theorem is obtained, and a corresponding fixed point theorem is given. AMS Subject classification 54H25.

Let X be a set, and let F be a set of all fuzzy subsets A of X ($A: X \rightarrow [0,1] =: \mathbb{I}$).

Definition 1. A mapping $S: F \rightarrow F$ will be called a fuzzy closure operator on X if the following conditions for each $A, B \in F$ are satisfied:

- 1) $A \leq B \Rightarrow S(A) \leq S(B)$;
- 2) $A \leq S(A)$;
- 3) $S(S(A)) = S(A)$.

Let S be a fuzzy closure operator on X .

A fuzzy subset A of X will be called S -closed if $A = S(A)$. If every centered system of S -closed fuzzy subsets of X has a nonempty intersection, then X will be called fuzzy S -compact.

Definition 2. A mapping $O: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{I}$ will be called

(1) a fuzzy U -order on \mathbb{R} if the following for each $x, y, z \in \mathbb{R}$ holds:

- 1) $x < y \Rightarrow O(x, y) > 0$;
- 2) $O(x, y) > 0 \Rightarrow x \leq y$;
- 3) $y \leq z \Rightarrow O(x, y) \leq O(x, z)$;
- 4) $O(x, \cdot)$ is continuous from the right;

(2) a fuzzy d -order on \mathbb{R} if for each $x, y, z \in \mathbb{R}$:

* Без литературной правки (ред.)

- 1) $x > y \Rightarrow O(x,y) > 0$;
 - 2) $O(x,y) > 0 \Rightarrow x \geq y$;
 - 3) $y \leq z \Rightarrow J(x,y) \geq O(x,z)$;
 - 4) $O(x, \cdot)$ is continuous from the left;
- (3) a fuzzy Γ -order on \mathbb{R} if for each $x, y, z \in \mathbb{R}$:
- 1) $x > y \Rightarrow O(x,y) > 0$;
 - 2) $O(x,y) > 0 \Rightarrow x \geq y$;
 - 3) $x \leq z \Rightarrow O(x,y) \leq O(z,y)$;
 - 4) $O(\cdot, y)$ is continuous from the right
- (4) a fuzzy Γ -order on \mathbb{R} if for each $x, y, z \in \mathbb{R}$:
- 1) $x < y \Rightarrow O(x,y) > 0$;
 - 2) $O(x,y) > 0 \Rightarrow x \leq y$;
 - 3) $x \leq z \Rightarrow O(x,y) \geq O(z,y)$;
 - 4) $O(\cdot, y)$ is continuous from the left.

Let $f: X \rightarrow \mathbb{R}$.

Definition 3. We say that a function f is like

(1) a penguin

if there exists a fuzzy closure operator S on X and a fuzzy Γ -order O on \mathbb{R} such that:

- 1) X is fuzzy S -compact;
- 2) $O(f(\cdot), r)$ is S -closed for each $r \in \mathbb{R}$;

(2) a swift

if there exists a fuzzy closure operator S on X and a fuzzy Γ -order O on \mathbb{R} such that the same two previous conditions are fulfilled.

Definition 4. We say that a function f is able to stop

(1) the \inf -movement to nowhere if there exists a fuzzy closure operator S on X and a fuzzy Γ -order O on \mathbb{R} such that:

- 1) X is fuzzy S -compact;
- 2) $O(r, f(\cdot))$ is S -closed for each $r \in \mathbb{R}$;

(2) the \sup -movement to nowhere if there exists a fuzzy closure operator S on X and a fuzzy Γ -order O on \mathbb{R} such that the

same two previous conditions are fulfilled.

"For most gulls, it is not flying that matters, but eating. For this gull, though, it was not eating that mattered, but flight. More than anything else, Jonothan Livingston Seagull loved to fly".[1]

Theorem. Let a function f be like a penguin.

Then f attains its minimal value.

If a function flies like a swift, then the maximal value is attained.

Proof. Suppose f is like a penguin. Then there exists a fuzzy closure operator S on X and a fuzzy U -order O on \mathbb{R} such that:

- 1) X is fuzzy S -compact.
- 2) $O(f(\cdot), r)$ is S -closed for each $r \in \mathbb{R}$.

