Version released: March 11, 2015

Einšteina relativitātes teorija līdz E=mc²

Matemātiķa piedzīvojumi

3.izdevums

Kārlis Podnieks, LU profesors

Karlis.Podnieks@lu.lv

3.izdevuma (2015.gada) jaunumi: a) Lorenca transformāciju izvedums 3-dimensiju un n-dimensiju telpai (t.s. Hergloca formulas), sk. pielikumu beigās; b) pārstrādāta (uzlabota) 1.daļa.

Ievads

Kaut kad 1960-jos gados, vēl students būdams, lasīju (krievu tulkojumā) Einšteina 1916.gadā uzrakstīto populārzinātnisko grāmatiņu:

[1] A. Einstein. Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie: Gemeinverständlich. *Sammlung Vieweg, Heft 38*; Braunschweig: F. Vieweg & Sohn, 1917 (online English translation).

Tur pirmoreiz ieraudzīju Lorenca transformāciju formulu izvedumu. Salīdzinot ar citiem populārzinātniskiem apstāstiem "uz pirkstiem", tas likās aizraujoši kompakts. Palikusi atmiņā "autentiskuma piegarša" (pats Einšteins!), tad pieņēmums, ka formulām ir jābūt lineārām pret x un t (kāpēc to nepamato?), t.s. relativitātes principa izmantošana un vēl pieņēmums (fiziķiem – eksperimentāls fakts) par gaismas ātruma neatkarību no atskaites sistēmas.

Tuvāk pensijas gadiem, 2005.gada vasarā man sagribējās saprast precīzi matemātiski, kādi tieši pieņēmumi ir Einšteina speciālās relativitātes teorijas (Lorenca formulu) pamatā. Nonācu pie secinājuma, ka šo formulu izvedumā pieņēmums par gaismas ātruma neatkarību no atskaites sistēmas nav nepieciešams, jo maksimālā ātruma eksistence seko jau no relativitātes principa. Arī tas bija aizraujoši: izrādās, ka no ļoti vispārīgiem pieņēmumiem ("dabas likumiem"?) seko, ka ir iespējami tikai divi varianti: Galileja-Ņūtona absolūtā telpa un absolūtais laiks, un Lorenca-Einšteina laiktelpa, kurā telpa un laiks ir savīti kopā, un mehāniski ķermeņi nevar kustēties ātrāk par kādu konstantu ātrumu c (c ir teorijas parametrs, kura konkrēta vērtība no tās gan nav izrēķināma). Citu variantu nav – neko citu kā Lorenca transformācijas Einšteins izgudrot (vai atklāt?) nevarēja!

Mēģinot visu maksimāli vispārināt, sapinos un beidzot nolēmu paskatīties, ko šajā virzienā ir izdarījuši citi. Un, protams, atklāju, ka mans "atklājums" ir atklāts jau 1910.gadā (Vladimirs Ignatovskis, sk. piemiņas plāksni zemāk). Izskatās gan, ka "īstie" fiziķi šādus meklējumus par nopietniem neuzskata, un grāmatās piemin tikai garāmejot. Tas laikam tāpēc, ka neko jaunu fizikas teoriju attīstībā šie meklējumi nav devuši. Toties uzgāju vairākus "off mainstream" sacerējumus, kuru autori, likās, "manu" problēmu ir atrisinājuši pat labāk nekā es pats to spēju. Jutos sevī ļoti vīlies, tāpēc šos sacerējumus nemaz nelasīju un visu pasākumu pametu uz 8 gadiem...

Un tikai 2013.gada jūlijā man sagribējās lietas noskaidrot līdz galam. Un divu nedēļu laikā tiešām tiku līdz galam...

Šī sacerējuma pirmajā versijā (sk. šeit) varējāt lasīt par to, ko izlasīju un izdomāju šajās divās nedēļās.

Bet vasaras brīvībā pagāja vēl mēnesis, un nu varēju piedāvāt jau daudz vairāk: gan vēl tālāk būtiski pilnveidotu Lorenca transformāciju izvedumu, gan Einšteina speciālās relativitātes teorijas dinamiskās daļas izvedumu līdz pat slavenajai formulai $E=mc^2$. Par to varējāt lasīt šī sacerējuma otrajā versijā (sk. šeit) un varat lasīt tepat – tālāk.

2014.gada vasaras laikā "izkodu" līdz galam Lorenca transformāciju izvedumu 3 dimensiju (un *n* dimensiju) telpai (t.s. Hergloca formulas). Mācību grāmatās parasti aplūko tikai viendimensiju gadījumu, kas ir (it kā) vienkāršāks. Arī sava sacerējuma pamattekstā es esmu rīkojies tāpat. Manis piedāvāto Lorenca transformāciju izvedumu 3 dimensiju (un *n* dimensiju) telpai sk. pielikumā šī teksta beigās. Darba rezultātā man sagribējās pārstrādāt (un uzlabot) arī sacerējuma 1.daļu (izvedumu viendimensiju telpai). Kas ir sanācis – sk. tālāk.

Sk. Wikipedia: Galileo Galilei, Isaac Newton, Hendrik Lorentz, Albert Einstein, Henri Poincaré.

1. Pirmā daļa - kinemātika

1.1. Slavenās formulas

Pieņemsim, ka mums ir *laiktelpa*, kurā ir tikai viena telpas dimensija x un laiks t, un aplūkosim divas inerciālas atskaites sistēmas S un S' (IAS, šobrīd nav svarīgi, kas tas ir). Otrā sistēma kustas pret pirmo ar kādu konstantu ātrumu v. Sākumā abu sistēmu koordinātu sākumpunkti sakrīt (x'=x=0, t'=t=0).

Ja kāda laiktelpas punkta koordinātes sistēmā S ir (x, t), bet sistēmā S' tās ir (x', t'), kā šīs koordinātes ir savā starpā saistītas, t.i., kā, zinot (x, t), var aprēķināt (x', t')? Ir zināmi divi varianti:

$$x' = x - vt, \quad t' = t$$ (t.s. Galileja transformācijas);

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad t' = \frac{-\frac{v}{c^2}x + t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$ (t.s. Lorenca transformācijas, c ir gaismas ātrums, $|v| < c$).

Ļoti vienkāršās Galileja transformācijas atbilst klasiskajai jeb **Ņūtona mehānikai** [pats Galilejs par "savām" transformācijām gan neko nezināja]. Lorenca transformācijas atbilst **Einšteina speciālajai relativitātes teorijai**, kurā mehāniski objekti nevar kustēties ātrāk par gaismu (t.i. mehāniskiem objektiem $|v| < c$, pati gaisma ir īpašs gadījums).

1.2. Matemātiķa izvedums

Pārfrazēsim amerikāņu fiziķa Ričarda Feinmana teicienu: nav svarīgi, kādā veidā Jūs izvedat Lorenca transformācijas, ja vien rezultāts ir ... Lorenca transformācijas. Tas ir fiziķa viedoklis, viņu interesē tikai patiesība "tur ārā". Bet matemātiķi nav fiziķi – viņus interesē ne tikai rezultāts, bet arī pats tā iegūšanas process: no kādiem pieņēmumiem rezultāts sanāk, un no kādiem – nesanāk.

Sk. Wikipedia: Richard Feynman.

Kā jau teicu, tas, kas tiek piedāvāts tālāk, pirmkārt, nav nekas īpaši jauns. Jau no pašiem relativitātes teorijas sākuma gadiem atsevišķi cilvēki ir interesējušies par minimālajām pieņēmumu kopām, no kuram var izvest Lorenca transformācijas (sk. tālāk). Un, otrkārt, mēs šo izvedumu veidosim nevis kā fiziķi, bet kā matemātiķi (ko tas nozīmē – redzēsiet paši). Tomēr man gribētos cerēt, ka tālāk izklāstītā pilnveidotā izveduma versija kaut kādā (vismaz – skaistuma) ziņā pārspēj priekšteču sasniegumus...

Viens no Einšteina relativitātes teorijas pamaprincipiem nosaka, ka **visās inerciālās atskaites sistēmās visiem mehānisko procesu likumiem ir jāizskatās vienādi.** Tas ir Einšteina ieviestais "relativitātes princips". Tik izplūdis princips (tā nav kritika!), protams, nav ne formulējams, ne izmantojams kā aksioma. Formulēt un izmantot var tikai konkrētus tā "specgadījumus". Redzēsim, kādi no tiem (īstenībā – niecīgi maza daļiņa no visa "lielā" principa) tiek izmantoti relativitātes teorijas būvēšanai.

Tagad sākam vēlreiz un jau nopietnāk: pieņemsim, ka mums ir *laiktelpa*, kurā ir tikai viena telpas dimensija un laiks. Ko tas nozīmē? Laiktelpa it kā sastāv no punktiem, katrs no tiem atrodas kaut kur telpā un kaut kur laikā. Lielas jēgas no šī priekšstata gan nav, jo ne telpa, ne laiks taču nav absolūti (vai ne? bet varbūt ir?). Jēga sāks rasties tikai vēlāk, ievedot pieņēmumus (jeb aksiomas), uz kuriem balstīsies mūsu izvedums. Tīri matemātiski, šobrīd (t.i. pašā sākumā) mums nekādas atšķirības starp telpu un laiku vēl nav.

Ar sarkanu krāsu šeit un tālāk ir iezīmēti **pieņēmumi** (aksiomas), kas būs mūsu izveduma pamatā. Pārējais teksts ir vai nu beletristika, vai matemātisks izvedums no pieņēmumiem.

Laiktelpā varam ievest *inerciālu atskaites sistēmu* S. Ko tas nozīmē? Pagaidām, visai nedaudz: pēc sistēmas S ievešanas katram laiktelpas punktam tiek pierakstīta telpas koordināte x un laika koordināte t (divi reāli skaitļi). Punktu ar x=t=0 sauksim par attiecīgās sistēmas *sākumpunktu*. Mums būs jārunā arī par x=0 kā sistēmas S *telpas* sākumpunktu, un t=0 – kā par S *laika* sākumpunktu. Koordināte x nozīmē attālumu *telpā*, tātad sistēmā S būtu vajadzīga noteikta *attāluma mērvienība* un attiecīgs mērinstruments *(lineāls)*. Nomainot mērvienību pret citu, koordinātu skaitļi mainītos. Tāpat ir ar *laiku* – sistēmā S būtu vajadzīgs *pulkstenis*, kas skaita laiku noteiktās *mērvienībās*. Nomainot šo pulksteni pret citu, laika mērījumi mainītos. Vai sistēmai pietiek ar vienu lineālu un vienu pulksteni, vai arī ir vajadzīgi daudzi (piemēram, katrā telpas punktā savs lineāls un savs pulkstenis)? Matemātiķim tie ir grūti jautājumi... Aizmirstam šo beletristiku! Mūsu izvedumā ne lineāli, ne pulksteņi izmantoti netiks.

Bet mēs varam ievest arī citu inerciālu atskaites sistēmu S', un tad katram laiktelpas punktam tiks pierakstīta **cita** telpas koordināte x' un **cits** laiks t'. Arī sistēmai S' būs savs sākumpunkts x'=t'=0 utt. (kas principā varētu nesakrist ar S sākumpunktu). Un būs savs lineāls un savs pulkstenis (vai daudzi tādi?). Bet vēlreiz: mūsu izvedumā ne lineāli, ne pulksteņi izmantoti netiks.

Tātad šobrīd mums IAS ir tikai pilnīgi patvaļīgas koordinātu sistēmas.

Ja mums ir divas inerciālas atskaites sistēmas S un S', tad tās viena pret otru kustas ar kādu konstantu ātrumu v (tāda nu ir "it-kā-definīcija"...). Bet ko tas precīzi nozīmē? Ja S' telpas sākumpunkts sistēmā S kustas ar konstantu ātrumu v (reāls skaitlis), tad kā šī situācija izskatīsies sistēmā S', t.i. kā tajā kustēsies sistēmas S telpas sākumpunkts? Ar ātrumu −v? Bet, ja S' ir pieņemtas citādas garuma un laika vienības nekā S? Laikam būtu parocīgāk pieņemt, ka visās IAS ir pieņemtas vienādas garuma un laika vienības? Bet ko tas nozīmē?

Mēs esam matemātiķi, tāpēc nemocīsimies ar atbilžu meklēšanu uz tādiem jautājumiem. Ne lineālus, ne pulksteņus mēs tālāk nekur neizmantosim.

Šajā tekstā mēs tiksim galā ar tām IAS, kam ir kopīgs sākumpunkts (t.i. ir tāds laiktelpas punkts O, kura koordinātes (x, t) ir vienādas ar nulli **visās** mūs interesējošajās IAS), un vienāds koordinātu asu virziens (drīz redzēsim, ko tas nozīmē). Pēc tam, ja vēlēsieties, varēsiet paši uzbūvēt vispārīgāku "IAS teoriju".

Tātad vēlreiz: ja mums ir divas inerciālas atskaites sistēmas S un S', tad tās viena pret otru kustas ar kādu konstantu ātrumu v (reāls skaitlis), precīzāk, S' kustas pret S ar ātrumu v, bet S pret S' – ar ātrumu −v. Ko šī frāze nozīmē (vēl precīzāk)? Pirmkārt, to, ka S' *telpas* sākumpunkta x'=0 "kustības" vienādojums sistēmā S ir $x=vt$, bet S *telpas* sākumpunkta "kustības" vienādojums sistēmā S' ir $x'=-vt'$. Pie t=0 iegūstam, ka x=0, un pie t'=0 – ka x'=0. Tas atbilst pieņēmumam, ka abām IAS ir kopīgs sākumpunkts. [Ja vēlaties to zināt: šie mūsu pieņēmumi jau daļēji nodrošina garuma un laika mērvienību zināmu saskaņotību: S' telpas sākumpunkts sistēmā S kustas ar ātrumu v, bet S telpas sākumpunkts sistēmā S' – ar ātrumu −v, t.i. ar tikpat lielu ātrumu, tikai pretējā virzienā. Bet mums tas nav svarīgi.]

Ko nozīmē "kustība" un tās vienādojums? Punktveida ķermeņa kustību sistēmā S uzdod vienādojums $x=f(t)$, kur f ir kāda divreiz diferencējama funkcija (divreiz diferencējama – paredzot, ka nākotnē aplūkosim gan kustības ātrumu, gan paātrinājumu). Laika momentā t ķermenis atrodas telpas punktā, kura koordināte ir f(t). Te beidzot parādās īsta *atšķirība starp telpu un laiku*. Jo funkcija f var nebūt apgriežama, piemēram, konstantā funkcija f(t)≡0 uzdod “kustību”, kurā ķermenis sistēmas S telpas sākumpunktā x=0 stāv uz vietas (no sistēmas S viedokļa).

Tālāk seko mazs interesants gabaliņš, ko tālāk gan neizmantosim (nebūs tāda vajadzība).

Jautājums, ko diezvai kāds fiziķis pašā sākumā sev uzdos: **kādas “likumīgas” vērtības var pieņemt ātrums v?** Pieņemsim, ka v nevar būt bezgalīgs, t.i. ka **v ir kāds reāls skaitlis.** Bet vai jebkurš reāls skaitlis? Vai drīkstam pieņemt, ka **ātrumu spektrs ir nepārtraukts**, t.i. ja v>0 ir “likumīgs” ātrums, tad tāds ir arī jebkurš nenegatīvs mazāks ātrums $v_1 < v$? Un, protams, būtu jāpieņem, ka eksistē vismaz viens pozitīvs “likumīgs” ātrums v_0 . Un ka ja v ir ”likumīgs” ātrums, tad tāds ir arī −v.

