ISSN 1407-2157

LATVIJAS UNIVERSITĀTES
ZINĀTNISKIE RAKSTI

ACTA UNIVERSITATIS LATVIENSIS

616

MATHEMATICS
DIFFERENTIAL EQUATIONS

МАТЕМАТИКА
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Л А Т В И Й С К И Й   У Н И В Е Р С И Т Е Т

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

М А Т Е М А Т И К А

Д И Ф Ф Е Р Е Н Ц И А Л Ь Н Ы Е   У Р А В Н Е Н И Я

Научные труды

Том 616

Рига 1999

MATEMĀTIKA. DIFERENCIĀLVIENĀDOJUMI.

Matemātika. Diferenciālvienādojumi: Zinātniskie raksti / Atb. red. J.Klokovs. -- 616. sējums. Rīga: LU, 1999. 131 lpp.

Rakstu krājums satur zinātniskos rakstus, kas veltīti parasto diferenciālvienādojumu teorijai. Tiek pētīti arī tuvie jautājumi.Īpaša uzmanība tiek veltīta nelineāram robežproblēmam.
Rakstu krājums paredzēts zinātniekiem, pasniedzējiem un studentiem, kuri nodarbojas ar parasto diferenciālvienādojumu un to atrisinājumu pētīšanu.

MATHEMATICS. DIFFERENTIAL EQUATIONS.

The collection contains articles on the theory of ordinary differential equations. Some related problems are investigated too. Main attention is paid to nonlinear boundary value problems.
The collection is destined for researchers and students in the field.

МАТЕМАТИКА. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.

Сборник содержит статьи по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассматриваются также близкие вопросы. Основное внимание уделяется нелинейным краевым задачам.
Сборник предназначается для исследователей, преподавателей и студентов, работающих в области обыкновенных дифференциальных уравнений.

Multiplicity results for third order two-point boundary value problems

F Sadyrbaev

Summary. Estimates from below of the number of solutions to boundary value problems of the type $x''' = f(t, x, x', x'')$, $x(a) = A$, $x'(a) = A_1$, $x(b) = B$, are given for certain classes of continuous functions f provided that there exists at least one solution $\xi(t)$ to the BVP under consideration. The number of solutions depends on oscillatory properties of a linear equation of variations with respect to $\xi(t)$. Existence results are presented also in terms of upper and lower functions.

1991 MSC 34B15, secondary 34A30

Key Words. Nonlinear boundary value problems, multiplicity of solutions, conjugate points.

Introduction. In this paper we are concerned with a nonlinear differential equation

$$x''' = f(t, x, x', x'') \tag{1}$$

subject to one of the following boundary conditions:

$$x(a) = A, \quad x'(a) = A_1, \quad x(b) = B, \tag{2}$$

$$x(a) = A, \quad x(b) = B, \quad x'(b) = B_1, \tag{3}$$

$$x'(a) = A_1, \quad x(b) = B, \quad x'(b) = B_1, \tag{4}$$

$$x(a) = A, \quad x'(a) = A_1, \quad x'(b) = B_1. \tag{5}$$

Boundary value problems of these types were studied by D.Barr and T.Sherman [2], G.Klaasen [11], L.Jackson and K.Schrader [9], A.Aftabizadeh and J.Wiener [1].

In the mentioned papers the existence of solutions and uniqueness were mainly discussed.

The aim of the present work is to establish multiplicity results for certain classes of third order nonlinear boundary value problems.

Our approach is based on the idea of A.Perov who studied boundary value problems for two-dimensional differential systems in [13], ch.15 (see also [3], ch.2) by angular function technique and on the theory of conjugate points for third order linear differential equations by M.Hanan [7] (see also C.Swanson [14] and M.Greguš [6]). Previously this approach was applied to investigation of third order boundary value problems in the paper [5] the results of which the present paper extends and strengthens. Since linear theory plays important role in our considerations we present related information in section 2. In section 3 principal results are stated for nonlinear equation (1) with bounded right-hand side.

In section 4 boundary value problems for unbounded f are considered. It is shown how to reduce these problems to those witn bounded f using maximum principles and upper and lower functions technique.

Throughout the paper we suppose that $f(t, x, x', x'')$ is continuous together with first partial derivatives f_x, $f_{x'}$, $f_{x''}$.

2. Linear equation. In this section we consider equation

$$y''' = p(t)y + q(t)y' + r(t)y'' \tag{6}$$

with continuous coefficients.

Suppose that (6) has a solution $y(t)$ which vanishes at $t = a$ and has at least n2 (n9») zeros in (a, ∞). Designate these zeros by $a_1, a_2, \ldots, a_{n+2}$. Then η_n is said ([7], p.920) to be the n-th conjugate point of $t = a$ (with respect to the equation (6) if it is the smallest possible value of a_{n+2} as $y(t)$ ranges over all possible solutions of (6) for which $y(a) = 0$. The solution which produces the n-th conjugate point is called the n-th *extremal* solution.

Two classes of linear third order equations were introduced in [7], p.92.

Definition 1. Equation (6) is said to be of Class I, if any it's solution $y(t)$ for which $y(a) = y'(a) = 0$ and $y''(a) > 0$, satisfies the inequality $y(t) > 0$ $\forall t < a$.

Definition 2. Equation (6) is said to be of Class II if any it's solution $y(t)$ for which $y(a) = y'(a) = 0$ and $y''(a) > 0$, satisfies the inequality $y(t) > 0$ $\forall t > a$.

The intersection of these classes is not empty (for instance, the equation $y''' = 0$ belongs to both classes) and there exist equations (for example, $y''' = -y'$) which are neither of Class I nor of Class II.

A number of criteria assuring that (6) belongs to one of the classes I or II are known of which we state here the following.

Theorem 1 ([7], theorem 2.3.) *Let $r(t) \equiv 0$ in (6). If the second order differential equation*

$$y'' - q(t)y = 0 \tag{7}$$

is nonoscillatory in $(0, \infty)$ and if $p \leq 0$ ($p \geq 0$) then (6) is of Class I (resp.: (6) is of Class II).

Theorem 2 ([7], theorem 2.5.) *If $q \leq 0$ ($q \geq 0$) then the equation*

$$(r(t)y')'' - q(t)y = 0, \qquad r(t) > 0$$

is of Class I (resp.: Class II).

Theorem 3 ([6], theorem 1.) *Linear equation (6) is of Class I (resp.: Class II) if* $p(t) \leq 0$ *(*$p(t) \geq 0$*) and* $q(t) \geq 0$.

Significant facts characterizing extremal solutions of equations of Class I and Class II are summarized in the following result due to M. Hanan ([7], theorems 2.6, 2.7 and 4.4).

Theorem 4 *Conjugate points of any point* $t = a$ *of an equation of Class I are the zeros (which are simple) of the so-called principal solution, that is the solution* $y(x; a)$ *of (6) which satisfies the initial conditions*

$$y(a) = y'(a) = 0, \quad y''(a) = 1.$$

Conjugate points η_n *of a point* $t = a$ *(it any) of an equation of Class II form ascending sequence* $a < \eta_1 < \quad < \eta_n < \quad$ *The corresponding extremal solutions* $y_n(t)$ *have a simple zero at* $t = a$*, double zero at* $t = \eta_n(a)$ *and exactly* $n-1$ *simple zeros in* $(a, \eta_n(a))$.

Conversely, suppose that equation (6) is of Class II and $y(t)$ is a solution of (6) such that $y(a) = 0$ and $y(t)$ has $n+2$ zeros in $[a, b]$. If $y(b) = y'(b) = 0$, then b is the n-th conjugate point of a.

In order to state the main result of this section, consider the linear equation

$$y''' = p(t, \lambda)y + q(t, \lambda)y' + r(t, \lambda)y'', \tag{6_λ}$$

coefficients of which are continuous functions of (t, λ).

Lemma 1 ([5], p.175.) *Let coefficients* p, q, r *in (6) be bounded in modulus by positive constants* M_0, M_1, M_2 *respectively. Then there exists a number* $\delta > 0$ *depending on* M_0, M_1, M_2 *only and such that for each* λ *the length of any subinterval which contains three zeros (counting their multiplicities) of an arbitrary nontrivial solution of* (6_λ) *is larger than* δ.

Lemma 2 *Let equation* (6_λ) *be of Class I for each* $\lambda \in I$*, where* I *is a compact interval. Then there exists a number* $\delta_1 > 0$ *depending on* I *only and such that for each* λ *the length of any subinterval containing two consecutive zeros of a solution* $y(t, \lambda)$ *of* (6_λ) *which has double zero at* $t = a$ *(i.e.* $y(a, \lambda) = y'(a, \lambda) = 0$*) is larger than* δ_1.

Proof: First of all notice that, by lemma 1, there is a positive number δ such that $t_j(\lambda) > a + \delta$ for $j = 1, 2, .$ independently of λ, where $t_j(\lambda)$ stand for j-th zero of a solution $y(t, \lambda)$ of (6_λ) which has double zero at $t = a$. Suppose that the assertion of lemma is not true and, e.g., $t_2(\lambda_n) - t_1(\lambda) \to \infty$ for some sequence $\{\lambda_n\}_1^\infty$, where $\lambda_n \in I$. Since the set of principal solutions $y(t, \lambda_n)$ is compact in $C^2([a, b], R)$ likewise the set of solutions $\frac{1}{n} y(t, \lambda_n)$, there exists a limit function $y(t, \lambda_*)$ which is a solution of (6_{λ_*}) and has a double zero in $(a, b]$. This contradicts the assumption that (6_{λ_*}) is of Class I.

Theorem 5 *Let the coefficients in* (6_λ) *be continuous functions of* (t, λ) *defined on* $[a, b] \times [\lambda_0, \Lambda]$, *where* λ_0 *and* Λ *are finite. Let* (6_λ) *be of Class I for each* $\lambda \in [\lambda_0, \Lambda]$. *Suppose that the interval* (a, b) *contains* n *points conjugate to* $t = a$ *with respect to the equation* (6_{λ_0}) *and does not contain conjugate points at all for* $\lambda = \Lambda$.

Then there exist at least n *values* $\lambda_n \in [\lambda_0, \Lambda]$ *such that the equation* (6_{λ_n}) *has a solution* $y(t, \lambda_n)$ *satisfying the boundary conditions*

$$y(a) = y'(a) = y(b) = 0. \tag{8}$$

Proof: Let $y(t, \lambda)$ be the principal solution of (6_λ) and denote by $\eta_i(\lambda)$ its zeros (i.e. conjugate points of $t = a$ with respect to the equation (6_λ). Since equations (6_λ) are of Class I, each $\eta_i(\lambda)$ is a simple zero, which continuously depends on the coefficients of (6_λ). By lemmas 1 and 2, each $\eta_i(\lambda)$ is separated both from $t = a$ and from the neighbouring zeros $\eta_{i-1}(\lambda)$ and $\eta_{i+1}(\lambda)$. From these facts and disconjugacy of (6_λ) L in (a, b) it follows that there exist $\lambda_j = \sup\{\lambda \in [\lambda_0, \Lambda] \quad \eta_j(\lambda) < b\}$ and $\eta_j(\lambda_j) = b$, $j = 1, \dots, n$. The associated principal solutions $y(t, \lambda_j)$ obviously satisfy the conditions (8).

It is mentioned in [7] that study of equations of Class II can be based on the variable change $t \to c - t$, which transforms equations of Class I to equations of Class II and vice versa. To this point the following statement is of value.

Theorem 6 *Let equation (6) be of Class II and suppose that the interval* (a, b) *contains* n *points conjugate to* $t = a$. *Then there exist* n *conjugate points to* $t = a$ *in the interval* (a, b) *with respect to the equation of Class I, which is derived from (6) by changing* t *to* $(a + b) - t$.

Proof: We have to show that the solution of (6) which has a double zero at $t = b$, has n simple zeros in (a, b). Consider (6) with the initial conditions

$$y(\tau) = y'(\tau) = 0, \quad y''(\tau) = 1,$$

where $\tau \in [\eta_n(a), b]$, and denote by $y(t; \tau)$ the solution of this Cauchy problem. By theorem 4, $y(t; \eta_n(a))$ is identical with the n-th extremal solution of (6) with respect to $t = a$. Hence $y(t; \eta_n(a))$ has exactly $n - 1$ simple zeros in $(a, \eta_n(a))$. Denote by $z(\tau)$ the $(n-1)$-th zero of $y(t; \tau)$ to the left of τ. Since $z(t)$ is a simple zero, $z(\tau)$ is continuous function of τ in a domain of definition. By lemma 1, $z(\tau) < \tau$. On the other hand, $z(\tau) > a$ for all $\tau \in [\eta_n(a), b]$. Suppose this is not true. Since $z(t) > a$ in some vicinity of $\eta_n(a)$, then there exists $\tau_0 \in [\eta_n(a), b]$ such that $z(t_0) = a$. Since $y(t; \tau_0)$ has a simple zero at $t = a$, double zero at $t = \tau_0$ and $n - 2$ simple zeros in (a, τ_0), it is $(n - 1)$-th extremal solution of (6) with respect to $t = a$, on the basis of theorem 4. This means that τ_0 is $(n - 1)$-th conjugate point of $t = a$ which is absurd since $\tau_0 > \eta_n(a) > \eta_{n-1}(a)$.

2. Nonlinear problems.

In this section we pass to the study of nonlinear problems (1),(2) to (1),(5). Our treatment of nonlinear problems will be based on the results of section 2.

Let $\xi(t)$ be a solution to the boundary value problem (1), (2). Suppose that function f in (1) is bounded and denote by $x(t; \lambda)$ a solution of (1), which satisfies the initial conditions

$$x(a) = \xi(a) = A, \quad x'(a) = \xi'(a) = A_1, \quad x''(a) - \xi''(a) = \lambda. \tag{9}$$

Consider now the one-parametric family of linear equations

$$Y''' = g_0(t;\lambda)Y + g_1(t;\lambda)Y' + g_2(t;\lambda)Y'', \tag{10}$$

where

$$\begin{aligned} g_0(t;\lambda) &= [f(t,x(t;\lambda),x'(t;\lambda),x''(t;\lambda))- \\ &-f(t,\xi(t),x'(t;\lambda),x''(t;\lambda))][x(t;\lambda)-\xi(t)]^{-1}, \\ g_1(t;\lambda) &= [f(t,\xi(t),x'(t;\lambda),x''(t;\lambda))- \\ &-f(t,\xi(t),\xi'(t),x''(t;\lambda))][x'(t;\lambda)-\xi'(t)]^{-1}, \\ g_2(t;\lambda) &= [f(t,\xi(t),\xi'(t),x''(t;\lambda))- \\ &-f(t,\xi(t),\xi'(t),x''(t;\lambda))][x''(t;\lambda)-\xi'(t)]^{-1} \end{aligned} \tag{11}$$

It is assumed that at the points where denominators vanish the right-hand sides of (11) must be changed to appropriate values of partial derivatives f_X, $f_{X'}$ and $f_{X''}$. By Mean Value Theorem, the right-hand sides in (11) are equal to respective partial derivatives at appropriate intermediate values of arguments. Notice also that functions $g(t;\lambda)$ are defined and continuous on $[a,b]\times R$ since f is bounded and all solutions of (1), (9) extend to the whole interval $[a,b]$.

The interrelation between linear equations in the form (10) and nonlinear problems is clarified by the following observation.

Lemma 3 *Let $\xi(t)$ be a solution of the boundary value problem (1), (2). Suppose that for some λ there exists a nontrivial solution $y(t;\lambda)$ of* (10) *satisfying the boundary conditions*

$$y(a) = y'(a) = 0 = y(b) \tag{12}$$

Then the function

$$x(t;\lambda) = \xi(t) + \frac{\lambda}{y''(a;\lambda))}y(t;\lambda) \tag{13}$$

also solves the problem (1), (2).

Proof: Notice that since $y(t;\lambda)$ is a nontrivial solution $y''(a;\lambda)$ must be nonzero. The solution

$$Y(t;\lambda) = \frac{\lambda}{y''(a;\lambda))}y(t;\lambda)$$

of (10) has a double zero at $t = a$ and satisfies the condition

$$Y''(a;\lambda) = x''(a;\lambda) - \xi''(a) = \lambda.$$

The difference

$$Y(t;\lambda) - (x''(t;\lambda) - \xi''(t))$$

is identically zero, since it is the solution of linear equation (10) and satisfies the zero initial conditions. Hence

$$x(b;\lambda) = Y(b;\lambda) + \xi(b) = B$$

but this means that $x(t;\lambda)$ solves the problem (1), (2).

We define below certain classes of nonlinear equations which include the classes of M.Hanan.

Definition 3. An equation (1) is said to be of Class I (resp.: Class II) if any two of its solutions $x(t)$ and $\xi(t)$ existing in $[a,b]$ for which

$$x(c) = \xi(c), \quad x'(c) = \xi'(c), \quad x''(c) - \xi''(c) \neq 0, \quad c \in (a,b] \quad (\text{ resp.:} c \in [a,b)),$$

satisfy $x(t) - \xi(t) \neq 0$ for any $t \in [a,c)$ (resp.: $t \in (c,b]$).

Since the difference $x(t) - \xi(t)$ must satisfy (10) it is clear that a nonlinear equation (1) is of Class I (resp.: Class II) if the associated linear equation

$$y''' = f_x y + f_{x'} y' + f_{x''} y'', \tag{14}$$

is of Class I (resp.: Class II) in the sense of definitions of section 2 for any possible values of arguments in the coefficients f_x, $f_{x'}$, $f_{x''}$. If, for example, $f_x \leq 0$ and $f_{x'} \geq 0$, then by virtue of theorem 3 a nonlinear equation (1) is of Class I.

Coefficient sign conditions for a linear equation to be of Class I (resp.: Class II) easily can be transformed to criteria for nonlinear equations.

Definition 4. An equation (1) is said to be of Class I (resp.: Class II) with respect to its solution $\xi(t)$ if any other solution $x(t)$ of (1) for which

$$x(c) = \xi(c), \quad x'(c) = \xi'(c), \quad x''(c) - \xi''(c) \neq 0, \quad c \in (a,b] \quad (\text{ resp.:} c \in [a,b))$$

satisfies $x(t) - \xi(t) \neq 0$ for any $t \in [a,c)$ (resp.: $t \in (c,b]$).

It is clear that a linear equation of Hanan's Class I is also of Class I (Def.3) and of Class I with respect to any its solution $\xi(t)$ (Def.4). A nonlinear equation of Class I (Def. 3) is of Class I with respect to any its solution $\xi(t)$ (Def.4).

We show now that there exists a nonlinear equation of the type

$$x''' = g(x), \quad g \in C^1, \quad g(0) = 0$$

which is of Class I with respect to the trivial solution but not of Class I in the sense of Definition 3. First of all notice that the above equation is of Class I with respect to $x \equiv 0$ if $g(x) = -g(-x)$ and $\int_0^x g(s)\,ds < 0$ for all $x > 0$. Indeed, suppose that there exist a and b such that $a < b$, $x'(a) = 0$, $x(b) = x'(b) = 0$, $x(t) > 0$ for $a < t < b$. Integrating the equation in the interval (a,b) one gets

$$x'x''|_a^b = \int_a^b x''^2(s)\,ds + \int_{x(a)}^{x(b)} g(s)\,ds$$

or

$$0 = \int_a^b x''^2(s)\,ds - \int_0^{x(a)} g(s)\,ds.$$

The right side of this equality is positive, and that is impossible. Hence the equation under consideration indeed is of Class I with respect to the trivial solution.

Choose now $g(x)$ such that at some $x_0 > 0$ $g(x_0) = 0$ and $g'_x(x_0) > 0$ and large enough so that the interval (a, b) contains a conjugate point to $t = a$ with respect to the equation $y''' = g'_x(x_0)y$ (which is of Class II). This can be done without violating the condition $\int_0^x g(s)\,ds < 0$ for all $x > 0$. One may show now by using the same type of argument as in the proof of the theorem 6 that solutions $x_1(t)$ of our nonlinear equation close to the solution $x(t) = x_0$ and having double zero at $t = b$ are such that the difference $x_1(t) - x_0$ has a zero in $[a, b)$. This means that the equation under consideration is not of Class I (Def.3).

It is obvious also that if the nonlinear equation (1) is of Class I (resp.: Class II) with respect to a solution $\xi(t)$, then for each λ linear equation (10) (where $\xi(t)$ is the same) is of Hanan's Class I (resp.: Class II) too.

The following is the main result of this section.

Theorem 7 *Suppose that f in (1) is bounded. Suppose also that there exists a solution $\xi(t)$ to the problem (1), (2) (resp.: (1), (3)) such that there exist n conjugate points of $t = a$ in (a, b) with respect to the linear equation of variations*

$$y''' = f_x(t, \xi, \xi', \xi'')y + f_{x'}(t, \xi, \xi', \xi'')y' + f_{x''}(t, \xi, \xi', \xi'')y'' \tag{15}$$

and such that (1) is of Class I (resp.: Class II) with respect to $\xi(t)$.
Then there exist at least $2n + 1$ (ξ counted) solutions of the problem (1), (2) (resp.: (1),(3)).

To prove the theorem we need the following lemma.

Lemma 4 *Let a function f in (1) be bounded. Let $x(t)$ be a solution to the initial value problem (1), (9).*

Then for λ sufficiently large the difference $x(t) - \xi(t)$ as well as its the first and the second order derivatives are positive in $(a, b]$.

Proof: For any $\lambda \neq 0$ the function $z(t; \lambda) = (x(t) - \xi(t))\lambda^{-1}$ is a solution to the problem

$$z''' = (f(t, x, x', x'') - f(t, \xi, \xi', \xi''))\lambda^{-1} \tag{16}$$

$$z(a; \lambda) = z'(a; \lambda) = 0, \quad z''(a; \lambda) = 1. \tag{17}$$

Since f is bounded, for λ sufficiently large the right hand side of (16) is in modulus less than $(b - a + 1)^{-1}$ Hence $z''(t; \lambda) = 1 + \int_a^t z'''(s; \lambda)ds > 0$ for any $t \in [a, b]$. From (17) it follows that z and z' are positive in $(a, b]$ also.

Proof: (of the theorem). Let (1) be of Class I with respect to ξ. Consider linear equation (10). Coefficients of (10) tend to the coefficients of equation of variations (15) as $\lambda \to 0$. Hence the principal solution $y(t; \lambda)$ of (10) has n zeros for λ close to zero. On the other hand, for λ sufficiently large the equation (10) is disconjugate in $(a, b]$, that is principal solution does not vanish in $(a, b]$. The disconjugacy of (10) follows from lemma 4 and [8], since for $\lambda \to +\infty$ coefficients of (10) are arbitrary small in integral sense. Applying theorem 5 to the equation (10) one can conclude that there exist at least n solutions

$y_n(t;\lambda_n)$ having double zero at $t = a$ and vanishing at $t = b$. By lemma 3 , the functions $x_n = y_n + \xi$ are solutions to the problem (1), (2).

The existence of additional n solutions of the problem (1), (2) can be proved in a similar way by considering the case of $\lambda < 0$.

Now consider the case of (1) being of Class II with respect to ξ. Then linear equation (10) is of Class II. By changing an indenpendent variable t to $a + b - t$ we reduce the case under consideration to the one just have been treated. Note that the number of conjugate points in (a, b) is the same (by theorem 3) for the linear equation of variations (15) which is of Class II and the linear equation of Class I which is obtained from (15) by changing t to $a + b - t$.

The proof is complete.

In a similar manner one can prove the following multiplicity result considering the case of boundary conditions (4) and (5).

Theorem 8 *Let f in (1) be bounded. Suppose also that there exists a solution $\xi(t)$ of the problem (1), (4) (resp.: (1), (5)) such that the interval $(a, b]$ contains n conjugate points of $t = a$ with respect to the equation of variations (15) and such that (1) is of Class I (resp.: Class II) with respect to $\xi(t)$.*

Then there exist at least $2n + 1$ (ξ counted) solutions of the problem (1), (4) (resp.: (1), (5)).

It is plausible that the estimates of theorems 7 and 8 are precise but we leave it as an open question.

The following result is inspired by the one of L.Jackson and K.Schrader [10] who studied the case of second order boundary value problems.

Theorem 9 *Let f in (1) be bounded and such that (1) is of Class I (resp.: Class II) in the sense of Definition 3. Then a solution $\xi(t)$ of the problem (1), (2) (resp.: (1), (3)) exists such that the interval (a, b) does not contain conjugate points of $t = a$ with respect to the equation of variations (15).*

Proof: Consider the case of (1) being of Class I. Then the linear equation (10) is of Class I also. Consider the set S of solutions to the problem (1), (2). This set is not empty since the homogeneous problem

$$x''' = 0, \quad x(a) = x'(\alpha) = x(b) = 0$$

has only the trivial solution ([12], ch.2). Since the third order derivatives of solutions to the problem (1), (2) are uniformly bounded, the set S is compact in C^2 Choose the solution $\xi(t)$ of (1), (2) with maximal value of the second derivative at $t = a$. Let us show that ξ possesses the desired property.

Suppose this is not the case. Consider linear equation (10). By lemma 4 for λ large enough (10) is disconjugate in $(a, b]$. Since by assumption there exists at least one conjugate point of $t = a$ in (a, b) with respect to the equation of variations (15) one may conclude on the basis of theorem 3 that there exists at least one solution $y(t; \lambda)$ of (10) with $\lambda > 0$ having double zero at $t = a$ and vanishing at $t = b$. By lemma 3, $x(t) = y(;\lambda) + \xi(t)$

is a solution to the problem (1), (2). Since $x''(a) = y''(a;\lambda)+\xi''(a) > \xi''(a)$, this contradicts the choice of ξ as a solution with maximal value of the second derivative at $t = a$.

The case of the problem (1), (3) is treated similarly by the variable change $t \to a+b-t$.

For third order nonlinear equations of Class I or Class II the following uniqueness result is valid.

Theorem 10 *Let equation (1) be of Class I (resp.: Class II).*

Then a solution of the boundary value problem (1), (3) (resp.: (1), (2)), when it exists, is unique.

Proof: Suppose the opposite is true. Let $x(t)$ and $\xi(t)$ be two distinct solutions of the problem (1), (2), where (1) is supposed to be of Class II. Then the difference $y(t) = x(t) - \xi(t)$ satisfies a linear equation of the form (14) which is of Class II. Since $y(t)$ has double zero at $t = a$ it cannot vanish for values of t to the right of $t = a$. But this contradicts the fact that $x(b) = \xi(b) = B$.

The case of the problem (1), (2), where (1) is of Class I, can be treated similarly.

Remark. Theorem 10 shows that the assumption of theorem 7 of f being from Class I is essential since one easily can construct a nonlinear equation of the type (1) which is of Class II with a solution $\xi(t)$ to the problem (1), (2) which must be unique independently of the oscillatory behavior of a corresponding equation of variations.

4. Essentially nonlinear problems. In this section we demonstrate the way how to apply the results of the precedent section to establish multiplicity results for equations with unbounded right side.

Lemma 5 *(maximum principle). Suppose function $u \in C^3([a,b])$ satisfies in $[a,b]$ the inequality $u'''(t) \geq 0$ and the inequalities at the ends of the interval $u'(a) \leq 0$, $u(a) \leq 0$, $u(b) \leq 0$ are valid. Then $u(t)$ cannot have in $[a,b]$ a positive maximum.*

Proof: Suppose the opposite is true. Let $u(t_0) = \;\; max\{u(t) \quad a \leq t < b\} > 0$. Since $u(b) \leq 0$ there exists $t_1 \in [t_0, b)$ such that $u'(t_1) < 0$. From the concavity of $u'(t)$ on $[a, t_1]$ and the inequality $u'(a) \leq 0$ it follows that $u'(t) < 0$ for any $t \in (a, t_1]$. Then $u(t)$ cannot have an extremum in (a, t_1). In view of $u(a) \leq 0$ the function $u(t)$ might attain at $t = a$ a nonpositive maximum only. The proof is complete.

Consider now the equation

$$x''' = f(t, x), \tag{18}$$

where f and f_x are continuous and $f_x \leq 0$.

Theorem 11 *Suppose that $f_x \leq 0$. Let there exist functions $\alpha, \beta \in C^3([a,b])$ such that*

1) $\alpha(t) \leq \beta(t)$ for any $t \in [a,b]$;

2) $\alpha'''(t) \geq f(t,x)$, $\beta'''(t) \leq f(t,x)$ for any $t \in [a,b]$ and $\alpha(t) \leq x \leq \beta(t)$;

3) $\alpha(a) \leq A \leq \beta(a)$, $\alpha'(a) \leq A_1 \leq \beta'(a)$, $\alpha(b) \leq B \leq \beta(b)$.

Let there exist also a solution $\xi(t)$ of the problem (18), (2) such that $\alpha(t) < \xi(t) < \beta(t)$ for any $t \in [a,b]$ and interval (a,b) contains n conjugate points to $t = a$ with respect to equation of variations

$$y''' = f_x(t, \xi(t))y. \tag{19}$$

Then the problem (18), (2) has at least $2n+1$ solutions (ξ counted).

Proof: Let $\varepsilon_m(t,x)$ be a function possessing the following properties:

1) $\varepsilon_m(t,x) = 0$ for any $t \in [a,b]\alpha(t) < x < \beta(t)$;

2) $\varepsilon_m(t,x)$ and $(\varepsilon_m)_x(t,x)$ are continuous in $I \times R$;

3) $(\varepsilon_m)_x(t,\beta(t)) = f_x(t,\beta(t))$, $(\varepsilon_m)_x(t,\alpha(t)) = f_x(t,\alpha(t))$ for any $t \in [a,b]$;

4) $(\varepsilon_m)_x(t,x) < 0$ for any $t \in [a,b]$, $x > \beta(t)$, $x < \alpha(t)$;

5) $0 > \varepsilon_m(t,x) > \frac{-1}{m}$ for any $t \in [a,b]$, $x > \beta(t)$, $0 < \varepsilon_m(t,x) < \frac{1}{m}$ for any $t \in [a,b]$, $x < \alpha(t)$.

Obviously for any positive integer m such a function exists.

Define

$$F_m(t,x) = f(t,\delta(\alpha(t),x,\beta(t))) + \varepsilon_m(t,x),$$

$$\alpha_m(t) = \alpha(t) + h_1(t), \quad \beta_m(t) = \beta(t) + h_2(t),$$

where

$$\delta(x,y,z) = \begin{cases} z, & y > z, \\ y, & x \le y \le z, \\ x, & y < x. \end{cases}$$

h_1 and h_2 are solutions of $h''' = \frac{1}{m}$, $h''' = -\frac{1}{m}$ respectively, which satisfy boundary conditions $h(a) = h'(a) = h(b) = 0$. Note that $h_1(t) < 0$ in (a,b) and $h_2(t) > 0$ in (a,b). We obtain now that

$$\beta_m'''(t) = \beta'''(t) + h_2'''(t) = \beta'''(t) - \frac{1}{m} \le f(t,\delta(\alpha,x,\beta)) + \epsilon_m(t,x) = F_m(t,x)$$

for any $(t,x) \in [a,b] \times R$. Analogously $\alpha_m'''(t) \ge F_m(t,x)$ for any $(t,x) \in [a,b] \times R$.

Let $x(t)$ be any solution of

$$x''' = F_m(t,x) \tag{20}$$

satisfying the boundary conditions (2). Then for any positive m and $t \in (a,b)$ the inequalities $x(t) - \beta_m(t) \ge 0$ and $\alpha_m(t) - x(t) \ge 0$ hold. From lemma 5 we get that $\alpha_m(t) \le x(t) \le \beta_m(t)$.

Note that for each m all the hypotheses of the theorem 8 are met for the problem (20), (2). Designate by $(x_k^+)_m$ (resp.: $(x_k^-)_m$) ($k = 1, \ldots, n$; $m = 1, 2, \ldots$) a solution to the problem (20), (2) such that $x''(a) - \xi''(a)$ is positive (resp.: negative) and the difference $x(t) - \xi(t)$ vanishes exactly $k-1$ times in (a,b). Fix k and, to be definite, consider the sequence $(x_k^+)_m$ which we denote for brevity by x_m. If for some m the function x_m satisfies the inequalities $\alpha(t) < x < \beta(t)$ in (a,b) then x_m is a solution to the problem (18), (2) such that $x_m - \xi$ has exactly $k-1$ zeros in (a,b). The sequence $\{x_m\}$ is compact in C^2 and hence has a limit function $x(t)$ which is a solution of (18), (2). If for any m there exists t_m such that either $x_m(t_m) = \beta(t_m)$ or $x_m(t_m) = \alpha(t_m)$ then a limit function $x(t)$ is equal to β or α at some point t_0. This means that x and ξ are distinct solutions of the problem (18), (2) and the difference $x - \xi$ has exactly $k-1$ zeros in (a,b).

The proof is complete.

Below we state the duals of lemma 5 and theorem for the case of boundary value problem (18), (3).

Lemma 6 (maximum principle.) *Suppose that a function $u \in C^3([a,b])$ satisfies the inequality $u'''(t) \le 0$ for any $t \in [a,b]$ and the inequalities $u(a) \le 0$, $u'(b) \ge 0$, $u(b) \le 0$ at the ends of the interval. Then $u(t)$ cannot have a positive maximum in the interval $[a,b]$.*

Theorem 12 *Suppose that $f_x \geq> 0$. Let there exist functions $\alpha, \beta \in C^3([a,b])$ such that*
1) $\alpha(t) \leq \beta(t)$ for any $t \in [a,b]$;
2) $\alpha'''(t) \leq \beta'''(t)$ for any $t \in [a,b]$ and $\alpha(t) \leq x \leq \beta(t)$;
3) $\alpha(a) \leq A \leq \beta(a)$, $\quad \alpha'(b) \geq B_1 \geq \beta'(a)$, $\quad \alpha(b) \leq B \leq \beta(b)$.

Let there exist also a solution $\xi(t)$ of the problem (18), (3) such that $\alpha(t) < \xi(t) < \beta(t)$ for any $t \in [a,b]$ and interval (a,b) contains n conjugate points of $t = a$ with respect to the equation of variations (19).

Then the problem (18), (3) has at least $2n+1$ solutions (ξ counted).

Список литературы

[1] Aftabizadeh A. and Wiener J. On the solutions of third order nonlinear boundary value problems // "Trends Theory and Pract. Nonlinear Anal." Amsterdam e.a. 1985,- P. 1- 6.

[2] Barr D. and Sherman T. Existence and Uniqueness of Solutions of ThreePoint Boundary value Problems // J. Diff. Equations, 13 (1973). P. 1973 212.

[3] Bernfeld S. and Lakshmikantham V An Introductioh to Nonlinear Boundary Value Problems, New Yorke/London, Acad.Press, 1974.

[4] Gear M. Bedingungen der Nichtoszillations fahigkeit fur die Dif/-feren/-cial/-glei/-chung drit/-ter Ord/-nung $y'''p(x)y''p(x)y'p(x)y = 0$ // Acta Fac. Rer. Nat. Univ. Comenian. Math., XXIII (1969). P. 13 34.

[5] Gera M. and Sadyrbaev F. Multiple solutions of a third order boundary value problem // Math.Slovaca, 42 (1992).- N 2.- P. 173 180.

[6] Greguš M. Linearna diferencialna rovnica tretieho radu. Bratislava, Veda, 1981 (Slovak).

[7] Hanan M. Oscillation criteria for third order linear differential equations // Pacific J. Math., 11(1961). P. 919- 944.

[8] Hartman P. On disconjugacy criteria // Proc. Amer. Math. Soc., 24 (1970).- P. 374-381.

[9] Jackson L. and Schrader K. Subfunctions and Third Order Differential Inequalities // J. Diff. Equations, 8 (1970). P. 180-194.

[10] Jackson L. and Schrader K. Comparison Theorems for Nonlinear Differential Equations // J. Diff. Equations, 3(1967). P. 248- 255.

[11] Klaasen G. Differential Inequalities and Existence Theorems for Secohd and Third Order Boundary Value Problems // J.Diff. Equations, 10 (1971).-N 3.- P 529- 537.

[12] Klokov Yu. and Vasilyev N. Foundations of the Theory of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations.- Riga, Zinatne, 1978 (in Russian).

[13] Krasnoselskii M., Perov A., Povolockii A. and Zabreiko P. Plane vector fields. New Yorke, Academic Press, 1966.

[14] Swanson C. Comparison and oscillation theory of linear differential equations. New Yorke, Acad.Press, 1968.

Садырбаев Ф.Ж. Результаты о числе решений в двухточечной краевой задаче третьего порядка.

Аннотация. Даются оценки числа решений нелинейной краевой задачи $x''' = f(t,x,x',x'')$, $x(a) = A$, $x'(a) = A_1$, $x(b) = B$.

УДК 517.985

F. Sadirbajevs. Atrisinājumu skaita novērtējumi trešās kārtas nelineārai robežproblēmai.

Anotācija. Tiek doti atrisinājumu skaita novērtējumi nelineārai robežproblēmai $x''' = f(t,x,x',x'')$, $x(a) = A$, $x'(a) = A_1$, $x(b) = B$.

Institute of Mathematics
and Computer Science,
University of Latvia
Rainis blvd. 29

Received 1998, 20th November

Comparison results for fourth order positively homogeneous differential equations

F Sadyrbaev

Summary. We compare conjugate points and angles associated with extremal solutions for piece-wise linear and linear equations of the type $x^{(4)} \quad px^+ - qx^-$ and $x^{(4)} = px$, $x^{(4)} = qx$, where p and q are positive constants. By conjugate points we mean double zeros of solutions defined by the initial conditions $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.

Key words and phrases: Piece-wise linear fourth order equations, conjugate points.

1991 MSC 35J45

1. Introduction

We study the fourth-order ordinary differential equations of the type

$$x^{(4)} = h(t, x) \tag{1}$$

on a half axe $[0, +\infty)$, where $h(t,x)$ is positively homogeneous function, that is $h(t, cx) = ch(t,x)$ for any (t,x) and c nonnegative. Obviously $h(t,0) \equiv 0$.

The idea of investigation of oscillatory properties of such equations in terms of conjugate points goes back to W LEIGHTON and Z. NEHARI [1], who investigated linear equations of the type

$$x^{(4)} = p(t)x. \tag{2}$$

Much of their theory is valid also for equations of the type (1), as follows from the work [2], where one could find basics.

We would like restrict ourselves in this text to autonomous equations

$$x^{(4)} = h(x). \tag{3}$$

One has from the definition of positive homogeneity that for c positive $ch(1) = h(c)$, or $h(x) = h(1)x$ for $x \geq 0$. Analogously, $ch(-1) = h(-c)$, and $h(x) = -h(-1)x$ for

x negative. Hence the only possible form for the positively homogeneous autonomous equation is

$$x^{(4)} = p\,x^{+} - q\,x^{-} \tag{4}$$

Since the theory of conjugate points has been developed for equations with increasing right sides, we suppose that both p and q are positive.

2. Linear equation

In this section we provide some simple results on the linear equation

$$x^{(4)} = kx, \tag{5}$$

where k is a positive number.

Denote conjugate points of (5) by $\eta_i(k)$.

Proposition 1 *If $k_2 > k_1$ then $\eta_i(k_2) < \eta_i(k_1)$ for any i.*

Proof. This result was proved in [1] by variational method involving R. Courant's minimax eigenvalue theory. We give a straightforward proof based on the variable change. Consider the linear equations

$$x^{(4)} = k_2 x, \tag{6}$$

and

$$x^{(4)} = k_1 x, \tag{7}$$

where $k_2 > k_1$. By the variable change $\tau = (\frac{k_1}{k_2})^{\frac{1}{4}} t$ the equation (7) becomes

$$\frac{d^4x}{d\tau^4} = \frac{k_2}{k_1}\frac{d^4x}{dt^4} = k_2 x(t) = k_2\, x(\,(\frac{k_2}{k_1})^{\frac{1}{4}}\tau\,)$$

or

$$\frac{d^4X}{d\tau^4} = X(\tau), \quad X(\tau) = x((\frac{k_2}{k_1})^{\frac{1}{4}}\,\tau)$$

and hence

$$\eta_i(k_2) = (\frac{k_1}{k_2})^{\frac{1}{4}}\eta_i(k_1). \tag{8}$$

■

Recall that (cfn. [1], [2]) the *extremal* solutions of the linear equation (2) associated with the point $t = 0$ are the solutions which have double zeros at $t = 0$ and at some point $t = \eta_i$ to the right. These solutions x_i are uniquely defined (up to multiplication by a constant) by the number $i-1$ of internal (with respect to the interval $(0, \eta_i)$ zeros as well as by the angle

$$\phi_i = \arctan\,(\frac{x_i'''(0)}{x_i''(0)}).$$

It is known that both sequences $\{\eta_i\}$ and $\{\phi_i\}$ are ordered as

$$\frac{3\pi}{2} < \phi_2 < \quad < \phi_{2k} < \quad < \phi_{2n+1} < \quad < \phi_1 < 2\pi$$

and

$$0 < \eta_1 < \eta_2 <$$

We get additionally by computing derivatives of extremal solutions that

$$\tan\phi_i(k_2) = (\frac{k_1}{k_2})^{\frac{1}{4}} \tan\phi_i(k_1). \tag{9}$$

Proposition 2 *There exists a common limit ϕ_* of both sequences $\{\phi_{2k}\}$ and $\{\phi_{2k+1}\}$.*

Proof. Solutions of (5) with double zero at $t = 0$ are given by

$$x(t) = C_1(\sin kt - \sinh kt) + C_2(\cos kt - \cosh kt). \tag{10}$$

Eliminating the exponent $\exp t$ from (10) one gets that $C_1 = -C_2$ and $\tan\Theta = \frac{x_i'''(0)}{x_i''(0)} = k\frac{C_1}{C_2} = -k$, where Θ is the associated angle.

Conjugate points are given by

$$\cos kt \cosh kt = 1. \tag{11}$$

We will show now that $\phi_* = \Theta$. Since sequences $\{\phi_{2i}\}$ and $\{\phi_{2i+1}\}$ are monotonic, they have limits ϕ_{even} and ϕ_{odd} respectively.

Suppose that $\phi_{even} \neq \Theta$. Then, of course, $\phi_{even} < \Theta$. In any interval $[0, \eta_{2i}$ the sequence of extremal solutions x_{2i} converges to some solution x^*_{2i}. By standard diagonalization process one gets the limiting solution x^* with infinite number of zeros. Since x^* is included in (10), it must be identical with a solution defined by the angle Θ which is the only solution of (10) with infinite number of zeros.

Analogously it can be shown that $\lim\phi_{2i+1} = \Theta$. Identify now Θ with ϕ_*. ■

Some quantitative characteristics of conjugate points and extremal solutions follow. Consider the case $k = 1$ in the equation (5).

Solutions defined by (10) may be represented also as

$$x(t) = x'''(0)(\sinh t - \sin t) + x''(0)(\cosh t - \cos t). \tag{12}$$

The limiting oscillatory solution corresponds to $x''(0) = -x'''(0) = 1$ and is given by the expression

$$\frac{1}{2}x_*(t) = \exp(-t) + \sin t - \cos t.$$

The first four conjugate points η and tangents of the associated angles ϕ approximately are:

$$\begin{array}{rclcrcl} \eta_1 & = & 4.73 & \quad & -\tan\phi_1 & = & 0.98250221 \\ \eta_2 & = & 7.85 & & -\tan\phi_2 & = & 1.000777 \\ \eta_3 & & 11.00 & & -\tan\phi_3 & = & 0.9999664 \\ \eta_4 & = & 14.14 & & -\tan\phi_4 & = & 1.000001 \end{array}$$

Notice that $\phi_* = -\frac{\pi}{4}$ with $-\tan\phi_* = 1$.

3. Comparison of asymmetric equations

Consider the equation

$$u^{(4)} = k_2\, u^+ - k_1\, u^- \tag{13}$$

along with its dual

$$v^{(4)} = k_1\, v^+ - k_2\, v^- \tag{14}$$

The theory of conjugate points for positively homogeneous equations is applicable for both equations (13) and (14) as well as for the equations (7) and (6).

Let $u_i^\pm$ and $v_i^\pm$ stand for extremal solutions of (13) and (14) respectively, and $\eta_i^\pm$ and $\xi_i^\pm$ be associated conjugate points.

Proposition 3 *The following equalities hold:*

$$\begin{array}{rrcl} 1) & \eta_{2i+1}^+ & = & \xi_{2i+1}^-; \\ 2) & \eta_{2i+1}^- & & \xi_{2i+1}^+; \\ 3) & \eta_{2i}^+ & = & \eta_{2i}^-; \\ 4) & \xi_{2i}^+ & = & \xi_{2i}^-; \\ 5) & \eta_{2i}^+ & & \xi_{2i}^-. \end{array}$$

Proof. Assertions 1) and 2) follow from the fact that $u_{2i+1}^+ = -v_{2i+1}^-$ and $u_{2i+1}^- = -v_{2i+1}^+$ (by the variable change $u = -v$ equation (13) turns to (14)). 3) follows immediately from the observation that $u_{2i}^- = u_{2i}^+(\eta_{2i}^+ - t)$. Analogously, 4) is true since $v_{2i}^- = v_{2i}^+(\xi_{2i}^+ - t)$. 5) follows also from the relation $u_{2i}^+(t) = -v_{2i}^-(t)$.

Besides, odd extremal functions $u_{2i+1}^\pm$ and $v_{2i+1}^\pm$ are symmetric with respect to $t = \frac{1}{2}\eta_{2i+1}^\pm$ and $t = \frac{1}{2}\xi_{2i-1}^\pm$ respectively. ∎

We have for extremal angles $\phi_i^\pm$ and $\psi_i^\pm$ associated with equations (13) and (14) respectively the following

Corollary 1 $\tan\phi_i^+ = \tan\psi_i^-$ *and* $\tan\phi_i^- = \tan\psi_i^+$

Proof. Follows immediately from the observation that $u_i^+(t) = -v_i^-(t)$ and $u_i^-(t) = -v_i^+(t)$. ∎

Consider now equations (1) and

$$x^{(4)} = g(t, x), \tag{15}$$

where the right sides are positively homogeneous continuous functions, strictly increasing in x.

Lemma 1 *Let the inequality*

$$g(t,x) \geq h(t,x)$$

hold for any (t,x).

Suppose $x(t)$ and $y(t)$ are solutions of equations (15) and (1) respectively and

$$x^{(i)}(0) \geq y^{(i)}(0), \quad i = 0,1,2,3.$$

with at least one inequality being strict.

Then $x(t) > y(t)$ and $x''(t) > y''(t)$ for any $t > 0$.

Proof. Consider only the case $x'''(0) > y'''(0)$, since the other cases can be treated analogously.

Then $x''(0) > y''(0)$ in some right vicinity of $t = 0$. Suppose $x''(t_1) = y''(t_1)$ and $x''(t) > y''(t)$ for some $t_1 > 0$. Then $x'(t) > y'(t)$ and $x(t) > y(t)$ for $t \in (0,t_1]$. We have that in the interval $(0,t_1]$

$$x^{(4)} - y^{(4)} = g(t,x(t)) - h(t,y(t)) > g(t,y(t)) - h(t,y(t)) \geq 0$$

and therefore

$$x^{(i)}(t) > y^{(i)}(t), \quad t \in (0,t_1], \quad i = 3,2,1,0.$$

Contradiction with $x''(t_1) = y''(t_1)$.

Obviously $x(t) - y(t) > 0$ for $t > 0$ also. ∎

The dual of lemma 1 states:

Lemma 2 *Let $g(t,x)$ and $h(t,x)$ be as in lemma 1. Suppose $x(t)$ and $y(t)$ are solutions of equations (15) and (1) respectively and*

$$x^{(i)}(b) \geq y^{(i)}(b),\ i = 0,2; \quad x^{(j)}(b) \leq y^{(j)}(b),\ j = 1,3$$

with at least one inequality being strict.

Then

$$x^{(i)}(t) > y^{(i)}(t),\ i = 0,2; \quad x^{(j)}(t) < y^{(j)}(t),\ j = 1,3$$

for $t < b$.

Proposition 4 *Let $g(t,x)$ and $h(t,x)$ be as in lemma 1.*
Let $\phi_i^+(g)$ and $\phi_i^+(h)$ be angles in $(\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$ (resp.: $\phi_i^-(g)$ and $\phi_i^-(h)$ in $(\frac{\pi}{2},\pi)$), corresponding to (+)-extremal (resp.: (-)-extremal) solutions $x_i^+(t)$ and $y_i^+(t)$ (resp.: $x_i^-(t)$ and $y_i^-(t)$).

Then $\phi_i^+(g) \leq \phi_i^+(h)$ (resp.: $\phi_i^-(g) \geq \phi_i^-(h)$).

Proof. Consider the case of odd extremal functions $x_{2i+1}(t)$ and $y_{2i+1}(t)$ associated with differential equations $x' = g(t,x)$ and $y' = h(t,y)$ respectively. Suppose that

$$\phi_{2i+1}^+(g) > \phi_{2i+1}^+(h). \tag{16}$$

Then, by lemma 1, $x_{2i+1}^{(j)}(t) > y_{2i+1}^{(j)}(t)$, $j = 0,1,2,3$.

From here on we omit lower indices of $x(t)$ and $y(t)$. Denote by $\eta(x)$ and $\eta(y)$ the last double zeros (conjugate points) of $x(t)$ and $y(t)$. Obviously $\eta(x) < \eta(y)$, otherwise $x(t)$ is not greater than $y(t)$ for $t > a$. We will show that the case $\eta(x) < \eta(y)$ is impossible too.

Suppose $\eta(x) < \eta(y)$. Since the total number of simple zeros of $x(t)$ and $y(t)$ is the same and $x(t) > y(t)$, there exist numbers

$$t_1 < \tau_1 < \tau_2 < \tau_3 \leq \tau_4 < t_2$$

such that

$$\begin{array}{ll} y(t) < 0, & t \in (t_1, t_2); \\ x(\tau_i) = 0, & i = 1,2,3,4; \\ x(t) < 0, & t \in (\tau_1, \tau_2); \\ x(t) > 0, & t \in (\tau_2, \tau_3). \end{array}$$

Note that $y(t)y^{(4)} > 0$ for t different from zeros of $y(t)$. Then $y^{(4)}(t) < 0$ in (t_1, t_2). Let $t_0 \in (\tau_2, \tau_3)$ be a point where $x(t)$ attains its local maximum. There exists $t_* \in (t_1, t_0)$ where $x'''(t_*) < 0$. Then $y'''(t_*) < 0$ and $y'''(t) < 0$ for $t \in (t_*, t_2]$. From $x''(t_0) \leq 0$ it follows that $y''(t_0) < 0$ and hence $y''(t) < 0$ to the end of the interval $(t_1, t_2]$. There is a point τ_0 in $[\tau_3, \tau_4]$ in which $x'(\tau_0) = 0$ and hence $y'(\tau_0) < 0$. Then $y'(t) < 0$ in $[\tau_0, t_2)$ and $y(t_2)$ cannot be zero.

Consider now the case of even extremal functions $x_{2i}(t)$ and $y_{2i}(t)$. Suppose that $\phi_{2i}^{+}(x) > \phi_{2i}^{+}(y)$. Then $x_{2i}^{(j)}(t) > y_{2i}^{(j)}(t)$ for $t > a$, $j = 0,1,2,3$. Proceeding like in the case above one concludes that there exist numbers

$$t_1 < \tau_1 < \tau_2 < \tau_3 \leq \tau_4 < t_2$$

such that

$$\begin{array}{ll} x(t) > 0, & t \in (t_1, t_2); \\ y(\tau_i) = 0, & i = 1,2,3,4; \\ y(t) > 0, & t \in (\tau_1, \tau_2); \\ y(t) < 0, & t \in (\tau_2, \tau_3). \end{array}$$

Let $t_0 \in (\tau_2, \tau_3)$ be a point where $y(t)$ attains its local minimum, and $t_* \in (t_1, t_0)$ be a point where $y'''(t_*) > 0$. Then $x'''(t_*) > y'''(t_*) > 0$ and since $x^{(4)}(t) > 0$ in (t_1, t_2), $x'''(t) > 0$ in $(t_*, t_2]$. Since $x''(t_0) > y''(t_0) \geq 0$, $x''(t) > 0$ in $(t_0, t_2]$. Then since $y(t)$ has maximum in the interval $[\tau_2, \tau_3]$, $y'(t)$ vanishes in some point $\tau_0 \in [\tau_2, \tau_3]$ and $x'(\tau_0) > 0$. Then $x(t_2)$ cannot be zero. ∎

As a consequence of the latter result we come to the following assertion concerning the interrelation of the angles of extremal solutions of linear equations (6), (7) and piece-wise linear equations (13) and (14).

Corollary 2 *Let $\phi_i^{\pm}(k_1)$, $\phi_i^{\pm}(k_2)$, $\phi_i^{\pm}(k_{12})$ and $\phi_i^{\pm}(k_{21})$ stand for the angles associated with extremal solutions of the equations (7), (6), (14) and (13) respectively.*

Then for any i

$$\frac{\pi}{2} < \phi_i^{-}(k_{12}) \leq \phi_i^{-}(k_2) < \phi_i^{-}(k_1) \leq \phi_i^{-}(k_{21}) < \pi,$$

$$\frac{3\pi}{2} < \phi_i^{+}(k_{21}) \leq \phi_i^{+}(k_2) < \phi_i^{+}(k_1) \leq \phi_i^{+}(k_{12}) < 2\pi.$$

Proof. By combining Proposition 4 and formula (9).

Proposition 5 *Let n_+ and n_- be the numbers of (+)- and (-)-conjugate points of the piece-wise linear equation (4) in the interval (a, b).*

Then $|n_+ - n_-| \leq 1$.

Proof. We have that

$$a < \eta_1^+ < \eta_2^+ < \quad < \eta_{n_+}^+ < b$$

and

$$a < \eta_1^- < \eta_2^- < \quad < \eta_{n_-}^- < b,$$

where, by Proposition 3, $\eta_{2i}^+ = \eta_{2i}^-$.
Hence the proof.

Список литературы

[1] W Leighton and Z. Nehari. On the oscillation of solutions of self-adjoint linear differential equations of the fourth order. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 89:325–377, 1961.

[2] M. Henrard and F Sadyrbaev. Multiplicity results for fourth order two-point boundary value problems with asymmetric nonlinearities. Rapport N 261 June 1996. Séminaire Mathématique, Univ. Cathol. de Louvain.

Садырбаев Ф.Ж. Результаты о сравнении решений для положительно однородных дифференциальных уравнений четвертого порядка.

Аннотация. Сравниваются сопряженные точки и начальные углы, соответствующие экстремальным решениям кусочно-линейных и линейных уравнений типа $x^{(4)} = p\,x^{+} - q\,x^{-}$ и $x^{(4)} = p\,x$, $\quad x^{(4)} = q\,x$, где p и q положительные постоянные. Под сопряженными точками понимаются двойные нули решений, определенных начальными условиями $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.

УДК 517.985

F. Sadirbajevs. Salīdzināšanas rezultāti ceturtās kārtas pozitīvi homogēnam diferenciālvienādojumam.

Anotācija. Tiek salīdzināti konjugētie punkti un sākuma leņķi pozitīvi homogēno un lineāro diferenciālvienādojumu ekstremāliem atrisinājumiem.

Institute of Mathematics
and Computer Science,
University of Latvia
Rainis blvd. 29

Received 1998, 12th March

О несуществовании унитарных антиэрмитовых антикоммутирующих друг с другом 3×3-матриц и о гиперкомплексных решениях

В. В. Гудков

Аннотация. Доказана теорема о несуществовании двух унитарных антиэрмитовых 3×3 матриц, которые антикоммутируют друг с другом. Для четного n указана процедура построения множества унитарных антиэрмитовых $n \times n$ матриц, антикоммутирующих друг с другом. На их основе построены матричные представления гиперкомплексных решений нелинейного уравнения Клейна-Гордона. Показано соответствие полученных матричных решений специальным унитарным группам.

