E. G r i n b e r g s
Latvijas Valsts Universitātes docents.

A N A L Ī T I S K Ā   Ģ E O M E T R I J A .

II .

Analītiskā ģeometrija plāksnē.

K o n s p e k t s
ar rokraksta tiesībām.

Lasīts Fīzikas-matēmatikas fakultātes studentiem 1940/41.g.

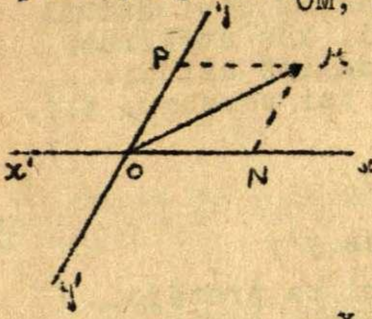
R ī g ā , 1 9 4 1
Latvijas Valsts Universitātes izdevniecība.

ANALĪTISKĀ ĢEOMETRIJA PLĀKSNĒ

= =

Koordinātu sistemas. Viens no analītiskās geometrijas pamata objektiem ir punkts.

Dekarta koordinātas. Lai raksturotu plāksnes ptus, ņem divas asis $x'x$, $y'y$ kas šķeļās ptā O, ko sauc par sākuma ptu. Lai raksturotu ptu M, aplūko $\overrightarrow{OM}$, ko sauc par pta M vietas vektoru.



Katram ptam piesaistīts viens vietas vektors un otrādi. $\overrightarrow{OM}$ projicē uz koordinātu asīm. $\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{OP}$ ir $\overrightarrow{OM}$ projekcijas uz asīm un to algebr.garumus apzīmē ar x , y
Šos skaitļus x, y sauc par pta M koordinātām, proti Dekarta /parallēl/koordinātām ko uzskatām kā nenosauktus skaitļus.
x ir x koordināta vai abscisa
y ir y " " ordināta

$$x = \overline{ON}$$

$$y = \overline{OP}$$

Ņemot asis savstarpēji perpendikulāras, rodas ortogonālas Dekarta koordinātas. Dažos gadījumos, piem.lai pētītu ptus, kas neaprobežoti attālinās, izdevīgi Dekarta koordinātu x, y vietā lietot homogēnās koordinātas x_1, x_2, x_3, ko iegūst, uzskatot x un y kā divu skaitļu attiecību:

$$x = \frac{x_1}{x_3} \qquad y = \frac{x_2}{x_3}$$

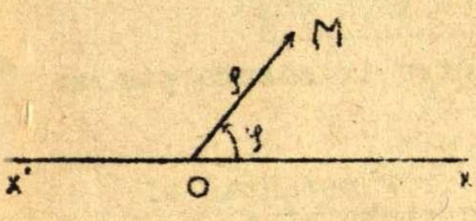
Katram punktam, arī bezgalīgi tālam ptam, kam vismaz viena Dekarta koordināta ir bezgalīga, var piesaistīt galīgas x_1, x_2, x_3 vērtības.
Otrādi, ja dotas homogenas koordinātas x_1, x_2, x_3, to attiecības nosaka x un y tā tad arī ptu ar abscisu x un ordinātu y.
To pašu ptu nosaka arī homog.koord. ρx_1, ρx_2, ρx_3.

Tā tad katram ptam atbilst bezgalīgi daudz homog.koord.vērtību.
Tā kā x un y viennozīmīgi raksturo ptu, saka un raksta "pts/x,y/" , "pts /5,-7/" u.t.t. Ptu nosaka divi skaitļi, ko var brīvi izvēlēties, lai dabūtu patvaļīgu plāksnes ptu - tāpēc saka, ka plāksnē ∞^2 ptu, vai arī, ka plāksnei ir divas dimensijas.

POLĀRĀS KOORDINĀTAS.

= = = = = = = = = = = = = =

Plāksnē izvēlas sākuma ptu jeb polu O un polāro asi x'x.

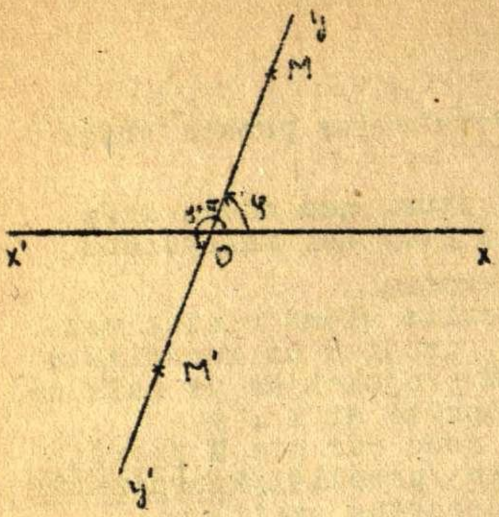


$\overrightarrow{OM}$ var noteikt divejādā veidā:
1/ Var noteikt pašu vektoru $\overrightarrow{OM}$ dodot
OM = ρ /rādijvektoru/ un leņķi
/x'x, OM/ = φ
/amplitūdu jeb polāro leņķi/

Ja dots ρ un φ var konstruēt $\overrightarrow{OM}$.
Šie skaitļi nosaka viennozīmīgi ptu M.

φ ir definēts tikai līdz 2π /to bieži ierobežo, piem.prasot, ka $0 \leq \varphi < 2\pi$ /, jo pts /ρ,φ/ ir tas pats kā $(\rho, \varphi + 2k\pi)$ /katram ptam atbilst bezgalīgi daudz polāro leņķu/. Nupat polārās koordinātas reizēm nav parocīgas.

ZB-100
1941.g.maijā.



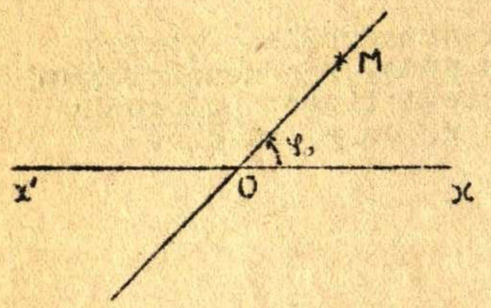
2/ Aplūkosim taisni y'y , kas iet caur polu un uz tās ptu M /ρ,φ/. Kamēr M pārvietojās pa staru Oy, polārais leņķis ir konstants.

Ja pts M nonāk stāvoklī M', tad M/ρ',φ+π/.
Viens taisnes ptiem iznāk divi dažādi konstanti polari leņķi, kas atšķiras par π. Tādēļ ρ un φ definē citādi: orientē y'y piešķirot tai vērsumu, t.i. ņemot asi y'y. Tad

$$\varphi = /x'x\ ,y'y/$$

$$\rho = \overline{OM} \text{ uz ass } y'y$$

Ja M iet cauri ptam O, φ nemainās, bet ρ maina zīmi uz pretējo, ejot cauri nulles vērtībai. Apskatam kādas polāro koordinātu vērtības tagad atbilst ptam M. Apzīmējam /x'x, OM/= φ_0.
Ja taisnei OM pozitivais vērsums iet no O uz M



$$\rho = OM$$

$$\varphi = \varphi_0 + 2k\pi$$

izvēloties pozitivo vērsumu no M uz O

$$\rho_1 = -OM = -\rho \qquad \rho = -\rho$$

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \pi + 2k\pi \qquad \varphi_1 = \varphi_0 + /2k+1/\pi$$

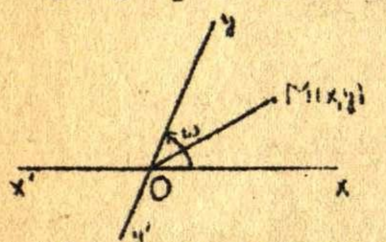
Ja kādam ptam viens no koordinātu vērtību pāriem ir ρ, φ , tam atbilst koordinātas

$$[\rho, \varphi + 2k\pi] \text{ un } [-\rho, \varphi + /2k+1/\pi]$$

LĪKNES VIENĀDOJUMA VEIDI

Punkta attālums no sākuma punkta slīpleņķa koordinātas.

Dots pts M ar koord. /x,y/



M/x,y/

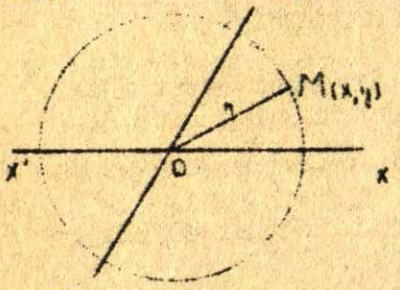
$$\overrightarrow{OM}^2 = x^2 + y^2 + 2xy\cos\omega$$

liekot OM = d

$$\boxed{d^2 = x^2 + y^2 + 2xy\cos\omega}$$

$$\text{ja } \omega = \frac{\pi}{2}, \quad \boxed{d^2 = x^2 + y^2}$$

Līknes vienādojuma veidi: Raksturot riņķi kā centrs ir sākuma pts un radijs r. Patvaļīgam riņķa ptam M/x,y/



$$OM = d = r$$

attālums d no O ir konstants; šī īpašība raksturo riņķa ptus.

$$d^2 = r^2$$

Izsakam d^2 ar M koordinātām:

$$(1) \quad x^2 + y^2 + 2xy\cos\omega = r^2$$

Šis noteikums, kas jāpilda visiem ptiem, ir riņķa vienādojums.
Sakarību (1) var rakstīt

(2) $x^2 + y^2 + 2xy \cos\omega - r^2 = 0$ 1.veids

Otrādi: katrs pts, kā koordinātas apmierina sakarību (1) , ir riņķa pts, jo tā attālums no 0 ir r. (2) ietilpst vispārīgo sakarību tipā

(3) $F/x,y/ = 0$

Šāda sakarība nosaka y kā x funkciju aizklātā veidā. (1),(2) ir riņķa <u>vienādojumi aizklātā veidā</u>. Lai atklātu,jāatrisina (2) attiecībā pret y

diskriminants $= x^2 \cos^2\omega - x^2 + r^2 = r^2 - x^2 \sin^2\omega$

(4) $y = -x\cos\omega \pm \sqrt{r^2 - x^2\sin^2\omega}$ 2.veids

te y ir x funkcija <u>atklātā veidā</u>. (4) ietilpst vienādojumu tipā (5)

(5) $y = f/x/$

3.veids: izsaka x un y kā kāda parametra t funkcijas. To var panākt, piemēram, ņemo x kā t funkciju x/t/ un ievietojot vienādojumā (2) vai (4) un atrisinot attiecībā pret y, kas dos y/t/. Parametru noteiksim ar sakarību

(6) $y = r + xt$
ievietojot š.y vērtību sakarībā (2), dabū:

$$x^2 + x^2t^2 + 2xtr + \cancel{r^2} + 2x^2t\cos\omega + 2xr\cos\omega - \cancel{r^2} = 0$$

Dalot kreiso pusi ar x, kas tikai atsevišķiem riņķa punktiem ir 0

$$x/t^2 + 2t\cos\omega + 1/ + 2tr + 2r\cos\omega = 0$$

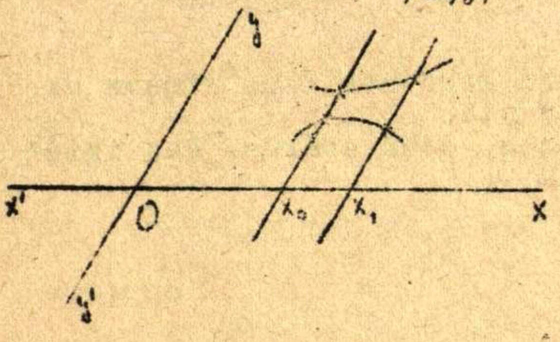
$$x/t^2 + 2t\cos\omega + 1/ + 2r/t + \cos\omega/ = 0$$

$$\boxed{x = -\frac{2r\,/t + \cos\omega/}{t^2 + 2t\cos\omega + 1} \qquad y = \frac{r\,/-t^2 + 1/}{t^2 + 2t\cos\omega + 1}} \qquad y = \frac{rt^2 + 2rt\cos\omega + r - 2rt^2 - 2rt\cos\omega}{t^2 + 2t\cos\omega + 1}$$

kas ir <u>parametrisks līknes vienādojums</u> /3.veids/

<u>Pārbaude vai trīs aplūkoto veidu vienādojumi dod attēlā līkni</u>.

