Maruta Avotiņa

MODERNĀS ELEMENTĀRĀS ALGEBRAS UN ĢEOMETRIJAS ELEMENTI MATEMĀTIKAS SKOLOTĀJIEM

SKOLOTĀJU IZGLĪTĪBAS JOMA:
Modernās elementārās algebras un ģeometrijas elementi

LATVIJAS UNIVERSITĀTE

LATVIJAS UNIVERSITĀTE
PEDAGOĢIJAS, PSIHOLOĢIJAS UN MĀKSLAS FAKULTĀTE

Maruta Avotiņa

MODERNĀS ELEMENTĀRĀS ALGEBRAS UN ĢEOMETRIJAS ELEMENTI MATEMĀTIKAS SKOLOTĀJIEM

SKOLOTĀJU IZGLĪTĪBAS JOMA:
Modernās elementārās algebras un ģeometrijas elementi

Latvijas Universitāte,
Pedagoģijas, psiholoģijas un mākslas fakultāte
2020

Maruta Avotiņa. *Modernās elementārās algebras un ģeometrijas elementi matemātikas skolotājiem.* Rīga: LU Akadēmiskais apgāds, 2020. 148 lpp.

Grāmata izstrādāta Latvijas Universitātes Pedagoģijas, psiholoģijas un mākslas fakultātes 2020. gada attīstības projektā “Inovatīvo mācību materiālu izstrāde jaunajām izglītības, pedagoģijas un sporta virziena studiju programmām”.

Grāmata paredzēta studiju kursa “Modernās elementārās algebras un ģeometrijas elementi” (4 kredītpunkti) apguvei integrētās profesionālās bakalaura studiju programmas “Skolotājs” studentiem. Tajā iekļauts teorijas materiāls, uzdevumu piemēri un uzdevumi ar atrisinājumiem patstāvīgajam darbam. Materiālu var izmantot arī matemātikas skolotāji mācību procesā, gatavojot vidusskolēnus matemātikas olimpiādēm.

Recenzents: *Dr. math.* Andrejs Cibulis, LU Fizikas un matemātikas fakultātes profesors

Korektore Gita Kļaviņa
Vāku un iekšlapu dizainu veidojusi Baiba Lazdiņa
Maketējusi Ieva Zarāne

e-ISBN 978-9934-18-557-1

Saturs

Ievads

E-grāmata “Modernās elementārās algebras un ģeometrijas elementi matemātikas skolotājiem” paredzēta studiju kursa “Modernās elementārās algebras un ģeometrijas elementi” (4 KP) apguvei integrētās profesionālās bakalaura studiju programmas “Skolotājs” studentiem, kas izvēlējušies matemātikas apakšprogrammu. Materiālu var izmantot arī matemātikas skolotāji mācību procesā un ārpusklases nodarbību vadītāji, gatavojot vidusskolēnus matemātikas olimpiādēm.

Materiāla mērķis ir aplūkot elementārās metodes algebras un ģeometrijas uzdevumu risināšanā un palīdzēt topošajiem matemātikas skolotājiem pilnveidot dažādu līmeņu matemātikas olimpiāžu uzdevumu risināšanas prasmes un iemaņas, kā arī attīstīt spriešanas spējas nestandarta uzdevumos.

E-grāmatā iekļauta teorija un uzdevumu piemēri ar izvērstiem atrisinājumiem, katras apakšnodaļas beigās – uzdevumi patstāvīgam darbam, kuru atrisinājumi salīdzināšanai un paš-pārbaudei apkopoti 8. nodaļā. Grāmatā dotie uzdevumu atrisinājumi nav vienīgie iespējamie, dažiem uzdevumiem piedāvāti vairāki principiāli atšķirīgi risinājumi. Piemēri un uzdevumi pārsvarā ņemti no Latvijas līmeņa matemātikas olimpiādēm, kuras organizē Latvijas Universitātes A. Liepas Neklātienes matemātikas skola; šie uzdevumi pieejami [19]. Katras nodaļas beigās norādīta literatūra papildu zināšanu apguvei par attiecīgo tēmu.

Darbā ietvertas algebras un ģeometrijas tēmas, kas skolas kursā līdz šim netika apskatītas vai arī tika apgūtas ļoti virspusēji, bet matemātikas olimpiādēs uzskatāmas par pamattēmām. Saturs veidots ar mērķi veidot dziļāku izpratni par apgūstamo materiālu un attīstīt spriešanas spējas, lai izdarītu secinājumus, nevis tikai iemācītos konkrētus algoritmus uzdevumu risināšanai. Tā kā studenti skolā mācījušies pēc 2013. gadā izstrādātā standarta un programmas, tad materiāls viņiem noderēs, pašiem strādājot skolā, jo tas veidots, balstoties uz Valsts izglītības satura centra īstenotā projekta “Kompetenču pieeja mācību saturā” (*Skola 2030*) izstrādāto jauno vispārējo vidējās izglītības standartu un pilnveidoto pieeju mācību procesā, kurā galvenais uzsvars matemātikā augstākajā līmenī likts uz izpratnes veidošanu, vispārīgu spriedumu izdarīšanu, pierādījuma nepieciešamību, pierādīšanas prasmju attīstīšanu, kā arī jaunu, kompleksu uzdevumu risināšanu.

1. nodaļā sniegts pārskats par vienkāršākajām nevienādību pierādīšanas metodēm, kuras saistītas ar skolā apgūtajām zināšanām – pilno kvadrātu atdalīšanu, sadalīšanu reizinātājos, izteiksmes novērtēšanu – un ekvivalento pārveidojumu izmantošanu, pierādot nevienādības. Skolas kursā nav iekļauta nevienādība starp aritmētisko vidējo un ģeometrisko vidējo, bet to var izmantot darbā ar spējīgākajiem skolēniem kā papildus apgūstamo materiālu.

2. nodaļā skolā apgūtās metodes vienādojumu un vienādojumu sistēmu risināšanā aplūkotas nestandarta situācijās, kā arī parādīts Vjeta teorēmas lietojums ne tikai kvadrātvienādojuma sakņu minēšanā, bet arī sarežģītāku uzdevumu risināšanā. Apskatīta simetrijas

nozīme algebras uzdevumu risināšanā un nevienādību izmantošana vienādojumu risināšanā, kas parāda saistību starp dažādu matemātikas apakšnozaru elementu izmantošanu viena uzdevuma risinājuma ietvaros. Šāda veida uzdevumiem projekta *Skola 2030* izstrādātajā vidējās izglītības standartā ir liela nozīme, jo tie parāda prasmi sasaistīt apgūtās zināšanas, risinot kompleksus uzdevumus.

3. nodaļa veltīta funkcijām un to īpašībām, tajā uzsvērta spriešanas spēju attīstīšana un izpratne par pretpiemēra pietiekamību vai vispārīga pierādījuma nepieciešamību. Piedāvātie uzdevumi ir viegli integrējami skolas mācību stundās, kurās skolēniem jāizmanto esošās zināšanas jaunās, kompleksās situācijās.

4. un 5. nodaļa saistītas ar riņķa līniju, uzdevumu risināšanā galvenokārt izmantots tiešais pierādījums, kam atvēlēta nozīmīga loma arī skolas kursā augstākajā līmenī, ko raksturo niansēta iedziļināšanās saturā, vispārīgu matemātisko modeļu analīze un lietojums, kā arī sistēmiska izpētes un pierādīšanas pieredze. Ģeometrijas uzdevumi trenē sistemātisku pierakstu, jēgpilnu matemātikas valodas izmantošanu un vairāku zināmu faktu sasaistīšanu vienotā veselumā.

6. nodaļā apskatīti tie ģeometriskie pārveidojumi, kas iekļauti jaunajā vispārējā vidējās izglītības standartā. Tiem doti pielietojumi pārsvarā ģeometrijas uzdevumu risināšanā, bet sniegti arī daži piemēri, kā tos izmantot, risinot algebras uzdevumus.

7. nodaļā apskatīti piemēri, kuros izmantota trijstūra nevienādība, kā arī uzdevumi, kuros jāizmanto algebras zināšanas, lai pierādītu sakarības ģeometrijas uzdevumos.

1. Nevienādību pierādīšanas metodes

Skolas kursā galvenais uzsvars tiek likts uz nevienādību risināšanu, bet matemātikas olimpiādēs nevienādības ir jāpierāda. Svarīgi ir saprast atšķirību starp nevienādību risināšanu un pierādīšanu.

Atrisināt nevienādību nozīmē atrast visus tās atrisinājumus un pierādīt, ka citu atrisinājumu nav. Visu nevienādības atrisinājumu apvienojumu sauc par šīs nevienādības atrisinājumu kopu.

Pierādīt nevienādību ar vienu vai vairākiem mainīgajiem nozīmē pamatot, ka nevienādība ir patiesa jebkurām pieļaujamajām mainīgo vērtībām.

DEFINĪCIJA Divas nevienādības sauc par **ekvivalentām**, ja tām ir viena un tā pati atrisinājumu kopa.

Bieži vien nevienādības pierāda, izmantojot ekvivalentus pārveidojumus. Tādējādi iegūst nevienādību, kuras patiesums viegli noskaidrojams ar elementāru spriedumu palīdzību.

Ekvivalenti nevienādību pārveidojumi

- Nevienādības kādu pusi aizstāj ar tai identisku izteiksmi.

  Piemēram, $2x + 3x < 3 + 7 \quad \Leftrightarrow \quad 5x < 10.$

- Nevienādības abām pusēm pieskaita vienu un to pašu skaitli vai izteiksmi, kas nemaina nevienādības definīcijas kopu.

  Piemēram, $x - 9 < 5 \quad \Leftrightarrow \quad x - 9 + \mathbf{9} < 5 + \mathbf{9}.$

- Nevienādības abas puses reizina vai dala ar vienu un to pašu pozitīvu skaitli (vai izteiksmi, kas ir pozitīva visām mainīgo vērtībām).

  Piemēram, $\frac{1}{x^2+3} \leq 5 \quad \Big|\cdot (\boldsymbol{x^2} + \mathbf{3}) > \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leq 5(x^2 + 3).$

- Nevienādības abas puses reizina vai dala ar vienu un to pašu negatīvu skaitli (vai izteiksmi, kas ir negatīva visām mainīgo vērtībām).

  Piemēram, $-\frac{1}{3}x \geq 7 \quad |\cdot (-3) \quad \Leftrightarrow \quad x \leq -21.$

- Nevienādības abas puses kāpina kvadrātā vai velk kvadrātsakni, ja definīcijas kopā dotās nevienādības abas puses ir nenegatīvas.

  Piemēram, $\sqrt{x+2} \geq 7 \quad \Leftrightarrow \quad x + 2 \geq 49.$

- Nevienādības abas puses kāpina m-tajā pakāpē vai velk m-tās pakāpes sakni, kur m ir naturāls nepāra skaitlis.
- Nevienādības abas puses kāpina m-tajā pakāpē vai velk m-tās pakāpes sakni, kur m ir naturāls pāra skaitlis un definīcijas kopā dotās nevienādības abas puses ir nenegatīvas.

Uzdevuma piemērs

P1. Pierādīt, ka $\left(\sqrt{7}\right)^{\sqrt{5}} > \left(\sqrt{5}\right)^{\sqrt{7}}$.

Atrisinājums. Kāpinot abas nevienādības puses pakāpē $2\sqrt{5}$, iegūstam

$$\left(\sqrt{7}\right)^{\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5}} > \left(\sqrt{5}\right)^{\sqrt{7}\cdot 2\sqrt{5}}.$$

Ekvivalenti pārveidojam katras puses izteiksmi:

- $\left(\sqrt{7}\right)^{\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5}} = 7^5 = 16087;$
- $\left(\sqrt{5}\right)^{\sqrt{7}\cdot 2\sqrt{5}} = 5^{\sqrt{35}} < 5^6 = 15625.$

Līdz ar to esam ieguvuši, ka

$$\left(\sqrt{7}\right)^{\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5}} = 7^5 = 16087 > 15625 = 5^6 > 5^{\sqrt{35}} = \left(\sqrt{5}\right)^{\sqrt{7}\cdot 2\sqrt{5}}.$$

Nevienādību īpašības

- Vienāda veida nevienādības var saskaitīt (var attiecīgi saskaitīt to kreiso un labo pusi):
  ja $a > b$ un $c > d$, tad $a + c > b + d$.
- Vienāda veida nevienādības var reizināt (var attiecīgi reizināt to kreiso un labo pusi), ja visas izteiksmes ir pozitīvas:
  ja $a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ d > 0$ un $a > b$, $c > d$, tad $ac > bd$.

Vienāda veida nevienādības nedrīkst atņemt, jo ne vienmēr iegūst patiesu nevienādību, piemēram,

$$5 > 2 \ \text{un}\ \ 3 > 1,\ \ \text{bet}\ \ 2 = 5 - 3 > 2 - 1 = 1;$$

$$5 > 2 \ \text{un}\ \ 7 > 1,\ \ \text{bet}\ \ -2 = 5 - 7 < 2 - 1 = 1.$$

Vienāda veida nevienādības nedrīkst reizināt, ja visas izteiksmes nav pozitīvas, jo ne vienmēr iegūst patiesu nevienādību, piemēram,

$$5 > -2 \ \text{un}\ \ 7 > 1,\ \ \text{bet}\ \ 35 = 5 \cdot 7 > -2 \cdot 1 = -2;$$

$$5 > -2 \ \text{un}\ \ 3 > -10,\ \ \text{bet}\ \ 5 = 5 \cdot 3 < -2 \cdot (-10) = 20.$$

Nākamajās apakšnodaļās apskatīsim biežāk lietotās metodes nevienādību pierādīšanā Latvijas līmeņa matemātikas olimpiādēs.

1.1. Nevienādības vienas puses vai abu pušu sadalīšana reizinātājos

Dažreiz nevienādību izdodas pierādīt, visus nevienādības locekļus pārnesot uz vienu pusi un iegūto izteiksmi sadalot reizinātājos. Turklāt šiem reizinātājiem jābūt tādiem, lai skaidri varētu pateikt, vai tie ir pozitīvi vai negatīvi.

Apgalvojumi

- Divu negatīvu skaitļu reizinājums ir pozitīvs.
- Divu pozitīvu skaitļu reizinājums ir pozitīvs.
- Pozitīva un negatīva skaitļa reizinājums ir negatīvs.

Formulas izteiksmes sadalīšanai reizinātājos

- $ab + bc = b(a + c)$;
- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$;
- $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$;
- $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$;
- $a^4 - b^4 = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$;
- $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$, kur $n \in \mathbb{N}$;
- $a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots - ab^{n-2} + b^{n-1})$, kur n ir naturāls nepāra skaitlis;
- $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, kur x_1 un x_2 ir kvadrāttrinoma saknes.

Polinoma sadalīšana reizinātājos

Lai sadalītu reizinātājos augstāku kārtu polinomus, var izmantot Hornera shēmu (ja izdodas uzminēt kādu polinoma sakni).

Polinoma $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ dalījumu ar binomu $(x - \alpha)$ apzīmējam ar $Q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \dots + b_1 x + b_0$, bet atlikumu ar r, kur r ir reāls skaitlis. Tad ir spēkā vienādība $P(x) = Q(x)(x - \alpha) + r$. Atverot iekavas un savelkot līdzīgos locekļus vienādības labajā pusē, iegūst polinomu, kuram jābūt vienādam ar $P(x)$. Divi polinomi ir vienādi, ja koeficienti pie vienādām mainīgā pakāpēm ir vienādi. Līdz ar to iegūstam vienādības:

$$b_{n-1} = a_n,\quad b_{n-2} - \alpha b_{n-1} = a_{n-1},\quad b_{n-3} - \alpha b_{n-2} = a_{n-2},\quad \dots,\quad r - \alpha b_0 = a_0.$$

Izsakot koeficientus b_i un izveidojot tabulu, iegūst ērtu pierakstu polinoma dalīšanai ar binomu:

	a_n	a_{n-1}	$\dots$	a_1	a_0
$\boldsymbol{\alpha}$	$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} =$ $= a_{n-1} + \alpha b_{n-1}$	$\dots$	$b_0 =$ $= a_1 + \alpha b_1$	$r =$ $= a_0 + \alpha b_0$

Uzdevumu piemēri

P1. Pierādīt, ka $\frac{a+b}{a^2+b^2} \geq \frac{a^2+b^2}{a^3+b^3}$, ja a un b ir pozitīvi skaitļi.

Atrisinājums. Reizinām abas nevienādības ar $(a^2+b^2)(a^3+b^3) > 0$, jo a un b ir pozitīvi skaitļi. Ekvivalenti pārveidojam iegūto nevienādību:

$$(a+b)(a^3+b^3) \geq (a^2+b^2)^2;$$
$$a^4+b^4+a^3b+ab^3 \geq a^4+2a^2b^2+b^4;$$
$$a^3b-2a^2b^2+ab^3 \geq 0;$$
$$ab(a^2-2ab+b^2) \geq 0;$$
$$ab(a-b)^2 \geq 0.$$

Tā kā a un b ir pozitīvi skaitļi un skaitļa kvadrāts vienmēr ir nenegatīvs skaitlis, tad iegūtā nevienādība ir patiesa, tātad patiesa ir arī uzdevumā dotā nevienādība, kas arī bija jāpierāda.

P2. Pierādīt, ka $a^2+b^2+c^2 \geq a+1+\frac{1}{a}$, ja a, b, c ir pozitīvi un $abc=1$.

Atrisinājums. Izmantojot, ka $b^2+c^2 \geq 2bc$ un $bc=\frac{1}{a}$, iegūstam

$$a^2+b^2+c^2 \geq a^2+2bc = a^2+\frac{2}{a}.$$

Pierādīsim, ka $a^2+\frac{2}{a} \geq a+1+\frac{1}{a}$. Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$a^2-a-1+\frac{1}{a} \geq 0 \quad | \cdot a > 0$$
$$a^3-a^2-a+1 \geq 0;$$
$$a^2(a-1)-(a-1) \geq 0;$$
$$(a-1)(a+1)(a-1) \geq 0;$$
$$(a-1)^2(a+1) \geq 0.$$

Iegūta patiesa nevienādība, jo pirmais reizinātājs ir nenegatīvs, bet otrais reizinātājs ir pozitīvs. Līdz ar to esam ieguvuši, ka $a^2+b^2+c^2 \geq a^2+\frac{2}{a} \geq a+1+\frac{1}{a}$, no kā izriet vajadzīgais: $a^2+b^2+c^2 \geq a+1+\frac{1}{a}$.

UZDEVUMI PATSTĀVĪGAJAM DARBAM

"Nevienādības vienas puses vai abu pušu sadalīšana reizinātājos"

U1. Pierādīt, ka pozitīviem skaitļiem x un y ir spēkā nevienādība

$$x^6y+xy^6 \geq x^5y^2+x^2y^5.$$

U2. Pierādīt, ka $x^4+y^4 \geq x^3y+xy^3$ visiem reāliem skaitļiem *x* un *y*.

1.2. Nevienādības pastiprināšanas metode

Bieži vien, lai pierādītu nevienādību, tikai ar ekvivalentiem pārveidojumiem nepietiek, dažreiz ir izdevīgi kādu saskaitāmo atmest vai novērtēt ar kādu citu izteiksmi, kura ir vai nu lielāka, vai arī mazāka nekā iepriekšējā.

Biežāk lietotie novērtējumi:

- izteiksmes vērtība, atmetot pozitīvu saskaitāmo, samazinās;
- izteiksmes vērtība, atmetot nenegatīvu mazinātāju, palielinās;
- ja $a > b > 0$, tad $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Nevienādības pastiprināšanas metodes būtība: lai pierādītu, ka $A < B,$ atrod tādu izteiksmi vai skaitli C, ka $A < C,$ un pierāda, ka $C \leq B$. Ja tas izdodas, tad nevienādība $A < B$ ir pierādīta.

Uzdevumu piemēri

P1. Salīdzināt skaitļus a) $\log_7 3$ un $\log_5 9$; b) 48^{25} un 344^{17}; c) 6^{65} un 9^{56}.

Atrisinājums. Lai salīdzinātu dotos skaitļus a un b, atradīsim tādu skaitli c, kuram ir spēkā vai nu $a < c$ un $c < b$ (tad $a < b$), vai arī $a > c$ un $c > b$ (tad $a > b$).

a) Ja logaritma bāze ir lielāka nekā 1, tad logaritmiskā funkcija ir augoša. Līdz ar to iegūstam $\log_7 3 < \log_7 7 = 1 = \log_5 5 < \log_5 9$.

b) Izmantojot pakāpju īpašības un novērtēšanu, iegūstam
$$48^{25} < 49^{25} = (7^2)^{25} = 7^{50} < 7^{51} = (7^3)^{17} = 343^{17} < 344^{17}.$$

c) Izmantojot pakāpju īpašības un novērtēšanu, iegūstam
$$6^{65} < (2^3)^{22} \cdot 3^{65} < (3^2)^{22} \cdot 3^{65} < 3^{47} \cdot 3^{65} = 3^{112} = 9^{56}.$$

P2. Pierādīt, ka pozitīviem a un b ir spēkā nevienādība $\frac{a+b}{1+a+b} < \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}$.

Atrisinājums. Novērtējot saskaitāmos (palielinām saucēju), iegūstam
$$\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} > \frac{a}{1+a+b} + \frac{b}{1+b+a} = \frac{a+b}{1+a+b}.$$

P3. Pierādīt, ka visiem skaitļiem $x > 1$ izpildās nevienādība $x^3 - 2x + 1 > 0$.

1. atrisinājums. Ievērojam, ka visiem skaitļiem $x > 1$ izpildās nevienādība $x^3 > x^2$. Novērtējam pierādāmās nevienādības kreisās puses izteiksmi:
$$x^3 - 2x + 1 > x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 > 0.$$

Līdz ar to esam pierādījuši prasīto.

2. atrisinājums. Tā kā $x > 0$, tad, ekvivalenti pārveidojot, iegūstam prasīto:
$$x^3 - 2x + 1 = x^3 - x - x + 1 = x(x^2 - 1) - (x - 1) = (x - 1)(x^2 + x - 1) > 0.$$

P4. Kāda ir izteiksmes $a^{20}+a^4+\frac{1}{a^4+1}$ mazākā vērtība, ja a ir reāls skaitlis?

Atrisinājums. Dotās izteiksmes mazākā vērtība ir 1, to iegūst, ja $a=0$. Mazāku vērtību nevar iegūt, jo

$$a^{20}+a^4+\frac{1}{a^4+1}=a^{20}+\frac{a^8+a^4+1}{a^4+1}=a^{20}+\frac{a^8}{a^4+1}+1\geq 1.$$

IEVĒRO! Tāda uzdevuma atrisinājumam, kurā jāatrod lielākā (mazākā) vērtība, jāsastāv no divām daļām:

1) jāatrod vislielākā (vismazākā) vērtība un jāparāda piemērs, kurā izpildās visas prasības;
2) jāpierāda, ka lielāku (mazāku) vērtību iegūt nevar.

UZDEVUMI PATSTĀVĪGAJAM DARBAM

"Nevienādības pastiprināšanas metode"

U1. Salīdzināt skaitļus 31^{11} un 17^{14}.

U2. Pierādīt, ka pozitīviem skaitļiem a, b un c ir spēkā nevienādība $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}>\frac{3}{a+b+c}$.

U3. Kāda ir izteiksmes $\frac{a}{b+1}+\frac{b}{a+1}$ mazākā vērtība, ja a un b ir naturāli skaitļi?

U4. Dots, ka $a\geq b\geq c>0$ un $a+b+c\leq 1$. Pierādīt nevienādību $a^2+3b^2+5c^2\leq 1$.

1.3. Pilno kvadrātu atdalīšana

1.3. un 1.4. apakšnodaļa sagatavotas, izmantojot [6].

Viens no ekvivalento pārveidojumu veidiem ir pilno kvadrātu atdalīšana. Lai atdalītu pilno kvadrātu, izmanto saīsinātās reizināšanas formulas:

- $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$;
- $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$;
- $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$.

Bieži vien tikai ar formulām nepietiek, tāpēc jāizmanto arī spriedumi. Visbiežāk lietotie spriedumi ir šādi:

- ja A ir algebriska izteiksme, tad $A^2\geq 0$;
- ja $A_1,\ A_2,\ \dots,\ A_n$ ir algebriskas izteiksmes, tad $A_1^2+A_2^2+\cdots+A_n^2\geq 0$;
- ja $A_1,\ A_2,\ \dots,\ A_n$ ir algebriskas izteiksmes un $c_1,\ c_2,\ \dots,\ c_n$ ir nenegatīvas izteiksmes, tad $c_1A_1^2+c_2A_2^2+\cdots+c_nA_n^2\geq 0$.

Piezīme. $A_1^2+A_2^2+\cdots+A_n^2=0$ tad un tikai tad, ja $A_1=A_2=\cdots=A_n=0$.

Uzdevumu piemēri

P1. Pierādīt nevienādību $x^2 + 8x + y^2 - 2y + 17 \geq 0$.

Atrisinājums. Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$x^2 + 8x + 16 + y^2 - 2y + 1 \geq 0;$$

$$(x^2 + 2 \cdot 4x + 4^2) + (y^2 - 2y \cdot 1 + 1^2) \geq 0;$$

$$(x + 4)^2 + (y - 1)^2 \geq 0.$$

Pēdējā nevienādība (un līdz ar to arī dotā) ir patiesa, jo nevienādības kreisajā pusē ir divu nenegatīvu skaitļu summa.

P2. Pierādīt nevienādību $x^2 - xy + y^2 \geq 0$.

1. atrisinājums. Reizinām nevienādības abas puses ar 2 un veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$2x^2 - 2xy + 2y^2 \geq 0;$$

$$(x^2 - 2xy + y^2) + x^2 + y^2 \geq 0;$$

$$(x - y)^2 + x^2 + y^2 \geq 0.$$

Pēdējā nevienādība (un līdz ar to arī dotā) ir patiesa, jo kreisajā pusē ir trīs nenegatīvu skaitļu summa.

2. atrisinājums. Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$x^2 - xy + y^2 = \left(x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}y^2\right) + \frac{3}{4}y^2 = \left(x - \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2.$$

Pēdējā nevienādība (un līdz ar to arī dotā) ir patiesa, jo $\left(x - \frac{1}{2}y\right)^2 \geq 0$ un $\frac{3}{4}y^2 \geq 0$.

P3. Pierādīt, ka pozitīviem skaitļiem a, b un c izpildās nevienādība $a + \frac{bc}{a} \geq \frac{4bc}{b+c}$.

Atrisinājums. Abas nevienādības puses reizinām ar pozitīvu izteiksmi $a(b + c)$ un veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$a^2(b + c) + bc(b + c) \geq 4abc;$$

$$a^2b + a^2c + b^2c + bc^2 - 4abc \geq 0;$$

$$a^2b - 2abc + bc^2 + a^2c - 2abc + b^2c \geq 0;$$

$$b(a^2 - 2ac + c^2) + c(a^2 - 2ab + b^2) \geq 0;$$

$$b(a - c)^2 + c(a - b)^2 \geq 0.$$

Pēdējā nevienādība (un līdz ar to arī dotā) ir patiesa, jo $b(a - c)^2 \geq 0$ un $c(a - b)^2 \geq 0$.

P4. Pierādīt, ka $2x^4 + 1 \geq 2x^3 + x^2$.

Atrisinājums. Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$2x^4 + 1 - 2x^3 - x^2 \geq 0;$$
$$x^4 - 2x^3 + x^2 + x^4 - 2x^2 + 1 \geq 0;$$
$$x^2(x^2 - 2x + 1) + (x^2 - 1)^2 \geq 0;$$
$$x^2(x - 1)^2 + (x^2 - 1)^2 \geq 0.$$

Pēdējā nevienādība (un līdz ar to arī dotā) ir patiesa, jo $x^2(x-1)^2 \geq 0$ un $(x^2-1)^2 \geq 0$.

P5. Pierādīt, ka $x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x + 6y + 3 \geq 0$.

Atrisinājums. Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2(x + y) + 2y^2 + 4y + 3 \geq 0;$$
$$((x + y)^2 + 2(x + y) + 1) + 2(y^2 + 2y + 1) \geq 0;$$
$$(x + y + 1)^2 + 2(y + 1)^2 \geq 0.$$

Pēdējā nevienādība (līdz ar to arī dotā) ir patiesa, jo $(x + y + 1)^2 \geq 0$ un $2(y + 1)^2 \geq 0$.

P6. Pierādīt, ka $x^3 + 3x^2 - 13x + 10 > 0$, ja $x > 0$.

Atrisinājums. Ekvivalenti pārveidojam doto nevienādību:

$$x(x^2 - 2x + 1) + 5x^2 - 14x + 10 > 0;$$
$$x(x-1)^2 + 5\left(x^2 - 2\cdot\frac{7}{5}x + \frac{49}{25}\right) - \frac{49}{5} + 10 > 0;$$
$$x(x-1)^2 + 5\left(x - \frac{7}{5}\right)^2 + \frac{1}{5} > 0.$$

Tā kā $x > 0$, skaitļa kvadrāts vienmēr ir nenegatīvs skaitlis un $\frac{1}{5} > 0$, tad iegūtā nevienādība ir patiesa, tātad patiesa ir arī uzdevumā dotā nevienādība, kas arī bija jāpierāda.

Piezīme. Risinājumā mēģina iegūt izteiksmi formā $x(x + a)^2 + b(x + c) + d$, kur $b \geq 0$ un $d \geq 0$. Lai atrastu vajadzīgās vērtības, var, piemēram, atvērt iekavas, savilkt līdzīgos un pielīdzināt koeficientus pie vienādām mainīgā pakāpēm iegūtajai izteiksmei un uzdevumā dotajai. Līdz ar to iegūst vienādojumu sistēmu, kurai pietiek atrast vienu atrisinājumu:

$$\begin{cases} 2a + b = 3 \\ a^2 + 2bc = -13 \\ bc^2 + d = 10 \end{cases}$$

P7. Doti tādi reāli skaitļi x, y un z, ka $x + y + z = 3$. Pierādīt, ka $xy + xz + yz \leq 3$.

Atrisinājums. Dotās vienādības abas puses kāpinot kvadrātā un pēc tam reizinot ar 2, iegūstam:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 9;$$
$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4xy + 4xz + 4yz = 18.$$

Pieskaitot un atņemot vienādības kreisajai pusei vienu un to pašu izteiksmi un pēc tam izmantojot starpības kvadrāta formulu, iegūstam:

$$x^2 - 2xy + y^2 + x^2 - 2xz + z^2 + y^2 - 2yz + z^2 + 6xy + 6xz + 6yz = 18;$$
$$(x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2 + 6xy + 6xz + 6yz = 18.$$

Tā kā $(x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2 \geq 0$, tad $6xy + 6xz + 6yz \leq 18$ jeb $xy + xz + yz \leq 3$.

UZDEVUMI PATSTĀVĪGAJAM DARBAM

"Pilno kvadrātu atdalīšana"

U1. **a)** Vai noteikti visiem reāliem skaitļiem x izpildās $3x^2 - 0{,}25x + 0{,}005 > 0$?

b) Vai noteikti visiem reāliem skaitļiem x izpildās $9x^2 + 12x + 5 > 0$?

U2. Pierādīt, ka $a^2 + b^2 + \frac{1}{2} \geq a + b$.

U3. Pierādīt, ka $9x^2 - 12xy + 20y^2 + 8y + 4 > 0$ visām reālām x un y vērtībām.

U4. Pierādīt, ka $9x^6 - x^3 + 1 > 0$ visiem reāliem x.

U5. Pierādīt, ka $x^2 + 2y^2 + 2xy + y + 1 > 0$, ja x, y ir reāli skaitļi.

U6. Pierādīt, ka $x^4 + 2x^3y + 2xy^3 + y^4 \geq 6x^2y^2$, ja x un y ir reāli pozitīvi skaitļi.

U7. Pierādīt, ka $x^2 + y^2 + 4 \geq 2x - 2y - xy$, ja x, y ir reāli skaitļi.

2016./2017. gadā valsts matemātikas olimpiādes 2. posma tēma bija "Nevienādību pierādīšana – pilno kvadrātu atdalīšana". Katrai klasei viens uzdevums bija par šo tēmu: 9. klasei (704 dalībnieki) – U4., 10. klasei (676 dalībnieki) – U5., 11. klasei (507 dalībnieki) – U6., 12. klasei (435 dalībnieki) – U7. Par katru uzdevumu varēja iegūt 0–10 punktus (*n* – ja uzdevums nebija risināts), un skolēnu risinājumi tika vērtēti pēc šādiem kritērijiem:

- par ekvivalentiem pārveidojumiem, pilno kvadrātu atdalīšanu – 7 punkti;
- izdarīts pareizs secinājums par iegūtās nevienādības patiesumu – 2 punkti;
- secināts, ka arī dotā nevienādība ir patiesa, – 1 punkts;
- par atsevišķiem piemēriem dažām konkrētām mainīgo vērtībām – ne vairāk kā 2 punkti.

Skolēnu iegūto punktu sadalījums parādīts 1. tabulā, kurā iekavās aiz uzdevuma numura norādīts vidēji iegūtais punktu skaits par uzdevumu.

1. tabula. **Skolēnu iegūto punktu sadalījums**

	U4. (3,07)	U5. (5,19)	U6. (5,15)	U7. (4,45)
n	7	14	20	13
0	183	101	91	61
1	155	47	76	57
2	113	115	41	83
3	28	54	11	39
4	21	27	10	22
5	35	20	15	8
6	14	7	10	9
7	22	21	30	8
8	21	20	15	13
9	28	61	81	22
10	77	189	107	100

1.4. Nevienādība starp aritmētisko vidējo un ģeometrisko vidējo

Iepriekšējā apakšnodaļā tika aplūkota metode, kā pierādīt nevienādības, atdalot pilnos kvadrātus. Tomēr bieži vien sarežģītākas nevienādības neizdodas pierādīt, izmantojot tikai šo paņēmienu, tāpēc ir lietderīgi zināt un prast lietot citas metodes.
Iespējams, pati pazīstamākā un biežāk lietotā ir nevienādība starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko. Bieži to saīsināti apzīmē kā $A \geq G$ (angliski AM-GM).

DEFINĪCIJA Par n skaitļu $a_1, a_2, \dots, a_n$ vidējo aritmētisko sauc lielumu $\frac{a_1+a_2+\cdots a_{n-1}+a_n}{n}$.

DEFINĪCIJA Par n nenegatīvu skaitļu $a_1, a_2, \dots, a_n$ vidējo ģeometrisko sauc lielumu $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$.

Nevienādība starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko

Ja $a_1, a_2, \dots, a_n$ ir nenegatīvi skaitļi, tad

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n},$$

tas ir, skaitļu vidējais aritmētiskais ir lielāks vai vienāds ar šo skaitļu vidējo ģeometrisko, turklāt vienādība ir tad un tikai tad, ja visi skaitļi ir vienādi.

Pierādījums. [21] Pierādīsim šo nevienādību ar tiešo matemātisko indukciju.

Indukcijas bāze. Pierādīsim nevienādību gadījumā, ja $n = 2$, tas ir, $\frac{a_1+a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 \cdot a_2}$.

Veicot ekvivalentus pārveidojumus, iegūstam:

$$a_1 + a_2 \geq 2\sqrt{a_1 a_2};$$

$$\left(\sqrt{a_1}\right)^2 - 2\sqrt{a_1 a_2} + \left(\sqrt{a_2}\right)^2 \geq 0;$$

$$\left(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}\right)^2 \geq 0.$$

Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka nevienādība ir patiesa jebkuriem n nenegatīviem skaitļiem.

Induktīvā pāreja. Pierādīsim, ka nevienādība ir patiesa jebkuriem $n + 1$ nenegatīviem skaitļiem.

Varam samainīt skaitļu $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$ indeksus (to drīkst darīt, jo šis pārveidojums nemaina vidējā aritmētiskā un vidējā ģeometriskā vērtību) tā, lai a_{n+1} būtu vislielākais no šiem skaitļiem (vai arī viens no lielākajiem). Tātad $a_{n+1} \geq a_1$, $a_{n+1} \geq a_2$, ..., $a_{n+1} \geq a_n$ un līdz ar to

$$a_{n+1} \geq \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n}. \qquad (1)$$

Ieviešam apzīmējumus:

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n}, \qquad (2)$$

$$A_{n+1} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + a_{n+1}}{n+1}.$$

Izmantojot (2), iegūstam

$$A_{n+1} = \frac{nA_n + a_{n+1}}{n+1}. \qquad (3)$$

Tā kā nenegatīvu skaitļu vidējais aritmētiskais atrodas starp lielāko un mazāko no šiem skaitļiem, tad $a_{n+1} \geq A_n$ jeb $a_{n+1} = A_n + \alpha$, kur $\alpha \geq 0$. Tad (3) pārrakstām formā:

$$A_{n+1} = \frac{nA_n + A_n + \alpha}{n+1} = \frac{A_n(n+1) + \alpha}{n+1} = A_n + \frac{\alpha}{n+1}.$$

Kāpinot iegūtās vienādības abas puses $(n + 1)$-jā pakāpē, iegūstam

$$(A_{n+1})^{n+1} = (A_n)^{n+1} + C_{n+1}^1 (A_n)^n \frac{\alpha}{n+1} + C_{n+1}^2 (A_n)^{n-1} \left(\frac{\alpha}{n+1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\alpha}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Labās puses izteiksme kāpināta, izmantojot Ņūtona binoma formulu:

$$(x + y)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1} y + C_n^2 x^{n-2} y^2 + \dots + y^n.$$

Tā kā visi saskaitāmie ir nenegatīvi, tad

$$C_{n+1}^2(A_n)^{n-1}\left(\frac{\alpha}{n+1}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\alpha}{n+1}\right)^{n+1}\geq 0.$$

Ievērojot, ka $C_{n+1}^1=n+1$, iegūstam

$$(A_{n+1})^{n+1}\geq (A_n)^{n+1}+(n+1)(A_n)^n\frac{\alpha}{n+1}=(A_n)^{n+1}+(A_n)^n\alpha=(A_n)^n a_{n+1}.$$

Tā kā pēc induktīvā pieņēmuma

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}\quad \text{jeb}\quad (A_n)^n\geq a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\ldots\cdot a_n,$$

tad $(A_{n+1})^{n+1}\geq (A_n)^n a_{n+1}\geq a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\ldots\cdot a_n\cdot a_{n+1}$.

Tāpēc $A_{n+1}\geq\sqrt[n+1]{a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\ldots\cdot a_n\cdot a_{n+1}}$.

Līdz ar to esam pierādījuši, ka jebkuram naturālam skaitlim n ir patiesa nevienādība

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\ldots\cdot a_n}.$$

Piezīme. Ir arī citi nevienādības $A\geq G$ pierādījumi, piemēram, [37] doti 12 dažādi pierādījumi.

Elegants un ļoti vienkāršs pierādījums, kura ideja aizgūta no [23], dots [14].
"Ar M un m apzīmēsim attiecīgi vislielāko un vismazāko no skaitļiem $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$. Ja $m=M$, tad $x_1=x_2=\cdots=x_n$ un tātad $A=G$. Ja savukārt $m<M$, tad reizinājumā $x_1x_2\ldots x_n$ šos divus skaitļus m un M aizstāsim ar A un $m+M-A$. Šāda aizstāšana acīmredzami saglabā summu, bet palielina reizinājumu, jo $m<A<M$ un

$$mM-A(m+M-A)=(m-A)(M-A)<0.$$

Tā kā katrā nākamajā aizvietošanas solī parādās vismaz viens jauns reizinātājs A, tad pēc galīga skaita soļu iegūstam $G^n\leq A^n$ jeb $G\leq A$, kas arī bija jāpierāda."

Secinājumi

- Ja $n=2$, tad nenegatīviem skaitļiem x un y izpildās $\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$.
- Ja $n=3$, tad nenegatīviem skaitļiem x, y un z izpildās $\frac{x+y+z}{3}\geq\sqrt[3]{xyz}$.
- Dažreiz novērtējumu ir ērti lietot formā $a_1+a_2+\cdots+a_n\geq n\cdot\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}$.
- Pozitīviem skaitļiem x un y izpildās nevienādība $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$, tas ir, skaitļa un tam apgrieztā skaitļa summa ir vismaz 2.
- Ja x ir pozitīvs skaitlis, tad $x+\frac{1}{x}\geq 2$.

Uzdevumu piemēri

P1. Pierādīt, ka $3a^8 + 5b^8 \geq 8a^3b^5$, ja a un b – pozitīvi skaitļi.

Atrisinājums. Izmantojot nevienādību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko, iegūstam

$$3a^8 + 5b^8 = a^8 + a^8 + a^8 + b^8 + b^8 + b^8 + b^8 + b^8 \geq$$

$$\geq 8 \cdot \sqrt[8]{a^8 \cdot a^8 \cdot a^8 \cdot b^8 \cdot b^8 \cdot b^8 \cdot b^8 \cdot b^8} = 8a^3b^5.$$

P2. Pierādīt, ka $a^{11} - 3a^5 + a^4 + 1 \geq 0$, ja a ir nenegatīvs skaitlis.

Atrisinājums. Pietiek pierādīt dotajai nevienādībai ekvivalentu nevienādību

$$a^{11} + a^4 + 1 \geq 3a^5.$$

No nevienādības starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko izriet vajadzīgais:

$$a^{11} + a^4 + 1 \geq 3 \cdot \sqrt[3]{a^{11} \cdot a^4 \cdot 1} = 3 \cdot \sqrt[3]{a^{15}} = 3a^5.$$

P3. Pierādīt, ka $(1 + ab)(1 + ac)(1 + bc) \geq 8abc$, ja a, b un c ir pozitīvi skaitļi.

Atrisinājums. No nevienādības starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko izriet, ka

$$1 + ab \geq 2\sqrt{ab};$$

$$1 + ac \geq 2\sqrt{ac};$$

$$1 + bc \geq 2\sqrt{bc}.$$

Sareizinot iegūtās nevienādības (to drīkst darīt, jo katras nevienādības abas puses ir pozitīvas), iegūstam

$$(1 + ab)(1 + ac)(1 + bc) \geq 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{ac} \cdot 2\sqrt{bc} = 8\sqrt{abacbc} = 8abc.$$

P4. Pierādīt, ka pozitīviem skaitļiem a, b un c izpildās nevienādība

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a + b + c}.$$

Atrisinājums. Reizinot abas nevienādības puses ar $a + b + c > 0$, iegūstam

$$(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9.$$

Novērtēsim nevienādības kreisās puses izteiksmi:

$$(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) \geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9,$$

kas arī bija jāpierāda.

P5. Pierādīt, ka visiem reāliem skaitļiem x un y pastāv nevienādība $x^2y^2(x^2+y^2-3) \geq -1$.

Atrisinājums. Ja $x=0$ vai $y=0$, tad $0 \geq -1$ un nevienādība ir patiesa.
Ja $x \neq 0$ un $y \neq 0$, tad, dalot nevienādības abas puses ar $x^2y^2 > 0$, iegūstam:

$$x^2+y^2-3 \geq -\frac{1}{x^2y^2};$$

$$x^2+y^2+\frac{1}{x^2y^2} \geq 3.$$

Nevienādības kreisās puses izteiksmei lietojam nevienādību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko:

$$x^2+y^2+\frac{1}{x^2y^2} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{x^2 \cdot y^2 \cdot \frac{1}{x^2y^2}} = 3.$$

P6. Dots, ka $a > b > c > d$. Pierādīt nevienādību

$$a-d+\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-d} \geq 6.$$

Atrisinājums. Nevienādības kreisās puses izteiksmei pieskaitām un no tās atņemam vienus un tos pašus saskaitāmos un pēc tam lietojam nevienādību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko:

$$a-d+\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-d} = a-b+b-c+c-d+\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-d} =$$

$$=(a-b)+(b-c)+(c-d)+\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-d} =$$

$$=(a-b)+\frac{1}{a-b}+(b-c)+\frac{1}{b-c}+(c-d)+\frac{1}{c-d} \geq 2+2+2=6.$$

P7. Kādu mazāko vērtību var pieņemt izteiksme $x+\frac{2020}{x}$, ja $x > 0$?

Atrisinājums. No nevienādības starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko izriet, ka

$$x+\frac{2020}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{2020}{x}} = 2\sqrt{2020}.$$

Šo vērtību izteiksme sasniedz, ja abi saskaitāmie ir vienādi, tas ir, $x = \frac{2020}{x}$ jeb $x^2 = 2020$ un $x = \sqrt{2020}$.

P8. Pierādīt, ka nevienādība $\frac{a}{b}(a+1)^2+\frac{b}{a}(b+1)^2 \geq 2(a+1)(b+1)$ ir spēkā visiem reāliem pozitīviem skaitļiem a un b.

1. atrisinājums. Tā kā a un b ir pozitīvi skaitļi, tad dotās nevienādības kreisās puses izteiksmi var novērtēt, izmantojot nevienādību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko:

$$\frac{a}{b}(a+1)^2+\frac{b}{a}(b+1)^2 \geq 2\cdot\sqrt{\frac{a}{b}(a+1)^2\cdot\frac{b}{a}(b+1)^2} = 2(a+1)(b+1),$$

kas arī bija jāpierāda.

2. atrisinājums. Tā kā a un b ir pozitīvi skaitļi, tad abas nevienādības puses drīkst reizināt ar ab. Iegūstam pierādāmajai nevienādībai ekvivalentu nevienādību:

$$a^2(a+1)^2+b^2(b+1)^2 \geq 2a(a+1)b(b+1);$$

$$a^2(a+1)^2-2a(a+1)b(b+1)+b^2(b+1)^2 \geq 0.$$

Ekvivalenti pārveidojam šīs nevienādības kreisās puses izteiksmi:

$$\big(a(a+1)\big)^2-2a(a+1)b(b+1)+\big(b(b+1)\big)^2 \geq 0;$$

$$\big(a(a+1)-b(b+1)\big)^2 \geq 0.$$

Reāla skaitļa kvadrāts vienmēr ir nenegatīvs. Līdz ar to iegūta patiesa nevienādība un arī dotā nevienādība ir patiesa, jo tika veikti tikai ekvivalenti pārveidojumi.

UZDEVUMI PATSTĀVĪGAJAM DARBAM

"Nevienādība starp aritmētisko vidējo un ģeometrisko vidējo"

U1. Pierādīt, ka visiem reāliem skaitļiem a, b, c, d izpildās nevienādība

$$a^4+b^4+c^4+d^4+a^2b^2+b^2c^2+c^2d^2+d^2a^2+a^2c^2+b^2d^2 \geq 10abcd.$$

U2. Pierādīt, ka $x^6+y^6+\frac{2}{x^3y^3}-4 \geq 0$, ja $x>0, y>0$.

U3. Pierādīt, ka visiem pozitīviem skaitļiem a un b izpildās $\left(\frac{3a}{b}+1\right)\left(\frac{3b}{a}+1\right) \geq 16$.

U4. Doti tādi četri pozitīvi skaitļi a_1, a_2, a_3 un a_4, ka $a_1a_3=a_2a_4=2017$. Kāda ir mazākā izteiksmes $(a_1+a_2)(a_3+a_4)$ vērtība?

U5. Pierādīt, ka $\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{16}{c} \geq \frac{49}{a+b+c}$, ja a, b, c ir pozitīvi skaitļi.

2016./2017. gadā Atklātās matemātikas olimpiādes tēma bija "Nevienādību pierādīšana – nevienādība starp aritmētisko vidējo un ģeometrisko vidējo". Katrai klasei viens uzdevums bija par šo tēmu: 9. klasei (352 dalībnieki) – U2., 10. klasei (342 dalībnieki) – U3., 11. klasei (222 dalībnieki) – U4., 12. klasei (186 dalībnieki) – U5.

Par katru uzdevumu varēja iegūt 0–10 punktus (*n* – ja uzdevums nebija risināts). Skolēnu iegūto punktu sadalījums parādīts 2. tabulā, kurā iekavās aiz uzdevuma numura norādīts skolēnu vidēji iegūtais punktu skaits.

