



LATVIJAS UNIVERSITĀTES
ZINĀTNISKIE RAKSTI

ACTA UNIVERSITATIS LATVIENSIS

592

MATEMĀTISKĀ MODELĒŠANA

MATEMĀTISKĀS FIZIKAS LIETIŠKĀS PROBLĒMAS

LATVIJAS UNIVERSITĀTE

Fizikas un matemātikas fakultāte
Diferenciālvienādojumu un tuvināto metožu katedra

**OBLIGĀTAIS
EKSEMPLĀRS**

MATEMĀTISKĀ MODELĒŠANA

MATEMĀTISKĀS FIZIKAS LIETIŠKĀS PROBLĒMAS

Zinātniskie raksti

572.sējums

Latvijas Universitāte
Rīga 1994

Matemātiskā modelēšana. Matemātiskās fizikas lietišķās problēmas: Zinātniskie raksti /Galv. red. prof. A.Buiķis //Atb. red. prof. H.Kalis. - Rīga: LU, 1994. - 592.sēj. - 174 lpp.

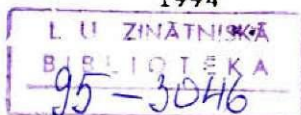
Zinātnisko rakstu krājums ietver Latvijas zinātnieku un augstskolu pasniedzēju un doktorantu zinātniskos darbus, izstrādātus laika periodā no 1992.-1993.gadam matemātiskajā modelēšanā, risinot dažādas matemātiskās fizikas lietišķās problēmas. Bez tam rakstu krājumā ir ietverti arī ZA un LU Matemātikas institūta semināra (1992.g.) "Matemātiskā modelēšana un pārejas procesa nehomogēnās vidēs parametru identifikācija" referātu tēzes.

Krājums domāts vecāko kursu studentiem, doktorantiem un zinātniskajiem darbiniekiem.

REDAKCIJAS KOLĒGIJA:

H.Kalis (atb. red.), N.Avdopins,
A.Buiķis (galv. red.), B.Martuzāns

© Latvijas
Universitāte,
1994



SATURA RĀDĪTĀJS

N. Avdonins, H. Kalis, G. Lurins. Temperatūras gradients, rotācijas un vibrācijas radītas šķidruma kustības skaitliskā modelēšana	5
N. Avdonins, G. Lurins. Temperatūras lauku, vibrācijas un dabiskās konvekcijas skaitliskā analīze aksiālsimetriskā gadījumā.....	15
A. Buikis. Dažu pāzemes filtrācijas procesu modelēšanas shēmu analīze	25
A. Buikis, N. Ulanova. Problēma par temperatūru frontes kustību diskrētā vidē risināšana	33
J. Čepītis. Par kādas robežproblēmas atrisinājumu skaitu	47
A. Cibulis. Kā nogludināt pārtrauktās nelinearitātes vienādojumu sistēmās?	55
A. Desmitnieks. Kādas kontaktpiblēmas skaitliskā atrisinājums.....	61
M. Gulbe. Fāzu pārejas robežas skaitliskā pētīšana no kausējuma audzējamās monokristālos.....	67
H. Kalis. Dažu nelineāru problēmu skaitliskā integrēšana ar galīgo diferencu metodi	73
H. Kalis. Dažu lineāru un nelineāru problēmu skaitliskā integrēšana ar galīgo diferencu metodi diferenciālvienādojumu sistēmām.....	91
G. Lurins. Datorprogrammu pakete aksiālsimetriskās šķidrums kustības skaitliskai modelēšanai cilindriskā iekārtā	105
A. Reinfelds. Neapgrīšanu attēlojumu invariantās kopas	115
ZA un LU Matemātikas institūta semināra "Matemātiskā modelēšana un pārejas procesa nehomogēnās vidēs parametru indentifikācija" referātu tēzes.....	125-174

CONTENTS

N. Avdonins, H. Kalis, G. Lurins. Numerical research of fluid flow induced by temperature gradient, rotation and vibration	5
N. Avdonins, G. Lurins. The numerical analysis of temperature fields, vibrational and natural convection in axially symmetric two dimensional case.	15
A. Buikis. The analysis of schemes for the modelling some processes of filtration in the underground.....	25
A. Buikis, N. Ulanova. Method for the solution of the moving temperature front in discrete medium.....	33

J.Cepitis. On the multiplicity of solutions of certain boundary value problem	47
A.Cibulis. How to smooth discontinuous nonlinearities in the systems of equations?	55
A.Desmitnicks. The numerical solution of a contract-problem	61
M.Gulbe. Numerical analysis of foam for surface of two phase at crystallization process of mono-crystal	67
H.Kalis. Numerical integration by finite-difference methods for some nonlinear problems	73
H.Kalis. Numerical integration by finite-difference methods for some problems of linear and nonlinear systems of differential equations.	81
G.Lurins. Software for the numerical simulation of axially symmetric fluid flow in cylindrical vessel	105
A.Reinfelds. Invariant Sets of noninvertible mapping...	115
References of seminar "Mathematical Modelling and Parameter Identification of transfer processes in nonhomogenous media"	125-174

Н. Авдонин, Х. Калис, Г. Луринс
Латвийский университет

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ,
ПОРОЖДЕННОГО ГРАДИЕНТОМ ТЕМПЕРАТУРЫ,
ВРАЩЕНИЕМ И ВИБРАЦИЕЙ

В работе /1/ была решена задача движения неизоэотермической жидкости при воздействии низкочастотных вибраций. В данной работе численно исследовано движение вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрической емкости, порожденное тремя источниками :

1) градиентом внешней температуры вдоль боковой поверхности сосуда ;

2) вибрирующим стержнем цилиндрической формы, размещенном в центре сосуда и погруженном на некоторую глубину в жидкость ;

3) вращением сосуда или центрального стержня вокруг центральной оси.

Вызванное этими факторами осесимметричное движение согласно /1/ и /2/ математически описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial t} = \nu \frac{\partial}{\partial r} \left(r^3 \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial r} \right) + \nu \frac{\partial^2 \mathcal{R}}{\partial z^2} - v_r \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial r} - v_z \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial z} - \frac{\beta g}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^4} \frac{\partial (W^2)}{\partial z} \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = -r \mathcal{R} \quad (2)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \nu r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} \right) + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - v_r \frac{\partial W}{\partial r} - v_z \frac{\partial W}{\partial z} \quad (3)$$

$$c_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - c_p \rho (v_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_z \frac{\partial T}{\partial z}) \quad (4)$$

где $\Omega = \frac{1}{z} \left(\frac{\partial V_z}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial z} \right)$ - нормированная функция завихренности, (5)

Ψ - функция гидродинамического тока,

T - температура,

$W = 2\pi\omega_r r^2$ - момент вращения (ω_r - частота вращения) (6)

$V_z = -\frac{1}{z} \frac{\partial \Psi}{\partial z}$ (7)

- компоненты скорости,

$V_z = \frac{1}{z} \frac{\partial \Psi}{\partial z}$ (8)

$\nu, \beta, \lambda, c_p, \rho$ - коэффициенты вязкости, теплового расширения, теплопроводности, теплоемкости и плотность.

Здесь можно напомнить, что уравнения (1) и (4) записаны в линейном приближении Буссинеска.

Уравнения (1)-(4) определены в области, представленной на рис.1.

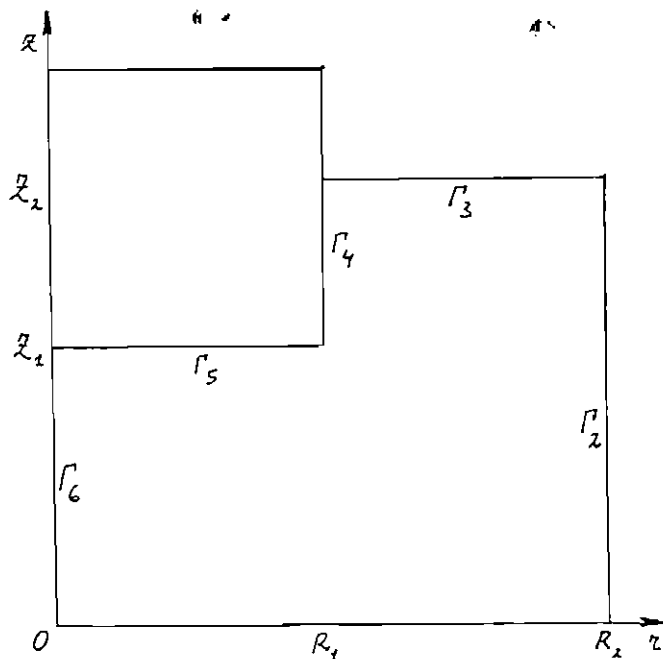


Рис.1. Схема расчетной области

Для ψ , ϱ на твердых стенках (Γ_1 , Γ_2) ставятся обычные условия прилипания, а на Γ_3 - условия свободной поверхности. На оси симметрии Γ_4

$$\frac{\partial \varrho}{\partial r} = 0 \quad (9)$$

Согласно [1], на вибрирующих поверхностях Γ_5 и Γ_6 имеем

$$\nu \partial V_z / \partial z = -\nu \delta^{-1} V_z + 0,5 \pi^2 \delta^{-1} a^2 \omega_v^2 z; V_z = 0 \quad (10)$$

$$\partial V_z / \partial r = -\delta^{-1} V_z \quad (11)$$

где a , ω_v - амплитуда и частота колебаний вибратора, а

$$\delta = \sqrt{2\nu / \omega_v} \quad (12)$$

Для температуры граничные условия на Γ_1 , Γ_2 и Γ_3 третьего рода

$$-r \frac{\partial T}{\partial n} = \alpha (T - T_0) \quad (13)$$

где n - внешняя нормаль, α - коэффициент теплоотдачи,

- внешняя температура. На оси симметрии Γ_4

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad (14)$$

Кроме того, внешняя температура вдоль боковой поверхности изменяется по закону

$$T_0 = T_1 - \kappa z / z_2 \quad (15)$$

Для момента вращения W в случае вращения стержня имеем следующие граничные условия:

$$W|_{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_6} = 0 \quad (16)$$

$$\frac{\partial W}{\partial z} \Big|_{\Gamma_3} = 0 \quad (17)$$

$$W|_{\Gamma_4, \Gamma_5} = 2\pi \omega_R r^2 \quad (18)$$

Начальные условия нулевые, кроме граничных значений для ϱ и W . Для температуры

$$T|_{t=0} = T_0 \quad (19)$$

Разностная аппроксимация уравнений (1), (2) и (4) проводилась также, как в [1], используя основную

$$S_h = \{(r_i, z_j), i = \overline{1, N+1}; j = \overline{1, M+1}\} \quad (20)$$

и вспомогательную сетки

$$S_{h/2} = \{(r_{i+0,5}, z_{j+0,5}), i = \overline{1, N}; j = \overline{1, M}\} \quad (21)$$

Уравнение (3) аппроксимировалось аналогично уравнению (1) на сетке $S_{h/2}$ монотонной экспоненциальной схемой:

$$\begin{aligned} \tilde{g}_j \tilde{h}_i \frac{W_{ij} - \hat{W}_{ij}}{\tau^2} = & \beta_{ij}^{(1)} (W_{i+1j} - W_{ij}) - \alpha_{ij}^{(1)} (W_{ij} - W_{i-1j}) + \\ & + \beta_{ij}^{(2)} (W_{ij+1} - W_{ij}) - \alpha_{ij}^{(2)} (W_{ij} - W_{ij-1}) \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$i = \overline{2, N-1}; j = \overline{2, M-1}$$

$$\beta_{ij}^{(1)} = \frac{\tau_{i+0,5}}{\tau_i} \frac{\tilde{g}_j}{h_i^+} \rho \left(\frac{(V_2)_{i+0,5} h_i^+}{\nu} \right); \beta_{ij}^{(2)} = \frac{\tilde{h}_i}{g_j^+} \rho \left(\frac{(V_2)_{ij+0,5} g_j^+}{\nu} \right);$$

$$\alpha_{ij}^{(1)} = \frac{\tau_{i+0,5}}{\tau_{i+1}} \frac{\tilde{g}_j}{h_i^-} \rho \left(\frac{(V_2)_{i-0,5} h_i^-}{\nu} \right); \alpha_{ij}^{(2)} = \frac{\tilde{h}_i}{g_j^-} \rho \left(\frac{(V_2)_{ij-0,5} g_j^-}{\nu} \right);$$

$$P(x) = \frac{x}{e^x - 1}; h_i^+ = \tau_{i+1,5} - \tau_{i+0,5}; h_i^- = \tau_{i+0,5} - \tau_{i-0,5};$$

$$g_j^+ = \tau_{j+1,5} - \tau_{j+0,5}; g_j^- = \tau_{j+0,5} - \tau_{j-0,5}; \tilde{h}_i = h_{i+1}; \tilde{g}_j = g_{j+1}$$

Слагаемое $\frac{1}{\tau^4} \frac{\partial(W^2)}{\partial z}$ в уравнении (1) аппроксимировалось с линеаризацией следующим образом:

$$\left(\frac{1}{\tau^4} \frac{\partial(W^2)}{\partial z} \right)_{ij} \approx \frac{W_{ij}}{\tau_{i+0,5}^4} \left(\frac{W_{ij+1} - W_{ij}}{g_j^+} + \frac{W_{ij} - W_{ij-1}}{g_j^-} \right) \quad (23)$$

На текущем временном слое разностное уравнение (22) рассчитывалось методом релаксации.

Численные расчеты проводились для цилиндрической емкости с радиусом 6 см и высотой 6 см на модельной жидкости. Вибрирующий стержень имел радиус 3 см и был погружен на 2,1 см в жидкость. Кинематическая вязкость 4,3 см²/сек, объемная теплоемкость 1,2 дж/см³ К, теплопроводность 0,4 Вт/(м*градК) и коэффициент теплового расширения 0,0001 1/градК. Внешняя температура под сосудом была 1500°К, над сосудом - 500°К, а вдоль боковой поверхности снизу вверх линейно уменьшалась на 20°К.

Циркуляция, вызванная такими температурными условиями представлена на рис.2. В этом случае один отрицательный вихрь занимает весь объем жидкости. Интенсивность движения характеризует среднее значение модуля скорости, которая в этом случае составляет 0,37 см/сек.

Вращение стержня с частотой 0,05 Гц приводит к распределению момента вращения представленном на рис.3 и порождает положительный вихрь (рис.4) слабой интенсивности.

При взаимодействии температурного и вращательного факторов полностью преобладает вихрь естественной конвекции. Влияния вращательного вихря в данном случае почти не наблюдается (рис.5).

Вибрация центрального стержня с амплитудой 0,1 мм и частотой 50 Гц порождает положительный вихрь (рис.6) интенсивностью 0,22 см/сек. Этот вихрь локализован ближе к центральному стержню и менее интенсивен, чем вихрь естественной конвекции (рис.2). В случае взаимодействия температурного и вибрационного факторов получаем двухвихревую картину течения (рис.7).

Совместное воздействие вибрации и вращения приводит к еще большему вытеснению и ослаблению температурного вихря (рис.8). В данном случае полностью преобладает вибрационный вихрь.

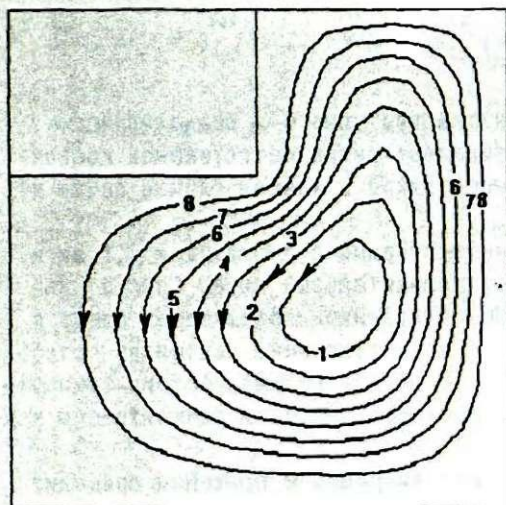
Если же вращение осуществлять с частотой 0,1 Гц, то преобладающим воздействием обладает вращательный вихрь и тот полностью вытесняет вихрь естественной конвекции из центральной области (см. рис.9,10).

Предложенную методику расчета можно применять при прогнозировании примесной чистоты и однородности монокристаллов при их выращивании из расплава. В этом случае роль центрального твердого стержня будет играть монокристалл.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Авдонин Н.А., Калис Х.Э. Численный анализ вибрационных течений в неизотермической жидкости//Сб. научных трудов "Математическое моделирование, прикладные задачи математической физики".- Рига:ЛУ, 1992,с.11-25.
2. Госмен А., Сполдинг Д. Расчет ламинарного циркуляционного течения между дисками, вращающимися в кожухе//Сб. переводов "Численные методы в механике жидкостей"-М: Мир,1973,с.260-268.

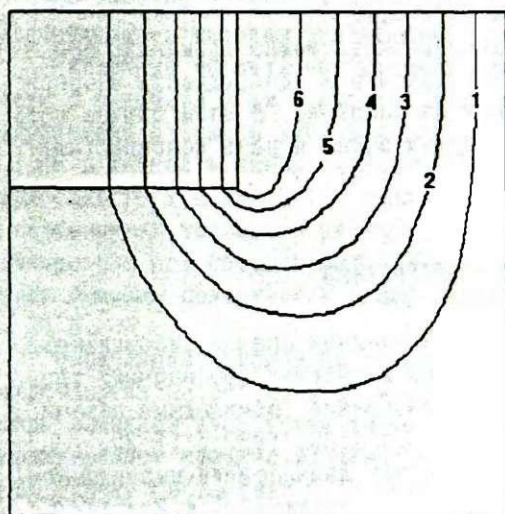
ИЗОЛИНИИ ФУНКЦИИ ТОКА [см*см*см/сек]

Значения
уровней:

- 1) -2.606
- 2) -2.280
- 3) -1.954
- 4) -1.628
- 5) -1.303
- 6) -0.977
- 7) -0.651
- 8) -0.326

Рис.2. Естественная конвекция при $\Delta T = 20^\circ \text{K}$.

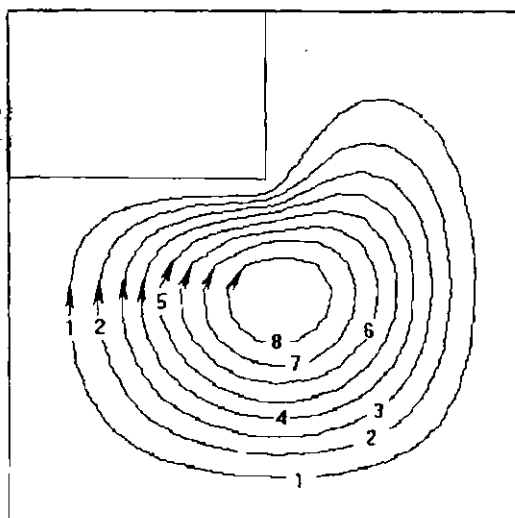
ИЗОЛИНИИ МОМЕНТА ВРАЩЕНИЯ [см*см/сек]

Значения
уровней:

- 1) 0.384
- 2) 0.768
- 3) 1.152
- 4) 1.536
- 5) 1.920
- 6) 2.304

Рис.3. Распределение момента вращения при $\omega_R = 0,05 \text{ Гц}$.

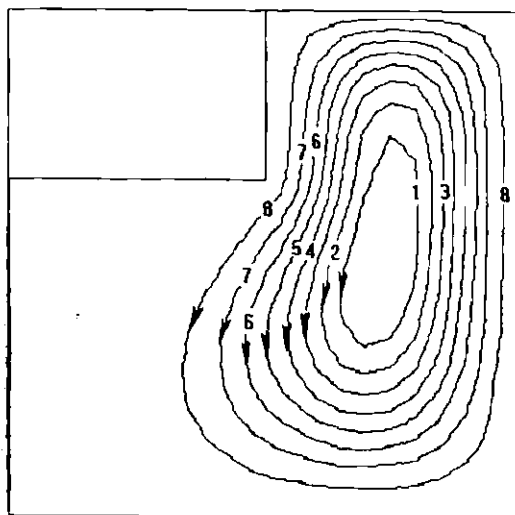
ИЗОЛИНИИ ФУНКЦИИ ТОКА [см*см*см/сек]

Значения
уровней:

- 1) 0.099
- 2) 0.197
- 3) 0.296
- 4) 0.395
- 5) 0.494
- 6) 0.592
- 7) 0.691
- 8) 0.790

Рис.4. Движение от вращения при $\omega_R = 0,05$ Гц.

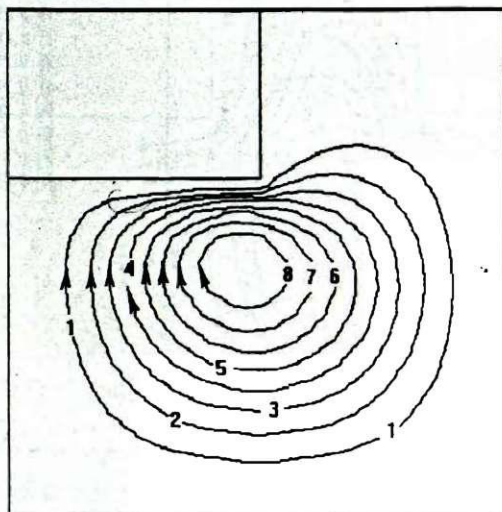
ИЗОЛИНИИ ФУНКЦИИ ТОКА [см*см*см/сек]

Значения
уровней:

- 1) -1.565
- 2) -1.361
- 3) -1.158
- 4) -0.955
- 5) -0.751
- 6) -0.548
- 7) -0.345
- 8) -0.141

Рис.5. Совместное движение при $\omega_R = 0,05$ Гц и $\Delta T = 20^\circ \text{K}$.

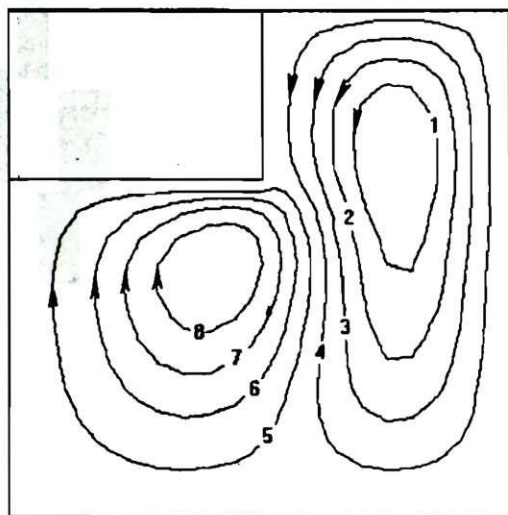
ИЗОЛИНИИ ФУНКЦИИ ТОКА [см*см*см/сек]

Значения
уровней:

- 1) 0.185
- 2) 0.371
- 3) 0.558
- 4) 0.744
- 5) 0.930
- 6) 1.116
- 7) 1.303
- 8) 1.489

Рис.6. Движение от вибрации при $\omega_v = 50$ Гц и $a = 0,1$ мм.

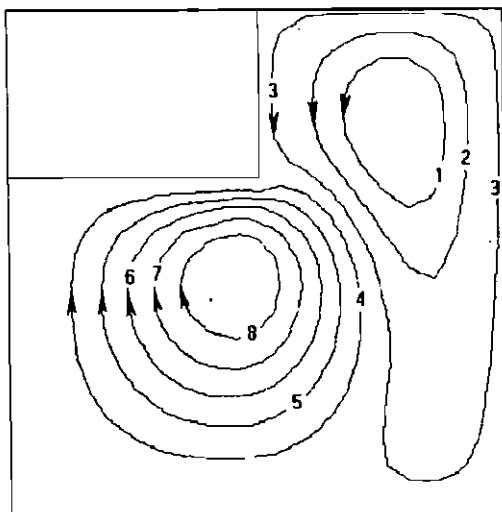
ИЗОЛИНИИ ФУНКЦИИ ТОКА [см*см*см/сек]

Значения
уровней:

- 1) -1.374
- 2) -1.011
- 3) -0.647
- 4) -0.283
- 5) 0.081
- 6) 0.445
- 7) 0.808
- 8) 1.172

Рис.7. Совместное движение при $\omega_v = 50$ Гц и $\Delta T = 20^\circ \text{K}$.

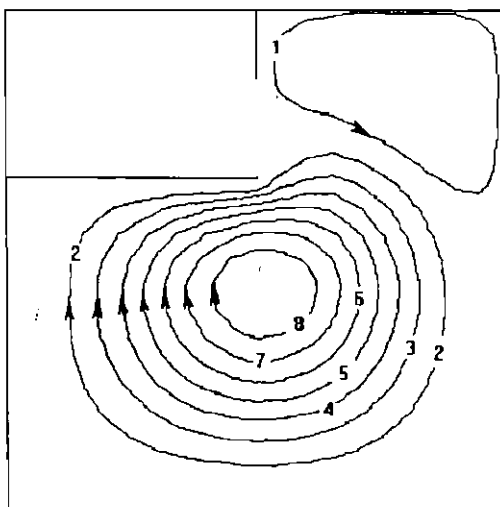
ИЗОЛИНИИ ФУНКЦИИ ТОКА [см*см*см/сек]

Значения
уровней:

- 1) -0.782
- 2) -0.412
- 3) -0.042
- 4) 0.328
- 5) 0.698
- 6) 1.068
- 7) 1.438
- 8) 1.808

Рис.8. Совместное движение от всех факторов при $\omega_R = 0.05$ Гц, $\omega_V = 50$ Гц и $\Delta T = 20^\circ \text{K}$.

ИЗОЛИНИИ ФУНКЦИИ ТОКА [см*см*см/сек]

Значения
уровней:

- 1) -0.025
- 2) 0.473
- 3) 0.971
- 4) 1.469
- 5) 1.967
- 6) 2.465
- 7) 2.963
- 8) 3.461

Рис.9. Совместное движение от всех факторов при $\omega_R = 0.1$ Гц, $\omega_V = 50$ Гц и $\Delta T = 20^\circ \text{K}$.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ, ПОРОЖДЕННОГО ГРАДИЕНТОМ ТЕМПЕРАТУРЫ, ВРАЩЕНИЕМ И ВИБРАЦИЕЙ. Н. Авдонин, Х. Калис, Г. Луринс // Математическое моделирование. Прикладные задачи математической физики. - Рига: ЛУ, 1993.

В работе предложена методика численного расчета движения вязкой, несжимаемой жидкости в цилиндрической емкости, порожденного градиентом внешней температуры, вращением и вибрацией. Проведен сравнительный численный анализ как отдельного, так и совместного воздействия вибрации и вращения на естественную конвекцию жидкости. Возможно использование разработанной методики для прогнозирования примесной чистоты и однородности монокристаллов при их выращивании из расплава.

Библ. 2 назв., рис. 9.

TEMPERATŪRAS GRADIENTA, ROTĀCIJAS UN VIBRĀCIJAS RADĪTAS ŠKIDRUMA KUSTĪBAS SKAITLISKĀ MODEĻĒŠANA. N. Avdonins, H. Kalis, G. Lurins // Matemātiskā modelēšana. Matemātiskās fizikas lietišķās problēmas. - Rīga: LU, 1993.

Darbā piedāvāta cilindriskā tilpumā notiekošas, ārējās temperatūras gradienta, vibrācijas un rotācijas izraisītas, viskoza, nesaspiežama šķidrums kustības skaitliskās aprēķināšanas metodika. Veikta salīdzinoša, gan atsevišķas, gan kopējas, vibrācijas un rotācijas ietekmes uz brīvu konvektīvu plūsmu skaitliskā analīze. Izstrādāto metodiku iespējams izmantot, lai prognozētu no šķidruma audzējamu monokristālu homogenitāti un piemaisījumu koncentrāciju tajos.

Bibi. 2, zīm. 9.

NUMERICAL RESEARCH OF FLUID FLOW INDUCED BY TEMPERATURE GRADIENT, ROTATION AND VIBRATION. N. Avdonins, H. Kalis, G. Lurins // Mathematical modelling. Applied problems of mathematical physics. - Riga: LU, 1993.

The numerical procedure of computing viscous incompressible fluid flows in cylindrical entities induced by external temperature gradient, rotation and vibration is offered. Particular and combined influence of rotation and vibration upon natural convection is studied numerically. The developed procedure can be applied for the prediction of impurity concentration and homogeneity of monocrystals grown from solution.

Ref. 2, fig. 9.

Н. Авдони, Г. Луринос

Институт математики и информатики
Латвийского университетаЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ,
ВИБРАЦИОННОЙ И ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ
В ОСЕСИММЕТРИЧНОМ ДВУХМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Рассматриваем осесимметричное движение вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрической емкости (рис.1), порожденное градиентом внешней температуры вдоль боковой поверхности сосуда и вертикальной вибрацией центрального стержня, погруженного на некоторую глубину в жидкость.

Такое движение описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = \frac{\nu}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^3 \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) + \nu \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} - V_r \frac{\partial \Omega}{\partial r} - V_z \frac{\partial \Omega}{\partial z} - \frac{\beta g}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -r \Omega \quad (2)$$

$$c_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - c_p \rho \left(V_r \frac{\partial T}{\partial r} + V_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (3)$$

где Ω - нормированная функция завихренности,

ψ - функция гидродинамического тока,

T - температура,

V_r, V_z - компоненты скорости,

$\nu, \beta, \lambda, c_p, \rho$ - коэффициенты вязкости, теплового расширения, теплопроводности, теплоемкости и плотности.

Уравнения (1) и (2) в этой системе взаимосвязаны: слагаемое в уравнении (1), содержащее градиент температуры, порождает движение, а конвективное слагаемое в уравнении (3) в свою очередь определяет влияние движения жидкости на распределение температуры.

На основе изложенной в [1] численной методики и используя разработанный пакет прикладных программ (описание см. в [2]), в настоящей работе проводится численный анализ температурных полей, потоков естественной и вибрационной конвекции и их взаимного влияния. Для этого были проведены многовариантные расчеты в широком диапазоне изменения значений физических параметров.

В настоящей статье приводим результаты расчетов и их анализ для цилиндрической установки размерами $Z = R = 6 \text{ см}$, $r_0 = 3 \text{ см}$ при перепаде внешней температуры вдоль боковой поверхности, равном 60°C , со следующими значениями параметров: $\lambda = 0.4 \text{ Вт/(м}^\circ\text{К)}$, $\rho = 1200 \text{ кг/м}^3$, $c_p = 0.001 \text{ кДж/(кг}^\circ\text{К)}$, $\beta = 0.01 \text{ 1/}^\circ\text{К}$, $\nu = 4.3$ и $0.35 \text{ см}^2/\text{сек}$.

Распределение температуры внутри цилиндрической установки представлено на рис. 2. Внутренний перепад температуры составляет 157°C , а радиальный градиент температуры во всей области положительный (рис. 3) и достигает $60^{\circ}\text{C}/\text{см}$.

Положительный градиент температуры по r приводит к образованию отрицательного вихря естественной конвекции, изображенного на рис. 4. Конвективное движение в своем очерде несколько выравнивает температурное поле (рис. 5,6). Внутренний перепад температуры в этом случае уменьшается до 111°C , а максимальный градиент $\partial T / \partial r$ — до $27.6^{\circ}\text{C}/\text{см}$.

Вибрация центрального стержня с частотой 50 Гц и амплитудой 0.1мм порождает вихрь положительного направления. Так как вибрационное движение в этом случае интенсивнее, то совместное движение, как видно на рис. 7, такого же характера. Температурное поле (рис.8) при этом становится еще более однородным (перепад температуры уменьшается до 97°C). Максимальное значение $\partial T / \partial r$ уменьшается всего на $1^{\circ}\text{C}/\text{см}$, но появляется область с отрицательным градиентом температуры (рис.9).

Совместное движение при меньшей вязкости ($\nu = 0.35\text{см}^2/\text{сек}$) изображено на рис.10. Характер движения в общем сохранился, но оно стало значительно интенсивнее, и центр вихря переместился вверх. Внутренний перепад температуры упал до 75°C (рис.11), но увеличилась область с отрицательным градиентом температуры (рис.12).

Проводились также расчеты при перепаде внешней температуры 600°C вдоль боковой поверхности сосуда. Перепад температуры внутри установки в этом случае значительно возрастает и достигает 402°C (рис.13), однако характер и даже интенсивность совместного движения (рис.14) мало меняются.

Подобное численное исследование по взаимному влиянию движения жидкости и температурного поля может быть полезным, в частности, при изучении и оптимизации процесса выращивания кристаллов из высокотемпературных расплавов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Авдони Н.А., Калис Х.Э. Численный анализ вибрационных течений в неизотермической жидкости // Сб. научных трудов "Математическое моделирование, прикладные задачи математической физики". — Рига: ЛУ, 1992. С.11–25.
2. Лурикс Г.Р. Пакет прикладных программ для численного моделирования осесимметричного движения жидкости в цилиндрической емкости (в этом сборнике).

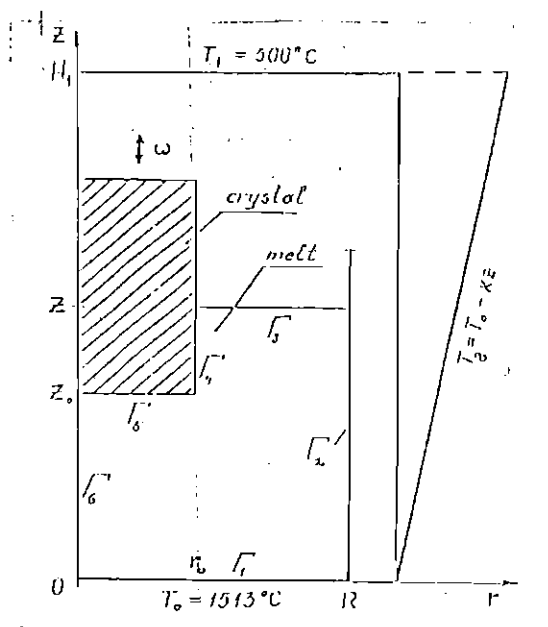
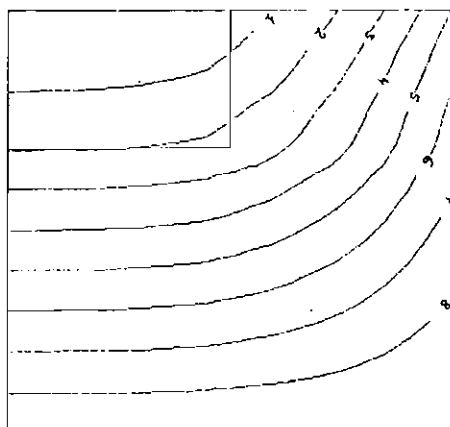


Рис. 1. Схема цилиндрической установки

ИЗОТЕРМЫ [град К]

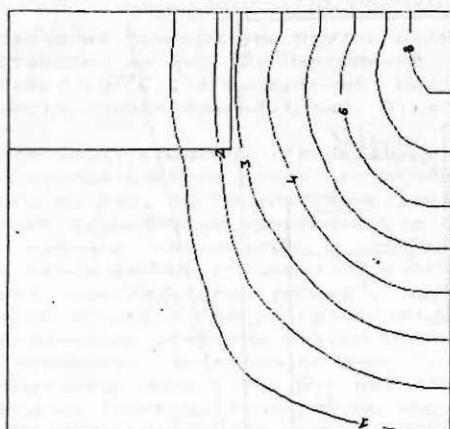


Значения
уровня:

1)	1316.0
2)	1336.5
3)	1358.9
4)	1381.4
5)	1403.9
6)	1426.4
7)	1448.8
8)	1471.3

Рис. 2. Температурное поле в отсутствии движения

Г Р А Д И Е Н Т Т Е М П Е Р А Т У Р Ы П О r (град К/см)

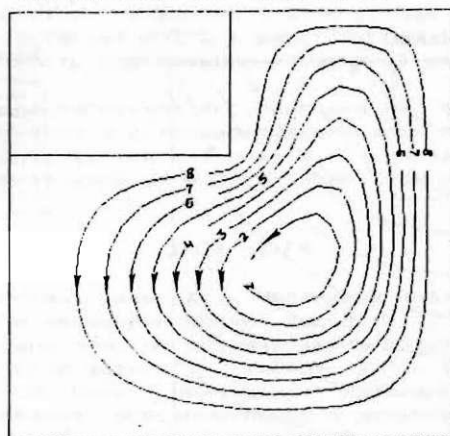


Значения
уровней:

- 1) 6.209
- 2) 12.552
- 3) 18.806
- 4) 25.060
- 5) 31.314
- 6) 37.568
- 7) 43.822
- 8) 50.076

Рис. 3. Градиент температуры в отсутствии движения

ИЗОЛИНИИ ФУНКЦИИ Т0Е0 (град/сек)



Значения
уровней:

- 1) -0.506
- 2) -0.442
- 3) -0.379
- 4) -0.316
- 5) -0.253
- 6) -0.190
- 7) -0.126
- 8) -0.063

Рис. 4. Естественная конвекция

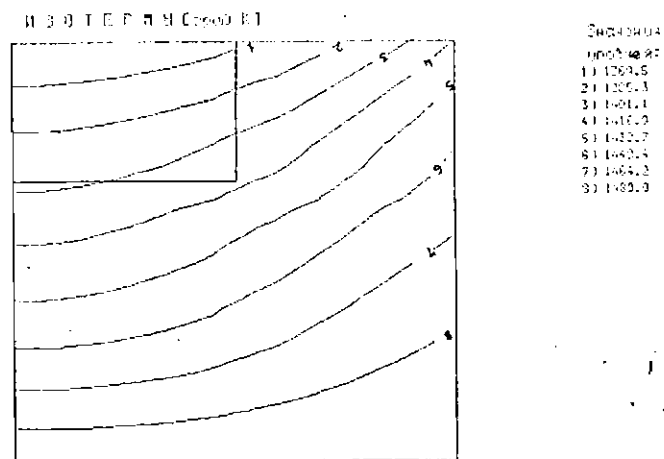


Рис. 5. Температурное поле естественной конвекции.

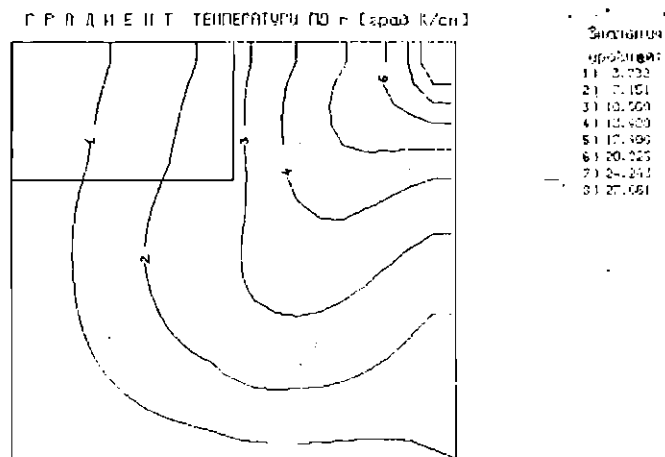
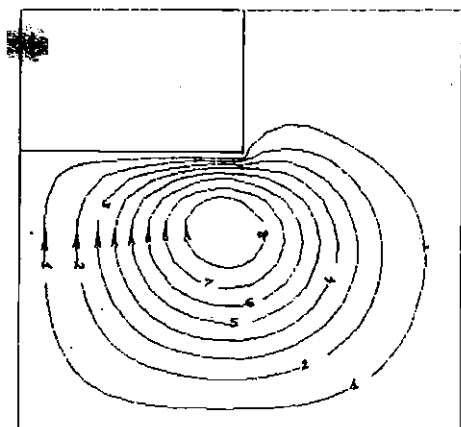


Рис. 6. Градиент температуры естественной конвекции.

ИЗОЛИНИИ ФУНКЦИИ ТОКА [ампер/сек]

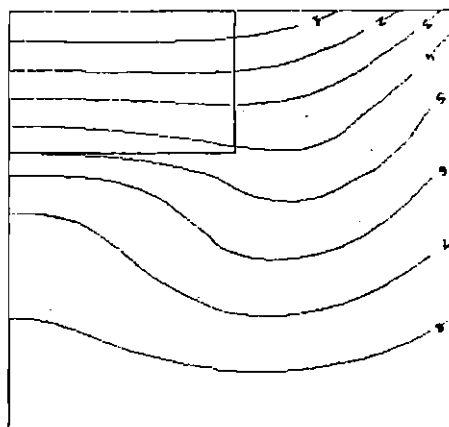


Значения
уровней:

1	0.056
2	0.263
3	0.470
4	0.677
5	0.883
6	1.090
7	1.297
8	1.504

Рис. 7. Совместное движение с учетом вибрации

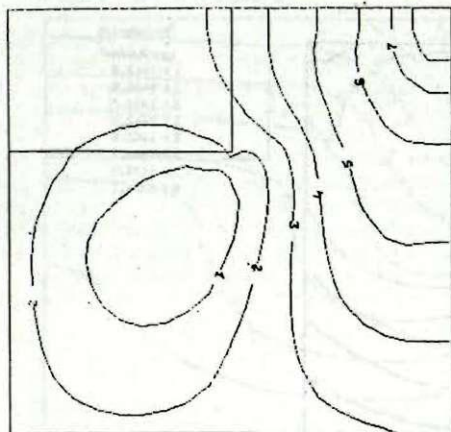
ИЗОТЕРМЫ [град К]



Значения
уровней:

1	1384.4
2	1398.3
3	1412.2
4	1426.1
5	1440.0
6	1453.9
7	1467.8
8	1481.7

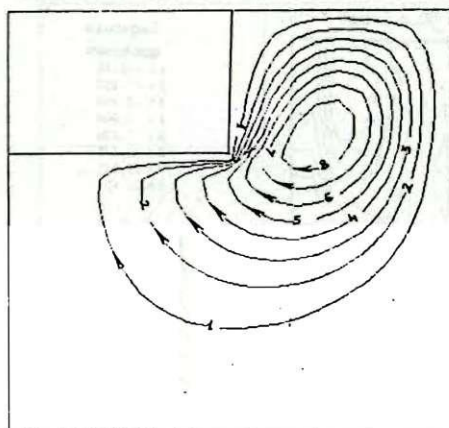
Рис. 8. Температурное поле совместного движения

Г Р А Д И Е Н Т Т Е М П Е Р А Т У Р Ы $\text{по } r$ [град К/см]

Значения
уровней:

1)	-6.973
2)	-2.149
3)	2.674
4)	7.497
5)	12.329
6)	17.143
7)	21.966
8)	26.789

Рис. 9. Градиент температуры совместного движения

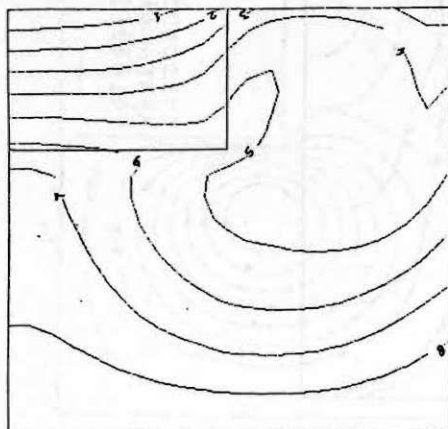
ИЗОЛИНИИ ФУНКЦИИ ТОКА [см²·сек/сек]

Значения
уровней:

1)	2.250
2)	4.832
3)	7.414
4)	9.996
5)	12.578
6)	15.161
7)	17.743
8)	20.325

Рис. 10. Совместное движение при меньшей вязкости

ИЗОТЕРМЫ [град К]



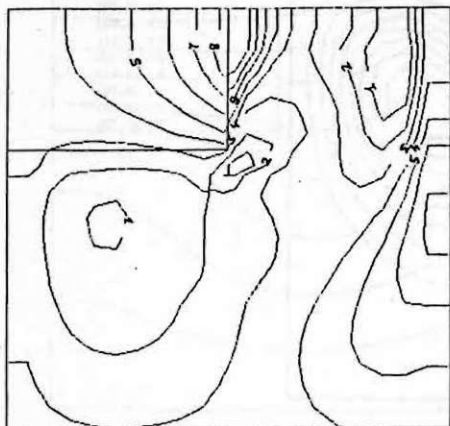
Значения

уровней:

1)	1410.0
2)	1420.6
3)	1431.3
4)	1442.0
5)	1452.6
6)	1463.3
7)	1474.0
8)	1484.7

Рис. 11. Температурное поле при меньшей вязкости

ГРАДИЕНТ ТЕМПЕРАТУРЫ ПО r [град К/см]



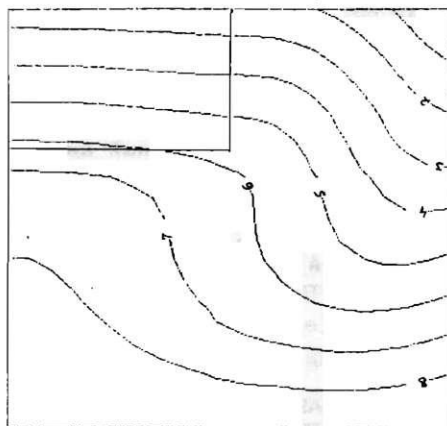
Значения

уровней:

1)	-12.12
2)	-7.183
3)	-2.243
4)	2.696
5)	7.636
6)	12.575
7)	17.515
8)	22.454

Рис. 12. Градиент температуры при меньшей вязкости

ИЗОТЕРМИИ [град К]



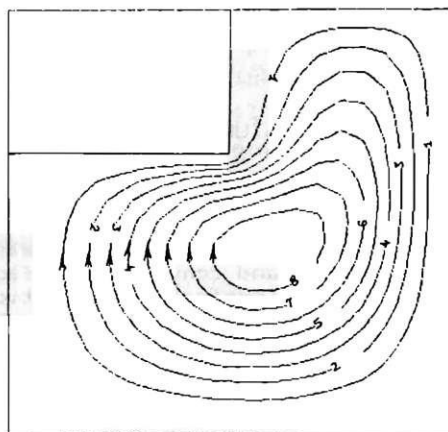
Значения

уровней:

- 1) 1016,5
- 2) 1073,9
- 3) 1131,3
- 4) 1188,8
- 5) 1246,2
- 6) 1303,6
- 7) 1361,0
- 8) 1418,4

Рис. 13. Температурное поле при 10-кратном перепаде внешней температуры

ИЗОЛИНИИ ФУНКЦИИ ТОКА [литры/сек]



Значения

уровней:

- 1) 0,364
- 2) 0,727
- 3) 1,091
- 4) 1,455
- 5) 1,819
- 6) 2,182
- 7) 2,546
- 8) 2,909

Рис. 14. Совместное движение при 10-кратном перепаде внешней температуры

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ, ВИБРАЦИОННОЙ И ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ В ОСЕСИММЕТРИЧНОМ ДВУХМЕРНОМ СЛУЧАЕ Н.Авдонин, Г.Луринос // Математическое моделирование. Прикладные задачи математической физики. Рига:ЛУ, 1994.

В настоящей работе проводится численный анализ температурных полей, потоков естественной и вибрационной конвекции и их взаимного влияния в цилиндрической установке.

Подобное численное исследование по взаимному влиянию движения жидкости и температурного поля может быть полезным, в частности, при изучении и оптимизации процесса выращивания кристаллов из высокотемпературных расплавов.

Библ. 2, рис. 14.

TEMPERATŪRAS LAUKU, VIBRĀCIJAS UN DABISKĀS KONVEKCIJAS SKAITLISKĀ ANALĪZE AKSIĀLSIMETRISKĀ GADĪJUMĀ. N.Avdonins, G.Lurins // Matemātiskā modelēšana. Matemātiskās fizikas lietišķās problēmas. Rīga:LU, 1994.

Darbā skaitliski analizēti temperatūras lauki, vibrāciju un dabiskās konvekcijas plūsmas, kā arī to savstarpējā mijiedarbība cilindriskā iekārtā.

Līdzīga veida šķidrums kustības un temperatūras lauka savstarpējās ietekmes skaitliskie pētījumi var būt noderīgi, piemēram, veicot kristālu audzēšanas no kausējuma izpēti un optimizāciju.

Библ. 2, зīm. 14.

THE NUMERICAL ANALYSIS OF TEMPERATURE FIELDS, VIBRATIONAL AND NATURAL CONVECTION IN AXIALLY SYMMETRICAL TWO DIMENSIONAL CASE. G.Lurins // Mathematical modelling. Applied problems of mathematical physics. Riga:LU, 1994.

The subject of this paper is numerical analysis of temperature fields, vibrational and convectional flows and their interaction as well in cylindrical installation.

Similar numerical analysis of interaction between temperature and flow fields may be useful for the investigation and optimization of the process of crystal growth from high temperature melt.

Ref. 2, fig. 14.

A. Bulgis

IZ A un LU Matemātikas institūts

DAŽU PAZEMES FILTRĀCIJAS PROCESU MODEĻĒŠANAS
SHĒMU ANALĪZE

Apakšzemes slāņu sistēmās notiekošo procesu matemātiskajā modeļēšanā nepieciešams ņemt vērā sistēmas kārtaino struktūru. Citiem vārdiem, to, ka sistēmas fizikālie parametri vertikālajā virzienā ir gabaliem konstanti lielumi. Lai iegūtais matemātiskais modelis būtu ērtāks tālākai izmantošanai, ļoti bieži lieto tāda vai cita tipa viduvēšanu. Šajā darbā analizēti tie matemātiskie pieņēmumi, kuri tiek izmantoti dažū vispārpieņemtu geofizikālās modeļēšanas shēmu konstruēšanā.

Jāatzīmē šāds svarīgs aspekts. Gan monogrāfiskajā literatūrā, gan zinātniskajos rakstos, kuri publicēti periodiskos izdevumos, dažādi autori viduvējot izmanto pēc matemātiskā satūra identiskus pieņēmumus. Ēt tas paliek nepamanīts, jo, pirmkārt, katrs no autoriem paliek savas konkrētās tēmas ietvaros, un, otrkārt, viduvēšanas procedūrai virsū klājas citi fizikāli vai matemātiski papildpieņēmumi, kuri saistīti ar konkrētās problēmas atsevišķām specifiskām īpatnībām. Ēit viduvēšanas procedūru tādēļ centīsimies dot vispārīgā formā.

Formulēsīm problēmu daudzslāņu sistēmai, apzīmējot ar

$U_i(x, y, z)$ (vai ar $U_i(x, y, z, t)$) nestacionārai problēmai) meklējamo funkciju i -tajam slānim; pašu slāni definējot ar nevienādībām $z_i < z < z_{i+1/2}$. Starpslāni starp i un $i+1$

slāni definējam ar nevienādībām $z_{i+1/2} < z < z_{i+1}$ un ar

$U_{i+1/2}(x, y, z)$ apzīmējam attiecīgo meklējamo lielumu (temperatūru, koncentrāciju, spiediena augstumu u.c.).