<u>1. veids.</u> $F/x,y/ = 0$



Izvēlās noteiktu x vērtību x_0 un ievieto vienādojumā; $F/x_0y/ = 0$ ir vienādojums ar vienu nezināmo y, ko var atrisināt un dabūt zināmu skaitu ptu,kā koordinātas apmierina vienādojumu. Ņemot citu x vērtību x_1 dabūjam $F/x_1y/ = 0$, kas atkal dos zināmu skaitu ptu. Ja pārbīda y asij parallelo taisni, mainot x vērtību, dabū bezgalīgi daudzus ptus, kas veido līkni

Vienādojums F/x,y/ dod līkni.

<u>ZB- 100</u>
1941.g.maijā.

Var gadīties, ka nav nevienas reālas/x un y vērtības, kas šo vienādojumu apmierina, piem. ja

$$x^2 + y^2 + 1 = 0$$

Šis vienādojums dod līkni, tikai imagināru. F/x,y/ dod līkni, speciālos gadījumos tā var būt imagināra.

2.veids. $y = f/x/$ vienmēr dos līkni, tikai tā var būt arī imagināra,

piem. ja $y = \sqrt{-x^2 - x^4 - 1}$ zemsaknes izteiksme reāliem x negatīva, tādēļ y imaginārs

3.veids. $x = \varphi/t/$, $y = \psi/t/$ izvēloties noteiktu t vērtību t_0, šai vērtībai atbildīs viens vai vairāki pti $x_0 y_0$, $x_1 y_1$

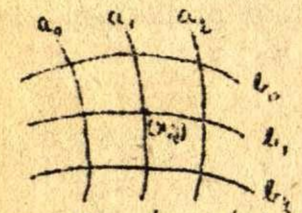
Ja t nepārtraukti mainam, x un y pārvietosies pa līknes gabaliem, tā tad arī te dabūjam līkni.

LĪKLĪNIJU KOORDINĀTAS

Ja dots līknes vienādojums F/x,y/ , kas satur bez x un y vēl parametru a, katrai a vērtībai atbildīs sava līkne. Līknes vienādojumu var rakstīt

$$F/x,y,a/ = 0$$

piem. $x^2 + y^2 + 2xy\cos\omega - a^2 = 0$ Mainot a vērtības, dabū līkņu saimi, t.i. bezgalīgi daudzas līknes.



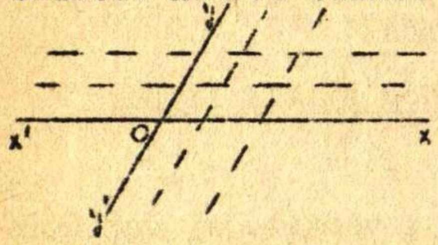
Ja dots pts /x,y/ plnē, tam ies cauri saimes līkne, ko raksturos kāds noteikts $a=a_1$. Aplūkosim otru līkņu saimi, ko attēlo v-ms

$G/x,y,b/ = 0$

Katrai b vērtībai atbildīs viena šīs saimes līkne.

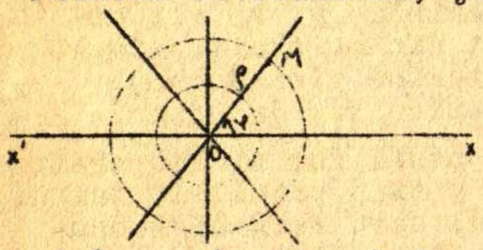
Caur ptu /x,y/ ies arī viena otrās saimes līkne, kam atbildīs noteikts $b = b_1$ Tā tad pts/x,y/ nosaka skaitļus a_1, b_1, kas raksturo abu saimju līknes, kas iet caur šo ptu. Otrādi: skaitļi a_1, b_1 raksturo mūsu ptu, tā tad var tikt uzskatīti par pta koordinātām. Šādā kārtā var dabūt bezgalīgi daudz koordinātu sistēmu.

Tās sauc par līklīniju koordinātām, jo tās nosaka divas līkņu saimes. Katras saimes atsevišķās līnijas sauc par koordinātu līnijām.



Sevišķi vienkāršas koordinātu līniju saimes ir Dekarta un polāro koordinātu gadījumā:
Dekarta koordinātām
pirmā līkņu saime sastāv no parallēlēm y asij
otrā " " " " " x "

Polārām koordinātām, ja ρ konstants, dabū koncentriskus riņķus ar centru sākuma ptā.
ja φ konstants, dabū starus, kas iziet no sākuma pta.



Algebriskās līknes.

Par algebriskām līknēm sauc līknes, kam vienādojumu kaut kādā Dekarta parallelkoordinātu sistemā var uzrakstīt veidā F/x,y/ = 0,

ZB-100
1941.g.maijā.

kur F ir polinoms attiecībā pret x un y. Šai kursā aplūkosim līknes, ko dod pirmās un otrās pakāpes vienādojumi.

$Ax + By + C = 0$ attēlo taisni, kā to vēlāk redzēsim.

$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$ attēlo konikas /līknes, ko var dabūt šķeļot taisnu riņķa konu ar plni/.

Algebriskās līknes var šķirot pēc polinoma F/x,y/ pakāpēm. Runājot par līknēm, polinoma pakāpi sauc par līknes kārtu./taisnei kārta ir viens, konikai divi/.

Ja šķeļ algebrisku līkni ar taisni, šķelšanās ptu skaits ir vienāds ar līknes kārtu /vairāki šķelšanās pti var sakrist; tie var būt arī imaginari/

Piemērs:

$x^4 + y^2 - xy = 0$ šķeļot ar x asi, tad y = 0 un dod

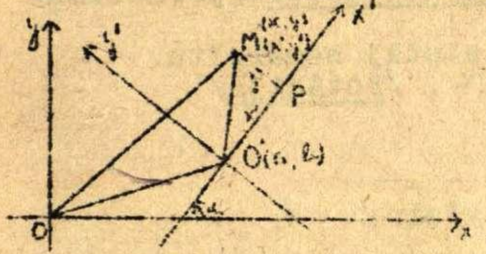
$x^4 = 0$ 4 šķelšanās ptus, kas sakrīt.

K O O R D I N Ā T U T R A N S F O R M Ā C I J A S

Koordinātu transformācija ir pāreja no vienas koordinātu sistēmas otrā. Aplūkosim šādas: 1/ Pāreja no vienas Dekarta koordinātu sistemas uz otru

2/ Pāreja no polārām uz ortogonālām Dekarta koordinātām.

Pāreja no ortogonālām uz ortogonālām Dekarta koordinātām.



Jāatrod sakarība starp pta M vecām un jaunām koordinātām /x,y/ un /x',y'/, ja koordinātu sistēmas Ox, Oy vietā ņemam sistēmu O'x', O'y'. Jauno sistemu raksturo

α = / Ox, O'x'/

O' /a,b/

Sakarības starp koordinātām meklēsim veidā $x = \varphi/x',y'/$

$y = \psi/x',y'/$

Jo tad, ievietojot x un y izteiksmes dotas līknes vienādojumā, varēs dabūt līknes vienādojumu jaunā koordinātu sistēmā. Aplūkojam vektorus, kas raksturo abās sistemās M :

$$\vec{OM} = \vec{OO'} + \vec{O'M}$$

Projicē vektoru summu $\vec{OM} = \vec{OO'} + \vec{O'P} + \vec{PM}$

uz x asi $x = a + x'\cos/Ox,O'x'/ + y'\cos/Ox,O'y'/$

uz y asi $y = b + x'\cos/Oy,O'x'/ + y'\cos/Oy,O'y'/$

No : /Ox,O'x'/ = α

/Ox,Oy / = $\frac{\pi}{2}$

/O'x',O'y'/ = $\frac{\pi}{2}$

atrodam

/Ox,O'y'/ = /Ox,O'x'/+/O'x', O'y'/ = $\alpha + \frac{\pi}{2}$

/Oy,O'x'/ = /Oy,Ox/ + /Ox,O'x'/ = $\alpha - \frac{\pi}{2}$

/Oy,O'y'/ = /Oy,Ox/ + /Ox,O'x'/ +/O'x'O'y'/ = $-\frac{\pi}{2} + \alpha + \frac{\pi}{2} = \alpha$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= a + x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y &= b + x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{aligned}}$$

Dod koordinātu transformāciju ortogonālām koordinātām.

Lai atrastu x' un y' kā x un y funkcijas, reizinam vienādojumus ar labā pusē atzīmētiem faktoriem un saskaitam:

$$\begin{array}{l|l|l} x = a + x'\cos\alpha - y'\sin\alpha & .\cos\alpha & .-\sin\alpha \\ y = b + x'\sin\alpha + y'\cos\alpha & .\sin\alpha & \cos\alpha \end{array}$$

$$x' = -a\cos\alpha - b\sin\alpha + x\cos\alpha + y\sin\alpha$$
$$y' = a\sin\alpha - b\cos\alpha - x\sin\alpha + y\cos\alpha$$

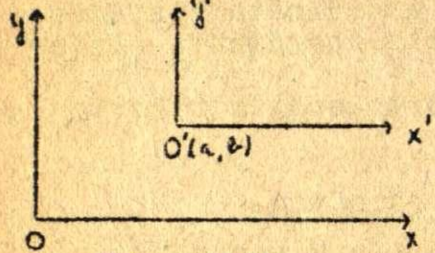
apzīmējot

$$-a\cos\alpha - b\sin\alpha = a'_1 \qquad a\sin\alpha - b\cos\alpha = b'_1 ,$$

a'_1 un b'_1 ir punkta O koordinātas jaunā koordinātu sistēmā O'x', O'y' un

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= a'_1 + x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ y' &= b'_1 - x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{aligned}}$$

Ja maina tikai sākuma ptu, bet nemaina ass virzienu un vērsumu

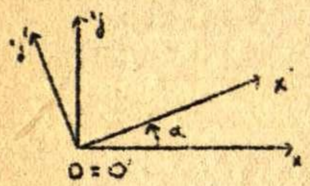


$$\alpha = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= a + x' \\ y &= b + y' \end{aligned}}$$

šai gadījumā saka, ka ar koordinātu sistēmu izdara translāciju /pārnesumu/

2. Maina tikai asu virzienus, bet sākuma ptu atstāj nemainītu. Jauno sistēmu dabū, veco pagriežot pa leņķi α. /rotācija/



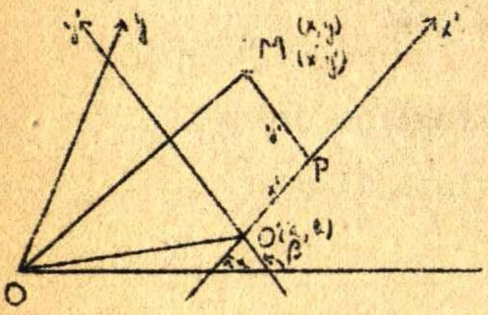
$$a = b = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{aligned}}$$