Assume that

$$m := \inf \{ f(x) \mid x \in X \} = -\infty.$$

By assumption S -closed fuzzy subsets $O(f(\cdot), -n) =: A_n$ ($n \in \mathbb{N}$) of X are nonempty as a consequence from the first property of O . The third property of O provides the sequence $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is descending. Since X is fuzzy S -compact, an intersection of all the sets A_n is nonempty. Hence, there exists a point $x \in X$ such that

$$\alpha := \inf \left\{ O(f(y), m + \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N} \right\} > 0$$

since X is fuzzy S -compact.

Since $O(f(y), m + \frac{1}{n}) \geq \alpha$ for each $n \in \mathbb{N}$, continuity of O from the right (the fourth property of O) implies that

$O(f(y), m) \geq \alpha$. As a consequence from the second property of O : $f(y) \leq m$. Hence, $f(y) = m$.

Assertion that a swiftlike function attains its maximal value can be proved in the same manner. It also follows, of course, from the fact that $-f$ is penguinlike for swiftlike f .

Since penguinlike and swiftlike functions are able to stop correspondingly the inf -movement and the sup -movement to nowhere, our theorem can be expressed as well as following:

1) if a function is able to stop the inf -movement to nowhere, then it attains its minimal value;

2) if a function is able to stop the sup -movement to nowhere, then it attains its maximal value.

As an obvious consequence from our result we obtain a fixed point theorem.

Corollary. Let X be a set, and let f be a selfmap of X .

Suppose there exists a function $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ such that (1) or (2) holds:

(1) g is able to stop the inf -movement to nowhere and $g(x) > g(f(x))$ for each $x \in X: x \neq f(x)$;

(2) g is able to stop the sup -movement to nowhere and $g(x) < g(f(x))$ for each $x \in X: x \neq f(x)$.

Then f has a fixed point.

References

1. Bach R. Jonathan Livingston Seagull || - London, 1973.

A. Liepiņš, M. Kaprāns. Čaiķa Džonatanu Līvīngstonu.

Аннотация. Получено нечеткое обобщение теоремы Вейерштрасса, и приведена соответствующая теорема о неподвижной точке. УДК 517.98.

A. Liepiņš, I. Kaprāns. Kaiķai Džonatanam Līvīngstonam.

Anotācija. Iegūta Veierštrasa teorēmas miglējvispārinājums un atbilstoša nekustīgā punkta teorēma.

Matemātiskās analīzes katedra
Latvijas universitāte
Raina bulvāris 19
226098 Rīga

A SEMILLUSION OF CONTINUITY ²

A. Lispiņš, L. Kampe

Abstract. A simple, but pretty Weierstrass theorem's generalization establishing sufficient and necessary conditions under which a real valued function on a compact Hausdorff space attains its minimal and maximal value is given. A corresponding fixed point theorem is obtained. AMS Subject classification 54B25.

Let X be a topological space, and let $f: X \rightarrow \mathbb{R}$.

Definition 1. We say that a function f is illusionlike lower semicontinuous if there exists a mapping $g: X \rightarrow X$ such that

$$f^{-1}((]r, +\infty[)) \supset g(f^{-1}((]r, +\infty[))) \text{ for each } r \in \mathbb{R}.$$

Definition 2. We say that a function f is illusionlike upper semicontinuous if there exists a mapping $g: X \rightarrow X$ such that

$$f^{-1}((]r, +\infty[)) \supset g(f^{-1}((]r, +\infty[))) \text{ for each } r \in \mathbb{R}.$$

Theorem. Let X be a compact Hausdorff space, and let $f: X \rightarrow \mathbb{R}$. Then:

- 1) f attains its minimal value if and only if it is illusionlike lower semicontinuous.
- 2) f attains its maximal value if and only if it is illusionlike upper semicontinuous.

Proof. Let f be illusionlike lower semicontinuous.

Assume that $m := \inf \{ f(x) \mid x \in X \} = -\infty$.

We define $A_n := f^{-1}((]m, m+n[))$ for each $n \in \mathbb{N}$ and obtain a descending sequence $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ of nonempty subsets of X . Since f is illusionlike lower semicontinuous, we can choose a mapping $g: X \rightarrow X$ such that $A_n \supset g(A_n) =: B_n$ for each $n \in \mathbb{N}$. We obtain a descending sequence $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ of nonempty and closed subsets of X . Since X is compact, an intersection of all the sets B_n is nonempty.

*) Без литературной правки (ред.)

Let $X = \bigcap \{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. It follows that $X \in A_n$ and therefore $f(X) \leq -n$ for each $n \in \mathbb{N}$. Impossible! We conclude that $m \in \mathbb{R}$.