Uzskatīsim, ka $U_i(x, y, z)$ - meklējama funkcija i -tajā slānī (produktīvājam slānī) izpilda vienādojumu

$$\frac{\partial}{\partial t} (k_i \frac{\partial U_i}{\partial z}) + L^i(U_i) = -F_i(x, y, z), z_i < z < z_{i+1/2}, (x, y) \in A, i = \overline{0, N-1} \quad (1)$$

Šeit K_i^c var būt tikai argumentu x, y funkcija, lineārie operatori L^i un viņu koeficienti arī attiecas tikai uz argumentiem x, y (vai uz x, y un t nestacionārai problēmai).

Savukārt, starpslānī $i + 1/2$, kurš atrodas starp i un $i+1$ slāni, izpildīts vienādojums:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(k_{i+1/2} \frac{\partial U_{i+1/2}}{\partial z} \right) + L^{i+1/2} (U_{i+1/2}) = -F_{i+1/2}(x, y, z), \quad z = z_{i+1/2}, \quad (x, y) \in A, \quad i = 0, N-1. \quad (2)$$

Tālāk, uz starpslāņa, zem tā un virs tā atrodošos slāņu saskarsmes virsmējāizpildās saistības nosacījumiem

($i = 0, N-1$):

$$U_i|_{-} = U_{i+1/2}|_{+}, \quad k_i \frac{\partial U_i}{\partial z}|_{-} = k_{i+1/2} \frac{\partial U_{i+1/2}}{\partial z}|_{+}, \quad z = z_{i+1/2}, \quad (x, y) \in A, \quad (3)$$

$$U_{i+1}|_{+} = U_{i+1/2}|_{-}, \quad k_{i+1} \frac{\partial U_{i+1}}{\partial z}|_{+} = k_{i+1/2} \frac{\partial U_{i+1/2}}{\partial z}|_{-}, \quad z = z_{i+1}, \quad (x, y) \in A, \quad (4)$$

kur $+$ (vai $-$) zīme apzīmē robežvērtību attiecībā pret z koordināti no labās (attiecīgi kreisās) puses.

Savukārt, sistēmas divu malējo slāņu mijiedarbību ar apkārtni var vispārīgā formā aprakstīt ar šādiem robežnosacījumiem. Augšējam slānim:

$$\left(\nu_0 k_0 \frac{\partial U_0}{\partial z} - \lambda_0 U_0 \right) \Big|_{+} = -\Phi_0(x, y), \quad z = z_0, \quad (x, y) \in A, \quad (5)$$

kur $\nu_0 \geq 0$, $\lambda_0 \geq 0$ nosaka robežnosacījuma tipu. Ja $\nu_0 = 0$ un $\lambda_0 = 1$, tad robežnosacījums (5) uz slāņa robežas fiksē meklējamās funkcijas (temperatūras, spiediena) vērtību:

$$U_0|_{+} = \Phi_0(x, y), \quad z = z_0, \quad (x, y) \in A. \quad (5_1)$$

Kā jau minēts, nestacionārā gadījumā uzdotā robežvērtība var būt atkarīga arī no laika: $\Phi_0 = \Phi_0(x, y, t)$. Ja $\nu_0 = 1$ un $\lambda_0 = 0$, tad (5) fiksē plūsmas lielumu uz sistēmas

augšējās robežas:

$$k_0 \frac{\partial U_0}{\partial z} \Big|_+ = -\Phi_0(x, y), z = z_0, (x, y) \in A. \quad (5_2)$$

Piem., $\Phi_0 = 0$ nozīmē, ka sistēma saskaras ar necaurlaidīgu slāni. Visbeidzot, $\nu_0 = \sigma$ un $\lambda_0 = 1$ apraksta situāciju, kas sistēma saskaras ar plānu vāji caurlaidīgu slāni, sk., piem. [1]:

$$k_0 \frac{\partial U_0}{\partial z} \Big|_+ = \sigma [U_0 \Big|_+ - \Phi_0(x, y)], z = z_0, (x, y) \in A. \quad (5_3)$$

Analogi uzrakstāms un interpretējams nosacījums uz sistēmas apakšējā slāņa ārējās malas:

$$(\nu_1 k_N \frac{\partial U_N}{\partial z} + \lambda_1 U_N) \Big|_- = \Phi_1(x, y), z = z_{N+1/2}, (x, y) \in A. \quad (6)$$

Problēmas pilnam formulējumam vēl jāizraksta nosacījumi uz apgabala A robežas (sistēmas kontūra, un, ja apgabalā ir urbumi, tad arī uz to kontūriem). Ja apskatām nestacionāru problēmu, tad nepieciešams pievienot arī sākuma nosacījumu. Šo papildnosacījumu forma nav principiāla sistēmas daudzslāņainības analīzei, tādēļ pie viņu detaļa apraksta nepakāvosimies.

Turpmāk apskatīsim vienkāršāko gadījumu, kad starpslāņos nedarbojas avoti, t.i., vienādojumos (2) funkcija $F_{i+1/2} \equiv 0$ un kad drīkst ignorēt procesus x, y virzienā, t.i., $L^{i+1/2}(U_{i+1/2}) = 0$. (Faktiski pietiek prasīt, lai būtu izpildīts vienādojums

$$L^{i+1/2}(U_{i+1/2}) = -F_{i+1/2}(x, y, z),$$

arī tad turpmākie spriedumi paliek spēkā.)

Ja tikko minētie pieņēmumi izpildās, tad vienādojumi (2) deģenerējas par triviāliem vienādojumiem

$$\frac{\partial}{\partial z} (k_{i+1/2} \frac{\partial U_{i+1/2}}{\partial z}) = 0, z_{i+1/2} < z < z_{i+1}, (x, y) \in A. \quad (2_0)$$

To atrisinājumi uzrakstāmi šādi:

$$U_{i+1/2}(x, y, z) = U_i^+(x, y) + \frac{z - z_{i+1/2}}{H_{i+1/2}} [U_{i+1}^-(x, y) - U_i^+(x, y)], \quad (7)$$

kur $H_{i+1/2} = z_{i+1} - z_{i+1/2}$ ir starpslāņa biezums, bet U_i^+ ir funkcijas $U_i(x, y, z)$ vērtība uz i slāņa augšējās malas: $U_i^+(x, y) = U_i(x, y, z_{i+1/2})$. Analogi definēta $U_i^-(x, y) = U_i(x, y, z_i)$. Ar (7) palīdzību saistības nosacījumi (3) uzrakstāmi šādi:

$$k_i \frac{\partial U_i}{\partial z} \Big|_- = \frac{k_{i+1/2}}{H_{i+1/2}} [U_{i+1}^- - U_i^+], \quad z = z_{i+1/2}, (x, y) \in \mathcal{A}, \quad (8_1)$$

bet (4) - šādi (samazinot indeksu i par vienu):

$$k_i \frac{\partial U_i}{\partial z} \Big|_+ = \frac{k_{i-1/2}}{H_{i-1/2}} [U_i^- - U_{i-1}^+], \quad z = z_i, (x, y) \in \mathcal{A}, \quad (8_2)$$

Tagad iegūsim slāņu viduvētos vienādojumus. Šim nolūkam definēsim vidējo integrālo pa i slāņa biezumu funkciju:

$$u_i(x, y) = \frac{1}{H_i} \int_{z_i}^{z_{i+1/2}} U_i(x, y, z) dz, \quad H_i = z_{i+1/2} - z_i \quad (9)$$

un integrēsim pa z vienādojumu (1). Ievērojot operatora L^i linearitāti, iegūsim

$$L^i(u_i) + \frac{k_i}{H_i} \frac{\partial U_i}{\partial z} \Big|_{z_i+0}^{z_{i+1/2}-0} = -f_i(x, y), \quad (x, y) \in \mathcal{A}, \quad i = \overline{0, N},$$

kur saskaņā ar (9), f_i ir funkcijas F_i vidējā vērtība. Tagad atliek iekšējiem slāņiem $i = \overline{1, N-1}$ ievietot pēdējā vienādojumā plūsmu izteiksmes (8₁), (8₂) un mēs iegūstam:

$$L^i(u_i) + \frac{k_{i+1/2}}{H_i H_{i+1/2}} (U_{i+1}^- - U_i^+) + \frac{k_{i-1/2}}{H_i H_{i-1/2}} (U_{i-1}^+ - U_i^-) = -f_i(x, y), \quad (10) \\ (x, y) \in \mathcal{A}.$$

Vienādojumu malējiem slāņiem ($i = 0$ un $i = N$) iegūšanai viena no nosacījumiem (8_k) $k = 1, 2$ vietā tiek izmantots robežnosacījums (5) vai (6).

Redzams, ka no sistēmas (10) ir pazudušas starpslāņus raksturojošās funkcijas $U_{i+1/2}$. Bet sistēma (10) nav pilna, jo katrā no vienādojumiem bez viduvētās pa slāņa biezumu funkcijas $u_i(x, y)$ ietilpst arī neviduvētās funkcijas

jas robežvērtības uz slāņa augšējās (un apakšējās) malas

U_i^+ (attiecīgi U_i^-). Īoti bieži sistēmas papildināšanai tiek izmantots pats vienkāršākais pieņēmums, proti, ka meklējamā funkcija ir konstanta Z virzienā, t.i., pa slāņa biezumu. Tad no (9) izriet

$$u_i(x, y) = U_i^-(x, y) = U_i^+(x, y), \quad i = 0, N. \quad (11)$$

un sistēma (10) uzrakstāma formā:

$$L^i(u_i) + \frac{k_{i+1/2}}{H_i H_{i+1/2}} (u_{i+1} - u_i) + \frac{k_{i-1/2}}{H_i H_{i-1/2}} (u_{i-1} - u_i) = -f_i(x, y), \quad (12)$$

$(x, y) \in A.$

Šāda viduvēšanas shēma tiek ļoti plaši izmantota literatūrā. Piem., ja u_i apzīmē spiediena augstumu $\phi_i(x, y)$ tad operators L^i sakrīt ar Laplasa operatoru, avota funkcija viscaur ir vienāda ar nulli, izņemot urbumu vietas un sistēma iegūst izskatu:

$$H_i k_i \left(\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2} \right) + \frac{k_{i+1/2}}{H_i H_{i+1/2}} (\phi_{i+1} - \phi_i) + \frac{k_{i-1/2}}{H_i H_{i-1/2}} (\phi_{i-1} - \phi_i) = -H_i f_i, \quad (13)$$

$(x, y) \in A.$

Šāda geofiltrācijas shēma dota ļoti daudzās monogrāfijās, arī jau pieminētajā [1].

Ja u_i apzīmē piesārņojošās vielas koncentrāciju $c_i(x, y, t)$, tad par operatoru L^i jāņem nestacionārais difūzijas ar horizontālo konvekciju operators [2] un mēs varam iegūt modeli, kas apraksta pazemes ūdeņu piesārņošanas sistēmai ar starpslāņiem

$$H_i \left(\frac{\partial c_i}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla c_i \right) = H_i \nabla (D_i \nabla c_i) + \frac{D_{i+1/2}}{H_i H_{i+1/2}} (c_{i+1} - c_i) + \frac{D_{i-1/2}}{H_i H_{i-1/2}} (c_{i-1} - c_i), \quad (14)$$

$(x, y) \in A,$

kur gan $\vec{V} = (v_x, v_y)$ - ātruma vektors, gan arī diferenciāloperatoru ∇ un ∇^2 attiecināmi tikai uz koordinātēm x un y .

Atzīmes: kādu matemātisku pretrunu, kas piemīt abām shēmām (13), (14), ka arī jebkuram pēc tādā pašu principa

konstruētai shēmai. Pieņemums, ka funkcija $U_i(x, y, z)$ ir konstanta z virzienā, t.i., pa i slāņa biezumu, t.i., ka

$$\frac{\partial U_i}{\partial z} = 0$$

dod no otrā saistības nosacījuma (3), kā arī

$$\left. \frac{\partial U_{i+1/2}}{\partial z} \right|_+ = 0, \quad z = z_{i+1/2}.$$

Šī sakarība kopā ar vienādojumu (2₀) dod, ka

$$\frac{\partial U_{i+1/2}}{\partial z} = 0, \quad z_{i+1/2} \leq z \leq z_{i+1},$$

t.i., kā arī $U_{i+1/2}$ ir konstanta z virzienā, bet tas ir pretrunā ar pieņemumu par $U_{i+1/2}$ linearitāti (formula (7)). Tomēr šī pretruna ir tīri teorētiska, vismaz attiecībā uz modeli (13) situācijā, kad slāņu un starpslāņu biezumi ir vienas kārtas lielumi. Kā zināms [1], modeli (13) par spiediena augstumiem starpslāņu filtrācijas koeficienti $\kappa_{i+1/2}$ ir par vairākām kārtām mazāki par slāņu koeficientiem κ_i .

Piem., bieži $\kappa_{i+1/2} \approx 10^{-8} \kappa_i$. Tāda gadījumā, pieņemot, ka $\Phi_{i+1/2} \approx \Phi_i$, no otrā nosacījuma (3) iegūstam (aizvietojojot atvasinājumu ar galīgām diferenciām):

$$\kappa_i \frac{\Phi_i^+ - \Phi_i^-}{H_i} \approx \kappa_{i+1/2} \frac{\Phi_{i+1/2}^+ - \Phi_{i+1/2}^-}{H_{i+1/2}}, \quad (15)$$

t.i.,

$$\Phi_i^+ - \Phi_i^- \approx O\left(\frac{\kappa_{i+1/2}}{\kappa_i}\right) (\Phi_{i+1}^- - \Phi_i^+).$$

Tas nozīmē, ka pat pie samērā liela gradienta starpslānī (lieluma $\Phi_{i+1}^- - \Phi_i^+$) iegūsim $\Phi_i^+ \approx \Phi_i^-$. Citiem vārdiem, funkcija slānī z virzienā ir tuvu konstantei. Līdz ar to shēma (13) pietiekami labi spēj aprakstīt reālos procesus daudzkārtainos ūdens slāņos.

Ar šo tikko apskatīto shēmu (13), (14) iekšējo pretrunu saistīts vēl viens nepatīkams aspekts: kā redzams no vispārīgās vienādojumu sistēmas, nav pieļaujama situācija, ka izzūd kāds no starpslāņiem (jeb tā biezums praktiski ir nulle): tad vienādojumu sistēma (12) (vai konkrētās sistē-

mas (13), (14) degenerējas). Kā tad izriet no sakarības (15), atliek pieņemt, ka $\Phi_{0+1/2}^+ = \Phi_{0+1/2}^-$, t.i., ka viscaur pa kopējo sistēmas biežumu tiek pieņemta viena un tā pati vērtība. Citiem vārdiem, reāli slāņaina sistēma tiek aizvietota ar kādu ekvivalentu homogēnu vertikālā virzienā sistēmu. Kā ziņāms, sk. [1], [2], tad tā arī parasti tiek darīts.

Lai izvairītos no šīs pretrunas, nepieciešams konstruēt vispārīgāku, precīzāku viduvēto shēmu. Darbā [3] sistēmai bez starpslāņiem un [4] konkrētai sistēmai ar starpslāņiem piedāvāts izmantot tā sauktos integrālos paraboliskos splainus. Šie splaini konstruēti tā, lai: 1) katrā no slāņiem funkcija $U_i(x, y, z)$ tiktu aproksimēta ar 2.pakāpes polinomu attiecībā pret z ; 2) izpildītu saglabāšanās likumu (9) katram slānim; 3) uz slāņu saskarsmes virsmas izpildītu saistības nosacījumus (3), (4) un uz malējo slāņu ārējām robežām izpildīti robežnosacījumi (5), (6). (Sistēmai ar starpslāņiem splains meklējamo lielumu tur aproksimē ar lineāru funkciju).

Vispārīgā gadījumā, t.i., patvaļīgam slāņu skaitam, nav iespējams viduvēto shēmu uzrakstīt analogi formai (12) ar atklātām koeficientu izteiksmēm pie diferenciēm $u_i = -u_i$.

Bet divu slāņu sistēmai (13) ar 2.veida homogēniem robežnosacījumiem (5₂) šādas formulas ir iespējams uzrakstīt. Abiem gadījumiem viduvētā sistēma ir uzrakstāma vienā un tajā pašā formā:

$$H_i k_i \left(\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial y^2} \right) + \alpha_{01} (\Phi_j - \Phi_i) = -H_i f_i; \quad i=0, j=1-i, \quad (16)$$

atšķiras tikai koeficienta α_{01} izteiksmes.

"Klasiskajam" viduvēšanas variantam, kā izriet no sistēmas (13), koeficienta α_{01} izteiksme ir šāda:

$$\alpha_{01} = \frac{\kappa^{1/2}}{H_{1/2}},$$

bet mūsu piedāvātā viduvēšanas metode dod:

$$\tilde{\alpha}_{01} = \left[\frac{H_0}{3\kappa_0} + \frac{1/1/2}{\kappa_{1/2}} + \frac{H_1}{3\kappa_1} \right]^{-1},$$

jeb

$$\tilde{\alpha}_{01} = \alpha_{01} \left[1 + \frac{\kappa^{1/2}}{3H_{1/2}} \left(\frac{H_0}{\kappa_0} + \frac{H_1}{\kappa_1} \right) \right]^{-1}.$$

Tagad labi saķetāms, ka, ja visu slāņu biežumi H ir ar vienu kārtas lielumu, bet $k_{1/2} \ll k_0$, $k_{1/2} \ll k_1$, tad $\tilde{\alpha}_{01} \approx \alpha_{01}$. Savukārt, pie $H_{1/2} \rightarrow 0$ iegūstam

$$\alpha_{01} \rightarrow \infty, \quad \tilde{\alpha}_{01} \rightarrow \alpha_{01}^{(0)} = \left(\frac{H_0}{3k_0} + \frac{H_1}{3k_1} \right)^{-1}$$

Tātad robežgadījumā $H_{1/2} \rightarrow 0$ "klasisko" vienādojumu sistēma (16) degenerējas, bet sistēma (16), kura izriet no darbā [4] apskatītās vispārīgās sistēmas, paliek korekti definēta.

LITERATŪRA

1. J. Bear. Hydraulics of Groundwater. Mc.Graw-Hill Inc. 569 p., 1979.

2. J.J.Fried. Groundwater pollution. Elsevier scientific publishing company Amsterdam-Oxford-New York, 304 p., 1975 (krievu izdevums Maskava: Nedra, 1981).

3. A. Buiķis. Diferenciālvienādojumu ar pārtrauktiem koeficientiem konservatīva aproksimācija ar splainiem (kr.val.) - Numerical analysis and mathematical modelling. Benach Center Publications, v.24. PWN - Polish scientific publishers. Warsaw, 1990, p.487-491.

4. A. Buiķis, M. Šnite. Problēmu formulējumi ar viduvēšamu pārneses procesu aprakstīšanai kārtainos slāņos. (kr.val.)// Priekšdarņi zadači matematiķeskoj fiziki. R.: LU, 1987, 138-143 lpp.

DAŽU PAZEMES FILTRĀCIJAS PROCESU MODEĻŠANAS SHĒMU ANALĪZE. A. Buiķis// Matemātiskā modelēšana. Matemātiskās fizikas lietiskās problēmas. - Rīga: LU, 1994.

Analizēta dažādu fizikālu procesu daudzkārtainos pazemes slāņos modelēšana. Īpaši apskatītas sistēmas ar starpslāņiem un viduvēšanas procedūras iespējamie sarežģījumi.

Bibl. 4 nos.

THE ANALYSIS OF SCHEMES FOR THE MODELLING SAME PROCESSES OF FILTRATION IN THE UNDERGROUND. A. Buiķis// The mathematical simulation. Applied problems of mathematical physics. - Rīga: LU, 1994.

The modelling of different processes in multilayered underground systems is analysed. Especially the systems with aquatards are considered and possible complications of the averaging's procedure in them are analysed.

Ref. 4.

АНАЛИЗ НЕКОТОРЫХ СХЕМ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПОДЗЕМНЫХ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ. А. Буйкис// Математическое моделирование. Прикладные задачи математической физики. - Рига: LU, 1994.

Анализируется моделирование различных физических процессов в многослойных подземных пластах. Особо рассмотрены системы с перемычками и возможные осложнения процедуры осреднения.

Библи. 4 назв.

A. Buikis, N. Ulanova
Institute of Mathematics
of the Latvian Academy of Science and the University

METHOD FOR THE SOLUTION
OF THE MOVING TEMPERATURE FRONT PROBLEM IN DISCRETE MEDIUM

Introduction

The processes, which are intended for storing heat in large volumes and further its using, are common many fields of research and technology. These include the application of non-traditional energy sources, for example, solar energy. A part of solar power plants accumulating heat is a reactor. It is a large tube, which is filled with material having good capacity characteristics (granite rock) [3]. In this tube, the heat air flow with a constant rate is heated by the rock when passing through it. In a reverse process, cold air passing in reverse direction through the rock is heated by it up to an operating temperature.

Various methods were used in mathematical modelling of these processes. We present some statement of the problem for the solution of the above or similar problems from the given literature. We will first consider specific applied solution of problems and then will formulate the class of analogous problems, our approach in solving this problem is proposed at the end.

Differential formulation of problem

A model of imaginary continuous medium often serves as an approximation in solving the problems of discrete media. In the case of the above problem, in [1],[2] it has been proposed to consider the total mass of rock loaded in the reactor as a certain unit body divided into section along the direction of gas flows and having a constant temperature. In other works [3], [4], rock is shown as a discrete medium (a

sphere with an equivalent diameter D_k) divided into sphere layers with a constant temperature. In each layer the equation of the heat conductivity is considered for one characteristic sphere. The particles of rock and gas have different temperature as it differs also in various layers. Mathematical formulation of this problem leads to the following system of partial differential equations with corresponding initial and boundary conditions:

$$\partial_t z = \frac{2}{r} \partial_r z + \partial_r^2 z, \quad z(r, x, 0) = 0, \quad r \in [0, 1], \quad x \in [0, \infty),$$

$$\partial_x u = -\gamma \partial_r z \quad (1, \dots), \quad (1)$$

$$\partial_r z(1, x, t) = 0, \quad x, t \in [0, \infty),$$

$$\partial_r x(1, x, t) = \alpha [u(x, t) - z(1, x, t)],$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in (0, \infty),$$

$$u(0, t) = 1, \quad t \in [0, \infty).$$

The first equation gives the time-dependent temperature distribution z in the sphere of n -layer and the second gives the temperature distribution u of the one-dimensional air stream in direction x . Moreover, the dependence of flow thermal physical parameters on temperature is also taken into account in the coefficients of equations, i.e. the problem is nonlinear. For this model described in [3],[4] the important role is played by the heat transfer coefficient α between each spherical particle of material and moving gas flow.

The complication of this formulation lead to the necessity of considering since separate equations for each layer and consequently - of solving large stiff systems of equations.

Therefore, we shall deal with other formulation of problem for the solution of similar problem. If assuming [5], the porous body is two interacting imaginary media, modelling both the solid and gaseous (liquid) phases, the heat transfer process could be presented as a system of two equations:

$$\begin{cases} nc_f \rho_f \frac{\partial T_f}{\partial t} = -c_f \rho_f \vec{v} \operatorname{grad} T_f + \operatorname{div} (\lambda_f \operatorname{grad} T_k) + \alpha (T_k - T_f) \\ (1-m) c_k \rho_k \frac{\partial T_k}{\partial t} = \operatorname{div} (\lambda_k \operatorname{grad} T_k) + \alpha (T_f - T_k), \end{cases} \quad (2)$$

Here T_f and T_k are flow and rock temperature
 m is porosity

\vec{v} is air velocity

α is inter-component heat transfer coefficient

λ, ρ, c - heat conductivity, density, heat capacity

The seeming simplicity of the above system and each of its parameter, λ and α in particular, involve complex dependencies taking into account the properties of all media. If the flow velocity is sufficiently large, heat transfer caused by convection considerably exceeds the heat transfer due to heat conductivity which allows to neglect heat conductivity terms of equations (2).

The similar equation systems are also obtained by authors of [6], when studying the processes of one-dimensional filtration of heat carrier on fractured medium. When taking into account the dependence of heat carrier density on temperature, the equation of mass conservation and the dependence of density on temperature are added to the system of equations:

$$\left\{ \begin{array}{l} - \frac{\partial \rho_f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (\rho_f v) \\ \rho_k c_k (1-m) \frac{\partial T_k}{\partial t} = - \alpha (T_k - T_f) \\ c_f \rho_f m \frac{\partial T_f}{\partial t} = - c_f \frac{\partial}{\partial x} (v \rho_f T_f) + \alpha (T_k - T_f) \\ \rho_f = f(T_f). \end{array} \right. \quad (3)$$

This interpretation of problem permits to describe the given process of filtration with sufficient accuracy according to the opinion of the authors.

Formulation of problems for finding temperature fields in oil beds with an account of temperature difference of solid bed and filtrating liquid may reduce as further examples [7], [8].

In this article the above analogous formulation of problem for the process of heating of rock (reactor) with the hot gas flow as the system of two interacting imaginary media is proposed.

The 'gas - solid body' system is represented as two one-

dimensional transient differential equations. In the equation of substance, only heating of separate substance particles in each point of one-dimensional space due to convective heat transfer of gas is considered, whereas heat conductivity and contact heat transfer between the particles are neglected. The system is supplemented by the equation of mass conservation and temperature dependence for gas density, which allows to take into account the change of flow velocity along the direction of motion:

$$\left\{ \begin{array}{l} m \frac{\partial}{\partial t} [\rho_f (c_f T_f + \frac{v^2}{2})] + \frac{\partial}{\partial x} \{v [\rho_f (c_f T_f + \frac{v^2}{2})]\} = \alpha (T_k - T_f), \\ (1-m) \rho_k c_k \frac{\partial T_k}{\partial t} = \alpha (T_f - T_k), \\ - m \frac{\partial \rho_f}{\partial t} = \frac{\partial (\rho_f v)}{\partial x} \\ \rho_f = \rho_0 / T_f. \end{array} \right. \quad (4)$$

The initial and boundary conditions may be written as:

$$\left. \begin{array}{ll} T_f /_{x=0} = T_1, & (\rho_f v) /_{x=0} = \rho_0 v_0, \\ T_f /_{t=0} = T_0, & T_k /_{t=0} = T_0, \end{array} \right\} \quad (5)$$

Here $\rho_0 = \rho_f(T_0)$,

v_0 is initial velocity of air stream

T_0 is initial temperature of the two media

T_1 is temperature of air blown

To solve this system, a new variable - the mass velocity $G = \rho_f v$ is introduced and the system (4) could be written as:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{m c_f}{v} \frac{\partial (G T_f)}{\partial t} + c_f \frac{\partial (G T_f)}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\frac{v \partial G}{\partial t} + v^2 \frac{\partial G}{\partial x} \right] = \alpha (T_k - T_f) \\ (1-m) \rho_k c_k \frac{\partial T_k}{\partial t} = \alpha (T_f - T_k), \\ - \frac{m}{v} \frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\partial G}{\partial x} \\ \rho_f = \rho_0 / T_f. \end{array} \right. \quad (4')$$

It is clear that the first equation of the above system (4) gives form to convective heat front in the air component, whereas the inter component heat transfer coefficient α becomes the value determining the temperature distribution of

both air and rocks. Taking into account importance of this parameter, various methods of its determination [9],[3],[10] were considered.

In [3] the coefficient α has been found by taking into account the characteristics of the flow of gas and solid particles of the rock:

$$\alpha = \frac{\alpha_0}{1 + \alpha_0 F_k / (2 \cdot V_m c_t)}$$

Here $\alpha_0 = 0.33 \lambda_t Re^{0.6} / 2R_k$,

$$V_m = \rho_t v_s V_1 / h_s,$$

F_k is sphere surface,

R_k - radius of the sphere

v_s - mean flow velocity in one sphere layer,

V_1 - air volume around each sphere

h_s - height of one sphere layer

We selected a version, proposed in [10], where solution of non-stationary equation of heat conductivity for a sphere was employed to obtain expression for finding the value of the transient volume coefficient of heat transfer, and then - the average value of heat transfer coefficient, which could be written as:

$$\alpha = 15 \lambda_k / R_k^2$$

R_k is the radius of the sphere, i.e. the equivalent radius of rock stones.

In order to compare the proposed formulation of problem with the one described in [3], the remaining initial data relevant to an analogous process should be employed. Then, at $R_k = 0.0125$ m, $\alpha = 123000$ W/m²grad. At such large values of α , the temperature profile obtained as a result of solution of the system of equations given in (4),(5) with jump conditions at the tube entrance in an initial moment of time, would approach that of rectangular, i.e. practically discontinues solution is obtained.

Study of difference problem

Difference realization of problem, in which the width of

temperature front is estimated by several steps within space, might generate the oscillating solutions caused by dispersion errors of difference scheme. Besides, the schemes of the first order of accuracy are not sufficiently precise for calculating such problems.

In order to select the optimal modification of difference scheme for the solution of system (4), we consider the most simple case - the analogous system of equation with the constant coefficients. We have the following system:

$$\begin{cases} m\rho_f c_f \frac{\partial T_f}{\partial t} + v \rho_f c_f \frac{\partial T_f}{\partial x} = \alpha (T_k - T_f), \\ (1-m) \rho_k c_k \frac{\partial T_k}{\partial t} = \alpha (T_f - T_k), \end{cases} \quad (4'')$$

Since the method of solution of the second equation of (4'') does not cause any difficulties, its choice in the range from exact analytical solution to various discrete schemes was based on such criterion as speed of computation. We chose implicit difference scheme 'with weight' Krank-Nicolson type:

$$\frac{T_k^{n+1} - T_k^n}{\tau} = \frac{\alpha}{(1-m)c_k \rho_k} \frac{1}{2} \left[(T_j^{n+1} - T_k^{n+1}) + (T_j^n + T_k^n) \right].$$

In order to solve the first equation of (4'') we will use the introduction of artificial viscosity (pseudo viscosity). The behavior of discrete solution in the vicinity of discontinuity depends essentially on the type of introduced pseudo viscosity as well as on the scheme viscosity caused by approximation error of initial equation. Their effect can be evaluated by means of differential approximation method [11], estimating the value of introduced viscosity. Differential approximation of difference scheme is an differential equation obtained from the difference scheme approximated by it. Hence, it is different for various difference approximations of the same equation.

In the case of the first equation from (4''), where $u = v_0/m$, the first differential approximation can be written in the form:

$$\rho_f c_f \frac{\partial T_f}{\partial t} + u \rho_f c_f \frac{\partial T_f}{\partial x} - a \frac{\partial^2 T_f}{\partial x^2} = \alpha (T_k - T_f),$$

where α is the value of introduced pseudo viscosity assuming the following values [11]:

- when using the scheme with one-side differences:

$$a = \frac{uh}{2} \left(1 - \frac{\tau u}{h} \right),$$

- when using the scheme of the second order of precision (Lacks-Vendrof type):

$$a = \frac{h^2}{2\tau} \left(1 - \frac{\tau^2 u^2}{h^2} \right).$$

Here the result of using notion of the first differential approximation of difference scheme is substantiation of fact that introduction of diffusion term with artificial viscosity coefficient does not change the physical formulation of problem (4)-(5), but serves as a means of realization of the first equation from (4'').

Finally, difference scheme for the first equation of (4'') is written as:

$$\begin{aligned} & \frac{T_j^{n+1} - T_j^n}{\tau} + \frac{v}{2m} \left[\frac{T_{j+1}^n - T_{j-1}^n}{2h} + \frac{T_{j+1}^{n+1} - T_{j-1}^{n+1}}{2h} \right] + \\ & - \frac{a}{2} \left[\frac{T_{j-1}^n - 2T_j^n + T_{j+1}^n}{h^2} + \frac{T_{j-1}^{n+1} - 2T_j^{n+1} + T_{j+1}^{n+1}}{h^2} \right] = \quad (10) \\ & = \frac{v\alpha}{m c_f} (T_{j+1}^{n+1} - T_j^n), \end{aligned}$$

This scheme yields stable solution, i.e. moving temperature front. With time the temperature front curve becomes more slanting, which is due to heat transfer from air to solid substance which result in gradual heating of solid phase.

Additional modifications of difference scheme (6) led to have stable non-oscillating solutions with the minimum values of pseudo-viscosity coefficient:

1) Certain decrease of pseudo viscosity coefficient can be reached by introducing mass operator for time derivative [12]:

$$M_x \frac{\partial T}{\partial t} = \delta \frac{T_{j-1}^{n+1} - T_{j-1}^n}{\tau} + (1-2\delta) \frac{T_j^{n+1} - T_j^n}{\tau} + \delta \frac{T_{j+1}^{n+1} - T_{j+1}^n}{\tau},$$

$$M_x = \{ \delta, (1-2\delta), \delta \}, \quad \delta \leq 0.25.$$

Here $\delta > 0.1$ leads to the rise of temperature profile up to

and after the front line.

2) The effect of introduced pseudo viscosity can be diminished by means of terms which can be represented as anti-diffusion flows [13]:

$$\frac{1}{2} \left[\beta_{j+1/2} \frac{T_{j+1}^n - T_j^n}{h} - \beta_{j-1/2} \frac{T_j^n - T_{j-1}^n}{h} \right].$$

The coefficients $\beta_{j\pm 1/2}$ are non-negative, confine anti-diffusion and are chosen in a different way.

The difference scheme for the problem with the variable coefficient are proposed to analogous (6) scheme:

$$\begin{aligned} & \frac{G_j^{n+1} T_j^{n+1} - G_j^n T_j^n}{\tau} + \frac{V_j^n}{2m} \left[G_j^n \frac{T_{j+1}^n - T_{j-1}^n}{2h} + G_j^{n+1} \frac{T_{j+1}^{n+1} - T_{j-1}^{n+1}}{2h} \right] + \\ & + \frac{(V_j^n)^2}{2m c_f} \left[\frac{G_j^{n+1} - G_j^n}{\tau} + V_j^n \frac{G_j^n - G_{j-1}^n}{h} \right] - \\ & - \frac{\alpha}{2} \left[\frac{T_{j-1}^n - 2T_j^n + T_{j+1}^n}{h^2} + \frac{T_{j-1}^{n+1} - 2T_j^{n+1} + T_{j+1}^{n+1}}{h^2} \right] = \\ & = \frac{V_j^n \alpha}{m c_f} (T_k^{n+1} - T_j^n), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\frac{G_j^{n+1} - G_j^n}{\tau} = - \frac{V_j^n}{2m} \left[\frac{G_j^n - G_{j-1}^n}{h} + \frac{G_j^{n+1} - G_{j-1}^{n+1}}{h} \right], \quad (8)$$

T_k^{n+1} is expressed through the second equation of (4).

G_j^{n+1} is found from the equation (8) and T_j^{n+1} from (7).

The results of calculation for above difference schemes allows to assume that in formulating the problem of (4)-(5), the first equation is sufficiently fully represented by means of scheme (7) realized with Thomas algorithm [12].

Results of calculation

To compare the results obtained by using the system (4)-(5) with the solution of problem for analogous case in [3], the following initial data were applied [3]:

$$\begin{aligned} T_0 &= 20^\circ \text{C}, & T_1 &= 550^\circ \text{C}, & v_0 &= 2.2 \text{ m/sec}, \\ \lambda_k &= 1.7 \text{ W/m grad.}, & m &= 0.5, \end{aligned}$$

$$\rho_k = 2894 \text{ kg/m}^3, \quad c_k = 795 \text{ J/kg grad.}$$

$$\rho_i = 348.3/T \text{ kg/m}^3, \quad c_i = 1040. \text{ J/kg grad.}$$

The numerical value of pseudo viscosity coefficient α ranges from 0.45 to 0.55 at the given initial data. Analogous range of values is in other sources [12],[13] where the estimates, correcting the value of introduced pseudo viscosity are reduced. When conducting numerical experiment, it may be concluded that the dumping of oscillating solution occur at these values. At $\alpha > 0.55$, the width of temperature front smearing increases.

Figure 1. shows the motion of temperature front along the tube at $\alpha=0.55$ with curves demonstrating temperature distribution every two hours. As seen from Fig.1. the temperature mark $T = 300^\circ\text{C}$ moves with a constant velocity. In 6 hours after the heated air is blown in, the exit temperature starts gradually growing until reaching the entrance temperature.

The next two figures characterize the effect of pseudo viscosity.

As seen from Fig.2., at decrease of α ($\alpha = 0.25$), the width of temperature front smearing decreases, but the solution becomes unstable.

Fig.3. shows the effect of the value of pseudo viscosity coefficient in a wider range from $\alpha = 0.055$ (curve 1 - oscillating solution) to $\alpha = 1.1$ (curve 3 - the temperature front smearing) due to the increase of the effect of diffusion term, curve 2 - at $\alpha = 0.55$ - basic calculation.

Fig.4. gives the results of calculation at $\alpha = 0.45$ of system (4) and system of equation with the constant coefficient, i.e. with substitution of first equation from (4) by (4'). This curve is marked by asterisk. The results show that for the present problem the system of equation with constant coefficient can be used when conducting calculation of specific applied problems, which essentially reduces computing time.

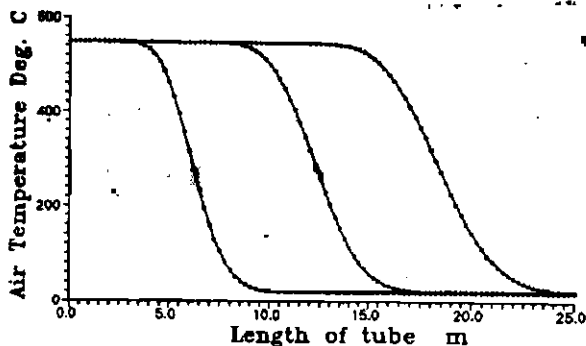


Fig.1. Transient distribution of rock temperature in two hours, basic calculation $a = 0.55$.

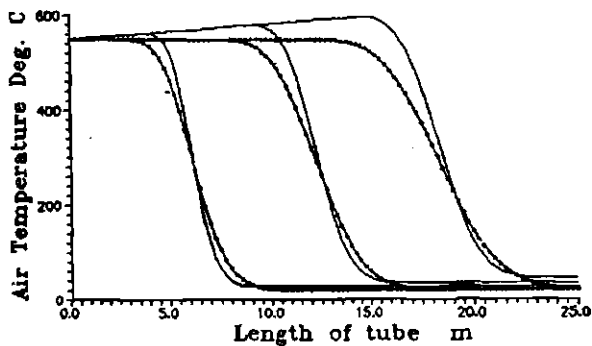


Fig.2. Transient distribution of rock temperature with basic calculation (curve with asterisk) and with varied pseudo viscosity coefficient - $a = 0.25$.

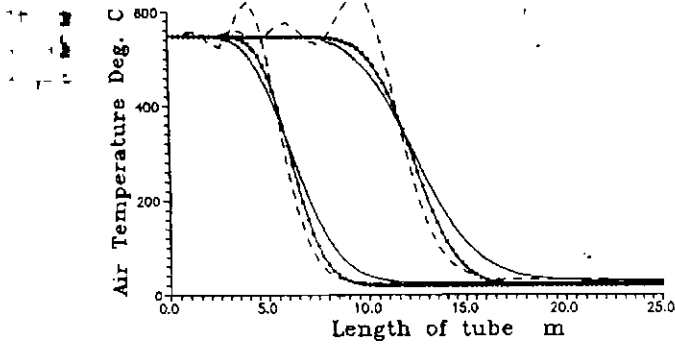


Fig.3. Transient distribution of rock temperature with basic calculation (curve with asterisk) and with varied pseudo viscosity coefficient - $a = 0.055$ and $a = 1.1$ (dotted line).

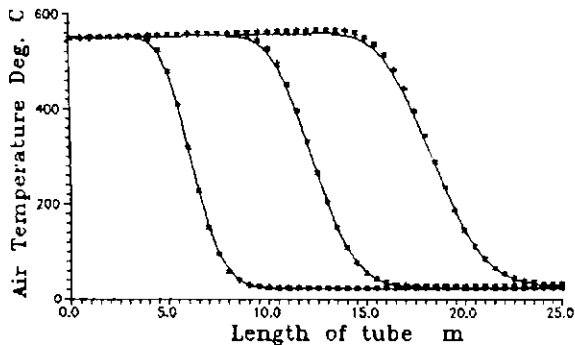


Fig.4. Transient distribution of rock temperature for system with variable coefficients and with constant coefficients (asterisk).

Conclusion

1. The proposed formulation of problem for heating of Solar Thermal station reactor is a porous media model as a system of interacting imaginary media which allows essentially simplify the method of solving similar problem.

2. The inter component heat transfer coefficient is important in the formation of the convective heat front and in choosing of way for its determination.

3. For the obtained difference problem with the solution, which has a large gradient in restricted area, the differential approximation method is used, which allows to introduce artificial viscosity coefficient and estimate this influence on the behavior of difference solution. The proposed range of values of pseudo viscosity coefficient leads to the dumping of oscillating solution and for the decreasing of the width of the temperature front smearing.

4. The proposed model (4)-(5) gives the result which is reasonably close to the model from [3],[4], however its realization is considerably simpler.

References:

1. J.P.Coutier, E.A.Farber. Two Applications of a Numerical Approach of Heat Transfer Process within Rock Beds. Solar Energy. Vol.29. No.6. 1982.
2. D.E.Beasley, J.A.Clark. Transient Response of a Packed Bed for Thermal Energy Storage, Int. J. Heat and Mass Transfer. Vol.27. No.9. 1984.
3. W.Durisch, E.Erick, P.Kesselring. Heat Storage in Solar Plants Using Solid Beds. Third International Workshop. Konstanz. Germany. 1986.
4. J.T.Marti. Heat propagation by hot gas flow through a pebble bed. ECMI. Vol.5. Lahni. 1990.
5. Ж.Бурже, П.Сурио, М.Кобарну. Термические методы повышения нефтеотдачи пластов. Москва: Недра, 1988.
6. А.Шербань, А.Цырульников, Э.Мерзляков, И.Рыженко. Системы извлечения тепла земной коры и методы их расчёта. Киев: Наукова думка, 1986.

7. А. А. Буйкис. Двухтемпературное поле в гетерогенной среде в приближении сосредоточенной ёмкости // Сб. Прикладные задачи теоретической и математической физики. Рига; ЛГУ. 74-83, 1977.
8. А. А. Буйкис. Тождественность задач определения температурных полей в однородном и трещиноватом пластах // Известия ВУЗов. Нефть и газ. 49-52, 1979.
9. А. В. Лыков. Теплообмен. Москва: Энергия, 1978.
10. Г. Е. Малофеев, Ф. А. Кеннави: О коэффициенте теплоотдачи от теплоносителя блокам трещиноватого пласта // Известия ВУЗов. Нефть и газ. Москва. N. 1. 29-35, 1979.
11. Ю. И. Шокин, Н. Н. Яненко. Метод дифференциального приближения. Новосибирск: Наука, 1985.
12. К. Флетчер. Вычислительные методы в динамике жидкости. Москва: Мир, 1991.
13. Н. В. Вязников, В. Ф. Тишкин, А. Т. Фаворский. Построение монотонных разностных схем повышенного порядка аппроксимации для систем уравнений гиперболического типа // Математическое моделирование. Т. 1. N. 5. 1989.

УДК 517.874:519.6

СПОСОБ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ДВИЖУЩЕМСЯ ТЕМПЕРАТУРНОМ ФРОНТЕ В ДИСКРЕТНОЙ СРЕДЕ. А. А. Буйкис, Н. Л. Уланова // Математическое моделирование. Прикладные задачи математической физики. Рига: ЛУ, 1994.

Аннотация. Исследуется процесс разогрева реактора солнечной тепловой станции, представляющего собой большую трубу, наполненную твердой породой. Разогрев происходит вдувом потока горячего воздуха. Для решения задачи используется модель пористой среды, как системы двух взаимодействующих фиктивных сред. Процесс описывается двумя одномерными нестационарными дифференциальными уравнениями конвективного переноса тепла, дополненных уравнением сохранения массы. Учитывается температурная зависимость для плотности газа. Для разностной реализации полученной задачи, имеющей решения с большими градиентами в узкой зоне, применяется метод дифференциального приближения с введением коэффициента искусственной вязкости. Исследуется поведение разностного решения в зоне с резким изменением температуры в зависимости от величины вводимой псевдовязкости. Для инженерных расчетов предлагается использовать упрощенную модель с постоянными коэффициентами, которая значительно сокращает время расчетов.

MA 315q5

METHOD FOR THE SOLUTION OF THE MOVING TEMPERATURE FRONT PROBLEM IN DISCRETE MEDIUM. A. A. Buikis, N. L. Ulanova // The mathematical simulation. Applied tasks of mathematical physics. Riga: LU. 1994.

Abstract - A porous media model as a system of two interacting imaginary media is proposed for solving the problem for studying the process of heating of Solar Thermal station reactor, which is a large long tube filled with rock. The heating is the result of motioned heat gas flow with the initial constant rate and temperature. The process is described by two one-dimensional non-stationary differential equation of heat transfer convection and complemented by the equation of mass conservation and temperature dependence for gas density. For the difference realization of obtained problem with the solution, which has a large gradient in restricted area, differential approximation method with artificial viscosity coefficient introduction is used. The behavior of difference solution in the vicinity of area with abrupt temperature change depending on introduced pseudo viscosity is studied. For the specific applied problem simplified model with the constant coefficient equation, which allows essentially to reduce computing time, has been used.

PROBLEMA PAR TEMPERATURU FRONTEŠ KUSTĪBU DISKRĒTĀ VIDE RĪSINĀŠANA. A.A. Buiķis, N.L. Ulanova. // Matemātiskā modelēšana. Matemātiskās fizikas lietišķās problēmas. Rīga: LU. 1994.

Anotācija - Apskatīts sasilšanas process saules siltuma stacijas reaktorā, kas sastāv no cietus iežus saturošas lielas caurules, kurā iepus karstu gaisu. Problēmas risināšanai izmanto priekšstatu par porainu vidi kā sistēmu ar divām fiktīvām savstarpēji mijiedarbošajām vidēm. Procesu apraksta ar diviem viendimensiju konvektīvās siltuma pārnese vienādojumiem, kurus papildina ar masas saglabāšanas likumu. Tiek ievērota gāzes blīvuma atkarība no temperatūras. Diferenču shēmas skaitliskajā realizācijā izmanto diferenciāla tuvinājuma metodi, pievienojot maksimālo viskozitāti, lai aprakstītu lielu gradientu šaurā zonā. Izpētīta diferenču shēmas atrisinājuma atkarība šajā zonā no pseidoviskozitātes koeficienta lieluma. Inženieru aprēķiniem piedāvāts modelis ar konstantiem koeficientiem, kurš būtiski samazina aprēķinu laiku.

44

J. Cepitis
University of Latvia

ON THE MULTIPLICITY
OF SOLUTIONS OF CERTAIN BOUNDARY VALUE PROBLEM

Introduction

Let us consider the boundary value problem

$$Lx = r(t) f(x), \quad (1)$$

$$a_i x(i) - (-1)^i b_i x'(i) = c_i; \quad i = 0, 1, \quad (2)$$

where $Lx = (p(t)x')' + (\lambda r(t) - q(t))x$,

$$r: [0, 1] \rightarrow (0, +\infty); \quad p', q: [0, 1] \rightarrow R; \quad f: R \rightarrow R$$

are continuous functions, $a_i \in [0, +\infty)$, $b_i \in (0, +\infty)$, $c_i, \lambda \in R$; $i = 0, 1$.

The boundary value problem (1),(2) is said to be regular, if $p(t) > 0$, $t \in [0, 1]$. For $c_0 = 0$ we shall consider also the singular boundary value problem (1),(2), which provides additionally $p(0) = 0$.

Suppose, that λ_1 is an eigenvalue and v is a corresponding eigenfunction of the Sturm-Liouville problem

$$Lx = 0 \quad (3)$$

$$a_i x(i) - (-1)^i b_i x'(i) = 0; \quad i = 0, 1,$$

w is another solution of the linear differential equation (3) and $W(t)$ is the Wronskian of the linear independent in $[0, 1]$ solutions v and w .

If x is the solution of the boundary value problem (1), (2) with an arbitrary $\lambda \in R$, then, adding up to the both sides of the differential equation (1) the term

$$(\lambda_1 - \lambda) r(t)x,$$

one obtains equality

$$\int_0^1 \frac{v(\tau)r(\tau)}{W(\tau)} [f(x(\tau)) + (\lambda_1 - \lambda)x] d\tau = \frac{c_1}{a_1 W(1) + b_1 W'(1)} + \frac{c_0 v(0)}{b_0 W(0)} \quad (4)$$

Using the equality (4), the solution x of the boundary value problem (1),(2) can be replaced by its averaged value x_0 , such that

$$\int_0^1 \frac{v(\tau)r(\tau)}{W(\tau)} [f(x_0) + (\lambda_1 - \lambda)x_0] d\tau =$$

$$= \frac{c_1}{a_1 W(1) + b_1 W'(1)} + \frac{c_0 v(0)}{b_0 W(0)}$$

Denoting

$$k = \frac{\int_0^1 \frac{v(\tau)r(\tau)}{W(\tau)} d\tau}{\frac{c_1}{a_1 W(1) + b_1 W'(1)} + \frac{c_0 v(0)}{b_0 W(0)}}$$

the obtained equality can be written as

$$k - f(x_0) - (\lambda_1 - \lambda)x_0 = 0.$$

Therefore, x_0 is the stationary point of the autonomous differential equation

$$\frac{dx}{ds} = \phi(x), \quad (5)$$

where $\phi(x) = k - f(x) - (\lambda_1 - \lambda)x$.

Notice, that $x_0 \in R$ is known as a stable (unstable) stationary point of the differential equation (5), if for some $\delta_1, \delta_2 \in (0, +\infty)$

$$\begin{aligned} \phi(x) > 0 & \quad (\phi(x) < 0) \quad , \quad x \in (x_0 - \delta_1, x_0), \\ \phi(x) < 0 & \quad (\phi(x) > 0) \quad , \quad x \in (x_0, x_0 + \delta_2). \end{aligned} \quad (6)$$

According to the equality (4), it is necessary for the solvability of the boundary value problem (1),(2), that the differential equation (5) has at least one stable or unstable stationary point.

We shall pay attention to the connection of the autonomous differential equation (5) stationary points with the solvability of the boundary value problem (1),(2). For solvability proving can use the method of a priori estimates, which in the case of the second order differential equations is reduced to the employment of lower and upper solutions ([1]). There occurs in our considerations the situation, that the mutual disposition of lower and upper solutions is opposite.

Solvability of the boundary value problem

For $u \in R$ introduce the designation

$$z(t, u) = \frac{1}{b_0 w(0)} (c_0 (v(t)w(0) - w(t)v(0)) - \\ - u v(t) (a_0 w(0) - b_0 w'(0))) + \\ + \int_0^t \frac{k r(\tau)}{w(\tau)} (w(t)v(\tau) - v(t)w(\tau)) d\tau .$$

The function $z(t, u)$ is a solution of the differential equation

$$Lx = k r(t) , \quad (7)$$

with $\lambda = \lambda_1$, satisfies the boundary conditions (2) and $z(0, u) = u$.