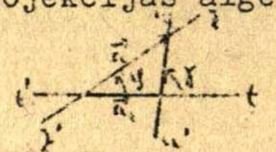
Slīpleņķa koordinātu transformācija. Apzīmējam dotās koordinātu sistēmas asu leņķi ar ω : $/Ox,Oy/ = \omega$

Jauno koordinātu sistēmu raksturos: O'/a,b/ ; /Ox,O'x'/ = α;

/Ox,O'y'/ = β



Sakarību $\vec{OM} = \vec{OO'} + \vec{O'P} + \vec{PM}$ projicēsim uz x un y asi paralēli otrai asij, atceroties formulu vektoru projekcijas algebriskā garuma noteikšanai



$$a_t = \bar{a}\,\frac{\sin/\delta - \gamma/}{\sin\gamma}$$

Projicējot uz x'x : $\gamma = \omega$, δ ir leņķis starp asi un vektoru nesēju asi /α un β /

$$x = a + x'\frac{\sin[\omega - /Ox,O'x'/]}{\sin\omega} + y'\frac{\sin[\omega - /Ox,O'y'/]}{\sin\omega}$$

projicējot uz y asi $\gamma = -\omega$; δ ir leņķis starp y asi un vektora nesēju asi

ZB-100

1941.g.maijā.

$$y = b + x'\,\frac{\sin[-\omega - /Oy,O'x'/]}{\sin(-\omega)} + y'\,\frac{\sin[-\omega - /Oy,O'y'/]}{\sin/-\omega/}$$

Jāaprēķina leņķi:

$$\omega = /Ox,Oy/ \qquad /Oy,Ox/ = -\omega$$

$$\alpha = /Ox,O'x'/$$

$$\beta = /Ox,O'y'/$$

$$/Oy,O'x'/ = /Oy,Ox/ + /Ox,O'x'/ = -\omega + \alpha$$

$$/Oy,O'y'/ = /Oy,Ox/ + /Ox,O'y'/ = -\omega + \beta$$

Ievietojot dabū:

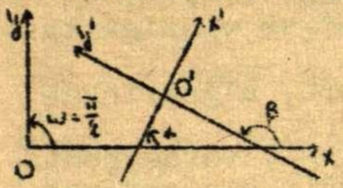
$$-\omega - /Oy,O'x'/ = -\omega + \omega - \alpha = -\alpha$$

$$-\omega - /Oy,O'y'/ = -\omega + \omega - \beta = -\beta$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= a + x'\,\frac{\sin/\omega-\alpha/}{\sin\omega} + y'\,\frac{\sin/\omega-\beta/}{\sin\omega} \\ y &= b + x'\,\frac{\sin\alpha}{\sin\omega} + y'\,\frac{\sin\beta}{\sin\omega} \end{aligned}}$$

Formulas, kas dod iespēju pāriet no pta koordinātām vecā sistēmā uz jauno slīpleņķa koordinātu sistemu.

Pārbaudei nosakām formuļu veidu, kad abas sistemas ir ortogonālas.



$$\beta = /Ox,O'y'/ = /Ox,O'x'/ + /O'x',O'y'/ = \alpha + \frac{\pi}{2}$$

$$\omega = \frac{\pi}{2}$$

$$\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$$

$$x = a + x'\cos\alpha - y'\sin\alpha$$

$$y = b + x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$$

kas ir formulas ortogonālām koordinātu sistēmām.

Abos gadījumos x un y izsakami kā pirmās pakāpes izteiksmes attiecībā pret x' un y'. Šīs sistemas atrisinot, dabū x' un y' kā pirmās pakāpes izteiksmes attiecībā pret y un x

$$x' = a_1' + \lambda x + \mu y$$

$$y' = b_1' + \nu x + \rho y$$

sistemu /2/ var atrisināt attiec. pret x' un y' tad, kad sistemas $D \neq 0$

$$D = \begin{vmatrix} \dfrac{\sin/\omega-\alpha/}{\sin\omega} & \dfrac{\sin/\omega-\beta/}{\sin\omega} \\ \dfrac{\sin\alpha}{\sin\omega} & \dfrac{\sin\beta}{\sin\omega} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sin^2\omega}\left[\sin/\omega-\alpha/\sin\beta - \sin(\omega-\beta)\sin\alpha\right]$$

$$\sin/\omega-\alpha/ = \sin\omega\cos\alpha - \cos\omega\sin\alpha \quad |\,.\sin\beta$$

$$\sin/\omega-\beta/ = \sin\omega\cos\beta - \cos\omega\sin\beta \quad |\,.-\sin\alpha$$

$$\sin/\omega-\alpha/\sin\beta - \sin\alpha\sin/\omega-\beta/ = \sin\omega/\cos\alpha\sin\beta - \cos\beta\sin\alpha/ =$$

$$= \sin\omega\sin/\beta-\alpha/$$

$$D = \frac{\sin/\beta-\alpha/}{\sin\omega}$$ ja šis determinants nav 0, tad vienādojuma sistema atrisināma

Ja $\beta-\alpha = k\pi$, $\sin/\beta-\alpha/ = 0$ tad $D = 0$, bet tagad Oy' sakrīt ar Ox' jaunās asis sakrīt un nevar tikt ņemtas par koordinātu asīm.

Aplūkosim algebrisku līkni $F/x,y/ = 0$. Par līknes <u>kārtu</u> sauc polinoma F pakāpi, t.i. augstāko skaitli, ko dabū saskaitot x un y pakāpes atsevišķos F monomos.

Piemērs

$$2x^2y^3 + 3xy^4 - x^2 + 5 = 0 \quad \text{kārta} = 5$$

Polinoms F satur locekļus, kam vispārīgais veids ir x^iy^h

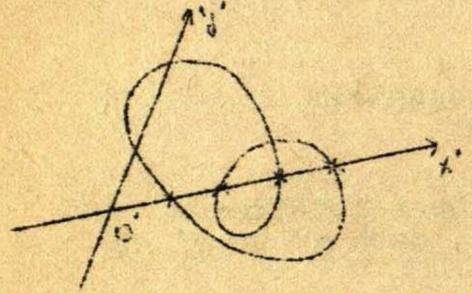
Ja F pakāpe ir n, eksistē tādi i un h, kam $i+h=n$. Līknes vienādojums jaunā sistemā būs

$$/2/\ F = /a+\lambda x' + \mu y', b + \nu x' + \rho y'/ = 0 \qquad /1/ F/x,y/ = 0$$

Vienādojums /2/ atkal ir polinoms attiecībā pret x'y', kas pielīdzināts 0 un tam nevar būt locekļu, kā pakāpe augstāka par n, bet gan varētu gadīties, ka pakāpe mazāka, jo augstākas pakāpes locekļi var pazust

$$n_1 \leq n \quad n_1 \text{ līknes /2/ kārta.}$$

Pārejot atpakaļ no jaunās uz veco koordinātu sistemu, redzam, ka $n_1 \geq n$. Abas sakarības n un n_1 starpā nav pretrunīgas vienīgi tai gadījumā, kad $n = n_1$, tā tad:
pārejot no vienas Dekarta koordinātu sistēmas uz otru, algebriskās līknes kārta n nemainās.



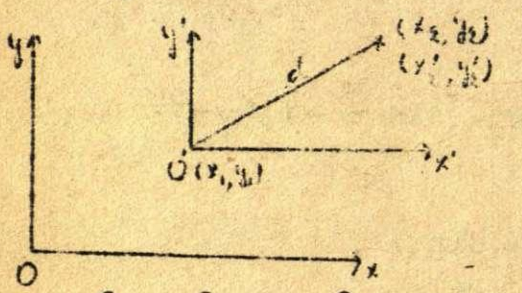
Lai līkni šķeltu ar taisni, varam ņemt šo taisni jaunā koordinātu sistemā par x' asi, un y' asi ņemt patvaļīgu. Līknes vienādojums tad taps par /3/

$$G = /x', y'/ = 0$$

Tā kā šķelšanās ptiem $y = 0$, jo tie ir uz x' ass, sakarība /3/ dod $G/x', o/ = 0$, t.i. n-tās pakāpes v-mu attiecībā pret x.

Pielietojums: <u>divu punktu attālums</u>.

1/ Ortogonālā koordinātu sistēmā



Doti pti $/x_1,y_1/$ un $/x_2,y_2/$, jāaprēķina attālums d.
Atceramies, ka ptam x,y attālumu līdz sākuma ptam dod $d_1^2 = x^2 + y^2$
Izlieto koordinātu transformāciju /translāciju/ pārnesot O uz /O'/ ar koordinātām $x_1 y_1$

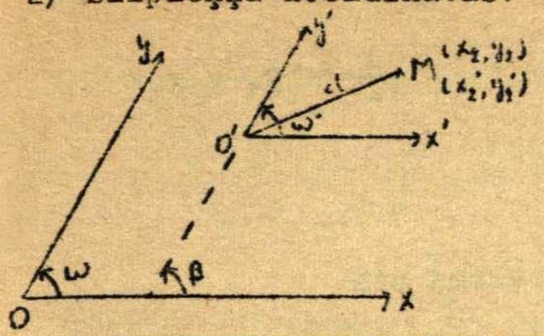
$$d^2 = x_2'^2 + y_2'^2$$

$$x_2 = x_1 + x_2' \qquad x_2' = x_2 - x_1$$

$$y_2 = y_1 + y_2' \qquad y_2' = y_2 - y_1$$

$$\boxed{d^2 = /x_2-x_1/^2 + /y_2-y_1/^2}$$

2/ Slīpleņķa koordinātās.



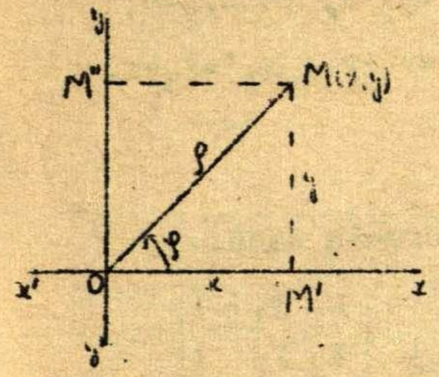
Lietojot tos pašus apzīmējumus, kā iepriekš, atrod divu ptu $/x_1 y_1/$ un $/x_2,y_2/$ attālumu slīpleņķa koordinātās.

$$d^2=x_2'^2 + y_2'^2 + 2x_2'y_2'\cos\omega'$$

$\omega' = \omega$. Vispārīgās koordinātu transformācijas formulas liekot $\alpha = 0$, $\beta = \omega$, translacijai dod $\begin{cases} x_2 = a + x_2' \\ y_2 = b + y_2' \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = a + x_1' \\ y_1 = b + y_1' \end{cases}$ $\begin{cases} x_2' = x_2 - x_1 \\ y_2' = y_2 - y_1 \end{cases}$

$$\boxed{d^2 = /x_2-x_1/^2+/y_2-y_1/^2 + 2/x_2-x_1/\cdot/y_2-y_1/\cos\omega}$$

Polārkoordinātu transformācija uz Dekarta koordinātām.