Now again we define

$A_n' := f^{-1}(] -\infty, m + \frac{1}{n} [) \supset \overline{g(A_n')} =: B_n'$ for each $n \in \mathbb{N}$ and

obtain a descending sequence $(B_n') \mid n \in \mathbb{N}$ of nonempty and closed subsets of X . Again $\bigcap \{B_n' \mid n \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$. It follows that

$m \leq f(X) \leq m + \frac{1}{n}$ for each $n \in \mathbb{N}$. Hence, $f(X) = m$.

Conversely, suppose there exists a point $X \in X$ such that

$f(X) = \inf \{f(y) \mid y \in X\} =: m$. We define $g(y) := X$ for each $y \in X$. Let $\Gamma \in \mathbb{R}$ be arbitrary. If $\Gamma < m$, then

$A_\Gamma := f^{-1}(] -\infty, \Gamma [) = \emptyset = \overline{g(A_\Gamma)}$.

If $\Gamma \geq m$, then $A_\Gamma \supset \{X\} = \overline{g(A_\Gamma)}$. Hence, f is illusionlike lower semicontinuous.

The second conclusion of our theorem can be proved in the same manner.

Corollary. Let X be a compact topological space, and $F: X \rightarrow X$ be a selfmap of X . Suppose there exists a function $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ such that (1) or (2) holds:

(1) f is illusionlike lower semicontinuous and $f(X) > f(F(X))$ for each $X \in X: X \neq F(X)$;

(2) f is illusionlike upper semicontinuous and $f(X) < f(F(X))$ for each $X \in X: X \neq F(X)$.

Then F has a fixed point.

A. Лишниньш, Л. Кампе. Семилузья непрерывности.

Аннотация. Приведено простое, но приятное обобщение теоремы Вейерштресса, дающее необходимое и достаточное условие, при котором действительновзвечная функция на компактном хаусдорфовом пространстве принимает свое наименьшее и наибольшее значение. Получена соответствующая теорема о неподвижной точке. УДК 517.98.

A. Liepiņš, L. Kampe. Nepartrauktības semilūzija.

Анотācija. Aplūkots vienkāršs, bet patikams Вейерштресса теорēmas vispārinājums, kas satur pietiekamu un nepieciešamu nosacījumu, lai reālvērtīga funkcija kompakta Хаусдорфа тelpā sasniegtu savu lielāko un mazāko vērtību. Iegūta atbilstoša nekustīgā punkta теорēma.

Matemātiskās analīzes katedra, Latvijas universitāte
 Raiņa bulvāris 19, 226098 Rīga

A BALANCED CLOUDSCAPE WITH FIXED POINTS

R. Zirvite, E. Kopeika, A. Liepins

Abstract. For strictly contractive multifunctions and for strictly contractive families of nonexpansive multifunctions the well-known Edelstein's fixed point theorem is generalized. AMS Subject classification 54E25.

We generalize the results from [1], [2] and [3].

We need the following basic definitions and notations.

Let X be a metric space with a distance d , and let $A, B \in EK$ where by EK the set of all subsets of X is denoted. By h we denote the Hausdorff distance on EK .

$$h(A, B) := \max \left(\sup \{ \inf \{ d(x, y) \mid y \in B \} \mid x \in A \}, \right. \\ \left. \sup \{ \inf \{ d(x, y) \mid x \in A \} \mid y \in B \} \right).$$

Let $f: X \rightarrow EK$.

A multifunction f is called:

- 1) nonexpansive if $h(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$ for each $x, y \in X$;
- 2) strictly contractive if $h(f(x), f(y)) < d(x, y)$ for each $x, y \in X: x \neq y$.

Let $f_1, \dots, f_n: X \rightarrow EK$.

A family of multifunctions f_1, \dots, f_n is called strictly contractive if $\min \{ h(f_i(x), f_i(y)) \mid i = 1, \dots, n \} < d(x, y)$ for each $x, y \in X: x \neq y$.

If E is a vector space and $A_1, \dots, A_n \in EK$, then

$$CO(A_1, \dots, A_n) := \bigcup \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i A_i \mid \alpha_i \geq 0 \ (i=1, \dots, n) \ \& \ \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \right).$$

We recall that a subset A of a vector space is starshaped provided there is a point $x_0 \in A$, such that for each $x \in A$, the line segment joining x to x_0 is contained in A . Such a point x_0 will be called a star center of A .

