LATVIJAS UNIVERSITĀTES

ZINĀTNISKIE RAKSTI

ACTA UNIVERSITATIS LATVIENSIS

570

МАТЕМАТИКА

Дифференциальные уравнения

ЛАТВИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
Институт математики и информатики

МАТЕМАТИКА

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Научные труды
Том 570

Латвийский университет
Рига 1992

УДК 517

МАТЕМАТИКА. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.

Математика. Дифференциальные уравнения: Научные труды/ Отв. ред. Ю.А.Клоков. Т.570. Рига: ЛУ, 1991. - 142 с.

Сборник содержит 13 статей, написанных преподавателями и научными сотрудниками Латвийского университета. Большая часть работ посвящена разработке общей теории нелинейных краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. В ряде статей решаются конкретные актуальные задачи, строятся разностные схемы решения задач в частных производных, рассматриваются операторные уравнения и уравнения с различными особенностями.

Сборник предназначен для специалистов по качественной теории и прикладным задачам дифференциальных уравнений, а также для аспирантов соответствующих специальностей.

УДК 517.927

G.Grizans

ON A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE SYSTEM OF TWO DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH SINGULARITY

In this paper we are concerned with the boundary value problem

$$
\begin{aligned}
x'' + \frac{k}{t} x' &= P(x,y), \\
y'' + \frac{k}{t} y' &= Q(x,y)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

$$x'(0) = y'(0) = 0, \tag{2}$$

$$x(\tau) = A, \quad y(\tau) = B, \tag{3}$$

where $k > -1$, $P, Q \in C(\mathbb{R}^2)$, $A, B \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$.

We may deduce that a solution $(x(t), y(t))$ of (1) is also a radial symmetric solution of the following partial differential equations

$$
\begin{aligned}
\Delta x &= P(x,y), \\
\Delta y &= Q(x,y),
\end{aligned}
$$

where Δ is the Laplacian operator in $\mathbb{R}^{k+1}$.

The investigation of boundary value problem (BVP) (1)-(3) in case of one equation has been examined by different authors; see e.g. the papers [4, 7, 8], but very little is known about the system of two equations.

In the paper [5] there are given the necessary conditions for the existence of the solution of BVP for second order vector equation. Making use of this result, we will establish the following theorem.

T h e o r e m 1. Let there exist function $w(x,y) \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}_+)$ and $H > 0$ such that, for $(x,y,z,u) \in \mathbb{R}^4$ satisfying $w(x,y) \geq H$, $w'_x x + w'_y u = 0$, the following inequalities hold

$$(A_1) \quad w'_x P + w'_y Q + 2w''_{xy} xu + w''_{yy} u^2 \geq 0,$$

$$(A_2) \quad w''_{xx} v^2 + 2w''_{xy} v\tau + w''_{yy} \tau^2 \geq 0 \qquad \forall (v,\tau) \in R^2,$$

$$(A_3) \quad w(A,B) \leq H.$$

Then BVP (1)-(3) has solution for all A and B.

We now introduce functions P and Q, satisfying the conditions of theorem 1.

S t a t e m e n t 1. Let $w(x,y) = (x^2+y^2)/2$, but P and Q be such that

$$xP(x,y) + yQ(x,y) \geq 0 \tag{4}$$

for large x and y. Then BVP (1)-(3) has a solution for all A and B.

It is obvious that the inequality (4) will hold if P and Q are of the following type

$$P(x,y) = x^{2n+1} + P_{2n}(x,y), \quad Q = y^{2n+1} + Q_{2n}(x,y), \tag{5}$$

where $n \in N$, P_{2n}, Q_{2n} are polynomials of degree less that $2n+1$.

S t a t e m e n t 2. Let $w(x,y) = \dfrac{x^{2n}}{2n} + \dfrac{y^{2m}}{2m}$, $n, m \in N$ and

$$x^{2n-1}P(x,y) + y^{2m-1}Q(x,y) \geq 0 \tag{6}$$

for large x and y. Then BVP (1)-(3) has a solution for all A and B.

The condition (6) will hold if

$$P(x,y) = y^{2m-1}\psi'_0 + xy^{2m}\psi'_1,$$
$$Q(x,y) = -x^{2n-1}\psi'_0 + x^{2n}y\,\psi'_2$$

where $\psi_1 + \psi_2 \geq 0$, $\psi_i \in C(\mathbb{R}^2)$, $i = 0,1,2$

Analogously we can construct more and more complicated function $w(x,y)$ corresponding to different choice of P and Q.

In some cases function $w(x,y)$ may be used to find parameters of the equations for which BVP has a solution.

E x a m p l e 1. Consider the system

$$
\begin{aligned}
x'' + \frac{k}{t} x' &= x - \alpha y \\
y'' + \frac{k}{t} y' &= y - \beta x,
\end{aligned}
\tag{8}
$$

where $\alpha, \beta \geq 0$. It is obvious for $k = 0$ that BVP (8), (2), (3) is solvable for all τ, A and B if and only if $0 \leq \alpha\beta \leq 1$. If we choose $w(x,y)$ as

$$
w(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}
$$

we obtain that BVP (8), (2), (3) if solvable if $\frac{|\alpha + \beta|}{2} \leq 1$. But choosen $w(x,y) = \alpha x^2 + \beta y^2$ we have solvability of BVP (8), (2), (3) for $0 \leq \alpha\beta \leq 1$ i.e. the best possible estimate.

The conditions for the existence of the solution of the BVP (1)-(3) can be formulated in the terms of upper and lower functions for the system of the differential equations, introduced in [6], or in the terms of Nagumo's pairs $\chi(t)$ and $\varphi(t)$, introduced in [3]. However, it may occur that in many cases BVP (1)-(3) is not solvable and hence corresponding functions don't exist.

Consider the following scalar problem

$$
u'' + \frac{k}{t} u' = \alpha u^n \tag{9}
$$

$$
u'(0) = 0, \quad u(\tau) = u_0 \tag{10}
$$

in which $k > -1$, $\alpha \in R$, $n > 1$. Problem (9), (10) is solvable for all $\tau > 0$ and $u_0 \in R$ if $\alpha \geq 0$ and $n = 2m+1$, $m \in N$. If

$\alpha < 0$ or $n = 2m$ then for each $\tau > 0$ there exists u_0 such, that BVP (9), (10) has no solution. In this case usually it is investigated the domain where BVP is solvable. We will bring some well known results about existence and non existence of the solution of BVP (9), (10).

Lemma 1. Let $\alpha \geq 0$ and n is of odd type i.e. $u^n u \geq 0 \quad \forall u \in R$. Then problem (9), (10) has solution for all $\tau > 0$ and $u_0 \in R$

Lemma 2. Let $\alpha > 0$ and n is of even type i.e. $u^n = (-u)^n \quad \forall u \in R$. Then for each $\tau > 0$ it can be found $b_0 < 0$ such, that for $u_0 < b_0$ the problem (9), (10) has no solution. For $u_0 \geq b_0$ problem (9), (10) is solvable.

Lemma 3. Let $\alpha < 0$, $(k-1)(n-1) > 2$. Then for each $\tau > 0$ it can be found $b_1 > 0$ such, that for $u_0 > b_1$ BVP (9), (10) has no solution. For $u_0 < b_1$ problem (9), (10) is solvable.

By the way of the application of these results it must be emphasized that b_0 and b_1 can be found only numerically, see [2,5] but in a certain case this value can be obtained precisely.

Lemma 4. Let $\alpha < 0$, $(k-1)(n-1) \geq 4n + 4\sqrt{n(n-1)}$. Then for each $\tau > 0$ and $u_0 \geq \delta$, where

$$\delta = \left[\left[\frac{(k-1)(n-1)}{2} - 1 \right] \frac{4}{\alpha (n-1)^2} \right]^{\frac{1}{n-1}} \tau^{\frac{2}{1-n}} \tag{11}$$

BVP (9), (10) has no solution. If $0 \leq u_0 < \delta$ then BVP (9), (10) has one and only one solution [4]. Using lemmas 1-4 we can state the following theorems about the solvability and the unsolvability of BVP (1)-(3).

Theorem 2. Let

$$\frac{P(x,y) + Q(x,y)}{(x+y)^n} \geq C_0 > 0 \qquad \text{for } |x+y| \geq M > 0, \tag{12}$$

where $n > 1$ is of even type. Then it can be found $b < 0$ such that for $A - B < b$ BVP (1)-(3) has no solution.

T h e o r e m 3. Let $P(x,y) \leq \alpha x^n$, where $\alpha < 0$, $(\kappa-1)(n-1) \geq 4n + 4\sqrt{n(n-1)}$ and condition (12) is fulfilled. Then BVP (1)-(3) has no solution for $A > \delta$ or $B < \beta - \delta$ where δ is defined in (11).

T h e o r e m 4. Let

$$0 \geq \frac{P(x,y) + Q(x,y)}{(x+y)^n} \geq \alpha_1 \quad for \ (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

where n and α_1 are such that the problem (9), (10) is solvable. Then BVP (1)-(3) has at least one solution.

These theorems can be easy proved by a well-known comparison method.

Unfortunately, usually it is impossible to utilize the general results in order to investigate applied BVP, and we must develop the special method in each case. According to what has been said, consider two applied BVP.

1.

$$x'' + \frac{\kappa}{t}x' + x^{\beta_{11}} y^{\beta_{12}} = 0,$$

$$y'' + \frac{\kappa}{t}y' + x^{\beta_{21}} y^{\beta_{22}} = 0, \tag{13}$$

$$x'(0) = y'(0) = x(\infty) = y(\infty) = 0, \tag{14}$$

where $\kappa > -1$, $\beta_{ij} > 0$ $i,j = 1,2$. The system (13) consists of two equation of Emden-Fowler type. We will take an interest in the existence of positive solution

T h e o r e m 5. Let $\beta_{11} + \beta_{12} = \beta_{21} + \beta_{22} = n$, $(n-1)(\kappa-1) \geq 4$. Then BVP (13), (14) has a positive solution.

R e m a r k 1. Theorem 5 is an immediate consequence of the results proved in [4].

C o r o l l a r y. The solution of (13), (14) exists if $x(0) = y(0)$. The latest condition is essential.

T h e o r e m 6. Let $\beta_{11} + \beta_{12} = \beta_{21} + \beta_{22} = n$, $(n-1)(\kappa-1) \geq 4$, $\beta_{11} - \beta_{21} = \beta_{22} - \beta_{12} = \gamma$, where $\gamma < 0$. Then BVP (13), (14) has no positive solution if $x(0) \neq y(0)$.

P r o o f. Firstly, we specify $x(t)$ and $y(t)$ to be positive solutions of the problem (13), (14) and $x(0) \neq y(0)$. Without loss of generality we may suppose that $x(0) > y(0)$. Denoting by

$$\alpha(t) = x(t) - y(t)$$

we got from (13), (14) that

$$\alpha(0) > 0, \quad \alpha'(0) = 0 \qquad \text{and}$$

$$\alpha'' + \frac{\kappa}{t}\alpha' + x^{\beta_{11}} y^{\beta_{12}} - x^{\beta_{21}} y^{\beta_{22}} = 0. \tag{15}$$

Integrating (15) over $(0,t)$ we have

$$\alpha'(t) = t^{-\kappa} \int_0^t s^{\kappa} x^{\beta_{21}} y^{\beta_{12}} (x^{\gamma} - y^{\gamma}) ds.$$

It is evident that $\alpha'(t) > 0$ if $x, y > 0$. From this, we may deduce $\alpha(t) > \alpha(0)$ $\forall\, t > 0$ or $x(t) > y(t)$ $\forall\, t > 0$, which contradicts the condition $x(\infty) = y(\infty)$. Therefore we have completed the proof of theorem 6.

R e m a r k 2. It is easy to show that if the conditions of theorem 6 hold and

1) $\gamma = 0$, then $x(t) = y(t) + x(0) - y(0)$;

2) $\gamma = 1$, then $x(t) = y(t) \cdot \frac{x(0)}{y(0)}$.

From the numerical calculations and analogy with the scalar problem we are led to the following conjectures.

C o n j e c t u r e 1. Let conditions of theorem 5 hold and $\gamma = \beta_{11} - \beta_{21} = \beta_{22} - \beta_{12}$. Then

1) if $\gamma \in (0,1]$ or $(\kappa-1)(n-1) \geq 4\gamma + 4\sqrt{\gamma(\gamma-1)}$ and $x(0) \neq y(0)$, then

$$0 < \frac{x(t) - y(t)}{x(0) - y(0)} < 1 \qquad \text{for all } t > 0;$$

2) if $\gamma>1$ and $(\kappa-1)(n-1)\in(4, 4\gamma+4\sqrt{\gamma(\gamma-1)})$, then there exists an infinitive number of $t_i>0$ such that $x(t_i)=y(t_i)$.

Conjecture 2. If $\kappa>1$,

$$\frac{2}{\kappa-1}\cdot\frac{\beta_{22}-\beta_{12}-1}{(\beta_{11}-1)(\beta_{22}-1)-\beta_{12}\beta_{21}}\in(0,\tfrac{1}{2}]$$ and

$$\frac{2}{\kappa-1}\cdot\frac{\beta_{11}-\beta_{21}-1}{(\beta_{11}-1)(\beta_{22}-1)-\beta_{12}\beta_{21}}\in(0,\tfrac{1}{2}],$$

then BVP (13), (14) has a positive solution else BVP (13), (14) has no positive solution.

3. In the paper [1] by numerical methods the problem

$$x''+\frac{2}{t}x'+xy-x=0, \tag{16}$$

$$y''+\frac{2}{t}y'+x^2=0, \tag{17}$$

$$x'(0)=y'(0)=x(\infty)=y(\infty)=0, \tag{18}$$

was investigated.

In this paper we will give some results about the non existence of the solution of problem (16)-(18).

Theorem 7. Let

$$y_0<x_0+1 \tag{19}$$

where $x_0=x(0)$, $y_0=y(0)$, $x_0,y_0>1$. Then BVP (16)-(18) can have only positive solution.

Proof. From (16) we have

$$x'(t)=t^{-2}\int_0^t s^2x(1-y)\,ds. \tag{20}$$

Denoting

$$\varkappa(t)=y(t)-x(t)-1,$$

we deduce from (16), (17) that

$$\varkappa'(t)=t^{-2}\int_0^t \varepsilon^2 x\varkappa\, ds. \tag{21}$$

Let $t_0: x(t_0)=0,\ x(t)>0,\ t\in[0,t_0)$. Now we will show that $y(t_0)<1$.

In fact, $\varkappa(0)$ is negative, and from (21) we have $\varkappa'(t)<0\ \ t\in[0,t_0]$. This implies that $\varkappa(t_0)<0$ or $y(t_0)-1<0$. Thus, combining this result with (20) we obtain that $x'(t)<0$ for all $t>t_0$. This contradicts the condition $x(\infty)=0$.

R e m a r k 3. Let $y_0<1$. Then BVP (16)-(18) has no solution.

It is an immediate consequence of the above result.

References

1. N.Balabaev, V.Lachno. On the structure of the strongly connected Polaron (Russian). - Puschino, 1979. - 23 p. (Preprint / Institute of Biologie, AS USSR).
2. S.Bespalova. The existence domain of the solution of boundary value problem for the fourth order system (Russian) // Nonlinear boundary value problems for ordinary differential equations. Riga: Latvian University, 1985 p.72-83.
3. G.Gaprindashvilli. On the solvability of the nonlinear boundary value problem (Russian) // Soobsc. Akad. Nauk. Gruz.SSR. - 1981. - V.114, N 1. - p.53-56.
4. S.Crisens. The domain of the solvability of boundary value problem for the Emden Fowler equation (Russian) // Diff.ur. - 1988. - V.24, N 4. - p.563-566

5. G.Grizans. On the solvability of boundary value problem for the system of singular ODE (Russian) // Theoretical and numerical investigation of boundary value problem. Riga: Latvian University, 1989. - p.68-73.

6. V.Gudkov, Y.Klokoff, A.Lepin, V.Ponomarev. The two-point boundary value problems for ordinary differential equations (Russian) // Riga: Zinatne, 1973. - 136 p.

7. G.Iffland. Positive solution of a problem of Emden-Fowler type with a free boundary // SIAM J. Math. Anal. - 1987. - V.18, N 2. - p.283-292.

8. T.Kusano, M.Naito. Oscillation theory of entire solutions of second order superlinear elliptic equations // Funcialaj Ekvacioj. - 1987. - V.30. - p.269-282.

9. A.Stepanov. On the existence and uniqueness of the solution of a two-point boundary value problems class (Russian) // Latv.math.es. N 25. Riga: Zinatne, 1981. - p. 88-95.

УДК 517.95

U.Raitums

ON THE STRONG CONVERGENCE OF SOLUTION OF EQUATIONS WITH MULTIVALUED OPERATORS

Introduction

In this paper we study the question: under what conditions there is the strong convergence of a sequence of solutions corresponding to a given sequence of elliptic system?

It is easy to see that for many cases the H-convergence together with the strong monotonicity of leading operators and the point-wise convergence of the sequence of operators will imply the strong convergence of solutions. Unfortunately these properties (and the connection between them) are very little investigated for equations with multivalued maps or with nonlinearities in the leading part of equations, see, for instance, V.Chiado Piat, G.Dal Maso, A. Defranceschi [1], A.Cibulis [2], A.A.Pankov [3].

By this reason we use in this paper another approach of introducing some abstract properties of a sequence of operators (the conditions H_1 -H_4 below in the section 1) which ensure the strong convergence of the corresponding sequence of solutions. The necessary proofs are given in the section 2, but in the section 3 there are given some simple examples which show that none of the conditions H_1-H_4 can be avoided.

1. Preliminaries and main results

Let $\Omega\in R^n$, $n\geq 1$, be a bounded domain with strongly Lipschitz boundary $\partial\Omega$ and let $\Gamma_s\subset\partial\Omega$, $s=1,\dots,m$, be a closed sets.

For p, q_1, q_2 such that

$$1<p<\infty,$$

$$1<q_1<\begin{cases}\infty, & \text{if } p\geq n,\\ \frac{pn}{n-p}, & \text{if } p<n,\end{cases}$$

$$1<q_2<\begin{cases}\infty, & \text{if } p\geq n,\\ \frac{p(n-1)}{n-p}, & \text{if } p<n,\end{cases}$$

$$p'=\frac{p}{p-1},\quad q_1'=\frac{q_1}{q_1-1},\quad q_2'=\frac{q_2}{q_2-1},$$

we introduce the spaces

$$F_0=(\underbrace{L_p(\Omega)\times\ldots\times L_p(\Omega)}_{n})^m,$$

$$F_1=(L_{q_1}(\Omega))^m,$$

$$F_2=L_{q_2}(\Gamma_1)\times\ldots\times L_{q_2}(\Gamma_m),$$

$$L=F_1\times F_0\times F_2$$

and the corresponding dual spaces F_0^*, F_1^*, F_2^* and L^* respectively.

Elements of L and L^* we will denote by ω and f (or g) respectively. For $\omega\in L$ and $f\in L^*$ we will use notations

$$\omega=(\alpha\omega,\ \delta\omega,\ \varkappa\omega),$$

$$f=(\alpha f,\ \delta f,\ \varkappa f), \tag{1.1}$$

with $\alpha\omega\in F_1$, $\delta\omega\in F_0$, $\varkappa\omega\in F_2$,

$$\alpha f \in F_1^*,\ \delta f \in F_0^*,\ \varkappa f \in F_2^*.$$

The pairing between L and L^*, F_0 and F_0^*, F_1 and F_1^*, F_2 and F_2^* we will denote by

$$\langle\cdot,\cdot\rangle,\ \langle\cdot,\cdot\rangle_0,\ \langle\cdot,\cdot\rangle_1,\ \langle\cdot,\cdot\rangle_2$$

respectively. To distinguish elements of L and L^* we will use the upper indexes and the same index will correspond to all parts of the representation (1.1), for instance, $w^k = (\alpha w^k, \delta w^k, \varkappa w^k)$.

Let us denote by $\mathcal{O}\!\mathcal{l}$ the class of all multivalued operators $\mathcal{A}$ such that

$$\mathcal{A} = (A, a, b),$$

$$A: F_1 \times F_0 \to 2^{F_0^*},\ a: F_1 \times F_0 \to 2^{F_1^*},\ b: F_2 \to 2^{F_2^*}, \tag{1.2}$$

$$Aw = A(\alpha w, \delta w),\quad aw = a(\alpha w, \delta w),\quad bw = b(\varkappa w)$$

Let $W \subset L$ be a linear closed subspace with elements $u = (\alpha u, \delta u, \varkappa u)$, $v = (\alpha v, \delta v, \varkappa v)$ such that

1°. If a sequence $\{u^k\} \subset W$ converges weakly to u^0 in W then

$$\alpha u^k \to \alpha u^0 \quad \text{strongly in } F_1,$$
$$\varkappa u^k \to \varkappa u^0 \quad \text{strongly in } F_2.$$

2°. There exists a bounded linear operator $\mathcal{P}: L \to L$ (the projection operator) such that $\mathcal{P}L = W$ and $\mathcal{P}\mathcal{P} = \mathcal{P}$. The adjoint operator we will denote by $\mathcal{P}^*$.

D e f i n i t i o n 1. Let $\mathcal{A} \in \mathcal{O}\!\mathcal{l}$ and $f \in L^*$. We say that the element $u^0 \in W$ is a solution of the equation

$$\mathcal{P}^*(\mathcal{A}u - f) \tag{1.3}$$

if there exists an element $g^0 \in L^*$ such that

$$g^0 \in \mathcal{A}u^0,\quad g^0 = (\alpha g^0, \delta g^0, \varkappa g^0),$$

$$\delta g^0 \in Au^0,\ \alpha g^0 \in au^0,\ \varkappa g^0 \in bu^0, \tag{1.4}$$

$$\mathcal{P}^*(g^0 - f) = 0.$$

This element g^0 we will denote by SAu^0.

Because $\mathcal{P}$ is the projection operator then u^0 is a solution of the equation (1.3) if

$$\langle SAu^0 - f, v\rangle = 0 \quad \forall v \in W \tag{1.5}$$

The source of this formalism is the case of elliptic equations

$$-\operatorname{div} A(x, \varkappa, \varkappa_x) - a_0(x, \varkappa, \varkappa_x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad \varkappa \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega),$$

with $p = 2$, $m = 1$, $F_1 = \emptyset$ and W consisting from elements $u = (\varkappa, \varkappa_{x_1}, \dots, \varkappa_{x_n})$, $\alpha u = \varkappa$, $\delta u = \operatorname{grad} \varkappa$, with $\varkappa \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$.

For a given sequence of operators $A_\kappa \in \mathfrak{A}$, $\kappa = 0, 1, 2, \dots$, we introduce the following hypothesies.

H_1. There exists a continuous strictly increasing function γ with $\gamma(0) = 0$ such that for every fixed $u, v \in W$ there exist elements $g^\kappa(u, v) \in F$, $\kappa = 1, 2, \dots$, such that

$$\delta g^\kappa(u, v) \in A_\kappa(\alpha u, \delta v), \quad \kappa = 1, 2, \dots,$$

and for every $g^\kappa \in F$ with $\delta g^\kappa \in A_\kappa(\alpha u, \delta u)$ there is

$$\langle \delta g^\kappa - \delta g^\kappa(u, v), \delta u - \delta v\rangle_0 \geq \gamma(\|\delta u - \delta v\|_{F_0}).$$

H_2. If a sequence $\{u^\kappa\} \subset W$ converges weakly to u^0 in W then all elements $\delta g^\kappa(u^\kappa, u^0)$, $\kappa = 1, 2, \dots$, belong to some compact set in F_0 (elements $g^\kappa(u^\kappa, u^0)$ are defined by H_1).

H_3. The operators A_κ, $\kappa = 1, 2, \dots$, are bounded uniformly with respect to $\kappa = 1, 2, \dots$, i.e. from $u \in W$, $\|u\| \leq c_1 = \mathrm{const}$ it follows that all sets $A_\kappa u$ belong to some bounded set in L^* which depends only on the value of c_1.

H_4. If a sequence $\{u^\kappa\} \subset W$ converges strongly to u^0 in W

nd elements $g^\kappa \in A_\kappa u^\kappa$, $\kappa=1,2,\dots$, converges weakly to g^0 as $\kappa\to\infty$ then $g^0\in A_0 u^0$.

As an example of maps for which the hypothesies H_1 - H_4 are satisfied we can show to the case which corresponds to the equation

$$-\frac{d}{dx_1}(a_{\kappa_1}(x)\partial x_1)-\sum_{i=2}^{n}\frac{d}{dx_i}(a_{\kappa_i}(x)\varphi(\partial)\partial x_i)\ni 0$$

where

$$\varphi(\partial)=\begin{cases} \lambda, & \partial>0\\ [1,\lambda], & \partial=0\\ 1, & \partial<0\end{cases}$$

and the sequences $\{a_{\kappa_i}\}$, $i=1,\dots,n$ with

$$1\le a_{\kappa_i}(x)\le 2,\quad \kappa=1,2,\dots,$$

converges strongly in $L_2(\Omega)$.

The main result of this paper is the following theorem.

T h e o r e m 1.1 Let $A_\kappa\in\mathfrak{A}$, $\kappa=0,1,2,\dots$, $f^\kappa\in L^*$, $\kappa=0,1,2,\dots$ and $f^\kappa\to f^0$ strongly in L^* as $\kappa\to\infty$. Let the assumptions 1°, 2° and the hypothesies H_1-H_4 are fulfilled. If for some subsequence $\{\kappa'\}\subset\{\kappa\}$ of indexes the equtions

$$\mathcal{P}^*(A_{\kappa'}u-f^{\kappa'})\ni 0$$

have solutions $u^{\kappa'}$ respectively and the sequence $\{u^{\kappa'}\}$ is bounded then the equation

$$\mathcal{P}^*(A_0 u-f^0)\ni 0$$

has a nonempty set $\mathcal{D}\subset W$ of solutions and the sequence $\{u^{\kappa'}\}$ converges strongly to $\mathcal{D}$ as $\kappa'\to\infty$, i.e.

$$\inf_{v\in\mathcal{D}}\|u^{\kappa'}-v\|\to 0\quad as\ \kappa'\to\infty.$$

As some consequence of the theorem 1.1 one can easy receive the results of the continuous dependence upon parameters of solutions of equations. For this it is only necessary to check the validity of H_1-H_4 for sequences of operators $\{\mathcal{A}_K(\cdot)=\mathcal{A}(\sigma_K,\cdot)\}\subset\mathfrak{A}$ depending on parameter σ.

2. The convergence of solutions

We start with the following lemma.

L e m m a 2.1. Let for a sequence $\mathcal{A}_K\in\mathfrak{A}$, $K=0,1,2,\dots$ the hypotesies H_1-H_4 are fulfilled. Let a sequences $\{u^K\}\subset W$, $\{f^K\}\subset L^*$ are such that

$$u^K\to u^0 \quad \text{weakly in } W,$$
$$f^K\to f^0 \quad \text{strongly in } L^*$$

and u^K are solutions of the equations

$$\mathcal{P}^*(\mathcal{A}_K u-f^K)=0,\quad K=1,2,\dots \tag{2.1}$$

respectively.

Then the sequence $\{u^K\}$ converges strongly in W to u^0 and u^0 is a solution of the equation

$$\mathcal{P}^*(\mathcal{A}_0 u-f^0)=0. \tag{2.2}$$

P r o o f. Let $S\mathcal{A}_K u^K$ correspond to the solutions u^K of equations (2.1) by definition 1 and $g^K(u^K,u^0)$ are given by H_1 with the property

$$\langle\delta S\mathcal{A}_K u^K-\delta g^K(u^K;u^0),\delta u^K-\delta u^0\rangle_0\geq\gamma(\|\delta u^K-\delta u^0\|) \tag{2.3}$$
$$K=1,2,\dots$$

From the fact that u^K are solutions of the equations (2.1) it follows that

$$\langle\delta S\mathcal{A}_K u^K-\delta g^K(u^K,u^0),\delta v\rangle_0+\langle\delta g^K(u^K;u^0)-$$
$$-\delta f^K,\delta v\rangle_0+\langle\alpha S\mathcal{A}_K u^K-\alpha f^K,\alpha v\rangle_1+ \tag{2.4}$$

$$+ < \varkappa \mathcal{S} A_k u^k - \varkappa f^k, \varkappa v >_2 = 0 \quad \forall v \in W$$

Particularly, these relationships are valid for $v = u^k - u^0$, $k = 1, 2, \ldots$ By virtue of the assumption 1° we have that $\alpha(u^k - u^0) \to 0$ and $\varkappa(u^k - u^0) \to 0$ strongly as $k \to \infty$. From the strong convergence of the sequence $\{f^k\}$ and the hypothesis H_3 it follows that the sequences $\{\alpha \mathcal{S} A_k u^k - \alpha f^k\}$ and $\{\varkappa \mathcal{S} A_k u^k - \varkappa f^k\}$ are bounded. Therefore,

$$< \alpha \mathcal{S} A_k u^k - \alpha f^k, \alpha(u^k - u^0) >_1 + < \varkappa \mathcal{S} A_k u^k - \tag{2.5}$$

$$- \varkappa f^k, \varkappa(u^k - u^0) >_2 \to 0 \quad \text{as } k \to \infty.$$

By virtue of H_2 and the strong convergence $f^k \to f^0$ as $k \to \infty$ we have that the sequence $\{\delta g^k(u^k; u^0) - \delta f^k\}$ belongs to some compact set in F_0. Hence,

$$< \delta g^k(u^k; u^0) - \delta f^k, \delta(u^k - u^0) >_0 \to 0 \quad \text{as } k \to \infty$$

i.e., that the sequence $\{u^k\}$ converges strongly in L to u^0 as $k \to \infty$.

Finally, by virtue of H_3 and H_4 we have that the sequence $\{\mathcal{S} A_k u^k\}$ is bounded in L^*, sequentially weakly compact in L^* (L^* is reflexive) and all weak limit elements of this sequence belongs to $A_0 u^0$.

Hence, passing to the limit $k \to \infty$ in relationships

$$< \mathcal{S} A_k u^k - f^k, v > = 0 \quad \forall v \in W$$

(or in some subsequence of these relationships) with fixed $v \in W$ we get the existence of an element $\mathcal{S} A_0 u^0 \in A_0 u^0$ such that

$$< \mathcal{S} A_0 u^0 - f^0, v > = 0 \quad \forall v \in W$$

what means that the element u^0 is the solution of the equation (2.2).

Now we are able to pass to the proof of the theorem 1.1.

P r o o f of the theorem 1.1. Since the sequence $\{u^k\}$

is bounded it is weakly sequentially compact. Let a subsequence $\{u^\ell\}\subset\{u^{k'}\}$ converges weakly in W to some element u^0. Sequence $\{A_\ell, u^\ell, f^\ell\}$ satisfies all conditions of the lemma 2.1. Hence, $u^0\in D$ and the sequence $\{u^\ell\}$ converges strongly to u^0 as $\ell\to\infty$.

Finally, the convergence of the sequence $\{u^{k'}\}$ to the set D easy follows from the arguing by contradiction.

3. Counter-examples

The conditions 1° and 2° reflect by themselves essential properties of elliptic equations and are necessary (mainly the condition 2°) to ensure the existence of solutions of equations under consideration (at least for simple representatives). The hypothesis H_4 is only (and necessary) for the reason to be able to appoint some limit operator and has no influence on the fact of the convergence of the sequence of solutions in lemma 2.1.

What concerns the hypothesies H_1 - H_3 the following examples will show that none of them can be avoided.

We will give these examples in the form of boundary value problems for systems of equations of the 2^{nd} order with one independent variable, i.e., $n=1$. It is only for the sake of traditionality because these examples without any effort can be reformulated in the terms of the section 1.

E x a m p l e 1 (the necessity of H_1). Let us consider the following sequence of boundary value problems

$$\frac{d}{dx}\left[a_k\left(\frac{d}{dx}x\right)\right]=\frac{d}{dx}b_k(x), \qquad -2\pi<x<2\pi, \tag{3.1}$$
$$x\in H_0^1, \quad k=1,2,\ldots,$$

where

$$a_k(t)=\begin{cases} t+1-1/k, & \text{if } t<-1,\\ 1/k\, t, & \text{if } -1\le t<1,\\ t-1+1/k, & \text{if } t\ge 1,\end{cases}$$

$$b_k(x)=\begin{cases} 0, & \text{if } |x|\ge\pi,\\ 1/k\cos kx, & \text{if } |x|<\pi,\end{cases}$$

$$k=1,2,\dots .$$

Problems (3.1) have solutions

$$g_k(x)=\begin{cases} 0, & \text{if } |x|\geq \pi, \\ 1/k \sin kx, & \text{if } |x|<\pi, \end{cases}$$
$$k=1,2,\dots,$$

respectively. Hence, the absence of the uniform strict monotonicity can lead to the absence of the strong convergence of solutions (it is easy to see that another conditions of the lemma 2.1 are satisfied).

E x a m p l e 2 (the necessity of H_2). Let us consider the following sequence of boundary value problems

$$\frac{d}{dx}\Big[\frac{d\varphi}{dx}-2\pi a_k(\psi)\Big]=\frac{d}{dx}b_{1k}(x), \quad 0<x<1,$$
$$\frac{d}{dx}\Big[\frac{d\psi}{dx}-2\pi a_k(\varphi)\Big]=\frac{d}{dx}b_{2k}(x), \quad 0<x<1, \tag{3.2}$$
$$\varphi,\psi\in H_0^1, \quad k=1,2,\dots,$$

where

$$a_k(t)=\begin{cases} 0, & \text{if } t\leq -1/k, \\ k/2\, t+1/2, & \text{if } -1/k<t<1/k, \\ 1, & \text{if } t\geq 1/k. \end{cases}$$

Let us introduce the functions

$$\rho_k(x)=\begin{cases} \sqrt{k}\,x, & \text{if } 0<x<1/\sqrt{k}, \\ 1, & \text{if } 1/\sqrt{k}\leq x\leq 1-1/\sqrt{k}, \\ \sqrt{k}(1-x), & \text{if } 1-1/\sqrt{k}<x\leq 1, \end{cases} \tag{3.3}$$

and define

$$b_{1k}(x)=(1-\rho_k(x))\cos k\pi x.$$

$$b_{2k}(x) = (1-\rho_k(x))\sin k\pi x + \frac{1}{\pi k}\left[\frac{d}{dx}\varphi_k(x)\right]\cos k\pi x, \quad k=1,2,\dots$$

Then the system (3.2) have solutions

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{\pi k}\sin k\pi x,$$

$$\psi_k(x) = \frac{1}{\pi k}\varphi_k(x)\cos k\pi x, \qquad k=1,2,\dots,$$

respectively and the sequence $\{(\varphi_k, \psi_k)\}$ does not converge strongly in $H_0^1 \times H_0^1$.

Easy calculations show that the sequence $\{(b_{1k}, b_{2k})\}$ converges strongly to zero in $L_2(0,1)\times L_2(0,1)$ as $k\to\infty$, but the sequence $\{(a_k(\psi_k(\cdot)), a_k(\varphi_k(\cdot)))\}$ does not compact in $L_2(0,1)\times L_2(0,1)$, i.e., the hypothesis H_2 is not satisfied.

On the other hand, it is obvious that the hypothesies H_1, H_3, H_4 are satisfied with the limit map

$$a_0(t) = \begin{cases} 0, & \text{if } t<0, \\ [0,1], & \text{if } t=0, \\ 1, & \text{if } t>1 \end{cases}$$

in H_4.

E x a m p l e 3 (the necessity of H_3). Let us consider the following nonlocal systems of equations

$$\begin{gathered} \frac{d}{dx}\left[\frac{d\varphi}{dx} - k\pi\psi\,\xi_k\left(\|\psi - \frac{1}{k\pi}\sin k\pi x\|_{L_2}\right)\right] = \frac{d}{dx}[(1- \\ -\rho_k(x))\cos k\pi x], \qquad 0<x<1, \\ \frac{d}{dx}\left[\frac{d\psi}{dx} + k\pi\varphi\,\xi_k\left(\|\varphi - \frac{1}{k\pi}\sin k\pi x\|_{L_2}\right)\right] = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{k\pi}\left(\frac{d}{dx}\rho_k(x)\right)\cdot \right. \\ \left. \cdot\cos k\pi x + (1-\rho_k(x))\sin k\pi x\right], \qquad 0<x<1, \\ \varphi, \psi \in H_0^1, \quad k=1,2,\dots \end{gathered} \tag{3.4}$$

where the functions ρ_k are given by (3.3) and

$$\xi_k(t)=\begin{cases}0, & \text{if } t\le -k^{-2},\\ 1+k^{-2}t, & \text{if } -k^{-2}<t<0,\\ 1-k^{-2}t, & \text{if } 0<t<k^{-2}\\ 0 & \text{if } t\ge -k^{-2}\end{cases}$$

From the special construction of equations (3.4) it follows immediately that the corresponding solutions are

$$(\varphi_k,\psi_k)=\left(\frac{1}{k\pi}\sin k\pi x,\ \frac{1}{k\pi}\rho_k(x)\cos k\pi x\right),\qquad (3.5)$$
$$k=1,2,\dots$$

This sequence does not converge strongly in $H_0^1\times H_0^1$.

It is easy to see that for the sequence of equations (3.4) the hypothesies H_1, H_2 are satisfied and the sequence of right hand sides in (3.4) converges strongly to zero in $L_2(0,1)\times L_2(0,1)$.

On the other hand, the sequence

$$(\varphi_{1k},\psi_{1k})=\left(\frac{1}{k\pi}\sin k\pi x,\ \sin\pi x\right),\qquad k=1,2,\dots$$

shows that the hypothesis H_3 is not satisfied.

Finally, by virtue of the fact that from strong convergence of a sequence $\{\varphi_n\}$ in H_0^1 it follows the estimate

$$\left\|\varphi_k-\frac{1}{k\pi}\sin k\pi x\right\|_{L_2}\ge\frac{1}{4}\|\varphi_k\|_{L_2}+\frac{1}{8\sqrt{\pi}k}-6\left(\frac{1}{k}\right)$$

we get that

$$\xi_k\left(\left\|\varphi_k-\frac{1}{k\pi}\sin k\pi x\right\|_{L_2}\right)=0\quad\text{for } k \text{ large enough}$$

and, as a consequence, that the hypothesis H_4 is satisfied too with the limit operator

$$A_0\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\varphi\right)\\ \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\psi\right)\end{pmatrix}.$$

References

1. V.Chiado Piat, G.Dal Maso, A.Defranceschi. G-convergence of monotone operators. - Ann. Inst. H.Poincare, Analyse nonlineaire - 1990. - V.7, N 3. - P.127-160.
2. А.Б.Цибулис. Разрешимость эллиптических уравнений с разрывными нелинейностями. - Дифференциальные уравнения. - 1986. - Т.22, N 8. - С.1435-1441.
3. А.А.Панков. Об усреднении и G-сходимости нелинейных эллиптических операторов дивергентного вида. - Докл. АН СССР - 1984. - Т.278, N 1. - С.37-41.

УДК 517.927

А.А.Унгуре, Я.В.Цепитис

О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С НЕСУММИРУЕМЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$x'' = f(t,x,x'), \tag{1}$$

где для любого $\sigma\in(0,1)$ вектор-функция $f:[\sigma,1]\times R^{2n}\to R^n$ удовлетворяет локальному условию Каратеодори, а при $t=0$ f имеет, быть может, несуммируемые особенности.

В настоящей заметке исследуется вопрос о разрешимости краевой задачи для системы (I) с условиями

$$x(0)=0, \quad Ax(1)+Bx'(1)=c, \tag{2}$$

при предположении, что A и B диагональные матрицы с неотрицательными элементами такие, что $\det(A+B)\neq 0$, $c\in R^n$. Выделен класс правых частей системы (I), обобщающий часто в приложениях встречающиеся правые части, сформулирована теорема существования решения краевой задачи (I), (2) в терминах нижних и верхних функций и указана методика построения этих функций.

Отметим, что под решением краевой задачи (I), (2) будем понимать непрерывно дифференцируемую вектор-функцию $x:[0,1]\to R^n$, для которой выполняются условия (2), и для любого $\sigma\in(0,1)$ сужение x на $[\sigma,1]$ является решением системы уравнений (I).

