DIFERENCIĀLVIENĀDOJUMI

UN

VARIĀCIJU RĒĶINI

II DAĻA

DR. MATH. A. LŪSIS
LATVIJAS UNIVERSITĀTES DOCENTS

RĪGĀ, 1938
LATVIJAS UNIVERSITĀTE

Iespiests R. Eķa grāmatu spiestuvē
Jelgavā, Čakstes bulvārī 10, tālrunis 221

DIFERENCIĀLVIENĀDOJUMI
UN
VARIĀCIJU RĒĶINI

Doc. A. Lūša
Diferenciālvienādojumu un variāciju rēķinu
I daļa
iznākusi L. U. Matēmatikas zinātņu studentu biedrības apgādā,
Rīgā, 1937. gadā.

Saturs.

Diferenciālvienādojumi un variāciju rēķini.

II daļa.

Parastie diferenciālvienādojumi.

I. Eksistences teorēmas.

II. Vispārīgie n. kārtas diferenciālvienādojumi.

III. Lineārie n. kārtas diferenciālvienādojumi.

IV. Simultānie diferenciālvienādojumi.

Vienādojumi ar parciāliem atvasinājumiem.

V Lineārie pirmās kārtas vienādojumi ar parciāliem atvasinājumiem.

VI. Totālie diferenciālvienādojumi.

VII. Nelīneārie pirmās kārtas vienādojumi ar parciāliem atvasinājumiem.

VIII. Otrās kārtas vienādojumi ar parciāliem atvasinājumiem.

Variāciju rēķinu papildinājumi.

IX. Brīvā ekstrēma problēmas.

X. Saistītā ekstrēma problēmas.

Pielikums.

Priekšvārdi.

Šī darba I daļa publicēta 1937. gadā L. U. Matēmatikas zinātņu studentu biedrības izdevumā. Pēc Mācības grāmatu apgādniecības fonda nodibināšanas darba II daļas izdošanu laipni ir uzņēmusies Latvijas Universitāte. Izsaku pateicību visiem, kas sekmējuši šī darba publikāciju

Dažus aizrādījumus šī darba sagatavošanā deva asistents *cand. math.* N. Brauera kgs, par ko izsaku viņam atzinību. — Variāciju rēķinu papildinājumi skar nepieciešamāko vielu. Plašākām studijām noder literātūra, kas minēta pieliktajā sarakstā. Technisku iemeslu dēļ neizdevās savākt visus uzdevumus, kas doti akadēmiskos gala pārbaudījumos Latvijas Universitātes pastāvēšanas pirmajos gados.

1938. g. maijs.

A. Lūsis.

Variāciju rēķinu literātūra.

1. **E. Goursat.** Cours d'analyse mathématique, t. III, Paris, 1923.
2. **J. Hadamard.** Leçons sur le calcul des variations, t. I, Paris, 1910.
3. **A. R. Forsyth.** The calculus of variations, Cambridge, 1927.
4. **G. Bliss — F. Schwank.** Variationsrechnung, Leipzig, 1932.
5. **O. Bolza.** Vorlesungen über Variationsrechnung, Berlin-Leipzig, 1909.
6. **R. Courant — D. Hilbert.** Methoden der mathematischen Physik, Bd I — 1931, Bd. II — 1937, Berlin.
7. **C. Carathéodory.** Variationsrechnung, Berlin-Leipzig, 1935.
8. **A. Kneser.** Lehrbuch der Variationsrechnung, Braunschweig, 1925.
9. М ЛАВРЕНТЬЕВ — Л. ЛЮСТЕРНИК Основы вариационного исчисления, т. I, ч. I и II. Москва-Ленинград, 1935.
10. В. СМИРНОВ — В. КРЫЛОВ — Л. КАНТОРОВИЧ — Вариационное исчисление, Ленинград, 1933.

PARASTIE DIFERENCIĀLVIENĀDOJUMI.

I. Eksistences teōrēmas.

§ 1. Pirmās kārtas diferenciālvienādojums.

1. Diferenciālvienādojuma

$$(1)\quad y' = f(x, y) \qquad \left(y' = \frac{dy}{dx}\right)$$

atrisinājumu, kas apmierina sākuma nosacījumu

$$(2)\quad x = x_0, \quad y = y_0 = y(x_0),$$

sauc par Košī (*Cauchy*) integrālu. Ģeometriskā interpretācijā tas attēlo integrāllīniju, kas iet caur doto punktu (x_0, y_0). Šāda integrāla eksistenci pirmo reizi stingri pierādīja Košī gadījumā, kad $f(x, y)$ ir analitiskā funkcija. Tad atkārtoti atvasinot (1) pēc x, dabū augstākās kārtas atvasinājumus

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y', \qquad y''' = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial f}{\partial y} y'', \ldots$$

Var pakāpeniski aprēķināt atvasinājumu vērtības

$$y_0' = f(x_0, y_0), \qquad y_0'' = y''(x_0), \qquad y_0''' = y'''(x_0), \ldots.$$

un ar tām formāli sastādīt Teilora (*Taylor*) rindu

$$(3)\quad y(x) = y_0 + \frac{y_0'}{1!}(x - x_0) + \frac{y_0''}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{y_0'''}{3!}(x - x_0)^3 + \ldots$$

Košī ar savu metodi*) „*Calcul des limites*" diskutē rindas (3) konvergenci un konstatē, ka diferenciālvienādojumam (1) ar analitisko funkciju $f(x, y)$ ir viens vienīgs Košī integrāls, ko aprēķina ar pakāpju rindu (3) pietiekoši mazām $|x - x_0|$ vērtībām.