Библ. 3.

УДК 512.83+517.95

1 Введение

В настоящей работе подробно излагаются результаты, краткое изложение которых было дано в статье [1], в том числе приводится полное доказательство теоремы о том, что в множестве унитарных антиэрмитовых 3×3-матриц не существует двух таких, которые антикоммутируют друг с другом. Для случая комплексных $n \times n$ -матриц с четным n показано, как на основе классических матриц Паули и Дирака можно построить множество унитарных антиэрмитовых матриц, которые антикоммутируют друг с другом, и как это множество используется для построения матричных представлений гиперкомплексных решений нелинейного уравнения Клейна Гордона. Установлено, что для четного индекса n при каждом фиксированном аргументе матрица гиперкомплексного решения является элементом специальной унитарной группы $SU(n)$. Для индекса 2 доказано, что между множеством матричных представлений гиперкомплексного решения и группой $SU(2)$ существует взаимно-однозначное соответствие.

Воспроизведем определение действительной функции p, комплексной функции q и гиперкомплексной функции q_n, введенных в работе 1. Для любого действительного переменного $z \in (-\infty, \infty)$ мы полагаем

$$p(z) = (1 + \exp(z))^{-1}, \quad q(z) = p(2z) \pm \frac{i}{2}\operatorname{sech}(z), \quad i = \sqrt{-1}.$$

Легко проверить, что p и q удовлетворяют логистическому уравнению $u' = u(u-1)$. Положим

$$q_n(z) = p(2z)E + \frac{\operatorname{sech}(z)}{2}\sum_{k=1}^{m} a_k M_k, \qquad \sum_{k=1}^{m} a_k^2 = 1, \tag{1.1}$$

где $n = 2, 3, \quad \{E, M_1, . \quad , M_m\}$ множество гиперкомплексных чисел порядка n (см.[2],стр.28), в котором определена операция умножения и которое содержит единицу E и элементы $M_1, \quad , M_m$, удовлетворяющие для любых $j, k = 1, 2, \quad , m$ условиям

$$M_k M_k = -E, \qquad M_j M_k = -M_k M_j, \qquad j \neq k. \tag{1.2}$$

Благодаря свойствам (1.2) и соотношению $\sum_{k=1}^{m} a_k^2 = 1$ из (1.1) выполняется равенство

$$(\sum_{j=1}^{m} a_j M_j)(\sum_{k=1}^{m} a_k M_k) = -E. \tag{1.3}$$

Равенство (1.3) приводит к утверждению, что произвольная гиперкомплексная функция

$$u_n(z) = r(z)E + s(z)\sum_{j=1}^{m} a_j M_j$$

возведенная в степень $k = 2, 3, \quad$, снова есть гиперкомплексная функция вида

$$u_n^k(z) = r_k(z)E + s_k(z)\sum_{j=1}^{m} a_j M_j.$$

Следовательно, если положить $q_n(z) = u_n^k(z)$, то для $l = \pm 1, \pm 2, . \quad$ находим

$$q_n^{l/k}(z) = u_n^l(z), \quad \text{где } u_n^{-1}(z) = \left(r(z)E - s(z)\sum_{j=1}^{m} a_j M_j\right)\left(r^2(z) + s^2(z)\right)^{-1}$$

Эти равенства показывают, что функцию q_n можно возводить в любую рациональную степень.

Благодаря равенству (1.3) и соотношениям

$$p(2z)(1 - p(2z)) = \frac{\operatorname{sech}^2(z)}{4}, \qquad 1 - 2p(2z) = \operatorname{th}(z) \tag{1.4}$$

становится очевидным утверждение, что функция q_n удовлетворяет логистическому уравнению. Именно этот факт, что функции p, q, q_n есть решения логистического уравнения, позволил найти точные решения некоторых уравнений реакции-диффузии и получить новые решения некоторых известных эволюционных и волновых уравнений.

2 Гиперкомплексные решения

Рассмотрим хорошо известное в квантовой теории поля нелинейное уравнение Клейна-Гордона [3,4]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \lambda u^3 - \mu^2 u, \qquad \lambda > 0. \tag{2.1}$$

В движущейся со скоростью γ системе координат $z = x - \gamma t$ уравнение (2.1) имеет гиперкомплексные решения [1]

$$u_n(z) = \pm\frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}(2q_n(\alpha z) - E) \quad \text{при} \quad \gamma^2 < 1,$$

$$v_n(z) = \pm\frac{2\mu\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda}}(q_n(\beta z))^{1/2}(1 - q_n(\beta z))^{1/2} \quad \text{при} \quad \gamma^2 > 1,$$

где

$$\alpha = \pm\mu\sqrt{2}(1-\gamma^2)^{-1/2}, \qquad \beta = \pm 2\mu(\gamma^2 - 1)^{-1/2}$$

Приведем матричные представления решений u_2, u_4, u_6. Учитывая (1.1) и второе равенство в (1.4), перепишем решение u_2 в виде

$$u_2(z) = \pm\frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}\left(-\operatorname{th}(\alpha z)E + \operatorname{sech}(\alpha z)\sum_{k=1}^{3} a_k A_k\right) \tag{2.2}$$

где гиперкомплексные числа представлены в виде матриц

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

Матрицы A_k связаны с матрицами Паули σ_k (см.[3],стр.27) следующими равенствами

$$A_1 = i\sigma_1, \qquad A_2 = -i\sigma_2, \qquad A_3 = i\sigma_3.$$

В дальнейшем, забывая о множителе связи между A_k и σ_k, будем под термином матрицы Паули подразумевать матрицы A_k.

Пусть

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B_4 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

Тогда комплексные 4×4-матрицы Дирака (см.[4, стр.64]) можно записать в блочной форме

$$D_1 = \begin{pmatrix} 0 & B_1 \\ -B_1 & 0 \end{pmatrix} \qquad D_2 = \begin{pmatrix} 0 & B_2 \\ -B_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_3 = \begin{pmatrix} 0 & B_3 \\ -B_3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D_4 = \begin{pmatrix} B_4 & 0 \\ 0 & -B_4 \end{pmatrix}$$

Представляя гиперкомплексные числа в виде матриц D_k, приходим к решению

$$u_4(z) = \pm\frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}\left(-th(\alpha z)E + \mathrm{sech}(\alpha z)\sum_{k=1}^{4} a_k D_k\right) \tag{2.3}$$

Правомерность матричного представления (2.2) и (2.3) объясняется замечательными свойствами матриц Паули и Дирака. Перечислим их, предварительно введя символ *, который будет обозначать переход к комплексно-сопряженной транспонированной матрице. Матрицы $A_j(j = 1,2,3)$ и $D_k(k = 1,2,3,4)$ унитарны, т.е. $A_j^* = A_j^{-1}$, $D_k^* = D_k^{-1}$; антиэрмитовы, т.е. $A_j^* = -A_j$, $D_k^* = -D_k$; матрицы A_j антикоммутируют друг с другом, т.е. $A_jA_k \quad -A_kA_j$, также и матрицы D_k; матрицы A_j линейно-независимы и имеют единичный определитель, также и матрицы D_k. Отметим, что из унитарности и антиэрмитовости матриц следует $A_jA_j = -E$, $D_kD_k = -E$. Следовательно, матрицы A_j, D_k удовлетворяют условиям (1.2) и поэтому естественно их использование в q_2, q_4 для построения многокомпонентных решений.

Построим комплексные 6×6-матрицы, главную диагональ которых образуют блоки из матриц A_j и D_k. Пусть

$$F_1 = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & D_1 \end{pmatrix} \quad F_2 = \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix} \quad F_3 = \begin{pmatrix} A_3 & 0 \\ 0 & D_3 \end{pmatrix}$$

$$F_4 = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix} \quad F_5 = \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & D_3 \end{pmatrix} \quad F_6 = \begin{pmatrix} A_3 & 0 \\ 0 & D_4 \end{pmatrix}$$

Выполнимость свойств (1.2) для матриц F_l проверяется порознь для верхней ($l = 1,2,3$) и нижней ($l = 4,5,6$) троек матриц. Ясно, что число блочно-диагональных матриц с A_j и D_k вдвое больше чем число матриц F_l, но нас интересуют лишь линейно-независимые матрицы.

Покажем, что матрицы F_l линейно-независимы. Действительно, допустим обратное, т.е. пусть найдутся числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_6$ не все равные нулю и такие, что $\sum_{l=1}^{6} \lambda_l F_l = 0$. Тогда из равенств

$$A_1(\lambda_1 + \lambda_4) + A_2(\lambda_2 + \lambda_5) + A_3(\lambda_3 + \lambda_6) = 0,$$

$$D_1\lambda_1 + D_2(\lambda_2 + \lambda_4) + D_3(\lambda_3 + \lambda_5) + D_4\lambda_6 = 0$$

в силу линейной независимости матриц A_j и D_k следуют равенства

$$\lambda_1 + \lambda_4 = 0,\ \lambda_2 + \lambda_5 = 0,\ \lambda_3 + \lambda_6 = 0,$$

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_6 = 0,\ \lambda_2 + \lambda_4 = 0,\ \lambda_3 + \lambda_5 = 0.$$

Но эти равенства, как легко заметить, выполняются только при $\lambda_k = 0$ для всех $k = 1, \ldots, 6$. Полученное противоречие доказывает линейную независимость матриц F_l.

Эти матрицы обладают еще одним свойством

$$\det F_l = \det A_j \det D_k = 1,$$

где индексы j, k выбираются соответствующими индексу l. Таким образом, тройки матриц F_l (фиксируемые выбором коэффициентов a_l), можно использовать для построения решения

$$u_6(z) = \pm\frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}\left(-\operatorname{th}(\alpha z)E + \operatorname{sech}(\alpha z)\sum_{k=1}^{6} a_k F_k\right) \tag{2.4}$$

Способ построения матриц F_l может быть распространен и на более высокие четные порядки. Физический интерес матричных решений u_2, u_4, u_6 следует из их соответствия специальным унитарным группам $SU(2), SU(4), SU(6)$, о чем пойдет речь в следующем параграфе.

3 Соответствие унитарным группам

Пусть в векторном (по отношению к сложению матриц) пространстве W всех комплексных $n\times n$-матриц выбрано множество $\{M_k\}$ таких линейно-независимых матриц M_k, которые обладают тремя свойствами: они унитарны, антиэрмитовы и антикоммутируют друг с другом. Максимальное число m линейно-независимых матриц из $\{M_k\}$ образуют вместе с единичной матрицей E базис в действительном (над полем действительных чисел) векторном ($m+1$- мерном) собственном подпространстве V пространства W Любая матрица M из V может быть представлена в виде разложения по базису

$$M = c_0E + \sum_{k=1}^{m} c_\kappa M_k, \tag{3.1}$$

где c_k $(k = 0, 1, \ldots, m)$ действительные числа. Умножим матрицу M на эрмитово-сопряженную к ней матрицу M^*

$$MM^* = (c_0E + \sum_{k=1}^{m} c_k M_k)(c_0E - \sum_{k=1}^{m} c_k M_k) = \sum_{k=0}^{m} c_k^2.$$

Отсюда следует, что матрица M унитарна при условии $\sum_{k=0}^{m} c_k^2 = 1$. Если к тому же $\det M = 1$, то матрица M является элементом специальной унитарной группы $SU(n)$, которая является подгруппой матриц с единичным определителем в группе всех унитарных комплексных $n\times n$- матриц (см.[5, стр.129]).

Непосредственно видно, что базисные матрицы M_k можно использовать для построения функций q_n. Естественными примерами таких матриц M_k служат матрицы A_j, D_k, F_l из предыдущего параграфа. Еще одно из свойств матриц A_j и D_k: они предоставляют удобную формулу для вычисления определителя матрицы M по коэффициентам разложения (3.1). Действительно, для комплексной 2×2 матрицы

$$A = c_0E + \sum_{k=1}^{3} c_k A_k = \begin{pmatrix} c_0 + ic_3 & ic_1 - c_2 \\ ic_1 + c_2 & c_0 - ic_3 \end{pmatrix}$$

находим

$$\det A = \sum_{k=0}^{3} c_k^2. \tag{3.2}$$

Для комплексной 4×4-матрицы D, используя ее блочное представление с помощью матриц B_k

$$D = c_0E + \sum_{k=1}^{4} c_kD_k = \begin{pmatrix} c_0E + c_4B_4 & c_1B_1 + c_2B_2 + c_3B_3 \\ -c_1B_1 - c_2B_2 - c_3B_3 & c_0E - c_4B_4 \end{pmatrix}$$

и ссылаясь на формулы Шура (см.[6, стр.59])

$$\det \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} = \det(PS - QR) \quad \text{при} \quad RS = SR$$

находим

$$\det D = \left(\sum_{k=0}^{4} c_k^2\right)^2 \tag{3.3}$$

Для комплексной 6×6-матрицы

$$F = c_0E + \sum_{k=1}^{6} c_kF_k$$

со ссылкой на формулы (3.2) и (3.3) получается следующий результат: при дополнительных условиях

$$c_1c_4 + c_2c_5 + c_3c_6 = 0, \qquad c_2c_4 + c_3c_5 = 0$$

справедлива формула

$$\det F = (\sum_{k=0}^{6} c_k^2)^3 \tag{3.4}$$

Перейдем теперь к решениям u_2, u_4, u_6 уравнения (2.1). Будем считать, что в определении этих решений правые части выражений (2.2),(2.3),(2.4) взяты со знаком плюс и что $\mu = \sqrt{\lambda}$. Тогда для любого решения u из множества $\{u_2, u_4, u_6\}$ находим

$$u(z)u^*(z) = \mathrm{th}^2(\alpha z) + \mathrm{sech}^2(\alpha z) \sum_{k=1}^{m} a_k^2 = 1, \tag{3.5}$$

где $m = 3, 4, 6$ соответственно для u_2, u_4, u_6. Это означает, что для любого фиксированного z матрица $u(z)$ унитарна. Далее, благодаря формулам (3.2)-(3.4) и правому равенству в (3.5), находим

$$\det u_k(z) = 1 \quad \text{при} \quad k = 2, 4, 6.$$

Отметим лишь, что при построении решения u_6 с условием $\det u_6 = 1$ нужно, согласно приведенной выше процедуре вычисления $\det F$, на коэффициенты a_k наложить дополнительные условия

$$a_1a_4 + a_2a_5 + a_3a_6 = 0, \qquad a_2a_4 + a_3a_5 = 0.$$

В итоге наши матрицы удовлетворяют включениям

$$u_2(z) \in SU(2), \qquad u_4(z) \in SU(4), \qquad u_6(z) \in SU(6).$$

Относительно решения u_2 справедлив более сильный результат.

Т е о р е м а 1. Множество U_2 матриц

$$-\operatorname{th}(z)E + \operatorname{sech}(z)\sum_{k=1}^{3} a_k A_k$$

по всем действительным z и a_k, удовлетворяющим условию

$$z \in [-\infty, \infty], \qquad a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1,$$

находится во взаимно однозначном соответствии с группой $SU(2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Каждый элемент из U_2, как показано выше, есть унитарная 2×2-матрица с единичным определителем, т.е. элемент из $SU(2)$. С другой стороны, каждый элемент матричной группы $SU(2)$ есть унитарная 2×2-матрица с единичным определителем, которая может быть разложена по базису $\{E, A_1, A_2, A_3\}$. Пусть c_0, c_1, c_2, c_3-коэффициенты этого разложения, тогда формулами

$$z = \operatorname{arth}(-c_0), \qquad a_k = \frac{c_k}{\operatorname{sech}(\operatorname{arth}(-c_0))}$$

при $k = 1, 2, 3$ однозначно определяются параметры z, a_1, a_2, a_3 некоторой матрицы из множества U_2. Теорема доказана.

4 Унитарные антиэрмитовые матрицы

Произвольная комплексная 3×3-матрица M, удовлетворяющая условию антиэрмитовости $M^* = -M$, может быть представлена в виде

$$M = \begin{pmatrix} ia & b\exp(i\phi) & c\exp(i\psi) \\ -b\exp(-i\phi) & id & f\exp(i\omega) \\ -c\exp(-i\psi) & -f\exp(-i\omega) & ig \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

где a, d, g-диагональные, b, c, f-внедиагональные, ϕ, ψ, ω- угловые параметры все суть действительные числа. Не ограничивая общности будем считать $0 \le \phi, \psi, \omega < 2\pi$.

Из условия унитарности $MM^* = E$ следуют две системы условий на параметры. Первая из равенства единице диагональных элементов матрицы MM^*

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1, \tag{4.2a}$$

$$b^2 + d^2 + f^2 = 1, \tag{4.2b}$$

$$c^2 + f^2 + g^2 = 1. \tag{4.2c}$$

Вторая из равенства нулю внедиагональных элементов матрицы MM^*

$$cf\exp(i(\psi - \omega)) = b(a + d)\exp(i(\phi + \pi/2)), \tag{4.3a}$$

$$bf\exp(i(\omega + \phi)) = c(a + g)\exp(i(\psi - \pi/2)), \tag{4.3b}$$

$$bc\exp(i(\psi-\phi)) = f(d+g)\exp(i(\omega+\pi/2)). \tag{4.3c}$$

Согласование показателей экспонент в (4.3) приводит к простому соотношению

$$\omega = \psi - \phi \pm \frac{\pi}{2}. \tag{4.4}$$

Пусть b, c, f отличны от нуля, тогда попарное перемножение равенств (4.3) приводит к явным выражениям внедиагональных параметров через диагональные

$$b^2 = (g+a)(g+d), \tag{4.5a}$$

$$c^2 = (d+g)(d+a), \tag{4.5b}$$

$$f^2 = (a+d)(a+g). \tag{4.5c}$$

Сложение трех равенств из (4.2) с учетом суммы $b^2 + c^2 + f^2$ из (4.5) приводит к простому соотношению

$$(a+d+g)^2 = 1, \tag{4.6}$$

которое позволяет выразить один диагональный параметр через два других диагональных.

Предположим теперь, что один из внедиагональных параметров равен нулю, тогда из (4.3) следует равенство нулю по крайней мере еще одного внедиагонального параметра. Из (4.2) следует, что равенство нулю двух внедиагональных параметров приводит к равенству единице квадрата одного из диагональных параметров и обратно. В результате из (4.2) следуют такие импликации

$$a^2 = 1 \Longrightarrow b = c = 0, \quad f^2 = 1 - d^2, \quad d^2 = g^2, \tag{4.7a}$$

$$d^2 = 1 \Longrightarrow b = f = 0, \quad c^2 = 1 - g^2, \quad g^2 = a^2, \tag{4.7b}$$

$$g^2 = 1 \Longrightarrow c = f = 0, \quad b^2 = 1 - a^2, \quad a^2 = d^2 \tag{4.7c}$$

Кстати, совместное выполнение любых двух импликаций из (4.7) приводит к равенствам

$$a^2 = d^2 = g^2 = 1, \qquad b = c = f = 0. \tag{4.8}$$

Полученные соотношения можно оформить в виде следующего вспомогательного утверждения.

Л е м м а. Произвольная унитарная антиэрмитовая 3×3-матрица имеет вид (4.1) с четырьмя независимыми параметрами двумя угловыми и двумя диагональными, остальные 5 определяются из соотношений (4.4)-(4.6) либо, если один из диагональных параметров выбран равным ±1, из соотношений (4.4),(4.7),(4.8).

Рассмотрим теперь две унитарные антиэрмитовые 3×3-матрицы M_1 и M_2 вида (4.1), где параметры матрицы M_1 будем отмечать индексом 1, а параметры матрицы M_2 индексом 2.

Т е о р е м а 2. Не существует двух унитарных антиэрмитовых 3×3-матриц, которые антикоммутируют друг с другом.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим обратное. Пусть упомянутые перед теоремой матрицы M_1 и M_2 антикоммутируют друг с другом, т.е. $M_1 M_2 = -M_2 M_1$. Тогда из равенства нулю всех элементов матрицы $M_1M_2 + M_2M_1$ следуют две системы равенств. Первая для диагональных элементов

$$a_1a_2 + b_1b_2\cos(\phi_1 - \phi_2) + c_1c_2\cos(\psi_1 - \psi_2) = 0, \tag{4.9a}$$

$$b_1b_2\cos(\phi_1 - \phi_2) + d_1d_2 + f_1f_2\cos(\omega_1 - \omega_2) = 0, \tag{4.9b}$$

$$c_1c_2\cos(\psi_1 - \psi_2) + f_1f_2\cos(\omega_1 - \omega_2) + g_1g_2 = 0. \tag{4.9c}$$

Вторая для внедиагональных элементов

$$ib_1(a_2 + d_2)e^{i\phi_1} + ib_2(a_1 + d_1)e^{i\phi_2} - c_1f_2e^{i(\psi_1 - \omega_2)} - c_2f_1e^{i(\psi_2 - \omega_1)} = 0, \tag{4.10a}$$

$$ic_1(a_2 + g_2)e^{i\psi_1} + ic_2(a_1 + g_1)e^{i\psi_2} + b_1f_2e^{i(\phi_1 + \omega_2)} + b_2f_1e^{i(\phi_2 + \omega_1)} = 0, \tag{4.10b}$$

$$if_1(d_2 + g_2)e^{i\omega_1} + if_2(d_1 + g_1)e^{i\omega_2} - b_1c_2e^{i(\psi_2 - \phi_1)} - b_2c_1e^{i(\psi_1 - \phi_2)} = 0. \tag{4.10c}$$

Кроме того, из свойств унитарности и антиэрмитовости матриц M_1 и M_2 следуют равенства (4.2) и (4.3) и их следствия (4.4)-(4.8), где параметры следует брать с индексом 1 для матрицы M_1 и с индексом 2 для матрицы M_2.

Соотношения (4.4) предоставляют 4 варианта выбора пары угловых параметров ω_1 и ω_2. Рассмотрим первый вариант

$$\omega_1 = \psi_1 - \phi_1 + \frac{\pi}{2}, \qquad \omega_2 = \psi_2 - \phi_2 + \frac{\pi}{2}. \tag{4.11}$$

В этом варианте из (4.3) для матриц M_1 и M_2 находим

$$c_kf_k = -b_k(a_k + d_k), \qquad k = 1,2, \tag{4.12a}$$

$$b_kf_k = -c_k(a_k + g_k), \qquad k = 1,2, \tag{4.12b}$$

$$b_kc_k = -f_k(d_k + g_k), \qquad k = 1,2. \tag{4.12c}$$

Для упрощения дальнейших записей введем обозначения

$$\phi = \phi_1 - \phi_2, \qquad \psi = \psi_1 - \psi_2, \qquad \omega = \omega_1 - \omega_2.$$

Отделим в равенствах (4.10) действительные части, разделив предварительно строчки на экспоненты, стоящие при вторых слагаемых,

$$f_2c_1\cos(\psi) + b_2(a_1 + d_1) + (a_2 + d_2)b_1\cos(\phi) + c_2f_1\cos(\omega) = 0, \tag{4.13a}$$

$$f_2b_1\cos(\phi) + c_2(a_1 + g_1) + (a_2 + g_2)c_1\cos(\psi) + b_2f_1\cos(\omega) = 0, \tag{4.13b}$$

$$b_2c_1\cos(\psi) + f_2(d_1 + g_1) + c_2b_1\cos(\phi) + (d_2 + g_2)f_1\cos(\omega) = 0. \tag{4.13c}$$

Пусть

$$b_k \neq 0,\ c_k \neq 0,\ f_k \neq 0 \text{ при } k = 1,2. \tag{4.14}$$

Разделим (4.13a) на f_2c_1, (4.13c) на b_2c_1 и сложим их, предварительно заменив суммы диагональных параметров выражениями из (4.12) через внедиагональные параметры, в результате получим

$$\cos(\psi) = \frac{1}{2}\left(\frac{b_1f_2}{b_2f_1} + \frac{b_2f_1}{b_1f_2}\right)$$

Аналогичная процедура с (4.13b,c) приводит к равенству

$$\cos(\phi) = \frac{1}{2}\left(\frac{c_1 f_2}{c_2 f_1} + \frac{c_2 f_1}{c_1 f_2}\right)$$

Благодаря известному неравенству $x^2 + y^2 \geq 2|xy|$ убеждаемся, что равенства для косинусов выполняются лишь при условиях, соответственно

$$b_1 f_2 = \pm b_2 f_1 \qquad \text{и} \qquad c_1 f_2 = \pm c_2 f_1.$$

В результате от равенств (4.13) мы пришли к соотношениям

$$\pm\frac{b_1}{b_2} = \frac{f_1}{f_2} \qquad \text{и} \qquad \cos(\psi) = \pm 1,$$

$$\pm\frac{c_1}{c_2} = \frac{f_1}{f_2} \qquad \text{и} \qquad \cos(\phi) = \pm 1,$$

где знаки перед дробями и знаки косинусов согласуются как плюс с плюсом и минус с минусом. Замечание о согласовании знаков позволяет нам объединить эти соотношения в одно

$$\frac{b_1}{b_2}\cos(\psi) = \frac{f_1}{f_2} = \frac{c_1}{c_2}\cos(\phi).$$

Умножая части этих равенств на $\cos(\omega)$ и учитывая значения косинусов в том числе

$$\cos(\omega) = \cos(\psi - \phi) = \cos(\psi)\cos(\phi),$$

приходим к соотношению

$$\frac{b_1}{b_2}\cos(\phi) = \frac{f_1}{f_2}\cos(\omega) = \frac{c_1}{c_2}\cos(\psi). \tag{4.15}$$

Введем обозначения

$$b_0 = b_1\cos(\phi), \qquad c_0 = c_1\cos(\psi), \qquad f_0 = f_1\cos(\omega)$$

и отметим, что

$$b_0^2 = b_1^2, \quad c_0^2 = c_1^2, \quad f_0^2 = f_1^2$$

Из (4.2) для M_1 и M_2 и из (4.9) построим новую систему равенств следующим образом: просуммируем (4.2a) при индексе 1 с (4.2a) при индексе 2 и с удвоенным равенством (4.9a), аналогично поступим со вторыми и третьими строками. Результатом будут равенства

$$(a_1 + a_2)^2 + (b_0 + b_2)^2 + (c_0 + c_2)^2 = 2, \tag{4.16a}$$

$$(b_0 + b_2)^2 + (d_1 + d_2)^2 + (f_0 + f_2)^2 = 2, \tag{4.16b}$$

$$(c_0 + c_2)^2 + (f_0 + f_2)^2 + (g_1 + g_2)^2 = 2. \tag{4.16c}$$

Из (4.12) и (4.13) построим новую систему равенств следующим образом: просуммируем умноженное на $\cos(\psi)\cos(\omega) = \cos(\phi)$ равенство (4.12a) при $k = 1$ с равенством (4.12a) при $k = 2$ и равенством (4.13a); аналогично поступим со вторыми и третьими строками с тем только отличием, что (4.12b) при $k = 1$ умножается на $\cos(\phi)\cos(\omega) \quad \cos(\psi)$, а (4.12c) при $k = 1$ умножается на $\cos(\phi)\cos(\psi) = \cos(\omega)$. Результатом будут равенства

$$(c_0 + c_2)(f_0 + f_2) = -(b_0 + b_2)(a_1 + a_2 + d_1 + d_2), \tag{4.17a}$$

$$(b_0 + b_2)(f_0 + f_2) = -(c_0 + c_2)(a_1 + a_2 + g_1 + g_2), \tag{4.17b}$$

$$(b_0 + b_2)(c_0 + c_2) = -(f_0 + f_2)(d_1 + d_2 + g_1 + g_2). \tag{4.17c}$$

Если допустить, что в (4.17) одна из сумм внедиагональных параметров равна нулю, например, $b_0 + b_2 = 0$, т.е. $b_1\cos(\phi)/b_2 = -1$, то из соотношений (4.15) следует равенство нулю и двух других сумм. Это приводит к соотношениям $b_0 = -b_2$, $c_0 = -c_2$, $f_0 = -f_2$, что позволяет из (4.9) получить равенства

$$a_1 a_2 = b_k^2 + c_k^2, \qquad d_1 d_2 = b_k^2 + f_k^2, \qquad g_1 g_2 = c_k^2 + f_k^2.$$

Подставляя их в (4.2) для M_1 и M_2, находим

$$a_1^2 + a_1 a_2 = 1 \quad \text{и} \quad a_2^2 + a_1 a_2 = 1 \Longrightarrow a_1 = a_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Аналогично вычисляются

$$d_1 = d_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad g_1 = g_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Но эти значения диагональных параметров не удовлетворяют условиям

$$a_k + d_k + g_k = \pm 1, \qquad k = 1, 2, \tag{4.18}$$

которые следуют из (4.6) для матриц M_1 и M_2 при b_k, c_k, f_k отличных от нуля.

Полученное противоречие показывает, что суммы внедиагональных параметров в (4.17) отличны от нуля и, следовательно, можно строки в (4.17) попарно перемножать и делить на общие множители. В итоге получается система равенств

$$(f_0 + f_2)^2 = (a_1 + a_2 + d_1 + d_2)(a_1 + a_2 + g_1 + g_2), \tag{4.19a}$$

$$(c_0 + c_2)^2 = (a_1 + a_2 + d_1 + d_2)(d_1 + d_2 + g_1 + g_2), \tag{4.19b}$$

$$(b_0 + b_2)^2 = (a_1 + a_2 + g_1 + g_2)(d_1 + d_2 + g_1 + g_2). \tag{4.19c}$$

Далее с соотношениями (4.16) и (4.19) следует выполнить процедуру аналогичную той, которая из (4.2) и (4.5) привела к (4.6). Именно: сложим строки в (4.16), квадраты сумм внедиагональных параметров заменим соотношениями из (4.19), выполним арифметические действия и получим равенство

$$(a_1 + a_2 + d_1 + d_2 + g_1 + g_2)^2 = 2.$$

Подстановка условий (4.18) в это равенство приводит к противоречию. Тем самым мы показали лишь то, что в варианте (4.11) с неравенствами (4.14) матричное условие $M_1 M_2 + M_2 M_1 = 0$ не выполняется.

Откажемся от неравенств (4.14). Пусть один из внедиагональных параметров матрицы M_1 равен нулю. Тогда согласно лемме выполняется одно из соотношений (4.7) для M_1, например, (4.7a), т.е.

$$a_1 = \pm 1, \quad b_1 = c_1 = 0, \quad f_1^2 = 1 - d_1^2, \quad d_1^2 = g_1^2.$$

Из (4.9) следует

$$a_2 = 0, \qquad d_1 d_2 = g_1 g_2 = -f_1 f_2 \cos(\omega). \tag{4.20}$$

Из (4.13) находим произведение (4.13a) на (4.13b)

$$b_2 c_2 (a_1 + d_1)(a_1 + g_1) = b_2 c_2 f_1^2 \cos(\omega). \tag{4.21}$$

Если допустить, что $f_1 = 0$, то

$$(4.7a) \Longrightarrow d_1^2 = g_1^2 = 1, \qquad (4.20) \Longrightarrow d_2 = g_2 = 0,$$

а из (4.12) при $k = 2$ следует равенство нулю по крайней мере двух внедиагональных параметров в дополнение к нулевым диагональным. Но унитарная матрица M_2 не может иметь нулевых строк.

Если $f_1 \neq 0$, то $d_1^2 = g_1^2 = 1 - f_1^2 < 1$, следовательно, $a_1 + d_1 \neq 0$, $a_1 + g_1 \neq 0$. Далее, если один из параметров b_2 или c_2 равен нулю, то из (4.10a) и (4.10b) следует, что и второй равен нулю, но в (4.2a) $b_2^2 + c_2^2 = 1$. Если отделить в (4.10a,b) мнимую часть, то нетривиальность этих параметров влечет $\sin(\omega) \quad 0$, т.е. $\cos(\omega) = \pm 1$. Совместное выполнение условий $b_2 \neq 0$, $c_2 \neq 0$ согласно (4.12) влечет неравенство $f_2 \neq 0$, а оно влечет из (4.20) $d_1 \neq 0$. Более того, произведение (4.12a) на (4.12b) $f_2^2 = d_2 g_2$ показывает, что d_2 и g_2 одного знака, значит d_1 и g_1 тоже одного знака и, следовательно, $d_1 = g_1$. Таким образом, из (4.21), учитывая (4.7a), находим $d_1 = \pm 1$, что противоречит условию $d_1^2 = 1 - f_1^2 < 1$.

Аналогично в случае отказа от неравенств (4.14) к противоречию привело бы каждое из соотношений (4.7) для матрицы M_1, а равно и для матрицы M_2.

Итак, первый вариант отпал. Рассмотрим второй вариант

$$\omega_1 = \psi_1 - \phi_1 + \frac{\pi}{2}; \quad \omega_2 = \psi_2 - \phi_2 - \frac{\pi}{2}$$

при неравенствах (4.14). В этом варианте для матрицы M_1 сохраняются равенства (4.12) при $k = 1$, а для M_2 из (4.3) следуют, отличающиеся знаком правых частей, равенства

$$c_2 f_2 = b_2 (a_2 + d_2), \tag{4.22a}$$

$$b_2 f_2 = c_2 (a_2 + g_2), \tag{4.22b}$$

$$b_2 c_2 = f_2 (d_2 + g_2). \tag{4.22c}$$

Отделим в (4.10) действительные части

$$b_2(a_1 + d_1) - f_2 c_1 \cos(\psi) + (a_2 + d_2) b_1 \cos(\phi) - c_2 f_1 \cos(\omega) = 0, \tag{4.23a}$$

$$c_2(a_1 + g_1) - f_2 b_1 \cos(\phi) + (a_2 + g_2) c_1 \cos(\psi) - b_2 f_1 \cos(\omega) = 0, \tag{4.23b}$$

$$f_2(d_1 + g_1) - b_2 c_1 \cos(\psi) - c_2 b_1 \cos(\phi) + (d_2 + g_2) f_1 \cos(\omega) = 0. \tag{4.23c}$$

Разделим (4.23a) на $-f_2c_1$, а (4.23c) на $-b_2c_1$ и сложим полученные равенства, в результате получим

$$\cos(\psi) = -\frac{1}{2}\left(\frac{b_1f_2}{b_2f_1} + \frac{b_2f_1}{b_1f_2}\right)$$

Аналогичная процедура с (4.23b) и (4.23c) приводит к равенству

$$\cos(\phi) = -\frac{1}{2}\left(\frac{c_1f_2}{c_2f_1} + \frac{c_2f_1}{c_1f_2}\right)$$

Эти равенства приводят к соотношенияю

$$-\frac{b_1}{b_2}\cos(\psi) = \frac{f_1}{f_2} = -\frac{c_1}{c_2}\cos(\phi),$$

которое сводится к полученному в первом варианте соотношению (4.15) умножением на

$$\cos(\omega) = -\cos(\psi)\cos(\phi), \quad \text{где} \quad \omega = \psi - \phi + \pi.$$

Совпадение основных пропорциональных соотношений (4.15) для обоих вариантов убеждает нас в том, что и в этом варианте будет получено противоречие. Нужно лишь при построении системы неравенств типа (4.17) из (4.12), (4.22) и (4.23) выполнить следующую процедуру: (4.12a) при $k = 1$ умножить на $\cos(\psi)\cos(\omega) = -\cos(\phi)$ сложить с (4.22a) и из результата вычесть (4.23a); аналогично поступить со вторыми и третьими строками с тем только отличием, что строка (4.12b) умножается на $\cos(\phi)\cos(\omega) = -\cos(\psi)$, а строка (4.12c) умножается на $\cos(\phi)\cos(\psi) = -\cos(\omega)$. В результате получаются равенства типа (4.17), где перед правыми частями вместо минусов стоят плюсы. Попарное их умножение приводит к равенствам (4.19). Равенства (4.16) (общие для обоих вариантов) и (4.19), как показано в первом варианте, приводят к противоречию.

Отказ от неравенств (4.14) в этом варианте приводит к противоречию при дословном повторении соответствующей процедуры первого варианта. Аналогичное рассмотрение оставшихся двух вариантов также приводит к противоречию. Что завершает доказательство теоремы.

Список литературы

[1] Гудков В.В. О соответствии гиперкомплексных решений специальным унитарным группам//Теор. Мат. Физ. Т.113. N.1. С.29-33.

[2] Маделунг Э. Математический аппарат физики. М.: Физматгиз, 1960.

[3] Рамон П. Теория поля. Современный вводный курс. М.: Мир, 1984.

[4] Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1984.

[5] Шутц Б. Геометрические методы математической физики. М.: Мир, 1984.

[6] Гантмахер Ф.Р Теория матриц. М.: Физматгиз, 1967

V V Gudkov. On nonexistence of the unitary anti-Hermitian anti-commuting 3×3 - matrices and on the hypercomplex solutions

Summary. The theorem on nonexistence of two unitary anti-Hermitian 3×3 - matrices anticommuting one to another is proved. A procedure of a constructing of the sets for the unitary anti-Hermitian $n \times n$ matrices anticommuting one to another is given for even n. Using these sets the matrix representation of the hypercomplex solutions for nonlinear Klein Gordon is obtained. The correspondence between these matrix solutions and the special unitary groups is shown.

1991 MSC 35Q58

V V. Gudkovs. Par unitāras antihermītas antikomutējošas trēšas kārtas matricas neeksistēšanu un par hiperkompleksiem atrisinājumiem

Anotācija. Tiek pierādīta teorēma par divu unitāru antihermītu antikomutējošu trešās kārtas matricu neeksistēšanu. Visiem pāru skaitļiem n tiek norādīta unitārās antihermītas antikomutējošas n-tās kārtas konstruēšanas procedūra. Izmantojot šīs matricas, tiek konstruēti nelineāra Kleina-Gordona vienādōjuma matricu veida hiperkompleksie atrisinājumi. Tiek pierādīta atbilstība starp iegūtiem matricu atrisinājumiem un speciālām unitārām grupām.

Институт математики и информатики
Латвийского университета
Рига, б. Райниса, 29

Поступила 01.11.98

О единственности и асимптотике решения одного интегро-дифференциального уравнения теплопроводности

Ю.А.Клоков

Аннотация. Доказана единственность решения задачи $\alpha p'' = F(x,p,z)$, $p'(0) = p'(l) = 0$, $z = \int_0^l \sigma(s)(p(x) - p(s))ds$, где $F \in C(I \times R^2)$, $\alpha > 0$. В случае, когда $F = k^2(p - r(x)) + z$, $k > 0$, $r(x) \in C(I)$, найдены асимптотики решений при $\alpha \to 0$ и при $\alpha \to +\infty$.

Библ. 3.

УДК 517.927.4

I. Рассмотрим задачу, возникающую в нелинейной теории тепловодности [1], [2]:

$$\alpha p'' = F(t,p,z), \tag{1}$$

$$p'(0) = p'(l) = 0, \tag{2}$$

$$z = \int_0^l \sigma(s)(p(x) - p(s))ds, \tag{3}$$

где $F \in C(I \times R^2)$, $I = [0,l]$, $\alpha, l > 0$, $p \in R$, $\sigma \in C(I)$, $\sigma(s) \geq 0$, $s \in I$, p - температура среды, α коэффициент теплопроводности, σ интенсивность нелокального выделения энергии.

Из работ [1], [2] следует, что решение задачи (1)-(3) существует, если найдутся такие постоянные $m_0, m \in R$ $(m \geq m_0)$, что

$$F(x,m,0) \geq 0 \quad \forall x \in I, \tag{4}$$

$$F(x,m_0,0) \leq 0 \quad \forall x \in I. \tag{5}$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что условия (4), (5) выполняются. В этом случае решение $p(x)$ удовлетворяет оценке $m_0 \leq p(x) \leq m \quad \forall x \in I$.

Теорема 1 *Пусть* $F_p, F_z \in C(I \times R^2)$, *причем*

$$F_p(x,p,z) > 0, \quad F_z(x,p,z) \geq 0$$

$\forall (x,p,z) \in I \times [m_0, m] \times [-M, M]$, *где* $M = 2\max(|\, m_0 \,|, |\, m \,|) \int_0^l \sigma(s)\, ds$.

Тогда решение задачи (1)-(3) единственно.

Доказательство. Предположим, что $p_1(x)$, $p_2(x)$, $x \in I$ два решения задачи (1)-(3). Тогда их разность $u(x) = p_2(x) - p_1(x)$ будет удовлетворять уравнению

$$\alpha u'' = a(x)u + b(x) \int_0^l \sigma(s)(u(x) - u(s))\, ds, \tag{6}$$

где

$$a(x) = \int_0^1 F_p(x, p_2(x)t + p_1(x)(1-t), z_2(x))\, dt,$$

$$b(x) = \int_0^1 F_z(x, p_1(x), z_2(x)t + z_1(x)(1-t))\, dt.$$

В силу условий теоремы $a(x) > 0$, $b(x) \geq 0$ $\forall x \in I$. Из (6) находим

$$\alpha u'' = (a(x) + cb(x))u - b(x)\gamma, \tag{7}$$

$$u'(0) = u'(l) = 0, \tag{8}$$

где

$$c = \int_0^l \sigma(s) ds, \quad \gamma = \int_0^l \sigma(s)u(s) ds.$$

Пусть $\gamma = 0$. Тогда из (7), (8) следует, что $u(x) \equiv 0$, $x \in I$ и единственность доказана. Пусть $\gamma > 0$. Обозначим

$$\overline{u}(x) = \frac{b(x)\gamma}{a(x) + cb(x)} \tag{9}$$

($\overline{u}(x)$ кривая, где $u'' = 0$), $\overline{u_1} = \max \overline{u}(x)$, $\overline{u_0} = \min \overline{u}(x)$, $x \in I$. Так как $\gamma > 0$, то $\overline{u_1} > 0$. Покажем, что решение $u(x)$ задачи (7), (8) удовлетворяет оценке $u(x) \leq \overline{u_1}$. Пусть это не так и, к примеру, для некоторого $x_* \in I$ $u(x_*) > \overline{u_1}(x)$. Тогда, если $u'(x_*) \geq 0$ (x_* $(0,l)$), получим $u'(x) > 0$ при $x > x_*$, и, значит, $u'(l) > 0$, чего не может быть в силу (8). Аналогичные противоречия получаются, если $u'(x_*) = 0$ (при $x_* = 0$ или $x_* = l$), а также в случае, когда $u'(x_*) < 0$ при $x_* \in (0,l)$.

Следовательно, $u(x) \leq \overline{u_1}$ $\forall x \in I$. Пусть $x_0 \in I$ точка, где $\overline{u_1}(x_0) = \overline{u_1}$. В этой точке имеем:

$$\overline{u}(x_0) = \frac{b(x_0)}{a(x_0) + cb(x_0)} \int_0^l \sigma(s)u(s)\, ds \leq \frac{b(x_0)c\overline{u}(x_0)}{a(x_0) + cb(x_0)} < \overline{u}(x_0).$$

Полученное противоречие доказывает, что не может быть случая $\gamma > 0$. Случай $\gamma < 0$ сводится к рассмотренному введением разности $p_1(x) - p_2(x)$. Тем самым $\gamma = 0$, и единственность доказана.

Замечание. Условие $a(x) > 0$ $\forall x \in I$ существенно для справедливости теоремы.

II. Далее рассмотрим частный случай задачи (1)-(3), а именно уравнение:

$$\alpha p'' = k^2(p - r(x)) + \int_0^l \sigma(s)(p(x) - p(s))\,ds, \tag{10}$$

где $\alpha, k \in R$, $\alpha, k > 0$, $r \in C(I)$, с условиями (2).

Из [1], [2] следует существование решения $p = p(x, \alpha)$ задачи (10), (2), а из доказанной выше теоремы его единственность.

Представляет интерес асимптотика этого решения $p(x, \alpha)$ при $\alpha \to 0$.

Покажем, что

$$p(x, \alpha) = \frac{k^2}{k^2 + c} r(x) + \frac{1}{k^2 + c}\int_0^l \sigma(s) r(s)\,ds + \varepsilon(x, \alpha), \tag{11}$$

где $c = \int_0^l \sigma(s)\,ds$ и $\varepsilon(x, \alpha) \to 0$ при $\alpha \to 0$ равномерно относительно $x \in I$.

Если $\sigma \equiv 0$, $s \in I$, то (10) превращается в дифференциальное уравнение и из (11) получаем $p(x, \alpha) = r(x) + \varepsilon_0(x, \alpha)$, где $\varepsilon_0(x, \alpha) \to 0$ при $\alpha \to 0$ равномерно относительно $x \in I$. Асимптотика таких решений хорошо изучена (см.[3]). В дальнейшем будем считать, что $\sigma(s) \not\equiv 0$. Обозначим

$$k_0^2 = \frac{k^2 + c}{\alpha}; \quad k_\alpha^2 = \frac{k^2}{\alpha}; \quad L = \frac{1}{k^2 + c}\int_0^l \sigma(s) r(s)\,ds.$$

Решая задачу (10), (2) методом вариации произвольных постоянных, найдем:

$$\begin{gathered} p(x, \alpha) = \frac{k_\alpha^2}{k_0} \frac{1}{\operatorname{sh} k_0 l}[\operatorname{ch} k_0 x \textstyle\int_x^l r(s) \operatorname{ch} k_0(l - s)\,ds + \\ + \operatorname{ch} k_0(l - x) \textstyle\int_0^x r(s) \operatorname{ch} k_0 s\,ds] + L. \end{gathered} \tag{12}$$

Пусть $r(s) \equiv r - const$. Тогда $p(x, \alpha) = r$ есть решение (10), (2). Поэтому справедливо равенство

$$\begin{gathered} r \qquad \frac{k_\alpha^2}{k_0} \frac{1}{\operatorname{sh} k_0 l}[\operatorname{ch} k_0 x \textstyle\int_x^l r \operatorname{ch} k_0(l - s)\,ds \\ + \quad \operatorname{ch} k_0(l - x) \textstyle\int_0^x r \operatorname{ch} k_0 s\,ds] + \frac{rc}{k^2 + c} \end{gathered}$$

или:

$$\frac{k^2 r}{k^2 + c} = \frac{k_\alpha^2}{k_0 \operatorname{sh} k_0 l}\left[\operatorname{ch} k_0 x \int_x^l r \operatorname{ch} k_0(l - s)\,ds + \operatorname{ch} k_0(l - x)\int_0^x r \operatorname{ch} k_0 s\,ds\right] \tag{13}$$

Перепишем теперь (12) в виде

$$\begin{gathered} p(x, \alpha) = \frac{k_\alpha^2}{k_0 \operatorname{sh} k_0 l}[\operatorname{ch} k_0 x \textstyle\int_x^l (r(x) + r(s) - r(x)) \operatorname{ch} k_0(l - s)\,ds + \\ + \operatorname{ch} k_0(l - x) \textstyle\int_0^x (r(x) + r(s) - r(x)) \operatorname{ch} k_0 s\,ds] + L = \\ = \frac{k^2 r(x)}{k^2 + c} + L + I_1(x, \alpha) + I_2(x, \alpha), \end{gathered} \tag{14}$$

где

$$I_1(x,\alpha)=\frac{k_\alpha^2}{k_0}\frac{\operatorname{ch}k_0x}{\operatorname{sh}k_0l}\int_x^l(r(s)-r(x))\operatorname{ch}k_0(l-s)\,ds,$$

$$I_2(x,\alpha)=\frac{k_\alpha^2}{k_0}\frac{\operatorname{ch}k_0(l-x)}{\operatorname{sh}k_0l}\int_0^x(r(s)-r(x))\operatorname{ch}k_0s\,ds.$$

Первое слагаемое в (14) получается в силу равенства (13). Покажем, что при $\alpha\to 0$ $|I_1(x,\alpha)|+|I_2(x,\alpha)|\to 0$ равномерно относительно $x\in I$. С этой целью покажем, что для любого $\varepsilon>0$ найдется $\alpha_0>0$ такое, что $|I_1(x,\alpha)|<\varepsilon/2$, $\forall x\in I$, если $\alpha<\alpha_0$.

Пусть $\varepsilon>0$ задано. Выберем $h>0$ столь малым, чтобы при $|s-x|\le h$ было $|r(s)-r(x)|\le\varepsilon/4$, $\forall(s,x)\in I$. Покажем, что $|I_1(x,\alpha)|\le\varepsilon/2$ при $\forall x\in[l-2h,l]$ для любого $\alpha>0$. Имеем

$$|I_1(x,\alpha)|\le$$

$$\le\frac{k_\alpha^2\operatorname{ch}k_0x}{k_0\operatorname{sh}k_0l}\int_x^l(|r(s)-r(l-h)|+|r(l-h)-r(x)|)\operatorname{ch}k_0(l-s)\,ds\le$$

$$\le(\varepsilon/4+\varepsilon/4)\frac{k_\alpha^2\operatorname{ch}k_0x}{k_0^2\operatorname{sh}k_0l}\operatorname{sh}k_0(l-x)< \tag{15}$$

$$<\varepsilon/2\frac{1}{\operatorname{sh}k_0l}\frac{1}{2}(\operatorname{sh}k_0l+\operatorname{sh}k_0(l-2x))\le\varepsilon/2.$$

Заметим, что никаких ограничений на малость $\alpha>0$ мы не ставили.

Пусть теперь $x\in[0,l-2h]$. Имеем $I_1(x,\alpha)=I_1^*+I_2^*$, где

$$I_1^*=\frac{k_\alpha^2\operatorname{ch}k_0x}{k_0\operatorname{sh}k_0l}\int_x^{x+h}(r(s)-r(x))\operatorname{ch}k_0(l-s)\,ds,$$

$$I_2^*=\frac{k_\alpha^2\operatorname{ch}k_0x}{k_0\operatorname{sh}k_0l}\int_{x+h}^{l}(r(s)-r(x))\operatorname{ch}k_0(l-s)\,ds.$$

Оценим первый интеграл:

$$|I_1^*|\le\frac{k_\alpha^2\operatorname{ch}k_0x}{k_0\operatorname{sh}k_0l}\varepsilon/4(\operatorname{sh}k_0(l-x)-\operatorname{sh}k_0(l-x-h))< \tag{16}$$

$$<\varepsilon/4\frac{1}{\operatorname{sh}k_0l}\frac{1}{2}(\operatorname{sh}k_0l+\operatorname{sh}k_0(l-2x))\le\varepsilon/4.$$

В (16) $\alpha>0$ любое. Оценим I_2^*. Пусть $n>0$ таково, что $|r(x)|\le n$, $\forall x\in I$. Тогда

$$|I_2^*|\le\frac{k_\alpha^2}{k_0^2}2n\frac{\operatorname{ch}k_0x}{\operatorname{sh}k_0l}\operatorname{sh}k_0(l-x-h)<$$

$$<2n\frac{1}{\operatorname{sh}k_0l}\frac{1}{2}(\operatorname{sh}k_0(l-h)+\operatorname{sh}k_0(l-2x-h))\le$$

$$\le 2n\frac{\operatorname{sh}k_0(l-h)}{\operatorname{sh}k_0l}<2n\frac{\exp(k_0(l-h))}{\exp(k_0l)}= \tag{17}$$

$$=2n\exp(-h\sqrt{\frac{k^2+c}{\alpha}}).$$

Выберем $\alpha_0 > 0$ столь малым, чтобы

$$2n\exp(-h\sqrt{\frac{k^2+c}{\alpha_0}}) = \varepsilon/4.$$

Тогда из (17), (16), (15) следует

$$| I_1(x,\alpha) | < \varepsilon/2, \quad \forall x \in I \quad и \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_0]. \tag{18}$$

Аналогичная оценка получается и для интеграла $I_2(x,\alpha)$ (и при том же значении $\alpha = \alpha_0$). Следовательно,

$$| I_1(x,\alpha) | + | I_2(x,\alpha) | < \varepsilon \quad \forall x \in I \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_0].$$

Тем самым формула (11) доказана.

Из формулы (11) следует, что если функция $r(x)$ имеет экстремумы и $\alpha > 0$ достаточно мало, то решение $p(x,\alpha)$ также будет иметь экстремумы.

Найдем теперь асимптотику решения $p(x,\alpha)$ при $\alpha \to +\infty$. Для решения $p(x,\alpha)$ задачи (10), (2) справедлива оценка (см.[1], [2]):

$$| p(x,\alpha) | \leq n, \quad \forall x \in I$$

Разделив (10) на α и полагая $\alpha \to +\infty$, получим $p''(x,\alpha) \to 0$ при $\alpha \to +\infty$ равномерно относительно $x \in I$. Из условий (2) следует, что $p'(x,\alpha) \to 0$ при $\alpha \to +\infty$ равномерно относительно $x \in I$. Поэтому

$$p(x,\alpha) = H + \varepsilon_1(x,\alpha), \tag{19}$$

где H некоторая постоянная и $\varepsilon_1(x,\alpha) \to 0$ при $\alpha \to \infty$ равномерно относительно $x \in I$. Интегрируя (10) по x от $x = 0$ до $x = l$, в силу (2) получим

$$0 = k^2(\int_0^l (p(x,\alpha) - r(x))\,dx + \int_0^l (\int_0^l (\sigma(s)(p(x,\alpha) - p(s,\alpha)))\,ds)\,dx). \tag{20}$$

Подставляя (19) в формулу (20), найдем

$$Hl = \int_0^l r(x)\,dx + \varepsilon_2(\alpha).$$

Теперь из (19) следует

$$p(x,\alpha) = \frac{1}{l}\int_0^l r(x)dx + \varepsilon_3(x,\alpha), \tag{21}$$

где $\varepsilon_3(x,\alpha) \to 0$ при $\alpha \to +\infty$ равномерно относительно $x \in I$ Из (21) следует, что при $\alpha \to +\infty$ решение $p(x,\alpha)$ будет стремиться к постоянной, а экстремумы будут "выглаживаться".

Список литературы

[1] Клоков Ю.А., Михайлов А.П. Об одной задаче Неймана для интегро-дифференциального уравнения // Дифференц.уравнения, 1996, Т.32, N 8. С.1110-1113.

[2] Клоков Ю.А. Михайлов А.П. Существование и единственность решения задачи Неймана для обыкновенного интегро-дифференциального уравнения // Препринт, ИММ РАН М. 1996, N 2. 10 с.

[3] Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. М. 1975. 248 с.

Yu.A. Klokov. On uniqueness and asymptotics of solutions of one integro-differential equation in the heat transfer theory

Summary. Uniqueness of a solution for the problem $\alpha p'' = F(x, p, z)$, $p'(0) = p'(l) = 0$, $= \int_0^l \sigma(s)(p(x) - p(s))ds$ is proven, where $F \in C(I \times R^2)$, $\alpha > 0$. Asymptotics of solutions are found for the case $F = k^2(p - r(x)) + z$, $k > 0$, $r(x) \in C(I)$, where $\alpha \to 0$ and $\alpha \to +\infty$.

1991 MSC 45J05, secondary 80

Yu.A. Klokovs. Par atrisinājuma unitāti un asimptotiku vienam integrāldiferenciālvienādojumam siltumvadības teorijā

Anotācija. Pierādīta uzdevuma atrisinājuma unitāte $\alpha p'' = F(x, p, z)$, $p'(0) = p'(l) = 0$, $z = \int_0^l \sigma(s)(p(x) - p(s))ds$, kur $F \in C(I \times R^2)$, $\alpha > 0$. Gadījumā, kad $F = k^2(p - r(x)) +$ $k > 0$, $r(x) \in C(I)$, atrastas atrisinājuma asimptotikas, kad $\alpha \to 0$ un $\alpha \to +\infty$.