Theorem 1. Let X be a compact metric space, and let $f: X \rightarrow EK$ be strictly contractive.

Suppose $f(X)$ is nonempty and closed for each $x \in X$.

*) Без литературных ссылок (ред.)

Then f has a fixed point.

Proof. Let $z_0 \in X$. As a closed subset of a compact space $f(z_0)$ is compact. Hence, there exists a point $z_1 = f(z_0)$ such that $d(z_0, z_1) = d(z_0, f(z_0)) = \inf \{ d(z_0, y) \mid y \in f(z_0) \}$.

Inductively we construct $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, for each $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ the following holds:

- 1) $z_{n+1} \in f(z_n)$;
- 2) $d(z_n, z_{n+1}) = d(z_n, f(z_n))$.

Observe that for each $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} d_n &:= d(z_n, z_{n+1}) = d(z_n, f(z_n)) = \inf \{ d(z_n, y) \mid y \in f(z_n) \} < \\ &< \sup \{ \inf \{ d(x, y) \mid y \in f(z_n) \} \mid x \in f(z_{n-1}) \} < \\ &< h(f(z_{n-1}), f(z_n)) =: h_n < d_{n-1}. \end{aligned}$$

It follows that $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ and $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ both are convergent and their limits are equal. Their common limit will be denoted by q .

Now, since X is compact, we can choose convergent subsequences $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ and $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ of $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfying for each $n \in \mathbb{N}$:

- 1) $y_n \in f(x_n)$;
- 2) $d(x_n, y_n) = d(x_n, f(x_n))$.

Let $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converges to x and $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ to y .

$$\begin{aligned} \text{For each } n \in \mathbb{N}: \quad d(y_n, f(x)) &= \inf \{ d(y_n, u) \mid u \in f(x) \} < \\ &< \sup \{ \inf \{ d(v, u) \mid u \in f(x) \} \mid v \in f(x_n) \} < h(f(x_n), f(x)) < d(x_n, x). \end{aligned}$$

Since $f(x)$ is closed, consequently: $y \in f(x)$.

Observe that

$$d(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = q = \lim_{n \rightarrow \infty} h(f(x_n), f(y_n)) = h(f(x), f(y)).$$

It is possible if and only if $x=y$ because f is strictly contractive. The result follows.

Let X be a subset of a vector space.

A subset X will be called a cloud for a family of multifunctions $f_1, \dots, f_n : X \rightarrow \mathbb{K}X$ if

$$co \{ f_1(x), \dots, f_n(x) \} \subset X \text{ for each } x \in X.$$

Theorem 2. Let X be a subset of a normed vector space.

Suppose X is a compact cloud for a strictly contractive family of nonexpansive multifunctions $f_1, \dots, f_n : X \rightarrow \mathbb{K}X$.

Suppose $f_1(x)$ is nonempty, closed and convex for each $x \in X$

and for each $i \in \{1, \dots, n\}$.

Then every multifunction f_i ($i = 1, \dots, n$) has a fixed point.

Proof. For $n=1$ the result is obviously implied by the previous theorem. We assume that $n \geq 2$. Let $i \in \{1, \dots, n\}$ and $c \in \mathbb{R}_+$ be arbitrary.

Since X is compact, it is bounded. Hence, there exists $C \in]\frac{c}{2}, +\infty[$ such that $\|f_i(x)\| \leq C$ for each $x \in X$. Let $\alpha_1 \in]0, 1 - \frac{c}{2C}[$ and $\alpha_j = \frac{1-\alpha_1}{n-1}$ ($j = 1, \dots, n, j \neq 1$).

We define a multifunction f for each $x \in X$ as following:

$$f(x) := \sum_{j=1}^n \alpha_j f_j(x).$$

Since X is a cloud for $\{f_1, \dots, f_n\}$, $f: X \rightarrow \mathbb{K}$.

Let $x, y \in X$ ($x \neq y$) be arbitrary. Then:

$$h(f(x), f(y)) = h\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j f_j(x), \sum_{j=1}^n \alpha_j f_j(y)\right) \leq \sum_{j=1}^n \alpha_j h(f_j(x), f_j(y)).$$

A family of nonexpansive multifunctions f_1, \dots, f_n is strictly contractive.

Therefore:
$$h(f(x), f(y)) < \sum_{j=1}^n \alpha_j \|x - y\| = \|x - y\|,$$

and f is strictly contractive. Making use of the previous theorem we conclude that f has a fixed point z .