*) Skat. piem., *Goursat* — „*Cours d'Analyse*", t. II, lpp. 354 un sekoj.

Funkcijas $y(x)$ augstākās kārtas atvasinājumu y'', y''', ... aprēķināšanas vietā var direkti meklēt vienādojuma (1) atrisinājumu pakāpju rindas veidā

$$(4) \qquad y(x) = y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n .$$

Nezināmo koeficientu a_n noteikšanai sastāda atvasinājumu

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$$

un ievieto vienādojumā (1), izteicot analitisko funkciju $f(x, y)$ ar absolūti un vienmērīgi savirzāmu rindu

$$(5) \qquad f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{mn} (x - x_0)^m (y - y_0)^n$$

dēfinīcijas taisnstūrī

$$|x - x_0| \leqslant a, \qquad |y - y_0| \leqslant b.$$

Pēc koeficientu salīdzināšanas dabū formulas

$$(6) \qquad \left\{ \begin{array}{l} a_1 = a_{00}, \\ 2a_2 = a_{10} + a_{01} a_1, \\ 3a_3 = a_{20} + a_{11} a_1 + a_{02} a_1^2 + a_{01} a_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{array} \right.$$

ar kuŗām var pakāpeniski noteikt rindas (4) koeficientus $a_1, a_2, a_3, \ldots$. Arī te ir lietojama Košī metode konvergences diskusijā. Ir saprotams, ka salīdzinājumā ar Teilora rindu (3) koeficienti ir šādi:

$$a_1 = \frac{y_0'}{1!}, \quad a_2 = \frac{y_0''}{2!}, \quad a_3 = \frac{y_0'''}{3!}, \ldots$$

2. Eksistences teōrēmas pierādījumam lietosim otru metodi, ko devis P i k ā r s (*E. Picard*). Tā ir t. s. **pakāpenisko tuvinājumu metode** (*méthode des approximations successives*). Ar šo metodi pierāda Košī integrāla eksistenci, neprasot, lai dotā funk-

cija $f(x, y)$ būtu analitiskā, bet gan ar šādām plašākām **hipotēzēm**.

1) $f(x, y)$ ir nepārtraukta un vienvērtīga funkcija definīcijas taisnstūrī

$$(7) \qquad |x - x_0| \leqslant a, \quad |y - y_0| \leqslant b,$$

resp.

$$x_0 - a \leqslant x \leqslant x_0 + a, \quad y_0 - b \leqslant y \leqslant y_0 + b.$$

2) Relātīvi pret y funkcija $f(x, y)$ apmierina t. s. **Lipšica** (*Lipschitz*) **nosacījumu**

$$(8) \qquad |f(x, \bar{y}) - f(x, y)| \leqslant A\,|\bar{y} - y|,$$

kur (x, y) un $(x, \bar{y})$ ir divi funkcijas $f(x, y)$ dēfinīcijas taisnstūra (7) punkti ar kopīgu abscisu un $A > 0$ ir t. s. **Lipšica konstante.** Lipšica nosacījums rāda, ka funkcijas $f(x, y)$ diferenču kvocients

$$\frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \qquad (\Delta y = \bar{y} - y)$$

attiecībā pret y ir galigs, un tā absolūtās vērtības augšējā robeža dēfinīcijas taisnstūrī (7) ir A.

Speciālā gadījumā, kad funkcijai $f(x, y)$ eksistē nepārtraukts parciālais atvasinājums $\frac{\partial f}{\partial y}$, Lipšica nosacījums ir ievērots, jo tad pēc diferenciālrēķinu teorēmas par vidējo vērtību izteic

$$f(x, \bar{y}) - f(x, y) = (\bar{y} - y)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{y + \theta(\bar{y} - y)} \qquad (0 < \theta < 1).$$

Lipšica konstante šinī gadījumā ir

$$A \geqslant \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|.$$

3 **Eksistences teorēma.** Ja $f(x, y)$ ir nepārtraukta un vienvērtīga funkcija ar tās absolūtās vērtības augšējo robežu

$$M \geqslant |f(x, y)|$$

definīcijas taisnstūrī (7) un apmierina Lipšica (*Lipschitz*) nosacījumu (8), tad diferenciālvienādojumam

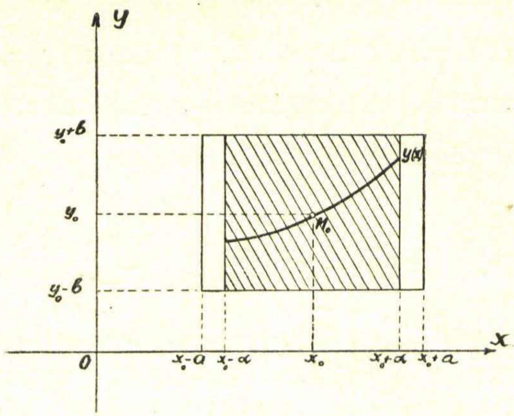
$$(1) \qquad y' = f(x, y) \qquad \left(y' = \frac{dy}{dx}\right)$$

eksistē intervallā

$$(9) \qquad x_0 - a \leqslant x \leqslant x_0 + a \qquad \left[a = min.\left(a, \frac{b}{M}\right)\right]$$

vismaz viens atrisinājums $y = y(x)$, kas ir nepārtraukta funkcija kopā ar savu atvasinājumu šajā intervallā un kas pieņem doto vērtību $y_0 = y(x_0)$, kad $x = x_0$.