Институт математики и информатики
Латвийского университета
Рига, б. Райниса, 29

Поступила 18.09.98

Теоремы существования для систем сингулярных обыкновенных дифференциальных уравнений

Ю.А.Клоков

Аннотация. Изучается краевая задача $x'' + k\dfrac{x'}{t} = f(t,x,x')$, $x'(0) = 0$,

$x(\tau) = b - Bx'(\tau)$,где $x,b \in R^n$, $K,B - n \times n$ - матрицы и $f \in C(I \times R^{2n})$, $I = [0,\tau]$ При различных предположениях относительно K,B и f доказаны 4 теоремы о существовании решения.Эта работа посвящена изучению вопросов существования решения двухточечных краевых задач для систем обыкновенных сингулярных дифференциальных уравнений второго порядка.

Библ. 5.

УДК 517.927.4

п.1. Вначале мы докажем теорему для квазилинейных сингулярных систем. Для этого нам понадобится следующая сингулярная задача Коши

$$x'' + K\frac{x'}{t} = F(t,x,x'), \tag{1}$$

$$x(0) = c, \quad x'(0) = 0 \tag{2}$$

где $K + E - n \times n -$ матрица, симметричная, положительно определённая (E - единичная матрица), $x,c \in R^n$ $F(t,x,x') \in C(I_\delta \times R^{2n})$ $I_\delta = [0,\delta]$, $I_0 = (0,\delta]$, $\delta > 0$

Под решением задачи (1), (2) будем понимать функцию $x(t) \in C^2(I_\delta)$, удовлетворяющую условиям (2) и при $t \in I_0$ уравнению(1).

Теорема 1. Решение задачи (1), (2) существует для некоторого $\delta > 0$ Кроме того, если F удовлетворяет локальному условию Липшица по x,x', то это решение единственно и $x(t),x'(t)$ непрерывно зависит от $c \in R^n$

Доказательство этой теоремы см.[1]

Для решения этой задачи справедливо равенство (см. [1])

$$x''(0) = (E+K)^{-1}F(0,c,0).$$

Заметим, что если F не удовлетворяет условию Липшица, то задача (1), (2) может иметь несколько решений.

Действительно, пусть $n = 1, x \in R$

Рассмотрим

$$x'' + \frac{\nu}{t}x' = x^{\frac{1}{3}} \qquad \nu > -1, \qquad x(0) = x'(0) = 0.$$

Эта задача имеет два решения $x_1(t) \equiv 0$, $x_2(t) = At^3$, где $3(2+\nu)A^{\frac{2}{3}} = 1$.

Теперь рассмотрим двухточечную краевую задачу для квазилинейной системы

$$x'' + K\frac{x'}{t} = A(t)x + B(t)x' + g(t,x,x') \tag{3}$$

$$x'(0) = 0 \tag{4}$$

$$Ux(\tau) + Vx'(\tau) = a \tag{5}$$

где $x, a \in R^n, t \in I = [0,\tau], \tau > 0$, K - матрица точно такая же как и в теореме 1.

$A(t), B(t) - n \times n -$ матрицы, элементы которых есть непрерывные функции для $t \in I, U, V -$ постоянные $n \times n -$ матрицы, $g \in C(I \times R^{2n})$ и существует постоянная $m_0 > 0$, такая, что $|g| < m_0$, $\forall (t,x,x') \in I \times R^{2n}$ рассмотрим

Наряду с задачей (3)-(5) рассмотрим однородную задачу

$$x'' + K\frac{x'}{t} = A(t)x + B(t)x' \tag{6}$$

$$x'(0) = 0 \tag{7}$$

$$Ux(\tau) + Vx'(\tau) = 0 \tag{8}$$

Теорема 2. Пусть однородная задача (6)-(8) имеет только нулевое решение. Тогда задача (3)-(5) имеет решение для любого $a \in R^n$

Доказательство. Обозначим через $X(t), t \in I$ матрицу с элементами $x_{i,k}(t), t \in I$, каждый столбец которой есть решение системы (6) с условиями

$x_{i,j}(0) = \delta_{i,j}$ $\quad x'_{i,j}(0) = 0$, $\delta_{i,j} = 0$, $i \neq j$ и $\delta_{i,j} = 1$.

Такое решение существует (см.[1]).

Следовательно $X(0) = E$, $\quad X'(0) = 0$ и решение задачи Коши (2) для системы (6) может быть записано в виде

$$x(t) = X(t)c \tag{9}$$

Выберем теперь c таким образом, чтобы выполнялось условие (8). Подставляя (9) в (8) получим

$$(UX(\tau) + VX'(\tau))c = 0$$

Так как по условию нулевое решение (6)-(8) единственно, то

$$Det(UX(\tau) + VX'(\tau)) \neq 0 \tag{10}$$

Обратимся теперь к задаче (3), (2). Пусть $x(t,c)$ есть решение задачи Коши (3), (2). Сделаем замену

$$x(t,c) = X(t)c + z(t,c), \tag{11}$$

где $z(t,c)$ - новая вектор-функция. Подставляя (11) в (3) получим

$$z'' + K\frac{z'}{t} = Az + Bz' + \bar{g}(t,z,z') \tag{12}$$

$$z(0,c) = z'(0,c) = 0, \tag{13}$$

где $\bar{g}(t,z,z') = g(t, X(t)c + z, X'(t)c + z')$. Покажем, что существует постоянная $m > 0$, такая что

$$|z(t,c)| + |z'(t,c)| < m, \quad \forall (t,c) \in I \times R^n \tag{14}$$

Из (12), (13) находим

$$z'(t,c) = \int_0^t \exp(K \ln\frac{s}{t})\left[A(s)z(s,c) + B(s)z'(s,c) + g_0(s,c)\right]ds \tag{15}$$

$$z(t,c) = \int_0^t z'(s,c)ds, \tag{16}$$

где $g_0(s,c) = \bar{g}(s,z(s,c),z'(s,c))$)

Очевидно, что $|g_0(s,c)| < m_0$, $\forall (s,c) \in I \times R^n$ Пусть постоянные $L > 0, \lambda \in (-1,+\infty)$ таковы, что $\|e^{K\ln t}\| < Lt^{\lambda}$, $0 < t \le \tau$ Очевидно, что $\lambda = \min(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$, где $\lambda_r, (r = 1,\dots,n)$ есть собственные значения матрицы K

Теперь из (15), (16) следует

$$|z'(t,c)| \le L\int_0^t \left(\frac{s}{t}\right)^{\lambda}\left[\|A(s)\|\int_0^s |z'(\alpha,c)|d\alpha + \|B(s)\||z'(s,c)| + m_0\right]ds$$

откуда, предполагая $\lambda \ge 0$ (тогда $\left(\frac{s}{t}\right)^{\lambda} \le 1$)

$$|z'(t,c)| \le Pt + Q\int_0^t |z'(s,c)|ds \tag{17}$$

В случае, если $\lambda \in (-1,0)$,тогда $\left(\frac{s}{t}\right)^{\lambda} \ge 1$

аналогично получаем

$$|z'(t,c)| \le P_1 t + Q_1\int_0^t \left(\frac{s}{t}\right)^{\lambda}|z'(s,c)|ds, \tag{18}$$

где $P, Q, P_1, Q_1 > 0$ - некоторые постоянные. В случае $\lambda \ge 0$ из (17) следует

$$\frac{|z'(t,c)|Q}{Pt + Q\int_0^t |z'(s,c)|ds} \le Q,$$

интегрируя, найдём

$$\int_0^t \frac{Q|z'(\alpha,c)|d\alpha}{P\alpha + Q\int_0^{\alpha} |z'(s,c)|ds} \le Qt$$

или $\int_0^t \frac{Q|z'(\alpha,c)|d\alpha}{Pt + Q\int_0^\alpha |z'(s,c)|ds} \le Qt$

Выполняя интегрирование по α и потенцируя, находим

$$Pt + Q\int_0^t |z'(s,c)|ds \le Pt\exp Qt \tag{19}$$

Из (19) и (17) следует

$$|z'(t,c)| \le Pt\exp Qt \le P\tau\exp Q\tau, \quad \forall t,c \in I \times R^n \tag{20}$$

В случае $\lambda \in (-1,0)$ необходимо вначале умножить (18) на t^λ, после чего рассуждения полностью аналогичные предыдущим дают такую же оценку

$$|z'(t,c)| \le P_1\tau\exp Q_1\tau, \quad \forall t,c \in I \times R^n \tag{21}$$

Из (20), (21) и (16) следует

$$|z(t,c)| \le P_0\tau^2\exp(Q_0\tau), \quad \forall t,c \in I \times R^n \tag{22}$$

где $P_0 = \max(P, P_1)$, $Q_0 = \max(Q, Q_1)$.

Из (20), (21), (22), следует справедливость оценки (14).

Обратимся теперь к решению задачи (3)-(5). Постараемся в задаче (3), (2) выбрать $c \in R^n$ таким образом, чтобы полученное решение $x(t,c)$ удовлетворяло условию (5). Подставляя (11) в (5) найдём

$$\left(UX(\tau) + VX'(\tau)\right)c = a - Uz(\tau,c) - Vz(\tau,c) \tag{23}$$

откуда используя (10), получим

$$c = \left(UX(\tau) + VX'(\tau)\right)^{-1}(a - Uz(\tau,c) - Vz'(\tau,c)) := g_1(c) \qquad)$$

или $\qquad c = g_1(c) \qquad (24)$

В силу оценки (14) существует постоянная $M > 0$, для которой $|g_1(c)| < M$, $\forall c \in R^n$

После этого доказательство теоремы 2 завершается аналогично тому, как это было сделано в теореме существования (см.[4], стр.24). Тем самым теорема 2 доказана.

Если в теореме 2 $K = 0$, то она следует из результата Р.Конти [5]

Замечание. В теореме 2 вместо условия (5) можно рассмотреть более общее условие

$$\sum_{k=1}^{p}\left[U_k x(t_k) + V_k x'(t_k)\right] = \varphi(x),$$

где $t_k \in I$, U_k, V_k-заданные $n \times n$-матрицы и $\varphi(x)$ непрерывный вектор-функционал определённый на классе функций $x \in C^2(I)$,

причём $\frac{|\varphi(x)|}{|x|} \to 0$ при $|x \to \infty|$.

п.2. Рассмотрим задачу

$$x'' + k\frac{x'}{t} = f(t,x,x') \tag{25}$$

$$x'(0) = 0, \tag{26}$$

$$x(\tau) = b, \tag{27}$$

где $x, b \in R^n$, $k \in R$, $k > -1$, $f \in C(I \times R^{2n})$.

Теорема 3. Пусть выполняются условия:

(А) Существует число $h > 0$ и симметричная положительно определённая матрица H такие что для $x, y \in R^n$,

$$\left(Hx, f(t,x,y)\right) + \left(Hy, y\right) \geq 0$$

при $|x| \geq h$, $\left(Hx, y\right) = 0$, $\forall t \in I$

(Б) Для любого $M_0 > 0$ существует $p_0 > 0$ и непрерывная положительная функция $b(s) > 0$, $s \geq 0$, такие что $b(s) \to 0$, $s \to +\infty$ причём

$$\left|f(t,x,y)\right| \leq p_0\left(1 + |y|^2 b\left(|y|^2\right)\right), \quad \forall t \in I, \quad |x| \leq M_0, \quad \forall y \in R^n$$

Тогда задача (25) - (27) имеет решение для любого $b \in R^n$. Для доказательства теоремы 3 нам понадобится следующая лемма.

Лемма. Пусть $x(t) \in C^2(I)$ есть решение системы (25), для которой выполняется условие (Б). Тогда для любого $M > 0$ можно указать такое $N > 0$ что если $x(t)$ есть любое решение (25), для которого выполняется оценка $|x(t)| \leq M$, $\forall t \in I$, то

$$|x'(t)| \leq N, \quad \forall t \in I \tag{28}$$

Доказательство леммы. Пусть $z(t) \in R$, $z \in C^2(I)$ и $m_k = \max\left|z^{(k)}(t)\right|$ $t \in I$, $(k = 0,1,2)$ Тогда справедливо неравенство ([3], стр.393)

$$m_1^2 \leq \left(8\exp 2\right)^2 m_0 \max\left(m_2, 2m_0\tau^{-2}\right)$$

Заменяя максимум двух чисел их суммой, получим более грубую, но более удобную оценку

$$m_1^2 \leq q_0\left(m_0 + m_2\right) \tag{29}$$

где $q_0 = m_0\left(8\exp 2\right)^2 \max\left(1; 2\tau^{-2}\right)$.

Пусть теперь $x \in R^n$, $x \in C^2(I)$. Обозначим $M_k = \max\left|x^{(k)}(t)\right|$, $t \in I$, $(k = 0,1,2)$ Полагая $x = (x_1, \ldots, x_n)$ из неравенства (29) имеем

$$\left|x_\nu'(t)\right|^2 \leq q_1(M_0 + M_2), \quad t \in I, \quad (\nu = 1,2,\ldots,n), \tag{30}$$

где $q_1 = M_0 q_0 m_0^{-1}$

Складывая все неравенства (30) для $\nu = 1,\ldots,n$ и обозначая $q = nq_1$, получим

$$M_1^2 \leq q\left(M_0 + M_2\right) \tag{31}$$

Теперь из (25), (26) находим

$$x'(t) = \int_0^t \left(\frac{s}{t}\right)^k f(s, x(s), x'(s))ds$$

и опять же из (1) следует

$$\left|x''(t)\right| \leq \left|f(t, x(t), x'(t)\right| + \frac{|k|}{t}\int_0^t \left(\frac{s}{t}\right)^k \left|f(s, x(s), x'(s))\right|ds \leq$$

$$\leq p\left[1 + x'^2(t)b(x'^2(t) + \frac{|k|}{t}\int_0^t \left(\frac{s}{t}\right)^k (1 + x'^2(s)b(x'^2(s))ds\right]$$

Не уменьшая общности, мы можем считать, что $x'^2 b(x'^2)$ есть неубывающая функция x'^2 Взяв значение t, при котором $|x''(t)|$ достигает максимума, из последнего неравенства находим, используя (31),

$$M_2 \le p\left[1 + q(M_0 + M_2)b(q(M_0 + M_2))\right]\left(1 + \frac{|k|}{1+k}\right) \tag{32}$$

Так как при увеличении M_2 $b(q(M_0 + M_2) \to 0$, то из (32) следует ограниченность M_2, а из (31) ограниченность $M_1 = \max|x'(t)|, t \in I$ Тем самым оценка (28) доказана.

Доказательство теоремы 3. Обозначим через $m > 0$ такое число, чтобы эллиптический цилиндр $(Hx, x) = 2m,\ t \in I$ содержал внутри себя цилиндр $|x| = M_0 = \max(h, |b|)$, $t \in I$ Так что $(Hb, b) < 2m$. Далее выберем $M > 0$ таким образом, чтобы цилиндр $|x| = M$, $t \in I$ содержал внутри себя эллиптический цилиндр $(Hx, x) = 2m,\ t \in I$ Этому значению M согласно лемме, соответствует число $N > 0$ Для этих чисел M и N определим функцию

$$F(t,x,y) = \frac{f(t,x,y)}{1 + \left[\sigma(|x| - M) + \sigma(|y| - N)\right]|f(t,x,y)|} + \frac{x}{(Hx,x)}\sigma\big((Hx,x) - 2m\big) \tag{33}$$

где $\sigma(s) \ge 0$ задана следующим образом: $\sigma(s) = 0,\ s < 0$; $\sigma(s) = s,\ 0 \le s \le 1$; $\sigma(s) = 1,\ s > 1$. Очевидно, что $F(t,x,y)$ непрерывна и ограничена для $(t,x,y) \in I \times R^{2n}$ Поэтому уравнение

$$x'' + \frac{k}{t}x' = F(t,x,x') \tag{34}$$

по теореме 2, имеет решение, удовлетворяющее условиям (26), (27). (Легко проверить, что однородная система $x'' + kx't^{-1} = 0$ $x'(0) = 0,\ x(0) = 0,$ имеет только нулевое решение.) Обозначим решение задачи (34), (26), (27) через $x(t)$ и покажем что справедлива оценка

$$\big(Hx(t), x(t)\big) \le 2m\ ,\ \forall t \in I \tag{35}$$

С этой целью рассмотрим функцию

$$r(t) = \frac{1}{2}\big(Hx(t), x(t)\big),\ \ t \in I \tag{36}$$

Последовательно дифференцируя , получим

$$r'(t) = \big(Hx(t), x'(t)\big) \tag{37}$$

$$r''(t) = \big(Hx(t), x''(t)\big) + \big(Hx'(t), x'(t)\big) = \tag{38}$$

$$= -\frac{k}{t}r'(t) + \big(Hx(t), F(t, x(t), x'(t))\big) + \big(Hx'(t), x'(t)\big)$$

Из формул (33), (37), (38) и условия (A) следует, что функция $r(t)$ не может иметь максимума в тех точках $t \in I$, где $r(t) > m$ Действительно, пусть при некотором $t \in I$, $r(t) > m$, $r'(t) = 0$, $r''(t) \le 0$ Но из (38) следует, что $r''(t) \ge \sigma\big(\big(Hx(t), x(t)\big) - 2m\big) > 0$ Получили противоречие. Покажем теперь, что

$$\big(Hx(0), x(0)\big) \le 2m \tag{39}$$

Предполагая противное, из (38) в некоторой окрестности точки $t = 0$ находим при $t > 0$

$$r'(t) = \int_0^t \left(\frac{s}{t}\right)^k \left[\left(Hx(s), F(s,x(s),x'(s))\right) + \left(Hx'(s),x'(s)\right)\right] ds >$$

$$> \frac{t}{2(k+1)} \sigma\left(\left(Hx(0),x(0)\right) - 2m\right) > 0$$

Так как функция $r(t)$ не может иметь максимума при $r(t) > m$, то $r'(t) > 0$, $r(t) > m$ $\forall t \in I$ Но тогда при $t = \tau$ получим $r(b) > m$ или $(Hb,b) > 2m$. Но это противоречит выбору числа m Тем самым оценка (39) доказана. Так как $r(0) < m$ и $r(\tau) \le m$, и так как $r(t)$ не может иметь максимума при тех t где $r(t) > m$, то $r(t) \le m$, $\forall t \in I$ и, следовательно, $x(t) \le M$, $\forall t \in I$ (в силу выбора числа M). При выполнении этих оценок система (34) принимает вид

$$x'' + \frac{k}{t}x' = \frac{f(t,x(t),x'(t))}{1 + \sigma(|x'| - N)|f(t,x(t),x'(t))|} \qquad (40)$$

Так как f удовлетворяет условию (Б), то правая часть (40) тем более будет удовлетворять этому условию, и тогда из леммы следует оценка $|x'(t)| \le N$, $\forall t \in I$ Так как при этом $\sigma(|x'(t)| - N) \equiv 0$, $\forall t \in I$, то $x(t)$ есть решение задачи (25) - (27). Тем самым теорема 3 доказана.

Далее вместо условия (27) рассмотрим условия

$$x(\tau) = b - Bx'(\tau) \qquad (41)$$

$$x(\tau) = -Bx'(\tau) \qquad (42)$$

Теорема 4. Пусть функция f удовлетворяет условиям (А) и (Б) теоремы 3. Тогда задача (25), (26), (41), где B - положительно определенная матрица перестановочная с H, имеет решение.

Теорема 5. Пусть функция f удовлетворяет условиям (А) и (Б) теоремы 3. Тогда задача (25), (26), (42), где B - неотрицательно определенная матрица перестановочная с H, имеет решение.

Доказательства теорем 4 и 5 проходят с помощью тех же рассуждений, которые были использованы при доказательстве теоремы 3.

Заметим, что краевые задачи типа (25), (26), (27) и (25), (26), (41) в случае $n = 1$, $x \in R$ изучались в [4], гл.9, §2.

Список литературы

[1] Гризанс Г.П. О начальных задачах для систем сингулярных ОДУ второго порядка. ЛГУ- Рига, 1988.- 15 с. - Деп. в ЛатНИИНТИ 30.05.88, № 123-Ла88

[2] Александров П.С. Комбинаторная топология. М. Гостехиздат, 1947, 660с.

[3] Харди Г.Г., Литтльвуд Д.Е., Полиа Г. Неравенства. М., ИЛ, 1948, 456 с.

[4] Васильев Н.И., Клоков Ю.А. Основы теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. - Рига, Зинатне, 1978, 184 с

[5] Conti R. Equazioni differenziali ordinarie quasilineari con condizioni lineari. "Ann.mat. pura ed appl.", 1962, vol. 57. P 49-61.

Yu. A. Klokov. Existence theorems for systems of singular ordinary differential equations.

Summary. The boundary value problem

$$x'' + k\frac{x'}{t} = f(t,x,x'),\quad x'(0) = 0,\quad x(\tau) = b - Bx'(\tau),$$

is investigated, where $x,b \in R^n$ $K,B - n\times n$ - matrices and $f \in C(I \times R^{2n})$, $I = [0,\tau]$. Four existence theorems are established under different sets of conditions imposed on K,B and f
УДК 517.927.4

J. Klokovs. Eksistences teorēmas singulāro parasto diferenciālvienādojumu sistēmām.

Anotācija. Tiek pētīta robežproblēma

$$x'' + k\frac{x'}{t} = f(t,x,x'),\quad x'(0) = 0,\quad x(\tau) = b - Bx'(\tau),$$

kur $x,b \in R^n$ $K,B - n\times n$ - matricas un $f \in C(I \times R^{2n})$, $I = [0,\tau]$. Pieradītas četrās atrisinājumu eksistences teorēmas pie dažādiem nosacījumiem uz K,B un f

Институт математики и информатики
Латвийского университета
Б. Райниса 29
LV-1459, Рига, Латвия

Поступила 25.09.1998

Два условия компактности

А.Я.Лепин

Аннотация. Для решений дифференциального уравнения n-го порядка доказывается эквивалентность двух условий компактности.

УДК 517.927

Наша цель   рассмотреть два условия компактности решений уравнения

$$x^{(n)} = f(t, x, ..., x^{(n-1)}), \tag{1}$$

где f $[a,b] \times R^n \to R$ удовлетворяет условиям Каратеодори. Пусть $\alpha, \beta \in C([a,b], R)$, $\alpha \leq \beta$ и S множество решений x $(c,d) \to R$ уравнения (1), удовлетворяющих неравенствам $\alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t)$ для $t \in (c,d)$. Для компактности решений из S применяются следующие условия (см.[1]-[2]).

1. Для любых $c \in [a,b)$ и $d \in (c,b]$ найдется $M \in (0,\infty)$ такое, что для любого решения x $(c,d) \to R \in S$ справедливо неравенство $\mid x^{(n-1)}(t) \mid M$ для $t \in (c,d)$.

2. Для любого $\varepsilon \in (0,\infty)$ найдется $M \in (0,\infty)$ такое, что для любых $c \in [a,b)$, $d \in (c,b]$ и решения x $(c,d) \to R \in S$ из $d - c > \varepsilon$ следует $\mid x^{(n-1)}(t) \mid M$ для $t \in (c,d)$.

Ясно, что из условия 2 следует условие 1. Покажем, что из условия 1 следует условие 2. Предположим противное. Тогда найдутся ε и последовательность x_k $(c_k, d_k) \to R \in S$ такая, что $d_k - c_k > \varepsilon$, $c_k \to c$, $d_k \to d$ и

$$\sup\{\mid x_k^{(n-1)}(t) \mid : t \in (c_k, d_k)\} > k. \tag{2}$$

Рассмотрим случай, когда $c_k \leq c$ и $d_k \leq d$. Для интервала (c,d) из 1 найдем M. Из условий Каратеодори следует, что найдется $\delta \in (0,\infty)$ такое, что справедлива оценка $\mid x_k^{(n-1)}(t) \mid < 2M$ для $t \in ((-\delta, d+\delta) \cap (c_k, d_k))$, что противоречит неравенству (2) для достаточно больших k.

Рассмотрим случай, когда $c_k \leq c$ и $d_k < d$. Из предыдущего ясно, что найдется $N \in (0,\infty)$ такое, что $\mid x_k^{(n-1)}(t) \mid < N$ для $t \in (c_k, c)$. Из 1 следует компактность x_k на интервале (c, d_1). Следовательно, найдется подпоследовательность $x_{\varphi_1(k)}(k)$, которая равномерно сходится на (c, d_1). Аналогично найдем подпоследовательность $x_{\varphi_m(k)}(k)$, которая равномерно сходится на (c, d_m). Диагональная подпоследовательность $x_{\varphi(k)}(k)$ сходится к $x : (c,d) \to R \in S$. Из 1 следует оценка $\mid x^{(n-1)}(t) \mid < M$

для $t \in (c, d)$. Теперь из равномерной сходимости и условий Каратеодори следует оценка $| x^{(n-1)}_{\varphi(k)}(t) | < 2M$ для $t \in (c, d_{\varphi(k)})$ и достаточно больших k, что противоречит неравенству (2).

Случаи, когда $c < c_k$, $d \leq d_k$ и $c < c_k$, $d_k < d$, рассматриваются аналогично.

Общий случай с помощью перехода к подпоследовательности сводится к одному из рассмотренных случаев.

Список литературы

[1] Лепин А.Я. Общая краевая задача для уравнения третьего порядка. Matemātika. Diferenciālvienādojumi: Zinātniskie raksti. 605.sējums. Rīga: LU, 1997. 92.-103.lpp.

[2] A.Ya.Lepin, A.D.Myshkis. General nonlocal nonlinear boundary value problem for differential equation of 3rd order. Nonlinear Analysis, Theory, Methods, Applications. 1997, Vol.28, N 9. P 1533-1543.

A.Ya.Lepin. Two conditions of compactness

Summary The equivalence of two conditions of compactness for solutions of n-th order differential equations is proved.

1991 MSC 34C

A.Lepins. Divi kompaktuma nosacījumi

Anotācija. N-tās kārtas diferenciālvienādojuma atrisinājumiem pierādīta divu kompaktuma nosacījumu ekvivalence.

Институт математики и информатики
Латвийского университета
Рига, б.Райниса, 29

Поступила 18.06.98

Разрешимость краевых задач между верхней и нижней функциями

А.Я.Лепин, Л.А.Лепин

Аннотация. Для краевой задачи

$$x'' = f(t,x,x'), \quad H_1x = h_1, \quad H_2x = h_2, \quad \alpha \le x \le \beta$$

изучаются условия, обеспечивающие существование решения.

Библ. 2.

УДК 517.927

В работе [1] подробно изучена обобщенная разрешимость двухточечной краевой задачи

$$x'' = f(t,x,x'), \quad H_1(x(a),x(b),x'(a),x'(b)) = h_1,$$
$$H_2(x(a),x(b),x'(a),x'(b)) = h_2, \quad \alpha \le x \le \beta,$$

где H_1 и H_2 принадлежат определенным классам монотонности, α - обобщенная нижняя функция, а β обобщенная верхняя функция. Для доказательства теоремы $Tb50$ была разработана новая методика доказательства теорем существования, которая в дальнейшем позволила существенно ослабить условия на H_1 и H_2 для краевой задачи

$$x'' = f(t,x,x'), \quad H_1x = h_1, \quad H_2x = h_2, \quad \alpha \le x \le \beta.$$

Наша цель - изложить эту методику доказательства теорем существования.

Фиксируем $a \in R$, $b \in (a,\infty)$ и $I = [a,b]$. Введем обозначения. $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\forall$, $\exists$ логические символы "и", "или", "влечет", квантор всеобщности и квантор существования. Для функций x,y $I \to R$ неравенства $x \le y$ и $x < y$ понимаются поточечно. $\delta(x,y,z)$ $(x + \mid x-y \mid$ $\mid y-z \mid +z)2^{-1}$ $card(M)$ кардинальное число множества M

$Car(I \times R^2, R)$ класс функций f $I \times R^2 \to R$, удовлетворяющих условию Каратеодори: $f(\cdot,x,y)$ измерима на I при всех $t \in I$, и для любого компактного множества $P \subset R^2$ найдется функция $g \in L(I,R)$ такая, что для всех $(t,x,y) \in I \times P$ справедливо неравенство $\mid f(t,x,y) \mid \le g(t)$.

$L(I,R)$ класс функций $x \quad I \to R$, суммируемых по Лебегу с обычной нормой.

$C(I,R)$ класс непрерывных функций $x \quad I \to R$ с обычной нормой.

$AC_1(I,R)$ класс непрерывных функций $x \quad I \to R$ с абсолютно непрерывной первой производной. Для $x \in AC_1(I,R)$ $\|x\|_{AC_1} = \|x\|_C + \|x''\|_L$.

$A(I,R) = A_f(I,R)$ класс функций $\alpha \quad I \to R$, удовлетворяющих условию Липшица и неравенству

$$\alpha'(t_2) - \alpha'(t_1) \geq \int_{t_1}^{t_2} f(t, \alpha(t), \alpha'(t))dt$$

для любых $t_1 \in (a,b)$ и $t_2 \in (t_1, b)$, в которых функция α имеет производную. Функции из $A(I,R)$ называются нижними функциями.

$B(I,R) = B_f(I,R)$ класс функций $\beta \quad I \to R$, удовлетворяющих условию Липшица и неравенству

$$\beta'(t_2) - \beta'(t_1) \leq \int_{t_1}^{t_2} f(t, \beta(t), \beta'(t))dt$$

для любых $t_1 \in (a,b)$ и $t_2 \in (t_1, b)$, в которых функция β имеет производную. Функции из $B(I,R)$ называются верхними функциями.

$S(I,R) = S_f(I,R)$ множество решений $x \quad I \to R$ уравнения $x'' = f(t,x,x')$.

1. Разрешимость краевых задач при единственности решения задачи Коши и продолжимости решений

В [1] исследуется разрешимость краевых задач

$$x'' = f(t,x,x'), \quad H_1 x = h_1, \quad H_2 x = h_2, \quad \alpha \leq x \leq \beta, \quad U,$$

где $f \in Car(I \times R^2, R)$, $H_{1,2} \in C(AC_1(I,R), R)$, $h_{1,2} \in R$, $\alpha \in A(I,R)$, $\beta \in B(I,R)$, а U одно из условий

$$\{\oslash, \alpha'(a) \leq x'(a) \leq \beta'(a), \alpha'(a) \geq x'(a) \geq \beta'(a),$$

$$\alpha'(a) \leq x'(a) \leq \beta'(a) \wedge \alpha'(b) \geq x'(b) \geq \beta'(b),$$
$$\alpha'(a) \geq x'(a) \geq \beta'(a) \wedge \alpha'(b) \leq x'(b) \leq \beta'(b)\}.$$

Предполагается выполнение следующих условий. Для любых $\tau \in I$, $x_0, x_1 \in R$ единственно решение задачи Коши

$$x'' = f(t,x,x'), \quad x(\tau) = x_0, \quad x'(\tau) = x_1,$$

которое будем обозначать $s(x(\tau) = x_0 \wedge x'(\tau) = x_1)$. Любое решение уравнения $x'' = f(t,x,x')$ продолжимо на I.

В 1.1 приводятся необходимые для дальнейшего теоремы о существовании максимального и минимального решений основных краевых задач. Поведение решений подробно исследуется в 1.2. Это исследование позволило в 1.3 построить вложения интервала в $S(I,R)$, а в 1.4 построить вложения окружности в $S(I,R)$. В 1.5 доказывается разрешимость краевых задач.

1.1. Существование максимального и минимального решений основных краевых задач

В 1.1 приводятся теоремы о существовании максимальных и минимальных решений основных двухточечных краевых задач, которые постоянно будут использоваться в дальнейшем. Предполагается, что $\alpha \le \beta$.

Теорема 1. Пусть $x_a \in [\alpha(a), \beta(a)]$ и $x_b \in [\alpha(b), \beta(b)]$. Тогда существуют максимальное и минимальное решения краевой задачи

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x(a) = x_a, \quad x(b) = x_b, \quad \alpha \le x \le \beta. \tag{1}$$

Доказательство. Существование обобщенного максимального решения краевой задачи (1) следует из теоремы 1 работы [2]. Из параграфа 3 главы 3 работы [1] следует, что полученное обобщенное решение является обычным решением. Заменой x на $-x$ получаем существование минимального решения краевой задачи (1).

Теорема 2. Пусть $\alpha'(a) \le \beta'(a)$ и $x_b \in [\alpha(b), \beta(b)]$. Тогда существуют максимальное и минимальное решения краевой задачи

$$x'' = f(t, x, x'), \quad \alpha'(a) \le x'(a) \le \beta'(a), \quad x(b) = x_b, \quad \alpha \le x \le \beta. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть $H_1 x = \delta(\alpha'(a), x'(a), \beta'(a)) - x'(a)$. Рассмотрим краевую задачу

$$x'' = f(t, x, x'), \quad H_1 x = 0, \quad x(b) = x_b, \quad \alpha \le x \le \beta. \tag{3}$$

Существование обобщенного максимального решения краевой задачи (3) следует из теоремы 1 работы [2]. Из параграфа 3 главы 3 работы [1] следует, что полученное обобщенное решение является обычным решением, а из определения H_1 следует, что оно является решением краевой задачи (2). Заменой x на $-x$ получаем существование минимального решения краевой задачи (2).

Теорема 3. Пусть $\alpha'(a) \ge \beta'(a)$, $x'_a \in [\beta'(a), \alpha'(a)]$ и $x_b \in [\alpha(b), \beta(b)]$. Тогда существуют максимальное и минимальное решения краевой задачи

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x'(a) = x'_a, \quad x(b) = x_b, \quad \alpha \le x \le \beta. \tag{4}$$

Доказательство. Условие $x'(a) = x'_a$ запишем в виде $-x'(a) = -x'_a$. Тогда существование обобщенного максимального решения краевой задачи (4) следует из теоремы 1 работы [2]. Из параграфа 3 главы 3 работы [1] следует, что полученное обобщенное решение является обычным решением. Заменой x на $-x$ получаем существование минимального решения краевой задачи (4).

Теорема 4. Пусть $\alpha'(a) \le \beta'(a)$, $\alpha'(b) \le \beta'(b)$ и $x'_b \in [\alpha'(b), \beta'(b)]$. Тогда существуют максимальное и минимальное решения краевой задачи

$$x'' = f(t, x, x'), \quad \alpha'(a) \le x'(a) \le \beta'(a), \quad x'(b) = x'_b, \quad \alpha \le x \le \beta. \tag{5}$$

Доказательство. Пусть $H_1 x = \delta(\alpha'(a), x'(a), \beta'(a)) - x'(a)$. Рассмотрим краевую задачу

$$x'' = f(t, x, x'), \quad H_1 x = 0, \quad x'(b) = x'_b, \quad \alpha \le x \le \beta. \tag{6}$$

Существование обобщенного максимального решения краевой задачи (6) следует из теоремы 1 работы [2]. Из параграфа 3 главы 3 работы [1] следует, что полученное обобщенное решение является обычным решением, а из определения H_1 следует, что оно является решением краевой задачи (5). Заменой x на $-x$ получаем существование минимального решения краевой задачи (5).

Теорема 5. Пусть $\alpha'(a) \le \beta'(a)$ и $\alpha'(b) \ge \beta'(b)$. Тогда существуют максимальное и минимальное решения краевой задачи

$$\begin{gathered} x'' = f(t, x, x'), \quad \alpha'(a) \le x'(a) \le \beta'(a), \\ \alpha'(b) \ge x'(b) \ge \beta'(b), \quad \alpha \le x \le \beta. \end{gathered} \tag{7}$$

Доказательство. Пусть $H_1 x = \delta(\alpha'(a), x'(a), \beta'(a)) - x'(a)$ и $H_2 x = x'(b)$ $\delta(\beta'(b), x'(b), \alpha'(b))$. Рассмотрим краевую задачу

$$x'' = f(t, x, x'), \quad H_1 x = 0, \quad H_2 x = 0 \quad \alpha \le x \le \beta. \tag{8}$$

Существование обобщенного максимального решения краевой задачи (8) следует из теоремы 1 работы [2]. Из параграфа 3 главы 3 работы [1] следует, что полученное обобщенное решение является обычным решением, а из определения H_1 и H_2 следует, что оно является решением краевой задачи (7). Заменой x на $-x$ получаем существование минимального решения краевой задачи (7).

Теорема 6. Пусть $\alpha'(a) \ge \beta'(a)$, $\alpha'(b) \le \beta'(b)$, $x'_a \in [\beta'(a), \alpha'(a)]$ и $x'_b \in [\alpha'(b), \beta'(b)]$. Тогда существуют максимальное и минимальное решения краевой задачи

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x'(a) = x'_a, \quad x'(b) = x'_b, \quad \alpha \le x \le \beta. \tag{9}$$

Доказательство. Условие $x'(a) = x'_a$ запишем в виде $-x'(a) = -x'_a$. Тогда существование обобщенного максимального решения краевой задачи (9) следует из теоремы 1 работы [2]. Из параграфа 3 главы 3 работы [1] следует, что полученное обобщенное решение является обычным решением. Заменой x на $-x$ получаем существование минимального решения краевой задачи (9).

Теоремы 1-6 симметричны при замене x на $-x$, а теоремы 1, 5-6 симметричны при замене t на $-t$.

Замечание 1. В дальнейшем часто будут встречаться различные проявления симметрии. Так, в [2] все теоремы сформулированы для максимального решения. Замена x на $-x$ переводит максимальное решение в минимальное, что дает возможность получать теоремы о существовании минимального решения из теорем о существовании максимального решения. Если сделать замену t на $-t$ в теоремах 2-3, то получим следующие теоремы.

Теорема 2t. Пусть $\alpha'(b) \geq \beta'(b)$ и $x_a \in [\alpha(a), \beta(a)]$. Тогда существуют максимальное и минимальное решения краевой задачи

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x(a) = x_a, \quad \alpha'(b) \geq x'(b) \geq \beta'(b), \quad \alpha \leq x \leq \beta.$$

Теорема 3t. Пусть $\alpha'(b) \leq \beta'(b)$, $x_a \in [\alpha(a), \beta(a)]$ и $x'_b \in [\alpha'(b), \beta'(b)]$. Тогда существуют максимальное и минимальное решения краевой задачи

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x(a) = x_a, \quad x'(b) = x'_b, \quad \alpha \leq x \leq \beta.$$

Нет смысла приводить все симметричные утверждения. При ссылках будет указываться теорема (лемма) без указания вида симметрии.

Следствие 1. Пусть $x'_a \in [\beta'(a), \infty)$, $x_b \in [\alpha(b), \beta(b)]$ и краевая задача

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x'(a) = x'_a, \quad x(b) = x_b, \quad \alpha \leq x \leq \beta \tag{10}$$

имеет решение. Тогда существует максимальное решение краевой задачи (10).

Доказательство. Пусть y решение краевой задачи (10). Тогда краевая задача

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x'(a) = x'_a, \quad x(b) = x_b, \quad y \leq x \leq \beta$$

по теореме 3 имеет максимальное решение z. Если y_1 решение краевой задачи (10), для которого найдется $\tau \in [a, b)$ такое, что $y_1(\tau) > z(\tau)$, то пусть $z_1(t)$ $\max\{y_1(t), z(t)\}$, $t \in I$. Тогда краевая задача

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x'(a) = x'_a, \quad x(b) = x_b, \quad z_1 \leq x \leq \beta$$

по теореме 3 имеет решение, что противоречит максимальности z.

Следствие 2. Пусть $x'_a \in [\beta'(a), \infty)$, $x'_b \in (-\infty, \beta'(b)]$ и краевая задача

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x'(a) = x'_a, \quad x'(b) = x'_b, \quad \alpha \leq x \leq \beta \tag{11}$$

имеет решение. Тогда существует максимальное решение краевой задачи (11).

Доказательство. Пусть y решение краевой задачи (11). Тогда краевая задача

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x'(a) = x'_a, \quad x'(b) = x'_b, \quad y \leq x \leq \beta$$

по теореме 6 имеет максимальное решение z. Если y_1 решение краевой задачи (11), для которого найдется $\tau \in I$ такое, что $y_1(\tau) > z(\tau)$, то пусть $z_1(t) = \max\{y_1(t), z(t)\}$, $t \in I$. Тогда краевая задача

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x'(a) = x'_a, \quad x'(b) = x'_b, \quad z_1 \leq x \leq \beta$$

по теореме 6 имеет решение, что противоречит максимальности z.

Лемма 1. Пусть $x \in C([0,1], S(I, R))$ и $\beta_1 \in B(I, R)$. Тогда

$$x_0 \leq \beta_1 \wedge (\forall \lambda \in [0,1))((x_\lambda(a) \leq \beta_1(a) \vee x'_\lambda(a) > \beta'_1(a)) \wedge$$

$$\wedge (x_\lambda(b) \leq \beta_1(b) \vee x'_\lambda(b) < \beta'_1(b)) \wedge x_\lambda \neq \beta_1) \Rightarrow x_1 \leq \beta_1.$$

Доказательство. Пусть $\lambda_* = \sup\{\lambda \in [0,1] \quad x_\lambda \leq \beta_1\}$. Тогда $x_{\lambda_*} \leq \beta_1$. Если $\lambda_* = 1$, то лемма доказана. Рассмотрим случай, когда $\lambda_* < 1$. Покажем, что

$$(\forall t \in (a,b))(x_{\lambda_*}(t) < \beta_1(t)), \tag{12}$$

$$x_{\lambda_*}(a) = \beta_1(a) \Rightarrow x'_{\lambda_*}(a) < \beta'_1(a), \tag{13}$$

$$x_{\lambda_*}(b) = \beta_1(b) \Rightarrow x'_{\lambda_*}(b) > \beta'_1(b). \tag{14}$$

Пусть $c \in (a,b)$ и $d \in I$ такие, что $x_{\lambda_*}(c) = \beta_1(c)$ и $x_{\lambda_*}(d) < \beta_1(d)$. Для краевой задачи

$$x'' = f(t,x,x'), \quad x(c) = \beta_1(c), \quad x(d) = (x_{\lambda_*}(d) + \beta_1(d))2^{-1}$$

по теореме 1 существует решение, что противоречит единственности решения задачи Коши.

Если $x_{\lambda_*}(a) = \beta_1(a)$ и $x'_{\lambda_*}(a) = \beta'_1(a)$, то пусть $c = (a+b)2^{-1}$ Из (12) следует, что $x_{\lambda_*}(c) < \beta_1(c)$. По теореме 1 краевая задача

$$x'' = f(t,x,x'), \quad x(a) = \beta_1(a), \quad x(c) = (x_{\lambda_*}(c) + \beta_1(c))2^{-1},$$

$$(\forall t \in [a,c])(x_{\lambda_*}(t) \leq x(t) \leq \beta_1(t))$$

имеет решение, что противоречит единственности решения задачи Коши. Аналогично доказывается (14).

Из (12-14) следует, что для достаточно малого $\delta \in (0,\infty)$ справедливо неравенство $x_\lambda \leq \beta_1$, $\lambda \in [\lambda_*, \lambda_* + \delta]$, что противоречит определению λ_*.

Замечание 2. Здесь мы встречаемся еще с одним проявлением симметрии. Замена λ на $1-\lambda$ меняет параметризацию на противоположную. Так, при замене λ на $1-\lambda$ в лемме 1 получаем следующее утверждение.

Лемма 1λ. Пусть $x \in C([0,1], S(I,R))$ и $\beta_1 \in B(I,R)$. Тогда

$$x_1 \leq \beta_1 \wedge (\forall \lambda \in (0,1])((x_\lambda(a) \leq \beta_1(a) \vee x'_\lambda(a) > \beta'_1(a)) \wedge$$

$$\wedge (x_\lambda(b) \leq \beta_1(b) \vee x'_\lambda(b) < \beta'_1(b)) \wedge x_\lambda \neq \beta_1) \Rightarrow x_0 \leq \beta_1.$$

Лемма 2. Пусть $x \in C([0,1], S(I,R))$ и $s \in S(I,R)$. Тогда

$$x_0 \leq s \wedge x_1(a) \leq s(a) \wedge (\forall \lambda \in [0,1))(x'_\lambda(a) \neq s'(a) \wedge x_\lambda(b) \leq s(b)) \Rightarrow x_1 \leq s.$$

Доказательство. Случай, когда $x'_\lambda(a) > s'(a)$, $\lambda \in [0,1)$, следует из леммы 1. Рассмотрим случай, когда $x'_\lambda(a) < s'(a)$, $\lambda \in [0,1)$. Пусть

$$\lambda_* = \sup\{\lambda \in [0,1] \quad x_\lambda \leq s \vee (\exists \tau \in I)((\forall t \in [a,\tau])(x_\lambda(t) \geq s(t)) \wedge$$

$$\wedge (\forall t \in [\tau, b])(x_\lambda(t) \leq s(t)))\}.$$

Ясно, что

$$x_{\lambda_*} \leq s \vee (\exists \tau \in I)((\forall t \in [a,\tau])(x_{\lambda_*}(t) \geq s(t)) \wedge (\forall t \in [\tau,b])(x_{\lambda_*}(t) \leq s(t))).$$

Если $\lambda_* = 1$, то из $x_1(a) \leq s(a)$ и $x'_1(a) \leq s'(a)$ следует $x_1 \leq s$. Если $\lambda_* < 1$, то для достаточно малого $\delta \in (0,\infty)$ для $\lambda \in [\lambda_*, \lambda_* + \delta]$ справедливо условие

$$x_\lambda \leq s \vee (\exists \tau \in I)((\forall t \in [a,\tau])(x_\lambda(t) \geq s(t)) \wedge (\forall t \in [\tau,b])(x_\lambda(t) \leq s(t))),$$

что противоречит определению λ_*.

1.2. Поведение решений

В 1.2 доказываются 3 леммы, которые являются основой для построения различных вложений интервала и окружности в множество решений $S(I,R)$. Подробное исследование поведения решений представляет и самостоятельный интерес. Предполагаются заданными $y,z \in S(I,R)$ такие, что $y < z$.

Введем обозначения. Пусть $\mu, \nu, x_a, x_b, x'_a, x'_b \in R$. Тогда

$$\pi_\mu = s(x(a) = \mu \wedge x'(a) = x'_a),$$

$$\rho_\mu = s(x(a) = x_a \wedge x'(a) = \mu),$$

$$\sigma_\nu = s(x(b) = x_b \wedge x'(b) = \nu),$$

$$\tau_\nu = s(x(b) = \nu \wedge x'(b) = x'_b).$$

Функцию $\pi_{*\mu}: I \to R$, $\mu \in [y(a), z(a)]$, определим следующим образом. Если $y \leq \pi_\mu \leq z$, то $\pi_{*\mu} = \pi_\mu$. Если найдется $t_0 \in [a,b)$ такое, что $\pi_\mu(t_0) = y(t_0)$, $\pi'_\mu(t_0) < y'(t_0)$ и для любого $t \in [a,t_0]$ справедливо неравенство $y(t) \leq \pi_\mu(t) \leq z(t)$, то $\pi_{*\mu}(t) = \pi_\mu(t)$ для $t \in [a,t_0]$ и $\pi_{*\mu}(t) = y(t) - t + t_0$ для $t \in [t_0,b]$. Если найдется $t_0 \in [a,b)$ такое, что $\pi_\mu(t_0) = z(t_0)$, $\pi'_\mu(t_0) > z(t_0)$ и для любого $t \in [a,t_0]$ справедливо неравенство $y(t) \leq \pi_\mu(t) \leq z(t)$, то $\pi_{*\mu}(t) = \pi_\mu(t)$ для $t \in [a,t_0]$ и $\pi_{*\mu}(t) = z(t) + t - t_0$ для $t \in [t_0,b]$. Аналогично определяется функция $\rho_{*\mu}: I \to R$, $x_a \in [y(a), z(a)]$. Функцию $\sigma_{*\nu}: I \to R$, $x_b \in [y(b), z(b)]$, определим следующим образом. Если $y \leq \sigma_\nu \leq z$, то $\sigma_{*\nu} = \sigma_\nu$. Если найдется $t_0 \in (a,b]$ такое, что $\sigma_\nu(t_0) = y(t_0)$, $\sigma'_\nu(t_0) > y'(t_0)$ и для любого $t \in [t_0,b]$ справедливо неравенство $y(t) \leq \sigma_\nu(t) \leq z(t)$, то $\sigma_{*\nu}(t) = y(t) + t - t_0$ для $t \in [a,t_0]$ и $\sigma_{*\nu}(t) = \sigma_\nu(t)$ для $t \in [t_0,b]$. Если найдется $t_0 \in (a,b]$ такое, что $\sigma_\nu(t_0) = z(t_0)$, $\sigma'_\nu(t_0) < z(t_0)$ и для любого $t \in [t_0,b]$ справедливо неравенство $y(t) \leq \sigma_\nu(t) \leq z(t)$, то $\sigma_{*\nu}(t) = z(t) - t + t_0$ для $t \in [a,t_0]$ и $\sigma_{*\nu}(t) = \sigma_\nu(t)$ для $t \in [t_0,b]$. Аналогично определяется функция $\tau_{*\nu}: I \to R$, $\nu \in [y(b), z(b)]$.

Лемма 3. Пусть $x_a \in [y(a), z(a)]$, $x_b \in [y(b), z(b)]$,

$$X = \{x \in S(I,R) : x(a) = x_a \wedge x(b) = x_b \wedge y \leq x \leq z\},$$

$$X_* = \{x_* \in X : (\forall x \in X)(x'(a) \leq x'_*(a) \vee x'(b) \leq x'_*(b))\},$$

$x_{*1}, x_{*2} \in X_*$, $x'_{*1}(a) < x'_{*2}(a)$, $\mu_1 = x'_{*1}(a)$, $\mu_2 = x'_{*2}(a)$, $\nu_1 = x'_{*1}(b)$ и $\nu_2 = x'_{*2}(b)$. Тогда

$$(\forall t \in (a,b))(x_{*1}(t) < x_{*2}(t)). \tag{15}$$

Если для любого $x_* \in X_*$ из $x_{*1} \leq x_* \leq x_{*2}$ следует $x_* = x_{*1}$ или $x_* = x_{*2}$, то

$$(\exists \mu \in (\mu_1, \mu_2))(\rho_{*\mu} \leq x_{*2}) \vee (\exists \nu \in (\nu_1, \nu_2))(\sigma_{*\nu} \geq x_{*1}), \tag{16}$$

$$(\exists \mu_0 \in (\mu_1, \mu_2))(\rho_{*\mu_0} \leq x_{*2}) \Rightarrow$$

$$(\forall\mu \in (\mu_1,\mu_2))((\forall t \in (a,b])(\rho_{*\mu}(t) < x_{*2}(t))\wedge \tag{17.1}$$

$$\begin{gathered}(\forall x_* \in X_*)(x'_*(a) < x'_{*2}(a) \Rightarrow \\ card\{t \in (a,b) \quad \rho_{*\mu}(t) = x_*(t)\} = 1))\wedge\end{gathered} \tag{17.2}$$

$$\begin{gathered}(\forall\nu \in (\nu_2,\nu_1))(\exists\tau \in (a,b))(\sigma_\nu(\tau) = x_{*1}(\tau)\wedge \\ (\forall t \in (\tau,b))(x_{*1}(t) < \sigma_\nu(t) < x_{*2}(t))),\end{gathered} \tag{17.3}$$

$$(\exists\nu_0 \in (\nu_2,\nu_1))(\sigma_{*\nu_0} \geq x_{*1}) \Rightarrow$$

$$(\forall\nu \in (\nu_2,\nu_1))((\forall t \in [a,b))(\sigma_{*\nu}(t) > x_{*1}(t))\wedge \tag{18.1}$$

$$\begin{gathered}(\forall x_* \in X_*)(x'_*(b) < x'_{*1}(b) \Rightarrow \\ card\{t \in (a,b) \quad \sigma_{*\nu}(t) = x_*(t)\} = 1))\wedge\end{gathered} \tag{18.2}$$

$$\begin{gathered}(\forall\mu \in (\mu_1,\mu_2))(\exists\tau \in (a,b))(\rho_\mu(\tau) = x_{*2}(\tau)\wedge \\ (\forall t \in (a,\tau))(x_{*1}(t) < \rho_\mu(t) < x_{*2}(t))).\end{gathered} \tag{18.3}$$

Пусть $y_1, z_1 \in X_*$, $y'_1(a) < z'_1(a)$,

$$\mu(\lambda) = y'_1(a) + \lambda(z'_1(a) - y'_1(a)), \quad \lambda \in [0,1],$$

$$\Lambda = \{\lambda \in [0,1] \quad \rho_{\mu(\lambda)} \in X_*\},$$

$$s_\lambda = \rho_{\mu(\lambda)}, \quad \lambda \in \Lambda.$$

Тогда Λ замкнутое множество и $0, 1 \in \Lambda$, а $[0,1]\backslash\Lambda$ открытое множество. Определим s на открытых интервалах множества $[0,1]\backslash\Lambda$. Пусть $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$, $\lambda_1 < \lambda_2$ и $(\lambda_1,\lambda_2) \cap \Lambda = \oslash$. Если найдется $\lambda \in (\lambda_1,\lambda_2)$ такое, что $\rho_{*\mu(\lambda)} \leq s_{\lambda_2}$, то $s_\lambda = \rho_{*\mu(\lambda)}$ для $\lambda \in (\lambda_1,\lambda_2)$. В противном случае $s_\lambda = \sigma_{*\nu(\lambda)}$ для $\lambda \in (\lambda_1,\lambda_2)$, где

$$\nu(\lambda) = s'_{\lambda_1}(b) + (\lambda - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)^{-1}(s'_{\lambda_2}(b) - s'_{\lambda_1}(b)), \quad \lambda \in [\lambda_1,\lambda_2].$$

Так определенное на $[0,1]$ отображение s инъективно непрерывно и обладает следующими свойствами: $s_0 = y_1$, $s_1 = z_1$, для любого $\lambda \in \Lambda$

$$s_\lambda(a) = x_a \wedge s_\lambda(b) = x_b \wedge y_1 \leq s_\lambda \leq z_1 \tag{19}$$

и для любого $\lambda \in [0,1]\backslash\Lambda$

$$(s_\lambda(a) = x_a \wedge s'_\lambda(a) > y'_1(a) \wedge (\forall t \in (a,b])(s_\lambda(t) < z_1(t)))\vee \tag{20.1}$$

$$(s_\lambda(b) = x_b \wedge s'_\lambda(b) > z'_1(b) \wedge (\forall t \in [a,b))(s_\lambda(t) > y_1(t))). \tag{20.2}$$

Доказательство. Докажем (15). Предварительно покажем, что

$$(\forall x_* \in X_*)(\forall x \in X)(x'(a) < x'_*(a) \wedge x'(b) > x'_*(b) \Rightarrow x \leq x_*). \tag{21}$$

Предположим противное:

$$(\exists x_* \in X_*)(\exists x \in X)(x'(a) < x'_*(a) \wedge x'(b) > x'_*(b) \wedge (\exists t_0 \in I)(x(t_0) > x_*(t_0))).$$

Ясно, что для достаточно малого $\delta \in (0,\infty)$

$$(\forall\mu \in [x'_*(a), x'_*(a) + \delta])(card\{t \in (a,b) : \rho_{*\mu}(t) = x(t)\} \geq 2). \tag{22}$$

Пусть $x_1(t) = \max\{x(t), x_*(t)\}$, $t \in I$, а x_2 минимальное решение краевой задачи

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x(a) = x_a, \quad x(b) = x_b, \quad x_1 \le x \le z,$$

которое существует по теореме 1. Из единственности решения задачи Коши следует $x_1(t) < x_2(t)$, $t \in (a, b)$. Докажем, что для достаточно малого $\delta \in (0, \infty)$ из минимальности x_2 следует

$$\rho_{*\mu}(t) < x_2(t), \quad \mu \in (x_2'(a) - \delta, x_2'(a)), \quad t \in (a, b].$$

В противном случае найдутся $\mu_0 \in (x_*'(a), x_2'(a))$ и $\tau \in (a, b]$ такие, что

$$\rho_{\mu_0}(\tau) = x_2(\tau), \quad x_1(t) < \rho_{\mu_0}(t) < x_2(t), \quad t \in (a, \tau).$$

Пусть $\beta_1(t) = \rho_{\mu_0}(t)$, $t \in [a, \tau]$ и $\beta_1(t) = x_2(t)$, $t \in [\tau, b]$. Тогда краевая задача

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x(a) = x_a, \quad x(b) = x_b, \quad x_1 \le x \le \beta_1$$

имеет решение по теореме 1, что противоречит минимальности x_2. Пусть

$$\mu_* = \inf\{\mu_0 \in (x_*'(a), x_2'(a)) \quad (\forall \mu \in (\mu_0, x_2'(a)))(\forall t \in (a, b])(\rho_{*\mu}(t) < x_2(t))\}.$$

Тогда для любого $\mu \in (\mu_*, x_2'(a))$

$$card\{t \in (a, b] \quad \rho_{*\mu}(t) = x_*(t)\} = 1,$$

$$card\{t \in (a, b] \quad \rho_{*\mu}(t) = x(t)\} = 1.$$

Из (22) следует $x_*'(a) < \mu_*$, а из единственности решения задачи Коши следует $\rho_{*\mu_*}(t) < x_2(t)$, $t \in (a, b)$. Если $\rho_{*\mu_*}(b) < x_b$, то для достаточно малого $\delta \in (0, \infty)$ и $\mu \in (\mu_* - \delta, \mu_* + \delta)$ справедливо неравенство $\rho_{*\mu}(t) < x_2(t)$, $t \in (a, b]$, что противоречит определению μ_*. Если $\rho_{*\mu_*}(b) = x_b$, то $\rho_{*\mu_*} = \rho_{\mu_*} \in X$. Из $\rho_{\mu_*}'(a) = \mu_* > x_*'(a)$, $x_* \in X_*$ и единственности решения задачи Коши следует $\rho_{\mu_*}'(b) < x_*'(b)$. Следовательно, $\rho_{\mu_*}(t) > x_1(t)$, $t \in (a, b)$, что противоречит минимальности x_2. Условие (21) доказано.

