LATVIJAS UNIVERSITĀTES

ZINĀTNISKIE RAKSTI

ACTA UNIVERSITATIS LATVIENSIS

605

MATEMĀTIKA

DIFERENCIĀLVIENĀDOJUMI

U N I V E R S I T Y of L A T V I A
INSTITUTE of MATHEMATICS and COMPUTER SCIENCE

M A T H E M A T I C S
D I F F E R E N T I A L E Q U A T I O N S

Proceedings
Volume 605

Riga 1997

ЛАТВИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

МАТЕМАТИКА
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Научные труды
Том 605

Рига 1997

1–12
605

MATEMĀTIKA. DIFERENCIĀLVIENĀDOJUMI.

Matemātika. Diferenciālvienādojumi: Zinātniskie raksti / Atb. red. J. Klokovs. 605. sējums. – Rīga: LU, 1997. – 123 lpp.

Rakstu krājums satur zinātniskos rakstus, kas veltīti parasto diferenciālvienādojumu teorijai. Tiek pētīti arī tuvie pielietojuma jautājumi. Īpaša uzmanība tiek veltīta trešās un ceturtās kārtas vienādojumiem.

Rakstu krājums paredzēts zinātniekiem, pasniedzējiem un studentiem, kuri nodarbojas ar parasto diferenciālvienādojumu un to atrisinājumu pētīšanu.

MATHEMATICS. DIFFERENTIAL EQUATIONS.

The collection contains articles on the theory of ordinary differential equations. Some applications are investigated too. Main attention is paid to the third and fourth order equations.

The collection is destined for researchers and students in the field.

МАТЕМАТИКА. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.

Сборник содержит научные статьи по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассматриваются также близкие вопросы из приложений. Особое внимание уделяется уравнениям третьего и четвертого порядка.

Сборник предназначен для исследователей, преподавателей и студентов, которые работают в области обыкновенных дифференциальных уравнений.

Counterexample to ordinary solvability for systems with discontinuous nonlinearities

A.Cibulis

Summary. The solvability problem of the system of the type

$$(\alpha_i(u_1,u_2)u_i')' + \beta_i(u_1,u_2) = f_i, \tag{1}$$

$$u_i(a_j) = A_{ij}, \quad i, j = 1,2 \tag{2}$$

is considered. It has been shown that discontinuities belonging simultaneously in both coefficients α_i, β_i create generally speaking the nonexistence of the solution determined in the so-called mushy region by one and the same unknown function.

1991 MSC 35J45

Let $\Omega = (a_1, a_2)$, $f_i \in L_2(\Omega)$, $g \in C(R)$,

$$Q_0 = \{(t,\tau) \in R \times R \quad \tau = g(t)\}, \quad Q = R \times R \backslash Q_0,$$

and let the coefficients $\alpha_k : Q \to R$, where $\alpha_3 = \beta_1$, $\alpha_4 = \beta_2$, be continuous functions in Q with finite limits

$$\alpha_k^{\pm}(t,\tau) := \lim_{s \to \tau \pm 0} \alpha_k(t,s), \quad k = 1,\dots,4.$$

By analogy with single equation, see for example [1], we use the following "ordinary" definition of the solution.

Definition. The pair $u = (u_1, u_2) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ is said to be the solution of (1), (2) if boundary condition (2) holds and if a function $\varphi \in L_2(\Omega)$ with values from $[0,1]$ exists such that

$$\int_\Omega [\alpha_i^*(u,\varphi)u_i'\eta_i' - \alpha_{i+2}^*(u,\varphi)\eta_i + f_i\eta_i]dx = 0 \quad \forall \eta \in H_0^1, \quad i = 1,2, \tag{3}$$

where

$$\alpha_k^*(u,\varphi) = \alpha_k^+(u)\varphi + \alpha_k^-(u)(1-\varphi), \quad k = 1,\dots,4. \tag{4}$$

Remark 1 *The function φ is of a great importance only in the mushy region $\Omega_0 = \{x \in \Omega \;\; u_2(x) = g(u_1(x))\}$, because $\alpha_k^* = \alpha_k^+ = \alpha_k^- = \alpha_k$ whenever $x \notin \Omega_0$.*

Remark 2 *The solvability of (1), (2) in a case when $\beta_i = 0$ under some assumptions on α_i, $i = 1, 2$, is stated in [2].*

To construct the desirable counterexample we choose

$$\Omega = (0,1), \quad A_{11} = A_{21} = 0, \quad A_{12} = A_{22} = 1, \quad \beta_1 = 0,$$

$$f_1 = f_2 = 0, \quad g(t) = t, \quad w = u_2 - u_1,$$

$$\alpha(w) := \alpha_1(u) = \alpha_2(u) = \begin{cases} 1 & if \quad w < 0 \\ 3 & if \quad w > 0, \end{cases}$$

$$\beta(w) := \beta_2(u) = \begin{cases} \pi^2 w - 1 & if \quad w < 0 \\ -6 & if \quad w > 0. \end{cases}$$

Then (2), (3) is equivalent to

$$\int_\Omega \alpha^*(w,\varphi) u_1' \eta_1' dx = 0 \quad \forall \eta_1 \in H_0^1, \tag{5}$$

$$\int_\Omega [\alpha^*(w,\varphi) u_2' \eta_2' - \beta^*(w,\varphi)\eta_2] dx = 0 \quad \forall \eta_2 \in H_0^1, \tag{6}$$

$$u_i(0) = 0, \quad u_i(1) = 1, \quad i = 1, 2. \tag{7}$$

Lemma. *Suppose that (u_1, u_2) is the solution of the system (5)-(7).*
Then $w \le 0$ in Ω.

Proof. If $w(x) > 0$ for some $x \in \Omega$ then continuity of w and boundary condition (7) yields the existence of points $x_1, x_2 \in \Omega$ such that

$$w(x) > 0 \text{ in } (x_1, x_2) \text{ and } w(x_1) = w(x_2) = 0.$$

As $\alpha_1 = \alpha_2 = 3$ and $\beta = -6$ in (x_1, x_2) then taking $\eta_1 = \eta_2 = w$ in (x_1, x_2) and $\eta_1 = \eta_2 = 0$ outside (x_1, x_2) we have, see (5), (6),

$$\int_{x_1}^{x_2} 3u_1' w' dx = 0,$$

$$\int_{x_1}^{x_2} (3u_2' w' + 6w) dx = 0.$$

The difference of these equalities leads us immediately to the contradiction

$$\int_{x_1}^{x_2} (3w'^2 + 6w) dx = 0$$

because $3w'^2 + 6w > 0$ in (x_1, x_2).

Theorem. *System (5)-(7) has no solution $(u_1,$*

Proof. Suppose that (u_1, u_2) is the solution of (5)-(7). Then difference of the equalities (5) and (6) yields

$$\int_\Omega [\alpha^*(w,\varphi)w'\eta' - \beta^*(w,\varphi)\eta]dx = 0 \quad \forall\eta \in H_0^1. \tag{8}$$

Let $\Omega_- := \{x \in \Omega \mid w(x) < 0\}$. Taking into account Lemma and the well-known fact that $w' = 0$ almost everywhere in Ω_0, see, for example, [3], from the equality (8) we obtain

$$\int_{\Omega_-} [w'\eta' - (\pi^2 w - 1)]\eta dx - \int_{\Omega_0} \beta^*\eta dx = 0 \quad \forall\eta \in H_0^1. \tag{9}$$

On the other hand for $\eta = \sin\pi x$ we have $\eta'' + \pi^2\eta = 0$. Hence it follows that

$$\int_\Omega (-w'\eta' + \pi^2 w\eta)dx = 0.$$

Arguing as above we obtain

$$\int_{\Omega_-} (-w'\eta' + \pi^2 w\eta)dx = 0$$

which together with (9) yields the following contradictory relation

$$\int_{\Omega_-} \eta dx = \int_{\Omega_0} \beta^*\eta dx. \tag{10}$$

If $meas\,\Omega_0 = 0$ then right-hand side of (10) is zero but left-hand side is positive because $\eta > 0$ in Ω and $meas\,\Omega_- > 0$ by virtue of Lemma.

In its turn if $meas\,\Omega_0 > 0$ then right-hand side of (10) is negative (because $-6 = \beta^- \leq \beta^* \leq \beta^+ = -1$) but left hand side is positive or zero.

This completes the proof.

Remark 3 *To obtain the solvability of the system (1) or (3) one can use the more general concept of solution when discontinuous coefficients α_k are determined in mushy region each by his own unknown function φ_k.*

Let us show that pair $(u_1, u_2) = (x, x)$ satisfies the following equations, compare with (5)-(7),

$$\int_\Omega \alpha^*(w,\varphi_1)u_1'\eta_1' dx = 0 \quad \forall\eta_1 \in H_0^1, \tag{11}$$

$$\int_\Omega [\alpha^*(w,\varphi_2)u_2'\eta_2' - \beta^*(w,\varphi_3)\eta]dx = 0 \quad \forall\eta_2 \in H_0^1, \tag{12}$$

if $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = x$ and $\varphi_3 = \frac{1}{5}$.

Observe that $\Omega_0 = \Omega$ and

$$\alpha^*(w,\varphi_1) = \alpha^+\varphi_1 + \alpha^-(1-\varphi_1) = 3,$$

$$\alpha^*(w,\varphi_2) = \alpha^+\varphi_2 + \alpha^-(1-\varphi_2) = 2x + 1,$$

$$\beta^*(w,\varphi_3) = \beta^+\varphi_3 + \beta^-(1-\varphi_3) = -2.$$

This implies equalities (11) and (12).

References

[1] Cibulis A. Solvability of elliptic equations with discontinuous nonlinearities // Differentsial'nye Uravneniya. - 1986. - V.22, N 8. - P. 1435-1441 (Russian).

[2] Cibulis A. How to smooth discontinuous nonlinearities in the systems of equations? // Acta Universitatis Latviensis. - 1994, 552. P. 55-60.

[3] Ladyzhenskaya O.A., Uraltseva N.N. Linear and quasilinear elliptic equations (Russian). Moskow: Nauka, 1973.

А.Цибулис. Контрпример к *обыкновенной* разрешимости систем с разрывными нелинейностями.

Аннотация. Рассматривается проблема разрешимости для систем с разрывными нелинейностями вида

$$(\alpha_i(u_1,u_2)u_i')' + \beta_i(u_1,u_2) = f_i,$$

$$u_i(a_j) = A_{ij}, \quad ,j = 1,2.$$

Установлено, что доопределение разрывных коэффициентов α_i и β_i в так называемой двухфазной зоне при помощи одной и той же неизвестной функции вызывает, вообще говоря, несуществование решения.

УДК 517.95

A.Cibulis. Pretpiemērs sistēmu ar pārtrauktām nelinearitātēm *parastai* atrisināmībai.

Anotācija. Aplūkota atrisinājuma eksistences problēma šādām sistēmām ar pārtrauktām nelinearitātēm

$$(\alpha_i(u_1,u_2)u_i')' + \beta_i(u_1,u_2) = f_i,$$

$$u_i(a_j) = A_{ij}, \quad ,j = 1,2.$$

Noskaidrots, ka pārtraukto koeficientu α_i un β_i papildudefinēšana tā saucamajā divfāzu zonā ar vienas un tās pašas nezināmās funkcijas palīdzību, vispārīgi runājot, izraisa atrisinājuma neeksistenci.

Institute of Mathematics
and Computer Science,
University of Latvia
Rainis blvd. 29

Received 07.06.96

GROBMAN'S–HARTMAN'S THEOREM FOR TIME–DEPENDENT DIFFERENCE EQUATIONS

A. Reinfelds

Summary. A short proof of global dynamical equivalence of time–dependent difference equations in a Banach space is given. The proof is carried out by means of Green's function.
1991 MSC 34C35, 39B52, 54H20

0. Introduction

The linearization problem in the theory of ordinary differential equations were explored by P. Hartman [1], D. M. Grobman [2], J. Palis [3], C. C. Pugh [4], A. Reinfelds [5, 8], K. J. Palmer [6], M. A. Boudourides [7] and Nguyen Van Minh [9]. In the present paper we extend Grobman's–Hartman's theorem to time–dependent difference equations.

1. Preliminaries

Consider two time–dependent semilinear difference equations in the Banach space $\mathbf{X}$:

$$x(n+1) = A(n)x(n) + f_1(n, x(n)), \tag{1}$$

and

$$x(n+1) = A(n)x(n) + f_2(n, x(n)), \tag{2}$$

where:

(i) the maps $x \mapsto A(n)x$, $x \mapsto A(n)x + f_1(n,x)$ and $x \mapsto A(n)x + f_2(n,x)$ for fixed $n \in \mathbf{Z}$ are homeomorphisms;

(ii) the maps $f_1 \colon \mathbf{Z} \times \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ and $f_2 \colon \mathbf{Z} \times \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ satisfy the estimates

$$|f_1(n,x) - f_2(n,x)| \leq N < +\infty; \tag{3}$$

$$|f_1(n,x) - f_1(n,x')| \le \varepsilon |x - x'|, \tag{4}$$

$$|f_2(n,x) - f_2(n,x')| \le \varepsilon |x - x'|. \tag{5}$$

Let $\phi_1(\cdot, m, x_m): \mathbf{Z} \to \mathbf{X}$ be the solution of the equation (1), $\phi_2(\cdot, m, x_m): \mathbf{Z} \to \mathbf{X}$ be the solution of the equation (2) that satisfies the initial condition $\phi_1(m,m,x_m) = \phi_2(m,m,x_m) = x_m$.

Let us note that the solution of (1) is given by the formula

$$\phi_1(n,m,x_m) = X(n,m)x_m + \sum_{i=m}^{n-1} X(n,i+1) f_1(i, \phi_1(i,m,x_m)),$$

the solution of (2) is given by the formula

$$\phi_2(n,m,x_m) = X(n,m)x_m + \sum_{i=m}^{n-1} X(n,i+1) f_2(i, \phi_2(i,m,x_m)),$$

where $X(n,m)$ is Cauchy evolution map of the linear equation

$$x(n+1) = A(n)x(n). \tag{6}$$

Definition. Equations (1) and (2) are *globally dynamically equivalent* if there is such homeomorphism $H(n,\cdot): \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ that for all $n \in \mathbf{Z}$

$$H(n, \phi_1(n,m,x_m)) = \phi_2(n,m,H(m,x_m)).$$

Definition. The *Green map* $\mathcal{G}: \mathbf{Z}^2 \to \mathrm{Hom}(\mathbf{X})$ is a map such that:

(i)

$$\mathcal{G}(n+1,m) = A(n)\mathcal{G}(n,m); n \neq m-1;$$

(ii)

$$\mathcal{G}(n,n) = A(n)\mathcal{G}(n-1,n) + E;$$

(iii)

$$\sup_{n \in \mathbf{Z}} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |\mathcal{G}(n,i)| = M < +\infty.$$

Here E is the identity map in the space $\mathbf{X}$.

Remark. If the linear equation (6) possesses an exponential dichotomy on $\mathbf{Z}$, then there exists a Green map.

2. The main theorem

Theorem. *Let $\mathcal{G}$ be the Green map and $\varepsilon M < 1$. Then equations* (1) *and* (2) *are globally dynamically equivalent.*

Proof. Consider the operator $\mathcal{F}$, defined by the formula:

$$\mathcal{F}h(m, x_m)$$

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}(m, i+1)(f_2(i, \phi_1(i, m, x_m) + h(i, \phi_1(i, m, x_m))) - f_1(i, \phi_1(i, m, x_m))).$$

Let us take arbitrary $h \in \mathbf{BC}$, where $\mathbf{BC}$ is the space of all bounded continuous maps from $\mathbf{Z} \times \mathbf{X}$ to $\mathbf{X}$. With the supremum norm $\mathbf{BC}$ is a complete metric space. Boundedness of the difference $f_1 - f_2$, condition (5) and the conditions of the theorem implies that $\mathcal{F}h \in \mathbf{BC}$. Further,

$$|\mathcal{F}h(m, x_m) - \mathcal{F}h'(m, x_m)|$$

$$= |\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}(m, i+1)(f_2(i, \phi_1(i, m, x_m) + h(i, \phi_1(i, m, x_m)))$$

$$-f_2(i, \phi_1(i, m, x_m) + h'(i, \phi_1(i, m, x_m))))|$$

$$\leq \varepsilon \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |\mathcal{G}(m, i+1)||h(i, \phi_1(i, m, x_m)) - h'(i, \phi_1(i, m, x_m))|$$

$$\leq \varepsilon \|h - h'\| \sup_m \left(\sum_{i=-\infty}^{+\infty} |\mathcal{G}(m, i)| \right) = \varepsilon M \|h - h'\|.$$

From the last inequality it follows that $\mathcal{F}$ is a contraction. Therefore in $\mathbf{BC}$ there is only one solution satisfying the functional equation $\mathcal{F}h = h$.

We have

$$h(n, \phi_1(n, m, x_m)) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}(n, i+1)(f_2(i, \phi_1(i, n, \phi_1(n, m, x_m))$$

$$+h(i, \phi_1(i, n, \phi_1(n, m, x_m)))) - f_1(i, \phi_1(i, n, \phi_1(n, m, x_m))))$$

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}(n, i+1)(f_2(i, \phi_1(i, m, x_m) + h(i, \phi_1(i, m, x_m))) - f_1(i, \phi_1(i, m, x_m)))$$

$$X(n, m) \left\{ \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}(m, i+1)(f_2(i, \phi_1(i, m, x_m) + h(i, \phi_1(i, m, x_m))) - f_1(i, \phi_1(i, m, x_m))) \right\}$$

$$+ \sum_{i=m}^{n-1} X(n, i+1)(f_2(i, \phi_1(i, m, x_m) + h(i, \phi_1(i, m, x_m))) - f_1(x, \phi_1(i, m, x_m))).$$

We check that $\eta(n) = \phi_1(n, m, x_m) + h(n, \phi_1(n, m, x_m))$ satisfies the equation (2).

$$X(n, m)x_m + \sum_{i=m}^{n-1} X(n, i+1) f_1(i, \phi_1(i, m, x_m)) + X(n, m)h(m, x_m)$$

$$+\sum_{i=m}^{n-1} X(n,i+1)(f_2(i,\eta(i)) - f_1(i,\phi_1(i,m,x_m)))$$

$$= X(n,m)\eta(m) + \sum_{i=m}^{n-1} X(n,i+1) f_2(i,\eta(i)).$$

Therefore $\phi_1(n,m,x_m) + h(n,\phi_1(n,m,x_m)) = x_2(n,m,x_m + h(m,x_m))$.

Changing the roles of f_1 and f_2, we prove, in the same way, the existence of h' that satisfies the equality $\phi_2(n,m,x_m) + h'(n,\phi_2(n,m,x_m)) = \phi_1(n,m,x_m + h'(m,x_m))$. Designating $H(m,x_m) = x_m + h(m,x_m)$, $H'(m,x_m) = x_m + h'(m,x_m)$, we get

$$H'(n, H(n,\phi_1(n,m,x_m))) = \phi_1(n,m,H'(m,H(m,x_m)))$$

and

$$H(n, H'(n,\phi_2(n,m,x_m))) = \phi_2(n,m,H(m,H'(m,x_m))).$$

Taking into account uniqueness of mapping $H'(n,H(n,\cdot)) - E$ and $H(n,H'(n,\cdot)) - E$ in **BC** we have $H'(n,H(n,\cdot)) = E$ and $H(n,H'(n,\cdot)) = E$ and therefore $H(n,\cdot)$ is a homeomorphism, establishing the global dynamical equivalence of equations (1) and (2). $\square$

Remark. If instead of (3) we assume that $\sup_{n,x} |f_1(n,x)| < +\infty$ and $f_2(n,x) \equiv 0$, then systems (1) and (6) are globally dynamically equivalent.

Acknowledgement

This research was partially supported by the Latvian Council of Science under grant 93.809.

References

1. P. Hartman, *A lemma in the theory of structural stability of differential equations*, Proc. Amer. Math. Soc. **11** (1960), no. 4, 610 620.

2. D. M. Grobman, *Topological classification of neighborhoods of a singularity in n-space*, Mat. Sb. **56(98)** (1962), no. 1, 77 94 (Russian).

3. J. Palis, *On the local structure of hyperbolic fixed points in Banach space*, An. Acad. Brasil. Ci. **40** (1968), no. 3, 263 266.

4. C. C. Pugh, *On the theorem of P. Hartman*, Amer. J. Math. **91** (1969), no. 2, 363 367.

5. A. Reinfelds, *Global topological equivalence of nonlinear flows*, Differentsial'nye Uravneniya **8** (1972), no. 10, 1901 1903 (Russian).

6. K. J. Palmer, *A generalization of Hartman's linear*, J. Math. Anal. Appl. **41** (1973), no. 3, 753 758.

7. M. A. Boudourides, *Topological equivalence of monotone nonlinear nonautonomous differential equations*, Portugal. Math. **41** (1982), no. 1-4, 287-294.

8. A. Reinfelds, *A generalized Grobman-Hartman theorem*, Latv. Mat. Ezhegodnik **29** (1985), 84-88 (Russian).

9. Nguyen Van Minh, *On the topological classification of nonautonomous differential equations*, Colloq. Math. Soc. Janos Bolayai **53** (1988), 421-426.

А.Рейнфелд. Теорема Гробмана – Хартмана для зависящих от времени разностных уравнений.

Аннотация. Дано короткое доказательство глобальной динамической эквивалентности зависящих от времени разностных уравнений в банаховых пространствах. Доказательство проводится с помощью функции Грина.

A. Reinfelds. Grobmana - Hartmana teorēma no laika atkarīgiem diferenču vienādojumiem.

Anotācija. Dots īss no laika atkarīgu diferenču vienādojumu globālas dinamiskās ekvivalences pierādījums Banaha telpā. Pierādījums balstās uz Grīna funkcijas pielietojumu.

Institute of Mathematics
Latvian Academy of Sciences
University of Latvia
Akademijas laukums 1
Riga, LV 1524 Latvia

Received 12.03.96

On the behaviour of solutions of a system of two first order ordinary differential equations

V.Ponomarev

Summary. Interrelations are established between components of two solutions of two ordinary differential equations

$$x' = h(t,x,y), \quad y' = f(t,x,y),$$

where functions $f, h : [a,b] \times R^2 \to R$ satisfy the Caratheodory conditions.

1991 MSC 34B99

Consider the system of two first order differential equations

$$x' = f(t,x,y), \quad y' = h(t,x,y), \tag{1}$$

where functions $h, f \; I \times R^2 \to R$, $I = [a,b]$, $-\infty < a < b < +\infty$ satisfy the Caratheodory conditions [1].

Interrelations between components of two solutions at the ends of an interval plays important role when proving the existence of solutions of some boundary value problems, for example, the two-point ones with boundary conditions prescribed at the ends of an interval. One may observe this in explicit or implicit form in the proof of results in the papers ([2]-[9]). In this paper we investigate the interrelation between components of two solutions at the ends of an interval with regard to one sided Lipschitz conditions imposed on the right side of the equation (conditions E_i, $i = 1,\ldots,8$) and to monotonicity of h and f (conditions M_i, $i = 1,\ldots,4$).

We need the following conditions in the sequel.

M_1) $h(t,x,y)$ strictly increases with respect to $y \in R$ for $(t,x) \in I \times R$ fixed;

M_2) $h(t,x,y)$ is non-decreasing with respect to $y \in R$ for $(t,x) \in I \times R$ fixed;

M_3) $f(t,x,y)$ strictly increases with respect to $x \in R$ for $(t,y) \in I \times R$ fixed;

M_4) $f(t,x,y)$ is non-decreasing with respect to $x \in R$ for $(t,y) \in I \times R$ fixed.

For any $M \in (0,\infty)$ there exist $k_i \in L(I)$, $i = 1,\ldots,8$, such that for any $(t, x_1, x_2, y_1, y_2) \in I \times [-M,M]^4$ the following conditions hold

E_1) $h(t,x_1,y_1) - h(t,x_2,y_1) \le k_1(t)(x_1 - x_2)$,

E_1) $h(t,x_1,y_1) - h(t,x_2,y_1) \le k_1(t)(x_1 - x_2)$, $x_1 \ge x_2$;
E_2) $h(t,x_1,y_1) - h(t,x_2,y_1) \le k_2(t)(x_1 - x_2)$, $x_1 \le x_2$;
E_3) $h(t,x_1,y_1) - h(t,x_2,y_1) \ge k_3(t)(x_1 - x_2)$, $x_1 \ge x_2$;
E_4) $h(t,x_1,y_1) - h(t,x_2,y_1) \ge k_4(t)(x_1 - x_2)$, $x_1 \le x_2$;
E_5) $f(t,x_1,y_1) - f(t,x_1,y_2) \le k_5(t)(y_1 - y_2)$, $y_1 \ge y_2$;
E_6) $f(t,x_1,y_1) - f(t,x_1,y_2) \le k_6(t)(y_1 - y_2)$, $y_1 \le y_2$;
E_7) $f(t,x_1,y_1) - f(t,x_1,y_2) \ge k_7(t)(y_1 - y_2)$, $y_1 \ge y_2$;
E_8) $f(t,x_1,y_1) - f(t,x_1,y_2) \ge k_8(t)(y_1 - y_2)$, $y_1 \le y_2$.

Let $(x_1(t),y_1(t))$, $(x_2(t),y_2(t))$, $t \in I$ be solutions of the system (1).

A_1) For any $t_0 \in [a,b)$ $x_1(t_0) = x_2(t_0)$ and $y_1(t_0) > y_2(t_0)$ implies $x_1(b) > x_2(b)$, $y_1(b) \ge y_2(b)$;

A_2) for any $t_0 \in (a,b]$ $x_1(t_0) = x_2(t_0)$ and $y_1(t_0) < y_2(t_0)$ implies $x_1(a) > x_2(a)$, $y_1(a) < y_2(a)$;

A_3) for any $t_0 \in [a,b)$ $x_1(t_0) = x_2(t_0)$ and $y_1(t_0) > y_2(t_0)$ implies $x_1(b) > x_2(b)$, $y_1(b) > y_2(b)$;

A_4) for any $t_0 \in (a,b]$ $x_1(t_0) = x_2(t_0)$ and $y_1(t_0) < y_2(t_0)$ implies $x_1(a) > x_2(a)$, $y_1(a) \le y_2(a)$;

A_5) for any $t_0 \in [a,b)$ $x_1(t_0) > x_2(t_0)$ and $y_1(t_0) = y_2(t_0)$ implies $x_1(b) \ge x_2(b)$, $y_1(b) > y_2(b)$;

A_6) for any $t_0 \in (a,b]$ $x_1(t_0) > x_2(t_0)$ and $y_1(t_0) = y_2(t_0)$ implies $x_1(a) > x_2(a)$, $y_1(a) < y_2(a)$;

A_7) for any $t_0 \in [a,b)$ $x_1(t_0) > x_2(t_0)$ and $y_1(t_0) = y_2(t_0)$ implies $x_1(b) > x_2(b)$, $y_1(b) > y_2(b)$;

A_8) for any $t_0 \in (a,b]$ $x_1(t_0) > x_2(t_0)$ and $y_1(t_0) = y_2(t_0)$ implies $x_1(a) \ge x_2(b)$, $y_1(a) < y_2(a)$;

A_9) For any $t_0 \in [a,b]$ $x_1(t_0) > x_2(t_0)$ and $y_1(t_0) < y_2(t_0)$ implies $x_1(a) > x_2(a)$, $y_1(a) < y_2(a)$;

A_{10}) for any $t_0 \in [a,b]$ $x_1(t_0) > x_2(t_0)$ and $y_1(t_0) > y_2(t_0)$ implies $x_1(b) > x_2(b)$, $y_1(b) > y_2(b)$;

A_{11}) for any $t_0 \in [a,b]$ $x_1(t_0) \ge x_2(t_0)$ and $y_1(t_0) > y_2(t_0)$ implies $x_1(b) \ge x_2(b)$, $y_1(b) > y_2(b)$;

A_{12}) for any $t_0 \in [a,b]$ $x_1(t_0) > x_2(t_0)$ and $y_1(t_0) \le y_2(t_0)$ implies $x_1(a) > x_2(a)$, $y_1(a) \le y_2(a)$;

A_{13}) for any $t_0 \in [a,b]$ $x_1(t_0) > x_2(t_0)$ and $y_1(t_0) \ge y_2(t_0)$ implies $x_1(b) > x_2(b)$, $y_1(b) \ge y_2(b)$;

A_{14}) for any $t_0 \in [a,b]$ $x_1(t_0) \ge x_2(t_0)$ and $y_1(t_0) < y_2(t_0)$ implies $x_1(a) \ge x_2(a)$, $y_1(a) < y_2(a)$;

A_{15}) for any $t_0 \in (a,b]$ $x_1(t_0) < x_2(t_0)$ and $y_1(t_0) = y_2(t_0)$ implies $x_1(a) < x_2(a)$, $y_1(a) > y_2(a)$;

A_{16}) for any $t_0 \in (a,b]$ $x_1(t_0) = x_2(t_0)$ and $y_1(t_0) > y_2(t_0)$ implies $x_1(a) < x_2(a)$, $y_1(a) > y_2(a)$;

A_{17}) for any $t_0 \in (a,b]$ $x_1(t_0) < x_2(t_0)$ and $y_1(t_0) = y_2(t_0)$ implies $x_1(a) \le x_2(a)$, $y_1(a) > y_2(a)$;

A_{18}) for any $t_0 \in (a,b]$ $x_1(t_0) = x_2(t_0)$ and $y_1(t_0) > y_2(t_0)$ implies $x_1(a) < x_2(a)$, $y_1(a) \ge y_2(a)$;

A_{19}) for any $t_0 \in [a,b]$ $x_1(t_0) < x_2(t_0)$ and $y_1(t_0) > y_2(t_0)$ implies $x_1(a) < x_2(a)$, $y_1(a) > y_2(a)$;

A_{20}) for any $t_0 \in [a,b]$ $x_1(t_0) \leq x_2(t_0)$ and $y_1(t_0) > y_2(t_0)$ implies $x_1(a) \leq x_2(a)$, $y_1(a) > y_2(a)$;

A_{21}) for any $t_0 \in [a,b]$ $x_1(t_0) < x_2(t_0)$ and $y_1(t_0) \geq y_2(t_0)$ implies $x_1(a) < x_2(a)$, $y_1(a) \geq y_2(a)$.

Theorem. 1 *Let $(x_1(t), y_1(t))$, $(x_2(t), y_2(t))$, $t \in I$ be solutions of the system (1). Then the following is true:*

1) M_1, M_4, E_3, E_4, E_8 imply A_1;
2) M_1, M_4, E_1, E_2, E_6 imply A_2;
3) M_1, M_4, E_3, E_4, E_7 imply A_3;
4) M_1, M_4, E_1, E_2, E_7 imply A_4;
5) M_2, M_3, E_4, E_6, E_7 imply A_5;
6) M_2, M_3, E_1, E_7, E_8 imply A_6;
7) M_2, M_3, E_3, E_7, E_8 imply A_7;
8) M_2, M_3, E_2, E_7, E_8 imply A_8;
9) M_2, M_4, E_1, E_8 imply A_9;
10) M_2, M_4, E_3, E_7 imply A_10;
11) M_2, M_3, E_4, E_7 imply A_11;
12) M_2, M_4, E_1, E_7 imply A_12;
13) M_2, M_4, E_3, E_6 imply A_13;
14) M_2, M_4, E_2, E_8 imply A_14;
15) M_2, M_3, E_4, E_6, E_8 imply A_15;
16) M_1, M_4, E_3, E_4, E_5 imply A_16;
17) M_3, M_3, E_3, E_5, E_6 imply A_17,
18) M_1, M_4, E_1, E_4, E_6 imply A_18;
19) M_2, M_4, E_4, E_5 imply A_19;
20) M_2, M_4, E_3, E_5 imply A_20;
21) M_2, M_4, E_4, E_6 imply A_21.

Proof. We consider only typical cases. The main attention is paid to the case A_15. Proofs for other cases are only outlined.

In all cases we denote $u(t) = x_1(t) - x_2(t)$, $v(t) = y_1(t) - y_2(t)$. We suppose also that for

$$M = \max\{\|x_1\|, \|x_2\|, \|y_1\|, \|y_2\|\}$$

$k_i \in L(I)$, $i = 1, ..., 8$ ($\|x\| = \sup\{| x(t) |: t \in I\}$) are found.

Let us prove that A_15 holds. Denote by $(t_1, t_0]$ the maximal interval on which $u(t) < 0$. We will show that $v(t) > 0$ in $[t_1, t_0)$. Note that if $v(t) = 0$ for any $t \in [t_1, t_0]$ then, by virtue of M_3, $u(t) = 0$ for any $t \in [t_1, t_0]$ which is impossible. Then either there exist $t_2 \in [t_1, t_0)$ and $t_3 \in (t_2, t_0]$ such that $v(t_2) < 0$ in $[t_2, t_3)$ and $v(t_3) = 0$ or there exist $t_4 \in [t_1, t_0)$ and $t_5 \in (t_4, t_0)$ such that $v(t_4) = 0$, $v(t) > 0$ in $(t_4, t_5]$.

Consider the first case. We have from the second equation of the system that for a.e. $t \in [t_2, t_3]$, where

$$v'(t) = b_1(t)v(t) + b_0(t).$$

$$b_0(t) = f(t, x_1(t), y_2(t)) - f(t, x_2(t), y_2(t)) \leq 0,$$
$$b_1(t) = \frac{f(t, x_1(t), y_1(t)) - f(t, x_1(t), y_2(t))}{y_1(t) - y_2(t)} \geq k_6(t).$$

Hence
$$v(t) = \exp B_1(t)(v(t_2) + \int_{t_2}^{t} b_0(s) \exp(-B_1(s)) ds),$$
where $B_1(t) = \int_{t_2}^{t} b_1(s) ds$. Therefore for any $\tau_1 \in (t_2, t_3)$ and $t \in [t_2, \tau_1]$

$$v(t) \leq v(t_2) \exp B_1(t) \leq v(t_2) \exp \int_{t_2}^{t} k_6(s) ds \leq$$

$$\leq v(t_2) \min_{t \in [t_2, t_3]} \exp \int_{t_2}^{t} k_2(s) ds = -r < 0,$$

which contradicts the assumption that $v(t_3) = 0$.

Consider the second case. Analogously to the first case we have for any $\tau_1 \in (t_4, t_5)$ and $t \in [\tau_1, t_5]$ that

$$v(t) \geq v(t_5) \exp B_2(t) \geq v(t_5) \exp \int_{t}^{t_5} -k_5(s) ds \geq$$

$$\geq v(t_5) \min_{t \in [t_4, t_5]} \exp \int_{t}^{t_5} -k_5(s) ds = r_1 > 0,$$

which contradicts the condition $v(t_4) = 0$, where

$$B_2(t) = \int_{t_5}^{t} b_1(s) ds = \int^{t_5} t - b_1(s) ds$$

and $b_1(t) \leq k_5(t)$ for a.e. $t \in [t_4, t_5]$.

Consider the case $u(t_1) = 0$. We have from the first equation of the system that for a.e. $t \in [t_1, t_0]$
$$u'(t) = a_1(t) u(t) + a_0(t),$$
where
$$a_0(t) = h(t, x_2(t), y_1(t)) - h(t, x_2(t), y_2(t)) \geq 0,$$
$$a_1(t) = \frac{h(t, x_1(t), y_1(t)) - h(t, x_2(t), y_2(t))}{x_1(t) - x_2(t)} \leq k_4(t).$$
We have then that for any $\tau_1 \in (t_1, t_0)$ and $t \in [\tau_1, t_0]$

$$u(t) = \exp A_1(t)(u(t_0) + \int_{t_0}^{t} a_0(s) \exp(-A_1(s)) ds),$$

where $A_1(t) = \int_{t_0}^{t} a_1(s) ds = \int_{t}^{t_0} -a_1(s) ds$. Hence for any $\tau_1 \in (t_1, t_0)$ and $t \in [\tau_1, t_0]$

$$u(t) \leq u(t_0) \exp A_1(t) \leq u(t_0) \exp \int_{t}^{t_0} -k_4(s) ds \leq$$

$$\leq u(t_0) \min_{t \in [t_1, t_0]} \exp \int_{t}^{t_0} -k_4(s) ds = -r_2 < 0,$$

which contradicts the assumption that $u(t_1) = 0$ and proves that the condition A_15.

We will prove now that A_5 holds.

We will show that $v(t) > 0$ in $(t_0, t_1]$. Let $[t_0, t_1]$ be the maximal interval in which $u(t) \geq 0$. Note that if $v(t) = 0$ for any $t \in [t_0, t_1]$, then in view of the condition M_3 $u(t) = 0$ for any $t \in [t_0, t_1]$, which is impossible. Then either there exist $t_2 \in (t_0, t_1]$ and $t_3 \in [t_0, t_2)$ such that $v(t_3) = 0$ and $v(t) < 0$ in $(t_3, t_2]$ or there exist $t_4 \in (t_0, t_1]$ and $t_5 \in (t_0, t_4]$ such that $v(t_4) = 0$ and $v(t) > 0$ in (t_5, t_4). Consider the first case. We have from the second equation of the system that for any $\tau_1 \in (t_3, t_2)$ and $t \in [\tau_1, t_2]$

$$v(t) \leq v(t_2) \exp B_1(t) \leq v(t_2) \exp \int_t^{t_2} -k_8(s)ds \leq$$

$$\leq v(t_2) \min_{t \in [t_3, t_2]} \exp \int_t^{t_2} -k_8(s)ds = -r < 0,$$

which contradicts the assumption $v(t_3) = 0$, where $B_1(t) = \int_{t_2}^t b_1(s)ds = \int_t^{t_2} -b_1(s)ds$ and $b_1(t) \leq k_8(t)$.

Consider the second case. Analogously to the first case we have that for any $\tau_1 \in (t_5, t_4)$ and $t \in [t_5, \tau_1]$

$$v(t) \geq v(t_5) \exp B_2(t) \geq v(t_5) \exp \int_{t_5}^t k_7(s)ds \geq$$

$$\geq v(t_5) \min_{t \in [t_5, t_4]} \exp \int_{t_5}^t k_7(s)ds = r_2 > 0,$$

which contradicts the assumption that $v(t_4) = 0$, where $B_2(t) = \int_{t_5}^t b_1(s)ds$ and $b_1(t) \geq k_7(s)$ for a.e. $t \in [t_5, t_4]$.

We are done, if $t_1 = b$. Let $t_1 < b$. Then there exist $t_4 \in (t_1, b)$ and $t_5 \in [t_1, t_4)$ such that $v(t) > 0$ in $(t_0, t_4]$, $u(t_5) = 0$ and $u(t) < 0$ in $(t_5, t_4]$.

We have from the first equation of the system that for any $\tau_1 \in (t_5, t_4)$ and $t \in [\tau_1, t_4]$

$$u(t) \leq u(t_4) \exp A_1(t) \leq u(t_4) \exp \int_t^{t_4} -k_1(s)ds \leq$$

$$\leq u(t_4) \min_{t \in [t_5, t_4]} \exp \int_t^{t_4} -k_1(s)ds = -r_1 < 0,$$

which contradicts the assumption that $u(t_5) = 0$ and proves A_5, where $A_1(t) = \int_{t_4}^t a_1(s)ds = \int_t^{t_4} -a_1(s)ds$ and $a_1(t) \geq k_3(t)$ for a.e. $t \in [t_5, t_4]$.

Let us prove that A_7 holds. Let $[t_0, t_1)$ be the maximal interval in which $u(t) > 0$. We will show that $v(t) > 0$ in $(t_0, t_1]$. Suppose the contrary is true. Note that, if $v(t) = 0$ for any $t \in [t_0, t_1]$, then, in view of M_3, $u(t) = 0$ for any $t \in [t_0, t_1]$, which is impossible. Then either there exist $t_2 \in (t_0, t_1]$ and $t_3 \in [t_0, t_2)$ such that $v(t_3) = 0$ and $v(t) < 0$ in $(t_3, t_2]$ or there exist $t_4 \in (t_0, t_1]$ and $t_5 \in (t_0, t_4)$ such that $v(t_4) = 0$ and $v(t) > 0$ in $[t_5, t_4)$.

Consider the first case. Then for any $\tau_1 \in (t_3, t_2)$ and $t \in [\tau_1, t_2]$ we have that

$$v(t) \leq v(t_2) \exp B_1(t) \leq v(t_2) \exp \int_t^{t_2} -k_2(s)ds \leq$$

$$\leq v(t_2) \min_{t \in [t_3, t_2]} \exp \int_t^{t_2} -k_2(s)ds = -r < 0,$$

which contradicts the assumption that $v(t_3) = 0$, where $B_1(t) = \int_{t_2}^{t} b_1(s)ds = \int_t^{t_2} -b_1(s)ds$ and $b_1(t) \leq k_8(t)$ for a.e. $t \in [t_3, t_2]$.

Consider the second case. Analogously to the first case, for any $\tau_1 \in (t_5, t_4)$ and $t \in [t_5, \tau_1]$ we have

$$v(t) \geq v(t_5) \exp B_2(t) \geq v(t_5) \exp \int_t^{t_5} -k_3(s)ds \geq$$

$$\geq v(t_5) \min_{t \in [t_5, t_4]} \exp \int_t^{t_5} -k_3(s)ds = r_1 > 0,$$

which contradicts the assumption that $v(t_4) = 0$, where $B_2(t) = \int_{t_6}^{t} b_1(s)ds$ and $b_1(t) \geq k_7(t)$ for a.e. $t \in [t_5, t_4]$.

Consider the case $u(t_1) = 0$. Hence for any $\tau_1 \in (t_0, t_1)$ and $t \in [t_0, \tau_1]$ we have that

$$u(t) \geq u(t_0) \exp A_1(t) \geq u(t_0) \exp \int_{t_0}^{t} k_1(s)ds \geq$$

$$\geq u(t_0) \min_{t \in [t_0, t_1]} \exp \int_{t_0}^{t} k_1(s)ds = r_2 > 0,$$

which contradicts the assumption that $u(t_1) = 0$, where $A_1(t) = \int_{t_0}^{t} a_1(s)ds$ and $a_1(t) \geq k_3(t)$ for a.e $\in [t_0, t_1]$.

