LATVIJAS UNIVERSITĀTES
ZINĀTNISKIE RAKSTI

ACTA UNIVERSITATIS LATVIENSIS

593

M A T E M Ā T I K A

DIFERENCIĀLVIENĀDOJUMI

LATVIJAS UNIVERSITĀTE

MATEMĀTIKA
DIFERENCIĀLVIENĀDOJUMI
Zinātniskie raksti

МАТЕМАТИКА
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
Научные труды

MATHEMATICS
DIFFERENTIAL EQUATIONS
Proceedings

Vol.593

Latvijas Universitāte
Rīga 1994

MATEMĀTIKA. DIFERENCIĀLVIENĀDOJUMI

Matemātika. Diferenciālvienādojumi: Zinātniskie raksti/ Atb. red. J.Klokovs.- 593.sējums.- Rīga: LU, 1994.- 99 lpp.

Rakstu krājums satur zinātniskos rakstus, kuri veltīti parasto diferenciālvienādojumu teorijai. Pētīti jautājumi par diferenciālvienādojumu atrisinājumu eksistenci un īpašībām. Daži raksti veltīti konkrēto problēmu izpētes metodēm.

Rakstu krājums paredzēts zinātniekiem, pasniedzējiem un studentiem, kuri nodarbojas ar parasto diferenciālvienādojumu un to atrisinājumu pētīšanu.

MATHEMATICS. DIFFERENTIAL EQUATIONS

The collection contains articles on the qualitative theory of ordinary differential equations. The problems of existence of solutions as well as their properties are investigated. Several articles are devoted to developing of methodes of investigation of applied problems.

The collection is destined for researchers and students in the field.

МАТЕМАТИКА. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Сборник содержит научные статьи по качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Исследуются вопросы существования решений, изучаются их свойства. Ряд статей посвящен разработке методов исследования конкретных практических задач.

Сборник предназначен для научных сотрудников, преподавателей и студентов, которые занимаются исследованиями в области обыкновенных дифференциальных уравнений.

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

А.Я.Лепин

Аннотация. Доказана разрешимость краевой задачи

$$x''=f(t,x,x'),\quad H_1x=h_1,\quad H_2x=h_2,$$
$$\alpha\le x\le\beta,\quad \alpha'(a)\le x'(a)\le\beta'(a)$$

при наличии условия Шредера.

УДК 517.927

Рассмотрим краевую задачу:

$$x''=f(t,x,x'),\quad H_1x=h_1,\quad H_2x=h_2,$$
$$\alpha\le x\le\beta,\quad \alpha'(a)\le x'(a)\le\beta'(a), \tag{1}$$

где $f\in\mathrm{Car}(I\times\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$; $I=[a,b]$; $a\in\mathbb{R}$; $b\in(a,\infty)$; $H_{1,2}\in C(S(I,\mathbb{R}),\mathbb{R})$; $S(I,\mathbb{R})$ – множество решений $x:I\to\mathbb{R}$ уравнения $x''=f(t,x,x')$ с топологией на $C(I,\mathbb{R})$; $h_{1,2}\in\mathbb{R}$, $\alpha\in A(I,\mathbb{R})$ и $\beta\in B(I,\mathbb{R})$. (Обозначения см. в [4,5]). В работе [1] был изложен подход к обобщению базовых теорем работы [4]. Наша цель – получить обобщение аналога теоремы 15 работы [1] при наличии условия Шредера: для любых $t_1\in[a,b)$, $t_2\in(t_1,b]$ и любого решения $x:(t_1,t_2)\to\mathbb{R}$ уравнения $x''=f(t,x,x')$ из $\alpha(t)\le x(t)\le\beta(t)$, $t\in(t_1,t_2)$ следует $\sup\left\{|x'(t)|:\ t\in(t_1,t_2)\right\}<\infty$. Условие Шредера позволяет считать, что $|f(t,x,x')|\le g(t)$, $t\in I$, $x,x'\in\mathbb{R}$, гду $g\in L(I,\mathbb{R})$.

Нам потребуются следующие леммы, доказательство которых аналогично доказательству соответствующих мест в работах [2,3].

Лемма 1. Пусть $y,z\in S(I,\mathbb{R})$, $y\le z$, $y'(a)\ge z'(a)$, y_1 – минимальное, а z_1 – максимальное решение краевой задачи

$$x''=f(t,x,x'),\quad x'(a)=y'(a),\quad x(b)=z(b),\quad y\le x\le z,$$

$y_1\ne z_1$, $\lambda_1\in\mathbb{R}$ и $\lambda_2\in(\lambda_1,\infty)$. Тогда существует инъективное непрерывное отображение $s:[\lambda_1,\lambda_2]\to S(I,\mathbb{R})$ со следующими свойствами: $s_{\lambda_1}=y_1$, $s'_\lambda(a)=y'(a)\ \wedge\ s_\lambda\le z_1$ или $s_\lambda(b)=z(b)\ \wedge\ s'_\lambda(a)\le$

$\le y'(a) \wedge y_1 \le s_\lambda$ для $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$ и $s_{\lambda_2} = z_1$.

Лемма 2. Пусть $y, z \in S(I, \mathbb{R})$, $y < z$, y_1 - минимальное, а z_1 - максимальное решение краевой задачи

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x(a) = y(a), \quad x(b) = z(b), \quad y \le x \le z,$$

$y_1 \ne z_1$, $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ и $\lambda_2 \in (\lambda_1, \infty)$. Тогда существует инъективное непрерывное отображение $s: [\lambda_1, \lambda_2] \to S(I, \mathbb{R})$ со следующими свойствами: $s_{\lambda_1} = y_1$, $s_\lambda(a) = y(a) \wedge s_\lambda \le z_1$ или $s_\lambda(b) = z(b) \wedge y_1 \le s_\lambda(a)$ для $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$ и $s_{\lambda_2} = z_1$.

Теорема. Пусть $\alpha \le \beta$, $\alpha'(a) < \beta'(a)$, краевые задачи

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x'(a) = \beta'(a), \quad x(b) = \alpha(b), \quad \alpha \le x \le \beta,$$

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x'(a) = \alpha'(a), \quad x(b) = \beta(b), \quad \alpha \le x \le \beta$$

не имеют решения, выполняется условие Шредера, и для любого $x \in S(I, \mathbb{R})$ из $\alpha \le x \le \beta$ следует

$$x(a) = \alpha(a) \wedge x(b) = \alpha(b) \Rightarrow H_1 x + H_2 x \le h_1 + h_2,$$

$$\Big(x'(a) = \beta'(a) \vee (x'(a) < \beta'(a) \wedge (x(a) = \alpha(a) \vee x(b) = \beta(b)))\Big) \wedge$$

$$\wedge\ H_1 x + H_2 x = h_1 + h_2 \Rightarrow H_1 x \le h_1,$$

$$x(a) = \beta(a) \wedge x(b) = \beta(b) \Rightarrow H_1 x + H_2 x \ge h_1 + h_2,$$

$$\Big(x'(a) = \alpha'(a) \vee (x'(a) > \alpha'(a) \wedge (x(a) = \beta(a) \vee x(b) = \alpha(b)))\Big) \wedge$$

$$\wedge\ H_1 x + H_2 x = h_1 + h_2 \Rightarrow H_1 x \ge h_1.$$

Тогда существует решение краевой задачи (1).

Доказательство. Предварительно докажем теорему при следующих дополнительных условиях: $\alpha < \beta$ и для любых $\tau \in I$, $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ единственно решение задачи Коши

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x(\tau) = x_0, \quad x'(\tau) = x_1. \tag{2}$$

Пусть y - максимальное решение краевой задачи

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x(a) = \alpha(a), \quad x(b) = \alpha(b), \quad \alpha \le x \le \beta,$$

а z - минимальное решение краевой задачи

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x(a) = \beta(a), \quad x(b) = \beta(b), \quad y \le x \le \beta,$$

$L_\varphi = (\cos\varphi, \sin\varphi)$, $L = \Big\{L_\varphi\colon \varphi \in [0, 2\pi]\Big\}$. Из определения y, z и условий теоремы имеем $\alpha'(a) \le y'(a) < \beta'(a)$ и $\alpha'(a) < z'(a) \le \beta'(a)$. Построим инъективное непрерывное отображение $\Phi: L \to S(I, \mathbb{R})$ со следующими свойствами. Для $x_\varphi = \Phi(L_\varphi)$ $y \le x_\varphi \le z$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $x_0 = y$, $x'_\varphi(a) = \beta'(a)$ или $\alpha'(a) < x'_\varphi(a) < \beta'(a) \wedge (x_\varphi(a) = \alpha(a) \vee x_\varphi(b) = \beta(b))$ для $\varphi \in (0, \pi)$,

$x_\pi=z$ и $x'_\varphi(a)=\alpha'(a)$ или $\alpha'(a)<x'_\varphi(a)<\beta'(a)$ $\wedge$ $(x_\varphi(a)=\beta(a)$ $\vee$ $x_\varphi(b)=\alpha(b))$ для $\varphi\in(\pi,2\pi)$. Пусть $K\subset\mathbb{R}^2$ лежит внутри простой замкнутой кривой $L_*=\left\{(x_\varphi(a),x'_\varphi(a)):\ \varphi\in[0,2\pi]\right\}$. Тогда для $\tau=a$ и любых $(x_0,x_1)\in K$ решение x задачи Коши (2) удовлетворяет условиям $y\le x\le z$ и $\alpha'(a)\le x'(a)\le\beta'(a)$.

Пусть y_1 – минимальное, а y_2 – максимальное решение краевой задачи

$$x''=f(t,x,x'),\quad x(a)=\alpha(a),\quad x(b)=\beta(b),\quad y\le x\le z.$$

Обозначим через ρ_λ, σ_μ, τ_ν решения задач Коши

$$x''=f(t,x,x'),\quad x(a)=\alpha(a),\quad x'(a)=\lambda,$$

$$x''=f(t,x,x'),\quad x(b)=\beta(b),\quad x'(b)=\mu,$$

$$x''=f(t,x,x'),\quad x(a)=\nu,\quad x'(a)=\beta'(a).$$

Построим отображение $u:[0,\lambda_*]\to S(I,\mathbb{R})$ со следующими свойствами: $u_0=y$, $u'_\lambda(a)=\beta'(a)$ или $\alpha'(a)<u'_\lambda(a)<\beta'(a)$ $\wedge$ $(u_\lambda(a)=\alpha(a)$ $\vee$ $u_\lambda(b)=\beta(b))$ для $\lambda\in(0,\lambda_*)$, $u_{\lambda_*}=z$ и $y\le u_\lambda\le z$ для $\lambda\in[0,\lambda_*]$.

Рассмотрим случай, когда $\beta'(a)\le y'_1(a)$. Пусть $y_3=\rho_{\beta'(a)}$, $\lambda_1=1$, $\mu_1(\lambda)=y'(a)+\lambda(y'_3(a)-y'(a))$, $u_\lambda=\rho_{\mu_1(\lambda)}$ для $\lambda\in[0,\lambda_1]$, $\mu_2(\lambda)=\alpha(a)+$ $+(\lambda-\lambda_1)(\beta(a)-\alpha(a))$, $\lambda_2=\sup\left\{\lambda_0\in[\lambda_1,\lambda_1+1]:(\forall\lambda\in[\lambda_1,\lambda_0])(\dot{\tau}_{\mu_2(\lambda)}\le z\right\}$, $y_4=\tau_{\mu_2(\lambda_2)}$, $u_\lambda=\tau_{\mu_2(\lambda)}$ для $\lambda\in[\lambda_1,\lambda_2]$, y_5 – максимальное решение краевой задачи

$$x''=f(t,x,x'),\quad x'(a)=\beta'(a),\quad x(b)=\beta(b),\quad y_4\le x\le z,\tag{3}$$

если $y_4=y_5$, то $\lambda_3=\lambda_2$, если $y_4\ne y_5$, то $\lambda_3=\lambda_2+1$ и $u_\lambda=s_\lambda$ для $\lambda\in[\lambda_2,\lambda_3]$, где s_λ находится по лемме 1 и удовлетворяет условиям $s_{\lambda_2}=y_4$ и $s_{\lambda_3}=y_5$, если $y_5=z$, то $\lambda_*=\lambda_3$, если $y_5\ne z$, то $\lambda_*=\lambda_3+1$, $\mu_3(\lambda)=y'_5(b)+(\lambda-\lambda_3)(z'(b)-y'_5(b))$, $u_\lambda=\sigma_{\mu_3(\lambda)}$ для $\lambda\in[\lambda_3,\lambda_*]$.

Рассмотрим случай, когда $y'_1(a)<\beta'(a)$. Пусть $\mu_4(\lambda)=y'(a)+$ $+\lambda(y'_1(a)-y'(a))$, $u_\lambda=\rho_{\mu_4(\lambda)}$ для $\lambda\in[0,1]$, s_λ для $\lambda\in[1,2]$ находится по лемме 2 и удовлетворяет условиям $s_1=y_1$ и $s_2=y_2$, если найдется $\lambda_1\in(1,2]$ такое, что $s'_{\lambda_1}(a)=\beta'(a)$, $s'_\lambda(a)<\beta'(a)$ для $\lambda\in(1,\lambda_1)$ и $s_{\lambda_1}(a)=\alpha(a)$, то $y_3=s_{\lambda_1}$, $u_\lambda=s_\lambda$ для $\lambda\in[1,\lambda_1]$ и дальнейшее построение совпадает со случаем, когда $\beta'(a)\le y'_1(a)$, если найдется $\lambda_1\in(1,2]$ такое, что $s'_{\lambda_1}(a)=\beta'(a)$, $s'_\lambda(a)<\beta'(a)$ для

$\lambda\in(1,\lambda_1)$ и $s_{\lambda_1}(a)=\beta(b)$, то $u_\lambda=s_\lambda$, $\lambda\in[1,\lambda_1]$, $\lambda_1=\lambda_2$, $y_4=u_{\lambda_1}$ и y_5 - максимальное решение краевой задачи (3), и дальнейшее построение u_λ совпадает со случаем, когда $\beta'(a)\le y_1'(a)$, если $s_\lambda'(a)<\beta'(a)$ для $\lambda\in[1,2]$, то $u_\lambda=s_\lambda$ для $\lambda\in[1,2]$, $\mu_5(\lambda)=u_2'(b)+$ $+(\lambda-2)(z'(b)-u_2'(b))$, $\lambda_1\in[2,3]$ находится из условий $\sigma'_{\mu_5(\lambda_1)}(a)=\beta'(a)$ для $\lambda\in(2,\lambda_1)$, $u_\lambda=\sigma_{\mu_5(\lambda)}$ для $\lambda\in[2,\lambda_1]$, и дальнейшее построение u_λ совпадает с предыдущим случаем. Неравенства $y\le u_\lambda\le z$ и $\alpha'(a)<u_\lambda'(a)\le\beta'(a)$, $\lambda\in(0,\lambda_*)$ следуют из построения u_λ.

Пусть $\Phi(L_\varphi)=u_{\lambda_*\pi^{-1}\varphi}$ для $\varphi\in[0,\pi]$. Для $\varphi\in[\pi,2\pi]$ построение Φ проводится аналогично. Инъективность $\Phi_\varphi=\Phi(L_\varphi)$ для интервалов $[0,\pi]$ и $[\pi,2\pi]$ следует из построения. Для любых $\varphi_1\in[0,\pi]$ и $\varphi_2\in[\pi,2\pi]$ из $\Phi_{\varphi_1}=\Phi_{\varphi_2}$ и свойств Φ следует $\varphi_1=0$, $\varphi_2=2\pi$ или $\varphi_1=\varphi_2=$ $=\pi$. Непрерывность Φ очевидна из построения. Из построения и доказанных условий для Φ следует, что $\alpha'(a)\le x_\varphi'(a)\le\beta'(a)$ и $y\le x_\varphi\le z$ для $\varphi\in[0,2\pi]$. Поэтому для любой точки (x_0,x_1), лежащей внутри L_*, решение x задачи Коши (2) при $\tau=a$ удовлетворяет неравенствам $\alpha'(a)\le x'(a)\le\beta'(a)$.

Покажем, что $y\le x\le z$. Предположим противное. Рассмотрим случай, когда найдется $t_0\in I$ такое, что $z(t_0)<x(t_0)$. Множество

$$\Big\{(y(a),y'(a)):\ y\in S(I,\mathbb{R})\ \wedge\ x(t_0)\le y(t_0)\Big\} = M$$

неограниченно и связно. Следовательно, $L_*\cap M\ne\varnothing$. Пусть $(y_0,y_1)\in L_*\cap M$. Тогда для решения s задачи Коши (2) при $\tau=a$, $x_0=y_0$ и $x_1=y_1$ имеем $z(t_0)<x(t_0)\le s(t_0)$, что противоречит неравенству $s\le z$.

Для $r=(x_0,x_1)\in\mathbb{R}^2$ обозначим через x_r решение задачи Коши (2) при $\tau=a$. Если в некоторой точке L_* векторное поле

$$H_r=(H_1x_r-h_1,H_2x_r-h_2)$$

обращается в нуль, то существует решение краевой задачи (1). Пусть векторное поле H на L_* не обращается в нуль. Покажем, что вращение векторного поля H на L_* отлично от нуля, что гарантирует существование решения краевой задачи (1).

Из условий теоремы и свойств Φ следует, что Hx_0 лежит ниже биссектрисы 2-го, 4-го квадрантов, при $\varphi\in(0,\pi)$ Hx_φ не сонаправлен $(1,-1)$, Hx_{π} лежит выше биссектрисы 2-го, 4-го квадрантов, при $\varphi\in(\pi,2\pi)$ Hx_{φ} не сонаправлен $(-1,1)$. Отсюда следует отличие от нуля вращения векторного поля.

Перейдем к доказательству теоремы в общем случае. Пусть $\delta(x,y,z)=(x+|x-y|-|y-z|+z)\cdot 2^{-1}$. Из условия Шредера следует существование $M\in(0,\infty)$ такого, что для

$$f_{*}(t,x,x')=f(t,\delta(\alpha(t),x,\beta(t)),\delta(-M,x',M))$$

$$\alpha\in A_{f_{*}}(I,\mathbb{R}),\qquad \beta\in B_{f_{*}}(I,\mathbb{R})$$

$$\text{и } \left\{x\in S_{f}(I,\mathbb{R}):\ \alpha\le x\le\beta\right\}=\left\{x\in S_{f_{*}}(I,\mathbb{R}):\ \alpha\le x\le\beta\right\}.$$

В дальнейшем будем считать, что $f=f_{*}$. Пусть $\beta_k=\beta+k^{-1}$, $k\in\mathbb{N}$. Тогда $\beta_k\in B_f(I,\mathbb{R})$ и $\alpha<\beta_k$, $k\in\mathbb{N}$. Теперь аппроксимируем правую часть так, чтобы была единственность решения задачи Коши. Пусть для $k\in\mathbb{N}$, $m\in\{4k,4k+1,\dots\}$, $n\in\{m,m+1,\dots\}$, $t\in I$, $x,y,z\in\mathbb{R}$

$$\varphi(z)=2^{-1}|z-2|-|z-1|+|z+1|-2^{-1}|z+2|,$$

$$\psi(z)=2^{-1}(|z-2|-|z-1|-|z+1|+|z+2|),$$

$$\varphi_m(z)=m^{-1}\varphi(mz),\qquad \psi_m(z)=\psi(mz),$$

$$f_{km}(t,x,y)=f(t,x-\varphi_m(x-\alpha(t))\psi_m(y-\alpha'(t))-$$
$$-\varphi_m(x-\beta_k(t))\psi_m(y-\beta'(t)),y-\varphi_m(y-\alpha'(t))\psi_m(x-\alpha(t))-$$
$$-\varphi_m(y-\beta'(t))\psi_m(x-\beta_k(t))),$$

$$f_{kmn}(t,x,y)=(2n)^{-2}\int_{x-1/n}^{x+1/n}\int_{y-1/n}^{y+1/n} f_{km}(t,u,v)\,du\,dv.$$

При фиксированном $t\in I$ функция f_{km} отличается от f только в $2m^{-1}$ окрестностях точек $(\alpha(t),\alpha'(t))$, $(\beta_k(t),\beta'(t))$, равна $f(t,\alpha(t),\alpha'(t))$ в m^{-1} окрестности точки $(\alpha(t),\alpha'(t))$ и $f(t,\beta_k(t),\beta'(t))$ в m^{-1} окрестности точки $(\beta_k(t),\beta'(t))$. Функция f_{kmn} удовлетворяет обобщенному условию Липшица по второму и третьему аргументам, $\alpha\in A_{f_{kmn}}(I,\mathbb{R})$ и $\beta_k\in B_{f_{kmn}}(I,\mathbb{R})$.

Рассмотрим случай, когда найдется $k_0\in\mathbb{N}$ такое, что для $k\in\{k_0,k_0+1,\dots\}$, $m\in\{4k,4k+1,\dots\}$ и $n\in\{m,m+1,\dots\}$ выполняются условия: краевые задачи

$$x''=f_{kmn}(t,x,x'),\quad x'(a)=\beta'(a),\quad x(b)=\alpha(b),\quad \alpha\le x\le\beta_k,$$
$$x''=f_{kmn}(t,x,x'),\quad x'(a)=\alpha'(a),\quad x(b)=\beta_k(b),\quad \alpha\le x\le\beta_k$$

не имеют решения, и для любого $x \in S_{f_{kmn}}(I,\mathbb{R})$ из $\alpha \le x \le \beta_k$ следует

$$x(a)=\alpha(a) \wedge x(b)=\alpha(b) \Rightarrow H_1x+H_2x \le h_1+h_2,$$

$$\Big(x'(a)=\beta'(a) \vee (x'(a)<\beta'(a) \wedge (x(a)=\alpha(a) \vee x(b)=\beta_k(b)))\Big) \wedge$$

$$\wedge\ H_1x+H_2x=h_1+h_2 \Rightarrow H_1x \le h_1, \tag{4}$$

$$x(a)=\beta_k(a) \wedge x(b)=\beta_k(b) \Rightarrow H_1x+H_2x \ge h_1+h_2,$$

$$\Big(x'(a)=\alpha'(a) \vee (x'(a)>\alpha'(a) \wedge (x(a)=\beta_k(a) \vee x(b)=\alpha(b)))\Big) \wedge$$

$$\wedge\ H_1x+H_2x=h_1+h_2 \Rightarrow H_1x \ge h_1.$$

Тогда по уже доказанному существует решение x_{kmn} краевой задачи

$$x''=f_{kmn}(t,x,x'), \quad H_1x=h_1, \quad H_2x=h_2,$$
$$\alpha \le x \le \beta_k, \quad \alpha'(a) \le x'(a) \le \beta'(a).$$

Из x_{kmn} можно выделить сходящуюся последовательность $x_i \to x \in S(I,\mathbb{R})$ такую, что $\alpha \le x \le \beta$, $H_1x=h_1$, $H_2x=h_2$ и $\alpha'(a) \le x'(a) \le \beta'(a)$.

Рассмотрим случай, когда найдется последовательность $x_i \in S_{f_{k_i m_i n_i}}(I,\mathbb{R})$, $i=1,2,\ldots$, такая, что $k_i \to \infty$, $4k_i \le m_i \le n_i$, $\alpha \le x_i \le \beta_{k_i}$, $i=1,2,\ldots$, и $x_i \to x \in S(I,\mathbb{R})$, для которой не выполняются условия (4). Без ограничения общности можно считать, что нарушается одно из условий (4). Если $x_i(a)=\alpha(a)$, $x_i(b)=\alpha(b)$ и $H_1x_i+H_2x_i>h_1+h_2$ для $i=1,2,\ldots$, то x – решение краевой задачи (1). Действительно, $x(a)=\alpha(a)$, $x(b)=\alpha(b)$, $H_1x+H_2x \ge h_1+h_2$ и $\alpha'(a) \le x'(a) < \beta'(a)$. Из условий теоремы следует $H_1x+H_2x \le h_1+h_2$. Следовательно, $H_1x+H_2x=h_1+h_2$. Из условий теоремы имеем $H_1x \le h_1$ и $H_1x \ge h_1$. Следовательно, $H_1x=h_1$ и $H_2x=h_2$. Аналогично доказывается, что если $x_i(a)=\beta_{k_i}(a)$, $x_i(b)=\beta_{k_i}(b)$, $H_1x_i+H_2x_i<h_1+h_2$ для $i=1,2,\ldots$, то x – решение краевой задачи (1). Если

$$\Big(x_i'(a)=\beta'(a) \vee \Big(x_i'(a)<\beta'(a) \wedge (x_i(a)=\alpha(a) \vee x_i(b)=\beta_{k_i}(b))\Big)\Big) \wedge$$

$$\wedge\ H_1x_i+H_2x_i=h_1+h_2 \wedge H_1x_i>h_1, \quad i=1,2,\ldots,$$

то x – решение краевой задачи (1). Действительно,

$$\Big(x'(a)=\beta'(a) \vee \Big(x'(a)<\beta'(a) \wedge (x_i(a)=\alpha(a) \vee x(b)=\beta(b))\Big)\Big) \wedge$$

$$\wedge\ H_1x+H_2x=h_1+h_2\ \wedge\ H_1x_i\geq h_1.$$

Из условий теоремы имеем $H_1x\leq h$. Следовательно, $H_1x=h_1$ и $H_2x=h_2$. Докажем неравенства $\alpha'(a)\leq x'(a)\leq\beta'(a)$. Если $x'(a)=\beta'(a)$, то это очевидно. Если $x'(a)<\beta'(a)$ и $x(a)=\alpha(a)$, то $\alpha'(a)\leq x'(a)$. Если $x'(a)<\beta'(a)$ и $x(b)=\beta(b)$, то $\alpha'(a)<x'(a)$ следует из условий теоремы. Аналогично доказывается, что если

$$\left(x_i'(a)=\alpha'(a)\ \vee\ \left(x_i'(a)>\alpha'(a)\ \wedge\ (x_i(a)=\beta_{k_i}(a)\ \vee\ x_i(b)=\alpha(b))\right)\right)\ \wedge$$

$$\wedge\ H_1x_i+H_2x_i=h_1+h_2\ \wedge\ H_1x_i<h_1,\qquad i=1,2,\dots,$$

то x - решение краевой задачи (1).

Литература

1. Лепин А.Я. Разрешимость краевых задач для уравнения второго порядка // Актуальные вопросы краевых задач: Теория и приложения. - Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1988. - С.69-78.
2. Лепин А.Я. Разрешимость некоторых краевых задач для уравнения второго порядка // Латв.мат.ежегодник. - Рига: Зинатне, 1989. - Вып.28. - С.39-46.
3. Лепин А.Я., Лепин Л.А. Обобщенная разрешимость одной двухточечной краевой задачи // Латв.мат.ежегодник. - Рига: Зинатне, 1986. - Вып.30. - С.63-68.
4. Лепин А.Я., Лепин Л.А. Краевые задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. - Рига: Зинатне, 1988. - 211 с.
5. Лепин Л.А. Обобщенные решения и разрешимость краевых задач для дифференциального уравнения второго порядка // Дифференц.уравнения. - 1982. - Т.18, N 8. - С.1323-1330.

A.Lepin. On the solvability of one boundary value problem.
Summary. The solvability of boundary value problem

$$x''=f(t,x,x'),\quad H_1x=h_1,\quad H_2x=h_2,$$
$$\alpha\leq x\leq\beta,\quad \alpha'(a)\leq x'(a)\leq\beta'(a)$$

under the assumption of Schrader condition is proved.
MSC 34B15

A.Lepins. Par kādas robežproblēmas atrisināmibu.
Anotācija. Pierādīta robežproblēmas

$$x''=f(t,x,x'),\quad H_1x=h_1,\quad H_2x=h_2,$$

$$\alpha \le x \le \beta, \quad \alpha'(a) \le x'(a) \le \beta'(a)$$

atrisināmība, ja izpildās Šredera nosacījumi.

Институт математики и информатики
Латвийского университета
Рига, б.Райня, 29

Поступила 16.09.93

О РЯДАХ ЧЕБЫШЕВА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ БЕСКОНЕЧНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ НЕАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Ю.А.Клоков, А.Я.Шкерстена

Аннотация. *В работе изложен один метод практического нахождения коэффициентов ряда Чебышева для некоторых бесконечно дифференцируемых неаналитических функций. Суть метода в том, что последовательность коэффициентов Чебышева является минимальным решением соответствующего рекуррентного уравнения высокого порядка. Для нахождения этого решения применяется обратный рекуррентный алгоритм в интерпретации Ю.Люка [2].*
УДК 517.918.8

В численном анализе хорошо известны ряды Чебышева для таких элементарных трансцендентных функций, как $\exp(kx)$, $\sin\omega x$, $\cos\omega x$ и других и некоторых специальных функций (интегральные синус и косинус, интегралы Френеля и др.), на конечном интервале. Например,

$$\exp(kx)=2\sum_{r=0}^{\infty} I_r(k)T_r(x), \qquad x\in[-1,1],$$

где k - комплексное число; $I_r(k)$ - модифицированные функции Бесселя; $T_r(x)$ - полиномы Чебышева первого рода (см. [1-3]).