Let $x_0 \in R$ be a stable (unstable) stationary point of the differential equation (5), $i = 1, 2$; Δ_i be the sets of values δ_i , for which inequalities (6) hold, and $d_i = \sup \Delta_i$.

We shall say, that the stationary point x_0 satisfies the condition (A), if exist $u_1 \in [x_0 - d_1, x_0]$, $u_2 \in [x_0, x_0 + d_2]$, such that for every $t \in [0, 1]$ inequalities

$$x_0 - d_1 \leq z(t, u_1) \leq x_0 , \quad x_0 \leq z(t, u_2) \leq x_0 + d_2$$

are true.

Theorem 1. Let $x_0 \in R$ be a stable stationary point of the differential equation (5), which satisfies the condition (A).

Then the regular boundary value problem (1), (2) has the solution x , which satisfies the estimates

$$z(t, u_1) \leq x(t) \leq z(t, u_2) , \quad t \in [0, 1] , \quad (8)$$

and x_0 is the averaged value of this solution with respect to the equality (4).

Proof. Since the condition (A) and inequalities (6) are true, $z(t, u_1)$ is the lower solution, and $z(t, u_2)$ is the upper solution of the boundary value problem (1), (2). As it is well known, this implies solvability of the boundary value problem (1), (2) and the a priori bounds (8) for its solution x . Furthermore, x_0 is the unique stationary point of the differential equation (5) in the $[x_0 - d_1, x_0 + d_2]$, therefore equality (4) ensures the latter statement of the theorem. The theorem is proven.

We shall say, that the stationary point x_0 satisfies the condition (A_r) , if it satisfies the condition (A) , and for the solutions r_{ij} of the regular differential equation (1), which correspondingly satisfy the initial conditions

$$r_{ij}(j) = z(j, u_i), \quad r'_{ij}(j) = (-1)^{j+1} \frac{c_j - a_j z(j, u_i)}{b_j}, \quad (9)$$

$i = 1, 2; j = 0, 1$, at least for one of the possible values of j the inequality

$$\prod_{i=1}^2 [a_j r_{i1}(j) - (-1)^j b_j(j) r'_{i1}(j) - c_j] \leq 0, \quad l = 0, 1; \quad l \neq j,$$

is true.

Theorem 2. Let $x_0 \in R$ be an unstable stationary point of the differential equation (5), which satisfies the condition (A_r) .

Then the regular boundary value problem (1),(2) has the solution x , and x_0 is the averaged value of this solution with respect to the equality (4).

Proof of the theorem is based on the employment of the connectedness in the corresponding functional space of the sets, for every $j = 0, 1$ composed by solutions of the Cauchy problem for the differential equation (1) with the initial conditions

$$x(j) = u, \quad x'(j) = (-1)^{j+1} \frac{c_j - a_j u}{b_j}, \quad u \in [z(j, u_1), z(j, u_2)].$$

Theorem 3. Let $x_1, x_2 \in R$ be two different stable stationary points of the differential equation (5), which satisfy the condition (A) , and $x_3 \in (x_1, x_2)$ be an unstable stationary point of the differential equation (5), which satisfies the condition (A_r) .

Then the regular boundary value problem (1),(2) has at least three different solutions.

Proof of the theorem immediately follows from Theorems 1 and 2.

We shall say, that the singular boundary value problem (1),(2) satisfies the condition (ε, ν) , if exist a number $\sigma \in (0, 1]$ and continuous functions $\varepsilon, \nu : (0, \sigma) \rightarrow [0, +\infty)$, such that $\lim_{t \rightarrow 0^+} \varepsilon(t) = 0$, $\lim_{t \rightarrow 0^+} \nu(t) = \frac{a_0}{b_0}$, for every $t_0 \in (0, \sigma)$, $t_1 \in (t_0, \sigma]$ and solution $x : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$ of the differential equation (1), the inequality $|x'(t_0) - \nu(t_0)x(t_0)| \leq \varepsilon(t_0)$ implies in $(t_0, t_1]$ the inequality $|x'(t) - \nu(t)x(t)| \leq \varepsilon(t)$.

We shall say, that the stationary point x_0 satisfies the condition (A_3) , if it satisfies the condition (A) and at least one of the solutions $\gamma_{1,1}$ of the differential equation (1), which correspondingly satisfies the initial conditions (9), is a solution of the singular boundary value problem (1),(2) or equality

$$\prod_{i=1}^2 [\lim_{t \rightarrow 1} (a_0 \gamma_{1,1}(t) - b_0 \gamma_{1,1}'(t))] = -\infty$$

is true.

Remark 1. Theorems 1 - 3 remain true for the singular boundary value problem (1),(2), if it satisfies the conditions (ε, ν) , and the condition (A_2) is replaced by the condition (A_3) .

In this case employment of the lower and upper functions is based on the results of [2].

Lemma. Let λ_1 be the first eigenvalue of the considered Sturm-Liouville problem, $\lambda \leq \lambda_1$, the singular boundary value problem satisfies the condition (ε, ν) , and x_0 be an unstable stationary point of the differential equation (5).

Then the condition (A) implies the condition (A_3) .

Proof. Let $t_0 \in (0, 1)$, $t_1 \in (t_0, 1]$. The first eigenvalue of the Dirichlet problem for the differential equation (3) with the boundary conditions $x(t_i) = 0$, $i = 0, 1$, satisfies inequality $\lambda_0 > \lambda_1$ (see, for example [3]), and so, if $\lambda = \lambda_1$, the Dirichlet problem for the differential equation (7) with the boundary conditions $x(t_i) = \mu_i$, $\mu_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, has an unique solution. Therefore, analogously as in the proof of

the main theorem of [4], we can obtain for the functions γ_{i1} the inequalities $(-1)^i \gamma_{i1}(t) \leq (-1)^i z(t, u_i)$, $t \in (0, 1]$, which ensures the carrying out of the condition (A_2) . The lemma is proven.

Theorem 4. Let λ_1 be the first eigenvalue of the considered Sturm-Liouville problem, $\lambda < \lambda_1$, the singular boundary value problem (1),(2) satisfies the condition (ϵ, ν) , and $x_0 \in R$ be a stable or an unstable stationary point of the differential equation (5).

Then the singular boundary value problem (1),(2) has the solution x , and x_0 is the averaged value of this solution with respect to the equality (4).

Proof of the theorem is the consequence of Theorems 1,2, Remark 1 and Lemma .

Remark 2. Particularly, the conditions of the theorem 4 are true for the Neumann problem

$$x'' + g(t)x' = r(t)f(x) \quad , \quad (10)$$

$$x'(0) = 0 \quad , \quad x'(1) = c_1 \quad ,$$

where the function $g : (0, 1] \rightarrow R$ for every $\delta \in (0, 1]$ is summable on the $[\delta, 1]$, and for some $c \in [0, 1)$ the negative part of the function $t \rightarrow g(t) + \frac{c}{t}$ is summable in $[0, 1]$. The corresponding theorem for the system of differential equations generalizing the differential equation (10) is proven in [4].

Applications

1. The boundary value problem

$$\beta x'' - x' = p(x - q) \exp\left(-\frac{k}{x+1}\right) \quad , \quad (11)$$

$$x(0) - \beta x'(0) = 0 \quad , \quad x'(1) = 0 \quad ,$$

where $\beta, p, q, k \in (0, +\infty)$, arises in the chemical reactor theory. Multiplicity of its solutions were investigated in many papers (see, for example [5] and references there added).

If $\lambda_1 \in (\frac{1}{4\beta}, +\infty)$ is the smallest root of the equation

$$\operatorname{tg} \frac{\sqrt{4\lambda\beta - 1}}{2\beta} = \frac{\sqrt{4\lambda\beta - 1}}{2\lambda\beta - 1},$$

then the differential equation

$$\beta x'' - x' + \lambda_1 x = 0$$

has the nontrivial solution x , which satisfies the boundary conditions (12). Therefore, we can consider the stationary points of the differential equation (5) with

$$\phi(x) = -p(q-x) \exp\left(-\frac{k}{x+1}\right) - \lambda_1 x.$$

For positive k the first term in the expression for the function ϕ has two extremes. So, the differential equation (5) has one or two stable stationary points, and, according to Theorems 1 and 3, there are possible to obtain one, two or three different solutions of the boundary value problem (11), (12).

2. The Neumann problem

$$x'' + \frac{2}{t} x' = \frac{x^m}{\mu + \nu x^m} - \frac{\gamma}{\gamma + x^m},$$

$$x'(0) = 0, \quad x'(1) = \alpha,$$

where $m \in [1, +\infty)$, $\mu, \nu, \gamma \in (0, +\infty)$, arises in the modelling of fermental processes ([6]). According to Theorem 4 and Remark 2 we obtain, that the two possible roots of equation

$$3\alpha = \frac{x^m}{\mu + \nu x^m} - \frac{\gamma}{\gamma + x^m}$$

can correspond to different solutions of this problem.

Moreover, existence at least of one root of this equation is necessary for the solvability of the considered Neumann problem.

The work has been accomplished with financial support of the Science Council of Latvia (Grant No.93.809).

REFERENCES

1. Lepin A. J., Lepin L. A. Boundary value problems for the second order ordinary differential equations.- Riga: Zinātne, 1988. - 212 p. (in Russian)

2. Cepitis J. On the existence of bounded solutions of the second order equation with non-summable singularity

// Boundary value problems for the ordinary differential equations. - Riga:LU,1987. - P. 91-100. (in Russian)

3. Petrowsky I. G. Lectures on the partial differential equations.- Moscow,1950. - 304 p. (in Russian)

4. Cepitis J. On the solvability of the Neumann problem for certain systems of second order ordinary differential equations // Proceedings of Latvian Academy of Sciences B. - 1994. - No.2. - P. 53-55.

5. Williams L.R. , Leggett R. W. Multiple fixed point theorems for problems in chemical reactor theory //J. Math. Analysis and Appl. - 1979. - V.69. - P. 180-193.

6. Volesky B., Votruba J. Modelling and optimization of fermental processes. - Amsterdam:Elsevier,1992. - 266p.

ON THE MULTIPLICITY OF SOLUTIONS OF CERTAIN BOUNDARY VALUE PROBLEM. Cepitis J. // The mathematical simulation. Applied problems of mathematical physics. Riga:LU,1994.

Multiplicity of the two point boundary value problems solutions for the second order ordinary differential equations with the linear boundary conditions containing the derivatives is discussed. Two examples arising in the chemical reactor theory are added.

Ref. 6 titles.

PAR KĀDAS ROBEŽPROBLĒMAS ATRISINĀJUMU SKAITU. Cepitis J. // Matemātiskā modelēšana. Matemātiskās fizikas lietiskās problēmas. - Riga:LU,1994.

Pētīts atrisinājumu skaits otrās kārtas parastā diferenciālvienādojuma robežproblēmā ar atvasinājumu saturošiem lineāriem divpunktu robežnosacījumiem. Pievienoti divi ķīmiskā reaktora teorijā sastopami piemēri.

Bibl.6. nos.

О ЧИСЛЕ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ. Цепитис Я. В. // Математическое моделирование. Прикладные задачи математической физики. - Рига:ЛУ,1994.

Изучается число решений двухточечной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с линейными краевыми условиями, содержащими производные. Указаны два примера из теории химического реактора.

Библ. 6 назв.

A. Cibulis

HOW TO SMOOTH DISCONTINUOUS NONLINEARITIES

IN THE SYSTEMS OF EQUATIONS ?

Summary . The solvability of systems of the type

$$(\alpha_i(u_1, u_2) u_i')' = f_i; u_i(a_i) = A_i, \quad i=1,2 \quad (1)$$

with discontinuous nonlinearities α_i is considered. On the basis of the appropriate smoothing technique of α_i the existence of the solution for which the values of both the coefficients α_i ($i=1,2$) in the so-called mushy region are determined by one and the same unknown function is proved. MSC 35J45.

The exhaustive answer to the questions how to define the solution and how to smooth discontinuous nonlinearities is unknown even in the case of such a seemingly simple systems as (1). In particular the uniqueness of the solutions for the systems of the type (1) is essentially depending upon the concept of the solution [1].

Let $\Omega=(a,b)$; $f_i \in L_2(\Omega)$; $\lambda_1, \lambda_2 > 0$; $g \in C^1(\mathbb{R})$;

$$Q_0 = \{ (t, \tau) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \tau = g(t) \}, \quad Q = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus Q_0$$

and let the functions α_i be of the class $C(Q \rightarrow [\lambda_1, \lambda_2])$

with the finite limits $\alpha_i^+(t, \tau) \equiv \lim_{\xi \rightarrow \tau+0} \alpha_i(t, \xi), i=1,2,$

$$\alpha_i^-(t, \tau) = C^+ \in \mathbb{R} \quad \text{for all } t, \tau \in \mathbb{R} \quad (2)$$

Definition. The element $u=(u_1, u_2) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ is said to be the solution of (1) if the boundary conditions are satisfied and there exists a function $\varphi \in L_2(\Omega)$ with values from $[0,1]$ such that

$$\int_{\Omega} (\alpha_i^*(u, \varphi) u_i' \eta_i' + f_i \eta_i) dx = 0 \quad \forall \eta_i \in H_0^1(\Omega) \quad (3)$$

where

$$\alpha_i^*(u, \varphi) = \alpha_i^+(u) \varphi + \alpha_i^-(u) (1-\varphi). \quad (4)$$

Corollary 1. Immediately from (4) it follows $\alpha_i^* = \alpha_i^+ = \alpha_i^- = \alpha_i$, if $u_2 \neq g(u_1)$, what means that function φ is of a great importance

only in the mushy region $\{x \in \Omega: u_2(x) = g(u_1(x))\}$.

Approximation. For $t, \tau \in \mathbb{R}$ let be

$$\alpha_{i1}(t, \tau) = \begin{cases} \alpha_i(t, \tau), & \tau < g(t), \\ \alpha_i(t, g(t)-), & \tau \geq g(t), \quad i=1,2 \end{cases} \quad (5)$$

$$\alpha_{i2}(t, \tau) = \begin{cases} \alpha_i(t, \tau), & \tau > g(t), \\ \alpha_i(t, g(t)+), & \tau \leq g(t), \quad i=1,2 \end{cases} \quad (6)$$

$$\psi^k(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi < 0, \\ k\xi, & 0 \leq \xi \leq \frac{1}{k}, \\ 1, & \xi > \frac{1}{k} \end{cases} \quad (7)$$

The coefficients $\alpha_i = \alpha_i(t, \tau)$ ($i=1,2$) we approximate by continuous functions for all $(t, \tau) \in \mathbb{R}^2$ as follows:

$$\alpha_1^k = \frac{\alpha_{11} \alpha_{12}}{\alpha_{11} \psi_1^k + \alpha_{12} (1 - \psi_1^k)}, \quad (8)$$

$$\alpha_2^k = \frac{\alpha_{11} \alpha_{22} \psi_1^k + \alpha_{12} \alpha_{21} (1 - \psi_1^k)}{\alpha_{11} \psi_1^k + \alpha_{12} (1 - \psi_1^k)}, \quad (9)$$

where $\psi_1^k(t, \tau) = \psi^k(\tau - g(t))$.

Corollary 2. Immediately from (5)-(9) we have

$$\alpha_i^k(t, \tau) = \alpha_i(t, \tau) \quad \text{if } \tau < g(t) \text{ or } \tau > g(t) + \frac{1}{k} \quad (10)$$

$$\alpha_i^k(t, \tau) \rightarrow \alpha_i^-(t, \tau) \quad \text{if } k \rightarrow \infty \quad (i=1,2). \quad (11)$$

To obtain the solvability of the system (1), see Definition, we shall need two preliminary lemmas.

Lemma 1. The approximated system

$$\int_{\Omega} [\alpha_i^k(u) u_i' \eta_i' + f_i \eta_i] dx = 0 \quad \forall \eta_i \in H_0^1; \quad u_i(a_i) = A_i, \quad i=1,2 \quad (12)$$

has the solution $u^k \equiv (u_1^k, u_2^k) \in H^1 \times H^1$, $k=1,2,\dots$

such that the sequence $\{u_i^k\}$ ($i=1,2$) converges to some $u_i^0 \in H^1$ weakly in H^1 , strongly in L_2 and also pointwise a.e. in Ω .

Proof. The existence of such solutions u^k follows from the Schauder's principle and embedding theorem [2].

Lemma 2. Let $u^k \equiv (u_1^k, u_2^k)$, $k=1,2,\dots$ be sequence of the solutions of (12) with limit element $u^0 \equiv (u_1^0, u_2^0)$ and let

$w^k \equiv u_2^k - g(u_1^k)$, $w^0 \equiv u_2^0 - g(u_1^0)$, $\Omega_0 \equiv \{x \in \Omega : w^0 = 0\}$. Then

$$\alpha_1^k(u^k)(u_1^k)' \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \alpha_1^0(u^0)(u_1^0)' \quad \text{in } L_2(\Omega) \quad (13)$$

$$\alpha_1^k(u^k)(g(u_1^k))' \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \alpha_1^0(u^0)(g(u_1^0))' \quad \text{in } L_2(\Omega) \quad (14)$$

where

$$\frac{1}{\alpha_1^k(u^k)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \frac{1}{\alpha_1^0(u^0)}, \quad (15)$$

$$\alpha_2^k(u^k)(w^k)' \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \quad \text{in } L_2(\Omega_0). \quad (16)$$

Proof. The property (13) is a well-known result in theory of G-convergence.

By virtue of the continuity of g' and Egoroff's theorem [3] we have $g'(u_1^k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} g'(u_1^0)$ in $L_2(\Omega)$. Therefore the convergence (14) is a simple consequence of (13).

To obtain the weak convergence (16) let us rewrite $\alpha_2^k(u^k)$ in the form

$$\alpha_2^k(u^k) = (\alpha_{22}^k(u^k) - \alpha_{21}^k(u^k))\varphi_2^k(u^k, w^k) + \alpha_{21}^k(u^k) \quad (17)$$

where

$$\varphi_2^k(u^k, w^k) \equiv \frac{\alpha_{11}^k(u^k) \psi^k(w^k)}{(\alpha_{11}^k(u^k) - \alpha_{12}^k(u^k)) \psi(w^k) + \alpha_{12}^k(u^k)} \quad (18)$$

Since

$$\alpha_{ij}^k(u^k) \rightarrow \alpha_{ij}^0(u^0) \quad \text{in } L_2(\Omega) \quad (i, j=1, 2) \quad (19)$$

by virtue of the continuity of α_{ij} ($i, j=1, 2$) and above mentioned Egoroff's theorem then

$$\varphi_2^k(u^k, w^k) - \varphi_2^k(u^0, w^k) \rightarrow 0 \quad \text{in } L_2(\Omega).$$

Therefore (16) is reduced to

$$(\alpha_{22}^0(u^0) - \alpha_{21}^0(u^0))\varphi_2^k(u^0, w^k)(w^k)' \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \quad \text{in } L_2(\Omega_0). \quad (20)$$

Let us notice that $w^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ ($k \rightarrow \infty$) in $H^1(\Omega_0)$ and that for $x \in \Omega_0$, see (2),

$$\varphi^k(w^k) \equiv \frac{c^- \psi^k(w^k)}{(c^- - c^+) \psi^k(w^k) + c^+} = \varphi_2^k(u^0, w^k).$$

Let us consider the functions

$$\chi^k(x) \equiv \int_0^{w^k(x)} \rho^k(t) dt.$$

The convergence $w^k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$) in $L_2(\Omega_0)$ implies $\chi^k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$) in L_2 . Besides, the sequence $\{\chi^k\}$ is bounded in H^1 and, consequently, weakly compact in H^1 .

Hence $(\chi^k)' = \rho^k(w^k)(w^k)' \rightarrow 0$ in $L_2(\Omega_0)$ what yields (20).

Theorem 1. There exists a function $\varphi \in L_2(\Omega)$ with values from $[0,1]$ such that limit coefficients α_i^0 , see (13), can be represented in the form

$$\alpha_i^0(u^0) = \alpha_i^+(u^0)\varphi + \alpha_i^-(u^0)(1-\varphi), \quad i=1,2. \quad (21)$$

Proof. Taking into account (8) and (19) we have

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha^k(u^k)} &= \frac{\psi^k(w^k)}{\alpha_{12}(u^k)} + \frac{1-\psi^k(w^k)}{\alpha_{11}(u^k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha_1^0(u^0)} = \\ &= \frac{\psi}{\alpha_{12}(u^0)} + \frac{1-\psi^0}{\alpha_{11}(u^0)}, \end{aligned}$$

where ψ^0 is the weak limit of the sequence $\{\psi^k(w^k)\}$.

Moreover

$$\psi^0(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } w^0 < 0 \\ 1 & \text{if } w^0 > 0 \\ \in [0,1] & \text{if } w^0 = 0 \end{cases}. \quad (22)$$

$$\text{Hence } \alpha_1^0(u^0) = \frac{\alpha_{11}^-(u^0)\alpha_{12}^-(u^0)}{\alpha_{11}^-(u^0)\psi^0 + \alpha_{12}^-(u^0)(1-\psi^0)} =$$

$$= \begin{cases} \frac{\alpha_1^-(u^0)\alpha_1^+(u^0)}{\alpha_1^-(u^0)\psi^0 + \alpha_1^+(u^0)(1-\psi^0)} & \text{if } x \in \Omega_0 \\ \alpha_1(u^0) & \text{if } x \in \Omega \setminus \Omega_0 \end{cases}.$$

Let us denote

$$\varphi \equiv \frac{\alpha_1^-(u^0)\psi^0}{\alpha_1^-(u^0)\psi^0 + \alpha_1^+(u^0)(1-\psi^0)}. \quad (23)$$

Then $\alpha_1^0(u^0)$ can be rewritten in the desirable form

$$\alpha_1^0(u^0) = \alpha_1^+(u^0)\varphi + \alpha_1^-(u^0)(1-\varphi) \quad (24)$$

Now we prove that the limit coefficient $\alpha_2^0(u^0)$ also can be expressed in the form (21) with the same function φ .

Let Ω_δ be the set $\{x \in \Omega: 0 < |w^0(x)| < \delta\}$.

Then $\psi^k(w^k) \rightarrow \psi^0(x)$ in $L_2(\Omega \setminus (\Omega_0 \cup \Omega_\delta))$ where ψ^0 is determined by (22). It together with (9), (19) and the fact

that $\text{meas } \Omega_\delta \rightarrow 0$ when $\delta \rightarrow 0$ gives $\alpha_2^k(u^k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \alpha_2(u^0)$ in $L_2(\Omega \setminus \Omega_0)$.

Since in the outer of the mushy region Ω_0 the equality $\alpha_2(u^0) = \alpha_2^+(u^0) = \alpha_2^-(u^0)$ is fulfilled the representation (21) is obviously valid for $i=2$ and $x \in \Omega \setminus \Omega_0$.

In the case $x \in \Omega_0$ first of all we find, taking into account (8), (9), (19) and (22), the limit of the ratio

$$\frac{\alpha_2^k(u^k)}{\alpha_1^k(u^k)} = \frac{\alpha_{22}(u^k) \psi^k(w^k) + \alpha_{21}(u^k) (1-\psi^k(w^k))}{\alpha_{12}(u^k) + \alpha_{11}(u^k)}$$

$$\xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \frac{\alpha_2^+(u^0) \psi^0(x) + \alpha_2^-(u^0) (1-\psi^0(x))}{\alpha_1^+(u^0) + \alpha_1^-(u^0)} \quad \text{in } L_2(\Omega_0).$$

Expressing there ψ^0 via φ , see (23), we have

$$\psi^0(x) = \frac{\alpha_1^+(u^0) \varphi(x)}{\alpha_1^+(u^0) \varphi(x) + \alpha_1^-(u^0) (1-\varphi(x))}$$

$$\frac{\alpha_2^k(u^k)}{\alpha_1^k(u^k)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \frac{\alpha_2^+(u^0) \varphi + \alpha_2^-(u^0) (1-\varphi)}{\alpha_1^+(u^0) \varphi + \alpha_1^-(u^0) (1-\varphi)} \quad (25)$$

Further $\alpha_2^k(u^k)(u^k)' = \alpha_2^k(u^k) (w^k + g(u_1^k))' =$

$$= \alpha_2^k(u^k)(w^k)' + \frac{\alpha_2^k(u^k)}{\alpha_1^k(u^k)} (\alpha_1^k(u^k)(g(u_1^k))').$$

What according to convergences (16), (25), (14) and representation (24) yield

$$\alpha_2^k(u^k)(u^k)' \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} (\alpha_2^+(u^0)\varphi + \alpha_2^-(u^0)(1-\varphi))(u_2^0)' \quad \text{in } L_2(\Omega_0).$$

It together with (24) completes the proof. Thereby the solvability of the system (1), when both the discontinuous

coefficients $\alpha_i(u^0)$, $i=1,2$, are determined in the mushy region by one and the same function, see (23), is proved.

Remark. If both coefficients α_i have been approximated in the same manner, say by means of (8), then limit coefficients of α_i^k , generally speaking, can not be represented in the form (21) by one and the same function.

REFERENCES

1. Cibulis A. The example illustrating some properties of solution of the system of elliptic equation in mushy region. *Zin.raksti, Matemātika*, - Rīga: LU, 185.-191.lpp.
2. Ладыженская О.А., Уралцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973. 576 с.
3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 544с.

A.Cibulis. Kā nogludināt pārtrauktās nelinearitātes vienādojumu sistēmās?

Tiek pētīta šāda veida sistēmu

$$(\alpha_i(u_1, u_2) u_i')' = f_i; u_i(a_i) = A_i, i=1,2$$

ar pārtrauktām nelinearitātēm α_i atrisināmība. Uzrādīts piemērots koeficientu α_i aproksimēšanas parēmiens, kas ļauj iegūt atrisinājuma eksistenci arī tad, kad abi koeficienti α_i tā saucamajā divfāzu zonā tiek definēti ar vienu un to pašu nezināmo funkciju.

A.Шибулис. Как сглаживать разрывные нелинейности в системах уравнений?

Изучается разрешимость системы следующего вида

$$(\alpha_i(u_1, u_2) u_i')' = f_i; u_i(a_i) = A_i, i=1,2$$

с разрывными нелинейностями α_i . Указан подходящий способ аппроксимации коэффициентов α_i , позволяющий установить существование решения даже тогда, когда оба коэффициента α_i в так называемой двухфазной зоне определяются при помощи одной и той же неизвестной функции.

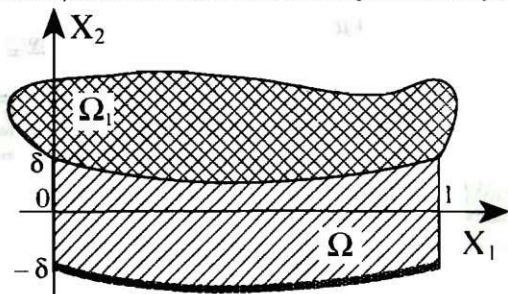
KĀDAS KONTAKTPROBLĒMAS SKAITLISKS ATRISINĀJUMS

1. Uzdevuma nostādne.

Aplūkosim taisnstūrveida elastīgu ķermeni

$$\Omega = \{(x_1, x_2) / 0 \leq x_1 \leq 1, -\delta \leq x_2 \leq \delta\},$$

kura sānu malas nostiprinātas nekustīgi. Ω apakšējā robeža atrodas pilnā kontaktā ar stīgu, kuras galapunkti nekustīgi nostiprināti punktos $(0, -\delta)$ un $(1, -\delta)$. Ķermeni Ω no augšas deformē ciets šķērslis Ω_1 . Kontaktzonas formu apraksta funkcija $x_2 = \varphi(x_1)$.



Mūsu uzdevums — ķermeni Ω atrast pārvietojumu funkcijas $u_1(x_1, x_2)$ un $u_2(x_1, x_2)$, kas apmierina Lamē vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} = 0 \\ \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

kur λ, μ — ķermeņa Ω Lamē koeficienti.

Sistēmu (1.1) aplūkosim kopā ar robežnosacījumiem:

$$u_1(0, x_2) = u_2(0, x_2) = 0 \quad (1.2)$$

$$u_1(1, x_2) = u_2(1, x_2) = 0 \quad -\delta \leq x_2 \leq \delta \quad (1.3)$$

Stīgas stāvokli pēc deformācijas apraksta stīgas svārstību vienādojums stacionārā gadījumā

$$a^2 \frac{d^2 v(x_1)}{dx_1^2} = -F(x_1) \quad (1.4)$$

ar robežnosacījumiem

$$v(0) = v(1) = 0 \quad (1.5)$$

Spēks $F(x_1)$ vienāds ar normāles spriegumu σ_n^p uz Ω apakšējās robežas.

Pieraksta ērtības dēļ Ω augšējās un apakšējās robežas pārvietojumus apzīmēsim sekojoši:

$$u_1(x_1, \delta) = q(x_1)$$

$$u_1(x_1, -\delta) = r(x_1)$$

$$u_2(x_1, \delta) = f(x_1)$$

$$(1.6)$$

$$u_2(x_1, -\delta) = p(x_1)$$

Tā kā aplūkosim uzdevumu bez berzes, jāpaskata nulles berzes nosacījumi kontaktzonās:

$$\sigma_n^B = 0 \tag{1.7}$$

$$\sigma_t^B = 0, \tag{1.8}$$

kur σ_t^T — tangenciālais spriegums uz Ω augšējās robežas un σ_t^B — tangenciālais spriegums uz Ω apakšējās robežas.

Konkretizēsim σ_t^T , σ_t^B un σ_n^B izteiksmes:

$$\sigma_t^B = \left((\sigma_{22} - \sigma_{11})n_1^B n_2^B + \sigma_{21}(n_1^{B^2} - n_2^{B^2}) \right), \tag{1.9}$$

kur n_1^B un n_2^B — Ω apakšējās robežas vienības normāles vektora komponentes, σ_{ij} — spriegumu tenzors, kura komponentes var sekojošā veidā izteikt ar funkcijām

$u_1(x_1, x_2)$ un $u_2(x_1, x_2)$:

$$\sigma_{11} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \mu \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \tag{1.10}$$

$$\sigma_{22} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \tag{1.10}$$

$$\sigma_{12} = \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)$$

Vienības normāles vektora komponentes:

$$n_1^B = \frac{r'(x_1)}{\sqrt{r'(x_1)^2 + (1 + p'(x_1))^2}} \tag{1.11}$$

$$n_2^B = -\frac{1 + p'(x_1)}{\sqrt{r'(x_1)^2 + (1 + p'(x_1))^2}}$$

Izteiksme tangenciālajam spriegumam:

$$\sigma_t^T = \left((\sigma_{22} - \sigma_{11})n_1^T n_2^T + \sigma_{12}(n_1^{T^2} - n_2^{T^2}) \right), \tag{1.12}$$

kur n_1^T un n_2^T — vienības normāles vektora komponentes uz Ω augšējās robežas:

$$n_1^T = \frac{q'(x_1)}{\sqrt{q'(x_1)^2 + (1 + f'(x_1))^2}} \tag{1.13}$$

$$n_2^T = -\frac{1 + f'(x_1)}{\sqrt{q'(x_1)^2 + (1 + f'(x_1))^2}}$$

Izteiksme normālā sprieguma aprēķināšanai:

$$\sigma_n^B = \sigma_{11}n_1^{B^2} + 2\sigma_{12}n_1^B n_2^B + \sigma_{22}n_2^{B^2} \tag{1.14}$$

Pievienosim saistības nosacījumus kontaktzonās:

$$\delta + q(x_1) = \phi(x_1) + f(x_1) \tag{1.15}$$

$$v(x_1) + p(x_1) = r(x_1) \tag{1.16}$$

2. Tuvinātā problēmas nostādne.

Lai tuvināti atrisinātu aplūkojamo uzdevumu, pieņemsim, ka Lamē sistēmas atrisinājumu var izteikt formā:

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2) &= A_0 q(x_1) + A_1 f(x_1)x_2 + A_2(x_1)x_2^2 \\ u_2(x_1, x_2) &= B_0 q(x_1) + B_1 f(x_1)x_2 + B_2(x_1)x_2^2. \end{aligned} \tag{2.1}$$

kur A_i , un B_i — nezināmās funkcijas. Izmantojot robežnosacījumus un sakarības (1. 6), funkcijas A_i , A_j , B_i , B_j var izteikt ar pārvietojumiem f , q , p , r :

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{f+p}{2} - A_2 \delta^2 \\ B_1 &= \frac{q+r}{2} - B_2 \delta^2 \\ A_1 &= \frac{f-p}{2\delta} \\ B_1 &= \frac{q-r}{2\delta} \end{aligned} \quad (2. 2)$$

Polinomus (2. 1) tagad var pārveidot formā:

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2) &= \frac{f+p}{2} + \frac{f-p}{2} x_2 + A_2(x_2^2 - \delta^2) \\ u_2(x_1, x_2) &= \frac{q+r}{2} + \frac{q-r}{2} x_2 + B_2(x_2^2 - \delta^2) \end{aligned} \quad (2. 3)$$

Saprotams, ka tāda aproksimācija nevar apmierināt Lamē vienādojumus visos apgabala Ω punktos, tāpēc prasīsim to izpildīšanos vidējā integrālā nozīmē, integrējot pa slāni $t = \delta$, δ_i . Pēc vidējošanas iegūsim sekojošu vienādojumu sistēmu:

$$\delta(\lambda + 2\mu)(f'' + p'') + (\lambda + \mu)(q' - r') + 4\mu\delta A_2 - \frac{4}{3}\delta^3(\lambda + 2\mu)A_2'' = 0$$

$$\delta\mu(q'' + r'') + (\lambda + \mu)(f' - p') + 4\delta(\lambda + 2\mu)B_2 - \frac{4}{3}\delta^3\mu B_2'' = 0$$

ar robežnosacījumiem:

$$p(0) = p(1) = 0$$

$$r(0) = r(1) = 0$$

$$q(0) = q(1) = 0$$

$$f(0) = f(1) = 0$$

$$A_2(0) = A_2(1) = 0$$

$$B_2(0) = B_2(1) = 0.$$

3. Skaitliskais algoritms.

Pēc vidējošanas esam ieguvuši sekojošu kontaktproblēmu:

$$\delta(\lambda + 2\mu)(f'' + p'') + (\lambda + \mu)(q' - r') + 4\mu\delta A_2 - \frac{4}{3}\delta^3(\lambda + 2\mu)A_2'' = 0$$

$$\delta\mu(q'' + r'') + (\lambda + \mu)(f' - p') + 4\delta(\lambda + 2\mu)B_2 - \frac{4}{3}\delta^3\mu B_2'' = 0$$

$$a_i^* v'' = -\sigma_i^B$$

$$\sigma_i^f = 0$$

$$\sigma_i^B = 0$$

$$\delta + q = \phi(x_1 + f(x_1))$$

$$v(x_1 + p(x_1)) = r(x_1)$$

$$p(0) = p(1) = 0$$

$$r(0) = r(1) = 0$$

$$q(0) = q(1) = 0$$

$$f(0) = f(1) = 0$$

$$A_2(0) = A_2(1) = 0$$

$$B_2(0) = B_2(1) = 0.$$

Šo problēmu skaitliski risināsim ar diferencu metodi, izmantojot sekojošu iterāciju procesu:

1) izveidosim vienmērīgu režģi

$$w_h = \{x_j/x_i = ih, h = 1/N, i = 1, \dots, N\}.$$

Tuvināto vērtību apzīmēšanai mezglu punktos izmantosim burtus ar svītru augšā.

2) režģa mezglu punktos uzdosim sākuma tuvinājumus:

$$\begin{aligned} \bar{f}_i^0, \bar{p}_i^0, \bar{q}_i^0 &= \phi(x_i), & \bar{r}_i^0 &= \bar{v}_i^0 \\ \bar{v}_0^0 &= \bar{v}_N^0 = \bar{f}_0^0 = \bar{f}_N^0 = \bar{p}_0^0 = \bar{p}_N^0 = \bar{r}_0^0 = \bar{r}_N^0 = \bar{q}_0^0 = \bar{q}_N^0 = 0 \end{aligned}$$

3) diferencu shēmu iegūsim, atvasinājumus aizstājot ar atbilstošas kārtas centrālām diferencēm:

$$y_{\bar{x}_i} = \frac{y_{i+1} + y_{i-1}}{2h}$$

$$y_{\bar{\bar{x}}_i} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

Iegūsim sekojošu diferencu shēmu:

$$a_i \bar{A}_{2i-1} - c_i \bar{A}_{2i} + b_i \bar{A}_{2i+1} = -d_i$$

$$l_i \bar{B}_{2i-1} - n_i \bar{B}_{2i} + m_i \bar{B}_{2i+1} = -o_i,$$

$$b_i = a_i = \frac{4}{3} \delta^3 (\lambda + 2\mu)$$

kur

$$c_i = \frac{8}{3} \delta^3 (\lambda + 2\mu) + 4\mu \delta h^2$$

$$d_i = -\delta h^2 (\lambda + 2\mu) (\bar{f}_{\bar{\bar{x}}_i} + \bar{p}_{\bar{\bar{x}}_i}) - (\lambda + \mu) h^2 (\bar{q}_i - \bar{r}_i)$$

$$l_i = m_i = \frac{4}{3} \delta^3 \mu$$

$$n_i = \frac{8}{3} \delta^3 \mu + 4\delta h^2 (\lambda + 2\mu)$$

$$o_i = -\delta h^2 \mu (\bar{q}_{\bar{\bar{x}}_i} + \bar{r}_{\bar{\bar{x}}_i}) - (\lambda + \mu) h^2 (\bar{f}_i - \bar{p}_i)$$

$$\bar{A}_{2n} = \bar{A}_{2N} = 0$$

$$\bar{B}_{2n} = \bar{B}_{2N} = 0$$

Iegūto diskreto robežproblēmu risina ar faktorizācijas metodi. Rezultātā iegūst tuvinājumus

$$\bar{A}_i \text{ un } \bar{B}_i, \quad i = \overline{1, N-1}.$$

4) lai iegūtu tuvinājumus \bar{p}_i un \bar{r}_i , kas apmierina nosacījumus

$$|\bar{\sigma}_i^{\beta}| < \varepsilon_i$$

$$\bar{v}(x_i + \bar{f}_i) = \bar{r}_i,$$

aizstāsim Ω apakšējo robežu ar lauztu līniju, kuras virsotnes atrodas punktos P_i ar koordinātēm

$$(x_i + \bar{p}_i, -\delta + \bar{r}_i) \quad i = \overline{0, N}$$

un rīkosimies sekojoši:

a) no formulas

$$\bar{\sigma}_i^B = \frac{\left[-2\mu \left(\frac{\bar{q}_i - \bar{r}_i}{2\delta} - 2\delta\bar{B}_2 - \bar{p}_x \right) \bar{r}_x (1 + \bar{p}_x) + \mu \left(\frac{\bar{f}_i + \bar{p}_i}{2\delta} - 2\delta\bar{A}_1 - \bar{r}_x \right) \left((\bar{r}_x)^2 - (1 + \bar{p}_x) \right) \right]}{(\bar{r}_x)^2 + (1 + \bar{p}_x)^2}$$

atradīsim tangenciālos spriegumus lauztās līnijas virsotnēs,

b) pārvietosim P_i pirmās koordinātes proporcionāli $\bar{\sigma}_i^B$ lielumam, tikai tam pretējā virzienā. Iegūsim punktus ar koordinātēm

$$(x_i + \bar{p}_i - \theta \bar{\sigma}_i^B, -\delta + \bar{r}_i) \quad i = \overline{1, N-1},$$

c) lai šīs operācijas rezultātā būtiski nemainītos Ω apakšējās malas forma, jauniegūtos punktus projicēsim uz lauztās līnijas nogriežņiem, kurus izvēlas sekojoši:

$$(x_j + \bar{p}_j, -\delta + \bar{r}_j),$$

kur $j=i-1$, ja $\bar{\sigma}_i^B > 0$,

$j=i+1$, ja $\bar{\sigma}_i^B < 0$.

Pēc projekcijas iegūsim punktus ar koordinātēm

$$\left(\frac{\beta - \beta_1}{\alpha_1 - \alpha} \beta_1 + \alpha_1 \frac{\beta - \beta_1}{\alpha_1 - \alpha}, \right)$$

kur

$$\alpha = \frac{\bar{r}_j - \bar{r}_i}{x_j - x_i + \bar{p}_j - \bar{p}_i + \theta_1 \bar{\sigma}_i^B}$$

$$\beta = \frac{(x_i + \bar{p}_i - \theta_1 \bar{\sigma}_i^B)(\bar{r}_i - \bar{r}_j)}{x_j - x_i + \bar{p}_j - \bar{p}_i + \theta_1 \bar{\sigma}_i^B} + \bar{r}_i - \delta$$

$$\alpha_1 = -\frac{1}{\alpha}$$

$$\beta_1 = \frac{(x_i + \bar{p}_i)(x_j - x_i + \bar{p}_j - \bar{p}_i + \theta_1 \bar{\sigma}_i^B)}{\bar{r}_j - \bar{r}_i} + \bar{r}_i - \delta$$

Tagad var iegūt apakšējās robežas punktu jaunus pārvietojumus:

$$\bar{p}_i^{j+1} = \frac{\beta - \beta_1}{\alpha_1 - \alpha} - x_i$$

$$\bar{r}_i^{j+1} = \beta_1 + \alpha_1 \frac{\beta - \beta_1}{\alpha_1 - \alpha} + \delta$$

Šo procedūru atkārto, kamēr tiek apmierināts nosacījums

$$|\bar{\sigma}_i^B| < \varepsilon_1 \quad i = \overline{1, N-1}$$

5) tuvinājumus augšējās malas pārvietojumiem, kas apmierina nosacījumus

$$|\bar{\sigma}_i^T| < \varepsilon_2$$

$$\delta + \bar{q} = \phi(x_i + \bar{f}_i)$$

Iegūsim analogi kā punktā 4), aizstājot f_i un q_i ar p_i un r_i , kā arī δ ar $-\delta$.

6) lai iegūtu stīgas punktu pārvietojumus, kas atbilst Ω apakšējās malas deformācijai, ar faktorizācijas metodi risināsim diskreto robežproblēmu

$$\bar{v}_{i-1} - 2\bar{v}_i + \bar{v}_{i+1} = -\frac{\bar{\sigma}_i^B}{a^2} h^2,$$

$$\bar{v}_0 = \bar{v}_N = 0$$

kur

$$\bar{\sigma}_n^B = \frac{s_1 + s_2 - s_3}{s_4}$$

$$s_1 = \left[(\mu + 2\mu)\bar{p}_x + \lambda \left(\frac{\bar{q}_i - \bar{r}_i}{2\delta} - 2\delta\bar{B}_2 \right) \right] (\bar{r}_x)^2$$

$$s_2 = \mu \left(\frac{\bar{f}_i + \bar{p}_i}{2\delta} - 2\delta\bar{A}_2 - \bar{r}_x \right) \bar{r}_x (1 + \bar{p}_x)$$

$$s_3 = \left[(\mu + 2\mu) \left(\frac{\bar{q}_i - \bar{r}_i}{2\delta} - 2\delta\bar{B}_2 \right) + \lambda\bar{p}_x \right] (1 + \bar{p}_x)$$

$$s_4 = (1 + \bar{p}_x)^2 + (\bar{r}_x)^2$$

7) iterāciju procesu beidz, kad izpildās nosacījums

$$|\bar{v}_i^j - \bar{v}_i^{j+1}| < \epsilon_3,$$

8) pēc šī nosacījuma izpildīšanās, iegūsim tuvinātās vērtības \bar{u}_i un \bar{w}_i , režģa

$$\omega_h \times \omega_\tau = \{(x_1, x_2) / x_1 = ih, x_2 = j\tau, h = \frac{1}{N}, \tau = \frac{2\delta}{M}, i = \overline{0, N}, j = \overline{0, M}\}$$

mezglu punktus, izmantojot formulas

$$u_1(x_1, x_2) = \frac{\bar{f}_i + \bar{p}_i}{2} + \frac{\bar{f}_i - \bar{p}_i}{2\delta} x_2 + \bar{A}_2 \left((x_2)^2 - \delta^2 \right)$$

$$u_2(x_1, x_2) = \frac{\bar{q}_i + \bar{r}_i}{2} + \frac{\bar{q}_i - \bar{r}_i}{2\delta} x_2 + \bar{B}_2 \left((x_2)^2 - \delta^2 \right)$$

4. Rezultāti.

Nelielām deformācijām aprakstītā metode ātri konverģē un dod fizikālajai situācijai atbilstošus rezultātus.

KĀDAS KONTAKTPROBLĒMAS SKAITLISKS ATRISINĀJUMS. Desmitnieks A. // Matemātiskā modelēšana. Matemātiskās fizikas lietišķās problēmas. - Rīga: LU, 1994.

Darbā tuvināti risināta Lamé vienādojumu sistēma, kura apraksta elastīga ķermeņa un stīgas kontaktu.
1 zīm.

THE NUMERICAL SOLUTION OF A CONTACT PROBLEM. Desmitnieks A. // The mathematical simulation. Applied problems of mathematical physics. - Rīga: LU, 1994.

The paper contains an approximate solution of the Lamé equations system for the contact of the elastic body and the string.

1 figure.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ. Десмитниекс А. // Математическое моделирование. Прикладные задачи математической физики. Рига: ЛУ, 1994.

В работе рассмотрено приближенное решение системы уравнений Ламэ, которая описывает контакт эластичного тела и струны.
1 рис.

М. Гулбе

Институт Математики и информатики ЛУ

Рига

Численное исследование формы границы раздела фаз при выращивании монокристалла из расплава

Математическая модель задачи в классической постановке описывается следующими уравнениями и условиями. Уравнением теплопереноса в двухфазной среде

$$c \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} u) + f \quad (1)$$

и условиями на границе раздела фаз

$$[\lambda \operatorname{grad} u]_{s_c} \cdot \vec{n} = \gamma v_n(t), \quad u(x, y, t)|_{s_c} = u_n, \quad (2)$$

и следующими условиями на внешних границах рассматриваемой области:

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad u \Big|_{y=R} = u_n + \frac{u_1 - u_n}{l} \cdot x, \quad u \Big|_{x=l} = u_1 \quad (3)$$

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \lambda K, \quad x \in [x_1, x_2] \quad (4)$$

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \varepsilon \sigma (u^4 - u_{\text{бн}}^4), \quad x \in [0, x_1) \cup (x_2, R] \quad (5)$$

$$u(x, y, 0) = u_n(x, y) \quad (6)$$

Здесь $u(x, y, t)$ - температура в области изменения, c - удельная теплоемкость, γ - удельная скрытая теплота фазового перехода, u_n - температура фазового перехода, λ - коэффициент теплопроводности, терпящий разрыв при переходе из твердой в жидкую фазу; $[\Phi]_{s_i}$ - обозначает скачок величины Φ при переходе через границу; s_i, s_i - граница раздела фаз; $v_n(t)$ - скорость движения границы раздела фаз по направлению нормали \vec{n} , направленной в сторону жидкой фазы.

Для построения численного метода решения проводится локальное осреднение уравнений задачи /1/. В результате локального осреднения уравнение (1) с условием (2) можно заменить уравнениями

$$c \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} (\lambda \operatorname{grad} u) + \gamma \frac{\partial \eta}{\partial t} + f \quad (7)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \beta \Delta u \theta_1(\rho - |x - x^*|) \cdot \theta(\Delta u), \quad (8)$$

где $\Delta u = u_n - u$, $\theta_1(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi < 0 \\ 1, & \xi \geq 0 \end{cases}$ и $\theta(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi \leq 0 \\ 1, & \xi > 0 \end{cases}$ - единичные функции, ρ - радиус локального объема осреднения на границе раздела фаз, x^* - точка на границе раздела фаз Σ . Функция $\eta(x, r, t)$ - относительная доля твердой фазы в локальном объеме осреднения V_ρ (ρ - окрестности границы раздела фаз). В этом объеме $0 < \eta < 1$. В жидкой фазе $\eta(x, r, t) = 0$, в твердой $\eta(x, r, t) = 1$. Тогда $\lambda = \lambda_1 \eta + \lambda_2 (1 - \eta)$, где λ_1 , λ_2 - значения коэффициента теплопроводности материала в твердой и жидкой фазе.

Как показано в /1/, решение уравнения (7) $u(x, r, t)$ с учетом (8) сходится к решению исходной задачи при $\beta \rightarrow \infty$. Теперь к уравнению (7) можно применять разностные методы со сквозным счетом без выделения границы раздела фаз. Уравнение (7) в цилиндрической неподвижной системе координат (x, r) пишется в виде

$$c \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \lambda \frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial x} (\lambda \frac{\partial u}{\partial x}) + \gamma \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (9)$$

($f=0$, т.к. рассматриваем случай без внутренних источников тепла).

Для численного решения вводим неравномерную сетку в пространстве

$$\omega_h = \{(x_i, r_j); 1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq M, x_{i+1} - x_i = h_i, r_{j+1} - r_j = g_j, x_1 = r_1 = 0, x_N = 1, r_M = R\} \quad (10)$$

и дифференциальное уравнение (9) заменяем разностным. В направлении t берем равномерный шаг τ , $t = t_0 + k\tau$.

$$\begin{aligned} \frac{c}{\lambda} \frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^k}{\tau} = & \frac{\lambda}{h_i + h_{i+1}} \left(\frac{1}{h_{i+1}} u_{i+1,j}^{k+1} - \left(\frac{1}{h_{i+1}} + \frac{1}{h_i} \right) u_{i,j}^{k+1} + \frac{1}{h_i} u_{i-1,j}^{k+1} \right) + \\ & + \frac{\lambda}{g_j + g_{j+1}} \left(\frac{1}{g_{j+1}} u_{i,j+1}^{k+1} - \left(\frac{1}{g_{j+1}} + \frac{1}{g_j} \right) u_{i,j}^{k+1} + \frac{1}{g_j} u_{i,j-1}^{k+1} \right) + \\ & + \frac{1}{h_j} \frac{u_{i,j+1}^{k+1} - u_{i,j-1}^{k+1}}{g_j + g_{j+1}} + \frac{\gamma}{\lambda} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)_{i,j}^{k+1/2} \end{aligned} \quad (11)$$

Так как мы рассматриваем задачу в классической постановке, то скрытая теплота выделяется только в окрестности границы раздела фаз. При использовании метода локального осреднения в малой ρ -окрестности этой границы. Соответственно разностную аппроксимацию члена $\frac{\partial \eta}{\partial t}$ в уравнении (11) записываем в виде:

$$\left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)_{i,j}^{k+1/2} = \beta \Delta u_{i,j}^{k+1} \left(\theta(\Delta u_{i,j}^k) \theta(1 - \eta_{i,j}^k) \theta_1(\eta_{i,j \pm 1}^k - 1) + \theta(\eta_{i,j}^k) \theta(-\Delta u_{i,j}^k) \right) \quad (12)$$

и функцию η определяем из уравнения

$$\frac{\eta_{i,j}^{k+1} - \eta_{i,j}^k}{\tau} = \beta \Delta u_{i,j}^{k+1} \left(\theta(\Delta u_{i,j}^{k+1}) \theta(1 - \eta_{i,j}^k) \theta_1(\eta_{i,j \pm 1}^k - 1) + \theta(\eta_{i,j}^k) \theta(-\Delta u_{i,j}^{k+1}) \right), \quad (13)$$

где $\eta_{i \pm 1, j \pm 1}$ - значения функции $\eta(x, y, t)$ в точках, сдвинутых на шаг аппроксимации в любом направлении по пространству. Граничные условия (3) - (5) аппроксимировались обычным образом. Для расчетов применялся эффективный итерационный метод неполного LU-разложения сопряженных градиентов [2,3].