Let us prove that $A_1 0$ holds. Let $[t_0, t_1]$ be the maximal interval in which $v(t) > 0$. We will show that $u(t) > 0$ in $[t_0, t_1]$. Suppose the contrary is true. Let $t_2 \in (t_0, t_1]$ and $[t_0, t_2)$ - the maximal interval in which $u(t) > 0$. Then $u(t_1) = 0$. We have from the first equation of the system that for any $\tau_1 \in (t_0, t_2)$ and $t \in [t_0, \tau_1]$

$$u(t) \geq u(t_0) \exp A_1(t) \geq u(t_0) \exp \int_{t_0}^{t} k_3(s)ds \geq$$

$$\geq u(t_0) \min_{t \in [t_0, t_2]} \exp \int_{t_0}^{t} k_3(s)ds = r > 0,$$

which contradicts the assumption that $u(t_2) = 0$, where $A_1(t) = \int_{t_0}^{t} a_1(s)ds$ and $a_1(t) \geq k_3(t)$ for a.e. $t \in [t_0, t_1]$.

Consider the case $v(t_1) = 0$. We have from the second equation of the system that for any $\tau_1 \in (t_0, t_1)$ and $t \in [t_0, \tau_1]$

$$v(t) \geq v(t_0) \exp B_1(t) \geq v(t_0) \exp \int_{t_0}^{t} k_7(s)ds \geq$$

$$\exp \int_{t_0}^{t} k_7(s)ds = r_1 > 0,$$

which contradicts the assumption that $v(t_0) = 0$, where $B_1(t) = \int_{t_0}^{t} b_1(s)ds$ and $b_1(t) \geq k_7(t)$ for a.e. $t \in [t_0, t_1]$.

Since $[t_0, t_1]$ is the [illegible]al in which $u(t) > 0$ and $v(t) > 0$, we have that $t_1 = b$.

Let us prove that $A_1 3$ holds. Let $[t_0, t_1)$ be the maximal interval in which $u(t) > 0$. We will show that $v(t) \geq 0$ in $[t_0, t_1]$. Suppose the contrary is true. Then one can find

$t_2 \in (t_0, t_1]$ and $t_3 \in [t_0, t_2)$ such that $v(t) < 0$ in $(t_3, t_2]$ and $v(t_3) = 0$. We have from the second equation of the system that for any $\tau_1 \in (t_3, t_2)$ and $t \in [\tau_1, t_2]$

$$v(t) \leq v(t_2) \exp B_1(t) \leq v(t_2) \exp \int_t^{t_2} -k_2(s) ds \leq$$

$$\leq v(t_2) \min_{t \in [t_3, t_2]} \exp \int_t^{t_2} -k_2(s) ds = -r < 0,$$

which contradicts the assumption that $v(t_3) = 0$, where $B_1(t) = \int_{t_2}^t b_1(s) ds = \int_t^{t_2} -b_1(s) ds$ and $b_1(t) \leq k_6(t)$ for a.e. $t \in [t_3, t_2]$.

Let $u(t_1) = 0$. We have from the first equation of the system that for any $\tau_1 \in (t_0, t_1)$ and $t \in [t_0, \tau_1]$

$$u(t) \geq u(t_0) \exp A_1(t) \geq u(t_0) \exp \int_{t_0}^t k_1(s) ds \geq$$

$$\geq u(t_0) \min_{t \in [t_0, t_1]} \exp \int_{t_0}^t k_1(s) ds = r_1 > 0,$$

which contradicts the assumption that $u(t_1) = 0$, where $A_1(t) = \int_{t_0}^t a_1(s) ds$ and $a_1(t) \geq k_3(t)$ for a.e. $t \in [t_0, t_1]$.

Since $[t_0, t_1]$ is the maximal interval, in which $u(t) > 0$ and $v(t) \geq 0$, then $t_1 = b$.

Consider now the condition $A_1 6$. Let $(t_0, t_1]$ be the maximal interval in which $v(t) > 0$. We will show that $u(t) < 0$ for any $t \in [t_1, t_0)$. Note that if $u(t) = 0$ for any $t \in [t, t_0]$, then, in view of M_1, $v(t) = 0$ for any $t \in [t_1, t_0]$, which is impossible. Then either there exist $t_2 \in [t_1, t_0)$ and $t_3 \in (t_2, t_0]$ such that $u(t_3) = 0$ and $u(t) > 0$ in $[t_2, t_3)$ or there exist $t_4 \in [t_1, t_0)$ and $t_5 \in (t_4, t_0)$ such that $u(t_4) = 0$ and $u(t) < 0$ in $(t_4, t_5]$.

We have from the first equation of the system like in the case of $A_1 5$, that for any $\tau_1 \in (t_2, t_3)$ and $t \in [t_2, \tau_1]$

$$u(t) \geq u(t_2) \exp A_2(t) \geq u(t_2) \exp \int_{t_2}^t k_1(s) ds \geq$$

$$\geq u(t_2) \min_{t \in [t_2, t_3]} \exp \int_{t_2}^t k_1(s) ds = r > 0,$$

which contradicts the assumption that $u(t_3) = 0$.

Consider the second case. We have that for any $\tau_1 \in (t_4, t_5)$ and $t \in [\tau_1, t_5]$

$$u(t) \leq u(t_5) \exp A_2(t) \leq u(t_5) \exp \int_t^{t_5} -k_4(s) ds \leq$$

$$\leq u(t_5) \min_{t \in [t_4, t_5]} \exp \int_t^{t_5} -k_4(s) ds = -r_1 < 0,$$

which contradicts the assumption that $u(t_4) = 0$, where $A_2(t) = \int_{t_5}^t a_1(s) ds = \int_t^{t_5} -a_1(s) ds$ and $a_1(t) \leq k_4(t)$.

Consider the case of $v(t_1) = 0$. We have from the second equation of the system that for any $\tau_1 \in (t_1, t_0)$ and $t \in [\tau_1, t_0]$

$$v(t) \geq v(t_0) \exp B_1(t) \geq v(t_0) \exp \int_t^{t_0} -k_5(s) ds \geq$$

$$\geq v(t_0) \min_{t\in[t_1,t_0]} \exp \int_t^{t_0} -k_5(s)ds = r_2 > 0,$$

which contradicts the assumption that $v(t_1) = 0$, where $B_1(t) = \int_{t_0}^t b_1(s)ds = \int_t^{t_0} -b_1(s)ds$ and $b_1(t) \leq k_5(t)$ for a.e. $t \in [t_1, t_0]$.

Consider now the case of $A_1 7$. Let $[t_1, t_0]$ be the maximal interval in which $u(t) \leq 0$. We will show that $v(t) > 0$ in $[t_1, t_0)$. Note that if the equality $v(t) = 0$ holds for any $t \in [t_1, t_0]$, then, in view of M_1, $u(t) = 0$ for any $t \in [t_1, t_0]$ which is impossible. Then either there exist $t_2 \in [t_1, t_0)$ and $t_3 \in (t_2, t_0]$ such that $v(t_3) = 0$ and $v(t) < 0$ in $[t_2, t_3)$ or there exist $t_4 \in [t_1, t_0)$ and $t_5 \in (t_4, t_0)$ such that $v(t_4) = 0$ and $v(t) > 0$ in $(t_4, t_5]$.

Consider the first case. We have from the second equation of the system that for any $\tau_1 \in (t_2, t_3)$ and $t \in [t_2, \tau_1]$

$$v(t) \leq v(t_2) \exp B_1(t) \leq v(t_2) \exp \int_{t_2}^t k_6(s)ds \leq$$

$$\leq v(t_2) \min_{t\in[t_2,t_3]} \exp \int_{t_2}^t k_6(s)ds = -r < 0,$$

which contradicts the assumption that $v(t_3) = 0$, where $B_1(t) = \int_{t_2}^t b_1(s)ds$ and $b_1(t) \geq k_6(t)$ for a.e. $t \in [t_2, t_3]$.

Consider the second case. We have from the second equation of the system that for any $\tau_1 \in (t_4, t_5)$ and $t \in [\tau_1, t_5]$

$$v(t) \geq v(t_5) \exp B_2(t) \geq v(t_5) \exp \int_t^{t_5} -k_5(s)ds \geq$$

$$\geq v(t_5) \min_{t\in[t_4,t_5]} \exp \int_t^{t_5} -k_5(s)ds = r_1 > 0,$$

which contradicts the assumption that $v(t_4) = 0$, where $B_2(t) = \int_{t_5}^t b_1(s)ds = \int_t^{t_5} -b_1(s)ds$ and $b_1(t) \leq k_5(t)$ for a.e. $t \in [t_4, t_5]$.

If we have that $t_1 = a$, then proof is complete. Let $t_1 > a$. Then there exist $t_4 \in (a, t_1)$ and $t_5 \in (t_4, t_1]$ such that $v(t) > 0$ in $[t_4, t_0]$, $u(t_5) = 0$ and $u(t) > 0$ in $[t_4, t_5)$.

We have from the first equation of the system that for any $\tau_1 \in (t_4, t_5)$ and $t \in [t_4, \tau_1]$

$$u(t) \geq u(t_4) \exp A_1(t) \geq u(t_4) \exp \int_{t_4}^t k_3(s)ds \geq$$

$$\geq u(t_4) \min_{t\in[t_4,t_5]} \exp \int_{t_4}^t k_3(s)ds = r_1 > 0,$$

which contradicts the assumption that $u(t_5) = 0$, where $A_1(t) = \int_{t_4}^t a_1(s)ds$ and $a_1(t) \geq k_3(t)$ for a.e. $t \in [t_4, t_5]$.

Let us prove that $A_1 8$. Let $[t_1, t_0]$ be the maximal interval in which $v(t) \geq 0$. We will show that $u(t) < 0$ for any $t \in [t_1, t_0)$. Note that if $u(t) = 0$ for any $t \in [t_1, t_0]$, then, in view of M_1, $v(t) = 0$ for any $t \in [t_1, t_0]$, which is impossible. Then either there exist $t_2 \in [t_1, t_0)$ and $t_3 \in (t_2, t_0]$ such that $u(t_3) = 0$ and $u(t) > 0$ for any $t \in [t_2, t_3)$ or there exist $t_4 \in [t_1, t_0)$ and $t_5 \in (t_4, t_0)$ such that $u(t_4) = 0$ and $u(t) < 0$ in $(t_4, t_5]$.

Consider the first case. We have from the first equation of the system that for any $\tau_1 \in (t_2, t_3)$ and $t \in [t_2, \tau_1]$

$$u(t) \geq u(t_2) \exp A_1(t) \geq u(t_2) \exp \int_{t_2}^{t} k_3^*(s)ds \geq$$

$$\geq u(t_2) \min_{t\in[t_2,t_3]} \exp \int_{t_2}^{t} k_3(s)ds = r > 0,$$

which contradicts the assumption that $u(t_3) = 0$, where $A_1(t) = \int_{t_2}^{t} a_1(s)ds$ and $a_1(t) \geq k_3(t)$ for a.e. $t \in [t_2, t_3]$.

Consider the second case. We have from the first equation of the system that for any $\tau_1 \in (t_4, t_5)$ and $t \in [\tau_1, t_5]$

$$u(t) \leq u(t_5) \exp A_2(t) \leq u(t_5) \exp \int_{t}^{t_5} -k_4(s)ds \leq$$

$$\leq u(t_5) \min_{t\in[t_4,t_5]} \exp \int_{t}^{t_5} -k_4(s)ds = -r_2 < 0,$$

which contradicts the assumption that $u(t_4) = 0$, where $A_2(t) = \int_{t_5}^{t} a_1(s)ds = \int_{t}^{t_5} -a_1(s)ds$ and $a_1(t) \leq k_4(t)$ for a.e. $t \in [t_4, t_5]$.

If $t_1 = a$, then the proof is complete. Suppose that $t_1 > a$. Then there exist $t_4 \in (a, t_1)$ and $t_5 \in (t_4, t_1]$ such that $u(t) < 0$ in $[t_4, t_0]$, $v(t_5) = 0$ and $v(t) < 0$ in $[t_4, t_5)$.

We have from the second equation of the system that for any $v_1 \in (t_4, t_5)$ and $t \in [t_4, v_1]$

$$v(t) \leq v(t_4) \exp B_1(t) \leq v(t_4) \exp \int_{t_4}^{t} k_6(s)ds \leq$$

$$\leq v(t_4) \min_{t\in[t_4,t_5)} \exp \int_{t_4}^{t} k_3(s)ds = -r_1 < 0,$$

which contradicts the assumption that $v(t_5) = 0$, where $B_1(t) = \int_{t_4}^{t} b_1(s)ds$ and $b_1(t) \geq k_6(t)$ for a.e. $t \in [t_4, t_5]$.

Consider the case of $A_1 9$. Let $(t_1, t_0]$ be the maximal interval in which $v(t) > 0$. We will show that $u(t) < 0$ in $[t_1, t_0]$. Suppose the contrary is true. Let $t_2 \in [t_1, t_0)$ and $(t_2, t_0]$ be the maximal interval in which $u(t) < 0$. Then $u(t_2) = 0$. We have from the first equation of the system that for any $\tau_1 \in (t_2, t_0)$ and $t \in [\tau_1, t_0]$

$$u(t) \leq u(t_0) \exp A_1(t) \leq u(t_0) \min_{t\in[t_2,t_0]} \exp \int_{t}^{t_0} -k_4(s)ds = -r < 0,$$

which contradicts the assumption that $u(t_2) = 0$, where $A_1(t) = \int_{t_0}^{t} a_1(s)ds = \int_{t}^{t_0}$ and $a_1(t) \leq k_4(t)$ for a.e. $t \in [t_2, t_0]$.

Consider the case $v(t_1) = 0$. We have [illegible] second equation of the [illegible]stem that for any $\tau_1 \in (t_1, t_0)$ and $t \in [\tau_1, t_0]$

$$v(t) \geq v(t_0) \exp B_1(t) \geq v \quad [illegible] \exp \int_{t}^{t_0} -k_5(s)ds \geq$$

$$\geq v(t_0) \min_{t\in[t_1,t_0]} \exp \int_{t}^{t_0} -k_5(s)ds = r_1 > 0.$$

which contradicts the assumption that $v(t_0) = 0$, where $B_1(t) = \int_{t_0}^t b_1(s)ds = \int_t^{t_0} -b_1(s)ds$ and $b_1(t) \le k_5(t)$ for a.e. $t \in [t_1, t_0]$.

Since $[t_1, t_0]$ is the maximal interval in which $u(t) < 0$ and $v(t) > 0$, then $t_1 = a$.

Consider the condition A_20. Let $(t_1, t_0]$ be maximal interval in which $v(t) > 0$. We will show that $u(t) \le 0$ in $[t_1, t_0]$. Suppose the contrary is true. Then one can find $t_2 \in [t_1, t_0)$ and $t_3 \in (t_1, t_0]$ such that $u(t) > 0$ in $[t_2, t_3)$ and $u(t_3) = 0$. We have from the first equation of the system that for any $\tau_1 \in (t_2, t_3)$ and $t \in [t_2, \tau_1]$

$$u(t) \ge u(t_2)\exp A_1(t) \ge u(t_2)\exp\int_{t_2}^t k_3(s)ds \ge$$

$$\ge u(t_2)\min_{t\in[t_2,t_3]}\exp\int_{t_2}^t k_3(s)ds = r > 0,$$

which contradicts the assumption that $u(t_3) = 0$, where $A_1(t) = \int_{t_2}^t a_1(s)ds$ and $a_1(t) \ge k_3(t)$ for a.e. $t \in [t_2, t_3]$.

Suppose that $v(t_1) = 0$. We have from the second equation of the system that for any $\tau_1 \in (t_1, t_0)$ and $t \in [\tau_1, t_0]$

$$v(t) \ge v(t_0)\exp B_1(t) \ge v(t_0)\exp\int_t^{t_0} -k_5(s)ds \ge$$

$$\ge v(t_0)\min_{t\in[t_1,t_0]}\exp\int_t^{t_0} -k_5(s)ds = r_1 > 0,$$

which contradicts the assumption that $v(t_0) = 0$, where $B_1(t) = \int_{t_0}^t b_1(s)ds = \int_t^{t_0} -b_1(s)ds$ and $b_1(t) \le k_5(t)$ for a.e. $t \in [t_1, t_0]$.

Consider the condition A_21. Let $(t_1, t_0]$ be maximal interval in which $u(t) < 0$. We will show that $v(t) \ge 0$ in $[t_1, t_0]$. Suppose the contrary is true. Then one can find $t_2 \in [t_1, t_0)$ and $t_3 \in (t_2, t_0]$ such that $v(t) < 0$ in $[t_2, t_3)$ and $v(t_3) = 0$. We have from the second equation of the system that for any $\tau_1 \in (t_2, t_3)$ and $t \in [t_2, \tau_1]$

$$v(t) \le v(t_2)\exp B_1(t) \le v(t_2)\exp\int_{t_2}^t k_6(s)ds \le$$

$$\le v(t_2)\min_{t\in[t_2,t_3]}\exp\int_{t_2}^t k_6(s)ds = -r < 0,$$

which contradicts the assumption that $v(t_3) = 0$, where $B_1(t) = \int_{t_0}^t b_1(s)ds = \int_t^{t_0} -b_1(s)ds$ and $b_1(t) \le k_6(t)$ for a.e. $t \in [t_2, t_3]$.

Suppose that $u(t_1) = 0$. We have from the first equation of the system that for any $\tau_1 \in (t_1, t_0)$ and $t \in [\tau_1, t_0]$

$$u(t) \le u(t_0)\exp A_1(t) \le u(t_0)\exp\int_t^{t_0} -k_1(s)ds \le$$

$$\le u(t_0)\min_{t\in[t_1,t_0]}\exp\int_t^{t_0} -k_1(s)ds = -r_1 < 0,$$

which contradicts the assumption that $u(t_1) = 0$, where $A_1(t) = \int_{t_0}^t a_1(s)ds = \int_t^{t_0} -a_1(s)ds$ and $a_1(t) \ge k_4(t)$ for a.e. $t \in [t_1, t_0]$.

Since $[t_1, t_0]$ is the maximal interval, in which $u(t) = 0$ and $v(t) \ge 0$, then $t_1 = a$.

Remark. We note that in the proof of A_15 we proved in fact more than the validity of A_15, namely A'_{15}) for any $t_0 \in (a, b]$ and $t \in [a, t_0)$ the conditions $x_1(t_0) < x_2(t_0)$ and $y_1(t_0) = y_2(t_0)$ imply that $x_1(t) < x_2(t)$ and $y_1(t) > y_2(t)$.

References

[1] Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1953. - 474 с.

[2] Гудков В.В., Клоков Ю.А., Лепин А.Я., Пономарев В.Д. Двухточечные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. - Рига: Зинатне, 1973. 135 с.

[3] Васильев Н.И., Клоков Ю.А. Основы теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. - Рига: Зинатне, 1978. - 183 с.

[4] Клоков Ю.А. Краевые задачи с условием на бесконечности для уравнений математической физики. - Рига: РИИГВФ, 1963. - 107 с.

[5] Васильев Н.И. Некоторые краевые задачи для системы двух дифференциальных уравнений первого порядка, I. // Латв.мат.ежегодник. - Рига: Зинатне, 1969. - Вып.5. - С.11-24.

[6] Васильев Н.И. Некоторые краевые задачи для системы двух дифференциальных уравнений первого порядка, II. // Латв.мат.ежегодник. - Рига: Зинатне, 1969. - Вып.6. - С.31-39.

[7] Клоков Ю.А. Несколько замечаний о единственности решения краевых задач. // Дифференц.уравнения. - 1970. - Т.6, N 2. - С.276-282.

[8] Клоков Ю.А. Единственность решения краевых задач для системы двух дифференциальных уравнений первого порядка // Дифференц.уравнения. - 1972. - Т.8, N 3. - С.1377-1385.

[9] Пономарев В.Д. О единственности решения некоторых краевых задач для системы двух дифференциальных уравнений первого порядка // Латв.мат.ежегодник. - Рига: Зинатне, 1974. - Вып.14. - С.157-176.

Пономарев В.Д. О поведении решений системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

Аннотация. Для двух решений системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$x' = h(t,x,y), \quad y' = f(t,x,y),$$

где функции $h, f : [a,b] \times R^2 \to R$ удовлетворяют условиям Каратеодори, устанавливаются соотношения между их компонентами.

УДК 517.927

V.Ponomarevs. Par divu pirmās kārtas parasto diferenciālvienādojumu sistēmas atrisinājumu uzvedību.

Anotācija. Diviem parasto diferenciālvienādojumu sistēmas

$$x' = h(t, x, y), \quad y' = f(t, x, y),$$

atrisinājumiem, kur funkcijas $h, f : [a, b] \times R^2 \to R$ apmierina Karateodori nosacījumus, atrastas sakarības starp to komponentēm.

Institute of Mathematics
and Computer Science,
University of Latvia
Rainis blvd. 29

Received 23.04.96

On the existence of a solution to a boundary value problem for functional-differential equation

V.Ponomarev

Summary. Conditions for the existence of a solution to a boundary value problem for functional-differential equation are given.
MSC 34K10

Consider boundary value problems

$$x' = Fx + F_0x, \tag{1}$$

$$Lx = r, \tag{2}$$

$$x' = Fx, \tag{3}$$

$$Lx = 0, \tag{4}$$

where $F, F_0 \quad AC(I,R^n) \to L(I,R^n)$, $L \quad AC(I,R^n) \to R^n$, $r \in R^n$, $n \in \{1,2,...\}$, $I = [a,b]$, $-\infty < a < b < \infty$, $AC(I,R^n)$ - the space of absolutely continuous functions $x : I \to R^n$ with a norm

$$\|x\| = | x(a) | + \int_a^b | x'(s) | ds,$$

$L(I,R)$ - the space of Lebesque-integrable functions $y : I \to R^n$ with a norm

$$\|y\| = \int_a^b | y(s) | ds,$$

where $| x | = max\{| x_i | : i \in \{1,2,...,n\}\}$ - the norm in R^n.

I. We suppose in the sequel that the BVP has a unique solution, the trivial one.

Solutions of the problem (1), (2); (3), (4) are identical with solutions of the equations

$$x(t) = \int_a^t (Fx)(s)ds + \int_a^t (F_0x)(s)ds + Lx + x(a) - r,$$

$$x(t) = \int_a^t (Fx)(s)ds + Lx + x(a),$$

respectively.

Define the operators $B, B_0 \quad AC(I, R^n) \to AC(I, R^n)$, $A \quad [0,1] \times AC(I, R^n) \to AC(I, R^n)$ as follows:

$$(Bx)(t) = \int_a^t (Fx)(s)ds + Lx + x(a),$$

$$(B_0x)(t) = \int_a^t (Fx)(s)ds - r,$$

$$A(\lambda, x) = Bx + \lambda B_0 x.$$

The the problem (3), (4) can be written as

$$x = Bx,$$

and the problem (1,2) as

$$x = Bx + B_0 x.$$

To begin we show that there exists $\mu \in (1, \infty)$ such that for any solution v of the equation

$$x = A(\lambda, x), \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \tag{5}$$

an estimate

$$\|v\|_{AC} \leq \mu\lambda \|B_0 v\|_{AC} \tag{6}$$

is valid.

Suppose the contrary is true. Then one can find a sequence v_n, $n = 1, 2, \ldots$ of nontrivial solution of the equation (5), and λ_n, $n = 1, 2, \ldots$ such that

$$\|v_n\|_{AC} > n\lambda_n \|B_0 v_n\|_{AC}$$

or

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\lambda_n \|B_0 v_n\|_{AC}}{\|v_n\|_{AC}} \leq \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0. \tag{7}$$

II. Suppose that the operators B and B_0 are completely continuous, and B is also homogeneous.

The equation (5) implies

$$\frac{v_n}{\|v_n\|_{AC}} = \frac{Bv_n}{\|v_n\|_{AC}} + \frac{\lambda_n B_0 v_n}{\|v_n\|_{AC}},$$

and, letting $v_n^* = \frac{v_n}{\|v_n\|_{AC}}$, $n = 1, 2, \ldots$, one obtains

$$v_n^* = Bv_n^* + \frac{\lambda_n B_0 v_n}{\|v_n\|_{AC}}. \tag{8}$$

Since B is completely continuous, it maps the bounded set

$$\{v_n^* \quad v_n^* = \frac{v_n}{\|v_n\|_{AC}}, n = \{1, 2, \ldots\}\}$$

into compact. Hence one can choose a subsequence $v_{n_k}^*$, $k = 1, 2, \ldots$ from the sequence v_n^*, $n = 1, 2, \ldots$ which converges to $v_0 \in AC(I, R^n)$, and $\|v_0\|_{AC} = 1$.

Passing to the limit in (8), we have $v_0 = Bv_0$, in view of (7), which contradicts the ...ss of a solution to the problem (3), (4).

...stimate.

III. Suppose that the inequality

$$\|B_0x\|_{AC} \le f_0 + k\|x\|_{AC},$$

is true, where $f_0, k \in [0, \infty)$.

Then we get from (6) that

$$\|v\|_{AC} \le \mu\lambda\|B_0v\| \le \mu\lambda f_0 + \mu\lambda k\|v\|_{AC} \le \mu\lambda f_0 + \mu\lambda(k+1)\|v\|_{AC}.$$

Hence

$$\|v\|_{AC} \le \frac{\mu\lambda f_0}{(1-\mu\lambda)(k+1)}.$$

IV. Let for some $k_0 \in (0, \infty)$ such that

$$k_0 > \frac{\mu\lambda f_0}{(1-\mu\lambda)(k+1)}$$

the condition

$$\|Bx\|_{AC} \le k_0, \quad \|x\|_{AC} = k_0$$

be fulfilled.

We get now the existence of a solution to the problem, by application of the method of Leray-Schauder (cfr. [1], v.5.37.6, p.298).

Thus, a theorem is proved.

Theorem. 1 *Let conditions I-IV hold. Then there exists a solution to the problem (1), (2).*

Remark. This note sharpens the results in [2] and generalizes the results in [3].

References

[1] Красносельский М.А., Забрейко П.П. Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука, 1975.

[2] Пономарев В.Д. Существование решений краевой задачи для функционально-дифференциального уравнения первого порядка // Latv.Univ.Zinatn.Raksti. Matemātika. Diferenciālvienādojumi. 1994. V.593. 50.-53.lpp.

[3] Krakowiak A. On the existence of solution of homogeneous boundary value problem for ordinary differential equation // Zezs.nauk.U.J.Acta math. 1987. N 26. P.179-181.

Пономарев В.Д. Существование решения краевой задачи для функционально-дифференциального уравнения.

Аннотация. Даются условия существования решения краевой задачи для функционально-дифференциального уравнения.

УДК 517.985

V.Ponomarevs. Funkcionāla diferenciālvienādojuma robežproblēmas atrisinājuma eksistence.

Anotācija. Tiek doti atrisinājuma eksistences nosacījumi funkcionāla diferenciālvienādojuma robežproblēmai.

Institute of Mathematics
and Computer Science,
University of Latvia
Rainis blvd. 29

Received 27.02.96

Sturm-Lioville boundary value problem for two dimensional differential system with asymptotically asymmetric nonlinearities

O. Zayakina – F. Sadyrbaev

Summary. Estimations of the number of solutions for nonlinear system

$$x' = f(t,y) + u(t,x,y), \quad y' = -g(t,x) + v(t,x,y),$$

with boundary conditions

$$x(a)\cos\alpha - y(a)\sin\alpha = A, \quad x(b)\cos\beta - y(b)\sin\beta = B$$

are given provided that there exists at least one solution to the problem. The limits $f_\pm := \lim_{y\to\pm\infty} \frac{f(t,y)}{y}$ and $g_\pm := \lim_{x\to\pm\infty} \frac{g(t,x)}{x}$ are supposed to exist and in general $g_- \neq g_+$, $f_- \neq f_+$. Nonlinearities $u(t,x,y)$ and $v(t,x,y)$ are sublinear. Consequences for second order equations are discussed.

1991 MSC 34B15

1 Introduction

We consider the boundary value problem

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} \qquad f(t,y) + u(t,x,y), \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} \qquad -g(t,x) + v(t,x,y), \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x(a)\cos\alpha - y(a)\sin\alpha \qquad & A, \\ x(b)\cos\beta - y(b)\sin\beta \qquad & B. \end{aligned}$$

where $f(t,y)$, $g(t,x)$, $u(t,x,y)$, $v(t,x,y)$ are continuously differentiable, $0 \leq \alpha < \pi$, $0 < \beta \leq \pi$.

The goal of this paper is to obtain estimations of the number of solutions to the problem (1), (2) provided that the principal part defined by the functions $f(t,y)$ and $g(t,x)$, is piece-wise linear at infinity. We suppose that there exist uniform in t limits

$$\lim_{y\to\pm\infty}\frac{f(t,y)}{y}=f_{\pm}(t),\qquad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{g(t,x)}{x}=g_{\pm}(t).$$

As a particular case, system (1) includes a second order equation

$$x''+g(x)=v(t,x,x') \tag{3}$$

with asymptotically piece-wise linear $g(x)$.

Two-point boundary value problems for equations of the type (3) were studied intensively by a number of authors (see [3], [8], [5] and references therein) under the assumption that limits

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{g(x)}{x}=g_{\pm}(t)$$

exist and generally $g_{-}\neq g_{+}$.

As a general idea, a comparison with the associated linear eigenvalue problem

$$x''+\lambda x=0, \tag{4}$$

$$\begin{array}{ll} x(a)\cos\alpha-x'(a)\sin\alpha & 0,\\ x(b)\cos\beta-x'(b)\sin\beta & 0, \end{array} \tag{5}$$

was employed. For example, in the works [5] and [8] estimations of the number of solutions were established for Dirichlet type problem for (3) with very specific right hand sides. These estimations depend on the number of the associated eigenvalues λ_k lying in the interval (g_{-},g_{+}). Simple examples of equations of the type (3) show however that the number of solutions to the problem (3),(5) depends rather on the interrelation of the associated eigenvalues λ_k with the right hand side in (3) than on the number of λ_k in (g_{-},g_{+}). This interrelation was investigated by the first author in [11]. It was established that the number of solutions to the problem (1),(2) depends substantially on the local characteristic of some particular solution $\xi(t)$ the existence of which was assumed implicitly in the works [5], [6], and on the behavior of the nonlinearity $g(x)$ at infinity, that is, on the numbers g_{-} and g_{+}.

In this paper we extend the results of [11] to the case of the differential system (1). As far as the authors know, boundary value problems with asymptotically asymmetric nonlinearities for systems of the form (1) were not considered previously.

Our approach uses much of the technique of the angular function. We would like mention the results of A. Perov [2] who considered a symmetric case ($g_{-}=g_{+},f_{-}=f_{+}$) of the system (1).

Recent works [10] and [9] also employed the angular function technique for investigation of similar problems.

The structure of the work is the following. In the second section following A. Perov [2] we introduce oscillatory classes of linear and piece-wise linear second order systems. Preliminary results are given in the third section. In the fourth section main results are given.

We consider the boundary value problem (1), (2) under the following assumtions on the functions f,g,u,v :

(A1) $f, g : [a, b] \times R \to R$, $u, v : [a, b] \times R^2 \to R$ are continuous functions along with partial derivatives $\frac{\partial f}{\partial y}(t, y)$, $\frac{\partial g}{\partial x}(t, x)$, $\frac{\partial u}{\partial x}(t, x, y)$, $\frac{\partial u}{\partial y}(t, x, y)$, $\frac{\partial v}{\partial x}(t, x, y)$, $\frac{\partial v}{\partial y}(t, x, y)$;

(A2) the limits $\lim_{y \to \pm\infty} \frac{f(t, y)}{y} = f_\pm(t)$, $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{g(t, x)}{x} = g_\pm(t)$ exist and are uniform in $t \in [a, b]$;

(A3) $\lim_{|x|+|y| \to +\infty} \frac{u(t, x, y)}{|x| + |y|} = 0$ and $\lim_{|x|+|y| \to +\infty} \frac{v(t, x, y)}{|x| + |y|} = 0$ uniformly in $t \in [a, b]$;

(A4) there exists a particular solution $(\xi(t), \eta(t))$ of the problem (1),(2).

A definite role in our considerations will play the system of equations of variations with respect to $(\xi(t), \eta(t))$

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} & \frac{\partial u}{\partial x}(t, \xi(t), \eta(t))z + (\frac{\partial f}{\partial y}(t, \eta(t)) + \frac{\partial u}{\partial y}(t, \xi(t), \eta(t)))w, \\ \frac{dw}{dt} & -(\frac{\partial g}{\partial x}(t, \xi(t)) - \frac{\partial v}{\partial x}(t, \xi(t), \eta(t)))z + \frac{\partial v}{\partial y}(t, \xi(t), \eta(t))w \end{cases} \tag{6}$$

and a piece-wise linear system

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} & = & f_+(t)y^+ - f_-(t)y^-, \\ \frac{dy}{dt} & & -g_+(t)x^+ + g_-(t)x^-, \end{cases} \tag{7}$$

where $x^+ = \max\{x(t), 0\}$, $x^- = x^+ - x(t)$, $y^+ = \max\{y(t), 0\}$, $y^- = y^+ - y(t)$.

Notice that the system (6) describes the behavior of solutions of (1) near $(\xi(t), \eta(t))$ and the system (7) characterizes the behavior of solutions of (1) at infinity.

2 Definitions

In this section we consider a linear system

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} & & a(t)x + b(t)y, \\ \frac{dy}{dt} & = & -c(t)x + d(t)y \end{cases} \tag{8}$$

and piece-wise linear system (7).

We introduce the angular function $\varphi(t)$ by

$$x(t) = \rho(t) \sin \varphi(t), \quad y(t) = \rho(t) \cos \varphi(t), \text{ where } \rho^2(t) = x^2(t) + y^2(t).$$

Notice that increasing of $\varphi(t)$ corresponds to clock-wise rotation of the vector $(x(t), y(t))$ on a phase plane.

In the work [2] A. Perov introduced classes G_k associated with the homogeneous boundary conditions

$$\begin{aligned} x(a)\cos\alpha - y(a)\sin\alpha &= 0, \\ x(b)\cos\beta - y(b)\sin\beta &= 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Definition 1 (Perov) *A system of the form (8) is said to be of Class G_k with respect to the boundary conditions (9) if the angular function $\varphi(t)$ defined by $\varphi(a) = \alpha$, satisfies the condition*

$$\beta + k\pi < \varphi(b) < \beta + (k+1)\pi \tag{10}$$

for some integer k.

We introduce an analogous definition for piece-wise linear systems of the type (7). Notice that, unlike the symmetric case (8), multiplication of a solution $(x(t), y(t))$ by -1 (or, equivalently, defining of the angular function $\varphi(t)$ by $\varphi(a) = \alpha + \pi$) may not yield a solution to the problem.

Definition 2 *The system (7) is of Class $G_{m,n}$ with respect to the boundary conditions (9) if the angular functions $\theta_+(t)$ and $\theta_-(t)$, defined by $\theta_+(a) = \alpha$, $\theta_-(a) = \alpha + \pi$, satisfy the conditions*

$$\beta + m\pi < \theta_+(b) < \beta + (m+1)\pi, \tag{11}$$

$$\beta + (n+1)\pi < \theta_-(b) < \beta + (n+2)\pi \tag{12}$$

for some integers m and n.

Remark. Integers m and n cannot be chosen arbitrarily. They can differ at most by unity as lemma 3.2 below states

Remark. Notice that right sides of both systems (7) and (8) are positively homogeneous. Recall that $f(t,x,y)$ is said to be positively homogeneous if $f(t,cx,cy) = cf(t,x,y)$ for $c \geq 0$. Hence solutions of (7) and (8) defined by $\theta(a) = \alpha$, $\varphi(a) = \alpha$, can be obtained by multiplying of the normalized solution ($\rho^2(0) = 1$) with appropriate positive number.

3 Preliminary results

Lemma 3.1 *Let $\theta_1(t)$ and $\theta_2(t)$ be the angular functions of the system (7), and let the inequality $\theta_1(a) \leq \theta_2(a)$ hold.*

Then $\theta_1(t) \leq \theta_2(t)$ for any $t \in [a,b]$.

Proof. By application of theorem 15.2 of [2].

Lemma 3.2 *Let m and n be the numbers in (11),(12).*

Then $|m - n| \leq 1$.

Proof. Let $\theta_-(t)$ and $\theta_+(t)$ be the angular functions of the system (7) defined by $\theta_+(a) = \alpha, \theta_-(a) = \alpha + \pi$. Consider the angular function $\theta_{++}(t)$ defined by $\theta_{++}(a) = \alpha + 2\pi$. Since solutions of (7) are uniquely defined by the initial data, we have that $\theta_{++}(t) = \theta_+(t) + 2\pi$ for any $t \in [a, b]$.

By lemma 3.1,

$$\theta_+(b) \le \theta_-(b) \le \theta_{++}(b) = \theta_+(b) + 2\pi.$$

In view of (11)

$$\beta + m\pi < \theta_-(b) < \beta + (m+3)\pi. \tag{13}$$

Comparing (13) and (12), one obtains that

$$\beta + m\pi < \theta_-(b) < \beta + (n+2)\pi \tag{14}$$

and

$$\beta + (n+1)\pi < \theta_-(b) < \beta + (m+3)\pi. \tag{15}$$

Hence $|m - n| < 2$. ∎

Remark. One has for the boundary value problem $x'' = -k^2 x^+$, $x(0) = 0$, $x(\pi) = 0$ with $1 < k < 2$ that $m = 1$ and $n = 0$.

4 Main result

Consider the system

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} & F(t, y) + U(t, x, y), \\ \frac{dy}{dt} = & -G(t, x) + V(t, x, y), \end{cases} \tag{16}$$

where

$$F(t, y) = f(t, y + \eta(t)) - f(t, \eta(t)),$$
$$G(t, x) = g(t, x + \xi(t)) - g(t, \xi(t)),$$
$$U(t, x, y) = u(t, x + \xi(t), y + \eta(t)) - u(t, \xi(t), \eta(t)),$$
$$V(t, x, y) = v(t, x + \xi(t), y + \eta(t)) - v(t, \xi(t), \eta(t)).$$

Notice that still

$$\lim_{y \to \pm\infty} \frac{F(t, y)}{y} = f_\pm(t), \qquad \lim_{x \to \pm\infty} \frac{G(t, x)}{x} = g_\pm(t).$$

Obviously, the system (16) with homogeneous boundary conditions

$$\begin{aligned} x(a)\cos\alpha - y(a)\sin\alpha &= 0, \\ x(b)\cos\beta - y(b)\sin\beta &= 0 \end{aligned} \tag{17}$$

has the trivial solution.

Let $\phi_+(t,\rho_0)$ and $\phi_-(t,\rho_0)$ denote the angular functions for system (16) with the initial conditions

$$\phi_+(a,\rho_0) = \alpha, \quad x^2(a) + y^2(a) = \rho_0^2 \tag{18}$$

$$\phi_-(a,\rho_0) = \alpha + \pi, \quad x^2(a) + y^2(a) = \rho_0^2 \tag{19}$$

respectively.

Lemma 4.1 *Suppose that the variational system (6) is of Class G_k for some $k \geq 0$.*
Then $\epsilon > 0$ exists such that, for $\rho_0 \in (0,\epsilon)$ the inequalities

$$\beta + k\pi < \phi_+(b,\rho_0) < \beta + (k+1)\pi, \tag{20}$$

$$\beta + (k+1)\pi < \phi_-(b,\rho_0) < \beta + (k+2)\pi \tag{21}$$

hold.

Proof. By definition of the class G_k for the angular function $\varphi(t)$ of the variational system we have that

$$\beta + k\pi < \varphi_+(t) < \beta + (k+1)\pi < \varphi_-(t) < \beta + (k+2)\pi,$$

where $\varphi_+(t) = \varphi(t)$, $\varphi_-(t) = \varphi(t) + \pi$.

By continuous dependence of solutions of (16), (17) on the initial data and by differentiability with respect to the initial data we have that $\phi_\pm(t,\rho_0) \to \varphi_\pm(t)$ as $\rho_0 \to 0$, respectively. ∎

Lemma 4.2 *The functions $\phi_+, \phi_- : [a,b] \times R_+ \to R$ are continuous.*

Proof. Follows immediately from continuous dependence of solutions on the initial data.

Lemma 4.3 *Let $\theta_+(t)$ and $\theta_-(t)$ be the angular functions of solutions to the system (7) with initial values $\theta_+(a) = \alpha$, $\theta_-(a) = \alpha + \pi$.*
Then $\phi_\pm(b,\rho_0) \to \theta_\pm(b)$ as $\rho_0 \to +\infty$.

Proof. Consider the case of $\theta_+(t)$. Proof for $\theta_-(t)$ is analogous. Write the system (16) in the form

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} \qquad \chi(t,y) + U_1(t,x,y), \\ \\ \dfrac{dx}{dt} \qquad \kappa(t,x) + V_1(t,x,y), \end{cases} \tag{22}$$

where

$$\chi(t,y) := f_+(t)y^+ - f_-(t)y^-,$$
$$\kappa(t,x) := g_+(t)x^+ - g_-(t)x^-$$

and

$${}_1(t,x,y) = U(y,x,y) + F(t,y) - f_+(t)y^+ + f_-(t)y^-,$$
$$,x,y) = V(y,x,y) + G(t,x) + g_+(t)x_+ - g^-(t)x^-$$

are bounded functions. Consider the solution $(x(t,\rho_0), y(t,\rho_0))$ of the system (22), defined by the initial data (18). Consider also the solution (z, w) of the system (7), defined by the initial conditions

$$\theta_+(a) = \alpha, \quad z^2(a) + w^2(a) = 1. \tag{23}$$

Making use of formulas for polar variables one gets that $\theta_+(t)$ solves the differential equation

$$\theta' = \cos\theta \cdot \chi(t, \cos\theta) + \sin\theta \cdot \kappa(t, \sin\theta) =: \omega(t, \theta), \tag{24}$$

while $\phi_+(t, \rho_0)$ satisfies

$$\phi' = \frac{1}{\rho(t)}[\cos\phi \cdot U_1 - \sin\phi \cdot V_1] + \omega(t, \phi), \tag{25}$$

where in turn $\rho(t)$ is a solution of

$$\rho' = U_1 \sin\phi + V_1 \cos\phi + \rho \sin\phi \cdot \chi(t, \cos\phi) - \rho\cos\phi \cdot \kappa(t, \sin\phi). \tag{26}$$

Since the right side of (26) grows in ρ like linear function, solutions of (26) extend to the whole interval $[a, b]$. Then, by Theorem 15.1 in [2], there exists $\Delta(\rho_0)$ such that $\Delta(\rho_0) \to +\infty$ as $\rho_0 \to +\infty$ and $\rho(t) > \Delta(\rho_0)$ for $t \in [a, b]$.