Однако в ряде случаев возникает необходимость представлять эти функции соответствующими рядами на бесконечном интервале. В качестве примера рассмотрим функцию

$$f(x)=\exp(x)\int_x^{\infty} \frac{1}{s}\exp(-s)ds, \qquad a\le x<\infty,\ a>0, \tag{1}$$

которая связана с интегральной показательной функцией $E_1(x)$ [3].

Из (1) следует, что

$$f'(x)-f(x)=\frac{1}{x}, \qquad f(\infty)=0. \tag{2}$$

После подстановки

$$x=\frac{2a}{1-t} \tag{3}$$

переходим на конечный отрезок $t\in[-1,1]$, на котором для функции $y(t)=f(\frac{2a}{1-t})$ получаем из (2)

$$(1-t)^2y'(t)-2ay(t)=t-1, \tag{4}$$

$$y(1)=0. \tag{5}$$

Можно проверить, что функция $y(t)$, $t\in[-1,1]$, бесконечно дифференцируемая, но неаналитическая. Представим $y(t)$ в виде ряда по полиномам Чебышева первого рода:

$$y(t)=\sum_{r=0}^{\infty}{}' c_rT_r(t). \tag{6}$$

После замены функции $y(t)$ рядом (6) в уравнении (4), интегрирования обеих сторон этого уравнения в пределах от t до 1 и приравнивания коэффициентов у полиномов Чебышева находим *однородное рекуррентное уравнение 4-го порядка для неизвестных* коэффициентов c_r ряда (6) (см. [1], гл.14):

$$\begin{gathered}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2r}\right)c_{r-2}-\left(1-\frac{1-a}{r}\right)c_{r-1}+\frac{3}{2}c_r-\\-\left(1+\frac{1-a}{r}\right)c_{r+1}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2r}\right)c_{r+2}=0,\qquad r=3,4,\ldots\end{gathered} \tag{7}$$

и два уравнения при $r=1$ и $r=2$, соответственно,

$$ac_0-\frac{5}{4}c_1+(2-a)c_2-\frac{3}{4}c_3=1, \tag{8}$$

$$(1+a)c_1-3c_2+(3-a)c_3-c_4=-\frac{1}{2}. \tag{9}$$

Вопрос о существовании и асимптотике решения рекуррентных уравнений вида (7) весьма сложный, и эту тему мы предполагаем рассмотреть в отдельной работе.

Теперь предположим, что уравнение (7) имеет два линейно независимых решения $-u_n(a)$ и $v_n(a)$, $n=1,2,\ldots$, стремящихся к нулю, которые могут быть найдены при помощи обратного рекуррентного алгоритма (см. [2], гл.13). Суть этого метода состоит в том, что задаются две различные последовательности начальных значений $-c_{N+1}=1$, $c_{N+i}=0$, $i=2,3,4$, и $c_{N+2}=1$, $c_{N+i}=0$, $i=1,3,4$. Далее из уравнения (7) счетом в обратном направлении вычисляются два частных решения $-u_n(a)$, $v_n(a)$, $n=N,N-1,\ldots,1$.

Для получения $u_0(a)$ и $v_0(a)$ используем соотношение (8). Тогда последовательность

$$c_r = Au_r(a) + Bv_r(a), \quad r=0,1,\dots, \tag{10}$$

где A и V – неизвестные постоянные, так же удовлетворяет уравнениям (7) и (8) и стремится к нулю, если $r\to\infty$. Кроме того, коэффициенты (10) должны удовлетворять и уравнению (9) и условию, вытекающему из (5),

$$\sum_{r=0}^{\infty}{}' c_r = 0. \tag{11}$$

Подставляя (10) в (9) и (11), можно получить систему алгебраических уравнений с неизвестными A и B

$$\begin{cases} \alpha A+\beta B = -\frac{1}{2}, \\ \gamma A+\delta B = 0, \end{cases} \tag{12}$$

где α, β, γ, δ – функции от a. Если определитель системы (12) $\Delta=\alpha\delta-\beta\gamma$ отличен от нуля, то коэффициенты A и B вычисляются по формулам

$$A = -\frac{\delta}{2\Delta}, \qquad B = \frac{\gamma}{2\Delta}.$$

Введя обозначения

$$U(t,a) = \sum_{r=0}^{\infty}{}' u_r(a)T_r(t),$$

$$V(t,a) = \sum_{r=0}^{\infty}{}' v_r(a)T_r(t),$$

можно написать следующую формулу приближенного вычисления функции $y(t)$:

$$y(t) = AU(t,a) + BV(t,a)$$

и соответствующую формулу для функции

$$f(x) = AU(1-\frac{2a}{x},a) + BV(1-\frac{2a}{x},a), \quad a\le x<\infty. \tag{13}$$

Для иллюстрации приведем таблицы численных результатов, полученных при помощи ЭВМ ЕС-1060 с двойной точностью (16 десятичных цифр). В табл.1 приведены скорости сходимости частных решений u_n и v_n, а также коэффициентов c_n при N=10 и a=4. Табл.2 иллюстрирует точность аппроксимации функции (1) рядом

$$f(x) \approx f_N(x) = \sum_{n=0}^{\infty}{}' c_n T_n(1-\frac{2a}{x}) \tag{14}$$

Таблица 1

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ u_n, v_n И КОЭФФИЦИЕНТЫ c_n
РЯДА (14) ДЛЯ ФУНКЦИИ (1)
(ТОЧНОСТЬ CD≥7.5 НА ВСЕМ ИНТЕРВАЛЕ)

n	u_n	v_n	c_n
0	$-0.156321785\cdot10^{0}$	$0.100000000\cdot10^{+1}$	$0.661928336\cdot10^{0}$
1	$-0.100000000\cdot10^{+1}$	$0.463752677\cdot10^{0}$	$-0.292368120\cdot10^{0}$
2	$-0.107701975\cdot10^{0}$	$0.499470794\cdot10^{-1}$	$-0.314886235\cdot10^{-1}$
3	$-0.186983469\cdot10^{-1}$	$0.867140885\cdot10^{-2}$	$-0.546680019\cdot10^{-2}$
4	$-0.411799213\cdot10^{-2}$	$0.190973031\cdot10^{-2}$	$-0.120396928\cdot10^{-2}$
5	$-0.105387152\cdot10^{-2}$	$0.488736180\cdot10^{-3}$	$-0.308118096\cdot10^{-3}$
6	$-0.299955680\cdot10^{-3}$	$0.139105696\cdot10^{-3}$	$-0.876971376\cdot10^{-4}$
7	$-0.925385671\cdot10^{-4}$	$0.429154538\cdot10^{-4}$	$-0.270549869\cdot10^{-4}$
8	$-0.304336288\cdot10^{-4}$	$0.141141132\cdot10^{-4}$	$-0.889748989\cdot10^{-5}$
9	$-0.105470274\cdot10^{-4}$	$0.489163344\cdot10^{-5}$	$-0.308329316\cdot10^{-5}$
10	$-0.381907607\cdot10^{-5}$	$0.177151821\cdot10^{-5}$	$-0.111626217\cdot10^{-5}$
11	$-0.143526604\cdot10^{-5}$	$0.666031611\cdot10^{-6}$	$-0.419303198\cdot10^{-6}$
12	$-0.556511833\cdot10^{-6}$	$0.258550347\cdot10^{-6}$	$-0.162350410\cdot10^{-6}$
13	$-0.221158699\cdot10^{-6}$	$0.103094550\cdot10^{-6}$	$-0.642541642\cdot10^{-7}$
14	$-0.891981821\cdot10^{-7}$	$0.419463351\cdot10^{-7}$	$-0.256358638\cdot10^{-7}$
15	$-0.359077270\cdot10^{-7}$	$0.172069862\cdot10^{-7}$	$-0.100750853\cdot10^{-7}$
16	$-0.140581588\cdot10^{-7}$	$0.692435937\cdot10^{-8}$	$-0.380128036\cdot10^{-8}$
17	$-0.521305542\cdot10^{-8}$	$0.255198551\cdot10^{-8}$	$-0.142157889\cdot10^{-8}$
18	$-0.185401553\cdot10^{-8}$	$0.699277609\cdot10^{-9}$	$-0.664527701\cdot10^{-9}$
19	$-0.614752517\cdot10^{-9}$	$0.000000000\cdot10^{0}$	$-0.397243265\cdot10^{-9}$
20	$0.278102329\cdot10^{-9}$	$-0.128438744\cdot10^{-9}$	$0.817141053\cdot10^{-10}$

в зависимости от степени полинома (14) и значения параметра a. Точность характеризуется числом точных десятичных чисел (CD), которое вычисляется по формуле

$$CD = -\log_{10}|f(x)-f_N(x)|,$$

где $f(x)$ – точное значение функции (1), вернее, значение функции (1), полученное при помощи явной формулы $f(x)=\exp(x)E_1(x)$. Функциональные ряды вида (13) можно найти и для некоторых других функций. Так, для экспоненты

Таблица 2

ЗАВИСИМОСТЬ МИНИМАЛЬНОГО ЧИСЛА ТОЧНЫХ ДЕСЯТИЧНЫХ ЦИФР (CD)* В АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИИ (1) РЯДОМ (14) ОТ N И ПАРАМЕТРА a

a	CD_{min}				
	N=10	N=20	N=30	N=40	N=50
0.5	3.4	5.9	8.2	10.3	12.2
1	4.2	7.7	10.6	13.1	12.3
2	6.2	9.9	11.4	11.4	11.4
3	0.8	11.7	12.0	12.0	12.0
4	0.9	0.9	11.4	11.4	11.4
5	1.0	1.0	11.7	11.7	11.7

* Для сравнения использованы значения функции $E_1(x)$, вычисленные при помощи стандартной программы с точностью $\approx 10^{-11}$.

$$f(x)=\exp(-\omega x), \qquad 0\le x<\infty,\ \omega>0, \qquad (15)$$

после замены

$$x = \frac{1+t}{1-t}$$

получаем функцию

$$y(t)=\exp\left(-\frac{2\omega}{1-t}\right), \qquad t\in[-1,1],$$

которая удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(1-t)^2 y'(t)+2\omega y(t)=0$$

и условию

$$y(-1)=1.$$

В этом случае рекуррентное уравнение для коэффициентов Чебышева c_r $(r=3,4,\dots)$ можно получить из уравнения (7), заменяя в нем параметр a на $-\omega$. Вместо уравнений (8), (9) и дополнительного условия имеем следующие уравнения:

$$\omega c_0 + \frac{5}{4}c_1 - (2+\omega)c_2 + \frac{3}{4}c_3 = 0,$$

$$(1-\omega)c_1 - 3c_2 + (3+\omega)c_3 - c_4 = 0,$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}{}' (-1)^r c_r = 1.$$

При помощи того же метода, что и в первом случае, можно найти частные решения $u_n(\omega)$ и $v_n(\omega)$ $(n=0,1,\ldots,N)$, вычислить константы A и B из системы уравнений, аналогичной системе (12), и получить приближенную формулу

$$\exp(-\omega x)=AU\left(\frac{x-1}{x+1},-\omega\right)+BV\left(\frac{x-1}{x+1},-\omega\right).$$

Из табл.3 видно, что ряд Чебышева (6) с хорошей точностью аппроксимирует экспоненту (15) на всем бесконечном интервале, однако сходимость коэффициентов медленнее, чем в случае (1).

Построение ряда Чебышева для функции, заданной на отрезке $[-1,1]$ и неаналитической в нуле

$$\varphi(t)=\exp\left(-\frac{\omega}{t^2}\right),\qquad t\in[-1,1],\ \omega>0, \tag{16}$$

можно осуществить сведением (16) к предыдущему случаю. Для переменной

$$\tau=2t^2-1,\qquad \tau\in[-1,1]$$

получаем функцию

$$y(\tau)=\exp\left(-\frac{2\omega}{1+\tau}\right),$$

которая является решением дифференциального уравнения

$$(1+\tau)^2y'(\tau)-2\omega y(\tau)=0.$$

При помощи рекуррентных уравнений

$$\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2r}\right)c_{r-2}+\left(1-\frac{1+\omega}{r}\right)c_{r-1}+\frac{3}{2}c_r+$$

$$+\left(1+\frac{1+\omega}{r}\right)c_{r+1}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2r}\right)c_{r+2}=0,\quad r=3,4,\ldots;$$

$$-\omega c_0+\frac{5}{4}c_1+(2+\omega)c_2+\frac{3}{4}c_3=0$$

и алгебраической системы

$$\begin{cases}(1-\omega)c_1+3c_2+(3+\omega)c_3+c_4=0,\\ \frac{1}{2}c_0+c_1+c_2+\ldots=\exp(-\omega)\end{cases}$$

можно найти коэффициенты разложения

$$y(\tau)\approx y_N(\tau)=\sum_{n=0}^{N}{}' c_n(\omega)T_n(\tau). \tag{17}$$

Известно, что (см.[1], Приложение)

Таблица 3

КОЭФФИЦИЕНТЫ ЧЕБЫШЕВА ДЛЯ ФУНКЦИИ $\exp(-\omega x)$
И НИЖНЯЯ ГРАНИЦА ТОЧНОСТИ АППРОКСИМАЦИИ (В ТОЧКЕ $t=1$)
ПРИ $N=20$ И РАЗНЫХ ω

n	c_n		
	$\omega=1$, CD=4.5	$\omega=2$, CD=4.8	$\omega=4$, CD=5.8
0	$0.855166817\cdot10^{0}$	$0.672407300\cdot10^{0}$	$0.510791286\cdot10^{0}$
1	$-0.546427210\cdot10^{0}$	$-0.501906999\cdot10^{0}$	$-0.427185922\cdot10^{0}$
2	$0.710602888\cdot10^{-1}$	$0.180100167\cdot10^{0}$	$0.241658125\cdot10^{0}$
3	$0.547307496\cdot10^{-1}$	$0.395975499\cdot10^{-2}$	$-0.789786525\cdot10^{-1}$
4	$0.574213207\cdot10^{-2}$	$-0.185947256\cdot10^{-1}$	$0.373282155\cdot10^{-2}$
5	$-0.792849735\cdot10^{-2}$	$-0.312840087\cdot10^{-2}$	$0.699739091\cdot10^{-2}$
6	$-0.539494775\cdot10^{-2}$	$0.238614603\cdot10^{-2}$	$-0.847214139\cdot10^{-3}$
7	$-0.121289727\cdot10^{-2}$	$0.136737568\cdot10^{-2}$	$-0.982047918\cdot10^{-3}$
8	$0.697615143\cdot10^{-3}$	$0.202948669\cdot10^{-4}$	$0.434847559\cdot10^{-4}$
9	$0.866595729\cdot10^{-3}$	$-0.310849200\cdot10^{-3}$	$0.174290352\cdot10^{-3}$
10	$0.443845465\cdot10^{-3}$	$-0.162088111\cdot10^{-3}$	$0.274539832\cdot10^{-4}$
11	$0.687759919\cdot10^{-4}$	$-0.717503838\cdot10^{-5}$	$-0.276513108\cdot10^{-4}$
12	$-0.982781755\cdot10^{-4}$	$0.405040083\cdot10^{-4}$	$-0.140323875\cdot10^{-4}$
13	$-0.113123494\cdot10^{-3}$	$0.271230968\cdot10^{-4}$	$0.132278019\cdot10^{-5}$
14	$-0.675929986\cdot10^{-4}$	$0.526263846\cdot10^{-5}$	$0.367888697\cdot10^{-5}$
15	$-0.208482030\cdot10^{-4}$	$-0.531379586\cdot10^{-5}$	$0.112206843\cdot10^{-5}$
16	$0.580858138\cdot10^{-5}$	$-0.600197426\cdot10^{-5}$	$-0.483785552\cdot10^{-6}$
17	$0.133583114\cdot10^{-4}$	$-0.317024303\cdot10^{-5}$	$-0.572333293\cdot10^{-6}$
18	$0.101654013\cdot10^{-4}$	$-0.819070283\cdot10^{-6}$	$-0.209221697\cdot10^{-6}$
19	$0.375056102\cdot10^{-5}$	$0.755550556\cdot10^{-7}$	$-0.453927813\cdot10^{-8}$
20	$-0.179119145\cdot10^{-5}$	$0.311610770\cdot10^{-7}$	$0.787836283\cdot10^{-8}$

$$T_{2n}(t)=T_n(2t^2-1).$$

Поэтому ряд Чебышева для функции (16) имеет вид

$$\varphi(t)\approx\varphi_N(t)=\sum_{n=0}^{N}{}' c_n(\omega)T_{2n}(t), \tag{18}$$

где $c_n(\omega)$ $(n=0,1,\ldots,N)$ – те же коэффициенты, что и в разложении (17). Скорость сходимости аппроксимации (16) рядом

(18) показана в табл.4, где в столбцах выписаны нижние границы точности (CD_{min}) на отрезке $[-1,1]$ при различных значениях параметра ω.

Далее покажем, что изложенную методику можно использовать и для нахождения коэффициентов ряда Чебышева интегральных функций $si(x)$ и $ci(x)$ на бесконечном интервале $[a,\infty)$, $a>0$. Известны формулы (см. [3])

$$Si(x)=\frac{\pi}{2}-A(x)\cos x-B(x)\sin x, \tag{19}$$

$$Ci(x)=A(x)\sin x-B(x)\cos x, \tag{20}$$

где

$$A(x) = \frac{0!}{x}-\frac{2!}{x^3}+\frac{4!}{x^5}-\ldots;$$

$$B(x) = \frac{1!}{x^2}-\frac{3!}{x^4}+\frac{5!}{x^6}-\ldots.$$

Функции $A(x)$ и $B(x)$ не поддаются вычислению в явном виде, но они являются решением системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} A'(x)+B(x)=0, \\ A(x)-B'(x)=\frac{1}{x}, \qquad A(\infty)=B(\infty)=0. \end{cases} \tag{21}$$

Формируем новую функцию

$$f(x)=B(x)-iA(x),$$

для которой система (21) переходит в одно уравнение

$$f'(x)-if(x)=-\frac{1}{x}.$$

После подстановки (3) на отрезке $[-1,1]$ имеем дифференциальное уравнение

$$(1-t)^2y'(t)-2iay(t)=t-1 \tag{22}$$

для функции

$$y(t)=f\left(\frac{2a}{1-t}\right), \qquad y(1)=0.$$

Очевидно, уравнение (22) можно получить из уравнения (4) заменой a на ia. Совпадает и граничное условие при $t=1$. Используя изложенную методику, можно найти коэффициенты конечного ряда Чебышева для функции $f(x)$; аппроксимация функций $A(x)$ и $B(x)$ следует из равенств

$$B(x)=\mathrm{Re}f(x),$$

$$A(x)=-\mathrm{Im}f(x).$$

Таблица 4

НИЖНЯЯ ГРАНИЦА ТОЧНОСТИ (CD_{min}) НА [-1,1]
РЯДА ЧЕБЫШЕВА (18) ДЛЯ ФУНКЦИИ (16)

N	CD_{min}				
	ω=0.2	ω=0.8	ω=1.5	ω=3.0	ω=4.5
10	1.6	3.9	4.9	5.0	6.0
20	2.5	5.3	5.5	7.3	8.8
30	3.3	5.6	7.1	10.2	11.1
40	4.0	7.0	8.5	11.1	12.9

Интегральные функции $si(x)$ и $ci(x)$ потом вычисляются по формулам (19) и (20). Численные результаты табл.5 показывают, что рассматриваемый рекуррентный метод позволяет построить хорошую чебышевскую аппроксимацию функций $Si(x)$ и $Ci(x)$ для широкого диапазона значений параметра a; при этом точность результатов увеличивается с отдалением точки a от нуля.

В настоящей работе мы изложили один метод практического нахождения коэффициентов ряда Чебышева для некоторых бесконечно дифференцируемых неаналитических функций. Метод оказался весьма эффективным, так как при необходимости многократного вычисления функции в заданных точках интервала коэффициенты ряды вычисляются только один раз для каждого значения параметра a. Кроме того, вычисление решения рекуррентного уравнения выполняется намного быстрее, чем, например, системы алгебраических уравнений в случае метода коллокации. Однако нерешенным остается целый ряд теоретических вопросов, особенно для рекуррентных уравнений более высоких порядков. Например, в случае аппроксимации интеграла Досона и интегралов Френеля коэффициенты Чебышева являются решением рекуррентного уравнения 6-го порядка.

Следует заметить, что все рекуррентные уравнения, которым удовлетворяют коэффициенты Чебышева бесконечно дифференцируемых неаналитических функций, имеют специфическую форму, а именно: их можно записать в виде

Таблица 5

ЗАВИСИМОСТЬ КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗЛОЖЕНИЙ ДЛЯ ФУНКЦИЙ $A(x)$ И $B(x)$ И ТОЧНОСТИ АППРОКСИМАЦИИ (CD) РЯДОМ ЧЕБЫШЕВА ФУНКЦИЙ $\mathrm{Si}(x)$ И $\mathrm{Ci}(x)$ ОТ ПАРАМЕТРА a ПРИ N=10

n	c_n		
	a=0.1, CD=1.8	a=2.4, CD=6.5	a=12, CD=10.8
0	$0.18761428\cdot10^{1}$ $0.22298862\cdot10^{1}$	$0.36877074\cdot10^{0}$ $0.91639734\cdot10^{-1}$	$0.82650953\cdot10^{-1}$ $0.50649117\cdot10^{-2}$
1	$-0.48775243\cdot10^{0}$ $-0.91559484\cdot10^{0}$	$-0.17442073\cdot10^{0}$ $-0.57493670\cdot10^{-1}$	$-0.63262681\cdot10^{-1}$ $-0.33582455\cdot10^{-2}$
2	$-0.22489416\cdot10^{0}$ $-0.19327291\cdot10^{0}$	$-0.10519622\cdot10^{-1}$ $0.96262653\cdot10^{-2}$	$-0.19807764\cdot10^{-3}$ $0.81246666\cdot10^{-3}$
3	$-0.10988492\cdot10^{0}$ $-0.42598107\cdot10^{-1}$	$0.20578959\cdot10^{-3}$ $0.18886574\cdot10^{-2}$	$0.29449081\cdot10^{-4}$ $0.14819507\cdot10^{-4}$
4	$-0.55425048\cdot10^{-1}$ $-0.13571710\cdot10^{-2}$	$0.27309255\cdot10^{-3}$ $0.18986254\cdot10^{-3}$	$0.12942783\cdot10^{-5}$ $-0.13747286\cdot10^{-5}$
5	$-0.28701338\cdot10^{-1}$ $0.93350139\cdot10^{-2}$	$0.67910222\cdot10^{-4}$ $-0.12860845\cdot10^{-4}$	$-0.63262681\cdot10^{-7}$ $-0.12404243\cdot10^{-6}$
6	$-0.15313856\cdot10^{-1}$ $0.10361249\cdot10^{-1}$	$0.96879545\cdot10^{-5}$ $-0.13152919\cdot10^{-4}$	$-0.12341360\cdot10^{-7}$ $0.97965334\cdot10^{-9}$
7	$-0.84215736\cdot10^{-2}$ $0.83792386\cdot10^{-2}$	$-0.25315469\cdot10^{-6}$ $-0.41903143\cdot10^{-6}$	$-0.44346409\cdot10^{-9}$ $0.11928156\cdot10^{-8}$
8	$-0.46517672\cdot10^{-2}$ $0.57038459\cdot10^{-2}$	$-0.77791920\cdot10^{-6}$ $-0.78929644\cdot10^{-6}$	$0.99603930\cdot10^{-10}$ $0.10934667\cdot10^{-9}$
9	$-0.23376965\cdot10^{-2}$ $0.31472358\cdot10^{-2}$	$-0.38337207\cdot10^{-6}$ $-0.17524022\cdot10^{-7}$	$0.17652072\cdot10^{-10}$ $-0.46220838\cdot10^{-11}$
10	$-0.68859760\cdot10^{-3}$ $0.95335205\cdot10^{-3}$	$-0.10585443\cdot10^{-6}$ $0.28616212\cdot10^{-7}$	$0.86433100\cdot10^{-12}$ $-0.27695560\cdot10^{-11}$

$$\sum_{j=0}^{2m}(-1)^j c_{2m}^j u_{r-m+j}=\frac{m}{r}\sum_{j=0}^{2m} b_j(a)u_{r-m+j}, \qquad r=3,4,\ldots;\ m\geq 2,$$

где c_{2m}^j – биноминальные коэффициенты; $b_j(a)$ - функции от параметра; при этом $b_m(a)=0$.

Литература

1. Васильев Н.И., Клоков Ю.А., Шкерстена А.Я. Применение полиномов Чебышева в численном анализе. – Рига: Зинатне, 1984. – 240 с.
2. Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации. – М.: Мир, 1980. - 608 с.
3. Справочник по специальным функциям / Под ред.М.Абрамовица и И.Стиган. - М.: Наука, 1979. – 836 с.

Yu.Klokov, A.Shkerstena. On Chebyshev series for some infinitely differentiable non-analytic functions.

Summary. In the work a method is presented of practical determination of the coefficients of Chebyshev series for some infinitely differentiable non-analytic functions. The method is based on the fact that the sequence of Chebyshev coefficients is a minimal solution of corresponding recurrent equation of high order. To find this solution an inverse recurrent algorithm in J.Luke interpretation [2] is applied.
MSC 65C20

J.Klokovs, A.Škerstena. Par kādu bezgalīgi diferencējamu neanalītisku funkciju Čebiševa rindām.

Anotācija. Šajā darbā apskatīta kāda metode dažu bezgalīgi diferencējamu neanalītisku funkciju Čebiševa rindas koeficientu aprēķināšanai. Metodes būtība pamatojas uz to, ka Čebiševa koeficientu virkne ir atbilstoša augstas kārtas rekurences vienādojuma minimālais atrisinājums. Šī atrisinājuma atrašanai lieto apgrieztās rekurences algoritmu L.Ļuka interpretācijā.

Институт математики и информатики
Латвийского университета
Рига, б.Райня, 29

Поступила 04.08.93

МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

С.Беспалова

Аннотация. Предлагается итерационный метод численного решения краевых задач для сингулярных ОДУ. Эффективность метода иллюстрируется на конкретных задачах.
УДК 518.61

1. Рассматривается краевая задача

$$y''+\frac{k}{t}y'=f(t,y), \tag{1}$$

$$y'(0)=0, \quad y(\tau)=b, \quad t\in(0,\tau], \quad y\in\mathbb{R}, \tag{2}$$

где функция f сингулярна по y (может также иметь и сингулярность по t) на одном или обоих концах интервала $[0,\tau]$ $(\tau>0,\ k,\tau,b\in\mathbb{R},\ k>1)$.

Нетрудно проверить, что функция

$$y'(t)=\int_0^t\left(\frac{s}{t}\right)^k f(s,y(s))ds \tag{3}$$

удовлетворяет уравнению (1). Из (3) получаем

$$y(t)=y_0+\frac{1}{k-1}\int_0^t\left(s-t\left(\frac{s}{t}\right)^k\right)f(s,y(s))ds. \tag{4}$$

Полагая в (4) $t=\tau$, имеем

$$y(\tau)=b=y(0)+\frac{1}{k-1}\int_0^\tau\left(s-\tau\left(\frac{s}{\tau}\right)^k\right)f(s,y(s))ds. \tag{5}$$

Из (4), (5) следует интегральное уравнение

$$y(t)=b-\int_0^\tau \mathcal{G}(t,s)f(s,y(s))ds, \tag{6}$$

где $\mathcal{G}(t,s)$ – функция Грина краевой задачи

$$y''+\frac{k}{t}y'=0, \qquad y'(0)=y(\tau)=0, \tag{7}$$

а именно:

$$\mathcal{G}(t,s) = \frac{1}{k-1}\begin{cases} \left(\frac{s}{t}\right)^k\left(t-\tau\left(\frac{t}{\tau}\right)^k\right), & 0\le s\le t, \\ s-\tau\left(\frac{s}{\tau}\right)^k, & k\le s\le\tau. \end{cases} \tag{8}$$

2. Пусть отрезок $[0,\tau]$ разбит определенным образом на подинтервалы

$$0=t_0<t_1<\ldots<t_m=\tau \tag{9}$$

и пусть

$$y_p=y(t_p), \quad t_p\in[0,\tau], \quad p=0,1,\ldots,m,$$
$$\mathcal{G}_{ij}=\mathcal{G}(t_i,s_j), \quad i,j=0,1,\ldots,m.$$

Теперь, используя какую-либо квадратурную формулу, которая не включает концевые значения t_0, t_m интервала интегрирования, запишем (6) следующим образом:

$$y_p=b+\sum_{r=1}^{m-1} C_r\,\mathcal{G}_{pr}f(t_r,y_r), \qquad p=1,\ldots,m-1, \tag{10}$$

где C_r – коэффициенты выбранной нами квадратурной формулы.

Численное значение решения в точках t_p, $p=1,\ldots,m-1$, предлагается находить с помощью итерационного процесса

$$(y_p)^{(l+1)}=(1-\lambda)(y_p)^{(l)}+\lambda\left(b+\sum_{r=1}^{m-1} C_r\,\mathcal{G}_{pr}f(t_r,(y_r)^{(l)})\right), \tag{11}$$

где $\lambda\in(0,1)$, l и $(l+1)$ – номера предыдущей и последующей итераций.

