Prof. J. CIZAREVIČS

ANALITISKĀ ĢEOMETRIJA PLAKNĒ

LATVIJAS VALSTS IZDEVNIECĪBA
RĪGĀ 1947

Проф. Я. Цизаревич

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ
НА ПЛОСКОСТИ

На латышском языке

PRIEKŠVĀRDS

Grāmata domāta Latvijas valsts universitates inženierzinātņu un mechanikas fakultatu pirmā kursa studentiem, lai atvieglotu tiem priekšmeta piesavināšanos. Tā būs noderīga vielas atkārtošanai, kā arī analitiskās ģeometrijas elementu patstāvīgai piesavināšanai.

Lai atvieglotu sprausto mērķu sasniegšanu, grāmatā ievietots neliels uzdevumu krājums. Uzdevumu atrisināšanas gaitā vēlams lietot skices, jo tas veicina neskaidrību novēršanu un noder arī kontroles nolūkiem.

Rīgā, 1947. gadā.

J. CIZAREVIČS

PIRMĀ NODAĻA

PUNKTU, NOGRIEŽŅU UN LAUKUMU NOTEIKŠANA AR KOORDINATĀM. KOORDINATU SISTEMAS. PROJEKCIJAS

1. Analitiskās ģeometrijas definicija. Ģeometriju sauc par *analitisku* tad, ja tā ģeometrisku attēlu īpašības izpētī ar algebriskas analizes palīdzību.

Lai pētīšanu varētu izdarīt minētā kārtā, ģeometriskie attēli ir jānoteic ar skaitļiem. Skaitļus, kas pilnīgi noteic un raksturo kādu ģeometrisku attēlu, sauc par šā attēla *koordinatām*. Te apskatīsim ģeometrisku attēlu īpašību pētīšanu plaknē.

2. Taisnes nogrieznis. Divi uz taisnes esoši punkti A un B noteic taisnes *nogriezni* AB (1. zīm.).

1. zīm.

Mērījot šo nogriezni ar kādu citu nogriezni, ko pieņemam par *vienību*, dabūjam mēra skaitli, kas noteic nogriežņa absoluto garumu.

Uz taisnes izšķiram divas *virziena puses*. Ja vienu no tām pieņemam par pozitivu, tad otra būs negativa. Taisnes pozitivo virziena pusi apzīmējam ar bultu. Taisni, kuras pozitivā virziena puse apzīmēta, sauc par *vērstu* taisni.

Ja uz vērstas taisnes atrodas nogrieznis ar sākuma punktu A un gala punktu B, tad garums AB dabū pozitivū zīmi, ja no A uz B ejam taisnes bultas virzienā. Pretējā gadījumā nogriežņa garums dabū negativu zīmi.

No augšējiem pieņēmumiem secinām:

$$AB = -BA,$$

$$AB + BA = 0.$$

$$AB + BC + CA = 0.$$

3. Leņķu mērīšana. Elementarā matematikā leņķus mērī grados, augstākā matematikā — *loka mērā*.

Kāds leņķis ir pilnīgi noteikts, ja uz riņķa ar radiusu 1 (vienības riņķa) dots šim leņķim piekārtotais loks. Šā loka mēra skaitli dabūjam, mērījot šo loku ar loku, kura garums ir 1.

Kā redzams, leņķi mērījam, noteicot tam uz vienības riņķa piekārtotā loka garuma mēra skaitli. Loka mēra skaitlis ir nenosaukts skaitlis.

Leņķa α° loka mēru apzīmē ar

$$\operatorname{arc} \alpha .$$

Ja leņķis dots grados α°, tad šā leņķa loka mēru dabūjam no attiecības

$$\operatorname{arc} \alpha : 2\pi = \alpha^\circ : 360^\circ .$$

Tātad

$$\operatorname{arc} \alpha = \frac{\alpha^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi = \frac{\alpha^\circ}{180^\circ} \cdot \pi . \tag{1}$$

No formulas (1) dabūjam:

$$\operatorname{arc} 360^\circ = 2\pi, \qquad \operatorname{arc} 60^\circ = \frac{\pi}{3},$$

$$\operatorname{arc} 180^\circ = \pi, \qquad \operatorname{arc} 45^\circ = \frac{\pi}{4},$$

$$\operatorname{arc} 90^\circ = \frac{\pi}{2}, \qquad \operatorname{arc} 30^\circ = \frac{\pi}{6}.$$

Ja leņķis dots loka mērā, tad tam atbilstošo gradu skaitu dabūjam no attiecības

$$\alpha^\circ : 360^\circ = \operatorname{arc} \alpha : 2\pi$$

un

$$\alpha^\circ = \frac{\operatorname{arc} \alpha}{2\pi} \cdot 360^\circ = \frac{\operatorname{arc} \alpha}{\pi} \cdot 180^\circ . \tag{2}$$

Tātad, ja $\operatorname{arc} \alpha = \frac{\pi}{3}$, tad

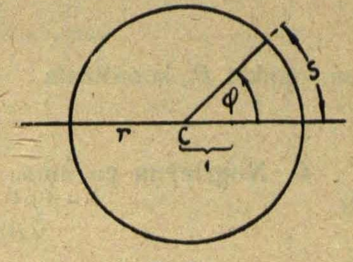
$$\alpha^\circ = \frac{\frac{\pi}{3}}{\pi} \cdot 180^\circ = 60^\circ .$$

Ja (2. zīm.) loka garums s līdzinās riņķa radiusam r, tad lokam $s = r$ atbilstošais leņķis riņķa centrā ir $\varphi = 57^\circ\ 17'\ 45''$. Šo leņķi sauc par *radianu*.

Uz riņķa ar radiusu r, loka mērā izteiktam centra leņķim φ atbilstošais loka garums ir

$$s = r\varphi.$$

Par pozitivo virziena pusi uz riņķa pieņemam virziena pusi pret pulksteņa rādītāja kustību.



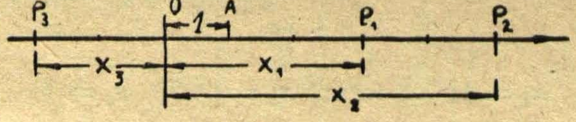
2. zīm.

4. Koordinatas. Par kāda pētījamā ģeometriskā attēla *koordinatām* sauc skaitļus, kas noteic šā attēla stāvokli pret nekustīgiem elementariem attēliem.

Koordinatu sistema ir to nekustīgo elementarattēlu kopums, pret kuriem noteic pētījamā attēla stāvokli.

5. Koordinatu sistema uz taisnes. Lai noteiktu punkta P stāvokli uz dotas vērstas taisnes (3. zīm.), izvēlamies uz tās pēc patikas punktu O. Šo punktu uzskatām par nekustīgu. Dotā taisne, punkts O un vienības garums OA tad veido koordinatu sistemu.

Punktu O sauc par *nullpunktu* vai arī *sākuma* punktu. Punkta P_1 vietu uz šīs taisnes noteic sekojošā veidā.



3. zīm.

Pieņemot, ka nogrieznis OA ir vienības garums, skaitlis

$$x_1 = \frac{OP_1}{OA} \tag{1}$$

izteic, cik vienības garumu ieiet nogriežņa OP_1 garumā. Šo skaitli x_1 sauc par punkta P_1 *koordinatu*.

Koordinatas x vērtība ir pozitivs skaitlis, ja no punkta O uz P ejam uz vērstās taisnes pozitivo pusi; pretējā gadījumā šis skaitlis ir negativs. Tā, piemēram, punkta P_1 koordinata ir

$$x_1 = 3$$

un punkta P_3 koordinata

$$x_3 = -2.$$

6. Nogriežņa garums. No 3. zīmējuma dabūjam:

$$OP_1 + P_1P_2 = OP_2,$$

$$P_1P_2 = OP_2 - OP_1.$$

Tā kā

$$OP_1 = x_1, \quad OP_2 = x_2,$$

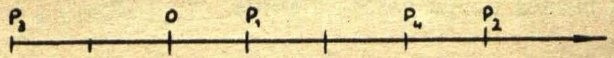
tad nogriežņa P_1P_2 garums ir:

$$P_1P_2 = x_2 - x_1. \tag{2}$$

Tātad nogriežņa garumu dabūjam, no nogriežņa gala punkta koordinatas atņemot sākuma punkta koordinatu.

Piemērs:

Uz taisnes (4. zīm.) doti punkti ar koordinatām:



4. zīm.

$$x_1 = 1; \quad x_2 = 4; \quad x_3 = -2; \quad x_4 = 3;$$

tad

$$P_1P_2 = x_2 - x_1 = 4 - 1 = 3;$$

$$P_1P_4 = x_4 - x_1 = 3 - 1 = 2;$$

$$P_2P_4 = x_4 - x_2 = 3 - 4 = -1;$$

$$P_1P_3 = x_3 - x_1 = -2 - 1 = -3;$$

$$P_2P_3 = x_3 - x_2 = -2 - 4 = -6;$$

$$P_3P_4 = x_4 - x_3 = 3 - (-2) = 5.$$

7. Nogriežņa dalīšanas attiecība. Nogriezni P_1P_2 uz dotas taisnes (5. zīm.) tās pašas taisnes punkts P dala noteiktā attiecībā.

5. zīm.

Dalīšanas attiecību λ dod izteiksme

$$\lambda = \frac{PP_1}{PP_2}. \qquad (1)$$

Augšējā izteiksme un 5. zīmējums rāda, ka λ ir negativs skaitlis, ja dalītājpunkts P atrodas nogriežņa P_1P_2 iekšienē, jo tādā gadījumā nogriežņiem PP_1 un PP_2 ir pretējās zīmes. Ja dalītājpunkts P atrodas ārpus nogriežņa P_1P_2, tad, kā redzams, λ dabū pozitivu zīmi.

Pirmajā gadījumā saka: punkts P dala nogriezni *iekšēji*, otrā — *ārēji*.

Ja punktu P_1, P, P_2 koordinatas ir x_1, x, x_2, tad

$$PP_1 = x_1 - x \text{ un } PP_2 = x_2 - x$$

un

$$\lambda = \frac{PP_1}{PP_2} = \frac{x_1 - x}{x_2 - x}. \qquad (2)$$

Piemērs:

$$x_1 = 2; \quad x = 3; \quad x_2 = 6.$$

Ar šīm koordinatām dabūjam

$$\lambda = \frac{2-3}{6-3} = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}.$$

Ja dotas nogriežņa P_1P_2 sākuma un gala punkta koordinatas x_1 un x_2 un arī λ, tad no (2) dabūjam dalītājpunkta P koordinatu x

$$x = \frac{\lambda x_2 - x_1}{\lambda - 1}. \qquad (3)$$

Piemērs:

Doti

$$x_1 = 2; \quad x_2 = 6 \text{ un } \lambda = -\frac{1}{3},$$

tad

$$x = \frac{-\frac{1}{3}\cdot 6 - 2}{-\frac{1}{3} - 1} = \frac{-2-2}{-\frac{4}{3}} = 3.$$

Piemērs:

Dabūt nogriežņa P_1P_2 viduspunkta M koordinatu. Nogriežņa viduspunkts M dala nogriezni P_1P_2 attiecībā

$$\lambda = -1.$$

Lietojot formulu (3), dabūjam viduspunkta M koordinatu

$$x_m = \frac{-1\cdot x_2 - x_1}{-1-1} = \frac{x_2 + x_1}{2}. \tag{4}$$

8. Īpaši punkti uz taisnes attiecībā uz nogriezni. Uz nogriežņa un uz taisnes, uz kuras atrodas nogrieznis, ir īpaši punkti, pie kuriem pieder nogriežņa sākuma, vidus un gala punkti, t. i. P_1, M, P_2.

Formula [7] (2) rāda:

ja dalītājpunkts P sakrīt ar nogriežņa sākuma punktu P_1, tad

$$\lambda = 0;$$

ja dalītājpunkts P sakrīt ar nogriežņa vidus punktu M, tad

$$\lambda = -1,$$

un ja dalītājpunkts P sakrīt ar nogriežņa gala punktu P_2, tad

$$\lambda = \infty.$$

Formula

$$\lambda = \frac{x_1 - x}{x_2 - x} \tag{α}$$

rāda, ka vispār katram dalītājpunktam atbilst tikai viena dalīšanas attiecība λ.

Formula

$$x = \frac{\lambda x_2 - x_1}{\lambda - 1} \tag{β}$$

rāda, ka vispār katrai dalīšanas attiecībai λ atbilst tikai viens dalītājpunkts P.

Formulas (α) un (β) dod norādītos rezultatus tikai tad, ja formulā (α) punkta P koordinata ir galīga un ja formulā (β) λ ir pozitivs un nav 1.

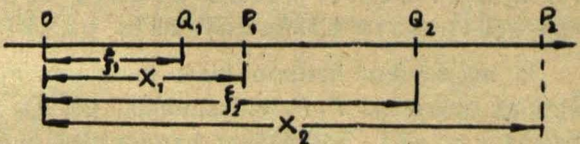
Ja dalītājpunkta P koordinata x tiecas uz $\pm\infty$, tad formula (α) abos gadījumos dod $\lambda = 1$.

Ja $\lambda > 1$ un $\lambda \to 1$, tad no formulas (β) dabūjam $x \to +\infty$. Ja $0 < \lambda < 1$ un $\lambda \to 1$, tad šī formula dod $x \to -\infty$.

Kā vēlāk redzēsim, ir iemesls pieņemt, ka uz dotas taisnes ir tikai viens bezgalīgi tāls punkts, ko dabūjam, ejot bezgalīgi tālu uz taisnes vai nu pa labi, vai pa kreisi no 0 (5. zīm.).

Ar šādu pieņēmumu arvien pastāv vienvērtīga piekārtošana zīmējoties uz dalītājpunkta P koordinatu un dalīšanas attiecību λ.

Pieņemam, ka (6. zīm.) punkts Q_1 dala nogriezni P_1P_2 attiecībā λ un punkts Q_2 dala šo pašu nogriezni attiecībā $-\lambda$. Četrus punktus P_1, P_2, Q_1, Q_2, kas stāv minētajā sakarā, sauc par četriem *harmoniskiem punktiem* un saka, ka punkti Q_1, Q_2 dala harmoniski nogriezni P_1P_2. Tā kā Q_1 dala nogriezni P_1P_2 ārēji un Q_2 iekšēji, tad redzams, ka punktu pāris P_1, P_2 šķir punktu pāri Q_1, Q_2, un otrādi — punktu pāris Q_1, Q_2 šķir punktu pāri P_1, P_2.



6. zīm.

Ar augšējiem pieņēmumiem par punktiem Q_1, Q_2 attiecībā uz nogriezni P_1P_2, punktu Q_1 un Q_2 koordinatas ξ_1 uu ξ_2 ir

$$\xi_1 = \frac{\lambda x_2 - x_1}{\lambda - 1} \quad \text{un} \quad \xi_2 = \frac{-\lambda x_2 - x_1}{-\lambda - 1}.$$

Punkts P_1 dala nogriezni Q_1Q_2 iekšēji ar dalīšanas attiecību

$$\mu_1 = \frac{P_1Q_1}{P_1Q_2} = \frac{\xi_1 - x_1}{\xi_2 - x_1}.$$

Punkts P_2 dala nogriezni Q_1Q_2 ārēji ar dalīšanas attiecību

$$\mu_2 = \frac{P_2Q_1}{P_2Q_2} = \frac{\xi_1 - x_2}{\xi_2 - x_2}.$$

Liekot šinīs μ_1 un μ_2 izteiksmēs augšējās ξ_1 un ξ_2 vērtības, dabūjam:

$$\mu_1 = \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} \quad \text{un} \quad \mu_2 = -\frac{\lambda + 1}{\lambda - 1}.$$

No augšējā secinām: ja punkti Q_1 un Q_2 dala nogriezni P_1P_2 harmoniski, tad arī punkti P_1 un P_2 dala harmoniski nogriezni Q_1Q_2.

Ja punkti Q_1 un Q_2 dala harmoniski nogriezni P_1P_2 un ja Q_1 sakrīt ar P_1, tad $\lambda_1 = 0$, un tādēļ arī $\lambda_2 = -\lambda_1 = 0$. Tas nozīmē, ka šādā gadījumā arī punkts Q_2 sakrīt ar punktu P_1.

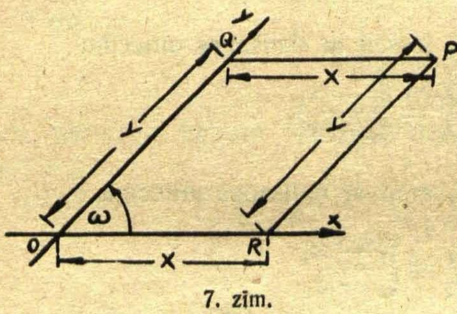
Ja Q_1 sakrīt ar P_2, tad $\lambda_1 = \infty$, un tādēļ arī $\lambda_2 = -\lambda = -\infty$. Tas nozīmē, ka arī punkts Q_2 sakrīt ar punktu P_2.

Vispār var teikt tā: ja no četriem harmoniskiem punktiem divi sakrīt vienā punktā, tad šajā punktā iekrīt arī vēl trešais harmoniskais punkts.

Ja no četriem harmoniskiem punktiem P_1, P_2, Q_1, Q_2 punkts Q_2 atrodas nogriežņa P_1P_2 viduspunktā, tad Q_2 dala nogriezni P_1P_2 attiecībā $\lambda = -1$. Saskaņā ar harmonisko punktu definiciju, punkts Q_1 tad dala nogriezni P_1P_2 attiecībā $\lambda = 1$, un tādēļ punkta Q_1 koordinatai jābūt ∞.

9. Paralelkoordinatu sistema plaknē. Lai noteiktu dota punkta P stāvokli plaknē, pieņemam nekustīgu elementarattēlojumu — koordinatu sistemu, uz kuru attiecinām doto punktu.

Par koordinatu sistemu pieņemam divas taisnes, kas krustojas punktā O (7. zīm.). Šīs taisnes sauc par *koordinatu asīm*. Punktu O sauc par *koordinatu sākumu*, leņķi ω par *koordinatu leņķi*. Bultu virzienu pusi uz šīm asīm pieņemam par pozitivo.



7. zīm.

Taisni caur punktu O bultas virzienā uz X pusi sauc par *abscisu* vai *X asi* un taisni caur O bultas virzienā uz Y pusi sauc par *ordinatu* vai *Y asi*.

Punkta P stāvokli plaknē noteic šādi: caur P velkam taisni $PQ \parallel X$ asij un taisni $PR \parallel Y$ asij. Nogriežņa QP mēra skaitlis x un nogriežņa RP mēra skaitlis y pilnīgi noteic punkta P vietu plaknē. No 7. zīmējuma redzams, ka

$$OR = QP = x \text{ un } OQ = RP = y.$$

Skaitli x sauc par punkta P *abscisu* un skaitli y par punkta P *ordinatu*. Šos skaitļus sauc par punkta P *koordinatām*.

Šo koordinatu sistemu sauc par *Dekarta* koordinatu sistemu vai, tā kā leņķis ω še slīps, arī par *slīpleņķa* sistemu

Te pieņemam un tālāk lietosim simbolu.

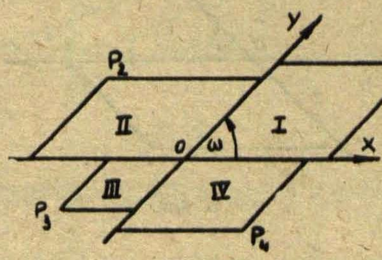
$$P = x \mid y.$$

Šā simbola nozīme ir: punkts P ir noteikts ar abscisu x un ordinatu y. Tātad, ja rakstām:

$$P_1 = 3 \mid 5,$$

tad tas nozīmē, ka punkts P_1 ir noteikts ar abscisu $x = 3$ un ordinatu $y = 5$.

Koordinatu asis iedala plakni četros laukumos: I, II, III, IV (8. zīm.). Redzams, ka katram plaknē esošam punktam piekārtota tikai viena abscisa x un tikai viena ordinata y. Katra laukuma punktu koordinatām, saskaņā ar augšā teikto, ir piekārtotas noteiktas zīmes, kā tas parādīts tabulā.



8. zīm.

		x	y
Punkts P_1 atrodas laukumā	I	+	+
„ P_2 „ „	II	—	+
„ P_3 „ „	III	—	—
„ P_4 „ „	IV	+	—

Kā redzams, katram punktam plaknē atbilst pilnīgi noteikta abscisa un ordinata ar pilnīgi noteiktu zīmi. Tāpat redzam: ja dotas koordinatas x un y ar noteiktu zīmi, tad šīs koordinatas dod vienu vienīgu pilnīgi noteiktu punktu.

Simbols

$$P = 3 \mid -2$$

izteic punktu IV laukumā. Šā punkta abscisa ir $x = 3$ un ordinata $y = -2$ (9. zīm.).

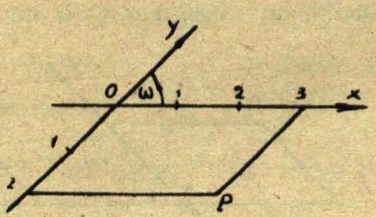
Punkti ar ordinatu $y = 0$ atrodas uz X ass un punkti ar abscisu $x = 0$ uz Y ass.

Simbols

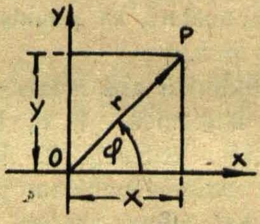
$$O = 0 \mid 0$$

izteic koordinatu sākumu.

10. Dekarta taisnleņķa paralelkoordinatu sistema. Ja pieņemam koordinatu leņķi $\omega = 90^\circ$, tad Y ass ir $\perp$ pret X asi. Šo koordinatu sistemu sauc par *Dekarta taisnleņķa* koordinatu sistemu vai arī par taisnleņķa paralelkoordinatu sistemu (10. zīm.).



9. zīm.



10. zīm.

Pieņemam zīmējuma plakni par vertikalu un abscisu asi tanī par horizontalu ar pozitivo virziena pusi pa labi no O. Ordinatu ass tad ir vertikala, ar pozitivo virziena pusi uz augšu.

Staru OP sauc par punkta P ***radiusu vektoru.*** To apzīmē arī ar burtu r. Radiuss vektors arvien ir pozitivs un skatāms no O uz P. No 10. zīmējuma redzam, ka

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{1}$$

Šī izteiksme, kā redzam, dod arī punkta P attālumu no koordinatu sākuma O.

Ja

$$P = 3 \mid 5,$$

tad šā punkta attālums no koordinatu sākuma O ir

$$r = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}.$$

Leņķi φ, mērījot to no X ass līdz radiusam vektoram pozitivā virzienā, sauc par radiusa vektora *virziena leņķi.* Skaitli

$$m = tg\,\varphi = \frac{y}{x} \tag{2}$$

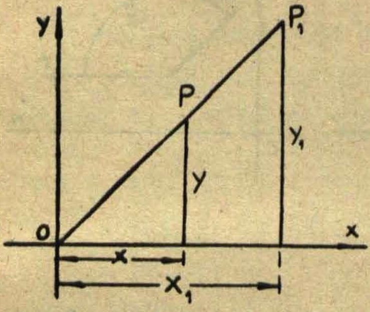
sauc par radiusa vektora *virziena koeficientu.*

Redzams, ka

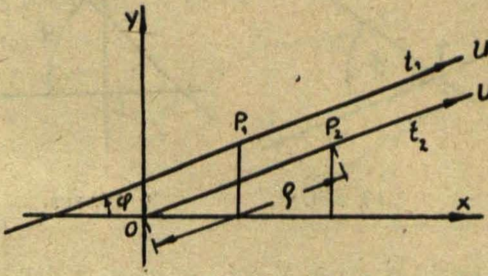
$$\sin\varphi = \frac{y}{r}; \quad \cos\varphi = \frac{x}{r}. \tag{3}$$

Piemērs:

Caur koordinatu sākumu dota taisne, un uz tās punkts $P = x \mid y$ (11. zīm.). Kādas ir uz tās pašas taisnes esošā punkta P_1 koordinatas?



11. zīm.



12. zīm.

Apzīmējot meklētās punkta P_1 koordinatas, kā redzams zīmējumā, dabūjam

$$\frac{y_1}{y} = \frac{x_1}{x} = \rho.$$

Tātad

$$y_1 = \rho y \text{ un } x_1 = \rho x$$

un

$$P_1 = \rho x \mid \rho y.$$

Še ρ ir atkarīgs no punkta P_1 vietas uz dotās taisnes.

Piemērs:

Dota taisne t_1 caur punktu P_1 ar virziena leņķi φ (12. zīm.). Kādas ir šīs taisnes bezgalīgi tālā punkta koordinatas?

Velkam caur koordinatu sākumu taisni $t_2 \parallel t_1$. Šīs taisnes krustojas bezgalīgi tālā punktā U.

Punkta P_2 koordinatas uz taisnes t_2 ir

$$P_2 = \rho\cos\varphi \mid \rho\sin\varphi.$$

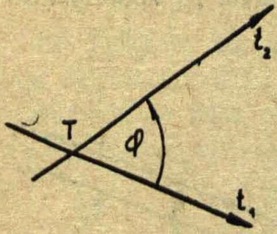
Ja $\rho = \infty$, tad dabūjam taisnes t_2 bezgalīgi tālā punkta koordinatas:

$$U = \rho\cos\varphi \mid \rho\sin\varphi,$$

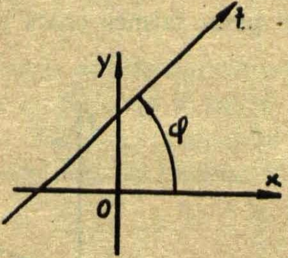
$$\rho = \infty,$$

kas arī ir taisnes t_1 bezgalīgi tālā punkta koordinatas.

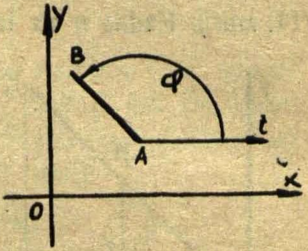
11. Leņķis starp divām taisnēm. Par leņķi starp divām vērstām taisnēm t_1 un t_2 sauc to leņķi φ, ko pārejam, griežot (ap taišņu t_1 un t_2 krustošanās punktu T) taisni t_1 pozitivā virzienā, kamēr tā sakrīt ar taisni t_2 (13. zīm.).



13. zīm.



14. zīm.

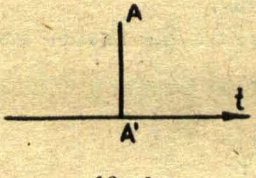


15. zīm.

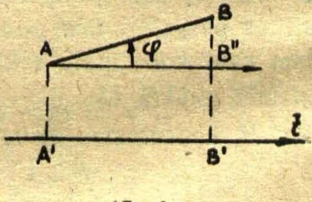
Leņķi φ starp X asi un taisni t dabūjam, griežot pozitivā virzienā X asi, kamēr tā sakrīt ar taisni t (14. zīm.). Pārietais leņķis φ tad ir meklētais leņķis.

Leņķi starp X asi un nogriezni AB dabūjam (15. zīm.), ja velkam caur nogriežņa sākuma punktu A taisni $t \parallel X$ asij un griežam šo taisni pozitivā virzienā, kamēr tā sakrīt ar nogriezni AB. Pārietais leņķis φ tad ir meklētais.

12. Nogriežņa projekcija. Punkta A ortogonalā projekcija uz taisnes t ir punkts A', ko dabūjam, krustojot taisni t ar stateni pret to caur A (16. zīm.).



16. zīm.



17. zīm.

Par nogriežņa AB projekciju uz taisnes t sauc nogriezni $A'B'$ uz taisnes t, t. i. nogriezni starp punktu A un B projekcijām uz taisnes t (17. zīm.).

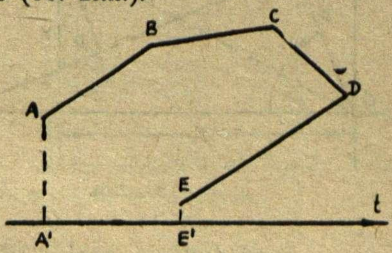
Apzīmējot ar φ leņķi starp projekcijas ass t pozitivo virziena pusi un nogriezni AB, dabūjam:

$$A'B' = AB'' = |AB| \cos \varphi.$$

Jāievēro, ka nogriežņa AB projekcija $A'B'$ dabū zīmi atkarībā no $\cos \varphi$ zīmes.

13. Poligona projekcija uz taisnes (18. zīm.).

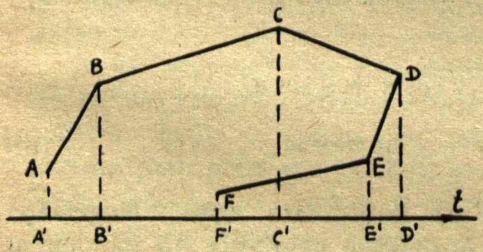
Par poligona $ABCDE$ ortogonalo projekciju uz projekcijas ass t sauc nogriezni $A'E'$, t. i. to nogriezni uz taisnes t, kas atrodas starp poligona sākuma punkta A un gala punkta E ortogonalām projekcijām A' un E' uz taisnes t.



18. zīm.

Teorema:

Poligona projekcija uz kādas ass ir vienlīdzīga poligona malu projekciju sumai (19. zīm.).



19. zīm.

Saskaņā ar poligona projekcijas definiciju

$$\text{proj. } (ABCDEF) = A'F'. \quad (1)$$

Poligona malu projekciju suma ir

$$\text{proj. } (AB) + \text{proj. } (BC) + \\ + \text{proj. } (CD) + \text{proj. } (DE) + \\ + \text{proj. } (EF) =$$

$$= A'B' + B'C' + C'D' + D'E' + E'F' =$$

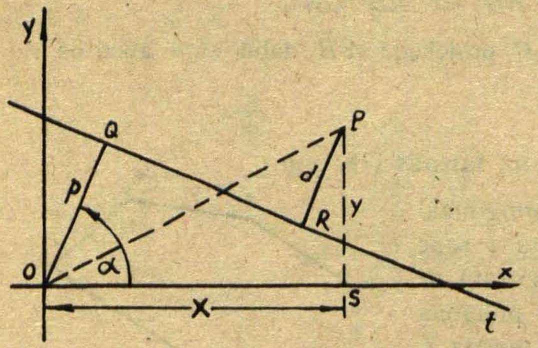
$$= A'D' + D'F' = A'D' - F'D' = A'F'. \quad (2)$$

Izteiksmes (1) un (2) pierāda teoremu.

Ja poligons ir slēgts, t. i., ja punkts F (19. zīm.) sakrīt ar punktu A, tad redzams, ka slēgta poligona projekcija uz kādas ass ir 0. No zīmējuma arī redzams, ka neslēgta poligona projekcija uz kādas ass līdzinās taisnes AF projekcijai uz šīs ass. Taisni AF sauc par neslēgtā poligona *rezultanti*.

Piemērs:

Dota taisne ar attālumu p no koordinatu sākuma un leņķi α, ko p veido ar x asi. Dabūt punkta $P = x \mid y$ attālumu no šīs taisnes (20. zīm.).



20. zīm.

Poligoniem $OQRP$ un OSP ir kopēja rezultante OP, tādēļ šo poligonu projekcijām uz kādas taisnes ir jābūt vienlīdzīgām. Par projekcijas asi izraugām taisni, uz kuras atrodas nogrieznis OQ.

Poligona $OQRP$ projekcija uz taisnes, kas iet caur O un Q, ir

$$\text{proj.}\,(OQ) + \text{proj.}\,(QR) + \text{proj.}\,(RP) = p + 0 + d. \qquad (1)$$

Poligona OSP projekcija uz taisnes OQ ir

$$\text{proj.}\,(OS) + \text{proj.}\,(SP) = x \cos\alpha + y \sin\alpha. \qquad (2)$$

Tā kā

$$\text{proj.}\,(OQRP) = \text{proj.}\,(OSP),$$

tad no (1) un (2) dabūjam:

$$p + 0 + d = x \cos\alpha + y \sin\alpha,$$

vai

$$d = x \cos\alpha + y \sin\alpha - p. \qquad (3)$$

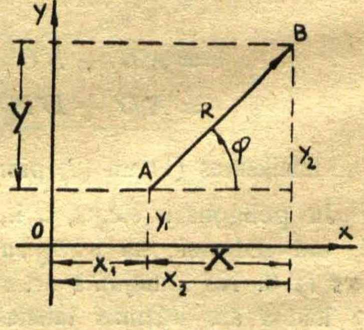
14. Nogriežņa projekcijas uz koordinatu asīm. Nogriežņa garums un virziens (21. zīm.). Apzīmējam nogriežņa AB garumu ar R un nogriežņa projekcijas uz koordinatu asīm ar X un Y; leņķi ar x asi apzīmējam ar φ.

Tad

$$X = R\cos\varphi,\ Y = R\sin\varphi; \qquad (1)$$

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}; \qquad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{X}{R} = \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}} \\ \sin\varphi &= \frac{Y}{R} = \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2}} \end{aligned}\right\}. \qquad (3)$$



21. zīm.

Ja $A = x_1 \mid y_1$ un $B = x_2 \mid y_2$, tad:

$$X = x_2 - x_1;\ Y = y_2 - y_1$$

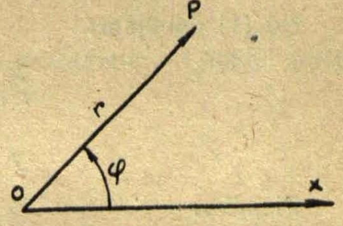
un

$$\left.\begin{aligned} R &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ \cos\varphi &= \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \\ \sin\varphi &= \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 + y_1)^2}} \end{aligned}\right\} . \qquad (4)$$

No (1) redzams, ka X un Y dabū zīmes, atkarībā no leņķa φ vērtības. R un tātad arī saknes zīme te arvienu ir pozitiva.

15. Polarkoordinatu sistema. Šajā sistemā punkta P vietu plaknē noteic ar tā attālumu r no nekustīga punkta O un ar leņķi φ, ko r veido ar nekustīgu pusstaru OX (22. zīm.).

Punktu O sauc par *polu*, pusstaru OX par *polarasi*, leņķi φ par *amplitudu*, nogriezni $OP = r$ par *radiusu vektoru*.



22. zīm.

Ja nav pieņemts kāds cits noteikums, tad radiusu vektoru r arvienu uzskata par pozitivu. Leņķi φ uzskata par pozitivu virzienā pret pulksteņa rādītāja kustību. Punkta P noteicējus r un φ sauc par punkta P *polarkoordinatām* un raksta

$$P = r \mid \varphi .$$

Ja doti r un φ, tad punkts P ir vienvērtīgi noteikts, bet ja dots punkts P, tad tam piekārtotu r dabūjam vienvērtīgu, bet amplituda tad ir daudzvērtīga; tās vērtība ir

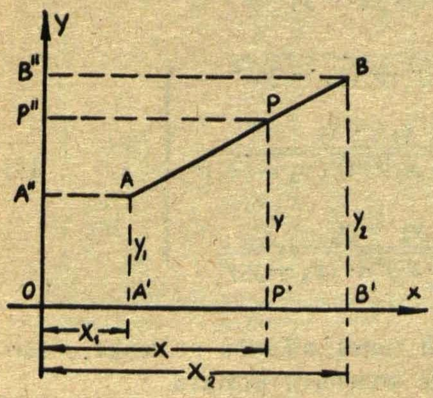
$$\varphi + 2k\pi$$

ar k kā veselu skaitli.

Pols O, polarass OX, radiuss vektors r, amplituda φ un garuma vienība veido polarkoordinatu sistemu.

Polam O piekārtotais radiuss vektors ir 0 un amplituda φ nenoteikta.

16. Nogriežņa dalīšanas attiecība paralelkoordinatu sistēmā (23. zīm.).



23. zīm.

Punkts P dala nogriezni AB attiecībā

$$\lambda = \frac{PA}{PB}.$$

No zīmējuma redzam, ka

$$\lambda = \frac{PA}{PB} = \frac{P'A'}{P'B'} = \frac{P''A''}{P''B''}.$$

Tā kā

$$P'A' = x_1 - x; \quad P'B' = x_2 - x$$

un

$$P''A'' = y_1 - y; \quad P''B'' = y_2 - y,$$

tad λ dabū vērtību:

$$\lambda = \frac{x_1 - x}{x_2 - x} = \frac{y_1 - y}{y_2 - y}. \tag{1}$$

No (1) dabūjam:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\lambda\, x_2 - x_1}{\lambda - 1} \\ y &= \frac{\lambda\, y_2 - y_1}{\lambda - 1} \end{aligned}\right\}. \tag{2}$$

Piemērs:

Kādas ir nogriežņa AB viduspunkta koordinatas?

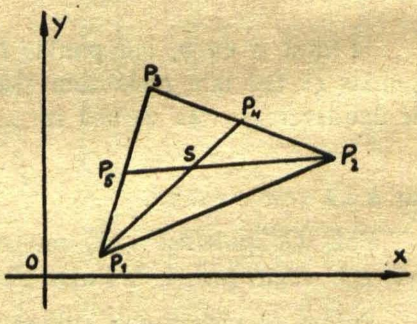
Ievērojot, ka nogriežņa viduspunkts dala nogriezni AB attiecībā $\lambda = -1$, no (2) dabūjam:

$$x = \frac{-1\, x_2 - x_1}{-1 - 1} = \frac{x_1 + x_2}{2};$$

$$y = \frac{-1\, y_2 - y_1}{-1 - 1} = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Piemērs:

Dabūt trīsstūra $P_1 P_2 P_3$ smaguma centra koordinatas (24.zīm.). Apzīmējam ar P_4 nogriežņa $P_2 P_3$ viduspunktu un ar P_5 nogriežņa $P_1 P_3$ viduspunktu.



24. zīm.

Smaguma centru S tad dabūjam kā taišņu $P_1 P_4$ un $P_2 P_5$ krustošanās punktu.

Punkts S dala nogriezni $P_1 P_4$ iekšēji ar $\lambda = -2$. Punkta P_4 koordinatas ir

$$x_4 = \frac{x_2 + x_3}{2} \text{ un } y_4 = \frac{y_2 + y_3}{2}.$$

Punkta S koordinatas dabūjam no (2), liekot $\lambda = -2$ un x_2, y_2 vietā x_4 un y_4. Tad:

$$x_s = \frac{-2 \cdot \frac{x_2 + x_3}{2} - x_1}{-2 - 1} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3},$$

$$y_s = \frac{-2 \cdot \frac{y_2 + y_3}{2} - y_1}{-2 - 1} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

17. Leņķis starp diviem radiusiem vektoriem. Leņķis starp diviem nogriežņiem (25. zīm.). Doti punkti

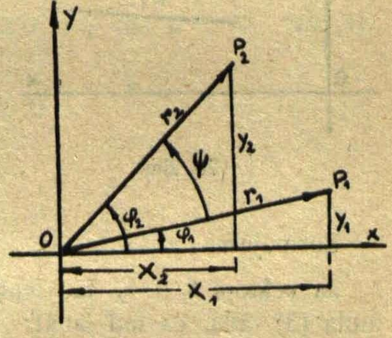
$$P_1 = x_1 \mid y_1 \text{ un } P_2 = x_2 \mid y_2.$$

Tad radiusu vektoru r_1 un r_2 vērtības attiecīgi ir

$$r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}; \quad r_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2},$$

un leņķiem φ_1 un φ_2 piekārtoto trigonometrisko funkciju vērtība ir:

$$\left.\begin{aligned} \sin \varphi_1 = \frac{y_1}{r_1}; \quad \cos \varphi_1 = \frac{x_1}{r_1} \\ \sin \varphi_2 = \frac{y_2}{r_2}; \quad \cos \varphi_2 = \frac{x_2}{r_2} \end{aligned}\right\}. \quad (\alpha)$$



25. zīm.

Tā kā

$$\psi = \varphi_2 - \varphi_1,$$

tad

$$\sin\psi = \sin(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin\varphi_2\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2\sin\varphi_1; \quad (1)$$

$$\cos\psi = \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \cos\varphi_2\cos\varphi_1 + \sin\varphi_2\sin\varphi_1. \quad (2)$$

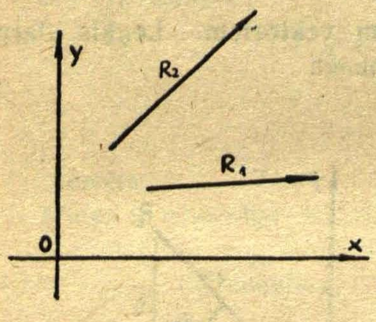
Ievietojot formulās (1) un (2) vērtības no (α), dabūjam:

$$\left.\begin{aligned} \sin\psi &= \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{r_1 r_2} \\ \cos\psi &= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{r_1 r_2} \end{aligned}\right\}. \quad (3)$$

Piemērs:

Dabūt leņķi φ, ko veido divi nogriežņi R_1 un R_2. Pieņemam, ka R_1 projekcijas uz koordinatu asīm ir X_1 un Y_1 un nogriežņa R_2 projekcijas — X_2, Y_2 (26. zīm.).

Pārbīdām nogriežņus R_1 un R_2 paraleli sev caur koordinatu sākumu O. Tad, izmantojot formulas (3), liekam tajās x_1, x_2 vietā X_1, X_2 un y_1, y_2 vietā Y_1, Y_2. Tādā kārtā dabūjam



26. zīm.

$$\left.\begin{aligned} \sin\psi &= \frac{X_1 Y_2 - X_2 Y_1}{R_1 R_2} \\ \cos\psi &= \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2}{R_1 R_2} \\ R_1 &= \sqrt{X_1^2 + Y_1^2} \\ R_2 &= \sqrt{X_2^2 + Y_2^2} \end{aligned}\right\}. \quad (4)$$

Secinājumi.

Ja vektors $r_1 \perp r_2$, tad leņķis $\psi = 90^\circ$ vai 270° un $\cos\psi = 0$. Formula (3) rāda, ka tad jābūt:

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$$

vai

$$\frac{y_1}{x_1} = -\frac{x_2}{y_2} = -\frac{1}{\frac{y_2}{x_2}}.$$

Radiusa vektora r_1 virziena koeficients $m_1 = \frac{y_1}{x_1}$, un radiusa vektora r_2 virziena koeficients $m_2 = \frac{y_2}{x_2}$. Ievērojot augšējo, dabūjam, ka gadījumā, ja $r_1 \perp r_2$, tad

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

vai

$$m_1 \cdot m_2 = -1. \tag{5}$$

Ja nogrieznis $R_1 \parallel R_2$, tad $\psi = 0°$ vai $180°$. Tad

$$\sin \psi = 0.$$

No (4) redzams, ka tad jābūt:

$$X_1 Y_2 - X_2 Y_1 = 0$$

vai arī

$$\frac{Y_1}{Y_2} = \frac{X_1}{X_2}.$$

Tātad, ja $R_1 \parallel R_2$, tad šo nogriežņu projekcijas ir proporcionalas.