На рис. 1-4 представлены модель и результаты расчетов положения границы раздела фаз (фронта кристаллизации) в установившемся тепловом режиме. На рис. 2-3 показан случай, когда кристалл первоначально был погружен в перегретый расплав (показано пунктиром). Охлаждение происходит с поверхности кристалла. Просчитаны случаи с двумя различными температурами внешней среды: $T_{\text{вн}} = -500^\circ$ (реальная температура 700°K , рис. 2) и $T_{\text{вн}} = -400^\circ$ с реально 800°K , рис. 3). Расчеты показывают устойчивое положение границы раздела фаз, причем изменение температуры внешней среды незначительно изменило форму фронта кристаллизации. На рис. 4 показаны результаты расчетов формы фронта кристаллизации, когда рост кристалла происходит от подложки (кристалл не погружен в расплав). Как видно, и в этом случае наблюдается устойчивый рост кристалла.

Приведенные примеры показывают надежность и пригодность предложенного численного метода решения задачи Стефана в классической постановке.

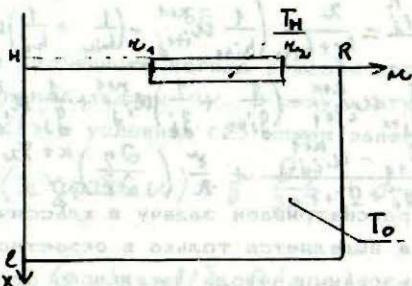


Рис. 1. Расчетная модель задачи.

$$u_H(0, \mu, 0) = T_H, \quad \mu \in [\mu_1, \mu_2]$$

$$u_H(x, \mu, 0) = T_0$$

$$u_1 = T_1, \quad u_2 = T_2.$$

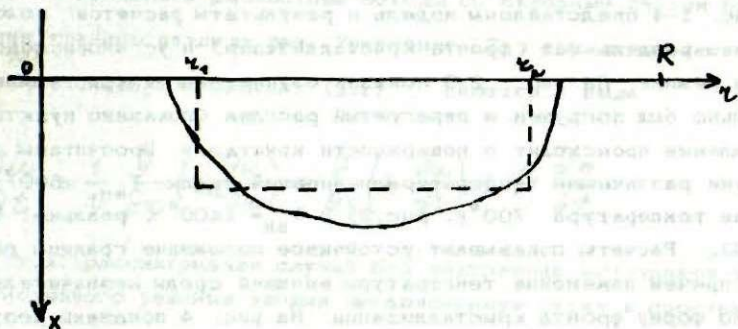


Рис. 2. Положение границы раздела фаз.

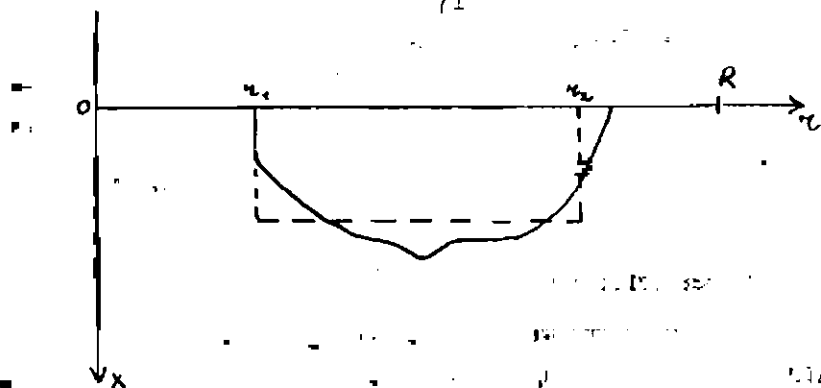


Рис. 3. Положение границы раздела фаз

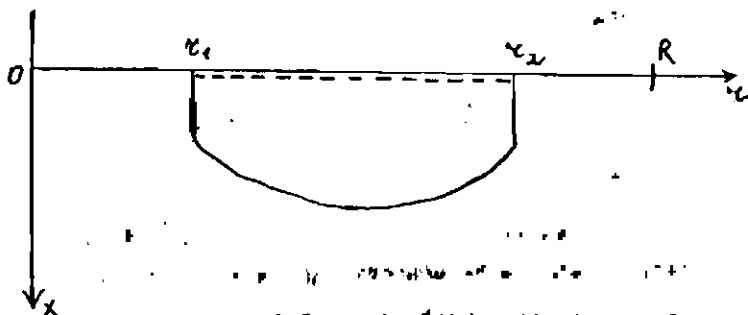


Рис. 4. Положение границы раздела фаз

Расчеты проводились для следующих значений физических величин:
 $T_1 = -50^\circ$, $T_2 = -10^\circ$, $T_0 = -10^\circ$, $T_H = -3^\circ$, $k = 20$ град/см, $H = 0,3$ см, $l = 5$ см,
 $R = 5$ см

Литература

1. М. Гулбе, Н. Авдонин. Исследование устойчивости фронта кристаллизации на осредненной расчетной модели теплопереноса в двухфазной среде // Прикладные задачи математической физики. Рига, 1989. С. 87.
2. David S. Kersaw. The incomplete Cholesky-conjugate gradient methods for the iterative solution of system of linear equations // J. of comput. Phys. 1978. V. 26. P. 43-65.

3. А.Л.Гончаров. Реализация метода неполной LU - композиции сопряженных градиентов для решения сеточных уравнений на различных шаблонах. // Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша АН СССР М., 1984. № 174.

УДК 536.421.1+536.24

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ФОРМЫ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ФАЗ ПРИ ВЫРАЩИВАНИИ МОНОКРИСТАЛЛА ИЗ РАСПЛАВА. М.Гулбе // Математическое моделирование. Прикладные задачи математической физики. Рига: ЛУ, 1994.

В настоящей работе проведено численное исследование устойчивости роста кристалла на численной модели задачи о фазовом переходе. Использован метод локального осреднения. Показана устойчивость процесса роста.

Ил. 4, библи. 3 назв.

NUMERICAL ANALYSIS OF FORM FOR SURFACE OF TWO PHASE AT CRYSTALLIZATION PROCESS OF MONOCRYSTAL. M.Gulbe //The mathematical simulation. Applied problems of mathematical physics. Riga: LU, 1994.

The problem of crystalization in the classical approach with method of local averaging is solved. Stable crystal growth process with smooth phase transition boundary is shown.

Fig. 4, ref. 3.

FĀZU PĀREJAS ROBEŽAS SKAITLISKA PĒTĪSANA NO KAUSĒJUMA AUDZĒJAMOS MONOKRISTĀLOS. M.Gulbe //Matemātiskā modeļēšana. Matemātiskās fizikas lietisķās problēmas.-Rīga: LU, 1994.

Darbā pētīta kristalizācijas problēma klasiskajā nostādņē. Lai varētu realizēt skaitlisko algoritmu, matemātiskā modeļa izveidei izmantota lokālās viduvēšanas metode. Speciālā veidā modeļēts no kausējuma audzējamu monokristālu augšanas process. Skaitliski modelēts stabils kristāla augšanas process.

4 zīm., bibli. 3 nos.

H. Kalis
University of Latvia

NUMERICAL INTEGRATION BY FINITE-DIFFERENCE METHODS
FOR SOME NONLINEAR PROBLEMS

We consider the application of monotone difference schemes to the solutions of some non-linear one-dimensional and two-dimensional initial-boundary problems for parabolic type partial differential equations.

1. The nonlinear time-dependent one-space-dimensional problem can be written in the form

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, \quad u|_{t=0} = \varphi(x), \end{cases} \quad (1)$$

where the coefficients $\alpha, \nu > 0$ and function f depend on $x, u, \partial u / \partial x, 0 \leq x \leq l, t \geq 0$.

The corresponding discretized version of equation (1) for monotone difference scheme [1] is

$$\begin{cases} (y_i^{n+1} - y_i^n) / \tau = \sigma \Lambda y_i^{n+1} + (1-\sigma) \Lambda y_i^n + \tilde{f}_i \\ y_0^n = y_N^n = 0, \quad y_i^0 = \varphi_i, \quad i = 1, N-1, \quad n \geq 0, \end{cases} \quad (2)$$

where $y_i^n, \tilde{f}_i, \varphi_i$ denote the discrete approximation of u, f, φ at the mesh point $x = x_i$ and at time $t = t_n, 0 \leq \sigma \leq 1$

- the parameter (weight) of schemes, $\Lambda y_i \equiv B_i (y_{i+1} - y_i) - A_i (y_i - y_{i-1})$

- the difference expression, $B_i = (\bar{h}_i \bar{h}_i^+)^{-1} \bar{\nu}_i^+ s(\alpha_i^+ \bar{h}_i^+ / \bar{\nu}_i^+),$

$A_i = (\bar{h}_i \bar{h}_i^-)^{-1} \bar{\nu}_i^- s(-\alpha_i^- \bar{h}_i^- / \bar{\nu}_i^-)$ - coefficients of difference

schemes, $\tau, \bar{h}_i^+, \bar{h}_i^-$ - the time step size and non-uniform

grid mesh sizes, $N+1$ - the number of mesh points,

$\bar{h}_i^- = x_i - x_{i-1}, \bar{h}_i^+ = x_{i+1} - x_i, \bar{h}_i = (\bar{h}_i^+ + \bar{h}_i^-) / 2,$

$s = s(z) = z / (e^z - 1) > 0,$

v_i^-, α_i^- and v_i^+, α_i^+ - values of functions v, α in the corresponding points $x_{i-1/2} = (x_i + x_{i-1})/2$ and $x_{i+1/2} = (x_i + x_{i+1})/2$.

Modifying form of Λy_i we can write (2) as

$$\Lambda y = (\gamma y_{x\bar{x}})_x - [\alpha y]_x, \quad (3)$$

where

$$\begin{aligned} \gamma &= \beta \alpha h \beta, \quad \beta = \alpha h / (2v), \\ (\alpha \gamma y_{x\bar{x}})_x &= h_i^{-1} [v_i^+ \delta_i^+ (y_{i+1} - y_i) / h_i^+ - v_i^- \delta_i^- (y_i - y_{i-1}) / h_i^-], \\ [\alpha y]_x &= (2h_i)^{-1} [\alpha_i^+ (y_{i+1} - y_i) + \alpha_i^- (y_i - y_{i-1})]. \end{aligned}$$

In the case of uniform grid ($h_i^+ = h_i^- = h$):

$$\Lambda y = \tilde{\gamma} y_{x\bar{x}} - \tilde{\alpha} y_x,$$

where

$$\begin{aligned} (y_{x\bar{x}})_i &= (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) / h^2, \quad (y_x)_i = (y_{i+1} - y_{i-1}) / (2h), \\ \tilde{\gamma}_i &= (v_i^+ \delta_i^+ + v_i^- \delta_i^-) / 2 > 0, \\ \tilde{\alpha}_i &= (v_i^- \delta_i^- - v_i^+ \delta_i^+) / h, \quad A_i = v_i^- \delta_i^- / h^2, \\ B_i &= v_i^+ \delta_i^+ / h^2, \quad \delta = \gamma - \beta > 0, \quad \varepsilon = \gamma + \beta > 0. \end{aligned}$$

In the case of constant coefficients v, α we have the Il'yn difference scheme [2] with the perturbation coefficients

$$\gamma \text{ in the form } \Lambda y = \gamma v y_{x\bar{x}} - \alpha y_x.$$

The discretization (truncation) error of the approximate difference expression Λy (3) for the differential expression $Lu = \frac{\partial}{\partial x} (\gamma v \frac{\partial u}{\partial x}) - \alpha \frac{\partial u}{\partial x}$ is locally $O(\max |h_i^+ - h_i^-|)$.

For the uniform grid case we obtain the accuracy of second order. The presence of coefficients γ in the difference operator Λ and in the case of constant coefficients ensure the exact discrete approximation of operator L in the space and

monotone difference scheme in the general case ($A_i > 0, B_i > 0$). This is essential for ($0 \leq \beta \text{cth} \beta - 1 \leq \beta^2/3$) large values of parameters β . If $\sigma \neq 0.5$, then the truncation error for (2) is locally first order in time (if $\sigma = 0.5$, then - second order).

Investigating the stability of difference scheme, we apply the maximum principles [3], requiring to be positive the corresponding coefficients of difference scheme (2), that is

$$1 + \tau \sigma (A_i + B_i) > 0, \tau \sigma B_i \geq 0, \tau \sigma A_i \geq 0, \\ 1 - \tau (1 - \sigma) (A_i + B_i) > 0, \tau (1 - \sigma) A_i \geq 0, \tau (1 - \sigma) B_i \geq 0.$$

As for as $\gamma > |\beta|, \nu > 0, 0 \leq \sigma \leq 1, A_i > 0, B_i > 0$, then all inequalities are satisfied automatically with exception for fourth inequality, which can be rewritten in the form

$$\tau \leq ((1 - \sigma) K)^{-1}, \quad (4)$$

where

$$K = \max (A_i + B_i).$$

The classical centered difference ($\gamma_i = 1$) scheme is monotone in case $\max |\beta_i| \leq 1$. The stability condition (4) in the case of constant coefficients and regular meshes has the form

$$S \leq \nu^{-1}, \\ \text{where } S = \gamma K_0 (1 - \sigma), \quad K_0 = 2\tau / h^2.$$

The implicit finite-difference scheme (2) with $\sigma \neq 0$ can be solved by factorisation method for tridiagonal systems [4].

2. The nonlinear time-dependent two-space-dimensional problem in bounded domain ($0 \leq x_1 \leq \ell_1, 0 \leq x_2 \leq \ell_2, t \geq 0$) can be represented in form

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha^{(1)} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \alpha^{(2)} \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1} (\nu^{(1)} \frac{\partial u}{\partial x_1}) + \frac{\partial}{\partial x_2} (\nu^{(2)} \frac{\partial u}{\partial x_2}) + f \\ u|_{x_1=0} = u|_{x_1=\ell_1} = u|_{x_2=0} = u|_{x_2=\ell_2} = 0, u|_{t=0} = \varphi(x_1, x_2), \end{cases} \quad (5)$$

where the coefficients $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \nu^{(1)}, \nu^{(2)}$ and function f depend on $x_1, x_2, u, \partial u / \partial x_1, \partial u / \partial x_2$.

The corresponding monotone difference scheme can be written in the form

$$\left\{ \begin{aligned} (y_{ij}^{n+1} - y_{ij}^n) / \tau &= \sigma \Lambda y_{ij}^{n+1} + (1-\sigma) \Lambda y_{ij}^n + \tilde{f}_{ij}, \\ y_{0ij}^n &= y_{N_2 ij}^n = y_{i,0}^n = y_{i,N_2}^n = 0, \quad y_{ij}^0 = \varphi_{ij}, \\ & i = 1, N_1 - 1, j = 1, N_2 - 1, \end{aligned} \right. \quad (6)$$

where $y_{ij}^n, \tilde{f}_{ij}, \varphi_{ij}$ denote the discrete approximation of u, f, φ at the mesh point $(x_1, x_2) = (x_1^{(i)}, x_2^{(j)})$ and at time $t = t_n$, $0 \leq \sigma \leq 1$ the parameter of schemes,

$$\begin{aligned} \Lambda y_{ij} &= B_{ij}^{(1)} (y_{i+1j} - y_{ij}) - A_{ij}^{(1)} (y_{ij} - y_{i-1j}) + \\ &+ B_{ij}^{(2)} (y_{ij+1} - y_{ij}) - A_{ij}^{(2)} (y_{ij} - y_{ij-1}), \\ B_{ij}^{(1)} &= \frac{1}{h_i^+ h_i^-} v_{ij}^{(1)+} S \left(\frac{\alpha_{ij}^{(1)+}}{v_{ij}^{(1)+}} h_i^+ \right), \quad A_{ij}^{(1)} = \frac{1}{h_i^+ h_i^-} v_{ij}^{(1)-} S \left(-\frac{\alpha_{ij}^{(1)-}}{v_{ij}^{(1)-}} h_i^- \right), \\ B_{ij}^{(2)} &= \frac{1}{g_j^+ g_j^-} v_{ij}^{(2)+} S \left(\frac{\alpha_{ij}^{(2)+}}{v_{ij}^{(2)+}} g_j^+ \right), \quad A_{ij}^{(2)} = \frac{1}{g_j^+ g_j^-} v_{ij}^{(2)-} S \left(-\frac{\alpha_{ij}^{(2)-}}{v_{ij}^{(2)-}} g_j^- \right), \\ \tau, h_i^+, h_i^-, g_j^+, g_j^- & \text{ - the time step size and non-uniform grid} \end{aligned}$$

mesh sizes, $(i-1) h_i^+ = x_1^{(i+1)} - x_1^{(i)}, g_j^- = x_2^{(j)} - x_2^{(j-1)}$,
 $h_i^- = x_1^{(i)} - x_1^{(i-1)}, h_i^+ = x_1^{(i+1)} - x_1^{(i)}, g_j^- = x_2^{(j)} - x_2^{(j-1)}$,

$$g_j^+ = x_2^{(j+1)} - x_2^{(j)}, \quad h_i^- = (h_i^+ + h_i^-) / 2, \quad g_j^- = (g_j^+ + g_j^-) / 2,$$

$v_{ij}^{(1)-}, v_{ij}^{(2)-}, \alpha_{ij}^{(1)-}, \alpha_{ij}^{(2)-}$ and $v_{ij}^{(1)+}, v_{ij}^{(2)+}, \alpha_{ij}^{(1)+}, \alpha_{ij}^{(2)+}$ - the values of functions $v^{(1)}, v^{(2)}, \alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}$ in the corresponding points $(x_1^{(i-1/2)}, x_2^{(j)})$, $(x_1^{(i)}, x_2^{(j-1/2)})$ and $(x_1^{(i+1/2)}, x_2^{(j)})$, $(x_1^{(i)}, x_2^{(j+1/2)})$;

$$x_1^{(i \pm 1/2)} = (x_1^{(i)} + x_1^{(i \pm 1)}) / 2, \quad x_2^{(j \pm 1/2)} = (x_2^{(j)} + x_2^{(j \pm 1)}) / 2.$$

Similarly (3) one obtains

$$\left\{ \begin{aligned} \Lambda y &= \Lambda_1 y + \Lambda_2 y, \\ \Lambda_m y &= (v^{(m)} y^{(m)})_{x_m} - [d^{(m)} y]_{x_m}, \quad m = 1, 2 \end{aligned} \right. \quad (7)$$

where

$$\begin{aligned} ((v_{ij}^{(1)} y_{\bar{x}_1})_{x_1})_{ij} &= h_i^{-1} [v_{ij}^{(1)+} \delta_{ij}^{(1)+} (y_{i+j} - y_{ij}) / h_i^+ - \\ &- v_{ij}^{(1)-} \delta_{ij}^{(1)-} (y_{ij} - y_{i-1j}) / h_i^-], \\ ((v_{ij}^{(2)} y_{\bar{x}_2})_{x_2})_{ij} &= g_j^{-1} [v_{ij}^{(2)+} \delta_{ij}^{(2)+} (y_{ij+1} - y_{ij}) / g_j^+ - \\ &- v_{ij}^{(2)-} \delta_{ij}^{(2)-} (y_{ij} - y_{ij-1}) / g_j^-], \\ ([\alpha^{(1)} y]_{x_1})_{ij} &= (2h_i)^{-1} [\alpha_{ij}^{(1)+} (y_{i+j} - y_{ij}) + \alpha_{ij}^{(1)-} (y_{ij} - y_{i-1j})], \\ ([\alpha^{(2)} y]_{x_2})_{ij} &= (2g_j)^{-1} [\alpha_{ij}^{(2)+} (y_{ij+1} - y_{ij}) + \alpha_{ij}^{(2)-} (y_{ij} - y_{ij-1})], \\ \delta^{(1)} &= \beta^{(1)} cth \beta^{(1)}, \delta^{(2)} = \beta^{(2)} cth \beta^{(2)}, \beta^{(1)} = \alpha^{(1)} h / (2v^{(1)}), \\ \beta^{(2)} &= \alpha^{(2)} g / (2v^{(2)}). \end{aligned}$$

With the mesh sizes $h = h_1, g = h_2$ in the case of regular meshes the difference operators Λ_1, Λ_2 can be rewritten in the form

$$\Lambda_m y = \bar{\gamma}^{(m)} y_{x_m \bar{x}_m} - \bar{\alpha}^{(m)} y_{\bar{x}_m}, \quad m = 1, 2,$$

where

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_{ij} &= (v_{ij}^+ \delta_{ij}^+ + v_{ij}^- \varepsilon_{ij}^-) / 2, \quad \bar{\alpha}_{ij} = (v_{ij}^- \varepsilon_{ij}^- - v_{ij}^+ \delta_{ij}^+) / h, \\ A_{ij} &= v_{ij}^- \varepsilon_{ij}^- / h^2, \quad B_{ij} = v_{ij}^+ \delta_{ij}^+ / h^2, \\ \delta &= \gamma - \beta > 0, \quad \varepsilon = \gamma + \beta > 0. \end{aligned}$$

If the all coefficients have constant values, then $\bar{\gamma} = \gamma$, $\bar{\alpha} = \alpha$ and in this case can be obtained Ilhyn type monotone difference scheme, where

$$\Lambda_m y = \gamma^{(m)} v^{(m)} y_{x_m \bar{x}_m} - \alpha^{(m)} y_{\bar{x}_m}, \quad m = 1, 2.$$

Similarly in advance the difference expression Λy approximate the differential expression

$$Lu = \frac{\partial}{\partial x_1} (\gamma^{(1)} v^{(1)} \frac{\partial u}{\partial x_1}) + \frac{\partial}{\partial x_2} (\gamma^{(2)} v^{(2)} \frac{\partial u}{\partial x_2}) - \alpha^{(1)} \frac{\partial u}{\partial x_1} - \alpha^{(2)} \frac{\partial u}{\partial x_2}$$

with error

$$O(\max |h_i^+ - h_i^-| + \max |g_j^+ - g_j^-|).$$

Using maximum principle can be obtained the stability condition (4) in time, where $K = \max (B_y^{(1)} + B_y^{(2)} + A_y^{(1)} + A_y^{(2)})$. The stability inequality in the case of constant coefficients and regular meshes is written in the form

$$S \leq \nu^{-1}, \quad \text{where} \quad S = \gamma K_0 (1 - \sigma), \\ K_0 = 2\tau (h^{-2} + g^{-2}).$$

If the coefficients are not constant, then the numerical experiment shows, that the difference scheme (6) may be stable, if this inequality is not true.

3. The resulting difference scheme (6) ($\sigma = 1$) may be solved by a direct application of Samarski symmetrical alternating direction methods (ADI) in form [3]

$$\begin{cases} (y^{n+1/2} - y^n) / \tau = \sigma_1 \Lambda_1 y^{n+1/2} + (1 - \sigma_1) \Lambda_2 y^n + \sigma_1 \tilde{f} \\ (y^{n+1} - y^{n+1/2}) / \tau = (1 - \sigma_2) \Lambda_1 y^{n+1/2} + \sigma_2 \Lambda_2 y^{n+1/2} + (1 - \sigma_2) \tilde{f} \end{cases} \quad n \geq 0, \quad (8)$$

where σ_1, σ_2 the weight coefficients.

Excepting $y^{n+1/2}$ from (8) one obtains the two-levels difference equations

$$B(y^{n+1} - y^n) / \tau = \Lambda y^n + \tau(1 - \sigma_1 - \sigma_2) \Lambda_1 \Lambda_2 y^n + \tilde{f}, \quad (9)$$

where $B = (E - \tau \sigma_1 \Lambda_1)(E - \tau \sigma_2 \Lambda_2)$,

E - is the identity operator. If $\alpha^{(1)} = \alpha^{(2)} = 0$, $\nu^{(1)} = \nu^{(2)} = 1$, $\sigma_m = 0.5 - h_m^2 / (12\tau)$, $m=1,2$ (h_1, h_2 - the uniform grid mesh sizes), $\tilde{f} = f + \tau(0.5 - \sigma_1) \Lambda_1 f + \tau(0.5 - \sigma_2) \Lambda_2 f$, then in the steady-state case ($t \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$) high accuracy with order $O(\tau^2 + h_1^4 + h_2^4)$ can be obtained, difference scheme, for solving of Poisson equation $\Delta u + f = 0$ [3].

If $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.5$, $\tilde{f} = f$, then the difference equations (9)

$$\text{are} \quad (y^{n+1} - y^n) / \tau = \Lambda(y^{n+1} + y^n) / 2 + f - \frac{\tau}{4} \Lambda_1 \Lambda_2 (y^{n+1} - y^n), \quad n \geq 0 \quad (10)$$

and they have the order $O(\tau^2 + h_1^2 + h_2^2)$ of approximation for finite difference equations (6), if $\sigma = 0.5$.

The difference equations (8) in every direction can be solved by factorisation method, that is stable, if [4]

$$\begin{aligned} \sigma_1 \tau A_{ij}^{(1)} > 0, \quad \sigma_1 \tau B_{ij}^{(1)} > 0, \quad 1 + \sigma_2 \tau C_{ij}^{(1)} > 0, \\ (1 - \sigma_2) \tau A_{ij}^{(2)} > 0, \quad (1 - \sigma_2) \tau B_{ij}^{(2)} > 0, \quad 1 - (1 - \sigma_2) \tau C_{ij}^{(2)} > 0, \\ \sigma_2 \tau A_{ij}^{(2)} > 0, \quad \sigma_2 \tau B_{ij}^{(2)} > 0, \quad 1 + \sigma_2 \tau C_{ij}^{(2)} > 0, \\ (1 - \sigma_1) \tau A_{ij}^{(1)} > 0, \quad 1 - (1 - \sigma_1) \tau C_{ij}^{(1)} > 0, \quad (1 - \sigma_1) \tau B_{ij}^{(1)} > 0, \\ C_{ij}^{(m)} = A_{ij}^{(m)} + B_{ij}^{(m)}, \quad m = 1, 2, \end{aligned}$$

that is

$$\tau \leq \min \left(\frac{h_1^2}{2(1 - \sigma_1) \max_{ij} \tilde{f}_{ij}^{(1)}}, \frac{h_2^2}{2(1 - \sigma_2) \max_{ij} \tilde{f}_{ij}^{(2)}} \right).$$

This inequality follows from (4), if $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$.

4. The results of numerical experiments were obtained mainly for one-dimensional problem (1) by considering such nonlinear equations - as for instance Burgers equations

($\alpha = u, \nu = \text{const} > 0$) [5], Fischer equation

($\alpha = \text{const}, \nu = \text{const} > 0, f = u(1 - u)$) [6],

Samarski equation ($\alpha = 0, \nu = u^\theta, f = u^2, x \geq \theta + 1$) [7],

Yanenko equation ($\alpha = f = 0, \nu = 1 + 3\rho + \rho^2, \rho = \partial u / \partial x, l = 1$) [8].

There are obtained also some another modifications of nonlinear problems.

The numerical solutions were obtained on IBM PC-386 computer with pascal language of programming. The results are obtained form of graphic on computer screen. This gives the possibility to globally investigate the form of the solution and the stability of difference scheme.

As example of model for the linear one-space-dimensional problem (1) ($\alpha = \text{const}$, $\nu = \text{const} > 0$, $l = 1$,

$$\begin{aligned} f(x) &= A w_k(x), \quad w_k(x) = \exp(rx/2) \sin(\pi k x), \\ \varphi(x) &= w_1(x), \quad k \geq 1, \quad r = \alpha/\nu, \quad A = \text{const} \end{aligned}$$

is presented the solution [9]

$$u(x, t) = e^{-\lambda_k t} w_1(x) + A(1 - e^{-\lambda_k t}) w_k(x) / \lambda_k, \quad (11)$$

where

$$\lambda_k = \frac{\alpha^2}{4\nu} + (k\pi)^2 \nu.$$

The corresponding discrete problem in the case of regular meshes also can be written in the analytic form [9]

$$y_i^n = q_k^n w_1(x_i) + A \frac{\tau}{1 + \sigma \tau \tilde{\lambda}_k} \frac{1 - q_k^n}{1 - q_k} w_k(x_i), \quad (12)$$

where $q_k = (1 - (1 - \sigma) \tau \tilde{\lambda}_k) / (1 + \sigma \tau \tilde{\lambda}_k)$,

$$\tilde{\lambda}_k = \frac{\alpha l}{h} (\operatorname{ch}(r h / 2) - \cos(k \pi h)) / \operatorname{sh}(\pi h / 2).$$

As test of the linear two-space dimensional problem (5)

$$\begin{aligned} (\alpha^{(1)} = \alpha^{(2)} = 0, \quad \nu^{(1)} = \nu^{(2)} = 1, \quad f = A \sin(\pi x_1) \cdot \\ \sin(\pi x_2), \quad \varphi = -\frac{A}{2\pi^2} \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2), \quad l_1 = l_2 = 1) \end{aligned}$$

is considered the solution

$$u(x_1, x_2, t) = \frac{A}{2\pi^2} (1 - 2e^{-2\pi^2 t}) \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2). \quad (13)$$

As test of the nonlinear equation is considered solution of homogenous Burgers equation ($f = 0$) in the form [5]

$$u(x, t) = -2\nu (\partial \phi / \partial x) / \phi, \quad (14)$$

where $\phi = \phi(x, t)$ is solution of the linear heat conduction equation $\partial \phi / \partial t = \nu \partial^2 \phi / \partial x^2$ for example

$$\begin{aligned} \phi(x, t) &= 1 + 0.25 \exp(-\pi^2 \nu t) \cos(\pi x) + 0.5 \exp(-4\pi^2 \nu t) \cos(2\pi x), \\ \varphi(x) &= -2\nu (\partial \phi / \partial x) / \phi |_{t=0}, \quad l = 1. \end{aligned}$$

For the numerical results in the description are used following designations:

y_{\min}, y_{\max} - the minimal (min) and maximal (max) values of numerical solution,

y_{\min}^*, y_{\max}^* - the minimal and maximal values of numerical solution with Ilhyn scheme,

u_{\max} - the maximal value of exact solution,

$iP=0$ - the classical difference scheme with centered difference ($\gamma=1$),

$iP=1$ - the monotonous difference scheme.

Simulating solutions (11), (12) of linear equation (1) in the moment of time $t=0.02$ ($N=20, \sigma=0.5, \alpha=10$) depending on parameter iP have been obtained such results:

$u_{\max} = 60.86, y_{\max}^* = 62.38, S = 0.51$ ($iP=1$),
 $y_{\max}^* = 62.71$ ($iP=0$).

If $N=40$, then corresponding $u_{\max} = 61.30, y_{\max}^* = 62.69$ ($iP=1$), $y_{\max}^* = 62.79$ ($iP=0$).

If the value of the parameter $\alpha > 0$ increases, then the thickness of the boundary layer (BL) at the point $x=1$ rapidly decreases, but in the case $\alpha = -10$ the BL moves at the point $x=0$ with max. value smaller as in previous case ($N=20$): $u_{\max} = 0.41, y_{\max}^* = 0.420$ ($iP=1$), $y_{\max}^* = 0.423$ ($iP=0$). Comparing the numerical solutions obtained for various σ , it is visible, if increase σ then accuracy becomes better ($iP=1, \alpha=-10, N=20$):

if $\sigma = 0; 0.5; 1$ ($u_{\max} = 0.41$), then $y_{\max}^* = 0.423; 0.420; 0.417$.

If $iP=0$, then corresponding results are $y_{\max}^* = 0.426; 0.423; 0.419$.

Hence more precise is monotone difference scheme ($iP=1$) comparing with classical scheme ($iP=0$), which is convergent, if $S < 2$. But as soon as $S \geq 2$ (for example $\alpha=10, K_0=4, N=40, S=2$) then both explicit schemes ($\sigma=0$) rapidly diverge. Similarly diverge also the classical scheme ($iP=0$), if $\beta \geq 1$ not depending on values K_0 .

Modelling the steady-state solution ($t = \infty$) (13) of problem (5) of linear equation ($\alpha = 0$) in the centre of square are obtained the following results ($A = 1000$):

$$u = 50.66, y = 51.08 (N_1 = N_2 = 10), y = 50.74 (N_1 = N_2 = 20).$$

Modelling the solution (14) of Burgers equations (1) is obtained ($\nu = 1, t = 0.05$), that the accuracy $\delta y = \max |y_i - y_c|$

1) is improved if τ decreases: $N = 40, \tau = 0.5 -$

$$\delta y = 0.032 (K_0 = 4), \delta y = 0.006 (K_0 = 1),$$

2) a little bit depends of schemes form

$$(iP = 0 \quad \text{or} \quad iP = 1),$$

3) is improved, if τ increases: $N = 20, K_0 = 1 -$

$$\delta y = 0.050 (\tau = 0); 0.025 (\tau = 0.5); 0.023 (\tau = 1).$$

Modelling the steady-state solution of nonhomogenous Burgers equations (1) ($\alpha = \alpha_1 u, \ell = \nu = 1, \varphi(x) = -100x(1-x),$

$f(x) = 100 \sin(\pi x)$) depending on parameters α_1

(1; 10; 100; 1000), τ (0; 0.5; 1),

N (10; 20; 40; 80; 100), K_0 ($1 \leq K_0 \leq 100$)

have been obtained such main results:

1) $y \geq 0$ independing of signs α_1 ;

if $\alpha_1 > 0$, then the solution has a BL nature at the point

$x = 1$ where the y_{\max} value is reached, if α_1 increases;

if $\alpha_1 < 0$, then the BL is shifted at the point $x = 0$;

2) comparing with the Ilhyn difference scheme, the difference

scheme (2),(3) is more precise: $\tau = 1, K_0 = 40, \alpha_1 = 10 -$

$$y_{\max}^* = 3.289 (N=20); 3.297 (N=40); 3.298 (N=80),$$

$$y_{\max} = 3.300 (N=20); 3.299 (N=40); 3.299 (N=80),$$

3) the scheme (2),(3) ($iP = 1$) also is more precise

comparing with classical scheme ($iP = 0$): $\tau = 1, K_0 = 40, \alpha_1 = 10,$

$$iP = 0 - y_{\max} = 3.306 (N=40); 3.302 (N=80),$$

4) the accuracy of steady-state solution is independent on σ with exception for the convergence and the stability of the discrete method: the both schemes ($iP=0$ and $iP=1$) are divergent, if S increases ($S \geq 2$) at $\sigma=0$ and converge nonmonotonously, if $\sigma=0.5$, $iP=0$,

for example, if $\alpha_1=1$, $\sigma=0$, $N=20$, $K_0=2$, then the both schemes are divergent, but, if $K_0=1$ ($S=1.03$) then -

$$y_{\max} = 7.962 \quad (iP=1); \quad 7.976 \quad (iP=0);$$

if α_1 increases the value of y_{\max} decreases: $iP=\sigma=1$, $K_0=20$, $N=40$ - $y_{\max}=7.965$ ($\alpha_1=1$); 3.299 ($\alpha_1=10$); 1.107 ($\alpha_1=100$); 0.354 ($\alpha_1=1000$),

6) the convergent result with scheme ($iP=0$) is obtained only if $\beta \leq 1$ moreover the results with scheme (2),(3) are more precisely than with classical centered difference scheme

$$\sigma=1, \alpha_1=100, K_0=10 - y_{\max}^* = \infty \quad (N=10);$$

$$3.09 \quad (N=20); \quad 1.547 \quad (N=40); \quad 1.108 \quad (N=80);$$

$$1.108 \quad (N=100), \quad y_{\max} = 1.39 \quad (N=10); \quad 1.224 \quad (N=20);$$

$$1.129 \quad (N=40); \quad 1.108 \quad (N=80); \quad 1.107 \quad (N=100),$$

7) the classical scheme ($iP=0$) can be divergent if the scheme (2),(3) with $\chi=1$ is convergent: $\sigma=0.5$, $\alpha_1=100$, $K_0=10$, $N=100$ - $y_{\max}^* = \infty$, $y_{\max} = 1.107$.

By another initial condition $\varphi(x) = x(1-x)$ the speed of convergence to the steady-state solution is greater.

Modelling the steady-state solution of nonlinear equation (1) ($\alpha = \alpha_1 u^2$, $l=v=1$, $\varphi(x) = x(1-x)$, $f_r(x) = 100 \sin(f_r \pi x)$) depending on parameters $\alpha_1, \sigma, K_0, N, f_r$ are obtained following results:

- 1) if $f_r=1$, then the approximate solution is similarly in advance;
- 2) the explicit scheme ($\sigma=0$) is divergent independent on values of parameter iP ($\alpha_1=100$, $f_r=K_0=1$, $N=40$)

but in the case $\sigma = 0.5$ or $\sigma = 1$ (implicit scheme) with parameter $iP = 0$ the convergent solution is obtained if only $N = 80$ (if $N = 40$ then oscillations of the approximate solution with monotonically growing amplitude arise at point $x = 1$ in the BL (this process continues until the moment $t \geq 2$ when the solution becomes negative)) - $y_{\max}^* = 1.218$ ($\sigma = 1$);

correspondingly with $iP = 1, K_0 = 14$ -

$y_{\max}^* = 1.210$ ($N = 40$); 1.214 ($N = 80$);

if $\alpha_1 = 1000, N = 80$, then $y_{\max}^* = 0.570$,

3) if $iP = 0$ the oscillation frequency of the right-hand function f increases ($f_r = 4$), then the steady-state solution has a sine-curve character in the space with 2 positive y_{\max} values and 2 negative y_{\min} values, moreover

the deformable graph of a sine curve in the right-hand side ($y' < 0$) is steeper as in the left side ($y' > 0$): $iP = 1,$

$K_0 = 100, N = 80$ - $y_{\max}^* = 0.644, y_{\min}^* = -0.329$ ($\alpha_1 =$

$= 100$), $y_{\max}^* = 0.329, y_{\min}^* = -0.644$ ($\alpha_1 = -100$),

exchanging the sign of parameter α_1 the max. and min. values of solution exchange with places;

if $\alpha_1 = 1000, f_r = 8$, then the steady-state solution has the form of sine curve with 4 max. un 4 min. values:

$$y_{\max}^* = 0.181, \quad y_{\min}^* = -0.125,$$

4) if $d_1 = 1000, f_r = 4$, then the periodical oscillation in time are obtained, for example, if $\sigma = iP = 1, N = K_0 = 40$,

then the values y_{\max}^* oscillate from 0.143 until 0.574 with the point 2τ in time.

Changing the parameter $v(1; 10; 100)$,

if $\alpha_1 = 1000, f_r = iP = \sigma = 1, N = 80$, then

correspondingly - $y_{\max}^* = 0.570; 0.515; 0.101$

moreover if increases the BL at the point $x = 1$ gradually decreases. If v is dependent on the solution u ($v = |u|;$

$10|u|; 100|u|; 1000|u|$), then form also the BL

at the point $x = 0$ and correspondingly -

$$y_{\max}^* = 0.575; 0.567; 0.425; 0.142.$$

If $\alpha_1 = 100$, $f_r = 8$, $\nu = |u|$, then the nonperiodical oscillations with sharp pointed values of y from -0.74

until 0.72 are obtained, which oscillation-amplitudes and the sharp pointed values decreases, if ν increases (if $\nu = 10|u|$; $100|u|$ then correspondingly -

$$y = -0.42 \div 0.56; \quad y = -0.31 \div 0.24).$$

If $f = u(1-u)$, $\nu = |u|$ (the other parameters are fixed), then correspondingly $\alpha_1 = 10; 100; 1000$ are obtained

$y_{\max}^* = 0.20; 0.14; 0.05$ moreover the BL at the point $x = 1$ decreases. If $\alpha_1 = \nu \rightarrow 0$, then the steady-state solution tends to the discontinuous function ($y(x) = 1, x \in (0, 1)$, $y(0) = y(1) = 0$) because the exact solutions

$$u \rightarrow c / (c + e^{-t}), \quad c = \text{const}, \quad x \in (0, 1).$$

Changing the convection terms

$$(\alpha = \alpha_1 u |u|, \nu = 1, f(x) = 100 \sin(f_r \pi x))$$

$$\text{if } \alpha_1 = 100, \nu = 1, N = 80, K_0 = 100, f_r = 4,$$

the approximate solution has a nonregular sine-curve character with the steeper right-hand side ($y' < 0$): $y_{\max}^* = 0.53$, $y_{\min}^* = -0.55$,

but at $\alpha_1 = 1000$ is obtained weakly oscillating solution in the middle of segment $[0, 1]$ where the perturbation increases if f_r increases ($f_r = 8; 16$) - $y_{\max}^* = 0.336$, $y_{\min}^* = -0.336$.

Modelling the Yanenko equation (1) ($\alpha = 10$, $\ell = 1$, $f(x) = x(1-x)$, $f(x) = 100 \sin(\pi x)$, $N = 40$, $K_0 = 1$, $\nu = \nu_1 + 3p + p^2$, $p = \alpha u / \nu x$)

with the both schemes ($iP = 0$ and $iP = 1$) depending

on ν_1 ($1 \leq \nu_1 \leq 15$) are obtained the following results:

1) if $\nu_1 = 15$, $\nu = 1$, then the obtained results by both schemes are identical: $t = 0.005; 0.01; 0.05$ -

$$y_{\max}^* = 0.465; 0.552; 0.606$$

but, if $\alpha = 100$, then the steady-state solution with the

value $y_{\max}^* = 0.439$ is achieved already at $t \geq 0.02$ and

they has a BL nature at the point $x = 1$;

2) if $\sigma = 0.5$, then the solutions with both schemes has an oscillatory nature in the space ($y_{\min}^* < 0$) and the oscillations begin at the point $x=1$ where $p < 0$ and the max and min values change in the every level of time:

$$\begin{aligned} v_1 &= 1, t = 0.005; 0.01; 0.05 - \\ y_{\max}^* &= 0.879; 0.642; 0.664, \\ y_{\min}^* &= -0.311; -0.585; -0.320 \quad (iP=0), \\ y_{\max}^* &= 0.779; 1.077; 0.970, \\ y_{\min}^* &= -0.330; -0.900; -0.906 \quad (iP=1), \\ v_1 &= 5, t = 0.005; 0.01; 0.05 - \\ y_{\max}^* &= 0.631; 0.663; 0.425, \\ y_{\min}^* &= -0.075; -0.158; -0.186 \quad (iP=0, iP=1), \end{aligned}$$

3) if $\sigma = iP = 1$, then the steady-state solution ($y \geq 0$) tends to the piecewise linear function with the max. in interior of the segment $[0, 1]$ moreover if v_1 increases the unevenness are preserved in the neighbourhood of the point $x=1$ where $p < 0$, if $v_1 = 15$, then the unevenness are vanished:

$$\begin{aligned} v_1 &= 1, t = 0.005; 0.01; 0.05 - \\ y_{\max}^* &= 0.667; 2.043; 2.028, \\ v_1 &= 5, t = 0.005; 0.01; 0.05; 0.1 - \\ y_{\max}^* &= 0.628; 0.870; 1.058; 1.058, \end{aligned}$$

4) if $\sigma = 1, iP = 0, v_1 = 1$, then also the negative values appear which vanish, if t and v_1 increases:

$$\begin{aligned} t &= 0.005; 0.01; 0.05 - \\ y_{\max}^* &= 2.388; 4.762; 2.311, \\ y_{\min}^* &= -3.126; -7.525; 0.0, \end{aligned}$$

5) if $\sigma = 0$, $\nu_2 = 1$, then both schemes give the divergent process.

Modelling the steady-state solution of Fischer equation (5) ($\nu^{(1)} = \nu^{(2)} = \nu = \text{const}$, $f = u(1-u)$, $\alpha^{(1)} = \alpha^{(2)} = \alpha = \text{const}$, $l_1 = l_2 = l = 1$, $\varphi = 10 \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2)$) with the explicit scheme (6), (7) ($\sigma = 0$, $N_1 = N_2 = 15$, $i\rho = 1$, $\nu_j k_0 \leq 1$) depending on values of α and ν are obtained:

1) the max. value of solution ($y \neq 0$) is in the middle of the unit square; if α increases ($\alpha = 0; 0.5; 1.0$) the value of y_{\max} reaches at the corner of square

$(x_1, x_2) = (1, 1)$ where the BL is formed:

$$\nu = 0.01 - y_{\max} = 0.95 (\alpha = 0); 0.70 (\alpha = 0.5); 0.48 (\alpha = 1);$$

$$\nu = 0.02 - y_{\max} = 0.78 (\alpha = 0); 0.56 (\alpha = 0.5); 0.40 (\alpha = 1);$$

2) choosing $\alpha = 0$ is obtained $u = 0$ if

$$\nu > l^2 / \pi^2 [6] \quad (\nu = 0.12 \quad y = 0),$$

but if $\nu = 0$, then $y = 1$ for all points, excepting the edges of square, where $y = 0$.

By modelling the steady-state solution of linear problem (5) ($l_1 = l_2 = \nu^{(1)} = \nu^{(2)} = 1$, $f = 100 \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2)$, $\varphi = 5\pi^{-2} \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2)$, $k_0 = 1$, $N_1 = N_2 = 10$) with ADI method (8), depending on values of $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$ are obtained such results ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0.5$):

1) if $|\alpha^{(1)}| = |\alpha^{(2)}| = 100$, then $y_{\max} = 0.8483$ and the BL is formed at the corner of square (x_1, x_2) ,

$$x_i = (\text{sign}(\alpha^{(i)}) + 1) / 2, \quad i = 1, 2,$$

2) if $|\alpha^{(1)}| = 100$, $\alpha^{(2)} = 0$ or $\alpha^{(1)} = 0$, $|\alpha^{(2)}| = 100$,

then $y_{\max} = 1.0754$ and the boundary layer is formed

at the edge of square $x_1 = (\text{sign}(\alpha^{(1)}) + 1) / 2$ or $x_2 = (\text{sign}(\alpha^{(2)}) + 1) / 2$;

3) if ν increases, the BL and the value of y_{max} decreases:
 $\nu^{(1)} = \nu^{(2)} = 10$, $|\alpha^{(1)}| = |\alpha^{(2)}| = 100$ — $y_{max} = 0.6465$.

If coefficient α is nonlinear, for example,

$$\alpha^{(1)} = 100 + 100|\partial u / \partial x_1|, \alpha^{(2)} = 100 \quad \text{or}$$

$$\alpha^{(1)} = 100, \alpha^{(2)} = 100 + 100|\partial u / \partial x_2|, \quad \text{then}$$

$$y_{max} = 0.3719 \quad \text{and the BL is at the edges of square}$$

$$x_2 = 0, x_2 = 1 \quad \text{or} \quad x_1 = 0, x_1 = 1.$$

If the coefficient ν is nonlinear, for example,

$$\nu^{(1)} = 1 + \nu_0 |\partial u / \partial x_1|, \nu^{(2)} = 1 \quad (\alpha^{(1)} = \alpha^{(2)} = 100),$$

then the boundary layer, diminishes in the direction of Ox_1 -axis, if ν_0 increases and

$$y_{max} = 0.8396 (\nu_0 = 1), y_{max} = 0.8086 (\nu_0 = 2).$$

In the case of Burgers equation (5) ($\alpha^{(1)} = \alpha_1 u$, $\alpha^{(2)} = \alpha_2 u$, $\nu^{(1)} = \nu^{(2)} = 1$, $\sigma = 0$, $iP = 1$, $t = \infty$)

depending on $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ are obtained such results:

$$y_{max} = 2.609 (\alpha = 10); 1.960 (\alpha = 20); 1.300 (\alpha = 50);$$

$$0.840 (\alpha = 100); 0.260 (\alpha = 1000).$$

The BL with max. value is at the corner of square (1, 1). If α increases the classical method can not be used, for example by $\alpha = 20$, $N_1 = N_2 = 20$ ($\beta \approx 1$), $K_0 = 0.1$

the approximate solution with sharp pointed value at the corner (1, 1) converge gradually to the steady-state solution, but if $\alpha = 50$ ($\beta \approx 1.5$), then the method is divergent.

The divergence is very rapid, by $N_1 = N_2 = 10$, $\alpha = 50$ ($\beta \approx 3$).

The parameter $K_0 = 0.14$ is the best for convergence by $iP = 1$, $\alpha = 1000$, $N_1 = N_2 = 10$, $S \approx 1.7$,

because the process is divergent, if $K_0 = 0.15$.

If $\alpha_1 \neq \alpha_2$ ($\alpha_1 = 1000$, $\alpha_2 = 500$, $K_0 = 0.14$, $N_1 = N_2 = 10$, $iP = 1$), then the BL moves, and by $\alpha_1 = 1000$, $\alpha_2 = 0$ it is at the edge $x_1 = 1$ of square. Changing the coefficients α_1, α_2

values, depending on their signs are obtained BL of the some character as in the linear case ($x^{(1)} = \text{const}, x^{(2)} = \text{const}$).

It is possible also to model in time oscillating processes, for example, if $f = 100 \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2) \sin(100\pi t)$ these solution changes in time from positive max. in the BL at the point (1, 1) until negative min. in the BL at the point (0, 0) (the oscillations period is 0.02 time units).

For the Samarski equation (5) ($iP=1, x^{(1)}=x^{(2)}=0, f = u^{\alpha}, v^{(1)}=v^{(2)}=u^{\theta}, \varphi = A(2\pi^2)^{-1} \sin(\pi x_1(\ell_1)) \sin(\pi x_2(\ell_2)), N_1=N_2=15, \tau=0, \ell_1=\ell_2=\ell$)

obtained results are strongly depending on parameters: $\theta, \alpha, k_0, A, \ell$. If $\theta=2, \alpha=3, k_0=50, A=5.2, \ell=1$, then the parabel-form solution begins oscillate and slowly localizes in the time. Similarly is the approximate solution by $\theta=2, \alpha=4, k_0=50, A=5.5$, but if $\alpha \leq \theta$ ($\theta=2, \alpha=1; 2$), then the localized solution does not exist

$$y_{\max} \rightarrow \infty \quad \text{or} \quad y_{\max} \rightarrow 0.$$

REFERENCES

1. B.Kalis. Special difference schemes for solution of boundary value problems of mathematical physics. Journ. of electronical modelling, Kiev 1986, vol.8, Nr.3, P.78-83 (in Russian).
2. A.M.Ilyin. The difference scheme for differential equation with small parameters at second order derivatives. Mathematical note, 1969, vol.6, Nr2, p.234-248 (in Russian).
3. A.A.Samarsky. Theory of difference schemes. Moscow, 1977 (in Russian).
4. R.D.Richtmyer, K.W.Morton. Difference methods for initial-value problems. New York, 1967 (1972 - in Russian).
5. J.D.Murray. On Burgers model equations for turbulence. - J.Fluid Mech. 1973, vol.59, p.263-279.
6. J.D.Murray. Lectures on nonlinear-differential equation. Models in biology. Clarendon press Oxford, 1977 (1983 - in Russian).