[Ja no paša sākuma gribam atļaut arī **diskrētu ātrumu spektru**, tad problēma kļūst savādāka, un zemāk piedāvātais risinājums pilnībā vairs neder. Vai nebūtu interesanti izpētīt šo domu līdz galam?]

Interesanti, ka jau tagad, no mūsu pašiem pirmajiem pieņēmumiem acīm redzami seko (pārliecinieties paši), ka **ir iespējami tikai divi varianti** (vai divarpus): vai nu “likumīgie” ātrumi v aizņem visu reālo skaitļu taisni (Galilejs?), vai arī tie aizņem tikai kādu intervālu (–c, +c), kur c ir kāds reāls skaitlis (Lorencs?). Vai, varbūt, intervāla vietā varētu būt segments [–c, +c]? Nevarētu?

Interesantā gabaliņa beigas.

Ja kāda laiktelpas punkta koordinātes sistēmā S ir (x, t), tad gribētos iemācīties aprēķināt šī punkta koordinātes (x', t') sistēmā S' (un otrādi).

Pieņemsim, ka šīs koordinātes no vienas sistēmas otrā ir pārveidojamas, izmantojot *lineāru transformāciju*:

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \text{, jeb } \begin{matrix} x' = ax + bt \\ t' = dx + et \end{matrix} .$$

Koeficienti a, b, d, e, iespējams, ir atkarīgi (t.i. ir noteiktas funkcijas) no ātruma v (bet ne no x un t):

$$a = a(v); b = b(v); d = d(v); e = e(v) .$$

[Daži autori transformācijas linearitāti izved no relativitātes principa, vai pat bez tā. Šie izvedumi izmanto fizikālus apsvērumus, piemēram, tajos figurē “cieti stieņi” un to garumi. Bet vai ir vērts censties pamatot transformāciju linearitāti, ja “tur ārā” laiktelpa, stingri ņemot, nemaz nav ne lineāra, ne izotropa, utt.? Ar relativitātes principa palīdzību var pamatot arī Einšteina vispārīgo relativitātes teoriju, kurā laiktelpas transformācijas sanāk lineāras tikai tur, kur nav gravitācijas. Bet tādu vietu Visumā nav! Tāpēc transformāciju linearitātes pieņēmums nav “sliktāks” par telpas izotropijas utml. citiem, no fiziķu viedokļa precīzi runājot, tikpat aplamiem pieņēmumiem.]

Tagad varam sākt izvedumu (un jaunus pieņēmumus).

Pie v=0 sistēmas S un S' viena pret otru nekustas, un tā kā tām ir kopīgs sākumpunkts, tad uzskatīsim, ka tās ir identiskas, tātad

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \text{, jeb } \begin{matrix} x'=x \\ t'=t \end{matrix} \quad ,$$

un tāpēc $a(0)=e(0)=1; b(0)=d(0)=0$. Tas ir pieņēmums, nevis teorēma!

Nākamais solis: sistēmā S aplūkojam sistēmas S' telpas sākumpunktu, tā kustības vienādojums ir $x=vt$. Sistēmā S' šis punkts ir nekustīgs un tam x'≡0, tātad:

$$\begin{matrix} x'=ax+bt=avt+bt=(av+b)t\equiv 0; \\ t'=dx+et=dvt+et=(dv+e)t. \end{matrix}$$

Tā kā a,b nav atkarīgi no t, tad $av+b=0$ un $b(v)=-a(v)v$.

Pieņemsim, ka abās sistēmās laiks rit vienādā virzienā, t.i. augot t, aug arī t'. Tas ir gabaliņš no relativitātes principa.Tātad **visiem *v*,** $d(v)v+e(v)>0$. Šo secinājumu vēlāk izmantosim.

Transformācijas kopskats tagad ir:

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -av \\ d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \text{, jeb } \begin{matrix} x'=a(x-vt) \\ t'=dx+et \end{matrix} \quad .$$

Nākamais solis: sistēmā S' aplūkojam sistēmas S telpas sākuma punktu, tā kustības vienādojums, kā pieņēmām pašā sākumā, ir $x'=-vt'$. Sistēmā S šis punkts ir nekustīgs un tam $x\equiv 0$, tātad:

$$\begin{matrix} x'=a(x-vt)=-avt=-vt' \\ t'=dx+et=et \end{matrix} \quad ,$$

un $-v(et)=-avt; v(a-e)t=0$. Tā kā *a* un *e* nav atkarīgi no t, tad (ja v≠0) $e(v)=a(v)$. Ja v=0, tad, kā jau zinām, $e(0)=a(0)=1$, tātad **visiem** *v*, $e(v)=a(v)$.

Iepriekšējais secinājums $d(v)v+e(v)>0$ tagad pārvēršas par $d(v)v+a(v)>0$.

Jau pieņēmām, ka abās sistēmās laiks rit vienādā virzienā, t.i. augot t, aug arī t'. No $t'=e(v)t=a(v)t$ tad seko, ka **visiem *v*,** $a(v)>0$. Kā redzam, $a(v)$ te ir tāds kā “laika rituma korekcijas” koeficients sistēmas S sākumpunktam $x\equiv 0$.

Bet ja S' kustētos pret S ar to pašu ātrumu, tikai pretējā virzienā, t.i. ar ātrumu $-\mathbf{v}$? Vai laika ritums t' tad būtu jākoriģē ar citu koeficientu $a(-\mathbf{v})$, nevis ar to pašu $a(\mathbf{v})$? Pieņemsim, ka tā nevajadzētu būt, t.i. ka $a(-\mathbf{v})=a(\mathbf{v})$. Tas ir jauns pieņēmums – gabaliņš no relativitātes principa!

[Ja mēs būtu 19.gadsimta beigu un 20.gadsimta sākuma fiziķu vietā, tad doma par “laika rituma korekciju” mums tik viegli vis neienāktu prātā... Bet ja esam matemātiķi, kuriem te ir tikai transformāciju matricas, tad kāpēc ne?]

Savelkot visu kopā:

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -av \\ d & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \text{ , jeb } \begin{matrix} x' = a(x - vt) \\ t' = dx + at \end{matrix} \quad . \qquad (1)$$

Lai uzzinātu kaut ko par koeficientu $d=d(v)$, jau 1910.gadā krievu fiziķis Vladimirs Ignatovskis (sk. piemiņas plāksni zemāk) un austrieši – fiziķis Filips Franks un matemātiķis Hermanis Rote kā vēl vienu pieņēmumu izmantoja šādu “slēgtību pret kompozīciju”: aplūkojam 3 atskaites sistēmas: ja S' kustas pret S ar ātrumu v, un S'' kustas pret S' ar ātrumu w, tādā gadījumā S'' kustas pret S ar kādu ātrumu u, ko var aprēķināt, zinot v un w (visu sistēmu koordinātu sākumpunkti, kā sākumā norunājām, sakrīt: x''=x'=x=0, t''=t'=t=0). Te atkal ir izmantots “mazs gabaliņš” no relativitātes principa.

Tātad, no vienas puses, ņemot punktu, kura koordinātes sistēmā S ir (x, t), tā koordinātes sistēmā S'', t.i. (x'', t'') var aprēķināt caur koordinātēm sistēmā S':

$$\begin{pmatrix} x'' \\ t'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(w) & -a(w)w \\ d(w) & a(w) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(v) & -a(v)v \\ d(v) & a(v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a(w)[a(v) - wd(v)] & -a(w)a(v)(v+w) \\ a(v)d(w) + a(w)d(v) & a(v)[a(w) - vd(w)] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \quad .$$

No otras puses:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ t'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(u) & -a(u)u \\ d(u) & a(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \quad .$$

Pirmais secinājums – tā kā matricu reizinājuma diagonāles elementi abi ir vienādi ar *a(u)*, tad:

$$a(u) = a(w)[a(v) - wd(v)] = a(v)[a(w) - vd(w)] \text{ ,}$$

un, atmetot vienādos saskaitāmos:

$$a(w)wd(v) = a(v)vd(w) \text{ .}$$

Mēs jau zinām, ka a(w) un a(v) nav nulles, tātad, ja arī w un v nav nulles, tad:

$$\frac{d(v)}{a(v)v}=\frac{d(w)}{a(w)w} \quad .$$

Sanāk, ka izteiksmes $\frac{d(v)}{a(v)v}$ vērtība nav atkarīga no ātruma *v* un tātad

$$d(v)=\alpha a(v)v \quad ,$$

kur koeficients α vairs nav atkarīgs no *v*, t.i. tā ir kāda **universāla "pasaules konstante"**. Šī vienādība izpildās arī pie $v=0$, jo mēs jau zinām, ka $d(0)=0$.

Formulas (1) tagad izskatās šādi:

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} 1 & -v \\ -\alpha v & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \text{ , jeb } \begin{matrix} x'=a(x-vt) \\ t'=a(-\alpha v x+t) \end{matrix} \quad . \qquad (2)$$

Un secinājums $d(v)v+a(v)>0$ tagad pārvēršas par $a(v)(\alpha v^2+1)>0$. Tā kā mēs jau zinām, ka a(v)>0, tad

$$1+\alpha v^2>0 \quad . \qquad (2')$$

Vēl viens secinājums no matricu reizinājuma elementu pielīdzināšanas (tuvojamies ātrumu saskaitīšanas likumam):

$$a(u)=a(w)[a(v)-wd(v)]=a(w)a(v)(1-\alpha vw) \quad ; \qquad (3)$$

$$-a(u)u=-a(w)a(v)(v+w) \quad .$$

Izdalīsim otro vienādību ar pirmo (jo a(u)>0):

$$u=\frac{v+w}{1-\alpha vw} \quad .$$

Redzam, ka "pasaules konstantes" α dimensija ir 1/ātrums^2. Ko vēl varam par to uzzināt?

Turpmākās dažas rindiņas citos sacerējumos neesmu redzējis:

Ja α ir "pasaules konstante", vai tā ir pozitīvs skaitlis? Ja $\alpha>0$, tad mēs varētu apzīmēt $\alpha=\frac{1}{c^2}$ (kur c arī ir "pasaules konstante"), t.i. sanāktu, ka

$u=\frac{v+w}{1-\frac{vw}{c^2}}$, un ja w=v, tad $u=\frac{2v}{1-\frac{v^2}{c^2}}$. Jāpieņem, ka ātruma u virziens nevar būt pretējs v virzienam, un ka u (kā divu galīgu ātrumu "saskaitīšanas" rezultāts) nevar būt bezgalīgs. Tāpēc $1-\frac{v^2}{c^2}>0$. Tātad $v^2<c^2$ un $|v|<c$, t.i. v nevar būt neierobežoti liels ātrums. No otras puses, ja eksistē kaut viens nenulles ātrums v (atkal pieņēmums!), tad $|u|>2|v|$. Atkārtojot šādu ātrumu "saskaitīšanu", iegūsim ātrumu u_2, kam $|u_2|>4|v|$ utt. galu galā, katram n iegūsim ātrumu u_n, kam $|u_n|>2^n|v|$, t.i. iegūsim neierobežoti lielus ātrumus. Tā ir pretruna. Tātad mūsu "pasaules konstante" α nevar būt pozitīva!

Ja $\alpha\leq 0$, tad, apzīmējot $\alpha=-\frac{1}{c^2}$, mēs atkal nonākam pie **c – universālas "pasaules konstantes", kuras dimensija ir ātrums**. Gadījumā, ja $\alpha=0$, uzskatīsim, ka $c=\infty$.

Aplūkosim vēlreiz formulu (3):

$$a(u)=a(w)[a(v)-wd(v)]=a(w)a(v)(1-\alpha vw) .$$

Ja $w=-v$, tad $u=0;a(u)=1;a(w)=a(v)$, tāpēc $1=a(v)^2(1+\alpha v^2)$. No (2') mēs jau zinām, ka $1+\alpha v^2>0$, tātad $a(v)=\frac{1}{\sqrt{1+\alpha v^2}}$.

Esam galā. Tagad:

$$a(v)=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} .$$

Pie $c=\infty$ (jeb $\alpha=0$) no formulām (2) mēs iegūstam Galileja transformācijas:

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \text{, jeb } \begin{matrix} x'=x-vt \\ t'=t \end{matrix} ;$$

un **Ņūtona mehānikas ātrumu saskaitīšanas likumu**: $u=v+w$.

Savukārt, pie $c<\infty$ (jeb $\alpha<0$) no (2) mēs iegūstam Lorenca transformācijas:

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & -v \\ -\frac{v}{c^2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \text{, jeb } x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \quad t' = \frac{-\frac{v}{c^2}x + t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

un **Einšteina ātrumu saskaitīšanas likumu**:

$$u = \frac{v + w}{1 + \frac{vw}{c^2}} \quad .$$

[Tiem, kuri pieraduši domāt trijās dimensijās, te jāpiebilst, ka šajā samērā vienkāršajā saskaitīšanas formulā runa ir tikai par paralēlu (kolineāru) ātrumu saskaitīšanu, t.i. divu tādu ātrumu, kas vērsti paralēlos virzienos. Vispārīgajā gadījumā ātrumu saskaitīšanas formula ir sarežģītāka, sk. pielikumu beigās.]

Secinājums (2') tagad pārvēršas par $1+\alpha v^2 = 1 - \frac{v^2}{c^2} > 0$. Tātad $v^2 < c^2$ un $|v| < c$. Iznāca kaut kā garāmejot, bet īstenībā tas ir fundamentāls secinājums: ja *c* ir galīgs ātrums (Lorenca transformāciju gadījums), tad **atskaites sistēmas kustība ar ātrumu, kas lielāks vai vienāds ar *c*, nav iespējama.**

1.3. Kopsavilkums

Apkoposim visus izvedumā izmantotos pieņēmumus:

1. Mums ir *laiktelpa*, kurā ir tikai viena telpas dimensija un laiks. Pēc inerciālas atskaites sistēmas (IAS) S ievešanas katram laiktelpas punktam tiek pierakstīta telpas koordināte x un laika koordināte t (divi reāli skaitļi).

2. Ja mums ir divas inerciālas atskaites sistēmas S un S', tad tās viena pret otru kustas ar kādu konstantu ātrumu v (reāls skaitlis). Pirmkārt, S' *telpas* sākumpunkta x'=0 kustības vienādojums sistēmā S ir $x = vt$, bet otrkārt, S *telpas* sākumpunkta kustības vienādojums sistēmā S' ir $x' = -vt'$. Tas ir gabaliņš no relativitātes principa. (Tas nozīmē arī, ka sākumā visu IAS sākumpunkti sakrīt.)

3. Koordinātes no sistēmas S uz sistēmu S' ir pārveidojamas, izmantojot *lineāru transformāciju*:

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \text{, jeb } \begin{matrix} x' = ax + bt \\ t' = dx + et \end{matrix} \quad .$$

Koeficienti a, b, d, e, iespējams, ir atkarīgi no ātruma v (bet ne no x un t): a=a(v); b=b(v); d=d(v); e=e(v).

4. Pie v=0 sistēmas S un S' viena pret otru nekustas, pieņemsim, ka tad tās ir identiskas, tātad $a(0)=e(0)=1\,;b(0)=d(0)=0$.

5. Abās sistēmās laiks rit vienādā virzienā, t.i. augot t, aug arī t'. Tas ir gabaliņš no relativitātes principa.

6. Nekustīgam sistēmas S sākumpunktam ($x\equiv 0$) laika rituma korekcijas koeficients no t uz t' (t.i. $a(v)$) nemainās, ja ātrumu v maina uz pretējo (t.i. $a(-v)=a(v)$). Tas ir gabaliņš no relativitātes principa.