3. Рассмотрим краевую задачу, аналогичную задаче (1), (2), но для системы n дифференциальных уравнений 2-го порядка

$$Y''+\frac{K}{t}Y'=F(t,Y), \tag{12}$$

$$Y'(0)=0, \qquad B_0Y(\tau)+B_1Y'(\tau)=b, \tag{13}$$

где $Y,F,b\in\mathbb{R}^n$; B_0, B_1 – квадратные матрицы размерности $n\times n$.

Предполагаем, что для соответствующей однородной задачи существует функция Грина (матричная). Тогда задача (12), (13) сводится к интегральному уравнению

$$Y(t)=B-\int_{0}^{\tau}\mathcal{G}(t,s)F(s,Y(s))ds, \tag{7'}$$

где B – известный вектор,

$$\mathcal{G}(t,s)=\| \mathcal{G}_{ij}(t,s)\|_{i,j=1}^{n}. \tag{14}$$

Если в (12) K есть диагональная матрица, то в (7′) $\mathcal{G}(t,s)$ также будет диагональной матрицей.

Так в [5] исследуется задача

$$\begin{aligned}
&u''+\frac{3}{x}u'=-144v+uv-2\eta,\\
&v''+\frac{3}{x}v'=144u-\frac{1}{2}u^2;\\
&u'(0)=0, \quad u(1)=0,\\
&v'(0)=0, \quad \frac{2}{3}v(1)+v'(1)=0, \quad x\in(0,1],\ \eta\in\mathbb{R}.
\end{aligned} \tag{15}$$

Для такой системы имеем $\mathcal{G}_{12}=\mathcal{G}_{21}=0$ и

$$\mathcal{G}_{11}(t,s) = \frac{1}{2}\begin{cases} \left(\frac{s}{t}\right)^3(t-t^3), & 0\le s\le t,\\ s-s^3, & t\le s\le 1,\end{cases} \tag{16}$$

$$\mathcal{G}_{22}(t,s) = \frac{1}{2}\begin{cases} \left(\frac{s}{t}\right)^3(t+2t^3), & 0\le s\le t,\\ s+2s^3, & t\le s\le 1.\end{cases} \tag{17}$$

Пусть $Y_j^{(l)}$ – вектор-функция, компоненты которой есть l-е приближения компонент вектор-функции Y, вычисленные в точке $t=t_j$. Обозначим далее

$$F_j^{(l)}=F(t_j,Y_j^{(l)}) \quad \text{и} \quad \mathcal{G}^{(j,r)}=\mathcal{G}(t_j,s_r).$$

Теперь численное решение системы (12), (13) может быть найдено в каждой точке t_j $(j=1,\ldots,m-1)$ разбиения (9), как предельное значение в итерационном процессе

$$Y_j^{(l+1)}=(1-\lambda)Y_j^{(l)}+\lambda\left(B+\sum_{r=1}^{m-1}c_r\,\mathcal{G}^{(j,r)}F_r^{(l)}\right). \tag{11'}$$

4. Сходимость итерационного процесса (11) может быть

Таблица 1

ЗАВИСИМОСТЬ ЧИСЛА ИТЕРАЦИЙ ОТ λ И m
ПРИ ФИКСИРОВАННОМ $\varepsilon(=10^{-8})$ В ЗАДАЧЕ (I)

m	λ						
	0.05	0.1	0.2	0.3	0.38	0.4	0.49
16	234	118	58	37	28	37	463
32	248	127	62	39	30	37	481
64	261	132	64	40	32	40	495
128	269	135	66	43	32	40	508
256	279	142	70	44	33	33	517

Таблица 2

ЗАВИСИМОСТЬ МАКСИМАЛЬНОЙ И МИНИМАЛЬНОЙ ВЕЛИЧИН
ОТНОСИТЕЛЬНО ПОГРЕШНОСТИ ОТ m
$(\lambda\in[0.1,0.49]$, ЗАДАЧА (I))

m	$\max\Delta_{отн}$ (%)	t_{max}	$\min\Delta_{отн}$ (%)	t_{min}
16	4.78	±0.875	0.86	±0.0625
32	4.96	±0.9375	0.43	±0.03125
64	5.06	±0.96875	0.21	±0.015625
128	5.11	±0.984375	0.11	±0.0078125
256	5.13	±0.9921875	0.05	±0.00390625

Здесь $\max\Delta_{отн}=\max_{t\in(-1,1)}\Delta_{отн}(t)=\Delta_{отн}(t_{max})$. Аналогично, $\min\Delta_{отн}=$ $=\min_{t\in(-1,1)}\Delta_{отн}(t)=\Delta_{отн}(t_{min})$; $t_{max},t_{min}\in(-1,1)$.

доказана посредством рассуждений, аналогичных тем, что используются в [1,3,4,10].

5. **Численные результаты.** Описанным выше методом решено несколько конкретных краевых задач. В частности,

$$x''=-\frac{1}{x^3},\qquad x(\pm1)=0. \tag{I}$$

Как известно, функция Грина соответствующей ей однородной краевой задачи есть

$$\mathcal{G}(t,s)=\begin{cases}(s-1)(1+t)/2, & -1\le t\le s,\\ (1+s)(t-1)/2, & s\le t\le 1.\end{cases}$$

Точное решение задачи (1) есть функция

$$x(t)=\sqrt{1-t^2}, \quad t\in[-1,1].$$

Результаты вычислений для задачи (1) приведены в табл.1 и 2.

Точность вычислений $\varepsilon=10^{-8}$,

$$x'' = -\frac{t^2}{32x^2}+\frac{\sigma^2}{8}, \qquad t\in(0,1),$$
$$x(0)=0, \quad 2x'(1)+(1+\nu)x(1)=0, \quad \sigma,\nu>0. \tag{II}$$

Функция Грина соответствующей ей однородной задачи есть

$$\mathscr{G}(t,s) = -\begin{cases} (1+(\nu+1)s/(1-\nu))t, & 0\le t\le s, \\ (1+(\nu+1)t/(1-\nu)s, & s\le t\le 1. \end{cases}$$

В [6] для решения задачи (11) использовались метод RKF45 Shampine, Watts вместе со слабомодифицированным методом ZEROIN, [9], а также метод Shampine, Gordon [14]. Вычисления выполнялись с удвоенной точностью (с 13 десятичными знаками) и с локальной ошибкой $5\cdot10^{-11}$. Результаты вычислений имеют 6 верных знаков. Там же отмечено, что метод Runge-Kutta 4-го порядка с постоянным шагом h=0.05 дает примерно 1-2 верных знака.

В целях сравнения наших результатов с результатами работы [6] мы решали задачу (II) для тех же значений входящих в нее параметров, что и в [6]. При этом мы полагали в (10) m=128 и точность вычислений $\varepsilon=10^{-9}$. Результаты расчетов задачи (II) приведены в таблицах 3 и 4.

$$(r^{m-1}u')'+\lambda\rho^{m-1}F(u)=0, \quad u'(0)=0, \quad u(1)=1. \tag{III}$$

Эта задача рассматривалась в работе [11]. Здесь $F(u)=(1+\alpha u)^{\beta}$, $\alpha\beta>0$, $r\in[0,1]$.

Нами рассмотрены следующие случаи:

а) $\alpha=-1$, $\beta=-1$, $\lambda=1$, $m=3$, что соответствует краевой задаче

$$u'' + \frac{2}{r}u' = -\frac{1}{1-u}, \qquad u'(0)=0, \quad u(1)=1; \tag{III$_1$}$$

б) $\alpha=-1$, $\beta=-2$, $\lambda=1$, $m=3$, что соответствует краевой задаче

$$u'' + \frac{2}{r}u' = -\frac{1}{(1-u)^2}, \qquad u'(0)=0, \quad u(1)=1. \tag{III$_2$}$$

Таблица 3

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (II) ПОСРЕДСТВОМ ИТЕРАЦИОННОГО ПРОЦЕССА (11)

σ	λ^*	L	$\max_{t\in(0,1)}(x(t)/t)$
0.000	0.49	33	0.431097774 (*) 0.431094017
0.233	0.49	34	0.426549105 (*) 0.426545367
0.825	0.41	42	0.379769906 (*) 0.379766516
0.991	0.37	47	0.360569859 (*) 0.360566693
1.171	0.34	52	0.338465984 (*) 0.338463168
1.388	0.29	62	0.311364813 (*) 0.311362512
1.474	0.27	67	0.300775975 (*) 0.300773929

Здесь λ^* – оптимальное значение λ в итерационном процессе в смысле скорости сходимости его, вычисленное с точностью до 10^{-2}; L – соответствующее ему число итераций. В строках со знаком (*) приведены предельные значения величины $\max(x(t)/t)$ при $t\to 0$, взятые из табл.1 работы [6]. Для всех экспериментируемых значений σ величина $\max(x(t)/t)$, $t\in(0,1]$ соответствует одному и тому же значению независимой переменной t (0.00390625).

Таблица 4

ЗАВИСИМОСТЬ КОЛИЧЕСТВА ИТЕРАЦИЙ (L) В (11) ПРИ ФИКСИРОВАННОМ ЗНАЧЕНИИ σ В ЗАДАЧЕ (II)

$\sigma=1.388$									
λ	0.1	0.2	0.25	0.28	0.29	0.30	0.31	0.33	0.35
L	192	93	73	64	62	72	92	237	>500

В обоих случаях функция Грина есть

$$\mathscr{G}(t,s) = \begin{cases} \left(\frac{s}{t}\right)^2 (t-t^2), & 0 \le s \le t, \\ (s-s^2), & t \le s \le 1. \end{cases}$$

Для численного решения уравнения (6) во всех рассматриваемых нами примерах использовалась квадратурная формула прямоугольников

$$\int_a^b F(z)dz \approx \frac{b-a}{m}\left(F_{1/2}+F_{3/2}+\ldots+F_{(2m-1)/2}\right), \qquad (18)$$

где $F_{i/2}=F(z_i-\frac{h}{2})$ $(i=1,2,\ldots,m)$; $h=(b-a)/m$, m - число точек разбиения интервала интегрирования.

Чтобы проследить влияние величин λ из (11) и m на скорость сходимости итерационного процесса и точность получаемых результатов (в смысле совпадения с точным решением, если оно известно), рассмотренные задачи решали для разных значений $\lambda\in(0,1)$, в том числе близких к 0 и к 1, а также брали различное число точек разбиения m интервала интегрирования.

Основные выводы

1. Сходимость итерационного процесса существенно зависит от λ. Интервал значения λ (0,1) можно с определенной степенью точности разбить на три подинтервала: $(0,\lambda_1)$, $[\lambda_1,\lambda_2]$, $(\lambda_2,1)$. При этом в подинтервалах $(0,\lambda_1)$, $(\lambda_2,1)$ имеет место плохая сходимость (требуется очень большое число итераций) или даже ее отсутствие по мере приближения λ к 0 или к 1 (см.табл.1,4). Значения λ_1, λ_2 для каждой задачи свои.

2. Для каждой краевой задачи существует оптимальное значение $\lambda=\lambda^*\in(\lambda_1,\lambda_2)$ в смысле скорости сходимости итерационного процесса (см.табл.1,3).

3. Для всех значений λ, для которых итерационный процесс сходится с одной и той же заданной точностью, величина отклонения приближенного решения от точного не зависит от λ, но зависит от m - числа точек разбиения интервала интегрирования (см.табл.2).

Литература

1. Ахиезер Т.А. Итерационные процессы, связанные с нерастягивающими отображениями // Теория функций, функционального анализа и их приложений. - Харьков, 1988. - N 50. - С.17-20.
2. Васильев Н.И., Клоков Ю.А. Основы теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. - Рига, 1987. - 183 с.
3. Клоков Ю.А. Краевые задачи с условием на бесконечности для уравнений математической физики. - Рига, 1963. - 105 с.
4. Algethmy A., Sehgal V.M. A convergence theorem for nonlinear contractions and fixed points // Math.Jap. - 1982. - Vol.27, N 1. - P.113-116.
5. Asher U., Russell R.D. Reformulation of boundary value problems into "standard" form // SIAM Rev. - 1981. - Vol.23, N 2. - P.238-254.
6. Baxley J.V. A singular nonlinear boundary value problem: membrane response of a spherical cap // SIAM J.Appl.Math. - 1988. - Vol.48, N 3. - P.497-505.
7. De Bruijn N.G. Topological existence proof for a nonlinear two-point boundary value problem // Philips J.Res. - 1981. - Vol.36, N 4-6. - P.229-238.
8. Diaz J.I., Morel J.M. An elliptic equation with singular nonlinearity // Commun.Part.Differential Equations. - 1987. - Vol.12, N 12. - P.1333-1344.
9. Forsythe G.E., Malcolm M.A., Moler C.B. Computer methods for mathematical computations. - Englewood Cliffs; Prentice-Hall, 1977. - N 7. - 156 p.
10. Guel A.K., Sharma P.L. Fixed point theorems on contractive mapping // Ind.J.Pure a.Appl.Math. - 1982. - Vol.13, N 4. - P.426-428.
11. Joseph D.D., Zundgren T.S. Quasilinear Dirichlet problems Driven by positive sources // Arch.Rational Mechanics a. Analysis. - 1973. - Vol.49, N 4. - P.241-269.
12. Na T.Y. Computational methods in engineering boundary value problems. - New York: Acad.Press, 1979. - 294 p.

13. Rentrop P. Numerical solution of the singular Ginzburg-Landau equations by multiple shooting // Computing. - 1976. - Vol.16, N.1/2. - P.61-67.

14. Shampine L.E., Gordon M.K. Computer solution of ordinary differential equations. - San Francisco: W.H.Freeman, 1975. - 272 p.

S.Bespalova. Successive approximation method for the solution of singular boundary value problems.

Summary. An iterative method is proposed for the numerical solution of boundary value problems for singular ODE. Examples are given showing the efficiency of the method.
MSC 65L10

S.Bespalova. Pakāpenisko tuvinājumu metode singulāro robežproblēmu risināšanā.

Anotācija. Tiek piedāvāta iterāciju metode singulāru PDV robežproblēmu risināšanai. Metodes efektivitāte tiek ilustrēta risinot konkrētus uzdevumus.

Институт математики и информатики
Латвийского университета
Рига, б.Райня, 29

Поступила 24.07.93

SOLVABILITY OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR THE CERTAIN SECOND ORDER DIFFERENTIAL EQUATION WITH NON-SUMMABLE SINGULARITIES

J.Cepītis

Summary. Multiplicity of solutions for the boundary value problem

$$x'' + \frac{1-p+q}{t}x' - \frac{pq}{t^2}x + b\,t^r\left(\frac{x}{t^p}\right)^n = 0\ ,$$

$$x(0) = 0 \quad , \quad x(t_0) = x_0 \quad , \quad b, t_0, x_0 \in (0, +\infty)\ ,$$

is investigated by phase plane analysis method as long as values of the parameters are permissible.
1991 MSC 34B15

Introduction

Second order differential equations or its systems ,which contain the differential operator with non-summable singularities

$$Lx = \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1-p+q}{t}\frac{dx}{dt} - \frac{pq}{t^2}x \ ;\ p,q \in R\ ,$$

frequently appear in applications. A lot of papers (see [1,2] and references there added) were turned attention to the boundary value problems of such kind.

Solvability conditions for the boundary value problem

$$Lx = f(t, t^{-p}x, t^{1-p}x')\ , \tag{1}$$

$$x(0) = 0 \quad , \quad x(t_0) = x_0, \tag{2}$$

in the terms of lower and upper functions follows, for example, from results of [1], but these conditions do not clarify how number of solutions depends on values of the parameters containing in the boundary value problem.

The operator L can be obtained by change of variables

$$u = t \quad x^{-p} \tag{3}$$

in the operator

$$L_1 u = t^p \left(\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{k}{t} \frac{du}{dt} \right) \quad ; \quad k = 1 + p + q \ .$$

This circumstance stimulated us to transfer to the boundary value problem for the differential equation

$$Lx + bt^r \left(\frac{x}{t^p} \right)^n = 0 \ , \tag{4}$$

$n > 1$, with the boundary conditions (2) results of the paper [3]. These results were gotten by phase plane analysis method and were related to the boundary value problem for the differential equation

$$L_1 x + t^r x^n = 0$$

with the boundary conditions (2), if $x_0 > 0$.

Note, that the direct application of the change of variables (3) is not possible, because the sets composed by permissible values of parameters p,q,r in either case are covered partly.

The differential equation of the phase plane

Let $p \in [1, 2+r)$, $q \in [0, +\infty)$, $r \in (-1, +\infty)$. Then, according with the results of papers [4,5], for every $s \in [0,+\infty)$ exists the solution x of the differential equation (4), which satisfies initial conditions

$$x(0) = 0 \quad , \lim_{t \to 0+} \frac{x(t)}{t^p} = s \tag{5}$$

Let y be the solution of the problem (4),(5) with $s = 1$. It is easy to be convinced, that for $s \in (0,+\infty)$ the function

$$x(t) = s^{1-\nu} y(s^\nu t) \quad , \text{where} \quad \nu = \frac{n-1}{1 + r + n(1-p)} \ ,$$

also is the solution of the problem (4),(5).

Let $t_0 \in (0, +\infty)$ be fixed. Consider the function

$$u(s) = s^{1-\nu} y(s^{\nu} t_0). \qquad (6)$$

If $\nu > 0$,which is true under the condition

$$1 + r + n > np , \qquad (7)$$

then

$$\lim_{s \to 0+} u(s) = 0 \quad , \quad 0 \le \lim_{s \to 0} \frac{du(s)}{ds} < +\infty . \qquad (8)$$

Deriving the function u twice and taking into consideration the differential equation (4), we obtain

$$\frac{d^2u}{ds^2} + \frac{(\alpha\nu + \beta\nu - 1)}{s} \frac{du}{ds} + \frac{(1 - \nu\alpha)(1 - \nu\beta)}{s^2} u + \frac{a}{s^2} u^n = 0 ,$$

where $\alpha = 1 - p$, $\beta = 1 + q$, $a = b\, \nu^2 t_0^{r-pn+2}$.

Further,making use of the independent variable $\tau = \ln s$, denoting $v = \frac{du}{d\tau}$ and turning out τ from the acquired system of first order di f ferential equations, we get the searched differential equation of the phase plane

$$\frac{dv}{du} = \frac{- \lambda_1\lambda_2 u + (\lambda_1 + \lambda_2)v - au^n}{v} , \qquad (9)$$

where $\lambda_1 = 1 - \nu\alpha$, $\lambda_2 = 1 - \nu\beta$.

Note,that the trajectories, which are determined by the differential equation (9) and are entered in the origin of (u,v)-plane ,if $\tau \to -\infty$,correspond to the conditions (8).

The behavior of the trajectories

Origin of the (u,v)-plane is a singular point of the differential equation (9).If $\nu > 0$,then $\lambda_1 > 0$,but $\lambda_2 < 0$, if

$$2 + r + q < n(p + q) . \qquad (10)$$

With this, it is easy to make certain, that inequalities (7) and (10) imply the fact, that origin of the (u,v)-plane is the saddle point of the differential equation (9). In such case the differential equation (9) has one more singular point $(\delta,0)$,where

$$\delta = \left(- \frac{\lambda_1\lambda_2}{a} \right)^{\frac{1}{n-1}} .$$

Let us assume, that inequalities (7) and (10) are true.

Then solutions v_i of the differential equation, which satisfy the initial conditions

$$v_i(0) = 0 \quad , \quad \frac{dv_i(0)}{du} = \lambda_i \quad , \quad i = 1,2,$$

exists and are uniquely. The differential equation (9) and inequality $n > 1$ imply existence of the numbers $u_i \in [\delta, +\infty)$, such that

$$v_i(u_i) = 0 \quad , \quad (-1)^{i-1} v_i(u) > 0 \quad , \quad u \in (0, u_i), \quad i=1,2.$$

Lemma. The equality $sign(u_1 - u_2) = sign(\lambda_1 + \lambda_2)$ is true. Proof of this lemma does not differs from the proof of th Lemma 1 in the paper [3].

Let us denote $\gamma = 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ and observe, that $\gamma > 0$.

Statement.Inequality

$$\gamma \geq 2n + 2\sqrt{n(n-1)} \quad , \qquad (11)$$

implies $u = \delta$.

Proof. Derivative $\frac{dv_1}{du}$,for the sake of its monotonicity, the minimal value in the domain $[0,\delta]$ reaches at the point $u=\delta$. Denote this minimal value with k and suppose, that $u_1 = \delta$. Putting into the differential equation (9)

$$v = k(u - \delta) \quad , \qquad (12$$

which is the equation of the tangent drawing to the graph of the solution v_1 in the point $u = \delta$, and taking the limit, when $u \to \delta$,we obtain $k^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)k - (n - 1)\lambda_1\lambda_2 = 0$. So,as k must be real, we have

$$\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^2 + (4n - 2)\frac{\lambda_2}{\lambda_1} + 1 \geq 0 \quad ,$$

From this inequality follows, that one of the inequalities (11 or

$$\gamma \leq 2n - 2\sqrt{n(n-1)} \qquad (13$$

must be true. On the other hand,in such case $u_1 \leq u_2$ and, according with the Lemma, we have $\lambda_1 + \lambda_1 \leq 0$. Altering the latter inequality in the form $\gamma \geq 2$, we see, that it is not linked with (13) ,if $n > 1$. Choosing $k = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$ from the differential equation (9), we can convince oneself, that $\frac{dv_1}{du}<k$ on the interval $(0,\delta)$ of the straight line (12),consequently the graph of the solution v_1 can not to intersect the mentioned straight line and for certain enters in the point $(\delta,0)$. The statement is proved.

It is easy to verify, that for $\gamma \in (2\ ,\ 2n + 2\sqrt{n(n-1)}\ )$ the singular point $(\delta,0)$ of the differential equation (9) is a stable focus and the trajectory, which contains the solution v_1, as a spiral winds on it.

If the inequality (7) is true,but inequality (10) is not true,then the *origin of the* (u,v)*-plane is the unique singular* point of the differential equation (9), and it is an unstable knot point. It is seen by the differential equation (9), that the solution v_1 has the same kind of behavior as in the previous case with $\lambda_1+\lambda_2 > 0$.

The solvability of the boundary value problem

Let $M(t_0) = \max\limits_{s\in(0,+\infty)} u(s)$,where the function u is defined by the expression (6). Then the boundary value problem (4),(2) has not a solution,if $x_0 > M(t_0)$. On the other hand,if $x_0 \le M(t_0)$, then the trajectory, which contains the constructed solution v_1 of the differential equation (9), determines various values of the variable s, such that the solution of the problem (4),(5) satisfies also the boundary conditions (2). The considerations analogous as in the paper [3] allow to get the following solvability theorem for the boundary value problem (4),(2).There will be previous designations used in the formulation of the theorem.

Theorem. Let $p \in [1,\ 2+r)$,$q \in [0,\ +\infty)$,$r \in (-1,\ +\infty)$ and inequality (7) are true.

If $\gamma \in (0,2]$,then the boundary value problem (4),(2):

has two solutions, in case $x_0 \in (0,u_1)$,

has one solution, in case $x_0 = u_1$,

has no solutions, in case x_0 $(u_1, +\infty)$.

If $\gamma \in (2, 2n + 2\sqrt{n(n-1)})$, then for every $t_0 \in (0,+\infty)$ exists sequence $j \rightarrow M_j(t_0)$, such that $\lim_{j\to\infty} M_j(t_0) = \delta$,

$$M_{2j-1}(t_0) > M_{2j}(t_0),$$

$$M_1(t_0) > M_3(t_0) > \ldots > M_{2j-1}(t_0) > \ldots,$$

$$M_2(t_0) < M_4(t_0) < \ldots < M_{2j}(t_0) < \ldots,$$

and the boundary problem (4),(2):

has j solutions, in case $x_0 = M_j(t_0)$,

has $j + 1$ solution, in case $x_0 \in (M_j(t_0), M_{j+2}(t_0))$,

if j is an even number,

or $x_0 \in (M_{j+2}(t_0), M_j(t_0))$,

if j is an odd number,

has no solutions, in case $x_0 \in (M_1(t_0), +\infty)$.

If $\gamma \in [2n + 2\sqrt{n(n-1)}, +\infty)$, then the boundary value problem (4),(2):

has one solution, in case $x_0 \in (0,\delta)$,

has no solutions, in case $x_0 \in [\delta, +\infty)$.

Remarks

1. The formulated Theorem, by using solvability results for the boundary value problem (1),(2) in the terms of the lower and upper functions (see [1]), allows to get also some results, which are related to the general boundary value problem (1),(2), if $f \in C([0,t_0]\times R^2)$.

If $f(t,t^{-p}x,t^{1-p}x') \geq bt^r(t^{-p}x)^n$, $t \in (0,t_0]$; $x,x' \in R$ and $x_0 \in (0,+\infty)$ is such, that the boundary value problem (4),(2) has no solution, then the boundary value problem (1),(2) has no solution also.

If $0 \leq f(t,t^{-p}x,t^{1-p}x') \leq bt^r(t^{-p}x)^n$, $t \in (0,t_0]$, $x,x' \in R$ and $x_0 \in (0,+\infty)$ is such, that the boundary value problem (4),(2) has a solution, then the boundary value problem (1),(2) has a solution also.

2. Let $i = 1,2$ and consider the boundary value problem for the system of differential equations

$$Lx_i + \phi_i(x_1,x_2) = 0 \qquad (14)$$

with the conditions

$$x_i(0) = 0 \quad , \quad x_i(t_0) = x_0^{[i]} \quad , \; t_0, x_0^{[i]} \in (0,+\infty).$$

If for the continuous nonlinearities ϕ_i hold conditions of the homogeneity $\phi_i(kx_1,kx_2) = k^{n_i}\phi_i(x_1,x_2)$, $k \in R$, $n_i > 1$, then frequently the system of differential equations (14) by the linear change of variables $x_i = \alpha_i u + \beta_i v$, $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$, can be reduced to the system of the differential equations

$$Lu + a_0 u^{n_1} = 0 \quad , \quad Lv + \psi(u,v) = 0 \quad , \qquad (15)$$

The boundary conditions, then are taken the form

$$u(0) = v(0) = 0 \; , \; u(t_0) = u_0 \; , \; v(t_0) = v_0 . \qquad (16)$$

If ϕ_i are homogeneous polynomials with equal (second or third) powers, then necessary connections among its coefficients for this purpose are the same as in the paper [6], which is dedicated to the systems of differential equations with the differential operator L_1.

As regards to the component u of the solution of the boundary value problem (15),(16) the Theorem of this article can be applied. The existence of the corresponding components v can be established by the lower and upper functions (see [1]).

This work has been completed with the financial support of the Science Council of Latvia under grant 90.224.

References

1. Унгуре А.А.,Цепитис Я.В. О разрешимости краевой задачи для одного класса систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с несуммируемыми особенностями //Математика.Дифференциальные уравнения.-Рига:ЛУ,1992.-Т.570.-С.24-34.
2. Гризанс Г.П. Об одной краевой задаче для уравнения с несуммируемой особенностью // Латв.мат.ежегодник - Рига:Зинатне,1985.-Вып.29.-С.22-35.

3. Гризанс Г.П. Область существования решения одной краевой задачи для уравнения Эмдена-Фаулера //Дифференц.уравнения.-1988.-Т.-24.-Н.-4.-С.563-566.

4. Гризанс Г.П.,Клоков Ю.А. Об одной начальной задаче для уравнения второго порядка с несуммируемой особенностью //Латв.мат.ежегодник.- Рига:Зинатне,1984.-Вып.28.-С.14-24.

5. Цепитис Я.В. О существовании ограниченного решения для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с несуммируемой особенностью // Актуальные вопросы теории краевых задач.Теория и приложения.-Рига:ЛГУ,1988.-С.59-68.

6. Гризанс Г.П. Об одной краевой задаче для системы двух уравнений типа Эмдена-Фаулера // Математика.Дифференциальные уравнения.-Рига:ЛУ,1992.-Т.577.-С.16-21.

J.Cepītis. Par Dirihlē problēmas atrisināmību kādam otrās kārtas parastam diferenciālvienādojumam ar neintegrējamām singularitātēm.

Anotācija. Robežproblēmai

$$x'' + \frac{1-p+q}{t}\, x' - \frac{pq}{t^2} x + bt^r\left(\frac{x}{t^p}\right)^n = 0 ,$$

$$x(0) = 0 ,\, x(t_0) = x_0 \quad , \quad b, t_0, x_0 \in (0, +\infty) ,$$

noteikts atrisinājumu skaits pieļaujamajām parametru vērtībām (p,q,r)-telpā .

Я.Цепитис. О разрешимости задачи Дирихле для одного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с несуммируемыми особенностями.

Аннотация. Для краевой задачи

$$x'' + \frac{1-p+q}{t}\, x' - \frac{pq}{t^2} x + bt^r\left(\frac{x}{t^p}\right)^n = 0 ,$$

$$x(0) = 0 ,\, x(t_0) = x_0 \quad , \quad b, t_0, x_0 \in (0, +\infty),$$

установлено число решений при допустимых значениях параметров в пространстве (p,q,r).

УДК 517.917

Latvian University Received 10.09.93.

19 Rainis boulevard , Riga

О ЧИСЛЕ РЕШЕНИЙ В КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Ф.Ж.Садырбаев

Аннотация. Для краевой задачи

$$x''=f(t,y), \qquad y''=g(t,x), \tag{1}$$

$$x(a)=A, \quad x'(a)=A_1, \quad x(b)=B, \quad x'(b)=B_1, \tag{2}$$

с f, g ограниченными и из класса C^1, $\frac{\partial f}{\partial y}$ и $\frac{\partial g}{\partial x}$ положительными, получен следующий результат.