Пусть на протяжении всей статьи $I=[0,1]$, $i=1,\dots,n$; $j=1,\dots,i-1,i+1,\dots,n$; $\gamma_i:(0,1]\to(0,+\infty)$ для любого $\sigma\in(0,1)$ абсолютно непрерывные на $[\sigma,1]$ функции такие, что

$$\lim_{t\to 0^+}\gamma_i(t)=+\infty, \tag{3}$$

$$\lim_{t\to 0^+} \gamma_i(t)\exp\left(-\int_t^{\sigma} \gamma_i(\tau)d\tau\right) < +\infty, \tag{4}$$

далее, $g_i : (0,1] \to R$ для любого $\sigma \in (0,1]$ суммируемые на $[\sigma, 1]$ функции, отрицательные части которых суммируемы на I, наконец, для суммируемых функций $p_i : I \to (0,+\infty)$ выполняются соотношения

$$\int_0^1 p_i(\xi)\int_{\xi}^{1} \exp\left(\int_{\eta}^{1} \gamma_i(\tau)d\tau\right)\exp\left(-\int_{\xi}^{\eta} g_i(\tau)d\tau\right)d\eta\, d\xi < +\infty \tag{5}$$

Непрерывно дифференцируемой вектор-функции $x : I \to R^n$ сопоставим вектор-функции

$$\tilde{x} = \left(\exp\left(\int_t^1 \gamma_1(\tau)d\tau\right)x_1, \ldots, \exp\left(\int_t^1 \gamma_n(\tau)d\tau\right)x_n\right),$$

$$\tilde{x}' = \left(\gamma_1'(t)\exp\left(\int_t^1 \gamma_1(\tau)d\tau\right)x_1', \ldots, \gamma_n'(t)\exp\left(\int_t^1 \gamma_n(\tau)d\tau\right)x_n'\right),$$

и пусть $p_i(t) = g_i(t) - \gamma_i(t)$, $q_i(t) = \gamma_i'(t) + g_i(t)\gamma_i(t)$, $P(t)$, $Q(t)$, $R(t)$ диагональные матрицы такие, что $\operatorname{diag} P(t) = (p_1(t), \ldots, p_n(t))$, $\operatorname{diag} Q(t) = (q_1(t), \ldots, q_n(t))$, $\operatorname{diag} R(t) = (\rho_1(t), \ldots, \rho_n(t))$.

В последующем рассмотрим систему уравнений (I) при предположении, что правая часть системы представляется в виде

$$f(t,x,x') = Q(t)x - P(t)x' + R(t)h(t,\tilde{x},\tilde{x}'), \tag{6}$$

где $h : I \times R^{2n} \to R^n$ непрерывная вектор-функция. Учитывая представление (6), систему уравнений (I) мы можем покомпонентно записать в следующем виде

$$(x_i' - \gamma_i(t)x_i)' + g_i(t)(x_i' - \gamma_i(t)x_i) = \rho_i(t)h_i(t,\tilde{x},\tilde{x}') \tag{7}$$

В дальнейшем, для краткости, левую часть уравнения (7) обозначим через $\mathcal{L}_i x_i$.

В частном случае, для $\tau_i \in (-1, +\infty)$, $\rho_i \in [1, 2+\tau_i)$, $q_i \in [-1, +\infty)$, полагая $\gamma_i(t) = \rho_i/t$, $g_i(t) = \frac{1+q_i}{t}$, $\rho_i(t) = t^{\tau_i}$, представление (6), записанное покомпонентно, принимает вид

$$f_i(t,x,x') = \frac{p_i q_i}{t^2} x_i - \frac{1-p_i+q_i}{t} x_i' + t^{q_i} h_i\Big(t, \frac{x_1}{t^{p_1}}, \dots, \frac{x_n}{t^{p_n}}, \frac{x_1'}{t^{p_1-1}}, \dots, \frac{x_n'}{t^{p_n-1}}\Big).$$

Отсюда следует, что краевая задача (I), (2) с правой частью уравнения (I) в виде (6) обобщает возникшие в приложениях краевые задачи (см., например, [2], [4], [6] и там указанную литературу).

Предположим далее существование вектор-функций $\alpha, \beta: I \to R^n$ с непрерывными компонентами, удовлетворяющих неравенствам

$$\alpha_i(t) \le \beta_i(t) \tag{8}$$

таких, что функции $t \to \exp\big(\int_t^1 \gamma_i(\tau)d\tau\big)\,|\alpha_i(t)|$, $t \to \exp\big(\int_t^1 \gamma_i(\tau)d\tau\big)\,|\beta_i(t)|$ ограничены на I.

Определение I. Будем говорить, что система уравнений (I) удовлетворяет условию $\mathcal{E}$, если существуют число $\sigma \in (0,1]$ и функции $\varepsilon_i : (0,\sigma] \to [0,+\infty)$ такие, что

$$\lim_{t \to 0^+} \varepsilon_i(t) = 0, \tag{9}$$

$$\lim_{t \to 0^+} \int_t^\sigma \varepsilon_i(s) \exp\Big(\int_s^\sigma \gamma_i(\tau)d\tau\Big)ds < +\infty, \tag{10}$$

и для любых $t_0 \in (0,\sigma)$, $t_1 \in (t_0,\sigma]$ и решения $x: [t_0,t_1] \to R^n$ системы уравнений (I), компоненты которого удовлетворяют оценкам

$$\alpha_i(t) \le x_i(t) \le \beta_i(t) \tag{11}$$

из неравенства

$$|x_i'(t_0) - \gamma_i(t_0)| \le \varepsilon_i(t_0) \tag{12}$$

следует выполнение для $t \in (t_0, t_1]$ неравенства

$$|x_i'(t) - \gamma_i(t)| \le \varepsilon_i(t) \tag{13}$$

Л е м м а I. Если правая часть системы уравнений (I) представляется в виде (6), то системы уравнений (I) удовлетворяют условию $\mathcal{E}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$\mathcal{L}=\max_i\left(\exp\left(\int_t^1 \gamma_i(\tau)d\tau\right)|\alpha_i(t)|,\ \exp\left(\int_t^1 \gamma_i(\tau)d\tau\right)|\beta_i(t)|:\ t\in I\right),$$

$$M\in(\mathcal{L},+\infty),\quad N=\max_i\left(|h_i(t,u,v)|:\ t\in I,\ u\in[-\mathcal{L},\mathcal{L}]^n,\ v\in[-M,M]^n\right)$$

Выберем $\sigma\in(0,1)$ такое, чтобы для всех i при $t\in(0,\sigma]$

$$N\gamma_i^{-1}(t)\exp\left(\int_t^1 \gamma_i(\tau)d\tau\right)\int_0^{\sigma} p_i(\xi)\exp\left(-\int_\xi^t g_i(\tau)d\tau\right)d\xi+\mathcal{L}<M, \tag{14}$$

что возможно в силу (3) и (4). Далее, для $t\in[0,\sigma]$ определим

$$\delta_i(t)=N\int_0^t p_i(\xi)\exp\left(-\int_\xi^t g_i(\tau)d\tau\right)d\xi.$$

Функции δ_i удовлетворяют соотношениям (9), а из (5) следует выполнение оценок (II). Пусть $t_0\in(0,\sigma),\ t_1\in(t_0,\sigma]$ и $x:[t_0,t_1]\to\mathbb{R}^n$ – решение системы уравнений (I), компоненты которого на области определения удовлетворяют оценкам (II) и (I2). Покажем, что на $(t_0,t_1]$ выполняются и неравенства (I3). Имеем

$$|x_i'(t_0)-\gamma_i(t_0)x_i(t_0)|\le\delta(t_0)=N\int_0^{t_0} p_i(\xi)\exp\left(-\int_\xi^{t_0} g_i(\tau)d\tau\right)d\xi.$$

Из этого следует

$$-N\int_0^{\sigma} p_i(\xi)\exp\left(-\int_\xi^{t_0} g_i(\tau)d\tau\right)d\xi+\gamma_i(t_0)x_i(t_0)\le x_i'(t_0)\le$$

$$\le N\int_0^{\sigma} p_i(\xi)\exp\left(-\int_\xi^{t_0} g_i(\tau)d\tau\right)d\xi+\gamma_i(t_0)x_i(t_0)$$

Поделив полученные неравенства на $\gamma_i(t_0)\exp\left(-\int_{t_0}^1 \gamma_i(\tau)d\tau\right)$ и учитывая (I4), получаем

$$|\gamma_i^{-1}(t_0)\exp(\int_{t_0}^{1}\gamma_i(\tau)d\tau)x_i'(t_0)| < M.$$

Допустим, что $i \in \{1,\dots,n\}$ и $t_2 \in (t_0, t_1)$ такие, что

$$|\gamma_i^{-1}(t_2)\exp(\int_{t_2}^{1}\gamma_i(\tau)d\tau)x_i'(t_2)| = M, \tag{15}$$

$$|\gamma_i^{-1}(t)\exp(\int_{t}^{1}\gamma_i(\tau)d\tau)x_i'(t)| < M, \qquad t \in (t_0, t_2].$$

Принимая (7), как линейное уравнение относительно $x_i' - \gamma_i(t)x_i$, получаем

$$|x_i'(t) - \gamma_i(t)x_i(t)| \le N\int_{t}^{t} g_i(\xi)\exp(-\int_{\xi}^{t} g_i(\tau)d\tau)d\xi +$$

$$+\,\delta(t_0)\exp(-\int_{t_0} g_i(\tau)d\tau), \qquad t \in (t_0, t_2],$$

следовательно, неравенство (13) выполняется для $t \in (t_0, t_2]$. Подставляя в неравенстве (13) $t = t_2$ и повторяя вышеприведенные рассуждения, получаем

$$|\gamma_i^{-1}(t_2)\exp(\int_{t_2}^{1}\gamma_i(\tau)d\tau)x_i'(t_2)| < M,$$

что противоречит (15), поэтому

$$|\gamma_i^{-1}(t)\exp(\int_{t}^{1}\gamma_i(\tau)d\tau)x_i'(t)| < M,$$

для всех i и $t \in (t_0, t_1]$, откуда следует выполнение неравенства (13) для $t \in (t_0, t_1]$. Лемма доказана.

Определение 2. Будем говорить, что система уравнений (1) удовлетворяет условию B, если для любых $t_0 \in (0,1)$, $t_1 \in (t_0, 1]$ существуют постоянные $N_i \in (0, +\infty)$ такие, что для произвольного решения $x : [t_0, t_1) \to R^n$ системы уравнений (1), компоненты которого на области определения удовлетворяют оценкам (11), имеют место неравенства

$$\sup\{|x_i'(t)| : t \in [t_0, t_1)\} < N_i.$$

Условия на правую часть системы уравнений (1), обеспечивающие выполнение условия B, приведены в монографии [1]. Мы в дальнейшем предположим, что правая часть системы уравнений (1) удовлетворяет и таким условиям.

О п р е д е л е н и е 3. Будем говорить, что система уравнений (I) удовлетворяет условию $\mathcal{A}$, если выполняется условие $\mathcal{B}$, и для любых $t_0 \in (0,1)$, $t_1 \in (t_0, 1]$ компоненты вектор-функций α и β на $[t_0, t_1]$ являются, соответственно, обобщенными нижней и верхней функциями скалярного уравнения

$$x_i'' = f_i(t, y_1, \ldots, x_i, \ldots, y_n, z_1, \ldots, x_i', \ldots, z_n) \qquad (16)$$

при любом наборе параметров $y_j \in [\alpha_j(t), \beta_j(t)]$, $z_j \in [-N_j, N_j]$.

Определения и соответствующие свойства обобщенных нижних и верхних функций см., например, в [3].

Т е о р е м а I. Пусть правая часть системы уравнений (I) представляется в виде (6), выполняется условие $\mathcal{A}$ и

$$A\alpha(1) + B\alpha'(1) \leq c \leq A\beta(1) + B\beta'(1).$$

Тогда краевая задача (I), (2) имеет решение x, компоненты которого на I удовлетворяют оценкам (II).

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме I система уравнений (I) удовлетворяет условию $\mathcal{E}$. Следовательно, утверждение теоремы получается из результатов работы [6].

Пусть $\operatorname{diag} A = (a_1, \ldots, a_n)$, $\operatorname{diag} B = (b_1, \ldots, b_n)$, $G_i(t, \xi)$ функции Грина краевых задач

$$\mathcal{L}_i x_i = 0, \quad x_i(0) = 0, \quad a_i x_i(1) + b_i x_i'(1) = 0,$$

которые существуют, так как $a_i + b_i \gamma_i(1) > 0$, и определим функции

$$\varkappa_i(t) = \frac{c_i}{a_i + b_i \gamma_i(1)} \exp\left(-\int_t^1 \gamma_i(\tau)\,d\tau\right) +$$

$$+ \lambda_i \int_0^1 G_i(t,\xi)\,\rho_i(\xi)\,d\xi,$$

где $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $\mu_i(t) = \exp\left(\int_t^1 \gamma_i(\tau)\,d\tau\right) \varkappa_i(t)$,

$$\nu_i(t) = \gamma_i^{-1}(t) \exp\left(\int_t^1 \gamma_i(\tau)\,d\tau\right) \varkappa_i'(t).$$

Л е м м а 2. Функции $t \to \mu_i(t) \operatorname{sign} \lambda_i$ не убывают на I, а при дополнительном условии

$$\gamma_i'(t)-\gamma^2(t)\leq 0, \quad t\in[0,1] \tag{17}$$

на I не убывают и функции $t\to\nu_i(t)\,sign\,\lambda_i$.

Доказательство леммы проводится непосредственной проверкой.

Пусть $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$, введем обозначения

$$\mu_i^{[1]}(\lambda_i)=\lim_{t\to 0^+}\mu_i(t),\qquad \mu_i^{[-1]}(\lambda_i)=\mu_i(1),$$

$$\nu_i^{[1]}(\lambda_i)=\lim_{t\to 0^+}\nu_i(t),\qquad \nu_i^{[-1]}(\lambda_i)=\nu_i(1),$$

$$\mu_i^{[0]}(0)=\frac{c_i}{a_i+b_i\gamma_i(1)},\qquad \nu_i^{[0]}(0)=\frac{c_i\gamma_i(1)}{a_i+b_i\gamma_i(1)},$$

наконец, для $\kappa=(\kappa_1,\ldots,\kappa_n)$, $l=(l_1,\ldots,l_n)$, где $\kappa_i,l_i\in\{-1,1\}$,

$$\mu^{[\kappa]}(\lambda)=(\mu_1^{[\kappa_1 sign\,\lambda_1]}(\lambda_1),\ldots,\mu_n^{[\kappa_n sign\,\lambda_n]}(\lambda_n)).$$

Определение 4. Будем говорить, что функция $h: I\times\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}^n$ принадлежит классу $\mathcal{M}(\kappa,l)$, если для любых $t\in I$; $u,\nu_y^{[i]},\nu_x^{[i]}\in\mathbb{R}^n$; $y,x\in\mathbb{R}$ таких, что

$$\nu_y^{[i]}=(\nu_1,\ldots,\nu_{i-1},y,\nu_{i+1},\ldots,\nu_n),$$

$$\nu_x^{[i]}=(\nu_1,\ldots,\nu_{i-1},x,\nu_{i+1},\ldots,\nu_n),$$

выполняются

$$(-1)^{\kappa_i}[h_i(t,\nu_y^{[i]},u)-h_i(t,\nu_x^{[i]},u)]\,sign\,(y-x)<0,$$

$$(-1)^{l_i}[h_i(t,u,\nu_y^{[i]})-h_i(t,u,\nu_x^{[i]})]\,sign\,(y-x)<0.$$

Теорема 2. Пусть правая часть системы (I) представляется в виде (6), функции f_i удовлетворяют неравенствам (17), $h \in \mathcal{M}(\kappa,\ell)$, существуют $\lambda_*, \lambda^* \in \mathbb{R}^n$ такие, что для функций $\alpha_i(t) = \lambda_{*i}\, \varkappa_i(t)$, $\beta_i(t) = \lambda_i^*\, \varkappa_i(t)$ на области определения справедливы соотношения (8), выполняются условие B и для любых $t_0 \in (0,1)$, $t_1 \in (t_0, 1]$ неравенства

$$\lambda_{*i} \geq h_i(t, \mu^{[-\kappa]}(\lambda_*), \alpha_1, \ldots, \nu^{[-\ell_i \operatorname{sign} \lambda_{*i}]}(\lambda_{*i}), \ldots, \alpha_n),$$

$$\lambda_i^* \leq h_i(t, \mu^{[\kappa]}(\lambda^*), \alpha_1, \ldots, \nu^{[\ell_i \operatorname{sign} \lambda_i^*]}(\lambda_i^*), \ldots, \alpha_n),$$

$$t \in [t_0, t_1], \quad \alpha_j \in [-N_j, N_j].$$

Тогда система уравнений (I) удовлетворяет условию A.

Доказательство. Для любых $t_0 \in (0,1)$, $t_1 \in (t_0, 1]$ функции α_i для $t \in [t_0, t_1]$, $y_j \in [\alpha_j(t), \beta_j(t)]$ в силу леммы 2, удовлетворяют соотношениям

$$\mathcal{L}_i \alpha_i = \lambda_{*i} \rho_i(\xi) \geq \rho_i(\xi) h_i(t, \mu^{[-\kappa]}(\lambda_*), \alpha_1, \ldots,$$

$$\nu_i^{[-\ell_i \operatorname{sign} \lambda_{*i}]}(\lambda_{*i}), \ldots, \alpha_n) \geq \rho_i(\xi) h_i(t, y_1, \ldots,$$

$$\exp\Big(\int_t^1 \gamma_i(s) ds\Big) \alpha_i(t), \ldots, y_n, \alpha_1, \ldots, f_i^{-1}(t) \exp\Big(\int_t^1 \gamma_i(s) ds\Big) \alpha_i'(t), \ldots, \alpha_n).$$

Следовательно, функции α_i на $[t_0, t_1]$ являются нижними функциями уравнений (16). Аналогично показывается, что функции β_i на $[t_0, t_1]$ являются верхними функциями уравнений (16). Теорема доказана.

Если в представлении (6) присутствующая функция h имеет произвольное поведение по своим аргументам, полезной может оказаться следующая модификация теоремы 2.

Теорема 2'. Пусть правая часть системы (I) представляется в виде (6), функции f_i удовлетворяют неравенствам (I7), $k_m=(-1)^{(m-1)!}$, $\ell_m=(-1)^{m+1}$,

$$h_i(t,u,v)=\sum_{m=1}^{4} h_i^{[m]}(t,u,v),$$

где $h_i^{[m]}: I\times R^{2n}\to R^n$ непрерывные функции такие, что $h_i^{[m]}\in M(k_m,\ell_m)$ и существуют $\lambda_*^{[m]},\lambda^{*[m]}\in R^n$ такие, что для

$$\lambda_{*i}=\sum_{m=1}^{4}\lambda_{*i}^{[m]},\quad \lambda_i^*=\sum_{m=1}^{4}\lambda_i^{*[m]},$$

функции $\alpha_i(t)=\lambda_{*i}\,\varkappa_i(t)$, $\beta_i(t)=\lambda_i^*\,\varkappa_i(t)$ на области определения справедливы соотношения (8), выполняются условие B и для любых $t_0\in(0,1)$, $t_1\in(t_0,1]$ неравенства

$$\lambda_{*i}^{[m]}\geqslant h_i^{[m]}(t,\mu^{[-k_m]}(\lambda_*),x_1,\ldots,\nu^{[-\ell_m\,\mathrm{sign}\,\lambda_{*i}]}(\lambda_{*i}),\ldots,x_n),$$

$$\lambda_i^{*[m]}\leqslant h_i^{[m]}(t,\mu^{[k_m]}(\lambda^*),x_1,\ldots,\nu^{[\ell_m\,\mathrm{sign}\,\lambda_i^*]}(\lambda_i^*),\ldots,x_n),$$

$$t\in[t_0,t_1],\ x_j\in[-N_j,N_j].$$

Тогда система уравнений (I) удовлетворяет условию A.

Доказательство теоремы проводится так же, как доказательство теоремы 2.

Пример I. В работе [4] изучалась краевая задача для уравнения (I) при $n=1$, правая часть которого представляется в виде (6) с функциями $\gamma(t)=\frac{1}{t}$, $g(t)=\frac{2}{t}$,

$$p(t)=t,\quad h(t,u,v)=h_1(t,u,v)+h_2(t,u,v),$$

где

$$h_1(t,u,v)=-\left(\frac{2u}{R}+\frac{4u^3}{R^3}+\frac{2uv^2}{R^2-2t^2u^2}\right),$$

$$h_2(t,u,v)=\frac{4t^2u^3}{R^4}+\frac{6u}{R}\left(1-\frac{2}{R}\right)^{1/2}\left(1+\frac{2t^2u}{R^3}\right)^{1/2},$$

$R\in(2,+\infty)$, с краевыми условиями

$$x(0)=0, \quad x(1)=2; \quad 0\leq x(t)\leq 2, \quad t\in I.$$

Применяя теорему 2′, получаем, что в таком случае для уравнения (I) выполняется условие A , если положить

$$\alpha(t)=\left[\frac{16}{R^4}+\frac{6}{R}\left(1-\frac{2}{R}\right)^{1/2}\right](t^3-t)+2t,$$

$$\beta(t)=\begin{cases}(2+\lambda)(t^3-t)+2t, & t\in[0,t_0],\\ 2, & t\in(t_0,1],\end{cases}$$

где λ корень уравнения

$$20+\left(\frac{2}{R}-10\right)\lambda+\frac{2R^3-32}{R^3(R^3-8)}\lambda^3=0,$$

а t_0 возможный корень уравнения

$$(2+\lambda)(t^3-t)+2t=2,$$

который попадает на I при значениях параметра R , достаточно близких к 2. Отметим, что полученные оценки (II) для существующего в силу теоремы I решения x этой краевой задачи улучшают соответствующие оценки из работы [4].

Пример 2. Рассмотрим систему уравнений (I) при $n=2$, правая часть которой представляется в виде (6) с функциями $f_i(t)=1/t$, $g_i(t)=1/t$, $p_i(t)=t$,

$$h_1(t,u,v)=u_1^2u_2+u_2, \quad h_2(t,u,v)=u_1^2u_2$$

совместно с краевыми условиями

$$x_1(0)=x_1'(1)=0, \quad x_2(0)=0, \quad x_2(1)=b,$$

где $b\in[0,2/3]$. Применяя теорему 2, получаем, что для системы уравнений (I) выполняется условие A , если положить

$$\alpha_1(t)=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\sqrt{4-9b^2}\right)(t^3-3t),$$

$$\beta_1(t)=3t-t^3,\quad \alpha_2(t)=0,\quad \beta_2(t)=bt.$$

Наконец заметим, что предложенной нами методикой построения нижних и верхних функций можно, следуя изложенному в [5], изучить вопрос об оценке снизу количества решений в случаях неединственности решения краевой задачи (I), (2).

Литература

I. Васильев Н.И., Клоков Ю.А. Основы теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений - Рига: Зинатне, 1978. - 184 с.
2. Гризанс Г.П. Об одной краевой задаче для уравнения с несуммируемой особенностью // Латв.мат.ежегодник - Рига: Зинатне, 1985. - Вып.29. - С.22-35.
3. Лепин А.Я., Лепин Л.А. Краевые задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка - Рига: Зинатне, 1988. - 210 с.
4. Унгуре А.А., Цепитис Я.В. О разрешимости одной краевой задачи, возникшей в теории гравитации // Прикладные задачи математической физики - Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1988. - С.137-143.
5. Цепитис Я.В. О разрешимости краевой задачи одного типа, встречающейся в приложениях // Латв.мат.ежегодник - Рига: Зинатне, 1983. - Вып.27. - С.122-130.
6. Цепитис Я.В. О существовании ограниченного решения для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с несуммируемыми особенностями // Математика. Дифференциальные уравнения: Научные труды - Рига: ЛУ, 1990. - С.105-113.

УДК 517.927

С.А.Беспалова, Ю.А.Клоков

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ УРАВНЕНИЯ ФОЛКНЕРА-СКЕНА. III

п.1. Эта статья является продолжением работ [1]-[4], посвященных изучению задачи

$$x''' = P_2(x, x', x'') \tag{1}$$

$$x(0) = x_0, \ x'(0) = a, \ x'(\infty) = \gamma, \tag{2}$$

где P_2 - полином второй степени, который мы запишем в виде

$$P_2(x,x',x'') = (a_0 + a_1 x + a_2 x' + a_3 x'')x'' + \\ + b_0 + b_1 x + b_2 x' + b_{12} x x' + b_{22} x'^2 + b_{11} x^2.$$

В [1] было доказано, что если решение задачи (1), (2) существует для какого-нибудь $\gamma \neq 0$, то необходимо $b_{11} = 0$ и $b_1 + \gamma b_{12} = 0$. В общем случае нельзя утверждать, что если решение задачи (1), (2) существует, то необходимо $b_0 + b_2\gamma + b_{22}\gamma^2 = 0$, [3].

п.2. Обозначим $b_{12} = B$, $Q_2(x') = b_0 + b_2 x' + b_{22} x'^2$ и запишем уравнение (1) в виде

$$x''' = Q_2(x') + Bx(x'-\gamma) + x''(a_0 + a_1 x + a_2 x' + a_3 x'') = f(x,x',x'') \tag{3}$$

Рассмотрим для (3) задачу (2), где $0 < a < \gamma$, $x_0 \geqslant 0$. В [1] отмечалось, что если $B = 0$, то необходимо $Q_2(\gamma) = 0$. Однако, если $B \neq 0$, то это не так. В дальнейшем будем считать, что $B > 0$. Легко убедиться, что если $Q_2(\gamma) < 0$ и $a \leqslant x'(t) \leqslant \gamma$, $t \geqslant 0$, то при этих условиях задача (3), (2) решения не имеет. Поэтому предположим, что $Q_2(\gamma) \geqslant 0$.

Теорема 1. Пусть $a_1 \leqslant 0$,

$$Q_2(\gamma) \geqslant 0 \tag{4}$$

и $$Q_2(a) \leq Bx_0(\gamma - a). \qquad (5)$$

Тогда задача (3), (2) имеет решение.

Доказательство. Справедливость этой теоремы установим построением соответствующих верхней и нижней функций, [I].

В качестве верхней функции возьмем $\beta(t) = x_0 + \gamma t$. Тогда $\beta'''(t) = \beta''(t) = 0$ и видно, что

$$\beta'''(t) \leq f(\bar{\beta}(t), \beta'(t), \beta''(t))$$

для любой функции $\bar{\beta}(t)$ такой, что $\bar{\beta}(t) \leq \beta(t)$.

В качестве нижней функции –

$$\alpha(t) = \begin{cases} x_0 + at_1, & 0 \leq t \leq t_1, \\ x_0 + at_1 + \gamma(t - t_1) - (\gamma - a)t_1 \ln\frac{t}{t_1}, & t \geq t_1, \end{cases} \qquad (6)$$

где $t_1 > 0$ выберем позже. Из (6) следует, что для $0 \leq t \leq t_1$ неравенство

$$\alpha''' \geq f(\bar{\alpha}(t), \alpha'(t), \alpha''(t)) \qquad (7)$$

имеет место для любой $\bar{\alpha}(t)$ такой, что $\alpha(t) \leq \bar{\alpha}(t) \leq \beta(t)$, так как выполняется (5). Пусть теперь $t \geq t_1$. Представим $Q_2(x')$ в виде

$$Q_2(x') = (x' - \gamma)(Mx' + N) + Q_2(\gamma),$$

где $M, N \in \mathbb{R}$. Тогда уравнение (3) можно записать следующим образом

$$x''' = Q_2(\gamma) + (x' - \gamma)(Bx + Mx' + N) + x''(a_0 + a_1 x + a_2 x' + a_3 x'').$$

Очевидно, что

$$\alpha'''(t) = -\frac{2t_1(\gamma - a)}{t^3} < 0, \quad t \geq t_1.$$

С другой стороны,

$$f(\bar{\alpha}(t),\alpha'(t),\alpha''(t)) = f(\alpha(t)+[\bar{\alpha}(t)-\alpha(t)],\alpha'(t),\alpha''(t)),$$

и поэтому

$$f(\bar{\alpha}(t),\alpha'(t),\alpha''(t)) = Q_2(\gamma) - (\gamma-a)\frac{t_1}{t}[B(x_0+at_1+\gamma(t-t_1)-$$

$$-(\gamma-a)t_1\ln\frac{t}{t_1}) + B(\bar{\alpha}(t)-\alpha(t)) + M(\gamma-(\gamma-a)\frac{t_1}{t})+N] +$$

$$+\frac{(\gamma-a)t_1}{t^2}[a_0+a_1\bar{\alpha}(t)+a_2\alpha'(t)+a_3\alpha''(t)].$$

Откуда видно, что (7) выполняется и для $t \geq t_1$, если взять t_1 достаточно большой величиной. Тем самым теорема I доказана.

п.3. Рассмотрим теперь для уравнения (I) задачу

$$x(0)=x_0,\quad x'(0)=a,\quad x'(\infty)=0. \tag{8}$$

Заметим, что в данном случае $(\gamma=0)$ уже нельзя утверждать, что если задача (I), (8) имеет решение, то $b_I=0$, $b_{II}=0$. В качестве примера приведем уравнение

$$x'''+x''+x' = x''+x'+x+(x''+x'+x)^2,$$

для которого задача (8) имеет единственное решение для любых $x_0, a\in R$. В то же время $b_I=b_{II}=1$.

Рассмотрим для уравнения

$$x''' = xx' \tag{9}$$

задачу (8), где $x_0 > 0$ и

$$a\in\left[-\sqrt{\frac{x_0^3}{3}},0\right], \qquad \text{так что } a \leq 0.$$

Обозначим через C_0 наименьший неотрицательный корень уравнения

$$\frac{a^2}{2} = \frac{x_0^3}{6} - C^2\frac{x_0}{2} + \frac{C^3}{3}. \tag{10}$$

Л е м м а. Решение задачи (9), (8) существует и удовлетворяет уравнениям

$$x''(t)=\frac{1}{2}[x^2(t)-C_0^2], \tag{11}$$

$$x'(t)=-[x(t)-C_0]\sqrt{(x(t)+2C_0)/3}. \tag{12}$$

При этом $C_0\le x(t)\le x_0$, $a\le x'(t)\le 0$, $x''(t)\ge 0$ для $t\ge 0$.

Доказательство. Интегрируя (9), получим

$$x''=\frac{x^2}{2}+K. \tag{13}$$

Для того, чтобы решение задачи (9), (8) существовало, необходимо, чтобы $K\le 0$. Обозначим $K=-C^2/2$. Из (13) следует, что $x(\infty)=C$. Умножая (13) на x' и интегрируя еще раз, получим

$$\frac{x'^2}{2}=\frac{x^3}{6}+\frac{C^2x}{2}+\mathcal{L}, \tag{14}$$

где $\mathcal{L}$ - $const$. При $t=\infty$ из (14) находим (учитывая, что $x'(\infty)=0$, $x(\infty)=C$)

$$\mathcal{L}=C^3/3.$$

Подставляя это значение $\mathcal{L}$ в (14) и полагая там $t=0$, получим уравнение (10), откуда находим

$$C=C_0>0.$$

Теперь из (13) следует уравнение (11). Запишем (14) в виде

$$3x'^2(t)=(x(t)-C_0^2)(x(t)+2C_0), \tag{15}$$

откуда следует уравнение (12).

Так как $x(t)\ge C_0$, то $x''(t)\ge 0$ и $a\le x'(t)\le 0$. Тем самым лемма доказана.

Заметим, что решение задачи (9), (8) с условием $a\le x'(t)\le 0$ единственно.

Рассмотрим теперь задачу (8) для более общего уравнения

$$x''' = px' + qxx'' + rxx' + Ax''^2 + Bx''x' + Cx'^2, \qquad (16)$$

где $p, \ldots, C \in R$, причем

$$q \le 0,\quad r \ge 1,\quad \sqrt{C_0}\,(p + C_0(r-1)) - qC_0^2 \ge 0, \qquad (17)$$

$$A \le 0,\quad B \ge 0,\quad C \le 0, \qquad (18)$$

и C_0 определяется равенством (10).

Т е о р е м а 2. Пусть $x_0 \ge 0$, $a \in [-\sqrt{\frac{1}{3}x_0^3}, 0]$ и выполняются условия (17), (18). Тогда решение задачи (16), (8) существует.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства построим соответствующие верхнюю и нижнюю функции.

Очевидно, что $\beta(t) = x_0$ есть верхняя функция. В качестве нижней функции $\alpha(t)$ возьмем решение задачи (9), (8). Очевидно, что $\alpha'(t) \le \beta'(t)$ $\forall t \in R_+$. Обозначим через $\bar{\alpha}(t)$ ($\bar{\alpha} \in C^3(R_+)$, $R_+ = [0, \infty)$) любую функцию, удовлетворяющую неравенствам $\alpha(t) \le \bar{\alpha}(t) \le \beta(t)$, $t \ge 0$. Подставляя $\alpha(t)$ в (16), найдем (учитывая (10), (11), (12))

$$\alpha''' - p\alpha' - q\bar{\alpha}\alpha'' - r\bar{\alpha}\alpha' - A\alpha''^2 - B\alpha''\alpha' - C\alpha'^2 =$$

$$= (\alpha''' - \alpha\alpha') + \alpha\alpha' - p\alpha' - q\bar{\alpha} - r\bar{\alpha}\alpha' - A\alpha''^2 - B\alpha''\alpha' - C\alpha'^2 =$$

$$= -\alpha'(p + r\bar{\alpha} - \alpha) - q\bar{\alpha}\alpha'' - A\alpha''^2 - B\alpha''\alpha' - C\alpha'^2 \ge 0.$$

Последнее неравенство следует из соотношений

$$-\alpha'(t) = +[\alpha(t) - C_0]\sqrt{(\alpha(t) + 2C_0)/3} \ge [\alpha(t) - C_0]\cdot\sqrt{C_0},$$

$$\alpha''(t) = [\alpha(t) - C_0]\cdot\frac{1}{2}[\alpha(t) + C_0] \ge [\alpha(t) - C_0]\cdot C_0.$$

Следовательно, $\alpha(t)$ есть нижняя функция. Тем самым существование решения $x(t)$ задачи (16), (8) доказано. Заметим, что $\alpha'(t) \le x'(t) \le \beta'(t) = 0$, $t \in R_+$, см. [1].

З а м е ч а н и е I. Для построения нижней функции $\alpha(t)$ мы использовали решение задачи (8), (9). Вместо уравнения (9) можно было бы взять более общее уравнение

$$x''' = kxx' + \mathcal{L}x'x'', \qquad k>0,\ \mathcal{L} \in \mathbb{R}.$$

Интегрируя его, найдем

$$x'' = \frac{k}{2}x^2 + \mathcal{L}\frac{x'^2}{2} + C. \tag{I9}$$

Интегрируя (I9) еще раз, получим для определения $C_0>0$ (при заданных $x_0 \geqslant 0$, $a<0$) трансцедентное уравнение (вместо (I0)). После этого можно получить различные условия существования решения задачи (I6), (8).

З а м е ч а н и е 2. Аналогично можно сформулировать условия существования решения задачи (I6), (8), где $a>0$, $-\nu < x_0 < \infty$, $\nu = (3a^2/4)^{1/3}$.

Литература

I. Беспалова С.А., Клоков Ю.А. Об одном обобщении уравнения Фолкнера-Скена. I // Актуальные вопросы краевых задач. Теория и приложения. - Гроге: ДГУ им.П.Стучки, 1988. - С.99-108.

2. Беспалова С.А., Клоков Ю.А. Об одной задаче для уравнения третьего порядка с квадратичной нелинейностью // Доклады расширенных заседаний семинара Института прикладной математики им.И.Н.Векуа. - Тбилиси: Тбилисский государственный университет, 1988. - С.13-16.

3. Беспалова С.А., Клоков Ю.А. Об одном обобщении уравнения Фолкнера-Скена. II // Математика. Дифференциальные уравнения: Научные труды. - Рига: ЛУ, 1990. - С.40-53.

4. Беспалова С.А., Клоков Ю.А. Об одном обобщении уравнения Блазиуса // Теоретические и численные исследования краевых задач. - Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1989. - С.47-55.

УДК 517.927.4

В.В.Гудков

РАЗРЕШИМОСТЬ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОЙ МОДЕЛИ ПОЛУПРОВОДНИКОВОГО ПРИБОРА

В работе [I] поставлена сингулярно-возмущенная краевая задача для системы 4-х обыкновенных дифференциальных уравнений, моделирующей одномерный стационарный процесс протекания тока через полупроводниковый прибор. Построены и обоснованы асимптотические разложения решений задачи. В работе [2] для весьма частного случая упомянутой задачи доказана теорема существования и единственности решения. В настоящей работе дана теорема существования решения задачи, поставленной в [I] и описывающей полупроводниковый прибор из двух звеньев. Методика доказательства аналогична той, которая использована в работах [2] и [3].

На интервале $I=[0,1]$ рассмотрим систему уравнений относительно неизвестных функций x, y, z, u аргумента $t\in I$

$$
\begin{aligned}
x' &= yz + u\mu_1 + \vartheta\mu_2 \\
y' &= xz + u\mu_2 + \vartheta\mu_1 \\
z' &= \frac{1}{\varepsilon^2}\left(y + N(t)\right) \\
u &= g(x,y)
\end{aligned}
\tag{I}
$$

совместно с краевыми условиями

$$
\begin{aligned}
x(0) &= \sqrt{N^2(0)+\gamma^2}, \qquad & y(0) &= -N(0), \\
x(1) &= \sqrt{N^2(1)+\gamma^2}, \qquad & y(1) &= N(1).
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Предполагается, что ограниченная функция $N(t)$ имеет разрыв при $t=1/2$, непрерывна в остальной части интервала и

$$N(t)>0 \quad \forall t\in[0,\tfrac{1}{2}], \quad N(t)<0 \quad \forall t\in(\tfrac{1}{2},1].$$

Функция g определяется формулой

$$g(x,y)=\frac{x^2-y^2-\delta^2}{\tau_p(x+y+\delta)+\tau_n(x-y+\delta)}.$$

Остальные величины постоянные

$$J>0, \quad \mu_1>\mu_2>0, \quad \delta,\tau_n,\tau_p,\varepsilon>0.$$

Здесь ε - малый параметр, δ - мало по отношению к $N(0)$ и $|N(1)|$. Величины задачи (I), (2) связаны с соответствующими величинами исходной задачи в [I] следующими формулами:

$$x=p+n, \quad y=p-n, \quad \varkappa=E \quad u=J_n-J_p,$$

$$J=-J_n-J_p, \quad \mu_1=\frac{\mu_n+\mu_p}{2\mu_n\mu_p}, \quad \mu_2=\frac{\mu_n-\mu_p}{2\mu_n\mu_p}.$$

Рассмотрим вспомогательную систему уравнений

$$\begin{aligned}
&x'=\sigma(y)\sigma(\varkappa)+u\mu_1+J\mu_2,\\
&y'=\sigma(x)\sigma(\varkappa)+\sigma^*(u)\mu_2+J\mu_1,\\
&\varkappa'=\frac{1}{\varepsilon^2}(y+N(t)),\\
&u'=G(x,y,u),
\end{aligned} \tag{3}$$

совместно с краевыми условиями

$$\begin{aligned}
&x(0)+y(0)=\sqrt{N^2(0)+\delta^2}-N(0)=m_0,\\
&x(1)-y(1)=\sqrt{N^2(1)+\delta^2}+N(1)=m_1,\\
&y(0)=(\varkappa(0)-\sigma(\varkappa(0)))(m_0+2N(0))-N(0),\\
&y(1)=(\sigma(\varkappa(0))-\varkappa(0))(m_1-2N(1))-N(1).
\end{aligned} \tag{4}$$

В дальнейшем для удобства аргументы 0 и 1 в краевых условиях будем писать как индексы, например: x_0, y_1, $\varkappa_0$ и т.д.

Функции G, σ, σ^* определим следующим образом:

$$G = \begin{cases} \dfrac{h(x,y)}{\tau_p(\delta(x+y)+\gamma)+\tau_n(\delta(x-y)+\gamma)}, & |u| \le \mathcal{J} \\ \dfrac{h(x,y)(\mathcal{J}+1-|u|)}{\tau_p(\delta(x+y)+\gamma)+\tau_n(\delta(x-y)+\gamma)}, & \mathcal{J} < |u| < \mathcal{J}+1 \\ 0 & |u| \ge \mathcal{J}+1 \end{cases}$$

$$h = \begin{cases} h_1(x,y) = \delta(x+y)\delta(x-y)-\gamma^2, & \varkappa_0 \le M \\ h_2(x,y) = h_1(x,y)\,\dfrac{\mathcal{J}\gamma(\tau_p+\tau_n)}{2M^2}, & \varkappa_0 \ge M+\frac{1}{2} \\ 2h_1(x,y)(M+\frac{1}{2}-\varkappa_0)+2h_2(x,y)(\varkappa_0-M), & M < \varkappa_0 < M+\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\delta(v) = \begin{cases} 0, & v < 0 \\ v, & 0 \le v \le 2M \\ 2M, & v > 2M \end{cases}$$

$$\sigma(v) = \begin{cases} -M, & v < -M \\ v, & -M \le v \le M \\ M, & v > M \end{cases}$$

$$\sigma^*(u) = \begin{cases} -\mathcal{J}, & u < -\mathcal{J} \\ u, & -\mathcal{J} \le u \le \mathcal{J} \\ \mathcal{J}, & u > \mathcal{J} \end{cases}$$

$$M = 1 + \max\Big\{1 + 2(\gamma^2 + (1+\mu_1+\mu_2)\mathcal{J} + \max_I |N(t)|),\ \frac{\mu_1 + 2\max_I(|N'(t)| + 2|N(t)|)}{m_0},\ \frac{\mathcal{J}(\mu_1+\mu_2) + \max_I |N'(t)|}{N_0}\Big\}.$$

Л е м м а I. Соответствующая вспомогательной задаче (3), (4) линейная однородная краевая задача имеет единственное решение, тождественно равное нулю.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Соответствующая системе (3) линейная однородная система имеет решение

$$y = A, \quad u = B, \quad x = B\mu_1 t + C, \quad z = \frac{A}{\sigma^2} t + D.$$

Из соответствующих линейных однородных краевых условий следует $A = 0 = D$, $B = 0 = C$. Лемма доказана.