Ja $R_1 \perp R_2$, tad leņķis $\psi = 90°$ vai $270°$ un $\cos \psi = 0$. No (4) redzams, ka tad jābūt:

$$X_1 X_2 + Y_1 Y_2 = 0$$

vai arī

$$\frac{Y_1}{X_1} = -\frac{1}{\frac{Y_2}{X_2}}.$$

Tā kā

$\frac{Y_1}{X_1} = m_1$ ir nogriežņa R_1 virziena koeficients un

$\frac{Y_2}{X_2} = m_2$ ir nogriežņa R_2 virziena koeficients, tad

$$m_1 \cdot m_2 = -1.$$

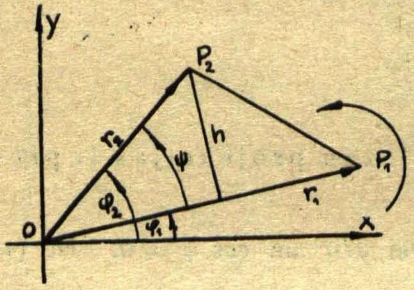
18. Trīsstūra laukums. Punkti O, P_1, P_2 veido trīsstūri (27. zīm.). Uzskatot r_1 par šā trīsstūra pamatu un h par augstumu, dabūjam:

$$'\triangle\, OP_1P_2 = \frac{r_1 \cdot h}{2} = \frac{r_1 \cdot r_2 \sin\psi}{2}. \tag{1}$$

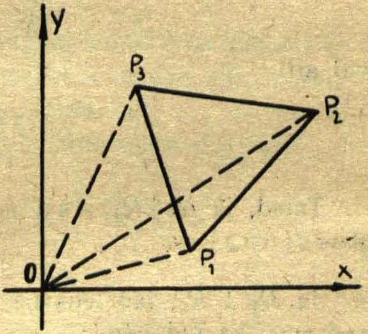
Ievietojot augšējā izteiksmē $\sin\psi$ vērtību $\{$sk. [17] (3)$\}$, dabūjam:

$$'\triangle\, OP_1P_2 = \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Tā kā r_1 un r_2 arvienu ir pozitivi, tad no (1) redzam, ka trīsstūra laukums ir pozitivs, ja $\sin\psi$ ir pozitivs. Tādā gadījumā leņķim ψ jābūt pozitivam un mazākam par 180°. Ar šādiem noteikumiem trīsstūra OP_1P_2 apejas virziens (sk. 27. zīm.) ir pozitivs. Ja apejam trīsstūri virzienā OP_2P_1, tad apejas virziens ir negativs, un trīsstūra laukums tad dabū negativu zīmi. No 27. zīmējuma redzams: ja apejas ceļš iet pozitivā virzienā, tad trīsstūra laukums atrodas pa kreisi no šā ceļa.



27. zīm.



28. zīm.

Piemērs:

Dabūt trīsstūra OP_1P_2 laukumu, ja $P_1 = 2 \mid 1$ un $P_2 = 1 \mid 3$. Tad

$$'\triangle\, OP_1P_2 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(2 \cdot 3 - 1 \cdot 1) = 2{,}5.$$

Ja trīsstūra virsotne neatrodas koordinatu sākumā (28. zīm.), tad trīsstūra laukumu dabūjam, kā redzams, šādi:

$$\triangle\, P_1P_2P_3 = \triangle\, OP_1P_2 + \triangle\, OP_2P_3 + \triangle\, OP_3P_1.$$

Augšējiem trīsstūriem pielietojot formulu (2), dabūjam:

$$\triangle\, P_1P_2P_3 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Attīstot determinantes, dabūjam:

$$\triangle P_1P_2P_3 = \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1) + \frac{1}{2}(x_2y_3 - x_3y_2) + \frac{1}{2}(x_3y_1 - x_1y_3). \quad (3a)$$

Izteiksmi (3a) var rakstīt arī veidā:

$$\triangle P_1P_2P_3 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_3 & y_3 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix}. \quad (4)$$

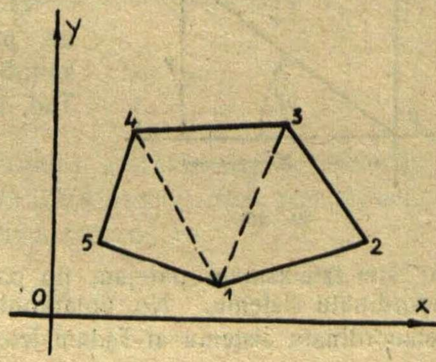
19. Daudzstūra laukums. Daudzstūra laukumu dabūjam, sadalot to trīsstūros, piemērojot katram trīsstūrim formulu [18] (3a) un saskaitot šo trīsstūru laukumus (29. zīm.).

Daudzstūra (*1 2 3 4 5 1*) laukums

$$F = \triangle 123 + \triangle 134 + \triangle 145.$$

Lietojot formulu [18] (3a), dabūjam:

$$\begin{aligned} 2F = {} & (x_1y_2 - x_2y_1) + \\ & + (x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_1 - x_1y_3) + \\ & + (x_1y_3 - x_3y_1) + (x_3y_4 - x_4y_3) + \\ & + (x_4y_1 - x_1y_4) + (x_1y_4 - x_4y_1) + \\ & + (x_4y_5 - x_5y_4) + (x_5y_1 - x_1y_5). \end{aligned}$$



29. zīm.

No šīs izteiksmes dabūjam:

$$2F = (x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_4 - x_4y_3) + (x_4y_5 - x_5y_4) + \\ + (x_5y_1 - x_1y_5)$$

un

$$F = \frac{1}{2}[(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_4 - x_4y_3) + (x_4y_5 - x_5y_4) + \\ + (x_5y_1 - x_1y_5)]. \quad (1)$$

Piemērs:

Dots slēgts poligons ar

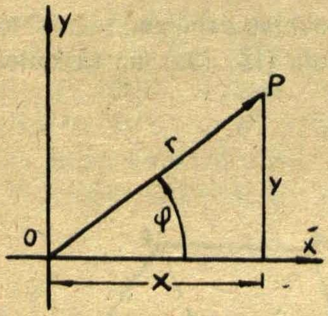
$$P_1 = 1 \mid -2; \; P_2 = 3 \mid 0; \; P_3 = 2 \mid 3; \; P_4 = -1 \mid 1; \; P_5 = -2 \mid -1.$$

Dabūt šā poligona laukumu F. Lietojot formulu (1), dabūjam:

$$F = \frac{1}{2}[1 \cdot 0 - 3(-2) + 3 \cdot 3 - 0 \cdot 2 + 2 \cdot 1 - 3(-1) + \\ + (-1)(-1) - 1(-2) + (-2)(-2) - (-1)\,1] = 14.$$

KOORDINATU SISTEMAS PĀRVEIDOŠANA

20. Koordinatu sistemas pārveidošanas vajadzība. Kāda ģeometriska attēla īpašības analitiski izteicamas jo vienkāršāk, jo vienkāršāks ir koordinatu sistemas stāvoklis attiecībā pret pētījamo attēlu. Daudzos gadījumos ģeometrisku attēlu pētīšanā attiecīgos rēķinus varam vienkāršot, pārejot no dotās koordinatu sistemas uz jaunu koordinatu sistemu, kuras stāvoklis pret pētījamo attēlu, ievērojot izdarāmos rēķinus, ir izdevīgāk izvēlēts.



30. zīm.

21. Pāreja no paralelkoordinatām uz polarkoordinatām. Liekam polu koordinatu sākumā, polarasi x ass virzienā. Tad, kā redzams no 30. zīmējuma,

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}\right\}. \qquad (1)$$

Ar šīm izteiksmēm pārejam no paralelkoordinatu sistemas uz polarkoordinatu sistemu. No polarkoordinatu sistemas pārejam uz paralelkoordinatu sistemu ar šādām izteiksmēm:

$$\left.\begin{array}{c} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}};\ \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}};\ \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x};\ \operatorname{cotg}\varphi = \dfrac{x}{y} \\ \varphi = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x} \end{array}\right\}. \qquad (2)$$

22. Taisnleņķa paralelkoordinatu sistemas paralelā pārbīdīšana (translacija) (31. zīm.). Jaunā koordinatu sākuma koordinatas ir x_0 un y_0:

$$O' = x_0 \mid y_0.$$

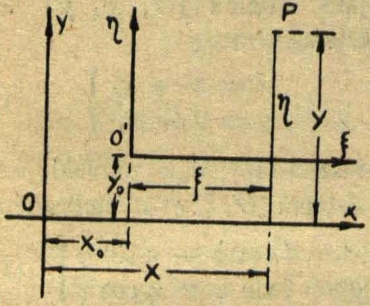
Caur O' velkam ξ asi $\parallel x$ asij un η asi $\parallel y$ asij.

Pāreja no (O, x, y) koordinatu sistemas uz sistemu (O', ξ, η) ir dota ar izteiksmēm

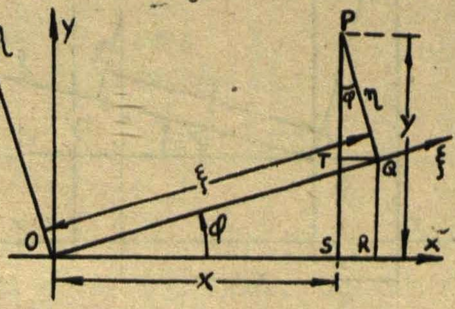
$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + \xi \\ y &= y_0 + \eta \end{aligned}\right\}. \qquad (1)$$

Pāreju no sistemas (O', ξ, η) uz sistemu (O, x, y) dabūjam ar

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x - x_0 \\ \eta &= y - y_0 \end{aligned}\right\}. \qquad (2)$$



31. zīm.



32. zīm.

23. Taisnleņķa koordinatu sistemas griešana ap koordinatu sākumu (32. zīm.). Koordinatu sistemu (O, ξ, η) pagriežam pret sistemu (O, x, y) par leņķi φ. No 32. zīmējuma redzam, ka

$$\begin{aligned} x &= OR - SR \\ y &= ST + TP. \end{aligned}$$

Tā kā

$$OR = \xi \cos\varphi; \; SR = \eta \sin\varphi; \; ST = \xi \sin\varphi; \; TP = \eta \cos\varphi,$$

tad

$$\left.\begin{aligned} x &= \xi \cos\varphi - \eta \sin\varphi \\ y &= \xi \sin\varphi + \eta \cos\varphi \end{aligned}\right\}. \qquad (1)$$

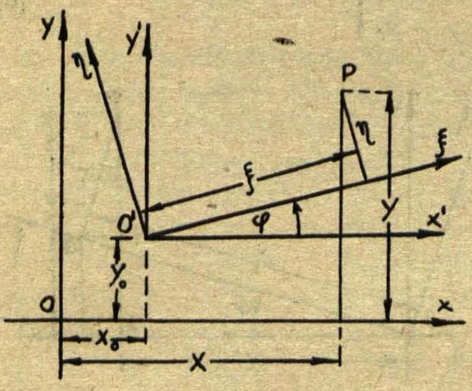
Šīs izteiksmes dod pāreju no koordinatu sistemas (O, x, y) uz koordinatu sistemu (O, ξ, η).

Atrisinot vienādojumus (1) attiecībā uz ξ un η, dabūjam:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x \cos\varphi + \eta \sin\varphi \\ \eta &= -x \sin\varphi + \eta \cos\varphi \end{aligned}\right\}. \qquad (2)$$

Šīs izteiksmes dod pāreju no koordinatu sistemas (O, ξ, η) uz koordinatu sistemu (O, x, y).

24. Taisnleņķa koordinātu sistēmas paralēla pārvietošana un griešana (23. zīm.). Šo pārveidošanu izdarām, vispirms veidojot sistēmu (O', x', y') un pēc tam pagriežot šo sistēmu par leņķi φ.



33. zīm.

Sistēmu (O, x, y) pārveidojam sistēmā (O', x', y') ar izteiksmēm

$$\left.\begin{array}{l} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{array}\right\}. \qquad (1)$$

Sistēmu (O', x', y') pārveidojam sistēmā (O', ξ, η) ar izteiksmēm

$$\left.\begin{array}{l} x' = \xi \cos\varphi - \eta \sin\varphi \\ y' = \xi \sin\varphi + \eta \cos\varphi \end{array}\right\}. \qquad (2)$$

Ievietojot izteiksmēs (2) x' un y' vērtības no (1), dabūjam:

$$\left.\begin{array}{l} x = x_0 + \xi \cos\varphi - \eta \sin\varphi \\ y = y_0 + \xi \sin\varphi + \eta \cos\varphi \end{array}\right\}. \qquad (3)$$

Šīs izteiksmes dod pāreju no koordinātu sistēmas (O, x, y) uz koordinātu sistēmu (O', ξ, η).

Atrisinot vienādojumu (3) attiecībā uz ξ un η, dabūjam pārejas formulas no sistēmas (O', ξ, η) uz sistēmu (O, x, y):

$$\left.\begin{array}{l} \xi = (x - x_0) \cos\varphi + (y - y_0) \sin\varphi \\ \eta = -(x - x_0) \sin\varphi + (y - y_0) \cos\varphi \end{array}\right\}. \qquad (4)$$

25. Pāreja no taisnleņķa uz slīpleņķa koordinātām (34. zīm.). Kā redzams no zīmējuma:

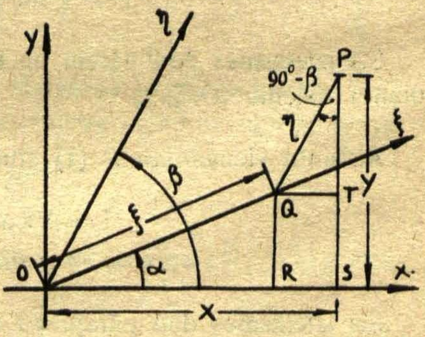
$$x = OR + RS$$
$$y = ST + TP.$$

Tā kā

$$ST = \xi \sin\alpha,$$
$$RS = \eta \sin(90^\circ - \beta) = \eta \cos\beta,$$
$$OR = \xi \cos\alpha \text{ un}$$
$$TP = \eta \cos(90^\circ - \beta) = \eta \sin\beta,$$

tad

$$\left.\begin{array}{l} x = \xi \cos\alpha + \eta \cos\beta \\ y = \xi \sin\alpha + \eta \sin\beta \end{array}\right\}. \qquad (1)$$



34. zīm.

Šīs izteiksmes dod pāreju no koordinatu sistemas (O, x, y) uz koordinatu sistemu (O, ξ, η).

Pārveidojot izteiksmes (1), dabūjam:

$$\left.\begin{aligned} \xi \sin(\beta - \alpha) &= x \sin\beta - y \cos\beta \\ \eta \sin(\beta - \alpha) &= -x \sin\alpha + y \cos\alpha \end{aligned}\right\}. \qquad (2)$$

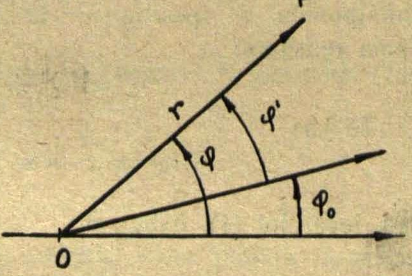
Šīs izteiksmes dod pāreju no koordinatu sistemas (O, ξ, η) uz koordinatu sistemu (O, x, y).

26. Polarkoordinatu sistemas griešana (35. zīm.). Ap polu O pagriežam polarasi par leņķi φ. Pāreju no polarkoordinatu sistemas (O, r, φ) uz sistemu (O, r, φ') dod izteiksmes:

$$\left.\begin{aligned} r &= r' \\ \varphi &= \varphi_0 + \varphi' \end{aligned}\right\}. \qquad (1)$$

Pāreju no sistemas (O, r, φ') uz sistemu (O, r, φ) dod izteiksmes:

$$\left.\begin{aligned} r' &= r \\ \varphi' &= \varphi - \varphi_0 \end{aligned}\right\}. \qquad (2)$$



35. zīm.

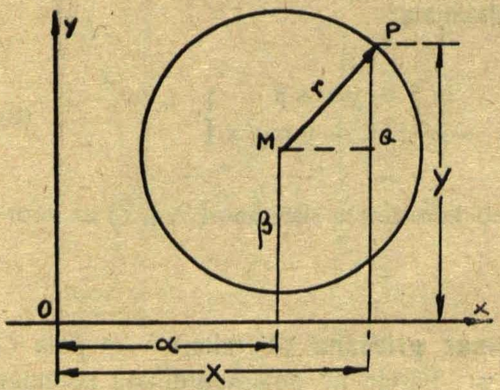
TREŠĀ NODAĻA

LĪKNES UN LĪKŅU VIENĀDOJUMI

27. Līknes un līknes vienādojuma definicija. Par *līkni — arī ģeometrisko vietu* — sauc līniju, kuras visiem atsevišķiem punktiem ir tā pati ģeometriskā īpašība, ar ko tie atšķiras no punktiem, kas neatrodas uz šīs līknes.

Līknes vienādojums — arī līknes veidošanas likums — ir punkta, kas veido līkni, vai tekošā punkta īpašības analitiskā izteiksme.

28. Piemēri: Kāds ir līknes vienādojums, kuras katra punkta attālums no punkta $M = \alpha \mid \beta$ ir pastāvīgs lielums c? (36. zīm.)



36. zīm.

Tekošais punkts P veido līkni tādā kārtā, ka katrā šā punkta stāvoklī:

$$MP = c.$$

Izteicot šo veidošanas likumu analitiskā veidā, dabūsim saskaņā ar šo likumu veidotās līknes vienādojumu. Tā kā punkts P plaknē noteikts ar tā koordinatām x un y, izteiksim analitiski veidošanas likumu — veidotājpunkta P īpašību — ar punkta P koordinatām. No zīmējuma redzams:

$$MQ^2 + QP^2 = c^2. \tag{1}$$

Tā kā:

$$MQ = x - \alpha \quad \text{un} \quad QP = y - \beta, \tag{2}$$

tad, ievērojot (1), dabūjam:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = c^2. \tag{3}$$

Šis vienādojums izteic analitiski līknes veidošanas likumu, un tādēļ tas ir ar doto likumu veidotās līknes vienādojums.

Ar doto likumu veidotā līkne ir riņķis. Riņķa vienādojums, ja riņķa centrs atrodas punktā $M = \alpha \mid \beta$, ir dots ar izteiksmi (3).

Ja riņķa centrs atrodas koordinatu sākumā O un ja riņķa radiuss ir r, tad riņķa vienādojums dabū veidu:

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0.$$

Kā redzams, riņķa, t. i., līknes vienādojumā atrodas līkni veidojošā punkta $P = x \mid y$ koordinatas. Šis vienādojums izteic veidotājpunkta P īpašību.

Līknes vienādojumu vispār rakstām:

$$F(x, y) = 0.$$

Katru šādu vienādojumu varam uzskatīt par kādas līknes vienādojumu, kas, kā redzējām, analitiski izteic līkni veidojošā punkta īpašību. Ja punkta $P_0 = x_0 \mid y_0$ koordinatas apmierina līknes vienādojumu, t. i., ja

$$F(x_0, y_0) = 0,$$

tad punktam P_0 ir tāda pati īpašība kā punktam, kas veido līkni. Tādā gadījumā punkts P_0 atrodas uz līknes

$$F(x, y) = 0.$$

Ja

$$F(x_0, y_0) \gtrless 0,$$

tad punktam P_0 nav tās īpašības, kādas ir punktam P, kas veido līkni: punkts P_0 tādēļ neatrodas uz līknes

$$F(x y) = 0.$$

Piemērs:

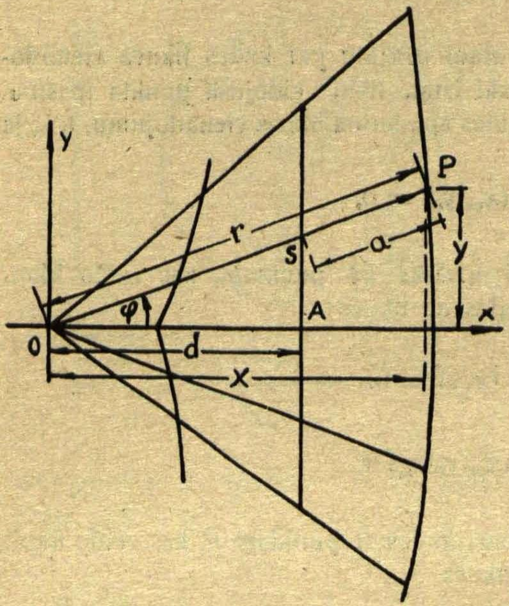
Uz taisnes Ox, punktā A, velkam stateni. Caur punktu O velkam taisni t, kas krusto stateni punktā S. Uz taisnes t, nogriežot garumu a, dabūjam punktu P. Ja caur O vilksim taisnes $t_1, t_2, t_3 \ldots .$ un uz katras no šīm taisnēm izdarīsim norādīto konstrukciju, tad dabūsim punktus $P_1, P_2, P_3 \ldots$, kuru kopums veido līkni (37. zīm.). Šīs līknes vienādojumu dabūjam, ievērojot līkni veidojošā punkta P īpašību

$$SP = a.$$

Pieņemot, ka O ir pols, Ox polarass, φ amplituda, r punkta P radiuss vektors, izteicam līkni veidojošā punkta P norādīto īpašību analitiski. No zīmējuma redzam: ja a nogriezts pa labi no y ass, tad

$$r = \frac{d}{\cos \varphi} + a.$$

Garumu a varam nogriezt arī pa kreisi no S, bet nogrieznis a tad dabū zīmi —. Aptverot abus gadījumus, varam rakstīt:



37. zīm.

$$r = \frac{d}{\cos \varphi} \pm a.$$

Šis vienādojums izteic līkni veidojošā punkta P īpašību un tādēļ ir ar punktu P veidotās līknes vienādojums polarkoordinatu sistemā.

Šai līknei, *konchoidai*, ir divi zari; vienu no tiem dabūjam, ņemot a pozitivu, un otru, ņemot a negativu.

Konchoidas vienādojumu taisnleņķa koordinatu sistemā dabūjam, pieņemot polu O par koordinatu sākumu un Ox par x asi. Tad konchoidas vienādojums ir

$$r \cos \varphi = d \pm a \cos \varphi.$$

No 37. zīmējuma redzam, ka

$$r \cos \varphi = x; \quad \cos \varphi = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Ievērojot augšējo, rakstām:

$$x = d \pm \frac{ax}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

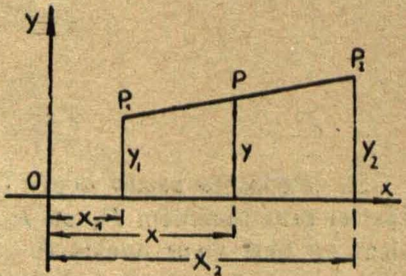
Šo vienādojumu pārveidojot, dabūjam:

$$(x - d)^2 (x^2 + y^2) = a^2 x^2.$$

Šis vienādojums dod konchoidas abus zarus.

TAISNE

29. Taisnes vienādojumi. Taisnes vienādojumu dabūjam, izteicot analitiski taisni veidojošā punkta īpašību. Izlietosim šo norādījumu, apskatot gadījumus, atkarībā no tiem elementiem, kas noteic taisni.



38. zīm.

a) Taisne caur diviem punktiem (38. zīm.).

Taisni veidojošais tekošais punkts P veido ar taisnes punktiem P_1 un P_2 trīsstūri, kura laukums ir 0.

Ar

$$P_1 = x_1 \mid y_1; \quad P = x \mid y; \quad P_2 = x_2 \mid y_2$$

jābūt:

$$\triangle P P_1 P_2 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Tātad izteiksme:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{1}$$

ir tās taisnes vienādojums, kas iet caur punktiem P_1, P un P_2. Determinanti pārveidojot, dabūjam:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & 0 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Šo determinanti attīstot pēc trešā stabiņa elementiem, dabūjam:

$$(x - x_1)(y_2 - y_1) - (x_2 - x_1)(y - y_1) = 0$$

vai

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1). \tag{2}$$

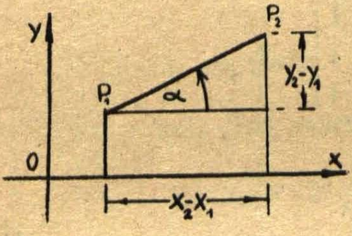
Šis vienādojums izteic taisni caur punktiem P_1 un P_2.

b) Tā kā taisni veidojošais punkts P dala nogriezni $P_1 P_2$ attiecībā λ, tad punkta P koordinātas ir:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\lambda x_2 - x_1}{\lambda - 1} \\ y &= \frac{\lambda y_2 - y_1}{\lambda - 1} \end{aligned}\right\}. \tag{3}$$

Šīs izteiksmes pastāv kopēji tikai tad, ja punkts P atrodas uz taisnes, kas iet caur punktiem P_1 un P_2. Katrai λ vērtībai atbilst uz šīs taisnes viens un tikai viens punkts P. Mainot λ, mainām arī punkta P vietu uz taisnes, kas iet caur punktiem P_1 un P_2, tātad punkts P veido šo taisni.

Izteiksmēs (3) esošo lielumu λ sauc par *parametru*. Izteiksmes (3) sauc par taisnes vienādojumiem parametriskā veidā.



39. zīm.

Izslēdzot λ no vienādojumiem (3) un tos pārveidojot, dabūjam vienādojuma (2) veidu.

c) Kā redzams no 39. zīmējuma, izteiksme

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \operatorname{tg} \alpha$$

ir nogriežņa $P_1 P_2$ virziena koeficients m.

Taisnes vienādojumu (2) tādēļ varam rakstīt:

$$y - y_1 = m(x - x_1). \tag{4}$$

Vienādojums (4) izteic taisni caur punktu P_1 ar dotu virzienu m.

Ja punkts P_1 atrodas uz y ass, tad $P_1 = 0 \mid b$, kur b ir taisnes nogrieznis uz y ass.

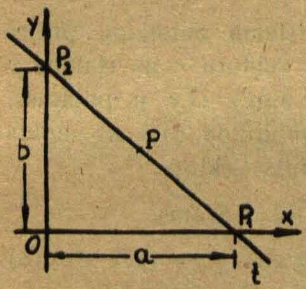
Tādā gadījumā vienādojums (4) dabū veidu:

$$y = mx + b. \tag{5}$$

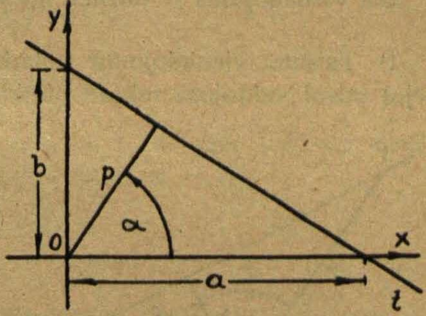
Šis vienādojums izteic taisni ar dotu virziena koeficientu m un dotu nogriezni b uz y ass.

d) Ja taisne noteikta ar punktu $P_1 = a \mid 0$ uz x ass un punktu $P_2 = 0 \mid b$ uz y ass (40. zīm.), tad

$$\triangle PP_1P_2 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 \end{vmatrix} = 0.$$



40. zīm.



41. zīm.

Attīstot determinanti pēc pirmās rindas elementiem, dabūjam:

$$x(-b) + y(-a) + ab = 0.$$

Dalot šo vienādojumu ar $-ab$, dabūjam:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0. \tag{6}$$

Šo vienādojumu sauc par taisnes *vienādojumu asu nogriežņos*. Te a ir nogrieznis uz x ass un b — nogrieznis uz y ass.

e) Taisnes *normalveida* vienādojumu dabūjam, noteicot taisni ar stateni p no koordinatu sākuma O pret taisni un ar leņķi α, ko veido statenis p ar x asi (41. zīm.).

Stateni p pret taisni t varam izteikt:

$$p = a \cos\alpha; \; p = b \cdot \cos(90^\circ - \alpha) = b \sin\alpha.$$

No šīm izteiksmēm dabūjam:

$$a = \frac{p}{\cos\alpha} \text{ un } b = \frac{p}{\sin\alpha}.$$

Ievietojot a un b vērtības vienādojumā (6), dabūjam:

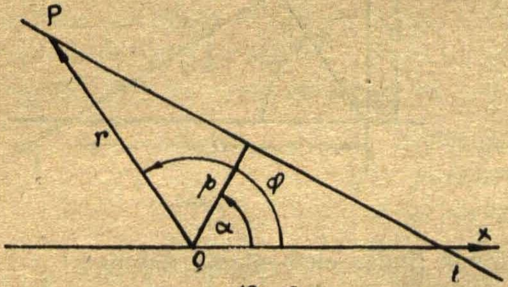
$$\frac{x}{\frac{p}{\cos\alpha}} + \frac{y}{\frac{p}{\sin\alpha}} - 1 = 0.$$

Pārveidojot augšējo vienādojumu, dabūjam:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0. \tag{7}$$

Šis vienādojums ir taisnes *normalveida vienādojums.*

f) Taisnes vienādojumu polarkoordinatu sistēmā dabūjam, projecējot taisni veidojošā tekošā punkta P radiusu vektoru r uz stateņa p (42. zīm.). Ox ir polarass, φ amplituda, r tekošā punkta radiuss vektors.



42. zīm.

Kā redzams,

$$r\cos(\varphi - \alpha) = p. \tag{8}$$

Šis vienādojums ir taisnes vienādojums polarkoordinatās.

Piemēri:

1. Kādiem noteikumiem atbilst triju punktu P_1, P_2, P_3 koordinatas, ja šie trīs punkti atrodas uz taisnes?

Tad $\triangle P_1P_2P_3 = 0$ un

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

2. Taisne iet caur punktiem $P_1 = 3 \mid 1{,}5$ un $P_2 = 6 \mid 6$. Kāds ir šīs taisnes vienādojums?

No formulas (2) dabūjam:

$$y - 1{,}5 = \frac{6 - 1{,}5}{6 - 3}(x - 3).$$

Un pārveidojot:

$$3x - 2y - 6 = 0.$$

3. Taisnes nogriežņi uz koordinatu asīm ir $a = 4$; $b = 5$. Šīs taisnes vienādojums, saskaņā ar (6), ir

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{3} - 1 = 0.$$

4. Taisne iet caur punktu $P_1 = 1 \mid 1$ ar virziena koeficientu $m = \frac{1}{2}$. Šīs taisnes vienādojums, saskaņā ar (4), ir

$$y - 1 = \frac{1}{2}(x - 1)$$

vai arī

$$x - 2y + 1 = 0.$$

5. Taisnes nogrieznis uz y ass ir $b = 1$, taisnes virziena koeficients $m = 1$. Šīs taisnes vienādojums, saskaņā ar (5), ir

$$y = 1 \cdot x + 1.$$

30. Taisnes vispārīgais vienādojums taisnleņķa koordinatu sistemā. Visi aprakstītie taisnes vienādojumi taisnleņķa koordinatu sistemā ir lineari attiecībā uz koordinatām x un y. Šo vienādojumu veids ir

$$Ax + By + C = 0. \tag{1}$$

Augšējo vienādojumu sauc par taisnes *vispārīgo* vienādojumu.

Vienādojums (1) izteic taisni, ko varam pierādīt ar to, ka, šo vienādojumu pārveidojot, varam dabūt [29] apskatītās taisnes vienādojumu veidus taisnleņķa koordinatu sistemā.

Dalot vienādojumu (1) ar $- C$, dabūjam:

$$\frac{x}{\frac{-C}{A}} + \frac{y}{\frac{-C}{B}} - 1 = 0.$$

Kā redzams, liekot te

$$\left.\begin{aligned} a &= -\frac{C}{A} \\ \text{un} \qquad & \\ b &= -\frac{C}{B} \end{aligned}\right\}, \tag{2}$$

dabūjam

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1=0,$$

t. i., taisnes vienādojumu asu nogriežņos. Šos asu nogriežņus dod izteiksmes (2).

Piemēri:

No taisnes vispārīgā vienādojuma

$$3x+4y-12=0$$

dabūjam asu nogriežņus:

$$a=-\frac{C}{A}=-\frac{-12}{3}=4;$$

$$b=-\frac{C}{B}=-\frac{-12}{4}=3.$$

Atrisinot vienādojumu (1) attiecībā uz y, dabūjam:

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}.$$

Liekot:

$$\left.\begin{aligned} m&=-\frac{A}{B}\\ b&=-\frac{C}{B}\end{aligned}\right\}, \tag{3}$$

un

dabūjam agrāk apskatītā vienādojuma veidu

$$y=mx+b.$$

No taisnes vienādojuma vispārīgā veidā

$$3x+4y-12=0$$

dabūjam

$$m=-\frac{A}{B}=-\frac{3}{4}$$

un

$$b=-\frac{C}{B}=-\frac{-12}{4}=3.$$

Ar faktoru ρ reizināts taisnes vispārīgais vienādojums

$$\rho\,(Ax+By+C)=0$$

izteic to pašu taisni, ko vienādojums

$$Ax + By + C = 0,$$

jo, kā tas viegli redzams, abos gadījumos asu nogriežņi a un b dabū to pašu vērtību. Tātad divi vienādojumi, kuri attiecībā uz x un y ir pirmās pakāpes vienādojumi un kuru koeficienti ir proporcionali, izteic vienu un to pašu taisni.

Tāpēc, lai vienādojumi

$$Ax + By + C = 0,$$
$$\cos\alpha \cdot x + \sin\alpha \cdot y - p = 0$$

izteiktu to pašu taisni, jābūt

$$\cos\alpha = \rho A; \quad \sin\alpha = \rho B \text{ un } -p = \rho C. \tag{4}$$

Tā kā

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = \rho^2 (A^2 + B^2) = 1,$$

tad

$$\rho = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{5}$$

No augšējā redzams, ka, dalot taisnes vispārīgo vienādojumu

$$Ax + By + C = 0$$

ar

$$\pm\sqrt{A^2 + B^2},$$

dabūjam taisnes normalvienādojumu

$$\frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0. \tag{6}$$

Ieliekot ρ vērtību $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ un p izteiksmēs (4), dabūjam:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} \\ \sin\alpha &= \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} \\ p &= -\frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} \end{aligned}\right\}. \tag{7}$$

Stateņa p vērtība arvienu ir pozitiva; tādēļ, lai no augšējās formulas p dabūtu pozitivu, redzams, ka sakne jāņem ar zīmi, kas pretēja C zīmei. Tātad, ja taisnes vispārīgā vienādojumā absolutais loceklis ir ar + zīmi, saknei jādod — zīme, un otrādi, ja absolutam loceklim ir — zīme, tad saknei jādod + zīme.

Piemērs:

Pārveidot taisnes vispārīgo vienādojumu

$$3x + 4y - 12 = 0$$

normalvienādojumā.

Te

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{1}{5}.$$

Saknei dota + zīme tādēļ, ka vispārīgā vienādojumā absolutā locekļa zīme ir —.

Dalot vispārīgo vienādojumu ar 5, dabūjam normalvienādojumu

$$\frac{3x + 4y - 12}{5} = 0.$$

Te $\cos\alpha = \frac{3}{5}$; $\sin\alpha = \frac{4}{5}$; $p = \frac{12}{5}$.

Piemērs:

Dots taisnes vienādojums:

$$2x - 3y + 9 = 0.$$

Dabūt: a, b, m, p, $\cos\alpha$, $\sin\alpha$.

No formulām (2), (3), (7) dabūjam:

$$a = -\frac{C}{A} = -\frac{9}{2} = -4{,}5; \quad b = -\frac{C}{B} = -\frac{9}{-3} = 3;$$

$$m = -\frac{A}{B} = -\frac{2}{-3} = \frac{2}{3};$$

$$p = -\frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = -\frac{9}{-\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{9}{\sqrt{13}};$$

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{2}{-\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{2}{-\sqrt{13}} = -\frac{2}{\sqrt{13}};$$

$$\sin\alpha = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{-3}{-\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{3}{\sqrt{13}}.$$

Ar taisnes vispārīgā vienādojuma lielumiem dabūjam taisnes normalvienādojumu

$$\frac{2x - 3y + 9}{-\sqrt{13}} = 0,$$

vienādojumu asu nogriežņos

$$\frac{x}{-4{,}5} + \frac{y}{3} - 1 = 0$$

un vienādojumu virziena veidā

$$y = \frac{2}{3}x + 3.$$

Specializējot taisnes vispārīgā vienādojuma

$$Ax + By + C = 0$$

koeficientus $A, B, C,$ dabūjam atsevišķas taisnes.

Ja $A = 0$, dabūjam

$$By + C = 0$$

vai arī

$$y = -\frac{C}{B}.$$

Te y ir konst. un taisne ir paralela x asij.

Ja $B = 0$, tad

$$Ax + C = 0,$$

un taisne ir paralela y asij.

Ja $C = 0$, tad

$$Ax + By = 0$$

izteic taisni caur koordinatu sākumu, jo augšējais vienādojums ir apmierināts ar $x = 0$ un $y = 0$.

Ja $A = 0$ un $C = 0$, tad

$$By = 0 \text{ un } y = 0$$

dod x asi. Ja $B = 0$ un $C = 0$, tad

$$Ax = 0 \text{ un } x = 0$$

dod y asi.

Ja $A = 0$; $B = 0$, tad vienādojums dabū veidu

$$0 \cdot x + 0 \cdot y + C = 0.$$

Ar galīgiem x un y šis vienādojums nevar pastāvēt. No

$$a = -\frac{C}{A} \text{ un } b = -\frac{C}{B}$$

redzam: ja $A \to 0$, tad $a = \infty$, un ja $B \to 0$, tad $b = \infty$.

Ar $a = \infty$ un $b = \infty$ taisne atrodas bezgalībā.

Taisnes vienādojumu

$$Ax + By + C = 0$$

ar $A \to 0$ un $B \to 0$ varam uzskatīt par bezgalīgi tālas taisnes vienādojumu.

Taisnes vispārīgā vienādojumā atrodas trīs pastāvīgi lielumi A, B, C. Dalot vienādojumu ar vienu no tiem, piemēram, dalot ar C, dabūjam

$$\frac{A}{C}x + \frac{B}{C}y + 1 = 0.$$

Liekot $\frac{A}{C} = k$ un $\frac{B}{C} = l$, dabūjam

$$kx + ly + 1 = 0.$$

Te redzams, ka taisnes vispārīgā vienādojumā atrodas tikai divi patstāvīgi pastāvīgi lielumi. Arī citos apskatītajos taisnes vienādojumu veidos redzam tikai divus patstāvīgus pastāvīgus lielumus. Tātad, lai taisne plaknē būtu noteikta, jādod šie divi pastāvīgie lielumi. Saka: taisne plaknē ir dota ar diviem noteikumiem, vai arī: taisnei plaknē ir divas brīvības.

31. Divu taišņu krustošanās punkts. Leņķis starp divām taisnēm.

Divu taišņu

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0,$$
$$A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$$

krustošanās punkts $P_0 = x_0 \mid y_0$ atrodas uz šīm abām taisnēm, tādēļ šā punkta koordinatām x_0 un y_0 jāapmierina abi augšējie vienādojumi.

Atrisinot kopēji augšējos vienādojumus attiecībā uz x un y, dabūjam tās x un y vērtības x_0, y_0, kas apmierina abus vienādojumus. Šo atrisinājumu izteicam ar simbolu:

$$x_0 : y_0 : 1 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ + & - & + \end{vmatrix}.$$

Šā simbola nozīmi dod šāda izteiksme:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ + & - & + \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} : (-1) \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix};$$

tātad

$$x_0 : y_0 : 1 = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}. \qquad (1)$$

Piemērs:

Dotas taisnes

$$x + y - 5 = 0,$$
$$2x - y - 4 = 0.$$

Dabūt šo taišņu krustošanās punktu $P_0 = x_0 \mid y_0$. Te

$$x_0 : y_0 : 1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 2 & -1 & -4 \\ + & - & + \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix};$$

$$x_0 : y_0 : 1 = [(1 \cdot -4) - (-1 \cdot -5)] : -[(1 \cdot -4) - (2 \cdot -5)] :$$
$$: [(1 \cdot -1) - (2 \cdot 1)] = -9 : -6 : -3;$$

$$x_0 = \frac{-9}{-3} = 3; \; y_0 = \frac{-6}{-3} = 2.$$

Tātad

$$P_0 = 3 \mid 2.$$

No izteiksmes (1) redzams, ka krustošanās punkts P_0 atrodas bezgalībā, ja

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Tad

$$A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0$$

un

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}. \tag{2}$$

Ja punkts P_0 atrodas bezgalībā, tad taisnes ir paralelas. Tātad, ja taisnes ir paralelas, taišņu vienādojumos koeficienti pie x un y ir atttiecīgi proporcionali.

Taisnes

$$Ax + By + C_1 = 0,$$
$$\lambda Ax + \lambda By + C_2 = 0$$

ir paralelas. Dalot otro vienādojumu ar λ, dabūjam

$$Ax + By + \frac{C_2}{\lambda} = 0.$$

Šī taisne ir paralela taisnei

$$Ax + By + C_1 = 0.$$

No minētā varam secināt, ka paralelu taišņu vienādojumi atšķiras tikai ar absoluto locekli. Tātad taisnes

$$Ax + By + C_1 = 0,$$
$$Ax + By + C_2 = 0,$$
$$Ax + By + C_3 = 0$$

ir paralelas taisnes.

Lai trīs taisnes

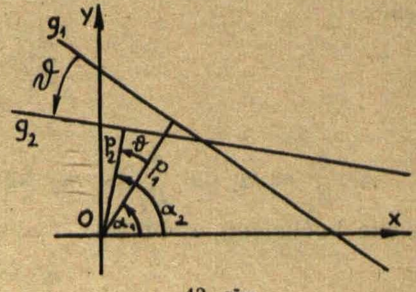
$$A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$
$$A_3x + B_3y + C_3 = 0$$

ietu caur vienu punktu, šā punkta koordinatām jāapmierina šie trīs vienādojumi, t. i. šiem trim vienādojumiem jāpastāv kopīgi.

Kā zinām, tādā gadījumā

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

32. Leņķis starp divām taisnēm. Leņķi ϑ starp taisnēm g_1 un g_2 skaita no taisnes g_1 uz taisni g_2 pozitivā virzienā. Leņķis ϑ var pieņemt vērtības no 0° līdz 180° (43. zīm.).



43. zīm.