Теорема. Пусть $\frac{\partial f}{\partial y}$ ограничена и существует решение (ξ,η) задачи (1), (2) такое, что интервал (a,b) содержит n сопряженных (к $t=a$) точек относительно уравнения в вариациях

$$\left((1/\tfrac{\partial f}{\partial y}(t,\eta(t)))u''\right)''=\frac{\partial g}{\partial x}(t,\xi(t))u.$$

Тогда существует по меньшей мере $2n+1$ решений задачи (1), (2).

УДК 517.927

1. Рассматривается квазилинейная краевая задача

$$x''=f(t,y), \qquad y''=g(t,x), \tag{1}$$

$$x(a)=A, \quad x'(a)=A_1, \quad x(b)=B, \quad x'(b)=B_1, \tag{2}$$

где функции $f,g:[a,b]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ – непрерывны вместе с частными производными f_y, g_x и ограничены, $a,b,A,A_1,B,B_1\in\mathbb{R}$.

Задача (1), (2) является математической моделью движения материальной частицы в нелинейном поле сил, где заданы x-проекции положения и скорости частицы в начальный и конечный момент времени.

Будем считать, что всюду

$$f_y>0, \qquad g_x>0. \tag{3}$$

Основной результат состоит в оценке снизу числа решений задачи (1), (2) при некоторых дополнительных предположениях.

2. Пусть (x_0,y_0) – некоторое решение задачи (1), (2). Перепишем систему (1) в виде

$$(x-x_0)''=\frac{f(t,y)-f(t,y_0)}{y-y_0}(y-y_0)=\varphi(t)(y-y_0),$$
$$(y-y_0)''=\frac{g(t,x)-g(t,x_0)}{x-x_0}(x-x_0)=\psi(t)(x-x_0), \tag{4}$$

где коэффициенты φ, ψ непрерывны (в точках, где $y=y_0$ или $x=x_0$, которые образуют не более чем конечное множество [1, с.82], коэффициенты доопределяются соответствующим значением f_y или g_x) и положительны в силу условия (3). Если ограничиться рассмотрением решений системы (1), удовлетворяющих начальным условиям

$$x(a)=A, \quad x'(a)=A_1, \quad y(a)-y_0(a)=p, \quad y'(a)-y_0'(a)=q, \tag{5}$$

то коэффициенты φ, ψ в (4) являются функциями значений p, q. При малых p, q система (4) превращается в систему уравнений в вариациях

$$u''=f_y(t,y_0(t))v, \qquad v''=g_x(t,x_0(t))u. \tag{6}$$

Система (6) может быть записана в виде

$$\left(\frac{1}{f_y(t,y_0(t))}\,u''\right)''=g_x(t,x_0(t))u. \tag{7}$$

Теория уравнения

$$(r(t)u'')''=p(t)u, \qquad r>0,\ p>0 \tag{8}$$

развита в статье [2], терминологии которой мы будем придерживаться.

Определение [2, п.3]. Точка $t=\eta$ называется сопряженной к $t=a$ относительно уравнения (8), если существует нетривиальное решение $u(t)$, удовлетворяющее условиям

$$u(a)=u'(a)=0=u(\eta)=u'(\eta). \tag{9}$$

Теорема. *Пусть выполняются условия:*

1) существует $C=\text{const}>0$ такое, что $f_y<C$ *для всех значений* (t,y);

2) существует решение (x_0,y_0) задачи (1), (2) такое, что интервал (a,b) содержит k точек $\eta_1,\ldots,\eta_k$, сопряженных к $t=a$ относительно уравнения (7).

Тогда задача (1), (2) имеет еще не менее $2k$ решений.

3. В этом пункте приводятся некоторые вспомогательные сведения.

Наряду с (4) рассмотрим систему

$$u''=\varphi(t)v, \qquad v''=\psi(t)u \tag{10}$$

и соответствующее уравнение

$$\left(\frac{1}{\varphi}u''\right)'' = \psi u, \tag{11}$$

где φ, ψ зависят от p, q согласно (5).

Лемма 1 [2, с.327]. *Если значения функций u, u', u'', $\left(\frac{1}{\varphi}u''\right)'$ при $t=a$ неотрицательны и не все равны нулю, то при $t>a$ эти функции положительны.*

Лемма 2. Сопряженные к $t=a$ точки $\eta_1, \eta_2, \ldots$ относительно уравнения (8) непрерывно зависят от коэффициентов $r(t)$, $p(t)$.

Доказательство. Известно [3, п.8.6], что собственные значения самосопряженной задачи

$$\begin{gathered}(R(\tau)u'')''=\lambda P(\tau)u, \qquad R>0,\ P>0,\\ u(0)=u'(0)=0=u(1)=u'(1),\end{gathered} \tag{12}$$

образующие дискретное множество, непрерывно зависят от коэффициентов уравнения (12). Поскольку преобразованием $t=\sqrt[4]{\lambda}\tau+a$ уравнение (8) переходит в (12), а сопряженным точкам η_n соответствуют собственные значения λ_n по формуле $\eta_n=\sqrt[4]{\lambda_n}+a$, утверждение леммы справедливо.

Лемма 3. Каждому решению $u(t)$ уравнения (11) (где φ, ψ определяются согласно (4), (5) и зависят от p, q), удовлетворяющему условиям:

1) $u(a)=u'(a)=0=u(b)=u'(b)$;

2) вектор $(u''/\varphi,\ (u''/\varphi)')$ при $t=a$ коллинеарен вектору (p,q),

соответствует решению задачи (1), (2).

Доказательство. Поскольку уравнение (11) линейное, можно, умножив $u(t)$ на постоянную и перейдя к системе (10), сравнить (10) с (4) и получить, что $x=x_0+u$, $y=y_0+v$ является решением (1), (2).

Лемма 4. *Если в уравнении (8) $r(t)\geq c>0$, а коэффициент $p(t)$ достаточно мал в интегральном смысле, то интервал (a,b) не содержит точек, сопряженных к $t=a$.*

Справедливость леммы следует из теоремы сравнения и оценок числа нулей решения п.3.4 работы [2] применительно к уравнению $cu^{(4)}=p(t)u$.

4. Доказательство теоремы. Рассмотрим уравнение (11) с коэффициентами, зависящими от p, q. На плоскости (p,q) в секторе $p>0$, $q<0$ проведем семейство полупрямых l_θ, выходящих из начала координат и параметризованных значением угла $\theta\in(-\frac{\pi}{2},0)$. Фиксируем θ. Пусть полупрямые l_θ естественным образом s-параметризованы, причем $s=0$ соответствует началу координат. Для малых значений s интервал (a,b), по условию теоремы, содержит k сопряженных к $t=a$ точек $\eta_1,\dots,\eta_k$. При увеличении s коэффициент $\psi(t)$ становится сколь угодно мал в интегральном смысле (следствие ограниченности g), а $\frac{1}{\varphi}$ отделен от нуля. Тогда из леммы 4 вытекает, что в (a,b) нет сопряженных точек при больших s. Из леммы 2 следует, что при увеличении s $\eta_1,\dots,\eta_k$ последовательно принимают значение b. Пусть $S_{k\theta}$ – верхняя точная грань значений s, где $\eta_k=b$. Пусть $u_{k\theta}$ – решение (11), реализующее $\eta_k=b$ при $s=S_{k\theta}$. Множество точек полупрямых l_θ, соответствующих значениям $S_{k\theta}$, образуют связное множество L, параметризованное значениями θ. Для любого θ функция $u_{k\theta}$ удовлетворяет, согласно лемме 1, условию $u_2=(\frac{1}{\varphi}u'')(a)>0$, $u_3=(\frac{1}{\varphi}u'')'(a)>0$. Поскольку угол, образованный векторами $(1,0)$ и (u_2,u_3), и угол между $(0,-1)$ и (u_2,u_3) имеют разные знаки, найдется значение $\theta\in(-\frac{\pi}{2},0)$, при котором этот угол равен нулю. Этому значению, по лемме 3, соответствует решение задачи (1), (2). Таким образом, при рассмотрении значений $\theta\in(-\frac{\pi}{2},0)$ получается не менее k решений задачи (1), (2).

Еще k решений дает аналогичное рассмотрение в секторе $\theta\in(\frac{\pi}{2},\pi)$.

Доказательство завершено.

Литература

1. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970. – 720 с.
2. Leighton W., Nehari Z. On the oscillation of solutions of

selfadjoint linear differential equations of the fourth order // Trans.Amer.Math.Soc. - 1958. - V.89. - P.325-377.

3. Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика. - М.: Мир, 1969. - 447 с.

F.Sadyrbaev. On the number of solutions in a boundary value problem for two second order differential equations.

Summary. For the boundary value problem

$$x''=f(t,y), \qquad y''=g(t,x), \tag{1}$$

$$x(a)=A, \quad x'(a)=A_1, \quad x(b)=B, \quad x'(b)=B_1, \tag{2}$$

with f, g continuously differentiable and bounded, and $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial g}{\partial x}$ positive, a result is stated:

Theorem. Let $\frac{\partial f}{\partial y}$ be bounded and let there exist a solution (ξ,η) of (1), (2) such that the interval (a,b) contains n conjugate (to t=a) points with respect to the equation of variations

$$\left((1/\tfrac{\partial f}{\partial y}(t,\eta(t)))u''\right)''=\frac{\partial g}{\partial x}(t,\xi(t))u.$$

Then there exist at least $2n+1$ solutions to the problem (1), (2).

MSC 34B15

F.Sadirbajevs. Par atrisinājumu skaitu divu otrās kārtas diferenciālvienādojumu sistēmas robežproblēmai.

Anotācija. Robežproblēmai

$$x''=f(t,y), \qquad y''=g(t,x), \tag{1}$$

$$x(a)=A, \quad x'(a)=A_1, \quad x(b)=B, \quad x'(b)=B_1, \tag{2}$$

kur f, g ir ierobežotas un C^1 klases, $\frac{\partial f}{\partial y}$ un $\frac{\partial g}{\partial x}$ pozitīvas, iegūts sekojošs rezultāts.

Teorēma. Lai $\frac{\partial f}{\partial y}$ ierobežots un eksistē problēmas (1), (2) atrisinājums (ξ,η) tāds, ka intervāls (a,b) satur n duālus (pret punktu t=a) punktus attiecībā pret vienādojumu variācijās:

$$\left((1/\tfrac{\partial f}{\partial y}(t,\eta(t)))u''\right)''=\frac{\partial g}{\partial x}(t,\xi(t))u.$$

Tad eksistē vismaz $2n+1$ problēmas (1), (2) atrisinājums.

Институт математики и информатики
Латвийского университета
Рига, б.Райня, 29

Поступила 06.08.93

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОЙ МОДЕЛИ ПОЛУПРОВОДНИКОВОГО ПРИБОРА

В.Гудков

Аннотация. Рассмотрена система 4-х обыкновенных дифференциальных уравнений, моделирующая одномерный стационарный процесс протекания тока через полупроводниковый прибор. Доказана теорема единственности решения соответствующей краевой задачи.
УДК 517.927.4

Рассмотрена система 4-х обыкновенных дифференциальных уравнений, моделирующая одномерный стационарный процесс протекания тока через полупроводниковый прибор. В общем виде краевая задача для упомянутой системы поставлена в работе [1]. В настоящей работе доказывается теорема единственности решения этой краевой задачи для модели полупроводникового прибора, состоящего из двух звеньев. При доказательстве используются априорные оценки решения, полученные в работе [2], где доказана теорема существования решения рассматриваемой краевой задачи.

На интервале $I=[0,1]$ исследуется система уравнений относительно неизвестных функций x, y, z, u аргумента $t\in I$

$$\begin{aligned} x' &= yz+u\mu_1+J\mu_2 \\ y' &= xz+u\mu_2+J\mu_1 \\ z' &= \frac{1}{\varepsilon}(y+N(t)) \\ u' &= g(x,y) \end{aligned} \tag{1}$$

совместно с краевыми условиями

$$\begin{aligned} x(0)&=\sqrt{N^2(0)+\gamma^2}, \qquad y(0)=-N(0), \\ x(1)&=\sqrt{N^2(1)+\gamma^2}, \qquad y(1)=-N(1). \end{aligned} \tag{2}$$

Предполагается, что ограниченная функция $N(t)$ имеет разрыв при $t=1/2$, непрерывна в остальной части интервала I и удовлетворяет неравенствам

$$N(t)>0 \quad \forall t\in[0,1/2], \quad N(t)<0 \quad \forall t\in(1/2,1].$$

Функция g определяется формулой

$$g(x,y)=G(x+y,x-y)=\frac{(x+y)(x-y)-\gamma^2}{\tau_p(x+y+\gamma)+\tau_n(x-y+\gamma)} .$$

Остальные величины постоянные:

$$J>0, \quad \mu_1>\mu_2>0, \quad \gamma,\tau_p,\tau_n,\varepsilon>0.$$

В работе [2] доказано существование решения задачи (1), (2) и построены априорные оценки, т.е. установлено существование числа M такого, что выполняются неравенства

$$0<x<M, \quad |y|<M, \quad |z|<M, \quad |u|\le J \tag{3}$$

для любого решения x, y, z, u задачи (1), (2). Методика построения априорных оценок, основанная на теоремах сравнения, будет использована и при доказательстве единственности решения. Напомним идею доказательства промежуточных оценок

$$x+y>0, \qquad x-y>0 \qquad \forall t\in I.$$

Складывая и вычитая 1-ое и 2-ое уравнения системы (1), находим (учитывая $|u|\le J$)

$$(x+y)'=z(x+y)+(u+J)(\mu_1+\mu_2)\ge z(x+y),$$
$$(x-y)'=-z(x-y)+(u-J)(\mu_1-\mu_2)\le -z(x-y).$$

Первое дифференциальное неравенство при начальном условии $x(0)+y(0)>0$ позволяет получить $x+y>0$ на I, а второе - при граничном условии $x(1)-y(1)>0$ позволяет получить $x-y>0$ на I.

Теорема. Краевая задача (1), (2) не может иметь более одного решения.

Доказательство. Допустим, задача (1), (2) имеет два решения: x_1, y_1, z_1, u_1 и x_2, y_2, z_2, u_2. Определим функции $v=x_1-x_2$, $w=y_1-y_2$, $p=z_1-z_2$, $q=u_1-u_2$ и выпишем краевую задачу для них:

$$\begin{aligned} &v'=wz_1+y_2p+\mu_1q, && v(0)=0,\\ &w'=vz_1+x_2p+\mu_2q, && w(0)=0,\\ &p'=\frac{1}{\varepsilon}w, && v(1)=0,\\ &q'=G(x_1+y_1,x_1-y_1)-G(x_2+y_2,x_2-y_2), && w(1)=0. \end{aligned} \tag{4}$$

Вместо первых двух уравнений в (4) можно взять следующие уравнения:

$$(v+w)'=z_1(v+w)+(x_2+y_2)p+(\mu_1+\mu_2)q, \tag{5}$$

$$(v-w)'=-z_1(v-w)+(x_2-y_2)p+(\mu_1-\mu_2)q. \tag{6}$$

В силу положительности величин x_2+y_2, x_2-y_2, $\mu_1+\mu_2$, $\mu_1-\mu_2$ из (5), (6) следуют дифференциальные неравенства:

$$(v+w)'>z_1(v+w) \quad \text{при} \quad p\ge 0,\ q>0, \tag{7}$$

$$(v-w)'>-z_1(v-w) \quad \text{при} \quad p\le 0,\ q>0, \tag{8}$$

$$(v+w)'<z_1(v+w) \quad \text{при} \quad p\le 0,\ q<0, \tag{9}$$

$$(v-w)'<-z_1(v-w) \quad \text{при} \quad p\ge 0,\ q<0. \tag{10}$$

Пусть $q\equiv 0$ на I, тогда при $p(0)=0$ линейная однородная система (4) имеет *лишь* нулевое решение, что противоречит допущению о существовании двух решений задачи (1), (2). При $p(0)>0$ (случай $p(0)<0$ сводится к этому переобозначением решений) найдется интервал $[0,\xi)$, где $p>0$. Но тогда на $[0,\xi)$ дифференциальное неравенство

$$(v+w)'>z_1(v+w) \quad \text{при} \quad v(0)+w(0)=0$$

влечет неравенство $v+w>0$ на $(0,\xi]$. Действительно, из $v'(0)+w'(0)>0$ найдется $\tau\in(0,\xi)$ такое, что $v+w>0$ на $(0,\tau]$, а для $t\in(\tau,\xi]$ справедливо неравенство

$$v+w>(v(\tau)+w(\tau))\exp\left(\int_\tau^t z_1(s)ds\right)>0.$$

Аналогично из

$$(v-w)'<-z_1(v-w) \quad \text{при} \quad v(0)-w(0)=0$$

следует $v-w<0$ на $(0,\xi]$. Из двух полученных неравенств находим $w(\xi)>0$. Взяв максимальный интервал $[0,\xi)$ со свойством $p>0$, обнаружим, что при $\xi<1$ должно быть $p(\xi)=0$, $p'(\xi)\le 0$, т.е. $w(\xi)\le 0$, а при $\xi=1$ дано $w(1)=0$. *И* то, *и* другое противоречит неравенству $w(\xi)>0$. Следовательно, при $q\equiv 0$ не может быть двух решений.

Прежде чем перейти к рассмотрению случая, когда функция q отлична от нуля хотя бы в одной точке, отметим, что

$$p'=\frac{1}{2\varepsilon^2}(v+w)-\frac{1}{2\varepsilon^2}(v-w), \tag{11}$$

$$q'=G'_\alpha(\alpha_*,\beta_1)(v+w)+G'_\beta(\alpha_2,\beta_*)(v-w). \tag{12}$$

Здесь G'_α, G'_β – производные функции G соответственно по аргументам $\alpha=x+y$, $\beta=x-y$, взятые в промежуточных точках; величина α_* *лежит* между α_1 и α_2, величина β_* *лежит* между β_1 и

β_2.

$$G'_\alpha(\alpha_*,\beta_1)=\frac{(\beta_1+\gamma)(\tau_p\gamma+\tau_n\beta_1)}{[\tau_p(\alpha_*+\gamma)+\tau_n(\beta_1+\gamma)]^2}>0,$$

$$G'_\beta(\alpha_2,\beta_*)=\frac{(\alpha_2+\gamma)(\tau_p\alpha_2+\tau_n\gamma)}{[\tau_p(\alpha_2+\gamma)+\tau_n(\beta_*+\gamma)]^2}>0.$$

В силу априорной ограниченности (3) решений задачи (1), (2) производные функции G удовлетворяют неравенствам на I:

$$\frac{\gamma^2\min\{\tau_p,\tau_n\}}{(2M+\gamma)^2(\tau_p+\tau_n)^2} < \left\{G'_\alpha, G'_\beta\right\} < \frac{(2M+\gamma)2M}{\gamma^2(\tau_p+\tau_n)} .$$

Пусть $q(0)>0$ (случай $q(0)<0$ сводится к этому переобозначением решений). Рассмотрим варианты.

1) Пусть $q>0$ на I. Тогда при $p\geq 0$ на I из (7) следует $v+w>0$ на $(0,1]$, что противоречит краевому условию $v(1)+w(1)=0$. Если $p\geq 0$ на $[0,\xi]$ и $p\leq 0$ на $[\xi,1]$, то $p'(\xi)\leq 0$ и на $(0,\xi]$ из (7) следует $v+w>0$. Следовательно, из (11) в точке $t=\xi$ находим $v(\xi)-w(\xi)>0$, и в соответствии с (8) необходимо $v-w>0$ на $[\xi,1]$, что противоречит краевому условию при $t=1$.

Если $p\geq 0$ на $[0,t_1]$ и $[t_2,1]$ и $p\leq 0$ на $[t_1,t_2]$, то, как и выше, на $(0,t_1]$ будет $v+w>0$, а на $[t_1,t_2]$ будет $v-w>0$. В точке t_2 необходимо $p'(t_2)\geq 0$, и из (11) следует $v(t_2)+w(t_2)>0$. Далее, из (7) находим $v+w>0$ на $[t_2,1]$, что противоречит краевому условию при $t=1$. В случае $p(0)<0$ из (8) на интервале $(0,\xi]$, где $p\leq 0$, следует $v-w>0$. Далее рассмотрение проводится точно так же, как и в предыдущем случае после точки $t=t_2$.

Не продолжая этот процесс далее, можно заключить, что, за исключением точки $t=0$, на всех интервалах, где $p\geq 0$, необходимо $v+w>0$, а на интервалах, где $p\leq 0$, необходимо $v-w>0$. Другими словами, для всех $t\in(0,1]$ либо $v+w>0$, либо $v-w>0$, что противоречит краевому условию при $t=1$.

2) Пусть $q>0$ на $[0,\tau)$, $q(\tau)=0$, $q<0$ на $(\tau,1]$. Тогда в соответствии с предыдущим пунктом в каждой точке интервала $(0,\tau]$ либо $v+w>0$, либо $v-w>0$. Отметим здесь, что строгие неравенства в точке $t=\tau$ сохраняются, несмотря на значение

$q(\tau)=0$, благодаря строгим дифференциальным неравенствам (7) и (8) внутри интервала $(0,\tau)$. Допустим $p(\tau)=0$, тогда линейная однородная система уравнений (5), (6), (11), (12) с нулевыми краевыми условиями $v(0)+w(0)=0$, $v(0)-w(0)=0$, $p(\tau)=0$, $q(\tau)=0$ имеет лишь тривиальное решение, что противоречит предположению о двух решениях.

Допустим $p(\tau)>0$, тогда $v(\tau)+w(\tau)>0$, и из (12) и $q'(\tau)\le0$ следует $v(\tau)-w(\tau)<0$. Далее на интервале $[\tau,t_1]$, где $p\ge0$, из (10) следует $v-w<0$. При $t_1=1$ это невозможно. Если же на $[t_1,t_2]$ будет $p\le0$, то из $p'(t_1)\le0$, $v(t_1)-w(t_1)<0$, и из (11) следует $v(t_1)+w(t_1)<0$. Далее из (9) находим $v+w<0$ на $[t_1,t_2]$. Таким образом, для всех $t\in(\tau,1]$, где $q<0$, необходимо либо $v-w<0$, либо $v+w<0$, что противоречит краевому условию при $t=1$.

Допустим $p(\tau)<0$, тогда $v(\tau)-w(\tau)>0$, и из (12) и $q'(\tau)\le0$ следует $v(\tau)+w(\tau)<0$. Дальнейшее рассмотрение, как и в предыдущем случае, приводит к противоречию.

3) Пусть функция q более одного раза меняет знак на I. Тогда, как следует из предыдущего пункта, за исключением точки $t=0$, на всех интервалах, где $q\ge0$, необходимо либо $v+w>0$, либо $v-w>0$; на всех интервалах, где $q\le0$, необходимо либо $v+w<0$, либо $v-w<0$. Таким образом, для всех $t\in(0,1]$ необходимо либо $v+w\ne0$, либо $v-w\ne0$, что приводит к противоречию в точке $t=1$.

Пусть, наконец, $q(0)=0$, и существует точка, где $q\ne0$. Тогда найдется интервал $(\xi,\tau)\subset I$, на котором $q\ne0$. Будем считать интервал (ξ,τ) самым левым, так что на $[0,\xi]$ будет $q=0$. Из предположения о существовании двух решений задачи (1), (2) необходимо следует $p\ne0$ на $[0,\xi]$. В таком случае из (5), (6) следует $v+w>0$ на $(0,\xi]$ при $p>0$ и $v-w>0$ при $p<0$ на $(0,\xi]$. Правее точки $t=\xi$ рассмотрение проводится точно так же, как и выше. Теорема доказана.

Литература

1. Белянин М.П. Об асимптотике в одномерной модели некоторых полупроводниковых приборов // Журнал вычислит.матем. и матем.физики. - 1988. - Т.28, N 1. - С.34-51.
2. Гудков В.В. Разрешимость краевой задачи для одномерной

модели полупроводникового прибора // Математика. Дифференциальные уравнения: Научные труды. - Рига: ЛУ. - 1992. - Т.570. - С.42-53.

V.Gudkov. The uniqueness of solution of boundary value problem for one-dimensional model of semiconductor device.

Summary. The system of 4 ordinary differential equations, modelling semiconductor device in a one-dimensional stationary case, is investigated. An uniqueness theorem is proved for related boundary value problem.
1991 MSC 34B30

V.Gudkovs. Robežproblēmas atrisinājuma unitāte pusvadītāju ierīces viendimensiju modelim.

Anotācija. Tiek pētīta 4 parasto diferenciālvienādojumu sistēma, kura modelē viendimensiju stacionāru strāvas plūsmu caur pusvadītāju ierīci. Pierādīta robežproblēmas atrisinājuma unitātes teorēma pieminētai vienādojumu sistēmai.

Институт математики и информатики
Латвийского университета
Рига, б.Райня, 29

Поступила 16.06.93

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

В.Д.Пономарев

Аннотация. Приводятся условия существования решения для краевой задачи для функционально-дифференциального уравнения.
УДК 517.985

Рассмотрим краевые задачи:

$$\begin{cases} x'=Fx+fx, & (1) \\ Lx=r, & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'=Fx, & (3) \\ Lx=0, & (4) \end{cases}$$

где $F,f:AC(I,\mathbb{R}^n)\to L(I,\mathbb{R}^n)$, $L:AC(I,\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}^n$, $r\in\mathbb{R}^n$, $n\in\{1,2,\dots\}$, $I=[a,b]$, $-\infty<a<b<+\infty$, $AC(I,\mathbb{R}^n)$ - пространство абсолютно непрерывных функций $x:I\to\mathbb{R}^n$ с нормой

$$\|x\|=|x(a)|+\int_a^b|x'(s)|ds.$$

Нам потребуется также норма

$$\|x\|_C = \max\left\{(i,t)\in\{1,\dots,n\}\times I \;\middle|\; |x_i(t)|\right\}.$$

$L(I,\mathbb{R}^n)$ - пространство суммируемых по Лебегу функций $y:I\to\mathbb{R}^n$ с нормой

$$\|y\|=\int_a^b|y(s)|ds,$$

где $|x|=\max\left\{i\in\{1,\dots,n\} \;\middle|\; |x_i|\right\}$ - норма в $\mathbb{R}^n$.

Аналогичные задачи рассматривались в работе [1], где имеется обширная библиография.

I. Предположим, что задача (3), (4) имеет единственное решение, тождественно равное нулю.

Решения задач (1),(2); (3),(4) эквивалентны соответственно решению уравнений

$$x(t) = \int_a^t (Fx)(s)ds + \int_t^b (fx)(s)ds + Lx - x(a) - r,$$

$$x(t) = \int_a^t (Fx)(s)ds + Lx - x(a).$$

Определим отображения $A, A_0 : AC(I,\mathbb{R}^n) \to AC(I,\mathbb{R}^n)$ следующим образом:

$$(Ax)(t) = \int_a^t (Fx)(s)ds + Lx - x(a),$$

$$(A_0x)(t) = \int_a^t (fx)(s)ds - r.$$

Тогда задачу (3), (4) можно записать в виде:

$$x = Ax,$$

а задачу (1), (2) - в виде:

$$x = Ax + A_0x.$$

Для применения теоремы Лере-Шаудера [2] о существовании решения уравнения

$$x = Ax + \lambda A_0 x, \tag{5}$$

где $0 \le \lambda \le 1$, необходимо доказать априорную оценку решению уравнения (5) независимо от λ.

Предварительно покажем, что для любого решения v уравнения (5) справедлива оценка

$$\|v\|_C \le \eta\lambda \|A_0 u\|_C,$$

где $0<\eta<\infty$. Предполагая противное, найдем последовательность (v_n) такую, что для любого $n \in \{1,2,...\}$ выполняется

$$\|v_n\|_C > n\eta\lambda \|A_0 v_n\|_C$$

или

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\eta\lambda\|A_0 v_n\|}{\|v_n\|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

II. Предположим, что операторы A и A_0 вполне непрерывны, а оператор A однороден.

Используя вполне непрерывность оператора A и его однородность, получаем, что *последовательность*

$$v_n^*(t) = \frac{v_n(t)}{\|v_n\|_C}$$

сходится, скажем, к элементу v_0, который *будет* решением уравнения

$$v_0 = Av_0.$$

Так как $\|v_0\|_C=1$, то получаем противоречие с единственностью решения задачи (3), (4).

Докажем априорную оценку. Пусть x - произвольное решение уравнения (5). Имеем

$$\|x\|_C \le \eta\lambda\|A_0 x\|_C \le \eta \ \|\int_a^t (fx)(s)ds - r\|_C.$$

III. Предположим, что справедлива оценка

$$\|fx\|_C \le f_0(t) + \varepsilon\|x\|_C,$$

где $f_0 \in L(I,\mathbb{R})$, $0 \le \varepsilon < +\infty$.