Л е м м а 2. Вспомогательная краевая задача (3), (4) имеет по крайней мере одно решение.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость леммы следует из теоремы существования решений для квазилинейных систем (см. [4], стр.II2) и леммы I.

Т е о р е м а I. Существует такое положительное число M, что на всем интервале I выполняются неравенства

$$0 < x < M, \quad |y| < M, \quad |z| < M, \quad |u| < \mathfrak{f} \tag{5}$$

для любого решения x, y, z, u задачи (3), (4).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть согласно лемме 2 x, y, z, u - решение задачи (3), (4) и пусть M такое, как определено выше. Выпишем несколько соотношений

$$(x+y)' = \sigma(z)(\sigma(x)+\sigma(y)) + u\mu_1 + \sigma^*(u)\mu_2 + \mathfrak{f}(\mu_1+\mu_2) \tag{6}$$

$$(x-y)' = -\sigma(z)(\sigma(x)-\sigma(y)) + u\mu_1 - \sigma^*(u)\mu_2 - \mathfrak{f}(\mu_1-\mu_2) \tag{7}$$

Отметим, что из этих соотношений и определения числа $M > \mathfrak{f} > 0$ следует на I

$$(x+y)' > \sigma(z)(\sigma(x)+\sigma(y)) \qquad \text{при} \quad u > -\mathfrak{f} \tag{8}$$

$$(x-y)' < -\sigma(z)(\sigma(x)-\sigma(y)) \qquad \text{при} \quad u < \mathfrak{f} \tag{9}$$

Для большей наглядности разобьем доказательство на ряд пунктов, в каждом из которых будет доказано некоторое утверждение.

I. Пусть $|u|\leq \vartheta$ на $[\tau, s]\subset I$, $x(\tau)+y(\tau)>0$, $x(s)-y(s)>0$, тогда на $[\tau, s]$ выполняется

$$x+y>0,\ x-y>0,\ x>|y|. \tag{10}$$

Действительно, из (6) следует на $[\tau,s]$

$$(x+y)'\geq \sigma(z)(\sigma(x)+\sigma(y)),$$

а из определения функции σ следует

$$|(\sigma(x)+\sigma(y))-(\sigma(v)+\sigma(w))|\leq |(x+y)-(v+w)|.$$

Эти соотношения гарантируют единственность решения начальной задачи

$$(v+w)'=\sigma(z)(\sigma(v)+\sigma(w)),\quad (v+w)|_\tau = x(\tau)+y(\tau),$$

а также справедливость неравенства

$$x+y\geq v+w>0 \qquad \text{на } [\tau,s].$$

Из (7) следует на $[\tau,s]$

$$(x-y)'\leq -\sigma(z)(\sigma(x)-\sigma(y))$$

и аналогично тому, что приводится выше, находим

$$x-y\geq v-w>0 \qquad \text{на } [\tau,s],$$

где $v-w$ положительное решение задачи

$$(v-w)'=-\sigma(z)(\sigma(v)-\sigma(w)),\quad (v-w)|_s = x(s)-y(s).$$

2. Пусть $|u|>\vartheta$ на (τ,s), $|u(\tau)|=|u(s)|=\vartheta$. Тогда на $[\tau,s]$ выполняется (I0).

Действительно, если $u>\vartheta$ на (τ,s), то там выполняются неравенство (8) и

$$(x-y)'>-\sigma(z)(\sigma(x)-\sigma(y)). \tag{11}$$

Из $u'(\tau)\geq 0$ и определения функции G находим $\delta(x+y)\delta(x-y)\geq \vartheta^{2}$ в точке τ, а это означает $(x+y)|_\tau>0$,

$(x-y)|_{\tau} > 0$. Отсюда и из дифференциальных неравенств (8) и (II) следует (IO). Если же $u < -\gamma$ на (τ, s), то там выполняются неравенства (9) и

$$(x+y)' < \mathfrak{S}(x)(\mathfrak{S}(x) + \mathfrak{S}(y)). \qquad (I2)$$

Из $u'(s) \geqslant 0$ следует $\delta(x+y)\delta(x-y) \geqslant \gamma^2$ в точке s и далее из $(x+y)_s > 0$, $(x-y)_s > 0$ и неравенств (9), (I2) следует (IO).

3. Не может быть $x_0 \geqslant M + 1/2$.

Действительно, допустим $x_0 \geqslant M + 1/2$, тогда из краевых условий (4) следует $x_0 - y_0 \leqslant 0$, $x_1 + y_1 \leqslant 0$. Но из дифференциального неравенства (8) при $u > -\gamma$ на I и начального условия $x_0 + y_0 = m_0$ находим $x + y > 0$ на I, что противоречит условию $x_1 + y_1 \leqslant 0$. Аналогично из неравенства (9) при $u < \gamma$ на I и краевого условия $x_1 - y_1 = m_1$ находим $x - y > 0$ на I, что противоречит условию $x_0 - y_0 \leqslant 0$. В случае, когда решение u на I принимает значения как $u \leqslant -\gamma$, так и $u \geqslant \gamma$, найдется точка ξ, в которой $|u'(\xi)| \geqslant 2\gamma$, но это противоречит определению G. В самом деле,

$$|G| \leqslant \frac{|h(x,y)|}{\gamma(\tau_p + \tau_n)} = \frac{|\delta(x+y)\delta(x-y) - \gamma^2|\gamma}{2M^2} < 2\gamma.$$

4. Неравенства $x+y>0$, $x-y>0$ выполняются на всем интервале I.

Действительно, из п.3 следует $x_0 < M + 1/2$, а из краевых условий (4) следует

$$x_0 + y_0 = m_0, \quad x_0 - y_0 > 0, \quad x_1 + y_1 > 0, \quad x_1 - y_1 = m_1.$$

Дифференциальные неравенства (8), (II) обеспечивают справедливость искомых неравенств (IO) на $[0, \tau)$, если там $u > \gamma$, и на $(s, 1]$, если там $u > \gamma$, $u(s) = \gamma$, благодаря положительности краевых условий в нуле и в точке s. Аналогично следует справедливость неравенств (IO) на $[0, \tau)$, если там $u < -\gamma$, $u(\tau) = -\gamma$, и на $(s, 1]$, если там $u < -\gamma$. На всех внутренних интервалах (τ, s), где $|u|>f$, справедливость (10) следует из п.2. На всех оставшихся интервалах - из п.1.

5. Пусть $u>f$, $x,y\in(-M,M)$ на $(\tau,s)\subset I$, тогда на (τ,s) выполняются неравенства

$$x^2(\tau)-y^2(\tau)<x^2-y^2<x^2(s)-y^2(s). \qquad (13)$$

Действительно, из (6), (7) находим на (τ,s)

$$(x+y)'>\sigma(z)(x+y), \quad (x-y)'>-\sigma(z)(x-y).$$

Отсюда для $t\in(\tau,s)$ следует

$$(x(\tau)+y(\tau))\exp\left(\int_\tau^t\sigma(z)dt\right)<x+y<(x(s)+y(s))\exp\left(\int_t^s-\sigma(z)dt\right)$$

$$(x(\tau)-y(\tau))\exp\left(\int_\tau^t-\sigma(z)dt\right)<x-y<(x(s)-y(s))\exp\left(\int_t^s\sigma(z)dt\right).$$

Перемножая эти неравенства, учитывая положительность функций $x+y$ и $x-y$, убеждаемся в справедливости неравенств (13).

6. Пусть $u<-f$, $x,y\in(-M,M)$ на $(\tau,s)\subset I$, тогда на (τ,s) выполняются неравенства

$$x^2(\tau)-y^2(\tau)>x^2-y^2>x^2(s)-y^2(s). \qquad (14)$$

Справедливость соотношений (14) устанавливается так же, как и в п.5.

7. Не может быть $z_0<-M$.

Допустим противное, тогда из краевых условий следует

$$y_0<-N_0, \quad y_1>-N_1>0, \quad x_0>m_0+N_0.$$

Из системы уравнений (3) находим

$$z_0'<0, \quad y_0'<(m_0+N_0)(-M)+f(\mu_1+\mu_2)<N_0'.$$

В правой полуокрестности нуля оказывается

$$z<-M, \quad y<-N_0, \quad \sigma(x)>\sigma(|y|)>N_0,$$

$$y' < N_0(-M) + \frac{1}{2}(\mu_1+\mu_2) < -\max_{[0,\frac{1}{2}]} |N'(t)|.$$

Такое поведение решения y приведет к $y'(\frac{1}{2})<0$, $y(\frac{1}{2})<-N(\frac{1}{2})$ и далее в силу $N(t)<0$ на $(\frac{1}{2},1]$ приведет к $y_1<-N(\frac{1}{2})<$ <0, что противоречит краевому условию.

8. Пусть существует точка $\xi\in I$, в которой $|y(\xi)|>$ $>M-\frac{1}{2}$, тогда $|y|>M-\frac{1}{2}$ на $[\xi,1]$.

Действительно, пусть $y(\xi)>M-1/2$, тогда найдется точка $\tau\in(0,\xi)$ такая, что

$$y>\max_I |N(t)| \quad \forall t\in(\tau,\xi], \qquad y(\tau)=\max_I |N(t)|.$$

На интервале (τ,ξ) найдется точка s, в которой

$$M-\frac{1}{2}-\max_I |N(t)| < y'(s) < \sigma(x(s))\sigma(z(s)) + \frac{1}{2}(\mu_1+\mu_2).$$

Относительно решения z находим $z'>0$ на (τ,ξ),

$$\sigma(z(s)) > \sigma^{-1}(x(s))\Big(M-\frac{1}{2}-\max_I |N(t)| - \frac{1}{2}(\mu_1+\mu_2)\Big) > 0.$$

Так что, $z(\xi)>z(s)>0$, $y'(\xi)>0$. Ясно, что при $t>\xi$ будет $z'>0$, $y'>0$ и в результате $y>M-1/2$ на $[\xi,1]$.

Пусть $y(\xi)<-M+1/2$, тогда найдется точка $\tau\in(0,\xi)$ такая, что

$$y<-\max_I |N(t)| \quad \forall t\in(\tau,\xi], \quad y(\tau)=-\max_I |N(t)|.$$

Найдется точка $s\in(\tau,\xi]$, в которой

$$-M+\frac{1}{2}+\max_I |N(t)| > y'(s) > \sigma(x(s))\sigma(z(s)) + \frac{1}{2}(\mu_1-\mu_2).$$

Для решения z находим $z'<0$ на $(\tau,\xi]$,

$$\sigma(z(s)) < M^{-1}\Big(-M+\frac{1}{2}+\max_I |N(t)| - \frac{1}{2}(\mu_1-\mu_2)\Big) < -\frac{1}{2}.$$

В точке ξ выполняются соотношения

$$z(\xi)<z(s)<-\frac{1}{2}, \qquad \sigma(x(\xi))>\sigma(|y(\xi)|)>M-\frac{1}{2}.$$

$$y'(\xi) \leq \sigma(x(\xi))\sigma(z(\xi)) + f(\mu_1+\mu_2) < 0.$$

Такое поведение решений y и z сохранится на всем интервале $[\xi, 1]$, что обеспечивает справедливость искомого утверждения.

9. Не может быть $u > f$ на всем интервале I.

Действительно, из краевых условий (4) при $z_0 \in (-M, M+\frac{1}{2})$ следует

$$x_0^2 - y_0^2 = x_1^2 - y_1^2 = \gamma^2(1 - 2(z_0 - \sigma(z_0))) \leq \gamma^2. \qquad (15)$$

Но при $x, y \in (-M, M)$, $u > f$ на I из п.5 следует $x_0^2 - y_0^2 < x_1^2 - y_1^2$, что противоречит (15). При $x > M$ на $(\tau, s) \subset I$ из краевых условий следует $\tau > 0$, $s < 1$. Случай $|y| > M$ сводится к рассматриваемому в силу неравенства $x > |y|$. Будем считать интервал (τ, s) самым правым из интервалов, характеризующихся свойством $x > M$ на (τ, s), $x(s) = M$. Тогда на $(s, 1]$ из п.5 следует

$$x^2(s) - y^2(s) < x_1^2 - y_1^2 \leq \gamma^2.$$

Отсюда при $y(s) \geq 0$ находим

$$x(s) - y(s) < \frac{\gamma^2}{x(s)+y(s)} \leq \frac{\gamma^2}{M} < \frac{1}{2}, \quad y(s) > M - \frac{1}{2}.$$

Если же $y(s) < 0$, то

$$x(s) + y(s) < \frac{\gamma^2}{x(s)-y(s)} < \frac{\gamma^2}{M} < \frac{1}{2}, \quad y(s) < -M + \frac{1}{2}.$$

В обоих случаях оказывается $|y(s)| > M - \frac{1}{2}$, но тогда из п.8 находим $|y_1| > M - \frac{1}{2}$, что противоречит краевому условию.

10. Не может быть $u < -f$ на всем интервале I.

Действительно, при $x, y \in (-M, M)$, $u < -f$ из п.6 следует $x_0^2 - y_0^2 > x_1^2 - y_1^2$, что противоречит соотношению (15). При $x > M$ на $(\tau, s) \subset I$, $x(\tau) = M$, считая интервал (τ, s) самым левым из аналогичных, согласно п.6 находим

$$\gamma^2 \geqslant x_0^2 - y_0^2 > x^2(\tau) - y^2(\tau).$$

Отсюда, как и в п.9, следует $|y_1| > M - \frac{1}{2}$, что противоречит краевому условию.

II. Не может быть $\varkappa_0 \in [M, M+\frac{1}{2})$.

Действительно, при таком $\varkappa_0$ из краевых условий следует

$$x_0 > \frac{m_0}{2}, \quad y_0 \in [-N_0, \frac{m_0}{2}), \quad y_1 \in (-\frac{m_1}{2}, -N_1].$$

Из системы уравнений находим

$$\varkappa_0' \geqslant 0, \qquad y_0' \geqslant \sigma(x_0)M + \gamma(\mu_1 - \mu_2) > \max_{[0,\frac{1}{2}]} |N'(t)|.$$

Так что, при $t>0$ в некоторой окрестности нуля выполняются неравенства $y'>0$, $\varkappa'>0$. Определение функции σ и утверждения пп.9, 10 обеспечивают условие $|u| < \gamma + 1$, благодаря которому из соотношения (6) находим

$$(x+y)' > \sigma(\varkappa)(\sigma(x)+\sigma(y)) - \mu_1 \qquad \forall t \in I. \tag{16}$$

Следовательно, при $t>0$ в окрестности нуля

$$(x+y)' > (M - \frac{M_1}{m_0})(\sigma(x)+\sigma(y)) > 0, \quad x+y > m_0,$$

$$y' > \sigma(x)M + \gamma(\mu_1 - \mu_2) > \max_{[0,\frac{1}{2}]} |N'(t)|. \tag{17}$$

Эти неравенства справедливы на всем I, нужно лишь показать, что всюду $x > m_0/2$. В самом деле, если существует интервал $[0,\tau)$, где $y<0$, то там $(x+y)'>0$, $x+y > m_0$, т.е. $x > m_0$. А при $t \geqslant \tau$, где $y \geqslant 0$, в частности для случая $\tau = 0$, из $x+y \geqslant m_0$, $x-y>0$ следует $x > m_0/2$. В точке $t = 1/2$, учитывая (17), выполняется неравенство

$$y(\tfrac{1}{2}) > -N_0 + \frac{Mm_0}{2} + \frac{\gamma}{2}(\mu_1 - \mu_2) > \max_{I} |N(t)|.$$

В результате в силу (17) оказывается $y_1 > \max |N(t)|$, что противоречит краевому условию.

I2. Не существует ни одной точки $\xi \in I$, в которой $|u(\xi)| > \mathfrak{z}$.

Действительно, допустим $|u| > \mathfrak{z}$ на $(\tau, s) \subset I$, тогда при $x, y \in (-M, M)$ согласно п.5 или п.6 придем к противоречию в краевых условиях. А при $x > M$ в соответствии с п.8 находим $|y_1| > M - 1/2$, что снова противоречит краевому условию.

В результате длительных рассуждений из пп. I-I2 следуют оценки

$$|u| \leqslant \mathfrak{z} \quad \text{на } I, \quad \varkappa_0 \in (-M, M).$$

Таким образом, задача (3), (4) свелась к исследованной в работе [3] задаче, где рассмотрена система

$$\begin{aligned} &v' = w\varkappa + F(t), \quad F(t) + G(t) \geqslant 0 \\ &w' = v\varkappa + G(t), \quad G(t) > 0 \\ &\varkappa' = w + H(t). \end{aligned} \tag{I8}$$

Здесь $v = \frac{x}{\delta^2}$, $w = \frac{y}{\delta^2}$, $F = \frac{1}{\delta^2}(u\mu_1 + \mathfrak{z}\mu_2)$,

$$G = \frac{1}{\delta^2}(u\mu_2 + \mathfrak{z}\mu_1), \quad H = \frac{N}{\delta^2}.$$

Из работы [3] следует существование числа M^* такого, что $0 < v \leqslant M^*$, $|\varkappa| \leqslant M^*$. Этим и завершается построение оценок (5).

Т е о р е м а 2. Краевая задача (I), (2) имеет решение.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Априорные оценки (5) решения x, y, $\varkappa$, u вспомогательной задачи (3), (4) установлены в теореме I. На этом решении системы уравнений и краевых условий вспомогательной и исходной задач совпадают, а следовательно, x, y, $\varkappa$, u - решение искомой задачи.

Литература

I. Белянин М.П. Об асимптотике одномерной модели некоторых полупроводниковых приборов // Ж.вычисл.матем. и матем. физики - 1988. Т.28, № I. - С.34-51.
2. Гудков В.В. Существование и единственность решения одной краевой задачи для системы четвертого порядка // Латв.мат.ежегодник - Рига: Зинатне, 1981. Вып.25. - С. 16-26.
3. Гудков В.В. Разрешимость одной краевой задачи из теории полупроводниковых приборов // Латв.мат.ежегодник - Рига: Зинатне, 1984. Вып.28. - С.25-33.
4. Гудков В.В., Клоков Ю.А., Лепин А.Я., Пономарев В.Д. Двухточечные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений - Рига: Зинатне, 1973. - 135 с.

УДК 517.927.4

Я.В.Виржбицкий, Д.Ю.Пономарев

ПОЛНОТА МНОЖЕСТВА ТЕОРЕМ РАЗРЕШИМОСТИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Рассматривается краевая задача

$$\begin{cases} x'' = f(t, x, x'), & (1) \\ H_1 x = H_1(x(a), x(b), x'(a), x'(b)) = h_1, & \\ H_2 x = H_2(x(a), x(b), x'(a), x'(b)) = h_2, & (2) \\ \alpha \le x \le \beta, & \end{cases}$$

и условия

1. $\alpha(a) = \beta(a)$,
2. $\alpha'(a) < \beta'(a)$,
3. $\alpha'(a) = \beta'(a)$,
4. $\alpha'(a) > \beta'(a)$,
5. $\alpha(b) = \beta(b)$,
6. $\alpha'(b) < \beta'(b)$,
7. $\alpha'(b) = \beta'(b)$,
8. $\alpha'(b) > \beta'(b)$,

9'. $(\forall x, y \in SG(I, R))((x \le y \wedge x'(a) \ge y'(a) \Rightarrow x'(b) \ge$
$\ge y'(b)) \wedge (x \le y \wedge x'(b) \le y'(b) \Rightarrow x'(a) \le y'(b)))$.

A. $\alpha \in SG(I, R)$,
B. $\beta \in SG(I; R)$.

В нумерации условия 9′ знак "штрих" добавлен, чтобы подчеркнуть отличие этого условия от аналогичного условия 9 в работе [1].

Обозначения: $a \in R$, $b \in (a, +\infty)$, $I = [a, b]$, $f \in Car(I \times R^2, R)$, $H_1, H_2 \in C(\bar{R}^2 \times \bar{R}^2, \bar{R})$, $h_1, h_2 \in \bar{R}$, $\alpha \in AG(I, R)$, $\beta \in BG(I, R)$, $x \in SG(I, R)$. Более подробно обозначения и определения см. в [2].

Настоящая работа является логическим продолжением работы [2], в которой приведены и доказаны теоремы обобщенной разрешимости краевой задачи (1)-(2) при дополнительных условиях, получаемых как всевозможные сочетания условий I-В. Цель данной работы - показать, что приведенное в [2] множество теорем охватывает все возможные теоремы такого рода. Достигается это путем построения конкретных примеров краевых задач. Вид примеров, нуждающихся в построении, образует множество примеров, которое было найдено с помощью ЭВМ, при использовании множества теорем. Методика, литература по этой теме и программное обеспечение приводятся в [I].

Оказалось, что в построении нуждаются следующие примеры:

EG 00I	00+00000	I2579'AB	EG 002	00+00000	I2589'AB
EG 003	00+00000	I269'AB	EG 004	+0+00000	357AB
EG 005	+0+00000	36AB	EG 006	+0+00000	457AB
EG 007	+0+00000	46AB	EG 008	+0+00000	3589'AB
EG 009	+0+00000	4589'AB	EG 0I0	+000+000	36AB
EG 0II	+000+000	457AB	EG 0I2	+000+000	46AB
EG 0I3	+000+000	2579'AB	EG 0I4	+000+000	2589'AB
EG 0I5	+000+000	269'AB	EG 0I6	+000+000	3579'AB
EG 0I7	+000+000	3589'AB	EG 0I8	+000+000	4589'AB
EG 0I9	+00000+0	357AB	EG 020	+00000+0	36AB
EG 02I	+00000+0	457AB	EG 022	+00000+0	46AB
EG 023	+00000+0	3589'AB	EG 024	+00000+0	4589'AB
EG 025	+00000-0	257AB	EG 026	+00000-0	26AB
EG 027	+00000-0	357AB	EG 028	+00000-0	36AB
EG 029	+00000-0	457AB	EG 030	+00000-0	45AB
EG 03I	+00000-0	2589'AB	EG 032	+00000-0	3589'AB
EG 033	+00000-0	4589'AB	EG 034	00-000-0	457AB
EG 035	00-000-0	46AB	EG 036	00-000-0	4589'AB
EG 037	+0+00+00	379'AB	EG 038	+00+0+00	379'AB
EG 039	+00+0+00	389'AB	EG 040	+00+0+00	489'AB

Здесь $EGijk$ - номер примера (EG 00I-EG040), следующие восемь символов из множества $\{0,-,+,I\}$ означают для H_1 (первые 4 символа) и H_2 (следующие 4 символа) по I-4 аргументу независимость (0), неубывание (+), невозрастание (-), любое поведение (I). Дальше следует сочетание дополнительных условий I-В. Здесь наличие номера условия означает его выполнение. Например,

EG030 +00000-0 46AB

означает, что пример имеет номер EG030, функция H_1 не убывает по I аргументу (знак "+" на первом месте), не зависит от остальных аргументов ("0" на 2,3,4 местах), функция H_2 не зависит от I и 2 аргументов ("0" на 4+I и 4+2 местах), не возрастает по 3 аргументу ("-" на 4+3 месте), не зависит от 4 аргумента ("0" на 4+4 месте), должны быть выполнены условия 4 ($\alpha'(a) > \beta'(a)$), 6 ($\alpha'(b) < \beta'(b)$), A (α является решением уравнения (I)), B (β также является решением уравнения (I)).

Некоторые элементы из приведенного множества примеров EG00I-EG040 не содержат условия $9'$. При проверке оказалось, что все эти примеры совпадают с некоторыми построенными примерами в [I]. Это элементы EG004-EG007, EG0I0-EG0I2, EG0I9-EG022, EG025-EG030, EG034-EG035. В силу сказанного мы эти примеры будем считать построенными и рассматривать не будем.

Следовательно, осталось построить примеры:

EG00I	00+00000	I2579'AB
EG002	00+00000	I2589'AB
EG003	00+00000	I269'AB
EG008	+0+00000	3589'AB
EG009	+0+00000	4589'AB
EG0I3	+000+000	2579'AB
EG0I4	+000+000	2589'AB
EG0I5	+000+000	269'AB
EG0I6	+000+000	3579'AB
EG0I7	+000+000	3589'AB
EG0I8	+000+000	4589'AB
EG023	+00000+0	3589'AB
EG024	+00000+0	4589'AB
EG03I	+00000-0	2589'AB
EG032	+00000-0	3589'AB
EG033	+00000-0	4589'AB

EG 036	00-000-0	4589 'AB
EG 037	+0+00+00	379 'AB
EG 038	+00+0+00	379 'AB
EG 039	+00+0+00	389 'AB
EG 040	+00+0+00	489 'AB

Предварительно докажем леммы, позволяющие указать правые части уравнения вида (I), удовлетворяющие условию 9′.

Л е м м а I. Пусть функция f в уравнении (I) не зависит от x', т.е. $f=f(t,x)$. Если

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(t,x_1) \geq f(t,x_2)$$

почти для всех $t\in[a,b]$ и всех $x_1,x_2\in\mathbb{R}$, тогда функция f удовлетворяет условию 9′.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x,y: I\to\mathbb{R}$, $x\leq y$ на I и $x''=f(t,x)$, $y''=f(t,y)$. Тогда

$$x'(b)-x'(a)=\int_a^b f(t,x(t))dt \geq \int_a^b f(t,y(t))dt = y'(b)-y'(a),$$

откуда $x'(b)-x'(a)\geq y'(b)-y'(a)$, из чего следует условие 9′. Лемма доказана.

В силу леммы I условию 9′ удовлетворяют функции $f=0$, $f=-x$, $f=-x_+$, где

$$x_+ = \begin{cases} x, & x\geq 0, \\ 0, & x<0. \end{cases}$$

Рассмотрим дифференциальные уравнения

$$y'(t) = -2\cos t\,\sqrt{(-y)_+} \qquad (3)$$

и

$$x''(t) = -2\cos t\,\sqrt{(-x')_+} \qquad (3')$$

на интервале $[0,\pi]$.

Л е м м а 2. Все решения уравнения (3) имеют вид

$$y(t) = -\left(\left(\sin t - 1 + \sqrt{(-\delta)_+}\right)_+^2 - \delta\right)_+, \qquad (4)$$

где

$$\gamma = y\left(\frac{\pi}{2}\right) \qquad (5)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Каждое решение уравнения (3) дифференцируемо в каждой точке $t \in [0,\pi]$, поэтому оно непрерывно. В силу непрерывности правой части уравнения (3) производная $y'(t)$ решения $y(t)$ уравнения непрерывна. Это позволяет применить к решению $y(t)$ теорему Лагранжа о конечном приращении.

При $t \in [0,\frac{\pi}{2}]$ в силу (3) $y'(t) \leq 0$, при $t \in [\frac{\pi}{2},\pi]$ $y'(t) \geq 0$. Таким образом, каждое решение уравнения (3) не возрастает на интервале $[0,\frac{\pi}{2}]$ и не убывает на интервале $[\frac{\pi}{2},\pi]$.

Рассмотрим произвольную интегральную кривую $(t,y(t))$ на интервале $[0,\pi]$, проходящую через точку $(\pi/2,\gamma)$.

Пусть $\gamma \geq 0$. Имеем $y(t) \equiv \gamma$, $t \in [0,\pi]$. Действительно, предположим противное - найдется $t^* \in [0,\pi]$ такое, что $y(t^*) \neq \gamma = y(\frac{\pi}{2})$. Пусть $t^* \in (\frac{\pi}{2},\pi]$ (случай $t^* \in [0,\pi/2)$ рассматривается аналогично), тогда $y(t^*) > y(\frac{\pi}{2})$. По теореме Лагранжа получаем $y'(\xi) > 0$, $\xi \in (\frac{\pi}{2},t^*)$. Но $y(\xi) \geq y(\pi/2) = \gamma \geq 0$. Из (3) следует, что $y'(\xi) = -2\cos\xi \cdot 0 = 0$, что противоречит неравенству $y'(\xi) > 0$. Следовательно, $y(t) \equiv \gamma$ при $t \in [0,\pi]$.

Пусть $\gamma < 0$. Покажем, что для любой интегральной кривой $(t,x(t))$, проходящей через точку $(\pi/2,\gamma)$, выполняется неравенство $x(t) \leq 0$ для всех $t \in [0,\pi]$.

Предположим противное - найдется $\xi \in [0,\pi]$ такое, что $x(\xi) > 0$. Пусть $\xi \in [\frac{\pi}{2},\pi]$ (случай $\xi \in [0,\frac{\pi}{2}]$ рассматривается аналогично), тогда найдется $\xi_1 \in (\frac{\pi}{2},\xi)$ такое, что $x(\xi_1) = 0$. Дальнейшие рассуждения как в случае $\gamma \geq 0$. Таким образом, показано, что любая интегральная кривая $(t,x(t))$, проходящая через точку $(\pi/2,\gamma)$, не превосходит 0, т.е. $x(t) \leq 0$ при $t \in [0,\pi]$.

Рассмотрим произвольную интегральную кривую $(t,y(t))$ на интервале $[0,\pi]$, проходящую через точку $(\pi/2,\gamma)$, и множество $J = \{t \in [0,\pi] : y(t) < 0\}$, $J \neq \varnothing$, т.к. $\pi/2 \in J$. Положим $a_0 = \inf J$, $b_0 = \sup J$. В силу непрерывности

$y(t)$ и равенства $y(\frac{\pi}{2})=\gamma<0$ имеем $a_0<\pi/2<b_0$. Покажем, что $y(t_0)<0$ при $t_0\in(a_0,b_0)$, т.е. $(a_0,b_0)\subset\mathcal{I}$. Предположим противное: $y(t_0)=0$. Пусть $t_0>\pi/2$ (случай $t_0<\pi/2$ рассматривается аналогично), тогда для всех $t\in[t_0,\pi]$ имеем $0=y(t_0)\leq y(t)\leq 0$, т.е. $y(t)=0$. Так как $t_0<b_0$, то это противоречит определению b_0. Таким образом, $(a_0,b_0)\subset\mathcal{I}$.

Покажем теперь, что в прямоугольнике $P=(a_0,b_0)\times(\gamma-1,0)$ единственной интегральной кривой уравнения (3), проходящей через точку $(\pi/2,\gamma)$, является $(t,y(t))$. Действительно, в прямоугольнике $P_n=(a_0,b_0)\times(\gamma-1,\gamma/(n+1))$, $n\geq 1$, правая часть уравнения (3) удовлетворяет условию Липшица, поэтому через точку $(\pi/2,\gamma)$ проходит только одна интегральная кривая уравнения (3) в прямоугольнике P_n. Имеем

$$P_1\subset P_2\subset\ldots\subset P_n\subset\ldots\subset P,\qquad \text{где}$$

$P=(a_0,b_0)\times(\gamma-1,0)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}P_n$. В этом прямоугольнике P через точку $(\pi/2,\gamma)$ также проходит только одна интегральная кривая уравнения (3), иначе это свойство не выполнялось бы в каком-то прямоугольнике P_N, покрывающем различные значения решений в одной точке $t_0\in(a_0,b_0)$. Итак, при $t\in(a_0,b_0)$ имеем $\gamma-1<\gamma\leq y(t)<0$, т.е. $(t,y(t))\in(a_0,b_0)\times(\gamma-1,0)=P$ при $t\in(a_0,b_0)$. Следовательно, в прямоугольнике P единственной интегральной кривой уравнения (3), проходящей через точку $(\pi/2,\gamma)$ является $(t,y(t))$.

Пусть $(t,\varkappa(t))$ – произвольная интегральная кривая, проходящая через точку $(\pi/2,\gamma)$. Тогда $\varkappa(t)=y(t)$, $t\in[0,\pi]$. Действительно, имеем $\varkappa(t)=y(t)$ для $t\in(a_0,b_0)$. Следовательно,

$$\varkappa(a_0)=\lim_{t\to a_0+}\varkappa(t)=\lim_{t\to a_0+}y(t)=y(a_0),$$

$$\varkappa(b_0)=\lim_{t\to b_0-}\varkappa(t)=\lim_{t\to b_0-}y(t)=y(b_0)$$

т.е. $x|_{[a_0,b_0]}=y|_{[a_0,b_0]}$.

Если $y(b_0)=0$, то $x(b_0)=0$ и для $[b_0,\pi]$ $0=x(b_0)\leq x(t)\leq 0$, т.к. $\pi/2<b_0$, т.е. $x(t)=0$. Это справедливо и для $y(t)$, поэтому

$$x|_{[a_0,\pi]}=y|_{[a_0,\pi]}.$$

Если $y(b_0)<0$, то $b_0=\pi$, и опять

$$x|_{[a_0,\pi]}=y|_{[a_0,\pi]}.$$

Если $y(a_0)=0$, то $x(a_0)=0$, и для $t\in[0,a_0]$ $0=x(a_0)\leq x(t)\leq 0$, т.к. $a_0<\pi/2$, т.е. $x(t)=0$. Это справедливо и для y, поэтому

$$x=x|_{[0,\pi]}=y|_{[0,\pi]}=y$$

в этом случае. Если $y(a_0)<0$, то $a_0=0$ и опять

$$x=x|_{[0,\pi]}=y|_{[0,\pi]}=y.$$

Следовательно, задача Коши (3)-(5) имеет единственное решение и в случае $\gamma<0$.

Теперь установим справедливость формулы (4). Для этого достаточно проверить, что $y(t)$ из (4) является решением задачи Коши (3), (5). Пусть $\gamma\geq 0$. Тогда $y(t)=-(\sin t-1)_+^2+\gamma=\gamma$, $y(\pi/2)=\gamma$ и $y'(t)=0=-2\cos t\cdot\sqrt{(-\gamma)_+}$. Пусть теперь $\gamma<0$. Тогда $y(t)=-(\sin t-1+\sqrt{(-\gamma)_+})_+^2$, $y(\frac{\pi}{2})=-(\sqrt{-\gamma})^2=-(-\gamma)=\gamma$, $y'(t)=-2(\sin t-1+\sqrt{(-\gamma)_+})_+\cdot\cos t=-2\cos t\sqrt{(-y(t))_+}$, т.к. $-y(t)\geq 0$ и $(x_+^2)'=2x_+$. Лемма доказана.

С в о й с т в о I. Для любого решения $y(t)$ уравнения (3) $y(0)=y(\pi/2)$, соответственно для любого решения уравнения (3') $x'(0)=x'(\pi/2)$.

Применяя свойство I и лемму I, легко установить выполнение условия 9 для решений уравнения вида (I) с правыми частями f_1, f_2 и f_3 на интервале $[a,\pi]$, где

$$f_1(t,x,x') = \begin{cases} -x_+, & a\le t<0, \\ -2\cos t\sqrt{(-x')_+}, & 0\le t\le\pi, \end{cases}$$

$$f_2(t,x,x') = \begin{cases} -x, & a\le t<0, \\ -2\cos t\sqrt{(-x')_+}, & 0\le t\le\pi, \end{cases}$$

$$f_3(t,x,x') = -2\cos t\sqrt{(-x')_+}, \quad a<0.$$

Перейдем к построению примеров.

EG001 00+00000 1.579'AB

Полагаем $0<\varepsilon<\pi/2$, $a=-\pi/2-\varepsilon/\varepsilon_1$, $b=\pi$, $f=f_1$, $\alpha(t)=-\varepsilon$, $\varepsilon_1=\pi/2-\varepsilon$,

$$\beta(t) = \begin{cases} \varepsilon_1 t+\varepsilon_1\cdot\frac{\pi}{2}, & t\in[a,-\frac{\pi}{2}), \\ \varepsilon_1\cos t, & t\in[-\frac{\pi}{2},0), \\ -\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t+\varepsilon_1, & t\in[0,\pi], \end{cases}$$

$H_1x=x'(a)$, $H_2x=0$, $h_1=\beta'(a)-\delta$, $h_2=0$, $0<\delta<\varepsilon_1$.

Из неравенства $\alpha\le x\le\beta$ следует, что для решения $x(t)$ должно выполняться $x(a)=\alpha(a)=\beta(a)$, в силу $\alpha'(b)=\beta'(b)$ и свойства I - равенство $x'(0)=0$. Но для решения $x(t)$ с условиями $x(a)=\alpha(a)$, $x'(a)=\beta'(a)-\delta$ равенство $x'(0)=0$ выполняться не может.

EG013 +000+000 2579'AB

Полагаем $0<\varepsilon<\pi/2$, $a=-\pi/2+\varepsilon$, $b=\pi$, $f=f_2$, $\alpha(t)=0$,

$$\beta(t) = \begin{cases} \pi/2\cos t, & t\in[a,0), \\ -\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t+\frac{\pi}{2}, & t\in[0,\pi], \end{cases}$$

$H_1x = H_2x = x(a)$, $h_1 = \alpha(a)$, $h_2 = \beta(a)$.

Доказательство несуществования решения краевой задачи с условиями $x(a) = \alpha(a)$, $x(a) = \beta(a)$ тривиально ввиду $\alpha(a) \neq \beta(a)$.

EG016 +000+000 3579'AB

Полагаем $a = 0$, $b = \pi$, $f = f_3$, $\alpha(t) = 0$, $\beta(t) = -\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + \pi/2$, $H_1x = H_2x = x(a)$, $h_1 = \alpha(a)$, $h_2 = \beta(a)$. Дальнейшие рассуждения как в EG013.

В дальнейшем используем обозначение

$$\beta_1(t) = \begin{cases} \sin t, & t \in [0, \pi), \\ \pi - t, & t \in [\pi, \pi + 1]. \end{cases}$$

EG002 00+00000 12589'AB

Полагаем $a = 0$, $b = \pi + 1$, $f = -x_+$, $\alpha(t) = -(\pi+1)^{-1}t$, $\beta = \beta_1$, $H_1x = x'(a)$, $H_2x \equiv 0$, $h_1 = h_2 = 0$. Решение $x(t)$ с условиями $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$ есть $x(t) \equiv 0$, при $t > \pi$ не удовлетворяющее неравенству $\alpha \leq x \leq \beta$.

EG003 00+00000 1269'AB

Полагаем $a = 0$, $b = \pi + 1$, $f = -x_+$, $\alpha(t) = -(1+\varepsilon)t$, $\beta = \beta_1$, $H_1x = x'(a)$, $H_2x \equiv 0$, $h_1 = h_2 = 0$. Дальнейшее как в EG002.

EG006 +0+00000 3589 AB

Полагаем $a = 0$, $b = \pi + 1$, $f = -x_+$, $\alpha(t) = t - (\pi + 2)$, $\beta = \beta_1$, $H_1x = x(a) + x'(a)$, $H_2x = 0$, $h_1 = h_2 = 0$. В силу неравенства $\alpha \leq x \leq \beta$ следует рассмотреть случаи $x(a) = 0$ и $\alpha(a) < x(a) < 0$. Рассмотрим случай $x(a) = 0$. Тогда для выполнения условия $x(a) - x'(a) = 0$ должно выполняться $x'(a) = 0$. Но решение $x(t)$ с условиями $x(a) = 0$, $x'(a) = 0$ не удовлетворяет условию $\alpha \leq x \leq \beta$ при $t > \pi$. Осталось рассмотреть случай $\alpha(a) < x(a) < 0$. Легко заметить, что все решения, удовлетворяющие условиям $x(a) < 0$ и $\alpha \leq x \leq \beta$, имеют вид

$$x(t) = -\frac{x(a)+1}{\pi+1}t + x(a).$$

Для таких решений выражение $x(a) + x'(a) = \frac{\pi x(a) - 1}{\pi+1} < 0$.

что противоречит требуемому условию $x(a)+x'(a)=0$.

EG009 +0+00000 4589'AB

Полагаем $a=0$, $b=\pi+1$, $f=-x_+$, $\alpha(t)=(1+\varepsilon)(t-\pi-1)-1$, $0<\varepsilon<1$, $\beta=\beta_1$, $H_1x=x(a)+x'(a)$, $H_2x=0$, $h_1=h_2=0$. Дальнейшие рассуждения как в EG 008.

EG014 +000+000 2589'AB

Полагаем $a=0$, $b=\pi+1$, $f=-x_+$, $\alpha(t)=(1-\varepsilon)(t-\pi-1)-1$, $0<\varepsilon<1$, $\beta=\beta_1$, $H_1x=H_2x=x(a)$, $h_1=\beta(a)$, $h_2=\alpha(a)$. Дальнейшие рассуждения как в EG013.

EG015 +000+000 269'AB

Полагаем $a=0$, $b=\pi+1$, $f=-x_+$, $\alpha(t)=-2t-1$, $\beta=\beta_1$, $H_1x=H_2x=x(a)$, $h_1=\beta(a)$, $h_2=\alpha(a)$. Дальнейшие рассуждения как в EG013.