Then $\phi_+(t, \rho_0) \to \theta_+(t)$ as $\rho_0 \to +\infty$ uniformly in t, and the assertion of lemma follows. ■

Theorem 4.1 *Let conditions* **(A1)-(A4)** *hold. Suppose that the variational system (6) is of Class G_k. Suppose also that the piece-wise linear system (7) is of Class $G_{m,n}$.*

Then the number N of solutions of the boundary value problem (1),(2), (ξ, η) included, satisfies the estimation

$$N \geq |m - k| + |k - n| + 1.$$

Proof. Let (u, v) and (x, y) be solutions to the problems (16), (17) and (1),(2) respectively. We have

$$x(t) = u(t) + \xi(t), \quad y(t) = v(t) + \eta(t).$$

Consider the solution $(u(t,\rho), v(t,\rho))$. We have, by application of lemma 4.1, that for $\rho \in (0, \varepsilon)$

$$\beta + k\pi < \phi_+(b, \rho) < \beta + (k+1)\pi \tag{27}$$

On the other hand, lemma 4.3 implies for $\rho \to +\infty$

$$\beta + m\pi < \phi_+(b, \rho) < \beta + (m+1)\pi. \tag{28}$$

By lemma 4.3 $\phi_+(b, \rho)$ is continuous with respect to ρ. Hence $\phi_+(b, \rho)$ passes all values of the form $\beta + i\pi$, where $i \in \{k+1, \ldots, m\}$ or $i \in \{m+1, \ldots, k\}$ depending on which of the number k or m is greater.

Thus we obtain at least $|m - k|$ solutions of the problem (16), (17) and of the problem (1), (2).

The same type argument for $\phi_-(b, \rho)$ yield additionally at least $|k - n|$. ■

5 Second order equations

In this section we consider the second order equation

$$x'' = -\psi(x')g(t,x) + u(t,x,x') \tag{29}$$

along with the Dirichlet boundary conditions

$$x(a) = A, \quad x(b) = B. \tag{30}$$

We consider the boundary value problem (29), (30) under the following assumtions on the functions ψ, g, u

(E1) ψ $R \to (0,+\infty)$, g $[a,b] \times R \to R$, u $[a,b] \times R^2 \to R$ are continuous functions along with partial derivatives $\frac{\partial\psi}{\partial x'}(t,x')$, $\frac{\partial g}{\partial x}(t,x)$, $\frac{\partial u}{\partial x}(t,x,x')$, $\frac{\partial u}{\partial x'}(t,x,x')$;

(E2) the limits $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{g(t,x)}{x} = g_\pm(t)$, $\lim_{y\to\pm\infty} \psi(y) = \psi_\pm$, $\psi_+ > \psi_- > 0$, exist and $g_\pm$ are uniform in $t \in [a,b]$;

(E3) $\lim_{|x|+|y|\to+\infty} \frac{u(t,x,y)}{|x|+|y|} = 0$ uniformly in $t \in [a,b]$;

(E4) there exists a particular solution $\xi(t)$ of the problem (29),(30);

(E5) $\psi(y) > 0$ for any $y \in R$.

In order to reduce the equation (29) to the system of the form (1) we introduce the function F by

$$\frac{dF}{dy} = \psi(F), \quad F(0) = 0. \tag{31}$$

In view of **(E2)** and **(E5)**, $F(y)$ is continuously differentiable and strictly increasing function. Then, the reciprocal function

$$y = F^{-1}(z)$$

is defined.

We introduce now the angular function $\varphi(t)$ for solution $x(t)$ of the equation (29) by

$$\tan\varphi(t) = \frac{x(t)}{F^{-1}(x'(t))}. \tag{32}$$

In the case of $\psi(x') = 1$ the angular function $\varphi(t)$ is given by

$$\tan\varphi(t) = \frac{x(t)}{x'(t)}. \tag{33}$$

The equation of variations with respect to a solution $\xi(t)$ is now

$$\begin{aligned}&(-\psi(\xi'(t))\frac{\partial g}{\partial x}(t,\xi(t)) + \frac{\partial u}{\partial x}(t,\xi(t),\xi'(t)))y+\\ &+ \quad (-\frac{\partial\psi}{\partial x'}(\xi'(t))g(t,\xi(t)) + \frac{\partial u}{\partial x'}(t,\xi(t),\xi'(t)))y'.\end{aligned} \tag{34}$$

Definition 3 *Accordingly to definitions of oscillatory classes given in [2] we will say that the linear second order equation*

$$y'' = p(t)y + q(t)y'$$

is of Class G_k with respect to the boundary conditions

$$y(a) = 0, \quad y(b) = 0,$$

if the angular function $\varphi(t)$ defined by $\varphi(a) = 0$, satisfies the inequalities

$$\pi + k\pi < \varphi(b) < \pi + (k+1)\pi \tag{35}$$

for some integer k.

Consider also the piece-wise linear system

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \psi_+ y^+ - \psi_- y^-, \\ \\ \frac{dy}{dt} = -g_+(t)x^+ + g_-(t)x^-, \end{cases} \tag{36}$$

which plays the role of a limiting system (7) for a system (37) equivalent to the second order equation under consideration.

Theorem 5.1 *Let the conditions* **(E1)** *to* **(E5)** *hold. Suppose that the equation of variations (34) is of Class G_k (in the sense of definition 3) and the associated piece-wise linear system (36) is of Class $G_{m,n}$ with respect to the boundary conditions (30).*

Then the boundary value problem (29), (30) has at least $|m-k| + |k-n| + 1$ solutions, $\xi(t)$ included.

Proof. We prove the result in several steps.

Step 1. We show now that the equation (29) is equivalent to the system of the form (1).

Introduce variable y by $x' = F(y)$ where F is defined in (31). We have then

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(y), \\ \\ \frac{dy}{dt} = -g(t,x) + v(t,x,y). \end{cases} \tag{37}$$

where

$$v(t,x,y) = \frac{u(t,x,F(y))}{\psi(F(y))}.$$

On the other hand, differentiating both sides in the first line of (37) with respect to t one obtains that

$$x'' = \frac{dF}{dy}(y)(-g(t,x) + v(t,x,y)) = -\psi(x')g(t,$$

Since $\psi(s)$ is continuous and has positive limits as s tends to $+\infty$ and $-\infty$, $\frac{dF}{dy}$ is separated from zero and

$$\lim_{y\to\pm\infty}\frac{F(y)}{y}=\lim_{y\to\pm\infty}\frac{dF}{dy}=\lim_{y\to\pm\infty}\psi(F(y))=\psi_{\pm}.$$

Step 2. One easily can verify that the system (37) meets the conditions **(A1)**-**(A4)** of section 1, and the vector-function

$$(\xi(t),\eta(t))=(\xi(t),F^{-1}(\xi'(t)))$$

solves the system (37) and satisfies the boundary conditions

$$\begin{aligned} x(a)\cos\alpha-y(a)\sin\alpha &= A,\\ x(b)\cos\beta-y(b)\sin\beta & \quad -B, \end{aligned} \tag{38}$$

where $\alpha=0,\ \beta=\pi$.

Step 3. Routine calculations show that the variational system associated with the system (37)

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial y}(\eta(t))w,\\ \\ \frac{dw}{dt} & \quad (-\frac{\partial q}{\partial x}(t,\xi(t))+\frac{\partial v}{\partial x}(t,\xi(t),\eta(t)))z+\frac{\partial v}{\partial y}(t,\xi(t),\eta(t))w \end{cases} \tag{39}$$

is equivalent to the equation of variations (34).

Step 4. Let $x(t)$ be a solution to the equation (29) and $\varphi(t)$ be the angular function of $x(t)$.

Then $(x(t),F^{-1}(x'(t)))=(x(t),y(t))$ is a solution of (37). Let $\phi(t)$ be the angular function for solutions of (37).

Hence

$$\tan\varphi(t)=\frac{x(t)}{F^{-1}(x'(t))}=\frac{x(t)}{y(t)}=\tan\phi(t).$$

Step 5. We conclude then that the system (39) with the boundary conditions $z(a)=0,\ z(b)=0$ belongs to G_k. Since the limiting system (36) with boundary conditions $x(a)=0,\ x(b)=0$ is of Class $G_{m,n}$ we obtain, by application of theorem 4.1, that the boundary value problem (29),(30) has at least $|m-k|+|k-n|+1$ solutions. ■

As an example consider the boundary value problem

$$x''=-\psi(x')x, \tag{40}$$

$$x(0)=0,\quad x(\pi)=0, \tag{41}$$

where ψ satisfies **(E1)** and **(E2)**.

Consider also eigenvalue problem

$$\begin{gathered} x''+\lambda x=0,\\ x(0)=0,\quad x(\pi)=0. \end{gathered} \tag{42}$$

Theorem 5.2 *Let conditions (E1) and (E2) hold for the function ψ in the equation (40). Suppose also that the inequalities*

(E6) $\lambda_k < \psi(0) < \lambda_{k+1}$;

(E7) $\dfrac{1}{N+1} < \dfrac{1}{2\sqrt{\psi_+}} + \dfrac{1}{2\sqrt{\psi_-}} < \dfrac{1}{N}$

hold for some integers k and N, where λ_i are eigenvalues of the problem (42). Then the problem (40), (41) has at least $2|N-k|$ nontrivial solutions.

Proof. Equation of variations for (40) with respect to the trivial solution $\xi = 0$ is

$$y'' = -\psi(0)y. \tag{43}$$

By virtue of (E6), solutions of (43) with initial values $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$ are such that $x(\pi) \neq 0$ and the corresponding angular function ϕ satisfies

$$\pi + (k-1)\pi < \phi(\pi) < \pi + k\pi.$$

Therefore equation (43) is of Class G_k.

On the other hand, system (37) for (40) is

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = F(y), \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = -x, \end{cases} \tag{44}$$

where $x' = F(y)$ and F is defined in (31).
The limiting system (36) is now

$$\begin{cases} x' = \psi_+ y^+ - \psi_- y^-, \\[2ex] y' = -x, \end{cases} \tag{45}$$

and we are looking for the Class $G_{m,n}$ to which (45) belongs with respect to the boundary conditions (30). Let θ_+ and θ_- be the angular functions for (45) with initial values $\theta_+(0) = 0$ and $\theta_+(0) = \pi$. Considering (45) as a single second order equation

$$y'' = -\psi_+ y^+ + \psi_- y^- \tag{46}$$

and looking for solutions $y(t)$ with initial values $y'(0) = 0$, $y(0) = \pm 1$, we obtain from (E7) that

$$N < \theta_+(\pi) - \theta_+(0) < N + 1$$

and

$$N < \theta_-(\pi) - \theta_-(0) < N + 1.$$

Then $m = n = N$ and, by theorem 5.1, the total number of nontrivial solutions is $2|N-k|$. ■

Remark. In the result above we compare parameters of our problem $\psi(0)$, ψ_+ and ψ_- with spectra of Dirichlet type eigenvalue problem (43) and Neumann type problem for (46).

6 Boundary conditions of mixed type

In this section we consider the nonlinear system

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} & f(t,y) + u(t,x,y), \\ \\ \frac{dy}{dt} & -g(t,x) + v(t,x,y), \end{cases} \tag{47}$$

along with the boundary conditions of the mixed type

$$x(0) = A,\ y(\pi) = B. \tag{48}$$

The main result restated for the problem (47),(48) is as follows.

Theorem 6.1 *Let the conditions* **(A1)** *to* **(A4)** *hold. Assume that the angular function $\varphi(t)$ of solutions of the variational system (6), defined by the initial condition $\varphi(0) = 0$, satisfies the inequalities*

$$\pi/2 + k\pi < \varphi(\pi) < \pi/2 + (k+1)\pi. \tag{49}$$

Suppouse that the angular functions $\theta_+(t)$ and $\theta_-(t)$ of solutions of the system (6) defined by the conditions $\theta_+(0) = 0, \quad \theta_-(0) = \pi$, satisfy the inequalities

$$\pi/2 + m\pi < \theta_+(\pi) < \pi/2 + (m+1)\pi, \tag{50}$$

$$\pi/2 + (n+1)\pi < \theta_-(\pi) < \pi/2 + (n+2)\pi, \tag{51}$$

where m and n are integers.

Then the total number of solutions to the boundary value problem (47), (48) is at least $|m-k| + |k-n| + 1$.

Consider now the problem

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} & f(y) + u(t,y) + se_2(t), \\ \\ \frac{dy}{dt} & -g(x) + v(t,x) + se_1(t), \end{cases} \tag{52}$$

$$x(0) = 0,\ y(\pi) = 0, \tag{53}$$

where $e_1(t) = \sin t/2, \quad e_2(t) = \cos t/2$, s is a parameter.

We investigate it by comparison with the eigenvalue problem

$$\begin{gathered} x'' + \lambda x = 0, \\ x(0) = 0, \quad x'(\pi) = 0. \end{gathered} \tag{54}$$

Notice that $e_1(t)$ is the first eigenfunction of (54).

Theorem 6.2 *Let the conditions* **(A1)** *to* **(A4)** *hold. Suppose that the limits*

$$\lim_{y\to\pm\infty}\frac{f(y)}{y}=f_\pm,\qquad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{g(x)}{x}=g_\pm$$

exist and are constant. Moreover, assume that the inequalities

$$\textbf{(A5)}\qquad f_-g_- < \lambda_1 < \qquad < \lambda_k < f_+g_+ < \lambda_{k+1}$$

hold for some k, where λ_i are eigenvalues of the problem (54). Suppose also that the inequalities

$$\textbf{(A6)}\qquad \lambda_k < \Big(f_+ + \frac{\partial u(t,x,y)}{\partial y}\Big)\Big(g_+ - \frac{\partial v(t,x,y)}{\partial x}\Big) < \lambda_{k+1}$$

hold for $(t,x,y)\in[0,\pi]\times R^2_+$.

Then for s positive and large enough the total number of solutions to the problem (47),(48) is at least $2k$.

Lemma 6.1 *Let the conditions of the theorem 6.2 hold.*

Then for s positive and large enough there exists a solution $(\xi(t),\eta(t))$ of the problem (47),(48), both components of which are positive in $(0,\pi)$.

Proof. Define the functions $f_1, g_1 : R_+ \to R$ by

$$f_1(y)=f(y)-f_+y,\quad g_1(x)=-g(x)+g_+x.$$

Note that f_1 and g_1 are continuous and bounded functions.

Consider the system

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt} \qquad f_+y+f_1(y)+u(t,y)+se_2(t),\\[2ex] \dfrac{dy}{dt} \qquad -g_+x+g_1(x)+v(t,x)+se_1(t),\end{cases}\tag{55}$$

which is equivalent to the system (52) in the quadrant $(x,y)\in R_+\times R_+$.

Introduce $X=\frac{x}{s}$ and $Y=\frac{y}{s}$, and consider the system

$$\begin{cases}\dfrac{dX}{dt} \qquad f_+Y+h_2(t,Y;s)+e_2(t),\\[2ex] \dfrac{dY}{dt} \qquad -g_+X+h_1(t,X;s)+e_1(t),\end{cases}\tag{56}$$

where

$$h_1(t,X;s)=\frac{1}{s}(g_1(sX)+v(t,sX)),$$

$$h_2(t,Y;s)=\frac{1}{s}(f_1(sY)+u(t,sY)).$$

Note that h_i uniformly tend to zero as $s\to+\infty$, $i=1,2$.

The boundary value problem

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f_+ y + e_2(t), \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = -g_+ x + e_1(t), \end{cases} \tag{57}$$

$$x(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$$

has a particular solution (x_0, y_0), given by

$$x_0 = \frac{4f_+ - 2}{4f_+ g_+ - 1} e_1(t), \quad y_0 = \frac{2 - 4g_+}{4f_+ g_+ - 1} e_2(t).$$

Then the vector function $(z_1, z_2) = (X - x_0(t), Y - y_0(t))$ is a solution to the problem

$$\begin{cases} \dfrac{dz_1}{dt} = f_+ z_2 + h_2(t, z_2 + y_0(t); s), \\ \\ \dfrac{dz_2}{dt} = -g_+ z_1 + h_1(t, z_1 + x_0(t); s), \end{cases} \tag{58}$$

$$z_1(0) = 0, \quad z_2(\pi) = 0$$

Since $f_+ g_+$ is not an eigenvalue of the problem (54), the non-homogeneous problem (58) allows for representation of a solution $z = (z_1, z_2)$ via the Green's function

$$z(t) = \int_0^\pi G(t, s) h(s) ds, \tag{59}$$

where $G(t, s)$ is two dimensional Green's matrix, z and h are vectors.

Since $||h||_c \to 0$ as $s \to +\infty$ $||z||$ tends to zero also. Therefore the solution $(X(t), Y(t)) = (z_1(t) + x_0(t), z_2(t) + y_0(t))$ is positive as $s \to +\infty$.

Then $(\xi(t, s), \eta(t, s)) = s(z_1(t), z_2(t))$ is a solution to the problem (52), (53). ∎

Lemma 6.2 *A solution $\xi(t; s)$ (in the previous lemma) is such that the angular function $\varphi(t)$ corresponding to the variational system*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (\dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial y}) y, \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = -(\dfrac{\partial g}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial x}) x \end{cases} \tag{60}$$

and defined by the initial condition $\varphi(0) = 0$, satisfies the inequalities

$$\pi/2 + k\pi < \varphi(\pi) < \pi/2 + (k+1)\pi, \tag{61}$$

where k is the same as in (**A5**).

Proof. From definitions of $f_1(y)$ and $g_1(x)$ we have that $g_1(x) \to 0$ as $x \to +\infty$ and $f_1(y) \to 0$ as $y \to +\infty$.

Therefore $\dfrac{\partial f}{\partial y} \to f_+$ and $\dfrac{\partial g}{\partial x} \to g_+$ as $s \to +\infty$, uniformly in t.

The conclusion then follows from (**A6**). ∎

Proof of the Theorem 6.2. Consider the system (7) of piece–wise linear equations. Let $\theta_+(t)$ and $\theta_-(t)$ be the angular functions of solutions of the system (7), defined by the initial conditions

$$\theta_+(0) = 0 \quad \theta_-(0) = \pi.$$

By the condition **(A5)**, $\theta_+(t)$ and $\theta_-(t)$ satisfy the inequalities

$$\pi/2 < \theta_+(\pi) < \pi/2 + \pi,$$

$$\pi/2 + \pi < \theta_-(\pi) < \pi/2 + 2\pi.$$

For the angular function $\varphi(t)$ of the variational system (60) we have

$$\pi/2 + k\pi < \varphi(\pi) < \pi/2 + (k+1)\pi. \tag{62}$$

Then for s positive and large enough the total number of solutions to the problem (52),(53), as states the theorem 6.1, is

$$N \geq |0 - k| + |k - 1| + 1 = 2k.$$

■

Theorem 6.3 *Let the limits f_-, f_+, g_-, g_+ be constant and such that*

$$\textbf{(A7)} \qquad \lambda_k < f_-g_- < \lambda_{k+1} < \qquad < \lambda_n < f_+g_+ < \lambda_{n+1}$$

Suppose also that

$$\begin{aligned} \frac{m}{\sqrt{f_+g_+}} + (m-1)\left(\frac{1}{\sqrt{f_-g_+}} + \frac{1}{\sqrt{f_-g_-}}\right) + (m-1)\frac{1}{\sqrt{f_+g}} &\neq 2, \\ \frac{m}{\sqrt{f_+g_+}} + m\left(\frac{1}{\sqrt{f_-g_+}} + \frac{1}{\sqrt{f_-g_-}}\right) + (m-1)\frac{1}{\sqrt{f_+g_-}} &\neq \end{aligned} \tag{63}$$

for any integer m (nonresonant condition).

Let for any $(t, x, y) \in [0, \pi] \times R^2$ the inequalities

$$\textbf{(A8)} \qquad \lambda_k < (f_- + \frac{\partial u}{\partial y})(g$$

$$\textbf{(A9)} \qquad \lambda_n < (f_+ +$$

hold.

Then there exist $s_+ > 0$ and $s_- < 0$ such that the total of so problem (52),(53), when $s > s_+$ and $s < s_-$, is at least $2(n$

Lemma 6.3 *Suppose that f_+ and g_+ are constants, satisfying the condition* **(A7)**

Then for s large and positive there exists a solution $\xi_+(t)$ of the problem (52),
which is positive in $(0, \pi)$.

Proof is analogous to that of lemma 6.1.

Lemma 6.4 *Suppose that f_- and g_- are constants, satisfying the condition* **(A7)**.
Then for s large and negative there exists a solution $\xi_-(t;s)$ of the problem (52),(53), which is negative in $(0,\pi)$.

Proof is analogous to that of lemma 6.1.

Lemma 6.5 *Let the conditions of lemma 6.3 hold, as well as the condition* **(A9)**.
Then the angular function $\varphi(t)$, corresponding to the variational system (60), and defined by the initial condition $\varphi(0) = 0$, satisfies the inequalities

$$\pi/2 + n\pi < \varphi(\pi) < \pi/2 + (n+1)\pi \tag{64}$$

Proof is analogous to that of lemma 6.2.

Lemma 6.6 *Let the conditions of lemma 6.4 hold, as well as the condition* **(A8)**.
Then the angular function $\varphi(t)$, corresponding to the variational system (60), and defined by the initial condition $\varphi(0) = \pi$, satisfies the inequalities

$$\pi/2 + k\pi < \varphi(\pi) < \pi/2 + (k+1)\pi. \tag{65}$$

Proof is analogous to that of lemma 6.2.

Proof of the Theorem 6.3. Consider the system (6). Let $\theta_+(t)$ and $\theta_-(t)$ be the angular functions of solutions of this system, defined by the initial conditions

$$\theta_+(0) = 0 \quad \theta_-(0) = \pi.$$

From **(A7)** we have that

$$\pi/2 + n\pi < \theta_+(\pi) < \pi/2 + (n+1)\pi, \tag{66}$$

$$\pi/2 + k\pi < \theta_-(\pi) < \pi/2 + (k+1)\pi \tag{67}$$

The nonresonant condition of the theorem says that the only solution of the system with $y(\pi) = 0$ is the trivial one.

Then the total number of solutions to the problem (52), (53) for $s > s_+$ is at least

$$|k-n| + |n-n| + 1 = k - n + 1,$$

is at least

$$|k-k| + |k-n| + 1 = k - n + 1,$$

■

References

[1] S. Fučik, Solvability of Nonlinear Equations and Boundary Value Problems, Reidel, Dordrecht (1980).

[2] M.A. Krasnoselskii, A.I. Perov, A.I. Povolockii and P.P. Zabreiko, Plane vector fields. Acad. Press, New Yorke (1966).

[3] A. Lazer, Solvability of nonlinear equations and boundary value problems, Bull. Amer. Math. Soc., 8, 482-487 (1983).

[4] A. Lazer and P. McKenna, On a conjecture related to the number of solutions of a nonlinear Dirichlet problem, Proc. Roy. Soc. Edin., 95A, 275-283 (1983).

[5] D.C. Hart, A.C. Lazer and P. McKenna, Multiplicity of solutions of nonlinear boundary value problems, SIAM J. Math. Anal., 17,1332-1338 (1986).

[6] D.C. Hart, A.C. Lazer and P. McKenna, Multiple solutions of two point boundary value problems with jumping nonlinearities, J. Diff. Equ. 59 (1985).

[7] B. Ruf, Remarks and generalizations related to a recent multiplicity result of A. Lazer and P. McKenna, Nonlinear Anal: TMA, 8 (1985)

[8] B. Ruf, Multiplicity and eigenvalue intersecting nonlinearities, J. Appl. Math. Phys. (ZAMP), 40 (1989), N 5, 774-775.

[9] A. Capietto, M. Henrard, J. Mawhin and F. Zanolin, A continuation approach to some forced superlinear Sturm Liouville boundary value problems, Topologocal Methods in Nonlinear Analysis, 3 (1994), 81-100.

[10] A. Capietto, J. Mawhin and F. Zanolin, A continuation approach to superlinear periodic boundary value problems, J. Differential Equations, 88 (1990), 347 395.

[11] F. Sadyrbaev, Multiplicity of solutions for two-point boundary value problems with asymptotically asymmetric nonlinearities, Nonlinear Analysis:TMA, 27 (1996), N 9, 999 - 1012.

О.Заякина, Ф.Садырбаев. Краевая задача Штурма – Лиувилля для двумерной дифференциальной системы с асимптотически асимметричными нелинейностями.

Аннотация. Даны оценки числа решений для нелинейной системы

$$x' = f(t,y) + u(t,x,y), \quad y' = -g(t,x) + v(t,x,y),$$

с краевыми условиями

$$x(a)\cos\alpha - y(a)\sin\alpha = A, \quad x(b)\cos\beta - y(b)\sin\beta = B$$

в предположении, что существует хотя бы одно решение задачи. Предполагается, что существуют пределы $f_\pm := \lim_{y\to\pm\infty} \frac{f(t,y)}{y}$ и $g_\pm := \lim_{x\to\pm\infty} \frac{g(t,x)}{x}$, которые могут быть не равны между собой. Нелинейности $u(t,x,y)$ и $v(t,x,y)$ подлинейны. Приводятся следствия для уравнения второго порядка.

УДК 517.927

O. Zajakina, F. Sadirbajevs. Šturma – Liuvilla robežproblēma divu dimensiju diferenciālai sistēmai ar asimptotiski asimetriskām nelinearitātēm.

Anotācija. Tiek doti atrisinājumu skaita novērtējumi nelineārai robežproblēmai

$$x' = f(t,y) + u(t,x,y), \quad y' = -g(t,x) + v(t,x,y),$$

$$x(a)\cos\alpha - y(a)\sin\alpha = A, \quad x(b)\cos\beta - y(b)\sin\beta = B$$

pie nosacījuma, ka eksistē vismaz viens problēmas atrisinājums. Pieņemam ka robežas $f_\pm := \lim_{y\to\pm\infty} \frac{f(t,y)}{y}$ un $g_\pm := \lim_{x\to\pm\infty} \frac{g(t,x)}{x}$ eksistē un var būt nevienādas. Nelinearitātes $u(t,x,y)$ un $v(t,x,y)$ aug lēnāk, neka lineāra funkcija. Ir apspriesti secinājumi otras kārtas vienādojumiem.

Institute of Mathematics
and Computer Science,
University of Latvia
Rainis blvd. 29

Received 16.09.96

Задача Дирихле для уравнения третьего порядка

Н.И.Васильев, А.Я.Лепин

Аннотация. Приводятся достаточные условия для гомеоморфности куба и множества решений краевой задачи

$$x''' = f(t, x, x', x''), \quad \alpha \le x \le \beta,$$

где α и β - решения уравнения $x''' = f(t, x, x', x'')$ и $\alpha < \beta$.

УДК 517.927

Рассмотрим уравнение

$$x''' = f(t, x, x', x''), \tag{1}$$

где $f \ \ [0,1] \times R^3 \to R$ удовлетворяет условиям Каратеодори. Пусть $\alpha, \beta \ \ [0,1] \to R$ - решения уравнения (1) такие, что $\alpha < \beta$. Для $a \in [0,1)$, $b \in (a,1]$, $A \in [\alpha(a), \beta(a)]$ и $B \in [\alpha(b), \beta(b)]$ обозначим через $S(a,b)$ множество решений $x \ \ [a,b] \to R$ уравнения (1), лежащих между α и β, а через $D(a,b,A,B)$ - множество решений $x \ \ [a,b] \to R$ задачи Дирихле

$$x''' = f(t, x, x', x''), \quad x(a) = A, \quad x(b) = B,$$

лежащих между α и β. Пусть

$$M(\alpha, a, b) = \{y \in S(a,b) \ \ (\exists \sigma \in [a,b])(y(\sigma) = \alpha(\sigma) \wedge y'(\sigma) = \alpha'(\sigma))\},$$

$$M(\beta, a, b) = \{z \in S(a,b) \ \ (\exists \tau \in [a,b])(z(\tau) = \beta(\tau) \wedge z'(\tau) = \beta'(\tau))\}.$$

В дальнейшем нам потребуются следующие условия:

1. $D(0, 1, \alpha(0), \beta(1)) \ne \emptyset$, $D(0, 1, \beta(0), \alpha(1)) \ne \emptyset$.

2. Для любых $a \in [0,1)$ и $b \in (a,1]$ найдется $M \in (0,\infty)$ такое, что для любого решения $x : (a,b) \to R$ из $\alpha(t) \le x(t) \le \beta(t)$, $t \in (a,b)$ следует

$$\sup\{| x''(t) | : t \in (a,b)\} < M.$$

3. Для любых $a \in [0,1)$, $b \in (a,1)$, $c \in (b,1]$ и $A, B, C \in R$ решение краевой задачи

$$x''' = f(t, x, x', x''), \quad x(a) = A, \quad x(b) = B, \quad x(c) = C,$$

$$\alpha(t) \le x(t) \le \beta(t), \quad t \in [a,c]$$

единственно.

В работах [1] и [2] приведены условия гомеоморфности куба и множества решений $S(0,1)$. При этом существенно использовалась единственность решения задачи Коши. При единственности решения двухточечных краевых задач в работах [3] и [4] удалось отказаться от единственности решения задачи Коши. В настоящей работе удалось отказаться от единственности решения задачи Коши при единственности решения трехточечных задач.

Лемма 1 *Если выполняются условия 2, 3, $a \in [0,1)$, $b \in (a,1)$, $c \in (b,1)$, $d \in (c,1]$, $y,z \in S(a,d)$, $y(b) = z(b)$, $y(d) = z(d)$, $\alpha(t) < y(t)$, $t \in (b,c)$ и $z(t) < \beta(t)$, $t \in (b,c)$, то $y(t) = z(t)$, $t \in [b,d]$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда $y(t) < z(t)$, $t \in [a,b) \cup (b,d)$ и $y''(b) < z''(b)$. Будем считать, что a и c достаточно близки к b. Если для любого $\tau \in (b,c)$ существует $x \in S(a,\tau)$ такое, что $x(b) > y(b)$, $x(\tau) = y(\tau)$, $x'(\tau) = y'(\tau)$ и $x''(\tau) = y''(\tau)$, то $z(a) < x(a)$ и найдется $s \in S(a,b)$ такое, что $s(a) \ge z(a)$, $s(b) = y(b)$, $s'(b) = y'(b)$ и $s''(b) = y''(b)$, что противоречит условию 3.

Аналогично рассматривается случай, когда для любого $\tau \in (b,c)$ существует $x \in S(a,\tau)$ такое, что $x(b) < z(b)$, $x(\tau) = z(\tau)$, $x'(\tau) = z'(\tau)$ и $x''(\tau) = z''(\tau)$.

Рассмотрим случай, когда $z(b) < \beta(b)$ и найдется $\tau \in (b,c)$ такое, что для любого $x \in S(b,\tau)$ из $x(\tau) = y(\tau)$, $x'(\tau) = y'(\tau)$ и $x''(\tau) = y''(\tau)$ следует $x(b) \le y(b)$. Для достаточно малых $\varepsilon, \delta \in (0,\infty)$ рассмотрим решение задачи Коши

$$x''' = f(t,x,x',x''), \quad x(\tau) = y(\tau) - \varepsilon, \quad x'(\tau) = y'(\tau), \quad x''(\tau) = y''(\tau) + \delta.$$

Если фиксировать δ и уменьшать ε, то получается противоречие с 3 условием. Аналогично рассматривается случай, когда $y(b) > \alpha(b)$ и найдется $\tau \in (b,c)$ такое, что для любого $x \in S(b,\tau)$ из $x(\tau) = z(\tau)$, $x'(\tau) = z'(\tau)$ и $x''(\tau) = z''(\tau)$ следует $x(b) \ge z(b)$.

Лемма 2 *Если выполняются условия 2, 3, $a \in (0,1)$,*

$$(A, A_1, A_2) \in ((\alpha(a), \beta(a)) \times R^2) \cup \{(\alpha(a), \alpha'(a), \alpha''(a)), (\beta(a), \beta'(a), \beta''(a))\},$$

$$K(a, A, A_1, A_2) = \{x \in S(a,1) : x(a) = A \wedge x'(a) = A_1 \wedge x''(a) = A_2\} \ne \emptyset,$$

то для любых $x_1, x_2 \in K(a,A,A_1,A_2)$ найдется $b \in [a,1]$ такое, что $x_1(t) = x_2(t)$, $t \in [a,b]$ и $x_1(t) \ne x_2(t)$, $t \in (b,1]$, в множестве $K(a,A,A_1,A_2)$ имеется минимальное решение y и максимальное решение z и отображение $x \to x(1)$ гомеоморфно отображает $K(a,A,A_1,A_2)$ на $[y(1), z(1)]$.

Доказательство. Для любых $x_1, x_2 \in K(a,A,A_1,A_2)$ условие

$$\begin{gathered}(\exists b \in [a,1])((\forall t \in [a,b])(x_1(t) = x_2(t)) \wedge \\ \wedge((\forall t \in [b,1])(x_1(t) < x_2(t)) \vee (\forall t \in (b,1])(x_1(t) > x_2(t)))\end{gathered} \tag{2}$$

следует из условия 3. Компактность $K(a, A, A_1, A_2)$ следует из условия 2. Из (2) и компактности следует существование $y, z \in K(a, A, A_1, A_2)$ таких, что $y \le x \le z$ для любых $x \in K(a, A, A_1, A_2)$. Если

$$K_1 = \{x(t) : x \in K(a, A, A_1, A_2)\},$$

то из (2) следует, что $x \to x(1)$ - гомеоморфизм между $K(a, A, A_1, A_2)$ и K_1. Покажем, что условие $[y(1), z(1)] \setminus K \ne \emptyset$ приводит к противоречию. Пусть $B \in [y(1), z(1)] \setminus K$. Тогда найдутся $y_0, z_0 \in K(a, A, A_1, A_2)$ такие, что $y_0 \le z_0$, $B \in (y_0(1), z_0(1))$ и $K_1 \cap (y_0(1), z_0(1)) = \emptyset$. Пусть $b \in [a, 1)$ такое, что $y_0(b) = z_0(b)$ и $y_0(t) < z_0(t)$, $t \in (b, 1]$.

Рассмотрим случай, когда $\alpha(b) < y_0(b) < \beta(b)$. Для $c \in (b, 1)$, достаточно близкого к b, множество решений задачи Коши

$$x''' = f(t, x, x', x''), \quad x(b) = y_0(b), \quad x'(b) = y_0'(b), \quad x''(b) = y_0''(b)$$

на интервале $[b, c]$ связно и лежит между α и β. Следовательно, существует решение x $[a, c] \to R$ уравнения $x''' = f(t, x, x', x'')$ такое, что $y_0(t) \le x(t) \le z_0(t)$, $t \in [a, c]$ и $y_0(c) < x(c) < z_0(c)$. Продолжая это решение вправо, получаем противоречие. Аналогично рассматриваются случаи, когда $y_0(b) = \alpha(b)$, $y_0'(b) = \alpha'(b)$, $y_0''(b) > \alpha''(b)$ и $z_0(b) = \beta(b)$, $z_0'(b) = \beta'(b)$, $z_0''(b) < \beta''(b)$.

Рассмотрим случай, когда $y_0(b) = \alpha(b)$, $y_0'(b) = \alpha'(b)$ и $y_0''(b) = \alpha''(b)$. Пусть $c \in (b, 1)$ достаточно близко к b. Если найдется решение $x : [b, c] \to R$ задачи Коши

$$x''' = f(t, x, x', x''), \quad x(b) = \alpha(b), \quad x'(b) = \alpha'(b), \quad x''(b) = \alpha''(b) \tag{3}$$

такое, что $x(t) \ge \alpha(t)$, $t \in [b, c]$ и $y_0(c) < x(c) < z_0(c)$, то, продолжая его вправо, получим противоречие. Пусть $t_n \in (b, c)$, $n \in \{1, 2, ...\}$, $t_n \to b$ и y_n $[t_n, c] \to R$ - минимальное решение задачи

$$x''' = f(t, x, x', x''), \quad x(t_n) = z_0(t_n), \quad x'(t_n) = z_0'(t_n), \quad y_0(t) \le x(t) \le z_0(t), \quad t \in [t_n, c]. \tag{4}$$

Ясно, что $y_n(c) = y_0(c)$ или найдутся $\sigma_n \in (t_n, c)$ такие, что $y_n(\sigma_n) = y_0(\sigma_n)$. Если $y_n''(\sigma_n) = y_0''(\sigma_n)$, то продолжая y_n влево, получим противоречие с условием 3 или леммой 1.

Рассмотрим случай, когда последовательность y_n сходится к решению y $[b, c] \to R$. Если $y(t) = y_0(t)$, $t \in [b, c]$, то найдется $B_c \in (y_0(c), z_0(c))$ такое, что $y_n(c) < B_c$, $n \in \{1, 2, ...\}$. Покажем, что найдутся решения x_n $[t_n, c] \to R$ задачи (4) такие, что $x_n(c) = B_c$. Фиксируем n и предположим противное. Из леммы 1 следует существование решений $u_n, z_n \in [t_n, c] \to R$ задачи (4) таких, что $u_n(c) < B_c < z_n(c)$ и для любого решения x $[t_n, c] \to R$ задачи (4) значение $x(c)$ не лежит в интервале $(u_n(c), z_n(c))$. Если $u_n''(t_n) < z_n''(t_n)$, то для решения $x : [t_n, c] \to R$ задачи Коши

$$x''' = f(t, x, x', x''), \quad x(t_n) = z_0(t_n), \quad x'(t_n) = z_0'(t_n),$$

$$x''(t_n) = (u_n''(t_n) + z_n''(t_n))2^{-1},$$

получаем противоречие. Если $u_n''(t_n) = z_n''(t_n)$, то аналогично предыдущему получаем противоречие. Ясно, что некоторая подпоследовательность x_n сходится к решению

$x \in S(b, c)$ задачи Коши (3), которое удовлетворяет условию $x(c) = B_c$. Если y не совпадает с y_0 или z_0 на $[b, c]$, то y - искомое решение задачи Коши (3).

Рассмотрим случай, когда $y(t) = z_0(t)$, $t \in [b, c]$. Продолжая y_n влево, из леммы 1 получаем, что найдется $b_n \in (b, t_n)$ такое, что $y_n(b_n) = y_0(b_n)$ и $y_0(t) < y_n(t) < z_0(t)$, $t \in (b_n, t_n)$. Пусть $k, m \in \{1, 2, \ldots\}$, $\sigma_k \in (t_k, c)$ и $\sigma_m \in (t_m, b_k)$ такие, что $y_k(\sigma_k) = y_0(\sigma_k)$ и $y_m(\sigma_m) = y_0(\sigma_m)$. Для достаточно малых $\epsilon, \delta \in (0, \infty)$ рассмотрим решение x задачи Коши

$$x''' = f(t, x, x', x''), \quad x(\sigma_m - \epsilon) = y_0(\sigma_m - \epsilon),$$

$$x'(\sigma_m - \epsilon) = y_0'(\sigma_m - \epsilon), \quad x''(\sigma_m - \epsilon) = y_0''(\sigma_m - \epsilon) + \delta.$$

Ясно, что x имеет с y_m на интервале (t_m, c) две точки пересечения. Следовательно, найдется $\tau \in (b_m, \sigma_m)$ такое, что $x(\tau) = y_0(\tau)$. Но тогда x имеет три общие точки с y_k, что противоречит условию 3.

Если некоторая подпоследовательность y_n сходится к решению y, то доказательство аналогично. Аналогично рассматривается случай, когда $z_0(b) = \beta(b)$, $z_0'(b) = \beta'(b)$ и $z_0''(b) = \beta''(b)$.

Лемма 3 *Если выполняются условия 2-3, $a \in [0, 1)$, $b \in (a, 1)$, $c \in (b, 1]$ и $y, z \in S(a, c)$ такие, что $y \le z$, $y(b) = z(b)$ и $y(c) = z(c)$, то $y(t) = z(t)$, $t \in [b, c]$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда $y(t) < z(t)$, $t \in [a, b) \cup (b, c)$. Из леммы 1 следует, что $y(b) = \alpha(b)$, $y'(b) = \alpha'(b)$, $y''(b) = \alpha''(b)$ или $z(b) = \beta(b)$, $z'(b) = \beta'(b)$, $z''(b) = \beta''(b)$. Рассмотрим случай, когда $y(b) = \alpha(b)$, $y'(b) = \alpha'(b)$ и $y''(b) = \alpha''(b)$. Из леммы 2 следует, что $y''(b) < z''(b)$. Будем считать, что a достаточно близко к b. Если $c = 1$ или $y'(c) = z'(c)$, или найдется $\tau \in (b, c]$ такое, что $z(\tau) = \beta(\tau)$, то вместо z возьмем решение задачи Коши

$$x''' = f(t, x, x', x''), \quad x(b) = \alpha(b), \quad x'(b) = \alpha'(b), \quad x''(b) = (y''(b) + z''(b))2^{-1}$$

Если для некоторого σ существует $x \in S(a, \sigma)$ такое, что $x(b) > y(b)$, $x(\sigma) = y(\sigma)$, $x'(\sigma) = y'(\sigma)$ и $x''(\sigma) = y''(\sigma)$, то из леммы 2 получаем противоречие с условием 3.

