Longīns Ausējs

Matēmatikas metodes ekonomiskajās zinātnēs

1938
VALTERA UN RAPAS A/S. APGĀDS
RĪGĀ

Cienījamam un mīļam kollegam
Un. doc. K. Canstes kungam
L. Ausējs
6. 12. 1938

Longīns Ausējs

Matēmatikas metodes ekonomiskajās zinātnēs

0,05

1938
VALTERA UN RAPAS A/S. APGĀDS
RĪGĀ

Armijas spiestuve
Rīgā, Muitas ielā Nr. 1.

Ievadam — šā darba uzdevums un plāns.

1. Šogad paiet simts gadu no tā brīža, kad parādījās *Augustin'a Cournot* ievērojamā grāmata *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses* (1838), kas padarīja tā autoru par teōrētiskās tautsaimniecības matēmatiskā novirziena garīgo tēvu. Tiesa, sastopami arī jau priekš minētā pētījuma citu autoru darbi, kur diezgan plaši lietota matēmatika, bet tā tur saistās tikai ar atsevišķiem tautsaimniecības teōrijas jautājumiem. Tā, piemēram, *Maffeo Pantaleoni*[1] piemin kā pirmo gaišredzīgo un noteikto matēmatikas metodes pārstāvi teōrētiskajā tautsaimniecībā *Giovanni Ceva'u*, kura galvenais darbs *De re nummaria qoad fieri potuit, geometrice tractata, ad illustrissimos et excelentissimos dominos Praesidem, Quaestoremque huius arciducalis Caesaraei Magistratus*, Mantua 1711.

Šinī darbā, kā to minētajā rakstā aprāda *Pantaleoni*, *Ceva* aplūko naudas jautājumu, norādīdams, ka naudas vērtību varot ietekmēt ārēji cēloņi un arī tādi, kas iziet no pašas monētas, pie kam ārēji, pēc *Ceva's* atzinuma, naudas vērtība mainoties proporcionāli ar naudas daudzumu (quantitas rei). *Ceva* uzsver to domu, ka saimniecības parādības *varot tvert tikai ar matēmatikas metodi* (nisi quodam geometrarum modo). Induktīvā metode nederot, bet jāizejot no noteiktiem iepriekšējiem pieņēmumiem (quibusdam petitionibus praefixis), matēmatiski jānoskaidrojot, aiz kādiem cēloņiem pavairojoties monētu daudzums un kā rodoties to vērtība. Praksē varot rasties apstākļi, kas slēdzienus pa daļai vājinot (quae praxim minus exactam reddunt), bet pate metode un tās nozīme tomēr paliekot droša un nesatricināma. Pēc aroda *Ceva* bija matēmatiķis un ūdens būvju inženieris.

Vēl būtu jāpiemin inženiera *Achille Nicolas Isnard'a* darbs, kas parādījās 1781. g. anōnimi ar nosaukumu *Traité des*

[1] Maffeo Pantaleoni, Palgrave's Dictionary of Political Economy vol. I. London 1925, pag. 252.

richesses, kur, kā liekas, pirmo reizi mēģināts atrisināt maiņas problēmu ar vienādojumu palīdzību, un *Nicolas François Canard'a* grāmata *Principes d'économie politique*, kam 1801. g. 5. janv. Francijas Nācionālinstitūts piešķīra godalgu kā sacensības darbam par tematu: *Vai patiesība, ka zemē, kur galvenā nodarbošanās zemkopība, ikkuŗu nodokļu veids ķeŗ zemes īpašniekus*[2]. *Canard's* noraida šo, kā viņš saka, fiziokratu mācību. Viņš mēģina matēmatiski attēlot cenas rašanos tirgū, kā tā norisinās cīņā starp pircēju un pārdevēju. Tomēr viņa dabūtās cenu formulas ir ar lieliem trūkumiem.

Ja beidzot atzīmētu vēl 1771. g. (piecus gadus priekš *A. Smith'a Wealth of Nations)* Londonā izdoto anōnīmo darbu *An Essay on the theory of Money*, par kuŗu *W. Stanley Jevons's* izsakās, ka tas gan dažās daļās ir negatavs un bezjēdzīgs, bet nav bez intereses un veiklības un uzlūkojams kā skaidrs un pa daļai izdevies mēģinājums uzstādīt matēmatisku naudas teōriju,[3] un *W. Whewell'a* darbu *Mathematical Exposition of some doctrines of political economy*, tad arī būtu atzīmēti visi ievērojamākie darbi šinī virzienā līdz *Cournot* laikam.

Cournot pieminētais darbs *Recherches* etc. palika sākumā nepamanīts. Vēlāk 1863. g. *Cournot* to izdeva pārgrozītā veidā bez matēmatikas formulām, ar nosaukumu *Principes de la théorie des richesses.*

Antoin-Augustin Cournot dz. 1801. g., studējis matēmatiku Bezansonā *(École Normale)*, kur saņēmis 1821. g. godalgu matēmatikā, un turpinājis studijas Parīzē; 1833. g. iecelts par matēmatikas un mēchanikas profesoru Lionas ūniversitātē, vēlāk bijis par rektoru Grenoblē, tad par galveno skolu pārlūku Parīzē un beidzot akadēmijas rektoru Dižonā. Miris 1877. g. Viņš bija ne tikai ievērojams matēmatiķis un tautsaimnieks, bet arī filozofs (svarīgākais darbs šinī laukā: Essai sur les fondements de la connaissance et sur les caractères de la critique philosophique, Paris 1851).

[2] Wl. Zawadzki, Les mathématiques appliquées à l'Économie politique, Paris 1914, pag. 31.—35.

[3] W. Stanley Jevons, The Theory of Political Economy, fourth edition, London 1931, p. XLII.

Pie viņa darba metodes vēl nāksies atgriezties; tagad tikai minam šo darbu kā matēmatiskās metodes laikmeta sākumu tautsaimniecības zinātnē.

Ja tālāk gribētu norādīt uz tādiem vārdiem, kā: *Dupuit, Thünen, Gossen, Jevons, Walras, Pantaleoni, I. Edgeworth, A. Marshall, V. Pareto, W. Launhardt, R. Auspitz* un *R. Lieben, Irving Fisher,* kas vairāk saistās ar 19. g. s., tad jaunākā laikā, it īpaši pēdējā gadu desmitā, matēmatikas metodēm ekonomiskajās zinātnēs vispār sāk piegriezt jo izcilu vērību. Lai minam tikai tādus darbus kā *Luigi Amoroso, Lezioni di economia matematica, Bologna MCMXXI; F. Divisia, Économique rationnelle, Paris* 1928; *Henry Ludwell Moore, Sunthetic Economics, New-York 1929; Henry Schultz, Statistical Laws of Demand and Supply with special application to sugar, Chicago 1928; Sur les Fondements de l'économique rationnelle avec une technique de la prévision par Georges Guillaume avec une Théorie mathématique par Ed. Guillaume, Paris 1932; G. et Ed. Guillaume, Economique rationnelle de ses fondements aux problèmes actuels, Paris 1937; Hans Peter, Grundprobleme der theoretischen Nationalökonomie, Stuttgart* 1933. (I. T.) u. 1934. (II. T.); *Erich Schneider, Reine Theorie monopolistischer Wirtschaftsformen, Tübingen* 1932; *Hans Bolza, Ein neuer Weg zur Erforschung und Darstellung volkswirtschaftlicher Vorgänge, Berlin* 1935; *Otto v. Mering, Die Steuerüberwälzung, Jena* 1928, kas iznākuši apm. viena gada desmita laikā un iztirzā svarīgākās tautsaimniecības problēmas ar matēmatikas palīdzību. Ja vēl pievienosim te darbus, kas saistīti ar dažādu konjunktūras pētīšanas institūtu studijām, un darbus, kas zīmējas uz privātsaimniecību kā, piem., *Prof. A. Schilling, Die Lehre vom Wirtschaften, Berlin* 1925, kas visi caurausti ar matēmatiku, tad rodas skaidrība par to, cik stiprā mērā ekonomiskās zinātnes cenšas «matēmatizēties». Uz to norāda arī speciālie žurnāli kā piem., *Econometrica* (no 1933. g.), *Archiv für mathematische Wirtschafts- und Sozialforschung* (no 1935. g.) un asociācijas *Centre Polytechnicien d'Études économiques* biļetēni (no 1937. g. iznāk ik mēnešus).

2. Tomēr šāda cenšanās ir sastapusi arī pretiniekus ne tikai tautsaimnieku, bet zināmā mērā pat matēmatiķu starpā. Tā, piem., Parīzes Zinātņu akadēmijas matēmatikas nodaļas loceklis, nesen mirušais *P. Painlevé*, priekšvārdos *Jevons*'a *Theory of Political Economy* franču tulkojumam *(La théorie de l'économie politique, Paris 1909)* izsakās diezgan atturīgi par iespējām lietot matēmatiķu tautsaimniecībā.

No tautsaimniekiem minami kā matēmatikas lietošanas pretinieki *E. Cairnes*'s *(E. Cairnes, The character and the logical method of political economy, London* 1888, p. 100—142), *Schmoller*'s (rakstā *Volkswirtschaftslehre und Methode* § 16., Handwörterbuch der Staatswissenschaften, 8. B.), *Andreas*'s *Voigt*'s [rakstā *Zahl und Mass in der ökonomie*, Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft 49 (1893)] un *Othmar*'s *Spann*'s [rakstā *Die mechanisch-mathematische Analogie in der Volkswirtschaftslehre* Archiv für Sozialwissenschaft und Sozialpolitik 30 (1910)]. Gan iebildumi, ko pret matēmatikas metodi ceļ, ir tikuši atspēkoti, bet tomēr visā šinī svarīgajā jautājumā nav pietiekošas skaidrības, lai varētu noteikti un pamatoti pieņemt vienus vai otrus uzskatus — matēmatikas metodes maznoderīgumu vai pat nederīgumu, vai arī šīs metodes lielās priekšrocības un pat nepieciešamību saimniecisko problēmu pētījumos. Tas tā iznācis, man šķiet, tāpēc, ka nav vēl pietiekoši iztirzāts jautājums par pašas matēmatikas metodes, vai, pareizāk, matēmatikas metožu būtību, it sevišķi no to lietošanas viedokļa citās zinātnēs, lai gan daudz par to rakstīts gan žurnālu rakstos, gan atsevišķās monografijās, gan matēmatiskos tautsaimniecības darbu priekšvārdos un arī pašu šo darbu tekstos. Tāpēc nav arī noteiktības jautājumā, kādos teōrētiskās tautsaimniecības darbos sastopama metode, ko var saukt par matēmatikas metodi, resp. metodēm. Parasti par tādiem pieņem darbus, kur sastopami diferenciālrēķinu un integrālrēķinu paņēmieni vai vismaz krietnā skaitā grafikas, kā tas ir, piem., *Enrico Barone* darbā *Principi di economia politica* (lietots vācu tulkojums *Grundzüge der theoretischen Nationalökonomie von Enrico Barone, Bonn* 1927).

Daži autori, it sevišķi, *Antonio Osorio* savā darbā *Théorie mathématique de l'échange*, *Paris* 1913, IV nodaļā *(De la necessité de la méthode mathématique)* uzlūko par matēmatikas metodes īpatnību funkcionālo sakarību meklēšanu atšķirībā no parastajām loģikas metodēm, kas meklē cēlonības sakarus. Arī tiešie matēmatiķu darbi nedod noteiktas atbildes uz jautājumu, kādas metodes varētu lietot teōrētiskajā tautsaimniecībā, pat tādi darbi, kas speciāli nododas metodes jautājumiem, kā, piem., *Otto Hölder's* savā grāmatā *Die mathematische Methode, Berlin* 1924.

3. Lai ienestu šinī jautājumā lielāku noteiktību, esmu uzstādījis par uzdevumu mēģināt noskaidrot, kādas tad īsti ir tās matēmatikas metodes, ko jau tagad lieto un ko vēl varētu un vajadzētu lietot ekonomiskajās zinātnēs, bet it sevišķi tautsaimniecības teōrijā, ņemot vērā visu to svarīgumu, kāds piekrīt jautājumam par metodēm.

Savā darbā gribu vispirms aplūkot līdzšinējos sasniegumus un uzskatus matēmatikas lietošanā ekonomiskajās zinātnēs (it īpaši tautsaimniecības teōrijā), tad sniegt matēmatikas metožu raksturojumu un novērtēt iebildumus pret matēmatikas metožu lietošanu ekonomiskajās zinātnēs, kā arī taisīt attiecīgos secinājumus.

Pirmajā daļā, kur aplūkoti līdzšinējie darbi matēmatikas metodes resp. metožu jautājumā, centos pēc iespējas ļaut runāt autoram viņa paša vārdiem, dodot raksturīgākos izvilkumus no darbiem un tikai retumis papildinot tos ar īsu atstāstījumu. Darīju to tādā nolūkā, lai lasītājam būtu iespējams *tieši* sastapties ar attiecīgo autoru uzskatiem.

Otrajā — galvenajā daļā, kur raksturotas matēmatikas metodes, it īpaši kā pētīšanas metodes, ilgāk kavējos pie aksiomatiskās un kollektīvpriekšmetu pētīšanas metodes, kas kā metodes vai nu mazāk izstrādātas, vai mazāk pazīstamas.

I daļa.

Līdzšinējie matēmatikas metožu raksturojumi.

1. Matēmatikas metodes tautsaimniecības teōrētiķu uztverē.

1. Savā jau pieminētajā darbā[4] *Osorio* galveno vērību piegriež maiņas teōrijai, kā tā atrodama *Walras'*a un *Pareto* darbos, bet plašu nodaļu veltījis arī matēmatikas metodes nepieciešamībai (no 97. līdz 169. lpp.). Viņa galvenās domas šādas.

«Strīdi par to, kādu metodi lietot kaut kādas zinātnes pētījumos, neauglīgi un nederīgi. Labas metodes tāpat kā labus strādniekus var pazīt pēc darba, ko tās padara. Zinātnes mērķis ir patiesības atzīšana un visi līdzekļi labi, ja tikai tie tuvina šiem mērķiem.

Mums nav nodoms pierādīt kādas metodes pārākumu vai zemāku vērtību, jo mums visas metodes labas un nepieciešamas. Gribam tikai attaisnot matēmatikas metodes lietošanu tīrajā ekonomikā (dans l'économie pure) un vēl vairāk nekā attaisnot, mēs gribam pierādīt tās nepieciešamību.

Zinātne ir tikai faktu un to vienveidību jeb *likumu* pētījums. Katra zinātne ir eksperimentāla, jo tā bazējas uz īstenības. Īstenība ir tā, kas beidzamā analizē apstiprina vai noraida secinājumus, pie kādiem nonāk zinātne.

Faktu un to likumu pētījumos cilvēka gars atrodas divu pretēju ceļu — *indukcijas* un *dedukcijas* ceļa priekšā. Indukcija ir intellektuāls process, kurā no parādību novērojumiem secina vienveidības jeb likumus, kas valda par šīm parādībām. Dedukcija ir intellektuāls process, kas atļauj vilkt visas loģiskās konsekvences no vispārīgām patiesībām jeb *likumiem*, kas dabūti ar indukciju. Pirmā gadījumā iziet no īstenības, lai no tās vairāk un vairāk novirzītos, iet no vispārinājuma uz vispārinājumu. Otrā gadījumā rīkojas otrādi. Pagriežas

[4] Antonio Osorio, Théorie mathématique de l'échange, Paris 1913. Traduit par José l'Almada.

atpakaļ pa līdzīgiem ceļiem, kas noved pie līdz šim nezināmiem punktiem. Sakām «pa līdzīgiem ceļiem», jo nonāktu pie izejas punkta, ja ietu eksakti pirmo ceļu, un acīmredzot dedukcijai nebūtu nozīmes. Ja starp parādībām A, B, C un D atrodam kādu kopīgu vilcienu, kādu vienveidību, kādu likumu, mēs inducējam. Ja pēc tam cenšamies secināt no šā likuma attiecības, kam jāpastāv parādību E, F, G, H starpā, mēs deducējam. Ja tiešām šo parādību starpā atrodam attiecības, ko atrastais likums ļāva paredzēt, mēs secinām, kamēr nav pierādīts pretējais, ka indukcija un dedukcija ir pareiza, un ka atrastā vienveidība jeb likums ir patiess. Vēstures metode, statistikas metode u. tml. ir induktīvas metodes paveidi (des variétés); *matēmatikas metode ir deduktīvās metodes paveids.* (Pasv. mans. L. A.)

Par loģiku saucam zinātni, kas pētī procesus un likumus, kuŗi jāievēro cilvēku prātam indukcijā un dedukcijā. Matēmatika sastāda deduktīvās loģikas daļu. No daziem ļoti vispārīgiem principiem, kuŗu beidzamais pamats ir — vai arī jābūt — pieredze, matēmatika deducē visus secinājumus, ko var dabūt ar paņēmieniem, kuŗi atšķiŗas no parastajiem paņēmieniem tikai ar savu stingrību...

Tīrā matēmatika, kas pētī tikai abstraktās attiecības *daudzumu* un *lielumu* starpā (des *quantités* et des *grandeurs*), iegūst visus savus slēdzienus ar tādu stingrību, ka no tā brīža, kur pieņem vispārīgo patiesību vai vispārīgās patiesības, kas dod izejas punktu, visi slēdzieni ir bez ierunām nepieciešami vismaz tik daudz, cik nemaldīsies cilvēka prāta loģikas likumi».[5]

Tālāk autors noskaidro to apstākli, ka izejas patiesības var gan būt dažādas, kā, piem., ģeometrijā, bet tiklīdz tās pieņemtas, tad secinājumi neapšaubāmi, un tad kavējas pie jautājuma, ar ko parastais prātojums atšķiŗas no matēmatikas prātojuma.

«Objektīvās attiecības lietu starpā ir vairākos veidos. Dažām lietām ir tāds pats lielums, vai arī lielāks vai mazāks nekā citām. Viņas ieņem tādu pašu telpu, vai arī lielāku vai

[5] A. Osorio, Théorie etc., p. 97—99.

mazāku telpu. Tas nozīmē, ka šo lietu starpā var pastāvēt *koekstensijas* («coéxtension») un *non-koekstensijas* («non-coextension») attiecības. Citas lietas eksistē vienā laikā, vai ir eksistējušas priekš vai eksistē pēc citām. Viņu starpā tad pastāv *koeksistences* (coexistence) vai *non-koeksistences* attiecības. Ir lietas, kas ir vai nav vienādas. Attiecības šādu lietu starpā ir dabas *identitātes* vai *neidentitātes* attiecības. Beidzot ir lietas, kas ir līdzīgas, vai nav līdzīgas. Viņu starpā pastāv *līdzības* (ressemblence) vai *starpības* (différence) attiecības. Tādas ir objektīvu attiecību kategorijas lietu starpā. Tā tad mūsu apziņas stāvokļu attiecībām, kuri ir šo lietu atveids, jāpavada dažādu attiecību kategorijas lietu starpā . . .

Pastāv vēl cits attiecību veids mūsu apziņas stāvokļu starpā. Stingri ņemot, tas ir tikai *līdzības* un *starpības* attiecību veids. Viņu daba ir vairāk subjektīva, un tāpēc tas jāmin atsevišķi. Lieta grozās ap kointensitātes (cointensité) un non-kointensitātes attiecībām starp apziņas divi stāvokļiem vai to attiecībām. Ja sitīsim par bungām un tūlīt pēc tam otrreiz sitīsim no visa spēka, mēs *sajutīsim*, ka otrs iespaids intensīvāks nekā pirmais . . .

Šādas attiecības apziņas stāvokļu starpā mums rada *intuīcija*. Tas ir iekšējais process, kas nepadodas analizei. Divi apziņas stāvokļi mums izliekas vienādi vai nevienādi, līdzīgi vai dažādi, vairāk vai mazāk intensīvi, *ja mēs to sajūtam kā tādus* un ne aiz kādiem citiem motīviem.»[6]

Bet nu visām attiecībām lietu starpā, aizrāda *Osorio*, nav apziņā tās pašas precizitātes un tās pašas rigorozitātes. Intuīcija dod vienizplatījuma (coexstension) attiecību divu lietu starpā ar absolūtu rigorozitāti, kā tas ir, piem., divu blakus novietotu taisnu līniju starpā — ar lielu precizitāti var konstatēt, ka tās vienlīdzīgas. Grūtāk jau, ja tās nav vienlīdzīgas, pateikt vienīgi ar intuīciju, par cik viena garāka nekā otra. Tāpat ar lielu precizitāti var noteikt divu lietu koeksistenci, bet ar vienkāršu intuīciju grūti noteikt intervallu, kas atdala vienu parādību no otras, ja tās seko viena otrai. Tāpat tas ir citām attiecībām.

[6] A. Osorio, op. cit., p. 107—108.

«Tāpēc prātojumi, kur ieiet tikai koeksistensijas, koeksistences un dabas identitātes intuicijas un percepcijas, neizbēgami būs ar tādu precīzitāti un rigorozitāti, kādu nekad nesasniegs tās, kas balstās uz kaut kādu citu intuicijas veidu. Taisni matēmatiskais prātojums balstās tieši vai netieši vienīgi uz pieminētajiem trim intuicijas veidiem.»[7]

Šo domu autors pamato un illūstrē ar vairākiem piemēriem, un tad piegriežas tautsaimniecībai.

«Modernie matēmatiskās tautsaimniecības traktāti nepastāv tikai viņu metodē. Bez matēmatikas metodes tie lieto arī vēstures metodi, ja grib pagarināt pagātnē tagadnes pieredzi, vispār, induktīvo metodi un statistisko metodi un arī parasto deduktīvo metodi. Matēmatikas metodi atrodam tur tikai tad, kad tā tieši neizbēgama. Matēmatikas skola nenostāda *sevī pretī* (ne s'oppose pas) citām skolām, un matēmatikas metode neizslēdz citas metodes, tā tikai *pievienojas* tām (s'y *surajoute*).

Patlaban matēmatikas metodes lietošanas nozīme un iespēja aprobežojas ar tīro ekonomiku. Tas tāpēc, ka patlaban tīrā ekonomika ir abstrakta mainas un ražošanas teōrija, aplūkota no plašāka viedokļa nekā vienkāršs ofelimitātes izlikums (manifestations de l'ophélimité). Bet tāpēc, lai gan būdama abstrakta, tīrā ekonomika nepārstāj būt eksperimentāla zinātne, jo tās prēmisas nāk no realitātes, tās vispārīgie principi, no kuriem secina visus likumus, ir reālo faktu vispārinājumi, kaut gan šie fakti abstrakcijas ceļā reducēti uz to visvienkāršākajiem elementiem . . .

Bet attiecības ekonomisko parādību starpā pieder vispārīgam sociālo parādību tipam, t. i. savstarpīgas atkarības (de dépendance mutuelle) tipam, un nevis vienkāršam cēloņu un seku tipam. Personām, kam svešas dabas zinātnes, ir mazliet pretīgi pieņemt citas attiecības parādību starpā nekā cēloņa un seku attiecības.»[8]

«Tas arī dabiski, jo cēloņu un seku attiecības vieglāk konstatējamas, tā sakot, redzamas. Ja, piem., A ir cēlonis un

[7] A. Osorio, op. cit., p. 110—111.
[8] A. Osorio, op. cit., p. 117—121.

B, C D sekas, tad šī attiecība izteicas tā, ka A eksistence it kā rada B, C un D, un attiecīgi B, C un D izzušana liek spriest par A izzušanu. Ja turpretim pastāv savstarpīga atkarīga attiecība starp A, B, C un D, doma nevar tik viegli tai izsekot. Zināms, ka A ietekmē B, C un D un otrādi, B, C un D ietekmē A un visas pārējās parādības, no kurienes izriet, ka vienas parādības ietekme atgriežas uz sevi (se repercute sur lui-même). Tas viss neskaidrs, nenoteikts, salīdzinot ar cēloņu un seku attiecību valdzinātāju skaidrību. Tāpēc cilvēka gars instinktīvi meklē cēloņu un seku attiecības, kaut arī dažreiz ar to iestigtu maldos, novirzoties no īstenības ... Bioloģija mums sniedz lielu skaitu tādu novērojumu. Nervu centri darbojas *tāpēc*, ka sirds tiem sūta asinis ar katru pulsāciju, bet šīs pulsācijas savukārt ceļas no zināmu nervu centru darbības. Plaušas strādā *tāpēc*, ka funkcionē visi citi organi, bet neviens no tiem nedarbotos, ja apstātos plaušu darbība.

Vislabāk šādas attiecības vērojamas sociālo parādību starpā ... Intellektuālais progress, kas pakāpeniski pārveido zinātnes, rūpniecību, mākslu, reliģiju, parašas, tiesības un visus sociālās aktīvitātes veidus, paklauts savukārt pārveidojumiem, kas nāk no pārmaiņu kopības, kuras notikušas arī visām šām aktīvitātēm. Intellektuālais progress, likdamies par *cēloni*, ir tai pašā reizē arī *sekas* ...

Tuvosimies reālitātei ar konkrētu piemēru. Aplūkosim jauna dzelzceļa atklāšanu. Vispirms, ja gribētu analizēt šā notikuma pirmatnējos priekšnosacījumus, mēs atrastos nopietnās grūtībās, jo pakāpeniskie intellektuālā progresa stāvokļi, kas noteikuši tvaika spēka izlietošanu lokomotīvēs un dzelzceļu būvi, nav paklaujami uzskaitīšanai. Aplūkosim tomēr dažus no tuvākiem cēloņiem ...

Jāņem vērā visi lokālie ekonomiskie faktori: iedzīvotāji, dabas bagātības, rūpniecības attīstība, paradumi, visāda veida kapitāli u. t. t. Tālāk vajadzētu aplūkot katru no šiem faktoriem ne tikai pašu par sevi, bet attiecībā ar visas pasaules ekonomiskajiem faktoriem ... Lielāka vai mazāka lokālās un pasaules palīgrūpniecības attīstība — sliežu, lokomotīvju, tenderu, vagonu u. t. t. fabrikācija, ogļu un dzelzsraktuvju ekspluatācija, šo materiālu importa un transporta vieglums vai grūtības, algu līmenis u. tml. — tas viss jāapsver un tas viss būs daļa no dzelzceļa būves priekšnosacījumiem. Tas viss dod šādas sekas. Būvkoku importa vai mežu ekspluatācijas palielināšana, akmenslauztuvju, ogļu un dzelzsraktuvju ekspluatācija vai šo produktu imports būs pirmās sekas. Rodas dažādi uzņēmumi un veidojas jaunas strādnieku grupas, kā, piem., konduktori, šoferi u. t. t. Tas atsaucas uz darba sadalījumu un algu augstumu. Kad dzelzceļš gatavs, parādības, ko tas rada, arvienu pieaug skaitā un kļūst vairāk sarežģītas. Ar to tiek lielākā vai mazākā mērā ietekmēta visu pasākumu operācija: satiksmes atvieglojums ļauj katram izdarīt to, ko agrāk uzdeva pilnvarotai personai... Preces sūta lielākā vairumā un uz lielāku attālumu, kamēr agrāk vajadzēja pirkt mazumā apkārtnē... Transporta ātrums un lētums sekmē dažādu vietējo rūpniecības uzņēmumu speciālizēšanos un to iekārtošanu tādās vietās, kur ražošana izdevīgāka. Cirkulācijas ātrums cenšas nolīdzināt cenas un caurmērā tās pazemināt. Preces var pirkt tie, kas agrāk nevarēja par to ne domāt, ar ko palielinās vispārīgā labklājība.

Tanī pašā laikā ļaudis sāk vairāk ceļot. Atrodas cilvēki, kas agrāk nebūtu izbraukuši no dzimtās zemes, tagad iepazīstas ar citām zemēm, paplašina savas zināšanas, attīsta inteliģenci, pārveido uzskatus. Vēstules un avīzes nonāk drīzāk pie mērķa. Tautas pulss paātrinās... Parādās jaunas profesijas, daudzi agrākie arodi speciālizējas un daži izbeidzas. Sociālais organisms kļūst vairāk heterogens. Cenas mainās. Tie, kas *pārdod*, un tie, kas *pērk*, modificē lielākā vai mazākā mērā savus tirgošanās paņēmienus, un kopsummā *visi* kaut kā tiek ietekmēti viņu darbos, domās un jūtās.

Rezimējot var teikt, ka dzelzceļa būve rada pārmaiņas visas savas zemes saimnieciskā un sabiedriskā dzīvē un līdz ar to arī visas pasaules saimnieciskos un sabiedriskos nosacījumos. Viss tas, ko var uzlūkot kā dzelzceļa būves *cēloņus* (procentu likme, tautas raksturs un attīstība u. tml.) ir savukārt pakļauts ietekmējumam. Visu šo parādību starpā nodibinājušies savstarpīgās atkarības attiecība, tā ka grūti atšķirt *cēloņus* no *sekām*.[9]

[9] A. Osorio, op. cit., p. 121—126.

Savstarpīgās atkarības attiecība parādību A, B, C, D grupā var būt *kvantitātīva* vai *kvalitātīva*, vai abas kopā. Par *kvantitātīvu* sauc atkarību tad, kad abpusēja parādību ietekme izteicas lieluma vai daudzuma maiņā. Par *kvalitātīvu* sauc tad, kad savstarpīgā iedarbība un pretdarbība ietekmē parādības dabu, bet šo ietekmi nevar reducēt uz kādu lielumu.

Iepriekšējā piemērā par *kvantitātīvo* sakarību var pieņemt savstarpīgo ietekmi, kas pastāv starp transporta lētumu un ātrumu, un to apgabalu importu vai eksportu, ko apkalpo dzelzceļš. Bet tagadējā zinātnes stāvoklī nav iespējams tvert kvantitātīvu sakarību savstarpīgo ietekmējumu starpā, kuŗi, no vienas puses, saista transporta lētumu un ātrumu ar dažām pārmaiņām, kas no tam rodas tautu parašās un intellektuālā attīstībā, no otras puses, zinām tikai, ka tāda abpusēja ietekme pastāv . . .

Tā tad dažas attiecības, kas pastāv visu parādību starpā, kuŗas zīmējas uz dzelzceļu būvi, ir *kvantitātīvas* un kā tādas tās iespējams *mērīt*, turpretim citas ir tikai *kvalitātīvas*.

Šās pēdējās pārsvarā sociālās parādībās, kāpēc rodas neiespējamība to pētīšanai izlietot algebru . . .

Savstarpīgās atkarības jēdziens atļauj fiksēt līdzsvara jēdzienu un attaisnot matēmatikas lietošanu ekonomiskā līdzsvara pētījumos.[10]

Pieņemsim, ka ar savstarpīgās atkarības attiecību saistītās parādības ir A, B, C, D, E . . . Saskaņā ar definīciju katra parādība ietekmē tieši vai netieši, kvantitātīvi vai kvalitātīvi katru citu, kas savukārt atgriežas uz sevi pašu; mēs varam parādību kopumu salīdzināt ar materiālu punktu sistēmu, kuŗi ietekmē cits citu. Katrs no šiem punktiem ir spēka centrs. Kad no savstarpīgās iedarbības un pretdarbības rezultē sistēmas nekustība, vispār saka, ka sistēma ir līdzsvarā.

Mēs tāpat definēsim sociālo vai ekonomisko līdzsvaru, kur starp savā starpā saistītajām parādībām A, B, C, D, E, . . . pastāv tāda iedarbība un pretdarbība, ka no šās savstarpīgās ietekmes rodas kopparādības nekustība.

[10] A. Osorio, op. cit., p. 126—128.

Ekonomiskais vai sociālais līdzsvars ir *kustīgā līdzsvara* tipa stāvoklis, kur agregāta nekustība koeksistē ar daļu kustībām.

Ekonomiskās un sociālās parādības, kas saistītas ar savstarpīgas atkarības attiecību, var paturēt savu īpašu kustību un svārstību. Lai varētu runāt par sasniegto līdzsvaru, pietiek, ka šās kustības un svārstības savstarpīgi līdzsvarojas tā, ka kopparādība neaprobežoti paliek noteiktā stāvoklī.»

Piem., zemkopis, aizrāda *Osorio*, var būt strādnieks, uzņēmējs, ražotājs un patērētājs. Viņa vēlēšanās, acīmredzot, būs apmierināt sevi tiklab kā patērētāju, tā arī kā ražotāju. Ņemot vērā, ka noteikums, kas jāizpilda, lai viņš patērētāja lomā saņemtu savu vēlēšanos pilnīgu apmierinājumu, nav tie paši, kas dod tam apmierinājumu ražotāja lomā, mūsu individs centīsies izpildīt abus divus noteikumus vienlaicīgi. Viņš redzēs, ka šie noteikumi, lai gan dažādi, tomēr nav neatkarīgi cits no cita. Piemēram, viņš redzēs, ka jo lielāks viņa ieguvums ražotāja lomā, jo lielāks būs viņa apmierinājums patērētāja lomā, un otrādi, jo vairāk gribēs tērēt, vairāk vajadzēs ražot. Tas nozīmē, ka nav iespējams, ja aplūkojam abstrakcijas ceļā pat no pārējiem izolētu cilvēku, atrisināt viņa eksistences ekonomisko problēmu, nesaistot savā starpā daudzējādas un dažādas parādības: visu preču ofelimitāti, ko patērē šis individs; visu preču cenas; savu ražojumu vai pakalpojumu cenas īpašnieka, strādnieka vai kapitālista lomā u. tml. Tā kā daudzi no šiem faktoriem savukārt ir citu sekas, tad elementu skaits, kas mums būtu jākombinē, lai dabūtu viena paša individa līdzsvara atveidu (image), būtu tik liels, ka parastā valoda nav spējīga mums dot eksaktu priekšstatu.

Nesalīdzināmi grūtāk, saka *Osorio*, tas daudzu individu gadījumā. Pieņemsim, ka mums zināmi preču veidi, kas nonāk tirgū, tāpat individu grupas, kas tur nonāk, tālāk — priekšmeti, ko viņi pērk un ko pārdod, motīvi, kas noteic viņu darbību, un nosacījumi, kas noteic viņu līdzsvaru; tad mums atliek izpētīt savstarpīgo ietekmi, ko tie rada cits uz citu, lai varētu secināt, ka tirgus līdzsvara problēma jānostāda tā, ka ņem vērā vienlaikus visus nosacījumus, kas noteic visu un katra patērētāja un ražotāja līdzsvaru, kuri patlaban tur atrodas. Šī savstarpīgā ietekme ir neapstrīdama, un pietiek aplūkot tikai faktus, lai par to nevarētu šaubīties. Patērētāji atkarājas no uzņēmējiem un tie no pirmajiem. Savstarpīgā ietekme, kas attaisnojas visos nosacījumos, kuri noteic līdzsvaru, ir nenoliedzama. Galīgais līdzsvars ir vienmēr rezultante no visu nosacījumu savstarpīgās atkarības.

Ja gribam noteikt šo līdzsvara stāvokli, saka tālāk *Osorio*, jāņem vērā *vienlaicīgi* visi noteicēji nosacījumi un to savstarpīgā ietekme un atkarība. To var sasniegt tikai ar loģiku un matemātikas valodu. Parastā loģika neprastu pavadīt un izsekot savstarpīgās atkarības attiecības, ne vairāk tā varētu noteikt galīgo stāvokli, kas te rodas. Pat tad, ja lieta grozās ap šā veida visvienkāršākām attiecībām, cilvēka prāts, kam atņemta matemātiskā analize, var tikai konstatēt savstarpīgās atkarības eksistenci, nevarēdams to pavadīt kustībās un parādībās, kas no tās izriet. Tas notiek tāpēc, ka mums nevar būt vienlaikus apziņas laukā vairāk nekā viens iespaids (impression) vai attiecība iespaidu starpā.

«Lai varētu izsekot domās savstarpīgās atkarības attiecības un attēlot vispārīgo parādību, kas no tam izriet, nelietojot citus līdzekļus kā vien tos, ko dod parastais prātojums, būtu nepieciešami, lai apziņa varētu *vienlaikus* domāt un aptvert daudz dažādu attiecību un atšķirīgu parādību, un lai tā varētu kopā nodarbotie ar to iedarbību un pretdarbību savstarpīgu un vienlaicīgu efektu. Loģikas likumi prātam to neatļauj. Tāpēc cilvēks, kas spiests lietot mikroskopu, teleskopu un telefonu, lai paplašinātu savu jutekļu darbības sfairu, redz nepieciešamību lietot netiešos paņēmienus, lai paplašinātu savus dedukcijas līdzekļus. Tā viņš nonāk pie secinājumiem, pie kādiem nekad nenonāktu ar vienkāršas loģikas līdzekļiem.

Tāpēc radīta matemātika un tāpēc cilvēkam tik bieži pie tās jāgriežas; aiz šā iemesla viņam tā jālieto, ja viņš grib iegūt eksaktu un precīzu ekonomiskā un sociālā līdzsvara parādību atveidu domās.»[11]

«Mūsu zināšanas par savstarpīgo atkarību vairāku parādību A, B, C un D starpā un par stāvokli, kas izriet no šīs sav-

[11] A. Osorio, op. cit., p. 157.

starpīgās atkarības, spēj iziet trīs dažādas, un tā sakot sukcesīvas pakāpes.

1) Mēs varam zināt tikai to, ka savstarpīgā atkarība eksistē, ka A klātbūtne un pārmaiņas ietekmē B, C, D un ka B klātbūtne un pārmaiņas ietekmē A, C, D u. t. t.

2) Mums var būt, starp citu, ideja par attiecībām, kas eksistē starp A, B, C, D, un varam zināt, piem., ka gadījumā, ja A palielinās, tad B pamazinās, C pieaug u. t. t. Citādi sakot, varam zināt B, C, D pārmaiņu virzienu, ko rada kāda dotā A pārmaiņa.

3) Varam, beidzot, zināt ne tikai kādas sistēmas elementu pārmaiņu virzienu, bet aprēķināt arī to lielumus. Ja tiktāl nonākam, mums ir visas un pilnīgas zināšanas par parādību A, B, C, D savstarpīgo atkarību un par vispārīgo parādību, kas no tās izriet.

Astronomija, piem., zīmējoties uz saules sistēmas kustībām, ir nonākusi trešā stadijā... Politiskā ekonomija, priekš matēmatiskās skolas doktrīnu atrašanas, bij nonākusi pirmajā stadijā, kas jau bija liels progress. Pat šodien vēl ir daudz ekonomistu, kas sev veido tikai nepilnīgu ideju par ekonomisko parādību savstarpīgo atkarību... Jaunās doktrīnas novedušas politisko ekonomiju zināšanu otrajā pakāpē...

Ekonomiskā līdzsvara parādību pētīšanas matēmatiku lieto šādā veidā. Līdzsvars izriet no liela skaita ļoti dažādu savstarpīgās ietekmes nosacījumu. Ja izteiksim vienādojuma veidā katru nosacījumu, tad dabūsim problēmas atrisinājumu simultānā vienādojumu sistēmā, kas tā būs radusies. Nezināmo nozīmes, kas apmierinās sistēmu, apmierinās tanī pašā laikā arī visus nosacījumus, kas bija jāņem vērā...

Ja uzstādīsim vienlaikus nosacījumus, kas noteiktu stāvokli, kādu patērētāji gribētu turpināt bezgalīgi, un tos nosacījumus, kas noteiktu stāvokli, kuŗā uzņēmējs būs arī spiests turēties bezgalīgi, un ja neaizmirsīsim, ka starp pirmajiem un beidzamajiem ir savstarpīgas atkarības attiecības, kas mūs spiež šos vienādojumus atrisināt *simultāni*, mēs būsim noteikuši vispārīgo stāvokli, kas bezgalīgi paliks tāds pats, ja attiecīgie noteicēji nosacījumi nemainīsies... Galīgais līdzsvars būs noteikts ar šo nosacījumu simultāno atrisināšanu.

Šāda veida problēmas var uzstādīt tikai matemātiski, un vienīgi matemātika mums atļauj teikt, kad tās ir un kad nav noteiktas, un kā tās var padarīt noteiktas, ja tās tādas nebūtu.

Tāds ir galvenais pamats, kas mūs spiež griezties pie matemātikas.»[12]

Ar to būtu atstāstīts pieminētās nodaļas saturs. Varam konstatēt, ka matemātikas metodi *Osorio* saprot kā īpašu dedukcijas paņēmienu, kas jo sevišķi izpaužas simultānas vienādojumu sistēmas veidā, pie kam matemātikas metodes *nepieciešamību* viņš redz savstarpīgās atkarības parādību un ekonomiskā līdzsvara pētīšanā. *Osorio* pieslējies galvenokārt *Walras*'a un *Pareto* darbiem, kuŗu galvenais saturs grozās ap ekonomiskā līdzsvara problēmām. Tāpēc arī *A. Osorio* kavējas tikai šinī novadā.

2. Matēmatikas metodi politiskajā ekonomijā *Bouvier* raksturo tā.[13]

«Matēmatikas metode pastāv šeit formulu jeb algebrisku formu lietošanā, matēmatiskās analizes simbolu pielāgošanā politiskās ekonomijas teōrētiskajos pētījumos, definīciju un ekonomisko principu fiksēšanā matēmatiskā formā. Prātojumus izdara ar vienādojumiem, līknēm u. t. t.; ģeometriskie attēli kombinējas ar formulām; hipotezes ir izteiktas algebriski. Šās sistēmas sekotāji izdara problēmu atrisināšanu par vērtību, strādnieku algas fiksēšanu, dažādu ražojumu cenas noteikšanu tirgū u. t. t. ar integrāliem, funkcijām. Viņi lieto matēmatikas paņēmienus galvenokārt tīras politiskās ekonomijas, t. i. šīs zinātnes vispārīgās un abstraktās daļas konstrukcijai. *Leon's Walras's*, piem., iezīmē visu savu sistēmu divās tezēs:

1) *tīrā politiskā ekonomija ir cenu noteikšana absolūtas konkurences hipotetiskā režīmā;*

[12] A. Osorio, op. cit., p. 158—161.

[13] Émile Bouvier, La méthode mathématique en économie politique. Revue d'économie politique, 15-e anné, 1901. Nr. 8—9 et Nr. 12.

2) *šī cenu noteikšanas teōrija ir matēmatiska teōrija, t. i., ja izlikumu var* izdarīt parastajā valodā, tad pierādījums jādod matēmatiski.[14]

Ar to arī dots viss matēmatikas metodes raksturojums. Tālāk *Bouvier* aplūko jautājumu, vai matēmatikas metode iespējama, un pakavējas pie apgalvojuma, ka polītisko ekonomiju nevarot reducēt uz matēmatiku ekonomisko datu nenoteiktības un sarežģītības (incertitude et complexité) dēļ. Visus iebildumus pret matēmatikas metodi, pēc viņa domām, varētu izteikt šādā veidā.

«Ekonomiskie dati par daudz nenoteikti, par daudz padoti dažāda veida ietekmēm, lai pakļautos matēmatiskā prātojuma rigorozitātei; tie ir par daudz sarežģīti, lai varētu ieiet algebriskās formulās, un tā tad, no otras puses, rezultāti, ko varētu stingri panākt, nedotu nekāda praktiska labuma.»[15]

Otrs apgalvojums esot iespēja reducēt polītisko ekonomiju uz matēmatiku. Te varot runāt vispirms par vispārīgo likumu meklēšanu. *Bouvier* citē ievērojamā franču matēmatika *H. Poincaré* domas, kas izteiktas, zīmējoties uz matēmatisko fiziku un varot tikt attiecinātas uz polītisko ekonomiju.

«Vispirms, saka *Poincaré*, zinātniekam vajadzīgs paredzēt. Taisni tā ir matēmatika, kas, atļaudama viņam pacelties pāri novērojumiem un ģenerālizēt savus pieredzes rezultātus, dod viņam līdzekļus paredzēt. Viņš sāk ar to, ka sarežģīto parādību, kas dota tieši pieredzē, sadala zināmā elementāro parādību skaitā. Elementāro parādību zināšana atļauj problēmu izteikt vienādojumos, un nepaliek pāri nekas cits, kā no vienādojumu kombinācijas deducēt vērojamo un attaisnojamo sarežģīto faktu. To sauc par *integrēšanu;* tā ir matēmatikas lieta. Fizikālajās zināšanās ģenerālizācija labprāt pieņem matēmatikas formu. Tas vispirms tāpēc, ka jāizteic skaitliskie likumi, otrkārt, tāpēc, ka novērošanai pieejamās elementārās parādības ir visas *līdzīgas savā starpā;* tā tīri dabiski iznāk diferenciālvienādojums. Elementāro faktu vienkāršība un fiziku pētījamās vielas aptuvenā homogenitāte ir bijuši galve-

[14] Bouvier, La méthode etc., p. 819.
[15] Bouvier, op. cit., p. 826.

nie nosacījumi matēmatiskās fizikas rašanās iespējai.»[15] Tālākais jautājums — praktiskā izlietošana. «Matēmatiskās skolas abstrakcijas ir nepieciešamās hipotezes, lai varētu konstruēt tīro zinātni, tāpat kā racionālās mēchanikas vai ģeometrijas abstrakcijas... Bet līdz ar to algebriskie aprēķini atbilst tāpat konkrētām ekonomiskām parādībām, kā tie atbilst dabiskām mēchanikas parādībām, kā ģeometriskā teōrija atbilst īstajam ķermeņu stāvoklim dabā, kā astronomijas un ģeografijas likumi atbilst formas detaļām uz zemes virsas. Ekonomijā tie neatbilst vairāk, bet tik pat daudz, kas pilnīgi pietiek.»[17]

Tad *Bouvier* iztirzā jautājumu par to, vai matēmatikas metode nepieciešama, un, vispirms, vai tā nepieciešama visai politiskai ekonomijai, vai tikai dažām tās daļām, un atrod, ka tā nepieciešama visai politiskajai ekonomijai, bet «jāzina politiskā ekonomija un jābūt patikai (goût) uz algebras un ģeometrijas abstrakcijām, lai fiksētu matēmatiskā formā ekonomiskās definīcijas un principus, un lai tos šinī formā saprastu».[18]

Cik tālu matēmatikas metode nepieciešama kā izlikuma (exposition) un kontroles līdzeklis, uz to *Bouvier* dod šādu atbildi.

«Ir zināms, ka algebras formulas vai formas ir īss un skaidrs, dažreiz elegants paņēmiens izteikt *kaut kādu tezi*. Tas ir izcils izlikuma un kontroles līdzeklis.

Vispirms matēmatikas paņēmiens dod politiskās ekonomijas patiesībām, likumiem eksaktu zinātnisku izteiksmi. Šīs skolas ekonomisti izteic ar saviem paņēmieniem ekonomiskos likumus, un tas ir viņu tiesība. Visa pasaule atzīst, ka matēmatika ir izcils izlikuma līdzeklis, paņēmiens rezimēt pierādījumus, kas parastajā valodā riskētu būt pārāk gaŗi. Algebra noslēdzas īsās, izmeklētās formulās. Kā ir teikts, matēmatikas iejaukšanās zinātnēs ir ar lielu priekšrocību — tā dod domai

[16] Bouvier, op. cit., p. 828.
[17] Ibid., p. 849.
[18] Bouvier, op. c., p. 1029.

absolūtu precizitāti un novērš visas grūtības interpretēt likumus, kas deducēti šādā ceļā. Tā ir skaidrības zinātne.»[19]

Bet nu nāk pats galvenais jautājums — matemātikas metodes kā atklājumu (découverte) instrumenta nepieciešamība. Par to *Bouvier* izteic šādas domas.

«Katra deduktīvā metode vispār ir vispirms atklājuma instruments. Aiz šā iemesla to ir lietojusi tiesību zinātne. Bet matemātikas metode stumj šo priekšrocību daudz tālāk. Tā padara pilnīgāku noderīgumu, kas jau eksistē. Var ļoti viegli noskaidrot, ka matemātika ir atradumu instruments:

1) pašā sevī, t. i., ja nodarbojas vienkārši *ar matemātiku*, ja pētī matemātikas likumus pašā sevī;
2) kad to izlieto eksperimentālās zinātnēs;
3) kad to tāpat lieto politiskā ekonomijā.

Vispirms tīrā matemātika noved pati sevi pie jauniem rezultātiem. Bez šaubām, zināms, ka tā nerada nekā ar neko. Ir teikts drusku familjāri, bet pareizi, ka matemātika esot dzirnavas, un kā ikkatras dzirnavas, tā nedod nekā cita kā vien to, kas tanīs ielaists. Tikai tās pārveidojumu vara ir tāda, ka dabūtais produkts var atšķirties ļoti stipri no izejas vielas, kaut gan tas nevar būt nekas cits, kā tās loģiska konsekvence. No šā viedokļa var teikt, ka tā ir atradumu instruments, jo tā novedusi pie patiesībām, kuŗus uzminēt bez tās būtu ļoti grūti un dažkārt pat neiespējami. Tad laiks iejaukties novērojumam un likt redzēt, vai likums jeb parādība, kas norādīts ar matemātikas paņēmienu, īstenībā realizējas. Pieredzei vajadzīgs vienmēr sekot matemātikas prātojumam attaisnojumu nolūkā. Tā pastāvēs, piem., algebras ceļā dabūto rezultātu skaitliskajā lietošanā. Bet pieredzei te tikai attaisnojuma loma; atradumu instruments ir matemātika.»[20]

Noslēgumā *Bouvier* uzsveŗ domu, cik liela nozīme tam, ka dažādas zinātnes nozares iespiežas cita citā, jo ar to ienāk jauni viedokļi, paņēmieni un metodes, un zinātnes nozare it kā atdzīvojas. Tāda loma var piekrist matemātikai politiskā ekonomijā.

[19] Ibid., p. 1041—1042.

[20] Bouvier, op. cit., p. 1045.

«Ekonomistiem, tāpat kā juristiem, jāatteicas no senām tradicijām, ja viņi grib vilkt robežu savas zinātnes sastingumam, ja viņi sirsnīgi vēlas likt spert tai izšķirēju soli uz priekšu un to pacelt progresa līmenī, kas jau realizējies citu pētījumu nozarēs. Ja turpretim viņi atteicas par to izšķirties, viņi būs liecinieki tālākam teōriju sairumam par sabiedrisko bagātību un viņi kļūs vairāk un vairāk nespēcīgi izrādīt jebkādu ietekmi uz ekonomiskā novada notikumiem. Līdzeklis to novērst ir taisni radniecīgu zinātņu iespiešanās politiskā un finanču ekonomijā. Tādā veidā citas zinātnes jau ir atdzīvojušās.»[21]

Rezimējot, varam teikt, ka *Bouvier*, kaut gan atzīst matēmatikas metodi gan kā izlikuma līdzekli (didaktisko līdzekli), gan jo seviški kā atradumu instrumentu, nedod tomēr pietiekoši noteikta matēmatikas metodes raksturojuma un pienācīga attaisnojuma šās metodes lietošanai politiskajā ekonomijā. Atzīmējamas *Bouvier* domas par dažādu zinātņu nozaru caurausānās auglīgumu.

3. *P. Boven*'s vispirms mēģina[22] noskaidrot starpību starp dabas zinātnēm un metafiziku.

«Divas zināšanu grupas censās diferencēties: dabas zinātnes un metafizika.

Pirmās pētī lietas un faktus tādus, kā tos uztver mūsu spējas (jutekļi — facultés); otrās, turpretim, meklē to, kas *ir viņās pašās*, t. i. neatkarīgi no mūsu spējām.

Zinātne izzina tikai attiecības materiālo lietu un mūsu starpā. Metafizika pretendē uztvert lietu *būtību, absolūto patiesību.*

Tā tad pēc definējuma, otrās disciplīnas novads ir ārpus pieredzes lauka. Tas ir divu zinātnes grupu atšķirības kritērijs.

Dažreiz dzird runājam, ka, piem., ģeometrija spriežot par figūrām, ko nevar atrast pieredzes pasaulē, un ka tāpēc būtu jāizvēlas cits kritērijs, ja tāds būtu.

[21] Ibid., p. 1085.

[22] Pierre Boven, Les applications mathématiques à l'économie politique, thèse, présentée à la faculté de droit de l'université de Lausanne, Lausanne 1912.

Ģeometrijas objekts nav tieši šīs figūras pašas sevī, bet attiecības, ko varam atrast to starpā un attaisnot eksperimentāli. Zinām labi, ka punkts, līnija, plāksne ir hipotezes, bet ja šīs hipotezes dotas, tad varam pakļaut pieredzei likumus, ko deducējam no viņu attiecībām, bet ne vis figūru *eksistenci, reālitāti*, kā teiktu metafiziķi. Vēlreiz, zinātnes objekts ir atrast attiecības starp kādām *lietām* — *reālām vai irreālām.*»[23]

Noskaidrojot tālāk zinātnes attīstības gaitu un sevišķi savstarpīgās atkarības (dependance mutuelle) attiecības, *Boven*'s izteicas līdzīgi *Ant. Osorio:*

«Vispirms lieta grozās ap to, lai izteiktu tās savstarpīgās atkarības attiecības daudzumu starpā, ko varbūt vēl nespējam mērīt, bet kas nav patvaļīgi.

Otrs solis, ja tas iespējams, nostāda zinātni stāvoklī, ka tā var tieši *mērīt* šos daudzumus. Ķīmija šodien to spēj. Redzēsim, vai ekonomija arī tik tālu avansējusi.

Kvalitātīvie pētījumi dod pirmo tuvinājumu, bieži noderīgu vēl pēc kādas kvantitātīvas teōrijas atrašanas.»[24]

Tad autors piegriežas matēmatiskai ekonomikai un min vispirms tos iebildumus, ko ceļ pret to.

«Saka, ka politiskā ekonomija esot morāles zinātne. Nesot iespējams mērīt cilvēku jūtas, tās izteikt vienādojumos. Pieņemot, ka tas nebūtu chimerisks pasākums, mums trūktu precīzu datu, kas ļautu sasniegt meklējamo rigorozitāti. Mēs varot spriest tikai par vidējiem lielumiem un tuvinājumiem. Statistika esot vēl stipri palikusi atpakaļ, un ja tā būtu attīstījusies, mēs neuztvertu laiku, kas paiet, nedz arī mainīgo parādību plūdus un atplūdus. Ar matēmatisko ekonomistu abstraktajām teōrijām, ar viņu pieņēmumiem, viņu vienkāršojumiem, tie esot arvienu ārpus reālitātes; viņi nododoties ļoti amizantai gara spēlei, bet bez liela labuma zinātnei un vēl mazāk cilvēcei. Starp citu, tā tiek piemetināts, tā neesot nekā vai ļoti maz ko atradusi. Gribēdami izteikt vienādojumos cilvēku vēlēšanās, to priekus un bēdas, viņi (matēmatiskās

[23] Boven, Les applications etc., p. 3.
[24] Ibid., p. 15.

ekonomikas pārstāvji) izslēdzot brīvo spriedumu, atteikdamies rēķināties ar morāli, cilvēces vai kādas individu grupas interesēm, lai pieķertos tikai vienādojumiem, viņi netikai neņemot vērā daudzus problēmas faktorus, bet vēl izdarot egoistisku un bieži nemorālisku darbu.

Tie ir galvenie kritiskie iebildumi pret matēmatikas lietošanu ekonomijā.»[25]

Lai varētu dot atbildi uz šiem iebildumiem, *Boven's* šķir ekonomiju no citām sociālām zinātnēm. Pašā ekonomijā divas daļas — abstraktā, kas aplūko vienkāršus hipotetiskus stāvokļus, un lietojamā — otrais tuvinājums, kur tuvojas reālajām parādībām, ņemot vērā vairs ne abstraktās hipotezes, bet konkrētos gadījumus, kur pārbauda un izlabo novirzījumus no teōrijas, līdzīgi tam, kā tas ir mēchanikā.

Lietojamā ekonomijā būs viena daļa teōrētiska, bet ne vairs abstrakta, un viena daļa praktiska.

Socioloģija — trešais un beidzamais tuvinājums, kas aplūko konkrētu cilvēku ne tikai tā ekonomiskajās izteiksmēs, bet visās sociālās attiecībās.

«Tā tad pakāpeniski trīs tuvinājumi: tīrā ekonomija, kas pētī *homo oeconomicus*, lietojamā ekonomija, kas aplūko konkrēto cilvēku no ekonomijas viedokļa, un socioloģija, kas vēro cilvēku visās sociālās izteiksmēs.»[26]

Tā kā ekonomiskās parādības stipri sarežģītas, tad to pētīšanai rodoties lielas grūtības.

«Grūtības sarežģījumu kamola atšķetināšanā deva pamazām dažām personām neskaidru intuiciju par ekonomisko parādību savstarpīgo atkarību. Šo ideju izteica, proklāmējot faktoru savstarpīgo iedarbību un pretdarbību.

Pūlējās ar to rēķināties teōrijās, bet mēģinājumi iznāca neauglīgi aiz divi iemesliem.

Pirmais bija tas, ka ar parasto loģiku nav iespējams iet pietiekoši tālu savstarpīgās atkarības jautājumos.

Otrs, šo savstarpīgo atkarību nestiepa pietiekoši tālu, kad lietoja matēmatikas loģiku. Šo atkarību redzēja vienīgi starp

[25] Boven, op. cit., p. 16—17.
[26] Boven, ap. cit., p. 20.

atsevišķi ņemto problēmu elementiem. Kad lieta grozījās ap vispārīgu jautājumu, tūlīt tika aizmirsta savstarpīgā atkarība par labu jaunām cēloņu un seku rindām, kas soļoja vienā kolonnā. Tā rīkojas pa lielai daļai vēl tagad.»[27]

«Divi nosacījumi nepieciešami, lai varētu ekonomijā uzbūvēt kvantitātīvu teoriju: rēķināties ar savstarpīgo atkarību un šinī nolūkā lietot matēmatiku.

Nevarētu par daudz uzsvērt vispārīgās savstarpīgās atkarības svarīguma jēdzienu. Var teikt, ka taisni tanī dienā, kad tas kļuva skaidrs, dzima tīrā politiskā ekonomija. Pateicoties tam, beidzot atsvabinājās no primitīvās koncepcijas, no tiešās cēloņu un seku attiecības. Tas nenotika bez grūtībām; ilgu laiku vēl redzēja dzīvojam blakam divus jēdzienus vienā pašā teorijā, kur otrā dereja par kommentāru pirmajai. Bet ekonomisti bija jau uz pareiza ceļa. Šodien jau zināma daļa ekonomistu ir pilnīgi atmetuši veco koncepciju. Viņi atzīst, ka veltīgi meklēt *vērtības cēloņi*. Viņi saprot, ka bieži mēģināts atrisināt sistēmas, kur vienādojumu daudz vairāk nekā nezināmo, vai arī mēģināts aplūkot neatkarīgi dažādus vienas sistēmas vienādojumus.»[28]

«Par problēmu sarežģītību tīrajā ekonomijā *nav ne jausmas* ekonomistiem nematēmatiķiem. Dažiem jautājumiem jau grūti sekot matēmatiskajā izlikumā. Var iedomāties, kādi tie būtu parastajā valodā.

Parastā ekonomika domā ņēmusi vērā savstarpīgo atkarību savu elementu starpā, pieškirdama tiem *vairākus cēloņus*.»[29]

Pretodamies uzskatam, it kā vienīgi kvantitātīvais pieškirtu vajadzību lietot matēmatiku, *Boven*'s saka:

«Tiešām, ja tāpēc, ka nodarbojas ar daudzumiem, vajadzētu lietot matēmatikas loģiku, tikai nedaudz disciplīnu izvairītos no tās iejaukšanās.

Mūzikas un dejas māksla, bez šaubām, rīkojas ar daudzumiem, bet tomēr nevienam nenāks prātā apbruņoties ar algebru vai integrālrēķiniem, lai iemācītos solfedžo, vai pat kontra-

[27] Boven, op. c., p. 22.
[28] Ibid., p. 25.
[29] Boven, op. cit., p. 28.

punktu. Tas tāpēc, ka attiecības, ko tur atrod, ir tik vienkāršas, ka pa pilnam pietiek parastās valodas to izteikšanai. Taisni savstarpīgās atkarības attiecības ekonomisko parādību starpā ir par cēloni, ka ir spiesti ķerties pie daudz spēcīgākas loģikas, bet ne tikai tas fakts vien, ka aplūko daudzumus.»[30]

Kopsavilkumā redzam, ka *Boven*'a domas par matēmatikas metodes lietošanu politiskajā ekonomijā maz atšķiras no sīkāk atstāstītājiem *Ant. Osorio* uzskatiem.

4. *Jaques Moret* darba[31] mērķis aplūkot matēmatikas lietošanas izdevīgumu, vēsturi un stāvokli (l'opportunité, l'historiques et la consistance) politiskajā ekonomijā.»[32]

Moret cenšas noskaidrot, ka «ekonomijas *viela* pēc dabas tāda, ka to var ievest tur, ko *Taine*'s nosaucis par matēmatikas dzirnavām, un mums tā tad atliek tikai pierādīt, ka ekonomiskās parādības tērpjas tādās formās, kas ļoti pielāgotas šīm dzirnavām, t. i., ka matēmatikas analize ir spējīga pētīt šīs parādības».[33]

Arī *Moret* aizrāda uz ekonomisko parādību savstarpīgo atkarību.

«No otras puses, pārmaiņas, kas notiek vienlaikus vairākās parādībās, nav neatkarīgas, tās saistītas cita ar citu, tās ir cita citu *funkcija*. Tas ir ārkārtīgi svarīgs fakts, uz ko šeit tikai norādīsim, jo vēlāk būs izdevība ieiet visplašākā iztirzājumā par šo priekšmetu, lai parādītu matēmatikas lietošanas nepieciešamību politiskā ekonomijā.»[34]

Kādas tad nu pēc *Moret* domām ir matēmatikas metodes īpašības?

«Divi pamata jēdzieni, kas ir katras matēmatikas analizes pamatos, ir taisni nepārtrauktības un sevišķi funkcijas jēdziens, un tāpēc var teikt, ka šie divi jēdzieni sastāda pašu šīs zinātnes būtību tādā kārtā, ka ne tikai analizes paņēmieni lietojami visos jautājumos, kuŗu elementi spēj pakļauties ne-

[30] Ibid., p. 29—30.

[31] Jaques Moret, L'emploi des mathématiques en économie politique, Paris 1915.

[32] Moret, op. cit. p. 11.

[33] „ „ „ p. 7.