Citiem vārdiem, ar minētiem nosacījumiem diferenciālvienādojumam (1) ir vismaz viens Koši (*Cauchy*) integrāls eksistences intervallā (9), kur α apzīmē mazāko no skaitļiem a un $\frac{b}{M}$ (zīm. 1).



Zīm. 1.

P i e r ā d ī j u m s. Diferenciālvienādojuma (1) K o š ī p r o b l ē m a (t. i. Košī integrāla noteikšana) ir ekvivalenta **ar i n t e g r ā l v i e n ā d o j u m a**

$$(10) \qquad y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))\,dx$$

atrisināšanu. Tiešām, no vienādojuma (1), kopā ar sākuma nosacījumu (2), ar integrāciju sastāda vienādojumu (10); otrādi, ar atvasināšanu pēc x no (10) rodas vienādojums (1), un der sākuma nosacījums $y(x_0) = y_0$.

Pēc P i k ā r a m e t o d e s y_0 izvēlas par atrisinājuma tuvinājumu. Ieliekot $y = y_0$ vienādojuma (10) labajā pusē, sastāda sekojošo tuvinājumu

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\,dx.$$

Šādu procesu atkārto ar sastādīto funkciju $y_1(x)$. Rodas jauns tuvinājums

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1(x))\,dx.$$

Vispārīgi ar minēto i t e r ā c i j a s p r o c e s u sastāda funkcijas pēc rekurrences formulas

$$(11) \qquad y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1}(x))dx \quad (n=1,2,3,\ldots).$$

Konstatēsim sastādītām funkcijām $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ šādas īpašības, apskatot eksistences intervalla (9) labo pusi, t. i. kad $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + a$.

I. K a t r a s f u n k c i j a s $y_n(x)$ v ē r t ī b a i r y_0, k a d $x = x_0$, t. i. k a t r a l ī n i j a $y = y_n(x)$ i e t c a u r d o t o p u n k t u (x_0, y_0).

Tiešām, formula (11) rāda, ka $y_n(x_0) = y_0$.

II. Ja arguments x mainās eksistences intervalla labajā pusē $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + a$, tad katra līnija $y_n(x)$ atrodas taisnstūrī

$$x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + a, \qquad y_0 - b \leqslant y \leqslant y_0 + b$$

un krusto tā malu $x = x_0 + a$.

Ir jākonstatē, ka

$$| y_n(x) - y_0 | \leqslant b.$$

Diferences

$$y_n(x) - y_0 = \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})\, dx$$

absolūto nozīmi novērtē ar

$$| y_n(x) - y_0 | \leqslant \int_{x_0}^{x} | f(x, y_{n-1}) |\, dx \leqslant M(x - x_0).$$

Tā kā $x - x_0 \leqslant a$ un $aM \leqslant b$, tad tiešām ir

$$| y_n - y_0 | \leqslant b.$$

III. Funkciju virknei

$$y_0, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x), \ldots$$

eksistē nepārtraukta robežfunkcija

$$\varphi(x) = \lim_{n \to \infty} y_n(x).$$

Sastādām palīga funkciju

$$u_0 = y_0, \quad u_1(x) = y_1(x) - y_0, \ldots, u_n(x) = y_n(x) - y_{n-1}(x), \ldots$$

rindu

$$(12) \qquad u_0 + u_1(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots,$$

kuŗas pirmo $n+1$ locekļu summa ir

$$S_n(x) = u_0 + u_1(x) + \ldots + u_n(x) = y_n(x).$$

Lai pierādītu šīs rindas vienmērīgo konvergenci un robežfunkcijas eksistenci, izlieto vispārīgo Veierštrāsa (*Weierstrass*) kritēriju: ja dotai nepārtraukto funkciju rindai eksistē savirzāma skaitlisku majorantu rinda, tad dotā funkciju rinda savirzās absolūti un vienmērīgi, un tā dēfinē nepārtrauktu funkciju.

Rindas (12) locekli

$$u_1 = y_1 - y_0 = \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\, dx$$

novērtē ar formulu

$$|u_1| \leqslant M(x - x_0) \leqslant Ma.$$

Sekojošo locekļu, piem.,

$$u_2 = y_2 - y_1 = \int_{x_0}^{x} [f(x, y_1) - f(x, y_0)]\, dx$$

novērtēšanai izlieto Lipšica nosacījumu (8). Ar Lipšica konstanti A izteic

$$|f(x, y_1) - f(x, y_0)| \leqslant A\, |y_1 - y_0|,$$

un tā tad

$$|u_2| \leqslant A \int_{x_0}^{x} |u_1|\, dx \leqslant AM\frac{(x - x_0)^2}{2} \leqslant AM\frac{a^2}{2!}.$$

Vispārīgās formulas

$$(13) \qquad |u_n(x)| \leqslant A^{n-1} M \frac{(x - x_0)^n}{n!} \leqslant A^{n-1} M \frac{a^n}{n!}$$

pierādījumam lieto matēmatiskās indukcijas slēdzienu.