Pieņemot $p_1 \perp g_1$ un $p_2 \perp g_2$, no zīmējuma redzams, ka

$$\vartheta = \alpha_2 - \alpha_1.$$

$$\cos\vartheta = \cos(\alpha_2 - \alpha_1) =$$
$$= \cos\alpha_2 \cdot \cos\alpha_1 + \sin\alpha_2 \cdot \sin\alpha_1,$$
$$\sin\vartheta = \sin(\alpha_2 - \alpha_1) =$$
$$= \sin\alpha_2 \cos\alpha_1 - \cos\alpha_2 \sin\alpha_1.$$

No taišņu vienādojumiem

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, \qquad \text{(taisne } g_1\text{)}$$
$$A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \qquad \text{(taisne } g_2\text{)}$$

dabūjam:

$$\cos\alpha_1 = \frac{A_1}{\pm\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}; \quad \sin\alpha_1 = \frac{B_1}{\pm\sqrt{A_1^2 + B_1^2}};$$

$$\cos\alpha_2 = \frac{A_2}{\pm\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}; \quad \sin\alpha_2 = \frac{B_2}{\pm\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Ievietojot šīs vērtības augšējās izteiksmēs, dabūjam:

$$\left.\begin{aligned}
\cos\vartheta &= \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{(\pm\sqrt{A_1^2 + B_1^2})(\pm\sqrt{A_2^2 + B_2^2})} \\
\sin\vartheta &= \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{(\pm\sqrt{A_1^2 + B_1^2})(\pm\sqrt{A_2^2 + B_2^2})} \\
\operatorname{tg}\vartheta &= \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2}
\end{aligned}\right\}. \qquad (4)$$

Ja $g_1 \parallel g_2$, tad $\vartheta = 0^\circ$ vai 180°, $\sin\vartheta = 0$, tādēļ

$$A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0, \text{ vai } \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.$$

Ja $g_1 \perp g_2$, tad $\vartheta = 90°$ un $\cos\vartheta = 0$.

Tādēļ

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$$

vai

$$\frac{A_1}{B_1} = -\frac{1}{\frac{A_2}{B_2}}.$$

Ar $\frac{A_1}{B_1} = m_1$ un $\frac{A_2}{B_2} = m_2$, kur m_1 un m_2' ir taisnes g_1 un g_2 virziena koeficienti, dabūjam:

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

vai arī

$$m_1 \cdot m_2 = -1.$$

Piemērs:

Kāds ir taisnes vienādojums, kas paralela taisnei

$$2x + 4y - 3 = 0 \qquad (g_1)$$

un kas iet caur punktu $P = 4 \mid 5$?

Taisnei g_1 paralelas taisnes (g_2) vienādojums ir:

$$2x + 4y + C = 0. \qquad (g_2)$$

C vērtību dabūjam no noteikuma, ka šai taisnei jāiet caur punktu $P = 4 \mid 5$. Šā punkta koordinatām tādēļ jāapmierina vienādojums (g_2); tātad

$$2 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + C = 0$$

un

$$C = -28.$$

Ievietojot vienādojumā (g_2) šo C vērtību, dabūjam vienādojumu

$$2x + 4y - 28 = 0,$$

kas izteic taisni caur $P = 4 \mid 5$ paralelu taisnei

$$2x + 4y - 3 = 0.$$

Piemērs:

Dota taisne

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0. \qquad (t_1)$$

Kāds ir taisnes t_2 vienādojums, kas stateniska pret šo doto taisni?

Dotās taisnes t_1 virziena koeficients ir

$$m_1 = -\frac{A_1}{B_1}.$$

Apzīmējot stateniskās taisnes t_2 virziena koeficientu ar m_2 un ievērojot statenības noteikumu, ka

$$m_1 \cdot m_2 = -1,$$

dabūjam

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{-\frac{A_1}{B_1}} = +\frac{B_1}{A_1}.$$

Kā redzams, taisne

$$B_1 x - A_1 y + C_2 = 0 \qquad (t_2)$$

ir stateniska pret taisni

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, \qquad (t_1)$$

jo taisnes t_2 virziena koeficients ir

$$m_2 = -\frac{B_1}{-A_1} = \frac{B_1}{A_1}.$$

Kā redzams no dotā taisnes vienādojuma

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0,$$

tad pret šo taisni stateniskas taisnes vienādojumu dabūjam, pārmainot koeficientus pie x un y un vienam no šiem koeficientiem dodot pretēju zīmi.

Tātad, ja dota taisne

$$2x + 4y - 3 = 0, \qquad (t_1)$$

tad pret šo taisni stateniskas taisnes vienādojums ir

$$4x - 2y + C = 0. \qquad (t_2)$$

Ja šai taisnei jāiet caur punktu $P = 2 \mid 5$, tad šā punkta koordinatām jāapmierina vienādojums (t_2), tātad

$$4 \cdot 2 - 2 \cdot 5 + C = 0$$

un

$$C = 2.$$

Taisne

$$4x - 2y + 2 = 0$$

iet caur punktu $P = 2 \mid 5$ un ir stateniska pret taisni

$$2x + 4y - 3 = 0.$$

Piemērs:

Dabūt taisnes krustošanās punktu ar dotu nogriezni.

Meklētais krustošanās punkts P_0 atrodas uz nogriežņa $P_1 P_2$ un dala to vēl nezināmā attiecībā. Krustošanās punkta P_0 koordinatas x_0 un y_0 tad ir:

$$x_0 = \frac{\lambda x_2 - x_1}{\lambda - 1} \text{ un } y_0 = \frac{\lambda y_2 - y_1}{\lambda - 1}.$$

Punkts P_0 atrodas arī uz dotās taisnes

$$Ax + By + C = 0;$$

tādēļ punkta P_0 koordinatām jāapmierina dotais taisnes vienādojums. Tātad

$$A \frac{\lambda x_2 - x_1}{\lambda - 1} + B \frac{\lambda y_2 - y_1}{\lambda - 1} + C = 0.$$

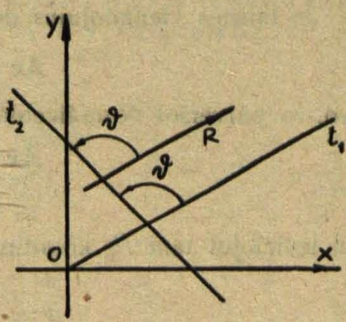
Atrisinot augšējo vienādojumu attiecībā uz λ, dabūjam:

$$\lambda = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{Ax_2 + By_2 + C}.$$

Ievietojot šo izteiksmi koordinatu x_0 un y_0 izteiksmēs, dabūjam uzdevuma atrisinājumu.

Piemērs:

Dabūt leņķi starp taisnes nogriezni R un dotu taisni t_2.



44. zīm.

Caur koordinatu sākumu velkam taisni $t_1 \parallel$ nogrieznim R. Pieņemot, ka nogriežņa R projekcijas ir X un Y, taisnes t_1 virziena koeficients ir

$$m_1 = \frac{Y}{X}.$$

Tad taisnes t_1 vienādojums ir

$$y = \frac{Y}{X}\, x$$

vai arī

$$Yx - Xy = 0.$$

Dotās taisnes t_2 vienādojums ir

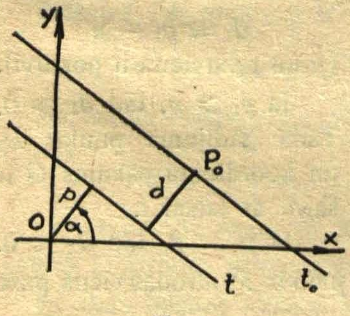
$$Ax + By + C = 0.$$

Izlietojot formulu (4), dabūjam:

$$tg\,\vartheta = \frac{YB - A(-X)}{YA + (-X)B} = \frac{AX + BY}{AY - BX}.$$

33. Punkta attālums no dotās taisnes (45. zīm.). Caur doto punktu P_0 velkam taisni t_0 paraleli dotajai taisnei, kuras vienādojums dots ar

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0. \qquad (t)$$



45. zīm.

Taisnes t_0 vienādojums tad ir

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha - (p + d) = 0. \qquad (t_0)$$

Tā kā taisne t_0 iet caur punktu P_0, tad jābūt:

$$x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - (p + d) = 0.$$

Atrisinot šo vienādojumu attiecībā uz d, dabūjam punkta P_0 attālumu no taisnes t:

$$d = x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p. \qquad (1).$$

Tātad: *punkta P_0 attālums no dotās taisnes ir tā vērtība, ko dabū šīs taisnes normalvienādojuma kreisā puse, ja tanī ievietojam punkta P_0 koordinatas.*

Ja taisnes vienādojums dots vispārīgā veidā

$$Ax + By + C = 0,$$

tad, to pārvēršot normalveidā

$$\frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

un ievietojot tanī P_0 koordinatas, dabūjam

$$d = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (2)$$

Saknes zīme jāņem pretēja C zīmei.

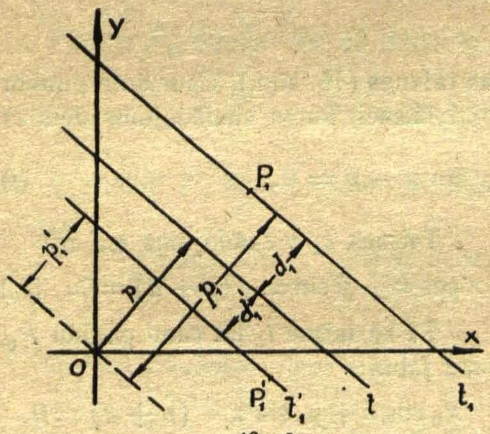
Liekot vienādojumā (1) $x_0 = 0$; $y_0 = 0$, dabūjam punkta O attālumu no taisnes t_0

$$d = -p,$$

bet taisnes attālums no punkta O, kā agrāk redzējām, ir p.

Taisnes t_1, t, t_1' (46. zīm.) ir paralelas un to vienādojumi ir

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p_1 = 0,$$
$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0,$$
$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p_1' = 0.$$



46. zīm.

No 46. zīmējuma redzams: ja punkts P_1 atrodas uz taisnes t_1, tad punkta P_1 attālums no taisnes t ir

$$d_1 = p_1 - p$$

(p un p_1 arvienu ir pozitivi).

Ja $p_1 > p$, tad $d_1 > 0$. Tādā gadījumā punkts P_1 un koordinatu sākums O ir šķirti ar taisni t.

Ja $p_1' < p$, tad $d_1' < 0$. Tādā gadījumā koordinatu sākums un punkts P_1' atrodas vienā pusē no taisnes t. Tātad:

ja punkta attālumu d no dotās taisnes t dabūjam pozitivu, tad taisne t šķir punktus O un P_1:

ja d dabūjam negativu, tad punkti P_1 un O (koordinatu sākums) abi atrodas taisnes t vienā pusē.

Piemērs:

Kāds ir punkta $P = 6 \mid 3$ attālums no taisnes

$$x + y - 5 = 0? \qquad (t)$$

Šīs taisnes normalvienādojums ir

$$\frac{x + y - 5}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 0.$$

Punkta P attālums no taisnes t ir

$$d = \frac{6 + 3 - 5}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

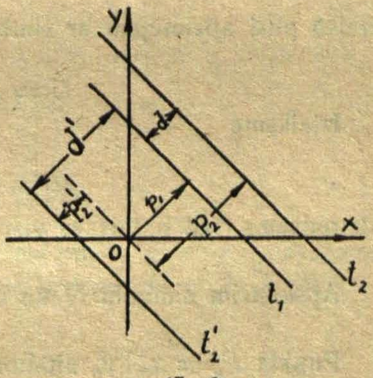
Tā kā te d ir pozitivs, tad punkts $P = 6 \mid 3$ un koordinatu sākums O atrodas taisnes

$$x + y - 5 = 0$$

pretējās pusēs.

Piemērs:

Dabūt divu paralelu taišņu savstarpējo attālumu (47. zīm.). Apzīmēsim šīs taisnes ar t_1 un t_2.



47. zīm.

Taišņu t_1, t_2 attālums ir

$$d = p_2 - p_1.$$

Taišņu t_1, t_2' attālums ir

$$d' = p_2' + p_1.$$

Apvienojot izteiksmes, varam rakstīt, ka

$$d = p_2 \pm p_1. \qquad (3)$$

Te jāņem $+$ zīme, ja koordinatu sākums O atrodas starp taisnēm.

Ja abas taisnes atrodas koordinatu sākuma O vienā pusē, tad formulā (3) jāņem $-$ zīme.

Ja paralelo taišņu t_1 un t_2 absoluto locekļu C_1 un C_2 zīmes vispārīgos vienādojumos ir vienādas, tad šo taišņu asu nogriežņu zīmes arī ir vienādas. Tādā gadījumā taisnes t_1 un t_2 atrodas koordinatu sākuma O vienā pusē, un formulā (3) tādēļ jāņem — zīme. Ja C_1 un C_2 zīmes ir pretējas, tad arī taišņu t_1 un t_2 asu nogriežņu zīmes ir pretējas. Tādā gadījumā koordinatu sākums O atrodas starp taisnēm t_1 un t_2, un formulā (3) tādēļ jāņem + zīme.

34. Taisnes vienādojumu simboli. Taišņu šķipsna. Taisnes normalvienādojuma

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$$

kreiso pusi apzīmējam ar simbolu N, tātad

$$N = x \cos \alpha + y \sin \alpha - p.$$

Izteiksme

$$N = 0,$$

kā redzams, tad ir taisnes normalvienādojuma simbols.

Taisnes vispārīgā vienādojuma

$$Ax + By + C = 0$$

kreiso pusi apzīmējam ar simbolu G, tātad

$$G = Ax + By + C.$$

Izteiksme

$$G = 0,$$

kā redzams, tad ir taisnes vispārīgā vienādojuma simbols.

Apskatīsim simbolu N un G ģeometrisko nozīmi.

Punkta $P_0 = x_0 \mid y_0$ attālums no taisnes

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0 \tag{1}$$

ir

$$d_0 = x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - p.$$

Ievērojot šo izteiksmi, redzam, ka punkta $P = x \mid y$ attālums no taisnes

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$$

ir

$$d = x \cos \alpha + y \sin \alpha - p.$$

Augšējās izteiksmes labā puse ir tieši tā izteiksme, ko apzīmējam ar simbolu N.

Redzams, ka simbols N izteic punkta $P = x \mid y$ attālumu no taisnes, kas dota ar normalvienādojumu (1), vai arī no taisnes, ko rakstām ar normalvienādojuma simbolu

$$N = 0.$$

Tātad: simbols N izteic punkta $P = x \mid y$ attālumu no taisnes, kas dota ar simbolu

$$N = 0.$$

Taisnes vispārīgo vienādojumu pārveidojam normalvienādojumā, dalot vispārīgo vienādojumu ar $\pm \sqrt{A^2 + B^2}$. Tātad

$$\frac{G}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

ir taisnes normalvienādojums, ko apzīmējam ar simbolu

$$N = 0.$$

Ievērojot augšējo, redzam, ka

$$\frac{G}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} = N$$

un

$$G = N (\pm \sqrt{A^2 + B^2}).$$

No minētā redzam, ka simbols G apzīmē punkta $P = x \mid y$ attālumu no taisnes $G = 0$, reizinātu ar konstantu faktoru $\pm \sqrt{A^2 + B^2}$.

Vienādojumi

$$N_1 = 0,$$
$$N_2 = 0$$

ir divu taišņu normalvienādojumi. Vienādojums

$$N_1 - \lambda N_2 = 0,$$

kur λ ir skaitlis, arī izteic taisni, jo šis vienādojums attiecībā uz x un y ir pirmās pakāpes, tādēļ ka N_1 un N_2 attiecībā uz x un y arī ir pirmās pakāpes izteiksmes.

Taisne

$$N_1 - \lambda N_2 = 0$$

iet caur taišņu

$$N_1 = 0,$$

$$N_2 = 0$$

krustošanās punktu, jo, tā kā šī krustošanās punkta koordinatas apmierina vienādojumus $N_1 = 0$ un $N_2 = 0$, tad redzams, ka krustošanās punkta koordinatas apmierina arī vienādojumu $N_1 - \lambda N_2 = 0$.

Ja λ ir mainīgs lielums, tad katrai λ vērtībai atbilst taisne caur taišņu $N_1 = 0$ un $N_2 = 0$ krustošanās punktu. Vienādojums

$$N_1 - \lambda N_2 = 0$$

tātad izteic bezgalīgu daudzumu taišņu, kas visas iet caur taišņu $N_1 = 0$ un $N_2 = 0$ krustošanās punktu. Šo bezgalīgo daudzumu taišņu, kas ir izteiktas ar vienādojumu

$$N_1 - \lambda N_2 = 0,$$

sauc par *taišņu šķipsnu* un augšējo vienādojumu par taišņu šķipsnas vienādojumu.

Ja $\lambda = 0$, tad šķipsnas vienādojums dod

$$N_1 = 0.$$

Pārveidojot šķipsnas vienādojumu, dabūjam

$$\frac{N_1}{N_2} = \lambda.$$

Ja $\lambda = \infty$, tad

$$N_2 = 0.$$

Šķipsnas taisnes, kas atbilst vērtībām $\lambda = 0$ un $\lambda = \infty$, t. i. taisnes

$$N_1 = 0 \text{ un } N_2 = 0$$

sauc par *šķipsnas pamata taisnēm*.

Ja $\lambda = 1$, tad

$$N_1 = N_2.$$

Apskatīsim, ko nozīmē izteiksme

$$N_1 = N_2.$$

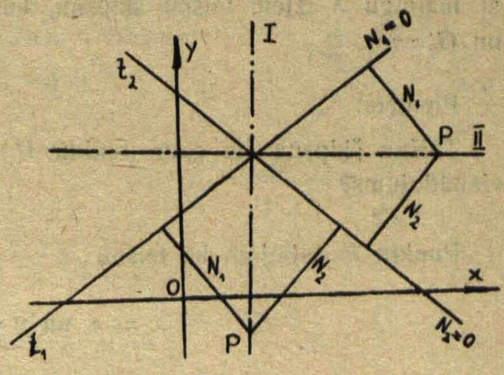
Dotas divas taisnes ar attiecīgiem vienādojumiem $N_1 = 0$ un $N_2 = 0$ (48. zīm.).

Simbols N_1 izteic punkta $P = x \mid y$ attālumu no taisnes $N_1 = 0$, simbols N_2 izteic punkta $P = x \mid y$ attālumu no taisnes $N_2 = 0$.

Izteiksme

$$N_1 = N_2$$

tātad parāda, ka punkta $P = x \mid y$ attālums no taisnes $N_1 = 0$ ir vienlīdzīgs ar šā punkta attālumu no taisnes $N_2 = 0$.



48. zīm.

Šāda īpašība ir visiem punktiem, kas atrodas uz taisnes I, kura dala uz pusēm leņķi starp taisnēm t_1 un t_2. Taisnes I tekošā punkta P attālumi N_1 un N_2 no taisnēm $N_1 = 0$ un $N_2 = 0$ ir vienlīdzīgi, kā redzam no 48. zīmējuma, abi ar — zīmēm, jo punkti P un O nav šķirti ar taisnēm t_1 un t_2.

Ja $\lambda = -1$, tad

$$N_1 + N_2 = 0$$

vai

$$N_1 = - N_2.$$

Ievērojot nule minēto, redzams, ka šis vienādojums izteic taisni II, kas arī dala leņķi starp taisnēm t_1 un t_2 uz pusēm. Šinī gadījumā N_2 ir ar + zīmi un N_1 ar — zīmi. Tātad

$$N_1 = - N_2.$$

Ja taisnes dotas ar vispārīgiem vienādojumiem

$$G_1 = 0$$

$$\text{un } G_2 = 0,$$

tad, līdzīgi apskatītam gadījumam, iznāk, ka vienādojums

$$G_1 - \lambda G_2 = 0$$

izteic taisni caur taišņu $G_1 = 0$ un $G_2 = 0$ krustošanās punktu.

Vienādojums

$$G_1 - \lambda G_2 = 0$$

ar mainīgu λ izteic taišņu šķipsnu, kuras pamatā ir taisnes $G_1 = 0$ un $G_2 = 0$.

Piemērs:

Taišņu šķipsna iet caur punktu $P = \alpha \mid \beta$. Kāds ir šīs šķipsnas vienādojums?

Punktu P dabūjam kā taišņu

$$x = \alpha \text{ un } y = \beta$$

krustošanās punktu. Šīs taisnes

$$G_1 \equiv x - \alpha = 0 \quad \text{un} \quad G_2 \equiv y - \beta = 0$$

tad ir taišņu šķipsnas

$$G_1 - \lambda G_2 = 0$$

pamata taisnes. Caur punktu $P = \alpha \mid \beta$ ejošās taišņu šķipsnas vienādojums tad ir

$$(x - \alpha) - \lambda (y - \beta) = 0.$$

Piemērs:

Dabūt taišņu

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \qquad (g_1)$$

un

$$A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \qquad (g_2)$$

bisektrises.

Tā kā bisektrišu vienādojums ir

$$N_1 \pm N_2 = 0,$$

tad taišņu vienādojumi (g_1) un (g_2) jāizteic normalveidā un jāveido augšējā izteiksme. Dabūjam:

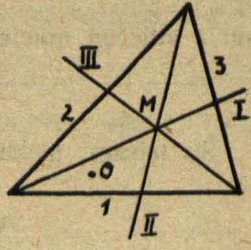
$$\frac{A_1 x + B_1 y + C_1}{\pm \sqrt{A_1^2 + B_1^2}} \pm \frac{A_2 x + B_2 y + C_2}{\pm \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = 0.$$

Šis vienādojums ir meklēto bisektrišu vienādojums.

Piemērs:

Pierādīt, ka trīsstūra bisektrises krustojas vienā punktā (49. zīm.).

Apzīmējam trīsstūra malas ar *1, 2, 3* un pieņemam koordinatu sākumu *O* trīsstūra iekšienē.



49. zīm.

Trīsstūra malu vienādojumi tad ir

$$N_1 = 0$$
$$N_2 = 0$$
$$N_3 = 0.$$

I bisektrises vienādojumi ir

$$N_1 - N_2 = 0$$

un II bisektrises vienādojums —

$$N_2 - N_3 = 0.$$

Saskaitot šos vienādojumus, dabūjam:

$$(N_1 - N_2) + (N_2 - N_3) = N_1 - N_3 = 0.$$

Šis vienādojums izteic taisni caur I un II bisektrises krustošanās punktu, bet tas ir arī III bisektrises vienādojums. Tātad III bisektrise iet caur I un II bisektrises krustošanās punktu.

Piemērs:

Caur punktu $P = 2 \mid 4$ vilkt stateni pret taisni

$$2x + 3y - 4 = 0. \qquad (g)$$

Veidojam taišņu šķipsnu caur punktu P:

$$(x - 2) - \lambda\,(y - 4) = 0. \qquad (s)$$

Šinī šķipsnā atrodas arī meklētais statenis.

Apzīmējot taisnes (g) un stateņa virziena koeficientus attiecīgi ar m_1 un m_2, iznāk, ka

$$m_1 \,.\, m_2 = -1.$$

No taisnes vienādojuma (g) dabūjam, ka

$$m_1 = -\frac{A}{B} = -\frac{2}{3}.$$

Par stateņa vienādojumu varam uzskatīt šķipsnas vienādojumu

$$(x-2)-\lambda(y-4)=0,$$

kur λ attiecīgi noteicams. Pārveidojot šo vienādojumu, dabūjam:

$$x-\lambda y+(4\lambda-2)=0.$$

Šīs taisnes, meklētā stateņa, virziena koeficients ir

$$m_2=-\frac{A}{B}=-\frac{1}{-\lambda}=\frac{1}{\lambda}.$$

No izteiksmes

$$m_1\cdot m_2=-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\lambda}=-1$$

dabūjam

$$\lambda=\frac{2}{3}.$$

Liekot šo λ vērtību šķipsnas (s) vienādojumā, dabūjam:

$$x-\frac{2}{3}y+4\cdot\frac{2}{3}-2=0$$

vai arī

$$3x-2y+2=0.$$

Šis vienādojums izteic stateni pret taisni (g) caur punktu P.

PIEKTĀ NODAĻA

DAŽAS LINEARAS TRANSFORMACIJAS

35. Līdzības transformacija. Ar vienādojumiem

$$x'=cx$$
$$y'=cy$$

katram punktam $P=x\mid y$ plaknē tiek vienvērtīgi piekārtots punkts $P'=x'\mid y'$ un otrādi: katram punktam $P'=x'\mid y'$ plaknē tiek vienvērtīgi piekārtots punkts $P=x\mid y$.

Tāda veida piekārtošanu sauc par *līdzības* piekārtošanu vai *līdzības transformaciju*.

Šai transformacijai ir sekojošas īpašības.

1) Piekārtoti punkti P un P' atrodas uz taisnes, kas iet caur koordinatu sākumu, jo punkta P radiusa vektora virziena koeficients ir $\frac{y}{x}$ un punkta P' radiusa vektora virziena koeficients ir $\frac{y'}{x'} = \frac{cy}{cx} = \frac{y}{x}$. No aprādītā redzams, ka P un P' atrodas uz taisnes, kas iet caur koordinatu sākumu.

2) Piekārtotas taisnes t un t' ir paralelas.

Taisnei

$$Ax + By + C = 0 \qquad (g)$$

ir piekārtota taisne

$$A\frac{x'}{c} + B\frac{y'}{c} + C = 0$$

vai arī

$$Ax' + By' + Cc = 0. \qquad (g')$$

Kā redzams, taisnei (g) piekārtotā taisne (g') ir paralela taisnei (g).

Taisnes nogrieznim

$$P_1P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

ir piekārtots nogrieznis

$$P_1'P_2' = \sqrt{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2} = \sqrt{(cx_2 - cx_1)^2 + (cy_2 - cy_1)^2} =$$
$$= c\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

No tā redzams, ka

$$P_1'P_2' = cP_1P_2. \qquad (1)$$

3) Ievērojot aprādītās īpašības, iznāk, ka $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ (50. zīm.). Punktu 0 sauc par *līdzības centru.* Kā redzam no 50. zīmējuma, minētie trīsstūri ir ne tikai līdzīgi, bet arī līdzīgi novietoti.

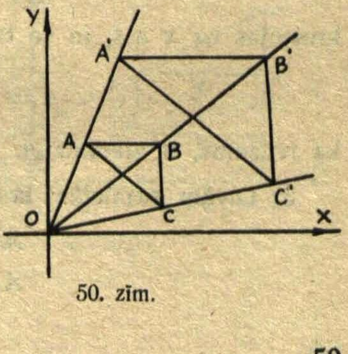
Attēlus, kas ir līdzīgi un līdzīgi novietoti, sauc par *homotetiskiem*.

Trīsstūra ABC laukums ir

$$F = \frac{gh}{2}$$

un trīsstūra $A'B'C'$ laukums —

$$F' = \frac{g'h'}{2}.$$



50. zīm.

Tā kā nogrieznim g ir piekārtots nogrieznis g' un nogrieznim h ir piekārtots nogrieznis h', pie kam

$$g' = cg \text{ un } h' = ch,$$

tad

$$F' = \frac{g'h'}{2} = \frac{cg \cdot ch}{2} = c^2 \frac{gh}{2}.$$

No tā iznāk, ka

$$F' = c^2 F.$$

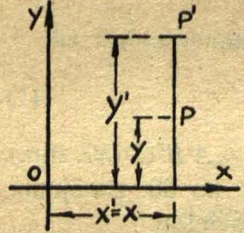
Skaidri redzams, ka kāda nogriežņa viduspunktam M atbilst šim nogrieznim piekārtotā nogriežņa viduspunkts M'.

36. Homogena transformacija. Ar vienādojumiem

$$x' = x$$
$$\text{un } y' = cy$$

noteikto transformaciju sauc par *homogenu* transformaciju. Ar šiem vienādojumiem katram punktam $P = x \mid y$ plaknē tiek piekārtots punkts $P' = x' \mid y'$, kura abscisa ir tāda pati kā punktam P, bet ordinata ir punkta P ordinata, reizināta ar faktoru c.

Ja $c > 1$, tad ordinatas tiek stieptas, bet ja $c < 1$, tad spiestas (51. zīm.).



51. zīm.

Homogenai transformacijai ir šādas īpašības:

1) Piekārtoti punkti P un P' atrodas uz taisnes, kas paralela y asij.

2) Piekārtotas taisnes t

$$Ax + By + C = 0$$

un t'

$$Ax' + B\frac{y'}{c} + C = 0$$

krustojas uz x ass, jo šo taišņu asu nogriežņi uz x ass

$$a = -\frac{C}{A} \text{ un } a' = -\frac{C}{A},$$

kā redzams, ir vienlīdzīgi.

3) Divām paralelām taisnēm t_1 un t_2

$$Ax + By + C_1 = 0, \qquad (t_1)$$
$$Ax + By + C_2 = 0 \qquad (t_2)$$

piekārtotās taisnes t'_1 un t'_2

$$Ax' + B\frac{y'}{c} + C_1 = 0, \qquad (t'_1)$$

$$Ax' + B\frac{y'}{c} + C_2 = 0 \qquad (t'_2)$$

arī ir paralelas.

4) Nogriežņa P_1P_2 viduspunkta M koordinatas ir

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Šim nogrieznim piekārtotā nogriežņa $P'_1P'_2$ viduspunkta M' koordinatas ir

$$x'_{M'} = \frac{x'_1 + x'_2}{2};$$

$$x'_{M'} = \frac{y'_1 + y'_2}{2}.$$

Tā kā $x' = x$ un $y' = cy$, tad nule minētās izteiksmes pārveidojot, dabūjam:

$$x'_{M'} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

un

$$y'_{M'} = \frac{y'_1 + y'_2}{2} = \frac{cy_1 + cy_2}{2} = c\frac{y_1 + y_2}{2}.$$

No tā redzam, ka

$$x'_{M'} = x_M$$

un

$$y'_{M'} = cy_M,$$

kas nozīmē, ka homogenā transformacijā nogriežņa viduspunkts pārvietojas šim nogrieznim piekārtotā nogriežņa viduspunktā.

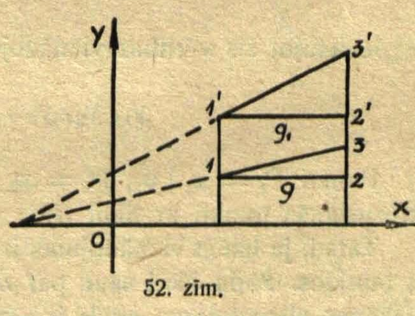
5) 52. zīmējumā redzams, ka

$$F = \triangle 1, 2, 3 = \frac{g(y_3 - y_2)}{2}$$

un

$$F' = \triangle 1' 2' 3' = \frac{g(y'_3 - y'_2)}{2} =$$

$$= \frac{g}{2}(cy_3 - cy_2) = \frac{g}{2}c\,(y_3 - y_2).$$



52. zīm.

No tā varam secināt, ka

$$F' = cF.$$

SESTĀ NODAĻA

LĪKŅU KLASIFIKACIJA. VISPĀRĪGAS IZTEIKSMES PAR LĪKNĒM. PIESKARE

37. Līkņu klasifikacija. Vispārīgas izteiksmes par līknēm. Pieņemam, ka vienādojums

$$F(x, y) = 0$$

ir algebrisks. Vienādojuma loceklim tad ir šāds veids:

$$Mx^r \cdot y^s.$$

Te M ir pastāvīgs koeficients, pakāpes rādītāji r un s ir veseli pozitivi skaitļi. Vienādojumā esošo lielāko r vērtību sauc par vienādojuma pakāpi attiecībā uz x, lielāko s — par vienādojuma pakāpi attiecībā uz y. Lielāko sumu $r + s$ sauc par vienādojuma pakāpi vispār.

Šāda vienādojuma attēls Dekarta koordinatu sistemā ir līkne. Šīs līknes krustošanās punktus ar taisni dabūjam, kopēji atrisinot līknes vienādojumu

$$F(x, y) = 0 \tag{l}$$

un taisnes vienādojumu

$$y = mx + b. \tag{t}$$

Ja līknes vienādojums $F(x,y) = 0$ ir n-tās pakāpes, tad, ievietojot tajā y vērtību no (t), dabūjam n-tās pakāpes algebrisku vienādojumu attiecībā uz x kā nezināmo.

Šim vienādojumam, kā zināms, ir n saknes

$$x_1, x_2, x_3 \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, x_n.$$

Ievietojot šīs vērtības vienādojumā (t), dabūjam n vērtības:

$$y_1, y_2, y_3 \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, y_n.$$

Punkti $P_1 = x_1 \,|\, y_1$, $P_2 = x_2 \,|\, y_2 \, . \, . \, . \, . \, P_n = x_n \,|\, y_n$ ir taisnes (t) krustošanās punkti ar līkni (l).

Tātad, ja līknes vienādojums ir n-tās pakāpes, tad taisne krusto līkni n punktos. Šādu līkni sauc par n-tās *kārtas* līkni. Redzams, ka n-tās pakāpes vienādojuma attēls ir n-tās kārtas līkne.

Taisnes krustošanās punkti ar līkni var būt reali vai arī imaginari. Imaginari krustošanās punkti arvien ir pāra skaitā.

Ja krustošanās punkti ir reali un ja divi no tiem sakrīt vienā punktā, t. i., ja $x_1 = x_2$; $y_1 = y_2$, tad taisne šādā punktā līknei pieskaras.

Ja līknes vienādojuma kreisā puse ir vesels racionals algebrisks polinoms, tad līkni sauc par algebrisku. Ar piemērotu pārveidojumu katru algebrisku vienādojumu var pārvērst veselā racionalā vienādojumā.

Ja līknes vienādojums ir transcendents, tad līkni sauc par transcendentu.

Ja līkne dota ar algebrisku vienādojuma, tad līknes stāvokļa un veida izpētīšanā taisnleņķa koordinatu sistemā lietojam šādas izteiksmes:

1) Ja punkts $P_0 = x_0 \mid y_0$ apmierina līknes vienādojumu $F(x, y) = 0$, t. i., ja

$$F(x_0, y_0) = 0,$$

tad šis punkts atrodas uz līknes.

2) Ja līknes vienādojumā nav absolutā locekļa, tad punkta $O = 0 \mid 0$ koordinatas apmierina līknes vienādojumu, tātad punkts O atrodas uz līknes. Šādā gadījumā līkne iet caur koordinatu sākumu.

Piemērs:

Līkne

$$x^2 - y^2 + x + 2y = 0$$

iet caur koordinatu sākumu, jo vienādojums ir apmierināts ar $x = 0$ un $y = 0$.

3) Ja līknes vienādojuma

$$F(x, y) = 0 \tag{α}$$

polinoms sadalās faktoros, piemēram

$$F(x, y) = \varphi(x, y) \cdot \psi(x, y), \tag{β}$$

tad līkne sadalās divās līknēs.

Pierādījums:

No izteiksmes (β) redzams, ka

$$F(x, y) = 0,$$

ja liekam

$$\varphi(x, y) = 0. \tag{γ}$$

Vienādojums (γ) izteic līkni. Katrs līknes (γ) punkts $P = x \mid y$, saskaņā ar teikto, apmierina arī vienādojumu (α), tātad tas atrodas arī uz līknes

$$F(x, y) = 0.$$

Tieši tāpat dabūjam, ka katrs līknes

$$\psi(x, y) = 0 \qquad (\delta)$$

punkts atrodas arī uz līknes

$$F(x, y) = 0.$$

Tātad, tikpat līknes

$$\varphi(x, y) = 0$$

punkti, kā arī līknes

$$\psi(x, y) = 0$$

punkti atrodas uz līknes

$$F(x, y) = 0.$$

No tā redzams, ka līkne $F(x, y) = 0$ ir līkņu $\varphi(x, y) = 0$ un $\psi(x, y) = 0$ kopums, t. i., līkne $F(x, y) = 0$ ir sadalījusies līknēs $\varphi(x, y) = 0$ un $\psi(x, y) = 0$.

4) Ja līknes vienādojums

$$F(x, y) = 0$$

ir n-tās pakāpes homogens polinoms, attiecībā uz x un y, tad līkne sadalās n taisnēs, kas iet caur koordinatu sākumu.

Pieņemam, ka vienādojums ir n-tās pakāpes polinoms.

$$Ay^n + By^{n-1}x + Cy^{n-2}x^2 + \ldots + Qx^n = 0. \qquad (\varepsilon)$$

Pārveidojam šo vienādojumu, dalot to ar x^n; dabūjam

$$A\left(\frac{y}{x}\right)^n + B\left(\frac{y}{x}\right)^{n-1} + C\left(\frac{y}{x}\right)^{n-2} + \ldots + Q = 0.$$

Uzskatot $\left(\frac{y}{x}\right)$ par nezināmo, apzīmējam augšējā n-tās pakāpes vienādojuma saknes ar

$$k_1, k_2, \ldots \ldots \ldots \ldots k_n.$$

Sadalot augšējā vienādojuma polinomu sakņu faktoros, dabūjam:

$$A\left(\frac{y}{x}-k_1\right)\left(\frac{y}{x}-k_2\right).\;.\;.\;.\;.\left(\frac{y}{x}-k_n\right)=0.$$

Saskaņā ar nule pierādīto teoremu, līkne (ε) sadalās līknēs:

$$\frac{y}{x}=k_1;\ \frac{y}{x}=k_2;\ .\;.\;.\;.\;.\;.\ \text{un}\ \frac{y}{x}=k_n,$$

kas dotajā gadījumā katra izteic taisni caur koordinatu sākumu.

5) Ja n-tās pakāpes vienādojumā nav x, tad tas izteic n taisnes, kas paralelas x asij.

Vienādojumam

$$Ay^n+By^{n-1}+.\;.\;.\;.\;.+Py+Q=0 \qquad (\lambda)$$

ir n saknes: k_1, k_2, ... k_n.

Sadalot vienādojuma polinomu faktoros, dabūjam:

$$A\,(y-k_1)\,(y-k_2)\;.\;.\;.\;.\;.\;(y-k_n)=0.$$

Kā redzams, līkne (λ) sadalās taisnēs

$$y=k_1;\ y=k_2;\ .\;.\;.\;.\;.\;.\;.\ y=k_n,$$

kas paralelas x asij.

Tāpat pierādāms: ja vienādojums ir n-tās pakāpes un tajā nav y, tad tas izteic n taisnes, kas paralelas y asij.

6) Ja līknes vienādojums ir tāds, ka, liekot tanī x vietā $-x$, tas nemainās, tad līkne ir simetriska pret y asi.

Pieņemam, ka, liekot līknes vienādojumā $x=a$, dabūjam $y=b$. Tā kā, saskaņā ar pieņēmumu, vienādojums nemainās, ja tajā liekam $x=-a$, tad arī šinī gadījumā dabūsim $y=b$.

Punkti

$$P=a\mid b \text{ un } P_1=-a\mid b$$

ir simetriski pret y asi.

Tāpat:

ja līknes vienādojums nemainās, liekot tanī y vietā $-y$, tad līkne ir simetriska pret x asi.

Ja līknes vienādojums nemainās, liekot tanī x vietā $-x$ un y vietā $-y$, tad līkne ir simetriska pret y un x asīm.

7) Ja līknes vienādojumā

$$F(x, y) = 0$$

x vietā liekam y un y vietā x, t. i., veidojam līkni

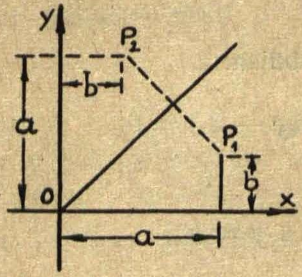
$$F(y, x) = 0,$$

tad šīs līknes atrodas simetriski attiecībā uz bisektrisi

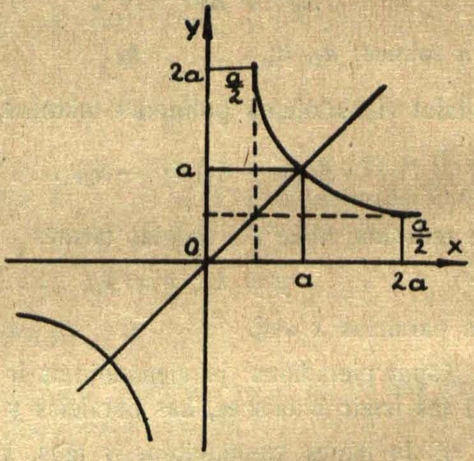
$$y = x.$$

Ja punkts $P_1 = a \mid b$ ir līknes $F(x, y) = 0$ punkts, tad punkts $P_2 = b \mid a$ ir līknes $F(y, x)$ punkts (53. zīm.).

Punkti P_1 un P_2 ir simetriski pret bisektrisi.



53. zīm.



54. zīm.

8) Ja līknes vienādojums ir simetrisks attiecībā uz x un y, tad tas nemainās, ja x vietā liekam y un y vietā x. Tādā gadījumā līkne ir simetriska pret bisektrisi.

Saskaņā ar (7), līknes $F(x, y) = 0$ punkts P_1 un līknes $F(y, x) = 0$ punkts P_2 ir novietoti simetriski pret bisektrisi.

Ja, apmainot mainīgos, vienādojums $F(x, y) = 0$ nav mainījis savu veidu, tad līknes $F(y, x) = 0$ punkts P_2 ir arī līknes $F(x, y) = 0$ punkts; tātad līkne $F(x, y) = 0$ ir simetriska pret bisektrisi. Līkne ar šādu īpašību ir dota, piemēram, ar vienādojumu

$$xy = a^2.$$

Šis vienādojums nemainās, ja x vietā liekam y un y vietā x. Līknes attēls parādīts 54. zīm.

9) Punktu, kurā visas līknes chordas dalās uz pusēm, sauc par līknes *centru*.

Ja līknes vienādojumu apmierina punkti

$$P_1 = a_1 \mid b_1;\ P_2 = a_2 \mid b_2; \dots\dots\dots\dots P_n = a_n \mid b_n$$

un arī punkti

$$P'_1 = -a_1 \mid -b_1;\ P'_2 = -a_2 \mid -b_2; \dots P'_n = -a_n \mid -b_n,$$

tad koordinatu sākums ir līknes centrs. No 55. zīmējuma redzams, ka tādā gadījumā katra chorda $P'_n\, P_n$ dalās uz pusēm koordinatu sākumā, kas tad ir līknes centrs.

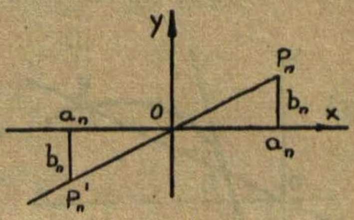
10) No līknes

$$F(x, y) = 0$$

dabūjam līkni

$$F(x, c_1 y) = 0,$$

deformējot līkni $F(x, y) = 0$ y ass virzienā ar deformacijas faktoru c_1.



55. zīm.

Līkni

$$F(c_2 x, y) = 0$$

dabūjam no līknes $F(x, y) = 0$, deformējot šo līkni x ass virzienā ar deformacijas faktoru c_2.