Then: $d(z, f_1(z)) = \inf\{\|z - x\| \mid x \in f_1(z)\} <$

$$< \sup\{\inf\{\|y - x\| \mid x \in f_1(z)\} \mid y \in f(z)\} <$$

$$< h(f(z), f_1(z)) = h\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j f_j(z), f_1(z)\right) <$$

$$< h\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j f_j(z), (0)\right) + h(\alpha_1 f_1(z), f_1(z));$$

$$h\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j f_j(z), (0)\right) = \sup_{j \neq 1} \left\{ \left\| \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j \right\| \mid x_j \in f_j(z) (j=1, \dots, n, j \neq 1) \right\} <$$

$$< \sup_{j \neq 1} \left\{ \sum_{j=1}^n \alpha_j \|x_j\| \mid x_j \in f_j(z) (j=1, \dots, n, j \neq 1) \right\} < \sum_{j=1}^n \alpha_j c = c(1 - \alpha_1).$$

Since $f_1(z)$ is convex, $f_1(z) = \alpha_1 f_1(z) + (1 - \alpha_1) f_1(z)$.
 Therefore: $h(\alpha_1 f_1(z), f_1(z)) =$
 $= h(\alpha_1 f_1(z), \alpha_1 f_1(z) + (1 - \alpha_1) f_1(z)) \leq$
 $< h(0, (1 - \alpha_1) f_1(z)) \leq c(1 - \alpha_1)$.
 Hence, $d(z, f_1(z)) \leq 2c(1 - \alpha_1) < c$.

We conclude, that $\inf \{ d(y, f_1(y)) \mid y \in X \} = 0$.

By Weierstrass theorem there exists a point $X \in \bar{X}$ such that $d(X, f_1(X)) = 0$. Since $f_1(X)$ is closed, the result follows.

Corollary. Let X be a compact star in a normed vector space, and let $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ be nonexpansive.

Suppose $f(X)$ is nonempty, closed and convex for each $X \in \bar{X}$. Then f has a fixed point.

Proof. Let $f_1: X \rightarrow X$ and $f_2(X) := \{X_0\}$ (X_0 is a star center of X) for each $X \in \bar{X}$. The result follows by Theorem 2, used for the family $\{f_1, f_2\}$.

Theorem 1 used for singlevalued functions as an immediate consequence gives the result from [1], Theorem 2 - the result from [2] and Corollary - the result from [3].

References

1. Edelstein M. On fixed and periodic points under contractive mappings || J. London Math. Soc. - 1962. - V.37. - P.74-75.
2. Galina I. Ein gleichgewichtiges bild mit fixpunkten || Latvijas universitātes zinātniskie raksti. 1990.- 8.552.- L.45-46.
3. Dotson V.G. Fixed point theorems for nonexpansive mappings on star-shaped subsets of Banach spaces || J. London Math. Soc. - 1971./72. - V.(2)4. - P. 408-410.

Р.Зирвите, Э.Копейка, А.Лиепиньс. Уравновешенный пейзаж с облаками и неподвижными точками.

Аннотация. Известная теорема Эделштейна о неподвижной точке обобщена для строго нестягивающих многозначных отображений и строго нестягивающих семейств нестягивающих многозначных отображений. УДК 517.98.

R.Zirvite, E.Kopejka, A.Liepins. Lidzsvarota mākopaina ar ne-
 kustīgām punktiem.

Анотација. Эделштейна pazīstamā teorēma par nekuatīgu punktu vispārināta stingri neizstiepjošām multifunkcijām un stingri neizstiepjošām neizstiepjošu multifunkciju saimēm.

Matemātiskās analīzes katedra
 Latvijas universitāte
 Raiņa bulvāris 19, 226098 Rīga

МАТЕМАТИКА

Изучившие труды

Том 562

Рецензент В. Штейнбук, канд. физ.-мат. наук, доцент
Рижского технического
университета

Редакторы: А. Лоренц, Н. Теректзева
Технический редактор С. Динья
Корректор И. Балодэ

Подписано к печати 28.10.1991. Ф/О 60/84/16.
Зага 51.11,8 физ.печ.л. 11,0 уол.печ.л. 8,7 уч.-изд.л.
в экз. 290 экз. Рег.уд. № 2-0266. Зак. № 653 Цена I р.80к.

Латвийский университет
226098 Рига, о. Рвлинса, 19
Отпечатано на ротационной
226050 Рига, ул.Калева, 43