7. A.A.Samarski, V.A.Galaktionov, S.P.Kudrjumov. A.P. Mihailov. The aggravation regimes in the problems of quasilinear parabolic equation. Moscow, 1987 (in Russian).

8. N.A.Larkin, V.A.Novikov, N.N.Yanenko. Nonlinear equations of changeable type. Novosibirsk, 1983 (in Russian).

9. H.Kalis. The analytic solutions for continuous and discrete problems of mathematical physics. Riga, 1992 (in Latvian).

NUMERICAL INTEGRATION BY FINITE-DIFFERENCE METHODS FOR SOME NONLINEAR PROBLEMS. Kalis H. // The mathematical simulation. Applied problems of mathematical physics. Riga: LU, 1994.

Monotonous difference schemes are applied to the solutions of some nonlinear one-dimensional and two-dimensional initial-boundary value problems for parabolic type partial differential equations.

Ref. 9.

DAŽU NEĻINEĀRU PROBLĒMU SKAITLISKĀ INTEGRĒŠANA AR GALĪGO DIFERENČU METODI. H.Kalis // Matemātiskā modelēšana. Matemātiskās fizikas lietišķās problēmas. Riga: LU, 1994.

Apskatīta monotona diferencu shēmu pielietošana dažu nelineāru viendimensiju un divdimensiju sākuma un robežproblēmu atrisināšanai paraboliskā tipa parciāliem diferenciālvienādojumiem.

Bibl. 9 nosauk.

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ СЕТОК. Калис Х. // Математическое моделирование. Прикладные задачи математической физики. Рига: ЛУ, 1994.

Рассмотрено применение разностных схем решения некоторых нелинейных одномерных и двумерных начально-краевых задач для дифференциальных уравнений параболического типа.

Библ. 9 назв.

H. Kalis
University of Latvia

NUMERICAL INTEGRATION BY FINITE-DIFFERENCE METHODS
FOR SOME PROBLEMS OF LINEAR AND NONLINEAR SYSTEMS
OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

We consider the application of monotone difference schemes to the solutions of some linear and nonlinear one-dimensional and two-dimensional initial-boundary value problems for parabolic type systems of partial differential equations.

1. The nonlinear time-dependent one-space-dimensional problem can be written in the vectorial form

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f & ; \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, \quad u|_{t=0} = \varphi(x), \end{cases} \quad (1)$$

where the coefficients-matrix $\alpha, \nu > 0$ of order m and function-vector f depend on $x, u, \partial u / \partial x$ (f, u - the vectors of order m),

The corresponding linearized version of equations system

(1) for vector difference scheme [1] is

$$\begin{cases} (y_i^{n+1} - y_i^n) / \tau = \sigma \Lambda y_i^{n+1} + (1-\sigma) \Lambda y_i^n + F_i, \quad i = \overline{1, N-1} \\ y_0^n = y_N^n = 0, \quad y_i^0 = \varphi_i, \quad i = \overline{0, N}, \end{cases} \quad (2)$$

where y_i^n, F_i, φ_i - denote the discrete approximation of u, f, φ at the grid point $x = x_i$ and at time $t = t_n = n\tau$,
 $0 \leq \sigma \leq 1$ - the parameter of schemes,

$\Lambda y_i = A_i^+(y_{i+1} - y_i) - A_i^-(y_i - y_{i-1})$ - the difference expression,

$$A_i^+ = s(z_i^+) \nu_i^+ / (h_i^+ h_i), \quad A_i^- = s(-z_i^-) \nu_i^- / (h_i^- h_i) -$$

- the coefficients-matrix of differences schemes,

$F_i = h_i^{-1} [r(z_i^+) h_i^+ f_i^+ + r(-z_i^-) h_i^- f_i^-]$ - the function-vectors,

$Z = \alpha \nu^{-1} h$ - the matrix of order m ,
 $S(Z) = Z(\exp(Z) - E)^{-1} = (\exp(Z) - E)^{-1} Z$, $S(-Z) = S(Z) + Z$,
 $r(Z) = Z^{-1}(E - S(Z)) = (E - S(Z))Z^{-1}$, $r(-Z) = -r(Z) + E$ -

the matrix-functions for the scheme,

$N+1$ - the number of mesh points,

τ, h_i^+, h_i^- - the time step size and nonuniform grid mesh sizes:

$h_i^- = x_i - x_{i-1}$, $h_i^+ = x_{i+1} - x_i$, $h_i = (h_i^+ + h_i^-)/2$,
 $\nu_i^-, \alpha_i^-, f_i^-$ and $\nu_i^+, \alpha_i^+, f_i^+$ - values of matrix ν, α and vectors f in the corresponding mesh intervals (x_{i-1}, x_i) and (x_i, x_{i+1}) .

The difference expression Δy_i and the right-hand side function F_i can be written in the other form, where

$$A_i^+ = \nu_i^+ S(\tilde{z}_i^+) / (h_i^+ h_i), \quad A_i^- = \nu_i^- S(-\tilde{z}_i^-) / (h_i^- h_i),$$

$$F_i = h_i^{-1} [\nu_i^+ r(\tilde{z}_i^+) (\nu_i^+)^{-1} h_i^+ f_i^+ + \nu_i^- r(-\tilde{z}_i^-) (\nu_i^-)^{-1} h_i^- f_i^-],$$

$$Z = \nu^{-1} \alpha h.$$

The both forms are equal, because the matrix-function $g(s; r)$ of the similar matrix $\nu^{-1} \alpha h$ and $\alpha \nu^{-1} h$ ($\alpha \nu^{-1} h = \nu(\nu^{-1} \alpha h) \nu^{-1}$) are identical ($g(\alpha \nu^{-1} h) = \nu g(\nu^{-1} \alpha h) \nu^{-1}$, $g(\alpha \nu^{-1} h) \nu = \nu g(\nu^{-1} \alpha h)$) [2].

Here E is the identity matrix.

Since the matrix-functions $S(\pm Z)$ associated with the matrix $Z = \alpha \nu^{-1} h$ have nonnegative eigenvalues we obtain $A_i^+ > 0$,

$A_i^- > 0$ and the vector difference scheme (2) is monotone. The scheme (2) generalizes the corresponding monotone difference scheme in the scalar case [1]. The presence of matrix-functions $S(Z)$, $r(Z)$ in the difference operator Λ and in the right-hand side vector-functions F_i ensure in the case of piece wise constant value of functions

$\alpha_1^-, \nu_1^-, f_i^-$ and $\alpha_1^+, \nu_1^+, f_i^+$ the exact discrete approximation of steady-state boundary value problem (1) ($\partial u / \partial t \equiv 0$). The matrix-functions $S(z), r(z)$ are calculating on the spectrum of the matrix Z [2]. The implicit finite-difference scheme (2) with $G \neq 0$ can be solved by vector-factorisation method for tridiagonal systems [3], and the scheme (2) with $G = 1$ is absolutely stable. The stability condition in the case of constant coefficients and regular meshes has the form $\|v\| \leq K_0(1-G) \max_{1 \leq k \leq m} |y_k| \leq 1$, where $y_k = (\lambda_k/2) \operatorname{cth}(\lambda_k/2)$, λ_k - the eigenvalues of the matrix Z , $k = \overline{1, m}$, $K_0 = 2\tau/h^2$.

By computing $S(z), r(z)$ on the spectrum of the matrix Z with $m=2$ we get

$$\begin{aligned} S(z) &= S(\lambda_1, \lambda_2) z + \tilde{S}(\lambda_1, \lambda_2) E, \\ r(z) &= r(\lambda_1, \lambda_2) z + \tilde{r}(\lambda_1, \lambda_2) E, \end{aligned} \quad (3)$$

where λ_1, λ_2 - the eigenvalues of the matrix

$$Z = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix}; y_i = \begin{pmatrix} y_i^{(1)} \\ y_i^{(2)} \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} f^{(1)} \\ f^{(2)} \end{pmatrix}.$$

If $\lambda_1 \neq \lambda_2$ the real eigenvalues, then

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= (z_{11} + z_{22} + \sqrt{D})/2, \quad \lambda_2 = (z_{11} + z_{22} - \sqrt{D})/2, \\ D &= (z_{11} - z_{22})^2 + 4z_{12}z_{21} > 0, \end{aligned}$$

and $S(\lambda_1, \lambda_2) = (S(\lambda_1) - S(\lambda_2)) / (\lambda_1 - \lambda_2)$,

$$\tilde{S}(\lambda_1, \lambda_2) = S(\lambda_2) - \lambda_2 S(\lambda_1, \lambda_2),$$

$$r(\lambda_1, \lambda_2) = (r(\lambda_1) - r(\lambda_2)) / (\lambda_1 - \lambda_2),$$

$$\tilde{r}(\lambda_1, \lambda_2) = r(\lambda_2) - \lambda_2 r(\lambda_1, \lambda_2),$$

$$S(\lambda) = \lambda / (\exp(\lambda) - 1), \quad r(\lambda) = (1 - S(\lambda)) / \lambda,$$

$$S(0) = 1, \quad r(0) = 0.5.$$

If $\lambda_1 = \lambda_2$, then $D = 0$

and $S(\lambda_1, \lambda_2) = S'(\lambda_1) = ((1 - \lambda_1) - S(\lambda_1)) S(\lambda_1) / \lambda_1$,

$$r(\lambda_1, \lambda_2) = r'(\lambda_1) = (S^2(\lambda_1) + \lambda_1 S(\lambda_1) - 1) / \lambda_1^2 \quad (4)$$

If $\lambda_1 = a + i^*b$, $\lambda_2 = a - i^*b$, the complex eigenvalues
 ($i^* = \sqrt{-1}$), then $D < 0$, $a = (z_{11} + z_{22})/2$, $b = \sqrt{|D|}/2$

and

$$s(\lambda_1, \lambda_2) = \text{Im } s(\lambda_1)/b, \quad \tilde{s}(\lambda_1, \lambda_2) = \text{Re } s(\lambda_1) - a \text{Im } s(\lambda_1)/b,$$

$$\text{Im } s(\lambda_1) = (b(e^a \cos b - 1) - a e^a \sin b)/d,$$

$$\text{Re } s(\lambda_1) = (a(e^a \cos b - 1) + b e^a \sin b)/d,$$

$$r(\lambda_1, \lambda_2) = \text{Im } r(\lambda_1)/b, \quad \tilde{r}(\lambda_1, \lambda_2) = \text{Re } r(\lambda_1) - a \text{Im } r(\lambda_1)/b = -s(\lambda_1, \lambda_2) - 2a r(\lambda_1, \lambda_2),$$

$$\text{Im } r(\lambda_1) = -(a \text{Im } s(\lambda_1) + b(1 - \text{Re } s(\lambda_1)))/(a^2 + b^2) = (\tilde{s}(\lambda_1, \lambda_2) - 1)b/(a^2 + b^2),$$

$$\text{Re } r(\lambda_1) = (a(1 - \text{Re } s(\lambda_1)) - b \text{Im } s(\lambda_1))/(a^2 + b^2) = -s(\lambda_1, \lambda_2) - a r(\lambda_1, \lambda_2),$$

where $d = \exp(2a) - 2 \exp(a) \cos b + 1$,

$\text{Re } s$, $\text{Im } s$ - the real and imaginary parts of complex number s .

The approximation expressions of $s(\varepsilon)$, $r(\varepsilon)$, $s'(\varepsilon)$, $r'(\varepsilon)$

with $|\varepsilon| \leq 10^{-3}$ are

$$s(\varepsilon) = (1 + \varepsilon/2 + \varepsilon^2/6 + \varepsilon^3/24)^{-1},$$

$$r(\varepsilon) = (0.5 + \varepsilon/6 + \varepsilon^2/24 + \varepsilon^3/120) s(\varepsilon),$$

$$s'(\varepsilon) = (0.5 + \varepsilon/3 + \varepsilon^2/8 + \varepsilon^3/30) s^2(\varepsilon),$$

$$r'(\varepsilon) = -(1/12 + \varepsilon/12 + 2\varepsilon^2/45 + \varepsilon^3/60) s^2(\varepsilon). \quad (5)$$

We will consider solving the equation (1) subject to the Neumann type boundary condition $u'(0) = 0$. The steady-state equations system (1) with piecewise constant ν, α, f can be rewritten in the form

$$(\nu u')' - \alpha u' + f = 0. \quad (6)$$

Let us consider an irregular mesh formed by mesh point X_i ($x_0 = -h_1^-/2, x_1 = h_1^-/2, x_N = l$) and introduce the matrix function $W(x) = \exp(-\int_{x_i}^x \tilde{\alpha} dt) = \exp(-\tilde{\alpha}(x-x_i))$, $x \in (x_{i-1}, x_i), x \in (x_i, x_{i+1}), \tilde{\alpha} = \alpha \nu^{-1}$.

Then equation (6) can be expressed locally in the self-adjoint form

$$(W \nu u')' = -W f.$$

Integrating over $(x_{1/2}, x_{3/2}), (x_{1/2} = 0, x_{3/2} = (h_1^- + h_1^+)/2$) and using $u'(0) = 0$ we obtain the vector equation of balance

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1^+ = & -\int_{x_{1/2}}^{x_{3/2}} W f dx = -[(\tilde{\alpha}_1^+)^{-1} (E - \exp(-\tilde{\alpha}_1^+ h_1^+/2)) f_{1/2}^+ + \\ & + (\tilde{\alpha}_1^-)^{-1} (\exp(\tilde{\alpha}_1^- h_1^-/2) - E) f_{1/2}^-], \end{aligned}$$

$\mathcal{F}(x) = W \nu u'$ - the continuities vector-function,

$$\mathcal{F}_1^+ = \mathcal{F}(x_{3/2}), \mathcal{F}_1^- = \mathcal{F}(x_{1/2}) = 0.$$

We see that the first difference equation (2) contains the difference operator Λ

$$\Lambda y_1 = A_1^+ (y_2 - y_1) \quad (7)$$

and the vector-function

$$\bar{F}_1 = h_1^{-1} [r(z_1^+) h_1^+ f_{1/2}^+ + \bar{s}^{-1}(z_1^-/2) h_1^-/2 \cdot f_{1/2}^-]. \quad (8)$$

Similarly in advance the difference expression

$$\Lambda y_{N-1} = A_{N-1}^- (y_{N-2} - y_{N-1}) \quad (9)$$

and vector-function

$$F_{N-1} = h_{N-1}^{-1} [\bar{s}^{-1}(-z_{N-1}^+/2) h_{N-1}^+ /2 \cdot f_{N-1}^+ + r(-z_{N-1}^-) h_{N-1}^- /2 \cdot f_{N-1}^-] \quad (10)$$

approximate the differential equation (6) at the point

$x_{N-1/2} = l (x_{N-1} = l - h_{N-1}^+/2)$ with the boundary condition $u'(l) = 0$.

By computing matrix-function $S^{-1}(z/2)$ on the spectrum of the matrix Z with $m=2$ we obtain

$$S^{-1}(z/2) = S^*(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2) z/2 + \tilde{S}^*(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2) E,$$

where $\tilde{\lambda}_1 = \lambda_1/2$, $\tilde{\lambda}_2 = \lambda_2/2$,

$$S^*(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2) = (S^*(\tilde{\lambda}_1) - S^*(\tilde{\lambda}_2)) / (\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_2),$$

$$\tilde{S}^*(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2) = \tilde{S}^*(\tilde{\lambda}_2) - \tilde{\lambda}_2 S^*(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2),$$

$$S^*(\lambda) = (\exp(\lambda) - 1) / \lambda, \quad S^*(0) = 1,$$

$$\text{or } S^{-1}(z/2) = (S(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2) z/2 + \tilde{S}(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2) E)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{\det} \begin{pmatrix} S z_{22}/2 + \tilde{S} & -S z_{12}/2 \\ -S z_{21}/2 & S z_{11}/2 + \tilde{S} \end{pmatrix},$$

$$\det = S(\lambda_1) S(\lambda_2), \quad S \equiv S(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2), \quad \tilde{S} \equiv \tilde{S}(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2).$$

Similarly

$$S^{-1}(-z/2) = (S(-z/2) + z/2)^{-1} = ((S+1)z/2 + \tilde{S})^{-1} =$$

$$= \frac{1}{\det} \begin{pmatrix} (S+1)z_{22}/2 + \tilde{S} & -(S+1)z_{12}/2 \\ -(S+1)z_{21}/2 & (S+1)z_{11}/2 + \tilde{S} \end{pmatrix},$$

$$\det = (\lambda_1 + S(\lambda_1))(\lambda_2 + S(\lambda_2)).$$

The presence of matrix-functions $S^{-1}(z/2)$, $S^{-1}(-z/2)$ in the expressions (8), (10) for F_1, F_{N-1} and the form F_i , Λy_i , $i=2, N-2$ and (9) for difference expressions Λy_2 , Λy_{N-1} ensure in the case of piecewise constant α, ν, f the exact discrete approximation of equations (6) with boundary conditions $u'(0) = 0$, $u'(l) = 0$.

2. The nonlinear time-dependent two-space-dimensional problem in bounded domain ($0 \leq x_1 \leq \ell_1$, $0 \leq x_2 \leq \ell_2$)

can be represented in the vectorial form

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha^{(1)} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \alpha^{(2)} \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\nu^{(1)} \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\nu^{(2)} \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) + f \\ u|_{x_1=0} = u|_{x_1=\ell_1} = u|_{x_2=0} = u|_{x_2=\ell_2} = 0, \quad u|_{t=0} = \varphi(x_1, x_2), \end{cases} \quad (11)$$

where the coefficients-matrix $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \beta^{(1)}, \beta^{(2)}$ of order m and function-vector f depend on $(x_1, x_2), u, \partial u / \partial x_1, \partial u / \partial x_2$ (f, u - the vectors of order m), $t \geq 0$.

The corresponding monotone vector-difference scheme can be written in the form [2]

$$\begin{cases} (y_{ij}^{(n+1)} - y_{ij}^{(n)}) / \tau = \sigma \Lambda y_{ij}^{(n+1)} + (1-\sigma) \Lambda y_{ij}^{(n)} + f_{ij}, & i = \overline{1, N_1-1}, j = \overline{1, N_2-1} \\ y_{0j}^{(n)} = y_{N_1 j}^{(n)} = y_{i,0}^{(n)} = y_{i, N_2}^{(n)} = 0, & y_{ij}^0 = \varphi_{ij}, & i = \overline{0, N_1}, j = \overline{0, N_2}, \end{cases} \quad (12)$$

where $y_{ij}^{(n)}, f_{ij}, \varphi_{ij}$ denote the discrete approximation of u, f, φ at the mesh point $(x_1, x_2) = (x_1^{(i)}, x_2^{(j)})$ and at time $t = t_n$; $0 \leq \sigma \leq 1$ - the parameter of schemes,

$(N_1+1)(N_2+1)$ - the number of mesh points,

$$\begin{aligned} \Lambda y_{ij} = & A_{ij}^{(1)+} (y_{i+1j} - y_{ij}) - A_{ij}^{(1)-} (y_{ij} - y_{i-1j}) + \\ & + A_{ij}^{(2)+} (y_{ij+1} - y_{ij}) - A_{ij}^{(2)-} (y_{ij} - y_{ij-1}), \end{aligned}$$

$$A_{ij}^{(k)+} = S(z_{ij}^{(k)+}) v_{ij}^{(k)+} / (h_{ij}^{(k)+} + h_{ij}^{(k)-}) > 0,$$

$$A_{ij}^{(k)-} = S(-z_{ij}^{(k)-}) v_{ij}^{(k)-} / (h_{ij}^{(k)-} - h_{ij}^{(k)+}) > 0,$$

$$h_{ij}^{(1)-} = x_1 - x_1^{(i-1)}, \quad h_{ij}^{(1)+} = x_1^{(i+1)} - x_1^{(i)},$$

$$h_{ij}^{(2)-} = x_2 - x_2^{(j-1)}, \quad h_{ij}^{(2)+} = x_2^{(j+1)} - x_2^{(j)},$$

$$h_{ij}^{(k)} = (h_{ij}^{(k)+} + h_{ij}^{(k)-}) / 2, \quad k = 1, 2,$$

$z_{ij}^{(k)-}, z_{ij}^{(k)+}$ - the values of functions-matrix $Z_{ij}^{(k)}$ in the corresponding points $(x_1^{(i-1/2)}, x_2^{(j)})$, $(x_1^{(i+1/2)}, x_2^{(j)})$, $k = 1$

and $(x_1^{(i)}, x_2^{(j-1/2)})$, $(x_1^{(i)}, x_2^{(j+1/2)})$, $k = 2$,

where $x_1^{(i \pm 1/2)} = (x_1^{(i)} + x_1^{(i \pm 1)}) / 2$, $x_2^{(j \pm 1/2)} = (x_2^{(j)} + x_2^{(j \pm 1)}) / 2$.

The difference scheme (12) with piecewise constant functions α, ν, f is not exact. The difference expression Δy approximate the steady-state differential expression with the truncation error of second order. The scheme with $\sigma \neq 0$ may be solved by an application of alternating direction methods.

3. The results of numerical experiments in the regular mesh were obtained for one-dimensional problem (1) by considering linear and nonlinear equations. The numerical results are obtained in the form of time dependent graphic on computer IBM PC-386 screen.

As example of linear model with constant coefficients of problem (1) is $m = 2, \ell = 1,$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1, 20 \\ 2, 2 \end{pmatrix}, \nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (13)$$

and

$$\alpha = \begin{pmatrix} 100 & 20 \\ 2 & 200 \end{pmatrix} \quad (14)$$

(the others parameters are preliminary),
where

$$\varphi(x) = 0.01 \sin(\pi x) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

The steady-state solution of equations system (6) with boundary conditions $u(0) = u(1) = 0$ can be written in the following analytic form

$$u(x) = g_x(\nu^{-1}\alpha) \alpha^{-1} f \quad (15)$$

or $(\nu = \nu u)$

$$u(x) = \nu^{-1} g_x(\alpha \nu^{-1}) \nu \alpha^{-1} f,$$

where

$$g_x(z) = xE - (\exp(zx) - E)(\exp(z) - E)^{-1} \quad (16)$$

- the matrix-function associated with the matrix Z (the parameter).

The both forms of solution are identical, because the matrix-function of the similar matrix $\nu^{-1}\alpha$ and $\alpha\nu^{-1}$ ($\nu^{-1}\alpha = \nu^{-1}(\alpha\nu^{-1})\nu$) is equal.

If $u'(0) = 0, u(1) = 0$, then

$$g_x(z) = (x-1)E - (\exp(zx) - \exp(z))z^{-1}, \quad (17)$$

but, if $u(0) = 0, u'(1) = 0$, then

$$g_x(z) = xE - (\exp(z(x-1)) - \exp(-z))z^{-1}. \quad (18)$$

By computing the matrix-function $g_x(z)$ on the spectrum of the matrix Z similarly (3) we get

$$g_x(z) = g(\lambda_1, \lambda_2)z + \tilde{g}(\lambda_1, \lambda_2)E,$$

where λ_1, λ_2 - the eigenvalues of the matrix Z of second order,

$$g(\lambda_1, \lambda_2) = (g_x(\lambda_1) - g_x(\lambda_2)) / (\lambda_1 - \lambda_2),$$

$$\tilde{g}(\lambda_1, \lambda_2) = g_x(\lambda_2) - \lambda_2 g(\lambda_1, \lambda_2),$$

where corresponding expression to (16), (17), (18) are -

$$g_x(\lambda) = x - (\exp(\lambda x) - 1)(\exp(\lambda) - 1)^{-1},$$

$$g_x(\lambda) = (x-1) - (\exp(\lambda x) - \exp(\lambda))\lambda^{-1},$$

$$g_x(\lambda) = x - (\exp(\lambda(x-1)) - \exp(-\lambda))\lambda^{-1}.$$

In the case of the example (1), (10) we get ($x = 0.5$):

$$Z_{11} = \alpha_{11} \nu_{11}^{-1} = 1, \quad Z_{12} = \alpha_{12} \nu_{11}^{-1} = 20,$$

$$Z_{21} = \alpha_{21} \nu_{22}^{-1} = 0.2, \quad Z_{22} = \alpha_{22} \nu_{22}^{-1} = 0.2,$$

$$D = 10.64, \quad \lambda_1 = 2.6386079, \quad \lambda_2 = -1.4386078,$$

$$g_{0.5}(\lambda_1) = 0.389149, \quad g_{0.5}(\lambda_2) = -0.170564,$$

$$g(\lambda_1, \lambda_2) = 0.113187, \quad \tilde{g}(\lambda_1, \lambda_2) = -0.009619,$$

$$u(0.5) = \begin{pmatrix} 0.107530 \\ 0.011066 \end{pmatrix}.$$

In the case of (17)

$$u(0.45) = \begin{pmatrix} 1.0048 \\ 0.1191 \end{pmatrix},$$

but of (18)

$$u(0.5) = \begin{pmatrix} 0.12017 \\ 0.03275 \end{pmatrix}.$$

In the case of the example (14), (16) we get

$$\begin{aligned} z_{11} &= 100, z_{12} = 20, z_{21} = 0.2, z_{22} = 20, D = 80.10, \\ \lambda_1 &= 100.05, \lambda_2 = 19.95, g_{0.5}(\lambda_1) = 0.5, g_{0.5}(\lambda_2) = 0.4999534, \\ u(0.5) &= \begin{pmatrix} 0.0045091 \\ 0.0024547 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Obviously that the solution (15), (16) is exact for difference equation $\Lambda y_2 + \bar{F}_1 = 0$ of

$$N=2, h_1^- = h_1^+ = 0.5,$$

because

$$\begin{aligned} s(-\bar{A}/2) - s(\bar{A}/2) &= \bar{A}/2, r(-\bar{A}/2) + r(\bar{A}/2) = E, \\ (e^{\bar{A}/2} + E)(e^{\bar{A}/2} - E) &= e^{\bar{A}} - E, \bar{A} = \bar{\nu}^{-1} \alpha. \end{aligned}$$

For the numerical results in the description are used the following designations:

$y_{\min}^{(1)}, y_{\max}^{(1)}, y_{\min}^{(2)}, y_{\max}^{(2)}$ - the minimal (min) and maximal (max) values of numerical steady-state solution $y_i^{(1)}, y_i^{(2)}, i = \overline{0, N}$,
 $\bar{y}^{(1)}, \bar{y}^{(2)}$ - the values of numerical steady-state solution on $y^{(1)}, y^{(2)}$ at the point $x_i = 0.5$.

Modelling the steady-state solution ($\bar{\nu} = 0$) of linear equation (1) with constant coefficients (13) or (14) is obtained, that the numerical solution $y \geq 0$ ($N = 2, 10, 20$) is approximate exactly with 8 decimal place, and if $u(0) = u(1) = 0$, $N = 20$, then

$$y_{\max}^{(1)} = 0.11491, y_{\max}^{(2)} = 0.01140, \quad (13)$$

$$y_{\max}^{(1)} = 0.00894, y_{\max}^{(2)} = 0.00393. \quad (14)$$

As example (13) in the case of boundary conditions $u(0) = u(1) = 0$ we obtain not depending on the mesh ($N = 2; 5; 8; 11$)

$$y^{(1)}(1/3) = 1.51199, y^{(2)}(1/3) = 0.128978.$$

If $D < 0$ then the solution has an oscillatory nature in the space. When $u(0) = u(1) = 0, \bar{\nu} = E, \alpha_{11} = \alpha_{22} = 0, \alpha_{12} \alpha_{21} = -b^2 < 0$, then $g = \text{Im} g_x / b, \bar{g} = \text{Re} g_x,$

$$\operatorname{Im} g_x = \sin(bx/2) \sin((1-x)b/2) / \sin(b/2),$$

$$\operatorname{Re} g_x = x - \sin(bx/2) \cos((1-x)b/2) / \sin(b/2),$$

$$\bar{g}(0.5) = 0, \quad g(0.5) = tg(b/4) / (2b),$$

and $u = \left(\begin{matrix} \bar{g} f^{(2)} / \alpha_{21} + g f^{(1)} \\ \bar{g} f^{(1)} / \alpha_{12} + g f^{(2)} \end{matrix} \right)$. For example, if $\alpha_{12} = \pm 10$,

$\alpha_{21} = \mp 1 (b = \sqrt{10})$, $f^{(1)} = f^{(2)} = 1$, then $\bar{y}^{(1)} = \bar{y}^{(2)} = 0.159758$, $y^{(2)} \geq 0$,

$y_{\min}^{(1)} = -0.02756$, $y_{\max}^{(1)} = 0.22475$, $y_{\max}^{(2)} = 0.15976$, but if

$\alpha_{12} = \pm 1$, $\alpha_{21} = \mp 10 (b = \sqrt{10})$, then the solutions $y^{(1)}, y^{(2)}$

mutually exchange.

In the case of piecewise constant coefficients we consider the example (14) with the factors f^x, f^y, ff

and if $x > 0.5$, then substitute $x/f^x, y/f^y$ and

ff/ff for x, y and f respectively. Modelling the steady-state solution of linear equations (1) with piecewise

constant coefficients are obtained the following exact results ($\ell = 1, u(0) = u(1) = 0$):

1) if $f^x = f^y = 10, ff = 1$, then $y \geq 0$ and

$$y_{\max}^{(1)} = 0.04719, \quad y_{\max}^{(2)} = 0.01844, \quad \bar{y}^{(1)} = 0.00192,$$

$$\bar{y}^{(2)} = 0.002455 (N = 20); \quad y_{\max}^{(1)} = 0.04249, \quad y_{\max}^{(2)} = 0.01844,$$

$$\bar{y}^{(1)} = 0.004109, \quad \bar{y}^{(2)} = 0.002455 (N = 10),$$

2) if $f^x = 10, f^y = 100, ff = 1$, then $y \geq 0$ and

$$y_{\max}^{(1)} = 0.04505, \quad y_{\max}^{(2)} = 0.02323, \quad \bar{y}^{(1)} = 0.004472,$$

$$\bar{y}^{(2)} = 0.002334 (N = 20); \quad y_{\max}^{(1)} = 0.04054, \quad y_{\max}^{(2)} = 0.02187,$$

$$\bar{y}^{(1)} = 0.004472, \quad \bar{y}^{(2)} = 0.002334 (N = 10),$$

3) if $f^x = -10, f^y = 100, ff = 1$, then $y \geq 0$ and

$$y_{\max}^{(1)} = 0.04058, \quad y_{\max}^{(2)} = 0.02209, \quad \bar{y}^{(1)} = 0.002157,$$

$$\bar{y}^{(2)} = 0.00218 (N = 20); \quad y_{\max}^{(1)} = 0.03607, \quad y_{\max}^{(2)} = 0.01964,$$

$$\bar{y}^{(1)} = 0.002157, \quad \bar{y}^{(2)} = 0.00218 (N = 10),$$

4) if $N=2$, then values $\bar{y}^{(1)}, \bar{y}^{(2)}$ are such as in the case $N=10, N=20$,

5) the solution has the boundary layer at the point $X=1$, but in the case $f\alpha = -10, f\beta = 100, ff = 1$ also at the point $X=0.5$.

When $\alpha_{21} = 200$, then $y^{(1)} \geq 0, y^{(2)} \leq 0$ and

1) if $f\alpha = -10, f\beta = 100, ff = 1$, then

$$y_{\max}^{(1)} = 0.05062, y_{\min}^{(2)} = -0.02811, \bar{y}^{(1)} = 0.01000, \\ \bar{y}^{(2)} = -0.00515 (N=20); y_{\max}^{(1)} = 0.04500, y_{\min}^{(2)} = -0.02500,$$

$$\bar{y}^{(1)} = 0.01000, \bar{y}^{(2)} = -0.00515 (N=10),$$

2) if $f\alpha = -10, f\beta = 100, ff = 10$, then ($N=20$)

$$y_{\max}^{(1)} = 0.005424, y_{\min}^{(2)} = -0.002812,$$

$$\bar{y}^{(1)} = 0.00542, \bar{y}^{(2)} = -0.00264;$$

(when $F_i = f(x_i)$, then $\bar{y}^{(1)} = 0.00503, \bar{y}^{(2)} = -0.00251$

and the difference equation $\Delta u(x_i) + F_i = 0$ is not exact).

Modelling the steady-state solution of nonlinear equation

(1) in the basis of the example (13) [4] we consider the factors

$$f\alpha_{11} = 1 + u^{(1)}, f\alpha_{22} = 1 + u^{(2)}, f\alpha_{12} = f\alpha_{21} = 1, ff_1 = \\ = 100 u^{(1)} (1 - u^{(1)} - u^{(2)}/2), \\ ff_2 = -100 u^{(1)} u^{(2)}$$

of proportionality for $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}$,

$$f^{(1)}, f^{(2)}.$$

The numerical results are the following:

($F_i = f(x_i), f\alpha = f\beta = ff = 1, u(0) = u(1) = 0, y^{(1)} \geq 0$):

1) if $f^{(1)} = f^{(2)} = 1$, then

$$y_{\max}^{(1)} = 0.9687, y_{\min}^{(2)} = -0.01001, y_{\max}^{(2)} = 0.00814,$$

$$\bar{y}^{(1)} = 0.9687, \bar{y}^{(2)} = -0.00154 (N=10),$$

(if F_i depends on $r(z)$, then

$$y_{\max}^{(1)} = 0.9738, y_{\min}^{(2)} = -0.01097, y_{\max}^{(2)} = 0.00870,$$

$$\bar{y}^{(1)} = 0.9738, \bar{y}^{(2)} = -0.00157),$$

$$y_{\max}^{(1)} = 0.9708, y_{\min}^{(2)} = -0.01006, y_{\max}^{(2)} = 0.00864,$$

$$\bar{y}^{(1)} = 0.9698, \bar{y}^{(2)} = -0.00157 (N=20),$$

2) if $f^{(1)} = 10, f^{(2)} = 1$, then

$$y_{\max}^{(1)} = 1.0007, \quad y_{\min}^{(2)} = -0.00766, \quad y_{\max}^{(2)} = 0.00719,$$

$$\bar{y}^{(1)} = 0.99981, \quad \bar{y}^{(2)} = -0.00028 \quad (N = 10),$$

$$y_{\max}^{(1)} = 1.0008, \quad y_{\min}^{(2)} = -0.00583, \quad y_{\max}^{(2)} = 0.00546,$$

$$\bar{y}^{(1)} = 0.99987, \quad \bar{y}^{(2)} = -0.00020 \quad (N = 20),$$

3) if $f^{(1)} = 100, f^{(2)} = 1$, then

$$y_{\max}^{(1)} = 1.0024, \quad y_{\min}^{(2)} = -0.00726, \quad y_{\max}^{(2)} = 0.00682,$$

$$\bar{y}^{(1)} = 1.0001, \quad \bar{y}^{(2)} = -0.0002 \quad (N = 10),$$

$$y_{\max}^{(1)} = 1.0015, \quad y_{\min}^{(2)} = -0.00440, \quad y_{\max}^{(2)} = 0.00427,$$

$$\bar{y}^{(1)} = 1.0000, \quad \bar{y}^{(2)} = -0.0001 \quad (N = 20),$$

4) if $f^{(1)} = f^{(2)} = 10$, then

$$y_{\max}^{(1)} = 1.0000, \quad y_{\min}^{(2)} = -0.00416, \quad y_{\max}^{(2)} = 0.00395,$$

$$\bar{y}^{(1)} = 0.9999, \quad \bar{y}^{(2)} = -0.0000 \quad (N = 10),$$

$$y_{\max}^{(1)} = 1.0000, \quad y_{\min}^{(2)} = -0.00263, \quad y_{\max}^{(2)} = 0.00355,$$

$$\bar{y}^{(1)} = 1.0000, \quad \bar{y}^{(2)} = -0.00001 \quad (N = 20).$$

When $f^x = 10, f^y = 100, f^z = 1, f^{(1)} = f^{(2)} = 1, N = 10$,

then $y^{(1)} \geq 0$ and

$$y_{\max}^{(1)} = 0.9981, \quad y_{\min}^{(2)} = -0.0127, \quad y_{\max}^{(2)} = 0.0062,$$

$$\bar{y}^{(1)} = 0.9728, \quad \bar{y}^{(2)} = -0.0103.$$

When $f^x = -10$, (the other parameters are preliminary) then

$$y^{(1)} \geq 0, \quad y^{(2)} \leq 0 \quad \text{and} \quad y_{\max}^{(1)} = 1.0010, \quad y_{\min}^{(2)} = -0.0127,$$

$$\bar{y}^{(1)} = 0.9810, \quad \bar{y}^{(2)} = -0.0102.$$

In the case of the boundary conditions $u'(0) = 0, u'(1) = 0$

($f^x = f^y = f^z = f^{(1)} = f^{(2)} = 1, N = 20$) - $y^{(1)} \geq 0, y^{(2)} \geq 0$ and

$$y_{\max}^{(1)} = 0.99801, \quad y_{\max}^{(2)} = 0.01046,$$

$$\bar{y}^{(1)} = 0.98597, \quad \bar{y}^{(2)} = 0.00564,$$

but, if $u(0) = 0, u'(1) = 0$, then $y^{(1)} \geq 0, y^{(2)} \leq 0$ and

$$y_{\max}^{(1)} = 1.0002, \quad y_{\min}^{(2)} = -0.01225,$$

$$\bar{y}^{(1)} = 0.99037, \quad \bar{y}^{(2)} = -0.00661.$$

Investigating the solutions of the reactive-diffusive equations (1) of biosystem [4] can be obtained the stable space structure. If $v_{11} = 0.0125$, $v_{12} = v_{21} = 0$, $v_{22} = 1$, $\alpha = 0$, $f^{(1)} = u^{(1)}((35 + 16u^{(1)} - (u^{(1)})^2)/9 - u^{(2)})$, $f^{(2)} = (u^{(1)} - 1 - 0.4u^{(2)})u^{(2)}$, $l = 2.5$, $u^{(1)}(0) = u^{(1)}(l) = 0$, then the steady-state solution has a periodic oscillatory nature with 3 max. and 4 min. values ($N = 40$):

$$y_{\min}^{(1)} = 0.2, y_{\max}^{(1)} = 9.5, y_{\min}^{(2)} = 9.0, y_{\max}^{(2)} = 10.7.$$

REFERENCES

1. H. Kalis. Special difference schemes for solution of boundary value problems of mathematical physics. Journ. of electrical modelling, Kiev 1986, vol. 8, Nr. 3, p. 78-83 (in Russian).
2. P. Lancaster. Theory of matrices. Academic press, New York-London, 1969 (1978 - in Russian).
3. A. A. Samarski. Theory of difference schemes. Moscow, 1977 (in Russian).
4. J. D. Murray. Lectures on nonlinear-differential equation. Models in biology. Clarendon press-Oxford, 1977 (1983 - in Russian).

DAŽU LINEĀRU UN NEĻINEĀRU PROBLĒMU SKAITLISKĀ INTEGRĒŠANA AR GALĪGO-DIFERĒNCU METODI DIFERENCIĀĻVIENĀDOJUMU SISTĒMĀM. Kalis H. // Matemātiskā modelēšana. Matemātiskās fizikas lietišķās problēmas. Rīga: LU, 1994.

Apskatīta monotono vektoru-diferenču shēmu pielietošana dažu lineāru un nelineāru viendimensiju un divdimensiju sākuma un robežvērtību problēmu atrisināšanai diferenciālvienādojumu sistēmām. Bibl. 4 nosauk.

NUMERICAL INTEGRATION BY FINITE-DIFFERENCE METHODS FOR SOME PROBLEMS OF LINEAR AND NONLINEAR SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS. Kalis H. // The mathematical simulation. Applied problems of mathematical physics. - Rīga: LU, 1994.

Monotonous vector-difference schemes are applied to the solutions of some linear and nonlinear one-dimensional and two-dimensional initial-boundary value problems for systems of differential equations.

Ref. 4.

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ ДЛЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ. Калис Х. // Математическое моделирование. Прикладные задачи математической физики. Рига: ЛУ, 1994.

Рассматривается применение монотонных векторно-разностных схем для решения некоторых линейных и нелинейных одномерных и двумерных начально-краевых задач для систем дифференциальных уравнений.

Библ. 4 назв.

G. Lurins

Latvijas Universitātes
 Matemātikas un informātikas institūts

**DATORPROGRAMMU PAKETE AKSIĀLSIMETRISKAS ŠKIDRUMA
 KUSTĪBAS SKAITLISKAI MODELĒŠANAI CILINDRISKĀ IEPĀRTĀ.**

Viskoza šķidruma kustību cilindriskas formas traukā (skat. 1.zīm.) izraisa trīs dažādi faktori:

- 1) ārējās temperatūras gradients gar trauka sānsieni;
- 2) trauka centrā šķidrumā iegremdēta cilindriskas formas stiepa vertikālas vibrācijas;
- 3) trauka vai stiepa rotācija ap savu asi.

Šādas kustības skaitliskai modelēšanai, pamatojoties uz darbos /1,2/ izklāstīto skaitlisko algoritmu, izstrādāta datorprogrammu pakete IBM PC tipa personālajiem datoriem.

Programmu paketes aprēķinu daļa realizēta programmēšanas valodā FORTRAN, bet servisa daļā izmantota arī valoda C un grafisko programmu pakete GRAFOR.

Programmu paketes darbība sākas ar rotācijas-izvēlnes lapu (1.zīm.), kurā iespējams izvēlēties darba režīmu. Sākot darbu ar paketi, jāizvēlas režīms (Jauns aprēķins). Pēc šī režīma izvēlēšanās nonāk pirmajā no četrām dialoga režīmā rediģējamām ievaddatu lapām-tabulām. Pirmajā tabulā (3.zīm.) var uzdot apgabala izmērus, trauka rotācijas frekvenci un iterāciju hidrodinamika-temperatūra skaitu. Ja iterāciju skaitu uzdod vienādu ar 0, tad uzreiz nonāk piedēžā ievaddatu tabulā (6.zīm.) hidrodinamiskajiem parametriem. Ja gribat ievērot arī temperatūras ietekmi, tad jāuzdod iterāciju skaits atšķirīgs no 0 un nonāksiet 2. un pēc tam arī 3. ievaddatu tabulā (4,5.zīm.) siltumprocesu parametru un robežnosacījumu uzdošanai.

Pēc hidrodinamisko parametru uzdošanas 4. tabulā (6.zīm.) lietotājam, kurš nav speciālists programmēšanā un skaitliskajās metodēs, ir iespējams veikt sērijuveida aprēķinus pilnā fizikālo parametru vērtību diapazonā bez skaitliskā algoritma parametru maiņas.

Lietotājam, kurš orientējas skaitliskajās metodēs, ir iespējams izmainīt arī skaitliskā algoritma parametrus, kuri apkopāti atsevišķā tabulā (7.zīm.).

Pēc visu parametru uzdošanas sākas aprēķins. Aprēķina laikā uz displeja ekrāna redzams 2-zīm. dotais attēls, kas ļauj sriest par skaitļošanas procesa gaitu.

Aprēķinu rezultāti tiek izdoti uzskatāmā formā grafiku un integrālu skaitlisku lielumu veidā, kas atviegloja to analīzi un ļauj lietotājam operatīvi mainīt ievaddatus vēlamajā virzienā.

Katram aprēķinu variantam tiek izdoti izolīniju grafiki hidrodinamiskajai strāvas funkcijai, rotācijas momentam, temperatūras laukam, temperatūras gradientam rādiālā un z - virzienā un ātruma modulim (skat.8-13.zīm.).

Pēc izolīniju grafikiem seko divas lapa ar dažādiem skaitliskiem lielumiem (14.zīm.), kuri var būt noderīgi

lietotājam, veicot rezultātu analīzi.

Līdz ar pēdējo rezultātu lapu lietotājam tiek dota iespēja izvēlēties nākošo darba režīmu. Tagad jau var izvēlēties jebkuru no piedāvātajiem režīmiem.

Izvēloties režīmu <Turpinājums>, tiks turpināts aprēķins jau iepriekš uzdotajam aprēķinu variantam. Lietojot šādu pakāpenisko tuvinājumu metodi, var uzskatāmi pārliicināties par skaitļošanas procesa konverģenci un beigt aprēķinus, ja atšķirības starp diviem sekojošiem tuvinājumiem ir pietiekami mazas. Aprēķinus var turpināt arī citā aprēķinu seansā, jo rezultāti tiek automātiski saglabāti uz diska.

Izvēloties režīmu <Apskate> var vēlreiz aplūkot aprēķinu rezultātus. Šajā režīmā apskatāmi arī iepriekš uzdotie fizikālie parametri.

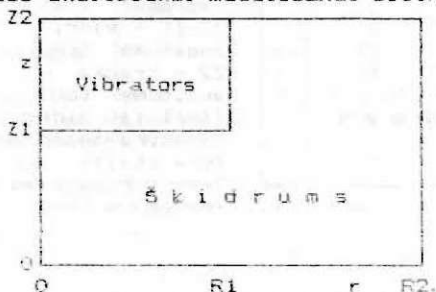
Datorprogrammu paketes servisa daļa izstrādāta arī krievu valodā un lietotājs var izvēlēties, kura versija viņam ērtāk lietojama.

LITERATŪRAS SARAKSTS

1. Авдонин Н.А., Калис Х.Э. Численный анализ вибрационных течений в неизотермической жидкости // Сб. научных трудов "Математическое моделирование, прикладные задачи математической физики". Рига: ЛУ, 1992. С. 11-25.
2. Авдонин Н.А., Калис Х.Э., Лурикс Г.Р. Численное исследование движения жидкости, порожденного градиентом температуры, вращением и вибрацией (в этом сборнике).

P i e d ā v ā j a m

programmu paketi vairāku faktoru izraisītas šķidrums
kustības skaitliskai modeļēšanai cilindriskā traukā.



Izstrādāta Latvijas Universitātes Matemātikas
un informātikas institūtā,
Rīgā, Raiņa bulv. 29, tel.211421

Jauns aprēķins
Turpinājums
Apskate
R e i g a s

1. zīm. Reklāmas - izvēlnes lapa.

NOTIEK APRĒKINS !

G A I D I E T !

ITERĀCIJU SKAITS 2 LAIKA SLĀNŪ SKAITS 1

I T E R Ā C I J A = 2 LAIKA SLĀNIS = 1

TEMPERATŪRAS APRĒKINS

Iterācija = 6 Maks. starpība = .1732 Precizitāte = .5000

2. zīm. Displeja ekrāna izskats aprēķina laikā

Ģeometrijas izvēle uzdevumam ar vibratoru

	R1 - vibrātora rādiuss [cm]	3
	R2 - trauka rādiuss [cm]	6
	Z2-Z1 - vibr. augstums [cm]	2.1
	Z2 - trauka augstums [cm]	6.
	Iterāciju hidrodinamika-temperatūra skaits	1.
	Trauka rotācijas frekvence [Hz]	0.05

1 no 4 tabulām

Rediģējiet! Pāreja ar taustiņiem <PgUp> vai <PgDn>

3. zīm. 1. rediģējamā ievaddatu tabula

Siltumprocesu parametri uzdevumam ar vibratoru

	Siltumvadāmība L1 [W/(m*K)]	.4
	Siltumvadāmība L2	.4
	Blīvums R01 [kg/(m³*m)]	1200.
	Blīvums R02	1200.
	Siltumietilpība CP1 [kJ/(kg*K)]	0.001
	Siltumietilpība CP2	0.001
	Siltuma izplešanās koeficients B2 [1/K]	0.01

2 no 4 tabulām

Rediģējiet! Pāreja ar taustiņiem <PgUp> vai <PgDn>

4. zīm. 2. rediģējamā ievaddatu tabula

Siltumprocesu robežnosacījumi uzdevumam ar vibratoru

Z2		T3, K3		Arējā temperatūra [K grādi]		
z	Vibrators	Šķidrums		T0	1500.	
Z1		K1	T1	T2	100.	
T2	Robežnosacījumu veids:		T0	T3	500.	
K2	L2*dT/dn=-K1*(T-Ti),			T4	1500.	
0	kur		Siltuma atdeves			
	T1=T0-G1*z/Z2, Ti=const		K1 koeficienti		1.0	
	(i=1,2,3,4)		K2 [W/(m*m*K)]		.00001	
			K3		.10	
			K4		1.0	
			Temperatūras Ti gradients G1 pa z			
			[K grādi]			20.
			Sākuma temperatūra [K grādi]			1500.

3 no 4 tabulām

Rediģējiet! Pāreja ar taustiņiem <PgUp> vai <PgDn>

5. zīm. 3. rediģējamā ievaddatu tabula

Hidrodinamiskie parametri uzdevumam ar vibratoru

Z2		Vibrators		Viskozitātes koef. [m*Pa s]	4.3
z	Vibrators	Šķidrums		Vibrators svārstību amplitūda [m]	.1
Z1				Vibrators svārstību frekvence [Hz]	80.
0			Robežnosacījumu veids virpulfunkcijai (0-Toma, 1-Vuda)		1.
			Skaitliskā algoritma parametru izmaiņa (0-nē, ?-jā)		3.3

Pēdējā tabula!