2. tabula. **Skolēnu iegūto punktu sadalījums**

	U2. (1,61)	U3. (5,93)	U4. (4,14)	U5. (2,63)
n	10	16	20	33
0	236	69	20	79
1	46	18	30	0
2	6	8	51	7
3	1	3	6	27
4	3	11	12	0
5	1	11	11	18
6	0	5	7	0
7	0	17	0	0
8	3	50	53	1
9	1	97	3	0
10	45	37	9	21

Vairāk par nevienādību pierādīšanu skat., piemēram, [10, 12, 15, 18].

2. Vienādojumu un vienādojumu sistēmu risināšanas metodes

Skolas kursā vienādojumu risināšana galvenokārt balstās uz algoritma pielietošanu konkrētos gadījumos, piemēram, risinot kvadrātvienādojumus, eksponentvienādojumus, trigonometriskos un logaritmiskos vienādojumus. Šajā nodaļā apskatīsim citus paņēmienus, kā rīkoties nestandarta situācijās.

Skolas kursā apskata trīs vienādojumu sistēmu risināšanas paņēmienus – saskaitīšanas, ievietošanas un grafisko, turklāt aplūkotās sistēmas ir ļoti vienkāršas un prasa tikai pareizu tehniku. Augstskolas pirmajā kursā algebrā apgūst vēl dažas lineāru vienādojumu sistēmu risināšanas metodes – Krāmera formulas, Gausa metodi, matricu metodi. Tomēr bieži vien sarežģītākos uzdevumos ar šīm metodēm nepietiek, tāpēc šajā nodaļā apskatīsim vēl dažas metodes, kā risināt nestandarta vienādojumu sistēmas.

Nodaļas materiāls par vienādojumu sistēmu risināšanu izstrādāts, balstoties uz [3].

2.1. Vjeta teorēma

DEFINĪCIJA Par kvadrātvienādojumu sauc vienādojumu $ax^2 + bx + c = 0$, kur x ir mainīgais, bet a, b, c ir reāli skaitļi ($a \neq 0$).

Kvadrātvienādojuma reālo sakņu skaits ir atkarīgs no diskriminanta $D = b^2 - 4ac$ vērtības:

- $D < 0$ – vienādojumam nav reālu sakņu.
- $D = 0$ – vienādojumam ir viena reāla sakne $x = -\frac{b}{2a}$.
- $D > 0$ – vienādojumam ir divas dažādas reālas saknes $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

TEORĒMA **Vjeta teorēma.** Kvadrātvienādojuma $ax^2 + bx + c = 0$ saknes x_1 un x_2 apmierina sistēmu

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

Vjeta teorēmu ir ērti lietot reducētajam kvadrātvienādojumam $x^2 + px + q = 0$, jo

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 \cdot x_2 = q \end{cases}$$

Apskatīsim, kā iegūt Vjeta formulas trešās kārtas vienādojumam

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0.$$

Ja vienādojuma saknes ir x_1, x_2, x_3, tad kreisās puses izteiksmi var sadalīt reizinātājos:

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0.$$

Sareizinot un savelkot līdzīgos saskaitāmos, iegūstam

$$x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3 = 0.$$

Divi polinomi ir vienādi, ja koeficienti pie vienādām mainīgā pakāpēm ir vienādi. Līdz ar to iegūstam:

$$\begin{cases} -(x_1 + x_2 + x_3) = p \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = q \\ -x_1x_2x_3 = r \end{cases} \quad \text{jeb} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -p \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = q \\ x_1x_2x_3 = -r \end{cases}$$

Līdzīgi iegūst formulas arī augstāku kārtu vienādojumiem.

Uzdevumu piemēri

P1. Vai iespējams, ka kvadrātvienādojuma $x^2 - a^2x + b^2 = 0$, a un b – naturāli skaitļi, saknes ir divu dažādu naturālu skaitļu kvadrāti?

Atrisinājums. Jā, ir iespējams, piemēram, kvadrātvienādojuma $x^2 - 5^2x + 12^2 = 0$ saknes ir 3^2 un 4^2, jo $3^2 + 4^2 = 5^2$ un $3^2 \cdot 4^2 = 12^2$.

Piezīme. Kā atrast prasīto kvadrātvienādojumu?
Ja x_1 un x_2 ir dotā vienādojuma saknes, tad saskaņā ar Vjeta teorēmu $x_1 + x_2 = a^2$ un $x_1x_2 = b^2$. Pieņemsim, ka eksistē divi dažādi naturāli skaitļi y_1 un y_2, kuriem būtu spēkā $x_1 = y_1^2$ un $x_2 = y_2^2$, tad $b^2 = (y_1y_2)^2$ jeb $b = y_1y_2$ ir naturāls skaitlis visām naturālām y_1 un y_2 vērtībām. Tā kā $y_1^2 + y_2^2 = a^2$, varam izvēlēties, piemēram, $y_1 = 3$ un $y_2 = 4$.

P2. Kvadrātvienādojuma $x^2 - 507x + a = 0$ saknes ir p^2 un q, kur p un q ir pirmskaitļi. Aprēķināt a skaitlisko vērtību.

Atrisinājums. No Vjeta teorēmas par sakņu summu izriet, ka $p^2 + q = 507$. Tā kā 507 ir nepāra skaitlis, tad vienam no pirmskaitļiem jābūt pāra skaitlim, tas ir, $p = 2$ vai $q = 2$. Ja $q = 2$, tad $p^2 = 505$, bet tad p nav naturāls skaitlis. Tātad $p = 2$ un $q = 507 - 2^2 = 503$. Izmantojot Vjeta teorēmu par sakņu reizinājumu, iegūstam, ka $a = p^2q = 2012$.

P3. Dots, ka p un q ir naturāli skaitļi un kvadrātvienādojuma $x^2 + px + q = 0$ saknes ir x_1 un x_2. Pierādīt, ka a) $x_1^2 + x_2^2$, b) $x_1^8 + x_2^8$, c) $x_1^5 + x_2^5$ ir veseli skaitļi.

Atrisinājums. Pēc Vjeta teorēmas iegūstam, ka $x_1 + x_2 = -p \in \mathbb{Z}$ un $x_1x_2 = q \in \mathbb{Z}$.

a) Ievērojam, ka $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2(x_1x_2) = p^2 - 2q$ ir vesels skaitlis.

b) Apskatām izteiksmi $x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2$, kas arī ir vesels skaitlis. Līdz ar to $x_1^8 + x_2^8 = (x_1^4 + x_2^4)^2 - 2x_1^4x_2^4$ arī ir vesels skaitlis.

c) Apskatām izteiksmi $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2) = (-p)(p^2 - 3q)$, kas ir vesels skaitlis. Līdz ar to $(x_1^5 + x_2^5) = (x_1^4 + x_2^4)(x_1 + x_2) - (x_1x_2)(x_1^3 + x_2^3)$ arī ir vesels skaitlis.

P4. Kvadrātvienādojuma $x^2 + p_1x + q_1 = 0$ saknes ir a un b, kvadrātvienādojuma $x^2 + p_2x + q_2 = 0$ saknes ir b un c, bet kvadrātvienādojuma $x^2 + p_3x + q_3 = 0$ saknes ir a un c. Zināms, ka $q_1 \le q_2 \le q_3 \le 0$. Kādas ir q_2 iespējamās vērtības?

Atrisinājums. No Vjeta teorēmas izriet, ka $q_1 = ab$, $q_2 = bc$, $q_3 = ac$ un pēc dotā $ab \le bc \le ac \le 0$. Ja neviens no skaitļiem a, b, c nav nulle, tad divi no tiem būtu vai nu abi pozitīvi, vai abi negatīvi, tāpēc to reizinājums būtu lielāks nekā nulle – pretruna. Tātad vismaz viens no skaitļiem a, b, c ir 0.

Ja $a \neq 0$, $b = 0$, $c \neq 0$, tad $q_1 = q_2 = 0$ un $q_3 = ac \neq 0$, kas ir pretrunā ar to, ka $0 \le q_3 \le 0$. Tātad $q_3 = 0$ un iespējami divi gadījumi:

- ja $c = 0$, tad $q_2 = bc = 0$;
- ja $a = 0$ un $c \neq 0$, tad $q_1 = ab = 0$ un no nevienādības $0 \le q_2 \le 0$ izriet, ka $q_2 = 0$.

Līdz ar to esam ieguvuši, ka $q_2 = 0$.

P5. Kvadrātvienādojuma

$$(1 + \sqrt{5})x^2 - \sqrt[4]{\frac{7}{3 + \sqrt{5}}} \cdot (1 + \sqrt{5})x + \sqrt[4]{\frac{7}{3 + \sqrt{5}}} = 0$$

saknes ir skaitļi *a* un *b*. Pierādīt, ka izteiksmes $a^4b + ab^4 + 3a^3b^2 + 3a^2b^3$ vērtība ir vesels skaitlis.

Atrisinājums. No Vjeta teorēmas izriet, ka

$$\begin{cases} a + b = \sqrt[4]{\dfrac{7}{3 + \sqrt{5}}} \cdot (1 + \sqrt{5}) \\ ab = \sqrt[4]{\dfrac{7}{3 + \sqrt{5}}} \cdot \dfrac{1}{1 + \sqrt{5}} \end{cases}$$

Pārveidojam doto izteiksmi:

$$a^4b + ab^4 + 3a^3b^2 + 3a^2b^3 = ab(a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2) = ab(a + b)^3 =$$

$$= \sqrt[4]{\frac{7}{3 + \sqrt{5}}} \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{5}} \cdot \sqrt[4]{\left(\frac{7}{3 + \sqrt{5}}\right)^3} \cdot (1 + \sqrt{5})^3 = \frac{7}{3 + \sqrt{5}} \cdot \left(1 + \sqrt{5}\right)^2 =$$

$$= \frac{7 \cdot \left(1 + 2\sqrt{5} + 5\right)}{3 + \sqrt{5}} = \frac{7 \cdot 2 \cdot \left(3 + \sqrt{5}\right)}{3 + \sqrt{5}} = 14.$$

Tā kā skaitlis 14 ir vesels skaitlis, tad prasītais ir pierādīts.

P6. Vienādojuma $x^3 - 44x^2 + 623x - 2860 = 0$ saknes ir trijstūra malu garumi. Aprēķināt šī trijstūra laukumu.

1. atrisinājums. Dotā trijstūra malu garumus apzīmējam ar a, b un c. Tā kā a, b un c ir vienādojuma saknes, tad $(x-a)(x-b)(x-c)=0$, ko var pārveidot formā

$$x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc = 0.$$

Pielīdzinot koeficientus pie vienādām x pakāpēm, iegūstam vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} a+b+c=44 \\ ab+ac+bc=623 \\ abc=2860 \end{cases}$$

Ievērojot, ka $2860 = 2\cdot 5\cdot 11\cdot 13$, varam uzminēt, ka a, b, c vērtības ir 10, 11, 13, un pārbaudīt, ka tās tiešām apmierina šo vienādojumu sistēmu. Tā kā trešās pakāpes vienādojumam ir ne vairāk kā trīs saknes, tad trijstūra malu garumi ir 10, 11, 13.

Izmantojot Hērona formulu, aprēķinām trijstūra laukumu:

$$S_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{22\cdot 12\cdot 11\cdot 9} = 22\cdot 3 = 66.$$

2. atrisinājums. Izmantosim Hērona formulu $S_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, kur a, b un c ir trijstūra malu garumi, bet p – pusperimetrs. Doto vienādojumu var pārrakstīt formā $(x-a)(x-b)(x-c)=0$, jo vienādojuma saknes ir trijstūra malu garumi. Koeficients pie x^2 ir visu sakņu summa ar pretēju zīmi. Tātad $a+b+c=44$ un $p=22$. Ievietojot x vietā p un aprēķinot $p^3 - 44p^2 + 623p - 2860$ vērtību, iegūstam izteiksmes $(p-a)(p-b)(p-c)$ vērtību.

Tātad trijstūra laukums ir

$$S_\Delta = \sqrt{22(22^3 - 44\cdot 22^2 + 623\cdot 22 - 2860)} = 22\sqrt{9} = 66.$$

P7. Vienādojumam $x^3 - px + 2019 = 0$, kur p – naturāls skaitlis, ir trīs reālas saknes x_1, x_2, x_3. Kāda var būt izteiksmes $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ vērtība?

1. atrisinājums. Ievērojot, ka x_1, x_2, x_3 ir dotā vienādojuma saknes, to var pārrakstīt formā $x^3 - px + 2019 = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = 0$. Grupējot locekļus, iegūstam sakarības:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=p \\ x_1x_2x_3=-2019 \end{cases}$$

Tā kā x_1, x_2, x_3 ir dotā vienādojuma saknes, tad iegūstam identitātes:

$$x_1^3 - px_1 + 2019 = 0;$$
$$x_2^3 - px_2 + 2019 = 0;$$
$$x_3^3 - px_3 + 2019 = 0.$$

Saskaitot iegūtās trīs identitātes, iegūstam

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - p(x_1 + x_2 + x_3) + 3 \cdot 2019 = 0.$$

Līdz ar to $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = p(x_1 + x_2 + x_3) - 3 \cdot 2019 = p \cdot 0 - 3 \cdot 2019 = -6057$.

2. atrisinājums. Ievērojot, ka x_1, x_2, x_3 ir dotā vienādojuma saknes, to var pārrakstīt formā $x^3 - px + 2019 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$. Grupējot locekļus, iegūstam sakarības:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = p \\ x_1x_2x_3 = -2019 \end{cases}$$

Izsakām prasīto summu:

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 =$$
$$= (x_1 + x_2 + x_3)^3 - 3(x_1^2x_2 + x_2^2x_1 + x_1^2x_3 + x_3^2x_1 + x_2^2x_3 + x_3^2x_2) - 6x_1x_2x_3 =$$
$$= (x_1 + x_2 + x_3)^3 - 3(p(x_1 + x_2 + x_3) - 3x_1x_2x_3) - 6x_1x_2x_3 = 3x_1x_2x_3 =$$
$$= 3 \cdot (-2019) = -6057.$$

UZDEVUMI PATSTĀVĪGAJAM DARBAM

"Vjeta teorēma"

U1. Noteikt funkciju $y = 2016 - x$ un $y = \frac{2015}{x}$ grafiku krustpunktu koordinātas.

U2. Dots, ka b un c ir naturāli skaitļi un kvadrātvienādojuma $x^2 - bx + c = 0$ reālās saknes ir x_1 un x_2. Pierādīt, ka

a) $x_1^2 + x_2^2 + 2017$; b) $x_1^3 + x_2^3$ ir naturāls skaitlis.

U3. Kvadrātvienādojuma

$$(1 + \sqrt{5})x^2 - \sqrt[4]{7} \cdot (1 + \sqrt{5})x + \sqrt[4]{7} = 0$$

saknes ir skaitļi a un b. Pierādīt, ka izteiksmes

$$a^4b + ab^4 + 3a^3b^2 + 3a^2b^3 + 16a^4b^3 + 16a^3b^4$$

vērtība ir vesels skaitlis.

U4. Vienādojuma $x^3 - 44x^2 + 623x - 2860 = 0$ saknes ir taisnstūra paralēlskaldņa malu garumi, kas izteikti centimetros. Aprēķināt šī paralēlskaldņa pilnas virsmas laukumu un tilpumu.

2.2. Substitūcijas metode

Substitūcijas metode ir viena no vienādojumu risināšanas metodēm, ko skolēni apgūst 10. klasē [8, 27]. Lietojot substitūcijas metodi, jāievēro šādi principi:

- vienādojumā kādu tā daļu aizvieto ar citu mainīgo (iepriekšējais nezināmais šajā vienādojumā nedrīkst parādīties);
- atrisina jauno vienādojumu;
- aprēķina doto nezināmo, izmantojot iegūtās jaunā mainīgā saknes.

Šajā apakšnodaļā apskatīsim sarežģītākus uzdevumus, kurus ērti risināt ar substitūcijas metodi.

Uzdevumu piemēri

P1. Atrast vienādojuma $(x^2+5x-7)^2-2(x^2+5x-6)-4=0$ sakņu kubu summu.

Atrisinājums. Apzīmējot $p=x^2+5x-8$ un ievietojot apzīmējumu dotajā vienādojumā, iegūstam $(p+1)^2-2(p+2)-4=0$ jeb $p^2=7$ un $p=\pm\sqrt{7}$. Esam ieguvuši, ka šo vienādojumu var sadalīt reizinātājos $(p-\sqrt{7})(p+\sqrt{7})=0$. Tas nozīmē, ka sākotnējā vienādojuma saknes sakrīt ar vienādojumu $x^2+5x-(8+\sqrt{7})=0$ un $x^2+5x-(8-\sqrt{7})=0$ saknēm (šo vienādojumu diskriminanti attiecīgi ir

$$D=57+4\sqrt{7}>0,$$

$$D=57-4\sqrt{7}>0,$$

tāpēc katram no tiem ir divas saknes). Apzīmējam šīs saknes pa pāriem ar $x_1,\ x_2$ un $x_3,\ x_4$. Izmantojot Vjeta teorēmu, iegūstam sakarības:

$$x_1+x_2=x_3+x_4=-5;$$

$$x_1x_2=-(8+\sqrt{7});$$

$$x_3x_4=-(8-\sqrt{7}).$$

Ievērojam, ka $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=(a+b)((a+b)^2-3ab)$.
Līdz ar to dotā vienādojuma sakņu kubu summa ir

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3=-5\cdot(25+3(8+\sqrt{7}))-5\cdot(25+3(8-\sqrt{7}))=-490.$$

P2. Atrisināt reālos skaitļos vienādojumu $\sqrt[4]{97-x}+\sqrt[4]{x}=5$.

Atrisinājums. Apzīmējot $\sqrt[4]{97-x}=y$ un $\sqrt[4]{x}=z$, iegūst sistēmu $\begin{cases} y+z=5 \\ y^4+z^4=97 \end{cases}$

Pārveidojam otrā vienādojuma kreisās puses izteiksmi:

$$y^4+z^4=(y^2+z^2)^2-2(yz)^2=((y+z)^2-2yz)^2-2(yz)^2.$$

Līdz ar to iegūstam vienādojumu attiecībā pret yz:

$$(5^2 - 2yz)^2 - 2(yz)^2 = 97;$$
$$5^4 - 4 \cdot 5^2 yz + 4(yz)^2 - 2(yz)^2 = 97;$$
$$2(yz)^2 - 100yz + 528 = 0;$$
$$(yz)^2 - 50yz + 264 = 0.$$

Tā kā $264 = 6 \cdot 44$, tad, izmantojot Vjeta teorēmu, iegūstam $yz = 6$ vai $yz = 44$. Līdz ar to esam ieguvuši divas vienādojumu sistēmas:

$$\begin{cases} y + z = 5 \\ yz = 6 \end{cases} \quad \text{un} \quad \begin{cases} y + z = 5 \\ yz = 4 \end{cases}$$

Redzams, ka sistēmas atrisinājumi ir $(2; 3)$ un $(3; 2)$. Ievietojot iegūtās vērtības sākotnējos apzīmējumos, iegūstam, ka attiecīgi $x = 81$ un $x = 16$. Abas vērtības der, jo tās atrodas vienādojuma definīcijas kopā [0; 97].

Lai atrisinātu otro sistēmu, no pirmā vienādojuma izsakām $y = 5 - z$, ievietojam sistēmas otrajā vienādojumā un iegūstam $(5 - z)z = 44$ jeb $z^2 - 5z + 44 = 0$. Tā kā $D = 5^2 - 4 \cdot 44 < 0$, tad vienādojumu sistēmai nav atrisinājuma.

Līdz ar to dotā vienādojuma saknes ir $x = 16$ un $x = 81$.

P3. Atrisināt vienādojumu sistēmu $\begin{cases} 4xy(2x^2 - 1) = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

Atrisinājums. Tā kā $x^2 + y^2 = 1$, tad ir izdevīgi apzīmēt $x = \cos t$ un $y = \sin t$.

Līdz ar to sistēmas otrais vienādojums pārvēršas identitātē, bet pirmais vienādojums ir formā $4 \sin t \cos t\, (2\cos^2 t - 1) = 1$.

Izmantojot trigonometrijas formulas $\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha$ un $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, iegūstam $2 \sin 2t \cos 2t = 1$ jeb $\sin 4t = 1$.

Iegūtā vienādojuma atrisinājums ir $t = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k$, kur k ir vesels skaitlis. Tā kā funkcija $\sin 4t$ ir periodiska funkcija ar periodu 4, tad atšķirīgus dotās sistēmas atrisinājumus iegūst, ja $k = 0;\ 1;\ 2;\ 3$. Tātad dotajai vienādojumu sistēmai ir četri atrisinājumi:

$$x_k = \cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k\right) \text{ un } y_k = \sin\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k\right).$$

Atradīsim x_0 un y_0. Izmantojot trigonometriskās formulas $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ un $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, iegūstam:

- $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, no kurienes $2\cos^2\frac{\pi}{8} - 1 = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, un līdz ar to $x_0 = \cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$;
- $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$, no kurienes $1 - 2\sin^2\frac{\pi}{8} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, un līdz ar to $y_0 = \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

Analoģiski iegūst pārējos atrisinājumus $\left(-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}; \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}; -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}; -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)$.

P4. Atrisināt vienādojumu sistēmu $\begin{cases} 2x + x^2y = y \\ 2y + y^2z = z \\ 2z + z^2x = x \end{cases}$

Atrisinājums. Ievērojam, ka, no pirmā vienādojuma izsakot y, iegūstam $y = \frac{2x}{1-x^2}$. Tā kā $\mathrm{tg}2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}$, tad ir izdevīgi apzīmēt $x = \mathrm{tg}\alpha$, kur $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Līdz ar to iegūstam, ka $y = \frac{2x}{1-x^2} = \mathrm{tg}2\alpha$, no sistēmas otrā vienādojuma $z = \mathrm{tg}4\alpha$, bet no sistēmas trešā vienādojuma $x = \mathrm{tg}8\alpha$. Tātad $x = \mathrm{tg}\alpha = \mathrm{tg}8\alpha$, kura atrisinājums ir $7\alpha = \pi k$ jeb $\alpha = \frac{\pi k}{7}$. Esam ieguvuši, ka dotajai sistēmai ir septiņi atrisinājumi $x = \mathrm{tg}\frac{\pi k}{7}$, $y = \mathrm{tg}\frac{2\pi k}{7}$ un $z = \mathrm{tg}\frac{4\pi k}{7}$, kur $k \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$.

UZDEVUMI PATSTĀVĪGAJAM DARBAM

"Substitūcijas metode"

U1. Atrisināt vienādojumu $\left(\frac{x^2-2x+3}{x}\right)^2 - 5x = \frac{15}{x} - 16$.

U2. Atrisināt vienādojumu $(x+1)(x-2)(x+3)(x-4) = 144$.

2.3. Simetrijas izmantošana uzdevumu risināšanā

Ne vienmēr uzreiz var pamanīt, kuru lielumu apzīmēt ar jaunu mainīgo. Apskatīsim lietotās substitūcijas uzdevumos, kur saskatāma simetrija. Vairāk par simetriju algebrā skat. [36].

DEFINĪCIJA Polinomu $P(x, y)$ sauc par simetrisku, ja, pārkārtojot argumentus (x aizstāj ar y un y aizstāj ar x, tas ir, $P(x, y) = P(y, x)$), iegūst to pašu polinomu.
Piemēram, simetriski polinomi ir $x + y$; xy; $x^2 + y^2 - 7xy + 4x + 4y$.

TEORĒMA Polinomus formā $s_n = x^n + y^n$ var izteikt ar $\sigma_1 = x + y$ un $\sigma_2 = xy$.

Principā teorēma ir 2.1. apakšnodaļas P3. piemēra vispārinājums. Patstāvīgi izteikt un salīdzināt s_n, ja $n = 1; 2; \dots; 10$.

$$s_1 = x + y = \sigma_1;$$
$$s_2 = x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = \sigma_1^2 - 2\sigma_2;$$
$$s_3 = x^3 + y^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2;$$
$$s_4 = x^4 + y^4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2;$$
$$s_5 = x^5 + y^5 = \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2;$$
$$s_6 = \sigma_1^6 - 6\sigma_1^4\sigma_2 + 9\sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_2^3;$$
$$s_7 = \sigma_1^7 - 7\sigma_1^5\sigma_2 + 14\sigma_1^3\sigma_2^2 - 7\sigma_1\sigma_2^3;$$
$$s_8 = \sigma_1^8 - 8\sigma_1^6\sigma_2 + 20\sigma_1^4\sigma_2^2 - 16\sigma_1^2\sigma_2^3 + 2\sigma_2^4;$$
$$s_9 = \sigma_1^9 - 9\sigma_1^7\sigma_2 + 27\sigma_1^5\sigma_2^2 - 30\sigma_1^3\sigma_2^3 + 9\sigma_1\sigma_2^4;$$
$$s_{10} = \sigma_1^{10} - 10\sigma_1^8\sigma_2 + 35\sigma_1^6\sigma_2^2 - 50\sigma_1^4\sigma_2^3 + 25\sigma_1^2\sigma_2^4 - 2\sigma_2^5.$$

Palielinoties n vērtībai, aizvien grūtāk kļūst izteikt s_n, tāpēc ir izdevīgi lietot rekurences sakarības, tas ir, izmantot jau iepriekš iegūtās izteiksmes.

Apskatām $s_{k-1} = x^{k-1} + y^{k-1}$.

Reizinām s_{k-1} ar $\sigma_1 = x + y$:

$$\sigma_1 s_{k-1} = x^k + y^k + xy(x^{k-2} + y^{k-2}) = s_k + \sigma_2 s_{k-2}.$$

Izsakot s_k, iegūstam

$$s_k = \sigma_1 s_{k-1} - \sigma_2 s_{k-2}.$$

TEORĒMA Katru simetrisku polinomu $P(x, y)$ var izteikt ar $\sigma_1 = x + y$ un $\sigma_2 = xy$.

Secinājums. Uzdevumos, kuros parādās simetriski polinomi, ir izdevīgi lietot substitūciju $\sigma_1 = x + y$ un $\sigma_2 = xy$.

Uzdevumu piemēri

P1. Atrisināt reālos skaitļos vienādojumu sistēmu $\begin{cases} x^3 + y^3 = 8 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

Atrisinājums. Izmantosim, ka

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy;$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3(x + y)xy.$$

Apzīmējot $x + y = a$ un $xy = b$, iegūstam vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} a^3 - 3ab = 8 \\ a^2 - 2b = 4 \end{cases}$$

No otrā vienādojuma izsakot $b = \frac{1}{2}(a^2 - 4)$ un ievietojot pirmajā vienādojumā, iegūstam:

$$a^3 - \frac{3}{2}a(a^2 - 4) = 8;$$

$$2a^3 - 3a^3 + 12a = 16;$$

$$a^3 - 12a + 16 = 0.$$

Ievērojam, ka der vērtība $a = 2$. Līdz ar to vienādojuma kreisās puses izteiksmi varam sadalīt reizinātājos:

$$(a - 2)(a^2 + 2a - 8) = 0.$$

Tātad šī vienādojuma saknes ir $a_1 = a_2 = 2$ un $a_3 = -4$. Līdz ar to esam ieguvuši divas vienādojumu sistēmas:

- $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 0 \end{cases}$, kuras atrisinājumi (pēc Vjeta teorēmas) ir $(2; 0)$ un $(0; 2)$,
- $\begin{cases} x + y = -4 \\ xy = 6 \end{cases}$, kurai nav atrisinājuma, jo, izsakot $y = -4 - x$ un ievietojot otrajā vienādojumā, iegūstam $x^2 + 4x + 6 = 0$, kuram $D = (-4)^2 - 4 \cdot 6 < 0$.

Līdz ar to dotās sistēmas atrisinājumi ir $(2; 0)$ un $(0; 2)$.

P2. Atrisināt vienādojumu sistēmu $\begin{cases}(x^3+y^3)(x^2+y^2)=2b^5\\ x+y=b\end{cases}$ attiecībā pret x un y.

Atrisinājums. Izmantojot otro vienādojumu, izsakām x^2+y^2 un x^3+y^3:

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=b^2-2xy;$$

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=b(b^2-3xy).$$

Ievietojam šīs izteiksmes dotās vienādojumu sistēmas pirmajā vienādojumā

$$b(b^2-3xy)(b^2-2xy)=2b^5$$

un iegūstam kvadrātvienādojumu attiecībā pret xy:

$$6x^2y^2-5b^2xy-b^4=0,$$

kura saknes ir

$$xy=\frac{5b^2\pm\sqrt{25b^4+24b^4}}{12}=\frac{5b^2\pm 7b^2}{12}$$

jeb $xy=b^2$ vai $xy=-\frac{b^2}{6}$.

Apskatām katru gadījumu.

- Ja $\begin{cases}x+y=b\\ xy=b^2\end{cases}$, tad, no pirmā vienādojuma izsakot $y=b-x$ un ievietojot otrajā vienādojumā, iegūstam $x^2-bx+b^2=0$, kuram $D=b^2-4b^2=-3b^2<0$, tātad vienādojumu sistēmai nav atrisinājuma.
- Ja $\begin{cases}x+y=b\\ xy=-\frac{b^2}{6}\end{cases}$, tad, no pirmā vienādojuma izsakot $y=b-x$ un ievietojot otrajā vienādojumā, iegūstam $6x^2-6bx-b^2=0$. Tā saknes ir

$$x_{1,2}=\frac{3b\pm\sqrt{15b^2}}{6}=\frac{3b\pm|b|\sqrt{15}}{6}=\frac{b}{6}\left(3\pm\sqrt{15}\right),$$

$$y_{1,2}=\frac{b}{6}\left(3\mp\sqrt{15}\right).$$

Ievietojot šos atrisinājumus dotajā vienādojumu sistēmā, pārliecināmies, ka tie der.

P3. Atrisināt reālos skaitļos vienādojumu sistēmu $\begin{cases}x_1+x_2+\dots+x_n=1\\ x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2=1\\ \dots\\ x_1^n+x_2^n+\ldots+x_n^n=1\end{cases}$

Atrisinājums. Apskatām trīs gadījumus.

1. Ja $n=2$, tad jārisina sistēma $\begin{cases}x+y=1\\ x^2+y^2=1\end{cases}$. Tās atrisinājumi ir $(1;0)$ un $(0;1)$.

2. Ja $n = 3$, tad jārisina sistēma $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=1 \\ x^3+y^3+z^3=1 \end{cases}$

Kāpinām vienādojumu sistēmas pirmo vienādojumu kubā:

$$(x+y+z)^3 = x^3+y^3+z^3+3(x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+y^2z+yz^2+2xyz);$$

$$(x+y+z)^3 = x^3+y^3+z^3+3(x+y)(y+z)(x+z).$$

Tā kā pēc dotā $x^3+y^3+z^3=1$ un $x+y+z=1$, tad iegūstam vienādojumu:

$$1^3 = 1+3(x+y)(y+z)(z+x);$$

$$3(x+y)(y+z)(z+x)=0.$$

Katru reizinātāju pielīdzinām nullei. Ja $x+y=0$, tad no sistēmas pirmā vienādojuma izriet, ka $z=1$, un no otrā vienādojuma, ka $x=y=0$. Analoģiski atrodam arī citus atrisinājumus.

Tātad sistēmas atrisinājumi ir $(0;0;1)$, $(0;1;0)$ un $(1;0;0)$.

3. Ja $n \geq 4$, dotās vienādojumu sistēmas atrisinājumi ir $(1;0;\ldots;0)$, $(0;1;0;\ldots;0)$, $(0;0;\ldots;0;1)$.

Pamatosim, ka dotajai vienādojumu sistēmai citu atrisinājumu nav. Apskatām sistēmas ceturto vienādojumu:

$$x_1^4+x_2^4+\cdots+x_n^4 = (x_1^2)^2+(x_2^2)^2+\cdots+(x_n^2)^2 =$$

$$= (x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)^2 - 2(x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+\ldots+x_{n-1}^2x_n^2).$$

No šīs vienādības iegūstam, ka $2(x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+\ldots+x_{n-1}^2x_n^2)=0$. Tas nozīmē, ka skaitļi $x_1, x_2, \ldots, x_n$, izņemot vienu no tiem, ir vienādi ar nulli.

Apskatīsim vienādojumus, kuru risināšanā izmanto simetriju.

DEFINĪCIJA Vienādojumu

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0=0,\ \ a_0\neq 0$$

sauc par simetrisko jeb atgriezenisko vienādojumu.

Lai atrisinātu atgriezenisko vienādojumu, izmanto šādas teorēmas.

TEORĒMA Katram nepāra pakāpes atgriezeniskajam vienādojumam ir sakne $x=-1$, un vienādojumu var pārveidot formā $(x+1)g(x)=0$, kur $g(x)=0$ ir pāra pakāpes atgriezeniskais vienādojums.

TEORĒMA Katru pāra pakāpes atgriezenisko vienādojumu

$$a_0x^{2n}+a_1x^{2n-1}+a_2x^{2n-2}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0=0$$

var pārveidot formā $x^nh(\sigma)=0$, kur $\sigma=x+\frac{1}{x}$ un $h(\sigma)$ ir n-tās pakāpes polinoms.

Izteiksmi $x^k + \frac{1}{x^k}$ var izteikt ar $\sigma = x + \frac{1}{x}$ (izmantojot sakarības $s_n = x^n + y^n$, kur $\sigma_1 = x + \frac{1}{x}$ un $\sigma_2 = x \cdot \frac{1}{x} = 1$).

Secinājumi

- Atgriezeniskajam vienādojumam skaitlis 0 nav sakne.
- Ja atgriezeniskā vienādojuma pakāpe ir pāra skaitlis $2k$, tad to risina, dalot abas vienādojuma puses ar $x^k \neq 0$. Iegūst vienādojumu formā $h\left(x + \frac{1}{x}\right)$, kuru risina ar substitūciju $x + \frac{1}{x} = t$.
- Ja atgriezeniskā vienādojuma pakāpe ir nepāra skaitlis $2k + 1$, tad vispirms vienādojumu izdala ar binomu $x + 1$. Dalījumā iegūst pāra pakāpes atgriezenisko vienādojumu.

Jebkuru simetrisku trešās pakāpes vienādojumu var atrisināt ar grupēšanas paņēmienu, sadalot kreisās puses izteiksmi reizinātājos un pēc tam katru reizinātāju pielīdzinot nullei. Apskatām vienādojumu vispārīgā veidā $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$ un izmantojam grupēšanas paņēmienu:

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = a(x^3 + 1) + bx(x + 1) =$$
$$= a(x + 1)(x^2 - x + 1) + bx(x + 1) = (x + 1)(ax^2 - ax + a + bx) =$$
$$= (x + 1)(ax^2 + (b - a)x + a).$$

Uzdevumu piemēri

P4. Atrisināt kompleksos skaitļos vienādojumu $x^3 + 4x^2 + 4x + 1 = 0$.

Atrisinājums. Ievērojam, ka der vērtība $x = -1$. Sadalot reizinātājos (Hornera shēma, polinoma dalīšana ar binomu vai grupēšanas paņēmiens), iegūstam

$$(x + 1)(x^2 + 3x + 1) = 0,$$

kura saknes ir $x_1 = -1$ un $x_{2,3} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

P5. Atrisināt kompleksos skaitļos vienādojumu $12x^4 - 16x^3 - 11x^2 - 16x + 12 = 0$.

Atrisinājums. Dalot abas vienādojuma puses ar $x^2 > 0$, iegūstam

$$12x^2 - 16x - 11 - \frac{16}{x} + \frac{12}{x^2} = 0.$$

Sagrupējot $12\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-16\left(x+\frac{1}{x}\right)-11=0$ un apzīmējot $x+\frac{1}{x}=t$, iegūstam vienādojumu:

$$12(t^2-2)-16t-11=0;$$
$$12t^2-16t-35=0.$$

Izmantojam palīgvienādojumu $y^2-16y-35\cdot 12=0$.
Tā kā $35\cdot 12=5\cdot 7\cdot 2\cdot 6=14\cdot 30$, tad $y_1=-14$ un $y_2=30$.

Līdz ar to $t_1=-\frac{14}{12}=-\frac{7}{6}$ un $t_2=\frac{30}{12}=\frac{5}{2}$. Aprēķinot atbilstošās x vērtības, iegūstam:

- $x+\frac{1}{x}=-\frac{7}{6}$ jeb $6x^2+7x+7=0$, kura saknes ir $x_{1,2}=\frac{-7\pm i\sqrt{95}}{12}$,
- $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$ jeb $2x^2-5x+2=0$, kura saknes ir $x_3=2$ un $x_4=\frac{1}{2}$.

P6. Atrisināt kompleksos skaitļos vienādojumu

$$4x^{11}+4x^{10}-21x^9-21x^8+17x^7+17x^6+17x^5+17x^4-21x^3-21x^2+4x+4=0.$$

Atrisinājums. Ievērojam, ka der vērtība $x=-1$. Izmantojam Hornera shēmu, lai izdalītu polinomu ar binomu $(x+1)$.

	4	**4**	**−21**	**−21**	**17**	**17**	**17**	**17**	**−21**	**−21**	**4**	**4**
−1	4	0	−21	0	−17	0	−17	0	−21	0	4	0

Tātad iegūstam

$$(x+1)(4x^{10}-21x^8+17x^6+17x^4-21x^2+4)=0.$$

Vienādojumu $4x^{10}-21x^8+17x^6+17x^4-21x^2+4=0$ dalām ar $x^5>0$ un sagrupējam saskaitāmos ar vienādiem koeficientiem:

$$4x^5-21x^3+17x+\frac{17}{x}-\frac{21}{x^3}+\frac{4}{x^5}=0;$$
$$4\left(x^5+\frac{1}{x^5}\right)-21\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+17\left(x+\frac{1}{x}\right)=0.$$

Apzīmējot $x+\frac{1}{x}=t$ un izmantojot formulas

$$x^3+y^3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2,$$
$$x^5+y^5=\sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1\sigma_2^2,$$

iegūstam:

$$4(t^5-5t^3+5t)-21(t^3-3t)+17t=0;$$
$$4t^5-20t^3+20t-21t^3+63t+17t=0;$$
$$t(4t^4-41t^2+100)=0.$$

Katru reizinātāju pielīdzinot nullei, iegūstam:

- $t = 0$ un līdz ar to $x + \frac{1}{x} = 0$ jeb $x_{1,2} = \pm 1$;
- $4t^4 - 41t^2 + 100 = 0$, no kā secinām (vai arī risina ar substitūciju $t^2 = a$), ka $t^2 = 4$ vai $t^2 = \frac{25}{4}$. Tātad attiecīgi $t = \pm 2$ un $t = \pm \frac{5}{2}$. Katrai t vērtībai atrodam atbilstošās x vērtības.

Dotā vienādojumu saknes ir $x_1 = x_2 = x_3 = -1$, $x_4 = x_5 = 1$, $x_{6,7} = \pm i$, $x_8 = 2$, $x_9 = \frac{1}{2}$, $x_{10} = -2$ un $x_{11} = -\frac{1}{2}$.

UZDEVUMI PATSTĀVĪGAJAM DARBAM

"Simetrijas izmantošana uzdevumu risināšanā"

U1. Atrisināt reālos skaitļos vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} xy = x + y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

U2. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x + y + xy = 7 \\ x^2 + y^2 + xy = 13 \end{cases}$$

U3. Atrisināt pozitīvos skaitļos vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x^3 + y^3 = 2 \end{cases}$$

U4. Atrisināt reālos skaitļos vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x^5 + y^5 = 33 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

U5. Izteikt polinomu $s_n = x^n + y^n + z^n$, ja $n = 1;\ 2;\ 3;\ 4$, kā funkciju $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, kur $\sigma_1 = x + y + z, \sigma_2 = xy + yz + xz$ un $\sigma_3 = xyz$.

U6. Atrisināt kompleksos skaitļos vienādojumu

$$6x^4 - 13x^3 + 12x^2 - 13x + 6 = 0.$$

U7. Atrisināt kompleksos skaitļos vienādojumu

$$2x^5 - 3x^4 - x^3 - x^2 - 3x + 2 = 0.$$

2.4. Lineāru vienādojumu sistēmas

Ir zināmas klasiskas metodes, kā atrisināt lineāru vienādojumu sistēmas (piemēram, Krāmera formulas, Gausa metode, matricu metode [20, 29]), taču dažreiz ir neracionāli un laikietilpīgi tās lietot. Šajā apakšnodaļā apskatīsim dažus spriedumus, kas var noderēt sistēmu risināšanā.

Uzdevumu piemēri

P1. Atrisināt vienādojumu sistēmu $\begin{cases} x+y+z+u=5 \\ y+z+u+v=1 \\ z+u+v+x=2 \\ u+v+x+y=0 \\ v+x+y+z=4 \end{cases}$

Atrisinājums. Saskaitot visus vienādojumus, iegūstam:

$$4(x+y+z+u+v)=12;$$

$$x+y+z+u+v=3.$$

No iegūtās vienādības un pirmā vienādojuma secinām, ka $5+v=3$ jeb $v=-2$.
No iegūtās vienādības un otrā vienādojuma secinām, ka $x+1=3$ jeb $x=2$.
No iegūtās vienādības un trešā vienādojuma secinām, ka $y+2=3$ jeb $y=1$.
No iegūtās vienādības un ceturtā vienādojuma secinām, ka $z+0=3$ jeb $z=3$.
No iegūtās vienādības un piektā vienādojuma secinām, ka $u+4=3$ jeb $u=-1$.
Līdz ar to dotās sistēmas atrisinājums ir $(2;1;3;\ -1;\ -2)$.

P2. Atrisināt vienādojumu sistēmu $\begin{cases} 10x_1+3x_2+4x_3+x_4+x_5=0 \\ 11x_2+2x_3+2x_4+3x_5+x_6=0 \\ 15x_3+4x_4+5x_5+4x_6+x_7=0 \\ 2x_1+x_2-3x_3+12x_4-3x_5+x_6+x_7=0 \\ 6x_1-5x_2+3x_3-x_4+17x_5+x_6=0 \\ 3x_1+2x_2-3x_3+4x_4+x_5-16x_6+2x_7=0 \\ 4x_1-8x_2+x_3+x_4+3x_5+19x_7=0 \end{cases}$

Atrisinājums. Ievērojam, ka k-tajā vienādojumā koeficients a_k pie x_k pēc moduļa ir lielāks nekā visu pārējo koeficientu moduļu summa. Ņemot vērā šo īpašību, pieņemam, ka x_m pēc moduļa ir lielākais no $x_1, x_2, \dots, x_7$. Ja $x_m \neq 0$, tad m-tajā vienādojumā loceklis $a_m x_m$ pēc moduļa ir lielāks nekā visu pārējo locekļu summa. Bet tā nevar būt, jo vienādojuma labajā pusē ir 0. Līdz ar to $x_m=0$. Tā kā pēc moduļa x_m bija lielākais no $x_1, x_2, \dots, x_7$, tad eksistē viens vienīgs atrisinājums: $x_1=x_2=\dots=x_7=0$.

P3. Atrisināt reālos skaitļos vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} \lfloor x \rfloor + \{y\} = z \\ \lfloor y \rfloor + \{z\} = x \\ \lfloor z \rfloor + \{x\} = y \end{cases}$$

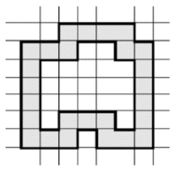
Ar $\lfloor a \rfloor$ apzīmē lielāko veselo skaitli, kas nepārsniedz a. Piemēram, $\lfloor 4{,}8 \rfloor = 4$; $\lfloor -3{,}3 \rfloor = -4$; $\lfloor 5 \rfloor = 5$. Pēc definīcijas $\{a\} = a - \lfloor a \rfloor$ (skaitļa a daļveida daļa). Piemēram, $\{4{,}8\} = 0{,}8$; $\{-3{,}3\} = 0{,}7$; $\{5\} = 0$.

Atrisinājums. Pārrakstām sistēmu formā

$$\begin{cases} \lfloor x \rfloor + \{y\} = \lfloor z \rfloor + \{z\} \\ \lfloor y \rfloor + \{z\} = \lfloor x \rfloor + \{x\} \\ \lfloor z \rfloor + \{x\} = \lfloor y \rfloor + \{y\} \end{cases}$$

Tā kā skaitlis viennozīmīgi nosaka savu veselo daļu un daļveida daļu, tad secinām, ka $\lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor = \lfloor z \rfloor$ un $\{x\} = \{y\} = \{z\}$, tātad $x = y = z$. Tomēr jebkurš vienādu skaitļu trijnieks $(a; a; a)$ der par atrisinājumu. Līdz ar to sistēmas atrisinājums ir $(a; a; a)$, kur $a \in R$.

P4. Rūtiņu lapā uzzīmēts patvaļīgs kontūrs ar platumu 1 rūtiņa (skat., piemēram, 1. att.). Katrā kontūra rūtiņā ierakstīts pa skaitlim. Kontūra iekšpusē esošajās rūtiņās arī jāieraksta pa skaitlim tā, lai katrā iekšpusē esošajā rūtiņā ierakstītais skaitlis būtu tā četru horizontālo un vertikālo kaimiņu skaitļu vidējais aritmētiskais.



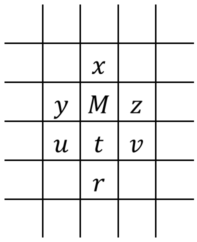
1. attēls

a) Pierādīt: ja visās kontūra rūtiņās sākumā ierakstītas nulles, tad vienīgā iespēja izpildīt uzdevuma prasības ir – arī kontūra iekšpusē visās rūtiņās ierakstīt nulles.

b) Pierādīt: ja kontūra rūtiņās sākumā ierakstīti patvaļīgi skaitļi, tad uzdevumu vienmēr var izpildīt, turklāt iekšpusē esošajās rūtiņās ierakstāmie skaitļi ir noteikti viennozīmīgi.

Atrisinājums. Pieņemsim, ka pa rūtiņu līnijām iet koordinātu asis, un sanumurēsim rūtiņas ar veselu skaitļu pāriem $(i; j)$. Ar $x_{i,j}$ apzīmēsim skaitli, kas ierakstīts rūtiņā ar numuru $(i; j)$.

a) Pieņemsim pretējo, ka uzdevuma nosacījumi izpildās un vismaz vienā iekšējā rūtiņā ierakstīts nenulles skaitlis. Aplūkojam variantu, kad starp nenulles skaitļiem ir pozitīvi skaitļi (gadījumu, kad visi nenulles skaitļi ir negatīvi, apskata līdzīgi). Tā kā kontūra iekšpusē rūtiņu skaits ir galīgs, tad starp ierakstītajiem skaitļiem var atrast vislielāko. Pieņemsim, ka tas ir M (skat. 2. att.).



2. attēls

Tā kā $M = \frac{x+y+z+t}{4}$, tad $4M = x + y + z + t$.

Tā kā pēc pieņēmuma $M \geq x,\ M \geq y,\ M \geq z,\ M \geq t$, tad $4M \geq x + y + z + t$, un vienādība var pastāvēt tikai tad, ja pastāv vienādības $M = x,\ M = y,\ M = z,\ M = t$; tātad lielākais skaitlis ierakstīts arī M rūtiņas kaimiņu rūtiņās.

Līdzīgi no $4t = M + u + r + v$ un $t \geq u,\ t \geq r,\ t \geq v,\ t = M$ iegūstam, ka arī $u = r = v = M.$

Šādi turpinot, kādā brīdī nonāksim līdz kontūram un iegūsim, ka kādā kontūra rūtiņā ierakstīts skaitlis $M > 0$. Esam ieguvuši pretrunu, jo uzdevuma nosacījumos ir dots, ka kontūra rūtiņās ierakstītas tikai nulles. Tātad sākotnējais pieņēmums ir nepareizs un esam pierādījuši, ka visās iekšējās rūtiņās ir ierakstītas nulles (uzdevuma nosacījumi izpildās, jo $0 = \frac{0+0+0+0}{4}$).

b) Uzdevuma otrās daļas risinājumā izmantosim dažus faktus no lineāru vienādojumu sistēmu teorijas, kas saistīti ar to atrisinājumu eksistences nosacījumiem.

