LATVIJAS UNIVERSITĀTES
ZINĀTNISKIE RAKSTI

ACTA UNIVERSITATIS LATVIENSIS

552

МАТЕМАТИКА

Научные труды

Физико-математический факультет

Кафедра математического анализа

Zinātniskie raksti

Fizikas un matemātikas fakultāte

Matemātiskās analīzes katedra

Latvijas Republikas Tautas izglītības ministrija
L A T V I J A S   U N I V E R S I T Ā T E
Fizikas un matemātikas fakultāte
Matemātiskās analīzes katedra

MATEMĀTIKA, I

Zinātniskie raksti
552. sējums

Latvijas Universitāte
Rīga 1990

Министерство народного образования Латвийской Республики
ЛАТВИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
Физико-математический факультет
Кафедра математического анализа

МАТЕМАТИКА, I

Научные труды
Том 552

Латвийский университет
Рига 1990

МАТЕМАТИКА

Математика, I: Научные труды/ Отв.ред. А.Лоренц.-Т.552.- Рига: ЛУ, 1990.-163 с.

В сборнике публикуются результаты научных работ, полученных на кафедре математического анализа ЛУ в 1988-1989 гг., а также работы специалистов других вузов и учреждений, сотрудничающих с кафедрой матанализа ЛУ.

Сборник предназначен для студентов-математиков старших курсов, аспирантов и научных работников.

Krājumā publicēti zinātniskā darba rezultāti, kas iegūti 1988.- 1989.g. LU Matemātiskās analīzes katedras pasniedzēju darbos. Krājumā ir iekļauti arī dažu citu iestāžu un augstskolu speciālistu darbi, kas iegūti ciešā sadarbībā ar LU Matemātiskās analīzes katedru.

Krājums domāts vecāko kursu matemātikas studentiem, aspirantiem un zinātniskajiem darbiniekiem.

М $\frac{1702010000-105у}{М812(11)-90}$ 29.90

ISBN 5-7970-0029-6

CONTENTS

ВВЕДЕНИЕ

Сборник содержит результаты исследований, проводимых в области теоретической математики специалистами Латвийского университета, а также специалистами других вузов и научных учереждений, сотрудничающими с математиками Латвийского университета. Основное содержание сборника составляют результаты исследований в области функционального анализа (теория сплайнов, теория неподвижной точки), топологии (теория кардинальных инвариантов, категорная топология, теория нечетких топологических пространств) и теория вероятностей (конечные вероятностные автоматы, исследование сходимости последовательностей случайных переменных).

Latvijas Universitātes Zinātniskie Raksti, 552. (1990)
Matemātika, I.

СПЛАЙН-ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ В РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ЗАДАЧ

С. Асмусс

Аннотация. На основе вариационного подхода изучаются интерполяционные полиномиальные сплайны двух переменных на прямоугольной области. Результаты, полученные для произвольного оператора интерполяции, применяются к исследованию простых, эрмитовых сплайнов и сплайнов для локальных средних. Приводятся явный вид таких сплайнов и характеризующие их дифференциальные свойства. Даётся интегральное представление ошибки сплайн-интерполяции, исходя из которого в случае сплайнов малых степеней выводятся оценки погрешности. УДК 519.6.

Пространство сплайнов $S(T,A)$, соответствующее линейным непрерывным операторам $T:X\to Y$ и $A:X\to Z$, действующим в вещественных гильбертовых пространствах X, Y, Z, определяют так: $S(T,A)=\{s\in X \mid \forall x\in \mathcal{N}(A)\ \langle Ts, Tx\rangle =0\}$, где $\mathcal{N}(A)$ - ядро оператора A, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ - знак скалярного произведения. Интерполяционным сплайном, соответствующим элементу $z\in \mathcal{R}(A)$, называют такой сплайн $s\in S(T,A)$, что $As=z$. Оказывается, что такой интерполяционный сплайн, если он существует, является решением вариационной задачи
$\|Ts\|=\min\{\|Tx\| \mid x\in X \ \& \ Ax=z\}$, где $\|y\|$ - норма элемента y.

Теория сплайн-функций одной переменной с этой точки зрения изложена в книге П.-Ж.Лорана [1]. Авторами монографии [2] была предпринята попытка её естественного обобщения на случай сплайн-функций нескольких переменных. Однако в их конструкции ядро $\mathcal{N}(T)$ бесконечномерно, а следовательно, бесконечномерно и пространство сплайнов (ибо $\mathcal{N}(T)\subset S(T,A)$). Один подход, свободный от этого недостатка, предложил А.Имамов. Ясный теоретически, он, как отмечено в [3], не удобен на практике при решении вариационных задач прямыми методами из-за сложности оператора T. Другой - предложенный В.С.Завьяловым - заключается в построении сужения исходного пространства функций, на котором ядро оператора T, бесконечномерного на исходном пространстве, будет уже конечномерным. Сравнение указанных подходов сделано в [3] и [4], там же можно найти библиографические ссылки. При всех их достоинствах сплайновые конструкции А.Имамова и В.С.Завьялова дают вариационную формулировку только для задач простой и эрмитовой интерполяции. Описанная в [5] конструкция сужения исходного пространства даёт возможность определить с точки зрения общей теории сплайнов в гильбертовом пространстве сплайн-функции нескольких переменных в случае произвольного оператора интерполяции. Ради краткости изложения ограничимся случаем двух переменных.

Пусть $E=[a^1,b^1]\times[a^2,b^2]\subset\mathbb{R}^2$. Обозначим через $H^{2q}_{q,q}(E)$ гильбертово пространство функций $x: E\to\mathbb{R}$, производные которых $D^{(l_1,l_2)}x$, $l_j=\overline{0,q-1}$, $j=\overline{1,2}$, абсолютно непрерывны и $D^{(l_1,l_2)}x\in L_2(E)$, $l_j=\overline{0,q}$, $j=\overline{1,2}$, (здесь и далее $D^{(l_1,l_2)}x(t^1,t^2)=\dfrac{\partial^{l_1+l_2}}{\partial t^{1l_1}\partial t^{2l_2}}x(t^1,t^2)$) со скалярным произведением

$$\langle x,\tilde{x}\rangle=\sum_{l_1=0}^{q}\sum_{l_2=0}^{q}\iint_E D^{(l_1,l_2)}x(t^1,t^2)D^{(l_1,l_2)}\tilde{x}(t^1,t^2)\,dt^1dt^2.$$

Пусть теперь $X=L\oplus\tilde{L}$, где L - пространство всех полиномов на E, степень которых по каждой переменной не превосходит $q-1$, $\tilde{L}=R(Q)$ - область значений оператора проектирования Q:

$$(Qx)(t^1,t^2)=\frac{1}{[(q-1)!]^2}\iint_E D^{(q,q)}x(\tau^1,\tau^2)(t^1-\tau^1)_+^{q-1}(t^2-\tau^2)_+^{q-1}d\tau^1d\tau^2,\ (t^1,t^2)\in E,\ x\in H^{2q}_{q,q}(E);$$

$Y=L_2(E)$; $Tx=D^{(q,q)}x$ для $x\in X$. Тогда пространство X - гильбертово, $T\in LC(X,Y)$, $N(T)=L$ и $R(T)=Y$.

Для того, чтобы задать пространство сплайнов, остаётся указать оператор A. Пусть заданы линейные непрерывные операторы $A_j: H^q[a^j,b^j]\to\mathbb{R}^{m_j}$ ($H^q[a^j,b^j]$ -пространство Соболева), $j=\overline{1,2}$. Учитывая, что каждая функция $x\in X$ раскладывается по формуле Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

$$x(t^1,t^2)=\sum_{l_1=0}^{q-1}\sum_{l_2=0}^{q-1}\frac{1}{l_1!l_2!}D^{(l_1,l_2)}x(a^1,a^2)(t^1-a^1)^{l_1}(t^2-a^2)^{l_2}+\frac{1}{[(q-1)!]^2}\iint_E D^{(q,q)}x(\tau^1,\tau^2)(t^1-\tau^1)_+^{q-1}(t^2-\tau^2)_+^{q-1}d\tau^1d\tau^2,$$

определим при помощи операторов A_1 и A_2, оператор $A: X \to \mathbb{R}^{m_1 m_2}$, полагая

$$(Ax)_{i_1 i_2} = \sum_{l_1=0}^{q-1}\sum_{l_2=0}^{q-1} \frac{1}{l_1! l_2!} D^{(l_1,l_2)} x(a^1,a^2)(A_1\varphi_{l_1}(\cdot,a^1))_{i_1}(A_2\varphi_{l_2}(\cdot,a^2))_{i_2} +$$
$$+\frac{1}{[(q-1)!]^2}\iint\limits_E D^{(q,q)}x(\tau^1,\tau^2)(A_1\varphi_{q-1}(\cdot,\tau^1))_{i_1}(A_2\varphi_{q-1}(\cdot,\tau^2))_{i_2}\,d\tau^1 d\tau^2,\quad i_j=\overline{1,m_j},\ j=1,2, \tag{I}$$

где $\varphi_l(t,\tau)=(t-\tau)_+^l$, $(A_j x)_i$ - i-ая координата вектора $A_j x$ а запись $A_j x(\cdot,\tau)$ означает, что оператор A_j действует по отношению к первому аргументу функции x, второй аргумент играет роль параметра.

<u>Замечание I</u>. Для корректности определения (I) необходимо пояснить как следует понимать запись $(A_j\varphi_{q-1}(\cdot,\tau))_i$, ибо оператор A_j, вообще говоря, не определён на усечённых степенных функциях степени $q-1$. Условимся считать, что

$$(A_j\varphi_{q-1}(\cdot,\tau))_i = -\frac{1}{q}\,\frac{d}{d\tau}(A_j\varphi_q(\cdot,\tau))_i, \tag{2}$$

если только выражение в правой части равенства (2) определено. Убедимся, что оно определено почти при всех $\tau\in[a^j,b^j]$. С этой целью представим линейный непрерывный функционал $f_{ji}x=(A_j x)_i$ в виде $f_{ji}x=\langle x,x_{ji}\rangle_{H^q[a^j,b^j]}$ (функция $x_{ji}\in H^q[a^j,b^j]$ однозначно определяется последним соотношением). Тогда имеем

$$(A_j\varphi_q(\cdot,\tau))_i=\sum_{l=0}^{q}\int_{a^j}^{b^j} x_{ji}^{(l)}(t)\frac{\partial^l}{\partial t^l}(t-\tau)_+^q\,dt=$$
$$=\sum_{l=0}^{q-1}\frac{q!}{(q-l)!}\int_{a^j}^{b^j} x_{ji}^{(l)}(t)(t-\tau)_+^{q-l}\,dt+q![x_{ji}^{(q-1)}(b^j)-x_{ji}^{(q-1)}(\tau)].$$

Воспользовавшись теоремой о дифференцировании интеграла, зависящего от параметра, мы получаем, что во всех тех точках отрезка $[a^j,b^j]$, где существует производная $x_{ji}^{(q)}$, функция $(A_j\varphi_q(\cdot,\tau))_i$ дифференцируема и её производная

$$\frac{d}{d\tau}(A_j\varphi_q(\cdot,\tau))_i=-q\langle x_{ji},\varphi_{q-1}(\cdot,\tau)\rangle_{H^{q-1}[a^j,b^j]}-q!\,x_{ji}^{(q)}(\tau)$$

суммируема в квадрате на $[a^j,b^j]$.

Легко видеть, что A - линейный оператор. Убедимся, что он непрерывен. Доказательство этого факта использует следующую лемму и её следствие.

<u>Лемма I</u>. Пусть на пространстве с мерой (Ω,μ), $0<\mu(\Omega)<\infty$, задана последовательность функций $(g_n(\cdot,\gamma))_{n\in\mathbb{N}}\subset L_2(\Omega,\mu)$ (здесь γ - параметр, принимающий значения из множества Γ), для которой $\int\limits_\Omega g_n^2(\omega,\gamma)d\mu\to 0$ равномерно относительно всех значений параметра γ. Если её можно представить в виде

$$g_n(\omega,\gamma)=\tau_n(\omega,\gamma)+\beta_n(\gamma), \tag{3}$$

где $(\tau_n(\cdot,\gamma))_{n\in\mathbb{N}}\subset L_2(\Omega,\mu)$ и $\tau_n(\omega,\gamma)\to 0$ равномерно относительно $\omega\in\Omega$ и $\gamma\in\Gamma$, то и $g_n(\omega,\gamma)\to 0$ равномерно на $\Omega\times\Gamma$.

<u>Доказательство</u>. Надо показать, что

$$\beta_n(\gamma)\to 0 \quad \text{равномерно относительно} \quad \gamma\in\Gamma. \tag{4}$$

Из соотношения (3) получаем

$$\beta_n^2(\gamma)=g_n^2(\omega,\gamma)+\tau_n^2(\omega,\gamma)-2g_n(\omega,\gamma)\tau_n(\omega,\gamma),$$

откуда

$$\beta_n^2(\gamma)\le g_n^2(\omega,\gamma)+\tau_n^2(\omega,\gamma)+2|g_n(\omega,\gamma)||\tau_n(\omega,\gamma)|.$$

Интегрируя последнее неравенство и пользуясь неравенством Буняковского, находим оценку

$$\beta_n^2(\gamma)\,\mu(\Omega)\le\int\limits_\Omega g_n^2(\omega,\gamma)d\mu+\int\limits_\Omega\tau_n^2(\omega,\gamma)d\mu+2\left[\int\limits_\Omega g_n^2(\omega,\gamma)d\mu\int\limits_\Omega\tau_n^2(\omega,\gamma)d\mu\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{5}$$

Так как все интегралы в правой части (5) при $n\to\infty$ стремятся к 0 равномерно относительно $\gamma\in\Gamma$, то из (5) следует (4).

<u>Следствие I</u>. Пусть задана параметрическая последовательность функций $(g_n(\cdot,\gamma))_{n\in\mathbb{N}}\subset H^1[a,b]$, $\gamma\in\Gamma$, для которой $\int\limits_a^b g_n^2(t,\gamma)dt\to 0$ и $\int\limits_a^b(\frac{\partial}{\partial t}g_n(t,\gamma))^2dt\to 0$ равномерно относительно $\gamma\in\Gamma$. Тогда $g_n(t,\gamma)\to 0$ равномерно на $[a,b]\times\Gamma$.

<u>Доказательство</u>. Так как $g_n(t,\gamma)=[g_n(t,\gamma)-g_n(a,\gamma)]+g_n(a,\gamma)$ то достаточно установить, что $g_n(t,\gamma)-g_n(t,a)\to 0$ равномерно относительно $t\in[a,b]$ и $\gamma\in\Gamma$.

Это сразу следует из полученной на основании формулы Ньютона-Лейбница и неравенства Буняковского оценки

$$[g_n(t,\gamma)-g_n(a,\gamma)]^2\le(t-a)\int\limits_a^t(\frac{\partial}{\partial\tau}g_n(\tau,\gamma))^2d\tau\le(b-a)\int\limits_a^b(\frac{\partial}{\partial\tau}g_n(\tau,\gamma))^2d\tau.$$

Вернёмся к вопросу о непрерывности оператора A. В силу линейности A достаточно установить его непрерывность в нуле.

Пусть последовательность функций $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ сходится к нулю в X. Произвольно зафиксировав пару индексов (i_1, i_2) покажем, что $(Ax_n)_{i_1 i_2} \to 0$. Из (I) принимая во внимание непрерывность операторов A_1 и A_2, получаем

$$|(Ax_n)_{i_1 i_2}| \leq \sum_{l_1=0}^{q-1}\sum_{l_2=0}^{q-1} \frac{1}{l_1! l_2!} |D^{(l_1,l_2)} x_n(a^1,a^2)| \, \|A_1\| \, \|A_2\| \, \|\varphi_{l_1}(\cdot,a^1)\|_{H^q[a^1,b^1]} \|\varphi_{l_2}(\cdot,a^2)\|_{H^q[a^2,b^2]} +$$
$$+ \frac{1}{[(q-1)!]^2} \|D^{(q,q)} x_n\|_{L_2(E)} \|(A_1\varphi_{q-1}(\cdot,\tau))_{i_1}\|_{L_2[a^1,b^1]} \|(A_2\varphi_{q-1}(\cdot,\tau))_{i_2}\|_{L_2[a^2,b^2]}. \tag{6}$$

Покажем, что $D^{(l_1,l_2)} x_n(a^1,a^2) \to 0$, если только $l_1, l_2 \leq q-1$. Сделаем это на основании леммы I, опираясь на соотношение

$$D^{(l_1,l_2)} x_n(t^1,t^2) = [D^{(l_1,l_2)} x_n(t^1,t^2) - D^{(l_1,l_2)} x_n(t^1,a^2)] + [D^{(l_1,l_2)} x_n(t^1,a^2) - D^{(l_1,l_2)} x_n(a^1,a^2)] + D^{(l_1,l_2)} x_n(a^1,a^2). \tag{7}$$

С этой целью введём в рассмотрение две последовательности функций:

$$g_n(t^1,t^2) = D^{(l_1,l_2)} x_n(t^1,t^2) - D^{(l_1,l_2)} x_n(t^1,a^2) \quad \text{и}$$
$$\tilde{g}_n(t^1,t^2) = D^{(l_1,l_2)} x_n(t^1,t^2) - D^{(l_1,l_2)} x_n(a^1,t^2).$$

С их помощью перепишем (7) в виде

$$D^{(l_1,l_2)} x_n(t^1,t^2) = g_n(t^1,t^2) + \tilde{g}_n(t^1,t^2) + D^{(l_1,l_2)} x_n(a^1,a^2). \tag{8}$$

Так как

$$\int_{a^1}^{b^1} g_n^2(t^1,t^2)\,dt^1 = \int_{a^1}^{b^1} \Big[\int_{a^2}^{t^2} D^{(l_1,l_2+1)} x_n(t^1,\tau^2)\,d\tau^2\Big]^2 dt^1 \leq (b^2-a^2)\int_{a^1}^{b^1}\int_{a^2}^{b^2} (D^{(l_1,l_2+1)} x_n(t^1,\tau^2))^2\,dt^1 d\tau^2,$$

$$\int_{a^1}^{b^1} \Big(\frac{\partial}{\partial t^1}\tilde{g}_n(t^1,t^2)\Big)^2 dt^1 = \int_{a^1}^{b^1} \Big[\int_{a^2}^{t^2} D^{(l_1+1,l_2+1)} x_n(t^1,\tau^2)\,d\tau^2\Big]^2 dt^1 \leq (b^2-a^2)\int_{a^1}^{b^1}\int_{a^2}^{b^2} (D^{(l_1+1,l_2+1)} x_n(t^1,\tau^2))^2\,dt^1 d\tau^2,$$

то в силу предположения $\|x_n\|_X \to 0$ для $(g_n(\cdot,t^2))_{n\in\mathbb{N}}$ (здесь $t^2\in[a^2,b^2]$ играет роль параметра) выполняются условия следствия I, согласно которому

$$g_n(t^1,t^2) \to 0 \quad \text{равномерно относительно} \quad (t^1,t^2)\in E. \tag{9}$$

Аналогично устанавливается, что

$$\tilde{g}_n(t^1,t^2) \to 0 \quad \text{равномерно относительно} \quad (t^1,t^2)\in E. \tag{10}$$

Сходимость (9) – (10) влечёт сходимость $D^{(l_1,l_2)} x_n(a^1,a^2) \to 0$ (см. (8) и лемму I), которая, в свою очередь, влечёт сходимость $(Ax_n)_{i_1 i_2} \to 0$ (см. оценку (6)).

Таким образом, доказана следующая

Теорема I.

$$A_j \in LC(H^q[a^j,b^j], \mathbb{R}^{m_j}),\ j=\overline{1,2} \Rightarrow A \in LC(X, \mathbb{R}^{m_1 m_2})$$

Замечание 2. В определении оператора A по формуле (I) операторы $A_j \in LC(H^q[a^j,b^j], \mathbb{R}^{m_j})$ можно заменить произвольными отображениями $F_j : K_j \to \mathbb{R}^{m_j}$, где

$$K_j = \{\varphi_l(\cdot, a^j) \mid l = \overline{0,q-1}\} \cup \{\varphi_{q-1}(\cdot,\tau) \mid \tau \in [a^j,b^j]\},\ j=\overline{1,2}.$$

Так мы получим линейный оператор A. Из доказательства теоремы I видно, что для его непрерывности достаточно потребовать, чтобы отображения F_j, $j=\overline{1,2}$, были ограниченными.

Замечание 3. Соотношением (I) может быть задан всякий оператор $A \in LC(X, \mathbb{R}^{m_1 m_2})$, для которого выполняется следующее условие:

можно указать такие операторы $A_j : H^q[a^j,b^j] \to \mathbb{R}^{m_j}$, $j=\overline{1,2}$, что для каждой функции $x \in X$ вида $x(t^1,t^2) = x_1(t^1)x_2(t^2)$ имеет место равенство $(Ax)_{i_1 i_2} = (A_1 x_1)_{i_1}(A_2 x_2)_{i_2}$, $i_j = \overline{1,m_j}$, $j=\overline{1,2}$ (см. замечание 4 к лемме 2).

Если такие операторы A_1 и A_2 существуют, то они определяются оператором A однозначно с точностью до постоянного множителя и оказываются линейными и непрерывными.

Займёмся исследованием пространства сплайнов $S(T,A)$ в случае, когда оператор A удовлетворяет высказанному условию. Как известно ([I], с.187), в случае конечномерного ядра $\mathcal{N}(T)$, если $\mathcal{N}(T) \cap \mathcal{N}(A) = \{\theta\}$ и $\mathcal{R}(A) = Z$, то для каждого вектора $z \in \mathbb{R}^{m_1 m_2}$ в $S(T,A)$ существует единственный интерполяционный сплайн (т.е. такой сплайн $s \in S(T,A)$, что $As = z$). Теорема 2 позволит сформулировать условия существования и единственности интерполяционного сплайна в терминах операторов A_1 и A_2.

Теорема 2. Обозначим через T_j оператор дифференцирования порядка q, определённый на $H^q[a^j,b^j]$, $j=\overline{1,2}$. Тогда

1) $\mathcal{N}(T) \cap \mathcal{N}(A) = \{\theta\} \Leftrightarrow \mathcal{N}(T_j) \cap \mathcal{N}(A_j) = \{\theta\}$, $j=\overline{1,2}$;

2) если $A_j(\{x \in H^q[a^j,b^j] \mid x^{(k)}(a^j) = 0,\ k=\overline{0,q-1}\}) = \mathbb{R}^{m_j}$, $j=\overline{1,2}$, или $A_j(\mathcal{N}(T_j)) = \mathbb{R}^{m_j}$, $j=\overline{1,2}$, то $\mathcal{R}(A) = \mathbb{R}^{m_1 m_2}$.

Доказательство. I) Установим импликацию

$$\mathcal{N}(T_j) \cap \mathcal{N}(A_j) = \{\theta\},\ j=\overline{1,2} \Rightarrow \mathcal{N}(T) \cap \mathcal{N}(A) = \{\theta\}$$

(обратная очевидна). Ядро $\mathcal{N}(T)$ состоит из полиномов вида

$p(t^1,t^2) = \sum_{l_1=0}^{q-1}\sum_{l_2=0}^{q-1} \alpha_{l_1 l_2}(t^1)^{l_1}(t^2)^{l_2}$. Предположим, что $p \in \mathcal{N}(A)$.

В этом случае для любой пары индексов (i_1,i_2) имеем

$$0=(Ap)_{i_1i_2}=\sum_{l_1=0}^{q-1}\sum_{l_2=0}^{q-1}\alpha_{l_1l_2}(A_1(t^1)^{l_1})_{i_1}(A_2(t^2)^{l_2})_{i_2}=A_1\Big(\sum_{l_1=0}^{q-1}\sum_{l_2=0}^{q-1}\alpha_{l_1l_2}(A_2(t^2)^{l_2})_{i_2}(t^1)^{l_1}\Big)_{i_1}. \quad (II)$$

Зафиксировав индекс i_2, рассмотрим полином

$p_{i_2}(t^1)=\sum_{l_1=0}^{q-1}\beta_{l_1i_2}(t^1)^{l_1}$, где $\beta_{l_1i_2}=\sum_{l_2=0}^{q-1}\alpha_{l_1l_2}(A_2(t^2)^{l_2})_{i_2}$.

Равенство (II) влечёт $(A_1p_{i_2})_{i_1}=0$, $i_1=\overline{1,m_1}$, откуда $p_{i_2}\in\mathcal{N}(T_1)\cap\mathcal{N}(A_1)$, а следовательно, $p_{i_2}(t^1)=0$. Так мы получаем, что $\beta_{l_1i_2}=0$, $l_1=\overline{0,q-1}$. Если ввести обозначение $p_{l_1}(t^2)=\sum_{l_2=0}^{q-1}\alpha_{l_1l_2}(t^2)^{l_2}$, $l_1=\overline{0,q-1}$, то последнее означает, что $p_{l_1}\in\mathcal{N}(A_2)$, ибо $(A_2p_{l_1})_{i_2}=\beta_{l_1i_2}$. А так как $\mathcal{N}(T_2)\cap\mathcal{N}(A_2)=\{\theta\}$, это возможно лишь в случае $\alpha_{l_1l_2}=0$, $l_j=\overline{0,q-1}$, $j=\overline{1,2}$, т.е. когда $p(t^1,t^2)=0$.

2) Надо показать, что любому вектору $z\in R^{m_1m_2}$ можно сопоставить функцию $x\in X$ так, чтобы выполнялось равенство $Ax=z$. Ясно, что достаточно установить это для каждого вектора $e_{l_1l_2}$, $l_j=\overline{1,m_j}$, стандартного базиса в $R^{m_1m_2}$ ($e_{l_1l_2}=(e^{11}_{l_1l_2},e^{12}_{l_1l_2},\dots,e^{1m_2}_{l_1l_2},e^{21}_{l_1l_2},\dots,e^{m_1m_2}_{l_1l_2})$, где $e^{i_1i_2}_{l_1l_2}=\delta_{l_1i_1}\delta_{l_2i_2}$ и δ_{li} – символ Кронекера).

Для векторов $e^j_{l_j}=(\delta_{1l_j},\delta_{2l_j},\dots,\delta_{m_jl_j})\in R^{m_j}$, $l_j=\overline{1,m_j}$, $j=\overline{1,2}$, найдутся функции $x^j_{l_j}\in H^q[a^j,b^j]$, для которых $A_jx^j_{l_j}=e^j_{l_j}$, причем или это будут полиномы степени не выше $q-1$ или все они будут удовлетворять условию: $x^{j\,(k)}_{l_j}(a^j)=0$, $k=\overline{0,q-1}$. Полагая $x_{l_1l_2}(t^1,t^2)=x^1_{l_1}(t^1)x^2_{l_2}(t^2)$, в каждом из этих случаев получим $x_{l_1l_2}\in X$ (в первом случае это очевидно, во втором – следует из того, что $x^j_{l_j}(t^j)=\frac{1}{(q-1)!}\int_{a^j}^{b^j}x^{j\,(q)}_{l_j}(\tau)(t^j-\tau)^{q-1}_+d\tau$).

Остаётся заметить, что $Ax_{l_1l_2}=e_{l_1l_2}$.

Теорема доказана.

Для дальнейшего изучения пространства $S(T,A)$ (для нахождения общего вида сплайна, интегрального представления ошибки сплайн-интерполяции) существенно используется следующая лемма.

Лемма 2. Пусть $J:L_2(E)\to X$, $J_j:L_2([a^j,b^j])\to H^q[a^j,b^j]$, $j=\overline{1,2}$, – интегральные операторы:

$$(\mathcal{J}y)(t^1,t^2)=\frac{1}{[(q-1)!]^2}\iint_E y(\tau^1,\tau^2)\varphi_{q-1}(t^1,\tau^1)\varphi_{q-1}(t^2,\tau^2)\,d\tau^1 d\tau^2; \tag{12}$$

$$(\mathcal{J}_j y)(t)=\frac{1}{(q-1)!}\int_{a^j}^{b^j} y(\tau)\varphi_{q-1}(t,\tau)\,d\tau.$$

Тогда операторы A и $\mathcal{J}$, A_j и $\mathcal{J}_j$, $j=\overline{1,2}$, "перестановочны" в смысле выполнения следующих равенств:

$$(A\mathcal{J}y)_{i_1i_2}=\frac{1}{[(q-1)!]^2}\iint_E y(\tau^1,\tau^2)(A_1\varphi_{q-1}(\cdot,\tau^1))_{i_1}(A_2\varphi_{q-1}(\cdot,\tau^2))_{i_2}\,d\tau^1 d\tau^2,\ i_j=\overline{1,m_j},\ j=\overline{1,2}, \tag{13}$$

$$(A_j\mathcal{J}_j y)_i=\frac{1}{(q-1)!}\int_{a^j}^{b^j} y(\tau)(A_j\varphi_{q-1}(\cdot,\tau))_i\,d\tau,\quad i=\overline{1,m_j}. \tag{14}$$

Доказательство. В силу равенства $\mathcal{R}(T)=Y$ "перестановочность" операторов A и $\mathcal{J}$ непосредственно следует из определения оператора A (I). Теперь соотношение (I4) нетрудно получить из (I3), но мы поступим иначе: прибегнем для доказательства "перестановочности" A_j и $\mathcal{J}_j$ к представлению функционалов $f_{ji}x=(A_jx)_i$ в виде $f_{ji}x=\langle x_{ji},x\rangle_{H^q[a^j,b^j]}$. Мы получим цепочку равенств

$$(A_j\mathcal{J}_j y)_i=\sum_{l=0}^{q}\int_{a^j}^{b^j} x_{ji}^{(l)}(t)(\mathcal{J}_j y)^{(l)}(t)\,dt=\frac{1}{(q-1)!}\sum_{l=0}^{q-1}\int_{a^j}^{b^j}\int_{a^j}^{b^j} x_{ji}^{(l)}(t)y(\tau)\mathcal{D}^{(l,0)}\varphi_{q-1}(t,\tau)\,dt\,d\tau+$$
$$+\int_{a^j}^{b^j} x_{ji}^{(q)}(t)y(t)\,dt=\frac{1}{(q-1)!}\int_{a^j}^{b^j} y(\tau)\Big[\sum_{l=0}^{q-1}\int_{a^j}^{b^j} x_{ji}^{(l)}(t)\mathcal{D}^{(l,0)}\varphi_{q-1}(t,\tau)\,dt+(q-1)!\,x_{ji}^{(q)}(\tau)\Big]d\tau=$$
$$=\frac{1}{(q-1)!}\int_{a^j}^{b^j} y(\tau)(A_j\varphi_{q-1}(\cdot,\tau))_i\,d\tau,$$

которая и доказывает (I4).

Замечание 4. Этим приёмом может быть установлена "перестановочность" оператора $\overset{\circ}{\mathcal{J}}$ с произвольным оператором $A\in LC(X,R^n)$.

Теорема 3. Для каждой функции $s\in H^{1q}_{q,q}(E)$ следующие утверждения эквивалентны:

I) s – сплайн пространства $S(T,A)$;

2) $\mathcal{D}^{(q,l)}s(t^1,a^2)=\mathcal{D}^{(l,q)}s(a^1,t^2)=0$ при $l\le q-1$ и (I5)

$$\mathcal{D}^{(q,q)}s(t^1,t^2)=\sum_{i_1=1}^{m_1}\sum_{i_2=1}^{m}\frac{\lambda_{i_1i_2}}{[(q-1)!]^2}(A_1\varphi_{q-1}(\cdot,t^1))_{i_1}(A_2\varphi_{q-1}(\cdot,t^2))_{i_2},\quad (t^1,t^2)\in E, \tag{16}$$

где $\lambda_{i_1 i_2}$, $i_j=\overline{1,m_j}$, $j=\overline{1,2}$,– какие-либо вещественные числа, удовлетворяющие условию

$$\forall p\in L \quad \sum_{i_1=1}^{m_1}\sum_{i_2=1}^{m_2} \lambda_{i_1 i_2}(Ap)_{i_1 i_2}=0; \tag{17}$$

3) функция S представима в виде

$$\begin{aligned} s(t^1,t^2) &= \sum_{l_1=0}^{q-1}\sum_{l_2=0}^{q-1} \alpha_{l_1 l_2}(t^1)^{l_1}(t^2)^{l_2} + \sum_{i_1=1}^{m_1}\sum_{i_2=1}^{m_2} \frac{\lambda_{i_1 i_2}}{[(2q-1)!]^2}(A_1\varphi_{2q-1}(t^1,\cdot))_{i_1}(A_2\varphi_{2q-1}(t^2,\cdot))_{i_2} + \\ &+ \sum_{i_1=1}^{m_1}\sum_{i_2=1}^{m_2} \frac{\lambda_{i_1 i_2}}{(2q-1)!}(A_1\varphi_{2q-1}(t^1,\cdot))_{i_1} \sum_{l=0}^{q-1}\frac{(-1)^{q-l}}{(q+l)!(q-l-1)!}(A_2\varphi_{q-l-1}(\cdot,a^2))_{i_2}(t^2-a^2)^{q+l} + \\ &+ \sum_{i_1=1}^{m_1}\sum_{i_2=1}^{m_2} \frac{\lambda_{i_1 i_2}}{(2q-1)!}(A_2\varphi_{2q-1}(t^2,\cdot))_{i_2} \sum_{l=0}^{q-1}\frac{(-1)^{q-l}}{(q+l)!(q-l-1)!}(A_1\varphi_{q-l-1}(\cdot,a^1))_{i_1}(t^1-a^1)^{q+l}, \end{aligned} \tag{18}$$

где числа $\alpha_{l_1 l_2}$, $l_j=\overline{0,q-1}$, $j=\overline{1,2}$, произвольные, а числа $\lambda_{i_1 i_2}$, $i_j=\overline{1,m_j}$, $j=\overline{1,2}$, удовлетворяют условию (17).

<u>Доказательство.</u> Для того, чтобы функция $s\in X$ была сплайном необходимо и достаточно (см.[1], с.206), чтобы существовали такие коэффициенты $\lambda_{i_1 i_2}$, $i_j=\overline{1,m_j}$, $j=\overline{1,2}$, что

$$\forall x\in X \quad \langle Ts,Tx\rangle = \sum_{i_1=1}^{m_1}\sum_{i_2=1}^{m_2}\lambda_{i_1 i_2}(Ax)_{i_1 i_2} \quad \text{и} \tag{19}$$

$$\forall p\in \mathcal{N}(T) \quad \sum_{i_1=1}^{m_1}\sum_{i_2=1}^{m_2}\lambda_{i_1 i_2}(Ap)_{i_1 i_2}=0. \tag{20}$$

С учётом (20) перепишем (19) в виде

$$\forall x\in X \quad \langle Ts,Tx\rangle = \sum_{i_1=1}^{m_1}\sum_{i_2=1}^{m_2}\lambda_{i_1 i_2}(AQx)_{i_1 i_2}. \tag{21}$$

Поскольку

$$(AQx)_{i_1 i_2} = \frac{1}{[(q-1)!]^2}\iint_E (Tx)(t^1,t^2)(A_1\varphi_{q-1}(\cdot,t^1))_{i_1}(A_2\varphi_{q-1}(\cdot,t^2))_{i_2}\,dt^1dt^2,$$

то, введя обозначения

$$y^j_{i_j}(t)=\frac{1}{(q-1)!}(A_j\varphi_{q-1}(\cdot,t))_{i_j}, \quad y_{i_1 i_2}(t^1,t^2)=y^1_{i_1}(t^1)\,y^2_{i_2}(t^2), \quad i_j=\overline{1,m_j},\ j=\overline{1,2}, \tag{22}$$

преобразуем (21) так:

$$\forall x\in X \quad \langle Tx, Ts-\sum_{i_1=1}^{m_1}\sum_{i_2=1}^{m_2}\lambda_{i_1 i_2}y_{i_1 i_2}\rangle=0.$$

С помощью равенства $\mathcal{R}(T)=Y$ отсюда находим, что

$$Ts=\sum_{i_1=1}^{m_1}\sum_{i_2=1}^{m_2}\lambda_{i_1 i_2}y_{i_1 i_2}.$$

Так как все рассуждения можно повторить в обратной последовательности, то для доказательства эквивалентности утверждений I) и 2) достаточно заметить, что

$$\forall x \in H^{2q}_{q,q}(E) \ \ (x \in X \Leftrightarrow \mathfrak{D}^{(l,q)} x(a^1,t^2) = \mathfrak{D}^{(q,l)} x(t^1,a^2) = 0, \ l = \overline{0,q-1}, (t^1,t^2) \in E).$$

Доказательство этого вспомогательного факта несложно и мы его опускаем.

Значит, пространство $S(T,A)$ состоит из элементов вида

$$s = p + \sum_{i_1=1}^{m_1} \sum_{i_2=1}^{m_2} \lambda_{i_1 i_2} x_{i_1 i_2}, \tag{23}$$

где p – произвольный элемент ядра оператора T, числа $\lambda_{i_1 i_2}$ удовлетворяют условию (I7), а $x_{i_1 i_2}$ – некоторый прообраз элемента $y_{i_1 i_2}$ при отображении T: $Tx_{i_1 i_2} = y_{i_1 i_2}$. Так как $N(T) = L$, то p – полином вида

$$p(t^1,t^2) = \sum_{l_1=0}^{q-1} \sum_{l_2=0}^{q-1} \alpha_{l_1 l_2} (t^1)^{l_1} (t^2)^{l_2}. \tag{24}$$

Чтобы получить общий вид функций из $S(T,A)$, остаётся найти элементы $x_{i_1 i_2}$. Вычислить их, непосредственно интегрируя соответствующие функции $y_{i_1 i_2}$ не представляется возможным, ибо в результате этого интегрирования мы, вообще говоря, получим функции из $H^{2q}_{q,q}(E)$. Покажем, что в качестве $x_{i_1 i_2}$ можно взять $\mathfrak{J} y_{i_1 i_2}$ (оператор $\mathfrak{J}$ определён в (I2)). Поскольку в этом случае $x_{i_1 i_2} = Qx$ для всякой функции $x \in T^{-1} y_{i_1 i_2}$ (в силу условия $\mathcal{R}(T) = Y$ хотя бы одна такая найдётся), то $x_{i_1 i_2} \in X$. Равенство $Tx_{i_1 i_2} = y_{i_1 i_2}$ следует из того, что $T\mathfrak{J}$ – единичный оператор на Y. Полагая теперь

$$x_{i_1 i_2}(t^1,t^2) = \frac{1}{[(q-1)!]^2} \iint_E y_{i_1 i_2}(\tau^1,\tau^2) \varphi_{q-1}(t^1,\tau^1) \varphi_{q-1}(t^2,\tau^2) \, d\tau^1 d\tau^2, \ (t^1,t^2) \in E,$$

и принимая во внимание обозначения (22) и "перестановочность" (I4) операторов A_j и $\mathfrak{J}_j$, получаем

$$x_{i_1 i_2}(t^1,t^2) = (A_1 \psi_1(\cdot,t^1))_{i_1} (A_2 \psi_2(\cdot,t^2))_{i_2}, \ (t^1,t^2) \in E, \tag{25}$$

где $\psi_j(\tau,t) = \frac{1}{[(q-1)!]^2} \int_{a^j}^{b^j} \varphi_{q-1}(\tau,u) \varphi_{q-1}(t,u) \, du.$

Интегрированием по частям находим, что

$$\psi_j(\tau,t) = \begin{cases} \frac{(-1)^q}{(2q-1)!}(t-\tau)^{2q-1} + \sum_{l=0}^{q-1} \frac{(-1)^l}{(q+l)!(q-l-1)!} (\tau-a^j)^{q-l-1} (t-a^j)^{q+l}, & \tau \le t, \\ \frac{(-1)^q}{(2q-1)!}(\tau-t)^{2q-1} + \sum_{l=0}^{q-1} \frac{(-1)^l}{(q+l)!(q-l-1)!} (\tau-a^j)^{q+l} (t-a^j)^{q-l-1}, & \tau > t. \end{cases}$$

Разложив $(t-\tau)^{2q-1}$ по формуле бинома Ньютона

$$(t-\tau)^{2q-1}=\sum_{l=0}^{2q-1}\frac{(2q-1)!}{l!(2q-l-1)!}(-1)^l(\tau-a^j)^l(t-a^j)^{2q-l-1}=$$

$$=\sum_{l=0}^{q-1}\frac{(2q-1)!}{(q+l)!(q-l-1)!}(-1)^{q-l-1}(\tau-a^j)^{q-l-1}(t-a^j)^{q+l}+\sum_{l=0}^{q-1}\frac{(2q-1)!}{(q+l)!(q-l-1)!}(-1)^{q-l-1}(\tau-a^j)^{q+l}(t-a^j)^{q-l-1}$$

и выполнив несложные преобразования, имеем

$$\psi_j(\tau,t)=\begin{cases}\sum\limits_{l=0}^{q-1}\dfrac{(-1)^l}{(q+l)!(q-l-1)!}(\tau-a^j)^{q+l}(t-a^j)^{q-l-1}, & \tau\le t,\\ \sum\limits_{l=0}^{q-1}\dfrac{(-1)^l}{(q+l)!(q-l-1)!}(\tau-a^j)^{q-l-1}(t-a^j)^{q+l}, & \tau>t.\end{cases}$$

Придадим этой формуле более удобный вид, пользуясь записью усеченной степенной функции,

$$\psi_j(\tau,t)=\frac{(-1)^q}{(2q-1)!}(t-\tau)_+^{2q-1}+\sum_{l=0}^{q-1}\frac{(-1)^l}{(q+l)!(q-l-1)!}(\tau-a^j)^{q-l-1}(t-a^j)^{q+l}.$$

Заменяя функции ψ_j в (25) последним выражением и подставляя (24) и (25) в (23), получаем

$$S(t^1,t^2)=\sum_{l_1=0}^{q-1}\sum_{l_2=0}^{q-1}d_{l_1l_2}(t^1)^{l_1}(t^2)^{l_2}+\sum_{i_1=1}^{m_1}\sum_{i_2=1}^{m_2}\frac{\lambda_{i_1i_2}}{[(2q-1)!]^2}(A_1\varphi_{2q-1}(t^1,\cdot))_{i_1}(A_2\varphi_{2q-1}(t^2,\cdot))_{i_2}+$$

$$+\sum_{i_1=1}^{m_1}\sum_{i_2=1}^{m_2}\frac{\lambda_{i_1i_2}}{(2q-1)!}(A_1\varphi_{2q-1}(t^1,\cdot))_{i_1}\sum_{l=0}^{q-1}\frac{(-1)^{q-l}}{(q+l)!(q-l-1)!}(A_2\varphi_{q-l-1}(\cdot,a^2))_{i_2}(t^2-a^2)^{q+l}+$$

$$+\sum_{i_1=1}^{m_1}\sum_{i_2=1}^{m_2}\frac{\lambda_{i_1i_2}}{(2q-1)!}(A_2\varphi_{2q-1}(t^2,\cdot))_{i_2}\sum_{l=0}^{q-1}\frac{(-1)^{q-l}}{(q+l)!(q-l-1)!}(A_1\varphi_{q-l-1}(\cdot,a^1))_{i_1}(t^1-a^1)^{q+l}+$$

$$+\sum_{i_1=1}^{m_1}\sum_{i_2=1}^{m_2}\sum_{l_1=0}^{q-1}\sum_{l_2=0}^{q-1}\frac{(-1)^{l_1+l_2}\lambda_{i_1i_2}}{(q+l_1)!(q+l_2)!(q-l_1-1)!(q-l_2-1)!}(A_1\varphi_{q-l_1-1}(\cdot,a^1))_{i_1}(A_2\varphi_{q-l_2-1}(\cdot,a^2))_{i_2}(t^1-a^1)^{q+l_1}(t^2-a^2)^{q+l_2}.$$

Остаётся заметить, что в полученном для S представлении последняя сумма (т.е. $\sum\limits_{i_1=1}^{m_1}\sum\limits_{i_2=1}^{m_2}\sum\limits_{l_1=0}^{q-1}\sum\limits_{l_2=0}^{q-1}\ldots$) равна нулю в силу условия (20).

На этом доказательство теоремы 3 завершено.

Переходя к изучению вопроса об ошибке сплайн-интерполяции, будем считать выполненными условия существования и единственности интерполяционного сплайна в $S(T,A)$. Будем придерживаться принятых в [6] обозначений:

$S: X\to S(T,A)$ – оператор сплайн-интерполяции

(для $x\in X$ Sx – интерполяционный сплайн, соответствующий вектору Ax);

$\mathcal{U}: X \to X$ – оператор ошибки интерполяции сплайнами из $S(T,A)$ ($\mathcal{U}=I-S$, где I – единичный оператор).

<u>Теорема 4</u>. Оператор $\mathcal{U}$ представим в виде

$$(\mathcal{U}x)(t^1,t^2)=\frac{1}{[(q-1)!]^2}\iint_E \mathcal{D}^{(q,q)}x(\tau^1,\tau^2)K_{q-1}(t^1,t^2,\tau^1,\tau^2)d\tau^1 d\tau^2,\ (t^1,t^2)\in E, \quad (26)$$

где $K_{q-1}(t^1,t^2,\tau^1,\tau^2)=(\mathcal{U}(\varphi_{q-1}(\cdot,\tau^1)\varphi_{q-1}(\cdot,\tau^2)))(t^1,t^2)$ есть значение в точке (t^1,t^2) ошибки интерполяции функции $\psi(u^1,u^2)=\varphi_{q-1}(u^1,\tau^1)\varphi_{q-1}(u^2,\tau^2)$.

<u>Доказательство</u>. Поскольку операторы $\mathcal{J}$ и $T|_{\mathbb{L}}$ (оператор $\mathcal{J}$ определён в (I2), а $T|_{\mathbb{L}}$ – сужение оператора T на пространство $\mathbb{L}$) взаимообратны , то $\mathcal{U}=\mathcal{V}T$, где $\mathcal{V}=(I-S)\mathcal{J}$ ([6], предложение I). Так как $Sx=\sum_{i_1=1}^{m_1}\sum_{i_2=1}^{m_2}(Ax)_{i_1 i_2}s_{i_1 i_2}$ (см., например, [6], лемму 3), где $s_{i_1 i_2}$ – интерполяционный сплайн, соответствующий вектору $e_{i_1 i_2}$ стандартного базиса в $\mathbb{R}^{m_1 m_2}$ (по поводу векторов $e_{i_1 i_2}$ см. доказательство теоремы 2), а операторы A и $\mathcal{J}$ "перестановочны", то $\mathcal{V}$ – интегральный оператор

$$(\mathcal{V}y)(t^1,t^2)=\frac{1}{[(q-1)!]^2}\iint_E y(\tau^1,\tau^2)K_{q-1}(t^1,t^2,\tau^1,\tau^2)d\tau^1 d\tau^2,\ (t^1,t^2)\in E,$$

с ядром

$$K_{q-1}(t^1,t^2,\tau^1,\tau^2)=\varphi_{q-1}(t^1,\tau^1)\varphi_{q-1}(t^2,\tau^2)-\sum_{i_1=1}^{m_1}\sum_{i_2=1}^{m_2}(A_1\varphi_{q-1}(\cdot,\tau^1))_{i_1}(A_2\varphi_{q-1}(\cdot,\tau^2))_{i_2}s_{i_1 i_2}(t^1,t^2).$$

Остаётся заметить, что

$$\sum_{i_1=1}^{m_1}\sum_{i_2=1}^{m_2}(A_1\varphi_{q-1}(\cdot,\tau^1))_{i_1}(A_2\varphi_{q-1}(\cdot,\tau^2))_{i_2}s_{i_1 i_2}(t^1,t^2)=(S(\varphi_{q-1}(\cdot,\tau^1)\varphi_{q-1}(\cdot,\tau^2)))(t^1,t^2).$$

На этом изучение общих вопросов, относящихся к случаю произвольного оператора A , заканчивается. Дальнейшая часть статьи посвящена рассмотрению на основе изложенных результатов трёх конкретных пространств сплайнов.

I. <u>Простые сплайны</u>

Пусть $\Delta^j=\{t^j_0,t^j_1,\dots,t^j_{n_j+1}\,|\,a^j=t^j_0<t^j_1<\dots<t^j_{n_j+1}=b^j\}$ – сетка на отрезке $[a^j,b^j]$, $A_j: H^q[a^j,b^j]\to\mathbb{R}^{n_j}$ – оператор интерполяции по значениям в узлах сетки Δ^j, т.е. $(A_j x)_i=x(t^j_i)$, $i=\overline{1,n_j}$, $j=\overline{1,2}$. Тогда $A: X\to\mathbb{R}^{n_1 n_2}$ – оператор интерполяции по значениям в узлах сетки $\Delta=\Delta^1\times\Delta^2$ (здесь $\times$ – знак декарт-

това произведения): $(Ax)_{i_1 i_2} = x(t^1_{i_1}, t^2_{i_2})$, $i_j = \overline{1,n_j}$, $j = \overline{1,2}$.

Его непрерывность по теореме I следует из непрерывности операторов A_1 и A_2.

Для изучения интерполяции сплайнами из $S(T,A)$ в этом конкретном случае (по виду интерполяционных условий их естественно назвать простыми) применима общая теория и из теорем 2-4 вытекают предложения I.I - I.3.

<u>Предложение I.I</u>. При условии $q \le \min\{n_1, n_2\}$ для каждого вектора $z \in \mathbb{R}^{n_1 n_2}$ в пространстве $S(T,A)$ существует единственный интерполяционный сплайн.

<u>Доказательство</u>. Надо показать, что $\mathcal{N}(T) \cap \mathcal{N}(A) = \{\theta\}$ и $\mathcal{R}(A) = \mathbb{R}^{n_1 n_2}$. Первое равенство следует из того, что $\mathcal{N}(T_j) \cap \mathcal{N}(A_j) = \{\theta\}$, если только $q \le n_j$. Для доказательства второго убедимся, что $A_j(\{x \in H^q[a^j, b^j] \mid x^{(l)}(a^j) = 0,\ l = \overline{0,q-1}\}) = \mathbb{R}^{n_j}$. Это действительно так, ибо прообразом произвольного вектора $z \in \mathbb{R}^{n_j}$ при A_j будет, например, интерполяционный полином Эрмита p, удовлетворяющий условиям: $p^{(l)}(a^j) = 0$, $l = \overline{0,q-1}$, $p(t^j_i) = z_i$, $i = \overline{1,n_j}$.

<u>Предложение I.2</u>. Пространство $S(T,A)$ состоит из функций $s \in H^{2q}_{q,q}(E)$, которые представимы в виде

$$s(t^1,t^2) = \sum_{l_1=0}^{q-1}\sum_{l_2=0}^{q-1} d_{l_1 l_2}(t^1)^{l_1}(t^2)^{l_2} + \sum_{i_1=1}^{n_1}\sum_{i_2=1}^{n_2} \frac{\lambda_{i_1 i_2}}{[(2q-1)!]^2}(t^1-t^1_{i_1})_+^{2q-1}(t^2-t^2_{i_2})_+^{2q-1} +$$
$$+ \sum_{i_1=1}^{n_1}\sum_{i_2=1}^{n_2} \frac{\lambda_{i_1 i_2}}{(2q-1)!}(t^1-t^1_{i_1})_+^{2q-1} \sum_{l=0}^{q-1} \frac{(-1)^{q-l}}{(q+l)!(q-l-1)!}(t^2_{i_2}-a^2)^{q-l-1}(t^2-a^2)^{q+l} + \tag{27}$$
$$+ \sum_{i_1=1}^{n_1}\sum_{i_2=1}^{n_2} \frac{\lambda_{i_1 i_2}}{(2q-1)!}(t^2-t^2_{i_2})_+^{2q-1} \sum_{l=0}^{q-1} \frac{(-1)^{q-l}}{(q+l)!(q-l-1)!}(t^1_{i_1}-a^1)^{q-l-1}(t^1-a^1)^{q+l},$$

где числа $d_{l_1 l_2}$ произвольны, а числа $\lambda_{i_1 i_2}$ удовлетворяют условию:

$$\sum_{i_1=1}^{n_1}\sum_{i_2=1}^{n_2} \lambda_{i_1 i_2}(t^1_{i_1})^{l_1}(t^2_{i_2})^{l_2} = 0, \quad l_j = \overline{0,q-1},\ j = \overline{1,2}. \tag{28}$$

Такое представление для $s \in H^{2q}_{q,q}(E)$ возможно тогда и только тогда, когда s обладает свойствами:

1) $\mathcal{D}^{(2q,0)}s(t^1,t^2) = 0$ для $(t^1,t^2) \in]t^1_{i-1}, t^1_i[\times [a^2,b^2]$, $i = \overline{1,n_1+1}$,
$\mathcal{D}^{(0,2q)}s(t^1,t^2) = 0$ для $(t^1,t^2) \in [a^1,b^1] \times]t^2_{i-1}, t^2_i[$, $i = \overline{1,n_2+1}$;

2) $\mathcal{D}^{(2q-2,2q-2)}s \in C(E)$;

3) $\mathcal{D}^{(q,q)}s(t^1,t^2)=0$ для
$(t^1,t^2)\in(]t_0^1,t_1^1[\times]t_0^2,t_1^2[)\cup(]t_{n_1}^1,t_{n_1+1}^1[\times[a^2,b^2])\cup([a^1,b^1]\times]t_{n_2}^2,t_{n_2+1}^2[)$;
4) $\mathcal{D}^{(q,k)}s(t^1,a^2)=\mathcal{D}^{(k,q)}s(a^1,t^2)=0,\ k=\overline{0,q-1},\ t^j\in[a^j,b^j],\ j=\overline{1,2}$.

Доказательство. Представление (27) - (28), как необходимое и достаточное условие того, что функция $s\in H^{2q}_{q,q}(E)$ является простым сплайном, сразу получается из (I8) и (I7) (теорема 3). Достаточно очевидно, что сплайн $s\in S(T,A)$ обладает свойствами I) - 4) : (27) $\Longrightarrow$ I), 2); свойство 3) получим, расписав для рассматриваемого случая (I6) (теорема 3) -

$$\mathcal{D}^{(q,q)}s(t^1,t^2)=\sum_{i_1=1}^{n_1}\sum_{i_2=1}^{n_2}\frac{\lambda_{i_1i_2}}{[(q-1)!]^2}(t^1_{i_1}-t^1)_+^{q-1}(t^2_{i_2}-t^2)_+^{q-1}, \tag{29}$$

где числа $\lambda_{i_1i_2}$ удовлетворяют условию (28); 4) в точности означает (I5).

Остаётся проверить, что функция $s\in H^{2q}_{q,q}(E)$, для которой выполняются условия I) - 4), есть сплайн. Сделаем это на основании теоремы 3, установив для s существование таких чисел $\lambda_{i_1i_2}$, $i_j=\overline{1,n_j}$, $j=\overline{1,2}$, что верно (28) и (29).
С этой целью рассмотрим

$$p_{i_1i_2}=\mathcal{D}^{(q,q)}s\big|_{]t^1_{i_1-1},t^1_{i_1}[\times]t^2_{i_2-1},t^2_{i_2}[},\quad i_j=\overline{1,n_j+1},\ j=\overline{1,2}. \tag{30}$$

В силу условия I) $p_{i_1i_2}$ - полиномы степени не выше $q-1$ по каждой переменной (будем считать их определёнными на E).
Покажем, что найдутся такие числа
$\gamma_{k_1k_2}$, $k_j=\overline{1,n_j+1}$, $j=\overline{1,2}$, что

$$p_{i_1i_2}(t^1,t^2)=\sum_{k_1=i_1}^{n_1+1}\sum_{k_2=i_2}^{n_2+1}\gamma_{k_1k_2}(t^1_{k_1}-t^1)^{q-1}(t^2_{k_2}-t^2)^{q-1},\quad i_j=\overline{1,n_j+1},\ j=\overline{1,2}. \tag{31}$$

Так как по условию 3 $p_{i_1n_2+1}(t^1,t^2)=p_{n_1+1i_2}(t^1,t^2)=0$, $i_j=\overline{1,n_j+1}$, $j=\overline{1,2}$, то

$$\gamma_{k_1n_2+1}=\gamma_{n_1+1k_2}=0,\quad k_j=\overline{1,n_j+1},\ j=\overline{1,2}. \tag{32}$$

Получим представление (3I) последовательно для полиномов $p_{n_1n_2}, p_{n_1-1n_2},\dots,p_{1n_2},p_{n_1n_2-1},\dots,p_{11}$ на основании индуктивного перехода, описанного ниже.

Пусть установлено (3I) для $p_{i_1+1i_2}$ и $p_{i_1i_2+1}$. Обозначим $\tilde p_{i_1i_2}=p_{i_1i_2}-p_{i_1+1i_2}$ и $\hat p_{i_1i_2}=p_{i_1i_2}-p_{i_1i_2+1}$.
Полиномы $\tilde p_{i_1i_2}$ и $\hat p_{i_1i_2}$ будем искать в виде

$$\tilde p_{i_1i_2}(t^1,t^2)=\sum_{l_1=0}^{q-1}\sum_{l_2=0}^{q-1}\tilde\alpha^{i_1i_2}_{l_1l_2}(t^1_{i_1}-t^1)^{l_1}(t^2_{i_2}-t^2)^{l_2},\quad \hat p_{i_1i_2}(t^1,t^2)=\sum_{l_1=0}^{q-1}\sum_{l_2=0}^{q-1}\hat\alpha^{i_1i_2}_{l_1l_2}(t^1_{i_1}-t^1)^{l_1}(t^2_{i_2}-t^2)^{l_2}, \tag{33}$$

где $\tilde\alpha^{i_1i_2}_{l_1l_2}$ и $\hat\alpha^{i_1i_2}_{l_1l_2}$ - пока неопределённые числа.

Поскольку выполнятся условия I) и 2), то $\mathcal{D}^{(k,k')}\tilde{p}_{i_1i_2}(t^1_{i_1},t^2_{i_2})=$ $=\mathcal{D}^{(k',k)}\hat{p}_{i_1i_2}(t^1_{i_1},t^2_{i_2})=0$ при $k=\overline{0,q-2}$, $k'=\overline{0,q-1}$, откуда при этих значениях k и k' $\tilde{\alpha}^{i_1i_2}_{kk'}=\hat{\alpha}^{i_1i_2}_{k'k}=0$. Неопределёнными в (33) остались $2q-2$ коэффициента. Определим $2q-1$ из них, опираясь на соотношение $\tilde{p}_{i_1i_2}-\hat{p}_{i_1i_2}=p_{i_1i_2+1}-p_{i_1+1i_2}$. Подставляя в него представления (3I) для $p_{i_1i_2+1}$ и $p_{i_1+1i_2}$, получим тождество

$$(t^1_{i_1}-t^1)^{q-1}\Big[\sum_{k_2=i_2+1}^{n_2+1}\gamma_{i_1k_2}(t^2_{k_2}-t^2)^{q-1}-\sum_{l=0}^{q-1}\tilde{\alpha}^{i_1i_2}_{q-1\,l}(t^2_{i_2}-t^2)^{l}\Big]-(t^2_{i_2}-t^2)^{q-1}\Big[\sum_{k_1=i_1+1}^{n_1+1}\gamma_{k_1i_2}(t^1_{k_1}-t^1)^{q-1}-\sum_{l=0}^{q-1}\hat{\alpha}^{i_1i_2}_{l\,q-1}(t^1_{i_1}-t^1)^{l}\Big]=0,$$

из которого находим $\hat{\alpha}^{i_1i_2}_{q-1\,q-1}-\tilde{\alpha}^{i_1i_2}_{q-1\,q-1}=\sum\limits_{k_1=i_1+1}^{n_1+1}\gamma_{k_1i_2}+\sum\limits_{k_2=i_2+1}^{n_2+1}\gamma_{i_1k_2}$,

$$\tilde{\alpha}^{i_1i_2}_{q-1\,k}=\frac{(q-1)!}{k!(q-k-1)!}\sum_{k_2=i_2+1}^{n_2+1}\gamma_{i_1k_2}(t^2_{k_2}-t^2_{i_2})^{q-k-1},\quad \hat{\alpha}^{i_1i_2}_{k\,q-1}=\frac{(q-1)!}{k!(q-k-1)!}\sum_{k_1=i_1+1}^{n_1+1}\gamma_{k_1i_2}(t^1_{k_1}-t^1_{i_1})^{q-k-1},\quad k=\overline{0,q-2}.$$

При таких значениях коэффициентов $\tilde{\alpha}^{i_1i_2}_{l_1l_2}$ и $\hat{\alpha}^{i_1i_2}_{l_1l_2}$ имеем

$$\tilde{p}_{i_1i_2}(t^1,t^2)=\sum_{k_2=i_2+1}^{n_2+1}\gamma_{i_1k_2}(t^1_{i_1}-t^1)^{q-1}(t^2_{k_2}-t^2)^{q-1}+\gamma_{i_1i_2}(t^1_{i_1}-t^1)^{q-1}(t^2_{i_2}-t^2)^{q-1},$$

$$\hat{p}_{i_1i_2}(t^1,t^2)=\sum_{k_1=i_1+1}^{n_1+1}\gamma_{k_1i_2}(t^1_{k_1}-t^1)^{q-1}(t^2_{i_2}-t^2)^{q-1}+\gamma_{i_1i_2}(t^1_{i_1}-t^1)^{q-1}(t^2_{i_2}-t^2)^{q-1},$$

где $\gamma_{i_1i_2}$ – некоторое число, а значит, $p_{i_1i_2}(t^1,t^2)=\sum\limits_{k_1=i_1}^{n_1+1}\sum\limits_{k_2=i_2}^{n_2+1}\gamma_{k_1k_2}(t^1_{k_1}-t^1)^{q-1}(t^2_{k_2}-t^2)^{q-1}$.