Из $x_{*2}'(a) > x_{*1}'(a)$, $x_{*1} \in X_*$ и единственности решения задачи Коши следует $x_{*2}'(b) < x_{*1}'(b)$. Применяя (21) при $x_* = x_{*2}$ и $x = x_{*1}$, имеем $x_{*1} \le x_{*2}$. Из единственности решения задачи Коши и $x_{*1} \le x_{*2}$ получаем (15).

Докажем (16). Предположим противное:

$$(\forall \mu \in (\mu_1, \mu_2))(\exists t \in (a, b])(\rho_{*\mu}(t) > x_{*2}(t) \wedge$$

$$\wedge (\forall \nu \in (\nu_2, \nu_1))(\exists t \in [a, b))(\sigma_{*\nu}(t) < x_{*1}(t)).$$

Пусть $\mu_* \in (\mu_1, \mu_2)$ достаточно близко к μ_2, а $\nu_* \in (\nu_2, \nu_1)$ достаточно близко к ν_1. Тогда

$$(\exists t_1 \in (a, b))(\rho_{\mu_*}(t_1) = x_{*2}(t_1) \wedge (\forall t \in (a, t_1))(\rho_{\mu_*}(t) < x_{*2}(t))),$$

$$(\exists t_2 \in (a, b))(\sigma_{\nu_*}(t_2) = x_{*1}(t_2) \wedge (\forall t \in (t_2, b))(\sigma_{\nu_*}(t) > x_{*1}(t)))$$

и для $\alpha_1(t) = x_{*1}(t)$, $t \in [a, t_2]$, $\alpha_1(t) = \sigma_{\nu_*}(t)$, $t \in [t_2, b]$, $\beta_1(t) \quad \rho_{\mu_*}(t)$, $t \in [a, t_1]$, $\beta_1(t) = x_{*2}(t)$, $t \in [t_1, b]$ справедливо неравенство $\alpha_1(t) < \beta_1(t)$, $t \in (a, b)$. По теореме 1 краевая задача

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x(a) = x_a, \quad x(b) = x_b, \quad \alpha_1 \le x \le \beta_1$$

имеет решение x_0. Из единственности решения задачи Коши следует

$$x'_{*1}(a) < x'_0(a) < x'_{*2}(a), \quad x'_{*1}(b) > x'_0(b) > x'_{*2}(b), \quad x_0 \in X. \tag{23}$$

Покажем, что условия (23) приводят к противоречию. Из компактности множества

$$M = \{x \in X \quad x'(a) \ge x'_0(a) \wedge x'(b) \ge x'_0(b)\}$$

следует существование $x_3 \in M$ такого, что $x'_3(a) \ge x'(a)$ для любого $x \in M$. Из $x_{*2} \in X_*$ и единственности решения задачи Коши следует $x'_3(a) < x'_{*2}(a)$, а из неравенств $x'_{*1}(a) < x'_3(a) < x'_{*2}(a)$ следует, что x_3 не принадлежит X_*. Следовательно, найдется $x_4 \in X$, для которого $x'_4(a) > x'_3(a)$ и $x'_4(b) > x'_3(b)$, что противоречит определению x_3. Условие (16) доказано.

Докажем (17.1). Из единственности решения задачи Коши следует $\rho_{*\mu_0}(t) < x_{*2}(t)$, $t \in (a, b)$. Если $\rho_{*\mu_0}(b) = x_b$, то $\rho_{*\mu_0} = \rho_{\mu_0} \in X$ и $\rho'_{\mu_0}(b) \ge x'_{*2}(b)$. Из единственности решения задачи Коши следует $\rho'_{\mu_0}(b) \ne x'_{*1}(b)$ и $\rho'_{\mu_0}(b) \ne x'_{*2}(b)$, а из противоречивости (23) для $x_0 \quad \rho_{\mu_0}$ следует $\rho'_{\mu_0}(b) > x'_{*1}(b)$, что противоречит условию $x_{*1} \in X_*$. Рассмотрим случай, когда $\rho_{*\mu_0}(b) < x_b$. Пусть

$$\mu_3 = \inf\{\mu_* \in (\mu_1, \mu_0) \quad (\forall \mu \in (\mu_*, \mu_0))(\forall t \in (a, b])(\rho_{*\mu}(t) < x_{*2}(t))\},$$

$$\mu_4 = \sup\{\mu_* \in (\mu_0, \mu_2) \quad (\forall \mu \in (\mu_0, \mu_*))(\forall t \in (a, b])(\rho_{*\mu}(t) < x_{*2}(t))\}.$$

Если $\mu_3 = \mu_1$ и $\mu_4 = \mu_2$, то (17.1) очевидно. Если $\mu_3 > \mu_1$, то пусть $\mu_5 = \mu_3$, а если $\mu_3 = \mu_1$ и $\mu_4 < \mu_2$, то пусть $\mu_5 = \mu_4$. Тогда $\mu_5 \in (\mu_1, \mu_2)$ и $\rho_{*\mu_5} \le x_{*2}$. Если $\rho_{*\mu_5}(b) = x_b$, то аналогично предыдущему получаем противоречие. Если $\rho_{*\mu_5}(b) < x_b$, то из единственности решения задачи Коши следует $\rho_{*\mu_5}(t) < x_{*2}(t)$, $t \in (a, b]$. Для достаточно малого $\delta \in (0, \infty)$ из непрерывной зависимости имеем $\rho_{*\mu}(t) < x_{*2}(t)$, $\mu \in (\mu_5 - \delta, \mu_5 + \delta)$, $t \in (a, b]$, что противоречит определению μ_5. Условие (17.1) доказано.

Аналогично доказывается (18.1).

Условия (17.2) и (18.2) непосредственно следуют из (17.1) и (18.1).

Покажем, что условие

$$(\exists \mu \in (\mu_1, \mu_2))(\rho_{*\mu} \le x_{*\mu}) \wedge (\exists \nu \in (\nu_2, \nu_1))(\sigma_{*\nu} \ge x_{*1}) \tag{24}$$

приводит к противоречию. Из (24) следуют (17.1) и (18.1). Аналогично доказательству условия (16) находим x_0, удовлетворяющее (23), что противоречиво.

Докажем (17.3). Если

$$\begin{gathered}(\exists \nu \in (\nu_2, \nu_1))(\exists \tau \in [a, b))(\sigma_\nu(\tau) = x_{*2}(\tau) \wedge \\ (\forall t \in (\tau, b))(x_{*1}(t) < \sigma_\nu(t) < x_{*2}(t))),\end{gathered} \tag{25}$$

то аналогично доказательству (16) условия находим x_0, удовлетворяющее (23), что противоречиво. Теперь из (25) получаем (17.3).

Аналогично доказывается (18.3).

Перейдем к доказательству остальных условий. Ясно, что Λ замкнуто, $0, 1 \in \Lambda$, $s_0 = y_1$ и $s_1 = z_1$. Из условия (16) следует

$$(\exists \lambda \in (\lambda_1, \lambda_2))(\rho_{*\mu(\lambda)} \leq s_{\lambda_2} \vee \sigma_{*\nu(\lambda)} \geq s_{\lambda_1}).$$

Если найдется $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$ такое, что $\rho_{*\mu(\lambda)} \leq s_{\lambda_2}$, то из (17.1) для любого $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$ следует

$$\rho_{*\mu(\lambda)}(t) < s_{\lambda_2}(t), \quad t \in (a, b]. \tag{26}$$

Если найдется $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$ такое, что $\sigma_{*\nu(\lambda)} \geq s_{\lambda_1}$, то из (18.1) для любого $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$ следует

$$\sigma_{*\nu(\lambda)}(t) > s_{\lambda_1}(t), \quad t \in [a, b). \tag{27}$$

Условие (19) следует из условия (15), условие (20.1) следует из условия (26), а условие (20.2) следует из условия (27). Инъективность s следует из (19) и (20).

Докажем непрерывность s. Непрерывность s на интервале $[\lambda_1, \lambda_2]$ не вызывает сомнений. Докажем непрерывность для $\lambda_0 \in \Lambda$. Для этого по $\varepsilon \in (0, \infty)$ найдем $\delta \in (0, \infty)$ такое, что из $\lambda \in [0, 1]$ и $\mid \lambda - \lambda_0 \mid < \delta$ следует $\|s_\lambda - s_{\lambda_0}\| < \varepsilon$. Пусть $\delta_1 \in (0, \infty)$ такое, что из $\lambda \in [0, 1]$ и $\mid \lambda - \lambda_0 \mid < \delta_1$ следует $\|\rho_{*\mu(\lambda)} - s_{\lambda_0}\| < \varepsilon$, а $\delta_2 \in (0, \delta_1)$ такое, что для $\nu \in R$ из $\mid \nu - s'_{\lambda_0}(b) \mid < \delta_2$ следует $\|\sigma_{*\nu} - s_{\lambda_0}\| < \varepsilon$. Если $\lambda_0 = 0$, то $\delta_3 = \delta_2$. Пусть $\lambda_0 > 0$. Если существует $\lambda_3 \in (0, \lambda_0)$ такое, что $(\lambda_3, \lambda_0) \cap \Lambda = \emptyset$, то выберем $\delta_3 \in (0, \lambda_0 - \lambda_3)$ так, чтобы $\|s_\lambda - s_{\lambda_0}\| < \varepsilon$ для $\lambda \in (\lambda_0 - \delta_3, \lambda_0)$. В противном случае пусть $\lambda_3 \in (0, \lambda_0) \cap \Lambda$ такое, что $\mid s'_{\lambda_3}(b) - s'_{\lambda_0}(b) \mid < \delta_2$. Тогда $\delta_3 = \lambda_0 - \lambda_3$. Если $\lambda_0 = 1$, то $\delta_4 = \delta_2$. Пусть $\lambda_0 < 1$. Если существует $\lambda_4 \in (\lambda_0, 1)$ такое, что $(\lambda_0, \lambda_4) \cap \Lambda = \emptyset$, то выберем $\delta_4 \in (0, \lambda_4 - \lambda_0)$ так, чтобы $\|s_\lambda - s_{\lambda_0}\| < \varepsilon$ для $\lambda \in (\lambda_0, \lambda_0 + \delta_4)$. В противном случае пусть $\lambda_4 \in (\lambda_0, 1) \cap \Lambda$ такое, что $\mid s'_{\lambda_4}(b) - s'_{\lambda_0}(b) \mid < \delta_2$. Тогда $\delta_4 = \lambda_4 - \lambda_0$. Окончательно $\delta = \min\{\delta_2, \delta_3, \delta_4\}$.

Лемма 4. Пусть $x'_a \in [z'(a), \infty)$, $x_b \in [y(b), z(b)]$,

$$X = \{x \in S(I, R) \quad x'(a) = x'_a \wedge x(b) = x_b \wedge y \leq x \leq z\},$$

$$X_* = \{x_* \in X \quad (\forall x \in X)(x(a) \leq x_*(a) \vee x'(b) \leq x'_*(b))\},$$

$x_{*1}, x_{*2} \in X_*$, $x_{*1}(a) < x_{*2}(a)$, $\mu_1 = x_{*1}(a)$, $\mu_2 = x_{*2}(a)$, $\nu_1 = x'_{*1}(b)$ и $\nu_2 = x'_{*2}(b)$. Тогда

$$(\forall t \in [a, b))(x_{*1}(t) < x_{*2}(t)). \tag{28}$$

Если для любого $x_* \in X_*$ из $x_{*1} \leq x_* \leq x_{*2}$ следует $x_* = x_{*1}$ или $x_* = x_{*2}$, то

$$(\exists \mu \in (\mu_1, \mu_2))(\pi_{*\mu} \leq x_{*2}) \vee (\exists \nu \in (\nu_2, \nu_1))(\sigma'_{*\nu}(a) < x'_a \wedge \sigma_{*\nu} \geq x_{*1}), \tag{29}$$

$$(\exists \mu_0 \in (\mu_1, \mu_2))(\pi_{*\mu_0} \leq x_{*2}) \Rightarrow$$

$$(\forall \mu \in (\mu_1, \mu_2))(\pi_{*\mu} < x_{*2}(t) \wedge \tag{30.1}$$

$$\begin{gathered}(\forall x_* \in X_*)(x_*(a) < x_{*2}(a) \Rightarrow \\ card\{t \in [a, b] : \pi_{*\mu}(t) = x_*(t)\} = 1)) \wedge\end{gathered} \tag{30.2}$$

$$
\begin{gathered}
(\forall \nu \in (\nu_2, \nu_1))(\sigma'_\nu(a) > x'_a \wedge \\
(\forall t \in [a,b))(x_{*1}(t) < \sigma_\nu(t) < x_{*2}(t))) \vee \\
(\exists t_0 \in [a,b))(\sigma_\nu(t_0) = x_{*1}(t_0) \wedge \\
(\forall t \in (t_0,b))(x_{*1}(t) < \sigma_\nu(t) < x_{*2}(t)))),
\end{gathered} \tag{30.3}
$$

$$
(\exists \nu_0 \in (\nu_2, \nu_1))(\sigma'_{*\nu_0} < x'_a \wedge \sigma_{*\nu_0} \geq x_{*1}) \Rightarrow
$$

$$
(\forall \nu \in (\nu_2, \nu_1))(\sigma'_{*\nu}(a) < x'_a \wedge (\forall t \in [a,b))(\sigma_{*\nu}(t) > x_{*1}(t)) \wedge \tag{31.1}
$$

$$
\begin{gathered}
(\forall x_* \in X_*)(x'_*(b) < x'_{*1}(b) \Rightarrow \\
card\{t \in [a,b) \quad \sigma_{*\nu}(t) = x_*(t)\} \leq 1)) \wedge
\end{gathered} \tag{31.2}
$$

$$
\begin{gathered}
(\forall \mu \in (\mu_1, \mu_2))(\exists t_0 \in (a,b))(\pi_\mu(t_0) = x_{*2}(t_0) \wedge \\
(\forall t \in [a,t_0))(x_{*1}(t) < \pi_\mu(t) < x_{*2}(t)).
\end{gathered} \tag{31.3}
$$

Пусть $y_1, z_1 \in X_*$, $y_1(a) < z_1(a)$,

$$
\mu(\lambda) = y_1(a) + \lambda(z_1(a) - y_1(a)), \quad \lambda \in [0,1],
$$

$$
\Lambda = \{\lambda \in [0,1] \quad \pi_{\mu(\lambda)} \in X_*\},
$$

$$
s_\lambda = \pi_{\mu(\lambda)}, \quad \lambda \in \Lambda.
$$

Тогда Λ замкнутое множество и $0, 1 \in \Lambda$, а $[0,1] \backslash \Lambda$ открытое множество. Определим s на открытых интервалах множества $[0,1] \backslash \Lambda$. Пусть $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$, $\lambda_1 < \lambda_2$ и $(\lambda_1, \lambda_2) \cap \Lambda = \oslash$. Если найдется $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$ такое, что $\pi_{*\mu(\lambda)} \leq s_{\lambda_2}$, то $s_\lambda = \pi_{*\mu(\lambda)}$ для $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$. В противном случае $s_\lambda = \sigma_{*\nu(\lambda)}$ для $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$, где

$$
\nu(\lambda) = s'_{\lambda_1}(b) + (\lambda - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)^{-1}(s'_{\lambda_2}(b) - s'_{\lambda_1}(b)), \quad \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2].
$$

Так определенное на $[0,1]$ отображение s инъективно непрерывно и обладает следующими свойствами: $s_0 = y_1$, $s_1 = z_1$, для любого $\lambda \in \Lambda$

$$
s'_\lambda(a) = x'_a \wedge s_\lambda(b) = x_b \wedge y_1 \leq s_\lambda \leq z_1 \tag{32}
$$

и для любого $\lambda \in [0,1] \backslash \Lambda$

$$
(s_\lambda(a) > y_1(a) \wedge s'_\lambda(a) = x'_a \wedge s_\lambda < z_1)) \vee \tag{33.1}
$$

$$
(s'_\lambda(a) < x'_a \wedge s_\lambda(b) = x_b \wedge s'_\lambda(b) > z'_1(b) \wedge (\forall t \in [a,b))(s_\lambda(t) > y_1(t))). \tag{33.2}
$$

Доказательство. Докажем (28). Предварительно покажем, что

$$
(\forall x_* \in X_*)(\forall x \in X)(x(a) < x_*(a) \wedge x'(b) > x'_*(b) \Rightarrow x \leq x_*). \tag{34}
$$

Предположим противное:

$$
(\exists x_* \in X_*)(\exists x \in X)(x(a) < x_*(a) \wedge x'(b) > x'_*(b) \wedge (\exists t_0 \in I)(x(t_0) > x_*(t_0))).
$$

Ясно, что для достаточно малого $\delta \in (0, \infty)$

$$
(\forall \mu \in [x_*(a), x_*(a) + \delta])(card\{t \in (a,b) : \pi_{*\mu}(t) = x(t)\} \geq 2). \tag{35}
$$

Пусть $x_1(t) = \max\{x(t), x_*(t)\}$, $t \in I$, а x_2 минимальное решение краевой задачи

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x'(a) = x'_a, \quad x(b) = x_b, \quad x_1 \le x \le z,$$

которое существует по теореме 3. Из единственности решения задачи Коши следует $x_1(t) < x_2(t)$, $t \in [a, b)$. Докажем, что для достаточно малого $\delta \in (0, \infty)$ из минимальности x_2 следует

$$\pi_{*\mu} < x_2, \quad \mu \in (x_2(a) - \delta, x_2(a)).$$

В противном случае найдутся $\mu_0 \in (x_*(a), x_2(a))$ и $\tau \in (a, b]$ такие, что

$$\pi_{\mu_0}(\tau) = x_2(\tau), \quad x_1(t) < \pi_{\mu_0}(t) < x_2(t), \quad t \in [a, \tau).$$

Пусть $\beta_1(t) = \pi_{\mu_0}(t)$, $t \in [a, \tau]$ и $\beta_1(t) = x_2(t)$, $t \in [\tau, b]$. Тогда краевая задача

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x'(a) = x'_a, \quad x(b) = x_b, \quad x_1 \le x \le \beta_1$$

имеет решение по теореме 3, что противоречит минимальности x_2. Пусть

$$\mu_* = \inf\{\mu_0 \in (x_*(a), x_2(a)) \quad (\forall \mu \in (\mu_0, x_2(a)))(\pi_{*\mu} < x_2)\}.$$

Тогда для любого $\mu \in (\mu_*, x_2(a))$

$$card\{t \in I \quad \pi_{*\mu}(t) = x_*(t)\} = 1,$$

$$card\{t \in I \quad \pi_{*\mu}(t) = x(t)\} = 1.$$

Из (35) следует $x_*(a) < \mu_*$, а из единственности решения задачи Коши следует $\pi_{*\mu_*}(t) < x_2(t)$, $t \in [a, b)$. Если $\pi_{*\mu_*}(b) < x_b$, то для достаточно малого $\delta \in (0, \infty)$ и $\mu \in (\mu_* - \delta, \mu_* + \delta)$ справедливо неравенство $\pi_{*\mu} < x_2$, что противоречит определению μ_*. Если $\pi_{*\mu_*}(b) = x_b$, то $\pi_{*\mu_*} = \pi_{\mu_*} \in X$. Из $\pi_{\mu_*}(a) = \mu_* > x_*(a)$, $x_* \in X_*$ и единственности решения задачи Коши следует $\pi'_{\mu_*}(b) < x'_*(b)$. Следовательно, $\pi_{\mu_*}(t) > x_1(t)$, $t \in [a, b)$, что противоречит минимальности x_2. Условие (34) доказано.

Из $x_{*2}(a) > x_{*1}(a)$, $x_{*1} \in X_*$ и единственности решения задачи Коши следует $x'_{*2}(b) < x'_{*1}(b)$. Применяя (34) при $x_* = x_{*2}$ и $x = x_{*1}$, имеем $x_{*1} \le x_{*2}$. Из единственности решения задачи Коши и $x_{*1} \le x_{*2}$ получаем (28).

Докажем (29). Предположим противное:

$$(\forall \mu \in (\mu_1, \mu_2))(\exists t \in (a, b])(\pi_{*\mu}(t) > x_{*2}(t) \wedge$$

$$\wedge (\forall \nu \in (\nu_2, \nu_1))(\sigma'_{*\nu}(a) \ge x'_a \vee (\exists t \in [a, b))(\sigma_{*\nu}(t) < x_{*1}(t)).$$

Пусть $\mu_* \in (\mu_1, \mu_2)$ достаточно близко к μ_2, а $\nu_* \in (\nu_2, \nu_1)$ достаточно близко к ν_1. Тогда

$$(\exists t_1 \in (a, b))(\pi_{\mu_*}(t_1) = x_{*2}(t_1) \wedge (\forall t \in [a, t_1))(\pi_{\mu_*}(t) < x_{*2}(t))),$$

$$(\sigma'_{\nu_*}(a) \ge x'_a \wedge \sigma_{\nu_*} \ge x_{*1}) \vee \tag{36.1}$$

$$(\exists t_2 \in (a, b))(\sigma_{\nu_*}(t_2) = x_{*1}(t_2) \wedge (\forall t \in (t_2, b))(\sigma_{\nu_*}(t) > x_{*1}(t))) \tag{36.2}$$

и для $\alpha_1 = \sigma_{\nu_*}$ при (36.1), $\alpha_1(t) = x_{*1}(t)$, $t \in [a, t_2]$, $\alpha_1(t) = \sigma_{\nu_*}(t)$, $t \in [t_2, b]$ при (36.2), $\beta_1(t) = \pi_{\mu_*}(t)$, $t \in [a, t_1]$, $\beta_1(t) = x_{*2}(t)$, $t \in [t_1, b]$ справедливо неравенство $\alpha_1(t) < \beta_1(t)$, $t \in [a, b)$. По теореме 3 краевая задача

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x'(a) = x'_a, \quad x(b) = x_b, \quad \alpha_1 \le x \le \beta_1$$

имеет решение x_0. Из единственности решения задачи Коши следует

$$x_{*1}(a) < x_0(a) < x_{*2}(a), \quad x'_{*1}(b) > x'_0(b) > x'_{*2}(b), \quad x_0 \in X. \tag{37}$$

Покажем, что условия (37) приводят к противоречию. Из компактности множества

$$M = \{x \in X \quad x(a) \ge x_0(a) \wedge x'(b) \ge x'_0(b)\}$$

следует существование $x_3 \in M$ такого, что $x_3(a) \ge x(a)$ для любого $x \in M$. Из $x_{*2} \in X_*$ и единственности решения задачи Коши следует $x_3(a) < x_{*2}(a)$, а из неравенств $x_{*1}(a) < x_3(a) < x_{*2}(a)$ следует, что x_3 не принадлежит X_*. Следовательно, найдется $x_4 \in X$, для которого $x_4(a) > x_3(a)$ и $x'_4(b) > x'_3(b)$, что противоречит определению x_3. Условие (29) доказано.

Докажем (30.1). Из единственности решения задачи Коши следует $\pi_{*\mu_0}(t) < x_{*2}(t)$, $t \in [a, b)$. Если $\pi_{*\mu_0}(b) = x_b$, то $\pi_{*\mu_0} = \pi_{\mu_0} \in X$ и $\pi'_{\mu_0}(b) \ge x'_{*2}(b)$. Из единственности решения задачи Коши следует $\pi'_{\mu_0}(b) \ne x'_{*1}(b)$ и $\pi'_{\mu_0}(b) \ne x'_{*2}(b)$, а из противоречивости (37) для $x_0 \quad \pi_{\mu_0}$ следует $\pi'_{\mu_0}(b) > x'_{*1}(b)$, что противоречит условию $x_{*1} \in X_*$. Рассмотрим случай, когда $\pi_{*\mu_0}(b) < x_b$. Пусть

$$\mu_3 = \inf\{\mu_* \in (\mu_1, \mu_0) \quad (\forall \mu \in (\mu_*, \mu_0))(\pi_{*\mu} < x_{*2})\},$$

$$\mu_4 = \sup\{\mu_* \in (\mu_0, \mu_2) \quad (\forall \mu \in (\mu_0, \mu_*))(\pi_{*\mu} < x_{*2})\}.$$

Если $\mu_3 = \mu_1$ и $\mu_4 = \mu_2$, то (30.1) очевидно. Если $\mu_3 > \mu_1$, то пусть $\mu_5 \quad \mu_3$, а если $\mu_3 = \mu_1$ и $\mu_4 < \mu_2$, то пусть $\mu_5 = \mu_4$. Тогда $\mu_5 \in (\mu_1, \mu_2)$ и $\pi_{*\mu_5} \le x_{*2}$. Если $\pi_{*\mu_5}(b) = x_b$, то аналогично предыдущему получаем противоречие. Если $\pi_{*\mu_5}(b) < x_b$, то из единственности решения задачи Коши следует $\pi_{*\mu_5} < x_{*2}$. Для достаточно малого $\delta \in (0, \infty)$ из непрерывной зависимости имеем $\pi_{*\mu} < x_{*2}$, $\mu \in (\mu_5 - \delta, \mu_5 + \delta)$, что противоречит определению μ_5. Условие (30.1) доказано.

Условие (30.2) непосредственно следует из (30.1).

Докажем (31.1). Из единственности решения задачи Коши следует $\sigma_{*\nu_0}(t) > x_{*1}(t)$, $t \in [a, b)$. Пусть

$$\nu_3 = \inf\{\nu_* \in (\nu_2, \nu_0) \quad (\forall \nu \in (\nu_*, \nu_0))(\sigma'_{*\nu}(a) < x'_a \wedge$$
$$(\forall t \in [a, b))(\sigma_{*\nu}(t) > x_{*1}(t)))\},$$
$$\nu_4 = \sup\{\nu_* \in (\nu_0, \nu_1) \quad (\forall \nu \in (\nu_0, \nu_*))(\sigma'_{*\nu}(a) < x'_a \wedge$$
$$(\forall t \in [a, b))(\sigma_{*\nu}(t) > x_{*1}(t)))\}.$$

Если $\nu_3 = \nu_2$ и $\nu_4 = \nu_1$, то (31.1) очевидно. Если $\nu_3 > \nu_2$, то пусть $\nu_5 = \nu_3$, а если $\nu_3 = \nu_2$ и $\nu_4 < \nu_1$, то пусть $\nu_5 = \nu_4$. Тогда $\nu_5 \in (\nu_2, \nu_1)$, $\sigma'_{*\nu_5}(a) \le x'_a$ и $\sigma_{*\nu_5} \ge x_{*1}$. Если $\sigma'_{*\nu_5}(a) = x'_a$, то $\sigma_{*\nu_5} = \sigma_{\nu_5} \in X$, а из единственности решения задачи Коши и противоречивости (37) для $x_0 = \sigma_{\nu_5}$ следует $\sigma_{\nu_5}(a) > x_{*2}(a)$, что противоречит условию $x_{*2} \in X_*$. Если $\sigma'_{*\nu_5}(a) < x'_a$, то из единственности решения задачи Коши следует $\sigma_{*\nu_5}(t) > x_{*1}(t)$, $t \in [a,b)$. Для достаточно малого $\delta \in (0,\infty)$ из непрерывной зависимости имеем $\sigma'_{*\nu}(a) < x'_a$, $\sigma_{*\nu}(t) > x_{*1}(t)$, $\nu \in (\nu_5 - \delta, \nu_5 + \delta)$, $t \in [a,b)$, что противоречит определению ν_5. Условие (31.1) доказано.

Условие (31.2) непосредственно следует из (31.1).

Покажем, что условие

$$(\exists \mu \in (\mu_1, \mu_2))(\pi_{*\mu} \le x_{*2}) \wedge (\exists \nu \in (\nu_2, \nu_1))(\sigma'_{*\nu}(a) < x'_a \wedge \sigma_{*\nu} \ge x_{*1}) \qquad (38)$$

приводит к противоречию. Из (38) следует (30.1) и (31.1). Аналогично доказательству (29) условия находим x_0, удовлетворяющее (37), что противоречиво.

Докажем (30.3). Если

$$\begin{gathered}(\exists \nu \in (\nu_2, \nu_1))((\sigma'_\nu(a) \le x'_a \wedge \\ (\forall t \in [a,b))(x_{*1}(t) < \sigma_\nu(t) < x_{*2}(t)) \vee \\ (\exists t_0 \in [a,b))(\sigma_\nu(t_0) = x_{*2}(t_0) \wedge \\ (\forall t \in (t_0,b))(x_{*1}(t) < \sigma_\nu(t) < x_{*2}(t)))),\end{gathered} \qquad (39)$$

то аналогично доказательству (29) условия находим x_0, удовлетворяющее (37), что противоречиво. Теперь из противоречивости (39) получаем (30.3).

Докажем (31.3). Из противоречивости (38) следует

$$(\forall \mu \in (\mu_1, \mu_2))(\exists t \in (a,b])(\pi_{*\mu}(t) > x_{*2}(t)). \qquad (40)$$

Если

$$\begin{gathered}(\exists \mu \in (\mu_1, \mu_2))(\exists \tau \in (a,b])(\pi_\mu(\tau) = x_{*1}(\tau) \wedge \\ (\forall t \in [a,\tau))(x_{*1}(t) < \pi_\mu(t) < x_{*2}(t))),\end{gathered}$$

то аналогично доказательству (29) условия находим x_0, удовлетворяющее (37), что противоречиво. Теперь из (40) получаем (31.3).

Перейдем к доказательству остальных условий. Ясно, что Λ замкнуто, $0,1 \in \Lambda$, $s_0 = y_1$ и $s_1 = z_1$. Из условия (29) следует

$$(\exists \lambda \in (\lambda_1, \lambda_2))(\pi_{*\mu(\lambda)} \le s_{\lambda_2} \vee (\sigma'_{*\nu(\lambda)}(a) < x'_a \wedge \sigma_{*\nu(\lambda)} \ge s_{\lambda_1})).$$

Если найдется $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$ такое, что $\pi_{*\mu(\lambda)} \le s_{\lambda_2}$, то из (30.1) для любого $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$ следует

$$\pi_{*\mu(\lambda)} < s_{\lambda_2}. \qquad (41)$$

Если найдется $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$ такое, что $\sigma'_{*\nu(\lambda)}(a) < x'_a$ и $\sigma_{*\nu(\lambda)} \ge s_{\lambda_1}$, то из (31.1) для любого $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$ следует

$$\sigma'_{*\nu(\lambda)}(a) < x'_a \wedge (\forall t \in [a,b))(\sigma_{*\nu(\lambda)}(t) > s_{\lambda_1}(t)). \qquad (42)$$

Условие (32) следует из условия (28), условие (33.1) следует из условия (41), а условие (33.2) следует из условия (42). Инъективность s следует из (32) и (33).

Докажем непрерывность s. Непрерывность s на интервале $[\lambda_1, \lambda_2]$ не вызывает сомнений. Докажем непрерывность для $\lambda_0 \in \Lambda$. Для этого по $\varepsilon \in (0,\infty)$ найдем $\delta \in (0,\infty)$ такое, что из $\lambda \in [0,1]$ и $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ следует $\|s_\lambda - s_{\lambda_0}\| < \varepsilon$. Пусть $\delta_1 \in (0,\infty)$ такое, что из $\lambda \in [0,1]$ и $|\lambda - \lambda_0| < \delta_1$ следует $\|\pi_{*\mu(\lambda)} - s_{\lambda_0}\| < \varepsilon$, а $\delta_2 \in (0, \delta_1)$

такое, что для $\nu \in R$ из $|\, \nu - s'_{\lambda_0(b)} \,| < \delta_2$ следует $\|\sigma_{*\nu} - s_{\lambda_0}\| < \varepsilon$. Если $\lambda_0 = 0$, то $\delta_3 = \delta_2$. Пусть $\lambda_0 > 0$. Если существует $\lambda_3 \in (0, \lambda_0)$ такое, что $(\lambda_3, \lambda_0) \cap \Lambda = \emptyset$, то выберем $\delta_3 \in (0, \lambda_0 - \lambda_3)$ так, чтобы $\|s_\lambda - s_{\lambda_0}\| < \varepsilon$ для $\lambda \in (\lambda_0 - \delta_3, \lambda_0)$. В противном случае пусть $\lambda_3 \in (0, \lambda_0) \cap \Lambda$ такое, что $|\, s'_{\lambda_3}(b) - s'_{\lambda_0}(b) \,| < \delta_2$. Тогда $\delta_3 = \lambda_0 - \lambda_3$. Если $\lambda_0 = 1$, то $\delta_4 = \delta_2$. Пусть $\lambda_0 < 1$. Если существует $\lambda_4 \in (\lambda_0, 1)$ такое, что $(\lambda_0, \lambda_4) \cap \Lambda = \emptyset$, то выберем $\delta_4 \in (0, \lambda_4 - \lambda_0)$ так, чтобы $\|s_\lambda - s_{\lambda_0}\| < \varepsilon$ для $\lambda \in (\lambda_0, \lambda_0 + \delta_4)$. В противном случае пусть $\lambda_4 \in (\lambda_0, 1) \cap \Lambda$ такое, что $|\, s'_{\lambda_4}(b) - s'_{\lambda_0}(b) \,| < \delta_2$. Тогда $\delta_4 = \lambda_4 - \lambda_0$. Окончательно $\delta = \min\{\delta_2, \delta_3, \delta_4\}$.

Лемма 5. Пусть $x'_a \in [z'(a), \infty)$, $x'_b \in [y'(b), \infty)$,

$$X = \{x \in S(I, R) \quad x'(a) = x'_a \wedge x'(b) = x'_b \wedge y \le x \le z\},$$

$$X_* = \{x_* \in X \quad (\forall x \in X)(x(a) \le x_*(a) \vee x(b) \ge x_*(b))\},$$

$x_{*1}, x_{*2} \in X_*$, $x_{*1}(a) < x_{*2}(a)$, $\mu_1 = x_{*1}(a)$, $\mu_2 = x_{*2}(a)$, $\nu_1 = x_{*1}(b)$ и $\nu_2 = x_{*2}(b)$. Тогда

$$x_{*1} < x_{*2}.$$

Если для любого $x_* \in X_*$ из $x_{*1} \le x_* \le x_{*2}$ следует $x_* = x_{*1}$ или $x_* = x_{*2}$, то

$$\begin{gathered}(\exists\mu \in (\mu_1, \mu_2))(\pi'_{*\mu}(b) < x'_b \wedge \pi_{*\mu} \le x_{*2}) \vee \\ (\exists\nu \in (\nu_1, \nu_2))(\tau'_{*\nu}(a) < x'_a \wedge \tau_{*\nu} \ge x_{*1}),\end{gathered} \tag{44}$$

$$(\exists\mu_0 \in (\mu_1, \mu_2))(\pi'_{*\mu_0}(b) < x'_b \wedge \pi_{*\mu_0} \le x_{*2}) \Rightarrow$$

$$(\forall\mu \in (\mu_1, \mu_2))(\pi'_{*\mu}(b) < x'_b \wedge \pi_{*\mu} < x_{*2} \wedge \tag{45.1}$$

$$\begin{gathered}(\forall x_* \in X_*)(x_*(a) < x_{*2}(a) \Rightarrow \\ card\{t \in [a, b] \quad \pi_{*\mu}(t) = x_*(t)\} = 1)) \wedge\end{gathered} \tag{45.2}$$

$$\begin{gathered}(\forall\nu \in (\nu_1, \nu_2))(\tau'_\nu(a) > x'_a \wedge x_{*1} < \tau_\nu < x_{*2} \vee \\ (\exists t_0 \in [a, b))(\tau_\nu(t_0) = x_{*1}(t_0)) \wedge \\ (\forall t \in (t_0, b])(x_{*1}(t) < \tau_\nu(t) < x_{*2}(t))),\end{gathered} \tag{45.3}$$

$$(\exists\nu_0 \in (\nu_1, \nu_2))(\tau'_{*\nu_0}(a) < x'_a \wedge \tau_{*\nu_0} \ge x_{*1}) \Rightarrow$$

$$(\forall\nu \in (\nu_1, \nu_2))(\tau'_{*\nu}(a) < x'_a \wedge \tau_{*\nu} > x_{*1} \wedge \tag{46.1}$$

$$(\forall x_* \in X_*)(x_*(b) > x_{*1}(b) \Rightarrow card\{t \in [a, b] \quad \tau_{*\nu}(t) = x_*(t)\} \le 1)) \wedge \tag{46.2}$$

$$\begin{gathered}(\forall\mu \in (\mu_1, \mu_2))((\pi'_\mu(b) > x'_b \wedge x_{*1} < \pi_\mu < x_{*2}) \vee \\ (\exists t_0 \in (a, b])(\pi_\mu(t_0) = x_{*2}(t_0)) \wedge \\ (\forall t \in [a, t_0))(x_{*1}(t) < \pi_\mu(t) < x_{*2}(t))).\end{gathered} \tag{46.3}$$

Пусть $y_1, z_1 \in X_*$, $y_1(a) < z_1(a)$,

$$\mu(\lambda) = y_1(a) + \lambda(z_1(a) - y_1(a)), \quad \lambda \in [0, 1],$$

$$\Lambda = \{\lambda \in [0, 1] \quad \pi_{\mu(\lambda)} \in X_*\},$$

$$s_\lambda = \pi_{\mu(\lambda)}, \quad \lambda \in \Lambda.$$

Тогда Λ замкнутое множество и $0, 1 \in \Lambda$, а $[0, 1] \backslash \Lambda$ открытое множество. Определим s на открытых интервалах множества $[0, 1] \backslash \Lambda$. Пусть $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$, $\lambda_1 < \lambda_2$ и

$(\lambda_1, \lambda_2) \cap \Lambda = \oslash$. Если найдется $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$ такое, что $\pi'_{*\mu(\lambda)}(b) < x'_b$ и $\pi_{*\mu(\lambda)} \le s_{\lambda_2}$, то $s_\lambda = \pi_{*\mu(\lambda)}$ для $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$. В противном случае $s_\lambda = \tau_{*\nu(\lambda)}$ для $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$, где

$$\nu(\lambda) = s_{\lambda_1}(b) + (\lambda - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)^{-1}(s_{\lambda_2}(b) - s_{\lambda_1}(b)), \quad \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2].$$

Так определенное на $[0,1]$ отображение s инъективно непрерывно и обладает следующими свойствами: $s_0 = y_1$, $s_1 = z_1$, для любого $\lambda \in \Lambda$

$$s'_\lambda(a) = x'_a \wedge s'_\lambda(b) = x'_b \wedge y_1 \le s_\lambda \le z_1 \tag{47}$$

и для любого $\lambda \in [0,1] \backslash \Lambda$

$$(s_\lambda(a) > y_1(a) \wedge s'_\lambda(a) = x'_a \wedge s'_\lambda(b) < x'_b \wedge s_\lambda < z_1) \vee \tag{48.1}$$

$$(s_\lambda(b) < z_1(b) \wedge s'_\lambda(b) = x'_b \wedge s'_\lambda(a) < x'_a \wedge s_\lambda > y_1). \tag{48.2}$$

Доказательство. Докажем (43). Предварительно покажем, что

$$(\forall x_* \in X_*)(\forall x \in X)(x(a) < x_*(a) \wedge x(b) < x_*(b) \Rightarrow x \le x_*). \tag{49}$$

Предположим противное:

$$(\exists x_* \in X_*)(\exists x \in X)(x(a) < x_*(a) \wedge x(b) < x_*(b) \wedge (\exists t_0 \in I)(x(t_0) > x_*(t_0))).$$

Ясно, что для достаточно малого $\delta \in (0, \infty)$

$$(\forall \mu \in [x_*(a), x_*(a) + \delta])(card\{t \in [a, b] \quad \pi_{*\mu}(t) = x(t)\} \ge 2). \tag{50}$$

Пусть $x_1(t) = \max\{x(t), x_*(t)\}$, $t \in I$, а x_2 минимальное решение краевой задачи

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x'(a) = x'_a, \quad x(b) = x_*(b), \quad x_1 \le x \le z,$$

которое существует по теореме 3. Из единственности решения задачи Коши следует

$$(\forall t \in [a, b))(x_1(t) < x_2(t)) \wedge x'_2(b) < x'_b.$$

Докажем, что для достаточно малого $\delta \in (0, \infty)$ из минимальности x_2 следует

$$\pi_{*\mu} < x_2, \quad \mu \in (x_2(a) - \delta, x_2(a)). \tag{51}$$

В противном случае найдется $\mu_0 \in (x_*(a), x_2(a))$ такое, что

$$(\exists \tau \in (a, b])(\pi_{\mu_0}(\tau) = x_2(\tau) \wedge (\forall t \in [a, \tau))(x_1(t) < \pi_{\mu_0}(t) < x_2(t))).$$

Пусть $\beta_1(t) = \pi_{\mu_0}(t)$, $t \in [a, \tau]$ и $\beta_1(t) = x_2(t)$, $t \in [\tau, b]$. Тогда краевая задача

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x'(a) = x'_a, \quad x(b) = x_*(b), \quad x_1 \le x \le \beta_1$$

имеет решение по теореме 3, что противоречит минимальности x_2. Пусть

$$\mu_* = \inf\{\mu_0 \in (x_*(a), x_2(a)) : (\forall \mu \in (\mu_0, x_2(a)))(\pi_{*\mu} < x_2 \wedge \pi'_{*\mu}(b) < x'_b))\}.$$

Тогда для любого $\mu \in (\mu_*, x_2(a))$

$$card\{t \in [a,b] \quad \pi_{*\mu}(t) = x_*(t)\} = 1,$$

$$card\{t \in [a,b] \quad \pi_{*\mu}(t) = x(t)\} \le 1.$$

Из (50) имеем $x_*(a) < \mu_*$, а из единственности решения задачи Коши следует

$$(\forall t \in [a,b))(\pi_{*\mu_*}(t) < x_2(t)) \wedge (\pi_{*\mu_*}(b) < x_*(b) \vee \pi'_{*\mu}(b) < x'_b).$$

Если $\pi_{*\mu_*}(b) < Hx_*(b)$ и $\pi'_{*\mu_*}(b) < x'_b$, то для достаточно малого $\delta \in (0,\infty)$

$$\mu \in (\mu_* - \delta, \mu_* + \delta))(\pi_{*\mu} < x_2 \wedge \pi'_{*\mu}(b) < x'_b),$$

что противоречит определению μ_*. Если $\pi_{*\mu_*}(b) < Hx_*(b)$ и $\pi'_{*\mu}(b) = x'_b$, то $\pi_{*\mu_*}$ $\pi_{\mu_*} \in X$ и $\pi'_{\mu_*}(a) = \mu_* > x'_*(a)$. Получаем противоречие с $x_* \in X_*$. Если $\pi_{*\mu_*}(b) = x_b$ и $\pi'_{*\mu_*}(b) < x'_b$, то $\pi_{*\mu_*} = \pi_{\mu_*}$ и $x_1 \le \pi_{\mu_*} \le x_2$, что противоречит минимальности x_2. Условие (49) доказано.

Из $x_{*2}(a) > x_{*1}(a)$, $x_{*1} \in X_*$ и единственности решения задачи Коши следует $x_{*2}(b) > x_{*1}(b)$. Применяя (49) при $x_* = x_{*2}$ и $x = x_{*1}$, имеем $x_{*1} < x_{*2}$, что доказывает (43).

Докажем (44). Предположим противное:

$$(\forall \mu \in (\mu_1, \mu_2))(\pi'_{*\mu}(b) \ge x'_b \vee (\exists t \in I)(\pi_{*\mu}(t) > x_{*2}(t)))\wedge$$

$$(\forall \nu \in (\nu_1, \nu_2))(\tau'_{*\nu}(a) \ge x'_a \vee (\exists t \in I)(\tau_{*\nu}(t) < x_{*2}(t))).$$

Пусть $\mu_* \in (\mu_1, \mu_2)$ достаточно близко к μ_2, а $\nu_* \in (\nu_1, \nu_2)$ достаточно близко к ν_1. Тогда

$$(\pi'_{\mu_*}(b) \ge x'_b \wedge \pi_{\mu_*} \le x_{*2})\vee \tag{52.1}$$

$$(\exists t_1 \in (a,b))(\pi_{\mu_*}(t_1) = x_{*2}(t_1) \wedge (\forall t \in [a,t_1))(\pi_{\mu_*}(t) < x_{*2}(t))), \tag{52.2}$$

$$(\tau'_{\nu_*}(a) \ge x'_a \wedge \tau_{\nu_*} \ge x_{*1})\vee \tag{52.3}$$

$$(\exists t_2 \in (a,b))(\tau_{\nu_*}(t_2) = x_{*1}(t_2) \wedge (\forall t \in (t_2,b])(\tau_{\nu_*}(t) > x_{*1}(t))) \tag{52.4}$$

и для $\alpha_1 = \tau_{\nu_*}$ при (52.3), $\alpha_1(t) = x_{*1}(t)$, $t \in [a,t_2]$, $\alpha_1(t) = \tau_{\nu_*}(t)$, $t \in [t_2,b]$ при (52.4), $\beta_1 = \pi_{\mu_*}$ при (52.1), $\beta_1(t) = \pi_{\mu_*}(t)$, $t \in [a,t_1]$, $\beta_1(t) = x_{*2}(t)$, $t \in [t_1,b]$ при (52.2) справедливо неравенство $\alpha_1 < \beta_1$. По теореме 6 краевая задача

$$x'' = f(t,x,x'), \quad x'(a) = x'_a, \quad x'(b) = x'_b, \quad \alpha_1 \le x \le \beta_1$$

имеет решение x_0. Из единственности решения задачи Коши следует

$$x_{*1}(a) < x_0(a) < x_{*2}(a), \quad x_{*1}(b) < x_0(b) < x_{*2}(b), \quad x_0 \in X. \tag{53}$$

Покажем, что условия (53) приводят к противоречию. Из компактности множества

$$M = \{x \in X \quad x(a) \ge x_0(a) \wedge x(b) \le x_0(b)\}$$

следует существование $x_3 \in M$ такого, что $x_3(a) \ge x(a)$ для любого $x \in M$. Из $x_{*2} \in X_*$ и единственности решения задачи Коши следует $x_3(a) < x_{*2}(a)$, а из неравенств

$x_{*1}(a) < x_3(a) < x_{*2}(a)$ следует, что x_3 не принадлежит X_*. Следовательно, найдется $x_4 \in X$, для которого $x_4(a) > x_3(a)$ и $x_4(b) < x_3(b)$, что противоречит определению x_3. Условие (44) доказано.

Докажем (45.1). Из единственности решения задачи Коши следует $\pi_{*\mu_0} < x_{*2}$. Пусть

$$\mu_3 = \inf\{\mu_* \in (\mu_1, \mu_0) \quad (\forall \mu \in (\mu_*, \mu_0))(\pi'_{*\mu}(b) < x'_b \wedge \pi_{*\mu} < x_{*2})\},$$

$$\mu_4 = \sup\{\mu_* \in (\mu_0, \mu_2) \quad (\forall \mu \in (\mu_0, \mu_*))(\pi'_{*\mu}(b) < x'_b \wedge \pi_{*\mu} < x_{*2})\}.$$

Если $\mu_3 = \mu_1$ и $\mu_4 = \mu_2$, то (45.1) очевидно. Если $\mu_3 > \mu_1$, то пусть $\mu_5 = \mu_3$, а если $\mu_3 = \mu_1$ и $\mu_4 < \mu_2$, то пусть $\mu_5 = \mu_4$. Тогда $\mu_5 \in (\mu_1, \mu_2)$, $\pi'_{*\mu_5}(b) \leq x'_b$ и $\pi_{*\mu_5} \leq x_{*2}$. Если $\pi'_{*\mu_5}(b) = x'_b$, то $\pi_{*\mu_5} = \pi_{\mu_5} \in X$ и из единственности решения задачи Коши и противоречивости (53) для $x_0 = \pi_{\mu_5}$ следует $\pi_{\mu_5}(b) < x_{*1}(b)$, что противоречит условию $x_{*1} \in X_*$. Если $\pi'_{*\mu_5}(b) < x'_b$, то из единственности решения задачи Коши следует $\pi_{*\mu_5} < x_{*2}$. Для достаточно малого $\delta \in (0, \infty)$ из непрерывной зависимости следует $\pi_{*\mu}(b) < x'_b$, $\pi_{*\mu} < x_{*2}$, $\mu \in (\mu_5 - \delta, \mu_5 + \delta)$, что противоречит определению μ_5. Условие (45.1) доказано.

Аналогично доказывается (46.1).

Условия (45.2) и (46.2) непосредственно следуют из (45.1) и (46.1).

Покажем, что условие

$$\begin{array}{c}(\exists \mu \in (\mu_1, \mu_2))(\pi'_{*\mu}(b) < x'_b \wedge \pi_{*\mu} \leq x_{*2})\wedge \\ (\exists \nu \in (\nu_1, \nu_2))(\tau'_{*\nu}(a) < x'_a \wedge \tau_{*\nu} \geq x_{*1})\end{array} \tag{54}$$

приводит к противоречию. Из (54) следуют (45.1) и (46.1). Аналогично доказательству (44) условия находим x_0, удовлетворяющее (53), что противоречиво.

Докажем (45.3). Если

$$\begin{array}{c}(\exists \nu \in (\nu_1, \nu_2))(\tau'_\nu(a) = x'_a \wedge x_{*1} < \tau_\nu < x_{*2})\vee \\ (\exists t_0 \in [a, b))(\tau_\nu(t_0) = x_{*2}(t)\wedge \\ (\forall t \in (t_0, b])(x_{*1}(t) < \tau_\nu(t) < x_{*2}(t)))),\end{array} \tag{55}$$

то аналогично доказательству (44) условия находим x_0, удовлетворяющее (53), что противоречиво. Теперь из (55) получаем (45.3).

Аналогично доказывается (46.3).

Перейдем к доказательству остальных условий. Ясно, что Λ замкнуто, $0, 1 \in \Lambda$, $s_0 = y_1$ и $s_1 = z_1$. Из условия (44) следует

$$(\exists \lambda \in (\lambda_1, \lambda_2))(\pi'_{*\mu(\lambda)}(b) < x'_b \wedge \pi_{*\mu(\lambda)} \leq s_{\lambda_2})\vee \tag{56.1}$$

$$(\exists \lambda \in (\lambda_1, \lambda_2))(\tau'_{*\nu(\lambda)}(a) < x'_a \wedge \tau_{*\nu(\lambda)} \geq s_{\lambda_1}). \tag{56.2}$$

Если справедливо (56.1), то из (45.1) для любого $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$ следует

$$\pi'_{*\mu(\lambda)}(b) < x'_b \wedge \pi_{*\mu(\lambda)} < s_{\lambda_2}. \tag{57}$$

Если справедливо (56.2), то из (46.1) для любого $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$ следует

$$\tau'_{*\nu(\lambda)}(a) < x'_a \wedge \tau_{*\nu(\lambda)} > s_{\lambda_1}. \tag{58}$$

Условие (47) следует из условия (43), условие (48.1) следует из условия (57), а условие (48.2) следует из условия (58). Инъективность s следует из (47) и (48).

Докажем непрерывность s. Непрерывность s на интервале $[\lambda_1, \lambda_2]$ не вызывает сомнений. Докажем непрерывность для $\lambda_0 \in \Lambda$. Для этого по $\varepsilon \in (0, \infty)$ найдем $\delta \in (0, \infty)$ такое, что из $\lambda \in [0,1]$ и $| \lambda - \lambda_0 | < \delta$ следует $\|s_\lambda - s_{\lambda_0}\| < \varepsilon$. Пусть $\delta_1 \in (0, \infty)$ такое, что из $\lambda \in [0,1]$ и $| \lambda - \lambda_0 | < \delta_1$ следует $\|\pi_{*\mu(\lambda)} - s_{\lambda_0}\| < \varepsilon$, а $\delta_2 \in (0, \delta_1)$ такое, что для $\nu \in R$ из $| \nu - s_{\lambda_0}(b) | < \delta_2$ следует $\|\tau_{*\nu} - s_{\lambda_0}\| < \varepsilon$. Если $\lambda_0 = 0$, то $\delta_3 = \delta_2$. Пусть $\lambda_0 > 0$. Если существует $\lambda_3 \in (0, \lambda_0)$ такое, что $(\lambda_3, \lambda_0) \cap \Lambda = \oslash$, то выберем $\delta_3 \in (0, \lambda_0 - \lambda_3)$ так, чтобы $\|s_\lambda - s_{\lambda_0}\| < \varepsilon$ для $\lambda \in (\lambda_0 - \delta_3, \lambda_0)$. В противном случае пусть $\lambda_3 \in (0, \lambda_0) \cap \Lambda$ такое, что $| s_{\lambda_3}(b) - s_{\lambda_0}(b) | < \delta_2$. Тогда $\delta_3 = \lambda_0 - \lambda_3$. Если $\lambda_0 = 1$, то $\delta_4 = \delta_2$. Пусть $\lambda_0 < 1$. Если существует $\lambda_4 \in (\lambda_0, 1)$ такое, что $(\lambda_0, \lambda_4) \cap \Lambda = \oslash$, то выберем $\delta_4 \in (0, \lambda_4 - \lambda_0)$ так, чтобы $\|s_\lambda - s_{\lambda_0}\| < \varepsilon$ для $\lambda \in (\lambda_0, \lambda_0 + \delta_4)$. В противном случае пусть $\lambda_4 \in (\lambda_0, 1) \cap \Lambda$ такое, что $| s_{\lambda_4}(b) - s_{\lambda_0}(b) | < \delta_2$. Тогда $\delta_4 = \lambda_4 - \lambda_0$. Окончательно $\delta = \min\{\delta_2, \delta_3, \delta_4\}$.