Rakstot pa vienam vienādojumam katrai kontūra iekšējai rūtiņai, uzdevuma nosacījumus varam pierakstīt kā lineāru vienādojumu sistēmu:

$$x_{i,j} = \frac{x_{i-1,j} + x_{i+1,j} + x_{i,j-1} + x_{i,j+1}}{4}.$$

Iegūtā sistēma satur n vienādojumus un n nezināmos, kur n ir kontūra iekšpusē esošo rūtiņu skaits.

Uzdevuma a) gadījumam atbilst līdzīga sistēma, kura atšķiras no b) gadījuma sistēmas tikai ar to, ka kontūra rūtiņām atbilstošās konstantes ir nulles. Tātad abas sistēmas atšķiras viena no otras tikai ar brīvajiem locekļiem. Tā kā a) gadījumā sistēmai eksistē viens vienīgs atrisinājums (tas pierādīts a) gadījumā), tad sistēmas determinants nav 0; tādā gadījumā arī b) gadījuma sistēmas determinants nav 0, bet tad b) gadījuma sistēmai eksistē viens vienīgs atrisinājums.

UZDEVUMI PATSTĀVĪGAJAM DARBAM

"Lineāru vienādojumu sistēmas"

U1. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x + 7y + 3v + 5u = 16 \\ 8x + 4y + 6v + 2u = -16 \\ 2x + 6y + 4v + 8u = 16 \\ 5x + 3y + 7v + u = -16 \end{cases}$$

U2. Aplī stāv 100 cilvēki, viens no tiem ir Sprīdītis. Visiem kopā ir 100 eiro. Katram cilvēkam ir divas reizes mazāk naudas nekā viņa kaimiņam pa labi un pretī stāvošajam cilvēkam kopā. Cik naudas ir Sprīdītim?

U3. Doti četri naturāli skaitļi a, b, c, d. Summām $a + b$; $a + c$; $a + d$; $b + c$; $b + d$ vērtības ir 6; 9; 11; 12; 15 (nav zināms, kurai summai ir kura vērtība). Aprēķināt summu $c + d$ un skaitļus c un d.

2.5. Saskaitīšanas paņēmiens

Skolas kursā saskaitīšanas galvenā ideja bija iegūt vienādojumu, kas satur tikai vienu nezināmo lielumu. Vispārīgā veidā saskaitīšanas paņēmienu var lietot arī, lai iegūtu vienādības, no kurām var izdarīt noderīgus secinājumus, piemēram, iegūto vienādojumu var pārveidot par reizinājumu, kas vienāds ar nulli, vai atdalīt pilnos kvadrātus.

Uzdevumu piemēri

P1. Atrisināt vienādojumu sistēmu $\begin{cases} x^2 + y^2 = 6z \\ y^2 + z^2 = 6x \\ z^2 + x^2 = 6y \end{cases}$

Atrisinājums. Visas vienādojumu sistēmas kreisās puses izteiksmes ir kvadrātu summas, tātad x, y un z ir nenegatīvi. Atņemot no sistēmas pirmā vienādojuma otro, iegūstam:

$$x^2 - z^2 = 6z - 6x;$$
$$(x - z)(x + z) + 6(x - z);$$
$$(x - z)(x + z + 6) = 0.$$

Tā kā $x + z + 6 > 0$, tad $x - z = 0$ jeb $x = z$.

Analoģiski, no sistēmas pirmā vienādojuma atņemot trešo, iegūstam, ka $y = z$. Tātad $x = y = z$ un sistēmas pirmo vienādojumu varam uzrakstīt kā $2x^2 = 6x$, kura saknes ir $x = 0$ un $x = 3$. Līdz ar to sistēmas atrisinājumi ir $x = y = z = 0$ un $x = y = z = 3$.

P2. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} y^2 = x^3 - 3x^2 + 2x \\ x^2 = y^3 - 3y^2 + 2y \end{cases}$$

Atrisinājums. Vispirms ievērojam, ka $x \geq 0$ un $y \geq 0$, jo sistēmu var pārveidot:

$$\begin{cases} y^2 + 3x^2 = x(x^2 + 2) \\ x^2 + 3y^2 = y(y^2 + 2) \end{cases}$$

Šajā formā vienādojuma kreisā puse ir kvadrātu summa, tātad nenegatīvs lielums, bet vienādojuma labajā pusē attiecīgi ir reizinātāji $x^2 + 2 > 0$ un $y^2 + 2 > 0$.

Atņemot no dotās sistēmas pirmā vienādojuma otro un sadalot izteiksmi reizinātājos, iegūstam:

$$x^3 - y^3 - 2x^2 + 2y^2 + 2x - 2y = 0;$$
$$(y - x)(y^2 + xy + x^2 - 2x - 2y + 2) = 0.$$

Iespējami divi gadījumi $y - x = 0$ vai $y^2 + xy + x^2 - 2x - 2y + 2 = 0$. Apskatām katru gadījumu.

Ja $y = x$, tad, ievietojot to dotajā vienādojumu sistēmā, iegūstam $x^3 - 4x^2 + 2x = 0$ jeb $x(x^2 - 4x + 2) = 0$, kura saknes ir $x_1 = 0, x_2 = 2 + \sqrt{2}$, $x_3 = 2 - \sqrt{2}$ un attiecīgi $y_1 = 0, y_2 = 2 + \sqrt{2}, y = 2 - \sqrt{2}$.

Ja $y^2 + xy + x^2 - 2x - 2y + 2 = 0$, tad, ekvivalenti pārveidojot, iegūstam:

$$(y^2 - 2y + 1) + (x^2 - 2x + 1) + xy = 0;$$
$$(y - 1)^2 + (x - 1)^2 + xy = 0.$$

Pēdējam vienādojumam reālu sakņu nav, jo visi trīs saskaitāmie ir nenegatīvi un vienīgā iespēja, kā summā iegūt nulli, ir, ja katrs saskaitāmais ir vienāds ar 0, bet vienlaicīgi visi trīs saskaitāmie nevar būt nulle.

Līdz ar to dotajai vienādojumu sistēmai atrisinājums ir $x = y = 0$, $x = y = 2 + \sqrt{2}$ un $x = y = 2 - \sqrt{2}$.

P3. Atrisināt reālos skaitļos vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} 1 + x_1^2 = 2x_2 \\ 1 + x_2^2 = 2x_3 \\ 1 + x_3^2 = 2x_1 \end{cases}$$

Atrisinājums. Saskaitot visus trīs sistēmas vienādojumus un ekvivalenti pārveidojot, iegūstam:

$$3 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2x_1 + 2x_2 + 2x_3;$$
$$x_1^2 - 2x_1 + 1 + x_2^2 - 2x_2 + 1 + x_3^2 - 2x_3 + 1 = 0;$$
$$(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_3 - 1)^2 = 0.$$

Tā kā visi trīs saskaitāmie ir nenegatīvi, tad, lai summā iegūtu 0, katram saskaitāmajam ir jābūt vienādam ar nulli, tas ir,

$$(x_1-1)^2=0,\ (x_2-1)^2=0 \text{ un } (x_3-1)^2=0.$$

No tā iegūstam, ka dotās sistēmas atrisinājums ir $x_1=x_2=x_3=1$, un pārbaude rāda, ka šis atrisinājums der.

UZDEVUMI PATSTĀVĪGAJAM DARBAM

"Saskaitīšanas paņēmiens"

U1. Atrisināt vienādojumu sistēmu $\begin{cases}2019x-2018y=1\\2020x-2019y=2\end{cases}$

U2. Atrisināt vienādojumu sistēmu $\begin{cases}x^2+xy=15\\y^2+xy=10\end{cases}$

U3. Atrisināt vienādojumu sistēmu $\begin{cases}a^2+3a+1=\frac{b+c}{2}\\b^2+3b+1=\frac{a+c}{2}\\c^2+3c+1=\frac{a+b}{2}\end{cases}$

U4. Atrisināt reālos skaitļos vienādojumu sistēmu $\begin{cases}\frac{2x_1^2}{1+x_1^2}=x_2\\\frac{2x_2^2}{1+x_2^2}=x_3\\\frac{2x_3^2}{1+x_3^2}=x_1\end{cases}$

U5. Atrast visus iespējamos skaitļu trijniekus $(x;y;z)$, kas apmierina nosacījumu: ja kādam no nezināmajiem lielumiem pieskaita abu pārējo nezināmo reizinājumu, tad rezultātā iegūst 2.

U6. Atrisināt reālos skaitļos vienādojumu sistēmu $\begin{cases}x+y^2=y^3\\y+x^2=x^3\end{cases}$

2.6. Novērtējumu izmantošana uzdevumu risināšanā

Viens no paņēmieniem, kā pierādīt, ka vienādojumam nav atrisinājuma vai ka citu atrisinājumu (bez jau atrastajiem) nav, ir izmantot novērtēšanu un nevienādības.

Uzdevumu piemēri

P1. Atrisināt pozitīvos skaitļos vienādojumu $x^3+y^3=9(xy-3)$.

Atrisinājums. Pārrakstām doto vienādojumu:

$$x^3+y^3+27=9xy;$$

$$\frac{x^3+y^3+3^3}{3}=3xy.$$

Izmantojot nevienādību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko, iegūstam

$$\frac{x^3+y^3+3^3}{3}\geq\sqrt[3]{x^3y^33^3}=3xy.$$

Lai vienādojumam eksistētu atrisinājums, nepieciešams, lai iegūtā nevienādība pārvērstos par vienādību. Tas iespējams tikai tad, ja visi saskaitāmie ir vienādi, tas ir, $x=y=3$. Līdz ar to šis ir vienīgais dotā vienādojuma atrisinājums.

P2. Atrisināt veselos skaitļos vienādojumu $x^6+3x^3+1=y^4$.

Atrisinājums. Ievērojam, ka der skaitļu pāri $(0;1)$ un $(0;-1)$. Pierādīsim, ka citu atrisinājumu nav.

Apzīmējam $x^3=a$, tad $y^4=a^2+3a+1$. Šķirojam gadījumus.

- Ja $a\geq 1$, tad $a^2+2a+1<a^2+3a+1<a^2+4a+4$, tātad arī $(a+1)^2<y^4<(a+2)^2$, bet redzams, ka y^4 (kas ir naturāla skaitļa kvadrāts) atrodas starp divu pēc kārtas esošu naturālu skaitļu kvadrātiem, – pretruna.
- Ja $a\leq -4$, tad $a^2+4a+4<a^2+3a+1<a^2+2a+1$, tātad arī $(a+2)^2<y^4<\ (a+1)^2$ un, tieši tāpat kā iepriekš, iegūstam pretrunu, ka y^4 atrodas starp diviem pēc kārtas esošu skaitļu kvadrātiem.
- Tātad $-3\leq a\leq 0$. Tā kā $a=x^3$, tad $a=0$ vai $a=-1$.
- Ja $a=0$, tad $x=0$, no kā izriet, ka $y=\pm 1$. Ja $a=-1$, tad $x=-1$, un iegūstam, ka $y^4=-1$, kam atrisinājuma nav.

Tātad dotajam vienādojumam ir tikai divi atrisinājumi $(0;1)$ un $(0;-1)$.

P3. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu $5^x+5^y+5^z=5^t$.

Atrisinājums. Ja kāds no x,y vai z ir lielāks vai vienāds ar t, tad vienādojumam nav atrisinājuma.

Tātad jāizpildās nevienādībām $x<t$, $y<t$ un $z<t$. Tā kā x,y,z,t ir naturāli skaitļi, tad secinām, ka $x\leq t-1$, $y\leq t-1$ un $z\leq t-1$. Tādā gadījumā

$$5^x+5^y+5^z\leq 5^{t-1}+5^{t-1}+5^{t-1}=3\cdot 5^{t-1}<5\cdot 5^{t-1}=5^t,$$

no kā izriet, ka dotajam vienādojumam nav atrisinājuma.

P4. Pierādīt, ka vienādojumam $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a^2+b^2}=\frac{1}{2}$ nav atrisinājuma naturālos skaitļos.

Atrisinājums. Pārveidojam doto vienādojumu formā:

$$2a+2b+\frac{2ab}{a^2+b^2}=ab.$$

Tā kā saskaitāmie $2a$, $2b$ un ab ir naturāli skaitļi, tad arī saskaitāmajam $\frac{2ab}{a^2+b^2}$ jābūt naturālam skaitlim. No nevienādības $A \geq G$ izriet, ka $a^2+b^2 \geq 2ab$. Līdz ar to $\frac{2ab}{a^2+b^2}$ būs naturāls tikai tad, ja $a^2+b^2=2ab$, no kā izriet, ka $a=b$. Tādā gadījumā iegūstam vienādojumu $4a+1=a^2$, kam nav atrisinājuma naturālos skaitļos, jo $D=16+4=20$.

P5. Atrast visas tādas naturālās x, y, z un t vērtības, ka $x \geq y \geq z$ un

$$t!=x!+2y!+3z!.$$

Atrisinājums. Tā kā $t!=x!+2y!+3z!$ un $x \geq y \geq z > 0$, tad $t > x$ un $(x+1)! \leq t! \leq x!+2x!+3x!=6x!$ jeb $(x+1)\cdot x! \leq 6x!$.
Tātad $x+1 \leq 6$ jeb $x \leq 5$. Apskatām visas iespējamās x vērtības.

- Ja $x=1$, tad $x=y=z=1$, $t!=6$ un $t=3$. Tātad $(1;1;1;3)$ ir dotā vienādojuma atrisinājums.
- Ja $x=2$, tad $3! \leq t! \leq 6\cdot 2!=2\cdot 3\cdot 2!=2\cdot 3! < 4!$. Tātad $t=3$ un iegūstam vienādojumu $6=2+2y!+3z!$. Tā kā $2+2y!+3z! \geq 7$, tad šajā gadījumā vienādojumam nav atrisinājuma.
- Ja $x=3$, tad $4! \leq t! \leq 6\cdot 3! < 5!$. Tātad $t=4$ un iegūstam vienādojumu $24=6+2y!+3z!$. Tā kā vienādojuma kreisā puse ir pāra skaitlis, tad arī labajai pusei jābūt pāra skaitlim. Labās puses saskaitāmie 6 un $2y!$ ir pāra skaitļi, tāpēc arī $3z!$ ir jābūt pāra skaitlim. Tātad $2 \leq z \leq 3$. Ja $z=2$, tad $2y!=24-6-3\cdot 2!=$ $=18-6=12$, $y!=6$ un $y=3$, tātad $(3;3;2;4)$ ir dotā vienādojuma atrisinājums. Ja $z=3$, tad $2y!=24-6-3\cdot 3!=18-18=0$, šajā gadījumā y nav naturāls skaitlis un dotajam vienādojumam nav atrisinājuma.
- Ja $x=4$, tad $5! \leq t! \leq 6\cdot 4! < 6!$. Tātad $t=5$ un iegūstam vienādojumu $120=24+2y!+3z!$ jeb $96=2y!+3z!$. Ja $z=4$, tad $2y!=96-3\cdot 4!=24$, $y!=12$ un y nav naturāls skaitlis. Ja $z<4$, tad $2y!+3z! \leq 2\cdot 4!+3\cdot 3! < 96$. Tātad šajā gadījumā dotajam vienādojumam nav atrisinājuma.
- Ja $x=5$, tad $6! \leq t! \leq 6\cdot 5!=6!$. Tātad $t=6$. Ja $x=y=z=5$, tad $5!+2\cdot 5!+3\cdot 5!=6\cdot 5!=6!$ un $(5;5;5;6)$ ir dotā vienādojuma atrisinājums. Ja $z<5$, tad $2y! > 6!-5!-3\cdot 5!=6\cdot 5!-4\cdot 5!=2\cdot 5!$, $y! > 5!$ jeb $y>5$, kas ir pretrunā ar to, ka $x \geq y$. Tātad šajā gadījumā dotajam vienādojumam nav atrisinājuma.

Esam ieguvuši, ka dotā vienādojuma atrisinājumi ir $(1;1;1;3)$, $(3\ 3;2;4)$ un $(5;5;5;6)$.

P6. Atrisināt vienādojumu sistēmu $\begin{cases} \sin x + \cos y = \frac{3}{2}\text{tg}z \\ \sin y + \cos x = \frac{3}{2}\text{ctg}z \end{cases}$

Atrisinājums. Ievērojam, ka šajā piemērā abus vienādojumus saskaitīt nav izdevīgi, bet, tos sareizinot un izmantojot formulu $\text{tg}\alpha \cdot \text{ctg}\alpha = 1$, labajā pusē iegūsim izteiksmi, kas nav atkarīga no mainīgā z:

$$\sin x \sin y + \sin x \cos x + \cos y \sin y + \cos y \sin y = 2{,}25.$$

Lietojot trigonometrijas formulas, iegūstam

$$\cos(x - y) + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\sin 2y = 2\frac{1}{4}.$$

Tā kā $\sin\alpha \in [-1; 1]$ un $\cos\alpha \in [-1; 1]$, tad pēdējā vienādojuma kreisā puse nepārsniedz vērtību $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2 < 2\frac{1}{4}$, tāpēc šim vienādojumam un līdz ar to arī sākotnējai vienādojumu sistēmai nav atrisinājuma.

P7. Atrast visus vienādojumu sistēmas $\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3^2 \\ x_2 + x_3 = x_4^2 \\ x_3 + x_4 = x_5^2 \\ x_4 + x_5 = x_1^2 \\ x_5 + x_1 = x_2^2 \end{cases}$ pozitīvos atrisinājumus.

Atrisinājums. Apzīmējam ar X un Y atbilstoši vislielāko un vismazāko no $x_1, x_2, \dots, x_5$. Tad no dotās vienādojumu sistēmas iegūstam, ka $X^2 \leq 2X$ un $Y^2 \geq 2Y$.
Tā kā ir jāatrod pozitīvie atrisinājumi, tad $X > 0$ un $Y > 0$. Līdz ar to no nevienādībām izriet, ka $X \leq 2$ un $Y \geq 2$. Tātad esam ieguvuši, ka $2 \leq Y \leq X \leq 2$, bet tas nozīmē, ka $x_1 = x_2 = \cdots = x_5 = 2$. Tātad dotajai vienādojumu sistēmai eksistē tikai viens pozitīvs atrisinājums $(2; 2; 2; 2; 2)$.

P8. Atrisināt vienādojumu sistēmu $\begin{cases} 2x(1 + y + y^2) = 3(1 + y^4) \\ 2y(1 + z + z^2) = 1(1 + z^4) \\ 2z(1 + x + x^2) = 3(1 + x^4) \end{cases}$

Atrisinājums. Tā kā visiem reāliem t pastāv nevienādība $t^2 + t + 1 > 0$, tad no dotās sistēmas vienādojumiem izriet, ka $x > 0$, $y > 0$ un $z > 0$.
Nezaudējot vispārīgumu, varam pieņemt (simetrijas dēļ), ka vislielākais (vai viens no lielākajiem) nezināmajiem ir x, tad $x \geq y$ un $x \geq z$. No sistēmas pēdējā vienādojuma iegūstam novērtējumu (izmantojam $x \geq z$):

$$2x(1 + x + x^2) \geq 3(1 + x^4);$$
$$3x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x + 3 \leq 0.$$

Ievērojot, ka kreisās puses polinoma sakne ir $x = 1$, sadalām polinomu reizinātājos:

$$(x-1)(3x^3 + x^2 - x - 3) \leq 0;$$

$$(x-1)(x-1)(3x^2 + 4x + 3) \leq 0;$$

$$(x-1)^2(3x^2 + 4x + 3) \leq 0.$$

Tā kā visiem reāliem x ir spēkā nevienādība $3x^2 + 4x + 3 > 0$, tad $x = 1$. Ievietojot $x = 1$ dotās sistēmas trešajā vienādojumā, iegūstam $2z \cdot 3 = 3 \cdot 2$ jeb $z = 1$. Līdzīgi iegūstam, ka $y = 1$. Tātad dotās vienādojumu sistēmas vienīgais atrisinājums ir $(1; 1; 1)$.

P9. Atrast visus reālo skaitļu četriniekus $(a; b; c; d)$, kas apmierina vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} (b+c+d)^{2010} = 3a \\ (a+c+d)^{2010} = 3b \\ (a+b+d)^{2010} = 3c \\ (a+b+c)^{2010} = 3d \end{cases}$$

Atrisinājums. Uzdevumā doto vienādojumu kreisā puse ir nenegatīvs lielums, jo reāla skaitļa 2010. pakāpe nevar būt negatīvs skaitlis, tātad arī vienādojumu labajā pusē ir nenegatīvs skaitlis jeb skaitļi a, b, c un d ir nenegatīvi. Nezaudējot vispārīgumu, varam pieņemt, ka $d \geq c \geq b \geq a \geq 0$. Tātad

$$b + c + d \geq a + c + d \geq a + b + d \geq a + b + c \geq 0.$$

Tā kā visas izteiksmes, kas ietilpst iegūtajās nevienādībās ir nenegatīvas, tad, kāpinot visas izteiksmes 2010. pakāpē, nevienādību zīmes saglabājas:

$(b + c + d)^{2010} \geq (a + c + d)^{2010} \geq (a + b + d)^{2010} \geq (a + b + c)^{2010}$, jo funkcija $f(x) = x^{2010}$ ir augoša visiem $x > 0$.

No iegūtajām nevienādībām un uzdevumā dotās nevienādību sistēmas iegūstam, ka

$$3a \geq 3b \geq 3c \geq 3d \geq 0;$$

$$a \geq b \geq c \geq d \geq 0.$$

Tātad $d \geq c \geq b \geq a \geq 0$ un $a \geq b \geq c \geq d \geq 0$, no kā izriet, ka $a = b = c = d$.

Apzīmējam $a = b = c = d = x \Rightarrow (3x)^{2010} = 3x \Rightarrow 3x = 0$ vai $3x = 1$. Tātad $a = b = c = d = 0$ vai $a = b = c = d = \frac{1}{3}$. Esam ieguvuši abus skaitļu komplektus: $(0;\ 0;\ 0;\ 0)$ un $\left(\frac{1}{3};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{3}\right)$, kas apmierina uzdevumā doto vienādojumu sistēmu.

UZDEVUMI PATSTĀVĪGAJAM DARBAM

"Novērtējumu izmantošana uzdevumu risināšanā"

U1. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu

$$\frac{xy}{z}+\frac{xz}{y}+\frac{yz}{x}=3.$$

U2. Atrisināt veselos skaitļos vienādojumu

$$(x-y)(x+y)=x.$$

U3. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x^y=z \\ y^z=x \\ z^x=y \end{cases}$$

U4. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0 \end{cases}$$

U5. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x^3+y^3=1 \\ x^4+y^4=1 \end{cases}$$

Vairāk par vienādojumu risināšanu skat., piemēram, [18, 32, 33, 34].

3. Funkcijas

3.1. Lineāra funkcija

DEFINĪCIJA Funkciju $y = kx + b$, kur k un b ir reāli skaitļi, sauc par lineāru funkciju.

Piezīme. Augstākās matemātikas kursos (algebra, funkcionālanalīze) lineāru funkciju definē citādi.

Lineāras funkcijas īpašības

- Funkcija ir augoša, ja $k > 0$, dilstoša, ja $k < 0$.
- Grafiks krusto y asi punktā $(0; b)$.
- Grafiks krusto x asi punktā $\left(-\frac{b}{k}; 0\right)$.

Uzdevumu piemēri

P1. Apskatām lineāras funkcijas $y = f(x)$ un $y = g(x)$, kas definētas visām reālām x vērtībām.

a) Vai var gadīties, ka $y = f(x) + g(x)$ nav lineāra funkcija?
b) Vai var gadīties, ka $y = f(x) \cdot g(x)$ ir lineāra funkcija?

Atrisinājums

a) Nē, nevar. Ja $f(x) = ax + b$ un $g(x) = cx + d$, tad
$$f(x) + g(x) = ax + b + cx + d = (a + c)x + (b + d),$$
kas ir lineāra funkcija.

b) Jā, var, piemēram, ja $f(x) = 1$ un $g(x) = 1$, tad $f(x) \cdot g(x) = 1$, kas arī ir lineāra funkcija.

P2. Divas paralēlas taisnes krusto funkcijas $y = x^2$ grafiku: viena taisne – punktos A un B, otra taisne – punktos C un D. Pierādīt, ka taisne, kas iet caur nogriežņu AB un CD viduspunktiem, ir paralēla y asij.

Atrisinājums. Apzīmējam taišņu vienādojumus ar $y = kx + b_1$ un $y = kx + b_2$. Tad punktu A un B abscisas x_A un x_B ir vienādojuma $x^2 = kx + b_1$ saknes, bet punktu C un D abscisas x_C un x_D ir vienādojuma $x^2 = kx + b_2$ saknes. Pēc Vjeta teorēmas $x_A + x_B = k$ un $x_C + x_D = k$, tātad $\frac{x_A + x_B}{2} = \frac{x_C + x_D}{2}$. Tāpēc nogriežņu AB un CD viduspunktiem ir vienādas abscisas, no kā izriet vajadzīgais.

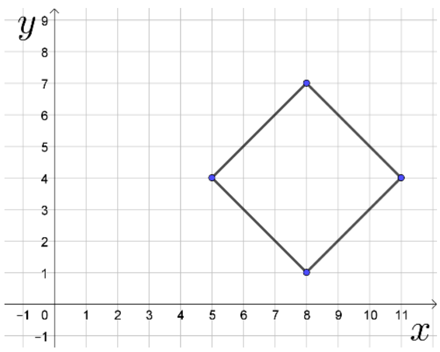
P3. Attēlot koordinātu plaknē visus tos punktus $(x; y)$, kas apmierina vienādību

$$|8 - x| + |4 - y| = 3.$$

Atrisinājums. Tā kā moduļa vērtības ir nenegatīvas, tad jāizpildās nevienādībām $|8 - x| \leq 3$ un $|4 - y| \leq 3$. Tātad $x \in [5; 11]$ un $y \in [1; 7]$. Apskatām četrus iespējamos gadījumus:

- ja $x \in [5; 8]$ un $y \in [1; 4]$, tad $8 - x + 4 - y = 3$ jeb $y = 9 - x$;
- ja $x \in [8; 11]$ un $y \in [1; 4]$, tad $x - 8 + 4 - y = 3$ jeb $y = x - 7$;
- ja $x \in [5; 8]$ un $y \in [4; 7]$, tad $8 - x + y - 4 = 3$ jeb $y = x - 1$;
- ja $x \in [8; 11]$ un $y \in [4; 7]$, tad $x - 8 + y - 4 = 3$ jeb $y = 15 - x$.

Tātad punkti veido kvadrāta kontūru (skat. 3. att.), kura virsotnes atrodas punktos ar koordinātām (5; 4), (11; 4), (8; 1), (8; 7).



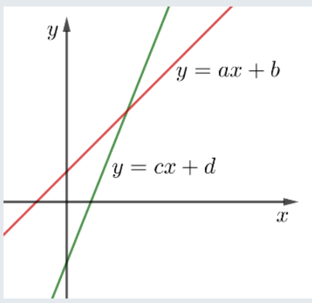
3. attēls

UZDEVUMI PATSTĀVĪGAJAM DARBAM

"Lineāra funkcija"

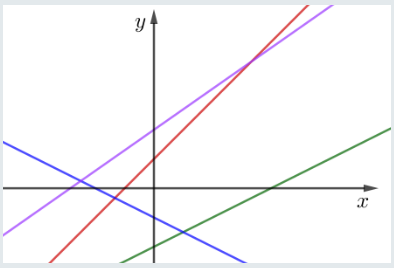
Apakšnodaļas uzdevumu idejas aizgūtas no [4].

U1. Funkciju $y = ax + b$ un $y = cx + d$ grafiki doti 4. att. Vai noteikti $(c - a)(b - d) > 0$?



4. attēls

U2. Vai var gadīties, ka 5. att. dotās taisnes ir funkciju $y = ax + b$, $y = bx + c$, $y = cx + d$ un $y = dx + a$ grafiki?



5. attēls

U3. Dotas funkcijas $f(x) = ax + b$ un $g(x) = cx + d$. Vai var gadīties, ka ar vērtībām $x = 2019$ un $x = 2021$ funkcijas f vērtība ir lielāka nekā atbilstošā funkcijas g vērtība, bet ar vērtību $x = 2020$ funkcijas g vērtība ir lielāka nekā f vērtība?

3.2. Kvadrātfunkcija

Šajā apakšnodaļā apskatīsim uzdevumus, kas saistīti tieši ar kvadrātfunkcijas īpašību izmantošanu.

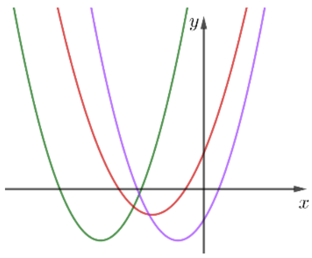
DEFINĪCIJA Funkciju, kuru apraksta vienādojums $y = ax^2 + bx + c$, kur $a, b, c \in \mathbb{R}$ un $a \neq 0$, sauc par kvadrātfunkciju.

Kvadrātfunkcijas īpašības

- Parabolas zari vērsti uz augšu, ja $a > 0$, zari vērsti uz leju, ja $a < 0$.
- Parabolas virsotne ir punktā $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{D}{4a}\right)$.
- Kvadrātfunkcijas grafiks krusto y asi punktā $(0; c)$.
- Ja $D > 0$, tad grafiks krusto x asi divos punktos.
- Ja $D < 0$, tad grafiks nekrusto x asi.

Uzdevumu piemēri

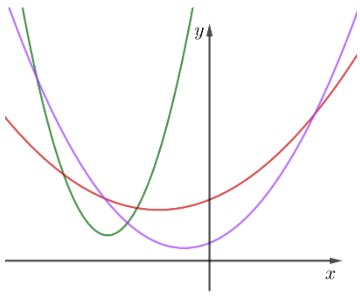
P1. Vai var gadīties, ka 6. att. doti funkciju $y = ax^2 + bx + c$, $y = bx^2 + cx + a$ un $y = cx^2 + ax + b$ grafiki? Grafiki nav doti mērogā.



6. attēls

Atrisinājums. Nē, nevar. Tā kā visām parabolām zari vērsti uz augšu, tad $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, bet tādā gadījumā neviena no parabolām nevar krustot y asi punktā, kurā $y < 0$.

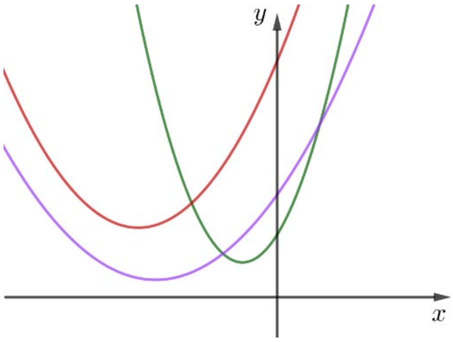
P2. Pieņemsim, ka 7. att. dotās līknes ir kvadrātfunkciju grafiki, tie nav doti mērogā. Vai tie var būt funkciju $y = ax^2 + bx + c$, $y = bx^2 + cx + a$ un $y = cx^2 + ax + b$ grafiki?



7. attēls

Atrisinājums. Nē, nevar. Ievērojam, ka zīmējumā redzami visi seši iespējamie parabolu krustpunkti, tātad citu krustpunktu nav, taču visu doto funkciju vērtības sakrīt, ja $x = 1$. Tā kā dotie trīs grafiki neiet caur vienu punktu, tad tie nevar būt uzdevumā doto funkciju grafiki.

P3. Pieņemsim, ka 8. att. dotās līknes ir kvadrātfunkciju grafiki, tie nav doti mērogā. Vai tie var būt funkciju $y = ax^2 + 2bx + c$, $y = bx^2 + 2cx + a$ un $y = cx^2 + 2ax + b$ grafiki?



8. attēls

Atrisinājums. Nē, nevar. Tā kā parabolām zari ir vērsti uz augšu, tad $a > 0, b > 0, c > 0$. Tā kā neviena parabola nekrusto abscisu asi, tad visu kvadrāttrinomu diskriminanti ir negatīvi, tas ir, $4b^2 < 4ac$, $4c^2 < 4ab$, $4a^2 < 4cb$ jeb $b^2 < ac$, $c^2 < ab$, $a^2 < cb$. Sareizinot šīs nevienādības, iegūstam $a^2b^2c^2 < a^2b^2c^2$ – pretruna.

P4. Aplūkojam funkcijas $y = x^2 + ax + b$, kur $a + 2b = 2014$. Pierādīt, ka visu šādu funkciju grafikiem ir kopīgs punkts.

Atrisinājums. Aplūkojam funkcijas $y = x^2 + ax + b$ vērtību, ja $x = \frac{1}{2}$:

$$y = \frac{1}{4} + \frac{a}{2} + b = \frac{1}{2}(a + 2b) + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot 2014 + \frac{1}{4} = 1007\frac{1}{4}.$$

Tātad punkts $\left(\frac{1}{2};\ 1007\frac{1}{4}\right)$ ir kopīgs visu funkciju grafikiem.

P5. Zināms, ka a un b ir pozitīvi skaitļi un kvadrātfunkciju $y = ax^2 + 2018x + b$ un $y = bx^2 + 2018x + a$ minimālo vērtību summa ir nulle. Pierādīt, ka katrai no šīm kvadrātfunkcijām minimālā vērtība ir nulle.

1. atrisinājums. Abām dotajām kvadrātfunkcijām ir vienāds sakņu skaits, jo tām ir vienāds diskriminants $D = 2018^2 - 4ab$. Ja tām abām būtu divas saknes, tad to minimālās vērtības būtu negatīvas un to summa arī būtu negatīva. Ja tām abām nebūtu sakņu, tad to minimālās vērtības būtu pozitīvas un summa arī pozitīva. Tātad tām abām ir tieši viena sakne, un tas nozīmē, ka katras kvadrātfunkcijas minimālā vērtība ir nulle.

2. atrisinājums. Tā kā a un b ir pozitīvi skaitļi, tad abu parabolu zari ir vērsti uz augšu un kvadrātfunkciju minimālā vērtība sakrīt ar parabolas virsotnes y koordinātu. Parabolas $y = ax^2 + 2018x + b$ virsotnes koordinātas ir

$$x_1 = -\frac{2018}{2a} = -\frac{1009}{a} \quad \text{un} \quad y_1 = -\frac{1009^2}{a} + b,$$

bet parabolas $y = bx^2 + 2018x + a$ virsotnes koordinātas ir

$$x_2 = -\frac{1009}{b} \quad \text{un} \quad y_2 = -\frac{1009^2}{b} + a.$$

Tā kā abu kvadrātfunkciju minimālo vērtību summa ir nulle, tad

$$-\frac{1009^2}{a} + b - \frac{1009^2}{b} + a = 0;$$

$$a + b - \frac{1009^2}{ab}(a+b) = 0;$$

$$(a+b)\left(1 - \frac{1009^2}{ab}\right) = 0.$$

Tā kā $a + b > 0$, tad $\left(1 - \frac{1009^2}{ab}\right) = 0$ jeb $ab = 1009^2$. Tātad $b = \frac{1009^2}{a}$ un $y_1 = -\frac{1009^2}{a} + \frac{1009^2}{a} = 0$. Līdzīgi iegūst, ka $y_2 = 0$.

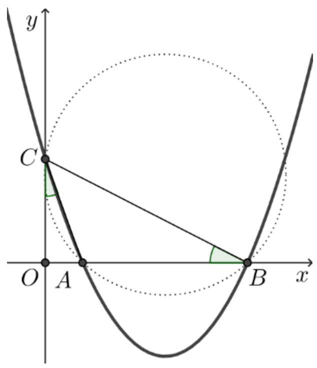
Piezīme. Kvadrātfunkcijas minimālo vērtību var atrast arī, atdalot pilno kvadrātu.

P6. Aplūkojam visus tos funkciju $y = x^2 + px + q$ grafikus, kuriem ir trīs dažādi krustpunkti ar koordinātu asīm. Katram grafikam caur šiem trim krustpunktiem novelk riņķa līniju. Pierādīt, ka visas šīs riņķa līnijas krustojas vienā punktā.

1. atrisinājums. Visām riņķa līnijām ir kopīgs punkts $(0; 1)$. Pierādīsim to.

Kvadrātvienādojuma $x^2 + px + q = 0$ saknes apzīmējam ar x_1 un x_2. Ar A un B apzīmējam parabolas krustpunktus ar x asi, ar C – parabolas krustpunktu ar y asi: $A(x_1; 0)$, $B(x_2; 0)$ un $C(0; q)$. Apskatīsim divus iespējamos gadījumus.

1. Ja riņķa līnijai ar y asi ir tikai viens krustpunkts, tas ir, tā pieskaras y asij (skat. 9. att.), tad $\Delta COA \sim \Delta BOC$ pēc pazīmes $\ell\ell$, jo $\sphericalangle COB$ – kopīgs un $\sphericalangle OCA = \sphericalangle OBC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$.



9. attēls

Tad

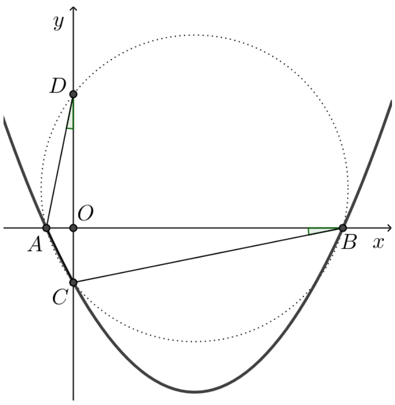
$$\frac{OA}{OC} = \frac{OC}{OB} \quad \Rightarrow \quad \frac{x_1}{q} = \frac{q}{x_2} \quad \Rightarrow \quad x_1 x_2 = q^2.$$

Pēc Vjeta teorēmas $x_1 x_2 = q$, tāpēc $q = q^2$. Tā kā C nesakrīt ar O (jo tad parabolai ar asīm būtu tikai divi krustpunkti), tad vienīgā iespēja ir, ka $q = 1$. Tātad šīs riņķa līnijas iet caur punktu $(0; 1)$.

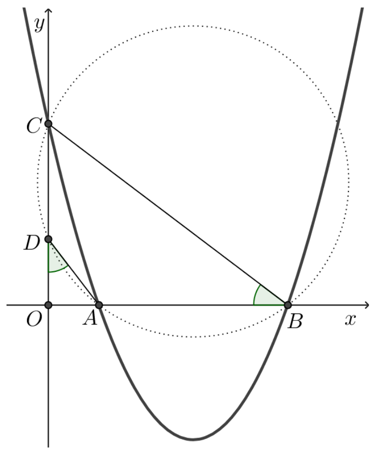
2. Ja riņķa līnijai ar y asi ir divi krustpunkti, tad otru krustpunktu ar y asi apzīmējam ar D.

- Ja $q \in (-\infty; 0) \cup (0; 1)$, tad $\Delta AOD \sim \Delta COB$ pēc pazīmes $\ell\ell$, jo $\sphericalangle ADC = \sphericalangle ABC$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz vienu un to pašu loku, un $\sphericalangle DOA = \sphericalangle BOC = 90°$ (skat. 10. att.). Tāpēc
$$\frac{AO}{OC} = \frac{OD}{OB} \quad \Rightarrow \quad \frac{x_1}{q} = \frac{OD}{x_2} \quad \Rightarrow \quad OD = \frac{x_1 x_2}{q} = \frac{q}{q} = 1.$$
- Ja $q > 1$, tad $\Delta AOD \sim \Delta COB$ pēc pazīmes $\ell\ell$, jo $\sphericalangle DOA = \sphericalangle BOC = 90°$ un $\sphericalangle ADO = 180° - \sphericalangle CDA = \sphericalangle CBA$ pēc blakusleņķu īpašības un īpašības, ka ievilkta četrstūra pretējo leņķu summa ir 180° (skat. 11. att.). Tāpēc
$$\frac{AO}{OC} = \frac{OD}{OB} \quad \Rightarrow \quad \frac{x_1}{q} = \frac{OD}{x_2} \quad \Rightarrow \quad OD = \frac{x_1 x_2}{q} = \frac{q}{q} = 1.$$

Tā kā punkts D nevar būt $(0; -1)$, jo tad iegūst ieliektu četrstūri, kuram nevar apvilkt riņķa līniju, tad šīs riņķa līnijas iet caur punktu $(0; 1)$.
Līdz ar to visām šādām riņķa līnijām ir kopīgs punkts $(0; 1)$.



10. attēls



11. attēls

2. atrisinājums. Visu grafiku krustpunktu koordinātas ir

$$(0;q),\quad \left(-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q};0\right),\quad \left(-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q};0\right).$$

Noteiksim, kur atrodas centrs riņķa līnijai, kas iet caur šiem trim punktiem. Abscisas vērtība ir $x=-\frac{p}{2}$. Atliek noskaidrot ordinātas vērtību y_0. Izmantojot riņķa līnijas ar centru punktā $(a;b)$ un rādiusu r vienādojumu $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, iegūstam:

$$r^2=\left(0+\frac{p}{2}\right)^2+(q-y_0)^2=\left(-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}+\frac{p}{2}\right)^2+(0-y_0)^2;$$

$$\frac{p^2}{4}+q^2-2qy_0+y_0^2=\frac{p^2}{4}-q+y_0^2;$$

$$y_0=\frac{q+1}{2}.$$

Tātad $r^2=\frac{p^2}{4}+\frac{(q-1)^2}{4}$ jeb $r=\frac{\sqrt{p^2+(q-1)^2}}{2}$ un riņķa līnijas centra koordinātas ir $\left(-\frac{p}{2};\frac{q+1}{2}\right)$.

Aplūkojam, kāds ir attālums no punkta $(0;1)$ līdz riņķa līnijas centram:

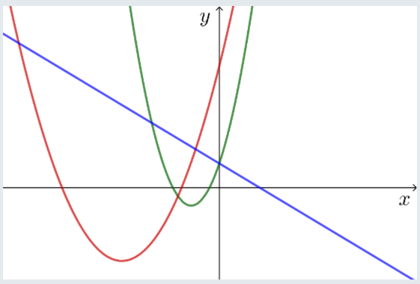
$$d^2=\left(0+\frac{p}{2}\right)^2+\left(1-\frac{q+1}{2}\right)^2=\frac{p^2}{4}+\frac{(1-q)^2}{4}=r^2.$$

Tātad caur punktu $(0;1)$ iet visas minētā veida riņķa līnijas.

UZDEVUMI PATSTĀVĪGAJAM DARBAM

"Kvadrātfunkcija"

U1. Vai var gadīties, ka 12. att. ir doti funkciju $y=ax^2+bx+c$, $y=cx^2+bx+a$ un $y=bx+c$ grafiki? Funkciju grafiki nav zīmēti mērogā.



12. attēls

U2. Apskatām funkcijas $y=ax^2+x+b$, kur a un b ir reāli skaitļi un $a+b=2011$. Pierādīt, ka visu šādu funkciju grafikiem ir divi kopīgi punkti.

3.3. Funkcijas īpašību izmantošana uzdevumu risināšanā

Šīs apakšnodaļas uzdevumi saistīti ar vispārīgu funkciju īpašību izmantošanu. Turpmāk atgādinātas svarīgākās definīcijas no skola kursa, kas būs nepieciešamas uzdevumu risināšanā.

DEFINĪCIJA Funkciju f sauc par **pāra funkciju**, ja katram x no šīs funkcijas definīcijas apgabala ir patiesa vienādība $f(-x) = f(x)$.

DEFINĪCIJA Funkciju f sauc par **nepāra funkciju**, ja katram x no šīs funkcijas definīcijas apgabala ir patiesa vienādība $f(-x) = -f(x)$.

Pāra funkcijas grafiks ir simetrisks attiecībā pret y asi, bet nepāra funkcijas grafiks ir simetrisks attiecībā pret koordinātu sistēmas sākumpunktu, tas ir, punktu $(0; 0)$.

DEFINĪCIJA Funkciju sauc par **nedilstošu**, ja katrām divām argumenta vērtībām x_1, x_2, kurām izpildās $x_1 < x_2$, ir spēkā nevienādība $f(x_1) \leq f(x_2)$.

DEFINĪCIJA Funkciju sauc par **neaugošu**, ja katrām divām argumenta vērtībām x_1, x_2, kurām izpildās $x_1 < x_2$, ir spēkā nevienādība $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Ja definīcijās ir stingrā nevienādība, tad funkciju attiecīgi sauc par augošu un dilstošu.
Ja funkcija kādā intervālā ir tikai nedilstoša vai tikai neaugoša, tad to sauc par **monotonu** funkciju šajā intervālā.
Funkciju f un g grafiku krustpunktu x koordinātas ir vienādojuma $f(x) = g(x)$ saknes.

Nepārtrauktība ir svarīgs jēdziens matemātikā, un visbiežāk lietotais apgalvojums, lai pamatotu, ka vienādojumam eksistē sakne, ir nākamā teorēma.

TEORĒMA Ja $f(a)f(b) < 0$ un funkcija $f(x)$ ir definēta visiem $x \in (a; b)$, tad eksistē vismaz viena tāda vērtība $c \in (a; b)$, ka $f(c) = 0$ (tas ir, funkcijas grafiks starp šīm argumenta vērtībām krusto x asi).

Uzdevumu piemēri

P1. Noteikt, vai virkne $a_n = \frac{3n+7}{n+2}$, n – naturāls skaitlis, ir augoša vai dilstoša.

1. atrisinājums. Izmantojot novērtēšanu, iegūstam

$$a_n = \frac{3n+7}{n+2} = \frac{3(n+2)+1}{n+2} = 3 + \frac{1}{n+2} > 3 + \frac{1}{n+3} = a_{n+1}.$$

Tā kā $a_n > a_{n+1}$, tad virkne $a_n = \frac{3n+7}{n+2}$ ir dilstoša.

2. atrisinājums. Pierādīsim pēc definīcijas, apskatot starpību $a_{n+1} - a_n$:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3(n+1)+7}{(n+1)+2} - \frac{3n+7}{n+2} = \frac{3n+10}{n+3} - \frac{3n+7}{n+2} =$$

$$= \frac{3n^2+6n+10n+20-(3n^2+7n+9n+21)}{(n+3)(n+2)} = \frac{-1}{(n+3)(n+2)} < 0.$$

Esam ieguvuši, ka $a_{n+1} < a_n$. Tātad virkne $a_n = \frac{3n+7}{n+2}$ ir dilstoša.

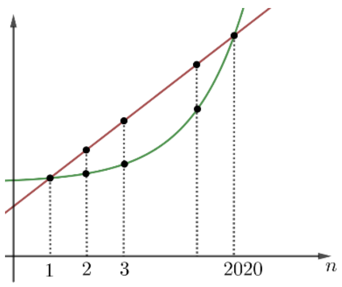
Piezīme. Skaitļu virkne ir naturāla argumenta funkcija.

P2. Vai eksistē tāda reāla parametra a vērtība, ka vienādojumam $\cos x = ax^2$ ir tieši 2021 dažādas reālas saknes?

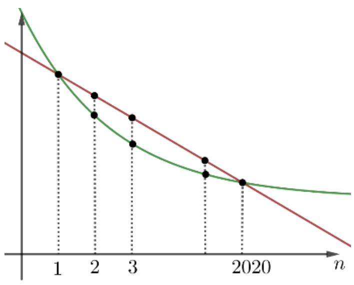
Atrisinājums. Nē, tāda a vērtība neeksistē. Ievērojam, ka $x = 0$ nav šī vienādojuma sakne, jo $\cos 0 = 1$. Ja vienādojumam $\cos x = ax^2$ ir sakne x_1, tad tam ir arī sakne $(-x_1)$, jo abas funkcijas $y = \cos x$ un $y = x^2$ ir pāra funkcijas. Tātad jebkurai a vērtībai šim vienādojumam ir pāra skaits sakņu, bet 2021 ir nepāra skaitlis.