Līkni

$$F(c_2 x, c_1 y) = 0$$

dabūjam no līknes

$$F(x, y) = 0,$$

deformējot šo līkni x ass virzienā ar deformacijas faktoru c_2 un deformējot līkni

$$F(c_2 x, y) = 0$$

y ass virzienā ar deformacijas faktoru c_1.

Piemērs:

Ko varam izteikt par līkni, kuras vienādojums ir

$$y^2 = x^3?$$

1) Līkne ir trešās kārtas.

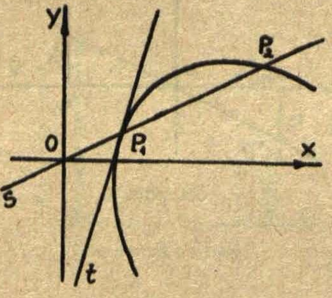
2) Līkne ir simetriska pret x asi, jo vienādojums nemainās, ja y vietā liekam $-y$.

3) Līkne iet caur koordinatu sākumu, jo vienādojums ir apmierināts ar $x = 0$ un $y = 0$.

4) y ir reāls tikai ar pozitiviem x, līkne atrodas pa labi no y ass.

5) No 2) un 3) varam secināt, ka līknei ir divi zari, kas iziet no koordinatu sākuma.

38. Līknes pieskare. Uz dotas līknes pieņemam punktus $P_1 = x_1 | y_1$ un $P_2 = x_2 | y_2$ (56. zīm.).



56. zīm.

Caur punktiem P_1 un P_2 vilktās taisnes vienādojums ir

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1). \qquad (1)$$

Ja punkts P_2 uz līknes tuvojas punktam P_1, tad taisne s griežas ap punktu P_1. Ja punkts P_2 atrodas pavisam tuvu punktam P_1, tad taisne s pieņem pilnīgi noteiktu robežstāvokli t. Šo sekantes s robežstāvokļa taisni t punktā P_1 sauc par līknes pieskari punktā P_1.

Ja punkts $P_2 \to P_1$, tad $x_2 \to x_1$ un $y_2 \to y_1$.

Ievērojot augšējo, redzams, kā pieskares vienādojumu līknes punktā P_1 dabūjam no vienādojuma (1).

Tātad:

$$y - y_1 = \lim_{\substack{x_2 \to x_1 \\ y_2 \to y_1}} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1). \qquad (2)$$

Šis vienādojums dod pieskares vienādojumu līknes punktā P_1.

Piemērs:

Dabūt pieskares vienādojumu līknes punktā $P_1 = x_1 \mid y_1$, ja līknes vienādojums ir

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0.$$

Lietojot formulu (2), iznāk, ka

$$\lim_{\substack{x_2 \to x_1 \\ y_2 \to y_1}} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0}{0}.$$

Šo nenoteiktību varam novērst ar sekojošu paņēmienu. Tā kā punkti P_1 un P_2 atrodas uz dotās līknes, tad

$$x_1^2 + y_1^2 - r^2 = 0$$

un arī

$$x_2^2 + y_2^2 - r^2 = 0.$$

No augšējiem vienādojumiem dabūjam:

$$(x_2^2 - x_1^2) + (y_2^2 - y_1^2) = 0$$

vai arī

$$(x_2 + x_1)(x_2 - x_1) + (y_2 + y_1)(y_2 - y_1) = 0.$$

No augšējā vienādojuma dabūjam:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1}. \tag{3}$$

Ievērojot (3), vienādojumu (2) rakstām:

$$y - y_1 = \lim_{\substack{x_2 \to x_1 \\ y_2 \to y_1}} \left(-\frac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1}\right)(x - x_1). \tag{4}$$

No (4) dabūjam:

$$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1). \tag{5}$$

Šis vienādojums ir pieskares vienādojums dotās līknes punktā $P_1 = x_1 \mid y_1$.

Šo vienādojumu varam pārveidot šādi:

$$yy_1 - y_1^2 = -xx_1 + x_1^2$$

vai arī

$$xx_1 + yy_1 - (x_1^2 + y_1^2) = 0.$$

Tā kā

$$x_1^2 + y_1^2 = r^2,$$

tad augšējo vienādojumu rakstām:

$$xx_1 + yy_1 - r^2 = 0. \tag{6}$$

Ņemot vērā, ka dotā līkne ir riņķis ar centru koordinatu sākumā, vienādojums (6) dod šā riņķa pieskares vienādojumu.

SEPTĪTĀ NODAĻA

OTRĀS KĀRTAS LĪKŅU VIENĀDOJUMA DISKUSIJA

39. Teoremas. Otrās pakāpes vienādojuma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

saknes ir:

$$x_1 = -\frac{b}{2a} + \sqrt{-\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}}$$

un

$$x_2 = -\frac{b}{2a} - \sqrt{-\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}}.$$

No augšējā secinām:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

un

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Šīs izteiksmes rāda:

1) ja vienādojumā nav absolutā locekļa c, t. i., ja $c = 0$, tad viena sakne ir 0;

2) ja vienādojumā nav locekļa ar x, t. i., ja $b = 0$, tad sakņu suma ir 0.

Pārveidojam vienādojumu

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

liekot

$$x = \frac{1}{z}.$$

Tad dabūjam:

$$\frac{a}{z^2} + \frac{b}{z} + c = 0.$$

Reizinot šo vienādojumu ar z^2, dabūjam:

$$a + bz + cz^2 = 0.$$

Ja šai vienādojumā $a = 0$, tad, saskaņā ar augšējo,

$$z_1 = 0, \text{ un tādēļ } x_1 = \infty.$$

Ja arī $b = 0$, tad arī $z_2 = 0$, un tādēļ arī $x_2 = \infty$.

No augšējā redzam: ja otrās pakāpes vienādojumā

$$ax^2 + bx + c = 0$$

liekam $a = 0$, tad viena sakne $x_1 = \infty$.

Ja liekam:

$$a = 0 \text{ un } b = 0,$$

tad

$$x_1 = \infty \text{ un arī } x_2 = \infty.$$

40. Otrās pakāpes vienādojums. Izteiksmē

$$a_1x + a_2y + a_3z \tag{a}$$

saucam pēc kārtas: x par pirmo, y par otro un z par trešo mainīgo. Visi koeficienti te apzīmēti ar burtu a. Koeficientu rādītāji 1, 2, 3 norāda, pie kāda mainīgā koeficienti atrodas. Tā, piemēram, koeficients a_2 atrodas pie otrā mainīgā, t. i. pie y.

Augšējās izteiksmes kvadrats ir:

$$a_1a_1\, x^2 + a_2a_2\, y^2 + a_3a_3\, z^2 + 2a_1a_2\, xy + 2a_1a_3\, xz + 2a_2a_3\, yz. \tag{b}$$

Šinī izteiksmē apzīmējam:

$$\left.\begin{array}{l} a_1a_1 \text{ ar } a_{11};\ a_2a_2 \text{ ar } a_{22};\ a_3a_3 \text{ ar } a_{33} \\ \text{un } a_1a_2 \text{ ar } a_{12};\ a_1a_3 \text{ ar } a_{13};\ a_2a_3 \text{ ar } a_{23} \end{array}\right\}. \tag{c}$$

Augšējie apzīmējumi rāda, ka:

$$a_{12} = a_{21};\ a_{13} = a_{31};\ a_{23} = a_{32}.$$

Ievērojot izteiksmes (c), izteiksmi (b) varam rakstīt:

$$a_{11}\, x^2 + a_{22}\, y^2 + a_{33}\, z^2 + 2a_{12}\, xy + 2a_{13}\, xz + 2a_{23}\, yz. \tag{d}$$

Liekot šai izteiksmē $z = 1$, dabūjam otrās pakāpes pilnīgu nehomogenu izteiksmi ar mainīgiem x un y:

$$a_{11}\, x^2 + a_{22}\, y^2 + 2a_{12}\, xy + 2a_{13}\, x + 2a_{23}\, y + a_{33}. \tag{e}$$

Ievērojot (d), redzam, ka

koeficients a_{11} atrodas pie x^2, a_{22} pie y^2, un a_{33} atrastos pie z^2, bet tā kā likām $z = 1$, tad a_{33} ir augšējās izteiksmes absolutais loceklis;

koeficients a_{12} atrodas pie xy; koeficients a_{13} atrodas izteiksmē (d) pie xz, bet tā kā $z = 1$, tad izteiksmē (e) koeficients a_{13} atrodas pie x. Tāpat redzams, ka koeficients a_{23} atrodas izteiksmē (e) pie y.

Tālāk te jāievēro, ka pie xy, x, y atrodas koeficienti

$$2a_{12},\ 2a_{13},\ 2a_{23}.$$

Pielīdzinot izteiksmi (e) nullei, dabūjam pilnīgu otrās pakāpes vienādojumu ar mainīgiem x un y:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \qquad (1)$$

41. Otrās kārtas līknes krustošanās punkti ar taisni. Otrās pakāpes vienādojums ar mainīgiem x un y.

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \qquad (a)$$

kā redzējām, izteic otrās kārtas līkni.

Pārveidojam koordinatu sistemu, liekot:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + x' \\ y &= y_0 + y' \end{aligned}\right\}. \qquad (b)$$

Tad vienādojums (a) dabū veidu:

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + 2x'(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}) + 2y'(a_{21}x_0 +$$
$$+ a_{22}y_0 + a_{23}) + a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{13}x_0 + 2a_{23}y_0 +$$
$$+ a_{33} = 0. \qquad (a')$$

Apzīmējam:

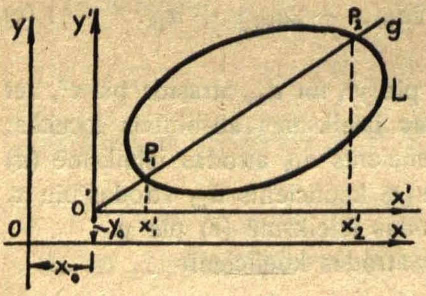
$$a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{13}x_0 + 2a_{23}y_0 + a_{33} = S. \qquad (c)$$

Šo izteiksmi pārveidojot, dabūjam (ievērojot, ka $a_{12} = a_{21}$ utt.):

$$x_0(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}) + y_0(a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}) +$$
$$+ (a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}) = S. \qquad (c')$$

Ievērojot (c) un (c'), vienādojumu (a') varam rakstīt:

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + 2x'(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}) +$$
$$+ 2y'(a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}) + S = 0. \qquad (L)$$



57. zīm.

Ar vienādojumu (a) ir dota otrās kārtas līkne koordinatu sistemā (O, x, y) (57. zīm.). Ar vienādojumu (a') vai (L) ir dota tā pati līkne koordinatu sistemā (O', x', y'), kas paralela sistemai (O, x, y).

No koordinatu sistemas (O', x', y') sākuma punkta O' velkam taisni g:

$$y' = mx'. \qquad (d)$$

Liekot šo y' vērtību vienādojumā (L), dabūjam vienādojumu:

$$x'^2 (a_{11} + 2a_{12} m + a_{22} m^2) + 2x' [(a_{11} x_0 + a_{12} y_0 + a_{13}) + \\ + m (a_{21} x_0 + a_{22} y_0 + a_{23})] + S = 0. \qquad (e)$$

Šis vienādojums dod taisnes g un līknes L krustošanās punktu P_1 un P_2 abscisas.

42. Līknes pieskare. Līknes sadalīšanās taisnēs. 1) Līknes pieskare.

Koordinatu sistemas (O', x', y') sākuma punktu $O' = x_0 \mid y_0$ varam novietot pēc patikas. Pieņemam, ka tas atrodas uz līknes L. Tad punkta O' koordinatām x_0 un y_0 ir jāapmierina līknes vienādojums

$$a_{11} x^2 + 2a_{12} xy + a_{22} y^2 + 2a_{13} x + 2a_{23} y + a_{33} = 0.$$

Ievietojot šai vienādojumā x_0 un y_0, dabūjam vienādojuma kreisajā pusē izteiksmi, ko apzīmējām ar S, sk. [41, c].

Tātad, ja O' atrodas uz līknes L, tad $S = 0$, ko ievērojot, vienādojums [41, e], kas dod krustošanās punktu P_1 un P_2 abscisas, dabū veidu:

$$x'^2 (a_{11} + 2a_{12} m + a_{22} m^2) + 2x [(a_{11} x_0 + a_{12} y_0 + a_{13}) + \\ + m (a_{21} x_0 + a_{22} y_0 + a_{23})] = 0.$$

Šis vienādojums rāda, ka tā viena sakne (sk. [39])

$$x'_1 = 0.$$

Ja augšējā vienādojumā arī

$$a_{11} x_0 + a_{12} y_0 + a_{13} + m (a_{21} x_0 + a_{22} y_0 + a_{23}) = 0, \qquad (1)$$

tad, ievērojot [39], arī

$$x'_1 + x'_2 = 0,$$

bet tā kā ar $S = 0$ arī $x'_1 = 0$, tad iznāk, ka

$$x'_2 = 0.$$

Tātad ar $S = 0$, un ja ievērota arī izteiksme (1), dabūjam:

$$x'_1 = 0 \text{ un } x'_2 = 0. \qquad (2)$$

No vienādojuma

$$y' = mx'$$

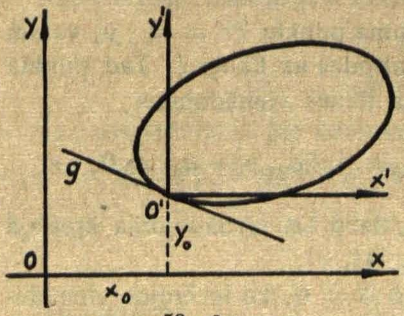
redzams, ka šādā gadījumā arī

$$y_1' = 0 \text{ un } y_2' = 0. \tag{3}$$

Izteiksmes (2) un (3) rāda, ka taisnes g krustošanās punkti ar līkni L, punkti P_1 un P_2, sakrīt ar koordinatu sākumu O' (sk. 58. zīm.): taisne g tātad ir līknes L pieskare punktā O'.

No vienādojuma (1) dabūjam pieskares virziena koeficientu

$$m = -\frac{a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}}{a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}}. \tag{A}$$



58. zīm.

Šos a_{11}, a_{12} . . . . dabūjam no līknes vienādojuma; x_0 un y_0 ir uz līknes esošā pieskares punkta koordinatas.

Piemērs:

Kāds virziens ir pieskarei līknes punktā $P = x_0 \mid y_0$, ja līknes vienādojums ir

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0?$$

No līknes vienādojuma dabūjam

$$a_{11} = 1;\ a_{22} = 1;\ a_{33} = -r^2;\ a_{12} = a_{21} = 0;\ a_{13} = a_{31} = 0;$$
$$a_{23} = a_{32} = 0.$$

Liekot augšējās vērtības izteiksmē (A), dabūjam:

$$m = -\frac{1 \cdot x_0 + 0 \cdot y_0 + 0}{0 \cdot x_0 + 1 \cdot y_0 + 0} = -\frac{x_0}{y_0}.$$

Pieskares vienādojumu koordinatu sistemā (O', x', y') dabūjam, ievietojot taisnes g vienādojumā [41, d] m vērtību no A; tad

$$y' = -\frac{a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}}{a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}} \cdot x'.$$

Ievietojot augšējā vienādojumā

$$y' = y - y_0,$$
$$x' = x - x_0,$$

dabūjam pieskares vienādojumu koordinatu sistemā (O, x, y):

$$y - y_0 = -\frac{a_{11} x_0 + a_{12} y_0 + a_{13}}{a_{21} x_0 + a_{22} y_0 + a_{23}} (x - x_0).$$

Reizinot ar saucēju un sakārtojot vienādojumu, dabūjam:

$$x (a_{11} x_0 + a_{12} y_0 + a_{13}) + y (a_{21} x_0 + a_{22} y_0 + a_{23}) - [x_0 (a_{11} x_0 + \\ + a_{12} y_0 + a_{13}) + y_0 (a_{21} x_0 + a_{22} y_0 + a_{23})] = 0. \quad (4)$$

Salīdzinot augšējās izteiksmes stūrainās iekavās esošo izteiksmi ar [41, c'], redzam, ka

$$x_0 \cdot (a_{11} x_0 + a_{12} y_0 + a_{13}) + y_0 (a_{21} x_0 + a_{22} y_0 + a_{23}) = \\ = S - (a_{31} x_0 + a_{32} y_0 + a_{33}).$$

Ievērojot, ka še $S = 0$, vienādojumu (4) varam rakstīt:

$$x (a_{11} x_0 + a_{12} y_0 + a_{13}) + y (a_{21} x_0 + a_{22} y_0 + a_{23}) + (a_{31} x_0 + \\ + a_{32} y_0 + a_{33}) = 0. \quad (B)$$

Šis vienādojums ir pieskares vienādojums līknes punktā $x_0 \mid y_0$.

Piemērs:

Kāds ir pieskares vienādojums elipses punktā $P_0 = x_0 \mid y_0$?

Elipses vienādojums ir

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

No šā vienādojuma dabūjam

$$a_{11} = \frac{1}{a^2}; a_{12} = a_{21} = 0; a_{22} = \frac{1}{b^2}; a_{33} = -1; a_{13} = a_{31} = 0; a_{23} = a_{32} = 0.$$

Ieliekot koeficientu vērtības pieskares vienādojumā (B), dabūjam:

$$x \left(\frac{1}{a^2} \cdot x_0 + 0 \cdot y_0 + 0\right) + y \left(0 \cdot x_0 + \frac{1}{b^2} \cdot y_0 + 0\right) + (0 \cdot x_0 + 0 \cdot y_0 - 1) = 0.$$

Tātad

$$\frac{x \cdot x_0}{a^2} + \frac{y \cdot y_0}{b^2} - 1 = 0$$

ir pieskares vienādojums elipses punktā $P_0 = x_0 \mid y_0$.

2) Līknes sadalīšanās taisnēs.

Pieņemam kā agrāk, ka punkts $O' = x_0 \mid y_0$ atrodas uz līknes, tad $S = 0$.

Pieņemam arī, ka vienādojumā [41, e] līknes koeficientiem ir tādas vērtības kā

$$\left.\begin{aligned} a_{11} x_0 + a_{12} y_0 + a_{13} = 0 \\ a_{21} x_0 + a_{22} y_0 + a_{23} = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{5}$$

Tā kā arī ar šiem noteikumiem vienādojums (1) ir apmierināts, tad arī tagad taisne g krusto līkni L divos, punktā O' kopā sakrītošos punktos. Kā redzams no izteiksmes (A), ievērojot (4), tagad virziena koeficienta m vērtība ir nenoteikta.

Tas ģeometriski nozīmē, ka katra taisne, kas iet caur punktu O', šinī gadījumā krusto līkni divos, punktā O' sakrītošos punktos.

Ievērojot pieņēmumu $S = 0$ un izteiksmi (5), līknes vienādojums koordinatu sistemā (O', x', y') dabū veidu:

$$a_{11} x'^2 + 2 a_{12} x' y' + a_{22} y'^2 = 0.$$

Šis vienādojums ir otrās pakāpes un homogens un tas, saskaņā ar [37, 4], izteic divas taisnes caur punktu O'. Tātad līkne ir sadalījusies divās taisnēs.

Liekot izteiksmē [41, c'], kas izteic S, izteiksmes (5) un ievērojot, ka šinī gadījumā $S = 0$, dabūjam, ka

$$a_{31} x_0 + a_{32} y_0 + a_{33} = 0.$$

Tātad, ja $S = 0$ un ja ievērotas izteiksmes (5), tad pastāv kopēji vienādojumi:

$$\left.\begin{aligned} a_{11} x_0 + a_{12} y_0 + a_{13} = 0 \\ a_{21} x_0 + a_{22} y_0 + a_{23} = 0 \\ a_{31} x_0 + a_{32} y_0 + a_{33} = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{6}$$

Šie trīs attiecībā uz x_0 un y_0 nehomogenie vienādojumi var kopīgi pastāvēt tikai tad, ja determinante

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0. \tag{C}$$

Tātad pazīme, ka līkne, kas dota ar vienādojumu (a), sadalās divās taisnēs, ir:

$$A = 0.$$

Kā redzams, determinantē A ietilpst visi līknes vienādojuma (a) koeficienti a_{11}, a_{12}, ... (ievērojot, ka $a_{12} = a_{21}$, $a_{13} = a_{31}$ utt.).

Taisnes, kurās sadalās līkne, krustojas punktā, kura koordinatas $x_0 \mid y_0$ dabūjam, atrisinot attiecībā uz x_0 un y_0 divus no vienādojumiem (6).

43. Līknes centrs. Par līknes centru sauc punktu, kurā visas līknes chordas dalās uz pusēm.

Pieņemam, ka vienādojumā [41, e] koeficients pie $2x'$ ir nulle:

$$a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} + m\,(a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}) = 0. \tag{1}$$

Tad, saskaņā ar [39],

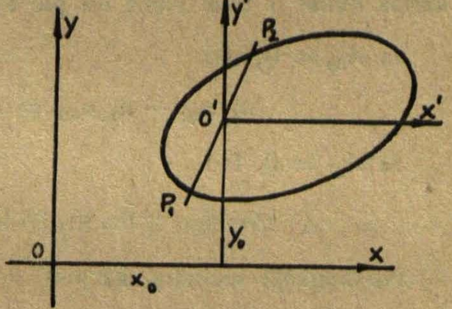
$$x_1' + x_2' = 0 \tag{2}$$

un, ievērojot taisnes g vienādojumu [41, d], arī

$$y_1' + y_2' = 0. \tag{3}$$

Bet tad arī

$$\frac{x_1' + x_2'}{2} = 0 \text{ un } \frac{y_1' + y_2'}{2} = 0. \tag{4}$$



59. zīm.

Izteiksmes (4) rāda, ka punkts $O' = x_0 \mid y_0$ dala chordu $P_1\,P_2$ uz pusēm. Šīs chordas virziena koeficientu m dabūjam no izteiksmes (1), tātad:

$$m = -\frac{a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}}{a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}}.$$

Pieņemam, ka O' noteikts tā, ka

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0 \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0 \end{aligned}\right\}; \tag{5}$$

tad m ir nenoteikts:

$$m = \frac{0}{0}.$$

Tas nozīmē, ka punkts $O' = x_0 \mid y_0$ noteikts tā, ka katra chorda, kas iet caur šo punktu, tanī dalās uz pusēm. Punkts O' tātad ir līknes centrs.

Centra koordinatas dabūjam, atrisinot vienādojumus (5) attiecībā uz x_0 un y_0:

$$x_0 : y_0 : 1 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} : -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Kā redzams, augšējās determinantes ir determinantes A apakšdeterminantes:

$$A_{31};\ A_{32};\ A_{33}.$$

Tātad līknes centra koordinatas ir

$$x_0 = \frac{A_{31}}{A_{33}};\ y_0 = \frac{A_{32}}{A_{33}}. \qquad (D)$$

Ja $A_{33} \neq 0$, tad centra koordinatas ir galīgi lielumi.

Ja $A_{33} = 0$ un A_{31} un $A_{32} \neq 0$, tad centrs atrodas bezgalīgi tālu.

Tā kā centra koordinatas dabūjam no pirmās pakāpes vienādojumiem (5), tad x_0 un y_0 ir vienvērtīgi un reali; tas nozīmē, ka otrās kārtas līknei ir tikai viens un pie tam reals centrs.

Ja $A_{33} = 0$, tad

$$a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12} = 0 \text{ vai arī } \frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}}.$$

Ja $A_{31} = 0$, tad

$$a_{12} a_{23} - a_{22} a_{13} = 0 \text{ vai arī } \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{13}}{a_{23}}.$$

No augšējā secinām, ka

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{13}}{a_{23}} \quad \text{vai arī: } a_{11} a_{23} - a_{21} a_{13} = 0.$$

Augšējā izteiksme rāda: ja $A_{33} = 0$ un $A_{31} = 0$, tad arī $A_{32} = 0$.

Gadījumā, ja $A_{33} = 0$; $A_{31} = 0$ un $A_{32} = 0$, dabūjam:

$$x_0 = \frac{0}{0};\ y_0 = \frac{0}{0}.$$

Kā redzams no augšējā, šādā gadījumā

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{13}}{a_{23}}.$$

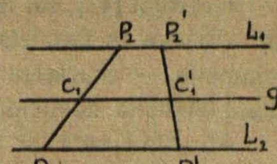
Šī attiecība rāda, ka vienādojumos (5), kas noteic centra koordinatas x_0 un y_0, koeficienti ir proporcionali. Tas nozīmē, ka centra koordinatas x_0, y_0 noteic tikai viens vienādojums (5), t. i.

$$a_{11} x_0 + a_{12} y_0 + a_{13} = 0.$$

Šis vienādojums dod ne pašus x_0 un y_0, bet gan sakaru starp tiem. Uzskatot x_0 un y_0 par mainīgiem, augšējais vienādojums izteic taisni, un katrs šīs taisnes punkts ir līknes centrs.

Tā kā $A_{31} = 0$; $A_{32} = 0$; $A_{33} = 0$, tad arī $A = 0$, kas norāda, ka šādā gadījumā līkne sadalās divās taisnēs. Dotajā gadījumā šīs taisnes ir paralelas, un vidus līnija starp šīm taisnēm ir augšā minētā taisne — līknes centru vieta (60. zīm.).

Še taisnes L_1 un L_2 ir līknes L sastāvdaļas un g ir līknes L centru vieta. Katra taisne, kas iet caur C_1 vai C_1' utt., dalās attiecīgos punktos C_1, C_1' . . . . uz pusēm.



60. zīm.

Piemērs:

Dots līknes vienādojums

$$x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 6y + 3 = 0.$$

Dabūt līknes centra koordinatas.

Te $a_{11} = 1$; $2a_{12} = -2$ un $a_{12} = a_{21} = -1$; $a_{22} = 2$; $2a_{13} = -4$, tātad $a_{13} = a_{31} = -2$; $2a_{23} = -6$, tātad $a_{23} = a_{32} = -3$; $a_{33} = 3$.

Centra koordinatas x_0 un y_0 dabūjam, izlietojot dotās formulas

$$A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 5;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 7.$$

$$x_0 = \frac{A_{31}}{A_{33}} = \frac{7}{1} = 7; \; y_0 = \frac{A_{32}}{A_{33}} = \frac{5}{1} = 5.$$

44. Līknes diametri. Ja dots punkts $O' = x_0 \mid y_0$, tad, kā redzējām [43], no vienādojuma

$$a_{11} x_0 + a_{12} y_0 + a_{13} + m (a_{21} x_0 + a_{22} y_0 + a_{23}) = 0$$

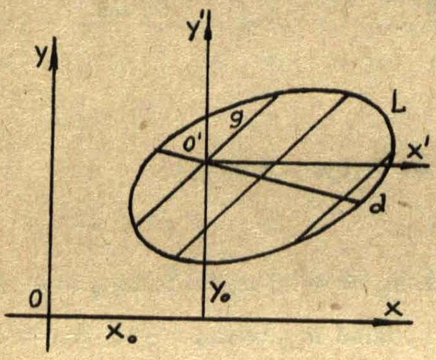
dabūjam virzienu m tai chordai, kas iet caur O' un šajā punktā dalās uz pusēm.

Ja uzskatām virzienu m par dotu, tad augšējais vienādojums rāda, ka visi punkti P $x_0 \mid y_0$, kas šo vienādojumu apmierina, veido taisni:

$$a_{11} x + a_{12} y + a_{13} + m (a_{21} x + a_{22} y + a_{23}) = 0. \qquad (E)$$

Ievērojot [43], šai taisnei ir tāda īpašība, ka tā dala uz pusēm visas ar virzienu m paralelās līknes chordas. Šo taisni sauc par līknes (L) diametru — caurmēru. Šis diametrs piekārtots paralelām chordām, kuru virziena koeficienti ir m.

61. zīmējumā ar g apzīmēta viena no chordām, kuru virziena koeficients ir m, un ar d taisne, kuras vienādojums ir (E). Uz šīs taisnes atrodas paralelo chordu g vidus punkti.



61. zīm.

Vienādojums (E) tātad ir līknes diametra vienādojums.

Ievērojot vienādojumus [43, 5], kas noteic līknes centru, redzam, ka centra koordinatas x_0, y_0 apmierina diametra vienādojumu (E). Tas rāda, ka diametrs iet caur līknes centru. Šajā punktā diametrs dalās uz pusēm.

Diametra un līknes krustošanās punktu apzīmējam ar $P_0 = x_0 \mid y_0$; šā punkta koordinatām jāapmierina diametra vienādojums, tātad jābūt:

$$a_{11} x_0 + a_{12} y_0 + a_{13} + m (a_{21} x_0 + a_{22} y_0 + a_{23}) = 0.$$

No šā vienādojuma dabūjam virzienu koeficientu m tām chordām, ko diametrs dala uz pusēm, tātad

$$m = -\frac{a_{11} x_0 + a_{12} y_0 + a_{13}}{a_{21} x_0 + a_{22} y_0 + a_{23}}.$$

Salīdzinot šo izteiksmi ar pieskares virziena koeficientu līknes punktā $x_0 \mid y_0$ [42, A], redzam, ka abas izteiksmes ir vienlīdzīgas.

No augšējā secinām, ka pieskare diametra krustošanās punktā ar līkni ir paralela tām paralelām chordām, ko diametrs dala uz pusēm.

Apzīmējam paralelo chordu virziena koeficientu ar m_1.

Pārveidojot attiecīgo diametra vienādojumu

$$a_{11} x + a_{12} y + a_{13} + m_1 (a_{21} x + a_{22} y + a_{23}) = 0,$$

dabūjam:

$$(a_{11} + m_1 a_{21}) x + (a_{12} + m_1 a_{22}) y + (a_{13} + m_1 a_{23}) = 0.$$

No šā vienādojuma dabūjam diametra virziena koeficientu m_2:

$$m_2 = -\frac{a_{11} + m_1 a_{21}}{a_{12} + m_1 a_{22}}. \tag{1}$$

Šo izteiksmi pārveidojot, dabūjam:

$$a_{11} + (m_1 + m_2) a_{12} + a_{22} m_1 m_2 = 0. \tag{F}$$

Vienādojums (F) saista paralelo chordu virziena koeficientu m_1 ar tam piekārtotā diametra virziena koeficientu m_2.

Starp paralelām chordām atrodas arī viens diametrs ar šo chordu virziena koeficientu m_1.

Diametrus, kuru virziena koeficienti m_1 un m_2 ir saistīti ar izteiksmi (F), sauc par *piekārtotiem diametriem*. Tā kā virziena koeficienti m_1 un m_2 vienādojumā (F) ir pilnīgi simetriski, tad no tā nākam pie šāda secinājuma:

Piekārtoti diametri dala uz pusēm viens otram paralelas chordas.

Piemērs:

Dots līknes vienādojums

$$x^2 - 4xy + 4y^2 + 6x - 8y + 10 = 0$$

un paralelu chordu virziena koeficients $m_1 = 2$.

Dabūt chordām (ar $m_1 = 2$) piekārtotā diametra virziena koeficientu m_2 un šā diametra vienādojumu.

No dotā līknes vienādojuma dabūjam:

$$a_{11} = 1; \; a_{22} = 4; \; a_{33} = 10.$$

$$2a_{12} = -4, \text{ tātad } a_{12} = a_{21} = -2.$$

$$2a_{13} = 6, \text{ tātad } a_{13} = a_{31} = 3.$$

$$2a_{23} = -8, \text{ tātad } a_{23} = a_{32} = -4.$$

Ieliekot attiecīgās vērtības izteiksmē (F), dabūjam:

$$1 + (2 + m_2)(-2) + 4 \cdot 2 \cdot m_2 = 0.$$

Tātad chordām (ar m_1) piekārtotā diametra virziena koeficients ir

$$m_2 = \frac{1}{2}.$$

Diametru, kas piekārtots chordām, kuru virziena koeficients $m_1 = 2$, dabūjam, ieliekot vienādojumā (E) m vietā $m_1 = 2$. Tātad:

$$1 \cdot x + (-2)y + 3 + 2[-2x + 4y + (-4)] = 0.$$

Pārveidojot dabūjam diametra vienādojumu:

$$3x - 6y + 5 = 0.$$

45. Asis. Vispārīgā gadījumā divi piekārtoti diametri veido līknes centrā slīpu leņķi, atsevišķā — tie var būt stateniski viens pret otru. Šādus stateniskus piekārtotus diametrus sauc par līknes *asīm*.

Tā kā asis ir piekārtoti diametri, tad ass virziena koeficientiem jāapmierina vienādojums:

$$a_{11} + (m_1 + m_2)\,a_{12} + a_{22} \,.\, m_1 \,.\, m_2 = 0. \qquad (F)$$

Tā kā asis ir stateniskas viena pret otru, tad asu virziena koeficientiem jāapmierina arī statenības noteikums:

$$m_1 \cdot m_2 = -1.$$

Ieliekot $m_2 = -\dfrac{1}{m_1}$ vienādojumā (F), dabūjam:

$$a_{11} + \left(m_1 - \frac{1}{m_1}\right) a_{12} - a_{22} = 0.$$

Pārveidojot dabūjam:

$$m_1^2 + \frac{a_{11} - a_{22}}{a_{12}}\, m_1 - 1 = 0. \qquad (G)$$

Šis vienādojums noteic līknes asu virzienus.

Tā kā vienādojums ir otrās pakāpes, tad dabūjam divus virzienus m_1' un m_1''. Šie virzieni ir reali, jo vienādojuma absolutais loceklis ir negativs, un tā kā tas ir -1, tad, saskaņā ar [39], jābūt:

$$m_1' \cdot m_1'' = -1,$$

kas rāda, ka šie virzieni ir stateniski viens pret otru.

Tātad: katrai otrās kārtas līknei ir divas, savstarpēji stateniskas asis.

Vienādojumā

$$a_{11}+\left(m_1-\frac{1}{m_1}\right)a_{12}-a_{22}=0,$$

liekot $m_1 = m$, dabūjam

$$a_{11}+\left(m-\frac{1}{m}\right)a_{12}-a_{22}=0.$$

Šo vienādojumu pārveidojot, dabūjam

$$\frac{m}{1-m^2}=\frac{a_{12}}{a_{11}-a_{22}}.$$

Ja otrās kārtas līknes ass veido ar x asi leņķi α, tad $\operatorname{tg}\alpha = m$. Kā zināms,

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{2m}{1-m^2}=\frac{2a_{12}}{a_{11}-a_{22}}.$$

Tātad

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2a_{12}}{a_{11}-a_{22}}.$$

Šī izteiksme dod divus leņķus 2α un $2\alpha+\pi$; tātad līknes asis veido ar x asi leņķus

$$\alpha \text{ un } \alpha+\frac{\pi}{2},$$

kurus ar augšējās formulas palīdzību varam aprēķināt.

46. Līknes asimptotas. Līknes bezgalīgi tālā punkta pieskari sauc par līknes *asimptotu.*

Ja līknei, kas dota ar vienādojumu [41, a'], ir bezgalīgi tāls punkts, tad taisnei g no O' uz šo bezgalīgi tālo punktu jādabū noteikts virziena koeficients m.

Taisne g tad krusto līkni bezgalīgi tālā punktā. Šādā gadījumā, ievērojot [39, 2], vienādojumā [41, e] koeficientam pie x'^2 jābūt 0.

Tātad

$$a_{11}+2a_{12}m+a_{22}m^2=0.$$

Šis vienādojums dod no O' uz ∞ tālo punktu vilktās taisnes g virziena koeficientu. Tā kā vienādojums attiecībā uz m ir otrās pakāpes vienādojums, tad tas dod divas m vērtības. Tātad līknei ir divi virzieni uz bezgalīgi tāliem punktiem.

Augšējo vienādojumu atrisinot, dabūjam:

$$m = -\frac{a_{12}}{a_{22}} \pm \sqrt{\frac{a_{12}^2}{a_{22}^2} - \frac{a_{11}}{a_{22}}} = -\frac{a_{12}}{a_{22}} \pm \frac{1}{a_{22}} \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}\, a_{22}}.$$

Tā kā $a_{12}^2 - a_{11}\, a_{22} = A_{33}$, tad rakstām:

$$m = -\frac{a_{12}}{a_{22}} \pm \frac{1}{a_{22}} \sqrt{-A_{33}}. \qquad (H)$$

Atkarībā no A_{33} vērtības, te dabūjam šādus gadījumus:

1) $A_{33} > 0$. Tad abas m vērtības ir imaginaras. Virzieni uz bezgalīgi tāliem punktiem nav reali. Līknei nav realu ∞ tālu punktu.

2) $A_{33} = 0$. Tad abas m vērtības ir vienlīdzīgas un realas. Virzieni uz līknes bezgalīgi tāliem punktiem sakrīt vienā realā virzienā. Šādai otras kārtas līknei ir viens bezgalīgi tāls punkts.

3) $A_{33} < 0$. Šādā gadījumā ir divi reali nesakrītoši virzieni uz bezgalīgi tāliem punktiem. Līknei ir divi bezgalīgi tāli punkti.

Gadījumā, ja:

$A_{33} > 0$, līkni sauc par elipsi,

$A_{33} = 0$ „ „ „ parabolu,

$A_{33} < 0$ „ „ „ hiperbolu.

Kā redzējām, ja taisne g, kas vilkta no O, krusto līkni bezgalīgi tālā punktā, tad jābūt ievērotam noteikumam

$$a_{11} + 2a_{12}\, m + a_{22}\, m^2 = 0.$$

Bet ja šī taisne ir arī līknes pieskare bezgalīgi tālā punktā (asimptota), tad taisne g krusto līkni šai punktā divas reizes; tādēļ vienādojuma [41, e] abām saknēm jābūt ∞.

Saskaņā ar [39], tas notiek tad, ja vienādojumā [41, e] koeficients pie x'^2 un arī koeficients pie x' abi ir 0.

Tātad, lai taisne g, kas vilkta no O', būtu līknes asimptota, jābūt ievērotiem noteikumiem:

$$a_{11} + 2a_{12}\, m + a_{22}\, m^2 = 0 \qquad (\alpha)$$

un $a_{11}\, x_0 + a_{12}\, y_0 + a_{13} + m\,(a_{21}\, x_0 + a_{22}\, y_0 + a_{23}) = 0. \qquad (\beta)$

No vienādojuma (α) dabūjam asimptotas virziena koeficientu m.

Tā kā šis vienādojums ir otrās pakāpes vienādojums, tad, kā rāda izteiksme (H), m dabū divas vērtības. Ievietojot izteiksmē (β) dabūtās vērtības, dabūjam izteiksmi — noteikumu, kas jāpilda punkta O' koordinatām x_0, y_0, lai no punkta O' ar virzienu m vilktā taisne g būtu līknes asimptota. Šo noteikumu (β) pilda bezgalīgi daudzi vērtību pāri x_0, y_0; tas nozīmē, ka punktam O' jāatrodas uz taisnes

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13} + m(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}) = 0.$$

Še m vērtība dabūta no izteiksmes (α).

Šī taisne tad ir asimptota, jo, ja O' atrodas uz šīs taisnes, tad tā ir taisne g, kas atbilst noteikumiem (α) un (β). Tātad asimptotu vienādojums ir:

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13} + m(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}) = 0. \qquad (J)$$

Šai vienādojumā jāieliek m vērtības, ko dabūjam, atrisinot vienādojumu

$$a_{11} + 2a_{12}m + a_{22}m^2 = 0. \qquad (K)$$

Salīdzinot asimptotas vienādojumu (J) ar diametra vienādojumu [44 E], redzam, ka tie ir vienlīdzīgi; tas nozīmē, ka asimptota ir arī līknes diametrs.

Piemērs:

Dabūt līknes (hiperbolas) —

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

asimptotu vienādojumu.

Te: $$a_{11} = \frac{1}{a^2};\ a_{12} = 0;\ a_{22} = -\frac{1}{b^2};\ a_{33} = -1.$$

$$2a_{12} = 0,\ \text{tātad}\ a_{12} = a_{21} = 0;$$
$$2a_{13} = 0,\ \text{tātad}\ a_{13} = a_{31} = 0;$$
$$2a_{23} = 0,\ \text{tātad}\ a_{23} = a_{32} = 0.$$

Ieliekot attiecīgās vērtības vienādojumā (K), dabūjam:

$$\frac{1}{a^2} + 2 \cdot 0 \cdot m + \left(-\frac{1}{b^2}\right) m^2 = 0$$

vai

$$m = \pm \frac{b}{a}.$$

Šo m vērtību un attiecīgo koeficientu vērtības ieliekot vienādojumā (*I*), dabūjam

$$\frac{1}{a^2}x+0\cdot y+0+\left(\pm\frac{b}{a}\right)\left[0\cdot x+\left(-\frac{1}{b^2}\right)y+0\right]=0;$$

tātad

$$y=\pm\frac{b}{a}x$$

ir dotās līknes asimptotu vienādojums.

47. Pols un polare. Otrās kārtas līknes pieskares vienādojums ir

$$(a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13})\,x+(a_{21}x_0+a_{22}y_0+a_{23})\,y+\\+(a_{31}x_0+a_{32}y_0+a_{33})=0. \tag{1}$$

Te pieskaršanās punkts $P_0=x_0\,|\,y_0$ ir dots.

Pieņemsim, ka pieskaršanās punkts nav zināms un apzīmēsim to ar $P=x\,|\,y$. Pieskares tekošās koordinatas apzīmējot ar $\xi\,|\,\eta$, dabūjam pieskares vienādojumu šādā veidā:

$$(a_{11}x+a_{12}y+a_{13})\,\xi+(a_{21}x+a_{22}y+a_{23})\,\eta+\\+(a_{31}x+a_{32}y+a_{33})=0. \tag{2}$$

Pieņemam, ka šī pieskare iet caur punktu $P_0=x_0\,|\,y_0$; tad šā punkta koordinatām jāapmierina vienādojums (2), tātad jābūt:

$$(a_{11}x+a_{12}y+a_{13})\,x_0+(a_{21}x+a_{22}y+a_{23})\,y_0+\\+(a_{31}x+a_{32}y+a_{33})=0. \tag{3}$$

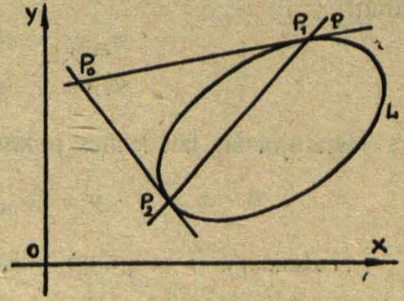
Pieskaršanās punkts $P=x\,|\,y$ atrodas uz līknes

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0. \tag{4}$$

Atrisinot kopīgi vienādojumus (3) un (4), dabūsim meklētās pieskaršanās punkta koordinatas x un y. Tā kā vienādojums (4) ir otrās pakāpes vienādojums, tad pieskares punktam $P=x\,|\,y$ dabūsim divus vērtību pārus $x_1\,|\,y_1$ un $x_2\,|\,y_2$.