$x = \vec{OM'}$ $y = \vec{OM''}$

$x = \rho\cdot\cos\varphi = \rho\cdot\cos/x'x,\vec{OM}/$

$\varphi = /x'x,\vec{OM}/$ $\frac{\pi}{2} = /x'x,y'y/$

$/y'y,\vec{OM}/ = /y'y,x'x/ + /x'x,\vec{OM}/ = -\varphi + \frac{\pi}{2}$

$$\boxed{\begin{aligned} y &= \rho\sin\varphi \\ x &= \rho\cos\varphi \end{aligned}}$$

formulas, kas atļauj pāriet no polārām uz ortogonālām koordinātām, kur x ass iet pa polāro asi un y ass tai perpendikulāra.

No šīm formulām var atrast ρ un φ, ja dots x un y

$$x^2+y^2 = \rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi \; ; \quad \rho = \pm\sqrt{x^2+y^2}$$

ja ρ ir 0, leņķis φ ir nenoteikts; ja ρ nav 0, ir divas ρ nozīmes: + - un jāņem viena nozīme

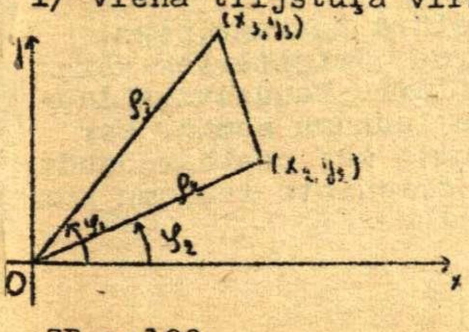
$$\boxed{\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{x}{\rho} \\ \sin\varphi &= \frac{y}{\rho} \end{aligned}} \qquad \frac{y}{x} = \frac{\rho\cdot\sin\varphi}{\rho\cdot\cos\varphi} \; ; \quad \frac{y}{x} = \operatorname{tg}\varphi$$

Pāreja no ortogonālām uz polārām koordinātām:

Ja pāriet no polārām koordinātām uz slīpleņķa vai otrādi, tad pāriet vispirms uz ortogonālām.

Trījstūra laukums kā virsotņu koordinātu funkcija/ortogon.koord./

1/ Viena trijstūra virsotne atrodas sākuma ptā.



Trijstūra laukumu var aprēķināt, ņemot x asi par polāro asi; divu malu garums būs ρ_2 un ρ_3. Trijstūra leņķis punktā O vienlīdzīgs $\varphi_3 - \varphi_2$; tas ir leņķis starp malām ρ_2 un ρ_3.

Laukuma formula ir spēkā arī zīmēm

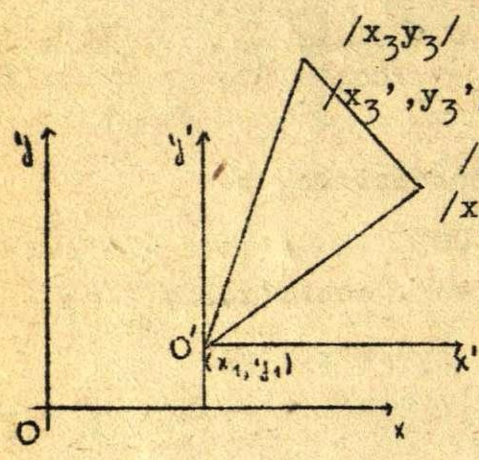
$$L = \frac{1}{2}\rho_2\rho_3\cdot\sin/\varphi_3-\varphi_2/$$

$$L = \frac{1}{2} \rho_2 \rho_3 /\sin \varphi_3 . \cos \varphi_2 - \cos \varphi_3 \sin \varphi_2/ =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\rho_2 \cos \varphi_2 . \rho_3 \sin \varphi_3 - \rho_2 \sin \varphi_2 . \rho_3 \cos \varphi_3 \right] = \frac{1}{2} /x_2 y_3 - y_2 x_3/$$

$$L = \frac{1}{2} /x_2 y_3 - y_2 x_3/; \qquad L = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

2/ No trijstūra virsotnēm neviena nav sākuma ptā



Novieto koordinātu sākuma ptu ptā O' paturot virzienus

$x = a + x'$ $x = x_1 + x'$; $x' = x - x_1$,

$y = b + y'$;te $y = y_1 + y'$; $y' = y - y_1$,

$x_2' = x_2 - x_1$; $y_2' = y_2 - y_1$,

$y_3' = y_3 - y_1$; $x_3' = x_3 - x_1$,

$$L = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2' & y_2' \\ x_3' & y_3' \end{vmatrix};$$

Ievietojot laukuma formulā dabū:

$$L = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}; \text{ ko var arī rakstīt: } L = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

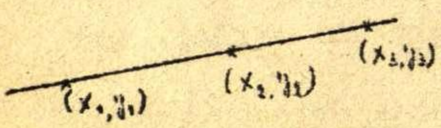
Pārbaudei atskaita pirmās rindas elementus no pārējo rindu elementiem

$$L = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - 1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$$

Šīs ir trijstūŗa laukuma formulas ortogonālā koordinātu sistemā.

S e c i n ā j u m i no trijstūŗa laukuma formulas:

1/ Lai trīs pti atrastos uz tnes, trijstūrim, kam šie pti ir virsotnes, laukums ir vienāds ar 0 un otrādi. Tā tad: lai trīs pti būtu uz tnes, nepieciešams un pietiekams, lai trijstūrim, kā virsotnes šie pti ir, laukums būtu 0:

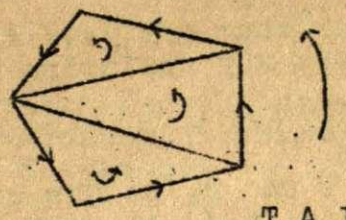


$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

2/ Varam iegūt formulu, kas dod patvaļīga daudzstūra laukumu, piem. 5 stūŗa laukumu to sadalot vairākos trijstūŗos. Trijstūriem vērsumu nosaka malas, kas tiem kopējas ar daudzstūri. Daudzstūŗa laukums, kas šai gadījumā pozitīvs, ir trijstūŗa laukumu summa. Var gadīties, ka atsevišķiem trijstūriem ir vērsums, kas pretējs daudzstūra vērsumam, tomēr vienmēr visu trijstūŗu orientēto laukumu summa

ZB- 100
1941.g.maijā.

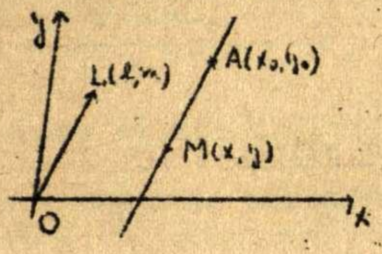
dod daudzstūŗa orientēto laukumu.



T A I S N E   P L Ā K S N Ē .

Taisni var noteikt dažādos veidos, no kuriem izvēlamies vienkāršākos. Katrs atbildīs kādam īpašam taisnes vienādojuma veidam.

<u>Taisnes vienādojumi ar virziena parametriem.</u>



Taisni var raksturot ar tās ptu $A/x_0 y_0/$ un tās virzienu, dodot vektoru $\overline{OL}/1,m/$ parallēlu taisnei.
Jāizsaka, ka pts $M/x, y/$ atrodas uz taisnes.
Ja M atrodas uz taisnes vektori $\overrightarrow{AM}$ un $\overrightarrow{OL}$ paraleli t.i. var atrast tādu skaitli t, ka

$$/1/ \quad \overrightarrow{AM} = t.\overrightarrow{OL}$$

/1/ ir <u>vektoriāls</u> taisnes vienādojuma veids. Vektoru komponentes pa asīm ir $\overrightarrow{AM}/x-x_0, y-y_0/$; $\overrightarrow{OL}/1,m/$ Projicējot sakarību /1/ uz x asi parallēli y asij un otrādi, tā pastāvēs vektoru projekciju un to algebrisko gaŗumu starpā:

$$/2/ \quad \begin{aligned} x-x_0 &= t.1 \;; & x &= x_0 + t.1 \\ y-y_0 &= t.m \;; & y &= y_0 + t.m \end{aligned}$$

taisnes v-ms <u>parametriskā veidā</u>

jo izsaka tekošā pta koordinātas, kā parametra t funkcijas.
l un m sauc par virziena parametriem; tie abi kopā nosaka taisnes virzienu.
Taisnes vienādojums bez parametra t ir dabūjams, to izslēdzot

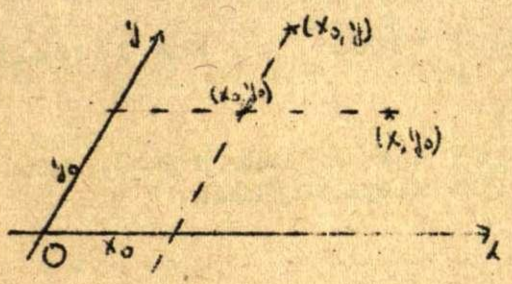
$$/3/ \quad \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m}$$

taisnes v-ms ar virziena parametriem /taisne parallēla vektoram ar komponentēm l, m/

l, m reizē nevar būt 0, jo tad taisnes virziens nebūtu noteikts.
Ja l vienāds ar 0 un $m \neq 0$, tad

$$\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{m}$$

nepieciešams, lai $x - x_0 = 0$, jo citādi kreisā puse līdzinātos bezgalībai, kas nebūs vienāda labai pusei.



Visus ptus, kam abscise x_0, dabū, velkot parallēli caur $/x_0, 0/$ y asij.

ja $m = 0$; $l \neq 0$

$$\frac{x-x_0}{1} = \frac{y-y_0}{0}$$

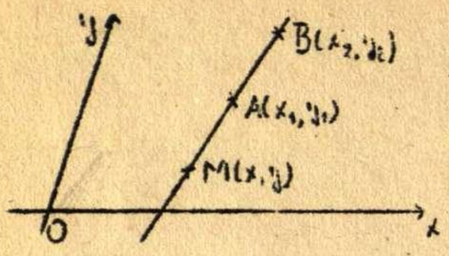
spēkā tikai, ja

$$y-y_0 = 0; \; y=y_0$$

Sakarība raksturo taisni parallēlu x asij.

ZB - 100
1941.g.maijā.

TAISNE NOTEIKTA AR D I V I E M SAVIEM PUNKTIEM.



$A/x_1,y_1/$ un $B/x_2,y_2/$
Katrai taisnei caur $A/x_1,y_1/$ tekošā pta koordinātas x,y apmierina sakarību

$$\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m}$$

jāatrod vēl l un m, ko dos otrs taisnes pts $B/x_2,y_2/$, jo vektors $AB/x_2-x_1,y_2-y_1/$ ir paralēls vektoram $OL/l,m/$; par lielumiem l un m var ņemt AB komponentes, kas ir $/x_2-x_1,y_2-y_1$:

$$l = x_2-x_1 \qquad /4/$$
$$m = y_2-y_1$$

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2-x_1} = \frac{y - y_1}{y_2-y_1}}$$

t.i. <u>taisnes vienādojums, kas iet caur diviem ptiem.</u>
Var rīkoties arī šādi: izteiksim, ka $B/x_2,y_2/$ atrodas uz tnes

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} \;; \quad \text{t.i.} \quad \frac{x_2 - x_1}{l} = \frac{y_2 - y_1}{m} \;;$$

Izdala pirmās sakarības locekļus ar otrās sak.locekļiem, dabū

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Drīkst dalīt ar l un m arī tad, ja viens no tiem ir 0, ievērojot, ka pēdējā gadījumā arī attiecīgajam skaitītājam jābūt vienādam ar 0.