Rediģējiet! Izeja ar taustiņu <Esc>, atpakaļ ar <PgUp>

6. zīm. 4. rediģējamā ievaddatu tabula

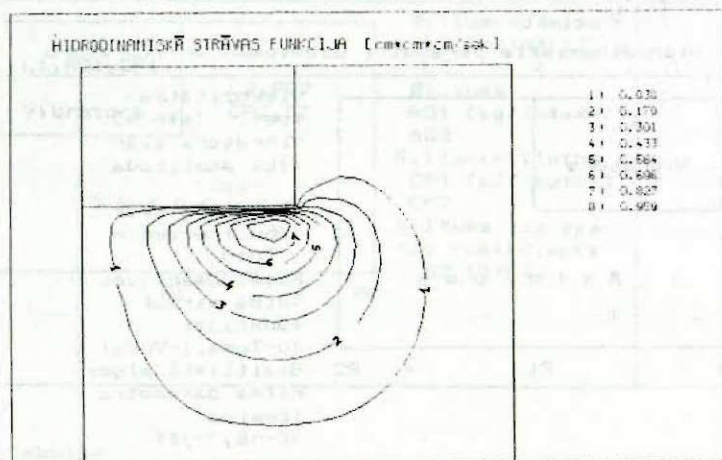
Skaitliskā algoritma parametri uzdevumam ar vibratoru

Laika slāņu skaits	1
Relaksācijas koeficients temperatūrai	1.1
Iterācijsolis virpulfunkcijai	0.005
Iterācijsolis temperatūrai	0.10
Precizitāte virpulfunkcijai	0.005
Precizitāte temperatūrai	0.5

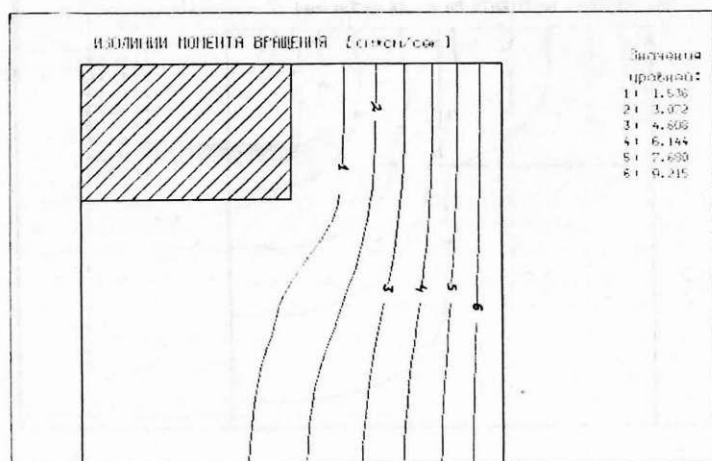
Pēdējā tabula :

Rediģējiet ! Izeja ar taustiņu <Esc>, atpakaļ ar <PgUp>

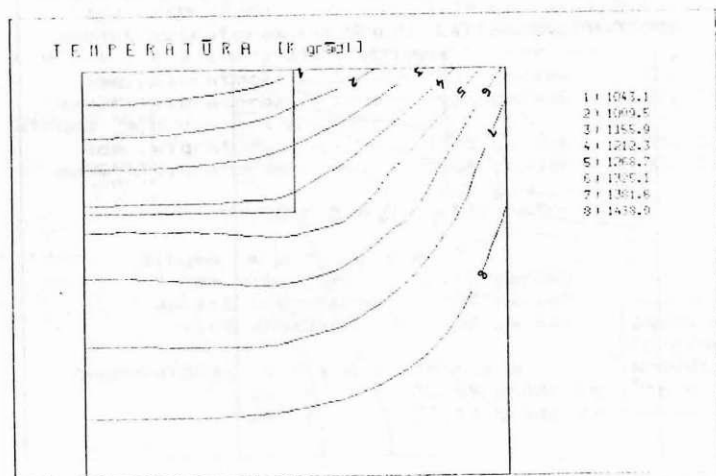
7. zīm. Skaitliskā algoritma parametru rediģējamā tabula



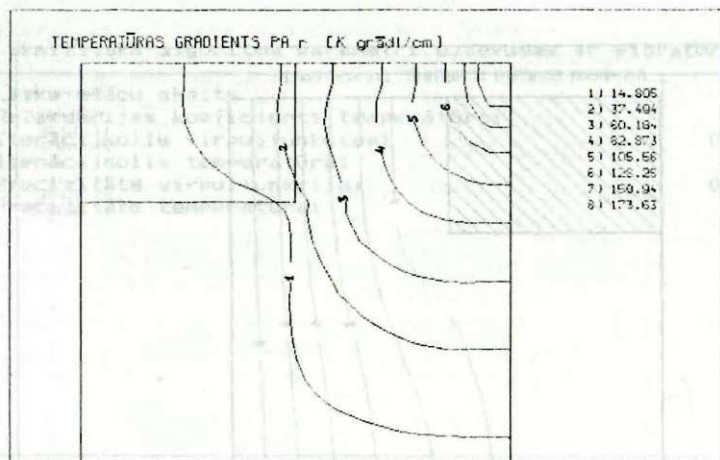
8. Zīm. Hidrodinamiskās plūsmas izolīnijas



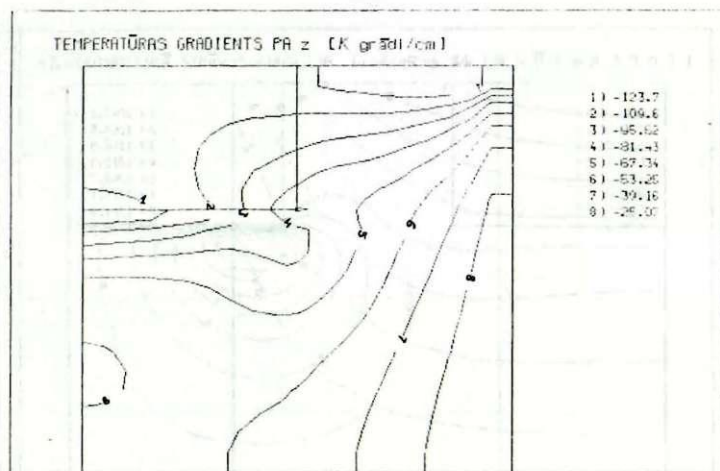
9. зйм. Rotācijas momenta izlīnijas.

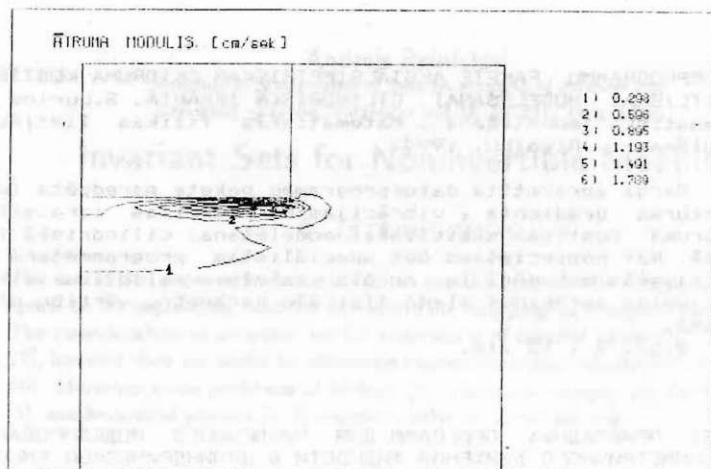


10. зйм. Temperatūras lauka izlīnijas



11. zīm. Temperatūras radiālā gradienta izolīnijas

12. zīm. Temperatūras z - gradienta izolīnijas



13. zīm. Ātruma modula izolinijas

M A K S I M Ā L Ā S V Ē R T Ī B A S

r a d i ā l ā j a m ā t r u m a m

zem vibratora 1.77 cm/sek (2.40, 3.82)

apkārt vibratoram .47 cm/sek (3.15, 3.82)

v e r t i k ā l ā j a m ā t r u m a m

zem vibratora .31 cm/sek (.75, 3.60)

apkārt vibratoram .52 cm/sek (3.08, 3.90)

ā t r u m a m o d u l i m

zem vibratora 1.75 cm/sek (2.55, 3.82)

apkārt vibratoram .86 cm/sek (3.08, 3.82)

V I D Ē J Ā S V Ē R T Ī B A S

ā t r u m a m o d u l i m

zem vibratora .15 cm/sek

apkārt vibratoram .03 cm/sek

visā apgabalā .08 cm/sek

t e m p e r a t ū r a s g r a d i e n t a m

p a r 33.69 grādi/cm

p a z 71.43 grādi/cm

Jauns aprēķins
Turpinājums
Apskate
Beigās

14. zīm. Skaitlisko vērtību 2.izvadlapa ar režīmu izvēlni

DATORPROGRAMMU PAKETE AKSIĀLSIMETRISKAS ŠĶIDRUMA KUSTĪBAS SKAITLISKAI MODELĒŠANAI CILINDRISKĀ IEKĀRTĀ. G.Lurins // Matemātiskā modelēšana. Matemātiskās fizikas lietišķās problēmas. Rīga:LU, 1994.

Darbā aprakstītā datorprogrammu pakete paredzēta temperatūras gradienta, vibrācijas un rotācijas izraisītas šķidrums kustības skaitliskai modelēšanai cilindriskā iekārtā. Nav nepieciešams būt speciālistam programmēšanā un skaitliskās metodēs, lai ar šīs paketes palīdzību veiktu sērijveida aprēķinus plašā fizikālo parametru vērtību diapazonā.

Bibl. 2, 15 zīm.

ПАКЕТ ПРИКЛАДНЫХ ПРОГРАММ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ЕМКОСТИ Луринс Г.Р. // Математическое моделирование. Прикладные задачи математической физики. Рига:ЛУ, 1994.

Описанный в работе пакет прикладных программ предназначен для численного моделирования движения жидкости в цилиндрической емкости, порожденного градиентом температуры, вибрацией и ротацией. Нет необходимости быть специалистом по программированию и численным методам, чтобы с помощью этого пакета проводить серийные расчеты в широком диапазоне значений физических параметров.

Библ. 2, рис.15.

SOFTWARE FOR THE NUMERICAL SIMULATION OF AXIALLY SYMMETRIC FLUID FLOW IN CYLINDRICAL VESSEL. G.Lurins // Mathematical modelling. Applied problems of mathematical physics. Riga:LU, 1994.

The software described in this paper is suitable for the numerical simulation of fluid flow in cylindrical vessel induced by temperature gradient, vibration and rotation. It is not necessary for the user to be a specialist in programming and numerical methods to carry out series of calculations in a wide range of parameter values.

Ref. 2, fig.15.

Andrejs Reinfelds¹

*Institute of Mathematics of Latvian Academy of Sciences and
University of Latvia, Turgejeva ielā 19, LV-1524 Riga, Latvia*

Invariant Sets for Noninvertible Mapping

0. INTRODUCTION

The aim of this paper is to derive invariant manifolds results for mapping in Banach space to corresponding ones for noninvertible mapping in complete metric space. The consideration of invariant set for mapping is of interest in itself [7, 10, 12, 13, 17], however they are useful for obtaining various conjugacy results [2-6, 8-9, 11, 14-16]. Moreover some problems of biology [2], numerical analysis [8], electrotechnics [1], mathematical physics [6, 9] require results for invariant sets.

1. MAIN RESULTS

Let \mathbf{X} and \mathbf{Y} be complete metric spaces with metrics ρ_1 and ρ_2 , respectively, and let \mathbf{S} be a topological space. Consider a continuous mapping $T: \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \times \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \times \mathbf{S}$ where $T(x, y, s) = (f(x, y, s), g(x, y, s), \sigma(s))$.

Let there exist mappings $\psi: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ and $\varphi: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ such that $\psi \circ \varphi = id_{\mathbf{X}}$, $\rho_1(\varphi(x), \varphi(x')) \leq \nu \rho_1(x, x')$ and $f(x, y, s) = \psi \circ \phi(x, y, s)$. We will make the following hypotheses:

(H1) $\rho_1(x, x') \leq \alpha \nu^{-1} \rho_1(\phi(x, y, s), \phi(x', y, s))$, where $\alpha > 0$.

(H2) $\rho_1(\phi(x, y, s), \phi(x, y', s)) \leq \beta \nu \rho_2(y, y')$.

(H3) $\rho_2(g(x, y, s), g(x', y', s)) \leq \gamma \rho_1(x, x') + \delta \rho_2(y, y')$.

(H4) Mapping $\phi(\cdot, y, s): \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ is surjective.

(H5) Mapping $\sigma: \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{S}$ is a homeomorphism.

We consider a case when the invariant set can be represented as the graph of mapping $u: \mathbf{X} \times \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{Y}$ or $v: \mathbf{Y} \times \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{X}$ which is Lipschitzian with respect to first variable. The corresponding mappings satisfy functional equations

$$u(x_1, \sigma(s)) = g(x, u(x, s), s) \text{ and } \varphi(x_1) = \phi(x, u(x, s), s), \quad (1)$$

$$\phi(v(y, s), y, s) = \varphi(v(g(v(y, s), y, s), \sigma(s))) \quad (2)$$

and Lipschitz conditions

$$\rho_2(u(x, s), u(x', s)) \leq k_0 \rho_1(x, x'), \quad (3)$$

$$\rho_1(v(y, s), v(y', s)) \leq l_0 \rho_2(y, y'), \quad (4)$$

¹This work was supported by the Latvian Council of Science, Grant 93.809

where

$$k_0 = \frac{2\alpha\gamma}{1 - \alpha\delta + \sqrt{(1 - \alpha\delta)^2 - 4\alpha^2\beta\gamma}}$$

and

$$l_0 = \frac{2\alpha\beta}{1 - \alpha\delta + \sqrt{(1 - \alpha\delta)^2 - 4\alpha^2\beta\gamma}}$$

It should be noted that $\beta k_0 = \gamma l_0$.

It is easily verified that the mapping v also satisfies the functional equation

$$f(v(y, s), y, s) = v(g(v(y, s), y, s), \sigma(s)).$$

Analogously, the mapping u satisfies the functional equation

$$u(f(x, u(x, s), s), \sigma(s)) = g(x, u(x, s), s)$$

for all those $x \in X$ for which

$$\varphi(f(x, u(x, s), s)) = \phi(x, u(x, s), s).$$

Now we will formulate the main results of the paper.

THEOREM 1 Let the hypothesis (H1) - (H5) hold, and let there exists mapping $u_0: X \times S \rightarrow Y$ such that

$$\rho_1(u_0(x, s), u_0(x', s)) \leq k_0 \rho_1(x, x')$$

and

$$\sup_{x, s} \rho_2(u_0(f(x, u_0(x, s), s), \sigma(s)), g(x, u_0(x, s), s)) < +\infty. \quad (5)$$

If $\delta + \beta k_0 < 1$, then there exists unique mapping $u: X \times S \rightarrow Y$ satisfying (1), (3) and

$$\sup_{x, s} \rho_2(u(x, s), u_0(x, s)) < +\infty.$$

THEOREM 2 Let the hypothesis (H1) - (H5) hold, and let there exists mapping $v_0: Y \times S \rightarrow X$ such that

$$\rho_1(v_0(y, s), v_0(y', s)) \leq l_0 \rho_2(y, y')$$

and

$$\sup_{y, s} \rho_1(\varphi(v_0(g(v_0(y, s), y, s), \sigma(s))), \phi(v_0(y, s), y, s)) < +\infty. \quad (6)$$

If $\alpha(1 + \gamma l_0) < 1$, then there exists unique mapping $v: Y \times S \rightarrow X$ satisfying (2), (4) and

$$\sup_{y, s} \rho_2(v(y, s), v_0(y, s)) < +\infty.$$

THEOREM 3 Let the hypothesis (H1) - (H5) hold and let there exists mappings $x_0: S \rightarrow X$ and $y_0: S \rightarrow Y$ such that

$$\phi(x_0(s), y_0(s), s) = \varphi(x_0(\sigma(s))),$$

$$g(x_0(s), y_0(s), s) = y_0(\sigma(s)).$$

If $\alpha(\delta + 2\sqrt{\beta\gamma}) < 1$, then there exists unique mappings $u: X \times S \rightarrow Y$, $v: Y \times S \rightarrow X$ satisfying (1)-(4), $u(x_0(s), s) = y_0(s)$ and $v(y_0(s), s) = x_0(s)$.

2. AUXILIARY LEMMAS

Let us consider the set of mappings

$$\mathcal{M}(k) = \{u : \mathbf{X} \times \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{Y} \mid \rho_2(u(x, s), u(x', s)) \leq k\rho_1(x, x')\}.$$

Next introduce the operator \mathcal{L} at $\mathcal{M}(k)$ defined by the equality

$$(\mathcal{L}u)(x_1, \sigma(s)) = g(x, u(x, s), s) \text{ and } \varphi(x_1) = \phi(x, u(x, s), s).$$

LEMMA 1 Let $\alpha\beta k < 1$ and $u \in \mathcal{M}(k)$. Then mapping $\Phi : \mathbf{X} \times \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{X} \times \mathbf{S}$, defined by $\Phi(x, s) = (\phi(x, u(x, s), s), \sigma(s))$, is a homeomorphism.

Proof. The proof is analogous to the proof of similar Lemma 1 [12, 13].

LEMMA 2 If $\alpha(\delta + 2\sqrt{\beta\gamma}) < 1$, then there exists $k_0 \geq 0$ such that $\mathcal{L}(\mathcal{M}(k_0)) \subset \mathcal{M}(k_0)$.

Proof. Taking into account **(H3)** we get

$$\begin{aligned} & \rho_2((\mathcal{L}u)(x_1, \sigma(s)), (\mathcal{L}u)(x'_1, \sigma(s))) \\ &= \rho_2(g(x, u(x, s), s), g(x', u(x', s), s)) \leq (\gamma + \delta k)\rho_1(x, x'). \end{aligned}$$

On the other hand, we obtain

$$\begin{aligned} \rho_1(x, x') &\leq \alpha\nu^{-1}\rho_1(\phi(x, u(x, s), s), \phi(x', u(x, s), s)) \\ &\leq \alpha\nu^{-1}\rho_1(\varphi(x_1), \varphi(x'_1)) + \alpha\beta k\rho_1(x, x'). \end{aligned}$$

It follows that

$$\rho_1(x, x') \leq \alpha\nu^{-1}(1 - \alpha\beta k)^{-1}\rho_1(\varphi(x_1), \varphi(x'_1)) \leq \alpha(1 - \alpha\beta k)^{-1}\rho_1(x_1, x'_1).$$

Therefore

$$\begin{aligned} & \rho_2((\mathcal{L}u)(x_1, \sigma(s)), (\mathcal{L}u)(x_1, \sigma(s))) \\ &\leq \alpha(\gamma + \delta k)(1 - \alpha\beta k)^{-1}\rho_1(x_1, x'_1). \end{aligned}$$

If $k \geq 0$ satisfies inequality

$$0 \leq \alpha(\gamma + \delta k)(1 - \alpha\beta k)^{-1} \leq k,$$

then $\mathcal{L}(\mathcal{M}(k)) \subset \mathcal{M}(k)$. Such $k \geq 0$ exists, if $\alpha(\delta + 2\sqrt{\beta\gamma}) < 1$. We choose

$$k_0 = \frac{2\alpha\gamma}{1 - \alpha\delta + \sqrt{(1 - \alpha\delta)^2 - 4\alpha^2\beta\gamma}}.$$

Lemma is proved.

Next let us consider the set of mappings

$$\mathcal{N}(l) = \{v : \mathbf{Y} \times \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{X} \mid \rho_1(v(y, s), v(y', s)) \leq l\rho_2(y, y')\}$$

and let us introduce the operator \mathcal{K} at $\mathcal{N}(l)$ by the equality

$$\phi(\mathcal{K}v(y, s), y, s) = \varphi(v(g(v(y, s), y, s), \sigma(s))).$$

Operator \mathcal{K} is correctly defined, because mapping $\phi(\cdot, y, s) : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ is surjective and hypothesis **(H1)** is fulfilled.

LEMMA 3 If $\alpha(\delta + 2\sqrt{\beta\gamma}) < 1$, then there exists $l_0 \geq 0$ such that $\mathcal{K}(\mathcal{N}(l_0)) \subset \mathcal{N}(l_0)$.

Proof. According to (H1) - (H3), we get

$$\begin{aligned} \rho_1(\mathcal{K}v(y, s), \mathcal{K}v(y', s)) &\leq \alpha\nu^{-1}\rho_1(\phi(\mathcal{K}v(y, s), y, s), \phi(\mathcal{K}v(y', s), y, s)) \\ &\leq \alpha\nu^{-1}\rho_1(\varphi(v(g(v(y, s), y, s), \sigma(s))), \varphi(v(g(v(y', s), y', s), \sigma(s)))) \\ &\quad + \alpha\nu^{-1}\rho_1(\phi(\mathcal{K}v(y', s), y, s), \phi(\mathcal{K}v(y', s), y', s)) \\ &\leq (\alpha l(\gamma l + \delta) + \alpha\beta)\rho_2(y, y'). \end{aligned}$$

If

$$0 \leq \alpha l(\gamma l + \delta) + \alpha\beta \leq l,$$

then $\mathcal{K}(\mathcal{N}(l)) \subset \mathcal{N}(l)$. Such $l \geq 0$ exists, if $\alpha(\delta + 2\sqrt{\beta\gamma}) < 1$. We choose

$$l_0 = \frac{2\alpha\beta}{1 - \alpha\delta + \sqrt{(1 - \alpha\delta)^2 - 4\alpha^2\beta\gamma}}$$

Lemma is proved.

3. PROOFS OF THEOREMS

PROOF OF THEOREM 1. The set

$$\mathcal{M} = \{u \in \mathcal{M}(k_0) \mid \sup_{x,s} \rho_2(u(x, s), u_0(x, s)) < +\infty\}$$

is complete metric space, if the metric is defined by the equality

$$d(u, u') = \sup_{x,s} \rho_2(u(x, s), u'(x, s)).$$

Let us prove that \mathcal{L} is a contraction. Let

$$\varphi(x_1) = \phi(x, u(x, s), s) = \phi(x', u'(x', s), s), \quad s_1 = \sigma(s).$$

We have

$$\begin{aligned} &\rho_2((\mathcal{L}u)(x_1, s_1), (\mathcal{L}u')(x_1, s_1)) \\ &= \rho_2(g(x, u(x, s), s), g(x', u'(x', s), s)) \\ &\leq (\gamma + \delta k_0)\rho_1(x, x') + \delta\rho_2(u(x, s), u'(x, s)). \end{aligned}$$

On the other hand

$$\begin{aligned} \rho_1(x, x') &\leq \alpha\nu^{-1}\rho_1(\phi(x, u(x, s), s), \phi(x', u(x, s), s)) \\ &= \alpha\nu^{-1}\rho_1(\phi(x', u'(x', s), s), \phi(x', u(x, s), s)) \\ &\leq \alpha\beta\rho_2(u'(x, s), u(x, s)) + \alpha\beta k_0\rho_1(x, x'). \end{aligned}$$

Therefore

$$\rho_1(x, x') \leq \alpha\beta(1 - \alpha\beta k_0)^{-1} \rho_1(u'(x, s), u(x, s)).$$

We get

$$\begin{aligned} & \rho_2((\mathcal{L}u)(x_1, s_1), (\mathcal{L}u')(x_1, s_1)) \\ & \leq (\alpha\beta(\gamma + \delta k_0)(1 - \alpha\beta k_0)^{-1} + \delta) \rho_2(u(x, s), u'(x, s)). \end{aligned}$$

Hence

$$d(\mathcal{L}u, \mathcal{L}u') \leq (\delta + \beta k_0) d(u, u').$$

We have

$$\begin{aligned} & \rho_2((\mathcal{L}u_0)(x_1, \sigma(s)), u_0(x_1, \sigma(s))) \\ & = \rho_2(g(x, u_0(x, s), s), u_0(f(x, u_0(x, s), s), \sigma(s))). \end{aligned}$$

Therefore

$$d(\mathcal{L}u_0, u_0) \leq \sup_{x,s} \rho_2(g(x, u_0(x, s), s), u_0(f(x, u_0(x, s), s), \sigma(s))).$$

Hence

$$\begin{aligned} d(\mathcal{L}u, u_0) & \leq d(\mathcal{L}u, \mathcal{L}u_0) + d(\mathcal{L}u_0, u_0) \\ & \leq (\delta + \beta k_0) d(u, u_0) + \sup_{x,s} \rho_2(g(x, u_0(x, s), s), u_0(f(x, u_0(x, s), s), \sigma(s))). \quad (7) \end{aligned}$$

We obtain that \mathcal{L} is a contraction on \mathcal{M} . It involves in \mathcal{M} there is unique mapping u satisfying functional equation (1).

From (7) we have

$$d(u, u_0) \leq (1 - \delta - \beta k_0)^{-1} \sup_{x,s} \rho_2(g(x, u_0(x, s), s), u_0(f(x, u_0(x, s), s), \sigma(s))).$$

The theorem is proven.

PROOF OF THEOREM 2. The set

$$\mathcal{N} = \{u \in \mathcal{N}(I_0) \mid \sup_{y,s} \rho_2(v(y, s), u_0(y, s)) < +\infty\}$$

is complete metric space, if the metric is defined by

$$d(v, v') = \sup_{y,s} \rho_1(v(y, s), v'(y, s)).$$

Let us prove that \mathcal{K} is a contraction. We have

$$\begin{aligned} \rho_1(\mathcal{K}v(y, s), \mathcal{K}v'(y, s)) & \leq \alpha\nu^{-1} \rho_1(\phi(\mathcal{K}v(y, s), y, s), \phi(\mathcal{K}v'(y, s), y, s)) \\ & = \alpha\nu^{-1} \rho_1(\varphi(v(g(v(y, s), y, s), \sigma(s))), \varphi(v'(g(v'(y, s), y, s), \sigma(s)))) \\ & \leq \alpha\rho_1(v(g(v(y, s), y, s), \sigma(s)), v'(g(v(y, s), y, s), \sigma(s))) \\ & \quad + \alpha\rho_1(v'(g(v(y, s), y, s), \sigma(s)), v'(g(v'(y, s), y, s), \sigma(s))). \end{aligned}$$

Therefore

$$d(\mathcal{K}v, \mathcal{K}v') \leq \alpha(1 + \gamma l_0)d(v, v').$$

We have

$$\begin{aligned} \rho_1(\mathcal{K}v_0(y, s), v_0(y, s)) &\leq \alpha\nu^{-1}\rho_1(\phi(\mathcal{K}v_0(y, s), y, s), \phi(v_0(y, s), y, s)) \\ &= \alpha\nu^{-1}\rho_1(\varphi(v_0(g(v_0(y, s), y, s), \sigma(s))), \phi(v_0(y, s), y, s)). \end{aligned}$$

We get

$$d(\mathcal{K}v_0, v_0) \leq \alpha\nu^{-1} \sup_{y,s} \rho_1(\phi(v_0(y, s), y, s), \varphi(v_0(g(v_0(y, s), y, s), \sigma(s))))).$$

Therefore

$$\begin{aligned} d(\mathcal{K}v, v_0) &\leq d(\mathcal{K}v, \mathcal{K}v_0) + d(\mathcal{K}v_0, v_0) \leq \alpha(1 + \gamma l_0)d(v, v_0) \\ &+ \alpha\nu^{-1} \sup_{y,s} \rho_1(\phi(v_0(y, s), y, s), \varphi(v_0(g(v_0(y, s), y, s), \sigma(s))))). \end{aligned} \quad (8)$$

We obtain that \mathcal{K} is a contraction on \mathcal{N} . It involves in \mathcal{N} there is unique mapping v satisfying functional equation (2). From (8) we have

$$\begin{aligned} &d(v, v_0) \\ &\leq \nu^{-1}(\alpha^{-1} - (1 + \gamma l_0))^{-1} \sup_{y,s} \rho_1(\phi(v_0(y, s), y, s), \varphi(v_0(g(v_0(y, s), y, s), \sigma(s))))). \end{aligned}$$

The theorem is proven.

PROOF OF THEOREM 3. Let us endow the set

$$\mathcal{M}_0 = \{u \in \mathcal{M}(k_0) \mid u(x_0(s), s) = y_0(s)\}$$

with the metric.

$$d_2(u, u') = \sup_{x,s} \frac{\rho_2(u(x, s), u'(x, s))}{\rho_1(x, x_0(s))}.$$

Then \mathcal{M}_0 become the complete metric space. Let $u \in \mathcal{M}_0$ and let us note that $\phi(x, u(x, s), s) \neq \varphi(x_0(\sigma(s)))$, if $x \neq x_0(s)$. It follows that

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}u)(x_0(\sigma(s)), \sigma(s)) &= (\mathcal{L}u)(f(x_0(s), u(x_0(s), s), s), \sigma(s))) \\ &= g(x_0(s), u(x_0(s), s), s) = y_0(\sigma(s)), \end{aligned}$$

or $\mathcal{L}u \in \mathcal{M}_0$. We must prove that \mathcal{L} is a contraction on \mathcal{M}_0 . Let

$$x_1 = f(x, u(x, s), s) = f(x', u'(x', s), s), \quad s_1 = \sigma(s).$$

Analogously, like in Theorem 1, we obtain

$$\rho_2((\mathcal{L}u)(x_1, s_1), (\mathcal{L}u')(x_1, s_1)) \leq (\delta + \beta k_0)\rho_2(u(x, s), u'(x, s)).$$

Let us estimate

$$\begin{aligned} \rho_1(x, x_0(s)) &\leq \alpha\nu^{-1}\rho_1(\phi(x, u(x, s), s), \phi(x_0(s), u(x, s), s))) \\ &\leq \alpha\nu^{-1}\rho_1(\phi(x, u(x, s), s), \varphi(x_0(\sigma(s)))) \\ &+ \alpha\nu^{-1}\rho_1(\phi(x_0(s), u(x, s), s), \phi(x_0(s), u(x_0(s), s), s))) \\ &\leq \alpha\nu^{-1}\rho_1(\varphi(x_1), \varphi(x_0(\sigma(s)))) + \alpha\beta k_0\rho_1(x, x_0(s)). \end{aligned}$$

Hence,

$$\rho_1(x, x_0(s)) \leq \alpha(1 - \alpha\beta k_0)^{-1}\rho_1(x_1, x_0(s_1)).$$

We have

$$\begin{aligned} &\rho_2((\mathcal{L}u)(x_1, s_1), (\mathcal{L}u')(x_1, s_1)) \\ &\leq (\delta + \beta k_0)d_2(u, u')\rho_1(x, x_0(s)) \\ &\leq \alpha(\delta + \beta k_0)(1 - \alpha\beta k_0)^{-1}d_2(u, u')\rho_1(x_1, x_0(s_1)). \end{aligned}$$

Therefore

$$d_2(\mathcal{L}u, \mathcal{L}u') \leq \alpha(\delta + \beta k_0)(1 - \alpha\beta k_0)^{-1}d_2(u, u').$$

If $\alpha(\delta + 2\sqrt{\beta\gamma}) < 1$, then

$$\begin{aligned} &\alpha(\delta + \beta k_0)(1 - \alpha\beta k_0)^{-1} \\ &= \frac{1 + \alpha\delta - \sqrt{(1 - \alpha\delta)^2 - 4\alpha^2\beta\gamma}}{1 + \alpha\delta + \sqrt{(1 - \alpha\delta)^2 - 4\alpha^2\beta\gamma}} < 1. \end{aligned}$$

We obtain that \mathcal{L} is a contraction on \mathcal{M}_0 . It involves in \mathcal{M}_0 there is unique mapping u satisfying functional equation (1) and Lipschitz condition (3). The first part of the theorem is established.

Let us prove the existence of invariant manifold given by the mapping $v: Y \times S \rightarrow X$. The set

$$\mathcal{N}_0 = \{v \in \mathcal{N}(l_0) \mid v(y_0(s), s) = x_0(s)\}$$

becomes a complete metric space, if the metric is defined by

$$d_1(v, v') = \sup_{y, s} \frac{\rho_1(v(y, s), v'(y, s))}{\rho_2(y, y_0(s))}.$$

Using the definition of \mathcal{K} , we obtain $\mathcal{K}v(y_0(s), s) = x_0(s)$. Therefore, $\mathcal{K}v \in \mathcal{N}_0$, if $v \in \mathcal{N}_0$. It follows that

$$\begin{aligned} &\rho_1(\mathcal{K}v(y, s), \mathcal{K}v'(y, s)) \\ &\leq \alpha\nu^{-1}\rho_1(\phi(\mathcal{K}v(y, s), y, s), \phi(\mathcal{K}v'(y, s), y, s)) \\ &= \alpha\nu^{-1}\rho_1(\varphi(v(g(v(y, s), y, s), \sigma(s))), \varphi(v'(g(v'(y, s), y, s), \sigma(s)))) \\ &\leq \alpha\rho_1(v(g(v(y, s), y, s), \sigma(s)), v'(g(v(y, s), y, s), \sigma(s))) \\ &+ \alpha\gamma l_0\rho_1(v(y, s), v'(y, s)) \leq \alpha\gamma l_0 d_1(v, v')\rho_2(y, y_0(s)) \\ &+ \alpha d_1(v, v')\rho_2(g(v(y, s), y, s), y_0(\sigma(s))). \end{aligned}$$

Let us estimate

$$\begin{aligned} & \rho_2(g(v(y, s), y, s), y_0(\sigma(s))) \\ &= \rho_2(g(v(y, s), y, s), g(v(y_0(s), s), y_0(s), s)) \\ &\leq (\delta + \gamma l_0) \rho_2(y, y_0(s)). \end{aligned}$$

Therefore

$$\rho_1(\mathcal{K}v(y, s), \mathcal{K}v'(y, s)) \leq \alpha(\delta + 2\gamma l_0) d_1(v, v') \rho_2(y, y_0(s)).$$

We get

$$d_1(\mathcal{K}v, \mathcal{K}v') \leq \alpha(\delta + 2\gamma l_0) d_1(v, v').$$

Besides

$$\alpha(\delta + 2\gamma l_0) = 1 - \sqrt{(1 - \alpha\delta)^2 - 4\alpha^2\beta\gamma} < 1$$

We obtain that \mathcal{K} is a contraction on \mathcal{N}_0 . It involves in \mathcal{N}_0 there is unique mapping v satisfying functional equation (2) and estimate (4). The theorem is proven.

4. EXAMPLE

Let us consider a nonautonomous system of difference equations on Z of the form

$$\begin{aligned} x(n+1) &= Ax(n) + F(x(n), y(n), n), \\ y(n+1) &= By(n) + G(x(n), y(n), n), \end{aligned}$$

where $x \in X$, $y \in Y$, X and Y are Banach spaces, A and B are bounded linear mappings such that A has a right inverse A_r , $\|B\| < \|A_r\|^{-1}$ and the mappings $F: X \times Y \times Z \rightarrow X$, $G: X \times Y \times Z \rightarrow Y$ satisfy Lipschitz conditions

$$\begin{aligned} |F(x, y, n) - F(x', y', n)| &\leq \epsilon(|x - x'| + |y - y'|), \\ |G(x, y, n) - G(x', y', n)| &\leq \epsilon(|x - x'| + |y - y'|). \end{aligned}$$

It is easy to verify that this mapping satisfies the hypotheses (H1) - (H5), where $\psi = A$, $\varphi = A_r$, $\nu = \|A_r\|$, $\alpha = (\|A_r\|^{-1} - \epsilon)^{-1}$, $\beta = \gamma = \epsilon$, $\delta = \|B\| + \epsilon$ and $\sigma(n) = n + 1$. The condition $\alpha(\delta + 2\sqrt{\beta\gamma}) < 1$ reduces to the inequality

$$\epsilon < \frac{\|A_r\|^{-1} - \|B\|}{4}.$$

The mapping given by formula $u = x + A_r F(x, y, n)$ for fixed n and y is surjective, if $\epsilon \|A_r\| < 1$. Let us note that $\epsilon \|A_r\| < 4^{-1} < 1$. The condition (5) is fulfilled if $\sup_{x,n} |G(x, 0, n)| < +\infty$. The condition (6) is fulfilled if $\sup_{y,n} |F(0, y, n)| < +\infty$.

REFERENCES

1. N. Akamatsu, *Classification of invariant sets and global behavior of third order nonlinear system*, Trans. IECE Japan **E 69** (1986), no. 6, 732-739.
2. B. Aulbach, *Continuous and discrete dynamics near manifolds of equilibria*, Lecture Notes in Math., vol. 1058, Springer, Berlin, 1984.
3. B. Aulbach, B. M. Garay, *Linearization and decoupling of dynamical and semi-dynamical systems*, Differential equations. Papers from the Second International Colloquium held in Plovdiv, August 19-24, 1991 (D. Bainov and V. Covachev, eds.), World Scientific, Singapore, 1992, pp. 15-27.
4. B. Aulbach, B. M. Garay, *Linearizing the expanding part of noninvertible mappings*, J. Appl. Math. Phys. **44** (1993), 469-494.
5. B. Aulbach, B. M. Garay, *Partial linearization for noninvertible mappings*, J. Appl. Math. Phys. (to appear).
6. P. W. Bates, K. Lu, *A Hartman-Grobman theorem for Cahn-Hilliard equations and phase-field equations*, J. Dynamics Differential Equations (to appear).
7. M. W. Hirsch, C. C. Pugh and M. Shub, *Invariant manifolds*, Lecture Notes in Math., vol. 583, Springer, Berlin, 1977.
8. U. Kirchgraber, K. J. Palmer, *Geometry in the neighborhood of invariant manifolds of maps and flows and linearization*, Pitman Res. Notes Math. Ser., vol. 233, Longman, Harlow, 1990.
9. K. Lu, *A Hartman-Grobman theorem for scalar reaction-diffusion equations*, J. Differential Equations **93** (1991), no. 2, 364-394.
10. G. Papaschinopoulos, *On the summable manifold for discrete systems*, Math. Japon. **33** (1988), no. 3, 457-468.
11. G. Papaschinopoulos, *Linearization near the summable manifold for discrete systems*, Studia Sci. Math. Hungar. **25** (1990), no. 3, 275-289.
12. A. Reinfelds, *Invariant sets in a metric space*, Latv. Mat. Ezhegodnik **30** (1986), 83-91 (Russian).
13. A. Reinfelds, *Invariant sets for splitting mapping in metric space*, Latv. Univ. Zinātn. Raksti **588** (1993), 35-44.
14. A. Reinfelds, *Decoupling of mappings in a metric space*, Proc. Latvian Acad. Sci. Sect. **B 1994**, no. 2(559), 67-75.
15. A. Reinfelds, *Partial decoupling for noninvertible mappings*, Differential Equations and Dynamical Systems (to appear).

16. A. Reinfelds, *The reduction principle for discrete dynamical and semidynamical systems in metric spaces*, J. Appl. Math. Phys. (to appear).
17. J. C. Wells, *Invariant manifolds of non-linear operators*, Pacific. J. Math. 62 (1976), no. 1, 285–293.

Received March 21, 1994

MSC 39B52, 54H20, 34C35

INVARIANT SETS FOR NONINVERTIBLE MAPPING. A. Reinfelds // The mathematical simulation. Applied problems of mathematical physics. – Rīga: LU, 1994. – Vol. 4.

The theorems of existence of invariant sets for noninvertible mapping in complete metric space are proved under the assumption that given mapping satisfies some natural metric inequalities.

NEAPGRIEŽAMU ATĒLOJUMU INVARIANTĀS KOPAS. A. Reinfelds // Matemātiskā modelēšana. Matemātiskās fizikas lietišķās problēmas. – Rīga: LU, 1994. – 4. sēj.

Atrasti nepieciešamie nosacījumi invariantu kopu eksistencei pilnā metriskā telpā, ja dotais attēlojums apmierina zināmas metriskas nevienādības.

Seminar "Mathematical Modelling and Parameter Identification of Transfer Processes in Nonhomogenous Media" . Riga, 1992

Семинар "Математическое моделирование и идентификация параметров процессов переноса в неоднородных средах". Рига, 1992

A MODEL OF DEEP-BED GRAIN DRYING PROCESS WITH VENTILATION

Aivars ABOLTINS

Jelgava, Latvia

The mathematical model is based on a set of four partial differential equations which contain grain and air temperature ($\Theta(x,t)$ and $T(x,t)$), grain moisture $W(x,t)$ and air humidity $d(x,t)$ / 1 /.

$$\frac{\partial W}{\partial t} = K (W_p - W) , \quad t > 0, x > 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial d}{\partial t} + a_1 \cdot \frac{\partial d}{\partial x} = \frac{K}{a_2} (W - W_p) , \quad t > 0, x > 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = c_1 (T - \Theta) + c_2 (W_p - W) , \quad t > 0, x > 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + a_1 \frac{\partial T}{\partial x} = c_0 (\Theta - T) , \quad t > 0, x > 0 \quad (4)$$

where x, t - variables of layer thickness and drying time . Boundary and initial conditions are given as follows:

$$T|_{x=0} = T_a, \quad d|_{x=0} = d_a, \quad T|_{t=0} = \Theta|_{t=0} = \Theta_s, \quad W|_{t=0} = W_s, \quad d|_{t=0} = d_r . \quad (5)$$

$$\text{There } a_1 = 3600v, \quad a_2 = \frac{\gamma_B \cdot \epsilon}{10 \cdot \gamma_3}, \quad c_0 = \frac{\alpha_q}{m \cdot \gamma_B \cdot c_B},$$

$$c_1 = \frac{\alpha_q}{c_3 \cdot \gamma_3 (m-1)}, \quad c_2 = \frac{r \cdot K}{100 c_3},$$

where v - intergranular air velocity (m/s),

γ_B, γ_3 - capacity of weight /correspondingly for air, grain /(kg/m^3),

c_B, c_3 - heat of drying air and moist grain (kJ/kg),

r - latent heat of water vaporization (kJ/kg),

$\epsilon = m/(1-m)$ (m - porosity of grain), K - drying coeff. (1/h),

W_p - equilibrium moisture content , dry basis (%),

α_q - heat transfer coefficient ($\text{kJ}/\text{m}^2 \cdot \text{C}$),

Set (1)-(4) is solved with difference scheme using weights σ_k ($k = 1, 2, 3, 4$) for sources /2/. Set equations (1) - (4) are approximated in /4/.

One of the problems is to determine the max thickness of first grain layer for various grain moistures which don't provoke grain deterioration. The second - is to determine the max thickness of second strew upon grain layer for various grain moistures when the drying front reaches the top of the first layer (experimental researches showed its possibility /3/).

Conditions of difference scheme stability are given at /1/. For simulation is taken K from /4/:

$$K = \exp\left(20.95 - \frac{6942}{T + 273.15}\right)$$

We have made use of article /5/ for equilibrium moisture content (W_p). After some calculus is obtained the following expression for W_p :

$$W_p = W_{P1} \cdot 100 / (W_{P1} - 100) \quad \text{where} \quad (6)$$

$$W_{P1} = (-\ln[1 - p_n \cdot \phi_1 / (100 \cdot \phi_2)] \cdot (T + 273))^{0.775} / 5869)^{1/W_{P2}},$$

$$W_{P2} = 5203 \cdot (T + 273)^{-1.363}$$

p_n , ϕ_1 -saturation pressure of water vapour at atmosphere temperature and ambient air humidity, ϕ_2 -drying air humidity. In order to decrease grain deterioration from mould growth, germination damage, respiration, etc. it's supposed that the storage time is 6 hours without reducing grain moisture. The second layer of grain has strewed when the moisture of the first grain layer has decreased 0.1 (%) on top. The drying ambient air with ventilation is warmed up until humidity corresponds to grain moisture 14 %. Ventilated air velocity is 0.1 m/sec (given from experimental researches). The start of drying $t_0 = 12^{\circ}$.

Results

Solutions have been obtained using computer which operates by setting initial values T_s , d_s , Θ_s , W_s , d_r and constants $\gamma_B, \gamma_3, v, r, m, c_B, c_3$. The solving results of the system (1)-(4) with conditions (5) are given in table 1 (for max thickness of first layer) .

From those results is obtained an equation for max grain layer thickness H (m) :

$$H = \frac{83}{W} - 2.62, \quad \text{where } W - \text{grain moisture } (\%). \quad (7)$$

Less grain layer thickness is used in production. From production results the thickness can be determined by the following expression :

$$H = \frac{33.4}{W} - 0.9 \quad (8)$$

For thicker grain layers experimental and production tests are not yet carried out. Thickness (8) is used for drying first and second layer with ventilation in the primary grain processing .

Table 1

Thickness of max first grain layer H ,velocity of propagation of drying front ω , independent grain moisture W_s .

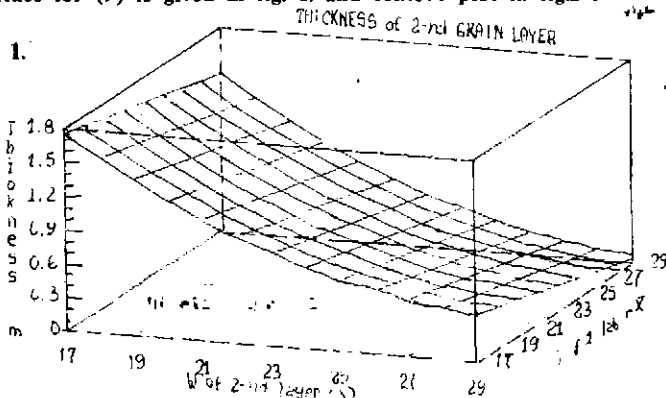
W_s (%)	H (m)	ω (m/h)
17	2.37	0.39
19	1.74	0.29
21	1.29	0.22
23	0.93	0.16
25	0.66	0.11
27	0.48	0.08
29	0.33	0.06

Production conditions showed that the second grain layer can be put on the first layer when grain moisture on top decreased by 0.1 (%) /3 /. Thickness of the 2-nd layer is determined with expression (8). It is evident that the thickness of the second grain layer should be between (7) and (8). The results of mathematical simulation proved it. Processing simulation results an equation is obtained to know the thickness of the second grain layer as an expression from the first (W_1) and second (W_2) grain layer moistures .

$$H = 7.89 - (0.03 \cdot W_1 + 0.46 \cdot W_2) + 0.0076 \cdot (W_2)^2 \quad (9)$$

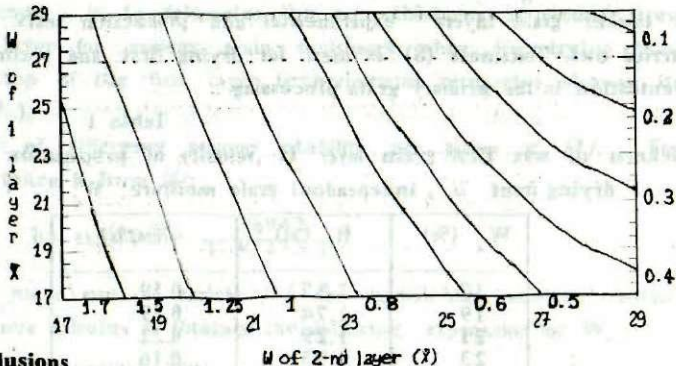
The surface for (9) is given in fig. 1. and contour plot in fig.2 .

Figure 1.



THICKNESS of 2-nd GRAIN LAYER

Figure 2.



Conclusions

The theory given in this paper describes the basic behaviour observed when air of high or low temperature and humidity is passed through grain.

The first grain layer can be thicker than it's used in production now. It would help to save energy in grain drying processes. The second grain layer can be strewn upon when the moisture of the first grain layer decreased 0.1 (%) on top. The max thickness of the second layer can be obtained from the equation (9).

Correspondence between the theoretical and the production results is reflected in wheat. The wheat by $W_s=21$ (%) in layer of the thickness $H=1.2$ m dry to moisture 15.6 (%) in 7.5 days / production result /. The theoretical result showed that grain layer of thickness $H=1.29$ m dry in 8 days. It is good coincidence because all initial heat-physical constants are given approximate.

References

1. Аболтиньш А.Я., Буйкис А.А. Математическое моделирование процесса сушки зерна с активным вентилированием // Математическое моделирование. Прикладные задачи математической физики. Рига : ЛУ, 1991. Вып. 2. С.10-20.
2. Самарский А.А. Теория разностных схем. М. :Наука 1983. 616 с.
3. Раецкис П.Ю. Режимы сушки зерна активным вентилированием с послонной загрузкой // Автореф. дис. — канд. техн. наук. Елгава, 1990. 21 с.
4. Bowden P.J., Lamond W.J., Smith E.A. Simulation of near-ambient grain drying // J.agric. Engng Res., 1983.-N 28 (4), p 279-300
5. Fortes M. Okos M.R. Barrett J.R. Heat and mass transfer analysis of intra-kernel wheat drying and rewetting // J.agric. Engng Res., 1981.-N 26. p 109-125.

Seminar "Mathematical Modelling and Parameter Identification
of Transfer Processes in Nonhomogeneous Media". Riga, 1992

Семинар "Математическое моделирование и идентификация параметров
процессов переноса в неоднородных средах". Рига, 1992

NUMERICAL ANALYSIS OF NONLINEAR BLOW-UP DIFFUSION PROCESS

V. BUDA, R. ČIEGIS, M. SAPAGOVAS

Vilnius, Lithuania

1. One-dimensional model of diffusion

We consider a diffusion process of gaseous phosphorus in a silicon plate with the diffusivity, depending on a concentration of a diffusant. The goal of the analysis is to predict the presence of localization phenomena and to determine the influence of boundary conditions on profiles of diffusant. The governing equations of the process are as follows:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial}{\partial x} \left(n^\sigma \frac{\partial n}{\partial x} \right), \quad x > 0, \quad (1a)$$

$$n(x, 0) = 0, \quad x > 0, \quad n(0, t) = n_s(t), \quad t_0 \leq t < t_f, \quad (1b, c)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} n(x, t) = 0, \quad t_0 \leq t < t_f. \quad (1d)$$

We solve this problem using the difference scheme

$$y_i^s = D \left(\bar{y}^{s-1} \hat{y}_x^s \right)_x, \quad (2a)$$

$$y_{i,0} = 0, \quad y_0 = n_s(t_j), \quad y_{N_j} = 0, \quad (2b, c)$$

where $N_j = \max_{y_i > 0} (i)$ is a diffusion depth.

Notice that the well-known diffusion process from a source of constant concentration of a diffusant $n_s(t) = n_s$ yields almost linear profiles of concentration as shown in Fig.1.

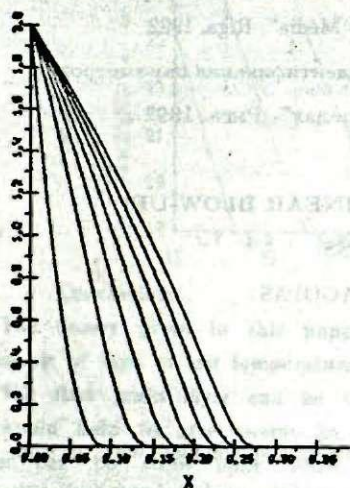


Fig.1

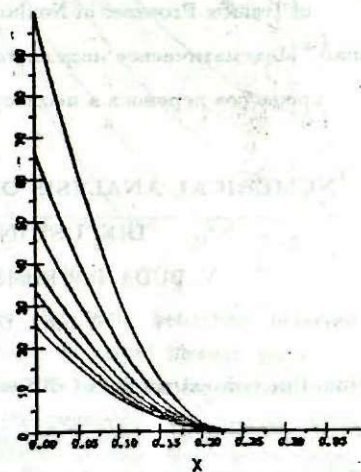


Fig. 2

We show that blow-up boundary condition

$$n(0, t) = n_s(t) \equiv n_0 / (t_f - t)^{\alpha}, \quad t_0 < t < t_f, \quad n_0 > 0, \quad \alpha > 0, \quad (3)$$

causes diffusant localisation effect [1], that is, the domain with nonzero concentration of a diffusant remains constant during finite time interval while the concentration inside the region increases unboundedly (Fig.2). We have analyzed the process for LS boundary regime ($\alpha < 1$) and for S boundary regime ($\alpha = 1$). In both cases we have found a relation between boundary conditions and concentration profiles including convex profiles with a maximum point inside the silicon plate (Fig.3). This kind of profiles occurs when the concentration of the diffusant is increasing according to blow-up boundary regime (3) during time interval $t_0 \leq t \leq t_1 < t_f$ and at the time moment t_1 the concentration begins to decrease according to the same boundary condition, with time variable t replaced by $2t_1 - t'$, i.e.,

$$n(0, t) = n_0 / (t_f - 2t_1 + t')^{\alpha}, \quad t' \geq t_1.$$

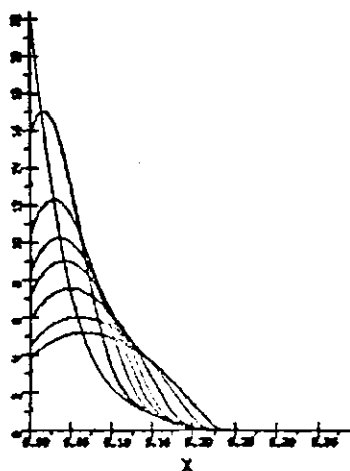


Fig.3

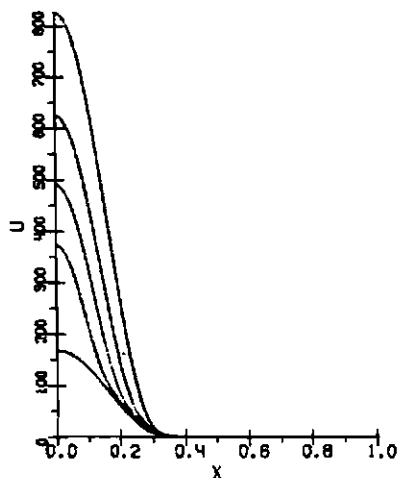


Fig.4

2. Diffusion from a limited source

We consider the diffusion process from implanted phosphorus layer into silicon plate. The corresponding non-local condition expressing the total quantity of a diffusant is as follows:

$$\int_0^{x_0} n(x, t) dx = s(t). \quad (4)$$

We solve the problem (1) with the condition (4) using technique developed in [2,3]. The effect of localization of a diffusant is observed if we take $s(t) = s_0/(t_f - t)^\beta$. The conditions for the effect are similar to those of the problem (1), i.e., $\beta \geq 1/\sigma$.