Tas nozīmē, ka plaknē no dotā punkta $P_0=x_0\,|\,y_0$ otrās kārtas līknei varam pievilkt divas pieskares (62. zīm.).

Ja šīs pieskares ir realas, tad punktu $P_0 = x_0 \mid y_0$ sauc par *ārēju* attiecībā uz līkni, ja pieskares ir imaginaras, tad punktu $P_0 = x_0 \mid y_0$ sauc par *iekšēju*; ja pieskares sakrīt kopā, tad punkts $P_0 = x_0 \mid y_0$ atrodas uz līknes.



62. zīm.

Vienādojums (3) attiecībā uz x un y ir pirmās pakāpes un tādēļ izteic taisni, kas, kā redzams no augšējā, iet caur punktiem $P_1 = x_1 \mid y_1$ un $P_2 = x_2 \mid y_2$.

Attiecībā uz līkni L, taisni, kas izteikta ar vienādojumu (3), sauc par punkta $P_0 = x_0 \mid y_0$ *polari* un punktu P_0 par šīs polares *polu*.

Vienādojumu (3) pārveidojot — atklājot iekavas, sakārtojot locekļus — dabūjam (ievērojot, ka $a_{12} = a_{21}$; $a_{23} = a_{32}$ utt.):

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13})\,x + (a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23})\,y +$$
$$+ (a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}) = 0. \qquad (5)$$

Šis vienādojums tātad ir polares vienādojums. Salīdzinot polares vienādojumu (5) ar pieskares vienādojumu (1), redzam, ka tie ir identiski.

Tas nozīmē, ka pieskare arī ir polare, bet šīs polares (pieskares) pols atrodas uz pašas polares, kā arī uz līknes.

Vispārīgā gadījumā polares pols neatrodas ne uz polares, ne arī uz līknes.

Polam P_0 piekārtota tikai viena polare, un otrādi — polarei p piekārtots tikai viens pols P_0, jo no vienādojuma (5) redzams: ja dots pols $P_0 = x_0 \mid y_0$, tad polarei virziena koeficients un asu nogriežņi ir vienvērtīgi lielumi. Tātad dotajam polam piekārtota tikai viena polare.

Ja pieņemam, ka dotā taisne

$$Ax + By + C = 0$$

ir kādas otrās kārtas līknes polare, tad, ievērojot polares vienādojumu (5), jābūt:

$$a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = \rho A$$
$$a_{21}x_0 + a_{22}y + a_{23} = \rho B$$
$$a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33} = \rho C.$$

No augšējiem trim vienādojumiem dabūjam nezināmos ρ, x_0, y_0 kā vienvērtīgus lielumus. Tātad dotajai polarei piekārtots tikai viens pols.

Ja pols $P_0 = x_0 \mid y_0$ atrodas līknes centrā, tad, kā zināms no [43], jābūt:

$$a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0$$
$$a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0.$$

Ievietojot šīs izteiksmes polares vienādojumā (5), dabūjam:

$$0 \cdot x + 0 \cdot y + (a_{31}\, x_0 + a_{32}\, y_0 + a_{33}) = 0.$$

Šī izteiksme ir bezgalīgi tālās taisnes vienādojums. Tātad:

Ja pols atrodas līknes centrā, tad šā pola polare ir bezgalīgi tāla taisne.

Dalot polares vienādojumu ar x_0, dabūjam:

$$\left(a_{11} + a_{12}\frac{y_0}{x_0} + \frac{a_{13}}{x_0}\right) x + \left(a_{21} + a_{22}\frac{y_0}{x_0} + \frac{a_{23}}{x_0}\right) y +$$
$$+ \left(a_{31} + a_{32}\frac{y_0}{x_0} + \frac{a_{33}}{x_0}\right) = 0. \tag{6}$$

Ja pols $P_0 = x_0 \mid y_0$ tiecas uz bezgalību, atrazdamies uz kādas taisnes, tad dabūjam:

$$\lim_{x_0 \to \infty,\; y_0 \to \infty} \frac{y_0}{x_0} = m \quad \text{un} \quad \lim_{x_0 \to \infty} \frac{a_{13}}{x_0} = 0; \quad \lim_{x_0 \to \infty} \frac{a_{23}}{x_0} = 0; \quad \lim_{x_0 \to \infty} \frac{a_{33}}{x_0} = 0,$$

kur m ir minētās taisnes virziena koeficients.

Ievietojot šīs vērtības vienādojumā (6), to sakārtojot un ievērojot, ka $a_{12} = a_{21}$ utt., dabūjam:

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13} + m\,(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}) = 0. \tag{7}$$

Vienādojums (7), kā zināms, izteic līknes diametru. Tātad:

Ja pols atrodas bezgalībā virzienā m, tad šim polam piekārtotā polare ir virzienam m piekārtotais līknes diametrs.

Pārveidojot polares vienādojumu (5) — atklājot iekavas, sakārtojot locekļus un ievērojot, ka $a_{12} = a_{21}$ utt. — dabūjam:

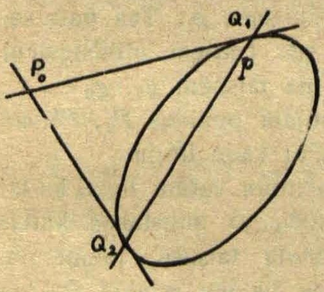
$$a_{11}x_0x + a_{12}x_0y + a_{12}xy_0 + a_{22}y_0y + a_{13}x + a_{23}y + a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33} = 0.$$

Kā redzams, šīs polares vienādojums ir pilnīgi simetrisks attiecībā uz x un x_0 un tāpat arī attiecībā uz y un y_0. No teiktā secinām:

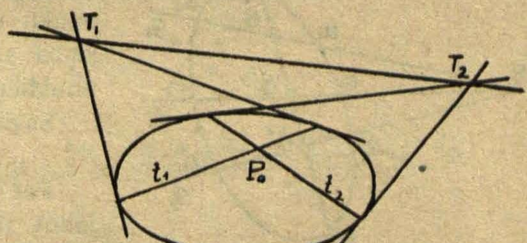
Ja punkts $R = x \mid y$ atrodas uz punkta $P_0 = x_0 \mid y_0$ polares, tad arī otrādi — punkts $P_0 = x_0 \mid y_0$ atrodas uz punkta $R = x \mid y$ polares.

Ievērojot augšējo, redzams:

Ja punkts R kustas uz taisnes p, tad šā punkta polare r griežas ap taisnes p polu P_0, un otrādi:



63. zīm.



64. zīm.

Ja taisne r griežas ap punktu $P_0 = x_0 \mid y_0$, tad taisnes r pols kustas uz punkta P_0 polares p.

Ja dots punkts P_0 un otrās kārtas līkne (63. zīm.), tad punkta P_0 polari dabūjam šādi: no punkta P_0 velkam pieskares dotajai līknei. Polare iet caur pieskaršanās punktiem Q_1 un Q_2.

Ja dota līkne un polare p, kas krusto līkni, tad šīs polares polu dabūjam šādi: polares krustošanās punktos ar līkni — punktos Q_1 un Q_2 — velkam pieskares. Šo pieskaru krustošanās punkts tad ir taisnes p pols.

Ja pols P_0 atrodas līknes iekšienē (64. zīm.), tad rīkojamies šādi:

Caur punktu P_0 velkam taisni t_1 un dabūjam šīs taisnes polu T_1;

Caur P_0 velkam taisni t_2 un dabūjam tās polu T_2.

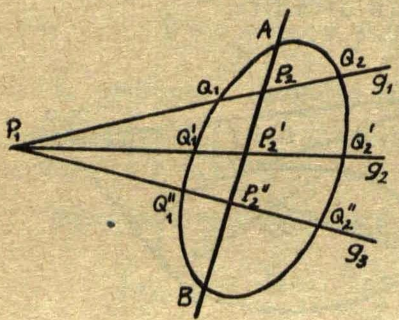
Taisne p, kas vilkta caur punktiem T_1 un T_2, ir punkta P_0 polare, jo, ja taisne t griežas ap P_0, tad taisnes t pols T kustas uz P_0 pola polares.

Taišņu t_1 un t_2 attiecīgie poli T_1 un T_2 tātad atrodas uz punkta P_0 polares p.

Ja dota līkne un polare p, kas līkni nekrusto, tad, kā redzams, polares p polu P dabū — kā punktu T_1 un T_2 polaru krustošanās punktu.

Pie polares jēdziena nākam arī šādā kārtā:

Pieņemam, ka dota otrās kārtas līkne un punkts P_1 (65. zīm.). Caur punktu P_1 velkam taisni g_1, kas krusto līkni punktos Q_1 un Q_2. Punkts P_1 dala nogriezni $Q_1 Q_2$ kādā attiecībā λ. Uz minētās taisnes atrodam punktu P_2, kas dala nogriezni Q_1Q_2 attiecībā — λ. Tādā kārtā dabūjam uz taisnēm g_2, g_3 . . . . punktus P_2', P_2'' . . . . . .



65. zīm.

Saskaņā ar konstrukciju, punkti P_1, Q_1, P_2, Q_2 ir četri harmoniski punkti uz taisnes g_1. Tas pats sakāms arī par četriem atbilstošiem punktiem uz taisnēm g_2, g_3 . . . .

Savienojam punktus P_2, P_2' un P_2'' . . . . ar kādu līniju.

Par šo līniju varam teikt, ka tai jābūt taisnei, jo augstākas kārtas līkne krustotu taisnes, piemēram, taisni g, ne tikvien punktā P_2, bet vairākos punktos, atkarībā no līknes kārtas.

Tas nozīmētu, ka trim punktiem P_1, Q_1, Q_2 atbilstu vairāki harmoniski punkti P_2, kas nav iespējams.

Taisne caur punktiem P_2, P_2' P_2'' . . . . . krusto līkni punktos A un B. Šais punktos sakrīt kopā punkti Q_1 un Q_2, bet, kā zināms, ar punktu A tad sakrīt arī punkts P_2.

Taisnes P_1A un P_1B ir līknes pieskares. No augšējā redzams, ka taisne caur punktiem P_2, P_2', P_2'' . . . . . ir punkta P_1 polare; punkti, kuri atrodas uz taisnes, kas vilkta caur polu P_1 un krusto līkni un polari, ir četri harmoniski punkti.

48. Līknes ar centru galībā. Pētījumā par līknes centru [43] redzējām, ka līknes centra koordinatas ir galīgas, ja determinante

$$A_{33} \neq 0.$$

Te apskatīsim līknes, kuru vienādojumi atbilst augšējiem noteikumiem.

Līknes centra koordinatas x_0 un y_0 dabū no izteiksmēm:

$$a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0,$$
$$a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0.$$

Ja pārnesam koordinatu sistemas (O', x', y') sākumu O' uz līknes centru, tad augšējās izteiksmes būs apmierinātas un līknes vienādojums šai koordinatu sistemā, kā redzams no [41, L], dabūs šādu veidu:

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + S = 0. \tag{1}$$

Kā redzams no [41, c'], S šajā koordinatu sistemā dabū veidu:

$$S = a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}.$$

Ievietojot šai izteiksmē centra koordinatu izteiksmes:

$$x_0 = \frac{A_{31}}{A_{33}};\ y_0 = \frac{A_{32}}{A_{33}},$$

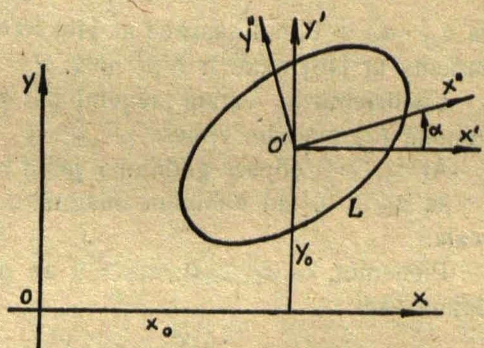
dabūjam:

$$S = a_{31} \cdot \frac{A_{31}}{A_{33}} + a_{32}\frac{A_{32}}{A_{33}} + a_{33} = \frac{a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}}{A_{33}}.$$

Tātad

$$S = \frac{A}{A_{33}}.$$

Kā zināms no [45], otrās kārtas līknei ir arvienu divas realas asis. Griežam koordinatu sistemu (O', x', y') (66. zīm.) ap O', kamēr koordinatu asis x' un y' sakrīt ar līknes asīm. Šo jauno koordinatu sistemu apzīmējam ar (O', x'', y''). Griešanas leņķi α dabūjam no [45, G].



66. zīm.

Šai jaunajā koordinatu sistemā (O', x'', y'') līknes vienādojumu dabūjam no (1), ievērojot koordinatu transformacijas formulas. Tā kā līkne ir simetriska pret asīm, tad līknes vienādojumā neatradīsies loceklis ar $x''y''$. Koeficienti pie x''^2 un y''^2 dabūs kādas attiecīgas vērtības α_{11} un α_{22}. Locekļa S vērtība pārveidošanā nemainās. Tātad līknes vienādojums koordinatu sistemā (O', x'', y'') dabū šādu veidu:

$$\alpha_{11}x''^2 + \alpha_{22}y''^2 + \frac{A}{A_{33}} = 0.$$

Vienkāršības dēļ augšējo vienādojumu rakstām šādā veidā:

$$\alpha_{11}x^2 + \alpha_{22}y^2 + \alpha_{33} = 0. \tag{2}$$

Šis vienādojums izteic otrās kārtas līknes ar centru galībā. Determinante A [sk. 42] šai gadījumā dabū veidu:

$$A = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{23} \end{vmatrix} = \alpha_{11}\,\alpha_{22}\,\alpha_{33}.$$

Ja kaut viens vienādojuma (2) koeficients ir 0, tad arī $A = 0$, un tas saskaņā ar [42] nozīmē, ka līkne sadalās taisnēs.

Ja $\alpha_{33} = 0$, tad, kā redzams no (2), līkne sadalās divās krustojošā realās vai imaginarās taisnēs.

Ja α_{11} vai α_{22} ir 0, tad līkne sadalās divās paralelās taisnēs.

Ja $\alpha_{11} = 0$ un $\alpha_{33} = 0$, tad dabūjam divas ar x asi sakrītošas taisnes. Ja $\alpha_{22} = 0$ un $\alpha_{33} = 0$, tad dabūjam divas ar y asi sakrītošas taisnes.

Pieņemam, ka vienādojumā (2) neviens koeficients nav 0. Veidojam determinanti A_{33}:

$$A_{33} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & 0 \\ 0 & \alpha_{22} \end{vmatrix} = \alpha_{11} \cdot \alpha_{22}.$$

Ja $\alpha_{11} \cdot \alpha_{22} > 0$, tad saskaņā ar [46] līkne ir elipse. Ja $\alpha_{11} \cdot \alpha_{33} < 0$, tad saskaņā ar [46] līkne ir hiperbola.

Koeficientu α_{11} varam pieņemt par pozitivu, pretējā gadījumā vienādojumā (2) mainām zīmes.

Ar $\alpha_{11} > 0$ elipses gadījumā jābūt $\alpha_{22} > 0$.

Ja $\alpha_{33} > 0$, tad dabūjam imaginaru elipsi. Ja $\alpha_{33} < 0$, tad elipse ir reala.

Pieņemot, ka $\alpha_{11} > 0$; $\alpha_{22} > 0$ un $a_{33} < 0$, vienādojumu (2) pārveidojam šādi:

$$\frac{x^2}{-\frac{\alpha_{33}}{\alpha_{11}}} + \frac{y^2}{-\frac{\alpha_{33}}{\alpha_{22}}} - 1 = 0. \tag{3}$$

Ar augšējiem pieņēmumiem daļas

$$-\frac{\alpha_{33}}{\alpha_{11}} \text{ un } -\frac{\alpha_{33}}{\alpha_{22}}$$

ir pozitivi lielumi. Tos apzīmējot attiecīgi ar a^2 un b^2, vienādojumu (3) rakstām:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \tag{4}$$

Šo vienādojumu sauc par elipses *kanonisko* vienādojumu.

Ja $\alpha_{11} \cdot \alpha_{22} < 0$, tad, saskaņā ar [46], līkne ir hiperbola.

Šādā gadījumā, pieņemot, ka $\alpha_{11} > 0$, jābūt $\alpha_{22} < 0$. Ar $\alpha_{33} < 0$, pārveidojot vienādojumu (2), dabūjam

$$\frac{x^2}{-\frac{\alpha_{33}}{\alpha_{11}}} + \frac{y^2}{-\frac{\alpha_{33}}{\alpha_{22}}} - 1 = 0. \tag{5}$$

Izteiksmes

$$-\frac{\alpha_{33}}{\alpha_{11}} \text{ un } \frac{\alpha_{33}}{\alpha_{22}}$$

ir pozitivas; tādēļ varam likt:

$$-\frac{\alpha_{33}}{\alpha_{11}} = a^2 \text{ un } \frac{\alpha_{33}}{\alpha_{22}} = b^2.$$

Tad vienādojums (5) dabū šādu veidu:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \tag{6}$$

Ja $\alpha_{11} > 0$; $\alpha_{22} < 0$ un $\alpha_{33} > 0$, tad, dalot vienādojumu ar $-\alpha_{33}$, dabūjam:

$$\frac{x^2}{-\frac{\alpha_{33}}{\alpha_{11}}} + \frac{y^2}{-\frac{\alpha_{33}}{\alpha_{22}}} - 1 = 0. \tag{7}$$

Te

$$-\frac{\alpha_{33}}{\alpha_{11}} \text{ ir negativs un } -\frac{\alpha_{33}}{\alpha_{22}} \text{ ir pozitivs.}$$

Liekot

$$\frac{\alpha_{33}}{\alpha_{11}} = a^2 \text{ un } -\frac{\alpha_{33}}{\alpha_{22}} = b^2,$$

dabūjam

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \tag{8}$$

Vienādojums (8) arī izteic hiperbolu.

Hiperbolas, kas izteiktas ar vienādojumiem (6) un (8), sauc par *piekārtotām* hiperbolām.

Apvienojot abus vienādojumus, rakstām:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \mp 1 = 0.$$

Šie vienādojumi ir hiperbolas kanoniskie vienādojumi.

49. Līknes ar centru bezgalībā. Kā zināms, otrās kārtas līknei ir divas realas asis. Pieņemam vienu no tām par x asi un liekam koordinatu sākumu līknes un x ass krustošanās punktā. Taisnleņķa koordinatu sistemā y ass tad ir līknes pieskare koordinatu sākumā. Tā kā koordinatu sākums atrodas uz līknes, tad līknes vienādojumā [40,1] nevar atrasties absolutais loceklis, tātad $a_{33} = 0$.

Tā kā līkne ir simetriska pret līknes asīm, un šinī gadījumā līknes viena ass sakrīt ar x asi, tad līkne ir simetriska pret x asi. Saskaņā ar [37] līknes vienādojumā nevar atrasties locekļi ar y pirmajā pakāpē. Tātad jābūt: $a_{12} = 0$ un $a_{23} = 0$.

Ievērojot teikto, pieņemtajā koordinatu sistemā līknes vienādojumam var būt vienīgi šāds veids:

$$a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + 2a_{13} x = 0. \qquad (1)$$

Šo vienādojumu pārveidojot, dabūjam:

$$y^2 = -2 \frac{a_{13}}{a_{22}} x - \frac{a_{11}}{a_{22}} x^2. \qquad (2)$$

Pieņemot, ka $a_{22} > 0$, apzīmējam:

$$-\frac{a_{13}}{a_{22}} = p \text{ un } -\frac{a_{11}}{a_{22}} = q.$$

p varam uzskatīt par pozitivu, jo, ja tas būtu negativs, tad, pārmainot x ass virzienu, varētu p uzskatīt par pozitivu; turpretim q var būt pozitivs vai negativs.

Ievērojot teikto, vienādojumu (2) varam rakstīt šādā veidā:

$$y^2 = 2px + qx^2. \qquad (3)$$

Veidojot determinanti A_{33}, dabūjam:

$$A_{33} = \begin{vmatrix} -q & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -q.$$

Kā redzams, vienādojums (3) izteic

elipsi, ja $q < 0$,
hiperbolu, ja $q > 0$,
parabolu, ja $q = 0$.

Ja liekam $q = 0$, tad $A_{33} = 0$. Šādā gadījumā, saskaņā ar [43], līknes centrs atrodas bezgalībā.
Vienādojums (3) tad dabū šādu veidu:

$$y^2 = 2px. \tag{4}$$

Šis vienādojums ir parabolas *kanoniskais* vienādojums.
No augšējā redzams, ka parabola ir vienīgā otrās kārtas līkne ar centru bezgalībā.

ASTOTĀ NODAĻA

ELIPSE

50. Elipses veids. Vispārīgo formulu specializēšana elipses gadījumam. Kā redzējām [48], elipses vienādojums ir:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \tag{1}$$

Līknes centrs, kā pieņemts, atrodas koordinatu sākumā, un līknes asis sakrīt ar koordinatu asīm.
Līknes vienādojums rāda, ka tā ir simetriska pret koordinatu asīm.
Liekot līknes vienādojumā (1) $y = 0$, dabūjam līknes krustošanās punktus ar x asi

$$x = \pm a.$$

Liekot $x = 0$, dabūjam līknes krustošanās punktus ar y asi

$$y = \pm b.$$

Atrisinot vienādojumu (1) attiecībā uz y, dabūjam:

$$y = \pm b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

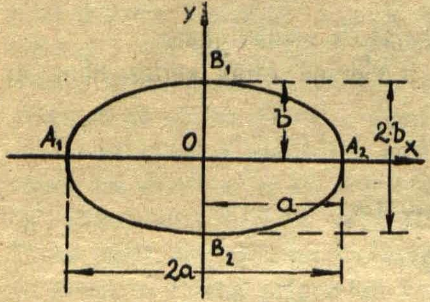
Šī izteiksme rāda, ka y ir reals, kamēr $|x| \leqslant a$, un imaginars, ja $|x| > a$.

y dabū lielāko vērtību, ja $x = 0$. Ja $|x|$ aug, $|y|$ dilst, un ja $x = \pm a$, y dabū vērtību 0.

Atrisinot vienādojumu (1) attiecībā uz x, dabūjam:

$$x = \pm a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}.$$

Šī izteiksme rāda, ka x ir reals, ja $|y| \leqslant b$, bet tas ir imaginars, ja $|y| > b$. $|x|$ dabū lielāko vērtību, ja $y = 0$. Ja $|y|$ aug, $|x|$ dilst.



67. zīm.

No augšējā redzams, ka elipse ietilpst paralelogramā, kura malas ir $2a$ un $2b$. (67. zīm.)

Punktus A_1, A_2, B_1, B_2, kuros elipse krusto koordinatu asis, sauc par elipses *virsotnēm.*

Nogriežņus $2a$ un $2b$ sauc par elipses *asīm.*

Parasti pieņem $a > b$; tad elipses lielā ass sakrīt ar x asi

Ja $a = b$, tad dabūjam:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - 1 = 0$$

vai

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0.$$

Šis vienādojums izteic riņķi; tātad riņķis ir elipses atsevišķs gadījums.

Salīdzinot elipses vienādojumu (1) ar otrās pakāpes pilnīgo vienādojumu, redzam, ka:

$$a_{11} = \frac{1}{a^2}; \quad a_{22} = \frac{1}{b^2}; \quad a_{33} = -1.$$

$$a_{12} = a_{21} = 0; \quad a_{13} = a_{31} = 0; \quad a_{23} = a_{32} = 0.$$

Ievietojot šīs vērtības izteiksmēs [42] (A) un (B), dabūjam:

pieskares virzienu m elipses punktā $x_0 \mid y_0$

$$m = -\frac{\frac{1}{a^2} x_0 + 0 \cdot y_0 + 0}{0 \cdot x_0 + \frac{1}{b^2} \cdot y_0 + 0} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0}, \qquad (2)$$

un pieskares vienādojumu elipses punktā $x_0 \mid y_0$

$$x\left(\frac{1}{a^2}x_0+0\cdot y_0+0\right)+y\left(0\cdot x_0+\frac{1}{b^2}y_0+0\right)+(0\cdot x_0+0\cdot y_0-1)=0$$

vai

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}-1=0. \tag{3}$$

Ievietojot augšējo koeficientu vērtības izteiksmē [44, F], dabūjam elipses piekārtoto diametru virziena koeficientu saistību:

$$\frac{1}{a^2}+(m_1+m_2)\cdot 0+m_1\cdot m_2\cdot\frac{1}{b^2}=0$$

vai

$$m_1\cdot m_2=-\frac{b^2}{a^2}. \tag{4}$$

Polares vienādojums, kā zināms, ir tāds pats kā pieskares vienādojums; tātad

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}-1=0 \tag{5}$$

ir elipses polares vienādojums un $P_0=x_0 \mid y_0$ šīs polares pols.

Piemērs:

Pieņemot, ka taisne

$$Ax+By+C=0 \tag{α}$$

ir elipses

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0 \tag{β}$$

polare, dabūt šīs polares polu $P_0=x_0 \mid y_0$.

Elipses polares vienādojums ir

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}-1=0. \tag{γ}$$

Tā kā vienādojumi (α) un (γ) izteic vienu un to pašu taisni — elipses polari, tad jābūt:

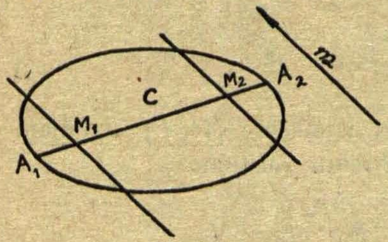
$$\rho\cdot A=\frac{x_0}{a^2};\ \rho B=\frac{y_0}{b^2};\ \rho C=-1.$$

Tātad

$$\rho=-\frac{1}{C};$$

$$x_0=\rho\cdot a^2A=-\frac{a^2A}{C}\ \text{un}\ y_0=-\frac{b^2B}{C}.$$

51. Dažas konstrukcijas. 1) Dots elipses konturs un paralelu chordu virziens m. Konstruēt šīm chordām piekārtotu diametru un dabūt elipses centru.

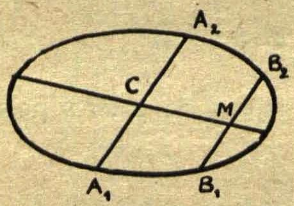


68. zīm.

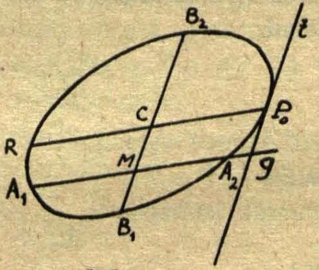
Velkam (68. zīm.) divas virzienam m paralelas chordas. Nogrieznis A_1A_2, kas iet caur šo chordu viduspunktiem M_1 un M_2, ir meklētais diametrs. Nogriežņa A_1A_2 viduspunkts C ir elipses centrs.

2) Dots elipses konturs un diametrs A_1 A_2. Konstruēt šim diametram piekārtoto diametru.

Diametra A_1 A_2 viduspunkts C ir līknes centrs. Velkam diametram A_1 A_2 paralelu chordu B_1 B_2. Meklētais diametrs iet caur šīs chordas viduspunktu M un līknes centru C.



69. zīm.



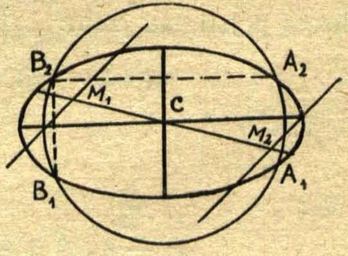
70. zīm.

3) Dots elipses konturs un punkts P_0 uz šā kontura. Konstruēt pieskari punktā P_0.

Atrodam, kā norādīts pirmajā piemērā, elipses centru C. Velkam diametru caur punktiem P_0 un C un šim diametram paralelo chordu g. Nogrieznis B_1B_2, kas iet caur centru C un chordas A_1A_2 viduspunktu M, tad ir diametram P_0 R piekārtotais diametrs. Taisne t, ko velkam caur P_0 paraleli diametram B_1 B_2, ir meklētā pieskare elipses punktā P_0.

4) Dots elipses konturs. Konstruēt elipses asis.

Atrodam elipses centru. Ap centru velkam riņķi ar tāda lieluma radiusu, lai dabūtu četrus riņķa un elipses krustošanās punktus. Elipses asis tad ir caur centru vilktas taisnes, kas paralelas chordām A_2B_2 un B_1 B_2.



71. zīm.

52. Elipse kā riņķa homogena deformacija. Ap koordinatu sākumu kā centru velkam riņķi ar radiusu a. Šā riņķa vienādojums tad ir:

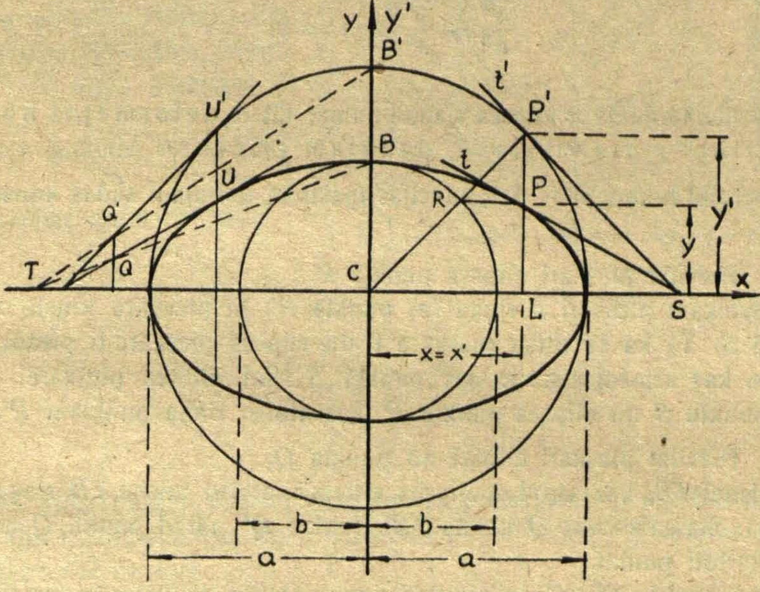
$$x'^2 + y'^2 - a^2 = 0 \text{ (} x' \text{ un } y' \text{ — riņķa punkta koordinatas).} \quad (1)$$

Deformējam šo riņķi homogeni y ass virzienā ar deformacijas attiecību $\frac{b}{a}$, kur $b < a$ (72. zīm.).

Ap koordinatu sākumu kā centru velkam arī riņķi ar radiusu b.

Homogenās deformacijas vienādojumi, ja izdarām deformaciju saskaņā ar augšējiem pieņēmumiem, ir

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \\ y &= \frac{b}{a} y' \end{aligned}\right\} . \quad (2)$$



72. zīm.

Uz riņķa ar radiusu a ņemam punktu P'. Taisne no punkta P' uz riņķa centru C krusto riņķi, kura radiuss ir b, punktā R. Taisne caur R, kas paralela x asij, krusto punkta P' ordinatu punktā P. Apzīmējam punkta P ordinatu LP ar y. Tad punkta P koordinatas ir:

$$x = x' \text{ un } y = \frac{b}{a} y', \quad (3)$$

kas redzams no 72. zīmējuma. No vienādojumiem (2) un (3) secinām, ka punkts P, kas dabūts, izdarot norādīto konstrukciju, ir riņķa punkta P' homogena deformacija ar deformacijas attiecību $\frac{b}{a}$.

Līknes vienādojumu, ko veido punkts P, t. i., riņķa deformacijas vienādojumu, dabūjam, ievietojot riņķa vienādojumā (1) izteiksmes:

$$x' = x; \text{ un } y' = \frac{a}{b} y.$$

Tad dabūjam:

$$x^2 + \frac{a^2}{b^2} y^2 - a^2 = 0.$$

Dalot šo vienādojumu ar a^2, dabūjam:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Šis vienādojums ir elipses vienādojums; tātad, deformējot homogeni riņķi y ass virzienā, dabūjam elipsi.

Ievērojot homogenās deformacijas īpašības, dabūjam šādas konstrukcijas:

1) Pievilkt pieskari elipses punktā P.

Pievelkam pieskari t' riņķa (a) punktā P'. Šī pieskare krusto x asi punktā S. Tā kā šā riņķa pieskare t' un elipses pieskare ir piekārtotas taisnes, kas krustojas uz x ass punktā S, tad elipses pieskarei jāiet caur punktu S un elipses punktu P, kas atbilst riņķa punktam P'.

2) Pievilkt pieskari elipsei no punkta Q.

Taisnei TB, kas atrodas elipses sistemā, atbilst taisne TB' riņķa (a) sistemā. Statenis caur Q krusto TB' punktā Q'; tātad punkti Q un Q' ir piekārtoti punkti.

Caur punktu Q' velkam pieskari riņķim (a) un dabūjam pieskaršanās punktu U'. Punkts U' un caur to vilkta stateņa krustošanās punkts ar elipsi — punkts U — ir piekārtoti punkti. Elipses pieskare iet caur punktiem Q, U, kas piekārtoti riņķa pieskares punktiem Q', U'.

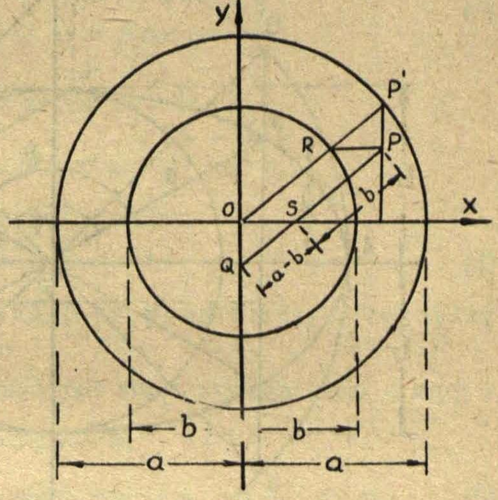
3) Ja dotas elipses pusasis a un b ar $a > b$, tad ar 72. zīmējumā norādītu paņēmienu varam konstruēt elipsi kā riņķa (a) homogenu deformaciju y ass virzienā ar deformacijas attiecību $\frac{b}{a}$.

4) 73. zīmējumā parādīts elipses cirkuļa princips. Ar augšā norādīto konstrukciju dabūjam elipses punktu P. Velkam $PQ \parallel OP'$, tad, kā redzams:

$$QP = a; \; SP = b; \; QS = a - b.$$

Šīs izteiksmes pastāv katram elipses punktam.

No augšējā redzams: ja nogrieznis $QP = a$ kustas tā, ka nogriežņa $QS = a - b$ gala punkts S atrodas uz x ass un otrs gala punkts Q uz y ass, tad nogriežņa QP gala punkts P veido elipsi.



73. zīm.

Kā zināms no [36], deformētā un nedeformētā laukuma attiecība līdzinās deformacijas attiecībai, tātad, ja F' ir riņķa laukums, F elipses laukums un $\frac{b}{a}$ deformacijas attiecība, tad

$$\frac{F}{F'} = \frac{b}{a}$$

vai arī

$$F = F' \cdot \frac{b}{a} = a^2\pi \cdot \frac{b}{a} = a \cdot b \cdot \pi.$$

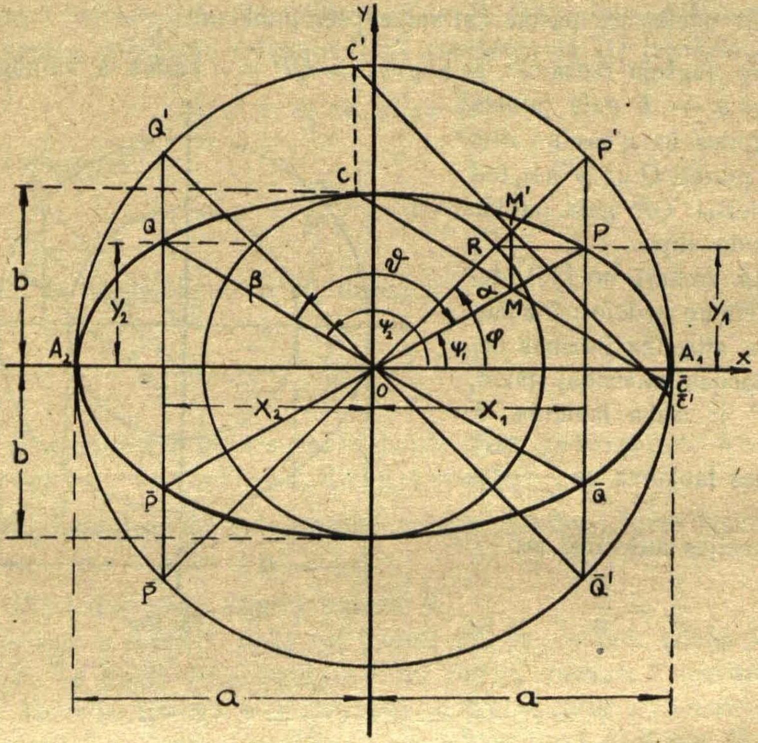
53. Sakari starp elipses pusasīm un piekārtotiem pusdiametriem. (74. zīm.) Stateniskiem riņķa diametriem $\overline{P'P'}$ un $\overline{Q'Q'}$ atbilst elipses diametri $\overline{PP}$ un $\overline{QQ}$.

Riņķa diametrs dala uz pusēm pret to statenisko chordu $\overline{C'C'}$.

Riņķa chordai $\overline{C'C'}$ atbilst elipses chorda $\overline{CC}$. Riņķa diametram $\overline{P'P'}$ atbilst elipses diametrs $\overline{PP}$. Riņķa chordas $\overline{C'C'}$ viduspunktam M', kas atrodas uz diametra $\overline{P'P'}$, atbilst elipses chordas $\overline{CC}$ viduspunkts M; šim punktam tātad jāatrodas uz elipses diametra $\overline{PP}$.

Riņķa diametram $\overline{Q'Q'}$ atbilstošais elipses diametrs $\overline{QQ}$ ir paralels chordai $\overline{CC}$, un tā kā šo chordu dala uz pusēm diametrs $\overline{PP}$, tad iznāk, ka stateniskiem riņķa diametriem $\bar{P}'P'$ un $\bar{Q}'Q'$ piekārtotie elipses diametri $\bar{P}P$ un $\bar{Q}Q$ ir savstarpēji piekārtoti diametri.

Apzīmējam pusdiametrus OP un OQ attiecīgi ar α un β.



74. zīm.

Leņķi, ko veido riņķa radiuss OP' ar x ass pozitivo virzienu, apzīmējam ar φ.

Leņķis starp riņķa radiusu OQ' un x ass pozitivo virzienu tad ir $\varphi + 90^{\circ}$.

Leņķus, ko veido elipses pusdiametri α un β ar x ass pozitivo virzienu, apzīmējam attiecīgi ar ψ_1 un ψ_2.

Kā redzams no 74. zīmējuma, elipses jebkura punkta koordinatas varam izteikt:

$$\left.\begin{aligned} x &= a \cos \varphi \\ y &= b \sin \varphi \end{aligned}\right\}. \qquad (1)$$

Augšējos vienādojumus sauc par elipses vienādojumiem *parametriskā veidā.* Parametrs te ir leņķis φ.

Ievērojot 74. zīmējumu, dabūjam:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a \cos\varphi \\ y_1 &= b \sin\varphi \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

un

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= a \cos(90^\circ + \varphi) = -a \sin\varphi \\ y_2 &= b \sin(90^\circ + \varphi) = b \cos\varphi \end{aligned}\right\}. \tag{3}$$

Tā kā

$$\alpha^2 = x_1^2 + y_1^2 = a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi$$

un

$$\beta^2 = x_2^2 + y_2^2 = a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi,$$

tad, saskaitot augšējos vienādojumus, dabūjam:

$$\alpha^2 + \beta^2 = a^2 + b^2. \tag{4}$$

Tātad elipses divu piekārtotu pusdiametru kvadratu suma ir pastāvīgs lielums.

Kā redzams no 74. zīmējuma, leņķis starp pusdiametriem α un β ir

$$\vartheta = \psi_2 - \psi_1$$

un

$$\sin\vartheta = \sin(\psi_2 - \psi_1) = \sin\psi_2 \cos\psi_1 - \cos\psi_2 \cdot \sin\psi_1. \tag{5}$$

Tā kā:

$$\sin\psi_1 = \frac{y_1}{\alpha}; \quad \cos\psi_1 = \frac{x_1}{\alpha}$$

un

$$\sin\psi_2 = \frac{y_2}{\beta}; \quad \cos\psi_2 = \frac{x_2}{\beta},$$

tad, ievietojot šīs vērtības izteiksmē (5), dabūjam:

$$\sin\vartheta = \frac{y_2}{\beta} \cdot \frac{x_1}{\alpha} - \frac{x_2}{\beta} \cdot \frac{y_1}{\alpha}.$$

Ievietojot šinī izteiksmē x_1, y_1 un x_2, y_2 vērtības no (2) un (3), dabūjam:

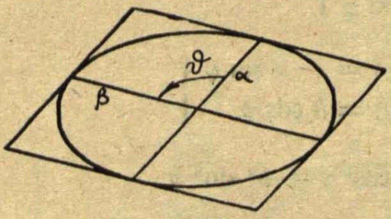
$$\sin\vartheta = \frac{a\cos\varphi}{\alpha} \cdot \frac{b\cos\varphi}{\beta} - \frac{b\sin\varphi}{\alpha} \cdot \left(-\frac{a\sin\varphi}{\beta}\right).$$

No augšējās izteiksmes dabūjam:

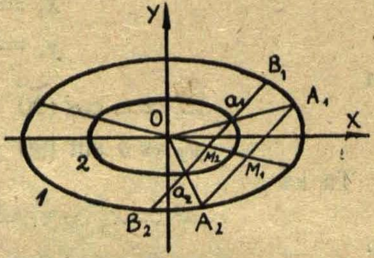
$$\alpha\beta \sin\vartheta = ab. \tag{6}$$

Formula (6) ģeometriski tulkojama šādi:

visiem ap elipsi veidotiem paralelogramiem ir vienāds laukums $F = 4ab$, ja paralelogramu malas ir paralelas piekārtotiem diametriem.



75. zīm.



76. zīm.

54. Līdzīgas un līdzīgi novietotas elipses (76. zīm.). Divas līdzīgas elipses ir līdzīgi novietotas, ja atbilstošie punkti atrodas uz viena stara. Pieņemam par līdzības centru abu elipšu kopējo centru. Ievērojot līdzības transformacijas īpašības, dabūjam:

I elipses chordai A_1A_2 atbilst II elipses chorda a_1a_2. Šīs chordas ir paralelas. Chordas A_1A_2 viduspunktam M_1 atbilst chordas a_1a_2 viduspunkts M_2. Šis punkts ir arī chordas B_1B_2 viduspunkts.