Замечание 3. В леммах 3-5 изучается поведение решений, лежащих между y и z. Делается это при помощи функций $\pi_{*\mu}$, $\rho_{*\mu}$, $\sigma_{*\nu}$ и $\tau_{*\nu}$, которые иногда определены и вне множества

$$\{(t,x) \quad t \in I \wedge y(t) \leq x \leq z(t)\}.$$

При желании можно отказаться от введения таких функций. Достаточно ограничиться рассмотрением функций π_μ, ρ_μ, σ_ν и τ_ν на соответствующих интервалах. Пусть

$$t_{\pi_\mu} = \sup\{t_* \in I \quad (\forall t \in [a, t_*])(y(t) \leq \pi_\mu(t) \leq z(t))\}, \quad \mu \in [y(a), z(a)],$$

$$t_{\rho_\mu} = \sup\{t_* \in I \quad (\forall t \in [a, t_*])(y(t) \leq \rho_\mu(t) \leq z(t))\}, \quad x_a \in [y(a), z(a)],$$

$$t_{\sigma_\nu} = \inf\{t_* \in I \quad (\forall t \in [t_*, b])(y(t) \leq \sigma_\nu(t) \leq z(t))\}, \quad x_b \in [y(b), z(b)],$$

$$t_{\tau_\nu} = \inf\{t_* \in I \quad (\forall t \in [t_*, b])(y(t) \leq \tau_\nu(t) \leq z(t))\}, \quad \nu \in [y(b), z(b)].$$

Сужения

$$\pi_\mu |_{[a, t_{\pi_\mu}]}, \quad \rho_\mu |_{[a, t_{\rho_\mu}]}, \quad \sigma_\nu |_{[t_{\sigma_\nu}, b]}, \quad \tau_\nu |_{[t_{\tau_\nu}, b]}$$

полностью заменяют функции $\pi_{*\mu}$, $\rho_{*\mu}$, $\sigma_{*\nu}$ и $\tau_{*\nu}$. При этом несколько увеличиваются формулировки и доказательства.

1.3. Вложение интервала в множество решений

В 1.3 строятся вложения

$$u \quad [0,1] \to S(I, R),$$

которые являются основой для построения вложений окружности в множество решений и доказательства разрешимости краевых задач. Предполагаются заданными $y, z \in S(I, R)$ такие, что $y < z$.

Лемма 6. Пусть для любого $x \in S(I, R)$ из $y \leq x \leq z$, $x(a) = y(a)$ и $x(b) = y(b)$ следует $x \quad y$ и из $y \leq x \leq z$, $x(a) = z(a)$ и $x(b) = z(b)$ следует $x = z$. Тогда существует инъективное непрерывное отображение

$$u : [0,1] \to \{x \in S(I, R) : y \leq x \leq z\} \tag{59}$$

со следующими свойствами: $u_0 = y$, $u_1 = z$, найдутся $\lambda_1, \lambda_2 \in (0,1)$ такие, что $\lambda_1 \le \lambda_2$ и

$$(\forall \lambda \in (0,\lambda_1))(u_\lambda(a) = y(a)) \wedge \tag{60.1}$$

$$u_{\lambda_1}(a) = y(a) \wedge u_{\lambda_1}(b) = z(b) \wedge \tag{60.2}$$

$$(\forall \lambda \in (\lambda_1,\lambda_2))(u_\lambda(a) = y(a) \vee u_\lambda(b) = z(b)) \wedge \tag{60.3}$$

$$u_{\lambda_2}(a) = y(a) \wedge u_{\lambda_2}(b) = z(b) \wedge \tag{60.4}$$

$$(\forall \lambda \in (\lambda_2, 1))(u_\lambda(b) = z(b)). \tag{60.5}$$

Доказательство. Пусть y_1 минимальное, а z_1 максимальное решение краевой задачи

$$x'' = f(t,x,x'), \quad x(a) = y(a), \quad x(b) = z(b), \quad y \le x \le z.$$

Если $y_1 = z_1$, то $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$, а если $y_1 \ne z_1$, то $\lambda_1 = 1/3$ и $\lambda_2 = 2/3$. Пусть

$$\begin{aligned} &u_\lambda = s(x(a) = y(a) \wedge x'(a) = y'(a) + \lambda\lambda_1^{-1}(y_1'(a) - y'(a))),\\ &\lambda \in [0,\lambda_1],\\ &u_\lambda = s(x(b) = z(b) \wedge x'(b) = z_1'(b) + (\lambda - \lambda_2)(1-\\ &\lambda_2)^{-1}(z'(b) - z_1'(b))), \quad \lambda \in [\lambda_2, 1]. \end{aligned} \tag{61}$$

Покажем, что из экстремальности y и y_1 следует

$$(\forall \lambda \in (0,\lambda_1))(\forall t \in (a,b])(y(t) < u_\lambda(t) < y_1(t)).$$

Если

$$(\exists \lambda \in (0,\lambda_1))(\exists \tau \in (a,b])(u_\lambda(\tau) = y(\tau) \wedge (\forall t \in (a,\tau))(y(t) < u_\lambda(t) < y_1(t))),$$

то пусть $\alpha_1(t) = u_\lambda(t)$, $t \in [a,\tau]$ и $\alpha_1(t) = y(t)$, $t \in [\tau, b]$. Тогда краевая задача

$$x'' = f(t,x,x'), \quad x(a) = y(a), \quad x(b) = y(b), \quad \alpha_1 \le x \le y_1$$

по теореме 1 имеет решение, что противоречит условиям леммы. Если

$$(\exists \lambda \in (0,\lambda_1))(\exists \tau \in (a,b])(u_\lambda(\tau) = y_1(\tau) \wedge (\forall t \in (a,\tau))(y(t) < u_\lambda(t) < y_1(t))),$$

то пусть $\beta_1(t) = u_\lambda(t)$, $t \in [a,\tau]$ и $\beta_1(t) = y_1(t)$, $t \in [\tau, b]$. Тогда краевая задача

$$x'' = f(t,x,x'), \quad x(a) = y(a), \quad x(b) = z(b), \quad y \le x \le \beta_1$$

по теореме 1 имеет решение, что противоречит минимальности y_1. Аналогично доказывается, что

$$(\forall \lambda \in (\lambda_2, 1))(\forall t \in [a,b))(z_1(t) < u_\lambda(t) < z(t)).$$

Следовательно,

$$(\forall \lambda \in [0,\lambda_1] \cup [\lambda_2, 1])(y \le u_\lambda \le z). \tag{62}$$

Если $y_1 = z_1$, то u полностью определяется формулами (61). Если $y_1 \neq z_1$, то по лемме 3 при $x_a = y(a)$ и $x_b = z(b)$ находим s такое, что

$$\begin{gathered} s_0 = y_1 \wedge s_1 = z_1 \wedge (\forall \mu \in (0,1))((s_\mu(a) = y(a) \wedge s_\mu \leq z_1) \vee \\ (s_\mu(b) = z(b) \wedge s_\mu \geq y_1)). \end{gathered} \tag{63}$$

Аналогично предыдущему доказываются неравенства

$$(\forall \mu \in (0,1))(y \leq s_\mu \leq z). \tag{64}$$

Следовательно, $s \quad [0,1] \to S(I,R)$. Пусть

$$u_\lambda = s_{3\lambda-1}, \quad \lambda \in [1/3, 2/3]. \tag{65}$$

Тогда u определяется формулами (61), (65) и из (64)-(65) следует

$$(\forall \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2])(y \leq u_\lambda \leq z). \tag{66}$$

Из (62) и (66) следует (59), а из (61), (63) и (65) следует (60).

Лемма 7. Пусть $y'(a) > z'(a)$ и для любого $x \in S(I,R)$ из $y \leq x \leq z$, $x'(a) = y'(a)$ и $x(b) = y(b)$ следует $x = y$ и из $y \leq x \leq z$, $x'(a) = z'(a)$ и $x(b) = z(b)$ следует $x = z$. Тогда существует инъективное непрерывное отображение

$$u \quad [0,1] \to \{x \in S(I,R) \quad y \leq x \leq z \wedge z'(a) \leq x'(a) \leq y'(a)\} \tag{67}$$

со следующими свойствами: $u_0 = y$, $u_1 = z$, найдутся $\lambda_1, \lambda_2 \in (0,1)$ такие, что $\lambda_1 \leq \lambda_2$ и

$$(\forall \lambda \in (0, \lambda_1))(u'_\lambda(a) = y'(a)) \wedge \tag{68.1}$$

$$u'_{\lambda_1}(a) = y'(a) \wedge u_{\lambda_1}(b) = z(b) \wedge \tag{68.2}$$

$$(\forall \lambda \in (\lambda_1, \lambda_2))(u'_\lambda(a) = y'(a) \vee u_\lambda(b) = z(b)) \wedge \tag{68.3}$$

$$u'_{\lambda_2}(a) = y'(a) \wedge u_{\lambda_2}(b) = z(b) \wedge \tag{68.4}$$

$$(\forall \lambda \in (\lambda_2, 1))(u_\lambda(b) = z(b)). \tag{68.5}$$

Доказательство. Пусть y_1 минимальное, а z_1 максимальное решение краевой задачи

$$x'' = f(t,x,x'), \quad x'(a) = y'(a), \quad x(b) = z(b), \quad y \leq x \leq z.$$

Если $y_1 = z_1$, то $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$, а если $y_1 \neq z_1$, то $\lambda_1 = 1/3$ и $\lambda_2 = 2/3$. Пусть

$$\begin{aligned} & u_\lambda = s(x'(a) = y'(a) \wedge x(a) = y(a) + \lambda\lambda_1^{-1}(y_1(a) - y(a))), \\ & \lambda \in [0, \lambda_1], \\ & u_\lambda = s(x(b) = z(b) \wedge x'(b) = z'_1(b) + (\lambda - \lambda_2)(1- \\ & \lambda_2)^{-1}(z'(b) - z'_1(b))), \quad \lambda \in [\lambda_2, 1]. \end{aligned} \tag{69}$$

Покажем, что из экстремальности y и y_1 следует

$$(\forall \lambda \in (0, \lambda_1))(y < u_\lambda < y_1).$$

Если

$$(\exists\lambda \in (0,\lambda_1))(\exists\tau \in (a,b])(u_\lambda(\tau) = y(\tau) \wedge (\forall t \in [a,\tau))(y(t) < u_\lambda(t) < y_1(t))),$$

то пусть $\alpha_1(t) = u_\lambda(t)$, $t \in [a,\tau]$ и $\alpha_1(t) = y(t)$, $t \in [\tau, b]$. Тогда краевая задача

$$x'' = f(t,x,x'), \quad x'(a) = y'(a), \quad x(b) = y(b), \quad \alpha_1 \le x \le y_1$$

по теореме 3 имеет решение, что противоречит условиям леммы. Если

$$(\exists\lambda \in (0,\lambda_1))(\exists\tau \in (a,b])(u_\lambda(\tau) = y_1(\tau) \wedge (\forall t \in [a,\tau))(y(t) < u_\lambda(t) < y_1(t))),$$

то пусть $\beta_1(t) = u_\lambda(t)$, $t \in [a,\tau]$ и $\beta_1(t) = y_1(t)$, $t \in [\tau, b]$. Тогда краевая задача

$$x'' = f(t,x,x'), \quad x'(a) = y'(a), \quad x(b) = z(b), \quad y \le x \le \beta_1$$

по теореме 3 имеет решение, что противоречит минимальности y_1. Аналогично доказывается, что

$$(\forall\lambda \in (\lambda_2, 1))(\forall t \in [a,b))(z_1(t) < u_\lambda(t) < z(t)) \wedge z'(a) < u'_\lambda(a) < y'(a)).$$

Следовательно,

$$(\forall\lambda \in [0,\lambda_1] \cup [\lambda_2, 1])(y \le u_\lambda \le z \wedge z'(a) \le u'_\lambda(a) \le y'(a)). \tag{70}$$

Если $y_1 = z_1$, то u полностью определяется формулами (69). Если $y_1 \ne z_1$, то по лемме 4 при $x'_a = y'(a)$ и $x_b = z(b)$ находим s такое, что

$$\begin{gathered} s_0 = y_1 \wedge s_1 = z_1 \wedge (\forall\mu \in (0,1))((s_\mu(a) > y(a) \wedge \\ s'_\mu(a) = y'(a) \wedge s_\mu \le z_1) \vee \\ (s'_\mu(a) < y'(a) \wedge s_\mu(b) = z(b) \wedge \\ s'_\mu(b) > z'_1(b) \wedge s_\mu \ge y_1)). \end{gathered} \tag{71}$$

Аналогично предыдущему доказываются неравенства

$$(\forall\mu \in (0,1))(y \le s_\mu \le z \wedge z'(a) \le s'_\mu(a) \le y'(a)). \tag{72}$$

Следовательно, $s \quad [0,1] \to S(I,R)$. Пусть

$$u_\lambda = s_{3\lambda-1}, \quad \lambda \in [1/3, 2/3]. \tag{73}$$

Тогда u определяется формулами (69), (73) и из (72)-(73) следует

$$(\forall\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2])(y \le u_\lambda \le z \wedge z'(a) \le u'_\lambda(a) \le y'(a)). \tag{74}$$

Из (70) и (74) следует (67), а из (69), (71) и (73) следует (68).

Лемма 8. Пусть $y'(a) \le z'(a)$ и для любого $x \in S(I,R)$ из $y \le x \le z$, $y'(a) \le x'(a) \le z'(a)$ и $x(b) = y(b)$ следует $x = y$ и из $y \le x \le z$, $y'(a) \le x'(a) \le z'(a)$ и $x(b) = z(b)$ следует $x = z$. Тогда существует инъективное непрерывное отображение

$$u \quad [0,1] \to \{x \in S(I,R) \quad y \le x \le z \wedge y'(a) \le x'(a) \le z'(a)\} \tag{75}$$

такое, что $u_0 = y$ и $u_1 = z$.

Доказательство. Пусть

$$u_\lambda = s(x(a) = y(a) + \lambda(z(a) - y(a)) \wedge \\ x'(a) = y'(a) + \lambda(z'(a) - y'(a))), \quad \lambda \in [0,1]. \tag{76}$$

Ясно, что $u_0 = y$ и $u_1 = z$. Покажем, что из экстремальности y и z следует

$$(\forall \lambda \in (0,1))(y < u_\lambda < z). \tag{77}$$

Если

$$(\exists \lambda \in (0,1))(\exists \tau \in (a,b])(u_\lambda(\tau) = y(\tau) \wedge (\forall t \in [a,\tau))(y(t) < u_\lambda(t) < z(t))),$$

то пусть $\alpha_1(t) = u_\lambda(t)$, $t \in [a,\tau]$ и $\alpha_1(t) = y(t)$, $t \in [\tau, b]$. Тогда краевая задача

$$x'' = f(t,x,x'), \quad y'(a) \le x'(a) \le z'(a), \quad x(b) = y(b), \quad \alpha_1 \le x \le z$$

по теореме 2 имеет решение, что противоречит условиям леммы. Если

$$(\exists \lambda \in (0,1))(\exists \tau \in (a,b])(u_\lambda(\tau) = z(\tau) \wedge (\forall t \in [a,\tau))(y(t) < u_\lambda(t) < z(t))),$$

то пусть $\beta_1(t) = u_\lambda(t)$, $t \in [a,\tau]$ и $\beta_1(t) = z(t)$, $t \in [\tau, b]$. Тогда краевая задача

$$x'' = f(t,x,x'), \quad y'(a) \le x'(a) \le z'(a), \quad x(b) = z(b), \quad y \le x \le \beta_1$$

по теореме 2 имеет решение, что противоречит условиям леммы. Из (76) и (77) следует (75).

Лемма 9. Пусть $x'_\alpha \in (-\infty, y'(a)]$, $x'_\beta \in [z'(a), \infty)$, для любого $x \in S(I,R)$ из $y \le x \le z$, $x(a) = y(a)$ и $x(b) = y(b)$ следует $x = y$ и из $y \le x \le z$, $x(a) = z(a)$ и $x(b) = z(b)$ следует $x = z$ и краевые задачи

$$x'' = f(t,x,x'), \quad x'(a) = x'_\beta, \quad x(b) = y(b), \quad y \le z \le z, \tag{78.1}$$

$$x'' = f(t,x,x'), \quad x'(a) = x'_\alpha, \quad x(b) = z(b), \quad y \le z \le z \tag{78.2}$$

не имеют решения. Тогда существует инъективное непрерывное отображение

$$u \quad [0,1] \to \{x \in S(I,R) \quad y \le x \le z \wedge x'_\alpha \le x'(a) \le x'_\beta\} \tag{79}$$

со следующими свойствами: $u_0 = y$, $u_1 = z$, найдутся $\lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 \in (0,1]$ такие, что $\lambda_3 \le \lambda_4 \le \lambda_5$,

$$(\forall \lambda \in (0,\lambda_3))(u_\lambda(a) = y(a)) \wedge \tag{80.1}$$

$$u_{\lambda_3}(a) = y(a) \wedge u'_{\lambda_3}(a) = x'_\beta \wedge \tag{80.2}$$

$$(\forall \lambda \in (\lambda_3,\lambda_4))(u'_\lambda(a) = x'_\beta) \wedge \tag{80.3}$$

$$u'_{\lambda_4}(a) = x'_\beta \wedge u_{\lambda_4}(b) = z(b) \wedge \tag{80.4}$$

$$(\forall \lambda \in (\lambda_4,\lambda_5))(u'_\lambda(a) = x'_\beta \vee u_\lambda(b) = z(b)) \wedge \tag{80.5}$$

$$u'_{\lambda_5}(a) = x'_\beta \wedge u_{\lambda_5}(b) = z(b) \wedge \tag{80.6}$$

$$(\forall \lambda \in (\lambda_5,1))(u_\lambda(b) = z(b)), \tag{80.7}$$

или найдутся $\lambda_1, \lambda_2 \in (0,1)$ такие, что $\lambda_1 \le \lambda_2$,

$$(\forall\lambda \in (0,\lambda_1))(u_\lambda(a) = y(a))\wedge \tag{81.1}$$

$$u_{\lambda_1}(a) = y(a) \wedge u_{\lambda_1}(b) = z(b)\wedge \tag{81.2}$$

$$(\forall\lambda \in (\lambda_1,\lambda_2))(u_\lambda(a) = y(a) \vee u_\lambda(b) = z(b))\wedge \tag{81.3}$$

$$u_{\lambda_2}(a) = y(a) \wedge u_{\lambda_2}(b) = z(b)\wedge \tag{81.4}$$

$$(\forall\lambda \in (\lambda_2,1))(u_\lambda(b) = z(b)), \tag{81.5}$$

или найдутся $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_4, \lambda_5 \in (0,1]$ такие, что $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_4 \le \lambda_5$,

$$(\forall\lambda \in (0,\lambda_1))(u_\lambda(a) = y(a))\wedge \tag{82.1}$$

$$u_{\lambda_1}(a) = y(a) \wedge u_{\lambda_1}(b) = z(b)\wedge \tag{82.2}$$

$$(\forall\lambda \in (\lambda_1,\lambda_2))(u_\lambda(a) = y(a) \vee u_\lambda(b) = z(b))\wedge \tag{82.3}$$

$$u_{\lambda_2}(a) = y(a) \wedge u_{\lambda_2}(b) = z(b)\wedge \tag{82.4}$$

$$(\forall\lambda \in (\lambda_2,\lambda_4))(u_\lambda(b) = z(b))\wedge \tag{82.5}$$

$$u'_{\lambda_4}(a) = x'_\beta \wedge u_{\lambda_4}(b) = z(b)\wedge \tag{82.6}$$

$$(\forall\lambda \in (\lambda_4,\lambda_5))(u'_\lambda(a) = x'_\beta) \vee u_\lambda(b) = z(b))\wedge \tag{82.7}$$

$$u'_{\lambda_5}(a) = x'_\beta \wedge u_{\lambda_5}(b) = z(b)\wedge \tag{82.8}$$

$$(\forall\lambda \in (\lambda_5,1))(u_\lambda(b) = z(b)), \tag{82.9}$$

или найдутся $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 \in (0,1]$ такие, что $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3 \le \lambda_4 \le \lambda_5$,

$$(\forall\lambda \in (0,\lambda_1))(u_\lambda(a) = y(a))\wedge \tag{83.1}$$

$$u_{\lambda_1}(a) = y(a) \wedge u_{\lambda_1}(b) = z(b)\wedge \tag{83.2}$$

$$(\forall\lambda \in (\lambda_1,\lambda_2))(u_\lambda(a) = y(a) \vee u_\lambda(b) = z(b))\wedge \tag{83.3}$$

$$u_{\lambda_2}(a) = y(a) \wedge u_{\lambda_2}(b) = z(b)\wedge \tag{83.4}$$

$$(\forall\lambda \in (\lambda_2,\lambda_3))(u_\lambda(a) = y(a))\wedge \tag{83.5}$$

$$u_{\lambda_3}(a) = y(a) \wedge u'_{\lambda_3}(a) = x'_\beta\wedge \tag{83.6}$$

$$(\forall\lambda \in (\lambda_3,\lambda_4))(u'_\lambda(a) = x'_\beta)\wedge \tag{83.7}$$

$$u'_{\lambda_4}(a) = x'_\beta \wedge u_{\lambda_4}(b) = z(b)\wedge \tag{83.8}$$

$$(\forall\lambda \in (\lambda_4,\lambda_5))(u'_\lambda(a) = x'_\beta \vee u_\lambda(b) = z(b))\wedge \tag{83.9}$$

$$u'_{\lambda_5}(a) = x'_\beta \wedge u_{\lambda_5}(b) = z(b)\wedge \tag{83.10}$$

$$(\forall\lambda \in (\lambda_5,1))(u_\lambda(b) = z(b)). \tag{83.11}$$

Доказательство. Приступим к построению функции v, из которой функция u получается по формуле $u_\lambda = v_{\lambda\mu_6}$, $\lambda \in [0,1]$. В построении v участвуют $\mu_i \in (0,\infty)$, $i = 1,\dots,6$, которые связаны с λ_i равенством $\lambda_i = \mu_i\mu_6^{-1}$, $i = 1,\dots,5$. Заметим, что из отсутствия решения у краевой задачи (78.1) следует $y'(a) < x'_\beta$ и $x'_\alpha < x'_\beta$. Пусть y_1 минимальное, а z_1 максимальное решение краевой задачи

$$x'' = f(t,x,x'), \quad x(a) = y(a), \quad x(b) = z(b), \quad y \le x \le z.$$

Из минимальности y_1 следует, что

$$(\forall x \in S(I,R))(\forall t_1 \in [a,b))(\forall t_2 \in (t_1,b])(x(t_1) = y_1(t_1) \wedge x(t_2) = y_1(t_2) \wedge$$

$$(\forall t \in (t_1,t_2))(y(t) \le x(t) \le y_1(t)) \Rightarrow x = y_1).$$

Действительно, если найдется $\tau \in (t_1,t_2)$ такое, что $x(\tau) < y_1(\tau)$, то пусть $\beta_1(t) = y_1(t)$, $t \in [a,t_1] \cup [t_2,b]$ и $\beta_1(t) = x(t)$, $t \in [t_1,t_2]$. Тогда краевая задача

$$x'' = f(t,x,x'), \quad x(a) = y(a), \quad x(b) = z(b), \quad y \le x \le \beta_1$$

по теореме 1 имеет решение, что противоречит минимальности y_1.

Рассмотрим случай, когда

$$y_1'(a) \ge x'_\beta. \tag{84}$$

Пусть $\mu_3 = 1$,

$$v_\mu = s(x(a) = y(a) \wedge x'(a) = y'(a) + \mu(x'_\beta - y'(a))), \quad \mu \in [0,\mu_3] \tag{85}$$

и $y_3 = v_{\mu_3}$. Аналогично предыдущему доказываются неравенства

$$(\forall \mu \in [0,\mu_3])(y \le v_\mu \le y_1 \wedge x'_\alpha \le v'_\mu(a) \le x'_\beta). \tag{86}$$

Пусть y_4 минимальное, y_5 максимальное решение краевой задачи

$$x'' = f(t,x,x'), \quad x'(a) = x'_\beta, \quad x(b) = z(b), \quad y_3 \le x \le z. \tag{87}$$

Если $x \in S(I,R)$, $y \le x \le z$, $x'(a) = x'_\beta$ и $x(b) = z(b)$, то из $x \ge y_1 \ge y_3$ следует, что x является решением краевой задачи (87). Если $y_1'(a) = x'_\beta$, то $\mu_4 = \mu_3$. Если $y_1'(a) > x'_\beta$, то $\mu_4 = \mu_3 + 1$ и

$$v_\mu = s(x(a) = y(a) + (\mu - \mu_3)(y_4(a) - y(a)) \wedge x'(a) = x'_\beta), \quad \mu \in [\mu_3,\mu_4]. \tag{88}$$

Аналогично предыдущему доказываются неравенства

$$(\forall \mu \in [\mu_3,\mu_4])(y \le v_\mu \le y_4 \wedge v'_\mu(a) = x'_\beta). \tag{89}$$

Если $y_5 = y_4$, то $\mu_5 = \mu_4$. Если $y_5 \ne y_4$, то $\mu_5 = \mu_4 + 1$ и по лемме 4 при $x'_a = x'_\beta$ и $x_b = z(b)$ найдем s такое, что

$$\begin{gathered} s_0 = y_4 \wedge s_1 = y_5 \wedge (\forall \mu \in (0,1))((s_\mu(a) > y_4(a) \wedge \\ s'_\mu(a) = x'_\beta \wedge s_\mu \le y_5) \vee \\ (s'_\mu(a) < x'_\beta \wedge s_\mu(b) = z(b) \wedge \\ s'_\mu(b) > y_5'(b) \wedge s_\mu \ge y_4)). \end{gathered} \tag{90}$$

Аналогично предыдущему доказываются неравенства

$$(\forall \mu \in (0,1))(y \le s'_\mu \le z \wedge x'_\alpha \le s'_\mu(a) \le x'_\beta). \tag{91}$$

Следовательно, $s \quad [0,1] \to S(I,R)$. Пусть

$$v_\mu = s_{\mu-\mu_4}, \quad \mu \in [\mu_4, \mu_5]. \tag{92}$$

Тогда

$$(\forall \mu \in [\mu_4, \mu_5])(y \le v_\mu \le z \wedge x'_\alpha \le v'_\mu(a) \le x'_\beta). \tag{93}$$

Если $z = y_5$, то $\mu_6 = \mu_5$. Если $z \ne y_5$, то $\mu_6 = \mu_5 + 1$ и

$$\begin{gathered} v_\mu = s(x(b) = z(b) \wedge x'(b) = y'_5(b) + (\mu - \mu_5)(z'(b) - y'_5(b))), \\ \mu \in [\mu_5, \mu_6]. \end{gathered} \tag{94}$$

Аналогично предыдущему доказываются неравенства

$$(\forall \mu \in [\mu_5, \mu_6])(y_5 \le v_\mu \le z \wedge x'_\alpha \le v'_\mu(a) \le x'_\beta). \tag{95}$$

Из (85)-(86) и (88)-(95) следуют условия (79), (80). Рассмотрение случая (84) закончено.

Рассмотрим случай, когда

$$y'_1(a) < x'_\beta. \tag{96}$$

По лемме 6 найдем

$$w \quad [0,1] \to \{x \in S(I,R) \quad y \le x \le z\}$$

и $\nu_1, \nu_2 \in (0,1)$ такие, что $w_0 = y$, $w_1 = z$, $\nu_1 \le \nu_2$ и

$$\begin{gathered} (\forall \nu \in (0,\nu_1))(w_\nu(a) = y(a) \wedge \\ w_{\nu_1}(a) = y(a) \wedge w_{\nu_1}(b) = z(b) \wedge \\ (\forall \nu \in (\nu_1,\nu_2))(w_\nu(a) = y(a) \vee w_\nu(b) = z(b)) \wedge \\ w_{\nu_2}(a) = y(a) \wedge w_{\nu_2}(b) = z(b) \wedge \\ (\forall \nu \in (\nu_2, 1))(w_\nu(b) = z(b)). \end{gathered} \tag{97}$$

Рассмотрим случай, когда

$$(\forall \nu \in [0,1])(w'_\nu(a) < x'_\beta). \tag{98}$$

Пусть $\mu_1 = \nu_1$, $\mu_2 = \nu_2$, $\mu_6 = 1$ и

$$v_\mu = w_\mu, \quad \mu \in [0, \mu_6]. \tag{99}$$

Ясно, что

$$(\forall \mu \in [0,\mu_6])(y \le v_\mu \le z \wedge x'_\alpha \le v'_\mu(a) \le x'_\beta). \tag{100}$$

Из (97), (99)-(100) следуют условия (79), (81). Рассмотрение случая (96), (98) закончено.

Рассмотрим случай, когда

$$\begin{gathered} (\exists \mu_4 \in (0,1])(w_{\mu_4}(a) > y(a) \wedge w'_{\mu_4}(a) = x'_\beta \wedge w_{\mu_4}(b) = z(b) \wedge \\ (\forall \nu \in [0,\mu_4))(w'_\nu(a) < x'_\beta)). \end{gathered} \tag{101}$$

Пусть $\mu_1 = \nu_1$, $y_4 = w_{\mu_4}$,

$$X = \{x \in S(I,R) \quad x(a) = y(a) \wedge x(b) = z(b) \wedge y \le x \le z\},$$

$$X_* = \{x_* \in X \quad (\forall x \in X)(x'(a) \le x'_*(a) \vee x'(b) \le x'_*(b))\},$$

$$\mu_2 = \sup\{\nu \in [0,1] \quad w_\nu \in X_* \wedge w_\nu \le y_4\},$$

$$v_\mu = w_\mu, \quad \mu \in [0, \mu_4] \tag{102}$$

и $y_2 = w_{\mu_2}$. Ясно, что

$$(\forall \mu \in [0, \mu_4])(y \le v_\mu \le z \wedge x'_\alpha \le v'_\mu(a) \le x'_\beta). \tag{103}$$

Пусть y_5 максимальное решение краевой задачи

$$x'' = f(t,x,x'), \quad x'(a) = x'_\beta, \quad x(b) = z(b), \quad y_4 \le x \le z.$$

Ясно, что y_5 будет максимальным решением краевой задачи

$$x'' = f(t,x,x'), \quad x'(a) = x'_\beta, \quad x(b) = z(b), \quad y \le x \le z.$$

Покажем, что для любого $x \in S(I,R)$ из $y \le x \le z$, $x'(a) = x'_\beta$ и $x(b) = z(b)$ следует $x'(b) \le y'_4(b)$. Предположим противное. Пусть

$$\nu_{*1} = \sup\{\nu \in [0,1] \quad w_\nu \in X_* \wedge w_\nu \le x\}.$$

Из определения y_4 следует $x'(b) > y'_2(b)$. Следовательно, $\mu_2 > \nu_{*1}$. Пусть

$$\nu_{*2} = \inf\{\nu \in (\nu_{*1}, 1] \quad w_\nu \in X_*\}.$$

Ясно, что $\nu_{*1} < \nu_{*2}$. Если $w_\nu(a) = y(a)$, $\nu \in (\nu_{*1}, \nu_{*2})$, то из леммы 1 следует $x \ge w_{\nu_{*2}}$, что противоречит определению ν_{*1}. Если $w_\nu(b) = z(b)$, $\nu \in (\nu_{*1}, \nu_{*2})$, то из леммы 2 следует $x \ge w_{\nu_{*2}}$, что противоречит определению ν_{*1}. Дальнейшее построение v_μ совпадает со случаем (84). Из (97), (102)-(103), (91)-(95) следуют условия (79), (82). Рассмотрение случая (96), (101) закончено.

Рассмотрим случай, когда

$$\begin{gathered}(\exists \mu_3 \in (0,1))(w_{\mu_3}(a) = y(a) \wedge w'_{\mu_3}(a) = x'_\beta \wedge \\ (\forall \nu \in [0, \mu_3))(w'_\nu(a) < x'_\beta)).\end{gathered} \tag{104}$$

Пусть $\mu_1 = \nu_1$, $y_3 = w_{\mu_3}$,

$$\mu_2 = \sup\{\nu \in [0,1] \quad w_\nu \in X_* \wedge w_\nu \le \mu_3\},$$

$$v_\mu = w_\mu, \quad \mu \in [0, \mu_3]. \tag{105}$$

Ясно, что

$$(\forall \mu \in [0, \mu_3])(y \le v_\mu \le z \wedge x'_\alpha \le v'_\mu(a) \le x'_\beta). \tag{106}$$

Пусть y_4 минимальное, а y_5 максимальное решение краевой задачи (87). Покажем, что для любого $x \in S(I,R)$ из $y \le x \le z$, $x'(a) = x'_\beta$ и $x(b) = z(b)$ следует $x \ge y_3$. Предположим противное. Пусть

$$\nu_{*1} = \sup\{\nu \in [0,1] : w_\nu \in X_* \wedge w_\nu \le x\}.$$

Из $y_3 \le z_1$ следует существование $\nu \in (\nu_{*1}, 1]$ такого, что $w_\nu \in X_*$. Пусть

$$\nu_{*2} = \inf\{\nu \in (\nu_{*1}, 1] \quad w_\nu \in X_*\}.$$

Ясно, что $\nu_{*1} < \nu_{*2}$. Если $w_\nu(a) = y(a)$, $\nu \in (\nu_{*1}, \nu_{*2})$, то из леммы 1 следует $x \ge w_{\nu_{*2}}$, что противоречит определению ν_{*1}. Если $w_\nu(b) = z(b)$, $\nu \in (\nu_{*1}, \nu_{*2})$, то из леммы 2 следует $x \ge w_{\nu_{*2}}$, что противоречит определению ν_{*1}. Дальнейшее построение v_μ совпадает со случаем (84). Из (97), (105)-(106), (91)-(95) следуют условия (79), (83). Рассмотрение случая (96), (104) закончено.

Лемма 10. Пусть $y'(a) > z'(a)$, $y'(b) < z'(b)$ и для любого $x \in S(I, R)$ из $y \le x \le z$, $x'(a) = y'(a)$ и $x'(b) = y'(b)$ следует $x = y$ и из $y \le x \le z$, $x'(a) = z'(a)$ и $x'(b) = z'(b)$ следует $x = z$. Тогда существует инъективное непрерывное отображение

$$\begin{gathered} u \quad [0,1] \to \{x \in S(I,R) \quad y \le x \le z \wedge \\ z'(a) \le x'(a) \le y'(a) \wedge y'(b) \le x'(b) \le z'(b)\} \end{gathered} \tag{107}$$

со следующими свойствами: $u_0 = y$, $u_1 = z$, найдутся $\lambda_1, \lambda_2 \in (0,1)$ такие, что $\lambda_1 \le \lambda_2$ и

$$(\forall \lambda \in (0, \lambda_1))(u'_\lambda(a) = y'(a)) \wedge \tag{108.1}$$

$$u'_{\lambda_1}(a) = y'(a) \wedge u'_{\lambda_1}(b) = z'(b) \wedge \tag{108.2}$$

$$(\forall \lambda \in (\lambda_1, \lambda_2))(u'_\lambda(a) = y'(a) \vee u'_\lambda(b) = z'(b)) \wedge \tag{108.3}$$

$$u'_{\lambda_2}(a) = y'(a) \wedge u'_{\lambda_2}(b) = z'(b) \wedge \tag{108.4}$$

$$(\forall \lambda \in (\lambda_2, 1))(u'_\lambda(b) = z'(b)). \tag{108.5}$$

Доказательство. Пусть y_1 минимальное, а z_1 максимальное решение краевой задачи

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x'(a) = y'(a), \quad x'(b) = z'(b), \quad y \le x \le z.$$

Если $y_1 = z_1$, то $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$, а если $y_1 \ne y_2$, то $\lambda_1 = 1/3$ и $\lambda_2 = 2/3$. Пусть

$$\begin{aligned} & u_\lambda = s(x(a) = y(a) + \lambda\lambda_1^{-1}(y_1(a) - y(a))) \wedge \\ & x'(a) = y'(a)), \quad \lambda \in [0, \lambda_1], \\ & u_\lambda = s(x'(b) = z'(b) \wedge x(b) = z_1(b) + (\lambda - \lambda_2)(1- \\ & \lambda_2)^{-1}(z(b) - z_1(b))), \quad \lambda \in [\lambda_2, 1]. \end{aligned} \tag{109}$$

Покажем, что из экстремальности y и y_1 следует

$$(\forall \lambda \in (0, \lambda_1))(y < u_\lambda < y_1 \wedge y'(b) < u'_\lambda(b) < z'(b)).$$

Если

$$(\exists \lambda \in (0, \lambda_1))(\exists \tau \in (a, b])(u_\lambda(\tau) = y(\tau) \wedge (\forall t \in [a, \tau))(y(t) < u_\lambda(t) < y_1(t))),$$

то пусть $\alpha_1(t) = u_\lambda(t)$, $t \in [a, \tau]$ и $\alpha_1(t) = y(t)$, $t \in [\tau, b]$. Тогда краевая задача

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x'(a) = y'(a), \quad x'(b) = y'(b), \quad \alpha_1 \le x \le y_1 \tag{110}$$

по теореме 6 имеет решение, что противоречит условиям леммы. Если

$$(\exists \lambda \in (0, \lambda_1))(\exists \tau \in (a, b])(u_\lambda(\tau) = y_1(\tau) \wedge (\forall t \in [a, \tau))(y(t) < u_\lambda(t) < y_1(t))),$$

то пусть $\beta_1(t) = u_\lambda(t)$, $t \in [a, \tau]$ и $\beta_1(t) = y_1(t)$, $t \in [\tau, b]$. Тогда краевая задача

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x'(a) = y'(a), \quad x'(b) = z'(b), \quad y \le x \le \beta_1 \tag{111}$$

по теореме 6 имеет решение, что противоречит минимальности y_1. Если

$$(\exists \lambda \in (0, \lambda_1))(y < u_\lambda < z \wedge u'(b) \le y'(b)),$$

то пусть $\alpha_1 = u_\lambda$. Тогда по теореме 6 краевая задача (110) имеет решение, что противоречит условиям леммы. Если

$$(\exists \lambda \in (0, \lambda_1))(y < u_\lambda < z \wedge u'(b) \ge z'(b)),$$

то пусть $\beta_1 = u_\lambda$. Тогда по теореме 6 краевая задача (111) имеет решение, что противоречит минимальности y_1. Аналогично доказывается, что

$$(\forall \lambda \in (\lambda_2, 1))(y < u_\lambda < z \wedge z'(a) < u'_\lambda(a) < y'(a)).$$

Следовательно,

$$\begin{gathered}(\forall \lambda \in [0, \lambda_1] \cup [\lambda_2, 1])(y \le u_\lambda \le z \wedge \\ z'(a) \le u'_\lambda(a) \le y'(a) \wedge y'(b) \le u'_\lambda(b) \le z'(b)).\end{gathered} \tag{112}$$

Если $y_1 = z_1$, то u полностью определяется формулами (109). Если $y_1 \ne z_1$, то по лемме 5 при $x'_a = y'(a)$ и $x'_b = z'(b)$ находим s такое, что

$$\begin{gathered}s_0 = y_1 \wedge s_1 = z_1 \wedge (\forall \mu \in (0, 1))((s_\mu(a) > y_1(a) \wedge \\ s'_\mu(a) = y'(a) \wedge s'_\mu(b) \le z'(b) \wedge s_\mu \le z_1) \vee \\ (s_\mu(b) < z_1(b) \wedge s'_\mu(a) \le y'(a) \wedge \\ s'_\mu(b) = z'(b) \wedge s_\mu \ge y_1)).\end{gathered} \tag{113}$$

Аналогично предыдущему доказываются неравенства

$$\begin{gathered}(\forall \mu \in [0, 1])(y \le s_\mu \le z \wedge z'(a) \le s'_\mu(a) \le y'(a) \wedge \\ y'(b) \le s'_\mu(b) \le z'(b)).\end{gathered} \tag{114}$$

Следовательно, $s\colon [0, 1] \to S(I, R)$. Пусть

$$u_\lambda = s_{3\lambda - 1}, \quad \lambda \in [1/3, 2/3]. \tag{115}$$

Тогда u определяется формулами (109), (115). Из (112), (114) и (115) следует (107), а из (109), (113) и (115) следует (108).

Лемма 11. Пусть $y'(a) \le z'(a)$, $y'(b) \le z'(b)$ и для любого $x \in S(I, R)$ из $y \le x \le z$, $y'(a) \le x'(a) \le z'(a)$ и $x'(b) = y'(b)$ следует $x = y$ и из $y \le x \le z$, $y'(a) \le x'(a) \le z'(a)$ и $x'(b) = z'(b)$ следует $x = z$. Тогда существует инъективное непрерывное отображение

$$\begin{gathered}u\colon [0, 1] \to \{x \in S(I, R) \mid y \le x \le z \wedge \\ y'(a) \le x'(a) \le z'(a) \wedge y'(b) \le x'(b) \le z'(b)\}\end{gathered} \tag{116}$$

такое, что $u_0 = y$ и $u_1 = z$.

Доказательство. Пусть

$$u_\lambda = s(x(a) = y(a) + \lambda(z(a) - y(a))\wedge \\ x'(a) = y'(a) + \lambda(z'(a) - y'(a)), \quad \lambda \in [0,1]. \tag{117}$$

Ясно, что $u_0 = y$ и $u_1 = z$. Покажем, что из экстремальности y и z следует (116). Если

$$(\exists\lambda \in (0,1))(\exists\tau \in (a,b])(u_\lambda(\tau) = y(\tau) \wedge (\forall t \in [a,\tau))(y(t) < u_\lambda(t) < z(t))),$$

то пусть $\alpha_1(t) = u_\lambda(t)$, $t \in [a,\tau]$ и $\alpha_1(t) = y(t)$, $t \in [\tau,b]$. Тогда краевая задача

$$x'' = f(t,x,x'), \quad y'(a) \le x'(a) \le z'(a), \quad x'(b) = y'(b), \quad \alpha_1 \le x \le z \tag{118}$$

по теореме 4 имеет решение, что противоречит условиям леммы. Если

$$(\exists\lambda \in (0,1))(\exists\tau \in (a,b])(u_\lambda(\tau) = z(\tau) \wedge (\forall t \in [a,\tau))(y(t) < u_\lambda(t) < z(t))),$$

то пусть $\beta_1(t) = u_\lambda(t)$, $t \in [a,\tau]$ и $\beta_1(t) = z(t)$, $t \in [\tau,b]$. Тогда краевая задача

$$x'' = f(t,x,x'), \quad y'(a) \le x'(a) \le z'(a), \quad x'(b) = z'(b), \quad y \le x \le \beta_1 \tag{119}$$

по теореме 4 имеет решение, что противоречит условиям леммы. Если

$$(\exists\lambda \in (0,1))(y < u_\lambda < z \wedge u'_\lambda(b) < y'(b)),$$

то пусть α_1 u_λ. Тогда краевая задача (118) по теореме 4 имеет решение, что противоречит условиям леммы. Если

$$(\exists\lambda \in (0,1))(y < u_\lambda < z \wedge u'_\lambda(b) > z'(b)),$$

то пусть β_1 u_λ. Тогда краевая задача (119) по теореме 4 имеет решение, что противоречит условиям леммы. Неравенства $y'(a) \le u'_\lambda(a) \le z'(a)$, $\lambda \in [0,1]$ следуют из (117).

Лемма 12. Пусть $x'_{\alpha a} \in (-\infty, y'(a)]$, $x'_{\beta a} \in [z'(a), \infty)$, $x'_{\alpha b} \in (-\infty, z'(b)]$, $x'_{\beta b} \in [y'(b), \infty)$, для любого $x \in S(I,R)$ из $y \le x \le z$, $x(a) = y(a)$ и $x(b) = y(b)$ следует $x = y$ и из $y \le x \le z$, $x(a) = z(a)$ и $x(b) = z(b)$ следует $x = z$ и краевые задачи

$$x'' = f(t,x,x'), \quad x(a) = y(a), \quad x'(b) = x'_{\alpha b}, \quad y \le x \le z, \tag{120.1}$$

$$x'' = f(t,x,x'), \quad x'(a) = x'_{\beta a}, \quad x(b) = y(b), \quad y \le x \le z, \tag{120.2}$$

$$x'' = f(t,x,x'), \quad x'(a) = x'_{\beta a}, \quad x'(b) = x'_{\alpha b}, \quad y \le x \le z, \tag{120.3}$$

$$x'' = f(t,x,x'), \quad x'(a) = x'_{\alpha a}, \quad x(b) = z(b), \quad y \le x \le z, \tag{120.4}$$

$$x'' = f(t,x,x'), \quad x(a) = z(a), \quad x'(b) = x'_{\beta b}, \quad y \le x \le z, \tag{120.5}$$

$$x'' = f(t,x,x'), \quad x'(a) = x'_{\alpha a}, \quad x'(b) = x'_{\beta b}, \quad y \le x \le z, \tag{120.6}$$

не имеют решения. Тогда существует непрерывное отображение

$$u \quad [0,1] \to \{x \in S(I,R) \quad y \le x \le z \wedge \\ x'_{\alpha a} \le x'(a) \le x'_{\beta a} \wedge x'_{\alpha b} \le x'(b) \le x'_{\beta b}\} \tag{121}$$

такое, что $u_0 = y$ и $u_1 = z$.

Доказательство. Если $y'(b) \leq x'_{\alpha b}$, то из $y'(b) \leq x'_{\alpha b} \leq z'(b)$ по теореме 3 следует, что краевая задача (120.1) имеет решение. Следовательно,

$$x'_{\alpha b} < y'(b) \leq x'_{\beta b} \tag{122}$$

и $x'_{\alpha b} < x'_{\beta b}$. Если $z'(a) \leq x'_{\alpha a}$, то из $z'(a) \leq x'_{\alpha a} \leq y'(a)$ по теореме 3 следует, что краевая задача (120.4) имеет решение. Следовательно,

$$x'_{\alpha a} < z'(a) \leq x'_{\beta a} \tag{123}$$

и $x'_{\alpha a} < x'_{\beta a}$. Если $x'_{\beta a} \leq y'(a)$, то из $z'(a) \leq x'_{\beta a} \leq y'(a)$ по теореме 3 следует, что краевая задача (120.2) имеет решение. Следовательно,

$$x'_{\alpha a} \leq y'(a) < x'_{\beta a}. \tag{124}$$

Если $x'_{\beta b} \leq z'(b)$, то из $y'(b) \leq x'_{\beta b} \leq z'(b)$ по теореме 3 следует, что краевая задача (120.5) имеет решение. Следовательно,

$$x'_{\alpha b} \leq z'(b) < x'_{\beta b}. \tag{125}$$

Пусть y_1 минимальное, а z_1 максимальное решение краевой задачи

$$x'' = f(t,x,x'), \quad x(a) = y(a), \quad x(b) = z(b), \quad y \leq x \leq z,$$

которые существуют по теореме 1, и для $\mu \in [0,1]$

$$v_{1\mu} = s(x(a) = y(a) \wedge x'(a) = y'(a) + \mu(y_1'(a) - y'(a))),$$

$$w_{1\mu} = s(x(b) = z(b) \wedge x'(b) = z_1'(b) + \mu(z'(b) - z_1'(b))).$$

Из экстремальности y, y_1, z_1, z и отсутствия решений у краевых задач (120.1) и (120.4) следует

$$(\forall \mu \in [0,1])(y \leq v_{1\mu} \leq y_1 \wedge x'_{\alpha b} < v'_{1\mu}(b)), \tag{126}$$

$$(\forall \mu \in [0,1])(z_1 \leq w_{1\mu} \leq z \wedge x'_{\alpha a} < w'_{1\mu}(a)). \tag{127}$$

Если $y_1 = z_1$, то пусть $s_\lambda = y_1$, $\lambda \in [0,1]$. Если $y_1 \neq z_1$, то по лемме 3 существует непрерывное на $[0,1]$ отображение s со следующими свойствами: $s_0 = y_1$, $s_1 = z_1$ и для любого $\lambda \in [0,1]$

$$\begin{gathered}(s_\lambda(a) = y(a) \wedge s'_\lambda(a) \geq y_1'(a) \wedge s_\lambda \leq z_1) \vee \\ (s_\lambda(b) = z(b) \wedge s'_\lambda(b) \geq z_1'(b) \wedge s_\lambda \geq y_1).\end{gathered} \tag{128}$$

Из (128) и экстремальности y и z следует

$$(\forall \lambda \in [0,1])(y \leq s_\lambda \leq z). \tag{129}$$

Следовательно, s $[0,1] \to S(I,R)$. Из (124), (125), (128) и отсутствия решений у краевых задач (120.1) и (120.4) следует

$$(\forall \lambda \in [0,1])(x'_{\alpha a} < s'_\lambda(a) \wedge x'_{\alpha b} < s'_\lambda(b)). \tag{130}$$

Пусть $r_\mu = v_{13\mu}$ для $\mu \in [0,1/3]$, $r_\mu = s_{3\mu-1}$ для $\mu \in [1/3,2/3]$ и $r_\mu = w_{13\mu-2}$ для $\mu \in [2/3,1]$. Из (124)-(127) и (129) следует

$$\begin{gathered}(\forall\mu \in [0,1])(y \le r_\mu \le z \wedge x'_{\alpha a} \le r'_\mu(a) \wedge x'_{\alpha b} \le r'_\mu(b)),\\ (\forall\mu \in (0,1])(x'_{\alpha a} < r'_\mu(a)),\\ (\forall\mu \in [0,1))(x'_{\alpha b} < r'_\mu(b)).\end{gathered} \tag{131}$$

Если

$$(\forall\mu \in [0,1])(r'_\mu(a) \le x'_{\beta a} \wedge r'_\mu(b) \le x'_{\beta b}), \tag{132}$$

то $u = r$ и из (131)-(132) следует (121).

Если (132) не выполняется, то из (122)-(125) следует

$$\begin{gathered}(\exists\mu_*, \nu_* \in [0,1])((r'_{\mu_*}(a) = x'_{\beta a} \vee r'_{\mu_*}(b) = x'_{\beta b})\wedge\\ (\forall\mu \in [0,\mu_*))(r'_\mu(a) < x'_{\beta a} \wedge r'_\mu(b) < x'_{\beta b})\wedge\\ (r'_{\nu_*}(a) = x'_{\beta a} \vee r'_{\nu_*}(b) = x'_{\beta b})\wedge\\ (\forall\mu \in (\nu_*,1])(r'_\mu(a) < x'_{\beta a} \wedge r'_\mu(b) < x'_{\beta b})).\end{gathered} \tag{133}$$

Ясно, что $\mu_* < \nu_*$. Из определения r и (133) следует

$$(r_{\mu_*}(a) = y(a) \wedge r'_{\mu_*}(a) = x'_{\beta a} \wedge r'_{\mu_*}(b) \le x'_{\beta b})\vee \tag{134.1}$$

$$(r_{\mu_*}(a) = y(a) \wedge r'_{\mu_*}(a) < x'_{\beta a} \wedge r'_{\mu_*}(b) = x'_{\beta b})\vee \tag{134.2}$$

$$(r_{\mu_*}(a) > y(a) \wedge r_{\mu_*}(b) = z(b) \wedge r'_{\mu_*}(a) = x'_{\beta a} \wedge r'_{\mu_*}(b) < x'_{\beta b}), \tag{134.3}$$

$$(r_{\nu_*}(b) = z(b) \wedge r'_{\nu_*}(a) \le x'_{\beta a} \wedge r'_{\nu_*}(b) = x'_{\beta b})\vee \tag{135.1}$$

$$(r_{\nu_*}(b) = z(b) \wedge r'_{\nu_*}(a) = x'_{\beta a} \wedge r'_{\nu_*}(b) < x'_{\beta b})\vee \tag{135.2}$$

$$(r_{\nu_*}(a) = y(a) \wedge r_{\nu_*}(b) < z(b) \wedge r'_{\nu_*}(a) < x'_{\beta a} \wedge r'_{\nu_*}(b) = x'_{\beta b}). \tag{135.3}$$

Случай, когда $r_{\mu_*}(a) > y(a)$, $r_{\mu_*}(b) = z(b)$ и $r'_{\mu_*}(b) = x'_{\beta b}$ возможен только при $\mu_* > 1/3$. Тогда $r'_{1/3}(b) = y'_1(b) > x'_{\beta b}$, что противоречит (133). Аналогично исключается случай, когда $r_{\nu_*}(a) = y(a)$, $r_{\nu_*}(b) < z(b)$ и $r'_{\nu_*}(a) = x'_{\beta a}$.

Рассмотрим случай, когда выполняется условие (134.1). Пусть $y_2 = r_{\mu_*}$. Из $y_2 \le z_1$ следует, что $\nu_* \in [2/3,1]$. Следовательно, условие (135.3) не выполняется.