Рассмотрим случай, когда

$$X = \{x \in S(b_*, \qquad b_* \in [b, c) \wedge c_* \in (b_*, c] \wedge x(b_*) = y(b_*) \wedge x'(b_*) = y'(b_*) \wedge$$

$$\wedge x(c_*) = y(c_*) \wedge x'(c_*) = y'(c_*) \wedge (\forall t \in (b_*, c_*))(x(t) > y(t))\} = $$

Для $\delta \in (0, \infty)$ рассмотрим решение $x(\delta, t)$ задачи Коши

$$''' = f(t, x, x', x''), \quad x(c) = y(c), \quad x'(c) = y'(c), \quad x''(c) = y''(c) + \delta. \tag{5}$$

Если δ достаточно мало, то найдется $t(\delta) \in (b, c)$ такое, что $x(\delta, t(\delta)) = y(t(\delta))$ и $y(t) < x(\delta, t) < z(t)$, $t \in (t(\delta), c)$. Пусть δ такое, что $x(\delta, t)$ максимальное решение (5), удовлетворяющее условиям: найдется $t(\delta) \in (b, c)$ такое, что $x(\delta, t(\delta)) = y(t(\delta))$ и $y(t) < x(\delta, t) \le z(t)$, $t \in (t(\delta), c)$. Ясно, что найдется $\tau \in [b, c)$ такое, что $x(\delta, \tau) = z(\tau)$, что противоре 1. Если X конечно, то выбирая в качестве z решение $x \in X$ м $c_* - b_*$, приходим к уже разобранному случаю.

Рассмотрим случай, когда X бесконечно. Если точная нижняя грань значений $c_* - b_*$ для $x \in X$ больше нуля, то опять приходим к уже разобранному случаю. Рассмотрим случай, когда точная нижняя грань значений $c_* - b_*$ равна нулю. Пусть δ достаточно мало и фиксировано. Выберем $x \in X$ так, чтобы $c_* - b_*$ было достаточно мало, и рассмотрим решение s задачи Коши

$$x''' = f(t, x, x', x''), \quad x(d) = y(d), \quad x'(d) = y'(d), \quad x''(d) = y''(d) + \delta,$$

где $d \in (c_*, b_*)$ и достаточно близко к c_*, если $c_* - b_* < (c-b)2^{-1}$, или к b_* в противном случае. Ясно, что s и x имеют не менее трех точек пересечения, что противоречит условию 3.

Случай, когда $z(b) = \beta(b)$, $z'(b) = \beta'(b)$ и $z''(b) = \beta''(b)$, рассматривается аналогично.

Лемма 4 *Если выполняются условия 2, 3, $a \in (0,1)$,*

$$(A, A_1) \in ((\alpha(a), \beta(a)) \times R) \cup \{(\alpha(a), \alpha'(a)), (\beta(a), \beta'(a))\},$$

$$K(a, A, A_1) = \{x \in S(a,1) : x(a) = A \wedge x'(a) = A_1\},$$

то в множестве $K(a, A, A_1)$ имеется минимальное решение y и максимальное решение z, отображение $x \to x(1)$ гомеоморфно отображает $K(a, A, A_1)$ на $[y(1), z(1)]$, $y(1) = \alpha(1)$ или $y \in M(\alpha, a, 1)$ и $z(1) = \beta(1)$ или $z \in M(\beta, a, 1)$.

Доказательство. Из лемм 2 и 3 следует, что $K(a, A, A_1)$ линейно упорядочено, а из компактности следует существование минимального и максимального решений. Если

$$K_1 = \{x(1) : x \in K(a, A, A_1)\},$$

то из леммы 2 следует, что $K_1 \doteq [y(1), z(1)]$, а из линейной упорядоченности следует гомеоморфизм между $K(a, A, A_1)$ и K_1. Условие $y(t) > \alpha(t)$, $t \in [a, 1]$ приводит к противоречию. Аналогично получается, что $z(1) = \beta(1)$ или $z \in M(\beta, a, 1)$.

Лемма 5 *Если выполняются условия 1-3, то для любых $a \in [0,1)$ и $b \in (a, 1]$*

$$D(a, b, \alpha(a), \beta(b)) \neq \oslash, \quad D(a, b, \beta(a), \alpha(b)) \neq \oslash.$$

Доказательство. Пусть $a \in (0,1)$ и $s \in D(0, 1, \alpha(0), \beta(1))$. Докажем, что $D(a, 1, \alpha(a), \beta(1)) \neq \oslash$. Если $s(a) = \alpha(a)$ и $x(t) = s(t)$, $t \in [a, 1]$, то $x \in D(a, 1, \alpha(a), \beta(1))$. Пусть $s(a) > \alpha(a)$. Применяя лемму 4, получаем существование $x \in S(a, 1)$ такого, что $x(a) = \alpha(a)$, $x'(a) = \alpha'(a)$, $x(t) \leq s(t)$, $t \in [a, 1]$ и найдется $c \in (a, 1]$ такое, что $x(c) = s(c)$. Если $x'(c) = s'(c)$, то это противоречит ле[illegible] 3. Следовательно, $c = 1$ и $x \in D(a, 1, \alpha(a), \beta(1))$.

Аналогично доказывается, что $D(a, b, \alpha(a), \beta(b)) \neq \oslash$ и $D(a, b, \beta(a), \alpha(b)) \neq$

Лемма 6 *Если выполняются условия 1-3, $a \in (0,1)$, $b \in (a,1)$, $A \in (\alpha(a),\beta(a))$ и $B \in (\alpha(b),\beta(b))$, то множество решений задачи Дирихле $D(a,b,A,B)$ имеет минимальное решение и максимальное $y(a,b,A,B,\cdot) \in M(\alpha,a,b)$ решение $z(a,b,A,B,\cdot) \in M(\beta,a,b)$. Решения $y(a,b,A,B,\cdot)$ и $z(a,b,A,B,\cdot)$ непрерывно зависят от a, b, A и B. Для любого $U \in [y'(a,b,A,B,a),z'(a,b,A,B,a)]$ существует единственное $s(a,b,A,B,U,\cdot) \in D(a,b,A,B)$ такое, что $s'(a,b,A,B,U,a) = U$. Решения $s(a,b,A,B,U,\cdot)$ непрерывно зависят от a, b, A, B, U и*

$$D(a,b,A,B) = \{s(a,b,A,B,U,\cdot) \quad U \in [y'(a,b,A,B,a),z'(a,b,A,B,a)]\}.$$

Если $U,V \in [y'(a,b,A,B,a),z'(a,b,A,B,a)]$ и $U < V$, то $s(a,b,A,B,U,t) < < s(a,b,A,B,V,t)$, $t \in (a,b)$ и $s'(a,b,A,B,U,b) > s'(a,b,A,B,V,b)$.

Доказательство. По лемме 5 существует $s \in D(a,b,\alpha(a),\beta(b))$. Используя лемму 4, найдем $x \in D(a,b,\alpha(a),B)$ такое, что $x'(a) = \alpha'(a)$ и $x(t) \le s(t)$, $t \in [a,b]$. Рассмотрим случай, когда найдется $\tau \in (a,b)$ такое, что $x(\tau) = \beta(\tau)$. Из $\beta(\tau) = x(\tau) \le s(\tau) \le \beta(\tau)$ следует $s(\tau) = \beta(\tau)$. Следовательно, $x(t) = s(t)$, $t \in [a,\tau]$, $x''(\tau) = \beta''(\tau)$ и существует решение $x_1 \quad [a,b] \to R$ - решение краевой задачи

$$x''' = f(t,x,x',x''),$$

$$x(a) = A, \quad x(\tau) = \beta(\tau), \quad x'(\tau) = \beta'(\tau), \quad x''(\tau) = \beta''(\tau)$$

такое, что $x(t) \le x_1(t) \le \beta(t)$, $t \in [a,\tau]$. Тогда $z(t) = x_1(t)$, $t \in [a,\tau]$ и $z(t) = x(t)$, $t \in [\tau,b]$ является решением задачи Дирихле: $z \in D(a,b,A,B)$. Из условия 3 следует, что z максимальное решение из $D(a,b,A,B)$. Из компактности $D(a,b,A,B)$ и условия 3 следует существование минимального решения $y \in D(a,b,A,B)$. Покажем, что $y \in M(\alpha,a,b)$. Предположим противное. Если найдется $s_0 \in S(a,b)$ такое, что $s_0(a) = A$, $s_0'(a) < y'(a)$ и $s_0(b) \le B$, то $s_0(t) < y(t)$, $t \in (a,b]$ и найдется $y_1 \in D(a,b,A,B)$ такое, что $y_1'(a) = s_0'(a)$ и $y_1 \le y$, что противоречит минимальности y. В противном случае найдется последовательность $s_n \in S(a,b_n)$, $b_n \in (a,b)$ и $\sigma_n \in (a,b_n)$, $n \in \{1,2,\ldots\}$ такие, что $s_n(a) = A$, $s_n'(a) < y'(a)$, $s_n(\sigma_n) = \alpha(\sigma_n)$, $s_n(b_n) = y(b_n)$ и $s_n(t) < y(t)$, $t \in (a,b_n)$, $n \in \{1,2, \quad \}$ и $s_n'(a) \to y'(a)$. Следовательно, найдется $s_* \in S(a,b_*)$, $b_* \in (a,b)$ и $\sigma_* \in (a,b_*)$ такие, что $s_*(a) = A$, $s_*'(a) = y'(a)$, $s_*(\sigma_*) = \alpha(\sigma_*)$, $s_*(b_*) = y(b_*)$ и $s_*(t) \le y(t)$, $t \in (a,b_*)$, что противоречит лемме 3.

Рассмотрим случай, когда $x < \beta$. Пусть

$$M = \{A_* \in (\alpha(a),\beta(a)) \quad D(a,b,A_*,B) \ne \emptyset\}.$$

Тогда $M \ne$ и замкнуто в $(\alpha(a),\beta(a))$. Покажем, что M открыто. Пусть $A_* \in M$. Аналогично предыдущему доказывается существование минимального решения $y \in D(a,b,A_*,B) \cap M(\alpha,a,b)$ и максимального решения $\in D(a,b,A_*,B) \cap M(\beta,a,b)$. Если $y'(a) < z'(a)$, то из лемм 2 и 3 следует, что для любого $U \in (y'(a),z'(a))$ существует $s(U,t) \in D(a,b,A_*,B)$ такое, что $s'(U,a) = U$. Следовательно, A_* внутренняя

M Ес $z'(a)$. Пусть $\sigma,\tau \in (a,b)$ такие, что $y(\sigma) = \alpha(\sigma)$ и

$\beta(\tau)$. $\alpha''(\sigma)$ и $y''(\tau) = \beta''(\tau)$. Рассмотрим случай, ко-

. Е $y(\tau) = s(\tau)$. мме 3 $y(t) = s(t)$, $t \in [\sigma,\tau]$.

Следовательно, $y''(\sigma) = \alpha''(\sigma)$. Если $y(\sigma) < s(\sigma)$ и $y(\tau) > s(\tau)$, то y и s имеют три точки пересечения, что противоречит условию 3. Аналогично рассматривается случай, когда $\sigma > \tau$. Из $y''(\sigma) = \alpha''(\sigma)$ и $y''(\tau) = \beta''(\tau)$ следует, что A_* - внутренняя точка. Непрерывная зависимость и неравенства $s(a,b,A,B_0,U,t) < s(a,b,A,B,V,t)$, $t \in (a,b)$ и $s'(a,b,A,B_0,U,b) > s'(a,b,A,B,V,b)$ следуют из условия 3 и леммы 3.

Теорема 1 *Если выполняются условия 1-3, $a \in [0,1)$, $b \in (a,1]$, $A \in [\alpha(a),\beta(a)]$ и $B \in [\alpha(b),\beta(b)]$, то множество решений задачи Дирихле $D(a,b,A,B)$ имеет минимальное решение $y(a,b,A,B,\cdot) \in M(\alpha,a,b)$ и максимальное решение $z(a,b,A,B,\cdot) \in M(\beta,a,b)$, которые непрерывно зависят от a, b, A и B. Для любого $\lambda \in [0,1]$ существует $s(a,b,A,B,\lambda,\cdot) \in D(a,b,A,B)$ такое, что*

$$\sup\{s(a,b,A,B,\lambda,t) - y(a,b,A,B,t) : t \in [a,b]\} =$$

$$= \lambda \sup\{z(a,b,A,B,\lambda,t) - y(a,b,A,B,t)\}.$$

Решения $s(a,b,A,B,\lambda,\cdot)$ непрерывно зависят от a, b, A, B, λ и

$$D(a,b,A,B) = \{s(a,b,A,B,\lambda,\cdot) : \lambda \in [0,1]\}.$$

Если $\lambda_1 \in [0,1)$, $\lambda_2 \in (\lambda_1,1]$ и $y(a,b,A,B,\cdot) \neq z(a,b,A,B,\cdot)$, то

$$s(a,b,A,B,\lambda_1,t) < s(a,b,A,B,\lambda_2,t), \quad t \in (a,b).$$

Доказательство. Из леммы 6 и условия 2 следует существование y, z и s, а из условия 3 следует непрерывность y, z и s.

Список литературы

[1] Лепин А.Я. Краевая задача для уравнения третьего порядка // LU zinātniskie raksti. Matemātika. Diferenciālvienādojumi. 1995. 30.-41.lpp.

[2] Васильев Н.И. Об одной краевой задаче для дифференциального уравнения третьего порядка // LU zinātniskie raksti. Matemātika. Diferenciālvienādojumi. 1995. 41.-51.lpp.

[3] Лепин А.Я. Краевые задачи для уравнения третьего порядка // ДАН. 1995. Т.344, N 3. С.309-310.

[4] Лепин А.Я. Общая краевая задача для уравнения третьего порядка // в настоящем сборнике.

N.Vasilyev, A.Lepin. The Dirichlets problem for the third order differential equation.

Summary. The sufficient conditions for homeomorphism of the cube to the set of solutions for the boundary value problem

$$x''' = f(t, x, x', x''), \quad \alpha \leq x \leq \beta,$$

are given, where α and β are the solutions of $x''' = f(t, x, x', x'')$ and $\alpha < \beta$.

1991 MSC 34B15

N.Vasiļjevs, A.Lepins. Dirihlē problēma trešās kārtas vienādojumam.

Anotācija. Doti pietiekami nosacījumi, lai kubs būtu homeomorfs robežproblēmas atrisinājumu kopai

$$x''' = f(t, x, x', x''), \quad \alpha \leq x \leq \beta,$$

kur α un β ir vienādojuma $x''' = f(t, x, x', x'')$ atrisinājumi un $\alpha < \beta$.

Институт математики и информатики
Латвийского университета
Рига, б.Райниса, 29

Поступила 20.06.96

О числе разбивающих покрытий полного графа

Э.Я.Гринберг

Аннотация. В работе сформулирована и доказана теорема, при помощи которой возможно перечислить некоторые подграфы полного графа.

УДК 519.1

1. Терминология и обозначения

Обобщенным полным графом $G(X, V)$ можно назвать конечный связный граф с $|X| = n$ пронумерованными вершинами, с полной симметрической группой S_n вершинных автоморфизмов и множеством V ребер, дуг и петель. В общем случае V содержит по p' петель у каждой вершины, p ребер, связывающих любую пару различных вершин x и y, и q дуг, идущих от каждой вершины x к каждой другой вершине y. Общие рассуждения этого параграфа, в частности доказываемая далее теорема, базируются на наличии S_n полной симметрической группы и имеют силу для таких обобщенных полных графов. Однако для уменьшения громоздкости рассуждений и формул в конкретных примерах мы ограничимся рассмотрением обычных полных неорграфов $< n >$ и полных симметричных орграфов $<< n >>$ без петель и параллельных ребер и дуг. В задачах рассматриваемого типа переход к случаю, когда p или q больше единицы, совершается без труда, а рассмотрение петель, как это делается в одном примере, можно заменить на снабжение вершин пометками.

Легко проверить, что встречаемые далее конкретные степенные ряды сходятся абсолютно хотя бы в некоторой окрестности нуля. Поэтому проводимые с ними операции имеют желаемый смысл, и мы не будем каждый раз это обосновывать.

За исключением определенных ниже терминов, используется терминология по [1], с некоторыми дополнениями из [2].

Допустимое разбивающее покрытие (далее, для краткости, - покрытие) - это частичный граф (X, V') с $V' \subset V$, непустые компоненты связности (далее - компоненты) которого принадлежат к заданным непересекающимся s типам.

Пример для неорграфа: первый тип - деревья, второй тип - элементарные циклы, третий тип - связные графы с одним циклом и хотя бы одной висячей вершиной.

Пусть α_i число компонент i-го типа в рассматриваемом покрытии. Вектор $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s\}$ или $\{\alpha_i\}$ - сигнатура этого покрытия; h-тая координата покрытия это α_k. Во втором виде записи сигнатуры, как и далее в аналогичных случаях, индекс i у величины в фигурных скобках пробегает все значения $1, 2, \ldots, s$.

Разбиение компонент покрытия на типы - произвольное. Если, например, нас интересуют деревья и, в частности, элементарные цепи, то последние можно выделить в один тип, а деревья с $\nu \geq 3$ висячими вершинами в другой. Можно также, как это будет сделано дальше, разбить деревья на типы по числу ν висячих вершин. В последнем случае, если $n \to \infty$, то число типов неограниченно возрастает, однако для любого заданного n число s, очевидно, ограниченно.

Число всех компонент покрытия

$$k = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i \tag{1}$$

мы будем называть порядком покрытия.

Если даны вид графа (неорграф или орграф), n и типы компонент, то можно рассматривать следующие числа и соответствующие им экспоненциальные порождающие функции (э.п.ф.), получаемые из соответствующих чисел для каждого n умножением на $\frac{x^n}{n!}$ и суммированием по n.

Число $e_n[h]$ всех связных покрытий типа h, т.е. число графов типа h с пронумерованными n вершинами. Соответствующую э.п.ф.

$$L[h] = \sum_{n=1}^{\infty} e_n[h] \frac{x^n}{n!} \tag{2}$$

мы будем называть базисной функцией типа h.

Число всех покрытий данной сигнатуры $e_n\{\alpha_i\}$ и э.п.ф. $L\{\alpha_i\}$.

Число всех покрытий данного порядка k $e_{n,k} = \sum e_n\{\alpha_i\}$ и э.п.ф.

$$L_k = \sum L\{\alpha_i\}, \tag{3}$$

где суммирование производится по всем сигнатурам, удовлетворяющим (1).

Число всех покрытий

$$e_n = \sum_k e_{n,k}$$

и э.п.ф.

$$L = \sum_k L_k, \tag{4}$$

где суммирование производится по всем допустимым k.

Ясно, что, например, $L[h] = L\{\alpha_i = \delta_{ih}\}$, где δ_{ih} - символ Кронекера, а в случае $s = 1$

$$e_{n,k} = e_n\{k\}.$$

Примеры задач рассматриваемого типа.

1) Найти число k деревьев в $< n >$ (задачу поставил Я.Я.Дамбит).

2) Модификация задачи 1): определить число деревьев и k - деревьев с ν висячими вершинами.

3) Найти число фактороидов в $< n >$, либо всех, либо с ограничениями на длины компонент.

4) Три родственные задачи: число подстановок группы S_n, число факторов графа $<< n >>$ и число членов разложения определителя или перманента порядка n с учетом некоторых особенностей этих объектов.

Действительно, переходу i в j при подстановке или члену a_{ij} матрицы можно сопоставить дугу ij графа $<< n >>$. Часто особую роль играют инвариантные элементы i в подстановке или диагональные элементы a_{ii} матрицы им можно сопоставить петлю y вершины i графа, или проще - пометку y этой вершины. Особую роль иногда имеют также произведения $a_{ij}a_{ji}$ или циклы длины 2 в подстановке. Для учета указанных особенностей мы можем рассматривать покрытия $<< n >>$, при чем допускаются следующие три типа компонент с легко определяемыми $e_{n[h]}$, $L[h]$:

изолированные помеченные вершины, $h = 1$, $e_{1[1]} = 1$, $e_{n[1]} = 0$ при $n \neq 1$, $L[1] = x$;

двуугольники, $h = 2$, $e_{2[2]} = 1$, $e_{n[2]} = 0$ при $n \neq 2$, $L[2] = \frac{x^2}{2}$;

элементарные контуры длины не менее трех, $h = 3$, $e_{n[3]} = 0$ при $n < 3$, $e_{n[3]} = (n-1)!$ при $n \geq 3$,

$$L[3] = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = -\ln(1-x) - x - \frac{x^2}{2}.$$

Полученные базисные функции нам послужат для иллюстрации и для решения задачи 3). Подробное исследование задачи 4) в терминах подстановок имеется в [3].

Установим теорему, связывающую рассматриваемые э.п.ф.

Известно ([3],[4]), что если мы имеем две э.п.ф.

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n,$$

$$B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} x^n,$$

то, рассматриваемая их произведение как э.п.ф.

$$AB = C = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} x^n,$$

имеем

$$c_n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a_j b_{n-j}. \tag{5}$$

Теорема 1 *Пусть для данных s типов компонент известны базисные функции $L_{[h]}$, $h = 1, 2, \ldots, s$. Тогда*

$$L\{\alpha_i\} = \prod_{i=1}^{s} \frac{(L[i])^{\alpha_i}}{\alpha_i!}, \tag{6}$$

$$L_k = \frac{1}{k!} (\sum_{i=1}^{s} L[i])^k, \tag{7}$$

$$L = \exp(\sum_{i=1}^{s} L[i]). \tag{8}$$

Доказательства требует только соотношение (6). Соотношения (3), (6) и формула возведения суммы в степени k дают (7), а (4), (7) и формула разложения экспоненты в степенной ряд дают (8).

Если $\alpha_i - \delta_{ih} = 0$ (δ_{ih}, как и раньше, - символ Кронекера), т.е. $\alpha_h = 1$, $\alpha_j = 0$ при $j \neq h$, то (6) имеет место по определению.

Пусть теперь $\alpha_i - \delta_{ih} \geq 0$, т.е. $\alpha_h \geq 1$ и хотя бы для одного j $\alpha_i - \delta_{ih} \geq 1$.

При данном n рассмотрим все покрытия с сигнатурой $\{\alpha_i\}$, в которых точно одна из компонент типа h снабжена пометкой. Полный список таких покрытий, отличающихся хотя бы помеченной компонентой, составим двумя способами.

Во-первых, берем список всех $e_n\{\alpha_i\}$ различных покрытий рассматриваемой сигнатуры, каждое из них повторяем α_h раз и в каждом из таких повторений снабжаем пометкой другую компоненту типа h.

Второй способ: выбираем j вершин, которые будут вершинами помеченной компоненты, что можно сделать $\binom{n}{j}$ различными способами. Затем $c_j[h]$ различными способами строим помеченную компоненту с этими вершинами. На оставшихся $n-j$ вершинах строим покрытие с сигнатурой $\{\alpha_i - \delta_{ih}\}$, что можно сделать $e_{n-j}\{\alpha_i - \delta_{ih}\}$ различными способами. Наконец, суммируем числа полученных покрытий по всем возможным значениям j.

Приравнивая числа покрытий в обоих списках, имеем

$$\alpha_h e_n\{\alpha_i\} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}_j [h] e_{n-j}\{\alpha_i - \delta_{ih}\}.$$

Правая часть имеет вид правой части (5) с

$$a_n = c_n[h]; \quad b_n = e_n\{\alpha_i - \delta_{ih}\}.$$

Пределы суммирования указаны по аналогии с (5). Так как мы работаем с непустыми компонентами, то слагаемые $j = 0$ и $j = n$ (возможно, и другие) равны нулю. Переходя к экспоненциальным порождающим функциям, мы получаем

$$L\{\alpha_i\} = \frac{L[h]L\{\alpha_i - \delta_{ih}\}}{\alpha_h}.$$

Как видно, уменьшение на единицу h-той координаты сигнатуры, характеризующей функцию левой части, достигается вынесением множителя $\frac{L[h]}{\alpha_h}$. Продолжая этот процесс редукции, мы можем свести ненулевую координату сигнатуры к единице, а все остальные - к нулю, что дает (6).

При переходе от (6) к (8) в силу суммирования теряется информация. Для предотвращения такой потери можно использовать дополнительные переменные y_i и z, степени которых характеризуют соответственно число компонент типа i и порядок покрытий. Тогда мы получаем соотношения

$$L\{\alpha_i\} = \prod_{i=1}^{s} \frac{(L[i]y_i)^{\alpha_i}}{(\alpha_i)!},$$

$$L_k = \frac{1}{k!}(z\sum_{i=1}^{s} L[i]y_i)^k,$$

$$L = \exp(z\sum_{i=1}^{s} L[i]y_i).$$

Последние формулы можно использовать и в ином смысле. Полагая некоторые из y_i равными нулю, мы исключаем из рассмотрения соответствующие компоненты, а полагая ненулевые z и y_i равными 1, снова производим суммирование. В качестве примера рассмотрим базисные функции, полученные для задачи 4). Для э.п.ф. числа всех покрытий мы имеем с $z = 1$

$$L = \exp\{xy_1 + \frac{x^2}{2}y_2 + [-\ln(1-x) - x - \frac{x^2}{2}]y_3\}. \tag{9}$$

Полагая $y_2 = 1$, $y_1 = y_3 = 0$, мы получаем э.п.ф. для покрытия двуугольниками, другими словами для числа совершенных паросочетаний в неорграфе $< n >$:

$$\exp\frac{x^2}{2} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\frac{x^{2j}}{2^j},$$

следовательно, соответствующие числа e_n имеют значения

$$e_{2m+1} = 0,$$

$$e_{2m} = \frac{(2m)!}{m!2^m} = 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2m-1),$$

что, понятно, легко получается и непосредственно.

Аналогично, с $y_2 = y_3 = 1$, $y_1 = 0$ мы получаем э.п.ф. для числа факторов орграфа $<< n >>$ без петель

$$\hat{L} = \frac{e^{-x}}{1-x},$$

и это число - иначе число подстановок без инвариантных элементов или число беспорядков - имеет значение

$$\hat{e}_n = n!\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j}{j!},$$

обычно получаемое иным путем [3], [4].

Для решения задачи 3), т.е. определения числа факторов $\tilde{e}_n$ в $< n >$, в качестве базисной функции мы имеем

$$\tilde{L}[3] = \frac{1}{2}L(3),$$

так как каждому гамильтонову циклу соответствуют два гамильтоновых контура. Полагая в (9) $y_1 = y_2 = 0$, $y_3 = \frac{1}{2}$, мы получаем

$$\tilde{L} = \frac{1}{\sqrt{1-x}}\exp(-\frac{x}{2} - \frac{x^2}{4}). \tag{10}$$

Для расчета конкретных значений $\tilde{e}_n$ можем искать рекуррентное
(10) дает

$$2(1-x)\frac{d\tilde{L}}{dx} = x^2\tilde{L}.$$

и подставляя

$$\bar{L} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\bar{e}_n}{n!} x^n,$$

мы получаем

$$\bar{e}_n = (n-1)\bar{e}_{n-1} + \frac{(n-1)(n-2)}{2}\bar{e}_{n-3}.$$

Так как $\bar{e}_n = 0$ при $n < 3$, $\bar{e}_3 = 1$, то первыми ненулевыми значениями $\bar{e}_n$ являются следующие:

n	3	4	5	6	7	8
$\bar{e}_n$	1	3	12	70	465	3507

Для отношения λ_n числа факторов к числу $\frac{n-1}{2}!$ гамильтоновых циклов мы имеем рекуррентное соотношение

$$\lambda_n = \lambda_{n-1} + \frac{1}{2(n-3)}\lambda_{n-3},$$

причем

$$\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 1.$$

Следовательно, при $n \geq 6$

$$\lambda_n > 1 + \sum_{j=6}^{n} \frac{1}{2(j-3)},$$

т.е. при $n \to \infty$, как и следовало ожидать, λ_n неограниченно возрастает.

Мы получаем еще одну модификацию соотношений теоремы, если для каждой компоненты типа h рассматриваем некоторый аддитивный вес β_h, например число вершин данной степени. Тогда вес покрытия будет суммой весов его компонент. В таком случае в качестве базисной э.п.ф. естественно брать

$$L[h] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e_n[h]}{n!} x^n y^{\beta_n}$$

При умножении таких функций степени y будут суммироваться, следовательно, эти степени в разложениях правых частей (6), (7) и (8) будут равны весам соответствующих компонент. Полагая же y равным единице, мы снова получим э.п.ф. для подсчета ...ла всех соответствующих покрытий.

Такую весовую переменную y мы будем использовать в следующем параграфе для подсчет... ...ла висячих вершин. Понятно, в случае надобности, можно также рассматривать любой комплект аддитивных весов, например, числа вершин степени 1,2,..., каждый из них представить степенями своей дополнительной переменной y, а также производить полные ...ли частичные суммирования, полагая все y, или некоторые из них равными единице.

2. Число деревьев и k-деревьев с ν висячими вершинами

Деревом в дальнейшем называется только соответствующий частичный граф (иначе дерево-остов) рассматриваемого неорграфа, т.е. всего $< n >$ или определенного его подграфа $< n' >$. Покрытие с k компонентами, каждая из которых является деревом для своего множества вершин, это k-дерево, так что 1-дерево - это дерево для всего $< n >$.

Рекуррентное соотношение для числа $t_{n,\nu}$ с ν висячими вершинами и $n \geq 3$ можно получить следующим образом. Мы составляем двумя способами список всех деревьев T с ν висячими ребрами, точно одно из которых снабжено пометкой, применяя прием, аналогичный доказательству теоремы. Во-первых, в списке всех $t_{n,\nu}$ деревьев без пометок берем каждое в ν экземплярах и в каждом из них снабжаем пометкой другое висячее ребро. Всего получаем $\nu t_{n,\nu}$ таких помеченных деревьев.

С другой стороны, если дерево T имеет помеченное ребро (a, b) и a висячая вершина, то, отбрасывая это ребро и эту вершину, мы получаем дерево T' для полного графа с множеством вершин $X \setminus a$, у которого вершина b либо висячая, либо нет. Поэтому имеем также следующий способ составления списка всех T: в $< n >$ выбираем вершину a, что можно сделать n способами. Далее в $< n-1 >$ со множеством вершин $X \setminus a$:

1) $t_{n-1,\nu}$ различными способами выбираем дерево T' с ν висячими вершинами; для каждого из них имеем ν возможностей выбора одной висячей вершины в качестве b;

2) $t_{n-1,\nu-1}$ различными способами выбираем дерево T' с $\nu - 1$ висячей вершиной и для каждого из них имеем $n - 1 - (\nu - 1) = n - \nu$ способов выбора одной невисячей вершины в качестве b.

Таким образом мы получаем

$$\nu t_{n,\nu} = n[\nu t_{n-1,\nu} + (n-\nu) t_{n-1,\nu-1}] \tag{11}$$

при $n \geq 3$.

При $n \leq 2$, очевидно, предыдущие рассуждения не применимы, имеет место. Имеются точно два ненулевых значения

$$t_{1,1} = 1, \quad t_{2,2} = 1,$$

если изолированную вершину, как это обычно делается, с... м деревом.

Для $n \geq 3$ ненулевые $t_{n,\nu}$ получаем, ес:

$$2 \leq \nu \leq n - 1,$$

при чем

$$_{n,2} = \frac{n!}{2}. \tag{13}$$

Эти значения легко получаются непосредственно. Каждой гамильтоновой цепи в $< n >$ соответствуют две различные перестановки n номеров вершин; деревой с вершиной степени $n-1$ определено выбором этой вершины. Понятно, можно так использовать (11), где для $\nu = 2$ аннулируется второе слагаемое в квадратной скобке, а при $\nu = n - 1$ первое слагаемое. (11) и (14) дают:

$$t_{n,n-2} = n(n-1)[2^{n-3} - 1]. \tag{15}$$

Полагая

$$t_{n,\nu} = \frac{n!}{\nu!} s(n-2, n-\nu), \tag{16}$$

мы получаем из (14)

$$s(n-2, 1) = 1 \tag{17}$$

при $n \geq 3$, и преобразуется в

$$s(n-2, n-\nu) = s(n-3, n-\nu-1) + (n-\nu)s(n-3, n-\nu), \tag{18}$$

что, с точностью до обозначений параметров, совпадает с рекуррентным соотношением для чисел Стирлинга второго рода [[3], стр.44].

В силу $t_{n,n} = 0$, (17) и (18) величины $s(n-2, n-\nu)$ в (16) являются этими числами Стирлинга с указанными для них параметрами.

Некоторые значения $t_{n,\nu}$:

n \ ν	2	3	4	5	6	7	n^{n-2}
3	3	0	0	0	0	0	3
4	12	4	0	0	0	0	16
5	60	60	5	0	0	0	125
6	360	720	210	6	0	0	1296
7	2520	8400	5250	630	7	0	16807
8	20160	100800	109200	30240	1736	8	262144

Последний столбец содержит суммы по строкам, т.е. числа всех деревьев.

Для э.п.ф.

$$F(x,y) = \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{\nu=2}^{n-1} \frac{t_{n,\nu}}{n!} x^n y^\nu = \frac{1}{2} x^3 y^2 + \frac{1}{6} x^4 (3y^2 + y^3) + \ldots \tag{19}$$

соотношение (11), с учетом первых членов в (19), дает уравнение в частных производных

$$x^2 \frac{\partial F}{\partial x} + (-xy + x - 1)\frac{\partial F}{\partial y} + x^3 y = 0. \tag{20}$$

Функция $F(x,y)$ однозначно определяется этим уравнением и условием

$$F(x, 0) = 0$$

и в конечном виде может быть выражена посредством параметрического представления

$$\left\{ \begin{array}{rcl} Re^{-R} & = & xe^{x(y-1)}, \\ F & = & R - \frac{1}{2}R^2 - x + \frac{1}{2}x^2 - x^2 y. \end{array} \right. \tag{21}$$

При этом соответствующие друг другу ветви значений R и x выбираются так, чтобы

$$R = x \quad \text{при} \quad y = 0. \tag{22}$$

Добавляя к F члены, соответствующие значениям (12), мы получаем базисную функцию N для числа всех деревьев с n пронумерованными вершинами, из которых висячие:

$$\begin{cases} Re^{-R} & xe^{x(y-1)}, \\ N & F + xy + \frac{1}{2}x^2y^2 \\ & R - \frac{1}{2}R^2 + (y-1)x + \frac{1}{2}(y-1)^2x^2, \end{cases} \tag{23}$$

при этом опять соблюдается (22), (20) дает

$$x^2\frac{\partial N}{\partial x} + (-xy + x - 1)\frac{\partial N}{\partial y} + x + (y-1)x^2 = 0. \tag{24}$$

Соотношения (21) и (23) компактны, но неявны. В отдельных случаях более удобными могут быть соотношения других видов, которые можно получить из (20) и (24). Так, например, полагая

$$F = \sum_{\nu=2}^{\infty} \varphi_\nu(x)y^\nu,$$

мы получаем

$$\varphi_\nu = \frac{x^{\nu+1}Q_\nu(x)}{\nu!(1-x)^{2\nu-3}},$$

где

$$Q_2(x) = Q_3(x) = 1,$$

а дальнейшие полиномы $Q_\nu(x)$ степени $\nu - 3$ с целочисленными коэффициентами определяются рекуррентным соотношением

$$Q_{\nu+1} = [(2\nu - 4)x + 1]Q_\nu + x(-x+1)\frac{dQ_\nu}{dx}.$$

Например,

$$Q_4 = 1 + 2x,$$

$$Q_5 = 1 + 8x + 6x^2,$$

$$Q_6 = 1 + 22x + 58x^2 + 24x^3,$$

старший коэффициент в Q_ν равен $(\nu - 2)!$, свободный член единице, а

$$Q_\nu(1) = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2\nu - 5).$$

На основе теоремы и замечаний о весах, э.п.ф. для k-деревьев с ν висячими вершинами равна

$$N_k = \frac{(N)^k}{k!}. \tag{25}$$

Умножая (24) на $(N)^{k-1}$, мы получаем линейное однородное соотношение между частными производными N_k и функцией N_{k-1}, которое можем использовать для получения различных рекуррентных соотношений. Таким образом можно, например, получить соотношение для числа $b_{n,\nu}$ 2-деревьев в $< n >$ с висячими вершинами (вершина x, $d(x) = 0$ висячая):

$$\nu b_{n,\nu} = n[\nu b_{n-1,\nu} + (n-\nu) b_{n-1,\nu-1}] + \frac{n(n-1)^2}{\nu - 1} t_{n-2,\nu-2}.$$

Некоторые значения $b_{n,\nu}$:

ν / n	2	3	4	5	6	7	$\tau_{n,2}$
2	1	0	0	0	0	0	1
3	0	3	0	0	0	0	3
4	0	12	3	0	0	0	15
5	0	60	50	0	0	0	110
6	0	360	630	90	0	0	1080
7	0	2520	7560	3150	147	0	13377
8	0	20160	92400	75600	12320	224	200704

Последний столбец опять содержит суммы по строкам, т.е. рассматриваемые ниже числа $\tau_{n,2}$ всех 2-деревьев в $< n >$.

Из-за особых свойств деревьев с $n = 1$ и $n = 2$ началю таблицы несколько нерегулярно, а общие соотношения для $b_{n,\nu}$ верны только начиная с достаточно большого n. Так, например, только при $n \geq 5$ имеем

$$b_{n,n-1} = \frac{n^2(n-1)}{2}; \quad b_{n,n-2} = 2^{n-6} n(n-1)(n^2 - n + 6) - 2^{-1} n^2 (n-1)^2.$$

3. Число всех k-деревьев

Общее число всех k-деревьев графа $< n >$ обозначим через $\tau_{n,k}$. Это число можно получить, суммируя по всем соответствующим ν числа таких деревьев с ν висячими вершинами, что мы делали в таблицах предыдущего параграфа.

Экспоненциальная порождающая функция

$$T_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_{n,k}}{n!} x^n \tag{26}$$

получается из (25) и (22), полагая $y = 1$, что дает

$$R e^{-R} = x \quad R \to 0 \quad \text{при } x \to 0, \tag{27}$$

$$T = T_1 = R - \frac{1}{2} R^2, \tag{28}$$

$$T_k = \frac{T^k}{k!}. \tag{29}$$

Отметим, что функция R, которую определяет соотношение (27), — это э.п.ф. для числа корневых деревьев. Эта функция получается иным путем и подробно исследуется в [3].

Явные выражения для $\tau_{n,k}$ можно получить, используя свойства вычетов аналитических функций:

$$\frac{\tau_{n,k}}{n!} = Res\left[\frac{T^k}{k!x^{n+1}}\right]. \tag{30}$$

Функция $R(x)$, определенная соотношением (27), регулярна в окрестности начальной точки плоскости x. Контуру C, охватывающему эту точку, в плоскости R соответствует аналогичный контур C'. Поэтому, представляя правую часть (30) через интеграл по контуру C и переходя к интегрированию по C', мы в конечном счете устанавливаем, что величина

$$2^k k! \tau_{n,k}$$

равна коэффициенту при R^n разложении в ряд Лорана по степени R выражения

$$n! R^{n-k}(2 - R)^k (1 - R) e^{nR}$$

Следовательно,

$$2^k k! \tau_{n,k} = n^{n-2k-1} n! \sum_{j=0}^{k} (-1)^j (k+j) \binom{k}{j} \frac{(2n)^{k-j}}{(n-k-j)!}. \tag{31}$$

Для $k = 1$ мы получаем известное значение для числа деревьев в $< n >$:

$$\tau_{n,1} = n^{n-2},$$

а для дальнейших значений k:

$$\tau_{n,k} = \frac{n^{n-2k}}{2^{k-1}} \binom{n-1}{k-1} P_k(n), \tag{32}$$

где $P_k(n)$ полином степени $k-1$ с целочисленными коэффициентами. В частности,

$$\tau_{n,2} = \frac{1}{2}(n-1)(n+6)n^{n-4}, \tag{33}$$

$$\tau_{n,3} = \frac{1}{8}(n-1)(n-2)(n^2+13n+60)n^{n-6},$$

$$P_4(n) = n^3 + 21n^2 + 202n + 840,$$

$$P_5(n) = n^4 + 30n^3 + 451n^2 + 3846n + 15120,$$

$$P_6(n) = n^5 + 40n^4 + 835n^3 + 10960n^2 + 87636n + 332640,$$

$$P_k(n) = n^{k-1} + \frac{1}{2}(k-1)(k+10)n^{k-2} +$$

$$+ \frac{1}{24}(k-1)(k-2)(3k^2 + 67k + 492)n^{k-3} +$$

$$+ \frac{1}{48}(k-1)(k-2)(k-3)(k^3 + 37k^2 + 551k + 3716)n^{k-4} + \ldots$$

Эти значения можно получить непосредственно из (31) или же использовать рекуррентные соотношения для $\tau_{n,k}$. Для получения последних обозначим штрихом дифференцирование по $\ln x$:

$$f' = x\frac{df}{dx}.$$

Тогда дифференцирование (27) и (28) дает $T' = R$, следовательно, (28) можно писать в виде

$$T'^2 = 2T' - 2T \tag{34}$$

Дифференцируя это соотношение и учитывая (34), результат можно написать в виде

$$2T'T'' = T'' + T' - 2T \tag{35}$$

Тогда

$$(T^2)'' = T'' + 5T' - 6T,$$

что в силу $T^2 = 2T_2$ дает

$$2n^2\tau_{n,2} = (n^2 + 5n$$

следовательно, формулу (33).

При $k \geq 2$ в силу (34) и (35) мы имеем

$$2(k \quad 1)(T^k)'' = k(T^{k-1})'' + k(4k \quad 3)(T^{k-}$$
$$-k(k \quad 1)(4k \quad 2)T^{k-} \quad 2k(k \quad 1)(T^{k-}$$
$$+2k(k \quad 1)(k \quad 2)T^k$$

Представляя фигурирующие здесь T через соответствующие T_j, мы получаем рекуррентное соотношение для коэффициентов разложений последних, которое дает именно

$$2(k \quad (k \quad 1)(4k \quad k + \tag{36}$$

Ана отношение для $P_k(n)$ мы по , подставляя в (36) правые части ответствующих (32):

$$3n - 4k \quad 4(k \tag{37}$$

(38)

можно установить, ально являются поли

оэффиц оэффициенты имеют

2^k

равно чис

Разность $\binom{m}{k} - \tau_{n,n-k}$ равна числу сочетаний ребер графа $< n >$ по k, каждое из которых содержит все ребра хотя бы одного цикла.

Некоторые значения $\tau_{n,k}$:

k / n	1	2	3	4	5	6
2	1	1	0	0	0	0
3	3	3	1	0	0	0
4	16	15	6	1	0	0
5	125	110	45	10	1	0
6	1296	1080	435	105	15	1
7	16807	13377	5250	1295	210	21
8	262144	200704	76608	18865	3220	378

Список литературы

[1] Берж К. Теория графов и ее применения. М.: ИЛ, 1962.