Tiešām, ar rekurrences formulu (11) izteic locekli

$$u_{n+1} = y_{n+1} - y_n = \int_{x_0}^{x} [f(x, y_n) - f(x, y_{n-1})] \, dx,$$

ko novērtē ar formulu

$$| u_{n+1} | \leqslant A \int_{x_0}^{x} | u_n | \, dx,$$

izlietojot Lipšica nosacījumu

$$| f(x, y_n) - f(x, y_{n-1}) | \leqslant A \, | y_n - y_{n-1} | \leqslant A \, | u_n |.$$

Ja atrastā novērtējuma formulā ievēro pieņemto sakaru (13), tad dabū formulu

$$| u_{n+1}(x) | \leqslant A^n M \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant A^n M \frac{a^{n+1}}{(n+1)!},$$

kas atbilst (13), ja n vietā ņem $n + 1$.

Rindai (12) ir skaitlisks majorants

$$|u_0| + Ma + MA\frac{a^2}{2!} + \ldots + MA^{n-1}\frac{a^n}{n!} + \ldots = |u_0| + \frac{M}{A}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A^n a^n}{n!},$$

kas savirzās, jo rinda (e — naturālā logaritma baze)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n a^n}{n!} = e^{Aa} - 1$$

savirzās visām galīgām A un a nozīmēm Minētais Veierštrāsa kriterijs rāda, ka funkciju rinda (12) savirzās absolūti un vienmērīgi. Tādēļ eksistē robežfunkcija

$$\lim_{n \to \infty} S_n(x) = \lim_{n \to \infty} y_n(x) = \varphi(x)$$

kā nepārtraukta funkcija intervallā $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + a$.

IV. Sastādītā robežfunkcija $\varphi(x)$ apmierina doto diferenciālvienādojumu (1) un sākuma nosacījumu, t. i. tā ir Košī (*Cauchy*) integrāls.

Ievērojot funkcijas $f(x, y)$ nepārtrauktību, no rekurrences formulas

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})\, dx$$

robežgadījumā, kad $n \to \infty$, dabū sakaru

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, \varphi(x))\, dx,$$

kas norāda uz funkcijas $\varphi(x)$ minētām īpašībām:

$$\varphi(x_0) = y_0, \qquad \frac{d\varphi}{dx} = f(x, \varphi(x)).$$

Tā tad diferenciālvienādojuma

$$(1) \qquad y' = f(x, y) \qquad \left(y' = \frac{dy}{dx}\right)$$

vismaz viena Košī integrāla eksistence ir pierādīta.

4. **Unitātes teōrēma.** Ar eksistences teōrēmā minētiem nosacījumiem diferenciālvienādojumam (1) ir viens vienīgs atrisinājums, kas nozīmei $x = x_0$ pieņem doto vērtību $y = y_0$, resp. viens vienīgs Košī (*Cauchy*) integrāls.

Pierādījums. Pieņemsim pretējo, ka $y = \psi(x)$ ir cits Košī integrāls, t. i.

$$\psi(x_0) = y_0, \qquad \frac{d\psi}{dx} = f(x, \psi(x))$$

jeb

$$\psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, \psi(x))\, dx.$$

Vajadzības gadījumā izvēloties jaunu konstanti a (mazāku par iepriekšējo), vienmēr var panākt to, ka x nozīmēm intervallā $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + a$ arī $\psi(x)$ pilnīgi ietilpst eksistences taisnstūŗa labajā pusē:

$$x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + a, \qquad y_0 - b \leqslant y \leqslant y_0 + b.$$

Tad diferenci

$$\psi(x) - y_0 = \int\limits_{x_0}^{x} f(x, \psi)\, dx$$

novērtē ar

$$|\,\psi(x) - y_0\,| \leqslant M(x - x_0) \leqslant Ma \leqslant b,$$

bet diferenci

$$\psi(x) - y_n = \int\limits_{x_0}^{x} [f(x, \psi) - f(x, y_{n-1})]\, dx$$

ar Lipšica nosacījumu

$$|\,f(x, \psi) - f(x, y_{n-1})\,| \leqslant A\,|\,\psi - y_{n-1}\,|.$$

Ja formulā

$$|\,\psi(x) - y_n(x)\,| \leqslant A \int\limits_{x_0}^{x} |\,\psi(x) - y_{n-1}(x)\,|\, dx$$

izvēlas $n = 1$, tad dabū

$$|\,\psi(x) - y_1(x)\,| \leqslant A \int\limits_{x_0}^{x} |\,\psi(x) - y_0\,|\, dx \leqslant Ab\,(x - x_0).$$

Ja izvēlas $n = 2$ un nevienlīdzības labajā pusē ievēro iepriekš atrasto sakaru, tad rodas

$$|\,\psi(x) - y_2(x)\,| \leqslant A^2 b\,\frac{(x - x_0)^2}{2}.$$

Atkārtojot šādu pakāpenisku ievietošanu un izlietojot pilnīgās indukcijas slēdzienu, var atrast vispārīgu formulu

$$(14) \qquad |\psi(x) - y_n(x)| \leqslant A^n b \frac{(x - x_0)^n}{n!} \leqslant b \frac{(A\alpha)^n}{n!}.$$

Šīs nevienlīdzības labā puse robežgadījumā, kad $n \to \infty$, ir nulle. Tādēļ jābūt

$$\psi(x) = \lim_{n \to \infty} y_n(x) = \varphi(x),$$

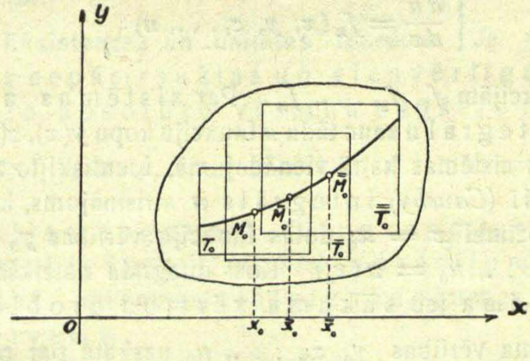
kas runā pretī pieņēmumam. Tā tad ir viens vienīgs Koši integrāls.