P3. Dots, ka $a_1, a_2, \dots, a_{2020}$ un $b_1, b_2, \dots, b_{2020}$ ir attiecīgi aritmētiskā un ģeometriskā progresija, kuras abas sastāv no pozitīviem skaitļiem. Zināms, ka $a_1 = b_1 \neq a_{2020} = b_{2020}$. Kas ir lielāks – visu aritmētiskās vai visu ģeometriskās progresijas locekļu summa?

Atrisinājums. Attēlojam abas progresijas kā naturāla argumenta funkcijas. Aritmētiskās progresijas locekļi izvietojas uz taisnes, bet ģeometriskās progresijas locekļi – uz eksponentfunkcijas grafika. No eksponentfunkcijas grafika īpašībām zinām, ka ir spēkā 13. att. vai 14. att. parādītā situācija. Redzam, ka abos gadījumos aritmētiskās progresijas locekļu summa ir lielāka.



13. attēls



14. attēls

P4. Dots, ka a, b, c ir kāda trijstūra malu garumi. Pierādīt, ka vienādojumam $ax^2 + bx - c = 0$ intervālā $(0; 1)$ ir tieši viena sakne.

Atrisinājums. Tā kā a, b, c ir trijstūra malu garumi, tāpēc $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Funkcija $f(x) = ax^2 + bx - c$ ir kvadrātfunkcija, tās grafiks ir parabola. Tā kā $f(0) = -c < 0$ un $f(1) = a + b - c > 0$ (trijstūra nevienādība $a + b > c$), tad starp 0 un 1 eksistē tāds x_0, ka $f(x_0) = 0$. Otra sakne ir negatīva (tātad nav intervālā $(0; 1)$), jo pēc Vjeta teorēmas dotā kvadrātvienādojuma sakņu reizinājums ir $-\frac{c}{a} < 0$.

P5. Dots, ka $a^2 + ab + ac < 0$. Pierādīt, ka $b^2 > 4ac$.

Atrisinājums. Aplūkojam kvadrātfunkciju $f(x) = cx^2 + bx + a$. Ievērojam, ka $a^2 + ab + ac = a(a + b + c) = f(0) \cdot f(1)$. No dotā izriet, ka $f(0) \cdot f(1) < 0$. Tātad izteiksmes $f(0)$ un $f(1)$ ir ar pretējām zīmēm, no kā izriet, ka kvadrātfunkcija krusto x asi. Varam secināt, ka kvadrātfunkcijai eksistē divas saknes jeb tās diskriminants ir pozitīvs, tas ir, $D = b^2 - 4ac > 0$ jeb $b^2 > 4ac$, kas arī bija jāpierāda.

P6. Doti vienādojumi $ax^2 + bx + c = 0$ un $-ax^2 + bx + c = 0$, un x_1, x_2 ir kaut kādas šo vienādojumu saknes. Pierādīt, ka atradīsies tāda vienādojuma $\frac{a}{2}x^2 + bx + c = 0$ sakne x_3, ka vai nu $x_1 \leq x_3 \leq x_2$, vai arī $x_1 \geq x_3 \geq x_2$.

Atrisinājums. Aplūkojam kvadrātfunkciju $f(x) = \frac{a}{2}x^2 + bx + c$ un aprēķinām tās vērtību punktā x_1 un x_2:

$$f(x_1) = \frac{a}{2}x_1^2 + bx_1 + c = ax_1^2 - \frac{a}{2}x_1^2 + bx_1 + c = \underbrace{(ax_1^2 + bx_1 + c)}_{=0,\text{ jo } x_1 \text{ ir sakne}} - \frac{a}{2}x_1^2 = -\frac{a}{2}x_1^2;$$

$$f(x_2) = \frac{a}{2}x_2^2 + bx_2 + c = \frac{3a}{2}x_2^2 - ax_2^2 + bx_2 + c = \underbrace{(-ax_2^2 + bx_2 + c)}_{=0,\text{ jo } x_2 \text{ ir sakne}} + \frac{3a}{2}x_2^2 = \frac{3a}{2}x_2^2.$$

Tā kā abām vērtībām ir pretējas zīmes, tad kvadrātfunkcija $f(x)$ starp x_1 un x_2 krusto x asi. Tāpēc viena no kvadrātvienādojuma $\frac{a}{2}x^2 + bx + c = 0$ saknēm ir starp x_1 un x_2.

P7. Apskatām funkciju $f(x) = x^2 + px + q$. Zināms, ka vienādojumam $f(x) = 0$ ir divas saknes, kas atšķiras viena no otras vismaz par 5. Pierādīt, ka vienādojumam $f(x) + f(x+1) + f(x+2) = 0$ arī ir divas saknes.

Atrisinājums. Apzīmējam vienādojuma $f(x) = 0$ saknes ar x_1 un x_2, kur $x_1 < x_2$. Ja $x_1 < x < x_2$, tad pastāv nevienādība $f(x) < 0$, bet ja $x > x_2$ un $x < x_1$, tad pastāv nevienādība $f(x) > 0$.

Līdz ar to:

- ja $x_3 = x_1 + 0{,}1$, tad pastāv nevienādības
$$f(x_3) < 0, f(x_3 + 1) < 0 \text{ un } f(x_3 + 2) < 0;$$
- ja $x_4 = x_1 - 10$, tad pastāv nevienādības
$$f(x_4) > 0, f(x_4 + 1) > 0 \text{ un } f(x_4 + 2) > 0;$$
- ja $x_5 > x_2$, tad pastāv nevienādības
$$f(x_5) > 0, f(x_5 + 1) > 0 \text{ un } f(x_5 + 2) > 0.$$

Tātad funkcija $F(x) = f(x) + f(x+1) + f(x+2)$ maina zīmi starp x_5 un x_3, kā arī starp x_3 un x_4, no kurienes izriet vajadzīgais.

P8. Dots polinoms $f(x)$ ar veseliem koeficientiem. Vai iespējams, ka $f(2011) = 100$ un $f(11) = 1000$?

Atrisinājums. Nē, nav iespējams. Tā kā $f(x)$ ir polinoms, tad to var uzrakstīt formā
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
kur $a_i, i = 0,1,2, \ldots, n$ ir veseli skaitļi.

Apskatām starpību:
$$f(x) - f(y) =$$
$$= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 - (a_n y^n + a_{n-1}y^{n-1} + \cdots + a_1 y + a_0) =$$
$$= a_n(x^n - y^n) + \cdots + a_1(x - y).$$

Izmantojot formulu $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + +ab^{n-2} + b^{n-1})$, kur n ir naturāls skaitlis, iegūstam, ka katrs saskaitāmais $a_i(x^i - y^i), i = 1,2, \ldots, n$ dalās ar $(x-y)$ un līdz ar to arī visa summa dalās ar $(x-y)$. Tātad arī starpība $f(x) - f(y)$ dalās ar $(x-y)$.

Tā kā $f(2011) - f(11) = 100 - 1000 = -900$ nedalās ar $2011 - 11 = 2000$, tad uzdevumā prasītais nav iespējams.

P9. Atrisināt vienādojumu sistēmu reālos skaitļos $\begin{cases} x^3 + 4x = 5y \\ y^3 + 4y = 5z \\ z^3 + 4z = 5x \end{cases}$

Atrisinājums. Dotās sistēmas atrisinājumi ir $(0;0;0)$; $(1;1;1)$ un $(-1;-1;-1)$. Pierādīsim, ka citu atrisinājumu nav. Tā kā vienādojums ir simetrisks attiecībā pret mainīgo rotāciju, tad, nezaudējot vispārīgumu, varam pieņemt, ka $x \geq y$ un $x \geq z$. Funkcija $f(a) = a^3 + 4a$ ir augoša visā savā definīcijas kopā kā divu augošu funkciju summa (a^3 un $4a$). Tātad, ja $x \geq y$, tad no sistēmas pirmā un otrā vienādojuma iegūstam, ka $x^3 + 4x \geq y^3 + 4y$ jeb $5y \geq 5z$, no kā izriet, ka $y \geq z$. Savukārt no $y \geq z$ analoģiski, izmantojot sistēmas otro un trešo vienādojumu, iegūstam, ka $z \geq x$. Tātad $x \geq y \geq z \geq x$, no kā izriet, ka $x = y = z$. Ievietojot $x = y = z$ sistēmas pirmajā vienādojumā, iegūstam, ka $x^3 + 4x = 5x$ jeb $x^3 - x = 0$, tātad $x_1 = -1, x_2 = 0, \; x_3 = 1$. Pārbaude apstiprina, ka $x = y = z = -1, \; x = y = z = 0$ un $x = y = z = 1$ ir vienādojumu sistēmas atrisinājumi.

P10. Pierādīt, ka $\sqrt[3]{99} < \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{25} < \sqrt[3]{100}$.

Atrisinājums. Ievērojam, ka $\left(\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{25}\right)^3 = 30 + 15(\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{25})$.

Tātad $\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{25}$ ir vienādojuma $x^3 - 15x - 30 = 0$ reālā sakne.

Aplūkojam nepārtrauktu funkciju $f(x) = x^3 - 15x - 30$. Apskatām funkcijas $f(x)$ vērtību punktā $\sqrt[3]{99}$:

$$f\left(\sqrt[3]{99}\right) = 99 - 15\sqrt[3]{99} - 30 = 69 - 15\sqrt[3]{99} = 3\left(23 - 5\sqrt[3]{99}\right).$$

Tā kā $23^3 = 12167 < 12375 = \left(5\sqrt[3]{99}\right)^3$, tad $f\left(\sqrt[3]{99}\right) < 0$.

Apskatām funkcijas $f(x)$ vērtību punktā $\sqrt[3]{100}$:

$$f\left(\sqrt[3]{100}\right) = 100 - 15\sqrt[3]{100} - 30 = 70 - 15\sqrt[3]{100} = 5\left(14 - 3\sqrt[3]{100}\right).$$

Tā kā $14^3 = 2744 > 2700 = \left(3\sqrt[3]{100}\right)^3$, tad $f\left(\sqrt[3]{100}\right) > 0$.

Pierādīsim, ka funkcija $f(x)$ ir augoša, ja $x > 3$. Ja $x_1 > x_2$, tad

$$f(x_1) - f(x_2) = x_1^3 - 15x_1 - 30 - x_2^3 + 15x_2 + 30 =$$
$$= x_1^3 - x_2^3 - 15x_1 + 15x_2 =$$
$$= (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) - 15(x_1 - x_2) =$$
$$= (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 15).$$

Ievērojam, ka $x_1 - x_2 > 0$ un $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 15 > 0$, ja $x_1 > x_2 > 3$. Tātad $f(x_1) > f(x_2)$ un funkcija $f(x)$ ir augoša, ja $x > 3$.

Visas trīs dotās vērtības atrodas funkcijas augšanas apgabalā:

$$\sqrt[3]{100} > \sqrt[3]{99} > \sqrt[3]{64} = 4 > 3;$$
$$\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{25} > 1 + 2 = 3.$$

Tā kā funkcija $f(x)$ ir nepārtraukta un augoša, turklāt $f\left(\sqrt[3]{99}\right) < 0$, $f(\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{25}) = 0$, $f\left(\sqrt[3]{100}\right) > 0$, tad esam pierādījuši prasīto nevienādību $\sqrt[3]{99} < \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{25} < \sqrt[3]{100}$.

P11. Atrast visus reālu skaitļu četriniekus $(a; b; c; d)$, kas apmierina vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} a^3 + c^3 = 2 \\ a^2b + c^2d = 0 \\ b^3 + d^3 = 1 \\ ab^2 + cd^2 = -6 \end{cases}$$

Atrisinājums. Apskatām polinomu $P(x) = (ax + b)^3 + (cx + d)^3$. Pārveidojam šo polinomu, savelkot līdzīgos:

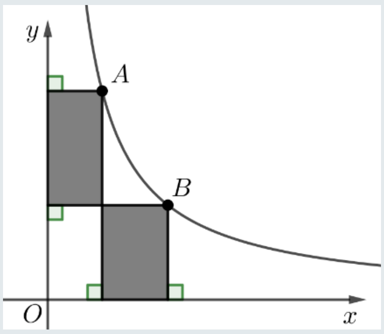
$$P(x) = (a^3 + c^3)x^3 + 3(a^2b + c^2d)x^2 + 3(ab^2 + cd^2)x + (b^3 + d^3).$$

Saskaņā ar doto $P(x) = 2x^3 - 18x + 1$. Līdz ar to $P(0) > 0$, $P(1) < 0$ un $P(3) > 0$. Tātad polinomam P ir vismaz divas reālas dažādas saknes. Taču $P(x) = 0$ nozīmē, ka $ax + b = -(cx + d)$ jeb $(a + c)x + b + d = 0$. Šim vienādojumam ir tikai viens atrisinājums, izņemot gadījumu, kad $a + c = b + d = 0$. Tomēr arī tas nav iespējams, jo no $a + c = 0$ izriet, ka $a^3 + c^3 = 0$, bet tas ir pretrunā sistēmas pirmajam vienādojumam, ka $a^3 + c^3 = 2$. Secinām, ka šādi reālu skaitļu četrinieki vispār nepastāv.

UZDEVUMI PATSTĀVĪGAJAM DARBAM

"Funkcijas īpašību izmantošana uzdevumu risināšanā"

U1. Uz funkcijas $y = \frac{1}{x}$ grafika izvēlēti divi punkti A un B, un no tiem novilkti perpendikuli pret koordinātu asīm (skat. 15. att.). Pierādīt, ka iekrāsoto četrstūru laukumi ir vienādi.



15. attēls

U2. Doti tādi nenulles skaitļi a, b un c, ka $a + c = \frac{b}{3}$. Pierādīt, ka $f(x) = ax^2 + bx + c$ grafiks noteikti krusto x asi kādā intervāla $[-1; 1]$ punktā.

U3. Dots, ka a, b un c ir dažādi skaitļi. Pierādīt, ka vienādojumam

$$(x - a)(x - b) + (x - a)(x - c) + (x - b)(x - c) = 0$$

ir divas dažādas saknes.

U4. Dota funkcija $f(x) = x^2 + px + q$. Zināms, ka vienādojumam $f(x) = 0$ ir divas saknes, no kurām viena atrodas starp 0 un 1, bet otra – ne. Pierādīt, ka $f(q) \leq 0$.

U5. Dota funkcija $f(x) = mx^2 + (m-1)x + \frac{2020}{m-2019}$. Ar kādām parametra m vērtībām funkcija ir augoša intervālā $(1; 2)$?

U6. Dots, ka x_1 ir vienādojuma $x^2 + px + q = 0$ sakne, bet x_2 ir vienādojuma $-x^2 + px + q = 0$ sakne. Pierādīt, ka vienādojumam $\frac{1}{3}x^2 + px + q = 0$ noteikti ir sakne x_3, kas atrodas starp x_1 un x_2.

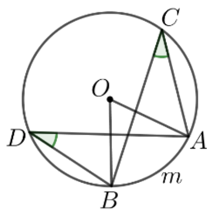
Vairāk par funkcijām skat., piemēram, [11, 13, 16, 30, 31].

4. Leņķi un nogriežņi riņķa līnijā

4.1. Leņķi riņķa līnijā

DEFINĪCIJA Par **centra leņķi** sauc leņķi, kura virsotne atrodas riņķa līnijas centrā, bet malas krusto riņķa līniju.

Centra leņķa lielums ir vienāds ar tā loka leņķisko lielumu, uz kuru tas balstās, tas ir, $\sphericalangle AOB = \overset{\frown}{AmB}$ (skat. 16. att.).



16. attēls

DEFINĪCIJA Par riņķa līnijā **ievilktu leņķi** sauc leņķi, kura virsotne atrodas uz riņķa līnijas, bet malas krusto riņķa līniju.

TEORĒMA Ievilktā leņķa lielums ir vienāds ar pusi no tā loka leņķiskā lieluma, uz kuru tas balstās, tas ir, $\sphericalangle ACB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AmB}$ (skat. 16. att.).

Pierādījums. Apskatām trīs gadījumus.

1. Ievilktā leņķa ACB viena mala iet caur riņķa līnijas centru (skat. 17. att.). Apskatām vienādsānu trijstūri BOC, tad $\sphericalangle AOB = \sphericalangle ACB + \sphericalangle CBO = 2\sphericalangle ACB$ kā trijstūra ārējais leņķis. Tā kā $\sphericalangle AOB = \overset{\frown}{AmB}$ kā centra leņķis, tad

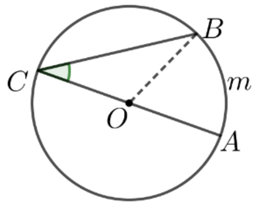
$$\sphericalangle ACB = \frac{1}{2}\sphericalangle AOB = \overset{\frown}{AmB}.$$

2. Riņķa līnijas centrs O atrodas ievilktā leņķa ACB iekšpusē (skat. 18. att.). Tā kā $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ACD + \sphericalangle DCB$, tad, izmantojot tikko pierādīto, iegūstam

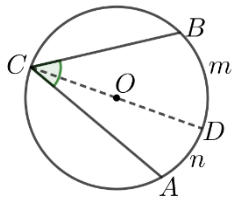
$$\sphericalangle ACB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AnD} + \frac{1}{2}\overset{\frown}{DmB} = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{AnD} + \overset{\frown}{DmB}\right) = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AmB}.$$

3. Riņķa līnijas centrs O atrodas ievilktā leņķa ACB ārpusē (skat. 19. att.). Tā kā $\sphericalangle ACB = \sphericalangle DCB - \sphericalangle DCA$, tad iegūstam

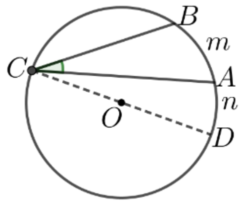
$$\sphericalangle ACB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{DnB} - \frac{1}{2}\overset{\frown}{DnA} = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{DnB} - \overset{\frown}{DnA}\right) = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AmB}.$$



17. attēls



18. attēls



19. attēls

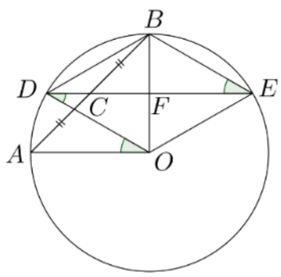
Secinājumi

- Visi ievilktie leņķi, kas balstās uz vienu un to pašu loku, ir vienādi, piemēram, $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$ (skat. 16. att.).
- Leņķi, kas balstās uz vienas riņķa līnijas vienāda garuma hordām, ir vienādi, un otrādi.
- Ievilkts leņķis, kas balstās uz diametru, ir $90°$, un otrādi – ja ievilkts leņķis ir taisns, tad tas balstās uz diametru.

Uzdevumu piemēri

P1. Riņķa līnijā ar centru punktā O novilkti divi savstarpēji perpendikulāri rādiusi OA un OB. Caur hordas AB viduspunktu C novilkta horda DE, kas paralēla OA (punkts D atrodas uz mazākā loka AB). Aprēķināt leņķa AOD lielumu.

Atrisinājums. Ar F apzīmējam nogriežņu OB un DE krustpunktu un $\sphericalangle AOD = \alpha$ (skat. 20. att.). Tā kā $AC = CB$ un $AO || DE$, tad CF ir trijstūra AOB viduslīnija un $OF = BF$.
No OA un DE paralelitātes izriet, ka $DE \perp OB$ un $\sphericalangle ODE = \sphericalangle AOD = \alpha$ kā iekšējie šķērsleņķi. Četrstūris $DOEB$ ir rombs, jo $DE \perp OB$, $OF = FB$ un $DF = FE$, jo rādiuss, kas perpendikulārs hordai, dala to uz pusēm. No romba īpašībām izriet, ka $\sphericalangle DEB = \alpha$. Līdz ar to $\sphericalangle DOB = 2\sphericalangle DEB = 2\alpha$ kā centra leņķis un ievilktais leņķis, kas balstās uz vienu un to pašu loku DB. Ievērojam, ka $\sphericalangle DOB + \sphericalangle AOD = 90°$ jeb $3\alpha = 90°$ un $\alpha = \sphericalangle AOD = 30°$.



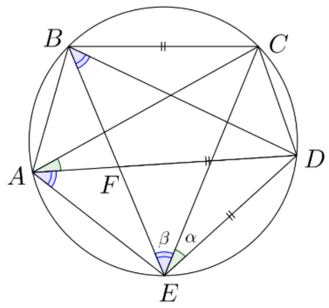
20. attēls

P2. Piecstūris $ABCDE$ ievilkts riņķa līnijā, nogriežņi AD un BE krustojas punktā F. Zināms, ka $BC = DF = DE$. Pierādīt, ka $AC = CE$.

Atrisinājums. Novelkam $BD,\ AC$ un EC (skat. 21. att.). Tā kā ievilktie leņķi, kas balstās uz vienādām hordām, ir vienādi, tad $\sphericalangle EBD = \sphericalangle BEC = \sphericalangle DAE = \beta$ un $\sphericalangle DEC = \sphericalangle CAD = \alpha$. Vienādsānu trijstūra DEF leņķi pie pamata ir vienādi, tas ir, $\sphericalangle DEF = \sphericalangle EFD = \alpha + \beta$. Tad no blakusleņķu īpašības iegūstam, ka $\sphericalangle AFE = 180° - \sphericalangle EFD = 180° - (\alpha + \beta)$.
No trijstūra AEF iegūstam, ka

$$\sphericalangle AEF = 180° - \sphericalangle FAE - \sphericalangle AFE = 180° - \beta - 180° + \alpha + \beta = \alpha.$$

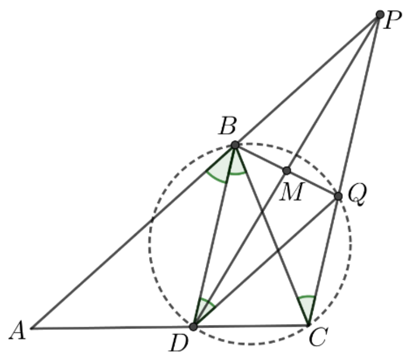
Esam ieguvuši, ka $\sphericalangle EAC = \sphericalangle AEC = \alpha + \beta$. Tātad trijstūris AEC ir vienādsānu un $AC = CE$ kā atbilstošās sānu malas.



21. attēls

P3. Trijstūrī ABC leņķa ABC bisektrise krusto malu AC punktā D. Caur punktu C paralēli BD novilkta taisne, kas krusto AB pagarinājumu punktā P un ap trijstūri BDC apvilkto riņķa līniju punktā Q. Taisne PD krusto nogriezni BQ punktā M. Pierādīt, ka $PM = MD$.

Atrisinājums. Nogrieznis BD ir bisektrise, tāpēc $\sphericalangle ABD = \sphericalangle DBC$ (skat. 22. att.). Tā kā $BD||CQ$, tad $\sphericalangle BCQ = \sphericalangle DBC$ kā iekšējie šķērsleņķi. Savukārt $\sphericalangle BDQ = \sphericalangle BCQ$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz vienu un to pašu loku BQ. Līdz ar to iekšējie šķērsleņķi $\sphericalangle ABD = \sphericalangle BDQ$ un tāpēc $AB \parallel DQ$. Četrstūris $BDQP$ ir paralelograms, jo $BD||QP$ un $BP||DQ$. Paralelogramā diagonāles krustpunktā dalās uz pusēm, tāpēc $PM = MD$.



22. attēls

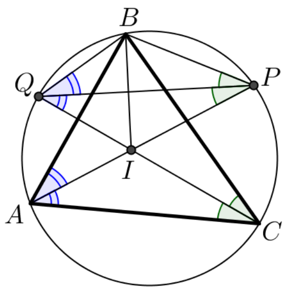
P4. Trijstūra ABC leņķu $\sphericalangle CAB$ un $\sphericalangle BCA$ bisektrises krusto tam apvilkto riņķa līniju attiecīgi punktos P un Q, bet pašas krustojas punktā I. Pierādīt, ka $PQ \perp BI$.

Atrisinājums. Apzīmējam $\sphericalangle BAP = \sphericalangle PAC = \alpha$ un $\sphericalangle BCQ = \sphericalangle QCA = \beta$ (skat. 23. att.). Ievilktie leņķi, kas balstās uz vienu un to pašu loku, ir vienādi, tāpēc

- $\sphericalangle BQP = \sphericalangle BAP = \alpha$ (balstās uz loku BP);
- $\sphericalangle PQC = \sphericalangle PAC = \alpha$ (balstās uz loku PC);
- $\sphericalangle BPQ = \sphericalangle BCQ = \beta$ (balstās uz loku BQ);
- $\sphericalangle QPA = \sphericalangle QCA = \beta$ (balstās uz loku QA).

Līdz ar to $\Delta QIP = \Delta QBP$ pēc pazīmes $\ell m\ell$, jo $\sphericalangle IQP = \sphericalangle BQP = \alpha$, PQ ir kopīga mala un $\sphericalangle IPQ = \sphericalangle BPQ = \beta$.

Tāpēc $PI = PB$ kā atbilstošās malas vienādos trijstūros un ΔBPI ir vienādsānu trijstūris ar pamatu BI. Tā kā PQ ir bisektrise, kas vilkta no virsotnes leņķa, tad PQ ir arī augstums pret BI un līdz ar to $PQ \perp BI$.



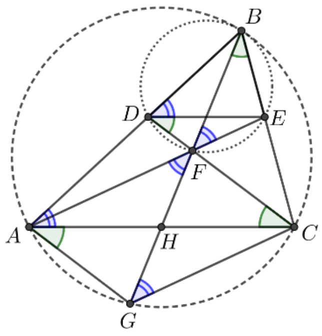
23. attēls

P5. Uz trijstūra ABC malām AB un BC izvēlēti attiecīgi tādi punkti D un E, ka $AC \parallel DE$. Nogriežņi AE un CD krustojas punktā F. Punkti B, D, E un F atrodas uz vienas riņķa līnijas. Taisne BF krusto malu AC punktā H un trijstūrim ABC apvilkto riņķa līniju punktā G. Pierādīt, ka $FH = GH$.

Atrisinājums. Tā kā četrstūri $BAGC$ un $BDFE$ ir ievilkti, tad $\sphericalangle GAC = \sphericalangle GBC$ un $\sphericalangle GBC = \sphericalangle FBE = \sphericalangle FDE$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz vienu un to pašu loku attiecīgi GC un FE (skat. 24. att.). Pēc dotā $AC \parallel DE$, tad $\sphericalangle FDE = \sphericalangle FCA$ kā iekšējie šķērsleņķi pie paralēlām taisnēm. Līdz ar to $\sphericalangle GAC = \sphericalangle FCA$, no kā izriet, ka $AG \parallel FC$, jo iekšējie šķērsleņķi ir vienādi.

Arī $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BGC$ un $\sphericalangle BDE = \sphericalangle BFE$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz vienu un to pašu loku, attiecīgi BC un BE. Pēc dotā $AC \parallel DE$, tad $\sphericalangle CAB = \sphericalangle EDB$ kā kāpšļu leņķi pie paralēlām taisnēm. Ievērojot, ka $\sphericalangle AFG = \sphericalangle BFE$ kā krustleņķi, iegūstam $\sphericalangle GAC = \sphericalangle FCA$. Tātad $CG \parallel FA$, jo iekšējie šķērsleņķi ir vienādi.

Tāpēc četrstūris $AFCG$ ir paralelograms, jo tā pretējās malas ir pa pāriem paralēlas. Paralelograma diagonāles krustpunktā dalās uz pusēm, tāpēc $FH = GH$.



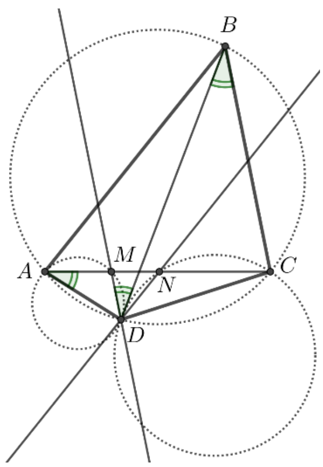
24. attēls

P6. Ap četrstūri $ABCD$ apvilkta riņķa līnija. Taisne, kas ir paralēla BC un iet caur D, krusto nogriezni AC punktā M. Taisne, kas ir paralēla AB un iet caur punktu D, krusto nogriezni AC punktā N. Pierādīt, ka riņķa līnijas, kas apvilktas ap trijstūriem AMD un DNC, pieskaras viena otrai.

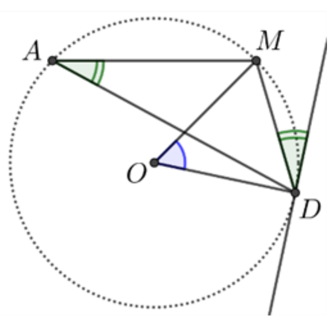
Atrisinājums. Novelkam nogriezni BD (skat. 25. att.). Ievērojam, ka $\sphericalangle DAC = \sphericalangle DBC$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz vienu un to pašu loku. Tā kā $DE||BC$, tad $\sphericalangle DBC = \sphericalangle BDM$ kā iekšējie šķērsleņķi pie paralēlām taisnēm. Līdz ar to $\sphericalangle DAC = \sphericalangle BDM$.

Pamatosim, ka ap ΔAMD apvilktā riņķa līnija pieskaras taisnei BD. Ar O apzīmējam trijstūrim AMD apvilktās riņķa līnijas centru (skat. 26. att.). Ja $\sphericalangle DAC = \sphericalangle BDM = \alpha$, tad $\sphericalangle MOD = 2\alpha$ kā atbilstošais centra leņķis. Tā kā ΔMOD ir vienādsānu, tad $\sphericalangle ODM = \frac{180° - 2\alpha}{2} = 90° - \alpha$. Līdz ar to $\sphericalangle ODB = 90° - \alpha + \alpha = 90°$. Tā kā rādiuss OD ir perpendikulārs taisnei BD, tad BD ir pieskare.

Līdzīgi iegūstam, ka ap trijstūri DNC apvilktā riņķa līnija pieskaras taisnei BD. Tātad esam pierādījuši, ka abas riņķa līnijas pieskaras viena otrai punktā D.



25. attēls



26. attēls

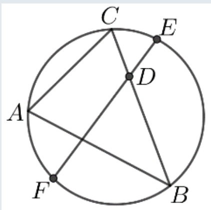
UZDEVUMI PATSTĀVĪGAJAM DARBAM

"Leņķi riņķa līnijā"

U1. Vienādsānu trapeces $ABCD$ sānu malas ir AB un CD, bet diagonāles AC un BD krustojas punktā E. Ap trijstūri CDE apvilktā riņķa līnija krusto garāko pamatu AD iekšējā punktā F. Nogriežņu CF un BD krustpunkts ir G. Noteikt $\sphericalangle CGD$ lielumu, ja $\sphericalangle CAD = \alpha$.

U2. Izliektā četrstūrī $APQC$ uz malas AC izvēlēts punkts B tā, ka trijstūri APB un BQC ir vienādsānu taisnleņķa trijstūri ar pamatiem attiecīgi AB un BC. Ap trijstūri PBQ apvilktā riņķa līnija vēlreiz krusto taisni AC punktā S. Pierādīt, ka $PS = SQ$.

U3. Trijstūrim $ABC, AC < BC$ apvilkta riņķa līnija. Punkts E ir loka ACB viduspunkts. Uz nogriežņa BC atlikts tāds punkts D, ka $BD = AC$. Stars ED krusto riņķa līniju punktā F (skat. 27. att.). Pierādīt, ka $AF||BC$.



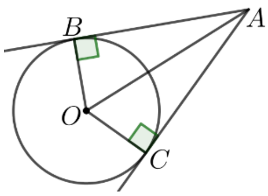
27. attēls

4.2. Ar riņķa līniju saistītie nogriežņi un taisnes

DEFINĪCIJA Par riņķa līnijas **pieskari** sauc taisni, kurai ar riņķa līniju ir tieši viens kopīgs punkts.

Caur jebkuru punktu A, kas atrodas ārpus riņķa līnijas, var novilkt tieši divas pieskares.
Ja punkti B un C ir šo pieskaru pieskaršanās punkti un O – attiecīgās riņķa līnijas centrs (skat. 28. att.), tad

- $AB = AC$ (pieskaru nogriežņi, kas novilkti no viena punkta, ir vienādi);
- $\sphericalangle BAO = \sphericalangle CAO$;
- $OB \perp AB$ un $OC \perp AC$.



28. attēls

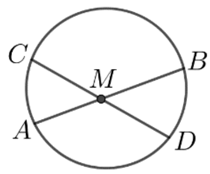
DEFINĪCIJA Par **hordu** sauc nogriezni, kas savieno divus riņķa līnijas punktus.

Īpašības

- Vienādas hordas balstās uz vienādiem lokiem.
- Loki starp vienas riņķa līnijas divām paralēlām hordām ir vienādi.

TEORĒMA **par krustiskām hordām.** Ja divas hordas AB un CD krustojas punktā M, tad vienas hordas nogriežņu reizinājums ir vienāds ar otras hordas nogriežņu reizinājumu (skat. 29. att.):

$$AB \cdot MB = CM \cdot MD.$$



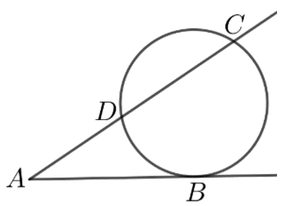
29. attēls

DEFINĪCIJA Par **sekanti** sauc taisni, kas krusto riņķa līniju divos dažādos punktos.

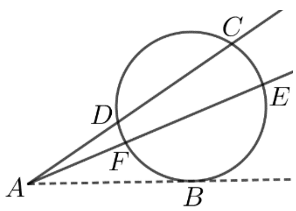
TEORĒMA **par pieskari un sekanti.** Ja pieskare un sekante ir novilktas no viena punkta, tad pieskares nogriežņa garuma kvadrāts ir vienāds ar visa sekantes nogriežņa garuma un sekantes ārējās daļas nogriežņa garuma reizinājumu (skat. 30. att.):

$$AB^2 = AC \cdot AD.$$

Secinājums (sekanšu īpašība). No punkta A var novilkt bezgalīgi daudz sekanšu, un katras sekantes ārējās daļas garuma reizinājums ar visa sekantes nogriežņa garumu ir vienāds ar pieskares nogriežņa garuma kvadrātu, tātad $AC \cdot AD = AE \cdot AF$ (skat. 31. att.).



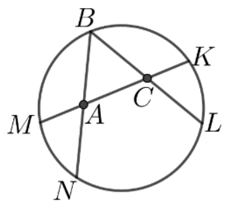
30. attēls



31. attēls

Uzdevumu piemēri

P1. Regulāra trijstūra ABC virsotne B atrodas uz riņķa līnijas, bet virsotnes A un C atrodas riņķa līnijas iekšpusē. Malu BA un BC pagarinājumi krusto riņķa līniju attiecīgi punktos N un L. Taisne, uz kuras atrodas AC, krusto riņķa līniju punktos M un K (skat. 32. att.). Pierādīt, ka $AM + CL = AN + CK$.



32. attēls

Atrisinājums. No hordu īpašības iegūstam, ka $AM \cdot AK = AN \cdot AB$ un $CK \cdot CM = CL \cdot CB$. Apzīmējam regulārā trijstūra malas garumu ar a, tad iegūtās vienādības var pārrakstīt kā

$$AM \cdot (a + CK) = AN \cdot a;$$
$$CK \cdot (a + AM) = CL \cdot a.$$

Atverot iekavas un atņemot no pirmās vienādības otro, iegūstam:

$$AM \cdot a - CK \cdot a = AN \cdot a - CL \cdot a;$$
$$(AM + CL) \cdot a = (AN + CK) \cdot a.$$

Dalot abas vienādības puses ar a (kas ir pozitīvs skaitlis), iegūstam vajadzīgo vienādību.

P2. Riņķa līnijā ar centru punktā O novilkta horda AB, kas neiet caur O. Caur punktu B novilkts perpendikuls pret AB, kas riņķa līniju vēlreiz krusto punktā D. Uz loka AB, pie kura nepieder D, atzīmēts šī loka viduspunkts C. Taisnes AC un DB krustojas punktā E. Pierādīt, ka

$$OE^2 = OB^2 + 2 \cdot OB \cdot BE.$$

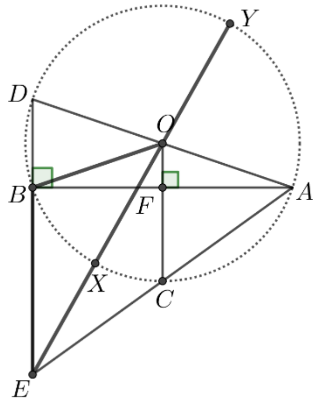
Atrisinājums. Apzīmējam $OB = OC = R$ (skat. 33. att.). Tā kā C ir loka AB viduspunkts, tad OC ir nogriežņa AB vidusperpendikuls, kas krusto AB punktā F. Tātad $OC||DE$. No $AO = OD$ un $OC||DE$ izriet, ka OC ir trijstūra ADE viduslīnija. Tātad $ED = 2OC = 2R$. Taisnes OE krustpunktus ar riņķa līniju apzīmējam ar X un Y. Apskatām starpību

$$OE^2 - OB^2 = (OE - R)(OE + R) = EX \cdot EY.$$

Tā kā pēc sekanšu īpašības $EX \cdot EY = EB \cdot ED$, tad

$$OE^2 - OB^2 = EB \cdot ED = EB \cdot 2R = 2 \cdot EB \cdot OB.$$

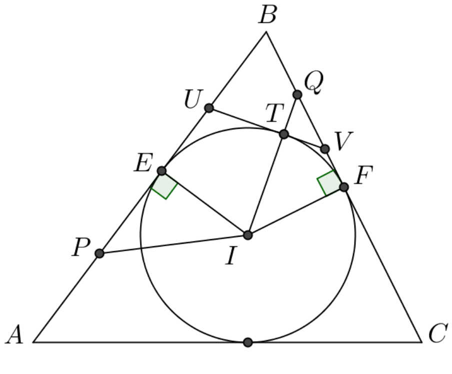
Līdz ar to esam ieguvuši, ka $OE^2 = OB^2 + 2 \cdot OB \cdot BE$.



33. attēls

P3. Trijstūrī ABC ievilktās riņķa līnijas ω centrs ir I. Uz malām AB un BC izvēlēti attiecīgi punkti P un Q tā, ka $PI = QI$ un $PB > QB$. Nogrieznis QI krusto ω punktā T. Taisne, kas pieskaras ω punktā T, krusto malas AB un BC attiecīgi punktos U un V. Pierādīt, ka $PU = UV + VQ$.

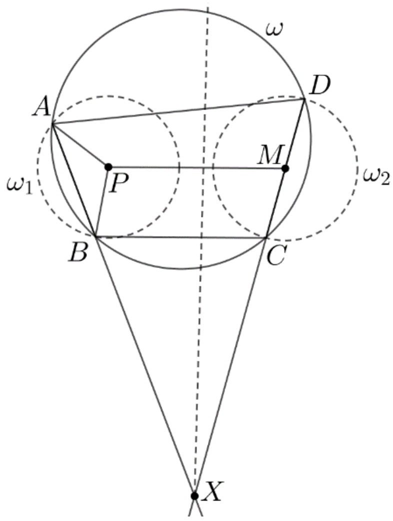
Atrisinājums. Apzīmējam ω pieskaršanās punktus malām AB un BC attiecīgi ar E un F (skat. 34. att.). Tā kā $PI = QI$ un $EI = IF$, tad $\Delta PEI = \Delta QFI$ pēc pazīmes kh. Tātad $PE = QF$ kā vienādu trijstūru atbilstošās malas.
Tā kā no viena punkta vilktu pieskaru nogriežņi ir vienāda garuma, tad $UE = UT$.
Saskaitot abas vienādības, iegūstam, ka $PE + UE = UT + QF$.
Savukārt $QF = QV + VF$, tāpēc $PE + UE = UT + QV + VF$. Tā kā $VF = VT$ (kā pieskaru nogriežņi), tad $PE + UE = UT + QV + VT$.
No tā, ka $PU = PE + UE$ un $UV = UT + VT$, izriet, ka $PU = UV + VQ$.



34. attēls

P4. Ap četrstūri $ABCD$, kura malas AB un CD nav paralēlas, apvilkta riņķa līnija. Malas CD viduspunkts ir M. Četrstūra $ABCD$ iekšienē atlikts punkts P tā, ka $PA = PB = CM$. Pierādīt, ka taisnes AB, CD un nogriežņa MP vidusperpendikuls krustojas vienā punktā.

Atrisinājums. Ar ω apzīmējam ap četrstūri $ABCD$ apvilkto riņķa līniju, ar X – taišņu AB un CD krustpunktu (skat. 35. att.). Tad jāpierāda, ka punkts X atrodas uz PM vidusperpendikula.



35. attēls

Novelkam riņķa līnijas ω_1 un ω_2 ar centriem attiecīgi punktos P un M un vienādiem rādiusiem $PB = CM = r$. Tādā gadījumā no sekanšu īpašības riņķa līnijām ω_1 un ω_2 izriet, ka $XA \cdot XB = (XP - r)(XP + r) = XP^2 - r^2$ un līdzīgi $XC \cdot XD = XM^2 - r^2$. Taču $XA \cdot XB = XC \cdot XD$ pēc sekanšu īpašības riņķa līnijai ω. Secinām, ka $XP = XM$. Tā kā punkts X atrodas vienādā attālumā no nogriežņa PM galapunktiem, tad tas atrodas uz šī nogriežņa vidusperpendikula, kas arī bija jāpierāda.

UZDEVUMI PATSTĀVĪGAJAM DARBAM

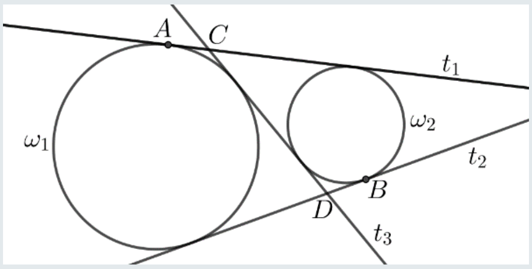
“Ar riņķa līniju saistītie nogriežņi un taisnes”

U1. Pierādīt hordu īpašību. Ja divas hordas AB un CD krustojas punktā M, tad vienas hordas nogriežņu reizinājums ir vienāds ar otras hordas nogriežņu reizinājumu:

$$AB \cdot MB = CM \cdot MD.$$

U2. Pierādīt teorēmu par pieskari un sekanti. Ja pieskare un sekante ir novilktas no viena punkta, tad pieskares nogriežņa garuma kvadrāts ir vienāds ar visa sekantes nogriežņa garuma un sekantes ārējās daļas nogriežņa garuma reizinājumu: $AB^2 = AD \cdot AC$.

U3. Plaknē dotas divas riņķa līnijas ω_1 un ω_2, kurām nav kopīgu punktu un kuru rādiusi nav vienāda garuma. Novilktas trīs pieskares t_1, t_2 un t_3, kas katra pieskaras abām riņķa līnijām – abas riņķa līnijas atrodas vienā un tajā pašā t_1 pusē, vienā un tajā pašā t_2 pusē, bet katra savā t_3 pusē (skat. 36. att.). Taisne t_1 pieskaras ω_1 punktā A un krusto t_3 punktā C, taisne t_2 pieskaras ω_2 punktā B un krusto t_3 punktā D. Pierādīt, ka $AC = BD$.



36. attēls

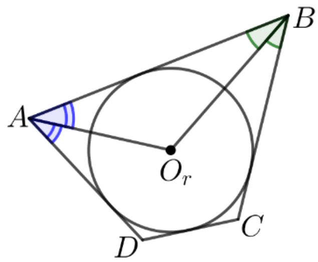
Vairāk par leņķiem un nogriežņiem riņķa līnijā skat., piemēram, [5, 7, 17].

5. Četrstūri un riņķa līnija

5.1. Apvilkti četrstūri

DEFINĪCIJA Par riņķa līnijai **apvilktu četrstūri** sauc četrstūri, kura visas malas pieskaras riņķa līnijai.

Attiecīgi riņķa līniju sauc par četrstūrī ievilktu riņķa līniju. Ievilktās riņķa līnijas centrs atrodas četrstūra leņķu bisektrišu krustpunktā (skat. 37. att.).



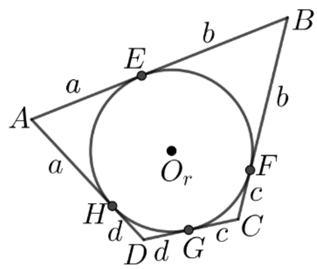
37. attēls

TEORĒMA Izliektu četrstūri $ABCD$ var apvilkt ap riņķa līniju tad un tikai tad, ja tā pretējo malu garumu summas ir vienādas: $AB + CD = BC + AD$.

Pierādījums. Lai teorēma būtu pierādīta, jāpierāda divi apgalvojumi:

1) ja izliektu četrstūri var apvilkt ap riņķa līniju, tad tā pretējo malu garumu summas ir vienādas;
2) ja izliekta četrstūra pretējo malu garumu summas ir vienādas, tad to var apvilkt ap riņķa līniju.

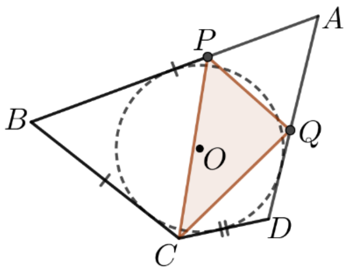
1. apgalvojuma pierādījums. Tā kā četrstūris ir apvilkts riņķa līnijai, tad tā malas ir riņķa līnijas pieskares, tāpēc $AE = AH = a$, $BE = BF = b$, $CF = CG = c$, $DG = DH = d$ kā pieskaru nogriežņi (skat. 38. att.). Līdz ar to esam ieguvuši, ka $AB + CD = a + b + c + d = BC + AD$.



38. attēls

2. apgalvojuma pierādījums. [1] Ja divas blakus malas ir vienādas, tad arī divas atlikušās ir vienādas un simetrijas dēļ visas četrstūra leņķu bisektrises krustojas vienā punktā, kas arī ir ievilktās riņķa līnijas centrs.

Ja blakus malas nav vienādas, tad, nezaudējot vispārīgumu, varam pieņemt, ka $AB > BC$, un tad no dotās vienādības iegūstam, ka $AB - BC = AD - CD$. Uz malām AB un AD atliekam attiecīgi tādus punktus P un Q, ka $BP = BC$ un $DQ = DC$ (skat. 39. att.). Tā kā $AB - BC = AD - CD$, tad $AB - BP = AD - DQ$ jeb $AP = AQ$. Esam ieguvuši, ka trijstūri APQ, BCP un DCQ ir vienādsānu trijstūri, tāpēc no virsotnēm A, B, P vilktās bisektrises ir arī mediānas un augstumi. Tātad šīs līnijas ir trijstūra PQC malu vidusperpendikuli un tās krustojas vienā punktā O, kas ir trijstūrim PQC apvilktās riņķa līnijas centrs. Četrstūra $ABCD$ iekšējo leņķu A, B un D bisektrises krustojas četrstūra iekšpusē punktā O, un šis punkts O atrodas vienādos attālumos no četrstūra malām, tātad tas ir četrstūrī ievilktās riņķa līnijas centrs, kas arī bija jāpierāda.



39. attēls

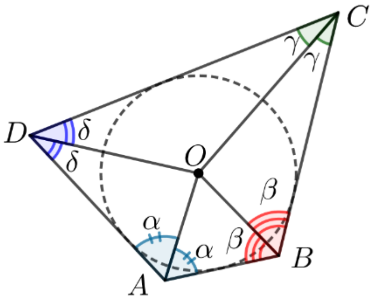
Teorēmas 2. apgalvojumu var pierādīt arī no pretējā, skat., piemēram, [25].