[34] „ „ „ p. 8.

pārtrauktām variācijām, ir citi citu funkcijas, bet vēl tāpēc, ka šie jautājumi ir *ipso facto* analizes problēmas, pat, ja viņu vienkāršība ļautu tos aplūkot, neķeroties pie simboliem, kuŗos, lielākas skaidrības dēļ, vispār ietērpj matēmatikas atrisinājumus.»[35]

«Tā kā polītiskā ekonomijā daudz savstarpīgas atkarības attiecību, tad var teikt, ka analize ir tik labi pielāgojama to jautājumu zinātniskiem pētījumiem, kas ir šis zinātnes priekšmets, ka no tās dienas, kad ieskatīja, ka derīgums (lietošanas vērtība) nav objektīva un absolūta lietu īpašība, bet individuālo dispoziciju *funkcija*, tā ir nākusi, dažā ziņā spontāni, ņemt vietu lietojamās matēmatikas novadā, līdzās mēchanikai un fizikai. Tiešām, tāpat kā šinīs zinātnēs, arī polītiskajā ekonomijā valda mazākā spēka patēriņa likums *(la loi de la moindre action)*, kas dažreiz pieņem, kad lieta grozās ap sociologijas jautājumiem, pareizi saprastas intereses principa nosaukumu: tāpat kā materiālas sistēmas līdzsvara stāvokļi ir tie, kas atbilst dažu *funkciju lielākajām* vai *mazākajām* nozīmēm, arī ekonomiskās pasaules līdzsvara nosacījumi ir tie, kas nodrošina individam derīguma *maksimu* ar pūļu *minimu* tik labi, ka visas sociālo zinātņu problēmas var tikt uzlūkotas kā *maksima* problēmas, kā to atzīmē *Winiarsky's*.»[36]

Kādam tad nolūkam īsti noder matēmatika polītiskā ekonomijā? Uz to *Moret* dod šādu atbildi.

«Matēmatika nepieciešama, lai norobežotu vispārīgo ekonomisko parādību pētījumus.»[37]

Šo tezi *Moret* pamato ar šādu prātojumu.

«Ekonomiskā pasaule, ņemta tās visumā, izrādās kā individu vai individu grupu agregāts, kuŗu tendences, savstarpīgi ierobežojoties — nonākt līdzsvarā konkurences iedarbībā (no konkurences neprastu abstrahēties pat vislielākās intervencijas režīmā), tāpat, kā kādas šķidras masas molekulas, ja šī masa aiz kaut kādiem motīviem novesta kustībā, sadurdamās, beidzot atrod līdzsvara stāvokli smagumspēka iestekmes dēļ.

[35] Moret, op. cit., p. 8.
[36] „ „ „ p. 9.

Tā tad viena individa vēlēšanos apmierināšana atkarājas no viņa gribas tikai zināmās robežās, ārpus kurām viņa pūles neizbēgami iznīcina to pūles, kam pretējas intereses ar viņa interesēm. Bet var pieņemt, ka šinīs robežās, kur viņš var brīvi rīkoties pēc savas patikas, individs rīkosies tā, lai dabūtu ar mazākām pūlēm vislielāko summu iespējamas laimes, ja doti apstākļi, kur viņš atrodas novietots.»[38]

«Ekonomijas, tāpat kā fizikas pasaulē līdzsvars atkarājas nevis no elementu absolūtas vērtības, kuŗi tur satek, bet no relātīvas vērtības, tāpēc šie elementi ir noteikti tikai kā citi citu funkcijas, no kurienes izriet, ka nepieciešami tos aplūkot visus *en bloc*, ja grib nokļūt līdz secinājumam, kas nenovirzītos par daudz no īstenības.»[39]

«Lai nokļūtu pie pilnīga ieskata ekonomiskajā pasaulē, ar visu nepieciešamību jākeras pie daudz pilnīgāka pētīšanas līdzekļa nekā parastā loģika. Ir tikai viens tāds līdzeklis, kas atļauj tvert vienā pašā prātojumā sarežģītās parādības dažādus elementus: tas ir izteikt reakcijas, ko šie dažādie elementi izdara cits uz citu, simultānu vienādojumu sistēmā. Lielākā daļa literāro ekonomistu darbu par tik, par cik tie nodarbojušies ar vispārīgām teorijām, var tā tad tikt uzlūkoti kā mēģinājumi atrisināt simultānus vienādojumus vienīgi ar parastās valodas līdzekļiem, kas nav iespējams, vai var tikt uzlūkoti vismaz kā mēģinājums reducēt, ar vairāk vai mazāk piemērotām hipotezēm, šo vienādojumu skaitu uz vienu vai divi, riskējot, ka beidzot iznāks tikai viens vienādojums triju nezināmo atrašanai, kā tas rodas dažās sadalījuma teorijās.

Un liekas tikpat skaidra lieta, ka, izejot no aplūkoto parādību savstarpīgās atkarības fakta, matēmatikas lietošana ir absolūti nepieciešama, lai norobežotu ekonomiskās pasaules pētījumus visā viņu pilnīgā sarežģītībā.»[40]

«Vienīgi parādību savstarpīgā atkarība spiež lietot matēmatiku politiskā ekonomijā un, tā tad pilnīgi attaisno šo lie-

[37] Moret, op. cit., p. 21.
[38] „ „ „ p. 22.
[39] Moret, op. cit., p. 23.
[40] „ „ „ p. 25.

tošanu . . . Ir novads, kas īpaši pieder matēmatiskajai ekonomijai: tas ir ekonomiskā līdzsvara analizes lauks.»[41]

No sacītā izriet, ka arī *Moret* nedod matēmatikas metodes pilnīgāka raksturojuma; tās nepieciešamību politiskā ekonomijā viņš redz savstarpīgas atkarības parādību pētīšanā, uzsverot pie tam maksima un minima problēmas.

5. *L. Leseine*'a un *L. Suret* darba[42] ievadā aplūkota matēmatikas metodes būtība un nozīme. Tur sastopamas gandrīz tās pašas domas, kas izteiktas iepriekš minēto autoru darbos.

«Matēmatikas metodi var saprast divējādā veidā: kā izlikuma metodi, t. i. kā didaktisku metodi, vai arī kā pētījumu metodi, t. i. kā *heuristisko* metodi.»[43]

Kā didaktiskā metode tā esot jau diezgan veca. *Quesnay*'s, piem., lietojis aritmētikas aprēķinus, lai izskaidrotu savu *Tableau*. Lietojuši matēmatikas formulas arī citi fiziokrati. Par *Marx*'u *Schmoller*'s runājot kā par matēmatiķi.

«Bieži iet vēl tālāk un uzlūko par matēmatiķiem, no didaktiskā viedokļa, ne tikai tos, kas ķeras pie matēmatikas simboliem vārda īstā nozīmē, bet arī tos, kas esot matēmatiķi, ja ne pēc valodas, tad vismaz pēc toņa, t. i. pēc savas loģikas, pēc savas dedukcijas rigorozitātes . . . Šinī nozīmē, piem., par *Adam*'u *Smith*'u un *Ricardo* var teikt, ka no didaktiskā viedokļa tie ir matēmatiķi . . . Bet kad šodien runā par matēmatiskās skolas ekonomistiem, nedomā par nule pieminētajiem, t. i. par tiem, kas lieto matēmatikas simbolus illūstrācijas nolūkos, vai, kas savas dedukcijas izdara ar tādu meistarību, ka liekas sasniedzam īstu matēmatikas rigorozitāti. Matēmatiskas skolas ekonomisti šīs izteiksmes pašreizējā nozīmē atšķiras no iepriekšējiem ar to, ka viņu metode nav tikai *didaktiska*, bet īsta *heuristiska*, īsta pētīšanas metode (véritable méthode d'investigation). Šī metode, kas specifiska matēmatikas skolai, bazējas uz šādiem divi apsvērumiem.

[41] Moret, op. cit., p. 27.

[42] Léopold Leseine et Louis Suret, Introduction mathématique à l'étude de l'économie politique, Paris 1911.

[43] Leseine et Suret, Indroduction etc., p. 1.

Katrā likumā ir divi elementi:
1) *data* jeb prēmisas;
2) *vincula* jeb prātojuma saites, kas risina secinājumus, kuŗi izriet no datu kombinācijas un spēles.

Kas zīmējas uz *data*, matēmatiķiem tas ir ar maz nozīmi, lai premisas būtu vai nebūtu kvantitātīvas. Kvantitātīva koeficienta fiksēšana kādai premisai nav matēmatikas zinātnei *būtiska* lieta, otrādi, tā spriež pēc būtības par nenoteiktiem daudzumiem. Un, saka matēmatiķi, ja, ejot savu ceļu, mūsu prātojuma gaitā mēs fiksējam ciparus vai burtus mūsu prēmisās, ko mēs izstrādājam, tad tas ir pilnīgi gadījuma rakstura paņēmiens, kuŗš lemts mūsu nolūka atvieglošanai. Vai *data* būtu vai nebūtu spējīgi tikt pārcelti ciparos, tas mūs interesē tikai sekundārā kārtā; būtiskais mums ir zināt, ka starp tādu un tādu parādību pastāv tāda un tāda attiecība.»[44]

«Mēs nedomājam, viņi (matēmatiskās ekonomijas pārstāvji) piemetina, padarīt par kvantitātīvu to, kas tāds nav, un nedomājam fiksēt kvantitātīvos koeficientus neizmērījamos sentimentos. Mums pietiek zināt, ka tāda vai citāda parādība ir tāda un tāda mainīgā lieluma funkcija un ar īpatnējiem matēmatikas analizes (calcul infinitésimal) paņēmieniem dabūjam secinājumus, ko dod šāda attiecība. Īsi sakot, *datiem* ir būtiska lietu attiecība, relācija, bet ne absolūts skaitlis.»[45]

Tik tālu par *data*. Kas, zīmējoties uz *vincula*, tad matēmatikas skola apgalvojot, ka taisni šinī ziņā tā esot spējīga galvenai lomai. «Tā ir funkciju teōrija un vienīgi funkciju teōrija, pēc šīs skolas uzskatiem, kas atļauj izsekot kā pienākas darbības un pretdarbības procesam, kuŗš ir būtisks un immanents īstenības parādībām. Tiešām, ja y ir x'a funkcija, otrādi x ir y'a funkcija: ar mūsu metodi, saka matēmatiķi, mēs izvairāmies lietot kauzālitātes principu, kas neatbilst nekam lietu īstenībā; nav ne cēloņu, ne seku, bet parādību daudzums, kas ir citas ar citu funkcionālā sakarībā. Kad nematēmatiskā ekonomika runā par cēloņiem, sekām un nosacījumiem, tā vilto īstenību. Nevar, piemēram, teikt, ka vērtībai

[44] Leseine et Suret, op. cit., p. 3—4.
[45] „ „ „ „ „ p. 4.

ir par cēloni ražošanas izmaksas; patiesība tikai tā, ka vērtība no vienas puses un ražošanas izmaksas no otras puses ir parādības, kas atrodas būtiski savstārpīgā relācijā. Tāpat nav normālas cenas, ir tikai līdzsvara cena u. tml. u. tml.

Vēl jo vairāk, piemetina matēmatiķi: dažus jautājumus nevar atrisināt citādi kā vien ar diferenciālrēķinu palīdzību — vispirms maksima jautājumus. Jāpiemetina, piezīmē *W. Winiarski*'s («La méthode mathématique dans la sociologie et dans l'économie politique, Revue socialiste 1894., p. 726), ka visas sociālo zinātņu problēmas var tikt uzlūkotas kā maksima problēmas, jo ekonomijas priekšmets ir sakārtojumi faktoru starpā (arrangements entre des agents), no kuŗiem katrs tendē uz savu noderīguma maksimu.»[46]

Bet nu maksima jautājumus, saka mūsu autori, nevar precīzāk atrisināt citādi kā vien ar diferenciālrēķinu palīdzību.

Tālāk autori piemin, ka jau *Malthus*'s norādījis uz to, ka daudz morāles un politikas jautājumi liekoties tādas dabas, kāda ir bezgalīgi mazo lielumu rēķinos problēmām par maksimiem un minimiem; norāda uz *Cournot, Edgeworth*'u, *Aupetit, Painlevé*, kā tie rakstuŗojuši matēmatikas metodi, un tad piegriežas iebildumiem pret šo metodi.

Tā kā mums nāksies atgriezties pie tikko pieminētajiem autoriem un sīkāk iztirzāt iebildumus pret matēmatikas metodi, tad patlaban pie šiem jautājumiem nekavēsimies.

Redzam, ka *Leseine* un *Suret* par politiskajā ekonomijā lietojamo metodi atzīst *funkciju* metodi, sīkāk nenoskaidrojot tās būtību.

6. *Josef*'s *Schumpeter*'s vispirms aizrāda[47] uz to, ka zinātniskajā ekonomijas diskusijā liela loma piekrīt metodoloģiskajiem jautājumiem. Kā pretējos polus apzīmējot parasti vēsturisko un eksakto virzienu. «Zīmējoties uz *eksakto teōriju*,» saka *Schumpeter*'s, «viens no interesantākiem metodoloģiskiem jautājumiem ir tas, vai matēmatikas domāšanas formu lietošana šeit būtu iespējama un vēlama, tālāk, vai tā būtu vajadzīga. Šis jautājums, kas tālāk īsi iztirzājams, ir svarīgs. Ja uz to būtu jāatbild pozitīvi, tad vajadzētu katru mirkli būt

[46] Leseine et Suret, op. cit., p. 4—5.

gataviem uzdurties uz problēmām, ko varētu atrisināt tikai ar šo metodi; vismaz par to runā analoģija ar citām, jau par matēmatiskām kļuvušām disciplīnām.»[48]

Tālāk *Schumpeter's* piegriežas tiem nosacījumiem, kas jāizpilda, lai varētu runāt par matēmatisku disciplīnu. Pirmais nosacījums pēc viņa domām — disciplīnas kvantitātīvais raksturs. Šādai disciplīnai jādarbojas ar jēdzieniem, kas izteicami kā matēmatiski lielumi, kam var piekārtot skaitliskos lielumus.

«Tāds nosacījums sastopams mūsu novadā pilnā mērā, var teikt, ka tas bija apstāklis, kas noveda pie matēmatikas lietošanas un vienmēr dereja par galveno argumentu. Ar sevišķu spēku to uzsvēris *Jevons's*, — viņam tāpēc vien jau katrs nematēmatisks aplūkošanas veids liekas nederīgs ... Tā tad darbs, prece, laiks, cenas, augļi u. t. t. ir kvantitātes ... Noauktajiem jēdzieniem var bez kā tālāka piekārtot skaitli un skaitļa simbolu; jautājums par izvēlamām vienībām rada gan praktiskas (piem. darbam), bet ne būtiskas principiālas grūtības.»[49]

«Tā kā tās jēdzieni ir kvantitātīvi, tad mūsu disciplīna ir matēmatiska disciplīna. Tās spriedumiem ir vienādojumu raksturs. To pierāda paviršs skats par tās mācībām. Ja kāda labuma vērtība atkarīga no piederošā vai baudītā daudzuma, tad te ir noteikta vērtības kvantitāte novesta funkcionālā sakarībā ar noteiktu daudzumu. Vai arī domāsim par ražošanas izmaksu likumu: cenas zināmos nosacījumos tendē uz vienlīdzību: cena = ražošanas izmaksām. Vai arī par kvantitātes teōriju, vai par *Böhm*'a kapitāla augļu teōriju: augļi ir tagadnes mantu *agio*, vai: cenas atkarājas no piedāvājuma un pieprasījuma, t. i. no piedāvātiem un pieprasītiem preču daudzumiem.»[50]

[47] Josef Schumpeter, Über die mathematische Methode der theoretischen Ökonomie. Zeitschrift für Volkswirtschaft, Sozialpolitik und Verwaltung, 15. B., 1906, p. 30—49.

[48] Schumpeter, op. cit., p. 30.

[49] Schumpeter, op. cit., p. 33.

[50] „ „ „ p. 35.

Tāpēc bez matēmatikas nevarot iztikt. Parasti gan, ja noraidot matēmatikas metodi, domājot par tā saucamo augstāko matēmatiku, bet tas neesot pieļaujams, jo nevarot aprobežoties, lietojot matēmatiku, tikai ar elementārmatēmatiku, atzīt tikai to par nepieciešamu, bet kas pāri par to, to noraidīt. Principiālas robežas šeit neesot.

Ko tad nu augstākā matēmatika, pēc *Schumpeter'a* uzskatiem var dot politiskai ekonomijai, kāda metode te visvairāk noderīga?

Atbildei *Schumpeter's* min vispirms funkcijas un robežlieluma jēdzienu. Kaut gan funkcijas jēdziens (funkcija — mainīgais lielums, kuŗa nozīmes atkarājas no kāda cita mainīga lieluma nozīmēm) neesot svešs arī nematēmatiskajai domai, tomēr savu pilnīgu nozīmi, pamatojumu un lietojamību dabūjot tikai ar matēmatisku formulējumu un lietošanu. Esot skaidra lieta, cik svarīgs šis jēdziens tautsaimniecībā. «Vērtība ir piederošā labumu daudzumu funkcija, cena — piedāvājuma un pieprasījuma funkcija, naudas vērtība atkarājas no vairākiem mainīgiem lielumiem u. t. t. Ja jāaplūko tikai divi savstarpīgi atkarīgi lielumi, tad var — vienkāršu attiecību gadījumā to starpā — iztikt bez augstākās matēmatikas formām. Bet ja tas tā nav, seviški, ja jāņem vērā daudzi mainīgie lielumi, tad pie mums nāk prasības, kam piemērots tikai matēmatisks apstrādājums. Tāpēc funkciju teōrija liekas kā nepieciešams palīglīdzeklis teōrētiskajai ekonomijai.»[51]

Arī robežlieluma jēdzienu sastopot jau priekšā teōrētiskajā tautsaimniecībā. Nekas tā nevarot pārliecināt par matēmatikas nepieciešamību, kā galīgā noderīguma jēdziens (Grenznutzenbegriff), jo tikai matēmatika to varot pilnīgi pietiekoši definēt. Varot teikt, ka ekonomija atradusi patstāvīgi diferenciālkvocienta jēdzienu un to ar pūlēm izstrādājusi saviem mērķiem, un otrādi, ka matēmatikā jau gatavā veidā ieiet ekonomijas fundamentālie jēdzieni. Bet pilnīgākā metode ar tiem rīkoties esot diferenciāl- un integrālrēķini. Tikai

[51] Schumpeter, op. cit., p. 39.

tie varot pilnīgi tvert pastāvīgi mainīgo un pie tam savstarpīgi ietekmējamo lielumu iedarbības veidu.

Vissvarīgākais bezgalīgi mazo lielumu metodes lietojums esot maksimu un minimu teōrija, ko *Edgeworth's* saucot par «ekonomijas dzimto valodu». Tam pieslēdzoties variāciju rēķini. Vēl jānosaucot divi citi lauki: ģeometrija un varbūtību rēķini. Funkcijas varot attēlot ar līknēm. Bet tā kā viņu noteiktā forma neesot zināma, tad tam esot tikai hipotetisks raksturs, ja neņemot vērā atsevišķas mums dotās īpašības. Bet kur līknes varot lietot, tur šie ģeometriskie attēli dodot savus rezultātus viegli saprotamā un ārkārtīgi pievilcīgā formā.

Dažu saimniecisko jautājumu pētījumiem esot nozīme arī varbūtības rēķiniem, tomēr ne tīrajā teōrijā, par ko vienīgo šeit runājot. Esot stingri jāizšķir divi lietas. Pirmkārt, matēmatika varot būt par palīgzinātni ekonomijai, lai atrisinātu dažas problēmas, ko pēdējā tai uzstāda; īpatnējais ekonomiskais domu gājiens šeit pilnīgi brīvs no matēmatikas, tai tur esot tikai pakārtota kalpa loma. Šāds lietošanas veids sastopams sevišķi praktiskos jautājumos, piem., kāda biržas papīra nākamā varbūtīgā kursa aprēķināšana, apdrošināšanas matēmatika u. tml. Bet tas šeit neesot saprotams kā matēmatiskā ekonomija. Tam nolūkam tautsaimniekiem nevajagot nekādu matēmatisku zināšanu, jo kas vajadzīgs no matēmatikas, to darbu varot likt pagatavot matēmatikas birojā. Te esot domāta matēmatika kā pētīšanas metode, kā ekonomiskas domas būtiska forma.

Tālāk *Schumpeter's* aplūko, ko līdz šim devusi matēmatiskā ekonomija, un nāk pie secinājuma, ka nav labāka pierādījuma matēmatiskās ekonomijas dzīvotspējai, kā tās ātrās pieaugšanas fakts. «Tagad nevar vairs tai pāriet pāri, kā to darīja vēl priekš relātīvi īsa laika (apm. 15 g.). Arī pētnieki spiesti ieņemt pret to stāvokli.»[52]

Tā tad arī *Schumpeter's* atrod par tautsaimniecības teōrijai noderīgu un pat nepieciešamu funkciju metodi, nedodams par to pilnīgāka pārskata.

[52] Schumpeter, op. cit., p. 47.

7. *Dr. B. Weisz's* norāda,[53] ka «jautājuma izšķiršanai, vai mūsu zinātnē var lietot matēmatikas metodi, priekšnosacījums ir šīs metodes pareiza izpratne. Ja tā tad aplūkojam matēmatiskā paņēmiena vispārīgo raksturu, kas diemžēl — cik tālu varējām izsekot šo lietu — *nekur nav pamatīgāk iztirzāts, kaut gan to būtu pelnījis* (pasvītrojums mans. L. A.), tad to redzam, zīmējoties uz mūsu mērķiem, šādā veidā:

1) Matēmatika attīsta uz nedaudzu loģisku principu pamata visaugstākā mērā vērtīgu domāšanas aparātu, kas ārkārtīgi atvieglo domāšanas operācijas, pat zināmā mērā izveidojas par sevis kontrolētāju mēchanismu.

2) Visu katēgoriju izslēgšana, izņemot skaitli un lielumu; matēmatikas teōrija nepazīst ne kvalitātes, ne cēlonības, ne organisku, ne ētisku principu.

3) Formas eksaktība, pat pastāvot faktoru vērtības nenoteiktībai.

4) Rezultātu iekšējais sakars ar prēmisām.

5) Visu težu sistēmatiska saistība.»[54]

Zīmējoties uz nācionālekonomiju, iznākot šādi secinājumi.

Ad. 1. Daudzas zinātnes ciešot no izteiksmes nenoteiktības un neskaidrības. Arī tautsaimniecībā pa daļai šis trūkums, jo zinātne un praktiskā dzīve saistot ar vienu un to pašu vārdu dažādus jēdzienus, kāpēc aiz šī pavisam svarīgā iemesla būtu ieteicama matēmatikas valodas lietošana. Bet tas sevišķi zīmējoties uz domāšanas operācijām. Bet te draudot arī briesmas — varot aiz formulām aizmirst būtību un piešķirt algoritmam lielāku vērību, nekā tam tā ir.

Ad. 2. Tautsaimniecībai neesot darīšana tikai ar daudzumu noteikšanu. Kvalitātīvo īpašību, organizācijas un ētisko principu aplūkošanai esot katrā ziņā augstāka nozīme, bet nevarot noliegt, ka esot darīšana arī ar daudzumu noteikšanu.

Ad. 3. et ad. 4. Rezultāti, ko sniedzot matēmatika, parādoties vienmēr eksaktības tērpā. Lielumi, attiecības esot ap-

---

[53] Dr. Bela Weisz, Die mathematische Methode in der Nationalökonomie. Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik, 31. B., 1878, p. 295—316.

[54] B. Weisz, Die mathematische Methode etc., p. 304.

zīmēti eksakti. Bet šo formālo eksaktību bieži varot panākt tikai ar noteiktu prēmisu pieņemšanu. Tāpēc tādām formālām tezēm esot dabiski tikai aprobežota vērtība. Arī tautsaimniecībā neesot dzinējspēku vērtības pilnīgi zināmas lielākā gadījumu skaitā, arī ietekmētāji blakus apstākļi neesot zināmi, bet tad nevarot nonākt arī pie noteiktiem eksaktiem gala rezultātiem. Bet arī hipotetiskiem gala rezultātiem esot liela nozīme. Tā varot zināmā nozīmē angļu tautsaimniecības teōriju uzlūkot kā uzbūvētu uz egoisma hipotezes; bet tad to arī nedrīkstot aizmirst.

Ad. 5. Matēmatika visas savas tezes savelkot kopā ciešā sakarībā; tāpēc tās lietošana varētu izveidot arī tautsaimniecības principus par iekšēji saistītu zinātnisku vienību. Taisni šīs sistēmatiskās saites līdz šim trūcis tautsaimniecībai, tāpēc bijis iespējams, ka atsevišķas daļas stāvējušas visasākā pretrunā savā starpā un arī ar pamatprincipiem. Bet ja būtu apziņa par atsevišķo patiesību ģenetisko sakarību un to varētu sekmēt matēmatikas metodes, tad tādas pretrunas kļūtu arvien retākas. Tikai jāņemot vērā, ka šo tezu sakars neesot meklējams formā, bet tanī apstāklī, ka matēmatikai esot daži pamatprincipi, ko neviens neapstrīdot.

«Bet līdz ar to no tiešas matēmatikas metodes īpatnībām un robežām rodas skaidrība, ka mēs no šīs metodes varam pa lielai tiesai sagaidīt formālas priekšrocības. Matēmatikas metode nevar vest pie pamatattiecību atrašanas . . . Tā var augstākais atvieglot šo pamatattiecību attēlu, vilkt no tām konsekvences un tā nākt palīgā cilvēka prātam. Pati par sevi, tā paliek simbolu valoda.»[55]

Nākam pie secinājuma, ka *Weisz*'a matēmatikas metodes raksturojums diezgan nenoteikts.

8. Ievadā pieminētajā darbā *A. Cournot* novērtē matēmatikas metodi šādā veidā.

«Es augšā pieminēju, ka pētnieki, kas sevi veltījuši šim priekšmetam (t. i. tautsaimniecībai), ir guvuši nepareizu ainu par analitiskās matēmatikas lietošanas iespējām. Viņi bija apjukuši tai ticībā, ka zīmēm un formulām nav cita mērķa, kā

[55] B. Weisz, op. cit., p. 303.

norīkot skaitliskos aprēķinus. Bet kas pazīst analitisko matēmatiku, zina, ka tā nenodarbojas tikai ar skaitliskiem aprēķiniem, bet, ka tā taisni var uzrādīt attiecības lielumu starpā, kuŗus nevar uztvert skaitliski, attiecības *funkciju* starpā, kuŗu likumība nav pieejama skaitliskai uztverei... Tā arī teorētiskā mēchanika dod praktiskai mēchanikai ļoti labi lietojamus norādījumus, kaut gan pa lielākai daļai jāķeras pie *pieredzes*, lai sasniegtu skaitlisku noteiktību, ko prasa prakse.

Matēmatikas zīmju lietošana ir dabiska visur, kur jānoskaidro savstarpīgās lielumu attiecības.»[56]

«Šinī sacerējumā es mēģināšu parādīt, ka saimniecisko pamatjautājumu atrisināšanai galvenokārt jāņem vērā ne elementārā algebra, bet tā analizes nozare, kas nodarbojas ar neatkarīgām funkcijām, no kuŗām tiek prasīts tikai tas, lai tās izpildītu noteiktus nosacījumus. Tā kā lieta grozās ap pavisam vienkāršiem nosacījumiem, tad diferenciālrēķinu un integrālrēķinu elementu pietiek, lai saprastu šo mazo sacerējumu.»[57]

Tā tad *Cournot* uztverē tautsaimniecības teorijai nepieciešama funkciju metode.

9. *Vilfredo Pareto* izsaka šādas domas[58] par matēmatikas lietošanu tautsaimniecībā.

«Saimnieciskais riņkojums veido noslēgtu ciklu, ko mēs patvaļīgi sadalām daļās: patēriņš, maiņa, ražošana, kapitālizācija. Cilvēks pakļaujas pūlēm, lai sagādātu sev noteiktus labumus, kas, kad tie patērēti, viņu noved stāvoklī, kur nākas pielikt atkal spēkus un pūles (Kraftanstrengung), un tā iet tālāk nepārtrauktā sarindojumā. Viens apstāklis ienes problēmā sarežģījumu. Cilvēku pūlēm pa lielākai daļai nav tieša nolūka iegūt labumus, ko tie lieto tieši; bieži izdevīgāk iet aplinkus ceļu. Tā būtu, piem., ļoti dārgi tieši pašam smelt no akas vajadzīgo ūdeni; ir izdevīgāk kausēt dzelzs rūdu, ierīkot dzelzs vadus, kad lieta grozās ap lielākiem ūdens daudzumiem. Šo aplinkus ceļu studijas, pa kuŗiem iet saimniecisko labumu iegū-

[56] Cournot, op. cit., p. XXI. (citējumi pēc Untersuchungen über die mathematischen Grundlagen der Theorie des Reichtums, Jena 1924.)
[57] Cournot, op. cit., p. XXII.

šanai, ved pie kapitāla radīšanas teorijas un apgrūtina ražošanas studijas. Saimnieciskās parādības šādā ceļā ļoti dažādas un sarežģītas. Šīs parādības to kopsakarībā izteic *Walras*'a vienādojumi.»[59]

«Matemātiskā analize vajadzīga tikai tad, lai iegūtu jēdzienu par saimnieciskās cirkulācijas kopsakaru un noteiktu tās galvenās pazīmes. Ja aprobežojas ar speciālu un skaitlisku problēmu, piem., ar cenu noteikšanu, tad matemātikas noderīgums, ņemot vērā pietiekošu skaitlisko datu trūkumus, ir niecīgs. Bet noderīgums kļūst jau stipri lielāks, tiklīdz rodas darīšana ar vispārīgu un kvalitātīvu problēmu, kāda ir, piem., to nosacījumu izziņai, kas noteic saimniecisko līdzsvaru. Ja lieta grozās ap šo saimnieciskā līdzsvara pamatproblēmu, tad svarīgi zināt, kad šis līdzsvars noteikts un kad viņš nav noteikts, un to var tūlīt uzzināt, salīdzinot vienādojumu skaitu ar nezināmo skaitu. Var izdevīgi atrisināt arī citas šāda veida problēmas, kas pieder pie tām, ko *Edgeworth*'s sauc par *unnumerical mathematics*, piem., tās, kam darīšana ar apmierinājuma maksima nosacījumu noteikšanu.»[60]

10. Angļu tautsaimnieks *F. J. Edgeworth*'s saka,[61] ka politiskā ekonomija «possess the esential condition for the application of mathematics: constancy of quantitative — though not necessarily numerical — relations.»[62] Tādas kvantitātīvu attiecību dabas raksturs esot, piem., ražīguma krītošā pieauguma likums (law of diminishing returns): darba un kapitāla pieaugums, ko iegulda zemē, tendē uz mazāku, nekā proporcionāli vajadzētu, ražojumu pieaugumu. *Funkciju* valoda esot labi piemērota šo attiecību izteiksmei. Ja, kā tās ir minētajā piemērā, attiecības esot starp daudzumu pieaugumiem, tad piemēroti *diferenciālrēķini*. Vienkāršākos gadījumos funkciju un to diferenciālu *ģeometriskais* attēls varot būt ļoti noderīgs.

[58] Vilfredo Pareto, Anwendungen der Mathematik auf Nationalökonomie. Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, I. B., 2. T.

[59] V. Pareto, Anwendungen etc., p. 1099.

[60] Pareto, op. cit., p. 1099.

[61] F. J. Edgeworth, Mathematical method in political economy, Palgrave's dietionary of political economy, edited by Henry Higgs, C. B., vol. II, London 1923.

No dažādām ekonomiskām matēmatikas nozarēm sevišķi redzamu vietu ieņemot *simultānie vienādojumi*. «Ja dotas vairākas kvantitātīvas — kaut arī ne vispār *skaitliskas* — attiecības vairāku mainīgu daudzumu starpā, tad ekonomistam jāzina, vai daudzumus var uzlūkot kā noteiktus vai nē... Ja darīšana tikai ar divi nosacījumiem, tad izdevīgāk lietot divas *līknes* divu vienādojumu vietā.»[63]

Jau pieminētās matēmatikas operācijas un vēl citas — arī *integrālrēķini* — ieejot maksima un minima aprēķinos, jeb, kā to sauc, *variāciju* rēķinos, kas liekoties aptveram visas abstraktās ekonomikas *augstās* problēmas. Prof. *Marshall's*, pēc tam, kad uzrakstījis vienādojuma skaitu, kas reprezentē cēloņus, kuri pārvalda kapitāla un pūļu (effort) investēšanu kādā uzņēmumā, piemetinot, ka tos visus var uzlūkot kā matēmatiskus, ietvertus tai tezē, ka H — V (tīrā ienesa) jāpadara par maksimu (Princ., Math. App., not. XIV).

«Tā īpatnība, ka jārīkojas ar skaitliski neizteicamiem daudzumiem, kas raksturīga matēmatiskai ekonomijai, nav uzlūkojama kā tāda, kas mazina vērtību. Tā ir parasta un atļauta kārtējā matēmatikā. Piemēram, ja viena trijstūra mala lielāka nekā citas, tad pretimgulošais šai lielākajai malai leņķis ir lielāks nekā leņķis, kas guļ pretī mazākajām malām.»[64]).

Astronomijas piemērs norādot uz otras jeb indirektas matēmatikas metodes lietošanu ekonomikā. Tāpat kā *Newton*'a vai *Kopernik*'a teōrijas gaisma liekot bēgt astroloģijas maldu ēnām, tā ekonomiskās problēmas nostādījums matēmatiskā formā vien jau varot izlabot kļūdas, jo tiekot virzīta uzmanība uz datiem, kas jāmeklē problēmas zinātniskam atrisinājumam. Mainīgos daudzumus, izteiktus simbolos, esot mazāk iespējams uzlūkot kā pastāvīgus lielumus.

«Matēmatikas metode ir noderīga gružu notīrīšanai, kas traucē ekonomiskās zinātnes, pamatu likšana, kā arī plāna piegādāšana celtnes visrēgulārākajai daļai.»[65]

[62] Edgeworth, Mathematical method etc., p. 711.
[63] „ op. cit. p., 711.
[64] Edgeworth, op. cit., p. 711.
[65] „ „ „ p. 711.

11. *Luigi Amoroso* izceļ[66] divus šādus punktus, zīmējoties uz matēmatikas metodi.

«1°. Visā ekonomikā ir elementi, ko var novērtēt kvantitātīvi, kāpēc tiem ir tāds raksturs, kāds tīrā un lietojamā matēmatikā ir neatkarīgiem mainīgiem lielumiem. Piemēri: kādas patērētas vai pārdotas preces daudzums, pārdošanas cena, ražotāja profits.

2°. Ekonomijas pamatlikumi izteicas kā analitiskas attiecības iepriekš minēto daudzumu starpā. Tādi ir pieprasījuma un piedāvājuma likumi, kas saista cenu un pārdoto daudzumu; profita tendences likums uz minimu, kas saista cenu, daudzumu, profitu etc.»[67]

Visu mainīgo lielumu un visu viņu savstarpīgo attiecību sistēmatiskā analize sastādot matēmatiskās ekonomijas priekšmetu, kas neesot tomēr visa politiskā ekonomija, jo konkrēto parādību daļa, vēl vairāk — tās galvenā daļa nepadodoties kvantitātīvai analizei. Tai nepadodoties gribas akts, kas esot katras cilvēciskās parādības (fenomeno umano) galvenā daļa. «Ja arī nav galvenā, tad tomēr matēmatiskās ekonomijas daļa ir fundamentāla. Politiskā ekonomija nevar bez tās iztikt... Matēmatiskās ekonomijas likumi ir kā barjeri, ko nav dots pārlēkt ne kollektīvā, ne individuālā darbībā, tie ir ķēdes, kas saista, lai arī kādi būtu nosacījumi, kuŗos attīstās ekonomiskā aktīvitāte.»[68]

12. Jau pieminētajā darbā *W. Stanlay Jevons's* arī piegriežas jautājumam par matēmatikas metodi tautsaimniecībā.

«Skaidra lieta,» saka *Jevons's*, «ka mācībai par tautsaimniecību, ja tā vispār grib būt par zinātni, jābūt matēmatiskai zinātnei.»[69] Pastāvot daudz aizspriedumu pret mēģinājumiem ievest kādā gara zinātņu nozarē matēmatikas metodi un valodu, jo daudzi domājot, ka īstais matēmatikas metodes novads esot dabas zinātnes un ka gara zinātnes prasot citu metodi — «es gan nezinu kādu,» piemetina *Jevons's*. «Mana tautsaimniecības teōrija ir tīri matēmatiska rakstura. Es

[66] Luigi Amoroso, Lezioni di economia matematica, Bologna MCMXXI.

[67] L. Amoroso, Lezioni etc., p. VII.

[68] „ „ „ „ „ VIII.

nevilcinos lietot attiecīgo matēmatikas nozari, kaut gan tā spiež nebaidīties rīkoties ar bezgalīgi maziem lielumiem, jo domāju, ka daudzumiem, ar ko mēs nodarbojamies, jāpadodas nepārtrauktām pārmaiņām. Teorija pastāv iekš tam, lai lietotu diferenciālrēķinus pazīstamajos bagātības, noderīguma, vērtības, pieprasījuma, piedāvājuma, kapitāla, augļu, darba un citos daudzuma jēdzienos, ko ikdienas lieto industrijas dzīvē.»[70]

«Man liekas, ka *mūsu zinātnei jābūt matēmatiskai vienkārši tāpēc, ka tā nodarbojas ar daudzumiem.* Vienmēr un visur, kur aplūkojamās lietas var būt lielākas vai mazākas, likumiem un attiecībām pēc lietu dabas jābūt matēmatiskiem. Parastie piedāvājuma un pieprasījuma likumi runā vienīgi par pieprasītiem un piesolītiem lietu daudzumiem un izteic veidu, kādā šie daudzumi mainās līdz ar cenu. Saskaņā ar to, šie likumi *ir* matēmatiski».[71] Ekonomisti nevarot ar to, ka viņi nepiešķirot tiem īstos vārdus, mainīt šo likumu dabas. Vai nu ekonomijas matēmatiskos likumus izteicot vārdos, vai arī parastajās formulās ar x, y, z, p, q u. t. t., esot blakus lieta jeb vienīgi ērtības jautājums. Matēmatisko grāmatu formulas pēc savas dabas neesot atšķirīgas no valodas; tās darinot pilnīgu valodas celtni, kas pieskaņota jēdzieniem un attiecībām, kuras grib izteikt. «Ja mums mācībā par tautsaimniecību ir darīšana ar daudzumiem un sarežģītām attiecībām daudzumu starpā, tad mums jādomā matēmatiski — zinātne ar to neklūst mazāk matēmatiska, ja izvairāmies no algebras simboliem[72])».

«Daudziem cilvēkiem ir pret matēmatiku aizspriedums, kas nāk no kādas matēmatiskās un eksaktās zinātnes būtības nepareizas uztveres. Viņi domā, ka mēs nedrīkstot atļauties rēķināt, ja mums neesot noteiktu datu, kas būtu spējīgi mūsu rēķiniem dot noteiktu atbildi; bet īstenībā nav nevienas eksaktas zinātnes, kā vien relātīvā nozīmē.»[73] Astronomija esot eksaktāka nekā citas zinātnes, jo planētas vai zvaigznes stā-

[69] Jevons, op. cit., p. 2.
[70] „ „ „ p. 3.
[71] Jevons, op. cit. p. 4.
[72] Jevons, op. cit. p. 5.
[73] Jevons, op. cit., p. 5.

voklis pielaižot precīzākus mērījumus, bet fizikālās astronomijas metodes esot aptuvenas. Matemātiskā zinātnē lielāka vai mazāka sasniedzamā precīzitāte esot blakus lieta un neskarot zinātnes pamatrakstūru.

Daudzi iebildīšot, ka jēdzieni, ko aplūkojot šinī zinātnē, nepieļaujot mērīšanas, jo nevarot dvēseles pārdzīvojumus ne mērīt, ne svērt; neesot ciešanu un prieku vienību. Tāpēc liekoties, ka ekonomijas matemātiskajai teōrijai nepieciešami jāatsakās uz visiem laikiem no skaitliskiem datiem.

Uz to *Jevons's* atbild, ka neesot nekas mazāk attaisnojams zinātnē, kā gars, kas neko nepētī un neko necer. Kā tad stāvot ar citām zinātnēm? Gandrīz visos gadījumos, kur tagad iespējami noteikti mērījumi, varot atiet uz laikiem, kad vēl valdījuši visnenoteiktākie jēdzieni. Kas būtu pirms *Pascal'a* domājis mērīt *šaubas* un *ticību*, un tomēr to darot varbūtību rēķini. Tanī laikā, kad Francijā *Quesnay's* un citi dibinājuši mācību par tautsaimniecību, elektrība bijusi vēl nenoteikta parādība, ko nevarējuši ne mērīt, ne aprēķināt, bet beidzamos četrdesmit vai piecdesmit gados ievesta elektrības matemātiska teōrija, kas dibinoties uz precīziem datiem.

Nevarot šaubīties, ka prieks, pūles, darbs, derīgums, vērtība, bagātība, nauda, kapitāls u. tml. esot jēdzieni, kas sevī ieslēdzot kvantitātīvo aplūkošanu; pat visa mūsu darbība amatniecībā un tirdzniecībā balstoties uz izdevīguma vai neizdevīguma daudzuma salīdzinājuma.

Bet kur tad, prasīšot varbūt lasītājs, ir jūsu skaitliskie dati, lai varētu vērtēt patikas vai nepatikas sajūtas polītiskā ekonomijā?

«Es atbildu, ka mani skaitliskie dati ir bagātāki un precīzāki nekā jebkuŗas citas zinātnes dati, bet ka mēs vēl neesam pratuši tos izlietot. Mūsu skaitliskā materiāla bagātība pārsteidz. Nav neviena rakstveža vai grāmatveža zemē, kas nebūtu ar to nodarbināts — uzzīmēt skaitliskus datus tautsaimniekam. Privātu saimniecību rēķinu grāmatas, biezās tirgotāju, baņķieŗu un publisko iestāžu galvenās grāmatas, kursu atzīmes par akcijām, cenu rādītāji, banku čeki, ziņas par naudas tirgu, muitām un citiem valdības ienākumiem — visi tie ir skaitliski dati, lai padarītu tautsaimniecības mācību par vienu no eksaktākām zinātnēm. Tūkstošiem foliju sējumu ar statistiskiem, parlamentāriskiem un citiem pārskatiem gaida pētnieka darbu... Tas ir galvenokārt metodes un šīs lielās masas materiāla pilnības trūkums, kas mūs traucē to lietot zinātniskos pētījumos par tautsaimniecības mācības dabiskiem likumiem.»[74]

«Es baidos apgalvot, ka cilvēkiem kādreiz būs līdzekļi tieši mērīt cilvēka sirds jūtas. Ir grūti saprast patikas vai nepatikas vienību, bet tas ir šo jūtu lielums, kas mūs nemitīgi dzen pārdot un pirkt, aizņemties un aizdot, strādāt un atpūsties, ražot un patērēt; *un no šo jūtu kvantitātīvām iedarbībām mums jānovērtē viņu samērīgais stiprums.* Arī smaguma spēku mēs nevaram viņa īpatnējā dabā labāk izzināt vai izmērīt, ka varam mērīt kādas jūtas; bet tāpat, kā smaguma spēku mērījam pēc tā iedarbības uz svārsta kustībām, varam tāpat nolasīt jūtu vienādu stiprumu pēc cilvēka gara lēmumiem. Mūsu svārsts ir griba un tās svārstības tiek katru minūti atzīmētas tirgus cenu sarakstos.»[75]

Noslēdzot pārskatu par matemātikas metodēm tautsaimnieku skatījumā, redzam vēl diezgan neskaidru ainu, kas nevar pietiekoši pārliecināt «literāros» (pēc *Pareto* izteiciena) ekonomistus (un vispār skeptiski noskaņotos pret matemātikas metožu lietošanu ekonomiskajās zinātnēs) par šo metožu lielo vērtību un nozīmi gan no didaktiskā, gan no heuristiskā viedokļa.

2. Citās zinātnēs lietojamās matēmatikas metodes matēmatiķu uztverē.

1. *A. Voss*'s par matēmatikas būtību un metodi spriež tā.[76]

«Matēmatikas īpatnējā daba, pēc manām domām, atrodas ne tikai loģiskās dedukcijas būtībā, bet tanī pašā laikā arī tai īpatnējā *simbolismā*, kam pielāgo šo metodi... Matēmatikas

[74] Jevons, op. cit., p. 10.

[75] Jevons, op. cit., p. 10—12.

[76] A. Voss, Über die mathematische Erkenntnis, Berlin und Leipzig 1914.

«objekti» ir *zīmes, kas pateicas prāta kārtotājai darbībai par saviem saistības likumiem, kuri izteikti ar pilnīgi noteiktām definīcijām.* Šādas zīmes var pavisam vispārīgi saukt par skaitļiem; uz iespējas paturēt šīs zīmes tiklab identiskas, kā savstarpīgi šķirtas mūsu prātā kā sakārtotu attiecību izteiksmi un saistīt tās savā starpā dibinās matēmatikas metodes īpatnējais raksturs, kamēr tās priekšmets var zīmēties uz visu to, kas pieejams tādam simboliskam fiksējumam.

Šinī nozīmē es redzu atšķirīgo tīras matēmatikas pazīmi iekš tam, ka tā ir zinātne par skaitļiem, ja atļaujamies šo jēdzienu tvert nule izteiktajā vispārīgā veidā. Tikai ar skaitļu zīmju, t. i. ne ar konkrēto skaitļu 1, 2, 3 . . ., bet gan simboliem (burtiem) attēloto jēdzienu palīdzību mums izdodas fiksēt aritmētikas operācijas, kļūst iespējams izveidot kombinātoriku un grupu teōriju. Vienmēr jēdziena vietā nostājas kāda zīme, kas iemieso savu funkcionālo nozīmi un ar savu saistību ar līdzīgas loģiskas noteiktības citiem simboliem padara iespējamu attiecību aprakstu šo jēdzienu starpā — aprakstu, ko valoda vien lāgā nespēj attēlot, un kas nav vienīgi ārējais palīga līdzeklis atmiņas un uzmanības atbalstam. Ar zīmju starpniecību tiek modināta *viena vienīga* priekšstatu grupa un visur, kur šī starpniecība notiek, ir atrodama arī matēmatiska pārlika (Überlegung).»[77]

«Matēmatikas lietošana kaut kādā novadā beidzot kļūst tikai tur iespējama, kur izdodas tā vielu pakļaut abstraktam simbolismam, t. i. šeit visplašākā nozīmē saprasta skaitļa kundzībai.»[78]

Tas izrādoties jau šķietami noslēpumainā matēmatikas algoritmu spēkā, t. i. skaitļu savstarpīgās saistības formās. Varot atgādināt *H. Hertz'a* vārdus, ka bieži formula rādoties gandrīz gudrāka par prātu, kas to izgudrojis; tā ir it kā matēmatikas domas enerģija, kas kļuvusi formulā latenta, būtu spējīga atkal kļūt brīva un izraisīt jaunas domas.

«Labprāt piekrītam, ka tik vispārīgiem apsvērumiem, kas tikai nepilnīgi iezīmē matēmatikas dzīvo būtni, nav nekādas

[77] A. Voss, Über die math. Erkenntnis, p. 18 E — E 19.
[78] A. Voss, op. cit., p. E 19.

principiālas vērtības, un tāpēc arī augšējie norādījumi nepretendē uz to, ka sasniegusi jau tās galīgu izskaidrojumu.

C. *Stumpf's* varbūt pamatoti uzsver, ka matēmatikas stāvoklis ieprietim citām zinātnēm pretēji visām pūlēm, *vēl arvienu nav pilnīgi noskaidrots* (pasv. mans. L. A.). (Abh. d. Berl. Akad. 1906.)»[79]

2. *E. Löffler's* grib pierādīt,[80] ka daži domāšanas līdzekļi un kategorijas, kas radušies matēmatikas pētījumos, vai vismaz tur izveidoti, skaidri izstrādāti, tiek lietoti apzināti vai neapzināti arī citās zinātnēs.

Vispirms *Löffler's* min *aksiomatisko metodi*, kas pastāvot iekš tam, «ka loģiski nepierādāmos intuitīvos pamatjēdzienus, pamatfaktus un pamatsaistības, t. i. *aksiomas*, no kuriem var iegūt visus kādas zinātnes vai zinātnes novadu jēdzienus un piederīgās tezes ar definīcijām resp. loģisko dedukciju, pilnīgi savāc un visu aplūkojamo zinātnes lauku sistēmatiski tā izliek, ka nekas neienāk pēkšņi un nepastarpināti, bet viens akmens pieklaujas otram, viens loceklis pieslēdzas nepieciešami otram.»[81] Kaut gan šī metode izcēlusies matēmatikas laukā, tomēr tai nozīme ne tikai matēmatikā — to var lietot katrā teōrētiskā zinātnē, saka *Löffler's*. Tiešām tā esot saskatāma gan filozofijā, gan fizikā un ķīmijā, gan valodniecībā un dažās vēsturfilozofiskās sistēmās, tāpat arī ētikā, teoloģiskā dogmatikā un arī jurisprudencē.

Bet aksiomatiskā metode jāpapildinot ar *intuitīvo domāšanu,* lai nāktu pie jaunām atziņām: aksiomatiskās un jēdzieniskās domāšanas spējas esot tikai vārti uz atziņas celtni.

Zināmā sakarībā ar šo visām zinātnēm pielāgojamo aksiomatisko metodi stāvot cita, kas tāpat nemot izeju no matēmatikas un esot iekarojusi citu zinātņu laukus — tā esot *zīmes metode (Methode des Zeichens).* «Domas ir lietu zī-

[79] A. Voss, op. cit., p. E 19 — 20 E.

[80] E. Löffler. Denkmittel der Mathematik im Dienste anderer Wissenschaften. Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften, XXXIV Jahrg., 1928. Nr. 8.

[81] Löffler, Denkmittel etc., p. 226.

mes un gleznas; šiem iekšējiem simboliem ir vajadzīgs ārējs attēls; mums vajadzīgas zīmes mūsu domām, ja zinātne grib izveidoties un attīstīties. Vaibsti, valoda, raksts ir tādas zīmes.»[82] Bet kādas valodas vārdiem reti esot pilnīga noteikta, nedivdomīga nozīme, un tāpēc tie bieži novedot pie pārpratumiem un kļūdām, ko loģika saucot par *quaternio terminorum*. *Tīrs* jēdzienu raksts, kas lietotu katram jēdzienam un katram jēdzienu sakopojumam noteiktas zīmes, būtu brīvs no šiem trūkumiem, ja tikai paši jēdzieni un to savienojumi būtu asi un noteikti. Matēmatikai pieder jau kopš senseniem laikiem tādas zīmes — skaitļu zīmes. Tā ir vēlāk algebrā attīstījusi metodi, kas strādā ar lielu skaitu šādu jēdzienu un saistības zīmju, un ar to sasniedz tādu domu ekonomiju, kas to padara spējīgu operēt ātri, droši, mēchaniski un noteikti.»[83] Tāpēc neesot brīnums, ka arī citi dzīves novadi un citas zinātņu nozares izmantojot šās jēdzienu raksta priekšrocības; varot atgādināt mūziku ar tās notīm, ķīmiju ar tās formulām, iedzimtības mācību, psīchotechniku, pasaules valodas, kā esperanto u. tml. Radusies jau sen pat tāda doma, vai nebūtu iespējams visus jēdzienus izteikt pienācīgā kārtā ar šādām ideogrammām un to savilkumu un attiecības attēlot ar darbību zīmēm, tā ka varētu sasniegt loģikas progresu algebrisku rēķinu ceļā ar šām zīmēm un visās zinātnēs viegli un droši nākt pie jauniem rezultātiem. Par šādu ūniversālu metodi sajūsminājies jau ap 1300. Katalonijas mistiķis *Raimundus's Lullus's*, tad *Descartes's*, *Leibniz's* un daudzi citi. Beidzot radusies pat īpatnēja loģika.

Vēl autors aizrāda uz *formālās līdzības* likumu, kam sevišķi liela nozīme esot jurisprudencē, tad *invariantu* jēdzienu un *adjunkciju*, pēc kuŗu parauga rīkojoties arī citas zinātnes.

No diezgan plašās literātūras par matēmatikas metodēm matēmatiķu apgaismojumā tikai tikdaudz, kā te minēts, esam varējuši uzrādīt, kas būtu noderīgs citās zinātnēs lietojamo

[82] Löffler, Denkmittel etc., p. 229.
[83] Löffler, op. cit., p. 229.

matēmatikas metožu raksturojumam. Parasti jau tā arī ir, ka vajadzīgās metodes meklē tās zinātnes pārstāvji, kas savā novadā grib lietot matēmatiku.

* *
*

Piegriezīsimies tagad pilnīgākam matēmatikas metožu raksturojumam un mēģināsim rādīt, kāpēc, kur un kā tās vajadzīgas ekonomiskajās zinātnēs.

II. daļa.

Matēmatikas metodes.

1. Aksiōmatiskā metode.

a. Parādību pētījuma problēmas.

1. Kā zināms, par katru parādību var rasties šādi jautājumi:

1. kāda ir šī parādība; 2. kāpēc šī parādība ir tāda un ne citāda; 3. kā tā izveidosies nākotnē un 4. kā to var iekārtot plānveidīgi, saskaņā ar noteiktu mērķi. Pirmā no minētajām problēmām ir aprakstījuma jeb deskripcijas problēma, otra — izskaidrojuma jeb eksplikācijas problēma, trešā — paredzējuma jeb prognōzes problēma, ceturtā — veidojuma jeb praktiskā problēma.

Jau parādību aprakstījumam, sevišķi sociālu parādību aprakstījumam ir savas grūtības. Vispirms aprakstījumam jāziet no parādību tveršanas dotībā — no parādību konstatējuma, bet tāda konstatējuma, kas iespējami pilnīgāk atbilst īstenībai, kas nav ne safantazēts, ne falsificēts. Ja tīrā fantāzija, pilnīgi patvaļīga izdoma faktu konstatējumos sastopama reti, tad falsifikācija — gribēta vai negribēta — sevišķi bieži vērojama sociālu parādību — arī saimniecisku parādību novadā. Iemesli tam dažādi. Viens iemesls tīri objektīvas dabas — parādību sarežģītība, salīdzinot ar cilvēka uztveres spējām. Tā piem., cenu veidošanās parādība saistās ar liela individu skaita rīcību dažādās vietās, preču daudzumiem, valsts likumu nosacījumiem, attiecīgas zemes paradumiem u. tml. Parasti te var konstatēt tikai kvantitātīvo pusi zināmā laika sprīdī.

Otrs objektīvs iemesls — grūtības katrreizēji svarīgo faktu izlasē: visus iegūtos faktus aprakstījumā uzņemt nevar, bet jāizvēlas atkarībā no mērķa, ko ar aprakstījumu grib iegūt, vissvarīgākie fakti. Trešais iemesls — par svarīgiem atzīto faktu formulējums: par aprakstāmām parādībām jāizteic zināmi apgalvojumi vai noliegumi.

Pieminēsim vēl subjektīvas dabas iemeslu — vienpusību faktu izlasē, kas notiek diezgan bieži ar zināmu nodomu, piem., aprakstot kapitālisko iekārtu, tās ēnas pušu izcelšana.

2. Tā kā pat vispilnīgākais parādību apraksīījums neapmierina cilvēka teorētiskās un praktiskās intereses, jo ir tikai savā starpā nesaistītu parādību kopojums, tad tīri dabiski izvirzās tālākā problēma — vai novērotās un aprakstītās parādības nav savā starpā kaut kā saistītas, vai neuzrāda kaut kādu noteiktu kārtību vienlaicīgi vai laika secībā, citiem vārdiem, vai parādību daudzējādībā nav vērojama kāda vienveidība. Šī problēma ir tā saucamā ekspli-kācijas jeb izskaidrojuma problēma, pie kam ar izskaidrojumu saprot atsevišķas parādības novešanu uz vispārīgu likumību, kam šī parādība pakļauta. Tā, piem., pacelta un vaļā palaista akmens krišanu izskaidro ar zemes pievilkšanas vai vēl vispārīgāka gravitācijas spēka iedarbību, kam pakļauts ne tikai akmens, bet arī ābols, cilvēks, koka lapa u. tml. Izskaidrojums var būt tikai tur, kur atrodama vispārīgāka likumība, kam iespējams pakārtot parādību. Ja atzīmējam grūtības aprakstījumā, tad vēl lielākas tās ir izskaidrojumā. Tās rodas ne tikai likumību konstatēšanā, bet sociālajās zinātnēs, to starpā teorētiskajā tautsaimniecībā var rasties šaubas arī par to, vai tādas vienveidības jeb likumības, ko var saukt par saimnieciskо parādību likumībām, vispār pastāv. Bet ja pat šādu šaubu nebūtu, tad tomēr šādu likumību tveršana jeb vienveidību konstatēšana un atsevišķu parādību pakļaušana vispārīgākām likumībām ir krietni sarežģīta problēma.

b. Parādību likumību konstatēšana.

1. Vieglāk šo problēmu risina dabas zinātnes, rīkojoties ar induktīvajām metodēm. Citādā stāvoklī atrodas tautsaimniecības teorija, kuŗas galvenais uzdevums — atsegt saimnieciskо parādību likumības.

Uz šo savādo stāvokli norādījis jau *J. S. Mill's* savā *Deduktīvās un induktīvās loģikas sistēmā (J. S. Mill, A System of Logic, Ratiocinative and Inductive)*. Jau otras grāmatas beigās viņš atzīmē, ka katra zinātne cenšas kļūt deduktīva, bet pilnīgāk šo jautājumu iztirzā sestajā grāmatā, runājot par garazinātņu loģiku. Šinī grāmatā *Mill's* noskaidro, ka sociālajās zinātnēs nav lietojama eksperimentālā metode, vispirms aiz tā iemesla, ka mums nav līdzekļu taisīt mākslīgus eksperimentus. Arī tieši novērojumi pēc induktīvām metodēm nevar palīdzēt, jo īstenībā ļoti retos gadījumos būs reālizēti tie priekšnosacījumi, kas nepieciešami indukcijas pamatmetožu pielāgošanai, lai atsegtu saimnieciško parādību likumības. *J. S. Mill's* to pamato šādā veidā, iziedams no jautājuma par restriktīvu un prohibitīvu tirdzniecības likumu iedarbību uz tautas bagātību.

«Lai varētu izlietot šinī gadījumā pilnīgāko eksperimentālo pētījuma metodi — diferences metodi, mums vajadzīgi divi gadījumi, kas, izņemot pētījamo priekšmetu veidotāju apstākli, visos pārējos apstākļos segtos. Ja varam atrast divas tautas, kas visās savās dabiskās priekšrocībās un vājajās pusēs ir vienādas; kuņu locekļi fiziskās un morāliskās, iedzimtās un iegūtās īpašībās līdzīgi; kuņu parašas, ieradumi, domas, likumi un iestādes visādā ziņā tie paši, tikai vienai stiprāki aizsargu tarifi vai tā citādā ziņā vairāk traucē industrijas brīvību; ja atrodam, ka viena no šām nācijām bagāta un otra nabaga, vai viena bagātāka nekā otra: tad tas būs *experimentum crucis*, tiešs pierādījums ar pieredzi, ka viena no šām sistēmām tautas bagātībai izdevīgāka. Bet pieņēmums, ka tiešām var atrast divi tādus gadījumus, ir acīmredzot absurds. Tāda saskaņa nav pat *in abstracto* iespējama. Divi nācijas, kas, izņemot tirdzniecības polītiku, visās citās lietās, saskan, saskanētu arī tirdzniecības polītikā»[84].

Tālāk *Mill's* izmēģina pārējās induktīvās metodes un nāk pie secinājuma, ka ar to palīdzību nevar doto jautājumu noskaidrot. Tāpēc *Mill'am* jākonstatē, ka sociālās zinātnes ir deduktīvas zinātnes un to metode ir konkrēta deduktīva metode, kam par pilnīgāko piemēru der astronomija, par drusku mazāk pilnīgu fizika»[85].

[84] J. S. Mill., A System of Logic, Ratiocinative and Inductive, Longmans, Green and Co., p. 574.
[85] J. S. Mill, op. cit., p. 584.

3. Gluži līdzīgi sprież arī *V. A. Kosinskis* savā darbā Лекціи по теоріи политической экономіи, читанныя на русскомъ юридическомъ факультетѣ въ Прагѣ, Прага 1922, runājot par ekonomisko pētījumu metodēm.

«Pretēji tam cēloņi, no kuriem atkarājas sociālās dzīves parādības, a) *daudzējādi;* b) šie daudzie cēloņi *iedarbojas pa lielākai daļai kopā,* tā kā nav iespējams atdalīt vienu cēloņu darbību no citu cēloņu darbības; c) beidzot ikviens sociāls faktors pakļauts *pastāvīgām pārmaiņām.* Šās sociālo parādību īpatnības ir par cēloni tam, ka sociālām zinātnēm nevar pielāgot tīrās empīriskās metodes[86].»

«Tā tad mums jānāk pie secinājuma, ka tīri induktīvo pētījumu paņēmieni sarežģītu ekonomisku faktu analizē nevar dot drošu slēdzienu par kauzālo sakarību parādību starpā . . .

Bet cilvēka prātam ir vēl cits pētījumu paņēmiens. Tanī vietā, lai pētītu parādības visā to īstenības totālitātē, cilvēka doma cenšas atrast un izpētīt parādību elementus un pēc tam parādīt, ka no šiem vienkāršiem elementiem sastādās vairāk sarežģīti fainomeni»[87].

«Kā jau bija aizrādīts, šī zinātnisko pētījumu otra metode, kas loģikā pazīstama ar nosaukumu *deduktīvā,* cenšas atrast sarežģītas parādības likumus, izejot no vienkāršāku cēloņu likumiem, cēloņu, kas rada šo parādību. Pirmā pakāpe deduktīvajā procesā ir tā, ka ar indukcijas vai uz tās dibināta secinājuma palīdzību nosaka katra cēloņa likumu, kas ietekmē atsevišķu parādību»[88].

4. Induktīvo metožu lietošana jau iepriekš postulē cēlonības principu (principu, ka nav parādības bez cēloņa), bet šīs metodes nedod iespējas izšķirt to, vai konstatētais parādības cēlonis ir pilns vai daļas cēlonis (totālais vai parciālais cēlonis), t. i. nepieciešams un pietiekošs, lai radītu sekas, jeb vai tikai nepieciešams, bet vēl nav pietiekošs.