EG017 +000+000 3589'AB

Полагаем a, b, f, α, β как в EG008, остальное - как в EG015.

EG018 +000+000 4589'AB

Полагаем a, b, f, α, β как в EG009, остальное - как в EG015.

EG023 +00000+0 3589'AB

Полагаем a, b, f, α, β как в EG 008, $H_1x=x(a)$, $H_2x=x'(a)$, $h_1=(\alpha(a)+\beta(a))/2$, $h_2=\alpha'(a)$. Решение $x(t)$ с такими начальными условиями не удовлетворяет условию $\alpha\leq x\leq\beta$.

EG024 +00000+0 4589'AB

Полагаем a, b, f, α, β как в EG 009, дальнейшее как в EG 023.

EG031 +00000-0 2589'AB

Полагаем a, b, f, α, β как в EG 014, $H_1x=x(a)$, $H_2x=\varphi(x'(a))$, $h_1=-\varepsilon$, $h_2=0$, $\varepsilon\in(0,10^{-2})$, где

$$\varphi(s)=\begin{cases} 0, & s\in[\alpha'(a),\beta'(a)],\\ \alpha'(a)-s, & s<\alpha'(a),\\ \beta'(a)-s, & s>\beta'(a).\end{cases}$$

Все решения с начальными условиями $x(a)=-\varepsilon$, $x'(a) \in \alpha'(a)\le$

$\leq \beta'(a)$ не удовлетворяют неравенству $\alpha < x < \beta$.

EG032 +00000-0 3589'AB

Полагаем a, b, f, α, β как в EG017, $H_1x=x(a)$, $H_2x=-x'(a)$, $h_1=-b$, $h_2=H_2\beta$. Все решения с такими начальными условиями не удовлетворяют неравенству $\alpha<x<\beta$.

EG033 +00000-0 4589'AB

Полагаем a, b, f, α, β как в EG018, дальнейшее - как в EG032.

EG036 00-000-0 4589'AB

Полагаем a, b, f, α, β как в EG018, $H_1x=H_2x=-x'(a)$, $h_1=-\alpha'(a)$, $h_2=-\beta'(a)$. Решение не существует ввиду неравенства $\alpha'(a)\neq\beta'(a)$.

EG037 +0+00+00 379'AB

Полагаем $a=0$, $b=1$, $f=0$, $\alpha=0$, $\beta=1$, $H_1x=x(a)+x'(a)$, $H_2x=x(b)$, $h_1=1$, $h_2=0$. Для всех решений $x(t)$, удовлетворяющих условию $x(b)=0$, выполнено

$$x(a)+x'(a)=0,$$

следовательно, требуемое условие $x(a)+x'(a)=1$ выполнено быть не может.

EG038 +00+0+00 379'AB

Полагаем a, b, f, α, β как в EG037, $H_1x=x(a)+x'(b)$, $H_2x=x(b)$, $h_1=1$, $h_2=0$. Ввиду выполнения равенства $x'(a)=x'(b)$ для всех решений уравнения $x''=0$ дальнейшие рассуждения как в EG 037.

EG039 +00+0+00 389'AB

Полагаем $a=0$, $b=\pi+1$, $f=-x_+$, $\alpha(t)=t-\pi-3$, $\beta=\beta_1$, $H_1x=x(a)+x'(b)$, $H_2x=x(b)$, $h_1=H_1\beta$, $h_2=\alpha(b)$. Все решения $x(t)$ с условием $x(b)=\alpha(b)$ имеют вид $k(t-\pi-1)-2$, где $k\in[-\frac{2}{\pi+1}, 1]$, для которых

$$x(a)+x'(b)\in[-\pi-2, -\frac{2}{\pi+1}]$$

при всех допустимых k. Но

$$H_1\beta=1\notin[-\pi-2, -\frac{2}{\pi+1}]$$

поэтому условие $x(a)+x'(b)=h_1$ выполняться не может.

E6040 +00+0+00 489'AB

Полагаем a, b, f, β как в E6039, $\alpha(t)=(1+\varepsilon)(t-\pi-1)-\varepsilon$, дальнейшее как в E6039.

Литература

I. Лепин А.Я., Лепин Л.А. Краевые задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка - Рига: Зинатне, 1988. - 2II с.

2. Виржбицкий Я.В., Пономарев Д.Ю. Обобщенная разрешимость одного класса краевых задач для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка (в печати).

УДК 517.927.4+517.988.5

В.Д.Пономарев

ЛОКАЛЬНАЯ ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим систему операторных уравнений

$$Fx=0, \quad \Phi x=0, \tag{1}$$

где $F: E_1 \to E_2$, $\Phi: E_1 \to E_3$, E_i - вещественное нормированное пространство с нормой $\|\cdot\|_i$, $i=1,2,3$. В настоящей работе продолжаются исследования системы операторных уравнений [3-5] и приводятся условия, при которых решение системы (1) локально единственно.

Определение 1. Оператор $f: E_1 \to E_2$ назовем демикомпактным, если из условий:

1) последовательность (x_k) элементов из E_1 ограничена,
2) $\lim\limits_{k\to\infty} \|fx_k\|_2 = 0$,

следует, что у последовательности (x_k) существует подпоследовательность (x_{k_i}) и $x_0 \in E_1$ такие, что $\lim\limits_{i\to\infty} \|x_{k_i} - x_0\|_1 = 0$.

Определение 2. Решение $x_0 \in E_1$ системы (1) локально единственно, если существует $r \in (0,+\infty)$ такое, что для любого $x_1 \in B(x_0,r) = \{x \in E_1 \mid \|x_0 - x\|_1 \le r\}$ из $Fx_1=0$ и $\Phi x_0 = \Phi x_1$ следует $x_0 = x_1$.

В дальнейшем фиксируем решение x_0 системы (1) и обозначим через F_0', Φ_0' производные Фреше операторов F, Φ в точке x_0.

Теорема 1. Пусть выполняются условия:

1) операторы F, Φ дифференцируемы в x_0;
2) оператор F_0' демикомпактен;
3) система уравнений

$$F_0'u=0, \quad \Phi_0'u=0 \tag{2}$$

имеет единственное решение.

Тогда решение x_0 локально единственно.

Доказательство. Предполагая противное, найдем последовательность $x:\{1,2,\ldots\}\to E_1\setminus\{x_0\}$ такую, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$ и

$$Fx_k = 0, \quad \Phi x_k = 0$$

для любого $k\in\{1,2,\ldots\}$. В силу дифференцируемости F и Φ в x_0 имеем

$$Fx_k - Fx_0 = F_0'(x_k - x_0) + f(x_k - x_0),$$

$$\Phi x_k - \Phi x_0 = \Phi_0'(x_k - x_0) + \varphi(x_k - x_0),$$

где $\|f(x_k - x_0)\|_2 = o(\|x_k - x_0\|_1)$, $\|\varphi(x_k - x_0)\|_3 = o(\|x_k - x_0\|_1)$. Тогда для $u_k = (x_k - x_0)\|x_k - x_0\|_1^{-1}$ получаем

$$F_0'u_k + f_k = 0, \qquad \Phi_0'u_k + \varphi_k = 0, \tag{3}$$

где $f_k = f(x_k - x_0)\cdot\|x_k - x_0\|^{-1}$, $\varphi_k = \varphi(x_k - x_0)\|x_k - x_0\|^{-1}$ и $\lim\limits_{k\to\infty}\|f_k\|_2 = 0$, $\lim\limits_{k\to\infty}\|\varphi_k\|_3 = 0$.

Следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty}\|F_0'u_k\|_2 = 0$ и так как последовательность (u_k) ограничена, то в силу демикомпактности $F_0'^{-1}$ найдется подпоследовательность (u_{k_i}) последовательности (u_k) и $u_0\in E_1$, $\|u_0\|_1 = 1$ такие, что $u_{k_i}\to u_0$ при $i\to\infty$. Тогда в силу непрерывности F_0' и Φ_0' из (3) имеем

$$F_0'u_0 = 0, \quad \Phi_0'u_0 = 0,$$

что противоречит условию 3.

Из теоремы I получаем следующий результат. Для $\tau\in(0,\infty)$ положим

$$S(\tau) = \{x\in E_1 \mid Fx = 0,\ \Phi x = 0,\ \|x\|_1 \le \tau\}$$

Следствие I. Пусть $\tau\in(0,\infty)$ и выполняются условия:

1) операторы F, Φ дифференцируемы на $B(0,\tau)\subset E_1$;

2) оператор F демикомпактен для любого $x \in B(0,r)$;
3) для любого $x \in S(r)$ система уравнений

$$(F'_x)u = 0, \quad (\Phi'_x)u = 0$$

имеет единственное решение.

Тогда множество $S(r)$ содержит конечное число элементов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предполагая противное, найдем последовательность (x_k) такую, что $x_k \in S(r)$, $x_\ell \neq x_m$ для любых $k, \ell, m \in \{1, 2, \dots\}$, $\ell \neq m$. Так как $Fx_k = 0$ и $\|x_k\|_1 < r$ для любых $k \in \{1, 2, \dots\}$, то в силу демикомпактности F у последовательности (x_k) существует подпоследовательность (x_{k_i}), сходящаяся, скажем, к $\hat{x} \in E_1$ и поэтому $\|\hat{x}\|_1 < r$. Из условия I следует непрерывность F и Φ в точке $\hat{x} \in B(0,r)$ и, следовательно, $\hat{x} \in S(r)$. По теореме I решение $\hat{x}$ локально единственно, что противоречиво.

З а м е ч а н и е. Если имеется априорная оценка решения системы (I) и выполняются все условия следствия I, то система (I) может иметь только конечное число решений.

Т е о р е м а 2. Пусть $r \in (0, \infty)$ и выполняются условия:

I) операторы F, Φ дифференцируемы на $B(x_0, r)$;
2) операторы F', Φ' непрерывны в x_0;
3) оператор F'_0 демикомпактен;
4) система уравнений

$$F'_0 u = 0, \quad \Phi'_0 u = 0$$

имеет единственное решение.

Тогда существуют $r_0, C \in (0, \infty)$ такие, что для любых $\alpha, \beta \in E_3$ для любого решения x системы

$$Fx = 0, \quad \Phi x = \alpha \tag{4}$$

для любого решения y системы

$$Fx = 0, \quad \Phi x = \beta \tag{5}$$

из $x, y \in B(x_0, r_0)$ следует $\|x-y\|_1 \le c \cdot \|\alpha-\beta\|_3$.

Доказательство. Предполагая противное, найдем последовательности $r:\{1,2,\ldots\} \to R$, $x, y:\{1,2,\ldots\} \to B(x_0, r_k)$, $\alpha, \beta:\{1,2,\ldots\} \to E_2$ такие, что для любого $k \in \{1,2,\ldots\}$ имеем $r_k < r$, $\lim_{k\to\infty} r_k = 0$, $Fx_k = 0$, $\Phi x_k = \alpha_k$, $Fy_k = 0$, $\Phi y_k = \beta_k$, $\|x_k - y_k\|_1 \ne 0$,

$$\|x_k - y_k\|_1 > k\,\|\alpha_k - \beta_k\|_3. \qquad (6)$$

Из $\|x_0 - x_k\|_1 < k^{-1}$ и $\|x_0 - y_k\|_1 < k^{-1}$ следует

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x_0, \quad \lim_{k\to\infty} y_k = y_0. \qquad (7)$$

Определим для любого $k \in \{1,2,\ldots\}$ f_k и φ_k следующим образом

$$\begin{aligned} f_k &= Fx_k - Fy_k - F_0'(x_k - y_k), \\ \varphi_k &= \Phi x_k - \Phi y_k - \Phi_0'(x_k - y_k). \end{aligned} \qquad (8)$$

Тогда по теореме 8.6.2 из [2] и теореме 2 гл.I § 2 п.3 из [I] имеем

$$\|f_k\|_2 = \|Fx_k - Fy_k - F_0'(x_k - y_k)\|_2 \le$$

$$\le \|x_k - y_k\|_1 \sup_{x\in S} \|F_x' - F_0'\|,$$

$$\|\varphi_k\|_3 = \|\Phi x_k - \Phi y_k - \Phi_0'(x_k - y_k)\|_3 \le \|x_k - y_k\|_1 \sup_{x\in S} \|\Phi_x' - \Phi_0'\|,$$

где S - сегмент, соединяющий точки x_k и y_k и $\|\cdot\|$ - операторная норма. Из (7) и непрерывности F' и Φ' в x_0 имеем

$$\|f_k\|_2 = o(\|x_k - y_k\|_1), \quad \|\varphi_k\|_3 = o(\|x_k - y_k\|_1). \qquad (9)$$

Переписывания (6) в виде

$$F_0'(x_k - y_k) + f_k = 0,$$

$$\Phi_0'(x_k - y_k) + \varphi_k = \alpha_k - \beta_k,$$

для $u_k = (x_k - y_k)\|x_k - y_k\|_1^{-1}$ получаем

$$F_0' u_k + f_k \|x_k - y_k\|_1^{-1} = 0,$$
$$\Phi_0' u_k + \varphi_k \|x_k - y_k\|_1^{-1} = (\alpha_k - \beta_k)\|x_k - y_k\|_1^{-1}. \qquad (10)$$

Из (9) и (10) получаем $\lim\limits_{k\to\infty} \|F_0' u_k\|_2 = 0$. Отсюда и из ограниченности последовательности (u_k) в силу условия 3 следует существование сходящейся подпоследовательности у последовательности (u_k) , скажем, к u_0 , причем $\|u_0\|_1 = 1$. С учетом (6), (9), непрерывности F_0' и Φ_0' из системы (10) имеем

$$F_0' u_0 = 0, \qquad \Phi_0' u_0 = 0,$$

что противоречит условию 4.

Следствие 2. Пусть выполняются условия теоремы 2. Тогда существует $r_1 \in (0,\infty)$ такое, что для любого $\alpha \in E_3$ любое решение $x \in B(x_0, r_1)$ системы (4) локально единственно.

Доказательство. По теореме 2 существуют $r_0, C \in (0\ \infty)$ такие, что, если x - решение системы (4) и y - решение системы (5) и $x, y \in B(x_0, r_0)$, то

$$\|x - y\|_1 \le C\|\alpha - \beta\|_3. \qquad (11)$$

Полагая $r_1 = 0{,}5 r_0$, имеем $B(x, r_1) \subset B(x_0, r_0)$ для любого $x \in B(x_0, r_1)$. Тогда из (11) при $\alpha = \beta$ получаем требуемое.

Следствие 3. Пусть выполняются условия теоремы 2. Тогда существует $r_1 \in (0,\infty)$ такое, что для любых $x, y \in B(x_0, r_1)$ из $Fx = Fy = 0$, $\Phi x = \Phi y$ следует $x = y$.

Доказательство. Полагаем в теореме 2 $\alpha = \beta$ и получаем для $r_1 = r_0$ требуемое.

Литература

1. Бурбаки Н. Функции действительного переменного - М.: Наука, 1965. - 424 с.
2. Дьедонне Ж. Основы современного анализа - М.: Мир, 1964. - 430 с.
3. Пономарев В.Д. Существование решения системы операторных уравнений // Латв.мат.ежегодник - Рига: Зинатне, 1982. Вып.26. - С.96-100.
4. Пономарев В.Д. Об одной теореме непрерывной зависимости решений операторных уравнений // Латв.мат.ежегодник - Рига: Зинатне, 1985. Вып.29. - С.70-72.
5. Пономарев В.Д. Существование решения системы двух операторных уравнений // Математика. Дифференциальные уравнения: Научные труды - Рига: ЛУ, 1990. - С.63-65.

УДК 517.927

А.И.Звягинцев, И.И.Карташова

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ С ПАРАМЕТРАМИ

В статье [6] рассмотрена краевая задача

$$x''=f(t,x,x',x_0,x_1), \tag{I}$$

$$x'(0)=x'(1)=0, \tag{2}$$

$$x(0)=x_0, \quad x(1)=x_1, \tag{3}$$

где вектор-функция $f\in C([0,1]\times R^{4n}, R^n)$ и параметры $x_0,x_1\in R^n$, $n\in\{1,2,\ldots\}$. Полученные в [6] результаты для краевой задачи (I)-(3) применяются к прикладной задаче

$$x''=(\lambda-\frac{x_0^2-x^2}{2}+(l\lambda+\frac{x_0^2-x_1^2}{2})t)x-l\lambda D-\frac{x_0^2-x_1^2}{2}D, \tag{4}$$

$$x'(0)=x'(1)=0, \tag{5}$$

$$x(0)=x_0, \quad x(1)=x_1, \tag{6}$$

которая была получена Л.Бассом [3, 4] при изучении движения ионов в жидком соединении и имеет применение к потенциалам биологической оболочки. С физической точки зрения интерес представляют коэффициенты $\lambda>0$, $l>0$ и $-1<D<1$. Вывод уравнения (4) содержится также в работе [6]. Уравнение (4) является уравнением Пенлеве [5] второго порядка.

Исследуем вопрос о существовании и единственности решения краевых задач (I)-(3) и (4)-(6). Прежде всего сформулируем теорему существования решения для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$x''=f(t,x,x',u,v), \tag{7}$$

$$u'=\varphi(t,x,x',u,v), \tag{8}$$

$$v' = \psi(t,x,x',u,v), \tag{9}$$

с краевыми условиями

$$x'(0) = x'(1) = 0, \tag{10}$$

$$u(0) = x(0), \tag{11}$$

$$v(1) = x(1), \tag{12}$$

где $f, \varphi, \psi \in C([0,1]\times R^{4n}, R^n)$, $n\in\{1,2,\dots\}$.

Всюду в дальнейшем предполагается, что индекс i пробегает множество $\{1,\dots,n\}$, $n\in\{1,2,\dots\}$, $I=[0,1]$. Если $z, y\in R^n$, то запись $z\le y$ понимается покомпонентно. Для $z\in R^n$ и $\xi\in R$ полагаем

$$\sigma_i(z,\xi) = (z_1,\dots,z_{i-1},\xi,z_{i+1},\dots,z_n).$$

Т е о р е м а I. Пусть существуют числа $T_i\in(0,\infty)$ и функции $\alpha,\beta\in C^2(I,R^n)$; $\gamma,\eta,\lambda,\mu\in C^1(I,R^n)$; $h_i\in C([0,\infty),(0,\infty))$, для которых выполняются следующие условия:

1) $\alpha(t)\le\beta(t)$, $\gamma(t)\le\eta(t)$, $\lambda(t)\le\mu(t)$ для $t\in I$,

2) $\alpha_i''(t)\ge f_i(t,\sigma_i(x,\alpha_i(t)),\sigma_i(x',\alpha_i'(t)),u,v)$,

$$\beta_i''(t)\le f_i(t,\sigma_i(x,\beta_i(t)),\sigma_i(x',\beta_i'(t)),u,v)$$

для $(t,x,x',u,v)\in\Omega$, где

$$\Omega=\{(t,x,y,u,v)\in I\times R^{4n}: t\in I,\ \alpha(t)\le x\le\beta(t),\ |y|\le T,$$
$$\gamma(t)\le u\le\eta(t),\ \lambda(t)\le v\le\mu(t)\},$$

$T=(T_1,\dots,T_n)$;

3) $\alpha'(0)\ge0$, $\alpha'(1)\le0$, $\beta'(0)\le0$, $\beta'(1)\ge0$;

4) $|f_i(t,x,x',u,v)|\le h_i(|x_i'|)$ для $(t,x,x,u,v)\in\Omega$, $x'\in R^n$ и

$$\int_0^{T_i}\frac{s\,ds}{h_i(s)} > \max_{t\in I}\beta_i(t)-\min_{t\in I}\alpha_i(t),$$

5) $\gamma_i'(t)\le\varphi_i(t,x,x',\sigma_i(u,\gamma_i(t)),v)$,

$$\eta_i'(t)\ge\varphi_i(t,x,x',\sigma_i(u,\eta_i(t)),v)$$

для $(t,x,x',u,v)\in\Omega$;

6) $\lambda_i'(t)\geq\psi_i(t,x,x',u,\sigma_i(v,\lambda_i(t)))$,

$$\mu_i'(t)\leq\psi_i(t,x,x',u,\sigma_i(v,\mu_i(t)))$$

для $(t,x,x',u,v)\in\Omega$;

7) $\gamma(0)\leq\alpha(0)\leq\beta(0)\leq\eta(0)$, $\lambda(1)\leq\alpha(1)\leq\beta(1)\leq\mu(1)$.

Тогда краевая задача (7)-(12) имеет решение $x(t)$, $u(t)$, $v(t)$, причем для него на отрезке I справедливы оценки

$$\alpha(t)\leq x(t)\leq\beta(t),\quad |x'(t)|\leq T,\quad \gamma(t)\leq u(t)\leq\eta(t),$$
$$\lambda(t)\leq v(t)\leq\mu(t).$$

Поскольку доказательство теоремы I проводится стандартными методами [I, 2], то оно опускается.

Т е о р е м а 2. Пусть существуют числа $T_i\in(0,\infty)$ и функции $\alpha,\beta\in C^2(I,\mathbb{R}^n)$, $h_i\in C([0,\infty),(0,\infty))$, для которых выполняются следующие условия:

I) $\alpha(t)\leq\beta(t)$ для $t\in I$;

2) $\alpha_i''(t)\geq f_i(t,\sigma_i(x,\alpha_i(t)),\sigma_i(x',\alpha_i'(t)),x_0,x_1)$,

$$\beta_i''(t)\leq f_i(t,\sigma_i(x,\beta_i(t)),\sigma_i(x',\beta_i'(t)),x_0,x_1)$$

для $(t,x,x',x_0,x_1)\in\Omega$, где

$$\Omega=\{(t,x,y,x_0,x_1)\in I\times\mathbb{R}^{4n}:\ t\in I,\ \alpha(t)\leq x\leq\beta(t),\ |y|\leq T,$$
$$\alpha(0)\leq x_0\leq\beta(0),\ \alpha(1)\leq x_1\leq\beta(1)\},$$

$T=(T_1,\dots,T_n)$;

3) $\alpha'(0)\geq 0$, $\alpha'(1)\leq 0$, $\beta'(0)\leq 0$, $\beta'(1)\geq 0$;

4) $|f_i(t,x,x',x_0,x_1)|\leq h_i(|x_i'|)$ для $(t,x,y,x_0,x_1)\in\Omega$, $x'\in\mathbb{R}^n$ и

$$\int_0^{T_i}\frac{s\,ds}{h_i(s)}>\max_{t\in I}\beta_i(t)-\min_{t\in I}\alpha_i(t).$$

Тогда существуют $x_0\in[\alpha(0),\beta(0)]$ и $x_1\in[\alpha(1),\beta(1)]$ такие, что краевая задача (I)-(3) имеет решение $x(t)$, причем для него на отрезке I справедливы оценки

$$\alpha(t)\leq x(t)\leq\beta(t),\quad |x'(t)|\leq T.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Полагая в краевой задаче (7)-(12)

$$\varphi \equiv 0, \quad \psi \equiv 0$$

и определяя функции

$$\gamma(t) \equiv \alpha(0), \quad \eta(t) \equiv \beta(0), \quad \lambda(t) \equiv \alpha(1), \quad \mu(t) \equiv \beta(1),$$

на основании теоремы I получаем утверждение теоремы 2. Теорема доказана.

В работе [6] получены условия существования решения краевой задачи (I)-(3) для произвольных $x_0 \in [\alpha(0), \beta(0)]$ и $x_1 \in [\alpha(1), \beta(1)]$. По сравнению с теоремой 2 в работе [6] все неравенства для $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ строгие и дополнительно требуются еще два условия: монотонность функции $f(\cdot, x, x', x_0, x_1)$ по второму аргументу и отличие от нуля степени Брауэра для некоторого оператора.

В качестве объекта приложения теоремы 2 возьмем краевую задачу (4)-(6).

Отметим, что, если $x(t, \lambda, \ell, D)$ является решением уравнения (4), то функция $-x(t, \lambda, \ell, -D)$ тоже является решением уравнения (4). Поэтому можно ограничиться случаем $D \geqslant 0$.

В работе [6] для $\lambda > 0$, $\ell > 0$, $D > 0$ доказано, что в случае существования числа $m > 0$, удовлетворяющего неравенствам

$$\lambda - 3m^2 - \frac{D^2}{2} > 0, \quad m\left(\lambda - \frac{m^2}{2}\right) - \ell\lambda D - m^2\frac{D}{2} > 0,$$

$$m\left(1 + \frac{\ell}{2}\right) - \ell D > 0, \quad \lambda - \frac{\ell D^2}{2(1+\ell)} \geqslant 0,$$

краевая задача (4)-(6) для любых $0 \leqslant x_1 \leqslant x_0 \leqslant m$ имеет единственное решение $x(t)$, причем $0 \leqslant x(t) \leqslant m$ для всех $t \in I$.

Используя теорему 2, получим условия существования и единственности решения задачи (4)-(6).

Т е о р е м а 3. Пусть $\lambda > 0$, $\ell > 0$, $D > 0$ и число $m > 0$ удовлетворяет неравенству

$$m\left(\lambda - \frac{m^2}{2}\right) - \ell\lambda D - m^2\frac{D}{2} \geqslant 0. \tag{13}$$

Тогда существуют $0 \le x_1 \le x_0 \le m$, для которых краевая задача (4)-(6) имеет единственное решение $x(t)$, причем $0 \le x(t) \le m$ для всех $t \in I$.

Доказательство. Определим число

$$T = 1 + \sqrt{2m\,(m\,(\lambda + \ell\lambda + m^2) + \ell\lambda D + m^2 D/2)},$$

множество

$$A = \{(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x_1 \le x_0 \le m\}$$

и функции

$$\alpha(t) \equiv 0, \quad \beta(t) \equiv m,$$

$$h(t) \equiv m\,(\lambda + \ell\lambda + m^2) + \ell\lambda D + \frac{m^2}{2} D.$$

Обозначив через $f(t, x, x', x_0, x_1)$ правую часть уравнения (4), для $(x_0, x_1) \in A$ в силу (13) получаем

$$\alpha''(t) = 0 \ge -\ell\lambda D - \frac{x_0^2 - x_1^2}{2} D = f(t, \alpha(t), \alpha'(t), x_0, x_1),$$

$$\beta''(t) = 0 \le m(\lambda - \frac{m^2}{2}) - \ell\lambda D - m^2 \frac{D}{2} \le f(t, \beta(t), \beta'(t), x_0, x_1).$$

Ясно, что для множества

$$\Omega = \{(t, x, x', x_0, x_1) \in I \times \mathbb{R}^4 : t \in I,\ 0 \le x \le m,\ |x'| \le T,\ (x_0, x_1) \in A\}$$

все условия теоремы 2 выполнены. Таким образом, из теоремы 2 следует существование решения $x(t)$ краевой задачи (4)-(6) для некоторых $0 \le x_1 \le x_0 \le m$, которое заключено между нулем и m на всем отрезке I.

Докажем единственность решения $x(t)$. Предположим противное и рассмотрим на отрезке I функцию

$$u(t) = \frac{1}{2}(x(t) - \tilde{x}(t))^2,$$

где $\tilde{x}(t)$ - решение задачи (4)-(6), отличное от $x(t)$. На основании (4) и неравенств $0 \le x_1 \le x_0 \le m$ получаем

$$u''(t) \ge (x(t) - \tilde{x}(t))(x''(t) - \tilde{x}''(t)) = (x(t) - \tilde{x}(t))[(\lambda - \frac{x_0^2}{2} + \lambda\ell + $$

$$+\frac{x_0^2-x_1^2}{2}t)(x(t)-\bar{x}(t))+\frac{1}{2}(x^3(t)-\bar{x}^3(t))] \geq$$

$$\geq(\lambda-\frac{x_0^2}{2})(x(t)-\bar{x}(t))^2+\frac{1}{2}(x(t)-\bar{x}(t))(x^2(t)-\bar{x}^3(t)) \geq$$

$$\geq(\lambda-\frac{m^2}{2})(x(t)-\bar{x}(t))^2.$$

Так как из (I3) следует неравенство $\lambda-m^2/2>0$, то $u''(t)\geq 0$ для всех $t\in I$. Значит, функция $u'(t)$ является монотонной на отрезке I и в силу краевых условий (5) $u'(t)\equiv 0$. Тогда на отрезке I функция $u(t)$ является постоянной, а из (6) следует равенство $u(t)=0$ для всех $t\in I$, что доказывает единственность решения $x(t)$. Теорема доказана.

Т е о р е м а 4. Пусть $\lambda>0$, $\ell>0$, $D\geq 0$, $r=\min\{\sqrt{2\lambda}, \sqrt{2\lambda\ell}\}$ и выполняется неравенство

$$\ell D\leq r \tag{I4}$$

Тогда существуют $0\leq x_0\leq x_1\leq r$, для которых краевая задача (4)-(6) имеет единственное решение $x(t)$, причём $0\leq x(t)\leq r$ для всех $t\in I$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим число

$$T=1+\sqrt{2r(r(\lambda+\ell\lambda+r^2)+\ell\lambda D+r^2D/2)},$$

множество

$$B=\{(x_0,x_1)\in R^2:\ 0\leq x_0\leq x_1\leq r\}$$

и функции

$$\alpha(t)\equiv 0,\quad \beta(t)\equiv r,$$

$$h(t)\equiv r(\lambda+\ell\lambda+m^2)+\ell\lambda D+\frac{r^2}{2}D.$$

Обозначив через $f(t,x,x',x_0,x_1)$ правую часть уравнения (4), для $(x_0,x_1)\in B$ в силу (I4) получаем

$$\alpha''(t)=0\geq\frac{r^2}{2}D-\ell\lambda D\geq f(t,\alpha(t),\alpha'(t),x_0,x_1),$$

$$\beta''(t)=0\leq r\lambda-l\lambda D\leq f(t,\beta(t),\beta'(t),x_0,x_1).$$

Поскольку для множества

$$\Omega=\{(t,x,x',x_0,x_1)\in I\times R^4: t\in I,\ 0\leq x\leq r,\ |x'|\leq T,\ (x_0,x_1)\in B\}$$

все условия теоремы 2 выполняются, то по теореме 2 найдутся $0\leq x_0\leq x_1\leq r$, для которых краевая задача (4)-(6) имеет решение $x(t)$, заключенное между нулем и r на всем отрезке I.

Покажем, что решение $x(t)$ единственно. Пусть $\tilde{x}(t)$ есть еще одно решение задачи (4)-(6). Тогда для функции $u(t)=\frac{1}{2}(x(t)-\tilde{x}(t))^2$ с помощью неравенств $0\leq x_0\leq x_1\leq m$ и определения числа r, как в доказательстве теоремы 3, получаем

$$u''(t)\geq(\lambda-\frac{r^2}{2})(x(t)-\tilde{x}(t))^2\geq 0.$$

Повторяя рассуждения из доказательства теоремы 3, получаем $x(t)\equiv\tilde{x}(t)$. Теорема доказана.

Литература

1. Васильев Н.И., Клоков Ю.А. Основы теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. - Рига: Зинатне, 1978. - 189 с.
2. Пономарев В.Д. Необходимое и достаточное условия разрешимости многоточечной краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка // Дифференц.уравнения - 1978. - Т.14, № 5. - С.929-931.
3. Bass L. Electrical structures of interfaces in steady electrolysis // Trans. Faraday Soc. - 1964. - V.60. - P.1656-1663.
4. Bass L. Potential of liquid junctions // Trans. Faraday Soc. - 1964. - V.60. - P.1914-1919.

5. Painleve P. Sur les equations differentielles du second ordre et d'ordre superiens dont l'integrale generale est uniforme // Acta Math. - 1902. - V.25. - P.1-65.
6. Thompson H.B. Existence for a two point boundary value problem arising in electrodiffusion // Acta math.Sci. Engl.Ed. - 1988. - V.8, N 4. - P.373-387.

УДК 517.927

А.И.Звягинцев, О.В.Тихая

ОБ ОДНОЙ ПРИКЛАДНОЙ ЗАДАЧЕ

Рассмотрим краевую задачу

$$d_1((1-u_2)u_1'' + u_1 u_2'') = -a_1(1-u_1-u_2) + a_3 u_1 + \\ + u_1 u_2 \prod_{i=1}^{m} (1 + b_{1i} u_1 + b_{2i} u_2)^{N_i}, \tag{I}$$

$$d_2(u_2 u_1'' + (1-u_1)u_2'') = -a_2(1-u_1-u_2)^{\gamma} + a_4 u_2^{\gamma} + \\ + u_1 u_2 \prod_{i=1}^{m} (1 + b_{1i} u_1 + b_{2i} u_2)^{N_i}. \tag{2}$$

$$u_1'(-1) = u_2'(-1) = u_1'(1) = u_2'(1) = 0 \tag{3}$$

с дополнительными условиями

$$0 \le u_1(x) \le 1, \quad 0 \le u_2(x) \le 1, \quad 0 \le u_1(x) + u_2(x) \le 1, \quad x \in [-1, 1], \tag{4}$$

где $a_1, a_2, a_3, a_4, d_1, d_2 \in (0, \infty)$; $b_{1i}, b_{2i} \in [-1, \infty)$ и $N_i \in \{0, 1, \ldots\}$ для $i = 1, \ldots, m$; $m \in \{1, 2, \ldots\}$, $\gamma \in \{1, 2\}$.

Задача (I)-(4) возникает при моделировании реакции окисления на поверхности катализатора [I] в случае стационарного режима.

Приведем доказываемую стандартными методами теорему [2], которая понадобится в дальнейшем.

Теорема I. Пусть существуют функции $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in C_2(I)$, $I = [-1, 1]$, обладающие следующими свойствами:

1) $\alpha_1(x) \le \beta_1(x)$ и $\alpha_2(x) \le \beta_2(x)$ для всех $x \in I$;

2) $f_1, f_2 \in C(W)$, где $W \subset \mathbb{R}^2$ и

$$W = \{(u, v) : \alpha_1(x) \le u \le \beta_1(x),\ \alpha_2(x) \le v \le \beta_2(x),\ x \in I\};$$

3) $\alpha_1''(x) \ge f_1(\alpha_1(x), v(x))$ и $\beta_1''(x) \le f_1(\beta_1(x), v(x))$ для $\alpha_2(x) \le v(x) \le \beta_2(x)$, $x \in I$;

4) $\alpha_2''(x) \geq f_2(u(x), \alpha_2(x))$ и $\beta_2''(x) \leq f_2(u(x), \beta_2(x))$ для $\alpha_1(x) \leq u(x) \leq \beta_1(x)$, $x \in I$;

5) $\alpha_i'(-1) \geq 0$, $\alpha_i'(1) \leq 0$, $\beta_i'(-1) \leq 0$, $\beta_i'(1) \geq 0$ для $i = 1,2$.

Тогда краевая задача

$$u'' = f_1(u, v),$$

$$v'' = f_2(u, v),$$

$$u'(-1) = v'(-1) = u'(1) = v'(1) = 0$$

имеет решение $u(x)$, $v(x)$ такое, что для всех $x \in I$ выполняются неравенства

$$\alpha_1(x) \leq u(x) \leq \beta_1(x), \qquad \alpha_2(x) \leq v(x) \leq \beta_2(x).$$

Сформулируем и докажем теперь основной результат.

Т е о р е м а 2. Пусть

$$a_3 d_2 \geq a_4 d_1 \tag{5}$$

и для $i \in \{1, \ldots, m\}$, соответствующих нечетным числам N_i, выполняются неравенства

$$1 - b_{1i} \geq 0, \quad 1 - b_{1i} + b_{2i} \geq 0. \tag{6}$$

Тогда задача (I)-(4) имеет решение.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Приведя систему уравнений (I), (2) к нормальному виду, получаем

$$u_1'' = \frac{(d_1^{-1}\varphi_1(u_1,u_2) + d_2^{-1}\varphi_2(u_1,u_2))u_1 - d_1^{-1}\varphi_1(u_1,u_2)}{1 - u_1 - u_2}, \tag{7}$$

$$u_2'' = \frac{(d_1^{-1}\varphi_1(u_1,u_2) + d_2^{-1}\varphi_2(u_1,u_2))u_2 - d_2^{-1}\varphi_2(u_1,u_2)}{1 - u_1 - u_2}, \tag{8}$$

где

$$\varphi_1(u_1, u_2) = a_1(1 - u_1 - u_2) - a_3 u_1 - u_1 u_2 \prod_{i=1}^{m} (1 + b_{1i} u_1 + b_{2i} u_2)^{N_i}$$

$$\varphi_2(u_1, u_2) = a_2(1 - u_1 - u_2)^{5} - a_4 u_2^{5} - u_1 u_2 \prod_{i=1}^{m} (1 + b_{1i} u_1 + b_{2i} u_2)^{N_i}.$$

Обозначив

$$v(x) = u_1(x) + u_2(x) \tag{9}$$

и сложив уравнения (7) и (8), рассмотрим следующую краевую задачу

$$u_2'' = \frac{(d_1^{-1}\varphi_1(v-u_2, u_2) + d_2^{-1}\varphi_2(v-u_2, u_2))u_2 - d_2^{-1}\varphi_2(v-u_2, u_2)}{1-v}, \tag{10}$$

$$v'' = -d_1^{-1}\varphi_1(v-u_2, u_2) - d_2^{-1}\varphi_2(v-u_2, u_2), \tag{11}$$

$$u_2'(-1) = v'(-1) = u_2'(1) = v'(1) = 0. \tag{12}$$

Применим к краевой задаче (10)-(12) теорему I, обозначив правые части уравнений (10), (11) соответственно через $f_1(u_2, v)$, $f_2(u_2, v)$ и считая, что $u_2 = u$.

Положим для всех $x \in I$

$$\alpha_1(x) = 0, \quad \beta_1(x) = 1, \quad \alpha_2(x) = 0, \quad \beta_2(x) = 1 - \varepsilon,$$

где $\varepsilon \in (0, 1)$ и будет определен ниже, проверим выполнение условий теоремы I для задачи (10)-(12).

Ясно, что первое, второе и пятое условия теоремы I выполнены. Покажем, что третье и четвертое условия теоремы I тоже выполняются.

Для $0 \le v(x) \le 1 - \varepsilon$, $x \in I$, в силу (6) имеем

$$\alpha_1''(x) = 0 \ge -a_2 d_2^{-1}(1 - v(x))^{\delta - 1} = f_1(\alpha_1(x), v(x)),$$

$$\beta_1''(x) = 0 \le d_2^{-1}(a_1 + a_3 + \prod_{i=1}^{n}(1 - b_{1i}(1 - v(x)) + b_{2i})^{N_i}) = f_1(\beta_1(x), v(x)).$$

Для $0 \le u_2(x) \le 1$, $x \in I$, в силу (5) и (6) имеем

$$\alpha_2''(x) = 0 \ge -\frac{a_1}{d_1} - \frac{a_2}{d_2} - \left(\frac{a_3}{d_1} - \frac{a_4}{d_2} u_2^{\delta-1}(x)\right) u_2(x) - \left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2}\right) u_2^2(x) \prod_{i=1}^{n}(1 - b_{1i} u_2(x) + b_{2i} u_2(x))^{N_i} = f_2(u_2(x), \alpha_2(x)).$$

$$\beta_2''(x)=0\leq\Big[\frac{a_3}{d_1}(1-u_2(x))+\frac{a_4}{d_2}u_2^{\gamma}(x)+\Big(\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}\Big)u_2(x)(1-u_2(x))\cdot$$

$$\cdot\prod_{i=1}^{m}(1+b_{1i}(1-\delta-u_2(x))+b_{2i}u_2(x))^{N_i}\Big]-\delta\Big\{\frac{a_1+a_3}{d_1}+\frac{a_2}{d_2}\delta^{\gamma-1}+$$

$$+\Big(\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}\Big)u_2(x)\prod_{i=1}^{m}(1+b_{1i}(1-\delta-u_2(x))+b_{2i}u_2(x))^{N_i}\Big\}=f_2(u_2(x),\beta_2(x)).$$

Поскольку выражение в квадратных скобках строго положительно, то последнее неравенство выполняется для достаточно малых $\delta\in(0,1)$. Взяв δ_0 достаточно малым, получаем, что третье и четвертое условия теоремы I тоже выполняются. Тогда по теореме I краевая задача (I0)-(I2) имеет решение $\bar{u}_2(x)$, $\bar{v}(x)$, причем для всех $x\in I$ справедливы неравенства

$$0\leq\bar{u}_2(x)\leq 1,\qquad 0\leq\bar{v}(x)\leq 1-\delta_0. \tag{I3}$$

Так как $\bar{u}_1(x)=\bar{v}(x)-\bar{u}_2(x)$ является решением уравнения (7) и в силу (I2) удовлетворяет условиям $\bar{u}_1'(-1)=\bar{u}_1'(1)=0$, то $\bar{u}_1(x)$, $\bar{u}_2(x)$ является решением краевой задачи (7), (3), (3). Из (I3) следует, что $\bar{u}_1(x)<1$ для всех $x\in I$. Покажем, что функция $\bar{u}_1(x)$ неотрицательна на отрезке I.