Теперь, принимая во внимание (30) – (32), можем записать $\mathcal{D}^{(q,q)}s(t^1,t^2)=\sum\limits_{i_1=1}^{n_1}\sum\limits_{i_2=1}^{n_2}\gamma_{i_1i_2}(t^1_{i_1}-t^1)^{q-1}_+(t^2_{i_2}-t^2)^{q-1}_+$. По условию I) $p_{11}(t^1,t^2)=0$, поэтому числа $\gamma_{i_1i_2}$ удовлетворяют соотношениям: $\sum\limits_{i_1=1}^{n_1}\sum\limits_{i_2=1}^{n_2}\gamma_{i_1i_2}(t^1_{i_1})^{l_1}(t^2_{i_2})^{l_2}=0$, $l_j=\overline{0,q-1}$, $j=\overline{1,2}$. Чтобы получить (28) и (29), надо взять $\lambda_{i_1i_2}=[(q-1)!]^2\gamma_{i_1i_2}$.

Предложение I.3. Для ошибки $\mathcal{U}x$ интерполяции функции $x\in X$ простыми сплайнами в случае $q=1$, имеют место оценки

$$|(\mathcal{U}x)(t^1,t^2)|\leq B^{\infty}_{i_1i_2}(t^1,t^2)\,\|\mathcal{D}^{(1,1)}x\|_{L_\infty(E)}$$ и

$$|(\mathcal{U}x)(t^1,t^2)|\leq\sqrt{B^{2}_{i_1i_2}(t^1,t^2)}\,\|\mathcal{D}^{(1,1)}x\|_{L_2(E)}$$ для $(t^1,t^2)\in E_{i_1i_2}$, $i_j=\overline{1,n_j+1}$, $j=\overline{1,2}$,

(здесь и далее $E_{i_1i_2}=[t^1_{i_1-1},t^1_{i_1}]\times[t^2_{i_2-1},t^2_{i_2}]$),

где

$$B^p_{i_1 i_2}(t^1,t^2)=\begin{cases} h^1_1 h^2_1(1-u^1u^2), & i_j=1,\ j=\overline{1,2},\\ h^1_1h^2_1(1-u^j)+c_p h^j_{i_j}u^j(1-u^j)(t^{j'}_{i_{j'}-1}-t^{j'}_1)+c_p h^1_{i_1}h^2_{i_2}u^1u^2(1-u^1u^2), & i_j=1,\ i_{j'}=\overline{2,n_{j'}},\\ h^1_1h^2_1(1-u^j)+c_p h^j_{i_j}u^j(1-u^j)(t^{j'}_{i_{j'}-1}-t^{j'}_1)+h^1_{i_1}h^2_{i_2}u^1u^2, & i_j=1,\ i_{j'}=n_{j'}+1,\\ c_p[h^1_{i_1}u^1(1-u^1)(t^2_{i_2-1}-a^2)+h^2_{i_2}u^2(1-u^2)(t^1_{i_1-1}-a^1)+h^1_{i_1}h^2_{i_2}u^1u^2(1-u^1u^2)], & i_j=\overline{2,n_j},\\ c_p h^{j'}_{i_{j'}}u^{j'}(1-u^{j'})(t^j_{n_j}-a^j)+h^1_{i_1}h^2_{i_2}u^1u^2, & i_j=n_j+1,\ i_{j'}=\overline{2,n_{j'}},\\ h^1_{n_1+1}h^2_{n_2+1}u^1u^2+h^1_{n_1+1}u^1(t^2_{n_2}-a^2)+h^2_{n_2+1}u^2(t^1_{n_1}-a^1), & i_j=n_j+1,\ j=\overline{1,2}, \end{cases}$$

$$h^j_i=t^j_i-t^j_{i-1},\quad u^j=\frac{t^j-t^j_{i_j-1}}{h^j_{i_j}},\quad j'=3-j,\quad c_p=\begin{cases}1, & p=2,\\ 2, & p=\infty.\end{cases}$$

<u>Доказательство</u>. По теореме 4 ошибка $\mathcal{U}x$ представима в виде

$$(\mathcal{U}x)(t^1,t^2)=\iint\limits_E D^{(1,1)}x(\tau^1,\tau^2)K_0(t^1,t^2,\tau^1,\tau^2)d\tau^1d\tau^2 \quad \text{, где}$$

$$K_0(t^1,t^2,\tau^1,\tau^2)=(\mathcal{U}(\varphi_0(\cdot,\tau^1)\varphi_0(\cdot,\tau^2)))(t^1,t^2),\quad (t^1,t^2),(\tau^1,\tau^2)\in E. \tag{34}$$

Тогда

$$|(\mathcal{U}x)(t^1,t^2)|\le \|D^{(1,1)}x\|_{L_\infty(E)}\iint\limits_E|K_0(t^1,t^2,\tau^1,\tau^2)|d\tau^1d\tau^2 \tag{35}$$

и

$$|(\mathcal{U}x)(t^1,t^2)|\le \|D^{(1,1)}x\|_{L_2(E)}\Big[\iint K_0^2(t^1,t^2,\tau^1,\tau^2)\,d\tau^1d\tau^2\Big]^{\frac12}. \tag{36}$$

Вычислим интегралы, записанные в правых частях неравенств (35)-(36), предварительно преобразовав выражения для ядра (34).

$$K_0(t^1,t^2,\tau^1,\tau^2)=\varphi_0(t^1,\tau^1)\varphi_0(t^2,\tau^2)-\sum_{l_1=1}^{n_1}\sum_{l_2=1}^{n_2}\varphi_0(t^1_{l_1},\tau^1)\varphi_0(t^2_{l_2},\tau^2)s_{l_1l_2}(t^1,t^2)=$$

$$=\begin{cases}1-\sum\limits_{l_1=k_1}^{n_1}\sum\limits_{l_2=k_2}^{n_2}s_{l_1l_2}(t^1,t^2) & (\tau^1,\tau^2)\in E_{k_1k_2}\cap([a^1,t^1]\times[a^2,t^2]),\\ -\sum\limits_{l_1=k_1}^{n_1}\sum\limits_{l_2=k_2}^{n_2}s_{l_1l_2}(t^1,t^2) & (\tau^1,\tau^2)\in E_{k_1k_2}\setminus([a^1,t^1]\times[a^2,t^2]),\end{cases} \tag{37}$$

$k_j=\overline{1,n_j+1},\quad j=\overline{1,2},\quad (t^1,t^2)\in E.$

Предположим, что $(t^1,t^2)\in E_{i_1i_2}$ и рассмотрим случай, когда $i_j=\overline{2,n_j}$.

Выражения для $s_{l_1 l_2}(t^1,t^2)$ получим на основе характеризующих сплайны дифференциальных свойств I)–4) (предложение I.2) и интерполяционных условий

$$s_{l_1 l_2}(t^1,t^2)=\begin{cases} 1-(-1)^{i_1-l_1}\dfrac{t^1_{i_1}-t^1}{h^1_{i_1}}-(-1)^{i_2-l_2}\dfrac{t^2_{i_2}-t^2}{h^2_{i_2}}+(-1)^{i_1+i_2-l_1-l_2}\dfrac{t^1_{i_1}-t^1}{h^1_{i_1}}\dfrac{t^2_{i_2}-t^2}{h^2_{i_2}}, & l_j=\overline{i_j-1,i_j},\ j=\overline{1,2},\\ 0 & \text{при всех остальных значениях } l_1 \text{ и } l_2. \end{cases} \tag{38}$$

Учитывая, что при этом $\sum\limits_{l_1=i_1-1}^{i_1}\sum\limits_{l_2=i_2-1}^{i_2} s_{l_1 l_2}(t^1,t^2)=1$, из (37) находим

$$K_0(t^1,t^2,\tau^1,\tau^2)=\begin{cases} 1-s_{i_1 i_2}(t^1,t^2)-\delta_{l_1 i_1}(1-\delta_{l_2 i_2})s_{i_1 i_2-1}(t^1,t^2)-\delta_{l_2 i_2}(1-\delta_{l_1 i_1})s_{i_1-1 i_2}(t^1,t^2), & (\tau^1,\tau^2)\in E_{k_1k_2}\cap([a^1,t^1]\times[a^2,t^2]),\\ -s_{i_1 i_2}(t^1,t^2)-\delta_{l_1 i_1}(1-\delta_{l_2 i_2})s_{i_1 i_2-1}(t^1,t^2)-\delta_{l_2 i_2}(1-\delta_{l_1 i_1})s_{i_1-1 i_2}(t^1,t^2), & (\tau^1,\tau^2)\in E_{k_1k_2}\setminus([a^1,t^1]\times[a^2,t^2]),\\ & \text{если } k_1=i_1,\ k_2\le i_2 \text{ или } k_2=i_2,\ k_1\le i_1,\\ 0 & \text{если } (\tau^1,\tau^2)\in E_{k_1k_2} \text{ при остальных значениях } k_1 \text{ и } k_2. \end{cases}$$

(здесь δ_{li} – символ Кронекера). Непосредственные вычисления интегралов, подстановка выражений (38) для базисных сплайнов и последующие несложные преобразования приводят к результату:

$$\iint_E |K_0(t^1,t^2,\tau^1,\tau^2)|\,d\tau^1 d\tau^2=[(s_{i_1-1 i_2-1}(t^1,t^2)+s_{i_1 i_2-1}(t^1,t^2))(t^2-t^2_{i_2-1})+(s_{i_1-1 i_2}(t^1,t^2)+s_{i_1 i_2}(t^1,t^2))(t^2_{i_2}-t^2)](t^1_{i_1-1}-a^1)+$$
$$+[(s_{i_1-1 i_2-1}(t^1,t^2)+s_{i_1-1 i_2}(t^1,t^2))(t^1-t^1_{i_1-1})+(s_{i_1 i_2-1}(t^1,t^2)+s_{i_1 i_2}(t^1,t^2))(t^1_{i_1}-t^1)](t^2_{i_2-1}-a^2)+$$
$$+(1-s_{i_1 i_2}(t^1,t^2))(t^1-t^1_{i_1-1})(t^2-t^2_{i_2-1})+s_{i_1 i_2}(t^1,t^2)((t^1_{i_1}-t^1_{i_1-1})(t^2_{i_2}-t^2_{i_2-1})-(t^1-t^1_{i_1-1})(t^2-t^2_{i_2-1}))=$$
$$=2\Big[(t^2_{i_2-1}-a^2)\frac{(t^1_{i_1}-t^1)(t^1-t^1_{i_1-1})}{h^1_{i_1}}+(t^1_{i_1-1}-a^1)\frac{(t^2_{i_2}-t^2)(t^2-t^2_{i_2-1})}{h^2_{i_2}}+(t^1-t^1_{i_1-1})(t^2-t^2_{i_2-1})\Big(1-\frac{t^1-t^1_{i_1-1}}{h^1_{i_1}}\,\frac{t^2-t^2_{i_2-1}}{h^2_{i_2}}\Big)\Big],$$

$$\iint_E K_0^2(t^1,t^2,\tau^1,\tau^2)\,d\tau^1 d\tau^2=[(s_{i_1-1 i_2-1}(t^1,t^2)+s_{i_1 i_2-1}(t^1,t^2))^2(t^2-t^2_{i_2-1})+(s_{i_1-1 i_2}(t^1,t^2)+s_{i_1 i_2}(t^1,t^2))^2(t^2_{i_2}-t^2)](t^1_{i_1-1}-a^1)+$$
$$+[(s_{i_1-1 i_2-1}(t^1,t^2)+s_{i_1-1 i_2}(t^1,t^2))^2(t^1-t^1_{i_1-1})+(s_{i_1 i_2-1}(t^1,t^2)+s_{i_1 i_2}(t^1,t^2))^2(t^1_{i_1}-t^1)](t^2_{i_2-1}-a^2)+$$
$$+(1-s_{i_1 i_2}(t^1,t^2))^2(t^1-t^1_{i_1-1})(t^2-t^2_{i_2-1})+s_{i_1 i_2}(t^1,t^2)^2((t^1_{i_1}-t^1_{i_1-1})(t^2_{i_2}-t^2_{i_2-1})-(t^1-t^1_{i_1-1})(t^2-t^2_{i_2-1}))=$$
$$=(t^2_{i_2-1}-a^2)\frac{(t^1_{i_1}-t^1)(t^1-t^1_{i_1-1})}{h^1_{i_1}}+(t^1_{i_1-1}-a^1)\frac{(t^2_{i_2}-t^2)(t^2-t^2_{i_2-1})}{h^2_{i_2}}+(t^1-t^1_{i_1-1})(t^2-t^2_{i_2-1})\Big(1-\frac{t^1-t^1_{i_1-1}}{h^1_{i_1}}\,\frac{t^2-t^2_{i_2-1}}{h^2_{i_2}}\Big).$$

Интересующие нас интегралы для $(t^1,t^2)\in E_{i_1 i_2}$ в случаях, когда $i_1\in\{1,n_1+1\}$ или $i_2\in\{1,n_2+1\}$, вычисляются по той же схеме. Мы ограничимся лишь тем, что выпишем выражения для $s_{l_1 l_2}(t^1,t^2)$ и $K_0(t^1,t^2,\tau^1,\tau^2)$ в каждом из них.

Пусть $(t^1,t^2)\in E_{i_1i_2}$. Введём в рассмотрение множества $M^1_{i_1i_2}=\bigcup\limits_{l_1=1}^{i_1-1}E_{l_1i_2}$ и $M^2_{i_1i_2}=\bigcup\limits_{l_2=1}^{i_2-1}E_{i_1l_2}$ и обозначим $\underline{M}=M\cap([a^1,t^1]\times[a^2,t^2])$, $\overline{M}=M\setminus([a^1,t^1]\times[a^2,t^2])$ для всякого $M\subset E$. Условимся, что $\underline{i}_j=\min\{n_j,i_j\}$, $j=\overline{1,2}$. Если теперь $i_1=i_2=1$ или $i_j=n_j+1, j=\overline{1,2}$, то $S_{l_1l_2}(t^1,t^2)=\delta_{l_1i_1}\delta_{l_2i_2}$ и $K_0(t^1,t^2,\cdot,\cdot)=\chi_{\overline{E}_{11}}$ при $i_1=i_2=1$, $K_0(t^1,t^2,\cdot,\cdot)=\chi_{\underline{E}_{i_1i_2}\cup\underline{M}^1_{i_1i_2}\cup\underline{M}^2_{i_1i_2}}$ при $i_j=n_j+1$, $j=\overline{1,2}$, где χ_M – характеристическая функция множества $M\subset E$. В случае $i_j=1$, $i_{j'}=\overline{2,n_{j'}}$ $(j'=3-j)$ имеем

$$S_{l_1l_2}(t^1,t^2)=\begin{cases}\frac{1}{h^j_1h^{j'}_{i_{j'}}}(t^j-a^j)(t^{j'}_{i_{j'}}-t^{j'}), & l_j=1,\ l_{j'}=i_{j'}-1,\\ \frac{1}{h^j_1h^{j'}_{i_{j'}}}(t^j-a^j)(t^{j'}-t^{j'}_{i_{j'}-1}), & l_j=1,\ l_{j'}=i_{j'},\\ \frac{1}{h^j_1}(t^j_1-t^j), & l_1=l_2=1,\\ 0 & \text{при остальных значениях } l_1 \text{ и } l_2,\end{cases}$$

откуда

$$K_0(t^1,t^2,\cdot,\cdot)=\chi_{\overline{E}_{11}}+S_{i_1i_2}(t^1,t^2)\chi_{\overline{E}_{i_1i_2}}+(1-S_{i_1i_2}(t^1,t^2))\chi_{\underline{E}_{i_1i_2}}+S_{11}(t^1,t^2)\chi_{\underline{M}^{j'}_{i_1i_2}\setminus E_{11}}+(1-S_{11}(t^1,t^2))\chi_{\overline{M}^{j'}_{i_1i_2}\setminus E_{11}}.$$

Если $i_j=\overline{2,n_j}$, $i_{j'}=n_{j'}+1$, то получаем

$$S_{l_1l_2}(t^1,t^2)=\begin{cases}\frac{1}{h^j_{i_j}}(t^j_{i_j}-t^j), & l_j=i_j-1,\ l_{j'}=n_{j'},\\ \frac{1}{h^j_{i_j}}(t^j-t^j_{i_j-1}), & l_j=i_j,\ l_{j'}=n_{j'},\\ 0 & \text{при остальных значениях } l_1 \text{ и } l_2,\end{cases}$$

$$K_0(t^1,t^2,\cdot,\cdot)=\chi_{\underline{E}_{i_1i_2}\cup\underline{M}^j_{i_1i_2}}+S_{\underline{i}_1\underline{i}_2}(t^1,t^2)\chi_{\overline{M}^{j'}_{i_1i_2}}+(1-S_{\underline{i}_1\underline{i}_2}(t^1,t^2))\chi_{\underline{M}^{j'}_{i_1i_2}}.$$

В случае $i_j=1$, $i_{j'}=n_{j'}+1$ отличными от нуля будут лишь значения сплайнов $S_{11}(t^1,t^2)=\frac{1}{h^j_1}(t^j_1-t^j)$, $S_{\underline{i}_1\underline{i}_2}(t^1,t^2)=\frac{1}{h^j_1}(t^j-a^j)$. Тогда

$$K_0(t^1,t^2,\cdot,\cdot)=\chi_{\overline{E}_{11}\cup\underline{E}_{i_1i_2}}+S_{11}(t^1,t^2)\chi_{\underline{M}^{j'}_{i_1i_2}}+(1-S_{11}(t^1,t^2))\chi_{\overline{M}^{j'}_{i_1i_2}}.$$

2. Эрмитовы сплайны

Эрмитовы сплайны решают задачу интерполяции функции по заданным в узлах разбиения Δ значениям самой функции и её производных: $D^{(\tau_1,\tau_2)}x(t^1_{i_1},t^2_{i_2})$, $\tau_j=\overline{0,K_j-1}$, $K_j\le q$, $i_j=\overline{1,n_j}$, $j=\overline{1,2}$. Рассмотрим оператор $A: X\to\mathbb{R}^{n_1n_2K_1K_2}$, где $(Ax)_{i_1i_2\tau_1\tau_2}=D^{(\tau_1,\tau_2)}x(t^1_{i_1},t^2_{i_2})$, $\tau_j=\overline{0,K_j-1}$, $i_j=\overline{1,n_j}$, $j=\overline{1,2}$. Этот оператор может быть задан по формуле (I) при помощи операторов одномерной эрмитовой интерполяции:

По теореме I его непрерывность следует из непрерывности операторов A_1 и A_2.

Для изучения интерполяции сплайнами из $S(T,A)$ применима общая теория и из теорем 2-4 вытекают предложения 2.I-2.3, доказательства которых можно получить, придерживаясь схемы доказательств предложений I.I-I.3.

Предложение 2.I. При условии $q \le \min\{n_1 k_1, n_2 k_2\}$ для каждого вектора $z \in \mathbb{R}^{n_1 n_2 k_1 k_2}$ в пространстве $S(T,A)$ существует единственный интерполяционный сплайн.

Предложение 2.2. Пространство $S(T,A)$ состоит из функций $s \in H^{2q}_{q,q}(E)$, которые представимы в виде

$$s(t^1,t^2)=\sum_{l_1=0}^{q-1}\sum_{l_2=0}^{q-1}\alpha_{l_1 l_2}(t^1)^{l_1}(t^2)^{l_2}+\sum_{i_1=1}^{n_1}\sum_{i_2=1}^{n_2}\sum_{\nu_1=0}^{k_1-1}\sum_{\nu_2=0}^{k_2-1}\frac{\lambda_{i_1 i_2 \nu_1 \nu_2}(-1)^{\nu_1+\nu_2}}{(2q-\nu_1-1)!(2q-\nu_2-1)!}(t^1-t^1_{i_1})_+^{2q-\nu_1-1}(t^2-t^2_{i_2})_+^{2q-\nu_2-1}+$$

$$+\sum_{i_1=1}^{n_1}\sum_{i_2=1}^{n_2}\sum_{\nu_1=0}^{k_1-1}\sum_{\nu_2=0}^{k_2-1}\frac{\lambda_{i_1 i_2 \nu_1 \nu_2}}{(2q-\nu_1-1)!}(t^1-t^1_{i_1})_+^{2q-\nu_1-1}\sum_{l=0}^{q-\nu_2-1}\frac{(-1)^{q-l+\nu_1}}{(q+l)!(q-l-\nu_2-1)!}(t^2_{i_2}-a^2)^{q-l-\nu_2-1}(t^2-a^2)^{q+l}+$$

$$+\sum_{i_1=1}^{n_1}\sum_{i_2=1}^{n_2}\sum_{\nu_1=0}^{k_1-1}\sum_{\nu_2=0}^{k_2-1}\frac{\lambda_{i_1 i_2 \nu_1 \nu_2}}{(2q-\nu_2-1)!}(t^2-t^2_{i_2})_+^{2q-\nu_2-1}\sum_{l=0}^{q-\nu_1-1}\frac{(-1)^{q-l+\nu_2}}{(q+l)!(q-l-\nu_1-1)!}(t^1_{i_1}-a^1)^{q-l-\nu_1-1}(t^1-a^1)^{q+l},$$

где числа $\alpha_{l_1 l_2}$ произвольны, а числа $\lambda_{i_1 i_2 \nu_1 \nu_2}$ удовлетворяют условию: $\sum_{i_1=1}^{n_1}\sum_{i_2=1}^{n_2}\sum_{\nu_1=0}^{l_1'}\sum_{\nu_2=0}^{l_2'}\frac{\lambda_{i_1 i_2 \nu_1 \nu_2}}{(l_1-\nu_1)!(l_2-\nu_2)!}(t^1_{i_1})^{l_1-\nu_1}(t^2_{i_2})^{l_2-\nu_2}=0$, $l_j'=\min\{l_j,k_j-1\}$, $l_j=\overline{0,q-1}$, $j=\overline{1,2}$.

Такое представление для $s \in H^{2q}_{q,q}(E)$ возможно тогда и только тогда, когда s обладает свойствами:

I) $D^{(2q,0)}s(t^1,t^2)=0$ для $(t^1,t^2)\in]t^1_{i-1},t^1_i[\times[a^2,b^2]$, $i=\overline{1,n_1+1}$,
$D^{(0,2q)}s(t^1,t^2)=0$ для $(t^1,t^2)\in[a^1,b^1]\times]t^2_{i-1},t^2_i[$, $i=\overline{1,n_2+1}$;

2) $D^{(2q-k_1-1,2q-k_2-1)}s \in C(E)$;

3) $D^{(q,q)}s(t^1,t^2)=0$ для
$(t^1,t^2)\in(]t^1_0,t^1_1[\times]t^2_0,t^2_1[)\cup(]t^1_{n_1},t^1_{n_1+1}[\times[a^2,b^2])\cup([a^1,b^1]\times]t^2_{n_2},t^2_{n_2+1}[)$;

4) $D^{(q,k)}s(t^1,a^2)=D^{(k,q)}s(a^1,t^2)=0$ при $k=\overline{0,q-1}$ для $t^j\in[a^j,b^j]$, $j=\overline{1,2}$.

Предложение 2.3. Для ошибки $\mathcal{U}x$ интерполяции функции $x\in X$ эрмитовыми сплайнами в случае $q=k_1=k_2=2$ имеет место оценка

$$|(\mathcal{U}x)(t^1,t^2)|\le B_{i_1 i_2}(t^1,t^2)\|D^{(2,2)}x\|_{L_\infty(E)},\ (t^1,t^2)\in E_{i_1 i_2},\ i_j=\overline{2,n_j},\ j=\overline{1,2},$$

где

$$B_{i_1i_2}(t^1,t^2)=\frac{1}{4}(h^1_{i_1})^2(h^2_{i_2})^2(u^1)^2(u^2)^2[1+(1-2u^1u^2(2-u^1)(2-u^2))(3-2u^1)(3-2u^2)+$$
$$+2(1-2u^1u^2(2-u^2))(1-u^1)(3-2u^2)+2(1-2u^1u^2(2-u^1))(3-2u^1)(1-u^2)+$$
$$+4(1-2u^1u^2)(1-u^1)(1-u^2)]+\frac{1}{2}(h^1_{i_1})^2(u^1)^2[(\frac{1}{2}(t^2_{i_2-1}-a^2)^2+(t^2_{i_2-1}-a^2)h^2_{i_2}u^2)+$$
$$+(\frac{1}{2}(t^2_{i_2-1}-a^2)^2+(t^2_{i_2-1}-a^2)h^2_{i_2}u^2(1+2u^2(1-u^2))(1+4(1-u^1)^2-u^1(2-u^1)(3-2u^1))]+$$
$$+\frac{1}{2}(h^2_{i_2})^2(u^2)^2[(\frac{1}{2}(t^1_{i_1-1}-a^1)^2+(t^1_{i_1-1}-a^1)h^1_{i_1}u^1)+(\frac{1}{2}(t^1_{i_1-1}-a^1)^2+(t^1_{i_1-1}-a^1)h^1_{i_1}u^1\times$$
$$\times(1+2u^1(1-u^1))(1+4(1-u^2)^2-u^2(2-u^2)(3-2u^2))],\quad u^j=\frac{t^j-t^j_{i_j-1}}{h^j_{i_j}},\ j=\overline{1,2}.$$

3. Сплайны для локальных средних

Возьмём $A_j: H^q[a^j,b^j]\to\mathbb{R}^{n_j+1}$, $(A_jx)_i=\frac{1}{h^j_i}\int\limits_{t^j_{i-1}}^{t^j_i}x(t)dt,\ i=\overline{1,n_j+1},\ j=\overline{1,2}$.

Тогда A – оператор интерполяции интегральных средних, подсчитанных по прямоугольникам $E_{i_1i_2}=[t^1_{i_1-1},t^1_{i_1}]\times[t^2_{i_2-1},t^2_{i_2}]$, т.е. $A:X\to\mathbb{R}^{(n_1+1)(n_2+1)}$, $(Ax)_{i_1i_2}=\frac{1}{h^1_{i_1}h^2_{i_2}}\iint\limits_{E_{i_1i_2}}x(t^1,t^2)dt^1dt^2,\ i_j=\overline{1,n_j+1}$. По теореме I его непрерывность следует из непрерывности операторов A_1 и A_2.

Для изучения интерполяции сплайнами из $S(T,A)$ применима общая теория и из теорем 2–4 вытекают предложения 3.I–3.3, доказательства которых можно получить, придерживаясь схемы доказательств предложений I.I–I.3.

Предложение 3.I. При условии $q\le\min\{n_1+1,n_2+1\}$ для каждого вектора $z\in\mathbb{R}^{(n_1+1)(n_2+1)}$ в пространстве $S(T,A)$ существует единственный интерполяционный сплайн.

Предложение 3.2. Пространство $S(T,A)$ состоит из функций $s\in H^{2q}_{q,q}(E)$, которые представимы в виде

$$s(t^1,t^2)=\sum_{l_1=0}^{q-1}\sum_{l_2=0}^{q-1}\alpha_{l_1l_2}(t^1)^{l_1}(t^2)^{l_2}+\sum_{i_1=1}^{n_1+1}\sum_{i_2=1}^{n_2+1}\frac{\lambda_{i_1i_2}}{[(2q)!]^2}\frac{(t^1-t^1_{i_1})_+^{2q}-(t^1-t^1_{i_1-1})_+^{2q}}{h^1_{i_1}}\frac{(t^2-t^2_{i_2})_+^{2q}-(t^2-t^2_{i_2-1})_+^{2q}}{h^2_{i_2}}+$$
$$+\sum_{i_1=1}^{n_1+1}\sum_{i_2=1}^{n_2+1}\frac{\lambda_{i_1i_2}}{(2q)!}\frac{(t^1-t^1_{i_1})_+^{2q}-(t^1-t^1_{i_1-1})_+^{2q}}{h^1_{i_1}}\sum_{l=0}^{q-1}\frac{(-1)^{q-l-1}}{(q+l)!(q-l)!}\frac{(t^2_{i_2}-a^2)^{q-l}-(t^2_{i_2-1}-a^2)^{q-l}}{h^2_{i_2}}(t^2-a^2)^{q+l}+$$
$$+\sum_{i_1=1}^{n_1+1}\sum_{i_2=1}^{n_2+1}\frac{\lambda_{i_1i_2}}{(2q)!}\frac{(t^2-t^2_{i_2})_+^{2q}-(t^2-t^2_{i_2-1})_+^{2q}}{h^2_{i_2}}\sum_{l=0}^{q-1}\frac{(-1)^{q-l-1}}{(q+l)!(q-l)!}\frac{(t^1_{i_1}-a^1)^{q-l}-(t^1_{i_1-1}-a^1)^{q-l}}{h^1_{i_1}}(t^1-a^1)^{q+l},$$

где числа $\alpha_{i_1 i_2}$, $l_j=\overline{0,q-1}$, $j=\overline{1,2}$, произвольны, а числа $\lambda_{i_1 i_2}$, $i_j=\overline{1,n_j+1}$, $j=\overline{1,2}$, удовлетворяют условиям:

$$\sum_{i_1=1}^{n_1+1}\sum_{i_2=1}^{n_2+1}\lambda_{i_1 i_2}\,\frac{(t^1_{i_1})^{l_1}-(t^1_{i_1-1})^{l_1}}{h^1_{i_1}}\,\frac{(t^2_{i_2})^{l_2}-(t^2_{i_2-1})^{l_2}}{h^2_{i_2}}=0,\ l_j=\overline{1,q},\ j=\overline{1,2}.$$

Такое представление для $S\in H^{2q}_{q,q}(E)$ возможно тогда и только тогда, когда S обладает свойствами:

1) $\mathcal{D}^{(2q+1,0)}S(t^1,t^2)=0$ для $(t^1,t^2)\in\,]t^1_{i-1},t^1_i[\,\times[a^2,b^2]$, $i=\overline{1,n_1+1}$,
$\mathcal{D}^{(0,2q+1)}S(t^1,t^2)=0$ для $(t^1,t^2)\in[a^1,b^1]\times\,]t^2_{i-1},t^2_i[$, $i=\overline{1,n_2+1}$;

2) $\mathcal{D}^{(2q-1,2q-1)}S\in C(E)$;

3) $\mathcal{D}^{(k_1,k_2)}S(b^1,t^2)=\mathcal{D}^{(k_1,k_2)}S(t^1,b^2)=0$ для $t^j\in[a^j,b^j]$, $j=\overline{1,2}$,
$\mathcal{D}^{(k_1,k_2)}S(a^1,a^2)=0$ при $k_j=\overline{q,2q-1}$;

4) $\mathcal{D}^{(q,k)}S(t^1,a^2)=\mathcal{D}^{(k,q)}S(a^1,t^2)=0$ при $k=\overline{0,q-1}$ для $t^j\in[a^j,b^j]$, $j=\overline{1,2}$.

Сплайны для интегральных средних уже в случае $q=1$ (т.е. сплайны минимальной степени) не будут локальными. Поэтому для них получение точной оценки ошибки сплайн-интерполяции на основе её интегрального представления затруднительно. Следующее предложение даёт оценку сходимости интерполяционного процесса, точную по порядку.

Предложение 3.3. Для ошибки Ux интерполяции функции $x\in X$ сплайнами для локальных средних в случае $q=1$, $h^j_i=h^j$, $i=\overline{1,n_j+1}$, $j=\overline{1,2}$, справедливо неравенство

$$|(Ux)(t^1,t^2)|\le(C^1h^1+C^2h^2+Ch^1h^2)\,\|\mathcal{D}^{(1,1)}x\|_{L_\infty(E)},\ (t^1,t^2)\in E_{i_1 i_2},$$

где константы C^1, C^2 и C зависят только от i_j, $j=\overline{1,2}$.

Полученные результаты могут быть обобщены и развиты в следующих направлениях:

1. По этой схеме могут быть рассмотрены пространства сплайнов, соответствующие самым разным операторам интерполяции (не обязательно связанным с прямоугольной сеткой узлов).

2. Задавая пространство X, в качестве L можно взять любое конечномерное подпространство ядра оператора $\mathcal{D}^{(q,q)}$.

3. Вместо оператора T можно взять оператор $D^{(q_1,q_2)}$ $(q_1 \neq q_2)$, соответственно изменив пространство X.

4. Эти результаты могут быть распространены на случай n переменных ($n > 2$).

5. Можно, наконец, рассмотреть вопрос о сглаживающих сплайнах пространства $S(T,A)$.

Ясно, что эти изменения можно производить одновременно.

Автор благодарит доц. М.А.Гольдмана за постановку задачи и обсуждение результатов.

Библиографический список

I. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация.-М., 1975.
2. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и её приложения.-М., 1972.
3. Завьялов Ю.С. Экстремальные свойства сплайн-функций многих переменных // Теория приближения функций: Труды Межд.конф. (Калуга, 1975).-М., 1977.-С.182-187.
4. Завьялов Ю.С., Имамов А. О вариационных задачах теории сплайнов // Математический анализ и смежные вопросы математики.-Новосибирск, 1978.-С.27-36.
5. Гольдман М.А. Замечание о сплайнах в гильбертовом пространстве // Настоящий сборник.- С.29-32.
6. Асмусс С.В. Оценка ошибки сплайн-интерполяции // Топологические структуры и их отображения.-Рига, 1987.-С.15-26.

S.Asmuss. Some interpolations by spline-functions of two variables.

Summary. In this paper we study interpolating bivariate polinomial splines defined as the solutions of the variational problem. Existence and uniqueness conditions for such splines, their representation in analytic form and characterization in terms of differential properties are obtained. An integral representation of the error is proved. All results are formulated for any interpolation operator. As examples simple splines, Hermite splines and splines which interpolate the local mean values are considered. AMS Subject classification 65D07.

Кафедра математического анализа
Латвийский университет
бульв. Райниса, I9
226098 г. Рига

Latvijas Universitates Zinātniskie Raksti,552.(1990)
Matemātika,I.

ЗАМЕЧАНИЕ О СПЛАЙНАХ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

М.А.Гольдман

Аннотация. Устанавливается некоторый вариант теоремы характеризации сплайнов в гильбертовом пространстве, связанный с рассмотрением оператора проектирования пространства на ядро оператора сглаживания. Приводится применение этого результата к вопросу об определении и характеризации сплайн-функций нескольких переменных.

Пусть X, Y, Z - вещественные гильбертовы пространства, $T: X\to Y$ и $A: X\to Z$ - линейные операторы. Пусть, далее, $S(T,A)$ - пространство сплайнов, соответствующее T и A ([I], с.20I, Определение 4.5.3), т.е.

$$S(T,A)=\{s\in X \mid \forall x\in \mathcal{N}(A)\ \langle Ts, Tx\rangle=0\}, \quad (\mathrm{I})$$

где $\mathcal{N}(A)$ - ядро оператора A, а $\langle\ ,\ \rangle$ - знак скалярного произведения. В случае, когда оператор T непрерывен, (I) можно записать в виде

$$S(T,A)=\{s\in X \mid T^*Ts\in \mathcal{N}(A)^{\perp}\}, \quad (2)$$

где T^* - оператор, сопряженный с T. Если наряду с T непрерывен и оператор A, причем его область значений $\mathcal{R}(A)$ замкнута, то в силу (2)

$$s\in S(T,A) \Leftrightarrow \exists\lambda\in Z:\ T^*Ts=A^*\lambda \quad (3)$$

([I], с.20I, Следствие 4.5.2).

<u>Теорема</u>. Пусть выполнены предпосылки утверждения (3). Тогда

$$s\in S(T,A)\Leftrightarrow \exists\lambda\in Z:\ \forall x\in X\ \ \langle Ts, Tx\rangle=\langle\lambda, Ax\rangle \quad (4)$$

и

$$s\in S(T,A)\Leftrightarrow \exists\lambda\in Z:\ \forall x\in X\ \langle Ts, Tx\rangle=\langle\lambda, A(x-Px)\rangle, \quad (5)$$

где P - какое-либо отображение пространства X в $\mathcal{N}(T)$.

<u>Доказательство</u>. Умножив равенство $T^*Ts=A^*\lambda$ (см.(3))

на произвольный элемент $x \in X$, получим $\langle T^*Ts, x\rangle = \langle A^*\lambda, x\rangle$ или $\langle Ts, Tx\rangle = \langle \lambda, Ax\rangle$. Отсюда и из (3) следует (4).

Из равенства $\langle Ts, Tx\rangle = \langle \lambda, Ax\rangle$ видно, что если $x \in \mathcal{N}(T)$, то $\langle \lambda, Ax\rangle = 0$, следовательно $\forall x \in X$ $\langle \lambda, APx\rangle = 0$ и $\forall x \in X$ $\langle \lambda, Ax\rangle = \langle \lambda, A(x-Px)\rangle$. Заменив в (4) $\langle \lambda, Ax\rangle$ на $\langle \lambda, A(x-Px)\rangle$, получим (5).

Замечание I. Утверждение (4) получается из утверждения (5), если в последнем положить $P=0$ (т.е. $\forall x \in X$ $Px = \theta_x$, где θ_x - нулевой элемент пространства X).

Рассмотрим случай, когда P - линейный оператор проектирования пространства X на $\mathcal{N}(T)$ ($P(X) = \mathcal{N}(T)$ и $P^2 = P$). В этом случае оператор $Q = I - P$, где I - тождественный оператор на X, тоже является линейным оператором проектирования, причем $\mathcal{N}(Q) = \mathcal{N}(T)$. Обратно, если Q - некоторый линейный оператор проектирования в X, для которого $\mathcal{N}(Q) = \mathcal{N}(T)$, то $P = I - Q$ является линейным оператором проектирования X на $\mathcal{N}(T)$. В силу этого имеет место следующий вариант утверждения (5).

Если Q - линейный оператор проектирования в X, такой, что $\mathcal{N}(Q) = \mathcal{N}(T)$, то

$$s \in S(T, A) \Leftrightarrow \exists \lambda \in Z: \forall x \in X \ \langle Ts, Tx\rangle = \langle \lambda, AQx\rangle. \quad (6)$$

Оператор Q порождает разложение пространства X в прямую сумму его подпространств $\mathcal{N}(T)$ и $\mathcal{R}(Q)$ (это означает, что $X = \mathcal{N}(T) + \mathcal{R}(Q)$ и $\mathcal{N}(T) \cap \mathcal{R}(Q) = \{\theta_x\}$). При дополнительном предположении, что оператор Q непрерывен, множество $\mathcal{R}(Q)$ замкнуто в X ([2], с.553, упражнение 21). Этот факт может быть использован следующим образом. Выберем в $\mathcal{N}(T)$ какое-либо конечномерное подпространство L и положим $X_0 = L + \mathcal{R}(Q)$. В силу замкнутости в X подпространства $\mathcal{R}(Q)$ и конечномерности L, пространство X_0 замкнуто в X. Следовательно, X_0 является гильбертовым пространством. Заменив пространство X пространством X_0, а операторы T и A - их сужениями $T_0 = T|_{X_0}$ и $A_0 = A|_{X_0}$, получим новое пространство сплайнов $S(T_0, A_0)$ с оператором сглаживания T_0, для которого $\mathcal{N}(T_0) = L$. Легко видеть, что $S(T, A) \cap X_0 \subset S(T_0, A_0)$.

Замечание 2. С точки зрения приложений важно, чтобы пространство сплайнов $S(T, A)$ было конечномерным. Этого не будет, если $\dim \mathcal{N}(T) = \infty$ (поскольку $\mathcal{N}(T) \subset S(T, A)$).

В этом случае целесообразно заменить пространство $S(T, A)$ пространством $S(T_0, A_0)$ с конечномерным $\mathcal{N}(T_0)$.

Применим изложенные сейчас соображения к вопросу об определении и характеризации сплайн-функций нескольких переменных.

Пусть дан прямоугольник $E=[a,b]\times[c,d]$. Обозначим через $\mathcal{H}^{2q}_{q,q}(E)$ пространство определенных на E функций $x(t,\tau)$, имеющих абсолютно непрерывные на E производные $\frac{\partial x^{\alpha_1+\alpha_2}(t,\tau)}{\partial t^{\alpha_1}\partial\tau^{\alpha_2}}$, где $0\le\alpha_1,\alpha_2\le q$, $\alpha_1+\alpha_2\le 2q-1$, и производную $\frac{\partial^{2q}x(t,\tau)}{\partial t^q\partial\tau^q}$, принадлежащую пространству $L_2(E)$. Введем в $\mathcal{H}^{2q}_{q,q}(E)$ скалярное произведение и норму по формулам:

$$\langle x,\tilde{x}\rangle=\sum_{\substack{0\le\alpha_1,\alpha_2\le q,\\ \alpha_1+\alpha_2\le 2q}}\iint\limits_E\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2}x(t,\tau)}{\partial t^{\alpha_1}\partial\tau^{\alpha_2}}\,\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2}\tilde{x}(t,\tau)}{\partial t^{\alpha_1}\partial\tau^{\alpha_2}}\,dt\,d\tau,$$

$$\|x\|=\langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}};\quad x,\tilde{x}\in\mathcal{H}^{2q}_{q,q}(E).$$

Полученное нормированное пространство является гильбертовым. Обозначим его через X. Зададим оператор $T: X\to Y$, где $Y=L_2(E)$, полагая $\forall x\in X$ $(Tx)(t,\tau)=\frac{\partial^{2q}x(t,\tau)}{\partial t^q\partial\tau^q}$.

Оператор T линеен, непрерывен и $\mathcal{R}(T)=Y$. Положим $\forall x\in X$

$$(Qx)(t,\tau)=\iint\limits_E(Tx)(u,v)(t-u)_+^{q-1}(\tau-v)_+^{q-1}\,du\,dv.$$

Оператор Q является линейным непрерывным оператором проектирования в пространстве X, причем $\mathcal{N}(Q)=\mathcal{N}(T)$.

Зададим оператор интерполяции A следующим образом. Выберем на E сетку $\{(t_i,\tau_j)\,|\,i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}\}$, где $t_1<\dots<t_m$, $\tau_1<\dots<\tau_n$, $a<t_1$, $t_m<b$, $c<\tau_1$, $\tau_n<d$ и положим $\forall x\in X$

$$Ax=(x(t_1,\tau_1),\dots,x(t_m,\tau_1),\dots,x(t_1,\tau_n),\dots,x(t_m,\tau_n))$$

Оператор A линеен, непрерывен и отображает X на $Z=\mathbb{R}^{mn}$. Соответствующее операторам T и A пространство $S(T,A)$

является пространством простых сплайн-функций от двух переменных. Так как $dim\,\mathcal{N}(T)=\infty$, то заменим $S(T, A)$ на $S(T_o, A_o)$ (см. Замечание 2 и предшествующий ему абзац), взяв, например, в качестве L часть $\mathcal{N}(T)$, состоящую из всевозможных полиномов вида $\sum\limits_{i=0}^{s-1}\sum\limits_{j=0}^{s-1} a_{ij} t^i \tau^j$.

Для характеризации сплайнов пространства $S(T_o, A_o)$ можно воспользоваться утверждением (6), в котором вместо операторов T, A и Q следует взять их сужения на $X_o = L + \mathcal{R}(Q)$.

Аналогично можно ввести и другие сплайн-функции двух переменных (например, эрмитовы); для этого нужно изменить подходящим образом лишь оператор A. Сплайн-функции большего числа переменных вводятся по той же схеме, что и в случае двух переменных; принципиальных трудностей при этом не возникает.

Библиографический список

I. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация. - М., I975.
2. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. Общая теория. - М., I962.

M.Goldmans. A note on splines in Hilbert spaces.

Summary. A new version of the theorem characterizing splines in Hilbert spaces is established. This version relies on the consideration of the operator projecting the space onto the kernel of the smoothing operator. This result is applied to the problem of definabbility and characterization of spline-functions of many variables. AMS Subject classification 65D07.

M.Goldmans. Piezīme par splainiem Hilberta telpā.

Anotācija. Rakstā pierādīts teorēmas variants, kas raksturo splainus Hilberta telpā. Tiek aplūkots operators, kas projicē telpu uz nogludinātājoperatora kodolu. Šis rezultāts tiek lietots, definējot un raksturojot vairākargumentu splain-funkcijas.

Кафедра математического анализа
Латвийский университет
бульв. Райниса, I9
226098 Рига

Latvijas Universitātes Zinātniskie Raksti, 552. (1990)
Matemātika, I.

СПЛАЙНЫ ДЛЯ ОДНОСТОРОННИХ ПРОИЗВОДНЫХ, УЧИТЫВАЮЩИЕ ЛОКАЛЬНЫЕ СРЕДНИЕ

Э. Карпус

Аннотация. В данной статье строится комбинированный сплайн, который является одновременно интерполяционным сплайном для односторонних производных, соответствующим данному вектору $r=(r_1,\dots,r_n)$, и интерполяционным сплайном для локальных средних, соответствующим данному вектору $\rho=(\rho_1,\dots,\rho_{n+1})$. УДК 519.6.

Построение названного сплайна опирается на сплайны для односторонних производных, которые рассмотрел М.А.Гольдман в статье [I, с. 53]. Определим эти сплайны и перечислим некоторые их свойства.

Пусть $S_{m,\mu}(\Delta)$ обозначает совокупность всех определенных на отрезке $[a,b]$ полиномиальных сплайнов степени m, дефекта μ, с узлами на сетке $\Delta=\{t_0,t_1,\dots,t_{n+1}\}$, где $t_0=a$, $t_{n+1}=b$ и $t_0<t_1<\dots<t_n<t_{n+1}$ [2, с. 15-16].

Положим $X=S_{m,\mu}(\Delta)$, где $1\le\mu\le m$; $Y=S_{\mu-1,\mu}(\Delta)$ и $Z=\mathbb{R}^n$. В простарнствах $S_{m,\mu}(\Delta)$ и $S_{\mu-1,\mu}(\Delta)$ зададим скалярное произведение одной и той же формулой $\langle u,v\rangle=\int_a^b u(t)v(t)\,dt$; скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$ - обычное.

Пусть, далее, $\forall i=\overline{1,n}$ выбраны два μ -мерных вектора $\alpha_i=(\alpha_{i0},\dots,\alpha_{i,\mu-1})$ и $\beta_i=(\beta_{i0},\dots,\beta_{i,\mu-1})$.

Введя обозначение $\xi=m-\mu+1$, зададим операторы T и A, положив

$$\forall x\in X \quad Tx=x^{(\xi)} \text{ и}$$

$$(Ax)_i = \sum_{p=0}^{k-1} [\alpha_{ip} x^{(s+p)}(t_i+0) + \beta_{ip} x^{(s+p)}(t_i-0)], \quad i=\overline{1,n}, \qquad (I)$$

где $(Ax)_i$ – i-я координата вектора Ax.

Соответствующее этим операторам T и A пространство сплайнов $S(T,A) := \{s \in X \mid \forall x \in N(A)\ \langle Ts, Tx\rangle = 0\}$, где $N(A)$ – ядро оператора A, названо пространством сплайнов для односторонних производных.

Так как $Tx = x^{(s)}$, то $N(T)$ состоит из полиномов, степень которых не превышает $s-1$.

Легко проверить, что $R(T) = Y$. Что касается равенства $R(A) = R^n$, то оно имеет место не всегда, т.е. не при любых $\alpha_i, \beta_i, i=\overline{1,n}$. Достаточные условия для выполнения этого равенства даются в следующей теореме.

Теорема I. Справедливы импликации:

$$\forall i=\overline{1,n}\ \alpha_i \neq 0 \Rightarrow R(A) = R^n,$$
$$\forall i=\overline{1,n}\ \beta_i \neq 0 \Rightarrow R(A) = R^n.$$

Вопрос об интерполяционных сплайнах решается в следующей теореме.

Теорема 2. Пусть $y_i = T^{*-1}A^* e_i$, $i=\overline{1,n}$, где $e_1, \ldots, e_n$ – стандартный базис в R^n. Тогда

I) для $\forall r = (r_1, \ldots, r_n) \in R^n$ система линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} \langle y_i, y_j\rangle \lambda_j = r_i, \quad i=\overline{1,n} \qquad (2)$$

имеет единственное решение $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$;

2) для того, чтобы элемент s из X был интерполяционным сплайном, соответствующим вектору r, необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство

$$Ts = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j, \qquad (3)$$

где $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ – решение системы (2).

Теперь покажем, как вычислять матрицу $(\langle y_i, y_j\rangle)_{i,j=\overline{1,n}}$. Так как $\langle y_i, y_j\rangle = 0$, если $|i-j| > 1$, то матрица $(\langle y_i, y_j\rangle)_{i,j=\overline{1,n}}$ является трёхдиагональной. Поскольку эта матрица к тому же эрмитова, её вычисление сводится к нахождению $\langle y_i, y_i\rangle$, $i=\overline{1,n}$ и $\langle y_i, y_{i+1}\rangle$, $i=\overline{1,n-1}$.

Для этого имеют место следующие формулы:

$$\langle y_i, y_i\rangle = \sum_{p=0}^{k-1} p!\left[\alpha_{ip}\sum_{l=0}^{k-1}\alpha_{il}b_{lip} + \beta_{ip}\sum_{l=0}^{k-1}\beta_{il}c_{lip}\right],\ i=\overline{1,n},$$

$$\langle y_i, y_{i+1}\rangle = \sum_{p=0}^{k-1}\beta_{i+1,p}\sum_{l=0}^{k-1}\alpha_{il}\sum_{j=p}^{k-1}\frac{j!}{(j-p)!}b_{lij}(t_{i+1}-t_i)^{j-p},\ i=\overline{1,n-1},$$

где

$$b_{pij} = (t_{i+1}-t_i)^{-(p+j+1)}E_{pj},\quad c_{pij} = (t_i - t_{i-1})^{-(p+j+1)}F_{pj},$$
$$i=\overline{1,n};\ p,j=\overline{0,k-1},$$

$$E_{pj} = p!\,B_{p+1,j+1}\Delta^{-1}_{m-\xi+1},\quad F_{pj} = p!\,C_{p+1,j+1}\tilde{\Delta}^{-1}_{m-\xi+1},$$
$$p,j=\overline{0,k-1},$$

$B_{p+1,j+1}$ $(C_{p+1,j+1})$ – алгебраическое дополнение элемента определителя $\Delta_{m-\xi+1} = \det\left(\frac{1}{p+j+1}\right)$ $\left(\tilde{\Delta}_{m-\xi+1} = \det\left(\frac{(-1)^{p+j}}{p+j+1}\right)\right)$, расположенного в строке с номером $p+1$ и в столбце с номером $j+1$ $(p,j=\overline{0,k-1})$.

Из равенства (3) следует, что множество всех интерполяционных сплайнов, соответствующих вектору r, состоит из элементов вида

$$s = s_0 + \sum_{j=1}^{n}\lambda_j s_j, \tag{4}$$

где s_0 – произвольный элемент ядра оператора T (полином степени не выше $\xi-1$), а s_j – некоторый прообраз элемента y_j при отображении T. Он вычисляется по следующим формулам:

$$\forall i=\overline{1,n}\ \text{и}\ \forall t\in[a,b]$$

$$s_i(t) = \sum_{j=0}^{k-1}\frac{j!}{(j+\xi)!}\left[\sigma_{ij}(t-t_i)_+^{j+\xi} - \tau_{ij}(t-t_{i+1})_+^{j+\xi}\right] +$$
$$+\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^{j+\xi}\frac{j!}{(j+\xi)!}\left[\xi_{ij}(t_i-t)_+^{j+\xi} - \eta_{ij}(t_{i-1}-t)_+^{j+\xi}\right],$$

где $\sigma_{ij} = \sum_{l=0}^{k-1}\alpha_{il}b_{lij}$, $\tau_{ij} = \sum_{k=j}^{k-1}\frac{k!}{j!(k-j)!}\sigma_{ik}(t_{i+1}-t_i)^{k-j}$,

$$\xi_{ij}=\sum_{l=0}^{\mu-1}\beta_{il}c_{lij}\ ,\quad \eta_{ij}=\sum_{k=j}^{\mu-1}\frac{k!}{j!(k-j)!}\xi_{ik}(t_i-t_{i-1})^{k-j}\ ,$$
$$j=\overline{0,\mu-1}.$$

На этом изложение необходимых для дальнейшего фактов о сплайнах для односторонних производных заканчивается.

Теперь займёмся построением в пространстве $S_{m,\mu}(\Delta)$ элемента x, который удовлетворял бы равенствам:

$$(Ax)_i=r_i\ ,\quad i=\overline{1,n} \tag{5}$$

(т.е. таким же равенствам, которым удовлетворяет интерполяционный сплайн $s\in S(T,A)$ для односторонних производных), а кроме того, обладал бы заданными локальными средними $\rho_1,\dots,\rho_{n+1}$:

$$\frac{1}{t_i-t_{i-1}}\int_{t_{i-1}}^{t_i}x(t)dt=\rho_i\ ,\quad i=\overline{1,n+1}. \tag{6}$$

Назовём такой сплайн x комбинированным сплайном. Будем искать его в виде:

$$x(t)=s(t)+\sigma(t)\ , \tag{7}$$

где $s(t)=s_0(t)+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j s_j(t)$ - какой-либо интерполяционный сплайн для односторонних производных, соответствующий вектору r (см. (4)), а $\sigma(t)$ - сплайн из $S_{m,\mu}(\Delta)$, удовлетворяющий равенствам $(A\sigma)_i=0\ ,\ i=\overline{1,n}.$

В случае, когда

$$\forall i=\overline{1,n}\quad \alpha_{ip}=-\beta_{ip}\ ,\ p=\overline{0,\mu-2}\ \text{ и } \alpha_{i,\mu-1}=\beta_{i,\mu-1}=0, \tag{8}$$

в качестве $\sigma(t)$ можно взять функцию

$$\sigma(t)=c_0+\sum_{j=1}^{n}c_j(t-t_j)_+^m\ , \tag{9}$$

где $c_i,\ i=\overline{0,n}$ - пока неопределённые коэффициенты.

В этом случае $(A\sigma)_i=0$, независимо от выбора коэффициентов $c_i\ i=\overline{0,n}$. Следовательно, $(Ax)_i=(As)_i=r_i,\ i=\overline{1,n}$ и искомый комбинированный сплайн x удовлетворяет равенствам (5).

Остаётся подобрать коэффициенты $c_i\ ,\ i=\overline{0,n}$ так, чтобы удовлетворялись равенства (6), которые можно записать в виде :

$$c_0 t \Big|_{t_{i-1}}^{t_i} - \sum_{j=1}^{n} c_j \frac{(t-t_j)_+^{m+1}}{m+1}\Big|_{t_{i-1}}^{t_i} =$$

$$= \rho_i (t_i - t_{i-1}) - \int_{t_{i-1}}^{t_i} s(t)\,dt, \quad i=\overline{1,n+1}. \qquad \text{(10)}$$

Уравнения (10) однозначно разрешимы. Они позволяют находить коэффициенты $c_i,\ i=\overline{0,n}$ построчно.

При определённом выборе $s_0(t)$ наша задача построения комбинированного сплайна в указанном виде (см. (7) и (9)) имеет единственное решение при ограничениях (8).

В заключение видоизменим нашу задачу о нахождении комбинированного сплайна, удовлетворяющего требованиям (5) и (6), в виде (7), позволив функции $\sigma(t)$ принадлежать пространству $S_{m,\mu}(\delta)$, где δ - расширение сетки $\Delta=\{t_0,\dots,t_{n+1}\}$ добавлением на каждом промежутке $[t_i,t_{i+1}]$ $m+1$ новых точек $t_{i,1},\dots,t_{i,m+1}$.

В качестве $\sigma(t)$ возьмём функцию:

$$\sigma(t) = \sum_{i=0}^{n} b_i \tilde{B}^i_{m+1}(t), \qquad \text{(11)}$$

где b_i - пока неопределённые коэффициенты, а $\tilde{B}^i_{m+1}$ - B-сплайн, построенный по значениям аргумента $t=t_i, t_{i,1},\dots,t_{i,m}, t_{i,m+1}, t_{i+1},\ i=\overline{0,n}$ [2, с. 18].

Учитывая, что $\tilde{B}^i_{m+1}(t)\in C^m[a,b]$ и $\tilde{B}^i_{m+1}(t)=0,\ t\notin(t_i,t_{i+1})$, имеем:

$$\sum_{p=0}^{\mu-1}[\alpha_{ip} x^{(\ell+p)}(t_i+0)+\beta_{ip} x^{(\ell+p)}(t_i-0)] =$$

$$= \sum_{p=0}^{\mu-1}[\alpha_{ip} s^{(\ell+p)}(t_i+0)+\beta_{ip} s^{(\ell+p)}(t_i-0)] +$$

$$+ \sum_{p=0}^{\mu-1}[\alpha_{ip} \sigma^{(\ell+p)}(t_i+0)+\beta_{ip} \sigma^{(\ell+p)}(t_i-0)] = r_i,\ i=\overline{1,n}.$$

Для определении коэффициентов $b_i,\ i=\overline{0,n}$ воспользуемся равенствами (6). Полагая

$$\rho_i' := \frac{1}{t_{i+1}-t_i}\int_{t_i}^{t_{i+1}} s(t)\,dt, \quad i=\overline{0,n},$$

будем иметь

$$\rho_i' + \frac{1}{t_{i+1}-t_i}\int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma(t)\,dt = \rho_i, \quad i=\overline{0,n}.$$

Отсюда, учитывая, что $\int_a^b \tilde{B}^i_{m+1}(t)\,dt = 1$, получаем равенства

$$\rho_i' + \frac{b_i}{t_{i+1}-t_i} = \rho_i, \quad i=\overline{0,n}.$$

Из них следует, что

$$b_i = (\rho_i - \rho_i')(t_{i+1}-t_i), \quad i=\overline{0,n}.$$

В случае, когда вектора α_i и β_i таковы, что $\alpha_{i,k-j} = \beta_{i,k-j} = 0$, $j=\overline{1,k}$, то в формуле (II) вместо $\tilde{B}^i_{m+1}$ можно взять сплайн $\tilde{B}^i_{m+1-k}$, построенный по значениям аргумента $t = t_i, t_{i_1}, \dots, t_{i,m+1-k}, t_{i+1}$.

Этим поставленная задача решена.

Библиографический список

I. Гольдман М.А. О сплайнах в гильбертовом пространстве в случае, когда ядро оператора сглаживания содержится в ядре оператора интерполяции // Топологические структуры и их отображения.-Рига,1987.-С. 47-62.
2. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. - М., 1980.

E. Karpus. Splines for one-sided derivatives accounting local means.

Summary. A combined spline is constructed. This spline is at the same time the interpolational spline for the one-sided derivativies corresponding to a given vector $r=(r_1,\dots,r_n)$ and the interpolational spline for the local means corresponding to the vector $\rho=(\rho_1,\dots,\rho_m)$.

E. Karpus. Vienpusīgo atvasinājumu un lokālo vidējo splaini.

Anotācija. Šajā rakstā tiek konstruēts kombinēts splains, kurš ir vienlaicīgi kā interpolācijas splains priekš vienpusējiem atvasinājumiem, atbilstošs dotajam vektoram $r=(r_1,\dots,r_n)$, tā arī interpolācijas splains priekš lokāli vidējām vērtībām, atbilstošs vektoram $\rho=(\rho_1,\dots,\rho_{n+1})$.

Кафедра прикладной математики
Рижский Технический университет
ул. Аусекля,9
226010 Рига.

Latvijas Universitātes Zinātniskie Raksti, 552. (1990)
Matemātika, I.