Тогда имеем

$$\|x\|_C \le \eta\left(\int_a^b f_0(s)ds + \varepsilon\int_a^b \|x\|_C ds + |r|\right)$$

или

$$\|x\|_C \le \frac{\eta\left(\int_a^b f_0(s)ds + |r|\right)}{1-\eta\varepsilon(a+b)} .$$

IV. Предположим, что для константы $c=\frac{1}{\eta(a+b)}$ выполняется $\varepsilon<c$.

V. *Предположим*, что *для любого* ограниченного по норме $\|\cdot\|_C$ множества функций $G \subset AC(I,\mathbb{R}^n)$ найдется константа c_0 такая, что для любых $x \in G$ имеем:

$$\left|\int_a^b (Fx)(s)ds\right| + \left|\int_a^b (fx)(s)ds\right| < c_0. \tag{6}$$

Из (6) следует априорная оценка решения уравнения (5) независимо от λ. Следовательно, согласно теореме Лере-Шаудера, существует решение задачи (1), (2) для любого r.

Итак, мы доказали теорему.

Теорема. Пусть выполняются условия I-V. Тогда найдется константа $c>0$ такая, что для любых $\varepsilon<c$ задача (1), (2) имеет решение для любых r.

Литература

1. Conti R. Recent trends in the theory of boundary value problems for ordinary differential equations // Boll.Unione mat.ital. - 1967. - V.22, N 2. - P.135-175.
2. Треногин В.А. Функциональный анализ. - М.: Наука. - 495 с.

V.Ponomarev. Existence of a solution to a boundary value problem for first-order functional-differential equation.

Summary. Conditions for the existence of a solution to a boundary value problem for first-order functional-differential equation are given.
MSC 34K10

V.Ponomarjovs. Pirmās kārtas funkcionāla diferenciālvienādojuma robežproblēmas atrisinājuma eksistence.

Anotācija. Tiek doti atrisinājuma eksistences nosacījumi funkcionāla diferenciālvienādojuma robežproblēmai.

Институт математики и информатики
Латвийского университета
Рига, б.Райня, 29

Поступила 22.06.93

PARTIAL DECOUPLING OF SEMIDYNAMICAL SYSTEM

A. Reinfelds

Summary. A theorem of topological conjugacy of a given possible noninvertible mapping in a complete metric space to a simpler mapping than the given one in terms of decoupling is proved.
1991 MSC 34C35, 54H20, 58F99

0. Introduction

The purpose of this paper is to present a general result which concerns a continuous and possible noninvertible mapping in a complete metric space defined by

$$(x,y,s) \to (f(x,y,s),g(x,y,s),\sigma(s)).$$

We prove that there is a Lipschitzian with respect to second variable mapping q such, that the given mapping is topologically conjugate to the mapping defined by

$$(x,y,s) \to (f(x,y_0,s),g(q(x,y,s),y,s),\sigma(s)).$$

The conjugacy problem between noninvertible mappings comes from the theory of evolution equations. It should be emphasized that the time one mapping is noninvertible, in other words, backward solutions may not exist. The decoupling and linearization for noninvertible mappings has been considered by B.Aulbach and B.M.Garay [1,2] and A.Reinfelds [8,10,11]. There are extensive works on the subject for invertible mappings. See [3-10].

1. Main result

Let $\mathbb{X}$ and $\mathbb{Y}$ be complete metric spaces with metrics ρ_1 and ρ_2, respectively, and let $\mathbf{S}$ be a topological space. Consider a continuous and possibly noninvertible mapping $T\colon \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \times \mathbf{S} \to \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \times \mathbf{S}$, where $T(x,y,s) = (f(x,y,s), g(x,y,s), \sigma(s))$.

We will make the following hypotheses:

(H1) $\rho_1(x,x') \le \alpha\rho_1(f(x,y,s), f(x',y,s))$, $\alpha > 0$.

(H2) $\rho_1(f(x,y,s), f(x,y',s)) \le \beta\rho_2(y,y')$.

(H3) $\rho_2(g(x,y,s), g(x',y',s)) \le \gamma\rho_1(x,x') + \delta\rho_2(y,y')$,
where $\alpha(\delta + 2\sqrt{\beta\gamma}) < 1$.

(H4) Mapping $f(\cdot,y,s)\colon \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ is surjective.

Denote

$$l = 2\alpha\beta \left(1 - \alpha\delta + \sqrt{(1 - \alpha\delta)^2 - 4\alpha^2\beta\gamma} \right)^{-1}.$$

It should be noted that $\alpha l(\gamma l + \delta) + \alpha\beta = l$.

Now we will formulate the main result of the paper.

Theorem. *Let the hypotheses* (H1) – (H4) *hold and let there exist* $y_0 \in \mathbb{Y}$ *such that*

$$\sup_{x,y,s}\rho_1(f(x,y,s), f(x,y_0,s)) < +\infty.$$

If $\alpha(1 + \gamma l) < 1$, *then there exist a continuous mapping* $q\colon \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \times \mathbf{S} \to \mathbb{X}$ *which is Lipschitzian with respect to the second variable and a homeomorphism* H: $\mathbb{X} \times \mathbb{Y} \times \mathbf{S} \to \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \times \mathbf{S}$ *such that the diagram*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{X} \times \mathbb{Y} \times \mathbf{S} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "H"'] & \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \times \mathbf{S} \arrow[d, "H"] \\
\mathbb{X} \times \mathbb{Y} \times \mathbf{S} \arrow[r, "R"] & \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \times \mathbf{S}
\end{tikzcd}$$

commutes, where $R(x,y,s) = (f(x,y_0,s), g(q(x,y,s),y,s), \sigma(s))$.

2. Proof of main result

Step 1. The mapping p: Consider the complete metric space

$$\mathfrak{M} = \left\{ p \mid p\colon \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \times \mathbf{S} \to \mathbb{X} \text{ is continuous and } \sup_{x,y,s}\rho_1(p(x,y,s),x) < +\infty \right\}$$

equipped with the supremum metric

$$d(p,p') = \sup_{x,y,s}\rho_1(p(x,y,s), p'(x,y,s)).$$

Let us consider the mapping $p \to \mathcal{P}p$, $p \in \mathfrak{M}$ defined by the equality

$$f(\mathfrak{L}p(x,y,s),y_0,s) = p(T(x,y,s)).$$

According to (H1), (H4) and the continuity of T, $\mathfrak{L}p$ is well defined and continuous. It remains to prove that $\mathfrak{L}$ is a contraction in $\mathfrak{M}$. First we obtain

$$\rho_1(\mathfrak{L}p(x,y,s),\mathfrak{L}p'(x,y,s)) \le$$
$$\le \alpha\rho_1(f(\mathfrak{L}p(x,y,s),y_0,s),f(\mathfrak{L}p'(x,y,s),y_0,s)) =$$
$$= \alpha\rho_1(p(T(x,y,s)),p'(T(x,y,s))) \le \alpha d(p,p').$$

Next we get

$$\rho_1(\mathfrak{L}id_x(x),x) \le \alpha\rho_1(f(x,y,s),f(x,y_0,s)) \le$$
$$\le \alpha\sup_{x,y,s}\rho_1(f(x,y,s),f(x,y_0,s)) < +\infty.$$

Since

$$d(\mathfrak{L}p,id_x) \le d(\mathfrak{L}p,\mathfrak{L}id_x) + d(\mathfrak{L}id_x,id_x) \le \alpha d(p,id_x) + d(\mathfrak{L}id_x,id_x)$$

it follows that $\mathfrak{L}p \in \mathfrak{M}$ and therefore there is a unique solution $p \in \mathfrak{M}$ of the functional equation

$$f(p(x,y,s),y_0,s) = p(T(x,y,s)).$$

Step 2. The mapping q: Consider the closed subset

$$\mathfrak{M}(l) = \Big\{ q \mid q \in \mathfrak{M} \text{ and } \rho_1(q(x,y,s),q(x,y',s)) \le l\rho_2(y,y') \Big\}.$$

of the complete metric space $\mathfrak{M}$.

Let us consider mapping $q \to \mathfrak{L}q$, $q \in \mathfrak{M}(l)$ defined by the equality

$$f(\mathfrak{L}q(x,y,s),y,s) = q(f(x,y_0,s),g(q(x,y,s),y,s),\sigma(s)).$$

As in the previous step $\mathfrak{L}q$ is correctly defined and continuous. Let us note

$$\rho_1(\mathfrak{L}q(x,y,s),x) \le \alpha\rho_1(f(\mathfrak{L}q(x,y,s),y,s),f(x,y,s)) \le$$
$$\le \alpha\rho_1(q(f(x,y_0,s),g(q(x,y,s),y,s),\sigma(s)),f(x,y_0,s)) +$$
$$+ \alpha\rho_1(f(x,y_0,s),f(x,y,s)) \le$$
$$\le \alpha d(q,id_x) + \alpha\sup_{x,y,s}\rho_1(f(x,y_0,s),f(x,y,s)).$$

In addition,

$$\rho_1(\mathfrak{L}q(x,y,s),\mathfrak{L}q(x,y',s)) \le$$
$$\le \alpha\rho_1(q(f(x,y_0,s),g(q(x,y,s),y,s),\sigma(s)),$$
$$q(f(x,y_0,s),g(q(x,y',s),y',s),\sigma(s))) + \alpha\beta\rho_2(y,y') \le$$
$$\le \alpha l(\gamma l + \delta)\rho_2(y,y') + \alpha\beta\rho_2(y,y') = l\rho_2(y,y').$$

It follows that $\mathfrak{L}q \in \mathfrak{M}(l)$. Since

$$\rho_1(\mathfrak{L}q(x,y,s),\mathfrak{L}q'(x,y,s)) \le$$
$$\le \alpha\rho_1(f(\mathfrak{L}q(x,y,s),y,s),f(\mathfrak{L}q'(x,y,s),y,s)) =$$
$$= \alpha\rho_1(q(f(x,y_0,s),g(q(x,y,s),y,s),\sigma(s)),$$

$$q'(f(x,y_0,s),g(q'(x,y,s),y,s),\sigma(s))) \le$$
$$\le \alpha d(q,q') + \alpha\gamma l\rho_1(q(x,y,s),q'(x,y,s)) \le \alpha(1+\gamma l)d(q,q')$$

it follows that there is a unique solution $q \in \mathfrak{M}(l)$ of the functional equation

$$f(q(x,y,s),y,s) = q(f(x,y_0,s),g(q(x,y,s),y,s),\sigma(s)) =$$
$$= q(R(x,y,s)).$$

Step 3. The mapping P**:** Let us consider the functional equation

$$P(R(x,y,s)) = f(P(x,y,s),y_0,s).$$

It is easily verified that this functional equation has solution $P(x,y,s) = x$. Let us prove uniqueness of the solution in $\mathfrak{M}$. Otherwise there exists (x,y,s) and $x \neq P(x,y,s)$. We get

$$\rho_1(P(x,y,s),x) \le \alpha\rho_1(f(P(x,y,s),y_0,s),f(x,y_0,s)) =$$
$$= \alpha\rho_1(P(R(x,y,s)),f(x,y_0,s)) \le \alpha d(P,id_x).$$

It follows that $P(x,y,s) = x$.

The mapping P', where $P'(x,y,s) = p(q(x,y,s),y,s)$, also satisfies this functional equation,

$$P'(R(x,y,s)) = p(q(R(x,y,s)),g(q(x,y,s),y,s),\sigma(s)) =$$
$$= p(f(q(x,y,s),y,s),g(q(x,y,s),y,s),\sigma(s)) =$$
$$= f(p(q(x,y,s),y,s),y_0,s) = f(P'(x,y,s),y_0,s).$$

Besides $P' \in \mathfrak{M}$. Indeed

$$\rho_1(P'(x,y,s),x) = \rho_1(p(q(x,y,s),y,s),x) \le$$
$$\le \rho_1(p(q(x,y,s),y,s),q(x,y,s)) + \rho_1(q(x,y,s),x) \le$$
$$\le d(p,id_x) + d(q,id_x).$$

Consequently, we have

$$P'(x,y,s) = p(q(x,y,s),y) = x.$$

Step 4. The mapping Q**:** Let us consider the complete metric space

$$\mathfrak{N}(l) = \Big(Q \mid Q\colon \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \times \mathbb{S} \times \mathbb{Y} \to \mathbb{X} \text{ is continuous, } \sup_{x,y,s,z}\rho_1(Q(x,y,s,z),x) < +\infty \text{ and } \rho_1(Q(x,y,s,z),Q(x,y,s,z')) \le l\rho_2(z,z') \Big)$$

equipped with the supremum metric

$$d_1(Q,Q') = \sup_{x,y,s,z}\rho_1(Q(x,y,s,z),Q'(x,y,s,z)).$$

Let us consider mapping $Q \to \mathfrak{Q}Q$ defined by the functional equation

$$f(\mathfrak{Q}Q(x,y,s,z),z,s) = Q(T(x,y,s),g(Q(x,y,s,z),z,s)).$$

Let us note that $\mathfrak{L}Q$ is continuous. If $Q \in \mathfrak{N}(l)$, then

$$\rho_1(\mathfrak{L}Q(x,y,s,z),\mathfrak{L}Q(x,y,s,z')) \le$$
$$\le \alpha\rho_1(f(\mathfrak{L}Q(x,y,s,z),z,s),f(\mathfrak{L}Q(x,y,s,z'),z',s)) + \alpha\beta\rho_2(z,z') =$$
$$= \alpha\rho_1(Q(T(x,y,s),g(Q(x,y,s,z),z,s)),$$
$$Q(T(x,y,s),g(Q(x,y,s,z'),z',s))) + \alpha\beta\rho_2(z,z') \le$$
$$\le (\alpha l(\gamma l + \delta) + \alpha\beta)\rho_2(z,z') = l\rho_2(z,z').$$

Let us note that

$$\rho_1(\mathfrak{L}Q(x,y,s,z),x) \le \alpha\rho_1(f(\mathfrak{L}Q(x,y,s,z),z,s),f(x,z,s)) \le$$
$$\le \alpha\rho_1(Q(T(x,y,s),g(Q(x,y,s,z),z,s)),f(x,y,s)) +$$
$$+ \alpha\rho_1(f(x,y,s),f(x,z,s)) \le$$
$$\le \alpha d_1(Q,id_x) + 2\alpha\sup_{x,y,s}\rho_1(f(x,y,s),f(x,y_0,s)).$$

It follows that $Q \in \mathfrak{N}(l)$. We have

$$\rho_1(\mathfrak{L}Q(x,y,s,z),\mathfrak{L}Q'(x,y,s,z)) \le$$
$$\le \alpha\rho_1(f(\mathfrak{L}Q(x,y,s,z),z,s),f(\mathfrak{L}Q'(x,y,s,z),z,s)) \le$$
$$\le \alpha\rho_1(Q(T(x,y,s),g(Q(x,y,s,z),z,s)),$$
$$Q'(T(x,y,s),g(Q(x,y,s,z),z,s))) +$$
$$+ \alpha l\gamma\rho_1(Q(x,y,s,z),Q'(x,y,s,z)).$$

Hence

$$d_1(\mathfrak{L}Q,\mathfrak{L}Q') \le \alpha(1 + \gamma l)d_1(Q,Q').$$

It follows that there is a unique solution in $\mathfrak{N}(l)$.

The mapping Q', where $Q'(x,y,s,z) = q(p(x,y,s),z,s)$, also satisfies the functional equation

$$f(Q'(x,y,s,z),z,s) = f(q(p(x,y,s),z,s),z,s) =$$
$$= q(R(p(x,y,s),z,s)) =$$
$$= q(p(T(x,y,s)),g(q(p(x,y,s),z,s),z,s),\sigma(s)) =$$
$$= Q'(T(x,y,s),g(Q'(x,y,s,z),z,s)),$$

and the Lipschitz condition

$$\rho_1(Q'(x,y,s,z),Q'(x,y,s,z')) =$$
$$= \rho_1(q(p(x,y,s),z,s),q(p(x,y,s),z',s)) \le l\rho_2(z,z').$$

Besides

$$\rho_1(Q'(x,y,s,z),x) \le \rho_1(q(p(x,y,s),z,s),p(x,y,s)) +$$
$$+ \rho_1(p(x,y,s),x) \le d(q,id_x) + d(p,id_x).$$

It follows that $Q' \in \mathfrak{N}(l)$ and therefore $Q(x,y,s,z) = q(p(x,y,s),z,s)$. It is easily verify :: that $Q(x,y,s,y) = x$. Therefore $q(p(x,y,s),y,s) = x$.

We obtain that the mappings H, Γ: $\mathbb{X} \times \mathbb{Y} \times \mathbb{S} \to \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \times \mathbb{S}$

defined by $H(x,y,s) = (p(x,y,s),y,s)$ and $\Gamma(x,y,s) = (q(x,y,s),y,s)$ are inverse to each other and that H is a homeomorphism that establishes conjugacy of the mappings T and R. Thus the theorem is proved.

3. Example

Let us consider a nonautonomous system of difference equations on $\mathbb{Z}$ of the form

$$x(n + 1) = A(n)x(n) + F(x(n),y(n),n),$$
$$y(n + 1) = B(n)y(n) + G(x(n),y(n),n),$$

where $x \in \mathbb{X}$, $y \in \mathbb{Y}$, $\mathbb{X}$ and $\mathbb{Y}$ are Banach spaces, $A(n)$ and $B(n)$ are bounded linear mappings, $A(n)$ is invertible, $\|B(n)\| < \|A^{-1}(n)\|^{-1}$, and mappings $F\colon \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{X}$, $G\colon \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Y}$ satisfy Lipschitz conditions

$$|F(x,y,n) - F(x',y',n)| \le \varepsilon(|x - x'| + |y - y'|),$$
$$|G(x,y,n) - G(x',y',n)| \le \varepsilon(|x - x'| + |y - y'|)$$

and mapping F is uniformly bounded.

It is easy to verify that this mapping satisfies the hypotheses (H1) - (H4), where $\alpha = ((\sup_n\|A^{-1}(n)\|)^{-1} - \varepsilon)^{-1}$, $\beta = \gamma = \varepsilon$, $\delta = \sup_n\|B(n)\| + \varepsilon$ and $\sigma(n) = n + 1$. The mapping given by formula $x_1 = A(n)x + F(x,y,n)$ for fixed n and y is surjective, if $\varepsilon\sup_n\|A^{-1}(n)\| < 1$. The condition $\alpha(\delta + 2\sqrt{\beta\gamma}) < 1$ reduces to the inequality $\varepsilon \le 4^{-1}((\sup_n\|A^{-1}(n)\|)^{-1} - \sup_n\|B(n)\|)$. Let us note that $\varepsilon\sup_n\|A^{-1}(n)\| \le 4^{-1} < 1$. Then given nonautonomous system of difference equations is globally conjugate to

$$x(n + 1) = A(n)x(n) + F(x(n),0,n),$$
$$y(n + 1) = B(n)y(n) + G(q(x(n),y(n),n),y(n),n).$$

Acknowledgment

This work was supported by the Latvian Council of Science, Grant 90.224.

References

1. Aulbach B., Garay B.M. Linearization and decoupling of dynamical and semidynamical systems. - The Second Colloquium on Differential Equations - Singapore: World Scientific, 1992. - P. 15-27.
2. Aulbach B., Garay B.M. Linearizing the expanding part of noninvertible mappings. // J.Appl.Math.Phys. - 1993. - Vol. 44. - P. 469-494.
3. Hartman P. A lemma in the theory of structural stability of differential equations. // Proc.Amer.Math.Soc. - 1960. - Vol. 11, N 4. - P. 610-622.
4. Kirchgraber U. Sur les proprietes geometriques au voisinage d' une variete invariante. // C.R.Acad.Sci.Paris Ser. A - 1979. - Vol.288, N 9. - P. 511-514.
5. Papaschinopoulos G. Linearization near the summable manifold for discrete systems // Studia Sci. Math. Hungar. - 1990. - Vol. 25, N 3. - P. 275-289.
6. Kirchgraber U., Palmer K.J. Geometry in the neighborhood of invariant manifolds of maps and flows and linearization. - Pitman Res. Notes Math. Ser.- Harlow: Longman Sci. Tech., 1991. - Vol.233.
7. Рейнфелд А.А. Сопряженность гомеоморфизмов в метрическом пространстве. // Латв. мат. ежегодник. - 1988. - Вып. 31. - С. 236.
8. Reinfelds A. Reduction of discrete dynamical and semidynamical systems. - Fourth Colloquium on the Qualitative Theory of Differential Equations. Abstracts of the colloquium held at the Szeged, Hungary, August 18-21, 1993. - Szeged, 1993. - P. 45.
9. Reinfelds A. Decoupling of mappings in a metric space. // Proc. Latvian Acad. Sci. Part B. - 1994. - N 2(559). - P. 67-75.
10. Reinfelds A. The reduction principle for discrete dynamical and semidynamical systems in metric spaces. // J. Appl. Math. Phys. (to appear).
11. Reinfelds A. Partial decoupling for noninvertible mappings.

// Differential Equations and Dynamical Systems (to appear).

А.Рейнфелд. Частичное разделение семидинамических систем.
Аннотация. Доказывается теорема о топологической сопряженности двух семидинамических систем.
УДК 517.988.6, 517.938, 517.965

A.Reinfelds. Semidinamisku sistēmu daļēja sadalīšana.
Anotācija. Pierādīta teorēma par divu semidinamisku sistēmu topoloģisko ekvivalenci.

Institute of Mathematics
Latvian Academy of Science
University of Latvia
Turgeņeva ielā 19,
Rīga, LV-1524, Latvia

Received 22.09.93

О СУЩЕСТВОВАНИИ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ХИМИЧЕСКОГО КАТАЛИЗА

А.И.Звягинцев

Аннотация. При $n=1,2$ для краевой задачи

$$d_n((1-u_{3-n})u_n'' + u_n u_{3-n}'' =$$
$$= -d_n(1-u_1-u_2)^n + a_{2+n}u_n^n + u_1 u_2(1+b_1 u_1+b_2 u_2)^N,$$
$$u_n'(-1)=u_n'(1)=0,$$

с дополнительными ограничениями $u_n(x)\ge 0$, $u_1(x)+u_2(x)\le 1$, $x\in[-1,1]$, доказывается существование решений при выполнении условий $(1-b_1)^N\ge 0$, $(1-b_1+b_2)^N\ge 0$, $a_3 d_2\ge 2a_4 d_1$.

УДК 517.927

При моделировании реакции окисления на поверхности катализатора [1] возникает необходимость решить следующую краевую задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varphi(u) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\Phi(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$
$$u(x,0)=a(x), \qquad -1\le x\le 1,$$
$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=-1} = \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=1} = 0, \qquad t\ge 0,$$

где

$$u=(u_1,u_2); \qquad \varphi=(\varphi_1,\varphi_2);$$
$$\varphi_1=\varphi_1(u_1,u_2)=a_1(1-u_1-u_2)-a_3u_1-u_1u_2(1+b_1u_1+b_2u_2)^N;$$
$$\varphi_2=\varphi_2(u_1,u_2)=a_2(1-u_1-u_2)^2-a_4u_2^2-u_1u_2(1+b_1u_1+b_2u_2)^N;$$
$$\Phi(u) = \begin{pmatrix} d_1(1-u_2) & d_1u_1 \\ d_2u_2 & d_2(1-u_1) \end{pmatrix};$$

$$a_1,a_2,a_3,a_4,d_1,d_2>0; \quad b_1,b_2>-1; \quad N\in\{0,1,2,\dots\}.$$

Из физических соображений функции $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ при

$-1\le x\le 1$, $t\ge 0$ должны удовлетворять оценкам

$$0\le u_1(x,t)\le 1,\quad 0\le u_2(x,t)\le 1,\quad 0\le u_1(x,t)+u_2(x,t)\le 1.$$

В случае стационарного режима $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\equiv 0\right)$ получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$u_1'' = \frac{(d_1^{-1}\varphi_1(u_1,u_2)+d_2^{-1}\varphi_2(u_1,u_2))u_1-d_1^{-1}\varphi_1(u_1,u_2)}{1-u_1-u_2}, \tag{1}$$

$$u_2'' = \frac{(d_1^{-1}\varphi_1(u_1,u_2)+d_2^{-1}\varphi_2(u_1,u_2))u_2-d_2^{-1}\varphi_2(u_1,u_2)}{1-u_1-u_2} \tag{2}$$

с краевыми условиями Неймана

$$u_1'(-1)=u_2'(-1)=u_1'(1)=u_2'(1)=0 \tag{3}$$

и дополнительными ограничениями

$$u_1(x)\ge 0,\quad u_2(x)\ge 0,\quad u_1(x)+u_2(x)\le 1,\quad x\in[-1,1]. \tag{4}$$

Рассмотрим краевую задачу

$$u''=f_1(u,v), \tag{5}$$

$$v''=f_2(u,v), \tag{6}$$

$$u'(a)=v'(a)=u'(b)=v'(b)=0, \tag{7}$$

где $f_1,f_2:D\to\mathbb{R}$; $D\subset\mathbb{R}^2$; $u,v:I\to\mathbb{R}$; $I=[a,b]$. В дальнейшем понадобится следующий результат [2].

Теорема 1. *Пусть существуют функции $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\in C_2(I)$, обладающие следующими свойствами:*

1) $\alpha_1(x)\le\beta_1(x)$ и $\alpha_2(x)\le\beta_2(x)$ для всех $x\in I$;

2) $f_1,f_2\in C(W)$, где $W\subset D$ и $W=\Big\{(u,v):\ \alpha_1(x)\le u\le\beta_1(x),\ \alpha_2(x)\le v\le\beta_2(x),\ x\in I\Big\}$;

3) $\alpha_1''(x)\ge f_1(\alpha_1(x),v(x))$ и $\beta_1''(x)\le f_1(\beta_1(x),v(x))$ для $\alpha_2(x)\le v(x)\le\beta_2(x)$, $x\in I$;

4) $\alpha_2''(x)\ge f_2(u(x),\alpha_2(x))$ и $\beta_2''(x)\le f_2(u(x),\beta_2(x))$ для $\alpha_1(x)\le u(x)\le\beta_1(x)$, $x\in I$;

5) $\alpha_i'(a)\ge 0$, $\alpha_i'(b)\le 0$, $\beta_i'(a)\le 0$, $\beta_i'(b)\ge 0$ для $i=1,2$.

Тогда задача (5)-(7) имеет решение $u(x)$, $v(x)$ такое, что для всех $x\in I$ выполняются неравенства

$$\alpha_1(x)\le u(x)\le\beta_1(x),\qquad \alpha_2(x)\le v(x)\le\beta_2(x).$$

С помощью этой теоремы докажем основной результат.

Теорема 2. Пусть выполняются условия

$$(1-b_1)^N \ge 0, \qquad (1-b_1+b_2)^N \ge 0, \tag{8}$$

$$a_3 d_2 \ge 2a_4 d_1. \tag{9}$$

Тогда задача (1)-(4) имеет решение.

Доказательство. Обозначим

$$v(x)=u_1(x)+u_2(x). \tag{10}$$

Сложив уравнения (1) и (2), рассмотрим следующую краевую задачу:

$$u_2'' = \frac{(d_1^{-1}\varphi_1(v-u_2,u_2)+d_2^{-1}\varphi_2(v-u_2,u_2))u_2-d_2^{-1}\varphi_2(v-u_2,u_2)}{1-v}, \tag{11}$$

$$v''=-d_1^{-1}\varphi_1(v-u_2,u_2)-d_2^{-1}\varphi_2(v-u_2,u_2), \tag{12}$$

$$u_2'(-1)=v'(-1)=u_2'(1)=v'(1)=0. \tag{13}$$

Полагая для всех $x\in[-1,1]$

$$\alpha_1(x)=0, \quad \beta_1(x)=1, \quad \alpha_2(x)=0, \quad \beta_2(x)=1-\varepsilon,$$

где $\varepsilon\in(0,1)$ и будет определен далее, проверим выполнение условий теоремы 1 для задачи (11)-(13). Если считать, что $u_2=u$, а правые части уравнений (11), (12) соответственно обозначить через $f_1(u_2,v)$, $f_2(u_2,v)$, то очевидно, что первое, второе и пятое условия теоремы 1 выполнены. Покажем, что третье и четвертое условия теоремы 1 тоже выполняются.