7. "Slēgtība pret kompozīciju": aplūkojam 3 atskaites sistēmas: ja S' kustas pret S ar ātrumu v, S" kustas pret S' ar ātrumu w, tādā gadījumā S" kustas pret S ar kādu ātrumu u, ko var aprēķināt, zinot v un w. Arī tas ir gabaliņš no relativitātes principa.

8. Ja 7. punktā *w=v*, tad ātruma *u* virziens nevar būt pretējs *v* virzienam, un *u* (kā divu galīgu ātrumu "saskaitīšanas" rezultāts) nevar būt bezgalīgs. Tas ir fizikāls, ne matemātisks pieņēmums.

9. Eksistē vismaz viens nenulles ātrums *v*. Vai tas ir "acīm redzami"?

No šiem pieņēmumiem seko, ka eksistē tāda universāla "pasaules konstante" *c* (tās dimensija ir ātrums), ka:

$$x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,;\quad t'=\frac{-\frac{v}{c^2}x+t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$ (Lorenca transformācijas).

Ja $c<\infty$, tad IAS var kustēties tikai ar ātrumiem v, kuru lielums ir mazāks par c. Ja $c=\infty$, tad IAS var kustēties ar jebkura lieluma ātrumiem, un:

$$x'=x-vt\,;\quad t'=t$$ (Galileja transformācijas).

Citu variantu nav – ja vien neatsakāmies no kāda no minētajiem ļoti vājajiem un vispārīgajiem pieņēmumiem! Neko citu kā Lorenca transformācijas Lorencs un Einšteins izgudrot (vai atklāt?) nevarēja! Bet, protams, to, ka *c* ir gaismas ātrums, tīri matemātiski izsecināt nevarēs, te nu beidzot būs vajadzīgi fiziķi!

1.4. Tēmas vēsture

Mēģinājumi izvest Lorenca transformācijas no pēc iespējas mazākām pieņēmumu kopām, sākās jau 1910.gadā. No tā laika šādu mēģinājumu (un pieņēmumu variantu) ir bijis diezgan daudz. Vai mans mēģinājums būtu kaut kādā ziņā pārāks par tiem?

Tēmas absolūtie pionieri bija trīs: krievu fiziķis Vladimirs Ignatovskis un divi austrieši – fiziķis Filips Franks (Philipp Frank) un matemātiķis Hermanis Rote (Hermann Rothe).

Tēmas pioniera piemiņai

Игнатовский Владимир Сергеевич (1875-1942)

(Notiesāts kopā ar sievu un nošauts Ļeņingradā 1942.gada janvārī.)

Wikipedia: Vladimir Ignatowski.

[2] W. von Ignatowsky, "Einige allgemeine Bemerkungen zum Relativitätsprinzip", *Berichte der Deutschen Physikalischen Gesellschaft*, 20/1910, 788-796 (online English translation).

[3] W. von Ignatowsky, "Einige allgemeine Bemerkungen zum Relativitätsprinzip," *Phys.Z.* 11, 972-976 (1910).

[4] W. von Ignatowsky, "Das Relativitätsprinzip," *Archiv Der Mathematik Und Physik*, 17/1911, 1-24, and 18/1911, 17-40.

[5] P. Frank, H. Rothe, "Uber die Transformation der Raumzeitkoordinaten von ruhenden auf bewegte Systeme," *Ann. Phys*. (Leipzig) 34(5), 825-855 (1911) (online copy).

No "lielajiem" fiziķiem šo problēmu (un Ignatovska-Franka-Rotes sasniegumus) ir pieminējis Volfgangs Pauli (Wolfgang Pauli), tiesa, tas bija ļoti sen – 1920.gadā:

[6] W. Pauli. Relativitätstheorie. *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, Band 5-2, Teubner, Leipzig, 1921, ss. 539-776 (tulkojumi angļu valodā ir grāmatas, kas saucas *Theory of Relativity*).

Šo rakstu Pauli sarakstīja 1920.gadā, būdams 20 gadus vecs students! Bet vēl mūsu dienās to pārdrukā kā grāmatu arvien jaunos un jaunos izdevumos! Par klasiķi Pauli kļuva gadus piecus vēlāk...

Pauli vērtējums: no tīri matemātiskiem apvērumiem var iegūt tikai Lorenca transformāciju "ārējo izskatu", bet nevar noteikt ne konstantes α (sk. augstāk formulu (2)) zīmi, ne lielumu, ne fizikālo jēgu. Par lielumu un fizikālo jēgu tā, protams, ir taisnība. Bet varbūt, tā ir taisnība arī par α zīmi, jo tās noteikšanai es izmantoju pieņēmumus 8 un 9, kas tiešām laikam ir jāuzskata par fizikāliem, nevis matemātiskiem pieņēmumiem?

Ja vēlaties palasīt vairāk par šīs tēmas vēsturi, sk. trīs samēra jaunus rakstus, kurā beigās ir bibliogrāfijas:

[7] S. Sonego and M. Pin. Foundations of anisotropic relativistic mechanics. *Journal of mathematical physics*, 2009, N.4, Vol.50, pp.042902-1 - 042902-28 (online copy).

Ignatovska-Franka-Rotes sasniegumu 100.gadadienai veltīts raksts:

[8] S. S. Stepanov. On simplified axiomatic foundations of special relativity, 2010 (online copy).

Viens no jaunākajiem citu autoru mēģinājumiem atrast skaistāko pieņēmumu kopu, no kuras var izvest Lorenca transformācijas – sk. preprintu

[9] J. Llosa. Yet another derivation of special relativity transformations without the second postulate. arXiv:1401.6568v1 [physics.class-ph], January 2014.

2. Otrā daļa – dinamika

2.1. Ievads

1930.gada 9.novembrī, apcerot Johanna Keplera nāves 300.gadadienu, Einšteins avīzē *Frankfurter Allgemeine* uzrakstīja: "Liekas, ka cilvēka prātam pašam ir jākonstruē formas, pirms mēs varam tās atpazīt lietās. Keplera brīnišķīgais mūža devums ir sevišķi skaists piemērs, kas parāda, ka zināšanas nevar uzplaukt no kailas empīrijas vien, bet tikai salīdzinot prāta izgudrojumus ar novērojamajiem faktiem."

Sk. Wikipedia: Johannes Kepler.

Ar “formu” izgudrošanu nodarbojas arī matemātiķi. Mēs neesam fiziķi. Fiziķus interesē patiesība “tur ārā”. Mēs esam matemātiķi. Mūs interesē atrast tās izcilās matemātiskās struktūras, kas uzreiz parāda, ka patiesība nemaz nevar būt citāda.

Pirmajā daļā mēs to jau pieredzējām: no ārkārtīgi vājiem un vispārīgiem pieņēmumiem seko, ka ir iespējamas tikai divas vienkāršas laiktelpas teorijas – Ņūtona (Galileja) un Einšteina (Lorenca). Citi varianti nav iespējami – ja vien negribēsim atteikties no kāda no pieņēmumiem (piemēram, no transformāciju linearitātes, tā dodoties Einšteina vispārīgās relativitātes teorijas virzienā).

Šajā – otrajā daļā mēs to pieredzēsim vēlreiz, pierādot divas teorēmas, kas parāda, ka arī slavenā Einšteina enerģijas formula $E=mc^2$ ir ārkārtīgi vāju un vispārīgu pieņēmumu rezultāts. Citi varianti nav iespējami!

Pirmajā daļā mums nebija īstas kustības: viena attiecībā pret otru kustējās atskaites sistēmas, bet citādi – laiktelpā nekas nekustējās.

Tagad mūs sāks interesēt “kustība” kā patstāvīgs fenomens. Mēs protam transformēt laiktelpas punkta koordināti x un laiku t atskaites sistēmā S par šī punkta koordināti x' un laiku t' sistēmā S', kas (sistēma) kustas pret S ar ātrumu v (uzskatam, ka sākumā abu sistēmu koordinātu sākumpunkti sakrīt, x'=x=0, t'=t=0):

$$x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};\quad t'=\frac{-\frac{v}{c^2}x+t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\quad \text{(Lorenca transformācijas).}$$

Tagad iedomāsimies, ka punktveida ķermeņa kustību sistēmā S uzdod vienādojums $x=f(t)$, kur f ir kāda divreiz diferencējama funkcija (divreiz diferencējama – paredzot, ka drīz vien aplūkosim kustības ātrumu un paātrinājumu). Laika momentā t ķermenis atrodas telpas punktā, kura koordināte ir f(t). Kāds ir šī ķermeņa kustības vienādojums sistēmā S'? Lorenca transformācijas dod:

$$x'=\frac{f(t)-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};\quad t'=\frac{-\frac{v}{c^2}f(t)+t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\quad .$$

Diemžēl, vispārīgajā gadījumā izrēķināt no šejienes formulu **x' kā funkcijai no t'** nebūs iespējams. [Ņūtona mehānikā šis uzdevums bija viegls: $x'=f(t)-vt; t'=t$, jeb $x'=f(t')-vt'$.] Šai ziņā relativitātes teorijas matemātika ir “grūti baudāma”... Piemēram, nav iespējama tik vienkārša lieta kā vienmērīgi paātrināta kustība, t.i. kustība ar kvadrātisku vienādojumu $x=pt^2+qt+c$, jo tad ātrums $\frac{dx}{dt}=2pt+q$, laikam t ejot, kādreiz kļūs lielāks par c.

2.2. Ātruma transformācija relativitātes teorijā

Bet kā ar kustības **ātruma** transformācijām? Sistēmā S ķermeņa kustības ātrums ir funkcijas atvasinājums $u=\frac{dx}{dt}=f'(t)$. Kāds ir šī paša ķermeņa kustības ātrums u' sistēmā S'? [Ņūtona mehānikā atbilde bija vienkārša: $t'=t; u'=\frac{dx'}{dt'}=\frac{dx}{dt}-v$.] Izrādās, ka šis uzdevums arī relativitātes teorijā ir viegli atrisināms:

$$x'=\frac{f(t)-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \quad t'=\frac{-\frac{v}{c^2}f(t)+t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};$$

$$\frac{dx'}{dt}=\frac{f'(t)-v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{u-v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \quad \frac{dt'}{dt}=\frac{-\frac{v}{c^2}f'(t)+1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{1-\frac{uv}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Dalot pirmo izteiksmi ar otro (fiziķu un 17.-18. gs. matemātiķu stils):

$$u'=\frac{dx'}{dt'}=\frac{f'(t)-v}{-\frac{v}{c^2}f'(t)+1}=\frac{u-v}{1-\frac{uv}{c^2}}.$$

(Šo formulu varēja iegūt arī no Einšteina ātrumu saskaitīšanas likuma.) Tā ir **ātruma transformācijas formula** no sistēmas S uz sistēmu S'. T.i. formula, kas punkta ātrumu u sistēmā S transformē par ātrumu u' sistēmā S', izmantojot kā vienīgo papildus parametru ātrumu v (ar kādu S' kustas pret S). Par to ir jāpriecājas, ja atceramies, ka ar paša kustības vienādojuma transformāciju mums nekas nesanāca...

[Tiem, kuri pieraduši domāt trijās dimensijās, te jāpiebilst, ka šajā jau tā sarežģītajā formulā runa ir par tāda ātruma *u* transformāciju, kas ir paralēls (kolineārs) ātrumam *v*. Vispārīgajā gadījumā formula ir sarežģītāka.]

2.3. Paātrinājuma transformācija relativitātes teorijā

Ņūtona mehānikā paātrinājums ir invariants pret IAS nomaiņu:

telpas koordināte: $x=f(t);t'=t;x'=f(t')-vt'$;

ātrums: $u=\frac{dx}{dt}=f'(t);u'=\frac{dx'}{dt'}=f'(t')-v$;

paātrinājums: $\frac{du}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}=f''(t);\frac{du'}{dt'}=\frac{d^2x'}{dt'^2}=f''(t')$.

Tālāk teorijā nāk **otrais Ņūtona likums**: par ātruma maiņas cēloni uzskata "**spēku**", kas pielikts ķermenim, tāpēc rakstām: $m\frac{du}{dt}=F(x,t)$, kur m ir ķermeņa atribūts – propocionalitātes koeficients, ko sauc par "**masu**", un kas raksturo ķermeņa "reaktivitāti" uz spēka iedarbību (t.s. inerci) – jo lielāka masa, jo "slinkāka" reakcija. Mēs pieņemam, ka spēks ir pielikts laiktelpas punktā, un tā lielums nav atkarīgs no atskaites sistēmas (t.i. $F(x',t')=F(x,t)$) un no ķermeņa kustības ātruma (t.i. magnētiskos laukus utml. pagaidām nepētīsim).

Relativitātes teorijā ir sarežģītāk. Kā tūlīt redzēsim, pāatrinājums te vairs **nav** invariants pret IAS nomaiņu:

$$\frac{du'}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{u-v}{1-\frac{uv}{c^2}}\right)=\frac{\frac{du}{dt}(1-\frac{uv}{c^2})-(u-v)\cdot\frac{-v}{c^2}\cdot\frac{du}{dt}}{(1-\frac{uv}{c^2})^2}=\frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{(1-\frac{uv}{c^2})^2}\frac{du}{dt} \quad . \qquad (4)$$

Dalot šo izteiksmi ar jau zināmo $\frac{dt'}{dt}$ izteiksmi $\frac{1-\frac{uv}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, iegūstam:

$$\frac{du'}{dt'}=\frac{(1-\frac{v^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}{(1-\frac{uv}{c^2})^3}\frac{du}{dt} \quad . \qquad (5)$$

Tā ir **paātrinājuma transformācijas formula** no sistēmas S uz sistēmu S'. Kā redzam, pāatrinājums te vairs **nav** invariants pret IAS nomaiņu.

[Tiem, kuri pieraduši domāt trijās dimensijās, te jāpiebilst, ka šajā jau tā sarežģītajā formulā runa ir par tāda paātrinājuma transformāciju, kas ir paralēls (kolineārs) ātrumiem u un v. Vispārīgajā gadījumā formula ir vēl sarežģītāka.]

Skaidrs, ka ar "tādu" paātrinājumu mums otrais Ņūtona likums "nespīd"... Jo spēka lielums nav atkarīgs no atskaites sistēmas. Un ir arī skaidrs, ka relativitātes teorijā konstants spēks vienkārši nevar izraisīt konstantu paātrinājumu – tad jau, laikam ejot, ātrums kādreiz pārsniegtu c! Tāpēc relativitātes teorijā konstantam spēkam, kad ķermeņa ātrums pieaug, "kļūst grūtāk", un paātrinājumam ir jāsamazinās. Ņūtona mehānikā "spēka grūtumu paātrināt" noteica proporcionalitātes koeficients *m*, ko sauca par ķermeņa masu. Tad jau relativitāte teorijā, **augot ātrumam, kermeņa masai vajadzētu pieaugt** – lai paātrināšanās samazinātos? Var teikt arī tā – bet vai tas nozīmē, ka augot ātrumam, pieaug arī "vielas daudzums" ķermenī? Joks?