[2] Зыков А.А. Теория конечных графов I. Новосибирск: Наука,

[3] Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. М. ИЛ, 1963.

[4] Холл М. Комбинаторика. М.: Мир, 1970.

E. Grinberg. On the number of decomposing coverings of complete graphs.

Summary In this work the author formulates and proves theorem, which allows enumerate subgraphs of a complete graph

1991 MSC 05C30

E.Grīnbergs. Pilna grafa sadalošo pārklājumu skaits.

Anotācija. Rakstā tiek formulēta pierādīta teorēma, ar kur nosaka pilna grafa dažu apakšgrafu skaitu

Латвийский университет
Рига, б.Райниса 19

О числе решений краевой задачи для системы двух дифференциальных уравнений второго порядка.

О.В. Зайкина

Аннотация. Получены оценки числа решений краевых задач для системы

$$\begin{cases} x'' & F_1(t,x) + F_2(t,y) + U(t,x,y), \\ y'' & G_2(t,y) + V(t,x,y), \end{cases}$$

где функции F_1, F_2, G_1 и G_2 асимптотически линейны и принадлежат классу C^1, функции U и V ограничены, краевыми условиями двух видов

$$x(a) = A,\ x'(a) = B,\ y(a) = \ ,\ x(b) = D$$

и

$$x(a) = A,\ y(a) = B,\ y'(a) = C,\ x(b) = D.$$

УДК 517.927

1 Введение

Цель работы состоит в оценке снизу ... сла решений краевой задачи

$$\begin{cases} & x) + F_2(t,y) + U \quad x,y), \\ y'' & x) + G_2(t,y) + V(t,x,y), \end{cases}$$

$$D. \tag{2}$$

...льных пре... ожениях

Краева ... (2) явл... я мате... тической мо... движения материальной ... линейно ... ся. ... заданы x- ... в начальный момент времени y проекция ... любой момент времени и x проекция положения частицы

Проблема изучается в предположении, что существует решение $(\xi(t), \eta(t))$ краевой задачи (1),(2), функции F_1, F_2, G_1 и G_2 асимптотически линейны, такие что существуют пределы

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{F_1(t,x)}{x} = f_1(t), \qquad \lim_{|y|\to\infty} \frac{F_2(t,y)}{y} = f_2(t),$$

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{G_1(t,x)}{x} = g_1(t), \qquad \lim_{|y|\to\infty} \frac{G_2(t,y)}{y} = g_2(t)$$

равномерно по $t \in [a,b]$, а функции U и V ограничены.

Как частный случай системы (1), расматривается краевая задача для уравнения четвертого порядка

$$x^{(4)} = G_1(t,x) + G_2(t,x'') + V(t,x,x''), \tag{3}$$

$$x(a) = A, \quad x'(a) = B, \quad x''(a) = C, \quad x(b) = D, \tag{4}$$

где функции G_1 и G_2 асимптотически линейны, существуют преде

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{G_1(t,x)}{x} = g_1(t), \qquad \lim_{|y|\to\infty} \frac{G_2(t,y)}{y} = g_2(t)$$

равномерно по $t \in [a,b]$, а функция V ограничена.

Наличие решения краевой задачи (1),(2) позволяет перейти от нелинейной дифференциальной системы (1) к линейной системе

$$\begin{cases} X'' \quad \left(\frac{F_1(t,x) - F_1(t,\xi)}{x-\xi} + \frac{U(t,x,y) - U(t,\xi,y)}{x-\xi}\right)X + \\ \quad + \left(\frac{F_2(t,y) \quad F_2(t,\eta)}{y-\eta} + \frac{U(t,\xi,y) - U(t,\xi,\eta)}{y \quad \eta}\right)Y \\ Y'' \quad \left(\frac{G_1(t,x) - G_1(t,\xi)}{x-\xi} + \frac{V(t,x,y) \quad V(t,\xi,y)}{x \quad \xi}\right)X + \\ \quad \left(\frac{G_2(t,y) - G_2(t,\eta)}{y-\eta} + \frac{V(t,\xi,y) \quad V(t,\xi,\eta)}{y \quad \eta}\right)Y \end{cases}$$

где $(\xi(t), \eta(t))$ решение краевой задачи (1),(2),
вле творяющее начальным условиям $x(a)$ A,
B, $X(t)$ $x(t)$ $\xi(t)$, $Y(t)$

Для исследования нелинейной краевой применяется ариант
"стрельбы" ается поведение зверяющих нача.
условиям

системы (1) относительно решения $(\xi(t), \eta(t))$.

$$\begin{cases} x'' = (\frac{\partial F_1}{\partial x}(t,\xi) + \frac{\partial U}{\partial x}(t,\xi,\eta))x + (\frac{\partial F_2}{\partial y}(t,\eta) + \frac{\partial U}{\partial y}(t,\xi,\eta))y, \\ y'' = (\frac{\partial G_1}{\partial x}(t,\xi) + \frac{\partial V}{\partial x}(t,\xi,\eta))x + (\frac{\partial G_2}{\partial y}(t,\eta) + \frac{\partial V}{\partial y}(t,\xi,\eta))y. \end{cases} \tag{7}$$

Как показано в работе, для $|\gamma| \to \infty$ нормированное решение системы (5) стремится к решению предельной системы

$$\begin{cases} x'' = f_1(t)x + f_2(t)y, \\ y'' = g_1(t)x + g_2(t)y. \end{cases} \tag{8}$$

Сравнивая поведение решений системы (5) вблизи нуля и на бесконечности, мы получаем необходимую оценку. Впервые идея сравнения поведения решений системы вблизи нуля и на бесконечности для получения оценок числа решений была использована А.Перовым в работе [3], где исследовалась система двух уравнений первого порядка с краевыми условиями типа Штурма-Лиувилля. Далее этот метод использовался при исследовании различных типов нелинейных уравнений в работах [4], [6], [7], [8], [9], [10], [5].

Основные понятия и определения, которые используются в данной работе, даны согласно статьям [1], [2].

Структура работы следующая.

Во второй части мы описываем класс исследуемых задач и приводим необходимые определения. В третьей части работы формулируются и доказываются вспомогательные результаты. В четвертой части сформулирован и доказан главный результат этой работы. В пятой части работы показан главный результат для уравнения четвертого порядка (3) с краевыми условиями (4). В шестой части работы показан главный результат для системы (1) с другими краевыми условиями. В седьмой части работы приведены примеры краевой задачи для системы и для уравнения четвертого порядка.

2 Класс исследуемых задач и определения

В работе исследуется краевая задача (1),(2) в предположении, что

(A1) $F_1, F_2, G_1, G_2 : [a,b] \times R \to R$, $U, V : [a,b] \times R^2 \to R$, и их частные производные по x и y являются непрерывными функциями;

(A2) существует решение $(\xi(t), \eta(t))$ краевой задачи (1),(2);

(A3) для любых $(t,x,y) \in (a,b] \times R^2$ выполняется неравенство

$$y\left[(\frac{\partial F_1}{\partial x}(t,x) + \frac{\partial U}{\partial x}(t,x,y))x + (\frac{\partial F_2}{\partial y}(t,y) + \frac{\partial U}{\partial y}(t,x,y))y\right] -$$

$$-x\left[(\frac{\partial G_1}{\partial x}(t,x) + \frac{\partial V}{\partial x}(t,x,y))x + (\frac{\partial G_2}{\partial y}(t,y) + \frac{\partial V}{\partial y}(t,x,y))y\right] > 0;$$

(A4) существуют равномерные по $t \in [a,b]$ пределы

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{F_1(t,x)}{x} = f_1(t), \qquad \lim_{|y|\to\infty} \frac{F_2(t,y)}{y} = f_2(t),$$

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{G_1(t,x)}{x} = g_1(t), \qquad \lim_{|y|\to\infty} \frac{G_2(t,y)}{y} = g_2(t);$$

(A5) существует равномерный по $t \in [a,b]$ предел

$$\lim_{|x|+|y|\to\infty} \frac{U(t,x,y) + V(t,x,y)}{|x| + |y|} = 0.$$

Условие **(A1)** обеспечивает существование и единственность решения задачи Коши, что является необходимым для исследования линейной задачи (5), (6). Кроме того, это условие обеспечивает непрерывную зависимость решений задачи Коши от начальных данных.

В работе [2] К.Крейт вводит условие **(A3)**, которое обеспечивает кручение решений линейной системы двух дифференциальных уравнений второго порядка на плоскости (x,y).

В дальнейшем нам потребуются некоторые понятия из теории линейных систем. Поэтому, рассмотрим линейную систему

$$\begin{cases} x'' = a(t)x + b(t)y, \\ y'' = c(t)x + d(t)y. \end{cases} \tag{9}$$

Для исследования решений системы удобно перейти к полярным координатам и ввести понятие угловой функции решения.

Переход к полярным координатам и использование техники угловой функции встречается в работе А.Перова [3]. В работе вводятся полярные координаты согласно [2].

$$x(t) = r(t)\sin\theta(t), \quad y(t) = r(t)\cos\theta(t), \quad r^2(t) = x^2(t) + y^2(t),$$
$$ctg\theta(t) = \frac{y(t)}{x(t)}. \tag{10}$$

Определение 1 (K.Kreith) *Пусть $(x(t), y(t))$ решение системы (9), определенное на интервале $[a,b]$. Если $x^2(t) + y^2(t) > 0$ для $t \in (a,b]$, то функцию $\theta(t)$ будем называть угловой функцией решения системы (9).*

Решение системы (9), удовлетворяющее начальным условиям (6), в терминах полярных координат должно удовлетворять следующим начальным условиям

$$r(a) = 0, \; r'(a) = \gamma, \; \theta(a) = 0.$$

Определение 2 (K.Kreith) *$\alpha_n \in (a,b)$ называется n-ой сопряженной к $t = a$ точкой относительно системы (9), если существует нетривиальное решение $(x(t),y(t))$ системы, такое что $x(t)$ имеет $n-1$ нулей на интервале (a,α_n), причем в точке $t=a$ это решение системы имеет тройной нуль и $r'(a)=1$, в точке $t=\alpha_n$ $x(\alpha_n)=0$, в точке $t=b$ $x(b)\neq 0$.*

Аналогично мы можем сформулировать понятие сопряженной точки для дифференциального уравнения четвертого порядка.

Определение 3 (Leighton-Nehari) *$\alpha_n \in (a,b)$ называется n-ой сопряженной к $t=a$ точкой относительно линейного уравнения четвертого порядка*

$$x^{(4)} = g_1(t)x + g_2(t)x'', \tag{11}$$

если существует нетривиальное решение $x(t)$ уравнения, такое что $x(t)$ имеет $n-1$ нулей на интервале (a,α_n), причем в точке $t=a$ это решение имеет тройной нуль и $r'(a)=1$, в точке $t=\alpha_n$ $x(\alpha_n)=0$, в точке $t=b$ $x(b)\neq 0$.

Замечание. Для уравнения (11) полярные координаты вводятся аналогично полярным координатам системы уравнений, где $y(t)=x''(t)$.

В работе [2] К.Крейт вводит некоторую функцию

$$\phi(t) = x'(t)y(t) - x(t)y'(t). \tag{12}$$

Условие **(A3)** эквивалентно тому, что $\phi'(t) > 0$ для $t \in (a,b]$. Это условие обеспечивает спиралеобразное движение решений системы (9) на плоскости (x,y).

3 Вспомогательные результаты

Лемма 3.1 *Каждому решению $(X(t),Y(t))$ задачи Коши (5),(6) удовлетворяющему условию $X(b)=0$, соответствует решение краевой задачи (1),(2).*

Доказательство. По построению $x(t) = X(t)+\xi(t)$, $y(t) = Y(t)+\eta(t)$, где $(x(t),y(t))$ решение системы (1), удовлетворяющее начальным условиям $x(a) = A$, $x'(a)=B$, $y(a)=C$, $y'(a)=\eta'(a)+\gamma$.

Условие $X(b)=0$ влечет $x(b)=D$.

Таким образом, $(x(t),y(t))$ является решением краевой задачи (1),(2).

Лемма 3.2 *Для $|\gamma|\to\infty$ нормированное решение системы (5), удовлетворяющее начальным условиям (6), стремится к решению предельной системы (8), удовлетворяющему начальным условиям*

$$x(a)=0, \quad x'(a)=0, \quad y(a)=0, \quad y'(a)=1. \tag{13}$$

Доказательство. Пусть $(X(t),Y(t))$ решение задачи Коши (5),(6). Рассмотрим нормированное решение системы (5) $(z(t),w(t))$.

$$z(t) = \frac{1}{\gamma}X(t;\gamma), \quad w(t) = \frac{1}{\gamma}Y(t;\gamma).$$

Нормированное решение $(z(t), w(t))$ удовлетворяет системе

$$
\begin{cases}
z'' &= \dfrac{F_1(t,\gamma z+\xi)-F_1(t,\xi)}{\gamma}+\dfrac{F_2(t,\gamma w+\eta)-F_2(t,\eta)}{\gamma}+\\
&+\ \dfrac{U(t,\gamma z+\xi,\gamma w+\eta)-U(t,\xi,\eta)}{\gamma},\\
w'' & \quad \dfrac{G_1(t,\gamma z+\xi)-G_1(t,\xi)}{\gamma}+\dfrac{G_2(t,\gamma w+\eta)-G_2(t,\eta)}{\gamma}+\\
&+\ \dfrac{V(t,\gamma z+\xi,\gamma w+\eta)-V(t,\xi,\eta)}{\gamma}
\end{cases}
\tag{14}
$$

и начальным условиям

$$
z(a)=0,\quad z'(a)=0,\quad w(a)=0,\quad w'(a)=1. \tag{15}
$$

При $|\gamma|\to\infty$ по условиям (A4),(A5) система (14) примет вид

$$
\begin{cases}
z'' & \quad f_1(t)z+f_2(t)w+\epsilon(t;\gamma),\\
w'' & \quad g_1(t)z+g_2(t)w+\delta(t;\gamma),
\end{cases}
\tag{16}
$$

где

$$
\epsilon(t;\gamma)=\frac{f_1(t)\xi(t)}{\gamma}-\frac{F_1(t,\xi(t))}{\gamma}-\frac{F_2(t,\eta(t))}{\gamma}+\frac{f_2(t)\eta(t)}{\gamma}+
$$
$$
+\frac{U(t,\gamma z+\xi(t),\gamma w+\eta(t))-U(t,\xi(t),\eta(t))}{\gamma},
$$

$$
\delta(t;\gamma)=\frac{g_1(t)\xi(t)}{\gamma}-\frac{G_1(t,\xi(t))}{\gamma}-\frac{G_2(t,\eta(t))}{\gamma}+\frac{g_2(t)\eta(t)}{\gamma}+
$$
$$
+\frac{V(t,\gamma z+\xi(t),\gamma w+\eta(t))-V(t,\xi(t),\eta(t))}{\gamma}.
$$

Сравним систему (16) с начальными условиями (15) с предельной системой (8) и аналогичными начальными условиями.

Пусть $u(t)=z(t)-x(t)$, $v(t)=w(t)-y(t)$.

Получаем систему

$$
\begin{cases}
u'' & \quad f_1(t)u+f_2(t)v+\epsilon(t;\gamma),\\
v'' & \quad g_1(t)u+g_2(t)v+\delta(t;\gamma)
\end{cases}
\tag{17}
$$

с нулевыми начальными условиями $u(a)=0$, $u'(a)=0$, $v(a)=0$, $v'(a)=0$.

Используя "формулу вариации постоянных" для линейной неоднородной системы, решение будет иметь вид

$$
x(t)=W(t)W^{-1}(a)x(a)+\int_a^t W(t)W^{-1}(s)h(s)ds.
$$

где $x(t) = (u(t), v(t))$, $W(t)$ – матрица Вронского,
$h(t) = (\epsilon(t;\gamma), \delta(t;\gamma))$.

Так как мы имеем нулевые начальные условия, то

$$x(t) = \int_a^t W(t)W^{-1}(s)h(s)ds.$$

При $|\gamma| \to \infty$ $h(t;\gamma) \to 0$ равномерно по t, следовательно, система (17) при $|\gamma| \to \infty$ имеет лишь тривиальное решение $u(t) = 0$, $v(t) = 0$ для любого $t \in [a,b]$.

Таким образом, для $|\gamma| \to \infty$ нормированное решение системы (5) стремится к решению предельной системы (8).

Лемма 3.3 *$\phi(t)$ строго возрастающая функция для $t \in [a,b]$ и $\phi(t) > 0$ для $t > a$.*

Доказательство. Рассмотрим $\phi'(t)$. По условию **(A3)** $\phi'(t) = y(t)x''(t) - x(t)y''(t) > 0$. Следовательно, $\phi(t)$ строго возрастающая функция.

Так как $\phi(a) = 0$, то $\phi(t) > 0$ для $t > a$.

Лемма 3.4 *$\theta(t)$ строго возрастающая функция для $t \in [a,b]$.*

Доказательство. Так как $\phi'(t) = (r^2(t)\theta'(t))'$, то $\phi(t) = r^2(t)\theta'(t)$. По лемме 3.3 $\phi(t) > 0$, следовательно $\theta'(t) > 0$ для $t > a$.

Следовательно, $\theta(t)$ строго возрастающая функция.

Лемма 3.5 *Любое нетривиальное решение задачи Коши (5),(6) имеет не более одного двойного нуля.*

Доказательство. Если t_0 двойной нуль решения, [illegible] $X(t_0) = Y(t_0) = 0$. $\phi(t_0) = X'(t_0)Y(t_0) - X(t_0)Y'(t_0) = 0$.

Так как $\phi(a) = 0$ и $\phi(t)$ [illegible] для любого $t > a$, то $t_0 = a$.

Таким образом, любое нетривиальное решение задачи Коши (5),(6) имеет двойной нуль в точке $t = a$, а все остальные нули являются простыми.

Лемма 3.6 *$\theta(t;$ [illegible] $[a,b] \times R$ непрерывная функция по совокупности t [illegible]*

Доказательство. Пусть $(X(t;\gamma), Y(t;\gamma))$ решение системы (5), удовлетворяю[illegible] начальным значениям (6). $\theta(t;\gamma)$ угловая функция этого решения.

$$\theta'(t;\gamma) = \frac{\phi(t;\gamma)}{r^2(t;\gamma)}, \qquad \theta(t;\gamma) = \theta(b;\gamma) - \int_t^b \frac{\phi(t;\gamma)}{r^2(t;\gamma)}dt.$$

Утверж[illegible] леммы с[illegible] 3.5 и теореме о непрерывной зависимости решения задачи Коши от начальных данных.

4 Главный результат

Теорема 4.1 *Пусть выполняются условия* **(A1)-(A6)**. *Пусть, кроме того, система уравнений в вариациях (7) имеет n точек сопряженных к $t = a$, а предельная система (8) имеет k точек, сопряженных к $t = a$, на интервале (a, b). Причем $k \neq n$.*

Тогда краевая задача (1),(2) имеет не менее $2|k - n| + 1$ решений.

Доказательство. Рассмотрим решение $(X(t), Y(t))$ задачи Коши (5), (6). Будем изменять значение γ от 0 до $+\infty$.

Для γ близких к нулю угловая функция $\theta(t; \gamma)$ решения задачи Коши (7),(6) удовлетворяет условию

$$n\pi < \theta(b; \gamma) < (n + 1)\pi,$$

где n целое число.

Для $\gamma \to +\infty$ угловая функция $\theta(t; \gamma)$ решения задачи Коши (8),(6) удовлетворяет условию

$$k\pi < \theta(b; \gamma) < (k + 1)\pi,$$

где k целое число.

Так как $\theta(b; \gamma)$ непрерывная функция по γ, то по теореме о промежуточном значении $\theta(b, \gamma) = m\pi$, где $m \in k + 1, \dots, n$ или $m \in n + 1, \dots, k$ в зависимости от значений k и n.

Таким образом, мы получаем $|n - k|$ решений задачи Коши (5), (6), удовлетворяющих условию $X(b) = 0$. По лемме 3.1 каждому такому решению соответствует решение краевой задачи (1),(2).

При изменении γ от $-\infty$ до 0 получаем еще $|n - k|$ решений.

Таким образом, краевая задача (1),(2) имеет не менее $2|n - k| + 1$ решений.

Аналогичный результат для системы двух уравнений первого порядка приводится в работе А.Перова [3].

5 Краевая задача для уравнения четвертого порядка

В этом параграфе мы покажем значение главного четвертого порядка

с краевыми условиями следующего ви

(E

(E3) для любых $(t,x,y) \in [a,b] \times R^2$ выполняется неравенство

$$x\left(\left(\frac{\partial G_1}{\partial x}(t,x)+\frac{\partial V}{\partial x}(t,x,y)\right)x + \left(\frac{\partial G_2}{\partial y}(t,y)+\frac{\partial V}{\partial y}(t,x,y)\right)y\right) < 0;$$

(E4) существуют пределы

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{G_1(t,x)}{x} = g_1(t), \qquad \lim_{|y|\to\infty} \frac{G_2(t,y)}{y} = g_2(t)$$

равномерно по $t \in [a,b]$.

(E5) существует предел

$$\lim_{|x|+|y|\to\infty} \frac{V(t,x,y)}{|x|+|y|} = 0$$

равномерно по $t \in [a,b]$.

Далее в рабо нас будут интересовать уравнение в вариациях относительно решения $\xi(t)$

$$x^{(4)} = \left(\frac{\partial G_1}{\partial x}(t,\xi) + \frac{\partial V}{\partial x}(t,\xi,\xi'')\right)x + \left(\frac{\partial G_2}{\partial x''}(t,\xi'') + \frac{\partial V}{\partial x''}(t,\xi,\xi'')\right)x'' \tag{20}$$

и предельное ура ние

$$x^{(4)} = g_1(t)x + g_2(t)x'' \tag{21}$$

Очевидно, что уравнение четвертого порядка (18) эквивалентно систе двух уравнений второго порядка

$$\begin{cases} x'' \qquad y, \\ y'' \qquad\qquad G_2(t,y) + V(t, \end{cases} \tag{22}$$

а красные условия (19) для такой системы будут иметь следующий вид

$$A, \quad x'(a) = B, \qquad\qquad x(b) = D. \tag{23}$$

Так как красная задача (18),(19) для уравнения четвертого порядка эквивалентна красной задаче (22),(23) для системы двух уравнений второго порядка, то все свойства решений системы (22) будут иметь место для решений уравнения (18).

Красная задача (22),(23) является частным случаем красной задачи (1),(2), где $F_1(t,x) = 0$, $F_2(t$

Красная дача (22),(23) принадлежит к классу нес так как ловия **(A1)-(A5)** из условий **(E1)-(E5)**

Таким образом, для красной ачи (22),(23), едовательно и для красной задачи (18),(19) имеет авный резу ты

Теорема 5.1 *ловия* **(E1)-(E5)** *кроме того, уравне-*
сопряженные *уравне-*
t *Причем* k,

6 Другая краевая задача

В этом параграфе мы покажем, что предложенный метод исследования подходит для системы двух дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{cases} x'' \qquad F_1(t,x) + F_2(t,y) + U(t,x,y), \\ \\ y'' \qquad G_1(t,x) + G_2(t,y) + V(t,x,y) \end{cases} \tag{24}$$

с краевыми условиями следующего вида

$$x(a) = A, \quad y(a) = B, \quad y'(a) = C, \quad x(b) = D. \tag{25}$$

Будем изучать краевую задачу (24),(25) в предположении, что выполняются условия **(A1)**-**(A5)**.

Наличие решения краевой задачи (24),(25) позволяет перейти от нелинейной дифференциальной системы (24) к линейной системе (5), где $(\xi(t),\eta(t))$ решение краевой задачи (24),(25), $(x(t),y(t))$ решение системы (24), удовлетворяющее начальным условиям $x(a) = A, y(a) = B, y'(a) \quad C, x'(a) = \xi'(a) + \gamma, \gamma \in R$, $X(t) = x(t) - \xi(t)$, $Y(t) = y(t) - \eta(t)$.

Будем исследовать поведение решений системы (5), удовлетворяющих следующим начальным условиям

$$X(a) = 0, \quad Y(a) = 0, \quad Y'(a) = 0, \quad X'(a) = \gamma, \tag{26}$$

где $\gamma \in R$.

Коэффициенты системы (5) зависят от значения γ Для γ близких к нулю система (5) превращается в соответствующую систему уравнений в вариациях (7) для системы (24) относительно решения $(\xi(t),\eta(t))$.

Для $|\gamma| \to \infty$ нормированное решение системы (5) стремится к решению предельной системы (8).

Замечание. В терминах полярных координат решение линейной должно удовлетворять следующим начальным значениям

$$r(a) = 0,\ r'(a) = \gamma,\ \theta(a) = -$$

Лемма 6.1 *Каждому решению $(X(t),Y(t))$ задачи* *овлетворяющему условию $X(b) = 0$, соответствует решение краевой*

Доказате: тво леммы аналогично

Лемма 6.2 *Для $|\gamma|$ ∞ нормированное решение* *чальным условиям (26), стремится к решени* *творяющему начальным ус.*

Лемма 6.3 *$\phi(t)$ строго возрастающая функция для $t \in [a,b]$ и $\phi(t) > 0$ для $t > a$.*

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 3.3.

Лемма 6.4 *$\theta(t)$ строго возрастающая функция для $t \in [a,b]$.*

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 3.4.

Лемма 6.5 *Любое нетривиальное решение задачи Коши (5),(26) имеет не более одного двойного нуля.*

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 3.5.

Лемма 6.6 *$\theta(t;\gamma) \in (a,b] \times R$ непрерывная функция по совокупности t и γ.*

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 3.6.

Таким образом, для краевой задачи (24),(25) имеет место главный результат работы.

Теорема 6.1 *Пусть выполняются условия* (**A1**)-(**A5**). *Пусть, кроме того, система уравнений в вариациях (7) имеет n точек сопряженных к $t = a$, а предельная система (8) имеет k точек, сопряженных к $t = a$, на интервале (a,b). Причем $k \neq n$.*

Тогда краевая задача (24),(25) имеет не менее $2|k-n|+1$ решений.

7 Примеры

1. Рассмотрим краевую задачу для уравнения четвертого порядка

$$x^{(4)} = -g(x), \tag{28}$$

$$x(0) = x'(0) = x''(0) = 0,\ x(\pi) = 0. \tag{29}$$

Предположим, что

(1) $g : R \to R$, $\frac{\partial g}{\partial x}(x)$ являются непрерывными функциями;

(2) $g(x)$ строго возрастающая функция, $g(0) = 0$;

(3) $\frac{\partial g}{\partial x}(0) = 4k^4$;

(4) $g(x)$ ограниченная функция.

Уравнение в вариациях имеет вид

$$x^{(4)} = -4k^4 x, \tag{30}$$

а предельное уравнение

$$x^{(4)} = 0. \tag{31}$$

Для краевой задачи (28),(29) выполняются условия (E1)-(E5). Следовательно, имеет место теорема 5.1.

Рассмотрим решения линейных уравнений (30) и (31), удовлетворяющие начальным условиям

$$x(0) = x'(0) = x''(0) = 0,\ x'''(0) = 1. \tag{32}$$

Решение задачи Коши (30),(32) $x(t) = \dfrac{1}{6}t^3$ не имеет сопряженных точек на интервале $(0, \pi)$.

Задача Коши (31),(32) имеет решение

$$x(t) = \frac{1}{4k^3}(ch\,kt \quad sin\,kt - sh\,kt\cdot cos\,kt),$$

$$x(t) = \frac{1}{4k^3}\sqrt{ch^2\,kt + sh^2\,kt}(sin\,(kt - \quad)),$$

где

$$\frac{ch\,kt}{\sqrt{ch^2\,kt + sh^2\,kt}} = cos \qquad \frac{sh\,kt}{\sqrt{ch^2\,kt + sh^2\,kt}} = sin \qquad 0 < \quad < \pi.$$

Таким образом, уравнение в вариациях (30) имеет $k - 1$ сопряженную точку на интервале $(0, \pi)$.

Следовательно, по теореме (5.1) краевая задача (28), (29) имеет не менее $2k - 1$ решений.

2. Рассмотрим краевую задачу для системы уравнений

$$\begin{cases} x'' \qquad 8k^2x + f(y), \\ y'' \qquad -g(x) + 8k^2y, \end{cases} \tag{33}$$

$$x(0) = x'(0) = 0,\ y(0) = 0,\ x(\pi) = 0. \tag{34}$$

Предположим, что

(1) $f, g \quad R \to R$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(y)$, $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x)$ являются непрерывными функциями;

(2) $f(y)$ строго возрастающая функция, $f(0) = 0$, $g(x)$ строго возрастающая функция, $g(0) = 0$;

(3) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0) = 4k^2$, $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0) = 9k^2$;

(4) $f(y)$, $g(x)$ ограниченные функции.

Система уравнений в вариациях имеет вид

$$\begin{cases} x'' \qquad 8k^2x + 4k^2y, \\ y'' \qquad -9k^2x + 8k^2y, \end{cases} \tag{35}$$

а предельная система

$$\begin{cases} x'' \qquad 8k^2x, \\ y'' = 8k^2y. \end{cases} \tag{36}$$

Для краевой задачи (33),(34) выполняются условия (**A1**)-(**A5**). Следовательно, имеет место теорема 4.1.

Рассмотрим решения линейных систем (35) и (36), удовлетворяющие начальным условиям

$$x(0) = x'(0) = y(0) = 0,\ y'(0) = 1. \tag{37}$$

Решение задачи Коши (35),(37)

$$\begin{cases} x(t) & 0, \\ y(t) & \dfrac{1}{k\sqrt{8}} sh(k\sqrt{8}t) \end{cases} \tag{38}$$

не имеет сопряженных точек на интервале $(0, \pi)$.

Задача Коши (36),(37) имеет решение

$$\begin{cases} x(t) & sh\,3kt \cdot cos\,kt - 3ch\,3kt \cdot sin\,kt, \\ y(t) & sh\,3kt \cdot cos\,kt + (\frac{1}{k} - 3)ch\,3kt \cdot sin\,kt. \end{cases} \tag{39}$$

Таким образом, система уравнений в вариациях (35) имеет $k - 1$ сопряженную точку на интервале $(0, \pi)$.

Следовательно, по теореме 4.1 краевая задача (33), (34) имеет не менее $2k - 1$ решений.

Список литературы

[1] W.M.Whyburn, On self-adjoint ordinary differential equations of the fourth order, Amer. J. Math., 52 (1930), 171-196.

[2] Kreith K. Rotation Properties of a Class of Second Order Differential Systems // J. Diff. Equations., 1975, V.17, N 2, P. 395 - 405.

[3] Красносельский М.А., Перов А.И., Поволоцкий А.Г., Забрейко П.П., Векторные поля на плоскости, М.: Физматгиз, 1963, 178-204.

[4] Кигурадзе И.Т. Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. - Тбилиси: Изд-во Тбилисского университета, 1975. - 352 с.

[5] Gera M., Sadyrbaev F., Multiple solutions of a third order boundary value problem, Math. Slovaca, 42 (1992), No. 2, 175-180.

[6] Ф.Ж.Садырбаев, Двухточечная краевая задача для уравнения четвертого порядка, Рига: Латвийский университет, Дифференциальные уравнения, т.553, 1990, 84-91.

[7] Ф.Ж.Садырбаев, Замечание о методах оценок числа решений нелинейных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, Мат. заметки, т.57, выпуск 6, 1995, 889-895.

[8] E.Rovderova, Number of solutions of boundary value problems, Nonlinear Analysis, TMA, vol. 21, No. 5, 1993, 363-368.

[9] E.Rovderova, On the number of solutions of a third-order boundary value problem, American Mathematical Society, vol. 347, No. 8, 1995, 3079-3092.

[10] E.Rovderova, Third-order boundary-value problem with nonlinear boundary conditions, Nonlinear Analysis, TMA, vol. 25, No. 5, 1995, 473-485.

O. Zayakina. On the number of solutions of a boundary value problem for a system of two second-order differential equations.

Summary. Estimations of the number of solutions of boundary value problems for the system

$$\begin{cases} x'' = F_1(t,x) + F_2(t,y) + U(t,x,y), \\ y'' = G_1(t,x) + G_2(t,y) + V(t,x,y), \end{cases}$$

are given, where functions F_1, F_2, G_1 and G_2 are continuously differentiable and asymptotically linear at infinity, functions U and V are bounded, with the boundary conditions $x(a) = A$, $x'(a) = B$, $y(a) = C$, $x(b) = D$ and $x(a) = A$, $y(a) = B$, $y'(a) = C$, $x(b) = D$.

MSC 34B15

O.Zajakina. Par atrisinājumu skaitu robežproblēmas divu otrās kārtas diferenciālvienādojumu sistēmai.

Anotācija. Doti atrisinājumu skaita novērtējumi robežproblēmām sistēmai

$$\begin{cases} x'' = F_1(t,x) + F_2(t,y) + U(t,x,y), \\ y'' = G_1(t,x) + G_2(t,y) + V(t,x,y), \end{cases}$$

kur funkcijas F_1, F_2, G_1 un G_2 ir asimptotiski lineāras un pieder C^1 klasei, funkcijas U un V ir ierobežotas, ar robežnosacījumiem $x(a) = A$, $x'(a) = B$, $y(a) = C$, $x(b) = D$ un $x(a) = A$, $y(a) = B$, $y'(a) = C$, $x(b) = D$.

Латвийский университет
Рига, б.Райниса, 19

Поступила 01.07.96

О единственности решения краевой задачи для одного нелинейного ОДУ второго порядка

Ю.А.Клоков

Аннотация. Рассматривается задача

$$u'' - \frac{t}{2}u' + \Theta u + (u')^2 = 0,$$

$$u'(0) = 0, \quad u(0) = \lambda, \quad t \geq 0, \quad \Theta, \lambda \in R.$$

Доказано, что для любого $\Theta > 1$ существует единственное $\lambda > 0$, для которого решение $u(t)$ определено при всех $t \geq 0$ и монотонно.

УДК 517.927

Рассмотрим задачу

$$u'' - \frac{t}{2}u' + \Theta u + (u')^2 = 0, \tag{1}$$

$$u'(0) = 0, \quad u(0) = \lambda, \quad \Theta > 1, \quad t \geq 0, \tag{2}$$

где $\Theta > 1$ задано и ищутся $\lambda \in R$, для которых решения $u(t)$ определены на всей полуоси $t \geq 0$ (см.[1]).

Таким решением является, например, функция

$$u = \frac{\Theta - 1}{2\Theta} - \frac{(\Theta - 1)}{4}t^2 \tag{3}$$

Покажем, что решение задачи (1), (2), определенное при $t \geq 0$ и монотонно убывающее, единственно, т.е. других решений, кроме (3), нет.

Заметим, что подобные решения могут существовать, только если $\lambda > 0$.

Сделаем в (1), (2) замену

$$z > 0, \quad u = \ln z, \tag{4}$$

так что $z' = u'e^u$ и если u есть монотонно убывающее решение ($u' < 0$, $t > 0$), то $z' < 0$, $t > 0$ и $z(t)$ есть также монотонно убывающее решение. После подстановки вместо задачи (1), (2) получим задачу

$$-\frac{t}{2}z' + \Theta z \ln z = 0.$$

$$z'(0) = 0, \quad z(0) = e^{\lambda}, \quad z(t) > 0, \quad t \geq 0 \tag{6}$$

(функцию $z \ln z$ в нуле полагаем равной нулю).

Пусть $z(t)$ есть решение (5), (6), определенное параметром $\lambda > 0$.

Легко показать, что $z(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Действительно, предположим противное. Пусть $z(\infty) = c$, $c \in (0, 1)$. Тогда при больших t из (5) получаем

$$z'' - \frac{t}{2} z' = \Theta c \ln \frac{1}{c} (1 + \epsilon(t)),$$

откуда следует, что при больших t необходимо $z(t) \to -\infty$ при $t \to \infty$. Следовательно, $c = 0$.

Обозначим

$$p = -\frac{z'}{tz}, \quad p > 0, \quad t > 0. \tag{7}$$

В нуле определяем $p(0)$ по непрерывности и таким образом получаем

$$p(0) = \Theta\lambda.$$

Из (7) и (5) находим

$$p' = tp^2 + p(\frac{t}{2} - \frac{1}{t}) + \Theta \frac{\ln z}{t}. \tag{8}$$

Из (7) находим также, что

$$z(t) = z(0) \exp(-\int_0^t sp(s)ds)$$

и, следовательно,

$$\ln z = \lambda - \int_0^t sp(s)ds. \tag{9}$$

Так как $z(t) \to 0$ при $t \to \infty$, то

$$\int_0^t sp(s)ds \to +\infty \quad при \quad t \to +\infty. (10)$$

Подставляя (9) в (8), находим уравнение

$$p' = tp^2 + p(\frac{t}{2} - \frac{1}{t}) + \frac{\Theta}{t}(\lambda - \int_0^t sp(s)ds),$$

которое перепишем в виде

$$p' = tp^2 + \frac{t}{2}p - \frac{\Theta\lambda - p}{t} - \frac{\Theta}{t} \int_0^t$$

Легко проверить, что $p(t)$ [illegible] $(\Theta$ [illegible]
$p(0) > (\Theta$ [illegible] $1)/2$ или $p(0) < (\Theta$ [illegible] $1)/$ [illegible]
[illegible] > 0 $(p(t) > 0)$. Е[illegible] же $p(0)$ [illegible]

Из (12) при t [illegible]

Отсюда при $t \to 0$ находим

$$p''(0) = \frac{p_0}{3}(2p_0 + 1 - \Theta), \tag{14}$$

где $p_0 = p(0) = \Theta\lambda$.

Пусть $p(0) = p_0 > (\Theta - 1)/2$. Тогда из (14) следует $p''(0) > 0$ и при малых t решение $p(t)$ будет монотонно возрастать. Покажем, что это решение не может иметь максимума. Действительно, пусть при некотором t $p'(t) = 0$, $p''(t) \leq 0$. Тогда при этом значении t из (13) находим (т.к. $p(t) > 0 > (\Theta - 1)/2$)

$$tp''(t) = tp(t)(2p(t) + 1 - \Theta) > 0.$$

Получили противоречие. Значит, решение монотонно возрастает при всех $t > 0$. Могут быть два случая: либо $p(\infty) = c > (\Theta - 1)/2$, либо $p(\infty) = +\infty$. В первом случае, разделив (12) на t, при $t \to \infty$ получим

$$0 = c^2 + \frac{c}{2} - \frac{\Theta c}{2} = \frac{c}{2}(2c + 1 - \Theta) > 0,$$

что противоречиво. Во втором случае из (12) при $t \to +\infty$ находим $p' = tp^2(1 + \varepsilon(t))$, где $\varepsilon(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Но из этого уравнения следует, что решение $p(t)$ при некотором конеч[illegible] t обратится в бесконечность. Таким образом, в случае, когда $p(0) > (\Theta - 1)/2$, решение задачи не существует.

Если $p(0) < (\Theta - 1)/2$, то аналогично решение будет монотонно убывать, и если $p(\infty) = c$, $0 < c < (\Theta - 1)/2$, то, как и выше, получаем противоречие

$$0 = c(2c + 1 - \Theta)/2 < 0.$$

Следовательно, остается случай $p(\infty) = 0$ ($p'(0) < 0$, $0 < t < \infty$).

Обозначим

$$\int_0^t sp(s)ds \quad J(t),$$

так что $J'(t) = tp(t)$ и, согласно (10), $J(t) \to +\infty$ при $t \to \infty$.

Перепишем (12) в виде

$$\frac{J'}{J} = \frac{2\Theta}{t}(1 + \varepsilon(t)) + \frac{t}{r(t)J},$$

[illegible] $\varepsilon(t) \to 0$ при $t \to \infty$ и $r(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{t^2} + p(t) > 0$ при $t > \sqrt{2}$, $r(\infty) = \frac{1}{2}$.

Интегрируя (15) от $t = t_0 > \sqrt{2}$ до $t \geq t_0$, находим

$$2\Theta \ln \frac{t}{t_0}(1 + \varepsilon_0(t)) + \int_{t_0}^{t} \frac{p'(s)ds}{r(s)J(s)}$$

[illegible] чтобы $r(t)$ [illegible] $\frac{1}{4}$ при $t \geq t_0$. Тогда

$$\int^t$$

Далее очевидно, что $J(t) < p(t_0)\frac{t^2}{2}$. Таким образом из (16) получаем неравенство

$$2\ln t(1+\varepsilon_1(t)) > 2\Theta \ln t(1+\varepsilon_2(t)) - \frac{4p(t_0)}{J(t_0)}. \qquad (17)$$

Так как $\varepsilon_1(t) \to 0$, $\varepsilon_2(t) \to 0$ при $t \to \infty$ и $\Theta > 1$, то при больших t неравенство (17) становится противоречивым. Поэтому в случае $p(0) < (\Theta - 1)/2$ решение также не существует. Значит, монотонное решение задачи (1), (2) единственно.

Список литературы

[1] Adjutov M., Klokov J. On some nonclassicial problems for ordinary differential equation // Latvijas Zinātņu Akademijas Vēstis. - 4/93. - P. 56-61.

Yu. Klokov. On uniqueness of a solution to a boundary value problem for some nonlinear second order ordinary differential equation.

Summary. The boundary value problem

$$u'' - \frac{t}{2}u' + \Theta u + (u')^2 = 0,$$

$$u'(0) = 0, \quad u(0) = \lambda, \quad t \geq 0, \quad \Theta, \lambda \in R$$

is considered. It is proved that for any $\theta > 1$ there exists a unique $\lambda > 0$ for which a solution $u(t)$ to the problem exists for any $t \geq 0$ and is monotonic.

1991 MSC 34B15

J.Klokovs. Par robežproblēmas atrisinājuma unitāti kādam nelineāram parastam otrās kārtas diferenciālvienādojumam.

Anotācija. Aplūkots uzdevums

$$u'' - \frac{t}{2}u' + \Theta u + (u')^2 = 0,$$

$$u'(0) = 0, \quad u(0) = \lambda, \quad t \geq 0, \quad \Theta, \lambda \in R.$$

Pierādīts, ka jebkuram $\Theta > 1$ eksistē vienīgs $\lambda > 0$, kuram ir atrasts atrisinājums $u(t)$ pie visiem $t \geq 0$.