Uzdevumu piemēri

P1. Četrstūrī $ABCD$ ievilkta riņķa līnija ar centru O. Pierādīt, ka

$$\sphericalangle AOB + \sphericalangle COD = \sphericalangle BOC + \sphericalangle AOD = 180°.$$

Atrisinājums. Tā kā O ir bisektrišu krustpunkts, tad apzīmējam $\sphericalangle OAD = \sphericalangle OAB = \alpha$, $\sphericalangle OBA = \sphericalangle OBC = \beta$, $\sphericalangle OCB = \sphericalangle OCD = \gamma$ un $\sphericalangle ODC = \sphericalangle ODA = \delta$ (skat. 40. att.).



40. attēls

Ievērojam, ka $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°: 2 = 180°$.
Izmantojot trijstūra iekšējo leņķu summu, aprēķinām leņķus:
- $\sphericalangle AOB = 180° - \alpha - \beta$;
- $\sphericalangle BOC = 180° - \beta - \gamma$;
- $\sphericalangle COD = 180° - \gamma - \delta$;
- $\sphericalangle AOD = 180° - \alpha - \delta$.

Līdz ar to iegūstam, ka

$$\sphericalangle AOB + \sphericalangle COD = 180° - \alpha - \beta + 180° - \gamma - \delta = 360° - 180° = 180°;$$
$$\sphericalangle BOC + \sphericalangle AOD = 180° - \beta - \gamma + 180° - \alpha - \delta = 360° - 180° = 180°.$$

P2. Apvilkta četrstūra $ABCD$ diagonāles ir savstarpēji perpendikulāras. Pierādīt, ka

$$AB \cdot CD = AD \cdot BC.$$

Atrisinājums. Četrstūra $ABCD$ diagonāļu krustpunktu apzīmējam ar S (skat. 41. att.). No Pitagora teorēmas izriet, ka

$$AB^2 = SA^2 + SB^2;$$
$$CD^2 = SC^2 + SD^2;$$
$$AD^2 = SA^2 + SD^2;$$
$$BC^2 = SB^2 + SC^2.$$

Saskaitot pirmās divas vienādības un pēdējās divas vienādības, iegūstam

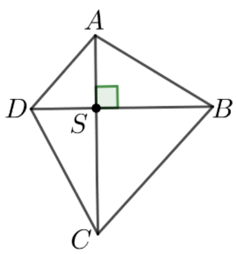
$$AB^2 + CD^2 = SA^2 + SB^2 + SC^2 + SD^2;$$

$$AD^2 + BC^2 = SA^2 + SD^2 + SB^2 + SC^2.$$

Tātad $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$.
Tā kā $ABCD$ ir apvilkts četrstūris, tad $AB + CD = AD + BC$. Kāpinām vienādības abas puses kvadrātā:

$$AB^2 + 2AB \cdot CD + CD^2 = AD^2 + 2AD \cdot BC + BC^2.$$

Ņemot vērā vienādību $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$, iegūstam, ka $2AB \cdot CD = 2AD \cdot BC$ jeb $AB \cdot CD = AD \cdot BC$.



41. attēls

UZDEVUMI PATSTĀVĪGAJAM DARBAM

"Apvilkti četrstūri"

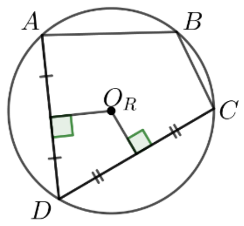
U1. Vienādsānu trapecē $ABCD$, kuras pamati $AD = a$ un $BC = b$, ievilkta riņķa līnija. Pierādīt, ka trapeces augstums $h = \sqrt{ab}$.

U2. Četrstūris $ABCD$ ir gan ievilkts, gan apvilkts. Punkti M un N ir attiecīgi malu AB un BC pieskaršanās punkti ievilktajai riņķa līnijai. Pierādīt, ka $AM \cdot CN = r^2$, kur r ir ievilktās riņķa līnijas rādiuss.

5.2. Ievilkti četrstūri

DEFINĪCIJA Par riņķa līnijā **ievilktu četrstūri** sauc četrstūri, kura visas virsotnes atrodas uz riņķa līnijas.

Attiecīgi riņķa līniju sauc par četrstūrim apvilktu riņķa līniju. Apvilktās riņķa līnijas centrs atrodas četrstūra malu vidusperpendikulu krustpunktā (skat. 42. att.).



42. attēls

Visbiežāk tiek lietota šāda teorēma par ievilktu četrstūri.

TEORĒMA Ap četrstūri var apvilkt riņķa līniju tad un tikai tad, ja četrstūra pretējo leņķu lielumu summa ir 180°.

Pierādījums. Lai teorēma būtu pierādīta, ir jāpierāda divi apgalvojumi:

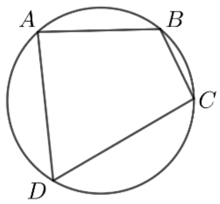
1) ja ap četrstūri var apvilkt riņķa līniju, tad četrstūra pretējo leņķu lielumu summa ir 180°;
2) ja četrstūra pretējo leņķu lielumu summa ir 180°, tad ap četrstūri var apvilkt riņķa līniju.

1. apgalvojuma pierādījums. Tā kā leņķi BAD un BCD ir ievilktie leņķi (skat. 43. att.), tad

$$\sphericalangle BAD + \sphericalangle BCD = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BCD} + \frac{1}{2}\overset{\frown}{BAD} = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{BCD} + \overset{\frown}{BAD}\right) = \frac{1}{2} \cdot 360° = 180°.$$

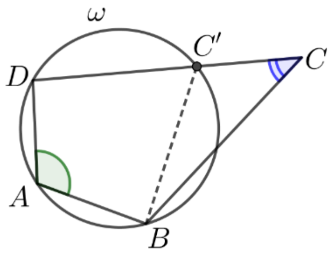
Tā kā četrstūra iekšējo leņķu summa ir $360°$, tad

$$\sphericalangle ABC + \sphericalangle CDA = 360° - (\sphericalangle BAD + \sphericalangle BCD) = 306° - 180° = 180°.$$



43. attēls

2. apgalvojuma pierādījums. Dots, ka $\sphericalangle BAD + \sphericalangle BCD = 180°$ (skat. 44. att.). Novelkam riņķa līniju ω, kas iet caur punktiem A, B, D. Pieņemsim, ka punkts C neatrodas uz ω, un CD krustpunktu ar ω apzīmēsim ar C'. Tā kā četrstūris $ABC'D$ ir ievilkts četrstūris, tad $\sphericalangle BAD + \sphericalangle BC'D = 180°$. Līdz ar to esam ieguvuši, ka $\sphericalangle BCD = \sphericalangle BC'D$, tātad $BC' || BC$, jo kāpšļu leņķi ir vienādi. Iegūta pretruna jo BC' un BC krustojas punktā B. Tātad pieņēmums ir aplams un punkts C atrodas uz ω jeb ap četrstūri $ABCD$ var apvilkt riņķa līniju.

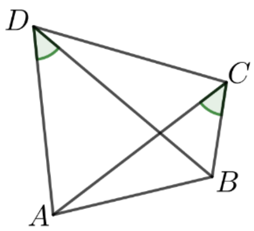


44. attēls

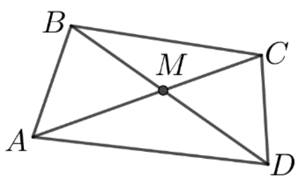
Izmanto arī citas teorēmas, lai pamatotu, ka ap četrstūri var apvilkt riņķa līniju.

TEORĒMA Ap četrstūri $ABCD$ var apvilkt riņķa līniju tad un tikai tad, ja $\sphericalangle ACB = \sphericalangle BDA$ (skat. 45. att.).

TEORĒMA Ap četrstūri var apvilkt riņķa līniju tad un tikai tad, ja ir spēkā vienādība $AM \cdot MC = BM \cdot MD$, kur M ir nogriežņu AC un BD krustpunkts (skat. 46. att.).



45. attēls



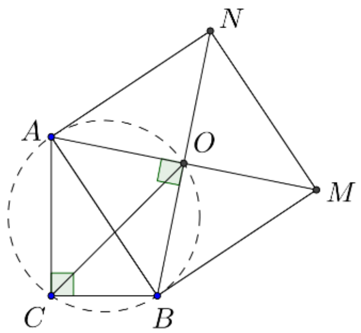
46. attēls

TEORĒMA **Ptolemaja teorēma.** Ap četrstūri var apvilkt riņķa līniju tad un tikai tad, ja ir spēkā vienādība $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$ (skat. 46. att.).

Uzdevumu piemēri

P1. Taisnleņķa trijstūra ABC hipotenūza AB ir kvadrāta $ABMN$ mala, kvadrāts atrodas ārpus trijstūra. Kvadrāta diagonāles krustojas punktā O. Pierādīt, ka CO ir leņķa ACB bisektrise.

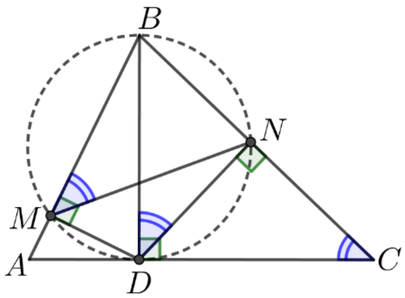
Atrisinājums. Ap četrstūri $AOBC$ var apvilkt riņķa līniju, jo $\sphericalangle ACB + \sphericalangle AOB = 180°$ (skat. 47. att.). Tā kā pēc kvadrāta diagonāļu īpašības $AO = OB$, tad $\sphericalangle ACO = \sphericalangle OCB$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz vienāda garuma hordām. Tātad CO ir leņķa ACB bisektrise.



47. attēls

P2. Šaurleņķu trijstūrī ABC novilkts augstums BD. No punkta D novilkti perpendikuli pret malām AB un CB; to pamati ir attiecīgi M un N. Pierādīt, ka punkti A, M, N, C atrodas uz vienas riņķa līnijas.

Atrisinājums. Tā kā $\sphericalangle BMD + \sphericalangle BND = 90° + 90° = 180°$, tad ap četrstūri $BNDM$ var apvilkt riņķa līniju (skat. 48. att.). Tāpēc $\sphericalangle BMN = \sphericalangle BDN$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz vienu un to pašu loku BN. Bet $\sphericalangle NCD = 90° - \sphericalangle NDC = \sphericalangle BDN$, tātad $\sphericalangle NCD = \sphericalangle BMN$. Tāpēc $\sphericalangle AMN + \sphericalangle ACN = \sphericalangle AMN + \sphericalangle BMN = 180°$ jeb punkti A, M, N, C atrodas uz vienas riņķa līnijas.



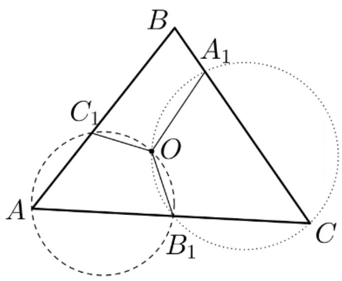
48. attēls

P3. Trijstūrī ABC punkts A_1 ir malas BC iekšējais punkts, B_1 ir malas AC iekšējais punkts, C_1 ir malas AB iekšējais punkts. Ap trijstūriem $AB_1C_1, CB_1A_1, BA_1C_1$ apvilktas riņķa līnijas. Pierādīt, ka tās visas krustojas vienā punktā.

Atrisinājums. To riņķa līniju krustpunktu, kuras apvilktas ap trijstūriem AC_1B_1 un CA_1B_1, apzīmējam ar O (skat. 49. att.). No teorēmas par ievilktā četrstūra leņķiem iegūstam:

$$\sphericalangle C_1OA_1 = 360° - \sphericalangle B_1OA_1 - \sphericalangle C_1OB_1 =$$
$$= 360° - (180° - \sphericalangle A_1CB_1) - (180° - \sphericalangle B_1AC_1) =$$
$$= \sphericalangle A_1CB_1 + \sphericalangle B_1AC_1 = 180° - \sphericalangle C_1BA_1.$$

Tātad ap četrstūri C_1BA_1O var apvilkt riņķa līniju. Tas nozīmē, ka visas trīs dotās riņķa līnijas krustojas vienā punktā O.

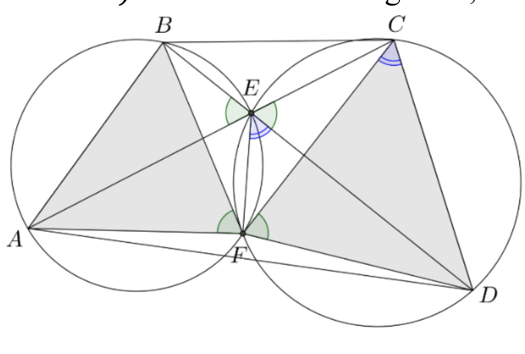


49. attēls

P4. Izliekta četrstūra $ABCD$ diagonāles krustojas punktā E. Ap trijstūriem ABE un CDE apvilktās riņķa līnijas arī krustojas punktā F. Pierādīt, ka trijstūri ABF un CDF ir līdzīgi.

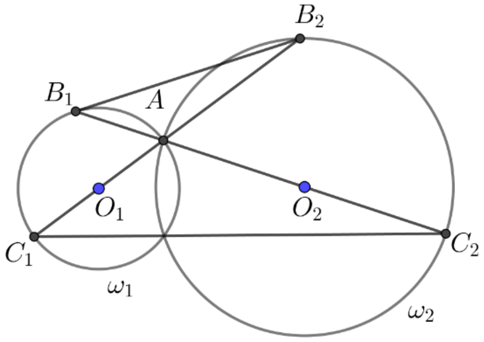
Atrisinājums. Ievērojam, ka $\sphericalangle DEC = \sphericalangle AEB$ kā krustleņķi (skat. 50. att.) un $\sphericalangle CFD = \sphericalangle DEC$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz vienu loku CD, un $\sphericalangle AFB = \sphericalangle AEB$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz loku AB. Tātad $\sphericalangle CFD = \sphericalangle AFB$.

Ievilktie leņķi $\sphericalangle DCF$ un $\sphericalangle DEF$ ir vienādi, jo balstās uz vienu loku FD. No blakusleņķu īpašības izriet, ka $\sphericalangle BEF = 180° - \sphericalangle DEF$. Tā kā ap četrstūri $ABEF$ ir apvilkta riņķa līnija, tad tā pretējo leņķu summa ir 180°, tāpēc $\sphericalangle BAF = 180° - \sphericalangle BEF =$ $= 180° - (180° - \sphericalangle DEF) = \sphericalangle DEF$. Esam ieguvuši, ka $\Delta CDF \sim \Delta ABF$ pēc pazīmes $\ell\ell$.



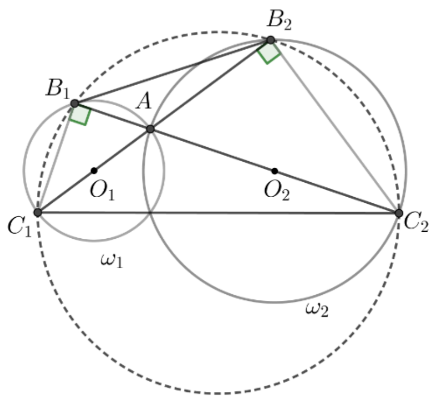
50. attēls

P5. Divas riņķa līnijas ω_1 (ar centru punktā O_1) un ω_2 (ar centru punktā O_2) krustojas punktā A. Taisne O_1A krusto ω_2 punktā B_2, bet ω_1 – punktā C_1. Taisne O_2A krusto ω_1 punktā B_1, bet ω_2 – punktā C_2 (skat. 51. att.). Pierādīt, ka $\sphericalangle B_2B_1A = \sphericalangle C_2C_1A$.



51. attēls

1. atrisinājums. Tā kā $\sphericalangle C_1B_1A = \sphericalangle C_2B_2A = 90°$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz diametru, tad ap četrstūri $B_1B_2C_2C_1$ var apvilkt riņķa līniju (skat. 52. att.). Līdz ar to $\sphericalangle B_2B_1C_2 = \sphericalangle C_2C_1B_2$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz vienu un to pašu loku B_2C_2. Tātad $\sphericalangle B_2B_1A = \sphericalangle C_2C_1A$.



52. attēls

2. atrisinājums. Tā kā $\sphericalangle C_1B_1A = \sphericalangle C_2B_2A = 90°$ (kā ievilktie leņķi, kas balstās uz diametru) un $\sphericalangle B_1AC_1 = \sphericalangle B_2AC_2$ (kā krustleņķi), tad $\Delta AB_1C_1 \sim \Delta AB_2C_2$ pēc pazīmes $\ell\ell$ un $\frac{AB_1}{AB_2} = \frac{AC_1}{AC_2}$. Tā kā $\frac{AB_1}{AB_2} = \frac{AC_1}{AC_2}$ un $\sphericalangle B_1AB_2 = \sphericalangle C_1AC_2$ kā krustleņķi, tad $\Delta B_1AB_2 \sim \Delta C_1AC_2$ pēc pazīmes $m\ell m$. Tātad $\sphericalangle B_2B_1A = \sphericalangle C_2C_1A$ kā atbilstošie leņķi līdzīgos trijstūros.

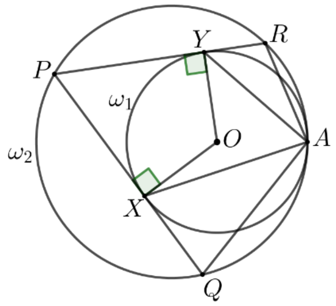
P6. Riņķa līnija ω_1 iekšēji pieskaras riņķa līnijai ω_2 punktā A. No punkta P, kas atrodas uz ω_2, novilktas hordas PQ un PR, kas pieskaras ω_1 attiecīgi punktos X un Y. Pierādīt, ka

$$\sphericalangle QAR = 2\sphericalangle XAY.$$

Atrisinājums. Ar O apzīmējam riņķa līnijas ω_1 centru (skat. 53. att.). Apzīmējam $\sphericalangle XOY = 2\alpha$. Tā kā $\sphericalangle OYP = \sphericalangle OXP = 90°$, tad $\sphericalangle XPY = 360° - 180° - \sphericalangle XOY = 180° - 2\alpha$. Ievērojam, ka $\sphericalangle XAY = \frac{1}{2}\sphericalangle XOY = \frac{1}{2} \cdot 2\alpha = \alpha$ kā ievilktais un centra leņķis, kas balstās uz vienu un to pašu loku XY. Tā kā četrstūris $AQPR$ ir ievilkts četrstūris, tad

$$\sphericalangle QAR = 180° - \sphericalangle QPR = 180° - (180° - 2\alpha) = 2\alpha.$$

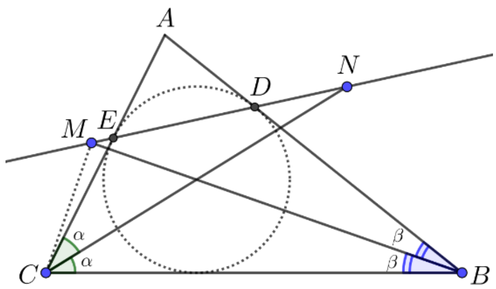
Līdz ar to esam pierādījuši, ka $\sphericalangle QAR = 2\sphericalangle XAY$.



53. attēls

P7. Trijstūrī ABC ievilktā riņķa līnija pieskaras malai AB punktā D, bet malai AC punktā E. Leņķu B un C bisektrises krusto taisni DE attiecīgi punktos M un N. Pierādīt, ka punkti B, C, M un N atrodas uz vienas riņķa līnijas.

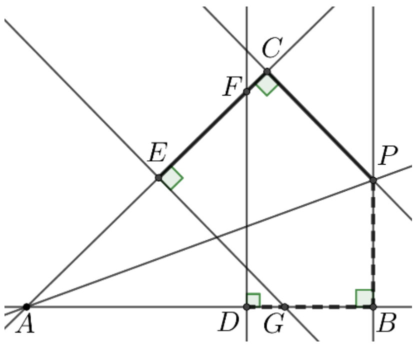
Atrisinājums. Tā kā CN un BM ir bisektrises, tad $\sphericalangle ACN = \sphericalangle NCB = \alpha$ un $\sphericalangle ABM = \sphericalangle MBC = \beta$ (skat. 54. att.). No ΔABC iegūstam, ka $\sphericalangle BAC = 180° - \sphericalangle ABC - \sphericalangle BCA = 180° - 2\alpha - 2\beta$. Tā kā $AE = AD$ kā pieskaru nogriežņi, kas vilkti no punkta A, tad trijstūris EAD ir vienādsānu un $\sphericalangle ADE = \sphericalangle AED = \alpha + \beta$. Tā kā $\sphericalangle AEN$ ir trijstūra NEC ārējais leņķis, tad $\sphericalangle AEN = \sphericalangle ECN + \sphericalangle ENC$, no kurienes $\sphericalangle ENC = \sphericalangle AEN - \sphericalangle ECN = \alpha + \beta - \alpha = \beta$. Tā kā $\sphericalangle MNC = \sphericalangle MBC = \beta$, tad ap četrstūri $CMNB$ var apvilkt riņķa līniju, tas ir, punkti B, C, M un N atrodas uz vienas riņķa līnijas.



54. attēls

P8. Šaurā leņķa $\sphericalangle BAC$ iekšpusē atzīmēts tāds punkts P, ka $\sphericalangle ABP = \sphericalangle ACP = 90°$. Uz nogriežņiem BA un CA atlikti attiecīgi punkti D un E tā, ka $BD = BP$ un $CP = CE$. Punkti F un G atrodas attiecīgi uz nogriežņiem AC un AB tā, ka $DF \perp AB$ un $EG \perp AC$. Pierādīt, ka $PF = PG$.

Atrisinājums. Tā kā PBD ir vienādsānu taisnleņķa trijstūris, tad $\sphericalangle GDP = \sphericalangle BDP = 45°$ (skat. 55. att.). Līdzīgi arī $\sphericalangle PEC = 45°$; tā kā leņķis $\sphericalangle CEG$ ir taisns, tad $\sphericalangle PEG = 90° - \sphericalangle PEC = 45°$. Tātad ap četrstūri $PGDE$ var apvilkt riņķa līniju, jo $\sphericalangle PEG = \sphericalangle PDG$. Tā kā leņķi $\sphericalangle GDF$ un $\sphericalangle GEF$ ir taisni, tad arī ap četrstūri $EFGD$ var apvilkt riņķa līniju. Secinām, ka visi pieci punkti D, G, P, F, E atrodas uz vienas riņķa līnijas.
Tad $\sphericalangle GFP = \sphericalangle GEP = 45°$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz vienu un to pašu loku; līdzīgi $\sphericalangle FGP = \sphericalangle FEP = 45°$. Tas nozīmē, ka trijstūris FGP ir vienādsānu taisnleņķa trijstūris, tāpēc $FP = PG$, kas arī bija jāpierāda.



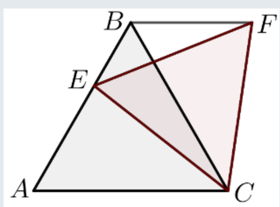
55. attēls

UZDEVUMI PATSTĀVĪGAJAM DARBAM

"Ievilkti četrstūri"

U1. Šaurleņķu trijstūrī ABC novilktie augstumi BD un AE krustojas punktā F. Pierādīt, ka punkti E, C, D, F atrodas uz vienas riņķa līnijas.

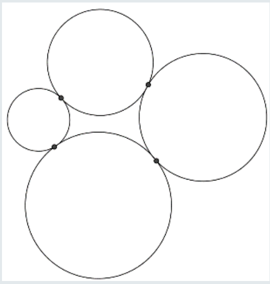
U2. Trijstūri ABC un CEF ir vienādmalu trijstūri (skat. 56. att.). Pierādīt, ka $BF || AC$.



56. attēls

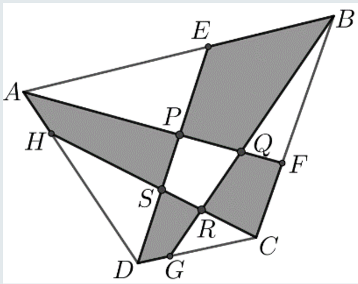
U3. Uz kvadrāta $ABCD$ malas AB kā pamata uz kvadrāta ārpusi konstruēts trijstūris AEB. Taisne, kas vilkta no E caur kvadrāta diagonāļu krustpunktu O, krusto kvadrāta malu AB punktā F un malu DC – punktā G. Zināms, ka $\sphericalangle OEB = \sphericalangle OCG$. Pierādīt, ka trijstūris AEB ir taisnleņķa.

U4. Četras riņķa līnijas ārēji pieskaras tā, kā parādīts 57. att. Pierādīt, ka četrstūrim, ko veido riņķa līniju pieskaršanās punkti, var apvilkt riņķa līniju.



57. attēls

U5. Izliektā četrstūrī $ABCD$ virsotnes savienotas ar patvaļīgiem malu iekšējiem punktiem (skat. 58. att.). Vai iespējams ap katru iekrāsoto četrstūri apvilkt riņķa līniju?



58. attēls

Vairāk par četrstūriem un riņķa līniju skat., piemēram, [5].

6. Ģeometriskie pārveidojumi

Jau skolas kursā 11. klasē [9, 28] ir apskatīti tādi ģeometriskie pārveidojumi kā paralēlā pārnese, aksiālā simetrija, centrālā simetrija, pagrieziens un homotētija. Šajā nodaļā apskatīti galvenie fakti, kas saistīti ar ģeometriskajiem pārveidojumiem, kā arī parādīts, kā tos lietot ģeometrijas uzdevumu risināšanā.

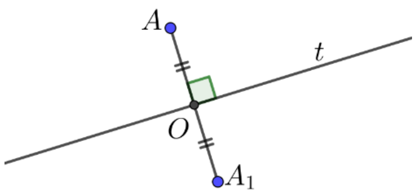
Ģeometriskie pārveidojumi ir funkcijas, kas pēc noteikta likuma katram plaknes punktam piekārto tieši vienu noteiktu plaknes punktu.

6.1. Aksiālā un centrālā simetrija

DEFINĪCIJA Ģeometrisko pārveidojumu, kas katru punktu A attēlo par punktu A_1 tā, ka taisne t ir nogriežņa AA_1 vidusperpendikuls, sauc par aksiālo simetriju pret taisni t.

Taisni t sauc par aksiālās simetrijas asi. Lai aksiālā simetrija būtu uzdota, jābūt uzdotai simetrijas asij t.

Aksiālajā simetrijā pret asi t punkts, kas atrodas uz taisnes t, attēlojas sevī. Punkta A aksiāli simetriskais punkts pret taisni t ir A_1, jo $AA_1 \perp t$ un $AO = OA_1$ (skat. 59. att.).



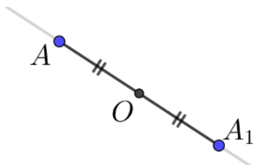
59. attēls

Aksiālās simetrijas īpašības

- Saglabājas attālumi starp punktiem.
- Aksiālajā simetrijā jebkuras figūras attēls ir vienāds ar doto figūru.
- Aksiālajā simetrijā nekustīgie punkti var būt tikai tie punkti, kas atrodas uz simetrijas ass.
- Ja aksiālajā simetrijā figūra F attēlojas par figūru F_1 un figūras F punkts P – par figūras F_1 punktu P_1, tad punktu P un P_1 ģeometriskā jēga figūrās F un F_1 ir vienāda. (Piemēram, trijstūra mediānu krustpunkts attēlojas par mediānu krustpunktu.)

DEFINĪCIJA Ģeometrisko pārveidojumu, kas katru punktu A attēlo par punktu A_1 tā, ka punkts O ir nogriežņa AA_1 viduspunkts, sauc par centrālo simetriju pret punktu O.

Punktu O sauc par simetrijas centru.
Punkta A centrāli simetriskais punkts pret punktu O ir A_1, jo $AO = OA_1$ un punkti A, O, A_1 atrodas uz vienas taisnes (skat. 60. att.).



60. attēls

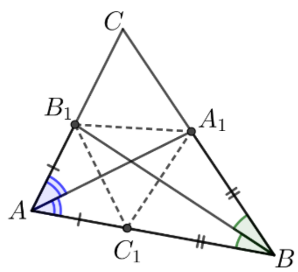
Centrālās simetrijas īpašības

- Centrālajā simetrijā jebkuras figūras attēls ir vienāds ar doto figūru.
- Ja centrālajā simetrijā figūra F attēlojas par F_1, tad figūra F_1 attēlojas par figūru F.
- Divas pēc kārtas veiktas simetrijas pret punktu ir paralēlā pārnese.
- Paralēlās pārneses un centrālās simetrijas kompozīcija ir centrālā simetrija.

Uzdevumu piemēri

P1. Trijstūrī ABC novilktas bisektrises AA_1 un BB_1. Punkta B_1 simetriskais punkts attiecībā pret AA_1 ir punkts C_1, un punkta A_1 simetriskais punkts attiecībā pret BB_1 arī ir punkts C_1. Pierādīt, ka trijstūris $A_1B_1C_1$ ir regulārs.

Atrisinājums. Punkts C_1 atrodas uz AB, jo bisektrise sadala leņķi divās vienādās daļās (skat. 61. att.).



61. attēls

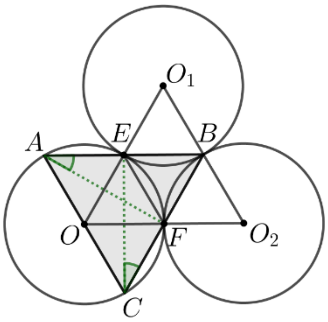
Ievērojam, ka

- $\Delta BB_1A_1 = \Delta BB_1C_1$ pēc pazīmes $m\ell m$, jo BB_1 – kopīga mala, $\sphericalangle A_1BB_1 = \sphericalangle C_1BB_1$ (pēc bisektrises definīcijas), $A_1B = C_1B$ (simetrijas dēļ);
- $\Delta AA_1C_1 = \Delta AA_1B_1$ pēc pazīmes $m\ell m$, jo AA_1 – kopīga mala, $\sphericalangle A_1AB_1 = \sphericalangle C_1AB_1$ (pēc bisektrises definīcijas), $B_1A = C_1A$ (simetrijas dēļ).

Tātad attiecīgi $A_1B_1 = B_1C_1$ un $A_1B_1 = A_1C_1$ kā atbilstošās malas vienādos trijstūros. Līdz ar to esam ieguvuši, ka $A_1B_1 = B_1C_1 = A_1C_1$, tātad trijstūris $A_1B_1C_1$ ir regulārs.

P2. Trijstūrī ABC novilktas mediānas AF un CE. Zināms, ka $\sphericalangle BAF = \sphericalangle BCE = 30°$. Pierādīt, ka trijstūris ABC ir regulārs.

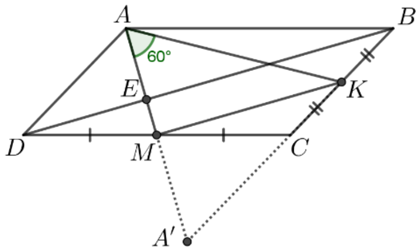
Atrisinājums. Tā kā $\sphericalangle BAF = \sphericalangle BCE$, tad ap četrstūri $AEFC$ var apvilkt riņķa līniju, tās centru apzīmējam ar O, tad $\sphericalangle EOF = 60°$ kā atbilstošais centra leņķis (skat. 62. att.). Šo riņķa līniju apzīmēsim ar ω. Tā kā A un B ir simetriski attiecībā pret E, tad punkts B atrodas uz riņķa līnijai ω simetriskās riņķa līnijas ω_1 attiecībā pret E. Spriežot analoģiski, punkts B atrodas uz riņķa līnijas ω_2, kas ir simetriska riņķa līnijai ω attiecībā pret punktu F. Tā kā trijstūris EOF ir regulārs, tad riņķa līniju ω, ω_1, ω_2 centri veido regulāru trijstūri OO_1O_2, kura malas garums ir $2R$, kur R ir šo riņķa līniju rādiusi. Tāpēc riņķa līnijām ω_1 un ω_2 ir tikai viens kopīgs punkts B un $\sphericalangle EBF = 60°$, tas nozīmē, ka ΔEBF ir regulārs. Tātad $\sphericalangle AFB = \sphericalangle CEB = 90°$, jo pēc dotā $\sphericalangle BAF = \sphericalangle BCE = 30°$. Esam pierādījuši, ka AF ir mediāna un augstums, tātad tā ir arī bisektrise un $\sphericalangle CAB = 60°$, līdz ar to trijstūris ABC ir regulārs.



62. attēls

P3. Paralelograma $ABCD$ malu BC un CD viduspunkti attiecīgi ir K un M. Aprēķināt AD garumu, ja $AK = 6$, $AM = 3$ un $\sphericalangle KAM = 60°$.

Atrisinājums. Novelkam KM, BD un ar E apzīmējam BD un AM krustpunktu (skat. 63. att.). Uz stara AM atliekam tādu punktu A', ka $A'M = AM = 3$ (centrāli simetriskais punkts), tad $A'AK$ ir vienādmalu trijstūris, jo tas ir vienādsānu trijstūris, kura virsotnes leņķis ir 60°, tātad abi pamata pieleņķi arī ir 60°. Tāpēc tā mediāna KM ir arī augstums, tātad $\sphericalangle KMA = 90°$. Pēc Pitagora teorēmas iegūstam, ka $KM = 3\sqrt{3}$.



63. attēls

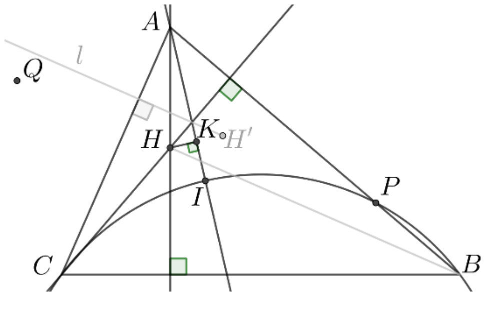
Nogrieznis KM ir trijstūra BCD viduslīnija, tāpēc $BD = 2KM = 6\sqrt{3}$ un $\sphericalangle MEB = 90°$.

Tā kā $\sphericalangle MED = \sphericalangle AEB$ kā krustleņķi un $\sphericalangle EMD = \sphericalangle EAB$ kā iekšējie šķērsleņķi pie paralēlām taisnēm, tad $\Delta MED \sim \Delta AEB$ pēc pazīmes $\ell\ell$ un $\frac{ME}{AE} = \frac{ED}{EB} = \frac{MD}{AB} = \frac{1}{2}$, no kā iegūstam, ka $ED = \frac{1}{3}BD = 2\sqrt{3}$ un $AE = \frac{2}{3}AM = 2$.

Pēc Pitagora teorēmas ΔAED iegūstam, ka $AD = \sqrt{AE^2 + ED^2} = \sqrt{4 + 12} = 4$.

P4. Šaurleņķu trijstūra ABC ievilktās riņķa līnijas centrs ir I, bet tā augstumu krustpunkts ir H. Trijstūrim BCI apvilktā riņķa līnija krusto malu AB punktā P (kas nesakrīt ar B). Perpendikula, kas no H vilkts pret AI, pamats ir K, savukārt Q ir punkta P simetriskais punkts attiecībā pret K. Pierādīt, ka punkti B, H un Q atrodas uz vienas taisnes.

Atrisinājums. Ar H' apzīmēsim punkta H simetrisko punktu attiecībā pret K; ar ℓ apzīmēsim taisni, kas iet caur H' un ir perpendikulāra taisnei AC (skat. 64. att.).



64. attēls

Apskatām simetriju attiecībā pret punktu K; šī simetrija attēlo

1) punktu Q par punktu P saskaņā ar doto;
2) punktu H par punktu H' saskaņā ar H' izvēli;
3) taisni BH par taisni ℓ, jo BH attēlam jābūt paralēlam sākotnējai taisnei BH un jāiet caur punkta H attēlu H'.

Apskatām simetriju attiecībā pret taisni AI; šī simetrija attēlo

1) punktu P par punktu C, jo trijstūris ACP ir vienādsānu un AI ir tā bisektrise (lai pierādītu, ka trijstūris ir vienādsānu, pietiek pamatot leņķu $\sphericalangle ICP$ un $\sphericalangle IPC$ vienādību, kas izriet no ievilkto leņķu vienādībām, kuri balstās uz vienu loku: $\sphericalangle ICP = \sphericalangle IBP$, $\sphericalangle IPC = \sphericalangle IBC$, un no tā, ka BI ir bisektrise, iegūstam, ka $\sphericalangle IBP = \sphericalangle IBC$);
2) punktu H' par punktu H, jo $KH \perp AI$ pēc dotā un $KH = KH'$ saskaņā ar H' izvēli;
3) taisni ℓ par taisni CH, jo ℓ attēlam jāiet caur H' attēlu H un jābūt perpendikulāram taisnei AB (kas ir simetriska taisnei AC pret taisni AI).

Tad abu simetriju kompozīcija attēlo

1) punktu Q vispirms par P, pēc tam par C;
2) taisni BH vispirms par taisni ℓ, pēc tam par taisni CH.

Tātad abu simetriju kompozīcija attēlo punktus Q, B un H par punktiem, kas atrodas uz vienas taisnes CH. Tā kā simetrijas nemaina punktu kolinearitāti, tad arī sākotnēji punkti Q, B un H atradās uz vienas taisnes.

UZDEVUMI PATSTĀVĪGAJAM DARBAM

“Aksiālā un centrālā simetrija”

U1. Pierādīt, ka jebkuru trijstūri a) ar trim, b) ar diviem nogriežņiem var sadalīt trīs daļās tā, ka katrai no daļām ir simetrijas ass.

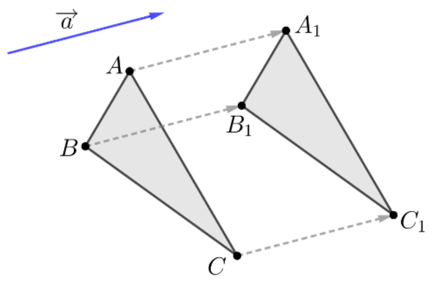
U2. Uz paralelograma $ABCD$ malām AB, BC, CD, DA izvēlēti attiecīgi punkti A_1, B_1, C_1, D_1 tā, ka arī $A_1B_1C_1D_1$ ir paralelograms. Pierādīt, ka abu paralelogramu centri sakrīt.

6.2. Paralēlā pārnese

DEFINĪCIJA Ģeometrisko pārveidojumu, kas katru punktu pārvieto vienā un tajā pašā virzienā par vienu un to pašu attālumu, sauc par paralēlo pārnesi.

Paralēlo pārnesi nosaka vektors, pa kuru šo pārnesi izdara. Lai veiktu paralēlo pārnesi, ir jāzina virziens un attālums.

Trijstūris $A_1B_1C_1$ ir trijstūra ABC attēls paralēlajā pārnesē par vektoru $\vec{a}$ (skat. 65. att.), turklāt $AA_1||BB_1||CC_1||\vec{a}$ un $AA_1 = BB_1 = CC_1 = |\vec{a}|$.



65. attēls

Paralēlās pārneses īpašības

- Paralēlajā pārnesē figūras attēls ir vienāds ar doto figūru.
- Paralēlajā pārnesē taisne attēlojas sevī vai par sev paralēlu taisni.
- Ja paralēlajā pārnesē figūra F attēlojas par figūru F_1 un figūras F punkts P – par figūras F_1 punktu P_1, tad punktu P un P_1 ģeometriskā jēga figūrās F un F_1 ir vienāda.
- Paralēlo pārnešu kompozīcija par vektoriem $\vec{a}$ un $\vec{b}$ ir paralēlā pārnese par vektoru $\vec{a} + \vec{b}$.

Paralēlo pārnesi lieto uzdevumos, kuros figūras vai tās daļu tuvināšana vai attālināšana vienkāršo risinājumu.

Uzdevumu piemēri

P1. Polinoms $P(x)$, kura visi koeficienti ir veseli skaitļi, piecām veselām x vērtībām pieņem vērtību 2000. Pierādīt, ka nav tādas veselas x vērtības, ar kuru dotais polinoms pieņem vērtību 2014.

Atrisinājums. Apzīmējam $F(x) = P(x) - 2000$ (tas ir, apskatām funkciju, kas paralēli pārnesta 2000 vienības uz leju). Tādā gadījumā a, b, c, d, e ir polinoma $F(x)$ saknes un $F(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-e)R(x)$.

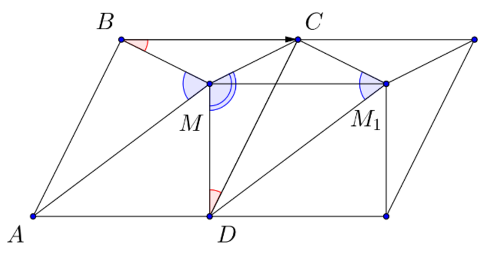
Ja $P(n) = 2014$, tad $F(n) = 14 = (n-a)(n-b)(n-c)(n-d)(n-e)R(n)$. Esam ieguvuši, ka skaitlis 14 ir uzrakstīts kā vismaz piecu dažādu veselu skaitļu reizinājums. Iegūta pretruna, jo $14 = 1 \cdot 2 \cdot 7$ vai $14 = 1 \cdot 14$. Tātad nav tādas veselas x vērtības, ar kuru dotais polinoms pieņem vērtību 2014.

P2. Paralelograma $ABCD$ iekšpusē atrodas punkts M. Ir zināms, ka $\sphericalangle AMB + \sphericalangle CMD = 180°$. Pierādīt, ka $\sphericalangle CBM = \sphericalangle CDM$.

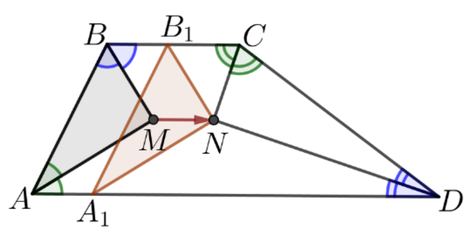
Atrisinājums. Paralelogramu $ABCD$ paralēli pārnesīsim par vektoru $\overrightarrow{BC}$ (skat. 66. att.).
Tā kā $\sphericalangle DM_1C = \sphericalangle AMB$ kā atbilstošie elementi vienādos paralelogramos un pēc dotā $\sphericalangle AMB + \sphericalangle CMD = 180°$, tad $\sphericalangle CM_1D + \sphericalangle CMD = 180°$.
Tātad ap četrstūri MCM_1D var apvilkt riņķa līniju, jo tā pretējo leņķu summa ir 180°. Tātad $\sphericalangle CDM = \sphericalangle CM_1M$ kā ievilkti leņķi, kas balstās uz vienu un to pašu loku, ko savelk horda MC.
Ievērojam, ka BCM_1M ir paralelograms, jo tā pretējās malas BM un CM_1 ir vienāda garuma un paralēlas pēc konstrukcijas. Tā kā paralelograma pretējie leņķi ir vienādi, tad $\sphericalangle CM_1M = \sphericalangle CBM$.
Tātad esam ieguvuši, ka $\sphericalangle CDM = \sphericalangle CM_1M = \sphericalangle CBM$ jeb $\sphericalangle CDM = CBM$, un prasītais ir pierādīts.

P3. Trapeces $ABCD$ pamati ir AD un BC. Trapeces leņķu A un B bisektrises krustojas punktā M, bet leņķu C un D bisektrises – punktā N. Pierādīt, ka $|AB + CD - BC - AD| = 2MN$.

Atrisinājums. Trijstūri ABM paralēli pārnesam par vektoru $\overrightarrow{MN}$, tas attēlojas par trijstūri A_1B_1N (skat. 67. att.). Esam ieguvuši četrstūri A_1B_1CD, kura bisektrises krustojas punktā N, tāpēc tajā var ievilkt riņķa līniju. Tā kā apvilkta četrstūra pretējo malu garumu summas ir vienādas, tad $B_1C + A_1D = A_1B_1 + CD$ jeb $B_1C + A_1D = AB + CD$. Tā kā trijstūris tika paralēli pārnests par $\overrightarrow{MN}$, tad iegūstam $BC - MN + AD - MN = AB + CD$ (vai arī $BC + MN + AD + MN = AB + CD$, ja $\overrightarrow{MN}$ vērsts pretējā virzienā). Tātad esam pierādījuši, ka $|AB + CD - BC - AD| = 2MN$.



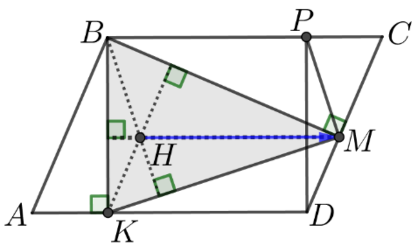
66. attēls



67. attēls

P4. No paralelograma $ABCD$ virsotnes B novilkti augstumi BK un BM. Zināms, ka $KM = a$ un $BD = b$. Aprēķināt attālumu no virsotnes B līdz trijstūra BKM augstumu krustpunktam.

Atrisinājums. Trijstūra BKM augstumu krustpunktu apzīmējam ar H. Tā kā $MH||AD$ un $KH||CD$, tad $HMDK$ ir paralelograms, tāpēc paralēlajā pārnesē par vektoru $\overrightarrow{HM}$ punkts K attēlojas par D, bet B – par P (skat. 68. att.).
Četrstūris $BPDK$ ir taisnstūris, tāpēc $KP = BD = b$. Tā kā $BH \perp KM$, tad $PM \perp KM$ un $PM = BH$. Pēc Pitagora teorēmas taisnleņķa trijstūrī KPM aprēķinām $PM = \sqrt{b^2 - a^2}$. Līdz ar to attālums no virsotnes B līdz trijstūra BKM augstumu krustpunktam ir $\sqrt{b^2 - a^2}$.



68. attēls

UZDEVUMI PATSTĀVĪGAJAM DARBAM

"Paralēlā pārnese"

U1. Atrisināt nevienādību $\left|\left||x-2|-3\right|-7\right| < 5$.

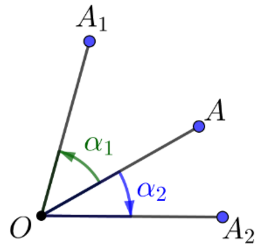
U2. Paralelograma $ABCD$ iekšpusē atzīmēts punkts P tā, ka $\sphericalangle PAB = \sphericalangle PCB$. Pierādīt, ka $\sphericalangle PBC = \sphericalangle PDC$.

U3. Pierādīt, ka katru izliektu četrstūri var sagriezt piecās daļās, no kurām iespējams izveidot divus paralelogramus tā, ka nekādas divas daļas nepārklājas.

6.3. Pagrieziens

DEFINĪCIJA Ģeometrisku pārveidojumu sauc par pagriezienu par leņķi α ap punktu O, ja katrs plaknes punkts A attēlojas par tādu punktu A_1, ka $OA = OA_1$ un $\sphericalangle AOA_1 = \alpha$.

Punktu O sauc par pagrieziena centru, leņķi α – par pagrieziena leņķi.
Lai veiktu pagriezienu, ir jāzina pagrieziena centrs (punkts) un leņķis. Pagriezienu var veikt gan pozitīvā virzienā (pretēji pulksteņrādītāju kustības virzienam), gan negatīvā (pulksteņrādītāju kustības virzienā). Piemēram, 69. att. punkta A attēls pagriezienā ap punktu O par leņķi $\alpha_1 > 0$ ir punkts A_1, bet punkta A attēls pagriezienā ap punktu O par leņķi $\alpha_2 < 0$ ir punkts A_2.



69. attēls

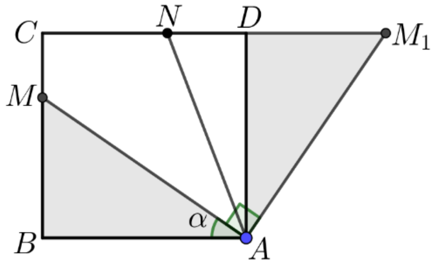
Pagrieziena īpašības

- Pagriezienā jebkuras figūras attēls ir vienāds ar doto figūru.
- Ja pagrieziena leņķis ir $180°$ vai $-180°$, tad pagrieziens atbilst centrālajai simetrijai.
- Ja pagrieziena leņķis ir $360°$ vai $-360°$, tad figūra attēlojas sevī neatkarīgi no pagrieziena centra.
- Ja pagriezienā ap punktu O par leņķi α figūra F attēlojas par figūru F_1 un figūras F punkts P – par figūras F_1 punktu P_1, tad punktu P un P_1 ģeometriskā jēga figūrās F un F_1 ir vienāda.