2.4. Relatīvistiskais ātrums un relatīvistiskais paātrinājums

Vai varēsim izdomāt kādu "**relatīvistisko ātrumu**" u_r , kura izmaiņu (atvasinājumu pēc laika: $\frac{du_r}{dt}$, t.i. "relatīvistisko paātrinājumu") noteiks "spēks" un "masa" ($m\frac{du_r}{dt}=F(x,t)$)? Tā kā $F(x',t')=F(x,t)$, tad $\frac{du_r}{dt}$ nedrīkst mainīties, pārejot uz citu IAS, t.i. vajag, lai

$$\frac{du_r'}{dt'}=\frac{du_r}{dt} \quad .$$

Liekas, ka u_r ir jābūt funkcijai tikai no u (u_r atkarība tiešā veidā no x un t būtu nesaprotama)? Jā tā, tad meklēsim tādu funkciju $U(x)$, ka $u_r=U(u)$.
Tad:

$$\frac{du_r}{dt} = \frac{dU(u)}{du}\frac{du}{dt} \quad ;$$

$$\frac{du_r'}{dt} = \frac{d}{dt}U(u') = \frac{dU(u')}{du'}\frac{du'}{dt} = \frac{dU(u')}{du'}\frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{(1-\frac{uv}{c^2})^2}\frac{du}{dt}$$ (izmantojam (4)).

Dalot šo izteiksmi ar jau zināmo $\frac{dt'}{dt}$ izteiksmi $\frac{1-\frac{uv}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, iegūstam:

$$\frac{du_r'}{dt'} = \frac{dU(u')}{du'}\frac{(1-\frac{v^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}{(1-\frac{uv}{c^2})^3}\frac{du}{dt} \quad .$$

Funkcijai U(u) ir jābūt tādai, lai $\frac{du_r'}{dt'} = \frac{du_r}{dt}$ visiem u un v, t.i.:

$$\frac{dU(u')}{du'}\frac{(1-\frac{v^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}{(1-\frac{uv}{c^2})^3} = \frac{dU(u)}{du} \quad \text{, jeb} \quad \frac{dU(u')}{du'} = \frac{(1-\frac{uv}{c^2})^3}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}\frac{dU(u)}{du} \quad . \tag{6}$$

Esam ieguvuši nosacījumu funkcijas U(u) atvasinājuma (pēc u) transformācijai, pārejot no sistēmas S uz sistēmu S'.

Kādai ir jābūt funkcijai U(u), lai nosacījums (6) izpildītos? Jaunības atmiņas par Einšteina formulām man liek izmēģināt šādu relatīvistisko ātrumu: $u_r = U(u) = \frac{u}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$. Paskatīsimies, kas sanāks:

$$\frac{dU(u)}{du}=\frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}-u\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\cdot\frac{-2\mathrm{u}}{c^2}}{1-\frac{u^2}{c^2}}=\frac{1}{(1-\frac{u^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}\quad .$$

Izrādās, ka šī Einšteina funkcija ir **vienīgā,** kas apmierina nosacījumu (6). Lai to pierādītu, ievedīsim vēl funkciju W(u): $\frac{dU(u)}{du}=\frac{W(u)}{(1-\frac{u^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}$, un parādīsim, ka no nosacījuma (6) seko, ka $W(u)=const$.

[Šis solis ir izšķirošs – W(u) vajag ievest atvasinājuma izteiksmē, nevis tieši U(u) izteiksmē: $U(u)=\frac{u\,W(u)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$ – ar tādu neko neizdodas izdarīt.]

Aplūkosim analoģisku lielumu sistēmā S': $\frac{dU(u')}{du'}=\frac{W(u')}{(1-\frac{u'^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}$.

Apstrādāsim izteiksmi saucējā:

$$1-\frac{u'^2}{c^2}=1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{u-v}{1-\frac{uv}{c^2}}\right)^2=\frac{1-2\frac{uv}{c^2}+\left(\frac{uv}{c^2}\right)^2-\frac{1}{c^2}(u^2-2\mathrm{uv}+v^2)}{(1-\frac{uv}{c^2})^2}=\frac{1-\frac{u^2}{c^2}-\frac{v^2}{c^2}(1-\frac{u^2}{c^2})}{(1-\frac{uv}{c^2})^2}$$

, jeb:

$$1-\frac{u'^2}{c^2}=\frac{(1-\frac{u^2}{c^2})(1-\frac{v^2}{c^2})}{(1-\frac{uv}{c^2})^2}\quad . \qquad (6a)$$

Tātad:

$$\frac{dU(u')}{du'}=W(u')\frac{\left(1-\frac{uv}{c^2}\right)^3}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\quad ,$$

un varam atgriezties pie nosacījuma (6):

$$W(u')\frac{\left(1-\frac{uv}{c^2}\right)^3}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\left(1-\frac{uv}{c^2}\right)^3}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{W(u)}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Saīsinot abās pusēs, iegūstam: $W(u')=W(u)$. Tas nozīmē, ka nosacījums (6) izpildās tad un tikai tad, ja visiem u un v: $W(u')=W(u)$, kur $u'=\frac{u-v}{1-\frac{uv}{c^2}}$. Un tas, savukārt, nozīmē, ka $W(u)=const$. Tiešām, ņemsim u=0 un liksim v mainīties no –c līdz +c, tad arī u' mainīsies no –c līdz +c, tātad W(u')=W(0) visiem ātrumiem u'.

Esam izveduši no nosacījuma (6) (tātad arī no $\frac{du_r'}{dt'}=\frac{du_r}{dt}$), ka $\frac{dU(u)}{du}=\frac{const}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$. Lai iegūtu U(u), ir jāintegrē. Tā kā $\frac{u}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$ atvasinājums pēc u ir $\frac{1}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$, tad integrējot iegūstam:

$$U(u)=\frac{const\cdot u}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}+const_1\quad .$$

Ja mēs vēlamies, lai pie maziem ātrumiem u relatīvistiskais ātrums $u_r=U(u)$ būtu tuvs u, tad $U(0)=const_1=0$, $U(u)\approx const\cdot u\approx u$, tātad $const=1$. Abus pēdējos nosacījumus var aizstāt ar $\lim_{u\to 0}\frac{U(u)}{u}=1$. Esam pierādījuši teorēmu:

Teorēma 1. Eksistē tikai viena funkcija $u_r = U(u)$, kam $\lim_{u\to 0} \frac{U(u)}{u} = 1$, un visiem u un v izpildās $\frac{du_r'}{dt'} = \frac{du_r}{dt}$, un tā ir: $u_r = U(u) = \frac{u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$.

Citiem vārdiem, šādam un tikai šādam relatīvistiskajam ātrumam atbilstošais relatīvistiskais paātrinājums $\frac{du_r}{dt} = \frac{1}{(1 - \frac{u^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}} \frac{du}{dt}$ ir vienāds visās inerciālajās atskaites sistēmās un pie maziem ātrumiem saskan ar Ņūtona mehāniku. Einšteinam nebija citas izvēles!

Uzdevums 3.1. Izmantojot formulu (6a), parādiet, ka relatīvistiskā ātruma transformācijas formula ir šāda:

$$u_r' = \frac{u_r - v\sqrt{1 + \frac{u_r^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} .$$

2.5. Otrais Ņūtona likums relativitātes teorijā

Vai parastā paātrinājuma $\frac{du}{dt}$ vietā izmantojot relatīvistisko paātrinājumu $\frac{du_r}{dt}$, mēs varēsim saglabāt otrā Nūtona likuma formu $m\frac{du_r}{dt} = F(x, t)$?

Iedomāsimies atskaites sistēmu S^0 , kura pret sistēmu S kustas ar ātrumu u (tas ir ķermeņa ātrums pret S laika momentā t). (Sākumā S^0 sākumpunkts sakrīt ar S sākumpunktu: $x^0=x=0$, $t^0=t=0$.). Laikam t atbilstošajā laika momentā t^0 sistēmā S^0 ķermenis vismaz šai brīdī ir nekustīgs. T.i. tam sistēmā S^0 laika momentā t^0 ir **jāuzvedas atbilstoši Ņūtona mehānikas likumiem**. Un tāds šai gadījumā ir otrais Ņūtona likums: tā kā $u^0=0$, tad

$$m\frac{du_r^0}{dt^0} = m\frac{1}{(1 - \frac{0^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}} \frac{du}{dt} = m\frac{du^0}{dt^0} ,$$

un tāpēc $m\frac{du_r^0}{dt^0}=m\frac{du^0}{dt^0}=F(x^{0,}t^0)$ .Vēl gan jāpiebilst, ka masa m šeit raksturo ķermeņa "reaktivitāti" **tikai miera stāvoklī**, kad $u^0=0$! T.i. m vietā būtu jāraksta "miera masa" m_0 :

$$m_0\frac{du_r^0}{dt^0}=m_0\frac{du^0}{dt^0}=F(x^0,t^0) \quad .$$

Bet kā ķermenim būtu jāreaģē uz spēku, kad tas (ķermenis) jau kustas ar ātrumu u>0? Nāksies **pieņemt**, ka $m_0\frac{du_r}{dt}=F(x,t)$ arī tad, ja u>0? Formāli ņemot, to varam darīt, jo zinām, ka relatīvistiskais paātrinājums $\frac{du_r}{dt}$ visās IAS ir vienāds!

Šis **pieņēmums** $m_0\frac{du_r}{dt}=F(x,t)$ tad arī būs **otrais Ņūtona likums relativitātes teorijā**.

2.6. Kinētiskā enerģija relativitātes teorijā

Ņūtona mehānikā punktveida ķermeņa **impulsu** (kustības daudzumu) definē kā $p=mu$, un tā atvasinājums pēc laika t ir spēks: $\frac{dp}{dt}=m\frac{du}{dt}=F$. Līdz ar to impulss ir ķermeņa kustības raksturojums, kura atvasinājums pēc laika ir vienāds visās IAS.

No otras puses, Ņūtona mehānikā spēks ir arī punktveida ķermeņa kinētiskās enerģijas $T=\frac{1}{2}mu^2$ atvasinājums – gan ne pēc laika t, bet pēc koordinātes x:

$$\frac{dT}{dx}=\frac{1}{2}m\cdot 2\mathrm{u}\frac{du}{dx}=mu\frac{du}{dt}\frac{dt}{dx}=mu\frac{du}{dt}\frac{1}{u}=m\frac{du}{dt}=F \quad .$$

Pamēģināsim atrast formulai $T=\frac{1}{2}mu^2$ līdzīgu "kinētiskās enerģijas funkciju" relativitātes teorijā.

Mums vajadzētu meklēt funkciju $T_r=T(u)$ (būtu taču dīvaini, ja **kinētiskā** enerģija būtu tiešā veidā atkarīga no x vai t?), kam:

$$\frac{dT_r}{dx}=\frac{dT_r}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{dT_r}{dt}\frac{1}{u}=F=m_0\frac{du_r}{dt}=\frac{m_0}{(1-\frac{u^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}\frac{du}{dt} \quad . \quad (7)$$

[Šeit esam izmantojuši sakarību: $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1}{u}$.]

Bet tāpat kā iepriekš, mēs varam pamēģināt atrisināt vispārīgāku uzdevumu: kādai ir jābūt funkcijai $T_r=T(u)$, lai atvasinājums $\frac{dT_r}{dx}$ nebūtu atkarīgs no izvēlētās IAS: $\frac{dT_r'}{dx'}=\frac{dT_r}{dx}$?

Teorēma 2. Eksistē tikai viena funkcija $T_r=T(u)$, kam $\lim_{u\to 0}\frac{T(u)}{\frac{1}{2}m_0u^2}=1$, un visiem u un v izpildās $\frac{dT_r'}{dx'}=\frac{dT_r}{dx}$, un tā ir:

$$T_r=T(u)=m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}-1\right) \quad .$$

Citiem vārdiem, šādai un tikai šādai "relatīvistiskajai kinētiskajai enerģijai" atbilstošais atvasinājums $\frac{dT_r}{dx}=\frac{m_0}{(1-\frac{u^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}\frac{du}{dt}$ ir vienāds visās inerciālajās atskaites sistēmās un pie maziem ātrumiem saskan ar Ņūtona mehāniku. Einšteinam nebija citas izvēles!

Pierādījums.

$$\frac{dT_r}{dx}=\frac{dT(u)}{du}\frac{du}{dx}=\frac{dT(u)}{du}\frac{1}{u}\frac{du}{dt} \quad ;$$

$$\frac{dT_r'}{dx'}=\frac{dT(u')}{du'}\frac{1}{u'}\frac{du'}{dt'}=\frac{dT(u')}{du'}\frac{1}{u'}\frac{(1-\frac{v^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}{(1-\frac{uv}{c^2})^3}\frac{du}{dt} \quad \text{(izmantojam (5)).}$$

Pielīdzinām abas izteiksmes:

$$\frac{dT(u')}{du'}\frac{1-\frac{uv}{c^2}}{u-v}\frac{(1-\frac{v^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}{(1-\frac{uv}{c^2})^3}\frac{du}{dt}=\frac{dT(u)}{du}\frac{1}{u}\frac{du}{dt} \quad ;$$

$$\frac{dT(u')}{du'}\frac{1}{u'}=\frac{(1-\frac{uv}{c^2})^3}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}\frac{dT(u)}{du}\frac{1}{u} \quad . \qquad (8)$$

No (7) mēs redzam, ka potenciālajam atrisinājumam būs īpašība:

$$\frac{dT_r}{dx}=\frac{dT_r}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{dT_r}{dt}\frac{1}{u}=F=m_0\frac{du_r}{dt}=\frac{m_0}{(1-\frac{u^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}\frac{du}{dt} \quad \text{, t.i.}$$

$$\frac{dT_r}{dx}=\frac{dT(u)}{du}\frac{1}{u}\frac{du}{dt}=\frac{m_0}{(1-\frac{u^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}\frac{du}{dt} \quad .$$

Tāpēc ievedīsim vēl funkciju W(u): $\frac{dT(u)}{du}=\frac{u\,W(u)}{(1-\frac{u^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}$, un parādīsim, ka no tikko iegūtā nosacījuma seko, ka $W(u)=const$.

Aplūkosim analoģisku lielumu sistēmā S': $\frac{dT(u')}{du'}=\frac{W(u')}{(1-\frac{u'^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}$. Tāpat kā teorēmas 1 pierādījumā, apstrādāsim izteiksmi saucējā:

$$\frac{dT(u')}{du'}=u'\,W(u')\frac{(1-\frac{uv}{c^2})^3}{(1-\frac{u^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}(1-\frac{v^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}} \quad .$$

Tagad varam atgriezties pie mūsu nosacījuma (8):

$$\frac{dT(u')}{du'}\frac{1}{u'}=W(u')\frac{(1-\frac{uv}{c^2})^3}{(1-\frac{u^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}(1-\frac{v^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}=\frac{(1-\frac{uv}{c^2})^3}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}\frac{W(u)}{(1-\frac{u^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}} \quad .$$

Saīsinot abās pusēs, iegūstam: $W(u')=W(u)$. Tas nozīmē, ka nosacījums (8) izpildās tad un tikai tad, ja visiem u un v: $W(u')=W(u)$, kur $u'=\frac{u-v}{1-\frac{uv}{c^2}}$. Un tas, savukārt, nozīmē, ka $W(u)=const$. Tiešām, ņemsim u=0 un liksim v mainīties no –c līdz +c, tad arī u' mainīsies no –c līdz +c, tātad W(u')=W(0) visiem ātrumiem u'.