To ensure the growth of the boundary concentration according to the blow-up regime we propose to combine ion implantation into a thin layer of the silicon plate with diffusion of implanted material. The governing nonlocal conditions are

$$\int_0^{x_0} n(x, t) dx = s_j, \quad t_j \leq t \leq t_{j+1} - 0, \quad s_j = s_{j-1} + R_j, \quad R_j = \int_0^l m_j(x) dx, \quad s_1 = 0.$$

We prove that for

$$m_1 = (1 - l/x_0)^2, \quad m_{j+1} = (t_f - t_{j+1})^{-\beta} - n(0, t_{j+1}), \quad j = 1, 2, \dots, J,$$

where l is the implantation depth, x_φ is the localization point, the localization effect takes place. Fig. 4 illustrates the effect with $t_j = 0,9990 - 0,9998$, $D_0 = 0,04$; $\sigma = 1$; $\beta = 0,75$; $l = 0,02$, $x_\varphi = 0,5$, $t_f = 1$.

3. Two dimensional model of nonlinear diffusion

We consider the quasilinear diffusion equation

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(D_0 n^\sigma \frac{\partial n}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(D_0 n^\sigma \frac{\partial n}{\partial y}), \quad (x, y) \in \bar{P} = \{0 \leq x \leq L_1, -L_2 \leq y_2 < L_2\}.$$

Diffusion is provided through the window $-L_3 \leq y_2 \leq L_3$:

$$n(0, y, t) = n_s(y, t), \quad t \geq t_0, \quad |y| \leq L_3, \quad L_3 \leq L_2.$$

The rest part of the boundary is isolated: $-D_0 n^\sigma \partial n / \partial N = 0$, where $\partial n / \partial N$ is an outward normal derivative. We add the initial condition $u(x, y, t_0) = 0$, $(x, y) \in P$. The numerical solution of the problem is provided by the linearized difference scheme

$$\overset{s+1}{u}_i = (a_1(\overset{s}{u}) \overset{s+1}{u}_x)_x + (a_2(\overset{s}{u}) \overset{s+1}{u}_y)_y.$$

The latter we solve using modified method of overrelaxation

$$\overset{s}{C}_i \overset{s+1}{Y}_i = (1 - \omega) \overset{s}{C}_i \overset{s}{Y}_i + \omega (\overset{s+1}{A}_i \overset{s+1}{Y}_{i-1} + B_i \overset{s}{Y}_{i-1}),$$

where approximations $\overset{s+1}{Y}_i$ are used to evaluate the elements of matrix A_i, B_i and C_i . This modification reduces the required computer memory twice.

As a result of the analysis of 2D problem we have found that blow-up boundary regime

$$n(0, y, t) = n_0 / (t_f - t)^2, \quad t_0 \leq t < t_f, \quad |y| \leq L_s$$

causes the localization effect. Observed localization point x_φ differs insignificantly from theoretically stated one [4].

4. Nonlinear diffusion of charge carriers

We consider a diffusion process of holes into the base of pnp transistor. The corresponding equations in a dimensionless form are as follows:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(D_p \frac{\partial p}{\partial x}) - \frac{p-1}{\tau}, \quad (5a)$$

$$p(x, t_0) = 1, \quad p(0, t) = \mu(t), \quad p(x_b, t) = 1, \quad (5b, c, d)$$

where p is the concentration of holes, $D_p = D(1 + p/(p + N_d/P_0))$ is the diffusion coefficient, P_0 is the equilibrium hole concentration. τ is the time of life of holes, N_d is the concentration of donor atoms in the base. The problem (5) is solved by the difference scheme

$$u_i^s = (D_p^{-1} u_x^s)_x - \frac{u^s - 1}{\tau},$$

$$u(x, t_0) = 1, \quad u_0 = \mu(t_j), \quad u_N^s = 1,$$

using the double sweep method at every step of iteration.

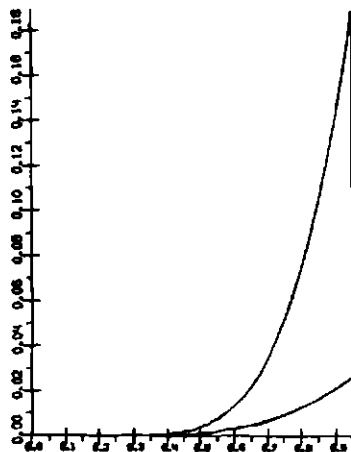


Fig.5

A presence of nonzero initial concentration of holes yields a possibility of a localization phenomena in an effective manner, only. To detect the localization effect we propose the following method. We solve the problem (5) with two essentially different boundary regime, i.e., blow-up regimes,

$$\mu_1(t) = T_0(t_f - t)^\nu \exp(R_0(t_f - t)^m), \quad t_0 \leq t < t_f,$$

and the linear boundary regime $\mu_2(t) = at$, $a - \text{const}$. Then we calculate the density of holes at a collector of the transistor ($x = x_b$) in both cases, i.e.,

$$j_c(t) = -qD_p \left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=x_b},$$

where q is the charge of electron. Finally, we compare the moment of switching of the transistor, i.e., the time moment when the density of holes at the collector x_b reaches a certain value J .

Fig.5 shows that the density of holes, corresponding to blow-up boundary regime, grows significantly slower than the density corresponding to the linear condition. It means a sufficient delay in switching time, when blow-up regime is applied.

References

1. Н.В. Змитренко, С.П. Курдюмов и др. Метастабильная локализация тепла в среде с нелинейной теплопроводимостью и условия ее проявления в эксперименте // Препринт № 103. Москва: ИПМ АН СССР, 1977. 67 с.
2. М.П. Сапагосас, Р.Ю. Чегис. О некоторых краевых задачах с нелокальными условиями // Дифференциальные уравнения. 1987. Т. 23, № 7. С. 1268 - 1274.
3. Р.Ю. Чегис. // Дифференциальные уравнения и их применение. Вильнюс, 1984. Вып. 35. С. 83 - 91.
4. В.В. Буда, М.П. Сапагосас, Р.Ю. Чегис. Двумерная модель нелинейной диффузии // Математическое и машинное моделирование в микроэлектронике. Вильнюс, 1985. С. 36 - 43.

Seminar "Mathematical Modelling and
Parameter Identification of Transfer Processes
in Nonhomogenous Media" Riga, 1992.
Семинар "Математическое моделирование и идентификация
параметров процессов переноса в неоднородных средах"
Рига, 1992.

THE APPROXIMATION WITH SPLINES
FOR PROBLEMS IN LAYERED SYSTEMS

A. BUIKIS

Riga, Latvia

The special spline, which interpolates middle integral values of piece wise smooth function, is defined. With the help of this spline we may reduce the problems of mathematical physics in R^{n+1} with piece wise coefficients to respect x analytically to problems for system of equations in R^n .

Let the domain (cylinder) $(x, y) \in \hat{\Omega} = (a, b) \times \Omega$, where $y \in \Omega \subset R^n$ consist of cylinders $\hat{\Omega}_i = (x_i, x_{i+1}) \times \Omega$, $i = \overline{0, N}$. We define the function $U_i(x, y)$ on closure of each cylinder $\bar{\hat{\Omega}}_i$. The function $U_i(x, y)$ satisfies in $\hat{\Omega}_i$ the differential equation:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_i \frac{\partial U_i}{\partial x} \right) + L^i(U_i) = -F_i(x, y), \quad i = \overline{0, N} \quad (1)$$

There the operators L^i all must be linear operators according to y and independent of x coefficients and derivatives. The coefficient k_i may have the functions of y : $k_i = k_i(y)$, which have discontinuity on the hyperplanes $\Gamma_i: \bar{\hat{\Omega}}_i \cap \bar{\hat{\Omega}}_{i+1} = \{x = x_i\} \times \Omega$, $i = \overline{1, N}$. On the hyperplanes Γ_i must be fulfilled (reality) conjugates conditions:

$$U_{i-1} = U_i, \quad k_{i-1} \frac{\partial U_{i-1}}{\partial x} = k_i \frac{\partial U_i}{\partial x}, \quad i = \overline{1, N}, \quad (2)$$

on the Γ_0 and Γ_{N+1} - boundary conditions:

$$\nu_0 k_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} - \lambda_0 U_0 = -\Phi_0(y), \quad \nu_1 k_N \frac{\partial U_N}{\partial x} + \lambda_1 U_N = \Phi_1(y), \quad (3)$$

where $\nu_l = \{0, 1\}$ for $l = 0, 1$ and $\nu_l + \lambda_l > 0$.

We introduce x_{i+1} :

$$u_i(y) = H_i^{-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} U_i(x, y) dx, \quad H_i = x_{i+1} - x_i, \quad i = \overline{0, N} \quad (4)$$

and approximate $U_i(x, y)$ with the spline:

$$S_2(x) = u_i + m_i(x - \bar{x}_i) + \frac{e_i}{k_i H_i} \left[(x - \bar{x}_i)^2 - \frac{H_i^2}{12} \right], \quad \bar{x}_i = x_i + \frac{H_i}{2}, \quad (5)$$

From the requirement that the spline $S_2(x)$ must satisfy the conditions (2)-(4), we can find the coefficients of spline $m_i, e_i, i = \overline{0, N}$. Further we have:

$$e_i = \sum_{j=0}^i \alpha_{i,j} (u_{j-1} - u_j) + \sum_{j=i+1}^{N+1} \alpha_{i,j} (u_j - u_{j-1}),$$

where

$$u_{-1} = \begin{cases} \lambda_0^{-1} u_0, & \lambda_0 \neq 0, \\ u_0 + \Phi_0, & \lambda_0 = 0, \end{cases} \quad u_{N+1} = \begin{cases} \lambda_1^{-1} u_N, & \lambda_1 \neq 0, \\ u_N + \Phi_1, & \lambda_1 = 0. \end{cases}$$

The coefficients $\alpha_{i,j}$ are calculated from the system of linear equation for $\forall_j = \overline{0, N+1}$:

$$\alpha_{-1,j} = \alpha_{N+1,j} = 0.$$

$$A_i \alpha_{i-1,j} + C_i \alpha_{i,j} + B_i \alpha_{i+1,j} = 0, \quad i \neq j, j-1.$$

$$A_{j-1} \alpha_{j-2,j} + C_{j-1} \alpha_{j-1,j} + B_j \alpha_{j,j} = F_i^*, \quad i = j-1, \quad (6)$$

$$-A_j \alpha_{j-1,j} + C_j \alpha_{j,j} + B_j \alpha_{j+1,j} = F_i^*, \quad i = j.$$

$$\text{Here } A_i = G_{i-1}(G_i + G_{i+1}), \quad B_i = G_{i+1}(G_i + G_{i-1}),$$

$$C_i = A_i + B_i + D_i, \quad D_i = (G_i + G_{i-1})(G_i + G_{i+1}), \quad (7)$$

$$F_i^- = 3(G_i + G_{i+1}), \quad F_i^+ = F_{i-1}^-, \quad G_i = k_i^{-1} H_i, \quad i = \overline{0, N},$$

where

$$G_{-1} = \begin{cases} 2 \lambda_0^{-1} \nu_0, & \lambda_0 \neq 0, \\ 2 \nu_0 - G_0, & \lambda_0 = 0, \end{cases} \quad G_{N+1} = \begin{cases} 2 \lambda_1^{-1} \nu_1, & \lambda_1 \neq 0, \\ 2 \nu_1 - G_N, & \lambda_1 = 0. \end{cases}$$

Further, for $\lambda_0 = 0$ is $A_0 = D_0$, and for $\lambda_1 = 0$ is $B_N = D_N$.

The system (6) with coefficients (7) shows that $\alpha_{i,j}$ are independent from $u_i, i = \overline{0, N}$.

The use of such spline (5) allows to reduce the problem (1)-(3) to the following problem in domain $y \in \Omega \subset R^n$:

$$L^i(u_i) + 2 H_i^{-1} \left[\sum_{j=0}^i \alpha_{i,j} (u_{i-1} - u_j) + \sum_{j=i+1}^{N+1} \alpha_{i,j} (u_j - u_{j-1}) \right] = -f_i, \quad (8)$$

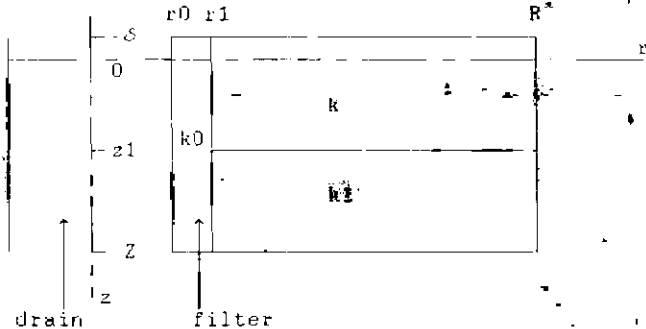
$$i = \overline{0, N},$$

where $f_i(y) = H_i^{-1} \int_{X_i}^{X_{i+1}} F_i(x, y) dx$.

Seminar "Mathematical Modelling and Parameter Identification of Transfer Processes in Nonhomogeneous Media", Riga, 1992
 Семинар "Математическое моделирование и идентификация параметров процессов переноса в неоднородных средах" Рига.1992

THE MODEL OF DRAIN WITH FILTER IN TWO LAYER MEDIA
 Andris BUIKIS, Aldis MELGALVIS
 Riga, Latvia

This abstract is concerned with the problem of mathematical physics, which describes flow in porous media in the vicinity of a drain split. More detailed physical and mathematical review of flow in porous medium in homogeneous domain is discussed in [1] and [2], in which conservative averaging method on filter thickness is used. Here, we will describe generalisation of flow in porous medium for a two-layer system:



k_0, k, k_1 - coefficients of filtration

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0, \quad r_1 < r < R, \quad -\delta < z < Z, \quad (z \neq z_1) \quad (1)$$

$$U|_{z=z_1-0} = U|_{z=z_1+0}, \quad k \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{z=z_1-0} = k_1 \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{z=z_1+0}, \quad r_1 < r < R \quad (2)$$

where $\bar{k} = \begin{cases} k, & -\delta \leq z < z_1, \\ k_1, & z_1 \leq z \leq Z. \end{cases}$

$$\frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{z=-\delta} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{z=Z} = 0, \quad (3)$$

$$U|_{r=r_1} = u_0, \quad -\delta \leq z < 0, \quad (4)$$

$$\bar{\kappa} r_1 \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{r_1^2 - r_0^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad r=r_1, \quad 0 < z < Z, \quad (5)$$

where $\bar{\kappa} = \begin{cases} \kappa = k/k_0, & -\delta \leq z \leq z_1, \\ \kappa_1 = k_1/k_0, & z_1 \leq z \leq Z. \end{cases}$

$$U|_{r=R} = u_1. \quad (6)$$

Here U is pressure, but more interesting for us is value of liquid flow through the split of drain:

$$Q = 2\pi r_0 k_0 \int_{-\delta}^0 \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r=r_0+0} dz = 2\pi r_1 \bar{\kappa} \int_{-\delta}^Z \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r=r_1+0} dz, \quad (7)$$

Numerical calculations show that in the cases that are more interesting in practice ($k, k_1 \ll k_0$), equation (1) can be replaced by:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial U}{\partial r} \right] = 0, \quad r_1 < r < R, \quad -\delta < z < Z, \quad (z \neq z_1). \quad (8)$$

Here, one can get analytical solution of problem (2)-(8):

$$Q = 2\pi \left\{ k_0 b + \frac{k}{a} \left[A(E-1) - B \left(\frac{1}{E} - 1 \right) \right] + \frac{k_1}{a_1} \left[A_1(E_2 - E_1) - B_1 \left(\frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_1} \right) \right] \right\},$$

$$A = b \frac{E_1^2 - E_2^2 + \sqrt{\kappa} (E_1^2 + E_2^2)}{\sqrt{\kappa} (E^2 + 1)(E_1^2 + E_2^2) - (E^2 - 1)(E_1^2 - E_2^2)},$$

$$B = b - A, \quad A_1 = A \frac{E_1}{E} \frac{E^2 - 1 + b}{E_1^2 + E_2^2}, \quad B_1 = A_1 \cdot E_2^2,$$

$$E = \exp(a \cdot z_1), \quad E_1 = \exp(a_1 \cdot z_1), \quad E_2 = \exp(a_1 \cdot Z),$$

$$a^2 = \frac{2 \kappa}{(r_1^2 - r_0^2) \ln(R/r_1)},$$

$$a_1^2 = \frac{2 \kappa_1}{(r_1^2 - r_0^2) \ln(R/r_1)}.$$

Solution of the above problems indicate that one of the most important factors is location of the drain split in the given region.

References

1. Буйкис А. А., Мелгалвис А. Г. Численное решение смешанной задачи для уравнения Лапласа с разрывным коэффициентом сведения ее к неклассической задаче. I // Латв. математический ежегодник. Рига: Зинатне, 1988. С. 120-126.
2. Буйкис А. А., Мелгалвис А. Г. Численное решение смешанной задачи для уравнения Лапласа с разрывным коэффициентом сведения ее к неклассической задаче. II // Латв. математический ежегодник. Рига: Зинатне, 1989. С. 133-138.

Seminar "Mathematical Modelling and
Parameter Identification of Transfer Processes
in Nonhomogenous Media". Riga, 1992.
Семинар "Математическое моделирование и идентификация
параметров процессов переноса в неоднородных средах"
Рига, 1992.

РАСЧЕТ ТЕМПЕРАТУРЫ В УГЛОВОЙ ОБЛАСТИ С ТОНКИМ СЛОЕМ

БУЙКИС А. А., УЛАНОВА Н. Л.
Рига, Латвия

В различных областях современной техники встречаются многослойные конструкции с отдельными слоями относительно малой толщины и состоящими из различных материалов. Исследование систем, полученных при постановке таких задач, имеет свои особенности, и для их решения удобно перейти путем осреднения по тонким слоям к новой постановке с дополнительными условиями типа сосредоточенной емкости [1] или их обобщения [2], [3]. Такой подход назван методом консервативного осреднения. Если же рассматриваемая область является угловой, то возникает сложность реализации осреднения в угловой точке.

Для расчета температурного поля в угловой области, состоящей из двух пересекающихся прямоугольных основных областей с относительно большой толщиной, покрытых снаружи дополнительным тонким слоем, мы получаем тепловую задачу, имеющую две вычислительные сложности: расчет температуры в тонком слое или учет его влияния и расчет температуры в угловой области тонкого слоя.

Для ее решения предлагается метод консервативного осреднения (МКО) для тонкой граничной подоласти с видоизмененной методикой осреднения для расчета температуры в угловой точке.

Физическая постановка задачи представляет собой процесс разогрева угловой части толстой бетонной стенки, облицованной тонким металлическим листом. Внутренняя поверхность конструкции поддерживается при заданной температуре. Наружная поверхность подвергается интенсивному разогреву. Рассматривается сечение угловой области, т.е. дву-

мерная задача, которая решается двумя способами:

1. Сопряженная задача, включающая в себя двумерные нестационарные уравнения теплопроводности для всех областей и слоев с условиями теплообмена по Ньютону и условиями сопряжения между основной областью и слоем. Эта постановка аппроксимируется разностной схемой, которая решается методом переменных направлений в каждой двумерной области, пересылая на итерационных шагах значения температур в зоне пересечения из уже просчитанной области в следующую.

2. Задача с использованием МК0, где уравнения для слоя с учетом граничных условий на внешней поверхности и условий сопряжения переводятся в граничные условия для основной области, сохраняя при этом все характеристики осредняемой подобласти. Таким образом, решение двумерной сопряженной задачи с малым параметром сводится к решению одного двумерного уравнения, но с неклассическим граничным условием, численное решение которого значительно проще.

Распределение температуры в тонком слое в области угловой точки аппроксимируется полиномом 2-й степени. Найдя коэффициенты этого полинома с учетом уравнений для тонкого слоя и граничных условий, получаем выражение для определения температуры в угловой точке, в котором не содержатся производные по пространственным переменным, что избавляет от необходимости решать уравнения специальными методами, увеличивающими сложность расчета и его время.

Тезисы этого доклада содержат идейную сторону метода и постановку проблемы. Подробное рассмотрение, применительно к данной задаче, дано в нашей статье [4], где акцент делается на методе консервативного осреднения в угловой зоне.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А. А. Теория разностных схем. М. Наука. 1976.
2. Буйкис А. А. Изменение постановки задач математической физики с разрывными коэффициентами в составных областях // Электронное моделирование. 1986. № 6.
3. Буйкис А. А., Уланова Н. Л. Математическое моделирование процессов сложного теплообмена в камере нагрева // Известия АН ЛатвССР. Сер. физ. техн. наук. 1987. № 6.
4. Буйкис А. А., Уланова Н. Л. Применение метода консервативного осреднения для угловой области с тонким слоем // Мат. модел. Прикл. задачи мат. физики. Рига: ЛУ, 1992. Вып. 3.

Seminar "Mathematical Modelling and Parameter Identification
of Transfer Processes in Nonhomogeneous Media". Riga, 1992

Семинар "Математическое моделирование и идентификация параметров
процессов переноса в неоднородных средах". Рига, 1992

ON THE ACCURACY OF SOME LOD SCHEMES

Raimondas ČIEGIS

Vilnius, Lithuania

We consider here the convergence properties of some splitting methods for numerical solution of the initial - boundary value problem for a partial difference equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^p L_i u + f(x, t), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in G, \quad (1.a)$$

$$u(x, t) = \nu(x, t), \quad x \in \Gamma, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{G}, \quad (1.b)$$

where $L_i u = \frac{\partial}{\partial x_i} (k_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}) - q_i(x)u$. Let $\omega = \omega_\tau \times \bar{\omega}_h$ be a difference grid

$$\omega_\tau = \{t_{j+\alpha/p} = (j + \alpha/p)\tau; \quad j = 0, 1, \dots, K, \quad \alpha = 0, 1, \dots, p; \quad K\tau = p\}.$$

$$\bar{\omega}_h = \{(x_{1j_1}, x_{2j_2}, \dots, x_{pj_p}), \quad x_{ij} = (j-1)h, \quad j = 0, 1, \dots, N; \quad Nh = 1\}.$$

We consider the following difference locally one-dimensional (LOD) scheme

$$y_{t_\alpha} = \Lambda_\alpha y_\alpha^\sigma + \varphi_\alpha, \quad x \in \omega_h, \quad (2.a)$$

$$y_\alpha = \mu_\alpha, \quad x \in \gamma_\alpha, \quad \gamma = \bigcup_{\alpha=1}^p \gamma_\alpha, \quad (2.b)$$

where $\Lambda_\alpha y = (ay_{x_\alpha})_{x_\alpha} - q_\alpha(x)y$ and usual notation of the theory of difference schemes is used. The main objective of the present investigation is the order of convergence of LOD scheme (2) when the simplest approximation of boundary condition (1.b) and a right - hand side (1.a) are used

$$\mu_\alpha(x) = \nu(x, t_{j+\alpha/p}), \quad \varphi_\alpha(x) = \frac{1}{p} f(x, t_{j+(2\alpha-1)/2p}). \quad (3)$$

We shall call (2) the basic scheme. The symmetry of LOD scheme can be restored by interchanging the direction of splitting after each step (the Sequentially Alternating Scheme)

$$y_{t,\beta} = \Lambda_\beta y_\beta^\sigma + \varphi_\beta, \quad y_\beta = \mu_\beta, \quad x \in \gamma_\beta, \quad \beta = 2p + 1 - \alpha, \quad \alpha = p + 1, p + 2, \dots, 2p. \quad (4)$$

In applications it is very important to know the accuracy of LOD schemes when the simplest approximation method (3) is considered. A new viewpoint to this problem was given by W. Hundsdorfer in his recent papers [1,2]. For 2D simple linear heat flow problem $p = 2$, $k_\alpha(x) = 1$, $q_\alpha(x) = 0$ he proved that for $\sigma = 0.5$ the orders of consistency in time for the basic scheme (2) and SAS are only $O(\tau^{0.25})$. For scheme (2) the global error is still of order $O(\tau)$, while for SAS there is no cancellation of error terms and a global error bound remains $O(\tau^{0.25})$.

We shall deal here with general difference schemes (2) and SAS when $\sigma \geq 0.5$, $p \geq 2$ and approximation (3) is used. Using the method of investigation, proposed in [12], we prove the following theorem.

Theorem 1. Accuracy estimates in L_2 norm hold true

$$a) \quad p = 2, \quad \sigma \geq 0.5, \quad \text{scheme (4)(SAS)} \Rightarrow \|z^j\| \leq C(\tau^{0.25} + h^2), \quad (5.a)$$

$$b) \quad p = 2, \quad \sigma \geq 0.5, \quad \text{scheme (2)} \Rightarrow \|z^j\| \leq C(\tau + h^2), \quad (5.b)$$

$$c) \quad p = 2, \quad \sigma = 0.5, \quad \text{schemes (2),(4)} \Rightarrow \|z^j\| \leq C(\tau^{0.25} + h^2). \quad (5.c)$$

We can represent the local approximation errors as a sum

$$\psi_\alpha = \psi_\alpha^0 + \psi_\alpha^*, \quad \psi_\alpha^0 = (f_\alpha + L_\alpha u - \frac{1}{p} \frac{\partial u}{\partial t})^{j+1}, \quad \psi_\alpha^* = O(\tau + h^2), \quad \sum_{\alpha=1}^p \psi_\alpha^0 = 0.$$

Remark 1. Stability estimate (6) had been proved for difference scheme (2) in [3] for $p = 2$, $\sigma = 0.5$

$$\|z^{j+1}\|^2 \leq (1 + C\tau)\|z^j\|^2 + C\tau Q^{j+1} + \tau^2(\psi^0(t_j), z^j)_t, \quad (8)$$

where $\psi^0(t_j) = \psi_2^0(t_j) - \psi_1^0(t_j)$, $Q^j = \tau^2 t_j \|\psi_1^0\|^2 + \sum_{\alpha=1}^2 \|\psi_\alpha^*\|_2^2$. It follows from (6) that $\|z^{j+1}\| \leq C(\tau + h^2)$. The method of [3] is not useful in the general case $p \geq 3$.

Theorem 2. Suppose that $\sigma = 0.5 + \sigma_0$. Then a solution of the basic difference LOD scheme (2) (and SAS) converges unconditionally to the solution of (1) and the accuracy estimate in L_2 norm $\|z^j\| \leq C(\tau^{0.5} + h^2)$ holds.

The proof of this theorem is based on some modifications of the general method proposed by A.A. Samarskij [4].

Problem U1. The statement of Theorem 2 holds for $\sigma = 0.5 + \sigma_0$, $\sigma_0 > 0$. Can this result be proved for $\sigma = 0.5$ LOD scheme (2)?

Let us write the error function as a sum $z_\alpha = v_\alpha + \eta_\alpha$, where η_α is found from the initial value problem

$$\frac{\eta_\alpha - \eta_{\alpha-1}}{\tau} = \psi_\alpha^0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \quad \eta(x, 0) = 0, \quad x \in w_h \cup \gamma_\alpha.$$

The following theorem holds true.

Theorem 3. For the solution of LOD schemes (2), (4) we have

a) if $\tau \leq 0.5h^2/((1-\sigma)k_0)$, then it follows from the maximum principle, that $\|z^j\|_c \leq C(\tau + h^2)$, b) the conditional accuracy estimate $\|z^j\| \leq C(\tau + h^2 + \tau/h^{0.5})$, it improves the

convergence results of Theorem 1 for SAS in the case of grid parameters connected by the relation $\tau = Ch^\alpha$, $\alpha \geq 2/3$, and the result of Theorem 2 for $\tau = Ch^\beta$, $\beta \geq 1$.

c) if $\sigma = 0.5 + \sigma_0$, $\sigma_0 > 0$, then the accuracy estimate $\|z^j\| \leq C(\tau^{0.75} + h^2)$ holds.

Problem U2. What optimal estimates in L_2 can be found for the solution of the 1D initial-boundary value problem (7)?

$$y_t = \Lambda y^\sigma, \quad y_0(t_j) = \mu(t_j), \quad y_N(t_j) = \mu_N(t_j), \quad (7)$$

$$y(x_i, 0) = 0, \quad |\mu_i(t_j)| \leq C\tau, \quad |\mu_{ii}(t_j)| = O(1).$$

References

1. W.H. Hundsdorfer. Local and global order reduction of some LOD schemes // Report NM - 8914. Centre for Mathematics and Computer Sciences, Amsterdam. P. 1 - 10. 1989.
2. W.H. Hundsdorfer. Unconditional convergence of some Crank - Nicolson LOD methods for initial-boundary value problems // Report NM - 9012. Centre for Mathematics and Computer Sciences, Amsterdam. P. 1 - 23. 1990.
3. A.A. Samarskij. On the convergence of fractional step method for the thermoconduction equation // Zh. Vych. Mat. i Mat. Fiz. 1962. V. 2, № 6. P. 1117 - 1121 (in Russian).
4. A.A. Samarskij. The introduction into the theory of difference schemes. M.: Nauka, 1974 (in Russian).

Seminar "Mathematical Modelling and Parameter Identification of Transfer Processes in Nonhomogenous Media". Riga, 1992

Семинар "Математическое моделирование и идентификация параметров процессов переноса в неоднородных средах". Рига, 1992

THE MODELLING OF 3-DIMENSIONAL
HYDRODYNAMIC FIELDS IN LAYERED MEDIA

Harijs KALIS
Riga, Latvia

The flow of the viscous incompressible liquid can be described with the system of Navier-Stokes equations

$$\rho(\partial \vec{v} / \partial t + \vec{v} \text{grad} \vec{v}) = -\text{grad} p + \eta \Delta \vec{v} + \vec{F}, \quad \text{div} \vec{v} = 0, \quad (1)$$

where $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ - vector of external force, $\vec{v} = (u, v, w)$ - velocity vector, p - pressure, ρ, η - density and viscosity. The system (1) is considered in layers of parallelepiped form:

$$\Omega_k = \{ (x, y, z) : |x| < L, |y| < l, H_{k-1} < z < H_k \}, \quad (2)$$

where $H_0 = 0, L, l; H_k = \text{const}, k = \overline{1, N}$.

The boundary problem statement for the system (1) includes non-slip conditions $\vec{v} = 0$ at walls $x = \pm L, y = \pm l, z = 0$, conditions $w = \partial u / \partial z = \partial v / \partial z = p = 0$ at free surfaces $z = H_N$ and continuity conditions $w_k = 0, u_{k-1} = u_k, v_{k-1} = v_k, p_{k-1} = p_k, \eta_{k-1} \partial u_{k-1} / \partial z = \eta_k \partial u_k / \partial z, \eta_{k-1} \partial v_{k-1} / \partial z = \eta_k \partial v_k / \partial z$ at interface $z = H_{k-1}, k = \overline{2, N}$.

Quantities $l_k / L, l_k / l$ ($l_k = H_k - H_{k-1}$) are small and operation of averaging may be used. The equations (1) are averaged along the heights l_k of layers Ω_k and square-law approximation of functions along z -coordinate [1] in following form is used

$$S_k = \bar{S}_k + m_k (z - \bar{z}_k) + e_k G_k l_k^{-2} \{ (z - \bar{z}_k)^2 - l_k^2 / 12 \}, \quad (3)$$

where $G_k = l_k / \eta_k, \bar{z}_k = (H_k + H_{k-1}) / 2, \bar{S}_k = l_k^{-1} \int_{H_{k-1}}^{H_k} S dz, k = \overline{1, N}$,

as a variable S we can take u, v, w, p ($e_k = 0$ for p), m_k, e_k we can take $m_k^u, m_k^v, m_k^w, m_k^p; e_k^u, e_k^v, e_k^w$.

From conditions $w = 0: e_k^w = -6 \bar{w}_k / G_k$; in continuity equation $m_k^w = 0$ and we can introduce averaged stream function Ψ_k and vor-

ticity function \bar{z}_k

$$\bar{u}_k = \partial \psi_k / \partial y, \bar{v}_k = -\partial \psi_k / \partial x, \bar{z}_k = \partial \bar{v}_k / \partial x - \partial \bar{u}_k / \partial y = -\Delta \psi_k. \quad (4)$$

As follows from other conditions:

$$\bar{S}_k + m_k \ell_k / 2 + e_k \bar{G}_k / 6 = \bar{S}_{k+1} - m_{k+1} \ell_{k+1} / 2 + e_{k+1} \bar{G}_{k+1} / 6, \quad (5)$$

$$\frac{1}{2} m_k + e_k = \frac{1}{2} m_{k+1} - e_{k+1},$$

$$\bar{S}_1 - m_1 \ell_1 / 2 + e_1 \bar{G}_1 / 6 = 0, \quad \frac{1}{2} m_N + e_N = 0,$$

(where $\bar{S} = \bar{u}; \bar{v}$)

$$\bar{p}_k + m_k^p \ell_k / 2 = \bar{p}_{k+1} - m_{k+1}^p \ell_{k+1} / 2, \quad k = 1, N-1, \quad (6)$$

$$m_N^p = -2\bar{p}_N / \ell_N.$$

Thus $5N$ coefficients (3), m_k, e_k are determined with $\bar{u}_k, \bar{v}_k, \bar{w}_k, \bar{p}_k$ and we have a system of $4N$ equations in medium layers, which do not depend on z . In terms of $\psi_k, \bar{z}_k, \bar{w}_k$ and \bar{p}_k we have

$$\rho_k (\partial \bar{z}_k / \partial t + \partial (\bar{u}_k \bar{z}_k + \bar{w}_k m_k^v) / \partial x + \partial (\bar{v}_k \bar{z}_k - \bar{w}_k m_k^u) / \partial y) = \partial (\frac{1}{2} \partial \bar{z}_k / \partial x + 2 \ell_k^{-1} e_k^v + \bar{F}_y) / \partial x + \partial (\frac{1}{2} \partial \bar{z}_k / \partial y - 2 \ell_k^{-1} e_k^u - \bar{F}_x) / \partial y, \quad (7)$$

$$\rho_k (\partial \bar{w}_k / \partial t + \bar{u}_k \partial \bar{w}_k / \partial x + \bar{v}_k \partial \bar{w}_k / \partial y) = -m_k^p + \partial (\frac{1}{2} \partial \bar{w}_k / \partial x) / \partial x + \partial (\frac{1}{2} \partial \bar{w}_k / \partial y) / \partial y + 2 \ell_k^{-1} e_k^w + \bar{F}_z, \quad (8)$$

$$\Delta \psi_k = -\bar{z}_k, \quad (9)$$

$$\rho_k ((\partial \bar{u}_k / \partial x)^2 + 2(\partial \bar{u}_k / \partial y)(\partial \bar{v}_k / \partial x) + (\partial \bar{v}_k / \partial y)^2) = \partial (-\partial \bar{p}_k / \partial x + 2 \ell_k^{-1} e_k^u + \bar{F}_x) / \partial x + \partial (-\partial \bar{p}_k / \partial y + 2 \ell_k^{-1} e_k^v + \bar{F}_y) / \partial y. \quad (10)$$

The approximation of differential equations with finite difference is based on the monotonous schemes [2].

References

1. Buikis A. Interpolation of integral average of partly-smooth function with parabolic spline // Latvian math. annual. - 1985, vol. 29, pp. 194-197 (in Russian).
2. Kalis H. On the special difference approximation of non-self adjoint head transfer differential equation in curvilinear orthogonal coordinates // Acta Univer. Latviensis. Math., differ. equat., vol. 570, 1992, pp. 85-93 (in Russian).

Семинар "Математическое моделирование и идентификация параметров процессов переноса в неоднородных средах". Рига, 1992

Влияние фотоиндуцированного поглощения в лазерных кристаллах на их термooптические свойства.

НАС УЛЬСКИЙ С.П., ПОСЪЛЫТОВ Г.А., РУСТАМОВ И.Р.,
СМИРНОВ В.А., ЩЕРБАКОВ И.А.

Москва, Россия

Известно, что при воздействии коротковолнового излучения лампы в лазерных активных средах индуцируется серия дефектов, являющихся дополнительными источниками тепловыделения. Спектроскопические исследования процессов фотоиндуцированного поглощения в лазерных кристаллах показали, что спектры наведенного поглощения представляются в двух видах:

- 1) спектры возбужденного поглощения (коэффициент поглощения в максимуме полосы ~ 350 нм составляет порядка $6,3 \text{ см}^{-1}$);
- 2) спектры поглощения центров окраски, представляющие собой бесструктурную широкую полосу (спектрально-средний коэффициент поглощения $\sim 1 \text{ см}^{-1}$) [1-3].

Учитывая тот факт, что коэффициенты наведенного поглощения по порядку величины совпадают с коэффициентами поглощения ионов-активаторов, количественные характеристики процессов тепловыделения в обоих случаях будут также близки. Указанное обстоятельство приводит к существенному перераспределению тепловыделения в системе накачки и в резонаторе лазера.

Эксперименты с лазерными активными средами, в которых индуцируются отмеченные выше дефекты (а указанные дефекты индуцируются практически во всех средах) показали, что воздействие коротковолнового излучения лампы накачки вызывает существенное искажение пространственного распределения лазерного излучения, нарушает его модовую структуру и заметно (в несколько раз) уменьшает КДД лазера.

Приведенные факты показывают, что проблема количественной оценки изменения тепловыделения в лазерных кристаллах

чрезвычайно актуальна как с научной, так и с практической точек зрения.

В работе выполнена оценка характера изменения тепловыделения в кристаллах лазеров, работающих в импульсном режиме генерирования.

Математическая модель, исследуемая в работе, такова: полагаем, что излучение лампы накачки распределено равномерно по длине пластины (параллелепипеда с размерами $2a, b, c$) - активный элемент лазера, - линейные размеры которой удовлетворяют условиям: $2a \ll b, 2a \ll c$

Излучение направлено перпендикулярно к грани кристалла, параллельной плоскости YOZ . Активный элемент с начальной температурой T_0 охлаждается хладагентом с температурами T^* на границах с соответствующими гранями. Считая, что теплообмен через грани, параллельные плоскостям XOZ и XOY , за время, равное длительности импульса накачки, пренебрежимо мал, приходим к выводу, что задача определения температурного поля кристалла сводится к одномерной начально-краевой задаче теплопроводности следующего вида:

$$\frac{\partial T_1(x,t)}{\partial t} = F_{01} \frac{\partial^2 T_1(x,t)}{\partial x^2} + Q_1(t), \quad N(t) < x < a, \quad 0 < t \leq 1 \quad (1)$$

$$\frac{\partial T_2(x,t)}{\partial t} = F_{02} \frac{\partial^2 T_2(x,t)}{\partial x^2} + Q_2(t), \quad 0 < x < N(t), \quad 0 < t \leq 1 \quad (2)$$

$$T_1(x,t) \Big|_{t=0} = T_1^0(x), \quad N(0) < x < a \quad (3)$$

$$T_2(x,t) \Big|_{t=0} = T_2^0(x), \quad 0 < x < N(0) \quad (4)$$

$$\frac{\partial T_1(x,t)}{\partial x} = \alpha [T(x,t) - T_1^a], \quad x=a, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (5)$$

$$\frac{\partial T_2(x,t)}{\partial x} = 0, \quad x=0, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (6)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1(x,t)}{\partial x} = \lambda_2 \frac{\partial T_2(x,t)}{\partial x}, \quad x=N(t) \quad (7)$$

$$T_1(x,t) = T_2(x,t), \quad x=N(t) \quad (8)$$

В начально-краевой задаче (I)-(C): x и t - безразмерные переменные; F_{0i} , $i=1,2$ - критерии Фурье, соответствующие "внешним" ($i=1$) и "внутренним" слоям в активном элементе; $N(t)$ для простоты задана линейно изменяющейся во времени: $N(t) = N(0) - kt$, $Q_i(t)$ - внутренние источники тепла, наводимые коротковолновым излучением лампы накачки, $T_1^a(x)$ - начальная температура слоев активного элемента; α - коэффициент теплообмена активного элемента с хладагентом, T_1^a - температура хладагента, λ_i - коэффициенты теплопроводности слоев активного элемента. Критерии Фурье определяются по формулам:

$$F_{0i} = \frac{\alpha_i t_m}{H^2}, \quad (i=1,2).$$

где α_i - коэффициент температуропроводности i -го слоя, t_m и H соответственно, временной и пространственный масштабы. Согласно изложенным выше физическим представлениям, мы считаем, что в зоне $\{N(t) < x < a, 0 < t \leq 1\}$ активно действуют центры окраски и поэтому теплофизические свойства этой зоны отличаются от теплофизических свойств зоны $\{0 < x < N(t), 0 < t \leq 1\}$. Начально-краевая задача (I)-(C) относится к классу сингулярно возмущенных начально-краевых задач теплопроводности, поскольку $F_{0i} \ll 1$, $i=1,2$. Отметим, что - в силу специфики образования центров окраски - выполняется соотношение: $F_{01} = c F_{02}$, где $c < 1$.

Для получения приближенного аналитического решения начально-краевой задачи (I)-(C) применяется обобщение на случай многослойных сред, разработанного одним из авторов "лучевого асимптотического метода" [4]. В основе этого метода лежит асимптотический анализ при $F_{0i} \rightarrow 0$ интегрального

представлении решения исследуемой краевой задачи, записанного при помощи матрицы Грина. Асимптотика матрицы Грина получается модификацией метода Лапласа к специальным образам сконструированным тепловым потенциалам и описывается при помощи "лучей"-экстремалей, естественным образом введенных функционалов "действия". Эти же экстремали присутствуют в асимптотике решения исследуемой задачи (1)-(3) и делятся на два класса - "отраженные" и "преломленные" экстремали. Таким образом, имеется полная аналогия с геометрической оптикой и, как следствие, - с реализацией принципа наименьшего действия. Коэффициенты асимптотического разложения решения задачи (1)-(3) вычисляются в явном виде, что позволяет анализировать полученное приближенное аналитическое решение задачи (1)-(3) как с качественной, так и с количественной точностью.

Литература

1. Гасельский С.И., Бусымаев И.В., Сидоров В.А., Семенов В.В. Фотоиндуцированное короткое импульсное излучение в кристаллах $\text{CaF}_2: \text{Ce}^{3+}, \text{Nd}^{3+}$ и $\text{LuF}_3: \text{Ce}^{3+}, \text{Nd}^{3+}$ // *Известия Академии Наук СССР, Т. 18, № 5.* С.1001-1004.
2. Мариков А.В., Гасельский С.И., Щербачев В.А. и др. Влияние жесткого электромагнитного излучения на релаксационные характеристики лазерных кристаллов // *Известия АН СССР. Сер. Физическая.* 1984. Т. 18. С.1001-1004.
3. Мариков А.В., Гасельский С.И., Щербачев В.А. и др. Живущее поглощение в кристаллах $\text{CaF}_2: \text{Ce}^{3+}, \text{Nd}^{3+}$ // *Известия Академии Наук СССР, Т. 18.* С.1001-1004.
4. Nezenenko G.A. The "ray" asymptotics in the solution of the nonlinear singularly perturbed boundary value problems of heat conduction. Second World Congress on computational Mechanics. 1990. Extended Abstracts of Posters. - Stuttgart University, 1990. - P.13-16.

Семинар "Математическое моделирование и идентификация параметров процессов переноса в неоднородных средах" Рига, 1992.

"ЛУЧЕВОЙ" АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД - ОБОБЩЕНИЕ НА СЛУЧАЙ
МНОГОСЛОЙНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛО-
МАССОПЕРЕНОСА

Несененко Г.А. Москва, Россия.

В докладе предложено и обосновано обобщение "лучевого" асимптотического метода [1] на случай многослойных нелинейных сингулярно возмущенных краевых задач тепломассопереноса в неканонических областях, например:

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = F_{01} \cdot \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + Q_1(T_1, T_2), \quad N(t) < x < M_1(t) \quad (1)$$

$$0 < t \leq 1$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = F_{02} \cdot \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + Q_2(T_1, T_2), \quad M_2(t) < x < N(t) \quad (2)$$

$$0 < t \leq 1$$

$$T_1(x, 0) = T_1^0(x), \quad T_2(x, 0) = T_2^0(x) \quad (3)$$

$$\frac{\partial T_i(x, t)}{\partial x} = B_i(T_i(x, t)), \quad x = N_i(t), \quad i = 1, 2 \quad (4)$$

$$0 < t \leq 1$$

$$T_1(x, t) = T_2(x, t), \quad x = N(t) \quad (5)$$

$$C_1 \cdot \frac{\partial T_1(x, t)}{\partial x} = C_2 \cdot \frac{\partial T_2(x, t)}{\partial x}, \quad x = N(t)$$

в краевой задаче (1)-(5): x и t - безразмерные переменные, F_{0i} ($i=1,2$) - критерии Фурье, $F_{0i} = \frac{\alpha_i t_n}{H^2} \ll 1$, где α_i ($i=1,2$) - коэффициенты температуропроводности слоев; t_n и H - соответственно временной и пространственный масштабы; N, N_i, B_i, Q_i - заданные функции ($i=1,2$).

Так же, как и в случае однослойных задач [1], в основе предложенного метода лежит асимптотический анализ интеграль-

ного представления решения при $F_{0i} \rightarrow 0$ ($i=1,2$) исследуемой краевой задачи, записанного при помощи соответствующей матрицы Грина. Для нахождения асимптотики матрицы Грина используется тот же прием: ее компоненты записываются в интегральной форме в виде тепловых потенциалов, содержащих неизвестные "плотности"; для определения последних выписываются интегральные уравнения. Асимптотика решений интегральных уравнений находится при помощи комбинации метода итерации и метода Зангера - частного случая метода перепада. Полученное асимптотическое разложение "плотностей" подставляется под знак интегралов, дающих интегральные представления компонент матрицы Грина, и к этому интегралу вновь применяется метод Зангера.

Предложенным методом определяются асимптотические разложения в любой точке области - как вдали от границ области, так и вблизи от них [1], а также и в промежуточных слоях. Метод работает для широких классов функций $N_i(t)$, $\varphi_i(\tau_1, \tau_2)$, B_i , что позволяет исследовать многие практически важные задачи математической физики [2], [3], [4], [5].

Проиллюстрируем вкратце идею получения асимптотических разложений элементов матрицы Грина простейшей из двухслойных задач - Задачи Коши с линейной границей раздела: $N(t) = k \cdot t$. В этом случае $N_1(t) = +\infty$, $N_2(t) = -\infty$

$$B_i(\tau_i) = 0, \quad \varphi_i(\tau_1, \tau_2) = 0, \quad i = 1, 2 \quad (6)$$

$$T_1(x, t) = \int_{N(t)}^{\infty} T_1^0(y) \cdot G^{11}(x, t; y, 0) dy + \int_{-\infty}^{N(t)} T_2^0(y) \cdot G^{12}(x, t; y, 0) dy \quad (7)$$

$$T_2(x, t) = \int_{-\infty}^{N(t)} T_2^0(y) \cdot G^{22}(x, t; y, 0) dy + \int_{N(t)}^{\infty} T_1^0(y) \cdot G^{21}(x, t; y, 0) dy \quad (8)$$

Укажем способ получения асимптотического разложения элементов матрицы Грина $G^{11}(x, t; y, s)$, $G^{12}(x, t; y, s)$, асимптотика других элементов находится аналогично. Воспользуемся тепловыми потенциалами простого слоя, положив:

$$G^{11}(k, t; y, d) = \frac{\exp\left\{-\frac{[x-y]^2}{4F_{01}(t-d)}\right\}}{2\sqrt{\pi F_{01}(t-d)}} + \sqrt{\frac{F_{01}}{4\pi}} \int_0^t \frac{\rho_1(d_1)}{\sqrt{t-d_1}} \exp\left\{-\frac{[x-kd_1]^2}{4F_{01}(t-d_1)}\right\} dd_1 \quad (9)$$

$$G^{12}(k, t; y, d) = \sqrt{\frac{F_{02}}{4\pi}} \int_0^t \frac{\rho_2(d_1)}{\sqrt{t-d_1}} \exp\left\{-\frac{[x-kd_1]^2}{4F_{02}(t-d_1)}\right\} dd_1 \quad (10)$$

Из условий сопряжения (8) получим систему интегральных уравнений для "плотностей" $\rho_1(t)$, $\rho_2(t)$. Полагая выполненными условия $F_{02} = 0$ (F_{01}) и решая полученную систему уравнений, используем метод Лангаса при каждой итерации, получаем

$$\rho_1(t) \sim_{F_{01} \rightarrow 0} F_{01}^{-\frac{3}{2}} \exp\left\{-\frac{[y-kt]^2}{4F_{01}(t-d)}\right\} \sum_{i=0}^{\infty} C_i^{(1)} \cdot F_{01}^{i/2} \quad (11)$$

$$\rho_2(t) \sim_{F_{02} \rightarrow 0} F_{02}^{-1} \exp\left\{-\frac{[y-kt]^2}{4F_{02}(t-d)}\right\} \sum_{i=0}^{\infty} C_i^{(2)} \cdot F_{02}^{i/2} \quad (12)$$

Подставив (11) и (12) под знак интегралов в соотношениях (9) и (10) и вновь применяя метод Лангаса [1], получаем асимптотическое разложение элементов матрицы Грина следующего вида:

$$G^{11}(k, t; y, d) \sim_{F_{01} \rightarrow 0} \frac{1}{2\sqrt{\pi F_{01}(t-d)}} \exp\left\{-\frac{[x-y]^2}{4F_{01}(t-d)}\right\} + \exp\left\{-\frac{[x-kd_0^{(11)}]^2}{4F_{01}(t-d_0^{(11)})} - \frac{[y-kd_0^{(11)}]^2}{4F_{01}(d_0^{(11)}-d)}\right\} \frac{\sum_{i=0}^{\infty} d_i^{(11)} F_{01}^i}{2\sqrt{\pi F_{01}(t-d)}} \quad (13)$$

$$G^{12}(k, t; y, d) \sim_{F_{02} \rightarrow 0} \frac{1}{2\sqrt{\pi F_{02}(t-d)}} \exp\left\{-\frac{[x-kd_0^{(12)}]^2}{4F_{02}(t-d_0^{(12)})}\right\} \times \exp\left\{-\frac{[y-kd_0^{(12)}]^2}{4F_{02}(d_0^{(12)}-d)}\right\} \sum_{i=0}^{\infty} d_i^{(12)} F_{02}^i \quad (14)$$

где коэффициенты $d_i^{(ij)}$ вычислены в явном виде, а $d_0^{(ij)}$ является решением установленных алгебраических уравнений, причем i

рассматриваемом случае тоже вычисляются в явном виде. С функцией G^{11} так же, как и в однослойном случае, естественным образом связывается "отраженная" экстремаль-"отраженный" луч некоторого функционала действия [1], а с G^{12} связывается "преломленная" экстремаль-"преломленный" луч того же функционала действия [6]. Асимптотическое разложение функции G^{22} аналогично (13), а функции G^{21} — аналогично (14).