Для $0\le v(x)\le 1-\varepsilon$, $x\in[-1,1]$ в силу (8) имеем:

$$\alpha_1''(x)=0\ge -a_2d_2^{-1}(1-v(x))=f_1(\alpha_1(x),v(x)),$$

$$\beta_1''(x)=0\le d_1^{-1}(a_1+a_3+(1-b_1(1-v(x)+b_2)^N)=f_1(\beta_1(x),v(x)).$$

В силу (8), (9) для $0\le u_2(x)\le 1$, $x\in[-1,1]$ имеем:

$$\alpha_2''(x)=0 \ge -\frac{a_1}{d_1}-\frac{a_2}{d_2}-\frac{a_3}{d_1}u_2(x)+\frac{a_4}{d_2}u_2^2(x)-$$

$$-\left(\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}\right)\left(1-b_1u_2(x)+b_2u_2(x)\right)^N u_2^2(x) = f_2(u_2(x),\alpha_2(x)),$$

$$\beta_2''(x)=0 \le \left[\frac{a_3}{d_1}(1-u_2(x))+\frac{a_4}{d_2}u_2^2(x)+\left(\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}\right)u_2(x)(1-u_2(x))\left(1+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\,b_1(1-\varepsilon-u_2(x))+b_2u_2(x)\right)^N\right]-\varepsilon\left(\frac{a_1+a_3}{d_1}+\frac{a_2}{d_2}\varepsilon+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}\right)u_2(x)\left(1+b_1(1-\varepsilon-u_2(x))+b_2u_2(x)\right)^N\right) =$$

$$= f_2(u_2(x), \beta_2(x)).$$

Поскольку выражение в квадратных скобках строго положительно, то последнее неравенство выполняется для достаточно малых $\varepsilon\in(0,1)$. Взяв ε_0 достаточно малым, получаем, что третье и четвертое условия теоремы 1 тоже выполняются. Тогда по теореме 1 краевая задача (11)-(13) имеет решение $u_2(x)$, $v(x)$, причем для всех $x\in[-1,1]$ справедливы неравенства

$$0\le u_2(x)\le 1, \qquad 0\le v(x)\le 1-\varepsilon_0. \tag{14}$$

Так как $u_1(x)=v(x)-u_2(x)$ является решением уравнения (1) и в силу (13) удовлетворяет условиям $u_1'(-1)=u_1'(1)=0$, то $u_1(x)$, $u_2(x)$ является решением краевой задачи (1)-(3). Из (14) следует, что $u_1(x)<1$ для всех $x\in[-1,1]$. Покажем, что функция $u_1(x)$ неотрицательна на отрезке $[-1,1]$. Пусть $x_0\in[-1,1]$ – точка, в которой $u_1(x)$ достигает минимума:

$$u_1(x_0)=\min_{-1\le x\le 1} u_1(x).$$

Предположим, что $u_1(x_0)<0$. Тогда из (1), (8), (9), (14) вытекает, что

$$u_1''(x_0) < \frac{u_1(x_0)}{1-v(x_0)}\left(\frac{a_3+u_2(x_0)(1+b_1u_1(x_0)+b_2u_2(x_0))^N}{d_1}\Big(1-u_1(x_0)\Big)-\right.$$

$$\left.-\frac{a_4u_2(x_0)+u_1(x_0)(1+b_1u_1(x_0)+b_2u_2(x_0))^N}{d_2}u_2(x_0)\right) \le \tag{15}$$

$$\le \frac{u_1(x_0)}{1-v(x_0)}\left(\frac{a_3}{d_1}-\frac{a_4}{d_2}u_2^2(x_0)\right) \le 0.$$

Если $x_0=-1$ или $x_0=1$, то с учетом (13), (15) имеем

$$u_1(x_0)<0, \quad u_1'(x_0)=0, \quad u_1''(x_0)<0.$$

Следовательно, на концах отрезка $[-1,1]$ функция $u_1(x)$ не может достигать отрицательного минимума. В случае же $-1<x_0<1$ необходимо выполнение условий

$$u_1'(x_0)=0, \qquad u_1''(x_0)\ge 0,$$

что противоречит (15). Полученное противоречие доказывает оценку $u_1(x)\ge 0$ для $x\in[-1,1]$.

Таким образом, для функций $u_1(x)$, $u_2(x)$, которые являются решением краевой задачи (1)-(3), установили оценки

$$0\le u_1(x)<1, \qquad 0\le u_2(x)\le 1, \qquad 0\le u_1(x)+u_2(x)<1$$

при всех $x\in[-1,1]$. Следовательно, $u_1(x)$, $u_2(x)$ есть решение исходной задачи (1)-(4). Теорема доказана.

В задаче (1)-(4) с физической точки зрения интерес представляют прежде всего решения, отличные от констант. Если, кроме условий (8), (9), потребовать, чтобы алгебраическая система уравнений

$$\begin{cases} a_1(1-y-z)-a_3y-yz(1+b_1y+b_2z)^N=0, \\ a_2(1-y-z)^2-a_4z^2-yz(1+b_1y+b_2z)^N=0 \end{cases} \qquad (16)$$

не имела решений в квадрате $\Pi=\{(y,z):\ 0\le y\le 1,\ 0\le z\le 1\}$, то, очевидно, эти условия гарантируют существование решения задачи (1)-(4), отличного от констант.

Литература

1. Еленин Г.Г., Лысак Т.М. Диссипативные структуры в модельной реакции окисления окиси углерода // Дифференц.уравнения. - 1988. - Т.24, N 7. - С.1186-1192.
2. Звягинцев А.И., Зубова Л.Ф., Пономарев Д.Ю. О существовании стационарных решений одной краевой задачи химической кинетики // Теоретические и численные исследования краевых задач. - Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1989. - С.33-40.

A.Zvyagincev. On existence of stationary solutions for some problem in chemical catalysis.

Summary. The existence of a solution for the boundary value problem

$$d_n((1-u_{3-n})u_n'' + u_nu_{3-n}'' =$$
$$= -d_n(1-u_1-u_2)^n + a_{2+n}u_n^n + u_1u_2(1+b_1u_1+b_2u_2)^N,$$
$$u_n'(-1)=u_n'(1)=0,$$

with additional constraints $u_n\ge 0$ $u_1(x)+u_2(x)\le 1$, $x\in[-1,1]$ is proved in the case of $n=1,2$ provided that $(1-b_1)^N\ge 0$, $(1-b_1+b_2)^N\ge 0$, $a_3d_2\ge 2a_4d_1$.

MSC 34B15

A.Zvjagincevs. Par kāda ķīmiskās katalīzes uzdevuma stacionāru atrisinājumu eksistenci.

Anotācija. Tiek pierādīta robežproblēmas

$$d_n((1-u_{3-n})u_n'' + u_nu_{3-n}'' =$$

$$= -d_n(1-u_1-u_2)^n + a_{2+n}u_n^n + u_1u_2(1+b_1u_1+b_2u_2)^N,$$
$$u_n'(-1)=u_n'(1)=0,$$

$n=1,2$ ar papildus ierobežojumiem $u_n(x)\geq 0$, $u_1(x)+u_2(x)\leq 1$, $x\in[-1,1]$ atrisinājumu eksistence, ja izpildās nosacījumu $(1-b_1)^N\geq 0$, $(1-b_1+b_2)^N\geq 0$, $a_3d_2\geq 2a_4d_1$.

Институт математики и информатики
Латвийского университета
Рига, б.Райня, 29

Поступила 29.07.93

МЕТОД АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ ОБОБЩЕННОЙ РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

А.Я.Лепин

Аннотация. Для краевой задачи

$$x''=f(t,x,x'),\quad H_1x=h_1,\quad H_2x=h_2,\quad \alpha\le x\le\beta,\quad U,$$

где α - обобщенная нижняя функция, β - обобщенная верхняя функция и U - некоторое условие, рассматривается применение метода аппроксимации для доказательства существования обобщенного решения.

УДК 517.927

Пусть $a\in\mathbb{R}$, $b\in(a,\infty)$ и $I=[a,b]$. Для $\gamma_1,\gamma_2:I\to\mathbb{R}$ и $i\in\{1,2\}$

$$\gamma_{i*}(a)=\varliminf_{\tau\to a+}\gamma_i(\tau),\quad \gamma_i^*(a)=\varlimsup_{\tau\to a+}\gamma_i(\tau),$$

$$\gamma_{i*}(b)=\varliminf_{\tau\to b-}\gamma_i(\tau),\quad \gamma_i^*(b)=\varlimsup_{\tau\to b-}\gamma_i(\tau),$$

$$\Big(\forall t\in(a,b)\Big)\Big(\gamma_{i*}(t)=\min\{\varliminf_{\tau\to t-}\gamma_i(\tau),\ \varliminf_{\tau\to t+}\gamma_i(\tau)\}\Big),$$

$$\Big(\forall t\in(a,b)\Big)\Big(\gamma_i^*(t)=\max\{\varlimsup_{\tau\to t-}\gamma_i(\tau),\ \varlimsup_{\tau\to t+}\gamma_i(\tau)\}\Big),$$

$$L_i=\Big\{(t,x)\in(a,b)\times\mathbb{R}\ :\ \gamma_{i*}(t)\le x\le\gamma_i^*(t)\Big\}\ \cup$$

$$\cup\ \Big\{(a,x)\in\{a\}\times\mathbb{R}\ :\ \min\{\gamma_i(a),\gamma_{i*}(a)\}\le x\le\max\{\gamma_i(a),\gamma_i^*(a)\}\Big\}\ \cup$$

$$\cup\ \Big\{(b,x)\in\{b\}\times\mathbb{R}\ :\ \min\{\gamma_i(b),\gamma_{i*}(b)\}\le x\le\max\{\gamma_i(b),\gamma_i^*(b)\}\Big\},$$

$$\rho(\gamma_1,\gamma_2)=\inf\{\varepsilon\in(0,\infty):\ (\forall r_1\in L_1)(\exists r_2\in L_2)(\|r_1-r_2\|<\varepsilon)\ \wedge$$

$$(\forall r_2\in L_2)(\exists r_1\in L_1)(\|r_1-r_2\|<\varepsilon\}\ +\ |\gamma_1(a)-\gamma_2(a)|\ +\ |\gamma_1(b)-\gamma_2(b)|.$$

Введем обозначения: $\mathrm{Car}(I\times\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ - множество функций, удовлетворяющих условию Каратеодори ([1], с.9), $AG_f(I,\mathbb{R})$ - множество обобщенных нижних функций уравнения $x''=f(t,x,x')$

([1], c.25), $BG_f(I,\mathbb{R})$ - множество обобщенных верхних функций уравнения $x''=f(t,x,x')$ ([1], c.25), $SG_f(I,\mathbb{R})$ - множество обобщенных решений уравнения $x''=f(t,x,x')$ ([1], c.41) с топологией, определяемой метрикой ρ, $C(SG_f(I,\mathbb{R}),\mathbb{R})$ - множество непрерывных функционалов из $SG_f(I,\mathbb{R})$ в $\mathbb{R}$ и $\mathrm{Fun}(I,\mathbb{R})$ - множество функций из I в $\mathbb{R}$. Пусть $f,f_n\in\mathrm{Car}(I\times\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$, $H_1,H_2\in C(SG_f(I,\mathbb{R}),\mathbb{R})$, $H_{1n},H_{2n}\in C(SG_{f_n}(I,\mathbb{R}),\mathbb{R})$, $h_1,h_2,h_{1n},h_{2n}\in\mathbb{R}$, $\alpha\in AG_f(I,\mathbb{R})$, $\alpha_n\in AG_{f_n}(I,\mathbb{R})$, $\beta\in BG_f(I,\mathbb{R})$, $\beta_n\in BG_{f_n}(I,\mathbb{R})$ для $n\in\mathbb{N}$ и $\alpha\le\beta$.

Рассмотрим краевые задачи:

$$x''=f(t,x,x'),\quad H_1x=h_1,\quad H_2x=h_2,\quad \alpha\le x\le\beta,\quad U, \tag{1}$$

$$x_n''=f_n(t,x_n,x_n'),\quad H_{1n}x_n=h_{1n},\quad H_{2n}x_n=h_{2n},\quad \alpha_n\le x_n\le\beta_n,\quad U_n, \tag{1n}$$

где U, U_n - некоторые условия ([1], c.52), $n\in\mathbb{N}$.

Определение аппроксимации. Если

$$(\forall n\in\mathbb{N})\ (\alpha_n\le\beta_n), \tag{2.1}$$

$$\lim_{n\to\infty} h_{1n}=h_1,\quad \lim_{n\to\infty} h_{2n}=h_2, \tag{2.2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\rho(\alpha,\alpha_n)=0,\quad \lim_{n\to\infty}\rho(\beta,\beta_n)=0, \tag{2.3}$$

$$(\forall M\in(0,\infty))(\exists\varphi\in L(I,\mathbb{R}))(\forall n\in\mathbb{N})(\forall t\in I)\\ (\forall x,y\in[-M,M])(|f\ (t,x,y)|\le\varphi(t)), \tag{2.4}$$

$$(\forall t\in I)(\forall u,v:\mathbb{N}\to\mathbb{R})(\lim_{n\to\infty} u_n=u_1\wedge\lim_{n\to\infty} v_n=v_1\Rightarrow\\ \lim_{n\to\infty} f_n(t,u_n,v_n)=f(t,u_1,v_1)), \tag{2.5}$$

$$(\forall x\in SG_f(I,\mathbb{R}))(\forall z:\mathbb{N}\to\mathrm{Fun}(I,\mathbb{R}))(\alpha\le x\le\beta\wedge(\forall n\in\mathbb{N})\\ (z_n\in SG_{f_n}(I,\mathbb{R})\wedge\alpha_n\le z_n\le\beta_n)\wedge\lim_{n\to\infty}\rho(x,z_n)=0\Rightarrow\\ \lim_{n\to\infty} H_{1n}z_n=H_1x\wedge\lim_{n\to\infty} H_{2n}z_n=H_2x), \tag{2.6}$$

$$(\forall x\in SG_f(I,\mathbb{R}))(\forall z:\mathbb{N}\to\mathrm{Fun}(I,\mathbb{R}))(\alpha\le x\le\beta\wedge\lim_{n\to\infty}\rho(x,z_n)=0\wedge\\ \wedge(\forall n\in\mathbb{N})(z_n\in SG_{f_n}(I,\mathbb{R})\wedge\alpha_n\le z_n\le\beta_n\wedge U_n)\Rightarrow U), \tag{2.7}$$

то краевые задачи (1n) аппроксимируют краевую задачу (1).

Одним из методов изучения обобщенной разрешимости краевой задачи (1) является рассмотрение аппроксимирующих краевых задач (1n). Наиболее простой результат в этом направлении дается следующей теоремой.

Теорема 1. Если краевые задачи ($1n$) аппроксимируют краевую задачу (1) и для бесконечного числа $n\in\mathbb{N}$ имеют обобщенные решения x_n, то краевая задача (1) имеет обобщенное решение.

Доказательство. Из (2.3) следует равномерная ограниченность α_n и β_n. По теореме 4 ([1], с.28) найдутся $\alpha_0\in AG_f(I,\mathbb{R})$, $\beta_0\in BG_f(I,\mathbb{R})$, $x_0\in SG_f(I,\mathbb{R})$ и $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ такие, что для любого $n\in\mathbb{N}$ обобщенное решение краевой задачи ($1_{\varphi(n)}$) существует, $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(n)=\infty$ и для любого $t\in I$

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_{\varphi(n)}(t)=\alpha_0(t),\quad \lim_{n\to\infty}\beta_{\varphi(n)}(t)=\beta_0(t),\quad \lim_{n\to\infty}x_{\varphi(n)}(t)=x_0(t).$$

Пусть

$$M=\Big\{t\in(a,b):\ |D_l\alpha(t)|=\infty \vee |D_l\beta(t)|=\infty \vee |D_r\alpha(t)|=\infty \vee |D_r\beta(t)|=\infty\Big\}.$$

Для $t\in(a,b)\setminus M$ из

$$(\forall n\in\mathbb{N})(\alpha_{\varphi(n)}(t)\le x_{\varphi(n)}(t)\le\beta_{\varphi(n)}(t))$$

получаем

$$\alpha(t)=\alpha_0(t)\le x_0(t)\le\beta_0(t)=\beta(t).$$

Следовательно, найдется $x\in SG_f(I,\mathbb{R})$ такое, что $\alpha\le x\le\beta$ и $\rho(x,x_0)=0$. Откуда

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x,x_{\varphi(n)})=\lim_{n\to\infty}\rho(x_0,x_{\varphi(n)})=0.$$

Следовательно, $H_1x=h_1$, $H_2x=h_2$, и выполняется условие U.

Теперь рассмотрим применение метода аппроксимации для доказательства теорем вида :

Теорема 2. Пусть

$$(\forall x\in SG_f(I,\mathbb{R}))(\alpha\le x\le\beta \wedge U\Rightarrow V).$$

Тогда существует обобщенное решение краевой задачи (1).

Наряду с теоремой 2 для $n\in\mathbb{N}$ рассмотрим теоремы.

Теорема 2n. Пусть

$$(\forall x_n\in SG_{f_n}(I,\mathbb{R}))(\alpha_n\le x_n\le\beta_n \wedge U_n\Rightarrow V_n).$$

Тогда существует обобщенное решение краевой задачи ($1n$).

Обозначим через W условие, которое получается в пределе из условий $\neg V_n$:

$$(\forall x\in SG_f(I,\mathbb{R}))(\forall z:\mathbb{N}\to\mathrm{Fun}(I,\mathbb{R}))(\alpha\le x\le\beta \wedge \lim_{n\to\infty}\rho(x,z_n)=0 \wedge$$
$$\wedge\ (\forall n\in\mathbb{N})(z_n\in SG_{f_n}(I,\mathbb{R}) \wedge \alpha_n\le z_n\le\beta_n \wedge \neg V_n) \Rightarrow W).$$

Теорема 3. Если краевые задачи ($1n$) аппроксимируют краевую задачу (1), для любого $n\in\mathbb{N}$ справедлива теорема $2n$ и

$$(\forall x\in SG_f(I,\mathbb{R}))(\alpha\le x\le\beta \wedge U \wedge V \wedge W \Rightarrow H_1x=h_1 \wedge H_2x=h_2), \tag{3}$$

то справедлива теорема 2.

Доказательство. Если множество

$$\left\{n\in\mathbb{N}:\ (\forall x_n\in SG_{f_n}(I,\mathbb{R}))(\alpha_n\le x_n\le\beta_n \wedge U_n\Rightarrow V_n)\right\}$$

бесконечно, то по теореме 1 существует обобщенное решение краевой задачи (1). Если множество

$$\left\{n\in\mathbb{N}:\ (\exists x_n\in SG_{f_n}(I,\mathbb{R}))(\alpha_n\le x_n\le\beta_n \wedge U_n \wedge \neg V_n)\right\}$$

бесконечно, то аналогично тому, как это делается в доказательстве теоремы 1, находим $x\in SG_f(I,\mathbb{R})$ такое, что $\alpha\le x\le\beta$, U и W. Откуда $H_1x=h_1$ и $H_2x=h_2$. Следовательно, x есть обобщенное решение краевой задачи (1).

Теорема 4. *Следующие наборы U, V и W удовлетворяют условию* (3).

$$U=\varnothing, \tag{4.0}$$

$$V=$$

$$= (x(a)=\alpha(a) \wedge x(b)=\alpha(b) \Rightarrow H_1x\le h_1 \vee H_2x\le h_2) \wedge \tag{4.1}$$

$$\wedge\ (x(a)=\alpha(a) \wedge H_2x=h_2 \Rightarrow H_1x\le h_1) \wedge \tag{4.2}$$

$$\wedge\ (x(a)=\alpha(a) \wedge x(b)=\beta(b) \Rightarrow H_1x\le h_1 \vee H_2x\ge h_2) \wedge \tag{4.3}$$

$$\wedge\ (x(b)=\beta(b) \wedge H_1x=h_1 \Rightarrow H_2x\ge h_2) \wedge \tag{4.4}$$

$$\wedge\ (x(a)=\beta(a) \wedge x(b)=\beta(b) \Rightarrow H_1x\ge h_1 \vee H_2x\ge h_2) \wedge \tag{4.5}$$

$$\wedge\ (x(a)=\beta(a) \wedge H_2x=h_2 \Rightarrow H_1x\ge h_1) \wedge \tag{4.6}$$

$$\wedge\ (x(a)=\beta(a) \wedge x(b)=\alpha(b) \Rightarrow H_1x\ge h_1 \vee H_2x\le h_2) \wedge \tag{4.7}$$

$$\wedge\ (x(b)=\alpha(b) \wedge H_1x=h_1 \Rightarrow H_2x\le h_2), \tag{4.8}$$

$$W=$$

$$= (x(a)=\alpha(a) \wedge x(b)=\alpha(b) \wedge H_1x\ge h_1 \wedge H_2x\ge h_2) \vee \tag{4.9}$$

$$\vee\ (x(a)=\alpha(a) \wedge H_2x=h_2 \wedge H_1x\ge h_1) \vee \tag{4.10}$$

$$\vee\ (x(a)=\alpha(a) \wedge x(b)=\beta(b) \wedge H_1x\ge h_1 \wedge H_2x\le h_2) \wedge \tag{4.11}$$

$$\vee\ (x(b)=\beta(b) \wedge H_1x=h_1 \wedge H_2x\le h_2) \vee \tag{4.12}$$

$$\vee\ (x(a)=\beta(a) \wedge x(b)=\beta(b) \wedge H_1x\le h_1 \wedge H_2x\le h_2) \vee \tag{4.13}$$

$$\vee\ (x(a)=\beta(a) \wedge H_2x=h_2 \wedge H_1x\le h_1) \vee \tag{4.14}$$

$$\vee\ (x(a)=\beta(a) \wedge x(b)=\alpha(b) \wedge H_1x\le h_1 \wedge H_2x\ge h_2) \vee \tag{4.15}$$

$$\vee\ (x(b)=\alpha(b) \wedge H_1x=h_1 \wedge H_2x\ge h_2), \tag{4.16}$$

$$U=\varnothing, \tag{5.0}$$

$$V=$$

$$= (x(a)=\alpha(a) \wedge x(b)=\alpha(b) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow H_1x-H_2x\ge h_1-h_2 \vee H_1x+H_2x\le h_1+h_2) \wedge \tag{5.1}$$
$$\wedge (x(a)=\alpha(a) \wedge H_1x-H_2x=h_1-h_2 \Rightarrow H_1x\le h_1) \wedge \tag{5.2}$$
$$\wedge (x(a)=\alpha(a) \wedge x(b)=\beta(b) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow H_1x-H_2x\le h_1-h_2 \vee H_1x+H_2x\ge h_1+h_2) \wedge \tag{5.3}$$
$$\wedge (x(b)=\beta(b) \wedge H_1x+H_2x=h_1+h_2 \Rightarrow H_1x\ge h_1) \wedge \tag{5.4}$$
$$\wedge (x(a)=\beta(a) \wedge x(b)=\beta(b) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow H_1x-H_2x\le h_1-h_2 \vee H_1x+H_2x\ge h_1+h_2) \wedge \tag{5.5}$$
$$\wedge (x(a)=\beta(a) \wedge H_1x-H_2x=h_1-h_2 \Rightarrow H_1x\ge h_1) \wedge \tag{5.6}$$
$$\wedge (x(a)=\beta(a) \wedge x(b)=\alpha(b) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow H_1x-H_2x\ge h_1-h_2 \vee H_1x+H_2x\le h_1+h_2) \wedge \tag{5.7}$$
$$\wedge (x(b)=\alpha(b) \wedge H_1x+H_2x=h_1+h_2 \Rightarrow H_1x\ge h_1), \tag{5.8}$$

$$W=$$
$$= (x(a)=\alpha(a) \wedge x(b)=\alpha(b) \wedge$$
$$\wedge H_1x-H_2x\le h_1-h_2 \wedge H_1x+H_2x\ge h_1+h_2) \vee \tag{5.9}$$
$$\vee (x(a)=\alpha(a) \wedge H_1x-H_2x=h_1-h_2 \wedge H_1x\ge h_1) \vee \tag{5.10}$$
$$\vee (x(a)=\alpha(a) \wedge x(b)=\beta(b) \wedge$$
$$\wedge H_1x-H_2x\ge h_1-h_2 \wedge H_1x+H_2x\ge h_1+h_2) \vee \tag{5.11}$$
$$\vee (x(b)=\beta(b) \wedge H_1x+H_2x=h_1+h_2 \wedge H_1x\ge h_1) \vee \tag{5.12}$$
$$\vee (x(a)=\beta(a) \wedge x(b)=\beta(b) \wedge$$
$$\wedge H_1x-H_2x\ge h_1-h_2 \wedge H_1x+H_2x\le h_1+h_2) \vee \tag{5.13}$$
$$\vee (x(a)=\beta(a) \wedge H_1x-H_2x=h_1-h_2 \wedge H_1x\le h_1) \vee \tag{5.14}$$
$$\vee (x(a)=\beta(a) \wedge x(b)=\alpha(b) \wedge$$
$$\wedge H_1x-H_2x\le h_1-h_2 \wedge H_1x+H_2x\le h_1+h_2) \vee \tag{5.15}$$
$$\vee (x(b)=\alpha(b) \wedge H_1x+H_2x=h_1+h_2 \Rightarrow H_1x\le h_1), \tag{5.16}$$

$$U=\varnothing \tag{6.0}$$

$$V=$$
$$= (x(a)=\alpha(a) \wedge x(b)=\alpha(b) \Rightarrow H_1x+H_2x\le h_1+h_2) \wedge \tag{6.1}$$
$$\wedge ((x(a)=\alpha(a) \wedge x(b)=\beta(b)) \wedge$$
$$\wedge H_1x+H_2x=h_1+h_2 \Rightarrow H_1x\le h_1) \wedge \tag{6.2}$$
$$\wedge (x(b)=\beta(b) \wedge x(b)=\beta(b) \Rightarrow H_1x+H_2x\ge h_1+h_2) \wedge \tag{6.3}$$

$$\wedge\ ((x(a)=\beta(a)\ \wedge\ x(b)=\beta(b))\ \wedge$$
$$\wedge\ H_1x+H_2x=h_1+h_2\ \Rightarrow\ H_1x\geq h_1), \tag{6.4}$$

$$W=$$

$$=\ (x(a)=\alpha(a)\ \wedge\ x(b)=\alpha(b)\ \wedge\ H_1x+H_2x\geq h_1+h_2)\ \vee \tag{6.5}$$

$$\vee\ ((x(a)=\alpha(a)\ \wedge\ x(b)=\beta(b))\ \wedge$$
$$\wedge\ H_1x+H_2x=h_1+h_2\ \wedge\ H_1x\geq h_1)\ \vee \tag{6.6}$$

$$\vee\ (x(a)=\beta(a)\ \wedge\ x(b)=\beta(b)\ \wedge\ H_1x+H_2x\leq h_1+h_2)\ \vee \tag{6.7}$$

$$\vee\ ((x(a)=\beta(a)\ \wedge\ x(b)=\alpha(b))\ \wedge$$
$$\wedge\ H_1x+H_2x\leq h_1+h_2\ \wedge\ H_1x\leq h_1), \tag{6.8}$$

$$U\ =\ \alpha'(a)>\beta'(a)\ \wedge\ \alpha'(a)\geq x'(a)\geq\beta'(a), \tag{7.0}$$

$$V=$$

$$=\ (x'(a)=\alpha'(a)\ \wedge\ x(b)=\alpha(b)\ \Rightarrow\ H_1x\leq h_1\ \vee\ H_2x\leq h_2)\ \wedge \tag{7.1}$$
$$\wedge\ (x'(a)=\alpha'(a)\ \wedge\ H_2x=h_2\ \Rightarrow\ H_1x\leq h_1)\ \wedge \tag{7.2}$$
$$\wedge\ (x'(a)=\alpha'(a)\ \wedge\ x(b)=\beta(b)\ \Rightarrow\ H_1x\leq h_1\ \vee\ H_2x\geq h_2)\ \wedge \tag{7.3}$$
$$\wedge\ (x(b)=\beta(b)\ \wedge\ H_1x=h_1\ \Rightarrow\ H_2x\geq h_2)\ \wedge \tag{7.4}$$
$$\wedge\ (x'(a)=\beta'(a)\ \wedge\ x(b)=\beta(b)\ \Rightarrow\ H_1x\geq h_1\ \vee\ H_2x\geq h_2)\ \wedge \tag{7.5}$$
$$\wedge\ (x'(a)=\beta'(a)\ \wedge\ H_2x=h_2\ \Rightarrow\ H_1x\geq h_1)\ \wedge \tag{7.6}$$
$$\wedge\ (x'(a)=\beta'(a)\ \wedge\ x(b)=\alpha(b)\ \Rightarrow\ H_1x\geq h_1\ \vee\ H_2x\leq h_2)\ \wedge \tag{7.7}$$
$$\wedge\ (x(b)=\alpha(b)\ \wedge\ H_1x=h_1\ \Rightarrow\ H_2x\leq h_2), \tag{7.8}$$

$$W=$$

$$=\ (x'(a)=\alpha'(a)\ \wedge\ x(b)=\alpha(b)\ \wedge\ H_1x\geq h_1\ \wedge\ H_2x\geq h_2)\ \vee \tag{7.9}$$
$$\vee\ (x'(a)=\alpha'(a)\ \wedge\ H_2x=h_2\ \wedge\ H_1x\geq h_1)\ \vee \tag{7.10}$$
$$\vee\ (x'(a)=\alpha'(a)\ \wedge\ x(b)=\beta(b)\ \wedge\ H_1x\geq h_1\ \wedge\ H_2x\leq h_2)\ \wedge \tag{7.11}$$
$$\vee\ (x(b)=\beta(b)\ \wedge\ H_1x=h_1\ \wedge\ H_2x\leq h_2)\ \vee \tag{7.12}$$
$$\vee\ (x'(a)=\beta'(a)\ \wedge\ x(b)=\beta(b)\ \wedge\ H_1x\leq h_1\ \wedge\ H_2x\leq h_2)\ \vee \tag{7.13}$$
$$\vee\ (x'(a)=\beta'(a)\ \wedge\ H_2x=h_2\ \wedge\ H_1x\leq h_1)\ \vee \tag{7.14}$$
$$\vee\ (x'(a)=\beta'(a)\ \wedge\ x(b)=\alpha(b)\ \wedge\ H_1x\leq h_1\ \wedge\ H_2x\geq h_2)\ \vee \tag{7.15}$$
$$\vee\ (x(b)=\alpha(b)\ \wedge\ H_1x=h_1\ \wedge\ H_2x\geq h_2), \tag{7.16}$$