5. Neatliek nekas cits, kā arī saimniecisko parādību likumību atsegšanā rīkoties pēc deduktīvā paņēmiena, kā to dara,

[86] В. А. Косинскій, Лекціи etc., p. 32.
[87] В. А. Косинскій, op. cit., p. 33.
[88] В. А. Косинскій, Лекціи etc., p. 33.

piem., ģeometrija. Pieredze dod neapstrādāto materiālu, cilvēka doma to šķiro un kārto — abstrahējas no nesvarīgā, ideālizē konkrēto, atšķetina sarežģīto, izolējot kādu parādību priekšstatu veidā (reāli to izdarīt nevar) un tā rada ideālu parādību sistēmu, kurā tad cenšas konstatēt ideālas likumības. Šinī sistēmā pamatlikumi jāpostulē, t. i. arī te jāpieņem intelekta radītais, no pieredzes datiem vien neizlobāmais ekonomisko parādību vienveidīgas iedarbības princips kā izejas patiesība, kā aksioma, un tad jāformulē pamatlikumi, no kuriem un attiecīgiem jauniem jēdzieniem var secināt ekonomisko parādību likumus.

Šīs domas pilnīgāka pamatojuma nolūkā pakavēsimies vispirms pie jautājuma par spriedumu attaisnošanas metodēm.

c. Spriedumi un to attaisnošanas metodes.

1. Savas atziņas par esošo zinātne izsaka tā, ka kaut ko apgalvo vai noliedz par kaut ko. Tādas ir, piem., atziņas: «Rīga ir Latvijas galvas pilsēta», «govs ir gremotājs dzīvnieks», «zeme riņķo ap sauli», «mēness nav saules līdztecis» u. tml. Tādas domas, kur kaut ko apgalvojam vai noliedzam par kaut ko, sauc par spriedumiem.

Parasti zinātnei no formālās puses definē kā pietiekoši pamatotu spriedumu sistēmu. Katrā ziņā zinātnes būvmateriāls ir spriedumi.

Spriedumi var būt pareizi — tādi, kas saskan ar īstenību, un nepareizi — kas nesaskan ar īstenību. Saprotams, zinātne cenšas atrast pareizus spriedumus. Tāpēc zinātnei rodas divi uzdevumi: 1) atrast spriedumus (vispirms nojautu veidā) un 2) pārbaudīt atrastos spriedumus, vai tie pareizi vai nepareizi. Spriedumu atrašanai vēl nav — un laikam arī nekad nebūs — izveidotu norādījumu, pēc kuriem ikviens varētu atrast jaunus spriedumus; citiem vārdiem, neeksistē vēl *«ars inveniendi»*. Toties labi izstrādātas un izveidotas spriedumu pārbaudes metodes, kas pieejamas ikvienam.

Sprieduma pārbaude var novest vai nu pie sprieduma attaisnojuma, ja spriedums izrādās pareizs, vai arī pie sprieduma apgāšanas, ja tas izrādās nepareizs.

2. Pamatmetodes spriedumu attaisnošanai ir tikai divas: 1) vienkāršs pieredzes datu konstatējums un 2) pierādījums. Tā tad ikviena sprieduma attaisnošanas metode ir vai nu kāda viena pamatmetode vai kāds šo pamatmetožu savienojums.

Par vienkāršu pieredzes datu konstatējumu sauc tādu pieredzē novērotās parādības konstatējumu, kur pieredzes datus ņem tīrā veidā, nesavienojot tos ne ar kādiem uz šiem novērojumiem dibinātiem secinājumiem. Tādā ceļā varam attaisnot piem., šādus spriedumus: «šo dzīvnieku sauc par suni», «vakar spīdēja saule», «dažas govis gremo», «patlaban noriet saule» u. tml.

Spriedumi, kas attaisnoti ar vienkāršu pieredzes datu konstatējumu, sastāda tā saucamās tiešās zināšanas. Tiešās zināšanas ir zinātnes svarīga sastāvdaļa. Dabas zinātnes, vēsture, ģeografija bez tiešajām zināšanām pārvērstos vienkāršā fantazēšanā.

Tomēr tiešajām zināšanām ir savs trūkums: ar vienkāršu pieredzes datu konstatējumu nevar attaisnot neviena vispārīga sprieduma. Tāpēc tiešās zināšanas var sastādīties tikai no singulāriem un atsevišķiem spriedumiem.

Turpretim vispārīgos spriedumus var attaisnot tikai ar otru metodi — ar pierādījumu. Par pierādījumu loģika sauc sprieduma attaisnošanu ar prāta slēdzienu jeb risienu palīdzību, kā to, piem., dara ģeometrija, kur teorēmas parasti attaisno ar risienu, t. i. pierādījuma palīdzību.

3. Lai gūtu pilnīgu skaidrību par to, ka ar vienkāršu pieredzes datu konstatējumu nevar attaisnot neviena vispārīga sprieduma, atcerēsimies starpību starp vispārīgiem, atsevišķiem un singulāriem spriedumiem.

Par pazīmēm sauc visu to, ar ko priekšmeti līdzīgi cits citam vai ar ko tie atšķiras cits no cita. Pazīmes var būt vispārīgas, ja tās pieder uz reizi daudziem priekšmetiem, kas ar to izrādās līdzīgi savā starpā, vai arī singulāras, ar ko atsevišķs priekšmets atšķiras no visiem bez izņēmuma pārējiem priekšmetiem, pat visvairāk līdzīgiem ar to.

Pazīmes, lai tās būtu vispārīgās vai singulārās, vēl var iedalīt svarīgās (būtiskās) un nesvarīgās. Par svarīgām pazīmēm sauc tādas pazīmes, no kuŗām ikviena, atsevišķi ņemta, nepieciešama, bet visas, kopā ņemtas, pietiekošas, lai atšķirtu doto priekšmetu vai priekšmetu grupu no visiem citiem priekšmetiem.

4. Domas par priekšmetiem, ja tos aplūko no viņu būtisko pazīmju puses, sauc par jēdzieniem.

Tāpēc par katru spriedumu no loģikas viedokļa var teikt, ka tas sastādās no divu jēdzienu savienojuma: sprieduma subjekta un sprieduma predikāta.

Ja jēdziens aptver tikai vienu vienīgu priekšmetu, piem., šis cilvēks, kas stāv manā priekšā; liepa, kas aug pie mana loga u. tml., tad tādu jēdzienu sauc par singulāru jēdzienu. Ja turpretim jēdziens aptver veselu priekšmetu grupu, piem., cilvēks, aita, koks u. tml., tad tādu jēdzienu sauc par vispārīgu jēdzienu.

Par jēdziena saturu sauc to pazīmju kopību, no kuru puses šinī jēdzienā tiek domāts priekšmets vai priekšmetu grupa. Par jēdziena apjomu sauc tādu priekšmetu kopību, kur katram priekšmetam ir visas pazīmes, kas ieiet jēdziena saturā.

5. Ja sprieduma predikāts zīmējas uz visu subjekta apjomu, pie kam par sprieduma subjektu der vispārīgs jēdziens, tad spriedumu sauc par vispārīgu spriedumu, piem., visi šķidrumi ir elastīgi. Vispārīga šādu spriedumu schēma ir: «visi (vai vienmēr) S ir P», vai arī «neviens (vai nekad) S nav P». Ja subjekta daļa, uz ko zīmējas predikāts, ir nenoteikta, piem., dažas puķes nesmaržo, tad tādu spriedumu sauc par a t s e v i š ķ u s p r i e d u m u. Vispārīgā schēma: «daži S ir P» vai «daži S nav P». Ja spriedumā par subjektu der singulārs jēdziens, piem., šī grāmata pieder man, tad spriedumu sauc par singulāru spriedumu.

6. Kā vispārīgus spriedumus nevar attaisnot ar vienkāršu pieredzes datu konstatējumu, var redzēt no tam, ka ikviens īsti vispārīgs spriedums zīmējas uz neaprobežotu lielu priekšmetu skaitu. Piem., vispārīgs spriedums: ikkuras divas matērijas daļiņas pievelk viena otru ar spēku, kas proporcionāls ar to masām un apgriezti proporcionāls ar attālumu kvadrātiem, zīmējas uz visu nepārredzamo vielas daļiņu skaitu. Pieredzei turpretim pieejams tikai stipri aprobežots telpā un laikā priekšmetu un novērojumu skaits. Kā gan, piem., va-

rētu vienīgi pieredzē attaisnot vispārīgu spriedumu: visi šķidrumi elastīgi? Nevaram taču izmēģināt visus šķidrumus, kādi eksistē, eksistējuši un eksistēs. Tāpēc pieredzes datu vienkāršs konstatējums var zīmēties tikai uz to, kas līdz šim novērots, un nekā nevar izteikt ārpus novērojumu lauka, ja šo konstatējumu nepapildina ar ko citu — ar pierādījumu.

Bet nu vislielākā nozīme zinātnē ir vispārīgiem spriedumiem. Pat dabas zinātnes — sevišķi tādas, kā fizika, ķīmija, astronomija — kaut gan pastāvīgi balstās uz pieredzes datiem, tomēr ar tiem vien neaprobežojas: dabas zinātnes neapmierinās ar novērojumos un eksperimentos iegūtā materiāla vienkāršu aprakstu, bet cenšas no tā dabūt kaut kādus vispārīgus secinājumus: cenšas noskaidrot vienveidības parādību starpā jeb tā saucamos dabas likumus. Bet dabas likumus vienmēr mēdz izteikt vispārīgo spriedumu veidā[89].

Tas arī saprotams, jo vispārīgie spriedumi, aptverdami visu attiecīgo priekšmetu vai parādību kopumu, dod kolosālu domu ekonomiju, ļauj vispār ienest kārtību bezgalīgo daudzo atsevišķo parādību starpā. Tāpēc arī vērojams tāds apstāklis: jo kādā zinātnes nozarē vairāk vispārīgu spriedumu, jo tur cilvēks spēj labāk paredzēt nākamos notikumus. Ja, piem., astronomija var noteikti aprēķināt, kad un kurā vietā turpmāk būs redzams saules aptumsums, tad tas iespējams tikai tāpēc, ka astronomija var lietot dažādus vispārīgus spriedumus, piem., kustību likumus, kas nezīmējas tikai uz līdz šim novērotajām kustībām, bet kam ir vispārīga nozīme: ja būs izpildīti tādi un tādi nosacījumi, tad vienmēr un visur ķermenis kustēsies pēc tāda un tāda likuma, piem., ķermenis, uz ko iedarbojas centrālie spēki, kustēsies pa vienu no kōniskajiem griezumiem. Tāpat, lai varētu ar parādībām rīkoties, t. i. iekārtot tās pēc savas patikas, tad to var darīt tikai tad, ja spējam paredzēt, kāda būs parādību gaita tādos vai citādos apstākļos. Ja to spējam, tad iegrozām apstākļus tā, lai parādību gaita ietu mums vēlamajā virzienā. Bet paredzēt spēsim tikai tad, ja mūsu rīcībā būs attiecīgie vispārīgie spriedumi.

[89] А. Введенскій, Логика какъ часть теоріи познанія, III. изд. Петроградъ 1917. г., p. 77.—79.

Tāpēc arī saprotams, ka ikviena zinātne cenšas pēc vispārīgiem spriedumiem, it īpaši dažādu tā saucamo likumu veidā. Tas vērojams arī ekonomiskajās zinātnēs, kur sastopami piem., piedāvājuma-pieprasījuma likums, dzelzs algu likums. *Grasham'a* likums, *Pareto* likums u. tml.

Atzīmēsim, ka gandrīz visi matēmatikas spriedumi ir vispārīgi spriedumi.

Viegli saprotams tāpēc, ka vislielākā vērība jāpiegriež vispārīgo spriedumu pārbaudes metodēm.

7. Izrādās, ka to sevišķi uzsvēris un noskaidrojis *Kant's*, ka vispārīgiem spriedumiem, atkarībā no to sastāva jeb matēriāla, t. i. atkarībā no to subjekta un predikāta, ir dažāda gnoseoloģiska nozīme. Uzsvērdams šo dažādo nozīmi, *Kant's* nosaucis dažus spriedumus par analitiskiem, pārējos par sintētiskiem.

Par analitiskiem spriedumiem *Kant's* sauc tādus, kur predikāts ir tāds jēdziens, kura viss saturs sastāda lielāku vai mazāku subjekta satura daļu, tā ka predikātu var atrast, vienkārši sadalot jeb analizējot subjekta saturu. Piem., spriedums: «visi ķermeņi ieņem telpas daļu», ir analitisks spriedums, jo ar šo vārdu «ķermenis» mēs saprotam kaut ko, kam ir dimensijas, kas ieņem telpas daļu. Tāpat spriedums: «kvadrāts ir taisnstūris» ir analitisks spriedums, jo jēdzienā kvadrāts jau ieiet jēdziens taisnstūrīgums, tā ka šeit viss predikāta saturs ir subjekta satura daļa, un tā saturu var atrast, analizējot subjekta jēdzienu.

Par sintetiskiem *Kant's* nosauc tādus spriedumus, kur viss predikāts neietelp subjekta saturā kā tā daļa, un tāpēc predikātu nevar atrast, analizējot subjekta saturu. Piem., spriedums: visi ķermeņi ir smagi (*Kant'a* piemērs), ir sintetisks spriedums, jo šeit predikāts ir pavisam kas cits nekā tas, ko es domāju jēdzienā ķermenis, jo var gan domāt par ķermeņiem, kam nav smaguma, bet nevar domāt par ķermeņiem, kas neieņemtu nekādas telpas daļas. Visi pieredzes spriedumi kā tādi ir sintetiski spriedumi, tāpat visas matēmatikas teōrēmas[90].

[90] I. Kant, Prolegomena zu jeder künftigen Metaphysik, p. 41. Reklāma izd.

Schēmatiski starpību starp analitiskiem un sintetiskiem spriedumiem var izteikt tā. Ja S=P+a, kur a var būt arī nulle, tad spriedums «S ir P» būs analitisks, jo predikātā nebūs nekā vairāk, kas nebūtu jau bijis subjekta saturā. Bet ja, piem., S=x+a un P=x+b,tad spriedums «S ir P» būs sintetisks, jo tā predikātā ir tas, kā nav subjekta saturā, proti, pazīme b.

Tā kā analitiskajos spriedumos predikātā neizteicas nekas vairāk, kas nebūtu jau īstenībā domāts bijis subjekta jēdzienā, kaut arī netik skaidri, ar līdzīgu apziņu, tad analitiskie spriedumi nepaplašina zināšanu, tikai noskaidro tās, izskaidrojot subjektu saturu. Tāpēc Kants nosauc analitiskos spriedumus par paskaidrojamiem spriedumiem (erläuternde Urteile).

Zināšanas paplašinās tikai ar pārbaudītiem sintetiskiem spriedumiem (Erkenntnis erweiternde Urteile.[91])

Tiešām, vispirms zināšanas nevar iztikt bez attaisnotiem spriedumiem par esamību, jo bez tiem zināšanām nav nozīmes, bet visi spriedumi par esamību, t. i. par to, ka tāds vai citāds priekšmets vai parādība tiešām eksistē, ir sintetiski spriedumi: neviena jēdziena saturā neieiet eksistence kā šā jēdziena satura sastāvdaļa. Varam radīt visdažādākos — pat visfantastiskākos jēdzienus, piem., jēdzienus: trīsgalvains cilvēks, apaļš kvadrāts u. tml., tāpēc, ka jēdziena saturā neieiet kā sastāvdaļa eksistences pazīme. Tas arī saprotams, jo, darinot jēdzienu, piegriežam vērību tikai tādu pazīmju izvēlei, kas raksturo šim jēdzienam pakļautos priekšmetus vai parādības, ja tādi eksistētu. Tāpēc tikai ar jēdzienu satura analizi varam uzzināt to, kādam jābūt priekšmetam, kas atbilst šim jēdzienam, ja tāds priekšmets eksistē, bet nekad nevaram ar vienkāršu analizi uzzināt tā, vai tiešām šis priekšmets eksistē. Bet arī tad, kad jau mums ir attaisnoti sintetiski spriedumi par eksistenci, tikai sintetiskie spriedumi ievērojamā kārtā paplašina zināšanas, jo tanīs subjektam tiek pievienotas jaunas pazīmes, kas neietelp paša subjekta jēdziena saturā.

[91] J. Kant, Kritik der reinen Vernunft, p. 48. Reklāma izd.

Lai atšķirtu analitisko spriedumu no sintētiskā, jāaplūko tikai attiecīgā sprieduma subjekta definīcija un arī predikāta definīcija un jānoskaidro, vai viss bez atlikuma predikāta saturs ieiet subjekta definīcijā. Ja tas tā, tad spriedums ir analitisks spriedums, ja nē — tad sintetisks spriedums. *Schleiermacher'a* un *Trendelenburg'a* iebildumi pret šo *Kant'a* iedalījumu nav pamatoti, kā to aprāda *Wundt's*[92]. Sintetisko spriedumu skaits nemazinās, bet gan nemitīgi aug līdz ar mūsu zināšanu paplašināšanos.

Tā tad nu tagad esam nonākuši pie jautājuma: kā var attaisnot vispārīgos sintetiskos spriedumus kā svarīgākos zināšanu paplašināšanai.

d. Vispārīgo sintetisko spriedumu attaisnošana.

1. Jau redzējām, ka neviena vispārīga sprieduma nevar attaisnot ar vienkāršu pieredzes datu konstatējumu, bet šādu spriedumu attaisnošanai jālieto pierādījums. Piemetināsim, ka te runājam par īstajiem vispārīgajiem spriedumiem, bet ne šķietamajiem vispārīgajiem spriedumiem, kas zīmējas kaut arī uz lielu, bet pilnīgi noteiktu priekšmetu skaitu, kuŗus var aplūkot visus līdz beidzamajam atsevišķi.

Katrs pierādījums sastādās no lielāka vai mazāka prāta slēdzienu jeb risienu skaita. Risieni var, savukārt, būt vai nu tiešie, kas rodas no viena vienīgā dotā sprieduma, vai arī sillogismi. Vissvarīgākie ir pēdējie, jo vienīgi sillogismi paplašina zināšanas; tiešie risieni tikai pārveido doto spriedumu. Tāpēc katrā pierādījumā, vai tas būtu vai nebūtu savienots ar pieredzes datu konstatējumu, atradīsim lielāku vai mazāku skaitu sillogismu.

Par sillogismu sauc tādu risienu, kur pieslieties risienam spiež ne mazāk kā divi dotie spriedumi jeb tā saucamās prēmisas, ņemti kopā. Tā tad sillogismam vajadzīgas vismaz divi prēmisas pareizu spriedumu veidā.

2. Bet lai ņemtu kādā veidā ņemdami risienus, vispārīgo sintetisko spriedumu var pareizi dabūt tikai tanī gadījumā, ja

[92] B. W. Wundt, Allgemeine Logik und Erkenntnistheorie I. B, Stuttgart, 1919, p. 152.

prēmisu skaitā atradīsies vismaz viens vispārīgs sintetisks spriedums; no vispārīgiem analitiskiem spriedumiem vien, lai tos kombinētu kā kombinēdami savā starpā, var secināt tikai vispārīgo analitisko spriedumu vai atsevišķos sintetiskos spriedumus.

To var pierādīt, aplūkojot dažādus sillogismu veidus[93].

Viss tas, ko līdz šim esam minējuši, ļauj izteikt šādu secinājumu: nevienu vispārīgu sintetisku spriedumu nevar attaisnot arī ar pierādījumu citādi, kā vien tad, ja dota kaut viena prēmisa vispārīga sintetiska sprieduma veidā. Īsākā, kaut arī ne pilnīgi precīzā formulējumā to var izteikt tā: vispārīgs sintetisks spriedums tikai no vispārīgā sintetiska sprieduma.

Tā tad, lai pierādītu kāda vispārīga sintetiska sprieduma pareizību, mazākais vienam pierādījuma pamatam (prēmisai) jābūt vispārīgam sintetiskam spriedumam.

3. Tādā kārtā, meklējot kāda vispārīga sintetiska sprieduma pierādījuma pamatus, atradīsim tur kādu citu vispārīgu sintetisku spriedumu; ejot arvienu atpakaļ, beigu beigās nonāksim pie tāda vispārīga sintetiska sprieduma, kas pats nav pierādāms, jo trūkst attiecīgā pamata, bet kas pats der par pamatu citiem, t. i. nonāksim pie tā, ko sauc par pirmajiem pamatiem, jeb augstākajiem pamatiem; matēmatikā šādus spriedumus sauc par aksiōmām jeb pamatpatiesībām, postulātiem, citās zinātnēs arī par principiem (fizikā, mēchanikā, filozofijā, tautsaimniecībā u. c.).

e. Aksiōmu jeb pamatpatiesību būtība. Pamatjēdzieni.

1. Tā tad aksiōmas (postulāti, principi) no loģikas viedokļa ir vispārīgi sintetiski spriedumi, kas jāpieņem bez pierādījuma kā pareizi spriedumi, kā pamatpatiesības, no kurām sākas secinājumu rinda, un šādi spriedumi (vismaz viens!) nepieciešami ikvienai zinātnei, kas grib savas atziņas izteikt vispārīgo sintetisko spriedumu veidā.

[93] L. Ausējs, Aksiōmatiskā metode tautsaimniecības teōrijā, Latvijas ūniversitātes sabiedrisko zinātņu biedrības Rakstu krājums. Rīgā, 1936., p. 96—98.

Ar to tad esam nonākuši pie lietas kodola: *neviena zinātne, ne tīri racionāla, kas lieto ar pieredzes datiem nesavienotus pierādījumus, kā, piem., matēmatika, nedz arī empīriska, kur pierādījumi savienoti ar pieredzes datiem, kā, piem., fizikā,* **ja vien tā lieto attaisnotus vispārīgus sintetiskus spriedumus,** *nevar iztikt arī bez tādiem lielākā vai mazākā skaitā ņemtiem vispārīgiem sintetiskiem spriedumiem, kas* **jāpieņem kā augstākie (pirmie) pamatojumi bez jebkāda pierādījuma no šīs zinātnes puses.**

Kā jau minēts, šādus svarīgus sintetiskus spriedumus sauc par aksiōmām jeb pamatpatiesībām (arī postulātiem vai principiem). Tie ir ikvienas zinātnes pamatpatiesības, kas tāpēc *noteikti un skaidri jādeklarē,* lai vēlāk nerastos pārpratumi. Reizē ar to jāievēro vēl viena lieta.

2. Kā jau redzējām, spriedumu var uzlūkot kā viena jēdziena apgalvojumu vai noliegumu, zīmējoties uz otru; tā tad jēdzieni ir spriedumu sastāvdaļa. Lai spriedumi būtu skaidri, jābūt skaidriem jēdzieniem, t. i. lietojot attiecīgus jēdzienus, skaidri jāzina, ko ar tiem domājam. Piem., lietojot jēdzienus — vērtība, labums, mantojums, parallēlogramms, jāzina, ko ar tiem saprotam. Citiem vārdiem, skaidri un noteikti jāzina to objektu (priekšmetu vai parādību) novada robežas, uz ko zīmējas šie jēdzieni un ko tie grib aptvert tā, lai nerastos pārpratumi — lai visiem, kas lieto kādu jēdzienu, objektu novadi, ko aptver dotais jēdziens, būtu pilnīgi saskanīgi. Tā, piem., lietojot jēdzienu parallēlogramms, attiecinām šo jēdzienu uz tādu plakanu ģeometrisku figūru novadu, kas aptver tikai četrmalu taisnlīniju figūras ar savstarpēji parallēlām pretējām malām.

Lai panāktu jēdzienu skaidrību un varētu tos pareizi lietot, jādod jēdziena definīcija, t. i. jāatklāj tā saturs — jānorāda pazīmes, kas atšķir to objektu novadu, uz ko zīmējas jēdziens, no pārējo objektu novada. Piem., definējot parallēlogrammu kā četrstūri, kam pretējās malas parallēlas, izdalām parallēlogrammu no visiem daudzstūriem ar citādu malu skaitu, paturot vērā tikai daudzstūŗus ar četrām malām. No šāda veida daudzstūriem savukārt noškiŗojam tikai tos, kam pretējās malas parallēlas. Tā rodas norobežota īpatnēja četrstūŗu kopība, uz ko tad zīmējas jēdziens parallēlogramms. Bet, atklājot jēdzienu saturu, līdz ar to norādām uz kādu citu jēdzienu vai jēdzieniem, kas mums šādā vai citādā veidā pazīstami. Jēdziens var būt, piem., pazīstams tā, ka esam to agrāk definējuši; tādi ir pieminētajā gadījumā jēdzieni: četrstūris, parallēls, mala. Bet definējot šos jēdzienus, mums savukārt jāatsaucas uz citiem, jau agrāk definētiem, kamēr nonākam pie jēdzieniem, kuŗu definīcijā vairs nav uz ko atsaukties, kuŗus tā tad vairs nevar definēt, bet tie jāpieņem par izejas jēdzieniem jeb pamatjēdzieniem. Tā, piem., ejot atpakaļ no parallēlogramma jēdziena, kuŗa definīcijā kā *genus proximum* ir četrstūŗa jēdziens, nonākam ģeometrijā pakāpeniski pie šādiem jauniem *genera proxima:*

parallēlogramms ⟶ četrstūris ⟶ daudzstūris ⟶ figūra ⟶ telpas veidojums ⟶ telpa.

Ja gribētu tālāk definēt jēdzienu telpa, tad atsaukties uz kādu citu jēdzienu kā *genus proximum* būtu grūti vai pat neiespējami. Bet ja arī to varētu darīt — varētu definēt telpu un norādīt kādu citu jēdzienu kā *genus proximum*, tad tomēr beigu beigās būtu spiesti kaut vienu vienīgu jēdzienu pieņemt par izejas jeb pamatjēdzienu.

Tas zīmējas tiklab uz reālo, kā nominālo definīciju[94], [tāpat arī citādā iedalījumā analitisko un sintetisko definīciju[95]].

f. Īstenības ideālizācija. Aksiōmu sistēmas.

1. Tā tad katrā zinātnē jāatškiŗ pamatjēdzieni, kas jāpieņem bez jebkāda definējuma, no pārējiem jēdzieniem, kuŗus var un vajaga definēt, līdzīgi tam, kā aksiōmas jāatškiŗ no pierādāmajiem spriedumiem.

Reālo objektu pasaule ir tik sarežģīta, ka pat mēģināt to atšķetināt un norobežot pēc kaut kādām pazīmēm vienu reālu objektu novadu no citu reālu objektu novada ir brīžiem neiespējama lieta, jo nevar atrast noteiktu pieturas punktu. Ja, piem.,

[94] Введенскій, op. cit., p. 276, 278, Wundt, Logik, II, p. 41—44.
[95] Wundt, op. cit.: II, p. 45.

grībētu reālas līnijas kā vienas dimensijas objektus atšķirt no reāliem laukumiem kā divu dimensiju objektiem, tad grūti nāktos sameklēt tādu objektīvu atšķirības pazīmi, jo katrai reālai līnijai ir vēl citas dimensijas (platums, biezums). Vajadzētu izvēlēties tādu noteiktu platumu, piem., 1 mm vai 0,1 mm kā mēraukļu un pieņemt līnijas, kuru platumi pārsniegtu šo standartplatumu, par laukumiem. Tāda šķirošana būtu iespējama, bet nebūtu tik lietderīga kā tā, ko tagad izdara, ideālizējot zināmus jēdzienus — abstrahējoties no dažām reālām īpašībām objektā. Liekas, ka ģeometrija pirmā sākusi iet šo, no vienas puses grūto, bet, no otras puses, izdevīgo ceļu, ideālizēdama reālos objektus un radīdama tādā kārtā jēdzienus, ar ko ērti rīkoties un ar ko viegli salīdzināt reālos objektus. Tāpēc ģeometrijā mums ir darīšana, piem., ar līniju kā tikai vienas dimensijas telpas veidojumu. Ikviena reāla līnija lielākā vai mazākā mērā tuvojas šai ideālai līnijai, un ideālā līnija var stāties reālās līnijas vietā, ja pēdējā piegriežam vērību tikai vienai dimensijai, abstrahējoties no pārējām. Tāpat rodas, piem., ģeometriska ķermeņa jēdziens kā zināma ideālizācija — ķermenis, kas, pastāvot dotajiem nosacījumiem, absolūti nemainīgs savā formā un lielumā, ar ideāli veidotu virsu u. t. t. Ģeometriskais ķermenis stājas reālā ķermeņa vietā, kamēr varam neņemt vērā tos reālos novirzījumus no ideālā ķermeņa, ar kuriem ikvienā reālā gadījumā jāsastopas. Bet ja arī šie novirzījumi nav vairs *quantités negligeables*, tad arī tādā gadījumā ideālizācija zaudē savas nozīmes, jo izejot no šā ideālizēta jēdziena, varam kļūt skaidrībā par novirzījumiem.

Tādus pašus ideālizētus jēdzienus sākušas lietot arī citas zinātnes, kā, piem., mēchanika (materiālais punkts, vienmērīga kustība u. c.), fizika (ideālā gāze, absolūts tukšums, absolūta temperātūra u. c.), arī tautsaimniecība (homo oeconomicus) un pēdējā laikā pat kultūrfilozofija[96].

Šeit jāpievienojas *Kühne*'s vārdiem:

«Katra teōrija var zīmēties vienmēr tikai uz ideālu, nevis attiecīgu īstenu parādību, jo neviena nevar sevī uztvert bez

[96] Spranger, Lebensformen, Halle, 1922, p. 133.

atlikuma daudzpusīgo īstenību; tā ir lielākā vai mazākā mērā padota abstrakcijām[97].»

2. Jaunu lietderīgu jēdzienu radīšana arvienu iezīmē attiecīgās zinātnes progresu. Tāpēc šāda jaunu jēdzienu radīšana ir ļoti svarīgs uzdevums. Dažādu jēdzienu starpā būs arvienu kādi pamatjēdzieni, kas jāpieņem bez definīcijas. Pārējie būs atvasinātie, definējamie jēdzieni.

Jēdziena definīcija ir pēc savām subjekta un predikāta attiecībām analitisks spriedums. Tāpēc pamatjēdzieni un atvasināto jēdzienu difinīcijas nav pietiekošs materiāls teorētiskās zinātnes uzbūvei — vajadzīgi vēl, kā redzējām, vispārīgie sintetiskie spriedumi aksiōmu veidā.

3. Visbiežāk aksiōmas saista savā starpā pamatjēdzienus, vai pamatjēdzienus ar kādiem citiem jēdzieniem, piem., divus punktus var vienmēr savienot ar taisni un tikai vienu taisni; punkts un taisne ir ģeometrijas pamatjēdzieni. Tā kā jēdzieni ir bieži kādi īstenības ideālveidojumi, tad arī aksiōmas, saistīdamas šādus jēdzienus, izteic arī ideālizēti uztvertu īstenību. Tā, piem., par ģeometrijas aksiōmām var teikt, ka «tās ir tiešo intuicijas datu lietderīgas ideālizācijas[98]. To pašu uzskatu izteic arī *F. Klein's*[99], ka «pamatjēdzieni un aksiōmas nav uztveres tiešie dati, bet lietderīgi izvēlētas šo datu ideālizācijas. Jau ass punkta jēdziens neeksistē tiešā uztverē, bet ir tikai iedomāta robeža, kam mēs ar savu mazā telpas gabala uzskatu varam tikai tuvoties, to nekad neaizsniedzot.»

Teikto par ģeometrijas aksiōmām var attiecināt arī uz citām aksiōmām, tikai ģeometrijā šis jautājums noskaidrots vislabāk un vispilnīgāk.

4. Jau vairāk nekā priekš 2000 gadiem, kad parādījās Eukleida Elementi (ap 300 g. pr. Kr.), jautājums par aksiōmu nozīmi ir bijis tā laika ģeometriem, bet it īpaši Eukleidam, pilnīgi skaidrs; šis darbs, kas sadalīts vairākās grāmatās, iekār-

[97] O. Kühne, Die mathematische Schule in der Nationalökonomie, Band I. 1. Teil. Berlin und Leipzig, 1928, p. 1.

[98] Проф. С. А. Богомолов, Основания геометрии, Москва, 1923, г. р. 33—34.

[99] F. Klein. Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Teil II. Geometrie. Leipzig, 1914, p. 405.

tots tā, ka katras grāmatas sākumā atrodam vispirms visu to ģeometrisko jēdzienu definīciju, ar kuŗiem nākas sastapties tanī grāmatā; tad nāk pirmās grāmatas sākumā (arī citu grāmatu) aksiōmas, ko Eukleids sadala divās grupās: postulātos un vispārīgajās patiesībās[100]).

Kā postulātus Eukleids min šādus vispārīgos sintetiskos spriedumus.

«Jāprasa, lai būtu iespējams:

1) no ikviena punkta uz ikvienu citu punktu vilkt taisni;

2) ierobežotu taisni pagarināt neaprobežoti;

3) ar ikvieņu radiju no ikviena centra vilkt riņķi;

4) lai taisnie leņķi savā starpā būtu vienlīdzīgi;

5) ja taisne, kas krusto divas taisnes, darina iekšējos un vienā pusē taisnei gulošus leņkus mazākus par diviem taisniem leņķiem, tad taisnes, pagarinātas neaprobežoti, satiekas tanī pusē, kur ir leņķi, kas (summā) mazāki par taisniem leņķiem.

V i s p ā r ī g ā s p a t i e s ī b a s.

1) Kas vienlīdzīgs ar vienu un to pašu, vienlīdzīgs savā starpā.

2) Ja vienlīdzīgam pieskaita vienlīdzīgu, tad veseli ir vienlīdzīgi.

3) Ja no vienlīdzīga atņem vienlīdzīgu, tad atlikumi ir vienlīdzīgi.

4) Kas savā starpā sakrīt, ir vienlīdzīgs.

5) Vesels lielāks par daļu.

Līdz ar to visā Eukleida ģeometrijā valda tanī ziņā pilnīga skaidrība, ka ikvienam ģeometrijas apgalvojumam — ikvienam vispārīgam spriedumam jābūt vai nu definīcijai, aksiōmai vai teōrēmai. Definīcijas un aksiōmas (postulāti un vispārīgas patiesības: vārdu *aksiōma* Eukleids nelieto; to lietojis Aristotelis un Herons[101]) tiek dotas, teōrēmas pierādītas, lietojot aksiōmas, definīcijas un jau agrāk pierādītas teōrēmas.

[100] Euclidis Elementa, Uol I. Lipsiae MDCCCLXXXIII, p. 9—10.

[101] J. Tropfke, Geschichte der Elementarmathematik, Vierter Band, Leipzig und Berlin 1923, p. 34.

Pilnīgi skaidrs vēl nav Eukleidam jautājums par pamatjēdzieniem, jo Eukleids grib visus jēdzienus dēfinēt. Protams, ka tāpēc dažas definīcijas iznāk nepilnīgas un kļūdainas.

Pirmās Eukleida definīcijas šādas:

1) Punkts ir, kam nav nekādas daļas.

2) Līnija ir garums bez platuma.

3) Līnijas robežas ir punkti.

4) Taisne ir līnija, kas vienmērīgi guļ starp punktiem, kuŗi atrodas uz tās.

Redzam, ka punkta definīcijā trūkst *genus proximum* un nav nevienas pozitīvas pazīmes. Taisnes apzīmējums neskaidrs.

Arī pašas galvenās un pavisam pareizās idejas, ka ikvienam apgalvojumam jābūt vai nu definīcijai, vai aksiōmai, vai teōrēmai (šo ideju jau bija noskaidrojusi Platōna skola) izpildījums nav Eukleidam izdevies tik pilnīgi, kā tas būtu vēlams, jo jau pašos Elementu sākumos Eukleids balstās uz intuicijas atziņu, kas nav formulēta aksiōmas veidā, bet klusu ciešot tiek pieņemta kā acīm redzama patiesība. Bet tas arī nav nekāds brīnums, jo jautājums ir visai sarežģīts.

5. To noskaidrot pilnā mērā ir izdevies tikai 19. g. s. beigās, un šeit ļoti lieli nopelni citu matēmatiķu starpā *D. Hilbert*'am. Viņa klasiskais darbs šinī laukā — aksiōmatikas laukā — *Die Grundlagen der Geometrie* — dod ģeometrijai ne tikai pilnīgu pamatjēdzienu un aksiōmu sistēmu, bet arī noskaidro, ka viņa aksiōmu sistēma ir bez pretrunām un ka aksiōmas ir tiešām aksiōmas — nevienu nevar pierādīt ar citu palīdzību, tās pilnīgi neatkarīgas savā starpā, un to pietiek, pilnīgi pietiek, lai uzbūvētu ģeometriju tā, kā to bija gribējis darīt Eukleids — nebalstoties ne uz vienu skaidri neformulētu spriedumu.

Pirmā nodaļa *Hilbert*'a darbā sākas tā.

«Mēs domājam trīs dažādu lietu sistēmas: pirmās sistēmas lietas saucam par punktiem un apzīmējam ar A, B, C, . . .; otrās sistēmas lietas saucam par taisnēm un apzīmējam tās ar a, b, c, . . .; trešās sistēmas lietas saucam par plāksnēm un apzīmējam tās ar α, β, γ, ...; punktus sauc arī par lineārās ģeometrijas elementiem, punktus un taisnes par plakanās ģeometrijas elementiem un punktus, taisnes un plāksnes par telpas ģeometrijas elementiem.

Mēs domājam punktus, taisnes un plāksnes zināmās savstarpības attiecības un apzīmējam šīs attiecības ar tādiem vārdiem kā «guļ», «starp», «paralēli», «kongruenti», «nepārtraukti»; noteiktu un matēmatikas mērķiem pilnīgu šo attiecību aprakstu dod ģeometrijas aksiōmas.

Ģeometrijas aksiōmas varam iedalīt piecās grupās; katra no šīm grupām izteic zināmus sakarīgus uzskates pamatfaktus. Šīs aksiōmu grupas mēs nosaucam šādā veidā:

I. 1—8. Saistības aksiōmas.
II. 1—4. Sakārtojuma aksiōmas.
III. 1—5. Kongruences aksiōmas.
IV. Parallēlo taišņu aksiōma.
V. 1—2. Nepārtrauktības aksiōmas.[102]»

6. Līdz ar to ģeometrija, kas ar savām metodēm arvienu derējusi par ceļa rādītāju citām zinātnēm, kļuvusi tām par pilnīgu paraugu: aksiōmatiska metode, kas prasa asi noškirt un pilnīgi formulēt aksiōmas (principus, postulātus u. tml.) no pierādāmiem spriedumiem un pamatjēdzienus no atvasinātiem jēdzieniem, ir nepieciešama ikvienai teōrētiskai zinātnei, lai tanī būtu skaidrība un noteiktība. Skaidri šķirojot pamatpatiesības no pārējām un, galvenais, noteikti tās formulējot, var daudz vieglāk izsargāties no kļūdām un pārpratumiem. Īstenībā aksiōmas arī lieto ikviena teōrētiska zinātne, kaut arī entimatiskā veidā, jo to jau prasa, kā redzējām, pati lietas būtība. Bet gadījumā, ja aksiōmas nav skaidri formulētas, var viegli rasties pārpratumi, jo lasītājiem nav par tiem skaidrības, un tie jāizloba no visas teōrijas, kas ne katrreiz bez pārpratumiem iespējams. Dažādu teōrētisko uzskatu atšķirības galvenokārt atkarājas no pieņemto

[102] D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, Leipzig und Berlin, 1922, p. 2.

Izejot no *Hilbert'a* aksiōmu sistēmas, amerikānis *Halsted's* ir uzbūvējis ģeometriju ar nosaukumu «*Rational Geometry*», kas pilnīgi reālizē to, ko ir centies sasniegt Eukleids savos Elementos — pilnīgu skaidrību un noteiktību dažādu spriedumu (definīciju, aksiōmu, teōrēmu) starpā, lai katrs spriedums ierindotos spriedumu sistēmā kā definīcija, aksiōma vai teōrēma un ne citādi.

pamatjēdzienu un aksiōmu sistēmas. Tāpēc iebildumiem pirmā kārtā jāvēršas pret tiem, jo parasti secinājumos kļūdas sastopamas samērā reti.

7. Pamatjēdzienu un aksiōmu sistēmu var izvēlēties dažādi. Arī te par paraugu der ģeometrija, kur šis jautājums pilnīgi noskaidrots, kaut arī tā noskaidrošanai bija vajadzīgi vairāki gadu simti, pat tūkstoši. Šeit vissvarīgākā loma piekrīt Eukleida piektajam postulātam, ko kopš Eukleida laikiem līdz pat 19. g. s. pirmajai pusei centās pierādīt, t. i. izteikt kā pārējo aksiōmu neizbēgamu secinājumu. Tomēr nevienam to izdarīt neizdevās, ja pamatos nelika bez pārējām Eukleida aksiōmām vēl kādu citu, piem., aksiōmu, ka trijstūra iekšējo leņķu summa ir divi taisnie leņķi vai arī: caur punktu ārpus taisnes var vilkt paralēlu taisni un tikai vienu. Beidzot jautājumu apgrieza otrādi un mēģināja uzbūvēt ģeometriju bez Eukleida postulāta, vai, pareizāk, tā vietā ņemt citu — gandrīz ar pretējo saturu. Tas arī izdevās vispirms Lobačevskim (1829. g.) un gandrīz vienā laikā ar to arī citiem.

Tādā kārtā radās citas aksiōmu sistēmas un arī citas ģeometrijas, nevainojamas savā loģiskā uzbūvē, bet ar īpatnējiem uzskatiem par telpas īpašībām.

Tā kā tās uzbūvētas no ideālizētiem jēdzieniem, tad pieredze nevar izšķirt, kuŗa no ģeometrijām ar dažādām aksiōmu sistēmām pareiza resp. pareizāka.

Arī šis apstāklis var derēt par paraugu citām zinātnēm. Daži piemēri, kā citas zinātnes lieto aksiōmatisko metodi, minēti manā pieminētajā darbā.[103]

g. Aksiōmas tautsaimniecības teōrijā.

1. Piegriezīsimies tagad tautsaimniecībai un pameklēsim, cik tālu teōrētiskās tautsaimniecības darbos izpaužas — apzināti vai neapzināti — aksiōmatiskā metode.

Kā pirmais no tautsaimniekiem, kas ne tikai atzinis aksiōmatiskās metodes nozīmi, bet tieši izlietojis to tautsaimniecības teōrijas izlikumam, minams *Nassau's Senior's*. Viņš pazīstamajā *Encyclopaedia Britannica* 1836. g. publicējis darbu

[103] L. Ausējs, op. cit., p. 107—111.

An Outline of Political Economy (vēlāk iznācis arī atsevišķā grāmatā), kur, sekodams Eukleida paraugam, iziet no četriem skaidri formulētiem pamatprincipiem (aksiōmām), no kuŗiem secina visu pārējo, par ko no tautsaimniecības mācību vēsturniekiem izpelnījies jaunā Eukleida nosaukumu.[104]

2. Arī tautsaimniecības matēmatiskā virziena īstais nodibinātājs *A. Cournot* lieto aksiōmatisko metodi.

«Mēs uzstādām tikai vienu aksiōmu, jeb, ja grib, tikai vienu hipotezi, proti, ka katrs meklē iegūt no sava darba vai īpašuma vislielāko vērtību. Ja mēs taisām secinājumus no šā principa, tad mēģināsim tomēr labāk, nekā līdz šim darījuši, noteikt pamatlielumus.[105]»

Gustav's Cassel's "(savā darbā *Theoretische Sozialökonomie*, vierte verbesserte und wesentlich erweiterte Auflage, 1927.), uzstāda vairākus principus, kas jāuzlūko kā aksiōmas, jo uz tiem balstās daudzi secinājumi. Kā pirmo tādu principu *Cassel's* min šaurības principu (*Prinzip der Knappheit)*. «Tā kā parasti vajadzību apmierināšanas līdzekļi stāv rīcībā tikai aprobežotos daudzumos un tā kā civīlizēto cilvēku vajadzības savā kopībā ir nepiesātināmas, tad vajadzību apmierināšanu līdzekļi ir parasti par šauriem samērā ar vajadzībām. Tikai tādus līdzekļus ievēro saimniecība, tikai šauri līdzekļi ir saimnieciskie līdzekļi. Visa saimniecība tā tad tiek vesta ar līdzekļu šaurības nosacījumu, to pārvalda šinī ziņā šaurības princips.»[106] Šo principu viņš arī izlieto par pamatu daudzu tautsaimniecības jautājumu noskaidrošanai. Ar to esot jārēķinās ražošanai, ar to izskaidrojams cenu līmenis. «Šaurības princips pastāv maiņas saimniecībās nepieciešamībā vest patēriņu saskaņā ar mantu šauru apgādāšanu, ar cenu veidošanās spiedienu. Šinī principā, kur izteicas sociālekonomiskā cenu veidošanās nepieciešamība, atrodams vienlaikus, kā to tagad redzēsim, viss vispārīgais un būtiskais cenu veidošanas teōrijā un līdz ar to visā ekonomiskā teōrijā.»[107] To pašu domu vēl spilg-

[104] Charles Gide, Charles Rist, Histoire des Doctrines économiques depuis les physiocrates jusqu'à nos jours, Paris 1926, p. 412.

[105] Augustin Cournot, op. cit., p. 35.

[106] Cassel, Theoret. Sozialökonomie, p. 3.

[107] Cassel, Theoret. Sozialökonomie, p. 63.

tāk izsaka *Cassel's* citā darbā *(Grundgedanken der theoretischen ökonomie*, Leipzig 1926).» Tā kā arī maiņas saimniecībā nevar apmierināt katru pieprasījumu, tad maiņas saimniecības rīcībā jābūt kādam līdzeklim, ar ko varētu ierobežot piemērotā veida pieprasījumu. Šāds līdzeklis ir cena... Tas ir cenu teōrijas kodols... Šai teōrijai nav nekā patvaļīga. Tā balstās uz katra cilvēka saimniecības vajadzību apmierināšanas veida pamatfakta, proti, līdzekļu šaurības, kas stāv viņa rīcībā...»[108] Ar šo pašu principu *Cassel's* izskaidro naudas pirkšanas spējas («Die Kaufkraft» des Geldes steht also vom Anfang an mit der Knappheit der Zahlungsmittelversorgung im notwendigen Zusammenhang»[109]) un augstkonjunktūras beigas, kad sāk pietrūkt kapitālu. «Augstkonjunktūras beigas iezīmēsies ar kapitāla piedāvājumu relātīvo šaurību.»[110]

Kā otru principu jeb aksiōmu *Cassel's* norāda uz vajadzību apmierināšanas vienmērības principu *(Prinzip der Gleichmässigkeit der Bedürfnisbefriedigung)*, kas zīmējas tiklab uz laiku, kā uz dažādiem vajadzību veidiem.[111]

Trešais princips — mazāko līdzekļu princips *(Prinzip des kleinsten Mittels)* ir censānās sasniegt noteikto mērķi ar vismazāko līdzekļu patēriņu.

Cassel's uzstāda arī citus principus, bet tos viņš pats apzīmē kā papildprincipus *(Supplementäre Prinzipien)* un atvasina no citiem principiem, tāpēc tiem nav piešķirama aksiōmu nozīme: tie drīzāk atbilst tam, ko ģeometrijā sauc par lemmām — tie ir atvasināti spriedumi, bet tādi, kas ievada kādu jaunu jautājumu. *Cassel'am* tādi papildprincipi ir vajadzīgi cenu teōrijā un tie ir 1) diferenciālprincips *(Differenzialprinzip)*, kas izriet no vispārīgā saimnieciskā principa un pastāv iekš tam, ka katram ražojumam jāaprēķina tāda cena, kas sedz tā uzņēmuma ražošanas izdevumus, kurš jāņem vērā pieprasījuma segšanai un kuļam līdzīgu uzņēmumu starpā vislielākās ražošanas izmaksas[112]; 2) cenu veidošanās princips,

108 Cassel, Grundgedanken, p. 45.
109 Cassel, Grundgedanken, p. 69.
110 Cassel, Th. Soz., p. 550.
111 Cassel, Th. Soz., p. 5.
112 Cassel, Th. Soz., p. 85.

pastāvot slīdošām caurmēra izmaksām *(das Prinzip der Preisbildung bei sinkenden Durchschnittskosten)*, kas izteicas iekš tam, ka gadījumā, ja var ražot lētāk, kad noiets lielāks, t. i. ja ražojuma caurmēra izmaksas, kas zīmējas uz visu kopražojumu, ar kāpjošu ražošanas apjomu krīt, tad līdzsvara stāvoklī ražojuma cenai jāatbilst caurmēra ražošanas izmaksām[113]; 3) substitūcijas princips — kas saka, ka gadījumā, ja vienu ražošanas metodi var substituēt ar otru bez pārmaiņām ražošanas iznākumā, tad jāizvēlas metode, kas ir vislētākā ražošanas līdzekļu cenu stāvoklī.[114]

4. *Georges Guillaume's* (savā grāmatā *Sur les fondements de l'économique rationelle,* Paris 1932), jau noteikti formulē postulātus (aksiōmas), kas jāliek teōrētiskās (racionālās) tautsaimniecības pamatos.

«Šie apsvērumi mūs ir noveduši pie pašu racionālās ekonomijas pamatu revīzijas, mēģināt labi izcelt (bien mettre en évidence) postulātus, uz kuŗiem jābūvē šī zinātne.

Kādā veidā?

Kad mēģina uzrakstīt attiecību kopību, kas noteic pašizmaksas cenu, tad rodas pārsteigums (on est frappé), konstatējot, ka galu galā neizteic neko citu kā «konservācijas principu», analoģisku tiem, kas veido fizikālo zinātņu pamatus. Līdzīgs princips, jāpiemetina, atrodams divkāršajā grāmatvedībā; ir zināms, ka tā prasa, lai katram ierakstam kaut kuŗā pusē atbilstu kontrieraksts un lai inventārs būtu vienveidīgs grāmatvedības posteņos. No šā likuma mēs esam atvasinājuši postulātu, kam esam devuši nosaukumu «vērtības konservācijas princips.»

Bez tam mēs griežamies pie cita principa, kas jau labi pazīstams, tas ir «masu konservācijas princips», *Lavoisier* formulēts.

Mēs parādīsim, kā *Walras's* un *Pareto,* uzstādot savus vienādojumus, ir neapzinoties balstījušies uz šo principu atsevišķiem gadījumiem.»

[113] Cassel, Th. Soz., p. 88.
[114] Cassel, Th. Soz., p. 92.

«Formulēti tā, kā to esam darījuši, šie postulāti mūs noved pie algoritma, kam liela heuristiska nozīme: nebūtu bijis iespējams nonākt pie visiem mūsu secinājumiem, ja gribētu spriest bez to palīdzības, vienīgi ar grāmatvedības palīdzību.»[115]

«Modernajam laikmetam pieder atziņa, ka eksperimentālās patiesības var deducēt no mūsu vispārīgu īpašību skaita, kas pamazām dabūtas no uzkrātās pieredzes. Savādi konstatēt, ka politiskā ekonomija vēl līdz šim nav nonākusi pie kaut kādu vispārīgu likumu izteiksmes, kuŗi būtu analoģiski ar fizikas un ķīmijas zinātnes pamatprincipiem.»[116]

5. *Alfred's Amonn's* (savā darbā *Objekt und Grundbegriffe der theoretischen Nationalökonomie*, zweite, erweiterte Auflage, Leipzig 1927) arī runā par nepieciešamiem iepriekšējiem nosacījumiem (citādi — aksiōmām), kas vajadzīgi, lai varētu rasties nācionālekonomijas problēmas.

«Mēs tagad kopsavilkumā uzstādām šādas pozitīvas pamattezes nācionālekonomijai kā dotai teōrētiskai sociālzinātnei.

Nācionālekonomijas cenu problēma un, tai pieslejoties, visas specifiski nācionālekonomiski sociālzinātniskās problēmas rodas *tikai* ar *sociālu* maiņu, t. i. maiņu, kas notiek vairāku personu starpā uz savstarpīgi noteicošas un atbilstošas gribas pamata resp. ar sociālu satiksmi (bet ne ar tīri individuālu *Schumpeter'a* maiņu, ar «tīri ekonomisku» maiņu) un *tikai* pieņemot sociālās satiksmes ārēju, t. i., no mainītāju gribas neatkarīgu sociālu *kārtību* jeb *organizāciju*, kas nosaka *noteiktu maiņas jeb sociālās satiksmes* formu, līdzīgā kārtā noteic arī mainītājus viņu maiņas veidā.

Šo kārtību raksturo šādi četri būtiski momenti.

1. No zināma viedokļa *sevišķas* (t. i. tādas, kas citiem jārespektē, bet kas nav nepieciešami neaprobežota) *individuālas* rīcības varas atzīšana par *ārējiem*, t. i. ārpus mainītāja personas atrodamiem objektiem (maiņas iepriekšējais nosacījums).

2. *Brīvas* t. i. pilnīgi no individuālas sociālās satiksmes subjektu gribas atkarīgas šās rīcības varas *pārmaiņas* (kā

[115] Guillaume, Sur les fondements etc, p. 3—4.
[116] Guillaume, Sur les fondements, p. 62.

mainas mērķa atzīšana) kopā ar ilgstošas saistības atzīšanu reiz notikušajai rīcībai.

3. Maiņas satiksmes objektu *kvantitātīvu attiecību noteikšanas brīvība* (t. i. vienīgi no mainītāju individuālās gribas atkarīgā iespēja, jo tanī sakrājas visas nacionālekonomijas problēmas, speciāli cenu problēma).

4. *Vispārīgā sociāla vērtību mēra* un maiņas līdzekļa atzīšana (kā šo sociālo maiņas vai satiksmes aktu salīdzināšanas iespējas nosacījums).

Šie četri nosacījumi mums jāpieņem kā paši vispārīgākie iepriekšējie nosacījumi, kas noteic katru specifiski nacionālekonomisko problēmu uzstādījumu. Kā nepieciešamie nacionālekonomisko maiņas parādību un maiņas problēmu un specifiski nacionālekonomisku problēmu vispār konstitutīvie nosacījumi. *Bez šās noteiktās* sociālās satiksmes attiecību *organizācijas* tās problēmas, ko esam atzinuši par nacionālekonomijas pamatproblēmām *nav domājamas; ar šo noteikto organizāciju* tās jau vienlaikus nepieciešami dotas.»[117]

6. *M. J. Tugan-Baranovski's* (savā darbā Основы политической экономіи, четвертое переработанное изданіе, Рига 1924.), tāpat norāda uz postulātu nepieciešamību. «Šis vienkāršojums pastāv iekš tam, ka ekonomists atteicas no pilnīgi bezcerību mēģinājuma izpētīt tautsaimniecības parādības visā to sarežģītībā. Tā vietā viņš sev uzstāda pazemīgu uzdevumu. Viņš konstruē vienkāršotu cilvēku, kas darbojas vienkāršotā sociālā apkārtnē. Tādā veidā rodas politiskās ekonomijas pamata prēmisas (t. i. aksiōmas. L. A.), no kurām izejot, ekonomists nāk pie saviem secinājumiem.

Visu ekonomisko konstrukciju centrā guļ noteikts priekšstats par motīviem, kas pārvalda cilvēku uzvedību. Ekonomists, pilnā saskaņā ar īstenību, pieņem, ka vidējais cilvēks tiecas pēc iespējas pavairot savu bagātību, turēdams vērā pie tam ne tikai sevi personīgi, bet arī savu ģimeni (rīkojas kā *bonus pater familias*, runājot romiešu tiesību valodā). Pieņem, ka cilvēka saimnieciskā motīvācija atrodas pilnīgā saskaņā ar pašreizējā sabiedrībā valdītājām civīltiesībām, kas balstās uz

[117] A. Amonn, Objekt etc., p. 194.

privātīpašuma un mantošanas tiesībām. Šeit pievienojas pieņēmums, ka cilvēka darbība atrodas pilnīgā saskaņā ar saimniecisko principu un dibinās uz pilnīgas visu apstākļu pārzināšanas.»[118]

Tā tad šeit redzam, kaut arī ne pilnīgi un noteikti formulētas, nepieciešamas aksiōmas tālākām teōrētiskām tautsaimniecības konstrukcijām. Autors norāda arī tālāko rīcības gaitu:

«Pie saviem secinājumiem ekonomists teōrētiķis nonāk, darinot sillogismus, kur lielo prēmisu loma piekrīt norādītājām prēmisām (t. i. aksiōmām. L. A.), bet mazāko — atsevišķiem gadījumiem, kas jāizpētī. Secinājums rodas ar parasto dedukciju.»[119]

Tāda paša — aksiōmatiska jeb postulātu tipa ir arī daudz citi minētā autora apgalvojumi, piem., uzskats par to, kā kvalificēt darba spēku — vai kā kādu preci vai kā citādi. «Tomēr, ja arī atzītu darba spēku par preci, tad skaidra lieta, ka tas ir ārkārtīgi savāda prece, principiāli atšķirīga no visām, bez izņēmuma, citām precēm.»[120]

7. *Hermann*'a *Heinrich*'a *Gossen*'a darbā *Entwicklung der Gesetze des menschlichen Verkehrs und der daraus fliessenden Regeln für menschlichen Handeln*, 3. Aufl., 1927 Berlin, atrodam, piem., šādas aksiōmas jeb likumus:

«Cilvēks grib savu dzīvi baudīt un uzstāda par savu dzīves mērķi iespējami kāpināt savu dzīves baudu. Bauda tā jāiekārto, lai visas dzīves baudu summa būtu lielāka. Mēs redzam visus cilvēkus bez izņēmuma rīkojamies pēc šā pamatlikuma, tiklab ķēniņu kā nabagu, tiklab frivolo uzdzīvotāju kā grēku nožēlotāju mūku.»[121]

H. Gossen's runā par baudu (Genuss) vārda plašā nozīmē, atzīdams arī askēzi un vispār mūku dzīvi par baudu, jo ar to cilvēks grib sev sagādāt nākamajā dzīvē mūžīgu prieku; arī

[118] Туганъ-Барановскій, Основы etc., p. 35.
[119] Туганъ-Барановскій, op. cit., p. 36.
[120] Туганъ-Барановскій, op. cit., p. 418.
[121] H. H. Gossen, op. cit., p. 1.

mākslas ražojumu aplūkošanu *Gossen's* apzīmē ar šo pašu vārdu (bauda).

«Vienas un tās pašas baudas lielums, ja nepārtraukti turpinām baudas sagatavošanu, pastāvīgi mazinās, kamēr beidzot iestājas pilnīgs apmierinājums.

Līdzīgs baudas lieluma pamazinājums iestājas arī tad, ja atkārtojam agrāk sagatavoto baudu, un ne tikai tas, ka, atkārtojot sagatavošanu, iestājas līdzīgs pamazinājums — arī baudas lielums tās sākumā ir mazāks un ilgums, kamēr kaut ko sajūt kā patīkamu, saīsinās atkārtojot, apmierinājums iestājas agrāk, un abi — kā sākuma lielums, tā ilgums, samazinās jo vairāk, jo ātrāk seko atkārtojums.[122]»

«Cilvēks, kam brīva izvēle vairāku baudu starpā, bet kam nepietiek laika tās visas pilnīgi izmantot, viņš tās visas izmantos pa daļai, lai arī kādi būtu atsevišķu baudu absolūtie lielumi, savu baudu summas maksima sasniegšanai un tādā attiecībā, lai katrs baudas lielums tai acumirklī, kad tās izmantošana tiek pārtraukta, paliktu viens un tas pats.»[123]

8. Katrā ziņā viena lieta skaidra: neviens teorētiskas tautsaimniecības darbs nevar iztikt bez aksiōmām (pamatprincipiem, postulātiem, prēmisām vai arī kā citādi tās sauktu) aiz tā iemesla vien, ka visi autori atzīst to, ka nevar tvert īstenību tās visā pilnībā un tāpēc no tās jāabstrahējas; bet līdz ar to rodas neizbēgama nepieciešamība skaidri un noteikti formulēt to vienkāršo uztveri, no kuras tautsaimniecības teorētiķis iziet, tos pamata nosacījumus, ko viņš patur tālākām konstrukcijām. Šo pamatprasību neievērojot, var nonākt — un ļoti bieži arī nonāk uz slidena ceļa, par ko var viegli pārliecināties, analizējot no šā viedokļa daudzus teorētiskās tautsaimniecības darbus, sevišķi tos, kas ir eklektiskas dabas un sniedz dažādu autoru domas vienā vai otrā jautājumā, nenoskaidrojot to pamatprincipus. Tā, piem., ekonomiskās mācības, kas zīmējas uz kapitālistiskās ražošanas iekārtu, balstās uz privātīpašuma un mantošanas tiesībām kā kapitālistiskās iekārtas galvenajiem balstiem, pie kuriem nāk kā tiešs papildinājums klāt

[122] H. H. Gossen, op. cit., p. 5.
[123] H. H. Gossen, op. cit., p. 12.

ģimenes tiesības. Izejot no šīm prēmisām, norisinās arī cilvēku saimnieciskā rīcība. Var diezgan viegli iedomāties, kā norisinātos saimnieciskā dzīve, ja atceltu, piem., mantošanas tiesības, paturot privātīpašuma un ģimenes tiesības. Tādu varbūtīgu stāvokli ļoti labi un šķietami pareizi attēlojis *L. J. Petražickis* (Теорія права и государства въ связи съ теоріей нравственности, изданіе второе. т. II Петербургъ 1910.) «Pastāvošās tiesības neraksta priekšā privātsaimniecību subjektiem tā iekārtot savu dzīvi un saimniecību, atsevišķi — tā vest ražošanu un tā organizēt patēriņu, lai viņiem uzticētās tautas bagātības daļas uzglabātos un vairotos arī laikam pēc viņu nāves; otrādi, viņiem brīv tā iekārtot savu dzīvi, atsevišķi ņemot, tā pacelt sava patēriņa, komforta, izpriecu u. t. t. līmeni, ka tiek aprīts ne tikai viss ienākums, tā ka nav ietaupījuma un īpašuma palielināšanās, bet pat kapitāls; ... vispār viņiem brīv rīkoties pēc principa *après nous le déluge* ... Tādas izturēšanās, tādu egoistisku motīvu, tāda dzīves veida, tādu paradumu izplatīšanās tautā neizbēgami novestu pie tautas bagātības un labklājības izpostīšanas, pie tautas nelaimēm un nabadzības. Bet pastāvošās civīltiesības, neaizliedzot tādas izturēšanās un nerakstot priekšā pretējās, rada netiešus motīvus prātīgākam un sociāli noderīgākam izturēšanās veidam ar mantošanas tiesību attiecīgiem solījumiem un garantijām. Šo tiesību atcelšana vai ievērojams satricinājums nozīmētu šīs motīvācijas iznīcināšanu vai ievērojamu satricinājumu, turpretim principa: pēc manis kaut ūdensplūdi — izplatīšanos un uzvaru».[124]

«To bieži aizmirst ekonomisti. Neviens ekonomists, pretēji solījumam deducēt visu mācību, izejot no ekskluzīvās egoisma darbības, īstenībā tāda solījuma nepilda. Ja kāds ekonomists mēģinātu lietot loģisku konsekvenci, viņam, kā to esam parādījuši agrāk, būtu iznākumā jādabū ne tautas saimniecības uzbūve, bet iznīcināšana, bads, nabadzība ... Apsolītās prēmisas vietā tiek lietotas neapzināti (mans pasv. L. A.) citi izejas priekšstati (t. i. aksiōmas, L. A.) — tādas motīvācijas un tādas izturēšanās priekšstati, kas faktiski ir

[124] Петражицкій, Теорія etc, p. 702.

pārsvarā, atsevišķi piemīt, kā teica romiešu jurists, vidējam «labajam ģimenes tēvam» *(bonus pater familias)*, bet ne labam cilvēkam, kas rūpējas ne tikai par sevi un savām baudām, bet arī par ģimeni un tās nākotni».[125]

9. Ja gribētu skicēt dažus saimniecisko parādību aksiōmas, kas izriet no cilvēka vajadzību pastāvēšanas un šo vajadzību radīto ēmociju pamudinātās cilvēku izturēšanās, tad tās varētu izteikt šādā veidā.