GOOD MORNING, Mr. FIXED POINT ! *

I. Kaprāne, E. Liepa, A. Liepiņš

Annotation. A fixed point theorem for continuous mappings in a metric space with closure operator is proved. AMS Subject clasification 54H25.

We extend results of [1] similarly as in [2].

We need the following basic definitions and notations.

Let X be a metric space with a distance d. Let PX be a set of all subsets of X. $B(x,r):=\{y\in X \mid d(y,x)\leq r\}$ for each $x\in X$ and $r\in R_+$.

Definition. A closure operator on X is a mapping $S\colon PX\mapsto PX$ for each $A, B\in PX$ satisfying:

1) $A\subset B \Rightarrow S(A)\subset S(B)$:

2) $A\subset S(A)$:

3) $S(S(A))=S(A)$.

Let S be a closure operator on X. A subset A of X is said to be S-closed if $A=S(A)$. S - compactness of X is defined in the same manner as in the case of topological closure operator.

Theorem. Suppose X is a metric space and S is a closure operator on X. Suppose the following holds:

1) X is S-compact;

2) $B(x,r)$ is S-closed for each $x\in X$ and $r\in R_+$;

Let f be a selfmap of X and the following conditions are satisfied:

3) $\exists c\in R_+ \forall x, y\in X\colon d(f(x),f(y))\leq cd(x,y)$;

4) $\forall x\in X\ (x\neq f(x))\ \exists a\in A(x):=\bigcap\{B\in PX \mid x\in B\ \&\ B=S(B)\ \&\ f(B)\subset B\}$:
$r(a):=\sup\{d(a,y) \mid y\in A(x)\}<\operatorname{diam}A(x)\ \&\ (r(f(y))/r(a)\leq 1 \vee r(f(y))/r(a)>c, \forall y\in A(x))$.

Then f has a fixed point in X.

---

* Без литературной правки (ред.)

Proof. Using Zorn's Axiom and S-compactness of X (condition 1) we conclude that there exists a minimal nonempty S-closed and invariant under f subset M of X. Let $x \in M$ and $x \neq f(x)$. Since $M = A(x)$, by 4 there exists a point $a \in M$ such that $r(a) < \operatorname{diam} M$. Let $A := M \cap (\bigcap \{ B(y, r(a)) \mid y \in M \})$. A is nonempty : $a \in A$. As intersection of S-closed subsets of X (we use condition 2) A is S-closed. Let's assume that A isn't invariant under f. Then there exists a point $y \in A$ such that $r(f(y)) > r(a)$. Using 4 we conclude that $r(f(y)) > cr(a)$.

Therefore $B := M \cap B(f(y), cr(a))$ is a proper subset of M. B is nonempty: $f(y) \in B$. By 2 B is S-closed. Let $z \in B$. By 3 we have: $d(f(y), f(z)) \leq cd(y,z) \leq cr(a)$. We conclude that $f(z) \in B$. Consequently, B is invariant under f. Minimality of M implies: M=B. We conclude that $f(A) \subset A$ and obtain that M=A. At the same time : $\operatorname{diam} A \leq r(a) < \operatorname{diam} M$. The result follows.

References

1. Belluce L.P., Kirk W.A. Fixed point theorems for certain classes of nonexpansive mappings// Proc. Amer. Math. Soc.- 1969. - V. 20. - P.141-146.
2. Лиепиньш А.Х. Колыбельная для маленького тигрёнка о неподвижных точках // Топологические пространства и их отображения. - Р., 1983.

И.Капране, Э.Лиепа, А.Лиепиньш. Доброе утро, Mrs. Неподвижная Точка !

Аннотация. Доказана теорема о неподвижной точке для непрерывных отображений в метрическом пространстве с оператором замыкания. УДК 517.98.

I.Kaprāne, E.Liepa, A.Liepiņš. Labrīt, mister Nekustīgais Punkt !

Anotācija. Pierādīta nekustīga punkta teorēmu nepārtrauktiem attēlojumiem metriskā telpā ar slēguma operatoru.

Department of Mathematical Analysis
Latvian University
Rainis bul. 19
226098 Riga

Latvijas Universitātes Zinātniskie Raksti, 552. (1990)
Matemātika, I.

KOPĒJA NEKUSTĪGĀ PUNKTA EKSISTENCE NEIZSTIEPJOŠU ATTĒLOJUMU KOMUTATĪVAI SAIMEI

I. Galiņa

Anotācija. Darbs iepazīstina ar dažām nekustīgo punktu teorēmām neizstiepjošu attēlojumu saimēm. Apskatīti līdz šim iegūtie V.A. Kirka teorēmu vispārinājumi, iegūti jauni rezultāti. UDK 517.98

Rakstā aplūkosim dažas nekustīgo punktu teorēmas, kas radušās sakarā ar [1]. Šajā nolūkā iepazīsimies ar kopas normālas struktūras jēdzienu.

Definīcija. Teiksim, ka izliektai kopai $K \subset X$ (X-Banaha telpa) ir normāla struktūra, ja katrā ierobežotā un izliektā K apakškopā H, kura nav vienelementīga, eksistē kaut viens nediametrāls punkts (punktu $x \in H$ sauc par diametrālu, ja $\sup\{\|x-y\| \mid y \in H\} = \operatorname{diam} H$).

Normālas struktūras jēdziens pirmoreizi lietots [2]. Atzīmēsim, ka Hilberta telpai ir normāla struktūra (katrai tās izliektai apakškopai ir normāla struktūra), arī katrai izliektai kompaktai kopai Banaha telpā ir normāla struktūra.

Skaidrības labad iegaumēsim, ka arī visa tālākā darbība risināsies Banaha telpā X.

Attēlojumu $f:X\to X$ sauksim par neizstiepjošu, ja katriem diviem telpas X punktiem x un y : $\|f(x)-f(y)\| \leq \|x-y\|$.
Tas ir smags nosacījums, bet izrādās, ka no attēlojumiem, kas dzīvo ar labām īpašībām apveltītās kopās, tieši neizstiepjošie ir tie, kuriem eksistē nekustīgie punkti.

Iepazīsimies ar jau pieminēto [1] teorēmu.

<u>Teorēma 1</u>. Pieņemsim, ka K ir netukša, izliekta, slēgta un ierobežota apakškopa refleksīvā Banaha telpā X. Pieņemsim, ka kopai K ir normāla struktūra. Ja attēlojums $f:K\to K$ ir neizstiepjošs, tad tam eksistē nekustīgais punkts.

<u>Sekas</u>. Ja teorēmā 1 nosacījumu par kopas K ierobežotību aizstāj ar nosacījumu par virknes $(f^n(p))_{n\in N}$ ierobežotību kādam kopas K punktam p, arī tad attēlojumam f eksistē nekustīgais punkts.

Ievērības cienīgākais no daudzajiem teorēmas 1 vispārinājumiem ir vispārinājums neizstiepjošu attēlojumu komutatīvai saimei - sekojošā teorēma 2 ([3]).

<u>Definīcija</u>. Attēlojumu saimi $\mathcal{F}$ (ja $f\in\mathcal{F}$, tad $f:X\to X$) sauksim par komutatīvu, ja :

$$\forall f,g\in\mathcal{F} : (f\cdot g)(x)=(g\cdot f)(x) \ \forall x\in X .$$

<u>Teorēma 2</u>. Pieņemsim, ka K ir netukša, izliekta un slēgta refleksīvas Banaha telpas apakškopa, kurai ir normāla struktūra, un $\mathcal{F}$ ir neizstiepjošu attēlojumu, kuri darbojas no kopas K sevī, komutatīva saime. Tad attēlojumu saimei $\mathcal{F}$ ir kopējs nekustīgais punkts.

Kā vispārināt teorēmas 1 sekas attēlojumu komutatīvai saimei ? Varbūt, ka var tā :

<u>Teorēma 3</u>. Pieņemsim, ka K ir netukša, izliekta un slēgta refleksīvas Banaha telpas apakškopa, kurai ir normāla struktūra, un $\mathcal{F}$ ir neizstiepjošu attēlojumu, kuri darbojas no kopas K sevī, komutatīva saime. Ja eksistē tāds $p\in K$, ka kopa $S=\{(f_1\cdot\ldots\cdot f_n)(p) \ / \ f_1,\ldots,f_n\in\mathcal{F} \ \& \ n\in N\}$ ir ierobežota, tad $\bigcap_{f\in\mathcal{F}}\mathrm{Fix}(f)\neq\emptyset$ (ar $\mathrm{Fix}(f)$ apzīmējam attēlojuma f nekustīgo punktu kopu).

▼ <u>Pierādījums</u>. Tā kā kopa $S=\{(f_1\cdot\ldots\cdot f_n)(p) \ / \ f_1,\ldots,f_n\in\mathcal{F} \ \& \ n\in N\}$ ir ierobežota, tad eksistē tāds $r\in R_+$, ka S ietilpst slēgtā lodē $B(p,r)$ ar centru punktā p un rādiusu r.

Definējam kopas :

$K_{f_1\cdot\ldots\cdot f_n} := B((f_1\cdot\ldots\cdot f_n)(p),r)\cap K$; $f_1,\ldots,f_n\in\mathcal{F} \ \& \ n\in N$.

Šīs kopas būs slēgtas un izliektas kā slēgtu un izliektu kopu šķēlums, un, protams, ierobežotas. Tās būs arī netukšas, jo $p\in K_{f_1\cdot\ldots\cdot f_n}$. Tiešām : tā kā $(f_1\cdot\ldots\cdot f_n)(p)\in B(p,r)$, tad $\| p-(f_1\cdot\ldots\cdot f_n)(p)\|\leq r$.

Definējam kopu : $W:=\bigcup_{k=0}^{\infty}\bigcap_{n\geq k}^{\infty}\bigcap_{f_1\ldots f_n} K_{f_1\cdot\ldots\cdot f_n}$.

W būs netukša, jo $p\in W$. Kopas S ierobežotības dēļ arī kopa $S':=\bigcup_{x\in S}B(x,r)$ ir ierobežota, bet $W\subset S$. Tātad kopa W ir ierobežota. Tā būs arī izliekta, jo izliektu kopu virkne $(\bigcap_{n\geq k}^{\infty}\bigcap_{f_1\dots f_n}K_{f_1\dots f_n})_{n\in N}$ ir augoša.

Fiksēsim $f\in\mathcal{F}$ brīvi. Pierādīsim, ka $f:W\to W$. Ņemsim $x\in W$. Tad eksistēs tāds $k\in N$, ka $x\in\bigcap_{n\geq k}\bigcap_{f_1\dots f_n}K_{f_1\dots f_n}$.
Tātad : $\|f(x)-f(f_1\dots f_n)(p)\leq\|x-(f_1\dots f_n)(p)\|\leq r$ visiem $f_1,\dots,f_n\in\mathcal{F}$: $n\geq k$. Esam ieguvuši, ka

$$f(x)\in\bigcap_{n=k+1}^{\infty}\bigcap_{f_1\dots f_n}K_{f_1\dots f_n}\subset W.$$ Tātad $f: W\to W$.

Tā kā f ir nepārtraukta funkcija, tad $f:\overline{W}\to\overline{W}$.

Situācija : $\mathcal{F}$-neizstiepjošu attēlojumu, kas attēlo kopu $\overline{W}$ sevī, komutatīva saime; $\overline{W}$ - netukša, izliekta, slēgta un ierobežota kopa refleksīvā Banaha telpā, kopai $\overline{W}$ ir normāla struktūra ($\overline{W}\subset K$). Varam lietot teorēmu 2 un secināt, ka attēlojumu saimei $\mathcal{F}$ ir kopējs nekustīgais punkts. ▲

Kā rāda nākošais piemērs, kopas S ierobežotības nosacījums teorēmā 3 ir būtisks.

Piemērs. Intervālā $[0;+\infty[$ apskatīsim attēlojumus, kurus definēsim sekojoši : $f_n(x):=\max\{x,n\}$, $n=1,2,\dots$.
Kaut arī visi teorēmas 3 nosacījumi ir izpildīti, izņemot nosacījumu par kopas S ierobežotību, saimei $\mathcal{F}:=\{f_n\ /\ n=1,2,\dots\}$ kopīga nekustīgā punkta nav.

Stingri izliektās Banaha telpās neizstiepjošu attēlojumu komutatīvām saimēm ir spēkā [4] :

Teorēma 4. Pieņemsim, ka X ir stingri izliekta, refleksīva Banaha telpa un K ir netukša, izliekta, slēgta, ierobežota tās apakškopa. Pieņemsim, ka $\mathcal{F}$ ir neizstiepjošu attēlojumu, kas kopu K attēlo sevī, komutatīva saime un $\forall f\in\mathcal{F}$: $Fix(f)\neq\emptyset$. Tad attēlojumu saimei $\mathcal{F}$ ir kopējs nekustīgais punkts.

Zinot šo teorēmu, varam pamatot nākamo rezultātu :

Teorēma 5. Pieņemsim, ka X ir stingri izliekta, refleksīva Banaha telpa, K ir netukša, izliekta, slēgta tās apakškopa, kurai ir normāla struktūra, un $\mathcal{F}$ ir galīga neizstiepjošu attēlojumu, kas kopu K attēlo sevī, komutatīva saime. Ja eksistē tāds $p\in K$, ka virkne $(f^n(p))_{n\in N}$ katram $f\in\mathcal{F}$ ir ierobežota, tad saimei $\mathcal{F}$ ir kopējs nekustīgais punkts.

Pierādījumu var veikt matemātiskās indukcijas ceļā pēc saimes $\mathcal{F}$ attēlojumu skaita.

Literatūra.

1.Kirk W.A. A fixed point theorem for mappings which do not increase diametrs//Amer.Math.Monthly-1965.-V.72.-P.1004-1006.
2.Brodskii M.S., Milman D.P. On the center of a convex set// Dokl.Akad.Nauk SSSR(N.S.)-1948.-V.59.-P.837-840.
3.Lim T.C. A fixed point theorem for families of nonexpansive mappings//Pacific J.of Math.-1974.-P.487-493.
4.Belluce L.P., Kirk W.A. Fixed-point theorems for families of contraction mappings//Pacific J.of Math.-1966.-V.18.-P.213-218.

I.Galiņa The existence of a common fixed point for a commutative family of nonexpansive mappings

Summary.Some fixed point theorems for nonexpansive mappings and generalized well-known fixed point theorem of W.A.Kirk for commutative families of nonexpansive mappings are prezented. Some new results are obtained. AMS Subject classification 54H25

И.Галиня Существование общей неподвижной точки для перестановочного семейства нерастягивающих отображений

Аннотация.Работа знакомит с некоторыми теоремами о неподвижных точках семейства нерастягивающих отображений. Рассмотрены обобщение теоремы В.А.Кирка для перестовочного семейства нерастягивающих отображении и доказаны новые результаты.
УДК 517.98

Augstākās matemātikas katedra
Latvijas Universitāte
Aspazijas bulvārī 5
Rīga

Latvijas Universitātes Zinātniskie Raksti, 552. (1990)
Matemātika, I.

EIN GLEICHGEWICHTIGES BILD MIT FIXPUNKTEN

I. Galiņa

Zusammenfassung. In diesem Artikel ist ein Fixpunktsatz mit vielen Abbildungen einer kompakten Menge in einem normierten vektorischen Raum bewiesen. AMS Subject classification 54H25

0. Einleitung.

Die Probleme des Fixpunktes nehmen eine wichtige Stelle in der mathematischen Analysis ein.

Aus der Zusammensetzung des [1], [2], [3] ist ein neues Ergebnis gefunden. In diesen Artikeln sind Fixpunktsätze mit einer Abbildung einer kompakten Menge in einem normierten vektorischen Raum betrachtet. Es werden viele Abbildungen erforscht.

1. Ergebnis.

Satz. X sei eine kompakte Menge in einem normierten vektorischen Raum (über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$), die durch f_i $(i=1,2,\dots,n)$ in sich abgebildet wird, für diese Bedingungen genüge f_i:

1) $\forall x,y\in X$: $\|f_i(x)-f_i(y)\|\leq\|x-y\|$, $i=1,2,\dots,n$;

2) $\forall x,y\in X(x\neq y)$: $\min\{\|f_i(x)-f_i(y)\| / i=1,2,\dots,n\}<\|x-y\|$;

3) $\forall x\in X$: $\mathrm{co}\{f_1(x),\dots,f_n(x)\}\subset X$.

Dann gibt es zu jedem f_i ein x_i, daß $f_i(x_i)=x_i$, $i=1,2,\dots,n$.

▼ Beweis. Gäbe es die Abbildungen t_i zu jedem $x\in X$ mit Gleicheit: $t_i(x):=\|x-f_i(x)\|$, $i=1,2,\dots,n$, so folgt aus dem Satz von Weierstraß:

$$\exists x_i\in X:\ t_i(x_i)=\inf t_i(X),\ i=1,2,\dots,n.$$

Wir beweisen, daß $\inf t_i(X)=0$, $i=1,2,\dots,n$.

Gäbe es die Abbildung h_α mit: $h_\alpha(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i(x)$, $\forall x\in X$ $(\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, $\alpha_i>0$, $i=1,2,\dots,n$, $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1)$, so folgt aus der 3) Bedingung: $h_\alpha: X\to X$.

Es seien $i\in\{1,2,\dots,n\}$ und $\varepsilon\in\mathbb{R}_+$ gegeben.

Wir zeigen, daß solche α $(\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n), \alpha_j>0, j=1,\dots,n, \sum_{j=1}^{n}\alpha_j=1)$ exsistiert, daß für alle $x\in X$: $\|f_i(x)-h_\alpha(x)\|<\varepsilon$ sind.

Es gilt : $\|f_i(x)-h_\alpha(x)\| = \|f_i(x)-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i(x)\| =$
$= \|(1-\alpha_i)f_i(x)-\sum_{j=1, j\neq i}^{n}\alpha_j f_j(x)\| \leq (1-\alpha_i)\|f_i(x)\| + \sum_{j=1, j\neq i}^{n}\alpha_j\|f_j(x)\|$.

Die Menge X ist kompakt, denn sie ist beschränkt. Daraus folgt : $\exists c \in R_+ \ \forall x \in X : \|f_i(x)\| \leq c$.

Entsprechend ist festzustellen :

$\|f_i(x)-h_\alpha(x)\| \leq (1-\alpha_i)c+(1-\alpha_i)c=2c(1-\alpha_i)$.

Wir wählen solche $\alpha_i \in]0;1[\ : 2c(1-\alpha_i)<\varepsilon$, $\alpha_j = \frac{1-\alpha_i}{n-1}$, $j=1,2,\dots,n$, $j\neq i$.

Weiter zeigen wir, daß die Abbildung h_α mit der Eigenschaft $\forall x,y \in X \ (x\neq y) : \|h_\alpha(x)-h_\alpha(y)\|<\|x-y\|$ ist.

Es seien $x,y \in X$ $(x\neq y)$ gegeben. Dann gilt $:\|h_\alpha(x)-h_\alpha(y)\| =$
$= \|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i(x)-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i(y)\| = \|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(f_i(x)-f_i(y))\| \leq \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\|f_i(x)-f_i(y)\|$

und wegen 2) Bedingung folgt : $\|h_\alpha(x)-h_\alpha(y)\| <$
$< \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\|x-y\| = \|x-y\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = \|x-y\|$.

Aus [2] folgt : $\exists x_i \in X: h_\alpha(x_i)=x_i$.

Aus $\|f_i(x_i)-h_\alpha(x_i)\|<\varepsilon$ folgt $\|f_i(x_i)-x_i\|<\varepsilon$.

Dann gilt $\inf t_i(X)=0$. ▲

Literatur.

1. Smart D.R, A fixed-point theorem//Proc. Cambridge Philos. Soc.-1961.-V.57.-P.430.

2. Edelstein M. On fixed and periodic points under contractive mappings//J. London Math. Soc.-1962.-V.37.-P.74-79.

3. Dotson V.G. Fixed point theorems for nonexpansive mappings on star-shaped subsets of Banach spaces//J. London Math. Soc.-1971./72.-V.(2)4.-P.408-410.

И. Галиня Уравновешенный пейзаж с неподвижными точками

Аннотация. В статье доказана теорема о неподвижных точках для семейства отображений в компактном множестве нормированного векторного пространства. УДК 517.98

I. Galiņa Līdzsvarota ainava ar nekustīgiem punktiem

Anotācija. Rakstā pierādīta nekustīgo punktu teorēma attēlojumu saimei normētas vektoru telpas kompaktā apakškopā. UDK 517.98

Lehrstuhl Wirtschaftsmathematik
Universität Lettland
Boulevard Aspazijas 5
Riga

Latvijas Universitātes Zinātniskie Raksti,552.(1990)
Matemātika,I.

NEKUSTĪGĀ PUNKTA TEORĒMA DAUDZVĒRTĪGIEM ATTĒLOJUMIEM

JURIS VĪKSNA

Anotācija
Daudzām labi zināmām teorēmām par nekustīgā punkta eksistenci metriskās telpās pierādījumi pēc būtības balstās uz to, ka ir uzdots slēguma operators, kuram izpildās dažas īpašības. Līdz ar to parasti vairākas šādas teorēmas var uzskatīt tikai par kādas vienas vispārīgākas teorēmas speciālgadījumiem. Šāda pieeja ir labi izstrādāta attiecībā uz teorēmām par nekustīgā punkta eksistenci vienvērtīgiem attēlojumiem. Šajā darbā ir pierādīts viens šādas vispārīgākas teorēmas analogs daudzvērtīgiem attēlojumiem.

Šobrīd ir labi pazīstamas teorēmas par nekustīgā punkta eksistenci daudzvērtīgiem attēlojumiem Banaha telpās. Pirmie pētījumi šajā virzienā ir atrodami darbā [1]. Vēlāk ir iegūti daudzi citi līdzīga veida rezultāti.

Sīkāka iepazīšanās ar spriedumu struktūru, kuri sastopami šo teorēmu pierādījumos, parāda, ka prasība pēc Banaha telpas, attēlojuma izliektības u.c. nav saistītas ar lietas būtību. Faktiski lietotās konstrukcijas prasa tikai telpas ar pavājinātu metriku (simetriku) un slēguma operatora, kuram izpildās dažas īpašības, eksistenci.

Pirmais šo ideju ir noformējis A.Liepiņš vienvērtīgiem attēlojumiem darbā [4]. Tālāk šīs idejas ir attīstījis N.H.Vjets (darbi [5] un [6]), kurš ir ieguvis vispārinājumus daudzvērtīgu attēlojumu gadījumam 1. un 3.teorēmai no [4]. Šī raksta autors šeit piedāvā līdzīga veida vispārinājumu 4.teorēmai no tā paša A.Liepiņa darba, kura N.H.Vjeta darbu specializētās ievirzes dēļ ir palikusi ārpus viņa redzesloka, lai gan principā ir vienīgā, kuras vispārinājums daudzvērtīgu attēlojumu gadījumam prasa nedaudz detalizētākus spriedumus, nekā ir atrodami darbā [4].

Iegūtā teorēma samērā precīzi parāda tos nosacījumus, kuri ir būtiski nepieciešami nekustīgā punkta eksistencei attiecīgā situācijā. Kā trūkumu var minēt to, ka šie nekustīgā punkta eksistences nosacījumi ir samērā sarežģīti un tādēļ, iespējams, neērtāki lietošanai kā tie, kurus sastopam atsevišķos speciālgadījumos.

Vispirms noskaidrosim tālāk izmantojamos apzīmējumus un dosim svarīgāko jēdzienu definīcijas.

Ar PX apzīmēsim netukšas kopas X visu apakškopu kopu.

Definīcija 1.

Attēlojumu $S:PX\to PX$ sauksim par slēguma operatoru kopā X, ja katrām divām brīvi izvēlētām kopām $A,B\subseteq X$ izpildās sekojoši nosacījumi:

1) $A\subseteq B\Rightarrow S(A)\subseteq S(B)$,

2) $A\subseteq S(A)$,

3) $S(S(A))=S(A)$.□

Definīcija 2.

Slēguma operatoru S, kas definēts kopā X, sauksim par algebrisku, ja brīvi izvēlētiem $A\subseteq X$ un $x\in S(A)$ eksistē tāda galīga kopa $B\subseteq A$, ka $x\in S(B)$.□

Tālāk, ievērosim, ka visu kopas X S-slēgto apakškopu kopa ir invarianta attiecībā pret kopu šķēluma operāciju, savukārt, ja kopa $W\subseteq PX$ ir invarianta attiecībā pret kopu šķēluma operāciju, tad attēlojums $\theta:PX\to PX$, kur katrai kopai $A\subseteq X$:

$$G(A)=\bigcap_{(B\in V)\&(A\subseteq B)} B \quad ,$$

ir slēguma operators kopā X.

Ja mums ir dots daudzvērtīgs attēlojums $F:X\to PX$, tad viegli redzēt, ka kopa $\{A\subseteq X \mid F(A)\subseteq A\}$ ir invarianta attiecībā pret kopu šķēlumu. Iepriekšminētajā veidā no šīs kopas iegūto slēguma operatoru apzīmēsim ar S_F.

Definīcija 3.

Kopu $H\subseteq X$ sauksim par S-kompaktu, ja katrai kopai $V\subseteq S(PX)$, kurai

$$\bigcap_{A\in V}(A\cap H)=\emptyset,$$

var atrast tādu galīgu apakškopu $V'\subseteq V$, ka

$$\bigcap_{A\in V'}(A\cap H)=\emptyset.\square$$

Definīcija 4.

Ja S_1 un S_2 ir kopā X definēti slēguma operatori, tad ar $\inf(S_1,S_2)$ apzīmēsim operatoru Z, kuru definē šādi:

$$\forall A\subseteq X:\ Z(A):=\bigcap_{(B\in S_1(PX)\cap S_2(PX))\&(A\subseteq B)} B.\square$$

Var viegli pārliecināties, ka Z ir slēguma operators.

Definīcija 5.

Attēlojumu $t:X\times X\to\mathbb{R}^+$ sauksim par simetriku, ja brīvi izvēlētiem $x,y\in X$ izpildās sekojoši nosacījumi:

1) $t(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$,

2) $t(x,y)=t(y,x)$.$\square$

Ievedīsim vēl sekojošus apzīmējumus:

$D(A,B):=\sup\{t(x,y)\mid x\in A, y\in B\}$,

$B(x,r):=\{y\in X\mid t(x,y)\le r\}$,

$U(x,r):=\{y\in X\mid t(x,y)<r\}$,

$\operatorname{diam}A:=\sup\{t(y,z)\mid y,z\in A\}$,

kur A,B-brīvi izvēlētas X apakškopas, $x\in X$, $r\in\mathbb{R}_+$.

Ar $U(x)$ apzīmēsim punkta x visu vaļējo apkārtņu sistēmu, t.i., $U(x)=\{U(x,r) \mid r\in R_+\}$.

Ar $O(x)$ apzīmēsim punkta x orbitu.

Tagad varam pāriet pie teorēmas formulējuma un pierādījuma.

TEORĒMA.

X ir topoloģiska telpa ar simetriku t,

$F:X\to PX$-pusnepārtraukts no apakšas daudzvērtīgs attēlojums,

S_a-algebrisks slēguma operators,

S_t-topoloģisks slēguma operators,

$S:=\inf(S_a,S_t)$, $S':=\inf(S,S_F)$,

$H\subseteq X$-netukša, S-kompakta kopa.

Izpildās vēl sekojoši nosacijumi:

1) $\forall x\in X$, $\forall r\in R_+$: $B(x,r)$ ir S-slēgta,

2) $\forall A\subseteq X$: $S_a(S_t(S_a(A)))=S_t(S_a(A))$,

3) $\forall x\in X$: $S'(O(x))\cap H\neq\emptyset$,

4) $\forall x\in X$: $x\notin F(x)\Rightarrow\exists y\in S'(O(x))$:

$\inf_{n\in N}(\sup_{m\geq n}(D(y,F^m(x))))<\operatorname{diam}S'(O(x))$,

5) $\forall x,y\in X$: $D(F(x),F(y))\leq D(x,y)$,

6) $\forall x\in X$, $\forall\varepsilon\in R_+$: $\exists U\in U(x)$:

$\forall y\in U$, $\forall z\in X$: $|t(y,z)-t(x,z)|<\varepsilon$.

Tad attēlojumam F eksistē nekustīgais punkts, t.i., eksistē $x_0\in H$, tāds, ka $x_0\in F(x_0)$.□

Pierādījums

Aplūkosim netukšu, S'-slēgtu apakškopu $A\subseteq X$ un kādu tās elementu $x\in A$. No nosacijuma 3) un kopas A S'-slēgtības, varam secināt, ka $A\cap H\neq\emptyset$, jo $S'(O(x))\subseteq A$. Tā kā A mēs izvēlējāmies brīvi, tad $A\cap H\neq\emptyset$ katrai kopai $A\subseteq X$, kas apmierina prasītās īpašības.

Pēc sākumnosacijumiem kopa H ir S-kompakta, līdz ar to mēs varam secināt, ka H ir arī S'-kompakta. Izmantojot Corna lemmu, konstruēsim minimālo netukšu S'-slēgtu kopu M, skaidrs, ka $M\cap H\neq\emptyset$.

Izvēlēsimies kaut kādu kopas $M\cap H$ elementu a. Pierādīsim, ka šis elements a ir attēlojuma F nekustīgais punkts, t.i., $a\in F(a)$.

Lai to izdarītu, pieņemsim pretējo: $a\notin F(a)$. Tad no nosacījuma 4) seko, ka eksistē tāds $a_0\in S'(O(a))$, ka

$$\inf_{n\in N}(\sup_{m\ge n}\mathcal{D}(a\ F^m(a)))=:q<\operatorname{diam}S'(O(a)).$$

Aplūkojam reālu skaitli $r\in]q,\operatorname{diam}S'(O(a))[$ un kopu

$$A_1:=\bigcup_{n\in N}(\bigcap_{m\ge n}((\bigcap_{\xi\in F^m(a)}B(\xi,r))\cap M)).$$

Tā kā $a_0\in A_1$, tad $A_1\ne\emptyset$. Līdz ar to $S_t(A_1)\ne\emptyset$. No nosacījuma 1) seko, ka A_1 ir S_a-slēgta, no nosacījuma 2), ka $S_t(A_1)$ ir S-slēgta. Izvēlēsimies kaut kādu skaitli $n\in N$ un elementu

$$y\in\bigcap_{m\ge n}((\bigcap_{\xi\in F^m(a)}B(\xi,r))\cap M).$$

No nosacījuma 5) iegūstam, ka

$$F(y)\subset\bigcap_{m\ge n+1}((\bigcap_{\xi\in F^m(a)}B(\xi,r))\cap M),$$

kas faktiski nozīmē, ka $F(A_1)\subseteq A_1$, tātad A_1 ir S_F-slēgta, un līdz ar to $S_t(A_1)$-S'-slēgta. Tā kā M ir minimālā netukša S'-slēgta X apakškopa, tad $S_t(A_1)=M$.

Brīvi izvēlamies $\varepsilon\in R_+$ un $x\in M$. No nosacījuma 6) atrodam, ka eksistē tāda punkta x apkārtne $U\in U(x)$, ka visiem $y\in U$, $z\in X$ izpildās:

$$|t(y,z)-t(x,z)|<\varepsilon.$$

Tā kā $U\cap A_1\ne\emptyset$, tad varam izvēlēties $y\in U\cap A_1$. Tad $y\in A_1$ un eksistē tāds $n_0\in N$, ka izpildās:

$$y\in\bigcap_{m\ge n_0}(\bigcap_{\xi\in F^m(a)}B(\xi,r)\cap M),$$

no kurienes iegūstam:

$$S(\bigcup_{m\ge n_0}F^m(a))\subseteq B(y,r) \text{ un}$$

$$S(\bigcup_{m\ge n_0}F^m(a))\subseteq B(x,r+\varepsilon).$$

Skaitli $\varepsilon\in R_+$ mēs izvēlējāmies brīvi, līdz ar ko

$$A_2:=\bigcap_{n\in N}(S(\bigcup_{m\ge n}F^m(a))\subseteq B(x,r) \text{ un}$$

$A_2 \cap H \subseteq B(x,r)$.

Tā kā H ir S-kompakta, kopa A_2 nav tukša, un eksistē $z \in A_2$. Skaidrs, ka $z \in B(x,r)$ un līdz ar to arī $z \in \bigcap_{x \in M} B(x,r)$, jo x no kopas M mēs arī izvēlējāmies brīvi. No šejienes

$z \in A_3 := (\bigcap_{x \in M} B(x,r)) \cap M$ un $A \neq \emptyset$.

Pierādīsim, ka $F(A_2) \subseteq A_2$. Pieņemsim pretējo: eksistē $x \in A_2$, tāds, ka $F(x) \subseteq A_2$. Tad eksistēs arī tāds $y \in F(x)$, ka $y \in M$ un $y \notin A_2$, un kopa $A_4 := B(y,r) \cap M$ būs īsta kopas M apakškopa, kas nav iespējams.

Patiešām:

$A_4 \neq \emptyset$, jo $F(x) \cap A_4 \neq \emptyset$, pie tam A_4 ir S'-slēgta. Tātad, $A_4 = M$, jo M-minimālā S'-slēgta kopa.

Esam pierādījuši, ka $F(A_2) \subseteq A_2$, tātad A_2 ir S'-slēgta. No M minimalitātes seko, ka $A_2 = M$, līdz ar ko $\operatorname{diam} A_2 \leq r < \operatorname{diam} M$ un mēs esam ieguvuši pretrunu.

Tātad mūsu pieņēmums bija nepareizs, un $a \in F(a)$, t.i., a ir attēlojuma F nekustīgais punkts, ko arī mums vajadzēja pierādīt.

Autors izsaka dziļu pateicību doc. A.Liepiņam par vispusīgu palīdzību šī darba sagatavošanā.

Literatūra.

1. Belluce L.P.,Kirk W.A. Fixed point theorems for certain classes of nonexpansive mappings-//Proc. of Amer. Math. Soc.- 1969, Vol. 20.- P. 141-146.

2. Kakutani S. A generalization of Brouwer's fixed point theorems-//Duke Math. J.- 1941.- P. 457-459.

3. Kannan R. Fixed point theorems in reflexive Banach spaces-//Proc. of Amer. Math. Soc.- 1973, Vol. 38.- P. 111-118.

4. Liepiņš A. Šūpļa dziesma mazajam tīģerēnam par nekustīgiem punktiem-//Topologičeskije prostranstva i ih otobraženija.- Rīga.- 1983.- 61-69. lpp. (krievu val.)

5. Viet N.H. Par nekustigiem punktiem daudzvērtigiem attēlojumiem- //Autoreferāts.- Maskava.- 1985. (krievu val.)

6. Viet N.H. Nekustigie punkti daudz vērtigiem attēlojumiem subsimetrizējamās metriskās telpās-//Vestnjik MGU.- Sēr. Matemātika.- 1986.- Nr.4.- 69-70. lpp. (krievu val.)

Summary.

The proofs of many well known fixed point theorems essentially are based on the existence of a closure operator which satisfies several conditions. Therefore in this way we usually can generalize some theorems of such kind. This method is elaborated for the fixed point theorems of univalued mappings. In this paper the analogue of one generalized theorem about the existence of a fixed point for multivalued mapping is proved.

AMS subject classification 54H25.

Анотация.

Для многих хорошо известных теорем о существовании неподвижной точки в метрическом пространстве доказательства в сущности дела используют существование некоторого оператора замыкания, удовлетворяюшего несколько условый. Таким образом, несколько теорем этого рода можно рассматривать как отдельные случаи более общей теоремы. Такой метод хорошо разработан для теорем о существовании неподвижной точки однозначных отображений. Настоящая работа предлагает некоторий аналог такой обобщенной теоремы для многозначных отображений.

УДК 517.98

Latvijas Universitāte

Fizikas un Matemātikas fakultāte

Matemātiskās analizes katedra

Rīga, Raiņa bulv. 19

Latvijas Universitātes Zinātniskie Raksti, 552. (1990)
Matemātika, I.

ПРОЕКТИВНАЯ КАТЕГОРИЯ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНЫХ КОММУТАТИВНЫХ ДИАГРАММ

Л. И. Рубанов

Аннотация. При некоторых построениях в проективной категории pro K, объектами которой служат обратные спектры над данной категорией K, естественно возникают и диаграммы над K, не являющиеся обратными спектрами. На них нельзя определить проективные морфизмы, что создает технические трудности. Снять их позволяет расширение категории Гротендика до категории, содержащей все коммутативные диаграммы над K, построение которой и является основной целью данной заметки. Отметим, что построенное здесь расширение проективной категории двойственно индуктивной категории прямых спектров в смысле Хаимова.
УДК 515.12

В алгебре и топологии хорошо известна проективная категория Гротендика pro K, объектами которой служат обратные спектры над данной категорией K. При некоторых построениях в этой категории естественно возникают и диаграммы над K, не являющиеся обратными спектрами. На них нельзя определять проективные морфизмы, что создаёт технические трудности. Снять их позволяет расширение категории Гротендика до категории, содержащей все коммутативные диаграммы над K, которое строится в этой заметке. Из методических соображений мы сначала строим саму категорию Гротендика, чтобы показать затем, как характер возникающих здесь трудностей подсказывает конструкцию расширения. Отметим, что расширенная проективная категория, построенная нами, двойственна индуктивной категории прямых спектров в смысле Я.Н.Хаимова [3]. О категории Гротендика см. [1, 2].

В дальнейшем K – фиксированная категория, объекты и морфизмы которой мы для краткости называем "K-объектами" и "K-морфизмами".

I. K-диаграммы

Как известно, диаграммой над категорией K (коротко -

К-диаграммой) называется система $\underline{X}=\{X_\alpha, p_{\alpha\alpha'}, A\}$, состоящая из индексного множества A с бинарным отношением σ на нём, объектов X_α категории К, занумерованных индексами $\alpha\in A$ и заданных при всех $\alpha\sigma\alpha'$ из A проекций $p_{\alpha\alpha'}\in K(X_\alpha, X_{\alpha'})$. Мы будем рассматривать только коммутативные диаграммы, у которых отношение рефлексивно и транзитивно, а все проекции вида $p_{\alpha\alpha}$ являются единичными К-морфизмами, причём вместо σ будем писать $\geqslant$. Отметим, что условие транзитивности здесь практически не умаляет общности, ибо его выполнения всегда можно добиться, добавляя к коммутативной диаграмме "недостающие" композиции её проекций.

К-диаграмма называется обратным спектром над К (коротко - К-спектром), если в её индексном множестве любые два индекса имеют общую мажоранту.

2. <u>Уравнённость К-морфизмов</u>

Пусть $\underline{X}=\{X_\alpha, p_{\alpha\alpha'}, A\}$ - К-диаграмма, а X - К-объект. Индекс $\alpha\in A$ называется уравнителем в $\underline{X}$ К-морфизмов $f_1: X_{\alpha_1}\to X$ и $f_2: X_{\alpha_2}\to X$, а сами эти К-морфизмы - уравнёнными в $\underline{X}$, если определена коммутативная диаграмма:

$$\begin{tikzcd} & X_{\alpha_1} \arrow[dl, "f_1"'] & \\ X & & X_\alpha \arrow[ul, "p"'] \arrow[dl, "p"] \\ & X_{\alpha_2} \arrow[ul, "f_2"] & \end{tikzcd}$$

Нам понадобятся такие свойства отношения уравнённости:

(I) Если f_1 и f_2 уравнены в $\underline{X}$, то уравнены в $\underline{X}$ и любые две композиции вида $g\circ f_1$ и $g\circ f_2$.

(2) Отношение уравнённости К-морфизмов в $\underline{X}$ рефлексивно и симметрично.

Рефлексивность тут вытекает из того, что $p_{\alpha\alpha}$ - единичный К-морфизм.

(3) Если $\underline{X}$ - К-спектр, то отношение уравнённости К-морфизмов в $\underline{X}$ транзитивно и, следовательно, является отношением эквивалентности.

В самом деле, пусть α' и α'' - уравнители в $\underline{X}$ для К-морфизмов f_1 с f_2 и f_2 с f_3 соответственно, а α - их общая мажоранта в A . Рассматривая коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & X_{\alpha_1} \arrow[dl, "f_1"'] & & \\
 & & X_{\alpha'} \arrow[ul, "p"'] \arrow[dl, "p"] & \\
X & X_{\alpha_2} \arrow[l, "f_2"'] & & X_{\alpha} \arrow[ul, "p"'] \arrow[dl, "p"] \\
 & & X_{\alpha''} \arrow[ul, "p"'] \arrow[dl, "p"] & \\
 & X_{\alpha_3} \arrow[uul, "f_3"] & &
\end{tikzcd}$$

убеждаемся, что α есть уравнитель в $\underline{X}$ для f_1 и f_3.

3. <u>Спектральная категория</u>

Спектральным морфизмом (СМ) К-диаграммы $\underline{X}$ в К-диаграмму $\underline{Y}=\{Y_\beta, q_{\beta\beta'}, B\}$ называется система $\underline{f}=\{\varphi, f_\beta\}$, состоящая из направляющего отображения $\varphi: B\to A$ и образующих – К-морфизмов $f_\beta: X_{\varphi(\beta)}\to Y_\beta$, $\beta\in B$, удовлетворяющих при всех $\beta\geq\beta'$ из B следующему условию:

(4) К-морфизмы $f_{\beta'}$ и $q_{\beta\beta'}\circ f_\beta$ уравнены в $\underline{X}$.

Композицией СМ $\underline{f}$ и $\underline{g}=\{\psi, g_\gamma\}: \underline{Y}\to\underline{Z}=\{Z_\gamma, r_{\gamma\gamma'}, \Gamma\}$ называется система $\underline{h}=\{\theta, h_\gamma\}$, где $\theta=\varphi\circ\psi: \Gamma\to A$, а $h_\gamma=g_\gamma\circ f_{\psi(\gamma)}: X_{\theta(\gamma)}\to Z_\gamma$, $\gamma\in\Gamma$. При этом

(5) если $\underline{X}$ – К-спектр, то композиция $\underline{h}$ есть СМ из $\underline{X}$ в $\underline{Z}$.

В самом деле, возьмём любые $\gamma\geq\gamma'$ из Γ. Пусть β – уравнитель в $\underline{Y}$ для $g_{\gamma'}$ и $r_{\gamma\gamma'}\circ g_\gamma$. Рассмотрим последовательность К-морфизмов:

(6) $\{h_{\gamma'}, g_{\gamma'}\circ q_{\beta\psi(\gamma')}\circ f_\beta = r_{\gamma\gamma'}\circ g_\gamma\circ q_{\beta\psi(\gamma)}\circ f_\beta, r_{\gamma\gamma'}\circ h_\gamma\}$

В ней ввиду (I) оба крайних члена уравнены в $\underline{X}$ со средним, а значит, согласно (3), и между собой, что нам и нужно. Наглядно это можно проследить по такой диаграмме:

$$\begin{tikzcd}
Z_\gamma \arrow[dd, "r"'] & Y_{\psi(\gamma)} \arrow[l, "g"'] & & X_{\varphi(\psi(\gamma))} \arrow[ll, "f"'] \\
 & & Y_\beta \arrow[ul, "g"'] \arrow[dl, "g"] & X_{\varphi(\beta)} \arrow[l, "f"'] \\
Z_{\gamma'} & Y_{\psi(\gamma')} \arrow[l, "g"'] & & X_{\varphi(\psi(\gamma'))} \arrow[ll, "f"']
\end{tikzcd}$$

Единичным СМ К-диаграммы $\underline{X}$ называется система $\{id_A, 1_{X_\alpha}\}$. Это действительно СМ, ибо при любых $\alpha\geq\alpha'$ из A индекс α будет уравнителем для 1_{X_α} и $1_{X_{\alpha'}}$. Легко проверяется, что единичные СМ служат нейтральными элементами для определённой выше композиции.

Итак, К-спектры и их СМ с определённой выше композицией образуют категорию (ассоциативность композиции очевидна). Она называется спектральной категорией над К и обозначается $\underline{K}$.

4. Проективная категория Гротендика

Спектральные морфизмы $\underline{f}=\{\varphi, f_\beta\}$ и $\underline{f}'=\{\varphi', f'_\beta\}$ К-диаграммы $\underline{X}$ в К-диаграмму $\underline{Y}$ называются гомотопными, если

(7) при любом $\beta\in B$ образующие f_β и f'_β уравнены в $\underline{X}$.

Проверим, что

(8) если $\underline{X}$ – К-спектр, $\underline{f}$ и $\underline{f}'$ – гомотопные СМ из $\underline{X}$ в $\underline{Y}$, а $\underline{g}=\{\psi, g_\gamma\}$ и $\underline{g}'=\{\psi', g'_\gamma\}$ – гомотопные СМ из $\underline{Y}$ в К-диаграмму $\underline{Z}$, то СМ $\underline{g}\circ\underline{f}$ и $\underline{g}'\circ\underline{f}'$ из $\underline{X}$ в $\underline{Z}$ также гомотопны.

Для этого возьмём любое $\gamma\in\Gamma$. Пусть $\beta\in B$ – уравнитель в $\underline{Y}$ для образующих g_γ и g'_γ. Рассмотрим последовательность К-морфизмов

$$\{g'_{\gamma'}\circ f'_{\psi'(\gamma')},\ g'_{\gamma'}\circ q_{\beta\psi'(\gamma')}\circ f'_{\beta},\ g'_{\gamma'}\circ q_{\beta\psi'(\gamma')}\circ f_\beta = g_\gamma\circ q_{\beta\psi(\gamma)}\circ f_\beta,\ g_\gamma\circ f_{\psi(\gamma)}\}. \tag{9}$$

Согласно (1) и условию в ней уравнены любые два соседних члена, значит, ввиду (3), уравнены и крайние её члены, что и требовалось доказать. Доказательство иллюстрируется такой диаграммой:

$$\begin{tikzcd}
 & Y_{\psi(\gamma)} \arrow[ddl, "g"'] & & X_{\varphi(\psi(\gamma))} \arrow[ll, "f"'] \\
 & & & X_{\varphi(\beta)} \arrow[dl, "f"'] \\
Z_\gamma & & Y_\beta \arrow[uul, "q"'] \arrow[ddl, "q"] & \\
 & & & X_{\varphi'(\beta)} \arrow[ul, "f'"] \\
 & Y_{\psi'(\gamma)} \arrow[uul, "g'"] & & X_{\varphi'(\psi'(\gamma))} \arrow[ll, "f'"]
\end{tikzcd}$$

Заметим теперь, что если рассматривать только СМ, определённые на К-спектрах, то их гомотопность ввиду (3) будет отношением эквивалентности. Класс всех СМ, гомотопных морфизму $\underline{f}$, обозначается $[\underline{f}]$. Предложение (8) позволяет определить композицию таких классов формулой $[\underline{g}]\circ[\underline{f}]=[\underline{g}\circ\underline{f}]$. Полученная факторкатегория спектральной категории, образованная

К-спектрами и гомотопическими классами спектральных морфизмов и есть проективная категория $\mathrm{pro}\,K$.

5. Слабая уравнённость

Рассмотрим К-диаграмму $Y \xrightarrow{f} X \xleftarrow{g} Z$. В ней проекции f и g уравнены с 1_X, но не уравнены между собой. Таким образом, отношение уравнённости К-морфизмов в К-диаграмме, не являющейся К-спектром, может не быть транзитивным. Это не позволяет в неизменном виде распространить конструкции двух предыдущих пунктов на произвольные К-диаграммы. Подробнее, при таком распространении становятся неверными предложения (5) и (8), ибо из уравнённости всех пар соседних членов в последовательностях (6) и (9) здесь уже не вытекает уравнённость их крайних членов. Но само свойство уравнённости соседних членов сохраняется и здесь. Это наводит на мысль восстановить утраченную транзитивность, ослабив определение уравнённости с помощью транзитивного замыкания. Именно, дадим такое

Определение.

К-морфизмы $f: X_\alpha \to Y$ и $g: X_{\alpha'} \to Y$ будем называть слабоуравнёнными в К-диаграмме $\underline{X}$, если существует такая последовательность К-морфизмов $\{f_1 = f, f_2, \dots, f_n = g\}$ (назовём её уравнивающей), в которой любые два соседних морфизма уравнены в $\underline{X}$.

Следующие свойства слабой уравнённости очевидны:

(I0) Если К-морфизмы f и g слабо уравнены в $\underline{X}$, то слабо уравнены в $\underline{X}$ и любые две композиции вида $h \circ f$ и $h \circ g$.

(II) Для любой диаграммы $\underline{X}$ отношение слабой уравнённости в $\underline{X}$ рефлексивно, симметрично и транзитивно.

(I2) Если два К-морфизма уравнены в $\underline{X}$, то они и слабо уравнены в $\underline{X}$.

Как видно из примера в начале пункта, (I2) обратить в общем случае нельзя. Но из (3) следует, что

(I3) если $\underline{X}$ – К-спектр, то любые два слабоуравнённых в нём К-морфизма уравнены в нём.

Теперь мы можем перейти непосредственно к построению искомого расширения.

6. Расширенная спектральная категория

Ослабим в определении спектрального морфизма условие (5), заменив его на следующее:

(5') К-морфизмы $f_{\beta'}$ и $q_{\beta\beta'} \circ f_\beta$ слабо уравнены в $\underline{X}$. Системы, удовлетворяющие полученному новому определению, назовём слабыми спектральными морфизмами (ССМ) К-диаграмм. Ввиду (I2) всякий СМ есть ССМ, а из (I3) следует, что всякий ССМ, определённый на К-спектре, является СМ.

(I4) Лемма.

Для любых ССМ $\underline{f}: \underline{X} \to \underline{Y}$ и слабо уравнённых в $\underline{Y}$ К-морфизмов $g': Y_{\beta'} \to Z$ и $g'': Y_{\beta''} \to Z$ композиции $g' \circ f_{\beta'}$ и $g'' \circ f_{\beta''}$ слабо уравнены в $\underline{X}$.

Доказательство. Допустим сначала, что g' и g'' уравнены в $\underline{Y}$. Пусть β – их уравнитель. Тогда в последовательности К-морфизмов $\{g' \circ f_{\beta'},\ g' \circ q_{\beta\beta'} \circ f_\beta = g'' \circ q_{\beta\beta''} \circ f_\beta,\ g'' \circ f_{\beta''}\}$ оба крайних члена ввиду (I0) слабо уравнены со средним, а, значит, и между собой. В общем случае рассмотрим уравнивающую в $\underline{Y}$ последовательность $\{g', t_1, \ldots, t_n, g''\}$, где $t_i \in K(Y_{\beta_i}, Z)$. По доказанному в последовательности $\{g' \circ f_{\beta'}, t_1 \circ f_{\beta_1}, \ldots, t_n \circ f_{\beta_n}, g'' \circ f_{\beta''}\}$ любые два соседних члена слабо уравнены в $\underline{X}$. Значит, слабо уравнены в $\underline{X}$ и её крайние члены, что и требовалось доказать.

Возьмём ССМ $\underline{f}: \underline{X} \to \underline{Y}$ и $\underline{g}: \underline{Y} \to \underline{Z}$. Их композиция $\underline{h}$ определяется так же, как для СМ в п. 3. Она является ССМ из $\underline{X}$ в $\underline{Z}$, ибо для любых $\gamma \geq \gamma'$ из Γ К-морфизмы $h_{\gamma'} = g_{\gamma'} \circ f_{\psi(\gamma')}$ и $r_{\gamma\gamma'} \circ h_\gamma = r_{\gamma\gamma'} \circ g_\gamma \circ f_{\psi(\gamma)}$ слабо уравнены ввиду (I4). Ясно также, что определённые в п.3 единичные СМ будут нейтральными элементами относительно такой композиции.

Суммируя сказанное, получаем, что справедлива

Теорема I.

К-диаграммы и их ССМ вместе с определённой выше композицией образуют категорию, полной подкатегорией которой является спектральная категория К-спектров и их СМ

Категорию из теоремы I естественно назвать расширенной спектральной категорией над категорией К. Обозначим её $\underline{K}_E$.

7. Расширение проективной категории

Заменим в определении гомотопности из п. 4 спектральные морфизмы на ССМ, а условие (7) на:

(7′) при любом $\beta \in B$ образующие f_β и f'_β слабо уравнены в $\underline{X}$.

Два ССМ, удовлетворяющие полученному новому определению, назовём слабогомотопными. Ввиду (II) слабая гомотопность является отношением эквивалентности, а из (I2) и (I3) следует, что если $\underline{X}$ – К-спектр, то классы слабогомотопных ССМ, заданных на нём, совпадают с классами гомотопных СМ.

Пусть $\underline{f}$ и $\underline{f}'$ – слабо гомотопные ССМ из К-диаграммы $\underline{X}$ в К-диаграмму $\underline{Y}$, а $\underline{g}$ и $\underline{g}'$ – слабо гомотопные ССМ из $\underline{Y}$ в К-диаграмму $\underline{Z}$. Тогда и композиции $\underline{g} \circ \underline{f}$ и $\underline{g}' \circ \underline{f}'$ слабо гомотопны. Доказывается это так же, как утверждение (8) с заменой ссылок на (I) и (3) ссылками соответственно на (I0) и (II). Это позволяет определить композицию классов слабогомотопных ССМ посредством их представителей так же, как в п. 4 композицию классов гомотопных СМ.

Из всего сказанного вытекает

Теорема 2.

Все К-диаграммы, удовлетворяющие условиям из п. I, и классы их слабо гомотопных ССМ с определённой выше операцией композиции образуют категорию $\mathrm{Pro}\,K$, в которой проективная категория $\mathrm{pro}\,K$ является полной подкатегорией.

Категорию $\mathrm{Pro}\,K$ мы назовём расширенной проективной категорией над категорией К.

8. Обобщённый шейповый функтор

Как хорошо известно, морфизмы проективной категории можно задать формулой Гротендика: $\mathrm{pro}\,K(\underline{X},\underline{Y}) = \varprojlim_{\beta} \varinjlim_{\alpha} K(X_\alpha, Y_\beta)$.

Нетрудно проверить, что она остаётся справедливой и для расширенной проективной категории. Это позволяет естественным образом распространять с $\mathrm{pro}\,K$ на $\mathrm{Pro}\,K$ различные конструкции. Например, построение функтора обратного предела переносится на $\mathrm{Pro}\,K$ без всяких изменений. Шейповый функтор продолжить на $\mathrm{Pro}\,K$ несколько сложнее. Покажем, как это сделать.

Если отождествить каждый К-объект X с однообъектным

K-спектром $\{X, 1_X\}$, категория K станет полной подкатегорией как в $\mathrm{Pro}K$, так и в $\underline{K}_E$. При этом ССМ вида $\underline{p}: X \to X$ полностью определяется своими образующими $p_\alpha: X \to X_\alpha$, коммутирующими с проекциями диаграммы $\underline{X}$. Такие ССМ называются K-конусами. Гомотопные K-конусы равны. Поэтому каждый K-конус можно рассматривать и как морфизм категории $\mathrm{Pro}K$.

Пусть $\mathcal{L}$ – полная подкатегория категории K. K-конус $\underline{p} = \{p_\alpha\}: X \to \underline{X}$ назовём K-конусом Морита класса $\mathcal{L}$, если выполнены следующие три условия:

(I5) $\underline{X}$ - $\mathcal{L}$-диаграмма;

(I6) для всякого K-морфизма $f: X \to Y$ в $\mathcal{L}$-объект Y найдутся такие индекс $\alpha \in A$ и K-морфизм $f_\alpha: X_\alpha \to Y$, что $f_\alpha \circ p_\alpha = f$;

(I7) если Y - $\mathcal{L}$-объект и K-морфизмы $f_\alpha: X_\alpha \to Y$ и $f_{\alpha'}: X_{\alpha'} \to Y$ таковы, что $f_\alpha \circ p_\alpha = f_{\alpha'} \circ p_{\alpha'}$, то эти K-морфизмы слабо уравнены в $\underline{X}$.

Два последних условия можно заменить таким:

(I8) если Y - $\mathcal{L}$-объект, то для всякого K-морфизма $f: X \to Y$ существует единственный морфизм $F \in \mathrm{Pro}K(\underline{X}, \underline{Y})$, для которого $F \circ \underline{p} = f$.

В самом деле, всякий ССМ из $\underline{X}$ в $\underline{Y}$ можно отождествить с единственной его образующей $f_\alpha: X_\alpha \to Y$, а слабая гомотопность таких ССМ означает слабую уравнённость их образующих в $\underline{X}$. Поэтому (I6) есть условие существования морфизма F, а (I7) - условие его единственности.

Допустим, что каждому K-объекту X сопоставлен K-конус Морита класса $\mathcal{L}$: обозначим его $\underline{p}_X: X \to M(X)$. Назовём обобщённой K-шейповой категорией класса $\mathcal{L}$ категорию, объекты которой такие же, как у категории K, а морфизмы из объекта X в объект Y суть морфизмы категории $\mathrm{Pro}K$ из $M(X)$ в $M(Y)$. Обозначим эту категорию $\mathrm{Sh}_{K,\mathcal{L}}$. Из (I8) следует, что каждому K-морфизму $f: X \to Y$ соответствует единственный морфизм $S(f) \in \mathrm{Pro}K(M(X), M(Y)) = \mathrm{Sh}_{K,\mathcal{L}}(X, Y)$, удовлетворяющий равенству $S(f) \circ \underline{p}_X = \underline{p}_Y \circ f$. Из единственности следует, что при этом $S(g \circ f) = S(g) \circ S(f)$. Таким образом, полагая для каждого K-объекта X $S(X) = X$, получаем обобщенный K-шейповый функтор класса $\mathcal{L}$ $S: K \to \mathrm{Sh}_{K,\mathcal{L}}$.

Если вместо (I5) потребовать, чтобы $\underline{X}$ была $\mathcal{L}$-спектром, условия (I6) и (I7) станут равносильными обычным условиям ассоциированности X и $\underline{X}$ в смысле Морита (строго говоря, для этого надо ещё положить K=H-TOP и $\mathcal{L}$=H-CW ([2]), но с категорной точки зрения это несущественно). Поэтому данные нами определения действительно обобщают обычные определения шейповых категории и функтора.

Библиографический список

I. Artin M., Mazur B. Etale homotopy // Lect. Notes in Math., 1969. - N 100. - 169 p.
2. Смирнов Ю.М. Теория шейпов. I // Алгебра. Топология. Геометрия. - Т.I9 (Итоги науки и техники). - М.,I98I. - С.I8I-208.
3. Хаимов Я.Н. Индуктивная категория прямых спектров и понятие экстензора // Рукопись деп. в ВИНИТИ I9.07.79 г., №2704-79 Деп.

I.Rubanov. A projective category for arbitrary commutative diagrams.

Summary. Some constructions in Grothendieck projective category ProK, the objects of which are inverse systems over the given category K leads naturally to diagrams over K which are not inverse systems. It is impossible to define projective morphisms for such diagrams. To overcome these difficulties we develop here an extension of the category ProK to a category containg all comutative diagrams. Notice that the extended projective category described here is dual to the Haimov's category of inductive directed systems. AMS Subject Classification 54B35, 54C56.

I.Rubanovs. Komutatīvu diagrammu projektīva kategorija.

Anotācija. Dažas konstrukcijas projektīvajā kategorijā ProK, kuras objekti ir inversie spektri virs dotas kategorijas K, dabiski noved pie vispārīgām diagrammām virs K. Tādām diagrammām nevar definēt atbilstošus projektīvus morfismus. Lai novērstu šo grūtību šajā rakstā,mēs definējam Grotendika kategorijas paplašinājumu, kurš satur visas komutatīvas diagrammas virs kategorijas K. Atzīmēsim, ka konstruētais projektīvas kategorijas K paplašinājums ir duāls direkto spektru projektīvai Haimova kategorijai.

Отделение математики
Кировский педагогический институт
Киров
РСФСР

Latvijas Universitātes Zinātniskie Raksti, 552. (1990)
Matemātika, I.