Институт математики и информатики
Латвийского университета
Рига, б.Райниса, 29

Поступила

Об одной задаче для обыкновенного нелинейного интегро-дифференциального уравнения

Ю.А.Клоков, А.П.Михайлов

Аннотация. Для краевой задачи

$$(k(x,p)p')' = F(x,p,p',z),$$

$$p'(0) = a_0 + b_0 p(0), \quad p'(l) = a_1 - b_1 p(l),$$

где

$$z = \int_0^l K(x,s,p(x),p(s))ds,$$

указаны достаточные условия существования решения с использованием нижних и верхних функций.

УДК 517.927

В этой статье мы рассмотрим краевую задачу

$$(k(x,p)p') = F(x,p,p',z), \tag{1}$$

$$p'(0) = a_0 + b_0 p(0), \quad p'(l) = a_1 - b_1 p(l), \tag{2}$$

где $k, k'_x, k'_p \in C(I \times R)$, $F \in C(I \times R^3)$, $k > 0 \ \forall x, p \in (I \times R)$, $I = [0, l]$,

$$z = \int_0^l K(x,s,p(x),p(s))ds,$$

$K(x,s,p,q) \in C(I^2 \times R^2)$, $a_0, a_1, b_0, b_1 \in R$, $b_0, b_1 \geq 0$.

Теорема 1 *Предположим, что K есть невозрастающая функция q, а функция F не убывает по z и растет по переменной p' не быстрее квадрата. Пусть $\alpha(x), \beta(x) \in C^2(I)$ - функции такие, что $\alpha(x) \leq \beta(x) \ \forall x \in I$,*

$$\beta'(0) \leq a_0 + b_0\beta(0), \quad \beta'(l) \geq a_1 - b_1\beta(l), \tag{3}$$

$$\alpha'(0) \geq a_0 + b_0\alpha(0), \quad \alpha'(l) \leq a_1 - b_1\alpha(l), \tag{4}$$

$$\alpha'(0) \geq a_0 + b_0\alpha(0), \quad \alpha'(l) \leq a_1 - b_1\alpha(l), \tag{4}$$

$$\begin{gathered}(k(x,\alpha(x))\alpha'(x))' \geq F(x,\alpha(x),\alpha'(x),z_*) \quad \forall x \in I, \\ (k(x,\beta(x))\beta'(x))' \leq F(x,\beta(x),\beta'(x),z^*) \quad \forall x \in I,\end{gathered} \tag{5}$$

где

$$z_* = \int_0^l K(x,s,\alpha(x),\alpha(s))ds,$$

$$z^* = \int_0^l K(x,s,\beta(x),\beta(s))ds.$$

Тогда решение задачи (1)-(2) существует, причем $\alpha(x) \leq p(x) \leq \beta(x)\ \forall x \in I$.

Доказательство. Из (1), дифференцируя, найдем

$$p'' = \quad + \varphi(x,p,p',z), \tag{6}$$

где

$$\varphi(x,p,p',z) = (k(x,p))^{-1}(F(x,p,p',z) - k_x p' - k_p p'^2) - p.$$

Заметим, что если F растет по p' не быстрее квадрата, то функция $p+\varphi$ растет по p' также не быстрее квадрата. Пусть $p(x)$ есть любое решение (6), удовлетворяющее для некоторого $M > 0$ оценке $| p(x) | \leq M$ для $\forall x \in I$. Тогда из (6) следует неравенство

$$p'' \leq c_0 + c_1 p'^2 \tag{7}$$

где постоянные $c_0, c_1 \geq 0$ зависят только от M. Из (7) следует, что для любого $M > 0$ найдется $N > 0$ ($N = N(M)$) такое, что если $p(x)$ есть любое решение (6), удовлетворяющее неравенству $| p(x) | \leq M\ \forall x \in I$, то $| p'(x) | \leq N\ \forall x \in I$ (см.[1], гл.3). В дальнейшем мы покажем, что $M = M_0 = \max(\max | \alpha(x) |, \max | \beta(x) |)$, $x \in I$. Соответствующее значение N обозначим через $N_0^* = N(M_0)$. Далее через N_0 обозначим $N_0 = \max(N_0^*, \max | \alpha'(x) |, \max | \beta'(x) |)$, $x \in I$. Для $a \leq c$ определим функцию δ:

$$\delta(a,b,c) = \begin{cases} a, & b < a \\ b, & a \leq b \leq c \\ c, & b > c \end{cases}$$

и обозначим

$$\tilde{p}(x) = \delta(\alpha(x), p(x), \beta(x)),$$

$$\tilde{p}'(x) = \delta(-N_0, p'(x), N_0),$$

$$\tilde{z}(x) = \int_0^l K(x,s,\tilde{p}(x),\tilde{p}(s))ds.$$

Рассмотрим вспомогательное уравнение

$$p'' = p + \varphi(x,\tilde{p},\tilde{p}',\tilde{z}). \tag{8}$$

Пусть $G(t,x)$ есть функция Грина для уравнения $p'' = p$ с условиями (2). Тогда (8), (2) можно записать в виде

$$p(x) = p_0(x) - \int_0^l G(t,x)\varphi(t,\tilde{p}(t),\tilde{v}(t),\tilde{z}(t))dt, \tag{9}$$

$$v(x) = p_0' - \int_0^l G_x(x,t)\varphi(t,\tilde{p}(t),\tilde{v}(t),\tilde{z}(t))dt, \tag{10}$$

где $v(x) = p'(x)$, $\tilde{v}(x) = \delta(-N_0, v(x), N_0)$ и $p_0(x)$ есть решение задачи (6), (2) при $\varphi \equiv 0$.

Так как φ непрерывна, то существует постоянная $L > 0$ такая, что

$$|\varphi(x,\tilde{p},\tilde{v},\tilde{z})| < L \quad \forall x, p, p' \in (I \times R^2).$$

Теперь из (9), (10) следует, что

$$|p - p_0| < L\int_0^l G(x,t)dt \quad \forall x \in I,$$

$$|v - p_0'| < L\int_0^l |G_x'(x,t)|\, dt \quad \forall x \in I,$$

и поэтому существует постоянная $\bar{L} > 0$ такая, что для $\forall x \in I$

$$|p - p_0| \le \bar{L}, \quad |v - p_0'| \le \bar{L}. \tag{11}$$

Множество вектор-функций (p,v), удовлетворяющих неравенствам (11), очевидно, ограничено, выпукло, замкнуто, а оператор A, определенный на этом множестве правыми частями уравнений (9), (10), вполне непрерывен и отображает множество (11) в себя. Согласно принципу Шаудера (см.[2], гл.4, с.204), существует неподвижная точка такого отображения, и поэтому решение системы (9), (10) существует. Обозначим его через $p(x)$, $v(x)$, $x \in I$. Ясно, что $p(x)$ есть решение (8) и в силу свойств функции Грина $p(x)$ удовлетворяет условиям (2).

Покажем, что $p(x) \le \beta(x)\, \forall x \in I$. Предположим противное. Пусть при некотором x $p(x) > \beta(x)$. Тогда в силу условий (3), (2) существует точка $x_0 \in I$ такая, что

$$p(x_0) - \beta(x_0) > 0, \quad p'(x_0) - \beta'(x_0) = 0,$$

$$p''(x_0) - \beta''(x_0) \le 0. \tag{12}$$

Но тогда из (3), (5), (8) находим (учитывая условия теоремы о функциях φ и K), что

$$(p(x_0) - \beta(x_0))'' \ge (p(x_0) - \beta(x_0)) +$$

$$+\varphi(x_0, \tilde{p}(x_0), \tilde{p}'(x_0), \tilde{z}) - \varphi(x_0, \beta(x_0), \beta'(x_0), z^*) \ge p(x_0) - \beta(x_0) > 0.$$

Получили противоречие с (12). Значит $p(x) \le \beta(x)\ \forall x \in I$. Аналогично доказывается, что $\alpha(x) \le p(x)\ \forall x \in I$, и поэтому $\alpha(x) \le p(x) \le \beta(x)\ \forall x \in I$. Следовательно, Эта теорема обобщает один результат, изложенный в работе [3], в которой изучались вопросы существования и единственности решения задачи

$$(k(x,p)p')' = F_0(x,p) + \int_0^l \sigma(s,p(s))(p(x)-p(s))ds, \tag{13}$$

$$p'(0) = 0, \quad p'(l) = 0, \tag{14}$$

где $k, k_x, k_p, \sigma \in C(I \times R)$, $k > 0$, $\sigma \geq 0$ $\forall x, p \in (I \times R)$, $F_0(x,0) \leq 0$ $\forall x \in I$ и для некоторого $m > 0$ $F_0(x,m) \geq 0$ $\forall x \in I$.

Существование решения задачи (13), (14) следует из доказанной теоремы как частный случай, если положить $\alpha(x) \equiv 0$, $\beta(x) \equiv m$ $\forall x \in I$. Уравнения(13), (14) возникли в одной неклассической нелинейной задаче теплопроводности.

Замечание. В условиях теоремы требование того, чтобы функция K была невозрастающей по переменной q, является весьма существенным. Соответствующие примеры легко построить.

Список литературы

[1] Васильев Н.И., Клоков Ю.А. Основы теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. - Рига: Зинатне, 1978. 184 с.

[2] Справочная математическая библиотека. Функциональный анализ. М., 1964.

[3] Клоков Ю.А., Михайлов А.П. Об одной краевой задаче Неймана для интегро-дифференциального уравнения // Дифференц.уравнения. 1996. Т.6.

Yu. Klokov, A. Mikhailov. On some problem for ordinary nonlinear integral-differential equation.

Summary. Sufficient conditions for existence of a solution to the boundary value problem

$$(k(x,p)p')' = F(x,p,p',z),$$

$$p'(0) = a_0 + b_0 p(0), \quad p'(l) = a_1 - b_1 p(l),$$

with

$$z = \int_0^l K(x,s,p(x),p(s))ds,$$

are given, using upper and lower functions.

J.Klokovs, A.Mihailovs. Par vienu uzdevumu vienkāršam nelineāram integrāldiferenciālvienādojumam.

Anotācija. Parādīti robežproblemas

$$(k(x,p)p')' = F(x,p,p',$$

$$p'(0) = a_0 + b_0 p(0), \quad p'(l) = a_1 - b_1 p(l),$$

kur

$$\int_0^l K(x,s,p(x),p(s))ds,$$

atrisinajuma eksistences pietiekamie izmantojot augšejas un apakšejas funkcijas.

Институт математики и информатики
Латвийского университета
Рига, б.Райниса, 29

Поступила 10.06.96

Общая краевая задача для уравнения третьего порядка

А.Я. Лепин

Аннотация. Для краевой задачи

$$x''' = f(t, x, x', x''), \quad H_1 x = 0, \quad H_2 x = 0, \quad H_3 x = 0, \quad \alpha \le x \le \beta,$$

где α и β решения уравнения $x''' = f(t, x, x', x'')$ и $\alpha < \beta$, указаны условия для существования решения.

УДК 517.927

Рассмотрим уравнение

$$x''' = f(t, x, x', x''), \tag{1}$$

где f $[a, b] \times R^3 \to R$ удовлетворяет условиям Каратеодори, $a \in R$ и $b \in (a, \infty)$. Пусть α, β $[a, b] \to R$ - два фиксированных решения уравнения (1), $\alpha < \beta$, S множество x $[a, b] \to R$ решений уравнения (1), удовлетворяющих неравенствам $\alpha \le x \le \beta$,

$$M_\alpha = \{y \in S : (\exists \sigma \in [a, b])(y(\sigma) = \alpha(\sigma) \wedge y'(\sigma) = \alpha'(\sigma))\},$$

$$M_\beta = \{z \in S \quad (\exists \tau \in [a, b])(z(\tau) = \beta(\tau) \wedge z'(\tau) = \beta'(\tau))\}.$$

Для $c \in [a, b)$ и $d \in (c, b]$ множество x $[c, d] \to R$ решений задачи Дирихле

$$x''' = f(t, x, x', x''), \quad x(c) = A, \quad x(d) = B,$$

лежащих между α и β, обозначим через $D(c, d, A, B)$, $D(A, B) = D(a, b, A, B)$.

Нам понадобятся следующие условия.

1. $D(\alpha(a), \beta(b)) \neq \emptyset$, $D(\beta(a), \alpha(b)) \neq \emptyset$.

2. Для любых $c \in [a, b)$ и $d \in (c, b]$ найдется $M \in (0, \infty)$ такое, что для любого решения x $(c, d) \to R$ уравнения (1) из $\alpha(t) \le x(t) \le \beta(t)$, $t \in (c, d)$ следует $|x''(t)| < M$, $t \in (c, d)$.

3. Для любых $c \in [a, b)$, $d \in (c, b]$ и $C, D, C_1, D_1 \in R$ решение x $[c, d] \to R$ любой из краевых задач

$$= f(t, x, x', x''), \quad x(c) = C \quad x'(c) = C \quad x(d) = D,$$

$$''' = f(t, x, x' \qquad\qquad , \quad x(c) = D, \quad x'(d) = D_1,$$

лежащее между α и β, единственно.

Основная теорема. Если выполняются условия 1-3, $H_1, H_2, H_3 \in C(S, R)$ и для любого $x \in S$ справедливы условия

$$\begin{gathered} x(a) = \alpha(a) \Rightarrow H_1 x \le 0, \quad x(a) = \beta(a) \Rightarrow H_1 x \ge 0, \\ x(b) = \alpha(b) \Rightarrow H_2 x \le 0, \quad x(b) = \beta(b) \Rightarrow H_2 x \ge 0, \\ x \in M_\alpha \Rightarrow H_3 x \le 0, \quad x \in M_\beta \Rightarrow H_3 x \ge 0, \end{gathered} \tag{2}$$

то краевая задача

$$x''' = f(t, x, x', x''), \quad H_1 x = 0, \quad H_2 x = 0, \quad H_3 x = 0, \quad \alpha \le x \le \beta \tag{3}$$

имеет решение.

Доказательство основной теоремы базируется на изучении множества решений задачи Дирихле $D(A, B)$. Оказывается, что для любых $A \in [\alpha(a), \beta(a)]$ и $B \in [\alpha(b), \beta(b)]$ в $D(A, B)$ имеется минимальное решение $y(t, A, B)$, максимальное решение $z(t, A, B)$, для любого $U \in [y'(a, A, B), z'(a, A, B)]$ найдется единственное $x(t, A, U, B) \in D(A, B)$ такое, что $x'(a, A, U, B) = U$, $y(\cdot, A, B)$ и $z(\cdot, A, B)$ непрерывно зависят от (A, B), а $x(\cdot, A, U, B)$ непрерывно зависит от (A, U, B). Это позволяет установить гомеоморфизм F между кубом K и S по формуле $(x(a), x'(a), x(b)) \to x$. На противоположных гранях куба K получаются неравенства $H_i F \le 0$, $H_i F \ge 0$, $i = 1, 2, 3$, которые гарантируют существование решения краевой задачи (3).

Примеры

$$x''' = 0, \quad x(-1) = 0, \quad x(1) = 0, \quad 0 \le x \le 7t^2 + 1,$$

$$x''' = 2^{-1} x''^3, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0, \quad x(1) = 2/3, \quad 0 \le x \le 2/3,$$

$$x''' = -x',$$

$$x(0) = -1, \quad x(3\pi) = -1, \max\{x(t) \ t \in [0, 3\pi]\} = 1, \quad -1 \le x \le 1$$

показывают существенность каждого из условий 1-3 для справедливости основной теоремы. Условие 1 в определенном смысле необходимо. Роль условий типа 2 хорошо известна (см.[1], с.151). Роль условия 3 не ясна.

Существование из единственности подробно изучалось для уравнения второго порядка (см.[2]). Единственность краевых задач используется и при исследовании разрешимости краевых задач для уравнения третьего порядка (см.[3]). От других результатов в этой области (см.[4], [5]) основная теорема отличается общностью краевых условий.

Лемма 1 *Если выполняются условия 2-3, $A, A_1 \in R$ и*

$$K(a, A, A_1) = \{x \in S \ \ x(a) = A \wedge x'(a) = A_1\} \ne \emptyset,$$

то для любых $x_1, x_2 \in K(a, A, A_1)$ найдется $c \in [a, b]$ такое, что $x_1(t) = x_2(t)$, $t \in [a, c]$ и $x_1(t) \ne x_2(t)$, $t \in (c, b]$, в $K(a, A, A_1)$ имеются минимальное решение y, максимальное решение $\ \ y(b) = \alpha(b)$ или $y \in M_\alpha$, $z(b) = \beta(b)$ или $z \in M_\beta$ и отображение $x \to x(b)$ гомеоморфно отображает $K(a, A, A_1)$ на $[y(b), z(b)]$.

Доказательство. **Для любых $x_1, x_2 \in K(a, A, A_1)$ условие**

$$
\begin{gathered}
(\exists c \in [a,b])((\forall t \in [a,c])(x_1(t) = x_2(t)) \wedge \\
((\forall t \in (c,b])(x_1(t) < x_2(t)) \vee (\forall t \in (c,b])(x_1(t) > x_2(t)))
\end{gathered} \tag{4}
$$

следует из условия 3. Компактность $K(a, A, A_1)$ следует из условия 2. Из (4) и компактности следует существование $y, z \in K(a, A, A_1)$ таких, что $y \le x \le z$ для любых $x \in K(a, A, A_1)$. Если

$$K_1 = \{x(b) : x \in K(a, A, A_1)\} = [y(b), z(b)],$$

то из условия 3 следует, что $x \to x(b)$ гомеоморфизм. Покажем, что условие $[y(b), z(b)] \setminus K_1 \neq \varnothing$ приводит к противоречию. Пусть $B \in [y(b), z(b)] \setminus K_1$. Тогда найдутся $y_0, z_0 \in K(a, A, A_1)$ такие, что $y_0 \le z_0$, $B \in (y_0(b), z_0(b))$ и $K_1 \cap (y_0(b), z_0(b)) = \varnothing$. Пусть $c \in [a, b)$ такое, что $y_0(c) = z_0(c)$ и $y_0(t) < z_0(t)$, $t \in (c, b]$. Ясно, что $y_0'(c) = z_0'(c)$. Если $y_0''(a) < z_0''(a)$, то для решения задачи Коши

$$x''' = f(t, x, x', x''),$$

$$x(a) = A, \quad x'(a) = A_1, \quad x''(a) = (y_0''(a) + z_0''(a))2^{-1}$$

получаем противоречие. Следовательно, $y_0''(c) = z_0''(c)$. Рассмотрим случай, когда $\alpha(c) < y_0(c) < \beta(c)$. Для $d \in (c, b)$, достаточно близкого к c, множество решений задачи Коши

$$x''' = f(t, x, x', x''), \quad x(c) = y_0(c), \quad x'(c) = y_0'(c), \quad x''(c) = y_0''(c)$$

на интервале $[c, d]$ связно и лежит между α и β. Следовательно, существует решение x $[a, d] \to R$ уравнения $x''' = f(t, x, x', x'')$ такое, что $y_0(t) \le x(t) \le z_0(t)$, $t \in [a, d]$ и $y_0(d) < x(d) < z_0(d)$. Продолжая это шение вправо, получаем противоречие. Аналогично рассматриваются случаи, когда $y_0(c) = \alpha(c)$, $y_0'(c) > \alpha'(c)$; $y_0(c) = \alpha(c)$, $y_0'(c) = \alpha'(c)$, $y_0''(c) > \alpha''(c)$; $z_0(c) = \beta(c)$, $z_0'(c) < \beta'(c)$ и $z_0(c) = \beta(c)$, $z_0'(c) = \beta'(c)$, $z_0''(c) < \beta''(c)$.

Рассмотрим случай, когда $y_0(c) = \alpha(c)$, $y_0'(c) = \alpha'(c)$ и $y_0''(c)$ $\alpha''(c)$. Пусть $t_n \in (c, b)$, $n \in 1, 2,$ такие, что $t_n \to c$ и $z_0(t_n) < \beta(t_n)$. $\in 1, 2,$ Через S_n обозначим множество решений x $[t_n, b_x] \to R$, $b_x \in (t_n, b]$ задачи

$$x''' = f(t, x, x', x''),$$

удовлетворяющих условию

$$(\forall t \in [t_n, b_x])(y_0(t) \le x(t) \le z_0(t) \wedge (b_x < b \Rightarrow x(b_x) = y_0(b_x) \wedge x'(b_x) <$$

Минимальн $= \{x \in S_n$ b_x

что условие R при к проти

обозначим Ес. $z_n''(t_n$

получаем противоречие. Следовательно, $y_n''(t_n) = z_n''(t_n)$. Если $z_n''(t_n) = z_0''(t_n)$, то, используя y_n, получаем противоречие с определением y_0. Следовательно, $z_n''(t_n) < z_0''(t_n)$ и $\alpha(t) < z_n(t) < z_0(t)$, $t \in (t_n, b]$. Пусть $c_n \in [t_n, b_{y_n})$ такое, что $y_n(c_n) = z_n(c_n)$ и $y_n(t) < z_n(t)$, $t \in (c_n, b_{y_n}]$. Ясно, что $y_n'(c) = z_n'(c)$, $y_n''(c) = z_n''(c)$ и $\alpha(c_n) < z_n(c_n) < \beta(c_n)$. Для $d_n \in (c_n, b_{y_n})$, достаточно близкого к c_n, множество решений задачи Коши

$$x''' = f(t, x, x', x''), \quad x(c_n) = y_n(c_n), \quad x'(c_n) = y_n'(c_n), \quad x''(c_n) = y_n''(c_n)$$

на интервале $[c_n, d_n]$ связно и лежит между α и β. Следовательно, существует решение $x\ [t_n, d_n] \to R$ уравнения $x''' = f(t, x, x', x'')$ такое, что $y_n(t) \le x(t) \le z_n(t)$, $t \in [t_n, d_n]$ и $y_0(d_n) < x(d_n) < z_0(d_n)$. Продолжая это решение вправо, получаем противоречие. Следовательно, $z_n(b) = B$. Выбирая из последовательности z_n, $n = 1, 2, \ldots$ сходящуюся подпоследовательность, получаем решение $z_*\ [c, b] \to R$ такое, что $z_*(c) = \alpha(c)$, $z_*'(c) = \alpha'(c)$, $z_*''(c) = \alpha''(c)$, $z_*(b) = B$ и $\alpha(t) \le z_*(t) \le z_0(t)$, $t \in [c, b]$. Пусть $x(t) = z_0(t)$, $t \in [a, c]$ и $x(t) = z_*(t)$, $t \in [c, b]$. Тогда $x \in K(a, A, A_1)$ и $x(b) = B$, что противоречит нашему предположению.

Случай, когда $z_0(c) = \beta(c)$, $z_0'(c) = \beta'(c)$ и $z_0''(c) = \beta''(c)$, рассматривается аналогично. Гомеоморфизм $K(a, A, A_1)$ и $[y(b), z(b)]$ доказан.

Аналогично предыдущему приводятся к противоречию случаи, когда

$$\alpha < y \vee (\alpha(a) = y(a) \wedge \alpha'(a) < y'(a) \wedge (\forall t \in (a, b])(\alpha(t) < y(t))),$$

$$z < \beta \vee (\beta(a) = z(a) \wedge \beta'(a) > z'(a) \wedge (\forall t \in (a, b])(\beta(t) > z(t))).$$

Следовательно, $y(b) = \alpha(b) \vee y \in M_\alpha$ и $z(b) = \beta(b) \vee z \in M_\beta$.

Замечание 1 *Если выполняются условия 2-3, $A, A_1, A_2 \in R$ и*

$$K(a, A, A_1, A_2) = \{x \in S \ \ x(a) = A \wedge x'(a) = A_1 \wedge x''(a) = A_2\} \neq \emptyset,$$

то в $K(a, A, A_1, A_2)$ имеются минимальное решение y, максимальное решение z и отображение $x \to z(b)$ гомеоморфно отображает $K(a, A, A_1, A_2)$ на $[y(b), z(b)]$.

Лемма 2 *Если выполняются условия 1-3 и $B \in [\alpha(b), \beta(b)]$, то существует единственное решение $y(\cdot, \alpha(a), B) : [a, b] \to R$ краевой задачи*

$$x''' = f(t, x, x', x''), \quad x(a) = \alpha(a), \quad x'(a) = \alpha'(a), \quad x(b) = B, \quad \alpha \le x \le \beta \qquad (5)$$

и $y(\cdot, \alpha(a), B) \le x$ для любого $x \in D(\alpha(a), B)$, для любого $c \in (a, b)$ существует единственное решение $y(\cdot, a, c, \alpha(a), \beta(c)) : [a, c] \to R$ краевой задачи

$$x''' = f(t, x, x', x''), \quad x(a) = \alpha(a), \quad x'(a) = \alpha'(a), \quad x(c) = \beta(c),$$

лежащее между α и β.

Доказательство. Пусть $s \in D(\alpha(a), \beta(b))$. Если $s'(a) = \alpha'(a)$, то

$$\{x(b) : x \in K(a, \alpha(a), \alpha'(a))\} = [\alpha(b), \beta(b)]$$

и разрешимость краевой задачи (5) очевидна. Пусть $s'(a) > \alpha'(a)$ и z - максимальное решение из $K(a, \alpha(a), \alpha'(a))$. Если $z(b) = \beta(b)$, то разрешимость краевой задачи (5) очевидна. Пусть $z(b) < \beta(b)$. Из $\alpha(t) < s(t) \le \beta(t)$, $t \in (a, b]$ и $z \in M_\beta$ следует существование $t_1 \in (a, b)$ такого, что $s(t_1) \le z(t_1)$. Следовательно, найдутся $z \in K(a, \alpha(a), \alpha'(a))$ и $t_2 \in (a, b)$ такие, что $z(t_2) = s(t_2)$ и $z'(t_2) = s'(t_2)$, что противоречит условию 3.

Если $B = \alpha(b)$, то $y(\cdot, \alpha(a), \alpha(b)) = \alpha$ и неравенство $y(\cdot, \alpha(a), B) \le x$ для любого $x \in D(\alpha(a), B)$ очевидно. Пусть $B > \alpha(b)$ и $x \in D(\alpha(a), B)$. Если $x'(a) = \alpha'(a)$, то $x = y(\cdot, \alpha(a), B)$. Пусть $x'(a) > \alpha'(a)$. Ясно, что $\alpha(t) < x(t)$, $t \in (a, b]$. Если найдется $t_1 \in (a, b)$ такое, что $x(t_1) < y(t_1, \alpha(a), B)$, то найдутся $s_1 \in K(a, \alpha(a), \alpha'(a))$ и $t_2 \in (a, b)$ такие, что $s_1(t_2) = x(t_2)$ и $s_1'(t_2) = x'(t_2)$, что противоречит условию 3.

Если $y(c, \alpha(a), \beta(b)) = \beta(c)$, то $y(t, a, c, \alpha(a), \beta(c)) = y(t, \alpha(a), \beta(b))$, $t \in [a, c]$. Пусть $y(c, \alpha(a), \beta(b)) < \beta(c)$. Через S_* обозначим множество решений $x : [a, b_x] \to R$ краевой задачи

$$x''' = f(t, x, x', x''), \quad x(a) = \alpha(a), \quad x'(a) = \alpha'(a),$$

удовлетворяющих условиям $y(t, \alpha(a), \beta(b)) \le x(t) \le \beta(t)$, $t \in [a, b]$ и $x(b_x) = \beta(b_x)$. Если $b_x < b$, то из 3-го условия следует, что $x'(b_x) > \beta'(b_x)$ или $y(t, \alpha(a), \beta(b)) = x(t)$, $t \in [a, b_x]$. Ясно, что $S_1 = \{x \in S_* \quad b_x \ge c\}$ не пусто. Из 2-го условия следует, что $S_2 = \{x \in S_* \quad b_x \le c\}$ не пусто. Если найдется $x \in S_*$ такое, что $b_x = c$, то $y(\cdot, a, c, \alpha(a), \beta(c)) = x$. В противном случае пусть y - максимальное решение из S_1, а z - минимальное решение из S_2. Аналогично доказательству леммы 1 получаем противоречие.

Замечание 2 *Используя симметрии $x \to -x$ и $t \to -t$, из леммы 2 для любых $A \in [\alpha(a), \beta(a)]$, $B \in [\alpha(b), \beta(b)]$, $c \in [a, b)$ и $d \in (c, b]$ получаются следующие утверждения.*

Существует решение $z(\cdot, \beta(a), B) : [a, b] \to R$ краевой задачи

$$x''' = f(t, x, x', x''), \quad x(a) = \beta(a), \quad x'(a) = \beta'(a), \quad x(b) = B, \quad \alpha \le x \le \beta$$

такие, что $z(\cdot, \beta(a), B) \ge x$ для любого $x \in D(\beta(a), B)$.

Существует решение $y(\cdot, A, \alpha(b)) : [a, b] \to R$ краевой задачи

$$x''' = f(t, x, x', x''), \quad x(a) = A, \quad x(b) = \alpha(b), \quad x'(b) = \alpha'(b), \quad \alpha \le x \le \beta$$

такое, что $y(\cdot, A, \alpha(b)) \le x$ для любого $x \in D(A, \alpha(b))$.

Существует решение $z(\cdot, A, \beta(b)) : [a, b] \to R$ краевой задачи

$$x''' = f(t, x, x', x''), \quad x(a) = A, \quad x(b) = \beta(b), \quad x'(b) = \beta'(b), \quad \alpha \le x \le \beta$$

такое, что $z(\cdot, A, \beta(b)) \le x$ для любого $x \in D(A, \beta(b))$.

Существует решение $y(\cdot, c, d, \alpha(c), \beta(d)) : [c, d] \to R$ краевой задачи

$$x''' = f(t, x, x', x''), \quad x(c) = \alpha(c), \quad x'(c) = \alpha'(c), \quad x(d) = \beta(d),$$

лежащее между α и β.

Существует решение $x(\cdot, c, d, \beta(c), \alpha(d)) : [c, d] \to R$ краевой задачи

$$x''' = f(t, x, x', x''), \quad x(c) = \beta(c), \quad x'(c) = \beta'(c), \quad x(d) = \alpha(d),$$

лежащее между α и β.

В дальнейшем, ссылаясь на любую лемму, мы будем иметь ввиду любое из утверждений, полученных с помощью таких симметрий.

Замечание 3 *Если справедливы условия 1-3, то аналогичные условия справедливы для любого интервала $[c, d] \subset [a, b]$. Для условий 2 и 3 это очевидно, а для условия 1 это следует из замечания 2.*

Лемма 3 *Если выполняются условия 1-3, $y, z \in S$, $y(a) = z(a)$, $y(b) = z(b)$ и $y \leq z$, то для любого $U \in [y'(a), z'(a)]$ найдется единственное $s(\cdot, U) \in S$ такое, что $y \leq s(\cdot, U) \leq z$ и $s'(a, U) = U$, решение $s(\cdot, U)$ непрерывно зависит от U и для любого $V \in (U, z'(a)]$ справедливо неравенство $s(t, U) < s(t, V)$, $t \in (a, b)$.*

Доказательство. Если $y'(a) = z'(a)$, то лемма очевидна. Пусть $y'(a) < z'(a)$, $U \in (y'(a), z'(a))$ и S_* - множество решений $x : [a, b] \to R$, $b_x \in (a, b]$ краевой задачи

$$x''' = f(t, x, x', x''), \quad x(a) = y(a), \quad x'(a) = U,$$

удовлетворяющих условиям $y(t) \leq x(t) \leq z(t)$, $t \in [a, b_x]$ и $x(b_x) = y(b_x)$ или $x(b_x) = z(b_x)$. Из условия 2 следует, что множества

$$S_1 = \{x \in S_* : x(b_x) = y(b_x)\},$$

$$S_2 = \{x \in S_* : x(b_x) = z(b_x)\}$$

не пусты, а из условия 3 следует, что $x'(b_x) < y'(b_x)$ для $x \in S_1$ и $x'(b_x) > z'(b_x)$ для $x \in S_2$. Если найдется $x \in S_*$ такое, что $b_x = b$, то $s(\cdot, U) = x$. В противном случае пусть y_1 - максимальное решение из S_1, а z_1 - минимальное решение из S_2. Если $y_1''(a) < z_1''(a)$, то для решения задачи Коши

$$x''' = f(t, x, x', x''), \quad x(a) = y(a), \quad x'(a) = U, \quad x''(a) = (y_1''(a) + z_1''(a))2^{-1}$$

получаем противоречие. Следовательно, $y_1''(a) = z_1''(a)$. Применяя замечание 1, получаем противоречие.

Из условия 3 следуют неравенства $y(t) < s(t, U) < z(t)$, $t \in (a, b)$. Используя эти неравенства, для $s(\cdot, U)$ и z получаем $s(t, U) < s(t, V)$, $t \in (a, b)$.

Из компактности $D(y(a), y(b))$ и условия 3 следует непрерывная зависимость $s(\cdot, U)$ от U.

Лемма 4 *Если выполняются условия 1-3,*

$$M_{\alpha\beta} = \{x \in S : (\exists \sigma \in [a, b))(x(\sigma) = \alpha(\sigma) \wedge x'(\sigma) = \alpha'(\sigma)) \wedge$$

$$\wedge (\exists \tau \in (\sigma, b])(x(\tau) = \beta(\tau) \wedge x'(\tau) = \beta'(\tau))\} \neq \emptyset,$$

$$A_* = \sup\{x(a) : x \in M_{\alpha\beta}\}, \quad B_* = \inf\{x(b) : x \in M_{\alpha\beta}\},$$

$$\sigma_* = \sup\{\sigma \in [a,b) : y(\sigma, \alpha(a), \beta(b)) = \alpha(\sigma)\},$$
$$\tau_* = \inf\{\tau \in (a,b] : z(\tau, \alpha(a), \beta(b)) = \beta(\tau)\},$$

то $y(\cdot, \alpha(a), \beta(b)) = z(\cdot, \alpha(a), \beta(b))$,

$$\{x(a) : x \in M_{\alpha\beta}\} = [\alpha(a), A_*], \quad \{x(b) : x \in M_{\alpha\beta}\} = [B_*, \beta(b)]$$

и $x(t) = y(t, \alpha(a), \beta(b))$, $t \in [\sigma_*, \tau_*]$ *для любого* $x \in M_{\alpha\beta}$.

Доказательство. Пусть $y = y(\cdot, \alpha(a), \beta(b))$, $z = z(\cdot, \alpha(a), \beta(b))$, $x \in M_{\alpha\beta}$, $\sigma \in [a,b)$, $\tau \in (\sigma, b]$, $x(\sigma) = \alpha(\sigma)$, $x'(\sigma) = \alpha'(\sigma)$, $x(\tau) = \beta(\tau)$ и $x'(\tau) = \beta'(\tau)$. Покажем, что

$$x(t) = y(t), \quad t \in [\sigma, \tau]. \tag{6}$$

Если $x(\sigma) = y(\sigma)$, то из $x(\tau) \geq y(\tau)$, $x(b) \leq y(b)$ и условия 3 следует (6). Если $x(\sigma) < y(\sigma)$, то пусть $s : [\sigma, b] \to R$ - максимальное решение краевой задачи

$$x''' = f(t, x, x', x''), \quad x(\sigma) = \alpha(\sigma), \quad x'(\sigma) = \alpha'(\sigma), \quad x(t) \leq y(t), \quad t \in [\sigma, b].$$

Ясно, что найдется $t_1 \in (\sigma, b]$ такое, что $s(t_1) = y(t_1)$ и $s'(t_1) = y'(t_1)$. Продолжая s влево, получаем противоречие с условием 3. Из условия (6) следует, что $y \in M_{\alpha\beta}$ и $x(t) = y(t)$, $t \in [\sigma_*, \tau*]$. Аналогично доказывается, что $z \in M_{\alpha\beta}$. Следовательно, $y = z$. Если $\sigma_* > a$, то $y''(\sigma_*) = \alpha''(\sigma_*)$ и из замечания 1 следует условие $\{x(a) : x \in M_{\alpha\beta}\} = [\alpha(a), A_*]$. Если $\tau_* < b$, то $z''(\tau_*) = \beta''(\tau_*)$ и из замечания 1 следует условие $\{x(b) : x \in M_{\alpha\beta}\} = [B_*, \beta(b)]$.

Лемма 5 *Если выполняются условия 1-3, $s \in S \setminus M_\alpha$, то найдется $A_1 \in (-\infty, s'(a))$ такое, что существует решение краевой задачи*

$$x''' = f(t, x, x', x''), \quad x(a) = s(a), \quad x'(a) = A_1, \quad x(b) = s(b), \quad \alpha \leq x \leq s.$$

Доказательство. Если $s(a) = \alpha(a)$ и $s(b) = \alpha(b)$, то $A_1 = \alpha'(a)$ и α - искомое решение. Рассмотрим случай, когда $s(b) > \alpha(b)$. Если найдется $A_1 \in (-\infty, s'(a))$ такое, что краевая задача

$$x''' = f(t, x, x', x''), \quad x(a) = s(a), \quad x'(a) = A_1, \quad \alpha \leq x \leq s \tag{7}$$

имеет решение, то из леммы 1 следует, что краевая задача (7) имеет решение s_*, для которого $s_*(b) = s(b)$. В противном случае найдутся последовательность s_n $[a, b_n] \to R$, $b_n \in (a,b)$, $n = 1, 2, \ldots$ решений и $\sigma_n \in (a, b_n)$, $n \in \{1, 2, \ldots\}$ такие, что $s_n(a) = s(a)$, $s_n'(a) < s'(a)$, $s_n(\sigma_n) = \alpha(\sigma_n)$, $s_n(b_n) = s(b_n)$, $\alpha(t) \leq s_n(t) < s(t)$, $t \in (a, b_n)$, $n \in \{1, 2, \ldots\}$ и $\lim_{n\to\infty} s_n'(a) = s'(a)$. Следовательно, найдутся решение s_* $[a, b_*] \to R$, $b_* \in (a, b]$ и $\sigma_* \in (a, b_*)$ такие, что $s_*(a) = s(a)$, $s_*'(a) = s'(a)$, $s_*(\sigma_*) = \alpha(\sigma_*)$ и $s_*(b_*) = s(b_*)$, что противоречит условию 3.

Аналогично рассматривается случай, когда $s(a) > \alpha(a)$.

Лемма 6 *Если выполняются условия 1-3, $B \in [\alpha(b), \beta(b)]$, то множество решений задачи Дирихле $D(\alpha(a), B)$ имеет минимальное решение $y(\cdot, \alpha(a), B) \in M_\alpha$ и максимальное решение $z(\cdot, \alpha(a), B) \in M_\beta$.*

Доказательство. По лемме 2 существует минимальное решение $y(\cdot,\alpha(a),B) \in M_\alpha$ из $D(\alpha(a),B)$. Из компактности $D(\alpha(a),B)$ следует существование решения $z \in D(\alpha(a),B)$ такого, что для любого решения $x \in D(\alpha(a),B)$ справедливо неравенство $z'(a) \geq x'(a)$. Неравенство $z \geq y(\cdot,\alpha(a),B)$ следует из минимальности $y(\cdot,\alpha(a),B)$, а равенство

$$D(\alpha(a),B) = \{x \in S : y(\cdot,\alpha(a),B) \leq x \leq z\}$$

следует из леммы 3 и условия 3. Ясно, что z - максимальное решение из $D(\alpha(a),B)$. Из леммы 5 следует, что $z \in M_\beta$.

Теорема 1 *Если выполняются условия 1-3, $A \in [\alpha(a),\beta(a)]$ и $B \in [\alpha(b),\beta(b)]$, то множество решений задачи Дирихле $D(A,B)$ имеет минимальное решение $y(\cdot,A,B) \in M_\alpha$ и максимальное решение $z(\cdot,A,B) \in M_\beta$. Решения $y(\cdot,A,B)$ и $z(\cdot,A,B)$ непрерывно зависят от (A,B). Для любого $U \in [y'(a,A,B),z'(a,A,B)]$ существует единственное $s(\cdot,A,U,B) \in D(A,B)$ такое, что $s'(a,A,U,B) = U$. Решение $s(\cdot,A,U,B)$ непрерывно зависит от (A,U,B) и*

$$D(A,B) = \{s(\cdot,A,U,B) \quad U \in [y'(a,A,B),z'(a,A,B)]\}.$$

Если $V \in (U,z'(a,A,B)]$, то $s(t,A,U,B) < s(t,A,V,B)$, $t \in (a,b)$ и $s'(b,A,U,B) > s'(b,A,V,B)$.

Доказательство. Покажем, что $D(A,B) \neq \emptyset$ для любых $A \in [\alpha(a),\beta(a)]$ и $B \in [\alpha(b),\beta(b)]$. Если $B \in \{\alpha(b),\beta(b)\}$, то по лемме 6 $D(A,B) \neq \emptyset$ для любого $A \in [\alpha(a),\beta(a)]$. Пусть $B \in (\alpha(a),\beta(a))$ и

$$M = \{A \in [\alpha(a),\beta(a)] \quad D(A,B) \neq \emptyset\}.$$

Ясно, что $\alpha(a),\beta(a) \in M$ и M замкнуто. Рассмотрим случай, когда $M_\alpha \cap M_\beta \neq \emptyset$. Тогда найдутся $s \in M_\alpha \cap M_\beta$ и $\sigma,\tau \in [a,b)$ такие, что $s(\sigma) = \alpha(\sigma)$, $s'(\sigma) = \alpha'(\sigma)$, $s(\tau) = \beta(\tau)$ и $s'(\tau) = \beta'(\tau)$. Из леммы 4 следует, что $s''(\sigma) = \alpha''(\sigma)$ при $\sigma > a$ и $s''(\tau) = \beta''(\tau)$ при $\tau > a$. Применяя лемму 1, на интервале $[a,\sigma]$ получаем $[\alpha(a),s(a)] \subset M$ и на интервале $[a,\tau]$ получаем $[s(a),\beta(a)] \subset M$. Рассмотрим случай, когда $M_\alpha \cap M_\beta = \emptyset$. Пусть $A \in M$ и $s \in D(A,B)$. Если $s \in D(A,B) \setminus (M_\alpha \cup M_\beta)$, то из леммы 1 следует, что некоторая окрестность A в $[\alpha(a),\beta(a)]$ принадлежит M. Если $s \in M_\beta$, то по лемме 5 найдется $s_1 \in D(A,B)$ такое, что $s_1'(a) < s'(a)$ и $s_1 \leq s$. Тогда по лемме 3 найдется $s_2 \in D(A,B) \setminus (M_\alpha \cup M_\beta)$. Аналогично рассматривается случай, когда $s \in M_\alpha$. Следовательно, $M = [\alpha(a),\beta(a)]$.