Pieredze rāda, ka milzīgais cilvēku vairums cenšas cik iespējams pilnīgāk apmierināt savas vajadzības: uzlabot pārtiku, iegādāties labākas drēbes, dzīvot labākā miteklī, smēķēt labāku tabāku u. tml. Ideālizējot šo ikdienas vērojumu, varam izteikt kā pirmo aksiōmu tādu:

katrs cilvēks cenšas sagādāt līdzeklus savu un savu tuvinieku vajadzību labākai un pilnīgākai apmierināšanai, salīdzinot tiklab ar savu agrāko stāvokli, kā arī ar citu cilvēku stāvokli.

Protams, var būt un īstenībā arī ir vērojami novirzījumi no šā pamatlikuma, bet to skaits, pēc dziļākas analizes, tik niecīgs, ka tos varam uzlūkot praktiski it kā neeksistējošus.

Atcerēsimies līdzīgu *H. Gossen'a* formulējumu (74. lapp.), kur, kā jau minēts, vārds bauda lietots šā vārda plašā nozīmē. Tomēr tāda lietošana var radīt nepareizus priekšstatus, jo ikdienas valodā ar šo vārdu apzīmētājam jēdzienam citāda nozīme, un tādā ceļā var vēl vairāk nostiprināt uzskatu, it kā cilvēku vada tikai egoistiski motīvi, pie kam šo vārdu «egoistiski» saprot ar nicināšanas piegaršu.

Tāpēc lietderīgi formulēt šo pirmo aksiōmu neitrālākā veidā vēl jo vairāk tāpēc, ka vajadzību apmierināšana ir cilvēkam nepieciešama lieta un tur nevar saskatīt nekā peļama, jo katrs dzīvs radījums (tāda ir tīri bioloģiska tendence) cenšas savu dzīvi dzīvot spraigāk, spilgtāk, pilnīgāk. Ja pieliekam vēl vārdus «un savu tuvinieku» (bērnu, vecāku, laulāta drauga u. c.), tad ar to tikai izteicam dzīvības plānā saskatāmo uzdevumu.

[125] Петражицкiй, op. cit., p. 706.

No šās aksiōmas, ievedot jēdzienus: ienākums, alga, cena u. t. t., var secināt vispirms to, ka katrs cilvēks centīsies sev gūt iespējami lielākus ienākumus — algots darbinieks lielāku algu, ražotājs — vairāk ražojumu un lielāku cenu par tiem, patērētājs vēlēsies, lai būtu labākas un lētākas preces rīcībā, u. t. j. šādu cenšanos tiešām arī vērojam īstenībā ik uz soļa: katrs cīnās par sava stāvokļa uzlabošanu, sākot jau no bērna kājām līdz pat sirmam vecumam.

Otru aksiōmu, kas izriet no cilvēku izturēšanās, var minēt tādu:

katrs cilvēks cenšas sagādāt līdzekļus savu un savu tuvinieku vajadzību apmierināšanai ar iespējami mazāku līdzekļu (pūļu, laika, enerģijas, materiālu līdzekļu u. tml.) patēriņu.

Tas nozīmē, ka cilvēks ar tiem pašiem līdzekļiem cenšas sasniegt iespējami lielākus vēlamos panākumus, vai arī tos pašus panākumus ar iespējami mazāku līdzekļu patēriņu.

Šī aksiōma tik pazīstama saimnieciskajā dzīvē, ka to pieņem it kā par specifisku saimniecisku principu, kaut gan tas ir vispārīgs dabas princips un, starp citu, vispārīgs cilvēku rīcības princips (aksiōma).

No otras aksiōmas izriet, ka saimnieciskajā dzīvē katrs cenšas vienādu vai vismaz līdzīgu preci pirkt tur, kur to var nopirkt lētāk; iegādāties pēc iespējas izturīgākas lietas, kas var ilgāk kalpot savam uzdevumam; katrs meklē sev un saviem tuviniekiem vieglāku un interesantāku darbu, kas sola lielākus panākumus; smagākus un nepatīkamākus darbus uzkraut citiem (svešiem) cilvēkiem, dzīvniekiem vai mēchaniskām ierīcēm u. tml. šās aksiōmas sekas ir arī darba dalījuma parādība.

Parasti atsevišķa cilvēka rīcībā esošo līdzekļu nepietiek visu viņa vajadzību apmierināšanai; tāpēc viņš rīkojas pēc vajadzību intensitātes, apmierinot vispirms tās, kam intensitāte vislielākā vai nu patlaban ir vai arī nākotnē var būt, spriežot pēc agrākiem novērojumiem, ja tās laikā nebūs apmierinātas.

Katrs zina, cik intensīvas ir vajadzības pēc barības, dzīvokļa un apģērba (smēķētājiem pēc tabakas, dzērājiem pēc alkohola, garīgas ievirzas cilvēkam pēc grāmatas, mākslas objekta u. tml.), un tāpēc katrs cenšas vispirms sagādāt līdzekļus to apmierināšanai, ja arī patlaban vēl tieši neizjustu šo vajadzību spaidu — attiecīgie priekšstati vai nu vēl neparādās psīchē vai arī tos izspiež citi pārdzīvojumi.

Tāpēc tiešo aksiōmu, izejot no cilvēku rīcības savu vajadzību apmierināšanā, var formulēt tā:

katrs cilvēks savu līdzekļu robežās cenšas apmierināt savas vajadzības pēc to pašreiz sajūtamās vai iedomājamās intensitātes pakāpes.

No šās aksiōmas izriet, piem., dažādu saimniecisko labumu pieprasījumu nevienāda elastība, reklāmas nozīme (vajadzību kairināšana un līdz ar to šo vajadzību intensitātes kāpināšana) u. c.

Šis skicējums nepretendē ne uz kādu pilnību, bet ir tikai mēģinājums rādīt, kā no pieredzes ideālizācijas ceļā var veidoties aksiōmas un kā indukcija saistās ar dedukciju.

10. Esam diezgan ilgi kavējušies pie aksiōmatiskās metodes tāpēc, ka tautsaimnieki tieši uz to nenorāda un arī matēmatiķu darbos trūkst loģiskā pamatojuma aksiōmu nepieciešamībai tur, kur darīšana ar vispārīgiem sintetiskiem spriedumiem.

Kas zīmējas uz citām ekonomiskajām zinātnēm, it sevišķi uz tautsaimniecības polītiku, kur uzstāda zināmus mērķus un meklē līdzekļus šo mērķu reālizēšanai, tad arī te šo pamatmērķu formulējums ir aksiōmatiskas dabas (atbilst ģeometrijas postulātiem), piem., mūsu valstij jāiztiek ar saviem ražojumiem; visa saimnieciskā dzīve jāvada plānveidīgi u. tml. Neapšaubāmi, ka šo pamatprasību skaidrs formulējums un pamatīgs iztirzājums atvieglo arī ekonomiskās polītikas darbu.

h. Aksiōmatiskās metodes nozīme.

1. Aksiōmatiskās metodes nozīmi labi raksturo šādi vārdi: «Aksiōmatikas nozīme — noskaidrot loģiski kādu teōriju, novedot to atpakaļ uz viegli ieskatāmām relācijām un no turienes stingri loģiskā ceļā uzkāpjot pie teōrijas propozicijām. Šādā kārtā var atklāt paslēptas, bieži grūti uzejamas loģiskas kļūdas kādā teōrijā.»[126]

[126] Brand-Deutschbein, Einführung in die philosophischen Grundlagen der Mathematik, Frankfurt a. M. 1929, p. 33.

Protams aksiōmatiskā metode vēl nav nekāds burvju līdzeklis pareizas teōrētiskās zinātnes uzbūvei, tas ir tikai nepieciešams, bet vēl nav pietiekošs nosacījums, kas dod iespēju pareizi nospraust pamatus — aksiōmu un pamatjēdzienu veidā — ikkuŗai teōrētiskajai zinātnei. Tiklab aksiōmu, kā arī pamatjēdzienu izvēle ir atkarīga no autora un tiem mērķiem, ko autors sprauž vai ko var spraust, saskaņā ar attiecīgo vielu. Bet kā no šiem pamatelementiem celt attiecīgās zinātnes ēku, tur formālā loģika, kas pēc būtības nav atradumu loģika, kā jau tas minēts, neko daudz palīdzēt nevar. Te sākas radīšanas jeb intuicijas (vārda plašā nozīmē) darbs, kas izteicas vispirms jaunu jēdzienu ievešanā (piem., tautsaimniecībā galīgā noderīguma jēdziena ievešana) un tad jaunu prēmisu darināšanā. «Skaidras aksiōmatiskas un jēdzieniskas domāšanas spējas vēl nedod ne juridiska, ne medicīniska, ne matēmatiska, nedz kāda cita zinātniska rakstura, bet tās darina tikai vārtus uz atziņas celtni.»[127]

Parasti no matēmatikas aksiōmu sistēmas prasa, lai tā būtu, vispirms, saskanīga, t. i. lai pašā sistēmā un arī secinājumos no tās vēlāk nekur nerastos iekšējas pretrunas, jo pretējā gadījumā tā būtu nederīga teōrijas uzbūvei. Otra prasība — lai sistēma būtu neatkarīga, t. i. lai nevienu aksiōmu nevarētu deducēt no pārējām, jo pretējā gadījumā tā vairs nebūtu aksiōma; ja šī prasība nav izpildīta, tad būs loģiska neskaidrība vai nepilnība, bet sistēmu nevarēs uzlūkot par nederīgu, ja vien izpildīta pirmā prasība. Dažreiz aiz didaktiskiem motīviem pat izdevīgi pavairot aksiōmu skaitu tā, ka to starpā iekļūst prēmisas, ko, stingri loģiski ņemot, nevar saukt par aksiōmām. Trešā prasība ir pilnības prasība, t. i., lai sistēma būtu tāda, ka nekādu citu pamatojumu, izņemot aksiōmas un ar to palīdzību attaisnotos spriedumus, nebūtu vajadzīgs kāda sprieduma attaisnošanai. Protams, šīs prasības zīmējas uz tīri racionālu zinātni un tā tad arī ikvienu citu zinātni, ciktāl tā uzlūkojama par racionālu zinātni.

Minētās prasības ir ideāls, ko pat matēmatika nevar tik viegli sasniegt; citas zinātnes var par to tikai vēl sapņot. Bet

[127] Löffler, op. cit., p. 228.

tas tomēr neizslēdz, ka pēc tā nav jācenšas, jo šinī ziņā nevar noliegt dziļas patiesības, kas piemīt *D. Hilbert'a* vārdiem: «Esmu pārliecināts: viss, kas vispār var būt par zinātniskās domāšanas priekšmetu, pakļaujas, tiklīdz ir gatavs teōrijas veidošanai, aksiōmatiskai metodei un līdz ar to matēmatikai... Aksiōmatiskās metodes tērpā matēmatika, liekas, ir aicināta vadītājai lomai zinātnē vispār.»[128]

2. Funkciju metode.

a. Vienveidības parādību dažādībā.

1. Kā jau pirmajā daļā aizrādīts, daudzi tautsaimnieki (piem., *Osorio, Moret, Leseine et Suret, Schumpeter's, Cournot, Pareto)* motivē nepieciešamību lietot matēmatiku tautsaimniecības teōrijā ar to, ka saimnieciskās parādības (vismaz to lielā daļa) neatrodas cēloņa un seku jeb kauzalitātes sakarībā, bet gan savstarpīgās atkarības, resp. savstarpīgās iedarbības sakarībā. Tāpēc mēģināsim vispirms noskaidrot, kā šī atšķirība, ja tā tiešām pastāv, būtu saprotama.

2. Savā apkārtnē — nedzīvajā un dzīvajā dabā (ārējā pasaulē) vērojam dažādas parādības — gan priekšmetus, gan ar šiem priekšmetiem notiekošās pārmaiņas (to kustības, pārveidošanos u. tml.). Redzam akmeņus, ūdeni, smiltis, kokus, dzīvniekus u. t. j., nomanām, ka ūdens tek, koks aug, dzīvnieks pārvietojas u. tml.

Dažādas parādības gan liekas nemainīgas, pastāvīgas, piem., akmens, kalns, zelta gabals u. tml., ko diendienā redzam tādā pašā veidā. Bet arī ar tiem vai tanīs tomēr notiek pārmaiņas, tikai šīs pārmaiņas vai nu mazāk duras acīs, piem., temperātūras pārmaiņas, vai arī norisinās lēnākā gaitā, piem., akmens sadrupšana, zelta nodilšana u. tml.

3. Katra parādība, stingri ņemot, pati par sevi ir vienreizēja un neatkārtojama, jo trīs telpas koordinātas līdz ar laika koordinātu noteic attiecīgās parādības vietu telpā un laikā, pie kam, ja telpas koordinātas liktos vai pat būtu nemainīgas, katrā ziņā mainās laika koordināta. Tomēr cilvēka

[128] D. Hilbert, Axiomatisches Denken, Mathematische Annalen. 78. B., p. 415.

apziņā noteiktas un vienreizējas parādības vērojums atstāj it kā pēdas tā, ka ar vērojumu saistītais pārdzīvojums īsāku vai ilgāku laiku uzglabājas atmiņā: savā iekšējā pasaulē varam agrāk notikušo parādības vērojumu pārdzīvot vēlreiz tā saucamā priekšstata veidā: it kā redzēt putna lidojumu, it kā dzirdēt pērkona grāvienu u. tml., kaut gan tanī brīdī šīs parādības ārpasaulē tieši neredzam un nedzirdam. Citu reizi, kad vērojam putna lidojumu vai pērkona grāvienu, tie jau liekas mums pazīstami — redzēti un dzirdēti, tie mums liekas atkārtojamies. Arī daudzas citas parādības it kā atkārtojas. Tā, piem., starp polārriņķiem ik dienas saule uzlēc, paceļas pret dienas vidu visaugstāk pie debesjuma un tad atkal noslīd zem horizonta, lai nākamā dienā atkārtotu to pašu, pie kam laiks, ko saule pavada virs horizonta, arī mainās noteiktā kārtībā: šis laiks mainās tā, ka no sākuma pieaug, sasniedz lielāko garumu, tad sāk dilt, nonāk līdz savam minimam un tad atkal sāk augt. Tā tas notiek no dienas dienā, no gada gadā, cauri gadu simtiem un tūkstošiem. Aiz polārriņķiem šī parādība notiek citādi, bet arī zināmā kārtībā.

Noteiktā kārtībā mainās arī mēness izskats, redzamais saules ceļš zvaigznāju starpā; zibens un pērkons saistīti tā, ka parasti pa priekšu redzams zibens un tad dzirdams pērkons. Retāk vērojam tos abus reizē, bet nekad pa priekšu pērkonu un tad zibeni. Šinīs piemēros no nedzīvās dabas minējām parādības, kas cita seko citai noteiktā kārtībā. Vienlaikus notiek, piem., ķermeņa temperatūras un tilpuma maiņa, vai vismaz tā, ka šās parādības grūti atdalīt vienu no otras, t. i. ķermeņa tilpuma maiņu no temperatūras maiņas. Tāpat vienlaikus notiek elektriskās strāvas tecēšana caur dzelzs vadu un tā magnētizēšana, vai arī strāvas aptecēšana kādam dzelzs stienim un tā magnētizēšana, tāpat magnētiskā indukcija un savstarpīgā pievilkšanās un taml.

Arī dzīvajā dabā tāpat redzam daudzas parādības it kā atkārtojamies: mūsu apstākļos rudenī kokiem nobirst lapas, pavasarī atkal uzplaukst; no miežu grauda uzaug miezis, lai arī kādā zemē to sētu, tāpat no rudzu grauda rudzis; cālis izšķiļas no olas, ja ola noteiktu laiku atradusies noteiktā temperātūrā u. taml.

4. Vairojoties novērojumiem par parādībām, kas it kā atkārtojas, rodas domas par zināmu v i e n v e i d ī b u parādībās, pie kam šī vienveidība var zīmēties tiklab uz parādības r a š a- n o s, kā arī tās n o r i s i. Priekšstati, ka viendien putns lidoja, vakar putns lidoja, kādreiz sen agrāk putns lidoja, noved pie v i s p ā r i n ā š a n a s, pie domas, ka putns v i s p ā r l i d o. Tas nozīmē, ka mēs īpašu dzīvnieku veidu — putnu saistām ar īpašu kustības veidu — lidošanu nepārtrauktā asociācijā un izsakām to vispārinātā atziņā jeb vispārīgā spriedumā — *putns lido*, saprazdami ar to, ka *ikviens* putns lidojis, lido un lidos šai kustībai izdevīgos apstākļos.

Tāpat vērojot, ka, piem., pacelts un brīvi palaists akmens vakar, aizvakar u. t. t., krita uz zemi, bet gluži līdzīgi vakar, aizvakar u. t. t. pacelts un brīvi palaists koks, cilvēks u. tml., krita uz zemi, vispārinām šīs parādības, sakot, ka gaisā pacelts un brīvi palaists ķermenis krīt uz zemi, pie kam ar šo vārdu «krīt» saprotam ne tikai tagadni, bet arī pagātni un it sevišķi nākotni.

Tā tad tiešā pieredze, kā jau minējām, dod tikai atsevišķu vienreizēju, neatkārtojamu faktu konstatējumu, par kuriem mums pamats, izejot tikai no pieredzes, izteikties, ka tad un tad, tur un tur, notika tas un tas — un vairāk nekā. Tomēr šos atsevišķos vērojumus saistām sakarībā, kam dziļāks un tālāk ejošs raksturs, nekā to dod tiešā pieredze: mūsu iekšējā pasaule saskata tur kaut ko kopīgu — kaut ko v i e n ā d u un p a s t ā v ī g u, kādu p a s t ā v ī g u v i e n v e i d ī b u un izsaka pārliecību, ka līdzīgos apstākļos, t. i. līdzīgos iepriekšējos nosacījumos šī vienveidība izpaudīsies arī nākotnē. Mums veidojas atziņa, ka vienveidība pastāv *semper et ubique* — vienmēr un visur, bet ne tikai *nunc et hic* — tagad un šeit citiem vārdiem, mūsu iekšējā pasaulē par ārējo pasauli veidojas atziņa, ko ārējā pasaule tieši nedod, bet ko ārējai pasaulei p i e d ē v ē j a m k ā d a b a s v i e n v e i d ī b a s p r i n- c i p u, kā a k s i ō m u par dabas parādībām: visas dabas parādības pakļautas zināmai vienveidībai, likumībai, pakļautas zināmiem likumiem — it kā priekšstatiem, pēc kuŗiem jānorisinās dabas parādībām.

Šādas vienveidības vērojam ne tikai ārējā pasaulē, bet arī savā iekšējā pasaulē, un tāpēc varam runāt vispār par parādību likumiem. Atsevišķā gadījumā, ja likumi zīmējas uz dabas parādībām, tos sauc par dabas likumiem. Parādību likumi ļauj cilvēkam orientēties parādību dažādībā un paredzēt un pat veidot notikumu gaitu, pieskaņojot tai savu rīcību. Vērojot, piem., ka cilvēks grimst ūdenī, bet koks peld pa virsu, cilvēks nemēģinās vienkārši pāriet dziļam ūdenim, bet centīsies to izdarīt ar kāda koka vai vairāku koku palīdzību. Redzēdams, ka daži dzīvnieki, kustinot savus locekļus, var peldēt, cilvēks mēģina to atdarināt un arī pats iemācās peldēt.

Visa cilvēku attīstība balstās vispirms uz šādu pastāvīgu sakarību — parādību likumu zināšanām. Paviršus novērojumus papildina ar sistēmatiskiem novērojumiem un pie tam bieži īpaši sagatavotos mēģinājumos ar speciāliem instrumentiem — sakarību meklēšanā ikdienības cilvēkam nāk palīgā zinātnieks.

Tādā kārtā pirmā un ļoti svarīgā pakāpe mūsu atziņām par apkārtnes kā dabas, tā gara pasaules parādībām pastāv pastāvīgu sakarību — parādību likumu konstatēšanā šo parādību starpā, pie kam meklējam tādas pastāvīgas sakarības, kas būtu sastopamas vienmēr un visur, jo ar to atvieglojas mūsu rīcība tādējādi, ka nav jādomā par izņēmumiem vai ierobežojumiem.

6. Parādību likumi var zīmēties: 1. uz parādību koeksistenci, 2. uz parādību rašanos, 3. uz parādību norisi pēc to rašanās.

Koeksistences likumi norāda uz kādu īpašību pastāvīgu koeksistenci vienos un tanīs pašos priekšmetos, piem., zelts ir dzeltāns; dzīvsudrabs ir 13,55 reiz smagāks par ūdeni, ūdens molekula sastādās no diviem ūdeņraža atomiem un viena skābekļa atoma u. tml.

b. Kauzālitātes princips.

1. Dažu parādību starpā likumība izteicas tā, ka tiklīdz rodas viena, tā neizbēgami parādās vienlaicīgi vai arī seko otra; piem., tiklīdz ap dzelzs gabalu apskrien elektriskā strāva, dzelzs gabalā rodas magnētisms; tiklīdz akmeni gremdē ūdenī, akmens kļūst vieglāks u. tml.; kofeīna ieņemšanai seko paātrināta

sirds darbība u. tml. Liekas, it kā viena parādība rada otru. To parādību, kas it kā rada, darina, modina otru, sauc par c ē l o n i; otru radīto parādību sauc par s e k ā m. Šāda veida sakarību parādību starpā sauc par c ē l o n ī b a s jeb k a u z ā l o s a k a r ī b u. Cēlonības sakarībā svarīgi šādi momenti: 1. nepieciešamība — parādības ir savstarpīgā sakarībā, bet ne vienkāršā laika secībā; 2. viennozīmība — vienādiem cēloņiem vienādas sekas, bet ne otrādi — vienādām sekām nav katrreiz vienādi cēloņi; 3. cēloņa un seku heterogēnais moments — ja viens pats fakts *A* ilgst laikā, tad nevar runāt par cēloni: jābūt vismaz divi parādībām.

Cilvēka domas tā apradušas un saistījušās ar cēlonības sakariem, ka vismaz ārējā pasaulē nevar iedomāties nevienas parādības, kas varētu rasties pati no sevis, ieklūt mūsu pasaulē kaut kur no ārpasaules vai no kādas ceturtās dimensijas un nestāvēt sakarā ar kaut kādu mūsu pasaules parādību, t. i. nevaram iedomāties nevienas parādības, kam nebūtu cēloņa un kas savukārt nebūtu par cēloni vai vismaz daļas cēloni kādai citai parādībai.

Šo domu izteicam tā saucamajā kauzālitātes principā (jeb aksiōmā): nav nevienas parādības bez cēloņa; noteikts cēlonis saistīts neizbēgami ar noteiktām sekām.

Nav vajadzības šeit iztirzāt dziļāk kauzālās sakarības būtību; mums pietiek konstatēt, ka pastāv tādas sakarības parādību starpā, kur viena parādība vienmēr un visur neizbēgami rada noteiktu otru sakarību, pie kam sakarības virziens — no cēloņa uz sekām — pilnīgi noteikts, t. i. dotajam cēlonim ir vienīgas, skaidri noteiktas sekas, bet kaut kādas dotās sekas var rasties arī no citiem cēloņiem, piem., akmens var kļūt vieglāks arī tad, ka to attālina no zemes; dzelzs stieni var izstiept arī nesasildot to u. tml. Var būt, ka sadalot parādības elementārās parādībās, varētu vērot tādas kauzālas sakarības, kur katram cēlonim ir tikai vienas noteiktas sekas un katrām sekām ir tikai viens noteikts cēlonis, piem., minētajās parādībās, kur akmens kļūst vieglāks, kad to gremdē ūdenī vai attālina no zemes, var svara pamazināšanos saistīt ar zemes pievilkšanas (pareizāk zemes un akmens savstarpīgās pievilkšanās spēka) pamazināšanos; vienā gadījumā šo pamazināšanos rada ūdens spiediens, otrā attāluma palielināšanās; tāpat dzelzs stieņa izstiepšanās notiek aiz dzelzs molekulu starpu palielināšanās: vienā gadījumā šo palielināšanos rada siltuma enerģija, otrā mēchaniska stiepšanas enerģija. Parastos apstākļos tomēr kādreiz neiespējami vai vismaz grūti parādības sadalīt elementārparādībās. Tāpēc jārunā bieži par cēloņu daudzējādību.

2. Te jāpiezīmē, kā jau to darījis *J. S. Mill's* savā *Deduktīvās un induktīvās loģikas sistēmā*, ka, stingri ņemot, nevar runāt par vienu parādību vien kā par cēloni.

«Ja nemainīga secība vienas sekojošas un vienas vienīgas iepriekšējas dabas parādības, viena atsevišķa *antecedens* un viena *consequens* starpā vispār pastāv, tad tikai reti, bet parasti tā ir vienas sekojošas un dažādu iepriekšēju parādību summas starpā, kuŗu visu kopdarbība vajadzīga, lai radītu sekojošas parādības, t. i., lai tās viņām noteikti sekotu. Šādos gadījumos ļoti parasts, ka vienu no iepriekšējām parādībām nošķiŗ ar nosaukumu cēlonis, kamēr pārējās sauc tikai par nosacījumiem.»[129]

«Īstais cēlonis ir visu šo iepriekšējo parādību kopums, un, filozofiski runājot, mums nav tiesības piešķirt cēloņa nosaukumu vienai vienīgai no tām, izslēdzot pārējās.»[130]

Tomēr parasti to tā dara: piešķiŗ cēloņa nosaukumu aktīvākajai parādībai vai arī tai, kas aiz kaut kādiem iemesliem mūs seviški interesē.

3. Bet ne tikai tas vien traucē, stingri ņemot, runāt par vienu parādību kā cēloni. Jāņem vērā vēl arī tas apstāklis, ka kaut kādas parādības rašanās ir vienmēr divu, bieži vien pat vairāku parādību savstarpīgās iedarbības jeb savstarpīgās atkarības iznākums. Piem., gadījumā, ja zināms spēks, ko parasti saucam par cēloni, iedarbojas uz kādu ķermeni, šā spēka iedarbības rezultāts (sekas) atkarāsies ne tikai no spēka (tā lieluma, virziena un pielikšanas punkta), bet katrā ziņā arī no ķermeņa masas — iekustināt ķermeni varēs tikai tāds spēks, kas pārvarēs ķermeņa

[129] J. S. Mill, op. cit., p. 214.
[130] J. S. Mill, op. cit., p. 215.

masas inerci, nerunājot par citiem pretekļiem. Ūdens celšanos aiz virzuļa sūcēja sūknī parasti izskaidro ar gaisa spiedienu uz ūdeni, t. i. par ūdens celšanās cēloni uzlūko gaisa spiedienu uz pārējo ūdens virsu, bet īstenībā sekas — ūdens celšanās ir vairāku parādību: 1) gaisa spiediena; 2) šā spiediena vienmērīgas novadīšanas pa ūdeni visos virzienos un 3) nevienāda spiediena uz ūdens virsas zem virzuļa un pārējās ūdens virsas savstarpīgās iedarbības rezultāts. Ja ūdens sūknī pacēlies tik augstu, ka gaisa spiediens un paceltā ūdens svars būs izlīdzinājušies, tad ūdens augstāk vairs necelas. Kuŗu no šām parādībām lai uzlūko par vienīgo ūdens celšanās cēloni? Tiesa, pirmās divi parādības var uzlūkot par nosacījumiem un par ūdens celšanās tiešo cēloni pieņemt aktīvāko parādību — pazināta spiediena radīšanu zem virzuļa, jeb virzuļa celšanu uz augšu, bet tā ir tīri konvencionāla lieta. Ja akmens iemests loga rūtī un pārplēš to, tad par stikla plīšanas fizikālo cēloni parasti uzlūko akmens kustīgās masas iedarbību, kaut gan viegli noskārst, ka radītā jaunā parādība — stikla saplīšana, ko uzlūkojam kā akmens iedarbības sekas, atkarīga ne tikai no akmens masas un tā kustības ātruma, bet arī no stikla inerces un pretestības spējām: ja akmens masa un ātrums nav lieli, bet stikla pretestība prāva, tad akmens sviediena iznākums pret stiklu būs pavisam citāds.

Ja aktīvāko parādību nosauksim par *agens*, pasīvāko, uz kuŗu iedarbojas *agens*, par *patiens*, kā to dara *J. S. Mill's*, tad tīri dabīgi, ka šī aktīvākā parādība mums izliekas par jaunās parādības it kā vienīgo modinātāju, bet, kā jau minēts īstenībā tā tas nav.

It sevišķi spilgti to redzam gadījumos, kur jaunas parādības rašanās taisni tiek atzīta kā divu vai vairāku parādību savstarpīgās iedarbības rezultāts. Tā, piem., runājam par divu magnēta adatu savstarpīgo pievilkšanos vai atgrūšanos, divu elektrizētu priekšmetu savstarpīgo pievilkšanos vai atgrūšanos, divu ķermeņu savstarpīgo pievilkšanos pēc *Newton'a* gravitācijas likuma, atzīstam, ka zeme riņķo ap sauli savas kustības inerces un gravitācijas spēka iedarbībā; elektrisko dzirksti uzlūkojam kā pozitīvas un negatīvas elektrības savstarpīgo izlīdzināšanos u. tml.

Tā tad var teikt, ka kauzalitātes princips ir parādību savstarpīgo iedarbību pastāvības principa atsevišķs gadījums, kur vienai parādībai piedēvējam aktīvāku lomu nekā otrai un savstarpīgās iedarbības rezultātu uzlūkojam kā vienīgi šīs aktīvās parādības sekas.

4. Uz šo apstākli norādījis jau *J. S. Mill's* savā *Loģikas sistēmā.*

«Vislielākā gadījumu daļā, kur iedarbojas viens cēlonis, parasti atšķiŗ lietu, kas iedarbojas, no otras lietas, uz ko iedarbojas, atšķiŗ *agens* no *patiens.* Vispārīgi lasītāji piesliesies tam, ka tie abi ir parādības nosacījumi, bet turēs par absurdu teikt, ka pēdējais *(patiens)* ir saucams par cēloni, jo šis vārds tiek dots pirmajam *(agens).* Tuvākā pārbaudē šī starpība tomēr izzūd vai arī vēl vairāk — izrādās tikai kā vārdu starpība, kas rodas tikai no nejaušas izteiksmes, proti tās, ka priekšmets, par ko saka, ka uz to iedarbojas un ko uzlūko par skatuvi, uz kuŗas norisinās iedarbībā, parasti ietverts izteiksmē, kuŗā runā par iedarbību, tā ka gadījumā, ja gribētu pieņemt to kā cēloņa daļu, rastos redzama aplamība ar pieņēmumu, ka tas ir pats sev par cēloni. Jau pieminētajā piemērā par ķermeņu krišanu, jautājums bija nostādīts tā: kas tas ir par cēloni, kas kritina akmeni? Ja atbilde būtu bijusi: «akmens pats», tad šāda izteiksme būtu redzamā pretrunā ar vārda cēlonis nozīmi. Tāpēc akmens tiek uzlūkots par *patiens* un zeme (vai saskaņā ar parastu un ļoti nefilozofisku lietošanu kaut kāda paslēpta zemes īpašība) par *agens* jeb cēloni. Bet ka šī atšķirība nav nekāda fundamentāla, izriet no tam, ka, izteicot jautājumu tikai citiem vārdiem, šādā veidā: kas par cēloni rada svērtenisku kustību pret zemi? varam bez aplamības runāt par akmeni vai citu smagu ķermeni kā par *agens,* kas uzsāk savu kustību pret zemi aiz saviem īpašiem likumiem un īpašībām; kaut gan, lai glābtu uzstādīto mācību par matērijas bezdarbību, labāk piedēvē iedarbību apslēptai īpašībai un saka, ka par cēloni ir nevis akmens, bet akmens *svars* vai tā *gravitācija*[131].»

5. Tā tad skaidri redzams, ka jaunas parādības rašanās gadījumā *J. S. Mill's* piešķiŗ nozīmi ne tikai *agens*'am, bet

[131] J. S. Mill, op. cit., p. 218.—219.

arī patiens'am, t. i. vismaz divi parādībām, kas, savstarpīgi iedarbojoties, rada jaunu parādību. Tikai diemžēl *Mill's* nenoved šo domu līdz galam — vismaz skaidri neizteic to, ka par kādas parādības rašanās cēloni nav vis viena parādība, bet vismaz divas: tiklab *agens*, kā arī *patiens*, no kuru savstarpīgās iedarbības rodas kāda jauna parādība.

Tāpēc kauzalitātes principu paplašinātā veidā var formulēt tā: līdzīgas parādības līdzīgos apstākļos, savstarpīgi iedarbojoties, dod vienveidīgu rezultātu.

Tā kā daudzreiz mūs interesēs galvenā kārtā tikai *agens*'a iedarbība, tad mēs apmierināmies ar kauzalitātes principu, pēc kuŗa it kā tikai viena parādība būtu jaunās parādības (seku) rašanās cēlonis.

Ja par jaunās parādības (seku) rašanās cēloni uzlūkosim divu vai vairāku parādību savstarpējo iedarbību, tad kauzalitātes principa saturs arī šā principa paplašinātajā izpratnē paliek tas pats: 1. nav seku bez cēloņa; 2. noteikts cēlonis rada noteiktas sekas.

Tā tad starp parādību kauzālitātes un parādību savstarpīgās iedarbības jeb savstarpīgās atkarības principu nav tik lielas un būtiskas atšķirības, lai te rastos robeža, no kuŗas, kā to domā šās daļas sākumā pieminētie tautsaimnieki, sāktos nepieciešamība lietot parādību pētīšanai matēmatiku. Šī robeža iet citur, kā to mēģināsim noskaidrot turpmāk.

6. Maldīgs ir tāpēc *A. Osorio* apgalvojums, ka sociālās parādībās rodas grūtības atšķirt cēloņus no sekām («intellektuālais progress, likdamies par cēloni, ir tanī pašā reizē arī sekas«) aiz tā iemesla, ka ne tikai cēlonis ietekmējot sekas, bet arī sekas cēloni. *Osorio* u. c. te samaina to ietekmi, ko izrāda *patiens* seku rašanās gadījumā, ar it kā seku ietekmi: sekas vairs neietekmē savu cēloni, jo laiks nav apgriežams, neiet atpakaļ, bet gan var kļūt par *agens* vai *patiens* jaunu seku radīšanai. Visi *A. Osorio* minētie piemēri to vien tikai pierāda. Tā tad te varētu runāt par kādas parādības norisi, bet nevis vairs par parādības rašanos. Pētot parādības rašanos, mums nav vajadzīgs nekas vairāk, kā kauzalitātes princips tā paplašinātā veidā (ņemot vērā kā *agens*'u, tā *patiens*'u).

Cits jautājums, uz kādu parādību novadu attiecināms kauzālitātes princips: vai tas der arī cilvēka dvēseles un gara parādību laukā jeb, kā to vispār pieņem, tikai nedzīvās un dzīvās vielas slāņos.

Ja arī pievienotos uzskatam, ka cilvēka iekšējās pasaules parādības nav pakļautas kauzālitātes likumam, tas tomēr nemazina šā principa nozīmi saimniecisko parādību pētījumos. Tas, pirmkārt, tāpēc, ka saimnieciskajām parādībām ir sava objektīvā puse, kas saistās ar nedzīvo un dzīvo dabu, un tā tad katrā ziņā pakļauta kauzālitātes principam, un, otrkārt, tāpēc, ka arī cilvēka iekšēju parādību pasaulē vērojami savi likumi, kas noteic cilvēka saimniecisko darbību.

c. Funkcionālās sakarības parādību starpā.

1. Piegriežoties tagad parādību norises likumiem, sastopamies ar divi galveniem jautājumiem: 1. kas ietekmē parādības norisi un 2. kā šī ietekme izteicas.

Pirmais jautājums ir vairāk kvalitatīvas dabas. Tā, piem., vērojot dzīvsudraba stabiņa augstuma maiņu stikla caurulē, nomanām, ka šis augstums mainās līdz ar apkārtnes gaisa vai citas vides, kur atrodas šī caurule, siltuma pakāpes maiņu. Tā tad stikla caurules vides siltuma pakāpe jeb temperātūra ietekmē dzīvsudraba stabiņa augstumu. Tāpat konstatējam, ka preces cena, pastāvot citiem līdzīgiem apstākļiem, mainās līdz ar attiecīgās preces piedāvājuma maiņu u. tml.

2. Zīmējoties uz otru jautājumu — kā mainās parādība atkarībā no to parādību maiņas, no kuŗām atkarīga aplūkojamā parādība, varam izšķirt divi pakāpes: vispirms maiņas *virziena* konstatējumu un tad maiņas *lieluma* konstatējumu, ja lieta grozās ap tādām parādībām, ko var skaitīt vai mērīt šā vārda plašā nozīmē.

Ja konstatēts, ka ar vides, piem., gaisa siltuma pakāpes augšanu aug arī dzīvsudraba stabiņa augstums, tad mums zināms parādības maiņas virziens.

3. Tālākais un pie tam vissvarīgākais solis — atrast ne tikai parādības maiņas virzienu, bet arī šo maiņas *lielumu*, atkarībā no ietekmētāju parādību maiņas lieluma. Tā, piem.,

mērījot no vienas puses kāda priekšmeta, pieņemsim, dzelzs stieņa temperatūru, no otras puses — šī stieņa garumus, var atrast sakarību, kas rādīs, kā ar temperatūras mainīšanos mainīsies stieņa garums, pie kam noskaidrosies, vai garuma pieaugšana līdz ar temperatūras celšanos notiek vienmērīgi vai nevienmērīgi, un ja notiek vienmērīgi, par kādu daļu no sava garuma pieaug stienis, ja temperatūra paceļas par 1°C, paturot citus apstākļus negrozītus. Šādu novērojumu un mēģinājumu iznākumā atradīsim stieņa garuma un tā temperatūras sakarību, piem., šādas sakarības veidā.

$$l_t = l_0 (1 + \alpha t),$$

kur l_t ir stieņa garums, pastāvot temperatūrai t°, l_0 — stieņa garums, pastāvot temperatūrai 0°, un α — tā saucamais lineārās izplešanās koeficients, kas rāda, par kādu daļu sava garuma daļu izplēšas garumā, vispār vienā virzienā stienis, ja tā temperatūra ceļas par 1°. Dabūtā sakarība rāda ne tikai parādības (stieņa garuma) maiņas virzienu, bet arī šīs maiņas atkarībā no stieņa temperatūras maiņas lieluma.

To mainīgo lielumu, kas mainās atkarībā no kāda cita lieluma, sauc par šā pēdējā f u n k c i j u; mainīgo lielumu, no kura atkarājas funkcijas maiņas, sauc par a r g u m e n t u. Pilnīgāk matemātisku funkciju, kā abstraktu jēdzienu definē tā: j a v i e n s l i e l u m s a t k a r ā j a s n o o t r a, k a s k ā d ā i n t e r v a l l ā m a i n ā s p ē c p a t i k a s, p ē c k a u t k ā d a l i k u m a t ā, k a k a t r a i š ā l i e l u m a v ē r t ī b a i a t b i l s t n o t e i k t a p i r m ā l i e l u m a v ē r t ī b a, t a d s a k a, k a p i r m a i s l i e l u m s i r o t r a l i e l u m a f u n k c i j a (*Dirichlet* dotā definīcija).

Simboliski funkcionālo sakarību lielumu starpā, ja y ir argumenta x funkcija, mēdz izteikt tā: $y = f\ (x)$, kur burts f ir pirmais burts vārdā *functio*. Daudzreiz burta f vietā lieto arī burtus φ un ψ. Simbols $f\ (x)$ norāda, ka ar mainīgo lielumu x un kādiem pastāvīgiem lielumiem jāizpilda zināmas darbības, lai atrastu y'a skaitlisko vērtību, kas tā tad, ja šīs darbības izpildīsim, būs pilnīgi noteikts lielums. Atsevišķi funkciju piemēri: $y = 3x + 5$ (pirmās pakāpes funkcija); $y = 3x^2 +$

$+ 2x - 5$ (otrās pakāpes funkcija); $y = \sin x$ (trigonometriska funkcija); $y = \log 3x$ (logaritmiskā funkcija) u. tml.

4. Lai varētu sasniegt šo augstāko pakāpi, t. i., lai izteiktu vienas parādības maiņu atkarībā no otras noteiktas funkcionālas sakarības veidā, citiem vārdiem, lai atrastu funkcijas analitisko izteiksmi atkarībā no argumenta, kur parādīts, kādas darbības jāizpilda ar x, lai atrastu y, vajadzīgs vispirms *prast mērīt* attiecīgās parādības **tieši** vai **netieši**, t. i. salīdzināt tās savā starpā tā, ka, pieņemot kaut kādu parādības lielumu par vienību, var izteikt, cik tādu vienību un tās daļu būs aplūkojamā parādībā. Šeit jāuzsver iespēja mērīt arī **netieši**, daudzreiz aprēķinu ceļā, kā to piem., darām ar laukumiem un tilpumiem ģeometrijā, kur var laukumus un tilpumus nemērīt tieši, bet gan tos aprēķināt, izvēloties tikai laukuma un tilpuma vienības un mērījot kādus garumus vai leņķus.

Tāpat *netieši* mērījam temperātūru u. c. lielumus.

Šai iespējai — netieši mērīt kādu lielumu ir ārkārtīgi liela nozīme, jo tā *milzīgi paplašina mērījamo lielumu lauku*.

Ja izvēlēta vienība un atrasti ceļi, kā pieņemtajās vienībās izteikt mērījamo parādību, tad šī parādība kļūst jau *par matēmatisko lielumu*, t. i. lielumu, ko var izteikt skaitliski attiecīgā lieluma vienībās. Atkal jāuzsver, ka bieži pati vienība var būt stipri abstrakta, kā, piem., kalorija, oms. u. tml., tā ka to tvert ar saviem jutekļiem cilvēks bieži vien nespēj.

Kad lielumus, kas saistīti sakarībās, iespējams šādā vai citādā ceļā izmērīt, tad rodas iespēja, salīdzinot vienas un otras parādības skaitliskos lielumus, atrast šo parādību maiņas likumu *kvantitātīvā veidā*, citiem vārdiem, atrast *funkcionālo sakarību parādību starpā analitiskā veidā*, t. i. sakarību, pēc kuras var atrast vienas parādības skaitlisko lielumu, ja zinām otras parādības skaitlisko lielumu.

5. Eksperimentālā ceļā dabūjam sakarības analitiskā veidā dažādu reālu parādību starpā. Cits ceļš analitisko funkcionālo sakarību atrašanai — racionālais, spriešanas ceļš, kādu lietojam, piem., ģeometrijā un kāds bieži jālieto saimniecisko parādību novadā. Lai atrastu, kā izteicas, piem., riņka laukuma lielums atkarībā no riņka radija lieluma, neko tieši ne-

mērījam, bet loģiskas spriešanas ceļā atrodam, ka laukums izteicas kā radija funkcija tādā veidā

$$L = \pi R^2.$$

Šāda funkcionāla sakarība ļauj ne tikai atrast laukuma skaitlisko lielumu kvadrātvienībās, ja zināms radija lielums garuma vienībās, bet arī rāda, kā ar radija izmainīšanos mainās laukums — ja radijs pieaug, piem., divreiz, tad laukums kļūst četrreiz lielāks u. t. t.

Vispār funkcionālas sakarības atrašana analitiskā veidā parādību starpā ir ļoti liels ieguvums parādību izpratnē, jo ļauj iepriekš noteikti pateikt, kāds būs vienas parādības (funkcijas) lielums, ja zinām otras parādības (argumenta) lielumu, un arī otrādi — tā ļauj noteikt, kāds jāņem arguments, lai dabūtu vajadzīgo funkcijas nozīmi, piem., kāds jāņem radijs, lai dabūtu vajadzīgo laukuma nozīmi. Šinī nolūkā jāprot izteikt arī arguments atkarībā no funkcijas, kas ne katrreiz ir viegla lieta. Katrā ziņā tanīs jautājumos, kur bijis iespējams izteikt atkarības parādību starpā analitisko funkcionālo sakarību veidā, rodas ļoti svarīgi secinājumi un plašas iespējas tiklab prognozes, kā veidojuma problēmu risināšanā.

6. Te svarīgi atzīmēt dažas lietas.

Pirmkārt, jāuzsver funkcionālo sakarību ērtais apzīmējums ar attiecīgiem simboliem kā tās īpatnējās matēmatikas valodas atsevišķs gadījums, kas vispār iezīmē matēmatikas priekšrocības, jo matēmatikai ir sava valoda — īsa, precīza, izteiksmīga, kas gan prasa laiku un pūles, lai to iemācītos, bet toties vēlāk stipri atmaksājas.

Lietojot šo ērto apzīmējumu, varam pētīt parādību sakarības, ja pat nezinām vēl funkcijas analitiskās izteiksmes, bet zinām tikai maiņas virzienu.

Otrkārt, funkcionāla sakarība, izteikta kādā analitiskā formā, ir reālo sakarību ideālizācija, kam reālās sakarības tikai lielākā vai mazākā mērā tuvojas. Tāpēc arī mēdz runāt par matēmatiskām funkcijām kā empīrisko funkciju ideālizācijām, kuras lielākā vai mazākā mērā tuvojas kādai analitiskai funkcijai.

Jau nodaļā par aksiōmatisko metodi nācās uzsvērt ideālizācijas nozīmi. Tas pats jāatkārto, zīmējoties arī uz funkcionālām sakarībām. Tāpēc iznāk, ka zinātne, kas sakarības savu parādību starpā grib izteikt funkcionālo sakarību veidā — un to vēlētos vai katra zinātne, jo tā jau ir parādību likumības augstākā pakāpe, kas atļauj paredzēt nākotnes notikumus — spiesta aizņemties no matēmatikas nepieciešamās zināšanas par funkcijām.

Treškārt, jāņem vērā, ka matēmatiskās funkcionālās sakarības kā abstraktas principiāli vienmēr apgriežamas: varam funkciju pieņemt par argumentu un argumentu par funkciju. Ne tā tas ir katrreiz ar konkrētajām funkciju sakarībām — tām, kas pēc savas būtības saistītas ar laiku. Te vienmēr jāgriežas pie pieredzes, lai atšķirtu funkciju no argumenta.

Ceturtkārt, jāatzīmē vēl tas, ka funkcija var atkarāties un bieži atkarājas, it īpaši zīmējoties uz saimnieciskajām parādībām, no divi vai vairākiem argumentiem, ko tās simboliski apzīmē tā, ka aiz funkcijas simbola liek tos argumentus, no kuriem atkarīga funkcija, piem., $f(x, y, z)$.

d. Funkciju pētīšanas pamatjautājumi.

1. Viens no svarīgākiem jautājumiem funkciju pētīšanā, ja dota funkcijas analītiskā izteiksme, *kā* ar neatkarīgā mainīgā lieluma pieaugšanu (vai dilšanu) aug vai dilst funkcija, t. i. kādā virzienā notiek funkcijas maiņa un kādā mērā tā pieaug vai dilst, salīdzinot ar argumenta augšanu. Šo pieauguma virziena un lieluma mēru izteic kāda cita funkcija, ko sauc par dotās funkcijas atvasinājumu un ko apzīmē ar simbolu $f'(x)$ jeb $\frac{dy}{dx}$ jeb $\frac{df(x)}{dx}$.

Atvasinātā funkcija jeb funkcijas atvasinājums ir tā saucamo diferenciālrēķinu svarīgākais jēdziens. Tā, piem., ja $f(x) = 3x + 2$, tad funkcijas atvasinājums $f(x) = 3$; tas rāda, ka ar x augšanu aug arī $f(x)$ un pie tam vienmērīgi, neatkarīgi no x lieluma, 3 reiz vairāk nekā x; tiešām, ja x skaitliskā vērtība pieaug par 1, piem., no $x = 2$ līdz $x = 3$, tad funkcijas y vērtība pieaug par 3 [$f(2) = 8$; $f(3) = 11$; pieaugums ir 3; simbols $f(2)$ nozīmē, ka x vietā ielikts skaitlis 2]; intervallā no $x = 10$ līdz $x = 11$;

$f(10) = 32$; $f(11) = 35$; atkal pieaugums 3 u. t. t. Ja ņemsim citu funkciju, piem., $f(x) = 3x^2 + 2$, tad $f'(x) = 6x$; šis atvasinājums rāda, 1) ka ar argumenta augšanu aug arī funkcija, bet pieaugums būs atkarīgs no x skaitliskās vērtības: jo lielāka x vērtība, jo samērā lielāks pieaugums; tā, piem., $f(1) = 5$, $f(2) = 14$, funkcijas pieaugums, pieaugot x'am par par 1, ir 9; ņemsim citu intervallu: $f(5) = 77$ un $f(6) = 110$, funkcijas pieaugums, pieaugot x-am par 1, ir 33 u. t. t.

Atvasinātai funkcijai var būt jauns atvasinājums, ko sauc, zīmējoties uz pirmatnējo funkciju, par otro atvasināto funkciju jeb otro atvasinājumu un apzīmē ar simboliem $f''(x)$ jeb $\frac{d^2f(x)}{d^2y}$ jeb $\frac{d^2y}{dx^2}$. Tāpat var runāt par trešo, ceturto u. t. t. atvasinājumu.

Šos jēdzienus un apzīmējumus attiecina arī uz tiem gadījumiem, kur funkcija ir atkarīga no diviem vai vairākiem argumentiem.

Ļoti svarīgs jautājums, zīmējoties uz ikvienu funkciju, ir arī tas, kādām jābūt neatkarīgo lielumu skaitliskām vērtībām, lai funkcijas vērtība sasniegtu savu maksimālo vai minimālo vērtību, citiem vārdiem, jautājums par funkcijas maksima vai minima atrašanu. To var atrast, viena neatkarīgā lieluma funkcijas gadījumā, tā, ka atrod funkcijas atvasinājumu, pielīdzina to nullei un atrisina tā dabūto vienādojumu. Vienādojuma saknes rādīs tās mainīgā lieluma nozīmes, kas var dot funkcijas maksimu vai minimu. Lai izšķirtu jautājumu, kāda sakne dod maksimu un kāda minimu, jāatrod vēl otrs atvasinājums un jāaprēķina, vai šis atvasinājums dod pozitīvu vai negātīvu nozīmi, ja tanī ieliek atrastās vienādojuma saknes. Pirmajā gadījumā būs darīšana ar funkcijas minimu, otrā ar maksimu.

Minējām tikai vispārīgos vilcienos dažas funkciju īpašības, kuras sevišķi svarīgas funkciju metodē un kuŗu dēļ funkciju metodei liela nozīme. Pati šī metode ir jau tik labi izstrādāta, ka to te visā pilnībā attīstīt būtu nevajadzīgs darbs, jo mūsu mērķis ir noskaidrot šīs metodes būtību un nozīmi dažādās zinātnes nozarēs, bet it sevišķi ekonomiskajās zinātnēs.

Sakarības, kas izteic ciešas saites divu lielumu starpā tā, ka viena lieluma nozīmei atbilst noteikta, pēc kāda matematikas likuma atrasta otra lieluma nozīme, kā jau minējām, sauc par matēmatiskajām funkcijām. Te smaguma punkts ir *ciešās saites:* tiklīdz zināma argumenta nozīme, tā tūlīt atrodama *stingri* noteikta funkcijas nozīme. Tas ir funkcionālo sakarību ideāltips.

Tā saucamajās eksaktās dabas zinātnēs — astronomijā, fizikā ar mēchaniku, ķīmija var atrast jau daudz funkcionālu sakarību parādību starpā, kur novirzījumi no ideāltipa — tie vienmēr pastāv reālās parādībās — izskaidrojami ar novērojumu un mērījumu nepilnībām. Tautsaimniecībā aplūkojamo parādību sakarības nav tik cieši saistītas, jo tās ir sarežģītas parādībās, kur reizē darbojas dažādi neatdalāmi faktori, kas traucē ciešu saišu nodibināšanos, kā par to runāsim, aplūkojot kollektīvlielumu pētīšanas metodi.

e. Funkciju metode ekonomiskajās zinātnēs.

1. Kā jau minēts, arī daudzu saimniecisko parādību norise notiek lielākā vai mazākā mērā pēc funkcionālo sakarību tipa. Tā, piem., induktīvi un deduktīvi varam konstatēt, ka zināmā laika sprīdī kādas preces cena brīvā tirgū mainās atkarībā no preces (vai pareizāk preču) piedāvājuma un pieprasījuma, ražojamā priekšmeta cena mainās atkarībā no pastāvīgiem un proporcionāliem izdevumiem, u. tml., pie kam attiecīgie lielumi izteicami skaitliski.

Tāpēc funkciju metode saimniecisko parādību pētījumos jau tagad ieņem diezgan redzamu vietu, un nav šaubu, ka turpmāk tā arvienu vairāk nostiprināsies, jo ikvienas zinātnes attīstības gaita, ja vien šī zinātne pieejama funkciju metodei, iet šinī virzienā.

Te vēl var piemetināt *Kühne's* vārdus:

«Aiz analizējamo parādību pārsvarā esošā dinamiskā rakstura mums tautsaimniecības mācībā būs pirmā kārtā jārīkojas ar funkciju jēdzienu.»[131]

2. Funkciju metodes illūstrācijai saimniecisko parādību pētīšanā minēsim dažus piemērus. Piegriezīsimies vecākajam darbam šinī virzienā — jau pieminētajam *A. Cournot* darbam.

[131] O. Kühne, Die mathematische Schule in der Nationalökonomie, Band I, 1. Teil: Die italienische Schule, Berlin u. Leipzig 1928.

Nodaļā «Par pieprasījuma likumu» viņš vispirms noskaidro pieprasījuma jēdzienu un grib ar to saprast tikai tiešo noietu. «Noiets jeb pieprasījums (mums abi jēdzieni sedzas, un mēs nesaprotam, kādos apstākļos varētu rēķināties ar pieprasījumu, kam nesekotu noiets), noiets jeb pieprasījums, mēs sakām, vispār aug, ja cenas krīt.»[132]

Viņš uzsver šo «vispār», jo atsevišķos gadījumos (retu un luksus priekšmetu gadījumā) varot būt arī citādi. Šo pieprasījumu likumu tad nu *Cournot* liekas pirmais ietērpj matemātikas formā — funkcionālās sakarības veidā.

Pieņemsim, saka *Cournot*, ka noiets jeb gadskārtējs pieprasījums D katrai precei ir šīs preces cenas p parciāla funkcija $f(p)$. Ja šīs funkcijas veids būtu zināms, tad dabūtu *pieprasījuma jeb noieta likumu*. Skaidra lieta, ka tas atkarājas no priekšmeta noderīguma pakāpes, no pakalpojuma veida, ko tas var sniegt, no patikas, ko tas sagādā, no katras tautas paradumiem un parašām, caurmēra labklājības un pakāpenības, kā sadalīta bagātība.[133]

Tādā kārtā *Cournot* dabū sakarību $D = f(p)$, no kuras, viņš saka, nevarot sagaidīt, lai to varētu izteikt algebriskā formā, jo *šo pieprasījuma* likumu ietekmējot daudzi morāliski cēloņi, kas neesot ne skaitāmi, ne mērījami. Varētu gan atrast, dibinoties uz statistiskiem datiem, empīrisku formulu, vai konstruēt līkni, kas varētu attēlot attiecīgu funkciju. Bet pat tad, ja šo mērķi nekad nevarētu sasniegt, tad tomēr varētu rīkoties ar šo funkciju arī nenoteiktā formā, jo viens no svarīgākiem analizes uzdevumiem taisni pastāvot iekš tam, «uztvert noteiktās attiecības lielumu starpā, kas paši nevar tikt uztverti skaitliski un pat algebriskās formulās.»[134]

Kā tas iespējams? Uz to *Cournot* dod šādu pareizu atbildi. No vienas puses var nezināmām funkcijām būt zināmas kādas īpatnības vai vispārīgas īpašības, piem., īpašība neaprobežoti augt vai krist vai būt periodiskām, vai būt reālām tikai zināmu robežu starpā. Tādi dotie lielumi, lai arī tie liktos cik nepilnīgi, var uz sava vispārnoderīguma pamata un ar analitisko izteiks-

[132] Cournot, op. cit., p. 37.
[133] Cournot, op. cit., p. 38.
[134] Cournot, ap. cit., p. 39.

mju palīdzību vest pie tikpat vispārīgām attiecībām, ko bez šīs palīdzības nezin vai būtu atraduši. Tā, piem., matēmatiķi, nezinot kapillāro spēku mazināšanās likumu un izejot tikai no pamatdomas, ka šie spēki manāmos attālumos ir nemanāmi, ir parādījuši vispārīgos kapillāritātes likumus, ko apstiprināja novērojums.

«Tā analize rāda, kādas noteiktas attiecības pastāv nezināmo lielumu starpā, reducē ar to nezināmos uz vismazāko iespējamo skaitu un dod novērotājam virzienu nozīmju noteikšanai visvairāk piemērotās formas izvēlē.»[135]

Šo funkciju F *(p)* *Cournot* pieņem par *nepārtrauktu* f-iju, t. i., kā viņš saka, par funkciju, kas nelec piepeši no vienas nozīmes uz otru, bet intervallā pastāvīgi ieņem starpnozīmes. «Tas varētu būt citādi, ja patērētāju skaits būtu ļoti ierobežots... Jo lielāks tirgus, jo dažādākas prasības, turība un pat noskaņojums patērētāju starpā — jo nepārtrauktāk mainīsies funkcija F *(p)* ar p maiņu. Lai arī cik mazas būtu p pārmaiņas, vienmēr atradīsies tādi patērētāji, ka uz to patēriņu iedarbojas neliels preču cenu kāpums vai kritums un pamudina mazliet sašaurināties.

Bet ja funkcija F *(p)* ir nepārtraukta, tad tai būs to funkciju īpatnība, uz ko balstās tik daudz matēmatiskās analizes lietošanas iespēju: *pieprasījuma pārmaiņa būs jūtami proporcionāla ar cenu pārmaiņu, kamēr pēdējās ir tikai iepriekšējās cenas mazas daļas*. Tālāk, šīs pārmaiņas būs ar pretējām zīmēm, t. i. cenu pacelšanai atbilst pieprasījuma pazemināšanās.»[136]

Ja nu funkcija F *(p)* ir nepārtraukta, tad arī funkcija pF *(p)* ir nepārtraukta; pF *(p)* izteic gada laikā pārdotā daudzuma kopvērtību. Šī funkcija pF *(p)* kļūst nulle, ja $p = 0$ jeb ir ļoti mazs lielums, jo tad ienākums ir nulle tāpēc, ka kādas preces patēriņš aprobežots, kaut arī tā neko nemaksātu; tā tad $D = f\ (p)$ nevar kļūt bezgalīgi liels, un tāpēc p vienlīdzīgs ar nulli vai ļoti mazs lielums, $pF\ (p) = 0$. No otras puses, var iedomāties, pa p (cena) pieņem tik lielas nozīmes,

[135] Cournot, op. cit., p. 39.
[136] Cournot, op. cit., p. 40—41.

ka preci vairs neražo un nepieprasa, t. i. $D = f(p)$ kļūst nulle vai nullei tuvs lielums; arī tad $pF(p)$ tuvojas nullei. Tā tad funkcija $pF(p)$ no sākuma līdz ar p aug un pēc tam dilst un ir pie tam nepārtraukta, tad jābūt tādai cenai p, kas dod funkcijas $pF(p)$, t. i. kopienesas lielāko nozīmi. Lai atrastu šo p nozīmi, jālieto pazīstamais diferenciālrēķinu paņēmiens: jādiferencē $pF(p)$ pēc p un dabūtais iznākums jāpielīdzina nullei; no dabūtā vienādojuma

$$F(p) + pF'(p) = 0$$

var izteikt meklējamo p kā $p = -\frac{F(p)}{F'(p)}$; šī nozīme dos vislielākās ienesas, kas izteiksies kā

$$pF(p) = -\frac{F(p)}{F'(p)} \cdot F(p) = -\frac{[F(p)]^2}{F'(p)}.$$

Šī izteiksme tikai tad dos maksimālo nozīmi, ja otrs funkcijas $pF(p)$ atvasinājums $2F'(p) + pF''(p)$ būs negātīvs, t. i. ja izpildīts nosacījums $2F'(p) + pF''(p) < 0$.

«Bet ja nu pieņem, ka nav iespējams katrai precei noteikt empīrisko funkciju $F(p)$, tad ar to nemaz nav teikts, ka tie paši šķēršļi rodas tās p nozīmes atrašanai, kas apmierina vienādojumu $F(p) + pF'(p) = 0$ jeb reizinājumu $pF(p)$ padara par maksimu. Tabulas konstrukcija, no kuras varētu ņemt šīs nozīmes, būtu visīstākais darbs praktiskai un vispamatīgākai to jautājumu atrisināšanas sagatavošanai, kas skaŗ bagātību teōriju.»[137]

3. Bet ja nu nevarētu pat no statistiskiem dokumentiem dabūt to p nozīmi, kas padara reizinājumu $pF(p)$ par maksimu, tad var vismaz visām precēm, uz ko mēģinājuši attiecināt tirdzniecības statistiku, viegli noteikt, vai dienas cena ir šaipus vai viņpus šīs nozīmes.