ON DECOMPOSITION OF A SET INTO CERTAIN SUBSETS AND cl-CARDINALITY OF A TOPOLOGICAL SPACE

Yu.H.Bregman, B.E.Shapirovskij and A.P.Šostak

Summary. By cl-cardinality of a space X we call the cardinal $\mathrm{clard}(X) = \min(\tau$: each subset (of X) is a union of $\le \tau$ closed in X subspaces). Some relations between cl-cardinality and cardinality of a space are established. Among them $|X| < \mathrm{cf}(2^{\mathrm{clard}(X)\cdot l(X)}) \le 2^{\mathrm{clard}(X)\cdot l(X)}$ and under GLH $|X| = \mathrm{clard}(X)\cdot l(X)$ for each weakly-additional T_1-space (in particular, for each T_2-space of point-countable type) [The equality is independent of ZFC ; GLH = " $2^{\tau} < 2^{\tau^+}$ for every cardinal τ "]. Besides, under GLH $|X| \le \mathrm{clard}(X)^{l(X)}$ for every T_1-space X.
AMS Subject classification 54A25, 54A35

In [3] we have introduced the notion of k-power $\bar{k}(X)$ of a topological space X as the least cardinal τ such that each subspace Y of X can be represented as a union of not more than τ compacta. It was proved in [3] that $\bar{k}(X)$ is "almoast always" equal to the power $|X|$ of X (e.g. if $|X| \le \mathfrak{c}^+$ or if $\bar{k}(X)^{\aleph_0} = \bar{k}(X)$). Moreover, as it is announced by Gerlits, Hajnal and Szentmiklossy [9] , $\bar{k}(X) = |X|$ for each T_2-space X.

Developing the idea to estimate the power of a space X by means of the least number τ sufficient to decompose each its subspace Y into τ subsets with certain properties, we introduce here a new cardinal function $\mathrm{clard}(X) = \min(\tau: \forall\ Y \subset X\ \exists$ closed (in X) sets Y_ξ, $\xi < \tau$ s.t. $Y = \cup(Y_\xi : \xi < \tau)$). Clard is used to establish some new connections between different cardinal functions of a topological space. Specifically, it is shown that, under GLH, $|X| \le \mathrm{clard}(X)^{l(X)}$

for each T_1-space and $|X| = \mathrm{clard}(X) \cdot l(X)$ for each T_2-space of point-countable type. In particular, $|X| = \mathrm{clard}(X)$ for each Lindelöf T_2-space of point-countable type.

We use the standard notation accepted in General Topology: $l(X)$ is the Lindelof number, $c(X)$ is the Souslin number, $w(X)$ is the weight, $nw(X)$ is the networkweight, $d(X)$ is the density, $\pi w(X)$ is the π-weight, $\pi\chi(X)$ is the π-character, $\psi(X)$ is the pseudochracter, $\psi w(X)$ is the pseudoweight of the space X.

Greek letters τ, λ, μ, and $\varkappa$ stand for arbitrary cardinals or for the corresponding initial ordinals. No separation axiom is assumed unless explicitely stated.

We start with some preliminary facts of cardinal arithmetic. Let $\log_\mu(\tau) = \min\{\nu : \mu^\nu \geq \tau\}$ and $\mathrm{Log}_\mu(\tau) = \min\{\nu : \mu^\nu > \tau\}$ [6]. We write just $\ln(\tau)$ and $\mathrm{Ln}(\tau)$ instead of $\log_2(\tau)$ and $\mathrm{Log}_2(\tau)$ respectively. Some elementary facts about these functions are collected in the next easy statement:

<u>Assertion 1</u>. For arbitrary cardinals $\mu, \tau, \varkappa$, and λ the following inequalities hold:

(1) $\log_\mu(\tau^\lambda) \leq \lambda \cdot \log_\mu(\tau)$;

(2) $\mathrm{Log}_\mu(\tau) \leq \tau$;

(3) if $2^\varkappa = \tau^\lambda$, then $\ln(\tau^\lambda) \leq \varkappa < \mathrm{Ln}(\tau^\lambda)$;

(4) if $2^\varkappa = \tau^\lambda$, and besides $\lambda \leq \varkappa$, then $\lambda \cdot \ln(\tau) \leq \varkappa < \mathrm{Ln}(\tau^\lambda)$.

<u>Assertion 2</u>^{0}(see [6]). $\mathrm{Log}_\mu(\mu)$ is regular and $\mathrm{Log}_\mu(\mu) \leq \mathrm{cf}(\mu)$ for each cardinal μ.

Indeed, if $\mathrm{Log}_\mu(\mu) = \Sigma\{\nu_\alpha : \alpha < \mathrm{cf}(\mathrm{Log}_\mu(\mu))\}$ and $\nu_\alpha < \mathrm{Log}_\mu(\mu)$ for all α , then by definition $\mu < \mu^{\mathrm{Log}_\mu(\mu)} = \mu^{\Sigma\{\nu_\alpha : \alpha < \mathrm{cf}(\mathrm{Log}_\mu(\mu))\}} = \Pi\{\mu^{\nu_\alpha} : \alpha < \mathrm{cf}(\mathrm{Log}_\mu(\mu))\} = \mu^{\mathrm{cf}(\mathrm{Log}_\mu(\mu))}$,because $\nu_\alpha < \mathrm{Log}_\mu(\mu)$ and hence $\mu^\nu = \mu$. Thus $\mu < \mu^{\mathrm{cf}(\mathrm{Log}\,(\mu))}$ and consequently, $\mathrm{cf}(\mathrm{Log}_\mu(\mu)) \geq \mathrm{Log}_\mu(\mu)$.

Let $\mu \geq 2^\tau$, then $\mathrm{Log}_2(\mu) > \tau$ and therefore $\mu < (2^\tau)^{\mathrm{Log}_{2^\tau}(\mu)} = 2^{\mathrm{Log}_{2^\tau}(\mu)}$. However, this means that $\mathrm{Log}_{2^\tau}(\mu) \geq \mathrm{Ln}(\mu)$ Since on the other hand, obviously $\mathrm{Ln}(\mu) \geq \mathrm{Log}_{2^\tau}(\mu)$, it follows that $\mathrm{Log}_{2^\tau}(\mu) = \mathrm{Ln}(\mu)$, and in particular, $\mathrm{Log}_{2^\tau}(2^\tau) = \mathrm{Ln}(2^\tau)$. Hence from the previous assertion it follows

<u>Assertion 2</u> (see [6]). For each cardinal τ the cardinal $\mathrm{Ln}(2^\tau)$

is regular and $\mathrm{Ln}(2^\tau) \le \mathrm{cf}(2^\tau)$.

It is clear that $\mathrm{ln}(2^\tau) \le \tau$. However, the equality $\mathrm{ln}(2^\tau) = \tau$ (even in case $\tau = \aleph_0$) holds only under the additional axiomatic assumption of GLH (Generalized Luzin Axiom):

GLH = "$2^\tau \le 2^\mu$ implies $\tau \le \mu$ for all τ, μ "

i.e. GLH just means that the cardinal-valued function $\tau \to 2^\tau$ is increasing. It is well known that GLH is independend of ZFC axioms.

Notice that GLH implies the ordinary Lusin Axiom: LH = "$2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$"

One can check easily the next trivial

Assertion 3. GLH is equivalent to each of the following statements:

(1) $\tau < \tau^+$ implies $2^\tau < 2^{\tau^+}$;

(1') $\tau < \mu$ implies $2^\tau < 2^\mu$;

(2) $2^\tau = 2^\mu$ implies $\tau = \mu$;

(3) $\mathrm{ln}(2^\tau) = \tau$ for every τ ;

(4) $\mathrm{Ln}(2^\tau) = \tau^+$ for every τ ;

(5) $\mathrm{Ln}(\mu) \le (\mathrm{ln}(\mu))^+$ for every μ ;

Consider now the following general situation. Let $\mathcal{P}$ be a family of subsets of X satisfying the following condition

(*) for each $A \subset X$ there exists $\mathcal{P}_A \subset \mathcal{P}$ such that $A = \cup \mathcal{P}_A$

Then the following cardinal number can be defined:

$\mathrm{card}(X|\mathcal{P}) = \min \{\tau : \forall A \subset X \ \exists \mathcal{P}_A \subset \mathcal{P},\ |\mathcal{P}_A| \le \tau \ \text{ s.t. } A = \cup \mathcal{P}_A\}$

We shall call $\mathrm{card}(X|\mathcal{P})$ by the cardinality of X with respect to the family $\mathcal{P}$.

Obviously the cardinal $\mathrm{card}(X|\mathcal{P})$ is defined iff $\{\{x\}: x \in X\} \subset \mathcal{P}$ iff $\mathcal{P}$ has the property (*). A family $\mathcal{P}$ satisfying (*) will be called admissible.

In particular, if $(X, \mathcal{T}_X)$ is a topological T_1-space and $\mathcal{P}$ is the family of its closed subsets, then the cardinal $\mathrm{card}(X|\mathcal{P})$ is defined; we shall denote this cardinal by $\mathrm{clard}(X)$.

It is obvious that $\mathrm{card}(X|\mathcal{P}) \le |X| \le |\mathcal{P}| \le 2^{|X|}$ for each admissible family $\mathcal{P}$ and therefore $|\mathcal{P}|^{\mathrm{card}(X|\mathcal{P})} \le |\mathcal{P}|^{|X|} \le 2^{|X|}$! On the other hand, by letting $j(\mathcal{P}') = \cup\mathcal{P}' \in \exp X$ for each $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$, $|\mathcal{P}'| \le \mathrm{card}(X|\mathcal{P})$ (where $\mathcal{P}$ is an admissible family) we obtain a surjection $j: \mathcal{P}^{\mathrm{card}(X|\mathcal{P})} \to \exp X$ and hence $|\mathcal{P}|^{\mathrm{card}(X|\mathcal{P})} \ge 2^{|X|}$.

From the above inequalities we come to the following

<u>Assertion 4.</u> $\mathrm{card}(X|\mathcal{P}) \le |X| \le |\mathcal{P}| \le 2^{|X|}$ and $|\mathcal{P}|^{\mathrm{card}(X|\mathcal{P})} = 2^{|X|}$ for each admissible family $\mathcal{P} \subset \exp X$. In particular, $\mathrm{clard}(X) \le |X| \le |\mathcal{T}_X| \le 2^{|X|}$ and $|\mathcal{T}_X|^{\mathrm{clard}(X)} = 2^{|X|}$ for each T_1-space $(X, \mathcal{T}_X)$.

Applying Assertion 1 (4) we get from here

<u>Assertion 5.</u> $\mathrm{card}(X|\mathcal{P}) \cdot \mathrm{in}(|\mathcal{P}|) \le |X| < \mathrm{Ln}(|\mathcal{P}|^{\mathrm{card}(X|\mathcal{P})})$ for each admissible family $\mathcal{P}$. In particular, if $(X, \mathcal{T}_X)$ is a T_1-space, then $\mathrm{clard}(X) \cdot \mathrm{in}(|\mathcal{T}_X|) \le |X| < \mathrm{Ln}(|\mathcal{T}_X|^{\mathrm{clard}(X)}) \le \mathrm{cf}(|\mathcal{T}_X|^{\mathrm{clard}(X)})$

Taking into consideration Assertion 3 (5) and Assertion 1 (1) the previous statement implies

<u>Assertion 5^0</u>[GLH] $|X| = \mathrm{card}(X|\mathcal{P}) \cdot \mathrm{in}(|\mathcal{P}|)$ for each admissible family $\mathcal{P}$. In particular, if $(X, \mathcal{T}_X)$ is a T_1-space, then

$$|X| = \mathrm{clard}(X)\ \mathrm{in}(|\mathcal{T}_X|)$$

Applying Assertion 4 and Assertion 5 we get easily

<u>Assertion 6.</u> If $\mathcal{P}$ is an admissible family such that $|\mathcal{P}| \le \mu^\tau \le 2^{|X|}$, then $|X| < \mu^{\tau \cdot \mathrm{card}(X|\mathcal{P})} = 2^{|X|}$ and moreover, if $\tau \le |X|$ then

$$\tau \cdot \mathrm{card}(X|\mathcal{P}) \cdot \mathrm{in}(\mu) \le |X| < \mathrm{Ln}(\mu^{\tau \cdot \mathrm{card}(X|\mathcal{P})}) \le \mu^{\tau \cdot \mathrm{card}(X|\mathcal{P})}.$$

In particular, if $(X, \mathcal{T}_X)$ is a T_1-space, $|\mathcal{T}_X| \le \mu^\tau \le 2^{|X|}$ and $\tau \le |X|$, then

$$\tau\ \mathrm{clard}(X) \cdot \mathrm{in}(\mu) \le |X| < \mathrm{Ln}(\mu^{\tau \cdot \mathrm{clard}(X)}) \le \mu^{\tau \cdot \mathrm{clard}(X)} = 2^{|X|}.$$

<u>Assertion 6^0</u>[GLH]. If $\mathcal{P}$ is an admissible family such that $|\mathcal{P}| \le \mu^\tau \le 2^{|X|}$, then $|X| = \tau \cdot \mathrm{card}(X|\mathcal{P}) \cdot \mathrm{in}(\mu)$. In particular, if $(X, \mathcal{T}_X)$ is a T_1-space, then $|X| = \tau \cdot \mathrm{clard}(X) \cdot \mathrm{in}(\mu)$.

<u>Lemma 1.</u> If $\mathcal{P} \subset \exp X$ and $|\mathcal{P}| \le |X|$ then there exist sets $X_0, X_1 \subset X$ such that $X = X_0 \cup X_1$ and $|P| < |X|$ for each $P \in \mathcal{P}$ contained in X_i, $i = 0,1$.

<u>Proof.</u> Let $\mathcal{F} = \{P \in \mathcal{P} : |X| = |P|\}$. According to Kuratowsky Lemma (see e.g. [4,8]) there exist $X_0, X_1 \subset X$ suth that $X_0 \cap P \ne \emptyset$ and $X_1 \cap P \ne \emptyset$ for all $P \in \mathcal{F}$.

<u>Proposition 1^0.</u> If $\mathcal{P}$ is admissible and $|X| = |\mathcal{P}|$, then $\mathrm{cf}(|X|) \le \mathrm{card}(X|\mathcal{P}) \le |X|$. Hence if besides $|X|$ is regular, then $|X| = \mathrm{card}(X|\mathcal{P})$

Proof. According to Lemma 1 there exists a partition $X=X_0\cup X_1$ such that $|P| < |X|$ for each $P\in\mathcal{P}$ which is contained in X_i, $i=0,1$. Since $\mathcal{P}$ is admissible, for each $i=0,1$ there exists a family $\mathcal{P}_i\subset\mathcal{P}$, $|\mathcal{P}_i| \le \mathrm{card}(X|\mathcal{P})$ such that $X_i=\cup\mathcal{P}_i$. Letting $\mathcal{P}'=\mathcal{P}_1\cup\mathcal{P}_2$ we have $|\mathcal{P}'| \le \mathrm{card}(X|\mathcal{P})$, $X=\cup\mathcal{P}'$ and $|P| < |X|$ for each $P\in\mathcal{P}'$ and hence $\mathrm{cf}(|X|) \le |\mathcal{P}'| \le \mathrm{card}(X|\mathcal{P})$. The second inequality is obvious.

The previous statement has the following corollary:

Proposition 1. If X is a T_1-space and $|X| = |\mathcal{T}_X|$, then $\mathrm{cf}(|X|) \le \mathrm{clard}(X) \le |X|$. Hence, if $|X|$ is regular, then $|X| = |\mathcal{T}_X|$ imlies $|X| = \mathrm{clard}(X)$.

Corollary 1. If $(X,\mathcal{T}_X)$ is a T_1-space such that $nw(X) \le \tau$, $|X| = 2^\tau$ and 2^τ is regular, then $\mathrm{clard}(X) = |X|$.

(Really, since $|\mathcal{T}_X| \le 2^{nw(X)} \le 2^\tau$ and $|\mathcal{T}_X| \ge |X| = 2^\tau$ it follows that $|X| = |\mathcal{T}_X|$ and therefore we can use the previous proposition.)

Corollary 1'. If $X \subset I^\tau$ and $|X| = 2^\tau$, then, under assumption that 2^τ is regular, $|X| = \mathrm{clard}(X)$. In particular, if X is a separable metric space and $|X| = \mathfrak{c}$, then, under assumption $\mathrm{cf}(\mathfrak{c}) = \mathfrak{c}$, the equality $\mathrm{clard}(X) = \mathfrak{c}$ holds, i.e. there exists a subset $X_0\subset X$ which can not be represented as a union of less then $\mathfrak{c}$ closed (in X) subsets.

In the sequel we shall need the following obvious fact:

Assertion 7. $c(X) \le hc(X) \le hl(X) \le \mathrm{clard}(X)\cdot l(X) \le |X|$ for each T_1-space X.

Proposition 2. If $(X,\mathcal{T}_X)$ is a T_1-space, then $|\mathcal{T}_X| \le w(X)^{\mathrm{clard}(X)l(X)} = 2^{|X|}$ and hence $|X| < w(X)^{\mathrm{clard}(X)\cdot l(X)}$.

Proof. It is well-known (and easy to verify) that $|\mathcal{T}_X| \le w(X)^{hl(X)}$, and hence, by Assertion 7, $|\mathcal{T}_X| \le w(X)^{\mathrm{clard}(X)\cdot l(X)}$. To complete the proof it is sufficient to notice, that $w(X) \le 2^{|X|}$ (by Assertion 4) and hence $w(X)^{l(X)} \le 2^{|X|}$ and apply Assertion 6 for $\mu^\tau = w(X)^{l(X)}$.

Since $w(X) \le \pi\chi(X)^{c(X)}$ [6] for each T_3-space X and $c(X) \le \mathrm{clard}(X)\cdot l(X)$ (by Assertion 7), the previous statement implies

Proposition 2'. If $(X,\mathcal{T}_X)$ is a T_3-space, then $|\mathcal{T}_X| \le \pi\chi(X)^{\mathrm{clard}(X)\cdot l(X)} = 2^{|X|}$ and hence $|X| < \pi\chi(X)^{\mathrm{clard}(X)\cdot l(X)}$.

Lemma 2^0. Let $(X,\mathcal{T}_X)$ be a T_1-space and a cardinal $\tau \le |X|$ exist such that either $w(X) \le 2^{\tau}$ or X is regular space and $\pi\chi(X) \le 2^{\tau}$. Then $|X| < Ln(2^{\tau \cdot clard(X) \cdot l(X)}) \le cf(2^{\tau \cdot clard(X) \cdot l(X)}) = 2^{|X|}$ and hence, under GLH, $|X| = \tau \cdot clard(X) l(X)$.

Proof. From Proposition 2 and Proposition 2' it follows, that $|\mathcal{T}_X| \le 2^{\tau \cdot clard(X) \cdot l(X)}$. To complete the proof it suffices to apply Assertion 6.

In case $\tau = clard(X) \cdot l(X)$ the previous statement implies

Lemma 2. If $w(X) \le 2^{clard(X) \cdot l(X)}$ and X is a T_1-space or $\pi\chi(X) \le 2^{clard(X) \cdot l(X)}$ and X is T_3-space, then $|X| < Ln(2^{clard(X) l(X)}) \le cf(2^{clard(X) l(X)}) \le 2^{clard(X) l(X)} = 2^{|X|}$. Hence, under GLH, $|X| = clard(X) \cdot l(X)$.

On the other hand taking into consideration that $w(X) \le 2^{d(X)}$ for each T_3-space or $w(X) \le 2^{nw(X)}$ and letting $\tau = d(X)$ or $\tau = nw(X)$ we get from Lemma 2^0 the following

Proposition 3. $|X| < Ln(2^{nw(X) \cdot clard(X)}) \le cf(2^{nw(X) clard(X)}) \le 2^{nw(X) \cdot clard(X)} = 2^{|X|}$ for each T_1-space X and hence, under GLH, $|X| = nw(X) \cdot clard(X)$; if besides X is a T_3-space then $|X| < Ln(2^{d(X) \cdot clard(X) \cdot l(X)}) \le cf(2^{d(X) \cdot clard(X) \cdot l(X)}) = 2^{|X|}$ and hence, under GLH, $|X| = d(X) \cdot clard(X)\, l(X)$.

Following the traditional terminology a topological space each subset of which is a G_δ-set will be called a Q-set (see, e.g. [13]).

Proposition 4. Let X be a T_1 Lindelof Q-set. Then $|X| < Ln(\mathfrak{c}) \le cf(\mathfrak{c}) \le \mathfrak{c} = 2^{|X|}$ and hence under LH $|X| = \aleph_0$ if one of the following conditions holds:

(a) $d(X) \le \aleph_0$ and X is T_3-space;

(b) $\pi w(X) \le \mathfrak{c}$ and X is T_3-space;

(c) $\pi\chi(X) \le \mathfrak{c}$ and X is T_3-space;

(d) $nw(X) \le \aleph_0$;

(e) $w(X) \le \mathfrak{c}$;

(f) $\chi(X) \le \mathfrak{c}$.

(For Q-sets contained in the real line this result was essentially proved by F.Hausdorff, see e.g. [14]).

Proof. Notice first that if X is a T_1 Lindelof Q-set, then $clard(X) \le \aleph_0$. Applying now Lemma 2^0 we obtain the statement in cases (b), (c) and (d), and applying Proposition 3 we get the statement in case (a).

Let $\bar{\psi}(X) = \sup \{ \psi(A,X) : A \subset X \}$; $\psi_{cl}(X) = \sup \{ \psi(H,X) : H$ is closed in $X \}$. The following statement is trivial:

Assertion 8. $\psi(X) \le \psi_{cl}(X) \le \bar{\psi}(X) = \mathrm{clard}(X)$ for each T_1-space X.

It is well-known (see e.g [1,7,10]) that $|X| \le \tau^{hl(X)}$ where τ is a cardinal such that for each closed set F containing more then one point there exists a family $\{ F_\alpha : \alpha < \tau \}$ of closed sets such that $F = \cup \{ F_\alpha : \alpha < \tau \}$ and $F \setminus F_\alpha \ne \emptyset$ for all $\alpha < \tau$. It is also clear that if $\mathcal{B}_x$ is a pseudobase of a point x in X then for each $x \in F$, $|F| \ge 2$ we have $F = \{x\} \cup \cup \{F \setminus B : B \in \mathcal{B}_x \}$ and hence $|X| \le \psi(X)^{hl(X)}$. (In case of a T_2-space X this is equivalent to the classical inequality $|X| \le 2^{hl(X)}$). Hence applying Assertion 7 and Assertion 8 we have the following series of inequalities: $|X| \le \psi(X)^{hl(X)} \le \mathrm{clard}(X)^{\mathrm{clard}(X) \cdot l(X)} = 2^{\mathrm{clard}(X)\, l(X)}$. Thus we get

Proposition 5. $|X| \le 2^{\mathrm{clard}(X)\, l(X)}$ for each T_1-space X.

A space X will be called weakly additional (weakly π-additional) if $w(X) \le |X|$ (resp. if $\pi w(X) \le |X|$).

Assertion 9. A space X is weakly additional (weakly π-additional) iff $\chi(X) \le |X|$ (resp. iff $\pi\chi(X) \le |X|$).

(Indeed, it is sufficient to notice that $w(X) \le \chi(X) \cdot |X|$ and $\pi w(X) \le \pi\chi(X) \, |X|$).

Since $\psi(X) \le |X|$ for each T_1-space, the previous statement implies:

Assertion 9'. If X is a T_1-space and $\chi(X) = \psi(X)$, then X is weakly additional.

Assertion 9''. If X is a T_2-space of point-countable type, then X is weakly additional.

(Really, as it is well-known, (see e.g. [5]), if X is a T_2-space of point-countable type, then $\chi(X) = \psi(X)$ and hence we can use Assertion 9').

Theorem 1^0. Let X be either a weakly additional T_1-space or a weakly π-additional T_3-space, then

$|X| < \mathrm{Ln}(2^{\mathrm{clard}(X) l(X)}) \le \mathrm{cf}(2^{\mathrm{clard}(X) l(X)}) \le 2^{\mathrm{clard}(X) l(X)} = 2^{|X|}$,

and hence, under GLH, $|X| = \mathrm{Clard}(x) \cdot l(X)$.

Proof. From Proposition 5 we get $w(X) \le |X| \le 2^{\mathrm{clard}(X)\cdot l(X)}$ in the first case and $\pi w(X) \le |X| \le 2^{\mathrm{clard}(X)\cdot l(X)}$ in the second case. It remains to use Lemma 2.

Applying Assertion 9" we obtain from here

Theorem 1. If X is a T_2-space of point-countable type, then $|X| < \mathrm{Ln}(2^{\mathrm{clard}(X)\cdot l(X)}) \le \mathrm{cf}(2^{\mathrm{clard}(X)\cdot l(X)}) \le 2^{\mathrm{clard}(X)\cdot l(X)}$ and hence, under GLH, $|X| = \mathrm{clard}(X)\cdot l(X)$.

Corollary 2.[GLH] If X is a Lindelof T_2-space of point-countable type, then $|X| = \mathrm{clard}(X)$.

Corollary 3. If X is a Lindelof Q-set of point-countable type, then $|X| < \mathrm{Ln}(2^{\aleph_0}) \le \mathrm{cf}(2^{\aleph_0}) \le 2^{\aleph_0} = 2^{|X|}$, and hence, under GLH, $|X| \le \aleph_0$.

Proposition 6.[2] $\psi w(X) \le \mathrm{clard}(X)\cdot \mathrm{ln}(X)$ for each T_1-space X. In particular, if $|X| \le 2^{\tau}$, then $\psi w(X) \le \mathrm{clard}(X)\cdot\tau$.

Proof. Since $|X| \le 2^{\mathrm{ln}(|X|)}$ there exists an injection (not nessarily continuous) $j: X \to I^{\mathrm{ln}(X)}$. Take a pseudobase $\mathcal{B}$ in $I^{\mathrm{ln}(|X|)}$ such that $|\mathcal{B}| \le \mathrm{ln}(|X|)$ and let $\mathcal{C} = \{j^{-1}(B): B \in \mathcal{B}\}$. According to Assertion 8 for each $A \subset X$ there exists a pseudobase $\mathcal{F}_A$ of A in X such that $|\mathcal{F}_A| \le \mathrm{clard}(X)$. It is easy to notice now, that $\mathcal{F} = \cup\{\mathcal{F}_G : G \in \mathcal{C}\}$ is a pseudobase in X and $|\mathcal{F}| \le \mathrm{clard}(X)\cdot\mathrm{ln}(|X|)$ and hence $\psi w(X) \le \mathrm{clard}(X)\cdot\mathrm{ln}(|X|)$.

Since $|X| \le 2^{\mathrm{clard}(X)\cdot l(X)}$ (by Proposition 5) it follows that $\mathrm{ln}(|X|) \le \mathrm{clard}(X)\cdot l(X)$. Therefore the previous statement implies

Proposition 6'.([2]) $\psi w(X) \le \mathrm{clard}(X)\cdot l(X)$ for each T_1-space X.

Theorem 2. If X is a T_1-space, then

$$nw(X) \le (2\,\mathrm{clard}(X))^{\underbrace{\nabla l(X)}} \le (2\cdot\mathrm{clard}(X))^{l(X)}.$$

Here $\nabla l(X) = \min\{\tau : \tau$ is a regular cardinal and for each cover $\mathcal{U}$ of X there exists a subcover $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ such that $|\mathcal{U}'| < \tau\}$.

Proof. It is known (see [6]) that for each topological space X the following inequalities hold: $nw(X) \le \psi w(X)^{\underbrace{\nabla l(X)}} \le \psi w(X)^{l(X)}$. (As usually $\mu^{\underline{\nu}} = \Sigma\{\mu^{\lambda} : \lambda < \nu\}$). From proposition 6' it follows now that $nw(X) \le (l(X)\,\mathrm{clard}(X))^{\nabla l(X)}$ and noticing that $(\mu^{\tau})^{\tau} = \mu^{\tau}$ for each regular cardinal τ (see [6]) we have $nw(X) \le$

$\leq (\mathrm{clard}(X)\cdot l(X))^{\underbrace{\nabla l(X)}} \leq (\mathrm{clard}(X)\cdot 2^{\underbrace{\nabla l(X)}})^{\underbrace{\nabla l(X)}} = (2\cdot \mathrm{clard}(X))^{\underbrace{\nabla l(X)}}$

By means of Proposition 3 the previous Theorem implies

Theorem 3. $|X| < 2^{|X|} \leq 2^{\mathrm{clard}(X)^{\underbrace{\nabla l(X)}}}$ for each T_1-space X .

In particular, under GLH, $|X| \leq \mathrm{clard}(X)^{\underbrace{\nabla l(X)}} \leq \mathrm{clard}(X)^{l(X)}$.

Corollary 4.[GLH]. If X is a Lindelof T_1-space, then $|X| \leq \mathrm{clard}(X)^{\aleph_0}$.

Corollary 4'.[GLH] If every subset of a Lindelof T_1-space X is a union of $\leq \mathfrak{c}$ closed (in X) subsets, then $|X| \leq \mathfrak{c}$.

The last corollary solves a problem of A.V.Arhangelskij.

Question 1. Is it true that $|X| = \mathrm{clard}(X)\cdot l(X)$ for every T_1-space X ?

This problem could be solved only under some additional set-theoretic assumptions. Really, it is consistent that there exist uncountable subspaces of the real line which are Q-sets (see [11]) and for each such space Z the inequality $|Z| > \aleph_0 = \mathrm{clard}(Z)\cdot w(Z) = \mathrm{clard}(Z)\cdot l(Z)$ obviously holds. Thus theorems 1, 1^0 and corollary 2 are independent of ZFC.

In fact, the most general problem in this direction is the following one, which also can not be solved without additional set-theoretic assumptions.

Question 2. Let $\mathrm{dclard}(X) = \min \{ \tau : \forall A\subset X\ \exists$ a system $\mathcal{U}_A$ of discrete (in itself) families of closed subsets of X such that $A = \cup \cup \mathcal{U}_A$ and $|\mathcal{U}_A| \leq \tau \}$ and let $|X|_d = \min \{ \tau : \exists$ a family $\mathcal{F}$ of discrete subsets of X such that $X = \cup\mathcal{F}$ and $|\mathcal{F}| \leq \tau \}$. Is it true that $|X|_d = \mathrm{dclard}(X)$ for every T_1-space X ?
(We say that a family $\mathcal{F}$ of subsets of X is discrete in itself if it is disjoint and each $A\in\mathcal{F}$ is open in $\cup\mathcal{F}$).

It turns out that the analog of Question 2 in which only discrete in itself families of compacta are considered, has the positive solution; this solution can be easily extracted from results of our paper [3]. To be precise, the equality $|X|_d = dk(X)$ holds under some general assumptions where $dk(X) = \min \{ \tau$: for each $A\subset X$ there exists a system $\mathcal{U}_A$ of discrete in itself families of compacta such that $|\mathcal{U}_A| \leq \tau$ and $A = \cup\cup\mathcal{U}_A \}$. (see Theorem 4).

(Obviously $\mathrm{dclard}(X) \leq dk(X)$ for each T_2-space X and $dk(X) \leq |X|$

for each space X)

To extract this result from [3] some simple assertions are stated below:

Assertion 10. For each family of subsets of X

(1) $|\cup\mathcal{F}|_d \le |\mathcal{F}| \sup \{|A|_d : A\in\mathcal{F}\}$;

$dk(\cup\mathcal{F}) \le |\mathcal{F}|\cdot \sup \{ dk(A): A\in\mathcal{F}\}$;

$dclard(\cup\mathcal{F}) \le |\mathcal{F}| \sup \{ dclard(A): A\in\mathcal{F}\}$.

If, besides, $\mathcal{F}$ is discrete in itself, then

(2) $|\cup\mathcal{F}|_d = \sup \{ |A|_d : A\in\mathcal{F}\}$;

$dk(\cup\mathcal{F}) = \sup \{ dk(A) : A\in\mathcal{F}\}$;

$dclard(\cup\mathcal{F}) = \sup \{ dclard(A): A\in\mathcal{F}\}$.

Recall that a space X is called τ-pseudoparacompact [3] if every its open cover $\mathcal{P}$ has a refinement $\mathcal{U} = \cup \{\mathcal{U}_\alpha : \alpha<\tau\}$ where each $\mathcal{U}_\alpha$ is discrete in itself. Similarly to the proof of Assertion 10 one can establish also the next

Assertion 11^0. If $X = \cup\mathcal{F}$ where $\mathcal{F}$ is a discrete in itself family of τ-pseudoparacompact sets, then X is τ-pseudoparacompact,too.

Assertion 11^0 immediatlly implies

Assertion 11. If X is a τ-pseudoparacompact space and $dclard(X) \le \tau$, then X is hereditary τ-pseudoparacompact.

Assertion 12. If $dk(X) \le \tau$, then X is a hereditary τ-pseudoparacompact space.

Proposition 7. ([3 , proposition 1]) A space X is scattered and hereditary τ-pseudoparacompact iff X is τ-discrete.

Recall that a space X is called k-scattered if each closed compactum K contained in X is scattered.

From Proposition 7 and Assertions 10 and 12 one can get now easily the following.

Proposition 8^0. If X is a k-scattered space, then $|X|_d = dk(X)$.

Proof. By Assertion 12 the space X is hereditary dk(X)-pseudoparacompact and hence by Proposition 7 each closed compactum K contained in X is dk(X)-discrete.

On the other hand there exists a system $\mathcal{U} = \{\mathcal{F}_\alpha : \alpha < dk(X)\}$ of discrete in itself families $\mathcal{F}_\alpha$ of compacta such that $X = \cup\cup\mathcal{U}$. Hence, applying Assertion 10(1), $\cup\mathcal{F}_\alpha$ is dk(X)-discrete for each α. Therefore by Assertion 10(2) the space $X = \cup\cup\mathcal{U} = \cup\{\cup\mathcal{F}_\alpha : \alpha < dk(X)\}$ is dk(X)- diskrete and hence $|X|_d \le dk(X)$. To complete the proof one has to notice only that the second inequality

$|X|_d \geq dk(X)$ is obvious.

Proposition 8^0 and Assertion 10(1) imply the following

Proposition 8. If $\mathcal{F}$ is a family of k-scattered subsets of X such that $X = \cup\mathcal{F}$ and $|\mathcal{F}| \leq dk(X)$, then $|X|_d = dk(X)$.

Let $RA_\tau(X)$ = " there exists a family $\mathcal{F}$ of k-scattered subspaces of X such that $X = \cup\mathcal{F}$ and $|\mathcal{F}| \leq \tau$."

Theorem 4^0 (see [3]) $RA_\tau(X)$ holds in each one of the following cases

(1) $|X| \leq \mathfrak{C}_{\omega_0}$ and $\tau \geq 2$;

(2) $\tau^{\aleph_0} = \tau$ and $|X| \leq \tau_{\omega_0}$ (in particular, $|X| \leq \tau^+$) ;

(3) $|X| \leq \tau_{\omega_1}$ and $\aleph_1 < \mathfrak{C}$;

(4) X is any topological space, $\tau \geq 2$ and either $ACP^\#$ or $V = L$ is assumed.

($V = L$ denotes the constructibility axiom and $ACP^\# =$ $= ACP\&(\aleph_1 < \mathfrak{C})$ and $ACP =$ "$\forall\, \mu \geq \mathfrak{C}\ \exists\, \alpha$ s.t. $|\alpha| < \mathfrak{C}$ and $\mu^{\aleph_0} \leq \mu_\alpha$ ".)

Applying Proposition 8 we get from here the following

Theorem 4. $|X|_d = dk(X) = \tau$ if $RA_\tau(X)$ holds and hence in each of the following cases

(1) $|X| \leq \mathfrak{C}_{\omega_0}$;

(2) $\tau^{\aleph_0} = \tau$ and $|X| \leq \tau_{\omega_0}$ (in particular. $|X| \leq \tau^+$);

(3) $|X| \leq \tau_{\aleph_1}$ and $\aleph_1 < \mathfrak{C}$;

(4) X is any topological space, $\tau \geq 2$ and either $ACP^\#$ or $V = L$ is assumed.

References

1. А. Б. Архангельский. Строение и классификация топологических пространств и кардинальные инварианты// УМН. -1978. -Т.35 - -N 6. -С.29-84.

2. А. В. Архангельский, Б. Э. Шапировский. О расщепленых топологических пространствах// (в печати)

3. Ю. Брегман, Б. Шапировский, А. Шостак. Теорема о разложении на компактно-разреженные подпространства и мощность топологических пространств//-Уч. зап. Тартуского ун-та. -1989. -Т. 836. -С.79-90.

4. К. Куратовский. Топология. Т. 1. -М , 1966

5. М. М. Чобан. Совершенные отображения пространств счетного типа// Вестник МГУ. сер. мат, мех., 1967. N 6. -С.87-93.

6. Б. Э. Шапировский. Канонические множества и характер: плотность

и вес в бикомпактах. // ДАН СССР. -1974. -Т. 218. -С.58-61.

7. Р. Энгелькинг. Общая топология. -М. 1986.

8. J.H.Bregman, B.Šapirovskij, A.Sostak. On partition of topological spaces.// Časopis pro pestovany matematicy. -1984. - V.109. -P.27-53.

9. J.Gerlits, A.Hajnal, Z.Szentmiklossy. On the cardinality of certain Hausdorff spaces.// Math. Institute of the Hungarian Academy of Sciences.-Preprint. -1989.-N 77.

10. I.Juhasz. Cardinal functions in topology - ten years later.- Amsterdam, 1980.

11. F.Tall. Normality versus collectionwise normality.// Handbook of Set-Theoretic Topology, Elseviere Science Publishers B.V., 1984. p.685-732.

12. A.W.Miller. Ibid, Chapter 5.

13. T.C.Przymusinski. The existence of Q-sets is equivalent to the existence of strong Q-sets.// Proc. Amer. Math. Soc., 1980, v.79 N4, p.626-628.

14. W.G.Fleissner. Current research on Q-sets.// Colloquia Math. Soc. Janos Bolyai, v.23, Topology, Budapest, 1978, v.1, p.413-431

Ю. Брегман, Б. Шапировский, А. Шостак. О разложении множества на подмножества определенного вида и о cl-мощности топологического пространства.

Аннотация. cl-мощностью пространства X называется кардинал $clard(X) = \min \{ \tau$: каждое подмножество C в X есть объединение $\le \tau$ замкнутых в X подпространств$\}$. В статье устанавливаются некоторые соотношения между cl-мощностью и мощностью топологического пространства. Например, $|X| < cf(2^{clard(X) \cdot l(X)}) \le 2^{clard(X) \cdot l(X)}$ и в предположении GLH $|X| \le clard(X)^{l(X)}$ для любого слабо адиционного T_1-пространства (в частности, для каждого T_2-пространства точечно-счетного типа). [Последнее равенство независимо от системы аксиом ZFC; GLH ≡ " $2^{\tau} < 2^{\tau^+}$ для всех кардиналов"]. Кроме того, в предположении GLH $|X| \le clard(X)^{l(X)}$ для каждого T_1-пространства X.

УДК 515.12.

J. Bregmans, B. Šapirovskis, A. Šostaks. Par kopas sadalījumu speciāla tipa apakškopās un topoloģiskas telpas cl-apjomu.

Anotācija. Par telpas cl-apjomu mēs sauksim kardinālu $clard(X) = \min \{ \tau$: katra telpas X apakškopa ir $\le \tau$ slēgtu X apakštelpu apvienojums $\}$. Rakstā pierādītas dažas attiecības starp telpas cl-apjomu un apjomu; Piemēram katrai vājī aditīvai T_1-telpai (tai skaitā katrai pc-tipa T_2-telpai $|X| < cf(2^{clard(X) \cdot l(X)}) \le$

$\le 2^{\mathrm{clard}(X)\cdot l(X)}$ un ja ir spēkā aksioma GLH tad $|X| = \mathrm{clard}(X)\cdot l(X)$. (Vienādība ir neatkarīga no ZFC aksiomām; GLH = " $2^{\tau} < 2^{\tau^{+}}$ katram kardinālim τ). Bez tam, pieņemot GLH $|X| \le \mathrm{clard}(X)^{l(X)}$, katrai T_1-telpai X.

Dept. of Appl. Math.
Riga Technical University
Kaļķu str.1
226355, Riga, Latvia

Gorky str. 8/1, apt.48
103009, Moscow, USSR.

Dept. of Mathematics
Latvian University
Rainis boulevard 19
226098, Riga, Latvia

Latvijas Universitātes Zinātniskie Raksti,552.(1990)
Matemātika,I.

ЧИСЛО СУСЛИНА В ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННОЙ ТОПОЛОГИИ

Б.Э. Шапировский

Аннотация. Вместе с кратким описанием развития нескольких направлений в теории кардинальных инвариантов, в которых оценки с числом Суслина играют центральную роль, статья содержит новые результаты автора, в этой области. Кроме того, в разделе 3°статьи выводятся три теоретико-множественные формулы самого общего характера, используемые для доказательства основного результата работы - теоремы 13 о строгом ap-калибре. УДК 515.12

Введение

В ряду кардинальных инвариантов простое и естественное понятие числа Суслина топологического пространства - $c(X)=\sup\{|\mathcal{D}|: \mathcal{D}$ - дизъюнктное семейство открытых в X множеств$\}$ - занимает одно из центральных мест и вместе с результатами, присущими теории кардинальных инвариантов, проникло и в другие области общей топологии.

Если $c(X)\leq\aleph_0$ (т.е. все дизъюнктные семейства открытых в множеств не более, чем счетны), то говорят, что пространство удовлетворяет условию Суслина. Именно это понятие восходит к знаменитой Проблеме Суслина, сформулированной еще в 1920 г. и решенной лишь спустя полвека в работах Йеха, Тенненбаума и Соловэя (см. [1], подробнее - в разделе 2): оказалось, что сформулированная Суслиным гипотеза не зависит от ZFC аксиом теории множеств.

Оценки с числом Суслина занимают важное место в нескольких направлениях теории кардинальных инвариантов.

1. Мощность и вес пространства как функции числа Суслина

Вместе с теоремой Архангельского о мощности бикомпакта с первой аксиомой счетности следующие два результата, связывающие мощность пространства с его числом Суслина, послужили отправной точкой для развития теории кардинальных инвариантов.

Теорема 1.(Хайнал, Юхас[14]). Если X – T_2-пространство, то $|X| \le 2^{\chi(X)\cdot c(X)}$ и, следовательно, мощность всякого T_2-пространства с условием Суслина и счетного характера не больше континуума.

Теорема 2^0. (Архангельский[2]). Если X – T_2-пространство, то $|X| \le 2^{h(X)\cdot bt(X)\cdot c(X)}$ и, следовательно, мощность всякого секвенциального бикомпакта с условием Суслина не больше континуума.

(Здесь $h(X)=\min\{\tau$: для всякого $x\in X$ существует бикомпакт $F\ni x$ такой, что $\chi(F,X)\le\tau\}$ – высота и $bt(X)$ – битеснота [2]).

Как легко видеть, теорема 2^0 влечет теорему 1 и, более того, в [2], по существу, уже содержится оценка плотности пространства – $d(X) \le 2^{h(X)\cdot t(X)\cdot c(X)}$, из которой легко вытекает несколько более сильный вариант теоремы 2^0:

Теорема 2. (см.[2]). Пусть X – T_2-пространство, и, кроме того, (p2): для всякого $S\subset X$ такого, что $|S|\le t(X)$ имеем $|\bar S| \le 2^{t(X)}$. Тогда $|X| \le 2^{h(X)\cdot t(X)\cdot c(X)}$ и, в частности, если $c(X)\le\aleph_0$, то $|X|\le 2^{h(X)\cdot t(X)}$. Следовательно, если X – бикомпакт с условием Суслина и счетной теснотой и всякое сепарабельное подмножество из X имеет мощность $\le \mathfrak{c}$, то тогда и $|X|\le\mathfrak{c}$.

Затем в [3] была установлена оказавшаяся весьма существенной связь между числом Суслина и весом регулярного пространства:

Теорема 3. ([3]). Если X – T_3-пространство, то $w(X)\le \pi\chi(X)^{c(X)}$.

Комбинируя теорему 3 с любой из теорем об отображениях бикомпактов на тихоновские кубы ([4],[5]), легко получаем:

Теорема 4. Если X – T_3-пространство, то $w(X)\le(h(X)+\bar i(X)+1)^{c(X)}$ и, в частности, если X – бикомпакт (т.е. $h(X)=1$), то $w(X)\le(i(X)+2)^{c(X)}$

(Здесь $i(X)=\sup\{\tau : X$ непрерывно отображается на $I^\tau\}$ – индекс пространства X и $\bar i(X)=\sup\{i(F) : F$ – бикомпакт из $X\}$).

Так как всегда $\bar i(X)\le t(X)$, то из теоремы 4 следует сразу же

Теорема 4^0. ([3]). Если X – T_3-пространство, то $w(X)\le(h(X)t(X))^{c(X)}$ и, в частности, если X – бикомпакт, то $w(X)\le t(X)^{c(X)}$

Таким образом, в оценке веса (плотности) удается перетащить тесноту и высоту пространства из показателя степени в ее основание. В действительности, базирующаяся на двух теоремах (из [4],[5]) об отображениях на тихоновские кубы теорема 4 дает больше; возможность решить вопрос о вложимости в бикомпакты с условием Суслина экстремально несвязных регулярных пространств и, в частности, таких конкретных объектов как βN_τ - Стоун-Чеховское расширение дискрета мощности τ и ρI^τ - абсолют ([6]) тихоновского куба I^τ веса τ.

Теорема 5°. ([4],[5]). Если X - бикомпакт и $w(X) > \tau^{c(X)}$, то X содержит все экстремально несвязные T_3-пространства веса $\le (\tau^{c(X)})^+$. Следовательно, всякий бикомпакт с условием Суслина и веса $> \tau^{\aleph_0}$ содержит все экстремально несвязные регулярные пространства веса $\le (\tau^{\aleph_0})^+$, в частности, $\rho I^{(\tau^{\aleph_0})^+}$ и βN_λ при $2^\lambda \le (\tau^{\aleph_0})^+$

(Действительно, надо заметить только, что при экстремально несвязном Z и совершенном f из $Z \hookrightarrow f(X)$ следует $Z \hookrightarrow X$ ([6])).

Из теорем 4 и 5° легко вытекает теперь

Теорема 5. (см.[3],[4],[5]). Пусть X - T_3-пространство. Тогда:
(1) если X не содержит βN_τ, то $w(X) \le (h(X)\cdot 2^\tau)^{c(X)}$
(2) если X не содержит $\rho I^{(\tau^{\aleph_0})^+}$ (в частности, ρI^{τ^+}), то $w(X) \le (h(X)\cdot\tau)^{c(X)}$.
Следовательно, если бикомпакт с условием Суслина не содержит βN или не содержит $\rho I^{\mathfrak{c}^+}$ (или даже $\rho I^{\mathfrak{c}}$), то вес бикомпакта $\le \mathfrak{c}$.

Полученная теперь благодаря теореме 5 возможность апеллировать к достаточно хорошо изученным свойствам таких эталонных объектов, как βN_τ или ρI^λ, дает ключ к целому ряду оценок веса и мощности в зависимости от числа Суслина (см., например,[7]).

Теорема 6°. Пусть X - T_3-пространство и, кроме того, (p6°): для всякого $S \subset X$ такого, что $|S| \le \lambda$, имеем $|\bar{S}| < 2^{2^\lambda}$. Тогда $w(X) \le (h(X)\cdot 2^\lambda)^{c(X)}$ и, следовательно, если X - бикомпакт с условием Суслина и всякое сепарабельное подмножество из X имеет мощность $\le \mathfrak{c}$, то $w(X) \le \mathfrak{c}$.

Этот результат легко следует как из теоремы 5(1), так и непосредственно из теоремы 4, поскольку свойство (p6°) вместе со всеми аналогичными сохраняется при замкнутых отображениях, и, следовательно, никакой бикомпакт F из X нельзя отобразить на I^{2^λ}. Точно так же доказывается

Теорема 6. (см.[7]). Пусть X - T_3-пространство, и, кроме того, (p6): для всякого $S \subset X$ такого, что $|S| \le \tau$ имеем: (a) $w(\bar{S}) \le \tau$ или (в) $|\bar{S}| \le \tau^+$ (или даже $|\bar{S}| < 2^{\tau^+}$) или (c) $|\bar{S}| \le \tau^{\aleph_0}$ (или даже $|\bar{S}| < 2^{\tau^{\aleph_0}}$). Тогда $w(X) \le (h(X)\cdot\tau)^{c(X)}$

Положив в теореме 6 $\tau = (h(X)\cdot\lambda)^{c(X)}$ в силу, например, п.(с), сразу же получаем $w(X)\le\tau$, а значит, и $|X|\le\tau$. Итак, справедлива

Теорема 7. Пусть X – T_3-пространство, и, кроме того, (р7): для всякого $S\subset X$ такого, что $|S|\le(h(X)\cdot\lambda)^{c(X)}$ имеем $|\bar{S}|\le(h(X)\cdot\lambda)^{c(X)}$. Тогда и $|X|\le(h(X)\cdot\lambda)^{c(X)}$. Следовательно, если X – бикомпакт (или даже T_3-пространство точечно-счетного типа) с условием Суслина и для всякого $S\subset X$ такого, что $|S|\le\lambda^{\aleph_0}$, имеем $|\bar{S}|\le\lambda^{\aleph_0}$, то тогда и $|X|\le\lambda^{\aleph_0}$.

Точно так же, положив в теореме 6 $\tau = (2\cdot h(X))^{\lambda\cdot c(X)}$, получаем:

Теорема 7^0. Пусть – T_3-пространство, и, кроме того, (р7^0): для всякого $S\subset X$ такого, что $|S|\le(2\cdot h(X))^{\lambda\cdot c(X)}$ имеем $|\bar{S}|\le(2\cdot h(X))^{\lambda\cdot c(X)}$. Тогда и $|X|\le(2\cdot h(X))^{\lambda\cdot c(X)}$. Следовательно, если X – бикомпакт (или даже T_3-пространство точечно-счетного типа) с условием Суслина, и для всякого $S\subset X$ такого, что $|S|\le 2^\lambda$, имеем $|\bar{S}|\le 2^\lambda$, то тогда и $|X|\le 2^\lambda$.

Формулировка именно теоремы 7^0 наилучшим образом показывает, насколько удалось продвинуть результат теоремы 2: центральное для теоремы 2 понятие тесноты пространства элиминировано – кардинал $t(X)$ заменен на произвольный бесконечный кардинал λ и, при этом, $h(X)$ опущена из показателя степени в ее основание.

С другой стороны, кажущееся менее естественным условие (р7^0) из теоремы 7^0 в действительности является при $t(X)=\lambda$ следствием условия (р2) теоремы 2, поскольку, как легко заметить, условие (р2) эквивалентно следующему условию

(р) : для всякого $S\subset X$ имеем $|\bar{S}|\le|S|^{t(X)}$.

Так, в частности, очевидно, что в секвенциальном T_2-пространстве X для всякого $S\subset X$ имеем $|\bar{S}|\le|S|^{\aleph_0}$ и, таким образом, существенным усилением следствий теорем 2^0 и 2 является вытекающая из следствия теоремы 7 (при $\lambda=\mathfrak{c}$) или следствия теоремы 7^0 (при $\lambda=\aleph_0$)

Теорема 7^{00} ([7]). Если X – бикомпакт (или даже T_3-пространство точечно-счетного типа) и всякое подмножество (из X) плотности $\le\mathfrak{c}$ имеет и мощность $\le\mathfrak{c}$, то тогда и $|X|\le\mathfrak{c}$.

2. Условие Суслина как модификация сепарабельности.

Аксиома Мартина и Проблема Суслина.

Как показали Иех (1967) и Тенненбаум (1968), отрицательное решение Проблемы Суслина, т.е. существование (несепарабельного) континуума Суслина совместимо с аксиомами ZFC теории множеств. С другой стороны, Соловэй и Тенненбаум в совместимом с ZFC предположении доказали, что всякое линейно упорядоченное пространство с условием Суслина сепарабельно, т.е. решили проблему Суслина положительно. Предположением, которое использовали Соловэй и Тенненбаум, была Аксиома Мартина вместе с отрицанием CH (Континуум-гипотезы [1]). Таким образом, Проблема Суслина была решена полностью, а Аксиома Мартина (МА) прочно вошла в обиход теоретико-множественной топологии. Так, будет приведен ряд результатов, развивающих положительное решение Проблемы Суслина, а именно, показывающих, что в предположении МА + $\neg$CH (или даже в существенно более слабых предположениях) для весьма широких классов (пространств) условие Суслина оказывается эквивалентным сепарабельности ([8]-[18]).

Прозрачный топологический аналог для МА был найден И.Юхасом:

Теорема 8 ([17]). МА эквивалентна следующему утверждению ($b_{\mathfrak{c}}$): никакой бикомпакт с условием Суслина не представим в виде объединения $< \mathfrak{c}$ нигде не плотных подмножеств.

Был получен и целый ряд других топологических эквивалентов и следствий МА. Чтобы продемонстрировать одно из них, понадобится

Предложение 1. Пусть в T_3-пространстве X существует измельчающаяся система $\mathcal{U} = \{ \mathcal{B}_\alpha : \alpha < \tau \}$ покрытий (т.е. семейство $\{ St(\mathcal{B}_\alpha, x) : \alpha < \tau \}$ - база x в X для всех $x \in X$, где $St(\mathcal{B}_\alpha, x) = \cup \{ B \in \mathcal{B}_\alpha : B \ni x \}$ и пусть, кроме того, выполняется условие (b^o_τ): X не представим в виде объединения $\le \tau$ нигде не плотных подмножеств. Тогда для всякого замкнутого неприводимого отображения $f : X \to Y$ существует в X непустое множество G_f точек взаимнооднозначности такое, что $\Psi(G_f, X) \le \tau$ и сужение $f|G_f$ - гомеоморфизм, причем, если условию (b^o_τ) удовлетворяет любое открытое в X множество, то G_f - всюду плотно в X.

Действительно, положив $\mathcal{B}^\# = \{ f^{-1}f(B) : B \in \mathcal{B}_\alpha \}$ и $P_\alpha = \cup \mathcal{B}^\#_\alpha$ для всякого $\alpha < \tau$, очевидно имеем $\overline{P_\alpha} = X$ - в силу неприводимости f и $G_f = \cap \{ P_\alpha : \alpha < \tau \} \ne \emptyset$ - в силу замкнутости f и условия (b^o_τ). Ясно также, что поскольку $\mathcal{U}$ -

измельчающаяся система, то для всех $x \in G_f$ семейство $\{ St(\mathcal{B}^{\#}_{\alpha}, x): \alpha < \tau \}$ -. база x в X из полных прообразов. Но это и означает, что x - точка гомеоморфизма, и, таким образом, предложение 1 доказано.

Теорема 9. (см. [20]). МА эквивалентна каждому из следующих утверждений: (а) для всякого неприводимого отображения f бикомпакта X с условием Суслина и веса $< \mathfrak{c}$ существует всюду плотное в X множество G_f точек взаимнооднозначности; (в) для всякого неприводимого отображения f бикомпакта X с условием Суслина и веса $< \mathfrak{c}$ существует всюду плотное в X множество G_f такое, что $f|G_f$ - гомеоморфизм и $\Psi(G_f, X) \le w(X) < \mathfrak{c}$.

Эквивалентность МА и утверждения (а) доказана Малыхиным ([20]) и поскольку в силу теоремы 8 и предложения 1 МА влечет несколько более сильное утверждение (в), то теорема 9 доказана.

Обозначим через $МА_{\tau}$ следующее утверждение: никакой бикомпакт с условием Суслина и веса $\le \tau$ не представим в виде объединения $< \mathfrak{c}$ нигде не плотных подмножеств.

Так как нигде не плотность - инвариант для замкнутых неприводимых отображений, то предложение 1 очевидно влечет

Предложение 2. В предположении $МА_{\tau}$ для всякого неприводимого отображения f бикомпакта X с условием Суслина и веса $< \mathfrak{c}$ на бикомпакт веса $\le \tau$ существует всюду плотное в X множество G_f такое, что $f|G_f$ - гомеоморфизм, причем $\Psi(G_f, X) \le w(X) < \tau$.

Поскольку неравенство $\pi w(X) \le \tau$ означает для бикомпакта X существование неприводимого отображения на бикомпакт веса $\le \tau$ ([6]), то из предложения 2 вытекает сразу же

Теорема 10. Пусть X - бикомпакт с условием Суслина и веса $< \mathfrak{c}$. Тогда в предположении $МА_{\pi w(X)}$ (и, в частности, в предположении МА) в X существует всюду плотное подмножество G такое, что $w(G) = \pi w(X)$, причем $\Psi(G, X) \le w(X)$. Следовательно, всякий бикомпакт с условием Суслина, веса $< \mathfrak{c}$ и счетного π-веса содержит всюду плотное подмножество со счетной базой.

(Отметим, что Л.Б. Шапиро ранее в этих предположениях доказал существование всюду плотного подмножества точек счетного характера. Заметим, что все приведенные в разделе 2 результаты, как легко видеть, справедливы и для G_{λ} -подмножеств бикомпактов при $\lambda < \mathfrak{c}$ и, в частности, для полных по Чеху пространств (см. [8], [16]).

Важную роль при доказательстве импликации "условие Суслина влечет сепарабельность" играет промежуточное между числом Суслина и плотностью понятие предкалибра (калибра ([12])): кардинал τ называется предкалибром (калибром) для X, если всякое семейство мощности τ непустых открытых в X множеств содержит центрированное подсемейство (подсемейство с непустым пересечением) той же мощности τ.

Обозначим K_τ следующее утверждение:
(K_τ) τ является калибром для всякого бикомпакта с условием Суслина.

Предложение 3 ([6],[8]). МА влечет K_τ для всякого не счетно-конфинального $\tau < \mathfrak{c}$. Следовательно, МА + $\neg$CH влечет $K_{\aleph_1}$ ([18]).

Теорема 11^0. ([8],[13],[14]). Если $\aleph_1$ - калибр для бикомпакта X со счетной теснотой, то X - сепарабелен. Следовательно, $K_{\aleph_1}$ а, значит, и (в силу предложения 3) МА + $\neg$CH влечет утверждение ($T_{\aleph_0}$): всякий бикомпакт с условием Суслина и счетной теснотой сепарабелен.

Этот результат дает один из наиболее широких классов, для которых гипотеза Суслина верна. Более того, оказывается, что при этом утверждения $K_{\aleph_1}$ и $T_{\aleph_0}$ эквивалентны. Чтобы показать это, достаточно лишь несколько уточнить (для случая $\aleph_1$) формулировку предложения 7 из [15] (оставляя доказательство без изменения):

Предложение 4^0. (см. [15]). $\aleph_1$ является калибром для бикомпакта X тогда и только тогда, когда всякий его непрерывный образ, являющийся корсоновским пространством, сепарабелен.

Предложение 4. Пусть $\mathcal{K}$ - класс бикомпактов такой, что $f(X) \in \mathcal{K}$ для всякого $X \in \mathcal{K}$ и всякого непрерывного f. Тогда следующие утверждения эквивалентны:
(1) всякий корсоновский бикомпакт из класса $\mathcal{K}$ сепарабелен,
(2) всякий бикомпакт из класса $\mathcal{K}$ имеет калибр $\aleph_1$.

Если в качестве класса $\mathcal{K}$ взять теперь класс всех бикомпактов с условием Суслина, то из предложения 4 и теоремы 11^0 вытекает

Теорема 11. Следующие утверждения эквивалентны:
(а) всякий бикомпакт с условием Суслина имеет калибр $\aleph_1$
(в) всякий корсоновский бикомпакт с условием Суслина сепарабелен,
(с) всякий бикомпакт со счетной теснотой и условием Суслина сепарабелен.

Заметим, что в силу У12 из [15] предложения 4^0, 4, а значит, и теорема 11 справедливы и для класса совершенных прообразов корсоновских пространств, как и для пространств, полных по Чеху (см. 16).

3°. Три теоретико-множественные формулы для одной теоремы и двух следствий

При анализе первоначального доказательства теоремы об σp-калибре - основного результата нашей работы - оказалось, что его заключительная часть является формальным следствием трех общих теоретико-множественных формул, очевидно, представляющих самостоятельный интерес.

Положим для семейства $\mathcal{A}$ подмножеств из X

$$\widetilde{\mathcal{A}} = \{ P \subset X : P \cap A \neq \emptyset \quad \text{для всех } A \in \mathcal{A} \}$$

$$\widehat{\mathcal{A}} = \{ P \subset X : \operatorname{Int}(P \cap A) \neq \emptyset \quad \text{для всех } A \in \mathcal{A} \}$$

Из определений сразу же следует

. Утверждение 1. Если $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ - семейства подмножеств из X и $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$, то $\widetilde{\mathcal{A}} \supset \widetilde{\mathcal{A}'}$, $\widehat{\mathcal{A}} \supset \widehat{\mathcal{A}'}$, и, следовательно, $\widetilde{\widetilde{\mathcal{A}}} \subset \widetilde{\widetilde{\mathcal{A}'}}$, $\widehat{\widehat{\mathcal{A}}} \subset \widehat{\widehat{\mathcal{A}'}}$

В действительности, для семейств $\widetilde{\widetilde{\mathcal{A}}}$ и $\widehat{\widehat{\mathcal{A}}}$ легко указать полное описание:

Утверждение 2°. $\widetilde{\widetilde{\mathcal{A}}} = \{ A' \subset X :$ существует $A \in \mathcal{A}$ такое, что $A' \supset A \}$.