Пусть $x_0\in I$ точка, в которой $\bar{u}_1(x)$ достигает минимум:

$$\bar{u}_1(x_0)=\min_{-1\leq x\leq 1}\bar{u}_1(x).$$

Предположим, что $\bar{u}_1(x_0)<0$. Тогда из (5), (6), (7) и (I3) вытекает, что

$$\bar{u}_1''(x_0)<\frac{\bar{u}_1(x_0)}{1-\bar{v}(x_0)}\Big\{d_1^{-1}(1-\bar{u}_1(x_0))(a_2+\bar{u}_2(x_0)\prod_{i=1}^{m}(1+b_{1i}\bar{u}_1(x_0)+$$

$$+b_{2i}\bar{u}_2(x_0))^{N_i})-d_2^{-1}\bar{u}_2(x_0)(a_4\bar{u}_2^{\gamma-1}(x_0)-\bar{u}_1(x_0)\prod_{i=1}^{m}(1+$$

$$+b_{1i}\bar{u}_1(x_0)+b_{2i}\bar{u}_2(x_0))^{N_i})\Big\}<\frac{\bar{u}_1(x_0)}{1-\bar{v}(x_0)}(d_1^{-1}a_2-\tag{I4}$$

$$-d_2^{-1}a_4\bar{u}_2^{\gamma}(x_0))\leq 0.$$

Если $x_0=-1$ или $x_0=1$, то с учетом (I2) и (I4) имеем

$$\bar{u}_1(x_0)<0, \quad \bar{u}_1'(x_0)=0, \quad \bar{u}_1''(x_0)<0.$$

Отсюда следует, что на концах отрезка $[-1,1]$ функция $\bar{u}_1(x)$ не может достигать отрицательного минимума. В случае же $-1<x_0<1$ из условия локального минимума функции следует, что $\bar{u}_1'(x_0)=0$ и выполняется неравенство $\bar{u}_1''(x_0)\geqslant 0$, которое противоречит (I4). Полученное противоречие доказывает оценку $\bar{u}_1(x)\geqslant 0$ для $x\in I$.

Таким образом, для решения $\bar{u}_1(x), \bar{u}_2(x)$ задачи (7), (8), (3) установлены оценки

$$0\leqslant \bar{u}_1(x)<1, \quad 0\leqslant \bar{u}_2(x)\leqslant 1, \quad 0\leqslant \bar{u}_1(x)+\bar{u}_2(x)<1$$

при всех $x\in I$. Поскольку функции $\bar{u}_1(x)$ и $\bar{u}_2(x)$ удовлетворяют также уравнениям (I) и (2), то, следовательно, $\bar{u}_1(x)$, $\bar{u}_2(x)$ являются решением исходной краевой задачи (I)-(4). Теорема доказана.

В заключение отметим, что из теоремы 2 в случае $N_1=\ldots=N_m=0$ следует результат работы [2].

Литература

I. Еленин Г.Г., Лысак Т.М. Диссипативные структуры в модельной реакции окисления окиси углерода // Дифференц. уравнения - 1988. - Т.24, № 7. - С.1186-1192.

2. Звягинцев А.И., Зубова Л.Ф., Пономарев Д.Ю. О существовании стационарных решений одной краевой задачи химической кинетики // Теоретические и численные исследования краевых задач - Рига: Изд-во Латв. университета - 1989. - С.83-90.

УДК 517.95

Х.Э.Калис

О СПЕЦИАЛЬНОЙ РАЗНОСТНОЙ АППРОКСИМАЦИИ НЕСАМОСОПРЯЖЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В КРИВОЛИНЕЙНЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ

В литературе известны стандартные аппроксимации самосопряженных дифференциальных операторов второго порядка разностными со вторым порядком аппроксимации [1]. Такие же классические аппроксимации можно применять для решения дифференциальных уравнений второго порядка в случае несамосопряженного оператора, содержащего первую производную. Эти аппроксимации становятся непригодными для решения дифференциальных уравнений с большими параметрами при младших производных или с малыми при старших производных, так как метод сеток имеет малую скорость сходимости и невысокую точность. Поэтому актуальной задачей является разработка специальных методов решения краевых задач математической физики при больших параметрах при младших производных. Для простейших линейных краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений и математической физики такие специальные методы, т.н. равномерные численные методы, рассмотрены в работах советских математиков (Н.С.Бахвалов, А.М.Ильин, К.В.Емельянов, Г.И.Шишкин), а также зарубежными учеными (Р.Келлог, Дж.Миллер, Э.Дулан, У.Шилдерс) [2 , 3 4, 5].

Здесь рассмотрена аппроксимация соответствующих операторов в криволинейных ортогональных координатах.

Рассматривается дифференциальное уравнение теплопроводности в жидкости

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t} + div\,(T\cdot\vec{v})\right) = div\,(\varkappa\, grad\, T) + Q, \qquad (1)$$

где

$\varkappa$ - коэффициент температуропроводности,

$T = T(t, q_1, q_2, q_3)$ - температура,

$\vec{v}$ - вектор скорости движения жидкости, содержащий составляющие v_1, v_2, v_3, зависящие от пространственных координат q_1, q_2, q_3 и параметра времени t (принимается, что жидкость несжимаемая, т.е. $\operatorname{div} \vec{v} = 0$),

$Q = Q(t, q_1, q_2, q_3)$ - функция источника тепла (например, джоулевое тепло).

В криволинейных координатах (q_1, q_2, q_3) дифференциальные выражения $\operatorname{div}(T \cdot \vec{v})$, $\operatorname{div}(\varkappa \operatorname{grad} T)$ имеют следующий вид:

$$\operatorname{div}(T \cdot \vec{v}) = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \Big[\frac{\partial}{\partial q_1}(H_2 H_3 v_1 T) + \frac{\partial}{\partial q_2}(H_3 H_1 v_2 T) + \frac{\partial}{\partial q_3}(H_1 H_2 v_3 T) \Big], \tag{2}$$

$$\operatorname{div}(\varkappa \operatorname{grad} T) = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \Big[\frac{\partial}{\partial q_1}\Big(\frac{H_2 H_3}{H_1} \varkappa \frac{\partial T}{\partial q_1}\Big) + \frac{\partial}{\partial q_2}\Big(\frac{H_3 H_1}{H_2} \varkappa \frac{\partial T}{\partial q_2}\Big) + \frac{\partial}{\partial q_3}\Big(\frac{H_1 H_2}{H_3} \varkappa \frac{\partial T}{\partial q_3}\Big) \Big], \tag{3}$$

где H_1, H_2, H_3 соответствующие коэффициенты Ламэ [6].

Так как $\operatorname{div} \vec{v} = 0$, то оператор (2) можно также переписать в виде

$$\operatorname{div}(T \vec{v}) = v_1 H_1^{-1} \frac{\partial T}{\partial q_1} + v_2 H_2^{-1} \frac{\partial T}{\partial q_2} + v_3 H_3^{-1} \frac{\partial T}{\partial q_3}. \tag{4}$$

Вид оператора (4) более простой, чем (2), но в этом случае уравнение (1) будет иметь т.н. недивергентный вид, который может осложнять аппроксимацию дифференциальных операторов разностными при больших значениях модуля скорости $|\vec{v}|$ или малых значениях параметра $\varkappa$. Покажем, что для специальной разностной аппроксимации вид оператора (2) или (4) не важен, т.к. при подходящей аппроксимации уравнения $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ разностные операторы совпадают.

Для построения специальных разностных схем решения многомерных краевых задач математической физики, в том числе для уравнения теплопроводности применяется поочередная дискретизация переменных и аппроксимация соответствующих одномерных операторов разностными на основе специальных монотонных разностных схем [7]. В качестве одномерных моделей уравнения (I) рассматриваются следующие:

$$Lu \equiv (bu')' + (au') = f, \tag{5}$$

$$Lu \equiv (bu')' + au' = f, \tag{6}$$

где коэффициенты a, b и правая часть f зависят от независимой переменной x, $u' = du/dx$, $b>0$

Аналогично [7], применяя (I) интегро-интерполяционный метод А.А.Самарского [I], получаем уравнение для "баланса" в виде

$$\int\limits_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} Lu\,dx = \mathcal{J}_i^+ - \mathcal{J}_i^- = \int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x)dx \approx f_i \hbar_i, \tag{7}$$

где для вычисления интеграла применена квадратурная формула прямоугольника,

$\mathcal{J}(x) = bu' + au$ - функция "потока",

$f_i = f(x_i)$, $\mathcal{J}_i^{\pm} = \mathcal{J}(x_{i\pm 1/2})$, $x_{i+1/2} = (x_i + x_{i+1})/2$,

x_i, x_{i-1}, x_{i+1} - узлы неравномерной сетки,

$\hbar_i = (h_i + h_{i+1})/2$ - средний шаг сетки,

$h_i = x_i - x_{i-1}$, $h_{i+1} = x_{i+1} - x_i$.

"Потоки" $\mathcal{J}_i^{\pm}$ определяются через экспоненциальное преобразование

$$\mathcal{J}(x) = b\omega^{-1}(\omega u)', \tag{8}$$

где $\omega(x) = \exp\left(\int\limits_{x_i}^{x} \alpha(t)dt\right)$,

$$\alpha = b^{-1}a.$$

Таким образом, преобразование (8) приводит локальное уравнение (5) в каждом из элементарных промежутков (x_{i-1}, x_i) и (x_i, x_{i+1}) к дивергентному виду. После интегрирования соотношения $Wb^{-1}\mathcal{J} = (Wu)'$ в промежутке (x_i, x_{i+1}) следует, что

$$u_{i+1}W(x_{i+1}) - u_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} Wb^{-1}\mathcal{J}dx \approx (b_i^+)^{-1}\mathcal{J}_i^+ \int_{x_i}^{x_{i+1}} Wdx \approx$$

$$\approx (b_i^+)^{-1}\mathcal{J}_i^+ \int_{x_i}^{x_{i+1}} \exp(\alpha_i^+(x-x_i))dx = (a_i^+)^{-1}\mathcal{J}_i^+(\exp(\alpha_i^+ h_{i+1}) - 1),$$

т.е.

$$\mathcal{J}_i^+ = b_i^+ h_{i+1}^{-1} S(-\alpha_i^+ h_{i+1})(u_{i+1} - u_i) + u_i a_i^+, \tag{9}$$

где $u_i = u(x_i)$, $u_{i+1} = u(x_{i+1})$ - значения сеточной функции,

$$S(x) = x/(\exp(x) - 1) \tag{10}$$

- функция для определения коэффициентов разностного операторов, $W(x_{i+1}) \approx \exp(\alpha_i^+ h_{i+1})$.

Здесь для вычисления интегралов применена теорема о среднем: a_i^+, b_i^+, α_i^+ - соответствующие средние значения коэффициентов a, b, α в промежутке (x_i, x_{i+1}), например, $a_i^+ = a(x_{i+1/2})$, $a_i^+ = (a(x_{i+1}) + a(x_i))/2$ или $a_i^+ = h_{i+1}^{-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} a(x)dx$.

Аналогично определяется величина $\mathcal{J}_i^-$ в промежутке (x_{i-1}, x_i):

$$\mathcal{J}_i^- = b_i^- h_i^{-1} S(\alpha_i^- h_i)(u_i - u_{i-1}) + (a_i^-) u_i, \tag{11}$$

где a_i^-, b_i^-, α_i^- - средние значения коэффициентов a, b, α в промежутке (x_{i-1}, x_i), $u_{i-1} = u(x_{i-1})$.

Следовательно, для уравнения (1) имеем следующие разностные уравнения:

$$\Lambda u_i \equiv B_i(u_{i+1} - u_i) - A_i(u_i - u_{i-1}) - D_i u_i = f_i, \tag{12}$$

где

$$B_i = \hbar_i^{-1} h_{i+1}^{-1} S(-\alpha_{i+1/2} h_{i+1}) > 0,$$

$$A_i = \hbar_i^{-1} h_i^{-1} S(\alpha_{i-1/2} h_{i+1}) > 0,$$

$$D_i = (a_{i-1/2} - a_{i+1/2})/\hbar_i, \quad a_{i\pm 1/2} \equiv a_i^{\pm}, \quad \alpha_{i\pm 1/2} \equiv \alpha_i^{\pm}, \quad i = \overline{1, N-1},$$

N - число элементарных промежутков сетки.

Соответствующая (I2) разностная схема монотонна ($A_i > 0$, $B_i > 0$, $D_i \geq 0$) при $a_i^- \geq a_i^+$, что аналогично условию однозначной разрешимости $a' \leq 0$ краевой задачи для уравнения (5). При аппроксимации модельное уравнение (6) переписывается локально в промежутках (x_{i-1}, x_i), (x_i, x_{i+1}) в сопряженном виде

$$W^{-1}(Wbu')' = f. \qquad (I3)$$

Следовательно, функцию "потока" надо ввести следующим образом

$$\mathcal{J}(x) = Wbu', \qquad (I4)$$

и уравнение "баланса" после применения теоремы о среднем для вычисления интеграла

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} Wf\,dx \approx f_i \hbar_i$$

имеет вид (7).

После интегрирования соотношения $u' = b^{-1} W^{-1} \mathcal{J}$ в промежутке (x_i, x_{i+1}) аналогично (9) следует, что

$$u_{i+1} - u_i \approx (b_i^+)^{-1} \mathcal{J}_i^+ \int_{x_i}^{x_{i+1}} W^{-1} dx \approx (a_i^+)^{-1} \mathcal{J}_i^+ (1 - \exp(-\alpha_i^+ h_{i+1})),$$

т.е.

$$\mathcal{J}_i^+ = b_i^+ h_{i+1}^{-1} S(-\alpha_i^+ h_{i+1})(u_{i+1} - u_i). \qquad (I5)$$

Аналогично,

$$y_i^- = b_i^- h_i^{-1} s(\alpha_i^- h_i)(u_i - u_{i-1}). \qquad (16)$$

Поэтому разностные уравнения имеют вид (12), где коэффициенты A_i , B_i сохранят свой вид, а $D_i = 0$, т.е. соответствующая разностная схема монотонна.

Для аппроксимации уравнения теплопроводности (1) по времени используется двухслойная неявная разностная схема, т.е. на каждом слое времени надо решать дифференциальное уравнение вида

$$\operatorname{div}(\varkappa \operatorname{grad} T) - \operatorname{div}(T\vec{v}) = (T - \check{T})/\tau - Q, \qquad (17)$$

где τ - шаг по времени,

$\check{T}$ - значения T на предыдущем слое времени.

Следовательно, для аппроксимации по пространству имеем соответственно (2-4) следующие одномерные операторы

$$L_m T = \frac{\partial}{\partial q_m}\left(\varkappa \frac{H_{m+1} H_{m+2}}{H_m} \frac{\partial T}{\partial q_m}\right) - \frac{\partial}{\partial q_m}\left(V_m H_{m+1} H_{m+2} T\right), \qquad (18)$$

$$L_m T = \frac{\partial}{\partial q_m}\left(\varkappa \frac{H_{m+1} H_{m+2}}{H_m} \frac{\partial T}{\partial q_m}\right) - H_{m+1} H_{m+2} V_m \frac{\partial T}{\partial q_m}, \qquad (19)$$

где $m = 1, 2, 3;\ H_4 = H_1,\ H_5 = H_2$.

Сравнивая (5), (6), имеем

$$b \equiv b^{(m)} = \varkappa \frac{H_{m+1} H_{m+2}}{H_m}, \quad a \equiv a^{(m)} = -V_m H_{m+1} H_{m+2},$$

$$\alpha \equiv \alpha^{(m)} = -\frac{V_m H_m}{\varkappa}.$$

Поочередная аппроксимация при помощи одномерных аналогов (19) дает для уравнения (17) следующие разностные уравнения:

$$\begin{aligned} \Lambda T_{i,j,k} = {} & B^{(1)}_{i,j,k}(T_{i+1,j,k} - T_{i,j,k}) - A^{(1)}_{i,j,k}(T_{i,j,k} - T_{i-1,j,k}) + B^{(2)}_{i,j,k} \cdot \\ & \cdot (T_{i,j+1,k} - T_{i,j,k}) - A^{(2)}_{i,j,k}(T_{i,j,k} - T_{i,j-1,k}) + B^{(3)}_{i,j,k}(T_{i,j,k+1} - \\ & - T_{i,j,k}) - A^{(3)}_{i,j,k}(T_{i,j,k} - T_{i,j,k-1}) = (H_1 H_2 H_3)_{i,j,k}[(T_{i,j,k} - \check{T}_{i,j,k})/\tau - Q_{i,j,k}], \end{aligned} \qquad (20)$$

где
$$B^{(1)}_{i,j,k}=\hbar^{-1}_{1,i}\,h^{-1}_{1,i+1}\,S(\alpha^{(1)}_{i+1/2,j,k}\,h_{1,i+1})>0,$$

$$A^{(1)}_{i,j,k}=\hbar^{-1}_{1,i}\,h^{-1}_{1,i}\,S(-\alpha^{(1)}_{i-1/2,j,k}\,h_{1,i})>0,$$

$$B^{(2)}_{i,j,k}=\hbar^{-1}_{2,j}\,h^{-1}_{2,j+1}\,S(\alpha^{(2)}_{i,j+1/2,k}\,h_{2,j+1})>0,$$

$$A^{(2)}_{i,j,k}=\hbar^{-1}_{2,j}\,h^{-1}_{2,j}\,S(-\alpha^{(2)}_{i,j-1/2,k}\,h_{2,j})>0,$$

$$B^{(3)}_{i,j,k}=\hbar^{-1}_{3,k}\,h^{-1}_{3,k+1}\,S(\alpha^{(3)}_{i,j,k+1/2}\,h_{3,k+1})>0,$$

$$A^{(3)}_{i,j,k}=\hbar^{-1}_{3,k}\,h^{-1}_{3,k}\,S(-\alpha^{(3)}_{i,j,k-1/2}\,h_{3,k})>0.$$

Здесь использована неравномерная трехмерная сетка с узлами $q_{1,i}$; $q_{2,j}$; $q_{3,k}$; $i=\overline{1,N_1-1}$, $j=\overline{1,N_2-1}$, $k=\overline{1,N_3-1}$,

N_1, N_2, N_3 – число элементарных промежутков сетки соответствующих координатных осей Oq_1, Oq_2, Oq_3,
$T_{i,j,k}$, $Q_{i,j,k}$ – значения функций T, Q в узле сетки с индексами (i,j,k);

$$h_{1,i}=q_{1,i}-q_{1,i-1},\ h_{1,i+1}=q_{1,i+1}-q_{1,i},\ h_{2,j}=q_{2,j}-q_{2,j-1},$$

$$h_{2,j+1}=q_{2,j+1}-q_{2,j},\ h_{3,k}=q_{3,k}-q_{3,k-1},\ h_{3,k+1}=q_{3,k+1}-q_{3,k};$$

$\hbar_{1,i}$, $\hbar_{2,j}$, $\hbar_{3,k}$ – соответствующие средние шаги сетки.

Аппроксимация на основе одномерных аналогов (18) сохраняет вид (20), так как сумма слагаемых вида $D_i u_i$ в (12) имеет вид

$$T_{i,j,k}\left[(a^{(1)}_{i+1/2,j,k}-a^{(1)}_{i-1/2,j,k})/\hbar_{1,i}+(a^{(2)}_{i,j+1/2,k}-a^{(2)}_{i,j-1/2,k})/\hbar_{2,j}+\right.$$
$$\left.+(a^{(3)}_{i,j,k+1/2}-a^{(3)}_{i,j,k-1/2})/\hbar_{3,k}\right],$$

который соответствует аппроксимации слагаемого
$h_1 h_2 H_3 T\,\operatorname{div}\vec{v}=0$.

В случае цилиндрических координат ($q_1=r$, $q_2=\theta$,

$q_5=\ell$, $H_1=1$, $H_2=r$, $H_3=1$) $\alpha^{(1)}=-V_1/\varkappa$, $\alpha^{(2)}=$ $=-V_2 r/\varkappa$, $\alpha^{(3)}=-V_3/\varkappa$ [7].

Для упрощения выкладок можно применять разные приближенные формулы для вычисления функции $S(\varkappa)$ (10). Так как $S(\varkappa)=S(|\varkappa|)+max(-\varkappa,0)$, $S(\varkappa)=S(|\varkappa|)+max(\varkappa,0)$, то эти формулы можно представить в виде (8)

1) $S(|\varkappa|)=max(0,1-0,1|\varkappa|)^5)$ - степенная схема,

2) $S(|\varkappa|)=max(0,1-0,5|\varkappa|)$ - комбинированная схема,

3) $S(|\varkappa|)=1$ - схема с односторонними разностями,

4) $S(|\varkappa|)=|\varkappa|/(exp(|\varkappa|)-1)$ - экспоненциальная схема,

5) $S(|\varkappa|)=1-0,5|\varkappa|$ - схема в центральных разностях, которая монотонна только при $|\varkappa|\leq 2$

Построенная разностная схема на основе разностных уравнений (20) монотонна и хорошо учитывает характер пограничных слоев при больших параметрах α.

Литература

1. Самарский А.А. Теория разностных схем - М.: Наука, 1977. - 656 с.
2. Ильин А.М. Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной // Математ. заметки - 1969. - Т.6. - Вып 2. - С.234-248.
3. Шишкин Г.И. Разностная схема для решения эллиптических уравнений с малыми параметрами при производных // Математ.моделир.течений жидкости - Новосибирск: СО АН СССР, Инст.теорет. и прикл.мех. - 1978. - С.260-282.
4. Емельянов К.В. Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной // Численные методы механики сплошной среды - 1980. - Т.11. - № 5. - С.54-74.

5. Дулан Э., Миллер Дж., Шилдерс У. Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем - М.: Мир, 1983. - 198 с.
6. Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления - М.: Наука, 1965. - 426 с.
7. Каляс Х.Э. Специальные разностные схемы решения краевых задач математической физики // Электронное моделирование - 1986. - Т.8. - № 3. - С.78-83
8. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости - М.: Энергоатомиздат, 1984. - 150 с.

УДК 621.373+517.927

В.П.Новиков, А.А.Степанов

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ОПТИКО-АКУСТИЧЕСКОЙ ДИАГНОСТИКИ ПОЛУПРОВОДНИКОВ

Оптико-акустическая спектроскопия находит широкое применение для исследования неразрушающим способом профилей концентрации примесей в материалах квантовой электроники и волоконной оптики. Распределение температуры в оптико-акустической ячейке в одномерном случае описывается следующим дифференциальным уравнением [I]:

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}=\frac{i\omega}{\alpha(x)}\varphi(x)-V(x), \qquad x\in(-(l_b+l),l_g), \qquad (I)$$

где $V(x)$ - непрерывная функция, отличная от нуля в интервале $[-l,0]$,

$$\alpha(x)=\begin{cases}\alpha_b, & x\in(-(l_b+l),-l),\\ \alpha_s, & x\in(-l,0),\\ \alpha_g, & x\in(0,l_g),\end{cases}$$

α_b, α_s, α_g - тепловая диффузивность подложки, образца и газа оптико-акустической ячейки, ω - частота модуляции лазерного излучения. Краевые условия имеют вид:

$$\varphi(-(l_b+l))=\varphi(l_g)=0. \qquad (2)$$

Решением краевой задачи (I)-(2) является комплексно-значная функция φ, зависящая от ω как от параметра и удовлетворяющая по x уравнению (I), краевым условиям (2) и условию непрерывности температуры и теплового потока на границах раздела сред. Обратная задача спектроскопии заключается в определении функции $V(x)$, если известно значение φ при $x=0$ как функции частоты ω. В такой постановке обратная задача рассмотрена в [2-3], где ее решение сведено к решению соответствующего интегрального уравнения первого рода. При этом предполагается, что концентрация примеси $n(x)$ в образце пропорциональна функции $V(x)$ и поэтому определяется непосредственно.

При исследовании полупроводниковых материалов оптико-акустическим методом необходимо учитывать диффузию возникающих носителей заряда. В этом случае функция $V(x)$ пропорциональна функции $n(x)$, которая в свою очередь есть решение краевой задачи [4],

$$D n''(x) - \left(\frac{1}{\tau} + i\omega\right) n(x) + \beta(x) = 0, \qquad (3)$$

$$-Dn'(0) = V_s n(0), \quad Dn'(-\ell) = V_s n(-\ell), \qquad (4)$$

где D - коэффициент диффузии носителей заряда, τ - время рекомбинации, V_s - поверхностная скорость рекомбинации. Обратная задача в общем случае состоит в определении параметров D, τ, V_s и функции $\beta(x)$, $x \in [-\ell, 0]$, если известно значение φ при $x=0$ как функции частоты ω. Таким образом, решение сформулированной обратной задачи позволяет определить не только распределение оптического поглощения в образце, но и такие важные параметры полупроводников, как D, V_s и τ.

Численное решение обратной задачи оптико-акустической спектроскопии связано с решением некорректно поставленной задачи - нелинейного операторного уравнения первого рода

$$A\beta = t, \qquad (5)$$

где $t = t(\omega) = \varphi(x,\omega)\big|_{x=0}$, A - оператор прямой задачи, задаваемый посредством двух краевых задач (I)-(2) и (3)-(4). Получим удобное для применения метода регуляризации [5] представление оператора A.

Прежде всего отметим, что функцию $n(x)$ можно представить в виде

$$n(x) = -\int_{-\ell}^{0} G_1(x,\xi)\beta(\xi)\,d\xi, \qquad (6)$$

где $G_1(x,\xi)$ - функция Грина краевой задачи (3)-(4), имеющая вид

$$G_1(x,\xi)=\begin{cases}\frac{1}{\omega_0}n_1(x)n_2(\xi), & -l\le x\le\xi,\\ \frac{1}{\omega_0}n_1(\xi)n_2(x), & \xi\le x\le 0,\end{cases}$$

$$n_1(x)=\left(\alpha+\frac{V_s}{D}\right)e^{\alpha(x+l)}+\left(\alpha-\frac{V_s}{D}\right)e^{-\alpha(x+l)}$$

$$n_2(x)=\left(\alpha-\frac{V_s}{D}\right)e^{\alpha x}+\left(\alpha+\frac{V_s}{D}\right)e^{-\alpha x},$$

$$\alpha=\left(\frac{1}{\tau D}+i\frac{\omega}{D}\right)^{1/2},$$

$$\omega_0=-2\alpha D\left[\left(\alpha-\frac{V_s}{D}\right)^2e^{-\alpha l}-\left(\alpha+\frac{V_s}{D}\right)^2e^{\alpha l}\right].$$

Аналогичное представление получим для решения уравнения (I) при $x\in[-l,0]$. Интегрируя уравнение (I) при $x\in(-(l_g+l),-l)$ с учетом краевого условия (2), получим, что

$$\frac{\Phi'(-l-0)}{\Phi(-l-0)}=\frac{\sigma_g\left[e^{-\sigma_g l}+e^{-2\sigma_g l_g-\sigma_g l}\right]}{\left[e^{-\sigma_g l}-e^{-2\sigma_g l_g-\sigma_g l}\right]}=\varphi_1.$$

где $\sigma_g=(i\omega/\varkappa_g)^{1/2}$, κ_g - коэффициент теплопрозодности подложки. Следовательно, из условия непрерывности температуры и теплового потока при $x=-l$ имеем соотношение

$$\Phi'(-l+0)=\frac{\kappa_g}{\kappa_s}\varphi_1\Phi(-l+0), \tag{7}$$

где κ_s - коэффициент теплопроводности образце. Аналогично,

$$\Phi'(0-0)=\frac{\kappa_g}{\kappa_s}\Phi_2\Phi(0-0), \tag{8}$$

где $\varphi_2=\frac{\sigma_g(1+e^{-2\sigma_g l_g})}{1-e^{-2\sigma_g l_g}}$, κ_g - коэффициент теплопроводности газа. Теперь можем с помощью функции Грина $G_2(x,\xi)$ краевой задачи (I), (7), (8) представить функцию $\Phi(x)$, $x\in[-l,0]$ в виде

$$\Phi(x)=\int_{-l}^{0}G_2(x,\xi)V(\xi)d\xi.$$

Так как $V(\xi)=i\omega I_0 n(\xi)$, $\xi\in(-l,0)$, то с учетом (6) окончательно получаем

$$\Phi(0)=\int_{-l}^{0}K(\omega,\xi)\beta(\xi)d\xi=t(\omega),\quad \omega\in\Omega, \tag{9}$$

где

$$K(\omega,\xi)=i\omega I_0\int_{-l}^{0}G_2(0,s)G_1(s,\xi)ds=$$

$$=c_1e^{\alpha\xi}+c_2e^{-\alpha\xi}+c_3e^{\delta\xi}+c_4e^{-\delta\xi},$$

$$c_i=c_i(\omega),\ i=1,2,3,4;\ \delta=\left(\frac{i\omega}{\alpha_s}\right)^{1/2},$$

I_0 - абсолютная интенсивность лазерного излучения. Таким образом, оператор A прямой задачи есть оператор интегрального типа, задаваемый формулой (9). Обратная задача при известных τ, D и V_s состоит в решении интегрального уравнения Фредгольма первого рода. Следовательно, обратная задача оптико-акустической спектроскопии является некорректно поставленной и для ее решения необходимо использовать метод регуляризации [5].

Для практики наибольший интерес представляют следующие две задачи: определение функции $\beta(x)$, $x\in[-l,0]$ при известных параметрах τ, D, V_s и определение этих параметров, когда $\beta(x)$ известна (как правило, константа). Первая задача решается как интегральное уравнение Фредгольма первого рода методом регуляризации Тихонова [5]. Поскольку в эксперименте функция $t(\omega)$ измеряется не на всем интервале Ω, а только при некоторых значениях частот ω, то исходной информацией являются значения $t^{\delta}(\omega_1),\ldots$ $t^{\delta}(\omega_n)$, такие, что

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(t^э(\omega_k)-t(\omega_k))^2\leqslant\delta^2,$$

где $\delta>0$ - уровень погрешности измерений. В этой связи целесообразнее использовать сглаживающий функционал Тихонова в схеме регуляризации в полудискретной форме. А именно, за приближенное решение уравнения (9) принимается функция $\beta_\alpha(x)$, минимизирующая функционал

$$M^\alpha[\beta]=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}((A\beta)(\omega_k)-t^э(\omega_k))^2+\alpha\|\beta\|^2_{W_2^{(m)}}, \tag{10}$$

где $\alpha>0$ - параметр регуляризации. Как известно [6-7], $\beta_\alpha(x)$ имеет следующий вид

$$\beta_\alpha(x)=h(x)(Q+n\alpha E)^{-1}\bar{t}, \tag{11}$$

где $\bar{t}=(t^э(\omega_1),\dots,t^э(\omega_n))^T$, $h(x)=(K(\omega_1,x),\dots,K(\omega_n,x))$, Q - матрица $n\times n$, элементы которой

$$q_{jk}=\int_{-l}^{0}K(\omega_j,x)K(\omega_k,x)dx,\quad j,k=1,2,\dots,n.$$

Такой подход удобен также еще и тем, что формула (11) позволяет вычислить решение в любой точке отрезка $[-l,0]$. Поскольку ядро интегрального уравнения (9) экспоненциального вида, то q_{jk} вычисляются аналитически и не возникает дополнительная погрешность аппроксимации интегралов. При этом для реализации алгоритма на ЭВМ требуется хранить только один массив размерности $n\times n$, не зависящий от числа точек, в которых вычисляется решение $\beta_\alpha(x)$. Параметр регуляризации α выбирается по принципу невязки - из решения уравнения

$$\|A\beta_\alpha-t^э\|^2=\|-n\alpha(Q+n\alpha E)^{-1}\bar{t}\|^2=\delta^2 \tag{12}$$

Эффективный численный алгоритм решения уравнения (12) строится на основе метода Ньютона и сингулярного разложения матрицы Q [7].

Сделаем еще несколько практически важных замечаний по использованию схемы регуляризации. Искомая функция $\beta(x)$ является вещественной, в то время как уравнение (9) комплексное. Поэтому уравнение (9) распадается на два эквивалетных уравнения с ядрами $Re[K(\omega,x)]$ и $Im[K(\omega,x)]$. Однако при численном решении необходимо использовать только второе. Это связано с тем, что при $x=0$ $Re[K(\omega,0)]=0$. Следовательно, при $x=0$ $\beta_\alpha(x)$ может принимать любые значения. Поскольку метод регуляризации дает из всех решений решение с минимальной нормой, то $\beta_\alpha(0)=0$. Это видно также непосредственно из формулы (II). Заметим, что для волоконных световодов [3] этого устранить не удается (при $r=0$ $K(\omega,r)=0$), поэтому получить распределение поглощения в центре ядра данным методом не удается. Этот факт имеет очевидную физическую интерпретацию. Действительно, количество тепла, выделяемое в волокне, пропорционально $2\pi r l$, где r - радиус. Следовательно, при $r=0$ информация о поглощении в прибор не поступает.

Далее отметим, что по физическому смыслу $\beta(x)\geqslant 0$, $x\in[-l,0]$, в то же время метод регуляризации может давать отрицательные значения в той части интервале, где $\beta(x)$ равно или близко к нулю. В этом случае можно непосредственно находить $\beta_\alpha(x)$ путем минимизации функционала (I0) на множестве неотрицательных функций. В монографии [5] это делается методом сопряженных градиентов, там же приведена программа для ЭВМ, реализующая этот подход. В качестве начального приближения итерационного процесса целесообразно использовать решение вида (II).

Задача по определению τ, $V_з$ и D при известной функции $\beta(x)$ есть задача решения нелинейного уравнения и решается методами нелинейной оптимизации. Возможно решение обратной задачи и в самой общей постановке, когда неизвестны $\beta(x)$, $V_з$, D и τ. Поскольку обратная задача является некорректной, то необходимо использовать метод регуляризации. Схема решения операторного уравнения (5) строится аналогичным образом и в случае нелинейного оператора A. См. подробнее [5]. Однако на практике, как правило, имеется различная априорная информация об искомом решении, позволяющая выделить компактное множество, к которому принадлежит точное решение. Такая информация может быть о монотонности, выпуклости решения, его параметризации и др. В любом таком случае имеются эффективные численные алгоритмы решения обратной задачи [5].

На основе изложенной методики авторами разработан комплекс программ, позволяющий производить обработку экспериментальных данных оптико-акустической (термической) спектроскопии конденсированных сред. Как показывает практика, удовлетворительные результаты получаются в случае, если экспериментальные данные имеют погрешность, не превышающую 1 %. В целом, возможность определения распределения поглощения из решения обратной задачи обусловлена соотношением длины тепловой диффузии и длины диффузии носителей заряда, определяемыми параметрами α и γ, т.е. параметрами D, τ и ω. Изложенная в работе методика решения обратной задачи оптико-акустической спектроскопии позволяет проводить автоматизированную обработку данных измерений, решать вопросы планирования эксперимента.

Литература

1. Rosencwaig A., Gersho A. Theory of the photoacoustic effect with solids // J.Appl.Phys. - 1976. - Vol.47, N 1. - P.64-69.
2. Новиков В.П., Новиков М.А. Оптико-акустическая спектроскопия полного внутреннего отражения // Горький: ИПФ АН СССР, 1983. - Препринт № 95. - 28 с.
3. Новиков В.П., Пушкин А.А., Скрипачев И.В. Оптико-акустический метод измерения оптических потерь в волоконных световодах // Квантовая электроника - 1988. - Т.15, № 3. - С.560-566.
4. Miranda I.C.M. Theory of the photoacoustic effect in semiconductors influence of carrier diffusion and recombination // Appl.Optics. - 1982. - Vol.21, N 16. -

P.2923-2928.

5. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Численные методы решения некорректных задач - М.: Наука, 1990. - 232 с.
6. Wahba G. Practical approximate solutions to linear operator equations when the data are noisy // SIAM J.Numer.Anal. - 1977. - Vol.14, N 4. - P.657-667.

7. Степанов А.А. О численных алгоритмах выбора параметра регуляризации методов взвешенной перекрестной проверки // Численный анализ: методы, алгоритмы, программы - М.: Изд-во Моск. ун-та. - 1983. - С.126-135.

УДК 517.925

И.А.Вольфсон, Ф.Ж.Садырбаев

О СОПРЯЖЕННЫХ ТОЧКАХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

1. Осцилляционная теория линейных дифференциальных уравнений третьего порядка

$$x''' + a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = 0 \qquad (1)$$

развита в работах [5], [6], [7] (см. также монографии [1], [2], [3] и библиографию в [2]). Интересная геометрическая трактовка предложена в [8]. При этом значительную роль играют так называемые сопряженные точки, реализуемые простыми либо двойными нулями решений. Теория сопряженных точек для уравнений третьего порядка построена в [5] (см. также [1. гл.4]) по аналогии со случаем уравнения четвертого порядка, исследованным в основополагающей работе [4]. Цель настоящей статьи - получить новые факты о взаимном расположении решений определенного класса уравнений вида (1).

2. В этом пункте приводятся необходимые сведения из теории линейных уравнений третьего порядка.

Определение 1 ([1, с.151]). Уравнение (1) есть уравнение класса I (класса II), если любое решение $x(t)$, для которого $x(\alpha) = x'(\alpha) = 0$ $(0 < \alpha < \infty)$, удовлетворяет неравенству $x(t) > 0$ при $t \in (0, \alpha)$ $(t \in (\alpha, \infty))$;

Определение 2 ([1, с.151]). Точная нижняя грань $(n+2)$-х нулей (считая кратности) всевозможных нетривиальных решений уравнения (1), обращающихся в нуль при $t = \alpha$, называется n-ой сопряженной к $t = \alpha$ точкой и обозначается $\eta_n(\alpha)$.

Если уравнение (1) имеет хотя бы одно нетривиальное решение с не менее чем $n+2$ нулями, обращающееся в нуль при $t = \alpha$, то существование $\eta_n(\alpha)$ может быть установлено рассуждениями, основанными на соображениях компактности.

Для уравнений класса I сопряженные точки реализуются нулями так называемого главного решения, т.е. решения, удовлетворяющего условиям $x(\alpha)=x'(\alpha)=0$, $x''(\alpha)=1$.

Для уравнений класса II способ реализации сопряженных точек устанавливает следующая

Т е о р е м а I ([I, с.152]). Пусть уравнение (I) есть уравнение класса II и существует хотя бы одно нетривиальное решение с нулем в $t=\alpha$ и по меньшей мере $n+2$ нулями в (α,∞).

Тогда существуют n точек $\eta_i(\alpha)$ $(\eta_1<\eta_2<\ldots<\eta_n)$ и n решений $x_i(t)$, определенных с точностью до умножения на постоянную, со следующими свойствами:

1) $x_i(t)$ имеет простой нуль при $t=\alpha$ и двойные нули в $t=\eta_i$ $(i=1,\ldots,n)$;

2) $x_i(t)$ имеет ровно $i+2$ нулей в интервале $[\alpha, \eta_i(\alpha)]$, считая кратности;

3) любое другое нетривиальное решение, обращающееся в нуль при $t=\alpha$, имеет менее $i+2$ нулей в $[\alpha,\eta_i(\alpha)]$.

Критерии принадлежности уравнения (I) классу I либо II приводятся в [I], [2]. Так, если в (I) коэффициент $a(t)\equiv\equiv 0$, а $b(t)$ таков, что уравнение второго порядка

$$y''+b(t)y=0$$

является неосциллирующим в $(0,\infty)$, то уравнение (I) является уравнением класса I (класса II), если $c(t)>0$ $(c(t)<0)$ ([I], теорема 4.6).

3. В этом пункте доказывается результат о взаимном расположении экстремальных решений (т.е. решений, реализующих сопряженные точки) уравнения, относящегося к классу II.

Согласно определению I, любое решение уравнения класса II, имеющее двойной нуль, не обращается в нуль вправо от двойного нуля. Так, например, решения x_+ и x_-, определенные соответственно начальными данными $x(\alpha)=x'(\alpha)=0$, $x''(\alpha)=\pm 1$, удовлетворяют при $t>\alpha$ неравенствам

$x_+(t)>0, \ x_-(t)<0$.

При рассмотрении решений, имеющих при $t=\alpha$ простой нуль, можем, не ограничивая общности, считать, что $x'(\alpha)>0$. Каждому такому решению ставится в соответствие угол $\varphi\in$ $\in(-\pi/2, \pi/2)$ на плоскости начальных данных $(x'(a), x''(a))$, определяемый из соотношения

$$tg\,\varphi = u''(\alpha)/u'(\alpha).$$

Углы, соответствующие экстремальным решениям $x_k(t)$, реализующим сопряженные точки $\eta_k(\alpha)$, обозначаются φ_k.

Ниже формулируются вспомогательные результаты.

Лемма I. Решения, соответствующие углам $\varphi=\pi/2$ и $\varphi=-\pi/2$, соответственно положительно и отрицательно при $t>\alpha$.

Это решения (с точностью до умножения на постоянную) $x_+(t)$, $x_-(t)$, поведение которых при $t>\alpha$ обсуждено выше.