Pieņemsim, turpina *Cournot*, ka cena ir cēlusies par Δp un ir $p + \Delta p$ un gada patēriņš pēc statistiskiem dokumentiem ir pamazinājies par ΔD un tā tad ir $D - \Delta D$. Vai cenas paaugstinājums būs izdevīgs vai neizdevīgs, atkarāsies no tam, vai

[137] Cournot, op. cit., p. 44.

reizinājums $(p + \Delta p)$ $(D - \Delta D)$ būs lielāks vai mazāks par pD, citiem vārdiem, vai starpība
$pD - (pD + D\Delta p - p\Delta D - \Delta p\Delta D)$ ir negātīva vai pozitīva, t. i. vai $p\Delta D - D\Delta p + \Delta p\Delta D < 0$ vai > 0; atmetot $\Delta p\Delta D$ kā ļoti mazu, salīdzinot ar pārējiem locekļiem, dabūsim šo nosacījumu tādā veidā

$$p\Delta D - D\Delta p < 0 \text{ un } p\Delta D - D\Delta p > 0 \text{ jeb}$$

$\frac{\Delta D}{\Delta p} < \frac{D}{p}$ un $\frac{\Delta D}{\Delta p} > \frac{D}{p}$; ja pastāv pirmā nevienlīdzība, tad cenas paaugstinājums Δp reizinājumu pD palielina un tā tad ir izdevīgs; otrā gadījumā tas reizinājumu pD pamazina un tā tad ir neizdevīgs. Līdz ar to var zināt, vai p un $p + \Delta p$ ir vienā vai otrā pusē tai p nozīmei, kas reizinājumu pD padara par maksimālo.

Aplūkojot funkciju $pF(p)$ tīri teorētiski, var teikt, ka tai varbūt maksims vai minims vai vairāki maksimi vai minimi. Minētā praktiskā gadījumā, kur f-ijas nozīmes mainās no nulles līdz nullei, jābūt katrā ziņā vismaz vienam maksimam, bet vispār varētu tādu būt arī vairāk, un līdz ar to funkcijai būtu starpās maksimi un minimi. Praktiski ļoti maz varbūtīgi, ka funkcijai būtu vairāki maksimi un minimi, bet ja pat tas tā būtu, tad varam aplūkot funkciju tikai tanīs robežās, kur ir viens maksims un aplūkot funkciju $pF(p)$ tā, it kā tai būtu tiešām tikai *viens* maksims.

Parasti lieta grozās ap to, lai uzzinātu, vai robežās, kuru starpā var svārstīties p, funkcija $pF(p)$ ar augošām p nozīmēm aug vai dilst.

Līdz ar to tagad sagatavots ceļš, lai *Cournot* varētu dot savu klasisko monopola teoriju.

4. Pieņemsim, saka *Cournot*,[138] vienkāršības dēļ, ka kādam cilvēkam pieder minerālūdeņu avots, kas piešķir dziednieciības spējas, kādas cits avots nedod. Viņš bez šaubām varētu noteikt šī ūdens litra cenu uz 100 frankiem, bet viņš drīz vien niecīgā pieprasījuma dēļ pārliecinātos, ka tas nav pareizais ceļš dabūt no sava īpašuma lielu ienesu. Viņš arvienu vairāk un vairāk pamazinātu litra cenu līdz tādam līmenim, kas tam nes

[138] Cournot, op. cit., p. 47.

vislielāko ieguvumu, t. i. ja $F(p)$ attēlo pieprasījuma likumu, tad viņš pēc dažādiem mēģinājumiem beigs ar cenu p, kas reizinājumu $pF(p)$ padara par maksimu un kas noteikta ar vienādojumu

$$F(p) + pF'(p) = 0.$$

Lai šis vienādojums būtu lietojams, jāpieņem, ka nozīmei p atbilst tāds D, ko avota īpašnieks var ik gadus nodot, t. i. tāds D, kas nepārsniedz avota gada devumu.

Līdz ar to reizinājums $pF(p) = \frac{[F(p)]^2}{-F'(p)}$ ir gada rente no avota. Šinī visvienkāršākajā piemērā ražotājam nav ražošanas izmaksu jeb tās ir tik mazas, ka ar tām nav ko rēķināties.

5. Mēģināsim piešķirt šim *Cournot* dabūtajam rezultātam konkrētāku veidu. Pieņemsim, ka pieprasījuma funkcija D ir lineāra funkcija, t. i. $D = \alpha p + \beta$, kur α un β ir pastāvīgi pozitīvi lielumi, atkarīgi tikai no preces rakstura un patērētāju vajadzības skalas. Tad monopolista ienesa A (*Cournot* minētajā gadījumā par dabisko minerālūdeni arī tīrienesa) izteiksies kā cenas un noieta reizinājums tā:

$$A = pD = p(-\alpha p + \beta) = -\alpha p^2 + \beta p;$$

$$\frac{dA}{dp} = -2\alpha p + \beta = 0, \text{ no kurienes } p_m = \frac{\beta}{2\alpha}.$$

Redzam, ka maksimālo ienesu dod cena, kuras lielums izteicas kā $\frac{\beta}{2\alpha}$.

Ja funkcijā $D = -\alpha p \pm \beta$ meklēsim tādu p, lai D kļūtu par nulli, citiem vārdiem, meklēsim tādu maksimālo cenu P, kuru nosakot, pieprasījums pēc preces izzūd, tad dabūsim, ka $0 = -\alpha P + \beta$ un $P = \frac{\beta}{\alpha}$. Redzam, ka izteiksme $\frac{\beta}{\alpha}$ ir maksimālā cena P. Tāpēc atrastā cena, kas dod ienesas maksimu, izteicas tā:

$$P_m = \frac{P}{2}$$

Esam dabūjuši svarīgu rezultātu: monopola gadījumā vislielākā ienesa rodas tad, kad pārdošanas cena ir puse no maksimālās cenas.

Līdzīgu iznākumu dod arī citas pieprasījuma funkcijas. Tā, piem., ja pieņemtu par pieprasījuma funkciju otras pakāpes funkciju tā, ka

$$D = -\alpha p^2 + \beta,$$

tad $A = pD = -\alpha p^3 + \beta p$ un $\frac{dA}{dp} = -3\alpha p^2 + \beta = 0$, no kurienes $p_m = \sqrt{\frac{\beta}{3\alpha}}$. Šinī gadījumā P dabūsim no sakarības $0 = -\alpha P^2 + \beta;\ P = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ un $p_m = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} = P \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{P}{1{,}73} \approx \frac{P}{2}$.

Tā tad vispārīgi var teikt, ka cena, kas atbilst vislielākajai ienesai monopola uzņēmumā, ir aptuvumis vienlīdzīga ar maksimālās cenas pusi. Lai praktiski atrastu šo cenu, nav nemaz jāzina visa pieprasījuma funkcija, bet tikai šinī funkcijā tā p vērtība, kad pieprasījums beidz pastāvēt.

6. Atgriezīsimies pie *Cournot*. Bet tagad piemēra dēļ, saka tālāk *Cournot*, ņemsim cilvēku, kas izgudrojis mākslīga minerālūdens pagatavošanas metodi ķīmiskā ceļā, pie kam jāsamaksā par izejvielām un darbu. Šeit ražotājam nebūtu vairs funkcija $pF(p)$ jeb brutto ienesa jāpadara par maksimu, bet gan netto ienesa jeb funkcija $pF(p) - \varphi(D)$, kur $\varphi(D)$ apzīmē izmaksas, kas vajadzīgas D litru ražošanai.

Tā kā funkcija $\varphi(D)$, kur $D = F(p)$, ir saistīta ar p, tad var funkciju $pF(p) - \varphi(D)$ uzlūkot kā funkciju, kas netieši atkarīga no viena vienīga mainīga lieluma p, kaut gan vispār ražošanas izdevumi ir tieši ražojuma daudzuma un nevis ražojuma cenas funkcija. Tāpēc cenu, lai dabūtu vislielāko tīro peļņu, varēs noteikt no vienādojuma, ko dabū, kā tas parasts maksima vai minima meklēšanai, pielīdzinot nullei funkcijas pirmo atvasinājumu, t. i. šinī gadījumā

$$F(p) + \frac{dF}{dp} \cdot p - \frac{d\varphi(D)}{dD} \cdot \frac{dD}{dp} = 0 \text{ jeb}$$

$$D + \frac{dD}{dp}\left[p - \frac{d\varphi(D)}{dD}\right] = 0.$$

7. Lai arī šinī gadījumā konkrētizētu jautājumu, pieņemsim, ka funkcijas D un $\varphi(D)$ ir lineāras funkcijas, t. i., ka $D = -\alpha p + \beta$ un $\varphi(D) = a + bD$; tad tīrienesa A_1 izteiksies tā:

$$A_1 = pf(p) - [a + bf(p)] =$$
$$= p(-\alpha p + \beta) - a - b(-\alpha p + \beta) =$$
$$= -\alpha p^2 + (\beta + \alpha b)p - \alpha - b\beta;$$
$$\frac{dA_1}{dp} = -2\alpha p + \beta + \alpha b, \text{ no kurienes}$$
$$p_m = \frac{\alpha b + \beta}{2\alpha} = \frac{b}{2} + \frac{\beta}{2\alpha}.$$

Atrastā p_m izteiksme rāda, ka ir tikai viena cena, kas dod maksimālo tīrienesu.

Ja pieņemsim, ka $D = -2p + 500$, $\varphi(D) = 2000 + 120D = 2000 + 120(-2p + 500)$, tad $A_1 = p(-2p + 500) - 2000 - 120(-2p + 500) = -2p^2 + 500p - 2000 + 240p - 60000$; $\frac{dA_1}{dp} = -4p + 500 + 240 = 0$; $p_m = \frac{740}{4} = 185$; tā tad minētajos nosacījumos optimālā cena ir Ls 185.

8. Tādi ir *Cournot* monopola teōrijas pamati. Nav mums vajadzības izsekot tālākiem secinājumiem šinī jautājumā, jo negribam iztirzāt pašu teōriju, bet gan rādīt funkciju metodes lietošanu. Nav nozīmes arī kavēties pie *Cournot* monopola teōrijas kritikas, jo tā var zīmēties ne uz pašu funkciju metodi, bet dažām prēmisām, piem. monopola jēdzienu.

9. Otru piemēru ņemsim no *F. Divisia* naudas vērtības teōrijas — cirkulācijas likuma pierādījumu. *Divisia* iziet no sakarības $\frac{Var}{a} = k$, kur V ir naudas vērtība, q izlietotās naudas daudzums, r — šīs naudas apgrozības ātrums, a — darījumu aktīvitāte, *pie kam Divisia pagaidām piešķir šiem jēdzieniem nenoteiktu, tīri literārisku nozīmi*[138]; k ir pastāvīgs lielums.

Ja naudas vērtības V apgriezto lielumu $\frac{1}{V}$ apzīmē ar J un nosauc par naudas indeku, tad iepriekšējā sakarība izteicas kā

[138] Divisia, Économique rationelle, Paris 1928, p. 263.

$\frac{qr}{aJ} = k$ jeb $qr = kaJ$. Šādā veidā rodas vienlīdzība divu locekļu starpā, no kuriem viens atkarīgs vienīgi no darījumu aktīvitātes un vispārīgā cenu līmeņa, otrs turpretim atkarīgs no *naudas raksturojuma* — naudas daudzuma, kas ir apgrozībā, un apgrozības ātruma vai, pareizāk, šo divu raksturojumu reizinājuma.

«Īstenībā», saka *Divisia*, «mēs neesam droši, ka precīzāka analize nenovestu mūs pie tā, ka būtu jāieved vienādojumā citi naudas raksturojumi. Bet mēs piešķirsim likumam vispārīgāku izteiksmi, rakstot: $c = kaJ$, kur c apzīmē reizinājumu qr, bet var reprezentēt arī, ja analize rāda nepieciešamību, kādu vispārīgāku visu naudas raksturojumu — funkciju. Mēs sauksim šo funkciju par *cirkulācijas funkciju* jeb īsāk par *cirkulāciju*.

Šī cirkulācijas funkcija ietver katrā ziņā reizinātāju r. Bet «cirkulācija» nav pieejama pieredzei aiz neiespējamības praktiski noteikt naudas cirkulācijas ātrumu. Tāpēc mums bija jāuzlūko likums $\frac{Vc}{a} = k$ par deduktīvu un ne eksperimentālu likumu, jo pieredze var tikai norādīt tā eksistenci un intuicija suģestēt tā formu. Tā tad, meklējot šā likuma teorētisko pierādījumu, mēģināsim tam dot vēlamo paļāvību un precīzitāti, pie kam šie pētījumi mums ļaus arī precīzēt izteiksmju C, V (vai tā apgrieztā lieluma J) un a nozīmi, kas, kā to pieminējām agrāk, nav vēl stingri definēti.

Tā kā naudas kvantitātīvā likuma eksperimentālais attaisnojums jau kļuvis par daudzu pētījumu objektu, tad mēs ceram ievest vairāk skaidrības jautājumā, pārveidojot terminoloģiju. Turpmāk mēs sauksim likumu $\frac{Vc}{a} = k$ par *cirkulācijas likumu*.»[139]

Cirkulācijas likuma pierādījumam *Divisia* aplūko noteiktu tirgu un vienkāršības dēļ pieņem, ka tirgū ir viena paša tipa naudas gabali. Tad viņš uzstāda schēmu tabulas veidā, kur kolonnas iekārtotas tā, ka katram *maksājumam*, kas izdarīts

[139] Divisia, op. cit., p. 264.

kādā laika periodā, atbilst viena kolonna, katram naudas gabalam, kas izlietots šinī laika periodā, atbilst viena horizontāla līnija. Uz katra naudas gabala līnijas tiek atzīmēti ar svītriņām visi maksājumi, kur piedalījies šis naudas gabals, pēc tam beidzamajā kolonnā uz katras līnijas savelk kopā svītriņas, t. i. saskaita tās. Tādā kārtā atrod, ka pirmais naudas gabals ir lietots n_1 reiz, otrs n_2 reiz u. t. t.

	1. maks.	2. maks.	3. maks.	4. maks.	P_N	Reižu skaits, cik katrs gab. lietots
1. naud. g.	1			1		n_1
2. „ „	1			1	1	n_2
3. „ „	1	1				n_3
4. „ „		1	1			n_4
. . . . . .						. . .
i „ „				1	1	n_i
. . . . . .						. . .
N „ „	1		1		1	n_N
	p_1q_1	p_2q_2	p_3q_3	p_4q_4	$p_n\,q_n$	c

Skaitļus n_1, $n_2 \ldots$, n_N pieņem par naudas gabalu 1, 2, 3 . . ., N cirkulācijas ātruma mēru. Visu naudas gabalu kopības vidējais cirkulācijas ātrums būs $r = \dfrac{n_1 + n_2 + \ldots + n_N}{N}$, jo naudas gabalu skaits ir N. No tā izriet, ka summa $n_1 + n_2 + \ldots + n_N$ ir reizinājums Nr, t. i. visu tirgus apgrozībā esošo naudas gabalu reizinājums ar to vidējo cirkulācijas ātrumu, t. i. tas lielums, kas nosaukts par «cirkulāciju» un apzīmēts ar c. Šī summa $n_1 + n_2 + \ldots + n_N$ ir vienlīdzīga ar visu tabulas svītriņu skaitu, ko var dabūt arī tā, ka savāc kopā svītriņas pa kolonnām un tad ņem to kopsummu. Svītriņu skaits pirmajā kolonnā reprezentē pirmo maksājumu summu, šī summa ir noderējusi samaksai par preču vai pakalpojumu daudzumu q_1 cenā p_1. Bet pirmās kolonnas svītriņu kopsumma ir $p_1\,q_1$, otrās $p_2\,q_2$, un $c = p_1\,q_1 + p_2\,q_2 + \ldots + p_n q_n = \Sigma\,p_i\,q_i$. Tā nonāk pie fundāmentālā vienādojuma $c = \Sigma p_i\,q_i$, no kuŗa izrietēs cirkulācijas likums. Tiešām, šī vienādojuma pirmajā loceklī ieiet cirkulācija, otrā — izteiksme, kas ļoti līdzīga kādam indekam. Šī vienādojuma salīdzinājums ar cirkulācijas likumu $c=kaJ$ ļaus definēt ar precizitāti a un J, kas vēl nav izdarīts. Tā kā vienādojums attaisnots, lai kādi būtu aplūkotie laika periodi, tad to var diferencēt attiecībā uz laiku

$$dc=k\ (adJ+Jda);$$

dalot abas puses ar $c=kaJ$, dabūjam, ka $\frac{dc}{c}=\frac{da}{a}+\frac{dJ}{J}$ . . (1),

bet no otras puses nule dabūtā sakarība $c=\Sigma\ p_i\ q_i$ dod

$$dc=\Sigma\ d\ (p_i\ q_i)=\Sigma\ (p_i\ dq_i+q_i\ dp_i)=\Sigma\ p_i\ dq_i+\Sigma\ q_i\ dp_i$$

$$\text{un } \frac{dc}{c}=\frac{\Sigma\ p_i\ dq_i}{\Sigma\ p_i\ q_i}+\frac{\Sigma\ q_i\ dp_i}{\Sigma\ p_i\ q_i} \quad . \ . \ . \ . \ (2)$$

Salīdzinot (1) ar (2), dabūjam, ka

$$\frac{da}{a}+\frac{dJ}{J}=\frac{\Sigma\ p_i\ dq_i}{\Sigma\ p_i\ q_i}+\frac{\Sigma\ q_i\ dp_i}{\Sigma\ p_i\ q_i} \quad . \ . \ . \ . \ (3)$$

Tā kā vienādojumā (3) katrā pusē ieiet pa loceklim, kas atbilst preču un pakalpojumu daudzuma variācijai un *cenu* variācijai, tad

$$\left.\begin{aligned}\frac{da}{a}&=\frac{\Sigma\ p_i\ dq_i}{\Sigma\ p_i\ q_i}\\ \frac{dJ}{J}&=\frac{\Sigma\ q_i\ dp_i}{\Sigma\ p_i\ q_i}\end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (4)$$

Ar vienādojumu (4) precīzi definēti: aktīvitātes indeks a un preču indeks J; šādā definējumā tie rigorozi attaisno cirkulācijas likumu, jo redzējām, ka $\frac{da}{a}+\frac{dJ}{J}=\frac{dc}{c}$, kas pēc integrēšanas dod $c=kaJ$, kur k ir integrācijas konstante.

«Cirkulācijas likums pierādīts tādā ziņā, ka tas ir rigorozi pareizs, ja piešķir — un tikai tādā gadījumā — locekļiem, kas ieiet formulā to precīzo nozīmi, kādu tikko esam definējuši.»[140]

Divisia jautā tālāk, vai tā definētais monetārais indeks neriskē būt tīri teorētisks, nepieejams nekādiem skaitliskiem aprēķiniem? Viņš atbild, ka tā nedomājot, kaut gan nebūtu pareizi lietot lielo skaitļu likumu šī indeka definīcijai, bet ap-

[140] Divisia, op. cit., p. 268.

rēķiniem tas varot būt pavisam labi noderīgs. «Protams, mēs nedrīkstētu pretendēt uz to, lai monetārā indeka aprēķinos ievestu visus objektus, par ko izdarīti maksājumi naudā vai aprēķinu (čeku u. tml.) kārtībā; nav nekādas izredzes aprēķināt eksakti ne lielumus q_i ne p_i. Tādā kārtā aprēķinātais indeks atšķirsies no teorētiskā indeka aiz vairākiem iemesliem. Bet jo vairāk locekļu ņemsim un jo precīzākus tos ņemsim, jo vairāk tuvosimies teorētiskajai izteiksmei. Bet tiklīdz būsim ņēmuši pietiekoši lielu locekļu skaitu un ja šie *locekļi zīmējas uz svarīgākajām kategorijām*, lielo skaitļu likums mums atvēl paļauties, ka radīsies pietiekoša kompensācija no *vienas puses starp atmestajiem locekļiem*, no otras puses starp kļūdām, kas radušās paturētajos locekļos.»[141]

10. Ja mainīgos lielumus, kas ieiet funkcionālā sakarībā, uzlūkojam kā nezināmos, tad funkcionālā sakarība dabū vienādojuma raksturu. Atkarībā no tam, cik patstāvīgās sakarības var saistīt meklējamos lielumos, var būt: 1) vienādojumu skaits mazāks nekā nezināmo skaits; tad vispār nebūs iespējams nezināmiem atrast noteiktas nozīmes, izņemot gadījumus, ja ir kādi papildu nosacījumi, piem., nezināmiem jābūt veseliem skaitļiem; 2) vienādojumu skaits vienlīdzīgs ar nezināmo skaitu; tad nezināmajiem lielumiem būs noteikts nozīmju skaits, t. i. tos varēs atrast kā pastāvīgus, noteiktus lielumus; 3) vienādojumu skaits lielāks nekā nezināmo skaits; tad nezināmajiem nevarēs atrast tādu nozīmju, kas derētu visiem vienādojumiem.

Šo vienādojumu sistēmas īpašību var izlietot un to parasti arī izlieto tādos gadījumos, kur jāizpētī, vai nosacījumu skaits, t. i. zināmo, doto, neatkarīgo lielumu vai par tādiem pieņemamo lielumu skaits ir pietiekošs meklējamo lielumu noteikšanai: ja nosacījumu skaits izrādās mazāks nekā nezināmo, meklējamo, atkarīgo lielumu skaits, tad uzdevums ir nenoteikts, un meklējamos lielumus pilnīgi noteikt nav iespējams.

Šo funkcionālo sakarību īpašību tad nu diezgan bieži izlieto arī tautsaimniecībā, sevišķi cenu veidošanās teorijā.

[141] Divisia, op. cit. p. 276.

11. Piemēram aplūkosim *G. Cassel'a* cenu veidošanās mēchanisma noskaidrojumu (*Theoretische Sozialökonomie*, p. 116—143).

Cassel'a izejas punkti: 1) šaurības princips kā pietiekošs pamats pilnīgai cenu noteikšanai; 2) ir doti zināmā periodā patērētāju rīcībā stāvošo preču daudzumi, t. i. ražošana nemainās un pilnīgi noteikta; šos preču daudzumus nosauc par attiecīgo mantu piedāvājumiem un apzīmē ar $A_1, A_2, A_3 \ldots, A_n$; n — attiecīgo mantu veidu skaits; 3) patērētāji ir citas personas nekā ražotāji; ja ražotājs patērē pats kādu daļu no sava ražojuma, tad to uzlūko kā atsevišķu personu patēriņa ziņā; 4) naudas summa, ko pats patērētājs aplūkojamā periodā izdod savu vajadzību apmierināšanai, jau iepriekš noteikta; šādos apstākļos patērētāja pieprasījums pēc dažādām mantām arī noteikts, tiklīdz dotas to cenas.

Sakars starp kādas mantas pieprasījumu un cenu visizdevīgāk izteicams tā, ka mantas cenu pieņem par neatkarīgo mainīgo lielumu; tad individuālo pieprasījumu mantas daudzumu, ko attiecīgā persona pērk, ja cena dota, var uzlūkot kā cenas funkciju, pie kam funkcijas veids raksturo subjektīvo vērtējumu.

Ja grib saistīt kopā vairāku personu pieprasījumus, tad var rīkoties tā: zināms kopīgs neatkarīgais mainīgais lielums— cena, un katrai šā mainīgā lieluma nozīmei zināms atsevišķa patērētāja pieprasījums, ko var izteikt skaitliski, t. i. atrast, cik dotās mantas vienību attiecīgā persona grib pirkt, un tad šos skaitļus saskaitīt. Tā nonāk pie koppieprasījuma pēc attiecīgās mantas, ko var izteikt kā cenas funkciju. Bet ja šo funkciju aplūko tuvāk, tad izrādās, ka tā ietver arī citu mantu cenas kā mainīgos lielumus, jo atsevišķa patērētāja pieprasījums nav noteikts, iekams nav dotas cenas visām mantām, kas var būt viņa pieprasījuma priekšmets; tikai tad viņš var noteikt savu pieprasījumu pēc atsevišķām mantām savu naudas līdzekļu robežās.

Tā tad ar n mantu cenām $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ir noteikts katra patērētāja pieprasījums un līdz ar to arī koppieprasījums pēc katras atsevišķas mantas. Apzīmējot aplūkojamā periodā kopprieprasījumu pēc n mantām ar $N_1, N_2, \ldots, N_n$, varam izteikt tos kā n cenu funkcijas:

$$\left.\begin{array}{l} N_1 = F_1\,(p_1, p_2, \ldots, p_n) \\ N_2 = F_2\,(p_1, p_2, \ldots, p_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ N_n = F_n\,(p_1, p_2, \ldots, p_n) \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

kur, kā jau minēts, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ir attiecīgo preču cenas. Mainas saimniecības līdzsvara gadījumā katras atsevišķas mantas pieprasījumam jāsaskan ar piedāvājumu, jo cenu veidošanas uzdevums pēc šaurības principa ir — tiktāl ierobežot pieprasījumu, lai to varētu apmierināt ar rīcībā esošiem preču daudzumiem. Tāpēc

$N_1 = A_1, N_2 = A_2, \ldots, N_n = A_n$ un līdz ar to pēc

(1)

$$\left.\begin{array}{l} F_1\,(p_1, p_2, \ldots, p_n) = A_1 \\ F_2\,(p_1, p_2, \ldots, p_n) = A_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_n\,(p_1, p_2, \ldots, p_n) = A_n \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Tā tad lai atrisinātu cenu veidošanās problēmu aplūkojamā vienkāršā gadījumā, jāuzlūko n cenas kā problēmas nezināmie. Pieņemot pagaidām cenas kā zināmos lielumus, varam izteikt pieprasījumus pēc n mantām atkarīgi no to cenām ar vienādojumu sistēmu (1). Izlietojot šaurības principu, dabūjam otru sistēmu (2), kur ieiet n vienādojumu n nezināmo cenu noteikšanai. Šinī gadījumā, kur pieņemti kā dotie lielumi patērētāju naudas izdevumi, noteiktas visas cenas arī to absolūtos augstumos. Bet ja cenas zināmas, var aprēķināt koppieprasījumus $N_1, N_2, \ldots, N_n$ pēc atsevišķām mantām. Tā kā pēc pieņēmuma pieprasījums tiek apmierināts, tad atrisināta visa problēma par konsumentu rīcībā nododamo mantu sadalījumu.

«Iekšējo cenu veidošanās sakarību nevar attēlot nekādā citādā veidā,» piebilst *Cassel*'s.[142]

[142] Cassel, Theoretische Sozialökonomie, p. 120.

12. Ņemsim vēl piemēru no privātsaimniecības parādību novada. Zināms, ka ražojamās vienības pašizmaksa g izteicas kā

$$g = \frac{a}{x} + b,$$

kur a ir pastāvīgās izmaksas, x ir ražojamo vienību skaits un b proporcionālo izmaksu daļa, kas iznāk uz 1 vienību Ja attiecināsim šo sakarību uz priekšmetiem, kas gandrīz vienlīdzīgi cits ar citu un ko var saukt par eksemplāriem (viena iespieduma grāmatas ar tās pašas kvalitātes papīru, vienas serijas mašīnas u. tml.) tad varam dabūt šādu svarīgu secinājumu.

Kaut gan viena eksemplāra pašizmaksa pamazinās ar priekšmetu skaita pieaugšanu, jo lielums a paliek pastāvīgs (pareizāk, gandrīz pastāvīgs) un ar x augšanu $\frac{a}{x}$ dilst, bet toties tanī pašā laikā pieaug ieguldītais kapitāls, par ko jāmaksā augļi. Tā tad, no vienas puses, lielāks eksemplāru skaits, ko pagatavo vienā reizē, pazemina atsevišķa eksemplāra ražošanas izmaksu, bet, no otras puses, augļi par ieguldīto kapitālu, ja sarazotos eksemplārus pietiekoši ātri nevar pārdot, ar laiku palielina šo izmaksu. Tāpēc, piem., ja vienā gadā var pārdot 500 eksemplārus, tad, pagatavojot vienā reizē 20000 eksemplāru, dabūsim gan samērā lēti vienu eksemplāru tā pagatavošanas laikā, bet turpmākos 40 gados augļi par ieguldīto kapitālu iznāks tik lieli, ka tāda prāva eksemplāru skaita izgatavošana izrādītos par neizdevīgu.

Tā nonākam pie jautājuma par izdevīgāko ražojamo eksemplāru skaitu.

Pieņemsim, ka no pagatavotiem x eksemplāriem katru gadu pārdod apmēram vienu un to pašu skaitu e; tad katru gadu pārdodamie eksemplāri izmaksās

$$ge + \text{augļi par nepārdotiem eksemplāriem.}$$

Apzīmēsim procentu likmi, kas jāmaksā vai jārēķina par ieguldīto kapitālu, ar p; tad $\frac{p}{100} = i$ ir augļi no Ls 1 par 1 gadu. Ja ražo x eksemplārus un gadā pārdod e, tad visus eksemplārus pārdos $\frac{x}{e} = n$ gados. Kopizmaksa ir K. Tāpēc pārdodamie eksemplāri izmaksās, ja vienkāršības dēļ pieņemam, ka nauda par pārdotiem eksemplāriem ienāk gada beigās:

$$n \text{ gados} \left\{ \begin{array}{lll} \text{pirmajā gadā} & ge + Ki \\ \text{otrajā} & \text{,,} & ge + (K - ge)i; \\ \text{trešajā} & \text{,,} & ge + (K - 2ge)i; \\ \dots\dots & & \dots\dots \\ \text{pēdējā} & \text{,,} & ge + [K - (n - 1)ge]i. \end{array} \right.$$

Saskaitot šīs izteiksmes, dabūjam:

$$nge + Ki + (K - ge)i + (K - 2ge)i + \ldots + [K -$$
$$- (n - 1)ge]i = nge + Kni - gei\, [1 + 2 + 3 + \ldots$$
$$\ldots + n - 1)] = nge + Kni - gei\frac{n\,(n-1)}{2},$$

jo $1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 1)$ pēc aritmētiskās progresijas locekļu summas formulas dod $\frac{n\,(n-1)}{2}$.

Dalot dabūto izteiksmi ar n, dabūsim e eksemplāru caurmēra izmaksu gadā, ko apzīmēsim ar c; tā tad

$$c = ge + Ki - \frac{gei\,(n-1)}{2};$$

$n - 1$ vietā var aptuvumis ņemt n; tad, ieliekot n vietā tā izteiksmi $\frac{x}{e}$, jo $n = \frac{x}{e}$, dabūsim, ka $\frac{gei\,(n-1)}{2} = \frac{gein}{2} = \frac{geix}{2e} = \frac{gxi}{2}$; bet $gx = K$, tāpēc $\frac{gxi}{2} = \frac{Ki}{2}$ un $c = ge + Ki - \frac{Ki}{2} = ge + \frac{Ki}{2}$ jeb $c = e\left(\frac{a}{x} + b\right) + \frac{(a + bx)i}{2}$, kur g un K vietā ieliktas to izteiksmes, atkarībā no x.

Tā tad $c = \frac{ea}{x} + \frac{bxi}{2} + eb + \frac{ai}{2}$, kur lielumus e, a, i un b var pieņemt par pastāvīgiem, t. i. c ir tikai eksemplāru skaita x f-ija. Meklēsim tagad, kādai x nozīmei (kādam eksemplāru skaitam) vidējā gada izmaksa ir vismazākā, tas ir, kāds būs izdevīgākais ražojamo eksemplāru skaits.

$$\frac{dc}{dx} = -\frac{ea}{x^2} + \frac{bi}{2}; \quad -\frac{ea}{x^2} + \frac{bi}{2} = 0; \text{ no šā vienādojuma}$$

$$x^2 = \frac{2ea}{bi} \text{ un } x_m = \sqrt{\frac{2ea}{bi}}.$$

Tā kā otrais atvasinājums $\frac{d^2c}{dx^2} = +\frac{ea}{x^3}$ ir pozitīvs, ja x ir pozitīvs skaitlis, bet x ir pozitīvs skaitlis pēc savas būtības, tad tiešām atrastā x nozīme dod attiecīgās f-ijas $c = \frac{ea}{x} + \frac{bxi}{2} + eb + \frac{ai}{2}$ minimālo nozīmi: $x_m = \sqrt{\frac{2ea}{bi}}$.

Piemēra dēļ pieņemsim, ka a = Ls 1000, b = Ls 0,50, $p = 8\%$ un $e = 500$; tad

$$x_m = \sqrt{\frac{2 \,.\, 500 \,.\, 1000 \,.\, 100}{0{,}5 \,.\, 8}} = 5000.$$

Tā tad minētajos nosacījumos izdevīgākais ražojamo eksemplāru skaits, kuŗu pašizmaksa iznāks vismazākā, ir 5000 —rezultāts, ko var dabūt tikai ar funkciju metodes palīdzību (Sal. A. *Schilling*, Die Lehre vom Wirtschaften, Berlin 1925, p. 237).

Arī finanču zinātnē funkciju metode atrod jau plašu lietošanas iespēju, sevišķi nodokļu tarifu jautājumos.

13. Pēc visa teiktā par parādību norises maiņas likumiem, skaidra lieta, ka robeža, no kuŗas sākas matēmatikas lietošanas izdevība un pat nepieciešamība, iet nevis starp cēlonības principu un savstarpīgās iedarbības principa novadiem, bet gan ieslēdz to novadu, kur mēs pētam *parādības norisi kvantitātīvā atkarībā no šo parādību ietekmējošām parādībām*, pie kam šī kvantitātīvā elementa pietiek, lai varētu lietot funkciju metodi jau tanī gadījumā, ja zinām parādības kvantitātīvās norises vispārīgo raksturu (aug, dilst; papriekš aug, tad dilst un tml.).

3. Grafiskā metode.

a. Grafiskās metodes pamati.

1. Kā jau to esam aizrādījuši, pastāvīgu sakarību meklēšana parādību starpā ir zinātnes pētījumu ļoti svarīgs uzdevums. Bieži šāda sakarība parādību skaitlisko lielumu starpā izteicas tā, ka dotajām viena lieluma skaitliskām nozīmēm atbilst otra lieluma skaitliskās nozīmes, bet vēl vispārīgā likumība, kādā izteicas šī sakarība, nav konstatēta kādas funkcionālas sakarības analitiskā veidā. Piem., novērota kāda zināma sakarība mērenās joslas siltākajos apgabalos (ap Vidusjūru un Melno jūru) starp nokrišņu daudzumu no decembra līdz februārim un caurmēra kviešu ražu no hektara. Minēto sakarību rāda šādi skaitļi[143]:

Gadi	1900.	1901.	1902.	1903.	1904.	1905.	1906.	1907.	1908.	1909.
Nokrišņu daudzums collās	2	16	14	26	12	18	6	21	4	30
Raža no ha kvintālos	3	10	9	14	8	10	5	13	4	16

Sakarība te skaidri redzama: lielāks nokrišņu daudzums — lielāka raža, bet nav zināma tāda funkcionāla sakarība, kas ļautu pēc dotā nokrišņu daudzuma atrast attiecīgo vidējo ražu.

Cits piemērs. Statistiskie dati par kartupeļu ražu Amerikas savienotās valstīs un vidējo cenu rāda šādu sakarību.[144]

Gads.	Raža bušeļu miljonos	Caurmēra cena centos par bušeli, periodā no jūlija līdz jūnijam.
1921.	351	121
1922.	434	74
1923.	392	94
1924.	422	177
1925.	323	184
1926.	354	141
1927.	403	108
1928.	463	61

[143] Richter — Altschäffer, Einführung in die Korrelationsrechnung, Berlin 1931, p. 33.

[144] Ezekiel, Preisvoraussage bei landwirtschaftlichen Erzeugnissen, Bonn 1930, p. 5.

Šie dati rāda, ka lielākai ražai atbilst vispār zemākās cenas un otrādi, bet kā īsti cena atkarājas no ražas, nav vēl zināms.

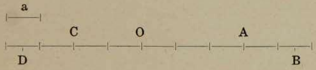
Šādos gadījumos sakarības labākai noskaidrošanai ļoti noder tā saucamā *grafiskā metode*. Tā stipri vien palīdz jautājumu noskaidrošanai arī tanī gadījumā, ja sakarība izteicas funkcionālās sakarības veidā, jo dod iespēju pārredzamā veidā attēlot funkcijas maiņu atkarībā no argumenta maiņas. Var pat tā raksturot grafisko metodi, ka tā ir vienkāršota un konkrētizēta funkciju metode.

Par grafisko metodi tautsaimniecībā atrodams plašs *Walter'a G. Waffenschmidt'a* apcerējums: *«Graphische Methode ir der theoretischen Oekonomie, dargestellt in Anlehnung an das Tauschproblem» (Archiv für Sozialwissenschaft und Sozialpolitik, 39 B., p. 438 et seq.)*. Tāpēc aprobežosimies šeit tikai ar grafiskās metodes visīsāko raksturojumu.

2. Grafiskās metodes pamatos, kā zināms, guļ iespēja nodibināt viennozīmīgu sakarību starp skaitļiem un telpas elementiem — punktiem tā, ka ikvienam telpas punktam atbilst viens vienīgs noteikts skaitlis vai skaitļu sakopojums un ikvienam noteiktam skaitlim vai skaitļu sakopojumam atbilst viens vienīgs punkts.

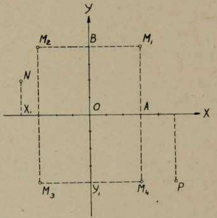
Vispirms var nodibināt šādu viennozīmīgu sakarību punktu un skaitļu starpā uz taisnes, kam piešķirts noteikts virziens un ko tādā gadījumā sauc par *asi.*

Izvēlēsimies uz dotās ass, kuras virziens iet no kreisās uz labo pusi, kādu punktu *O* par sākuma punktu un virzienu no tā pa labi uzlūkosim par pozitīvu, pa kreisi par negatīvu; pieņemsim par garuma vienību kādu taisnes gabalu un norunāsim ikkuru pozitīvu reālu (t. i. veselu, daļskaitli vai iracionālu) skaitli attēlot ar taisnes punktu tā, ka tas atrodas tik daudz garuma vienību attālumā pa labi no punkta *O*, cik vienību (vai tās daļu) dotajā skaitlī; tad, piem., ja par garuma vienību



pieņemsim kādu gabalu a, tad A attēlos skaitli 3, jo atrodas 3 garuma vienību attālumā no O, punkts B attēlos skaitli 4,5 u. tml. Analoģiski punkts C attēlos skaitli — 2, punkts D skaitli — 3,5 u. tml. Tā tad katram punktam atbildīs viens vienīgs noteikts skaitlis no visa reālo skaitļu lauka. Gluži tāpat katram reālam skaitlim atbildīs viens vienīgs noteikts punkts uz taisnes pa labi vai pa kreisi no punkta O. Tādā kārtā nodibinājas pilnīgi noteikta sakarība atsevišķu skaitļu un dotās taisnes punktu starpā.

Šo sakarību var izveidot tālāk, ņemot vērā dotās plāksnes punktus un skaitļu pārus. Izvēlēsimies plāksnē divas taisnes, kas savā starpā krustojas. Bieži ļoti ērti šim nolūkam ņemt savā starpā perpendikulārās taisnes, piem., taisnes XX_1 un YY_1 (1. att.).



1. att.

Ja tagad ņemsim kādu punktu plāksnē, piem., punktu M_1, kas guļ leņķa XOY malu starpā, tad viņa stāvoklis būs pilnīgi noteikts, ja norādīsim, kādos attālumos šis punkts atrodas no dotajām taisnēm, šinī gadījumā attālumus M_1A un M_1B, kur M_1A un M_1B ir perpendikuli no M_1 pret X_1X un Y_1Y. Attālums M_1B vietā var ņemt arī OA. Tā tad lielumi, kas raksturos punkta M_1 stāvokli, būs M_1A un OA; šos lielumus var izteikt skaitliski, pieņemot par garuma vienību kādu gabalu a.

Pieņemsim, ka $OA = 3$ un $M_1A = 4$ garuma vienības, tad punkta M_1 stāvoklis pret dotajām taisnēm XX_1 un YY_1 būs noteikts ar skaitļu pāri 3 un 4.

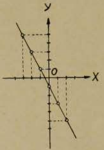
Taisnes XX_1 un YY_1 sauc par koordinātu asīm: taisni XX_1 sauc parasti par a b s c i s u a s i jeb arī par x'u a s i; taisni YY_1, sauc par o r d i n ā t u a s i, jeb par y'u a s i, skaitļus 3 un 4 sauc: pirmo, kas rāda punktu attālumu no y'u ass un ko parasti mērī kā x'u ass gabalu, skaitot no punkta O jeb k o o r d i n ā t u s ā k u m a p u n k t a līdz perpendikula pamatnei, kas vilkts no dotā punkta pret x'u asi, sauc par punkta a b s c i s u, otru skaitli, kas rāda punkta attālumu līdz x'u asij, sauc par punkta o r d i n ā t u. Punkta abscisu un ordinātu sauc par punkta koordinātām. Tā kā punkts var atrasties ne tikai leņķī XOY jeb tā saucamajā pirmajā koordinātu leņķī, bet arī visos pārējos — otrā koordinātu leņķī YOX_1, trešajā — X_1OY_1 un ceturtajā — Y_1OX, tad punkta stāvokļa noteikšanai, ja punkts ņemts kaut kur plāksnē, nepietiks norādīt tā attālumus no koordinātu asīm, bet vajadzēs vēl norādīt viņa atrašanās vietu pirmajā, otrajā, trešajā vai ceturtajā koordinātu leņķī. To panāk, pieņemot abscisas pa labi no koordinātu sākuma punkta O par pozitīvām, pa kreisi no tā par negātīvām; ordinātas uz augšu no sākuma punkta pieņem par pozitīvām, uz leju — par negātīvām. Tādā kārtā punkta stāvoklis plāksnē būs pilnīgi noteikts ar punkta koordinātām — skaitļu pāri. Tā, piem., punkta M_2 koordinātas ir —3 un 4, punkta M_3 koordinātas ir —3 un —4, punkta M_4 koordinātas ir 3 un —4. Otrādi, ja punkta koordinātas dotas kā noteikts skaitļu pāris, tad līdz ar to noteikts ir arī punkta stāvoklis. Tā, piem., koordinātām —4 un 2 jeb, kā to īsāk mēdz rakstīt, (—4; 2) atbilst punkts N, koordinātām (5; —4) atbilst punkts P u. tml.

Tā tad ikvienam noteiktam reālo skaitļu pārim atbilst noteikts punkts plāksnē un ikvienam noteiktam punktam plāksnē atbilst pilnīgi noteikts reālo skaitļu pāris. Tādā veidā nodibinājas viennozīmīga sakarība skaitļu pāru un punktu starpā un rodas iespēja skaitļu pārus attēlot ar punktiem plāksnē. Lietojot šo atbilstību punktu un skaitļu pāru starpā, varam attēlot zīmējumā ikvienu sakarību divu lielumu starpā, ja doti skaitļu pāŗi, kas saista šos lielumus savā starpā. Tā, piem., ja lielumi x un y saistīti tā, ka x'a skaitliskām vērtībām

$$x = 2 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad -2 \quad -3$$

atbilst $y = -5 \quad -3 \quad -1 \quad 1 \quad 3 \quad 5,$

tad varam ikvienu x'a un y'a skaitlisko vērtību pāri attēlot ar punktiem, kā tas redzams 2. att. Ja šos punktus savienosim ar taisnes gabaliem, tad vērosim, ka visi šie punkti guļ vienā taisnē.



2. att.

b. Funkciju grafikas.

1. Ja divi lielumi saistīti funkcionālā sakarībā, tad šo sakarību arī samērā viegli attēlot grafiski un tā dabūt tā saucamo funkcijas grafiku, kas uzskatamāk rāda funkcijas maiņas gaitu nekā funkcijas skaitliskās vērtības.

Lai viena mainīgā lieluma funkciju varētu attēlot grafiski, tad jāatrod pietiekoši daudz un pietiekoši tuvi cits citam punkti, kas atbilst dotās funkcijas nozīmēm. Funkcijas nozīmes savukārt atrod tā, ka ieliek argumenta vietā kādu pēc patikas izvēlētu skaitli un tad aprēķina attiecīgo funkcijas vērtību. Tādā kārtā dabūsim skaitļu pāŗu rindu, kuŗus var pieņemt par punktu koordinātām un tad atrast plāksnē šiem pāŗiem atbilstošus punktus. Ja tādu skaitļu pāŗu atrasts pietiekoši daudz un pie tam attiecīgie punkti pietiekoši tuvi cits citam, tad var ar pietiekošu pamatojumu spriest arī par pārējo punktu stāvokli; atrastos punktus savieno ar nepārtrauktu līniju, kas tad arī derēs par *funkcijas grafisko attēlu.* Pēc šāda attēla tad nu var spriest par funkcijas maiņas gaitu pirmajā tuvinājumā.

2. Ņemsim piemēram funkciju $y = -2x - 1$; sastādīsim funkcijas skaitlisko vērtību tabulu:

x	-3	-2	-1	0	1	2
y	5	3	1	-1	-3	-5

Attēlojot ar punktiem dabūtos skaitļu pārus, nonākam pie 2. att. attēlotās punktu rindas, kas diezgan noteikti guļ kādas taisnes virzienā. Tiešām, to var samērā viegli pierādīt, ka veselas racionālās pirmās pakāpes funkcijas $y = a_0 + a_1 x$ attēls būs vienmēr taisne, kur a_0 ir tā saucamā sākuma ordināta, t. i. ordinātu ass gabals no koordinātu sākuma punkta līdz krustpunktam ar doto taisni, un a_1 tā saucamais virziena koeficients, t. i. leņķa tangents, ko dotā taisne sastāda ar x'u ass pozitīvo virzienu. Tāpēc minētās pirmās pakāpes funkcijas attēlam pietiek atrast kaut kādus divus punktus — visērtāk tos, kur taisne krusto, ja tā vispār krusto — koordinātu asis; šie punkti atbilst skaitļu pāriem, ko dabūjam, ieliekot pirmkārt x'a vietā O un atrodot attiecīgo y un, otrkārt, ieliekot y-a vietā O un meklējot attiecīgo x'a vērtību no vienādojuma $0 = a_0 + a_1 x$.

Ja taisne iet caur koordinātu sākuma punktu, tad $a_0 = 0$ un attiecīgajai funkcijai ir tāds veids $y = a_1 x$; ja taisne iet paralēli ar x'u asi attālumā b no tās, tad attiecīgās funkcijas veids ir $y = b$; ja paralēli ar y'u asi attālumā c, tad $x = c$.

Tā kā funkcija $y = a_1 x$ jeb citādi $\frac{y}{x} = a_1$, kā redzam, izteic tiešās proporcionālitātes likumu (cikreiz pieaug y, tikreiz pieaug x un otrādi, vai arī ja y'a attiecība pret x paliek vienmēr tā pati), tad tādas funkcionālas sakarības gadījumā lielumu starpā, kur lielumi savā starpā tieši proporcionāli, f u n k c i j a s a t t ē l s b ū s v i e n m ē r t a i s n e.

Citādi šo sakarību $y = a_0 + a_1 x$ var raksturot arī vēl tā: ja x'a, t. i. neatkarīgā lieluma skaitliskās vērtības aug (vai arī dilst) pēc aritmētiskās progresijas likuma, tad arī y'a, t. i. atkarīgā lieluma jeb funkcijas skaitliskās vērtības aug (vai dilst) tāpat pēc aritmētiskās progresijas likuma. Piem., ja $y = 4 + 3x$ un x pieņem skaitliskās vērtības

1 3 5 7 9 11 ...., tad y pieņem
vērtības 7 10 13 16 19 22 ....

Abas rindas ir aritmētiskās progresijas.

Ar šādu funkciju, piem., izteicas kapitāls, kas aug pēc vienkāršo augļu likuma: $K_n = K_0 + K_0 in$, kur K_0 ir sākuma kapitāls, $i = \frac{p}{100}$, ja p ir pastāvīga procentu likme, n — gadu skaits un K_n — beigu kapitāls.

Minēto racionālo algebrisko pirmās pakāpes funkciju sauc vēl arī par lineāro funkciju.

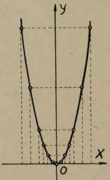
3. Vesela racionāla algebriska otrās pakāpes funkcija vispārīgā veidā izteicas tā

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2.$$

Šīs funkcijas grafisks attēls dod tā saucamo p a r a b o l u. Vienkāršākā gadījumā, ja $a_0 = a_1 = 0$ un $a_2 = 1$, dabūjam $y = x^2$.

Sastādīsim x'a un y'a skaitlisko vērtību tabulu funkcijai $y = x^2$:

x	4	3	2	1,5	1	0,5	0	−0,5	−1	−1,5 ...
y	16	9	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	0,25 ...



3. att.

Atsevišķie punkti un vispārīgs veids redzams 3. att. Tuvāki pētījumi rāda, ka tā ir līkne, kuŗas zari aiziet neaprobežoti tālu.

Funkcija $y = x^2$ rāda tādu sakarību, kur vieni lielumi proporcionāli ar otra lieluma kvadrātiem. Tā tad līkne, kas attēlo šādu sakarību, ir parabola.

Funkciju $y = x^2$ var raksturot arī vēl tā: ja x'a skaitliskās vērtības sastāda ģeometrisko progresiju, tad arī y'a vērtības sastāda ģeometrisko progresiju. Piem., ja x'a vērtības sakārtotas rindā

0 $\frac{1}{2}$ 1 2 4 8 16 ar progresijas rādītāju 2, tad attiecīgās y'a vērtības

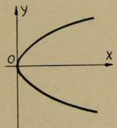
0 $\frac{1}{4}$ 1 4 16 64 256 dod ģeometrisko progresiju ar rādītāju 4.

Pēc tāda tipa aug kapitāls, ja tas atdots uz augļu augļiem. Tad beigu kapitāls izteicas ar formulu

$$K_n = K_0 r^n \text{, kur } r = 1 + i \text{ un } i = \frac{p}{100}.$$

4. Veselā racionāla n-nās pakāpes funkcija $y = a_0 + a_1 x + a_2 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n$, dod attēlā līkni, ko sauc par n-nās šķiras jeb n-nās pakāpes parabolu.

5. Ja divi lielumi saistīti tā, ka viens mainās proporcionāli ar kvadrātsaknēm no otra lieluma, tad funkcijas veids ir tāds: $y = \sqrt{x}$; ņemot abas puses kvadrātā, dabūjam $y^2 = x$. Šī sakarība līdzīga ar jau aplūkoto $y = x^2$, tikai x un y te apmainījušies vietām; tāpēc funkcijas $y = \sqrt{x}$ grafisks attēls iznāks gluži tāds pats, kā funkcijai $y = x^2$, tikai līknes punkti grupēsies ap x'u asi kā ap simmetrijas asi, jo vienai un tai pašai x'a vērtībai atbildīs divas y'a vērtības, vienlīdzīgas pēc absolūtās nozīmes, bet ar pretējām zīmēm (4. att.).



4. att.

6. Apgriezta proporcionālitāte izteicas sakarības veidā $y = \frac{a}{x}$ jeb $xy = a$. Attēlojot funkciju $y = \frac{a}{x}$ grafiski, dabūsim līkni, ko sauc par **hiperbolu**.

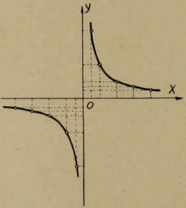
Ņemsim kādu atsevišķu gadījumu

$$y = \frac{2}{x};$$

Sastādot vērtību tabulu, dabūjam

x	4	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	0	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{2}$	–1
y	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1	2	4	16	∞	–16	–4	–2

Iezīmējot attiecīgos punktus, dabūsim līkni ar diviem zariem: vienu pirmajā koordinātu leņķī, otru trešajā koordinātu leņķī; katra zara gali neaprobežoti tuvojas koordinātu asīm, tomēr tās nekad nesasniedz; tādu tuvošanos sauc par asimptotisku; koordinātu asis šinī gadījumā ir līknes **asimptotes** (5. att.).

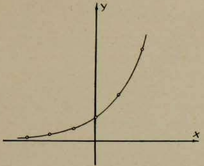


5. att.

7. No cita veida — tā saucamajām transcendentām funkcijām liela nozīme, sevišķi tautsaimniecībā, eksponentfunkcijai $y = a^x$, logaritmiskai funkcijai $y = \log x$ un trigonometriskajām funkcijām: $y = \sin x$, $y = \cos x$ un $y = \operatorname{tg} x$.

Šo funkciju grafikas dabūjam jau pieminētā ceļā. Ņemsim piemēram $y = 2^x$. Sastādīsim vērtību tabulu

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16



6. att.

Attēlojot dabūtos skaitļu pāŗus kā punktus, dabūsim punktu rindu, kas noteic līknes gaitu (6. att.). Līkne asimptotiski tuvojas x'u asij tās negātīvajā virzienā un attālinās no tās bezgalīgi pozitīvajā virzienā. Šo tipu var raksturot arī tā: ja x mainās pēc aritmētiskās progresijas likuma, tad y mainās pēc ģeometriskās progresijas likuma.

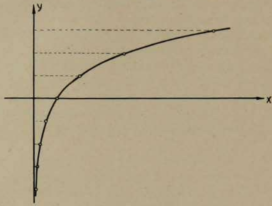
Piem., ja $y = 2^x$

un $x = 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$, tad

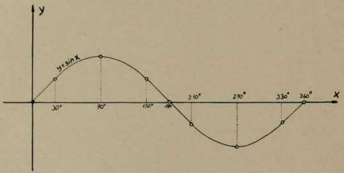
$y = 2 \quad 4 \quad 8 \quad 16$ (ģeom. progr. rādītājs ir 2).

8. Gluži analoģisks būs logaritmiskās funkcijas attēls, piem., $y = log_2 x$, jo to pašu sakarību varam citādi pārrakstīt tā: $2^y = x$. Salīdzinot ar kāpinātāja funkciju, x un y apmainījušies vietām, tāpēc attiecīgās līknes — logaritmiskās līknes stāvoklis būs gluži tāds pat pret y'u asi, kāds kāpinātāja līknei bija pret x'u asi (7. att.).

No periodiskām funkcijām visbiežāk sastopamas *sinus* un *cosinus* funkcijas. Periodiskās funkcijas raksturīgā īpašība tā, ka tās nozīmes atkārtojas pēc pastāvīgiem neatkarīga lieluma intervalliem ($y = \sin x$ attēlota 8. att.).



7. att.

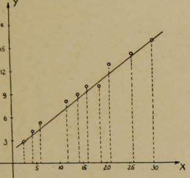


8. att.

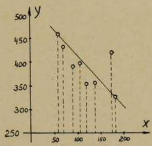
10. Funkcionālās sakarības, attēlotas grafiski, dod kādu noteiktu līkni, jo te iespējams atrast pēc patikas daudz punktu un pēc patikas tuvu cits citam. Tas ir tāpēc, ka parasti, vismaz bieži neatkarīgais mainīgais lielums var mainīties *nepārtraukti*, t. i. divu neatkarīgo mainīgo lielumu vērtību starpību var padarīt pēc patikas mazu, un līdz ar to parasti arī funkcija mainās *nepārtraukti* — bezgalīgi tuvām savā starpā argu-

mentu vērtībām atbilst arī bezgalīgi tuvas savā starpā funkcijas vērtības.

11. Kā jau minējām, daudzos gadījumos reālie dati nedod nepārtrauktu nozīmju rindas un nerāda, tīrā veidā ņemti, kādas noteiktas likumības. Bet ja tomēr tos attēlo grafiski, tad, pirmkārt, var ērtāk spriest par funkcijas maiņas gaitu nekā raugoties tikai skaitliskajos datos, un, otrkārt, var vieglāk noteikt, kādas funkcijas attēlam kā savam ideāltipam vistuvāk pieiet šī grafika un līdz ar to dabūt norādījumu par meklējamo likumību. Tā piem., ja 113. lap. p. minētos datus attēlosim grafiski, uz x'u ass atzīmējot nokrišņu daudzumu un ar attiecīgajām ordinātām caurmēra ražu no ha, tad dabūsim tādu ainu (9. att.).



9. att.



10. att.

Attiecīgie punkti neguļ, kā tas skaidri redzams, uz vienas taisnes, bet tomēr diezgan tuvu grupējas ap to. Tas rāda, kā starp nokrišņu daudzumu un vidējo ražu pastāv diezgan cieša sakarība — stipri tuva tiešai proporcionālitātei, jo, kā redzējām, taisne attēlo proporcionālitāti attiecīgo lielumu starpā.

Līdzīgā kārtā attēlojot 113. lap. p. minētos datus par kartupeļu ražu un vidējo cenu, dabūjam šādu punktu grupējumu (10. att.), kas rāda, ka arī te punkti grupējas gandrīz ap taisni, tikai šoreiz vienādiem pozitīviem x'a pieaugumiem atbilst vienādi y'a negatīvie pieaugumi.

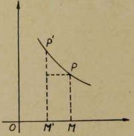
Šie piemēri rāda, kāda nozīme grafiskai metodei sakarību noskaidrošanā. Tāpēc to arī lieto plaši visas tās zinātnes nozares, kuŗām darīšana ar kaut kādā veidā — kaut arī stipri aptuveni — kvantitātīvi tveŗamām sakarībām. Auglīga šī metode arī tautsaimniecībā, kā jau to labi noskaidrojis *Waffenschmidt's* pieminētajā rakstā.

c. Grafiskās metodes piemēri tautsaimniecības teōrijā.

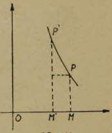
1. Minēsim dažus piemērus no jaunākiem teōrētiskās tautsaimniecības darbiem, kur ar panākumiem lietota grafiskā metode.

Tā *Enrico Barone (Grundzüge der theoretischen Nationalökonomie*, übersetzt von Hans Staehle, Bonn 1927.) lieto šinī darbā viscaur grafisko metodi. Paraugam ņemsim dažus jautājumus.

Pieprasījums. Ikdienas dzīves vērojumi rādot, ka ar kādas preces cenas kāpšanu vai krišanu tās lietošana pamazinoties vai pavairojoties, tā tad patēriņa daudzums un cenas mainoties *pretējā virzienā.* Ja pieņemtu, ka no statistiskiem datiem atrastas pārgrozības kādas preces patēriņā dotajā tirgū (noslēgtā tautsaimniecībā), kādas rodas no tās cenu pārgrozībām (ja tikai neiestumjas kāds cits apstāklis), un ka šie statistiskie dati attēloti grafiski, tad rastos diagramma, līdzīga tai, kāda attēlota 11. att., kur ikviena līknes punkta abscisa *OM* attēlo pieprasījumu, kas rodas, ja pastāv ar ordinātu *MP* attēlotā cena. Tādai pieprasījuma līknei, kas katrai precei savā laikā ir citāda, ir tomēr tā vispārīgā īpašība, ka līkne (pirmajā kvadrantā) krīt no kreisās uz labo pusi, t. i. pieaugošām abscisu nozīmēm atbilst dilstošās ordinātu nozīmes.»[145] (11. un 12. att.).



11. att.



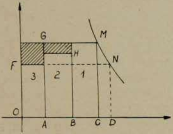
12. att.

[145] Barone, Grundzüge etc., p. 17.

Par kādas preces koppieprasījumu jāuzlūkojot atsevišķo saimniecību pieprasījumu summa: ja pastāvot zināma cena kādai precei, atsevišķi individi neuzstājoties kā pieprasītāji, jo uzlūkojot cenu samērā ar saviem ienākumiem par augstu un tāpēc dodot priekšroku vairāk nepieciešamu vajadzību apmierināšanai. Ja nu šīs preces cena krītot, tad daži individi, kas līdz šim uzlūkojuši to par nesasniedzamu, attīstīšot pieprasījumu un citi, kas jau šo preci lietojuši, savu patēriņu kāpināšot. Cenai celoties, līdzšinējie lietotāji, kas atradušies uz pašas lietošanas robežas, atkritīšot, citi savu patēriņu ierobežošot.

Ja lieta grozās ap preci, saka *Barone*, kas apmierina ļoti nepieciešamu vajadzību, tā ka tās patēriņu var ierobežot tikai ar lielām grūtībām, tad pietiks maza iztrūkuma piedāvājumā, lai patērētāju starpā radītu konkurenci (jo tiem jābaidās gadījumā palikt tukšā) un cenas jūtami celtos.

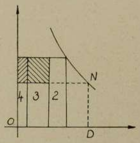
Piedāvājums. Pieredze mācot, ka kādā tirgū vienlaikus eksistējot uzņēmēji, kas to pašu preci ražojot par dažādām ražošanas izmaksām. Ja šos uzņēmējus sagrupētu pēc to izmaksām, sākot ar zemākajām un beidzot ar augstākajām, tad to varētu attēlot grafiski tā, kā redzams 13. att.



13. att.

Abscisas OA, OB, OC šeit attēlo uzņēmēju 3., 2. un 1. ražoto preču daudzumus. Attiecīgās gabala izmaksas attēlotas ar nesvītrotu taisnstūru augstumiem, kur taisnstūri konstruēti pie OA, AB un BC. Tā kā 3. un 2. uzņēmēja ražoto preču nepietiek, lai apmierinātu tirgus pieprasījumu, tad tiem līdzās pastāv 1. uzņēmējs ar augstāku izmaksu. Uzņēmējiem 3. un 2. rodas p e ļ ņ a, kas attēlota ar svītrotajiem taisnstūriem GH un FG.

Līdzsvara cena iznāk MC. Bet pieņemsim, ka tagad rodas kāds cits uzņēmējs 4., kas ražo par tādu pat izmaksu, kā 3. Var gadīties, ka tas izstumj no tirgus 1. uzņēmēju; tad radīsies stāvoklis, kas attēlots 14. att., kur 2. uzņēmējs piespiests pie «robežas».



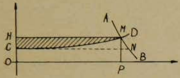
14. att.

Sekas: cena kritusies, ražotais un patērētais daudzums audzis, 2. uzņēmēja peļņa izzudusi, 3. uzņēmēja peļņa mazinājusies; ja nu pievienojas vēl 5. uzņēmējs, kas ražo ar tādiem pat izdevumiem kā 3. un 4. un izdzen no tirgus 2. uzņēmēju, tad cena krīt tālāk, patērētais daudzums aug un 3., 4. un 5. uzņēmēju peļņa tiecas izzust un cena pielīdzināties izdevumiem. Viss tiecas uz līdzsvaru tā, kā tas attēlots 14. att. ar patērēto daudzumu OD un attiecīgo cenu ND. «Šis iztirzājums izskaidro šķietamo pretrunu starp uzņēmēja peļņas (ko var uzlūkot teorētiski tikai kā pārejošo parādību) *reālo* eksistenci un brīvas konkurences tendenci reducēt cenu uz ražošanas izmaksām un tā iznīcināt uzņēmēju peļņu. Protams šinī nozīmē uzņēmēja alga ierēķināma ražošanas izmaksās.»[146]

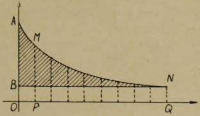
13. un 14. att. kāpienu diagramma, ja lieta grozās ap lielu tirgu un konkurējošu uzņēmumu lielu skaitu, var pāriet nepārtrauktā līknē CD (15. att.). Šo līkni sauc par koppiedāvājuma (offerta complessiva) līkni, tāpat kā AB ir koppieprasījuma līkne. Skaidra lieta, ka laukums HCM attēlo uzņēmēju peļņu, un ka uzņēmēju konkurence tendē savietot punktu M ar N, tā tad līkni CD tuvināt taisnei CN un reducēt laukumu MHC uz nulli.