Рассмотрим случай, когда выполняется условие (135.1). Пусть $z_2 = r_{\nu_*}$. Из $z_2 \ge y_1$ следует, что $\mu_* \in [0,1/3]$. Из (126)-(127) следует $y_2 \le y_1 \le z_1 \le z_2$. Следовательно, условие $y_2 \le z_2$ и по теореме 6 краевая задача

$$x'' = f(t,x,x'), \quad x'(a) = x'_{\beta a}, \quad x'(b) = x'_{\beta b}, \quad y_2 \le x \le z_2 \tag{136}$$

имеет минимальное решение y_3 и максимальное решение z_3. Из леммы 1 следует, что множество решений краевой задачи (136) совпадает с множеством решений краевой задачи

$$x'' = f(t,x,x'), \quad x'(a) = x'_{\beta a}, \quad x'(b) = x'_{\beta b}, \quad y \le x \le z. \tag{137}$$

Пусть для $\mu \in [0,1]$

$$v_{2\mu} = s(x(a) = y_2(a) + \mu(y_3(a) - y_2(a)) \wedge x'(a) = x'_{\beta a}),$$

$$w_{2\mu} = s(x(b) = z_3(a) + \mu(z_2(b) - z_3(b)) \wedge x'(b) = x'_{\beta b}).$$

Докажем неравенства

$$(\forall \mu \in [0,1])(y \le v_{2\mu} \le y_3). \tag{138}$$

Если $y_2(a) = y_3(a)$, то $y_2 = y_3$ и (138) очевидно. Пусть $y_2(a) < y_3(a)$. Тогда $y_2 < y_3$. Если найдется $\mu_0 \in [0,1]$ такое, что $v_{2\mu_0}(b) = y(b)$ и $y \le v_{2\mu_0} \le y_3$, то это противоречит отсутствию решения у краевой задачи (120.2). Если найдется $\mu_0 \in [0,1)$ такое, что $v_{2\mu_0}(b) = y_3(b)$ и $y \le v_{2\mu_0} \le y_3$, то по лемме 1 $v_{2\mu_0} \ge y_2$ и краевая задача

$$x'' = f(t,x,x'), \quad x'(a) = x'_{\beta a}, \quad x'(b) = x'_{\beta b}, \quad y_2 \le x \le v_{2\mu_0}$$

по теореме 6 имеет решение, что противоречит минимальности y_3. Теперь (138) следует из непрерывной зависимости. Аналогично доказывается, что

$$(\forall \mu \in [0,1])(z_3 \le w_{2\mu} \le z). \tag{139}$$

Из отсутствия решений у краевых задач (120.3), (120.6) и экстремальности y_3 и z_3 следует

$$(\forall \mu \in [0,1])(v'_{2\mu}(a) = x'_{\beta a} \wedge x'_{\alpha b} < v'_{2\mu}(b) \le x'_{\beta b}), \tag{140}$$

$$(\forall \mu \in [0,1])(x'_{\alpha a} < w'_{2\mu}(a) \le x'_{\beta a} \wedge w'_{2\mu}(b) = x'_{\beta b}). \tag{141}$$

По лемме 5 существует непрерывное на $[0,1]$ отображение s^1 со следующими свойствами: $s^1_0 = y_3$, $s^1_1 = z_3$ и для любого $\mu \in [0,1]$

$$\begin{array}{c} (s^1_\mu(a) \ge y_3(a) \wedge s^{1\prime}_\mu(a) = x'_{\beta a} \wedge s^{1\prime}_\mu(b) \le x'_{\beta b} \wedge s^1_\mu \le z_3)\vee \\ (s^1_\mu(b) \le z_3(b) \wedge s^{1\prime}_\mu(a) \le x'_{\beta a} \wedge s^{1\prime}_\mu(b) \le x'_{\beta b} \wedge s^1_\mu \ge y_3). \end{array} \tag{142}$$

Из (142) и отсутствия решений у краевых задач (120.1)-(120.5) следует, что

$$(\forall \mu \in [0,1])(y \le s^1_\mu \le z). \tag{143}$$

Следовательно, $s^1 \quad [0,1] \to S(I,R)$. Из отсутствия решений у краевых задач (120.3), (120.6) и (142) следует

$$(\forall \mu \in [0,1])(x'_{\alpha a} < s^{1\prime}_\mu(a) \le x'_{\beta a} \wedge x'_{\alpha b} < s^{1\prime}_\mu(b) \le x'_{\beta b}). \tag{144}$$

Пусть $\lambda_* = \mu_* - \nu_* + 4$, $\lambda_1 = \mu_*\lambda_*^{-1}$, $\lambda_2 = (\mu_* + 1)\lambda_*^{-1}$, $\lambda_3 = (\mu_* + 2)\lambda_*^{-1}$, $\lambda_4 = (\mu_* + 3)\lambda_*^{-1}$, $\lambda_5 = (\mu_* - \nu_* + 3)\lambda_*^{-1}$ и

$$u_\lambda = r_{\lambda\lambda_*}, \quad \lambda \in [0, \lambda_1],$$

$$u_\lambda = v_{2(\lambda-\lambda_1)\lambda_*}, \quad \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2],$$

$$u_\lambda = s^1_{(\lambda-\lambda_2)\lambda_*}, \quad \lambda \in [\lambda_2, \lambda_3],$$

$$u_\lambda = w_{2(\lambda-\lambda_3)\lambda_*}, \quad \lambda \in [\lambda_3, \lambda_4],$$

$$u_\lambda = r_{(\lambda-\lambda_5)\lambda_*}, \quad \lambda \in [\lambda_4, 1].$$

Условия (121) следуют из условий (131), (133), (138)-(141) и (143)-(144). Рассмотрение случая (131.1), (135.1) закончено.

Рассмотрим случай, когда выполнятся условие (135.2). Пусть $z_4 = r_{\nu_*}$. Из леммы 1 следует

$$(\forall x \in S(I,R))(x'(a) = x'_{\beta a} \wedge y \leq x \leq z \Rightarrow x \leq z_4). \tag{145}$$

Обозначим через z_5 решение краевой задачи

$$x'' = f(t,x,x'), \quad x'(a) = x'_{\beta a}, \quad x(b) = z(b), \quad y \leq x \leq z, \tag{146}$$

для которого для любого решения x краевой задачи (146) справедливо неравенство $z_5'(b) \geq x'(b)$. Из леммы 2 следует

$$(\forall x \in S(I,R))(x'(a) = x'_{\beta a} \wedge x(b) = z(b) \wedge y \leq x \leq z \Rightarrow x \geq y_2). \tag{147}$$

Из (145) и (147) следует $y_2 \leq z_5 \leq z_4$. По лемме 4 существует непрерывное на $[0,1]$ отображение s^3 со следующими свойствами: $s_0^3 = z_5$, $s_1^3 = z_4$ и для любого $\mu \in [0,1]$

$$\begin{gathered}(s_\mu^3(a) \geq z_5(a) \wedge s_\mu^{3\prime}(a) = x'_{\beta a} \wedge s_\mu^3 \leq z_4) \vee \\ (s_\mu^{3\prime}(a) \leq x'_{\beta a} \wedge s_\mu^3(b) = z(b) \wedge s_\mu^{3\prime}(b) \geq z_4'(b) \wedge s_\mu^3 \geq z_5).\end{gathered} \tag{148}$$

Из (148), отсутствия решения у краевой задачи (120.2) и экстремальности z следует, что

$$(\forall \mu \in [0,1])(y \leq s_\mu^3 \leq z). \tag{149}$$

Следовательно, $s^3 \quad [0,1] \to S(I,R)$. Из (148)-(149) и отсутствия решений у краевых задач (120.3) и (120.4) следует

$$(\forall \mu \in [0,1])(x'_{\alpha a} < s_\mu^{3\prime}(a) \leq x'_{\beta a} \wedge x'_{\alpha b} < s_\mu^{3\prime}(b)). \tag{150}$$

Возможны следующие варианты:

$$\begin{gathered}(\exists \nu_1 \in [0,1])(s_{\nu_1}^3(b) = z(b) \wedge s_{\nu_1}^3{}'(b) = x'_{\beta b} \wedge \\ (\forall \mu \in (\nu_1, 1])(s_\mu^{3\prime}(b) < x'_{\beta b})),\end{gathered} \tag{151}$$

$$\begin{gathered}(\exists \nu_2 \in [0,1])(s_{\nu_2}^3{}'(a) = x'_{\beta a} \wedge s_{\nu_2}^3(b) < z(b) \wedge s_{\nu_2}^3{}'(b) = x'_{\beta b} \wedge \\ (\forall \mu \in (\nu_2, 1])(s_\mu^{3\prime}(b) < x'_{\beta b})),\end{gathered} \tag{152}$$

$$(\forall \mu \in [0,1])(s_\mu^{3\prime}(b) < x'_{\beta b}). \tag{153}$$

Заметим, что в случаях (151)-(153) $\mu_* \in [0, 1/3]$. Действительно, в этих случаях существует $x_0 \in S(I,R)$ такое, что $x_0'(b) \quad x'_{\beta b}$ и $y \leq x_0 \leq z$. Пусть $\beta_1(t) \quad \min\{y_1(t), x_0(t)\}$, $t \in I$. По теореме 1 краевая задача

$$x'' = f(t,x,x'), \quad x(a) = y(a), \quad x(b) = \beta_1(b), \quad y \leq x \leq \beta_1$$

имеет решение x, для которого $x'(b) \geq x'_{\beta b}$. Следовательно, $\mu_* \in [0, 1/3]$.

Рассмотрим случай, когда выполняется условие (151). Пусть $z_2 = s_{\nu_1}^3$. Из леммы 1 следует $y_2 \leq z_2$. По теореме 6 краевая задача (136) имеет минимальное решение y_3 и максимальное решение z_3. Из леммы 1 следует, что y_3 является минимальным решением краевой задачи (137). Покажем, что z_3 является максимальным решением краевой задачи (137). Для этого достаточно показать, что

$$(\forall x \in S(I,R))(x'(a) = x'_{\beta a} \wedge x'(b) = x'_{\beta b} \wedge y \leq x \leq z \Rightarrow x \geq z_2). \tag{154}$$

Из леммы 1 следует $x \leq z_4$. Предположим, что найдется $\tau \in [a,b)$, для которого $x(\tau) > z_2(\tau)$. Пусть

$$Z = \{x \in S(I,R) \quad x'(a) = x'_{\beta a} \wedge x(b) = z(b) \wedge y \leq x \leq z\},$$

$$Z_* = \{x_* \in Z \quad (\forall x \in Z)(x(a) \leq x_*(a) \vee x'(b) \leq x'_*(b))\},$$

$$\mu_2(\lambda) = z_5(a) + \lambda(z_4(a) - z_5(a)), \quad \lambda \in [0,1],$$

$z_{*1}, z_{*2} \in Z_*$ и $\lambda_3, \lambda_4 \in [0,1]$ такие, что

$$\begin{gathered} z_{*1} \leq z_{*2} \wedge \mu_2(\lambda_3) = z_{*1}(a) \wedge \mu_2(\lambda_4) = z_{*2}(a), \\ (\forall z_* \in Z_*)(z_{*1} \leq z_* \leq z_{*2} \Rightarrow z_* = z_{*1} \vee z_* = z_{*2}), \\ x \leq z_{*2} \wedge (\exists \tau_1 \in (a,b))(x(\tau_1) > z_{*1}(\tau_1)). \end{gathered} \tag{155}$$

Если $s^3_\lambda = \pi_{\mu_2(\lambda)}$, $\lambda \in [\lambda_3, \lambda_4]$, то из (151) следует $x(a) < z_{*1}(a)$, а из леммы 2 следует $z_{*1} \geq x$, что противоречит (155). Если $s^3_\lambda = \sigma_{\nu_2(\lambda)}$, $\lambda \in [\lambda_3, \lambda_4]$, где

$$\nu_2(\lambda) = z'_{*1}(b) + (\lambda - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_3)^{-1}(z'_{*2}(b) - z'_{*1}(b)), \quad \lambda \in [\lambda_3, \lambda_4],$$

то из леммы 1 следует $z_{*1} \geq x$, что противоречит (155). Аналогично предыдущему определяются v_2, w_2, s^1 и доказываются неравенства (138), (140) и (142)-(144). Докажем неравенство (139). Если $z_2(b) = z_3(b)$, то $z_2 = z_3$ и (139) очевидно. Пусть $z_3(b) < z_2(b)$. Тогда $z_3 < z_2$. Если найдется $\mu_0 \in (0,1)$ такое, что $w_{2\mu_0}(a) = z(a)$ и $z_3 \leq w_{2\mu_0} \leq z$, то это противоречит отсутствию решения у краевой задачи (120.5). Если найдутся $\mu_0 \in (0,1)$ и $\tau \in [a,b)$ такие, что

$$w_{2\mu_0}(\tau) = z_3(\tau) \wedge (\forall t \in (\tau, b])(z_3(t) < w_{2\mu_0}(t) \leq z_2(t)), \tag{156}$$

то пусть $\alpha_1(t) = z_3(t)$, $t \in [a,\tau]$ и $\alpha_1(t) = w_{2\mu_0}(t)$, $t \in [\tau, b]$. Краевая задача

$$x'' = f(t,x,x'), \quad x'(a) = x'_{\beta a}, \quad x'(b) = x'_{\beta b}, \quad \alpha_1 \leq x \leq z_2$$

по теореме 6 имеет решение, что противоречит максимальности z_3. Следовательно, для достаточно малого $\delta \in (0,\infty)$ справедливы неравенства $z_3 < w_{2\mu} < z$, $\mu \in (0,\delta)$. Если найдется $\mu_0 \in (0,1)$ такое, что $w_{2\mu_0}(a) = z_3(a)$ и $z_3 \leq w_{2\mu_0} \leq z$, то аналогично доказательству (154) получаем неравенство $w_{2\mu_0\leq<z_2}$. Следовательно, выполняется условие (156). Неравенство (139) доказано. Аналогично предыдущему из (139) получаем (141). Пусть $\lambda_* = \mu_* - \nu_* - \nu_1 + 5$, $\lambda_1 = \mu_*\lambda_*^{-1}$, $\lambda_2 = (\mu_* + 1)\lambda_*^{-1}$, $\lambda_3 = (\mu_* + 2)\lambda_*^{-1}$, $\lambda_4 = (\mu_* + 3)\lambda_*^{-1}$, $\lambda_5 = (\mu_* - \nu_1 + 3)\lambda_*^{-1}$, $\lambda_6 = (\mu_* - \nu_1 + 4)\lambda_*^{-1}$, $\lambda_7 = (\mu_* - \nu_* - \nu_1 + 4)\lambda_*^{-1}$ и

$$u_\lambda = r_{\lambda\lambda_*}, \quad \lambda \in [0, \lambda_1],$$

$$u_\lambda = v_{2(\lambda-\lambda_1)\lambda_*}, \quad \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2],$$

$$u_\lambda = s^1_{(\lambda-\lambda_2)\lambda_*}, \quad \lambda \in [\lambda_2, \lambda_3],$$

$$u_\lambda = w_{2(\lambda-\lambda_3)\lambda_*}, \quad \lambda \in [\lambda_3, \lambda_4],$$

$$u_\lambda = s^3_{(\lambda-\lambda_5)\lambda_*}, \quad \lambda \in [\lambda_4, \lambda_6],$$

$$u_\lambda = r_{(\lambda-\lambda_7)\lambda_*}, \quad \lambda \in [\lambda_6, 1].$$

Условия (121) следуют из условий (131), (133), (138)-(141), (143)-(144) и (149)-(151). Рассмотрение случая (134.1), (135.2) и (151) закончено.

Рассмотрим случай, когда выполняется условие (152). Пусть $z_3 = s^3_{\nu_2}$. Из леммы 1 следует $y_2 \leq z_2$. По теореме 6 краевая задача

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x'(a) = x'_{\beta a}, \quad x'(b) = x'_{\beta b}, \quad y_2 \leq x \leq z_3 \tag{157}$$

имеет минимальное решение y_3. Из леммы 1 следует, что y_3 является минимальным решением краевой задачи (137). Покажем, что

$$\begin{gathered}(\forall x \in S(I, R))(x'(a) = x'_{\beta a} \wedge x'(b) = x'_{\beta b} \wedge \\ y \leq x \leq z \Rightarrow x(a) \leq z_3(a)).\end{gathered} \tag{158}$$

Предположим противное. Пусть решение x краевой задачи (137) удовлетворяет неравенству $x(a) > z_3(a)$. Из леммы 1 следует $x \leq z_4$. Пусть $z_{*1}, z_{*2} \in Z_*$ и $\lambda_3, \lambda_4 \in [0,1]$ такие, что выполняются условия (155). Аналогично предыдущему получаем противоречие, определяем v_2, s^1 и получаем неравенства (138), (140) и (143)-(144). Пусть $\lambda_* = \mu_* - \nu_* - \nu_2 + 4$, $\lambda_1 = \mu_* \lambda_*^{-1}$, $\lambda_2 = (\mu_* + 1)\lambda_*^{-1}$, $\lambda_3 = (\mu_* + 2)\lambda_*^{-1}$, $\lambda_4 = (\mu_* - \nu_2 + 2)\lambda_*^{-1}$, $\lambda_5 = (\mu_* - \nu_2 + 3)\lambda_*^{-1}$, $\lambda_6 = (\mu_* - \nu_* - \nu_2 + 3)\lambda_*^{-1}$ и

$$u_\lambda = r_{\lambda\lambda_*}, \quad \lambda \in [0, \lambda_1],$$

$$u_\lambda = v_{2(\lambda - \lambda_1)\lambda_*}, \quad \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2],$$

$$u_\lambda = s^1_{(\lambda - \lambda_2)\lambda_*}, \quad \lambda \in [\lambda_2, \lambda_3],$$

$$u_\lambda = s^3_{(\lambda - \lambda_4)\lambda_*}, \quad \lambda \in [\lambda_3, \lambda_5],$$

$$u_\lambda = r_{(\lambda - \lambda_6)\lambda_*}, \quad \lambda \in [\lambda_5, 1].$$

Условия (121) следуют из условий (131), (133), (138), (140), (143)-(144), (149)-(150) и (152). Рассмотрение случая (134.1), (135.2) и (152) закончено.

Рассмотрим случай, когда выполняется условие (153). Пусть для $\mu \in [0,1]$

$$v_{3\mu} = s(x(a) = y(a) + \mu(z_5(a) - y(a)) \wedge x'(a) = x'_{\beta a}).$$

Покажем, что

$$(\forall \mu \in [0,1])(y \leq v_{3\mu} \leq z_5). \tag{159}$$

Если $y_2(a) = z_5(a)$, то $y_2 = z_5$ и (159) очевидно. Пусть $y_2(a) < z_5(a)$. Тогда $y_2 < z_5$. Если найдется $\mu_0 \in [0,1]$ такое, что $v_{3\mu_0}(b) = y(b)$ и $y \leq v_{3\mu_0} \leq z_5$, то это противоречит отсутствию решения у краевой задачи (120.2). Если найдется $\mu_0 \in (0,1)$ такое, что $v_{3\mu_0}(b) = z_5(b)$ и $y \leq v_{3\mu_0} \leq z_5$, то это противоречит определению z_5. Теперь (159) следует из непрерывной зависимости. Возможны следующие варианты:

$$(\exists \nu_2 \in [0,1])(v'_{3\nu_2}(b) = x'_{\beta b} \wedge (\forall \mu \in (\nu_2, 1])(v'_{3\mu}(b) < x'_{\beta b})), \tag{160}$$

$$(\forall \mu \in [0,1])(v'_{3\mu}(b) < x'_{\beta b}). \tag{161}$$

Рассмотрим случай, когда выполняется условие (160). Пусть $z_3 = v_{3\nu_2}$, а y_3 минимальное решение краевой задачи

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x'(a) = x'_{\beta a}, \quad x'(b) = x'_{\beta b}, \quad y_2 \leq x \leq z_3.$$

Из леммы 1 следует, что y_3 является минимальным решением краевой задачи (137). Покажем, что

$$(\forall x \in S(I,R))(x'(a) = x'_{\beta a} \wedge x'(b) = x'_{\beta b} \wedge y \le x \le z \Rightarrow x < z_5). \tag{162}$$

Из леммы 1 следует $x \le z_4$. Пусть $z_{*1}, z_{*2} \in Z_*$ и $\lambda_3, \lambda_4 \in [0,1]$ такие, что выполняются условия (155). Аналогично предыдущему получаем противоречие, определяем v_2, s^1 и получаем неравенства (138), (140) и (143)-(144). Пусть $\lambda_* = \mu_* - \nu_* - \nu_2 + 5$, $\lambda_1 = \mu_* \lambda_*^{-1}$, $\lambda_2 = (\mu_* + 1)\lambda_*^{-1}$, $\lambda_3 = (\mu_* + 2)\lambda_*^{-1}$, $\lambda_4 = (\mu_* - \nu_2 + 2)\lambda_*^{-1}$, $\lambda_5 = (\mu_* - \nu_2 + 3)\lambda_*^{-1}$, $\lambda_6 = (\mu_* - \nu_2 + 4)\lambda_*^{-1}$, $\lambda_7 = (\mu_* - \nu_* - \nu_2 + 4)\lambda_*^{-1}$ и

$$u_\lambda = r_{\lambda\lambda_*}, \quad \lambda \in [0, \lambda_1],$$

$$\begin{aligned} u_\lambda &= v_{2(\lambda-\lambda_1)\lambda_*}, & \lambda &\in [\lambda_1, \lambda_2], \\ u_\lambda &= s^1_{(\lambda-\lambda_2)\lambda_*}, & \lambda &\in [\lambda_2, \lambda_3], \\ u_\lambda &= v_{3(\lambda-\lambda_4)\lambda_*}, & \lambda &\in [\lambda_3, \lambda_5], \\ u_\lambda &= s^3_{(\lambda-\lambda_5)\lambda_*}, & \lambda &\in [\lambda_5, \lambda_6], \\ u_\lambda &= r_{(\lambda-\lambda_7)\lambda_*}, & \lambda &\in [\lambda_6, 1]. \end{aligned}$$

Условия (121) следуют из условий (131), (133), (138), (140), (143)-(144), (149)-(150), (153) и (159)-(160). Рассмотрение случая (134.1), (135.2), (153) и (160) закончено.

Рассмотрим случай, когда выполняется условие (161). Пусть $\lambda_* = \mu_* - \nu_* + 3$, $\lambda_1 = \mu_* \lambda_*^{-1}$, $\lambda_2 = (\mu_* + 1)\lambda_*^{-1}$, $\lambda_3 = (\mu_* + 2)\lambda_*^{-1}$, $\lambda_4 = (\mu_* - \nu_2 + 2)\lambda_*^{-1}$ и

$$u_\lambda = r_{\lambda\lambda_*}, \quad \lambda \in [0, \lambda_1],$$

$$\begin{aligned} u_\lambda &= v_{3(\lambda-\lambda_1)\lambda_*}, & \lambda &\in [\lambda_1, \lambda_2], \\ u_\lambda &= s^3_{(\lambda-\lambda_2)\lambda_*}, & \lambda &\in [\lambda_2, \lambda_3], \\ u_\lambda &= r_{(\lambda-\lambda_4)\lambda_*}, & \lambda &\in [\lambda_3, 1]. \end{aligned}$$

Условия (121) следуют из условий (131), (133), (149)-(150), (153), (159) и (161). Рассмотрение случая (134.1), (135.2), (153) и (161) закончено. Следовательно, закончено рассмотрение случая (134.1).

Рассмотрим случай, когда выполняется условие (134.2). Ясно, что $\mu_* \in [0, 1/3]$. Пусть $y_4 = r_{\mu_*}$. Из леммы 1 следует

$$(\forall x \in S(I,R))(x'(b) = x'_{\beta b} \wedge y \le x \le z \Rightarrow x \ge y_4). \tag{163}$$

Обозначим через y_5 решение краевой задачи

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x(a) = y(a), \quad x'(b) = x'_{\beta b}, \quad y \le x \le z, \tag{164}$$

такое, что для любого решения x краевой задачи (164) справедливо неравенство $y_5'(a) \ge x'(a)$. Из (163) следует, что y_4 минимальное решение краевой задачи (164) и $y_4 \le y_5$. По лемме 4 существует непрерывное на $[0, 1]$ отображение s^2 со следующими свойствами: $s_0^2 = y_4$, $s_1^2 = y_5$ и для любого $\mu \in [0, 1]$

$$\begin{gathered} (s_\mu^2(b) \le y_5(b) \wedge s_\mu^{2\prime}(b) = x'_{\beta b} \wedge s_\mu^2 \ge y_4) \vee \\ (s_\mu^2(a) = y(a) \wedge s_\mu^{2\prime}(a) \ge y_4'(a) \wedge s_\mu^{2\prime}(b) \le x'_{\beta b} \wedge s_\mu^2 \le y_5). \end{gathered} \tag{165}$$

Аналогично предыдущему из (165) получаем s^2 $[0,1] \to S(I,R)$ и

$$(\forall\mu \in [0,1])(y \le s^2_\mu \le z \wedge x'_{\alpha a} \le s^{2\prime}_\mu(a) \wedge x'_{\alpha b} < s^{2\prime}_\mu(b)) \le x'_{\beta b}). \tag{166}$$

Возможны следующие варианты:

$$\begin{gathered}(\exists\mu_1 \in [0,1])(s^2_{\mu_1}(a) = y(a) \wedge s^2_{\mu_1}{}'(a) = x'_{\beta a}\wedge \\ (\forall\mu \in [0,\mu_1))(s^{2\prime}_\mu(a) < x'_{\beta a})),\end{gathered} \tag{167}$$

$$\begin{gathered}(\exists\mu_2 \in [0,1])(s^2_{\mu_2}(a) > y(a) \wedge s^2_{\mu_2}{}'(a) = x'_{\beta a}\wedge \\ (\forall\mu \in [0,\mu_2))(s^{2\prime}_\mu(a) < x'_{\beta a}) \wedge s^2_{\mu_2}{}'(b) = x'_{\beta b}),\end{gathered} \tag{168}$$

$$(\forall\mu \in [0,1])(s^{2\prime}_\mu(a) < x'_{\beta a}). \tag{169}$$

Ясно, что в случаях (167)-(168) $\nu_* \in [2/3,1]$. Следовательно, в случаях (167)-(168) условие (135.3) не выполняется. Пусть z_4, z_5 и s^3 определены аналогично предыдущим случаям. Покажем, что

$$\begin{gathered}(\forall\mu_0,\nu_0 \in [0,1])(s^2_{\mu_0}(a) = y(a) \wedge (\forall\mu \in [0,\mu_0))(s^{2\prime}_\mu(a) < x'_{\beta a})\wedge \\ s^3_{\nu_0}(b) = z(b) \wedge (\forall\mu \in (\nu_0,1])(s^{3\prime}_\mu(b) < x'_{\beta b}) \Rightarrow s^2_{\mu_0} \le s^3_{\nu_0}).\end{gathered} \tag{170}$$

Пусть

$$Y = \{x \in S(I,R) \quad x(a) = y(a) \wedge x'(b) = x'_{\beta b} \wedge y \le x \le z\},$$

$$Y_* = \{x_* \in Y \quad (\forall x \in Y)(x'(c) \le x'_*(a) \vee x(b) \ge x_*(b))\},$$

$$\mu_1(\lambda) = y_4(b) + \lambda(y_5(b) - y_4(b)), \quad \lambda \in [0,1].$$

Рассмотрим случай, когда $s^2_{\mu_0}{}'(b) = x'_{\beta b}$ и $s^3_{\nu_0}{}'(a) = x'_{\beta a}$. Из леммы 2 следует $s^2_{\mu_0} \le s^3_{\nu_0}$. Рассмотрим случай, когда $s^2_{\mu_0}{}'(b) = x'_{\beta b}$ и $s^3_{\nu_0}{}'(a) < x'_{\beta a}$. Пусть $z_{*1}, z_{*2} \in Z_*$ и $\lambda_3, \lambda_4 \in [0,1]$ такие, что

$$z_{*1} \le z_{*2} \wedge \mu_2(\lambda_3) = z_{*1}(a) \wedge \mu_2(\lambda_4) = z_{*2}(a),$$

$$(\forall z_* \in Z_*)(z_{*1} \le z_* \le z_{*2} \Rightarrow z_* = z_{*1} \vee z_* = z_{*2}),$$

$$(\exists\lambda_{*3} \in (\lambda_3,\lambda_4))(s^3_{\nu_0} = \sigma_{\nu_2(\lambda_{*3})}).$$

Из предыдущего следует $s^2_{\mu_0} \le z_{*2}$, а из леммы 1 следует $s^2_{\mu_0} \le s^3_{\nu_0}$. Аналогично рассматривается случай, когда $s^2_{\mu_0}{}'(b) < x'_{\beta b}$ и $s^3_{\nu_0}{}'(a)$ $x'_{\beta a}$. Рассмотрим случай, когда $s^2_{\mu_0}{}'(b) < x'_{\beta b}$ и $s^3_{\nu_0}{}'(a) < x'_{\beta a}$. Пусть $y_{*1}, y_{*2} \in Y_*$, $\lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]$ и

$$\nu_1(\lambda) = y'_{*1}(a) + (\lambda - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)^{-1}(y'_{*2}(a) - y'_{*1}(a)), \quad \lambda \in [\lambda_1,\lambda_2]$$

такие, что

$$y_{*1} \le y_{*2} \wedge \mu_1(\lambda_1) = y_{*1}(b) \wedge \mu_1(\lambda_2) = y_{*2}(b),$$

$$(\forall y_* \in Y_*)(y_{*1} \le y_* \le y_{*2} \Rightarrow y_* = y_{*1} \vee y_* = y_{*2}),$$

$$(\exists\lambda_{*1} \in (\lambda_1,\lambda_2))(s^2_{\mu_0} = \rho_{\nu_1(\lambda_{*1})}).$$

Из предыдущего следует $y_{*1} \le s^3_{\nu_0}$, а из леммы 1 следует $s^2_{\mu_0} \le s^3_{\nu_0}$.

Рассмотрим случай, когда выполняется условие (167). Пусть $y_2 = s^2_{\mu_1}$

Случай, когда выполняется условие (135.1), симметричен случаю (134.1), (135.2) и (151).

Рассмотрим случай, когда выполняется условие (135.2). Пусть $z_4 = r_{\nu_*}$. Аналогично предыдущему определяются z_5, s^3 и доказываются формулы (145), (148)-(150).

Рассмотрим случай, когда выполняется условие (151). Пусть $z_2 = s^3_{\nu_1}$. Из (170) следует $y_2 \le z_2$. Следовательно, множество решений краевой задачи (136) имеет минимальное решение y_3 и максимальное решение z_3. Ясно, что справедлива формула (154) и ей симметричная

$$(\forall x \in S(I,R))(x'(a) = x'_{\beta a} \wedge x'(b) = x'_{\beta b} \wedge y \le x \le z \Rightarrow x \ge y_2). \tag{171}$$

Из (154) и (171) следует, что множество решений краевой задачи (136) совпадает с множеством решений краевой задачи (137). Аналогично предыдущему определяются s^1 v_2, w_2 и доказываются формулы (138)-(144). Пусть $\lambda_* = \mu_* + \mu_1 - \nu_* - \nu_1 + 5$, $\lambda_1 = \mu_*\lambda_*^{-1}$, $\lambda_2 = (\mu_*+\mu_1)\lambda_*^{-1}$, $\lambda_3 = (\mu_*+\mu_1+1)\lambda_*^{-1}$, $\lambda_4 = (\mu_*+\mu_1+2)\lambda_*^{-1}$, $\lambda_5 = (\mu_*+\mu_1+3)\lambda_*^{-1}$, $\lambda_6 = (\mu_* + \mu_1 - \nu_1 + 3)\lambda_*^{-1}$, $\lambda_7 = (\mu_* + \mu_1 - \nu_1 + 4)\lambda_*^{-1}$, $\lambda_8 = (\mu_* + \mu_1 - \nu_* - \nu_1 + 4)\lambda_*^{-1}$ и

$$u_\lambda = r_{\lambda\lambda_*}, \quad \lambda \in [0, \lambda_1],$$

$$u_\lambda = s^2_{(\lambda-\lambda_1)\lambda_*}, \quad \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2],$$

$$u_\lambda = v_{2(\lambda-\lambda_2)\lambda_*}, \quad \lambda \in [\lambda_2, \lambda_3],$$

$$u_\lambda = s^1_{(\lambda-\lambda_3)\lambda_*}, \quad \lambda \in [\lambda_3, \lambda_4],$$

$$u_\lambda = w_{2(\lambda-\lambda_4)\lambda_*}, \quad \lambda \in [\lambda_4, \lambda_5],$$

$$u_\lambda = s^3_{(\lambda-\lambda_6)\lambda_*}, \quad \lambda \in [\lambda_5, \lambda_7],$$

$$u_\lambda = r_{(\lambda-\lambda_8)\lambda_*}, \quad \lambda \in [\lambda_7, 1].$$

Условия (121) следуют из условий (131), (133), (138)-(141), (143)-(144), (149)-(151) и (165)-(167). Рассмотрение случая (134.2), (135.2), (151) и (167) закончено.

Рассмотрим случай, когда выполняется условие (152). Пусть $z_3 = s^3_{\nu_1}$. Из (171) следует $z_3 \ge y_2$. По теореме 6 краевая задача (157) имеет минимальное решение y_3. Из (171) следует, что y_3 является минимальным решением краевой задачи (137). Аналогично предыдущему доказывается формула (158), определяются s^1, v_2 и получаются формулы (138), (140) и (143)-(144). Пусть $\lambda_* = \mu_*+\mu_1-\nu_*-\nu_2+4$, $\lambda_1 = \mu_*\lambda_*^{-1}$, $\lambda_2 = (\mu_*+\mu_1)\lambda_*^{-1}$, $\lambda_3 = (\mu_*+\mu_1+1)\lambda_*^{-1}$, $\lambda_4 = (\mu_*+\mu_1+2)\lambda_*^{-1}$, $\lambda_5 = (\mu_*+\mu_1-\nu_2+2)\lambda_*^{-1}$, $\lambda_6 = (\mu_* + \mu_1 - \nu_2 + 3)\lambda_*^{-1}$, $\lambda_7 = (\mu_* + \mu_1 - \nu_* - \nu_2 + 3)\lambda_*^{-1}$ и

$$u_\lambda = r_{\lambda\lambda_*}, \quad \lambda \in [0, \lambda_1],$$

$$u_\lambda = s^2_{(\lambda-\lambda_1)\lambda_*}, \quad \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2],$$

$$u_\lambda = v_{2(\lambda-\lambda_2)\lambda_*}, \quad \lambda \in [\lambda_2, \lambda_3],$$

$$u_\lambda = s^1_{(\lambda-\lambda_3)\lambda_*}, \quad \lambda \in [\lambda_3, \lambda_4],$$

$$u_\lambda = s^3_{(\lambda-\lambda_5)\lambda_*}, \quad \lambda \in [\lambda_4, \lambda_6],$$

$$u_\lambda = r_{(\lambda-\lambda_7)\lambda_*}, \quad \lambda \in [\lambda_6, 1].$$

Условия (121) следуют из условий (131), (133), (138), (140), (143)-(144), (149)-(150), (152) и (165)-(167). Рассмотрение случая (134.2), (135.2), (152) и (167) закончено.

Рассмотрим случай, когда выполняются условия (153) и (160). Пусть $z_3 = v_{3\nu_2}$. Аналогично предыдущему доказывается формула (162), определяются y_3, v_2, s^1 и получаются неравенства (138), (140), (143)-(144) и (159). Пусть $\lambda_* = \mu_* + \mu_1 - \nu_* - \nu_2 + 5$, $\lambda_1 = \mu_*\lambda_*^{-1}$, $\lambda_2 = (\mu_* + \mu_1)\lambda_*^{-1}$, $\lambda_3 = (\mu_* + \mu_1 + 1)\lambda_*^{-1}$, $\lambda_4 = (\mu_* + \mu_1 + 2)\lambda_*^{-1}$, $\lambda_5 = (\mu_* + \mu_1 - \nu_2 + 2)\lambda_*^{-1}$, $\lambda_6 = (\mu_* + \mu_1 - \nu_2 + 3)\lambda_*^{-1}$, $\lambda_7 = (\mu_* + \mu_1 - \nu_2 + 4)\lambda_*^{-1}$, $\lambda_8 = (\mu_* + \mu_1 - \nu_* - \nu_2 + 4)\lambda_*^{-1}$ и

$$
\begin{aligned}
u_\lambda &= r_{\lambda\lambda_*}, && \lambda \in [0, \lambda_1],\\
u_\lambda &= s^2_{(\lambda-\lambda_1)\lambda_*}, && \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2],\\
u_\lambda &= v_{2(\lambda-\lambda_2)\lambda_*}, && \lambda \in [\lambda_2, \lambda_3],\\
u_\lambda &= s^1_{(\lambda-\lambda_3)\lambda_*}, && \lambda \in [\lambda_3, \lambda_4],\\
u_\lambda &= v_{3(\lambda-\lambda_5)\lambda_*}, && \lambda \in [\lambda_4, \lambda_6],\\
u_\lambda &= s^3_{(\lambda-\lambda_6)\lambda_*}, && \lambda \in [\lambda_6, \lambda_7],\\
u_\lambda &= r_{(\lambda-\lambda_8)\lambda_*}, && \lambda \in [\lambda_7, 1].
\end{aligned}
$$

Условия (121) следуют из условий (131), (133), (138), (140), (143)-(144), (149)-(150), (153), (159)-(160) и (165)-(167). Рассмотрение случая (134.2), (135.2), (153), (160) и (167) закончено.

Рассмотрим случай, когда выполняются условия (153) и (161). Из (170) следует $y_2 \leq z_5$. Аналогично предыдущему доказывается формула (159). Пусть $\lambda_* = \mu_* + \mu_1 - \nu_* + 3$, $\lambda_1 = \mu_*\lambda_*^{-1}$, $\lambda_2 = (\mu_* + \mu_1)\lambda_*^{-1}$, $\lambda_3 = (\mu_* + \mu_1 + 1)\lambda_*^{-1}$, $\lambda_4 = (\mu_* + \mu_1 + 2)\lambda_*^{-1}$, $\lambda_5 = (\mu_* + \mu_1 - \nu_2 + 2)\lambda_*^{-1}$ и

$$
\begin{aligned}
u_\lambda &= r_{\lambda\lambda_*}, && \lambda \in [0, \lambda_1],\\
u_\lambda &= s^2_{(\lambda-\lambda_1)\lambda_*}, && \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2],\\
u_\lambda &= v_{3(\lambda-\lambda_2)\lambda_*}, && \lambda \in [\lambda_2, \lambda_3],\\
u_\lambda &= s^3_{(\lambda-\lambda_3)\lambda_*}, && \lambda \in [\lambda_3, \lambda_4],\\
u_\lambda &= r_{(\lambda-\lambda_5)\lambda_*}, && \lambda \in [\lambda_4, 1].
\end{aligned}
$$

Условия (121) следуют из условий (131), (133), (149)-(150), (153), (159), (161) и (165)-(167). Рассмотрение случая (134.2), (135.2), (153), (161) и (167) закончено. Следовательно, закончено рассмотрение случая (134.2), (167).

Рассмотрим случай, когда выполняется условие (168). Пусть $y_3 = s^2_{\mu_2}$.

Случай, когда выполняется условие (135.1), симметричен случаю (134.1), (135.2) и (152).

Рассмотрим случай, когда выполняется условие (135.2). Пусть $z_4 = r_{\nu_*}$. Аналогично предыдущему определяются z_5, s^3 и доказываются формулы (145), (148)-(150).

Случай, когда выполняется условие (151), симметричен случаю (134.2), (135.2), (152) и (167).

Рассмотрим случай, когда выполняется условие (152). Пусть $z_3 = s^3_{\nu_2}$. Аналогично предыдущему доказываем формулу (158) и ей симметричную

$$(\forall x \in S(I, R))(x'(a) = x'_{\beta a} \wedge x'(b) = x'_{\beta b} \wedge y \leq x \leq z \Rightarrow x(b) \geq y_3(b)). \tag{172}$$

определяем s^1 и получаем неравенства (143)-(144). Пусть $\lambda_* = \mu_* + \mu_2 - \nu_* - \nu_2 + 3$, $\lambda_1 = \mu_*\lambda_*^{-1}$, $\lambda_2 = (\mu_* + \mu_2)\lambda_*^{-1}$, $\lambda_3 = (\mu_* + \mu_2 + 1)\lambda_*^{-1}$, $\lambda_4 = (\mu_* + \mu_2 - \nu_2 + 1)\lambda_*^{-1}$, $\lambda_5 = (\mu_* + \mu_2 - \nu_2 + 2)\lambda_*^{-1}$, $\lambda_6 = (\mu_* + \mu_2 - \nu_* - \nu_2 + 2)\lambda_*^{-1}$ и

$$u_\lambda = r_{\lambda\lambda_*}, \quad \lambda \in [0, \lambda_1],$$

$$u_\lambda = s^2_{(\lambda-\lambda_1)\lambda_*}, \quad \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2],$$

$$u_\lambda = s^1_{(\lambda-\lambda_2)\lambda_*}, \quad \lambda \in [\lambda_2, \lambda_3],$$

$$u_\lambda = s^3_{(\lambda-\lambda_4)\lambda_*}, \quad \lambda \in [\lambda_3, \lambda_5],$$

$$u_\lambda = r_{(\lambda-\lambda_6)\lambda_*}, \quad \lambda \in [\lambda_5, 1].$$

Условия (121) следуют из условий (131), (133), (143)-(144), (149)-(150), (152), (166) и (168). Рассмотрение случая (134.2), (135.2), (152) и (168) закончено.

Рассмотрим случай, когда выполняется условие (153). Аналогично предыдущему доказываются формулы (159) и (162). Следовательно, $y_3 < z_5$ и выполняется условие (160). Пусть $z_3 = v_{3\nu_2}$. Тогда для любого решения x краевой задачи (137) справедливо неравенство $x(a) \leq z_3(a)$. Из (172) следует $x(b) \geq y_3(b)$, что позволяет построить отображение s^1 и доказать формулы (143)-(144). Пусть $\lambda_* = \mu_* + \mu_2 - \nu_* - \nu_2 + 4$, $\lambda_1 \quad \mu_*\lambda_*^{-1}$, $\lambda_2 = (\mu_* + \mu_2)\lambda_*^{-1}$, $\lambda_3 = (\mu_* + \mu_2 + 1)\lambda_*^{-1}$, $\lambda_4 = (\mu_* + \mu_2 - \nu_2 + 1)\lambda_*^{-1}$, $\lambda_5 = (\mu_* + \mu_2 - \nu_2 + 2)\lambda_*^{-1}$, $\lambda_6 = (\mu_* + \mu_2 - \nu_2 + 3)\lambda_*^{-1}$, $\lambda_7 = (\mu_* + \mu_2 - \nu_* - \nu_2 + 3)\lambda_*^{-1}$ и

$$u_\lambda = r_{\lambda\lambda_*}, \quad \lambda \in [0, \lambda_1],$$

$$u_\lambda = s^2_{(\lambda-\lambda_1)\lambda_*}, \quad \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2],$$

$$u_\lambda = s^1_{(\lambda-\lambda_2)\lambda_*}, \quad \lambda \in [\lambda_2, \lambda_3],$$

$$u_\lambda = v_{3(\lambda-\lambda_4)\lambda_*}, \quad \lambda \in [\lambda_3, \lambda_5],$$

$$u_\lambda = s^3_{(\lambda-\lambda_5)\lambda_*}, \quad \lambda \in [\lambda_5, \lambda_6],$$

$$u_\lambda = r_{(\lambda-\lambda_7)\lambda_*}, \quad \lambda \in [\lambda_6, 1].$$

Условия (121) следуют из условий (131), (133), (143)-(144), (149)-(150), (153), (159)-(160), (166) и (168). Рассмотрение случая (134.2), (135.2), (153) и (168) закончено. Следовательно, закончено рассмотрение случая (134.2) и (168).

Рассмотрим случай, когда выполняется условие (169).

Случай, когда выполняется условие (135.1), симметричен случаю (134.1), (135.2) и (153).

Рассмотрим случай, когда выполняется условие (135.2).

Случай, когда выполняется условие (151), симметричен случаю (134.2), (135.2), (153) и (167).

Случай, когда выполняется условие (152), симметричен случаю (134.2), (135.2), (153) и (168).

Рассмотрим случай, когда выполняется условие (153). Покажем, что

$$(\exists \mu_3 \in [0, 1))(r_{\mu_3} = y_5). \tag{173}$$

Пусть

$$X = \{x \in S(I, R) : x(a) = y(a) \wedge x(b) = z(b) \wedge y \leq x \leq z\},$$

$$X_* = \{x_* \in X \quad (\forall x \in X)(x'(a) \le x'_*(a) \vee x'(b) \le x'_*(b))\},$$
$$\mu(\lambda) = y'_1(a) + \lambda(z'_1(a) - y'_1(a)), \quad \lambda \in [0,1].$$

Если $y'_5(a) \le y'_1(a)$, то (173) очевидно. Пусть $y'_5(a) > y'_1(a)$. Из $y_5 \le z_1$ следует существование $x_{*2} \in X_*$ такого, что

$$y_5 \le x_{*2} \wedge (\forall x_* \in X_*)(x'_*(a) < x'_{*2}(a) \Rightarrow (\exists \tau \in (a,b))(x_*(\tau) < y_5(\tau))). \tag{174}$$

Если $y_5 = x_{*2}$, то (173) очевидно. Пусть $y_5 \ne x_{*2}$. Тогда найдутся $x_{*1} \in X_*$ и $\lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]$ такие, что

$$x_{*1} \le x_{*2} \wedge \mu(\lambda_1) = x'_{*1}(a) \wedge \mu(\lambda_2) = x'_{*2}(a),$$
$$(\forall x_* \in X_*)(x_{*1} \le x_* \le x_{*2} \Rightarrow x_* = x_{*1} \vee x_* = x_{*2}).$$

Если $s_\lambda = \rho_{\mu(\lambda)}$, $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$, то при $y'_5(a) \ge x'_{*1}(a)$ условие (173) очевидно. Пусть $y'_5(a) < x'_{*1}(a)$. Из определения y_5 следует $s'_\lambda(b) \ne x'_{\beta b}$ для $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$. Из леммы 2 следует $x_{*1} \ge y_5$, что противоречит (174). Если $s_\lambda = \sigma_{\nu(\lambda)}$, $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$, где

$$\nu(\lambda) = x'_{*1}(b) + (\lambda - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)^{-1}(x_{*2}(b) - x'_{*1}(b)), \quad \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2],$$

то из леммы 1 следует $x_{*1} \ge y_5$, что противоречит (174). Аналогично доказывается, что

$$(\exists \nu_3 \in (0,1])(r_{\nu_3} = z_5). \tag{175}$$

Из (170) следует $y_5 \le z_5$. Следовательно, $\mu_3 < \nu_3$. Возможны следующие варианты:

$$(\exists x \in S(I,R))(x'(a) = x'_{\beta a} \wedge x'(b) = x'_{\beta b} \wedge y \le x \le z), \tag{176}$$

$$(\forall x \in S(I,R))(y \le x \le z \Rightarrow x'(a) \ne x'_{\beta a} \vee x'(b) \ne x'_{\beta b}). \tag{177}$$

Рассмотрим случай, когда выполняется условие (176). Определим решения y_3 и z_3 краевой задачи (137) условием

$$(\forall x \in S(I,R))(x'(a) = x'_{\beta a} \wedge x'(b) = x'_{\beta b} \wedge y \le x \le z \Rightarrow y_3(b) \le x(b) \wedge z_3(a) \ge x(a)).$$

Следовательно, можно определить s^1 и получить формулы (143)-(144). Из (162) и симметричной формулы

$$(\forall x \in S(I,R))(x'(a) = x'_{\beta a} \wedge x'(b) = x'_{\beta b} \wedge y \le x \le z \Rightarrow x > y_5) \tag{178}$$

следует $y_5 < y_3 < z_5$ и $y_5 < z_3 < z_5$. Пусть для $\mu \in [0,1]$

$$v_{4\mu} = s(x(b) = y_5(b) + \mu(y_3(b) - y_5(b)) \wedge x'(b) = x'_{\beta b}),$$

$$w_{4\mu} = s(x(a) = z_3(a) + \mu(z_5(a) - z_3(a)) \wedge x'(a) = x'_{\beta a}).$$

Покажем, что

$$(\forall \mu \in [0,1])(y_5 \le v_{4\mu} \le z). \tag{179}$$

Если найдется $\mu_0 \in [0,1]$ такое, что $v_{4\mu_0}(a) = z(a)$ и $y_5 \le v_{4\mu_0} \le z$, то это противоречит отсутствию решений у краевой задачи (120.5). Если найдется $\mu_0 \in (0,1]$ такое, что $v_{4\mu_0}(a) = y(a)$ и $y_5 \le v_{4\mu_0} \le z$, то это противоречит определению y_5. Теперь (179) следует из непрерывной зависимости. Из определения y_3 и отсутствия решений у краевой задачи (120.6) следует

$$(\forall \mu \in [0,1])(x'_{\alpha a} < v'_{4\mu}(a) \le x'_{\beta a}). \tag{180}$$

Аналогично доказывается формула

$$(\forall \mu \in [0,1])(y \le w_{4\mu} \le z_5 \wedge x'_{\alpha b} < w'_{4\mu}(b) \le x'_{\beta b}). \tag{181}$$

Пусть $\lambda_* = \mu_* - \nu_* + 6$, $\lambda_1 = \mu_*\lambda_*^{-1}$, $\lambda_2 = (\mu_* + 1)\lambda_*^{-1}$, $\lambda_3 = (\mu_* + 2)\lambda_*^{-1}$, $\lambda_4 = (\mu_* + 3)\lambda_*^{-1}$, $\lambda_5 = (\mu_* + 4)\lambda_*^{-1}$, $\lambda_6 = (\mu_* + 5)\lambda_*^{-1}$, $\lambda_7 = (\mu_* - \nu_* + 5)\lambda_*^{-1}$ и

$$u_\lambda = r_{\lambda\lambda_*}, \quad \lambda \in [0, \lambda_1],$$

$$u_\lambda = s^2_{(\lambda-\lambda_1)\lambda_*}, \quad \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2],$$
$$u_\lambda = v_{4(\lambda-\lambda_2)\lambda_*}, \quad \lambda \in [\lambda_2, \lambda_3],$$
$$u_\lambda = s^1_{(\lambda-\lambda_3)\lambda_*}, \quad \lambda \in [\lambda_3, \lambda_4],$$
$$u_\lambda = w_{4(\lambda-\lambda_4)\lambda_*}, \quad \lambda \in [\lambda_4, \lambda_5],$$
$$u_\lambda = s^3_{(\lambda-\lambda_5)\lambda_*}, \quad \lambda \in [\lambda_5, \lambda_6],$$
$$u_\lambda = r_{(\lambda-\lambda_7)\lambda_*}, \quad \lambda \in [\lambda_6, 1].$$

Условия (121) следуют из условий (131), (133), (143)-(144), (149)-(150), (153), (166), (169) и (179)-(181). Рассмотрение случая (134.2), (135.2), (153), (169) и (176) закончено.

Рассмотрим случай, когда выполняется условие (177). Пусть

$$\mu_4 = \inf\{\mu \in [\mu_3, \nu_3] \quad r_\mu \in X_*\},$$

$$\nu_4 = \sup\{\mu \in [\mu_3, \nu_3] \quad r_\mu \in X_*\},$$

$y_6 = r_{\mu_4}$ и $z_6 = r_{\nu_4}$. Возможны следующие варианты:

$$z'_6(a) \le x'_{\beta a} \wedge y'_6(b) \le x'_{\beta b}, \tag{182}$$

$$z'_6(a) > x'_{\beta a} \wedge y'_6(b) \le x'_{\beta b}, \tag{183}$$

$$z'_6(a) \le x'_{\beta a} \wedge y'_6(b) > x'_{\beta b}, \tag{184}$$

$$z'_6(a) > x'_{\beta a} \wedge y'_6(b) > x'_{\beta b}. \tag{185}$$

Рассмотрим случай, когда выполняется условие (182). Ясно, что

$$(\forall \mu \in [\mu_3, \nu_3])(x'_{\alpha a} \le r'_\mu(a) \le x'_{\beta a} \wedge x'_{\alpha b} \le r'_\mu(b) \le x'_{\beta b}). \tag{186}$$

Пусть $\lambda_* = \mu_* - \mu_3 + \nu_3 - \nu_* + 3$, $\lambda_1 = \mu_*\lambda_*^{-1}$, $\lambda_2 = (\mu_* + 1)\lambda_*^{-1}$, $\lambda_3 = (\mu_* - \mu_3 + 1)\lambda_*^{-1}$, $\lambda_4 = (\mu_* - \mu_3 + \nu_3 + 1)\lambda_*^{-1}$, $\lambda_5 = (\mu_* - \mu_3 + \nu_3 + 2)\lambda_*^{-1}$, $\lambda_6 = (\mu_* - \mu_3 + \nu_3 - \nu_* + 2)\lambda_*^{-1}$ и

$$u_\lambda = r_{\lambda\lambda_*}, \quad \lambda \in [0, \lambda_1],$$

$$u_\lambda = s^2_{(\lambda-\lambda_1)\lambda_*}, \quad \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2],$$
$$u_\lambda = r_{(\lambda-\lambda_3)\lambda_*}, \quad \lambda \in [\lambda_2, \lambda_3],$$
$$u_\lambda = s^3_{(\lambda-\lambda_4)\lambda_*}, \quad \lambda \in [\lambda_4, \lambda_5],$$
$$u_\lambda = r_{(\lambda-\lambda_6)\lambda_*}, \quad \lambda \in [\lambda_5, 1].$$

Условия (121) следуют из условий (131), (133), (149)-(150), (153), (166), (169) и (186). Рассмотрение случая (134.2), (135.2), (153), (169), (177) и (182) закончено.

Рассмотрим случай, когда выполняется условие (183). Ясно, что

$$\begin{gathered}(\exists \mu_1 \in [\mu_3, \nu_3])(r'_{\mu_1}(a) = x'_{\beta a} \wedge (\forall \mu \in [\mu_3, \mu_1]) \\ (x'_{\alpha a} \le r'_\mu(a) \le x'_{\beta a} \wedge x'_{\alpha b} \le r'_\mu(b) \le x'_{\beta b})).\end{gathered} \tag{187}$$

Аналогично предыдущему определяется v_3 и доказывается формула (159). Из (177) и отсутствия решения у краевой задачи (120.3) следует

$$(\forall \mu \in [0,1])(x'_{\alpha b} < v'_{3\mu}(b) < x'_{\beta b}). \tag{182}$$

Пусть $\lambda_* = \mu_* + \mu_1 - \mu_3 - \nu_* + 4$, $\lambda_1 = \mu_* \lambda_*^{-1}$, $\lambda_2 = (\mu_* + 1)\lambda_*^{-1}$, $\lambda_3 = (\mu_* - \mu_3 + 1)\lambda_*^{-1}$, $\lambda_4 = (\mu_* + \mu_1 - \mu_3 + 1)\lambda_*^{-1}$, $\lambda_5 = (\mu_* + \mu_1 - \mu_3 + 2)\lambda_*^{-1}$, $\lambda_6 = (\mu_* + \mu_1 - \mu_3 + 3)\lambda_*^{-1}$, $\lambda_7 = (\mu_* + \mu_1 - \mu_3 - \nu_* + 3)\lambda_*^{-1}$ и

$$u_\lambda = r_{\lambda\lambda_*}, \quad \lambda \in [0, \lambda_1],$$
$$u_\lambda = s^2_{(\lambda-\lambda_1)\lambda_*}, \quad \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2],$$
$$u_\lambda = r_{(\lambda-\lambda_3)\lambda_*}, \quad \lambda \in [\lambda_2, \lambda_4],$$
$$u_\lambda = v_{3(\lambda-\lambda_4)\lambda_*}, \quad \lambda \in [\lambda_4, \lambda_5],$$
$$u_\lambda = s^3_{(\lambda-\lambda_5)\lambda_*}, \quad \lambda \in [\lambda_5, \lambda_6],$$
$$u_\lambda = r_{(\lambda-\lambda_7)\lambda_*}, \quad \lambda \in [\lambda_6, 1].$$

Условия (121) следует из условий (131), (133), (149)-(150), (153), (159), (166), (169) и (187)-(188). Рассмотрение случая (134.2), (135.2), (153), (169), (177) и (183) закончено.

Случай, когда выполняется условие (184), симметричен случаю (134.2), (135.2), (153), (169), (177) и (183).