$$U\ =\ \alpha'(a)>\beta'(a)\ \wedge\ \alpha'(a)\geq x'(a)\geq\beta'(a), \tag{8.0}$$

$$V=$$

$$=\ (x'(a)=\alpha'(a)\ \wedge\ x(b)=\alpha(b)\ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ H_1x-H_2x\geq h_1-h_2\ \vee\ H_1x+H_2x\leq h_1+h_2)\ \wedge \tag{8.1}$$

$$\wedge\ (x'(a)=\alpha'(a)\ \wedge\ H_1x-H_2x=h_1-h_2\ \Rightarrow\ H_1x\leq h_1)\ \wedge \tag{8.2}$$

$$\begin{gathered}\wedge\ (x'(a)=\alpha'(a)\ \wedge\ x(b)=\beta(b)\ \Rightarrow \\ \Rightarrow H_1x-H_2x\le h_1-h_2\ \vee\ H_1x+H_2x\le h_1+h_2)\ \wedge\end{gathered} \tag{8.3}$$

$$\wedge\ (x(b)=\beta(b)\ \wedge\ H_1x+H_2x=h_1+h_2\ \Rightarrow\ H_1x\le h_1)\ \wedge \tag{8.4}$$

$$\begin{gathered}\wedge\ (x'(a)=\beta'(a)\ \wedge\ x(b)=\beta(b)\ \Rightarrow \\ \Rightarrow H_1x-H_2x\le h_1-h_2\ \vee\ H_1x+H_2x\ge h_1+h_2)\ \wedge\end{gathered} \tag{8.5}$$

$$\wedge\ (x'(a)=\beta'(a)\ \wedge\ H_1x-H_2x=h_1-h_2\ \Rightarrow\ H_1x\ge h_1)\ \wedge \tag{8.6}$$

$$\begin{gathered}\wedge\ (x'(a)=\beta'(a)\ \wedge\ x(b)=\alpha(b)\ \Rightarrow \\ \Rightarrow H_1x-H_2x\ge h_1-h_2\ \vee\ H_1x+H_2x\ge h_1+h_2)\ \wedge\end{gathered} \tag{8.7}$$

$$\wedge\ (x(b)=\alpha(b)\ \wedge\ H_1x+H_2x=h_1+h_2\ \Rightarrow\ H_1x\ge h_1), \tag{8.8}$$

$$W=$$

$$\begin{gathered}=\ (x'(a)=\alpha'(a)\ \wedge\ x(b)=\alpha(b)\ \wedge \\ \wedge\ H_1x-H_2x\le h_1-h_2\ \wedge\ H_1x+H_2x\ge h_1+h_2)\ \vee\end{gathered} \tag{8.9}$$

$$\vee\ (x'(a)=\alpha'(a)\ \wedge\ H_1x-H_2x=h_1-h_2\ \wedge\ H_1x\ge h_1)\ \vee \tag{8.10}$$

$$\begin{gathered}\vee\ (x'(a)=\alpha'(a)\ \wedge\ x(b)=\beta(b)\ \wedge \\ \wedge\ H_1x-H_2x\ge h_1-h_2\ \wedge\ H_1x+H_2x\ge h_1+h_2)\ \vee\end{gathered} \tag{8.11}$$

$$\vee\ (x(b)=\beta(b)\ \wedge\ H_1x+H_2x=h_1+h_2\ \wedge\ H_1x\ge h_1)\ \vee \tag{8.12}$$

$$\begin{gathered}\vee\ (x'(a)=\beta'(a)\ \wedge\ x(b)=\beta(b)\ \wedge \\ \wedge\ H_1x-H_2x\ge h_1-h_2\ \wedge\ H_1x+H_2x\le h_1+h_2)\ \vee\end{gathered} \tag{8.13}$$

$$\vee\ (x'(a)=\beta'(a)\ \wedge\ H_1x-H_2x=h_1-h_2\ \wedge\ H_1x\le h_1)\ \vee \tag{8.14}$$

$$\begin{gathered}\vee\ (x'(a)=\beta'(a)\ \wedge\ x(b)=\alpha(b)\ \wedge \\ \wedge\ H_1x-H_2x\le h_1-h_2\ \wedge\ H_1x+H_2x\le h_1+h_2)\ \vee\end{gathered} \tag{8.15}$$

$$\vee\ (x(b)=\alpha(b)\ \wedge\ H_1x+H_2x=h_1+h_2\ \Rightarrow\ H_1x\le h_1), \tag{8.16}$$

$$U\ =\ \alpha'(a)>\beta'(a)\ \wedge\ \alpha'(a)\ge x'(a)\ge\beta'(a), \tag{9.0}$$

$$V=$$

$$=\ (x'(a)=\alpha'(a)\ \wedge\ x(b)=\alpha(b)\ \Rightarrow\ H_1x+H_2x\le h_1+h_2)\ \wedge \tag{9.1}$$

$$\begin{gathered}\wedge\ ((x'(a)=\alpha'(a)\ \wedge\ x(b)=\beta(b))\ \wedge \\ \wedge\ H_1x+H_2x=h_1+h_2\ \Rightarrow\ H_1x\le h_1)\ \wedge\end{gathered} \tag{9.2}$$

$$\wedge\ (x'(a)=\beta'(a)\ \wedge\ x(b)=\beta(b)\ \Rightarrow\ H_1x+H_2x\ge h_1+h_2)\ \wedge \tag{9.3}$$

$$\begin{gathered}\wedge\ ((x'(a)=\beta'(a)\ \wedge\ x(b)=\alpha(b))\ \wedge \\ \wedge\ H_1x+H_2x=h_1+h_2\ \Rightarrow\ H_1x\ge h_1),\end{gathered} \tag{9.4}$$

$$W=$$

$$= (x'(a)=\alpha'(a) \wedge x(b)=\alpha(b) \wedge H_1x+H_2x\geq h_1+h_2) \vee \tag{9.5}$$

$$\vee ((x'(a)=\alpha'(a) \wedge x(b)=\beta(b)) \wedge \wedge H_1x+H_2x=h_1+h_2 \wedge H_1x\geq h_1) \vee \tag{9.6}$$

$$\vee (x'(a)=\beta'(a) \wedge x(b)=\beta(b) \wedge H_1x+H_2x\leq h_1+h_2) \vee \tag{9.7}$$

$$\vee ((x'(a)=\beta'(a) \wedge x(b)=\alpha(b)) \wedge \wedge H_1x+H_2x\leq h_1+h_2 \wedge H_1x\leq h_1), \tag{9.8}$$

то x - решение краевой задачи (1).

Литература

1. Лепин А.Я. Разрешимость краевых задач для уравнения второго порядка // Актуальные вопросы краевых задач: Теория и приложения. - Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1988. - С.69-78.
2. Лепин А.Я. Разрешимость некоторых краевых задач для уравнения второго порядка // Латв.мат.ежегодник. - Рига: Зинатне, 1989. - Вып.28. - С.39-46.
3. Лепин А.Я., Лепин Л.А. Обобщенная разрешимость одной двухточечной краевой задачи // Латв.мат.ежегодник. - Рига: Зинатне, 1986. - Вып.30. - С.63-68.
4. Лепин А.Я., Лепин Л.А. Краевые задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. - Рига: Зинатне, 1988. - 211 с.
5. Лепин Л.А. Обобщенные решения и разрешимость краевых задач для дифференциального уравнения второго порядка // Дифференц.уравнения. - 1982. - Т.18, N 8. - С.1323-1330.

A.Lepin. On the solvability of one boundary value problem.
Summary. The solvability of boundary value problem

$$x''=f(t,x,x'), \quad H_1x=h_1, \quad H_2x=h_2,$$

$$\alpha\leq x\leq\beta, \quad \alpha'(a)\leq x'(a)\leq\beta'(a)$$

under the assumption of Schrader condition is proved.

MSC 34B15

A.Lepins. Par kādas robežproblēmas atrisināmību.
Anotācija. Pierādīta robežproblēmas

$$x''=f(t,x,x'),\quad H_1x=h_1,\quad H_2x=h_2,$$
$$\alpha\le x\le\beta,\quad \alpha'(a)\le x'(a)\le\beta'(a)$$
atrisināmība, ja izpildās Šredera nosacījumi.

Институт математики и информатики
Латвийского университета
Рига, б.Райня, 29

Поступила 16.09.93

A BOUNDARY FUNCTION APPROACH TO REGULARITY OF SOLUTIONS IN THE PROBLEM OF THE CALCULUS OF VARIATIONS

F.Zh.Sadyrbaev

Summary. Conditions are given for regularity of solutions in the basic problem of the calculus of variations.
MSC 49N60

We consider the basic problem of the calculus of variations

$$\text{minimize}\left\{ \int_a^b L(t,x,x')\,dt \ :\ x(a)=A,\ x(b)=B \right\} \tag{P}$$

provided that the conditions

(A1) $L(t,x,y)$ is of $C^1(I\times\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$, $I=[a,b]$;

(A2) $L_y(t,x,y) := \frac{\partial L}{\partial y}$ is strictly increasing in y for fixed (t,x);

are fulfilled.

It is well known ([1], vol.2, ch.5) that the problem (P) has a solution in the class of absolutely continuous functions if $L_{yy}>0$ and L satisfies the coercivity condition $L(t,x,y)>$ $>c_1y^2+c_2$. Even in the case of $L\in C^2$ some additional conditions are needed for a solution to be of a narrower class of functions (Lipschitz, continuously differentiable etc.). Thus the problem of regularity of solutions arises. The interested reader may consult the book [2] for the whole history and more details.

L.Tonelli also proved for $L\in C^2$ (see [4] for the case of L depending on n functions) that under the positivity and coercivity conditions a set $\Omega\subset I$ exists of measure zero such that a solution $x(t)$ to the problem (P) is of class C^2 on $I\setminus\Omega$ and satisfies the Euler-Lagrange equation

$$\frac{d}{dt}L_y(t,x(t),x'(t)) = L_x(t,x(t),x'(t)) \tag{1}$$

for all $t\in I\backslash\Omega$. For examples of problems with Ω non-empty one may consult the work [3].

For noncoercive problems existence results "in the small" were proved by L.Tonelli [1, vol.2, th.109] and by F.Clarke and R.Vinter [4]. It was shown also [4, Cor.1] that under the conditions (A1) and (A2) a set Ω of zero measure exists such that a solution $x(t)$ is continuously differentiable on the complement of Ω and $|x'(t)|=\infty$ for $t\in\Omega$.

A set of conditions ensuring the emptiness of Ω in the case of noncoercive functionals was given in the work of F.Clarke and P.Loewen [5].

In this note we present conditions of a new type (comparing with those in [2, ch.2] and [5]) ensuring the regularity of a solution to the problem (P). Moreover, these conditions provide estimates for the first derivative of a solution. Our conditions are based on the concept of bounding functions known in the theory of boundary value problems of ordinary differential equations (see [6] for more information). Additional assumptions usually required when applying bounding functions to Picard problem (that in the problem of finding $x(t)$ having prescribed values at the ends of the interval) have been ruled out in the work of the author [7] by the introduction of lower and upper diagonales. This technique was extended by Fabry and Habets [6] to more general boundary conditions and is applied in the theorem below.

Note that in view of (A2) there exist functions

$$l\pm(t,x) = \lim L_y(t,x,y) \quad \text{as} \quad y\to\pm\infty.$$

Theorem. Let $x(t)$ be a solution in the problem (P). Let there exist functions $\lambda,\mu\in C^1(I,\mathbb{R})$ and $u,v\in C^1(D,\mathbb{R})$, where D is some (t,x)-domain containing graph of x, such that:

1) $(t,\lambda(t))\in D$, $(t,\mu(t))\in D$ $\quad\forall t\in I$;
2) $l_-(t,x)<u(t,x)\le v(t,x)<l_+(t,x) \quad \forall(t,x)\in D$;
3) $L_y(t,\lambda,\lambda')\ge u(t,\lambda)$, $L_y(t,\mu,\mu')\le v(t,\mu) \quad \forall t\in I$;
4) $(x-\mu(t))(L_x(t,x,y)-v_t(t,x)-v_x(t,x)y)\ge 0 \quad \forall(t,x)\in D$, $\forall y$:
   $0 < L_y(t,x,y)-v(t,x)<\varepsilon$, $\quad (x-\lambda(t))(L_x(t,x,y)-u_t(t,x) \quad -$

$-u_x(t,x)y)\geq 0 \quad \forall(t,x)\in D,\ \forall y:\ 0<u(t,x)-L_y(t,x,y)<\varepsilon$, where ε is some positive number;

5) $\lambda(a)\geq A\geq\mu(a),\ \lambda(b)\leq B\leq\mu(b)$.

Then for any $t\in I$ $x'(t)$ satisfies the inequalities

$$u(t,x(t))\leq L_y(t,x(t),x'(t))\leq v(t,x(t)).$$

Proof. Suppose on the contrary that $L_y(t_0,x(t_0),x'(t_0))>$ $>v(t_0,x(t_0))$ at some $t_0\in I$. Consider the case $x(t_0)<\mu(t_0)$. Since $\mu(b)\geq B$, there exists $t_1\in(t_0,b]$ such that $x(t_1)=\mu(t_1)$, $x(t)>\mu(t)$ $\forall t\in[t_0,t_1)$. Then for any $n>1$ one may choose t_n arbitrarily close to t_1 such that

$$L_y(t_n,x(t_n),x'(t_n))-v(t_n,x(t_n)) < 1/n.$$

Since $x'(t)$ is continuous in a certain subset Ω of I of full measure ([3], Cor.2), an interval $[\xi,\eta]\subset[t_0,t_1]$ exists in which the function $L_y(t,x(t),x'(t))-v(t,x(t))$ decreases and $0<L_y-v<\varepsilon$ holds. Noting that $x(t)$ satisfies the Euler equation (1) almost everywhere in $[\xi,\eta]$, one has by the condition 4 that

$$\frac{d}{dt}\left[L_y(t,x(t),x'(t)-v(t,x(t))\right] =$$

$$= L_x(t,x(t),x'(t)) - v_t(t,x(t)) - v_x(t,x(t))x'(t) \geq 0.$$

This contradicts the decreasing of L_y-v in $[\xi,\eta]$.

The case $x(t_0)<\mu(t_0)$ is treated similarly. The case of $x(t_0)=\mu(t_0)$, $L_y(t_0,x(t_0),x'(t_0)) > v(t_0,\mu(t_0)) \geq L_y(t_0,\mu(t_0),$ $\mu'(t_0))$ reduces to one of the two above, since for t close to t_0 either $x>\mu$ or $x<\mu$ holds and still $L_y>v$.

Boundedness from below can be proved analogously.

Remark 1. Functions u, v may be defined only in $D\setminus\{\lambda\}$, $D\setminus\{\mu\}$ respectively. Then the condition 3 is to be replaced by

$$L_y(t,\lambda(t),\lambda'(t))\geq\max\left\{\lim_{x\to\lambda-}u(t,x),\ \lim_{x\to\lambda+}u(t,x)\right\},$$

$$L_y(t,\mu(t),\mu'(t))\leq\min\left\{\lim_{x\to\mu-}v(t,x),\ \lim_{x\to\mu+}v(t,x)\right\}.$$

Remark 2. Since $l\pm$ may be finite, the possibility of considering the "slow growth" lagrangians is allowed.

Corollary 1. Let $x(t)$ be a solution in the problem (P). Let the following conditions hold:

1) $|L_x(t,x,y)|\leq C|yL_y(t,x,y)|$, $C>0$, $\forall(t,x)\in D:=(a\leq t\leq b,\ |a|\leq 2M)$

$\forall y$: $|L_y(t,x,y)|\geq K$, where $M:=\max\limits_{t\in I}|x(t)|$, $K:=\max\{|L_y|: (t,x)\in D,\ |y|\leq 2M(b-a)^{-1}\}$;

2) $l_-(t,x)<-K\exp(2CM)$, $K\exp(2CM)<l_+(t,x)$.

Then $|L_y(t,x(t),x'(t))|\leq K\exp(2CM)$ $\forall t\in I$.

Proof. Choose by λ, μ the diagonales (μ starting at the left lower corner) of the rectangle D. Define

$$K^{-1}\exp(-CM)v(t,x) = \begin{cases} \exp(-Cx), & x>\mu(t), \\ \exp(Cx), & x<\mu(t), \end{cases}$$

$$K^{-1}\exp(-CM)u(t,x) = \begin{cases} -\exp(-Cx), & x>\lambda(t), \\ -\exp(Cx), & x<\lambda(t). \end{cases}$$

Remark 3. In fact the two-sided inequality in 1 can be replaced by the one-sided inequalities of the type $L_x\leq CyL_y$ or $L_x\geq -CyL_y$ which must hold only for $x>\mu$ or $x<\mu$ ($x>\lambda$ or $x<\lambda$).

Corollary 2. Let $x(t)$ be a solution in the problem (P). Let there exist numbers c_1 and c_2 and functions λ, μ as in the theorem, such that:

1) $l_-(t,x)<c_1<c_2<l_+(t,x)$ $\forall (t,x)\in D$;

2) $(x-\mu(t))L_x(t,x,y)\geq 0$ $\forall (t,x)\in D$ $\forall y$: $L_y\geq c_2$,
$(x-\lambda(t))L_x(t,x,y)\geq 0$ $\forall (t,x)\in D$ $\forall y$: $L_y\leq c_1$.

Then $c_1\leq L_y(t,x(t),x'(t))\leq c_2$ $\forall t\in I$.

Proof. Take $u=c_1$, $v=c_2$.

Example. Suppose x is a solution in the problem of minimizing $\int_a^b r(t,x)\sqrt{1+x'^2}dt$: $x(a)=A<$ $x(b)=B$, where $r(t,x)$ is continuous and positive and for some $\mu\in C^1$, having the same values at the ends of I as $x(t)$ does, holds $(x-\mu(t))r_x(t,x)\geq 0$. Let M and D be as in the Cor.1 above, $d=\min\limits_D r(t,x)$. Take $c<d$. Define $v=c$, $u=-c$. Then, applying the Cor.2, one gets that

$$|x'(t)|\leq c(r^2(t,x)-c^2)^{-1/2}.$$

References

1. L.Tonelli. Foundamenti di Calcolo delle Variazioni (2 vols). - Zanichelli, Bologna, 1921, 1923.
2. F.H.Clarke. Methods of Dynamic and Nonsmooth Optimization // Capital City Press. - Monpelier, VT, 1989.
3. J.M.Ball, V.J.Mizel. One dimensional variational problem whose minimizers do not satisfy the Euler-Lagrange equation // Arch. Rat. Mech. Anal. - 1985. - Vol.90. - P.325-388.
4. F.H.Clarke, R.B.Vinter. Existence and regularity in the small in the calculus of variations // J.Diff.Equations. - 1985. - Vol.59. - P.336-354.
5. F.H.Clarke, P.D.Loewen. An Intermediate Existence Theory in the Calculus of Variations // Annali Scuola Norm.Sup. - 1989. - Ser.IV, vol.16. - P.487-526.
6. Ch.Fabry, P.Habets. Upper and lower solutions for second order boundary value problems with nonlinear boundary conditions // Nonlinear Anal. - TMA, 1986. - V.10, N 10. - P.985-1007.
7. F.Zh.Sadyrbaev. Lyapunov functions and the solvability of the first boundary-value problem for ordinary second-order differential equations // Diff.Equations. - 1980. - Vol.16. - P.387-391.
8. F.Zh.Sadyrbaev. On regularity of solutions in the basic problem of the classical calculus of variations // Math. Zametki. - 1992. - Vol.52, N 5. - P.97-101.

Ф.Садырбаев. Метод ограничивающих функций в вопросе о регулярности решений задач вариационного исчисления.
Аннотация. В терминах ограничивающих функций приводятся условия регулярности решения в основной задаче вариационного исчисления, где функционал может быть не коэрцитивен.
УДК 519.31

F.Sadirbajevs. Ierobežojošu funkciju metode variāciju rēķinu uzdevumu atrisinājumu regularitātes jautājumā.
Anotācija. Ierobežojošu funkciju terminos formulēti atrisinājuma regularitātes nosacījumi variāciju rēķinu pamatproblēmā, kad funkcionālis var būt nekoercitīvs.

Институт математики и информатики
Латвийского университета
Рига, б.Райня, 29
Поступила 10.08.93

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

В.Д.Пономарев

Аннотация. Приводятся достаточные условия существования решения краевой задачи для уравнения третьего порядка с функциональными граничными условиями.
УДК 517.927

Рассмотрим краевую задачу:

$$x''' = f(t, x, x', x''), \tag{1}$$

$$l_i x(\cdot) = r_i, \quad i=1,2,3, \tag{2}$$

где $f \in \mathrm{Car}(I \times \mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, $l_i : AC^2(I, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, l_i - линейные непрерывные функционалы, $r_i \in \mathbb{R}$, $i=1,2,3$, $I=[a,b]$, $-\infty<a<b<+\infty$, $\mathrm{Car}(I \times \mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ - множество функций $f: I \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию Каратеодори [1], $AC^2(I, \mathbb{R})$ - множество непрерывных функций, у которых вторая производная абсолютно непрерывна.

Рассмотрим краевую задачу:

$$x''' = F(t, x, x', x''), \tag{3}$$

$$l_i x(\cdot) = r_i, \tag{4}$$

где $F(t,x,x',x'') = f(t, \delta(-L,x,L), \delta(-M,x',M), \delta(-N,x'',N))$, $L,M,N \in (0,+\infty)$,

$$\delta(x,y,z) = \begin{cases} x, & y<x, \\ y, & x \le y \le z, \\ z, & z<y, \end{cases}$$

для $x<z$.

Введем обозначения:

$$D = \begin{vmatrix} l_1(1) & l_1(t-p) & l_1\frac{(t-p)^2}{2} \\ l_2(1) & l_2(t-p) & l_2\frac{(t-p)^2}{2} \\ l_3(1) & l_3(t-p) & l_3\frac{(t-p)^2}{2} \end{vmatrix}$$

Обозначим через D_i определитель, у которого в i-том столбце матрицы, соответствующей определителю D, стоит столбец:

$$r_1 - \frac{1}{2}\, l_1\left(\int_p^t F(s,x(s),x'(s),x''(s))(t-s)^2 ds \right)$$

$$r_2 - \frac{1}{2}\, l_2\left(\int_p^t F(s,x(s),x'(s),x''(s))(t-s)^2 ds \right)$$

$$r_3 - \frac{1}{2}\, l_3\left(\int_p^t F(s,x(s),x'(s),x''(s))(t-s)^2 ds \right).$$

Теорема. Пусть для любого решения уравнения (3) выполняется

$$\sup\left\{ \left|\frac{D_1}{D}\right| \;\middle|\; t,p\in I \right\} \le L,$$

$$\sup\left\{ \left|\frac{D_2}{D}\right| \;\middle|\; t,p\in I \right\} \le M,$$

$$\sup\left\{ \left|\frac{D_3}{D}\right| \;\middle|\; t,p\in I \right\} \le N,$$

и краевая задача $x'''=0$, $l_i x(\cdot)=0$ имеет единственное решение, тождественно равное нулю.

Тогда краевая задача (1), (2) имеет решение.

Доказательство. Краевая задача (3), (4) имеет решение в силу единственности решения однородной краевой задачи [2].

Покажем, что для любого $t\in I$ $|x(t)|\le L$, $|x'(t)|\le M$, $|x''(t)|\le N$, а тогда x в силу определения функции F и будет решением задачи (1), (2).

Интегрируя (3), получаем:

$$x(t) = x(p) + x'(p)(t-p) + \frac{1}{2}x''(p)(t-p)^2 +$$
$$+ \frac{1}{2}\int_p^t F(s,x(s),x'(s),x''(s))(t-s)^2 ds$$

для любых $t,p\in I$.

Используя краевые условия, имеем:

$$x(p)l_i(1) + x'(p)l_i(t-p) + x''(p)l_i\frac{(t-p)^2}{2} =$$

$$= r_i - \frac{1}{2}\, l_i\Big(\int\limits_p^t F(s,x(s),x'(s),x''(s))(t-s)^2 ds \Big), \qquad i=1,2,3.$$

Отсюда получаем

$$x(p) = \frac{D_1}{D}, \quad x'(p) = \frac{D_2}{D}, \quad x''(p) = \frac{D_3}{D}.$$

Поэтому в силу условия теоремы имеем:

$$|x(p)| = \left|\frac{D_1}{D}\right| \le \sup\left\{\left|\frac{D_1}{D}\right| \;\middle|\; t,p\in I\right\} \le L,$$

$$|x'(p)| = \left|\frac{D_2}{D}\right| \le \sup\left\{\left|\frac{D_2}{D}\right| \;\middle|\; t,p\in I\right\} \le M,$$

$$|x''(p)| = \left|\frac{D_3}{D}\right| \le \sup\left\{\left|\frac{D_3}{D}\right| \;\middle|\; t,p\in I\right\} \le N,$$

для любых $p\in I$. Следовательно, априорная оценка доказана, а тем самым и теорема.

Пусть для любого $t\in I$

$$Q(t) = \max\Big\{ |F(t,x,x',x'')| \;:\; |x|\le L,\; |x'|\le M,\; |x''|\le N \Big\},$$

$$q=\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in I} Q(t)\in\mathbb{R}.$$

Предположим, что однородная краевая задача

$$x'''=0, \quad l_i x(\cdot)=0, \quad i=1,2,3$$

имеет единственное решение, тождественно равное нулю, и обозначим через $G(t,s)$ ее функцию Грина. В этом случае определитель матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} l_1(1) & l_1(t) & l_1\left(\frac{t^2}{2}\right) \\ l_2(1) & l_2(t) & l_2\left(\frac{t^2}{2}\right) \\ l_3(1) & l_3(t) & l_3\left(\frac{t^2}{2}\right) \end{pmatrix}$$

отличен от нуля. Введем обозначения:

$$\int\limits_a^b |G(t,s)|ds = g_0(t),$$

$$\int\limits_a^b |G_t(t,s)|ds = g_1(t),$$

$$\int_a^b |G_{tt}(t,s)|ds = g_2(t),$$

$$K(t)=(1,t,\frac{t^2}{2}).A^{-1}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}.$$

Теорема. Пусть выполняются условия:

$$\sup_{t\in I}\left(qg_0(t) + |K(t)|\right) \le L,$$

$$\sup_{t\in I}\left(qg_1(t) + |K'(t)|\right) \le M,$$

$$\sup_{t\in I}\left(qg_2(t) + |K''(t)|\right) \le N.$$

Тогда краевая задача (1), (2) имеет решение.

Доказательство. Решение x краевой задачи (3), (4) существует в силу единственности решения однородной краевой задачи и дается формулой

$$x(t) = \int_a^b G(t,s)F(s,x(s),x'(s),x''(s))ds + K(t).$$

Покажем, что $|x(t)|\le L$, $|x'(t)|\le M$, $|x''(t)|\le N$ для любого $t\in I$.

Имеем:

$$|x(t)| \le \int_a^b |G(t,s)||F(s,x(s),x'(s),x''(s))|ds + |K(t)| \le$$

$$\le qg_0(t) + |K(t)| \le \sup_{t\in I}\left(qg_0(t) + |K(t)|\right) \le L,$$

$$|x'(t)| \le \int_a^b |G_t(t,s)||F(s,x(s),x'(s),x''(s))|ds + |K'(t)| \le$$

$$\le qg_1(t) + |K'(t)| \le \sup_{t\in I}\left(qg_1(t) + |K'(t)|\right) \le M,$$

$$|x''(t)| \le \int_a^b |G_{tt}(t,s)||F(s,x(s),x'(s),x''(s))|ds + |K''(t)| \le$$

$$\le qg_2(t) + |K''(t)| \le \sup_{t\in I}\left(qg_2(t) + |K''(t)|\right) \le NЮ$$

Таким образом априорная оценка доказана, и x является решением исходной задачи (1), (2).

Литература

1. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: ИЛ, 1958.
2. Conti R. Recent trends in the theory of boundary value problems for ordinary differential equations // Boll.Unione mat.ital. - 1967. - V.22, N 2. - P.135-178.

V.Ponomarev. Existence of solutions of a boundary value problem for third-order differential equation.

Summary. Sufficient conditions for existence of a solution to a boundary value problem for third order differential equation with functional boundary constraints are given.
MSC 34B99

V.Ponomarjovs. Trešās kārtas vienādojuma robežproblēmas atrisinājuma eksistence.

Anotācija. Doti trešās kārtas vienādojuma ar funkcionāliem robežnosacījumiem atrisinājuma eksistences pietiekamie nosacījumi.

Институт математики и информатики
Латвийского университета
Рига, б.Райня, 29

Поступила 25.08.93

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПРОИЗВОДНЫХ

А.И.Звягинцев

Аннотация. Приводятся точные оценки норм производных функций.
УДК 517.5

При получении условий, гарантирующих априорную ограниченность решений и их производных для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, довольно часто (см., например, [1]) используются неравенства для норм функции и ее производных, которые называются обычно неравенствами Колмогорова. В случае конечного интервала $I=[0,1]$ *получение* неравенства Колмогорова приводит к экстремальной задаче

$$\mu_k=\sup\left\{\|f^{(k)}\|_{L_\infty(I)}:\ f\in W^n_{p\infty}(I),\ \|f\|_{L_p(I)}\le M_0,\ \|f^{(n)}\|_{L_\infty(I)}\le M_n\right\}, \tag{1}$$

где $n\in\{2,3,\dots\}$, $k\in\{1,\dots,n-1\}$, $1\le p\le\infty$, $M_0,M_n>0$, $W^n_{p\infty}(I)$ - пространство функций $f\in L_p(I)$, у которых $(n-1)$-ая производная абсолютно непрерывна на I и $f^{(n)}\in L_\infty(I)$.