Tādēļ

$$B_1M_2 = M_2B_2$$

un

$$a_1M_2 = M_2a_2.$$

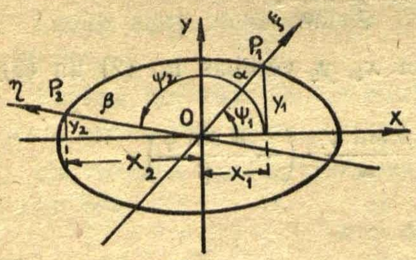
Tā kā

$$B_1M_2 - a_1M_2 = M_2B_2 - M_2a_1,$$

tad

$$B_1a_1 = a_2B_2.$$

55. Elipses vienādojums, attiecināts uz piekārtotiem diametriem. (77. zīm.). Pieņemam, ka koordinatu sistemas (O, ξ, η) asis ξ, η sakrīt ar attiecīgiem piekārtotiem elipses pusdiametriem α un β.



77. zīm.

Koordinatu sistemas pārveidošanas formulās

$$x = \xi \cos \psi_1 + \eta \cos \psi_2,$$
$$y = \xi \sin \psi_1 + \eta \sin \psi_2$$

ievietojam:

$$\cos \psi_1 = \frac{x_1}{\alpha}; \quad \sin \psi_1 = \frac{y_1}{\alpha};$$

$$\cos \psi_2 = \frac{x_2}{\beta}; \quad \sin \psi_2 = \frac{y_2}{\beta}.$$

Tad dabūjam:

$$x = \xi \cdot \frac{x_1}{\alpha} + \eta \cdot \frac{x_2}{\beta},$$

$$y = \xi \cdot \frac{y_1}{\alpha} + \eta \cdot \frac{y_2}{\beta}.$$

Šais formulās ievietojam x_1 un y_1, kā arī x_2 un y_2 vērtības [no 53, (2) un (3)]. Tad dabūjam:

$$x = \xi \frac{a \cos \varphi}{\alpha} + \eta \frac{-a \sin \varphi}{\beta},$$

$$y = \xi \frac{b \sin \varphi}{\alpha} + \eta \frac{b \cos \varphi}{\beta}$$

vai arī

$$\frac{x}{a} = \xi \frac{\cos \varphi}{\alpha} - \eta \frac{\sin \varphi}{\beta},$$

$$\frac{y}{b} = \xi \frac{\sin \varphi}{\alpha} + \eta \frac{\cos \varphi}{\beta}.$$

No šiem vienādojumiem dabūjam:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2}.$$

Tā kā

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

tad arī

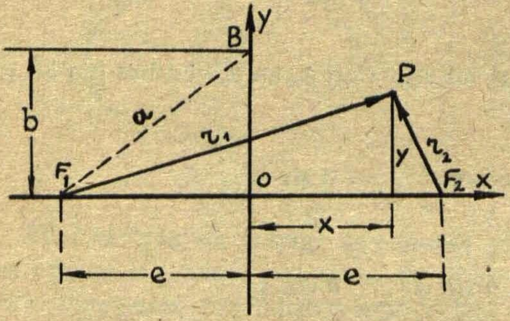
$$\frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} = 1.$$

Šim vienādojumam ir tāds pats veids kā elipses kanoniskajam vienādojumam.

56. Elipses ģeometriskā veidošana. Pieņemam līknes veidošanai šādu likumību:

$$r_1 + r_2 = 2a. \tag{1}$$

Kā redzams no 78. zīmējuma, līknes punktu P noteic no dotiem punktiem F_1 un F_2 vilktie radiusi vektori r_1 un r_2, ievērojot noteikumu (1).



78. zīm.

Punktus F_1 un F_2 sauc par *fokusiem* jeb *degpunktiem*, vektorus r_1 un r_2 par *degstariem*. Šo nosaukumu pamatojums būs vēlāk redzams.

Dabūsim saskaņā ar augšējo noteikumu (1) veidotās līknes vienādojumu, pieņemot koordinatu sistemas sākumu nogriežņa F_1F_2 viduspunktā un x asi šā nogriežņa virzienā.

Apzīmējam

$$OF_2 = OF_1 = e.$$

Nogriezni e sauc par *linearo ekscentricitati.*

Ar šādiem apzīmējumiem dabūjam:

$$r_1 = \sqrt{(e+x)^2 + y^2}$$

$$r_2 = \sqrt{(e-x)^2 + y^2}.$$

Ievērojot noteikumu (1), rakstām:

$$\sqrt{(e+x)^2 + y^2} + \sqrt{(e-x)^2 + y^2} = 2a.$$

Izdarot pakāpeniski pārveidojumus, dabūjam:

$$\sqrt{(e+x)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(e-x)^2 + y^2};$$

$$(e+x)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(e-x)^2 + y^2} + (e-x)^2 + y^2;$$

$$e^2 + 2ex + x^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(e-x)^2 + y^2} + e^2 - 2ex + x^2 + y^2;$$

$$ex - a^2 = -a\sqrt{(e-x)^2 + y^2};$$

$$e^2x^2 - 2a^2ex + a^4 = a^2e^2 - 2a^2ex + a^2x^2 + a^2y^2;$$

$$(a^2 - e^2)\,x^2 + a^2y^2 - a^2(a^2 - e^2) = 0. \tag{2}$$

Šo vienādojumu varam pārveidot, ievērojot, ka: ja punkts P atrodas uz y ass vietā B, tad $r_1 = r_2 = a$. Apzīmējot punkta B ordinatu ar b, varam rakstīt

$$b^2 = a^2 - e^2. \tag{3}$$

Ievietojot vienādojumā (2) izteiksmi (3), dabūjam:

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0. \tag{4}$$

Dalot izteiksmi (4) ar a^2b^2, dabūjam:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \tag{5}$$

Šis vienādojums rāda, ka ar likumu $r_1 + r_2 = 2a$ veidotā līkne ir elipse.

No 79. zīmējuma redzams: ja punkts P ieņem vietu A_2 uz x ass, tad

$$OA_2 = r_1 - e,$$
$$OA_2 = r_2 + e.$$

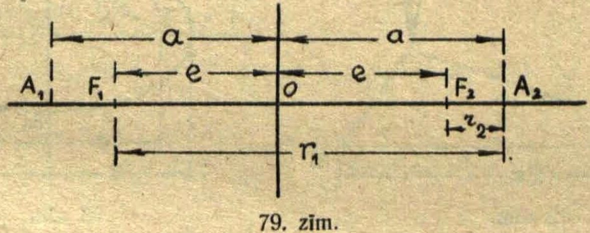
Tātad

$$2OA_2 = r_1 + r_2 = 2a$$

un

$$OA_2 = a.$$

Līdzīgi iznāk, ja veidojošais punkts atrodas uz x ass punktā A_1 tad $OA_1 = a$.



79. zīm.

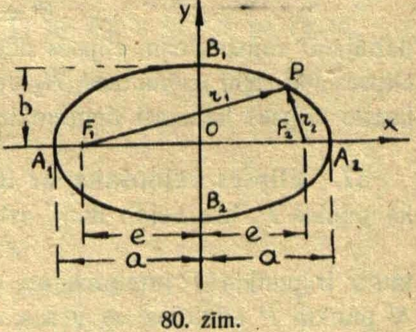
Tātad veidošanas likums ģeometriski rāda, ka elipses lielā ass ir $2a$.

80. zīmējumā parādīti apskatītie lielumi, kas noteic elipsi.

Uz līknes veidošanas likuma

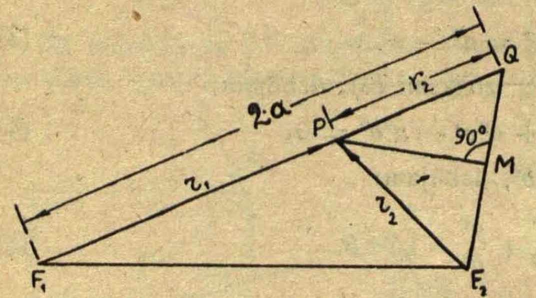
$$r_1 + r_2 = 2a$$

pamatojas šādas elipses konstrukcijas:



80. zīm.

1) No degpunkta F_1 (81. zīm.) velkam taisni, uz tās nogriežam $F_1Q = 2a$. Velkam taisni caur F_2 un Q. Nogriežņa F_2Q viduspunktā M velkam stateni. Šis statenis krusto punktā P taisni F_1Q. Punkts P ir elipses punkts, kas redzams no turpmākā.



81. zīm.

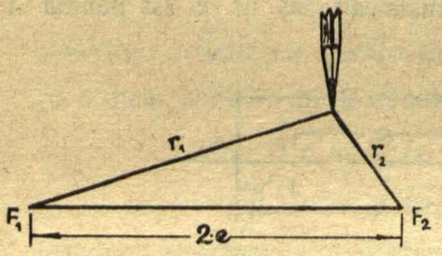
Apzīmējam:

$$F_1P = r_1 \text{ un } F_2P = r_2.$$

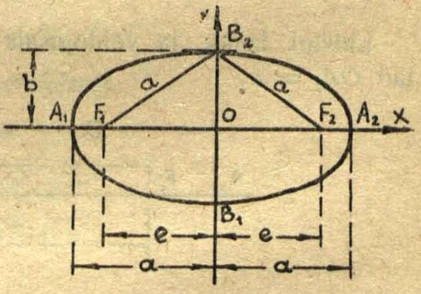
Tā kā saskaņā ar konstrukciju $F_2P = PQ = r_2$, tad iznāk, ka punkta P radiusi vektori atbilst elipses veidošanas likumam

$$r_1 + r_2 = 2a.$$

2) Punktos F_1 un F_2 piestiprinām diega galus. Ņemam diega garumu $r_1 + r_2 = 2a$ ar $2a > 2e$. Kustošs zīmulis, kas arvienu stiepj diegu, kā parādīts 82. zīmējumā, tad zīmē elipsi.



82. zīm.



83. zīm.

Pamatojoties uz izteiksmi

$$b^2 = a^2 - e^2,$$

dabūjam konstrukciju elipses degpunktiem, ja dotas elipses asis. No elipses (83. zīm.) virsotnes B_2 velkam riņķi ar radiusu a. Šis riņķis krusto elipses lielo asi degpunktos F_1 un F_2.

57. Elipses veidošana ar likumu $r = \varepsilon N$ (84. zīm.) Pieņemam, ka punkts P, kas veido līkni, arvien atbilst noteikumam:

$$r = \varepsilon N, \tag{1}$$

kur r ir punkta P attālums no dotā punkta F, kas atrodas uz x ass, N punkta P attālums no y ass, ε kāds pastāvīgs faktors.

Taisni, no kuras skaitām punkta attālumu N, sauc par *direktrisi*. Nogriezni $FP = r$ sauc par punkta P radiusu vektoru.

Saskaņā ar 84. zīmējumu, dabūjam:

$$(x - d)^2 + y^2 = r^2. \quad (2)$$

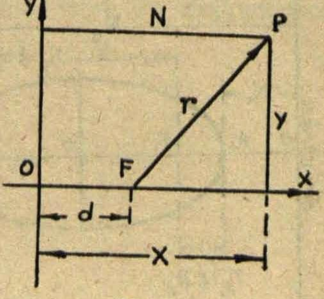
Tā kā te $N = x$, tad $r = \varepsilon N = \varepsilon x$.

Ievietojot šo r vērtību augšējā vienādojumā, dabūjam:

$$(x - d)^2 + y^2 = \varepsilon^2 x^2.$$

Atklājot iekavas un sakārtojot, dabūjam:

$$x^2(1 - \varepsilon^2) - 2dx + y^2 + d^2 = 0.$$



84. zīm.

Šis vienādojums attiecībā uz x un y ir otrās pakāpes vienādojums, tādēļ tas izteic otrās kārtas līkni.

Veidojam determinanti

$$A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Kā redzams no (3), te

$$a_{11} = 1 - \varepsilon^2; \; a_{12} = a_{21} = 0; \; a_{22} = 1.$$

Tātad

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 - \varepsilon^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - \varepsilon^2.$$

A_{33} ir > 0, ja $1 - \varepsilon^2 > 0$; tad $\varepsilon < 1$, un līkne (3) tad ir elipse.

$A_{33} = 0$, ja $1 - \varepsilon_2 = 0$; tad $\varepsilon = 1$, un līkne tad ir parabola.

$A_{33} < 0$, ja $1 - \varepsilon^2 < 0$; tad $\varepsilon > 1$, un līkne tad ir hiperbola.

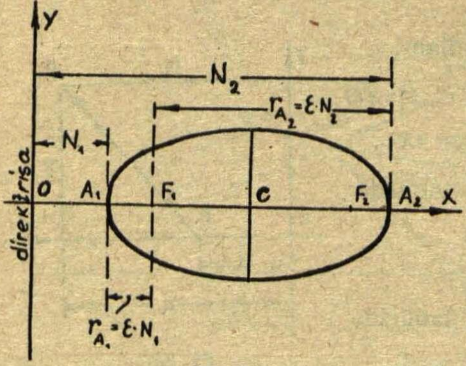
Tātad līkne, kas veidota ar likumu

$$r = \varepsilon N,$$

ir elipse ar $\varepsilon < 1$.

Šis elipses vienādojums ir dots ar vienādojumu (3). Punkts F ir elipses degpunkts, kā tas būs redzams no turpmākā.

85. zīmējumā ar A_1 un A_2 apzīmēti punkti, kurus ieņem līkni veidojošais punkts P, atrazdamies uz x ass.



85. zīm.

Punktā A_1: $r_{A1} = \varepsilon N_1$.

Punktā A_2: $r_{A2} = \varepsilon N_2$.

Punkts A_1 dala nogriezni OF_1 iekšēji attiecībā

$$\frac{A_1O}{A_1F} = -\frac{N_1}{\varepsilon . N_1} = -\frac{1}{\varepsilon}.$$

Punkts A_2 dala nogriezni OF_1 ārēji attiecībā

$$\frac{A_2O}{A_2F_1} = -\frac{N_2}{\varepsilon . N_2} = -\frac{1}{\varepsilon}.$$

Kā redzams, punkti O, A_1, F_1, A_2 ir četri harmoniski uz taisnes esoši punkti, pie kam punkti A_1, A_2 atrodas arī uz elipses.

No pētījuma [47] par polu un polari redzams, ka (85. zīmējumā) y ass (elipses direktrise) ir pola F_1 polare.

Apzīmējam 86. zīmējumā

$$F_1A_1 = r_1 \text{ un } F_1A_2 = r_2.$$

Tā kā elipse ir simetriska pret centru, tad tai ir divas direktrises, I un II taisne, kuru attālumu no elipses centra C apzīmējam ar l. Tad saskaņā ar veidošanas likumu $r = \varepsilon N$, dabūjam:

$$r_1 = \varepsilon . m,$$

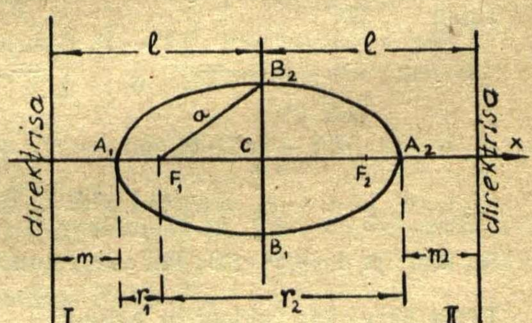
$$r_2 = \varepsilon (2l - m) = 2l\varepsilon - \varepsilon m.$$

Saskaitot šos vienādojumus un ievērojot, ka $r_1 + r_2 = 2a$, dabūjam:

$$r_1 + r_2 = 2l\varepsilon = 2a.$$

Tātad

$$l = \frac{a}{\varepsilon}. \quad (4)$$



86. zīm.

Apzīmējot $F_1B_2 = r_B$, dabūjam:

$$r_B = \varepsilon l = \varepsilon . \frac{a}{\varepsilon} = a.$$

Beidzamā izteiksme rāda, ka veidošanas likumā $r = \varepsilon N$ pieņemtais punkts F_1 ir elipses degpunkts.

Tā kā I taisne ir punkta F_1 direktrise un F_1 ir elipses degpunkts, tad, pamatodamies uz augšā norādīto, varam teikt, ka degpunktam piekārtotā direktrise ir degpunkta polare.

No 87. zīmējuma dabūjam:

$$r_1 = a - e; \quad N_1 = d + e - a,$$

$$r_1 = \varepsilon N = \varepsilon (d + e - a).$$

Tātad

$$a - e = \varepsilon (d + e - a), \qquad (\alpha)$$

$$r_2 = e + a; \quad N_2 = d + e + a,$$

$$r_2 = \varepsilon N_2 = \varepsilon (d + e + a). \qquad (\beta)$$

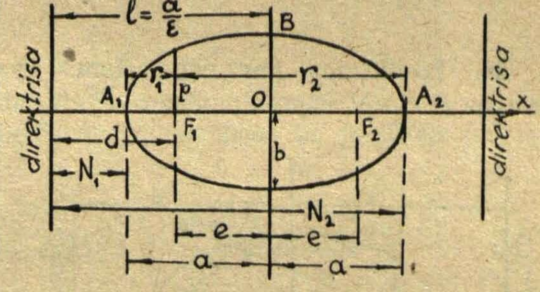
Vienādojumus (α) un (β) saskaitot, dabūjam:

$$a = \varepsilon (d + e). \qquad (5)$$

Atņemot vienādojumu (α) no vienādojuma (β), dabūjam:

$$e = \varepsilon a, \text{ vai arī } \varepsilon = \frac{e}{a}. \qquad (6)$$

ε sauc par *numerisko ekscentricitati.*



87. zīm.

Redzams, ka ordinatas degpunktā dabūjam ar izteiksmi

$$p = \varepsilon \cdot d. \qquad (7)$$

No

$$a = \varepsilon (d + e) = \varepsilon d + \varepsilon e,$$

ievietojot $e = \varepsilon a$, dabūjam

$$a = \varepsilon d + \varepsilon \cdot \varepsilon a = \varepsilon d + \varepsilon^2 a$$

vai arī

$$a (1 - \varepsilon^2) = \varepsilon d.$$

Augšējā vienādojumā liekot $\varepsilon = \frac{e}{a}$, dabūjam:

$$a\left(1 - \frac{e^2}{a^2}\right) = \varepsilon d$$

vai arī

$$a^2 - e^2 = a\varepsilon d.$$

Tā kā $a^2 - e^2 = b^2$, tad

$$b^2 = a\varepsilon d. \tag{8}$$

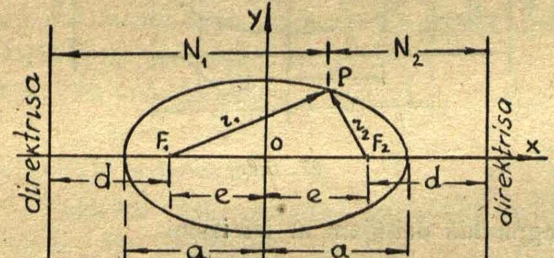
Liekot $\varepsilon d = p$, dabūjam:

$$b^2 = ap. \tag{9}$$

Liekot vienādojumā (8) $\varepsilon = \frac{e}{a}$, dabūjam:

$$b^2 = a \cdot \frac{e}{a} \cdot d = ed. \tag{10}$$

58. Izteiksmes par degstariem. Pielietojot elipses veidošanas likumu $r = \varepsilon N$ elipses punktam P attiecībā uz abiem degpunktiem saskaņā ar 88. zīmējumu, dabūjam:



88. zīm.

$$N_1 = \frac{a}{\varepsilon} + x,$$

$$N_2 = \frac{a}{\varepsilon} - x$$

un

$$r_1 = \varepsilon N_1 = \varepsilon\left(\frac{a}{\varepsilon} + x\right),$$

$$r_2 = \varepsilon N_2 = \varepsilon\left(\frac{a}{\varepsilon} - x\right).$$

No augšējiem vienādojumiem dabūjam:

$$r_1 = a + \varepsilon x,$$

$$r_2 = a - \varepsilon x.$$

59. Elipses pieskaru konstrukcija no punkta ārpus elipses. 89. zīmējumā pieskare elipses punktā P_0 ir taisne t. Stateņi no elipses degpunktiem F_1 un F_2 pret pieskari t attiecīgi apzīmēti ar d_1 un d_2

Elipses punktā $x_0 \mid y_0$ vilktās pieskares vienādojums ir

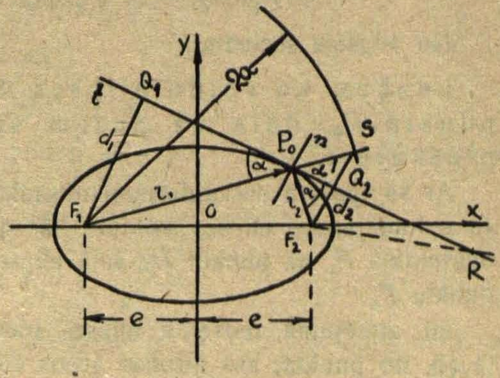
$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - 1 = 0,$$

ko pārveidojot dabūjam:

$$b^2xx_0 + a^2yy_0 - a^2b^2 = 0.$$

Šo vienādojumu pārvēršot normalvienādojumā, dabūjam:

$$\frac{b^2xx_0 + a^2yy_0 - a^2b^2}{\sqrt{b^4x_0^2 + a^4y_0^2}} = 0.$$



89. zīm.

Ievietojot augšējā vienādojuma tekošo koordinatu x, y vietā degpunktu koordinatas

$$F_2 = e \mid 0 \text{ un } F_1 = -e \mid 0,$$

dabūjam attiecīgi degpunktu F_1 un F_2 attālumus no pieskares t:

$$d_2 = \frac{b^2ex_0 - a^2b^2}{\sqrt{b^4x_0^2 + a^4y_0^2}} = -b^2\frac{a^2 - ex_0}{\sqrt{b^4x_0^2 + a^4y_0^2}},$$

$$d_1 = \frac{b^2(-e)\,x_0 - a^2b^2}{\sqrt{b^4x_0^2 + a^4y_0^2}} = -b^2\frac{a^2 + ex_0}{\sqrt{b^4x_0^2 + a^4y_0^2}}$$

un

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{a^2 - ex_0}{a^2 + ex_0} = \frac{a}{a} \cdot \frac{a - \frac{e}{a}x_0}{a + \frac{e}{a}x_0} = \frac{a - \varepsilon x_0}{a + \varepsilon x_0}.$$

Ievērojot [58] dotās r_1 un r_2 izteiksmes, augšējo izteiksmi varam rakstīt:

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{r_1}{r_2}. \qquad (1)$$

Ievērojot izteiksmi (1), 89. zīmējumā redzam, ka

$$\triangle F_1P_0Q_1 \sim \triangle F_2P_0Q_2;$$

tādēļ

$$\sphericalangle F_1P_0Q_1 = \sphericalangle F_2P_0Q_2 = \sphericalangle Q_2P_0S = \alpha.$$

No augšējā secinām:

Leņķus, ko veido elipses degstari r_1 un r_2 elipses punktā P_0, dala uz pusēm šā punkta normale n un pieskare t.

Ar šo īpašību izskaidrojami nosaukumi „degpunkti" un „degstari". Ja iedomājamies elipses konturu kā spoguli, tad stars, kas iziet no degpunkta F_1 uz punktu P_0, šajā elipses punktā tiek atstarots uz degpunktu F_2.

89. zīmējumā redzama elipses pieskares konstrukcija, ja pieskare jāvelk no punkta, kas atrodas ārpus elipses.

Pieskare elipsei no punkta R ir noteikta, ja varam noteikt pieskaršanās punktu P_0. Punkts P_0 ir stara F_1S krustošanās punkts ar elipsi. Kā redzams, uzdevums ir atrisināts ar punkta S konstrukciju.

Kā redzams

$$P_0S = P_0F_2 = r_2.$$

Tātad nogrieznis

$$F_1S = r_1 + r_2,$$

un tādēļ punkta S viena ģeometriskā vieta ir riņķa līnija ar centru F_2 un radiusu $r_1 + r_2$.

Punkta otrā ģeometriskā vieta ir riņķis ar centru R un radiusu RF_2, jo $RS = RF_2$.

DEVĪTĀ NODAĻA

HIPERBOLA

60. Hiperbolas veids. Vispārīgo formulu specializēšana hiperbolas gadījumam. Kā redzējām [48], hiperbolas vienādojums ir:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \mp 1 = 0.$$

Apskatām vispirms līkni, kas dota ar vienādojumu:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \tag{1}$$

Vienādojuma veids rāda, ka hiperbola ir simetriska pret koordinatu asīm.

Liekot $y = 0$, dabūjam hiperbolas krustošanās punktus ar x asi:

$$x = \pm a.$$

$2a$ sauc par hiperbolas *realo* asi.

Ar $x = 0$ dabūjam:

$$y = \pm bi,$$

tātad hiperbolas krustošanās punkti ar y asi ir imaginari, $2b$ sauc par hiperbolas *imaginaro* asi.

Atrisinot vienādojumu (1) attiecībā uz y, dabūjam:

$$y = \pm b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}.$$

Šī izteiksme rāda, ka y ir imaginars ar visām x vērtībām, no $x = 0$ līdz $x = \pm a$.

Tātad intervalā $-a < x < a$ hiperbolai nav realu punktu.

Ar $|x| > a$, augšējā izteiksme rāda, ka y arvien ir reals. Ar $|x| \to \infty$ arī $|y| \to \infty$.

No vienādojuma (1) redzams, ka:

$$\frac{y^2}{b^2} < \frac{x^2}{a^2}.$$

Tātad

$$|y| < \frac{b}{a}|x|.$$

Šī izteiksme rāda, ka hiperbolas ordinatas ir mazākas par taisnes

$$y = \pm \frac{b}{a} x \qquad (2)$$

ordinatām.

Hiperbolas attēls parādīts 90. zīmējumā.

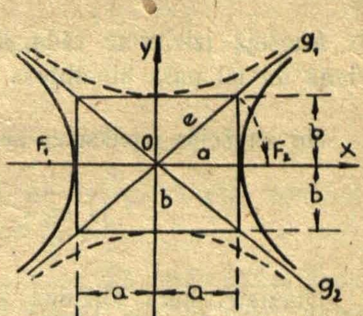
Taišņu g_1 un g_2 vienādojumi doti ar izteiksmi (2).

Hiperbolas vienādojums rāda, ka

$$a_{11} = \frac{1}{a^2}; \quad a_{22} = -\frac{1}{b^2}; \quad a_{33} = -1;$$

$$a_{12} = a_{21} = 0; \quad a_{13} = a_{31} = 0;$$

$$a_{23} = a_{32} = 0.$$



90. zīm.

Virzienus uz hiperbolas bezgalīgi tālajiem punktiem un asimptotu vienādojumus dabūjam, specializējot izteiksmi [46, K] un [46, J], kas dod virziena koeficientu:

$$m = \pm \frac{b}{a} \tag{3}$$

un asimptotu vienādojumu (90. zīm.)

$$y = \pm \frac{b}{a} x. \tag{4}$$

Specializējot pieskares vienādojumu [42, B] hiperbolas gadījumam, dabūjam pieskares vienādojumu, kas vilkta hiperbolas punktā $x_0 | y_0$:

$$\frac{x x_0}{a^2} - \frac{y y_0}{b^2} - 1 = 0. \tag{5}$$

Šis vienādojums, kā zināms, ir arī polares vienādojums, ja punkts $P_0 = x_0 | y_0$ ir pols.

Specializējot izteiksmes [44, E] un [44, F] hiperbolas gadījumam, dabūjam hiperbolas diametru, kas piekārtots chordām ar virzienu m:

$$y = \frac{b^2}{a^2} m \cdot x, \tag{6}$$

un vienādojumu, kas saista piekārtoto diametru virzienus m_1 un m_2:

$$m_1 m_2 = \frac{b^2}{a^2}. \tag{7}$$

Augšējā izteiksme rāda, ka hiperbolas piekārtotie diametri atrodas vienā un tai pašā hiperbolas kvadrantā.

No augšējās izteiksmes secinām:

$$\text{ja } m_1 < \frac{b}{a}, \text{ tad jābūt } m_2 > \frac{b}{a}.$$

Diametrs, kura virziena koeficients ir mazāks par asimptotas virziena koeficientu $\frac{b}{a}$, krusto hiperbolu, bet šim diametram piekārtotais diametrs hiperbolu nekrusto, jo tā virziena koeficients ir lielāks par asimptotas virziena koeficientu $\frac{b}{a}$.

Hiperbolas vienādojumu varam rakstīt:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\gamma=0.$$

Hiperbolas ar $\gamma=-1$ un $\gamma=1$, kā redzējām, sauc par piekārtotām.

Ja $\gamma=0$, tad līkni, kas izteikta ar vienādojumu

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0,$$

arī varam uzskatīt par hiperbolu, kas, kā redzams, sadalās divās taisnēs.

$$y=\pm\frac{b}{a}x.$$

Kā redzams, šis vienādojums izteic abu piekārtoto hiperbolu asimptotas.

Hiperbolas

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0 \tag{1}$$

realā ass ir $2a$ un imaginarā ass $2b$.

Šai hiperbolai piekārtotās hiperbolas

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+1=0 \tag{8}$$

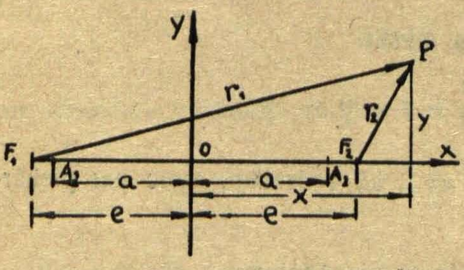
realā ass ir $2b$ un imaginarā $2a$.

Hiperbola, kuras vienādojums ir (1), un tai piekārtotā hiperbola, kuras vienādojums ir (8), parādīta 90. zīmējumā.

Konstrukcijas, kas pamatotas uz hiperbolas, kā otrās kārtas līknes, vispārīgām īpašībām, izdarāmas, piemērojoties konstrukcijām elipses gadījumā [51].

61. Hiperbolas ģeometriska veidošana ar likumu $r_1 - r_2 = \pm 2a$. Pieņemam, ka punktam P, kas veido līkni, ir tāda īpašība, ka no pastāvīgiem punktiem F_1 un F_2 (91. zīm.) uz veidojošo punktu P vilkto attiecīgo radiusu vektoru r_1 un r_2 starpības absolutā vērtība arvien ir $2a$; tātad

$$r_1 - r_2 = \pm 2a. \quad (1)$$



91. zīm.

Izejot no šā veidošanas noteikuma, veidotās līknes vienādojumu dabūjam šādi:

Koordinatu sistemas x asi liekam caur punktiem F_1 un F_2. Koordinatu sākumu liekam nogriežņa F_1F_2 viduspunktā.

Ievērojot 91. zīmējumu, dabūjam:

$$r_1 = \sqrt{(e + x)^2 + y^2},$$

$$r_2 = \sqrt{(x - e)^2 + y^2}.$$

Tad saskaņā ar (1) dabūjam:

$$\sqrt{(e + x)^2 + y^2} - \sqrt{(x - e)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

Augšējo vienādojumu pārveidojot tāpat kā elipses gadījumā un liekot

$$a^2 - e^2 = -b^2, \quad (2)$$

dabū līknes vienādojumu

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \quad (3)$$

kas, kā zināms no agrākā, izteic hiperbolu.

Zīmes $\pm$ līknes vienādojumā (1) norāda, ka līknei ir divi zari. Līknes zaru pa labi no y ass dod izteiksme:

$$r_1 - r_2 = 2a$$

un zaru pa kreisi:

$$r_1 - r_2 = -2a.$$

91. zīmējumā redzams: ja veidojošais punkts P atrodas uz x ass vietā A_2, tad

$$r_1 - r_2 = F_1 A_2 - A_2 F_2 .$$

Tā kā hiperbola ir simetriska pret y asi, tad

$$A_2 F_2 = F_1 A_1 .$$

Ievērojot augšējo, redzams, ka nogrieznis uz x ass

$$A_1 A_2 = r_1 - r_2 = 2a$$

ir hiperbolas reālā ass.

Punktus F_1 un F_2 sauc par hiperbolas *fokusiem* jeb *degpunktiem*, radiusus vektorus r_1 un r_2 par *degstariem*. Degpunkta attālumu e no hiperbolas centra O sauc par hiperbolas *linearo ekscentricitati*. Punktus A_1 un A_2 sauc par hiperbolas *virsotnēm*.

Izteiksme (2) rāda, ka hiperbolas gadījumā

$$a^2 + b^2 = e^2 .$$

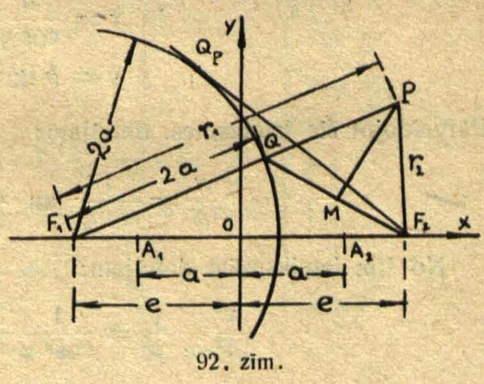
Ievērojot šo izteiksmi, no 90. zīmējuma skaidri redzams: 1) kā dabūt hiperbolas imaginaro pusasi b un asimptotu virzienus, ja dota reālā pusass a un lineārā ekscentricitate e; 2) kā dabūt imaginaro pusasi b un degpunktus, ja dota reālā pusass a un hiperbolas asimptotas.

62. Hiperbolas konstrukcijas (92. zīm.). Pieņemam, ka doti degpunkti F_1 un F_2 un lielums $2a$.

Velkam riņķi ap F_1 kā centru ar radiusu $2a$. Uz šā riņķa ņemam pēc patikas punktu Q. Velkam taisni $F_2 Q$. Šīs taisnes viduspunkta M statenis krusto taisnes $F_1 Q$ pagarinājumu hiperbolas punktā P.

Zīmējumā redzams, ka $F_1 P = r_1$ un $F_2 P = r_2$, $F_1 Q = 2a$. Saskaņā ar konstrukciju $QP = r_2$ un $F_1 Q = F_1 P - QP$, tātad

$$r_1 - r_2 = 2a.$$

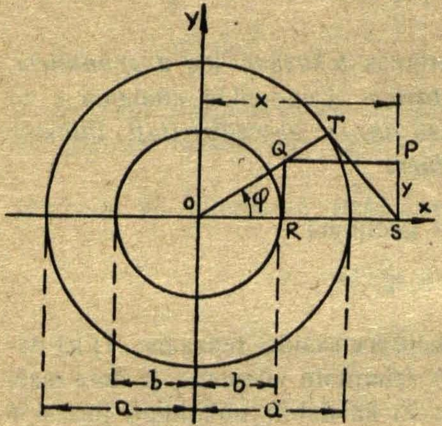


92. zīm.

Ar augšējo konstrukciju veidotie līknes punkti tātad ir hiperbolas punkti.

Ja punkts Q sakrīt ar riņķa pieskares F_2Q_p pieskaršanās punktu Q_p, tad taisne F_1Q_p ir paralela statenim punktā M. Šādā gadījumā punkts P atrodas bezgalībā un taisne F_1Q_p ir hiperbolas asimptota. Kā redzams, velkot riņķi ar radiusu $2a$ no F_1, konstrukcija dod hiperbolas punktus pa labi no y ass. Līdzīga konstrukcija, velkot riņķi no F_2, dod hiperbolas punktus pa kreisi no y ass.

Ja dota reālā pusass a un imaginarā pusass b, tad hiperbolas konstrukciju izdarām ar 93. zīmējumā parādīto paņēmienu.



93. zīm.

Ap koordinatu sākumu O kā centru velkam riņķus ar radiusiem a un b. Šos riņķus sauksim vienu par a riņķi un otru par b riņķi. No punkta O velkam ar virziena leņķi φ taisni līdz a riņķim. Šīs taisnes un a riņķa krustošanās punktā T velkam pieskari, kas krusto x asi punktā S. Tad b riņķa un x ass krustošanās punktā R velkam stateni, kas krusto taisni OT punktā Q. Caur punktu Q vilktās x asij paralelās taisnes un caur S pret x asi vilktā stateņa krustošanās punkts P tad ir hiperbolas punkts, kas būs redzams no sekojošā.

Apzīmējot punkta P koordinatas ar x un y, no 93. zīmējuma dabūjam:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{a}{\cos \varphi} \\ y &= b \operatorname{tg} \varphi \end{aligned}\right\}. \tag{1}$$

Pārveidojot šīs izteiksmes, dabūjam:

$$\frac{x}{a} = \frac{1}{\cos \varphi} \text{ un } \frac{y}{b} = \operatorname{tg} \varphi .$$

No šīm izteiksmēm dabūjam:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{\cos^2 \varphi} - \operatorname{tg}^2 \varphi = 1 .$$

Kā redzams, punkta P koordinatas apmierina hiperbolas vienādojumu; punkts P tātad atrodas uz hiperbolas.

Vienādojumus (1) sauc par hiperbolas vienādojumiem *parametriskā* veidā. Parametrs te ir leņķis φ.

Ja dots hiperbolas konturs, tad, līdzīgi kā elipses gadījumā, dabūjam hiperbolas centru, hiperbolas asu virzienus un realo asi $2a$. Lai dabūtu hiperbolas imaginaro asi, augšējā (93. zīm.) konstrukcija jāizdara apgrieztā kārtā, pieņemot, ka dots hiperbolas punkts P, hiperbolas centrs, asu virzieni un reālā ass.

Imaginarās pusass konstrukciju tad izdarām šādi (93. zīm.):

No dotā hiperbolas punkta P velkam stateni pret x asi un dabūjam krustošanās punktu S. No punkta S velkam pieskari dotajam a riņķim un dabūjam pieskaršanās punktu T. Tālāk dabūjam punktu Q, kurā radiuss OT krustojas ar taisni, kas vilkta caur P paraleli x asij. Statenis no punkta Q pret x asi krusto x asi punktā R. Nogrieznis OR tad ir hiperbolas imaginarā pusass.

63. Hiperbolas veidošana ar likumu $r = \varepsilon N$. Kā redzējām [57] ar augšējo likumu veidotā līkne ir hiperbola, ja:

$$\varepsilon > 1.$$

Hiperbolas vienādojums koordinatu sistemā, kurā x ass iet caur hiperbolas degpunktu F_2 un ir stateniska pret direktrisi — y asi, ir:

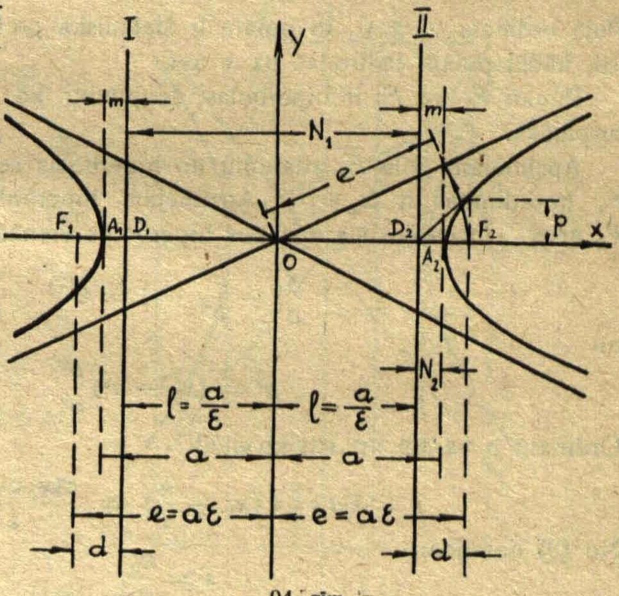
$$x^2(1-\varepsilon^2) - 2dx + \\ + y^2 + d^2 = 0.$$

Līdzīgi, kā elipses gadījumā, iznāk (94. zīm.), ka punktu pāri $A_1\,A_2$ un $D_2\,F_2$ ir četri harmoniski punkti, jo

$$\frac{A_1D_2}{A_1F_2} = \frac{N_1}{\varepsilon N_1} = \frac{1}{\varepsilon}$$

un

$$\frac{A_2D_2}{A_2F_2} = \frac{-N_1}{\varepsilon N_1} = -\frac{1}{\varepsilon}.$$



94. zīm.

Tātad, ja F_2 uzskatām par polu, tad attiecībā pret hiperbolu II taisne ir šā pola polare.

Ievērojot 94. zīmējuma apzīmējumus, redzam, ka attiecīgie punktu A_1 un A_2 radiusi vektori no F_2 ir

$$r_1 = \varepsilon N_1 = \varepsilon (2a - m),$$
$$r_2 = \varepsilon N_2 = \varepsilon m,$$

tādēļ

$$r_1 - r_2 = 2\varepsilon (a - m) = 2a.$$

Tā kā $a - m = l$, tad no augšējā dabūjam

$$l = \frac{a}{\varepsilon}. \qquad (2)$$

Augšējā izteiksme dod direktrises attālumu no līknes centra. Uzskatot direktrisi par polari, direktrises polu dabūjam šādi:

Tā kā šī polare iet caur punktu $P = \frac{a}{\varepsilon} \mid 0$, tad, ieliekot šā punkta koordinatas hiperbolas polares vienādojumā

$$\frac{x x_0}{a^2} - \frac{y y_0}{b^2} - 1 = 0,$$

dabūjam pola F_2 abscisu

$$x_0 = a \varepsilon. \qquad (3)$$

Pola ordinata $y_0 = 0$, jo polare ir stateniska pret x asi — hiperbolas asi, kādēļ polam jāatrodas uz x ass.

Punkti F_1 un F_2 ir hiperbolas degpunkti, kā tas būs redzams no turpmākā.

Apzīmējam pola F_2 attālumu no hiperbolas centra ar x_0. Tad pola F_2 koordinatas ir $x_0 \mid 0$. Apzīmējam hiperbolas ordinatu punktā F_2 ar p. Ievietojot šīs apzīmes hiperbolas vienādojumā, dabūjam:

$$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{p^2}{b^2} - 1 = 0$$

un

$$p^2 = (x_0^2 - a^2) \frac{b^2}{a^2}. \qquad (\alpha)$$

Ordinatu p varam arī izteikt citādi:

$$p = \varepsilon d = \varepsilon \left(x_0 - \frac{a}{\varepsilon}\right) = \frac{\varepsilon (x_0 \varepsilon - a)}{\varepsilon}. \qquad (\beta)$$

No (3) dabūjam

$$\varepsilon = \frac{x_0}{a}.$$

Ievietojot šo vērtību izteiksmē (β), dabūjam:

$$p = (x_0 \frac{x_0}{a} - a) = \frac{x_0^2 - a^2}{a}. \qquad (\gamma)$$

No izteiksmēm (α) un (γ) dabūjam

$$(x_0^2 - a^2) \frac{b^2}{a^2} = \frac{(x_0^2 - a^2)^2}{a^2}$$

vai arī

$$x_0^2 = a^2 + b^2. \qquad (4)$$

Beidzamā izteiksme rāda, ka punkts F_2 ir hiperbolas degpunkts.