5. P i e z ī m e. 1) Dabūtā nevienlīdzība

$$|\varphi(x) - y_n(x)| \leqslant b \frac{(A\alpha)^n}{n!}$$

norāda uz kļūdas robežu, ja īstā atrisinājuma $\varphi(x)$ vietā ņem tuvinājumu $y_n(x)$, aprēķinātu ar formulu (11).

2) Eksistences un unitātes teorēmas pierādījums eksistences intervalla kreisajai daļai, t. i. kad $x_0 - \alpha \leqslant x \leqslant x_0$, ir analogs iepriekšējam pierādījumam.



Zīm. 2.

3) Ja funkcijas $f(x, y)$ dēfinīcijas apgabals S ir laukums (zīm. 2) ar slēgtu konveksu kontūru, tad meklējamā Koši integrāla eksistenci visā apgabalā var konstatēt ar t. s. a n a l i t i s k o t u r p i n ā j u m u.

Ja punktam $M_0(x_0, y_0)$ piederīgais eksistences taisnstūris ir T_0 un tur uz integrāllīnijas izvēlas citu punktu $\overline{M}_0(\overline{x}_0, \overline{y}_0)$, tad ar Pikāra metodi var noteikt pēdējam punktam piederīgo eksistences taisnstūri $\overline{T}_0$, kas vispārīgi neaizņem T_0. Integrāllīniju ir iespējams „turpināt" taisnstūrī $\overline{T}_0$ un tamlīdzīgā kārtā citos sekojošos taisnstūros ($\overline{\overline{T}}_0$ u. c).

§ 2. Normāla diferenciālvienādojumu sistēma.

1. Simultānu diferenciālvienādojumu sistēmu sauc par normālu, ja sistēmai ir tādā pat skaitā neatkarīgu vienādojumu, cik nezināmu funkciju, un šo funkciju atvasinājumi ir izteikti atklātā formā atkarībā no pārējiem mainīgiem. Ja nezināmās funkcijas $y = y(x)$, $z = z(x)$, . . ., $u = u(x)$ ir skaitā n, tad normālās sistēmas vispārīgais veids ir

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} = f_1(x, y, z, \ldots, u), \\ \frac{dz}{dx} = f_2(x, y, z, \ldots, u), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \frac{du}{dx} = f_n(x, y, z, \ldots, u) \end{cases}$$

ar dotām funkcijām $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Par sistēmas atrisinājumu jeb integrālu sauc tādu n funkciju kopu $y(x), z(x), \ldots, u(x)$, kas, ievietotas sistēmas katrā vienādojumā, identiski to apmierina. Sistēmas Koši (*Cauchy*) integrāls ir atrisinājums, kas pieņem argumenta nozīmei $x = x_0$ dotās funkciju vērtības $y_0 = y(x_0)$, $z_0 = z(x)_0$, . . ., $u_0 = u(x_0)$. Koši integrāla noteikšana ir t. s. Koši problēma jeb sākuma vērtību problēma.

Ja sākuma vērtības $y_0, z_0, \ldots, u_0$ uzskata par patvaļīgām, tad Koši integrāls dod sistēmas vispārīgo integrālu. Tā tad no Koši integrāla eksistences secināms, ka sistēmas (1) vispārīgais integrāls satur n patvaļīgas konstantes.

Normālās sistēmas (1) Koši integrāla eksistenci var pierādīt, vispārinot vai nu Koši metodi *„Calcul des limites"* analitisko funkciju $f_1, f_2, \ldots, f_n$ gadījumā, vai **Pikāra pakāpenisko tuvinājumu metodi**, kad der šādas hipotēzes.

1 $f_1, f_2, \ldots, f_n$ ir $n+1$ mainīgo $x, y, z, \ldots, u$ nepārtrauktas un vienvērtīgas funkcijas definīcijas apgabalā

$$(2) \quad |x-x_0| \leqslant a, \ |y-y_0| \leqslant b, \ |z-z_0| \leqslant b, \ldots, |u-u_0| \leqslant b.$$

2. Ar kaut kādām divām mainīgo kopām $x, y, z, \ldots, u$ un $x, \bar{y}, \bar{z}, \ldots, \bar{u}$ definīcijas apgabalā (2) der relātīvi pret $y, z, \ldots, u$ t. s. vispārinātie Lipšica (*Lipschitz*) nosacījumi

$$(3) \quad |f_k(x, \bar{y}, \bar{z}, \ldots, \bar{u}) - f_k(x, y, z, \ldots, u)| \leqslant A(|\bar{y}-y| + |\bar{z}-z| + \ldots + |\bar{u}-u|)$$
$$(k = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Speciālā gadījumā, kad funkcijām eksistē parciālie atvasinājumi

$$\frac{\partial f_k}{\partial y}, \ \frac{\partial f_k}{\partial z}, \ldots, \frac{\partial f_k}{\partial u} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

nosacījumi (3) ir izpildīti ar Lipšica konstanti A, kas ir šo atvasinājumu absolūto vērtību augšējā robeža definīcijas apgabalā (2).