No nosacījuma $\frac{dT_r'}{dt'}=\frac{dT_r}{dt}$ esam izveduši, ka $\frac{dT(u)}{du}=\frac{const\cdot u}{(1-\frac{u^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}$. Lai iegūtu T(u), ir jāintegrē. Tā kā $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$ atvasinājums pēc u ir $\frac{1}{c^2}\frac{u}{(1-\frac{u^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}$, tad integrējot iegūstam:

$$T(u)=\frac{const}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}+const_1 \quad .$$

Pie u=0 ir jābūt T=0, tāpēc $const_1=-const$ un $T(u)=const\cdot(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}-1)$

Mazam q, $\frac{1}{\sqrt{1-q}}\approx 1+\frac{1}{2}q$, tāpēc maziem u: $T(u)\approx const\cdot\frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2}$. Bet pie maziem ātrumiem visam ir jābūt kā Ņūtona mehānikā: $T(u)\approx\frac{1}{2}m_0u^2$, tātad $const=m_0c^2$ un:

$$T(u)=m_0c^2(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}-1) \quad .$$

Abus nosacījumus, ko izmantojām, lai aprēķinātu konstantes, var apvienot vienā: $\lim_{u \to 0} \frac{T(u)}{\frac{1}{2} m_0 u^2} = 1$. Q.E.D.

2.7. Secinājumi

Abas minētās teorēmas es agrāk nekur nebiju redzējis.

Tikai šādam relatīvistiskajam ātrumam (funkcijai no "parastā ātruma" $u = \frac{dx}{dt}$):

$$u_r = \frac{u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

atbilstošais relatīvistiskais paātrinājums $\frac{du_r}{dt} = \frac{1}{(1 - \frac{u^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}} \frac{du}{dt}$ ir vienāds visās inerciālajās atskaites sistēmās. Einšteinam nebija citas izvēles!

Un tikai šādai punktveida ķermeņa relatīvistiskajai kinētiskajai enerģijai (funkcijai no "parastā ātruma" u):

$$T_r = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - 1 \right)$$

atbilstošais atvasinājums $\frac{dT_r}{dx} = \frac{m_0}{(1 - \frac{u^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}} \frac{du}{dt}$ ir vienāds visās inerciālajās atskaites sistēmās. Einšteinam nebija citas izvēles!

Izvedot šīs formulas, mēs izmantojām arī prasību, ka pie maziem ātrumiem visam ir jānotiek kā Ņūtona mehānikā: relatīvistikajam ātrumam u_r ir jātuvojas Ņūtona ātrumam u, bet punktveida ķermeņa relatīvistiskajai kinētiskajai enerģijai T_r – Ņūtona kinētiskajai enerģijai $\frac{1}{2} m_0 u^2$.

Par otro Ņūtona likumu. Ņūtona mehānikā šis likums ļauj sastādīt punktveida ķermeņa kustības diferenciālvienādojumu: $m\frac{du}{dt}=F(x,t)$, jeb $m\frac{d^2x}{dt^2}=F(x,t)$. Tas ir otrās kārtas diferenciālvienādojums, kura vispārīgais atrisinājums ir funkcija $x=f(t,C_{1,}C_2)$, kas nosaka ķermeņa kustību atskaites sistēmā S. Abas konstantes var aprēķināt, uzdodot ķermeņa sākuma telpas koordināti $x|_{t=0}=x_0$ un sākuma ātrumu $u|_{t=0}=u_0$.

Relativitātes teorijā situācija ir tikai nedaudz sarežģītāka. Otrajā Ņūtona likumā $m_0\frac{du_r}{dt}=F(x,t)$ mums ir jāievieto $\frac{du_r}{dt}=\frac{1}{(1-\frac{u^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}\frac{du}{dt}$, līdz ar to

$m_0\frac{du}{dt}=F(x,t)(1-\frac{u^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}$, jeb

$$m_0\frac{d^2x}{dt^2}=F(x,t)(1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2)^{\frac{3}{2}} \quad .$$

Arī šī (vairs ne tik jaukā) vienādojuma vispārīgais atrisinājums ir funkcija $x=f(t,C_{1,}C_2)$, kas nosaka ķermeņa kustību atskaites sistēmā S, un abas konstantes tāpat var aprēķināt, uzdodot ķermeņa sākuma telpas koordināti $x|_{t=0}=x_0$ un sākuma ātrumu $u|_{t=0}=u_0$.

2.8. Relatīvistiskā masa un kas no tās seko...

Literatūrā gan ir pieņemts runāt nevis par

relatīvistisko ātrumu $u_r=\frac{u}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$;

relatīvistisko paātrinājumu $\frac{du_r}{dt}=\frac{1}{(1-\frac{u^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}\frac{du}{dt}$;

relatīvistisko impulsu $p_r=m_0u_r$;

un relatīvistisko kinētisko enerģiju $T = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - 1 \right)$,

bet gan par:

relatīvistisko masu $m_r = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$;

relatīvistisko impulsu $p_r = m_r u$;

un **relatīvistisko kinētisko enerģiju** $T = (m_r - m_0) c^2$.

Formāli matemātiski ņemot, abi "runas veidi", protams, ir ekvivalenti. Otrais gan ir kompaktāks...

Pirmajā "runas veidā", neizbēgamais fenomens, ka augot ķermeņa ātrumam, vienam un tam pašam spēkam ķermeni paātrināt kļūst arvien grūtāk, tiek atstāts laiktelpas ģeometrijas ziņā. Masa ir tikai proporcionalitātes koeficients, kas raksturo ķermeņa paātrināšanas grūtības pakāpi, un tas mainās, pārejot uz citu IAS. "Vielas daudzumu" ķermenī raksturo tā "miera masa" m_0 .

Otrajā "runas veidā" uzreiz centrā tiek izvirzīta relatīvistiskā masa. Vai mums būtu jāsāk domāt, ka pats jēdziens par vielas daudzumu ir relatīvs (atkarīgs no atskaites sistēmas)? Joks? Un kinētiskās enerģijas formula rosina jau pavisam īpatnējas pārdomas: samazinoties ātrumam (t.i. zaudējot kinētisko energiju), ķermeņa (relatīvistiskā) masa samazinās līdz m_0 . Tātad, zaudējot visu **mehānisko** enerģiju $T = (m_r - m_0) c^2$, ķermeņa masa samazinas līdz m_0 . Bet ķermenī taču ir vēl citi enerģijas veidi – molekulu siltumkustība, elektromagnētiskie lauki, kodolspēku lauki utt.! Cik liels varētu būt šīs "slēptās" enerģijas daudzums? Ja kādu "slēptās" enerģijas daļu izdotos pārvērst ķermeņa mehāniskajā kustībā, pēc tam to nobremzējot, vai tad ķermeņa masa būtu samazinājusies jau zem m_0 ? Ja tā, tad liekas, ka ķermenī apslēptās enerģijas daudzums nevarētu būt lielāks par $E = m_0 c^2$. Un kāpēc "ne lielāks", varbūt tas ir "vienāds"?

Un cik daudz tas būtu? Ja mums ir 1 grams vielas miera stāvoklī , tad "slēptās" enerģijas tajā nevar būt vairāk par (vai arī ir tieši tik?) $m_0 c^2 \approx 9 \cdot 10^{13} J \approx 25 \cdot 10^6 kWh$. Tas ir vienas ģimenes elektroenerģijas patēriņš 10000 gados! Vai arī: 1 kilograms trotila (TNT) uzsprāgstot, izdala

$3 \cdot 10^6 J$, tātad jebkuras vielas 1 grama “slēptā” enerģija nepārsniedz (vai ir vienāda ar?) enerģiju, kas izdalās, uzsprāgstot $3 \cdot 10^7 kg$ jeb 30000 tonnām (30 kilotonnām) trotila.

Jautājums: cik lielu daļu šīs vielā “apslēptās” enerģijas var izdalīt reālos fizikālos procesos, t.i. “pārvērst mehāniskā kustībā” (piemēram, sprādzienā)? Vai tiešām kilotonnas (ja ne visas 30, tas vismaz vienu)? Tāds jautājums diezgan drīz pēc Einšteina radās gan civilistiem, gan militāristiem...

2.9. Hamiltona vienādojumi relativitātes teorijā

Ņūtona mehānikā, ja mehāniska sistēma kustas t.s. potenciāla spēku laukā (sk. tālāk), tad tās kustības vienādojumus var iegūt, sastādot t.s. Hamiltona funkciju H – sistēmas pilnās enerģijas izteiksmi, kurā sistēmas stāvokli raksturo tās sastāvdaļu koordinātes un impulsi (nevis koordinātes un ātrumi). Punktveida ķermenim viendimensiju telpā tad H=H(x, p, t), kur x ir ķermeņa koordināte telpā, bet $p = m\frac{dx}{dt}$ – impulss, konkrēti:

$$H = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + U(x, t) = \frac{1}{2\mathrm{m}} p^2 + U(x, t) \quad ,$$

kur U(x, t) ir spēku lauka potenciāls (potenciālā enerģija). Pats spēks tad ir vērsts pretēji potenciāla gradientam (t.i. uz potenciāla “bedres” pusi): $F(x, t) = -\boldsymbol{grad}\, U(x, t) = \frac{\partial U}{\partial x}$. [Īstenībā jau “tiešas iedarbības” spēku dabā nemaz nav – visas mijiedarbības notiek “it kā caur laukiem”.] Ķermeņa kustību šeit nosaka Hamiltona vienādojumi:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad ; \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad ,$$

jeb, ar konkrēto funkciju H:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p}{m} \quad ;$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\boldsymbol{grad}\, U \quad .$$

Pirmais vienādojums sakrīt ar impulsa definīciju (šāds vienādojums ir nepieciešams, jo tagad impulss skaitās neatkarīgs pamatjēdziens), bet otrais –

ar otro Ņūtona likumu.

Kā šis formulējums izskatītos relativitātes teorijā?

Vispirms mums ir vajadzīga relatīvistiskās kinētiskās enerģijas T_r izteiksme caur relatīvistisko impulsu p_r :

$$p_r = \frac{m_0 u}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \quad ; \quad \begin{matrix} p_r^2\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right) = m_0^2 u^2 ; & p_r^2 c^2 - p_r^2 u^2 = m_0^2 c^2 u^2 ; \\ u^2 = \frac{p_r^2 c^2}{p_r^2 + m_0^2 c^2} ; & 1-\frac{u^2}{c^2} = \frac{m_0^2 c^2}{p_r^2 + m_0^2 c^2} ; \end{matrix}$$

$$T_r = m_0 c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} - 1\right) = m_0 c^2\left(\frac{\sqrt{p_r^2 + m_0^2 c^2}}{m_0 c} - 1\right) = m_0 c^2\left(\sqrt{\frac{p_r^2}{m_0^2 c^2} + 1} - 1\right) \quad .$$

Līdz ar to, varam mēģināt šādu relatīvistisko Hamiltona funkciju:

$$H_r = m_0 c^2\left(\sqrt{\frac{p_r^2}{m_0^2 c^2} + 1} - 1\right) + U(x,t) \quad .$$

Tad varam saglabāt Hamiltona vienādojumu formu:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H_r}{\partial p_r} \quad ; \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H_r}{\partial x} \quad . \quad (9)$$

Tiešām:

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H_r}{\partial p} = m_0 c^2 \frac{1}{2\sqrt{\frac{p_r^2}{m_0^2 c^2} + 1}} \frac{2 p_r}{m_0^2 c^2} = \frac{p_r}{m_0}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} ;$$

$$m_0 \frac{du_r}{dt} = \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H_r}{\partial x} = -\boldsymbol{grad}\, U.$$

Pirmā vienādība atbilst relatīvistiskā impulsa definīcijai, bet otrā – otrajam Ņūtona likumam relativitātes teorijā.

Vienādojumi (9) tad arī kalpos kā Hamiltona vienādojumi relativitātes teorijā.

Pielikums

P1. Lorenca transformācijas 3-dimensiju un n-dimensiju telpai

Parasti, izklāstot speciālo relativitātes teoriju, aplūko tikai vienas dimensijas gadījumu, kad transformāciju formulas sanāk vienkāršākas. Tā esmu darījis arī es. Bet 1911.gadā vācu matemātiķis Gustavs Herglocs piedāvāja elegantas Lorenca transformāciju formulas, kas der jebkuram telpas dimensiju skaitam:

[10] G. Herglotz. Über die Mechanik des deformierbaren Körpers vom Standpunkte der Relativitätstheorie, Annalen der Physik, Volume 341, Issue 13, pp. 493–533, 1911.

Sk. Wikipedia: Gustav Herglotz.

Lai tālāk rakstīto vieglāk saprastu, noderēs nelielas lineārās algebras zināšanas (vektori, matricas).

Aplūkosim laiktelpu, kurā ir *n* telpas dimensijas un viena laika dimensija, un šajā laiktelpā aplūkosim divas inerciālas atskaites sistēmas (IAS). Pirmajā sistēmā S telpas punktam ir *n* koordinātes, kas kopā veido *n*-dimensiju vektoru $\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_n)$, otrajā sistēmā S' šī punkta koordinātes veido vektoru $\boldsymbol{x}'=(x_1',\ldots,x_n')$. Sākumā (pie *t=t'=0*) abu sistēmu sākuma punkti un attiecīgās koordinātu asis sakrīt. Bet otrās sistēmas sākuma punkts O', skatoties no pirmās sistēmas, kustas ar ātrumu $\boldsymbol{v}=(v_1,\ldots,v_n)$, koordinātu asīm nerotējot (ko tas īsti nozīmē – sk. tālāk). Vektora **v** garumu apzīmēsim ar v.

Hergloca formulas (t.i. Lorenca transformācijas *n*-dimensiju telpai) tad sanāk šādas:

$$t'=\frac{-\frac{v}{c^2}\,proj_v(\boldsymbol{x})+t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\quad \text{(vienai dimensijai: } t'=\frac{-\frac{v}{c^2}x+t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\text{);}$$

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{proj}_v(\boldsymbol{x})+\frac{\boldsymbol{proj}_v(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{v}t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$ (vienai dimensijai: $x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$).

Kas ir $\boldsymbol{proj}_v(\boldsymbol{x})$? Ar **vx** apzīmēsim vektoru **v**, **x** skalāro reizinājumu, t.i. $\boldsymbol{v}\boldsymbol{x}=v_1x_1+...+v_nx_n$. Hergloca formulās:

a) $\boldsymbol{proj}_v(\boldsymbol{x})=\frac{1}{v^2}(\boldsymbol{v}\boldsymbol{x})\boldsymbol{v}$ ir vektora **x** projekcijas *vektors* ātruma vektora **v** virzienā;

b) $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{proj}_v(\boldsymbol{x})$ ir vektora **x** projekcijas vektors plaknē (ja n=3), hiperplaknē (ja n>3) vai uz taisnes (ja n=2), kas perpendikulāra (jeb ortogonāla) vektoram **v**;

c) $proj_v(\boldsymbol{x})=\frac{1}{v}(\boldsymbol{v}\boldsymbol{x})$ ir projekcijas vektora $\boldsymbol{proj}_v(\boldsymbol{x})$ garums.

Apzīmējuma $\boldsymbol{proj}_v(\boldsymbol{x})$ izmantošana Hergloca formulās ir mans jaunievedums, kas atklāj šo formulu īstenībā vienkāršo jēgu (bet: droši vien, šos apzīmējumus kāds ir izmantojis jau agrāk). Fiziķu grāmatās projekcijas tiek izteiktas skalārajiem reizinājumiem, un tad tiek iegūtas ne gluži uzreiz saprotamas formulas:

$$t'=\frac{-\frac{1}{c^2}(\boldsymbol{v}\boldsymbol{x})+t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} ;$$

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x}+\frac{1}{v^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-1\right)(\boldsymbol{v}\boldsymbol{x})\boldsymbol{v}-\frac{\boldsymbol{v}t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} .$$

Tādas tās var ieraudzīt, piemēram, kvantu mehānikas klasiķa Volfganga Pauli augšminētā slavenā enciklopēdijas raksta [6] 555.lappusē.