Uzdevumu piemēri

P1. Uz kvadrāta $ABCD$ malām BC un CD attiecīgi atlikti punkti M un N tā, ka $AN = DN + BM$. Pierādīt, ka AM ir $\sphericalangle BAN$ bisektrise.

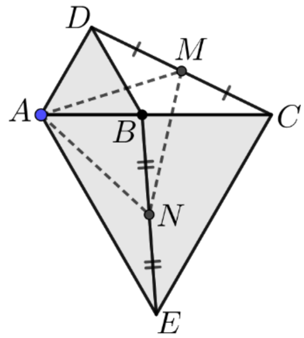
Atrisinājums. Veicam pagriezienu ap punktu A par $90°$ (skat. 70. att.). Šajā pagriezienā virsotne B attēlojas par virsotni D, punkts M – par M_1; BM attēlojas par DM_1. Iegūstam, ka $DN + BM = DN + DM_1 = AN = NM_1$. Tātad trijstūris ANM_1 ir vienādsānu. Apzīmējam $\sphericalangle BAM = \alpha$, tad no trijstūra ABM iegūst, ka $\sphericalangle BMA = 90° - \alpha$. Ievērojam, ka $\sphericalangle DM_1A = \sphericalangle BMA = 90° - \alpha$ pēc konstrukcijas. Tā kā trijstūris ANM_1 ir vienādsānu, tad arī $\sphericalangle NAM_1 = 90° - \alpha$. Ievērojam, ka $\sphericalangle MAM_1 = 90°$ kā leņķis starp atbilstošām taisnēm pagriezienā. Līdz ar to $\sphericalangle MAN = \sphericalangle MAM_1 - \sphericalangle BAM = 90° - (90° - \alpha) = \alpha$. Tātad AM ir $\sphericalangle BAN$ bisektrise.



70. attēls

P2. Uz nogriežņa AC atlikts patvaļīgs punkts B. Dažādās pusēs no AC konstruēti regulāri trijstūri ABD un ACE. Punkti M un N ir attiecīgi nogriežņu DC un BE viduspunkti. Pierādīt, ka trijstūris AMN ir regulārs.

Atrisinājums. Aplūkojam pagriezienu ap punktu A par $60°$ pulksteņrādītāju kustības virzienā. Tādā gadījumā punkts D attēlojas par B, bet C – par E un DC – par BE (skat. 71. att.). Tā kā punkts M ir DC viduspunkts, tad tas attēlojas par BE viduspunktu N, līdz ar to $AM = AN$ un $\sphericalangle MAN = 60°$. Tātad trijstūris AMN ir regulārs.

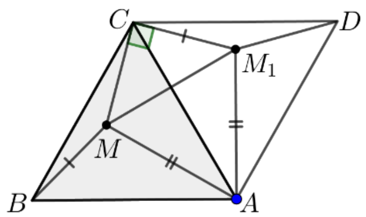


71. attēls

P3. Dots regulārs trijstūris ABC. Atrast punkta M ģeometrisko vietu trijstūra iekšpusē tā, lai $MA^2 = MB^2 + MC^2$.

Atrisinājums. Aplūkojam pagriezienu ap punktu A par $60°$ pulksteņrādītāju kustības virzienā, kas virsotni B attēlo par C. Šajā pagriezienā punkts M attēlojas par punktu M_1, bet C – par kādu punktu D (skat. 72. att.). Vienādība $MA^2 = MB^2 + MC^2$ ir ekvivalenta vienādībai $M_1A^2 = M_1C^2 + MC^2$. Trijstūris AMM_1 ir regulārs, tāpēc $MA = M_1A = M_1M$ un $MM_1^2 = M_1C^2 + MC^2$. Tad $\sphericalangle MCM_1 = 90°$ pēc Pitagora teorēmai apgrieztās teorēmas. Līdz ar to $\sphericalangle MBC + \sphericalangle MCB = \sphericalangle M_1CD + \sphericalangle MCB = 120° - 90° = 30°$ un $\sphericalangle CMB = 180° - 30° = 150°$.

Tātad punkta M ģeometriskā vieta trijstūra iekšpusē ir riņķa līnijas loks, no kura nogrieznis BC ir redzams $150°$ grādu lielā leņķī.



72. attēls

UZDEVUMI PATSTĀVĪGAJAM DARBAM

"Pagrieziens"

U1. Dots, ka $ABCD$ ir kvadrāts un E ir malas AB iekšējais punkts. Nogriežņi AC un DE krustojas punktā P. Perpendikuls, kas no P vilkts pret DE, krusto malu BC punktā F. Pierādīt, ka

$$EF = AE + FC.$$

U2. Dots rombs $ABCD$, kuram $\sphericalangle BAD = 60°$. Taisne krusto romba malas AB un BC punktos M un N tā, ka $BM + BN = AB$. Pierādīt, ka trijstūris DMN ir regulārs.

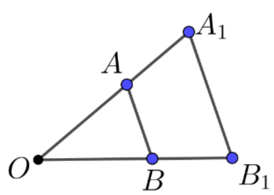
6.4. Homotētija

DEFINĪCIJA Par homotētiju ar centru O un koeficientu k sauc tādu ģeometrisku pārveidojumu, kurā katrs punkts A attēlojas par tādu punktu A_1, ka $\overrightarrow{OA_1} = k\overrightarrow{OA}$, kur $k \neq 0$.

Lai būtu uzdota homotētija, jābūt uzdotam homotētijas centram un homotētijas koeficientam.

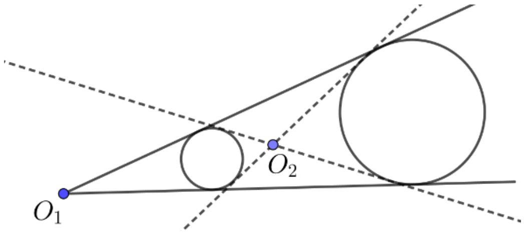
Homotētijas īpašības

- Homotētija ir līdzības pārveidojums, tas ir, homotētija attēlo figūru par tai līdzīgu figūru.
- Homotētiju kompozīcija ar koeficientiem k_1 un k_2 un kopīgu centru O ir homotētija ar koeficientu $k_1 \cdot k_2$ un to pašu centru O.
- Homotētija ar koeficientu $k = -1$ ir centrālā simetrija, kuras centrs ir homotētijas centrs O.
- Ja $k < 0$, tad homotētijas punkti A un A_1 atrodas uz pretējiem stariem OA un OA_1.
- Ja homotētijā ar koeficientu k punktu A un B attēli ir punkti A_1 un B_1, tad atbilstošie nogriežņi ir proporcionāli $A_1B_1 = k \cdot AB$ un paralēli $AB||A_1B_1$ (skat. 73. att.).
- Jebkuras divas riņķa līnijas ir savstarpēji homotētiskas.



73. attēls

- Homotētija riņķa līniju pārveido par riņķa līniju; abu riņķa līniju kopīgās pieskares iet caur vienu vai otru iespējamo homotētijas centru. Homotētijas centrs ir O_1 vai O_2 atkarībā no tā, vai $k > 0$ vai $k < 0$ (skat. 74. att.).



74. attēls

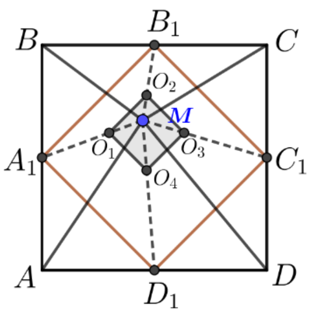
- Ja trīs punkti O, A, B atrodas uz vienas taisnes, tad eksistē homotētija ar centru punktā O, kas punktu A attēlo par B.
- Ja homotētijā ar centru O un koeficientu k figūra F attēlojas par figūru F_1 un figūras F punkts P – par figūras F_1 punktu P_1, tad punktu P un P_1 ģeometriskā jēga figūrās F un F_1 ir vienāda.

Uzdevumu piemēri

P1. Kvadrāta $ABCD$ iekšpusē atlikts patvaļīgs punkts M. Pierādīt, ka trijstūru AMB, BMC, CMD, DMA mediānu krustpunkti ir kāda kvadrāta virsotnes.

Atrisinājums. Ar A_1, B_1, C_1, D_1 apzīmējam attiecīgi malu AB, BC, CD, DA viduspunktus, un trijstūru AMB, BMC, CMD, DMA mediānu krustpunktu apzīmēsim attiecīgi ar O_1, O_2, O_3, O_4 (skat. 75. att.).

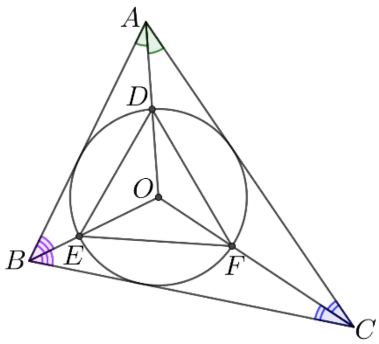
Četrstūris $O_1O_2O_3O_4$ ir homotētisks četrstūrim $A_1B_1C_1D_1$ ar homotētijas centru punktā M un koeficientu $\frac{2}{3}$, jo mediānas krustpunktā dalās attiecībā $2:1$, skaitot no virsotnes. Četrstūris $A_1B_1C_1D_1$ ir kvadrāts, tātad arī $O_1O_2O_3O_4$ ir kvadrāts.



75. attēls

P2. Trijstūrī ABC ievilktās riņķa līnijas centrs ir O. Nogriežņi OA, OB, OC krusto šo riņķa līniju attiecīgi punktos D, E, F. Zināms, ka $\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{AC}{DF}$. Pierādīt, ka trijstūris ABC ir regulārs.

1. atrisinājums. Punkts O ir trijstūrim DEF apvilktās riņķa līnijas centrs, kas ir vidusperpendikulu krustpunkts. Tā kā $\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{AC}{DF}$, tad trijstūri ABC un DEF ir homotētiski ar homotētijas centru O. Tātad trijstūrī DEF ievilktās riņķa līnijas centrs arī ir O. Tā kā trijstūra DEF bisektrišu krustpunkts sakrīt ar vidusperpendikulu krustpunktu, tad tas ir regulārs trijstūris. Līdz ar to arī trijstūris ABC ir regulārs.



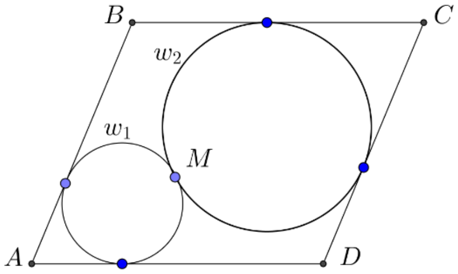
76. attēls

2. atrisinājums. Punkts O ir trijstūra ABC bisektrišu krustpunkts (skat. 76. att.). Apzīmējam $\sphericalangle BAC=2\alpha$, $\sphericalangle ABC=2\beta$ un $\sphericalangle ACB=2\gamma$. Tad $\sphericalangle DOF=180°-\alpha-\gamma$ un $\sphericalangle ODF=\sphericalangle DFO=\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)$, jo ΔODF ir vienādsānu. Līdzīgi iegūstam, ka $\sphericalangle EDO=\sphericalangle DEO=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ un $\sphericalangle OEF=\sphericalangle OFE=\frac{1}{2}(\beta+\gamma)$.

Tātad ΔDEF iekšējo leņķu lielumi ir $\sphericalangle EDF=\alpha+\frac{1}{2}(\beta+\gamma)$, $\sphericalangle DEF=\beta+\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)$, $\sphericalangle EFD=\gamma+\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$. Izmantojot, ka $\alpha+\beta+\gamma=90°$, iegūstam $\sphericalangle EDF=\frac{\alpha}{2}+45°$, $\sphericalangle DEF=\frac{\beta}{2}+45°$ un $\sphericalangle EFD=\frac{\gamma}{2}+45°$. Tā kā $\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{AC}{DF}$, tad $\Delta ABC\sim\Delta DEF$ pēc pazīmes mmm un atbilstošie trijstūru leņķi ir vienādi, tas ir, $2\alpha=\frac{\alpha}{2}+45°$, $2\beta=\frac{\beta}{2}+45°$ un $2\gamma=\frac{\gamma}{2}+45°$. Tātad $\alpha=\beta=\gamma=30°$ jeb $2\alpha=2\beta=2\gamma=60°$ un ΔABC ir regulārs.

P3. Dots, ka $ABCD$ – paralelograms. Riņķa līnijas w_1 un w_2 atrodas tā iekšpusē un ārēji pieskaras viena otrai punktā M; bez tam w_1 pieskaras AB un AD, bet w_2 pieskaras CB un CD. Pierādīt, ka punkti A, M un C atrodas uz vienas taisnes.

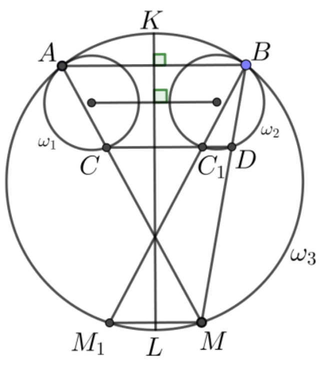
Atrisinājums. Apskatām homotētiju ar centru punktā M, kurā w_1 attēlojas par w_2 (skat. 77. att.). Tā kā homotētijā pieskare attēlojas par pieskari, tad taisne AB attēlojas par taisni CD un taisne AD attēlojas par taisni CB. Tāpēc arī šo taišņu krustpunkti attēlojas viens par otru, tas ir, A attēlojas par C. Bet tad punkti A, M un C atrodas uz vienas taisnes.



77. attēls

P4. Divas vienādas riņķa līnijas ω_1 un ω_2 iekšēji pieskaras trešajai riņķa līnijai ω_3 attiecīgi punktos A un B. Caur ω_3 brīvi izraudzītu punktu M novilktas taisnes MA un MB, kuras krusto ω_1 un ω_2 attiecīgi punktos C un D. Pierādīt, ka $AB||CD$.

Atrisinājums. Riņķa līnijas ω_3 diametrs KL, kas ir perpendikulārs taisnei, kura savieno ω_1 un ω_2 centrus, ir visas figūras simetrijas ass. Tātad punkti A un B arī ir simetriski pret šo diametru (skat. 78. att.).



78. attēls

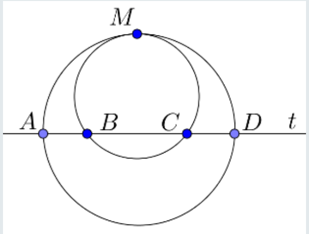
Punkts M_1 ir punkta M simetriskais punkts attiecībā pret taisni KL.
Nogriežņi BM_1 un AM ir simetriski pret KL, un nogrieznis BM_1 krusto riņķa līniju ω_2 punktā C_1, kas ir simetrisks punktam C. Taisnes MM_1 un CC_1 ir perpendikulāras pret simetrijas asi KL, tāpēc $MM_1||CC_1$.

Pierādīsim, ka punkti C, C_1, D atrodas uz vienas taisnes. Aplūkojam homotētiju ar centru punktā B. Šajā homotētijā punkts C_1 attēlojas par M_1 un punkts D – par M, tātad ω_2, kas apvilkta ap BC_1D attēlojas par riņķa līniju ω_3, kas apvilkta ap BM_1M. Tātad $MM_1||C_1D$. Līdz ar to punkti C, C_1 un D atrodas uz vienas taisnes, tāpēc $CD||MM_1||AB$.

UZDEVUMI PATSTĀVĪGAJAM DARBAM

"Homotētija"

U1. Divas riņķa līnijas iekšēji pieskaras punktā M. Taisne t krusto tās punktos A, B, C, D (skat. 79. att.). Pierādīt, ka $\sphericalangle AMB = \sphericalangle CMD$.



79. attēls

U2. Dots izliekts četrstūris $ABCD$, kura laukums ir S. Tā iekšpusē atlikts patvaļīgs punkts O. Aprēķināt laukumu četrstūrim, kura virsotnes ir punkta O simetriskie punkti attiecībā pret dotā četrstūra malu viduspunktiem.

U3. Uz trapeces $ABCD$ pamatiem AB un CD ārēji konstruēti vienādsānu trijstūri ABM un CDN. Pierādīt, ka taisne MN iet caur trapeces diagonāļu krustpunktu.

U4. Šaurleņķu trijstūrī ABC ievilktā riņķa līnija pieskaras tā malām AB, BC, CA attiecīgi punktos C_1, A_1 un B_1. No nogriežņu A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 viduspunktiem vilkti perpendikuli attiecīgi pret AB, BC, CA. Pierādīt, ka šie perpendikuli krustojas vienā punktā.

Vairāk par ģeometriskajiem pārveidojumiem skat., piemēram, [22, 24, 35].

7. Ģeometriskās nevienādības

Trijstūra nevienādība. Trijstūra katras malas garums ir mazāks nekā abu pārējo malu garumu summa.

Trijstūra nevienādība balstās uz apgalvojumu, ka lauztas līnijas garums ir lielāks nekā attālums starp tās galapunktiem.
Ir spēkā arī trijstūra nevienādībai apgrieztais apgalvojums.

TEORĒMA Ja trīs nogriežņi ir tādi, ka katra garums ir mazāks nekā abu pārējo nogriežņu garumu summa, tad var uzzīmēt trijstūri, kura malas ir attiecīgi vienādas ar šiem nogriežņiem.

Dažreiz ir noderīgs fakts, ka trijstūrī pret garāko malu atrodas lielākais leņķis un pret īsāko malu – mazākais leņķis.

Uzdevumu piemēri

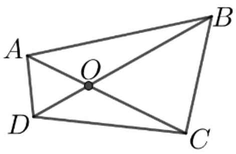
P1. Pierādīt četrstūra nevienādību: izliekta četrstūra diagonāļu summa ir lielāka nekā jebkuru divu pretējo malu garumu summa.

Atrisinājums. Tā kā četrstūris ir izliekts, tad tā diagonāles krustojas, to krustpunktu apzīmējam ar O (skat. 80. att.). Pēc trijstūra nevienādības trijstūrī AOB un DOC iegūstam:

$$AO + OB > AB;$$

$$CO + OD > CD.$$

Saskaitot iegūtās nevienādības, iegūstam $AO + OB + CO + OD > AB + CD$.
Tā kā $AO + OC = AC$ un $BO + OD = BD$, tad $AC + BD > AB + CD$, kas arī bija jāpierāda.

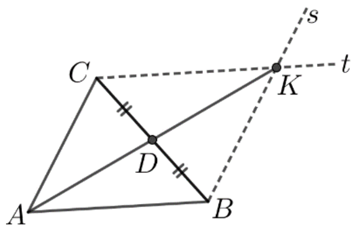


80. attēls

P2. Pierādīt, ka trijstūra mediānas garums ir mazāks nekā puse no to malu garumu summas, starp kurām atrodas šī mediāna.

Atrisinājums. Apskatām trijstūri ABC un mediānu AD. Tātad jāpierāda, ka $AD < \frac{1}{2}(AB + AC)$. Novelkam $t||AB$ un $s||AC$. Taišņu s un t krustpunktu apzīmējam ar K (skat. 81. att.). Četrstūris $ACKB$ ir paralelograms, jo tā malas ir pa pāriem paralēlas. Paralelograma diagonāles krustpunktā dalās uz pusēm, tāpēc AK iet caur BC viduspunktu D. No trijstūra nevienādības trijstūrī ACK izriet, ka $AK < AC + CK$.

Tā kā $AK = 2AD$ un $CK = AB$, tad iegūstam $2AD < AB + AC$ jeb $AD < \frac{1}{2}(AB + AC)$.

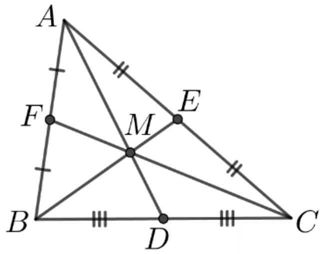


81. attēls

P3. Dots patvaļīgs trijstūris ABC, ar m_a, m_b, m_c apzīmētas šī trijstūra mediānas attiecīgi no virsotnes A, B, C. Pierādīt, ka $P_{ABC} > m_a + m_b + m_c > \frac{3}{4}P_{ABC}$.

Atrisinājums. Ar M apzīmējam mediānu krustpunktu (skat. 82. att.). No mediānas īpašības izriet, ka

$$AM = \frac{2}{3}m_a \text{ un } MD = \frac{1}{3}m_a;$$
$$BM = \frac{2}{3}m_b \text{ un } ME = \frac{1}{3}m_b;$$
$$CM = \frac{2}{3}m_c \text{ un } MF = \frac{1}{3}m_c.$$



82. attēls

Izmantojot trijstūra nevienādību, iegūstam:

$$BM + MC > BC \text{ jeb } \frac{2}{3}m_b + \frac{2}{3}m_c > a;$$
$$AM + MC > AC \text{ jeb } \frac{2}{3}m_a + \frac{2}{3}m_c > b;$$
$$AM + MB > AB \text{ jeb } \frac{2}{3}m_a + \frac{2}{3}m_b > c.$$

Saskaitām iegūtās nevienādības:

$$\frac{4}{3}(m_a + m_b + m_c) > a + b + c \quad \text{jeb} \quad m_a + m_b + m_c > \frac{3}{4}P_{ABC}.$$

Tā kā trijstūra mediānas garums ir mazāks nekā puse no to malu garumu summas, starp kurām atrodas šī mediāna (skat. P2. piemēru), tad iegūstam $m_a < \frac{1}{2}(b + c)$, $m_b < \frac{1}{2}(a + c)$ un $m_c < \frac{1}{2}(b + c)$. Saskaitām iegūtās nevienādības:

$$m_a + m_b + m_c < a + b + c = P_{ABC}.$$

Līdz ar to esam pierādījuši, ka $P_{ABC} > m_a + m_b + m_c > \frac{3}{4}P_{ABC}$.

P4. Trijstūra malu garumi ir *a*, *b*, *c*; mediānu garumi m_a, m_b, m_c un apvilktās riņķa līnijas rādiuss ir *R*. Pierādīt, ka $ab + bc + ca \leq 2R(m_a + m_b + m_c)$.

Atrisinājums. Trijstūrī pret malām a, b, c vilktos augstumus apzīmējam attiecīgi ar h_a, h_b, h_c. Aprēķinām dotā trijstūra laukumu vairākos atšķirīgos veidos:

$$S_\Delta = \frac{abc}{4R} = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}.$$

No šīm vienādībām iegūstam, ka $ab = 2Rh_c$, $bc = 2Rh_a$ un $ac = 2Rh_b$. Saskaitot iegūtās vienādības, iegūstam $ab + bc + ca = 2R(h_a + h_b + h_c)$.

Tā kā augstums ir īsākais nogrieznis no trijstūra virsotnes līdz pretējai malai, tad $h_a + h_b + h_c \leq m_a + m_b + m_c$. Līdz ar to esam ieguvuši, ka

$$ab + bc + ca \leq 2R(m_a + m_b + m_c).$$

P5. Vienā riņķa līnijā ievilkts regulārs deviņstūris un regulārs trijstūris. Kas ir lielāks – dotā deviņstūra malu kvadrātu summa vai dotā trijstūra malu kvadrātu summa?

Atrisinājums. Apskatām trijstūra malu AB un trīs sekojošas deviņstūra malas AK, KL, LB (skat. 83. att.). Ievērojam, ka trijstūri AKL un ALB ir platleņķa, jo balstās uz lokiem, kas ir lielāki nekā 180°. No kosinusu teorēmas ΔALB iegūstam

$$AL^2 + LB^2 - 2AL \cdot LB \cdot \cos\sphericalangle ALB = AB^2.$$

Tā kā $\sphericalangle ALB$ ir plats, tad $\cos\sphericalangle ALB < 0$ un $-2AL \cdot LB \cdot \cos\sphericalangle ALB > 0$. Tātad iegūstam novērtējumu:

$$AL^2 + LB^2 < AB^2.$$

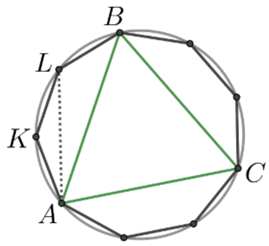
Analoģiski, izmantojot kosinusu teorēmu trijstūrī AKL, iegūstam

$$AK^2 + KL^2 < AL^2.$$

Pēdējās nevienādības abām pusēm pieskaitot LB^2 un izmantojot novērtējumu no ΔALB, iegūstam

$$AK^2 + KL^2 + LB^2 < AL^2 + LB^2 < AB^2.$$

Esam ieguvuši, ka regulāra deviņstūra trīs malu kvadrātu summa ir mazāka nekā trīsstūra vienas malas kvadrāts. Tātad dotā trijstūra malu kvadrātu summa ir lielāka nekā deviņstūra malu kvadrātu summa.



83. attēls

P6. Dots trijstūris ar malu garumiem a, b, c. Pierādīt, ka $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S_\Delta$.

Atrisinājums. Ievērojam, ka pierādāmā nevienādība ir ekvivalenta nevienādībai

$$S_\Delta \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4\sqrt{3}}.$$

Pēc Hērona formulas

$$S_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{p} \cdot \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Izmantojot nevienādību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko, novērtējam reizinājumu $(p-a)(p-b)(p-c)$:

$$\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)} \leq \frac{p-a+p-b+p-c}{3};$$

$$(p-a)(p-b)(p-c) \leq \left(\frac{3p-(a+b+c)}{3}\right)^3 = \left(\frac{3p-2p}{3}\right)^3 = \frac{p^3}{27}.$$

Līdz ar to esam ieguvuši, ka

$$S_\Delta \leq \sqrt{p} \cdot \sqrt{\frac{p^3}{27}} = \frac{p^2}{3\sqrt{3}} = \frac{(a+b+c)^2}{12\sqrt{3}}.$$

Lai būtu pierādīts prasītais, jāpierāda, ka

$$\frac{(a+b+c)^2}{3} \leq a^2 + b^2 + c^2.$$

Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \leq 3a^2 + 3b^2 + 3c^2;$$

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2ac - 2bc \geq 0;$$

$$a^2 - 2ab + b^2 + a^2 - 2ac + c^2 + b^2 - 2bc + c^2 \geq 0;$$

$$(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 \geq 0.$$

Iegūta patiesa nevienādība, tātad ir spēkā novērtējums

$$\frac{(a+b+c)^2}{3} \leq a^2 + b^2 + c^2.$$

Līdz ar to esam pierādījuši prasīto:

$$S_\Delta \leq \frac{(a+b+c)^2}{12\sqrt{3}} \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{4\sqrt{3}}.$$

Piezīme. Nevienādības $\frac{(a+b+c)^2}{3} \leq a^2 + b^2 + c^2$ patiesums uzreiz izriet no nevienādības, kas saista nenegatīvu skaitļu $x_1, \dots, x_n$ vidējo aritmētisko un vidējo kvadrātisko:

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}}.$$

UZDEVUMI PATSTĀVĪGAJAM DARBAM

"Ģeometriskās nevienādības"

U1. Dots izliekts 2020-stūris $A_1A_2A_3\dots A_{2020}$. Uz tā malām A_1A_2, A_2A_3, …, $A_{2019}A_{2020}$, $A_{2020}A_1$ attiecīgi ņemti šo malu viduspunkti $B_1, B_2, \dots, B_{2020}$. Pierādīt, ka 2020-stūra $B_1B_2B_3\dots B_{2020}$ perimetrs ir mazāks nekā 2020-stūra $A_1A_2A_3\dots A_{2020}$ perimetrs.

U2. Kādas vērtības var pieņemt katrs trijstūra ABC leņķis, ja $\sphericalangle A \leq \sphericalangle B \leq \sphericalangle C$?

U3. Izliektā četrstūrī $ABCD$ punkts M ir malas BC viduspunkts un punkts N ir malas CD viduspunkts. Pierādīt, ka $S_{AMN} < \frac{1}{2}S_{ABCD}$.

Vairāk par ģeometriskām nevienādībām skat., piemēram, [2, 26, 33].

8. Patstāvīgo darbu uzdevumu atrisinājumi

8.1. Nevienādības vienas puses vai abu pušu sadalīšana reizinātājos

U1. Pierādīt, ka pozitīviem skaitļiem x un y ir spēkā nevienādība

$$x^6y + xy^6 \geq x^5y^2 + x^2y^5.$$

Atrisinājums. Nevienādības abas puses izdalot ar $xy > 0$, iegūstam ekvivalentu nevienādību

$$x^5 + y^5 \geq x^4y + xy^4.$$

Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$x^5 + y^5 - x^4y - xy^4 \geq 0;$$
$$x^4(x-y) - y^4(x-y) \geq 0;$$
$$(x^4 - y^4)(x-y) \geq 0;$$
$$(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)(x-y) \geq 0;$$
$$(x-y)(x+y)(x^2+y^2)(x-y) \geq 0;$$
$$(x-y)^2(x+y)(x^2+y^2) \geq 0.$$

Pēdējās nevienādības pirmais reizinātājs ir nenegatīvs, jo tas ir kvadrāts; pārējie divi reizinātāji ir pozitīvi, jo pēc dotā x un y ir pozitīvi skaitļi. Tātad reizinājums arī ir nenegatīvs. Tā kā tika veikti ekvivalenti pārveidojumi un iegūta patiesa nevienādība, tad arī dotā nevienādība ir patiesa.

U2. Pierādīt, ka $x^4 + y^4 \geq x^3y + xy^3$ visiem reāliem skaitļiem x un y.

Atrisinājums. Pārveidojam pierādāmo nevienādību:

$$x^4 - x^3y + y^4 - xy^3 \geq 0;$$
$$x^3(x-y) - y^3(x-y) \geq 0;$$
$$(x-y)(x^3 - y^3) \geq 0.$$

Pēdējā nevienādība ir patiesa, jo ir iespējami 3 gadījumi:

- ja $x > y$, tad $x^3 > y^3$, jo $y = x^3$ ir augoša funkcija, un abas iekavas ir pozitīvas (divu pozitīvu skaitļu reizinājums ir pozitīvs skaitlis);
- ja $x < y$, tad $x^3 < y^3$ un abas iekavas ir negatīvas;
- ja $x = y$, tad $(x-y)(x^3-y^3) = 0$.

Tā kā tika veikti ekvivalenti pārveidojumi, tad arī dotā nevienādība ir patiesa, kas arī bija jāpierāda.

8.2. Nevienādības pastiprināšanas metode

U1. Salīdzināt skaitļus 31^{11} un 17^{14}.

Atrisinājums. Izmantojot pakāpju īpašības un novērtēšanu, iegūstam

$$17^{14} > 16^{14} = 2^{56} > 2^{55} = 32^{11} > 31^{11}.$$

U2. Pierādīt, ka pozitīviem skaitļiem a, b un c ir spēkā nevienādība

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} > \frac{3}{a+b+c}.$$

Atrisinājums. Novērtējot nevienādības kreisās puses saskaitāmos, iegūstam

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} > \frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{a+c+b} + \frac{1}{b+c+a} = \frac{3}{a+b+c}.$$

U3. Kāda ir izteiksmes $\frac{a}{b+1} + \frac{b}{a+1}$ mazākā vērtība, ja a un b ir naturāli skaitļi?

Atrisinājums. Izteiksmes minimālā vērtība ir 1, ko iegūst, ja $a = b = 1$. Vēl jāpierāda, ka izteiksmes vērtība nevar būt mazāka. Simetrijas dēļ var pieņemt, ka $b \geq a \geq 1$. Tad

$$\frac{a}{b+1} + \frac{b}{a+1} \geq \frac{a}{b+1} + \frac{b}{b+1} \geq \frac{1}{b+1} + \frac{b}{b+1} = \frac{1+b}{b+1} = 1.$$

U4. Dots, ka $a \geq b \geq c > 0$ un $a + b + c \leq 1$. Pierādīt nevienādību $a^2 + 3b^2 + 5c^2 \leq 1$.

Atrisinājums. Ņemot vērā nosacījumu $a \geq b \geq c > 0$, novērtējam pierādāmās nevienādības kreisās puses izteiksmi:

$$a^2 + 3b^2 + 5c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2c^2 \leq$$
$$\leq a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac = (a+b+c)^2 = 1.$$

8.3. Pilno kvadrātu atdalīšana

U1. a) Vai noteikti visiem reāliem skaitļiem x izpildās $3x^2 - 0{,}25x + 0{,}005 > 0$?

b) Vai noteikti visiem reāliem skaitļiem x izpildās $9x^2 + 12x + 5 > 0$?

Atrisinājums

a) Nē, dotā nevienādība neizpildās visiem reāliem skaitļiem x, piemēram, ja $x = \frac{1}{20}$, tad $\frac{3}{400} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{20} + \frac{1}{200} = 0$. Tā kā 0 nav lielāka kā 0, tad dotā nevienādība neizpildās.

b) Ekvivalenti pārveidojam dotās nevienādības kreisās puses izteiksmi:

$9x^2 + 12x + 5 = 9x^2 + 12x + 4 + 1 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 2 + 2^2 + 1 = (3x+2)^2 + 1.$

Izteiksme $(3x+2)^2+1>0$, jo skaitļa kvadrāts vienmēr ir nenegatīvs, un, tam pieskaitot 1, iegūst pozitīvu skaitli. Līdz ar to esam pierādījuši, ka visiem reāliem skaitļiem x izpildās $9x^2+12x+5>0$.

Piezīme. Risinājumā var apskatīt arī kvadrāttrinoma diskriminanta izteiksmi un izdarīt secinājumus par kvadrātfunkcijas grafika novietojumu attiecībā pret x asi.

U2. Pierādīt, ka $a^2+b^2+\frac{1}{2}\geq a+b$.

Atrisinājums. Ekvivalenti pārveidojam doto nevienādību:

$$a^2-a+\frac{1}{4}+b^2-b+\frac{1}{4}\geq 0;$$

$$\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\left(b-\frac{1}{2}\right)^2\geq 0.$$

Skaitļa kvadrāts vienmēr ir nenegatīvs, un divu nenegatīvu skaitļu summa ir nenegatīvs skaitlis, tātad pēdējā nevienādība ir patiesa. Tā kā tika veikti ekvivalenti pārveidojumi, tad arī dotā nevienādība ir patiesa.

U3. Pierādīt, ka $9x^2-12xy+20y^2+8y+4>0$ visām reālām x un y vērtībām.

Atrisinājums. Veicot ekvivalentus pārveidojumus, iegūstam

$$9x^2-12xy+20y^2+8y+4=(9x^2-12xy+4y^2)+(16y^2+8y+1)+3=$$
$$=(3x-2y)^2+(4y+1)^2+3>0,$$

jo $(3x-2y)^2+(4y+1)^2\geq 0$ kā reālu skaitļu kvadrātu summa un $3>0$.

U4. Pierādīt, ka $9x^6-x^3+1>0$ visiem reāliem x.

1. atrisinājums. Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$(3x^3)^2-2\cdot 3x^3\cdot\frac{1}{6}+\left(\frac{1}{6}\right)^2+\frac{35}{36}>0;$$

$$\left(3x^3-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{35}{36}>0.$$

Tā kā skaitļa kvadrāts ir nenegatīvs un $\frac{35}{36}$ ir pozitīvs skaitlis, tad pēdējā nevienādība ir patiesa. Tā kā tika veikti ekvivalenti pārveidojumi, tad arī dotā nevienādība ir patiesa visiem reāliem skaitļiem x.

2. atrisinājums. Reizinām nevienādības abas puses ar 2 un veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$18x^6-2x^3+2>0;$$

$$x^6-2x^3+1+17x^6+1>0;$$

$$(x^3-1)^2+17x^6+1>0.$$

Tā kā skaitļa kvadrāts ir nenegatīvs, saskaitāmais $17x^6$ ir nenegatīvs un skaitlis 1 ir pozitīvs skaitlis, tad pēdējā nevienādība ir patiesa. Tā kā tika veikti ekvivalenti pārveidojumi, tad arī dotā nevienādība ir patiesa visiem reāliem skaitļiem x.

U5. Pierādīt, ka $x^2 + 2y^2 + 2xy + y + 1 > 0$, ja x, y ir reāli skaitļi.

Atrisinājums. Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$(x^2 + 2xy + y^2) + y^2 + y + 1 > 0;$$

$$(x+y)^2 + \left(y^2 + 2 \cdot y \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) + \frac{3}{4} > 0;$$

$$(x+y)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0.$$

Tā kā skaitļa kvadrāts ir nenegatīvs un $\frac{3}{4}$ ir pozitīvs skaitlis, tad pēdējā nevienādība ir patiesa. Tā kā tika veikti ekvivalenti pārveidojumi, tad arī dotā nevienādība ir patiesa visiem reāliem skaitļiem x un y.

U6. Pierādīt, ka $x^4 + 2x^3y + 2xy^3 + y^4 \geq 6x^2y^2$, ja x un y ir reāli pozitīvi skaitļi.

Atrisinājums. Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$(x^4 - 2x^2y^2 + y^4) + 2x^3y + 2xy^3 - 4x^2y^2 \geq 0;$$
$$(x^2 - y^2)^2 + 2xy(x^2 + y^2 - 2xy) \geq 0;$$
$$(x^2 - y^2)^2 + 2xy(x - y)^2 \geq 0.$$

Tā kā skaitļa kvadrāts ir nenegatīvs un $xy > 0$ pēc dotā, tad pēdējā nevienādība ir patiesa. Tā kā tika veikti ekvivalenti pārveidojumi, tad arī dotā nevienādība ir patiesa visiem pozitīviem skaitļiem x un y.

U7. Pierādīt, ka $x^2 + y^2 + 4 \geq 2x - 2y - xy$, ja x, y ir reāli skaitļi.

Atrisinājums. Reizinām nevienādības abas puses ar 2 un veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$2x^2 + 2y^2 + 8 \geq 4x - 4y - 2xy;$$
$$x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 4x + y^2 + 4y + 8 \geq 0;$$
$$(x+y)^2 + (x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 4y + 4) \geq 0;$$
$$(x+y)^2 + (x-2)^2 + (y+2)^2 \geq 0.$$

Tā kā skaitļa kvadrāts ir nenegatīvs, tad pēdējās nevienādības kreisajā pusē ir trīs nenegatīvu skaitļu summa, kas arī ir nenegatīvs skaitlis. Tātad pēdējā nevienādība ir patiesa. Tā kā tika veikti ekvivalenti pārveidojumi, tad arī dotā nevienādība ir patiesa visiem reāliem skaitļiem x un y.

8.4. Nevienādība starp aritmētisko vidējo un ģeometrisko vidējo

U1. Pierādīt, ka visiem reāliem skaitļiem a, b, c, d izpildās nevienādība

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2d^2 + d^2a^2 + a^2c^2 + b^2d^2 \geq 10abcd.$$

1. atrisinājums. Izmantojot nevienādību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko, novērtējam dotās nevienādības kreiso pusi:

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2d^2 + d^2a^2 + a^2c^2 + b^2d^2 \geq$$

$$\geq 10 \cdot \sqrt[10]{a^4 \cdot b^4 \cdot c^4 \cdot d^4 \cdot a^2b^2 \cdot b^2c^2 \cdot c^2d^2 \cdot d^2a^2 \cdot a^2c^2 \cdot b^2d^2} =$$

$$= 10 \cdot \sqrt[10]{a^{10} \cdot b^{10} \cdot c^{10} \cdot d^{10}} = 10 \cdot |abcd| \geq 10abcd.$$

2. atrisinājums. Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 - 4abcd + (a^2b^2 - 2abcd + c^2d^2) +$$

$$+ (a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2) + (b^2c^2 - 2abcd + d^2a^2) \geq 0;$$

$$(a^4 - 2a^2b^2 + b^4) + (c^4 - 2c^2d^2 + d^4) + (2a^2b^2 + 2c^2d^2 - 4abcd) +$$

$$+ (ab - cd)^2 + (ac - bd)^2 + (bc - da)^2 \geq 0;$$

$$(a^2 - b^2)^2 + (c^2 - d^2)^2 + 2(ab - cd)^2 + (ab - cd)^2 + (ac - bd)^2 + (bc - da)^2 \geq 0.$$

Tā kā katrs saskaitāmais ir nenegatīvs, tad pēdējā nevienādība ir patiesa un arī dotā nevienādība ir patiesa.

U2. Pierādīt, ka $x^6 + y^6 + \frac{2}{x^3y^3} - 4 \geq 0$, ja $x > 0$, $y > 0$.

Atrisinājums. Pierādāmo nevienādību ekvivalenti pārveidojam formā

$$x^6 + y^6 + \frac{2}{x^3y^3} \geq 4.$$

Nevienādības kreisās puses izteiksmes saskaitāmo $\frac{2}{x^3y^3}$ uzrakstām kā divu saskaitāmo summu un lietojam nevienādību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko:

$$x^6 + y^6 + \frac{2}{x^3y^3} = x^6 + y^6 + \frac{1}{x^3y^3} + \frac{1}{x^3y^3} \geq 4 \cdot \sqrt[4]{x^6 \cdot y^6 \cdot \frac{1}{x^3y^3} \cdot \frac{1}{x^3y^3}} = 4,$$

kas arī bija jāpierāda.

U3. Pierādīt, ka visiem pozitīviem skaitļiem a un b izpildās $\left(\frac{3a}{b}+1\right)\left(\frac{3b}{a}+1\right) \geq 16$.

1. atrisinājums. Saskaitāmos $\frac{3a}{b}$ un $\frac{3b}{a}$ uzrakstām kā trīs saskaitāmo summu un katram dotās nevienādības kreisās puses izteiksmes reizinātājam lietojam nevienādību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko:

$$\left(\frac{3a}{b}+1\right)\left(\frac{3b}{a}+1\right) = \left(\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+1\right)\left(\frac{b}{a}+\frac{b}{a}+\frac{b}{a}+1\right) \geq$$

$$\geq 4 \cdot \sqrt[4]{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot 1} \cdot 4 \cdot \sqrt[4]{\frac{b}{a}\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{b}{a}\cdot 1} = 16 \cdot \sqrt[4]{\frac{a^3}{b^3}\cdot\frac{b^3}{a^3}} = 16,$$

kas arī bija jāpierāda.

2. atrisinājums. Ekvivalenti pārveidojam pierādāmo nevienādību:

$$\frac{3a}{b}+\frac{3b}{a}+1+9 \geq 16;$$

$$\frac{3a}{b}+\frac{3b}{a} \geq 6; \quad | : 3$$

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2.$$

Iegūta patiesa nevienādība, tātad arī dotā nevienādība ir patiesa.

3. atrisinājums. Apzīmējam $x = \frac{a}{b} > 0$, atveram iekavas un lietojam nevienādību $x + \frac{1}{x} \geq 2$:

$$(3x+1)\left(\frac{3}{x}+1\right) = 3x + \frac{3}{x} + 9 + 1 = 3\left(x+\frac{1}{x}\right) + 10 \geq 3 \cdot 2 + 10 = 16.$$

U4. Doti tādi četri pozitīvi skaitļi a_1, a_2, a_3 un a_4, ka $a_1a_3 = a_2a_4 = 2017$. Kāda ir mazākā izteiksmes $(a_1+a_2)(a_3+a_4)$ vērtība?

Atrisinājums. Izmantojot nevienādību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko, iegūstam

$$a_1 + a_2 \geq 2 \cdot \sqrt{a_1a_2} \text{ un } a_3 + a_4 \geq 2 \cdot \sqrt{a_3a_4}.$$

Tātad

$$(a_1+a_2)(a_3+a_4) \geq 2 \cdot \sqrt{a_1a_2} \cdot 2 \cdot \sqrt{a_3a_4} =$$

$$= 4 \cdot \sqrt{(a_1a_3)(a_2a_4)} = 4 \cdot \sqrt{2017 \cdot 2017} = 4 \cdot 2017 = 8068.$$

Vienādība tiek sasniegta, piemēram, ja $a_1 = a_2 = 2017$ un $a_3 = a_4 = 1$. Tātad dotās izteiksmes mazākā vērtība ir 8068.

U5. Pierādīt, ka $\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{16}{c} \geq \frac{49}{a+b+c}$, ja a, b, c ir pozitīvi skaitļi.

Atrisinājums. Reizinot abas nevienādības puses ar $a+b+c>0$, iegūstam

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{16}{c}\right) \geq 49.$$

Novērtēsim nevienādības kreisās puses izteiksmi:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{16}{c}\right)=1+4+16+\left(\frac{4a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{16b}{c}+\frac{4c}{b}\right)+\left(\frac{16a}{c}+\frac{c}{a}\right) \geq$$
$$\geq 21+2\sqrt{4}+2\sqrt{16\cdot 4}+2\sqrt{16}=21+4+16+8=49,$$

kas arī bija jāpierāda.

8.5. Vjeta teorēma

U1. Noteikt funkciju $y=2016-x$ un $y=\frac{2015}{x}$ grafiku krustpunktu koordinātas.

Atrisinājums. Krustpunkta abscisu iegūst no vienādojuma $2016-x=\frac{2015}{x}$. Reizinot abas vienādojuma puses ar $x \neq 0$, iegūst $x^2-2016x+2015=0$. Pēc Vjeta teorēmas

$$\begin{cases} x_1+x_2=2016 \\ x_1 \cdot x_2=2015 \end{cases}$$

Tātad $x_1=2015$ un $x_2=1$, tiem atbilstošās ordinātas ir $y_1=1$ un $y_2=2015$. Esam ieguvuši, ka grafiku krustpunktu koordinātas ir $(2015; 1)$ un $(1; 2015)$.

U2. Dots, ka b un c ir naturāli skaitļi un kvadrātvienādojuma $x^2-bx+c=0$ reālās saknes ir x_1 un x_2. Pierādīt, ka

a) $x_1^2+x_2^2+2017$; b) $x_1^3+x_2^3$ ir naturāls skaitlis.

Atrisinājums. No Vjeta teorēmas izriet, ka $x_1+x_2=b$ un $x_1x_2=c$. Tātad gan sakņu summa, gan sakņu reizinājums ir naturāls skaitlis un abas saknes ir pozitīvas.

a) Pārveidojam doto izteiksmi:

$$x_1^2+x_2^2+2017=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-2x_1x_2+2017=$$
$$=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2+2017=$$
$$=b^2-2c+2017.$$

Tā kā naturāla skaitļa kvadrāts ir naturāls skaitlis un naturālu skaitļu summa vai starpība ir vesels skaitlis, tad $b^2-2c+2017$ ir vesels skaitlis, līdz ar to $x_1^2+x_2^2+2017$ arī ir vesels skaitlis. Ņemot vērā, ka $x_1^2+x_2^2+2017>0$, secinām, ka $x_1^2+x_2^2+2017$ ir naturāls skaitlis.

b) Pārveidojam doto izteiksmi:

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2) - x_1 x_2^2 - x_1^2 x_2 = b(b^2 - 2c) - x_1 x_2 (x_2 + x_1) =$$
$$= b(b^2 - 2c) - cb = b^3 - 3bc.$$

Tā kā naturāla skaitļa kubs ir naturāls skaitlis un naturālu skaitļu starpība ir vesels skaitlis, tad $b^3 - 3bc$ ir vesels skaitlis. Tā kā $x_1^3 + x_2^3 > 0$, tad $x_1^3 + x_2^3$ ir naturāls skaitlis.

Piezīme. b) gadījumā var izmantot formulu $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.

U3. Kvadrātvienādojuma $\left(1 + \sqrt{5}\right)x^2 - \sqrt[4]{7} \cdot \left(1 + \sqrt{5}\right)x + \sqrt[4]{7} = 0$ saknes ir skaitļi a un b. Pierādīt, ka izteiksmes

$$a^4 b + ab^4 + 3a^3 b^2 + 3a^2 b^3 + 16a^4 b^3 + 16a^3 b^4$$

vērtība ir vesels skaitlis.