Ievērojot, ka $x_0 = e$, no (3) dabūjam:

$$e = \varepsilon a. \qquad (3^a)$$

No 94. zīmējuma redzams, ka

$$a = \varepsilon (e - d).$$

Reizinot šīs izteiksmes abas puses ar e, dabūjam:

$$ae = \varepsilon (e^2 - ed).$$

Augšējās izteiksmes kreisajā pusē ievietojot $e = \varepsilon a$ un dalot ar ε, dabūjam:

$$a^2 = e^2 - ed$$

vai arī

$$e^2 - a^2 = ed.$$

Ievērojot, ka $e^2 - a^2 = b^2$, dabūjam:

$$b^2 = ed. \qquad (5)$$

Ievērojot, ka $e = \varepsilon a$ un

$$p = \varepsilon d, \qquad (6)$$

dabūjam attiecīgi

$$b^2 = a\varepsilon d, \qquad (7)$$

$$b^2 = ap. \qquad (8)$$

No 95. zīmējuma redzams, ka

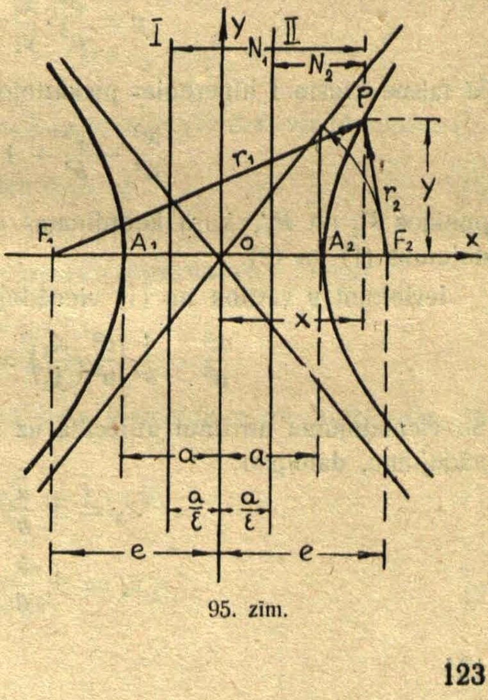
$$r_1 = \varepsilon N_1 = \varepsilon \left(\frac{a}{\varepsilon} + x\right) = a + \varepsilon x,$$

$$r_2 = \varepsilon N_2 = \varepsilon \left(x - \frac{a}{\varepsilon}\right) = \varepsilon x - a.$$

Tātad

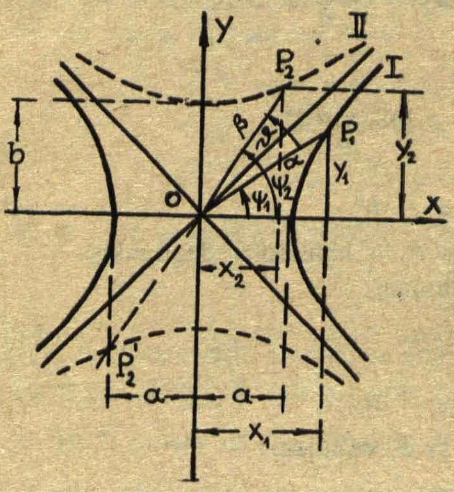
$$r_1 = \varepsilon x + a, \qquad (9)$$

$$r_2 = \varepsilon x - a. \qquad (10)$$



95. zīm.

64. Piekārtotu pusdiametru sakars ar pusasīm. 96. zīmējumā I un II hiperbola ir piekārtotas hiperbolas. Apzīmējot pusdiametru OP_1 ar α un tā virziena leņķi ar ψ_1, dabūjam:



96. zīm.

$$\operatorname{tg}\psi_1 = \frac{y_1}{x_1}.$$

Pusdiametram α ir piekārtots pusdiametrs β. Kā zināms [44], α un β virzienu koeficienti ir saistīti ar noteikumu:

$$\operatorname{tg}\psi_1 \cdot \operatorname{tg}\psi_2 = \frac{b^2}{a^2},$$

kur ψ_2 ir pusdiametra β virziena leņķis.

No augšējās izteiksmes dabūjam:

$$\operatorname{tg}\psi_2 = \frac{b^2}{a^2 \operatorname{tg}\psi_1} = \frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_1}{y_1}.$$

Pusdiametrs β atrodas uz taisnes, kuras vienādojums ir

$$y = \frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_1}{y_1}\cdot x. \tag{1}$$

Šī taisne krusto I hiperbolai piekārtoto II hiperbolu

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0 \tag{2}$$

punktos P_2 un P_2', kuru koordinatas dabūjam, kopīgi atrisinot vienādojumus (1) un (2).

Ievietojot y vērtību no (1) vienādojumā (2), dabūjam:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{1}{b^2}\left(\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_1}{y_1}\right)^2 x^2 + 1 = 0.$$

Šo vienādojumu atrisinot attiecībā uz x un ievērojot I hiperbolas vienādojumu, dabūjam:

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= \pm\frac{a}{b}y_1 \\ y_2 &= \pm\frac{b}{a}x_1 \end{aligned}\right\}. \tag{3}$$

Tā kā

$$\alpha^2 = x_1^2 + y_1^2$$

un

$$\beta^2 = x_2^2 + y_2^2 = \frac{a^2}{b^2} y_1^2 + \frac{b^2}{a^2} x_1^2,$$

tad, ievērojot augšējās izteiksmes, dabūjam:

$$\alpha^2 - \beta^2 = a^2 - b^2. \tag{4}$$

Tā kā leņķis starp pusdiametriem α un β ir:

$$\vartheta = \psi_2 - \psi_1,$$

tad

$$\sin\vartheta = \sin\psi_2 \cos\psi_1 - \cos\psi_2 \sin\psi_1. \tag{5}$$

No 96. zīmējuma dabūjam:

$$\sin\psi_1 = \frac{y_1}{\alpha}; \qquad \cos\psi_1 = \frac{x_1}{\alpha};$$

$$\sin\psi_2 = \frac{y_2}{\beta}; \qquad \cos\psi_2 = \frac{x_2}{\beta}.$$

Ievietojot beidzamajās izteiksmēs x_2 un y_2 vērtības no (3), dabūjam:

$$\sin\psi_2 = \frac{b}{a\beta} x_1; \qquad \cos\psi_2 = \frac{a}{b\,\beta} y_1.$$

Ievietojot dabūtās trigonometrisko funkciju vērtības vienādojumā (5), dabūjam:

$$\alpha\beta \sin\vartheta = ab. \tag{6}$$

65. Līdzīgas un līdzīgi novietotas hiperbolas. Liekot

$$x' = cx,$$
$$y' = cy$$

un ievietojot x un y vērtības no šiem vienādojumiem hiperbolas vienādojumā

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \tag{1}$$

dabūjam vienādojumu

$$\frac{x'^2}{c^2 a^2} - \frac{y'^2}{c^2 b^2} - 1 = 0, \tag{2}$$

kas izteic hiperbolai (1) līdzīgu un līdzīgi novietotu hiperbolu. Še koordinatu sākums ir līdzības centrs. Ar mainīgu c dabūjam līdzīgu un līdzīgi novietotu hiperbolu saimi.

No hiperbolas (2) vienādojuma dabūjam asimptotu vienādojumus:

$$y' = \pm \frac{c^2 b^2}{c^2 a^2} x' = \pm \frac{b^2}{a^2} x', \qquad (3)$$

kas rāda, ka visām minētajām hiperbolām ir viens un tas pats asimptotu pāris.

Kā redzams no vienādojuma (2), ja $c \to 0$, tad hiperbolas pusasis arī tiecas uz 0.

Vienādojumu (2) varam rakstīt:

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} - c^2 = 0.$$

Liekot šinī vienādojumā $c = 0$, dabūjam

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 0$$

vai arī

$$\left(\frac{x'}{a} + \frac{y'}{b}\right)\left(\frac{x'}{a} - \frac{y'}{b}\right) = 0.$$

Šis vienādojums, kā tas redzams no (3), izteic nevien līdzīgu un līdzīgi novietoto hiperbolu asimptotas, bet, kā redzams no augšējā, arī hiperbolu, kuras pusasis ir 0 un kuras pieder pie līdzīgu un līdzīgi novietotu hiperbolu saimes.

Hiperbolas gadījumā paralelu chordu virziena koeficients m_1 un tam piekārtotā diametra virziena koeficients m_2 saistīti ar noteikumu

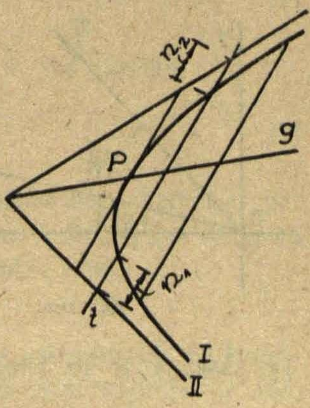
$$m_1 \cdot m_2 = \frac{b^2}{a^2}.$$

Šis noteikums hiperbolas (2) gadījumā dabū šādu veidu:

$$m_1 \cdot m_2 = \frac{c^2 b^2}{c^2 a^2} = \frac{b^2}{a^2}.$$

Kā redzams, līdzīgām un līdzīgi novietotām hiperbolām reizinājums $m_1 m_2$ nav atkarīgs no transformacijas faktora c; šis reizinājums ir tas pats visām minētajām hiperbolām. No augšējā redzams: ja kādai hiperbolai paralelu chordu virzienam m_1 esam dabūjuši piekārtotu diametru ar virzienu m_2, tad uz šā diametra atrodas visu līdzīgi un līdzīgi novietoto hiperbolu paralelo chordu viduspunkti.

Tātad, ja 97. zīmējumā taisne g ir diametrs, kas piekārtots I hiperbolas chordām ar virzienu m_1, tad taisne g ir arī II hiperbolas (asimptotu) diametrs, kas piekārtots chordām ar virzienu m_1. No augšējā redzams, ka chordas nogriežņi n_1 un n_2 starp asimptotām un hiperbolu ir vienlīdzīgi. Tāpat redzams, ka pieskaršanās punkts dala uz pusēm hiperbolas pieskares nogriezni starp asimptotām.

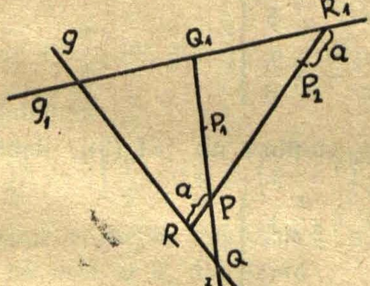


97. zīm.

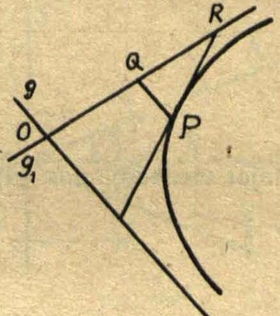
Uz augšējā pamatojas šādas konstrukcijas:

a) Dotas hiperbolas asimptotas g un g_1 un hiperbolas punkts. Konstruēt hiperbolu.

Caur doto punktu P (98. zīmējumā) velkam taisni t. No šīs taisnes un asimptotas g_1 krustošanās punkta Q_1 nogriežam $Q_1 P_1 = QP$. Punkts P_1 tad ir hiperbolas punkts. Šādā kārtā, konstrukciju turpinot, varam zīmēt pēc patikas hiperbolas punktus.



98. zīm.



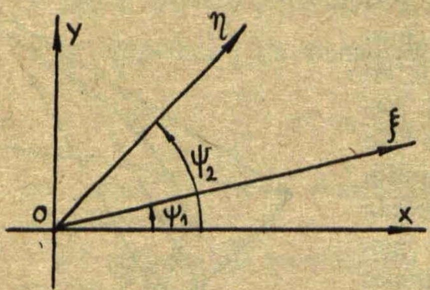
99. zīm.

b) Dota hiperbola un tās asimptotas. Konstruēt pieskari hiperbolas punktā P. 99. zīmējumā velkam caur hiperbolas punktu P paraleli asimptotai g taisni, kas krusto asimptotu g_1 punktā Q. Nogriežam

$$QR = OQ.$$

Taisne caur R un P tad ir pieskare hiperbolas punktā P.

66. Hiperbolas vienādojums, attiecināts uz piekārtotiem diametriem kā koordinatu asīm. 100. zīmējumā ξ un η asis liktas piekārtoto diametru virzienos. Koordinatu asu ξ un η attiecīgie leņķi ar x asi apzīmēti ar



100. zīm.

$$\psi_1 \text{ un } \psi_2.$$

Pārejai no taisnleņķa uz slīpleņķa koordinatu sistemu lietojam pazīstamās formulas:

$$\left.\begin{aligned} x &= \xi \cos\psi_1 + \eta \cos\psi_2 \\ y &= \xi \sin\psi_1 + \eta \sin\psi_2 \end{aligned}\right\}. \quad (1)$$

Te, saskaņā ar 96. zīmējumu:

$$\cos\psi_1 = \frac{x_1}{\alpha}; \qquad \sin\psi_1 = \frac{y_1}{\alpha}; \quad (2)$$

$$\cos\psi_2 = \frac{x_2}{\beta}; \qquad \sin\psi_2 = \frac{y_2}{\beta}. \quad (3)$$

Ievietojot trigonometrisko funkciju vērtības no (2) un (3) vienādojumos (1), dabūjam:

$$\left.\begin{aligned} x &= \xi\frac{x_1}{\alpha} + \eta\frac{x_2}{\beta} \\ y &= \xi\frac{y_1}{\alpha} + \eta\frac{y_2}{\beta} \end{aligned}\right\}. \quad (4)$$

Ievietojot vienādojumos (4) x_2 un y_2 vērtības no [64 (3)], dabūjam:

$$\left.\begin{aligned} x &= \xi\frac{x_1}{\alpha} + \eta\frac{a}{\beta b} y_1 \\ y &= \xi\frac{y_1}{\alpha} + \eta\frac{b}{\beta a} x_1 \end{aligned}\right\}. \quad (5)$$

Vienādojumus (5) dalām — pirmo ar a un otro ar b — un ievedam, saskaņā ar [62 (1)] parametru, leņķi φ;

tad dabūjam:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{a} &= \frac{\xi}{\alpha}\cdot\frac{1}{\cos\varphi} + \frac{\eta}{\beta}\cdot \operatorname{tg}\varphi \\ \frac{y}{b} &= \frac{\xi}{\alpha}\operatorname{tg}\varphi + \frac{\eta}{\beta}\cdot\frac{1}{\cos\varphi} \end{aligned}\right\}. \quad (6)$$

No vienādojumiem (6) dabūjam:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{\xi^2}{\alpha^2}-\frac{\eta^2}{\beta^2}. \tag{7}$$

Tā kā vienādojuma (7) kreisā puse nolīdzinās 1, tad rakstām:

$$\frac{\xi^2}{\alpha^2}-\frac{\eta^2}{\beta^2}-1=0. \tag{8}$$

Šis vienādojums rāda: ja pieņem hiperbolas piekārtotus diametrus par koordinatu asīm, tad hiperbolas vienādojumam ir tāds pats veids kā koordinatu sistemā, kuras asis sakrīt ar hiperbolas asīm.

67. Hiperbolas vienādojums, attiecināts uz asimptotām kā koordinatu asīm (101. zīm.). Apzīmējam leņķi starp asimptotām ar φ, tad, saskaņā ar zīmējumu un koordinatu pārveidošanas formulām [66 (1)], dabūjam:

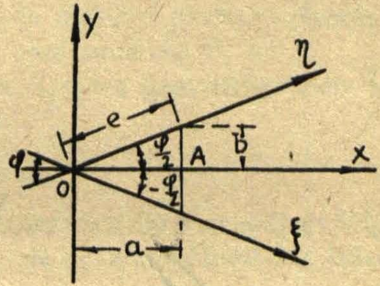
$$\left.\begin{aligned} x&=\xi\cos\left(-\frac{\varphi}{2}\right)+\eta\cos\frac{\varphi}{2}=\left(\xi+\eta\right)\cos\frac{\varphi}{2}\\ y&=\xi\sin\left(-\frac{\varphi}{2}\right)+\eta\sin\frac{\varphi}{2}=\left(\eta-\xi\right)\sin\frac{\varphi}{2}\end{aligned}\right\}. \tag{1}$$

Šinīs formulās ievietojam:

$$\cos\frac{\varphi}{2}=\frac{a}{e} \text{ un } \sin\frac{\varphi}{2}=\frac{b}{e}, \tag{2}$$

tad dabūjam:

$$x=\left(\xi+\eta\right)\frac{a}{e} \text{ un } y=\left(\eta-\xi\right)\frac{b}{e}.$$



101. zīm.

Dalot augšējās izteiksmes, pirmo ar a un otro ar b, dabūjam:

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{a}&=\frac{\xi+\eta}{e}\\ \frac{y}{b}&=\frac{\eta-\xi}{e}\end{aligned}\right\}. \tag{3}$$

No izteiksmēm (3) dabūjam:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{(\xi+\eta)^2-(\eta-\xi)^2}{e^2}=\frac{4\xi\eta}{e^2}. \tag{4}$$

Tā kā vienādojuma (4) kreisā puse ir vienlīdzīga 1, tad rakstām:

$$4\xi\eta = e^2. \tag{5}$$

Tā kā

$$\sin\varphi = 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2},$$

tad, ievietojot šinī izteiksmē $\sin\frac{\varphi}{2}$ un $\cos\frac{\varphi}{2}$ vērtības no (2), dabūjam:

$$\sin\varphi = \frac{2ab}{e^2} \tag{6}$$

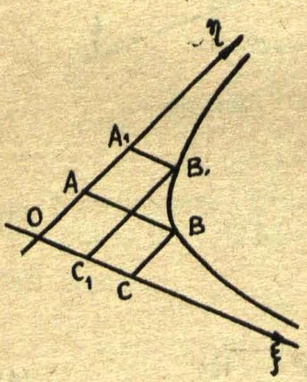
un

$$e^2 = \frac{2ab}{\sin\varphi}. \tag{7}$$

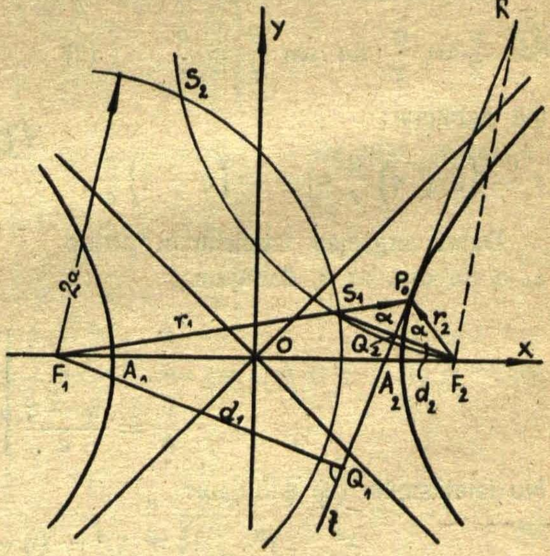
Ievietojot e^2 vērtību no (7) vienādojumā (5), dabūjam:

$$2\,\xi\eta\sin\varphi = ab. \tag{8}$$

Šīs formulas ģeometrisko nozīmi rāda 102. zīm. Formula izteic, ka paralelograms $OABC$ = paralelogramam $OA_1B_1C_1$, vai arī, ka visu paralelogramu laukumi ir vienlīdzīgi, ja paralelogramu malas atrodas uz hiperbolas asimptotām un viens stūris uz hiperbolas.



102. zīm.



103. zīm.

68. Pieskaru konstrukcija no ārpus hiperbolas dota punkta. Pieņemam, ka 103. zīmējumā taisne t ir hiperbolas pieskare punktā P_0. No hiperbolas degpunktiem velkam stateņus d_1 un d_2 pret šo pieskari un dabūjam attiecīgos punktus Q_1 un Q_2, kuros stateņi krustojas ar pieskari. Apzīmējam stateņu garumus ar d_1 un d_2. Ar to pašu paņēmienu kā elipses gadījumā dabūjam

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{r_1}{r_2}, \tag{1}$$

kur r_1 un r_2 ir attiecīgie punkta P_0 radiusi vektori no degpunktiem F_1 un F_2.

Ievērojot (1), redzam, ka

$$\triangle F_1Q_1P_0 \sim \triangle F_2Q_2P_0.$$

No augšējā secinām:

$$\sphericalangle F_1P_0Q_2 = \sphericalangle F_2P_0Q_2 \tag{2}$$

un

$$F_2P_0 = S_1P_0 = r_2;$$

tātad

$$F_1S_1 = r_1 - r_2 = 2a. \tag{3}$$

Izteiksme (2) rāda, ka, pieskare un normale dala uz pusēm leņķus starp pieskaršanās punkta radiusiem vektoriem. No 103. zīmējuma redzams, ka pieskares konstrukcijai no ārpus hiperbolas esošā punkta R jāatrod punkts S_1, jo meklētās pieskares pieskaršanās punkts atrodas uz taisnes, kas iet caur punktiem F_1 un S_1.

No izteiksmes (3) secinām, ka punkta S_1 viena ģeometriskā vieta ir riņķis ar centru F_1 un radiusu $2a$. Tā kā

$$S_1\,O_2 = Q_2\,F_2,$$

tad iznāk, ka S_1 otrā ģeometriskā vieta ir riņķis ar centru R un radiusu RF_2.

Tātad pieskares konstrukciju no punkta R ārpus hiperbolas izdarām šādi:

Ap punktu R velkam riņķi, kura radiuss ir punkta R attālums no tuvākā degpunkta F_2. Velkam riņķi ap tālāko degpunktu F_1 ar radiusu $2a$. Šie riņķi krustojas punktos S_1 un S_2.

Velkot taisni caur $F_1\,S_1$, dabūjam šīs taisnes krustošanās punktu P_0 ar punktam R tuvāko hiperbolas zaru. Punkts P_0 ir meklētās pieskares pieskaršanās punkts.

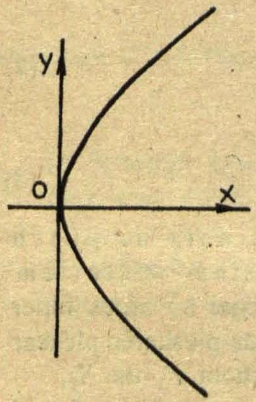
Velkot taisni $F_1\,S_2$, dabūjam pieskaršanās punktu P_0'. Taisne caur punktiem R un P_0' ir otra pieskare no punkta R.

PARABOLA

69. Parabolas veids. Vispārīgo formulu specializēšana parabolas gadījumam. Pētījumā [49] redzējām, ka parabolas centrs atrodas bezgalībā un ka parabolas vienādojums ir:

$$y^2 = 2px. \tag{1}$$

Vienādojums rāda, ka līkne ir simetriska pret x asi. Tā kā y ar negativiem x ir imaginars, tad redzams, ka līkne atrodas vienā pusē no y ass. Ar $x = 0$ arī $y = 0$; līkne tātad iet caur koordinatu sākuma punktu. Ar $x = \infty$, dabūjam $y = \pm \infty$. Līknes veidu rāda 104. zīmējums.



[104. zīm.

Rakstot parabolas vienādojumu veidā

$$y^2 - 2px = 0,$$

redzam, ka:

$$a_{11} = 0;\ a_{22} = 1;\ a_{33} = 0;\ a_{12} = a_{21} = 0;$$

$$a_{13} = a_{31} = -p;\ a_{23} = a_{32} = 0.$$

Ar šiem koeficientiem specializējam otrās kārtas līknēm kopējās formulas parabolas gadījumam.

Specializējot formulu [42, B], dabūjam pieskares vienādojumu parabolas punktā $P_0 = x_0 \mid y_0$

$$y\,y_0 = p\,(x + x_0). \tag{2}$$

Ja punkts $P_0 = x_0 \mid y_0$ neatrodas uz parabolas un to uzskatām par polu, tad vienādojums (2) ir polam P_0, attiecībā uz parabolu, piekārtotās polares vienādojums.

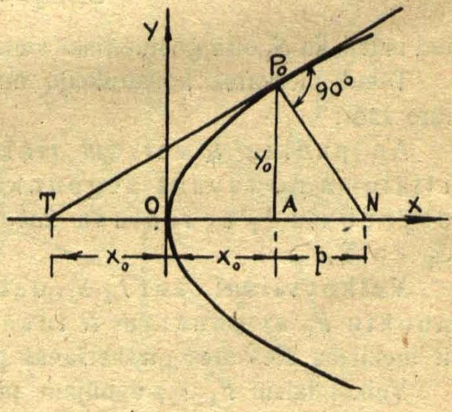
Nogriezni P_0T uz pieskares (105.zīm.) parasti sauc par *pieskari*. Šā nogriežņa projekciju uz x ass, nogriezni TA, sauc par *apakšpieskari*. Nogriezni P_0N uz līknes normales parasti sauc par *normali*. Normales projekciju uz x ass, nogriezni AN, sauc par *apakšnormali*.

Liekot pieskares vienādojumā (1) $y = 0$, dabūjam

$$0 \cdot y_0 = p\,(x + x_0).$$

No šā vienādojuma dabūjam punkta T abscisu

$$x = -x_0. \tag{3}$$



105. zīm.

Šī izteiksme rāda, ka koordinatu sākuma punkts O ir parabolas apakšpieskares viduspunkts.

Tā kā

$$\triangle P_0AN \sim \triangle TAP_0,$$

tad:

$$\frac{AN}{y_0} = \frac{y_0}{2x_0} \text{ un } AN = \frac{y_0^2}{2x_0}.$$

Liekot augšējā izteiksmē

$$y_0^2 = 2px_0,$$

dabūjam:

$$AN = \frac{2px_0}{2x_0} = p. \tag{4}$$

Lielumu p sauc par parabolas *parametru.*

Izteiksme (4) rāda, ka parabolas apakšnormale ir pastāvīgs lielums, kas vienlīdzīgs parabolas parametram.

Specializējot izteiksmi [44, F], dabūjam parabolas gadījumā:

$$m_1 \cdot m_2 = 0. \tag{5}$$

Izteiksme (5) rāda, ka katrai vērtībai $m_2 \neq 0$ atbilst $m_1 = 0$.

Apzīmējot paralelu chordu virzienu ar m_2 un šim virzienam piekārtota diametra virzienu ar m_1, redzam, ka visi parabolas diametri ir paraleli x asij, t. i. parabolas asij. Specializējot vienādojumu [44, E], dabūjam: chordām ar virzienu m piekārtotā diametra vienādojumu

$$y = \frac{p}{m}. \tag{6}$$

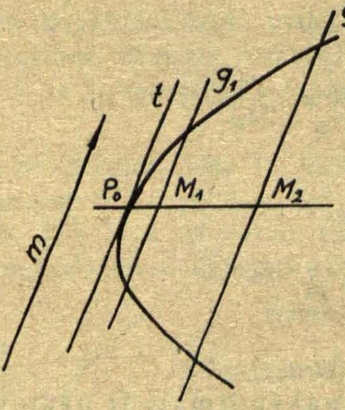
70. Dažas konstrukcijas. 1) Dots parabolas konturs un virziens m. Vilkt pieskari parabolai ar doto virzienu.

Velkam paraleli dotajam virzienam m divas chordas g_1 un g_2 (106. zīm.). Caur šo chordu viduspunktiem M_1 un M_2 iet parabolas diametrs, kas krusto parabolu punktā P_0. Taisne t caur P_0, kas paralela virzienam m, ir meklētā pieskare.

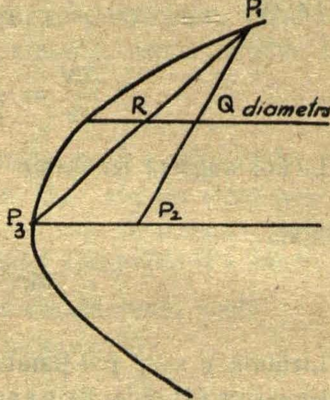
2) Dots parabolas konturs un diametrs. Dabūt šim diametram piekārtoto chordu virzienu (107. zīm.).

Uz taisnes caur pēc patikas ņemtu parabolas punktu P_1 nogriežam $QP_2 = QP_1$. Velkam taisni caur punktu P_2 paraleli dotajam diametram.

Šī taisne krusto parabolas konturu punktā P_3. Tā kā te $P_3R = RP_1$, tad nogriežņa $P_1\ P_3$ virziens ir diametram piekārtoto chordu virziens.



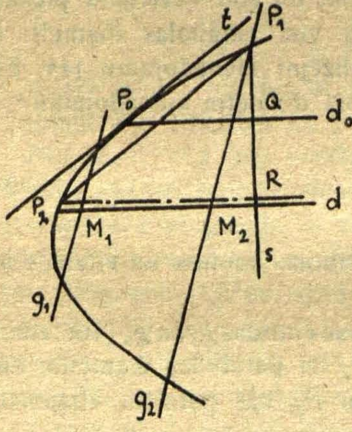
106. zīm.



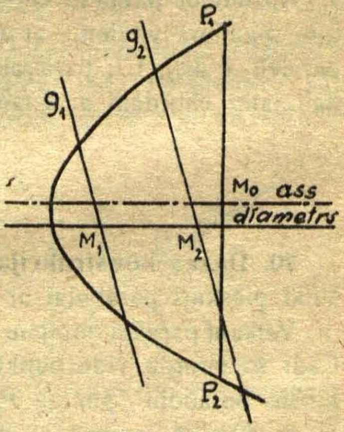
107. zīm.

3) Dots parabolas konturs un uz tā punkts P_0. Konstruēt pieskari punktā P_0 (108. zīm.).

Dabūjam diametra d virzienu; tas iet caur divu paralelu chordu viduspunktiem M_1 un M_2. Diametrs d_0 ir $\parallel$ diametram d. Pieskare t punktā P_0 ir paralela diametram d_0 piekārtoto chordu virzienam $P_1\ P_2$.



108. zīm.



109. zīm.

4) Dots parabolas konturs. Dabūt parabolas asi (109. zīm.).

Diametru, tātad arī ass virzienu dabūjam, velkot taisni caur paralelu chordu g_1, g_2 viduspunktiem M_1 un M_2. Asij piekārtotās chordas ir stateniskas pret ass virzienu. Ass tātad iet caur diametram stateniskas chordas $P_1\ P_2$ viduspunktu M_0.

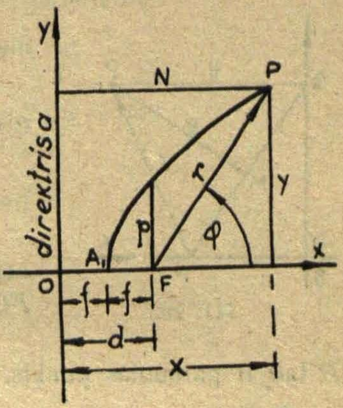
71. Parabolas ģeometriska veidošana ar likumu $r = \varepsilon N$. Šādā gadījumā, kā redzējām [57], veidotā līkne ir parabola, ja

$$\varepsilon = 1. \tag{1}$$

Ievietojot vienādojumā [57 (3)] šo ε vērtību, dabūjam parabolas vienādojumu

$$y^2 - 2dx \pm d^2 = 0. \tag{2}$$

Koordinatu sistema te novietota šādi (110. zīm.): degpunkts F atrodas uz x ass, un y ass ir parabolas direktrise. Vienādojums (2) rāda, ka līkne ir simetriska pret x asi; tātad šinī taisnleņķu koordinatu sistemā x ass ir parabolas ass.



110. zīm.

Ievērojot veidošanas likumu, redzam, ka parabolas virsotne dala uz pusēm degpunkta attālumu no direktrises.

Līknes ordinata degpunktā ir $p = \varepsilon d$, bet tā kā $\varepsilon = 1$, tad parabolas gadījumā

$$p = d. \tag{9}$$

Kā redzams no 110. zīmējuma,

$$N = d + r \cos \varphi,$$

$$\frac{N}{r} = \frac{d}{r} + \cos \varphi. \tag{10}$$

Parabolas gadījumā

$$\frac{N}{r} = 1.$$

Ja $\varphi = 180^\circ$, tad veidojošais punkts sakrīt ar punktu A_1 uz x ass. Tad $\cos 180^\circ = -1$. Redzams, ka šādā gadījumā $r_{A_1} = \frac{d}{2}$.

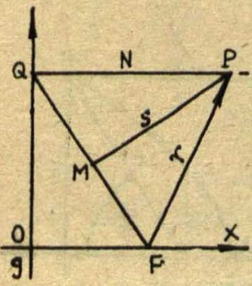
Ja $\varphi = 0^\circ$, tad punkts P arī ieņem vietu uz x ass. Šādā gadījumā attiecība $\frac{N}{r}$ tikai tad dabū vērtību 1, ja $r = \infty$. Parabolas otra virsotne tātad atrodas bezgalībā.

Tā kā otrās kārtas līknes diametrs iet caur līknes centru, tad parabolas gadījumā, kad centrs ir bezgalībā, visiem parabolas diametriem jābūt paraleliem parabolas asij.

Apzīmējam degpunkta attālumu no parabolas virsotnes ar f, tad $p = 2f$ un

$$\frac{p}{A_1F} = \frac{2f}{f} = 2.$$

Šī īpašība dod skaidri redzamu degpunkta konstrukciju, ja dots parabolas konturs un parabolas ass.



111. zīm.

Uz parabolas veidošanas likuma $r = N$ pamatojas šādas parabolas konstrukcijas:

1) Dots parabolas degpunkts F un direktrise g. Konstruēt parabolas punktus (111. zīm.).

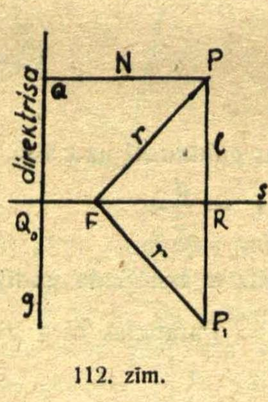
Uz direktrises g pēc patikas pieņemam punktu Q.

Caur punktu Q velkam taisni t paraleli x asij. Nogriežņa FQ viduspunktā M velkam pret FQ stateni s.

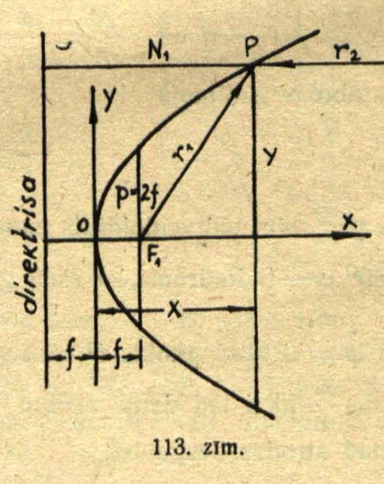
Taisnes t un stateņa s krustošanās punkts P tad ir parabolas punkts, jo šī konstrukcija dod $r = N$.

2) Dots parabolas degpunkts F un direktrise g. Parabolas punktu P dabūjam šādi:

Uz taisnes s, kas iet caur punktiem Q_0 un F un ir stateniska pret direktrisi, pieņemam pēc patikas punktu R.



112. zīm.



113. zīm.

Punktā R velkam stateni l pret taisni s. Riņķis ap F ar radiusu $Q_0 R$, tad nogriež uz stateņa l parabolas punktu P. Skaidri redzam, ka arī šī konstrukcija dod $r = N$.

Pārveidojam koordinatu sistemu, pārnesot koordinatu sākumu uz parabolas virsotni un liekot y asi paraleli direktrisei (113. zīm.). Kā redzams:

$$r_1 = \sqrt{(x - f)^2 + y^2},$$

$$N_1 = x + f.$$

Ievērojot, ka parabolas gadījumā $\varepsilon = 1$, dabūjam:

$$\sqrt{(x - f)^2 + y^2} = x + f,$$

vai

$$x^2 - 2fx + f^2 + y^2 = x^2 + 2fx + f^2,$$

un

$$y^2 = 4fx.$$

Tā kā koordinata degpunktā:

$$p = 2f,$$

tad parabolas vienādojums dabū veidu:

$$y^2 = 2px.$$

No augšējā redzams, ka parametrs p parabolas kononiskā vienādojumā ir ordinata degpunktā.

Kā tikko aprādīts, uz parabolas ass esošā otrā virsotne A_2 (110. zīm.) atrodas bezgalībā.

Bezgalībā tad atrodas arī parabolas centrs un, tā kā līkne ir simetriska pret centru, tad parabolai ir arī otrs degpunkts F_2 un otra direktrise, kas abi atrodas bezgalībā. No tā mēs varam secināt, ka no bezgalībā esošā degpunkta F_2 uz galībā esošo parabolas punktu P vilktais radiuss vektors r_2 ir paralels parabolas asij.

Uzskatām parabolu par elipsi ar bezgalīgi lielu pusasi a un bezgalīgi lielu linearo ekscentricitati e.

Starpība

$$a - e = f$$

ir galīgs lielums. No veidošanas likuma

$$r_1 + r_2 = 2a$$

dabūjam:

$$r_1 = 2a - r_2.$$

113. zīmējumā redzams, ka:

$$r_2 = 2e - q,$$

kur q ir r_1 projekcija uz x ass; tātad:

$$r_1 = 2a - 2e + q = 2(a - e) + q = 2f + q = x + f.$$

Tā kā $x + f = N$, tad augšējo izteiksmi varam rakstīt

$$r_1 = N.$$

No tikko noskaidrotā redzams, ka, veidodami elipsi, kuras $a = \infty$ un $e = \infty$, dabūjam līkni, kas veidota ar likumu $r = N$, tātad parabolu.

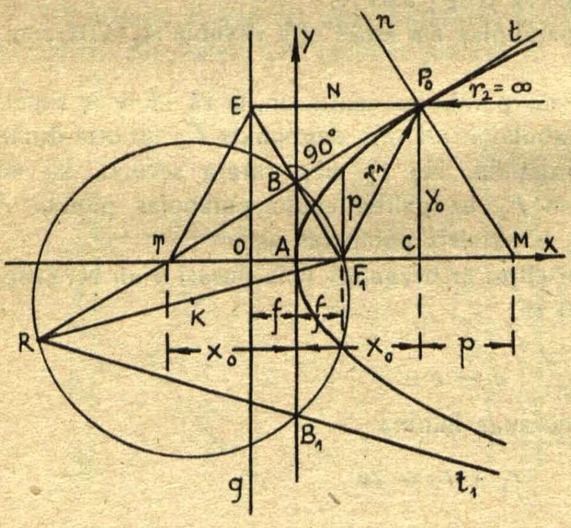
72. Pieskaru konstrukcija no punkta ārpus parabolas un dažas parabolu īpašības. 114. zīmējumā doti: parabolas degpunkts F_1 un direktrise — taisne g. Liekam x asi caur F_1 un $\perp$ pret direktrisi g. Kā zināms, parabolas virsotne A ir nogriežņa OF_1 viduspunkts.

Ja punkts P_0 ir parabolas punkts, tad, kā agrāk norādīts, punkts A ir parabolas punkta P_0 apakšpieskares viduspunkts.

No punkta T, kurā parabolas punkta P_0 pieskare krusto x asi, velkam ar radiusu $F_1 P_0 = r$ riņķi, kas krusto direktrisi punktā E. Ar šo konstrukciju dabūtais četrstūris TEP_0F_1 ir rombs, jo:

1) Saskaņā ar konstrukciju $TE = r$, un tā kā $TO = x_0 - f$ un arī $F_1C = x_0 - f$, tad $\triangle TOE \cong \triangle F_1 CP_0$; tādēļ $TE \parallel F_1 P_0$; $OE = CP_0$.

2) No augšējā secinām, ka taisne $EP_0 \parallel x$ asij. Tā kā punkts P_0 ir parabolas punkts, tad



114. zīm.

$$EP_0 = N = r.$$

3) Tā kā $TE \parallel F_1 P_0$, $EP_0 \parallel x$ asij un $N = r$, tad redzams, ka četrstūris TEP_0F_1 ir rombs.

Tā kā punkts A ir romba diagonales EF_1 projekcijas viduspunkts uz x ass, tad romba diagonales EF_1 viduspunkts B, kas arī ir romba diagonaļu krustošanās punkts, atrodas uz y ass, kas iet caur punktu A.

Romba diagonaļu krustošanās leņķis $\measuredangle F_1BP_0$ ir 90^0.

No nule aprādītā secinām:

Parabolas pieskare un pret šo pieskari no degpunkta F_1 vilktais statenis krustojas uz virsotnes pieskares.

Tā kā $\triangle EBP_0 \cong \triangle F_1BP_0$, tad $\measuredangle EP_0B = \measuredangle F_1P_0B$. Punkta P_0 degstars r_2 nāk no bezgalīgi tālā degpunkta F_2; tādēļ r_2 ir paralels x asij. Ievērojot minēto, varam secināt, ka parabolas punkta P_0 pieskare un normale dala uz pusēm leņķus starp punkta P_0 radiusiem vektoriem.

Tā kā romba diagonales EF_1 projekcija uz x ass $OF = p$, tad arī parabolas normales P_0M projekcijai CM uz ass jābūt p, jo $P_0M \parallel EF_1$. Tātad: parabolas apakšnormale ir pastāvīgs lielums un ir vienlīdzīga parabolas ordinatai degpunktā.

114. zīmējumā redzama pieskares konstrukcija no kāda punkta R, kas neatrodas uz parabolas.

Pieskare parabolas punktā P_0, kā redzams, ir noteikta ar punktiem R un B. Punkts R ir dots. Punkta B viena ģeometriskā vieta ir parabolas virsotnes pieskare, t. i. y ass. Punkta B otra ģeometriskā vieta ir riņķis ar diametru RF_1, jo $\measuredangle RBF_1 = 90^0$.

Pamatojoties uz augšējo, velkam riņķi ar diametru RF_1; šis riņķis krusto parabolas virsotnes pieskari — y asi punktos B un B_1.

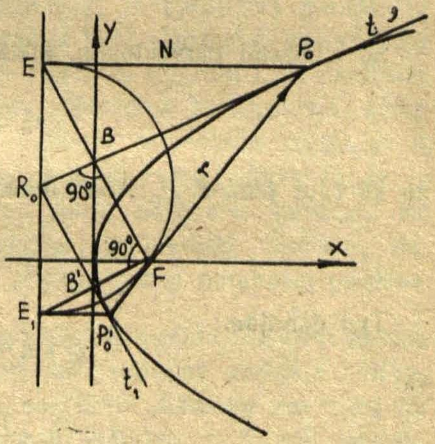
Taisne caur R un B, kā arī taisne caur R un B_1 tad ir parabolas pieskares no punkta R.

Pieskaršanās punktus, piemēram, punktu P_0, dabūjam šādi:

Velkam taisni caur punktiem F_1 un B. Šī taisne krusto parabolas direktrisi punktā E. Taisne caur punktu E, kas paralela x asij, krusto pieskari t pieskaršanās punktā P_0.