Kā Hergloca formulas ir iegūtas? Tajās ir labi saskatāms **jauns pieņēmums**, kas vienas dimensijas gadījumā nebija vajadzīgs, bet vairāku dimensiju gadījumā bez tā nevar iztikt: "relatīvistiskie efekti" neietekmē virzienus, kas ir **perpendikulāri** (ortogonāli) vektoram **v** (tad $\boldsymbol{proj}_v(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$), bet šim vektoram **paralēlajā** virzienā ($\boldsymbol{proj}_v(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}$) “viss notiek” atbilstoši mūsu jau agrāk aplūkotajām vienas dimensijas formulām . Kā redzam formulās, tad “jauktajos” virzienos “relatīvistiskie efekti” ir proporcionāli projekcijai $\boldsymbol{proj}_v(\boldsymbol{x})$. Var jau būt, ka šāds īss “izvedums” fiziķiem ar viņu profesionālo intuīciju liekas pietiekami pārliecinošs, un to viņiem nevar pārmest, jo rezultāts ir pareizs! Ko dod garš un sarešģīts izvedums, ja rezultāts ir tāds pats kā īsākam...

Man kā matemātiķim tomēr liekas interesanti pamēģināt izvest Hergloca formulas “tukšā vietā”, mēģinot atkārtot Lorenca transformāciju izvedumu vienai telpas dimensijai jaunajā situācijā: telpai tagad ir n dimensijas. Manuprāt, tieši tāda pieeja būtu vislabākā fizikas mācību grāmatām.

Tātad vēlreiz: aplūkojam laiktelpu, kurā ir n telpas dimensijas un viena laika dimensija, un šajā laiktelpā aplūkojam divas inerciālas atskaites sistēmas (IAS). Pirmajā sistēmā S telpas punktam ir n koordinātes, kas kopā veido n-dimensiju vektoru $\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_n)$, otrajā sistēmā S' šī punkta koordinātes veido vektoru $\boldsymbol{x}'=(x_1',\ldots,x_n')$. Sākumā (pie $t=t'=0$) abu sistēmu sākuma punkti un attiecīgās koordinātu asis sakrīt. Bet otrās sistēmas sākuma punkts O', skatoties no pirmās sistēmas, kustas ar ātrumu $\boldsymbol{v}=(v_1,\ldots,v_n)$, S' koordinātu asīm pret S asīm nerotējot. Ja dimensiju skaits $n>1$, tad jautājums par “ne-rotāciju” ir būtisks. Bet kā atsevišķs pieņēmums tas mums nebūs vajadzīgs, jo “ne-rotācija” automātiski sekos no cita pieņēmuma (sk. zemāk). Vektora **v** garumu apzīmēsim ar v.

Sākam pieņēmumus un izvedumus.

Pirmais pieņēmums: sistēmā S' laiku t' un koordinātu vektoru **x'** var aprēķināt no t un **x** ar tādas **lineāras transformācijas** palīdzību, kuras matrica ir atkarīga tikai no vektora **v**:

$$\begin{pmatrix} t' \\ \boldsymbol{x}' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & \boldsymbol{b}^T \\ \boldsymbol{d} & H \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ \boldsymbol{x} \end{pmatrix} \text{ , jeb: } \begin{matrix} t'=at+\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}'=\boldsymbol{d}\,t+H\,\boldsymbol{x} \end{matrix} ,$$

kur $\mathbf{b}^T$ ir horizontāls n dimensiju vektors (T nozīmē matricu transponēšanas operāciju, t.i. pats **b** ir vertikāls vektors), **d** – vertikāls n dimensiju vektors, H – $n\times n$ matrica. Un visi tie ir funkcijas no **v**: a(**v**), **b**(**v**), **d**(**v**), H(**v**). Mēs varētu uzreiz pieņemt arī, ka visas šīs funkcijas ir **nepārtrauktas** (tiesa, kā redzēsim vēlāk, faktiski mums vajadzēs izmantot tikai a(**v**) un **b**(**v**) nepārtrauktības pieņēmumu tikai punkta **v**=**0** mazā apkārtnē, t.i. ļoti maziem ātrumiem).

Vispirms tiksim galā ar sistēmas S' koordinātu asu “ne-rotācijas” jautājumu. Aplūkosim laiktelpas punktu $(t, \mathbf{x})$, kas sistēmā S ir nekustīgs, t.i. tam $\mathbf{x} \equiv const$. Kā šis punkts izskatās sistēmā S'? Izteiksim t caur t': $t = \frac{t' - \mathbf{b}^T \mathbf{x}}{a}$ un ievietosim **x'** izteiksmē:

$$\mathbf{x}' = \frac{\mathbf{d}(\mathbf{v})}{a(\mathbf{v})} t' + \left(-\frac{\mathbf{d}(\mathbf{v}) \mathbf{b}^T(\mathbf{v})}{a(\mathbf{v})} + H(\mathbf{v})\right) \mathbf{x} \ .$$

Otrais saskaitāmais ir konstants vektors, un arī reizinātājs pie t' ir konstants vektors. Tātad sistēmā S' visi punkti **x** kustas ar vienu un to pašu ātrumu $\frac{\mathbf{d}(\mathbf{v})}{a(\mathbf{v})}$. Tas tad arī nozīmē, ka sistēmas S un S' viena pret otru nerotē!

[Tūlīt redzēsim, ka $\frac{\mathbf{d}(\mathbf{v})}{a(\mathbf{v})} = -\mathbf{v}$, tātad $\mathbf{x}' = -\mathbf{v} t' + (\mathbf{v} \mathbf{b}^T + H) \mathbf{x}$, t.i. sistēmā S' visi punkti **x** kustas ar vienu un to pašu ātrumu –**v**.]

Otrais pieņēmums: ja **v**=**0**, tad sistēmas S un S' viena pret otru nekustas, un tā kā tām ir kopīgs sākumpunkts, tad uzskatīsim, ka tās ir identiskas, tātad $a(\mathbf{0}) = 1 ; \mathbf{b}(\mathbf{0}) = \mathbf{d}(\mathbf{0}) = \mathbf{0} ; H(\mathbf{0}) = E_n$, kur E_n ir $n \times n$ vienības matrica:

$$\begin{pmatrix} t' \\ \mathbf{x}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} \text{, jeb: } \begin{matrix} t' = t \\ \mathbf{x}' = \mathbf{x} \end{matrix} \ .$$

Vienības matricas piemērs: $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Tas nozīmē, ka tai skaitā: ja **v**=**0**, tad abu sistēmu koordinātu asis attiecīgi sakrīt.

Trešais pieņēmums (vienas dimensijas gadījumā tas nebija vajadzīgs): H(**v**) ir **simetriska matrica**. Jo telpas pārveidojumi dimensiju starpā taču nedrīkst atšķirties! Tas ir kas līdzīgs *telpas izotropijas* pieņēmumam. Un, kā zināms, simetriskas matricas komutē:

$$H(\mathbf{v}) H(\mathbf{w}) = [H(\mathbf{v}) H(\mathbf{w})]^T = H(\mathbf{w})^T H(\mathbf{v})^T = H(\mathbf{w}) H(\mathbf{v}) \ .$$

Šo secinājumu mēs vēlāk izmantosim.

Ceturtais pieņēmums: sistēmā S aplūkojam sistēmas S' telpas sākumpunkta $(t', \mathbf{0})$ kustību, tās vienādojums ir $\mathbf{x} = \mathbf{v} t$. Sistēmā S' šis punkts ir nekustīgs un tam **x'**≡0, tātad no $t' = at + \mathbf{b}^T \mathbf{x} ; \mathbf{x}' = \mathbf{d} t + H \mathbf{x}$ iegūstam

$t'=at+\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{v}t;\boldsymbol{0}\equiv\boldsymbol{d}t+H\boldsymbol{v}t$ un $t'=(a+\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{v})t;H\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{d}$.

Piektais pieņēmums: sistēmā S' aplūkojam sistēmas S telpas sākuma punkta $(t,\boldsymbol{0})$ kustību. Tās vienādojums sistēmā S' ir $\boldsymbol{x}'=-\boldsymbol{v}t'$. Sistēmā S šis punkts ir nekustīgs un tam $\boldsymbol{x}\equiv 0$.

Tātad no $t'=at+\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{x};\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{d}t+H\boldsymbol{x}$ iegūstam $t'=at;-\boldsymbol{v}t'=\boldsymbol{d}t$. Savelkot kopā, $-a\boldsymbol{v}t=\boldsymbol{d}t$; $\boldsymbol{d}=-a\boldsymbol{v}$, un

$$\begin{pmatrix}t'\\ \boldsymbol{x}'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & \boldsymbol{b}^T\\ -a\boldsymbol{v} & H\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\ \boldsymbol{x}\end{pmatrix} \text{ , jeb } \begin{matrix}t'=at+\boldsymbol{b}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{x}'=-a\boldsymbol{v}t+H\boldsymbol{x}\end{matrix} \quad .$$

Bez tam, $\boldsymbol{d}=-a\boldsymbol{v}$ kopā ar $H\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{d}$ dod svarīgu secinājumu, ko turpmāk daudzkārt izmantosim:

$$H(\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}=a(\boldsymbol{v})\boldsymbol{v} \quad .$$

[Matemātiķis to pateiktu “gudrāk”: ātrums **v** ir matricas H(**v**) īpašvektors, un a(**v**) ir atbilstošā īpašvērtība. Beigās redzēsim, ka visas pārējās H īpašvērtības ir vienādas ar 1.]

Sestais pieņēmums: abās sistēmās laiks rit vienādā virzienā, t.i. augot *t*, pieaug arī *t'*. No $t'=at$ tātad seko, ka **visiem v**, $a(\boldsymbol{v})>0$.

Bet ja S kustētos pret S' ar to pašu ātrumu, tikai pretējā virzienā, t.i. ar ātrumu $-\boldsymbol{v}$? Vai tad laika ritums t' tad būtu jākoriģē ar citu koeficientu $a(-\boldsymbol{v})$, nevis ar to pašu $a(\boldsymbol{v})$? Septītais pieņēmums: tā nevajadzētu būt, t.i. $a(-\boldsymbol{v})=a(\boldsymbol{v})$.

[Ja mēs būtu 19.gadsimta beigu un 20.gadsimta sākuma fiziķu vietā, tad doma par “laika rituma korekciju” mums tik viegli vis nenāktu... Bet ja esam matemātiķi, kuriem te ir tikai transformāciju matricas, tad kāpēc ne?]

Tā kā jau zinām, ka visiem **v**, $a(\boldsymbol{v})>0$, tad varam vektora $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{v})$ vietā ievest vektoru $\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{v})$ (tāpat kā mums jau agrāk sanāca $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{v})=-a(\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}$):

$$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{v})=-a(\boldsymbol{v})\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{v}) \quad .$$

Tā kā esam pieņēmuši (1.pieņēmums), ka $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{v})$ un $a(\boldsymbol{v})>0$ ir nepārtrauktas funkcijas punkta **v**=***0*** mazā apkārtnē, tad tāda ir arī funkcija $\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{v})$.

Šis piegājiens vienkāršos visas mūsu tālākās formulas (varat man ticēt, es izmēģināju abus variantus). Piemēram, transformāciju matrica tagad kļūst par:

$$\begin{pmatrix}t'\\ \boldsymbol{x}'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & -a\boldsymbol{\beta}^T\\ -a\boldsymbol{v} & H\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\ \boldsymbol{x}\end{pmatrix} \text{ , jeb } \begin{matrix}t'=a(t-\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{x})\\ \boldsymbol{x}'=-a\boldsymbol{v}t+H\boldsymbol{x}\end{matrix} \quad .$$

Lai kaut ko vairāk uzzinātu par $\beta(\boldsymbol{v})$, 1910.gadā Ignatovskis, Franks un Rote (sk. augstāk) kā vēl vienu pieņēmumu izmantoja šādu “slēgtību pret kompozīciju”:

Astotais pieņēmums: aplūkojam 3 atskaites sistēmas: ja S' kustas pret S ar ātrumu ***w***, un S'' kustas pret S' ar ātrumu ***v***, tad S'' kustas pret S ar kādu ātrumu **u**, ko var aprēķināt, zinot **v** un **w**.

Kompaktākam pierakstam apzīmēsim: $a_v = a(\boldsymbol{v}); \boldsymbol{\beta}_v = \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{v}); H_v = H(\boldsymbol{v})$.

(Visu sistēmu koordinātu sākumpunkti, kā sākumā norunājām, sakrīt: x''=x'=x=0, t''=t'=t=0). Tātad, no vienas puses, ņemot punktu, kura koordinātes sistēmā S ir (t, **x**), tā koordinātes sistēmā S'', t.i. (t'', **x''**) var aprēķināt caur koordinātēm sistēmā S':

$$\begin{pmatrix} t'' \\ \boldsymbol{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_v & -a_v \boldsymbol{\beta}_v^T \\ -a_v \boldsymbol{v} & H_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_w & -a_w \boldsymbol{\beta}_w^T \\ -a_w \boldsymbol{w} & H_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \boldsymbol{x} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_v a_w (1 + \boldsymbol{\beta}_v^T \boldsymbol{w}) & -a_v (a_w \boldsymbol{\beta}_w^T + \boldsymbol{\beta}_v^T H_w) \\ -a_w (a_v \boldsymbol{v} + H_v \boldsymbol{w}) & a_v a_w \boldsymbol{v} \boldsymbol{\beta}_w^T + H_v H_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \boldsymbol{x} \end{pmatrix} \quad .$$

No otras puses:

$$\begin{pmatrix} t'' \\ \boldsymbol{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_u & -a_u \boldsymbol{\beta}_u^T \\ -a_u \boldsymbol{u} & H_u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \boldsymbol{x} \end{pmatrix} \quad .$$

Uzdevums 3.2. Ja uzreiz nevarat tam noticēt, pārliecinieties paši, ka, vispār ņemot, ja $n>1$, tad mūsu transformācija **nav komutatīvas**. T.i., no vienas puses, ja S' kustas pret S ar ātrumu ***w***, un S'' kustas pret S' ar ātrumu ***v***, tad S'' kustas pret S ar kādu ātrumu **u**, ko var aprēķināt, zinot **v** un **w**. Bet, no otras puses, ja S' kustas pret S ar ātrumu ***v***, un S'' kustas pret S' ar ātrumu ***w***, tad S'' kustas pret S ar kādu ātrumu **u'**, kas var nesakrist ar ātrumu **u**. Izrādās, ka mūsu transformācijas var komutēt tikai speciālos gadījumos (viens no tādiem – kad ātrumi **v** un **w** ir paralēli). [Beigās redzēsim, ka vienmēr komutē ātrumu **lielumi** ($u' = u$), bet ne to virzieni.]

Aplūkosim divus speciālgadījumus: $\boldsymbol{w} = -\boldsymbol{v}$ un $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}$.

Gadījums $\boldsymbol{w} = -\boldsymbol{v}$.