2. **Eksistences un unitātes teorēma.** Ja $f_1, f_2, \ldots, f_n$ ir dotās nepārtrauktas un vienvērtīgas funkcijas ar to absolūto vērtību augšējo robežu

$$M \geqslant |f_k(x, y, z, \ldots, u)| \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

definīcijas apgabalā (2) un apmierina vispārinātos Lipšica (*Lipschitz*) nosacījumus (3), tad normālai diferenciālvienādojumu sistēmai (1) intervallā

$$(4) \quad x_0 - a \leqslant x \leqslant x_0 + a \qquad \left[a = min\left(a, \frac{b}{M}\right)\right]$$

eksistē viens un tikai viens Koši (*Cauchy*) integrāls.

Pierādījums. Sistēmas (1) Košī problēmu reducē uz integrālvienādojumu sistēmas

$$
(5)\quad \begin{cases}
y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f_1(x, y(x), z(x), \ldots, u(x))\, dx, \\
z(x) = z_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f_2(x, y(x), z(x), \ldots, u(x))\, dx, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
u(x) = u_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f_n(x, y(x), z(x), \ldots, u(x)) dx
\end{cases}
$$

atrisināšanu, lai ērti lietotu Pikāra (*Picard*) pakāpenisko tuvinājumu metodi. Par Košī integrāla tuvinājumiem izvēlas $y_0, z_0, \ldots, u_0$ un iterācijas procesā sastāda šādas funkcijas ($m = 1, 2, 3, \ldots$):

$$
(6)\quad \begin{cases}
y_m(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f_1(x, y_{m-1}(x), z_{m-1}(x), \ldots, u_{m-1}(x)) dx, \\
z_m(x) = z_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f_2(x, y_{m-1}(x), z_{m-1}(x), \ldots, u_{m-1}(x)) dx, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
u_m(x) = u_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f_n(x, y_{m-1}(x), z_{m-1}(x), \ldots, u_{m-1}(x)) dx.
\end{cases}
$$

Funkcijām (6) ir šādas **īpašības**, kas vispārina 1. §-fā konstatētās īpašības, un tās var ģeometriski interpretēt, lietojot vairāk dimensiju telpas jēdzienu. Vienkāršības labad turpmākā diskusijā apskatīsim eksistences intervalla (4) labo pusi, t. i. kad $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + a$ (aprēķini un rezultāti kreisajai pusei ir analogi).

I. Katra funkcija (6) apmierina sākuma nosacījumus:

$$y_m(x_0) = y_0, \quad z_m(x_0) = z_0, \ldots, u_m(x_0) = u_0 \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots).$$

II. **Eksistences intervallā (4) katrai funkcijai der sakari:**

$$|y_m(x)-y_0|\leqslant b,\ |z_m(x)-z_0|\leqslant b, \ldots, |u_m(x)-u_0|\leqslant b \quad (m=1,2,3,\ldots).$$

Piemēram, diferenci

$$y_m - y_0 = \int_{x_0}^{x} f_1(x, y_{m-1}, z_{m-1}, \ldots, u_{m-1})\, dx$$

novērtē ar

$$|y_m - y_0| \leqslant M \int_{x_0}^{x} dx \leqslant Ma \leqslant b,$$

ievērojot, ka

$$|f_1| \leqslant M, \qquad x - x_0 \leqslant a.$$

Citas diferences novērtē tādā pat veidā.

III. **Funkciju virknēm**

$$(7) \qquad \begin{cases} y_0,\ y_1(x), \ldots, y_m(x), \ldots \\ z_0,\ z_1(x), \ldots, z_m(x), \ldots \\ \cdots\cdots\cdots \\ u_0,\ u_1(x), \ldots, u_m(x), \ldots \end{cases}$$

eksistē nepārtrauktas robežfunkcijas:

$$Y(x) = \lim_{m\to\infty} y_m(x), \quad Z(x) = \lim_{m\to\infty} z_m(x), \ldots, U(x) = \lim_{m\to\infty} u_m(x).$$

Sastāda palīga funkciju rindas

$$(8) \qquad \begin{cases} y_0 + \sum\limits_{m=1}^{\infty} (y_m - y_{m-1}), \\ z_0 + \sum\limits_{m=1}^{\infty} (z_m - z_{m-1}), \\ \cdots\cdots\cdots \\ u_0 + \sum\limits_{m=1}^{\infty} (u_m - u_{m-1}), \end{cases}$$

kuŗām pirmo $m+1$ locekļu summas ir $y_m(x)$, $z_m(x)$, ..., $u_m(x)$. Šo rindu skaitlisko majorantu noteikšanai to locekļus novērtē šādā veidā. Locekļus

$$y_1 - y_0 = \int_{x_0}^{x} f_1(x, y_0, z_0, \ldots, u_0)dx,$$

$$z_1 - z_0 = \int_{x_0}^{x} f_2(x, y_0, z_0, \ldots u_0)dx,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_1 - u_0 = \int_{x_0}^{x} f_n(x, y_0, z_0, \ldots, u_0)\, dx$$

novērtē ar formulām

$$\begin{aligned} |y_1 - y_0| &\leqslant M(x - x_0) \leqslant Ma, \\ |z_1 - z_0| &\leqslant M(x - x_0) \leqslant Ma, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ |u_1 - u_0| &\leqslant M(x - x_0) \leqslant Ma, \end{aligned}$$

ievērojot, ka

$$|f_k| \leqslant M \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Ar iepriekšējām formulām un Lipšica nosacījumiem (3) dabū novērtējumu sekojošiem locekļiem. Piemēram, locekļa