Рассмотрим случай, когда выполняется условие (185). Тогда $y(a) < z_5(a)$ и $y_5(b) < z(b)$. Аналогично предыдущему определяется v_3 и доказываются формулы (159) и (188). Пусть для $\mu \in [0,1]$

$$w_{3\mu} = s(x(b) = y_5(b) + \mu(z(b) - y_5(b)) \wedge x'(b) = x'_{\beta b}).$$

Аналогично предыдущему получаем

$$(\forall \mu \in [0,1])(y_5 \le w_{3\mu} \le z \wedge x'_{\alpha a} < w'_{3\mu}(a) \le x'_{\beta a}). \tag{189}$$

Пусть $y_2 = v_{30}$ и $z_2 = w_{31}$. Из (185) следует $y'_6(a) < y'_2(a) < z'_6(a)$ и $z'_6(b) < z'_2(b) < y'_6(b)$. Аналогично предыдущему найдутся $\mu_1, \nu_1 \in [\mu_3, \nu_3]$ такие, что $r_{\mu_1} = y_2$ и $r_{\nu_1} = z_2$. Пусть

$$\mu_0 = \sup\{\mu \in [\mu_3, \mu_1] : r_\mu \in X_*\}.$$

Из $r'_{\mu_0}(a) < y'_2(a)$ и $r'_{\mu_0}(b) < z'_2(b)$ следует $\nu_1 < \mu_1$. Следовательно,

$$(\forall \mu \in [\nu_1, \mu_1])(x'_{\alpha a} \leq r'_\mu(a) \leq x'_{\beta a} \wedge x'_{\beta b} \leq r'_\mu(b) \leq x'_{\beta b}). \tag{190}$$

Пусть $\lambda_* = \mu_* + \mu_1 - \nu_* - \nu_1 + 5$, $\lambda_1 = \mu_*\lambda_*^{-1}$, $\lambda_2 = (\mu_* + \mu_1)\lambda_*^{-1}$, $\lambda_3 = (\mu_* + 2)\lambda_*^{-1}$, $\lambda_4 = (\mu_* - \nu_1 + 2)\lambda_*^{-1}$, $\lambda_5 = (\mu_* + \mu_1 - \nu_1 + 2)\lambda_*^{-1}$, $\lambda_6 = (\mu_* + \mu_1 - \nu_1 + 3)\lambda_*^{-1}$, $\lambda_7 = (\mu_* + \mu_1 - \nu_1 + 4)\lambda_*^{-1}$, $\lambda_8 = (\mu_* + \mu_1 - \nu_* - \nu_1 + 4)\lambda_*^{-1}$ и

$$u_\lambda = r_{\lambda\lambda_*}, \quad \lambda \in [0, \lambda_1],$$

$$u_\lambda = s^2_{(\lambda-\lambda_1)\lambda_*}, \quad \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2],$$

$$u_\lambda = w_{3(\lambda-\lambda_2)\lambda_*}, \quad \lambda \in [\lambda_2, \lambda_3],$$

$$u_\lambda = r_{(\lambda-\lambda_4)\lambda_*}, \quad \lambda \in [\lambda_3, \lambda_5],$$

$$u_\lambda = v_{3(\lambda-\lambda_5)\lambda_*}, \quad \lambda \in [\lambda_5, \lambda_6],$$

$$u_\lambda = s^3_{(\lambda-\lambda_6)\lambda_*}, \quad \lambda \in [\lambda_6, \lambda_7],$$

$$u_\lambda = r_{(\lambda-\lambda_8)\lambda_*}, \quad \lambda \in [\lambda_7, 1].$$

Условия (121) следуют из условий (131), (133), (149)-(150), (153), (159), (166), (169) и (188)-(190). Рассмотрение случая (134.2), (135.2), (153), (169), (177) и (185) закончено. Следовательно, закончено рассмотрение случая (134.2), (169) и (135.2).

Рассмотрим случай, когда выполняется условие (135.3). Из $r'_{\nu_*}(a) \leq y'_5(a)$ и $y_5 = r_{\mu_3}$ следует $r_{\nu_*} = y_5$. Аналогично предыдущему определяется s^2 и доказывается формула (166). Пусть $\lambda_* = \mu_* - \nu_* + 2$, $\lambda_1 = \mu_*\lambda_*^{-1}$, $\lambda_2 = (\mu_* + 1)\lambda_*^{-1}$, $\lambda_3 = (\mu_* - \nu_* + 1)\lambda_*^{-1}$ и

$$u_\lambda = r_{\lambda-\lambda_*}, \quad \lambda \in [0, \lambda_1],$$

$$u_\lambda = s^2_{(\lambda-\lambda_1)\lambda_*}, \quad \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2],$$

$$u_\lambda = r_{(\lambda-\lambda_3)\lambda_*}, \quad \lambda \in [\lambda_2, 1].$$

Условия (121) следуют из условий (131), (133), (166) и (169). Рассмотрение случая (134.2), (135.2) и (169) закончено. Следовательно, закончено рассмотрение случая (134.2).

Рассмотрим случай, когда выполняется условие (134.3). Ясно, что в этом случае выполняется условие (135.2). Аналогично предыдущему определяются z_4, z_5, s^3, доказываются формулы (149)-(150) и показывается, что $r_{\mu_*} = z_5$. Из $r'_\mu(b) < x'_{\beta b}$, $\mu \in [0, 1/3]$ следует

$$(\forall \mu \in [0, 1])({s^3}'_\mu(b) < x'_{\beta b}). \tag{191}$$

Пусть $\lambda_* = \mu_* - \nu_* + 2$, $\lambda_1 = \mu_*\lambda_*^{-1}$, $\lambda_2 = (\mu_* + 1)\lambda_*^{-1}$, $\lambda_3 = (\mu_* - \nu_* + 1)\lambda_*^{-1}$ и

$$u_\lambda = r_{\lambda\lambda_*}, \quad \lambda \in [0, \lambda_1],$$

$$u_\lambda = s^3_{(\lambda-\lambda_1)\lambda_*}, \quad \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2],$$

$$u_\lambda = r_{(\lambda-\lambda_3)\lambda_*}, \quad \lambda \in [\lambda_2, 1].$$

Условия (121) следуют из условий (131), (133), (149)-(150) и (191). Рассмотрение случая (134.3) и (135.2) закончено. Следовательно, закончено рассмотрение всех случаев. Лемма доказана.

1.4. Вложение окружности во множество решений

В 1.4 для окружности

$$L = \{(\cos\varphi, \sin\varphi) \quad \varphi \in [0, 2\pi]\}$$

строятся вложения $\Phi \quad L \to S(I, R)$, которые являются основой для доказательства разрешимости краевых задач. Гомеоморфизм $\Psi \quad S(I, R) \to R^2$ определим формулой $x \to (x(a), x'(a))$, а $x_\varphi \quad \Phi((\cos\varphi, \sin\varphi))$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Предполагаются заданными $y, z \in S(I, R)$ такие, что $y < z$.

Лемма 13. Пусть для любого $x \in S(I, R)$ из $y \le x \le z$, $x(a) = y(a)$ и $x(b) = y(b)$ следует $x = y$ и из $y \le x \le z$, $x(a) = z(a)$ и $x(b) = z(b)$ следует $x = z$. Тогда существует инъективное непрерывное отображение

$$\Phi \quad L \to \{x \in S(I, R) \quad y \le x \le z\}, \tag{192}$$

удовлетворяющее следующим условиям: $x_0 = y$, $x_\pi = z$, найдутся $\varphi_1, \varphi_2 \in (0, \pi)$ такие, что $\varphi_1 \le \varphi_2$ и

$$(\forall\varphi \in (0, \varphi_1))(x_\varphi(a) = y(a))\wedge \tag{193.1}$$

$$x_{\varphi_1}(a) = y(a) \wedge x_{\varphi_1}(b) = z(b)\wedge \tag{193.2}$$

$$(\forall\varphi \in (\varphi_1, \varphi_2))(x_\varphi(a) = y(a) \vee x_\varphi(b) = z(b))\wedge \tag{193.3}$$

$$x_{\varphi_2}(a) = y(a) \wedge x_{\varphi_2}(b) = z(b)\wedge \tag{193.4}$$

$$(\forall\varphi \in (\varphi_2, \pi))(x_\varphi(b) = z(b)), \tag{193.5}$$

найдутся $\varphi_3, \varphi_4 \in (\pi, 2\pi)$ такие, что $\varphi_3 \le \varphi_4$ и

$$(\forall\varphi \in (\pi, \varphi_3))(x_\varphi(a) = z(a))\wedge \tag{194.1}$$

$$x_{\varphi_3}(a) = z(a) \wedge x_{\varphi_3}(b) = y(b)\wedge \tag{194.2}$$

$$(\forall\varphi \in (\varphi_3, \varphi_4))(x_\varphi(a) = z(a) \vee x_\varphi(b) = y(b))\wedge \tag{194.3}$$

$$x_{\varphi_4}(a) = z(a) \wedge x_{\varphi_4}(b) = y(b)\wedge \tag{194.4}$$

$$(\forall\varphi \in (\varphi_4, 2\pi))(x_\varphi(b) = y(b)). \tag{194.5}$$

Пусть $K \subset R^2$ лежит внутри простой замкнутой кривой $L_1 = \Psi\Phi(L)$. Тогда

$$\Psi^{-1}(K) \subset \{x \in S(I, R) \quad y \le x \le z\}. \tag{195}$$

Доказательство. Используя лемму 6, найдем отображение u,

$$v \quad [0, 1] \to \{x \in S(I, R) \quad y \le x \le z\} \tag{196}$$

и $\lambda_{*1}, \lambda_{*2} \in (0, 1)$ такие, что $\lambda_{*1} \le \lambda_{*2}$, $v_0 = z$, $v_1 = y$ и

$$\begin{gathered}
(\forall\lambda \in (0, \lambda_{*1}))(v_\lambda(a) = z(a))\wedge \\
v_{\lambda_{*1}}(a) = z(a) \wedge v_{\lambda_{*1}}(b) = y(b)\wedge \\
(\forall\lambda \in (\lambda_{*1}, \lambda_{*2}))(v_\lambda(a) = z(a) \vee v_\lambda(b) = y(b))\wedge \\
v_{\lambda_{*2}}(a) = z(a) \wedge v_{\lambda_{*2}}(b) = y(b)\wedge \\
(\forall\lambda \in (\lambda_{*2}, 1))(v_\lambda(b) = y(b)).
\end{gathered} \tag{197}$$

Тогда

$$\Phi((\cos\varphi, \sin\varphi)) = u_{\varphi\pi^{-1}}, \quad \varphi \in [0, \pi],$$

$$\Phi((\cos\varphi, \sin\varphi)) = v_{\varphi\pi^{-1}-1}, \quad \varphi \in [\pi, 2\pi],$$

$\varphi_1 = \pi\lambda_1$, $\varphi_2 = \pi\lambda_2$, $\varphi_3 = \pi(\lambda_{*1}+1)$, $\varphi_4 = \pi(\lambda_{*2}+1)$, условие (192) следует из условия (59) и условия (196), условие (193) следует из условия (60) и условие (194) следует из условия (197).

Докажем (195). Предположим противное. Тогда найдется $k \in K$ такое, что

$$x_* = \Psi^{-1}(k) \in S(I, R) \backslash \{x \in S(I, R) \quad y \leq x \leq z\}.$$

Рассмотрим случай, когда найдется $t_0 \in I$ такое, что $x_*(t_0) > z(t_0)$. Множество

$$M = \{\Psi(x) \quad x \in S(I, R) \wedge x(t_0) \geq x_*(t_0)\}$$

неограничено и связно. Следовательно, $L_1 \cap M \neq \oslash$. Пусть $k_1 \in L_1 \cap M$. Тогда для $x_1 = \Psi^{-1}(k_1)$ имеем $x_1(t_0) \geq x_*(t_0) > z(t_0)$, что противоречит (192). Случай, когда найдется $t_0 \in I$ такое, что $x_*(t_0) < y(t_0)$, рассматривается аналогично.

Лемма 14. Пусть $y'(a) > z'(a)$ и для любого $x \in S(I, R)$ из $y \leq x \leq z$, $x'(a) = y'(a)$ и $x(b) = y(b)$ следует $x = y$ и из $y \leq x \leq z$, $x'(a) = z'(a)$ и $x(b) = z(b)$ следует $x = z$. Тогда существует инъективное непрерывное отображение

$$\Phi \quad L \to \{x \in S(I, R) \quad y \leq x \leq z \wedge z'(a) \leq x'(a) \leq y'(a)\}, \tag{198}$$

удовлетворяющее следующим условиям: $x_0 = y$, $x_\pi = z$, найдутся $\varphi_1, \varphi_2 \in (0, \pi)$ такие, что $\varphi_1 \leq \varphi_2$ и

$$(\forall\varphi \in (0, \varphi_1))(x'_\varphi(a) = y'(a))\wedge \tag{199.1}$$

$$x'_{\varphi_1}(a) = y'(a) \wedge x_{\varphi_1}(b) = z(b)\wedge \tag{199.2}$$

$$(\forall\varphi \in (\varphi_1, \varphi_2))(x'_\varphi(a) = y'(a) \vee x_\varphi(b) = z(b))\wedge \tag{199.3}$$

$$x'_{\varphi_2}(a) = y'(a) \wedge x_{\varphi_2}(b) = z(b)\wedge \tag{199.4}$$

$$(\forall\varphi \in (\varphi_2, \pi))(x_\varphi(b) = z(b)), \tag{199.5}$$

найдутся $\varphi_3, \varphi_4 \in (\pi, 2\pi)$ такие, что $\varphi_3 \leq \varphi_4$ и

$$(\forall\varphi \in (\pi, \varphi_3))(x'_\varphi(a) = z'(a))\wedge \tag{200.1}$$

$$x'_{\varphi_3}(a) = z'(a) \wedge x_{\varphi_3}(b) = y(b)\wedge \tag{200.2}$$

$$(\forall\varphi \in (\varphi_3, \varphi_4))(x'_\varphi(a) = z'(a) \vee x_\varphi(b) = y(b))\wedge \tag{200.3}$$

$$x'_{\varphi_4}(a) = z'(a) \wedge x_{\varphi_4}(b) = y(b)\wedge \tag{200.4}$$

$$(\forall\varphi \in (\varphi_4, 2\pi))(x_\varphi(b) = y(b)). \tag{200.5}$$

Пусть $K \subset R^2$ лежит внутри простой замкнутой кривой $L_1 = \Psi\Phi(L)$. Тогда

$$\Psi^{-1}(K) \subset \{x \in S(I, R) \quad y \leq x \leq z \wedge z'(a) \leq x'(a) \leq y'(a)\}. \tag{201}$$

Доказательство. Используя лемму 7, найдем отображение u,

$$v : [0, 1] \to \{x \in S(I, R) : y \leq x \leq z \wedge z'(a) \leq x'(a) \leq y'(a)\} \tag{202}$$

и $\lambda_{*1}, \lambda_{*2} \in (0,1)$ такие, что $\lambda_{*1} \le \lambda_{*2}$, $v_0 = z$, $v_1 = y$ и

$$\begin{gathered}(\forall\lambda \in (0,\lambda_{*1}))(v'_\lambda(a) = z'(a))\wedge\\ v'_{\lambda_{*1}}(a) = z'(a) \wedge v_{\lambda_{*1}}(b) = y(b)\wedge\\ (\forall\lambda \in (\lambda_{*1},\lambda_{*2}))(v'_\lambda(a) = z'(a) \vee v_\lambda(b) = y(b))\wedge\\ v'_{\lambda_{*2}}(a) = z'(a) \wedge v_{\lambda_{*2}}(b) = y(b)\wedge\\ (\forall\lambda \in (\lambda_{*2},1))(v_\lambda(b) = y(b)).\end{gathered} \tag{203}$$

Тогда

$$\Phi((\cos\varphi, \sin\varphi)) = u_{\varphi\pi^{-1}}, \quad \varphi \in [0,\pi],$$

$$\Phi((\cos\varphi, \sin\varphi)) = v_{\varphi\pi^{-1}-1}, \quad \varphi \in [\pi,2\pi],$$

$\varphi_1 = \pi\lambda_1$, $\varphi_2 = \pi\lambda_2$, $\varphi_3 = \pi(\lambda_{*1}+1)$, $\varphi_4 = \pi(\lambda_{*2}+1)$, условие (198) следует из условия (67) и условия (202), условие (199) следует из условия (68) и условие (200) следует из условия (203).

Докажем (201). Предположим противное. Тогда найдется $k \in K$ такое, что

$$x_* = \Psi^{-1}(k) \in S(I,R)\backslash\{x \in S(I,R) \quad y \le x \le z \wedge z'(a) \le x'(a) \le y'(a)\}.$$

Рассмотрим случай, когда найдется $t_0 \in I$ такое, что $x_*(t_0) > z(t_0)$. Множество

$$M = \{\Psi(x) \quad x \in S(I,R) \wedge x(t_0) \ge x_*(t_0)\}$$

неограничено и связно. Следовательно, $L_1 \cap M \ne \oslash$. Пусть $k_1 \in L_1 \cap M$. Тогда для $x_1 = \Psi^{-1}(k_1)$ имеем $x_1(t_0) \ge x_*(t_0) > z(t_0)$, что противоречит (198). Случай, когда найдется $t_0 \in I$ такое, что $x_*(t_0) < y(t_0)$, рассматривается аналогично. Рассмотрим случай, когда $x'_*(a) > y'(a)$. Множество

$$M_1 = \{\Psi(x) \quad x \in S(I,R) \wedge x'(a) \ge x'_*(a)\}$$

неограничено и связно. Следовательно, $L_1 \cap M_1 \ne \oslash$. Пусть $k_2 \in L_1 \cap M_1$. Тогда для $x_2 = \Psi^{-1}(k_2)$ имеем $x'_2(a) \ge x'_*(a) > y'(a)$, что противоречит (198). Случай, когда $x'_*(a) < z'(a)$, рассматривается аналогично.

Лемма 15. Пусть $y'(a) > z'(a)$, $y'(b) < z'(b)$ и для любого $x \in S(I,R)$ из $y \le x \le z$, $x'(a) = y'(a)$ и $x'(b) = y'(b)$ следует $x = y$ и из $y \le x \le z$, $x'(a) = z'(a)$ и $x'(b) = z'(b)$ следует $x = z$. Тогда существует инъективное непрерывное отображение

$$\begin{gathered}\Phi \quad L \to \{x \in S(I,R) \quad y \le x \le z\wedge\\ z'(a) \le x'(a) \le y'(a) \wedge y'(b) \le x'(b) \le z'(b)\},\end{gathered} \tag{204}$$

удовлетворяющее следующим условиям: $x_0 = y$, $x_\pi = z$, найдутся $\varphi_1, \varphi_2 \in (0,\pi)$ такие, что $\varphi_1 \le \varphi_2$ и

$$(\forall\varphi \in (0,\varphi_1))(x'_\varphi(a) = y'(a))\wedge \tag{205.1}$$

$$x'_{\varphi_1}(a) = y'(a) \wedge x'_{\varphi_1}(b) = z'(b)\wedge \tag{205.2}$$

$$(\forall\varphi \in (\varphi_1,\varphi_2))(x'_\varphi(a) = y'(a) \vee x'_\varphi(b) = z'(b))\wedge \tag{205.3}$$

$$x'_{\varphi_2}(a) = y'(a) \wedge x'_{\varphi_2}(b) = z'(b)\wedge \tag{205.4}$$

$$(\forall\varphi \in (\varphi_2,\pi))(x'_\varphi(b) = z'(b)), \tag{205.5}$$

найдутся $\varphi_3, \varphi_4 \in (\pi, 2\pi)$ такие, что $\varphi_3 \le \varphi_4$ и

$$(\forall \varphi \in (\pi, \varphi_3))(x'_\varphi(a) = z'(a)) \wedge \tag{206.1}$$

$$x'_{\varphi_3}(a) = z'(a) \wedge x'_{\varphi_3}(b) = y'(b) \wedge \tag{206.2}$$

$$(\forall \varphi \in (\varphi_3, \varphi_4))(x'_\varphi(a) = z'(a) \vee x'_\varphi(b) = y'(b)) \wedge \tag{206.3}$$

$$x'_{\varphi_4}(a) = z'(a) \wedge x'_{\varphi_4}(b) = y'(b) \wedge \tag{206.4}$$

$$(\forall \varphi \in (\varphi_4, 2\pi))(x'_\varphi(b) = y'(b)). \tag{206.5}$$

Пусть $K \subset R^2$ лежит внутри простой замкнутой кривой $L_1 = \Psi\Phi(L)$. Тогда

$$\begin{gathered} \Psi^{-1}(K) \subset \{x \in S(I, R) \quad y \le x \le z \wedge \\ z'(a) \le x'(a) \le y'(a) \wedge y'(b) \le x'(b) \le z'(b)\}. \end{gathered} \tag{207}$$

Доказательство. Используя лемму 10, найдем отображение u,

$$\begin{gathered} v \quad [0,1] \to \{x \in S(I, R) \quad y \le x \le z \wedge \\ z'(a) \le x'(a) \le y'(a) \wedge y'(b) \le x'(b) \le z'(b)\} \end{gathered} \tag{208}$$

и $\lambda_{*1}, \lambda_{*2} \in (0,1)$ такие, что $\lambda_{*1} \le \lambda_{*2}$, $v_0 = z$, $v_1 = y$ и

$$\begin{gathered} (\forall \lambda \in (0, \lambda_{*1}))(v'_\lambda(a) = z'(a)) \wedge \\ v'_{\lambda_{*1}}(a) = z'(a) \wedge v'_{\lambda_{*1}}(b) = y'(b) \wedge \\ (\forall \lambda \in (\lambda_{*1}, \lambda_{*2}))(v'_\lambda(a) = z'(a) \vee v'_\lambda(b) = y'(b)) \wedge \\ v'_{\lambda_{*2}}(a) = z'(a) \wedge v'_{\lambda_{*2}}(b) = y'(b) \wedge \\ (\forall \lambda \in (\lambda_{*2}, 1))(v'_\lambda(b) = y'(b)). \end{gathered} \tag{209}$$

Тогда

$$\Phi((\cos\varphi, \sin\varphi)) = u_{\varphi\pi^{-1}}, \quad \varphi \in [0, \pi],$$

$$\Phi((\cos\varphi, \sin\varphi)) = v_{\varphi\pi^{-1}-1}, \quad \varphi \in [\pi, 2\pi],$$

$\varphi_1 = \pi\lambda_1$, $\varphi_2 = \pi\lambda_2$, $\varphi_3 = \pi(\lambda_{*1} + 1)$, $\varphi_4 = \pi(\lambda_{*2} + 1)$, условие (204) следует из условия (107) и условия (208), условие (205) следует из условия (108) и условие (206) следует из условия (209).

Докажем (207). Предположим противное. Тогда найдется $k \in K$ такое, что

$$\begin{gathered} x_* = \Psi^{-1}(k) \in S(I, R) \backslash \{x \in S(I, R) \quad y \le x \le z \wedge \\ z'(a) \le x'(a) \le y'(a) \wedge y'(b) \le x'(b) \le z'(b)\}. \end{gathered}$$

Рассмотрим случай, когда найдется $t_0 \in I$ такое, что $x_*(t_0) > z(t_0)$. Множество

$$M = \{\Psi(x) \quad x \in S(I, R) \wedge x(t_0) \ge x_*(t_0)\}$$

неограничено и связно. Следовательно, $L_1 \cap M \ne \oslash$. Пусть $k_1 \in L_1 \cap M$. Тогда для $x_1 = \Psi^{-1}(k_1)$ имеем $x_1(t_0) \ge x_*(t_0) > z(t_0)$, что противоречит (204). Случай, когда найдется $t_0 \in I$ такое, что $x_*(t_0) < y(t_0)$, рассматривается аналогично. Рассмотрим случай, когда $x'_*(a) > y''(a)$. Множество

$$M_1 = \{\Psi(x) : x \in S(I, R) \wedge x'(a) \ge x'_*(a)\}$$

неограничено и связно. Следовательно, $L_1 \cap M_1 \neq \oslash$. Пусть $k_2 \in L_1 \cap M_1$. Тогда для $x_2 = \Psi^{-1}(k_2)$ имеем $x_2'(a) \geq x_*'(a) > y'(a)$, что противоречит (204). Случай, когда $x_*'(a) < z'(a)$, рассматривается аналогично. Рассмотрим случай, когда $x_*'(b) < y'(b)$. Множество

$$M_2 = \{\Psi(x) \quad x \in S(I,R) \wedge x'(b) \leq x_*'(b)\}$$

неограничено и связно. Следовательно, $L_1 \cap M_2 \neq \oslash$. Пусть $k_3 \in L_1 \cap M_2$. Тогда для $x_3 = \Psi^{-1}(k_3)$ имеем $x_3'(b) \leq x_*'(b) < y'(b)$, что противоречит (204). Случай, когда $x_*'(b) > z'(b)$, рассматривается аналогично.

Лемма 16. Пусть $x_\alpha' \in (-\infty, y'(a)]$, $x_\beta' \in [z'(a), \infty)$, для любого $x \in S(I,R)$ из $y \leq x \leq z$, $x(a) = y(a)$ и $x(b) = y(b)$ следует $x = y$, из $y \leq x \leq z$, $x(a) = z(a)$ и $x(b) = z(b)$ следует $x = z$ и краевые задачи

$$\begin{array}{llll} x'' = f(t,x,x'), & x'(a) = x_\beta', & x(b) = y(b), & y \leq x \leq z, \\ x'' = f(t,x,x'), & x'(a) = x_\alpha', & x(b) = z(b), & y \leq x \leq z \end{array} \tag{210}$$

не имеют решения. Тогда существует инъективное непрерывное отображение

$$\begin{array}{l} \Phi \quad L \to \{x \in S(I,R) \quad y \leq x \leq z \wedge \\ \qquad\qquad x_\alpha' \leq x'(a) \leq x_\beta'\}, \end{array} \tag{211}$$

удовлетворяющее следующим условиям: $x_0 = y$, $x_\pi = z$, найдутся $\varphi_3, \varphi_4, \varphi_5 \in (0, \pi]$ такие, что $\varphi_3 \leq \varphi_4 \leq \varphi_5$,

$$(\forall \varphi \in (0, \varphi_3))(x_\varphi(a) = y(a)) \wedge \tag{212.1}$$

$$x_{\varphi_3}(a) = y(a) \wedge x_{\varphi_3}'(b) = x_\beta' \wedge \tag{212.2}$$

$$(\forall \varphi \in (\varphi_3, \varphi_4))(x_\varphi'(a) = x_\beta')) \wedge \tag{212.3}$$

$$x_{\varphi_4}'(a) = x_\beta' \wedge x_{\varphi_4}(b) = z(b) \wedge \tag{212.4}$$

$$(\forall \varphi \in (\varphi_4, \varphi_5))(x_\varphi'(a) = x_\beta' \vee x_\varphi(b) = z(b)) \wedge \tag{212.5}$$

$$x_{\varphi_5}'(a) = x_\beta' \wedge x_{\varphi_5}(b) = z(b) \wedge \tag{212.6}$$

$$(\forall \varphi \in (\varphi_5, \pi))(x_\varphi(b) = z(b)), \tag{212.7}$$

или найдутся $\varphi_1, \varphi_2 \in (0, \pi)$ такие, что $\varphi_1 \leq \varphi_2$ и

$$(\forall \varphi \in (0, \varphi_1))(x_\varphi(a) = y(a)) \wedge \tag{213.1}$$

$$x_{\varphi_1}(a) = y(a) \wedge x_{\varphi_1}(b) = z(b) \wedge \tag{213.2}$$

$$(\forall \varphi \in (\varphi_1, \varphi_2))(x_\varphi(a) = y(a) \vee x_\varphi(b) = z(b)) \wedge \tag{213.3}$$

$$x_{\varphi_2}(a) = y(a) \wedge x_{\varphi_2}(b) = z(b) \wedge \tag{213.4}$$

$$(\forall \varphi \in (\varphi_2, \pi))(x_\varphi(b) = z(b)), \tag{213.5}$$

или найдутся $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4, \varphi_5 \in (0, \pi]$ такие, что $\varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \varphi_4 \leq \varphi_5$,

$$(\forall \varphi \in (0, \varphi_1))(x_\varphi(a) = y(a)) \wedge \tag{214.1}$$

$$x_{\varphi_1}(a) = y(a) \wedge x_{\varphi_1}(b) = z(b) \wedge \tag{214.2}$$

$$(\forall\varphi \in (\varphi_1,\varphi_2))(x_\varphi(a) = y(a) \vee x_\varphi(b) = z(b))\wedge \tag{214.3}$$

$$x_{\varphi_2}(a) = y(a) \wedge x_{\varphi_2}(b) = z(b)\wedge \tag{214.4}$$

$$(\forall\varphi \in (\varphi_2,\varphi_4))(x_\varphi(b) = z(b))\wedge \tag{214.5}$$

$$x'_{\varphi_4}(a) = x'_\beta \wedge x_{\varphi_4}(b) = z(b)\wedge \tag{214.6}$$

$$(\forall\varphi \in (\varphi_4,\varphi_5))(x'_\varphi(a) = x'_\beta \vee x_\varphi(b) = z(b))\wedge \tag{214.7}$$

$$x'_{\varphi_5}(a) = x'_\beta \wedge x_{\varphi_5}(b) = z(b)\wedge \tag{214.8}$$

$$(\forall\varphi \in (\varphi_5,\pi))(x_\varphi(b) = z(b)), \tag{214.9}$$

или найдутся $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4,\varphi_5 \in (0,\pi]$ такие, что $\varphi_1 \le \varphi_2 \le \varphi_3 \le \varphi_4 \le \varphi_5$,

$$(\forall\varphi \in (0,\varphi_1))(x_\varphi(a) = y(a))\wedge \tag{215.1}$$

$$x_{\varphi_1}(a) = y(a) \wedge x_{\varphi_1}(b) = z(b)\wedge \tag{215.2}$$

$$(\forall\varphi \in (\varphi_1,\varphi_2))(x_\varphi(a) = y(a) \vee x_\varphi(b) = z(b))\wedge \tag{215.3}$$

$$x_{\varphi_2}(a) = y(a) \wedge x_{\varphi_2}(b) = z(b)\wedge \tag{215.4}$$

$$(\forall\varphi \in (\varphi_2,\varphi_3))(x_\varphi(a) = y(a))\wedge \tag{215.5}$$

$$x_{\varphi_3}(a) = y(a) \wedge x'_{\varphi_3}(b) = x'_\beta\wedge \tag{215.6}$$

$$(\forall\varphi \in (\varphi_3,\varphi_4))(x'_\varphi(a) = x'_\beta)\wedge \tag{215.7}$$

$$x'_{\varphi_4}(a) = x'_\beta \wedge x_{\varphi_4}(b) = z(b)\wedge \tag{215.8}$$

$$(\forall\varphi \in (\varphi_4,\varphi_5))(x'_\varphi(a) = x'_\beta \vee x_\varphi(b) = z(b))\wedge \tag{215.9}$$

$$x'_{\varphi_5}(a) = x'_\beta \wedge x_{\varphi_5}(b) = z(b)\wedge \tag{215.10}$$

$$(\forall\varphi \in (\varphi_5,\pi))(x_\varphi(b) = z(b)), \tag{215.11}$$

найдутся $\varphi_8,\varphi_9,\varphi_{10} \in (\pi,2\pi]$ такие, что $\varphi_8 \le \varphi_9 \le \varphi_{10}$,

$$\begin{gathered}
(\forall\varphi \in (\pi,\varphi_8))(x_\varphi(a) = z(a))\wedge \\
x_{\varphi_8}(a) = z(a) \wedge x'_{\varphi_8}(a) = x'_\alpha\wedge \\
(\forall\varphi \in (\varphi_8,\varphi_9))(x'_\varphi(a) = x'_\alpha)\wedge \\
x_{\varphi_9}(a) = x'_\alpha \wedge x_{\varphi_9}(b) = y(b)\wedge \\
(\forall\varphi \in (\varphi_9,\varphi_{10}))(x'_\varphi(a) = x'_\alpha \vee x_\varphi(b) = y(b))\wedge \\
x'_{\varphi_{10}}(a) = x'_\alpha \wedge x_{\varphi_{10}}(b) = y(b)\wedge \\
(\forall\varphi \in (\varphi_{10},2\pi))(x_\varphi(b) = y(b)),
\end{gathered} \tag{216}$$

или найдутся $\varphi_6,\varphi_7 \in (\pi,2\pi]$ такие, что $\varphi_6 \le \varphi_7$,

$$\begin{gathered}
(\forall\varphi \in (\pi,\varphi_6))(x_\varphi(a) = z(a))\wedge \\
x_{\varphi_6}(a) = z(a) \wedge x_{\varphi_6}(b) = y(b)\wedge \\
(\forall\varphi \in (\varphi_6,\varphi_7))(x_\varphi(a) = z(a) \vee x_\varphi(b) = y(b))\wedge \\
x_{\varphi_7}(a) = z(a) \wedge x_{\varphi_7}(b) = y(b)\wedge \\
(\forall\varphi \in (\varphi_7,2\pi))(x_\varphi(b) = y(b)),
\end{gathered} \tag{217}$$

или найдутся $\varphi_6, \varphi_7, \varphi_9, \varphi_{10} \in (\pi, 2\pi]$ такие, что $\varphi_6 \le \varphi_7 \le \varphi_9 \le \varphi_{10}$,

$$\begin{gathered}
(\forall\varphi \in (\pi, \varphi_6))(x_\varphi(a) = z(a))\wedge \\
x_{\varphi_6}(a) = z(a) \wedge x_{\varphi_6}(b) = y(b)\wedge \\
(\forall\varphi \in (\varphi_6, \varphi_7))(x_\varphi(a) = z(a) \vee x_\varphi(b) = y(b))\wedge \\
x_{\varphi_7}(a) = z(a) \wedge x_{\varphi_7}(b) = y(b)\wedge \\
(\forall\varphi \in (\varphi_7, \varphi_9))(x_\varphi(b) = y(b))\wedge \\
x'_{\varphi_9}(a) = x'_\alpha \wedge x_{\varphi_9}(b) = y(b)\wedge \\
(\forall\varphi \in (\varphi_9, \varphi_{10}))(x'_\varphi(a) = x'_\alpha \vee x_\varphi(b) = y(b))\wedge \\
x'_{\varphi_{10}}(a) = x'_\alpha \wedge x_{\varphi_{10}}(b) = y(b)\wedge \\
(\forall\varphi \in (\varphi_{10}, 2\pi))(x_\varphi(b) = y(b)),
\end{gathered} \tag{218}$$

или найдутся $\varphi_6, \varphi_7, \varphi_8, \varphi_9, \varphi_{10} \in (\pi, 2\pi]$ такие, что $\varphi_6 \le \varphi_7 \le \varphi_8 \le \varphi_9 \le \varphi_{10}$,

$$\begin{gathered}
(\forall\varphi \in (\pi, \varphi_6))(x_\varphi(a) = z(a))\wedge \\
x_{\varphi_6}(a) = z(a) \wedge x_{\varphi_6}(b) = y(b)\wedge \\
(\forall\varphi \in (\varphi_6, \varphi_7))(x_\varphi(a) = z(a) \vee x_\varphi(b) = y(b))\wedge \\
x_{\varphi_7}(a) = z(a) \wedge x_{\varphi_7}(b) = y(b)\wedge \\
(\forall\varphi \in (\varphi_7, \varphi_8))(x_\varphi(a) = z(a))\wedge \\
x_{\varphi_8}(a) = z(a) \wedge x'_{\varphi_8}(a) = x'_\alpha\wedge \\
(\forall\varphi \in (\varphi_8, \varphi_9))(x'_\varphi(a) = x'_\alpha)\wedge \\
x'_{\varphi_9}(a) = x'_\alpha \wedge x_{\varphi_9}(b) = y(b)\wedge \\
(\forall\varphi \in (\varphi_9, \varphi_{10}))(x'_\varphi(a) = x'_\alpha \vee x_\varphi(b) = y(b))\wedge \\
x'_{\varphi_{10}}(a) = x'_\alpha \wedge x_{\varphi_{10}}(b) = y(b)\wedge \\
(\forall\varphi \in (\varphi_{10}, 2\pi))(x_\varphi(b) = y(b)).
\end{gathered} \tag{219}$$

Пусть $K \subset R^2$ лежит внутри простой замкнутой кривой $L_1 = \Psi\Phi(L)$. Тогда

$$\Psi^{-1}(K) \subset \{x \in S(I, R) \quad y \le x \le z \wedge x'_\alpha \le x'(a) \le x'_\beta\}. \tag{220}$$

Доказательство. Используя лемму 9, найдем стображение u,

$$v \quad [0, 1] \to \{x \in S(I, R) \quad y \le x \le z \wedge x'_\alpha \le x'(a) \le x'_\beta\} \tag{221}$$

со следующими свойствами: $v_0 = z$, $v_1 = y$, найдутся $\lambda_{*3}, \lambda_{*4}, \lambda_{*5} \in (0, 1]$ такие, что $\lambda_{*3} \le \lambda_{*4} \le \lambda_{*5}$,

$$\begin{gathered}
(\forall\lambda \in (0, \lambda_{*3}))(v_\lambda(a) = z(a))\wedge \\
v_{\lambda_{*3}}(a) = z(a) \wedge v'_{\lambda_{*3}}(a) = x'_\alpha\wedge \\
(\forall\lambda \in (\lambda_{*3}, \lambda_{*4}))(v'_\lambda(a) = x'_\alpha)\wedge \\
v'_{\lambda_{*4}}(a) = x'_\alpha \wedge v_{\lambda_{*4}}(b) = y(b)\wedge \\
(\forall\lambda \in (\lambda_{*4}, \lambda_{*5}))(v'_\lambda(a) = x'_\alpha \vee v_\lambda(b) = y(b))\wedge \\
v'_{\lambda_{*5}}(a) = x'_\alpha \wedge v_{\lambda_{*5}}(b) = y(b)\wedge \\
(\forall\lambda \in (\lambda_{*5}, 1))(v_\lambda(b) = y(b)),
\end{gathered} \tag{222}$$

или найдутся $\lambda_{*1}, \lambda_{*2} \in (0, 1)$ такие, что $\lambda_{*1} \le \lambda_{*2}$,

$$\begin{gathered}
(\forall\lambda \in (0, \lambda_{*1}))(v_\lambda(a) = z(a))\wedge \\
v_{\lambda_{*1}}(a) = z(a) \wedge v_{\lambda_{*1}}(b) = y(b)\wedge \\
(\forall\lambda \in (\lambda_{*1}, \lambda_{*2}))(v_\lambda(a) = z(a) \vee v_\lambda(b) = y(b))\wedge \\
v_{\lambda_{*2}}(a) = z(a) \wedge v_{\lambda_{*2}}(b) = y(b)\wedge \\
(\forall\lambda \in (\lambda_{*2}, 1))(v_\lambda(b) = y(b)),
\end{gathered} \tag{223}$$

или найдутся $\lambda_{*1}, \lambda_{*2}, \lambda_{*4}, \lambda_{*5} \in (0,1]$ такие, что $\lambda_{*1} \leq \lambda_{*2} \leq \lambda_{*4} \leq \lambda_{*5}$,

$$\begin{gathered}
(\forall \lambda \in (0, \lambda_{*1}))(v_\lambda(a) = z(a)) \wedge \\
v_{\lambda_{*1}}(a) = z(a) \wedge v_{\lambda_{*1}}(a) = y(b) \wedge \\
(\forall \lambda \in (\lambda_{*1}, \lambda_{*2}))(v_\lambda(a) = z(a) \vee v_\lambda(b) = y(b)) \wedge \\
v_{\lambda_{*2}}(a) = z(a) \wedge v_{\lambda_{*2}}(b) = y(b) \wedge \\
(\forall \lambda \in (\lambda_{*2}, \lambda_{*4}))(v_\lambda(b) = y(b)) \wedge \\
v'_{\lambda_{*4}}(a) = x'_\alpha \wedge v_{\lambda_{*4}}(b) = y(b) \wedge \\
(\forall \lambda \in (\lambda_{*4}, \lambda_{*5}))(v'_\lambda(a) = x'_\alpha \vee v_\lambda(b) = y(b)) \wedge \\
v'_{\lambda_{*5}}(a) = x'_\alpha \wedge v_{\lambda_{*5}}(b) = y(b) \wedge \\
(\forall \lambda \in (\lambda_{*5}, 1))(v_\lambda(b) = y(b)),
\end{gathered} \tag{224}$$

или найдутся $\lambda_{*1}, \lambda_{*2}, \lambda_{*3}, \lambda_{*4}, \lambda_{*5} \in (0,1]$ такие, что $\lambda_{*1} \leq \lambda_{*2} \leq \lambda_{*3} \leq \lambda_{*4} \leq \lambda_{*5}$,

$$\begin{gathered}
(\forall \lambda \in (0, \lambda_{*1}))(v_\lambda(a) = z(a)) \wedge \\
v_{\lambda_{*1}}(a) = z(a) \wedge v_{\lambda_{*1}}(a) = y(b) \wedge \\
(\forall \lambda \in (\lambda_{*1}, \lambda_{*2}))(v_\lambda(a) = z(a) \vee v_\lambda(b) = y(b)) \wedge \\
v_{\lambda_{*2}}(a) = z(a) \wedge v_{\lambda_{*2}}(b) = y(b) \wedge \\
(\forall \lambda \in (\lambda_{*2}, \lambda_{*3}))(v_\lambda(a) = z(a)) \wedge \\
v_{\lambda_{*3}}(a) = z(a) \wedge v'_{\lambda_{*3}}(a) = x'_\alpha \wedge \\
(\forall \lambda \in (\lambda_{*3}, \lambda_{*4}))(v'_\lambda(a) = x'_\alpha) \wedge \\
v'_{\lambda_{*4}}(a) = x'_\alpha \wedge v_{\lambda_{*4}}(b) = y(b) \wedge \\
(\forall \lambda \in (\lambda_{*4}, \lambda_{*5}))(v'_\lambda(a) = x'_\alpha \vee v_\lambda(b) = y(b)) \wedge \\
v'_{\lambda_{*5}}(a) = x'_\alpha \wedge v_{\lambda_{*5}}(b) = y(b) \wedge \\
(\forall \lambda \in (\lambda_{*5}, 1))(v_\lambda(b) = y(b)).
\end{gathered} \tag{225}$$

Тогда

$$\Phi((\cos\varphi, \sin\varphi)) = u_{\varphi\pi^{-1}}, \quad \varphi \in [0, \pi],$$

$$\Phi((\cos\varphi, \sin\varphi)) = v_{\varphi\pi^{-1}-1}, \quad \varphi \in [\pi, 2\pi],$$

$\varphi_i = \pi\lambda_i$, $i = 1, ..., 5$, $\varphi_i = \pi(\lambda_{*i-5} + 1)$, $i = 6, ..., 10$, условие (211) следует из условия (79) и условия (221), условия (212)-(215) следуют из условий (80)-(83), а условия (216)-(219) следуют из условий (222)-(225).

Докажем (220). Предположим противное. Тогда найдется $k \in K$ такое, что

$$x_* = \Psi^{-1}(k) \in S(I,R) \backslash \{x \in S(I,R) : y \leq x \leq z \wedge x'_\alpha \leq x'(a) \leq x'_\beta\}.$$

Рассмотрим случай, когда найдется $t_0 \in I$ такое, что $x_*(t_0) > z(t_0)$. Множество

$$M = \{\Psi(x) : x \in S(I,R) \wedge x(t_0) \geq x_*(t_0)\}$$

неограничено и связно. Следовательно, $L_1 \cap M \neq \oslash$. Пусть $k_1 \in L_1 \cap M$. Тогда для $x_1 = \Psi^{-1}(k_1)$ имеем $x_1(t_0) \geq x_*(t_0) > z(t_0)$, что противоречит (211). Случай, когда найдется $t_0 \in I$ такое, что $x_*(t_0) < y(t_0)$, рассматривается аналогично. Рассмотрим случай, когда $x'_*(a) < x'_\alpha$. Множество

$$M_1 = \{\Psi(x) : x \in S(I,R) \wedge x'(a) \leq x'_*(a)\}$$

неограничено и связно. Следовательно, $L_1 \cap M_1 \neq \oslash$. Пусть $k_2 \in L_1 \cap M_1$. Тогда для $x_2 = \Psi^{-1}(k_2)$ имеем $x_2'(a) \leq x_*'(a) < x_\alpha'$, что противоречит (211). Случай, когда $x_*'(a) > x_\beta'$, рассматривается аналогично.

1.5. Разрешимость краевых задач

В 1.5 доказывается разрешимость краевых задач

$$x'' = f(t,x,x'), \quad H_1x = h_1, \quad H_2x = h_2, \quad \alpha \leq x \leq \beta, \quad U,$$

где

$$\begin{aligned}U \in \{&\oslash, \alpha'(a) \leq x'(a) \leq \beta'(a), \beta'(a) \leq x'(a) \leq \alpha'(a),\\ &\alpha'(a) \leq x'(a) \leq \beta'(a) \wedge \beta'(b) \leq x'(b) \leq \beta'(b),\\ &\beta'(a) \leq x'(a) \leq \alpha'(a) \wedge \alpha'(b) \leq x'(b) \leq \beta'(b)\}.\end{aligned}$$

Предполагается, что $\alpha < \beta$.

Лемма 17. Пусть $\alpha'(a) < \beta'(a)$. Тогда найдется непрерывное отображение

$$u \quad [0,1] \to \{x \in S(I,R) \quad \alpha \leq x \leq \beta \wedge \alpha'(a) \leq x'(a) \leq \beta'(a)\} \tag{226}$$

такое, что

$$(u_0(a) = \alpha(a) \wedge u_0(b) = \alpha(b)) \vee (u_0'(a) = \beta'(a) \wedge u_0(b) = \beta(b)), \tag{227}$$

$$(u_1(a) = \beta(a) \wedge u_1(b) = \beta(b)) \vee (u_1'(a) = \alpha'(a) \wedge u_1(b) = \alpha(b)). \tag{228}$$

Доказательство. Пусть y максимальное решение краевой задачи

$$x'' = f(t,x,x'), \quad x(a) = \alpha(a), \quad x(b) = \alpha(b), \quad \alpha \leq x \leq \beta,$$

а z минимальное решение краевой задачи

$$x'' = f(t,x,x'), \quad x(a) = \beta(a), \quad x(b) = \beta(b), \quad y \leq x \leq \beta.$$

Рассмотрим случай, когда краевая задача

$$x'' = f(t,x,x'), \quad x'(a) = \alpha'(a), \quad x(b) = \alpha(b), \quad y \leq x \leq z \tag{229}$$

не имеет решения. По лемме 6 найдется непрерывное отображение

$$u \quad [0,1] \to \{x \in S(I,R) \quad (x(a) = z(a) \vee x(b) = y(b)) \wedge y \leq x \leq z\} \tag{230}$$

такое, что $u_0 = y$ и $u_1 = z$. Из отсутствия решения у краевой задачи (229) следует неравенство

$$(\forall \lambda \in [0,1])(u_\lambda'(a) > \alpha'(a)). \tag{231}$$

Если

$$(\forall \lambda \in [0,1])(u_\lambda'(a) \leq \beta'(a)), \tag{232}$$

то из (230)-(232) следуют условия (226)-(228). Если найдется $\lambda \in [0,1]$ такое, что $u'_\lambda(a) > \beta'(a)$, то краевая задача

$$x'' = f(t,x,x'), \quad x'(a) = \beta'(a), \quad x(b) = \beta(b), \quad y \le x \le z \tag{233}$$

имеет максимальное решение, которое обозначим через z_1. Пусть

$$u_\lambda = s(x(b) = z_1(b) \wedge x'(b) = z_1'(b) + \lambda(z'(b) - z_1'(b))), \quad \lambda \in [0,1]. \tag{234}$$

Ясно, что $u_0 = z_1$, $u_1 = z$ и справедливы условия (227)-(228). Из условий на z_1, z, (234) и отсутствия решения у краевой задачи (229) следует (226).

Рассмотрим случай, когда краевая задача (229) имеет решение. Обозначим через y_1 минимальное решение краевой задачи (229). Пусть

$$u_\lambda = s(x(b) = y(b) \wedge x'(b) = y'(b) + \lambda(y_1'(b) - y'(b))), \quad \lambda \in [0,1]. \tag{235}$$

Если

$$(\forall\lambda \in [0,1])(u'_\lambda(a) \le \beta'(a)), \tag{236}$$

то из условий на y, y_1 и (235)-(236) следуют условия (226)-(228).

Рассмотрим случай, когда найдется $\lambda_1 \in [0,1]$ такое, что $u'_{\lambda_1}(a) > \beta'(a)$. Обозначим через z_1 максимальное решение краевой задачи (233), и пусть u определяется формулой (234). Если

$$(\forall\lambda \in [0,1])(u'_\lambda(a) \ge \alpha'(a)), \tag{237}$$

то из условий на z_1, z, (234) и (237) следуют условия (226)-(228).

Рассмотрим случай, когда найдется $\lambda_2 \in [0,1]$ такое, что $u'_{\lambda_2}(a) < \alpha'(a)$. Пусть $z_2 = u_{\lambda_2}$, y_2 максимальное решение краевой задачи

$$x'' = f(t,x,x'), \quad x'(a) = \beta'(a), \quad x(b) = \alpha(b), \quad y \le x \le z.$$

Заметим, что $y_2 \le z_1 \le z_2$. Пусть z_3 минимальное решение краевой задачи

$$x'' = f(t,x,x'), \quad x'(a) = \beta'(a), \quad x(b) = \beta(b), \quad y_2 \le x \le z,$$

y_3 минимальное решение краевой задачи

$$\begin{gathered} x'' = f(t,x,x'), \quad x'(a) = \alpha'(a), \quad x(b) = \alpha(b), \quad y_2 \le x \le z_2, \\ u_\lambda = s(x(a) = z_3(a) + 2\lambda(y_2(a) - z_3(a)) \wedge \\ x'(a) = \beta'(a)), \quad \lambda \in [0,1/2], \\ u_\lambda = s(x(b) = y_2(b) \wedge x'(b) = y_2'(b) + (2\lambda - 1)(y_3'(b) - y_2'(b)), \\ \lambda \in [1/2,1]. \end{gathered} \tag{238}$$

Ясно, что $u_0 = z_3$, $u_1 = y_3$ и справедливы условия (227)-(228). Из условий на z_3, y_2, y_3 и (238) следует (226).

Теорема 7. Пусть $\alpha'(a) < \beta'(a)$ и для любого $x \in S(I,R)$ из $\alpha \le x \le \beta$ и $\alpha'(a) \le x'(a) \le \beta'(a)$ следует

$$\begin{gathered} (x(a) = \alpha(a) \wedge x(b) = \alpha(b)) \vee (x'(a) = \beta'(a) \wedge \\ x(b) = \beta(b)) \Rightarrow H_1 x \le h_1, \end{gathered} \tag{239}$$

$$(x(a) = \beta(a) \wedge x(b) = \beta(b)) \vee (x'(a) = \alpha'(a) \wedge x(b) = \alpha(b)) \Rightarrow H_1 x \geq h_1, \tag{240}$$

$$H_2 x = h_2. \tag{241}$$

Тогда существует решение краевой задачи

$$x'' = f(t, x, x'), \quad H_1 x = h_1, \quad H_2 x = h_2, \quad \alpha \leq x \leq \beta,$$

$$\alpha'(a) \leq x'(a) \leq \beta'(a).$$

Доказательство. Используя лемму 17, найдем непрерывное отображение u. Из условий (226)-(228) и условий (239)-(240) следует $H_1 u_0 \leq h_1$ и $H_1 u_1 \geq h_1$. Следовательно, найдется $\lambda \in [0,1]$ такое, что $H_1 u_\lambda = h_1$. Из условия (226) и условия (241) следует $H_2 u_\lambda = h_2$.

Лемма 18. Пусть $\alpha'(a) < \beta'(a)$. Тогда найдется непрерывное отображение

$$u \quad [0,1] \to \{x \in S(I, R) \quad \alpha \leq x \leq \beta \wedge \alpha'(a) \leq x'(a) \leq \beta'(a)\} \tag{242}$$

такое, что

$$(u_0(a) = \alpha(a) \wedge u_0(b) = \alpha(b)) \vee (u_0'(a) = \beta'(a) \wedge u_0(b) = \alpha(b)), \tag{243}$$

$$(u_1(a) = \beta(a) \wedge u_1(b) = \beta(b)) \vee (u_1'(a) = \alpha'(a) \wedge u_1(b) = \beta(b)). \tag{244}$$

Доказательство. Пусть y максимальное решение краевой задачи

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x(a) = \alpha(a), \quad x(b) = \alpha(b), \quad \alpha \leq x \leq \beta,$$

а z минимальное решение краевой задачи

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x(a) = \beta(a), \quad x(b) = \beta(b), \quad y \leq x \leq \beta.$$

Рассмотрим случай, когда краевая задача

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x'(a) = \beta'(a), \quad x(b) = \alpha(b), \quad y \leq x \leq z \tag{245}$$

не имеет решения и краевая задача

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x'(a) = \alpha'(a), \quad x(b) = \beta(b), \quad y \leq x \leq z \tag{246}$$

не имеет решения. По лемме 9 при $x'_\alpha = \alpha'(a)$ и $x'_\beta = \beta'(a)$ находим непрерывное отображение u, удовлетворяющее условиям: $u_0 = y$, $u_1 = z$ и (242)-(244).

Рассмотрим случай, когда краевая задача (245) не имеет решения, а краевая задача (246) имеет решение. Пусть z_1 минимальное решение краевой задачи (246), y_2 минимальное, а z_2 максимальное решение краевой задачи

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x'(a) = \alpha'(a), \quad x(b) = \alpha(b), \quad y \leq x \leq z_1.$$

По лемме 4 существует непрерывное отображение

$$s \quad [0,1] \to \{x \in S(I, R) \quad y \leq x \leq z_1 \wedge (x'(a) = \alpha'(a) \vee (x'(a) > \alpha'(a) \wedge x(b) = \alpha(b)))\}$$

такое, что $s_0 = y_2$ и $s_1 = z_2$. Пусть

$$
\begin{gathered}
u_\lambda = s(x(b) = \alpha(b) \wedge x'(b) = y'(b) + 3\lambda(y_2'(b) - y'(b))), \\
\lambda \in [0, 1/3], \\
u_\lambda = s_{3\lambda-1}, \quad \lambda \in [1/3, 2/3], \\
u_\lambda = s(x(a) = z_2(a) + (3\lambda - 2)(z_1(a) - z_2(a)) \wedge \\
x'(a) = \alpha'(a)), \quad \lambda \in [2/3, 1].
\end{gathered} \tag{247}
$$

Ясно, что $u_0 = y$, $u_1 = z_1$ и справедливы условия (243)-(244). Из условий на y, y_2, z_2, z_1 и (247) следует (242).

Рассмотрим случай, когда краевая задача (245) имеет решение. Пусть y_1 минимальное решение краевой задачи (245).

Рассмотрим случай, когда краевая задача

$$
x'' = f(t, x, x'), \quad x'(a) = \alpha'(a), \quad x(b) = \beta(b), \quad y_1 \leq x \leq z \tag{248}
$$

не имеет решения. Пусть y_2 минимальное, а z_2 максимальное решение краевой задачи

$$
x'' = f(t, x, x'), \quad x'(a) = \beta'(a), \quad x(b) = \beta(b), \quad y_1 \leq x \leq z.
$$

По лемме 4 существует непрерывное отображение

$$
\begin{gathered}
s \quad [0, 1] \to \{x \in S(I, R) \quad y_1 \leq x \leq z \wedge \\
(x'(a) = \beta'(a) \vee (x'(a) < \beta'(a) \wedge x(b) = \beta(b)))\}
\end{gathered}
$$

такое, что $s_0 = y_2$ и $s_1 = z_2$. Пусть

$$
\begin{gathered}
u_\lambda = s(x(a) = y_1(a) + 3\lambda(y_2(a) - y_1(a)) \wedge x'(a) = \beta'(a)), \\
\lambda \in [0, 1/3], \\
u_\lambda = s_{3\lambda-1}, \quad \lambda \in [1/3, 2/3], \\
u_\lambda = s(x(b) = z_2(b) \wedge x'(b) = z_2'(b) + (3\lambda - 2)(z'(b) - z_2'(b)), \\
\lambda \in [2/3, 1].
\end{gathered} \tag{249}
$$

Ясно, что $u_0 = y_1$, $u_1 = z$ и справедливы условия (243)-(244). Из условий на y_1, y_2, z_2, z и (249) следует (242).