Ja $\boldsymbol{w} = -\boldsymbol{v}$, t.i. S' kustas pret S ar ātrumu $-\boldsymbol{v}$, bet S'' pret S' – ar ātrumu ***v***. Devītais pieņēmums: tādā gadījumā S'' pret S ir nekustīga, t.i. abas sistēmas ir identiskas un

$$\begin{pmatrix} t'' \\ \boldsymbol{x}'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{0}^T \\ \boldsymbol{0} & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \boldsymbol{x} \end{pmatrix} \text{, jeb: } \begin{matrix} t'' = t \\ \boldsymbol{x}'' = \boldsymbol{x} \end{matrix} \quad .$$

Tātad, pielīdzinot attiecīgos matricas elementus (izmantojam arī to, ka $a_{-v}=a_v>0$):

$$\begin{array}{ccc} a_v a_{-v}(1-\boldsymbol{\beta}_v^T \boldsymbol{v})=1; & & a_v^2(1-\boldsymbol{\beta}_v^T \boldsymbol{v})=1; \\ -a_v(a_{-v}\boldsymbol{\beta}_{-v}^T+\boldsymbol{\beta}_v^T H_{-v})=\boldsymbol{0}^T; & \text{jeb} & a_v\boldsymbol{\beta}_{-v}^T+\boldsymbol{\beta}_v^T H_{-v}=\boldsymbol{0}^T; \\ -a_{-v}(a_v\boldsymbol{v}-H_v\boldsymbol{v})=\boldsymbol{0}; & & a_v\boldsymbol{v}-H_v\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}; \\ a_v a_{-v}\boldsymbol{v}\boldsymbol{\beta}_{-v}^T+H_v H_{-v}=E_n. & & a_v^2\boldsymbol{v}\boldsymbol{\beta}_{-v}^T+H_v H_{-v}=E_n. \end{array}$$

Vispār ņemot, mūsu transformācijas nekomutē, bet ātrumiem $\boldsymbol{v}$ un $-\boldsymbol{v}$ atbilstošās transformācijas tomēr **komutē**. Īpašs pieņēmums tam nav vajadzīgs: astotajā pieņēmumā mēs varējām paņemt arī $\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{w}$. Tātad tikko iegūtajās četrās vienādībās mēs varam mainīt vietām $\boldsymbol{v}$ un $-\boldsymbol{v}$, iegūstot vēl četras noderīgas vienādības.

Aplūkosim **pirmo** vienādību $a_v^2(1-\boldsymbol{\beta}_v^T\boldsymbol{v})=1$. Mainot vietām $\boldsymbol{v}$ un $-\boldsymbol{v}$, iegūstam $a_v^2(1+\boldsymbol{\beta}_{-v}^T\boldsymbol{v})=1$. Tātad $\boldsymbol{\beta}_{-v}^T\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{\beta}_v^T\boldsymbol{v}$.

Transponēsim **otro** vienādību $a_v\boldsymbol{\beta}_{-v}^T+\boldsymbol{\beta}_v^T H_{-v}=\boldsymbol{0}^T$, iegūstot, ka $a_v\boldsymbol{\beta}_{-v}+H_{-v}\boldsymbol{\beta}_v=\boldsymbol{0}$ un $H_{-v}\boldsymbol{\beta}_v=-a_v\boldsymbol{\beta}_{-v}$, kā arī, mainot vietām $\boldsymbol{v}$ un $-\boldsymbol{v}$, $H_v\boldsymbol{\beta}_{-v}=-a_v\boldsymbol{\beta}_v$. Šīs divas vienādības mums tūlīt noderēs.

Trešā vienādība $a_v\boldsymbol{v}-H_v\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$ mums nekā jauna nedod – to, ka $H(\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}=a(\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}$, mēs jau zinām.

Ceturtajā vienādībā $a_v^2\boldsymbol{v}\boldsymbol{\beta}_{-v}^T+H_v H_{-v}=E_n$ pareizināsim abas puses ar $\boldsymbol{\beta}_v$ (no labās puses):

$$a_v^2\boldsymbol{v}\boldsymbol{\beta}_{-v}^T\boldsymbol{\beta}_v+H_v H_{-v}\boldsymbol{\beta}_v=\boldsymbol{\beta}_v \ .$$

Un izmantosim nupat iegūtās divas vienādības, $H_{-v}\boldsymbol{\beta}_v=-a_v\boldsymbol{\beta}_{-v}$ un $H_v\boldsymbol{\beta}_{-v}=-a_v\boldsymbol{\beta}_v$:

$$a_v^2\boldsymbol{v}\boldsymbol{\beta}_{-v}^T\boldsymbol{\beta}_v+a_v^2\boldsymbol{\beta}_v=\boldsymbol{\beta}_v \ ;$$

$$(a_v^2-1)\boldsymbol{\beta}_v=-a_v^2\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\beta}_{-v}^T\boldsymbol{\beta}_v) \ .$$

No šejienes varam izdarīt svarīgu secinājumu: ja vektors $\boldsymbol{\beta}_v$ nav **0**, tad tas ir **paralēls vektoram *v***.

Tas nozīmē, ka

$$\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{v})=\eta(\boldsymbol{v})\boldsymbol{v} \ ,$$

jeb īsāk: $\boldsymbol{\beta}_v=\eta_v \boldsymbol{v}$, kur $\eta(\boldsymbol{v})$ ir kāda **skalāra** funkcija. Jau agrāk secinājām (no 1.pieņēmuma), ka $\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{v})$ ir nepārtraukta funkcija punkta **v**=**0** mazā apkārtnē, tātad arī $\eta(\boldsymbol{v})$ ir **nepārtraukta** funkcija punkta **v**=**0** mazā apkārtnē (izņēmums varētu būt tikai pats punkts **v**=**0**).

Mūsu transformāciju matrica tagad izskatās šādi ($\boldsymbol{v}^T \boldsymbol{x}=\boldsymbol{v}\boldsymbol{x}$ ir parastais vektoru skalārais reizinājums):

$$\begin{pmatrix} t' \\ \boldsymbol{x}' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & -a\eta \boldsymbol{v}^T \\ -a\boldsymbol{v} & H \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ \boldsymbol{x} \end{pmatrix} \text{ , jeb } \begin{matrix} t'=a(t-\eta \boldsymbol{v}\boldsymbol{x}) \\ \boldsymbol{x}'=-a\boldsymbol{v}t+H\boldsymbol{x} \end{matrix} \quad .$$

Un mūsu agrāk iegūtā pirmā vienādība $a_v^2(1-\boldsymbol{\beta}_v^T \boldsymbol{v})=1$ tagad kļūst par $a_v^2(1-\eta_v v^2)=1$, tāpēc varam secināt, ka $1-\eta_v v^2>0$ un (tā kā a(**v**)>0):

$$\eta(\boldsymbol{v})<\frac{1}{v^2} \text{ ; un } a(\boldsymbol{v})=\frac{1}{\sqrt{1-\eta(\boldsymbol{v})v^2}} \quad .$$

Pārrakstīsim arī transformāciju kompozīciju:

$$\begin{pmatrix} t'' \\ \boldsymbol{x} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_v & -a_v\eta_v \boldsymbol{v}^T \\ -a_v\boldsymbol{v} & H_v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_w & -a_w\eta_w \boldsymbol{w}^T \\ -a_w\boldsymbol{w} & H_w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ \boldsymbol{x} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_v a_w(1+\eta_v \boldsymbol{v}^T \boldsymbol{w}) & -a_v(a_w\eta_w \boldsymbol{w}^T+\eta_v \boldsymbol{v}^T H_w) \\ -a_w(a_v\boldsymbol{v}+H_v\boldsymbol{w}) & a_v a_w \eta_w \boldsymbol{v}\boldsymbol{w}^T+H_v H_w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ \boldsymbol{x} \end{pmatrix} \quad . \tag{10}$$

No otras puses:

$$\begin{pmatrix} t'' \\ \boldsymbol{x} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_u & -a_u\eta_u \boldsymbol{u}^T \\ -a_u\boldsymbol{u} & H_u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ \boldsymbol{x} \end{pmatrix} \quad . \tag{10'}$$

Pielīdzinot pirmās kolonas elementus, iegūstam:

$$a_u=a_v a_w(1+\eta_v \boldsymbol{v}^T \boldsymbol{w}) \text{ ;}$$

$$-a_u\boldsymbol{u}=-a_w(a_v\boldsymbol{v}+H_v\boldsymbol{w}) \text{ ;}$$

$$\boldsymbol{u}=\frac{\boldsymbol{v}+\frac{1}{a_v}H_v\boldsymbol{w}}{1+\eta_v \boldsymbol{v}\boldsymbol{w}} \quad .$$

Vai tāds tagad būs **ātrumu saskaitīšanas likums *n* dimensijās?**

Pielīdzinot otrās kolonas elementus:

$$-\eta_u a_u \boldsymbol{u}^T = -a_v (a_w \eta_w \boldsymbol{w}^T + \eta_v \boldsymbol{v}^T H_w) \;;$$

$$H_u = a_v a_w \eta_w \boldsymbol{v}\boldsymbol{w}^T + H_v H_w \;.$$

Transponēsim un pārveidosim pirmo vienādību:

$$a_u \eta_u \boldsymbol{u} = a_v (a_w \eta_w \boldsymbol{w} + \eta_v H_w \boldsymbol{v}) = a_v a_w \left(\eta_w \boldsymbol{w} + \eta_v \frac{1}{a_w} H_w \boldsymbol{v}\right) \;.$$

Kopā ar $a_u = a_v a_w (1 + \eta_v \boldsymbol{v}^T \boldsymbol{w})$ tas dod:

$$\eta_u \boldsymbol{u} = \frac{\eta_w \boldsymbol{w} + \eta_v \frac{1}{a_w} H_w \boldsymbol{v}}{1 + \eta_v \boldsymbol{v}^T \boldsymbol{w}} \text{ , jeb } (\eta_u \boldsymbol{u}) = \frac{(\eta_w \boldsymbol{w}) + \frac{1}{a_w} H_w (\eta_v \boldsymbol{v})}{1 + (\eta_v \boldsymbol{v}) \boldsymbol{w}} \;. \qquad (10'')$$

Šī nedaudz mistiskā vienādība satur svarīgu informāciju, kas citur nav atrodama, un to mēs tūlīt nopietni izmantosim.

Gadījums $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}$.

Ja $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}$, tad $H_v \boldsymbol{w} = H_v \boldsymbol{v} = a_v \boldsymbol{v}$ un tāpēc:

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{v} + \frac{1}{a_v} H_v \boldsymbol{w}}{1 + \eta_v \boldsymbol{v}\boldsymbol{w}} = \frac{2\boldsymbol{v}}{1 + \eta_v v^2} \;.$$

Desmitais pieņēmums: **u** nevar būt vērsts pretēji **v**, un **u** (kā divu galīgu ātrumu **v** un **v** saskaitīšanas rezultāts) nevar būt bezgalīgs. Tātad $1 + \eta_v v^2 > 0$ un tāpēc $\eta(\boldsymbol{v}) > -\frac{1}{v^2}$. Jau iepriekš bijām secinājuši, ka $\eta(\boldsymbol{v}) < \frac{1}{v^2}$, tātad, savelkot kopā: $-\frac{1}{v^2} < \eta(\boldsymbol{v}) < \frac{1}{v^2}$.

Tālāk, no mistiskās formulas (10") iegūstam:

$$(\eta_u \boldsymbol{u}) = \frac{(\eta_w \boldsymbol{w}) + \frac{1}{a_w} H_w (\eta_v \boldsymbol{v})}{1 + (\eta_v \boldsymbol{v}) \boldsymbol{w}} = \frac{2\eta_v \boldsymbol{v}}{1 + \eta_v v^2} \;.$$

Bet mēs zinām, ka $\boldsymbol{u} = \frac{2\boldsymbol{v}}{1 + \eta_v v^2}$, tātad:

$$\eta_u \boldsymbol{u} = \eta_u \frac{2\boldsymbol{v}}{1+\eta_v v^2} = \frac{2\eta_v \boldsymbol{v}}{1+\eta_v v^2} \;;$$

$$\eta_u \boldsymbol{v} = \eta_v \boldsymbol{v} \;.$$

Ļoti svarīgs secinājums: ja $\boldsymbol{v}$ ir nenulles vektors, tad $\eta(\boldsymbol{u})=\eta(\boldsymbol{v})$ un līdz ar to $-\frac{1}{u^2}<\eta(\boldsymbol{v})<\frac{1}{u^2}$.

Ko no tā varam secināt par $\eta(\boldsymbol{v})$? Vai tas būtu pozitīvs lielums? Un ja $\eta(\boldsymbol{u})=\eta(\boldsymbol{v})$ (tiesa, ātrums $\boldsymbol{u}$ ir ļoti specifiski sasaistīts ar $\boldsymbol{v}$ kā "$\boldsymbol{v}$ un $\boldsymbol{v}$ summa"), tad vai tas nav mājiens, ka $\eta(\boldsymbol{v})$ nemaz nav atkarīgs no $\boldsymbol{v}$ (t.i ka tā īstenībā ir **"pasaules konstante"** η)?

Pieņemsim uz brīdi, ka kādam nenulles ātrumam **v**, $\eta(\boldsymbol{v})\leq 0$. Tad $0<1+\eta_v v^2\leq 1$, tāpēc $u=\frac{2v}{1-\eta_v v^2}\geq 2v$. Atkārtosim šo konstrukciju ar sistēmām S, S', S'', ņemot **v** vietā **u**, iegūstot ātrumu $\boldsymbol{u_2}$, kam $u_2\geq 2u\geq 4v$. Tā turpinot, iegūsim neierobežoti lielus ātrumus $\boldsymbol{u_n}$, kam $u_n\geq 2^n v$. Tātad

$$-\frac{1}{2^{2n}v^2}<\eta(\boldsymbol{v})<\frac{1}{2^{2n}v^2}$$

jebkuram *n*, un tāpēc $\eta(\boldsymbol{v})=0$.

Atkārtosim, ko esam ieguvuši: ja kādam nenulles ātrumam $\boldsymbol{v}$, $\eta(\boldsymbol{v})\leq 0$, tad $\eta(\boldsymbol{v})=0$.

Secinājums: nenulles ātrumam $\boldsymbol{v}$, $\eta(\boldsymbol{v})\geq 0$.

Varam pamēģināt iet arī pretējā virzienā: kādu divu vienādu ātrumu $\boldsymbol{w_1}(\boldsymbol{v})$ "summa" ir vektors $\boldsymbol{v}$? (Tas ir interesanti, jo mēs taču zinām, ka tad $\eta_{w_1}=\eta_v$!)

$$\boldsymbol{v}=\frac{2\boldsymbol{w_1}}{1+\eta_v w_1^2};\, \boldsymbol{w_1}=k(\boldsymbol{v})\boldsymbol{v};\, \boldsymbol{v}=\frac{2k_v\boldsymbol{v}}{1+\eta_v k_v^2 v^2};\, 1+\eta_v k_v^2 v^2=2k_v \;;$$

$$-\eta_v v^2 k_v^2+2k_v-1=0;\, k(\boldsymbol{v})=\frac{-2\pm\sqrt{4-4\eta_v v^2}}{2\eta_v v^2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-\eta_v v^2}}{\eta_v v^2};\, \frac{1}{2}\leq k(\boldsymbol{v})<1 \;;$$

$$k(\boldsymbol{v})=\frac{1-\sqrt{1-\eta_v v^2}}{\eta_v v^2}=\frac{1}{1+\sqrt{1-\eta_v v^2}};\, \frac{1}{2}\leq k(\boldsymbol{v})<1 \;\text{, jo }\; 0\leq\eta(\boldsymbol{v})v^2<1 \;.$$

Tā varam turpināt uz leju, iegūstot arvien mazākus ātrumus:

$\boldsymbol{w_1}(\boldsymbol{v})=k(\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}\,;w_1\le k_v v<v$;

$\boldsymbol{w_2}(\boldsymbol{v})=k(\boldsymbol{w_1})\boldsymbol{w_1}(\boldsymbol{v});\eta_{w_1}=\eta_v\,;k(\boldsymbol{w_1})\le k(\boldsymbol{v});w_2\le k_v^2 v$;

...