Обозначим через $y(\cdot,A,B)$и $z(\cdot,A,B)$ решения из $D(A,B)$, удовлетворяющие неравенствам $y'(a,A,B) \leq x'(a) \leq z'(a,A,B)$ для любого $x \in D(A,B)$. Из леммы 5 следует, что $y(\cdot,A,B) \in M_\alpha$ и $z(\cdot,A,B) \in M_\beta$. Покажем, что $y(\cdot,A,B) \leq z(\cdot,A,B)$. Для $A \in \{\alpha(a),\beta(b)\}$ и любого $B \in [\alpha(b),\beta(b)]$ и для $B \in \{\alpha(b),\beta(b)\}$ и любого $A \in [\alpha(a),\beta(a)]$ это следует из леммы 6. Фиксируем $B \in (\alpha(b),\beta(b))$ и рассмотрим случай, когда $M_{\alpha\beta} \cap D(\alpha(a),B) \neq$ Пусть $y \in M_{\alpha\beta} \cap D(\alpha(a),B)$, $\tau \in (a,b)$, $y(\tau) = \beta(\tau)$ и

$$= \{x \in S \quad (\exists\tau \in [a,b))(x(\tau) = \beta(\tau) \wedge x'(\tau) = \beta'(\tau))\wedge$$

$$\in (\tau,b])(x(\sigma) = \alpha(\sigma) \wedge x'(\sigma) = \alpha'(\sigma))\}.$$

Покажем, что $M_{\beta\alpha} \cap D(\beta(b), B) = \emptyset$. Если $s \in M_{\alpha\beta} \cap D(\beta(b), B)$, то для s и $z(t) = \beta(t)$, $t \in [a, \tau]$, $z(t) = y(t)$, $t \in [\tau, b]$ получаем противоречие с условием 3. Покажем, что $y(\cdot, A, B) = z(\cdot, A, B)$ для $A \in (\alpha(a), A_*]$. Пусть $y_1 \in M_{\alpha\beta} \cap D(A, B)$, $\sigma \in (a, \tau)$, $y_1(\sigma) = \alpha(\sigma)$ и $s \in D(A, B)$. Если $s(\tau) = \beta(\tau)$, то из условия 3 следует $s = y_1$. Если $s(\tau) < \beta(tau)$, то пусть $z : [a, b] \to R$ - решение задачи Коши

$$z''' = f(t, x, x', x''), \quad z(\sigma) = \alpha(\sigma), \quad z'(\sigma) = \alpha'(\sigma), \quad z''(\sigma) = \alpha''(\sigma),$$

удовлетворяющее условиям $z(t) = y_1(t)$, $t \in [a, \sigma]$, $\alpha(t) \le z(t) \le s(t)$, $t \in [\sigma, b]$ и найдется $t_1 \in (\sigma, b)$ такое, что $z(t_1) = s(t_1)$ и $z'(t_1) = s'(t_1)$. Для s и z получаем противоречие с условием 3. Пусть $A \in (A_*, \beta(a))$ и z $[a, b] \to R$ - решение задачи Коши

$$x''' = f(t, x, x', x''), \quad z(\tau) = \beta(\tau), \quad z'(\tau) = \beta'(\tau), \quad x''(\tau) = \beta''(\tau), \tag{8}$$

удовлетворяющее условиям $z(a) = A$, $y \le z \le \beta$ и $z(t) = y(t)$, $t \in [\tau, b]$. Покажем, что z максимальное решение из $D(A, B)$. Если $s \in D(A, B)$, $t_1 \in (a, \tau)$ и $s(t_1) > z(t_1)$, то найдутся решение x_1 $[a, b] \to R$ задачи Коши (8) и $t_2 \in (a, \tau)$ такие, что $x_1(t_2) = s(t_2)$, $x_1'(t_2) = s'(t_2)$, $z \le x_1 \le \beta$ и $x_1(t) = y(t)$, $t \in [\tau, b]$, что противоречит условию 3. Случай, когда $t_1 \in (\tau, b)$, рассматривается аналогично. Следовательно, $z(\cdot, A, B) = z$ и $y(\cdot, A, B) \le z(\cdot, A, B)$. Случай, когда $M_{\beta\alpha} \cap D(\beta(a), B) \ne \emptyset$, рассматривается аналогично.

Рассмотрим случай, когда $M_{\alpha\beta} \cap D(\alpha(a), B) = M_{\beta\alpha} \cap D(\beta(a), B) = \emptyset$. Покажем, что

$$M_2 = \{A \in [\alpha(a), \beta(a)] \quad y(\cdot, A, B) \le z(\cdot, A, B)\}$$

и $M_3 = [\alpha(a), \beta(a)] \setminus M_2$ открыты в $[\alpha(a), \beta(a)]$. Пусть $A_0, A \in [\alpha(a), \beta(a)]$ и A близко к A_0. Покажем, что $y(\cdot, A, B)$ близко к $y(\cdot, A_0, B)$. Для этого достаточно показать, что $y'(a, A, B)$ близко к $y'(a, A_0, B)$. Действ [illegible]ельно, из

$$\underline{\lim}_{A \to A_0} y'(a, A, B) < y'(a, A_0, B)$$

получаем противоречие с определением $y(\cdot, A, B)$, а из лемм 5, 3 и 1 следует

$$\overline{\lim}_{A \to A_0} y'(a, A, B) \le y'(a, A_0, B).$$

Аналогично получаем, что $z(\cdot, A, B)$ близко к $z(\cdot, A_0, B)$. Если $A_0 \in M_2$, то $y(\cdot, A, B) \le z(\cdot, A, B)$. Пусть $A_0 \in M_3$. Тогда найдется $t_3 \in (a, b)$ такое, что $y(t_3, A_0, B) > z(t_3, A_0, B)$. Следовательно, $y(t_3, A, B) > z(t_3, A, B)$. Теперь из $M_2 \ne$ [illegible] следует $M_2 = [\alpha(a), \beta(a)]$.

Из леммы 3 следует, что $y(\cdot, A, B)$ - минимальное решение, $z(\cdot, A, B)$ максимальн[illegible] решение и

$$D(A, B) = \{s(\cdot, A, U, B) \quad U \in [y'(a, A, B), z'(\cdot, A, B)]\}.$$

Из условия 3 следует $s(t, A, U, B) < s(t, A, V, B)$, $t \in (a, b)$ и $s'(b, A, U, B) > s'(b, A, V, B)$ [illegible]
Непрерывная зависимость $y(\cdot, A, B)$ и $z(\cdot, A, B)$ [illegible] $A, B)$ [illegible] из компактн[illegible]
S, минимальности $y(\cdot, A, B)$ и максим[illegible] $B)$ [illegible] епрерывная [illegible]ависимость
$s(\cdot, A, U, B)$ следует из компактности и [illegible]
[illegible]читывая замечание 3, [illegible]

Теорема 2 *Если выполняются условия 1-3, $c \in [a,b)$, $d \in (c,b]$, $A \in [\alpha(c),\beta(c)]$ и $B \in [\alpha(d),\beta(d)]$, то множество решений задачи Дирихле $D(c,d,A,B)$ имеет минимальное решение $y(\cdot,c,d,A,B) \in M_\alpha(c,d)$ и максимальное решение $z(\cdot,c,d,A,B) \in M_\beta(c,d)$. Решения $y(\cdot,c,d,A,B)$ и $z(\cdot,c,d,A,B)$ непрерывно зависят от (c,d,A,B). Для любого $U \in [y'(c,c,d,A,B), z'(c,c,d,A,B)]$ существует единственное $s(\cdot,c,d,A,U,B) \in$*
$\in D(c,d,A,B)$ такое, что $s'(c,c,d,A,U,B) = U$. Решение $s(\cdot,c,d,A,U,B)$ непрерывно зависит от (c,d,A,U,B),

$$D(c,d,A,B) = \{s(\cdot,c,d,A,U,B) : U \in [y'(c,c,d,A,B), z'(c,c,d,A,B)]\}$$

и для любого $V \in (U, z'(c,c,d,A,B)]$ $s'(d,c,d,A,U,B) > s'(d,c,d,A,V,B)$ и $s(t,c,d,A,U,B) < s(t,c,d,A,V,B)$, $t \in (c,d)$.

Замечание 4 *Если через F_1 обозначить множество f, для которых выполняются условия 1-3, а через F_2 обозначить множество f, для которых справедлива теорема 2, то $F_1 \; F_2$. Включение $F_1 \subset F_2$ очевидно. Пусть $f \in F_2$, тогда условия 1, 3 очевидны, а условие 2 при фиксированных c и d следует из непрерывности $s(\cdot,c_1,d_1,A,U,B)$ на компактном множестве*

$$\{(c_1,d_1,A,U,B) : c_1 \in [c,c+\varepsilon] \wedge d_1 \in [d-\varepsilon,d] \wedge A \in [\alpha(c_1),\beta(c_1)] \wedge$$

$$\wedge U \in [y'(c_1,c_1,d_1,A,B), z'(c_1,c_1,d_1,A,B)] \wedge B \in [\alpha(d_1),\beta(d_1)]\},$$

где $\varepsilon = (d-c)/3$.

Замечание 5 *Если $y, z \in S$ и множество*

$$M = \{t \in [a,b] \;\; y(t) = z(t)\}$$

содержит более двух точек, то найдутся $c \in [a,b)$ и $d \in (c,b]$ такие, что $M = [c,d]$.

Лемма 7 *Если выполняются условия 1-3, то для любых $y \in M_\alpha$ и $t \in [a,b]$ справедливо неравенство*

$$y(t) \le \max\{y(t,\alpha(a),\beta(b)), y(t,\beta(a),\alpha(b))\}.$$

Доказательство. Пусть $\sigma \in [a,b]$ такое, что $y(\sigma) = \alpha(\sigma)$ и $y'(\sigma) = \alpha'(\sigma)$. Покажем, что $y(t) \le y(t,\alpha(a),\beta(b))$, $t \in [\sigma,b]$. Если $\sigma \; b$, то это очевидно. Если $\sigma \in [a,b)$ и $y(\sigma) = y(\sigma,\alpha(a),\beta(b))$, то это следует из леммы 1. Пусть $\sigma \in (a,b)$ и $y(\sigma) < y(\sigma,\alpha(a),\beta(b))$. Если найдется $t_1 \in (\sigma,b)$ такое, что $y(t_1) > y(t_1,\alpha(a),\beta(b))$, то найдутся $B \in (\alpha(b),y(b))$ и $t_2 \in (\sigma,b)$ такие, что

$$y(t_2,\sigma,b,\alpha(\sigma),B) = y(t_2,\alpha(a),\beta(b)),$$

$$y'(t_2,\sigma,b,\alpha(\sigma),B) = y'(t_2,\alpha(a),\beta(b)).$$

Продолжая $y(\cdot,\sigma,b,\alpha(\sigma),B)$ влево, получаем противоречие с условием 3. Аналогично доказываем, что $y(t) \le y(t,\beta(a),\alpha(b))$, $t \in [a,\sigma]$.

Доказательство основной теоремы. Теорема 1 устанавливает гомеоморфизм $F : (A, U, B) \to s(\cdot, A, U, B)$ между множеством

$$K = \{(A, U, B) : A \in [\alpha(a), \beta(a)] \wedge U \in [y'(a, A, B), z'(a, A, B)] \wedge B \in [\alpha(b), \beta(b)]\}$$

и множеством решений S. Пусть $h_i = H_i F$, $i = 1, 2, 3$. Ясно, что

$$h_1(\alpha(a), \cdot, \cdot) \leq 0, \quad h_1(\beta(a), \cdot, \cdot) \geq 0,$$

$$h_2(\cdot, \cdot, \alpha(b)) \leq 0, \quad h_2(\cdot, \cdot, \beta(b)) \geq 0,$$

$$h_3(A, y'(a, A, B), B) \leq 0, \quad h_3(A, z'(a, A, B), B) \geq 0.$$

Следовательно, найдется $(A, U, B) \in K$ такое, что $h_1(A, U, B) = 0$, $h_2(A, U, B) = 0$, $h_3(A, U, B) = 0$. Ясно, что $s(\cdot, A, U, B)$ является решением краевой задачи (3).

Замечание 6 *Если $H_1 x = H_1(x(a), x'(a))$, $H_1 \alpha \leq 0$, $H_1 \beta \geq 0$ и H_1 не возрастает по второму аргументу, то для любого $x \in S$*

$$x(a) = \alpha(a) \Rightarrow H_1 x \leq 0, \quad x(a) = \beta(a) \Rightarrow H_1 x \geq 0.$$

Если $H_2 x = H_2(x(b), x'(b))$, $H_2 \alpha \leq 0$, $H_2 \beta \geq 0$ и H_2 не убывает по второму аргументу, то для любого $x \in S$

$$x(b) = \alpha(b) \Rightarrow H_2 x \leq 0, \quad x(b) = \beta(b) \Rightarrow H_2 x \geq 0.$$

Теорема 3 *Если выполняются условия 1-3, $A \in [\alpha(a), \beta(a)]$, $B \in [\alpha(b), \beta(b)]$, $A_1 \in [\beta'(a), \alpha'(a)]$, $B_1 \in [\alpha'(b), \beta'(b)]$, $c \in (a, b)$ и*

$$C \in [y(c, \alpha(a), \beta(b)), z(c, \alpha(a), \beta(b))] \cap [y(c, \beta(a), \alpha(b)), z(c, \beta(a), \alpha(b))],$$

то краевые задачи

$$x''' = f(t, x, x', x''), \quad x(a) = A, \quad x(c) = C, \quad x(b) = B, \quad \alpha \leq x \leq \beta,$$

$$x''' = f(t, x, x', x''), \quad x'(a) = A_1, \quad x(c) = C, \quad x(b) = B, \quad \alpha \leq x \leq \beta,$$

$$x''' = f(t, x, x', x''), \quad x'(a) = A_1, \quad x(c) = C, \quad x'(b) = B_1, \quad \alpha \leq x \leq \beta$$

имеют решение.

Доказательство. Из леммы 7 следует, что для любых $y \in M_\alpha$ и $z \in M_\beta$ справедливы неравенства $y(c) \leq C \leq z(c)$. Остальные условия основной теоремы очевидны.

Список литературы

[1] Васильев Н.И., Клоков Ю.А. Основы теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. - Рига: Зинатне, 1978. - 189 с.

[2] Bailey P.B., Shampine L.F. // J.Math.Anal.Appl. - 1969. - V.25, N 3. - P.569-574.

[3] Das K.M., Lalli B.S. // J.Math.Anal.Appl. - 1981. - V.81. - P.300-307.

[4] Zhao Weili // Tohoku Mat.J. - 44 (1992). - P.545-555.

[5] Розов Н.Х., Сушко В.Г. // Росс. Акад. Наук Докл. - Т.332 (1993), N 3.

A.Lepin. General boundary value problem for the third order differential equation.

Summary. For boundary value problem

$$x''' = f(t,x,x',x''), \quad H_1x = 0, \quad H_2x = 0, \quad H_3x = 0, \quad \alpha \le x \le \beta,$$

were α and β are solution of the equation $x''' = f(t,x,x',x'')$, and $\alpha < \beta$ conditions are given for the existence of a solution.

1991 MSC 34B15

A.Lepins. Vispārīga veida robežproblēma trešās kārtas vienādojumam.

Anotācija. Atrasti robežproblēmas

$$x''' = f(t,x,x',x''), \quad H_1x = 0, \quad H_2x = 0, \quad H_3x = 0, \quad \alpha \le x \le \beta,$$

atrisinājuma eksistences nosacījumi, kur α un β ir vienādojuma $x''' = f(t,x,x',x'')$ atrisinājumi.

Институт математики и информатики
Латвийского университета
Рига, б.Райниса, 29

Поступила 23.05.96

Простейшие двухточечные задачи для уравнения четвертого порядка

Л.А.Лепин

Аннотация. Исследуется множество решений уравнения

$$x^{(4)} = f(t, x, x', x'', x'''),$$

заключенных между двумя заданными решениями α и β.

УДК 517.927

В работе изучаются условия разрешимости краевых задач

$$x^{(4)} = f(t, x, x', x'', x'''), \quad x^{(i)}(0) = A_i, \quad i \in \{0, ..., k\},$$

$$x^{(j)}(1) = B_j, \quad j = \{0, ..., l\}, \quad \alpha \leq x \leq \beta, \quad k + l \leq 2,$$

где $k, l \in \{0, 1, 2\}$, $A_i \in R$, $i \in \{0, ..., k\}$, $B_j \in R$, $j \in \{0, ..., l\}$, f $[0, 1] \times R^4 \to R$ удовлетворяет условиям Каратеодори и α, β $[0, 1] \to R$ - два фиксированных решения уравнения

$$x^{(4)} = f(t, x, x', x'', x''') \tag{1}$$

такие, что $\alpha < \beta$.

Аналогичные вопросы рассматривались в работах [1]-[3].

Пусть S множество x : $[0, 1] \to R$ решений уравнения (1), удовлетворяющих неравенствам $\alpha \leq x \leq \beta$. Для $k \in \{1, 2, ...\}$ введем обозначения

$$S(\alpha, k) = \{x \in S : (\exists \gamma_1, ..., \gamma_k \in [0, 1])((\forall i, j \in \{1, ..., k\})(i < j \Rightarrow \gamma_i < \gamma_j)\wedge$$

$$\wedge(\forall i \in \{1, ..., k\})((i \bmod 2 = 1 \Rightarrow x(\gamma_i) = \alpha(\gamma_i) \wedge x'(\gamma_i) = \alpha'(\gamma_i))\wedge$$

$$\wedge(i \bmod 2 = 0 \Rightarrow x(\gamma_i) = \beta(\gamma_i) \wedge x'(\gamma_i) = \beta'(\gamma_i)))\},$$

$$S(\beta, k) = \{x \in S : (\exists \gamma_1, ..., \gamma_k \in [0, 1])((\forall i, j \in \{1, ..., k\})(i < j \Rightarrow \gamma_i < \gamma_j)\wedge$$

$$\wedge(\forall i \in \{1, ..., k\})((i \bmod 2 = 1 \Rightarrow x(\gamma_i) = \beta(\gamma_i) \wedge x'(\gamma_i) = \beta'(\gamma_i))\wedge$$

$$\wedge(i \bmod 2 = 0 \Rightarrow x(\gamma_i) = \alpha(\gamma_i) \wedge x'(\gamma_i) = \alpha'(\gamma_i)))\},$$

$$S(\alpha,\beta,k)=S(\alpha,k)\cup S(\beta,k),$$

$$S_*(\alpha,k)=S(\alpha,k)\backslash S(\alpha,\beta,k+1),$$

$$S_*(\beta,k)=S(\beta,k)\backslash S(\alpha,\beta,k+1).$$

Для $k,l\in\{0,1,2\}$ и $A_0,\dots,A_k,B_0,\dots,B_l\in R$

$$D(A_0,\dots,A_k,B_0,\dots,B_l)=\{x\in S:(\forall i\in\{0,\dots,k\})(x^{(i)}(0)=A_i)\wedge$$

$$\wedge(\forall j\in\{0,\dots,l\})(x^{(j)}(1)=B_j)\}.$$

Будем предполагать, что выполняются следующие условия.

1. Для любых $a\in[0,1)$ и $b\in(a,1]$ найдется $M\in(0,\infty)$ такое, что для любого решения $x\quad(a,b)\to R$ уравнения (1) из $\alpha(t)\le x(t)\le\beta(t)$, $t\in(a,b)$ следует, что $|x'''(t)|<M$ при $t\in(a,b)$.

2. Для любых $c\in(0,1)$ и $A_i,B_i\in R$, $i\in\{0,1,2,3\}$ задачи Коши

$$x^{(4)}=f(t,x,x',x'',x'''),\quad x^{(i)}(0)=A_i,\quad i\in\{0,1,2,3\},$$

$$\alpha(t)\le x(t)\le\beta(t),\quad t\in[0,c],$$

$$x^{(4)}=f(t,x,x',x'',x'''),\quad x^{(i)}(1)=B_i,\quad i\in\{0,1,2,3\},$$

$$\alpha(t)\le x(t)\le\beta(t),\quad t\in[c,1]$$

имеют единственное решение.

3. Для любых $c\in(0,1)$, $k\in\{0,1\}$, $A_i,B_i\in R$, $i\in\{0,\dots,2-k\}$, $C_j\in R$, $j\in\{0,\dots k\}$ единственные решения краевых задач

$$x^{(4)}=f(t,x,x',x'',x'''),\quad x^{(i)}(0)=A_i,\quad i\in\{0,\dots,2-k\},\quad x^{(j)}(c)=C_j,$$

$$j\in\{0,\dots,k\},\quad \alpha(t)\le x(t)\le\beta(t),\quad t\in[0,c],$$

$$x^{(4)}=f(t,x,x',x'',x'''),\quad x^{(i)}(c)=C_i,\quad i\in\{0,\dots,k\},\quad x^{(j)}(1)=B_j,$$

$$j\in\{0,\dots,2-k\},\quad \alpha(t)\le x(t)\le\beta(t),\quad t\in[c,1].$$

4. Для любых $r\in\{0,1,2\}$, $k_0,k_1\in\{0,\dots,2-r\}$, $c_i\in(0,1)$, $i\in\{1,\dots,r\}$, $A_j\in R$, $j\in\{0,\dots,k_0\}$, $B_j\in R$, $j\in\{0,\dots,k_1\}$ и $C_i\in R$, $i\in\{1,\dots,r\}$ из $k_0+k_1=2-r$ и $c_1<c_2$ при $r=2$ следует единственность решения краевой задачи

$$x^{(4)}=f(t,x,x',x'',x'''),\quad x^{(j)}(0)=A_j,\quad j\in\{0,\dots,k_0\},$$

$$x(c_i)=C_i,\quad i\in\{1,\dots,r\},\quad x^{(j)}(1)=B_j,\quad j\in\{0,\dots,k_1\},$$

$$\alpha\le x\le\beta.$$

5. $S(\alpha,\beta,3)=\varnothing$.

Лемма 1 *Если $A \in (\alpha(0), \beta(0))$, $B \in (\alpha(1), \beta(1))$ и $s \in D(A, B)\setminus S(\alpha, \beta, 1)$, то найдется $\varepsilon \in (0, \infty)$ такое, что для любых $A_i \in (s^{(i)}(0) - \varepsilon, s^{(i)}(0) + \varepsilon)$, $i \in \{0, 1, 2\}$ и $B_0 \in (B - \varepsilon, B + \varepsilon)$ найдется $A_3 \in R$ такое, что решение $x : [0, 1] \to R$ задачи Коши*

$$\begin{array}{rl} x^{(4)} & f(t, x, x', x'', x'''), \\ x(0) = A_0, & x'(0) = A_1, \\ x''(0) = A_2, & x'''(0) = A_3 \end{array} \tag{2}$$

удовлетворяет условию $x \in D(A_0, A_1, A_2, B_0)\setminus S(\alpha, \beta, 1)$.

Доказательство. Выберем $A_{03} \in (-\infty, s'''(0))$ и $A_{30} \in (s'''(0), \infty)$ так, чтобы решения s_0 и s^0 задач Коши

$$x^{(4)} = f(t, x, x', x'', x'''),$$

$$x(0) = s(0), \quad x'(0) = s'(0), \quad x''(0) = s''(0), \quad x'''(0) = A_{03},$$

$$x^{(4)} = f(t, x, x', x''; x'''),$$

$$x(0) = s(0), \quad x'(0) = s'(0), \quad x''(0) = s''(0), \quad x'''(0) = A_{30}$$

удовлетворяли неравенствам $\alpha < s_0 < \beta$ и $\alpha < s^0 < \beta$. Из условия 3 следует, что $s_0(t) < s(t) < s^0(t)$, $t \in (0, 1]$. Выберем $\varepsilon \in (0, \infty)$ так, чтобы для любых $A_i \in (s^{(i)}(0) - \varepsilon, s^{(i)}(0) + \varepsilon)$, $i \in \{0, 1, 2\}$ и $A_3 \in (A_{03}, A_{30})$ решения задач Коши (2) удовлетворяли неравенствам $\alpha < x(\cdot, A_0, A_1, A_2, A_3) < \beta$, $x(1, A_0, A_1, A_2, A_{03}) < B - \varepsilon$ и $x(1, A_0, A_1, A_2, A_{30}) > B - \varepsilon$. Ясно, что найдется $A_3 \in (A_{03}, A_{30})$ такое, что $x(1, A_0, A_1, A_2, A_3) = B_0$.

Лемма 2 *Если $\varepsilon \in (0, \infty)$, $s \in S$, $s(t) < \beta(t)$, $t \in (0, 1)$, из $s(0) = \beta(0)$ и $s'(0) = \beta'(0)$ следует $s''(0) < \beta''(0)$ и из $s(1) = \beta(1)$ следует $s'(1) > \beta'(1)$, то найдется $x \in S$ такое, что $x(0) = s(0)$, $x'(0) = s'(0)$, $s''(0) < x''(0) < s''(0) + \varepsilon$, $x(1) = s(1)$ и $s(t) < x(t) < \beta(t)$, $t \in (0, 1)$.*

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $s(1) < \beta(1)$. Пусть $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon)$ достаточно мало. Тогда для $A_{30} \in (s'''(0), s'''(0) + \varepsilon_1)$ решение s^0 задачи Коши

$$x^{(4)} = f(t, x, x', x'', x'''),$$

$$x(0) = s(0), \quad x'(0) = s'(0), \quad x''(0) = s''(0), \quad x'''(0) = A_{30}$$

удовлетворяет неравенствам $s(t) < s^0(t) < \beta(t)$, $t \in (0, 1]$.

Для $u \in R$ обозначим через $s(\cdot, u)$ решение задачи Коши

$$x^{(4)} = f(t, x, x', x'', x'''),$$

$$x(0) = s(0), \quad x'(0) = s'(0), \quad x''(0) = u, \quad x'''(0) = A_{30}.$$

Из формулы

$$s(t, u) - s(t) = (u - s''(0))\frac{t^2}{2} + (A_{30} - s'''(0))\frac{t^3}{6} + \frac{1}{6}\int_0^t (f(\tau, s(\tau, u), s'(\tau, u),$$

$$s''(\tau,u), s'''(\tau,u)) - f(\tau, s(\tau), s'(\tau), s''(\tau), s'''(\tau)))(t-\tau)^3 d\tau$$

следует существование $t_1 \in (0,1)$ такого, что $s(t,u) > s(t)$, $t \in (0,t_1)$, $u \in (s''(0), s''(0)+\varepsilon_1)$. Выбирая $u \in (s''(0), s''(0)+\varepsilon_1)$ достаточно близким к $s''(0)$, получаем неравенства $s(t) < s(t,u) < \beta(t)$, $t \in (0,1]$. Следовательно, найдется $A_3 \in (-\infty, A_{30})$ такое, что решение задачи Коши

$$x^{(4)} = f(t,x,x',x'',x'''), \quad x(0) = s(0), \quad x'(0) = s'(0), \quad x''(0) = u, \quad x'''(0) = A_3$$

удовлетворяет условиям $s(t) < x(t) < s(t,u)$, $t \in (0,1)$ и $x(1) = s(1)$.

Случай $s(1) = \beta(1)$ рассматривается аналогично.

Лемма 3 *Если $y \in S(\alpha,2)$, $z \in S(\alpha,\beta,2)$, $y(0) = z(0)$ и $y(1) = z(1)$, то либо $y = z \in S_*(\alpha,2)$, либо $z \in S_*(\beta,2)$ и $y'(0) < z'(0)$.*

Доказательство. Пусть $\sigma_1, \sigma_2, \tau_1, \tau_2 \in [0,1]$ такие, что $y(\sigma_1) = \alpha(\sigma_1)$, $y'(\sigma_1) = \alpha'(\sigma_1)$, $z(\sigma_2) = \alpha(\sigma_2)$, $z'(\sigma_2) = \alpha'(\sigma_2)$, $y(\tau_1) = \beta(\tau_1)$, $y'(\tau_1) = \beta'(\tau_1)$, $z(\tau_2) = \beta(\tau_2)$, $z'(\tau_2) = \beta'(\tau_2)$. Из условия 5 следует, что $y \in S_*(\alpha,2)$, а если $z \notin S(\beta,2)$, то $z \in S_*(\beta,2)$. Пусть $z \in S_*(\alpha,2)$. Рассмотрим случай, когда $0 < \min\{\sigma_1,\sigma_2\}$ и $\tau = \max\{\tau_1,\tau_2\} < 1$. Ясно, что между σ_1 и σ_2 найдется t_1 такое, что $y(t_1) = z(t_1)$. Если $t_1 < \max\{\sigma_1,\sigma_2\} = \sigma$, то на интервале $[\sigma,\tau]$ найдется t_2 такое, что $y(t_2) = z(t_2)$. Из условия 4 следует, что $y = z$. Если $t_1 = \sigma$, то между τ_1 и τ_2 найдется t_2 такое, что $y(t_2) = z(t_2)$. Следовательно, $y = z$.

Рассмотрим случай, когда $\sigma_1 = 0$ и $\tau < 1$. Если $z'(0) = y'(0)$, то между τ_1 и τ_2 найдется t_2 такое, что $y(t_2) = z(t_2)$. Из условия 4 следует, что $y = z$. Если $z'(0) > y'(0)$, то найдется $t_1 \in (0,\sigma_2)$ такое, что $y(t_1) = z(t_1)$. На интервале $[\sigma_2,\tau_2]$ найдется t_2 такое, что $y(t_2) = z(t_2)$. Следовательно, $y = z$. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Пусть теперь $z \in S_*(\beta,2)$. Рассмотрим случай, когда $y'(0) = z'(0)$. Ясно, что $0 < \min\{\sigma_1,\tau_2\} = \sigma < \tau = \min\{\sigma_2,\tau_1\} < 1$ и на интервале $[\sigma,\tau]$ найдется t_1 такое, что $y(t_1) = z(t_1)$. Следовательно, $y = z$, что невозможно. Рассмотрим случай, когда $y'(0) > z'(0)$. Ясно, что $0 < \sigma < \tau < 1$, на интервале $(0,\sigma)$ найдется t_1 такое, что $y(t_1) = z(t_1)$, и на интервале $[\sigma,\tau]$ найдется t_2 такое, что $y(t_2) = z(t_2)$. Следовательно, $y = z$, что невозможно.

Лемма 4 *Если $A \in [\alpha(0),\beta(0)]$, $B \in [\alpha(1),\beta(1)]$, $y \in D(A,B) \cap S(\alpha,2)$, $z \in D(A,B) \cap S(\beta,2)$ и $s \in D(A,B)$, то $y'(0) \le s'(0) \le z'(0)$.*

Доказательство. Предположим противное. Рассмотрим случай, когда $s'(0) < y'(0)$. Пусть $\sigma,\tau \in [0,1]$ такие, что $y(\sigma) = \alpha(\sigma)$, $y'(\sigma) = \alpha'(\sigma)$ и $y(\tau) = \beta(\tau)$, $y'(\tau) = \beta'(\tau)$. Если $\alpha(t) < s(t)$, $t \in (0,1)$, то на интервале $(0,\sigma)$ найдется t_1 такое, что $y(t_1) = s(t_1)$. Если $\tau < 1$, то на интервале $[\sigma,\tau]$ найдется t_2 такое, что $y(t_2) = s(t_2)$. Следовательно, $y = s$. Если $s \in S(\alpha,1)$, то из $s(1) = \beta(1)$ следует $s'(1) > \beta'(1)$. По лемме 2 найдется $x \in D(A,B)$ такое, что $x'(0) = s'(0)$ и $\alpha(t) < x(t)$ при $t \in (0,1)$

С сматривается аналогично.

Лемма 5 *Если* $A_0 \in [\alpha(0), \beta(0)]$, $B_0 \in [\alpha(1), \beta(1)]$, $A_1 \in R$ *и* $D(A_0, A_1, B_0) \neq \varnothing$, *то найдутся* $A_{*2} \in R$, $A_{2*} \in [A_{2*}, \infty)$ *и*

$$s(\cdot, A_0, A_1, A_2, B_0) \in D(A_0, A_1, A_2, B_0), \quad A_2 \in [A_{*2}, A_{2*}]$$

такие, что

$$s(\cdot, A_0, A_1, A_{*2}, B_0) \in S(\alpha, 1); \tag{3}$$

$$(\forall t \in (0,1))(s(t, A_0, A_1, A_{*2}, B_0) > \alpha(t)) \wedge$$
$$(B_0 = \alpha(1) \Rightarrow s'(1, A_0, A_1, A_{*2}, B_0) < \alpha'(1)) \Rightarrow \tag{4}$$
$$A_0 = \alpha(0) \wedge A_1 = \alpha'(0) \wedge A_{*2} = \alpha''(0);$$

$$s(\cdot, A_0, A_1, A_{2*}, B_0) \in S(\beta, 1); \tag{5}$$

$$(\forall t \in (0,1))(s(t, A_0, A_1, A_{2*}, B_0) < \beta(t)) \wedge$$
$$(B_0 = \beta(1) \Rightarrow s'(1, A_0, A_1, A_{2*}, B_0) > \beta'(1)) \Rightarrow \tag{6}$$
$$A_0 = \beta(0) \wedge A_1 = \beta'(0) \wedge A_{2*} = \beta''(0);$$

$$D(A_0, A_1, B_0) = \{s(\cdot, A_0, A_1, A_2, B_0) \quad A_2 \in [A_{*2}, A_{2*}]\}; \tag{7}$$

для $u, v \in [A_{*2}, A_{2*}]$, $t \in (0,1)$ *из* $u < v$ *следует, что*

$$s(t, A_0, A_1, u, B_0) < s(t, A_0, A_1, v, B_0). \tag{8}$$

Доказательство. Из условия 1 следует компактность $D(A_0, A_1, B_0)$. Пусть

$$A_{*2} = \inf\{x''(0) : x \in D(A_0, A_1, B_0)\},$$

$$A_{2*} = \sup\{x''(0) : x \in D(A_0, A_1, B_0)\}.$$

Из условия 4 следует, что

$$card D(A_0, A_1, A_2, B_0) \leq 1, \quad A_2 \in [A_{*2}, A_{2*}],$$

а из компактности $D(A_0, A_1, B_0)$ - существование

$$s(\cdot, A_0, A_1, A_{*2}, B_0) \in D(A_0, A_1, A_{*2}, B_0),$$

$$s(\cdot, A_0, A_1, A_{2*}, B_0) \in D(A_0, A_1, A_{2*}, B_0).$$

Неравенство

$$s(\cdot, A_0, A_1, A_{*2}, B_0) \leq s(\cdot, A_0, A_1, A_{2*}, B_0)$$

следует из условия 4. Следовательно, для любого $A_2 \in (A_{*2}, A_{2*})$ найдется единственное

$$s(\cdot, A_0, A_1, A_2, B_0) \in D(A_0, A_1, A_2, B_0).$$

Теперь условие 7 очевидно, а условие 8 следует из условия 4. Из леммы 2 следует, что для $s = s(\cdot, A_0, A_1, A_{2*}, B_0)$ условие

$$(\forall t \in (0,1))(s(t) < \beta(t)) \wedge (s(0) = \beta(0) \wedge s'(0) = \beta'(0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s''(0) < \beta''(0)) \wedge (s(1) = \beta(1) \Rightarrow s'(1) > \beta'(1))$$

не выполняется. Следовательно, справедливы условия 5 и 6. Условия 3 и 4 доказываются аналогично.

Лемма 6 *Если* $A_0 \in (\alpha(0), \beta(0))$, $B_0 \in (\alpha(1), \beta(1))$ *и*

$$D(A_0, B_0)\backslash S(\alpha, \beta, 1) \neq \emptyset,$$

то найдутся $A_{*1} \in R$, $A_{1*} \in (A_{*1}, \infty)$ *и*

$$y(\cdot, A_0, A_1, B_0), z(\cdot, A_0, A_1, B_0) \in D(A_0, A_1, B_0), \quad A_1 \in [A_{*1}, A_{1*}]$$

такие, что

$$y(\cdot, A_0, A_{*1}, B_0) = z(\cdot, A_0, A_{*1}, B_0) \in S_*(\alpha, 2); \tag{9}$$

$$y(\cdot, A_0, A_{1*}, B_0) = z(\cdot, A_0, A_{1*}, B_0) \in S_*(\beta, 2); \tag{10}$$

$$y(\cdot, A_0, A_1, B_0) \in S_*(\alpha, 1), \quad A_1 \in (A_{*1}, A_{1*}); \tag{11}$$

$$z(\cdot, A_0, A_1, B_0) \in S_*(\beta, 1), \quad A_1 \in (A_{*1}, A_{1*}); \tag{12}$$

$$D(A_0, B_0) = \{z \in D(A_0, A_1, B_0) : A_1 \in [A_{*1}, A_{1*}]\}. \tag{13}$$

Доказательство. По лемме 1 множество

$$M = \{z'(0) \quad z \in D(A_0, B_0)\backslash S(\alpha, \beta, 1)\}$$

открыто. Пусть $A_{*1}, A_{1*} \in R\backslash M$, $(A_{*1}, A_{1*}) \subset M$ и $A_{*1} < A_{1*}$. Из леммы 5 для $A_1 \in [A_{*1}, A_{1*}]$ следует существование

$$y(\cdot, A_0, A_1, B_0), z(\cdot, A_0, A_1, B_0) \in D(A_0, A_1, B_0)$$

таких, что справедливы условия 11 и 12. Если

$$y(\cdot, A_0, A_{*1}, B_0) \neq z(\cdot, A_0, A_{*1}, B_0),$$

то по лемме 5 найдется $z \in D(A_0, A_{*1}, B_0)\backslash S(\alpha, \beta, 1)$, что противоречит определению интервала (A_{*1}, A_{1*}). Следовательно,

$$y(\cdot, A_0, A_{*1}, B_0) = z(\cdot, A_0, A_{*1}, B_0) \in S(\alpha, \beta, 2).$$

Аналогично получаем, что

$$y(\cdot, A_0, A_{1*}, B_0) = z(\cdot, A_0, A_{1*}, B_0) \in S(\alpha, \beta, 2).$$

Теперь из леммы 3 следуют условия 9 и 10, а из леммы 4 условие 13.

Определение В условиях леммы 6 положим

$$y(\cdot, A_0, B_0) = y(\cdot, A_0, A_{*1}, B_0), \quad z(\cdot, A_0, B_0) = z(\cdot, A_0, A_{1*}, B_0).$$

Лемма 7 *Для любых* $A \in (\alpha(0), \beta(0))$ и $B \in (\alpha(1), \beta(1))$ $\quad D(A, B)\backslash S(\alpha, \beta, 1) \neq \emptyset$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon \in (0, \infty)$ достаточно мало. Тогда решение s_* задачи Коши

$$x^{(4)} = f(t, x, x', x'', x'''), \quad x(0) = \alpha(0), \quad x'(0) = \alpha'(0),$$
$$x''(0) = \alpha''(0), \quad x'''(0) = \alpha'''(0) + \varepsilon$$

удовлетворяет неравенствам $\alpha(t) < s_*(t) < \beta(t)$, $t \in (0, 1]$, а решение s задачи Коши

$$x^{(4)} = f(t, x, x', x'', x'''), \quad x(1) = s_*(1), \quad x'(1) = s'_*(1),$$

$$x''(1) = s''_*(1), \quad x'''(1) = s'''_*(1) - \varepsilon$$

удовлетворяет неравенствам $\alpha < s < \beta$. Следовательно,

$$D(s(0), s(1)) \backslash s(\alpha, \beta, 1) \neq \emptyset.$$

По лемме 1 множество

$$M = \{B_0 \in (\alpha(1), \beta(1)) : D(s(0), B_0) \backslash S(\alpha, \beta, 1) \neq \emptyset\}$$

открыто. Пусть (B_{*0}, B_{0*}) - максимальный интервал из M, содержащий точку $s(1)$. Покажем, что неравенство $B_{*0} > \alpha(1)$ приводит к противоречию. Пусть

$$y(\cdot, s(0), B_{*0}) = \lim_{B_0 \to B_{*0}} y(\cdot, s(0), B_0),$$

$$z(\cdot, s(0), B_{*0}) = \lim_{B_0 \to B_{*0}} z(\cdot, s(0), B_0).$$

Равенство $y(\cdot, s(0), B_{*0}) = z(\cdot, s(0), B_{*0})$ противоречит условию 5. Следовательно, $y(\cdot, s(0), B_{*0}) \in S_*(\alpha, 2)$, $z(\cdot, s(0), B_{*0}) \in S_*(\beta, 2)$ и $y'(0, s(0), B_{*0}) < z'(0, s(0), B_{*0})$. Пусть $A_1 \in (y'(0, s(0), B_{*0}, z'(0, s(0), B_{*0}))$ и $y(\cdot, s(0), A_1, B_{*0}) = \lim_{B_0 \to B_{*0}} y(\cdot, s(0), A_1, B_0)$. Ясно, что $y(\cdot, s(0), A_1, B_{*0}) \in S_*(\alpha, 1)$. Из леммы 5 следует, что $D(s(0), A_1, B_{*0}) \backslash$ $\backslash S(\alpha, \beta, 1) \neq \emptyset$, а это противоречит определению интервала (B_{*0}, B_{0*}).

Аналогично доказывается, что $B_{0*} = \beta(1)$. Следовательно, $D(s(0), B_0) \backslash S(\alpha, \beta, 1) \neq \emptyset$ для любого $B_0 \in (\alpha(1), \beta(1))$. Аналогично получаем, что $D(A_0, B) \backslash S(\alpha, \beta, 1) \neq \emptyset$ для любого $A_0 \in (\alpha(0), \beta(0))$.