Лемма 2 ([4, с.327]). Пусть $u(t)$, $v(t)$ - функции класса C^1 в (a,b) и пусть $v(t)$ имеет постоянный знак в этом интервале. Если $t=\alpha$ и $t=\beta$ $(a<\alpha<\beta<b)$ последовательные нули $u(t)$, то существует постоянная μ такая, что функция $u(t)-\mu v(t)$ имеет двойной нуль в (α,β).

Теорема 2. Для линейного уравнения (I), принадлежащего классу II, справедливо следующее:

I) углы φ_k, соответствующие экстремальным решениям $x_k(t)$ (если они существуют), упорядочены следующим образом

$$-\pi/2<\varphi_2<\varphi_4<\ldots<\varphi_{2k}<\ldots<\varphi_{2k+1}<\ldots<\varphi_3<\varphi_1<\pi/2;$$

2) решения, удовлетворяющие условию $x(\alpha)=0$ и определяемые углом $\varphi\in(\varphi_{2k+2},\varphi_{2k})$ ($k=0,1,2,\ldots$), имеют в $[\alpha,+\infty)$ ровно $2k+2$ простых нуля, а решения, определяемые углом $\varphi\in(\varphi_{2k-1},\varphi_{2k+1})$ ($k=0,1,2,\ldots$), имеют в $[\alpha,+\infty)$ ровно $2k+1$ простых нуля (здесь для простоты обозначений полагаем $\varphi_0=-\pi/2$, $\varphi_{-1}=\pi/2$).

Доказательство. Для рассматриваемых функций имеем $x'(\alpha)>0$. Учитывая, что все нули экстремальных функций $x_k(t)$ в интервале $(\alpha, \eta_k(\alpha))$ простые, т.е. функция меняет знак при переходе через них, заключаем, что $x_k(t)$ положительна при $t>\eta_k(\alpha)$ для нечетных k и отрицательна для четных.

Сравним теперь две экстремальные функции с нечетными номерами и покажем, что

$$\varphi_{2k+1} > \varphi_{2\ell+1} \qquad \text{при} \quad k<\ell.$$

Будем считать, что $x'_{2k+1}(\alpha)=x'_{2\ell+1}(\alpha)$, и сравнение проводится только по значениям второй производной в точке $t=\alpha$. Этого всегда можно добиться умножением на положительную постоянную, что не изменяет соответствующего угла φ. Согласно теореме I, $\eta_{2\ell+1}>\eta_{2k+1}$. При $t>\eta_{2k+1}$ и $t>\eta_{2\ell+1}$ соответствующие экстремальные функции положительны. Покажем, что предположение $x''_{2\ell+1}(\alpha)>x''_{2k+1}(\alpha)$ (или, что то же самое, $\varphi_{2\ell+1}>\varphi_{2k+1}$) приводит к противоречию. Заметим, что случай равенства вторых производных при $t=\alpha$ исключается, так как тогда экстремальные решения должны совпадать, по теореме об однозначной разрешимости задачи Коши.

Рассмотрим разность $y=x_{2\ell+1}-x_{2k+1}$. Функция $y(t)$ является решением уравнения, удовлетворяющим начальным условиям

$$y(\alpha)=y'(\alpha)=0, \quad y''(\alpha)>0.$$

Поэтому $y(t)$ положительна при $t>\alpha$ (так как уравнения класса II). Но это противоречит тому, что $y(\eta_{2\ell+1})=$ $=x_{2\ell+1}(\eta_{2\ell+1})-x_{2k+1}(\eta_{2\ell+1})<0$.

Аналогично показывается, что $\varphi_{2\ell}>\varphi_{2k}$ при $\ell>k$.

Покажем теперь, что $\varphi_{2k-1}>\varphi_{2\ell}$ при любых натуральных k и ℓ. По-прежнему считая, что $x'_{2k-1}(\alpha)=x'_{2\ell}(\alpha)$, предположим, что $x''_{2\ell}(\alpha)>x''_{2k-1}(\alpha)$. Рассмотрим функцию $y=x_{2\ell}-x_{2k-1}$. Так как $y(t)$ имеет при $t=\alpha$ двойной нуль и положительную вторую производную, при $t>\alpha$ функция $y(t)$ положительна.

Здесь возможны два случая.

Пусть сначала $2l > 2k-1$. Тогда $\eta_{2l} > \eta_{2k-1}$. Имеем $y(\eta_{2l}) = x_{2l}(\eta_{2l}) - x_{2k-1}(\eta_{2l}) < 0$, что противоречит положительности $y(t)$ при $t > \alpha$.

Пусть теперь $2l < 2k-1$. Тогда $\eta_{2l} < \eta_{2k-1}$. Имеем $y(\eta_{2k-1}) = x_{2l}(\eta_{2k-1}) - x_{2k-1}(\eta_{2k-1}) < 0$. Противоречие.

Первая часть утверждения теоремы доказана.

Перейдем к пункту 2. Рассмотрим решение $x(t)$, обращающееся в нуль при $t = \alpha$ и определяемое углом $\varphi \in (\varphi_{2k-1}, \varphi_{2k+1})$, $k = 0, 1, \ldots$. Сравним это решение с экстремальными решениями x_{2k-1}, x_{2k+1}, предполагая, что значения первых производных при $t = \alpha$ равны. Функции $u = x_{2k-1} - x$, $v = x - x_{2k+1}$ положительны при $t > \alpha$. Следовательно, при $t > \alpha$

$$x_{2k-1}(t) > x(t) > x_{2k+1}(t)$$

Обозначим простые нули функции x_{2k-1} в интервале $(\alpha; \eta_{2k-1})$ через τ_i, а функции x_{2k+1} - через t_i. Рассмотрим вопрос о взаимном расположении чисел τ_i и t_j. Для четных значений i функция x_{2k-1} положительна в (τ_i, τ_{i+1}), так же как x_{2k+1} - в (t_i, t_{i+1}) (предполагается, что $\tau_0 = t_0 = \alpha$).

Покажем, что $\tau_i < t_i < t_{i+1} < \tau_{i+1}$ при $i = 0, 2, 4, \ldots$. Если это не так, то найдется интервал (τ_i, τ_{i+1}) с четными i такой, что $x_{2k+1}(t) < 0$ при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$. Тогда по лемме I найдется число μ такое, что функция $\varkappa(t) = x_{2k-1}(t) + \mu x_{2k+1}(t)$ имеет в (τ_i, τ_{i+1}) двойной нуль. Поскольку $\varkappa(t)$ является решением уравнения класса II, $\varkappa(t)$ не имеет нулей при $t > \tau_{i+1}$.

С другой стороны, число μ - положительное, иначе $\varkappa = x_{2k-1} + \mu x_{2k+1} > 0$ при $t \in (\tau_i, \tau_{i+1})$, что противоречит наличию нуля в этом интервале. Тогда $\varkappa(\eta_{2k-1}) = x_{2k-1}(\eta_{2k-1}) + \mu x_{2k+1}(\eta_{2k-1}) < 0$, так как первое слагаемое равно нулю, а $x_{2k+1}(\eta_{2k-1}) < x_{2k-1}(\eta_{2k-1}) < 0$. Но $\varkappa(\eta_{2k+1}) = x_{2k-1}(\eta_{2k+1}) + \mu x_{2k+1}(\eta_{2k+1}) > 0$, так как второе слагаемое нуль, а $x_{2k-1}(t)$ положительно при $t > \eta_{2k-1}$. Таким образом,

$x(t)$ меняет знак в интервале $(\eta_{2k-1}, \eta_{2k+1})$, лежащем правее точки $t=\tau_{i+1}$. Полученное противоречие означает, что в каждом интервале (τ_i, τ_{i+1}), где положительна экстремальная функция $x_{2k-1}(t)$, содержится подинтервал (t_i, t_{i+1}), в котором положительна функция $x_{2k+1}(t)$.

Таким образом, нули экстремальных функций x_{2k-1} и x_{2k+1} расположены так: $\alpha < t_1 < \tau_1 < \tau_2 < t_2 < t_3 < \ldots < \tau_{2k-2} < t_{2k-2} < t_{2k-1} < t_{2k+1} < t_{2k} < \eta_{2k+1}$.

Из неравенств $x_{2k-1}(t) < x(t) < x_{2k+1}(t)$, выполняющихся при $t > \alpha$, следует, что в каждом из интервалов $(t_1, \tau_1), \ldots, (\tau_{2k-2}, t_{2k-2}), (t_{2k-1}, \eta_{2k-1})$ существует нуль функции $x(t)$. Таким образом, функция $x(t)$ имеет в $[\alpha, \eta_{2k-1})$ $1+(2k-1)=2k$ нулей, причем $x(\eta_{2k-1}) < 0$. Следовательно, существует еще один нуль в интервале (η_{2k-1}, t_{2k}), и общее число нулей $x(t)$ в $[\alpha, t_{2k})$ не менее $2k+1$. Но в то же время функция $x(t)$ не может иметь нулей больше, так как иначе их было бы больше по меньшей мере на пару, и минимальное число нулей в интервале $[\alpha, t_{2k}]$ было бы $2k+3$. Но, поскольку $t_{2k} < \eta_{2k+1}$, это противоречит выбору числа η_{2k+1} как наименьшего из нулей с порядковым номером $2k+3$ среди решений, обращающихся в нуль при $t=\alpha$. Таким образом, функция $x(t)$ имеет при $t \geq \alpha$ ровно $2k+1$ нуль.

Аналогичные рассмотрения можно провести для решений, определяемых углом $\varphi \in (\varphi_{2k}, \varphi_{2k+2})$, $k=0,1,\ldots$.

Теорема доказана.

В качестве примера рассмотрим уравнение $x''' = x$, принадлежащее классу II. Функции e^t, $e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t$, $e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$ образуют фундаментальную систему решения. Значения сопряженных к $t=0$ точек получаются как корни уравнения

$$\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{3}{2}t} - \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \sin\frac{\sqrt{3}}{2}t = 0.$$

Экстремальные функции выражаются через углы φ_k следующим образом:

$$x(t) = \frac{\operatorname{tg}\varphi_k + 1}{3}e^t + e^{-\frac{1}{2}t}\left(\frac{1-\operatorname{tg}\varphi_k}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{1+\operatorname{tg}\varphi_k}{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

Углы φ_k, соответствующие первым шести экстремальным функциям, равны (даны значения в радианах, вычисленных с точностью до двенадцатого знака после запятой):

$\varphi_1 = -0,783885142097$ $\qquad$ $\varphi_2 = -0,785979240417$

$\varphi_3 = -0,785398127207$ $\qquad$ $\varphi_4 = -0,785398155705$

$\varphi_5 = -0,785398155661$ $\qquad$ $\varphi_6 = -0,785398155662$

Соответствующие сопряженные (к $t=0$) точки равны:

$\eta_1 = 4,233$; $\quad$ $\eta_2 = 7,859$; $\quad$ $\eta_3 = 11,487$;

$\eta_4 = 1 \ ,114$; $\quad$ $\eta_5 = 18,742$; $\quad$ $\eta_6 = 22,370$.

Значения φ_k стремятся при $k \to \infty$ (сверху - при k нечетных и снизу - при четных) к пределу $\varphi = -\pi/4$. Соответствующее осциллирующее решение дается формулой

$$x(t) = (2/\sqrt{3}) \cdot e^{-\frac{1}{2}t} \sin(\sqrt{3}/2)t.$$

4. В этом пункте рассматривается вопрос о непрерывной зависимости сопряженных точек от коэффициентов уравнения. С помощью результатов подобного рода может быть исследован вопрос о числе решений нелинейных краевых задач для соответствующих уравнений. Для уравнения четвертого порядка оценки числа решений приводились в [9].

Т е о р е м а 3. Пусть малые в норме C изменения коэффициентов уравнения (I), принадлежащего классу II, не выводят за пределы класса.

Тогда малым (в норме C) изменением коэффициентов соответствуют малые изменения сопряженных точек.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\eta_i(\alpha)$ - сопряженная точка. Зададимся числом $\delta > 0$. Из доказательства теоремы 2 следует, что $\eta_i \in (t_{2k-1}, t_{2k})$, где t_{2k-1}, t_{2k} - соответствующие нули решения $x(t)$ с углом φ, удовлетворяющие $(-1)^k \varphi > (-1)^k \varphi_k$. Возьмем решение $x(t)$ достаточно близким к $x_k(t)$ так, чтобы выполнялось $t_{2k} - t_{2k-1} < \delta/3$.

Нули t_{2k}, t_{2k-1} непрерывно зависят от коэффициентов уравнения, так как они простые. Пусть изменение коэффициентов столь мало, что новые нули удовлетворяют

$$|t_{2k}-\bar{t}_{2k}|<\varepsilon/3, \quad |t_{2k-1}-\bar{t}_{2k-1}|<\varepsilon/3.$$

Для соответствующей сопряженной точки $\bar{\eta}_k$ имеем $\bar{\eta}_k \in \in(\bar{t}_{2k-1}, \bar{t}_{2k})$, откуда получаем

$$|\eta_k-\bar{\eta}_k|<|\eta_k-t_k|+|\bar{\eta}_k-\bar{t}_k|+|t_k-\bar{t}_k|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

Доказательство завершено.

Литература

I. Swanson C.A. Comparison and oscillation theory of linear differential equations - New Yorke, Acad.Press, 1968. - P.222.

2. Greguš M. Lineárna diferenciálna rovnica tretieho rádu. - Bratislava, VEDA, 198I. - S.208.

3. Кигурадзе И.Т., Чантурия Т.А. Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений - М.: Наука, 1990. - 430 с.

4. Leighton W., Nehari Z. On the oscillation of solutions of self-adjoint linear differential equations of the fourth order // Trans.Amer.Math.Soc., 1958,v.89,N 2.

5. Hanan M. Oscillation criteria for thirdorder linear differential equations. - Pacific J.Math., 196I. - Vol.II. - P.919-944.

6. Кондратьев В.А. О колеблемости решений линейных уравнений третьего и четвертого порядка // Труды Московского матем.общества - 1959. - Т.8. - С.259-28I.

7. Азбелев Н.В., Цалюк З.Б. К вопросу о распределении нулей решений линейного дифференциального уравнения третьего порядка // Мат.сборник - 1960. - Т.5I:4. - С. 475-486.

8. Мышкис А.Д., Звентов В.Г. Об одной геометрической трактовке осцилляционных свойств линейных дифференциальных уравнений третьего порядка // Дифференц.уравнения - 1977. - Т.13, № 6. - С.1047-1052.
9. Садырбаев Ф.Ж. Двухточечная краевая задача для уравнения четвертого порядка // Математика. Дифференциальные уравнения - Рига: ЛУ, 1990. - С.84-91.

УДК 517.927

Лепин А.Я.

КЛАССЫ ФУНКЦИЙ С ОГРАНИЧЕННЫМ ИЗГИБАНИЕМ

В работе дается новое определение функций с ограниченным изгибанием, которое обобщает определение из работы [I] в двух направлениях: функции с ограниченным изгибанием рассматриваются на всюду плотном в $I=[a,b]$ множестве и они могут принимать значения $+\infty$, $-\infty$ в конечном числе точек. Подробно изучается эквивалентность функций с ограниченным изгибанием, которая только намечена в [I].

Будем считать, что $G, G_1, G_2 \subset I$ и $cl\,G = cl\,G_1 = cl\,G_2 = I$, где cl - замыкание. Используются следующие обозначения: N - множество натуральных чисел, $\bar{R}=[-\infty,+\infty]$, $card$ - мощность и mes - мера.

О п р е д е л е н и е изгибания функции. Пусть $x: G \to \bar{R}$ и $c_1, c_2 \in R$. Тогда

$$\delta^+(x,c_1,c_2)=\sup\{\delta\in[0,b-a]: c_1 \le c_2 \vee (\forall t_1,t_2,t_3,t_4\in I)$$
$$(t_1<t_2\le t_3<t_4 \wedge x(t_2)-x(t_1)>c_1(t_1-t_2) \wedge$$
$$x(t_4)-x(t_3)<c_2(t_4-t_3) \Rightarrow \delta \le t_4-t_1)\},$$

$$\delta^-(x,c_1,c_2)=\sup\{\delta\in[0,b-a]: c_1 \ge c_2 \vee (\forall t_1,t_2,t_3,t_4\in I)$$
$$(t_1<t_2\le t_3<t_4 \wedge x(t_2)-x(t_1)<c_1(t_2-t_1) \wedge$$
$$x(t_4)-x(t_3)>c_2(t_4-t_3) \Rightarrow \delta \le t_4-t_1)\}.$$

При этом используются следующие соглашения: $+\infty-\infty=0$ и $-\infty+\infty=0$.

О п р е д е л е н и е классов функций с ограниченным изгибанием.

$$BB^+(G,\bar{R})=\{x: G\to\bar{R} : \{t\in I : x(t)=+\infty\}\subset\{a,b\} \wedge card\{t\in I:$$
$$x(t)=-\infty\} < card\,N \wedge (\forall c_1,c_2\in R)(\delta^+(x,c_1,c_2)>0)\},$$

$BB^-(G,\bar{R})=\{x:G\to\bar{R}:\{t\in I: x(t)=-\infty\}\subset\{a,b\}\wedge \operatorname{card}\{t\in I: x(t)=+\infty\}<\operatorname{card} N\wedge(\forall c_1,c_2\in\bar{R})(\delta^-(x,c_1,c_2)>0)\}$,

$BB^\vee(G,\bar{R})=BB^+(G,\bar{R})\cup BB^-(G,\bar{R})$,

$BB^\wedge(G,\bar{R})=BB^+(G,\bar{R})\cap BB^-(G,\bar{R})$,

$BB^+(G,R)=\{x\in BB^+(G,\bar{R}):(\forall t\in G)(-\infty<x(t)<+\infty)\}$,

$BB^-(G,R)=\{x\in BB^-(G,\bar{R}):(\forall t\in G)(-\infty<x(t)<+\infty)\}$,

$BB^\vee(G,R)=BB^+(G,R)\cup BB^-(G,R)$,

$BB^\wedge(G,R)=BB^+(G,R)\cap BB^-(G,R)$.

Теорема 1. Пусть $\alpha\in BB^+(G,\bar{R})$, $\beta\in BB^-(G,R)$ и $\gamma\in BB^\vee(G,\bar{R})$. Тогда

$$(\forall t\in(a,b])(\underline{\lim}_{\tau\to t^-}\gamma(\tau)=\overline{\lim}_{\tau\to t^-}\gamma(\tau)), \tag{1}$$

$$(\forall t\in[a,b))(\underline{\lim}_{\tau\to t^+}\gamma(\tau)=\overline{\lim}_{\tau\to t^+}\gamma(\tau)), \tag{2}$$

$$(\forall t\in G\setminus\{a,b\})(\alpha(t)\le\max\{\lim_{\tau\to t^-}\alpha(\tau),\lim_{\tau\to t^+}\alpha(\tau)\}), \tag{3}$$

$$(\forall t\in G\setminus\{a,b\})(\beta(t)\ge\min\{\lim_{\tau\to t^-}\beta(\tau),\lim_{\tau\to t^+}\beta(\tau)\}), \tag{4}$$

$$(\forall t\in G\setminus\{a\})(D_-\gamma(t)=D^-\gamma(t)), \tag{5}$$

$$(\forall t\in G\setminus\{b\})(D_+\gamma(t)=D^+\gamma(t)), \tag{6}$$

$$(\forall t\in G\setminus\{a,b\})(D_2\alpha(t)\le D_1\alpha(t)), \tag{7}$$

$$(\forall t\in G\setminus\{a,b\})(D_2\beta(t)\ge D_1\beta(t)), \tag{8}$$

$$(\forall t\in(a,b])(\underline{\lim}_{\tau\to t^-}D_2\gamma(\tau)=\overline{\lim}_{\tau\to t^-}D_2\gamma(\tau)), \tag{9}$$

$$(\forall t\in(a,b])(\underline{\lim}_{\tau\to t^-} D_t\gamma(\tau)=\overline{\lim}_{\tau\to t^-} D_t\gamma(\tau)), \qquad (10)$$

$$(\forall t\in[a,b))(\underline{\lim}_{\tau\to t^+} D_t\gamma(\tau)=\overline{\lim}_{\tau\to t^+} D_t\gamma(\tau)), \qquad (11)$$

$$(\forall t\in[a,b))(\underline{\lim}_{\tau\to t^+} D_t\gamma(\tau)=\overline{\lim}_{\tau\to t^+} D_t\gamma(\tau)), \qquad (12)$$

$$(\forall t\in(a,b))(\lim_{\tau\to t^-} D_t\alpha(\tau)\leq\lim_{\tau\to t^+} D_t\alpha(\tau)), \qquad (13)$$

$$(\forall t\in(a,b))(\lim_{\tau\to t^-} D_t\beta(\tau)\geq\lim_{\tau\to t^+} D_t\beta(\tau)), \qquad (14)$$

$$(\forall t\ (a,b])(\lim_{\tau\to t^-} D_t\gamma(\tau)=\lim_{\tau\to t^-} D_t\gamma(\tau)), \qquad (15)$$

$$(\forall t\in[a,b))(\lim_{\tau\to t^+} D_t\gamma(\tau)=\lim_{\tau\to t^+} D_t\gamma(\tau)), \qquad (16)$$

$$(\forall t\in G\setminus\{a\})(\lim_{\tau\to t^-} D_t\alpha(\tau)\leq D_t\alpha(t)), \qquad (17)$$

$$(\forall t\in G\setminus\{a\})(\lim_{\tau\to t^-} D_t\beta(\tau)\geq D_t\beta(t)), \qquad (18)$$

$$(\forall t\in G\setminus\{b\})(\lim_{\tau\to t^+} D_t\alpha(\tau)\geq D_t\alpha(t)), \qquad (19)$$

$$(\forall t\in G\setminus\{b\})(\lim_{\tau\to t^+} D_t\beta(\tau)\leq D_t\beta(t)), \qquad (20)$$

$$(\forall t\in G\setminus\{a\})(\alpha(t)\leq\lim_{\tau\to t^-}\alpha(\tau)\Rightarrow D_t\alpha(t)=\lim_{\tau\to t^-} D_t\alpha(\tau)), \qquad (21)$$

$$(\forall t\in G\setminus\{a\})(\beta(t)\geq\lim_{\tau\to t^-}\beta(\tau)\Rightarrow D_t\beta(t)=\lim_{\tau\to t^-} D_t\beta(\tau)), \qquad (22)$$

$$(\forall t\in G\setminus\{b\})(\alpha(t)\leq\lim_{\tau\to t^+}\alpha(\tau)\Rightarrow D_t\alpha(t)=\lim_{\tau\to t^+} D_t\alpha(\tau)), \qquad (23)$$

$$(\forall t\in G\setminus\{b\})(\beta(t)\geq\lim_{\tau\to t^+}\beta(\tau)\Rightarrow D_t\beta(t)=\lim_{\tau\to t^+} D_t\beta(\tau)), \qquad (24)$$

$$(\forall t\in G\setminus\{a,b\})(\lim_{\tau\to t^-}\alpha(\tau)<\lim_{\tau\to t^+}\alpha(\tau)\Rightarrow D_t\alpha(t)=+\infty), \qquad (25)$$

$$(\forall t\in G\setminus\{a,b\})(\lim_{\tau\to t^-}\beta(\tau)>\lim_{\tau\to t^+}\beta(\tau)\Rightarrow D_t\beta(t)=-\infty), \qquad (26)$$

$$(\forall t\in G\setminus\{a,b\})(\lim_{\tau\to t^-}\alpha(\tau)>\lim_{\tau\to t^+}\alpha(\tau)\Rightarrow D_t\alpha(t)=-\infty), \qquad (27)$$

$$(\forall t\in G\setminus\{a,b\})(\lim_{\tau\to t^-}\beta(\tau)<\lim_{\tau\to t^+}\beta(\tau)\Rightarrow D_t\beta(t)=+\infty), \qquad (28)$$

$$\{t\in(a,b): \lim_{\tau\to t^-}\alpha(\tau)=+\infty \vee \lim_{\tau\to t^+}\alpha(\tau)=+\infty\}=\emptyset, \tag{29}$$

$$\{t\in(a,b): \lim_{\tau\to t^-}\beta(\tau)=-\infty \vee \lim_{\tau\to t^+}\beta(\tau)=-\infty\}=\emptyset, \tag{30}$$

$$\operatorname{card}\{t\in(a,b): \lim_{\tau\to t^-}\alpha(\tau)=-\infty \vee \lim_{\tau\to t^+}\alpha(\tau)=-\infty\}<\operatorname{card}\mathbb{N}, \tag{31}$$

$$\operatorname{card}\{t\in(a,b): \lim_{\tau\to t^-}\beta(\tau)=+\infty \vee \lim_{\tau\to t^+}\beta(\tau)=+\infty\}<\operatorname{card}\mathbb{N}, \tag{32}$$

$$\operatorname{card}\{t\in(a,b): \lim_{\tau\to t^-}\gamma(\tau)\neq \lim_{\tau\to t^+}\gamma(\tau)\}\leq\operatorname{card}\mathbb{N}. \tag{33}$$

$$\operatorname{card}\{t\in(a,b): \lim_{\tau\to t^-}D_\ell\alpha(\tau)=-\infty \wedge \lim_{\tau\to t^+}D_r\alpha(\tau)=+\infty\}<\operatorname{card}\mathbb{N}, \tag{34}$$

$$\operatorname{card}\{t\in(a,b): \lim_{\tau\to t^-}D_\ell\beta(\tau)=+\infty \wedge \lim_{\tau\to t^+}D_r\beta(\tau)=-\infty\}<\operatorname{card}\mathbb{N}, \tag{35}$$

$$(\forall L\in\mathbb{R})((\forall t\in G\setminus\{a\})(L\leq D_\ell\alpha(t))\Rightarrow(\forall t_1,t_2\in G\setminus\{a\})(t_1<t_2\Rightarrow L(t_2-t_1)\leq\alpha(t_2)-\alpha(t_1))), \tag{36}$$

$$(\forall L\in\mathbb{R})((\forall t\in G\setminus\{a\})(D_\ell\beta(t)\leq L)\Rightarrow(\forall t_1,t_2\in G\setminus\{a\})(t_1<t_2\Rightarrow\beta(t_2)-\beta(t_1)\leq L(t_2-t_1))), \tag{37}$$

$$(\forall L\in\mathbb{R})((\forall t\in G\setminus\{b\})(D_r\alpha(t)\leq L)\Rightarrow(\forall t_1,t_2\in G\setminus\{b\})(t_1<t_2\Rightarrow\alpha(t_2)-\alpha(t_1)\leq L(t_2-t_1))), \tag{38}$$

$$(\forall L\in\mathbb{R})((\forall t\in G\setminus\{b\})(L\leq D_r\beta(t))\Rightarrow(\forall t_1,t_2\in G\setminus\{b\})(t_1<t_2\Rightarrow L(t_2-t_1)\leq\beta(t_2)-\beta(t_1))). \tag{39}$$

$$\operatorname{mes}\{t\in(a,b): |\lim_{\tau\to t^-}D_\ell\gamma(\tau)|=\infty \vee |\lim_{\tau\to t^+}D_r\gamma(\tau)|=\infty\}=0, \tag{40}$$

$$\{t\in G\setminus\{a,b\}: |\lim_{\tau\to t^-}D_\ell\gamma(\tau)|=\infty \vee |\lim_{\tau\to t^+}D_r\gamma(\tau)|=\infty\}= \{t\in G\setminus\{a,b\}: |D_\ell\gamma(t)|=\infty \vee |D_r\gamma(t)|=\infty\}. \tag{41}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем (I). Рассмотрим случай, когда $\gamma \in BB^{+}(G,\bar{R})$. Предположим, что для $t \in (a,b]$ и $d_1, d_2 \in R$

$$\varliminf_{\tau \to t^-} \gamma(\tau) < d_1 < d_2 < \varlimsup_{\tau \to t^-} \gamma(\tau).$$

Пусть $\delta = \delta^{+}(\gamma, 1, -1)$ и $t_1, t_2, t_3 \in (t-\delta, t) \cap G$ такие, что $t_1 < t_2 < t_3$, $t_3 - t_1 < d_2 - d_1$, $\gamma(t_1) < d_1$, $\gamma(t_2) > d_2$ и $\gamma(t_3) < d_1$. Тогда

$$\gamma(t_2) - \gamma(t_1) > d_2 - d_1 > t_2 - t_1,$$

$$\gamma(t_3) - \gamma(t_2) < d_1 - d_2 < -(t_3 - t_2).$$

Следовательно, $\delta \leq t_3 - t_1$, что противоречит выбору t_3 и t_1. Аналогично рассматривается случай, когда $\gamma \in BB^{-}(G,\bar{R})$.

Аналогично доказывается (2).

Докажем (3). Предположим, что для $t \in G \setminus \{a,b\}$ и $d_1, d_2 \in R$

$$\max\{\varliminf_{\tau \to t^-} \alpha(\tau), \varliminf_{\tau \to t^+} \alpha(\tau)\} < d_1 < d_2 < \alpha(t).$$

Пусть $\delta = \delta^{+}(\alpha, 1, -1)$, $t_1 \in G \cap (a,t)$ и $t_2 \in G \cap (t,b)$ такие, что $t_2 - t_1 < \min\{\delta, d_2 - d_1\}$, $\alpha(t_1) < d_1$ и $\alpha(t_2) < d_1$. Тогда

$$\alpha(t) - \alpha(t_1) > d_2 - d_1 > t - t_1,$$

$$\alpha(t_2) - \alpha(t) < d_1 - d_2 < -(t_2 - t).$$

Следовательно, $\delta \leq t_2 - t_1$, что противоречит неравенству $t_2 - t_1 < \delta$.

Аналогично доказывается (4).

Докажем (5). Рассмотрим случай, когда $\gamma \in BB^{+}(G,\bar{R})$. Предположим, что для $t \in G \setminus \{a\}$ и $c_1, c_2 \in R$

$$D_{-}\gamma(t) < c_2 < c_1 < D^{-}\gamma(t).$$

Тогда $-\infty < \gamma(t) < +\infty$. Пусть $\delta = \delta^{-}(\gamma, c_1, c_2)$ и $t_1, t_2 \in G \cap (t-\delta, t)$ такие, что $t_1 < t_2$ и

$$\gamma(t) - \gamma(t_1) > c_1(t - t_1), \quad \gamma(t) - \gamma(t_2) < c_2(t - t_2).$$

Откуда

$$\gamma(t_2) - \gamma(t_1) > -c_2(t - t_2) + c_1(t - t_1) > c_1(t_2 - t_1).$$

Следовательно, $\delta \leq t - t_1$, что противоречит выбору t_1. Аналогично рассматривается случай, когда $\gamma \in BB^-(G,\bar{\mathbb{R}})$.

Аналогично доказывается (6).

Докажем (7). Предположим, что для $t \in G \setminus \{a,b\}$ и $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$D_r \alpha(t) < c_2 < c_1 < D_l \alpha(t).$$

Пусть $\delta = \delta^+(\alpha, c_1, c_2)$, $t_1 \in G \cap (a,t)$ и $t_2 \in G \cap (t,b)$ такие, что $t_2 - t_1 < \delta$ и

$$\alpha(t) - \alpha(t_1) > c_1(t - t_1), \quad \alpha(t_2) - \alpha(t) < c_2(t_2 - t).$$

Следовательно, $\delta \leq t_2 - t_1$, что противоречит неравенству $t_2 - t_1 < \delta$.

Аналогично доказывается (8).

Докажем (9). Рассмотрим случай, когда $\gamma \in BB^+(G,\bar{\mathbb{R}})$. Предположим, что для $t \in (a,b]$ и $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$\varliminf_{\tau \to t^-} D_l \gamma(\tau) < c_2 < c_1 < \varlimsup_{\tau \to t^-} D_l \gamma(\tau).$$

Пусть $\delta = \delta^+(\gamma, c_1, c_2)$ и $t_1, t_2, t_3, t_4 \in G \cap (a,t)$ такие, что $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$, $t_4 - t_1 < \delta$ и

$$\gamma(t_2) - \gamma(t_1) > c_1(t_2 - t_1), \quad \gamma(t_4) - \gamma(t_3) < c_2(t_4 - t_3).$$

Следовательно, $\delta \leq t_4 - t_1$, что противоречит неравенству $t_4 - t_1 < \delta$. Аналогично рассматривается случай, когда $\gamma \in BB^-(G,\bar{\mathbb{R}})$.

Аналогично доказываются (10)-(12).

Докажем (13). Предположим, что для $t \in (a,b)$ и $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$\varliminf_{\tau \to t^+} D_r \alpha(\tau) < c_2 < c_1 < \varlimsup_{\tau \to t^-} D_l \alpha(\tau).$$

Пусть $\delta = \delta^+(\alpha, c_1, c_2)$ и $t_1, t_2, t_3, t_4 \in (a,b)$ такие, что $t_1 < t_2 < t < t_3 < t_4$, $t_4 - t_1 < \delta$ и

$$\alpha(t_2) - \alpha(t_1) > c_1(t_2 - t_1), \quad \alpha(t_4) - \alpha(t_3) < c_2(t_4 - t_3).$$

Следовательно, $\delta \leq t_4 - t_1$, что противоречит неравенству $t_4 - t_1 < \delta$.

Аналогично доказывается (14).

Докажем (15). Рассмотрим случай, когда $\gamma \in BB^+(G,\bar{\mathbb{R}})$.

Предположим, что для $t \in (a,b]$ и $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

$$\varliminf_{\tau \to t^-} D_l \gamma(\tau) < c_2 < c_1 < \varlimsup_{\tau \to t^-} D_l \gamma(\tau).$$

Пусть $\delta = \delta^+(\alpha, c_1, c_2)$ и $t_1, t_2, t_3, t_4 \in G \cap (a,t)$ такие, что $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$, $t_4 - t_1 < \delta$ и

$$\gamma(t_2) - \gamma(t_1) > c_1(t_2 - t_1), \quad \gamma(t_4) - \gamma(t_3) < c_2(t_4 - t_3).$$

Тогда $\delta \leq t_4 - t_1$, что противоречит неравенству $t_4 - t_1 < \delta$.
Случай, когда

$$\varlimsup_{\tau \to t^-} D_l \gamma(\tau) > c_1 > c_2 > \varliminf_{\tau \to t^-} D_l \gamma(\tau),$$

рассматривается аналогично. Аналогично рассматривается случай, когда $\gamma \in BB^-(G, \bar{\mathbb{R}})$.

Аналогично доказывается (16).

Докажем (17). Предположим, что для $t \in G \setminus \{a\}$ и $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$D_l \alpha(t) < c_2 < c_1 < \varlimsup_{\tau \to t^-} D_l \alpha(\tau).$$

Пусть $\delta = \delta^+(\alpha, c_1, c_2)$ и $t_1, t_2, t_3 \in G$ такие, что $t_1 < t_2 < t_3 < t$, $t - t_1 < \delta$ и

$$\alpha(t_2) - \alpha(t_1) > c_1(t_2 - t_1), \quad \alpha(t) - \alpha(t_3) < c_2(t - t_3).$$

Следовательно, $\delta \leq t - t_1$, что противоречит неравенству $t - t_1 < \delta$.

Аналогично доказываются (18)-(20).

Докажем (21). Предположим, что для $t \in G \setminus \{a\}$ и $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$\alpha(t) \leq \varliminf_{\tau \to t^-} \alpha(\tau), \tag{1*}$$

$$\varliminf_{\tau \to t} D_l \alpha(\tau) < c_2 < c_1 < D_l \alpha(t). \tag{2*}$$

Пусть $\delta = \delta^+(\alpha, c_1, c_2)$ и $t_1 \in G \cap (a,t)$ такие, что $t - t_1 < \delta$ и

$$\alpha(t) - \alpha(t_1) > c_1(t - t_1). \tag{3*}$$

Из (1*) и (3*) следует существование $t_2 \in G \cap (t_1, t)$ такого, что

$$\alpha(t_2)-\alpha(t_1)>c_1(t_2-t_1),$$

а из (2*) следует существование $t_3,t_4\in G$ таких, что $t_2<t_3<t_4<t$ и

$$\alpha(t_4)-\alpha(t_3)<c_2(t_4-t_3).$$

Тогда $\delta\leq t_4-t_1<t-t_1$, что противоречит неравенству $t-t_1<\delta$.

Аналогично доказываются (22)-(24).

Докажем (25). Пусть для $t\in G\setminus\{a,b\}$

$$\varliminf_{\tau\to t^-}\alpha(\tau)<\varlimsup_{\tau\to t^+}\alpha(\tau).$$

Из (3) следует, что $\alpha(t)\leq\varlimsup_{\tau\to t^+}\alpha(\tau)$. Если $\alpha(t)<\varlimsup_{\tau\to t^+}\alpha(\tau)$, то равенство $D_\ell\alpha(t)=+\infty$ очевидно. Если $\alpha(t)=\varlimsup_{\tau\to t^+}\alpha(\tau)$, то $\varliminf_{\tau\to t^-}\alpha(\tau)<\alpha(t)$. Следовательно, $D_\ell\alpha(t)=+\infty$. Из (7) имеем $+\infty=D_\ell\alpha(t)\leq D_u\alpha(t)$.

Аналогично доказываются (26)-(28).

Докажем (29). Предположим, что найдется $t\in(a,b)$ такое, что

$$\max\{\varlimsup_{\tau\to t^-}\alpha(\tau),\varlimsup_{\tau\to t^+}\alpha(\tau)\}=+\infty.$$

Пусть $\delta=\delta^+(\alpha,1,-1)$, $t_1\in G\cap(a,t)$, $t_3\in G\cap(t,b)$ и $t_2\in G\cap(t_1,t_3)$ такие, что $t_3-t_1<\delta$ и

$$\alpha(t_2)-\alpha(t_1)>t_2-t_1,\quad \alpha(t_3)-\alpha(t_2)<-(t_3-t_2).$$

Следовательно, $\delta\leq t_3-t_1$, что противоречит неравенству $t_3-t_1<\delta$.

Аналогично доказывается (30).

Докажем (31). Пусть $\delta=\delta^+(\alpha,1,-1)$, $t_1\in(a,b)$, $t_2\in(t_1,b)$, $t\in G\cap(t_1,t_2)$, $\alpha(t)>-\infty$ и

$$\varliminf_{\tau\to t_i^-}\alpha(\tau)=-\infty\ \vee\ \varliminf_{\tau\to t_i^+}\alpha(\tau)=-\infty,\quad i=1,2.$$

Тогда для любого $\varepsilon\in(0,\infty)$ найдутся $\tau_1\in G\cap(t_1-\varepsilon,t_1+\varepsilon)$ и $\tau_2\in G\cap(t_2-\varepsilon,t_2+\varepsilon)$ такие, что $\tau_1<t<\tau_2$ и

$$\alpha(t)-\alpha(\tau_1)>t-\tau_1,\quad \alpha(\tau_2)-\alpha(t)<-(\tau_2-t)$$

Следовательно, $\delta < \tau_2 - \tau_1$. Откуда $\delta \leq t_2 - t_1$, что доказывает (31).

Аналогично доказывается (32).

Докажем (33). Пусть для $n \in N$

$$M_n = \{t \in (a,b) : |\lim_{\tau \to t^-} \gamma(\tau)| < n \wedge |\lim_{\tau \to t^+} \gamma(\tau)| < n \wedge$$
$$\wedge |\lim_{\tau \to t^-} \gamma(\tau) - \lim_{\tau \to t^+} \gamma(\tau)| > n^{-1}\}.$$

Из (1)-(2) следует конечность M_n, а из

$$\{t \in (a,b) : \lim_{\tau \to t^-} \gamma(\tau) \neq \lim_{\tau \to t^+} \gamma(\tau)\} \subset \bigcup \{M_n : n \in N\} \cup$$
$$\cup \{t \in (a,b) : |\lim_{\tau \to t^-} \gamma(\tau)| = \infty \vee |\lim_{\tau \to t^+} \gamma(\tau)| = \infty\}$$

следует (33).

Докажем (34). Пусть $\delta = \delta^+(\alpha, 1, -1)$, $t_1 \in (a,b)$, $t_4 \in (t_1, b)$ и

$$\lim_{\tau \to t_1^+} D_\ell \alpha(\tau) = +\infty, \quad \lim_{\tau \to t_4^-} D_\ell \alpha(\tau) = -\infty.$$

Тогда для любого $\varepsilon \in (0,\infty)$ найдутся $\tau_1, \tau_2 \in G \cap (t_1, t_1 + \varepsilon)$ и $\tau_3, \tau_4 \in G \cap (t_4 - \delta, t_4)$ такие, что $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3 < \tau_4$ и

$$\alpha(\tau_2) - \alpha(\tau_1) > \tau_2 - \tau_1, \quad \alpha(\tau_4) - \alpha(\tau_3) < -(\tau_4 - \tau_3).$$

Следовательно, $\delta \leq \tau_4 - \tau_1$. Откуда $\delta \leq t_4 - t_1$, что доказывает (34).

Аналогично доказывается (35).