Atrisinājums. No Vjeta teorēmas izriet, ka

$$\begin{cases} a + b = \sqrt[4]{7} \cdot \left(1 + \sqrt{5}\right) \\ ab = \dfrac{\sqrt[4]{7}}{1 + \sqrt{5}} \end{cases}$$

Pārveidojam doto izteiksmi:

$$a^4 b + ab^4 + 3a^3 b^2 + 3a^2 b^3 + 16a^4 b^3 + 16a^3 b^4 =$$
$$= ab(a^3 + b^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + 16a^3 b^2 + 16a^2 b^3) =$$
$$= ab((a + b)^3 + 16a^2 b^2 (a + b)) =$$
$$= \frac{\sqrt[4]{7}}{1 + \sqrt{5}} \cdot \left(\sqrt[4]{7^3} \cdot \left(1 + \sqrt{5}\right)^3 + 16 \cdot \frac{\sqrt[4]{7^2} \cdot \sqrt[4]{7} \cdot \left(1 + \sqrt{5}\right)}{\left(1 + \sqrt{5}\right)^2}\right) =$$
$$= 7 \cdot \left(1 + \sqrt{5}\right)^2 + \frac{16 \cdot 7}{\left(1 + \sqrt{5}\right)^2} = 7 \cdot \left(\left(6 + 2\sqrt{5}\right) + \frac{16}{6 + 2\sqrt{5}}\right) =$$
$$= 7 \cdot \frac{36 + 24\sqrt{5} + 20 + 16}{6 + 2\sqrt{5}} = 7 \cdot 12 \cdot \frac{6 + 2\sqrt{5}}{6 + 2\sqrt{5}} = 84.$$

Tā kā skaitlis 84 ir vesels skaitlis, tad prasītais ir pierādīts.

U4. Vienādojuma $x^3 - 44x^2 + 623x - 2860 = 0$ saknes ir taisnstūra paralēlskaldņa malu garumi, kas izteikti centimetros. Aprēķināt šī paralēlskaldņa pilnas virsmas laukumu un tilpumu.

Atrisinājums. Apzīmējam taisnstūra paralēlskaldņa šķautņu garumus ar a, b un c, tās ir arī dotā vienādojuma saknes, un to var pārrakstīt formā $(x - a)(x - b)(x - c) = 0$. Atverot iekavas, iegūstam

$$(x - a)(x - b)(x - c) = x^3 - x^2(a + b + c) + x(ab + ac + bc) - abc.$$

Ievērojam, ka dotajā vienādojumā koeficients pie x ir vienāds ar pusi no taisnstūra paralēlskaldņa pilnas virsmas laukuma, tātad pilnas virsmas laukums ir $2 \cdot 623 = 1246$ cm^2. Savukārt taisnstūra paralēlskaldņa tilpums ir vienāds ar abc, kas ir vienādojuma brīvais loceklis ar pretējo zīmi, tātad paralēlskaldņa tilpums ir 2860 cm^2.

8.6. Substitūcijas metode

U1. Atrisināt vienādojumu $\left(\frac{x^2-2x+3}{x}\right)^2 - 5x = \frac{15}{x} - 16$.

Atrisinājums. Pārveidojam doto vienādojumu:

$$\left(x - 2 + \frac{3}{x}\right)^2 - 5x = \frac{15}{x} - 16;$$

$$x^2 + 4 + \frac{9}{x^2} - 4x + 6 - \frac{12}{x} - 5x = \frac{15}{x} - 16;$$

$$x^2 + \frac{9}{x^2} + 26 - 9x - \frac{27}{x} = 0;$$

$$\left(x^2 + \frac{9}{x^2}\right) - 9\left(x + \frac{3}{x}\right) + 26 = 0.$$

Apzīmējam $x + \frac{3}{x} = a$, tad $x^2 + 6 + \frac{9}{x^2} = a^2$ un $x^2 + \frac{9}{x^2} = a^2 - 6$. Tātad iegūstam vienādojumu $a^2 - 6 - 9a + 26 = 0$ jeb $a^2 - 9a + 20 = 0$, kura saknes ir $a_1 = 4$ un $a_2 = 5$. Aprēķinām atbilstošās x vērtības:

- $x + \frac{3}{x} = 4$ jeb $x^2 - 4x + 3 = 0$, kura saknes ir $x_1 = 1$ un $x_2 = 3$;
- $x + \frac{3}{x} = 5$ jeb $x^2 - 5x + 3 = 0$, kura saknes ir $x_{3,4} = \frac{5\pm\sqrt{13}}{2}$.

U2. Atrisināt vienādojumu $(x + 1)(x - 2)(x + 3)(x - 4) = 144$.

Atrisinājums. Ievērojam, ka vienādojumu var pārveidot formā:

$$(x^2 - x - 2)(x^2 - x - 12) = 144.$$

Apzīmējot $x^2 - x - 2 = a$, iegūstam kvadrātvienādojumu $a(a - 10) = 144$ jeb $a^2 - 10a - 144 = 0$, kura saknes ir $a_1 = -8$ un $a_2 = 18$.

Apskatām abus gadījumus:

- $x^2 - x - 2 = -8$ jeb $x^2 - x + 6 = 0$, kuram nav atrisinājuma, jo $D = 1 - 4 \cdot 6 < 0$;
- $x^2 - x - 2 = 18$ jeb $x^2 - x - 20 = 0$, kura saknes ir $x_1 = -4$ un $x_2 = 5$.

8.7. Simetrijas izmantošana uzdevumu risināšanā

U1. Atrisināt reālos skaitļos vienādojumu sistēmu $\begin{cases} xy = x + y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

Atrisinājums. Apzīmējam $xy = x + y = a$, tad no sistēmas otrā vienādojuma iegūstam $(x+y)^2 - 2xy = 1$ jeb $a^2 - 2a = 1$, kura saknes ir $a = 1 \pm \sqrt{2}$. Apskatām abus gadījumus:

- ja $xy = x + y = 1 + \sqrt{2}$, tad sistēmai nav reālu atrisinājumu;
- ja $xy = x + y = 1 - \sqrt{2}$, tad sistēmas atrisinājumi ir $\left(\frac{1-\sqrt{2}\pm\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}; \frac{1-\sqrt{2}\mp\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}\right)$.

U2. Atrisināt vienādojumu sistēmu $\begin{cases} x + y + xy = 7 \\ x^2 + y^2 + xy = 13 \end{cases}$

Atrisinājums. Ievērojot, ka $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$ un apzīmējot $x + y = a$ un $xy = b$, iegūstam $\begin{cases} a + b = 7 \\ a^2 - b = 13 \end{cases}$. Saskaitot vienādojumus, iegūstam $a^2 + a - 20 = 0$, kura saknes ir $a_1 = -5$ un $a_2 = 4$, tad attiecīgi $b_1 = 12$ un $b_2 = 3$. Apskatām abus gadījumus:

- ja $x + y = -5$ un $xy = 12$, tad pēc ievietošanas iegūstam vienādojumu $x^2 + 5x + 12 = 0$, kuram nav atrisinājuma, jo $D = 25 - 4 \cdot 12 < 0$;
- ja $x + y = 4$ un $xy = 3$, tad pēc Vjeta teorēmas iegūstam atrisinājumus $(3; 1)$ un $(1; 3)$.

Līdz ar to dotās sistēmas atrisinājums ir $(3; 1)$ un $(1; 3)$.

U3. Atrisināt pozitīvos skaitļos vienādojumu sistēmu $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x^3 + y^3 = 2 \end{cases}$

Atrisinājums. Apzīmējot $a = x + y$ un $b = xy$, iegūstam sistēmu

$$\begin{cases} a^2 - 2b = 2 \\ a(a^2 - 3b) = 2 \end{cases}$$

No šīs sistēmas pirmā vienādojuma izsakām $b = \frac{a^2-2}{2}$ un, ievietojot to šīs sistēmas otrajā vienādojumā, iegūstam vienādojumu $a^3 - 6a + 4 = 0$, kuru varam sadalīt reizinātājos $(a-2)(a^2 + 2a - 2) = 0$. Šim vienādojumam ir trīs atrisinājumi:

- ja $a = 2$, tad $b = 1$. Risinot sistēmu $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 1 \end{cases}$, iegūstam, ka $x = y = 1$;

- ja $a = -1 + \sqrt{3}$, tad x un y nevar būt pozitīvi skaitļi, kā tas ir prasīts uzdevuma noteikumos, jo $b = xy < 0$;
- ja $a = -1 - \sqrt{3}$, tad arī x un y nav pozitīvi skaitļi.

Tātad dotās vienādojumu sistēmas vienīgais pozitīvais atrisinājums ir $x = y = 1$.

U4. Atrisināt reālos skaitļos vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x^5 + y^5 = 33 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

Atrisinājums. Tā kā $x^5 + y^5 = (x+y)^5 - 5(x+y)^3xy + 5(x+y)(xy)^2$, tad iegūstam vienādojumu:

$$3^5 - 5 \cdot 3^3xy + 5 \cdot 3(xy)^2 = 33;$$
$$15(xy)^2 - 135xy + 210 = 0;$$
$$(xy)^2 - 9xy + 14 = 0.$$

Izmantojot Vjeta teorēmu, iegūstam, ka $xy = 2$ vai $xy = 7$. Līdz ar to esam ieguvuši divas vienādojumu sistēmas:

- ja $\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases}$, tad pēc Vjeta teorēmas var pamanīt, ka sistēmas atrisinājumi ir $(2; 1)$ un $(1; 2)$.
- ja $\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 7 \end{cases}$, tad sistēmai nav atrisinājuma, jo, no pirmā vienādojuma izsakot $y = 3 - x$ un ievietojot otrajā vienādojumā, iegūstam $x^2 - 3x + 7 = 0$, kuram $D = 3^2 - 4 \cdot 7 < 0$.

Līdz ar to dotās vienādojumu sistēmas atrisinājumi ir $(2; 1)$ un $(1; 2)$.

U5. Izteikt polinomu $s_n = x^n + y^n + z^n$, ja $n = 1;\ 2;\ 3;\ 4$, kā funkciju $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, kur $\sigma_1 = x + y + z$, $\sigma_2 = xy + yz + xz$ un $\sigma_3 = xyz$.

Atrisinājums. Izsakām prasītos lielumus.

Ja $n = 1$ un $n = 2$, tad iegūstam

$$s_1 = x + y + z = \sigma_1;$$
$$s_2 = x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2xy - 2xz - 2xy = \sigma_1^2 - 2\sigma_2.$$

Lai izteiktu s_3, ir izdevīgi lietot formulu

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) + 3abc.$$

Līdz ar to

$$s_3 = x^3 + y^3 + z^3 = \sigma_1(\sigma_1^2 - 2\sigma_2 - \sigma_2) + 3\sigma_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3.$$

Izmantojot kvadrāta atdalīšanu, izsakām s_4:

$$s_4 = x^4 + y^4 + z^4 = (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2) =$$
$$= (\sigma_1^2 - 2\sigma_2)^2 - 2\big((xy + xz + yz)^2 - 2(x^2yz + xy^2z + xyz^2)\big) =$$
$$= (\sigma_1^2 - 2\sigma_2)^2 - 2\sigma_2^2 + 4xyz(x + y + z) =$$
$$= \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 4\sigma_2^2 - 2\sigma_2^2 + 4\sigma_3\sigma_1 =$$
$$= \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3.$$

Piezīme. Vispārīgā veidā ir spēkā rekurences sakarība $s_n = \sigma_1 s_{n-1} - \sigma_2 s_{n-2} + \sigma_3 s_{n-3}$.

U6. Atrisināt kompleksos skaitļos vienādojumu $6x^4 - 13x^3 + 12x^2 - 13x + 6 = 0$.

Atrisinājums. Dalot abas vienādojuma puses ar $x^2 > 0$, iegūstam

$$6x^2 - 13x + 12 - \frac{13}{x} + \frac{6}{x^2} = 0.$$

Sagrupējot $6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 13\left(x + \frac{1}{x}\right) + 12 = 0$ un apzīmējot $x + \frac{1}{x} = t$, iegūstam vienādojumu $6(t^2 - 2) - 13t + 12 = 0$ jeb $6t^2 - 13t = 0$. Līdz ar to $t_1 = 0$ un $t_2 = \frac{13}{6}$.

Aprēķinot atbilstošās x vērtības, iegūstam:

- $x + \frac{1}{x} = 0$, kura saknes ir $x_{1,2} = \pm 1$;
- $x + \frac{1}{x} = \frac{13}{6}$ jeb $6x^2 - 13x + 6 = 0$, kura saknes ir $x_3 = 2$ un $x_4 = \frac{1}{6}$.

U7. Atrisināt kompleksos skaitļos vienādojumu $2x^5 - 3x^4 - x^3 - x^2 - 3x + 2 = 0$.

Atrisinājums. Ievērojam, ka der vērtība $x = -1$.
Izmantojam Hornera shēmu, lai izdalītu polinomu ar binomu $(x + 1)$.

	2	**−3**	**−1**	**−1**	**−3**	**2**
−1	2	−5	4	−5	2	0

Tātad iegūstam

$$(x + 1)(2x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 5x + 2) = 0.$$

Vienādojumu $2x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 5x + 2 = 0$ dalot ar $x^2 > 0$ un sagrupējot saskaitāmos ar vienādiem koeficientiem, iegūstam $2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4 = 0$, un, apzīmējot $x + \frac{1}{x} = t$, iegūstam vienādojumu $2(t^2 - 2) - 5t + 4 = 0$ jeb $2t^2 - 5t = 0$.

Līdz ar to $t_1 = 0$ un $t_2 = \frac{5}{2}$. Aprēķinot atbilstošās x vērtības, iegūstam:

- $x + \frac{1}{x} = 0$, kura saknes ir $x_{1,2} = \pm 1$;
- $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$ jeb $2x^2 - 5x + 2 = 0$, kura saknes ir $x_3 = 2$ un $x_4 = \frac{1}{2}$.

8.8. Lineāru vienādojumu sistēmas

U1. Atrisināt vienādojumu sistēmu $\begin{cases} x + 7y + 3v + 5u = 16 \\ 8x + 4y + 6v + 2u = -16 \\ 2x + 6y + 4v + 8u = 16 \\ 5x + 3y + 7v + u = -16 \end{cases}$

Atrisinājums. Saskaitot 1. un 4. vienādojumu un saskaitot 2. un 3. vienādojumu, iegūstam

$$\begin{cases} 6x + 10y + 10v + 6u = 0 \\ 10x + 10y + 10v + 10u = 0 \end{cases}$$

No iegūtās sistēmas otrā vienādojuma atņemot pirmo vienādojumu, iegūstam $4x + 4u = 0$ jeb $u = -x$. Ievietojot iegūto vienādību pirmajā vienādojumā, iegūstam $10y + 10v = 0$ jeb $v = -y$.

Iegūtās sakarības ievietojam dotajā vienādojumu sistēmā (ievērojam, ka pēdējie divi vienādojumi sakrīt):

$$\begin{cases} -4x + 4y = 16 \\ 6x - 2y = -16 \end{cases} \text{ jeb } \begin{cases} -x + y = 4 \\ 3x - y = -8 \end{cases}$$

Saskaitot abus vienādojumus, iegūstam $2x = -4$ jeb $x = -2$ un attiecīgi $y = 2$. Tātad dotās sistēmas atrisinājums ir $(-2; 2; 2; -2)$.

U2. Aplī stāv 100 cilvēki, viens no tiem ir Sprīdītis. Visiem kopā ir 100 eiro. Katram cilvēkam ir divas reizes mazāk naudas nekā viņa kaimiņam pa labi un pretī stāvošajam cilvēkam kopā. Cik naudas ir Sprīdītim?

Atrisinājums. Aplūkojam cilvēku A, kuram ir visvairāk naudas (vai vienu no tādiem cilvēkiem, ja tādi ir vairāki). Pieņemsim, ka viņa naudas daudzums ir a, bet viņa kaimiņam pa labi B un pretī stāvošajam cilvēkam C ir attiecīgi naudas daudzumi b un c. Tad jāizpildās vienādībai $2a = b + c$. Tā kā a nav mazāks kā b un c, tad tas iespējams tikai, ja $a = b = c$. Tātad arī cilvēkiem B un C ir maksimālais naudas daudzums. Ņemot A vietā viņa kaimiņu pa labi B, līdzīgi iegūstam, ka arī pa apli nākamajam cilvēkam ir tāds pats naudas daudzums utt. Tātad visiem cilvēkiem naudas daudzumi ir vienādi; līdz ar to visiem, arī Sprīdītim, ir pa vienam eiro.

U3. Doti četri naturāli skaitļi a, b, c, d. Summām $a + b$; $a + c$; $a + d$; $b + c$; $b + d$ vērtības ir 6; 9; 11; 12; 15 (nav zināms, kurai summai ir kura vērtība). Aprēķināt summu $c + d$ un skaitļus c un d.

Atrisinājums. Ievērojam, ka

$$(a + b) + (c + d) = (a + c) + (b + d) = (a + d) + (b + c).$$

Tātad no skaitļiem 6; 9; 11; 12; 15 jāvar izveidot divus pārus, kuros ieejošo skaitļu summas ir vienādas. Tas ir iespējams tikai vienā veidā: $6 + 15 = 9 + 12$.

Līdz ar to $a + b + c + d = 21$. Tā kā $c + d$ vērtība nav dota, tad $a + b = 11$, no kā iegūstam, ka $c + d = 21 - 11 = 10$.

Skaidrs, ka visi naturālie skaitļi a, b, c, d ir dažādi (ja starp tiem būtu vienādi, tad vienādām būtu jābūt arī dažu pāru summām). Apzīmējam skaitļus a, b, c, d augošā secībā ar $x < y < z < t$. Tad mazākā divu skaitļu summa ir $x + y$, otrā mazākā ir $x + z$, lielākā ir $z + t$, otra lielākā ir $y + t$.

Tātad $x + y = 6$, $x + z = 9$, $y + t = 12$, $z + t = 15$.

Tā kā $y = 6 - x$ un $z = 9 - x$, tad $t = 12 - y = 6 + x$. Tāpēc $x + t = 6 + x + x =$ $= 6 + 2x$ un $y + z = 6 - x + 9 - x = 15 - 2x$; viena no šīm summām ir 10, otra 11 (tātad viena ir pāra skaitlis, otra – nepāra skaitlis).

Tā kā $6 + 2x$ ir pāra skaitlis un $15 - 2x$ ir nepāra skaitlis, tad $6 + 2x = 10$; no šejienes $x = 2$, $y = 4$, $z = 7$, $t = 8$. No šiem skaitļiem tikai 2 un 8 dod summā 10. Tātad $c = 2$, $d = 8$ vai $c = 8$, $d = 2$. Pārbaude rāda, ka visi uzdevuma nosacījumi izpildīti.

8.9. Saskaitīšanas paņēmiens

U1. Atrisināt vienādojumu sistēmu $\begin{cases} 2019x - 2018y = 1 \\ 2020x - 2019y = 2 \end{cases}$

Atrisinājums. No 2. vienādojuma atņemot 1. vienādojumu, iegūstam $x - y = 1$. Izsakot $x = y + 1$ un ievietojot, iegūstam $2019y + 2019 - 2018y = 1$ jeb $y = -2018$ un $x = -2017$. Tātad dotās sistēmas atrisinājums ir $(-2017;\ -2018)$.

U2. Atrisināt vienādojumu sistēmu $\begin{cases} x^2 + xy = 15 \\ y^2 + xy = 10 \end{cases}$

Atrisinājums. Saskaitot abus vienādojumus, iegūstam $x^2 + 2xy + y^2 = 25$ jeb $(x + y)^2 = 25$, no kā izriet, ka $x + y = 5$ vai $x + y = -5$. Apskatām abus gadījumus:

- ja $x + y = 5$, tad, ievērojot, ka $x(x + y) = 15$, iegūstam $x = 3$ un attiecīgi $y = 2$;
- ja $x + y = -5$, tad līdzīgi iegūstam, ka $x = -3$ un attiecīgi $y = -2$.

Tātad dotās sistēmas atrisinājums ir $(3; 2)$ un $(-3; -2)$.

U3. Atrisināt vienādojumu sistēmu $\begin{cases} a^2 + 3a + 1 = \frac{b+c}{2} \\ b^2 + 3b + 1 = \frac{a+c}{2} \\ c^2 + 3c + 1 = \frac{a+b}{2} \end{cases}$

Atrisinājums. Saskaitot visus trīs sistēmas vienādojumus, iegūstam:

$$a^2+3a+1+b^2+3b+1+c^2+3c+1=a+b+c;$$
$$(a+1)^2+(b+1)^2+(c+1)^2=0.$$

Tā kā visi trīs kreisās puses saskaitāmie ir nenegatīvi, tad vienādība ir iespējama tikai tad, ja katrs saskaitāmais ir vienāds ar nulli, tas ir, $(a+1)^2=0$, $(b+1)^2=0$, $(c+1)^2=0$. Tātad dotās vienādojumu sistēmas atrisinājums ir $a=b=c=-1$.

U4. Atrisināt reālos skaitļos vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} \dfrac{2x_1^2}{1+x_1^2}=x_2 \\ \dfrac{2x_2^2}{1+x_2^2}=x_3 \\ \dfrac{2x_3^2}{1+x_3^2}=x_1 \end{cases}$$

Atrisinājums. Apskatot doto vienādojumu sistēmu, redzams, ka visi trīs nezināmie var būt vienādi ar nulli tikai vienlaicīgi. Tātad $x_1=x_2=x_3=0$ ir dotās sistēmas atrisinājums. Apskatām gadījumu, kad neviens no nezināmajiem nav 0. Ņemot vērā, ka visu nezināmo reizinājums ir atšķirīgs no nulles, apskatām vienādojumu sistēmu, kuru iegūst, katras dotās sistēmas vienādojuma daļas vietā rakstot tai apgriezto daļu:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2x_1^2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{x_2} \\ \dfrac{1}{2x_2^2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{x_3} \\ \dfrac{1}{2x_3^2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{x_1} \end{cases}$$

Reizinot katru iegūtās sistēmas vienādojumu ar 2 un saskaitot visus vienādojumus, iegūstam:

$$\left(1+\frac{1}{x_1^2}-\frac{2}{x_1}\right)+\left(1+\frac{1}{x_2^2}-\frac{2}{x_2}\right)+\left(1+\frac{1}{x_3^2}-\frac{2}{x_3}\right)=0;$$
$$\left(1-\frac{1}{x_1}\right)^2+\left(1-\frac{1}{x_2}\right)^2+\left(1-\frac{1}{x_3}\right)^2=0.$$

Tā kā katrs saskaitāmais ir kvadrāts, tad vienādība iespējama tikai gadījumā, kad katrs saskaitāmais ir 0, no kurienes $x_1=x_2=x_3=1$.
Līdz ar to dotās sistēmas atrisinājums ir $(0;0;0)$ un $(1;1;1)$.

U5. Atrast visus iespējamos skaitļu trijniekus $(x; y; z)$, kas apmierina nosacījumu: ja kādam no nezināmajiem lielumiem pieskaita abu pārējo nezināmo reizinājumu, tad rezultātā iegūst 2.

Atrisinājums. Atbilstoši uzdevuma nosacījumam sastādām vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} x + yz = 2 \\ y + xz = 2 \\ z + xy = 2 \end{cases}$$

Atņemot no sistēmas pirmā vienādojuma otro un no otrā vienādojuma trešo, iegūstam:

$$x + yz - y - xz = 0 \quad \text{un} \quad y + xz - z - xy = 0;$$
$$(x - y)(1 - z) = 0 \text{ un } (y - z)(1 - x) = 0.$$

Apskatām katru no četriem gadījumiem.
Ja $x - y = 0$, tad $x = y$, un, ievietojot to sistēmas pirmajā un trešajā vienādojumā, iegūstam $\begin{cases} x + xz = 2 \\ z + x^2 = 2 \end{cases}$. No pirmā vienādojuma atņemot otro vienādojumu, iegūstam $x + xz - z - x^2 = 0$ jeb $(x - z)(1 - x) = 0$, no kā izriet, ka

- $x = y = z$, tad $x^2 + x - 2 = 0$, kura saknes ir $x_1 = 1$ un $x_2 = -2$;
- $x = 1$ un $y = 1$, tad arī $z = 1$.

Apskatot pārējos trīs gadījumus, iegūstam tos pašus atrisinājumus $x = y = z = 1$ un $x = y = z = -2$.

U6. Atrisināt reālos skaitļos vienādojumu sistēmu $\begin{cases} x + y^2 = y^3 \\ y + x^2 = x^3 \end{cases}$

Atrisinājums. Atņemot pirmo vienādojumu no otrā un veicot identiskus pārveidojumus, iegūstam:

$$(x^3 - y^3) - (x^2 - y^2) + (x - y) = 0;$$
$$(x - y)(x^2 + xy + y^2) - (x - y)(x + y) + (x - y) = 0;$$
$$(x - y)(x^2 + xy + y^2 - x - y + 1) = 0;$$
$$\frac{1}{2}(x - y)((x + y)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2) = 0;$$
$$(x - y)((x + y)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2) = 0.$$

Ievērojam, ka otrais reizinātājs ir 0 tikai tad, ja katrs no trim saskaitāmajiem ir 0, taču tā nevar būt, tāpēc iegūstam, ka $x = y$. Izmantojot doto vienādojumu, iegūstam $x^3 - x^2 - x = 0$ jeb $x(x^2 - x - 1) = 0$, no kurienes $x_1 = y_1 = 0$; $x_{2,3} = y_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Tātad dotās sistēmas atrisinājums ir $(0; 0)$, $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}; \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}; \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$.

8.10. Novērtējumu izmantošana uzdevumu risināšanā

U1. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu $\frac{xy}{z}+\frac{xz}{y}+\frac{yz}{x}=3$.

Atrisinājums. Izmantojot nevienādību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko, novērtējam vienādojuma kreiso pusi:

$$\frac{xy}{z}+\frac{xz}{y}+\frac{yz}{x}\geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{xy}{z}\cdot\frac{xz}{y}\cdot\frac{yz}{x}}=3\cdot\sqrt[3]{xyz}.$$

Tā kā x, y, z ir naturāli skaitļi, tad $\sqrt[3]{xyz}\geq 1$. Tātad esam ieguvuši, ka $\frac{xy}{z}+\frac{xz}{y}+\frac{yz}{x}\geq 3$.

Vienādība būs tikai tad, ja $x=y=z=1$, kas arī ir dotā vienādojuma vienīgais atrisinājums.

U2. Atrisināt veselos skaitļos vienādojumu

$$(x-y)(x+y)=x.$$

Atrisinājums. Pārveidojam vienādojumu formā $x(x-1)=y^2$.
Ja $x=0$ vai $x=1$, tad $y=0$ un atrisinājums eksistē.
Apskatām divus gadījumus:

- ja $x>1$, tad ir spēkā stingrā nevienādība $(x-1)^2<x(x-1)<x^2$. Tā kā $x(x-1)$ atrodas starp divu secīgu veselu skaitļu kvadrātiem, tad tas nevar būt vesela skaitļa kvadrāts;
- ja $x<0$, tad ir spēkā stingrā nevienādība $x^2<x(x-1)<(x-1)^2$. Tātad arī šajā gadījumā $x(x-1)$ nevar būt vesela skaitļa kvadrāts.

Līdz ar to atrisinājumi ir $(0;\ 0)$ un $(1;\ 0)$.

U3. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x^y=z\\ y^z=x\\ z^x=y\end{cases}$$

Atrisinājums. Šķirojam gadījumus.

- Ja kāds no mainīgajiem x, y, z ir 1, tad $x=y=z=1$.
- Ja divi no mainīgajiem ir lielāki nekā 1, piemēram, $x>1$ un $y>1$, tad no pirmā vienādojuma iegūstam, ka arī $z>1$. Tādā gadījumā $x<z$ (no 1. vienādojuma), $z<y$ (no 3. vienādojuma), $y<x$ (no 2. vienādojuma). Tātad esam ieguvuši, ka $x<z<y<x$ – pretruna. Tātad šajā gadījumā atrisinājuma nav.
- Līdzīgi iegūst pretrunu, ja divi no mainīgajiem ir mazāki nekā 1.

Tātad sistēmas vienīgais atrisinājums ir $x=y=z=1$.

U4. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0 \end{cases}$$

Atrisinājums. Ievērojam, ka neviens no nezināmajiem nav 0. No pirmā vienādojuma $x+y=-z$ un no otrā vienādojuma $\frac{1}{z}=-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=-\frac{x+y}{xy}=\frac{z}{xy}$, no kā izriet, ka $xy=z^2>0$.

Analoģiski iegūstam, ka $xz=y^2>0$ un $zy=x^2>0$. Tātad skaitļi x, y, z ir ar vienādām zīmēm, bet, saskaitot trīs vienādu zīmju skaitļus, summā nevar iegūt nulli. Tātad dotajai sistēmai nav atrisinājuma.

U5. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x^3+y^3=1 \\ x^4+y^4=1 \end{cases}$$

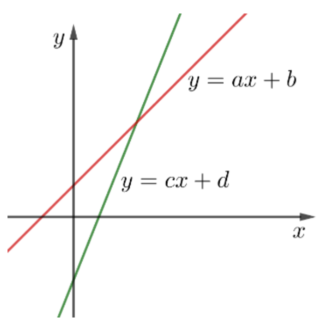
Atrisinājums. No sistēmas otrā vienādojuma izriet, ka $|x|\le 1$ un $|y|\le 1$. Ja $x\le 1$, tad arī $x^3\le 1$ un no sistēmas pirmā vienādojuma izriet, ka $y\ge 0$. Analoģiski pierādām, ka $x\ge 0$. Apskatām iespējamās x un y vērtības.

- Ja $0<x<1$ un $0<y<1$, tad $x^3>x^4$ un $y^3>y^4$, bet tādā gadījumā $x^3+y^3>x^4+y^4$, kas ir pretrunā ar doto sistēmu. Tātad šajā gadījumā sistēmai nav atrisinājuma.
- Ja $x=1$, tad $y=0$.
- Ja $x=0$, tad $y=1$.

Līdz ar to dotās sistēmas atrisinājums ir $(1;0)$ un $(0;1)$.

8.11. Lineāra funkcija

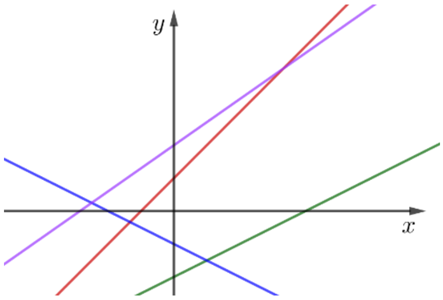
U1. Funkciju $y=ax+b$ un $y=cx+d$ grafiki doti 84. att. Vai noteikti $(c-a)(b-d)>0$?



84. attēls

Atrisinājums. Jā, noteikti. Apskatām vienādojumu $ax + b = cx + d$. Tā atrisinājums ir $x = \frac{b-d}{c-a}$. Tā kā grafiku krustpunkts atrodas pirmajā kvadrantā, tad $x > 0$ jeb $\frac{b-d}{c-a} > 0$. Iegūtā nevienādība ir ekvivalenta nevienādībai $(b-d)(c-a) > 0$, kas arī bija jāpierāda.

U2. Vai var gadīties, ka 85. att. dotās taisnes ir funkciju $y = ax + b$, $y = bx + c$, $y = cx + d$ un $y = dx + a$ grafiki?



85. attēls

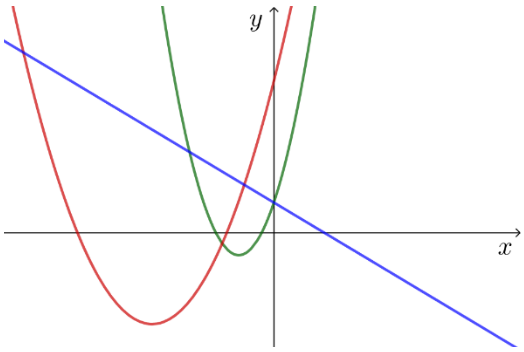
Atrisinājums. Nē, nevar. No vienas puses, a, b, c, d ir taišņu virziena koeficienti, tātad tieši vienam no tiem jābūt negatīvam, jo viena taisne ir dilstoša. No otras puses, a, b, c, d ir taišņu krustpunktu ar y asi ordinātas vērtības, tātad tieši diviem no šiem skaitļiem jābūt negatīviem, jo divas taisnes krusto y asi punktos, kuru ordinātas vērtība ir negatīva. Iegūta pretruna, tātad attēlotie grafiki nevar būt doto funkciju grafiki.

U3. Dotas funkcijas $f(x) = ax + b$ un $g(x) = cx + d$. Vai var gadīties, ka ar vērtībām $x = 2019$ un $x = 2021$ funkcijas f vērtība ir lielāka nekā atbilstošā funkcijas g vērtība, bet ar vērtību $x = 2020$ funkcijas g vērtība ir lielāka nekā f vērtība?

Atrisinājums. Nē, nevar, jo pretējā gadījumā abas taisnes krustotos divos punktos (viens krustpunkts ar abscisu starp 2019 un 2020, otrs – starp 2020 un 2021), bet tas nav iespējams, jo tās nesakrīt.

8.12. Kvadrātfunkcija

U1. Vai var gadīties, ka 86. att. ir doti funkciju $y = ax^2 + bx + c$, $y = cx^2 + bx + a$ un $y = bx + c$ grafiki? Funkciju grafiki nav zīmēti mērogā.



86. attēls

Atrisinājums. Nē, nevar. Ievērojam, ka funkcija $y = bx + c$ ir dilstoša funkcija un taisne krusto y asi punktā, kura ordinātas vērtība ir pozitīva, tātad $b < 0$.

Apskatām funkciju $y = ax^2 + bx + c$. Tā kā doto parabolu zari ir vērsti uz augšu un krustpunktu ar y asi ordinātas vērtība ir pozitīva, tad $a > 0$. Aprēķinām šīs parabolas virsotnes abscisas vērtību $x_v = -\frac{b}{2a}$. Tā kā virsotne atrodas trešajā kvadrantā, tad $x_v < 0$ un, ņemot vērā, ka $a > 0$, secinām, ka $b > 0$. Esam ieguvuši pretrunu ar to, ka $b < 0$ (lineārā funkcija dilstoša), tātad 86. att. nevar būt doti funkciju $y = ax^2 + bx + c$, $y = cx^2 + bx + a$ un $y = bx + c$ grafiki.

U2. Apskatām funkcijas $y = ax^2 + x + b$, kur a un b ir reāli skaitļi un $a + b = 2011$. Pierādīt, ka visu šādu funkciju grafikiem ir divi kopīgi punkti.

Atrisinājums. Apskatām, kādas ir funkciju vērtības, ja $x = 1$:

$$y = a + 1 + b = 1 + (a + b) = 2012.$$

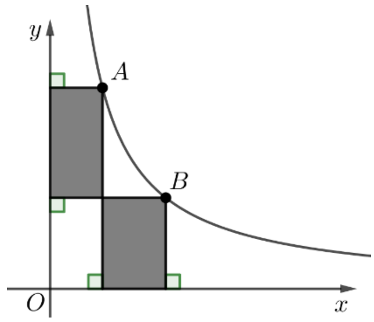
Līdzīgi apskatām, kādas ir funkciju vērtības, ja $x = -1$:

$$y = a - 1 + b = (a + b) - 1 = 2010.$$

Tātad neatkarīgi no a un b vērtībām funkcijas vērtības punktos $x = 1$ un $x = -1$ ir nemainīgas jeb punkti $(1; 2012)$ un $(-1; 2010)$ pieder pie visu minēto funkciju grafikiem.

8.13. Funkcijas īpašību izmantošana uzdevumu risināšanā

U1. Uz funkcijas $y=\frac{1}{x}$ grafika izvēlēti divi punkti A un B, un no tiem novilkti perpendikuli pret koordinātu asīm (skat. 87. att.). Pierādīt, ka iekrāsoto četrstūru laukumi ir vienādi.

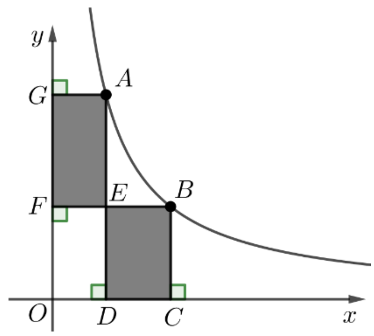


87. attēls

Atrisinājums. Aprēķinām taisnstūra $OFBC$ un $OGAD$ laukumu (skat. 88. att.):

- $S_{OFBC}=OC\cdot BC=OC\cdot\frac{1}{OC}=1$;
- $S_{OGAD}=OD\cdot AD=OD\cdot\frac{1}{OD}=1$.

Līdz ar to $S_{DEBC}=1-S_{OFED}=S_{FGAE}$, kas arī bija jāpierāda.



88. attēls

U2. Doti tādi nenulles skaitļi a, b un c, ka $a+c=\frac{b}{3}$. Pierādīt, ka $f(x)=ax^2+bx+c$ grafiks noteikti krusto x asi kādā intervāla $[-1;1]$ punktā.

Atrisinājums. Ievērojam, ka funkcijas vērtībām $f(-1)$ un $f(1)$ ir dažādas zīmes:

$$f(-1)=a-b+c=\frac{b}{3}-b=-\frac{2b}{3};$$

$$f(1)=a+b+c=\frac{b}{3}+b=\frac{4b}{3}.$$

Tādā gadījumā skaidrs, ka intervālā $[-1;\ 1]$ funkcijas grafikam ir jākrusto x ass.

U3. Dots, ka a, b un c ir dažādi skaitļi. Pierādīt, ka vienādojumam

$$(x-a)(x-b)+(x-a)(x-c)+(x-b)(x-c)=0$$

ir divas dažādas saknes.

Atrisinājums. Nezaudējot vispārīgumu, var pieņemt, ka $a<b<c$. Vienādojuma kreisās puses izteiksmi apzīmējam ar $f(x)$. Tad iegūstam:

$$f(a)=(a-b)(a-c)>0;$$
$$f(b)=(b-a)(b-c)<0;$$
$$f(c)=(c-a)(c-b)>0.$$

Tātad polinomam $f(x)$ un līdz ar to arī dotajam vienādojumam ir divas saknes; viena – intervālā $(a;b)$, otra – intervālā $(b;c)$.

U4. Dota funkcija $f(x)=x^2+px+q$. Zināms, ka vienādojumam $f(x)=0$ ir divas saknes, no kurām viena atrodas starp 0 un 1, bet otra – ne. Pierādīt, ka $f(q)\le 0$.

1. atrisinājums. Tā kā intervālā $(0;1)$ atrodas tikai viena no kvadrātvienādojuma $f(x)=0$ saknēm, tad abas vērtības $f(0)$ un $f(1)$ reizē nevar būt pozitīvas. Tāpēc $f(0)\cdot f(1)\le 0$. Iegūstam, ka

$$0\ge f(0)\cdot f(1)=q(p+q+1)=q^2+pq+q=f(q).$$

Līdz ar to esam ieguvuši, ka $f(q)\le 0$.

2. atrisinājums. Pieņemsim, ka vienādojuma $f(x)=0$ saknes ir x_1 un x_2. Izmantojot Vjeta teorēmu, iegūstam:

$$\begin{aligned} f(q)=q^2+pq+q&=x_1^2x_2^2-x_1x_2(x_1+x_2)+x_1x_2=\\ &=x_1x_2(x_1x_2-x_1-x_2+1)=x_1x_2(1-x_1)(1-x_2)=\\ &=\big(x_1(1-x_1)\big)\cdot\big(x_2(1-x_2)\big). \end{aligned}$$

No dotā secinām, ka tieši viens no reizinātājiem $\big(x_1(1-x_1)\big)$ vai $\big(x_2(1-x_2)\big)$ ir negatīvs, tāpēc reizinājums ir $\big(x_1(1-x_1)\big)\cdot\big(x_2(1-x_2)\big)\le 0$ jeb $f(q)\le 0$.

U5. Dota funkcija $f(x)=mx^2+(m-1)x+\frac{2020}{m-2019}$. Ar kādām parametra m vērtībām funkcija ir augoša intervālā $(1;2)$?

1. atrisinājums. Ievērojam, ka $m\ne 2019$. Lai funkcija būtu augoša, jāizpildās nevienādībai $f(1)<f(2)$. Atrisinām šo nevienādību:

$$m+(m-1)+\frac{2020}{m-2019}<4m+(m-1)\cdot 2+\frac{2020}{m-2019};$$

$$2m-1<6m-2 \qquad\Rightarrow\qquad m>\frac{1}{4}.$$

Vēl jāgarantē, ka parabolas virsotne neatrodas intervālā $(1;2)$. Tā kā m vērtības ir pozitīvas, tad parabolas zari ir vērsti uz augšu un, lai dotajā intervālā funkcija būtu augoša, jāizpildās nevienādībai $x_v \leq 1$ jeb $\frac{1-m}{2m} \leq 1$. Reizinot nevienādību ar $2m > 0$, iegūstam $1 - m \leq 2m$ jeb $m \geq \frac{1}{3}$. Līdz ar to funkcija ir augoša intervālā $(1;2)$, ja $m \in \left[\frac{1}{3}; 2019\right) \cup (2019; +\infty)$.

2. atrisinājums. Ievērojam, ka $m \neq 2019$. Ja $m < 0$, tad parabolas virsotnes abscisa $\frac{1-m}{2m} < 0$, kas nozīmē, ka funkcija nav augoša dotajā intervālā. Ja $m = 0$, tad iegūstam $f(x) = -x - \frac{2020}{2019}$, un tā ir dilstoša funkcija. Ja $m > 0$, tad parabolas zari ir vērsti uz augšu un, lai dotajā intervālā funkcija būtu augoša, jāizpildās nevienādībai $\frac{1-m}{2m} \leq 1$. Reizinot nevienādību ar $2m > 0$, iegūstam $1 - m \leq 2m$ jeb $m \geq \frac{1}{3}$. Līdz ar to funkcija ir augoša intervālā $(1;2)$, ja $m \in \left[\frac{1}{3}; 2019\right) \cup (2019; +\infty)$.

U6. Dots, ka x_1 ir vienādojuma $x^2 + px + q = 0$ sakne, bet x_2 ir vienādojuma $-x^2 + px + q = 0$ sakne. Pierādīt, ka vienādojumam $\frac{1}{3}x^2 + px + q = 0$ noteikti ir sakne x_3, kas atrodas starp x_1 un x_2.

Atrisinājums. Apskatām kvadrātfunkciju $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + px + q$ un aprēķinām tās vērtību punktā x_1 un x_2:

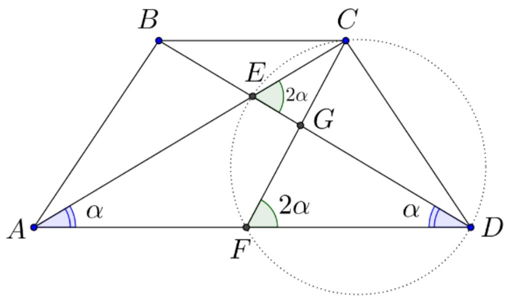
$$f(x_1) = \frac{1}{3}x_1^2 + px_1 + q = x_1^2 + px_1 + q - \frac{2}{3}x_1^2 = 0 - \frac{2}{3}x_1^2 = -\frac{2}{3}x_1^2 \leq 0;$$
$$f(x_2) = \frac{1}{3}x_2^2 + px_2 + q = -x_2^2 + px_2 + q + \frac{4}{3}x_2^2 = 0 + \frac{4}{3}x_2^2 = \frac{4}{3}x_2^2 \geq 0.$$

Tā kā vienā no šiem punktiem polinoma vērtība ir negatīva vai vienāda ar 0, bet otrā – nenegatīva, pie tam kvadrātfunkcija ir nepārtraukta, tad starp šiem punktiem ir arī tāds punkts x_3, kurā funkcija $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + px + q$ pieņem vērtību 0. Šis punkts x_3 ir vienādojuma $\frac{1}{3}x^2 + px + q = 0$ sakne, kas atrodas starp punktiem x_1 un x_2.

8.14. Leņķi riņķa līnijā

U1. Vienādsānu trapeces $ABCD$ sānu malas ir AB un CD, bet diagonāles AC un BD krustojas punktā E. Ap trijstūri CDE apvilktā riņķa līnija krusto garāko pamatu AD iekšējā punktā F. Nogriežņu CF un BD krustpunkts ir G. Noteikt $\sphericalangle CGD$ lielumu, ja $\sphericalangle CAD = \alpha$.

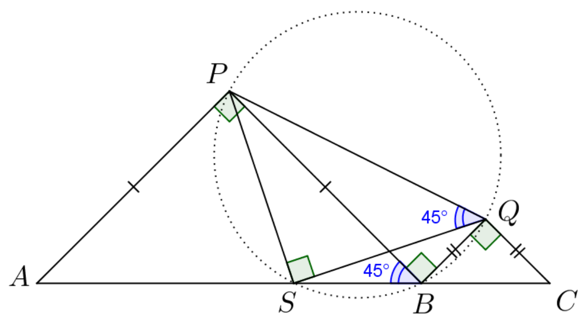
Atrisinājums. Tā kā trapece $ABCD$ ir vienādsānu, tad arī $\sphericalangle ADE = \alpha$ (skat. 89. att.). No trijstūra AED iegūstam, ka $\sphericalangle AED = 180° - 2\alpha$. Pēc blakusleņķu īpašības $\sphericalangle CED = 2\alpha$. Punkti C, E, F, D atrodas uz vienas riņķa līnijas, tāpēc $\sphericalangle CED = \sphericalangle CFD = 2\alpha$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz vienu loku CD. No trijstūra FGD iegūstam, ka $\sphericalangle CGD = 3\alpha$ kā ārējais leņķis.



89. attēls

U2. Izliektā četrstūrī $APQC$ uz malas AC izvēlēts punkts B tā, ka trijstūri APB un BQC ir vienādsānu taisnleņķa trijstūri ar pamatiem attiecīgi AB un BC. Ap trijstūri PBQ apvilktā riņķa līnija vēlreiz krusto taisni AC punktā S. Pierādīt, ka $PS = SQ$.

Atrisinājums. Tā kā trijstūri APB un BQC ir vienādsānu taisnleņķa trijstūri, tad $\sphericalangle ABP = \sphericalangle CBQ = 45°$ (skat. 90. att.). Tāpēc $\sphericalangle PBQ = 180° - \sphericalangle ABP - \sphericalangle CBQ = 90°$. Savukārt $\sphericalangle PSQ = \sphericalangle PBQ = 90°$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz vienu un to pašu loku PQ. Varam pieņemt, ka S pieder pie nogriežņa AB (gadījums, kad S pieder pie nogriežņa BC, risināms līdzīgi). Tad $\sphericalangle PQS = \sphericalangle PBS = 45°$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz vienu loku PS. Līdz ar to trijstūris PSQ ir vienādsānu taisnleņķa ar virsotni punktā S. Tāpēc $PS = SQ$.



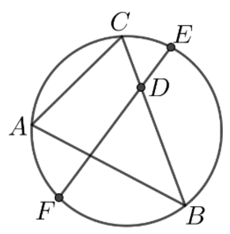
90. attēls

U3. Trijstūrim $ABC,\ AC < BC$ apvilkta riņķa līnija. Punkts E ir loka ACB viduspunkts. Uz nogriežņa BC atlikts tāds punkts D, ka $BD = AC$. Stars ED krusto riņķa līniju punktā F (skat. 91. att.). Pierādīt, ka $AF||BC$.