TAISNES VISPĀRĪGAIS VIENĀDOJUMS

Izejam no vienādojuma ar virziena parametriem $\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m}$ pieņemot, ka l un m nav 0.
Atsvabināmies no saucējiem un pārnesam locekļus kreisā pusē

$$mx - mx_1 - ly + ly_1 = 0$$
$$mx - ly - mx_1 + ly_1 = 0$$

Ieved apzīmējumus: $m=A$; $-l=B$; $-mx_1+ly_1 = C$
un ievieto

$$/5/ \quad \boxed{Ax + By + C = 0}$$

Ja dota kāda taisne, to vienmēr var attēlot veidā /5/, kur locekļi ir pirmās pakāpes attiecībā pret x un y.
<u>Katra taisne ir pirmās kārtas līkne.</u>

Vai katrs /5/ attēlo taisni? Ja pieņemam, ka $A \neq 0$ vai $B \neq 0$, tad var atrast 2 skaitļus x_o un y_o kas apmierina vienādojumu:

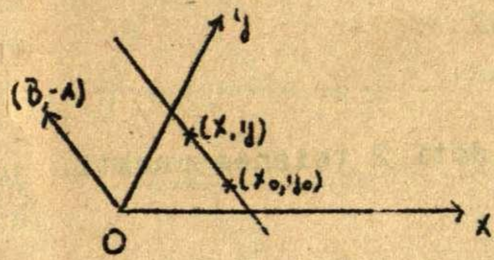
$$Ax_o + By_o + C = 0$$

atskaitot no /5/ dabū $A/x-x_o/ + B/y-y_o/ = 0$
izdalot ar AB; $\frac{x-x_o}{B} + \frac{y-y_o}{A} = 0$;

ZB - 100
1941.g.maijā.

/6/ $$\boxed{\frac{x - x_0}{B} = - \frac{y - y_0}{A}}$$

/6/ izteic, ka vektors ar komponentēm $/x-x_0, y-y_0/$ kas savieno ptus ar koordinātām /x,y/,$/x_0,y_0/$ ir parallēls vektorām ar komponentēm /B,-A/. Tā tad pts /x, y/ pārvietojas pa taisni, kas parallēla vektoram /B,-A/



Speciāli vienādojuma /5/ gadījumi

1/ $A=0$; $B \neq 0$; $By+C = 0$

$y = -\frac{C}{B}$; taisne kas $\parallel$ x asij,

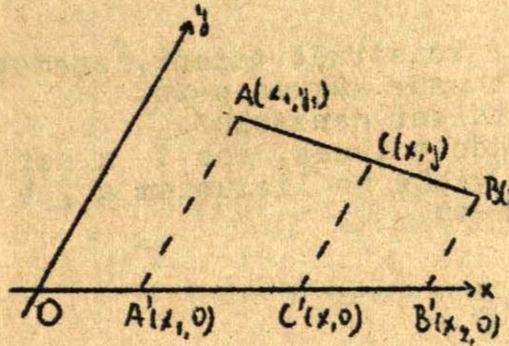
2/ $A \neq 0$, $B=0$; $Ax+C=0$;

$x = - \frac{C}{A}$; taisne kas $\parallel$ y asij.

Ja viens no koeficientiem pie x, y ir 0, taisne ir parallēla attiecīgai asij /un otrādi/.
Ja $C = 0$, vienādojums homogens un apmierināts, ja $x = y = 0$, t.i. taisne iet caur sākuma ptu.

KOORDINĀTU ATRAŠANA PTAM C , KAS SADALA TAISNES GABALU

AB attiecībā λ: Doti punkti $A/x_1y_1/$, $B/x_2y_2/$ un $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \lambda$ /C uz taisnes AB/.



Projicē ptus A,B,C uz x asi par-li y asij ptos A',B',C'

Tiem abscisas tādas pašas kā ptiem ABC un ptu kārtība tāda pati, tādēļ tā pati attiecība pastāv arī projekciju starpā/zīmē un absolūtā vērtībā/.

$\frac{\overline{A'C'}}{\overline{C'B'}}$ ir λ zīme;

$$\frac{A'C'}{C'B'} = \frac{AC}{CB} \; ; \quad \frac{\overline{A'C'}}{\overline{C'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \lambda \; ; x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$$

x ir arī pta C abscisa. Viena C koordināta ir atrasta.
Lai atrastu y, projicē ACB uz y asi. Formula analoga

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

y ir pta C ordināta. Ja λ ir dots, atrod pta C koordinātas, kas sadala AB attiecībā λ .

Pārbaudam, ka $A/x_1, y_1/$, $B/x_2,y_2/$, $C/ \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$ / ir uz taisnes

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} & \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{1 + \lambda} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_1 + \lambda x_2 & y_1 + \lambda y_2 & 1 + \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Punkts C atrodas uz taisnes AB

ZB - 100
1941.g.maijā.

Ja $\lambda = 1$:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \; ; \; y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$ C ir taisnes gabala AB viduspunkts.

Ja lielumam λ piešķir visas iespējamās vērtības no $-\infty$ līdz $+\infty$, dabū visu taisnes AB punktu koordinātas.

λ var pieņemt par parametru:

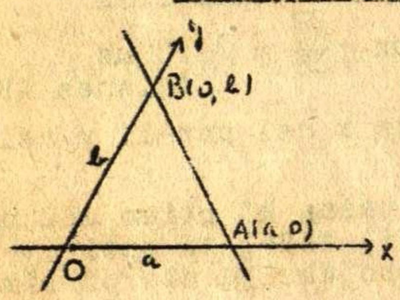
$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \\ y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \end{cases}$$

tad ir taisnes 2.veida parametrisks v-ms, ja doti 2 taisnes punkti.
C nonāk taisnes punktā bezgalībā, ja $\lambda = -1$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = -1.$$

Vienīgās bezgalīgās x un y vērtības rodas, ja $\lambda = -1$; tad vismaz viens no lielumiem x, y bezgalīgs. Katrai taisnei ir viens punkts bezgalībā, kam atbilst λ vērtība -1

Taisnes vienādojums ar asu gabaliem.



Taisne šķeļ koordinātu asis p-tos A/a,o/ un B/o,b/.
Ja dota taisne, ir noteiktas p-tu A un B koordinātas.

Ja doti a un b, var konstruēt taisni, izņemot ja a=b=o/taisne iet caur sākuma p-tu, a un b vērtības taisni nenosaka/.
No aplūkošanas izslēdz taisnes, kas ∥ x asij, vai y asij, jo tām viens no lielumiem a, b bezgalīgs un taisnes, kas iet caur sākuma p-tu.

$$Ax + By + C = 0 \quad C \neq 0$$

Dala v-mu ar -C un apzīmē: $A' = -\frac{A}{C}$, $B' = -\frac{B}{C}$

$$A'x + B'y - 1 = 0$$

Jānosaka A' un B', ko dod noteikumi, ka taisne iet caur p-tiem /a,o/ /o,b/

$$A'a - 1 = 0 \qquad A' = \frac{1}{a}$$
$$B'b - 1 = 0 \qquad B' = \frac{1}{b}$$

Ievietojot šīs vērtības taisnes v-mā, dabū taisnes v-mu ar asu gabaliem, ko tā nošķeļ no x un y asīm

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Pārbaude:

1.pak.v-ms [illegible]. Tā iet caur abiem p-tiem A un B

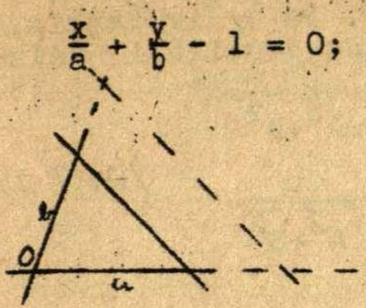
Piemērs:

taisni $2x + \frac{3}{5}y = 1$ v-ms ar asu gabaliem ir $\frac{x}{\frac{1}{2}} + \frac{y}{\frac{5}{3}}$

ZB - 100
1941.g.maijā.

Kas notiek ar taisni,ja taisnes abi pirmie koeficienti top par nulli?

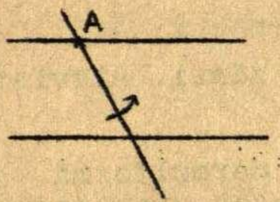
$A = B = 0$



$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$; Liekam a un b pieaugt attālinot taisni no sākuma punkta.

$a \to \infty$, $b \to \infty$, $\frac{1}{a} \to 0$, $\frac{1}{b} \to 0$

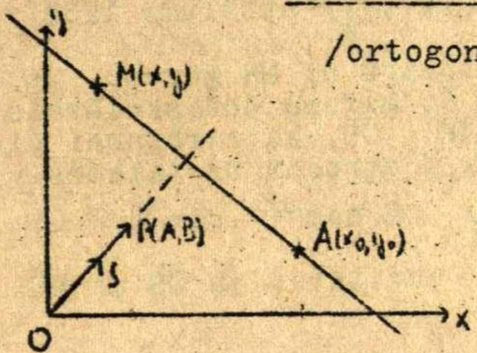
Taisnes v-ms top par $-1=0$; tas attēlo taisni,kas neaprobežoti attālinājusies - taisni bezgalībā.



Ņemot 2 taisnes, kas šķeļas, un griežot vienu no tām ap kādu tās p-tu A, kamēr tā top parallēla otrai, redzam:
1/Ja 2 taisnes ∥ , tād šķeļas bezgalībā.
2/Ja 2 taisnes šķeļas bezgalībā un nesakrīt, tās ir parallēlas.

Ņemot bezgalīgi tālo taisni $-1=0$, tā šķeļ x un y asis bezgalīgi tālos punktos. Tā jāuzskata kā parallēle x un y asīm.
Šai taisnei ir šādas īpašības:
1/ Tās visi punkti atrodas bezgalīgi tālu.
2/ Tā ir ∥ jebkuŗai plāksnes taisnei, un tās virziens nav noteikts.

TAISNES VIENĀDOJUMS NORMĀLFORMĀ.



/ortogonālu koordinātu sistēmā/.

Taisni var noteikt, dodot tās p-tu A ar koordinātām x_0, y_0 un vektoru $\overrightarrow{OP}/A,B/$, kas perpendikulārs taisnei.

$M/x,y/$ atradīsies uz taisnes tikai tad, ja $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{OP}$.

Ja 2 vektori $\perp$, to skalārais reizinājums ir nulle.

$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{OP} = 0$; ko izsakot ar vektoru komponentēm

$\overrightarrow{AM}/x-x_0, y-y_0/$, $\overrightarrow{OP}/A,B/$ dabū: $A/x-x_0/+B/y-y_0/=0$ noteikums, kas jāpilda pta $M/x,y/$ koordinātām,lai tas atrastos uz taisnes.