Докажем (36). Пусть $\varepsilon \in (0,\infty)$ и $x(t) = \alpha(t) - (l - \varepsilon)t$. Тогда $\varepsilon \leq D_\ell x(t)$ для $t \in G \setminus \{a\}$. Докажем, что $x(t_1) \leq x(t_2)$. Предположим противное: $x(t_1) > x(t_2)$. Из $\varepsilon \leq D_\ell \alpha(t_1)$ следует

$$M = \sup \{x(t) : t \in G \cap [t_1, t_2]\} > x(t_1).$$

Рассмотрим случай, когда найдется $\tau_3 \in G \cap (t_1, t_2)$ такое, что $x(\tau_3) = M$. Пусть $\delta = \delta^+(\alpha, l - \frac{\varepsilon}{4}, l - \frac{3\varepsilon}{4})$ и $\tau_1, \tau_2, \tau_4 \in G$ такие, что $t_1 < \tau_1 < \tau_2 < \tau_3 < \tau_4 < t_2$, $\tau_4 - \tau_1 < \delta$ и

$$x(\tau_2) - x(\tau_1) > \frac{3\varepsilon}{4}(\tau_2 - \tau_1), \quad x(\tau_4) - x(\tau_3) \leq 0. \qquad (4*)$$

Следовательно,

$$\alpha(\tau_2)-\alpha(\tau_1)>\left(L-\frac{\delta}{4}\right)(\tau_2-\tau_1),$$

$$\alpha(\tau_4)-\alpha(\tau_3)<\left(L-\frac{3\delta}{4}\right)(\tau_4-\tau_3).$$

Откуда $\delta\leq\tau_4-\tau_1$, что противоречит неравенству $\tau_4-\tau_1<\delta$. Рассмотрим случай, когда для любого $\tau\in G\cap(t_1,t_2)$ $x(\tau)<M$. Пусть

$$\tau_*=\sup\{\tau\in[t_1,t_2]:\sup\{\alpha(t):t\in[t_1,\tau]\}<M\}.$$

Если $\tau_*=t_1$, то пусть $\tau_1=t_1$ и $\tau_4\in G$ такое, что $t_1<\tau_4<\tau_2$ и $\tau_4-\tau_1<\delta$. Выберем $\tau_2,\tau_3\in G$ так, чтобы $\tau_1<\tau_2<\tau_3<\tau_4$ и выполнялось (4*). Аналогично предыдущему получаем противоречие. Случай, когда $\tau_*\in(t_1,t_2)$ или $\tau_*=t_2$, рассматривается аналогично.

Из $x(t_1)\leq x(t_2)$ следует $(L-\delta)(t_2-t_1)\leq\alpha(t_2)-\alpha(t_1)$. Переходя к пределу, имеем $L(t_2-t_1)\leq\alpha(t_2)-\alpha(t_1)$.

Аналогично доказываются (37)-(39).

Докажем (40). Предположим противное. Рассмотрим случай, когда $\gamma\in BB^+(a,\bar{R})$. Из (I), (2), (29), (3I) и (34) следует существование $c\in(a,b)$ и $d\in(c,b)$ таких, что $d-c<\delta=\delta^+(\gamma,1,-1)$ и

$$mes\{t\in[c,d]:|\lim_{\tau\to t^-}D_\ell\gamma(\tau)|=\infty\vee|\lim_{\tau\to t^+}D_\ell\gamma(\tau)|=\infty\}>0,$$

$$\sup\{|\gamma(t)|:t\in[c,d]\}<\infty,$$

$$\{t\in[c,d]:\lim_{\tau\to t^-}D_\ell\gamma(\tau)=-\infty\wedge\lim_{\tau\to t^+}D_\ell\gamma(\tau)=+\infty\}=\varnothing.$$

Пусть

$$T_*=\{t\in[c,d]:\lim_{\tau\to t^-}D_\ell\gamma(\tau)=-\infty\},$$

$$T^*=\{t\in[c,d]:\lim_{\tau\to t^+}D_\ell\gamma(\tau)=+\infty\}.$$

Из (I3) следует, что

$$\{t\in[c,d]:|\lim_{\tau\to t^-}D_\ell\gamma(\tau)|=\infty\vee|\lim_{\tau\to t^+}D_\ell\gamma(\tau)|=\infty\}=T_*\cup T^*$$

Из $T_* \cup T^* \neq \emptyset$ следует, что возможны три случая: $T_* = \emptyset \wedge T^* \neq \emptyset$, $T_* \neq \emptyset \wedge T^* = \emptyset$ и $T_* \neq \emptyset \wedge T^* \neq \emptyset$. Покажем, что последний случай может быть сведен к двум предыдущим. Если $t_1 \in T^*$, то $T_* \cap [t_1, d] = \emptyset$. Действительно, из существования $t_2 \in T_* \cap (t_1, d]$ следует существование $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4 \in G \cap (c, d)$ таких, что $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3 < \tau_4$ и

$$f(\tau_2) - f(\tau_1) > \tau_2 - \tau_1, \quad f(\tau_4) - f(\tau_3) < -(\tau_4 - \tau_3).$$

Следовательно, $\delta \leq \tau_4 - \tau_1 < d - c$, что противоречит неравенству $d - c < \delta$. Пусть $t^* = \inf T^*$. Тогда $t^* \in T^*$ и $T_* \cap [t^*, d] = \emptyset$. Если $\operatorname{mes} T^* > 0$, то, заменяя c на t^*, приходим к первому случаю, а если $\operatorname{mes} T_* > 0$, то, заменяя d на $\sup T_*$, приходим ко второму случаю. Рассмотрим случай, когда $T_* = \emptyset$ и $T^* \neq \emptyset$. Без ограничения общности можно считать, что $c \in T^*$ и $d - c < \delta_1 = \delta^+(f, 1, 0)$. Покажем, что

$$(\forall t \in G \cap (c, d])(0 \leq D_2 f(t)). \qquad (5*)$$

Предположим противное. Тогда найдутся $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4 \in G \cap (c, d]$ такие, что $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3 < \tau_4$ и

$$f(\tau_2) - f(\tau_1) > \tau_2 - \tau_1, \quad f(\tau_4) - f(\tau_3) < 0.$$

Следовательно, $\delta_1 \leq \tau_4 - \tau_1 < d - c$, что противоречит неравенству $d - c < \delta_1$. Из (5*) и (36) следует монотонное возрастание f на $G \cap (c, d]$, а из (I0) и (I2) следует замкнутость T^*. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Покажем, что найдется конечное число интервалов $[c_1, d_1], \ldots, [c_k, d_k]$ таких, что $c = c_1 < d_1 < c_2 < \ldots < c_k < d_k \leq d$, $T^* \subset [c_1, d_1] \cup \ldots \cup [c_k, d_k]$,

$$(\forall i \in \{1, \ldots, k\})(\forall t \in G \cap (c_i, d_i])(n \leq D_2 f(t)).$$

Если

$$T_1 = \{t \in G \cap (c_1, d] : D_2 f(t) < n\} = \emptyset,$$

то $k = 1$ и $d_1 = d$. Если $T_1 \neq \emptyset$, то пусть $d_* = \inf T_1$, $d_1 = \sup T^* \cap [c_1, d_*]$ и $c_2 = \inf T^* \cap [d_*, d]$. Ясно, что $d_* \notin T^*$. Покажем, что $c_2 - d_1 > \delta_2 = \delta^+(f, n+1, n)$. Найдем $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4 \in G \cap (d_1, c_2)$ такие, что $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3 < \tau_4$ и

$$\gamma(\tau_2)-\gamma(\tau_1)>(n+1)(\tau_2-\tau_1), \quad \gamma(\tau_4)-\gamma(\tau_3)<n(\tau_4-\tau_3).$$

Следовательно, $\delta_2 \leq \tau_4-\tau_1<c_2-d_1$. Аналогично предыдущему строим $d_2, c_3, \ldots, d_k$. Из (36) следует, что

$$(\forall i\in\{1,\ldots,k\})(n(d_i-c_i)\leq \lim_{\tau\to d_i^-}\gamma(\tau)-\lim_{\tau\to c_i^+}\gamma(\tau)).$$

Следовательно, $n\,mes\,T^* \leq \lim_{\tau\to d^-}\gamma(\tau)-\lim_{\tau\to c^+}\gamma(\tau)$. Ясно, что для любого $n\in N$ это возможно только при $mes\,T^*=0$. Случай, когда $T_* \neq \phi$ и $T^*=\phi$, рассматривается аналогично.

Случай, когда $\gamma\in BB^-(G,\bar{R})$, рассматривается аналогично.

Докажем (41). Рассмотрим случай, когда $\gamma\in BB^+(G,\bar{R})$. Пусть $t\in G\setminus\{a,b\}$. Если $\gamma_*(t)=\gamma^*(t)$, то из (3), (21) и (23) следует

$$D_\ell\gamma(t)=\lim_{\tau\to t^-}D_\ell\alpha(\tau)\wedge D_r\alpha(t)=\lim_{\tau\to t^+}D_\ell\alpha(\tau).$$

Если

$$\lim_{\tau\to t^-}\gamma(\tau)<\lim_{\tau\to t^+}\gamma(\tau),$$

то из (3), (23) и (25) следует

$$\lim_{\tau\to t^+}D_\ell\gamma(\tau)=D_\ell\gamma(t)=+\infty.$$

Если

$$\lim_{\tau\to t^-}\gamma(\tau)>\lim_{\tau\to t^+}\gamma(\tau),$$

то из (3), (21) и (27) следует

$$\lim_{\tau\to t^-}D_\ell\gamma(\tau)=D_\ell\gamma(t)=-\infty.$$

Аналогично рассматривается случай, когда $\gamma\in BB^-(G,\bar{R})$.

Определение. Пусть $\alpha,\beta,\gamma: G\to\bar{R}$ и существуют соответствующие пределы. Тогда функции $\alpha_+,\alpha^+,\beta_-,\beta^-,\gamma_*,\gamma^*: I\to\bar{R}$ задаются следующим образом:

$$\gamma_*(a)=\gamma^*(a)=\lim_{\tau\to a^+}\gamma(\tau),$$

$$\gamma_*(b)=\gamma^*(b)=\lim_{\tau\to b^-}\gamma(\tau),$$

$$(\forall t\in(a,b))(\gamma_*(t)=\min\{\lim_{\tau\to t^-}\gamma(\tau),\ \lim_{\tau\to t^+}\gamma(\tau)\}),$$

$$(\forall t\in(a,b))(\gamma^*(t)=\max\{\lim_{\tau\to t^-}\gamma(\tau),\ \lim_{\tau\to t^+}\gamma(\tau)\}),$$

$$\lim_{\tau\to a^+} D_l\alpha(\tau)<+\infty \Rightarrow \alpha_+(a)=\alpha_*(a),$$

$$\lim_{\tau\to a^+} D_l\alpha(\tau)=+\infty \Rightarrow \alpha_+(a)=-\infty,$$

$$\lim_{\tau\to b^-} D_l\alpha(\tau)>-\infty \Rightarrow \alpha_+(b)=\alpha_*(b),$$

$$\lim_{\tau\to b^-} D_l\alpha(\tau)=-\infty \Rightarrow \alpha_+(b)=-\infty,$$

$$(\forall t\in(a,b))(\lim_{\tau\to t^-} D_l\alpha(\tau)>-\infty \vee \lim_{\tau\to t^+} D_l\alpha(\tau)<+\infty \Rightarrow \alpha_+(t)=\alpha_*(t)),$$

$$(\forall t\in(a,b))(\lim_{\tau\to t^-} D_l\alpha(\tau)=-\infty \wedge \lim_{\tau\to t^+} D_l\alpha(\tau)=+\infty \Rightarrow \alpha_+(t)=-\infty),$$

$$\alpha^+(a)=\alpha^+(b)=+\infty,$$

$$(\forall t\in(a,b))(\alpha^+(t)=\alpha^*(t)),$$

$$\lim_{\tau\to a^+} D_l\beta(\tau)>-\infty \Rightarrow \beta^-(a)=\beta^*(a),$$

$$\lim_{\tau\to a^+} D_l\beta(\tau)=-\infty \Rightarrow \beta^-(a)=+\infty,$$

$$\lim_{\tau\to b^-} D_l\beta(\tau)<+\infty \Rightarrow \beta^-(b)=\beta^*(b),$$

$$\lim_{\tau\to b^-} D_l\beta(\tau)=+\infty \Rightarrow \beta^-(b)=+\infty,$$

$$(\forall t\in(a,b))(\lim_{\tau\to t^-} D_l\beta(\tau)<+\infty \vee \lim_{\tau\to t^+} D_l\beta(\tau)>-\infty \Rightarrow \beta^-(t)=\beta^*(t)),$$

$$(\forall t\in(a,b))(\lim_{\tau\to t^-} D_l\beta(\tau)=+\infty \wedge \lim_{\tau\to t^+} D_l\beta(\tau)=-\infty \Rightarrow \beta^-(t)=+\infty),$$

$$\beta_-(a)=\beta_-(b)=-\infty,$$

$$(\forall t\in(a,b))(\beta_-(t)=\beta_*(t)).$$

З а м е ч а н и е. Если $\alpha,\beta,\gamma\in BB^{\vee}(G,\bar{R})$, то по теореме I сушествуют все пределу из предыдушего определения.

З а м е ч а н и е. Пусть $\alpha\in BB^+(G,\bar{R})$ и $\beta\in BB^-(G,$

$\bar{R}$) . Из теоремы I следует, что

$$\operatorname{card}\{t\in I : \alpha_*(t)\neq\alpha_+(t)\} < \operatorname{card} N,$$

$$\operatorname{card}\{t\in I : \beta^*(t)\neq\beta^-(t)\} < \operatorname{card} N.$$

Следствие I. Пусть $x\in BB^\wedge(G,\bar{R})$. Тогда

$$(\forall t\in G\setminus\{a,b\})(x_*(t)\leq x(t)\leq x^*(t)), \qquad (1)$$

$$(\forall t\in G\setminus\{a,b\})(D_l x(t)=D_r x(t)), \qquad (2)$$

$$(\forall t\in (a,b))(\lim_{\tau\to t^-} x'(\tau)=\lim_{\tau\to t^+} x'(\tau)), \qquad (3)$$

$$(\forall t\in G\setminus\{a\})(\lim_{\tau\to t^-} x'(\tau)=x'(t)), \qquad (4)$$

$$(\forall t\in G\setminus\{b\})(\lim_{\tau\to t^+} x'(\tau)=x'(t)), \qquad (5)$$

$$(\forall t\in G\setminus\{a,b\})(\lim_{\tau\to t^-} x(\tau)<\lim_{\tau\to t^+} x(\tau)\Rightarrow x'(t)=+\infty), \qquad (6)$$

$$(\forall t\in G\setminus\{a,b\})(\lim_{\tau\to t^-} x(\tau)>\lim_{\tau\to t^+} x(\tau)\Rightarrow x'(t)=-\infty), \qquad (7)$$

$$\{t\in\{a,b\} : x_*(t)=-\infty \vee x^*(t)=+\infty\}=\emptyset, \qquad (8)$$

$$(\forall L\in R)((\forall t\in G)(L\leq x'(t))\Rightarrow(\forall t_1,t_2\in G)(t_1<t_2\Rightarrow L(t_2-t_1)\leq x(t_2)-x(t_1))). \qquad (9)$$

$$(\forall L\in R)((\forall t\in G)(x'(t)\leq L)\Rightarrow(\forall t_1,t_2\in G)(t_1<t_2\Rightarrow x(t_2)-x(t_1)\leq L(t_2-t_1))). \qquad (10)$$

Определение эквивалентности. Пусть $\gamma_1 : G_1\to\bar{R}$, $\gamma_2 : G_2\to\bar{R}$ и для любого $t\in(a,b)$ существуют пределы

$$\lim_{\tau\to t^-}\gamma_i(\tau),\quad \lim_{\tau\to t^+}\gamma_i(\tau),\quad i=1,2.$$

Тогда

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 := (\forall t \in (a,b))(\lim_{\tau \to t^-} \gamma_1(\tau) = \lim_{\tau \to t^-} \gamma_2(\tau) \wedge$$
$$\lim_{\tau \to t^+} \gamma_1(\tau) = \lim_{\tau \to t^+} \gamma_2(\tau)).$$

З а м е ч а н и е. Пусть $\alpha_i \in BB^+(G_i, \bar{R})$, $\beta_i \in BB^-(G_i, \bar{R})$ и $\gamma_i \in BB^\vee(G_i, \bar{R})$ для $i = 1,2$. Если $\alpha_1 \sim \alpha_2$, то $\alpha_1^+ = \alpha_2^+$. Если $\beta_1 \sim \beta_2$, то $\beta_{1-} = \beta_{2-}$. Если $\gamma_1 \sim \gamma_2$, то $\gamma_{1*} = \gamma_{2*}$ и $\gamma_1^* = \gamma_2^*$.

Т е о р е м а 2. Пусть $\alpha \in BB^+(G, \bar{R})$, $\beta \in BB^-(G, \bar{R})$ и $\alpha_1, \beta_1 : G_1 \to \bar{R}$. Тогда

$$(\forall t \in G_1)(\alpha_+(t) \le \alpha_1(t) \le \alpha^+(t)) \Rightarrow$$
$$(\forall t \in (a,b])(\lim_{\tau \to t^-} \alpha_1(\tau) = \lim_{\tau \to t^-} \alpha(\tau)) \wedge$$
$$(\forall t \in [a,b))(\lim_{\tau \to t^+} \alpha_1(\tau) = \lim_{\tau \to t^+} \alpha(\tau)),$$

$$(\forall t \in G_1)(\beta_-(t) \le \beta_1(t) \le \beta^-(t)) \Rightarrow$$
$$(\forall t \in (a,b])(\lim_{\tau \to t^-} \beta_1(\tau) = \lim_{\tau \to t^-} \beta(\tau)) \wedge$$
$$(\forall t \in [a,b))(\lim_{\tau \to t^+} \beta_1(\tau) = \lim_{\tau \to t^+} \beta(\tau)).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем неравенство

$$\overline{\lim_{\tau \to t^-}} \alpha^+(\tau) \le \lim_{\tau \to t^-} \alpha(\tau), \quad t \in (a,b].$$

Предположим, что для $t \in (a,b]$ и $d \in R$

$$\overline{\lim_{\tau \to t^-}} \alpha^+(\tau) = \overline{\lim_{\tau \to t^-}} \alpha^*(\tau) > d > \lim_{\tau \to t^-} \alpha(\tau). \qquad (1*)$$

Тогда найдется $\tau_1 \in (a,t)$ такое, что

$$(\forall \tau \in G \cap (\tau_1, t))(d > \alpha(\tau)). \qquad (2*)$$

Из (1*) следует существование $\tau_2 \in (\tau_1, t)$ такого, что $\alpha^*(\tau_2) > d$. Следовательно, найдется $\tau_3 \in G \cap (\tau_1, t)$ такое, что

$\alpha(\tau_3) > d$, что противоречит (2*). Аналогично доказывается неравенство

$$\underline{\lim}_{\tau\to t^-} \alpha(\tau) \le \underline{\lim}_{\tau\to t^-} \alpha_+(\tau), \quad t\in(a,b].$$

Следовательно,

$$\underline{\lim}_{\tau\to t^-} \alpha(\tau) \le \underline{\lim}_{\tau\to t^-} \alpha_+(\tau) \le \underline{\lim}_{\tau\to t^-} \alpha_1(\tau) \le$$

$$\le \overline{\lim}_{\tau\to t^-} \alpha_1(\tau) \le \overline{\lim}_{\tau\to t^-} \alpha^+(\tau) \le \lim_{\tau\to t^-} \alpha(\tau)$$

Откуда

$$\lim_{\tau\to t^-} \alpha_1(\tau) = \lim_{\tau\to t^-} \alpha(\tau), \quad t\in(a,b].$$

Аналогично доказывается

$$\lim_{\tau\to t^+} \alpha_1(\tau) = \lim_{\tau\to t^+} \alpha(\tau), \quad t\in[a,b).$$

Теорема 3. Пусть $\alpha\in BB^+(G,\bar{R})$, $\beta\in BB^-(G,\bar{R})$ и $\alpha_1, \beta_1 : G_1 \to \bar{R}$. Тогда

$$(\forall t\in G_1)(\alpha_+(t) \le \alpha_1(t) \le \alpha^+(t)) \Rightarrow \alpha_1 \in BB^+(G_1,\bar{R}) \wedge$$

$$(\forall c_1, c_2 \in R)(\delta^+(\alpha_1, c_1, c_2) = \delta^+(\alpha, c_1, c_2)) \wedge$$

$$(\forall t\in(a,b])(\lim_{\tau\to t^-} D_\ell\alpha_1(\tau) = D_\ell\alpha_+(t) = D_\ell\alpha_*(t)) \wedge$$

$$(\forall t\in[a,b))(\lim_{\tau\to t^+} D_\ell\alpha_1(\tau) = D_\ell\alpha_+(t) = D_\ell\alpha_*(t)) \wedge \alpha_{1+} = \alpha_+ \wedge$$

$$d\{t\in G_1 : \alpha_+(t) = \alpha_*(t) = \alpha_1(t) = \alpha^*(t) = \alpha^+(t)\} = I,$$

$$(\forall t\in G_1)(\beta_-(t) \le \beta_1(t) \le \beta^-(t)) \Rightarrow \beta_1 \in BB^-(G_1,\bar{R}) \wedge$$

$$(\forall c_1, c_2 \in R)(\delta^-(\beta_1, c_1, c_2) = \delta^-(\beta, c_1, c_2)) \wedge$$

$$(\forall t\in(a,b])(\lim_{\tau\to t^-} D_\ell\beta_1(t) = D_\ell\beta^-(t) = D_\ell\beta^*(t)) \wedge$$

$$(\forall t\in[a,b))(\lim_{\tau\to t^+} D_\tau\beta_1(\tau)=D_\tau\beta^-(t)=D_\tau\beta^*(t))\wedge\beta_1^-=\beta^-\wedge$$

$$d\,\{t\in G_1: \beta^-(t)=\beta^*(t)=\beta_1(t)=\beta_*(t)=\beta_-(t)\}=I.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем, что

$$\{t\in(a,b): \alpha_1^+(t)=+\infty\}=\varphi. \qquad (1*)$$

Предположим противное. Тогда найдется $t\in(a,b)$ такое, что $\alpha^+(t)=\alpha^*(t)=+\infty$. Пусть $\delta=\delta^+(\alpha,1,-1)$, $t_1, t_2, t_3\in G$ такие, что $t_1<t_2<t_3$, $t_3-t_1<\delta$ и

$$\alpha(t_2)-\alpha_1(t_1)>t_2-t_1,\quad \alpha(t_3)-\alpha(t_2)<-(t_3-t_2).$$

Следовательно, $\delta\le t_3-t_1$, что противоречит неравенству $t_3-t_1<\delta$. (I*) доказано. Следовательно,

$$\{t\in I: \alpha_1(t)=+\infty\}\subset\{a,b\}.$$

Докажем, что

$$\mathrm{card}\,\{t\in I: \alpha_+(t)=-\infty\}<\mathrm{card}\,\mathbb{N}. \qquad (2*)$$

Пусть $t_1, t_2\in I$, $t_1<t_2$ и $\alpha_+(t_1)=\alpha_+(t_2)=-\infty$. Если $\alpha_*(t_1)=\alpha_*(t_2)=-\infty$, то пусть $\tau\in G$ такое, что $t_1<\tau<t_2$ и $\alpha(\tau)>-\infty$. Для любого $\delta\in(0,\infty)$ найдутся $\tau_1, \tau_2\in G$ такие, что $t_1-\delta<\tau_1<\tau<\tau_2<t_2+\delta$ и

$$\alpha(\tau)-\alpha(\tau_1)>\tau-\tau_1,\quad \alpha(\tau_2)-\alpha(\tau)<-(\tau_2-\tau).$$

Следовательно, $\delta\le\tau_2-\tau_1$. Откуда $\delta\le t_2-t_1$. Если $\alpha_*(t_1)=-\infty$ и $\alpha_*(t_2)>-\infty$, то $\lim\limits_{t\to t_2^-} D_\tau\alpha(t)=-\infty$. Пусть $\tau\in G$ такое, что $t_1<\tau<t_2$ и $\alpha(\tau)>-\infty$. Для любого $\delta\in(0,\infty)$ найдутся $\tau_1, \tau_2, \tau_3\in G$ такие, что $t_1-\delta<\tau_1<\tau<\tau_2<\tau_3<t_2$ и

$$\alpha(\tau)-\alpha(\tau_1)>\tau-\tau_1,\quad \alpha(\tau_3)-\alpha(\tau_2)<-(\tau_3-\tau_2).$$

Следовательно, $\delta \le \tau_3-\tau_1$. Откуда $\delta \le t_2-t_1$. Аналогично рассматриваются случаи, когда $\alpha_*(t_1)>-\infty$, $\alpha_*(t_2)=-\infty$ и $\alpha_*(t_1)>-\infty$, $\alpha_*(t_2)>-\infty$. (2*) доказано.

Докажем, что

$$\delta^+(\alpha,c_1,c_2)\le \delta^+(\alpha_1,c_1,c_2). \qquad (3*)$$

Пусть $t_1,t_2,t_3,t_4\in G_1$, $t_1<t_2\le t_3<t_4$ и

$$\alpha_1(t_2)-\alpha_1(t_1)>c_1(t_2-t_1), \quad \alpha_1(t_4)-\alpha_1(t_3)<c_2(t_4-t_3).$$

Пусть $\varepsilon\in(0,\infty)$. Если $\alpha_*(t_1)=-\infty$, то найдутся $\tau_1,\tau_2\in G$ такие, что $t_1-\varepsilon<\tau_1<\tau_2<t_2$ и

$$\alpha(\tau_2)-\alpha(\tau_1)>c_1(\tau_2-\tau_1) \qquad (4*)$$

Если $\alpha_*(t_1)>-\infty$ и $\lim\limits_{\tau\to t_1^+} D_2\alpha(\tau)=+\infty$, то найдутся τ_1, $\tau_2\in G$ такие, что $t_1<\tau_1<\tau_2<t_2$ и справедливо (4*). Если $\alpha_*(t_1)>-\infty$, $\lim\limits_{\tau\to t_1^+} D_2\alpha(\tau)<+\infty$ и $t_2<t_3$, то найдутся $\tau_1,\tau_2\in G$ такие, что $t_1-\varepsilon<\tau_1<\tau_2<(t_2+t_3)2^{-1}$ и выполняется (4*). Если $\alpha_*(t_1)>-\infty$, $\lim\limits_{\tau\to t_1^+} D_2\alpha(\tau)<+\infty$, $t_2=t_3$, $\alpha_*(t_4)>-\infty$ и $\lim\limits_{\tau\to t_4^-} D_2\alpha(\tau)>-\infty$, то найдутся $\tau_1,\tau,\tau_4\in G$ такие, что $t_1-\varepsilon<\tau_1<\tau<\tau_4<t_4+\varepsilon$ и

$$\alpha(\tau)-\alpha(\tau_1)>c_1(\tau-\tau_1), \quad \alpha(\tau_4)-\alpha(\tau)<c_2(\tau_4-\tau).$$

Если $t_2<t_3$, $\alpha_*(t_4)>-\infty$ и $\lim\limits_{\tau\to t^-} D_2\alpha(\tau)=-\infty$, то найдутся $\tau_3,\tau_4\in G$ такие, что $(t_2+t_3)2^{-1}<\tau_3<\tau_4<t_4+\varepsilon$ и

$$\alpha(\tau_4)-\alpha(\tau_3)<c_2(\tau_4-\tau_3) \qquad (5*)$$

Если $\alpha_*(t_4)>-\infty$ и $\lim\limits_{\tau\to t_4^-} D_2\alpha(\tau)=-\infty$, то найдутся τ_3, $\tau_4\in G$ такие, что $t_3<\tau_3<\tau_4<t_4$ и справедливо (5*). Если $\alpha_*(t_4)=-\infty$, то найдутся $\tau_3,\tau_4\in G$ такие, что $t_3<\tau_3<\tau_4<t_4+\varepsilon$ и выполняется (5*). Во всех этих случаях имеем $\delta^+(\alpha,c_1,c_2)\le\tau_4-\tau_1$. Откуда $\delta^+(\alpha,c_1,c_2)\le t_4-t_1$, что доказывает (3). Следовательно, $\alpha_1\in BB^+(G,\bar{R})$.

Докажем, что

$$\mathrm{cl}\,\{t\in G_1 : \alpha_+(t)=\alpha_*(t)=\alpha_1(t)=\alpha^*(t)=\alpha^+(t)\}=I. \quad (6*)$$

По теореме I множество

$$\{t\in(a,b) : |\lim_{\tau\to t^-} D_l\alpha_1(\tau)|<\infty \wedge |\lim_{\tau\to t^+} D_r\alpha_1(\tau)|<\infty\}=M$$

открыто, всюду плотно в I и

$$(\forall t\in M)(\alpha_+(t)=\alpha_*(t)=\alpha^*(t)=\alpha^+(t)),$$

что доказывает (6*).

Докажем, что

$$(\forall t\in(a,b])(\lim_{\tau\to t^-} D_l\alpha_1(\tau)=D_l\alpha_+(t)=D_l\alpha_*(t)). \quad (7*)$$

Ясно, что

$$(\forall t\in G_1\cap M)(D_l\alpha_1(t)=D_l\alpha_+(t)=D_l\alpha_*(t)).$$

Следовательно,

$$(\forall t\in(a,b])(\lim_{\tau\to t^-} D_l\alpha_1(\tau)=\lim_{\tau\to t^-} D_l\alpha_+(\tau)=\lim_{\tau\to t^-} D_l\alpha_*(\tau)). \quad (8*)$$

По теореме I (21) и теореме 2

$$\lim_{\tau\to t^-} D_l\alpha_+(\tau)=D_l\alpha_+(t), \quad \lim_{\tau\to t^-} D_l\alpha_*(\tau)=D_l\alpha_*(t).$$

Откуда следует (7*).

Аналогично доказывается, что

$$(\forall t\in[a,b))(\lim_{\tau\to t^+} D_r\alpha_1(\tau)=\lim_{\tau\to t^+} D_r\alpha_+(\tau)), \quad (9*)$$

$$(\forall t\in[a,b))(\lim_{\tau\to t^+} D_r\alpha_1(\tau)=D_r\alpha_+(t)=D_r\alpha_*(t)).$$

Из теоремы 2, (3*) и (9*) следует $\alpha_{1+}=\alpha_+$.

Из (3*) и неравенств

$$(\forall t\in I)(\alpha_{1+}(t)=\alpha_+(t)\le\alpha(t)\le\alpha^+(t)=\alpha_1^+(t))$$

имеем

$$\delta^+(\alpha,c_1,c_2)\le\delta^+(\alpha_1,c_1,c_2)\le\delta^+(\alpha,c_1,c_2).$$

Следовательно, $\delta^+(\alpha_1, c_1, c_2) = \delta^+(\alpha, c_1, c_2)$.

Теорема 4. Пусть $\alpha_i \in BB^+(G_i, \bar{R})$, $\beta_i \in BB^-(G_i, \bar{R})$, $i = 1, 2$. Тогда

$$\alpha_1 \sim \alpha_2 \equiv (\forall t \in G_2)(\alpha_{1+}(t) \leq \alpha_2(t) \leq \alpha_1^+(t)),$$

$$\beta_1 \sim \beta_2 \equiv (\forall t \in G_2)(\beta_{1-}(t) \leq \beta_2(t) \leq \beta_1^-(t)).$$

Доказательство. Покажем, что из $\alpha_1 \sim \alpha_2$ следует

$$(\forall t \in G_2)(\alpha_{1+}(t) \leq \alpha_2(t) \leq \alpha_1^+(t)). \qquad (1*)$$

Из $\alpha_1^* = \alpha_2^*$ имеем

$$(\forall t \in G_2 \setminus \{a, b\})(\alpha_2(t) \leq \alpha_2^*(t) = \alpha_1^*(t)).$$

Следовательно,

$$(\forall t \in G_2)(\alpha_2(t) \leq \alpha_1^+(t)).$$

Для доказательства неравенства

$$(\forall t \in G_2)(\alpha_{1+}(t) \leq \alpha_2(t))$$

достаточно показать, что

$$(\forall t \in G_2)(\alpha_2(t) < \alpha_{2*}(t) \Rightarrow \alpha_{1+}(t) = -\infty) \qquad (2*)$$

Если $a \in G_2$ и $\alpha_2(a) < \alpha_{2*}(a)$, то $D_1\alpha_2(a) = +\infty$ и из теоремы I (23) и теоремы 3 имеем

$$+\infty = D_1\alpha_2(a) = \lim_{t \to a^+} D_1\alpha_2(t) = D_1\alpha_{2*}(a) =$$

$$= D_1\alpha_{1*}(a) = \lim_{t \to a^+} D_1\alpha_1(t).$$

Следовательно, $\alpha_{1+}(a) = -\infty$. Аналогично рассматривается случай, когда $b \in G_2$ и $\alpha_2(b) < \alpha_{2*}(b)$. Если $t \in G_2 \setminus \{a, b\}$ и $\alpha_2(t) < \alpha_{2*}(t)$, то $D_2\alpha_2(t) = -\infty$ и $D_1\alpha_2(t) = +\infty$. Из теоремы I (21,23) и теоремы 3 имеем

$$-\infty = D_2\alpha_2(t) = \lim_{\tau \to t^-} D_2\alpha_2(\tau) = D_2\alpha_{2*}(t) = D_2\alpha_{1*}(t) = \lim_{\tau \to t^-} D_2\alpha_1(\tau),$$

$$+\infty = D_t\alpha_2(t) = \lim_{\tau\to t^+} D_t\alpha_2(\tau) = D_t\alpha_{2*}(t) =$$

$$= D_t\alpha_{1*}(t) = \lim_{\tau\to t^+} D_t\alpha_1(\tau).$$

Следовательно, $\alpha_{1+}(t) = -\infty$, что доказывает (2*).

По теореме 2 из (1*) следует $\alpha_1 \sim \alpha_2$.

Теорема 5. Пусть $\alpha, \alpha_0 \in BB^+(I,\bar{R})$, $\beta, \beta_0 \in BB^-(I,\bar{R})$, $x_0 \in BB^\wedge(I,\bar{R})$, $\alpha \sim \alpha_0$, $\beta \sim \beta_0$, $\alpha \le \beta$, $\alpha_0 \le x_0 \le \beta_0$, $\alpha(a) \le x_0(a) \le \beta(a)$ и $\alpha(b) \le x_0(b) \le \beta(b)$. Тогда

$$x = \min\{\max\{\alpha, x_0\}, \beta\}$$

удовлетворяет условиям $\alpha \le x \le \beta$, $x \sim x_0$ и $x \in BB^\wedge(I,\bar{R})$.

Доказательство. Пусть $y = \max\{\alpha, x_0\}$. Тогда $\alpha \le y$. Покажем, что $y \sim x_0$ и $y \in BB^\wedge(I,\bar{R})$. Из $\alpha \sim \alpha_0$ и $\alpha_0 \le x_0$ имеем

$$(\forall t\in(a,b))(\lim_{\tau\to t^-}\alpha(\tau) = \lim_{\tau\to t^-}\alpha_0(\tau) \le \lim_{\tau\to t^-} x_0(\tau)).$$

Откуда

$$(\forall t\in(a,b))(\lim_{\tau\to t^-} x_0(\tau) \le \underline{\lim}_{\tau\to t^-} y(\tau) \le \overline{\lim}_{\tau\to t^-} y(\tau) \le \lim_{\tau\to t^-} x_0(\tau)).$$

Следовательно.

$$(\forall t\in(a,b))(\lim_{\tau\to t^-} y(\tau) = \lim_{\tau\to t^-} x_0(\tau)).$$

Аналогично доказывается, что

$$(\forall t\in[a,b))(\lim_{\tau\to t^+} y(\tau) = \lim_{\tau\to t^+} x_0(\tau))$$

Следовательно, $y \sim x_0$. Для $t\in(a,b)$ из

$$y(t) = \max\{\alpha(t), x_0(t)\} \le \max\{\alpha^*(t), x_0^*(t)\} =$$

$$= \max\{\alpha_0^*(t), x_0^*(t)\} = x_0^*(t) = x_0^+(t)$$

следует $y \le x_0^+$. Для доказательства неравенства $x_{0+} \le y$ достаточно показать, что для $t\in(a,b)$ из $y(t) < x_{0*}(t)$ следует $x_{0+}(t) = -\infty$. Если $x_0(t) = y(t) < x_{0*}(t)$ или $x_0(t) < y(t) < x_{0*}(t)$, то из теоремы I (21,23) следует $x_{0+}(t) = -\infty$. Следовательно, $x_{0+} \le y$. Из неравенств $x_{0+} \le y \le x_0^+$ и теоремы 3 следует $y \in BB^+(I, \bar{R})$. Для $t \in (a,b)$

$$x_{0-}(t) = x_{0+}(t) \le y(t) < x_0^+(t) = x_0^-(t).$$

Следовательно, $x_{0-} \le y$. Для доказательства неравенства $y \le x_0^-$ достаточно показать, что для $t \in \{a, b\}$ из $y(t) > x_0^*(t)$ следует $x_0^-(t) = +\infty$. Из условий теоремы имеем $x_0(t) = y(t)$ для $t \in \{a, b\}$. Следовательно, $x_0(t) = y(t) > x_0^*(t)$. Из теоремы I (22,24) следует $x_0^-(t) = +\infty$. Следовательно, $y \le x_0^-$. Из неравенств $x_{0-} \le y \le x_0^-$ и теоремы 3 следует $y \in BB^-(I, \bar{R})$.

Для $x = \min\{y, \beta\}$ аналогично предыдущему имеем $\alpha \le x \le \beta$, $x \sim x_0$ и $x \in BB^\wedge(I, \bar{R})$.

Определение. Пусть $A \subset BB^+(G, \bar{R})$, $B \subset BB^-(G, \bar{R})$, $c_1, c_2 \in R$, $A \ne \emptyset$ и $B \ne \emptyset$. Тогда

$$\delta^+(A, c_1, c_2) = \inf\{\delta^+(\alpha, c_1, c_2) : \alpha \in A\},$$

$$\delta^-(B, c_1, c_2) = \inf\{\delta^-(\beta, c_1, c_2) : \beta \in B\}.$$

Определение. Пусть $A \subset BB^+(G, \bar{R})$, $B \subset BB^-(G, \bar{R})$, $A \ne \emptyset$ и $B \ne \emptyset$. Условия UBB^+:

$$\sup\{|\alpha(t)| : \alpha \in A \wedge t \in G\} < \infty, \qquad (1UBB^+)$$

$$(\forall c_1, c_2 \in R)(\delta^+(A, c_1, c_2) > 0). \qquad (2UBB^+)$$

Условия UBB^-:

$$\sup\{|\beta(t)| : \beta \in B \wedge t \in G\} < \infty, \qquad (1UBB^-)$$

$$(\forall c_1, c_2 \in R)(\delta^-(B, c_1, c_2) > 0). \qquad (2UBB^-)$$

Лемма I. Пусть $a \in G$, $q_n \in G \setminus \{a\}$, $n = 1, 2, \ldots$ и $\lim\limits_{n \to \infty} q_n = a$. Если для $\alpha, \alpha_n \in BB^+(G, \bar{R})$, $n = 1, 2, \ldots$, $A = \{\alpha_n : n \in N\}$ выполняются условия UBB^+ и

$$(\forall k\in N)(\lim_{n\to\infty}\alpha_n(q_k)=\alpha(q_k)),$$

то

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n(a)=\alpha(a)\Rightarrow \lim_{\delta\to 0^+}\overline{\lim_{n\to\infty}}\sup\{\alpha_n(\tau):\tau\in G\cap(a,a+\delta)\}\leq\max\{\alpha(a),\alpha_*(a)\},\tag{1}$$

$$\lim_{\delta\to 0^+}\underline{\lim_{n\to\infty}}\inf\{\alpha_n(\tau):\tau\in G\cap(a,a+\delta)\}<\alpha_*(a)\Rightarrow \lim_{t\to a^+}D_t\alpha(t)=+\infty.\tag{2}$$

Если для $\beta,\beta_n\in BB^-(G,\bar R)$, $n=1,2,\dots$, $B=\{\beta_n: n\in N\}$ выполняются условия UBB^- и

$$(\forall k\in N)(\lim_{n\to\infty}\beta_n(q_k)=\beta(q_k)),$$

то

$$\lim_{n\to\infty}\beta_n(a)=\beta(a)\Rightarrow \lim_{\delta\to 0^+}\underline{\lim_{n\to\infty}}\inf\{\beta_n(\tau):\tau\in G\cap(a,a+\delta)\}\geq\min\{\beta(a),\beta_*(a)\},\tag{3}$$

$$\lim_{\delta\to 0^+}\overline{\lim_{n\to\infty}}\sup\{\beta_n(\tau):\tau\in G\cap(a,a+\delta)\}>\beta_*(a)\Rightarrow \lim_{t\to a^+}D_t\beta(t)=-\infty.\tag{4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем (1). Предположим противное. Тогда найдутся $d_1,d_2\in R$ такие, что

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n(a)=\alpha(a)\wedge\lim_{\delta\to 0^+}\overline{\lim_{n\to\infty}}\sup\{\alpha_n(\tau):\tau\in G\cap(a,a+\delta)\}>d_2>d_1>\max\{\alpha(a),\alpha_*(a)\}.$$

Пусть $m\in N$ такое, что $\alpha(q_m)<d_1$,

$$q_m-a<\min\{\delta^+(A,1,-1),d_2-d_1\},\tag{1*}$$

$$(\forall n\in\{m,m+1,\dots\})(\alpha_n(a)<d_1).$$

Тогда найдутся $k \in \{m, m+1, \dots\}$ и $\tau \in G \cap (a, q_m)$ такие, что $\alpha_k(\tau) > d_2$, $\alpha_k(a) < d_1$ и $\alpha_k(q_m) < d_1$. Следовательно,

$$\alpha_k(q_m) - \alpha_k(\tau) < d_1 - d_2 < -(q_m - \tau),$$

$$\alpha_k(\tau) - \alpha_k(a) > d_2 - d_1 > \tau - a.$$

Откуда $\delta^+(A, 1, -1) \leq q_m - \tau_1 < q_m - a$, что противоречит (1*).