Действительно, из $A \in \mathcal{A}$ в силу определения $\widetilde{\mathcal{A}}$ очевидно следует $A \in \widetilde{\widetilde{\mathcal{A}}}$, а значит, и из $A' \supset A \in \mathcal{A}$ следует $A' \in \widetilde{\widetilde{\mathcal{A}}}$. Если же для некоторого $P_0 \subset X$ имеем $A \setminus P_0 \neq \emptyset$ для всех $A \in \mathcal{A}$, то тогда $X \setminus P_0 \in \widetilde{\mathcal{A}}$ и, следовательно, $P_0 \notin \widetilde{\widetilde{\mathcal{A}}}$, что и требовалось доказать.

Утверждение 2. $\widehat{\widehat{\mathcal{A}}} = \{ A' \subset X :$ существует $A \in \mathcal{A}$ такое, что $\overline{\operatorname{Int} A'} \supset \operatorname{Int} A \}$.

Действительно, в силу определения $\widehat{\mathcal{A}}$ очевидно имеем $\mathcal{A} \subset \widehat{\widehat{\mathcal{A}}}$. Более того, если $\overline{\operatorname{Int} A'} \supset \operatorname{Int} A$, то $\operatorname{Int}(A \cap P) \neq \emptyset$ влечет $\operatorname{Int}(A' \cap P) \neq \emptyset$, и, таким образом, из $A \in \widehat{\widehat{\mathcal{A}}}$ следует, что и $A' \in \widehat{\widehat{\mathcal{A}}}$. С другой стороны, если для некоторого $P_0 \subset X$ имеем $\operatorname{Int} A \setminus \overline{\operatorname{Int} P_0} \neq \emptyset$ для всех $A \in \mathcal{A}$, то очевидно $X \setminus \overline{\operatorname{Int} P_0} \in \widehat{\mathcal{A}}$ и, значит $P_0 \notin \widehat{\widehat{\mathcal{A}}}$, что и требовалось доказать.

Легко проверяется непосредственно (как и вытекает из утверждений 2°, 2), что $\mathcal{A} \subset \widetilde{\widetilde{\mathcal{A}}}$, $\mathcal{A} \subset \widehat{\widehat{\mathcal{A}}}$ для всякого семейства $\mathcal{A}$

и, в частности, для семейств $\widetilde{\mathcal{A}}$, $\widehat{\mathcal{A}}$ соответственно имеем $\widetilde{\mathcal{A}} < \widetilde{\widetilde{\widetilde{\mathcal{A}}}}$, $\widehat{\mathcal{A}} < \widehat{\widehat{\widehat{\mathcal{A}}}}$. С другой стороны, из $\mathcal{A} < \widetilde{\widetilde{\mathcal{A}}}$, $\mathcal{A} < \widehat{\widehat{\mathcal{A}}}$ в силу утверждения I соответственно следует, что $\widetilde{\mathcal{A}} > \widetilde{\widetilde{\widetilde{\mathcal{A}}}}$, $\widehat{\mathcal{A}} > \widehat{\widehat{\widehat{\mathcal{A}}}}$ и, таким образом, доказано

Утверждение 3. Для всякого семейства $\mathcal{A}$ имеем $\widetilde{\mathcal{A}} = \widetilde{\widetilde{\widetilde{\mathcal{A}}}}$, $\widehat{\mathcal{A}} = \widehat{\widehat{\widehat{\mathcal{A}}}}$.

Всюду далее для системы $\mathfrak{A}$ семейств полагаем

$$\widetilde{\mathfrak{A}} = \{\widetilde{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \in \mathfrak{A}\} \qquad \widehat{\mathfrak{A}} = \{\widehat{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \in \mathfrak{A}\}$$

и, как обычно, $\cup\mathfrak{A} = \cup\{\mathcal{A} : \mathcal{A} \in \mathfrak{A}\}$, $\cap\mathfrak{A} = \cap\{\mathcal{A} : \mathcal{A} \in \mathfrak{A}\}$.
Как здесь, так и всюду далее, входящие в систему $\mathfrak{A}$ семейства являются семействами подмножеств некоторого множества

Теорема 12⁰. (Три формулы с волной). Для всякой системы $\mathfrak{A}$ семейств справедливы равенства:

$$/1/ \quad \widetilde{\mathfrak{A}} = \widetilde{\widetilde{\widetilde{\mathfrak{A}}}}$$

$$/2/ \quad \widetilde{\cup\mathfrak{A}} = \cap\widetilde{\mathfrak{A}}$$

$$/3/ \quad \widetilde{\widetilde{\cup\mathfrak{A}}} = \cup\widetilde{\widetilde{\mathfrak{A}}}$$

и, следовательно,

$$/a/ \quad \widetilde{\cup\mathfrak{A}} = \cap\widetilde{\mathfrak{A}} = \widetilde{\cup\widetilde{\widetilde{\mathfrak{A}}}} = \cap\widetilde{\widetilde{\widetilde{\mathfrak{A}}}}$$

$$/в/ \quad \widetilde{\widetilde{\cup\mathfrak{A}}} = \cup\widetilde{\widetilde{\mathfrak{A}}} = \widetilde{\cap\widetilde{\mathfrak{A}}} = \widetilde{\widetilde{\widetilde{\cup\widetilde{\mathfrak{A}}}}}$$

$$/c/ \quad \cup\widetilde{\mathfrak{A}} = \widetilde{\cap\widetilde{\widetilde{\mathfrak{A}}}} = \widetilde{\widetilde{\widetilde{\cup\mathfrak{A}}}}$$

$$/e/ \quad \widetilde{\cup\widetilde{\mathfrak{A}}} = \cap\widetilde{\widetilde{\mathfrak{A}}} = \widetilde{\widetilde{\widetilde{\cap\mathfrak{A}}}}.$$

Доказательство. Равенство /I/ равносильно утверждению 3. Равенство /3/ очевидно вытекает из утверждения 2⁰. Далее, $\cup\mathfrak{A} \supset \mathcal{A}$ в силу утверждения I немедленно влечет $\widetilde{\cup\mathfrak{A}} < \widetilde{\mathcal{A}}$ для всякого семейства $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}$ и, следовательно, $\widetilde{\cup\mathfrak{A}} < \cap\widetilde{\mathfrak{A}}$. С другой стороны, если $P \in \cap\widetilde{\mathfrak{A}}$, то ясно, что $P \cap A \neq \emptyset$ для всякого $A \in \cup\mathfrak{A}$, т.е. $P \in \widetilde{\cup\mathfrak{A}}$ и, таким образом, $\cap\widetilde{\mathfrak{A}} \subset \widetilde{\cup\mathfrak{A}}$, и, значит, доказано и равенство /2/. Остается заметить, что все равенства в пунктах /a/,/в/,/c/,/e/ являются формальными следствиями равенств /I/–/3/.

Дословно также доказывается

Теорема 12. (Три формулы с крышкой). Для всякой системы $\mathfrak{A}$ семейств справедливы равенства:

$$/1/ \quad \widehat{\mathfrak{A}} = \widehat{\widehat{\widehat{\mathfrak{A}}}}$$

$$/2/ \quad \widehat{\cup\mathfrak{A}} = \cap\widehat{\mathfrak{A}} \qquad /3/ \quad \widehat{\widehat{\cup\mathfrak{A}}} = \cup\widehat{\widehat{\mathfrak{A}}}$$

и, следовательно,

остаются справедливыми все равенства /а/,/в/,/с/,/е/ теоремыI2° при замене оператора "$\sim$" на оператор "$\wedge$" и, в частности,

$$/4/ \quad \cup\widehat{\mathfrak{U}} = \widehat{\cap\mathfrak{U}}. \qquad\qquad /5/ \quad \widehat{\widehat{\cap\mathfrak{U}}} = \widehat{\widehat{\widehat{\cap\mathfrak{U}}}}.$$

/Отметим, что семейства /а/,/в/,/с/,/е/ вместе с $\widehat{\cap\mathfrak{U}}$, $\widehat{\overline{\cap\mathfrak{U}}}$ (последние, как легко проверить, не равны ни одному из четырех первых) исчерпывают все семейства, полученные в результате применения к системе любой комбинации операторов $\cap, \cup, \sim$, (или $\wedge$)/.

3. Теорема о строгом ap-калибре. Число Суслина, вес и предкалибр пространства

Вводимое здесь понятие строгого ap-калибра пространства дает, помимо прочего, возможность усилить результаты Аргироса, Тсарпалиоса([22]), Бандлова([21]) /доказав, в частности, что всякий кардинал $(\mu^{c(X)})^+$ является ap-калибром - что существенно сильнее, чем предкалибр/,и одновременно получить,при этом, в качестве следствия результат автора([3, теорема 3]) о зависимости веса T_3-пространства от его числа Суслина и π-характера.

Примечание I. Теорема об ap-калибре, как и самое понятие, впервые были изложены автором на семинаре А.В.Архангельского и Александровских чтениях в 1985 г. Основная конструкция, почти копируя построение из[3, предложение 2], в то же время вместо точек /множеств/ и их π-баз, фигурирующих в теоремах 3,3° и предложении 2 из[3], оперировала с фильтрами. Введенные в разделе 3° нашей статьи теоретико-множественные формулы /теоремаI2/ позволили теперь перейти от фильтров к произвольным семействам и доказать, тем самым, теорему о строгом ap-калибре /теоремаI3/.

Понятия I. Семейство $\mathcal{B}$ открытых в X множеств называется π-базой семейства $\mathcal{A}$ в X([13]), если для всякого непустого $A \in \mathcal{A}$ существует непустое $B \in \mathcal{B}$ такое, что $B \subset A$. Если, более того, $\emptyset \neq \cup\{B \subset A : B \in \mathcal{B}\} \in \mathcal{A}$ для всякого непустого $A \in \mathcal{A}$, то будем говорить, что $\mathcal{B}$ - $s\pi$-база $\mathcal{A}$ в X. Положим $\pi w(\mathcal{A}, X) = min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B}$ - π-база $\mathcal{A}$ в $X\}$

$s\pi w(\mathcal{A}, X) = min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B}$ - $s\pi$-база $\mathcal{A}$ в $X\}$.

Чтобы сохранить традиционное соответствие, далее в случае центрированного семейства $\mathcal{F}$ вместо $\pi w(\mathcal{F}, X)$, $s\pi w(\mathcal{F}, X)$ будем писать $\pi\chi(\mathcal{F}, X)$, $s\pi\chi(\mathcal{F}, X)$.

Определение 1. Кардинал τ назовем ap-калибром для X, если для любой системы $\mathfrak{A}$ предфильтров из X, таких что $\pi\chi(\mathcal{F}, X) < \tau$ для всякого $\mathcal{F} \in \mathfrak{A}$, существует подсистема $\mathfrak{A}^0 \subset \mathfrak{A}$ такая, что

$$\cup\mathfrak{A} \subset \cup\widehat{\mathfrak{A}^0} \text{ и } |\mathfrak{A}^0| < \tau.$$

Следующие определения, помимо прочего, дают возможность продемонстрировать, насколько понятие ap-калибра (=архипредкалибра) сильнее понятия предкалибра.

Будем говорить, что семейство $\mathcal{B}$ замкнуто относительно конечных пересечений (объединений), если $\cap\mathcal{K} \subset \mathcal{B}$ (соответственно $\cup\mathcal{K} \subset \mathcal{B}$) для всякого конечного подсемейства $\mathcal{K} \subset \mathcal{B}$.

Определение 2°. Кардинал τ назовем сильным π-калибром для X, если для всякого замкнутого относительно конечных пересечений семейства $\mathcal{B}$ подмножеств пространства X из того, что найдется система $\mathfrak{A}$ максимальных в $\mathcal{B}$ предфильтров, для которой

$\mathcal{B} = \cup\mathfrak{A}$ и $\pi\chi(\mathcal{F}, X) < \tau$ при любом $\mathcal{F} \in \mathfrak{A}$

следует, что и $\pi w(\mathcal{B}, \mathcal{F}) < \tau$.

Определение 2. Кардинал τ назовем π-калибром для X, если для всякого замкнутого относительно конечных пересечений семейства $\mathcal{B}$ подмножеств из X такого, что $\pi\chi(\mathcal{F}, X) < \tau$ для всякого предфильтра $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}$ имеем и $\pi w(\mathcal{B}, X) < \tau$.

Предложение 5. Пусть τ - регулярный кардинал. Тогда утверждения

(а) τ - ap-калибр для X

(в) τ - сильный π-калибр для X

(с) τ - π-калибр для X.

(е) τ - предкалибр для X

связаны импликациями (а)$\Rightarrow$(в)$\Rightarrow$(с)$\Rightarrow$(е).

Доказательство. Покажем, что (а)$\Rightarrow$(в). Действительно, если $\mathcal{B} = \cup\mathfrak{A}$, где $\mathfrak{A}$ - система максимальных в $\mathcal{B}$ центрированных семейств такая, что $\pi\chi(\mathcal{F}, X) < \tau$ для всех $\mathcal{F} \in \mathfrak{A}$ и, при этом τ - ap-калибр для X, то существует подсистема $\mathfrak{A}^0 \subset \mathfrak{A}$, для которой $|\mathfrak{A}^0| < \tau$ и $\mathcal{B} = \cup\mathfrak{A} \subset \cup\widehat{\mathfrak{A}^0}$.

Но тогда очевидно имеем:

$\mathcal{B} \subset ((\cup\widehat{\mathfrak{A}^0}) \cap \mathcal{B} = \cup\mathfrak{A}^0$, поскольку для всякого предфильтра $\mathcal{F} \in \mathcal{B}$ максимальность в $\mathcal{B}$ в точности означает, что $\widehat{\mathcal{F}} \cap \mathcal{B} = \mathcal{F}$ и, следовательно, в силу регулярности τ

легко получаем $\pi w(\mathcal{B},X) \leq \pi w(\cup \mathcal{U}^{\circ}, X) \leq \sum\{\pi\chi(\mathcal{F},X) : \mathcal{F} \in \mathcal{U}^{\circ}\} < \tau$.

Далее, очевидно, что (в)$\Rightarrow$(с), и, наконец, покажем, что (с)$\Rightarrow$(е). Действительно, если $\mathcal{B}$ – семейство открытых в X множеств и $|\mathcal{F}| < \tau$ для всякого центрированного семейства $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}$, то тем более тогда для всякого предфильтра $\mathcal{F}' \subset \mathcal{B}$ имеем $\pi\chi(\mathcal{F}', X) \leq |\mathcal{F}'| < \tau$. Поэтому, если τ – π-калибр для X, то $\pi w(\mathcal{B}, X) < \tau$ (Очевидно, что без ограничения общности можно можно считать семейство $\mathcal{B}$ замкнутым относительно конечных пересечений) и, следовательно, $\mathcal{B} = \cup\{\mathcal{F}_G : G \in \mathcal{G}\}$ где $\mathcal{G}$ – π-база $\mathcal{B}$ в X такая, что $|\mathcal{G}| < \tau$ и $\mathcal{F}_G = \{B \in \mathcal{B} : B \supset G\}$ Ясно, что $\mathcal{F}_G$ – предфильтр и $|\mathcal{F}_G| < \tau$ для всякого $G \in \mathcal{G}$, откуда в силу регулярности τ и получаем $|\mathcal{B}| < \tau$. Но это и означает, что τ – предкалибр для X, и доказательство завершено.

<u>Следствие 1°.</u> Всякий регулярный ap-калибр для X является и предкалибром для X.

Всюду далее для семейства $\mathcal{B}$ и множества $A \subset X$ полагаем

$$A(\mathcal{B}) = \cup\{B \subset A : B \in \mathcal{B}\}$$

Ясно, что $\mathcal{B}$ – $s\pi$-база семейства $\mathcal{A}$ в X тогда и только тогда, когда для всякого $A \in \mathcal{A}$ имеем $\emptyset \neq A(\mathcal{B}) \in \mathcal{A}$ (при $A \neq \emptyset$).

<u>Утверждение 4.</u> Если $G \in \hat{\mathcal{A}}$ и $\mathcal{B}$ – $s\pi$-база $\mathcal{A}$ в X, то семейство $\mathcal{B}' = \{B \cap \operatorname{Int} G : B \in \mathcal{B}\}$ – π-база семейства $\mathcal{A}' = \{A \cap G : A \in \mathcal{A}\}$ в X.

Действительно, в соответствии с определением $s\pi$-базы для всякого непустого $A \in \mathcal{A}$ имеем

$\emptyset \neq A(\mathcal{B}) \in \mathcal{A}$ и, так как $G \in \hat{\mathcal{A}}$, то

$$\emptyset \neq A(\mathcal{B}) \cap \operatorname{Int} G = \cup\{B \cap \operatorname{Int} G : B \subset A,\ B \in \mathcal{B}\} \subset A \cap G,$$

что и требовалось доказать.

<u>Утверждение 5.</u> Если $\mathcal{B}$ – π-база семейства $\mathcal{A}$ в X, то $\mathcal{B}$ – $s\pi$-база семейства $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup \{A(\mathcal{B}) : A \in \mathcal{A}\}$ в X, причем, если $\mathcal{A}$ – (пред)фильтр, то и $\mathcal{A}'$ – (пред)фильтр.

Действительно, достаточно заметить, что из $A \subset A_1 \cap A_2$ следует $A(\mathcal{B}) \subset A_1(\mathcal{B}) \cap A_2(\mathcal{B})$.

<u>Предложение 6.</u> Следующие условия эквивалентны:

(а) кардинал τ – ap-калибр для X

(в) для всякой системы $\mathcal{U}$ предфильтров из X такой, что

$s\pi\chi(\mathcal{F},X)<\tau$ для всякого $\mathcal{F}\in\mathfrak{U}$,
существует подсистема $\mathfrak{U}^0\subset\mathfrak{U}$ такая, что

$$\cup\hat{\mathfrak{U}}=\cup\hat{\mathfrak{U}}^0 \quad \text{и} \quad |\mathfrak{U}^0|<\tau .$$

<u>Доказательство.</u> Если $\mathfrak{U}$ – система предфильтров из X такая что $s\pi\chi(\mathcal{F},X)<\tau$, то для всякого предфильтра

$\mathcal{F}_G=\mathcal{F}\cup\{G\}\cup\{A\cap G : A\in\mathcal{F}\}$, где $G\in\hat{\mathcal{F}}$,

в силу утверждения 4 $\pi\chi(\mathcal{F}_G,X)\le s\pi\chi(\mathcal{F},X)<\tau$ и, следовательно, если τ – ap-калибр, то для системы

$\mathfrak{U}_1=\{\mathcal{F}_G : \mathcal{F}\in\mathfrak{U},\ G\in\hat{\mathcal{F}}\}$ существует подсистема $\mathfrak{U}_1^0\subset\mathfrak{U}_1$ такая, что $|\mathfrak{U}_1^0|<\tau$ и $\cup\mathfrak{U}_1\subset\cup\hat{\mathfrak{U}}_1^0$. Но, очевидно, $\cup\hat{\mathfrak{U}}=\cup\mathfrak{U}_1$ и, кроме того, для системы $\mathfrak{U}^0=\{\mathcal{F} : \mathcal{F}_G\in\mathfrak{U}_1^0$ для некоторого $G\in\hat{\mathcal{F}}\}\subset\mathfrak{U}$ имеем $\cup\hat{\mathfrak{U}}_1^0\subset\cup\hat{\mathfrak{U}}^0$, так как $\mathcal{F}_G\supset\mathcal{F}$ и, следовательно, $\hat{\mathcal{F}}_G\subset\hat{\mathcal{F}}$ для всех $\mathcal{F}\in\mathfrak{U}^0$. Итак,

$$\cup\hat{\mathfrak{U}}=\cup\mathfrak{U}_1\subset\cup\hat{\mathfrak{U}}_1^0\subset\cup\hat{\mathfrak{U}}^0,$$

что в силу очевидного $\cup\hat{\mathfrak{U}}^0\subset\cup\hat{\mathfrak{U}}$ и $|\mathfrak{U}^0|\le|\mathfrak{U}_1^0|<\tau$ и доказывает импликацию (а) $\Rightarrow$ (в). Обратно, перейдя от системы $\mathfrak{U}$ предфильтров из X таких, что $\pi\chi(\mathcal{F},X)<\tau$ для всех $\mathcal{F}\in\mathfrak{U}$ к системе

$\mathfrak{U}_*=\{\mathcal{F}_* : \mathcal{F}\in\mathfrak{U}\}$, где $\mathcal{F}_*=\mathcal{F}\cup\{A(\mathcal{B}) : A\in\mathcal{F}\}$

и $\mathcal{B}$ – π-база $\mathcal{F}$ в X с $|\mathcal{B}|<\tau$ в силу утверждения 5 получаем, что $s\pi\chi(\mathcal{F}_*,X)<\tau$ для всех $\mathcal{F}_*\in\mathfrak{U}_*$ и, следовательно, в предположении (в) существует подсистема $\mathfrak{U}_*^0\subset\mathfrak{U}_*$ такая, что $|\mathfrak{U}_*^0|<\tau$ и $\cup\hat{\mathfrak{U}}_*=\cup\hat{\mathfrak{U}}_*^0$.
Заметив теперь, что $\mathcal{F}\subset\mathcal{F}_*\subset\hat{\mathcal{F}}_*$ – поскольку $\mathcal{F}_*$ – предфильтр в силу утверждения 5 и, $\hat{\mathcal{F}}_*\subset\hat{\mathcal{F}}$, поскольку $\mathcal{F}_*\supset\mathcal{F}$, окончательно получаем

$$\cup\mathfrak{U}\subset\cup\mathfrak{U}_*\subset\cup\hat{\mathfrak{U}}_*^0\subset\cup\hat{\mathfrak{U}}^0,$$

где $\mathfrak{U}^0=\{\mathcal{F} : \mathcal{F}_*\in\mathfrak{U}_*^0\}\subset\mathfrak{U}$ и доказательство завершено.

<u>Определение 3.</u> Кардинал τ назовем строгим ap-калибром для X, если для всякой системы $\mathfrak{U}$ семейств подмножеств из X таких, что $s\pi w(\mathcal{A},X)<\tau$ для всех $\mathcal{A}\in\mathfrak{U}$ существует подсистема $\mathfrak{U}^0\subset\mathfrak{U}$, такая что $|\mathfrak{U}^0|<\tau$ и $\cup\hat{\mathfrak{U}}=\cup\hat{\mathfrak{U}}^0$.

Из определения 3 и предложения 6 сразу же получаем

Утверждение 6. Всякий строгий ap-калибр для X является и ap-калибром для X.

Перейдем теперь к доказательству основного результата работы, утверждающему, что всякий кардинал вида $(\mu^{c(X)})^{+}$ является строгим ap-калибром.

Функцию $\sigma : \exp Z \to Y$ назовем τ-ограниченной ($\nabla\tau$-ограниченной), если для всякого $M \subset Z$ такого, что $|M| \le \tau$ ($|M| < \tau$) имеем

$$|\sigma(M)| \le \tau \text{ (соответственно, } |\sigma(M)| < \tau).$$

Функцию $\sigma : \exp Z \to Y$ будем называть λ-монотонно-аддитивной, если для всякого неубывающего семейства $\{M_\alpha : \alpha < \lambda\} \subset \exp Z$ имеем

$$\sigma(\cup\{M_\alpha : \alpha < \lambda\}) = \cup\{\sigma(M_\alpha) : \alpha < \lambda\}.$$

Лемма 1. (основная конструкция). Пусть $\mathcal{U}$ - система семейств подмножеств из X и $\sigma : \exp \mathcal{U} \to \exp\exp X$ $\nabla\tau$-ограниченная и λ-монотонноаддитивная функция, где $\lambda < cf(\tau)$. Тогда существует подсистема $\mathcal{U}^0 \subset \mathcal{U}$ такая, что $|\mathcal{U}^0| < \tau$ и $\sigma(\mathcal{U}^0) \cap \cap \mathcal{U}^0 = \sigma(\mathcal{U}^0) \cap \cap \mathcal{U}$.

Доказательство. Положим $\mathcal{U}_0 = \{\mathcal{A}_0\}$ для некоторого $\mathcal{A}_0 \in \mathcal{U}$, и пусть для всех $\alpha < \alpha' < \lambda$ уже определены системы $\mathcal{U}_\alpha \subset \mathcal{U}$ такие, что

$$|\mathcal{U}_\alpha| < \tau. \qquad (1)$$

Зафиксировав теперь для всякого $G \in \sigma(\cup\{\mathcal{U}_\alpha : \alpha < \alpha'\}) \setminus \cap \mathcal{U}$ семейство $\mathcal{A}(G) \in \mathcal{U}$ такое, что $G \notin \mathcal{A}(G)$, полагаем

$$\mathcal{U}_{\alpha'} = \{\mathcal{A}(G) : G \in \sigma(\cup\{\mathcal{U}_\alpha : \alpha < \alpha'\}) \setminus \cap \mathcal{U}\} \quad (2)$$

Ясно, что в силу (1), из $\lambda < cf(\tau)$ очевидно получаем $|\cup\{\mathcal{U}_\alpha : \alpha < \alpha'\}| < \tau$, а значит, в силу $\nabla\tau$-ограниченности функции σ, и $|\sigma(\cup\{\mathcal{U}_\alpha : \alpha < \alpha'\})| < \tau$ и, тем более, тогда в силу (2) $|\mathcal{U}_{\alpha'}| < \tau$. Покажем, что построенная таким образом система

$$\mathcal{U}^0 = \cup\{\mathcal{U}_\alpha : \alpha < \lambda\} \text{ - искомая.}$$

Доказательство. $|\mathfrak{U}^0| < \tau$ – опять же в силу (1) и так как $\lambda < cf(\tau)$. Далее, $\mathfrak{U}^0 \subset \mathfrak{U}$ очевидно влечет

$$\cap \mathfrak{U}^0 \supset \cap \mathfrak{U}. \qquad (3)$$

С другой стороны, в силу λ-монотонно-аддитивности функции σ, если $G \in \sigma(\mathfrak{U}^0) \setminus \cap \mathfrak{U}$, то

$G \in \sigma(\cup\{\mathfrak{U}_\alpha : \alpha < \alpha'\}) \setminus \cap \mathfrak{U}$ для некоторого $\alpha' < \lambda$, и в силу формулы (2) построения существует $A(G) \in \mathfrak{U}$, для которого $G \notin A(G) \in \mathfrak{U}_{\alpha'} \subset \mathfrak{U}^0$ и, значит, $G \notin \cap \mathfrak{U}^0$. Таким образом, $\sigma(\mathfrak{U}^0) \setminus \cap \mathfrak{U} \subset \sigma(\mathfrak{U}^0) \setminus \cap \mathfrak{U}^0$, что вместе с (3) и влечет требуемое равенство. (Сравните с предложением 2 и леммой 2 из [3]).

Как и в [3], [14] положим $V_{\mu*}\mathfrak{B} = \{\cup \mathfrak{B}' : \mathfrak{B}' \subset \mathfrak{B}, |\mathfrak{B}'| < \mu\}$ ($V_\mu \mathfrak{B} = \{\cup \mathfrak{B}' : \mathfrak{B}' \subset \mathfrak{B}, |\mathfrak{B}'| \le \mu\}$) и выделим очевидное

Утверждение 7. Если $\{\mathfrak{B}_\alpha : \alpha < \lambda\}$ – неубывающая система семейств из X (т.е. $\mathfrak{B}_\alpha \subset \mathfrak{B}_{\alpha'}$ при $\alpha < \alpha'$), и $\mu \le cf(\lambda)$, то

$$V_{\mu*}(\cup\{\mathfrak{B}_\alpha : \alpha < \lambda\}) = \cup\{V_{\mu*}\mathfrak{B}_\alpha : \alpha < \lambda\}.$$

и, в частности, если λ – регулярный кардинал, то

$$V_{\lambda*}(\cup\{\mathfrak{B}_\alpha : \alpha < \lambda\}) = \cup\{V_{\lambda*}\mathfrak{B}_\alpha : \alpha < \lambda\}$$

Действительно, если $\mathfrak{B}' \subset \cup\{\mathfrak{B}_\alpha : \alpha < \lambda\}$ и $|\mathfrak{B}'| < \mu \le cf(\lambda)$, то тогда $\mathfrak{B}' \subset \mathfrak{B}_\gamma$ для некоторого $\gamma < \lambda$ и, значит, $\cup \mathfrak{B}' \in V_{\mu*}\mathfrak{B}_\gamma$, откуда и следует требуемое равенство.

Заметив, что $|V_{\mu*}\mathfrak{B}| \le |\mathfrak{B}|^{\underline{\mu}}$ ($\lambda^{\underline{\mu}} = \Sigma\{\lambda^\nu : \nu < \mu\}$), из утверждения 7 легко извлекаем

Утверждение 8. Пусть $\mathfrak{U}$ и $\{\mathfrak{B}_A : A \in \mathfrak{U}\}$ – системы семейств подмножеств из X, и функция $\sigma : \exp \mathfrak{U} \to \exp\exp X$ определена формулой $\sigma(\mathfrak{U}') = V_{\mu*}(\cup\{\mathfrak{B}_A : A \in \mathfrak{U}'\})$ для всякой подсистемы $\mathfrak{U}' \subset \mathfrak{U}$. Тогда:

(1) если $\mu \le cf(\lambda)$, то функция σ – λ-монотонно-аддитивна

(2) если $|\mathfrak{B}_A| < \tau$ для всякого $A \in \mathfrak{U}$, где τ – регулярный кардинал, такой что $\nu^{\underline{\mu}} < \tau$ для всякого $\nu < \tau$, то функция σ – $\nabla\tau$-ограничена.

Из утверждения 8 и леммы 1 немедленно следует теперь

Предложение 7. Пусть $\mathfrak{U}$ – система семейств подмножеств из X

для каждого $\mathcal{A} \in \mathfrak{U}$ зафиксировано семейство $\mathcal{B}_{\mathcal{A}}$ такое, что $|\mathcal{B}_{\mathcal{A}}| < \tau$, где τ - регулярный кардинал,
и $\gamma^{\mathfrak{S}} < \tau$ для всякого кардинала $\gamma < \tau$.
Тогда существует подсистема $\mathfrak{U}^{\circ} \subset \mathfrak{U}$ такая, что $|\mathfrak{U}^{\circ}| < \tau$ и

$\sigma(\mathfrak{U}^{\circ}) \cap \bigcap \mathfrak{U}^{\circ} = \sigma(\mathfrak{U}^{\circ}) \cap \bigcap \mathfrak{U}$ где $\sigma(\mathfrak{U}^{\circ}) = V_{\mu *}(\cup\{\mathcal{B}_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \in \mathfrak{U}^{\circ}\})$.

(Заметим, что хотя здесь нам достаточно только одной операции V, функция σ допускает широкую интерпрета..ию и может включать в в себя набор операций вместе с их итерированием, например, операции V, Λ, Int, "замыкание" и их итерации).

Предложение 8. Если $\mathcal{B}_{\mathcal{A}}$ - $\$\pi$-база $\mathcal{A}$ в X, для всякого семейства $\mathcal{A} \in \mathfrak{U}$ и

$$\mathfrak{B} = V_{\nabla c(X)*}(\cup\{\mathcal{B}_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \in \mathfrak{U}\}) \cap \bigcap \hat{\hat{\mathfrak{U}}},$$

то $\hat{\hat{\mathfrak{B}}} = \bigcap \hat{\hat{\mathfrak{U}}}$.

Доказательство. В силу утверждения 1 и формулы (5) теоремы 12, $\mathfrak{B} \subset \bigcap \hat{\hat{\mathfrak{U}}}$ влечет

$$\hat{\hat{\mathfrak{B}}} \subset \widehat{\widehat{\bigcap \hat{\hat{\mathfrak{U}}}}} = \bigcap \hat{\hat{\mathfrak{U}}}$$

и достаточно показать, таким образом, что $\bigcap \hat{\hat{\mathfrak{U}}} \subset \hat{\hat{\mathfrak{B}}}$.
Действительно, если $P \in \bigcap \hat{\hat{\mathfrak{U}}}$, то для всякого $\mathcal{A} \in \mathfrak{U}$ существует $A \in \mathcal{A}$ такое, что $\overline{\mathrm{Int}\, P} \supset A \supset A(\mathcal{B}_{\mathcal{A}}) = \cup\{B \subset A : B \in \mathcal{B}_{\mathcal{A}}\} \in \mathcal{A}$ (последнее - так как $\mathcal{B}_{\mathcal{A}}$ - $\$\pi$-база $\mathcal{A}$ в X), и, следовательно,

$$\overline{\mathrm{Int}\, P} \supset P' = \cup\{A(\mathcal{B}_{\mathcal{A}}) : \mathcal{A} \in \mathfrak{U}\} \in \bigcap \hat{\hat{\mathfrak{U}}}. \quad (1)$$

Очевидно при этом, что $P' = \cup \mathcal{B}'$ для некоторого семейства $\mathcal{B}' \subset \cup\{\mathcal{B}_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \in \mathfrak{U}\}$, а значит, существует и семейство

$\mathcal{B}'' \subset \mathcal{B}'$ такое, что $|\mathcal{B}''| < \nabla c(X)$ (2)

и $\cup \mathcal{B}'' \subset P' \subset \overline{\cup \mathcal{B}''}$ (3)

Но тогда, в силу (1) и (3) $P'' = \cup \mathcal{B}'' \in \bigcap \hat{\hat{\mathfrak{U}}}$ (4)

а в силу (2) $P'' \in V_{\nabla c(X)*}(\cup\{\mathcal{B}_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \in \mathfrak{U}\})$, и, таким образом, $P'' \in \mathfrak{B}$. Итак, для всякого $P \in \bigcap \hat{\hat{\mathfrak{U}}}$ существует $P'' \in \mathfrak{B}$ такое, что $\overline{\mathrm{Int}\, P} \supset P''$ (в силу (1), (3), (4)). Следовательно, $P \in \hat{\hat{\mathfrak{B}}}$. Но это и означает, что

$\bigcap \hat{\hat{\mathfrak{U}}} \subset \hat{\hat{\mathfrak{B}}}$, и доказательство завершено.

Теорема 13 (Основная). Пусть τ - регулярный кардинал и $\nu^{\underline{\nabla c(X)}} < \tau$ (в частности, $\nu^{c(X)} < \tau$) для всякого кардинала $\nu < \tau$. Тогда τ - строгий ap-калибр для X.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}$ - система семейств подмножеств из X, такая что $s\pi\chi(\mathcal{A}, X) < \tau$ для всех $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}$. Зафиксировав тогда для всякого $\hat{\hat{\mathcal{A}}} \in \hat{\hat{\mathfrak{A}}}$ $s\pi$-базу $\mathcal{B}_{\mathcal{A}}$ семейства $\mathcal{A}$ в X с $|\mathcal{B}_{\mathcal{A}}| < \tau$, применим к системе $\hat{\hat{\mathfrak{A}}}$ предложение 7 при $\mu = \nabla c(X)$ (что соответствует условиям - поскольку $\nabla c(X)$ - регулярный кардинал (см[17]) и, кроме того, очевидно $\nabla c(X) \leq 2^{\underline{\nabla c(X)}} < \tau$) : существует подсистема $\mathfrak{A}^0 \subset \mathfrak{A}$ с $|\mathfrak{A}^0| < \tau$ и

$$\mathcal{G}(\hat{\hat{\mathfrak{A}}}{}^0) \cap \cap \hat{\hat{\mathfrak{A}}}{}^0 = \mathcal{G}(\hat{\hat{\mathfrak{A}}}{}^0) \cap \cap \hat{\hat{\mathfrak{A}}}, \quad \text{где}$$

$$\mathcal{G}(\hat{\hat{\mathfrak{A}}}{}^0) = \vee_{\nabla c(X)} * (\cup \{\mathcal{B}_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \in \mathfrak{A}^0\}).$$

Положив теперь $\mathcal{Y} = \mathcal{G}(\hat{\hat{\mathfrak{A}}}{}^0) \cap \cap \hat{\hat{\mathfrak{A}}}{}^0$ из очевидного $\mathcal{Y} \subset \cap \hat{\hat{\mathfrak{A}}}$ в силу предложения 8, утверждения 2, теоремы 12(5) получаем

$$\cap \hat{\hat{\mathfrak{A}}}{}^0 = \hat{\hat{\mathcal{Y}}} \subset \cap \hat{\hat{\mathfrak{A}}} \quad \text{и, следовательно,}$$

$\cap \hat{\hat{\mathfrak{A}}}{}^0 \subset \cap \hat{\hat{\mathfrak{A}}}$. С другой стороны, $\hat{\hat{\mathfrak{A}}}{}^0 \subset \hat{\hat{\mathfrak{A}}}$ очевидно влечет $\cap \hat{\hat{\mathfrak{A}}}{}^0 \supset \cap \hat{\hat{\mathfrak{A}}}$ и, таким образом, получаем $\cap \hat{\hat{\mathfrak{A}}}{}^0 = \cap \hat{\hat{\mathfrak{A}}}$. Но тогда $\widehat{\cap \hat{\hat{\mathfrak{A}}}{}^0} = \widehat{\cap \hat{\hat{\mathfrak{A}}}}$, что в силу формулы (4) теоремы 12 и приводит немедленно к требуемому равенству

$$\cup \hat{\mathfrak{A}}^0 = \cup \hat{\mathfrak{A}},$$

и доказательство завершено.

Очевидно, что кардиналы $(\mu^{c(X)})^+$ и $(\mu^{\underline{\nabla c(X)}})^+$ отвечают условиям теоремы 13, и справедлива, следовательно,

Теорема 13°. Кардинал $(\mu^{c(X)})^+$ (как и кардинал $(\mu^{\underline{\nabla c(X)}})^+$) является строгим ap-калибром для X при любом $\mu \geq 2$.

Следствие 1. ([22]; для $T_{3\frac{1}{2}}$-пространств [21]). Кардинал $(\mu^{c(X)})^+$ является предкалибром для X при любом $\mu \geq 2$

Определение 4. Кардинал τ назовем d-калибром для X, если $d(X') < \tau$ для всякого множества $X' \subset X$ такого, что $\pi\chi(x, X) < \tau$ для всех $x \in X'$.

Определение 4°. Кардинал τ назовем w-калибром для X, если $w(Y) < \tau$ для всякого множества $Y \subset X$ такого, что $\pi\chi(x, X) < \tau$ для всех $x \in Y$.

Если всякий регулярный кардинал является w-калибром для X, то X называется π-характерным пространством ([I5]). Класс π-характерных пространств весьма широк (см. [I5]) и, таким образом, всякий несчетный регулярный кардинал, в частности $\aleph_1$, может быть w-калибром для некоторого пространства, в то время как всякий ap-калибр $\geq c^+$ (см. ниже - теорему I4).

Отметим сразу же очевидный факт из [I5]:

Утверждение 9°. Кардинал τ является w-калибром для X тогда и только тогда, когда $w(\overline{Y}) < \tau$ для всякого $Y \subset X$ такого, что $\pi\chi(x, X) < \tau$ для всех $x \in Y$.

Утверждение 9. Если X - T_3-пространство, то всякий ap-калибр для X является и d-калибром для X

Доказательство. Пусть $Y \subset X$ и $\mathcal{U} = \{\mathcal{L}_x : x \in Y\}$, где $\mathcal{L}_x$ - семейство всех окрестностей точки x в X. Тогда, если τ - ap-калибр для X и $\pi\chi(x, X) < \tau$ для всех $x \in Y$, то /поскольку очевидно, что всегда $\pi\chi(\mathcal{L}_x, X) = \pi\chi(x, X)$/ существует $Y^o \subset Y$, для которого $\cup\mathcal{U} \subset \{\mathcal{L}_x : x \in Y^o\}$, $|Y^o| < \tau$. Ясно, что тогда для всякого $L \in \cup\mathcal{U} = \{L : L$ - открыто в X, $L \cap Y \neq \emptyset\}$ имеем $\overline{L} \cap Y^o \neq \emptyset$, откуда и следует $Y \subset \overline{Y^o}$.

Предложение 9. Пусть X - T_3-пространство и τ - регулярный кардинал такой, что $\nu^{\underline{\nabla c(X)}} < \tau$ для всех $\nu < \tau$. Тогда τ - w-калибр для X.

Доказательство. Если $Y \subset X$ и $\pi\chi(x, X) < \tau$ для всех $x \in Y$, то в силу утверждения 9 $d(Y) < \tau$, а, значит, в силу регулярности τ и $\pi w(Y, X) < \tau$. Остается только заметить, что если семейство $\mathcal{B}$ - π-база Y в X, то семейство

$$\mathcal{L} = \{\overline{Y} \setminus \overline{G} : G \in V_{\nabla c(X)*}\mathcal{B}\}$$ - база в $\overline{Y}$ и $|\mathcal{L}| \leq |\mathcal{B}|^{\underline{\nabla c(X)}}$.

Предложение 9°. Кардиналы $(\mu^{c(X)})^+$ и $(\mu^{\underline{\nabla c(X)}})^+$ являются w-калибрами для T_3-пространства X при любом $\mu \geq 2$.

Положив $\pi\chi(Y|X) = \sup\{\pi\chi(x, X) : x \in Y\}$, из предложения 9° при $\mu = \pi\chi(Y|X)$, в качестве второго следствия основной теоремы I3 получаем /уже активно использовавшийся/ результат:

Следствие 2. ([3, теорема 3°]). Если X - T_3-пространство и $Y \subset X$, то $w(\overline{Y}) \leq \pi\chi(Y|X)^{\underline{\nabla c(X)}} \leq \pi\chi(Y|X)^{c(X)}$.

Всю дополнительную информацию к следствию 2, которая содержится в несколько более точном предложении 9, полностью исчерпывает

Следствие 2′. Если X - T_3-пространство и $\pi\chi(Y|X)$ - регулярный кардинал такой, что $\nu^{\nabla c(X)} < \pi\chi(Y|X)$ для всякого $\nu < \pi\chi(Y|X)$, то существует точка $y \in Y$, для которой

$$\pi\chi(y, X) = \pi\chi(Y|X).$$

Легко проверяется, что свойство быть (строгим) ap-калибром сохраняется при переходе к непрерывным образам, всюду плотным подмножествам и расширениям, открытым подмножествам. Учитывая это, и предложение 9, получаем:

Теорема 14. Пусть τ - ap-калибр для X. Тогда τ - ap-калибр и для βN_λ при любом $\lambda < \nabla c(X)$ и, следовательно, $\nabla c(X) \leq 2^{\nabla c(X)} \leq \tau$, кроме того:

(1) если τ - регулярен, но не сильнонедостижим, то $(2^{\nabla c(X)})^+ \leq \tau$

(2) если $c(X)$ - не слабонедостижим, то $(2^{c(X)})^+ \leq \tau$.

Следующий результат демонстрирует, в частности, что даже в хороших, (но не бикомпактных) пространствах ap-калибр не обязан быть калибром.

Теорема 15. Если финально компактное секвенциальное T_3-пространство имеет несчетно-конфинальный калибр $\tau \leq \mathfrak{c}^+$, то $|X| \leq \mathfrak{c}$.

Библиографический список

1. Йех Т. Теория множеств и метод форсинга. - М., 1973.
2. Архангельский А.В. Число Суслина и мощность, характеры точек в секвенциальных бикомпактах// ДАН СССР. - 1970. - Т.192. - С. 255 - 258.
3. Шапировский Б.Э. Канонические множества и характер, плотность и вес в бикомпактах// ДАН СССР. - 1974. - Т. 218. - С. 58 - 61.
4. Шапировский Б.Э. О вложении экстремально несвязных пространств в бикомпакты// ДАН СССР. - 1975. - Т. 223. - С. 1083 - 1086.
5. Шапировский Б.Э. Об отображениях на тихоновские кубы// УМН. - 1980. - № 3. - С. 122 - 130.
6. Пономарев В.И. О пространствах соабсолютных с метрическими// УМН. - Т. 21. - С. 120 - 136.

7. Шапировский Б.Э. О тесноте и близких понятиях// Межвузовский сб. Топологические пространства и их отображения. - Рига, ЛГУ, 1979. - С. 119 - 131.

8. Малыхин В.И., Шапировский Б.Э. Аксиома Мартина и свойства топологических пространств// ДАН СССР. - 1973. - С. 532 - 535.

9. Малыхин В.И. Ослабленные формы Аксиомы Мартина// Непрерывные функции на топологических пространствах. - Рига, ЛГУ, 1986. - С. 91 - 107.

10. Архангельский А.В. Нет "наивного" примера несепарабельного секвенциального бикомпакта с условием Суслина// ДАН СССР. - 1972. - Т. 203. - С. 983 - 985.

11. Архангельский А.В. Кардинальные инварианты// УМН. - 1978. - Т. 33. - С. 29 - 84.

12. Шанин Н.А. О произведениях пространств// Труды МИАН. - 1948. - Т. 24. - С. 1 - 112.

13. Шапировский Б.Э. О тесноте и π-весе и близких к ним понятиях. Аксиома Мартина и ее топологические следствия// Топологические пространства и отображения в них. Ученые записки ЛГУ. - Т. 257. - С. 88 - 99.

14. Шапировский Б.Э. Кардинальные инварианты в бикомпактах// Семинар по общей топологии. - МГУ, 1981. - С. 162 - 187.

15. Шапировский Б.Э. О классе пространств, содержащем все диадические бикомпакты// Труды ЛИТК. - Л., 1983. - С. 119 - 134.

16. Shapirovskiĭ B.E. Special types of embeddings in Tychonoff cubes //Coll. Math. Sec. - 1978. - V. 23, p. 1055-1086. (Budapest, 1980).

17. Juhasz I. Cardinal functions. Math. Centre Tracts. 34. Amsterdam, 1971.

18. Juhasz I. Martin's axiom solves Ponomarev's problem Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Math. - 1969. - V. 17. - P. 219-223.

19. Hajnal A., Juhasz I. Discrete subspace of spaces Indag. Math.-1967. - V. 29. - P. 343.

20. Малыхин В.И. Эквивалентность аксиомы Мартина и одного чисто топологического утверждения//Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Math. 1979 - V. 25. - P. 895 - 900.

21. Бандлов И. Факторизационные теоремы и "сильные" последовательности в бикомпактах// ДАН СССР. - 1980. - Т. 253, № 5. - С. 1036 - 1039.

22. Argyros S, Tsarpalias A. Calibers of compact spaces //Trans. Amer. Math. Soc. - 1982. - V. 270. - P. 149-162.

23. Suslin M. Problem 3 // Fund. Math. - 1920. - V. 1. - P. 223

<u>B. Shapirovskii</u>.<u>Souslin number in set-theoretical topology.</u>

<u>Summary</u>. The main result is the following theorem on strict ap-calibers:

For an arbitrary space X each cardinal of the type $(\tau^{c(X)})^+$ is a strict ap-caliber of X. By the (strict) ap-caliber of the space X we call a cardinal τ s.t. for every system $\mathcal{U}$ of filters on X (resp. for every system of families of subsets of X) satisfying $s\pi\chi(\mathcal{A}, X) < \tau$ for every $\mathcal{A} \in \mathcal{U}$ there exists a subsystem $\mathcal{U}^0 \subset \mathcal{U}$ such that $|\mathcal{U}^0| < \tau$ and $\bigcup \widehat{\mathcal{U}^0} = \bigcup \widehat{\mathcal{U}}$, where $\widehat{\mathcal{U}} = \{\widehat{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \in \mathcal{U}\}$ and $\widehat{\mathcal{A}} = \{P \subset X: \operatorname{Int}(P \cap A) \neq \emptyset \ \forall A \in \mathcal{A}\}$.

The key for the proof of the theorem on strict ap-calibers (as distinct from the theorem on ap-calibers announced by the author in 1985) is three general set-theoretic formulae established in Section 3^0. As a corollary from the theorem on ap-calibers we obtain the results of Argyros and Tsarpalias and Bandlov (for $T_{3,5}$-spaces) and the author's results about the relations between the weight, the Souslin number and the π-character of a space.
AMS Subject classification: 54A25, 54A35.

<u>B. Šapirovskijs.</u> <u>Suslina skaitlis kopteorētiskajā topoloģijā.</u>

<u>Anotācija.</u> Darbā tiek apskatīti daži kardinālinvariantu teorijas virzieni. Visos šajos virzienos centrālo lomu novērtējumi ar Suslina skaitļa palīdzību. Raksts satur arī dažus jaunākus autora rezultātus šajā jomā. Raksta 3^0. nodaļā ir definētas trīs jaunas vispārīga rakstura kopteorētiskas formulas; šīs formulas tiek būtiski izmantotas, pierādot darba pamatrezultātu - teorēmu 13 par topoloģiskas telpas stingriem ap-kalibriem.

103009 Москва
ул. Горького д. 8, корп. I, кв. 48.

Latvijas Universitātes Zinātniskie Raksti, 552. (1990)
Matemātika, I.

TOPOLOGICAL PROPERTIES OF A FUZZY SPACE AS LOCATION PROPERTIES OF ITS FUZZY TOPOLOGY IN THE TYCHONOFF CUBE

A. Šostak

Abstract. Some topological properties of a fuzzy topological space (such as T_1-separatedness, discreteness, to have tightness $\leq k$) are characterized as location properties of the fuzzy topology τ in the Tychonoff cube I^X (endowed either with the usual product topology or with some special topology).
AMS Subject classification 54A40.

A.V. Arhangel'skiĭ proposed to study the relations between a certain topological property of a fuzzy topological space and the location of its fuzzy topology in the Tychonoff cube. More precise, let $\mathcal{P}$ be a topological property of fuzzy topological spaces and let Q be a property of a subset S of a Tychonoff cube I^k (e.g. to be open, to be closed e.a.). The problem is to find pairs of properties $\mathcal{P}$ and Q which are dual in the sense of a statement of the following type:

A fuzzy space (X,τ) has the property $\mathcal{P}$ iff the subset of the Tychonoff cube $I^{\mathcal{L}}$ (which is endowed either with the standard product topology, or with some special topology) has the property Q.

This paper is, probably, the first research carried out in this direction. Here we establish the duality, in the above sense of such pairs of properties as discreteness - openess, T_1-separatedness - denseness, tightness $\leq k$ - closedness (in a special topology). Incidently we establish analogous statements about the relations between the properties of a (crisp) topological space (X,T) and the location of its fuzzy topolcgy T in the Cantor cube 2^X.

In the sequel the term "a fuzzy topological space" is always used in Chang's sense [3]. A fuzzy space (X,τ) is called laminated if τ contains all constants $c\in I$ (such spaces were first considered in Lowen's papers [4, 5]). See e.g. [6,7] for the standard terminology and notation accepted in Fuzzy Topology.

For our purposes separation properties of T_1-type for fuzzy spaces are of importance. Therefore we start with discussing some T_1-type axioms and their elementary properties.

Recall first that according to [8] a fuzzy space (X,τ) is called a <u>T_1-space</u> if for every pair of distinct points $x,y\in X$ there exists $U\in\tau$ such that $U(x)=1$ and $U(y)=0$.

By an <u>AT_1-space</u> (or by a T_1-space in the sense of Adnadjevic [1]) we call a fuzzy space (X,τ) each fuzzy point x^t ($x\in X$, $t\in(0,1]$) in which is closed. A fuzzy space (X,τ) in which every fuzzy point x^t with the value $t\in(0,1)$ is closed will be called an <u>WAT_1-space</u> (or a weakly AT_1-space).

The proofs of the next four propositions reduce to direct verifications and therefore we omit them.

<u>Proposition</u> <u>1</u>. Each laminated T_1-space is an AT_1-space; each AT_1-space is a T_1-space. (The inverse implications do not hold.)

<u>Proposition</u> 2. The following properties are equivalent for a fuzzy space (X,τ) :

(a) (X,τ) is a laminated T_1-space ;

(b) for every pair of disjoint points $x,y\in X$ and every $\alpha\in I$ ($I=[0,1]$) there exists $U\in\tau$ such that $U(x)=\alpha$, $U(y)=0$ and $U\leq\alpha$;

(c) for every (finite) family of distinct points $x_1,\dots,x_n\in X$ and every family $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in I$ there exists $U\in\tau$ such that $U(x_i)=\alpha_i$ for each $i=1,\dots,n$ and $U\leq\max_i\alpha_i$

<u>Proposition</u> 3. The following properties are equivalent for a fuzzy space (X,τ):

(a) (X,τ) is an AT_1-space;

(b) for every pair of distinct points $x,y\in X$ and each $\alpha\in I$ there exists $U\in\tau$ such that $U(x)=\alpha$ and $U(y)=0$;

(c) for every (finite) family of distinct points $x_1,\dots,x_n\in X$ and every family $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in I$ there exists $U\in\tau$ such that $U(x_i)=\alpha_i$ for each $i=1,\dots,n$.

(d) for every pair of distinct points $x, y \in X$, and all $\alpha \in I$, $\varepsilon > 0$ there exists $U \in \tau$ such that $\alpha - \varepsilon < U(x) < \alpha + \varepsilon$ and $U(y) = 0$.

Proposition 4. The following properties are equivalent for a fuzzy space (X, τ)

(a) (X, τ) is a WAT_1-space ;

(b) for every pair of distinct points x, y X and all $\alpha, \gamma \in (0,1]$ exists $U \in \tau$ such that $U(x) = \alpha$ and $U(y) = \gamma$;

(c) for every (finite) family of distinct points $x_1, \ldots, x_n \in X$ and every family $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in (0,1]$ there exists $U \in \tau$ such that $U(x_i) = a_i$ for every $i = 1, \ldots, n$;

(d) for every finite family of distinct points $x_1, \ldots, x_n \in X$, every family $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, and each $\varepsilon > 0$ there exists $U \in \tau$ such that $\alpha_i - \varepsilon < U(x_i) < \alpha_i + \varepsilon$ for every $i = 1, \ldots, n$.

. Passing now to the main subject of the paper, we start with the next easy observation:

Proposition 5. If a space (X, τ) is either laminated or T_1, $x_1, x_2 \in X$, and $\alpha \in p_{x_1}(\tau)$, $\alpha \in p_{x_2}(\tau)$ (where $p_x: I^X \to I$ is the corresponding projection), then there exists $U \in \tau$ such that $\alpha = p_{x_1}(U) = p_{x_2}(U)$.

Proof. The case when the space is laminated is obvious. Assume that (X, τ) is a T_1-space and take $U_1, U_2 \in \tau$ such that $p_{x_i}(U_i) = U_i(x_i) = \alpha$, $i = 1,2$. Since (X, τ) is a T_1-space, one can find now V_1 , $V_2 \in \tau$ such that $V_1(x_1) = \alpha$; $V_1(x_2) = 0$, $V_2(x_1) = 0$, $V_2(x_2) = \alpha$. To finish the proof it is sufficient to take $V = V_1 \vee V_2$.

For spaces which are neither laminated, nor T_1, the previous statement does not generally hold:

Example 1. Let $X = \{x_1, x_2\}$, $\tau = \{0, 1, U_1, U_2, V\}$, where $U_1(x_1) = \frac{2}{3}$, $U_1(x_2) = 1$, $U_2(x_1) = \frac{1}{2}$, $U_2(x_2) = \frac{2}{3}$ and $V = U_1 \wedge U_2$. Then $\frac{2}{3} \in p_{x_1}(\tau)$, $\frac{2}{3} \in p_{x_2}(\tau)$, but there is no $U \in \tau$ such that $\frac{2}{3} = p_{x_1}(U) = p_{x_2}(U)$.

Theorem 1. A fuzzy space (X, τ) is a WAT_1-space iff τ is everywhere dense in I^X . ◆

Proof. Assume that $\overline{\tau} = I^X$ and fix a family of distinct points and numbers $\alpha_1,\dots,\alpha_n, \varepsilon \in (0,1]$. Then $\mathcal{N} = \mathcal{N}(x_1,\dots,x_n;\alpha_1,\dots,\alpha_n;\varepsilon) = \{M \in I^X : |M(x_i) - \alpha_i| < \varepsilon,\ i = 1,\dots,n\}$ is a nonempty open set and hence there exists $U \in \mathcal{N} \cap \tau$. Applying Proposition 4 we conclude that (X,τ) is a WAT$_1$-space.

Conversely, if (X,τ) is a WAT$_1$-space, then according to Proposition 4 for each family $x_1,\dots,x_n$ and numbers $\alpha_1,\dots,\alpha_n, \varepsilon \in (0,1]$ there exists $U \in \tau$ such that $\alpha_i - \varepsilon < U_i(x_i) < \alpha_i + \varepsilon$ for each $i = 1,\dots,n$. However, this exactly means that $\bar{\tau} = I^X$.

In a simmilar way one can establish the following fact:

Theorem 1'. A topological space (X,T) is a T_1-space iff T is every here dense in 2.

Corollary 1. If (X,τ) is a WAT$_1$-space then τ is closed in the Tychonoff cube iff τ is discrete (i.e. iff $\tau = I^X$).

Corollary 1'. If (X,T) is a T_1-space, then the topology T is closed in the Cantor cube iff T is discrete (i.e. iff $T = 2^X$).

Theorem 2. Let (X,τ) be a WAT$_1$-space. Then τ is open in I^X iff τ is discrete.

Proof. Assume that τ is open and let $x \in X$. Then, since obviously $1 \in \tau$, there exist $x_1,\dots,x_n \in X$, and $\varepsilon > 0$ such that $\mathcal{N} = \mathcal{N}(x_1,\dots,x_n;\ 1,\dots,1;\varepsilon) \subset \tau$. Without loss of generality one can assume that $x = x_1$. However, since (X,τ) is a WAT$_1$-space and ε can be chosen arbitrary small, it is easy to conclude that $\{x\} \in \tau$. Applying once again WAT$_1$-axiom, for $\alpha \in I$ find $U \in \tau$ such that $U(x) = \alpha$. However, this means that $\alpha\{x\} \in \tau$ and hence $\tau = I^X$.

In a similar way one can prove the following "crisp version" of Theorem 2:

Theorem 2'. Let (X,T) be a topological T_1-space. Then τ is open in 2^X iff T is discrete.

The next example shows that the assumptions of separatedness in Theorems 2 and 2' are essential:

Example 2. Let X be a set containing at least two points, $x_0 \in X$, and $0 < \alpha < \beta < 1$. Define a fuzzy topology $\tau = \{U \in I^X : U(x_0) \in [0,\alpha) \cup (\beta,1]\}$ on X. It is obvious that $\tau = [0,\alpha) \cup (\beta,1] \times I^{X \setminus \{x_0\}}$

and hence $\mathcal{T}$ is an open subset of I^X but $\mathcal{T} \neq I^X$.

Example 2'. Let X be a set containing at least two points x_0 and x_1. Define a crisp topology T on X by letting $U \in T$ iff either $x_0 \notin U$ or $\{x_0, x_1\} \subset U$. It is obvious that $T = \{(0,0),(1,1)\} \times 2^{X \setminus \{x_0, x_1\}}$ and hence T is open in 2^X but $T \neq 2^X$.

Our next aim is to estimate the tightness of a fuzzy space by means of location of its fuzzy topology. Patterned after the classical definition of tightness of a topological space [2] we introduce its fuzzy version as follows:

Definition. The tightness $t(X,\mathcal{T})$ of a fuzzy space $(X,\mathcal{T})$ is defined as the minimal infinite cardinal k such that $A \in I^X$ and for each fuzzy point $x^\lambda \tilde{\in} \bar{A}$ there exists a subset $G \subset X$, $|G| \leq k$, such that $x^\lambda \tilde{\in} \overline{A \wedge G}$.

We shall need the following simple fact

Lemma. Let $(X,\mathcal{T})$ be a fuzzy space and k be a cardinal. Then the following conditions are equivalent:

(1) $t(X,\mathcal{T}) \leq k$;

(1') for each $A \in I^X$ and each $x^\lambda \tilde{\in} \bar{A}$ such that $x^\lambda \tilde{\notin} A$ there exists $G \subset X$, $|G| \leq k$, such that $x^\lambda \tilde{\in} \overline{A \wedge G}$;

(2) for each $A \in I^X$ which is not closed there exists a fuzzy point $x^\lambda \tilde{\in} \bar{A}$, $x^\lambda \tilde{\notin} A$, and a set $G \subset X$, $|G| \leq k$, such that $x^\lambda \tilde{\in} \overline{A \wedge G}$.