$Ax + By - Ax_0 - By_0 = 0$. Liekot $C = - Ax_0 - By_0$ dabū:

$$Ax + By + C = 0.$$

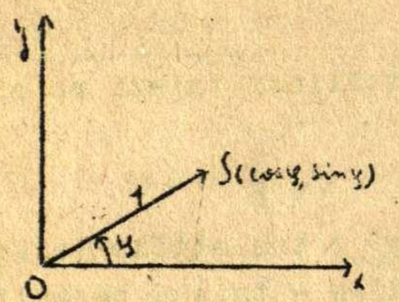
Vektoram $\overrightarrow{OP}$, kas $\perp$ taisnei, komponentes ir /A,B/. Šī vektora virzienu nedrīkst mainīt, bet var mainīt tā garumu. Var ņemt $\overrightarrow{OP}$ vietā $\overrightarrow{OS}$, kam garums $\overrightarrow{OS} = +1$

$\overrightarrow{OS} = k.\overrightarrow{OP}$. $\overrightarrow{OP}/A,B/$, tad $\overrightarrow{OS}/kA,kB/$

$k^2A^2 + k^2B^2 = 1$; $k^2 = \frac{1}{A^2+B^2}$ ja vismaz viens no A un B $\neq 0$, $.k^2$ ir galīgs lielums.

ZB - 100
1941.g.maijā.

$k = \frac{E}{\sqrt{A^2+B^2}}$. $E = \pm 1$. k ir normētājs reizinātājs/faktors/



Punkta S koordinātas, ja OS = 1 ir $\cos\varphi$ un $\sin\varphi$, ja φ ir leņķis, ko x ass veido ar perpendikuli taisnei.

$$\cos\varphi = k.A = \frac{EA}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

$$\sin\varphi = k.B = \frac{EB}{\sqrt{A^2+B^2}} \qquad /E = \pm 1/$$

Reizinot ar k taisnes vienādojumu

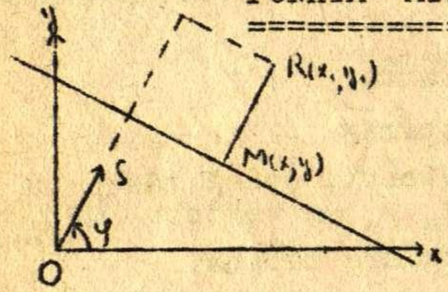
$Ax + By + C = 0$; $kAx + kBy + kC = 0$; liek $kC = -p$

Lai p būtu pozitīvs, k ņem ar zīmi, kas pretēja C zīmei. Aizvietojot koeficientus ar to nozīmēm

$$x.\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0,$$ kas ir t-nes v-ms normālformā. /Hesses vienādojums/.

$p = -\frac{EC}{\sqrt{A^2+B^2}}$. Lielums p ir sākuma punkta attālums līdz taisnei

PUNKTA ATTĀLUMS LĪDZ TAISNĒM.



Jāatrod p-ta $R/x_1,y_1/$ attālums līdz taisnei.
Tas būs vienlīdzīgs ar $\overrightarrow{MR}$ garumu, ja MR ⊥ taisnei. Šo garumu dod skalārais reizinājums $\overrightarrow{MR}$. $\overrightarrow{OS}$, kā atrašanai pietiks zināt, ka p-ts M atrodas uz taisnes.

$\overrightarrow{MR}/x_1-x, y_1-y/$; $\overrightarrow{OS}/\cos\varphi, \sin\varphi/$.

$\overrightarrow{OS} . \overrightarrow{MR} = d$ dos orientēto attālumu, kas pozitīvs, ja $\overrightarrow{OS}$ un $\overrightarrow{MR}$ vienādā vērsumā, un negatīvs, ja pretējā.

$$/x_1-x/\cos\varphi + /y_1-y/\sin\varphi = d$$

$$+\begin{cases} x_1.\cos\varphi + y_1\sin\varphi - x\cos\varphi - y\sin\varphi = d \\ x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0 \end{cases}$$ /x un y apmierina taisnes v-mu/.

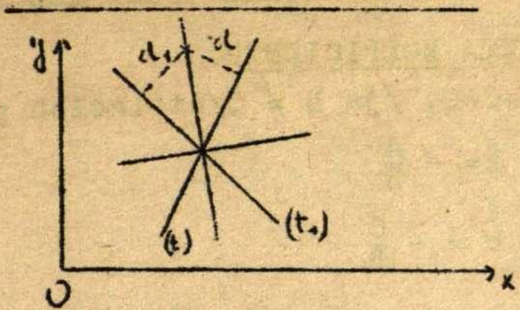
$$d = x_1\cos\varphi + y_1\sin\varphi - p.$$

ir meklētais punkta attālums līdz taisnei, kas dabūjams taisnes normālvienādojuma kreisā loceklī ievietojot punkta R koordinātas.
Ja meklē sākuma punkta attālumu līdz taisnei, tad $x_1 = y_1 = 0$ un $\underline{d = -p}$.

d zīme mainās punktam R, ejot cauri taisnei. Vienā pusē taisnei d +, otrā - . d top par nulli tikai pašas taisnes punktiem.
Tā taisnes puse, kam atbilst negatīvie d, satur sākuma punktu.

ZB - 100
1941.g.maijā.

Divu taišņu bisektrisas.



Bisektrisa ir to p-tu ģeometriskā vieta, kā attālumi līdz taisnēm ir vienādi.

$|d| = |d_1|$, kas prasa vai nu

$d = d_1$ -zīmes vienādas vai arī

$d = -d_1$ - " pretējas.

Ņemam doto taišņu vienādojumus normālformā:

(t) $x.\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0$

(t_2) $x.\cos\varphi_1 + y\sin\varphi_1 - p_1 = 0$

Šo vienādojumu kreisās puses izteic punkta /x,y/ attālumus d un d_1 līdz taisnei (t) un (t_1). Bisektrisu punktiem

$$d + d_1 = 0 \quad \text{vai} \quad d - d_1 = 0, \text{ t.i.}$$

$$x\,/\cos\varphi + \cos\varphi_1/ + y/\sin\varphi + \sin\varphi_1/ - p - p_1 = 0 \quad \text{saskaitot}$$

$$x/\cos\varphi - \cos\varphi_1/ + y/\sin\varphi - \sin\varphi_1/ - p + p_1 = 0 \quad \text{atskaitot.}$$

Bisektrisu vienādojumus dabū no taišņu v-miem normālformā, tos

1/ saskaitot
2/ atskaitot.

Ja taišņu vienādojumi doti vispārīgā veidā

$$Ax + By + C = 0 \qquad k = \frac{E}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}$$

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \qquad k_1 = \frac{E}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}$$

bisektrisu atrisināšanai vispirms pārvērš v-mus normālformā, reizinot ar normētājiem reizinātājiem. k un k_1, pēc tam saskaita un atskaita.

Piemērs:

dotas 2 taisnes ar v-miem

$$\begin{cases} 4x+3y-2 = 0 & k = \dfrac{+1}{\sqrt{4^2+3^2}} = \dfrac{1}{5} \\ 3x-4y+1 = 0 & k = \dfrac{-1}{\sqrt{4^2+3^2}} = \dfrac{-1}{5} \end{cases}$$

Pareizina katru v-mu ar k:

$$\begin{cases} \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{2}{5} = 0 \\ -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{1}{5} = 0 \end{cases}$$

dod abu taišņu bisektrisas.

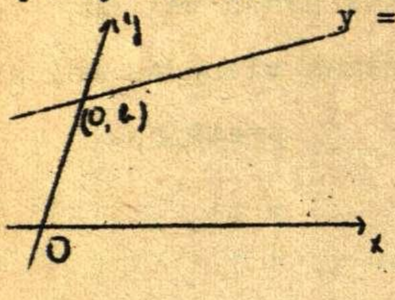
$$\begin{cases} \frac{1}{5}x + \frac{7}{5}y - \frac{3}{5} = 0 \\ \frac{7}{5}x - \frac{1}{5}y - \frac{1}{5} = 0 \end{cases} \text{ vai } \begin{cases} x + 7y - 3 = 0 \\ 7x - y - 1 = 0 \end{cases}$$

ZB - 100
1941.g.maijā.

Normētājiem faktoriem k, k_1 te tā pati absolūtā vērtība, tādēļ varēja tūlīt saskaitīt un atskaitīt./Šis paņēmiens lietājams tikai kad $k=k_1$/

TAISNES VIENĀDOJUMS AR LEŅĶA KOEFICIENTU.

Atrisina vispārīgo taisnes v-mu $Ax+By+C=0$, /ja $B \neq 0$/attiecībā pret y: $By=-Ax-C$



$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}\text{ ; apzīmē } k = -\frac{A}{B}$$

$$b = -\frac{C}{B}$$

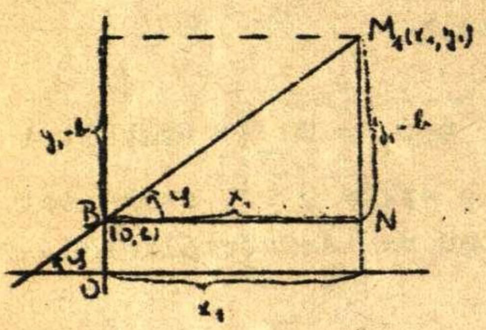
$$\underline{\underline{y = kx + b.}}$$

k - leņķa koeficients
b - sākuma ordināta.

Ja $x = 0$, $y = b$./punkts uz y ass/.

k nosaka y pieaugšanas ātrumu, ja x pieaug.
ja $k > 0$, y pieaug līdz ar x; taisne pa labi iet uz augšu.
" $k = 0$, y konstants. " parallela y asij
" $k < 0$, y samazinās, ja x pieaug;" pa labi, iet uz leju.

Ortogonālā sistēmā:



$$\underline{\underline{k = tg\,\varphi\,.}}$$

Lai to konstatētu, ņem p-tu $M_1/x_1y_1/$ uz taisnes un izsaka, ka taisne iet caur B/0,b/

$$y = kx+b \qquad \overline{NM_1} = BM_1\sin\varphi = y_1-b$$

$$y_1 = kx_1+b \qquad \overline{BN} = BM_1\cos\varphi = x_1$$

$$k = \frac{y_1 - b}{x_1} = tg\,\varphi$$

U z d e v u m i :

1/ caur doto p-tu vilkt taisni ar virziena koeficientu k
Doti k, $A/x_1y_1/$

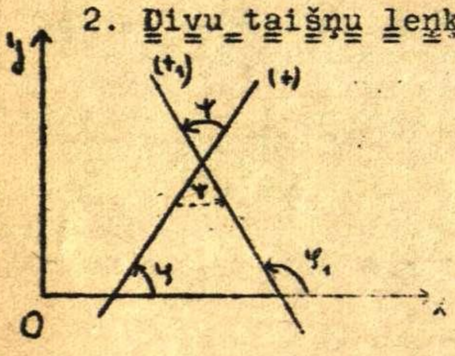
$$y = kx+b$$

$$y_1 = kx_1+b \qquad b \text{ būs } -kx_1+y_1$$

Vienkāršāk nezināmais koeficients b izslēdzams v-mus atskaitot.

$$y - y_1 = k/x-x_1/\ ; \quad \underline{\underline{y = k/x-x_1/ + y_1}}.$$

2. Divu taišņu leņķa noteikšana.



/ortogonālā koordinātu sistēmā/.

Dotas taisnes: /t/ $y=kx+b$
$/t_1/$ $y=k_1x+b_1$

/k, k_1, b, b_1, doti skaitļi/.

Jāatrod leņķis $/t,t_1/ = \psi$, ko veido abas t-nes.

$k = tg\,\varphi$; $k_1 = tg\,\varphi_1$;

$\psi = /t,t_1/$

$\varphi = /0x,t/$

ZB - 100
1941.g.maijā.