[146] Barone, op. cit. p. 21.

«Patērētāju rente. No priekšrocībām, ko dod kā sekas brīvā konkurence, iegūstam visskaidrāko ainu, ja meklējam par to veidot kvantitātīvu priekšstatu. Pieņemsim, ka *MN* ir koppieprasījuma līkne (16. att.), *NQ* līdzsvara cena un *OQ* patērētais



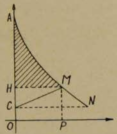
15. att.



16. att.

daudzums. Pastāvot cenai *PM*, patērētais daudzums aprobežotos ar *OP*, t. i. attiecīgo preci patērētu tikai tie indivīdi, kuru ienākumi un vajadzības tā iekārtotas, ka tiem preces vienība un labumam *PM* atbilstošā naudas summa izrādītos par līdzvērtīgām. Bet ja nu līdzsvara cena ir *NQ*, tad viņi ar naudas daudzumu *NQ* iegūst labumu, par ko tie būtu maksājuši arī *MP*. Tā tad tiem rodas labuma peļņa, ko varam attēlot ar svītroto laukumu 16. att. Tikai tiem pircējiem, kas ir uz robežas, nav nekādas peļņas. Visu patērētāju labuma peļņu sauc par patērētāju renti. Konkurence, kas cenšas punktu *P* iespējami tālu pazemināt, palielinātu patērētāju renti.

Bet ja ņemam vērā vienā reizē arī koppiedāvājuma līkni, tad rodas tālākie secinājumi:



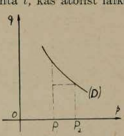
17. att.

Pieņemsim, ka *OP* (17. att.) ir ražotais un patērētais daudzums, *MP* — līdzsvara cena, laukums *AHM* attēlo patērētāju renti, laukums *HCM* — uzņēmēju peļņu. Tā kā konkurence spiež punktu *M* savienoties ar punktu *N* un tā iznīcina uzņēmēju peļņu, patērētāju rente pieaug par laukumu *HMCN*, kas ir lielāks nekā laukums *HMC*. Tā tad brīvās konkurences sekas ir tās, ka aug patērētāju lieluma peļņa un iznīkst uzņēmēju peļņa. Bet saimniekotājas sabiedrības kopībai tas dod *reālu* tīrpeļņu, jo patērētāju peļņa pārsniedz uzņēmēju zaudējumus.»[147]

2. Ņemsim vēl kādu piemēru no jau pieminētā *Divisia* darba.

Piedāvājuma un pieprasījuma definicija. Ne visu pircēju, tāpat kā ne visu pārdevēju dispozicijas, saka *Divisia*, nav vienādas: viens individs būtu ar mieru pirkt par cenu, kas mazāka vai vienlīdzīga ar 90 fr., otrs par cenu ≤ 92 fr., cits par ≤ 95 fr.; tāpat pārdevēji: viens ar mieru pārdot par cenu ≥ 90 fr., otrs par cenu ≥ 92, trešs par cenu 95 fr.; viens pircējs būtu pircējs 20 vienībām par 93 fr., bet ja cena būtu 91 fr. viņš nopirktu 40 vienības.

Šo dispoziciju kopību ir iespējams attēlot grafiski. Pieņemsim horizontālo asi par cenu asi, vertikālo asi par preču daudzuma asi (18. att.). Atzīmēsim kā ordinātu, kas atbilst abscisai $p = OP$, preču daudzuma kopsummu, ko neliela laika sprīdī Θ pircēji ir disponēti pirkt par cenu p (vai mazāku). Mēs sauksim šo ordinātu par preces pieprasījumu tirgū, pastāvot cenai p, momentā t, kas atbilst laika spīža Θ beigām.

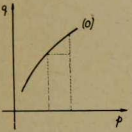


18. att.

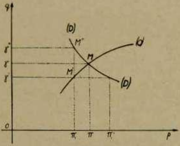
Katram abscisas lielumam p atbilst attiecīgs pieprasījuma lielums. Ja dots liels pircēju skaits un ja pircēju dispozicijas

[147] Barone, op. cit., p. 33.

pietiekoši tuvas cita citai, tad divām tuvām cenu nozīmēm atbilst divas tuvas pieprasījuma nozīmes. Citādi sakot, pieprasījumu momentā t var attēlot ar nepārtrauktu līkni kā cenas funkciju. Šo līkni sauc par *pieprasījuma līkni.* Viegli saprast, ka šī līkne vispār ir *krītoša* līkne. Tiešām, ja aplūko divas tuvas cenas nozīmes p_1 un p_2 $(p_1 < p_2)$, tad visu daudzumu, ko pieprasa, pastāvot cenai p_2, pieprasīs arī, pastāvot cenai p_1, un varbūt būs vēl kāds daudzums, ko pieprasīs, pastāvot cenai p_1 un nepieprasīs, pastāvot cenai p_2; tas nozīmē, ka ordināta, kas atbilst abscisai p_1, ir vismaz vienlīdzīga vai vispār lielāka par ordinātu, kas atbilst abscisai p_2.



19. att.



20. att.

Līdzīgā kārtā sauksim par *preces piedāvājumu* tirgū, pastāvot cenai p_1 momentā t, preču daudzumu kopsummu, ko pārdevēji ir disponēti pārdot par šo (vai augstāku) cenu laiku sprīdī Θ un saprotams, ka aiz tiem pašiem motīviem kā pieprasījuma gadījumā piedāvājumu var attēlot kā cenas funkciju ar līkni, kas vispār būs *kāpjoša.* (19. att.). Īstenībā šim beidzamajam faktam ir mazāk vispārīgs raksturs nekā pieprasījuma līknes krišanai; ir gadījumi, kur cenu paaugstināšanai atbilst piedāvājuma pamazināšanās un ne palielināšanās, bet tas tomēr atgadās samērā reti. Tomēr darba spēka tirgū šim faktam var būt arī diezgan liela vispārība. Ar visu to lieta grozās tomēr ap atsevišķiem gadījumiem, ko var neievērot vispārīgā teorijā.

Cenas noteikšana. «Ņemot vērā sacīto, var viegli saprast,

[14] Divisia, op. cit., p. 30.

ka *vienīgais kurss, ko kotē tirgū momentā t, atbilst divu līkņu — piedāvājuma un pieprasījuma — krustošanās punkta abscisai.*»[148]

Tiešām, pieņemsim ka krustošanās punkta M (20. att.) abscisa ir π. Vispirms iedomāsimies, ka laika sprīža Θ sākumā kurss ir $\pi_1 < \pi$. Figūra rāda, ka daudzums γ'', ko pieprasa par cenu π, ir lielāks par to daudzumu γ', ko piedāvā par šo cenu, t. i. pircēji, kas disponēti pirkt par cenu π_1, neatradīs kontrpartijas. Bet pircēju starpā būs daļa tādu, kas būs disponēti drīzāk pirkt par mazliet augstāku cenu nekā nemaz nepirkt. Lai to saprastu, pietiek aplūkot figūrā, ka cenai, kas augstāka par π_1 un zemāka par π'_1, atbilst pieprasījums, lielāks nekā γ'. Šie pircēji centīsies pacelt cenu, un kurss celsies.

Tāpat, ja kurss laika sprīža Θ sākumā būtu $\pi_2 > \pi$, zināms skaits pārdevēju, nevarēdami atrast kontrpartiju par π_2 un, būdami disponēti tomēr pārdot par zemāku cenu, centīsies pazemināt cenu, kas pazeminās kursu. Tā tad, ja kurss ir zemāks par π, viņš sāk celties: ja augstāks par π, sāk pazemināties. Galu galā, kad laika sprīža Θ beigās būs nodibinājies līdzsvars starp piedāvājumu un pieprasījumu, kotizācija nevarēs būt citāda, kā vien tāda, kas atbilst punkta M abscisai.

Var mēģināt attēlot algebriski parādības, ko esam analizējuši ģeometriski.

Pieņemsim, ka (1) ... $q = o\,(p)$ ir piedāvājuma līknes vienādojums un (2) ... $q = d\,(p)$ ir pieprasījuma līknes vienādojums.

No iepriekš teiktā izriet, ka cena, kas kotēta tirgū, ir dota ar vienādojuma (3) $o\,(p) = d\,(p)$ *atrisinājumu.*[149]

3. Minētie piemēri gaiši rāda grafiskās metodes lietošanas iespējas un priekšrocības teorētiskajā tautsaimniecībā. Vajaga tikai pamēģināt izteikt nule minēto bez grafiskās metodes, lai pārliecinātos, cik tas neizdevīgi un pat neiespējami. Tāpēc arī saprotams, ka taisni grafisko metodi ļoti plaši lieto teorētiskajā tautsaimniecībā (bez jau pieminētajiem autoriem *A. Cournot, H. Gossen's, Pareto* savā *Manuel, L. Amoroso, J. Fischer's* u. d. c.; jaunākā laikā tautsaimniecības teorijas

[149] Divisia, op. cit., p. 30—32.

kursi gandrīz nav domājami bez grafiskās metodes) un citās ekonomiskās zinātnēs.

Jāatzīmē, ka, minēdami piemērus grafiskās metodes lietošanai, neuzstādījām par uzdevumu aplūkot kritiski to jautājumu būtību, kas aplūkoti ar grafiskās metodes palīdzību, t. i. iztirzāt attiecīgās prēmisas u. tml.; mūsu mērķis bija tikai rādīt, cik lielu palīdzību sniedz grafiskā metode dažu teorētiskās tautsaimniecības jautājumu aplūkošanā.

4. Kollektīvpriekšmetu mērīšanas metode.

a. Vienveidības masu parādībās. Uzskatu attīstība par šādām parādībām.

1. Nodaļā par funkciju metodi jau runājām par to, cik svarīga parādību vienveidību konstatēšana. Tās vienveidības, ko pēta ar funkciju metodi, zīmējas uz gadījumiem, kur parādības norises vienveidība atkarājas no samērā nedaudzām parādībām, piem., gravitācijas spēks divu ķermeņu starpā atkarīgs no šo ķermeņu masām un attāluma ķermeņu smaguma centru starpā. Bet, meklējot parādību vienveidības, sastopamies arī ar tādām īpatnējām parādībām, kuŗu vienveidība atklājas tikai tad, ja esam vērojuši šo parādību kā kollektīvu ar pietiekoši lielu locekļu skaitu.

Tā, piem., vērojot bērnu sadalījumu pēc dzimumiem dažādās ģimenēs, redzam, ka ir ģimenes, kam bērni ir tikai sieviešu, citām tikai vīriešu dzimuma, vēl citām — lielākā daļa vīriešu vai lielākā daļa sieviešu dzimuma; samērā visai retas tādas ģimenes, kur abu dzimumu bērnu skaits vienāds. Tāpēc, kamēr nav atrasti kādi bioloģiski likumi, kas ļauj iepriekš noteikt bērna dzimumu, neviens neņemsies noteikti apgalvot, vai tādā un tādā ģimenē dzims zēns vai meitene, lai tas būtu pirmais bērns vai arī, teiksim, piektais pēc skaita, jo nekādas vienveidības te saskatīt nevaram. Bet tiklīdz ņemsim prāvāku ģimeņu skaitu un saskaitīsim tur bērnus pēc dzimumiem, vai vēl labāk, atzīmēsim visus dzimušos kādā gadā, šķirojot zēnus un meitenes, tad aina kļūst pavisam citāda. Tā, piem., 1930. g. dzimuši[150] (bez nedzīvi dzimušiem) Rīgā 2859 zēni un 2789 meitenes, Vid-

[150] Latvijas Statistiskā gada grāmata 1930. g., p. 16.

zemē 3344 z. un 3211 m., Kurzemē 2644 z. un 2441 m., Zemgalē 2599 z. un 2482 m., Latgalē 7986 z. un 7480 m., visā Latvijā 7986 zēni un 7480 meitenes. Redzam jau diezgan skaidri izteiktu vienveidību: dzimušo zēnu skaits gandrīz vienlīdzīgs ar dzimušo meiteņu skaitu, tomēr dzimušo zēnu skaits noteikti pārsvarā par dzimušo meiteņu skaitu.

Šādu pašu vienveidību redzam, salīdzinot dzimušo zēnu un meiteņu skaitu Latvijā (izņemot nedzīvi dzimušos) vairākos gados: 1929. g. 18327 z. un 17346 m.; 1928. g. 20082 z. un 19044 m.; 1927. g. 21631 z. un 19974 m., 1926. g. 21038 z. un 20035 m. u. t. t.

Vienveidība izrādās noteiktāka, ja šos datus apstrādājam tālāk, meklējot, piem., attiecību dzimušo zēnu un meiteņu starpā.

$$\text{Tad } \frac{2859}{2789} = 1{,}025; \ \frac{3344}{3211} = 1{,}041; \ \frac{2644}{2441} = 1{,}083;$$

$$\frac{2599}{2482} = 1{,}047; \ \frac{7986}{7480} = 1{,}068; \ \frac{19432}{18403} = 1{,}055; \ \frac{18327}{17346} = 1{,}056;$$

$$\frac{20082}{19044} = 1{,}054; \ \frac{21636}{19974} = 1{,}083; \ \frac{21038}{20035} = 1{,}050.$$

Ņemot dzimušo zēnu un meiteņu skaitu 5 gadu laikā (1926.—1930.) dabūjam attiecību $\frac{100515}{94802} = 1{,}060.$

Pirmās piecas attiecības: 1,025; 1,041; 1,083; 1,047 un 1,068 ir jau samērā stabilas, bet tomēr svārstās vēl diezgan stipri; daudz stabilākas jau nākamās piecas attiecības, kas dabūtas no lielākiem skaitļiem: 1,055; 1,056; 1,054; 1,083 un 1,050; salīdzinot ar vidējo attiecību par 5 gadiem, t. i. ar 1,060, redzam, ka atsevišķo attiecību svārstības samērā mazas. Tāpēc te jau var runāt par noteiktu vienveidību jeb likumību: ja pietiekošā skaitā vērojam jaunpiedzimušos Latvijā, tad ik uz 100 meitenēm dzimst apm. 106 zēni, pie kam svārstības uz vienu vai otru pusi nav lielas.

2. Tā kā kollektīvlielumu pētīšanas metode izveidojusies (pareizāk vēl veidojas) tikai jaunākā laikā un nav vēl iekarojusi sev tāda stāvokļa kā funkciju metode, tad pakavēsimies nedaudz pie tās attīstības gaitas.

Vienveidības ar lieliem skaitļiem raksturotos kollektīvpriekšmetos bija kā pirmais novērojis tirgotājs *John's Graunt's* Londonā, kas savā grāmatā *Natural and political Observations upon the Bills of Mortality* (1662) apstrādā tanī laikā pieejamos materiālus par kristīto bērnu skaitu, kā arī par mirušiem ar norādījumiem uz nāves cēloni.[151] *Graunt'a* pārsteidz skaitliskā vienveidība daudzos gadījumos, lai arī dati, ko tas izlietoja, bija visai nepilnīgi. Tā, piem., viņš mēģināja pierādīt, ka relatīvais miršanas gadījumu skaits no chroniskām slimībām, nelaimes gadījumiem un pašnāvībām ir *pastāvīgs*, kamēr epidēmiskās slimības uznāk nekārtīgi.

Par pastāvību, kas saistās ar lieliem skaitļiem, bija pārliecināts, kaut gan šaurā aplokā, arī angļu astronoms *Edm. Halley's* (1656—1742). *Halley's*, izlietodams Breslavas pilsētas datus par dzimušiem un mirušiem, publicēja pazīstamajā *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 1693[152] (ar vēlāku pielikumu) savu rakstu *An astimate of the degrees of the mortality of mankind drawu from curious tables of the births and funerals of the city of Breslau.* Šinī rakstā izlietoti 5 gadu (1684—1691) dati par dzimušiem un mirušiem, pēc kuriem *Halley's* sastādījis tabulas par Breslavas iedzīvotāju sadalīšanos pēc vecuma, pie kam šis sadalījums, pēc *Halley'a* domām, paliek ilgāku laiku *pastāvīgs*. Šīs tabulas līdz ar to bija pirmās mirstības tabulas.

Ja jau pieminēto un vēl citu vēlāko pētnieku [to starpā pieminami *Kersseboom's* (1691—1771), *Déparcieux* (1703—1768), kas nodarbojās ar mirstības tabulu sastādīšanu un vidējā dzīves ilguma aprēķināšanu] darbu pamatos bija doma par vienveidībām zināmos kollektīvpriekšmetos, tad par šādu vienveidību — noteiktu kārtību bija pilnīgi pārliecināts *J. P. Süssmilch's* (1707—1767), kuŗa 1741. gadā publicētā darba «*Die göttliche Ordnung in den Veränderungen des menschlichen Geschlechtes, aus der Geburt, dem Tode und der Fortpflanzung desselben erwiesen*» nosaukums jau vien rāda viņa

[151] H. Westergaard und H. C. Nybölle, Grundzüge der Theorie der Statistik, Jena 1928, p. 23, etc.

[152] Westergaard und H. Nybölle, op. cit., p. 29.

uzskatus par *Ordnung*, pie tam *göttliche Ordnung* mināto parādību kā kollektīvpriekšmetu laukā.

Tā, piem., par dzimušo zēnu un meiteņu skaita attiecību *Süssmilch*'s izsakās tā: «Visgudrais Radītājs ir noteicis šo kārtības likumu dabā, ka visā visumā vienmēr dzimst vairāk zēnu nekā meiteņu, pie kam šis likums noteikts tik precīzi un ierobežots tik brīnišķīgi, ka lielumā vienmēr un visur dzimst pret 20 meitām 21 dēls jeb pret 25 meitām 26 dēli, jeb, kas ir tas pats, visos laikos dzimst uz simta 4 līdz 5 dēli vairāk nekā meitas; reti 3 līdz 6 uz simta, bet vēl retāk 7 līdz 8 uz simta. 5 uz simta vai 50 uz 1000 ir visparastāk un visbiežāk, kā tūlīt tiks pierādīts.»[153]

Līdzīgu kārtību *Süssmilch*'s redz slimību sadalījumā, mirstības gaitā pēc vecumiem u. tml. Par pēdējo likumību viņš izsakās tā: «Nekad man nebija ne jausmas par tamlīdzīgu harmoniju starp klostera ļaudīm Parīzē un mūsu Brandenburgas zemniekiem. Es brīnījos, kad es to atklāju, un manu pūļu alga bija ārkārtīgs prieks par dievišķo kārtību.»[154] Pašu šo dievišķo kārtību *Süssmilch*'s raksturo šādiem vārdiem: «Šīs kārtības lielums, pilnība un skaistums kļūst ar to jo izcilāki, ka tie ir tik pastāvīgi un vispārīgi. Tā dzīves ilgums priekš 3000 gadiem un pie tam austrumos tāds pat kā tagad. Kā Vācijā cilvēki dzimst, dzīvo un mirst, tāpat tas notiek Somijā, Zviedrijā, Anglijā, Holandē un Francijā. Esmu jau iepriekš pārliecināts, ka pārējās Eiropas zemēs, pat visā pasaulē, būs vienādi likumi... Ir gan dažreiz izņēmumi no šiem likumiem, bet es ceru, ka tie, kas iepazinušies ar citiem kārtības veidiem pasaulē, nenoliegs šo kārtību izņēmumu dēļ.»[155]

Paralēli ar darbiem, kam par pamatu bija ņemti dati no cilvēku dzīves, radās novērojumi par lielos skaitļos raksturotiem kollektīvpriekšmetiem no citu lauku — no laimes spēļu lauka, kā arī no tieši izvestiem eksperimentiem apstākļos, kas līdzīgi dažādām laimes spēlēm. Arī šeit bija radušies novērojumi, ka, atkārtojot lielā skaitā kādu spēli vai izdarot attiecī-

[153] J. R. Süssmilch, Die göttliche Ordnung, II. T. Berlin 1765, p. 241.

[154] Süssmilch, op. cit., II T., p. 295.

[155] Süssmilch, op. cit., I T., Berlin 1775, p. 51.

gus eksperimentus, tā darinātos kollektīvpriekšmetos redzama zināma vienveidība, kas ļauj lielākā vai mazākā mērā paredzēt turpmāko kollektīvpriekšmeta raksturu. Itaļu matēmatiķis *Cardano* (1501—1576) uzrakstījis darbu *De Ludo Aleae*, kurā aplūko, kādas izredzes ir dažādiem acu skaitiem, ko var uzmest ar metamiem kauliņiem. Arī pazīstamais Galilejs (1564.—1642) nodarbojās ar līdzīgu jautājumu teōrētisku noskaidrošanu — kāda spēles dalībnieka novērojumu pareizību, ka ar 3 spēļu kauliņiem 10 acis uzkrīt biežāk nekā 9 acis. Galilejs parādīja, ka uz 25 metieniem, kas dod 9 acis, nāk 27, kas dod 10 acis.[156]

Dažādi jautājumi no laimes spēļu lauka pamudināja matēmatiķus attīstīt tā saucamos *varbūtību rēķinus*, kam īstos pamatus deva *Pascal's* (1623—1662) un *Fermat* (1601—1665), bet kas lielu impulsu tālākai attīstībai un izlietošanai dabūja no *Jacob'a Bernoulli* (1654—1705). Viņa darbā *Ars conjectandi*, kas parādījās, gan ne pilnīgi pabeigts, astoņus gadus pēc autora nāves (1713), atrodama slavenā *Bernoulli* teōrēma, ko biežāk sauc par lielo skaitļu likumu, kaut gan patiesībā šo nosaukumu sāka lietot pēc *Poisson'a* (sk. tālāk) vispārinājuma.

Bernoulli teōrēma iziet uz to, lai parādītu, ka ar mēģinājumu skaita pieaugšanu pieaug arī izredzes, vai kā to citādi saka, varbūtība, ka faktiskā biežuma, t. i. kāda notikuma iestāšanās skaita attiecība pret visu mēģinājumu skaita novirzīšanās no iepriekš paredzamās — tā saucamās aprioras varbūtības jeb apriorā biežuma atradīsies noteiktu robežu starpā, un ka ar mēģinājumu skaita pieaugšanu šīs robežas pamazinās. Pie šā jautājuma vēl nāksies atgriezties, tāpēc tagad atzīmēsim vēl tikai to, ko *Bernoulli* pētījumi bija tīri teōrētiskas dabas; nebija pierādījumu, ka pieredzē tiešām tā notiks. Svarīga nozīme šiem pētījumiem bija sevišķi tad, kad tika piegriezta vērība parādībām, kas atkārtojas lielā skaitā, tā tad kollektīvpriekšmetiem jeb *lielajiem skaitļiem* un tā saucamajām notikumu varbūtībām. Tā franču matēmatiķis *Abraham's de Moivre* (1667—1754) piegriezās Ber-

[156] Westergaard und Nybölle, op. cit., p. 45.

noulli problēmai un ar lielām sekmēm apstrādāja to tālāk. Katrā ziņā lielo skaitļu likums saistījās ar varbūtību rēķiniem, kļuva pat par to sastāvdaļu, un arī mums, noskaidrojot kollektīvpriekšmetu metodi, nāksies griezties pēc pabalsta pie varbūtību rēķiniem kā kollektīvpriekšmetu metodes izpratnes veicinātājiem.

Spīdošus rezultātus varbūtības rēķinos deva *Laplace*'a (1749—1827) klasiskie darbi: *Théorie analytique des probabilités* (1812) un *Essai philosophique sur le calcul des probabilités* (1814). Pēdējā darbā *Laplace*'s dod varbūtību rēķinu teōriju bez matēmatikas simboliem. *Laplace*'a darbu pa daļai turpināja *Poisson's* (1781—1840), kuŗa pētījuma rezultāti atrodami darbā *Recherches sur les probabilités des jugements* (1837). Minētais darbs mums svarīgs sevišķi tāpēc, ka tas paplašina *Bernoulli* teōrēmu tam gadījumam, ja notikuma varbūtība nepaliek viena un tā pati visos mēģinājumos jeb gadījumos.

Līdz ar jautājumu par lielajiem skaitļiem, kas raksturo kādu kollektīvpriekšmetu, piem., miršanas gadījumu skaitu ik uz 10000 cilvēkiem gadā, rodas jautājums par tipisko skaitli jeb tipisko lielumu, jo īstenības skaitļi, būdami apmēram vienlīdzīgi, tomēr svārstās uz vienu un otru pusi. Tāpēc jāmēģina atrast skaitlis, kas vismazāk atšķiŗas no dotajiem novērojuma skaitļiem, vai citādi, lai tipiskā skaitļa novirzījumu kvadrātu summa būtu vismazākais iespējamais skaitlis. Paņēmienu, kā to atrast, izveidojis ģeniālais matēmatiķis *Gauss*'s (1777—1855), saistīdams to ar varbūtību rēķiniem, un izlicis darbā *Theoria motus corporum coelestium* (1809). Pa to laiku, sevišķi no 1830. g., krājās novērojumi kollektīvpriekšmetu laukā, zīmējoties uz iedzīvotāju skaitu, mirušo sadalījumu pēc vecumiem u. tml.

Nostiprinājās pat nepareiza doma, ka mirstība pilnīgi pastāvīga. Tāda pārliecība bija, piem., *Malthus*'am.

«Zemē, kas tur savus iedzīvotājus pie zināma standarta, ja ir dots vidējais laulību un dzimšanu skaits, būs dots arī vidējais mirušo skaits; lietojot Dr. *Heberden*'a metaforu, kanāļi, pa kuŗiem plūst lielā mirstības straume, vienmēr aizvedīs doto daudzumu. Ja apstādināsim dažus no šiem kanāļiem, ir gluži skaidra lieta (it is perfectly clear), ka mirstības straumei jātek ar lielāku spēku caur dažiem no pārējiem kanāļiem, t. i., ja iznīdēsim dažas slimības, citas kļūs proporcionāli liktenīgākas.»[157]

Uzskats par pastāvīgu mirstību pamudināja daudzus mēģināt izteikt mirstības atkarību no vecuma matēmatikas formulu veidā. Šādu formulu starpā sevišķi minama *Gompertz'a-Makeham'a* formula, ko 1825. g. uzstādījis *Gompertz's* un 1860. g. pārveidoja *Makeham's*.

Lambert Adolphe Jacques Quetelet (1796—1874) redz sociālās parādībās likumības, kas pilnīgi atgādina dabas likumus. Savu galveno darbu *Sur l'homme et le développement des ses facultés ou Essai de physique sociale* (citējumi pēc vācu tulkojuma), *Quetelet* iesāk šādiem vārdiem: «Cilvēka dzimšana, attīstība un nāve notiek pēc zināmiem likumiem, kas līdz šim nav izpētīti ne to kopībā, ne arī to savstarpīgās iedarbības ziņā.»[158]

«Ir budžeti, ko samaksā ar briesmīgu kārtīgumu, proti, cietumu, galeru un ešafotu budžets . . . Ir nodevas, ko cilvēks kārtīgāk nomaksā nekā tās, ko nodod dabai vai valsts kasei; tās ir, ko maksā noziegumam.»[159]

Pēc šī īsā vēsturiskā apskata piegriezīsimies tagad pašas metodes raksturojumam un aplūkosim vispirms kollektīvpriekšmeta jēdzienu kā precīzētu masu parādības jēdzienu.

b. Kollektīvpriekšmeta jēdziens, sadalījuma tabula un grafisks attēls.

1. Ja mums jāraksturo viens vienīgs objekts, lai tas būtu kāds būdams, tad jāuzrāda tādas pazīmes, pēc kurām šo objektu var pazīt un atšķirt no citiem līdzīgiem. Tā rodas individuālais apraksts, un pats objekts mūsu priekšā ir kā individs, piem., Archimeds, Napoleons, Parīze, mans dzīvoklis u. tml. Ja jāraksturo ne vairs atsevišķs objekts, bet jau vesela objekta

[157] T. R. Malthus, An Essay on Population, Volume one, Volume two, London, published by I. M. Dent u. Sons Ltd., pag. 181.

[158] Ad. Quetelet, Soziale Physik, Erster Band, Jena 1914, p. 101.

[159] Ad. Quetelet, Sociale Physik, Erster Band, Jena 1914, p. 107.

suga jeb šķira, tad nevar vairs uzrādīt katra atsevišķa objekta individuālās pazīmes: taisni no tām jānovēršas un jāpiegriež vērība tām raksturīgām pazīmēm, kas visiem objektiem kopējas un kas dod iespēju spriest par dotā objekta piederību vai nepiederību pie kādas sugas. Aprakstot, piem., objektu «grāmata», uzrādīsim pazīmes, kas grāmatu atšķir no vēstules, no telegrammas u. tml. Uzrādot tikai kādas sugas raksturīgās pazīmes, dabūjam sugas jēdzienu. Pieņemsim, ka kāds priekšmetu daudzums ir vienveidīgs — vai arī tiek par tādu uzlūkots — visās pazīmēs, izņemot vienu, kas mainās no objekta uz objektu. Ja šo pazīmi var izteikt skaitliski, tad tāds daudzums pieejams matēmatiskai interpretācijai. Pirmais solis šinī virzienā — daudzuma *sakārtojums* pēc šīs pazīmes, pie kam jāabstrahējas no visām citām pazīmēm un jāpatur vērā tikai šī viena. Ja neņemtu vērā arī šis vienas pazīmes, tad būtu darīšana ar vienveidīgām vienībām, kā tas ir skaitīšanas procesa pamatos. Tā, piem., abstrahējoties no pazīmēm, kas atšķir vienu cilvēku no otra, varam skaitīt vienkārši cilvēkus; pievienojot kādu pazīmi, piem., vīriešu dzimumu, varam izdalīt no visas saskaitīto cilvēku masas vienā ziņā homogenu grupu — vīriešus, pārējā daļā paliks homogena grupa — sievietes. Var ņemt arī kādu citu pazīmi, piem., 20 gadu vecumu un iedalīt vienā grupā personas, kas jaunākas par 20 gadiem, otrā grupā personas, kas taisni 20 g. vecas un vecākas par 20 gadiem. Varam sagrupēt vairākās daļās, piem., pēc vecumiem: personas vecumā līdz 1 gadam, vecumā no 1 līdz 2 gadiem, no 2 g. līdz 3 g. u. t. t.

Tā nonāk pie šādas definīcijas: *par kollektīvpriekšmetu sauksim vienveidīgu objektu daudzumu, ko var sakārtot pēc mainīgas, skaitliski tveramas pazīmes.*[160]

2. Atsevišķos objektus sauc par kollektīva l o c e k ļ i e m, e k s e m p l ā r i e m, jeb v a r i a n t ā m, to skaitu par kollektīvu a p j o m u. Locekļi var rasties vai no pašas lietas dabas vai arī veidoti patvaļīgi. Tā, piem., kādā gadā iesaucamie jaunkareivji ir kollektīvpriekšmets, kuŗa variantas ir

[160] Dr. H. Bruns, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmasslehre, Leipzig und Berlin 1906, p. 16.

atsevišķas personas; tās var kārtot, piem., pēc augumiem, dzimšanas vietām u. tml., kas tad būs kārtotāja pazīme, un šinī gadījumā izriet no lietas dabas. Ja kārtotāja pazīme ir kvantitātīvas dabas, ko var konstatēt ar skaitīšanu, svēršanu, mērīšanu u. tml., tad skaitliskās interpretācijas iespēja dota tieši; citos gadījumos — pastāvot k v a l i t ā t ī v ā m pazīmēm — var bieži mākslīgi panākt skaitlisko interpretāciju, pagatavojot kārtotājas pazīmes paveidu skālu un saistot to ar skaitļiem, kā tas ir, piem., ar minerālu cietuma skālu. Mainīgo skaitli x, kas ar savām atsevišķām nozīmēm raksturo kārtotāju pazīmi, sauc par kollektīvpriekšmeta a r g u m e n t u jeb k ā r t ī b a s l i e l u m u. Arguments var mainīties lēcieniem, kā tas ir, piem., skaitīšanas gadījumos, vai arī var mainīties nepārtraukti. Pirmā gadījumā arī kollektīvpriekšmetu sauc par p ā r t r a u k t u, otrā par n e p ā r t r a u k t u. Pārtraukta kollektīvpriekšmeta kārtojums notiek tā, ka ikvienai atsevišķai argumenta nozīmei x_i piekārto skaitli y_i, kas dod šīs atsevišķās nozīmes eksemplāru skaitu.

Nepārtraukta kollektīva kārtošanai sadala iespējamo argumenta nozīmju lauku intervāllos (x_i, x_{i+1}) un katram intervāllam, kam sava vērtība, piekārto attiecīgo eksemplāru skaitu y_i. Parasti ņem vienlīdzīgus intervallus un par to argumenta nozīmi ņem intervalla vidējo nozīmi $\frac{x_i + x_{i+1}}{2} = x_i$ un tam piekārto attiecīgu y_i. Argumenta nozīmes x_i, kas atdala intervallus citu no cita sauc par m a i ņ a s p u n k t i e m.

Skaitlis y_i izteic eksemplāru a b s o l ū t o b i e ž u m u, kuriem argumenta nozīme x_i (tieši vai kā intervalla pārstāvja). Īsāk saka, ka y_i ir x_i absolūtais biežums. Dalījumu $\frac{y_i}{n} = z_i$, kur n ir kollektīvpriekšmeta eksemplāru skaits, sauc par r e l ā t ī v o b i e ž u m u.

No apzīmējumiem izriet, ka visu $y_1, y_2, \ldots, y_n$ summa Σy_i ir vienlīdzīga ar n, t. i. $\Sigma y_i = n$ un $\Sigma z_i = 1$.

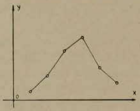
Kollektīvpriekšmetu s a v ā k t nozīmē noskaidrot katram eksemplāram atbilstošo argumenta nozīmi un šīs nozīmes, kā tās radušās, ierakstīt listē. Nepārtrauktiem kollektīvpriekšmetiem ieraksta listē parasti ne īsto, bet noapaļoto argumenta nozīmi, tā ka līdz ar savākšanu veidojas arī jau intervalls. Ja piekārtotais arguments ir personas vecums, tad noapaļojums parasti ir uz apakšu un augšu pusgads, tā ka ar vecuma x_i apzīmē visu to personu vecumu, kas ir starp $x_i = x_i - \frac{1}{2}$ un $x_{i+1} = x_i + \frac{1}{2}$ mūža gadiem.

Savāktie tādā kārtā dati dod tā saucamo kollektīvpriekšmeta *pirmlisti*, kas der par pamatu tā sakārtojumam. No tās vēl nevar redzēt, kā *sadalītas* novērotās pazīmes vērtības uz atsevišķiem locekļiem. Tāpēc tālāk argumentus vai argumentu intervallus sakārto to dabiskā rindā, sākot ar mazāko, un līdzās tiem atzīmē absolūto biežumu y vai relātīvo biežumu z. Tā rodas kollektīvpriekšmeta sadalījuma tabula kā tā pirmais apraksts:

variantas	biežumi	relātīvie biežumi
x_1	y_1	(z_1)
x_2	y_2	(z_2)
x_3	y_3	(z_3)
...	...	...
x_n	y_n	(z_n)

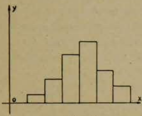
Sadalījuma tabula tūlīt rāda lielāko un mazāko vērtību kollektīvpriekšmetā sastopamajām nozīmēm. Šīs vērtības norobežo kollektīvpriekšmeta v a r i ā c i j a s i n t e r v a l l u. Intervalla plašumu sauc par v a r i ā c i j a s p l a š u m u jeb variācijas t ā l u m u.

3. Ja atzīmēsim argumenta nozīmes ar punktiem uz horizontālas taisnes un biežumu nozīmes ņemsim kā attiecīgo punktu ordinātas, tad pārtraukta argumenta gadījumā dabūsim punktu rindu. Ja punktus savienosim ar taisnēm, tad rodas b i e ž u m a p o l i g ō n s, kā tas redzams, piem. 21. att.

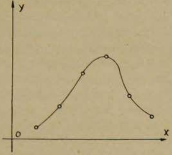


21. att.

Ja arguments ir nepārtraukts, tad y_i vai z_i pieder visam intervallam un sadalījuma attēls dod kāpņu veida figūru, kā tas redzams 22. att. Ja punktus savieno tā, lai rastos atbilstoša līkne, tad dabūjam kollektīvpriekšmeta sadalījuma līkni (23. att.).



22. att.



23. att.

c. Kollektīvpriekšmeta raksturīgie lielumi jeb mēri.

α. Stāvokļa mēri.

1. Kollektīvpriekšmeta apraksts ar sadalījuma tabulām un biežuma poligōniem vai biežuma līknēm dod pirmos priekšstatus par kollektīvpriekšmetu, tomēr ar visu to vēl nepietiek, lai varētu īsi un ērti raksturot kollektīvpriekšmetu un sevišķi salīdzināt kollektīvpriekšmetus savā starpā. Šim nolūkam der kollektīvpriekšmeta raksturīgie lielumi jeb mēri, un pēdējo starpā vispirms kā stāvokļa mēri — dažādi *vidējie lielumi*. Par vidējo lielumu vispār sauc tādu, kas neiziet no doto lielumu rindas. Vidējo lielumu starpā sevišķu vērību pelna vidējais aritmētiskais skaitlis.

Par kādas atsevišķu skaitļu rindas vienkāršo vidējo aritmētisko skaitli sauc dalījumu, ko dabū, dotās rindas skaitļus dalot ar skaitļu skaitu. Tā, piem., vidējais aritmētiskais dzimušo skaitlis Latvijā, laika sprīdī no 1926.—1930. g., izteiksies kā visu dzimušo summa, dalīta ar 5, t. i., ka (41 073 + 41 610 + 39 126 + 35 673 + 37 835) : 5 = 39 063.

Vienkāršo vidējo aritmētisko skaitli kā kollektīvpriekšmeta stāvokļa mēru jeb tipisko lielumu aprēķina parasti tikai tādu skaitļu rindai, kur skaitļiem ir vienāds tā saucamais svars. Pretējā gadījumā vienkāršo aritmētisko vidusskaitlī nevarēs uzlūkot kā īsto mēru jeb tipisko lielumu. Piem., ja jāatrod fabrikas strādnieka vidējā dienas alga pēc šādiem datiem: pilsētā trīs fabrikas, vienā strādā 1200 strādnieku un katrs saņem Ls 4,— dienā, otrā 200 strādnieku un katrs saņem Ls 3,— dienā un trešajā strādā 100 strādnieku un katrs saņem Ls 2,75 dienā, tad algu vienkāršais aritmētiskais vidusskaitlis izteiksies kā $\frac{4 + 3 + 2{,}75}{3} = 3{,}25$. Saprotams, da dabūtais skaitlis nebūs īstais mērs — nedos pareiza jēdziena par šīs pilsētas fabrikas strādnieku vidējo dienas algu, jo tādu strādnieku, kas saņem dienā Ls 4,— ir daudz vairāk nekā tādu, kas saņem mazāk par Ls 4,—. Šinī un līdzīgos gadījumos stāvokļa mēru kā tipisko lielumu dos tā saucamais svērtais vidusskaitlis, ko dabūjam tā.

Pieņemsim, ka mums dotas kāda lieluma kvantitātīvās pazīmes, t. i. skaitļu rinda, kas raksturo šo lielumu, jeb citiem vārdiem, variantas

$$x_1, x_2 \, . \, . \, . \, , x_n$$

un skaitļi, kas rāda, cik bieži šīs rariantas sastopamas, t. i. doti variantu biežumi

$$y_1, y_2 \, . \, . \, . \, , y_n$$

tad par rindas $x_1, \ldots x_n$ svērto vidējo aritmētisko skaitli M sauc sadalījumu, ko dabū, dalot lielumu x un attiecīgo biežumu y reizinājumu summu ar biežumu summu, t. i.

$$M = \frac{x_1 y_1 + x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n}{y_1 + y_2 + \ldots + y_n} = \frac{\Sigma x_i y_i}{\Sigma y_i} \text{ vai}$$

vēl vienkāršāk

$M = \frac{\Sigma xy}{\Sigma y}$; vidējo aritmētisko skaitli apzīmē arī ar $\bar{x}$.

Iepriekšējā piemērā minētā vidējā dienas alga pēc šī paņēmiena iznāk

$$M = \frac{1200 \, . \, 4 + 200 \, . \, 3 + 100 \, . \, 2{,}75}{1500} = 3{,}78,$$

kas attēlo daudz labāk īstenību, jo konkrēti, tā būs alga, ko saņemtu katrs strādnieks, ja visu strādnieku peļņu sadalītu vienlīdzīgi visu 1500 strādnieku starpā.

Aritmētiskā vidusskaitļa aprēķināšanai pastāv īpaši paņēmieni, kas atvieglo aprēķinus, bet tas ir speciāls jautājums, ko šeit neaplūkosim.

Vidējam aritmētiskajam (svērtajam) skaitlim atzīmējama vispirms šāda svarīga īpašība — tā s t a b i l i t ā t e: ja vidējais aritmētiskais skaitlis aprēķināts kādam kollektīvpriekšmetam, kuŗa apjoms pietiekoši liels, tad katram citam līdzīgam kollektīvpriekšmetam ar pietiekoši lielu apjomu var ar lielu varbūtību sagaidīt aritmētisko vidusskaitli, kas maz atšķirsies no pirmā. Bez tam vidējā aritmētiskā skaitļa citas galvenās īpašības šādas

1) visu variantu novirzījumu algebriskā summa no vidējā aritmētiskā skaitļa ir nulle, t. i.
$$\Sigma y_i\,(x_i - M) = 0.$$
2) minēto novirzījumu kvadrātu summa $\Sigma y_i\,(x_i - M)^2$ ir vismazākā, salīdzinot ar novirzījumu kvadrātu summu no kaut kāda cita lieluma.

Vidējais aritmētiskais skaitlis kā tipisks lielums viegli saprotams un aprēķināms, noteikts, parocīgs aritmētiskām un algebriskām operācijām. Tas bazējas uz visiem kollektīvpriekšmeta datiem.

2. Par citu kollektīvpriekšmeta stāvokļa mēru un līdz ar to tipisku lielumu var pieņemt c e n t r ā l l i e l u m u jeb m e d i ā n u: tas ir variantas lielums, kas dala sakārtotā kollektīvā apjomu divās vienlīdzīgās daļās: variantas, kas mazākas par medianu, kopsummā sastopamas tik pat bieži kā variantas, kas lielākas par medianu; medianu parasti apzīmē ar C.

Vispār par kādu skaitļu rindas mediānu jeb centrālo skaitli pirmā tuvinājumā sauc vidējo skaitli pēc lielumiem sakārtoto skaitļu rindā. Ja skaitļu skaits ir pāŗu skaitlis un abi vidējie skaitļi nevienlīdzīgi, tad par mediānu pieņem šo vidējo skaitļu aritmētisko vidusskaitli. Precīzāk, skaitļu rindas $y_1, y_2, \ldots, y_n$ mediāna ir skaitlis, ko atrod no vienādojuma:
$$(C - y_1)\ (C - y_2) \ldots (C - y_k) = (y_{k+1} - C)\ \ (y_{k+2} - C) \ldots$$
$$\ldots (y_n - C),$$ kur $y_1, y_2, \ldots, y_k$ ir rindas zemākās puses skaitļi un $y_{k+1}, y_{k+2}, \ldots, y_n$ ir augstākās puses skaitļi.[161]

[161] H. L. Rietz, Handbuch der mathematischen Statistik. Herausgegeben von Dr. Franz Baur, Leipzig u. Berlin 1930, p. 10.

Piem., skaitļu rindai 3, 8, 10, 15 mediāna ir $\frac{8+10}{2} = 9$

No vienādojuma $(m-3)(m-8) = (10-m)(15-m)$ arī atrodam, ka $m = 9$.

3. No citiem vidējiem lielumiem būtu minami vēl mode jeb visbiežāk sastopamā varianta, tad ģeometriskais vidusskaitlis un harmoniskais vidusskaitlis.

Visi šie vidējie lielumi ir ar savām īpatnībām — savām labajām un sliktajām pusēm, kuŗu aplūkošanai šeit nav nozīmes.

β. Izklaides mēri.

1. Vidējie skaitļi vēl nedod pilnīgu pārskatu par kollektīvpriekšmeta sadalījumu. Tā, piem., vidējais aritmētiskais skaitlis 100 var rasties no rindas: 90, 120, 90 un arī no rindas 20, 260, 20. Pirmajā rindā visi locekļi diezgan tuvi vidējam aritmētiskajam — *izklaide* jeb *dispersija* nav liela; otrā rindā tas pavisam citādi — tur izklaide ir liela. Jāatrod tāpēc lielums, kas raksturo izklaidi.

Visbiežāk lietojamais izklaides mērs ir vidējais kvadrātiskais novirzījums, ko bieži sauc vienkārši par vidējo novirzījumu vai arī standartnovirzījumu (pēc *K. Pearson*'a priekšlikuma).

Ja apzīmēsim variantas ar $x_1, x_2, \ldots, x_n$, to attiecīgos biežumus ar $y_1, y_2, \ldots, y_n$, vidējo aritmētisko ar M, starpības $x_1 - M_1$, $x_2 - M$, $x_3 - M$, $\ldots, x_n - M$ ar $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_n$, tad vidējais kvadrātiskais novirzījums σ_x izteicas tā:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\Sigma y_i \delta_i^2}{n}}$$

Vienkāršāku aprēķinu nolūkā σ_x var izteikt arī tā

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\Sigma y_i (x_i - A)^2}{n} - (M-A)^2},$$

kur A ir kāds skaitlis, parasti tuvs vidējam aritmētiskam, bet noapaļots tā, lai starpības $x_i - A$ izteiktos ar nedaudz zīmīgiem cipariem.

Beidzamā σ_x izteiksme starp citu, rāda, ka variantas novirzījumu kvadrātu summa no kaut kāda cita skaitļa ir lielāka nekā no vidējā aritmētiskā, jo tikai šinī gadījumā otrais loceklis $(M - A)^2$ zem saknes ir nulle un tā tad pirmajam loceklim zem saknes vismazākā skaitliskā nozīme.

Jo *lielāks vidējais kvadrātiskais novirzījums*, jo lielāka kollektīvpriekšmeta *izklaide* un otrādi.

2. Izklaides raksturojumam par citu lielumu pieņem caurmēra novirzījumu, par kuru sauc aritmētisko vidējo no variantu novirzījumu absolūtām vērtībām, ņemot novirzījumu no kaut kāda vidējā skaitļa, parasti no M vai no C. Apzīmējot caurmēra novirzījumu no mediānas ar μ, saskaņā ar apzīmējumu dabūjam:

$$\mu = \frac{\Sigma \mid x_i - C \mid}{n} = \frac{\mid x_1 - C \mid + \mid x_2 - C \mid + \ldots, + \mid x_n - C \mid}{n}$$

Vidējais kvadrātiskais un caurmēra novirzījums ir tipiskie lielumi, kas raksturo kollektīvu no izklaides viedokļa.

Vairāku kollektīvu dispersiju salīdzināšanai der relātīvais izklaides mērs, par kādu *K. Pearson*'s licis priekšā pieņemt variabilitātes koeficientu V šādā veidā:

$$V = 100 \cdot \frac{\sigma_x}{M}$$

3. Lai raksturotu variantu sadalījuma *formu*, visērtāk uzrādīt tā novirzījuma pakāpi no simmetrijas. Pēc *Pearson*'a priekšlikuma par sadalījuma *šķībuma* mēru pieņem dalījumu

$$\frac{M - Mo}{\sigma_x}$$

kur M ir vidējais aritmētiskais, Mo — mode jeb visbiežākais skaitlis un σ_x vidējais kvadrātiskais novirzījums.

Kreisās simmetrijas gadījumā M — Mo un līdz ar to šķībums ir pozitīvs, labās asimmetrijas gadījumā šķībums ir negātīvs. Lai apsvērtu dabūto mēru drošību, jāaprēķina to vidējās kļūdas, kas, piem., vidējam aritmētiskajam skaitlim

izteicas kā $\pm \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$ un vidējam kvadrātiskajam novirzījumam kā $\pm \frac{\sigma_x}{\sqrt{2n}}$

d. Relātīvais biežums un varbūtība. Varbūtību rēķinu pamatjautājumi.

1. Tālākie kollektīvpriekšmetu pētījumi iziet uz to, lai noskaidrotu, vai kollektīvpriekšmeta sadalījums nepakļaujas kādam *noteiktam sadalījuma likumam*. Šeit palīgā nāk varbūtību rēķini, dodot teōrētiski konstruētus kollektīvpriekšmetus — reālo kollektīvpriekšmetu ideāltipus, kuriem sadalījumu var noteikt a priori, un ar kuriem tad var salīdzināt reālo sadalījumu, pie kam to var izteikt ar kādu funkciju. Redzējām, ka novērojumi, kas izteicas lielos skaitļos, rāda zināmas likumības, dod zināmus stabilus skaitļus. Šāda stabilitāte zīmējas it seviški uz skaitļu attiecībām, piem., dzimušo zēnu skaita attiecību pret dzimušo meiteņu skaitu u. tml.

Kāda notikuma atkārtošanās skaitu, kā jau aizrādīts, sauksim par šā notikuma *biežumu*, piem., dzimstības biežums 1926. g. Latvijā ir 41073. Ja no kādas notikumu rindas izdalīsim kādu īpatnēju notikumu ar savām specifiskām pazīmēm, piem., no visu dzimušo skaita izdalīsim dzimušo zēnu skaitu, tad dabūsim šā notikuma biežumu u. tml. Kāda notikuma rašanās skaita attiecību pret visu novērcto gadījumu skaitu, kur notikums varēja rasties vai nerasties, sauc, kā jau minējām, par notikuma relātīvo biežumu. Tā, piem., 1926. g. Latvijā dzimušo zēnu relātīvais biežums izteiksies kā $\frac{21038}{41073} = 0{,}512$.

Quetelet vilka no trauka, kur bija 40 baltu un 40 melnu bumbiņu, pa vienai bumbiņai un lika izvilkto atpakaļ 4096 reizes, atzīmējot izvilkto bumbiņas krāsu. Izrādījās, ka baltā bumbiņa bija izvilkta 2066 reizes un melnā 2030 reizes. Tā tad baltās bumbiņas relātīvais biežums izteiksies kā $\frac{2066}{4096} = 0{,}504 \approx \frac{1}{2}$.

Daudzi un dažādi līdzīgi piemēri ļauj izteikt šādu eksperimentālu likumu, ko var saukt par nejaušību likumu *(la loi expérimentale du hasard)*.[162]

[162] Frechet et A. Halbwachs, Le calcul des probabilités à la portée de tous, Paris 1924, p. 8

Kad noteiktā mēģinājumu (vispār novērojumu) rindā kāds notikums iestājas zināmā skaitā, tad šī notikuma relātīvais biežums ļoti lielām skaitliskā ziņā mēģinājumu (vai vispār novērojumu) grupām mainās maz, citiem vārdiem, to gadījumu skaits, kur notikums iestājas (t. i. šī notikuma biežums) paliek jūtami proporcionāls ar mēģinājumu vai novērojumu skaitu. Esam jau minējuši par ideālizāciju nozīmi dažādās zinātnes nozarēs. Arī kollektīvpriekšmetu mērīšanas metodei izdevīgi lietot kādu ideālizāciju — notikuma relātīva biežuma ideālizāciju, ko sauksim par notikuma varbūtību. Pie šās ideālizācijas nonākam šādā ceļā.

3. Turpmāk īsuma labad apzīmēsim tiklab mēģinājumus, kā vispār novērojumus ar vārdu «mēģinājumi». Novērojumi rāda, ka kāda notikuma relātīvie biežumi, kas novēroti dažādās mēģinājumu grupās, atšķiras cits no cita mazāk, jo lielākas skaitliskā ziņā šīs grupas. Pieņemsim, ka mēģinājumu skaits kādā mēģinājumu laukā var augt neaprobežoti, jeb, kā citādi saka, tuvoties bezgalībai, piem., var izdarīt neaprobežoti daudz metienu, pie kam uzmetas 1, 2, 3, 4, 5, vai 6 acis. Tad dabūtie relātīvie biežumi arvienu vairāk tuvosies kādam skaitlim, ko sauc par notikuma varbūtību.

Quetelet mēģinājumā, kā redzējām, baltās bumbiņas izvilkšanas relātīvais biežums no trauka, kur bija vienāds balto un melno bumbiņu skaits, ir tuvs lielumam $\frac{1}{2}$, pie kam mēģinājumi rāda, ka balto bumbiņu izvilkšanas relātīvais biežums jo vairāk pieiet lielumam $\frac{1}{2}$, jo lielāks mēģinājumu skaits. Tāpēc $\frac{1}{2}$ šinī gadījumā var uzlūkot par baltās vai melnās bumbiņas izvilkšanas *varbūtību* kā relātīvā biežuma robežlielumu (limitu), ja mēģinājumu skaits tiecas uz bezgalību.

Šādu varbūtību parasti sauc par aposterioro varbūtību. Tā tad par notikuma varbūtību kādā mēģinājumu rindā sauc skaitli, kuŗa aptuvenu nozīmi dabū, aprēķinot notikuma relātīvo biežumu kādā mēģinājumu grupā. Tāpēc, noteicot kāda notikuma varbūtību, svarīgi noteikt mēģinājumu rindu, uz ko zīmējās šī definīcija. Atkarībā no veida, kā noteikta mēģinājumu rinda, atkarāsies arī varbūtība. Piem., izteicot kāda cilvēka miršanas varbūtību, varam uzlūkot šo cilvēku kā vīrieti pārējo vīriešu starpā vai arī kā 40 gadu vecu personu pārējo 40 g. vecu personu starpā, vai arī kā kādas profesijas darbinieku u. tml. Visos minētos gadījumos mirstības biežums būs citāds, jo zīmēsies uz dažādiem notikumiem: vīrieša miršanu, 40 g. vecas personas miršanu, zināmas profesijas darbinieka miršanu noteiktā laikā.

Tā tad «nav runa par kādu notikumu, ņemtu pašu par *sevi*, bet gan par notikumu, cik tālu tas ir atsevišķs objekts, eksemplārs vienveidīgu notikumu rindā, kas, iestājas, pastāvot dotajiem nosacījumiem, un tas, kas tiek izteikts, ir arvienu šā visus līdzīgus iespējamus notikumus aptveroša jēdziena īpašība.»[163]

Sauksim gadījumu par *labvēlīgu*, ja kāds notikums iestājas, par *nelabvēlīgu*, ja notikums neiestājas. Sauksim par *vienlīdzīgi iespējamiem* gadījumiem kādam notikumam gadījumus, kuŗu varbūtības šim notikumam ir vienlīdzīgas. Ja nu tagad ir zināms vai arī to pieņemam kā hipotezi, ka no n gadījumiem kādam notikumam labvēlīgu gadījumu ir m, pie kam gadījumi ir vienlīdzīgi iespējami un savstarpīgi cits citu izslēdz, tad notikuma rašanās varbūtības izteicas kā $\frac{m}{n}$ t. i., kā *labvēlīgo gadījumu skaita dalījums ar vispār iespējamo gadījumu jeb mēģinājumu skaitu*. Tā nonākam pie tā saucamās *apriorās* varbūtības, ko var dažreiz aprēķināt pirms mēģinājumiem, ja zināms vispāriespējamo un labvēlīgo gadījumu skaits, un gadījumi ir vienlīdzīgi iespējami un cits citu izslēdz.

Piem., ja kādā traukā, kā tas bijis *Quetelet* mēģinājumā, ir 40 baltas un 40 melnas bumbiņas, tad velkot kā pagadās 1 bumbiņu, dabūjam 80 vienlīdzīgi iespējamus gadījumus, kuŗu starpā baltas bumbiņas izvilkšanai ir 40 labvēlīgu gadījumu. Tāpēc baltās bumbiņas izvilkšanas varbūtība izteiksies kā $\frac{40}{80} = \frac{1}{2}$. Pietiekoši liels mēģinājumu skaits dod, kā jau mi-

[163] G. Helm, Die Wahrscheinlichkeitslehre als Theorie der Collektivbegriffe, Annalen der Naturphilosophie, Erster Band 1902, p. 367.

nēts, baltās bumbiņas izvilkšanas relātīvo biežumu, tuvu skaitlim $\frac{1}{4}$. Tā tad notikuma varbūtība ir relātīvā biežuma ideālizācija, ar kuŗu, rīkojoties tīri teorētiski, var dabūt dažādas likumības, kas zīmējas uz šām ideālparādībām, pie kam reālo kollektīvpriekšmetu īpašības lielākā vai mazākā mērā tuvosies teorētiski dabūtajam kā savam ideāljēdzienam. Teorētiski pieminētās īpašības dod varbūtību rēķini. No visa šo rēķinu plašā lauka mēs kollektīvpriekšmetu raksturošanai atzīmēsim tikai pašu nepieciešamāko.

4. Vispirms atzīmējamas divas teorēmas: varbūtību saskaitīšanas un varbūtību reizināšanas teorēma:

1. Varbūtība iestāties kaut kuŗam no vairākiem nesavietojamiem notikumiem, bez norādījuma, kuŗam īsti, ir vienlīdzīga ar atsevišķo notikumu varbūtību summu. Piem., ja urnā 8 baltas, 7 melnas un 4 sarkanas bumbiņas, tad varbūtība izvilkt balto bumbņu ir $\frac{8}{19}$, melno $\frac{7}{19}$ un sarkano $\frac{4}{19}$; varbūtība izvilkt balto vai sarkano bumbiņu izteiksies kā $\frac{8}{19}+\frac{4}{19}+\frac{12}{19}$. Šo teorēmu bieži lieto šādā gadījumā. Pieņemsim, ka kāda notikuma iestāšanās varbūtība ir p, neiestāšanās varbūtība q; pēc saskaitīšanas teorēmas varbūtība, ka notikums iestāsies vai neiestāsies, izteicas kā $p+q$, bet līdz ar to šī summa ir 1, jo katrā ziņā vienai no šīm iespējām jāreālizējas. Tā tad $p+q=1$ *un* $p=1-q$.

2. Varbūtība, ka vairākiem neatkarīgiem notikumiem jānotiek visiem vienlaiku vai citam pie cita, izteicas kā šo notikumu varbūtību reizinājums. Piem., ja vienā urnā ir 3 baltas un 8 melnas bumbiņas un otrā 11 baltas un 13 melnas bumbiņas, tad varbūtība, velkot no katras urnas pa bumbiņai, izvilkt abas baltās, izteiksies kā $\frac{3}{11}\cdot\frac{11}{24}=\frac{1}{8}$. Varbūtība, metot kā pagadas naudas gabalu, uzmest trīs reizes pēc kārtas rakstu, izteiksies kā $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$. Vispār varbūtība, ka kāds

notikums ar varbūtību p atkārtosies n reizes no vietas, ja mēģinājumu nosacījumi nemainās, t. i. ja notikuma varbūtība nemainās, izteiksies kā p^n.

e. Kollektīvpriekšmeta mēri un varbūtību rēķinu lielumi. Variantu grupējums ap vidējo aritmētisko normālajā sadalījumā.

Dabūtais aposteriorās varbūtības jēdziens stipri analoģisks ar kāda fizikas lieluma jēdzienu, jo arī fizikas lieluma nozīmi tieši no novērojumiem (no mērījumiem) var dabūt tikai aptuvumis.

Tā tad notikuma relātīvos biežumus, ko apzīmēsim ar $f_1, f_2, \ldots, f_n$, var uzlūkot kā aptuvenās nozīmes notikuma varbūtībām $p_1, p_2, \ldots, p_n$ aplūkojamā mēģinājumu rindā, ja vien katras atsevišķas mēģinājumu grupas mēģinājumu skaits ir pietiekoši liels un grupas mēģinājumu vai novērojumu rindā ņemtas kā pagadās. Tad arī jau minētie lielumi: mediāna, vidējais aritmētiskais, caurmēra novirzījums un vidējais kvadrātiskais novirzījums, ko dabūs kādā atsevišķā mēģinājumu vai novērojumu grupā, būs aptuvumis vienlīdzīgi ar tādiem, kas nav atkarīgi no grupu izvēles mēģinājumu rindā.

Tiešām, apzīmēsim vidējo aritmētisko skaitli ar M, mediānu ar C, caurmēra novirzījumu ar μ un vidējo kvadrātisko novirzījumu ar σ.

Vidējo svērto aritmētisko skaitli skaitļu grupai var aprēķināt, zinot skaitļu atsevišķās nozīmes un relātīvos biežumus (nav vajadzīgs zināt mēģinājumu skaitu).

Tā kā $M = \frac{y_1x_1 + y_2x_2 + \ldots + y_nx_n}{n} = \frac{y_1}{n}x_1 + \frac{y_2}{n}x_2 + + \ldots + \frac{y_n}{n}x_n$, un $\frac{y_1}{n} = f_1, \frac{y_2}{n} = f_2, \frac{y_n}{n} = f_n$, *tad*

$$M = x_1f_1 + x_2f_2 + \ldots + x_nf_n.$$

Ja mēģinājumu skaits pietiekoši liels, tad relātīvie biežumi $f_1, f_2, \ldots, f_n$ būs tuvi varbūtībām $p_1, \ldots, p_n$ un tāpēc izteiksme $x_1f_1 + x_2f_2 + \ldots + x_nf_n$ būs tuva izteiksmei $x_1p_1 + \ldots + x_np_n$. Tā tad, ja zinām notikuma varbūtības, tad vidējo aritmētisko skaitli var atrast arī tā:

$$M = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n.$$

Izteiksmi $x_1p_1 + x_2p_2 \ldots + x_np_n$ varbūtību rēķinos sauc par lieluma X matemātisko cerību, kur $x_1, x_2 \ldots, x_n$ iespējamās lieluma X nozīmes, t. i. lieluma X variantas un $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ir attiecīgās varbūtības, ka lielums X pieņems nozīmes $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Vispār par kāda lieluma matemātisko cerību sauc reizinājumu summu, kur reizinājumi sastādās no lieluma iespējamām nozīmēm, reizinātām ar attiecīgo varbūtību. Tā tad matemātiskai cerībai ar svērto aritmētisko vidējo skaitli ir analoģiskas izteiksmes.