Proof. The equivalence of conditions (1) and (1') and the implication (1')$\Rightarrow$(2) are obvious. Conversely, let (2) hold, $A \neq \bar{A}$, and define a fuzzy set $\tilde{A} = \vee\{x^\lambda : \exists\, G \subset X, |G| \leq k, \text{ s.t. } x^\lambda \tilde{\in} \overline{A \wedge G}\}$. It is sufficient to show that $\tilde{A} = A$. Assuming that $\tilde{A} \neq A$, take a fuzzy point $x^\mu \tilde{\in} \bar{\tilde{A}}$ such that $x^\mu \tilde{\notin} \tilde{A}$, but $x^\mu \tilde{\in} \overline{\tilde{A} \wedge H}$ for some $H \subset X, |H| \leq k$. For each $y^t \tilde{\in} \tilde{A} \wedge H$ one can find a set $G_y^t \subset X, |G_y^t| \leq k$, such that $y^t \tilde{\in} \overline{A \wedge G_y^t}$. Let now $G = \cup\{G_y^t : y \in H,\ t \in (0,1] \cap Q,\ y^t \tilde{\in} \overline{A \wedge G_y^t}\}$, Q is the set of all rational numbers. Obviously $|G| \leq |H| \cdot \aleph_0 \leq k$ and $\overline{A \wedge G} \geq \tilde{A} \wedge H$, and hence, $x^\mu \tilde{\in} \overline{A \wedge G}$. However, this means that $x^\mu \tilde{\in} \tilde{A}$. The obtained contradiction completes the proof.

To estimate the tightness of a fuzzy space by means of location of its fuzzy topology we need a special topology T_{tk} on I^X

described below. Consider topologies $T_r = \{(\alpha,1] : \alpha\in I\}\cup\{I\}$ and $T_1 = \{[0,b] : b\in I\}\cup\{\emptyset\}$ on I. Let (I^X,T_r^X) be the usual product of $|X|$ copies of the space (I,T_r) and let (I^X,T_{1k}^X) be the k-box product of $|X|$ copies of the space (I,T_1). (Thus the topology T_{1k}^X has the family $\{\prod[0,a_x]_x : 0\le a_x\le 1,\ |\{x: a_x<1\}|\le k\}$ as a subbase.) Let $T_{tk} = \sup\{T_{1k}^X, T_r^X\}$ and let I_{tk}^X denote the space (I^X,T_{tk}).

<u>Theorem 3</u>. Let (X,τ) be a fuzzy space and k be a cardinal. Then $t(X,\tau)\le k$ iff τ is closed in I_{tk}^X.

<u>Proof</u>. Assume that $t(X,\tau)\le k$ and let $B\in I^X\setminus\tau$. Then $B^c\ne\bar{B}^c$, where $B^c = 1-B$, and hence there exists a fuzzy point $x^\lambda\tilde{\in}\bar{B}^c$, $x^\lambda\tilde{\notin}B^c$. Take $G\subset X$ such that $|G|\le k$ and $x^\lambda\tilde{\in}\overline{B^c\wedge G}$, and let $\mathcal{N}=\mathcal{N}(x,\mu,B,G)=$ $=\{U\in I^X: U(x)>\mu,\ U(y)\le B(y)\ \forall y\in G\}$, where $\mu=\lambda^c\ (=1-\lambda)$. Obviously $\mathcal{N}$ is open in I_{tk}^X and $B\in\mathcal{N}$ (because $x^\lambda\tilde{\notin}B^c$ implies $B(x)>\mu$).

On the other hand $\mathcal{N}\cap\tau=\emptyset$. Really, assume that there exists $U\in\mathcal{N}\cap\tau$. Then $U(x)>\mu$ and hence U is a q-neighborhood of x^λ [6]. On the other hand $U(y)\le B(y)$ for all $y\in G$ and hence fuzzy sets U and $B^c\wedge G$ are quasidisjoint [6]. However this contradicts implies that $\mathcal{N}\cap\tau=\emptyset$ and therefore τ is closed in I_{tk}^X.

Conversely, assume that τ is closed in I_{tk}^X and take $A\in I^X$ which is not closed in (X,τ) then $B:=A^c\in\tau$ and therefore there exists a neighborhood $\mathcal{N}$ of B in I_{tk}^X such that $\mathcal{N}\cap\tau=\emptyset$. Without loss of generality one can take $\mathcal{N}$ from the standard base of neighborhoods of B, i.e. find $x_1,\dots,x_n\in X, \mu_1,\dots,\mu_n\in I$, and $G\subset X$, $|G|\le k$ such that $\mathcal{N}=\mathcal{N}(x_1,\dots,x_n;\mu_1,\dots,\mu_n;G)=\{U\in I^X:$ $U(x_i)>\mu_i,\ i=1,\dots,n;\ U(y)\le B(y)\ \forall y\in G\}$.

For each $i=1,\dots,n$ let now $\mathcal{N}_i=\mathcal{N}(x_i,\mu_i,G)=\{U\in I^X:$ $U(x_i)>\mu_i,\ U(y)\le B(y)\ \forall y\in G\}$. It is easy to notice that $\mathcal{N}_i\cap\tau=$ $=\emptyset$ for at least one $i=1,\dots,n$ (otherwise chosing $U_i\in\mathcal{N}_i\cap\tau$ for each $i=1,\dots,n$ and denoting $U=\cap U_i$ we should have $U\in\mathcal{N}\cap\tau$). Therefore without loss of generality one can assume that $\mathcal{N}=$ $=\mathcal{N}(x,\mu,G)=\{U\in I^X : U(x)>\mu,\ U(y)\le B(y)\ \forall y\in G\}$ for some point $x\in X$.

Let $\lambda=\mu^c$ and consider the fuzzy point x^λ. Since $B(x)>\mu$, it follows that $x^\lambda\tilde{\notin}A$ and besides $x^\lambda\tilde{\in}\bar{A}$. (Really, assume that $x^\lambda\tilde{\notin}\bar{A}$. Then denoting $W=A^c$ and noticing that $W\le B$ and $W(x)=$

$= A^c(x) > \lambda^c = \mu$ we conclude that $W \in \mathcal{N}$ and besides, obviously, $W \in \tau$.)

On the other hand, since $\mathcal{N} \cap \tau = \emptyset$, it follows that for each $U \in \tau$ satisfying $U(x) > \mu$ there exists at least one $y \in G$ such that $U(y) > B(y)$. However, this means exactly, that each q-neighborhood U of the fuzzy point x^λ q-coincides with the fuzzy set $B^c \wedge G = A \wedge G$ and therefore $x^\lambda \tilde{\in} \overline{A \wedge G}$. Thus we have found a fuzzy point $x^\lambda \notin A$, $x^\lambda \tilde{\in} \bar{A}$ such that $x^\lambda \tilde{\in} \overline{A \wedge G}$ for some $G \subset X, |G| \leq k$. Applying Lemma we conclude that $t(X,\tau) \leq k$.

In a similar way and with obvious simplifications one can establish the following crisp version of Theorem 3:

Theorem 3'. Let (X,T) be a topological space and let k be a cardinal. Then $t(X,T) \leq k$ iff T is closed in I^X_{tk} or, equivalently, iff T is closed in the space 2^X_{tk} (where 2^X_{tk} is considered as the subspace of I^X_{tk}).

(Effectively 2^X_{tk} can be described as follows. Consider topologies $T_0 = \{\{0\}, \emptyset, 2\}$ and $T_1 = \{\{1\}, \emptyset, 2\}$ on the two-point set $2 = \{0,1\}$ and let $(2^X, T^X_1)$ be the product of $|X|$ copies of the space $(2,T_1)$ and $(2^X, T^X_{0k})$ be the k-box product of $|X|$ copies of the space $(2,T_0)$. Now 2^X_{tk} can be defined as the Cantor set 2^X endowed with the topology T^X_{tk} which is the supremum of the topologies T^X_1 and T^X_{0k}.)

References

1. Adnadjevic D. Separation properties of F-spaces// Matematički Vesnik. - 1982. - V.6. - P. 1 - 8.

2. Архангельский А.В. О бикомпактах, которые удовлетворяют условию Суслина наследственно. Теснота и свободные последовательности// ДАН СССР, I97I,- Т. I99. - С. I227 - I230.

3. Chang C.L. Fuzzy topological spaces// J. Math. Anal. Appl.- 1968. - V.24. - P. 182 - 190.

4. Lowen R. Fuzzy topological spaces and fuzzy compactness// J. Math. Anal. Appl. - 1976. - V.56. - P. 621 - 633.

5. Lowen R. A comparison of different compactness notions in fuzzy topological spaces// J. Math. Anal. Appl. - 1977. -

V. 64. - P. 446 - 454.

6. Pu Pao-ming, Liu Ying-ming Fuzzy topology I. Neighborhood structure of a fuzzy point and Moore-Smith convergence// J. Math. Anal. Appl. - 1980. - V.76. - P. 571 - 599.

7. Pu pao-ming, Liu Ying-ming Fuzzy topology II. Product and quotient spaces// J. Math. Anal. Appl. - 1980. - V.77 - P. 20 - 37 .

8. Srivastava R., Lal S.N., Srivastava A.K. Fuzzy T_1-topological spaces// J. Math. Anal. Appl. - 1984. - V.102.-P.442-448.

А.Шостак. Топологические свойства нечеткого пространства как свойства расположения его нечеткой топологии в тихоновском кубе.

Аннотация. Некоторые топологические свойства нечеткого топологического пространства (в т.ч. T_I-отделимость, дискретность, иметь тесноту $\leq$ к) характеризуются как свойства расположения его нечеткой топологии в тихоновском кубе I^X, наделенном либо обычной, либо некоторой специальной топологией. УДК 515.12.

A.Šostaks. Fuzzy telpas topologiskas īpašības kā tas fuzzy topologijas izvietojuma īpašības Tihonova kubā.

Anotācija. Fuzzy telpas dažas topologiskas īpašības tiek raksturotas kā šīs telpas izvietojuma Tihonova kubā I^X īpašības; pie tam I^X ir apskatīts ar parasto, kā arī ar speciālām topologijām. Starp raksturotām īpašībām ir T_1-atdalāmība, diskretitāte, saspiestība $\leq$ k un citas.

A. Šostak
Department of Mathematics
Latvian University
226098 Rīga

Latvijas Universitātes Zinātniskie Raksti, 552. (1990)
Matemātika, I.

ВЕРОЯТНОСТЬ И ФУНКЦИЯ ПЕРЕХОДОВ КОНЕЧНОГО АВТОМАТА

Лоренц А. А., Лапиньш А. А.

Аннотация. Исследуются алгебраические свойства расширенной функции перестановочных конечных детерминированных автоматов (КДА). Для ряда типов перестановочных КДА даны эффективные описания их функций переходов в виде многочленов над соответствующими конечными полями. УДК 519.214

В работе рассматривается специфический класс конечных детерминированных автоматов, называемых регулярными перестановочными автоматами. По заданному автомату строится последовательность функций, определяющих переход автомата из начального состояния в конечное за n, $n = 1, 2, \ldots$, тактов действия. Это естественным образом приводит к последовательности функций от n случайных переменных, если предположить, что на вход рассматриваемого автомата поступает фиксированная последовательность случайных сигналов. Исследуются алгебраические свойства этих функций и предельные распределения их значений.

Вероятностные свойства многочленов, определенных на конечных алгебраических структурах рассматривались в работах различных авторов (Дворецкий, Вольфовиц, 1951; Воробев Н. Н., 1954; Д. Смидт, 1973; Лоренц А. А., 1978b). Следует отметить, что во всех упомянутых работах рассматривались, главным образом, симметрические функции, что толкало на мысль искать причину стабилизации определенных характеристик в симметрии рассматриваемых функций. Особенно ярко эта идея выступает в работе Денмица Смидта, хотя он сам нигде явно об этом не говорит. Настоящая работа является попыткой внести ясность в этот вопрос. Одновременно авторы питались внести определенный вклад в арсенал эффективных приемов описания класса функций от случайных переменных, отличающихся свойством стабилизировать параметры вероятностных распределений их значений. Практическая ценность полученных нами результатов заключается в том, что они расширяют конструктивные возможности построения вероятностных распределений с надежными и точными характеристиками, пользуясь датчиками случайных сигналов, не отличающимися ни надежностью, ни точностью параметров.

Для точной постановки изучаемых вопросов мы введем ряд определений. Они позволят читателю обойтись без предварительного знакомства с весьма специфическими понятиями при чтении данной работы. Так как наше исследование во многих отношениях базируется на результатах теории конечных автоматов, то начнем с определения ряда понятий именно из данной области.

Определение 1. Конечным детерминированным автоматом (КДА) типа Мура мы условимся называть пятерку математических обьектов $\langle X, Y, Z, \Delta, \lambda \rangle$, где X, Y и Z - непустые, конечные множества символов, Δ - отображение $Z \times X \to Z$, λ - отображение $Z \to Y$.

В дальнейшем КДА типа Мура мы для краткости будем именовать просто конечным автоматом (КА). Для наших целей достаточно ограничиватся случаем, когда $Y=Z$ и $\lambda(z)=z$. Это позволяет задавать любой интересующий нас КА в виде тройки математических обьектов $\langle X, Z, \Delta \rangle$. Отметим, что в литературе X называется входным алфавитом КА, а Z - его множеством внутренних состояний. Отображение Δ принято называть функцией переходов.

В теории КА функциональный символ Δ используется, как правило, в более широком смысле, чем это было определено выше. Область его определения естественным образом расширяется посредством следующего индуктивного правила: $\Delta(z, x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_m} x_{i_{m+1}}) = \Delta(\Delta(z, x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_m}), x_{i_{m+1}})$, $m \geqslant 1$. Если зафиксировать некоторое $z \in Z$, то, с учетом способа расширения области определения Δ, мы приходим к определению последовательности функций $\{\Delta_m\}$, $m=1,2,\ldots$, положив $\Delta_m(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) = \Delta(z_0, \xi_1 \xi_2 \ldots \xi_m)$. Здесь предполагается, что переменные ξ_i, $i=1,2,\ldots,m,\ldots$ принимают значения из X.

В дальнейшей работе мы займемся изучением вероятностных свойств последовательности $\{\Delta_m\}$, определив ξ_i как случайные переменные. Денмид Смидт (1974) занимался изучением вероятностных свойств последовательности элементарных симметрических функций $\{\sigma_m^k\}$ к-той степени от независимых случайных переменных ξ_i. Мы исследуем свойства $\{\Delta_m\}$ при более общем предположении: ξ_i; $i=1,2,\ldots,m,\ldots$ образуют сложную марковскую цепь фиксированного порядка. Разумеется, в частном случае ξ_i могут быть также независимыми переменными.

Математический аппарат, применяемый нами для доказательства соответствующих свойств $\{\Delta_m\}$, опирается на теореме о стабилизирующих способностях регулярных перестановочных автоматов (Лоренц, 1978). Определим теперь понятия, необходимые для точной формулировки этой теоремы.

Определение 2. КА $\langle X, Z, \Delta \rangle$ условимся называть перестановочным КА, если для любых x, z и z' $\Delta(z,x) \neq \Delta(z',x)$, когда $z \neq z'$.

Если зафиксировать элемент $x \in X$, то функция $\Delta(z,x)$ относительно переменной $z \in Z$ индуцирует отображение $Z \to Z$. Оно может быть представлено надлежащей матрицей A_x, если все элементы множества Z соответствующим образом пронумеровать числами $1, 2, \ldots, |Z|$. Тогда при $Z=\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ элементы $n{\times}n$ матрицы $A_x = (a_{ij}(x))$ определяются условием: $a_{ij}(x)=1$, когда $\Delta(z_i, x)=z_j$; в остальных случаях $a_{ij}(x)=0$.

Определение 3. КА $\langle X, Z, \Delta \rangle$ условимся называть регулярным, если матрица

$M = \frac{1}{|X|} \sum_{x \in X} A_x$ регулярна, то есть некоторая ее степень является положительной

матрицей.

Определение 4. КА $\langle X, Z, \Delta \rangle$ условимся называть регулярным перестановочным автоматом, если он является

1) регулярным КА,

2) перестановочным КА,

3) наибольший элемент матрицы M равен $\frac{1}{|X|}$.

Начиная с этого места, мы будем подразумевать, что $Z = \{0, 1, \dots, n-1\}$, а X - подмножество множества Z. Легко понять, что это предположение не является ограничением класса регулярных перестановочных автоматов по существу вопроса, а лишь упрощает дальнейшую терминологию. Сформулируем теперь упомянутую теорему о стабилизирующих свойствах регулярных перестановочных автоматов в несколько отличной терминологии от той, которая использована в работе Лоренца (1978b). Для устранения возможных недоразумений, отметим, что равносильность обеих формулировок устанавливается без труда.

Теорема 1. Пусть даны регулярный перестановочный автомат $\langle X, Z, \Delta \rangle$ и вероятностное пространство $\Omega = \langle E, F, P \rangle$, над которым определена последовательность случайных переменных $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$, образующая сложную марковскую цепь конечного порядка над множеством состояний X, тогда при любом $z_0 \in Z$ определенная последовательность случайных переменных $\{\Delta_m\}$, $\Delta_m = (z_0, \xi_1 \xi_2 \dots \xi_m)$, имеет предельное распределение

$$\lim_{m \to \infty} P\{\Delta_m = z\} = \frac{1}{n},$$

если только существует положительное действительное число α такое, что

$$P\{\xi_{m+1} = x \mid \xi_m = x_m, \dots, \xi_1 = x_1\} \geq \alpha$$

для всех кортежей $(x, x_m, x_{m-1}, \dots, x_1)$ из X^{m+1}.

В работе Лоренца (1978b) показано, что сходимость распределения случайной переменной Δ_m к пределу происходит с экспоненциальной скоростью, то есть существует действительное число c, $0<c<1$, зависящее от порядка марковской цепи $\{\xi_i\}$, числа α и некоторых характеристик КА такое, что

$|P\{\Delta_m = z\} - \frac{1}{n}| \leq c^m$. Легко понять, что теорема 1 дает лишь неявное описание рассматриваемого класса функций переходов Δ. Поэтому вопросом первостепенной важности является их изучение и описание средствами современной алгебры.

1. СИММЕТРИЧЕСКИЕ И СВОДИМЫЕ К СИММЕТРИЧЕСКИМ ФУНКЦИИ ПЕРЕХОДОВ

В предыдущем разделе мы ознакомились с конструктивным способом построения системы матриц A_x, $x \in X$, по заданному КА $\langle X, Z, \Delta \rangle$. В дальнейшем для краткости мы обозначим ее через A_X. Отметим, что в силу способа определения A_x, она является простой стохастической матрицей, т. е. все

ее положительные элементы $a_{ij}(x)$ равны 1 и $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) = 1$. Очевидно, каждый КА $\langle X, Z, \Delta \rangle$ может быть однозначно представлен тройкой $\langle X, Z, A_X \rangle$, где A_X построена по заданному Δ.

Легко также видеть, что любой КА может быть задан посредством задания $\langle X, Z, A_X \rangle$, где A_X состоит из простых стохастических матриц A_x порядка $n \times n$, $n = |Z|$.

Если $\langle X, Z, \Delta \rangle$ является регулярным перестановочным автоматом, то все матрицы A_x, построенные по заданному Δ, окажутся матрицами подстановки или, другими словами, простыми бистохастическими матрицами. Значит, каждый регулярный перестановочный автомат может быть задан посредством задания тройки $\langle X, Z, A_X \rangle$, где A_X - некоторая система простых бистохастических матриц n-ого порядка, $n=|Z|$, удовлетворяющая следующим условиям:

(1) матрица $M=\frac{1}{|X|}\sum_{x\in X} A_x$ регулярна;

(2) наибольший элемент матрицы M равен $\frac{1}{|X|}$.

Легко сообразить, что каждая матрица A_x, построенная по перестановочному КА, является матрицей подстановки, т. е. она является матричным представлением соответсвующего элемента симметрической группы S_n. Таким образом, перестановочный автомат может быть задан путем задания множества $Z=\{0, 1, \dots, n-1\}$, его подмножества $X=\{x_0, x_1, \dots x_{k-1}\}$ и надлежащего списка подстановок или элементов $t_0, t_1, \dots t_{k-1}$ из S_n.

Мы видим, что эффективное описание всевозможных перестановочных автоматов легко осуществимо как на языке матриц, так и на языке подстановок. Сложнее дело обстоит с эффективным описанием класса регулярных, и тем более, - класса регулярных перестановочных автоматов. Матричный вид задания позволяет осуществить проверку регулярности автомата за конечное число шагов, но не больше. Число шагов при этом ограничено числом n^2-2n+2 (см. Гантмахер, 1967). Что же касается алгебраической структуры функции Δ_m, определенной на основе регулярного перестановочного автомата $\langle X, Z, \Delta \rangle$, то здесь мы сталкиваемся со значительными трудностями. Различные системы алгебраических операций обладают различной силой выразительности и тем самым приводят к различным описаниям функций Δ_m. Кроме того, необходимо также исследовать вопросы полноты применяемого алгебраического языка. Если в качестве применяемых операций использовать традиционные операции алгебры логики $\cup$, $\cap$ и $'$, определенные равенствами $x\cup y=\max(x,y)$, $x\cap y=\min(x,y)$, $x'=(x+n-1) \bmod n$, то проблема полноты автоматически снимается. Как известно, любая функция f, представляющая отображение $Z^m\to Z$, выразима при помощи этой системы операций (Яблонский, 1986).

Остановимся теперь на другой системе операций, состоящей из сложения и умножения по заданному модулю. (Мы здесь предпологаем, что использование констант ничем не ограничивается.) Покажем, что не всякая функция Δ выразима при помощи этих операций. Для этой цели рассмотрим КА, задаваемый следующей тройкой $\langle X, Z, A_X \rangle$: $X=\{0, 1, 2\}$, $Z=\{0, 1, 2, 3\}$,

$$A_0=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{vmatrix};\quad A_1=\begin{vmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{vmatrix},\quad A_2=\begin{vmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{vmatrix}.$$

Легко убедится, что наибольший элемент матрицы $M=\frac{1}{3}(A_0+A_1+A_2)$ равен 1/3 и все элементы M^2- положительны. Так как A_X состоит из матриц подстановок, то рассматриваемый КА является регулярным перестановочным автоматом.

Очевидно, если функция Δ от переменных z и x представима в виде конечной алгебраической записи при помощи операций $(\eta_1+\eta_2) \bmod 4$ и $(\eta_1 * \eta_2) \bmod 4$, то Δ допускает представление в виде многочлена. Предположим теперь, что существует многочлен $P(Z, x)$, такой, что $\Delta(Z, x) = P(Z, x)$ для всех $x \in \{0, 1, 2\}$ и $Z \in \{0, 1, 2, 3\}$. Тогда найдется многочлен $Q(x)$, такой, что $\Delta(0, x) = Q(x)$ для всех $x \in \{0, 1, 2\}$. Покажем, что такого $Q(x)$ не существует. Действительно, если $\Delta(0, x) = a_0 x^{\ell} + a_1 x^{\ell-1} + \ldots + a_0$ (здесь и в дальнейшем, если не оговорено противное, традиционная запись интерпретируется как соответствующая операция по модулю), то $a_\ell = 0$ поскольку $\Delta(0, 0) = 0$. Но тогда $\Delta(0, 2) = 2(a_0 2^{\ell-1} + \ldots + a_{\ell-1}) = 2r$, где r - натуральное число. Но так как в нашем примере $\Delta(0, 2) = 3$ и $2r \neq 3 \bmod 4$, то предположение о существовании многочлена $Q(x)$ приведено к противоречию. Значит, функция Δ в нашем примере не может быть записана при помощи операций $(\eta_1+\eta_2) \bmod 4$ и $(\eta_1 \eta_2) \bmod 4$.

Полученный нами отрицательный результат все же не означает абсолютной невозможности выражения рассматриваемой функции Δ при помощи операций сложения и умножения по другому модулю. В данном случае это вполне осуществимо, если в качестве модуля взять число 5. Вообще говоря, любая интересующая нас Δ-функция допускает представление в виде надлежащего многочлена в соответствущем поле Галуа. Сформулируем это в виде точного математического утверждения.

Предложение 1. Для любого регулярного перестановочного автомата $\langle X, Z, \Delta \rangle$ функция Δ_m представима в виде надлежащего многочлена в поле Галуа $GF(p)$, если только p - простое число большее либо равное $|Z|$.

Справедливость предложения 1 непосредственно вытекает из теоремы Лагранжа о том, что любая функция $f: (GF(p))^{\ell} \to GF(p)$ представима в виде надлежащего интерполяционного многочлена над $(GF(p))^{\ell}$. Здесь следует лишь учесть одно обстоятельство: если многочлен Q представляет Δ_m, то, вообще говоря, нельзя писать $\Delta_m(Z, x_1 x_2 \ldots x_m) = Q(Z, x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Вместо этого мы должны писать условное равенство $\Delta_m(Z, x_1 x_2 \ldots x_m) = Q(Z, x_1, x_2, \ldots, x_m)$, чтобы подчеркнуть совпадение значений обеих функций только в тех точках, в которых определена Δ_m.

Рассмотрим теперь ряд регулярных перестановочных автоматов, функции переходов которых допускают простое и регулярное алгебраическое представление. В качестве первого рассмотрим класс КА K_1, определяемый следующим образом.

Определение 5. КА $\langle X, Z, A_X \rangle \in K_1$ если $Z = \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $X = \{c_1, c_2, \ldots, c_s\}$ и $A_X = \{A^{c_1}, A^{c_2}, \ldots, A^{c_s}\}$, где A - матричное представление подстановки $(1, 2, 3, \ldots, n-1, 0)$ а $0 < c_1 < c_2 < \ldots < c_s$.

Предложение 2. Любой автомат класса K_1 является регулярным перестановочным автоматом тогда и только тогда, когда НОД $(c_2-c_1, c_3-c_1, \ldots, c_s-c_1, n) = 1$. (НОД - наибольший общий делитель.)

Доказательство. Обозначим разности $c_j - c_1$ через d_j, $j \in \{1, 2, \ldots, s\}$ и покажем, что матрица $M = s^{-1}\sum_{i=1}^{s} A^{c_i} = s^{-1} A^{c_1} \sum_{i=1}^{s} A^{d_i}$ регулярна. Через $\delta \geqslant 1$ обозначим величину НОД $(d_2, d_3, \ldots, d_s)$. Какова бы ни бы а величина δ, существуют целые числа $u_2, u_3, \ldots u_s$ такие, что $\sum_{i=2}^{s} d_i u_i = \delta$. Через u^* обозначим минимальное натуральное число, удовлетворяющее следующей системе условий:

(1) u^* - кратное n,

(2) $u^* \geqslant \max |u_i|$.

Обозначив u_i+u^* через u_i^*, мы получим, что $\sum_{i=1}^{s} d_i u_i^* \equiv \delta \pmod n$ и для всех i $u_i^* \geq 0$. В силу условий предложения 2 НОД$(\delta, n)=1$. Легко заметить, что $M^{\tilde u}$, при $\tilde u = \sum_{i=2}^{s} u_i^*$, может быть представлена в виде $s^{-\tilde u} A^{c_1 \tilde u} (A^{d_1 \tilde u} + A^{\sum_{i=2}^{s} d_i u_i^*} + B)$, где B - сумма надлежащих степеней матрицы A. Так как $d_1 \tilde u = 0$ и $\sum_{i=2}^{s} d_i u_i^* \equiv \delta \pmod n$, то $M^{\tilde u} = s^{-\tilde u} A^{c_1 \tilde u} (E + A^{\delta} + B)$. Следовательно, $M^{\tilde u (n-1)} = s^{-\tilde u (n-1)} A^{c_1 \tilde u (n-1)} (E + A^{\delta})^{n-1} + B^*$, где B^*- неотрицательная $n \times n$ матрица. Отсюда, в силу равенства НОД$(\delta, n)=1$, заключаем, что $M^{\tilde u (n-1)} = s^{-\tilde u (n-1)} A^{c_1 \tilde u (n-1)} \sum_{i=0}^{n-1} A^i + B^*$. Значит рассматриваемый КА $\langle X, Z, A_X \rangle$ является регулярным перестановочным автоматом. Докажем теперь обратное. Пусть НОД$(d_2, d_3, \ldots d_s, n) = \delta > 1$. Тогда при любом $h \in N$ $M^h = s^{-h} A^{c_1 h} (A^{d_1} + A^{d_2} + \ldots + A^{d_s})^h = s^{-h} A^{c_1 h} \sum_{j=1}^{s} A^{l_j(d_1, \ldots, d_s)}$, где $l_j(d_1, \ldots, d_s)$ - линейная комбинация чисел d_i с целыми неотрицательными коэффициентами. Но, так как $d_1=0$, то $l_j(d_1, \ldots, d_s) = n_j \delta$, где $n_j \in N$ и $\delta \geq 2$. Определим далее величины δ_j, положив $\delta_j = \mathrm{rest}(n_j \delta, n)$. Тогда $M^h = s^{-h} A^{c_1 h} \sum_{j=1}^{h} A^{\delta_j}$. Так как все $\delta_j \leq n-1$ и δ является делителем n, то число различных δ_j при любом h не превышает $n/\delta \leq n/2$. Значит, никакая степень матрицы M не будет положительной матрицей.

Предположим теперь, что КА $\langle X, Z, \Delta \rangle$ принадлежит K_1 и $|Z|=n$. В силу того, что Δ задается системой матриц $\{A^{c_1}, A^{c_2}, \ldots A^{c_s}\}$, где A - матричное представление подстановки $(1, 2, \ldots, n-1, 0)$, мы заключаем, что $\Delta(z, x) = z + x \pmod n$. Тем самым $\Delta_m(z, x_1 x_2 \ldots x_m) = (z + x_1 + x_2 + \ldots + x_m) \pmod n$.

Далее рассмотрим другой класс КА K_2.

<u>Определение 6.</u> КА $\langle X, Z, A_X \rangle \in K_2$, если $Z = \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $X = \{c_1, c_2, \ldots, c_s\}$ и $A_X = \{A^{c_1}, A^{c_2}, \ldots, A^{c_s}\}$, где матрица A задается подстановкой, образующей один цикл, кроме цикла $(1, 2, \ldots, n-1, 0)$.

Предполагается, что $0 \leq c_1 < c_2 < \ldots < c_s$ и НОД$(c_2 - c_1, \ldots, c_s - c_1, n) = 1$.

<u>Предложение 3.</u> Класс K_2 является классом регулярных перестановочных автоматов.

<u>Доказательство.</u> Легко сообразить, что любой КА класса K_2 преобразуется в КА из K_1 посредством надлежащей перестановки его внутренних состояний. Обозначим через $(i_0, i_1, \ldots, i_{n-1})$ подстановку цикла, чьей матричным представлением является матрица A. Через q обозначим наименьшее простое число такое, что $q \geq n$ и рассмотрим отображение $f: GF(q) \to GF(q)$, которое в точках $1, 2, \ldots, n-1, 0$ принимает, соответственно, значения $i_0, i_1, \ldots, i_{n-2}, i_{n-1}$. Легко видеть, что функция переходов Δ автомата $\langle X, Z, A_X \rangle \in K_2$ может быть представлена в виде $\Delta(z, x) = f(\Delta^1(z, x))$, где Δ^1 является функцией переходов соответствующего автомата $\langle X, Z, A_X^1 \rangle \in K_1$. А функция Δ_m, в свою очередь, может быть выражена как $\Delta_m(z, x_1 x_2 \ldots x_m) = f(\Delta_m^1(z, x_1 x_2 \ldots x_m)) = f((z + x_1 + x_2 + \ldots + x_m) \pmod n)$. Ради ясности подчеркнем, что отображение f допускает алгебраическое представление при помощи операций из $GF(q)$, а Δ_m^1 выражается через сложение по модулю n. Так как f задается некоторым многочленом $a_0 z^k + a_1 z^{k-1} + \ldots + a_k$, то $\Delta_m(z, x_1 x_2 \ldots x_m) = a_0((z + x_1 + \ldots + x_m) \pmod n)^k + a_1((z + x_1 + \ldots + x_m) \pmod n)^{k-1} + \ldots + a_k$. Значит, Δ_m представляет собой симметрическую функцию относительно переменных $x_1, \ldots, x_m$.

Изучим теперь алгебраическую структуру Δ функций КА класса K_3.

Определение 7. КА $\langle X, Z, A_X \rangle \in K_3$, если X наряду с некоторым x содержит также $x+1$, $Z=\{0, 1, \ldots, n-1\}$ и A_X - g-циркулянтные матрицы у которых $a_{0x}=1$ и НОД$(g, n)=1$ (см. Лоренц, 1978а).

Предложение 4. Класс K_3 является классом регулярных перестановочных автоматов.

Доказательство. Предположим, что подавая на вход автомата все возможные слова длины k, мы можем достичь состояния $a_0, a_1, \ldots, a_h$, $h \le n-1$, где $a_0 < a_1 < \ldots < a_h \le n-1$. Наша цель - доказать, что при некотором k достижимы все состояния. Предположим, что $\{a_0, a_1, \ldots, a_h\} \ne Z$. Подавая на вход автомата всевозможные слова длины $k+1$ мы можем достичь состояния $(ga_i+x) \pmod n$ и $(ga_j+x+1) \pmod n$, $i=0, 1, \ldots, h$, причем $ga_i \ne ga_j \pmod n$, при $a_i \ne a_j$, что следует из свойства НОД$(g, n)=1$. Значит состояния $b_i=ga_i+x \pmod n$, $i=0, 1, \ldots, h$ тоже все разные. Множество $\{b_0, b_1, \ldots, b_h\}$ упорядоченное в порядке возврастания его элементов обозначим через $\{b_0^*, b_1^*, \ldots b_h^*\}$. Так как $\{b_0^*, b_1^*, \ldots, b_h^*\} \ne Z$, то либо существует такое i, что $b_{i+1}^*-b_i^* \ge 2$, либо $b_h^* < n-1$. В любом из этих случаев как минимум один из достижимых состояний b_i^*+1, $i=0, 1, \ldots, h$ не имеется в множестве $\{b_0^*, b_1^*, \ldots, b_h^*\}$. А это значит, что количество состояний, достижимых словами длины $k+1$, больше чем количество состоянии, достижимых словами длины k, если только уже не достигнуты все состояния. Таким образом, из любого состояния $z \in Z$ любое другое состояние $z' \in Z$ достижимо ровно за k шагов, где $k \le n-1$, откуда следует, что k-тая степень матрицы $M=\frac{1}{|X|}\sum_{x \in X} A_x$ положительна.

Так как НОД$(g, n)=1$, то все матрицы A_x, будучи g-циркулянтными матрицами, содержат 1 в каждом столбце. Следовательно, любой КА класса K_3 является конечным перестановочным автоматом.

Из определения K_3 непосредственно следует, что функция Δ КА $\langle X, Z, \Delta \rangle$ из К в алгебраической записи имеет вид $\Delta(z, x) = gz+x \pmod n$. Значит, $\Delta_m(z, x_1 x_2 \ldots x_m) = (g^m z + g^{m-1} x_1 + \ldots + g^0 x_m) \pmod n$. Легко понять, что функция $\Delta_m(z, x_1 x_2 \ldots x_m)$ симметрична относительно переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$ только тогда, когда $g=1$. Отметим, что функция Δ_m получается из функции $z+y_1+y_2+\ldots+y_m \pmod n$ путем подстановки $g^{m-j}x_j$ вместо y_j. Следовательно, эргодические свойства функций переходов КА из K_3 базируются на симметрический характер функций переходов КА из K_1.

Примечание. Смысл последнего утверждения заключается в том, что рассматриваемая нами ситуация равносильна построению подходящего КА из класса K_1 и подачи на его вход последовательности случайных величин $y_1, y_2, \ldots, y_m, \ldots$, определяемой посредством соотношения $y_j = g^{m-j}x_j \pmod n$. Разумеется, эта процедура может рассматриваться как полное сведение одной ситуации к другой только в том случае, когда для всех m и j, $j=1, 2, \ldots, m$ $\{\mathrm{res}(g^{m-j}x, n) \mid x \in X\}$ представляет собой одно и тоже множество. Если это условие не выполнено, возникают технические трудности обоснования нашего утверждения. Хотя мы знаем путь преодоления этих затруднений, здесь не место останавливаться на них более подробно.

Рассмотрим далее пример регулярного перестановочного автомата, функция Δ_m которого не является симметричной и всевозможные ее представления при помощи операций сложения и умножения по заданному модулю приводят к плохо обозримым выражениям. Мы имеем в виду КА $\langle X, Z, A_X \rangle$, задаваемый системой уравнений:

(1) $X=\{0,1\}$,

(2) $Z=\{0,1,2,3\}$,

(3) $A_0=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{vmatrix}$, $A_1=\begin{vmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{vmatrix}$.

Легко удостоверится в том, что рассматриваемый КА действительно является регулярным перестановочным автоматом. Поэтому займемся лишь изучением алгебраической структуры функций Δ_m. Так как $\Delta(z,x)$ не выразимо при помощи операций сложения и умножения по модулю 4, то целесообразно представить его в виде некоторого многочлена над $GF(p)$, где $p>4$, например, $p=5$. Читатель может самостоятельно убедиться, что $\Delta(z,x)\cong 4z^3x+2z^2x+4zx+3z^3+3z^2+z+x$ если алгебраические операции здесь истолковывать как операции из $GF(5)$.

Существенного упрощения многочлена, представляющего $\Delta(z,x)$ не удается получить при значениях $p=7,11,13$. Как видно, получить на этой основе явное полиномиальное выражение для $\Delta(z,x_1x_2\ldots x_\ell)$, $l=2,3,\ldots$, не представляется возможным, или, по крайней мере, связано с большими затруднениями. Поэтому попытаемся выразить $\Delta(z,x)$ как многочлен над $GF(2^2)$, отождествив его элементы $0,1,x$ и $x+1$ с числами $0,1,2$ и 3 соответственно (Кокендерфер, 1962). Это приводит к следующим таблицам сложения и умножения

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

·	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	3	1
3	0	3	1	2

Тогда $\Delta(z,x)$ имеет вид $3z+3x$. Значит, $\Delta(z,x_1x_2\ldots x_\ell)\cong 3^\ell z+3^\ell x_1+3^{\ell-1}x_2+\ldots+3^2x_{\ell-1}+3x_\ell$. Отсюда при $l=3k$ получаем, что $\Delta(z,x_1x_2\ldots x_\ell)\cong z+(1x_1+2x_2+3x_3)+(1x_4+2x_5+3x_6)+\ldots+(1x_{\ell-2}+2x_{\ell-1}+3x_\ell)$. В двух остальных случаях, т. е., когда $l=3k+1$ или $l=3k+2$, мы получим соответственно следующие соотношения

$$\Delta(z,x_1x_2\ldots x_\ell)\cong 3z+(3x_1+1x_2+2x_3)+\ldots+(3x_{\ell-3}+1x_{\ell-2}+2x_{\ell-1})+3x_\ell;$$

$$\Delta(z,x_1x_2\ldots x_\ell)\cong 2z+(2x_1+3x_2+1x_3)+\ldots+(2x_{\ell-4}+3x_{\ell-3}+1x_{\ell-2})+2x_{\ell-1}+3x_\ell.$$

Теперь нетрудно заметить, что $\Delta(z,x_1x_2\ldots x_\ell)$ инвариантно относительно любой транспозиции переменных x_i и x_j, если $i\equiv j \pmod 3$.

2. ПОЛНОСТЬЮ АСИММЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ПЕРЕХОДОВ

Функции Δ_m, рассмотренные в предыдущем разделе, отличались более или менее выраженной симметрией. Это обстоятельство в месте с результатом Е. Д. Смита наталкивает на мысль, что изучаемая эргодичность связана с явной или скрытой симметрией дискретных функций. Сейчас мы убедимся в несостоятельности такого предположения.

Определение 8. КА $\langle X,Z,\Delta\rangle\in K_4$ если $X=\{0,1\}$, $Z=\{0,1,\ldots,n-1\}$, $n\geqslant 4$ и

$$\Delta(z,0)=\begin{cases} z, & \text{если } res(z,3)=1,\\ z+1, & \text{если } res(z,3)=2 \text{ и } z\neq n-1,\\ z-1, & \text{если } res(z,3)=0 \text{ и } z\neq 0,\\ 0, & \text{если } z=0,\\ z, & \text{если } z=n-1 \text{ и } res(n-1,3)=2.\end{cases}$$

$$\Delta(z,1)=\begin{cases} z+1, & \text{если } res(z,3)\quad \{0,1\} \text{ и } z\neq n-1,\\ z-2, & \text{если } res(z,3)=2,\\ z, & \text{если } z=n-1 \text{ и } res(n-1,3)=0,\\ z-1, & \text{если } z=n-1 \text{ и } res(n-1,3)=1.\end{cases}$$

Предложение 5. Класс K_4 является классом регулярных перестановочных автоматов.

Доказательство. Рассматривая матрицы A_0 и A_1 для $n=4,5,6$, легко убедится, что автоматы класса K_4 являются перестановочными для всех $n \geqslant 4$ (см. табл. 1). Легко проверить, что все положительные элементы матрицы M, $M=1/2(A_0+A_1)$ равны $1/2$ для $n=4,5,6$. Так как увеличение n для матриц A_x в принципе сохраняет ту же структуру, которая обнаруживается у матриц A_x при $n=4,5,6$, то можно считать обоснованным и следующее более общее утверждение: при любом $n \geqslant 4$ все положительные элементы матрицы $M=1/2(A_0+A_1)$ равны $1/2$.

Таблица 1.

$$n=4 \quad A_0=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{vmatrix} \qquad A_1=\begin{vmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{vmatrix}$$

$$n=5 \quad A_0=\begin{vmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\end{vmatrix} \qquad A_1=\begin{vmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\end{vmatrix}$$

$$n=6 \quad A_0=\begin{vmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{vmatrix} \qquad A_1=\begin{vmatrix}0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0&0\end{vmatrix}$$

Докажем теперь регулярность матрицы $M=1/2(A_0+A_1)$. В самом деле, если z и z' – два внутренних состояния рассматриваемого КА и $z=3k+i$, $z'=3k+i'$, $0 \leqslant i, i' \leqslant 2$, то для некоторого слова u, $u \in X^*$ (под X^* понимается множество всех слов в алфавите X), длиной $l(u) \leqslant 2$ должно быть $\Delta(z,u)=z'$ (см. табл. 1). С другой стороны, если $z^*=3t+i^*$, то $\Delta(z^*,v)=z^*$ для любых $v \in \{0\}^*$ и $i^*=1$. Значит, для любого $\nu \in N$, $\nu \geqslant 4$ существует $u' \in X^*$, $l(u')=\nu$ такое, что $\Delta(z,u')=z$. Пусть $z=3s+i$, а $z'=3k+i'$, $s\neq k$. Очевидно, если $s<k$ и u_i – слова в алфавите $\{1\}$ определяемые соотношениями $u_0=11$, $u_1=1$, $u_2=e$, то $\Delta(z,u\,0)=3(s+1)$. Значит, при $k-s=g$, $g>0$, найдется слово $v \in X^*$, такое, что $l(v) \leqslant 3g$ и $\Delta(z,v)=3k$. Но тогда для любого ν, $\nu \geqslant 3g+4$ можно построить слово u', удовлетворяющее условию $l(u')=\nu$ и $\Delta(z,u')=z'$.

Если $s>k$, то $\Delta(z,v_i\,0)=3(s-1)$, для $v_0=e$, $v_1=1$, если $z=n-1$, $v_1=11$, если $z\neq n-1$, $v_2=1$. Итак, состояние z' достижимо из состояния z словами любой длины $\nu \geqslant 3h+4$, где $h=s-k$. Так как $\max(g,h)=[(n-1)/3]$, то для любой пары внутренних состояний z и z' существует слово u, $l(u)=3[(n-1)/3]+4$

такое, что $\Delta(z,u)=z'$. Но это равносильно регулярности матрицы M. Следовательно, рассматриваемый КА $\langle X,Z,\Delta\rangle$ из K_4 является регулярным перестановочным автоматом.

Рассмотрим теперь свойства функции переходов $\Delta(z,x_1x_2\ldots x_m)$ КА из K_4 при $m\geqslant z=2$.

Предложение 6. Для любой подстановки s, отличной от тождественного преобразования можно построить слово $u\in X^*$ длинной m такое, что $\Delta(z,u)\neq \Delta(z,s(u))$.

Доказательство. Как известно, любая подстановка s представима в виде произведения циклов $c_1c_2\ldots c_r$. Очевидно, среди циклов c_k, $k=1,2,\ldots,r$ существуют циклы длиной больше чем 1, когда s - не тождественное преобразование. Условимся различать два случая:

(1) Среди c_k существует такой, у которого число i переходит в j, причем $|i-j|\not\equiv 0 \pmod 2$;

(2) Такого цикла среди c_k не существует.

Пусть имеет место случай 1; тогда слова u и v, $l(u)=l(v)$, определяемые соотношениями $u=u_1 1 u_2$, $v=v_1 1 v_2$, $l(u_1)=i-1$, $l(v_1)=j-1$, $u_1u_2v_1v_2\in\{0\}^*$, связаны соотношением $s(u)=v$. Так как по определению Δ функции $\Delta(2,u_1 1)=0$ при четном $l(u_1)$, то $\Delta(2,v_1 1)\in\{3,4\}$. Очевидно, $\Delta(2,v_1 1)=3$ только в том случае, когда $n=4$. Значит, $\Delta(2,v)\in\{2,3,4\}$. Легко сообразить, что $\Delta(2,u)$ в таком случае принимает значение 0. Пусть $l(u_1)$ нечетно. В таком случае $\Delta(2,u)\in\{2,3,4\}$ а $\Delta(2,v)=0$. Принимая во внимание, что $s(u)=v$, мы заключаем - $\Delta(z,u)\neq\Delta(z,s(u))$.

Предположим теперь, что имеет место случай 2. Тогда среди циклов c_k встречается по крайней мере один длины не меньшей чем 2. Обозначим через α_k минимальный по значению элемент цикла c_k. Без ограничения общности можно предположить, что $\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_r$. Пусть первым циклом, длина которого превышает 1, является c_i. Легко понять, что в этом случае $\alpha_i=i$ и $\alpha_{i+1}=i+1$. Пусть $c_i=(i_1,i_2,\ldots,i_g)$, а $c_{i+1}=(j_1,\ldots,j_k)$, где $g\geqslant 2$, $i_1=i$, $h\geqslant 1$ и $j_1=i+1$. Определим слово $u=u_1 1 u_2 1 u_3$, положив $l(u_1)=i-1$, $l(u_2)=j_k-i-1$, $l(u_3)=m-j_k$, $u_1u_2u_3\in\{0\}^*$. Так как подстановка s переводит i_1 в i_2, i_g в i_1, j_k в j_1, то $s(u)=u_1 0 1 u_2' 1 u_3'$, где $u_2'u_3'\in\{0\}^*$. Докажем теперь простую лемму.

Лемма 1. Если $\langle X,Z,\Delta\rangle\in K_4$, $|Z|\geqslant 6$ и u, $u\in X^*$, содержит ровно два вхождения символа "1", то $\Delta(2,u)=1$ (первое вхождение "1" в u на нечетном месте, считая от начала u) или $\Delta(2,u)\geqslant 5$ (первое вхождение "1" в u на четном месте).

Доказательство. Пусть $u=u_1 1 u_2 1 u_3$, где $u_1u_2u_3\in\{0\}^*$. Тогда при четном значении $l(u_1)$ должно быть $\Delta(2,u_1)=2$, а при нечетном $l(u_1)$ - $\Delta(2,u_1)=3$. Но тогда $\Delta(2,u_1 1 u_2)=0$ (при четном $l(u_1)$) или $\Delta(2,u_1 1 u_2)=4$ (при нечетном $l(u_1)$). Так как $\Delta(0,1u_3)=1$ и $\Delta(4,1u_3)\geqslant 5$, то лемма 1 доказана.

Если теперь воспользоваться словом u, построенным по заданной подстановке s в случае 2, то при $|Z|\geqslant 6$ из леммы 1 непосредственно следует $\Delta(2,u)\neq\Delta(2,s(u))$. При $|Z|=4$ или 5 неравенство $\Delta(2,u)\neq\Delta(2,s(u))$ может быть проверено самим читателем, если воспользоваться словом u, построенным по вышеизложенному принципу. Тем самым предложение 6 можно считать доказанным.

Замечание 1. Можно построить класс КА $\langle X,Z,\Delta\rangle$ K_5, структура матриц A_x у которых аналогична структуре A_x автоматов K_4 и доказать, что функции Δ_m

у них также асимметричны при соответсвующих начальных состояниях. Приводим определение КА, образующих класс K_5.

Также как и для автоматов из K_4 $X=\{0, 1\}$, $Z=\{0, 1, \dots n-1\}$, $n \geqslant 4$. При $n=3k+1$ или $3k+2$ определяем

$$\Delta(z, 0) = \begin{cases} z, & \text{если } res(z, 3) = 2, \\ z+1, & \text{если } res(z, 3) = 0 \text{ и } z < n-1, \\ z-1, & \text{если } res(z, 3) = 1, \\ z, & \text{если } z = n-1 \text{ и } res(n-1, 3) = 0, \end{cases}$$

$$\Delta(z, 1) = \begin{cases} 0, & \text{если } z = 0, \\ z+1, & \text{если } res(z, 3) \in \{1, 2\} \text{ и } z < n-1, \\ z-2, & \text{если } res(z, 3) = 0 \text{ и } z > 0, \\ z, & \text{если } z = n-1 \text{ и } res(n-1, 3) = 2, \\ z-2, & \text{если } z = n-1 \text{ и } res(n-1, 3) = 1, \end{cases}$$

а при $n=3k$ определяем

$$\Delta(z, 0) = \begin{cases} 0, & \text{если } z = 0, \\ z, & \text{если } res(z, 3) = 1, \\ z-1, & \text{если } res(z, 3) = 0 \text{ и } z > 0, \\ z+1, & \text{если } res(z, 3) = 2 \text{ и } z < n-1, \\ z, & \text{если } z = n-1, \end{cases}$$

$$\Delta(z, 1) = \begin{cases} z+1, & \text{если } res(z, 3) \in \{0, 1\}, \\ z-2, & \text{если } res(z, 3) = 2. \end{cases}$$

Нетрудно показать, что класс K_5 является классом регулярных перестановочных автоматов. Выбирая начальным состоянием z_0 состояние 0 при $n=3k+1$ или $n=3k+2$, или же состояние 3 при $n=3k$ можно показать, что функции переходов Δ_m этих автоматов являются полностью асимметричными.

Замечание 2. Функции Δ_m, связанные с КА из класса K_4 (соответственно K_5), обладают одним недостатком: явное алгебраическое их описание для больших значений m наталкивается на значительные трудности. Однако можно определить такой класс K_6 КА, функции Δ_m которого эргодичны, полностью асимметричны и допускают явное алгебраическое описание. КА этого класса могут быть построены для любого простого числа $p \geqslant 3$ по следующим правилам:

КА $\langle X, Z, \Delta \rangle$ принадлежит K_6 тогда, когда $Z=\{0, 1, 2, \dots, p-1\}$,

$\{0, 1, p-1\} \subset X \subset Z$, $|X| \geqslant (p-1)/2+1$ и $\Delta(z, x) = g(x)z + h(x)$, где $g(x) = x^{p-1}+1$,

$h(x) = x^{p-1}+x$ и все алгебраические операции являются операциями поля $GF(p)$.

Легко убедиться в том, что $\Delta(z, x_1 x_2 \dots x_m) = z\prod_{i=1}^{m} g(x_i) + \sum_{j=1}^{m-1} h(x_j)\prod_{i=j+1}^{m} g(x_i) + h(x_m)$.

Так как КА класса K_6 не являются регулярными перестановочными автоматами в смысле определения 1, то доказательство эргодичности Δ_m требует новых математических средств, что выходит за рамки данной статьи. Строгому обоснованию эргодичности и полной асимметричности функций Δ_m автоматов класса K_6 будет посвящена отдельная работа.

Библиографический список

1. Воробьев Н.Н., Сложение независимых случайных величин на конечных абелевых группах. Математический сборник, 1954, т. 34(76), № 1.
2. Гантмахер Ф.Р., Теория матриц. М., "Наука", 1967, 575с.

3. Dvoretzky A., Wolfowitz J. Sums of Random Integers Reduced Modulo m. Duke Math. J., 1951,- 18(2);-pp. 501-507.
4. Kochendorfer R. Einfuhrung in die Algebra. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften,-Berlin, 1962,- S. 315.
5. (a) Lorenc A.A. Transformer mit g-zirkulanter Struktur. Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik, 14(1978) 1/2,5-33.
6. (в) Лоренц А.А., Структурный синтез вероятностных автоматов. Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико математических наук-Киев, 1978,-25 с.
7. J.Denmead Smith, Probability and the Elementary Symmetric Functions. Proc, Camb. Phil. Soc. (19733), 74.
8. Яблонский Ç.В., Введение в дискретную математику.-М., 1986,-384 с.

<u>A. Lorencs, A. Lapins. Probability and Transition Function of Finite-state Automata</u>

<u>Summary</u>. The algebraic properties of an extended function of permutable finite-state deterministic automata (FDA) are investigated in this article. Efficient descriptions of transition functions for a number of permutable FDA types are given in the form of polynomials over the respective finite fields. It is shown in the article that the sequence of such polynomials P in n variables x has a limiting distribution when the polynomials in this sequence are determined on the basi of the same transition function and the variables x, i=1,2,...,n from a finite Markov chain with positive transition probabilities.

<u>A. Lorencs, A. Lapiņš. Varbūtība un galīga automāta pārejas funkcija</u>

<u>Anotācija</u>. Pētītas galīga determinēta permutāciju automāta paplašinātās pāreju funkcijas īpašības. Konstatēts, ka vairākiem galīgu determinētu automātu tipiem pāreju funkciju var izteikt kā polinomu atbilstošā galīgā algebriskā laukā. Parādīts, ka šādu n argumentu x polinomu virknei eksistē vērtību robežsadalījums, ja katrs virknes polinoms definēts, izejot no vienas un tās pašas pāreju funkcijas un maintīgie x, i=1,2,...,n veido galīgu markova ķēdi ar pozitīvām pāreju varbūtībām.

Латвийский Университет
Рига, бульвар Райня, 19

Латвийский Университет
Рига, бульвар Райня, 19

Latvijas Universitātes Zinātniskie Raksti, 552. (1990)
Matemātika, I.

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ СЛУЧАЙНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ НА КОНЕЧНЫХ КОЛЬЦАХ

А. Лапиньш

Аннотация. В данной статье находится точное выражение для некоторых параметров элементов подмножества минимального коммутативного кольца с единицей конечного порядка и на этой основе оценивается скорость сходимости последовательности случайных переменных на томже кольце. УДК 519.214.

Различными авторами изучалось предельное распределение значений симметрических функций от случайных переменных, определенных на конечных алгебраических структурах ([1], [2], [3]). Нетрадиционными методами к изучению етого вопроса подошел Лоренц [4] и, тем самым, получил в этой области более общие результаты. Целью этой статьи является уточнение оценки скорости сходимости распределения значений симметрических многочленов от случайных переменных на кольце с единицой конечного порядка.

Обозначим через $R(m)$ минимальное коммутативное кольцо с единицей конечного порядка m, $R(m)=\{0,1,2,\dots,m-1\}$, с операциями сложения и умножения по $\mathrm{mod}\ m$, а через X - случайные элементы в $R(m)$. Для достижения наших целей достаточно ограничится вероятностным пространством с конечным множеством элементарных событий. Поэтому под X мы будем понимать функции, определенные на конечном множестве элементарных событий E вероятностного пространства $\Omega=\{E,P\}$ со значениями из заданного конечного множества V элементов кольца $R(m)$. Это позволяет задавать распределение значений случайного элемента X посредством равенств вида

$$P\{X=a\} = \sum_{e\in\{e\in E,\, X(e)=a\}} P\{e\},\ \text{где } a \quad V.$$

Предположим, что на вероятностном пространстве $\Omega=\{E,P\}$ определена последовательность случайных элементов $X_0, X_1, \dots, X_n, \dots$ со значениями из $V=\{a_0, a_1, \dots a_{r-1}\}$, $r\geqslant 2$, образующая марковскую цепь μ-го порядка над множеством состояний V. Будем говорить, что указанная марковская цепь $X(t)$ принадлежит семейству марковских цепей $C_{\lambda,\alpha,V}$, если $\mu\leqslant\lambda$ и для любой последовательности $a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_j}$ из V имеет место неравенство $P\{X_j=a_{i_j} \mid X_{j-1}=a_{i_{j-1}}, \dots, X_0=a_{i_0}\}\geqslant\alpha$. Для удобства предполагается также, что для любого $a\in V$ $P\{X_0=a\}\geqslant\alpha$.

Обозначим через $\sigma_k(x_0, x_1, \dots, x_{l-1})$ элементарный симметрический многочлен $\sum\limits_{(i_1,i_2,\ldots,i_k)} x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k}$ над $R(m)$, а через Z_{kt} - случайный элемент, получаемый из $\sigma_k(x_0,x_1,\ldots,x_{t-1})$ посредством подстановки случайных элементов X_0, $X_1,\ldots,X_{t-1}$ вместо $x_0,x_1,\ldots,x_{t-1}$ соответственно, одновременно предположив, что $X,X,\ldots,X$ являются первыми t членами марковской цепи $X(t)$ из семейства $C_{\lambda\alpha,V}$. При фиксированном значении k любой Z_{kt}, $t=1,2,\ldots$ является случайным элементом, значения которого принадлежат вполне определенному конечному множеству V_k элементов $R(m)$.

Фиксируем множество $V=\{a_0,a_1,\ldots,a_{r-1}\}$ кольца $R(m)$ и обозначим через ρ_{ka_i} минимальное натуральное число n, $n\geq 1$, такое, что

$C_n^1(a_i)\equiv C_n^2(a_i^2)\equiv\ldots\equiv C_n^k(a_i^k)\equiv 0 \pmod m$, где запись $C_n^1(a)$ означает сумму $a+a+\ldots+a$ в кольце $R(m)$ из C_n^1 слагаемых, $a\in R(m)$.

Множество $V=\{a_0,a_1,\ldots,a_{r-1}\}$ кольца $R(m)$ условимся называть k-нормальным, если существует натуральное число n такое, что для любого кортежа натуральных чисел $(n_0,n_1,\ldots n_{r-1})$ можно указать кортеж натуральных чисел $(\breve n_0,\breve n_1,\ldots,\breve n_{r-1})$ обладающий следующими свойствами:

(1) для любого i, $i=0,1,\ldots,r-1$ $n_i\equiv\breve n_i \pmod{\rho_{ka_i}}$,

(2) $\sum\limits_{i=0}^{r-1}\breve n_i=n$.

Для удобства в дальнейшем предположим, что элементы k-нормального множества $V=\{a_0,a_1,\ldots,a_{r-1}\}$ помечены индексами $0,1,\ldots,r-1$ таким образом, чтобы имело место соотношение $\rho_{ka_0}\leq\rho_{ka_1}\leq\ldots\leq\rho_{ka_{r-1}}$.

Теорема 1 [4]. Если случайные элементы Z_{kt}, $t=1,2,\ldots$ определены на основании марковской цепи $X(t)$ из семейства $C_{\lambda\alpha,V}$ и множество V является k-нормальным, то для любого $a\in V_k$ $\lim\limits_{t\to\infty}P\{Z_{kt}=a\}$ существует и не зависит от выбора марковской цепи $X(t)$ из семейства $C_{\lambda\alpha,V}$; скорость сходимости к пределу $p_k(a)$ при этом оценивается неравенством

$$\left|P\{Z_{kt}=a\}-p_k(a)\right|\leq\frac{\rho_k-1}{\rho_k}\left(1-\rho_k r^{\lambda}\alpha^{x+\lambda+1}\right)^{\left[\frac{t}{x+\lambda+1}\right]},$$

где $\rho_k=\prod\limits_{i=0}^{r-1}\rho_{ka_i}$, а x - натуральное число определяемое равенством $x=\rho_{ka_0}\left(\sum\limits_{i=1}^{r-1}(\rho_{ka_i}-1)+\rho_{ka_0}\rho_{ka_{r-1}}\right)$ и $[x]$ означает целую часть действительного числа x.

Для любого ρ_{ka_i} имеет место следующая грубая оценка $\rho_{ka_i}\leq m\,k!$. В каждом конкретном случае можно найти числа ρ_{ka_i} по определенному алгорифму. Целью этой статьи является написание точной формулы для нахождения чисел ρ_{ka_i} в общем случае.