$\varphi_1 = /Ox, t_1/$

$/t, t_1/ = /t, Ox/ + /Ox, t_1/$

$\psi = \varphi_1 - \varphi$

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\operatorname{tg}\varphi_1 - \operatorname{tg}\varphi}{1 + \operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi} = \frac{k_1 - k}{1 + kk_1}.$$

================================

Kādām jābūt sakarībām starp k un k_1, ja taisnes parallēlas vai perpendikulāras?

1/ ja $/t/ \parallel /t_1/$: $\operatorname{tg} x = 0$ $\quad \underline{k_1 = k}$.

2/ ja $/t/ \perp /t_1/$: tg x ir bezgalīgs $\quad 1 + kk_1 = 0$: $\quad \underline{k_1 = -\frac{1}{k}}$

Kad abas taisnes dotas ar vispārīgiem vienādojumiem

$$Ax + By + C = 0$$
$$A_1x + B_1y + C_1 = 0_1$$

lai noteiktu taišņu leņķi, ir lietderīgi to v-mus pārveidot veidā ar leņķa koeficientu.

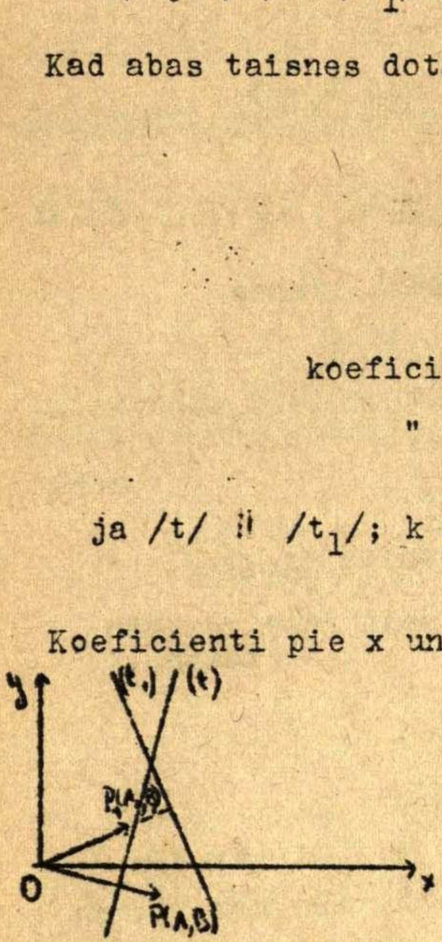
Atrisinot v-mus attiecībā pret y

koeficients pie x pirmai taisnei: $k = -\frac{A}{B}$

" " otrai " $k_1 = -\frac{A_1}{B_1}$

ja $/t/ \parallel /t_1/$; $k = k_1$ $\quad \frac{A}{B} = \frac{A_1}{B_1}$; $AB_1 - BA_1 = 0$; $\quad \underline{\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1}}$

Koeficienti pie x un y abām taisnēm proporcionāli.



Sakarību $\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1}$ var dabūt arī no fakta,

ka A un B ir komponentes vektoram, kas $\perp$ taisnei.

/Divi vektori parallēli, ja to komponentes proporcionālas/.

2./ $/t/ \perp /t_1/$ $1 + kk_1 = 0$. Ievietojot k un k_1 vietā to izteiksmes:

$$1 + \frac{A}{B} \cdot \frac{A_1}{B_1} = 0 \qquad \underline{A A_1 + B B_1 = 0.}$$

ir noteikums, lai 2 taisnes būtu perpendikulāras.
Tas iegūstams arī izsakot, ka taisnēm perpendikulārie vektori $\overrightarrow{OP}/A,B/$ un $\overrightarrow{OP}_1/A_1,B_1/$ ir perpendikulāri, t.i.to skalārais reizinājums ir nulle.

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP}_1 = AA_1 + BB_1 = 0$$

Patvaļīgā parallēlkoordinātu sistēmā noteikums par divu taišņu **parallēlitāti** paliek tāds pats, kā ortogonālā koordinātu sistēmā, **bet noteikums** par perpendikularitāti top citāds.

Uzdevums. Dota taisne t un punkts $/x_1y_1/$, **caur kuŗu jāvelk** taisne $/t_1/$ vai nu $\parallel$ vai $\perp$ dotai taisnei:

$$/t/\quad Ax + By + C = 0$$

$$/t_1/\quad A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

Jānosaka A_1, B_1, C_1 t.i. to attiecības

Pirmos 2 koeficientus dos taisnes virziena noteikums

C_1 dos fakts, ka taisne iet caur p-tu x_1y_1

1/. $/t_1/ \parallel /t/$. $\quad \frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1}$

A_1 var izvēlēties patvaļīgi. Ja ņem $A_1 = A$, tad $B_1 = B$

$$Ax + By + C_1 = 0.$$

Izsakot, ka t-ne iet caur punktu $/x_1y_1/$ aprēķina C_1: $Ax_1 + By_1 + C_1 = 0$

$$A/x-x_1/ + B/y-y_1/ = 0 \text{ ir meklētā taisne.}$$

2/. $/t_1/ \perp /t/$

Meklē koeficientus A_1 un B_1

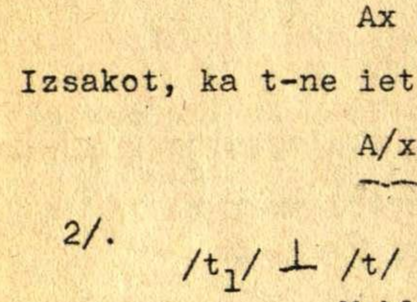
$AA_1 + BB_1 = 0$; ņemot $A_1 = B_1$ $B_1 = -A$:

$Bx - Ay + C_1 = 0$ šī taisne iet caur punktu $/x_1, y_1/$

$Bx_1 - Ay_1 + C_1 = 0$ atskaitot no iepriekšējā dabū **meklēto taisni.**

$$B/x-x_1/ - A/y-y_1/ = 0$$

Noteikt divu taišņu šķelšanās punktu.



Dotas taisnes: $/t/$, $/t_1/$. Atrast $M/x,y/$

Pta M koordinātas apmierina abu taišņu v-mus:

$$/t/\quad Ax + By + C = 0$$

$$/t_1/\quad A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

Ja $D = \begin{vmatrix} A & B \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix} \neq 0$ sistemai pastāv viens atrisinājums, ko dod

Kramera formulas:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -C & B \\ -C_1 & B_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} A & -C \\ A_1 & -C_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}}$$

Taisnēm $/t/$ un $/t_1/$ ir viens vienīgs šķelšanās p-ts ar **koordinātām** x, y.

ZB - 100
1941.g.maijā.

Ja $D = 0$, $\begin{vmatrix} A & B \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix} = 0$. A un B ir proporcionāli, kas ir tad, kad taisnes parallēlas : $/t/ \parallel /t_1/$

Iespējami divi gadījumi:

1/ taisnes nesakrīt un šķeļas bezgalībā /x un y izteiksmēs vismaz viens no skaitītājiem nav nulle/.
2/ taisnes sakrīt un tām ir bezgalīgi daudz kopēju punktu, ko var uzskatīt par šķelšanās p-tiem. Ikkatra x un y vērtība, kas apmierina vienu v-mu, apmierina arī otru. Tie var atšķirties ar patvaļīgu proporcionalitātes faktoru:

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1}.$$

Abu taišņu koeficienti proporcionāli - taisnes sakrīt.

<u>Homogēnās koordinātās</u> liekot $x = \frac{x_1}{x_3}$ $y = \frac{x_2}{x_3}$ var uzrakstīt taisnes vispārīgo vienādojumu:

$$A\frac{x_1}{x_3} + B\frac{x_2}{x_3} + C = 0.$$

$$\text{v-ms} \quad Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0.$$

ir taisnes vienādojums homogēnās koordinātās.
Katrs pirmās pakāpes homogens v-ms, piem. $A_1x_1+B_1x_2+C_1x_3 = 0$ attēlo taisni.

$$\begin{cases} Ax_1+Bx_2+Cx_3 = 0 \\ A_1x_1+B_1x_2+Cx_3 = 0 \end{cases}$$ ir homogēna sistema attiecībā pret x_1, x_2, x_3

$$x_1 = \rho\begin{vmatrix} B & C \\ B_1 & C_1 \end{vmatrix} \qquad x_2 = \rho\begin{vmatrix} C & A \\ C_1 & A_1 \end{vmatrix} \qquad x_3 = \rho\begin{vmatrix} A & B \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}$$

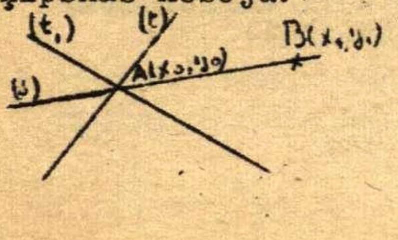
Ja vismaz viens no determinantiem atšķiras no nulles, dabū 3 skaitļus, kas proporcionāli lielumiem x_1, x_2, x_3 un punkts būs noteikts. Abām taisnēm viens šķelšanās punkts.

Ja $x_3 \neq 0$ punkts galīgā attālumā.
" $x_3 = 0$ bezgalīgi tāls punkts.

Ja visi trīs divrindu determinanti ir nulles, abi vienādojumi nosaka vienu un to pašu taisni. Abas taisnes sakrīt un tām bezgalīgi daudz kopēju punktu.

T A I Š Ņ U Š Ķ I P S N A .

Taišņu šķipsnu veido visas taisnes, kas iet caur vienu punktu - šķipsnas nesēju.



Aplūkosim divas šķipsnas taisnes /t/un/t_1/

$/t/ \quad f = Ax + By + C = 0$

$/t_1/ \quad f_1 = A_1x + B_1y + C_1 = 0$

ar kopēju $A/_{x_0, y_0}/$.

Vienādojums /1/ $f + \lambda f_1 = 0$, kur λ ir patvaļīgs skaitlis, attēlo visas šķipsnas taisnes, ja parametram λ piešķir visas iespējamās vērtības.

1./ Ikkatra taisne /1/ iet caur punktu A, jo tā koordinātas x_0, y_0 padara par nulli katru no izteiksmēm f, f_1, tā tad arī summu $f+\lambda f_1$

2./ Ikkatru taisni /s/ caur A var attēlot ar vienādojumu /1/ņemot piemērotu λ. Šim nolūkam ņem kādu taisnes /s/ punktu $B/x_1,y_1/$ un izsaka, ka tas atrodas uz taisnes /1/ :

$$f/x_1,y_1/ + \lambda f_1/x_1 y_1/ = 0$$

$$\lambda = - \frac{f/x_1,y_1/}{f_1/x_1 y_1/}$$

Ievietojot šo λ vērtību sakarībā /1/, dabūjam taisnes /s/vienādojumu. Katrai taisnei caur A atbilst noteikta λ vērtība; taisnei $/t_1/$ λ ir bezgalīgi liels. Tiešām, dalot vienādojumu /1/ ar λ :

$$/1'/ \quad \frac{1}{\lambda} . f + f_1 = 0$$

Liekam $\lambda \to \infty$, tad $\frac{1}{\lambda} \to 0$.un paliek $f_1=0$ t.i.dabū taisnes$/t_1/$ vienādojumu. Lietderīgi ņemt 2 homogēnus parametrus un λ attēlot kā divu skaitļu attiecību.

$$\lambda = \frac{\beta}{\alpha}$$

un ievieto šo λ izteiksmi vienādojumā /1/

$$f + \frac{\beta}{\alpha} f_1 = 0 \qquad /2/ \; \alpha f + \beta f_1 = 0$$

ir šķipsnas vienādojuma otrais veids.