2. Piegriezīsimies tagad mediānai. Pieņemsim, ka kāda notikuma relātīvie biežumi ir $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Sastādīsim pakāpeniski summas no pirmajiem relātīviem biežumiem, t. i. summas f_1, $f_1 + f_2$; $f_1 + f_2 + f_3$ u. t. t.; visu biežumu summa $f_1 + f_2 + \ldots + f_n$ ir 1. Ņemot pietiekoši lielu biežumu skaitu par saskaitāmiem, dabūsim summu, kas pārsniegs $\frac{1}{2}$. Pieņemsim, ka pirmā summa, kas pārsniedz $\frac{1}{2}$, ir $f_1 + f_2 + \ldots + f_k$; tad lieluma X nozīme x_k ir mediāna mēģinājumu vai novērojumu grupā G.

Tas nozīmē, ka $f_1 + f_2 + \ldots + f_{k-1} \leqslant f_k + f_{k+1} + \ldots + f_n$ un $f_1 + f_2 + \ldots + f_k \geqslant f_{k+1} + \ldots + f_n$.

Ja mēģinājumu skaits grupā G pietiekoši liels, tad relātīvie biežumi būs tuvi attiecīgajām varbūtībām, un tāpēc arī

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_{k-1} \leqslant p_k + \ldots + p_n$$

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_k \geqslant p_{k+1} + \ldots + p_n.$$

Tā kā varbūtībai p_k atbilst lieluma X nozīme x_k, tad iznāk, ka ir tikpat varbūtīgi, ka lieluma X nozīme būs mazāka par x_k vai vienlīdzīga ar to, vai arī lielāka par x_k vai vienlīdzīga ar x_k, jo varbūtību summa $p_1 + p_2 + \ldots + p_{k-1} \leqslant \frac{1}{2}$ un varbūtību summa $p_k + p_{k+1} + \ldots + p_n \geqslant \frac{1}{2}$, bet varbūtība $\frac{1}{2}$ nozīmē to, ka kāds notikums var tiklab reālizēties kā nereālizēties, šinī gadījumā var tiklab reālizēties kāds no lielumiem $x_1, x_2, \ldots, x_k$ vai arī nereālizēties, t. i. var reālizēties arī kāds no lielumiem $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$.

Tā tad pietiekoši lielai mēģinājumu grupai mediānu var saukt par šīs grupas *varbūtīgo lielumu.*

Tā kollektīvpriekšmeta stāvokļa mēru jeb tipisko lielumu nozīmes saistās ar varbūtību rēķiniem.

3. Izdevīgi saistīt arī izklaides mērus ar varbūtību rēķinu jēdzieniem.

Pieņemsim, ka lielums X var pieņemt nejaušas nozīmes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ar biežumiem $y_1, y_2, \ldots, y_n$ un ka a ir kāds patstāvīgs skaitlis. Tad vidējais novirzījums no a izteicas kā:

$$\frac{y_1 |x_1 - a| + y_2 |x_2 - a| + \ldots + y_n |x_n - a|}{n} =$$

$$= f_1 |x_1 - a| + f_2 |x_2 - a| + \ldots + f_n |x_n - a|.$$

Mēģinājuma skaitam pieaugot neaprobežoti, šī izteiksme tiecas pret

$$p_1 |x_1 - a| + p_2 |x_2 - a| + \ldots + p_n |x_n - a|.$$

Var pierādīt, ka varbūtība, lai X novirzījums no a būtu mazāks vai vienlīdzīgs ar t reiz ņemtu vidējo novirzījumu no a, būs lielāka vai vienlīdzīga ar $\frac{1}{t}$, un ka vismazākais novirzījums lielumam X no a būs tad, kad a vietā ņemsim X'a varbūtīgo lielumu (mediānu).

Vidējais kvadrātiskais novirzījums lielumam X no a izteicas kā

$$\sqrt{\frac{y_1 (x_1 - a)^2 + y_2 (x_2 - a)^2 + \ldots y_n (x_n - a)^2}{n}} \text{ jeb}$$

$$\sqrt{f_1 (x_1 - a)^2 + f_2 (x_2 - a)^2 + \ldots + f_n (x_n - a)^2}.$$

Ja mēģinājumu skaits aug bezgalīgi, tad šī izteiksme tuvosies lielumam

$$\sqrt{p_1 (x_1 - a)^2 + p_2 (x_2 - a)^2 + \ldots + p_n (x_n - a)^2}.$$

Var pierādīt, ka varbūtība, ka X novirzījums no a būs vienlīdzīgs ar t reiz ņemtu vidējo kvadrātisku novirzījumu vai pārsniegs to, nebūs lielāka par $\frac{1}{t^2}$ (*Bienaymé* — Čebiševa lemma). Ja a vietā ņem vidējo aritmētisko skaitli, tad dabū vidējo kvadrātisko novirzījumu šādā veidā

$$\sigma_x = \sqrt{f_1 (x_1 - M)^2 + f_2 (x_2 - M)^2 + \ldots + f_n (x_n - M)^2},$$

kādā vidējo kvadrātisko novirzījumu parasti lieto, jo tad, kā jau minēts, σ_x ir vismazākais skaitlis.

Mēģinājumu skaitam augot neaprobežoti, dabūsim

$$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - M)^2 + p_2 (x_2 - M)^2 + \ldots + p_n (x_n - M)^2}.$$

4. Vēlāk noskaidrosim, ko sauc par normālo sadalījumu; pagaidām pietiek atzīmēt, ka lieluma sadalījumu

var uzlūkot par aptuvumis normālu, ja sadalījums lielākā vai mazākā mērā simmetrisks, t. i., ja aplūkojamā lieluma nozīmēm, kas atrodas vienādos attālumos no kādas vidējās nozīmes, ir vienādi relātīvie biežumi, kā tas piem., redzams 750 studentu augumu sadalījumā:[164]

augums collās	studentu skaits
61	2
62	10
63	11
64	38
65	57
66	93
67	106
68	126
69	109
70	87
71	75
72	73
73	9
74	4

Jau šeit varam atzīmēt ļoti svarīgo tā saucamo triju sigmu likumu:

ja kāda lieluma nozīmes kārtojas apmēram normāli ap to vidējo aritmētisko skaitli, tad vairāk par 99% no visa nozīmju skaita novirzās uz vienu vai otru pusi ne vairāk par trīsreiz ņemtu vidējo kvadrātisko novirzījumu, t. i. ne vairāk par 3σ.

Līdz ar to dabūjam tā saucamā normālā sadalījuma mēru: ja 99% novirzījumu nepārsniedz 3σ, tad sadalījumu var uzlūkot par normālu.

Vēl var pierādīt, ka vienmēr starp $M - 3\sigma$ un $M + 3\sigma$ atrodas vairāk nekā 90% visu X nozīmju, lai X nozīmes sadalītos kā sadalīdamās. Ja sadalījums normāls, tad var parādīt, ka starp $M - 3\sigma$ un $M + 3\sigma$ atrodas taisni 0,997 visu X nozīmju.

No triju sigmu likuma arī izriet jau agrāk pieminētā īpašība, ka vidējo kvadrātisko novirzījumu var uzlūkot par aplū-

[164] В. И. Романовский, Элементы теории корреляции, Ташкент 1927, p. 17.

kojamā kollektīvpriekšmeta nozīmju ciešuma sadalījuma mēru ap to vidējo aritmētisko jeb citādi — par dispersijas mēru: jo mazāks vidējais kvadrātiskais novirzījums, jo ciešāk sakārtojas mērījamā lieluma nozīmes ap to vidējo aritmētisko. Ne par velti tāpēc *K. Pearson*'s nosaucis vidējo kvadrātisko novirzījumu par *standard deviation*.

f. Atkārtotie mēģinājumi. Binomiālais un normālais sadalījums.

1. Meklēsim varbūtību v_m, ka kāds viens un tas pats notikums E ar varbūtību p atkārtojas n mēģinājumos m reiz.

Viegli pierādīt, ka šī varbūtība izteiksies tā:

$$v_m^{(n)} = C_n^m \, p^m \, q^{n-m},$$

kur C_n^m ir m-mās klases kombināciju skaits no n elementiem, p ir notikuma iestāšanās varbūtība, q — notikuma neiestāšanās varbūtība.

Pēc «nejaušību likuma» ir visai maza varbūtība, ka relātīvais biežums $\frac{m}{n}$ stāvēs tālu no p, citiem vārdiem, ka varbūtība $v_m^{(n)}$ ir maza, lai atkārtojums m atbilstu tādam relātīvajam biežumam $\frac{m}{n}$, kas stāvētu tālu no p.

Parādīsim, ka izteiksmes varbūtība $v_m^{(n)}$ saskan ar šo paredzējumu. Tā kā $v_m^{(n)}$ izteiksme zināma, tad varēsim viegli redzēt, kas notiek ar $v_m^{(n)}$, ja n nav pat sevišķi liels skaitlis. Šinī nolūkā salīdzināsim varbūtības $v_0^{(n)}, v_1^{(n)}, \ldots, v_n^{(n)}$ un novērosim, kā tās mainās ar m maiņu.

Salīdzinot šo varbūtību attiecības, viegli konstatēt, ka varbūtību rinda iet no sākuma augdama, pēc tam pastāvīgi dilst, tā ka ir viens vai divi vislielākie locekļi, kas rāda visvarbūtīgāko vai visvarbūtīgākos atkārtojumu skaitu (-us), t. i., to atkārtojumu skaitu, kam atbilst vislielākā varbūtība. Izpētījot ātrumu, ar kādu varbūtības $v_m^{(n)}$ pamazinās, attālinoties no vislielākās varbūtības, var konstatēt, ka pamazināšanās iet ļoti ātri, ja vien n pietiekoši liels skaitlis un $v_m^{(n)}$ pietiekoši tālu no vislielākā locekļa vietas.

Apzīmēsim to m, kas atbilst vislielākai varbūtībai, ar μ. Šis μ tā tad ir visvarbūtīgākais atkārtojumu skaits.

Var viegli pierādīt sakarību

$\mu - 1 \leqslant np \leqslant \mu + 1$, no kuras, dalot to ar n, dabūjam, ka

$$\frac{\mu}{n} - \frac{1}{n} \leqslant p \leqslant \frac{\mu}{n} + \frac{1}{n}$$

Šī sakarība rāda, ka notikuma E varbūtība ir robežlielums, pret kuru tiecas visvarbūtīgākais relātīvais biežums n mēģinājumu grupā.

2. Aplūkosim kādu notikuma E ar varbūtību p kādā mēģinājumu grupā ar n mēģinājumiem. Varbūtības, ka notikums E atkārtosies 0 reiz, 1 reiz, 2 reiz, ..., m, ..., n reiz izteiksies kā $v_0^{(n)}, v_1^{(n)}, v_2^{(n)}, \ldots, v_m^{(n)}, \ldots, v_n^{(n)}$.

Kā jau pieminēts, šīs varbūtības no sākuma aug pēc tam dilst, pie kam, ja n pietiekoši liels, šī augšana un dilšana notiek visai ātri. Lai varētu šo izmaiņu labāk pārredzēt, ērti lietot grafisko metodi.

Pieņemsim par abscisām iespējamos relātīvos biežumus $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots \frac{m}{n}, \ldots \frac{n}{n}$ un par ordinātām attiecīgās varbūtības

$$v_0^{(n)}, v_1^{(n)}, v_2^{(n)}, \ldots, v_m^{(n)}, v_n^{(n)}.$$

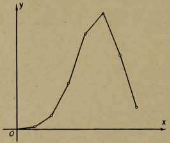
Tā dabūsim punktu rindu; šos punktus var uzlūkot kā poligōna virsotnes; savienojot tās ar taisnes gabaliem, dabūsim tā saucamo binomiālo poligōnu attiecībā pret pamatvarbūtību p un mēģinājumu skaitu n. Piem., ja $p = \frac{3}{5}$ un $n = 7$, tad

$$v_0^{(7)} = \frac{1}{2187}, \quad v_1^{(7)} = \frac{14}{2187}, \quad v_2^{(7)} = \frac{84}{2187}, \quad v_3^{(7)} = \frac{280}{2187},$$

$$v_4^{(7)} = \frac{560}{2187}, \quad v_5^{(7)} = \frac{672}{2187}, \quad v_6^{(7)} = \frac{448}{2187}, \quad v_7^{(7)} = \frac{128}{2187};$$

attēlojot, kā aizrādīts, šīs varbūtības grafiski, dabūsim binomiālo poligōnu, kā tas redzams 24. att.

Kamēr mēģinājumu skaits n nav liels, šo poligōnu veids ir diezgan dažāds, atkarībā no p un n, bet starpības izlīdzinās un poligōni kļūst arvienu vairāk simmetriski pret ordinātu, kas atbilst lielākajam (vai diviem lielākajiem) loceklim. Kaut gan ar n pieaugumu binomiāla poligōna veids stabilizējas, totiesu poligōns tiecas izstiepties pret horizontālo asi. Ja to grib paturēt pastāvīgu, tad jāizvēlas attiecīgi gaŗuma vienības. Tā konstruējot poligōnus, redzēsim, ka tie tuvojas ar n pieaugšanu vairāk un vairāk kā robežai kādai līknei, kuŗas veids nav atkarīgs no p.



24. att.

3. Tāpēc izdevīgi binomiālo sadalījumu atvietot ar nepārtrauktu sadalījumu vai, citiem vārdiem, binomiālo biežuma poligōnu atvietot ar biežuma līkni. To izdara tā, ka meklē robežu, kādai tuvojas binomiālais sadalījums, ja n neaprobežoti aug.

Tā nonāk pie sakarības

$$y = y_0 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

kur y_0 ir lielākā ordināta, e — naturālo logaritmu baze, x — abscisa, σ — vidējais kvadrātiskais novirzījums.

Līkni, kas rāda šīs funkcijas attēlu, sauc par normālo biežuma līkni jeb zvana līkni, arī *Gauss'a-Laplace'a* līkni jeb kļūdu līkni. Tās vispārējais veids iezīmējas ar simmetriju, zīmējoties uz y'u asi un asimptotisku tuvošanos x'u asij, kā tas redzams 25. attēlā. Ja izvēlas abscisām par gaŗuma vienību σ un tā tad pieņem, ka

$$\frac{x}{\sigma} = \xi,$$

tad visiem šāda tipa sadalījumiem būs *viena un tā pati* sadalījuma līkne

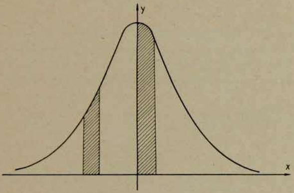
$$y = y_0 e^{-\frac{\xi^2}{2}}$$

To var uzzīmēt reizi par visām reizēm kā standartu un tad ar to salīdzināt dotos sadalījumus.

Ja vislielāko ordinātu y_0 izteic aptuvumis kā $\frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}}$, tad

$$y = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}},$$

kur y apzīmē biežumu, N — visu variantu skaitu, x — novirzījumu no vidējās nozīmes, σ — vidējo kvadrātisko novirzījumu un e — naturālo logaritmu bazi.



25. att.

Izvedot eksponentfunkciju no binomiālrindas, bija jāpieņem n par ļoti lielu — neaprobežoti lielu skaitli. Aprēķini rāda, ka, pastāvot jau mēreni lieliem n, iznāk pietiekoša saskaņa, kāpēc rodas vēl jo lielākas priekšrocības eksponentfunkcijai, salīdzinot ar binomiālrindu.

4. Tā tad eksistē noteikta līkne — minētā zvana līkne — ko var konstruēt reizi par visām reizēm un kam šāda

īpašība: lai būtu kāda būdama mēģinājumu rinda, lai būtu kāds būdams notikums E un tā varbūtība p šinī mēģinājumu rindā, zvana līkne kā robežlielums reprezentē grafiski relātīvā biežuma novirzījumu no varbūtības p un šī novirzījuma varbūtību aplūkojamā mēģinājumu rindā.

Mēģināsim tagad noskaidrot, kāds sakars normālajam sadalījumam ar tā saucamo kļūdu likumu vai citādi, mēģināsim noskaidrot noteikto un nejaušo cēloņu ietekmi uz kollektīvpriekšmetu.

g. Noteiktie un nejaušie cēloņi. Kļūdu likums.

1. Ja jāizmērī kāds lielums (garums, leņķis, temperātūra u. tml.) un ir izdarīti mērījumi, tad tie arvienu būs savienoti ar zināmām kļūdām, ko rada dažādi cēloņi, pa lielai daļai neatkarīgi savā starpā. Pilnīgi precīzus mērījumus nevaram nemaz izvest. Katrā novērojumu laukā rodas cēloņu grupa (parasti instrumentu un novērotāju nepilnība), kas ietekmē mērījumu iznākumu sistēmatiski tā, ka to iedarbība pārredzamā veidā atkarīga no zināmiem apstākļiem un, paliekot šiem apstākļiem pastāvīgiem, dod pastāvīgas kļūdas, tiem noteikti mainoties — kārtējas jeb sistēmatiskas kļūdas. Tā piem., mērījot gaisa spiedienu ar dzīvsidraba barometru, var, ja barometrs atrodas paaugstu, skatīties vairāk no apakšas un tā nolasīt millimetru skaitu pastāvīgi mazliet lielāku nekā īstenībā barometrs rāda. Sistēmatiskās kļūdas var vai nu ar attiecīgā instrumenta pārlabošanu vai attiecīgu novērojumu pārkārtošanu vai ietekmējumu aprēķināšanu samazināt līdz visniecīgākiem apmēriem.

Bet bez sistēmatiskām kļūdām, ar kurām var tikt galā, paliek vēl arī tādas kļūdas, ko bieži rada liels skaits niecīgu cēloņu, piem. mazas pārmaiņas novērojumu nosacījumos, kas pārgrozās ar katru novērojumu un kas ar to dabū nejaušu kļūdu raksturu: atsevišķas kļūdas lielums un virziens nenoteikts; bet jo vairāk novērojumu, jo skaidrāk izteicas arī šeit noteikta likumība. Par nejaušām kļūdām pieredze vispārīgos vilcienos dod šādus norādījumus: 1) vienāda lieluma pozitīvas un negātīvas kļūdas (lielāki un mazāki iznākumi, salīdzinot ar īsto lieluma nozīmi) sastopamas gandrīz vienlīdzīgi bieži un 2) mazas kļūdas sastopamas biežāk nekā lielas, tā ka ikkuŗu novērojumu laukā nav sagaidāmas kļūdas, kas pārsniedz zināmas robežas, ja neņem vērā rupjus maldus. Šo parādību var izskaidrot, pieņemot pat nelielu skaitu cēloņu, kas iedarbojas kopā.

2. Pieņemsim, ka iedarbojas trīs cēloņi, kas vienādi viegli rada šādas kļūdas[165]:

1. cēlonis		—2, —1, 0
2. „		—1, 0, 1
3. „		—1, 0, 1, 2, 3.

Ar šo cēloņu grupēšanos var iznākumā rasties šādas kļūdas:

— 4 — 3 — 2 — 1 0 1 2 3 4 un attiecīgi tik daudz dažādos veidos:

1 3 6 8 9 8 6 3 1.

Tā, piem., kļūda — 4 var rasties tikai tā:

1. cēl.	2. cēl.	3. cēl.	
— 2	— 1	— 1	, tā tad vienā vienīgā veidā;

kļūda — 3 var rasties šādos sakopojumos

1. cēl.	2. cēl.	3. cēl.	
— 2	— 1	0	3 veidi
— 2	0	— 1	
— 1	— 1	— 1	

kļūda 0 var rasties jau 9 gadījumos ar šādiem sakopojumiem

— 2	— 1	3
— 2	0	2
— 2	1	1
— 1	— 1	2
— 1	0	1
— 1	1	0
0	— 1	1
0	0	0
0	1	— 1

[165] E. Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Leipzig und Berlin 1914., p 290.

3. Ja kādā novērojumu rindā darbojas 8 neatkarīgi cēloņi, no kuŗiem ikviens var vienādi viegli radīt kādu no 9 kļūdām

—4 —3 —2 —1 0 1 2 3 4

tad ikviena no šīm pirmā cēloņa radītām 9 kļūdām var grupēties ar ikvienu pārējo cēloņu radīto kļūdu, tā tad dot $9^8 = 43046721$ grupējumu, kuŗu starpā būs daudz vienlīdzīgu; pēc absolūta lieluma lielākā kļūda būs 32. Tā tad visas kļūdas pēc lielumiem un virzieniem būs ietvertas starp — 32 un + 32 un sadalīsies šādā veidā:

kļūda	0	būs sastopama	apaļos	skaitļos	2300000	reiz
— 5 un	+ 5	„	„	„	1500000	„
— 10 „	+ 10	„	„	„	950000	„
— 15 „	+ 15	„	„	„	300000	„
— 20 „	+ 20	„	„	„	50000	„
— 25 „	+ 25	„	„	„	3500	„
— 32 „	+ 32	„	„	„	36	„

Salīdzinot lielo kļūdu izcelšanās veidu skaitu ar mazo kļūdu izcelšanās veidu skaitu, redzam, ka pēdējais stipri liels un izskaidrojas ar to, ka mazās kļūdas var celties ne tikai no atsevišķām mazām kļūdām, bet arī no lielākām un lielām, jo tās savu zīmju dēļ savā starpā pilnīgi vai pa daļai līdzsvarojas, turpretim lielās kļūdas gala iznākums var celties tikai no lielām atsevišķām viena virziena kļūdām. Tā, piem., kļūda 32 iespējama tikai tad, ja no visiem 8 elementārcēloņiem ikviens dod vislielāko ar + zīmi ņemtu kļūdu, t. i., dod kļūdu + 4.

Tā tad saprotams, ka relātīvais biežums, ar kādu var sagaidīt zināma lieluma kļūdas lielā novērojumu skaitā, stāv sakarā ar kļūdas lielumu.

Bet ja pat šaubītos par izskaidrojuma pareizību, neapšaubāms paliek līdzīgs kļūdu sadalījuma fakts, ko apstiprina pieredze.

4. Pieņemot novērojumos dabūto lielumu vidējo aritmētisko skaitli par visvarbūtīgāko meklējamā lieluma nozīmi un vēl citus priekšnosacījumus, *Gauss*'s kā pirmais savā darbā *Theoria motus corporum coelestium* (1809) devis tā saucamo

k ļ ū d u l i k u m u. Ar to saprotam matēmatikas izteiksmi, kas dod, kā to rāda pieredze, katrā noteiktā intervallā gadījuma kļūdu samērīgo skaitu. Izrādās, ka šis likums analītiski un līdz ar to arī grafiski izteicas līdzīgi normālajam sadalījumam.

5. Tas dod ļoti svarīgu atzinumu: normālos apstākļos t. i. tādos, kur rūpīgi izslēgti visi īpaši ietekmējumi, kas iedarbojas vienā virzienā, un darbojas tikai viens vai vairāki nejauši cēloņi, kāda lieluma novērojumu kļūdu sadalījums izteicas pēc noteikta likuma, ko grafiski attēlo pieminētā zvana līkne. Tā kā arī citos novērojumos, kas zīmējas uz kādiem kollektīvpriekšmetiem, kuŗos gribam raksturot kādu lielumu, piem., augumu zināmai cilvēku kopībai, var dažādi ietekmējumi pa daļai iznīcināties, pa daļai cits citu pastiprināt, tad var sagaidīt, ka arī te novirzījumi no vidējā lieluma sadalīsies tāpat kā fizikālo mērījumu novirzījumi no vidējā lieluma jeb kļūdas. Otrādi, ja kādi novērojumi rāda, ka kollektīvpriekšmeta skaitliskās nozīmes tuvas normālajam sadalījumam, tad šo apstākli var iztulkot tā, ka *darbojas kāds noteikts cēlonis vai cēloņi*, kas rada kādu parādību, kuŗai gan dažādi lielumi, bet šo lielumu novirzīšanās no kāda vidējā lieluma izskaidrojama ar nejaušām kļūdām, t. i. ar nejaušu cēloņu ietekmi.

«Mūsu novērojumu mērķis — izslēgt nejaušu cēloņu darbību; kur to nav, tur masu novērojumi nav vajadzīgi,» saka prof. *V. A. Kosinskis*.[166]

6. Ja zināma kāda notikuma apriorā varbūtība p, ar ko izdara mēģinājumus N serijās pa n mēģinājumiem serijā, tad loģiski secinātais notikumu atkārtojumu skaits ir np, kas parasti vairāk vai mazāk atšķiŗas no īstenībā vērojamā. Viena mēģinājuma gadījumā notikuma biežums var būt 1 vai 0, t. i. notikums var iestāties vai neiestāties. Novirzījumi no deduktīvi secināta biežuma p būs $1 - p$ un $0 - p$; pirmo novirzījumu var sagaidīt ar biežumu p, otru ar $1 - p = q$; vidējā kvadrātiskā novirzījuma kvadrāts tāpēc izteiksies kā

$$p\,(1-p)^2 + qp^2 = pq^2 + qp^2 = pq\,(q+p) = pq,$$

jo $q + p = 1$.

[166] В. А. Косинскій, О научной разработкѣ статистическихъ данныхъ, Москва 1890, p. 17.

Ja mēģinājumu skaits ir n, tad tos var uzlūkot kā n atsevišķo mēģinājumu summu, un vidējo kvadrātisko novirzījumu kvadrātus varēs summēt. Tā tad deduktīvi secinātais vidējais kvadrātiskais novirzījums n mēģinājumos izteiksies kā

$$\sigma_{(n)} = \sqrt{n\,p\,q}$$

Zīmējoties uz vienu mēģinājumu, vidējo kvadrātisko novirzījumu dabūsim, dalot ar n; tāpēc

$$\sigma_{(1)} = \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

Ja nu jāizpētī kāds kollektīvpriekšmets, par kuŗu struktūru un sagaidāmo sadalījumu *a priori* maz kas zināms, tad varam pieņemt arī tādu hipotezi, ka uz kollektīvpriekšmetu iedarbojas cēloņi, kuŗu starpā dažiem noteiktiem ctloņiem galvenā nozīme, bet pārējie — *nejaušie* cēloņi kollektīvpriekšmetā ar pietiekoši plašu locekļu skaitu lielākā vai mazākā mērā kompensējas. Šīs hipotezes pārbaudei labi noder vidējā kvadrātiskā novirzījuma izteiksmes

$$(1) \ldots \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma y_i\,(x - M)^2}{n}} \text{ jeb } \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma y_i\,(x - A)^2}{n} - (M - A)^2}$$

$(2) \ldots \sigma_{(n)} = \sqrt{npq}$, tikai pēdējā izteiksme parasti jāņem formā $\sqrt{nf\,(1 - f)}$, kur f ir notikuma relātīvais biežums, ja kollektīva locekļu skaits pietiekoši liels, jo apriorās varbūtības lielums p parasti nav zināms. Ja nu σ nozīmes, aprēķinātas pēc (1) un (2) formulas saskaņ, tad mūsu hipoteze par kollektīvlieluma sadalījuma nejaušu dabu ļoti varbūtīga. Uz šādas σ nozīmju salīdzināšanas balstās *Lexis*'a mācība par statistisko rindu stabilitāti vai dispersiju.

h. Lielo skaitļu likums.

1. Lieluma σ izteiksme rāda, ka relātīvā biežuma kvadrātiskais novirzījums dilst ar n pieaugšanu.

Mēģināsim to izteikt precīzāk. Meklēsim varbūtību P_ε, ka biežums $\frac{m}{n} = f$ atšķirsies no dotās varbūtības p vairāk nekā par doto lielumu ε, t. i., meklēsim varbūtību P_ε, ka $|f - p| \geqslant \varepsilon$.

Apzīmēsim varbūtību, ka $|f - p| \geqslant \sigma t$ ar Q_t; tad pēc minētās *Bienaymé* lemmas (153. lapp.) $Q_t \leqslant \frac{1}{t^2}$; ja pieņemsim, ka $\varepsilon = \sigma t$, tad $Q_t = P_\varepsilon$ un tā kā no sakarības $\varepsilon = \sigma t$ lielums $\frac{1}{t} = \frac{\sigma}{\varepsilon}$ un iepriekšējās formulas $\sigma^2 = \frac{pq}{n}$, tad $P_\varepsilon \leqslant \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$ jeb

$$P_\varepsilon \leqslant \frac{pq}{n\varepsilon^2}$$

Šī formula rāda, ka P_ε tuvojas nullei, ja n aug neaprobežoti. Tā tad varbūtība, ka starpība starp doto varbūtību un notikuma relātīvo biežumu būs lielāka par doto lielumu, tiecas uz nulli, ja mēģinājumu skaits aug neaprobežoti. Tas ir tā saucamā *Bernoulli* teorēmas jeb lielo skaitļu likuma saturs, ko var precīzāk formulēt tā:

Mēģinājumu vai novērojumu rindā varbūtība, ka notikuma E relātīvais biežums f šinīs mēģinājumos vai novērojumos, ja mēģinājumu vai novērojumu skaits aug neaprobežoti, atšķirsies no notikuma E apriorās varbūtības p vairāk par kādu patvaļīgu iepriekš izvēlētu un noteiktu skaitli ε, kļūst bezgalīgi maza.

Šis lielo skaitļu likums, stingri ņemot, bija jau iepriekš pieņemts kā eksperimentāls likums, bet nule minētā veidā tas dod jēdzienu par varbūtības P_ε lielumu atkarībā no dotās varbūtības p, mēģinājumu skaita n un patvaļīgā lieluma ε.

Kā jau agrāk minēts, *Bernoulli* teorēma zīmējas uz atkārtoto mēģinājumu gadījumu, kur kāda notikuma iestāšanās varbūtība paliek viena un tā pati. Ja mēģinājumu skaitu apzīmē ar n, notikuma varbūtību ar p, gadījumu skaitu, kur iestājas minētais notikums ar m, tad *Bernoulli* teorēmu var formulēt tā: mēģinājumu skaitu n var padarīt tik lielu, ka varbūtība attiecībai $\frac{m}{n}$ atrasties robežās $p + \varepsilon$ un $p - \varepsilon$, kur ε pēc patikas mazs pozitīvs skaitlis, pieiet pēc patikas tuvu skaitlim 1 — līdz ar to pilnīgai drošībai.

Poisson's vispārināja *Bernoulli* teorēmu gadījumam, ja notikuma varbūtība no mēģinājuma uz mēģinājumu mainās noteiktā kārtībā, pie kam iznākums analoģisks ar *Bernoulli* teorēmu ,tikai pastāvīgās varbūtības p vietā jāņem mainīgo varbūtību $p_1, p_2, \ldots$ vidējais aritmētiskais skaitlis p. *Poisson's* arī izveidojis terminu «lielo skaitļu likums», lai apzīmētu statistisko skaitļu noteiktu izturēšanos.[167] Zīmējoties uz termina «lielo skaitļu likums» lietošanu, var pilnīgi pieslieties *Bortkiewicz'a* priekšlikumam:

«Liekas vienīgi lietderīgi izteicienu «lielo skaitļu likums» turpmāk lietot tikai tādā nozīmē, kādu tas ieguvis statistikā: proti: tā pavisam vispārīga fakta (kas izskaidrojams, izejot no varbūtību teōrijas, bet kas nav saistīts ne ar kādu varbūtību teōrijas schēmu), ka statistiskie biežumi (un vidējie lielumi) nemainīgos vai tikai vāji mainīgos vispārīgos norises nosacījumos, paliek vairāk vai mazāk stabili, cik tālu tiem pamatos pietiekoši lieli notikumu skaitļi (Ereigniszahlen).»[168]

2. Tā kā kollektīvpriekšmeta pētījumi iziet uz to, lai parādītu, ka pastāv vai nepastāv kāda vienveidība jeb likumība, tad vispirms kollektīvpriekšmeta apjomam jābūt pietiekoši lielam, lai varētu dabūt ticamu secinājumu vienā vai otrā virzienā, jo citādi pētījumiem nav nozīmes. Cik lielam kollektīvpriekšmeta apjomam īsti jābūt, lai dabūtu ticamus iznākumus, tas atkarājas galvenokārt no apstākļiem; «var gadīties, ka pussimts locekļu dod lietojamu rezultātu, kamēr *citos* gadījumos vajadzīgi tūkstoši.»[169]

Ja zināma notikuma apriorā varbūtība p, tad var aprēķināt, cik liels jāņem mēģinājumu skaits n, lai ar varbūtību P varētu apgalvot, ka notikuma relātivais biežums neatšķirsies no apriorās varbūtības p vairāk nekā par $\pm \varepsilon$.

Tā, piem., ja $p=0{,}5$, tad pietiekoši lielo skaitļu skaitu rāda šāda tabula.[170]

---

[167] L. v. Bortkiewicz, Iterationen, Ein Beitrag zur Wahrscheinlichkeitstheorie, Berlin 1917, p. 46.

[168] Bortkiewicz, op. cit., p 57.

[169] Bruns, op. cit., p. 97.

[170] Проф. А. К. Митропольский, Техника статистического исчисления, Москва 1931, p., 20—21.

Pietiekoši lielo skaitļu tabula.

Varbūtības P / Pielaižamā kļūda ε	0,85	0,90	0,95	0,99	0,995	0,999
0,05	207	270	384	663	787	1082
0,04	323	422	600	1036	1231	1691
0,03	575	751	1067	1843	2188	3007
0,02	1295	1691	2400	4146	4924	6767
0,01	5180	6764	9603	16587	19699	27069

Šās tabulas stabiņu augšgalā norādītas varbūtības, ar kādām gribam paredzēt notikuma gaitu: 0,85; 0,90; 0,95; 0,99; 0,995; 0,999. Pirmajā stabiņā dotas pielaižamās kļūdas nozīmes: 0,05; 0,04; 0,03; 0,02; 0,01. Attiecīgo rindu un stabiņu krustojumā attiecīgie pietiekoši lielie skaitļi.

Pieņemsim, ka, piem., pieļaujamā kļūda jeb relātīvā biežuma novirzījums no dotās varbūtības var būt $\pm$ 0,05. Lai mūsu secinājums būtu no 10 gadījumiem deviņos pareizs, citiem vārdiem, lai secinājuma varbūtība būtu 0,90, jāņem ne mazāk par 270 novērojumiem. Ja pieminētā gadījumā gribētu spriest ar varbūtību 0,99, tad būtu jāņem vismaz 663 novērojumi.

Tabula rāda, ka 500—1000 gadījumu jau ir pietiekoši, lai vairāk vai mazāk varētu spriest par visu kollektīvpriekšmetu, izejot no novērojumiem par kollektīvpriekšmeta daļu.

Kāds nu visam tam sakars ar teōrētisko tautsaimniecību?

Ļoti vienkāršs un skaidrs: tautsaimniecībā mums darīšana galvenokārt ar masu parādībām, ar kollektīvlielumiem, ko nepārprotami liecina pats priekšmeta nosaukums — *tautsaimniecība*. Tāpēc tad arī tautsaimniecības zinātnei daudzu jautājumu noskaidrošanai jālieto kollektīvpriekšmetu mērīšanas jeb lielo skaitļu metode. To ļoti pareizi uzsver prof. V. A. Kosinskis:

«Kas zīmējas uz *likumiem*, kuŗus novērojam sabiedrībā, tad tie ir tā saucamie *lielo skaitļu likumi*... Lielo skaitļu likums ir regulāritāte, ko novērojam parādību (piem., cilvēku darbību) masā, pie kam liekas, ka nav nekādas regulāritātes, likumības katrā atsevišķā parādībā, kas ieiet norādītā masu parādības sastāvā. Šī regulāritāte balstās uz kauzālitātes principa.»[171]

«Sīka analize rāda, ka ikkuŗai konkrētai parādībai, kas ieiet mūsu parādības sastāvā, ir divas cēloņu kategorijas — *noteiktie* (неслучайные) cēloņi, kas pastāvīgi un nepieciešami iet pa priekšu parādībai, un cēloņi, kas *nejauši saistīti* ar doto parādību: tie var būt, var arī nebūt... Masu parādības rada *noteiktie cēloņi.* Zīmējoties uz saimniekotāju sabiedrību par vienu no tādiem noteiktiem cēloņiem, kas iet pa priekšu visām cilvēka saimnieciskām darbībām, der saimnieciskais aprēķins, ekonomiskais princips.»[172]

*
**

Pareto likums. Runājot par normālo sadalījumu, esam mēģinājuši parādīt metodi, kā meklē kollektīvlieluma sadalījuma likumus. *K. Pearson's* devis dažādu iespējamu sadalījumu tipus, pēc kuriem vieglāk spriest par sadalījuma likumību un atrast tai analitisku izteiksmi.[173]

Piemēra dēļ aplūkosim tā saucamo *Pareto likumu* jeb ienākuma sadalījuma likumu, kas grafiski izteicas ar tā saucamo ienākumu līkni (courbe des revenus). Savā darbā *Cours d'Économie politique*, t. II, *Lausanne* 1897, *Vilfredo Pareto* izsakās tā:

«Pretēji nepilnībām, ko ietveŗ ar ienākuma nodokli apliekamo deklarācijas, tas ir vēl visdrošākā baze, kas mums ir, lai zinātu, vismaz aptuvumis, kā sadalās bagātības.

Turpmāk apzīmēsim ar x zināmu ienākumu, ar N nodokļu maksātāju skaitu, kam ienākums lielāks par x.

Anglijā tas ir tikai attiecībā uz listi D: tirdzniecību un profesijām, kur ir plašu nodokļu maksātāju klasifikācija pēc ienākumu lieluma. Bet kā kompensācija rodas priekšrocība dabūt šos rezultātus pietiekoši attālinātām epochām un saimnieciskām organizācijām tik dažādām, kādas ir Anglijai šaurā nozīmē un Īrijai.

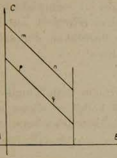
[171] В. А. Косинскiй. Лекцiи etc., p. 17.

[172] В. А. Косинскiй. Лекцiи etc., p. 30.

[173] R. v. Mises, Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung in der Statistik und theoretischen Physik, Leipzig und Wien, 1931, p. 269—279.

Vilksim divas asis AB un AC. Uz AB atzīmēsim lielumu x logaritmus, uz AC lielumu N logaritmus.

Esam tūlīt pārsteigti par faktu, ka tā noteiktie punkti ir ar ļoti noteiktu tendenci sakārtoties taisnā līnijā (26. att.).



26. att.

Liste D 1893.—1894. g.

x £	N Anglija	N Irija
150	400 648	17 717
200	234 185	9 365
300	121 996	4 592
400	74 041	2 684
500	54 419	1 898
600	42 072	1 428
700	34 269	1 104
800	29 311	940
900	25 033	771
1 000	22 896	684
2 000	9 880	271
3 000	6 069	142
4 000	4 161	88
5 000	3 081	68
10 000	1 041	22

Tas nozīmē, ka reāla līkne ir interpolēta ar taisni, kuras vienādojums ir

$$\log N = \log A - \alpha \log x \ldots (1)$$

Varbūt, ka līknes vispārīgais vienādojums ir

$$\log N = \log A - \alpha \log (a + x) - \beta x \ (2)$$

bet tikai vienā gadījumā (Oldenburga) esam atraduši lielumam β vērā ņemamu vērtību. Ļoti varbūtīgi, ka vispār β ir neievērojams lielums, un ka ir vienkārši

$$\log N = \log A - \alpha \log (a + x) \ldots (3).$$

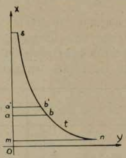
Kas zīmējas uz visu ienākumu, a ir vispār arī ļoti mazs lielums un visbiežāk tādas pašas šķiras kā novērojumu kļūdas. Tādā ceļā esam novesti pie vienādojuma (1). Ja lieta grozās ap kustamo mantu, pastāvīgo lielumu a vairs nevar atmest. Tas var iegūt pat diezgan ievērojamas nozīmes.

Vienādojums (1) dod

$$N = \frac{A}{x^\alpha}$$

Teiksim tūlīt, ka atradīsim šo tendenci daudzos piemēros, kas mums būs vēl jāaplūko.

Otrs fakts — arī un pat vēl vairāk ievērojams — ir tas, ka ienākumu sadalījumu līkne Anglijā un Īrijā dod gandrīz pilnīgu parallēlismu. Šis fakts jātuvina citam, ko tūlīt konstatēsim: līniju *mn*, *pq* noliekumi (inclinaisons), kuŗas dabūjam dažādām zemēm, maz atšķiŗas savā starpā.»[174]



27. att.

«Ja pāriesim no logaritmiem uz skaitļiem, tad dabūsim ienākumu sadalījumu līkni (27. att.), t. i., ka ir personu skaits, attēlots ar laukumu *aa'bb'*, kam ir ienākumi starp *Oa* un *Oa'*.»[175]

«Pirmā acu uzmetienā ienākumu sadalījuma līkne līdzinās varbūtību līknei, kas labi pazīstama ar nosaukumu «kļūdu līkne». Tāpēc varētu domāt, ka ienākumu sadalījums ir vienkārši nejaušības efekts. Bagātiem it kā būtu krituši lielie vinnesti.

Nav nekā tam līdzīga. Profils, kas rastos no varbūtību likuma, būtu daudz vairāk iedobts nekā tas ir 27. att. Citiem vārdiem, varbūtību līkne tuvojas asīm daudz vairāk nekā 25. attēla līkne.

Šīs propozicijas svarīgums mūs pamudināja izdarīt vairākus mēģinājumus censties atrast pierādījumu, neņemot palīgā matēmatiku. Par nelaimi, šie mēģinājumi palikuši neauglīgi.»[176]

[174] Pareto, Cours d'économie politique professée à l'université de Lausanne. T. I Lausanne 1896, T. II Lausanne 1897, p. p. 304—306.

[175] Pareto, Cours d'économie politique, p. 313.

[176] Pareto, Cours d'économie politique, p. 315.

Pareto tad arī dod matēmatisku pierādījumu tam, ka ienākumu sadalījuma līkne nav zvana līkne.

Tāpat ar matēmatikas palīdzību (citādi nevarot) Pareto pierāda šādu propoziciju:

«Šādi efekti: 1) minimālā ienākuma pieaugšana, 2) ienākumu nevienlīdzības samazināšanās var rasties kā atsevišķi, tā kopīgi tikai tad, ja ienākumu kopsumma aug ātrāk nekā iedzīvotāju skaits.»

Pareto likuma pareizību illūstrē arī citi dati. Ja ņemsim vērā datus no Austrijas ienākumu statistikas par 1910. g. (Handwörterbuch der Staatswissenschaften, 4. Aufl. 1926, p. 367 etc.), tad izrādās, ka ir šāds ienākumu sadalījums.

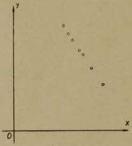
Ienākumu grupas kronās				Cenzitu skaits
	1200	līdz	1800	604526
pāri par	1800	—	3600	464051
„ „	3600	—	7200	164470
„ „	7200	—	12000	43235
„ „	12000	—	40000	27370
„ „	40000	—	200000	5214
„ „	200000			498
				1309094

Ja šos datus sagrupēsim citādi un atzīmēsim arī attiecīgo skaitļu logaritmus, tad dabūsim šādu tabulu[177]:

x Ienākums kronās pāri par	y Cenzitu skaits	$\log x$	$\log y$
1200	1309094	3,079	6,117
1800	704838	3,255	5,848
3600	240787	3,556	5,382
7200	76317	3,857	4,883
12000	33082	4,079	4,520
40000	5712	4,602	3,757
200000	498	5,301	2,697

[177] P. Lorenz, Höhere Mathematik für Volkswirte und Naturwissenschaftler, Leipzig, 1929, p. 53—55.

Attēlojot uz x'u ass logx un uz y'u ass logy, dabūjam šādu ainu (28. att.):



28. att.

Redzam, ka punkti pietiekoši skaidri novietojas taisnes virzienā, kuŗas vienādojumu var atrast šādā veidā:

$$logy = 10{,}80 - 1{,}53\ logx.$$

Šis pats vienādojums Pareto dotajā formulā izteicas kā

$$y = \frac{63\,100\,000\,000}{x^{1,53}}$$

i. Sakarības kollektīvpriekšmetu starpā.

1. Līdz šim aplūkojām, kā var mērīt atsevišķu kollektīvpriekšmetu. Aplūkosim tagad paņēmienus, kas ļauj noteikt saites divu kollektīvpriekšmetu starpā.

Saskaņā ar kauzālitātes principu, jāpieņem elementāro parādību starpā ciešas, negrozāmas, noteiktas saites.

Tomēr bieži mums jāsastopas ar parādībām, ko nevar sadalīt pietiekoši elementārās parādībās. Ja apzīmēsim kādu elementāro parādību kā cēloni ar *A* un elementāru parādību, kā sekas ar *B*, tad simboliski ar

$$A \longrightarrow B$$

apzīmēsim, ka A rada parādību B.

Ja sarežģītas parādības saistītas tā, ka parādība *X* sastādās no elementārām parādībām *A* un *B* un parādība *Y* no elementārām parādībām *A'* un *B'*, tad arī parādības X *(A, B)* un *Y (A', B')* būs saistītas nesaraujamām saitēm. Bet ja *X* sastādās, piem., no *A* un *B* un *Y* no *A'*, *B'*, un *C'*, tad *X (A, B)* var radīt $Y\ (A', B', C')$, bet var radīt arī kādu $Y_1\ (A', B', D')$, $Y_2\ (A', B', E')$ t. i. Y_1, Y_2, ... gan neradīsies bez X, bet pēc X var rasties Y_1, Y_2 u. tml.

Ja X sastādās no A, B un C un Y no A' un B', tad Y sekos parādībai X, bet var rasties arī no parādības X_1, kas sastādās no A, B un D u. tml.

Beidzot, ja X sastādās no A un B un Y no A' un C', tad $X\ (A, B)$ var dot $Y\ (A', C')$, $Y_1\ (A', D')$, $Y_2\ (A', E')$ u. t. t. un Y var rasties no $X\ (A, B)$, bet arī no $X_1\ (A, C)$, $X_2\ (A, D)$ u. tml.

Šādos gadījumos vairs nepastāvēs ciešas, nesaraujamas saites parādību starpā, bet tās būs lielākā vai mazākā mērā *valīgas*. Ja, piem., $X\ (A, B, C) \longrightarrow Y\ (A', B', D')$, tad sakarība ir ciešāka nekā gadījumā, ja $X\ (A, B, C) \longrightarrow Y\ (A', D', E')$.

Tādā kārtā rodas uzdevums: 1) atrast saišu ciešuma mēru parādību starpā, 2) atrast sakarības likumu un 3) iztulkot šīs saites.

2. Lai varētu kaut ko spriest par sakarībām, jāņem vērā mainīgās lielumu nozīmes gluži tāpat kā gadījumā, kur no pieredzes konstatējām sakarīgu lielumu nozīmes, šiem lielumiem mainoties, lai dabūtu funkcionālo sakarību. Pārliecība par nesaraujamām saitēm parādību starpā ļauj aprobežoties ar samērā nedaudzu mainīgo lielumu vērtību konstatēšanu, tik daudzu, cik vajadzīgs funkcijas veida noteikšanai.

Turpretim, ja parādību starpā ir valīgas saites, tad vajadzēs jau samērā daudz novērojumu, kas tādā gadījumā dos kollektīvpriekšmetus resp. to rindas, kuras parasti sakārtojam tabulās.

Lielumu, kas ar noteiktām varbūtībām pieņem k dažādas vērtības, sauc par k-tās šķiras nejaušo mainīgo lielumu. Iespējamo vērtību un tām atbilstošu varbūtību kopību sauc par nejaušā mainīgā lieluma sadalījuma likumu. Piem., uzmetamais ar spēļu kauliņu acu skaits ir sestās šķiras nejaušs mainīgs lielums, jo var ar vienu un to pašu varbūtību uzmest 1, 2, 3, ... 6 acis.

Nejaušs mainīgs lielums ir šaurāks jēdziens nekā mainīgs lielums vispār, pie kam *differentia specifica* ir sadalījuma līkums. Līdz ar nejaušā mainīgā lieluma jēdzienu rodas jēdziens par stochastisko[178] sakarību (saistību), kas noteikti jāatšķiŗ no funkcionālās saistības. Tāpēc stochastisko (vaļīgo) sakarību meklēšanai ir cita metode.

Ja Y stāv funkcionālā sakarībā ar X, tad pēc X vērtības izvēles vairs nav iespējams Y-am pieņemt kādu pagadās nozīmi; var jau būt, pastāvot, piem., funkcionālai sakarībai $Y = \sqrt{X}$, ja $X = 4$, ka $Y = 2$, bet te + vai — izvēle nav at-
$Y = \sqrt{X}$, ja $X = 4$, ka $Y = 2$, bet te + vai — izvēle nav at-
karīga no kādas nejaušības, tā tad nav saistīta ar varbūtību, bet tai jādibinās uz kādiem citiem pamatiem.

Bet ja Y pēc X vērtības izvēles izrādās par nejaušu mainīgu lielumu, kas var pieņemt dažādas vērtības ar noteiktu varbūtību, tad mums ir darīšana ar stochastisko saistību Y un X starpā.

3. Stochastiskā saistība var būt tikai plīvuris, aiz kuŗa slēpjas funkcionālā sakarība, un vērojamā novirzīšanās izskaidrojama ar novērojuma kļūdām. Šinī gadījumā jālieto kļūdu izlīdzināšanas paņēmieni. Bet bieži taisni stochastiskā sakarība pati ir pētījumu objekts. Šeit līdzekļus dod k o r r e l ā c i j a s m e t o d e. Tā dod vispirms iespēju noteikt saišu ciešuma mēru. Par saišu ciešuma mēru divu kollektīvlielumu starpā, ja ir l ī n e ā r a k o r r e l ā c i j a, der tā saucamais k o r r e l ā c i j a s k o e f i c i e n t s.

Korrelācijas koeficienta nozīmes noskaidrošanai aplūkosim sakarību, kāda pastāv divu rindu skaitļu starpā, no kuriem viena izteic attiecīgo augumu metros, otra svaru kilogramos:

(1)	136	138	140	142	144
	35	36	37	38	39

Kā redzams, šeit pastāv pilna saskaņa abu skaitļu rindu starpā, vispirms tāda, ka ar vienas rindas augšanu aug arī otras rindas skaitļi un otrādi, tā kā vienam un tam pašam pirmās rindas skaitļu pieaugumam atbilst viens un tas pats otras rindas skaitļu pieaugums. Šāda sakarība, kā redzējām, ir proporcionālitātes pazīme un izteicas funkcionālas sakarības

[178] Stochastisks (no grieķu verba στοχάζεσθαι — nojaust, šķist) ir sinonims vārdam «teorētiski varbūtīgs»; A. A. Tschuprow, Grundbegriffe und Grundprobleme der Korrelationstheorie, Leipzig und Berlin, 1925, pag. 20.

veidā kā $y = a_0 + a_1 x$, kur a_0 un a_1 ir kādi pastāvīgi skaitļi, x — kāds otras rindas skaitlis, y — attiecīgs pirmās rindas skaitlis. Pastāvīgos skaitļus a_0 un a_1 viegli atrast: $a_0 = 66$, $a_1 = 2$, tā rodas funkcija $y = 66 + 2x$, no kuras var atrast ikvienu pirmās rindas skaitli, ja x vietā ieliek attiecīgo otras rindas skaitli.

Tā tad doto skaitļu rindu starpā pastāv funkcionāla sakarība, ko citādi var saukt par p i l n u k o r r e l ā c i j u. Šinī gadījumā tā būs t i e š a pilnīga korrelācija — ar viena lieluma pieaugšanu aug arī otrs lielums.

Ja gribam raksturot šāda tipa sakarības divu skaitļu rindu starpā, tad tam nolūkam par visspilgtāko pazīmi der, kā jau minēts, novirzījumi no vidējā aritmētiskā: ja to zīmes viscaur vienādas, tad arī pieaugumi iet viscaur vienā virzienā, un var sagaidīt tiešu pilnu korrelāciju.

Šinī gadījumā pirmās rindas skaitļu vidējais aritmētiskais $\bar{y}$ ir 140, otrās rindas $\bar{x} = 37$ un tāpēc novirzījums $y - \bar{y}$ un $x - \bar{x}$ izteiksies tā:

$$-4 \quad -2 \quad 0 \quad 2 \quad 4 \; \ldots \; y - \bar{y}$$

$$-2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \; \ldots \; x - \bar{x}$$

Ja tagad ņemsim attiecīgo pieaugumu reizinājumus un tos summēsim, tad dabūsim

$\Sigma (x - \bar{x})\ (y - \bar{y}) = 8 + 2 + 2 + 8 = 20$, tā tad šinī gadījumā

$$\Sigma\ (x - \bar{x})\ (y - \bar{y}) = 20.$$

Atsevišķie saskaitāmie te visi ar vienādām zīmēm un pēc skaitliska lieluma vislielākie, ja vislielākajam pieaugumam pēc skaitliskās nozīmes pirmajā rindā atbilst vislielākais, pēc skaitliskās nozīmes, pieaugums otrā rindā. Tā tad pilnas tiešās korrelācijas gadījumā novirzījumu reizinājumu summa ir vislielākā un ar + zīmi.

Ja doto skaitļu rindas būtu sakārtotas tā:

136	138	140	142	144
39	38	37	36	35

tad redzama noteikta sakarība tāda, ka ar vienas rindas skaitļu augšanu otras rindas skaitļi dilst un tā, ka vienādiem pirmās rindas skaitļu pieaugumiem atbilst vienādi otras rindas skaitļu pamazinājumi. Arī šo sakarību var izteikt funkcionālās sakarības $y = 66 - 2x$ veidā, un te var runāt par pilnu korrelāciju, tikai otrādu.

Sastādot novirzījumu rindas, atrodam

-4	-2	0	2	4	...	$y - \bar{y}$
2	1	0	-1	-2	...	$x - \bar{x}$

un redzam, ka te visi attiecīgie novirzījumi ar pretējām zīmēm, pie kam skaitliski lielākie novirzījumi atkal saskan.

Reizinājumu summa $\Sigma(x - \bar{x})\ (y - \bar{y}) = -8 - 2 - 2 - - 8 = -20$ ir ar $-$ zīmi un skaitliski iespējami maksimālā. Tā tad šinī gadījumā $\Sigma\ (x - \bar{x})\ (y - \bar{y}) = -20$, kas rāda, ka pilna otrāda korrelācija, raksturojas ar novirzījumu reizinājumu summu tā, ka tā pēc skaitliskā lieluma maksimālā un ar $-$ zīmi.

Ja doto skaitļu rindas būtu sakārtotas tā:

136	138	140	642	144
38	35	37	39	36.

tad nekādu noteiktu sakarību manīt nevar: ar pirmās rindas skaitļu augšanu otrās rindas skaitļi gan aug, gan dilst.

Sakarības raksturojam sastādot novirzījumu rindas.

-4	-2	0	2	4	...	$y - \bar{y}$
-1	2	0	-2	1	...	$x - \bar{x}$

un ņemam attiecīgo novirzījumu reizinājumu summu

$$\Sigma\ (x - \bar{x})\ (y - \bar{y}) = 4 - 4 - 4 + 4 = 0.$$

Tā tad novirzījumu summa ir 0. Tas rāda, ka doto rindu skaitļu starpā nav nekādu saišu — nav nekādas korrelācijas. Bet ja rindas ņemtu tā

136	138	140	142	144
35	37	36	39	38

tad redzams, ka ar pirmās rindas skaitļu augšanu aug arī vispār otras rindas skaitļi, bet, tā sakot, ar traucējumiem. Lai varētu spriest, cik ciešas saites abu rindu starpā, sastādām novirzījumus un ņemam to reizinājumu summu:

$y - \bar{y}$	-4	-2	0	2	4
$x - \bar{x}$	-2	0	-1	2	1
	8	0	0	4	4;

$$\Sigma\ (x - \bar{x})\ (y - \bar{y}) = 16.$$

Redzam, ka summa $\Sigma (x - \bar{x}) (y - \bar{y})$ nesasniedz skaitliski vairs to lielumu, kāds bija pilnas korrelācijas gadījumā, bet tomēr ir diezgan prāva. Šādā gadījumā mēdz runāt par parciālo korrelāciju vai par korrelāciju vārda parastajā nozīmē.

Beidzot ņemsim rindas tādā veidā

136	138	140	142	144
39	37	38	35	36

Redzama tāda aina, ka ar pirmās rindas skaitļu augšanu otras rindas skaitļi vispār dilst, kaut arī vietām ir traucējumi. Sastādot novirzījumu rindas un ņemot novirzījumu reizinājumu summu, dabūjam

—4	—2	0	2	4
2	0	1	—2	—1
—8	0	0	—4	—4;

$\Sigma (x - \bar{x}) (y - \bar{y}) = -16.$

Atkal redzam, ka 1) summa ir ar — zīmi, 2) ka pēc skaitliskā lieluma tā ir starp vislielāko nozīmi un 0. Tāpēc te ir darīšana ar otrādu parciālo korrelāciju.

Tā tad, ja novirzījumu reizinājumu summa sasniedz vislielāko iespējamo nozīmi, tad ir pilna korrelācija; ja šī summa ir nulle, tad nemaz nav korrelācijas, un ja šīs summas skaitliskais lielums ir starp maksimālo skaitlisko lielumu un 0, tad ir daļas korrelācija, pie kam + zīme rāda tiešo, un — zīme netiešo korrelāciju.

4. Bet lai nu raksturotu saišu stiprumu, nepietiek ar norādījumu, ka $\Sigma (x - \bar{x}) (y - \bar{y})$ ir starp maksimālo nozīmi un 0. Varētu gan aizrādīt, neko tālāk neaprēķinot, ka šī summa ir vai nu tuvāk maksimālai nozīmei, vai arī nullei, bet tas būtu stipri nenoteikti. Bez tam jāatrod ērts paņēmiens arī šīs summas maksimālās nozīmes noteikšanai. Minētajam raksturojumam var ērtāk izteikt $\Sigma (x - \bar{x}) (y - \bar{y})$ attiecību pret summas maksimālo nozīmi, kas izteicas kā

$$\sqrt{\Sigma(x-\bar{x})^2 \, \Sigma(y-\bar{y})^2}.$$

Tā tad attiecība

$$\frac{\Sigma (x - \bar{x}) (y - \bar{y})}{\sqrt{\Sigma (x - \bar{x})^2 \, \Sigma (y - \bar{y})^2}} = r$$

ir raksturīga izteiksme, un to sauc par *korrelācijas koeficientu.*

Ja skaitītājs, t. i. summa $\Sigma(x - \bar{x})(y - \bar{y})$ arī dabū vislielāko nozīmi, tad skaitītājs ir vienlīdzīgs ar saucēju, un $r = \pm 1$, un ja $\Sigma(x - \bar{x})(y - \bar{y}) = 0$, tad $r = 0$. Tā tad pilnas korrelācijas gadījumā korrelācijas koeficients pēc skaitliskā lieluma ir 1, pie kam tiešas korrelācijas gadījumā tas ir pozitīvs, otrādas — negātīvs; ja korrelācijas nav, tad $r = 0$; pārējos gadījumos r, būdams pozitīvs vai relatīvs, svārstīsies pēc skaitliskā lieluma no 0 līdz 1.

Mūsu ņemtajā piemērā $\Sigma(y - \bar{y})^2$ ir $16 + 4 + 0 + 4 + 16 = 40$

$$\Sigma(x - \bar{x})^2 = 4 + 1 + 0 + 1 + 4 = 10;$$

$$\sqrt{\Sigma(x - \bar{x})^2 \Sigma(y - \bar{y})^2} = \sqrt{40 \cdot 10} = \sqrt{400} = 20.$$

Tā tad pirmajam gadījumam $r = \frac{20}{20} = 1$; otrā gadījumā $r = \frac{20}{20} = -1$; trešā $r = \frac{0}{20} = 0$; ceturtā $r = \frac{16}{20} = 0{,}8$; piektā $r = -\frac{16}{20} = -0{,}8$. Jo tuvāks r pēc skaitliskās nozīmes, jo stiprākas saites.

Ja korrelācija nav līneāra, t. i. ja attiecīgie punkti grafiskajā attēlā negrupējas apmēram ap kādu taisni, tad saišu ciešuma noteikšanai lieto k o r r e l ā c i j a s a t t i e c ī b u.

Sarežģīto parādību pētījumos jāņem vērā vairāk nekā divi lielumi: *vairāki* mainīgi lielumi. Tā rodas multiplās korrelācijas teōrija.

5. Otrs uzdevums — atrast korrelācijas vienādojumu, kas dod iespēju pēc viena lieluma vērtības atrast varbūtīgo vidējo nozīmi otram lielumam.

Ņemsim piemēram šādas kollektīvpriekšmetu rindas (113. lpp. papildinātas rindas)[179]: nokrišņu daudzumu no decembra līdz februārim un ražu no hektara nākamā vasarā.

[179] Hans Richter-Altschäffer, Einführung in die Korrelationsrechnung, Berlin 1931, p. 33.

Gadi	Nokrišņu daudzums collās. x	Ražas no ha kvintālos. y	$x-A$	$y-B$	$(x-A)^2$	$(y-B)^2$	$(x-A)(y-B)$
1900.	2	3	—13	—6	169	36	78
1901.	16	10	1	1	1	1	1
1902.	14	9	—1	0	1	0	0
1903.	26	14	11	5	121	25	55
1904.	12	18	—3	—1	9	1	3
1905.	18	10	3	1	9	1	3
1906.	6	5	—9	—4	81	16	36
1907.	21	13	6	4	36	16	24
1908.	4	4	—11	—5	121	25	55
1909.	30	16	15	7	225	49	105
1910.	8	6	—7	—3	49	9	21
1911.	22	13	7	4	49	16	28
1912.	15	9	—	—	—	—	—
1913.	25	12	10	3	100	9	30
1914.	10	7	—5	—2	25	4	10
1915.	26	15	11	6	121	36	66
1916.	9	6	—6	—3	36	9	18
1917.	9	11	4	2	16	4	8
1918.	10	7	—5	—2	25	4	10
1919.	20	12	5	3	25	9	15
	313	190	–	–	2219	270	566

Aplūkojot rindas, kas apzīmētas ar x un ar y, tūlīt varam redzēt noteiktu sakarību: ar x pieaugšanu vispār pieaug arī y un ar x pamazināšanos vispār pamazinās arī y, tomēr šī sakarība nebūs funkcionāla sakarība jeb pilna korrelācija, jo piem., x'a nozīmei 26 (1903. un 1915. g.) atbilst dažādas y'a nozīmes (14 un 15), tāpat x'a nozīmei 9 (1916. un 1917. g.) atbilst y'a nozīmes 6 un 11. Jau redzējām (124. lapp.), ka grafisks attēls dos punktu sarindojumu, kas grupēsies apm. ap taisni. Tāpēc var būt runa par līneāru korrelāciju. Meklēsim korrelācijas koeficientu, lai noteiktu saišu ciešumu.