Докажем (2). Предположим противное. Тогда найдутся $c_1, c_2 \in (0, \infty)$ и $d_1, d_2 \in R$ такие, что

$$\lim_{\delta \to 0^+} \lim_{n \to \infty} \inf \{\alpha_n(\tau) : \tau \in G \cap (a, a+\delta)\} < d_1 < d_2 < \alpha_*(a) \wedge$$

$$\wedge \lim_{t \to a^+} D_2 \alpha(t) < c_2 < c_1$$

Выберем $m \in N$ так, чтобы $q_{m+1} < q_m < b$, $\alpha(q_{m+1}) > d_2$,

$$q_m - a < \min \{\delta^+(A, c_1, c_2), (d_2 - d_1) c_1^{-1}\} \qquad (2*)$$

и из теоремы I (38) следовало

$$\alpha(q_m) - \alpha(q_{m+1}) < c_2 (q_m - q_{m+1}).$$

Выберем $k \in \{m, m+1, \dots\}$ и $\tau \in G \cap (a, q_{m+1})$ так, чтобы $\alpha_k(\tau) < d_1$, $\alpha_k(q_{m+1}) > d_2$ и

$$\alpha_k(q_m) - \alpha_k(q_{m+1}) < c_2 (q_m - q_{m+1}). \qquad (3*)$$

Следовательно,

$$\alpha_k(q_{m+1}) - \alpha_k(\tau) > d_2 - d_1 > c_1 (q_{m+1} - \tau). \qquad (4*)$$

Из (3*) и (4*) имеем $\delta^+(A, c_1, c_2) < q_{m+1} - \tau \leq q_m - a$, что противоречит (2*).

Л е м м а 2. Пусть $t \in G \setminus \{a, b\}$, $p_n \in G \cap (a, t)$, $q_n \in G \cap (t, b)$, $n = 1, 2, \dots$ и $\lim_{n \to \infty} p_n = \lim_{n \to \infty} q_n = t$.

Если для $\alpha, \alpha_n \in BB^+(G, R)$, $n = 1, 2, \dots$, $A = \{\alpha_n : n \in N\}$ выполняются условия UBB^+ и

$$(\forall k \in N)(\lim_{n \to \infty} \alpha_n(p_k) = \alpha(p_k) \wedge \lim_{n \to \infty} \alpha_n(q_k) = \alpha(q_k)),$$

то

$$\lim_{\delta\to 0^+}\overline{\lim_{n\to\infty}}\sup\{\alpha_n(\tau):\tau\in G\cap(t-\delta,t+\delta)\}\leq\alpha^*(t), \qquad (1)$$

$$\lim_{\delta\to 0^+}\underline{\lim_{n\to\infty}}\inf\{\alpha_n(\ ):\tau\in G\cap(t-\delta,t+\delta)\}<\alpha_*(t)\Rightarrow$$

$$\lim_{\tau\to t^-} D_\tau\alpha(\tau)=-\infty\wedge\lim_{\tau\to t^+} D_\tau\alpha(\tau)=+\infty. \qquad (2)$$

Если для $\beta,\beta_n\in BB^-(G,\bar{R})$, $n=1,2,\dots$, $B=\{\beta_n: n\in N\}$ выполняются условия UBD^- и

$$(\forall k\in N)(\lim_{n\to\infty}\beta_n(p_k)=\beta(p_k)\wedge\lim_{n\to\infty}\beta_n(q_k)=\beta(q_k)),$$

то

$$\lim_{\delta\to 0^+}\underline{\lim_{n\to\infty}}\inf\{\beta_n(\tau):\tau\in G\cap(t-\delta,t+\delta)\}\geq\beta_*(t), \qquad (3)$$

$$\lim_{\delta\to 0^+}\overline{\lim_{n\to\infty}}\sup\{\beta_n(\tau):\tau\in G\cap(t-\delta,t+\delta)\}>\beta^*(t)\Rightarrow$$

$$\lim_{\tau\to t^-} D_\tau\alpha(\tau)=-\infty\wedge\lim_{\tau\to t^+} D_\tau\alpha(\tau)=+\infty. \qquad (4)$$

Доказательство. Докажем (1). Предположим противное. Тогда найдутся $d_1,d_2\in R$ такие, что

$$\lim_{\delta\to 0^+}\overline{\lim_{n\to\infty}}\sup\{\alpha_n(\tau):\tau\in G\cap(t-\delta,t+\delta)\}>d_2>d_1>\alpha^*(t)$$

Пусть $m\in N$ такое, что $\alpha(p_m)<d_1$, $\alpha(q_m)<d_1$ и

$$q_m-p_m<\min\{\delta^+(A,1,-1),d_2-d_1\}. \qquad (1*)$$

Тогда найдутся $k\in\{m,m+1,\dots\}$ и $\tau\in G\cap(p_m,q_m)$ такие, что $\alpha_k(\tau)>d_2$, $\alpha_k(p_m)<d_1$ и $\alpha_k(q_m)<d_1$. Следовательно,

$$\alpha_k(\tau)-\alpha_k(p_m)>d_2-d_1>\tau-p_m,$$

$$\alpha_k(q_m)-\alpha_k(\tau)<d_1-d_2<-(q_m-\tau).$$

Откуда $\delta^+(A,1,-1)\leq q_m-p_m$, что противоречит (1*).

Докажем (2). Предположим противное. Пусть найдутся

$c_1, c_2 \in (-\infty, 0)$ и $d_1, d_2 \in R$ такие, что

$$\lim_{\delta \to 0^+} \lim_{n \to \infty} \inf \{\alpha_k(\tau) : \tau \in G \cap (t-\delta, t+\delta)\} < d_1 < d_2 < \alpha_*(t),$$

$$\lim_{\tau \to t^-} D_2 \alpha(\tau) > c_1 > c_2.$$

Выберем $m \in N$ так, чтобы $p_m < p_{m+1}$, $\alpha(p_{m+1}) > d_2$ и

$$q_m - p_m < \min \{\delta^+(A, c_1, c_2), (d_1 - d_2) c_2^{-1}\} \qquad (2^*)$$

и из теоремы I (35) следовало

$$\alpha(p_{m+1}) - \alpha(p_m) > c_1 (p_{m+1} - p_m).$$

Выберем $k \in \{m, m+1, \ldots\}$ и $\tau \in (p_{m+1}, q_m)$ так, чтобы $\alpha_k(\tau) < d_1$, $\alpha_k(p_{m+1}) > d_2$ и

$$\alpha_k(p_{m+1}) - \alpha_k(p_m) > c_1 (p_{m+1} - p_m). \qquad (3^*)$$

Следовательно,

$$\alpha_k(\tau) - \alpha_k(p_{m+1}) < d_1 - d_2 < c_2 (\tau - p_{m+1}). \qquad (4^*)$$

Из (3*) и (4*) имеем $\delta^+(A, c_1, c_2) \leq \tau - p_m < q_m - p_m$, что противоречит (2*). Аналогично рассматривается случай, когда найдутся $c_1, c_2 \in (0, \infty)$ такие, что

$$\lim_{\tau \to t^+} D_2 \alpha(\tau) < c_2 < c_1.$$

Т е о р е м а 6. Пусть $\alpha_n \in BB^+(G, \bar{R})$, $n = 1, 2, \ldots$, $A = \{\alpha_n : n \in N\}$ и выполняются условия UBB^+. Тогда найдутся $\varphi : N \to N$ и $\alpha \in BB^+(G, \bar{R})$ такие, что

$$\lim_{n \to \infty} \varphi(n) = \infty \wedge (\forall t \in G)(\lim_{n \to \infty} \alpha_{\varphi(n)}(t) = \alpha(t)), \qquad (1)$$

$$(\forall c_1, c_2 \in R)(\delta^+(\alpha, c_1, c_2) \geq \delta^+(A, c_1, c_2)) \qquad (2)$$

Пусть $\beta_n \in BB^-(G, \bar{R})$, $n = 1, 2, \ldots$, $B = \{\beta_n : n \in N\}$ и выполнятся условия UBB^-. Тогда найдутся $\varphi : N \to N$ и $\beta \in BB^-(G, \bar{R})$ такие, что

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(n)=\infty \wedge (\forall t\in G)(\lim_{n\to\infty} \beta_{\varphi(n)}(t)=\beta(t)), \tag{3}$$

$$(\forall c_1,c_2\subset R)(\delta^-(\beta,c_1,c_2)\geq\delta^-(B,c_1,c_2)). \tag{4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем (I). Пусть множество $G_0\subset G$ счетно и всюду плотно в G. Диагональным методом найдем $\psi: N\to N$ и $\alpha_0: G_0\to R$ такие, что $\lim_{n\to\infty}\psi(n)=\infty$ и для любого $t\in G_0$ $\alpha_{\psi(n)}(t)\to\alpha_0(t)$. Из определения α_0 следует

$$(\forall c_1,c_2\in R)(\delta^+(\alpha_0,c_1,c_2)\geq\delta^+(A,c_1,c_2)),$$

а из теоремы 3 имеем $\alpha_0^*\in BB^+(I,\bar{R})$ и $\delta^+(\alpha_0^*,c_1,c_2)=\delta^+(\alpha_0,c_1,c_2)$ для любых $c_1,c_2\in R$. По лемме 2

$$(\forall t\in G\setminus\{a,b\})(\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\alpha_{\psi(n)}(t)\leq\alpha_0^*(t)). \tag{I*}$$

Пусть

$$T=\{t\in G\setminus\{a,b\}:\underline{\lim_{n\to\infty}}\,\alpha_{\psi(n)}(t)<\alpha_0^*(t)\}. \tag{2*}$$

Из (I*) и (2*) следует, что

$$(\forall t\in G\setminus(T\cup\{a,b\}))(\lim_{n\to\infty}\alpha_{\psi(n)}(t)=\alpha_0^*(t)).$$

Покажем, что множество T не более чем счетно. По теореме I (33) множество

$$\{t\in G\setminus\{a,b\}:\alpha_{0*}(t)\leq\underline{\lim_{n\to\infty}}\,\alpha_{\psi(n)}(t)<\alpha_0^*(t)\}$$

не более чем счетно, а по лемме 2 и теореме I (34) множество

$$\{t\in G\setminus\{a,b\}:\underline{\lim_{n\to\infty}}\,\alpha_{\psi(n)}(t)<\alpha_{0*}(t)\}$$

конечно. Диагональным методом найдем $\omega: N\to N$ и $\alpha: G\to R$ такие, что $\lim_{n\to\infty}\omega(n)=\infty$ и для $\varphi=\psi(\omega)$ справедливо (I). По теореме 3 $\alpha\in BB^+(G,\bar{R})$ и $\delta^+(\alpha,c_1,c_2)=\delta^+(\alpha_0^*,c_1,c_2)$ для любых $c_1,c_2\in R$, что доказывает (2).

Т е о р е м а 7. Пусть $\alpha, \alpha_n \in BB^+(G,\bar{R})$, $n=1,2,\dots$, $A=\{\alpha_n : n\in N\}$, выполняются условия UBB^+ и

$$(\forall t\in G)(\lim_{n\to\infty}\alpha_n(t)=\alpha(t)).$$

Тогда

$$(\forall a_1\in G\setminus\{b\})(\forall b_1\in G\cap(a_1,b])(\forall L\in(0,\infty))$$
$$((\forall t\in G\cap(a_1,b_1])(-L<D_r\alpha(t)<L)\wedge(\forall t\in G\cap[a_1,b_1))$$
$$(-L<D_l\alpha(t)<L)\Rightarrow(\forall\varepsilon\in(0,\infty))(\exists k\in N)(\forall n\in\{k,k+1,\dots\})\tag{1}$$
$$(\forall t\in G\cap[a_1,b_1])(|\alpha(t)-\alpha_n(t)|<\varepsilon)),$$

$$(\forall L\in R)((\forall t\in G\setminus\{a\})(L<D_l\alpha(t))\Rightarrow(\forall a_1\in G\setminus\{a\})$$
$$(\forall\varepsilon\in(0,\infty))(\exists k\in N)(\forall n\in\{k,k+1,\dots\})(\forall t\in G\cap[a_1,b])\tag{2}$$
$$(L-\varepsilon<D_l\alpha_n(t))),$$

$$(\forall L\in R)((\forall t\in G\setminus\{b\})(D_r\alpha(t)<L)\Rightarrow(\forall b_1\in G\setminus\{b\})$$
$$(\forall\varepsilon\in(0,\infty))(\exists k\in N)(\forall n\in\{k,k+1,\dots\})(\forall t\in G\cap[a,b_1])\tag{3}$$
$$(D_r\alpha_n(t)<L+\varepsilon)).$$

Пусть $\beta,\beta_n\in BB^-(G,\bar{R})$, $n=1,2,\dots$, $B=\{\beta_n : n\in N\}$, выполняются условия UBB^- и

$$(\forall t\in G)(\lim_{n\to\infty}\beta_n(t)=\beta(t)).$$

Тогда

$$(\forall a_1\in G\setminus\{b\})(\forall b_1\in G\cap(a_1,b])(\forall L\in(0,\infty))$$
$$((\forall t\in G\cap(a_1,b_1])(-L<D_r\beta(t)<L)\wedge(\forall t\in G\cap[a_1,b_1))\tag{4}$$
$$(-L<D_l\beta(t)<L)\Rightarrow(\forall\varepsilon\in(0,\infty))(\exists k\in N)(\forall n\in\{k,k+1,\dots\})$$
$$(\forall t\in G\cap[a_1,b_1])(|\beta(t)-\beta_n(t)|<\varepsilon)),$$

$$(\forall L\in R)((\forall t\in G\setminus\{a\})(D_l\beta(t)<L)\Rightarrow(\forall a_1\in G\setminus\{a\})$$
$$(\forall\delta\in(0,\infty))(\exists k\in N)(\forall n\in\{k,k+1,\dots\})(\forall t\in G\cap[a_1,b])\quad (5)$$
$$(D_l\beta_n(t)<L+\delta)),.$$

$$(\forall L\in R)((\forall t\in G\setminus\{b\})(L<D_r\beta(t))\Rightarrow(\forall b_1\in G\setminus\{b\})$$
$$(\forall\delta\in(0,\infty))(\exists k\in N)(\forall n\in\{k,k+1,\dots\})(\forall t\in G\cap[a,b_1])\quad (6)$$
$$(L-\delta<D_r\beta_n(t))).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем (I). Предположим противное. Тогда

$$(\exists a_1\in G\setminus\{b\})(\exists b_1\in G\cap(a_1,b])(\exists L\in(0,\infty))$$
$$((\forall t\in G\cap(a_1,b_1])(-L<D_l\alpha(t)<L)\wedge(\forall t\in G\cap[a_1,b_1))$$
$$(-L<D_r\alpha(t)<L)\wedge(\exists\delta\in(0,\infty))(\forall k\in N)(\exists n\in\{k,k+1,\dots\})$$
$$(\exists t\in G\cap[a_1,b_1])(|\alpha(t)-\alpha_n(t)|\geq\delta).$$

Для функции α на интервале $[a_1,b_1]$ из теоремы I (36-39) следует условие Липшица с константой L . Пусть

$$\delta=\min\{\delta^+(A,-L-1,-L-2),\ \delta^+(A,L+2,L+1)\},$$

$m\in\{2,3,\dots\}$ и s_i , $i=0,\dots,m+1$ такие, что $s_0=a_1, s_{m+1}=b_1$,

$$s_i\in(a_i+(i-1)(b_1-a_1)m^{-1},\ a_i+i(b_1-a_1)m^{-1}),\ i=1,\dots,m,$$
$$m>\max\{8(b_1-a_1)(L+1)\delta^{-1},\ 4(b_1-a_1)\delta^{-1}\}.$$

Выберем $k\in N$ так, чтобы

$$(\forall i\in\{0,\dots,m+1\})(\forall n\in\{k,k+1,\dots\})(|\alpha(s_i)-\alpha_n(s_i)|<\delta/2).$$

$(\forall i\in\{0,\dots,m\})(\forall n\in\{k,k+1,\dots\})(|\alpha_n(s_{i+1})-\alpha_n(s_i)|<(L+1)(s_{i+1}-s_i))$.

Пусть $i\in\{0,\dots,m\}$ такое, что $t\in(s_i,s_{i+1})$ и $|\alpha_1(t)-\alpha_n(t)|\geq\delta$. Если $\alpha_1(t)-\alpha_n(t)\geq\delta$, то из

$$\alpha_n(t)-\alpha_n(s_i)=\alpha_n(t)-\alpha_1(t)+\alpha_1(t)-\alpha_1(s_i)+\alpha_1(s_i)-\alpha_n(s_i)<$$

$$<-\delta+L(t-s_i)+\delta/2=-(L+2)(t-s_i)+2(L+1)(t-s_i)-\delta/2<$$

$$<-(L+2)(t-s_i)+4(L+1)(b_1-a_1)m^{-1}-\delta/2\leq-(L+2)(t-s_i)+$$

$$+4(L+1)(b_1-a_1)8^{-1}(b_1-a_1)^{-1}(L+1)^{-1}\delta-\delta/2=-(L+2)(t-s_i)$$

следует

$$\alpha_n(t)-\alpha_n(s_i)<-(L+2)(t-s_i). \qquad (1^*)$$

Аналогично получается неравенство

$$\alpha_n(s_{i+1})-\alpha_n(t)>(L+2)(s_{i+1}-t). \qquad (2^*)$$

Если $0<i$, то

$$\alpha_n(s_i)-\alpha_n(s_{i-1})>-(L+1)(s_i-s_{i-1}). \qquad (3^*)$$

Из (1*) и (3*) следует $\delta\leq t-s_{i-1}<4(b_1-a_1)m^{-1}$, что противоречит выбору m. Если $i<m$, то

$$\alpha_n(s_{i+2})-\alpha_n(s_{i+1})<(L+1)(s_{i+2}-s_{i+1}). \qquad (4^*)$$

Из (2*) и (4*) следует $\delta\leq s_{i+2}-t<4(b_1-a_1)m^{-1}$, что противоречит выбору m. Если $\alpha_n(t)-\alpha(t)\geq\delta$, то аналогично предыдущему имеем

$$\alpha_n(t)-\alpha_n(s_i)>(L+2)(t-s_i),$$

$$\alpha_n(s_{i+1})-\alpha_n(t)<-(L+2)(s_{i+1}-t).$$

Следовательно, $\delta\leq s_{i+1}-s_i<2(b_1-a_1)m^{-1}$, что противоречит выбору m.

Докажем (2). Предположим противное. Тогда

$$(\exists L\in\mathbb{R})((\forall t\in G\setminus\{a\})(L<D_2\alpha(t))\wedge(\exists a_1\in G\setminus\{a\})(\exists\varepsilon\in(0,\infty))$$

$$(\forall k\in\mathbb{N})(\exists n\in\{k,k+1,\dots\})(\exists t\in G\cap[a_1,b])(L-\varepsilon>D_2\alpha_n(t)). \qquad (5^*)$$

Из (5^*) следует существование $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $s_0\in[a_1,b]$ и $s:\mathbb{N}\to G\cap[a_1,b]$ таких, что $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(n)=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=s_0$ и

$$(\forall n\in\mathbb{N})(L-\varepsilon>D_2\alpha_{\varphi(n)}(s_n)).$$

Пусть $\delta=\delta^+(A,L,L-\varepsilon/2)$, $\tau_1,\tau_2\in G$ такие, что $s_0-\delta/2<\tau_1<\tau_2<s_0$ и

$$\alpha(\tau_2)-\alpha(\tau_1)>L(\tau_2-\tau_1).$$

Выберем $k\in\mathbb{N}$ так, чтобы $s_k\in(\tau_2,s_0+\delta/2)$ и

$$\alpha_{\varphi(k)}(\tau_2)-\alpha_{\varphi(k)}(\tau_1)>L(\tau_2-\tau_1).$$

Тогда найдется $\tau_3\in G\cap(\tau_2,s_k)$ такое, что

$$\alpha_{\varphi(k)}(s_k)-\alpha_{\varphi(k)}(\tau_3)<(L-\varepsilon/2)(s_k-\tau_3).$$

Следовательно, $\delta\le s_k-\tau_1$, что противоречит выбору τ_1 и s_k.

Аналогично доказывается (3).

Аналогично доказываются (4)-(6).

Литература

1. Лепин А.Я., Лепин Л.А. Краевые задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка - Рига: Зинатне, 1988. - 211 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

МАТЕМАТИКА

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Научные труды

Том 570

Рецензенты: Е.Ф.Царьков, д-р физ.-мат.наук, проф РТУ;
А.Райнфельд, канд.физ.-мат.наук Латвийской Академии наук;
Н.И.Васильев, вед.науч.сотр.Ин-та математики и информатики.

Редакторы: Ю.Клоков, Р.Павлова
Технический редактор С.Дзенизя
Корректор И.Балоде

Подписано к печати 22.01.1992. Ф/б 60х84/16.
Бумага №1. 9,6 физ.печ.л. 8,9 усл.печ.л. 7,5 уч.-изд.л.
Тираж 300 экз. Рег.уд.№ 2-0266. Зак.№ 71 Цена 3.40

Латвийский университет
226098 Рига, б. Райниса, 19
Отпечатано на ротапринте ЛУ
226050 Рига, ул. Калею, 43

УДК 517.927

Гризанс Г.П. ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДВУХ СИНГУЛЯРНЫХ УРАВНЕНИЙ // Математика. Дифференциальные уравнения: Научные труды. – Рига: ЛУ, 1991. – С.3-11.

В статье исследуются вопросы существования и несуществования решения сингулярной краевой задачи.
Библиогр. 9 назв.

G.Grizāns. PAR KĀDU ROBEŽPROBLĒMU DIVU SINGULĀRU VIENĀDOJUMU SISTĒMAI.

Tiek pētīta singulāras nelineāru vienādojumu robežproblēmas atrisinājumu eksistence un neeksistence.

G.Grizans. ON A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE SYSTEM OF TWO DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH SINGULARITY.

The article deals with existence and nonexistence for a singular boundary value problem for equations of superlinear type.

УДК 517.95

Райтум У.Е. К СИЛЬНОЙ СХОДИМОСТИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ С МНОГОЗНАЧНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ // Математика. Дифференциальные уравнения: Научные труды. – Рига: ЛУ, 1991. – С.12-23.

Рассматривается абстрактная версия уравнений

$$-\operatorname{div} A(x,u,u_x) + a_0(x,u,u_x) \ni 0 \qquad (*)$$

с многозначными операторами A и a_0. Получены условия, обеспечивающие сильную сходимость решений последовательности уравнений вида (*).
Библиогр. 2 назв.

U.Raitums. PAR VIENĀDOJUMU AR DAUDZNOZĪMĪGIEM OPERATORIEM ATRISINĀJUMU STIPRO KONVERĢENCI.

Aplūkota vienādojums

$$-\operatorname{div} A(x,u,u_x) + a_0(x,u,u_x) \ni 0 \qquad (*)$$

abstrakta versija. Iegūti nosacījumi, kuri garantē (*) tipa vienādojumu virknes atrisinājumu stipro konverģenci.

U.Raitums. ON THE STRONG CONVERGENCE OF SOLUTIONS OF EQUATIONS WITH MULTIVALUED OPERATORS.

In this paper we consider an abstract version of the equations

$$-\mathrm{div}\, A(x, u, u_x) + a_0(x, u, u_x) \qquad (*)$$

with multivalued operators A and a_0.

There are given some conditions (strong monotonicity of A with respect to u_x, growth conditions, some compactness properties) which ensure the strong convergence of solutions of the sequence of equations of the type (*).

УДК 517.927

Унгуре А.А., Цепитис Я.В. О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С НЕСУММИРУЕМЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ // Математика. Дифференциальные уравнения: Научные труды. - Рига: ЛУ, 1991. - С.24-34.

Изучается двухточечная краевая задача для системы уравнений второго порядка, обобщающая краевую задачу

$$x_i'' + \frac{1-p_i+q_i}{t} x_i' - \frac{p_i q_i}{t^2} x_i = t^{r_i} h_i\left(t, \frac{x_1}{t^{p_1}}, \dots, \frac{x_n}{t^{p_n}}, \frac{x_1'}{t^{p_1-1}}, \dots, \frac{x_n'}{t^{p_n-1}}\right),$$

$$x_i(0) = 0, \quad a_i x_i(1) + b_i x_i'(1) = c_i,$$

где $i=1,\dots,n$; $p_i, q_i, r_i, c_i \in R$; $a_i, b_i \in [0,+\infty)$, $a_i + b_i \neq 0$, $h_i \in C([0,1] \times R^{2n})$.

Библиогр. 6 назв.

Ungure A., Cepītis J. PAR VIENAS ROBEŽPROBLĒMU KLASES ATRISINĀMĪBU OTRĀS KĀRTAS PARASTO DIFERENCIĀLVIENĀDOJUMU SISTĒMĀM AR NEINTEGRĒJAMĀM SINGULARITĀTĒM

Tiek pētīta divpunktu robežproblēma otrās kārtas vienādojumu sistēmai, kura vispārina robežproblēmu

$$x_i'' + \frac{1-p_i+q_i}{t} x_i' - \frac{p_i q_i}{t^2} x_i = t^{r_i} h_i\left(t, \frac{x_1}{t^{p_1}}, \dots, \frac{x_n}{t^{p_n}}, \frac{x_1'}{t^{p_1-1}}, \dots, \frac{x_n'}{t^{p_n-1}}\right),$$

$$x_i(0) = 0, \quad a_i x_i(1) + b_i x_i'(1) = c_i,$$

kur $i=1,\dots,n;\ p_i, q_i, r_i, c_i \in \mathbb{R};\ a_i, b_i \in [0,+\infty)$,
$a_i+b_i \neq 0,\ \ h_i \in C([0,1]\times\mathbb{R}^{2n})$.

Ungure A., Cepitis J. ON THE SOLVABILITY OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR SYSTEMS OF SECOND ORDER ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH UNSUMMABLE SINGULARITIES.

There is investigated two-point boundary value problem for system of second order equations, which is the generalization of the boundary value problem

$$x_i'' + \frac{1-p_i+q_i}{t} x_i' - \frac{p_i q_i}{t^2} x_i =$$
$$= t^{r_i} h_i\left(t, \frac{x_1}{t^{p_1}}, \dots, \frac{x_n}{t^{p_n}}, \frac{x_1'}{t^{p_1-1}}, \dots, \frac{x_n'}{t^{p_n-1}}\right),$$
$$x_i(0)=0, \quad a_i x_i(1) + b_i x_i'(1) = c_i,$$

where $i=1,\dots,n,\ p_i, q_i, r_i, c_i \in \mathbb{R};\ a_i, b_i \in [0,+\infty)$,
$a_i+b_i \neq 0,\ \ h_i \in C([0,1]\times\mathbb{R}^{2n})$.

УДК 517.927

Беспалова С.А., Клоков Ю.А. ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ УРАВНЕНИЯ ФОЛКНЕРА-СКЕНА. III // Математика. Дифференциальные уравнения: Научные труды. - Рига: ЛУ, 1991. - С.35-41.

Изучается разрешимость краевой задачи

$$x''' = Q_2(x') + Bx(x'-\gamma) + x''(a_0 + a_1 x + a_2 x' + a_3 x'')$$
$$x(0)=x_0,\ \ x'(0)=a,\ \ x'(\infty)=\gamma,$$

где $Q_2(x') = b_0 + b_1 x' + b_2 x'^2,\ \ b_i \in \mathbb{R},\ a_j \in \mathbb{R}\ (i=\overline{0,2};\ j=\overline{0,3})$,
$0<a<\gamma,\ \ x_0 \geq 0$.
Библиогр. 4 назв.

S.Bespalova, J.Klokovs. PAR KĀDU FOLKNERA-SKENA DIFERENCIĀLVIENĀDOJUMU VISPĀRINĀJUMU. III.

Apskatīta atrisinājuma eksistence robežproblēmai

$$x''' = Q_2(x') + Bx(x'-\gamma) + x''(a_0 + a_1 x + a_2 x' + a_3 x'')$$

$$x(0)=x_0,\quad x'(0)=a,\quad x'(\infty)=\gamma,$$

kur $Q_2(x')=b_0+b_1x'+b_2x'^2$, $b_i\in R$, $a_j\in R$ $(i=\overline{0,2};\ j=\overline{0,3})$, $0<a<\gamma$, $x_0\geq 0$.

S.Bespalova, J.Klokov. ON GENERALIZATION OF THE FOLKNER-SKAN EQUATION. III.

Existence of the solution of the boundary value problem

$$x'''=Q_2(x')+Bx(x'-\gamma)+x''(a_0+a_1x+a_2x'+a_3x'')$$

$$x(0)=x_0,\quad x'(0)=a,\quad x'(\infty)=\gamma,$$

where $Q_2(x')=b_0+b_1x'+b_2x'^2$, $b_i\in R$, $a_j\in R$ $(i=\overline{0,2};$ $j=\overline{0,3})$ $0<a<\gamma$, $x_0\geq 0$ is studied.

УДК 517.927.4

Гудков В.В. РАЗРЕШИМОСТЬ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОЙ МОДЕЛИ ПОЛУПРОВОДНИКОВОГО ПРИБОРА // Математика. Дифференциальные уравнения: Научные труды. - Рига: ЛУ, 1991. - С.42-53.

Исследуется система 4-х обыкновенных дифференциальных уравнений, моделирующая одномерный стационарный процесс протекания тока через полупроводниковый прибор, состоящий из двух звеньев. Доказана теорема существования решения краевой задачи для упомянутой системы уравнений. Библиогр. 4 назв.

V.Gudkovs. ROBEŽPROBLĒMAS ATRISINĀMĪBA PUSVADĪTĀJU IERĪCES VIENDIMENSIJU MODELIM.

Tiek pētīta 4 parasto difereciālvienādojumu sistēma, kura modelē viendimensiju stacionāru strāvas plūsmu caur pusvadītāju ierīci. Pierādīta robežproblēmas atrisinājuma eksistences teorēma pieminētai vienādojumu sistēmai.

V.Gudkov. THE SOLVABILITY OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR ONE-DIMENSIONAL MODEL OF SEMICONDUCTOR DEVICE.

The system of fourth ordinary differential equations, modelling semiconductor device in a one-dimensional stationary case, is investigated. An existence theorem is proved for related boundary value problem.

УДК 517.927.4

Виржбицкий Я.В., Пономарев Д.Ю. ПОЛНОТА МНОЖЕСТВА ТЕОРЕМ РАЗРЕШИМОСТИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ // Математика. Дифференциальные уравнения: Научные труды. - Рига: ЛУ, 1991. - С.54-65.

Доказана полнота множества теорем разрешимости двухточечной краевой задачи для ОДУ 2 порядка с некоторыми дополнительными условиями.
Библиогр. 2 назв.

Viržbickis J., Ponomarjovs D. ATRISINĀMĪBAS TEORĒMU KOPAS PILNUMS KĀDAI ROBEŽPROBLĒMU KLASEI.

Pierādīts divpunktu robežproblēmas otrās kārtas PDV teorēmu kopas pilnums ar dažiem papildus nosacījumiem.

Virzhbitski J., Ponomarev D. COMPLETENESS OF THE SET OF EXISTENCE THEOREMS FOR A CERTAIN CLASS OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS.

The completeness of the set of existence theorems is proved for two-point boundary value problem for ODE with some conditions.

УДК 517.927.4+517.988.5

Пономарев В.Д. ЛОКАЛЬНАЯ ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ // Математика. Дифференциальные уравнения: Научные труды. - Рига: ЛУ, 1991. - С. 66-71.

Для системы операторных уравнений

$$Fx = 0, \quad \Phi x = 0,$$

где $F: E_1 \to E_2$, $\Phi: E_1 \to E_3$, E_i, $i = 1,2,3$ - вещественные нормированные пространства, приводятся условия, при которых решение этой системы локально единственно.
Библиогр. 5 назв.

V.Ponomarjovs. OPERATORVIENĀDOJUMU SISTĒMAS ATRISINĀJUMU LOKĀLĀ UNITĀTE.

Operatoru vienādojumu sistēmai

$$Fx = 0, \quad \Phi x = 0,$$

kur $F: E_1 \to E_2$, $\Phi: E_1 \to E_3$, E_i, $i = 1,2,3$ - reālas, normētas telpas, doti nosacījumi, lai dotai sistēmai būtu lokālā unitāte.

V.Ponomarev. LOCAL UNIQUENESS FOR A SYSTEM OF OPERATOR EQUATIONS.

For a system of operator equations

$$Fx=0, \quad \Phi x=0,$$

where $F: E_1 \to E_2$, $\Phi: E_1 \to E_3$, E_i, $i=1,2,3$ - are real normed spaces the conditions for the local uniqueness of a solution are derived.

УДК 517.927

Звягинцев А.И., Карташова И.И. ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ С ПАРАМЕТРАМИ // Математика. Дифференциальные уравнения: Научные труды. - Рига: ЛУ, 1991. - С.72-79.

Получены условия существования решения для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с двухточечными краевыми условиями, содержащей параметры. В качестве приложений доказаны теоремы существования и единственности решения для одной прикладной задачи электродиффузии. Библиогр. 6 назв.

A.Zvjaginceva, I.Kartašova. PAR KĀDU ROBEŽPROBLĒMU AR PARAMETRIEM.

Iegūti parasto diferenciālvienādojumu atrisinājumu eksistences nosacījumi, ja atrisinājums noteikts pie robežnosacījumiem un noteikta parametra. Pielikumā doti teorēmu pierādījumi atrisinājuma eksistēšanai un unitātei vienam elektrodifūzijas uzdevumam.

A.Zvyagintsev, I.Kartashova. ON A CERTAIN BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH PARAMETERS.

For system of ordinary differential equations with parameters conditions ensuring the existense of solutions are obtained. As an application the existense and uniqueness theorems for a certain problem of ekestrodiffusion is proved.

УДК 517.927

Звягинцев А.И., Тихая О.В. ОБ ОДНОЙ ПРИКЛАДНОЙ ЗАДАЧЕ // Математика. Дифференциальные уравнения: Научные труды. - Рига: ЛУ, 1991. - С.80-84.

Получены условия существования решения конкретной краевой задачи, которая возникает при моделировании реакции окисления на поверхности катализатора.
Библиогр. 2 назв.

A.Zvjagincevs, O.Tihaja. PAR KĀDU LIETIŠĶU PROBLĒMU.

Ir atrasti konkrētās robežproblēmas atrisinājumu eksistēšanas noteikumi. Robežproblēma ir saistīta ar oksidēšanas reakcijas modelēšanu uz katalizatora virsmas.

A.Zvyagintsev, O.Tihaya. ON A CERTAIN APPLIED PROBLEM.

The conditions ensuring the existence of a solution of a certain boundary value problem modeling the oxidation reaction on the surface of catalizator are obtained.

Калис Х.Э. О СПЕЦИАЛЬНОЙ РАЗНОСТНОЙ АППРОКСИМАЦИИ НЕСАМОСОПРЯЖЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В КРИВОЛИНЕЙНЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ // Математика. Дифференциальные уравнения: Научные труды. - Рига: ЛУ, 1991. - С.85-93.

На основе специальной разностной аппроксимации несамосопряженных дифференциальных операторов второго порядка построена монотонная разностная схема для решения уравнения теплопроводности в широком диапазоне изменения параметров.
Библиогр. 8 назв.

H.Kalis. PAR SILTUMA VADĪŠANAS NEPAŠSAITĪTA DIFERENCIĀLVIENĀDOJUMA SPECIĀLU DIFERENČU APROKSIMĀCIJU LĪKLĪNIJU ORTOGONĀLĀS KOORDINĀTĒS.

Pamatojotos uz nepašsaistītu otrās kārtas diferenciāloperatoru speciālu diferenču aproksimāciju, ir konstruēta monotona diferenču shēma siltuma vadīšanas vienādojuma atrisināšanai plašā parametru izmaiņas diapazonā.

H.Kalis. ON THE SPECIAL DIFFERENCE APPROXIMATION OF NON-SELF-ADJOINT HEAT TRANSFER DIFFERENTIAL EQUATION IN CURVED LINE ORTOGONAL COORDINATES.

On the basis of special difference approximation of non-self-adjoint second order differential operators monotonous difference scheme for solution of heat transfer equation in a wide rahge of parameters is constructed.

УДК 621.373+517.927

Новиков В.П., Степанов А.А. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ОПТИКО-АКУСТИЧЕСКОЙ ДИАГНОСТИКИ ПОЛУПРОВОДНИКОВ // Математика. Дифференциальные уравнения: Научные труды. - Рига: ЛУ, 1991. - С.94-101.

В работе исследуется обратная краевая задача, возникающая в оптико-акустической спектроскопии, рассмотрены численные методы ее решения.
Библиогр. 7 назв.

V.Novikovs, A.Stepanovs. PUSVADĪTĀJU OPTISKI-AKUSTISKĀS DIAGNOSTIKAS INVERSAIS UZDEVUMS.

Darbā ir pētīta inversā robežproblēma, kas rodas optiski-akustiskajā spektroskopijā, tās risināšanai ir apskatītas skaitliskās metodes.

V.Novikov, A.Stepanov. THE INVERSE PROBLEM OF THE PHOTOACOUSTIC DIAGNOSTIC OF SEMICONDUCTORS.

In the paper is investigated the inverse boundary value problem of photoacoustic spectroskopy and discussed numerical methods for this ill-posed problems solutions.

УДК 517.925

Вольфсон И.А., Садырбаев Ф.Ж. О СОПРЯЖЕННЫХ ТОЧКАХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА // Математика. Дифференциальные уравнения: Научные труды. - Рига: ЛУ, 1991. - С. 102-110.

Исследован вопрос о взаимном расположении решений, имеющих простой нуль в фиксированной точке α, и экстремальных решений (т.е. решений, которые реализуют точки, сопряженные к $t=\alpha$) для уравнений класса II, т.е. уравнений, обладающих свойством: любое решение, имеющее двойной нуль, не обращается в нуль вправо от него.
Библиогр. 9 назв.

I.Volfsone, F.Sadirbaevs. PAR LINEĀRA TREŠĀS KĀRTAS VIENĀDOJUMA SAISTĪTAJIEM PUNKTIEM.

Izpētīts jautājums par atrisinājuma, kuram ir vienkārša nulle punktā α, un II klases vienādojumu, t.i. vienādojumu ar īpašību: jebkurš atrisinājums, kuram ir divkārša nulle, nepieņem nulles vērtību pa labi no tās, ekstremālo atrisinājumu (t.i. atrisinājumu, kuri realizē punktus saistītus ar $t=\alpha$) savstarpējo izvietojumu.

I.Volfson, F.Sadyrbaev. ON CONJUGATE POINTS OF THIRD ORDER LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS.

Given a point $t=\alpha$, the interrelation of extremal solutions (those realizing the conjugate points to $t=\alpha$) and solutions having simple zero at $t=\alpha$ is investigated for equations of classe II i.e. equations possessing the property: any solution with double zero ($x(\beta)=x'(\beta)=0$, $\beta>\alpha$) does not vanish to the right of that. As a consequense the continuous dependence of conjugate points on the coefficients of the equation is established.

УДК 517.927

Лепин А.Я. КЛАССЫ ФУНКЦИЙ С ОГРАНИЧЕННЫМ ИЗГИБАНИЕМ // Математика. Дифференциальные уравнения: Научные труды. - Рига: ЛУ, 1991. - С.111-141.

Дается новое определение функций с ограниченным изгибанием. Подробно изучаются основные свойства. Библиогр. 1 назв.

A.Ļepiņš. IEROBEŽOTI IZLIEKTU FUNKCIJU KLASES.

Formulēta jauna ierobežoti izliektu funkciju definīcija. Sīki pētītas pamatīpašības.

A.Lepin. SET OF FUNCTIONS WITH BOUNDED BENDING.

New definition of functions with bounded bending is given. Their basic properties are investigated in detail.