Рассмотрим случай, когда краевая задача (248) имеет решение. Пусть z_1 минимальное решение краевой задачи (248), y_2 минимальное, а z_2 максимальное решение краевой задачи

$$
x'' = f(t, x, x'), \quad x'(a) = \beta'(a), \quad x(b) = \beta(b), \quad y_1 \leq x \leq z_1.
$$

По лемме 4 существует непрерывное отображение

$$
\begin{gathered}
s \quad [0, 1] \to \{x \in S(I, R) \quad y_1 \leq x \leq z_1 \wedge \\
(x'(a) = \beta'(a) \vee (x'(a) < \beta'(a) \wedge x(b) = \beta(b)))\}
\end{gathered}
$$

такое, что $s_0 = y_2$ и $s_1 = z_2$. Пусть

$$
\begin{gathered}
u_\lambda = s(x(a) = y_1(a) + 3\lambda(y_2(a) - y_1(a)) \wedge \\
x'(a) = \beta'(a)), \quad \lambda \in [0, 1/3], \\
u_\lambda = s_{3\lambda-1}, \quad \lambda \in [1/3, 2/3], \\
u_\lambda = s(x(b) = z_2(b) \wedge x'(b) = z_2'(b) + (3\lambda - 2)(z_1'(b) - z_2'(b)), \\
\lambda \in [2/3, 1].
\end{gathered} \tag{250}
$$

Ясно, что $u_0 = y_1$, $u_1 = z_1$ и справедливы условия (243)-(244). Из условий на y_1, y_2, z_2, z_1 и (250) следует (242).

Теорема 8. Пусть $\alpha'(a) < \beta'(a)$ и для любого $x \in S(I,R)$ из $\alpha \le x \le \beta$ и $\alpha'(a) \le x'(a) \le \beta'(a)$ следует

$$\begin{gathered}(x(a) = \alpha(a) \wedge x(b) = \alpha(b)) \vee (x'(a) = \beta'(a) \wedge \\ x(b) = \alpha(b)) \Rightarrow H_1 x \le h_1,\end{gathered} \tag{251}$$

$$\begin{gathered}(x(a) = \beta(a) \wedge x(b) = \beta(b)) \vee (x'(a) = \alpha'(a) \wedge \\ x(b) = \beta(b)) \Rightarrow H_1 x \ge h_1,\end{gathered} \tag{252}$$

$$H_2 x = h_2. \tag{253}$$

Тогда существует решение краевой задачи

$$x'' = f(t,x,x'), \quad H_1 x = h_1, \quad H_2 x = h_2, \quad \alpha \le x \le \beta,$$

$$\alpha'(a) \le x'(a) \le \beta'(a).$$

Доказательство. Используя лемму 18, найдем непрерывное отображение u. Из условий (242)-(244) и условий (251)-(252) следует $H_1 u_0 \le h_1$ и $H_1 u_1 \ge h_1$. Следовательно, найдется $\lambda \in [0,1]$ такое, что $H_1 u_\lambda = h_1$. Из условия (242) и условия (253) следует $H_2 u_\lambda = h_2$.

Лемма 19. Пусть $\alpha'(a) \le \beta'(a)$ и $\alpha'(b) > \beta(b)$. Тогда найдется непрерывное отображение

$$\begin{gathered}u \quad [0,1] \to \{x \in S(I,R) \quad \alpha \le x \le \beta \wedge \\ \alpha'(a) \le x'(a) \le \beta'(a) \wedge \beta'(b) \le x'(b) \le \alpha'(b)\}\end{gathered} \tag{254}$$

такое, что

$$u_0(b) = \alpha(b) \vee u_0'(b) = \beta'(b), \quad u_1(b) = \beta(b) \vee u_1'(b) = \alpha'(b). \tag{255}$$

Доказательство. Пусть y_1 максимальное решение краевой задачи

$$x'' = f(t,x,x'), \quad \alpha'(a) \le x'(a) \le \beta(a), \quad x(b) = \alpha(b), \quad \alpha \le x \le \beta.$$

Рассмотрим случай, когда краевая задача

$$\begin{gathered}x'' = f(t,x,x'), \quad y_1'(a) \le x'(a) \le \beta'(a), \\ x'(b) = \beta'(b), \quad y_1 \le x \le \beta\end{gathered} \tag{256}$$

не имеет решения. Тогда $x_0 = y_1$. Пусть z_1 минимальное решение краевой задачи

$$x'' = f(t,x,x'), \quad x_0'(a) \le x'(a) \le \beta(a), \quad x(b) = \beta(b), \quad x_0 \le x \le \beta. \tag{257}$$

Если краевая задача

$$\begin{gathered}x'' = f(t,x,x'), \quad x_0'(a) \le x'(a) \le z_1'(a), \\ x'(b) = \alpha'(b), \quad x_0 \le x \le z_1\end{gathered} \tag{258}$$

не имеет решения, то $x_1 = z_1$. Пусть

$$\begin{gathered}u_\lambda = s(x(a) = x_0(a) + \lambda(x_1(a) - x_0(a)) \wedge \\ x'(a) = x_0'(a) + \lambda(x_1'(a) - x_0'(a))), \quad \lambda \in [0,1].\end{gathered} \tag{259}$$

Ясно, что $u_0 = x_0$, $u_1 = x_1$ и справедливы условия (255). Из условий на x_0, x_1, (259) и отсутствия решений у краевых задач (256), (258) следует (254).

Если краевая задача (258) имеет решение, то пусть x_1 минимальное решение краевой задачи (258), а u определяется формулой (259). Ясно, что в этом случае для u справедливы условия (255). Из условий на x_0, x_1, (259) и отсутствия решений у краевой задачи (256) следует (254).

Рассмотрим случай, когда краевая задача (256) имеет решение. Пусть x_0 - максимальное решение краевой задачи (256), а z_1 минимальное решение краевой задачи (257).

Если краевая задача (258) не имеет решения, то $x_1 = z_1$, а u определяется формулой (259). Ясно, что в этом случае для u справедливы условия (255). Из условий на x_0, x_1, (259) и отсутствия решений у краевой задачи (258) следует (254).

Если краевая задача (258) имеет решение, то пусть x_1 минимальное решение краевой задачи (258) и u определяется формулой (259). Ясно, что в этом случае для u справедливы условия (255). Из условий на x_0, x_1 и (259) следует (254).

Теорема 9. Пусть $\alpha'(a) \le \beta'(a)$, $\alpha'(b) > \beta'(b)$ и для любого $x \in S(I,R)$ из $\alpha \le x \le \beta$, $\alpha'(a) \le x'(a) \le \beta'(a)$ и $\beta'(b) \le x'(b) \le \alpha'(b)$ следует

$$x(b) = \alpha(b) \vee x'(b) = \beta'(b)) \Rightarrow H_1x \le h_1, \tag{260}$$

$$x(b) = \beta(a) \vee x'(b) = \alpha'(b) \Rightarrow H_1x \ge h_1, \tag{261}$$

$$H_2x = h_2. \tag{262}$$

Тогда существует решение краевой задачи

$$x'' = f(t,x,x'), \quad H_1x = h_1, \quad H_2x = h_2, \quad \alpha \le x \le \beta,$$

$$\alpha'(a) \le x'(a) \le \beta'(a), \quad \alpha'(b) \ge x'(b) \ge \beta'(b).$$

Доказательство. Используя лемму 19, найдем непрерывное отображение u. Из условий (254)-(255) и условий (260)-(261) следует $H_1u_0 \le h_1$ и $H_1u_1 \ge h_1$. Следовательно, найдется $\lambda \in [0.1]$ такое, что $H_1u_\lambda = h_1$. Из условия (254) и условия (262) следует $H_2u_\lambda = h_2$.

Теорема 10. Пусть для любого $x \in S(I,R)$ из $\alpha \le x \le \beta$ следует справедливость одной из групп условий

$$x(a) = \alpha(a) \wedge x(b) = \alpha(b) \Rightarrow H_1x + H_2x \le h_1 + h_2, \tag{263.1}$$

$$(x(a) = \alpha(a) \vee x(b) = \beta(b) \wedge H_1x + H_2x = h_1 + h_2 \Rightarrow H_1x \le h_1, \tag{263.2}$$

$$x(a) = \beta(a) \wedge x(b) = \beta(b) \Rightarrow H_1x + H_2x \ge h_1 + h_2, \tag{263.3}$$

$$(x(a) = \beta(a) \vee x(b) = \alpha(b) \wedge H_1x + H_2x = h_1 + h_2 \Rightarrow H_1x \ge h_1; \tag{263.4}$$

$$x(a) = \alpha(a) \wedge x(b) = \alpha(b) \Rightarrow H_1x \le h_1 \vee H_2x \le h_2, \tag{264.1}$$

$$x(a) = \alpha(a) \wedge H_2x = h_2 \Rightarrow H_1x \le h_1, \tag{264.2}$$

$$x(a) = \alpha(a) \wedge x(b) = \beta(b) \Rightarrow H_1x \le h_1 \vee H_2x \ge h_2, \tag{264.3}$$

$$x(b) = \beta(b) \wedge H_1x = h_1 \Rightarrow H_2x \ge h_2, \tag{264.4}$$

$$x(a) = \beta(a) \wedge x(b) = \beta(b) \Rightarrow H_1 x \geq h_1 \vee H_2 x \geq h_2, \tag{264.5}$$

$$x(a) = \beta(a) \wedge H_2 x = h_2 \Rightarrow H_1 x \geq h_1, \tag{264.6}$$

$$x(a) = \beta(a) \wedge x(b) = \alpha(b) \Rightarrow H_1 x \geq h_1 \vee H_2 x \leq h_2, \tag{264.7}$$

$$x(b) = \alpha(b) \wedge H_1 x = h_1 \Rightarrow H_2 x \leq h_2; \tag{264.8}$$

$$\begin{gathered} x(a) = \alpha(a) \wedge x(b) = \alpha(b) \Rightarrow \\ H_1 x + H_2 x \leq h_1 + h_2 \vee H_1 x - H_2 x \geq h_1 - h_2, \end{gathered} \tag{265.1}$$

$$x(a) = \alpha(a) \wedge H_1 x - H_2 x = h_1 - h_2 \Rightarrow H_1 x \leq h_1, \tag{265.2}$$

$$\begin{gathered} x(a) = \alpha(a) \wedge x(b) = \beta(b) \Rightarrow \\ H_1 x + H_2 x \leq h_1 + h_2 \vee H_1 x - H_2 x \leq h_1 - h_2, \end{gathered} \tag{265.3}$$

$$x(b) = \beta(b) \wedge H_1 x + H_2 x = h_1 + h_2 \Rightarrow H_1 x \leq h_1, \tag{265.4}$$

$$\begin{gathered} x(a) = \beta(a) \wedge x(b) = \beta(b) \Rightarrow \\ H_1 x + H_2 x \geq h_1 + h_2 \vee H_1 x - H_2 x \leq h_1 - h_2, \end{gathered} \tag{265.5}$$

$$x(a) = \beta(a) \wedge H_1 x - H_2 x = h_1 - h_2 \Rightarrow H_1 x \geq h_1, \tag{265.6}$$

$$\begin{gathered} x(a) = \beta(a) \wedge x(b) = \alpha(b) \Rightarrow \\ H_1 x + H_2 x \geq h_1 + h_2 \vee H_1 x - H_2 x \geq h_1 - h_2, \end{gathered} \tag{265.7}$$

$$x(b) = \alpha(b) \wedge H_1 x + H_2 x = h_1 + h_2 \Rightarrow H_1 x \geq h_1. \tag{265.8}$$

Тогда существует решение краевой задачи

$$x'' = f(t, x, x'), \quad H_1 x = h_1, \quad H_2 x = h_2, \quad \alpha \leq x \leq \beta. \tag{266}$$

Доказательство. Пусть y максимальное решение краевой задачи

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x(a) = \alpha(a), \quad x(b) = \alpha(b), \quad \alpha \leq x \leq \beta,$$

а z минимальное решение краевой задачи

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x(a) = \beta(a), \quad x(b) = \beta(b), \quad y \leq x \leq \beta.$$

По лемме 13 существует отображение Φ. Если в некоторой точке $L_1 = \Psi\Phi(L)$ векторное поле

$$Hr = (H_1 \Psi^{-1}(r) - h_1, H_2 \Psi^{-1}(r) - h_2)$$

обращается в нуль, то теорема доказана. Пусть векторное поле H на L_1 не обращается в нуль. Покажем, что вращение векторного поля H на L_1 отлично от нуля, что завершит доказательство теоремы. Пусть

$$x_\varphi = \Phi((\cos\varphi, \sin\varphi)), \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Рассмотрим случай, когда справедливы условия (263). Из (263.1), (263.2) и (263.4) следует, что Hx_0 лежит ниже биссектрисы второго и четвертого квадрантов, из (263.2) и условий (193) следует, что Hx_φ при $\varphi \in (0, \pi)$ не сонаправлен с $(1, -1)$, из (263.2), (263.3) и (263.4) следует, что Hx_π лежит выше биссектрисы второго и четвертого квадрантов, из (263.4) и условий (194) следует, что Hx_φ при $\varphi \in (\pi, 2\pi)$ не сонаправлен с $(-1, 1)$. Отсюда следует отличие от нуля вращения векторного поля.

Рассмотрим случай, когда справедливы условия (264). Из (264.1), (264.2) и (264.8) следует, что Hx_0 не лежит в первом квадранте, из (264.2) и условия (193.1) следует, что Hx_φ при $\varphi \in (0, \varphi_1)$ не сонаправлен с $(1, 0)$, из (264.2), (264.3), (264.4) и условий (193.2), (193.4) следует, что Hx_{φ_1} и Hx_{φ_2} не лежат в четвертом квадранте, а из условия (193.3) следует, что при изменении φ от φ_1 до φ_2 Hx_φ не делает ни одного полного оборота, из (264.4) и условия (193.5) следует, что Hx_φ при $\varphi \in (\varphi_2, \pi)$ не сонаправлен с $(0, -1)$, из (264.4), (264.5) и (264.6) следует, что Hx_π не лежит в третьем квадранте, из (264.6) и условия (194.1) следует, что Hx_φ при $\varphi \in (\pi, \varphi_3)$ не сонаправлен с $(-1, 0)$, из (264.6), (264.7), (264.8) и условий (194.2), (194.4) следует, что Hx_{φ_3} и Hx_{φ_4} не лежат во втором квадранте, а из условия (194.3) следует, что при изменении φ от φ_3 до φ_4 Hx_φ не делает ни одного полного оборота, из (264.8) и условия (194.5) следует, что Hx_φ при $\varphi \in (\varphi_4, 2\pi)$ не сонаправлен с $(0, 1)$. Отсюда следует отличие от нуля вращения векторного поля.

Случай, когда справедливы условия (265), рассматривается аналогично. При этом геометрически условия отличия от нуля вращения векторного поля отличаются от случая, когда справедливы условия (264), поворотом на $\pi/4$.

Теорема 11. Пусть $\alpha'(a) > \beta'(a)$ и для любого $x \in S(I, R)$ из $\alpha \le x \le \beta$ и $\beta'(a) \le x'(a) \le \alpha'(a)$ следует справедливость одной из групп условий

$$\begin{gathered}
x'(a) = \alpha'(a) \wedge x(b) = \alpha(b) \Rightarrow H_1x + H_2x \le h_1 + h_2, \\
(x'(a) = \alpha'(a) \vee x(b) = \beta(b) \wedge H_1x + H_2x = h_1 + h_2 \Rightarrow H_1x \le h_1, \\
x'(a) = \beta'(a) \wedge x(b) = \beta(b) \Rightarrow H_1x + H_2x \ge h_1 + h_2, \\
(x'(a) = \beta'(a) \vee x(b) = \alpha(b) \wedge H_1x + H_2x = h_1 + h_2 \Rightarrow H_1x \ge h_1;
\end{gathered} \tag{267}$$

$$\begin{gathered}
x'(a) = \alpha'(a) \wedge x(b) = \alpha(b) \Rightarrow H_1x \le h_1 \vee H_2x \le h_2, \\
x'(a) = \alpha'(a) \wedge H_2x = h_2 \Rightarrow H_1x \le h_1, \\
x'(a) = \alpha'(a) \wedge x(b) = \beta(b) \Rightarrow H_1x \le h_1 \vee H_2x \ge h_2, \\
x(b) = \beta(b) \wedge H_1x = h_1 \Rightarrow H_2x \ge h_2, \\
x'(a) = \beta'(a) \wedge x(b) = \beta(b) \Rightarrow H_1x \ge h_1 \vee H_2x \ge h_2, \\
x'(a) = \beta'(a) \wedge H_2x = h_2 \Rightarrow H_1x \ge h_1, \\
x'(a) = \beta'(a) \wedge x(b) = \alpha(b) \Rightarrow H_1x \ge h_1 \vee H_2x \le h_2, \\
x(b) = \alpha(b) \wedge H_1x = h_1 \Rightarrow H_2x \le h_2;
\end{gathered} \tag{268}$$

$$\begin{gathered}
x'(a) = \alpha'(a) \wedge x(b) = \alpha(b) \Rightarrow \\
H_1x + H_2x \le h_1 + h_2 \vee H_1x - H_2x \ge h_1 - h_2, \\
x'(a) = \alpha'(a) \wedge H_1x - H_2x = h_1 - h_2 \Rightarrow H_1x \le h_1, \\
x'(a) = \alpha'(a) \wedge x(b) = \beta(b) \Rightarrow \\
H_1x + H_2x \le h_1 + h_2 \vee H_1x - H_2x \le h_1 - h_2, \\
x(b) = \beta(b) \wedge H_1x + H_2x = h_1 + h_2 \Rightarrow H_1x \le h_1, \\
x'(a) = \beta'(a) \wedge x(b) = \beta(b) \Rightarrow \\
H_1x + H_2x \ge h_1 + h_2 \vee H_1x - H_2x \le h_1 - h_2, \\
x'(a) = \beta'(a) \wedge H_1x - H_2x = h_1 - h_2 \Rightarrow H_1x \ge h_1, \\
x'(a) = \beta'(a) \wedge x(b) = \alpha(b) \Rightarrow \\
H_1x + H_2x \ge h_1 + h_2 \vee H_1x - H_2x \ge h_1 - h_2, \\
x(b) = \alpha(b) \wedge H_1x + H_2x = h_1 + h_2 \Rightarrow H_1x \ge h_1.
\end{gathered} \tag{269}$$

Тогда существует решение краевой задачи

$$x'' = f(t,x,x'), \quad H_1x = h_1, \quad H_2x = h_2,$$
$$\alpha \le x \le \beta, \quad \beta'(a) \le x'(a) \le \alpha'(a).$$

Доказательство. Пусть y максимальное решение краевой задачи

$$x'' = f(t,x,x'), \quad x'(a) = \alpha'(a), \quad x(b) = \alpha(b), \quad \alpha \le x \le \beta,$$

а z минимальное решение краевой задачи

$$x'' = f(t,x,x'), \quad x'(a) = \beta'(a), \quad x(b) = \beta(b), \quad y \le x \le \beta.$$

По лемме 14 существует отображение Φ. Дальнейшее доказательство аналогично доказательству теоремы 10.

Теорема 12. Пусть $\alpha'(a) > \beta'(a)$, $\alpha'(b) < \beta'(b)$ и для любого $x \in S(I,R)$ из $\alpha \le x \le \beta$ и $\beta'(a) \le x'(a) \le \alpha'(a)$ и $\alpha'(b) \le x'(b) \le \beta'(b)$ следует справедливость одной из групп условий

$$\begin{gathered}
x'(a) = \alpha'(a) \wedge x'(b) = \alpha'(b) \Rightarrow H_1x + H_2x \le h_1 + h_2, \\
(x'(a) = \alpha'(a) \vee x'(b) = \beta'(b) \wedge \\
H_1x + H_2x = h_1 + h_2 \Rightarrow H_1x \le h_1, \\
x'(a) = \beta'(a) \wedge x'(b) = \beta'(b) \Rightarrow H_1x + H_2x \ge h_1 + h_2, \\
(x'(a) = \beta'(a) \vee x'(b) = \alpha'(b) \wedge \\
H_1x + H_2x = h_1 + h_2 \Rightarrow H_1x \ge h_1;
\end{gathered} \tag{270}$$

$$\begin{gathered}
x'(a) = \alpha'(a) \wedge x'(b) = \alpha'(b) \Rightarrow H_1x \le h_1 \vee H_2x \le h_2, \\
x'(a) = \alpha'(a) \wedge H_2x = h_2 \Rightarrow H_1x \le h_1, \\
x'(a) = \alpha'(a) \wedge x'(b) = \beta'(b) \Rightarrow H_1x \le h_1 \vee H_2x \ge h_2, \\
x'(b) = \beta'(b) \wedge H_1x = h_1 \Rightarrow H_2x \ge h_2, \\
x'(a) = \beta'(a) \wedge x'(b) = \beta'(b) \Rightarrow H_1x \ge h_1 \vee H_2x \ge h_2, \\
x'(a) = \beta'(a) \wedge H_2x = h_2 \Rightarrow H_1x \ge h_1, \\
x'(a) = \beta'(a) \wedge x'(b) = \alpha'(b) \Rightarrow H_1x \ge h_1 \vee H_2x \le h_2, \\
x'(b) = \alpha'(b) \wedge H_1x = h_1 \Rightarrow H_2x \le h_2;
\end{gathered} \tag{271}$$

$$\begin{gathered}
x'(a) = \alpha'(a) \wedge x'(b) = \alpha'(b) \Rightarrow \\
H_1x + H_2x \le h_1 + h_2 \vee H_1x - H_2x \ge h_1 - h_2, \\
x'(a) = \alpha'(a) \wedge H_1x - H_2x = h_1 - h_2 \Rightarrow H_1x \le h_1, \\
x'(a) = \alpha'(a) \wedge x'(b) = \beta'(b) \Rightarrow \\
H_1x + H_2x \le h_1 + h_2 \vee H_1x - H_2x \le h_1 - h_2, \\
x'(b) = \beta'(b) \wedge H_1x + H_2x = h_1 + h_2 \Rightarrow H_1x \le h_1, \\
x'(a) = \beta'(a) \wedge x'(b) = \beta'(b) \Rightarrow \\
H_1x + H_2x \ge h_1 + h_2 \vee H_1x - H_2x \le h_1 - h_2, \\
x'(a) = \beta'(a) \wedge H_1x - H_2x = h_1 - h_2 \Rightarrow H_1x \ge h_1, \\
x'(a) = \beta'(a) \wedge x'(b) = \alpha'(b) \Rightarrow \\
H_1x + H_2x \ge h_1 + h_2 \vee H_1x - H_2x \ge h_1 - h_2, \\
x'(b) = \alpha'(b) \wedge H_1x + H_2x = h_1 + h_2 \Rightarrow H_1x \ge h_1.
\end{gathered} \tag{272}$$

Тогда существует решение краевой задачи

$$x'' = f(t,x,x'), \quad H_1x = h_1, \quad H_2x = h_2, \quad \alpha \le x \le \beta,$$

$$\beta'(a) \le x'(a) \le \alpha'(a), \quad \alpha'(b) \le x'(b) \le \beta'(b).$$

Доказательство. Пусть y максимальное решение краевой задачи

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x'(a) = \alpha'(a), \quad x'(b) = \alpha'(b), \quad \alpha \le x \le \beta,$$

а z минимальное решение краевой задачи

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x'(a) = \beta'(a), \quad x'(b) = \beta'(b), \quad y \le x \le \beta.$$

По лемме 15 существует отображение Φ. Дальнейшее доказательство аналогично доказательству теоремы 10.

Теорема 13. Пусть $\alpha'(a) < \beta'(a)$, краевые задачи

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x'(a) = \beta'(a), \quad x(b) = \alpha(b), \quad \alpha \le x \le \beta,$$

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x'(a) = \alpha'(a), \quad x(b) = \beta(b), \quad \alpha \le x \le \beta$$

не имеют решения и для любого $x \in S(I, R)$ из $\alpha \le x \le \beta$ и $\alpha'(a) \le x'(a) \le \beta'(a)$ следует справедливость одной из групп условий

$$x(a) = \alpha(a) \wedge x(b) = \alpha(b) \Rightarrow H_1x + H_2x \le h_1 + h_2, \tag{273.1}$$

$$\begin{gathered}(x(a) = \alpha(a) \vee x'(a) = \beta'(a) \vee x(b) = \beta(b)) \wedge \\ H_1x + H_2x = h_1 + h_2 \Rightarrow H_1x \le h_1,\end{gathered} \tag{273.2}$$

$$x(a) = \beta(a) \wedge x(b) = \beta(b) \Rightarrow H_1x + H_2x \ge h_1 + h_2, \tag{273.3}$$

$$\begin{gathered}(x(a) = \beta(a) \vee x'(a) = \alpha'(a) \vee x(b) = \alpha(b)) \wedge \\ H_1x + H_2x = h_1 + h_2 \Rightarrow H_1x \ge h_1;\end{gathered} \tag{273.4}$$

$$x(a) = \alpha(a) \wedge x(b) = \alpha(b) \Rightarrow H_1x \le h_1 \vee H_2x \le h_2, \tag{274.1}$$

$$x(a) = \alpha(a) \wedge H_2x = h_2 \Rightarrow H_1x \le h_1, \tag{274.2}$$

$$x(a) = \alpha(a) \wedge (x'(a) = \beta'(a) \vee x(b) = \beta(b)) \Rightarrow H_1x \le h_1 \vee H_2x \ge h_2, \tag{274.3}$$

$$(x'(a) = \beta'(a) \vee x(b) = \beta(b)) \wedge H_1x = h_1 \Rightarrow H_2x \ge h_2, \tag{274.4}$$

$$x(a) = \beta(a) \wedge x(b) = \beta(b) \Rightarrow H_1x \ge h_1 \vee H_2x \ge h_2, \tag{274.5}$$

$$x(a) = \beta(a) \wedge H_2x = h_2 \Rightarrow H_1x \ge h_1, \tag{274.6}$$

$$x(a) = \beta(a) \wedge (x'(a) = \alpha'(a) \vee x(b) = \alpha(b)) \Rightarrow H_1x \ge h_1 \vee H_2x \le h_2, \tag{274.7}$$

$$(x'(a) = \alpha'(a) \vee x(b) = \alpha(b)) \wedge H_1x = h_1 \Rightarrow H_2x \le h_2; \tag{274.8}$$

$$\begin{gathered}x(a) = \alpha(a) \wedge x(b) = \alpha(b) \Rightarrow \\ H_1x + H_2x \le h_1 + h_2 \vee H_1x - H_2x \ge h_1 - h_2,\end{gathered} \tag{275.1}$$

$$x(a) = \alpha(a) \wedge H_1x - H_2x = h_1 - h_2 \Rightarrow H_1x \le h_1, \tag{275.2}$$

$$\begin{gathered}x(a) = \alpha(a) \wedge (x'(a) = \beta'(a) \vee x(b) = \beta(b)) \Rightarrow \\ H_1x + H_2x \le h_1 + h_2 \vee H_1x - H_2x \le h_1 - h_2,\end{gathered} \tag{275.3}$$

$$(x'(a) = \beta'(a) \vee x(b) = \beta(b)) \wedge H_1x + H_2x = h_1 + h_2 \Rightarrow H_1x \le h_1, \tag{275.4}$$

$$\begin{gathered} x(a) = \beta(a) \wedge x(b) = \beta(b) \Rightarrow \\ H_1 x + H_2 x \geq h_1 + h_2 \vee H_1 x - H_2 x \leq h_1 - h_2, \end{gathered} \tag{275.5}$$

$$x(a) = \beta(a) \wedge H_1 x - H_2 x = h_1 - h_2 \Rightarrow H_1 x \geq h_1, \tag{275.6}$$

$$\begin{gathered} x(a) = \beta(a) \wedge (x'(a) = \alpha'(a) \vee x(b) = \alpha(b)) \Rightarrow \\ H_1 x + H_2 x \geq h_1 + h_2 \vee H_1 x - H_2 x \geq h_1 - h_2, \end{gathered} \tag{275.7}$$

$$(x'(a) = \alpha'(a) \vee x(b) = \alpha(b)) \wedge H_1 x + H_2 x = h_1 + h_2 \Rightarrow H_1 x \geq h_1. \tag{275.8}$$

Тогда существует решение краевой задачи

$$\begin{gathered} x'' = f(t, x, x'), \quad H_1 x = h_1, \quad H_2 x = h_2, \\ \alpha \leq x \leq \beta, \quad \alpha'(a) \leq x'(a) \leq \beta'(a). \end{gathered}$$

Доказательство. Пусть y максимальное решение краевой задачи

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x(a) = \alpha(a), \quad x(b) = \alpha(b), \quad \alpha \leq x \leq \beta,$$

а z минимальное решение краевой задачи

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x(a) = \beta(a), \quad x(b) = \beta(b), \quad y \leq x \leq \beta.$$

По лемме 16 при $x'_\alpha = \alpha'(a)$ и $x'_\beta = \beta'(a)$ существует отображение Φ. Если в некоторой точке $L_1 = \Psi\Phi(L)$ векторное поле

$$Hr = (H_1 \Psi^{-1}(r) - h_1, H_2 \Psi^{-1}(r) - h_2)$$

обращается в нуль, то теорема доказана. Пусть векторное поле H на L_1 не обращается в нуль. Покажем, что вращение векторного поля H на L_1 отлично от нуля, что завершит доказательство теоремы. Пусть

$$x_\varphi = \Phi((\cos\varphi, \sin\varphi)), \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Рассмотрим случай, когда справедливы условия (273). Из (273.1), (273.2) и (273.4) следует, что Hx_0 лежит ниже биссектрисы второго и четвертого квадрантов, из (273.2) и условий (212)-(215) следует, что Hx_φ при $\varphi \in (0, \pi)$ не сонаправлен с $(1, -1)$, из (273.2), (273.3) и (273.4) следует, что Hx_π лежит выше биссектрисы второго и четвертого квадрантов, из (273.4) и условий (216)-(219) следует, что Hx_φ при $\varphi \in (\pi, 2\pi)$ не сонаправлен с $(-1, 1)$. Отсюда следует отличие от нуля вращения векторного поля.

Рассмотрим случай, когда справедливы условия (274). Из (274.1), (274.2) и (274.8) следует, что Hx_0 не лежит в первом квадранте, из (274.4)-(274.6) следует, что Hx_π не лежит в третьем квадранте. Рассмотрим случай, когда выполняются условия (212). Из (274.2) и условия (212.1) следует, что Hx_φ при $\varphi \in (0, \varphi_3)$ не сонаправлен с $(1, 0)$, из (274.2)-(274.4) и условия (212.2) следует, что Hx_{φ_3} не лежит в четвертом квадранте, из (274.4) и условий (212.3)-(212.7) следует, что Hx_φ при $\varphi \in (\varphi_3, \pi)$ не сонаправлен с $(0, -1)$. Рассмотрим случай, когда выполняются условия (213). Из (274.2) и условия (213.1) следует, что Hx_φ при $\varphi \in (0, \varphi_1)$ не сонаправлен с $(1, 0)$, из (274.2)-(274.4) и условий (213.2), (213.4) следует, что Hx_{φ_1} и Hx_{φ_2} не лежат в четвертом квадранте, а из условия (213.3) следует, что при изменении φ от φ_1 до φ_2 вектор Hx_φ не делает ни одного полного оборота, из (274.4) и условия (213.5) следует, что Hx_φ при $\varphi \in (\varphi_2, \pi)$ не сонаправлен с $(0, -1)$. Рассмотрим случай, когда выполняются условия (214). Из (274.2) и условия (214.1) следует, что Hx_φ при $\varphi \in (0, \varphi_1)$ не сонаправлен с $(1, 0)$, из (274.2)-(274.4) и условий (214.2), (214.4) следует, что Hx_{φ_1} и Hx_{φ_2} не лежат в четвертом квадранте, а из условия (214.3) следует, что при изменении φ от φ_1 до φ_2 вектор Hx_φ не делает ни одного полного оборота, из (274.4) и условий (214.5)-(214.9) следует, что Hx_φ при $\varphi \in (\varphi_2, \pi)$ не сонаправлен с $(0, -1)$. Рассмотрим случай, когда выполняются условия (215). Из (274.2) и условия (215.1) следует, что Hx_φ при $\varphi \in (0, \varphi_1)$ не сонаправлен с $(1, 0)$, из (274.2)-(274.4) и условий (215.2), (215.4) и (215.6) следует, что Hx_{φ_1}, Hx_{φ_2} и Hx_{φ_3} не лежат в четвертом квадранте, а из условия (215.3), (215.5) следует, что при изменении φ от φ_1 до φ_3 вектор Hx_φ не делает ни одного полного оборота, из (274.4) и условий (215.7)-(215.11) следует, что Hx_φ при $\varphi \in (\varphi_3, \pi)$ не сонаправлен с $(0, -1)$. Аналогично рассматривая случаи, когда выполняется одно из условий (216)-(219), получаем отличие от нуля вращения векторного поля.

Случай, когда справедливы условия (275), рассматривается аналогично.

Замечание 4. Если вектор $(H_1x - h_1, H_2x - h_2)$ не сонаправлен с вектором $(\cos\gamma, \sin\gamma)$, то

$$(H_1x - h_1)\sin\gamma - (H_2x - h_2)\cos\gamma = 0 \Rightarrow$$

$$(H_1x - h_1) sign \cos\gamma \le 0 \wedge (H_2x - h_2) sign \sin\gamma \le 0.$$

Если имеются два вектора $(\cos\gamma_1, \sin\gamma_1)$, $(\cos\gamma_2, \sin\gamma_2)$ и $0 < \gamma_1 - \gamma_2 < \pi$, то два угла, определяемые этими векторами, задаются условиями

$$((H_1x - h_1)\sin\gamma_1 - (H_2x - h_2)\cos\gamma_1) sign \sin(\gamma_1 - \gamma_2) \le 0 \vee$$

$$((H_1x - h_1)\sin\gamma_2 - (H_2x - h_2)\cos\gamma_2) sign \sin(\gamma_2 - \gamma_1) \le 0,$$

$$((H_1x - h_1)\sin\gamma_1 - (H_2x - h_2)\cos\gamma_1) sign \sin(\gamma_1 - \gamma_2) \ge 0 \wedge$$

$$((H_1x - h_1)\sin\gamma_2 - (H_2x - h_2)\cos\gamma_2) sign \sin(\gamma_2 - \gamma_1) \le 0.$$

Если $\gamma_1 - \gamma_2 = \pi$, то полуплоскости задаются условиями

$$(H_1x - h_1)\sin\gamma_1 - (H_2x - h_2)\cos\gamma_1 \ge 0,$$

$$(H_1x - h_1)\sin\gamma_1 - (H_2x - h_2)\cos\gamma_1 \le 0.$$

Выбирая два вектора и выписывая соответствующие условия, можно получить обобщение условий (263), (267), (270) и (273), а выбирая четыре вектора и выписывая соответствующие условия, можно получить обобщение условий (264), (265), (268), (269), (271), (272), (274) и (275).

Список литературы

[1] Лепин А.Я., Лепин Л.А. Краевые задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. - Рига: Зинатне, 1988. - 211 с.

[2] Лепина Э.И. О максимальных решениях краевых задач для уравнения второго порядка // Актуальные вопросы краевых задач. Теория и приложения. Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1988. С.131-139.

A.Lepin, L. Lepin. Solvability of Boundary Value Problems between Upper and Lower Functions

Summary. Conditions for existing of solution of boundary value problem

$$x'' = f(t, x, x'), \quad H_1 x = h_1, \quad H_2 x = h_2, \quad \alpha \le x \le \beta$$

are investigated.

1991 MSC 34B15

A.Lepins, L.Lepins. Robežproblēmu atrisināmība starp augšējo un apakšējo funkciju

Anotācija. Robežproblēmai

$$x'' = f(t, x, x'), \quad H_1 x = h_1, \quad H_2 x = h_2, \quad \alpha \le x \le \beta$$

ir pētīti nosacījumi, kuri nodrošina atrisinājuma eksistenci.

Институт математики и информатики
Латвийского университета
Рига, б. Райниса, 29

Поступила 18.09.98

О построении верхних и нижних функций для системы дифференциальных уравнений первого порядка

В.Д.Пономарев

Аннотация. Приводятся достаточные условия существования нижних и верхних функций для системы дифференциальных уравнений первого порядка.
Библ. 3.

УДК 517.927

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} x' = h(t,x,y), \\ y' = f(t,x,y), \end{cases} \tag{1}$$

где функции $h, f \in Car(I \times R^2, R)$ удовлетворяют условиям Каратеодори, $-\infty < a < b < \infty$, $I = [a,b]$.

Введем необходимое определение.

Определение. Пару абсолютно непрерывных на I функций (α, λ) и (β, μ) будем называть соответственно нижней и верхней функциями системы (1), если выполняются условия:

1) $\alpha(t) \leq \beta(t)$ на I,
2) $\alpha'(t) = h(t, \alpha(t), \lambda(t))$, $\lambda'(t) \geq f(t, \alpha(t), \lambda(t))$ почти для всех $t \in I$,
3) $\beta'(t) = h(t, \beta(t), \mu(t))$, $\mu'(t) \leq f(t, \beta(t), \mu(t))$ почти для всех $t \in I$.

Нижние и верхние функции существенно используются при доказательстве необходимых и достаточных условий разрешимости различных краевых задач для системы двух дифференциальных уравнений первого порядка (см., например, [1]-[3]).

В настоящей работе приводятся эффективно проверяемые условия, при которых существуют нижние и верхние функции для системы дифференциальных уравнений (1).

Теорема 1 *Пусть $m \in (0, \infty)$, $r \in [0, m)$, $k \in (m - r)(b - a)^{-1}$, $n \in [0, k)$, $\varepsilon \in (0,1)$ и существуют функции $\varphi_i, \psi_i \in C(R, R)$, $i = 1, 2$, такие, что выполняются условия:*

1) для любых $x \in [0,\infty)$ *и* $i \in \{1,2\}$, $\varphi_i(x) = \varphi_i(-x)$, $\psi_i(x) = \psi_(- x)$, $\varphi_1(x) > 0$, $\varphi_2(x) \geq 0$, $\psi_1(x) \geq 0$, $\psi_2(x) > 0$;

2) выполняется по крайней мере одно из условий:

$h(t,x,y) \geq \varphi_1(x)\psi_1(y)$, *где* $(t,x,y) \in I \times [-m-\varepsilon,-r] \times [n,k]$

или

$h(t,x,y) \leq -\varphi_1(x)\psi_1(y)$, *где* $(t,x,y) \in I \times [-m,-r+\varepsilon] \times [-k,-n]$;

3) выполняется по крайней мере одно из условий:

$h(t,x,y) \geq \varphi_1(x)\psi_1(y)$, *где* $(t,x,y) \in I \times [r-\varepsilon,m] \times [n,k]$

или

$h(t,x,y) \leq -\varphi_1(x)\psi_1(y)$, *где* $(t,x,y) \in I \times [r,m+\varepsilon] \times [-k,-n]$;

4) $h(t,x,y) \leq k$, *где* $(t,x,y) \in I \times ([-m,-r] \cup [r,m]) \times [n,k]$, $h(t,x,y) \geq -k$, *где* $(t,x,y) \in I \times ([-m,-r] \cup [r,m] \times [-k,-n]$;

5) $f(t,x,y) \leq \varphi_2(x)\psi_2(y)$, *где* $(t,x,y) \in I \times [-m,-r] \times ([-k,-n] \cup [k,n])$, $f(t,x,y) \geq -\varphi_2(x)\psi_2(y)$, *где* $(t,x,y) \in I \times [r,m] \times ([-k,-n] \cup [k,n])$;

6) $\int_n^k \frac{\psi_1(s)}{\psi_2(s)}ds > \int_r^m \frac{\varphi_2(s)}{\varphi_1(s)}ds$.

Тогда существуют нижние и верхние функции системы (1).

Доказательство. Построим нижние и верхние функции (α,λ) и (β,μ), когда выполняется условие

$$h(t,x,y) \geq \varphi_1(x)\psi_1(y), \text{ где } (t,x,y) \in I \times ([-m,-r] \cup [r,m]) \times [n,k].$$

Остальные возможные случаи разбираются аналогично. Определяя (α,λ) как решение следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} x' = h(t,x,y), \\ y' = \varphi_2(x)\psi_2(y), \end{cases}$$

$$x(a) = -m, \quad y(a) = n,$$

а (β,μ) как решение следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} x' = h(t,x,y), \\ y' = -\varphi_2(x)\psi_2(y), \end{cases}$$

$$x(a) = r, \quad y(a) = k,$$

покажем, что для любого $t \in I$ $(t,\alpha(t),\lambda(t)) \in G_1$ и $(t,\beta(t),\mu(t)) \in G_2$, где

$$G_1 = \{(t,x,y) \quad t \in I, x \in [-m,-r], y \in [n,k]\},$$

$$G_2 = \{(t,x,y) \quad t \in I, x \in [r,m], y \in [n,k]\}.$$

Ограничимся только тем, что покажем, что $(t,\alpha(t),\lambda(t)) \in G_1$ для любого $t \in I$.

Действительно, пусть $[a,t_0]$ максимальный интервал, на котором $n \leq \lambda(t) \leq k$. Тогда $0 \leq \alpha'(t) \leq k$ почти для всех $t \in [\alpha,t_0]$. Если $t_0 = b$, то все доказано. Пусть $t_0 \in (a,b)$. Случай $\lambda(t) = n$ для всех $t \in [a,t_0]$ не может быть в силу максимальности интервала $[a,t_0]$. Следовательно, $\lambda(t_0) = k$. Тогда имеем

$$h(t,\alpha(t),\lambda(t))\lambda'(t) = \varphi_2(\alpha(t))\psi_2(\lambda(t))\alpha'(t).$$

Откуда

$$\int_{\lambda(a)}^{\lambda(t_0)} \frac{\psi_1(\lambda(t))}{\psi_2(\lambda(t))} d\lambda(t) \le \int_{\alpha(a)}^{\alpha(t_0)} \frac{\varphi_2(\alpha(t))}{\varphi_1(\alpha(t))} d\alpha(t)$$

или

$$\int_n^k \frac{\psi_1(s)}{\psi_2(s)} ds \le \int_{-m}^{-r} \frac{\varphi_2(s)}{\varphi_1(s)} ds,$$

что противоречит условию 6 и доказывает теорему.

Теорема 2 *Пусть $r \in [0, +\infty)$ и существуют функции $p_i \in L(I)$, $\varphi_i \in C(-\infty, +\infty)$, $i = 1, 2$ такие, что выполняются условия:*

1) для любых $x \in [0, +\infty)$ и $i \in \{1, 2\}$, $\varphi_i(x) > 0$, $\varphi_i(x) = \varphi_i(-x)$ и почти для всех $t \in I$ $p_i(t) \ge 0$;

2) $\int_r^{+\infty} \varphi_1^{-1}(s)ds > 2\int_a^b p_1(s)ds$, $\int_r^{+\infty} \varphi_2^{-1}(s)ds > 2\int_a^b p_2(s)ds$;

3) $|\ h(t, x, y)\ | \le p_1(t)\varphi_1(x)$, где $(t, x, y) \in I \times (R\backslash(-r, r)) \times [r, m]$ или $(t, x, y) \in I \times (R\backslash(-r, r)) \times [-m, -r]$, где $m \in [r, +\infty)$ определяется из уравнения

$$\int_r^m \varphi_2^{-1}(s)ds = \int_a^b p_2(s)ds;$$

4) $f(t, x, y) \le p_2(t)\varphi_2(y)$, где $(t, x, y) \in I \times (-\infty, -r] \times ([-m, -r] \cup [r, m])$,
$f(t, x, y) \ge -p_2(t)\varphi_2(y)$, где $(t, x, y) \in I \times [r, +\infty) \times ([-m, -r] \cup [r, m])$.

Тогда существуют нижние и верхние функции системы (1).

Доказательство. Построим (α, λ) и (β, μ) для случая, когда выполняются условия 3 для $(t, x, y) \in I \times (R\backslash(-r, r)) \times [r, m]$.

Для остальных возможных случаев построение проходит аналогично.

Из условия 2 следует, что найдется $n \in (r, +\infty)$ такое, что

$$\int_r^n \varphi_1^{-1}(s)ds > \int_a^b p_1(s)ds, \quad \int_n^{+\infty} \varphi_1^{-1}(s)ds > \int_a^b p_1(s)ds. \tag{2}$$

Определим (α, λ) как решение следующей задачи Коши:

$$x' = h(t, x, y), \quad y' = p_2(t)\varphi_2(y),$$

$$x(a) = -n, \quad y(a) = r,$$

а (β, μ) как решение следующей задачи Коши:

$$x' = h(t, x, y), \quad y' = -p_2(t)\varphi_2(y),$$

$$x(a) = n, \quad y(a) = m.$$

Покажем, что решения (α, λ) и (β, μ) продолжимы на весь интервал I и $\alpha(t) \le \beta(t)$ для всех $t \in I$. Проверим, например, что решения (α, λ) продолжимо на весь интервал I Действительно, в силу определения числа m следует, что $r \le \lambda(t) \le m$ для всех $t \in I$, а существование функции $\alpha(t)$ на всем I вытекает из условия 3 и (2). Из (2) также следует, что $\alpha(t) < -r$ и $\beta(t) > r$ для всех $t \in I$. Теорема доказана.

Список литературы

[1] Васильев Н.И. Необходимые и достаточные условия существования некоторых краевых задач для системы двух дифференциальных уравнений первого порядка // Латв.мат.ежегодник. 1970, Вып.8. С.18-24.

[2] Гудков В.В., Клоков Ю.А., Лепин А.Я., Пономарев В.Д. Двухточечные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Рига: Зинатне, 1973. 136 с.

[3] Гудков В.В., Пономарев В.Д. Необходимые и достаточные условия разрешимости краевых задач для системы двух дифференциальных уравнений первого порядка // Латв.мат.ежегодник. 1973, Вып.12. С.51-77.

V.Ponomarev. On construction of upper and lower functions for a system of the first order differential equations

Summary. Sufficient conditions are given for the existence of lower and upper functions for the first order differential system.

1991 MSC 34B99

V.Ponomarjovs. Par apakšējo un augšējo funkciju konstruēšanu pirmās kārtas diferenciālvienādojumu sistēmai

Anotācija. Doti apakšējo un augšējo funkciju eksistences pietiekamie nosacījumi pirmās kārtas diferenciālvienādojumu sistēmai.

Институт математики и информатики
Латвийского университета
Рига, б. Райниса, 29

Поступила 05.03.98

О существовании решения трехточечной краевой задачи

В.Д.Пономарев

Аннотация. Доказана разрешимость краевой задачи

$$x''' = f(t, x, x', x''),$$

$$x(t_1) = c_1, \quad x(t_2) = c_2, \quad x(t_3) = c_3.$$

Библ. 7.

УДК 517.927

Рассмотрим краевую задачу

$$x''' = f(t, x, x', x''), \tag{1}$$

$$x(t_1) = c_1, \quad x(t_2) = c_2, \quad x(t_3) = c_3, \tag{2}$$

где $f \quad [t_1, t_3] \times R^3 \to R$ удовлетворяет условиям Каратеодори, $t_i, c_i \in R$, $i = 1, 2, 3$ и $t_1 < t_2 < t_3$.

В работе будет приведена теорема, относящаяся к проблеме "Из единственности следует существование решения" Подобный вопрос рассматривался также в работах [1]-[7].

Наряду с задачей (1), (2) рассмотрим уравнение (1) с краевыми условиями

$$x(t_1) = c_1, \quad x(t_2) = c_2, \quad x'(t_2) = p, \tag{3}$$

$$x(t_1) = c_1, \quad x(t_2) = c_2, \quad x''(t_2) = q, \tag{4}$$

$$x(t_2) = c_2, \quad x'(t_2) = p, \quad x(t_3) = c_3, \tag{5}$$

$$x(t_2) = c_2, \quad x''(t_2) = q, \quad x(t_3) = c_3, \tag{6}$$

где $p, q \in R$.

Для формулировки теоремы нам потребуются следующие обозначения.

Пусть $I, J \subseteq R$ непустые связные множества. Обозначим через S_1, S_2 множества решений уравнения (1) на интервалах $[t_1, t_2]$, $[t_2, t_3]$. Положим

$$S_1(t_2) = \{x'(t_2) : x \in S, x(t_1) = c_1, x(t_2) = c_2, (\exists q \in I)(x''(t_2) = q)\},$$

$$S_2(t_2) = \{x''(t_2) \quad x \in S, x(t_1) = c_1, x(t_2) = c_2, \ (\exists p \in J)(x'(t_2) = p)\},$$
$$S_3(t_2) = \{x'(t_2) \quad x \in S, x(t_2) = c_2, x(t_3) = c_3, \ (\exists q \in I)(x''(t_2) = q)\},$$
$$S_4(t_2) = \{x''(t_2) \quad x \in S, x(t_2) = c_2, x(t_3) = c_3, \ (\exists p \in J)(x'(t_2) = p)\}.$$

Теорема 1 *Пусть выполняются условия:*

1) для любых $q \in I$ и $p \in J$ существуют решения задач (1), (3) (1), (6);

2) $S_1(t_2), S_3(t_2) \subseteq J$, $S_2(t_2), S_4(t_2) \subseteq I$;

3) для любого $q \in I$ и любых $s_1 \in (t_1, t_2]$, $s_2 \in [t_2, t_3)$ существует не более одного решения краевых задач для уравнения (1) с краевыми условиями

$$x(t_1) = c_1, \quad x''(s_1) = q, \quad x(t_2) = c_2,$$

$$x(t_2) = c_2, \quad x''(s_2) = q, \quad x(t_3) = c_3.$$

Тогда существует единственное решение краевой задачи (1), (2).

Доказательство. Обозначим через $x_1(t, q)$ решение задачи (1), (4). Функция $(t, q) \to x_1(t, q)$ однозначно определена на $[t_1, t_2] \times I$ согласно условиям 1 и 3 теоремы. Покажем, что функция $g \to x_1'(t_2, q)$ строго возрастающая на I. Предварительно отметим, что из краевых условий (4) следует что, если $q_1 < q_2$, то

$$x_1''(t_2, q_1) < x_1''(t_2, q_2). \tag{7}$$

Докажем, что $x_1''(t, q_1) < x_1''(t, q_2)$ на $(t_1, t_2]$. Предполагая противное, получаем, что существует $s_0 \in (t_1, t_2)$ такое, что $x_1''(s_0, q_1) \quad x_1''(s_0, q_2)$. Отсюда и из (7) следует, что $x_1''(s_1, q_1) = x_1''(s_1, q_2)$. Поэтому получили противоречие с условием 3 теоремы.

Из краевых условий (4) имеем $x_1(t_1, q_1) = x_1(t_1, q_2)$ и $x_1(t_2, q_2) = x_1(t_2, q_2)$. Следовательно, для $z(t) = x_1(t, q_2) - x_1(t, q_1)$ имеем $z(t_1) = 0$, $z(t_2) = 0$ и $z''(t) > 0$ на $(t_1, t_2]$. Поэтому найдется $t_0 \in (t_1, t_2]$ со свойством $z'(t_0) = 0$, а поэтому $z'(t) > 0$ на $(t_0, t_2]$ или $x_1'(t_2, q_2) > x_1'(t_2, q_1)$, т.е. функция $q \to x_1'(t_2, q)$ строго возрастает на I.

В силу условия $S_2(t_2) \subseteq I$ и существования решения для любого $p \in J$ краевой задачи (1), (3) следует $S_1(t_2) = J$. Пусть $FrI = \{a, b\}$, $FrJ \quad \{c, d\}$, $a, b, c, d \in R$, $a < b$ и $c < d$. Из $S_1(t_2) = J$ и монотонности функции $q \to x_1'(t_2, q)$ следует ее непрерывность на I и равенства $\lim_{q \to a+} = x_1'(t_2, q) = c$, $\lim_{q \to b-} x_1'(t_2, q) = d$.

Обозначая через $x_2(t, q)$ решение задачи (1), (6), покажем, как и выше, что функция $q \to x_2'(t_2, q)$ непрерывна и строго убывает на I и справедливы равенства $\lim_{q \to a+0} x_2'(t_2, q) = d$, $\lim_{q \to b-0} x_2'(t_2, q) = c$. Следовательно, найдется $q_3 \in I$ такое, что $x_1'(t_2, q_3) = x_2'(t_2, q_3)$. Полагая $x_0(t) = x_1(t, q_3)$ на $[t_1, t_2]$ и $x_0(t) \quad x_2(t, q_3)$ на $[t_2, t_3]$, получаем, что функция $t \to x_0(t)$ является решением краевой задачи (1), (2).

Для доказательства единственности решения краевой задачи (1), (2) предположим противное, т.е. что существуют два различных решения x_1 и x_2 краевой задачи (1), (2). Поэтому найдется $\tau_1 \in (t_1, t_3)$ такое, что $x_1(\tau_1) \neq x_2(\tau_1)$. Не теряя общности, считаем, что $\tau_1 \in (t_2, t_3)$. Если существует $\tau_2 \in (t_1, t_2)$ такое, что $x_1(\tau_2) \neq x_2(\tau_2)$, то для $z(t) = x_1'(t) - x_2'(t)$ найдутся $s_1 \in (t_1, t_2)$, $s_2 \in (t_2, t_3)$ и $s_0 \in (s_1, s_2)$ такие, что $z(s_1) = z(s_2) = z'(s_0) = 0$, что противоречит условию 3 теоремы. Если $x_1(t) = x_2(t)$ на $[t_1, t_2]$, то найдутся $s_3 \in (t_2, t_3)$ и $s_4 \in (t_2, s_3)$ такие, что $z(t_2) = z(s_3) = z'(s_4) = 0$, что опять противоречит условию 3 теоремы. Следовательно, существует единственное решение краевой задачи (1), (2).

Замечание. При $I = J = R$ и непрерывной правой части уравнения (1) получаем соответствующий результат из [3].

Список литературы

[1] Лепин А.Я., Пономарев В.Д. Локальная единственность и существование решения краевых задач // Дифференц.уравнения. 1975, Т.11, N.8. С.1361-1365.

[2] Пономарев В.Д. Существование решения краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка // Латв.мат.ежегодник. Рига: Зинатне, 1976. Вып.17. С.201-208.

[3] Barr D., Sherman T. Existence and uniqueness of solutions of three-point boundary value problems // J.Diff.Equations. 1973. -V.13, Nr.2. P.197-212.

[4] Jackson L., Schrader K. Existence and uniqueness of solutions of boundary value problems for third order differential equations // J.Diff.Equations. 1971. V.9, Nr.1. P.46-54.

[5] Hartman P On N-parameter families and interpolation problems for nonlinear ordinary differential equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1971. V.154. P.201-226.

[6] Lasota A., Opial Z. On the existence and uniqueness of solutions of a boundary value problems for an ordinary second-order differential equation // Colloq.math. 1967 V.16. P.1-5.

[7] Sedziwy S. Dependence of solutions on boundary data for a system of two ordinary differential equations // J.Diff.Equations. 1971. V.9, Nr.2. P.381-389.

V.Ponomarev. On the existence of solution of three-point boundary value problem

Summary. The solvability of boundary value problem

$$x''' = f(t, x, x', x''),$$

$$x(t_1) = c_1, \quad x(t_2)c_2, \quad x(t_3) = c_3,$$

is proved.

1991 MSC 34B99

V.Ponomarjovs. Par kādas trešās kārtas robežproblēmas atrisināmību

Anotācija. Pierādīta robežproblēmas

$$x''' = f(t, x, x', x''),$$

$$x(t_1) = c_1, \quad x(t_2)c_2, \quad x(t_3) = c_3$$

atrisināmība.

Институт математики и информатики
Латвийского университета
Рига, б. Райниса, 29

Поступила 02.01.98

SATURA RĀDĪTĀJS