Redzējām, ka to var atrast pēc formulas $r = \dfrac{\Sigma\,(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\Sigma\,(x-\bar{x})^2\;\Sigma\,(y-\bar{y})^2}}$ kur $\bar{x}$ un $\bar{y}$ ir attiecīgo lielumu vidējie aritmētiskie skaitļi. Aprēķinu ērtības nolūkā šo r izteiksmi var pārveidot šādā:

$r = \frac{\Sigma\,(x - A)\ (y - B) - n\ (\bar{x} - A)\ (\bar{y} - B)}{n\sigma_x\sigma_y}$, kur A un B patvaļīgi skaitļi, kuŗus parasti izvēlas tuvus $\bar{x}$ un $\bar{y}$, bet noapaļotus, lai starpības $X - A$ un $y - B$ izteiktos ar nedaudz cipariem.

Mūsu piemērā $\bar{x} = \frac{313}{20} = 15{,}65$ un $\bar{y} = \frac{190}{20} = 9{,}5$, tāpēc par A un B izvēlamies skaitļus 15 un 9 un tad sastādām lielumu $x - A$, $y - B$, $(x - A)^2$, $(y - B)^2$ un $(x - A)\ (y - B)$ rindas; dabūjam, ka $\Sigma\,(x - A)\ (y - B) = 566$; $\bar{x} - A = 0{,}65$; $\bar{y} - B = 0{,}5$;

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{(x - A)^2}{n} - (A - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1219}{20} - 0{,}4225} = 7{,}78$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{(y - B)^2}{n} - (B - \bar{y})^2} = \sqrt{\frac{270}{20} - 0{,}25} = 3{,}64$$

$r = \frac{566 - 20\ .\ 0{,}65\ .\ 0{,}5}{20\ .\ 7{,}78\ .\ 3{,}64} = 0{,}988$; tas ir liels korrelācijas koeficients, kas liecina par ļoti ciešām saitēm aplūkojamo lielumu starpā.

Korrelācijas koeficienta vidējā kļūda izteicas kā $m_r = \frac{1 - r^2}{\sqrt{n}}$; šinī gadījumā tā būs tikai dažas tūkstotdaļas, kas rāda, ka korrelācijas koeficients ir visai stabils.

Sastādot k o r r e l ā c i j a s v i e n ā d o j u m u (regresijas vienādojumu), kuŗa vispārīga forma šinī gadījumā (lineārās korrelācijas gadījumā) būs $y = a_0 + a_1 x$, mums jāatrod koeficienti a_0 *un* a_1; tos atrodam ar tā saucamo normālvienādojuma palīdzību, lietojot *mazāko kvadrātu* paņēmienu:

$$\begin{cases} \Sigma y = na_0 + a_1 \Sigma x \\ \Sigma xy = a_0 \Sigma x + b\, \Sigma x^2 \end{cases}$$

šinī gadījumā

$$\begin{cases} 190 = 20\, a_0 + a_1\ .\ 313 \\ 3533 = a_0\ .\ 313 + a_1\ .\ 6109 \end{cases}$$

kas dod $a_0 = 2{,}30$ un $a_1 = 0{,}46$.

Tāpēc $y = 2{,}30 + 0{,}46\, x$.

Šis vienādojums dod mums iespēju izdarīt *prognozi;* ja kādā gadā esam vērojuši laika sprīdī decembris — februāris nokrišņu daudzumu 5, kādu varam sagaidīt vidējo ražu no hektara?

Atbildi dod mūsu vienādojums:

$$y = 2{,}30 + 0{,}46 \,.\, 5 = 4{,}6 \text{ (kv.)}.$$

Te vēl vajadzīgs vidējās kļūdas novērtējums, bet par to patlaban nerunāsim, jo mūsu galvenais nolūks raksturot — ne iemācīt metodi.

Ja salīdzināsim tieši novērotos un pēc šī vienādojuma dabūtos lielumus, tad rezultātus rāda šāda tabula:

Gadi	x	Novērotais y	Aprēķinātais y	Novirzījums
1900.	2	3	3,2	— 0,2
1901.	16	10	9,7	0,3
1902.	14	9	8,7	0,3
1903.	26	14	14,3	— 0,3
1904.	12	8	7,8	0,2
1905.	18	10	10,6	— 0,6
1906.	6	5	5	0,0
1907.	21	13	12	1,0
1908.	4	4	4,1	— 0,1
1909.	30	16	16,1	— 0,1
1910.	8	6	6	0,0
1911.	22	13	12,4	0,6
1912.	15	9	9,2	— 0,2
1913.	25	12	13,8	— 1,8
1914.	10	7	6,9	0,1
1915.	26	15	14,3	0,7
1916.	9	6	6,4	— 0,4
1917.	19	11	11	0,0
1918.	10	7	6,9	0,1
1919.	20	12	11,5	0,5

Redzam, ka 15 gadījumos no 20 (75%) kļūdas (novirzījumi) nepārsniedz 0,5.

6. Beidzot nāk ļoti svarīgs uzdevums — sakarību iztulkojums, kas daudzreiz vissvarīgākā lieta kādā pētījumā,[180] tāpēc, ka sakarību ārējās saites vien var ievest maldu ceļos. A. Čuprovs min šādu interesantu piemēru.[181]

[180] Tschuprow, Grundbegriffe, p. 17.

[181] Tschuprow, Grundbegriffe, p. 18.

Krievijas ugunsgrēku statistika rāda sakarību starp gadskārtējām nodegušo ēku skaita un ražas daudzuma svārstībām: sliktas ražas gados pieaug ugunsgrēku skaits. Sakarība izteikta ļoti stipri — korrelācijas koeficients augsts. Ko tas nozīmē? Pētnieks, kas to bija atklājis, domāja, ka te tieš neražas ietekmējums uz ugunsgrēku skaitu. Īstenībā lieta droši vien grozās ap ko citu — ap ražas un laika apstākļu sakarību no vienas un ugunsgrēka gadījumu un to pašu laika apstākļu sakarību no otras puses: apgabalos, kas Krievijā noteic ražu, sausie gadi ir sliktas ražas gadi, bet sausums veicina ugunsgrēkus. Statistiski pētījumi rādījuši ievērojamu sakarību ziemāju ražas un lietus daudzuma starpā dažas nedēļas priekš sējas laika.

Vērojot kādu kollektīvlielumu laika maiņā, bieži atradīsim, sevišķi lielākā laika sprīdī zināmu lielāku vai mazāku pieaugumu (vai arī dilšanu), ko parasti sauc par *trendu*. Tā, piem., pasaules dzelzs produkcija svārstās no gada gadā, bet lielākā laika sprīdī uzrāda kāpjošu tendenci — produkcijas pamatvirziens — trends iet uz augšu.

**
*

Ar to būtu noslēguši to matēmatikas metožu aplūkošanu, kas jau pietiekoši labi izveidotas un kuŗu lietošana var atnest lielu palīdzību teōrētiskajai tautsaimniecībai un vispār ekonomiskajām zinātnēm. Ar to gribam uzsvērt, ka te nav minētas visas metodes, jo dažas vēl veidojas, dažām vēl varbūt nav pietiekoši sagatavota zeme.

Jāatzīmē vēl reiz, ka darba nolūks bijis dot matēmatikas metožu b ū t ī b a s un to nozīmes r a k s t u r o j u m u, bet ne aprakstīt pašas metodes visā pilnībā, citiem vārdiem, tās iemācīt. Esam pēc iespējas turējuši acu priekšā lasītājus, kam šīs metodes var būt svešas, un tāpēc esam centušies iespējami elementārākā ceļā dot skaidru jēdzienu par attiecīgo metodi.

Iebildumi pret matēmatikas metodēm un šo iebildumu atspēkojums.

1. Rakstā *Zahl und Mass in der ökonomik, Eine kritische Untersuchung der mathematischen Methode und der mathematischen Preistheorie (Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft, 29. Jahrg., 1893.) A. Voigt's* vispirms norāda uz ekonomikas īpatnējo stāvokli zinātņu starpā, zīmējoties uz mēra un skaitļa lietošanu: no vienas puses, ar statistisko datu lietošanu tā esot ierādījusi skaitlim plašu lauku un ar to ieguvusi vairāk noteiktības un lietošanas izdevības, no otras puses, taisni tas virziens, kas centies pēc pilnas īstenības dzīvas uztveres, esot pavisam noraidījis skaitļa lietošanu un matēmatisko dedukciju teōrētiskajā ekonomijā. *Matēmatikas metodei kā galējai deduktīvai metodei tas nostādījis pretī vēstures metodi.*[182] (pasv. mans. L.A.).

Kaut gan statistika dodot ekonomikai datus, kas nepieciešami tās lietošanai attiecībā uz īstenību, un tāpēc nevarot šaubīties par tādas skaitļu un mēra lietošanas vajadzību un iespējamību, bet ne par šādu lietošanu domājot, kad runājot par matēmatikas metodi ekonomikā. Tad neesot prātā operācijas ar skaitļiem iztirzājumu beigās, pārejot no teōrijas uz īstenību, bet matēmatiskās dedukcijas lietošana no paša sākuma, no principiem. Galējie matēmatikas virziena pārstāvji taisni apgalvojot, ka ekonomika esot matēmatiska, t. i., no principiem ar tīri matēmatisko slēdzienu palīdzību deducējama zinātne.

«Būtu lieks pasākums, ja gribētu apgāzt šo apgalvojumu, jo kas kaut cik pārzina problēmas, ko uzstāda sev mūsdienu zinātne, nenāks uz domām — atrisināt tās ar matēmatisko dedukciju.»[183]

Bet ja arī galējas pretenzijas būtu noraidītas, paliekot vēl

[182] A. Voigt, Zahl und Mass, p. 578.
[183] A. Voigt, Zahl und Mass, p. 579.

pāri mērenākas, un it īpaši jāizšķirot jautājums, vai ekonomiskie pamatjēdzieni esot vispār mērījami lielumi.

Esot zinātnes, kas, zīmējoties uz saviem principiem, esot spējīgas uz zināmu noslēgumu. Tās esot deduktīvās zinātnes šaurākā nozīmē, ar matēmatiku priekšgalā, kas varot uzskaitīt visus savus principus un no tiem deducēt visas savas tezes. Visas pārējās turpretim, lai arī cik plaši lietotu deduktīvo metodi, nekad nevarot noklūt pie pilnas savu principu uzskaitīšanas, kuŗi būtu pietiekoši visiem lietošanas gadījumiem, jo laiku pa laikam nākot klāt jauni gadījumi, jaunas parādības, kas prasot to izskaidrojumam jaunu principu ievešanas. «Līdz ar to tīri deduktīvas zinātnes ir pietiekoši definētas ar principiem un to lietošanas lauku, kamēr pārējās zinātnes turklāt jāierobežo vismaz arī lietišķi, t. i. ar objektu uzrādīšanu, ar ko tām jānodarbojas. Gara zinātne var tikt aprobežota savās daļās tikai lietišķi, ka tā zīmējoties vispār uz metodi, darina deduktīvo zinātņu pretpolu. Tā vispār nemeklē likumu, no kuŗiem varētu deducēt notikumus.»[184]

Ja nu uzstāda vēsturisko metodi kā ekonomikas metodi, tad tas var nozīmēt tikai to, ka tā stāv metodiskā ziņā tuvu vēstures zinātnei. Tā nav pavisam *bez deduktīviem elementiem* (pasv. mans. L.A.), tā ietveŗ vispārīgos principus, bet to nozīme paliek stipri iepakaļ atsevišķiem, vēsturiski dotajai saimniecības ainai pielāgotiem pamatlikumiem. *Tikai mazs jēdzienu krājums var pretendēt uz vispārnoderību visām saimniecības formām* (pasv. mans. L.A.), lielākais skaits mainās līdz ar tām.»[185]

Tā ekonomika spilgtā kārtā izrādot nenoslēgtību, zīmējoties uz principiem, jo arī tās objekts pakļauts pārgrozībām laikā, kamēr, piem., fizikai, kas principu nenoslēgtības ziņā līdzīga, tomēr kam pastāvīgs objekts — daba. Ekonomikā dedukcija aprobežota ar vēstures periodiem, kuŗu laikā atrodama vienlaicīgi derīgu principu sistēma, bet cik tie gaŗi, to varot rādīt tikai pieredze. Tāpēc pamatjēdzienu derīgums aprobežots laikā.

Esot vēl viens apstāklis, kas ievērojamā kārtā aprobežojot deducēto rezultātu lietojamību īstenībā: katra dedukcija ne-

[184] A. Voigt, op. cit., p. 580.
[185] A. Voigt, op. cit., p. 580.

pieciešami saistīta ar lielāku vai mazāku abstrakciju. Deduktīvā metode nepieciešami atsakās no pilnas īstenības uztveres. Abstrakcijas attaisnojums atkarājoties no tās veidojumu saskaņas pakāpes ar īstenību. «Katra dedukcija ir bezvērtīga, ja neizteic skaidri prēmisas un tā nedara zināmus tās lietošanas nosacījumus. Taisni šinī *punktā līdz šim visvairāk grēkots.*»[186]

Bieži korrekti matēmatiski slēdzieni esot derējuši tikai tam, lai nomaldinātu projām no nekorrektībām prēmisās.

Matēmatiskai dedukcijai apstrīdot pat tās visfundamentālākās prēmisas attaisnojumu — ekonomisko pamatparādību mērīšanas iespēju. Šā jautājuma noskaidrošanai *Voigt's* vispirms norāda, ka primitīvie nepilnīgie mērījumi pastāv objektu sarindošanā pēc to lieluma vai īpašību lieluma, kā tas ir piem. ar minerālu cietuma pakāpes noteikšanu, kur minerālus sakārto pēc to cietuma tā, lai cietākais skrambātu mīkstāko. Arī temperatūras mērīšana ar termometru palīdzību nestāvot uz daudz augstākas pakāpes, jo temperatūras gradi nedodot temperatūru attiecību, kā tas piem., esot garumu mērījumos.

«Visi psīchofizikas mērījumi ir sajūtu subjektīvais sakārtojums pēc to intensitātes, pie kam atsevišķas pakāpes atbilst tikko samanāmām starpībām.»[187]

«Skaidra lieta, ka ekonomiskie elementārie lielumi — patika un nepatika, noderīgums, vēlēšanās ir spējīgi pakļauties tikai tādam subjektīvam sakārtojumam. Visi to mērījumi pastāv tikai kārtības skaitļa noteikšanā, kurš tam pienākas vienveidīgu lielumu rindā. Tādām rindām ir tikai subjektīva nozīme tiem, kas to uzstādījuši; ikviens cits, saskaņā ar savām tieksmēm, vērtēs tās pašas mantas vairāk vai mazāk, citi vērtēs augstāk, ko pirmais nolicis zemāk un otrādi.»[188]

Pūles piešķirt ekonomiskiem lielumiem to pašu dabu, kāda ir ekstensīviem, ar vienībām mērījamiem ģeometrijas un mēchanikas lielumiem, cēloties no aplamas dabas zinātņu atdarināšanas, no kļūdaina priekšstata, it kā objektīvi mērījamie lielumi visos apstākļos būtu pilnīgāki.

[186] A. Voigt, op. cit., p. 581.
[187] A. Voigt, op. cit., p. 583.
[188] A. Voigt, op. cit., p. 584.

«Kas dabas zinātnēs būtu liels trūkums — masas subjektīvitāte, ekonomikā ir tās būtiskā īpašība; gribai to novērst nav nekādas jēgas. Fizika cenšas subjektīvitāti, cik vien iespējams, eliminēt, ekonomika ne tikai to cieš, bet tā veido vienu no tās galvenajiem pamatiem. Ja subjektīvā vēlēšanās pēc mantām nebūtu dažāda dažādām personām, tad maiņas satiksme nebūtu nemaz iespējama.»[189]

Bet tas apstāklis, ka ekonomikā lielumus varot tikai vērtēt, t. i. kārtot priekšstatos, un nevarot mērīt, t. i. nevarot pašus šos lielumus kārtot, nevarot tikt uzlūkots kā trūkums.

Kopsavilkumā varot teikt, ka ekonomiskie pamatjēdzieni izrādoties par noteiktas pakāpes subjektīviem lielumiem; to uzsvērt esot svarīga lieta. «Šo jēdzienu kvantitātīvas definīcijas, pamatprincipu kvantitātīvu tveršanu var prasīt un tā jāprasa šinī ierobežotā nozīmē. Bet ar prasību pēc jēdzienu matēmatiskā asuma nav nepieciešami saistīta matēmatisko dedukciju lietošana no tiem.»

Tālāk *Voigt's* aplūko piemēru no maiņas teōrijas. Viņš saka, lai arī kādi būtu atsevišķu personu īpašie motīvi, bet katrā ziņā derot vispārīgākais ekonomiskais princips, ka katrs dodot priekšroku lielākam labumam (Vorteil), salīdzinot ar mazāku. Jāpieņemot arī, *ka neviens no mainītājiem nepiešķirot otram labumu (Vorteil) bez atlīdzības, neba vēl savā rēķinā.* Šis pieņēmums raksturojot maiņu visstingrākā nozīmē. Tikai šādi gadījumi jāuzlūkojot kā maiņa, pārējie kā sadalījums vai parciāla dāvināšana vai arī kā citādi.

Matēmatiskā dedukcija esot spiesta uzstādīt maiņai šo nosacījumu, neraugoties uz novadu, kur tas der, bez tā šī teōrija nevarot spert ne soli tālāk. Vajadzīgs vēl viens nosacījums.

Lai vispārīgi varētu spriest par labumu vienlīdzību vai nevienlīdzību, jāpieņemot, ka *mainītāji zinot ne tikai savu, bet arī pretējās puses labumu un varot ar to sevi salīdzināt.* Tiem tā tad jābūt spējīgiem no abām subjektīvu labumu rindām sastādīt vienu rindu resp. divkāršu rindu, kur vienādas labumu pakāpes stāv cita citai pretī.

Tiklīdz mainītāju skaits pārsniedzot divus, tad esot nevis

[189] A. Voigt, op. cit., p. 584—585.

viena, bet būtiski divas dažādas maiņas formas. «Mēs sauksim tās par kopas maiņu (Gemeinschaftstausch) un konkurences maiņu (Konkurenztausch). Šī apstākļa neievērošana ir radījusi līdzšinējai matēmatikai maiņas teōrijai pavisam īpatnējas sekas.»[190] Kopas maiņas būtība esot tā, ka maiņu noslēdzot visi dalībnieki vienā vienīgā kopīgā aktā, kas pietiekoši izteicoties, piem., strejgabalu maiņā.

Kamēr kopas maiņā stingrais maiņas princips tikko nākot lietošanā, liekoties, ka konkurences maiņā tas tiekot pēc iespējas uzturēts. No kopas maiņas konkurences maiņa būtiski atšķiroties vispirms ar to, ka maiņa te neesot viens vienīgs kopīgs akts, bet izraisoties darījumu kompleksā pāŗu starpā, bet galvenā atšķirība pastāvot taisni konkurencē, kas kopas maiņā izslēgta. Šeit aplūkojamā konkurences īpašība esot tā, ka rodoties vienas maiņas vietā izvēle starp vairākām maiņām. Kopas maiņā katram esot tikai divi izredzes: palikt līdzšinējā stāvoklī vai mainīt. Konkurences gadījumā atsevišķas maiņas nenotikšana vēl nenozīmējot maiņas nenotikšanu vispār. Tāpēc konkurences gadījumā mainītāju apsvērumi esot citādi nekā izolētā jeb kopas maiņā. Maiņas labums (Vorteil) izlikšoties vispār mazāks, jo tam vairs nestāvot pretī stāvoklis priekš maiņas, bet maiņa citā vietā, kas tāpat solot labumu, ja arī mazāku. Maiņas labuma jēdziens te iegūstot pavisam jaunu nozīmi, tas kļūstot par *relātīvu*, zīmējoties uz citām maiņas izdevībām, īpaši uz labvēlīgākām to starpā. Relātīvais maiņas labums varot kļūt nulle, bet tāpēc maiņa netiekot aizkavēta, jo absolūtais labums pie tam varot būt ievērojams.

«Katrā ziņā maiņas cenu noteic viens pats relātīvais labums. Tā ir otra liela analitiskās maiņas teōrijas kļūda — neieskatīt šo apstākli.»[191]

Aplūkojis tālāk, kā rīkojas matēmatiskā maiņas teōrija, *Voigt*'s nāk pie slēdziena, ka «visa līdzšinējā teōrija ir aplūkojusi nevis konkurences maiņu, bet naivā vienkāršībā kopas maiņu.»[192] Kļūda palielinoties ar to, ka arī kopas maiņas nosacījumus ne-

[190] A. Voigt, op. cit., p. p. 590—591.
[191] A. Voigt, op. cit., p. 596.
[192] A. Voigt, op. cit., p. 604.

uzturot tīrus, tā ka īstenībā formulas apvienojot sevī reālu tirgus maiņas un kopas maiņas mistru.

Taisot kļūdas arī maksimu aprēķinos.

Tālāk autors runā par vērtību un galēja noderīguma teōriju, kas mūs patlaban neinteresē. Nobeidz savu apcerējumu *Voigt's* tā: «Esam galā un gribētu mūsu pētījumu rezultātu izteikt tā, ka katrā ziņā jācenšas pēc mēru un skaitļu lietošanas *izlietojumos* (in den Anwendungen), turpretim *principos* to lietošanai jāieved šādi ierobežojumi: vienai elementārlielumu daļai vispār nav vienībās izteicama mēra, bet pastāv tikai pakāpes starpības, ko var izteikt ar kārtas skaitļiem. Tas netraucē tos uztvert kā lielumus un definēt kvantitātīvi. Īstā matēmatiskā dedukcija attiecināma uz tiem tikai visciešākā pieslēgumā īstenībai, tā tad pēc sintetiskās metodes un arī tad tikai visrūpīgāk ievērojot nosacījumus, cik tālu viņi lietojami. Analitiskā metode ar tai radniecīgo grafisko ir ne tikai piecieșama, bet pat maldina un ir līdz šim, vismaz cik tālu tas zīmējas uz cenu teōriju, tikai maldinājusi. Īpatnējais ekonomiskais mantu mērs ir vērtība. Galējā noderīguma teōrija kā cenu teōrija atmetama.»[193]

2. Franču zinātņu akadēmijas loceklis *P. Painlevé* priekšvārdos *St. Jevons'*a *Theory of political economy* franču tulkojumam *(La théorie de l'économie politique, Paris 1909.)* izsakās vispār arī par matēmatikas metodi.

Viņš saka, ka zinātņu dabiskais gājiens — attīstīties no kvalitātīva un deskriptīva stāvokļa uz kvantitātīvu un kauzālu. Piemēram — astronomija sākumā sastādījusies tikai no glezmainām un diezgan nenoteiktām piezīmēm par zvaigznāju veidu, saules, mēness un planetu stāvokli, formu un krāsu. Bet kad radušies pirmie precīzie novērojumu instrumenti, tad astronomija kļuvusi par *kvantitātīvu* zinātni, t. i. par spējīgu mērīt un izteikt skaitliski parādības, ko tā pētī, palikdama viscaur *deskriptīva*. Tikai vēlāk tā sākusi nodarboties ar parādību *cēloņu* pētīšanu; noskaidrojusi šos cēloņus, tā kļuvusi spējīga paredzēt debesu nākotni. Citas zinātnes vēl tālu no tādas pil-

[193] A. Voigt, op. cit., p. 607.

rības stāvokļa. Fizika esot vēl pa pusei, ķīmija vairāk par pusī kvalitātīva. Tomēr šinīs divās zinātnēs esot ļoti svarīgas parādību klases, kas rodoties no milzīga mazu, sarežģītu parādību daudzuma un no kurām mūsu jutekļi uztverot tikai kopuma efektus (les effets d'ensemble). Tā kā aiz šo elementāro parādību untumiem tās zināmā mērā cita citu iznīcinot, tad varot eksakti tvert kopparādību (le phenomène global), neieejot sīkumos. Tāda zinātne, ko varot saukt par *kvantitātīvo statistisko zinātni*, teorētiski mazāk pilnīga nekā astronomija, bet tai praktiski varot būt vairāk nozīmes, jo tā vienkāršāka. Kinētiskā gāzu teorija esot statistiskās zinātnes piemērs.

Citos gadījumos parādības (pat statistiskas) nepieļaujot visumā kvantitātīvas teorijas, bet zinātne tomēr tiem uzliekot dažus precīzus likumus, kas neesot pietiekoši, lai parādības noteiktu, bet kam vismaz vienmēr jāpaklausa. Enerģijas pastāvības princips, *Carno-Clausius*'a princips — šo likumu tipi.

«Tādā kārtā esam izšķīruši trīs kvantitātīvu zinātņu veidus: pilnīgu zinātni, statistisku zinātni un nepilnīgu zinātni, kuras skaitliskie likumi, pilnīgi pārvaldīdami parādības, nav pietiekoši, lai tās noteiktu. Šie apsvērumi nebija nederīgi, lai nomanītu pakalpojumus, ko politiskā ekonomija var sagaidīt no kvantitātīviem prātojumiem vai, ja grib, no matēmatikas.»[194]

Iedomāsimies smadzenes, saka tālāk *Painlevé*, pietiekoši saprātīgas un pietiekoši informētas (renseigné), lai precīzi zinātu visas zemes aktuālo ekonomisko stāvokli (ražojumus, transporta līdzekļus, tirdzniecisko organizāciju); pieņemsim, ka tās (smadzenes) zina tāpat katra individa psīcholoģisko stāvokli un precīzus likumus savstarpējām iedarbībām, kas notiek katra individa un tā apkārtnes starpā. Tādas smadzenes, ja bez tam tām būtu neaprobežotas dedukcijas spējas, varētu aprēķināt ekonomiskās parādības, kas notiks uz zemes rītdien, parītdien u. t. t. Tā darināta zinātne būtu tikpat pilnīga kā astronomija. Bet vai vajadzīgs piemetināt, ka šāda hipotēze ir chimēra? Vai nav skaidra lieta, ka politiskā ekonomija būs vienmēr nespēcīga parādību priekšā, kur tai nāktos ņemt vērā katra cilvēka vienības untumus? Vienīgā kvantitātīvā forma, ko tā var pieņemt, ir statistiskā forma. Citiem vārdiem, tā var zi-

[194] Painlevé, op. cit., p. VIII.

mēties (s'attaquer) tikai uz kollektīvparādībām, ko neietekmē individuālās savādības, vai nu tāpēc, ka tās neeksistē, vai arī tāpēc, ka tās savstarpīgi iznīcinās.

Bet, turpina *Painlevé*, pat statistiskā formā zinātne prastu spriest tikai par mērījamiem, noteikti definētiem lielumiem. Ņemsim piemēram garuma jēdzienu: izvēloties vienreiz metru, varēsim mērīt dotajā momentā līnijāla garumu, kāda priekšmeta dimensijas, nezinot nekā cita kā aplūkojamo priekšmetu un garuma etalonu. Bet pieņemsim, ka tagad ir analoģisks politiskas ekonomijas jēdziens: vērtības jēdziens. Pieņemsim par vērtības vienību viena grama zelta vērtību: vai varam, pārbaudot vienīgi kādu priekšmetu, piem., kādu daudzumu zivju, pateikt, kāda ir tā vērtība aplūkojamā momentā? Precīzāk, vai eksistē vispārīgs vērtības apzīmējums, ko var visi lietot tā kā garuma jēdzienu, un tāds, ko var *tieši* (pasv. mans. L.A.) mērīt kāda priekšmeta vērtību dotajā momentā (kā to var darīt ar dimensijām, svaru etc.) no tā brīža, kad zināms objekts, vērtības vienība un nekas vairāk?

Viegli saprast, ka tāda definīcija nevarot eksistēt. Bet varētu, saka autors, iebilst tā: atteiksimies no vērtības teorētiskas definīcijas, kam būtu tāda pati nozīme kā garumam. Tas taču netraucē, ka dotajā tirgū, dotajā stundā būs pilnīgi noteikta kādas preces cena. Šī cena, preces pārejošā un lokālā vērtība, ir taču skaitlis, kuŗu variācijas varam pētīt atkarībā no laika un vietas apstākļiem. Bet, saka *Painlevé* pret šo iebildumu, grūtības ir tikai atbīdītas. Kā gan novērtēsim dažādus elementus, kas ietekmē cenas?

Jevons's rīkojoties ar derīguma funkcijām: pieņemot, ka tirgotāju grupai A pieder daudzums a kviešu un tirgotāju grupai B daudzums b gaļas un ka tie tirgojoties savā starpā. *Jevon*'s apzīmējot ar φ_1 (a) un ψ_1 (y) derīgumu, kāds ir no daudzuma a kviešu un no daudzuma y gaļas grupai A un ar φ_2 *(x)* un ψ_2 *(b)* derīgumu, kāds ir no daudzuma x kviešu un daudzuma b gaļas grupai B un pierādot, ka maiņa apstāšoties, jeb citiem vārdiem, būšot reālizēts ekonomiskais līdzsvars, kad būšot izpildīti vienādojumi:

$$\frac{\varphi_1 (a - x)}{\psi_1 (y)} = \frac{y}{x} = \frac{\varphi_2 (x)}{\psi_2 (b - y)}$$

Bet kā, jautā *Painlevé*, noteiks *kvantitātīvi* tādas preces *derīgumu* grupai *A* un *B*? Ļoti daudzos gadījumos preces derīgums neatkarāsies vienīgi no tās daudzuma. Pat ja tā būtu, ja aplūkojam derīgumu kā funkciju φ (a), kuŗas lielums grupai *A* dilst, ja aug šīs preces daudzums, kas jau *A* pieder, tad vesels prāts mums atļauj izvēli neaprobežotā funkciju skaita starpā, kuŗām jāpakļaujas tikai tam nosacījumam, ka ar *a* augšanu tās dilst. Varētu teikt, ka izvēlēsies tās, ko dos tirdznieciskā statistika. Bet tad vairs nebūs teōrija, tas būs vienkāršs konstatējums, ko mēs izdarām.

Tās pašas piezīmes zīmējoties uz lielāko daļu citu ekonomisko jēdzienu, kas ieejot kvantitātīvā formā *Jevons*'a vienādojumos.

Par šo tā saucamo lielumu dimensijām esot pāragri runāt.

Tāpat ekonomiskā līdzsvara likumu pielīdzināšana statikas principiem neesot citas lielākas nozīmes kā vienīgi valodas figūra. Bet esot ekonomisko parādību klases, kas izvairoties no nule minētiem iebildumiem. Tā visi *apdrošināšanas* veidi esot varbūtību rēķinu precīza lietošana. Tāpat lielas kredita kustības biržas papīru svārstības varot pakļaut matēmatikas prātojumiem, kaut gan tur loma arī psīcholoģijas elementiem, bet tie tur ienākot statistikas veidā.

Arī monopōla fundamentālā problēmā diferenciālrēķini esot labs palīgs, jo parastie prātojumi te būtu bezspēcīgi.

Atgriezies vēlreiz pie *Jevons*'a formulas un to iztirzājis, *Painlevé* saka: «Vienā vārdā, matēmatikas prātojumi mums der par palīga un pagaidu instrumentu, lai ērtāk un ar lielāku pārliecību deducētu no kvalitātīvām prēmisām kvalitātīvus secinājumus. Šo starpprātojumu gaitā mums jāmet kvantitātīvas drānas uz datiem, kas ir vēl tikai kvalitātīvi. Bet tās ir patapinātas drānas, no kuŗām varam atsvabināties ceļa galā.[105] Bet iebildīšot, ja tas tā, kāpēc tad ievest matēmatiskos prātojumus. Ja lieta grozoties tikai ap kvalitātīviem rezultātiem (un ne pavisam ne ap skaitliskiem), kāpēc nelietot parasto valodu. Uz šo varbūtējo iebildumu *Painlevé* atbild tā:

«Iebildums būtu dibināts, ja mūsu dedukcijas spējas vien-

[105] Painlevé, op. cit., p. XVII.

kāršā valodā nebūtu nesalīdzināmi mazākas nekā matēmatikas valodā.»

«Galu galā: stipri un mākslīgi vienkāršotas reālo parādību k v a n t i t ā t ī v ā s schēmas, bet ar šām schēmām tiek spilgti izcelti ekonomisko cēloņu savstarpēji, nepārtraukti, sarežģīti ietekmējumi un cēloņu k v a l i t ā t ī v a s tendences; kritika un zinātnisks gars tiek ievesti polītiskā ekonomijā šādā ceļā precīzākā formā un līdz ar to dažādās socioloģijas nozarēs; beidzot, ka k v a n t i t ā t ī v ā s konsekvences ir racionāla statistikas interpretācija, daži skaidri atvasināti vispārīgi likumi; dažas ļoti speciālu faktu klases, izpētītas skaitliski — lūk šās jaunās zinātnes darbs, kuru var saukt par matēmatisko ekonomiju.»[196]

Vai esot atļauts uz to dibināt plašas cerības? Cerības padarīt polītisko ekonomiju par zinātni, kas neapšaubāma visiem, kā tas ir ar ģeometriju, esot chimēriskas. Bet tomēr zinātniskās ekonomijas sociālais ietekmējums esot neapstrīdams, tāpēc, visiem kas vēlas lai tiktu ienests no sākuma mazliet gaismas, pēc tam drusku taisnības mūsu modernās sabiedrības ekonomiskās dzīves šausmīgajā juceklī, jāinteresējas par matēmatiskās ekonomijas attīstību, lai arī cik grūts liktos sākums.»[197]

3. žurnālā *«Archiv für Sozialwissenschaft und Sozialpolitik»* XXX. B. 1910. *O. Spann's* rakstā *«Die mechanisch-mathematische Analogie in der Volkswirtschaftslehre»*, kas domāts galvenokārt kā J. Schumpetera darba *Wesen und der Hauptinhalt der theoretischen Nationalökonomie, Leipzig, 1908.*, kritika, izsaka principiālas domas arī par matēmatikas metodi tautsaimniecībā, sevišķi nodalījumā *«Die Anwendung der Mathematik»*. Šī problēma koncentrējoties ap jautājumu: kas mūsu zinātnē *izteicams lielumos, kas tanī kvantificējams* (quantifizierbar) (pasv. mans. L. A.).

«Par nacionālekonomijas objektu izrādās vispār: cilvēku darbības, kas *saistītas* ar mantu daudzumiem. *Vissvarīgākais ir, ka īstenībā nav dotas nekādas tiešas funkcijas starp mantu daudzumiem,* bet *īstā cēlonība* (Verursachung), *pirmatnējā li-*

[196] Painlevé, op. cit., p. XIX.
[197] Painlevé, op. cit., p. XXII.

kumība atrodas saimnieciskajās darbībās, ciktālu tās ir līdzekļi saimnieciskiem mērķiem ... *Nacionālekonomijā daudzumu kustības* (pieaugums un dilšana) ir *tikai pavisam citu procesu* ārējais blakus rezultāts,»[198] saka *Spann's,* un tāpēc mantu daudzumi, kas sastopami saimniecībā, nestāvot tiešā atkarības attiecībā, bet vai tie ieejot principiāli kaut kādā ziņā kā *daudzumi* tautsaimnieciski zinātniskos apsvērumos? Saimniecisko darbību sakarība (kuras derot par līdzekli saimnieciskiem mērķiem) veidojot saimnieciskās parādības. «Bet ja nu jāņem vērā darbības tikai to *sakarībā,* tikai to iedarbībā, svarīguma līdzekļu sistēmā, tad iznāk, ka pie tām saistītās mantas netiek uztvertas vispār kā daudzumi, bet tikai pēc to *nozīmes,* to nozīmes sakarībā, sistēmās. Esmu to nosaucis par kādas darbības (vai mantas u. tml.) f u n k c i o n ā l u n o z ī m i, un jēdzienu par to — par funkcijas vai izdarības jēdzienu. Lieta negrozās ap līdzekļiem, kas uzrāda vienu vai otru *daudzumu,* bet ap *nozīmi,* kas tiem ir saimnieciska mērķa sasniegšanai, ne ap mantu daudzumu, bet mantu nozīmēm, funkcijām. Daudzumi gan ir saistīti pie nozīmēm, bet tās ir prīmāras. To vispirms pierāda pats vērtības jēdziens. Vērtība ir «nozīme, ko piešķiram mantām, zīmējoties uz mūsu vajadzību apmierināšanu jeb saimnieciskiem mērķiem *(Philipovich)*» ... Daudzumi paši par sevi nedzīvi; tikai tiktālu, cik tie iegūst *nozīmi* mūsu labā — un to tie var tikai tad, kad kļūst par *rīcības* (Handelns) priekšmetu — tiem ir saimnieciska nozīme. Ir vispār maldīšanās, it kā mantas pašas par sevi būtu saimnieciskas parādības: par tādām tās kļūst tikai ar to ieaušanos saimnieciskā rīcībā.»[199]

Izejot no šiem uzskatiem, *Spann's* norāda, ka pirmā mēchaniski-matēmatiskā aplūkošanas veida kļūda bijusi tā, ka pieņemts, it kā daudzumi stāvētu tiešās atkarības attiecībās savā starpā; otra kļūda — saimnieciskie līdzekļi (mantas), no tautsaimnieciskās teorijas viedokļa vispār neesot vis daudzumi, bet gan kvalitātes, kas katrā ziņā uzrādot *sadalītu pakāpes intensitāti.* Šīs intensitātes neesot tieši kvantificējamas, bet gan tikai netieši, tiktāl, cik tās salīdzināmas.

[198] O. Spann, Die mech. math. Analogie, p. 795—796.

[199] Spann, op. cit., p. 796—797.

«Tā rodas salīdzināmie lielumi, kas bez šaubām dara iespējamus kvantitātīvos viedokļus un *padara matēmatiskās izteiksmes un formulējumus bieži pat vēlamus un auglīgus;* bet pēc savas dabas tie izslēdz priekšstatu par tieši savā starpā atkarīgu lielumu (daudzumu) sistēmu un līdz ar to mēchaniski matēmatisku aplūkošanas veidu kā principiālu.»[200]

Bet kādā ziņā tad intensitātes salīdzināmas un tādējādi kvantificējamas? Te jāņemot vērā tikai funkcionālo nozīmju graduālā dažādība, t. i., *vienkārši* nozīmes, kādas ir mantām, no to salīdzināmā stipruma viedokļa, vai citādi: dažādas intensitātes, ar kādām izpaužoties funkcionālās nozīmes. Tādā kārtā lieta grozoties ap vērtību teōriju.

Beidzot, arī saimnieciško parādību *vienība* neesot izteicama kvantitātīvi, saimnieciskās parādības neesot nekādi agregāti, bet gan līdzekļa *sistēmas,* funkcionālās *vienības.*

«Matēmatikas metode bazējas uz lietas būtības samainīšanu ar attēles līdzekli.»[201]

«Matēmatiskā domāšana nav principiāli *patstāvīga* pētīšana, kas izpaužas saimnieciskas darbības struktūras plastiskā pēcpārdzīvojumā (Nacherleben), bet vienmēr tikai formulējums vai mēra noteikums *piedevām.* Matēmatikas metode ir tā teikt indirekts aplūkošanas paņēmiens, kas nodarbojas rīcību vietā tikai ar blakus parādībām un rīcības iznākumiem lietišķo mantu pasaulē. Tā tad zināms aplinkus ceļa veids, notikumu pētīšana no otrām rokām, kas *gan bieži, bet ne vienmēr būs derīgs un auglīgs* (pasv. mans. L. A.)»[202]

«Jo vairāk matēmatikas, jo vairāk jāizzūd saimniecisko parādību attiecību dzīvajai jēgai, kuŗas izkausētas vienādojumos.»[203]

Uz beigām *Spann's* vēl piemetina:

«Ar to izrādās par nederīgu ne tikai mēchanisko priekšstatu veids, bet arī matēmatikas, kā patstāvīgas pētīšanas metodes lietošana nācionālekonomijā par izslēgtu, kaut gan palīgkārtā parciāla matēmatikas metožu, sevišķi matēmatikas un

[200] Spann, op. cit., p. 797.
[201] Spann, op. cit., p. 798.
[202] Spann, op. cit., p. 798.
[203] Spann, op. cit., p. 798.

grafisko *attēles līdzekļu* lietošana nav nemaz izslēgta — otrādi, tā var būt vēlama un ļoti noderīga.»[204]

**
*

4. Esam minējuši tipiskākos iebildumus pret matēmatikas lietošanu teōrētiskajā tautsaimniecībā.

Īstenībā pēc tam, kad jau noskaidrota matēmatikas metožu būtība un nozīme, šie iebildumi krīt gandrīz paši no sevis. Tiešām, neviens no tiem neskar, piem., aksiōmatisko metodi; citas metodes aizķer tikai pa daļai. Tas arī saprotams, jo līdz šim nav cik necik plašāka mēģinājuma dot pietiekoši pilnīgu šo metožu raksturojumu, tāpēc arī iebildumi varēja vispār zīmēties uz vienu otru atsevišķu jautājumu. Tomēr, lai nebūtu nekādu šaubu, aplūkosim sīkāk šos iebildumus.

Visiem nule minētiem iebildumiem kopīgs trūkums tas, ka tie vēršas pret to, ko neviens nav apgalvojis: tie vēršas pret matēmatikas metožu *ekskluzīvo* lietošanu tautsaimniecības teōrijā, bet neviens pat no fanātiskākiem šo metožu aizstāvjiem nav nekur apgalvojis, ka visas tautsaimniecības problēmas atrisināmas ar matēmatikas metožu palīdzību. Tā, piem., *Voigt's* norāda, ka teōrētiskā ekonomija esot nostādījusi pretī matēmatikas metodei vēstures metodi.

Te jāatgādina, ka matēmatikas metodes pārstāvji taisni uzsver arī vēstures metodes nozīmi, jo tā dodot iespēju paplašināt pieredzi, un tā tad nemaz nenorāda vai nenostāda p r e t ī vēstures metodei matēmatikas metodes.

Kā galveno iebildumu *Voigt's* tālāk izvirza to, ka teōrētiskā tautsaimniecība nevarot būt noslēgta, zīmējoties uz saviem principiem, kas varot mainīties līdz ar vēsturiski doto saimniecības ainu. Bet šis apstāklis ne mazākā mērā netraucē matēmatikas metodes lietošanu, jo 1) arī pašai matēmatikai nebūt nepiemīt tāda principu noslēgtība, par kādu runā *A. Voigt's*; ir labi, ja pat mazs jēdzienu krājums var pretendēt uz vispārnoderību visām saimnieciskām formām; 2) tas, ka daži principi mainās līdz ar saimniecisko formu maiņu vai arī otrādi, taisni pieder pie matēmatikas metodes būtības, jo tā negrib teōrētiskajā tautsaimniecībā teikt neko citu, kā tikai

[204] Spann, op. cit., p. 811.

to: j a p i e ņ e m a m š ā d u s p r i n c i p u s u n j ē d z i e- n u s, t a d r o d a s t ā d a s u n t ā d a s s e k a s; s e- k a s ī s t e n ī b ā a r z i n ā m u t u v i n ā j u m u r e ā l i- z ē s i e s p a r t i k, p a r c i k b ū s r e ā l i z ē t i m i n ē- t i e p r i n c i p i. Bet kad īsti šie principi tiks reālizēti, tas vairs nav teōrētiskās tautsaimniecības lieta — tas ir tautsaimniecības polītikas uzdevums, ja, protams, šis uzdevums tai vispār pa spēkam.

Arī, piem., fizikas likumi attaisnojas īstenībā tikai tad, ja ir vajadzīgie priekšnosacījumi. Tā, piem., *Ohm*'a likums reālizēsies tikai tad, ja pa kādu vadu plūdīs elektriskā strāva. Ja tādas nav, tad nav vērojams arī minētais likums. Tāpat parādības, kas saistītas ar, pieņemsim, kādas preces ražošanas monopōla stāvokli, īstenībā iestāsies tikai tad, kad būs reālizēts šāds stāvoklis.

Tāpēc var tikai visnotaļ pieslietes *Voigt*'am, ja viņš saka, ka katra dedukcija esot bezvērtīga, ja neizteicot skaidri prēmisas un tā nedarot zināmus tās lietošanas nosacījumus, un ka taisni šinī punktā visvairāk esot grēkots. Aksiōmatiskā metode taisni grib šos grēkus novērst, vai sliktākā gadījumā tos mazināt.

Tālāk *Voigt*'s uzsver ekonomisko elementāro lielumu subjektīvo pusi, no kuŗas izrietot neiespējamība tos mērīt objektīvi.

Tas ir visbiežāk dzirdamais iebildums pret matēmatikas metožu lietošanu un tāpēc pie tā jāpakavējas mazliet ilgāk.

Šo jautājumu jau pietiekoši labi apgaismojis *Jevons*'s (sk. šā darba 43. lapp.), *Schumpeter*'s (šā darba 33. lapp.) u. c. Mums atliek vēl tikai uzsvērt dažas lietas. Esam jau aizrādījuši uz lielumu n e t i e š a s mērīšanas iespējām: piem., vērojot resp. mērījot garumus (dzīvsudraba garumu termometra caurulē), spriežam par temperātūru. Tāpēc var būt iespēja, ja pat tās patlaban vēl nebūtu, mērīt arī tādus lielumus — skaitliski salīdzināt savā starpā kaut arī tikai zināmas skālas veidā — kuŗus tieši salīdzināt neprotam un kuŗu vienību definēt vēl pilnīgi precīzi nevaram, kā to jau tagad dara, piem., ar cilvēka intelliģenci, atmiņu, uzmanību u. c. subjektīvām īpašībām.

Ja kādus subjektīvus pārdzīvojumus nevar mērīt, tad, protams, nevar tiem pielāgot saskaitīšanas un citu aritmētisku darbību, bet tad tomēr, starp citu, vienmēr paliek iespējams konstatēt vienlīdzību vai nevienlīdzību, nepārtrauktību, pārmaiņas virzienu u. tml.

Bez tam, skaitliskais — tieši cipariem izteiktais jau nav matēmatikai būtiska lieta, kā to jau pareizi norādījis *Cournot* (šā darba 97. lapp.).

Par to runā arī *O. Hölder's*. «Agrāko parasti lietojamo matēmatikas, kā zinātnes definīciju, kas nodarbojas ar daudzumiem, pretēji kvalitātei, ir šodien lielākā daļa pamatoti atmetuši.»[205] Esot daudz teōrēmu, kur nemaz neesot runas par daudzumiem, saka *Hölder's*.

Bet pat ja atteiktos no tāda viedokļa, pat ja pievienotos domai, ka subjektīvos lielumus nevar nekādi mērīt, tas nenozīmētu vēl, ka skaitliskajam teōrētiskajā tautsaimniecībā nebūtu vietas. Še pietiek atcerēties tikai tādas lietas, kā piem., *Pareto* ienākuma sadalījuma likumu, lai saprastu matēmatikas metodes nozīmi. Runājot par matēmatikas metodēm, vēlreiz jāuzsveŗ, ka nekur nav izteikta doma, ka tās būtu vienīgās, kas lietojamas teōrētiskajā tautsaimniecībā, bet gan ļoti svarīgas blakus citām. Ko nevar veikt ar matēmatikas metodēm, lai paliek citām metodēm.

A. Voigt's tālāk kavējas pie speciāliem atsevišķiem jautājumiem, pie kuŗiem neapstāsimies, jo mūs šeit interesē vispārīgais metožu jautājums.

Arī *Painlevé* runā par subjektīvu lielumu precīzas, objektības vienības neiespējamību, piem., vispār noderīgas vērtības vienības neiespējamību. Arī cenas te nelīdzot.

Sasniegumi taisni pieprasījuma un piedāvājuma līkņu novadā, kā tie izteicas, piem., pieminētajā *H. Schultz'a* darbā *Statistical laws of demand and supply*, ir labākais atspēkojums pret šo iebildumu un līdz ar to arī pret iebildumu, ka statistiskā formā ietērptā zinātne būtu mazāk vērtīga, jo tā nedodot iespējas izdarīt prognozi. Kollektīvlielumu pētīšanas metode ir pierādījusi, ka te iespējama arī prognoze, kā to rāda arī piemēri no minētā *H. Schultz'a* darba.

[205] O. Hölder, Die mathematische Methode, Berlin 1924, p. 50.

Bet tālāk *Painlevé* pats it kā atsauc, katrā ziņā, stipri mīkstina savus iebildumus, piešķirdams lielu nozīmi matēmatikas metodei, jo viņa iebildumi, īsumā savienoti, grib izteikt to, ka teōrētiskā tautsaimniecība nav vēl sasniegusi tādu stāvokli, ka tā viscaur būtu apstrādājama ar matēmatikas metodēm, bet uz to jau neviens arī nepastāv.

Kas zīmējas uz *Spann*'u, tad viņam taisnība, ka nevar runāt tikai par mantu daudzumu tiešām funkcijām, bet galvenais ir cilvēku darbības un mantu nozīme. Bet arī viņš atzīst, ka bieži matēmatiskās izteiksmes un matēmatiskie formulējumi pat vēlami un auglīgi, tikai noliedz mēchaniski-matēmatisku aplūkošanas veidu kā principiālu. Matēmatikas metode esot indirekts aplūkošanas paņēmiens, kas gan bieži, bet ne vienmēr būšot auglīgs un derīgs. Ar to mums arī pietiek, jo nebūt negribam lietot matēmatikas metodes tur, kur tās nederētu, jo atliek jau tā, kā redzējām, plaši lauki teōrētiskajā — un, piemetināsim, ne mazāk arī praktiskajā, lietojamā — tautsaimniecībā, kā arī privātsaimniecībā, kur matēmatikas metodes izrādījušās par visai auglīgām un turpmāk izrādīsies par vēl noderīgākām.

Par netiešu pierādījumu nule izteiktām domām der diezgan prāvais dažādās valodās sastādīto matēmatiskās mācības grāmatu skaits, kuras domātas tieši tiem, kas nodarbojas ar tautsaimniecības zinātņu studijām. Tā, piem., šinī gadā iznākusi samērā plaša grāmata (541 lapp.) *Mathematical Analysis for Economists by R. G. D. Allen, London* 1938. No agrāk iznākušajām var atzīmēt: *Prof. Carlo Alberto dell' Agnola, Matematiche generali, Introduzione allo studio della Matematica, applicata ai problemi finanziari, economici e statistici, Venezia* 1928 (590 lapp.), un jau agrāk minētās: *Introduction mathématique à l'économie politique par L. Leseine et L. Suret*, Paris 1911; *Paul Lorenz, Höhere Mathematik für Volkswirte und Naturwissenschaftler, Leipzig* 1929.

Pazīstamais amerikāņu tautsaimnieks *I. Fisher*'s arī sarakstījis tīri matēmatisku grāmatu *A brief Indroduction to the Infinitesimal Calculus (3-d ed. 1909)*.

Tāpēc var droši pievienoties *J. Schumpeter*'a vārdiem: «Kas šodien piegriežas ekonomiskās analizes novadam, tam jārēķinās ar to, ka viņš piedzīvos laiku, kur bez augstākās matēmatikas domāšanas formu zināšanām pavisam nebūs iespējams runāt līdzi mūsu zinātnes jautājumos.» (*Arch. für Sozialwiss., Bd. 58, 1927, p. 241.*).

**
*

Šķiet, ka ar visu sacīto esam pilnīgi attaisnojuši šādas tezes:

1. Līdz ar tautsaimniecības zinātnes attīstības gaitu vērojami pirmie nedrošie mēģinājumi lietot dažādu jautājumu noskaidrošanai matēmatiku, kas ieņem jau dominējošu vietu *Cournot* darbā «*Recherches etc.*» un sevišķi spilgti izteicas daudzos 19. g. simta beigu un it īpaši 20. g. s. sākuma darbos.
2. Paralleli ar matēmatikas paņēmienu iespiešanos ekonomiskajās zinātnēs, rodas arī iebildumi pret tiem, kas pamudina matēmatikas metožu lietotājus atspēkot šos iebildumus, nesniedzot tomēr pietiekoši pilnīgu pārskatu par matēmatikas metožu būtību un nozīmi.
3. Patlaban var runāt par četrām galvenām matēmatikas metodēm, kas lietojamas vispirms tautsaimniecības teōrijā: aksiōmatisko metodi, funkciju metodi, grafisko metodi, kollektīvpriekšmetu mērīšanas jeb lielo skaitļu metodi (ar saviem paveidiem — korrelācijas metodi u. t. t.).
4. Šīs metodes jau izrādījušās par ļoti noderīgām ekonomiskajās zinātnēs un, apzināti un pareizi lietotas, var izrādīties turpmāk par vēl vairāk noderīgām un pat nepieciešamām.
5. Tā kā ekonomisko zinātņu un it īpaši tautsaimniecības teōrijas daudzu svarīgu jautājumu izpratne un tālākā izkopšana nav lāgā iespējama bez matēmatikas metodēm, tad tiem, kas vēlas nopietni nodarboties ar ekonomiskajām zinātnēm, nepieciešama attiecīga matēmatiska priekšizglītība.

Literatūra un avoti.

(Minēti galvenā tiesā citētie darbi.)

1. *Alfred Amonn,* Objekt und Grundbegriffe der theoretischen Nationalökonomie, zweite, erweiterte Auflage, Leipzig 1927.
2. *Luigi Amoroso,* Lezioni di economia matematica, Bologna MCMXXI
3. *Enrico Barone,* Grundzüge der theoretischen Nationalökonomie, übersetzt u. mit einem Anhang versehen von Hans Staehle, Bonn 1927.
4. *Проф. С. А Богомолов,* Основания геометрии, Москва 1923.
5. *Dr. L. v. Bortkiewicz,* Die Iterationen, Ein Beitrag zur Wahrscheinlichkeitstheorie, Berlin 1917.
6. *Émile Bouvier,* La Méthode mathématique en Économie politique Revue d'Économie politique, 15e anné, 1901, Nr. 8—9, Nr. 12.
7. *Pierre Boven,* Les Applications mathématique à l'Économie politique, Thèse, presenté à la Faculté de Droit de l'Université de Lausanne, Lausanne 1912.
8. *Dr. Walther Brand u. Dr. Marie Deutschbein,* Einführung in die philosophischen Grundlagen der Mathematik, Frankfurt a. M. 1929.
9. *Dr. Heinrich Bruns,* Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmasslehre, Leipzig und Berlin 1906.
10. *Gustav Cassel,* Theoretische Sozialökonomie, vierte, verbesserte und wesentlich erweiterte Auflage, Leipzig 1927.
11. *Gustav Cassel,* Grundgedanken der theoretischen Ökonomie, Leipzig 1926.
12. *Augustin Cournot,* Untersuchungen über die mathematischen Grundlagen der Theorie des Reichtums, Jena 1924.
13. *Em. Czuber,* Wahrscheinlichkeitsrechnung, Leipzig und Berlin 1914.
14. *Dr. Emanuel Czuber,* Die statistischen Forschungsmethoden. Wien 1921.
15. *F. Divisia,* Économique rationelle, Paris 1928.
16. *F. I. Edgeworth,* Mathematical method in political economy, Palgrave's Dictionary of political economy edited by Henry Higgs, C. B., vol. II, London 1923.
17. *Euclidis* Elementa edidit et latine interpretatus est I. L. Heiberg, Uol. I, Lipsiae MDCCCLXXXIII.
18. *Dr. M. Ezekiel,* Preisvoraussage bei landwirtschaftlichen Erzeugnissen, Bonn 1930.
19. *Charles Gide et Charles Rist,* Histoire des Doctrines économiques depuis les physiocrates jusqu'à nos jours, Paris 1926.
20. *Hermann Heinrich Gossen,* Entwicklung der Gesetze des menschlichen Verkehrs und der daraus fliessenden Regeln für menschliches Handeln, Berlin 1927.

21. *Georges Guillaume*, Sur les Fondements de l'Économique rationnelle avec une technique de la prévision, avec une théorie mathématique par *Ed. Guillaume*, Paris 1932.
22. *Georg Helm*, Die Wahrscheinlichkeitslehre als Theorie der Collektiv-begriffe, Annalen der Naturphilosophie, Erster Band, 1902.
23. *D. Hilbert*, Axiomatisches Denken, Mathematische Annalen, 78. B.
24. *Dr. David Hilbert*, Grundlagen der Geometrie, Leipzig und Berlin 1922.
25. *Otto Hölder*, Die mathematische Methode, Berlin 1924.
26. *Frechet et Halbwachs*, Le Calcul Probabilités à la portée de tous, Paris 1924.
27. *W. Stanlay Jevons*, The Theory of Political Economy, London 1931.
28. *Immanuel Kant*, Prolegomena zu einer jeden künftigen Metaphysik, die als Wissenschaft wird auftreten können, Leipzig, Druck und Verlag von Philipp Reclam jun.
29. *F. Klein*, Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus, Teil II, Geometrie, Leipzig 1914.
30. *Проф. В. А. Косинскій*, Лекціи но теоріи политической экономіи, читанныя на русскомъ юридическомъ факультетѣ въ Прагѣ, Прага 1922.
31. *В. А. Косинскій*, О пріемахъ научной разработки статистическихъ данныхъ, Москва 1890.
32. *Dr. Otto Kühne*, Die mathematische Schule in der Nationalökonomie, Band I, 1. Teil: Die italienische Schule (bis 1914), Berlin und Leipzig 1928.
33. *Latvijas statistiskā gada grāmata*, 1930., Rīgā 1931.
34. *Léopold Leseine et Louis Suret*, Introduction mathématique à l'Édute de l'Économie politique, Paris 1911.
35. *Paul Lorenz*, Höhere Mathematik für Volkswirte und Naturwissen-schaftler, Leipzig 1929.
36. *E. Löffler*, Denkmittel der Mathematik im Dienste anderer Wissen-schaften, Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften, XXXIV Jahrgang, 1928, Nr. 8.
37. *T. R. Malthus*, An Essay on Population, Volume one, Volume two, London Published by J. M. Dent & Sons Ltd.
38. *J. S. Mill*, A. System of Logic, Ratiocinative and Inductive, Longmans, Green and Co.
39. *Frederick Cecil Mills*, Statistical Methods applied to Economics and Business, London 1929.
40. *Alfred Marshall*, Principles of Economics, Vol. I, London 1898.
41. *Dr. Richard v. Mises*, Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwen-dung in der Statistik und theoretischen Physik, Leipzig und Wien 1931.
42. *Henry Ludwell Moore*, Synthetic Economics, New-York 1929.
43. *Jaques Moret*, L'emploi des Mathématiques en Économie politique, Paris 1915.

44. *Antonio Osorio*, Théorie mathématique de l'Échange, Traduit par José d'Almada, Paris 1913.
42. *Paul Painlevé*, préface à *W. Stanley Jevons*, Theory of Political Economy, traduit par H. E. Barrault & Maurice Alfassa, Paris 1909.
43. *Maffeo Pantaleoni*, Ceva. Palgrave's Dictionary of political economy, edeted by Henry Higgs, C. B. vol., I, London 1925.
44. *Vilfredo Pareto*, Anwendungen der Mathematik auf Nationalökonomie, Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen, I, B., II. T.
45. *Vilfredo Pareto*, Manuel d'Économie politique, Paris 1927.
46. *Vilfredo Pareto*, Cours d'Économie politique professé à l'université de Lausanne, T. I. Lausanne 1896, T. II. Lausanne 1897.
47. *Л. І. Петражицкій*, Теорія права и государства въ связи съ теоріей нравственности, Петербургъ 1910.
48. *Ad. Quetelet*, Soziale Physik oder Abhandlung über die Entwicklung der Fähigkeiten des Menschen. Erster B. Jena 1914, zw. B. Jena 1921.
49. *Hans Richter-Altschäffer*, Einführung in die Korrelationsrechnung, Berlin 1931.
50. *Hans Richter-Altschäffer*, Theorie und Technik der Korrelationsanalyse, Berlin 1932.
51. *H. L. Rietz*, Handbuch der mathematischen Statistik, herausgegeben von Dr. Franz Baur, Leipzig und Berlin 1930.
52. *В. И. Романовский*, Элементарный курс математической статистики, Москва 1924.
53. *В. И. Романовский*, Элементы теории корреляции, Ташкент 1928.
54. *Prof. A. Schilling*, Die Lehre vom Wirtschaften, Berlin 1925.
55. *Henry Schultz*, Statistical Laws of Demande and Sypply with special Applications to sugar, Chicago 1928.
56. *Joseph Schumpeter*, Über die mathematische Methode der theoretischen Ökonomie, Zeitschrift für Volkswirtschaft, Sozialpolitik und Verwaltung, XV. B., 1906.
57. *Johann Peter Süssmilch*, Die göttliche Ordnung in den Veränderungen des menschlichen Geschlechts, aus der Geburt, dem Tode und der Fortpflanzung desselben erwiesen, Erster Theil. Berlin 1775, zweyter Theil, Berlin 1765.
58. *Dr. Johannes Tropfke*, Geschichte der Elementar-Mathematik, Vierter Band, Berlin und Leipzig 1923.
59. *Prof. Dr. A. A. Tschuprow*, Grundbegriffe und Grundprobleme der Korrelationstheorie, Leipzig un Berlin 1925.
60. *А. А. Чупровъ*, Очерки по теории статистики, Петербургъ 1910.
61. *М. И. Туганъ-Барановскій*, Основы политической экономіи, Рига 1924.
62. *Walter G. Waffenschmidt*, Graphische Methode in der theoretischen Oekonomie, dargestellt in Anlehnung an das Tauschproblem, Archiv für Sozialwissenschaft und Sozialpolitik, Tübingen 1915.

63. *Dr. jur. und Dr. rer. pol. Otto Weinberger,* Mathematische Volkswirtschaftslehre, Leipzig und Berlin 1930.
64. *Dr. B. Weisz,* Die mathematische Methode in der Nationalökonomie, Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik, 31. Band, Jena 1878.
65. *Проф. А. И. Введенскій,* Логика какъ часть теоріи познанія, Петербургъ 1917.
66. *H. Westergaard und H. C. Nybölle,* Grundzüge der Theorie der Statistik, Jena 1928.
67. *Wilhelm Wundt,* Allgemeine Logik und Erkenntnistheorie, I. Band, Stuttgart 1919.
68. *Wilhelm Wundt,* Logik der exakten Wissenschaften, II. Band, Stuttgart 1920.
69. *Dr. Andreas Voigt,* Zahl und Mass in der Ökonomik, Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft, 49. Jahrg., Tübingen 1893.
70. *A. Voss,* Über die mathematische Erkenntnis, Berlin und Leipzig 1914.
71. *G. Udny Yule,* An Introduction to the Theory of Statistics, London 1929.
72. *Проф. А. К. Митропольский,* Техника статистического исчисления Москва 1921.

Satura rādītājs.