Divu parametru λ un β lietāšanas priekšrocības:

1./ vienādojuma /2/ kreiso pusi var padarīt identisku ar vienādojuma kreiso pusi dotai taisnei caur A.

2./ uzdevumos bieži α un β var ņemt kā veselus skaitļus, kamēr λ ir daļskaitlis.

p i e m ē r s : lai taisne /2/ ietu caur punktu $/x_1 y_1/$ jāpastāv sakarībai $/3/ \; \alpha f/x_1 y_1/ + \beta f_1/x_1 y_1/ = 0$

Par α un β var ņemt ikkatrus divus skaitļus, kas apmierina sakarību /3/, piem:

$$\alpha = f_1/x_1 y_1/ \qquad \beta = - f/x_1 y_1/$$

Taišņu šķipsnas jēdziens ļauj vienkārši atrisināt jautājienus, kad caur 2 taišņu /t/ un $/t_1/$ krustpunktu jāvelk taisne, kas padota vēl kādam noteikumam:

uzraksta v-mu šķipsnas vispārīgai taisnei:

$$/4/ \quad /\alpha A + \beta A_1/x + /\alpha B + \beta B_1/y + \alpha C + \beta C_1 = 0$$

un izsaka , ka taisne /4/ izpilda doto noteikumu.
Jautājums, kad meklētā taisne iet caur dotu punktu ir atrisināts; apskatīsim vēl gadījumus, kad tā $\parallel$ vai $\perp$ dotai taisnei:

Prasam, lai taisne /4/ $\parallel$ taisnei /5/

$$/5/ \quad A'x+B'y+C' = 0; \qquad \frac{\alpha A + \beta A_1}{A'} = \frac{\alpha B + \beta B_1}{B'}$$

Atsvabinoties no saucējiem, dabū homogēnu vienādojumu, kur var ņemt vienu no lielumiem α, β patvaļīgu.

Jānosaka taisne, kas iet caur divu taišņu krustpunktu un ⊥ trešai taisnei:

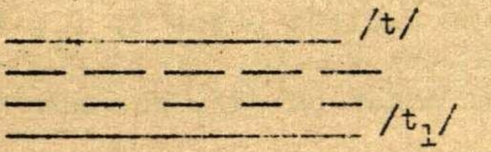
$$/6/ \quad A''x + B''y + C'' = 0$$

Ar aplūkotām formulām šo jautājumu varēs atrisināt tikai, ja koordinātas ortogonālas:

$$(\alpha A + \beta A_1)A'' + (\alpha B + \beta B_1)B'' = 0.$$

aplūkotām šķipsnām nesējs punkts galīgā attālumā.

Aplūkosim tagad divas paralēlas taisnes /t/ un /t_1/:



$$/t/ \; Ax + By + C = 0$$

$$/t_1/ \; \mu Ax + \mu By + C_1 = 0$$

$$A(\alpha + \beta\mu)x + B(\alpha + \beta\mu)y + \alpha C + \beta C_1 = 0$$

ir taisne ∥ abām dotām taisnēm, jo koeficienti abiem pirmiem locekļiem ir proporcionāli.

Šķipsna sastāv no paralēlām taisnēm. Var atrisināt tikai jautājumu, kad šķipsnas taisne iet caur dotu punktu.

Ja šķipsnas taisnes paralēlas, nesējs punkts A aizgājis bezgalībā un visām šķipsnas taisnēm tas ir kopējs.

Lai 3 taisnes ietu caur vienu punktu, jābūt izpildītam vienam noteikumam. Kāds ir šis noteikums?

Uzrakstām taišņu v-mus:

/t/ $Ax + By + C = 0$	$Ax + By + Cz = 0$
/t_1/ $A_1x + B_1y + C_1 = 0$	$A_1x + B_1y + C_1z = 0$
/t_2/ $A_2x + B_2y + C_2 = 0$	$A_2x + B_2y + C_2z = 0$

Kādā gadījumā eksistē x un y vērtības, kas apmierina visus 3 vienādojumus?

Reizinot brīvos locekļus ar lielumu z, dabūjam homogenu 3 vienādojumu sistemu ar nezināmiem x, y, un z. Tās x un y vērtības, kas dos kopējā pta koordinātas, atbildīs z vērtībām, kas = 1

Sistēmai ir atrisinājums, kam vismaz viens nezināmais ≠ 0, t.i. netriviāls atrisinājums un $D = 0$. Tā tad ja

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0$$

taisnēm ir vismaz viens kopējs punkts. Ja tām ir bezgalīgi daudz kopēju punktu, taisnes sakrīt.

Ja taisnes nav dotas skaitliski, bet vispārīgā veidā, lieto šķipsnas jēdzienu un jēdzienu par lineāro atkarību. Ja taisnes

$$/t/ \quad f/x,y/ = 0$$

$$/t_1/ \quad f_1/x,y/ = 0$$

$$/t_2/ \quad f_2/x,y/ = 0$$

iet caur vienu punktu, var atrast tādas α un β vērtības, ka izteiksme

$$f_2/x,y/ \equiv \alpha f/x,y/ + \beta f_1/x,y/ \quad \text{vai (1)} \quad \alpha f + \beta f_1 - f_2 \equiv 0$$

ZB - 100
1941.g.maijā.

Identitātes zīme ($\equiv$) nozīmē to, ka sakarības /1/ kreisā pusē koeficienti pie x,y un brīvais loceklis pazūd.

Sakarība /1/ ietilpst vispārīgāka veida sakarībā /2/

$$/2/\quad af + af_1 + a_2f_2 \equiv 0$$

Izteiksmes f, f_1,f_2 ir lineāri atkarīgas, ja ir iespējama šo izteiksmju starpā sakarība /2/, kur vismaz viens koeficients a ,a_1,a_2 atšķiras no nulles.

Ja dotas 3 taisnes, kas iet caur 1 punktu, to v-mu kreisās /puses/ lineāri atkarīgas, jo katra taisne pieder pie abu pārējo noteiktas šķipsnas, t.i. pastāv sakarība /1/

Jāpierāda pretējais: ka taisnes, kā v-mu kreisās puses f, f_1, f_2 ir lineāri atkarīgas iet caur vienu punktu.

Par a_2 nosaucam vienu no koeficientiem sakarībā /2/, kas nav nulle:

$a_2 \neq 0$; var dalīt sakarību /2/ ar a_2

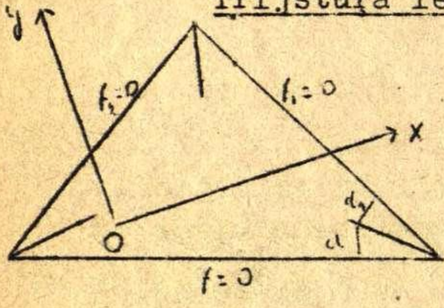
$$\frac{a}{a_2} f + \frac{a}{a_2} f_1 + f_2 \equiv 0$$

$$f_2 = - \frac{a}{a_2} f - \frac{a_1}{a_2} f_1$$

izsaka, ka taisne, kā vienādojuma kreisā puse ir f_2 iet caur taišņu $f = 0$, $f_1=0$ noteiktās šķipsnas nesēju punktu.

<u>Piemērs:</u>

<u>Trijstūra iekšējās bisektrisas iet caur vienu punktu.</u>



Sākuma p-tu ņemam trijstūŗa iekšpusē. Tad patvaļīgiem trijstūŗa iekšējās bisektrisas p-tiem attālumi d, d_1,d_2 līdz malām būs negatīvi.

Uzraksta ōra malu v-mus normālformā:

$f/x,y/ = 0$, $f_1/x,y/=0$, $f_2/x,y/ = 0$.

Punkta /x,y/ attālumi līdz malām ir

$d = f/x,y/$	Bisek-	$d = d_1$
$d_1=f_1/x,y/$	trisu punktiem	$d_1=d_2$
$d_2=f_2/x,y/$		$d_2=d$.

$f/x,y/ = f_1/x,y/$

$f_1/x,y/= f_2/x,y/$

$f_2/x,y/= f/x,y/$ ir iekšējo bisektrisu vienādojumi.

Pārnesot visus locekļus kreisā pusē dabū:

$$f/x,y/ - f_1/x,y/ = 0$$
$$f_1/x,y/ - f_2/x,y/ = 0$$
$$f_2/x,y/ - f/x,y/ = 0$$

Saskaitot vienādojumus, kreisā pusē dabū identisku nulli, kas nozīmē, ka izteiksmes ir lineāri atkarīgas un visas bisektrisas iet caur kopēju punktu. Arī 2 ārējās un viena iekšējā bisektrisa iet caur kopēju punktu.

<u>ZB - 100</u>
1941.g.maijā.

TAISNES VIENĀDOJUMS POLĀRĀS KOORDINĀTĀS.

Uzraksta taisnes vispārīgu vienādojumu ortogonālās Dekarta koordinātās un aizvieto x un y ar to izteiksmēm polārās koordinātās:

$$Ax + By + C = 0 \qquad x = \rho \cos\varphi$$
$$y = \rho \sin\varphi$$

/1/ $A.\rho \cos\varphi + B\rho \sin\varphi + C = 0$

ir vispārīgais taisnes vienādojums polārās koordinātās

Atrisinot attiecībā pret ρ :

$$\rho = -\frac{C}{A\cos\varphi + B\sin\varphi}$$

sakarība ar vispārīgo veidu : $\rho = \dfrac{C}{a\cos\varphi + b\sin\varphi}$.

attēlo taisni polārās koordinātās.

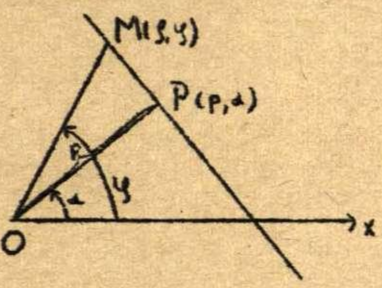
Ņemot taisnes v-mu normālformā:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$$
$$\rho\cos\varphi\cos\alpha + \rho\sin\varphi\sin\alpha - p = 0$$

/2/ $\rho\cos/\varphi - \alpha/ = p$

/2¹/ $= \dfrac{p}{\cos/\varphi - \alpha/}$

Vienādojuma /2/ iztulkojums.



OP - normāle taisnei ar tekošo punktu M

$\triangle$rī OPM : OP = p

/OP, OM/ = $\varphi - \alpha$. $\rho\cos/\varphi - \alpha/ = p$

Afīnas un metriskas īpašības.

Dekarta koordinātu sistēmas asu leņķis vienaldzīgs gadījumos, kur aplūko taišņu šķelšanos, parallēlismu, vai attiecību, kādā punkts C sadala taisnes gabalu.

Bet ja meklē attālumu starp 2 punktiem, vai leņķi 2 taišņu starpā, formulas, kas iegūtas ortogonālai koordinātu sistēmai, neder slīpleņķa koordinātu sistēmai.

1. grupā ietilpstošās īpašības sauc par a f ī n ā m.
2. " " " " " m e t r i s k ā m.

Afīnās īpašības raksturo dotās figūras sakarība ar bezgalīgi tālo taisni.

+++++++++++++
++++++++++ ++++++++++
+++++++++++++

ZB - 100
1941.g. maijā.