$\boldsymbol{w_n}(\boldsymbol{v})=k(w_{n-1})\boldsymbol{w_{n-1}}(\boldsymbol{v});w_n\le k_v^n v$.

Kā redzam, $\boldsymbol{w_n}(\boldsymbol{v})\rightarrow\boldsymbol{0}$, un visiem šiem ātrumiem $\eta(\boldsymbol{w_n}(\boldsymbol{v}))=\eta(\boldsymbol{v})$. Vai no šejienes neseko, ka $\eta(\boldsymbol{v})=const$?

Tā kā $\eta(\boldsymbol{v})$ ir **nepārtraukta** funkcija punkta **v**=**0** mazā apkārtnē (izņemot, varbūt, pašu punktu **v**=**0**), tad katram mazam $\delta>0$ eksistē tik mazs $\epsilon>0$, ka nenulles ātrumiem **w**, **w'** no $|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{w}'|<\epsilon$ seko $|\eta(\boldsymbol{w})-\eta(\boldsymbol{w}')|<\delta$.

Patvaļīgiem **v**, **v'** un minētajam $\epsilon>0$ paņemsim *n* tik lielu, ka $|\boldsymbol{w_n}(\boldsymbol{v})|<\frac{\epsilon}{2}$, $|\boldsymbol{w_n}(\boldsymbol{v}')|<\frac{\epsilon}{2}$, tad $|\boldsymbol{w_n}(\boldsymbol{v})-\boldsymbol{w_n}(\boldsymbol{v}')|<\delta$, tātad:

$$|\eta(\boldsymbol{v})-\eta(\boldsymbol{v}')|=|\eta(\boldsymbol{w_n}(\boldsymbol{v}))-\eta(\boldsymbol{w_n}(\boldsymbol{v}'))|<\delta\ .$$

Un tā katram mazam $\delta>0$. Tas nozīmē, ka $\eta(\boldsymbol{v})=\eta(\boldsymbol{v}')$, t.i. nenulles ātrumam **v**, $\eta(\boldsymbol{v})$ nav atkarīgs no **v**, un tā ir **universāla "pasaules konstante"** η .

Bet kā ar nulles ātrumu un $\eta(\boldsymbol{0})$? Tā kā $\eta(\boldsymbol{v})$ mums figurē tikai kā koeficients pie v^2 , tad $\eta(\boldsymbol{0})$ vērtība neko neietekmē, un varam uzskatīt, ka $\eta(\boldsymbol{0})$ ir tāds pats, kā $\eta(\boldsymbol{v})$ nenulles ātrumiem.

Vienādībā $\boldsymbol{u}=\frac{2\boldsymbol{v}}{1-\eta_v v^2}$ redzam, ka ηv^2 ir jābūt bezdimensiju lielumam, tātad η dimensija ir 1/ātrums^2 un varam rakstīt:

$$\eta=\frac{1}{c^2}\ ,$$

kur ***c*** **ir kāds universāls ātrums ("pasaules konstante")**. Tas varētu būt galīgs (ja $\eta>0$) vai bezgalīgs (ja $\eta=0$).

Agrāk iegūtā formula $a(\boldsymbol{v})=\frac{1}{\sqrt{1-\eta v^2}}$ tagad kļūst par $a(\boldsymbol{v})=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$.

Ja šeit c ir bezgalīgs ātrums, tad a(**v**)=1 un ātruma v lielumu tad nekas neierobežo.

Bet ja c ir galīgs ātrums, tad $v<c$, t.i. tad **IAS var kustēties tikai ar ātrumiem, kas ir mazāki par "pasaules konstanti" *c*.**

No agrāk iegūtās formulas $t'=a(t-\eta\mathbf{v}\mathbf{x})$ mēs tagad uzreiz iegūstam Hergloca formulu laika transformācijai:

$$t'=\frac{-\frac{1}{c^2}(\mathbf{x}\,\mathbf{v})+t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\text{ , jeb }\quad t'=\frac{-\frac{v}{c^2}\,proj(\mathbf{x},\mathbf{v})+t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\quad .$$

Koordinātu **x'** transformācijas jautājumā gan pagaidām esam apstājušies pie formulas:

$$\mathbf{x}'=-a\mathbf{v}t+H\mathbf{x}\ .$$

Zinām, ka H(**v**) ir simetriska $n\times n$ matrica, kam piemīt īpašība $H\mathbf{v}=a\mathbf{v}$, t.i. **v** ir tās īpašvektors, bet a=a(**v**) – tās īpašvērtība.(Simetriskai $n\times n$ matricai visas *n* īpašvērtības ir reāli skaitļi.) Tas nozīmē, ka ja **x** ir paralēls **v**, tad H**x**=a**x** un $\mathbf{x}'=-a\mathbf{v}t+a\mathbf{x}=a(-\mathbf{v}t+\mathbf{x})$.

Lai turpinātu, mums ir vajadzīgs jauns pieņēmums par to, kā sistēmas S' kustība (ar ātrumu **v** pret sistēmu S) ietekmē koordinātes virzienos, kas ir **perpendikulāri** ātrumam **v**.

11-ais pieņēmums: virzienos, kas ir **perpendikulāri** ātrumam **v**, sistēmas S' kustība telpas koordinātes **neietekmē**.

Tātad, ja **x** ir perpedikulārs **v**, tad pie t=0: $\mathbf{x}'=-a\mathbf{v}t+H\mathbf{x}=H\mathbf{x}=\mathbf{x}$. (Starp citu, tas nozīmē, ka matricai H visas pārējās $n-1$ īpašvērtības ir vienādas ar 1).

Vispārīgajā gadījumā: $\mathbf{x}=\mathbf{x}_{perp}+\mathbf{proj}_v(\mathbf{x})$, kur $\mathbf{x}_{perp}$ ir vektora **x** projekcija (hiper)plaknē, kas perpendikulāra vektoram **v**, un tāpēc:

$$\mathbf{x}'=-a\mathbf{v}t+H(\mathbf{x}_{perp}+\mathbf{proj}_v(\mathbf{x}))=-a\mathbf{v}t+\mathbf{x}_{perp}+a\,\mathbf{proj}_v(\mathbf{x})\ ;$$

$$\mathbf{x}'=-a\mathbf{v}t+\mathbf{x}-\mathbf{proj}_v(\mathbf{x})+a\,\mathbf{proj}_v(\mathbf{x})\ ;$$

$$\mathbf{x}'=\mathbf{x}-\mathbf{proj}_v(\mathbf{x})+a(\mathbf{proj}_v(\mathbf{x})-\mathbf{v}t)\ .$$

Līdz ar to esam ieguvuši arī otro Hergloca formulu:

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{proj}_v(\boldsymbol{x})+\frac{\boldsymbol{proj}_v(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{v}\,t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad ,$$

jeb, kā raksta fiziķi:

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x}+(a-1)\,\boldsymbol{proj}_v(\boldsymbol{x})-a\,\boldsymbol{v}\,t=\boldsymbol{x}+\frac{a-1}{v^2}(\boldsymbol{vx})\,\boldsymbol{v}-a\,\boldsymbol{v}\,t \quad ; \qquad (11)$$

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x}+\frac{1}{v^2}\Bigg(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-1\Bigg)(\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{v}-\frac{\boldsymbol{v}\,t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad .$$

Mūsu mērķis ir sasniegts.

P2. Par matricu H

Bet kāda tad ir $n\times n$ matrica $H=(h_{ij})$, ar kuru tik daudz esam nodarbojušies? Vispirms izteiksim

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{proj}(\boldsymbol{x}\,,\boldsymbol{v})=\frac{1}{v^2}(\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{v}$$

kā **x** lineāru transformāciju:

$$y_i=\frac{1}{v^2}\Big(\sum_j v_j x_j\Big)v_i=\frac{1}{v^2}\sum_j v_i v_j x_j \quad .$$

Tātad $\boldsymbol{y}=\frac{1}{v^2}G\boldsymbol{x}$, kur matricā G: $g_{ij}=v_i v_j$, jeb $G=\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{T}}$. Tātad:

$$\boldsymbol{proj}_v(\boldsymbol{x})=\frac{1}{v^2}(\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{T}})\,\boldsymbol{x} \quad ;$$

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{proj}_v(\boldsymbol{x})+a(\boldsymbol{proj}_v(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{v}\,t) \quad ;$$

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x}-\frac{1}{v^2}(\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{T}})\,\boldsymbol{x}+a\Big(\frac{1}{v^2}(\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{T}})\,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{v}\,t\Big) \quad .$$

Salīdzinot to ar $\boldsymbol{x}'=-a\,\boldsymbol{v}\,t+H\,\boldsymbol{x}$, redzam, ka $H\,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}+\frac{a-1}{v^2}(\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{T}})\,\boldsymbol{x}$, jeb:

$$H(\boldsymbol{v}) = E_n + \frac{a(\boldsymbol{v})-1}{v^2}(\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^T) \quad ;$$

$$h_{ij}(\boldsymbol{v}) = \delta_{ij} + \frac{a(\boldsymbol{v})-1}{v^2} v_i v_j \quad .$$

Šeit δ_{ij} ir t.s. Kronekera simbols, kas pieņem vērtību 1, ja $i=j$, citādi – vērtību 0).

Izvērsta aina 3 dimensiju gadījumā ir šāda:

$$H(\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{a(\boldsymbol{v})-1}{v^2} \begin{pmatrix} v_1^2 & v_1 v_2 & v_1 v_3 \\ v_2 v_1 & v_2^2 & v_2 v_3 \\ v_3 v_1 & v_3 v_1 & v_3^2 \end{pmatrix} \quad ;$$

$$H(\boldsymbol{v})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} + \frac{a(\boldsymbol{v})-1}{v^2}(\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \frac{a(\boldsymbol{v})-1}{v^2}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}\boldsymbol{x}) \quad .$$

Šīs formulas ir arī rakstā [9].

P3. Ātrumu saskaitīšanas likums *n* dimensijās

Jau agrāk konstatējām, ka ja sistēmā S sistēma S' kustas ar ātrumu **v**, un savukārt, sistēmā S' sistēma S'' kustas ar ātrumu **w**, tad rezultātā sistēmā S sistēma S'' kustas ar ātrumu:

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{v} + \frac{1}{a_v} H_v \boldsymbol{w}}{1 + \frac{\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}}{c^2}} \quad .$$

Redzam, ka atšķirībā no vienas dimensijas gadījuma, šī formula **nav simetriska** pret **v** un **w**.

Izteiksmi $H_v \boldsymbol{w}$ varam pārveidot, sadalot vektoru **w** divās daļās – viena būs paralēla vektoram **v**, otra – perpendikulāra (ortogonāla):

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{proj}_v(\boldsymbol{w}) + [\boldsymbol{w} - \boldsymbol{proj}_v(\boldsymbol{w})] \quad .$$

Mēs zinām, ka paralēlo daļu matrica H_v "izstiepj" ar koeficientu a_v (atceramies, ka $H_v \boldsymbol{v} = a_v \boldsymbol{v}$), bet perpendikulāro daļu tā nemaina:

$$H_v \boldsymbol{w} = H_v(\boldsymbol{proj}_v(\boldsymbol{w}) + \boldsymbol{w} - \boldsymbol{proj}_v(\boldsymbol{w})) = a_v \, \boldsymbol{proj}_v(\boldsymbol{w}) + \boldsymbol{w} - \boldsymbol{proj}_v(\boldsymbol{w}) \ .$$

Tātad:

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{v} + \boldsymbol{proj}_v(\boldsymbol{w}) + \frac{1}{a_v}(\boldsymbol{w} - \boldsymbol{proj}_v(\boldsymbol{w}))}{1 + \frac{\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}}{c^2}} \ ;$$

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{v} + \boldsymbol{proj}_v(\boldsymbol{w}) + (\boldsymbol{w} - \boldsymbol{proj}_v(\boldsymbol{w}))\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}}{c^2}} \ .$$

Kompaktāks tomēr būs šāds pieraksts: $\boldsymbol{w}_{paral} = \boldsymbol{proj}_v(\boldsymbol{w}); \boldsymbol{w}_{perp} = +\boldsymbol{w} - \boldsymbol{proj}_v(\boldsymbol{w})$:

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}_{paral} + \boldsymbol{w}_{perp}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}}{c^2}} \ .$$

Ja vektori **v** un **w** ir paralēli (kolineāri), tad sanāk mums jau zināmā formula no vienas dimensijas gadījuma:

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}}{1 + \frac{\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}}{c^2}} = \frac{\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}}{1 + \frac{v w}{c^2}} \ .$$

Savukārt, ja vektori **v** un **w** ir perpendikulāri (ortogonāli), tad:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \ .$$

Saskaitot ātrumu **v** ar ātrumu **w**, ieguvām ātrumu **u**. Bet ja saskaitīsim **w** ar **v**, iegūstot ātrumu **u'**, vai **u'** būs vienāds ar **u**?

Izrādās, ka saskaitot, ātrumi nekomutē virzienu ziņā (t.i. vispārīgajā gadījumā, $\boldsymbol{u}' \neq \boldsymbol{u}$), bet **komutē ātrumu lielumos** (t.i. u'=u, šo tēzi noskatīju Pauli grāmatā!). Tiešām, pārliecināsimies, ka ātrumu saskaitīšanas likums vektoru lielumu ziņā ir simetrisks pret **v** un **w**.

Pirmkārt, izteiksmes saucējs $1+\frac{\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}}{c^2}$ ir simetrisks pret **v** un **w**. Otrkārt, aplūkosim izteiksmes skaitītāja kvadrātu:

$$\left(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{paral}}+\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{perp}}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)^2=v^2+w_{paral}^2+w_{perp}^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)+2\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{paral}} .$$

Pārējie divi saskaitāmie ir vienādi ar 0 vektoru perpendikularitātes dēļ. Tā kā $w_{paral}^2+w_{perp}^2=w^2$ un $\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{paral}}=\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}$, tad mūsu skaitītāja kvadrāts tagad ir $v^2+w^2-w_{perp}^2\frac{v^2}{c^2}+2\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}$. Pirmā, otrā un ceturtā saskaitāmā summa ir simetriska pret ***v*** un ***w***. Atliek aplūkot trešo saskaitāmo, t.i. reizinājumu $w_{perp}^2 v^2$. Tas ir kvadrāts paralelograma laukumam, ko veido vektori ***v***, ***w***. Tātad $w_{perp}^2 v^2=v_{perp}^2 w^2$, un arī trešais saskaitāmais ir simetrisks pret ***v*** un ***w***.

Uzdevums 3.3. Aplūkosim sistēmas S koordinātu asu vienības vektorus $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n$ laika momentā t=0. Kā tie šajā momentā izskatās sistēmā S'? Izmantojot formulu (11), parādiet, ka vektora $\boldsymbol{e}_i$ garuma kvadrāts (kas sistēmā S ir 1) sistēmā S' ir $1+\frac{a^2-1}{v^2}v_i^2$, bet $\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j$ skalārais reizinājums (kas sistēmā S ir 0) sistēmā S' ir $\frac{a^2-1}{v^2}v_i v_j$. Ko no tā varam secināt?

Pagaidām viss. Vēl esmu jums "parādā" Minkovska laiktelpas ģeometriju. Sk. Wikipedia: Minkowski space un Hermann Minkowski.

Pateicības

Paldies Paulim Ķikustam un Dainim Zepam par vērtīgajām diskusijām.