Решение экстремальной задачи (1) представляет также интерес в связи с решением известной проблемы Колмогорова [2] о трех заданных *положительных* числах M_0, M_k, M_n и нормах функции, промежуточной и старшей производных. Для отрезка I решение проблемы Колмогорова имеет следующий вид [3,4]: для того, чтобы существовала функция $f\in W^n_{p\infty}(I)$, удовлетворяющая равенствам

$$\|f\|_{L_p(I)}=M_0,\quad \|f^{(k)}\|_{L_\infty(I)}=M_k,\quad \|f^{(n)}\|_{L_\infty(I)}=M_n,$$

необходимо и достаточно выполнения условия

$$M_k\le\mu_k.$$

Для $p=\infty$ в настоящее время доказано [5,6], что задача (1) эквивалентна экстремальной задаче

$$\lambda_k=\sup\left\{\|f^{(k)}(0)\|:\ f\in W^n_{\infty\infty}(I),\ \|f\|_{L_\infty(I)}\le M_0,\ \|f^{(n)}\|_{L_\infty(I)}\le M_n\right\}, \quad (2)$$

т.е. $\mu_k=\lambda_k$. Этот результат дает возможность в случае отрезка $I=[0,l]$ получать неравенства Колмогорова с точными константами.

Для случая $k=n-1$ доказано [7] неравенство

$$\|f^{(n-1)}\|_{L_\infty(I)}\le(n-1)!\,2^{2n-3}l^{1-n}\|f\|_{L_\infty(I)}+2^{-1}l\|f^{(n)}\|_{L_\infty(I)}, \quad (3)$$

причем ни одну из констант в (3) нельзя уменьшить. Неравенство (3) уточняет соответствующий результат В.И.Буренкова [8].

В общем случае получены [9] неравенство в аддитивной форме

$$\|f^{(k)}\|_{L_\infty(I)}\le \frac{2^k}{n}T_n^{(k)}(1)\cos^{2k}\frac{\pi}{2n}\left(\frac{n-k}{l^k}\|f\|_{L_\infty(I)}+\right.$$
$$\left.+\frac{kl^{n-k}}{n!\,2^{2n-1}\cos^{2n}\frac{\pi}{2n}}\|f^{(n)}\|_{L_\infty(I)}\right), \quad (4)$$

а при условии $l^n\|f\|^{-1}_{L_\infty(I)}\|f^{(n)}\|_{L_\infty(I)}\ge n!\,2^{2n-1}\cos^{2n}\frac{\pi}{2n}$ неравенство в мультипликативной форме

$$\|f^{(k)}\|_{L_\infty(I)}\le T_n^{(k)}(1)(n!\,2^{n-1})^{-k/n}\|f\|^{1-k/n}_{L_\infty(I)}\|f^{(n)}\|^{k/n}_{L_\infty(I)}, \quad (5)$$

где $T_n(t)$ - полином Чебышева первого рода и

$$T_n^{(k)}(1)=\frac{n^2(n^2-1^2)\dots(n^2-(k-1)^2)}{(2k-1)!!}.$$

Неравенство (4) обращается в равенство для функции $f(t)=T_n\left((2l^{-1}\cos^2\frac{\pi}{2n})t-1\right)$, а неравенство (5) обращается в равенство для функции $f(t)=T_n(l^{-1}(1+\alpha)t-1)$, где параметр $\alpha\in[\cos\frac{\pi}{n},1]$. При $n=2$ неравенства (4), (5) совпадают с известными неравенствами Ландау-Адамара [10].

Поскольку в задаче (2) экстремальными функциями являются [11-14] так называемые *золотаревские сплайны*, то, находя золотаревские сплайны, можно вычислить значение μ_k в (1) при $p=\infty$ и, следовательно, можно получить различные аналоги неравенств (4), (5).

Для $n\in\{3,4\}$ при выполнении условия

$$l^{n}\|f\|^{-1}_{L_\infty(I)}\|f^{(n)}\|_{L_\infty(I)} \le n!\,2^{2n-1}\cos^{2n}\frac{\pi}{2n} \tag{6}$$

получены точные неравенства [7,15-17] вида

$$\|f^{(k)}\|_{L_\infty(I)} \le |Z^{(k)}_{\alpha_n}(0)|\,l^{-k}\|f\|_{L_\infty(I)}, \tag{7}$$

где при $n=3$ параметр $\alpha_3\in[1/3,1/2]$ и

$$Z_{\alpha_3}(t)=(1-\alpha_3)^{-2}\alpha_3^{-2}\Big(2(1-2\alpha_3)t^3+2(1-3\alpha_3^2)t^2+2\alpha_3(2-3\alpha_3)t\Big)-1,$$

а при $n=4$ параметр $\alpha_4\in[\sqrt{2}-1,1/2]$ и

$$Z_{\alpha_4}(t)=(1-\alpha_4)^{-2}\alpha_4^{-3}\Big(4\sqrt{1-2\alpha_4}\,t^4+4(3\alpha_4^3-4\alpha_4+1-2\sqrt{1-2\alpha_4})t^3+$$

$$+2(3(1-\alpha_4)(3\alpha_4-1)+(3-3\alpha_4+5\alpha_4^2-3\alpha_4^3)\sqrt{1-2\alpha_4})t^2+$$

$$+2(1-\alpha_4)(\alpha_4^4-\alpha_4^3-3\alpha_4+1-(3\alpha_4^2-2\alpha_4+1)\sqrt{1-2\alpha_4})t\Big)+1.$$

Равенство в (7) достигается для функции $f(t)=Z_{\alpha_n}(l^{-1}t)$.

Следует отметить, что при выполнении условия (6) для $n=2$ неулучшаемым является неравенство (4), а для $n=3,4$ неулучшаемым является неравенство (7). Если же условие (6) не выполняется, то справедливо неравенство (5), причем для $n=2,3$ неравенство (5) неулучшаемо, а для $n\ge4$ константа в (5) может быть уменьшена для достаточно большой величины $l^{n}\|f\|^{-1}_{L_\infty(I)}\|f^{(n)}\|_{L_\infty(I)}$. Приведем пример [17] для случая $n=4$. Пусть

$$\alpha = \frac{1}{9}\Big(-6+4\sqrt{6}-3\sqrt{10}+\sqrt{15}+\sqrt{6(17+11\sqrt{6}-8\sqrt{10}-4\sqrt{15})}\ \Big),$$

$$\beta=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{10}}{2}\alpha, \qquad A=\frac{8}{3}(-15+16\sqrt{6}-12\sqrt{10}+4\sqrt{15})\alpha^{-4}.$$

Тогда при условии $l^4\|f\|^{-1}_{L_\infty(I)}\|f^{(4)}\|_{L_\infty(I)}\ge A(1+\beta)^4$ имеет место неравенство

$$S(t) = \frac{A}{24}(t^4-2t_+^4)-\frac{2}{3}(3-4\sqrt{6}+3\sqrt{10}-\sqrt{15})\alpha^{-3}t^3-$$

$$-\frac{2}{9}(3+4\sqrt{6}-3\sqrt{10}+\sqrt{15})\alpha^{-1}t.$$

Константа в неравенстве (8) меньше константы в неравенстве (5) при $n=4$.

Представляет интерес вопрос о количестве экстремальных функций в задаче (1). Так как очевидно, что в задаче (1) наряду с экстремальной функцией $f_0(x)$ функции $-f_0(x)$, $f_0(l-x)$, $-f_0(l-x)$ тоже являются экстремальными, то, говоря о единственности экстремальной функции, подразумеваем единственность с точностью до симметрии. Для $p=\infty$ установлено [18], что если $l^n M_0^{-1} M_n \le n!\,2^{2n-1}\cos^{2n}\frac{\pi}{2n}$, то в задаче (1) существует единственная экстремальная функция, которая выражается через полином Золотарева. В случае $n!\,2^{2n-1}\cos^{2n}\frac{\pi}{2n} < l^n M_0^{-1} M_n \le n!\,2^{2n-1}$ единственность нарушается, и экстремальная функция выражается через полином Чебышева.

В общем случае вопросы о количестве и аналитическом выражении экстремальных функций в задачах (1), (2) остаются открытыми.

Поскольку в задачах (1), (2) при некоторых значениях параметров l, M_0, M_n, p экстремальные функции выражаются через полиномы Золотарева, то актуальным становится вопрос решения задачи Золотарева о полиномах наименьшего уклонения в метрике $L_p(-1,1)$. В настоящее время для полиномов произвольной степени решение задачи Золотарева известно [12] только в трех случаях: $p=1$, $p=2$, $p=\infty$. Приведем решение [19] задачи Золотарева для полиномов второй степени

$$\gamma_{2p}(\sigma)=\inf_{a\in\mathbb{R}}\|t^2-\sigma t+a\|_{L_p(-1,1)}.$$

Для $p\in(1,\infty)$ обозначим через $\sigma_0\in(0,2)$ единственный корень уравнения

$$\beta_{1-\sigma_0/2}(1-2p,p)-\beta_0(p,p)=0,$$

где $\beta_c(b,d)=\int\limits_c^1 t^{b-1}(1-t)^{d-1}dt$ – неполная бэта-функция. Пусть $\sigma\ge 0$, $4a\le\sigma^2$ и

$$\alpha(a)=\frac{2\sqrt{\sigma^2-4a}}{2+\sigma+\sqrt{\sigma^2-4a}},\qquad \beta(a)=\frac{2\sqrt{\sigma^2-4a}}{2-\sigma+\sqrt{\sigma^2-4a}},\qquad \gamma(a)=\frac{\sigma-2+\sqrt{\sigma^2-4a}}{2\sqrt{\sigma^2-4a}}.$$

Тогда для $p\in(1,\infty)$ в случае $0\le\sigma\le\sigma_0$

$$\gamma_{2p}(\sigma)=(2+4p)^{-1/p}\Big[(1+a_0+\sigma)^p(2+\sigma)+(1+a_0-\sigma)^p(2-\sigma)\Big]^{1/p},$$

где a_0 – единственный корень уравнения

$$\beta_{\alpha(a)}(1-2p,p)-\beta_0(p,p)+\beta_{\beta(a)}(1-2p,p)=0,$$

а в случае $\sigma\ge\sigma_0$

$$\gamma_{2p}(\sigma)=(2+4p)^{-1/p}\Big[(1+a_0+\sigma)^p(2+\sigma)+(\sigma-1-a_0)^p(2-\sigma)\Big]^{1/p},$$

где a_0 - единственный корень уравнения

$$\beta_{\alpha(a)}(1-2p,p)-\beta_{\gamma(a)}(p,p)=0.$$

При получении априорных оценок для производных решений систем дифференциальных неравенств [20] возникает необходимость решить следующую экстремальную задачу:

$$\omega_p=\inf\left\{\|f\|_{L_p(0,1)}:\ f\in W^n_{p\infty}(0,1),\ \|f^{(n)}\|_{L_\infty(0,1)}\ge M\right\}, \tag{9}$$

где $n\in\{0,1,\ldots\}$, $1\le p\le\infty$, $M>0$. В работе [21] доказано, что в задаче (9) нижняя грань достигается на многочлене наименьшего уклонения, т.е.

$$\omega_p=\frac{M}{n!}\|Q_n\|_{L_p(0,1)},$$

где $Q_n(t)=t^n+a_{n-1}t^{n-1}+\ldots+a_1t+a_0$ и

$$\|Q_n\|_{L_p(0,1)}=\inf_{b_0,\ldots,b_{n-1}\in\mathbb{R}}\|t^n+b_{n-1}t^{n-1}+\ldots+b_0\|_{L_p(0,1)}.$$

Результаты, полученные для экстремальных задач (1) и (9), позволяют доказывать априорную ограниченность производных решения системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$x_i^{(n_i)}=f_i\left(t,x_1,\ldots,x_1^{(n_1-1)},\ldots,x_m,\ldots,x_m^{(n_m-1)}\right),\quad i=\overline{1,m}, \tag{10}$$

при наличии априорной оценки самого решения

$$\|x_i\|_{L_{p_i}(I)}<M_i,\qquad i=\overline{1,m}. \tag{11}$$

Предполагается, что $t\in I=[0,\tau]$ и для $i=\overline{1,m}$ функции $f_i\in C\left(I\times\mathbb{R}^{n_1+\ldots+n_m},\mathbb{R}\right)$ удовлетворяют условиям

$$\left|f_i\left(t,x_1,\ldots,x_1^{(n_1-1)},\ldots,x_m,\ldots,x_m^{(n_m-1)}\right)\right|\le$$

$$\le\sum_{j=1}^{r_i}g_{ij}(t)\prod_{k=1}^{m}\prod_{l=0}^{n_k-1}|x_k^{(l)}|^{\alpha_{ijkl}},$$

где m, n_i, $r_i\in\{1,2,\ldots\}$, $\alpha_{ijkl}\ge0$, $g_{ij}\in L_s(I,[0,\infty))$, $s\in\{1,\infty\}$. Доказаны следующие теоремы [22].

Теорема 1. Пусть $s=1$ и для $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,r_i}$, $1\le p_i\le\infty$ выполняются неравенства

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{l=0}^{n_k-1} \frac{1+lp_k}{1+(n_k-1)p_k} \alpha_{ijkl} \le 1, \tag{12}$$

причем в случае равенства в (12) предполагается, что числа M_i достаточно малы. Тогда существуют такие числа N_i, что для любого решения системы (10), удовлетворяющего оценкам (11), выполняются неравенства

$$\|x_i^{(l)}\|_{L_\infty(I)} \le N_i, \quad i=\overline{1,m}, \quad l=\overline{0,n_i-1}.$$

Теорема 2. Пусть $s=\infty$ и для $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,r_i}$, $1 \le p_i \le \infty$ выполняются неравенства

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{l=0}^{n_k-1} \frac{1+lp_k}{1+n_k p_k} \alpha_{ijkl} \le 1, \tag{13}$$

причем в случае равенства в (13) предполагается, что числа M_i достаточно малы. Тогда существуют такие числа N_i, что для любого решения системы (10), удовлетворяющего оценкам (11), выполняются неравенства

$$\|x_i^{(l)}\|_{L_\infty(I)} \le N_i, \quad i=\overline{1,m}, \quad l=\overline{0,n_i-1}.$$

Теорема 1 обобщает соответствующий результат Г.Т.Гегелия [23], а теорема 2 обобщает результаты Ю.А.Клокова [1,24]. Отметим еще, что условия (12) и (13) являются точными в том смысле, что в неравенствах (12) и (13) единицу в правой части нельзя заменить большей величиной. Кроме того, теоремы 1 и 2 остаются справедливыми, если вместо системы дифференциальных уравнений (10) рассмотреть систему дифференциальных неравенств

$$\left|x_i^{(n_i)}(t)\right| \le \sum_{j=1}^{r_i} g_{ij}(t) \prod_{k=1}^{m} \prod_{l=0}^{n_k-1} |x_k^{(l)}(t)|^{\alpha_{ijkl}}, \quad i=\overline{1,m}.$$

При исследовании прикладных краевых задач, как правило, в первую очередь рассматривается вопрос о существовании и единственности решения краевой задачи. Приведем несколько результатов, полученных для краевых задач, встречающихся в приложениях.

При изучении движения ионов в жидком соединении возникает следующая краевая задача [25-27]:

$$x'' = \frac{1}{2}x^3 + x\left(\lambda - \frac{x_0^2}{2} + \left(l\lambda + \frac{x_0^2-x_1^2}{2}\right)t\right) - l\lambda D - \frac{x_0^2-x_1^2}{2}D, \tag{14}$$

$$x'(0)=x'(1)=0, \tag{15}$$

$$x(0)=x_0, \qquad x(1)=x_1, \tag{16}$$

где λ, l, D - заданные положительные числа, а x_0, x_1 - параметры. Установлено [28], что:

1) если существует число $m>0$, удовлетворяющее неравенству

$$m\left(\lambda - \frac{mD+m^2}{2}\right) - l\lambda D \ge 0,$$

то найдутся $0 \le x_1 \le x_0 \le m$, для которых краевая задача (14)-(16) имеет единственное решение $x(t)$, причем $0 \le x(t) \le m$ для всех $t\in[0,1]$;

2) если $lD \le r = \min\{\sqrt{2\lambda}, \sqrt{2\lambda l}\}$, то существуют $0 \le x_0 \le x_1 \le r$, для которых краевая задача (14)-(16) имеет единственное решение $x(t)$, причем $0 \le x(t) \le r$ для всех $t\in[0,1]$.

Эти результаты значительным образом дополняют результат Томпсона [27].

В работах [29-31] рассмотрена для случая стационарного режима краевая задача, которая моделирует реакцию окисления на поверхности катализатора [31]:

$$d_1((1-u_2)u_1''+u_1u_2'')=-a_1(1-u_1-u_2)+a_3u_1+ \\ + u_1u_2\prod_{i=1}^{m}(1+b_{1i}u_1+b_{2i}u_2)^{N_i}, \tag{17}$$

$$d_2(u_2u_1''+(1-u_1)u_2'')=-a_2(1-u_1-u_2)^{\gamma}+a_4u_2^{\gamma}+ \\ + u_1u_2\prod_{i=1}^{m}(1+b_{1i}u_1+b_{2i}u_2)^{N_i}, \tag{18}$$

$$u_1'(-1)=u_2'(-1)=u_1'(1)=u_2'(1)=0, \tag{19}$$

$$0 \le u_1(x), \quad u_2(x) \le 1, \quad 0 \le u_1(x)+u_2(x) \le 1, \quad x\in[0,1], \tag{20}$$

где $a_1, a_2, a_3, a_4, d_1, d_2 > 0$, $\gamma\in\{1,2\}$, $m\in\{1,2,\dots\}$ и для $i=\overline{1,m}$ $b_{1i}, b_{2i} \ge -1$, $N_i\in\{0,1,\dots\}$. В общем случае доказано [31], что если $a_3d_2 \ge a_4d_1$, и для тех $i\in\{1,2,\dots,m\}$, которым соответствуют нечетные числа N_i, выполняются неравенства

$$1-b_{1i} \ge 0, \qquad 1-b_{1i}+b_{2i} \ge 0,$$

то задача (17)-(20) имеет решение.

В последнее время активно исследуется уравнение Курамото-

Цузуки [33-37], которое описывает поведение многих открытых диссипативных систем в окрестности точки бифуркации:

$$w_t=(1+ic_1)w_{xx}+w-(1+ic_2)|w|^2w,$$
$$w_x(0,t)=w_x(l,t)=0.$$

В стационарном случае $w_t\equiv0$, полагая $w=u+iv$, получаем краевую задачу:

$$(1+c_1^2)u''=-u-c_1v+(u^2+v^2)((1+c_1c_2)u+(c_1-c_2)v), \tag{21}$$

$$(1+c_1^2)v''=c_1u-v+(u^2+v^2)((1+c_1c_2)v-(c_1-c_2)u), \tag{22}$$

$$u'(0)=v'(0)=u'(l)=v'(l)=0. \tag{23}$$

Установлено [38], что если $c_1\ge0$, $c_2>0$ и выполняется неравенство $l<\sqrt{1/2(1+c_1^2)}$, то краевая задача (21)-(23) имеет только тривиальное решение $u\equiv0$, $v\equiv0$.

Встречающиеся в приложениях и приведенные здесь задачи с краевыми условиями Неймана довольно часто имеют вид:

$$u'' = \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{l} a_{ij}u^iv^j, \tag{24}$$

$$v'' = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} b_{ij}u^iv^j, \tag{25}$$

$$u'(0)=v'(0)=u'(\tau)=v'(\tau)=0, \tag{26}$$

где $k,l,m,n\in\{0,1,\ldots\}$, $a_{ij},b_{ij}\in(-\infty,+\infty)$, $\tau\in(0,+\infty)$. В этой связи очень актуальным становится вопрос получения эффективных условий существования и единственности решения краевой задачи (24)-(26).

В случае $n\in\{3,4\}$ для многоточечной краевой задачи

$$x^{(n)}=f(t,x,\ldots,x^{(n-1)}), \tag{27}$$

$$x(t_i)=A_i, \qquad i=\overline{1,n}, \tag{28}$$

где $0=t_1<t_2<\ldots<t_n=1$, $A_i\in\mathbb{R}$ и функция $f\in C([0,1]\cdot\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ удовлетворяет условию Липшица

$$|f(t,x_{11},\ldots,x_{1n})-f(t,x_{21},\ldots,x_{2n})| \le\sum_{i=1}^{n} L_i|x_{1i}-x_{2i}|,$$

установлено [39,40], что при выполнении условия $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(n)L_i<1$, краевая задача (27), (28) имеет единственное решение. Константы $\alpha_i(n)$ определяются следующим образом:

$$\alpha_1(n)=\max_{0\le t\le 1}\prod_{i=1}^{n}|t-t_i|, \qquad \alpha_2(3)=\max\left\{\frac{t_2}{6},\frac{1-t_2}{6}\right\},$$

$$\alpha_3(3)=\max\left\{\frac{1+t_2}{3},\frac{2-t_2}{3}\right\}, \qquad \alpha_2(4)=\max\left\{\frac{t_2t_3}{24},\frac{(1-t_2)(1-t_3)}{24}\right\},$$

$$\alpha_3(4)=\max\left\{\frac{t_2+t_2t_3+t_3}{12},\frac{3-2t_2-2t_3+t_2t_3}{12}\right\},$$

$$\alpha_4(4)=\max\left\{\frac{1+t_2+t_3}{4},\frac{3-t_2-t_3}{4}\right\}.$$

Этот результат при $n=3$ уточняет результат В.Шеды [41].

Литература

1. Васильев Н.И., Клоков Ю.А. Основы теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. – Рига: Зинатне, 1978. – 189 с.
2. Колмогоров А.Н. О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции на бесконечном интервале // Ученые записки МГУ. Математика. – 1939. – Т.30, кн.3. – С.3-16.
3. Звягинцев А.И. О вариационных задачах для норм функции и ее производных // Нелинейные краевые задачи обыкновенных дифференциальных уравнений. – Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1985. – С.15-28.
4. Звягинцев А.И. Одна экстремальная задача, связанная с априорными оценками решений дифференциальных неравенств // Математика. Дифференциальные уравнения: Научные труды. – Рига: ЛУ, 1990. – С.54-62.
5. Звягинцев А.И. Об одной проблеме А.Н.Колмогорова // Латвийский математический ежегодник. – 1989. – Вып.33. – С.192-203.
6. Звягинцев А.И. Экстремальная задача о норме промежуточной производной // Математические заметки. – 1991. – Т.49, N 2. – С.45-54.
7. Звягинцев А.И. Некоторые оценки для норм функции и ее производных на конечном интервале // Латвийский математический ежегодник. – 1985. – Вып.29. – С.198-210.

8. Буренков В.И. О точных постоянных в неравенствах для норм промежуточных производных на конечном интервале // Труды МИАН СССР. - 1980. - Т.156. - С.22-29.
9. Звягинцев А.И. Оценки для промежуточной производной функции // Латвийский математический ежегодник. - 1988. - Вып.32. - С.183-186.
10. Харди Г.Г., Литтлвуд Д.Е., Полиа Г. Неравенства. - М.: Иностр.лит., 1948. - 456 с.
11. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений // Доклады АН СССР. - 1965. - Т.160, N 4. - С.774-777.
12. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. - М.: Изд-во МГУ, 1976.
13. Karlin S. Interpolation properties of generalized perfect splines and the solutions of certain extremal problems // Trans.Amer.Math.Soc. - 1975. - N 206. - P.25-66.
14. Karlin S. Oscillatory perfect splines and related extremum problems // Studies in Spline Functions and Approximation Theory. - New York: Academic Press, 1976. - P.371-460.
15. Звягинцев А.И., Лепин А.Я. О неравенствах Колмогорова между верхними гранями производных функции для $n=3$ // Латвийский математический ежегодник. - 1982. - Вып.26. - С.176-181.
16. Звягинцев А.И. Неравенства Колмогорова для $n=4$ // Латвийский математический ежегодник. - 1982. - Вып.26. - С.165-175.
17. Звягинцев А.И. Уточнение констант в неравенствах Колмогорова для $n=4$ // Латвийский математический ежегодник. - 1988. - Вып.32. - С.187-189.
18. Звягинцев А.И. О единственности экстремальной функции // Краевые задачи обыкновенных дифференциальных уравнений. - Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1987. - С.12-18.
19. Звягинцев А.И., Филипенкова И.В. К разрешимости задачи Е.И.Золотарева // Тезисы докладов XVI Всесоюзной школы по теории операторов в функциональных пространствах. - Нижний Новгород, 1991. - С.77.
20. Лепин А.Я. Априорная ограниченность производных для системы дифференциальных неравенств // Дифференц.уравнения. - 1989.

- Т.25, N 7. - С.1129-1135.

21. Звягинцев А.И. О полиномах, наименее уклоняющихся от нуля // Латвийский математический ежегодник. - 1988. - Вып.31. - С.216-221.
22. Звягинцев А.И. Об априорной ограниченности производных решений для системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Математические заметки (в печати).
23. Гегелия Г.Т. О краевых задачах типа периодической для обыкновенных дифференциальных уравнений // Труды ИПМ им.И.Н.Векуа. - Тбилиси, 1986. - Т.17. - С.60-93.
24. Клоков Ю.А. Об априорных оценках решений обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференц.уравнения. - 1987. - Т.23, N 4. - С.611-618.
25. Bass L. Electrical structures of interfaces in steady electrolysis // Trans.Faraday Soc. - 1964. - V.60. - P.1656-1663.
26. Bass L. Potential of liquid functions // Trans.Faraday Soc. - 1964. - V.60. - P.1914-1919.
27. Thompson H.B. Existence for a two point boundary value problem arising in electrodiffusion // Acta math.Sci.Engl. Ed. - 1988. - V.8, N 4. - P.373-387.
28. Звягинцев А.И., Карташова И.И. Об одной краевой задаче с параметром // Математика. Дифференциальные уравнения: Научные труды. - Рига: ЛУ, 1992. - С.72-79.
29. Звягинцев А.И. Об одной краевой задаче химического катализа // Латвийский математический ежегодник. - 1989. - Вып.33. - С.20-29.
30. Звягинцев А.И., Зубова Л.Ф., Пономарев Д.Ю. О существовании стационарных решений одной краевой задачи химической кинетики // Теоретические и численные исследования краевых задач. - Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1989. - С.83-90.
31. Звягинцев А.И., Тихая О.В. Об одной прикладной задаче // Математика. Дифференциальные уравнения: Научные труды. - Рига: ЛУ, 1992. - С.80-84.
32. Еленин Г.Г., Лысак Т.М. Диссипативные структуры в модельной реакции окисления окиси углерода // Дифференц.уравнения. -

1988. - Т.24, N 7. - С.1186-1192.

33. Kuramoto Y., Tsuzuki T. On the Formation of Dissipative Structures in Reaction-Diffusion Systems // Progress of Theoretical Physics. - 1975. - V.54, N 3. - P.687-699.
34. Kuramoto Y., Yamada T. Turbulent State in Chemical Reactions // Progress of Theoretical Physics. - 1976. - V.56, N 2. - P.679-681.
35. Kuramoto Y. Diffusion-Induced Chaos in Reaction Systems // Supplement of the Progress of Theoretical Physics. - 1978. - N 64. - P.346-366.
36. Kuramoto Y., Koga S. Turbulized Rotating Chemical Waves // Progress of Theoretical Physics. - 1981. - V.66, N 3. - P.1081-1083.
37. Ахромеева Т.С., Малинецкий Г.Г. О диффузионном хаосе // Препринт ИПМ АН СССР. - М., 1983. - N 140.
38. Звягинцев А.И. О некоторых прикладных задачах // Тезисы докладов Международной научной конференции "Дифференциальные и интегральные уравнения. Математическая физика и специальные функции". - Самара, 1992. - С.101-102.
39. Звягинцев А.И., Армане М.А. О функции Грина многоточечной краевой задачи // Краевые задачи обыкновенных дифференциальных уравнений. - Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1987. - С.19-30.
40. Звягинцев А.И. О единственности решения многоточечных краевых задач // Тезисы докладов XII Всесоюзной школы по теории операторов в функциональных пространствах. Часть 1. - Тамбов, 1987. - С.78.
41. Šeda V. On the three-point boundary-value problem for a non-linear third order ordinary differential equation // Archivum mathematicum. - 1972. - V.8, N 2. - P.85-98.

A.Zvyagincev. Extremal problems for derivatives.

Summary. Precise estimates of the norms of derivatives of functions are given.

MSC 26B02

A.Zvjagincevs. Atvasinājumu ekstremālie uzdevumi.

Anotācija. Doti funkciju atvasinājumu normu precīzi novērtējumi.

Институт математики и информатики
Латвийского университета
Рига, б.Райня, 29

Поступила 30.07.93

SATURA RĀDĪTĀIS