Теорема 1 *Если $A_0 \in (\alpha(0), \beta(0))$ и $B_0 \in [\alpha(1), \beta(1)]$, то существуют $y(\cdot, A_0, B_0)$, $z(\cdot, A_0, B_0) \in D(A_0, B_0)$ такие, что*

$$y(\cdot, A_0, B_0) \in S_*(\alpha, 2), \qquad \cdot, A_0, B_0) \in S_*(\beta, 2); \tag{14}$$

$$y'(0, A_0, B_0) < z'(0, A_0, B_0); \tag{15}$$

если $A_1 \in [y'(0, A_0, B_0), z'(0, A_0, B_0)]$, то существуют $y(\cdot, A_0, A_1, B_0)$, $z \cdot, A_0, A_1, B_0) \in D(A_0, A_1, B_0)$ такие, что

$$y(\cdot, A_0, y'(0, A_0, B_0), B_0) - z \cdot, A_0, y'(0, A_0, B_0), B_0) = y \cdot, A_0, B_0); \tag{16}$$

$_0, z'(0, .$

$$y(\cdot, A_0, A_1, B_0) \in S_*(\alpha, 1), \quad A_1 \in (y'(0, A_0, B_0), z'(0, A_0, B_0)); \tag{18}$$

$$z(\cdot, A_0, A_1, B_0) \in S_*(\beta, 1), \quad A_1 \in (y'(0, A_0, B_0), z'(0, A_0, B_0)); \tag{19}$$

$$D(A_0, B_0) = \{x \in D(A_0, A_1, B_0) : A_1 \in [y'(0, A_0, B_0), z'(0, A_0, B_0)]\}; \tag{20}$$

если $A_2 \in [y''(0, A_0, A_1, B_0), z''(0, A_0, A_1, B_0)]$, *то существуют*
$s(\cdot, A_0, A_1, A_2, B_0) \in D(A_0, A_1, A_2, B_0)$ *такие, что*

$$s(\cdot, A_0, A_1, y''(0, A_0, A_1, B_0), B_0) = y(\cdot, A_0, A_1, B_0); \tag{21}$$

$$s(\cdot, A_0, A_1, z''(0, A_0, A_1, B_0), B_0) = z(\cdot, A_0, A_1, B_0); \tag{22}$$

$$D(A_0, A_1, B_0) = \{s(\cdot, A_0, A_1, A_2, B_0) : A_2 \in [y''(0, A_0, A_1, B_0), z''(0, A_0, A_1, B_0)]\}; \tag{23}$$

для $u, v \in [y''(0, A_0, A_1, B_0), z''(0, A_0, A_1, B_0)]$, $t \in (0,1)$ *из* $u < v$ *следует, что*

$$s(t, A_0, A_1, u, B_0) < s(t, A_0, A_1, v, B_0). \tag{24}$$

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $B_0 \in (\alpha(1), \beta(1))$. Условие $D(A_0, B_0) \setminus S(\alpha, \beta, 1) \neq \emptyset$ следует из леммы 7. Из леммы 6 следует существование $A_{*1} \in R$, $A_{1*} \in (A_{*1}, \infty)$ и

$$y(\cdot, A_0, A_1, B_0), z(\cdot, A_0, A_1, B_0) \in D(A_0, A_1, B_0), \quad A \in [A_{*1}, A_{1*}].$$

Ясно, что $A_{*1} = y'(0, A_0, B_0)$ и $A_{1*} = z'(0, A_0, B_0)$. Условия (14), (16)-(20) следуют из условий (9)-(13) леммы 6, а условие (15) - из того, что $A_{*1} < A_{1*}$. По лемме 5 существуют $A_{*2} \in R$, $A_{2*} \in [A_{*2}, \infty)$ и

$$s(\cdot, A_0, A_1, A_2, B_0) \in D(A_0, A_1, A_2, B_0), \quad A_2 \in [A_{*2}, A_{2*}].$$

Ясно, что $A_{*2} = y''(0, A_0, A_1, B_0)$ и $A_{2*} = z''(0, A_0, A_1, B_0)$. Условия (21)-(24) следуют из условий (3), (5), (7) и (8) леммы 5.

Рассмотрим случай, когда $B_0 = \alpha(1)$. Пусть

$$y(\cdot, A_0, \alpha(1)) = \lim_{B \to \alpha(1)} y(\cdot, A_0, B), \quad z(\cdot, A_0, \alpha(1)) = \lim_{B \to \alpha(1)} z(\cdot, A_0, B).$$

Из леммы 3 следуют условия (14), (15) и

$$D(A_0, \alpha(1)) \cap S(\alpha, \beta, 2) = \{y(\cdot, A_0, \alpha(1)), z(\cdot, A_0, \alpha(1))\}. \tag{25}$$

Пусть

$$y(\cdot, A_0, y'(0, A_0, \alpha(1)), \alpha(1)) = z(\cdot, A_0, y'(0, A_0, \alpha(1)), \alpha(1)) = y(\cdot, A_0, \alpha(1)),$$

$$y(\cdot, A_0, z'(0, A_0, \alpha(1)), \alpha(1)) = z(\cdot, A_0, z'(0, A_0, \alpha(1)), \alpha(1)) = z(\cdot, A_0, \alpha(1)),$$

$$y(\cdot, A_0, A_1, \alpha(1)) = \lim_{B \to \alpha(1)} y(\cdot, A_0, A_1, B), \quad A_1 \in (y'(0, A_0, \alpha(1)), z'(0, A_0, \alpha(1))),$$

$$z(\cdot, A_0, A_1, \alpha(1)) = \lim_{B \to \alpha(1)} z(\cdot, A_0, A_1, B), \quad A_1 \in (y'(0, A_0, \alpha(1)), z'(0, A_0, \alpha(1))).$$

Из (25) и леммы 4 следует, что выполняются условия (18)-(20). Пусть $s(\cdot, A_0, A_1, A_2, \alpha(1))$ определяется лемьюй 5. Ясно, что $A_{*2} = y''(0, A_0, A_1, \alpha(1))$, $A_{2*} = z''(0, A_0, A_1, \alpha(1))$ и справедливы условия (21)-(24).

Случай, когда $B_0 = \beta(1)$, рассматривается аналогично.

Обозначим через S_α множество решений задачи

$$x^{(4)} = f(t, x, x', x'', x'''),$$

$$x(0) = \alpha(0), \quad x'(0) = \alpha'(0), \quad x''(0) = \alpha''(0), \quad \alpha \le x \le \beta.$$

Пусть $B_\alpha = \sup\{x(1) \quad x \in S_\alpha\}$, а $s_\alpha(\cdot, B_0)$, $B_0 \in [\alpha(1), B_\alpha]$ определяются условиями $s_\alpha(\cdot, B_0) \in S_\alpha$ и $s_\alpha(1, B_0) = B_0$.

Теорема 2 *Если* $B_0 \in [\alpha(1), \beta(1)]$, *то существуют* $y(\cdot, \alpha(0), B_0), z(\cdot, \alpha(0), B_0) \in D(\alpha(0), B_0)$ *такие, что*

$$y(\cdot, \alpha(0), B_0) \in S_*(\alpha, 2), \quad z(\cdot, \alpha(0), B_0) \in S_*(\beta, 2); \tag{26}$$

$$y'(0, \alpha(0), B_0) < z'(0, \alpha(0), B_0); \tag{27}$$

$$\alpha'(0) = y'(0, \alpha(0), B_0), \quad B_0 \in [\alpha(1), B_\alpha]; \tag{28}$$

$$\alpha'(0) < y'(0, \alpha(0), B_0), \quad B_0 \in [B_\alpha, \beta(1)]; \tag{29}$$

если $A_1 \in [y'(0, \alpha(0), B_0), z'(0, \alpha(0), B_0]$, *то существуют* $y(\cdot, \alpha(0), A_1, B_0)$, $z(\cdot, \alpha(0), A_1, B_0) \in D(\alpha(0), A_1, B_0)$ *такие, что*

$$y(\cdot, \alpha(0), \alpha'(0), B_0) = s_\alpha(\cdot, B_0), \quad B_0 \in [\alpha(1), B_\alpha];$$

$$y(\cdot, \alpha(0), y'(0, \alpha(0), B_0), B_0) = y(\cdot, \alpha(0), B_0), \quad B_0 \in (B_\alpha, \beta(1)];$$

$$z(\cdot, \alpha(0), y'(0, \alpha(0), B_0), B_0) = y(\cdot, \alpha(0), B_0);$$

$$y(\cdot, \alpha(0), z'(0, \alpha(0), B_0), B_0) = z(\cdot, \alpha(0), z'(0, \alpha(0), B_0), B_0) = z(\cdot, \alpha(0), B_0);$$

$$y(\cdot, \alpha(0), A_1, B_0) \in S_*(\alpha, 1), \quad A_1 \in (y'(0, \alpha(0), B_0), z'(0, \alpha(0), B_0)); \tag{30}$$

$$z(\cdot, \alpha(0), A_1, B_0) \in S_*(\beta, 1), \quad A_1 \in (y'(0, \alpha(0), B_0), z'(0, \alpha(0), B_0)); \tag{31}$$

$$D(\alpha(0), B_0) = \{x \in D(\alpha(0), A_1, B_0) : A_1 \in [y'(0, \alpha(0), B_0), z'(0, \alpha(0), B_0)]\}; \tag{32}$$

если $A_2 \in [y''(0, \alpha(0), A_1, B_0), z''(0, \alpha(0), A_1, B_0)]$, *то существуют* $s(\cdot, \alpha(0), A_1, A_2, B_0) \in D(\alpha(0), A_1, A_2, B_0)$ *такие, что*

$$s(\cdot, \alpha(0), A_1, y''(0, \alpha(0), A_1, B_0), B_0) = y(\cdot, \alpha(0), A_1, B_0); \tag{33}$$

$$s(\cdot, \alpha(0), A_1, z''(0, \alpha(0), A_1, B_0), B_0) = z(\cdot, \alpha(0), A_1, B_0); \tag{34}$$

$$D(\alpha(0), A_1, B_0) = \{s(\cdot, \alpha(0), A_1, A_2, B_0) : A_2 \in [y''(0, \alpha(0), A_1, B_0), z''(0, \alpha(0), A_1, B_0)]\}; \tag{35}$$

для $u, v \in [y''(0, \alpha(0), A_1, B_0), z''(0, \alpha(0), A_1, B_0)]$, $t \in (0,1)$ *из* $u < v$ *следует*

$$s(t, \alpha(0), A_1, u, B_0) < s(t, \alpha(0), A_1, v, B_0). \tag{36}$$

Доказательство. Пусть

$$y(\cdot,\alpha(0),B_0)=\lim_{A\to\alpha(0)}y(\cdot,A,B_0),\quad z(\cdot,\alpha(0),B_0)=\lim_{A\to\alpha(0)}z(\cdot,A,B_0).$$

Из леммы 3 следуют условия (26), (27) и равенство

$$D(\alpha(0),B_0)\cap S(\alpha,\beta,2)=\{y(\cdot,\alpha(0),B_0),z(\cdot,\alpha(0),B_0)\}. \tag{37}$$

Условие (28) следует из условия (4) и леммы 2 при $B_0=\alpha(1)$ или леммы 3 при $B_0=\beta(1)$. Если $B_0\in(B_\alpha,\beta(1)]$ и $\alpha'(0)=y'(0,\alpha(0),B_0)$, то тогда найдутся $B_1\in(\alpha(1),B_\alpha)$ и $t_1\in(0,1)$ такие, что $s_\alpha(t_1,B_1)=y(t_1,\alpha(0),B_0)$ и $s'_\alpha(t_1,B_1)=y'(t_1,\alpha(0),B_0)$, что противоречит условию (3). Пусть

$$y(\cdot,\alpha(0),\alpha'(0),B_0)=s_\alpha(\cdot,B_0),\quad B_0\in[\alpha(1),B_\alpha],$$

$$y(\cdot,\alpha(0),y'(0,\alpha(0),B_0),B_0)=y(\cdot,\alpha(0),B_0),\quad B_0\in(B_\alpha,\beta(1)],$$

$$z(\cdot,\alpha(0),y'(0,\alpha(0),B_0),B_0)=y(\cdot,\alpha(0),B_0),$$

$$y(\cdot,\alpha(0),z'(0,\alpha(0),B_0),B_0)=z(\cdot,\alpha(0),z'(0,\alpha(0),B_0),B_0)=z(\cdot,\alpha(0),B_0),$$

$$y(\cdot,\alpha(0),A_1,B_0)=\lim_{A\to\alpha(0)}y(\cdot,A,A_1,B_0),\quad A_1\in(y'(0,\alpha(0),B_0),z'(0,\alpha(0),B_0)),$$

$$z(\cdot,\alpha(0),A_1,B_0)=\lim_{A\to\alpha(0)}z(\cdot,A,A_1,B_0),\quad A_1\in(y'(0,\alpha(0),B_0),z'(0,\alpha(0),B_0)).$$

Из (37) следуют условия (30) и (31), а из леммы 4 - условие (32). Пусть $s(\cdot,\alpha(0),A_1,A_2,B_0)$ определяется леммой 5. Ясно, что $A_{*2}=y''(0,\alpha(0),A_1,B_0)$, $A_{2*}=z''(0,\alpha(0),A_1,B_0)$ и справедливы условия (33)-(36).

Теорема 3 *Отображение*

$$(A_0,A_1,A_2,B_0)\to s(\cdot,A_0,A_1,A_2,B_0) \tag{38}$$

является гомеоморфизмом между множеством

$$M=\{(A_0,A_1,A_2,B_0):A_0\in[\alpha(0),\beta(0)]\wedge B_0\in[\alpha(1),\beta(1)]\wedge$$

$$\wedge A_1\in[y'(0,A_0,B_0),z'(0,A_0,B_0)]\wedge A_2\in[y''(0,A_0,A_1,B_0),z''(0,A_0,A_1,B_0)]\}$$

и S. Функции $y(\cdot,A_0,B_0)$ и $z(\cdot,A_0,B_0)$ непрерывны по (A_0,B_0), а функции $y(\cdot,A_0,A_1,B_0)$ и $z(\cdot,A_0,A_1,B_0)$ непрерывны по (A_0,A_1,B_0).

Доказательство. Однозначность отображения (38) следует из условия 4. Из компактности S и непрерывности отображения

$$s\to(s(0),s'(0),s''(0),s(1)),\quad s\in S$$

следует, что отображение (38) является гомеоморфизмом. Из единственности $y(\cdot,A_0,B_0)$ и $z(\cdot,A_0,B_0)$ следует их непрерывность по (A_0,B_0), а из единственности $y(\cdot,A_0,A_1,B_0)$ и $z(\cdot,A_0,A_1,B_0)$ следует их непрерывность по (A_0,A_1,B_0).

Список литературы

[1] Лепин А.Я. Краевая задача для уравнения третьего порядка // LU zinātniskie raksti. Matemātika. Diferenciālvienādojumi. - 1995. - С.30-41.

[2] Лепин Л.А. О структуре множества решений обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка // LU zinātniskie raksti. Matemātika. Diferenciālvienādojumi. - 1995. - С.59-74.

[3] Djukic Dj.S., Atanackovic T.M. An extremum variational principle and error estimate procedure for $q^{IV} = f(q, x)$ // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. (1982), 92. - P.307-316.

L.Lepin. The simplest two-point boundary value problems for the fourth order equation.

Summary. The set of solution of equation

$$x^{(4)} = f(t, x, x', x'', x''')$$

that lie between the two fixed solutions α and β is investigated.

1991 MSC 34B15

L.Lepins. Vienkāršākās divpunktu robežproblēmas ceturtās kārtas vienādojumam.

Anotācija. Tiek pētīta vienādojuma

$$x^{(4)} = f(t, x, x', x'', x''')$$

atrisinājumu kopa, kas atrodas starp diviem uzdotiem atrisinājumiem α un β.

Институт математики и информатики
Латвийского университета
Рига, б.Райниса, 29

Поступила 10.10.96

Об одной краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с многоточечно-функциональными граничными условиями

В.Д.Пономарев

Аннотация. Для краевой задачи

$$x_i' = f_i(t, x_1, \dots, x_n),$$

$$\Phi_i(x_i(a_i), x_i(b_i)) = \phi_i(x_1(\cdot), \dots, x_n(\cdot)),$$

приведены условия существования решения.

УДК 517.927

Рассмотрим краевую задачу

$$x_i' = f_i(t, x_1, \dots, x_n), \tag{1}$$

$$\Phi_i(x_i(a_i), x_i(b_i)) = \phi_i(x_1(\cdot), \dots, x_n(\cdot)), \tag{2}$$

где $f_i : I \times R^n \to R$, функции $\Phi_i : R^2 \to R$ и функционалы ϕ_i непрерывны, $i = 1, \dots, n$, $n \in \{1, 2, \dots\}$, $a \le a_i \le b_i \le b$.

В этом параграфе приведены условия существования решения (1), (2), обобщающие соответствующие результаты работ [1]-[4], как в регулярном, так и сингулярном случаях.

Приведем необходимые обозначения, определения и вспомогательные утверждения.

Всюду в дальнейшем предполагается, что индекс i пробегает множество $\{1, \dots, n\}$. $R_+ = [0, \infty)$, $R^n_+ = \{x \in R^n : x_i \in R_+, i = 1, \dots, n\}$.

Для $m_i \in \{0, 1, 2, \dots\}$ и $\tau_{ij} \in I$, $j = 1, \dots, m_i$ положим $T_{m_i} = \{\tau_{i1}, \dots, \tau_{im_i}\}$ и $T_0 = \emptyset$.

$AC(I, R; T_{m_i})$, $Car(I \times R^n, R; T_{m_i})$, $BV^-(I, R; T_{m_i})$, $BV^+(I, R; T_{m_i})$ — множества функций, принадлежащих $AC([c,d], R)$, $Car([c,d] \times R^n, R)$, $BV^-(I, R)$, $BV^+(I, R)$, для любого интервала $[c,d] \subset I \setminus T_{m_i}$; $AC(I, R; \emptyset) = AC(I, R)$, $Car(I \times R^n, R; \emptyset) = Car(I \times R^n, R)$, $BV^-(I, R^n; \emptyset) = BV^-(I, R^n)$, $BV^+(I, R^n; \emptyset) = BV^+(I, R^n)$.

$AC(I,R^n;T_{m_i})$ пространство функций x $I \to R^n$ таких, что $\|x\|_c < +\infty$ и $x_i \in AC(I,R;T_{m_i})$; под сходимостью последовательности $k \to x_k$ этого пространства понимается равномерная сходимость каждой последовательности $k \to x_{ik}$ на любом интервале $[c,d] \subseteq I \backslash T_{m_i}$.

$BV^-(I,R^n;T_{m_i})$, $BV^+(I,R^n;T_{m_i})$ - множества функций x, y $I \to R^n$ таких, что $\|x\|_c < \infty$, $\|y\|_c < \infty$ и $x_i \in BV^-(I,R;T_{m_i})$, $y_i \in BV^+(I,R;T_{m_i})$.

Также будут использованы следующие обозначения. Для $\alpha \in BV^-(I,R)$, $\beta \in BV^+(I,R)$ $u,v,w,z \in R^n$, $t_1,t_2,t_3,y \in R$, $\Delta_i \in \{-1,1\}$ положим

$$\Omega = \{(t,x) \in I \times R^n : t \in I, \alpha(t) \le x \le \beta(t)\},$$

$$\chi_i(t) = \begin{cases} -1, & t < a_i \\ \Delta_i, & a_i \le t \le b_i \\ 1, & b_i < t \end{cases}$$

$$\delta(t_1,t_2,t_3) = \begin{cases} t_1, & t_2 < t_1 \le t_3 \\ t_2, & t_1 \le t_2 \le t_3 \\ t_3, & t_1 \le t_3 < t_2 \end{cases}$$

$$\delta(u,v,w) = (\delta(u_1,v_1,w_1),...,\delta(u_n,v_n,w_n)),$$

$$\sigma_i(z,y) = (z_1,...,z_{i-1},y,z_{i+1},...,z_n),$$

$$y_\delta(t) = \delta(\alpha(t),y(t),\beta(t))$$

для y $I \to R^n$. Запись $\Phi_i \in M_i(\Delta_i)$ означает, что при $\Delta_i = 1$ для любых $x_1,x_2 \in [\alpha_i(b_i),\beta_i(b_i)]$ и $x \in \{\alpha_i(a_i),\beta_i(a_i)\}$ из $x_1 \le x_2$ следует $\Phi_i(x,x_1) \le \Phi(x,x_2)$ и при $\Delta_i = -1$ для любых $x_1,x_2 \in [\alpha_i(a_i),\beta_i(a_i)]$ и $x \in \{\alpha_i(b_i),\beta_i(b_i)\}$ из $x_1 \le x_2$ следует $\Phi_i(x_1,x) \le \Phi(x_2,x)$.

В дальнейшем фиксируются числа $m_1,...,m_n$, где $m_i \in \{0,1,2,...\}$, множества T_{m_i} и предполагается, что в теореме 1 и следствии 1 $f \in Car(I \times R^n, R^n)$, $\phi : AC(I,R^n) \to R^n)$, а в теоремах 2 и 3 $f_i \in Car(I \times R^n, R; T_{m_i})$ и ϕ $AC(I,R^n;T_{m_i}) \to R^n$. Отметим, что ϕ считается непрерывным. Под решением краевой задачи (1), (2) в теореме 1 понимается абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая уравнению (1) и краевым условиям (2).

Определение 1 *Функция x $I \to R^n$ называется обобщенным решением I-го рода краевой задачи (1), (2), если существуют последовательности абсолютно непрерывных и равномерно ограниченных на I функций $k \to x_k$ и числовые последовательности $k \to a_{ijk}$, $k \to b_{ijk}$ такие, что для любых $j \in \{1,...,m_i\}$ и $k \in \{1,2,...\}$ выполняется*

$$a \le a_{ijk} \le a_{ijk+1} \le b_{ijk+1} \le b_{ijk} \le b,$$

$\lim_{k\to\infty}(b_{ijk} - a_{ijk}) = 0$, $x'_{ik} = f_i(t,x_{1k},...,x_{nk})$ для почти всех $t \in I \backslash \bigcup_{j=1}^{m_i}(a_{ijk},$ $\lim_{k\to\infty} x_{ik}(t) = x_i(t)$ поточечно на I и $\Phi_i(x_i(a_i),x_i(b_i)) = \phi_i(x)$.

Замечание 1 *Если $f_i \in Car(I \times R^n, R; T_{m_i})$, то для обобщенного решения I-го рода x имеем $x \in AC(I,R^n;T_{m_i})$.*

Определение 2 *Функция $x : I \to R^n$ называется обобщенным решением II-го рода (см.также [5]) краевой задачи (1), (2), если кроме выполнения всех условий из определения 1 дополнительно имеем*

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{a_{ijk}}^{b_{ijk}}\|x'_{ik}(s)\|ds = 0, \quad j = 1,\dots,m_i.$$

Лемма 1 *Из любой последовательности функций $x_k : I \to R$, $k = 1,2,\dots$, равномерно ограниченных и равностепенно непрерывных на каждом промежутке $[c,d] \subseteq I\backslash T_m$, $T_m \subset I$, $m \in \{0,1,2,\dots\}$ можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся на каждом промежутке $[c,d] \subseteq I\backslash T_m$.*

•

Непосредственное следствие теоремы Арцела-Асколи.

Теорема 1 *Пусть $\Delta_i = 1$ и выполняются условия:*

1) существуют $\alpha \in BV^-(I,R^n)$, $\beta \in BV^+(I,R^n)$ такие, что $\alpha \le \beta$;

2) $\chi_i(t)(D_-\alpha_i(t) - f_i(t,\sigma_i(x,\alpha_i(t)))) \le 0$, $\chi_i(t)(D^-\beta_i(t) - f_i(t,\sigma_i(x,\beta_i(t)))) \ge 0$ для $(t,x) \in \Omega$;

3) $\Phi_i(\beta_i(a_i),\beta_i(b_i)) \le \phi_i(x_t) \le \Phi_i(\alpha_i(a_i),\alpha_i(b_i))$ для любых $x \in AC(I,R^n)$ и если $a_i < b_i$, то $\Phi_i \in M_i(\Delta_i)$.

Тогда существует решение краевой задачи (1), (2) такое, что $\alpha \le x \le \beta$.

Доказательство. Хорошо известно, что краевая задача

$$x'_i = h_i(t,x), \quad \Phi^*_i(x_i(a_i), x_i(b_i)) = \phi_i(x_t),$$

где

$$h_i(t,x) = -\Delta_i x_i + f_i(t,\delta(\alpha(t),x,\beta(t)))+$$
$$+\Delta_i\delta(\alpha_i(t),x_i,\beta_i(t)), \quad t \in [a_i,b_i],$$
$$h_i(t,x) = f_i(t,\delta(\alpha(t),x,\beta(t))), \quad t \in I\backslash[a_i,b_i],$$
$$\Phi^*_i(y,z) = \Phi_i(\delta(\alpha_i(a_i),y,\beta_i(a_i))),\delta(\alpha_i(b_i),z,\beta_i(b_i)))-$$
$$-\frac{1}{2}(1+\Delta_i)(y-\delta(\alpha_i(a_i),y,\beta_i(a_i)))-$$
$$-\frac{1}{2}(1-\Delta_i)(z-\delta(\alpha_i(b_i),z,\beta_i(b_i))),$$

имеет решение x. Покажем, что выполняется соотношение $\alpha \le x \le \beta$, чем, очевидно, и будет завершено доказательство.

Предварительно заметим, что для тех индексов $j \in \{1,\dots,n\}$, для которых $a_j < b_j$, на интервале I выполняется

$$\alpha_j(t) \le x_j(t) \le \beta_j(t). \tag{3}$$

Докажем справедливость неравенства $x_j(t) \le \beta_j(t)$. Неравенство $\alpha_i(t) \le x_j(t)$ рассматривается аналогично. Допуская противное, найдем $j \in \{1,\dots,n\}$ и интервал

$[s_1, s_2] \subseteq [a_j, b_j]$ максимальной длины такие, что $\beta_j(t) < x_j(t)$ для любого $t \in (s_1, s_2)$. Поэтому

$$\beta_j(s_1) \leq x_j(s_1), \quad \beta_j(s_2) \leq x_j(s_2). \tag{4}$$

На интервале $[s_1, s_2]$ имеем

$$\Delta_j x_j'(t) = -x_j(t) + \Delta_j f(t, \delta(\alpha(t), x(t), \beta(t))) + \beta_j(t) \leq$$

$$\leq \beta_j(t) - x_j(t) + \Delta_j D^- \beta_j(t) < \Delta_j D^- \beta_j(t).$$

Следовательно, на $[s_1, s_2]$ получаем

$$x_j'(t) < D^- \beta_j(t) \tag{5}$$

и $\Phi_j \in M_j(1)$. Из (5), интегрируя, получаем

$$x_j(s_2) - x_j(s_1) < \beta_j(s_2) - \beta_j(s_1).$$

Если $x_j(s_1) = \beta_j(s_1)$, то $x_j(s_2) < \beta_j(s_2)$, что противоречит (4). Поэтому $s_1 = a_j$ и $\beta_j(a_j) < x_j(a_j)$. Если $x_j(s_2) = \beta_j(s_2)$, то нетрудно показать с использованием дифференциальных неравенств, что $x_j(t) \leq \beta_j(t)$ для любого $t \in [s_2, b_j]$. Отсюда имеем

$$\phi_j(x_\delta) = \Phi_j^*(x_j(a_j), x_j(b_j)) = \Phi(\beta_j(a_j), \delta(\alpha_j(b_j), x_j(b_j)),$$

$$\beta_j(b_j))) - (x_j(a_j) - \beta_j(a_j)) < \Phi_j(\beta_j(a_j), \beta_j(b_j)) \leq \phi_j(x_\delta),$$

что противоречиво. Поэтому $s_2 = b_j$ и $\beta_j(b_j) \leq x_j(b_j)$, откуда имеем

$$\phi_j(x_\delta) = \Phi_j^*(x_j(a_j), x_j(b_j)) = \Phi_j(\beta_j(a_j), \beta_j(b_j)) -$$

$$-(x_j(a_j) - \beta_j(a_j)) < \Phi_j(\beta_j(a_j), \beta_j(b_j)) \leq \phi_j(x_\delta),$$

что противоречиво. Следовательно, установлена оценка (3) на интервале $[a_j, b_j]$.

Так как доказательство неравенства (3) на интервалах $[a, a_j]$ и $[b_j, b]$ аналогично, то рассмотрим только интервал $[a, a_j]$ и предположим, что $a < a_j$ (случай $a = a_j$ тривиален). Очевидно, что

$$x_j'(t) = h_j(t, \sigma_j(x(t), x_j(t))).$$

Так как $(t, \delta(\alpha(t), x(t), \beta(t)) \in \Omega$ для любых $t \in I$, то на $[a, a_j]$ имеем

$$D_- \alpha_j(t) - h_j(t, \sigma_j(x(t), \alpha_j(t))) \geq 0,$$

$$D^- \beta_j(t) - h_j(t, \sigma_j(x(t), \beta_j(t))) \leq 0.$$

Поэтому с учетом $x_j(a_j) \in [\alpha_j(a_j), \beta_j(a_j)]$ из [6], т.4.8, следует оценка (3) на интервале $[a, a_j]$.

Таким образом, для тех $j \in \{1, \ldots,$ для которых $a_j < b_j$, справедливость неравенства (3) на I установлена.

Пусть $a_j = b_j$. Тогда установим, что

$$\alpha_j(a_j) \le x_j(a_j) \le \beta_j(a_j).$$

Допуская противное, рассмотрим только случай $\beta_j(a_j) < x_j(a_j)$. Имеем

$$\phi_j(x_\delta) = \Phi_j^*(x_j(a_j), x_j(a_j)) = \Phi_j(\beta_j(a_j), \beta_j(a_j)) -$$

$$-(x_j(a_j) - \beta_j(a_j)) < \Phi_j(\beta_j(a_j), \beta_j(a_j)) \le \phi_j(x_\delta),$$

что противоречиво. Поэтому с учетом условия 2 и т.4.8 из [6] получаем оценку (3), а тем самым справедливость неравенства $\alpha \le x \le \beta$ и теоремы.

Следствие 1 *Пусть $g_i \in Car(I \times R_+^n, R_+)$, g_i не убывает по переменным $x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ... x_n)$, функционалы ψ_i $AC(I, R^n) \to R^+$ непрерывные и неубывающие и выполняются условия:*

1) $f_i(t, x_1, ..., x_n)\chi_i(t)x_i \le g_i(t, \|x_1\|, ..., \|x_n\|)$ для $(t, x) \in I \times R^n$;

2) $\|\phi_i(x)\| \le \psi_i(x)$ для $x \in AC(I, R^n)$;

3) $\Phi_i(-x_1, -x_2) = -\Phi_i(x_1, x_2)$ для $x_1, x_2 \in R$ и если $a_i < b_i$, то $\Phi_i \in M_i(\Delta_i)$;

4) краевая задача

$$x_i' = g_i(t, \|x_1\|, ..., \|x_n\|)\chi_i(t),$$
$$\Phi_i(x_i(a_i), x_i(b_i)) = -\psi_i(x)$$

имеет положительное решение.

Тогда существует решение краевой задачи (1), (2).

Доказательство. Пусть y - положительное решение краевой задачи. Полагая $\alpha = -y$, $\beta = y$, имеем для любых $x \in AC(I, R^n)$ таких, что $-y \le x \le y$,

$$\Phi_i(y_i(a_i), y_i(b_i)) = -\psi_i(y) \le -\psi(x) \le \phi_i(x) \le$$

$$\le \psi_i(x) \le \psi_i(y) = -\Phi_i(y_i(a_i), y_i(b_i)) =$$
$$= \Phi_i(-y_i(a_i), -y_i(b_i)).$$

Кроме того, выполняется

$$0 = -y_i'(t)\chi_i(t) + g_i(t, \| - y_1(t)\|, ..., \| - y_n(t)\|) \ge$$

$$\ge -y_i'(t)\chi_i(t) + g_i(t, \sigma_i(\|x\|, \|y_i(t)\|)) \ge$$
$$\ge -y_i'(t)\chi_i(t) - f_i(t, \sigma_i(x, -y_i(t)))\chi_i(t))$$

на множестве $\{(t, x) \in I \times R^n \quad t \in I, -y(t) \le x \le y(t)\}$. Аналогично проверяется справедливость неравенства из условия 2 теоремы 1 для $\beta = y$. По теореме 1 получаем требуемое с учетом того, что теорема 1 остается справедливой при $\Delta_i = -1$, если $\alpha, \beta \in AC(I, R^n)$.

Следствие 2 *Пусть $\Delta_i = 1$ и выполняются условия:*

1) существуют $\alpha \in BV^-(I, R^n; T_{m_i})$, $\beta \in BV^+(I, R^n; T_{m_i})$ такие, что $\alpha \leq \beta$;

2) условие 2 теоремы 1;

3) $\Phi_i(\beta_i(a_i), \beta_i(b_i)) \leq \phi_i(x_\delta) \leq \Phi_i(\alpha_i(a_i), \alpha_i(b_i))$ для любых $x \in AC(I, R^n; T_{m_i})$ и если $a_i < b_i$, то $\Phi_i \in M_i(\Delta_i)$.

Тогда существует решение I-го рода краевой задачи (1), (2) такое, что $\alpha \leq x \leq \beta$.

Доказательство. Пусть $k_0 \in \{1, 2, ...\}$ таково, что для $k \in \{k_0, k_0 + 1, ...\}$ интервалы $(\tau_{ij} - k^{-1}, \tau_{ij} + k^{-1}) \cap I$ не пересекаются, где $j \in \{1, ..., m_i\}$. Для любого натурального $k \geq k_0$ определим функции $f_k \in Car(I \times R^n, R^n)$ следующим образом. Если $T_{m_i} = \emptyset$, то $f_{ik}(t, x_1, ..., x_n) = f_i(t, x_1, ..., x_n)$. Если $T_{m_i} = \{\tau_{i1}, ..., \tau_{im_i}\}$, то

$$\alpha_{ik} = \begin{cases} \alpha_i, & t \in I \setminus D_{ik} \\ \alpha_i(\tau_{ij} - k^{-1})(1 - 2^{-1}k(t - \tau_{ij} + k^{-1})) + \\ +\alpha_i(\tau_{ij} + k^{-1})2^{-1}k(t - \tau_{ij} + k^{-1}), \\ t \in [\tau_{ij} - k^{-1}, \tau_{ij} + k^{-1}], & j = 1, ..., m_i; \end{cases}$$

$$\beta_{ik} = \begin{cases} \beta_i, & t \in I \setminus D_{ik} \\ \beta_i(\tau_{ij} - k^{-1})(1 - 2^{-1}k(t - \tau_{ij} + k^{-1})) + \\ +\beta_i(\tau_{ij} + k^{-1})2^{-1}k(t - \tau_{ij} + k^{-1}), \\ t \in [\tau_{ij} - k^{-1}, \tau_{ij} + k^{-1}], & j = 1, ..., m_i; \end{cases}$$

$$f_{ik}(t, x_1, ..., x_n) = \begin{cases} f_i(t, x_1, ..., x_n), & (t, x) \in (I \setminus D_{ik}) \times R^n, \\ D_-\alpha_{ik}(t)\dfrac{\beta_{ik}(t) - x_i + \lambda_{ik}}{\beta_{ik}(t) - \alpha_{ik} + 2\lambda_{ik}} + \\ +D^-\beta_{ik}(t)\dfrac{x_i - \alpha_{ik}(t) + \lambda_{ik}}{\beta_{ik}(t) - \alpha_{ik}(t) + 2\lambda_{ik}(t)}, \\ (t, x) \in D_{ik} \times R^n, \end{cases}$$

где

$$D_{ik} = \bigcup_{j=1}^{m_i} (\tau_{ij} - k^{-1}, \tau_{ij} + k^{-1}) \cap I,$$

$$\lambda_{ik} = 1 - (\beta_{ik}(t) - \alpha_{ik}(t)).$$

Нетрудно показать, что $\alpha \in BV^-(I, R^n)$, $\beta \in BV^+(I, R^n)$.

По теореме 1 краевая задача

$$x_i' = f_{ik}(t, x_1, ..., x_n),$$

$$\Phi_i(x_i(a_i), x_i(b_i)) = \phi_i(x_1, ..., x_n)$$

для любого $k \geq k_0$ имеет решение x_k такое, что

$$\alpha_k \leq x_k \leq \beta_k.$$

Из условий Каратеодори и определения функций α, β, f_{ik} получаем, что последовательности функций $k \to x_{ik}$ равномерно ограничены и равностепенно непрерывны для любого интервала $[a_0, b_0] \subseteq I \setminus T_{m_i}$. По лемме 1, не теряя общности, считаем, что последовательности $k \to x_{ik}$ равномерно сходятся на каждом интервале $[a_0, b_0] \subseteq I \setminus T_{m_i}$. Кроме того, в определении 2 считаем, что $a_{ijk} = \tau_{ij} - k^{-1}$, $b_{ijk} = \tau ij + k^{-1}$, $j = 1, ..., m_i$, $k = 1, 2, ...$ Полагая поточечно $x_i(t) = \lim_{k\to\infty} x_{ik}(t)$ и учитывая непрерывность Φ_i и ϕ, получаем, что x является решением I-го рода.

Теорема 2 *Пусть $\Delta_i = 1$ и выполняются условия 1 и 2 теоремы 1 и условие 3 теоремы 2. Тогда существует обобщенное решение II-го рода краевой задачи (1), (2) такое, что $\alpha \leq x \leq \beta$.*

Доказательство. Поступая так же, как в теореме 2, получим существование решения I-го рода краевой задачи (1), (2) такое, что $\alpha \leq x \leq \beta$. Согласно определению, необходимо показать, что

$$\lim_{k\to\infty} \int_{a_{ijk}}^{b_{ijk}} \|x'_{ik}(s)\| ds = 0, \quad j = 1, ..., m_i.$$

Действительно, согласно теореме 1 ([7], с.137), если суммируемы $D_-\alpha_i(t)$, $D^-\beta_i(t)$, то суммируемы и $\|D_-\alpha_i(t)\|$, $\|D^-\beta_i(t)\|$. Учитывая неравенства $\alpha \leq x \leq \beta$ и определение функций f_{ik}, получаем

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{a_{ijk}}^{b_{ijk}} \|x'_{ik}(s)\| ds \leq$$

$$\leq \lim_{k\to+\infty} \int_{a_{ijk}}^{b_{ijk}} (\|D_-\alpha_i(s)\| + D^-\beta_i(s)\|) ds = 0$$

для любых $j \in \{1, ..., m_i\}$. Следовательно, решение является решением II-го рода.

Замечание 2 *Можно показать, что при условии $\alpha, \beta \in AC(I, R^n)$ теоремы 1, 2, 3 остаются справедливыми и для $\Delta_i = -1$.*

Список литературы

[1] Кигурадзе И.Т., Пужа Б. О некоторых краевых задачах для системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. - 1976. - Т.12, N 12. - С.2139-2143.

[2] Пужа Б. Об одной сингулярной краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Arch.Math. - 1977. - Т.13, N 4. - С.207-226.

[3] Пономарев В.Д. Необходимые и достаточные условия разрешимости многоточечной краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка // Дифференц.уравнения. - 1978. - Т.14, N 5. - С.929-931.

[4] Корчак Б.Е., Пономарев В.Д. Существование решения краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с многоточечно-функциональными граничными условиями // Латв.мат.ежегодник. - Рига: Зинатне, 1983. - Вып.27. - С.69-75.

[5] Какабадзе М.А. Об одной сингулярной краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений // ДАН СССР. 1974. Т.214, N 6. - С.1259-1262.

[6] Пономарев В.Д. Дифференциальные неравенства для обыкновенных дифференциальных уравнений и систем первого порядка. - Рига: Изд-во Латв.ун-та. - 1992. - 80 с.

[7] Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. - М.: Наука, 1974. - 480 с.

V.Ponomarev. On a boundary value problem for the system of first order ordinary differential equations with multipoint-functional boundary conditions.

Summary. Conditions for existence of a solution to the boundary value problem

$$x_i' = f_i(t, x_1, \dots, x_n),$$

$$\Phi_i(x_i(a_i), x_i(b_i)) = \phi_i(x_1(\cdot), \dots, x_n(\cdot)),$$

are given.

1991 MSC 34B99

V.Ponomarjovs. Par vienu robežproblēmu pirmās kārtas parastas diferenciālvienādojumu sistēmai ar daudzpunktu-funkcionāliem robežnosacījumiem.

Anotācija. Robežproblēmai

$$x_i' = f_i(t, x_1, \dots, x_n),$$

$$\Phi_i(x_i(a_i), x_i(b_i)) = \phi_i(x_1(\cdot), \dots, x_n(\cdot)),$$

ir doti atrisinājuma eksistences nosacījumi.

Институт математики и информатики
Латвийского университета
Рига, б.Райниса, 29

Поступила 24.05.96

SATURA RĀDĪTĀJS

1. A.Cibulis. Counterexample to ordinary solvability
for systems with discontinuous nonlinearities 5

2. A.Reinfeld. The Grobman's--Hartman's theorem
for time--depend difference equations 9

3. V.Ponomarev. On the behaviour of solutions
of a system of two first order
ordinary differential equations 14

4. V.Ponomarev. On existence of a solution
to the boundary value problem for
functional-differential equation 26

5. O. Zayakina, F. Sadyrbaev. Sturm-Lioville boundary value
problem for two dimensional differential system
with asymptotically asymmetric nonlinearities 30

6. Н.И.Васильев, А.Я.Лепин. Задача Дирихле для
уравнения третьего порядка 48

7. $\boxed{\text{Э.Я.Гринберг}}$. О числе разбивающих покрытий
полного графа 56

8. О.В.Заякина. О числе решений краевой задачи для системы двух
дифференциальных уравнений второго порядка 69

9. Ю.А.Клоков. О единственности решения краевой задачи для одного
нелинейного ОДУ второго порядка 83

10. Ю.А.Клоков, А.П.Михайлов. Об одной задаче для
обыкновенного нелинейного интегро-
дифференциального уравнения 87

11. А.Я. Лепин. Общая краевая задача для уравнения
третьего порядка 92

12. Л.А.Лепин. Простейшие двухточечные задачи для
уравнения четвертого порядка 104

13. В.П.Пономарев. Об одной краевой задаче для системы
обыкновенных дифференциальных уравнений первого
порядка с многоточечно-функциональными
граничными условиями 115