Через НОД(x,y) будем обозначать наибольший общий делитель чисел x и y. Исходя из свойств НОД и определения чисел ρ_{ki}, $i=0,1,\ldots,m-1$ можно доказать следующую лемму.

Лемма 1. Если НОД(i_1,m)=НОД(i_2,m), то для всех натуральных чисел k, $k\geq 1$ $\rho_{ki_1}=\rho_{ki_2}$.

Обозначим через $(n)_t$ произведение $n(n-1)\ldots(n-t+1)$, $n\geq t$. Из теории чисел [5] известно, что число $n!$ в каноническом разложении содержит $s(p,n!)=$ $=[\frac{h}{p}]+[\frac{h}{p^2}]+\ldots$ простых множителей p. Выписав все кратные p множители чисел $(p^\alpha)_{p^\beta}$ и $(cp^\alpha)_{p^\beta}$ можно убедиться в справедливости следующих утверждений

Лемма 2. Если $\alpha \geq \beta$ и p - простое число, то $s(p, (p^{\alpha})_{p^{\beta}}) = s(p, p^{\beta}) + \alpha - \beta$.

Лемма 3. Если $\alpha \geq \beta$, p - простое число и НОД$(c, p) = 1$, то $s(p, (cp^{\alpha})_{p^{\beta}}) = s(p, p^{\beta}) + \alpha - \beta$.

Используя равенство $C_n^{i} = \frac{n}{i} C_{n-1}^{i-1}$ и леммы 1, 2, 3 можно доказать следующие предложения.

Предложение 1. Предположим, что $m = cp^{\alpha}$, p- простое число, НОД$(c, p) = 1$, $\alpha \in N$, $\alpha \geq 1$, $k \in N$, $k > 1$ и НОД$(i, p) = 1$, $i \in R(m)$. В таком случае $C_n^1(i) \equiv C_n^2(i^2) \equiv \ldots \equiv C_n^k(i^k) \equiv 0 \pmod{p^{\alpha}}$ тогда и только тогда, когда n кратно $p^{\alpha + h}$, где $h = [\log_p k]$.

Предложение 2. Предположим, что $m = cp^{\alpha}$, p- простое число, НОД$(c, p) = 1$, НОД$(i, m) = p^{\beta}$, $\alpha, \beta \in N$, $1 \leq \beta \leq \alpha$, $k \in N$, $k \geq 1$. В таком случае

$C_n^1(i) \equiv C_n^2(i^2) \equiv \ldots \equiv C_n^k(i^k) \equiv 0 \pmod{p^{\alpha}}$ тогда и только тогда, когда n кратно $p^{\alpha - \beta}$.

Предположим, что m и i таковы, что $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_t^{\alpha_t}$, НОД$(i, m) = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_t^{\beta_t}$, где p_s, $s = 1, 2, \ldots, t$ разные простые числа, которые пронумерованы таким образом, что $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_{t_1} = 0$ и $\beta_{t_1+1} > 0, \ldots, \beta_t > 0$, $t_1 \in \{1, 2, \ldots, t\}$.
При таких обозначениях, пользуясь леммой 1 и предложениями 1 и 2, можно доказать следующую теорему.

Теорема 2. Если для каждого s, $s = 1, 2, \ldots, t$, $\alpha_s \geq 1$ и $0 \leq \beta_s \leq \alpha_s$, и $i \in R(m)$, $i \neq 0$, то $\rho_{ki} = p_1^{\alpha_1 + h_1} p_2^{\alpha_2 + h_2} \ldots p_{t_1}^{\alpha_{t_1} + h_{t_1}} \cdot p_{t_1+1}^{\alpha_{t_1+1} - \beta_{t_1+1}} \ldots p_t^{\alpha_t - \beta_t}$,
где h_j определяется условиями $h_j = [\log_{p_j} k]$, $j = 1, 2, \ldots, t_1$.

Теорема 2 позволяет вычислить точные значения ρ_{ki} для всех k и i. Значит для каждого фиксированного множества элементов V, $V = \{a_0, a_1, \ldots a_{r-1}\} \subset R(m)$ можно вычислить величину $\rho_k = \prod_{i=0}^{r-1} \rho_{ka_i}$ и число x и таким образом уточнить оценку скорости сходимости в теореме 1 в общем случае.

Итак $\rho_k = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \ldots p_t^{\gamma_t}$, где $\gamma_j = \sum_{s=1}^{t} (\alpha_j + \delta_{js})$, а

$$\delta_{js} = \begin{cases} [\log_{p_j} k], & \text{если НОД}(i, p_j) = 1, \\ -\beta_{ji}, & \text{если НОД}(i, p_j^{\alpha_j}) = p^{\beta_{ji}}. \end{cases}$$

Эти формулы при произвольном (не простом) m, к сожалению, не дают возможности написать более компактную общую точную формулу для ρ_k. Но заметим, что для любого a_i имеет место оценка $\rho_{ka_i} \leq \rho_{k1}$, которая достигается при НОД$(a_i, m) = 1$. Это значит, что имеет место следующая оценка $\rho_k \leq m^{c([\log_m k]+1)}$, где c равно количеству ненулевых элементов множества V. Отметим также, что эта оценка достигается, если для каждого $a_i \in V$ имеет место НОД$(a_i, m) = 1$. Имея ввиду выше изложенные рассуждения можем оценить также величину x. А именно:

$$x = \rho_{ka_0} \left(\sum_{i=1}^{r-1} (\rho_{ka_i} - 1) + \rho_{ka_0} \rho_{ka_{r-1}} \right) \leq q^2 (q+1),$$

где $q = m^{[\log_m k]+1}$.

Библиографический список

1. Воробьев Н.Н. Сложение независимых случайных величин на конечных абелевых группах // Математический сборник,-1954,-Т. 34(76),-Nr. 1.
2. Dvoretzky A., Wolfowitz J. Sums of Random Integers Reduced Modulo m // Duke Math. J. - 1951 -18(2).- pp. 501-507.
3. Smith J.D. Probability and the Elementary Symmetric Funktions. Proc. Camb. Phil. Soc. (1973), 74.
4. Лоренц А.А. Структурный синтез вероятностных автоматов. Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук.-Киев, 1978.
5. Виноградов И.М. Основы теории чисел.-М., 1981.

A.Lapins. On the Speed of Sequence's Convergence of Random Variables on the Finite Fields

Summary. Precize expressions of parametres that characterize the elements of a minimal commutative ring subgroup are found in the article. On the basis of these expressions the speed of convergence of the sequence of random variables of the ring is estimated.

A.Lapiņš. Gadījumlielumu virkņu konverģences ātrums galīgos laukos

Anotācija. Rakstā tiek atrastas minimāla komutatīva gredzena apakškopas, elementus raksturojošu parametru precīzas izteiksmes. Uz to bāzes tiek novērtēts šī gredzena gadījummainīgo virknes konverģences ātrums.

Латвийский Университет
Рига, бульвар Райня, 19

Latvijas Universitātes Zinātniskie Raksti, 552. (1990)
Matemātika, I.

ON HETEROGENEOUS QUANTIFIER ALGEBRAS

J. Cīrulis

Abstract. A heterogeneous quantifier algebra is, essentially, a heterogeneous cylindric algebra in the sense of Zlatoš [4] without diagonal elements. The inherited axiom system for these algebras turns out to be redundant. Moreover, one of his axioms suggests a definition of quantifiers in terms of other primitive operations. We take up this idea and present here a simple axiom system for such "quantifier-free" heterogeneous quantifier algebras.

1. Introduction. A heterogeneous cylindric algebra (h.c.a.) in the sense of [4] is, roughly speaking, a family of cylindric algebras of increasing finite dimension, interlinked by certain mappings. It is of some interest to investigate only the correlation of cylindrifications with these mappings. Hence, we shall ignore diagonal elements of h.c.a. Diagonal-free cylindric algebras are the simplest version of quantifier algebras. Still it is convenient to consider also composites of singular cylindrifications, and we shall introduce them explicitely in our algebras as primitive operations. These are known to be quantifiers as vell. For more information about quantifiers in general the reader is referred to [2], [3].

We recall three simple facts concerning retractions and cross-sections (cf [1], sect. II.3.8). Let A, A' be two nonvoid sets.

(1.1) If functions $f\colon A \to A'$, $g\colon A' \to A$ are connected by the condition

(a) $gf = \mathrm{id}_A$,

then f is injective, and g is surjective. Moreover, then the operation h on A' defined by

(b) $h = fg$

is idempotent and has the properties

(c) ran f = ran h, i.e. $fA = hA'$,

(d) ker g = ker h, i.e. $ga = gb \Leftrightarrow ha = hb$ for all a, b from A'.

(1.2) If an idempotent operation h on A' is connected with an injective function $f\colon A \longrightarrow A'$ by (1.1.c), then there is a unique function $g\colon A' \longrightarrow A$ satisfying (1.1.b), and then also (1.1.a) and (1.1.d) hold.

(1.3) If an idempotent operation h on A' is connected with a surjective function $g\colon A \longrightarrow A$ by (1.1.d), then there is a unique function $f\colon A \longrightarrow A'$ satisfying (1.1.b), and then also (1.1.a) and (1.1.c) hold.

2. Heterogeneous quantifier algebras. We assume throughout the paper that, as in [4], α is a fixed infinite set and that Finα is the set of all finite subsets of α. Letters ρ, q, r, s stand for arbitrary elements of Finα. By a *heterogeneous quantifier algebra* (h.q.a) *of dimension* α we mean a system $(\mathbf{A}_\rho, \mathbf{c}^\rho_r, f^{q\rho}, g^{\rho q})_{r \subset \rho \subset q}$, where

(2.1) $(\mathbf{A}_\rho, f^{q\rho})_{\rho \subset q}$ is a direct family of Boolean algebras, i.e.

(a) each $\mathbf{A}_\rho$ is a Boolean algebra with the carrier A_ρ,

(b) each $f^{q\rho}$ is a homomorphism from $\mathbf{A}_\rho$ to $\mathbf{A}_q$,

(c) $f^{\rho\rho} = \mathrm{id}_{A_\rho}$, $f^{q\rho}f^{\rho r} = f^{qr}$;

(2.2) for any ρ, $(\mathbf{A}_\rho, \mathbf{c}^\rho_r)_{r \subset \rho}$ is a quantifier algebra of dimension ρ, i.e.

(a) each $\mathbf{c}^\rho_i$ is a quantifier $(i \in \rho)$,

(b) $\mathbf{c}^\rho_i\mathbf{c}^\rho_j = \mathbf{c}^\rho_j\mathbf{c}^\rho_i$ $(i, j \in \rho)$,

(c) if $r = (i_1, \dots, i_k) \subset \rho$, then

$$\mathbf{c}^\rho_r = \mathbf{c}^\rho_{i_1} \dots \mathbf{c}^\rho_{i_k}$$

(we assume that $\mathbf{c}^\rho_{i_1} \dots \mathbf{c}^\rho_{i_k} = \mathrm{id}_{A_\rho}$ when $k = 0$);

(2.3) each g^{pq} is a function from A_q to A_p such that

(a) $g^{pq}f^{qp} = \mathrm{id}_{A_p}$;

(b) $f^{qp}g^{pq} = c^q_{q-p}$;

(2.4) quantifiers interplay with homomorphisms f^{qp} as follows:

(a) $c^q_i f^{qp} = f^{qp} c^p_i$, if $i \in p$,

(b) $c^q_i f^{qp} = f^{qp}$, if $i \in q-p$.

It is easily seen that subsumed in (2.1)—(2.4) are precisely those axioms of h.c.a from [4] which do not concern the diagonal elements. In particular, (2.1.b)+(2.4.a) correspond to condition (3), and (2.3.b)+(2.2.c) - to the condition (6) in [4]. We shall show in next section that the axiom (2.2) can be simplified, while (2.4) may be omitted at all.

3. Simplifying the definition. In this section, let $\mathfrak{A} := (\mathbf{A}_p, f^{qp})_{p \subset q}$ be a direct family of Boolean algebras, as in (2.1), and let

$$(c^p_r: A_p \to A_p)_{r \subset p}, \qquad (g^{pq}: A_q \to A_p)_{p \subset q}$$

be two families of operations satisfying (2.3). In view of (2.3.a), we immediately conclude that

(3.1) for all $p \subset q$,

(a) f^{qp} is a monomorphism,

(b) g^{pq} is surjective.

Now consider one more condition:

(3.2) For every p and all $r, s \subset p$, $a, b \in A_p$,

(a) $a \le c^p_r a$, $c^p_r a \le c^p_r(a \vee b)$,

(b) $c^p_r c^p_s = c^p_{r \cup s}$.

Obviously (2.2) implies (3.2). On the other hand, by (2.3) and (1.1) c^p_r is idempotent; together with (3.2.a) this means that c^p_r is a closure operator on $\mathbf{A}_p$. By (1.1.c) and (2.1.b) the range of c^p_r is a subalgebra of $\mathbf{A}_p$. Accordingly to theorem 3 from [2], such a closure operator is a quantifier, so (2.2.a) holds. By (2.3.b), (2.1.c) and (2.3.a) $c^p_\emptyset = \mathrm{id}_{A_p}$; together with (3.2.b) this gives us (2.2.c). (2.2.b) is merely a consequence of (3.2.b). Therefore, we have proved:

(3.3) The conditions (2.2) and (3.2) are equivalent.

Moreover, by (2.3.b) and (3.1) condition (3.2.a) is equivalent to the following one:

(3.4) For all $r \subset p \subset q$ and $a, b \in A_q$,
$$a \le f^{qp}g^{pq}a, \quad g^{pq}a \le g^{pq}(a \vee b).$$

The later condition in (3.4) means that g^{pq} is isotonic. To proceed, we need the following lemma.

(3.5) For all $r \subset p \subset q$,
$$g^{pp} = \mathrm{id}_{A_p}, \quad g^{rp}g^{pq} = g^{rq}.$$

Here the first identity follows from (2.3.a) and (2.1.c), while the other is obtained using (3.4), (2.1.c), (2.3.a), (3.4), (2.1.c) and (2.3.a):
$$g^{rq}a \le g^{rq}f^{qp}g^{pq}a \le g^{rq}f^{qp}f^{pr}g^{rp}g^{pq}a = g^{rq}f^{qr}g^{rp}g^{pq}a =$$
$$= g^{rp}g^{pq} \le g^{rp}g^{pq}f^{qr}g^{rq}a = g^{rp}g^{pq}f^{qp}f^{pr}g^{rq}a =$$
$$= g^{rp}f^{pr}g^{rq}a = g^{rq}a.$$

Now we can prove:

(3.6) If either (2.2) or (3.2) is fulfilled in $\mathfrak{A}$, then so is (2.4).

Indeed, if $i \in p$, then by (2.3.b), (3.2.b), (2.3.b), (2.1.c), (3.5), (2.3.b)
$$c_i^q f^{qp} g^{pq} = c_i^q c_{q-p}^q = c_{q-(p-i)}^q = f^{q(p-i)}g^{(p-i)q} =$$
$$= f^{qp}f^{p(p-i)}g^{(p-i)q} = f^{qp}f^{p(p-i)}g^{(p-i)p}g^{pq} = f^{qp}c_i^p g^{pq},$$
and then (3.1.b) gives us (2.4.a). If $i \in q-p$, then by (2.3.b), (2.1.c), (2.3.a), (2.1.c)
$$c^q f^{qp} = f^{q(q-i)}g^{(q-i)q}f^{qp} = f^{q(q-i)}g^{(q-i)q}f^{q(q-i)}f^{(q-i)p} =$$
$$= f^{q(q-i)}f^{(q-i)p} = f^{qp},$$
i.e. (2.4.b) also holds.

4. Reduction of the set of operations of h.q.a. By (1.2), if we replace the axiom (2.3.a) by the following one:

(4.1) each f^{qp} fulfills the conditions

(a) f^{qp} is injective,

(b) ran f^{qp} = ran c_{q-p}^q,

then (2.3.b) becomes an implicit definition of g^{pq}. In a similar way, the proposition (1.3) can be used to make (2.3 b) a definition of f^{qp} (provided we add also appropriate axioms for g^{pq} instead of (2.1.b) and (2.1.c)). On the other hand, the a xiom (2.3.b) alone shows that quantifiers in h.q.a. are completely determined by operations f^{qp}, g^{pq}. It is then naturally to ask whether these later admit an equational characterisation independent of quantifiers: the corresponding equations supplemented with (2.3.b) would provide another equational description of the class of all h.q.a.-s. The proposition (4.3) below gives a positive answer to this question.

Let $\mathfrak{A}$ be as above. Consider the following condition:

(4.2) For all $r, s \subset p \subset q$ and $a, b \in A_q$,

(a) $a \leq f^{qp} g^{pq} a, \quad g^{pq} a \leq g^{pq}(a \vee b)$,

(b) $f^{r(r \cap s)} g^{(r \cap s)s} = g^{rp} f^{ps}$.

Note that (4.2.a) = (3.4). We have:

(4.3) The conditions (3.2) and (4.2) are equivalent.

As we already know, (4.2.a) is equivalent to (3.2.a). Furthermore, (3.2.b) is obtained by (2.3.b), (4.2.b), (2.1.c), (3.5), (2.3.b):

$$c^p_r c^p_s = f^{p(p-r)} g^{(p-r)p} f^{p(p-s)} g^{(p-s)p} =$$

$$= f^{p(p-r)} f^{(p-r)((p-r)\cap(p-s))} g^{((p-r)\cap(p-s))(p-s)} g^{(p-s)p} =$$

$$= f^{p((p-r)\cap(p-s))} g^{((p-r)\cap(p-s))p} =$$

$$= f^{p((p-(r\cup s))} g^{((p-(r\cup s))p} = c^p_{r\cup s},$$

while (4.2.b) is obtained by (2.1.c), (3,5), (2.3.b), (3.2.b), (2.3.b):

$$f^{pr} f^{r(r\cap s)} g^{(r\cap s)s} g^{sp} = f^{p(r\cap s)} g^{(r\cap s)p} = c^p_{p-r\cap s} =$$

$$= c^p_{(p-r)\cup(p-s)} = c^p_{p-q} c^p_{p-s} = f^{pr} g^{rp} f^{ps} g^{sp}.$$

Then

$$f^{r(r\cap s)} g^{(r\cap s)s} = g^{rp} f^{pr} f^{r(r\cap s)} g^{(r\cap s)s} g^{sp} f^{ps} =$$

$$= g^{rp} f^{pr} g^{rp} f^{ps} g^{sp} f^{ps} = g^{rp} f^{ps}.$$

by multiple use of (2.3.a).

Therefore, the class of all h.q.a.-s can be equationally defined in terms of operations f^{qp} and g^{pq} only.

References

1. Bourbaki N. *Théorie des ensembles* (deux, éd). Hermann, Paris, 1960.
2. Halmos, P. *Algebraic logic I. Monadic algebras.* Compos. Math., 12 (1955), 217—249.
3. Henkin, L., J.D. Monk, A. Tarski. *Cylindric algebras. Part I.* North-Holland, Amsterdam, 1971.
4. Zlatoš, P. *Two notes on locally finite cylindric algebras.* Comment. Math. Univ. Carol., 25 (1984), 1, 181—199.

Аннотация. Многосортная кванторная алгебра - это по-существу многосортная цилиндрическая алгебра в смысле Златоша [4] без диагональных элементов. Соответствующая система аксиом для нее оказывается избыточной. Более того, одна из его аксиом подсказывает определение кванторов в терминах других примитивных операций. Пользуясь этой идеей, мы прелагаем систему аксиом для таких "бескванторных" многосортных кванторных алгебр.

Anotācija. Heterogēna kvantoralgebra būtībā ir heterogēna cilindriska algebra Zlatoša nozīmē [4] bez diagonālelementiem. Pārmantotā aksiomu sistēma tai izrādās redundanta. Vēl vairāk, viena no viņa aksiomām norāda, kā kvantorus var definēt ar pārējo primitīvo operāciju palīdzību. Izmantojot šo ideju, mēs proponējam aksiomu sistēmu tādai "bezkvantoru" heterogēnai kvantoralgebrai.

Latvijas Universitātes Zinātniskie Raksti,552.(1990)
Matemātika, I.

ON THE CONTINUOUS DEPENDENCE OF SOLUTIONS OF SEMILINEAR ELLIPTIC EQUATIONS UPON PARAMETERS

U.Raitums

Summary. The paper discuss continuous dependence of solutions of the boundary value problems for the equation

$$-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{d}{dx_i}[a_{ij}(x,\sigma)u_{x_j}+a_{io}(x,\sigma,u)]+a_o(x,\sigma,u,u_x)=0$$

upon parameter $\sigma\in L_1$.

AMS 1980 Subject Classification:
Primary: 35B30 ; Secondary: 49A22, 49B22
Key words: semilinear elliptic equation, dependence of solutions on parameters.

Introduction.

In various areas there is a great interest in information whether solutions of boundary value problems continuously depend upon coefficients of equations. Obviously the heart of the problem is in the conditions which we suppose to be fulfilled. In this paper we shall discuss the question from the point of view of optimal control problems.

These problems usually can be described as follows. Let $\mathcal{S}$ be a topological space, $\mathcal{X}$ be a reflexive Banach space and $F:\mathcal{S}\times\mathcal{X}\to\mathcal{X}^*$, $J:\mathcal{S}\times\mathcal{X}\to R$ be a state operator and a cost functional respectively. The problem is to minimize $J(\sigma,\mathcal{X})$ over all pairs $(\sigma,X)\in\mathcal{S}\times\mathcal{X}$ such that $F(\sigma,X)=0$. If the pair (σ_o,X_o) is the solution of this problem then the existence and continuity at σ_o of the implicit function $X=X(\sigma)$ defined by the equation

$$F(\sigma,X)=0$$

are needed, for instance in the case when it is necessery to derive conditions for optimality.

Usual treatments of optimal control problems are based on the well-known implicit function theorem [1] and demand the existance and continuity of the Frechetderivative $F'_X(\sigma, X)$ in some neighbourhood of the pair (σ_0, X_0) and invertibility of the operator $F'_X(\sigma_0, X_0): \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$. But in the important case where the main part of an elliptic equation depends upon control σ and $\mathcal{Y}$ is not convex, the derivative $F'_X(\sigma, X)$ is not continuous with respect to (σ, X) because the space $\mathcal{Y}$ can not be treated with topology of L_∞.

In this paper we shall look for slightly modified conditions which allow to obtain continuity of $X(\sigma)$ in the case of semilinear elliptic equation

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{d}{dx_i}[a_{ij}(x,\sigma)u_{x_j} + a_{i0}(x,\sigma,u)] + a_0(x,\sigma,u,u_x) = 0.$$

The main assumptions can be given in the following form:

(i) the existence of the inverse operator $[F'_X(\sigma_0, X_0)]^{-1}$;

(ii) uniform continuity of $F'_X(\sigma, \cdot)$ with respect to $X \in \mathcal{X}$ for every fixed $\sigma \in \mathcal{Y}$.

1. The statement of the problem and results.

Let Ω be a bonded domain in the Euclidean space $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, with uniformly Lipschitz boundary Γ,

$$a_{ij} = a_{ij}(x,\xi), \; a_{i0} = a_{i0}(x,\xi,t), \; a_0 = a_0(x,\xi,t,y)$$
$$x \in \Omega, \; \xi \in \mathbb{R}^m, \; t \in \mathbb{R}, \; y \in \mathbb{R}^n; \quad i,j = 1,\dots,n;$$
$$\varkappa = \varkappa(x', \xi', \tau), \; x' \in \Gamma, \; \xi' \in \mathbb{R}^\ell, \; \tau \in \mathbb{R},$$

be Caratheodory functions, $D \subset \mathbb{R}^m$, $D' \subset \mathbb{R}^\ell$ be bonded sets and Γ_0 be a closed subset of Γ.

By means of D and D' we defin the "control set" $\mathcal{Y}$,

$$\mathcal{Y} \equiv \{\sigma = (\vartheta, \theta): \; \vartheta \in L_1^{(m)}(\Omega), \; \vartheta(x) \in D, \; x \in \Omega,$$
$$\theta \in L_1^{(\ell)}(\Gamma), \; \theta(x') \in D', \; x' \in \Gamma\}.$$

Here and what follows we denote by $L_1^{(s)}(E)$ the space of vector -valued integrable functions defined on E with values in R^s with usual norm of Descartes product of Lebesque spaces $L_1(E)$.

Let us denote by W_0 the space

$$W_0 \equiv \{u \in W_2^1(\Omega) : u|_{\Gamma_0} = 0\}$$

(which is a reflexive Banach space) and for every $\sigma \in \mathcal{S}$ consider variation equality

$$\ll A(\sigma)u,v \gg \equiv \int_\Omega \{\sum_{i,j=1}^n [a_{ij}(x,\vartheta)u_{x_j} + a_{i0}(x,\vartheta,u)]v_{x_i} + \\ + a_0(x,\vartheta,u,u_x)v\}dx + \int_\Gamma \varkappa(x',\theta,u)v\,d\Gamma = 0 \quad \forall v \in W_0 \tag{1}$$

with respect to $u \in W_0$. Sometimes we shall write $A(\sigma,u)$ instead of $A(\sigma)u$ and denote by $A'_u(\sigma,u)$ the derivative of $A(\sigma)u$ with respect to $u \in W_0$, at a pair (σ,u).

Obviously the variation equality (1) is equivalent to some operator equation

$$F(\sigma,u) = 0$$

where $F : \mathcal{S} \times W_0 \to (W_0)^*$.

We assume that the following hypotheses on functions a_{ij}, a_{i0}, a_0, $\varkappa$ are valid.

H1. There exist positive constants $0 < \nu < \mu$ such that

$$|a_{ij}(x,\xi)| \le \mu,\ i,j = 1,\dots,n;\ \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,\xi)\lambda_i\lambda_j \ge \nu|\bar\lambda|^2$$

for every

$$x \in \Omega,\ \xi \in R^m,\ \bar\lambda \equiv (\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in R^n.$$

H2. The functions $a_{i0}, a_0, \varkappa$ have first derivatives with respect to t, y, τ and these derivatives are Caratheodory functions.

H3. For some $r > n$ there exist positive functions $h_1 \in L_r(\Omega)$, $h_2 \in L_{r-1}(r)$, constant $\mu > 0$ and a bonded continuous function γ with $\gamma(0) = 0$ such that for all arguments under consideration:

$$|a_{i0}(x,\xi,0)| \le h_1(x), \quad i=1,\dots,n,$$

$$|a_0(x,\xi,0,0)| \le |h_1(x)|^2, \quad |\varkappa(x',\xi',0)| \le h_2(x'),$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial\tau}\varkappa(x',\xi',\tau)\right| \le \mu\left[h_2(x') + |\tau|^{\frac{2}{r-2}}\right],$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}a_{i0}(x,\xi,t)\right|^2 + \left|\frac{\partial}{\partial t}a_0(x,\xi,t,y)\right| +$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial y_i}a_0(x,\xi,t,y)\right|^2 \le \mu\left[h_1(x) + |t|^{\frac{2}{r-2}} + |y|^{\frac{2}{r}}\right],$$

$$i=1,\dots,n,$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}a_{i0}(x,\xi,t') - \frac{\partial}{\partial t}a_{i0}(x,\xi,t'')\right|^2 +$$

$$+\left|\frac{\partial}{\partial t}a_0(x,\xi,t',y') - \frac{\partial}{\partial t}a_0(x,\xi,t'',y'')\right| +$$

$$+\left|\frac{\partial}{\partial y_i}a_0(x,\xi,t',y') - \frac{\partial}{\partial y_i}a_0(x,\xi,t'',y'')\right|^2 \le$$

$$\le \mu\left[h_1(x) + |t'|^{\frac{2}{r-2}} + |t''|^{\frac{2}{r-2}} + |y'|^{\frac{2}{r}} + |y''|^{\frac{2}{r}}\right]^2 \gamma_1(|t'-t''| +$$

$$+|y'-y''|), \quad i=1,\dots,n,$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial\tau}\varkappa(x',\xi',\tau') - \frac{\partial}{\partial\tau}\varkappa(x',\xi',\tau'')\right| \le$$

$$\le \mu\left[h_2(x') + |\tau'|^{\frac{2}{r-2}} + |\tau''|^{\frac{2}{r-2}}\right]\gamma(|\tau'-\tau''|).$$

__Theorem 1.__

Let hypotheses H1-H3 be fulfilled, $\sigma_0 \in \mathcal{S}$ be fixed, u_0 be the solution of (1) with $\sigma = \sigma_0$. Suppose that the linearised variational equality

$$\langle\langle A'_u(\sigma_o, u_o)u, v\rangle\rangle - \int_\Omega \Big[\sum_{i=1}^n f_i v_{x_i} + f_o v\Big]dx -$$

$$-\int_\Gamma f_{n+1} v \, d\Gamma = 0 \quad \forall v \in W_o \tag{2}$$

is uniquely solvable with respect to $u \in W_o$ for every

$$f_o \in L_{\frac{2r}{r+2}}(\Omega),\ f_i \in L_2(\Omega),\ i=1,\dots,n,\ f_{n+1} \in L_{\frac{2(r-1)}{r}}(\Gamma).$$

Then there exists a neighbourhood $\omega_o \subset \mathcal{S}$ of σ_o such that for every $\sigma \in \omega_o$ the variational equality (1) has a solution $u = u(\sigma)$ and $u(\sigma) \to u(\sigma_o) = u_o$ in W_o as $\sigma \to \sigma_o$ in $\mathcal{S}$.

2. <u>Proofs.</u>

Let $\mathcal{X}$ be a reflexive Banach space, $\mathcal{X}^*$ be its dual space, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ represents the pairing between $\mathcal{X}$ and $\mathcal{X}^*$ and $F: \mathcal{S} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ is such an operator that for some pair $(\sigma_o, X_o) \in \mathcal{S} \times \mathcal{X}$ and some neighbourhood $\omega_o \subset \mathcal{X}$ of the X_o

1^o. F is continuous on $\mathcal{S} \times \omega_o$.

2^o. Operator F has the Frechet derivative $F'_X(\sigma, X)$ with respect to X for $(\sigma, X) \in \mathcal{S} \times \omega_o$ and there exists a continuous function γ_1 with $\gamma_1(0) = 0$ such that

$$\|F'_X(\sigma, X) - F'_X(\sigma, 0)\| \le \gamma_1(\|X - X_o\|)$$

for $(\sigma, X) \in \mathcal{S} \times \omega_o$.

3^o. $F(\sigma_o, X_o) = 0$ and there exists a bounded inverse operator $[F'_X(\sigma_o, X_o)]^{-1}: \mathcal{X}^* \to \mathcal{X}$.

4^o. Operator F has a representation

$$F(\sigma, X) = L(\sigma)X + M(\sigma, X)$$

where $L(\sigma): \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ is a linear bounded operator for every $\sigma \in \mathcal{S}$.

5^o. There exists a positive constant ν such that

$$\langle L(\sigma)X, X\rangle \ge \nu \|X\|^2$$

for every $X \in \mathcal{X}$ and $\sigma \in \mathcal{S}$.

6°. If the sequences $\{\sigma_\kappa\} \subset \mathcal{S}$ and $\{X_\kappa\} \subset \mathfrak{X}$ converge strongly to σ_0 and X_o respectively then there is

$$F_X'(\sigma_\kappa, X_\kappa) y_\kappa \xrightarrow[\kappa\to\infty]{} F_X'(\sigma_o, X_o) y_o$$

for arbitrary weakly convergent sequence $\{y_\kappa\} \subset \mathfrak{X}$, $y_\kappa \to y_o$.

7°. There is

$$\langle M_X'(\sigma, X) y_\kappa, y_\kappa \rangle \xrightarrow[\kappa\to\infty]{} 0$$

uniformly with respect to $(\sigma, X) \in \mathcal{S} \times \omega_0$ for every weakly convergent to zero sequence $\{y_\kappa\} \subset \mathfrak{X}$.

Lemma 1. Let assumptions 1° - 7° be fulfilled. Then there exists a neighbourhood $\omega_1 \subset \mathcal{S}$ of σ_0 such that the equation

$$F(\sigma, X) = 0 \tag{3}$$

for every $\sigma \in \omega_1$ has at least one solution $X = X(\sigma)$ and $X(\sigma) \to X(\sigma_0) = X_0$ strongly in $\mathfrak{X}$ as $\sigma \to \sigma_0$ strongly in $\mathcal{S}$.

Proof. To begin with, we shall prove that there exists a neighbourhood ω_2 , $(\sigma_0, X_o) \in \omega_2 \subset \mathcal{S} \times \mathfrak{X}$ and a positive constant $\nu_1 > 0$ such that inverse operator $[F_X'(\sigma, X)]^{-1} : \mathfrak{X}^* \to \mathfrak{X}$ exists for $(\sigma, X) \in \omega_2$ and $\|[F_X'(\sigma, X)]^{-1}\| \leq \nu_1$.

We argue by contradiction. If ν_1 and ω_2 with mentioned above properties do not exists then there exists sequences $\{\sigma_\kappa\} \subset \mathcal{S}$, $\{X_\kappa\} \subset \mathfrak{X}$, $\{y_\kappa\} \subset \mathfrak{X}$, $\{f_\kappa\} \subset \mathfrak{X}^*$ such that

$$F_X'(\sigma_\kappa, X_\kappa) y_\kappa = f_\kappa , \quad \kappa = 1, 2, \ldots,$$

$$\sigma_\kappa \to \sigma_o , \ X_\kappa \to X_o , \ f_\kappa \to 0$$

$$\|y_\kappa\| = 1 , \quad \kappa = 1, 2, \ldots .$$

Because $\mathfrak{X}$ is a reflexive space we can assume that $y_\kappa \rightharpoonup y_o$. Two cases are possible: $y_o = 0$ and $y_o \neq 0$. Let us consider the first one, i.e. $y_\kappa \rightharpoonup 0$. Then by virtue of 4°; 5° and 7°

$$0=\lim_{k\to\infty} \langle f_k, y_k\rangle =$$

$$=\lim_{k\to\infty} \langle F_x'(\sigma_k, x_k) y_k, y_k\rangle =$$

$$=\lim_{k\to\infty} \langle L(\sigma_k) y_k, y_k\rangle +$$

$$+\lim_{k\to\infty} \langle M_x'(\sigma_k, x_k) y_k, y_k\rangle \geq$$

$$\geq \lim_{k\to\infty} \nu_1 \|y_k\|^2 + 0 \geq \nu_1 .$$

Therefore $y_0 \neq 0$.
If $y_0 \neq 0$ then be virtue of 6°

$$0=\lim_{k\to\infty} \langle f_k, y^*\rangle =$$

$$=\lim_{k\to\infty} \langle F_x'(\sigma_k, x_k) y_k, y^*\rangle =$$

$$=\langle F_x'(\sigma_0, x_0) y_0, y^*\rangle$$

for every $y^* \in \mathcal{X}^*$.

Since $y^* \in \mathcal{X}^*$ is arbitrary, $F_x'(\sigma_0, x_0) y_0 = 0$ what contradicts to 3° and $y_0 \neq 0$. Hence, constant ν_1 and neighbourhood ω_2 with required properties exists.

In what follows we can take $x_0 = 0$ for the sake of simplicity.

Now the equation (3) for $(\sigma, X) \in \omega_2$ is equivalent to the equation

$$X = Q(\sigma, X), \tag{4}$$

$$Q(\sigma,X) \equiv -[F_x'(\sigma,0)]^{-1}[F(\sigma,X) - F_x'(\sigma,0)X + \\ +F(\sigma,0) - F(\sigma,0) - F(\sigma_0,0)]. \tag{5}$$

It follows from assumptions 1° and 2° that for $(\sigma, X) \in \omega_2$

$$\|Q(\sigma,X)\| \leq \vartheta_1 \|\int_0^1 [F_x'(\sigma,\lambda X) - F_x'(\sigma,0)]X\,d\lambda\| + \\ +\vartheta_1 \|F(\sigma,0) - F(\sigma_0,0)\| \leq \\ \leq \vartheta_1 [\gamma_1(\|X\|)\|X\| + \|F(\sigma,0) - F(\sigma_0,0)\|]. \tag{6}$$

Hence, there exists such a neighbourhood $\omega_3 \subset \mathcal{G}$ of σ_0 and $\varepsilon_1 > 0$ that for all $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ and $\sigma \in \omega_3$ the right hand side of (4) belongs to $B(\varepsilon) \equiv \{X \in \mathcal{X} : \|X\| \leq \varepsilon\}$ if $X \in B(\varepsilon)$.

On the other hand the operator $Q(\sigma, \cdot): \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ has a derivative and

$$\|Q_x'(\sigma,X)\| \leq \vartheta_1 \|F_x'(\sigma,X) - F_x'(\sigma,0)\| \leq \vartheta_1 \gamma_1(\|X\|) \leq \frac{1}{2} \tag{7}$$

for $\sigma \in \omega_3$ and $\|X\| \leq \varepsilon_2$ where $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 > 0$ depends only upon ϑ_1 and γ_1 .

Hence, conditions of the fixed point theorem are satisfied for $(\sigma, X) \in \omega_3 \times B(\varepsilon_2)$ and there exists unique implicit function $X = X(\sigma)$ with values in $B(\varepsilon_2)$ for $\sigma \in \omega_3$.

The contiuity of this implicit function $X = X(\sigma)$ at point σ_0 follows immediatly from the estimates (6) and (7). This completes the proof of the lemma.

Now it remains to be shown that the operator F defined by (1) satisfies assumptions 1° - 7° .

The continuity and continuous differentability of all terms of the F are considered similarly (an exeption are terms corresponding to $a_{ij}(x,\vartheta)\, u_{x_j}$). Therefore, we shall consider only one term, for example an operator

$$B : \mathcal{S} \times W_0 \to L_2 ,$$
$$B(\sigma,u)(x) \equiv a_{10}(x,\vartheta(x),u(x)), \quad x\in\Omega$$

and specifically the continuity of the Frechet derivative $B'_u(\sigma,u)$.

We have

$$\mathcal{J} \equiv \int_\Omega \Big(\frac{\partial}{\partial t} a_{10}(x,\vartheta,u_1) - \frac{\partial}{\partial t} a_{10}(x,\vartheta,u_2)\Big)^2 v^2 dx \leq$$

$$\leq \mu \int_\Omega [h_1 + |u_1|^{\frac{2}{r-2}} + |u_2|^{\frac{2}{r-2}}]^2 \gamma^2(|u_1-u_2|)\, v^2 dx$$

and by virtue of $r>n$ and the imbedding theorem

$$\mathcal{J} \leq const\big(1+\|u_1\|^{\frac{r}{r-2}} + \|u_2\|^{\frac{r}{r-2}}\big)^2 \|v\|^2 \Big(\int_\Omega |\gamma(|u_1-u_2|)|^{2\alpha} dx\Big)^{\frac{1}{\alpha}}$$

where the constant depends only on r, n, Ω, μ and h_1 but

$$\alpha = \frac{r(n+r)}{4r-2(n+r)} > 1$$

Since function γ is bounded then

$$\int_\Omega \gamma(|h|)^{2\alpha} dx \leq \int_{|h(x)|\leq\sqrt{\|h\|}} \gamma(\|h\|^{\frac{1}{2}})^{2\alpha} dx +$$

$$+ \int_{|h(x)|>\sqrt{\|h\|}} |c_1|^{2\alpha} dx \leq$$

$$\leq \gamma(\|h\|^{\frac{1}{2}})^{2\alpha} \cdot mes\,\Omega + |c_1|^{2\alpha}\|h\|,$$

$$c_1 = \sup\{\gamma(\lambda) : \lambda \in R,\ \lambda \geq 0\},$$

for every $h \in L_2(\Omega)$. Hence, the derivative $B'_u(\sigma, u)$ has the desired estimate.

The operator

$$C : \mathcal{S} \times W_0 \to L_2,$$

$$C(\sigma, u)(x) \equiv a_{ij}(x, \vartheta(x))\, u_{x_j}(x), \quad x \in \Omega,$$

is linear and bounded with respect to u and derivative $C'_u(\sigma, u)$ does not depend on u and satisfies assumption 2°. On the other hand, contimuity of C follows from the estimate

$$\int_\Omega |a_{ij}(x, \vartheta_\kappa)\, u_{\kappa x_j} - a_{ij}(x, \vartheta_0)\, u_{0x_j}|^2\, dx \leq$$

$$\leq 2\mu \int_\Omega |u_{\kappa x_j} - u_{0x_j}|^2 dx + 2\int_\Omega |a_{ij}(x, \vartheta_\kappa) - a_{ij}(x, \vartheta_0)|^2 u^2_{0x_j}\, dx \to 0$$

as $\sigma_\kappa \to \sigma_0$ and $u_\kappa \to u_0$ because the function a_{ij} is bounded and continuous with respect to ξ and the function $|u_{0x_j}|^2 \in L_1(\Omega)$ is fixed.

Thus, assumptions 1°, 2°, 3°, 4° and 5° are satisfied with $L(\sigma)$ defined by

$$\ll L(\sigma)u, v \gg \equiv \int_\Omega \Big[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, \vartheta)\, u_{x_j} v_{x_i} + uv\Big]\, dx.$$

Analogously, it can be shown that the derivative $L'_u(\sigma, u)$ satisfies the assumption 6°.

Assumptions 6° and 7° for operator M are treated similarly. Let us consider, for example, the operator B. Let $\sigma_\kappa \to \sigma_0$, $u_\kappa \to u_0$ and $v_\kappa \to v_0$. Then

$$\frac{\partial}{\partial t} a_{10}(x, \vartheta_\kappa, u_\kappa)\, v_\kappa - \frac{\partial}{\partial t} a_{10}(x, \vartheta_0, u_0)\, v_0 =$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial t} a_{10}(x, \vartheta_K, u_K) - \frac{\partial}{\partial t} a_{10}(x, \vartheta_o, u_K) \right] v_K +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial t} a_{10}(x, \vartheta_o, u_o)(v_K - v_o) \equiv g_1 + g_2 .$$

It is obvious that $g_2 \to 0$ as $K \to \infty$. On the other hand,

$$\|g_1\|_{L_2} \leq \|v_K\| \Big[\big\| \frac{\partial}{\partial t} a_{10}(x, \vartheta_K, u_o) -$$

$$- \frac{\partial}{\partial t} a_{10}(x, \vartheta_o, u_o) \big\|_{L_{\frac{r+n}{2}}(\Omega)} + \big\| \frac{\partial}{\partial t} a_{10}(x, \vartheta_K, u_K) -$$

$$- \frac{\partial}{\partial t} a_{10}(x, \vartheta_K, u_o) \big\|_{L_{\frac{r+n}{2}}(\Omega)} \Big] \equiv \|v_K\| (J_{11} + J_{12}).$$

The last term J_{12} in this statement can be treated analogously as it was done with term J above. Integrant of J_{11} has the same majorant in $L_{\frac{r+n}{2}}(\Omega)$ for all $K = 1, 2, \dots ,$ and is continuous with respect to ξ . Hence $J_{11} \to 0$ as $K \to \infty$.

Now we need only to discuss the assumption 7^o for the derivative $A'_u(\sigma, u) - L'_u(\sigma, u)$. We have

where g belongs to the bounded set in $L_{\frac{2r}{r+2}}(\Omega)$ uniformly with respect to $K = 1, 2, \dots ,$ and $v_K \to 0$ strongly in $L_{\frac{2r}{r-2}}(\Omega)$. The term corresponding to the function $\varkappa$ is treated analogously.

$$\Big| \int_\Omega B'_u(\sigma, u) v_K v_{Kx_1} dx \Big| \leq$$

$$\leq \big\| \mu [h_1 + |u|^{\frac{2}{r-2}} \big\|_{L_r(\Omega)} \|v_K\| \Big(\int_\Omega |v_K|^{\frac{2r}{r-2}} dx \Big)^{\frac{r-2}{2r}} \to 0$$

as $K \to \infty$ by virtue of the imbedding theorem.

Another terms have the form

$$\int_\Omega g(x, \vartheta, u, u_x, v_K, v_{Kx}) v_K dx$$

Thus, the operator F defined by (1) satisfies all assumptions of the lemma 1 and hence, the implicit function $u = u(\sigma)$ exists if σ belongs to some neighbourhood of σ_0 and $u(\sigma) \to u(\sigma_0)$ in W_0 as $\sigma \to \sigma_0$ in $\mathcal{Y}$.

References

1. Warga J. Optimal control of differential and functional equations. - Academic Press. - New-York - London, 1972.

У.Райтум. О непрерывной зависимости решений полулинейных эллиптических уравнений от параметров.

Аннотация. В работе рассматривается непрерывная зависимость от параметров $\sigma \in L_1$ решений краевых задач для уравнения

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{d}{dx_i}\left[a_{ij}(x,\sigma)u_{x_j} + a_{io}(x,\sigma,u)\right] + a_0(x,\sigma,u,u_x) = 0.$$

УДК 517.95

U.Raitums. Par puslineāru eliptisku vienādojumu atrisinājumu atkarību no parametriem.

Anotācija. Darbā aplūkota vienādojuma

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{d}{dx_i}\left[a_{ij}(x,\sigma)u_{x_j} + a_{io}(x,\sigma,u)\right] + a_0(x,\sigma,u,u_x) = 0$$

atrisinājumu atkarība no parametriem $\sigma \in L_1$. UDK 517.95

Computing Centre
Latvian University
boulevard Rainis, 29
226250 Riga

Latvijas Universitātes Zinātniskie Raksti, 552. (1990)
Matemātika, I.

ВОПРОСЫ РАСШИРЕНИЯ ДЛЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СМЕШАННЫМИ СИСТЕМАМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Я. Вуцан

Аннотация. Рассматривается класс задач оптимального управления системой, динамика которой описывается при помощи задачи Дирихле для линейного уравнения эллиптического типа второго порядка и задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих в качестве функционального параметра решение эллиптического уравнения. Управляющие параметры входят в старшие коэффициенты эллиптического уравнения и в правые части обыкновенных дифференциальных уравнений. Для задач указанного вида оптимальные управления могут и не существовать. В статье для исходных задач построены расширения, имеющие оптимальные управления и сохраняющие точные нижние грани минимизируемых функционалов. УДК 519.3.

Пусть в евклидовом пространстве R^n, $n \geq 2$, заданы ограниченные области Ω, Ω', G, D с границами $\partial\Omega$, $\partial\Omega'$, ∂G, ∂D, соответственно, такие, что $D \subset\subset G \subset\subset \Omega' \subset\subset \Omega$, причем Ω и G – строго липшицевы [1] (запись $D \subset\subset G$ означает, что $D \subset G$ и расстояние $\rho(D, \partial G)$ положительно). Зададим также фиксированные натуральные числа m, s, s_1, s_2, действительные числа $\alpha > 0$, $q > n$, t_0, t_1, интервал $T \equiv \{t \in R \,/\, t_0 < t < t_1\}$, ограниченное множество $Q \subset R^s$, вектор $y^* \equiv (y_1^*, \ldots, y_{n+m}^*) \in R^{n+m}$ такой, что $\bar{y}^* \equiv (y_1^*, \ldots, y_n^*) \in D$, функции $\varphi : \Omega \to R$ ($\varphi \in W_2^1(\Omega)$), a, b_i, a_i, a_{ij}, g_0, g_i $: \Omega \times Q \mapsto R$ ($i, j = \overline{1,n}$), $\Psi_k : V' \equiv R^{n+m} \times R^{n+1} \mapsto R$ ($k = \overline{-s_2, 0}$), $f_r : T \times V \mapsto R$ ($V \equiv V' \times Q$, $r = \overline{-s_2, n+m}$), векторфункцию $f \equiv (f_1, \ldots, f_{n+m})$. Кроме того, введем множество управляющих функций

$$U \equiv \{u = (u_1, \ldots, u_s) \,/\, u_j \in L_\infty(T),\ j = \overline{1,s};\ \forall\, t \in T \ \ u(t) \in Q\},$$

и функционалы

$$I_k : (C(\bar{T}))^{n+m} \times (C(\bar{D}))^{n+1} \times U \mapsto R,$$

$$I_k = I_k(y, w, u) \equiv \Psi_{-k}(y(t_1), w(\bar{y}(t_1))) + \int_T f_{-k}(\tau, y(\tau), w(\bar{y}(\tau)), u(\tau))\, d\tau, \quad (1)$$

где векторфункция $\bar{y}$ определяется равенством $\bar{y} \equiv (y_1, \ldots, y_n)$, если $y \equiv (y_1, \ldots, y_{n+m})$; $k = \overline{0, s_2}$.

В настоящей статье рассматриваются вопросы расширения для задач оптимального управления, имеющих следующий вид.

Задача 1. Найти точную нижнюю грань функционала $I_0 = I_0(y,w,u)$ по всем матрицам $A=A(x)\equiv(a_{ij}(x))$ и функциям $u=u(t)$ из заданных множеств $\mathfrak{A}$ и U, соответственно, при связях

$$\forall \eta \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \quad \int_\Omega \{a_{ij}(x) z_{x_j}(x)\cdot \eta_{x_i}(x) - [b_i(x) z_{x_i}(x) + a(x) z(x)]\,\eta(x)\}\,dx = \int_\Omega [g_i(x)\cdot \eta_{x_i}(x) - g_0(x)\cdot\eta(x)]\,dx, \tag{2}$$

$$z - \varphi \in W_2^1(\Omega), \tag{3}$$

$$\forall\, t\in\bar T \quad y(t) = \int_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau), w(\bar y(\tau)), u(\tau))\,d\tau, \tag{4}$$

где $w\equiv(z, z_{x_1},\ldots,z_{x_n})$, и при дополнительных ограничениях

$$\forall\, t\in\bar T \quad \bar y(t)\in D, \tag{5}$$

$$I_k(y,w,u) \leqslant 0, \quad k=\overline{1,s_1}, \tag{6}$$

$$I_k(y,w,u) = 0, \quad k=\overline{s_1+1, s_2}. \tag{7}$$

Здесь и далее, если не указано иное, по парам одинаковых индексов подразумевается суммирование в пределах от 1 до n. Обозначения функциональных пространств и их норм понимаются в смысле работы [1]; кроме того, используются следующие обозначения:

$C(\bar T; M) \equiv \{y\in (C(\bar T))^k \ / \ \forall\, t\in \bar T \ \ y(t)\in M\subset R^k\}$;

$|v|_k \equiv \sqrt{\sum_{i=1}^{k} v_i^2}$ – модуль элемента $v\equiv(v_1,\ldots,v_k)\in R^k$;

$B(v^0,\varepsilon,R^k)\equiv\{v\in R^k \ / \ |v-v^0|_k\leqslant\varepsilon\}$;

$|\eta|_{\bar T,k} = \sup_{t\in\bar T}|\eta(t)|_k$ – норма в $C(\bar T,R^k)$; $\quad |\eta|_{\bar T}\equiv|\eta|_{\bar T,1}$;

$\rightharpoonup$ – знак слабо секвенциальной сходимости.

Запись задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений в форме интегрального уравнения (4) означает, что для этой задачи ищется обобщенное решение y из пространства $(C(\bar T))^{n+m}$.

Запись задачи Дирихле для уравнения эллиптического типа в форме (2),(3) соответствующего вариационного равенства вызвана тем, что рассматриваются обобщенные решения z этой задачи из пространства С.Л.Соболева $W_2^1(\Omega)$. Обозначим через $Z(\mathfrak{A})$ множество таких решений z, соответствующих множеству $\mathfrak{A}$ управляющих матриц $A(x)$.

Вид множества $\mathfrak{A}$ управляющих матриц $A\equiv(a_{ij})$ будет уточнен позже. Пока отметим только то, что в подобласти Ω' все управляющие матрицы $A=A(x)$ из $\mathfrak{A}$ совпадают (т.е. в Ω' они не могут варьироваться); кроме того, всегда предполагается, что в Ω' коэффициенты и свободные члены уравнения (2) удовлетворяют условиям, гарантирующим, по крайней мере, принадлежность решения $z\in W_2^1(\Omega)$ задачи Дирихле (2),(3) пространству $C^1(\bar G)$. Выполнение этого свойства позволяет обеспечить в рассматриваемых задачах суммируемость по $\tau\in T$ подинтегральных функций из (1) и (4).

Следует отметить, что задача 1 в случае, когда в ней отсутствуют управления $u\in U$, соответствует математической модели управления движением заряженных частиц в области D (так называемой "рабочей зоне") путем подбора магнитических характеристик среды (например, формы ферромагнитного материала) в множестве $\Omega \setminus \Omega'$.

Поставленная задача 1 обладает той особенностью, что точная нижняя грань целевого функционала I_0 в ней может не достигаться даже тогда, когда множества управляющих функций $\mathfrak{A}$ и U выпуклы и замкнуты. Здесь существенную роль играет то обстоятельство, что если матрицы старших коэффициентов $A\equiv(a_{ij})$ эллиптического уравнения являются управлениями, то множество $Z(\mathfrak{A})$ решений задачи Дирихле (2),(3), соответствующее множеству $\mathfrak{A}$, обладает свойством слабой замкнутости в $W_2^1(\Omega)$ (или замкнутости в $C^1(\bar{D})$) только для исключительных множеств $\mathfrak{A}$. Поэтому актуальным становится вопрос о возможности расширения исходной задачи 1 таким образом, чтобы в расширенной задаче оптимальное управление существовало и точные нижние грани целевых функционалов в исходной и расширенной задачах совпадали. Именно этим вопросам и посвящена настоящая статья.

При формулировке результатов статьи будут использованы следующие условия.

F1. Функции $f_r=f_r(\tau,y,w,u)$, $r=\overline{1,n+m}$, удовлетворяют условиям Каратеодори, т.е. они измеримы по $\tau\in T$ при любых $(y,w,u)\in V$ и непрерывны по $(y,w,u)\in V$ при почти всех $\tau\in T$.

F2. Существуют неотрицательные функции $h_2\in L_1(T)$ и $\gamma_2\in C(R)$ такие, что при почти всех $\tau\in T$ и для любых $(y,w,u)\in V$ справедлива оценка

$$|f(\tau,y,w,u)|_{n+m} \leqslant h_2(\tau)\cdot\gamma_2(|\tau|+|\bar{y}|_n+|w|_{n+1}+|u|_s)\cdot(|y|_{n+m}+1).$$

F3. Существуют неотрицательные функции $h_3\in L_1(T)$ и $\gamma_3\in C(R)$ такие, что для любых $u\in U$, $(y,w)\in V'$, $(y^\circ,w^\circ)\in V'$ и для почти всех $\tau\in T$ справедлива оценка

$$|f(\tau,y,w,u)-f(\tau,y^\circ,w^\circ,u)|_{n+m} \leqslant h_3(\tau)\cdot(|y-y^\circ|_{n+m}+|w-w^\circ|_{n+1})\times$$
$$\times\gamma_3(|\tau|+|y|_{n+m}+|y^\circ|_{n+m}+|w|_{n+1}+|w^\circ|_{n+1}+|u|_s).$$

F4. Функции $f_r=f_r(\tau,y,w,u)$, $r=\overline{-s_2,n+m}$, аффинны по $u\equiv(u_1,\dots,u_s)\in Q$, т.е. они имеют представления

$$f_r(\tau,y,w,u)=f_r^0(\tau,y,w)+\sum_{i=1}^{s}u_i\cdot f_r^i(\tau,y,w),$$

причем функции $f_r=f_r(\tau,y,w)$ удовлетворяют условиям Каратеодори и для них существуют неотрицательные функции $h_4\in L_1(T)$ и $\gamma_4\in C(R)$ такие, что для почти всех $\tau\in T$ и любых $(y,w)\in V'$ справедливы оценки

$$|f_r^j(\tau,y,w)| \leqslant h_4(\tau)\cdot\gamma_4(|\tau|+|y|_{n+m}+|w|_{n+1});\quad j=\overline{0,s}.$$

F5. Множество Q является ограниченным, выпуклым и замкнутым подмножеством пространства R^s.

F6. Для произвольных $(y,w)\in V'$ и $\varepsilon>0$ существует число $\delta>0$, вообще говоря, зависящее от y, w и ε таков, что для всех $(y,w)\in V'$

справедливы неравенства $|\Psi_k(y,w) - \Psi_k(\tilde{y},\tilde{w})| \leq \varepsilon$, если только $|y-\tilde{y}|_{n+m} + |w-\tilde{w}|_{n+1} \leq \delta$; $k=\overline{-s_2,0}$.

A1. Величины $|\varphi|^{(1)}_{2,\Omega}$, $\|a\|_{q/2,\Omega}$, $\|a\|_{q,\Omega'}$, $\|b_i\|_{q,\Omega}$, $\|g_0\|_{\frac{2q}{q+2},\Omega}$, $\|g_0\|_{q,\Omega'}$, $\|g_i\|_{2,\Omega}$, $\|g_i\|_{q,\Omega'}$ ограничены сверху некоторой константой $\mu_1<\infty$; $i=\overline{1,n}$.

A2. Для почти всех $x\in\Omega$ имеют место соотношения

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x), \quad i,j=\overline{1,n},$$

$$\forall\ \xi=(\xi_1,\ldots,\xi_{n_2})\in R^n \quad \nu\cdot|\xi|^2_n \leq a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \mu\cdot|\xi|^2_n,$$

где ν и μ – фиксированные константы, $0<\nu<\mu$.

A3. В множестве $\overline{\Omega'}$ функции $a_{ij}=a_{ij}(x)$, $i,j=\overline{1,n}$, являются фиксированными элементами пространства $C(\overline{\Omega'})\cap W^1_q(\Omega')$ и существует число $\mu_2\in(0,\infty)$, ограничивающее сверху величины $|a_{ij}|_{\overline{\Omega'}}$ и $\|a_{ij}\|^{(1)}_{q,\Omega'}$; в множестве $\Omega''\equiv\Omega\setminus\Omega'$ допускается варьирование функций $a_{ij}=a_{ij}(x)$ таким образом, что матрицы $A\equiv(a_{ij})$ принадлежат множеству $\mathfrak{A}$.

Перед тем, как определить свойства, которым должно удовлетворять множество $\mathfrak{A}$, введем несколько обозначений.

Обозначим через $A(x)$ введенную матрицу функций, вычисленную в точке $x\in\Omega''$, через $\lambda_i(A)(x)$, $i=\overline{1,n}$, – собственные значения симметрической матрицы A, вычисленные в точке $x\in\Omega''$ и пронумерованные в порядке возрастания их значений.

Введем также несколько множеств. Пусть $\overline{co}\,\mathfrak{A}$ – замкнутая выпуклая оболочка множества $\mathfrak{A}$ в смысле сходимости элементов матриц $A\in\mathfrak{A}$ по норме пространства $L_2(\Omega'')$.

Определим множество $W\mathfrak{A}$ как множество всех симметрических матриц $A\equiv(a_{ij})$, $a_{ij}\in L_\infty(\Omega'')$, $i,j=\overline{1,n}$, таких, что для почти всех $x\in\Omega''$ существует матрица $A'\in\overline{co}\,\mathfrak{A}$ (зависящая от $x\in\Omega''$ и $A\in W\mathfrak{A}$) такая, что $\lambda_1(A')(x) \leq \lambda_1(A)(x) \leq \lambda_n(A)(x) \leq \lambda_n(A')(x)$.

Для произвольного подмножества $\mathfrak{A}'\subset W\mathfrak{A}$ и почти всех $x\in\Omega''$ определим множества $\mathcal{D}(\mathfrak{A}')(x)$ и $G\mathcal{D}(\mathfrak{A}')(x)$:

$\mathcal{D}(\mathfrak{A}')(x) \equiv \{(\tau',t')\in R^2 \ /\ \tau'=(\lambda_1(A)(x))^{-1},\ t'=\lambda_n(A)(x),\ A\in\mathfrak{A}'\}$,

$G\mathcal{D}(\mathfrak{A}')(x) \equiv \{(\tau,t)\in R^2 \ /\ \tau=(\tau')^{-1},\ t=t',\ (\tau',t')\in\overline{co}\,\mathcal{D}(\mathfrak{A}')(x)\}$.

Определим множество $GW\mathfrak{A}$ как множество всех симметрических матриц $A\equiv(a_{ij})$, $a_{ij}\in L_\infty(\Omega'')$, $i,j=\overline{1,n}$, таких, что для почти всех $x\in\Omega''$ пара $(\lambda_1(A)(x),\ \lambda_n(A)(x))$ принадлежит $G\mathcal{D}(W\mathfrak{A})(x)$.

Теперь относительно множества $\mathfrak{A}$ управляющих матриц A потребуем выполнение следующих условий.