$$y_2 - y_1 = \int_{x_0}^{x} [f_1(x, y_1, z_1, \ldots, u_1) - f_1(x, y_0, z_0, \ldots, u_0)]\, dx$$

absolūtā vērtība ir

$$|y_2 - y_1| \leqslant A \int_{x_0}^{x} [|y_1 - y_0| + |z_1 - z_0| + \ldots + |u_1 - u_0|]\, dx$$

jeb

$$|y_2 - y_1| \leqslant nAM \frac{(x - x_0)^2}{2} \leqslant nAM \frac{a^2}{2}.$$

Tamlīdzīgi atrod, ka

$$|z_2 - z_1| \leqslant n\,A\,M\frac{(x-x_0)^2}{2} \leqslant n\,A\,M\frac{a^2}{2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$|u_2 - u_1| \leqslant n\,A\,M\frac{(x-x_0)^2}{2} \leqslant n\,A\,M\frac{a^2}{2}.$$

Ar pilnīgās indukcijas slēdzienu stingri pierāda vispārīgās formulas ($m = 1, 2, 3 \ldots$):

$$(9)\left\{\begin{array}{l} |y_m - y_{m-1}| \leqslant (nA)^{m-1} M\dfrac{(x-x_0)^m}{m!} \leqslant (nA)^{m-1} M\dfrac{a^m}{m!}, \\ |z_m - z_{m-1}| \leqslant (nA)^{m-1} M\dfrac{(x-x_0)^m}{m!} \leqslant (nA)^{m-1} M\dfrac{a^m}{m!}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ |u_m - u_{m-1}| \leqslant (nA)^{m-1} M\dfrac{(x-x_0)^m}{m!} \leqslant (nA)^{m-1} M\dfrac{a^m}{m!}. \end{array}\right.$$

Ievērojot šīs formulas un apzīmējot ar $K > 0$ augšējo robežu rindu (8) pirmo locekļu absolūtām vērtībām $|y_0|, |z_0|, \ldots, |u_0|$, sastāda šo rindu kopīgo skaitlisko majorantu

$$K + Ma + nAM\frac{a^2}{2} + \ldots + (nA)^{m-1} M\frac{a^m}{m!} + \ldots = K + \frac{M}{nA}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(naA)^m}{m!},$$

kas savirzās, jo rinda

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(naA)^m}{m!} = e^{naA} - 1 \qquad (e \text{ — nat. log. baze})$$

savirzās visām galīgām n, a un A nozīmēm. Veierštrāsa (§ 1) kritērijs rāda, ka funkciju rindas (8) savirzās absolūti un vienmērīgi, un tās definē robežgadījumā nepārtrauktas funkcijas

$$Y(x) = \lim_{m\to\infty} y_m(x), \quad Z(x) = \lim_{m\to\infty} z_m(x), \ldots, \quad U(x) = \lim_{m\to\infty} u_m(x).$$

IV. Sastādītās robežfunkcijas $Y(x), Z(x), \ldots, U(x)$ ir diferenciālvienādojumu sistēmas (1) Koši (*Cauchy*) integrāls.

Tiešām, ievērojot funkciju $f_1, f_2, \ldots, f_n$ nepārtrauktību, no rekurrences formulām (6) robežgadījumā, kad $m \to \infty$, dabū sakarus

$$
(10) \quad \begin{cases}
Y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f_1(x, Y, Z, \ldots, U)\, dx, \\
Z(x) = z_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f_2(x, Y, Z, \ldots, U)\, dx, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
U(x) = u_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f_n(x, Y, Z, \ldots, U)\, dx,
\end{cases}
$$

no kuŗiem viegli atrast, ka $Y(x), Z(x), \ldots, U(x)$ ir sistēmas (1) Košī integrāls.

V. A t r a s t a i s K o š ī i n t e g r ā l s $Y(x), Z(x), \ldots, U(x)$ a r t e o r ē m ā m i n ē t i e m n o s a c ī j u m i e m i r v i e n s v i e n ī g s s i s t ē m a s (1) a t r i s i n ā j u m s.

Pierādījums ir analogs 1. §-fā apskatītajam. Pieņemsim pretējo, ka ir vēl cits Košī integrāls $Y_1(x), Z_1(x), \ldots, U_1(x)$ ar tādiem pat sākuma nosacījumiem:

$$Y_1(x_0) = y_0, \quad Z_1(x_0) = z_0, \ldots, U_1(x_0) = u_0.$$

Tad funkcijas $Y_1(x), Z_1(x), \ldots, U_1(x)$ der sakariem (10), kur $Y, Z, \ldots, U$ apmainīti ar $Y_1, Z_1, \ldots, U_1$. No tiem sastādītās diferences

$$Y_1 - y_0, \quad Z_1 - z_0, \ldots, U_1 - u_0$$

novērtē ar

$$
\begin{aligned}
&|Y_1 - y_0| \leqslant M(x - x_0) \leqslant Ma \leqslant b, \\
&|Z_1 - z_0| \leqslant M(x - x_0) \leqslant Ma \leqslant b, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&|U_1 - u_0| \leqslant M(x - x_0) \leqslant Ma \leqslant b.
\end{aligned}
$$

Ja ievēro rekurrences formulas (6) un Lipšica nosacījumus (3), tad diferencēm $Y_1 - y_m$, $Z_1 - z_m, \ldots, U_1 - u_m$ dabū tādu novērtējumu, ka to absolutā vērtība nav lielāka par

$$A\int_{x_0}^{x}[|Y_1 - y_{m-1}| + |Z_1 - z_{m-1}| + \ldots + |U_1 - u_{m-1}|]dx.$$