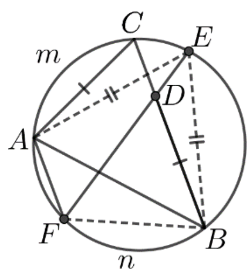
Atrisinājums. Ievērojam, ka $\Delta CAE = \Delta DBE$ (skat. 92. att.) pēc pazīmes mlm, jo

- no ievilkto leņķu īpašībām $\sphericalangle CAE = \sphericalangle CBE = \sphericalangle DBE$;
- tā kā loki, uz kuriem balstās hordas AE un BE, ir vienādi (jo E ir loka ACB viduspunkts), tad $AE = BE$;
- $AC = BD$ pēc dotā.

Tātad $\sphericalangle CEA = \sphericalangle DEB = \sphericalangle FEB$. Tā kā vienādi ievilktie leņķi balstās uz vienādiem lokiem, tad loki $\widetilde{AmC}$ un $\widetilde{FnB}$ ir vienādi. Ja loki starp divām hordām ir vienādi, tad hordas ir paralēlas; tātad $AF||BC$, kas arī bija jāpierāda.



91. attēls



92. attēls

8.15. Ar riņķa līniju saistītie nogriežņi un taisnes

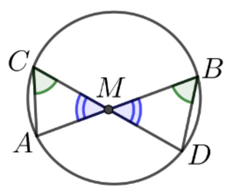
U1. Pierādīt hordu īpašību. Ja divas hordas AB un CD krustojas punktā M, tad vienas hordas nogriežņu reizinājums ir vienāds ar otras hordas nogriežņu reizinājumu:

$$AB \cdot MB = CM \cdot MD.$$

Pierādījums. Ievērojam, ka $\Delta ACM \sim \Delta DBM$ pēc pazīmes $\ell\ell$ (skat. 93. att.), jo

- $\sphericalangle ACD = \sphericalangle DBA$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz vienu un to pašu loku;
- $\sphericalangle AMC = \sphericalangle DMB$ kā krustleņķi.

Tātad to malas ir proporcionālas $\frac{CM}{MB} = \frac{AM}{MD}$ jeb $AM \cdot MB = CM \cdot MD$, kas arī bija jāpierāda.



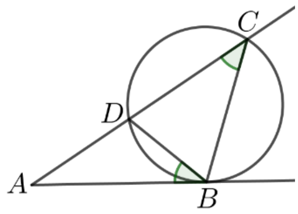
93. attēls

U2. Pierādīt teorēmu par pieskari un sekanti. Ja pieskare un sekante ir novilktas no viena punkta, tad pieskares nogriežņa garuma kvadrāts ir vienāds ar visa sekantes nogriežņa garuma un sekantes ārējās daļas nogriežņa garuma reizinājumu: $AB^2 = AD \cdot AC$.

Pierādījums. Novelkam hordas BD un BC (skat. 94. att.). Ievērojam, ka $\Delta ABC \sim \Delta ADB$ pēc pazīmes $\ell\ell$, jo

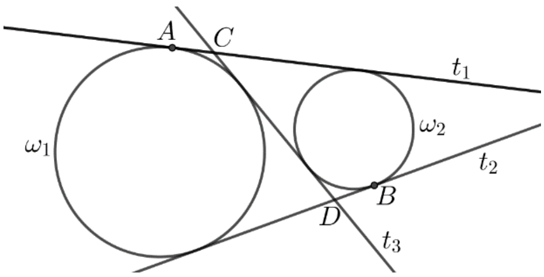
- $\sphericalangle ABD = \sphericalangle BCD$ kā ievilktais un hordas-pieskares leņķi, kas balstās uz vienu un to pašu loku;
- $\sphericalangle A$ ir kopīgs.

Tātad to malas ir proporcionālas $\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AD}$ jeb $AB^2 = AC \cdot AD$, kas arī bija jāpierāda.



94. attēls

U3. Plaknē dotas divas riņķa līnijas ω_1 un ω_2, kurām nav kopīgu punktu un kuru rādiusi nav vienāda garuma. Novilktas trīs pieskares t_1, t_2 un t_3, kas katra pieskaras abām riņķa līnijām – abas riņķa līnijas atrodas vienā un tajā pašā t_1 pusē, vienā un tajā pašā t_2 pusē, bet katra savā t_3 pusē (skat. 95. att.). Taisne t_1 pieskaras ω_1 punktā A un krusto t_3 punktā C, taisne t_2 pieskaras ω_2 punktā B un krusto t_3 punktā D. Pierādīt, ka $AC = BD$.



95. attēls

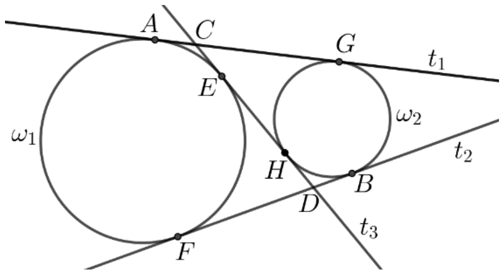
Atrisinājums. Ar E, F, G un H apzīmējam pārējos pieskaršanās punktus (skat. 96. att.). Tā kā no viena punkta vilktu pieskaru nogriežņi ir vienādi, tad iegūstam vienādības: $AC = CE, CH = CG, DH = DB, DE = DF$.

Tātad

- $FB = FD + DB = DE + DB = (EH + HD) + DB = EH + 2DB$ un, izsakot BD, iegūstam $BD = \frac{1}{2}(FB - EH)$;

- $AG = AC + CG = AC + CH = AC + (CE + EH) = 2AC + EH$ un, izsakot nogriezni AC, iegūstam $AC = \frac{1}{2}(AG - EH)$.

Ar X apzīmējam pieskaru t_1 un t_2 krustpunktu, tad $XG = XB$ un $XA = XF$. Līdz ar to $AG = FB$, no kā izriet, ka $AC = BD$.



96. attēls

8.16. Apvilkti četrstūri

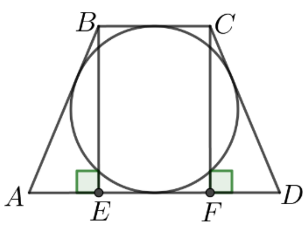
U1. Vienādsānu trapecē $ABCD$, kuras pamati $AD = a$ un $BC = b$, ievilkta riņķa līnija. Pierādīt, ka trapeces augstums $h = \sqrt{ab}$.

Atrisinājums. Tā kā vienādsānu trapecē ievilkta riņķa līnija, tad tās pretējo malu garumu summas ir vienādas un $AB = CD = \frac{a+b}{2}$. Novelkam trapeces augstumus BE un CF (skat. 97. att.). Simetrijas dēļ $AE = FD = \frac{AD-BC}{2} = \frac{a-b}{2}$. Pēc Pitagora teorēmas taisnleņķa trijstūrī AEB iegūstam

$$BE^2 = AB^2 - AE^2;$$

$$h^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab.$$

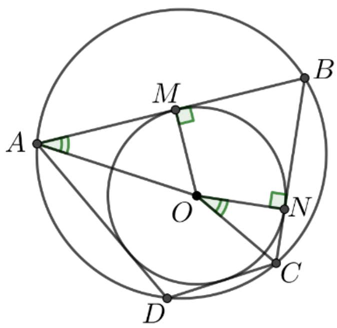
Līdz ar to esam ieguvuši, ka $h^2 = ab$ jeb $h = \sqrt{ab}$.



97. attēls

U2. Četrstūris $ABCD$ ir gan ievilkts, gan apvilkts. Punkti M un N ir attiecīgi malu AB un BC pieskaršanās punkti ievilktajai riņķa līnijai. Pierādīt, ka $AM \cdot CN = r^2$, kur r ir ievilktās riņķa līnijas rādiuss.

Atrisinājums. Ievilktās riņķa līnijas centru apzīmējam ar O. Apvilkta četrstūra pretējo leņķu summa ir 180°, tāpēc $\sphericalangle BAD + \sphericalangle BCD = 180°$ (skat. 98. att.). Tā kā ievilktās riņķa līnijas centrs ir bisektrišu krustpunktā, tad $\sphericalangle BAO + \sphericalangle BCO = 90°$. Ievērojot, ka $OM \perp AB$ un $ON \perp BC$, iegūstam $\sphericalangle MAO = 90° - \sphericalangle NCO = \sphericalangle NOC$. Tātad $\Delta AMO \sim \Delta ONC$ pēc pazīmes $\ell\ell$ un to malas ir proporcionālas $\frac{AM}{OM} = \frac{ON}{CN}$ jeb $AM \cdot CN = r^2$.

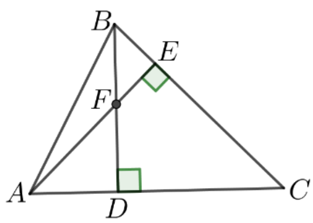


98. attēls

8.17. Ievilkti četrstūri

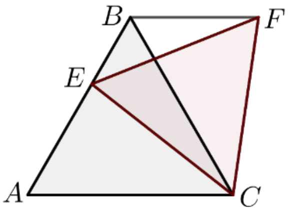
U1. Šaurleņķu trijstūrī ABC novilktie augstumi BD un AE krustojas punktā F. Pierādīt, ka punkti E, C, D, F atrodas uz vienas riņķa līnijas.

Atrisinājums. Tā kā BD un AE ir augstumi, tad $\sphericalangle BDC = \sphericalangle AEC = 90°$ (skat. 99. att.). Līdz ar to $\sphericalangle FDC + \sphericalangle FEC = 180°$ un ap četrstūri $EFDC$ var apvilkt riņķa līniju jeb punkti E, C, D, F atrodas uz vienas riņķa līnijas.



99. attēls

U2. Trijstūri ABC un CEF ir vienādmalu trijstūri (skat. 100. att.). Pierādīt, ka $BF||AC$.

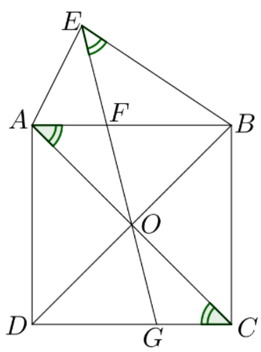


100. attēls

Atrisinājums. Tā kā $\sphericalangle EBC = \sphericalangle EFC = 60°$, tad ap četrstūri $EBFC$ var apvilkt riņķa līniju. Tāpēc $\sphericalangle FBC = \sphericalangle FEC = 60°$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz vienu un to pašu loku. Ievērojam, ka $\sphericalangle FBA + \sphericalangle BAC = 120° + 60° = 180°$, tātad $BF||AC$, jo iekšējo vienpus-leņķu summa ir 180°.

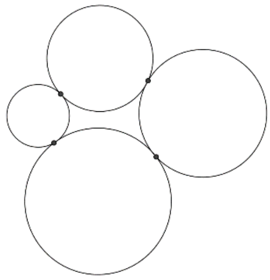
U3. Uz kvadrāta $ABCD$ malas AB kā pamata uz kvadrāta ārpusi konstruēts trijstūris AEB. Taisne, kas vilkta no E caur kvadrāta diagonāļu krustpunktu O, krusto kvadrāta malu AB punktā F un malu DC – punktā G. Zināms, ka $\sphericalangle OEB = \sphericalangle OCG$. Pierādīt, ka trijstūris AEB ir taisnleņķa.

Atrisinājums. Kvadrāta pretējās malas AB un CD ir paralēlas, tāpēc $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ACD$ kā iekšējie šķērsleņķi (skat. 101. att.).
Punkti A, E, B, O atrodas uz vienas riņķa līnijas ω, jo $\sphericalangle BAO = \sphericalangle OEB$. Tā kā kvadrāta diagonāles ir perpendikulāras, tad $\sphericalangle AOB = 90°$; no kā izriet, ka AB ir riņķa līnijas ω diametrs. Tātad $\sphericalangle AEB = 90°$ kā ievilktais leņķis, kas balstās uz diametru. Līdz ar to esam pierādījuši, ka trijstūris AEB ir taisnleņķa.



101. attēls

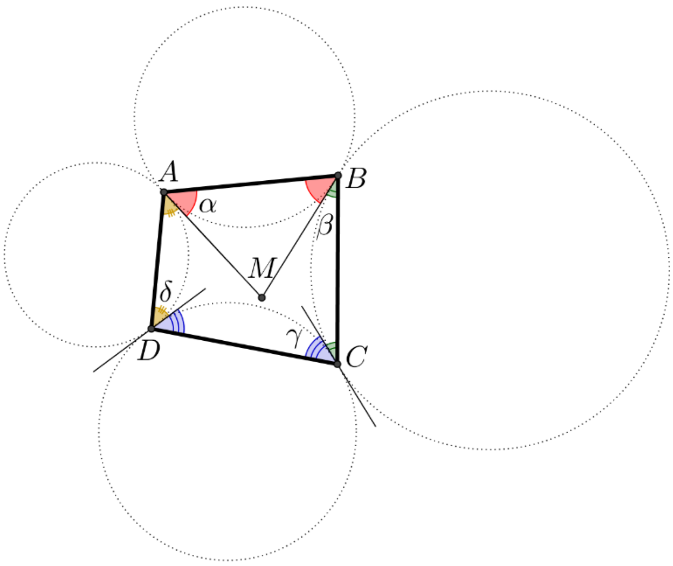
U4. Četras riņķa līnijas ārēji pieskaras tā, kā parādīts 102. att. Pierādīt, ka četrstūrim, ko veido riņķa līniju pieskaršanās punkti, var apvilkt riņķa līniju.



102. attēls

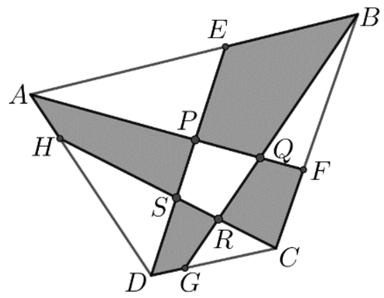
Atrisinājums. Riņķa līniju pieskaršanās punktus apzīmējam ar A, B, C un D (skat. 103. att.). Novelkam doto riņķa līniju kopīgās pieskares AM un BM. Trijstūris AMB ir vienādsānu, jo $AM = MB$ kā riņķa līnijas pieskaru nogriežņi, kas novilkti no punkta ārpus tās. Līdz ar to $\sphericalangle MAB = \sphericalangle MBA = \alpha$ kā leņķi pie pamata vienādsānu trijstūrī. Līdzīgi iegūstam atlikušo leņķu pāru vienādības.
Ievērojam, ka $\sphericalangle DAB + \sphericalangle ABC + \sphericalangle BCD + \sphericalangle CDA = 2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta = 360°$, no kā iegūstam, ka $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180°$. Tā kā $\sphericalangle DAB + \sphericalangle BCD = \alpha + \beta + \gamma + \delta = 180°$, tad četrstūrim $ABCD$ var apvilkt riņķa līniju, kas arī bija jāpierāda.

Piezīme. Leņķu vienādību var pierādīt arī, izmantojot hordas-pieskares leņķi.



103. attēls

U5. Izliektā četrstūrī $ABCD$ virsotnes savienotas ar patvaļīgiem malu iekšējiem punktiem (skat. 104. att.). Vai iespējams ap katru iekrāsoto četrstūri apvilkt riņķa līniju?



104. attēls

Atrisinājums. Nē, nav iespējams. Pieņemsim pretējo, ka ap katru iekrāsoto četrstūri var apvilkt riņķa līniju. Izmantojot, ka ievilkta četrstūra pretējo leņķu summa ir 180°, iegūstam:

- $\sphericalangle PAH = 180° - \sphericalangle PSH = \sphericalangle PSR$ (no četrstūra $APSH$);
- $\sphericalangle EBQ = 180° - \sphericalangle EPQ = \sphericalangle QPS$ (no četrstūra $EBQP$);
- $\sphericalangle FCR = 180° - \sphericalangle FQR = \sphericalangle PQR$ (no četrstūra $CRQF$);
- $\sphericalangle GDS = 180° - \sphericalangle GRS = \sphericalangle QRS$ (no četrstūra $DSRG$).

Saskaitot iegūtās vienādības, iegūstam
$$\sphericalangle PAH + \sphericalangle EBQ + \sphericalangle FCR + \sphericalangle GDS = \sphericalangle PSR + \sphericalangle QPS + \sphericalangle PQR + \sphericalangle QRS.$$
Tā kā četrstūra iekšējo leņķu summa ir 360°, tad
$$\sphericalangle PSR + \sphericalangle QPS + \sphericalangle PQR + \sphericalangle QRS = 360°;$$
bet $\sphericalangle PAH + \sphericalangle EBQ + \sphericalangle FCR + \sphericalangle GDS < \sphericalangle BAD + \sphericalangle ABC + \sphericalangle BCD + \sphericalangle CDA = 360°$.
Esam ieguvuši pretrunu, tātad pieņēmums ir bijis aplams un ap katru iekrāsoto četrstūri nav iespējams apvilkt riņķa līniju.

8.18. Aksiālā un centrālā simetrija

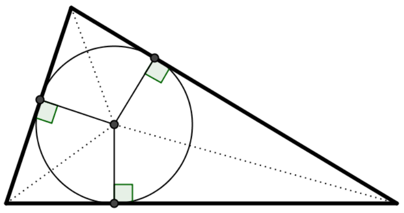
U1. Pierādīt, ka jebkuru trijstūri a) ar trim, b) ar diviem nogriežņiem var sadalīt trīs daļās tā, ka katrai no daļām ir simetrijas ass.

Atrisinājums

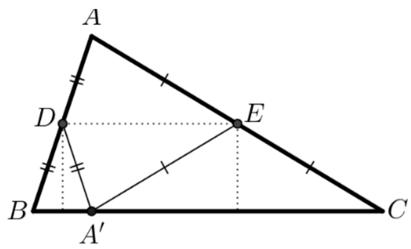
a) Novelkot ievilktās riņķa līnijas rādiusus pret visām trim trijstūra malām, tas tiek sadalīts trīs četrstūros (skat. 105. att.). Katram no tiem simetrijas ass ir dotā trijstūra bisektrise (attēlā atzīmēta ar pārtrauktu līniju).

b) Trijstūra ABC garāko malu apzīmēsim ar BC, malu AB un AC viduspunktus – attiecīgi ar D un E (skat. 106. att.). Attēlojot virsotni A simetriski pret viduslīniju DE, tās projekcija A' atrodas uz malas BC. Simetrijas dēļ trijstūri BDA' un CEA' ir vienādsānu –

tātad simetrijas ass tajos ir augstums pret pamatu. Četrstūris $ADA'E$ pēc konstrukcijas ir simetrisks pret DE. Tātad divi meklētie nogriežņi ir DA' un EA'.



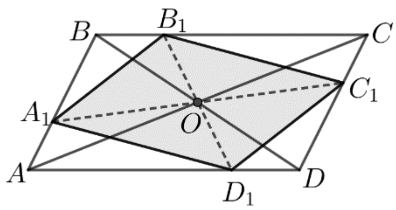
105. attēls



106. attēls

U2. Uz paralelograma $ABCD$ malām AB, BC, CD, DA izvēlēti attiecīgi punkti A_1, B_1, C_1, D_1 tā, ka arī $A_1B_1C_1D_1$ ir paralelograms. Pierādīt, ka abu paralelogramu centri sakrīt.

Atrisinājums. Paralelograma $ABCD$ diagonāļu krustpunktu apzīmējam ar O (skat. 107. att.). Paralelograma diagonāļu krustpunkts ir tā simetrijas centrs. Simetrijā pret punktu O punktu A_1 un B_1 attēli ir attiecīgi punkti A_2 un B_2, kas atrodas uz malām CD un AD. No centrālās simetrijas īpašībām izriet, ka $A_1B_1 = A_2B_2$ un $A_1B_1 || A_2B_2$. Tātad trijstūriem B_2A_2D un D_1C_1D ir atbilstoši paralēlas malas un $B_2A_2 = A_1B_1 = D_1C_1$. Līdz ar to $B_2 = D_1$ un $A_2 = C_1$, tāpēc esam pamatojuši, ka O ir arī $A_1B_1C_1D_1$ simetrijas centrs.



107. attēls

8.19. Paralēlā pārnese

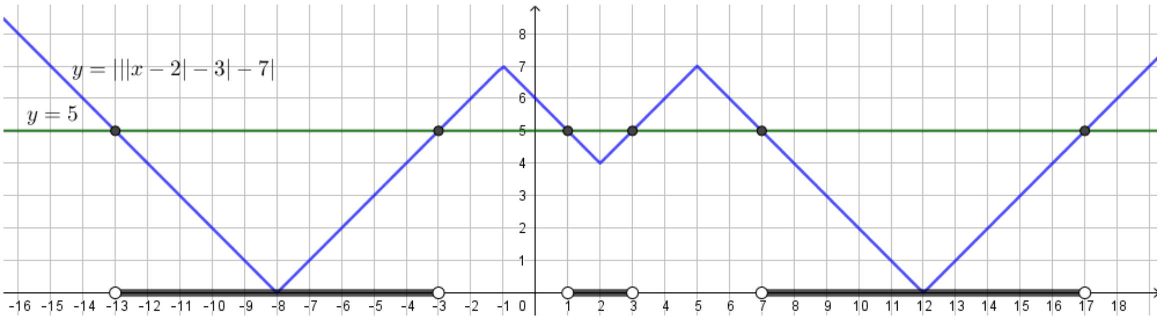
U1. Atrisināt nevienādību $\left|\left||x-2|-3\right|-7\right| < 5$.

1. atrisinājums. Doto nevienādību var risināt, pakāpeniski zīmējot funkciju $y = |x-2|$, $y = |x-2|-3$, $y = ||x-2|-3|$, $y = ||x-2|-3|-7$, $y = |||x-2|-3|-7|$ grafikus un ievērojot, ka funkcijas

- $y = f(x) - a$, kur $a > 0$, grafiku iegūst, funkcijas $y = f(x)$ grafiku pārbīdot paralēli Oy asij par a vienībām uz leju;

- $y = |f(x)|$ grafiku iegūst, nemainot to grafika $y = f(x)$ daļu, kur $f(x) \geq 0$, un to grafika daļu, kur $f(x) < 0$, attēlojot simetriski attiecībā pret Ox asi.

Rezultātā iegūst 108. att. doto grafiku. Atbildi nolasa no grafika, atrodot krustpunktus ar taisni $y = 5$ un izvēloties tos intervālus, kur grafiks atrodas zem taisnes $y = 5$.
Līdz ar to $x \in (-13; -3) \cup (1; 3) \cup (7; 17)$.



108. attēls

2. atrisinājums. Tā kā moduļa vērtība ir mazāka nekā 5, tad

$$-5 < \big||x-2|-3\big| - 7 < 5 \text{ jeb } 2 < \big||x-2|-3\big| < 12.$$

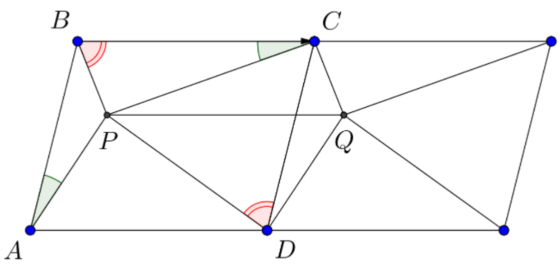
Iespējami divi gadījumi:

1) $2 < |x-2| - 3 < 12$ jeb $5 < |x-2| < 15$, un atkal iespējami divi gadījumi:
   a) $5 < x - 2 < 15$ jeb $7 < x < 17$;
   b) $-15 < x - 2 < -5$ jeb $-13 < x < -3$;

2) $-12 < |x-2| - 3 < -2$ jeb $-9 < |x-2| < 1$, un, tā kā modulis ir nenegatīvs, tad $-1 < x - 2 < 1$ jeb $1 < x < 3$.

U2. Paralelograma $ABCD$ iekšpusē atzīmēts punkts P tā, ka $\sphericalangle PAB = \sphericalangle PCB$. Pierādīt, ka $\sphericalangle PBC = \sphericalangle PDC$.

Atrisinājums. Apzīmējam $\sphericalangle PAB = \sphericalangle PCB = \alpha$. Paralelogramu $ABCD$ paralēli pārnesīsim par vektoru $\overrightarrow{BC}$ (skat. 109. att.).



109. attēls

Ievērojam, ka $PBCQ$ ir paralelograms, jo tā pretējās malas BP un CQ ir vienāda garuma un paralēlas pēc konstrukcijas. Tad $\sphericalangle CPQ = \sphericalangle BCP = \alpha$ kā šķērsleņķi pie diagonāles. Ievērojam, ka $\sphericalangle BAP = \sphericalangle CDQ = \alpha$ pēc konstrukcijas. Ap četrstūri $DPCQ$ var apvilkt riņķa līniju, jo vienādi leņķi $\sphericalangle CPQ$ un $\sphericalangle CDQ$ balstās uz CQ. Tātad $\sphericalangle PDC = \sphericalangle PQC$, jo abi ir ievilktie leņķi, kas balstās uz hordu PC. Tā kā paralelograma $PBCQ$ pretējie leņķi ir vienādi, tad $\sphericalangle PQC = \sphericalangle PBC$. Līdz ar to esam ieguvuši, ka $\sphericalangle PBC = \sphericalangle PDC$, kas arī bija jāpierāda.

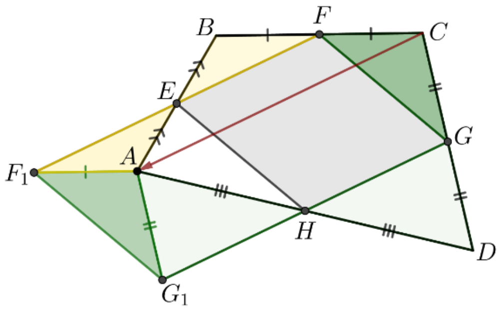
U3. Pierādīt, ka katru izliektu četrstūri var sagriezt piecās daļās, no kurām iespējams izveidot divus paralelogramus tā, ka nekādas divas daļas nepārklājas.

Atrisinājums. Četrstūra malu AB, BC, CD, DA viduspunktus apzīmējam attiecīgi ar E, F, G, H. Nogriežņi EF, FG, GH, EH sadala doto četrstūri piecās daļās.

Pamatosim, ka no iegūtajām piecām daļām var salikt divus paralelogramus.
Tā kā nogriežņi EF un HG ir attiecīgi trijstūru ABC un ADC viduslīnijas, tad $EF = HG$ un $EF || HG$. Tātad četrstūris $EFGH$ ir paralelograms, jo tā divas pretējās malas ir vienādas un paralēlas.
Trijstūri FCG pārnesam paralēli par $\overrightarrow{CA}$, tad tas attēlosies par trijstūri F_1AG_1 (skat. 110. att.). Ievērojam, ka četrstūris F_1EHG_1 ir paralelograms, jo tā pretējās mals EH un F_1G_1 ir vienādas un paralēlas. Vēl jāpamato, ka atbilstošās daļas ir vienādas:

- $\Delta EBF = \Delta EAF_1$ pēc pazīmes $m\ell m$, jo $EB = EA$, $\sphericalangle EBF = \sphericalangle EAF_1$ (kā iekšējie šķērsleņķi pie paralēlām taisnēm BF un F_1A, kuras krusto AB), $BF = FC = F_1A$;
- $\Delta HDG = \Delta HAG_1$ pēc pazīmes $m\ell m$, jo $HD = HA$, $\sphericalangle HDG = \sphericalangle HAG_1$ (kā iekšējie šķērsleņķi pie paralēlām taisnēm CD un G_1A, kuras krusto AD), $DG = GC = G_1A$.

Tātad jebkuru izliektu četrstūri var sagriezt piecās daļās un no tām salikt divus paralelogramus.



110. attēls

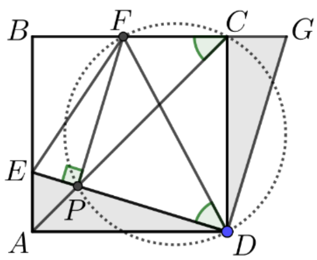
8.20. Pagrieziens

U1. Dots, ka $ABCD$ ir kvadrāts un E ir malas AB iekšējais punkts. Nogriežņi AC un DE krustojas punktā P. Perpendikuls, kas no P vilkts pret DE, krusto malu BC punktā F. Pierādīt, ka $EF = AE + FC$.

Atrisinājums. Veicam pagriezienu ap punktu D par 90° pulksteņrādītāju kustības virzienā (skat. 111. att.). Tad ED attēlojas par GD, kas nozīmē, ka $ED = GD$ un $\sphericalangle EDG = 90°$. Ievērojam, ka $AE = CG$ pēc konstrukcijas.
Ap $DPFC$ var apvilkt riņķa līniju, jo $\sphericalangle FPD + \sphericalangle FCD = 180°$. Tādā gadījumā $\sphericalangle PDF = \sphericalangle PCF = 45°$, jo balstās uz vienu un to pašu loku. Tāpēc

$$\sphericalangle FDG = \sphericalangle EDG - \sphericalangle PDF = 90° - 45° = 45°.$$

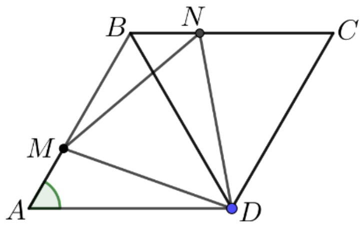
Iegūstam, ka $\Delta EDF = \Delta GDF$ pēc pazīmes $m\ell m$, tātad $EF = GF = GC + CF = AE + CF$, kas arī bija jāpierāda.



111. attēls

U2. Dots rombs $ABCD$, kuram $\sphericalangle BAD = 60°$. Taisne krusto romba malas AB un BC punktos M un N tā, ka $BM + BN = AB$. Pierādīt, ka trijstūris DMN ir regulārs.

Atrisinājums. Tā ka romba leņķa lielums ir 60°, tad trijstūri BDC un BAD ir regulāri. Aplūkojam pagriezienu ap punktu D par 60° pulksteņrādītāju kustības virzienā. Šajā pagriezienā punkts A attēlojas par B, punkts B – par C un AB – par BC (skat. 112. att.).
No tā, ka $BM + BN = AB = BC$, izriet, ka $AM = BN$, bet tādā gadījumā M attēlojas par punktu M_1, kas atrodas uz BC, un $BM_1 = AM$. Tātad punkts M_1 sakrīt ar N. Tātad $DM = DN$ un $\sphericalangle MDN = 60°$. Līdz ar to trijstūris MDN ir regulārs.

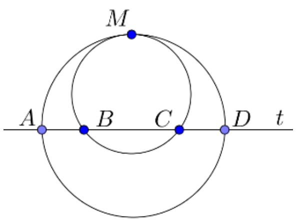


112. attēls

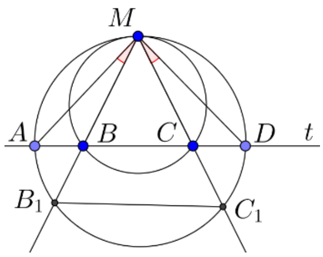
8.21. Homotētija

U1. Divas riņķa līnijas iekšēji pieskaras punktā M. Taisne t krusto tās punktos A, B, C, D (skat. 113. att.). Pierādīt, ka $\sphericalangle AMB = \sphericalangle CMD$.

Atrisinājums. Pagarinām MB un MC līdz krustpunktiem B_1 un C_1 ar ārējo riņķa līniju (skat. 114. att.). Tā kā abas riņķa līnijas ir homotētiskas ar centru M, tad B_1 un C_1 ir atbilstoši punktu B un C attēli šajā homotētijā; tātad taisne B_1C_1 ir taisnes BC attēls, tāpēc $B_1C_1 || BC$. Tāpēc loki AB_1 un C_1D ir vienādi un leņķi, kas uz šiem lokiem balstās, ir vienādi.



113. attēls

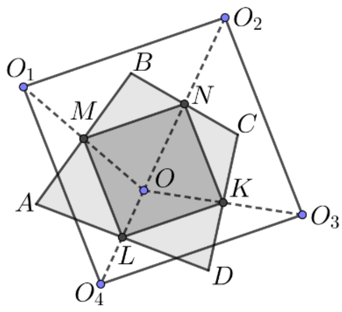


114. attēls

U2. Dots izliekts četrstūris $ABCD$, kura laukums ir S. Tā iekšpusē atlikts patvaļīgs punkts O. Aprēķināt laukumu četrstūrim, kura virsotnes ir punkta O simetriskie punkti attiecībā pret dotā četrstūra malu viduspunktiem.

Atrisinājums. Četrstūra malu AB, BC, CD, DA viduspunktus apzīmējam attiecīgi ar M, N, K, L un punktam O simetriskos punktus attiecībā pret četrstūra $ABCD$ malu viduspunktiem – ar O_1, O_2, O_3, O_4 (skat. 115. att.). Jau pierādījām (skat. 7.2. apakšnodaļas U3. uzdevumu), ka $S_{MNKL} = \frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{1}{2}S$.

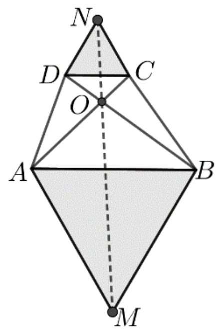
Homotētijā ar centru punktā O un koeficientu 2 četrstūris $MNKL$ attēlojas par četrstūri $O_1O_2O_3O_4$, tāpēc tā laukums ir $4 \cdot S_{MNKL} = 2S$.



115. attēls

U3. Uz trapeces $ABCD$ pamatiem AB un CD ārēji konstruēti vienādsānu trijstūri ABM un CDN. Pierādīt, ka taisne MN iet caur trapeces diagonāļu krustpunktu.

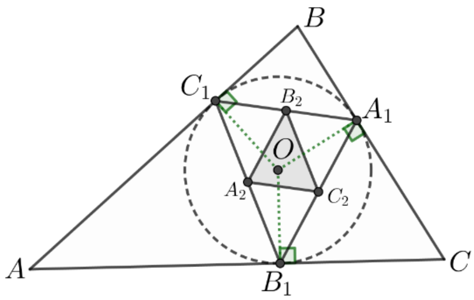
Atrisinājums. Diagonāļu AC un BD krustpunktu apzīmējam ar O. Homotētijā ar centru punktā O un koeficientu $\frac{OA}{OC}$ punkts A attēlojas par C, bet B – par D (skat. 116. att.). Šajā homotētijā trijstūris ABM attēlojas par trijstūri CDN, bet tas nozīmē, ka punkti N un M atrodas uz vienas taisnes, kas iet caur homotētijas centru O.



116. attēls

U4. Šaurleņķu trijstūrī ABC ievilktā riņķa līnija pieskaras tā malām AB, BC, CA attiecīgi punktos C_1, A_1 un B_1. No nogriežņu A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 viduspunktiem vilkti perpendikuli attiecīgi pret AB, BC, CA. Pierādīt, ka šie perpendikuli krustojas vienā punktā.

Atrisinājums. Ar A_2, B_2, C_2 apzīmējam malu C_1B_1, C_1A_1, A_1B_1 viduspunktus (skat. 117. att.). Trijstūris $A_2B_2C_2$ ir homotētisks trijstūrim $A_1B_1C_1$ ar homotētijas centru trijstūra $A_1B_1C_1$ mediānu krustpunktā un koeficientu $\left(-\frac{1}{2}\right)$.



117. attēls

Šajā homotētijā

- OA_1 attēlojas par perpendikulu, kas vilkts no A_2 pret malu BC, jo taisne homotētijā attēlojas par tai paralēlu taisni;

- OB_1 attēlojas par perpendikulu, kas vilkts no B_2 pret malu AC,
- OC_1 attēlojas par perpendikulu, kas vilkts no C_2 pret malu AB.

Tā kā OA_1, OB_1 un OC_1 krustojas punktā O, tad arī apskatāmie perpendikuli krustojas vienā punktā, kas ir punkta O attēls apskatītajā homotētijā.

8.22. Ģeometriskās nevienādības

U1. Dots izliekts 2020-stūris $A_1A_2A_3\ldots A_{2020}$. Uz tā malām A_1A_2, A_2A_3, …, $A_{2019}A_{2020}$, $A_{2020}A_1$ attiecīgi ņemti šo malu viduspunkti B_1, B_2, …, B_{2020}. Pierādīt, ka 2020-stūra $B_1B_2B_3\ldots B_{2020}$ perimetrs ir mazāks nekā 2020-stūra $A_1A_2A_3\ldots A_{2020}$ perimetrs.

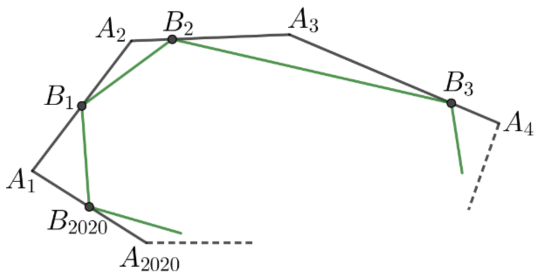
Atrisinājums. No trijstūra nevienādības $\Delta A_2B_2B_1$ iegūstam, ka $B_1B_2 < B_1A_2 + A_2B_2$ (skat. 118. att.). Analoģiski turpinot, katram $j = 2, 3, \ldots, 2019$ no $\Delta A_{j+1}B_{j+1}B_j$ iegūstam nevienādību

$$B_jB_{j+1} < B_jA_{j+1} + A_{j+1}B_{j+1}.$$

No $\Delta A_1B_1B_{2020}$ iegūstam, ka $B_{2020}B_1 < B_{2020}A_1 + A_1B_1$.
Saskaitot visas šīs nevienādības, iegūstam:

$$B_1B_2 + B_2B_3 + \cdots + B_{2019}B_{2020} + B_{2020}B_1 <$$
$$< B_1A_2 + A_2B_2 + B_2A_3 + A_3B_4 \ldots + B_{2020}A_1 + A_1B_1.$$

Nevienādības kreisajā pusē ir $B_1B_2B_3\ldots B_{2020}$ perimetrs, bet labajā pusē (pēc saskaitāmo pārgrupēšanas un saskaitīšanas) $A_1A_2A_3\ldots A_{20220}$ perimetrs. Līdz ar to esam pierādījuši, ka $B_1B_2B_3\ldots B_{2020}$ perimetrs ir mazāks nekā 2020-stūra $A_1A_2A_3\ldots A_{2020}$ perimetrs.



118. attēls

U2. Kādas vērtības var pieņemt katrs trijstūra ABC leņķis, ja $\sphericalangle A \le \sphericalangle B \le \sphericalangle C$?

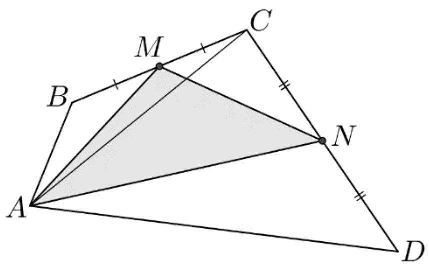
Atrisinājums. Ja trijstūra mazākais $\sphericalangle A > 60°$, tad $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C > 3 \cdot 60° = 180°$ (pretruna), tātad $\sphericalangle A \in (0°; 60°]$.
Trijstūra vidējais $\sphericalangle B \in (0°; 90°)$, jo leņķis B var būt pēc patikas mazs, ja leņķa C lielums ir tuvu 180°, un leņķis B var būt pēc patikas tuvu 90°, ja leņķa A lielums ir tuvu 0° un leņķu B un C vērtības daudz neatšķiras.

Ja trijstūra lielākais $\sphericalangle C < 60°$, tad $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C < 3 \cdot 60° = 180°$ (pretruna), tātad $\sphericalangle C \in [60°; 180°)$.

U3. Izliektā četrstūrī $ABCD$ punkts M ir malas BC viduspunkts un punkts N ir malas CD viduspunkts. Pierādīt, ka $S_{AMN} < \frac{1}{2} S_{ABCD}$.

Atrisinājums. Trijstūru AMB un AMC laukumi ir vienādi, jo tiem ir vienādi pamati BM un MC un to augstumi pret šiem augstumiem sakrīt; arī trijstūru CAN un AND laukumi ir vienādi (skat. 119. att.). Tātad

$$S_{AMN} < S_{AMCN} = S_{AMC} + S_{ACN} = \frac{1}{2}(S_{ABC} + S_{ACD}) = \frac{1}{2} S_{ABCD}.$$



119. attēls

Terminu vārdnīca

absolūtā vērtība	absolute value
aksiālā simetrija	axial symmetry
apvilkts četrstūris	circumscribed quadrilateral
atlikums	remainder
atņemšana	subtraction
atrisināt vienādojumu	solve the equation
atvērt iekavas	open parentheses
augoša funkcija	increasing function
augstums	height, altitude
augstumu krustpunkts	orthocentre
binoms	binomial
bisektrise	bisector
blakusleņķi	supplementary angles
centrālā simetrija	central symmetry
četrstūris	quadrilateral
dalīšana	division
dažādmalu trijstūris	scalene triangle
definīcijas kopa	domain
dilstoša funkcija	decreasing function
ekvivalents	equivalent
funkcija	function
ģeometrisks pārveidojums	geometric transformation
homotētija	homothety
horda	chord
identitāte	identity
iekšējie šķērsleņķi	alternate interior angles
iekšējie vienpusleņķi	consecutive interior angles
ieliekts četrstūris	concave quadrilateral
ievilkts četrstūris	inscribed quadrilateral
ievilkts leņķis	inscribed angle
izliekts četrstūris	convex quadrilateral
kāpšļu leņķi	corresponding angles
kosinusu teorēma	law of cosines
krustleņķi	vertical angles
kvadrāts	square
kvadrātvienādojums	quadratic equation
laukums	area
leņķis	angle
līdzīgi trijstūri	similar triangles
loks	arc
mala	side
matemātiskā indukcija	mathematical induction
mediāna	median
monotona funkcija	monotonic function
naturāls skaitlis	natural number

nepārtraukta funkcija	continuous function
nepieciešamais	necessary
nevienādība	inequality
nogrieznis	segment
pagrieziens	rotation
paralelograms	parallelogram
paralēlas taisnes	parallel lines
paralēlā pārnese	translation
pierādīt nevienādību	prove the inequality
pieskare	tangent
pietiekamais	sufficient
plats leņķis	obtuse angle
polinoms	polynomial
punkts	point
reāls skaitlis	real number
regulārs trijstūris	regular triangle, equilateral triangle
reizināšana	multiplication
reizinātājs	factor
riņķa līnija	circumference
riņķis	circle
sadalīt reizinātājos	factor
saskaitīšana	addition
saucējs	denominator
simetrija	symmetry, reflection
skaitītājs	numerator
starpība	difference
šaurs leņķis	acute angle
taisne	straight line
trapece	trapezoid
trijstūris	triangle
vesels skaitlis	integer
vidējais aritmētiskais	arithmetic mean
vidējais ģeometriskais	geometric mean
vidusperpendikuls	perpendicular bisector
viduspunkts	midpoint
vienādi trijstūri	equal triangles, congruent triangles
vienādojums	equation
vienādsānu trijstūris	isosceles triangle
virsotne	vertex
Vjeta formulas	Vieta’s formulas

Literatūras saraksts

1. Altshiller-Court, N. (2007) College Geometry: An Introduction to the Modern Geometry of the Triangle and the Circle. Dover Publications.
2. Andreescu, T., Mushkarov, O. (2019) *Topics in Geometric Inequalities.* XYZ Press.
3. Andrejeva-Andersone, A., Andžāns, A., Ramāna, L. (1997) *Praktikums vienādojumu sistēmu risināšanā*. Rīga: Latvijas Universitāte.
4. Andžāns, A., Markusa, I. (1996) *Vai vari atrisināt? Algebra*. Rīga: Zvaigzne ABC.
5. Andžāns, A., Zariņš, P., Johannessons, B. (1998) *Leņķu ģeometrijas elementi*. Rīga.
6. Avotiņa, M., Zīlīte, A. (2019) *Tematiskie uzdevumi matemātikas olimpiādēs*. Rīga: Latvijas Universitāte.
7. Āboltiņa, B., Čepuls, P. (2000) *Ģeometrija vidusskolai*. Rīga: Zvaigzne ABC.
8. Āboltiņa, B., Kriķis, D., Šteiners, K. (2011) *Matemātika 10. klasei*. Rīga: Zvaigzne ABC.
9. Āboltiņa, B., Kriķis, D., Šteiners, K. (2012) *Matemātika 11. klasei*. Rīga: Zvaigzne ABC.
10. Bulajich Manfrino, R., Gomez Ortega, J. A., Valdez Delgado, R. (2009) *Inequalities: A Mathematical Olympiad Approach*. SpringerLink.
11. Bulajich Manfrino, R., Gomez Ortega, J. A., Valdez Delgado, R. (2015) *Topics in Algebra and Analysis Preparing for the Mathematical Olympiad*. Birkhauser.
12. Cibulis, A. (1996) *Skaitlis e* // Zvaigžņotā Debess, Rudens.
13. Cibulis, A. (2006) *Ekstrēmu uzdevumi. 2. daļa.* Rīga: Mācību grāmata.
14. Cibulis, A. (2007) *Ekstrēmu uzdevumi. 1. daļa.* 2. izd. Rīga: Latvijas Universitāte.
15. Cvetkovski, Z. (2012) Inequalities: Theorems, Techniques and Selected Problems. Springer.
16. Gardiner, A. (2004) The Mathematical Olympiad Handbook An intorduction to problem solving based on first 32 British Mathematical Olympiads 1965–1996. Oxford University Press.
17. Grigorieva, E. (2013) Methods of Solving Complex Geometry Problems. Birkhauser.
18. Herman, J., Kučera, R., Šimša, J. (2000) *Equations and Inequalities*. Springer.
19. Latvijas Universitāte. A. Liepas Neklātienes matemātikas skola. Uzdevumu arhīvs. http://nms.lu.lv/uzdevumu-arhivs/latvijas-olimpiades/
20. Lay, D. C. (2006) *Linear algebra and its applications*. Boston: Pearson/Addison Wesley.
21. Ločmele, A., Palma, I., Ramāna, L., Andžāns, A. (1997) *Nevienādību pierādīšanas metodes*. Rīga.
22. Louridas, S. E., Rassias, M. Th. (2013) Problem-Solving and Selected Topics in Euclidean Geometry. Springer.
23. Niven, I. (1981) *Maxima and Minima Without Calculus* // Dolciani Mathematical Expositions, Math. Assoc. of Americ, No. 6.
24. Orbidāne, D. (2004) Ģeometrijas papildnodaļas IMO treniņu procesā. Maģistra darbs. Rīga.
25. Saul, M. (2009) *Hadamard's plane geometry*. American Mathematical Society.
26. Sedrakyan, H., Sedrakyan, N. (2017) *Geometric Inequalities: Methods of Proving*. Springer.
27. Slokenberga, E., France, Inga, France, Ilze. (2009) *Matemātika 10. klasei*. Rīga: Lielvārds.
28. Slokenberga, E., France, Inga, France, Ilze. (2010) *Matemātika 11. klasei*. Rīga: Lielvārds.
29. Šteiners, K., Siliņa, B. (1997) *Augstākā matemātika I*. Rīga: Zvaigzne ABC.
30. Todev, R. (2010) Functions and Polynomials Problems and Solutions from Mathematical Olympiads. MathOlymps.
31. Vasiļevska, A., Ramāna, L., Andžāns, A. (1997) *Ekstrēmu uzdevumu risināšanas metodes*. Rīga.
32. Xu, J. (2010) *Lecture Notes on Mathematical Olympiad Courses*. Vol. 6. For Junior Section Vol. 1. World Scientific Publishing.

33. Xu, J. (2010) Lecture *Notes on Mathematical Olympiad Courses*. Vol. 6. For Junior Section Vol. 2. World Scientific Publishing.
34. Xu, J. (2012) *Lecture Notes on Mathematical Olympiad Courses.* Vol. 8. For Senior Section Vol. 1. World Scientific Publishing.
35. Yaglom, I. M. (1975) *Geometric Transformations I*. Mathematical Association of America.
36. Болтянский, В. Г., Виленкин, Н. Я. (2002) *Симметрия в алгебре*. 2. изд. MCNMO.
37. Бэккенбах, Э., Беллманн, Р. (1965) *Неравенства*. Москва: Мир.