Используя асимптотическое разложение элементов матрицы Грина G^{ij} , способом, изложенным в [1], можно получить аппроксимацию как решения задачи Коши, так и решений более сложных нелинейных задач типа (1)–(5).

Предложенный метод допускает обобщения на случай нестационарных краевых задач для систем уравнений [1], на случай областей для областей с дефектами типа трещин [7] и проч..

Литература

1. Несененко Г.А. Пограничный слой в нестационарных температурных полях твердых тел. М.: МЗПИ, 1991. 104 с.
2. Карлов Н.В., Кириченко Н.А., Лукьянчук Б.С. Лазерная термохимия. — М.: Наука, 1992. — 296 с.
3. Маслов В.П., Данилов В.Г., Волосов К.А. Математическое моделирование процессов тепломассопереноса. М.: Наука, 1987. 336 с.
4. Полежаев Ю.В., Юревич Ф.Е. Тепловая защита. М.: Энергия, 1976. — 292 с.
5. Садренский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов А.П. Решения с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. — М.: Наука, 1987. — 477 с.
6. Несененко Г.А. Метод решения сингулярно возмущенных краевых задач нестационарного тепломассообмена в дисперсных системах // Тепломассообмен — ММЭ-92. II Минский Международный Форум, Т.У. Тепломассообмен в дисперсных системах. Минск: АИИ "ИТМО", 1992. — С.67-70.
7. Кит Г.С., Побережный О.В. Нестационарные процессы в телах с дефектами типа трещин. Киев: Наукова Думка, 1992. 21 с.

Seminar "Mathematical Modelling and Parameter Identification of Transfer Processes in Nonhomogenous Media", Riga, 1992

ON THE IDENTIFICATION OF COEFFICIENTS
OF ELLIPTIC SYSTEMS

Ilidis RAIUMS

Riga, Latvia

We will consider the following situation. Let us have an object whose behaviour is described by an elliptic boundary value problem

$$A(\sigma)u=f, \quad x \in \Omega, \quad u|_{\partial\Omega}=\varphi \quad (1)$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ is a given domain and the state $u=(u_1, \dots, u_m)$ is, in general, a vector valued function, but σ corresponds to unknown parameters. We can get (for instance, from experiments) some information about solutions of (1) and from this information we have to calculate the unknown σ .

Because in real life we can get the information about solutions of (1) only with some errors and the number of "tests" is bounded the following questions arise.

1. In what spaces we try "to locate" solutions of (1)? We will consider two cases. The first case is that of L_2 what means that we are able only to get the information of solutions only as functions of points. The second case is that of H^1 what means that we have information of fluxes too.

2. From what set we search our parameters σ ? Again we will consider two cases. One is the case of fixed number of materials with the admissible set φ_0 (at every spatial point x parameters σ can take only the fixed finite number of values). The second case is where we permit the "continuous spectrum" of materials. The corresponding set of σ will be the φ_1 , where φ_1 is the closed convex hull of φ_0 .

3. How much information we need? We will measure the amount of information by the number N of solutions $u(\sigma, f^1), \dots, u(\sigma, f^N)$ of (1) with given σ and right hand sides f^1, \dots, f^N .

Under some natural assumptions there can be shown the following properties.

1. If observations (solutions $u(\sigma, f^1), \dots, u(\sigma, f^N)$) are from L_2 , then the sets ϕ_0 and ϕ_1 can not be distinguished. More precisely. If $\sigma_0 \notin \phi_1$ and we have N solutions $u(\sigma_0, f^1), \dots, u(\sigma_0, f^N)$ of (1) with $\sigma = \sigma_0$ and $f = f^1, \dots, f = f^N$ respectively, then for every $\varepsilon > 0$ there is a $\sigma_\varepsilon \in \phi_0$ such that

$$\|u(\sigma_0, f^s) - u(\sigma_\varepsilon, f^s)\|_{L_2} < \varepsilon, \quad s=1, \dots, N$$

If observations are from H^1 then the sets ϕ_0 and ϕ_1 can not be distinguished in the case $m \cdot N < n$, that means that for every fixed $u_0 \in \phi_1$, f^1, \dots, f^N and $\varepsilon > 0$ there is a $\sigma_\varepsilon \in \phi_0$ such that

$$\|u(\sigma_0, f^s) - u(\sigma_\varepsilon, f^s)\|_{H^1} < \varepsilon, \quad s=1, \dots, N$$

The proofs of these properties are based on facts from G -convergence of elliptic operators and properties of extensions of optimal control problems.

Семинар "Математическое моделирование и идентификация параметров процессов переноса в неоднородных средах". Рига, 1992

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ТЕПЛООБМЕНА В КОСМИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЯХ

Резник С. В. , Денисов О. В. , Денисова Л. В. , Ефремов С. И. ,
Михалев А. М. , Плохотин И. Г. , Просунцов П. В. , Хедин Ю. В.

Москва, Россия

Одной из основных научно-технических проблем современной космонавтики является создание крупногабаритных космических конструкций (ККК). Такие конструкции призваны работать длительное время в условиях переменных тепловых воздействий и глубокого вакуума. К ним предъявляются высокие требования по точности сохранения формы и размеров. В силу высокой сложности и стоимости ККК при их создании применяются разнообразные методы физического и математического моделирования.

Для ККК актуальна разработка методов математического моделирования процессов радиационно-кондуктивного теплообмена (РКТ). При этом целесообразно проводить декомпозицию конструкций на подконструкции и элементы (рис. 1). Авторами построена иерархическая система расчетных схем, позволяющая определять температурное состояние конструкций в виде пластин, оболочек, стержней из непрозрачных и полупрозрачных, изотропных и ортотропных материалов при равномерном и неравномерном нагревании потоками излучения. Примеры расчетных схем РКТ космических конструкций показаны на рис. 2. Разработанные алгоритмы решения задач РКТ основаны на применении методов конечных разностей и конечных элементов в сочетании с зональным методом и позволяют учитывать зависимость теплофизических и оптических свойств материалов от температуры.

В связи с применением в ККК новых конструкционных материалов

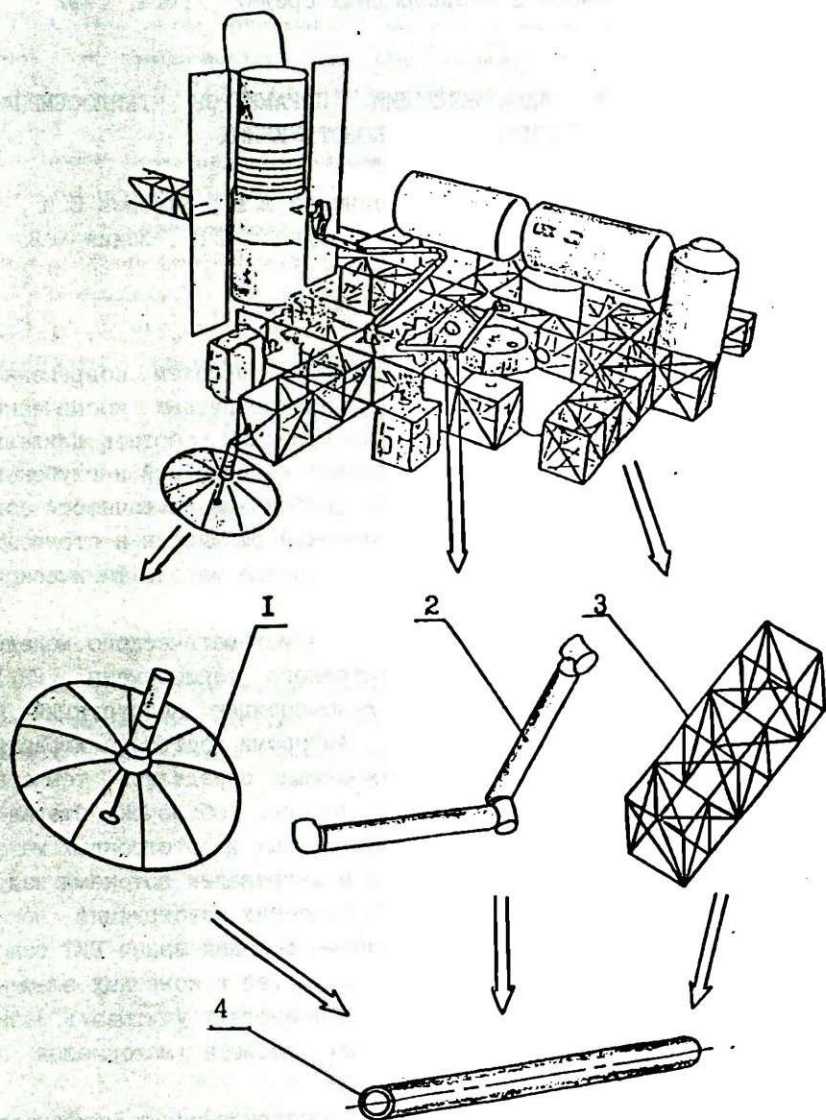


Рис. 1. Пример декомпозиции космической конструкции:
 1 - антенна ; 2 - манипулятор ; 3 - ферма ; 4 - полый стержень

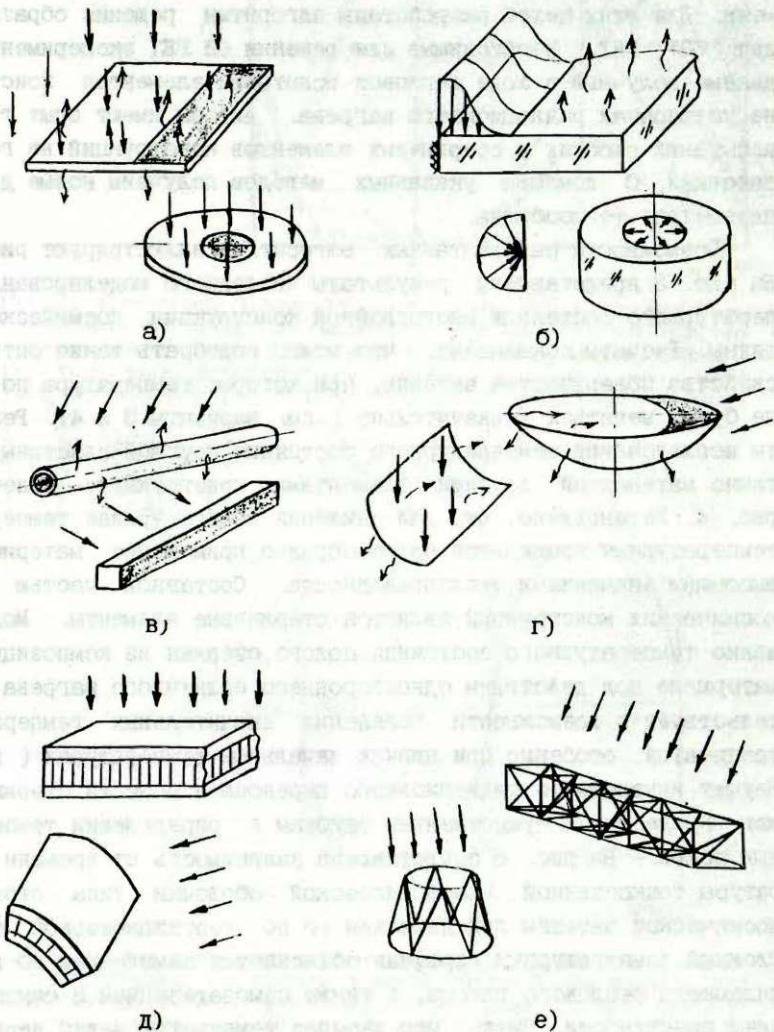


Рис. 2. Примеры расчетных схем РКТ космических конструкций: а) тонкая круглая и прямоугольная пластина; б) пластина и цилиндр из полупрозрачного материала; в) одиночные стержни; г) тонкие оболочки; д) многослойные пластины и оболочки; е) стержневые системы

весьма важной является задача идентификации параметров теплообмена. Для этих целей разработаны алгоритмы решения обратных задач (ОЗ) РКТ. Необходимые для решения ОЗ РКТ экспериментальные данные получают в ходе тепловых испытаний элементов конструкций на установках радиационного нагрева. Авторы имеют опыт тепловых испытаний плоских и стержневых элементов конструкций на гелиоустановках. С помощью указанных методов получены новые данные о параметрах теплообмена.

Возможности разработанных алгоритмов иллюстрируют рис. 3-6. На рис. 3 представлены результаты численного моделирования температурного состояния многослойной конструкции космической антенны. Расчеты показывают, что можно подобрать такие оптические свойства поверхностей антенны, при которых температура по толщине будет меняться незначительно (см. варианты 3 и 4). Результаты исследований температурного состояния круглой пластины, частично затененной другими элементами конструкции, вынесены на рис. 4. Установлено, что для снижения общего уровня температур и температурных градиентов целесообразно применение материалов с высокими значениями теплопроводности. Составной частью многих космических конструкций являются стержневые элементы. Моделирование температурного состояния полого стержня из композиционного материала под действием одностороннего солнечного нагрева свидетельствует о возможности появления значительных температурных градиентов, особенно при низких начальных температурах (рис. 5). Неучет внутреннего радиационного переноса в полости стержня может привести к существенным ошибкам в определении температурных полей. На рис. 6 представлена зависимость от времени температуры тонкостенной параболической оболочки типа отражателя космической антенны при движении ее по геостационарной орбите. Сложный температурный профиль объясняется изменением во времени падающего теплового потока, а также самозатенением и самооблучением поверхности. Видно, что перепад температур между вершиной и периферией оболочки может достигать сотни градусов.

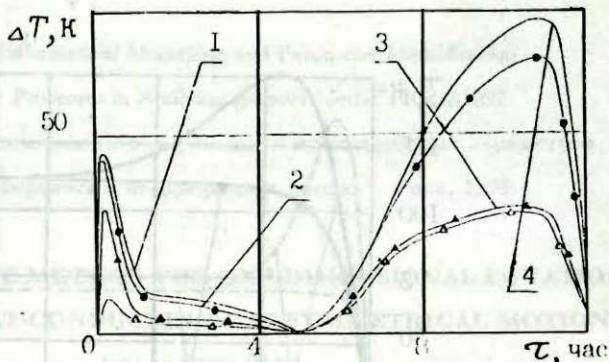


Рис.3. Изменение температурного перепада по толщине многослойной конструкции космической антенны (стеклопластик + стеклопластиковые соты + стеклопластик), находящейся на геостационарной орбите во времени с учетом и без учета ($\lambda_z=0$) радиационного переноса между несущими слоями

- $A_{w1} = 0,1$; $A_{w2} = 0,1$;
 1 - $T_0 = 120\text{K}$; $\lambda_z = 0$; $\epsilon_{w1} = 0,9$; $\epsilon_{w2} = 0,1$;
 2 - $T_0 = 120\text{K}$; $\epsilon_{w1} = 0,1$; $\epsilon_{w2} = 0,1$;
 3 - $T_0 = 120\text{K}$; $\epsilon_{w1} = 0,9$; $\epsilon_{w2} = 0,9$;
 4 - $T_0 = 293\text{K}$; $\epsilon_{w1} = 0,9$; $\epsilon_{w2} = 0,9$

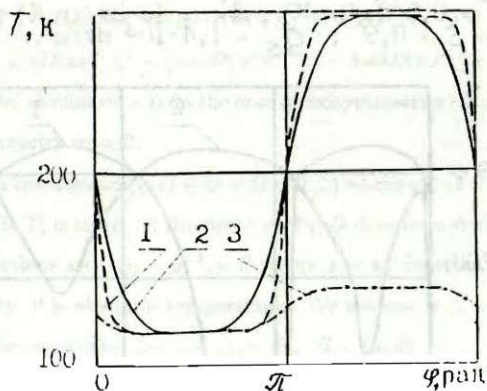


Рис.4. Влияние различных сочетаний теплофизических свойств на температурное состояние тонкой круглой пластины с половинным затенением ее фронтальной поверхности при одностороннем радиационном нагревании $T_0 = 120\text{K}$; $A_s = 0,4$; $\epsilon = 0,86$;

- $q_s = 1,4 \cdot 10^5 \text{ Вт/м}^2$; $\tau = 700 \text{ с}$;
 1 - $\lambda = 0,5 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$; $C = 2 \cdot 10^5 \text{ Дж/(м}\cdot\text{К)}$;
 2 - $\lambda = 5 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$; $C = 2 \cdot 10^5 \text{ Дж/(м}\cdot\text{К)}$;
 3 - $\lambda = 5 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$; $C = 2 \cdot 10^6 \text{ Дж/(м}\cdot\text{К)}$.

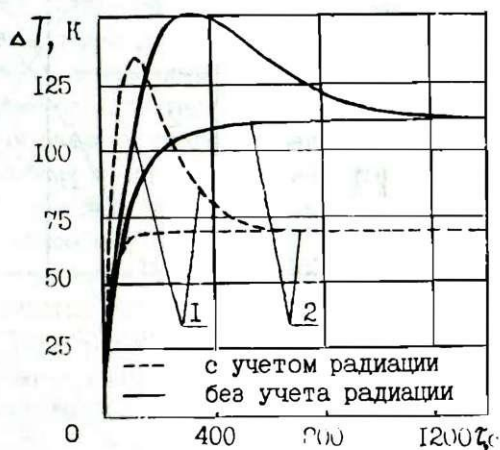


Рис. 5. Изменение перепада температур между освещенной и теневой сторонами стержня во времени при различных значениях начальной температуры

1 - $T_0 = 100\text{ K}$; 2 - 300 K ;

$\lambda_z = 0,5\text{ Вт/(м·К)}$; $\lambda_\varphi = 10\text{ Вт/(м·К)}$; $C = 1 \cdot 10^6\text{ Дж/(м}^3\text{·К)}$;

$A_s = \epsilon = 0,9$; $q_s = 1,4 \cdot 10^3\text{ Вт/м}^2$.

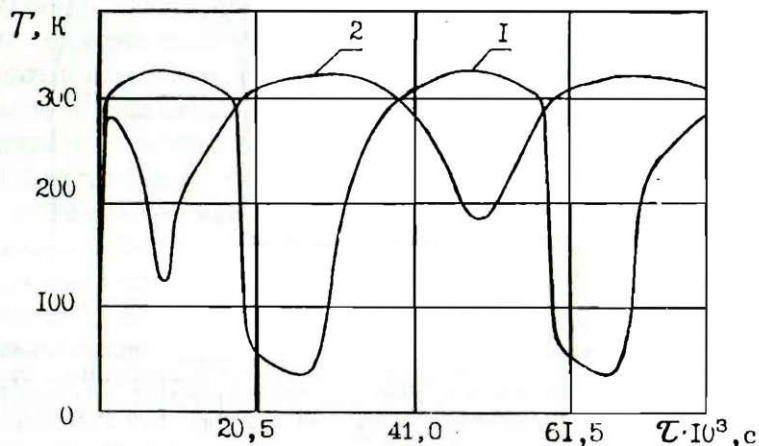


Рис. 6. Изменение во времени температуры в вершине (т.О) и на периферии (т.М) параболической оболочки в процессе движения по геостационарной орбите

1 - т.О; 2 - т.М; $D/H = 2$; $\delta = 0,15 \cdot 10^{-3}\text{ м}$;

$T_0 = 100\text{ K}$; $\lambda_{x_1} = \lambda_{x_2} = 10\text{ Вт/(м·К)}$; $C = 2 \cdot 10^5\text{ Дж/(м·К)}$;

$A_s = \epsilon = 0,2$; $q_s = 1,4 \cdot 10^3\text{ Вт/м}^2$.

Seminar "Mathematical Modelling and Parameter Identification
of Transfer Processes in Nonhomogeneous Media". Riga, 1992

Семинар "Математическое моделирование и идентификация параметров
процессов переноса в неоднородных средах". Рига, 1992

FINITE DIFFERENCE METHOD FOR ONE-DIMENSIONAL EQUATIONS OF VISCOUS HEAT-CONDUCTING GAS SYMMETRICAL MOTION

Artūras ŠTIKONAS

Vilnius, Lithuania

Samarskij and Popov [1] proposed difference schemes for nonviscous magnetic heat-conducting gas symmetrical motion equations.

Consider the equations in the Lagrange mass coordinates describing one-dimensional viscous heat-conducting gas symmetrical motion [2] :

$$D_t x = u, \quad D_t \eta = D(ux^m), \quad D_t u = x^m D[\mu \rho D(ux^m) - p] + g(x, t), \quad p = k\rho\vartheta, \\ c_V D_t \vartheta = D[\lambda \rho x^{2m} D\vartheta] + \mu \rho [D(ux^m)]^2 - \frac{3}{2} m \nu D(u^2 x^{m-1}) - k\rho\vartheta D(ux^m) + f(x, t).$$

In the case of plane-parallel motion $m = 0$, in the case of axisymmetrical motion $m = 1$, and in the case of spherical symmetry $m = 2$.

Problem is investigated in the domain $(q, t) \in \bar{Q} = \bar{\Omega} \times [0, T]$ where $q \in \bar{\Omega} = [0, L]$ is the Lagrange mass coordinate, $t \in [0, T]$ is time. In the problem D_t, D denotes a derivative with respect to t or q . Unknown functions are $x, \eta = \rho^{-1}, u, \vartheta$ where x is an Eulerian coordinate, ρ is a density, u is a gas velocity, ϑ is absolute temperature. We assume $\mu = \nu + \xi$, $k \geq 0$, $\xi \geq 0$, $\nu > 0$, $c_V > 0$, $\lambda > 0$ to be constants. Let $z = (x, \eta, \vec{u})$, $\vec{u} = (u, \vartheta)$.

We consider initial conditions $\eta(q, 0) = \eta^0(q)$, $u(q, 0) = u^0(q)$, $\vartheta(q, 0) = \vartheta^0(q)$ and the equation $Dx(q, 0) = \eta^0(q)[x(q, 0)]^{-m}$, $q \in \Omega$, which describes the relation between Eulerian and Lagrange mass coordinates. Let $x(0, 0) = a > 0$.

Finally, we consider the following boundary conditions

$$u \Big|_{q=0, L} = D\vartheta \Big|_{q=0, L} = 0.$$

Let $L_q(\Omega)$, $W_2^k(\Omega)$, $L_{q,r}(Q)$, $W_2^{k,l}(Q)$ be the usual (Sobolev) spaces with norms $\|\cdot\|_q$, $\|\cdot\|^{(k)}$, $\|\cdot\|_{q,r}$, $\|\cdot\|_Q^{(k,l)}$ where $q, r \in [1, \infty]$ and k, l are natural numbers. The norm of the vector is equal to the sum of norms of vector components.

We suppose that $f(s, t), g(s, t) \in L_{\infty,2}(\mathbf{R}_a^+ \times (0, T))$ where $\mathbf{R}_a^+ = (a, +\infty)$.

Let $K(N)$ be positive nondecreasing functions of a variable N , $N \in (1, +\infty)$, depending on $m, L, T, a, \xi, \nu, k, \lambda, c_V$ and let $\tau(N)$ be analogously determined nonincreasing functions.

The notation and conventions adopted here are the same as that introduced by Štikonas [2]. For $q, r \in [1, \infty]$ we get the norms $\|\cdot\|_{q, \bar{\omega}^h}$, $\|\cdot\|_{q, \omega_{1/2}^h}$, $\|\cdot\|_{r, \omega^r}$ from the norms in $L_q(\Omega)$, $L_q(\Omega)$, $L_r(0, T)$ if trapezoidal, midvalue, right rectangular integration rules are used, respectively. We suppose $\|V\|_{q, \omega^h} = \|\check{V}\|_{q, \bar{\omega}^h}$ where \check{V} is a zero continuation function of V from ω^h to $\bar{\omega}^h$. We consider the difference scheme with $P_M = P$ [2]

$$\bar{\partial}_t X = U(\bar{X}/\check{X})^m, \quad (1)$$

$$\bar{\partial}_t H = \delta(U\bar{X}^m), \quad (2)$$

$$\bar{\partial}_t U = \bar{X}^m \delta(\mu \dot{R} \delta(U\bar{X}^m) - P_M) + G, \quad (3)$$

$$c_V \bar{\partial}_t \Theta = \delta(\lambda \bar{X}^{2m} \bar{R} \delta \Theta) + \mu \dot{R} [\delta(U\bar{X}^m)]^2 - \frac{3}{2} m \nu \delta(U^2 \bar{X}^{m-1}) - \tilde{P} \delta(U\bar{X}^m) + F \quad (4)$$

where $\tilde{P} = k \cdot P_*(\Theta, \check{\Theta}, H, \check{H})$, $F \geq 0$, $\bar{R}_0 = \check{H}_{1/2}^{-1}$, $\bar{R}_n = \check{H}_{n-1/2}^{-1}$, $\bar{R}_i = [s(\check{H}^{-1})]_i$ or $\bar{R}_i = [s(H^{-1})]_i$ ($0 < i < n$). In the difference scheme we define $\dot{R} = \dot{R}(H, \check{H}) = \ln(H; \check{H})$, $\check{X} = \check{X}(X, \check{X}) = x_m(X; \check{X})$, $\bar{X} = \bar{X}(X, \check{X}) = [0.5(X^{m+1} + \check{X}^{m+1})]^{1/(m+1)}$ where $\ln(a; b) = (\ln a - \ln b)/(a - b)$ as $a \neq b$, $\ln(a; a) = a^{-1}$, $x_k(a; b) = (a + b)/2$, $k = -1, 0$ and

$$x_k(a; b) = [(a^k + a^{k-1} \cdot b + \dots + a \cdot b^{k-1} + b^k)/(k+1)]^{1/k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

We assume $\tilde{P} = P = k\theta R$, $R = 1/H$ [2]. We consider $\tilde{P} = \bar{P} = k\theta R \cdot I(H, \check{H})$ in addition where $I(H, \check{H}) = [\max(\text{sign}(m), \dot{R}^{-1} R)]^{-1/2}$.

We consider the following initial conditions

$$H|_{j=0} = H^0, \quad U|_{j=0} = U^0, \quad \Theta|_{j=0} = \Theta^0 \quad (5)$$

and the equation for X^0

$$\delta X^0 = H^0(\bar{X}^0)^{-m} \quad (6)$$

where $\bar{X}_{i+1/2} = \bar{X}(X_i, X_{i+1}) = x_m(X_i; X_{i+1})$. Besides the condition $X^0|_{i=0} = a$ we consider the boundary conditions

$$U|_{i=0,n} = \delta\theta|_{i=0,n} = 0. \quad (7)$$

Suppose that $U^0|_{i=0,n} = \delta\theta^0|_{i=0,n} = 0$, $X^0 > 0$, $H^0 > 0$, $\theta^0 > 0$. Functions X, H, U, θ are defined on the grids $\bar{\omega}^h \times \bar{\omega}^r$, $\omega_{1/2}^h \times \bar{\omega}^r$, $\bar{\omega}^h \times \bar{\omega}^r$, $\bar{\omega}_{1/2}^h \times \bar{\omega}^r$, and functions G, F are defined on the grids $\bar{\omega}^h \times \omega^r$, $\omega_{1/2}^h \times \omega^r$ (let $G|_{i=0,n} = 0$). Equations (1), (3) are defined on the grids $\bar{\omega}^h \times \omega^r$, $\omega^h \times \omega^r$, equations (2), (4) are defined on the grid $\omega_{1/2}^h \times \omega^r$ and equation (6) is defined on the grid $\omega_{1/2}^h$.

Let $Z = (X, H, \bar{U})$ be a solution of the difference scheme if Z satisfies equations (1) - (4), initial and boundary conditions (5) - (6), (7) and the conditions $X > 0$, $H > 0$, $\theta > 0$. Let $\bar{U} = (U, \theta)$ and $Z^0 = (H^0, \bar{U}^0)$, $\bar{G} = (G, F)$.

Let \tilde{P} satisfy the condition

$$\tilde{P}\theta^{-1}\delta(U\bar{X}^m) \leq kR^{1/2}R_*^{1/2}\delta(U\bar{X}^m) \quad (8)$$

where $R_* = \dot{R}$ as $m = 0$ and $R_* = (s_t H)^{-1}$ as $m > 0$. If $\tilde{P} = P$ or $\tilde{P} = \bar{P}$ then (8) holds.

We denote $\varepsilon_m = \xi/\nu - 0.5(m-2)(m+1)^{-1}$, $\bar{\varepsilon}_m = 1.5m(m+1)^{-1}$. We introduce the discrete analogue of entropy $S = k \ln H + c_V \ln \theta$ and functions

$$S^{(0)} = (\theta^{-1} R_* \cdot [(m+1)\{s(\bar{X}^{(m+1)/2})\}]^{-1} s(U\bar{X}^{(m-1)/2}) s_t H/2]^2) \geq 0.$$

$$S^{(1)} = (\theta^{-1} R_* \cdot [\delta(U\bar{X}^m)]^2) \geq 0, \quad S^{(2)} = (\bar{R} \bar{X}^{2m} \delta\theta \cdot k[-\theta^{-1}]) \geq 0, \quad S^{(3)} = (\theta^{-1} \cdot F) \geq 0.$$

Lemma 1. Let $\xi/\nu \geq 0.5(m-2)(m+1)^{-1}$ and inequality (8) holds. Then we have the nondecreasing entropy law $\bar{\partial}_t(S, 1) \geq \nu \bar{\varepsilon}_m S^{(0)} + \nu \bar{\varepsilon}_m S^{(1)} + \lambda S^{(2)} + S^{(3)} \geq 0$.

Lemma 2. For the difference scheme (1) - (7) we have volume conservation law $\|H^j\|_1 = \|H^0\|_1$, $1 \leq j \leq \bar{n}$.

We define norms

$$\|Z^{(1)}\| = \|X\|_{2,\infty} + \|\delta X\|_{2,\infty} + \|H\|_{2,\infty} + \|\bar{\partial}_t H\|_Q + \|\delta \bar{U}\|_Q + \|\bar{U}\|_{2,\infty}.$$

$$|Z|^{(2)} = |Z|^{(1)} + \|\delta^2 X\|_{2,\infty} + \|\delta H\|_{2,\infty} + \|\bar{\partial}_t \delta H\|_Q + \|\bar{\partial}_t H\|_{2,\infty} + \|\bar{U}\|^{(2,1)}$$

where $\|\cdot\|^{(2,1)} = \|\cdot\|_{2,\infty} + \|\bar{\partial}_t \cdot\|_Q + \|\delta \cdot\|_{2,\infty} + \|\delta^2 \cdot\|_Q$.

We say that Z is a regular \bar{N} -solution, if the solution Z satisfies the estimates $\bar{N}^{-1} \leq X \leq \bar{N}$, $\bar{N}^{-1} \leq \Theta \leq \bar{N}$, $\bar{N}^{-1} \leq H \leq \bar{N}$, $|Z|^{(2)} \leq \bar{N}$.

Theorem 1. Let $N^{-1} \leq H^0$, $\|\bar{Z}^0\|^{(1)} + \|\bar{G}\|_Q \leq N$, $\tau_{\max} \leq r^0(N)$, $\tau^{j+1} \leq N\tau^j$, $j \geq 1$ and conditions of Lemma 1 are valid. Then every solution of DS is a regular $K(N)$ -solution.

Remark 1. We can omit condition $\tau^{j+1} \leq N\tau^j$, $j \geq 1$ when $P_M = P$ and boundary conditions (7) hold.

Remark 2. When $\tau_{\max} \leq r^0(N)$ the regular $-K(N)$ solution exist and this solution is unique and stable.

Remark 3. If $h = \text{const}$ and z is smooth then $\|Z - z\|_C = O(\tau_{\max} z + h^2)$.

Remark 4. We can find the solution of DS using the simple (Jacoby) iterative type method. When $\tau_{\max} \leq r^0(N)$ and Z is the regular $-K(N)$ solution we get

$$|Z - Z_q|^{(2)} \leq K(N)[K(N)\tau_{\max}^{3/4}]^q \tau_{\max}^{-3/4}$$

where Z_q is solution of iterative method.

Remark 5. If we have boundary conditions

$$\Pi \Big|_{i=n-1/2} = (G_n - \bar{\partial}_t U_n) \bar{X}_n^{-m} h_{n+1/2}, \quad U \Big|_{i=0} = \delta \Theta \Big|_{i=0,n} = 0$$

where $\Pi = \mu \dot{R} \delta (U \bar{X}^m) - P_M$ instead of (7) then Lemma 1 and Theorem 1 are valid.

Remark 6. Lemma 1 and Theorem 1 are valid when we have magnetic heat-conducting gas symmetrical motion equations and gas velocity has nonradial components (in this case $\bar{U} = (U, V, W, \Theta, B_1, B_2)$ where $\vec{u} = (u, v, w)$ is a gas velocity vector, $\vec{b} = (\beta_0 x^{-m}, b_1, b_2)$ is a magnetic field intensity vector).

References

1. A.A. Samarskij, Yu. P. Popov. Difference methods for the solution of problems of gas dynamics. Nauka, Moscow, 1980. 352pp. (in Russian).
2. A. Štikonas. Difference scheme for equations of viscous heat-conducting gas symmetrical motion// Differential equations and their application, n. 44, Vilnius, 1989. pp. 85-98. ISSN 0132-7801 (in Russian).

Seminar "Mathematical Modelling and Parameter Identification of Transfer Processes in Nonhomogenous Media". Riga, 1992
 Семинар "Математическое моделирование и идентификация параметров процессов переноса в неоднородных средах"

НЕКОТОРЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ С НЕЛИНЕЙНЫМ
 УПРУГИМ МАТЕРИАЛОМ

ЗЕМИТИС А. А.

Рига, Латвия

При математическом моделировании успех можно ожидать лишь в том случае, если должным образом выбраны параметры задачи. Особенно сложно определить законы материала. Так, в теории упругости связь между напряжениями и деформацией для однородного, изотропного материала в общем случае выражается через формулу [1]:

$$\sigma = c_1(I_1, I_2, I_3)I + c_2(I_1, I_2, I_3)U + c_3(I_1, I_2, I_3)U^2, \quad (1)$$

где σ - тензор напряжений, I - единичный тензор, U - тензор деформаций, c_i - какие-то функции от трех инвариантов I_1, I_2, I_3 тензора U . Теперь при математическом моделировании конкретного упругого материала требуется установить вид зависимостей c_1, c_2, c_3 . Как отмечено в [1], при этом возникают много проблем.

В реферате обсуждаются исследования, начатые в [2], где путем численного эксперимента изучалось влияние квадрата тензора деформации U на решение задачи Сильборина. В [2] рассматривалась ситуация, когда U^2 входит в закон материала, умноженный на постоянную величину. Было установлено, что учет квадратичного члена может достаточно сильно изменить решение. Если брать линейный закон Гука и тензор деформаций U в форме, предназначенной для больших деформаций, то при решении контактных задач можно наблюдать эффект "опрокидывания" приконтактных частиц упругого материала. Учет квадратичного члена при соответствующем выборе значения постоянного множителя

снимает этот нефизический эффект.

В дальнейшем предполагалось изучить влияние U^2 с множителем, зависящим от самого решения. Фактически закон материала был взят в виде

$$\sigma = \lambda * I_1 * E + 2 * \mu * U + \gamma(I_1) * U^2, \quad (2)$$

где λ, μ - коэффициенты Ляме, $\gamma(I_1)$ - функция, зависящая от первого инварианта тензора деформации U .

Изучалась двумерная контактная задача, когда твердое тело вдавлируется в упругий материал прямоугольного сечения. Боковые и нижняя границы предполагались закрепленными жестко, а верхняя граница - свободна вне заранее неизвестной зоны контакта. Математическая модель записана в перемещениях. Дискретная математическая модель получена на основе комбинации метода Галеркина по вертикальному (по этому направлению неизвестные функции ищутся в виде кубических полиномов) и разностного по горизонтальному направлениям. Коэффициент $\gamma(I_1)$ брался на предыдущем итерационном слое и заменялся интерполяционным полиномом третьей степени.

В результате удалось получить результаты при некоторых конкретных $\gamma(I_1)$, которые обеспечивали выпуклую вверх зависимость приложенной силы от деформации в соответствующем одноосном эксперименте. Противоположный характер зависимости силы и деформации получить не удалось.

Литература

1. Staat M., Ballmann J. tensorielle Verallgemeinerungen einachsiger nichtlinearer Materialgesetze // Z. angew. Math. Mech. 69 (1989), 73-81.

2. Земитис А. Некоторые численные эксперименты с нелинейным эластичным материалом // Математическое моделирование. Прикладные задачи математической физики. Рига: ЛУ, 1993. Вып. 3. С. 143-150 (на латышск.).

"RAY" ASYMPTOTIC METHOD: FURTHER RESULTS FOR
SINGULARLY PERTURBED NONLINEAR TRANSIENT PROBLEMS
IN MULTILAYER DOMAINS

G. A. NESENEKO,

Department of Mathematical Analysis
of Moscow State Correspondent Pedagogical Institute,
ul. Verkhnyaya Radischevskaya 16, 109004 Moscow, RUSSIA

It is known the papers [1], [2], where Boundary Integral Equation (BIE) method are used to solve the problems of the dynamical thermoelasticity, including the thermal shock problems (ones are very important according to engineering standpoint). In connection with the development of new perspective technologies, the problems of the dynamical thermoelasticity in the composites are interesting specially. First stage of similar problems is determination the transient temperature fields under the thermal shock. Specificity of these problems is that it is necessary to solve the singularly perturbed boundary value problems for the heat equation with two small parameters in the multilayer domains with the moving boundaries. Necessity of study of the solution of the singularly perturbed boundary value problems with two small parameters arises under the investigation of many important problems [3], [4].

In this report it is suggested and grounded the method of solving the problems of above-mentioned type. It is based on analysis of the integral representation of the solution and includes analysis of corresponding BIE. The method may be considered as generalization of the supposed by G.A. Nesenenko [5] "ray" asymptotic method for the composite structures and for the heat equation with two small parameters. Thus, in case of one-dimensional temperature fields it is suggested the manner of obtaining the asymptotic expansions

(when $\epsilon_i \rightarrow 0$, $i=1,2$) of the functions $U_i(x,t)$ ($i=1,2$) which are the solution of the following boundary value problem:

$$\epsilon_i^2 \frac{\partial^2 U_i}{\partial x^2} - \epsilon_i \frac{\partial U_i}{\partial t} = Q_i(x,t) \cdot U_i, \quad i=1,2 \quad (1)$$

$$N_1(t) < x < N(t), \quad i=1; \quad N(t) < x < N_2(t), \quad i=2 \quad (2)$$

$$U_i(x,0) = f_i(x), \quad i=1,2; \quad 0 < t \leq 1 \quad (3)$$

$$U_1(N(t),t) = U_2(N(t),t), \quad c_1 \frac{\partial U_1(N(t),t)}{\partial x} = c_2 \frac{\partial U_2(N(t),t)}{\partial x} \quad (4)$$

The boundary conditions for $U_1(x,t)$ and $U_2(x,t)$ under $x=N_1(t)$ and $x=N_2(t)$ respectively may be linear or (if it is necessary) nonlinear [6]; x and t are the dimensionless variables; ϵ_i ($i=1,2$) are the small parameters. The functions $N(t)$, $N_1(t)$ ($i=1,2$) are supposed sufficiently smooth. We have mentioned already that the offered method is generalization of "ray" asymptotic method [7] and it is founded on asymptotic analysis of the Green matrix of the boundary value problem (1)-(4). In order to construct the integral representation of the Green matrix for the examined problem, it is used the well-known method of sources and wells [8]. The method admits generalization in case of the problems with the multilayer axial symmetry as well as for the multidimensional multilayer problems, including the multiconnected domains and the problems with free boundary $N(t)$ (Stefan's problem) [6].

REFERENCES

1. A. Chaudouet BIE applied to 3d transient thermoelasticity.- Boundary Element. Proceeding of the International Conference Beijing, China, 14-17 October 1986.- Pergamon Press: Oxford etc., 1986.- P. 523-535.
2. I.G. Suh, N. Tosaka Boundary element analysis of linear coupled thermoelasticity problems by using Laplace transformation.- Boundary Element Method in Applied Mechanics. Proceeding of the First Joint Japan/USA Symposium on Boundary Element Method. University of Tokyo, Japan, 3-6 October 1988.-

Pergamon Press: Oxford etc., 1988.- P. 277-284.

3. M.I.Freidlin Geometric optics approach to reaction-diffusion equations. - SIAM J. Appl. Math.-1986- v.46,N 2- P.222-232.
4. J.Rubinstein, P.Sternberg, J.B.Keller Fast reaction, slow diffusion and curve shortening.- SIAM J. Appl. Math. - 1989- v.49,N 1 -P.116-133.
5. G. Nesenenko The "ray" asymptotic method in the solutions of the nonlinear singularly perturbed boundary value problems of heat conduction.- Second World Congress on Computational Mechanics. August 27-31, 1990. Stuttgart, FRG. Extended Abstracts of Posters.- Stuttgart: Stuttgart University, 1990.- P. 13-16.
6. L. Rubinstein The Stefan problem.- AMS Translat. of Mathemat. monography.- V. 27.- 1981.
7. G.A.Nesenenko On the Laplace's method for the continual integrals with the Wiener's measure in the domains with boundaries.- Ph. D. Thesis. Moscow: Moskowsky Institut Elektromnogo Mashinostroeniya,1975 (in Russian).
8. H.S. Carslaw, J.C. Jaeger Conduction of heat in solids.- Clarendon Press: Oxford, 1959.

IDENTIFICATION OF THE FILTRATION COEFFICIENT

Gennadi Vainikko (University of Tartu)

1. Inverse problem. Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) be an open bounded region with a piecewise smooth boundary $\partial\Omega$; we denote by ν the outer unit normal to $\partial\Omega$. Let $\Gamma \subset \partial\Omega$ be a relatively open set. Consider the following inverse problem: find the coefficient $a = a(x)$ such that

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(a(x) \nabla u(x)) &= f(x), \quad x \in \Omega, \\ [a(x) \nabla u(x)] \cdot \nu(x) &= g(x), \quad x \in \Gamma, \end{aligned} \quad (1)$$

where $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\Gamma)$ are given functions. Physically, u can be interpreted as the piezometrical head of the ground water in Ω ; the function f characterizes the sources and sinks in Ω and the function g characterizes the inflow and outflow through $\Gamma \subset \partial\Omega$. The filtration (transmissivity) coefficient a is, physically, positive and piecewise smooth with possible discontinuities of the first kind on some surfaces in Ω .

We do not exclude the case of $\Gamma = \emptyset$. The boundary condition is omitted in (1) in this case.

Conditions (1) can be understood in the sense of distributions. We prefer to deal with the weak formulation of the problem.

Introduce the subspace

$$H^1(\Omega, \Gamma) = \{w \in H^1(\Omega): w(x) = 0 \text{ for } x \in \partial\Omega \setminus \Gamma\} \subset H^1(\Omega).$$

We obtain the following weak formulation of inverse problem (1): given $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\Gamma)$ find $a \in L^2(\Omega)$ such that

$$\int_{\Omega} a \nabla u \cdot \nabla w \, dx = \int_{\Omega} f w \, dx + \int_{\Gamma} g w \, dS, \quad \forall w \in H^1(\Omega, \Gamma). \quad (2)$$

Problem (2) occurs to be ill-posed: small perturbations of $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$ and $g \in L^2(\Gamma)$ may cause large perturbations of $a \in L^2(\Omega)$.

2. Discretization. A natural way to discretize the inverse problem (1) is to apply finite element approximations to the weak formulation (2) of the problem. Introduce finite-dimensional subspaces $S_h \subset H^1(\Omega, \Gamma)$ depending on a discretization parameter $h > 0$: we assume that S_h is complete in $H^1(\Omega, \Gamma)$ as $h \rightarrow 0$, i.e. for every $w \in H^1(\Omega, \Gamma)$, there exist $w_h \in S_h$ such that $w_h \rightarrow w$ in $H^1(\Omega)$ as $h \rightarrow 0$. We introduce the following discrete version of problem (2):

$$\left. \begin{aligned} &\text{find } a_h \in L^2(\Omega) \text{ of minimal } L^2(\Omega) \text{ norm such that} \\ &\int_{\Omega} a_h \nabla u \cdot \nabla w_h \, dx = \int_{\Omega} f w_h \, dx + \int_{\Gamma} g w_h \, dS, \quad \forall w_h \in S_h. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Problem (3) has never more than one solution. If problem (2) is solvable then (3) is solvable, too, and the solutions satisfy the relation $a_h = P_{h,u} a$ where $P_{h,u}$ is the orthoprojector in $L^2(\Omega)$ corresponding to the subspace $\{a_h \in L^2(\Omega): a_h = \nabla u \cdot \nabla v_h, v_h \in S_h\}$; a consequence is that $a_h \rightarrow a_0$ in $L^2(\Omega)$ as $h \rightarrow 0$ where $a_0 \in L^2(\Omega)$ is the normal solution (the solution of minimal $L^2(\Omega)$ norm) of problem (2). Conversely if (2) is non-solvable in $L^2(\Omega)$, but (3) is solvable, then $\|a_h\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow \infty$ as $h \rightarrow 0$.

Choosing a basis $w_j = w_{j,h}$ ($j=1, \dots, l=l_h$) of S_h , problem (3) can be reformulated as follows: find

$$a_h = \sum_{j=1}^l c_j \nabla u \cdot \nabla w_j$$

solving the system of linear equations

$$Ac = d$$

where c is an l -vector with components c_j , d is an l -vector with components

$$d_i = \int_{\Omega} f w_i \, dx + \int_{\Gamma} g w_i \, dS, \quad i=1, \dots, l,$$

and $A = (a_{ij})$ is an $l \times l$ -matrix with elements

$$a_{ij} = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla w_j)(\nabla u \cdot \nabla w_i) \, dx, \quad i, j=1, \dots, l.$$

3. Regularization. Consider a case where, instead of exact data denoted here by u_0, f_0 and g_0 , we have polluted data $u = u_\eta \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $f = f_\delta \in L^2(\Omega)$ and $g = g_\delta \in L^2(\Gamma)$ at our disposal. Then numerical difficulties should be expected especially for fine grids, and a precedent regularization of problem (3) is needed. Tikhonov regularization yields the following numerical scheme:

$$a_{\alpha,h} = \sum_{j=1}^l c_{j,\alpha} \nabla u \cdot \nabla w_j, \quad (\alpha B + A)c_\alpha = d. \quad (4)$$

Here d is l -vector with components d_i defined above, c_α is l -vector with components $c_{j,\alpha}$ ($j=1, \dots, l$), $A = (a_{ij})$ and $B = (b_{ij})$ are $l \times l$ -matrices with elements a_{ij} defined above and

$$b_{ij} = \int_{\Omega} \nabla w_j \cdot \nabla w_i \, dx \quad (i, j=1, \dots, l).$$

A suitable value of regularization parameter $\alpha > 0$ depends on the error level of the data. Assume that

$$\sup_{x \in \Omega} |\nabla u_{\eta}(x) - \nabla u_0(x)| \leq \eta \quad (5)$$

$$\|f_{\delta} - f_0\|_{L^2(\Omega)} \leq \delta, \quad \|g_{\delta} - g_0\| \leq \delta,$$

where δ and η are small positive numbers. Then an a priori choice $\alpha = \alpha(\delta, \eta)$ such that

$$\alpha(\delta, \eta) \rightarrow 0, \quad (\delta^2 + \eta^2) / \alpha(\delta, \eta) \rightarrow 0 \quad \text{as } \delta \rightarrow 0, \eta \rightarrow 0$$

guarantees the convergence $a_{\alpha(\delta, \eta), h} \rightarrow a_0$ in $L^2(\Omega)$ norm as $h \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$, $\eta \rightarrow 0$ where a_0 is the normal solution to (2) corresponding to exact data u_0, f_0, g_0 (we assume that (2) with the exact data is solvable in $L^2(\Omega)$). The same result holds if $\alpha = \alpha(h, \delta, \eta)$ is chosen, according to the residual principle, so that

$$\delta + \langle A c_{\alpha}, c_{\alpha} \rangle^{1/2} \eta \leq \langle A c_{\alpha} - d, B^{-1}(A c_{\alpha} - d) \rangle^{1/2} \leq \beta (\delta + \langle A c_{\alpha}, c_{\alpha} \rangle^{1/2} \eta)$$

where $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denotes the scalar product in R^1 and $\beta \geq 1$ is a constant not depending on h, δ, η .

The convergence results concerning the a priori parameter choice remains valid if (5) is replaced by conditions

$$a_0 \in L^{\infty}(\Omega), \quad \sup_{x \in \Omega} |u_{\eta}(x)| \leq c, \quad \|\nabla u_{\eta} - \nabla u_0\|_{(L^2(\Omega))^n} \leq \eta$$

where the constant c does not depend on η .

For more details see [1, 2]. About the identifiability of a from problem (2) among functions of class $L^2(\Omega)$ or even $L^1(\Omega)$ see [3].

References

1. E. Vainikko and G. Vainikko. Some numerical schemes for the identification of the filtration coefficients. Acta comm. univ. Tartuensis, 1992, 937, 3-14.
2. G. Vainikko. On the discretization and regularization of ill-posed problems with non-compact operators. Numer. Funct. Anal. Optim., 1992, 13, No. 3-4, 381-396.
3. G. Vainikko and K. Kunisch. L^1 -Identifiability of the transmissivity coefficient. Z. Anal. Anw. (to appear)