Ja punkts R_0, no kura velkam pieskari parabolai, atrodas uz parabolas direktrises (115. zīm.), tad, kā redzams, $R_0F = R_0E$. Riņķis ap R_0 ar radiusu R_0F krusto direktrisi punktos E un E_1. Leņķis $\measuredangle EFE_1 = 90^0$. Tātad $EF \perp E_1F$, un tādēļ arī $t \perp t_1$.

Augšējo īpašību izteicam tā: parabolas stateniskās pieskares krustojas uz direktrises.

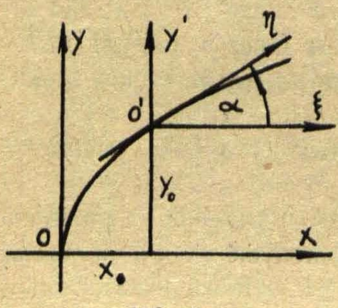


115. zīm.

Parabolas chorda $P_0 P_0'$ iet caur degpunktu E, kas redzams no sekojošā.

Kā zināms, chorda $P_0 P_0'$ ir punkta R_0 polare un F_1 ir direktrises pols; tādēļ, ja R_0 kustas uz direktrises, R_0 polarei $P_0 P_0'$ jāgriežas ap direktrises polu F_1; tātad chordai $P_0 P_0'$ jāiet caur degpunktu F.

73. Parabolas vienādojums attiecībā uz piekārtotiem diametriem kā koordinatu asīm. 116. zīmējumā pieņemam par ξ asi parabolas diametru un par η asi šim diametram piekārtoto pieskari punktā O'. Ievērojot 116. zīmējumā pieņemtos apzīmējumus, transformacijas formulās [25] jāliek:



116. zīm.

$$\alpha = 0 \text{ un } \beta = \alpha.$$

Transformacijas formulas tad dabū veidu:

$$x = x_0 + \xi + \eta \cos \alpha,$$

$$y = y_0 + \eta \sin \alpha.$$

Ievietojot x un y izteiksmes parabolas vienādojumā

$$y^2 = 2px,$$

dabūjam:

$$(y_0 + \eta \sin \alpha)^2 = 2p\,(x_0 + \xi + \eta \cos \alpha).$$

Šo izteiksmi pārveidojam, atklājot iekavas un ievērojot, ka

$$y_0^2 = 2px_0$$

un ka caur punktu P_0 vilktā diametra vienādojums ir

$$y = \frac{p}{m}.$$

Tad dabūjam:

$$\eta^2 \sin^2\alpha = 2p\xi$$

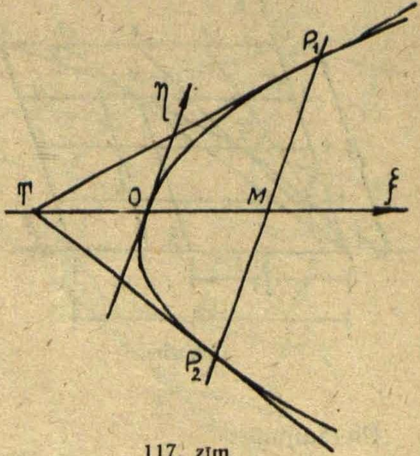
vai

$$\eta^2 = 2\,\frac{p}{\sin^2\alpha}\,\xi = 2p'\xi\,. \tag{1}$$

Kā redzams, parabolas vienādojumam jaunajā koordinatu sistemā ir agrākais veids.

Vienādojums (1) rāda, ka parabola jaunajā koordinatu sistemā ir slīpi simetriska.

Tas nozīmē, ka punktam $P_1 = a|b$ (117. zīm.) atbilst punkts $P_2 = a \mid -b$. Šīs slīpās simetrijas dēļ punkta P_1 pieskare krustojas ar punkta P_2 pieskari ξ ass punktā T. Šā punkta polare ir chorda $P_1\,P_2$.

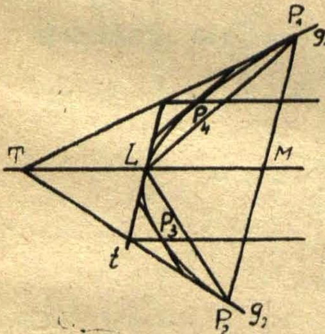


117. zīm.

No teiktā izriet, ka punkti TOM un parabolas bezgalīgi tālais punkts ir četri harmoniski punkti. Parabolas bezgalīgi tālajam punktam atbilstošais punkts O tādēļ atrodas nogriežņa TM vidū.

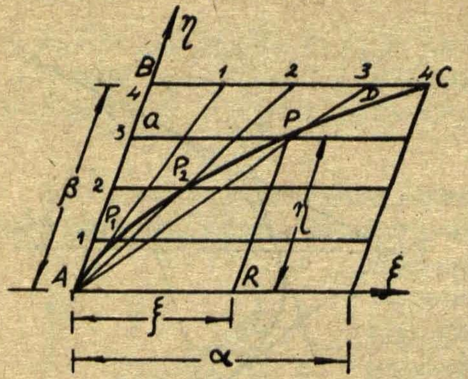
74. Dažas parabolas konstrukcijas.

a) Dotas divas parabolas pieskares ar pieskaršanās punktiem. Konstruēt parabolas punktus (118. zīm.). Caur pieskaru g_1 un g_2 krustošanās punktu T un chordas $P_1\,P_2$ viduspunktu M iet parabolas diametrs, un TM viduspunkts L ir parabolas punkts, kā tas parādīts [73]. Taisne t, kas paralela chordai $P_1\,P_2$ un iet caur L, ir parabolas pieskare. Norādīto konstrukciju atkārtojam, uzskatot par dotām pieskares g_2 un t ar pieskaršanās punktiem P_2 un L; dabūjam jaunu parabolas punktu. Šo konstrukciju pakāpeniski turpinot, dabūjam arvien jaunus parabolas punktus.



118. zīm.

b) Dota parabolas pieskare ar pieskaršanās punktu A un šai punktā pieskarei piekārtotais diametrs. Dots arī parabolas punkts C. Konstruēt parabolu (119. zīm.). Pieņemam doto diametru par ξ asi uu doto pieskari par η asi. Velkam caur punktu C ξ asij paralelu taisni. Nogriežņus AB un BC iedalām pēc patikas daudzās vienādās daļās. Apzīmējam dalītājpunktus uz η ass virzienā no A uz B ar 1, 2... m un uz nogriežņa BC virzienā no B uz C arī ar 1, 2... m. Caur η ass punktiem 1, 2,... m velkam paraleles ξ asij. Taisne caur punktu A un nogriežņa BC punktu 1 krusto pirmo paraleli punktā P_1. Taisne caur A un punktu 2 uz nogriežņa BC krusto otro paraleli punktā P_2. Punkti, kas dabūti ar norādīto konstrukciju, ir parabolas punkti.



119. zīm.

Pierādījums:

Ar 119. zīmējuma apzīmējumiem redzams, ka:

$$\frac{AQ}{AB}=\frac{QP}{BD}=\frac{BD}{BC}.$$

Tātad:

$$\frac{\eta}{\beta}=\frac{\xi}{BD}=\frac{BD}{\alpha}.$$

No šīm izteiksmēm dabūjam:

$$BD=\frac{\beta\xi}{\eta}$$

un

$$\xi=\frac{BD^2}{\alpha}=\frac{\xi^2\cdot\beta^2}{\eta^2\cdot\alpha}.$$

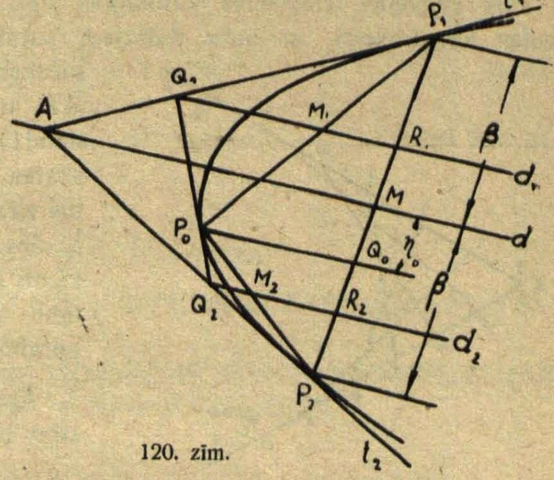
No pēdējās izteiksmes dabūjam:

$$\eta^2=\frac{\beta^2}{\alpha}\cdot\xi.$$

Šis vienādojums ir parabolas vienādojums. Ar to tad ir pierādīts, ka ar 119. zīmējumā doto konstrukciju dabūjam parabolu. Konstrukciju bieži izlieto speciālā gadījumā, kad $\xi \perp \eta$ un punkts A ir parabolas virsotne.

c) Dotas divas parabolas pieskares ar pieskaršanās punktiem. Konstruēt parabolas punktus. 120. zīmējumā dotas pieskares t_1, t_2 un pieskaršanās punkti P_1 un P_2.

Taisne d caur A un chordas $P_1 P_2$ viduspunktu M ir parabolas diametrs. Ja pieņemam, ka punkts P_0 ir parabolas punkts, tad taisne d_1 caur chordas $P_1 P_0$ viduspunktu M_1, kas paralela diametram d, arī ir parabolas diametrs. Šī taisne d_1 dod punktus Q_1 un R_1. Taisne caur punktiem Q_1 un P_0 tad ir parabolas pieskare punktā P_0.



120. zīm.

Taisne d_2 caur chordas $P_0 P_2$ viduspunktu M_2, kas paralela diametram d, arī ir parabolas diametrs. Šī taisne dod punktus Q_2 un R_2. Taisne caur punktiem Q_2 un P_0 ir parabolas pieskare punktā P_0.

No tā mēs secinām, ka punktiem $Q_1 P_0 Q_2$ jāatrodas uz vienas taisnes.

Caur punktu P_0 velkam taisni paraleli diametram d un dabūjam punktu Q_0.

Apzīmējam: $MP_1 = \beta = MP_2$; $Q_0 M = \eta_0$.

Tad no 120. zīmējuma redzams, ka

$$MR_1 = \frac{\eta_0 + \beta}{2} - \eta_0 = \frac{1}{2}(\beta - \eta_0)$$

un

$$P_2 R_2 = \frac{\beta - \eta_0}{2}.$$

Tātad:

$$P_2 R_2 = MR_1.$$

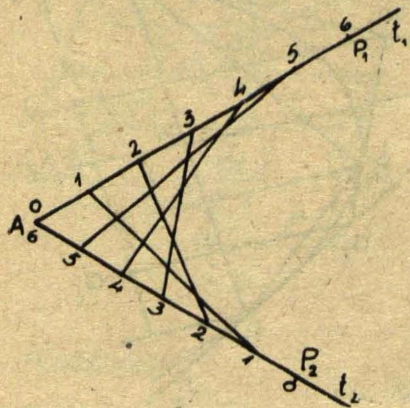
Ievērojot šo izteiksmi, no 120. zīmējuma redzams, ka:

$$\frac{P_2 Q_2}{P_2 A} = \frac{P_2 R_2}{\beta} = \frac{MR_1}{\beta} = \frac{A Q_1}{A P_1}.$$

No šīs izteiksmes dabūjam:

$$\frac{P_2 Q_2}{P_2 A} = \frac{AQ_1}{AP_1}.$$

Uz augšējās izteiksmes pamatojas 121. zīmējumā parādītā parabolas konstrukcija, ar kuru dabūjam parabolu kā līkni, kas aptver pieskares. Pieskaru nogriežņus AP_1 un AP_2 iedalām pēc patikas daudzās vienādās daļās. Uz pieskares t_1 apzīmējam dalītājpunktus virzienā AP_1, bet uz pieskares t_2 šos punktus apzīmējam virzienā P_2A. Taisnes caur punktiem 1, 1 — 2, 2 — utt., tad ir parabolas pieskares.



121. zīm.

Aprādītās parabolas konstrukcijas bieži lieto būvmechanikā.

75. Parabolas vienādojums asu nogriežņos. 122. zīmējumā parādītā koordinatu sistemā (O, x, y) parabolas vienādojumu dabūjam šādi:

Parabolas vienādojums koordinatu sistemā (O', x', y') ir

$$x'^2 = 2py'. \qquad (1)$$

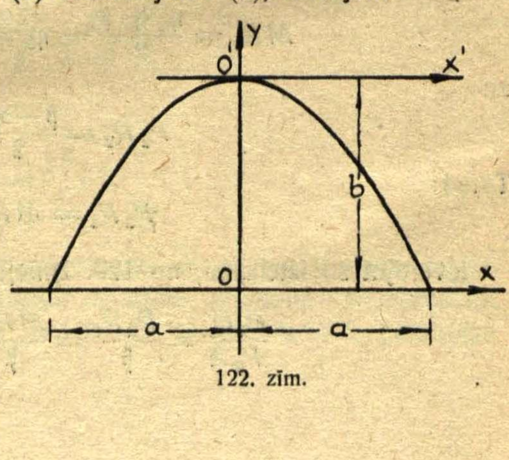
Pārejot no koordinatu sistemas (O', x', y') uz koordinatu sistemu (O, x, y), lietojam pārveidošanas formulas:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y - b \end{aligned}\right\}. \qquad (2)$$

Ievietojot x' un y' vērtības no (2) vienādojumā (1), dabūjam:

$$x^2 = 2p(y - b). \qquad (3)$$

Parametra p vērtību dabūjam, ievērojot, ka ar $y = 0$ x dabū vērtību $\pm a$.



122. zīm.

Ievietojot šīs x un y vērtības vienādojumā (3), dabūjam:

$$a^2 = -2pb$$

un

$$p = -\frac{a^2}{2b}. \qquad (4)$$

Ar šo p vērtību vienādojums (3) dabū veidu:

$$x^2 = -\frac{a^2}{b}(y-b)$$

vai arī

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y}{b} - 1 = 0. \tag{5}$$

Šo parabolas vienādojumu sauc par parabolas vienādojumu asu nogriežņos.

VIENPADSMITĀ NODAĻA

OTRĀS KĀRTAS LĪKŅU VIENĀDOJUMI POLARKOORDINATĀS

76. Otrās kārtas līkņu vienādojumi polarkoordinatās ar polu degpunktā. Izejot no līkņu veidošanas noteikuma

$$r = \varepsilon N,$$

ar 123. zīmējuma apzīmējumiem dabūjam:

$$N = d + r\cos\varphi;$$
$$r = \varepsilon N = \varepsilon(d + r\cos\varphi);$$
$$r(1 - \varepsilon\cos\varphi) = \varepsilon d = p.$$

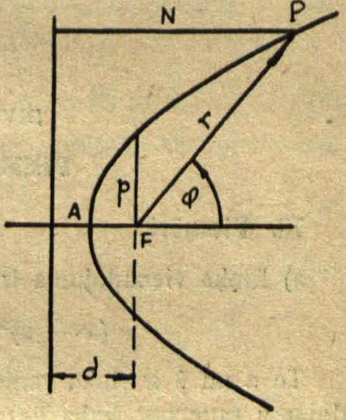
Tātad:

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}$$

ir otrās kārtas līkņu vienādojums polarkoordinatās. Še pols atrodas degpunktā. Līknes ass pieņemta par polarasi.

Līkne ir

elipse, ja $\varepsilon < 1$,
hiperbola, ja $\varepsilon > 1$, un
parabola, ja $\varepsilon = 1$.



123. zīm.

77. Otrās kārtas līkņu vienādojums polarkoordinatās, pieņemot līknes centru par polu un līknes asi caur degpunktiem par polarasi. Tā kā parabolas centrs ir bezgalībā, tad šinī gadījumā varam apskatīt tikai elipsi un hiperbolu. Izejot no elipses un hiperbolas vienādojuma

$$b^2x^2 \pm a^2y^2 - a^2b^2 = 0, \tag{1}$$

ievietojam šai vienādojumā no pārveidošanas formulām

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

x un y vērtības. Tad dabūjam:

$$\pm b^2 r^2 \cos^2\varphi + a^2 r^2 \sin^2\varphi = \pm a^2 b^2$$

vai

$$r^2[\pm b^2 \cos^2\varphi + a^2 \sin^2\varphi] = \pm a^2 b^2,$$

vai arī

$$r^2 = \pm \frac{a^2 b^2}{a^2 - \cos^2\varphi\,(a^2 \mp b^2)}.$$

Dalot augšējās izteiksmes labo pusi ar a^2 un ievedot $\frac{e}{a} = \varepsilon$, dabūjam elipses un hiperbolas vienādojumu pieņemtajā polarkoordinatu sistemā:

$$r^2 = \frac{\pm b^2}{1 - \varepsilon^2 \cos^2\varphi}.$$

DIVPADSMITĀ NODAĻA

PIEMĒRI UN UZDEVUMI

78. Piemēri:

a) Riņķa vienādojums ir

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - r^2 = 0. \qquad (1)$$

Te α un β ir riņķa centra koordinatas un r riņķa radiuss. Vienādojumu sauc par riņķa *normalvienādojumu.*

Vienādojumu (1) pārveidojot, dabūjam:

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + (\alpha^2 + \beta^2 - r^2) = 0. \qquad (2)$$

Vienādojums (2) rāda, ka otrās pakāpes vienādojums

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (3)$$

izteic riņķi tad, ja:

$$A = C \text{ un } B = 0.$$

Tātad otrās pakāpes vienādojums izteic riņķi tad, ja koeficienti pie mainīgo kvadratiem ir vienlīdzīgi un ja vienādojumā nav locekļa ar abu mainīgo reizinājumu. Tātad vienādojums:

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (4)$$

izteic riņķi.

Dalot vienādojumu (4) ar A un liekot

$$\frac{D}{A} = \alpha; \quad \frac{E}{A} = \beta \text{ un } \frac{F}{A} = \gamma,$$

vienādojumu (4) rakstām:

$$x^2 + y^2 + 2\alpha x + 2\beta y + \gamma = 0. \qquad (5)$$

Šo vienādojumu sauc par riņķa *vispārīgo* vienādojumu.

No riņķa vispārīgā vienādojuma (5) dabūjam riņķa centra koordinatas un radiusu šādi:

Izdarot vienādojumā (5) kvadratisku papildinājumu, dabūjam:

$$x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + y^2 + 2\beta x + \beta^2 + \gamma - \alpha^2 - \beta^2 = 0. \qquad (6)$$

Vienādojumu (6) varam rakstīt šādā veidā:

$$(x + \alpha)^2 + (y + \beta)^2 - (-\gamma + \alpha^2 + \beta^2) = 0. \qquad (7)$$

Salīdzinot šo vienādojumu ar vienādojumu (1), redzam, ka riņķa centra M koordinatas ir

$$M = -\alpha \mid -\beta \qquad (8)$$

un riņķa radiuss ir

$$r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma}. \qquad (9)$$

Ievērojot augšējo, redzam, ka vienādojums

$$x^2 + y^2 - 8x + 4y = 0$$

izteic riņķi, kas iet caur koordinatu sākumu. Še

$$\alpha = -\frac{8}{2} = -4; \quad \beta = \frac{4}{2} = 2.$$

Šā riņķa normalvienādojums tad ir:

$$(x - 4)^2 + (y + 2)^2 - 20 = 0.$$

Centra koordinatas ir

$$M = 4 \mid -2$$

un riņķa radiuss

$$r = \sqrt{20}.$$

b) Doti trīs punkti $P_1 = x_1 | y_1$, $P_2 = x_2 | y_2$ un $P_3 = x_3 | y_3$. Dabūt caur šiem punktiem vilktā riņķa vienādojumu.

Tā kā riņķis iet caur šiem dotajiem punktiem, tad šo punktu koordinatām jāapmierina riņķa vienādojums, ko pieņemam vispārīgā veidā:

$$x^2 + y^2 + 2\alpha x + 2\beta y + \gamma = 0. \tag{1}$$

Tātad:

$$\left.\begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 + 2\alpha x_1 + 2\beta y_1 + \gamma = 0 \\ x_2^2 + y_2^2 + 2\alpha x_2 + 2\beta y_2 + \gamma = 0 \\ x_3^2 + y_3^2 + 2\alpha x_3 + 2\beta y_3 + \gamma = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{2}$$

Vienādojums (1) un vienādojumu grupa (2) veido četrus linearus nehomogenus vienādojumus ar trim nezināmiem: α, β, γ.

Kā zināms, četri lineari nehomogeni vienādojumi ar trim nezināmiem var kopīgi pastāvēt tikai tad, ja šo vienādojumu koeficientu determinante ir 0, tātad jābūt

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & 2x & 2y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & 2x_1 & 2y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & 2x_2 & 2y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & 2x_3 & 2y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Attīstot šo determinanti attiecībā uz pirmās rindas elementiem, dabūjam meklēto vienādojumu.

c) Ja otrās pakāpes vienādojuma veids ir:

$$a^2 x^2 + 2abxy + b^2 y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

vai

$$(ax + by)^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

tad te:

$$a_{11} = a^2; \quad a_{12} = ab; \quad a_{22} = b^2$$

un

$$A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix} = a^2 b^2 - a^2 b^2 = 0.$$

Augšējais vienādojums, kā redzam, izteic parabolu. Tātad:

J a otrās pakāpes vienādojumā otrās dimensijas locekļi veido kvadratu $(ax + by)^2$, tad vienādojums izteic parabolu.

Vienādojumu

$$x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$$

varam rakstīt

$$(x - y)^2 - 4x - 6y + 3 = 0.$$

Saskaņā ar teikto, šis vienādojums izteic parabolu.

d) No punkta $P_0 = x_0 | y_0$ vilkt pieskari parabolai

$$y^2 = 2px. \tag{1}$$

Pieskares no punkta P_0 iet caur punkta P_0 polares un parabolas krustošanās punktiem P_1 un P_2. Šos punktus dabūjam, atrisinot kopēji vienādojumu (1) ar punkta P_0 polares vienādojumu.

$$yy_0 = (x + x_0). \tag{2}$$

Meklētās pieskares dabūjam, velkot taisni caur punktiem P_0 un P_1, kā arī taisni caur punktiem P_0 un P_2.

e) Dabūt elipses pieskares, kas paralelas dotajam virzienam m_1.

Virzienam m_1 piekārtotais diametrs krusto elipsi meklēto pieskaru pieskaršanās punktos.

Virzienam m_1 piekārtotā diametra vienādojums ir:

$$y = -\frac{b^2}{a^2 m_1} x. \tag{1}$$

Atrisinot kopēji vienādojumu (1) ar elipses vienādojumu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \tag{2}$$

dabūjam pieskaršanās punktus P_1 un P_2.

Ievietojot šo punktu koordinatas pieskares vienādojumā

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - 1 = 0$$

x_0 un y_0 vietā, dabūjam meklēto pieskaru vienādojumus.

79. Uzdevumi.

A. 1. nodaļas uzdevumi.

1) Kāds loka mērs atbilst leņķim $\psi = 45°$?

Atbilde: $\frac{\pi}{4}$.

2) Kāds gradu skaitlis atbilst loka mēram $\frac{\pi}{6}$?

Atbilde: $\varphi = 30°$.

3) Dots nogrieznis $P_1 P_2$ ar sākuma un gala punktu koordinatām $P_1 = 5$ un $P_2 = 12$.

Kādā attiecībā λ šo nogriezni dala uz tā esošais punkts $P = 7$?

Atbilde: $\lambda = -\frac{2}{5}$.

4) Nogriezni, kas dots ar $P_1 = 5$ un $P_2 = 12$, punkts P dala attiecībā $\lambda = -\frac{2}{5}$. Kāda ir punkta P abscisa x?

Atbilde: $x = 7$.

5) Dots punkts $P = 4 \mid -5$.

a) Kāds ir šā punkta attālums r no koordinatu sākuma?

Atbilde: $r = \sqrt{41}$.

b) Kāds ir radiusa vektora virziena koeficients m?

Atbilde: $m = \operatorname{tg} \varphi = \frac{-5}{4}$.

c) Kāds ir leņķa φ sin un cos?

Atbilde: $\sin \varphi = \frac{-5}{\sqrt{41}}$; $\cos \varphi = \frac{4}{\sqrt{41}}$.

6) Nogriežņa garums ir 6 cm. Nogrieznis veido ar x asi leņķi $\varphi = 30^0$

a) Kāds ir dotā nogriežņa projekciju X un Y garums?

Atbilde: $X = 3\sqrt{3}$ cm; $Y = 3$ cm.

b) Ja nogriežņa sākuma punkta koordinatas ir $P = 2 \mid 5$, kādas ir nogriežņa gala punkta P_2 koordinatas?

Atbilde: $x_2 = 2 + 3\sqrt{2}$; $y_0 = 5 + 3 = 8$.

7) Nogriežņa $P_1 P_2$ projekcijas ir: $X = -5$ un $Y = -7$.

Kāds ir nogriežņa garums R un virziena leņķis φ?

Atbilde: $R = \sqrt{74}$; $\sin \varphi = \frac{-7}{\sqrt{74}}$; $\cos \varphi = \frac{-5}{\sqrt{74}}$.

8) Dots nogrieznis ar sākuma punktu $P_1 = 2 \mid 3$ un gala punktu $P_2 = -3 \mid 5$.

Kāds ir šā nogriežņa garums R un virziena leņķis φ?

Atbilde: $R = \sqrt{29}$; $\cos \varphi = \frac{-5}{\sqrt{29}}$; $\sin \varphi = \frac{2}{\sqrt{29}}$.

8) Doti punkti: $P_1 = -2 \mid -1$ un $P_2 = 4 \mid 2$.

a) Kādas ir tā punkta P koordinatas, kas dala nogriezni $P_1 P_2$ attiecībā $\lambda = 4$?

Atbilde: $P = 6 \mid 3$.

b) Kādā attiecībā dala punkts $P = 6|3$ nogriezni $P_1 P_2$?

Atbilde: $\lambda = 4$.

9) Dotas trīsstūra virsotnes ar punktiem

$$P_1 = 2|4; \quad P_2 = 8|2; \quad P_3 = 11|6.$$

Dabūt šā trīsstūra smaguma centra S koordinatas.

Atbilde: $S = 7|4$.

10) Dots trīsstūra laukums $F = 4$ un virsotņu punkti

$$P_1 = 2|1; \quad P_2 = 3|3 \quad \text{un} \quad P_3 = x_3|4.$$

Dabūt punkta P_3 abscisu x_3.

Atbilde: $x_3 = -\frac{1}{2}$.

11) Doti četrstūra virsotņu punkti

$$P_1 = 5|8; \quad P_2 = -3|6; \quad P_3 = -7|-4; \quad P_4 = 10|-2.$$

Dabūt šā četrstūra laukumu F.

Atbilde: $F = 126$.

B. 2. nodaļas uzdevumi.

12) Taisnleņķa koordinatu sistēmā dots punkts $P = 5|4$. Kādām jābūt paraleli pārbīdītās koordinatu sistēmas sākuma punkta $O' = x_0|y_0$ koordinatām, lai šai pārbīdītajā koordinatu sistēmā punkta P koordinatas dabūtu vērtības $P = 2|6$?

Atbilde: $O' = 3|-2$.

13) Taisnleņķa koordinatu sistēmā dots punkts $P = -2|1$. Kādas ir šā punkta koordinatas $\xi|\eta$ koordinatu sistēmā, kuru dabūjam, pagriežot koordinatu asis pozitivā virzienā par 60°?

Atbilde: $\xi = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \eta = \sqrt{3} + \frac{1}{2}$.

C. 3. nodaļas uzdevumi.

14) Kādu leņķi veido taisne $y + 3x - 5 = 0$ ar x asi?

Atbilde: 108° 26′.

15) Taisne veido ar x asi leņķi 45° un nogriež uz ordinatu ass nogriezni $b = -7$. Kāds ir šīs taisnes vienādojums?

Atbilde: $y = x + 7$

16) Dot taisnes vienādojumu, ja taisne iet caur punktiem $P_1 = 11|4$ un $P_2 = 5|-8$.

Atbilde: $y - 2x + 18 = 0$.

17) Dabūt taisnes

$$x - 3y + 9 = 0$$

asu nogriežņus a un b.

Atbilde: $a = -9$; $b = 3$.

Kāds ir šīs taisnes vienādojums asu nogriežņos?

Atbilde: $\frac{x}{-9} + \frac{y}{3} - 1 = 0$.

18) Pārbaudīt, vai punkti

$$P_1 = 2|1; \quad P_2 = 0|0; \quad P_3 = 1|2$$

atrodas uz taisnes.

Atbilde: punkti neatrodas uz taisnes.

19) Kādā punktā krustojas taisnes g_1 un g_2?

$$g_1 \equiv 3x - 8y + 34 = 0;$$
$$g_2 \equiv x + 2y + 2 = 0.$$

Atbilde: $P_0 = -6|2$.

20) Taisne iet caur taišņu

$$3x - y - 1 = 0,$$
$$x + 3y - 1 = 0$$

krustošanās punktu un veido ar x un y asīm trīsstūri ar laukumu $F = 4$. Dabūt šīs taisnes vienādojumu.

Atbilde: $\frac{x}{20 - 8\sqrt{6}} + \frac{y}{10 + 4\sqrt{6}} - 1 = 0$.

21) Dabūt leņķi, ko veido krustojošās taisnes:

$$3x - 5y - 7 = 0 \quad \text{un} \quad 2x + 9y - 15 = 0.$$

Atbilde: $\operatorname{tg} \delta = \frac{37}{39}$; $\delta = 43° 30'$.

22) Trīsstūra virsotnes ir $P_1 = 7|8$; $P_2 = -3|5$; $P_3 = 0|-6$. Dabūt trīsstūra leņķus.

Atbilde: leņķis punktā P_1 ir $85° 24'$;
„ „ P_2 „ $56° 56'$;
„ „ P_3 „ $37° 40'$.

23) Taisne iet caur punktu $P = -2 \mid 5$ un ir paralela taisnei

$$3x + 5y - 7 = 0.$$

Dabūt šīs taisnes vienādojumu.

Atbilde: $3x + 5y - 19 = 0$.

24) Taisne iet caur punktu $P = 6 \mid 2$ un ir stateniska pret taisni

$$3y - 5x - 12 = 0.$$

Dabūt šīs taisnes vienādojumu.

Atbilde: $3x + 5y - 28 = 0$.

25) Doti punkti $P_1 = 3 \mid -4$ un $P_2 = 5 \mid 6$. Kāds ir caur nogriežņa $P_1 P_2$ viduspunktu vilkta stateņa vienādojums?

Atbilde: $x + 5y - 9 = 0$.

26) Dotas taisnes

$$x - y - 1 = 0; \quad x + y - 3 = 0; \quad x - 3y + 9 = 0.$$

Šīs taisnes veido trīsstūri. Dabūt:

a) katra taišņu pāra krustošanās punktu S_1, S_2, S_3.

Atbilde: $S_1 = 0 \mid 3$; $S_2 = 6 \mid 5$; $S_3 = 2 \mid 1$;

b) trīsstūra laukumu F.

Atbilde: $F = 8$;

c) smaguma centra S koordinatas.

Atbilde: $S = \frac{8}{3} \mid 3$;

d) smaguma centra attālumu no katras taisnes.

Atbilde: $s_1 = \frac{2}{3}\sqrt{2}$; $s_2 = \frac{4}{3}\sqrt{2}$; $s_3 = -\frac{4}{15}\sqrt{10}$.

27) Punkts P veido trīsstūri ar punktiem $P_1 = 3 \mid 4$ un $P_2 = 1 \mid 2$. Trīsstūra laukums $F = 4$. Kāda ir punkta P ģeometriskā vieta?

Atbilde: $x - y - 3 = 0$.

28) Punktam $P = x \mid y$ pārvietojoties, punkta attālumi no $P_1 = -x_1 \mid 0$ un $P_2 = x_1 \mid 0$ mainās tā, ka šo attālumu starpības kvadrats ir pastāvīgs lielums a. Kāds ir veidotās līknes vienādojums?

Atbilde: $x = \pm \frac{a}{4x_1}$.

29) Dabūt attālumu d starp paralelām taisnēm:

$$4x - 3y - 1 = 0 \quad \text{un} \quad 8x - 6y + 9 = 0.$$

Atbilde: $d = \frac{1}{2}$.

30) Izpētīt, vai līkne

$$9x^2 - 30xy + 25y^2 = 0$$

sadalās?

Atbilde: līkne sadalās taisnēs: $5y - 3x = 0$ un $5y - 3x = 0$.

31) Kādu veidu dabū līknes vienādojums

$$15x^2 + 3xy + 4y^2 + 8x + 5y + 1 = 0,$$

ja koordinatu sākumu pārnesam uz punktu $O' = 1 \mid -2$ un jaunās koordinatu asis ξ, η ir paralelas asīm x, y?

Atbilde: $15\xi^2 + 3\xi\eta + 4\eta^2 + 32\xi + 8\eta + 24 = 0$.

32) Noteikt, kādas līknes izteiktas ar vienādojumiem:

I $x^2 + 4xy + 3y^2 - 2x - 2y + 21 = 0$;

II $5x^2 + 12xy + 9y^2 - 5x - 6y - 19 = 0$;

III $3x^2 + 6xy + 3y^2 + 5x - 4y + 7 = 0$.

Atbilde: I — hiperbola; II — elipse; III — parabola.

33) Dabūt augšējo līkņu centrus C_1, C_2, C_3.

Atbilde: $C_1 = -1 \mid 1$; $C_2 = \frac{1}{2} \mid 0$; $C_3 = \infty \mid \infty$.

34) Dabūt līknes $11x^2 - 8xy + 7y^2 - 8x + 4y + 21 = 0$ caur punktu $0 \mid 0$ ejoša diametra vienādojumu.

Atbilde: $3x + 10y = 0$.

35) Pārveidot līknes vienādojumu

$$x^2 + 4xy + 3y^2 - 2x - 2y + 21 = 0,$$

pārbīdot koordinatu sistemu paraleli uz šīs līknes centru.

Atbilde: $\xi^2 + 4\xi\eta + 3\eta^2 + 21 = 0$.

36) Kāda vērtība jādod parametram A, lai līkne

$$Ax^2 + 2xy + y^2 + 6x + 4y + 5 = 0$$

dotu: a) divas taisnes, b) elipsi, c) hiperbolu, d) parabolu?

Atbilde: ar $A = 2$ dabūjam divas imaginaras taisnes,
„ $A > 1$ dabūjam elipsi,
„ $A < 1$ hiperbolu,
„ $A = 1$ parabolu.

37) Kādai jābūt parametra B vērtībai, lai līkne

$$5x^2 + 2Bxy + 3y^2 + 6x + 2y + 1 = 0$$

krustotos ar taisni $y = x$ divos sakrītošos punktos?

Atbilde: $B = 4$.

38) Dota līkne

$$x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0.$$

Dabūt diametru, kas piekārtots chordām, kuru virziena koeficients

$$m = \frac{1}{2}.$$

Atbilde: $x - y - 5 = 0$.

39) Dota līkne

$$2x^2 - 6xy + 7y^2 + 4x - 6y - 13 = 0.$$

Dabūt abu piekārtoto diametru vienādojumus. Viens no šiem diametriem iet caur punktu $P = 0 \mid -1$.

Atbilde: $x - 2y + 1 = 0$ un $x + y + 1 = 0$.

40) Caur punktu $P = 1 \mid 1$ vilkt pieskari līknei

$$x^2 - 2xy + 8y^2 + 4x - 2y - 5 = 0.$$

Atbilde: $y - 1 = 0$ un $8x + y - 9 = 0$.

41) Dota līkne

$$2x^2 - 8xy - 3y^2 + 4x + 10y - 1 = 0$$

un pols $P_0 = -1 \mid 3$

Dabūt polares vienādojumu.

Atbilde: $x - 1 = 0$.

42) Dota līkne

$$5x^2 - 4xy + 2y^2 - 4x + 4y - 4 = 0.$$

Dabūt līknes asu vienādojumus un līknes vienādojumu, ja koordinatu sistema likta līknes asīs.

Atbilde: līknes asu vienādojumi: $2x - y - 1 = 0$ un $x + 2y + 2 = 0$.

Līknes vienādojums: $\frac{\xi^2}{6} + \frac{\eta^2}{1} - 1 = 0$.

43) Uz elipses

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{7} - 1 = 0$$

asīm veidots paralelograms. Dabūt tā elipses diametra garumu, kas atrodas uz šā paralelograma diagonales.

Atbilde: 8.

44) Caur punktu $P = 1 | 1$ vilkt elipses

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - 1 = 0$$

diametru un dabūt tam piekārtoto diametru.

Atbilde: $y - x = 0$ un $\frac{x}{16} + \frac{y}{9} = 0$.

45) Dota hiperbola

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} - 1 = 0.$$

Caur punktu $P = 1 | 3$ vilkt tādu chordu, kas šajā punktā tiek dalīta uz pusēm.

Atbilde: $y - 3 = \frac{3}{4}(x - 1)$.

46) Dota parabola

$$y^2 = 6x.$$

Dabūt diametru, kas piekārtots chordām:

$$y = 3x + b \quad \text{(b mainīgs parametrs)}.$$

Atbilde: $y - 1 = 0$.

47) Dabūt chordu, kas iet caur parabolas $y^2 = 8x$ virsotni un piekārtota diametram $y - 4 = 0$.

Atbilde: $y - x = 0$.

48) Dota elipse

$$\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{16} - 1 = 0.$$

Dabūt pieskares, kas paralelas taisnei

$$x - 3y + 7 = 0,$$

Atbilde: $x - 3y + 15 = 0$ un $x - 3y - 15 = 0$.

49) Elipses mazā pusass $b = 3$, numeriskā ekscentricitate $\varepsilon = 0 \cdot 8$. Kāds ir šīs elipses vienādojums?

Atbilde: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - 1 = 0$.

50) Dabūt otrās kārtas līknes vienādojumu, ja līkne iet caur punktu $P = 4 \mid 3$; līknes numeriskā ekscentricitate $\varepsilon = 2$.

Atbilde: $\frac{x^2}{13} - \frac{y^2}{9} - 1 = 0$.

51) Dabūt elipses vienādojumu, ja lineārā ekscentricitate $e = 2$ un attālums starp direktrisēm ir 8.

Atbilde: $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} - 1 = 0$.

52) Dabūt leņķi starp parabolas pieskarēm, ja tās vilktas no direktrises un parabolas ass krustošanās punkta.

Atbilde: $\frac{\pi}{2}$.

53) Kādu līkni izteic vienādojums

$$x^2 + y^2 - 30x - 36y + 449 = 0?$$

Atbilde: riņķi.

54) Riņķi

$$x^2 + y^2 - 30x - 36y + 449 = 0,$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 8y - 83 = 0$$

krustojas punktos P_1 un P_2. Dabūt krustošanās punktu P_1 un P_2 koordinatas un leņķi δ starp riņķu pieskarēm krustošanās punktā P_1.

Atbilde: $P_1 = 9 \mid 10$ un $P_2 = 7 \mid 12$; $\delta = 16^0\ 16'$.

55) Parabolas virsotnes koordinatas ir $A = 5 \mid 7$. Parabolas ass ir paralela x asij un $p = 11$. Kāds ir šīs parabolas vienādojums?

Atbilde: $y^2 - 14y - 22x + 15y = 0$.

56) Parabolas virsotne atrodas koordinatu sākumā, un tās ass sakrīt ar x asi. Punkts $P = 9 \mid 12$ atrodas uz šīs parabolas. Kāds ir šīs parabolas vienādojums?

Atbilde: $y^2 = 16x$.

57) Parabolas ass sakrīt ar x asi. Parabolas virsotne atrodas punktā $A = a \mid b$. Kāds ir šīs parabolas vienādojums?

Atbilde: $(y - b)^2 = 2p\,(x - a)$.

58) Kāda elipses punkta P radiusi vektori ir $r_1 = 14$ un $r_2 = 48$. Šie radiusi vektori ir stateniski viens pret otru. Kāds ir šīs elipses vienādojums?

Atbilde: $\frac{x^2}{96} = \frac{y^2}{336} - 1 = 0.$

59) Parabolas virsotne atrodas elipses centrā. Parabolas un elipses degpunkti sakrīt un atrodas uz x ass pozitivās puses. Kādas ir parabolas un elipses krustošanās punktu radiusu vektoru r_1 un r_2 vērtības?

Atbilde: $r_1 = 5{,}75$; $r_2 = 4{,}25$.

60) Hiperbolas degpunktu attālums $2e = 100$, un tās asimptotu vienādojumi ir:

$$7x \mp 24y = 0.$$

Dabūt šīs hiperbolas vienādojumu.

Atbilde: $\frac{x^2}{2304} - \frac{y^2}{196} - 1 = 0.$

61) Elipses pusasis ir: $a = 5$; $b = 3$.

Dabūt: e, ε, d un p vērtības.

Atbilde: $e = 4$; $\varepsilon = \frac{4}{5}$; $d = \frac{9}{4}$; $p = \frac{9}{4}$.

62) Kāds ir elipses vienādojums, ja dota lineara ekscentricitate e un direktrises attālums no centra k?

Atbilde: $\frac{x^2}{ek} + \frac{y^2}{ek - e^2} - 1 = 0.$

63) Dots hiperbolas konturs. Dabūt:

1) hiperbolas centru,
2) hiperbolas asu virzienus,
3) hiperbolas realo un imaginaro pusasi un
4) pievilkt pieskari hiperbolai dotajā punktā.

ALFABETISKAIS RĀDĪTĀJS

SATURS

Pirmā nodaļa.

Punktu, nogriežņu un laukumu noteikšana ar koordinatām. Koordinatu sistemas. Projekcijas.

Otrā nodaļa.

Koordinatu sistemas pārveidošana.

Trešā nodaļa.

Līknes un līkņu vienādojumi.

Ceturtā nodaļa.

Taisne.

Piektā nodaļa.

Dažas linearas transformacijas.

Sestā nodaļa.

Līkņu klasifikacija. Vispārīgas izteiksmes par līknēm. Pieskare.

Septītā nodaļa.

Otrās kārtas līkņu vienādojuma diskusija.

Astotā nodaļa.

Elipse.

Devītā nodaļa.

Hiperbola.

Desmitā nodaļa.

Parabola.

Vienpadsmitā nodaļa.

Otrās kārtas līkņu vienādojumi polarkoordinatās.

Divpadsmitā nodaļa.

Piemēri un uzdevumi.

Redaktors K. Putniņš. Techn. redaktors M. Aizupiete.
Izdevn. korektors Ch. Špungins. Tipogr. korektore A. Zilvestere.

JT 03352. Nodota salikšanai 1946. g. 14. oktobrī. Parakstīta iespiešanai 1947. g. 31. martā.
Papīra formats 62 × 94. Metiens 4000 eks. Iespiedlokšņu skaits 10,25.
Izdevniecības lokšņu skaits 12,525. Burtu skaits iespiedloksnē 48880.
Izdevn. № 119. Pasūt. № 4597.
Iespiesta Latvijas Poligrafijas tresta Paraugtipogrāfijā, Maskavas ielā № 11.
Maksā 10 rbl.