A4. Множество $\mathfrak{A}$ не пусто; если $A^\circ\in\mathfrak{A}$, то множеству $\mathfrak{A}$ принадлежат все симметрические с элементами из $L_\infty(\Omega'')$ матрицы такие, что для почти всех $x\in\Omega''$ $\lambda_i(A)(x)=\lambda_i(A^\circ)(x)$; $i=\overline{1,n}$.

A5. Если $A',A^2\in\mathfrak{A}$ и v – произвольная функция из $L_\infty(\Omega)$, принимающая значения 0 или 1, то $v\cdot A^1 + (1-v)\cdot A^2 \in \mathfrak{A}$.

A6. Для почти всех $x \in \Omega$ справедливо неравенство $a(x) \leq 0$.

A7. Функции a, b_i, g_0 являются элементами пространства $C^\alpha(\bar{\Omega}')$, а функции a_{ij}, g_i – элементами пространства $C^{1+\alpha}(\bar{\Omega}')$; $i,j=\overline{1,n}$.

Наряду с задачей 1 будут рассматриваться также следующие задачи.

<u>Задача 2</u>. Найти пару $(A^0, u^0) \in GW\mathfrak{A} \times U$, доставляющую минимальное значение функционалу $I_0 = I_0(y,w,u)$ по всем парам $(A,u) \in GW\mathfrak{A} \times U$ при связях (2)-(4) и дополнительных ограничениях (6), (7) и

$$\forall\ t \in \bar{T} \quad \bar{y}(t) \in \bar{D}.$$

<u>Задача 1(ε)</u>. Найти величину $I_0^{1(\varepsilon)} \equiv \inf_{(A,u)\in\mathfrak{A}\times U} I_0(y,w,u)$ при связях (2)-(4) и дополнительных ограничениях

$$I_k(y,w,u) \leq \varepsilon, \quad k=\overline{1,s_1}, \tag{8}$$

$$|I_k(y,w,u)| \leq \varepsilon, \quad k=\overline{s_1+1,s_2}, \tag{9}$$

$$\forall\ t \in \bar{T} \quad \bar{y}(t) \in D_\varepsilon \equiv \{x \in R^n \ /\ \exists\ \hat{x} \in D : |x-\hat{x}|_n \leq \varepsilon\};\quad \varepsilon \geq 0.$$

<u>Задача 2(ε)</u>. Найти величину $I_0^{2(\varepsilon)} \equiv \inf_{(A,u)\in GW\mathfrak{A}\times U} I_0(y,w,u)$ при связях (2)-(4) и дополнительных ограничениях (7) и

$$I_k(y,w,u) + \varepsilon \leq 0, \quad k=\overline{1,s_1}, \tag{10}$$

$$\forall\ t \in \bar{T} \quad \bar{y}(t) \in \bar{D}_{-\varepsilon} = \{x \in R^n \ /\ \overline{B(x,\varepsilon,R^n)} \subset D\};\quad \varepsilon \geq 0.$$

Введем обозначения $I_0^1 \equiv I_0^{1(0)}$ и $I_0^2 \equiv I_0^{2(0)}$. Очевидно, что I_0^1 и I_0^2 являются точными нижними гранями минимизируемого функционала I_0 в задачах 1 и 2, соответственно.

Перейдем к формулировке и доказательству основных результатов настоящей статьи.

Во-первых, отметим, что из теоремы 1 работы [2] легко следует:

<u>Теорема 1</u>. Пусть выполнены условия F2, F4-F6, A1-A6. Тогда, если существует хотя бы одна пара $(A,u) \in GW\mathfrak{A} \times U$, для которой удовлетворены все связи и дополнительные ограничения задачи 2, то для этой задачи существует решение $(A^0,u^0) \in GW\mathfrak{A} \times U$.

<u>Следствие 1</u>. Очевидно, что если при достаточно малом параметре $\varepsilon > 0$ существует хотя бы одна пара $(A,u) \in GW\mathfrak{A} \times U$, для которой удовлетворены все связи и дополнительные ограничения задачи 2(ε), то в условиях теоремы 1 существует управление $(A^\varepsilon,u^\varepsilon) \in GW\mathfrak{A} \times U$, доставляющее точную нижнюю грань функционалу I_0 в задаче 2(ε).

<u>Теорема 2</u>. Пусть выполнены условия F2-F6, A1-A7 и существует хотя бы одна пара $(A,u) \in \mathfrak{A} \times U$, для которой удовлетворены все связи и дополнительные ограничения задачи 1. Пусть, кроме того, справедливо следующее утверждение:

в) решения $I_0^{1(\varepsilon)}$ задач 1(ε) непрерывно зависят от параметра $\varepsilon > 0$ в точке $\varepsilon=0$, т.е. $\lim_{\varepsilon\to 0+0} I_0^{1(\varepsilon)} = I_0^{1(0)}$.

Тогда точные нижние грани минимизируемого функционала I_0 в задачах 1 и 2 совпадают.

Теорема 3. Пусть выполнены условия F2–F6, A1–A7 и для любого достаточно малого $\varepsilon>0$ существует хотя бы одно управление, $(A,u)\in GW\mathfrak{A}\times U$, для которого удовлетворены все связи и дополнительные ограничения задачи $2(\varepsilon)$. Пусть, кроме того, справедливы следующие два утверждения:

а) если в задаче 1 функционалы $I_i=I_i(y,w,u)$, $i=\overline{s_1+1,s_2}$, заменить функционалами $I^{\,\hat\varepsilon}_{i,\hat\varepsilon}(y,w,u)=I_i(y,w,u)+\hat\varepsilon_i$, то точная нижняя грань функционала I_0 в измененной задаче (теперь она зависит и от $\hat\varepsilon=(\hat\varepsilon_{s_1+1},\ldots,\hat\varepsilon_{s_2})$) как функция от $\hat\varepsilon$ непрерывна в точке $\hat\varepsilon=0\in R^{s_2-s_1}$;

б) решения $I_0^{2(\varepsilon)}$ задач $2(\varepsilon)$ непрерывно зависят от параметра $\varepsilon>0$ в точке $\varepsilon=0$, т.е. $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+0} I_0^{2(\varepsilon)}=I_0^{2(0)}$.

Тогда точные нижние грани минимизируемого функционала I_0 в задачах 1 и 2 совпадают.

В доказательствах теорем 2 и 3 основную роль играет следующая

Лемма 1. Пусть выполнены условия A1–A6. Тогда:

1) множество $Z(GW\mathfrak{A})$ является ограниченным и слабо секвенциально замкнутым в $W_2^1(\Omega)$ и совпадает со слабо секвенциальным замыканием в $W_2^1(\Omega)$ множества $Z(\mathfrak{A})$,

2) множество $Z(GW\mathfrak{A})$ замкнуто, ограничено и компактно в пространствах $C^1(\bar G)$ и $C^{1+\hat\alpha}(\bar G)$, $0<\hat\alpha<1-n/q$, и как подмножество пространств $C^1(\bar G)$ и $C^{1+\hat\alpha}(\bar G)$ совпадает с замыканием множества $Z(\mathfrak{A})$ по норме этих пространств.

Доказательство. Справедливость утверждения 1) леммы почти непосредственно следует из результатов работы У.Ё.Райтума [3]. Докажем справедливость утверждения 2).

Выберем некоторую подобласть G' области Ω' так, чтобы

$$G\subset\subset G'\subset\subset\Omega'. \tag{11}$$

Из условий A1 и A2, основываясь на методике доказательства теоремы 10.1 главы III монографии О.А.Ладыженской и Н.Н.Уральцевой [1] при помощи теорем 1.1, 5.1, 5.2, 5.4, 13.1 и оценки (11.8) главы III этой же работы [1], доказывается, что обобщенное решение $z\in W_2^1(\Omega)$ задачи Дирихле (2),(3) удовлетворяет оценке

$$\|z\|^{(2)}_{q,G'}\leqslant C_1, \tag{12}$$

где величина постоянной C_1 зависит только от ν, μ, μ_1, μ_2, q из условий A1–A3, а также от областей Ω', G', расстояния $\rho(G',\partial\Omega')$ и от $\|z\|^{(1)}_{2,\Omega'}$.

Кроме того, из условий A1, A2 и A6 при помощи следствия 1 из работы А.Б.Цибулиса [4] следует, что при любых фиксированных $A \in GW\alpha$, $\varphi \in W_2^1(\Omega)$, $g_0 \in L_{\frac{2q}{q+2}}(\Omega)$ и $g_i \in L_2(\Omega)$, $i=\overline{1,n}$, для задачи Дирихле (2),(3) существует одно единственное решение $z \in W_2^1(\Omega)$ и имеет место априорная оценка

$$\|z\|_{2,\Omega}^{(1)} \leqslant C_0 (\|g_0\|_{\frac{2q}{q+2},\Omega} + \sum_{i=1}^{n} \|g_i\|_{2,\Omega} + \|\varphi\|_{2,\Omega}^{(1)}), \tag{13}$$

в которой величина константы C_0 зависит лишь от ν, μ, μ_1, q из условий А1 и А2, от размерности n и от области Ω.

Очевидно, что, ввиду выполнения условия А1, из (13) следует ограниченность множества $Z(GW\alpha)$ в пространствах $W_2^1(\Omega)$ и $W_2^1(\Omega')$.

Теперь из оценки (12) согласно теоремам вложения [1, с. 77] получаем, что $Z(GW\alpha)$ является компактным множеством пространств $C^{1+\hat{\alpha}}(\bar{G})$, где $0 < \hat{\alpha} < 1-n/q$, причем существует число $C>0$, величичина которого зависит только от постоянных n, q, ν, μ, μ_1, μ_2, от областей Ω, Ω', G', G и расстояний $\rho(G', \partial\Omega')$ и $\rho(G, \partial G')$, такое, что

$$\forall\, z \in Z(GW\alpha) \qquad |z|_{\bar{G}}^{(1+\hat{\alpha})} \leqslant C. \tag{14}$$

Вследствие некоторой произвольности в выборе G' в том смысле, что эта область должна удовлетворять лишь вложениям (11), зависимость постоянной C от G' и расстояний $\rho(G', \partial\Omega')$ и $\rho(G, \partial G')$ можно заменить зависимостью ее от Ω', G и расстояния $\rho(G, \partial\Omega')$.

Очевидно, что $Z(GW\alpha)$ компактно также в пространстве $C^1(\bar{G})$, и имеет место оценка

$$\forall\, z \in Z(GW\alpha) \qquad |z|_{\bar{G}}^{(1)} \leqslant C.$$

Докажем теперь, что множество $Z(GW\alpha)$ как подмножество пространства $C^1(\bar{G})$ совпадает с замыканием по норме $C^1(\bar{G})$ множества $Z(\alpha)$.

Ввиду справедливости утверждения 1) доказываемой леммы, для любого элемента $z^0 \in Z(GW\alpha)$ существует последовательность $\{z^k\}_{k=1}^{\infty} \subset Z(\alpha)$ такая, что $z^k \to z^0$ в $W_2^1(\Omega)$ при $k \to \infty$, но тогда $z^k \to z^0$ также в $W_2^1(G)$. Поскольку $Z(GW\alpha)$ является компактным множеством пространства $C^1(\bar{G})$ и $Z(\alpha) \subset Z(GW\alpha)$, то множество $Z(\alpha)$ также компактно в $C^1(\bar{G})$, а, следовательно, из последовательности $\{z^k\}_{k=1}^{\infty} \subset Z(\alpha)$ можно выделить сходящуюся в $C^1(\bar{G})$ подпоследовательность. Из единственности слабого предела, а также из того, что из сходимости по норме пространства $C^1(\bar{G})$ следует слабо секвенциальная сходимость в $W_2^1(G)$, заключаем, что эта подпоследовательность сходится в $C^1(\bar{G})$ к выбранной функции $z^0 \in Z(GW\alpha)$ как элементу пространства $C^1(\bar{G})$. Тем самым доказано, что z^0 принадлежит замыканию множества $Z(\alpha)$ по норме пространства $C^1(\bar{G})$.

Аналогично доказывается утверждение 2) леммы относительно пространств $C^{1+\hat\alpha}(\bar G)$, $0<\hat\alpha<1-n/q$.

На этом доказательство леммы завершено.

Следствие 2. Пусть выполнены условия A1-A7. Тогда $Z(GW\alpha)$ является подмножеством пространства $C^{2+\alpha}(\bar G)$, а значит, для любых $z\in Z(GW\alpha)$ векторфункции $w\equiv(z,z_{x_1},\dots,z_{x_n})$ являются элементами пространств $C^{1+\alpha}(\bar G;R^{n+1})$, $C^1(\bar G;R^{n+1})$ и $Lip(\bar G;R^{n+1})$.

Доказательсто следует из [1, с. 229 и 235] и оценки (14).

Лемма 2. Пусть заданы некоторые множество $D'\subset\subset G$, постоянная $\hat c$, $0<\hat c<\rho(D',\partial G)$, функции $y^0\in C(\bar T;\bar D'\times R^m)$, $u^0\in U$, $w^0\in Lip(\bar G;R^{n+1})$ и последовательность $\{w^k\}_{k=1}^{\infty}\subset C(\bar G;R^{n+1})$ такая, что

$$|w^k-w^0|_{\bar G,n+1}\to 0 \quad \text{при } k\to\infty. \qquad (15)$$

Пусть тройка функций $(y,w,u)=(y^0,w^0,u^0)$ удовлетворяет соотношению (4), а подинтегральная функция f из (4) – условиям F1 и F3 (F1 здесь безусловно можно заменить и более жестким условием F4).

Тогда для любого $\varepsilon\in(0,\hat c)$ найдется такое натуральное число K, что для уравнения (4) при $u=u^0$ и любых $w=w^k$, $k\geqslant K$, существует решение $y^k\in C(\bar T;R^{n+m})$, которое, кроме того, удовлетворяет оценке

$$|y^k-y^0|_{\bar T,n+m}\leqslant\varepsilon.$$

Доказательство. Схема доказательства леммы следующая. Покажем, что для произвольного $\varepsilon\in(0,\hat c)$ найдется такое натуральное число K, что при любом $k\geqslant K$ существует решение $\delta y^k\in C(\bar T;\overline{B(0,\varepsilon,R^{n+m})})$ для уравнения

$$\delta y=B_k\,\delta y, \qquad (16)$$

где оператор $B_k\equiv B_k(w^0,w^k,u^0,y^0)$ определен выражениями

$$(B_k\,\delta y)(t)\equiv\int_{t_0}^{t}f^k(\tau,\delta y(\tau))\,d\tau,\qquad t\in\bar T, \qquad (17)$$

$$f^k(\tau,\delta y(\tau))\equiv f(\tau,y^0(\tau)+\delta y(\tau),w^k(\bar y^0(\tau)+\overline{\delta y}(\tau)),u(\tau))-$$
$$-f(\tau,y^0(\tau),w^0(\bar y^0(\tau)),u^0(\tau)), \qquad (18)$$

где $\overline{\delta y}\equiv(\delta y_1,\dots,\delta y_n)$, если $\delta y\equiv(\delta y_1,\dots,\delta y_{n+m})$.

Тогда из этого утверждения, учитывая удовлетворение тройкой (y^0,w^0,u^0) равенства (4) и справедливость выражения

$$\forall\, t\in\bar T\quad \bar y^0(t)\in\bar D',$$

последует, что функция $y^k\equiv y^0+\delta y^k$ удовлетворяет всем требованиям из утверждения леммы, тем самым лемма будет доказана.

Приступим к этому доказательству. Зафиксируем произвольное число ε, $0<\varepsilon<\hat c$.

Выберем натуральное число K_1 таким, чтобы для всех $k\geqslant K_1$

$$|w^k-w^0|_{\bar G,n+1}\leqslant 1. \qquad (19)$$

Поскольку $y^0\in C(\bar T,\bar D'\times R^m)$, $w^0\in Lip(\bar G;R^{n+1})$ и область G строго липшицева, то, учитывая также (19), получаем, что существует такое число C, что для функций y^0,w^0 и w^k, $k\geqslant K_1$, справедливы оценки

$$\sup_{x\in\bar G}|w^\circ(x)|_{n+1}\leqslant C,\quad \sup_{t\in\bar T}|y^\circ(t)|_{n+m}\leqslant C,\quad \sup_{x\in\bar G}|w^k(x)|_{n+1}\leqslant C,\quad \sup_{\hat x,x\in\bar G}|w^\circ(\hat x)-w^\circ(x)|_{n+1}\leqslant C\cdot|\hat x-x|_n . \tag{20}$$

Отметим также справедливость для почти всех τ из T и произвольных $\delta y,\delta\eta\in C(\bar T;\overline{B(0,\varepsilon,R^{n+m})})$ при любых w^k, $k\geqslant K_1$, следующих выражений, вытекающих из определения (18), оценок (20) и условия F3 :

$$|f^k(\tau,\delta y(\tau))|_{n+m}\leqslant\hat{\hat c}\cdot h_3(\tau)\cdot\left[|\delta y(\tau)|_{n+m}+C\cdot|\delta y(\tau)|_n+|w^k-w^\circ|_{\bar G,n+1}\right], \tag{21}$$

$$|f^k(\tau,\delta y(\tau))-f^k(\tau,\delta\eta(\tau))|_{n+m}\leqslant\hat{\hat c}\cdot h_3(\tau)\cdot\left[|(\delta y-\delta\eta)(\tau)|_{n+m}+\right.$$
$$\left.+|w^k((\bar y^\circ+\delta y)(\tau))-w^k((\bar y^\circ+\delta\eta)(\tau))|_{n+1}\right], \tag{22}$$

где постоянная $\hat{\hat c}$ конечна и определена выражением

$$\hat{\hat c}\equiv\sup_{\substack{\tau\in\bar T,\ u\in Q,\\ |y|_{n+m}\leqslant c+\hat c,\ |w|_{n+1}\leqslant c}}\gamma_3(\,|\tau|+|y|_{n+m}+|w|_{n+1}+|u|_s\,),$$

а неотрицательные функции $h_3\in L_1(T)$ и $\gamma_3\in C(R)$ взяты из условия F3.

Из условия F1 и того, что w°, $w^k\in C(\bar G;R^{n+1})$ и $u\in U$, следует, что для любых $\delta y\in C(\bar T;\overline{B(0,\varepsilon,R^{n+m})})$ функция $f^{\delta y,k}(\tau)\equiv f^k(\tau,\delta y(\tau))$ измерима по $\tau\in T$, а значит оператор B_k, определенный выражениями (17),(18) отображает множество $C(\bar T;\overline{B(0,\varepsilon,R^{n+m})})$ в $C(\bar T;R^{n+m})$.

Из оценки (22) при помощи теоремы Егорова следует непрерывность операторов B_k, $k\geqslant K_1$, во множестве $C(\bar T;\overline{B(0,\varepsilon,R^{n+m})})$.

В свою очередь, из (21) следует равномерная ограниченность и равностепенная непрерывность в $\bar T$ функций из множества

$$\left\{(B_k\,\delta y)(\tau)\ /\ \delta y\in C(\bar T;\overline{B(0,\varepsilon,R^{n+m})})\right\},\quad k\geqslant K_1,$$

что согласно теореме Арцела влечет компактность этого множества в банаховом пространстве $C(\bar T;R^{n+m})$. Тем самым показано, что оператор $B_k: C(\bar T;\overline{B(0,\varepsilon,R^{n+m})})\mapsto C(\bar T;R^{n+m})$ вполне непрерывен.

Рассмотрим для произвольных $\lambda\in[0,1]$, $k\geqslant K_1$ уравнение

$$\delta y=\lambda\cdot B_k\,\delta y . \tag{23}$$

Допустим, что для этого уравнения существует решение $\delta y^{k,\lambda}\in C(\bar T;\overline{B(0,\varepsilon,R^{n+m})})$. Из (17), (18), (21) и (23) при помощи неравенства Гронуола (см.[5 , с. 219]) тогда следует оценка

$$|\delta y^{k,\lambda}|_{\bar T,n+m}\leqslant\lambda\cdot|w^k-w^\circ|_{\bar D,n+m}\cdot\hat{\hat c}\cdot\|h_3\|_{1,T}\cdot\exp\left[\hat{\hat c}(1+C)\cdot\|h_3\|_{1,T}\right]. \tag{24}$$

Выберем согласно соотношению (15) натуральное число K таким, чтобы $K\geqslant K_1$ и для всех $k\geqslant K$ было справедливым неравенство

$$|w^k-w^\circ|_{\bar D,n+1}\cdot\hat{\hat c}\cdot\|h_3\|_{1,T}\cdot\exp\left[\hat{\hat c}(1+C)\cdot\|h_3\|_{1,T}\right]\leqslant\varepsilon .$$

Тогда из принципа Шаудера (см.[6 , с. 416-417]) и априорной оценки (24) следует, что при любом $k\geqslant K$ для уравнения (16) существует решение $\delta y^k\in C(\bar T;\overline{B(0,\varepsilon,R^{n+m})})$.

Тем самым доказательство леммы завершено.

Следствие 3. Пусть подинтегральная функция f из уравнения (4) удовлетворяет условиям F1 и F3. Тогда при фиксированных $u^\circ\in U$ и

$w^0 \in Lip(\bar{G};R^{n+1})$ уравнение (4) может иметь не более одного решения из множества $C(\bar{T},\bar{G}xR^m)$.

Доказательство следует из априорной оценки (24).

Следствие 4. Если выполнены все условия леммы 2 и, кроме того, $w^k \in Lip(\bar{G};R^{n+1})$, то для достаточно больших k при фиксированных $w=w^k$ и $u=u^0$ решение уравнения (4) единственно.

Доказательство получается из леммы 2 и следствия 3, если взять в них тройку (y^k,w^k,u^0) вместо тройки (y^0, w^0,u^0).

Следствие 5. В условиях леммы 2 $y^k \to y^0$ в $C(\bar{T};R^{n+m})$ при $k \to \infty$.

Доказательство следует из априорной оценки (24) при $\lambda=1$.

Доказательство теоремы 2. Из формулировок задач 1 и 2 и из $\mathfrak{K} \subset GW\mathfrak{K}$ непосредственно следует неравенство

$$J_0^1 \geqslant I_0^2 . \tag{25}$$

Таким образом, настоящее доказательство сводится к изучению вопроса о том, когда справедливо противоположное неравенство $I_0^2 \geqslant I_0^1$.

В силу теоремы 1 минимальное значение I_0^2 функционала I_0 в задаче 2 достигается на некоторой паре $(A^0,u^0) \in GW\mathfrak{K} xU$, т.е. $I_0^2= =I_0(y^0,w^0,u^0)$, где $w^0\equiv(z^0,z^0_{x_1},\ldots,z^0_{x_n})$, z^0 – решение краевой задачи (2),(3), соответствующее управляющей матрице $A=A^0$, а y^0 – решение уравнения (4), соответствующее функциям $w=w^0$ и $u=u^0$.

Покажем, что при $\varepsilon>0$ решение задачи $1(\varepsilon)$ не превосходит I_0^2, т.е., что $I_0^{1(\varepsilon)} \leqslant I_0^2$.

Согласно лемме 1 существует такая последовательность $\{z^k\}_{k=1}^{\infty} \subset Z(\mathfrak{K})$, что

$$z^k \to z^{\wedge} \text{ в } C^1(\bar{G}) \text{ при } k \to \infty . \tag{26}$$

В дальнейшем будем считать, что $0 < \varepsilon < \rho(D, \partial G)$.

Поскольку функция $y^0 \in C(\bar{T};\bar{D}xR^m)$ является решением уравнения (4) при $w=w^0$ и $u=u^0$, то из леммы 2 и следствий 2 и 4 следует, что для достаточно больших индексов k при $w=w^k\equiv(z^k,z^k_{x_1},\ldots,z^k_{x_n})$ и $u=u^0$ существует, притом единственное, решение $y^k \in C(\bar{T};R^{n+m})$ уравнению (4), которое, кроме того, удовлетворяет соотношению

$$\forall\, t \in \bar{T} \quad \bar{y}^k(t) \in D_\varepsilon .$$

Согласно следствию 5

$$y^k \to y^0 \text{ в } C(\bar{T};R^{n+m}) \text{ при } k \to \infty . \tag{27}$$

Из удовлетворения тройкой (y^0,w^0,u^0) дополнительных ограничений (6),(7) на основе предельных соотношений (26), (27), условий F4–F6 при помощи теоремы Егорова получаем, что при достаточно больших индексах k тройками (y^k,w^k,u^0) будут удовлетворены также дополнительные ограничения (8), (9) задачи $1(\varepsilon)$ и, кроме того,

$$\lim_{k\to\infty} I_0(y^k,w^k,u^0) = I_0(y^0,w^0,u^0) \equiv I_0^2 . \qquad (28)$$

Таким образом, элементы (y^k,w^k,u^0) построенной последовательности при достаточно больших k удовлетворяют всем связям и дополнительным ограничениям задачи $1(\varepsilon)$ и для них справедливо предельное соотношение (28), а это означает, что

$$I_0^{1(\varepsilon)} \leqslant I_0^2 . \qquad (29)$$

Неравенство (29) доказано для произвольного достаточно малого $\varepsilon>0$. Совершая в (29) предельный переход при $\varepsilon\to 0$ и воспользуясь условием в) доказываемой теоремы, получаем требуемое неравенство $I_0^2 \geqslant I_0^1$. Теорема доказана.

<u>Доказательство теоремы 3</u>. Сперва докажем для достаточно малых $\varepsilon>0$ справедливость неравенства $I_0^{2(\varepsilon)} \geqslant I_0^1$. Желаемое равенство $I_0^2 = I_0^1$ после этого последует из двухстороннего неравенства

$$I_0^{2(\varepsilon)} \geqslant I_0^1 \geqslant I_0^2$$

и условия б) доказываемой теоремы, совершая предельный переход при $\varepsilon \to 0$.

Согласно следствию 1 из условий доказываемой теоремы получаем, что при любом достаточно малом $\varepsilon>0$ минимальное значение $I_0^{2(\varepsilon)}$ функционала I_0 в задаче $2(\varepsilon)$ достигается на некоторой паре $(A^\varepsilon,u^\varepsilon)\in G\mathcal{W}(\mathcal{M})\times U$, т.е. $I_0^{2(\varepsilon)}=I_0(y^\varepsilon,w^\varepsilon,u^\varepsilon)$, где y^ε - решение уравнения (4) соответствующее функциям $u=u^\varepsilon$ и $w=w^\varepsilon\equiv(z^\varepsilon,z^\varepsilon_{x_1},\ldots,z^\varepsilon_{x_n})$, а z^ε - решение задачи Дирихле (2),(3) соответствующее управляющей матрице A^ε.

Согласно следствиям 2, 3 и следствию 1 из работы [4] паре $(A^\varepsilon,u^\varepsilon)$ соответствует единственная такая пара функций $(z^\varepsilon,y^\varepsilon)$.

Из леммы 1 следует существование такой последовательности $\{z^k\}_{k=1}^{\infty}\subset Z(\mathcal{M})$, что

$$z^k \to z^\varepsilon \ \text{в} \ C^1(\bar G) \ \text{при} \ k\to\infty . \qquad (30)$$

Согласно лемме 2 и следствиям 2 и 4 при достаточно больших индексах k существует, притом единственное, решение $y^k\in C(\bar T;\bar D\times R^m)$ уравнению (4) соответствующее функциям $w=w^k\equiv(z^k,z^k_{x_1},\ldots,z^k_{x_n})$ и $u=u^\varepsilon$. Из следствия 5 получаем, что

$$y^k \to y^\varepsilon \ \text{в} \ C(\bar T;R^{n+m}) \ \text{при} \ k\to\infty . \qquad (31)$$

Из того, что тройка $(y^\varepsilon,w^\varepsilon,u^\varepsilon)$ удовлетворяет ограничениям (10), на основе предельных соотношений (30),(31) и условий F4-F6 при помощи теоремы Егорова получаем для достаточно больших индексов k справедливость неравенств

$$I_i(y^k,w^k,u^\varepsilon) < 0 , \qquad i=\overline{1,s_1}$$

Так как тройка функций $(y^\varepsilon,w^\varepsilon,u^\varepsilon)$ удовлетворяет ограничениям (7), то справедливы равенства

$$I_i(y^k,w^k,u^\ell) = I_i(y^k,w^k,u^\ell) - I_i(y^\ell,w^\ell,u^\ell); \qquad i=\overline{s_1+1,s_2}$$

Поскольку правые части этих равенств при достаточно больших индексах k сколь угодно малы по модулю (это вновь следует из (1), (30),(31) и условий F4–F6 при помощи теоремы Егорова), то таковы же и левые части этих равенств.

Аналогичными рассуждениями показывается, что

$$\lim_{k\to\infty} I_0(y^k,w^k,u^\ell) = I_0(y^\ell,w^\ell,u^\ell).$$

Если теперь предположить, что

$$I_0^{2(\varepsilon)} \equiv I_0(y^\ell,w^\ell,u^\ell) \leqslant I_0^f - \delta ,$$

где δ – некоторое положительное число, то, учитывая вышесказанное, мы получили бы противоречие условию а) доказываемой теоремы. Значит $I_0^{2(\varepsilon)} \geqslant I_0^f$, и тем самым доказательство теоремы завершено.

В заключении отметим, что, используя теоремы 1–3 в качестве теоретической базы для расширения задач вида задачи 1, вопрос о выполнении условий в) или а) и б) из формулировок теорем 2 и 3, соответственно, остается открытым. Тем самым, справедливость этих условий необходимо исследовать для каждой конкретной задачи в отдельности, учитывая при этом ее существенные особенности.

В некоторых ситуациях на этот вопрос легче ответить после того, как найдены управления, доставляющие точную нижнюю грань функционалу I_0 в задаче 2. Существование по крайней мере одного такого управления гарантировано теоремой 1. Эти управления можно искать при помощи необходимых условий оптимальности, которые для задач рассматриваемого вида изложены в работах автора [7],[8].

Наконец отметим, что теоремы 2 и 3 можно обобщить и на тот случай, когда от множества управляющих функций $U \equiv L_\infty(T;Q)$ не требуется его выпуклости и замкнутости в пространстве $L_2(T;R^s)$ (т.е. не требуется выполнения условия F5). В этом случае в формулировках задач 2 и 2(ε) множество U следует заменить множеством $\overline{co}U$ – выпуклой, замкнутой оболочкой множества U в смысле сходимости его элементов по норме пространства $L_2(T;R^s)$.

Библиографический список

1. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.– М., 1973.

2. Вуцан Я.П. Вопросы существования решения для одного класса задач оптимального управления смешанными системами уравнений // Латв. матем. ежегодник. –1985.–Вып.29.–С.8 – 21.

3. Райтум У.Е. Вопросы существования решения в задачах оптимального управления старшими коэффициентами линейных эллиптических уравнений// Дифференц.уравнения. -1983.-Т.19,N°6.-С.1040-1047.
4. Цибулис А.Б. Разрешимость эллиптических уравнений с разрывными нелинейностями// Дифференц.уравн. -1986.-Т.22,N°8.-С.1435-1441.
5. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями.-М., 1977.
6. Треногин В.А. Функциональный анализ.-М., 1980.
7. Вуцан Я.П. Линеаризованный принцип минимума для одного класса задач оптимального управления смешанными системами дифференциальных уравнений// Латв.матем.ежегодник.-1988.-Вып.31.-С.20-33.
8. Вуцан Я.П. К одной задаче оптимального управления смешанной системой уравнений// Топологические структуры и их отображения: Сборн. научных трудов. -Рига, ЛГУ им.П.Стучки, 1987. С.34 - 46.

J.Vucans. Extension's questions for optimal control problems for mixted type differential equations' systems

Summary. This article concerns optimal control problems for the system, whose dynamics is described by Dirichlet problem for a linear elliptical second order partial differential equation and Cauchy problem for a system of ordinary differential equations, containing the solution of the elliptical equation as a functional parameter. The control parameters are included into the oldest coefficients of elliptical equation and into the right sides of ordinary differential equations, too. The optimal control does not generally exist in such problems. There are made extensions in the article for these optimal control problems. In these extensions there exists an optimal control and the lower bound of the minimized functional doesn't change. AMS Subject classification 49A99.

J.Vucāns. Paplašināšanas jautājumi jaukta veida diferenciālvienādojumu sistēmu optimālās vadības uzdevumos.

Anotācija. Rakstā aplūkoti optimālās vadības uzdevumi sistēmai, kuras dinamiku apraksta Dirihlē problēma otrās kārtas lineāram eliptiskam parciāldiferenciālvienādojumam un Koši problēma tādu parasto diferenciālvienādojumu sistēmai, kuri kā funkcionālu parametru ietver eliptiskā vienādojuma atrisinājumu. Vadības parametrus satur gan eliptiskā vienādojuma vecākie koeficienti, gan arī parasto diferenciālvienādojumu labās puses. Aprakstītā veida uzdevumiem optimālā vadība var arī neeksistēt. Rakstā aplūkotie optimālās vadības uzdevumi paplašināti tādā veidā, ka paplašinātajiem uzdevumiem eksistē optimālā vadība un paplašināšanas rezultātā minimizējamā funkcionāla apakšējais slieksnis nemainās. UDK 519.3.

Кафедра математического анализа
Латвийского университета
бульвар Райниса, 19
226050 г. Рига

Поступила 19.02.90.

Latvijas Universitātes Zinātniskie Raksti, 552. (1990)
Matemātika, I.

О ГИПЕРСФЕРИЧЕСКОМ ОТОБРАЖЕНИИ И ПРЕОБРАЗОВАНИИ ПЕТЕРСОНА ПОВЕРХНОСТИ $V_p \subset E_n$ С ПОМОЩЬЮ ОРТА СРЕДНЕЙ НОРМАЛИ

А.С.Грицанс

Аннотация. Изучается случай, когда гиперсферическое отображение $T: V_p \to V_p$ поверхности $V_p \subset E_n$ с помощью орта средней нормали имеет максимально возможный ранг p. Выделен случай, когда отображение T является преобразованием Петерсона. УДК 514.75.

I. Рассмотрим поверхность $V_p \subset E_n$ и отнесем ее к подвижному реперу $R = \{x, \vec{e}_i, \vec{e}_\alpha\}$ $(i,j,k = \overline{1,p}, \alpha,\beta = \overline{p+1,n})$, где точка x лежит на поверхности V_p, орты $\vec{e}_i$ лежат в касательном пространстве $T_p(x)$ к V_p в точке x, а $\vec{e}_\alpha$ образуют ортонормированный базис нормального пространства $N_{n-p}(x)$ поверхности V_p в точке x.

Деривационные формулы репера R имеют вид:

$$\begin{aligned} d\vec{x} &= \omega^i \vec{e}_i, \\ d\vec{e}_i &= \omega_i^j \vec{e}_j + \omega_i^\alpha \vec{e}_\alpha, \\ d\vec{e}_\alpha &= \omega_\alpha^i \vec{e}_i + \omega_\alpha^\beta \vec{e}_\beta. \end{aligned} \tag{1}$$

Продолжая систему уравнений $\omega^\alpha = 0$ поверхности V_p, получим:

$$\omega_i^\alpha = b_{ij}^\alpha \omega^j, \quad b_{ij}^\alpha = b_{ji}^\alpha \tag{2}$$

Дифференцируя внешним образом систему уравнений (2) и применяя лемму Картана, получим квадратичные уравнения:

$$\Delta b_{ij}^\alpha \wedge \omega^j = 0, \text{ где}$$

$$\Delta b_{ij}^\alpha = d b_{ij}^\alpha - b_{ik}^\alpha \omega_j^k - b_{kj}^\alpha \omega_i^k + b_{ij}^\beta \omega_\beta^\alpha, \quad \Delta b_{ij}^\alpha = b_{ijk}^\alpha \omega^k, \tag{3}$$

b_{ijk}^α - симметричны по всем нижним индексам.

Вектор $\vec{e}_0 = \vec{e}_{p+s+1}$ $(0 \leq s \leq p$, s - фиксировано$)$ направим параллельно вектору средней кривизны поверхности V_p [I]: $\vec{M} = \frac{1}{p}\gamma^{ij} b^{\alpha}_{ij}\, \vec{e}_{\alpha}$, который в силу предполагаемой неминимальности V_p - ненулевой. Тогда

$$\gamma^{ij} b^{\hat{\alpha}}_{ij} = 0 \;, \; \gamma^{ij} b^{0}_{ij} \neq 0 \tag{$*$}$$

Условимся во всех встречающихся формулах вместо индекса $p+s+1$ писать 0 . Употребляемые в работе индексы будут принимать следующие значения:

$\hat{i}, \hat{j} = 0,1,\dots,p$; $\hat{\alpha}, \hat{\beta} = p+1,\dots,p+s,p+s+2,\dots,n$; $i_1, j_1 = \overline{1,r}$; $i_2, j_2 = \overline{r+1,p}$;

$i_3, j_3 = \overline{1,k}$; $i_4, j_4 = \overline{k+1,p}$; $a, b = \overline{p+1,p+q}$; $\sigma, \tau = \overline{p+q+1,n}$; $\hat{a}, \hat{b} = \overline{p+2,p+q}$.

Средние нормали $(x, \vec{M})$ [I] поверхности V_p образуют $(p+1)$ - мерную линейчатую поверхность V_{p+1} , уравнение которой:

$$\vec{R} = \vec{x} + t\vec{e}_0 \tag{4}$$

Дифференцируя (4) , находим:

$$\begin{gathered} d\vec{R} = \Omega^{\hat{i}} \vec{E}_{\hat{i}} \,, \Omega^0 = dt \,, \Omega^i = \omega^i \,, \vec{E}_0 = \vec{e}_0 \,, \vec{E}_i = \vec{e}_i + t\vec{a}_i \,, d\vec{e}_0 = \vec{a}_i \omega^i , \\ \vec{a}_i = d_i^j \vec{e}_j + \vec{\xi}_i \,, d_i^j = -\gamma^{js} b^0_{si} \,, \vec{\xi}_i = \xi_i^{\hat{\alpha}} \vec{e}_{\hat{\alpha}} \,, \omega_0^{\hat{\alpha}} = \xi_k^{\hat{\alpha}} \omega^k , \\ \xi_k^{\hat{\alpha}} = \frac{\gamma^{ij} b^{\hat{\alpha}}_{ijk}}{\gamma^{ij} b^0_{ij}} \,, \bar{\gamma}_{ij} = \vec{a}_i \vec{a}_j \,, \bar{\gamma}^{jk} \bar{\gamma}_{ki} = \delta_i^j \,, \gamma_{ij} = \vec{e}_i \vec{e}_j \,, \gamma^{jk} \gamma_{ki} = \delta_i^j . \end{gathered} \tag{5}$$

В дальнейшем будем предполагать, что $\dim \mathfrak{N} = p$, где $\mathfrak{N} = [\vec{a}_i]$ - касательное направление гиперсферического изображения:

$$\bar{V}_p : \vec{\bar{x}} = \vec{e}_0 \tag{6}$$

поверхности V_{p+1} [2] . Заметим, что $\bar{V}_p$ есть образ поверхности V_p в гиперсферическом отображении $T : V_p \to \bar{V}_p$, построенном с помощью орта $\vec{e}_0$ средней нормали поверхности V_p , причем $T(x) = \bar{x}$. Так как $\dim \mathfrak{N} = p$, то индуцированное отображение $T_* : T_p \to \bar{T}_p$, $\bar{T}_p = \mathfrak{N}$, невырождено, причем

$$T_*(\vec{e}_i) = \vec{a}_i \tag{7}$$

Значит, ранг отображения T равен p , следовательно, T - диффеоморфизм [3] .

Пространство $\mathfrak{M}=[R,\vec{e}_0,\vec{E}_i,\vec{a}_j]$ называется касательным пространством вдоль образующей поверхности V_{p+1} и является наименьшим подпространством, содержащим все касательные плоскости поверхности V_{p+1} в точках одной образующей [2].

Площадка $\tilde{\Delta}_2(x)$, порождающая распределение $\tilde{\Delta}_2$, вдоль которого переносится параллельно в нормальной связности направление вектора средней кривизны, определяется системой уравнений:

$$\xi^{\hat{2}}_{k}\omega^{k}=0 \tag{8}$$

В [4] показано, что

$\dim \mathfrak{M}=p+s+1 \Leftrightarrow \dim\tilde{\Delta}_2=p-s$ т.е. $rang\|\xi^{\hat{2}}_{k}\|=s$

Рассмотрим на V_p распределение $\bar{\Delta}_2$, порожденное точкой x и направлением $[\vec{e}_i]\cap[\vec{a}_j]$. Из (5) вытекает следующая

<u>Теорема I.</u> Касательное пространство $\mathfrak{M}$ вдоль образующей поверхности V_{p+1} имеет размерность $2p-r+1$ $(0\le r\le p)$ тогда и только тогда, когда $\dim\bar{\Delta}_2=r$.

Из равенства $\dim\mathfrak{M}=p+s+1=2p-r+1$ заключаем, что $s=p-r$ т.е. распределения $\tilde{\Delta}_2$ и $\bar{\Delta}_2$ имеют одну и ту же размерность $r=p-s$.

В [4] доказано, что средние нормали описывают подповерхности нулевого внешнего параметра распределения [2] вдоль некоторой линии ℓ на поверхности V_p тогда и только тогда, когда касательный вектор к линии ℓ лежит в $\mathfrak{N}=[\vec{a}_i]$. Значит, $\bar{\Delta}_2$ определяет в общем случае неголономную $(r+1)$-мерную линейчатую подповерхность поверхности V_{p+1} нулевого внешнего параметра распределения [2].

2. Смешанный тензор d^j_i определяет на поверхности V_p поле симметрического аффинора $\mathfrak{D}$, собственные направления которого совпадают с главными направлениями относительно средней нормали [I], причем $\mathfrak{D}(\vec{e}_i)=d^j_i\vec{e}_j$.

Рассмотрим на V_p распределение $\bar{\Delta}$, направление которого лежит в $[\vec{e}_i]\cap[\vec{a}_i]$. Тогда на $\bar{V}_p$ можно рассмотреть распределение $\bar{\bar{\Delta}}$, направление которого совпадает с направлением распределения $\bar{\Delta}$. О таких распределениях $\bar{\Delta}$ и $\bar{\bar{\Delta}}$ будем говорить, что они параллельны и писать $\bar{\Delta}\parallel\bar{\bar{\Delta}}$. Если $T_2(\bar{\Delta})\parallel\bar{\Delta}$, то распределение $\bar{\Delta}$ будем называть инва-

риантным относительно гиперсферического отображения T.
Рассмотрим распределение $\overline{\overline{\Delta}}_\iota$ на поверхности $\overline{V}_p$, параллельное распределению $\overline{\Delta}_\iota$. Расположим векторы $\vec{e}_{i_1}$ в $\widetilde{\Delta}_\iota$, тогда из (5), (7), (8) получим $T_*(\vec{e}_{i_1}) = \vec{a}_{i_1}$, где $\vec{a}_{i_1} = d_{i_1}^{j} \vec{e}_j$ т.е. векторы $\vec{a}_{i_1}$ образуют базис распределения $\overline{\overline{\Delta}}_\tau$. Доказана

Теорема 2. Распределение $\overline{\overline{\Delta}}_\tau$ на поверхности $\overline{V}_p$ является образом распределения $\widetilde{\Delta}_\tau$ на поверхности V_p в индуцированном отображении T_* т.е. $\overline{\overline{\Delta}}_\tau = T_*(\widetilde{\Delta}_\tau)$.

Рассмотрим некоторое распределение Δ_κ на поверхности V_p, инвариантное относительно гиперсферического отображения T и векторы $\vec{e}_{i_3}$ расположим в Δ_κ. Тогда векторы $\vec{a}_{i_3}$ образуют базис распределения $T_*(\Delta_\kappa)$ на поверхности $\overline{V}_p$. Так как $T_*(\Delta_\kappa) \parallel \Delta_\kappa$, то из (5) имеем:

$$d_{i_3}^{i_4} = 0, \quad \xi_{i_3}^{\hat{i}} = 0 \tag{9}$$

Отсюда заключаем, что $\Delta_\kappa \subset \widetilde{\Delta}_\tau$ (и значит $\kappa \leq \tau$) и $\mathfrak{D}(\Delta_\kappa) \subset \Delta_\kappa$. Обратно, из последних двух включений вытекают формулы (9) т.е. $T_*(\Delta_\kappa) \parallel \Delta_\kappa$. Доказана следующая

Теорема 3. Распределение Δ_κ на поверхности V_p инвариантно относительно гиперсферического отображения T тогда и только тогда, когда оно является подраспределением распределения $\widetilde{\Delta}_\tau$ (и значит $\kappa \leq \tau$) и $\mathfrak{D}(\Delta_\kappa) \subset \Delta_\kappa$ т.е. распределение Δ_κ инвариантно относительно аффинора $\mathfrak{D}$.

Пусть отображение T имеет κ - мерное инвариантное распределение Δ_κ и векторы $\vec{e}_{i_3}$ расположим в $\Delta_\kappa \subset \widetilde{\Delta}_\tau$. Из условия $\mathfrak{D}(\Delta_\kappa) \subset \Delta_\kappa$ заключаем, что κ попарно ортогональных линий кривизны относительно средней нормали принадлежат распределению Δ_κ. Значит [4], средние нормали описывают развертывающиеся поверхности вдоль этих κ семейств линий. Обратно, если средние нормали описывают развертывающиеся поверхности вдоль κ попарно ортогональных линий кривизны относительно средней нормали, то κ - мерное распределение, натянутое на касательные направления этих линий, инвариантно относительно отображения T. Имеет место следующее

Следствие. Распределение Δ_κ $(\kappa \leq \tau)$ на поверхности V_p инвариантно относительно гиперсферического отображения T тогда и только тогда, когда вдоль κ попарно ортогональных линий кривизны относительно средней нормали, принадлежащих распределению $\Delta_к$, средние нормали описывают развертывающиеся поверхности.

3. Рассмотрим случай, когда отображение T имеет инвариантное распределение максимальной размерности p - касательную плоскость $T_p(x)$ поверхности V_p. В этом случае гиперсферическое отображение T является преобразованием Петерсона. Так называется отображение двух поверхностей, при котором в соответствующих точках поверхностей касательные плоскости параллельны [5]. Из формул (9) находим, что в этом случае

$$\xi^{\hat{i}}_{i} \equiv 0, \tag{10}$$

т.е. $\dim \mathfrak{M} = p+1$, а из следствия из теоремы 3 заключаем, что средние нормали описывают развертывающиеся поверхности вдоль сети σ_p линий кривизны относительно средней нормали. Доказана

Теорема 4. Следующие утверждения равносильны:

1. Гиперсферическое отображение T является преобразованием Петерсона.
2. $\dim \mathfrak{M} = p+1$
3. $\xi^{\hat{i}}_{i} = 0$
4. Средние нормали поверхности V_p описывают развертывающиеся поверхности вдоль сети σ_p линий кривизны относительно средней нормали.

Направим векторы $\vec{e}_i$ репера R по касательным к линиям сети σ_p линий кривизны относительно средней нормали, а векторы $\vec{e}_a$ расположим в главной нормали $N_1(x)$ [1] поверхности V_p в точке x. Полученный репер обозначим через R_1. В этом случае имеют место формулы:

$$\gamma^{\circ}_{ij} = 0 \ (i \neq j), \ b^{\circ}_{ij} = 0 \ (i \neq j), \ b^{\sigma}_{ij} \equiv 0 \tag{11}$$

Замечание 1. Если средние нормали описывают развертывающиеся поверхности вдоль сети σ_p, то $T_*(\vec{e}_i) \cdot \vec{a}_i \parallel \vec{e}_i$ [4]. Значит, сеть σ_p линий кривизны относительно средней нормали в отображении T переходит в ортогональную сеть $T(\sigma_p)$ на поверхности V_p.

Замечание 2. Если $\dim \mathfrak{M}=p+1$, то из определения пространства $\mathfrak{M}$ вытекает, что касательная плоскость к поверхности V_{p+1} в точках одной образующей одна и та же. Поэтому число параметров, от которых зависит многообразие касательных плоскостей $T_{p+1}(R)$ поверхности V_{p+1}, меньше $p+1$ т.е. поверхность V_{p+1} является тангенциально вырожденной.

Из формул (5), (10), находим:

$$\omega_0^{\hat{2}} \equiv 0 \tag{12}$$

Дифференцируя внешним образом тождества (12), получим равенства:

$$\gamma^{ks}(b^0_{si} b^{\hat{2}}_{kj} - b_{sj} b^{\hat{2}}_{ki}) = 0 \quad (i \neq j) \tag{13}$$

В репере R_1 равенства (13) примут вид:

$$b^{\hat{a}}_{ij}(b^0_{ii} - b^0_{jj}) = 0 \quad (i \neq j) \tag{14}$$

Если линии ω^i, $\omega^j (i \neq j$ фиксированы) имеют различные кривизны: $b^0_{ii} \neq b^0_{jj}$, то из (14) следует, что $b^{\hat{a}}_{ij} = 0$. Имея ввиду (11), заключаем, что b^a_{ij} т.е. направления $\vec{e}_i$, $\vec{e}_j$ сети σ_p линий кривизны относительно средней нормали сопряжены. В частном случае, когда все b^0_{ii} попарно различны, сеть σ_p является сетью линий кривизны.

Рассмотрим случай, когда все кривизны b^0_{ii} совпадают между собой и равны α. Заметим [4], что в репере R_1 имеем:

$$\vec{a}_i = -b^0_{ii} \vec{e}_i \tag{15}$$

Так как $\dim \mathfrak{N} = p$, то

$$b^0_{ii} = \alpha \neq 0 \tag{16}$$

Поверхность V_p называется псевдоомбилической [6], если

$$\vec{b}_{ij} \cdot \vec{M} = \lambda^* \gamma_{ij}, \tag{17}$$

где $\vec{b}_{ij} = b^a_{ij} \vec{e}_a$, $\vec{M} = m^0 \vec{e}_0$, $m^0 = \frac{1}{p} \gamma^{ij} b^0_{ij} \neq 0$.

Из формул (11), (17) заключаем, что условие псевдоомбиличности поверхности V_p можно записать ввиде:

$$b^0_{ii} = \lambda, \quad \lambda = \lambda^*/m^0 \tag{18}$$

Из сказанного выше вытекает

Теорема 5. Пусть отображение T является преобразованием Петерсона, тогда:

I. Если линии ω^i, ω^j ($i \neq j$ фиксированы) сети σ_p линий кривизны относительно средней нормали имеют различные кривизны $b^{\circ}_{ii} \neq b^{\circ}_{jj}$, то направления $\vec{e}_i$, $\vec{e}_j$ сети σ_p сопряжены.

2. Если для всех линий сети σ_p кривизны b°_{ii} совпадают и равны α, то поверхность V_p является псевдоомбилической.

4. Пусть $\dim M = p+1$ и $b^{\circ}_{ii} = \alpha \neq 0$, тогда квадратичные уравнения (3) при значении индекса $\alpha = p+s+1$ в репере R_1 в силу формул (II), (I2), (I6) примут вид: $d\alpha \wedge \omega^i = 0$, откуда

$$\alpha = const \neq 0. \tag{I9}$$

Так как

$$\vec{M} = \frac{1}{p} \sum_i b^{\circ}_{ii} \vec{e}_0 = \alpha \vec{e}_0,$$

то $|\vec{M}| = |\alpha| = const$, т.е. поверхность V_p имеет постоянную среднюю кривизну.

Рассмотрим точку y на средней нормали с радиус-вектором:

$$\vec{y} = \vec{x} + \frac{1}{\alpha} \vec{e}_0 \tag{20}$$

Дифференцируя (20) и имея ввиду формулы (I), (5), (I5), (I9), находим:

$$d\vec{y} = \omega^i \vec{e}_i + d\left(\frac{1}{\alpha}\right)\vec{e}_0 + \frac{1}{\alpha}\omega^i \vec{a}_i = \omega^i\left(\vec{e}_i - \frac{1}{\alpha}\alpha \vec{e}_i\right) = \vec{0}$$

т.е. средние нормали поверхности V_p проходят через неподвижную точку y с радиус-вектором (20).

Так как

$$|\vec{y} - \vec{x}| = \frac{1}{|\alpha|} = const,$$

то поверхность V_p лежит на гиперсфере с центром в точке y и радиусом $\frac{1}{|\alpha|}$.

Обратно, пусть средние нормали проходят через неподвижную точку y с радиус-вектором $\vec{y} = \vec{x} + \frac{1}{\beta}\vec{e}_0$. Значит, $d\vec{y} = \vec{0}$, откуда в силу (5) и линейной независимости векторов $\vec{e}_i$, $\vec{e}_{\hat{\alpha}}$, получим:

$$d\beta = 0, \quad 1 - \beta b^{\circ}_{ii} = 0, \quad \xi^{\hat{\alpha}}_k = 0 \tag{2I}$$

Из теоремы 4 и формул (I8), (2I) заключаем, что отображение T является преобразованием Петерсона, а поверхность V_p - псевдоомбилической. Справедлива

<u>Теорема 7.</u> Средние нормали поверхности V_p проходят через неподвижную точку тогда и только тогда, когда гиперсферическое отображение T является преобразованием Петерсона, а поверхность V_p - псевдоомбилической.

Имея ввиду результаты работы [7], теорема 7 равносильна следующей теореме:

<u>Теорема 7'.</u> Поверхность V_p лежит на гиперсфере с центром на средней нормали тогда и только тогда, когда гиперсферическое отображение T является преобразованием Петерсона, а поверхность V_p - псевдоомбилической.

5. Компоненты метрического тензора поверхности $\bar{V}_p$ имеют вид:

$$\bar{\gamma}_{ij}=0\ (i\neq j),\quad \bar{\gamma}_{ii}=\lambda^2,\quad \bar{\gamma}^{ij}=0\ (i\neq j),\quad \bar{\gamma}^{ii}=\frac{1}{\lambda^2}.$$

Векторы $\vec{e}_\alpha$ образуют ортонормированный базис нормального пространства $N_{n-p}(\bar{x})$ поверхности $\bar{V}_p$ в точке $\bar{x}=T(x)$. Асимптотические формы поверхности $\bar{V}_p$ имеют вид:

$$\bar{\varphi}^\alpha=-d\vec{\bar{e}}_0\, d\vec{e}_\alpha=\bar{b}^\alpha_{ij}\,\omega^i\omega^j,\quad \bar{b}^\alpha_{ij}=-\lambda b^\alpha_{ij}$$

Находим вектор средней кривизны поверхности $\bar{V}_p$:

$$\vec{M}(\bar{V}_p)=\frac{1}{p}\,\bar{\gamma}^{ij}\,\bar{b}^\alpha_{ij}\,\vec{e}_\alpha=-\frac{1}{p\lambda}\sum_i b^0_{ii}\,\vec{e}_0=-\vec{e}_0$$

Значит, поверхность $\bar{V}_p=T(V_p)$ имеет постоянную среднюю кривизну равную единице [7].

Так как

$$\bar{b}^0_{ij}=-\lambda b^0_{ij}=0\ (i\neq j),$$

то имея в виду замечание I, заключаем, что сеть $T(\sigma_p)$ является сетью линий кривизны относительно средней нормали поверхности $\bar{V}_p$. Имеет место

<u>Теорема 8.</u> Если гиперсферическое отображение T является преобразованием Петерсона, а поверхность V_p - псевдоомбилическая, тогда:

I. Сеть $\sigma_p \subset V_p$ линий кривизны относительно средней нормали поверхности V_p переходит в отображении T в сеть $T(\sigma_p)\subset\bar{V}_p$ линий кривизны относительно средней нормали поверхности $\bar{V}_p$.

2. Средние нормали поверхностей V_p и $\overline{V_p}$ параллельны в соответствующих точках x и $\bar{x} = T(x)$.

3. Поверхность $\overline{V_p}$ имеет постоянную среднюю кривизну равную единице [7].

6. Касательные векторы поверхности V_{p+1} есть $\vec{E}_i = h\vec{e}_i$ $(h = 1 - t\alpha)$, $\vec{E}_o = \vec{e}_o$. Если $t \neq \frac{1}{\alpha}$, то векторы $\vec{E}_i|_t$ – линейно независимы. В точке $t_o = \frac{1}{\alpha}$ векторы E_i обращаются в нуль, следовательно, точка t_o на образующей поверхности V_{p+1} с радиус-вектором (20) является единственной особой точкой поверхности V_{p+1}. В дальнейшем исключим эту точку из рассмотрения.

Контравариантные компоненты $G^{\hat{i}\hat{j}}$ метрического тензора $G_{\hat{i}\hat{j}} = \vec{E}_{\hat{i}}\vec{E}_{\hat{j}}$ поверхности V_{p+1} имеют вид:

$$G^{oo} = 1, \quad G^{\hat{i}\hat{j}} = 0 \ (\hat{i} \neq \hat{j}), \quad G^{ii} = \frac{1}{h^2} \tag{22}$$

Векторы $\vec{e}_{\hat{\alpha}}$ образуют базис нормального пространства $N_{n-p-1}(R)$ поверхности V_{p+1}. Находим асимптотические формы поверхности V_{p+1}:

$$\phi^{\hat{\alpha}} = -d\vec{R}\,d\vec{e}_{\hat{\alpha}} = B^{\hat{\alpha}}_{ij}\omega^i\omega^j, \quad B^{\hat{\alpha}}_{ij} = h\,b^{\hat{\alpha}}_{ij} \tag{23}$$

Значит

$$B^{\hat{\alpha}}_{oo} = B^{\hat{\alpha}}_{oi} = B^{\hat{\alpha}}_{io} = 0 \tag{24}$$

Имея ввиду формулы (*), (II), (22), (23), (24), находим вектор средней кривизны поверхности V_{p+1}:

$$\vec{M}(V_{p+1}) = \frac{1}{p+1} G^{\hat{i}\hat{j}} B^{\hat{\alpha}}_{\hat{i}\hat{j}} \vec{e}_{\hat{\alpha}} = \frac{1}{(p+1)h} \sum_i b^{\hat{\alpha}}_{ii} \vec{e}_{\hat{\alpha}} = \vec{0}$$

т.е. поверхность V_{p+1} минимальна. Доказана

<u>Теорема 9</u>. Если гиперсферическое отображение

$$T: V_p \to \overline{V_p}$$

является преобразованием Петерсона, а поверхность V_p – псевдоцилической, то линейчатая поверхность V_{p+1} минимальна и, следовательно [8], допускает однопараметрическое семейство p – мерных подповерхностей

$$\hat{V}_p^t: \vec{y}^t = \vec{x} + t\vec{e}_o, \quad t = const,$$

имеющих общее семейство средних нормалей с поверхностью $V_p \cdot \hat{V}_p^o$.

Библиографический список

I. Базылев В.Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве// Литовский матем. сборник. 1966. - Т.6. - №4. - С.15-31.
2. Лумисте Ю.Г. Многомерные линейчатые поверхности евклидова пространства// Матем. сборник. - М.,1961. - Т.55.- С.97. Вып.4. - С.411-420.
3. Базылев В.Т. Материалы по геометрии. М., 1978.
4. Грицанс А.С. К геометрии семейства средних нормалей поверхности $V_p \subset E_n$// Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат.сб.науч.тр./Калинингр.ун-т.Калининград, 1989. - Вып.20. В печати.
5. Рыжков В.В. Метрическое тангенциальное изгибание поверхностей//Докл.АН СССР. 1956.-Т.III.-№4.-С.763-765.
6. Лумисте Ю.Г., Чакмазян А.В. Нормальная связность и подмногообразия с параллельными нормальными полями в пространстве постоянной кривизны//Проблемы геометрии/ВИНИТИ. М.,1981. - Т.12. - С.3-30.
7. Силаев Е.В. Геометрия поверхности, лежащей на гиперсфере// Диссертация на соискание уч. степени канд. физ.-мат. наук.- М.,1984.
8. Грицанс А.С. О Γ - поверхностях в E_n с общим семейством средних нормалей//Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр./ Калинингр.ун-т. - Калининград,1987. - Вып.18.- С.25-27.

A.Gricans. On a hyperspheric mapping and Peterson transformation of the surface $V_p \subset E_n$ by means of medial normal ort.

Summary. The case when a hyperspheric mapping $T : V_p \rightarrow \overline{V}_p$ of the surface $V_p \subset E_n$ by means of the medial normal ort has the maximal possible rank p is considered. The special case when T is Peterson transformation is studied. AMS Subject Classification 53A05.

Даугавпилсский педагогический институт
Даугавпилс
ЛАТВИЙСКАЯ РЕСПУБЛИКА

СОДЕРЖАНИЕ

SATURA RĀDĪTĀJS