Rekurrences un pilnīgās indukcijas ceļā rodas formulas

$$(11)\quad \begin{cases} |Y_1(x) - y_m(x)| \leqslant b\,(nA)^m \dfrac{(x-x_0)^m}{m!} \leqslant b\,\dfrac{(naA)^m}{m!}, \\ |Z_1(x) - z_m(x)| \leqslant b\,(nA)^m \dfrac{(x-x_0)^m}{m!} \leqslant b\,\dfrac{(naA)^m}{m!}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ |U_1(x) - u_m(x)| \leqslant b\,(nA)^m \dfrac{(x-x_0)^m}{m!} \leqslant b\,\dfrac{(naA)^m}{m!}. \end{cases}$$

Tā kā šo nevienlīdzību pēdējie locekļi neaprobežoti tuvojas nullei, kad $m \to \infty$, tad robežgadījumā ir

$$Y_1(x) = \lim_{m\to\infty} y_m(x)\quad Z_1(x) = \lim_{m\to\infty} z_m(x), \ldots, U_1(x) = \lim_{m\to\infty} u_m(x).$$

Tā tad rodas pretruna:

$$Y_1(x) = Y(x),\quad Z_1(x) = Z(x), \ldots,\quad U_1(x) = U(x),$$

kas norāda uz unitātes teōrēmas pareizību.

Normālas diferenciālvienādojumu sistēmas atrisinājumam var attiecināt analogas piezīmes 1.—3. kā 1. § tā darīts ar vienu diferenciālvienādojumu.

3. Ja diferenciālvienādojumu sistēma ir **lineāra**

$$(12)\quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \varphi_{11}(x)\,y + \varphi_{12}(x)\,z + \ldots + \varphi_{1n}(x)\,u + \varphi_1(x), \\ \dfrac{dz}{dx} = \varphi_{21}(x)\,y + \varphi_{22}(x)\,z + \ldots + \varphi_{2n}(x)\,u + \varphi_2(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{du}{dx} = \varphi_{n1}(x)\,y + \varphi_{n2}(x)\,z + \ldots + \varphi_{nn}(x)\,u + \varphi_n(x) \end{cases}$$

ar dotām nepārtrauktām funkcijām

$$\varphi_{ik}(x),\quad \varphi_i(x)\qquad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ldots,n)$$

intervallā

$$(13)\qquad x_0 - a \leqslant x \leqslant x_0 + a,$$

tad $b \to \infty$, un ir ievēroti arī Lipšica nosacījumi (3). Tā kā

$$\alpha = min.\left(a,\ \frac{b}{M}\right),$$

tad lineāras sistēmas (12) gadījumā $\alpha = a$, t. i. Koši integrāla eksistences intervalls

$$x_0 - \alpha \leqslant x \leqslant x_0 + \alpha$$

sakrīt ar definīcijas intervallu (13).

Uzdevumi I.

1. Lietojot Koši metodi ar pakāpju rindu, noteikt diferenciālvienādojuma

$$y' = 2x + y \qquad \left(y' = \frac{dy}{dx}\right)$$

to integrāllīniju, kas iet caur sākuma punktu.

$$Atb\quad y = 2(e^x - x - 1).$$

2. Ar pakāpenisko tuvinājumu metodi noteikt vienādojuma

$$\frac{dy}{dx} = 2xy$$

integrāllīniju, kas iet caur punktu (0,1).

$$Atb.\quad y = e^{x^2}.$$

3. Ar pakāpenisko tuvinājumu metodi atrisināt šādus vienādojumus:

1) kvadrātvienādojumu

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

ja $|\,a\,|$ mazs skaitlis un $b \neq 0$;

2) Keplera vienādojumu

$$x - e\sin x = a,$$

ja $0 < e < 1$ un $a = const.$

II. Vispārīgie n. kārtas diferenciālvienādojumi.

§ 3. Eksistences un unitātes teorēma. Integrālu veidi.

1. Vispārīgās formas diferenciālvienādojums

$$\Phi(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0 \tag{1}$$

saista argūmentu x, nezināmo funkciju $y = y(x)$ un tās atvasinājumus

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Ja var izteikt no (1) atklātā formā augstākās (n.) kārtas atvasinājumu

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)), \tag{2}$$

tad ar jaunu funkciju

$$y'(x) = z, \; y''(x) = t, \ldots, y^{(n-2)}(x) = v, \; y^{(n-1)}(x) = u$$

ievešanu diferenciālvienādojumu (2) var reducēt uz ekvivalentu normālu diferenciālu sistēmu

$$\left\{\begin{aligned} y'(x) &= z, \\ z'(x) &= t, \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ v'(x) &= u, \\ u'(x) &= f(x, y, z, t, \ldots, v, u), \end{aligned}\right. \tag{3}$$

kas satur n nezināmās funkcijas $y(x)$, $z(x)$, $t(x)$,.. , $v(x)$, $u(x)$.

Pēc vispārīgās eksistences un unitātes teorēmas (2. §) secina, ka sistēmai (3) ar teorēmā minētiem nosacījumiem eksistē viens vienīgs Koši integrāls, t. i. atrisinājums, kas nozīmei $x = x_0$ pieņem dotās vērtības

$$y_0 = y(x_0), \quad z_0 = z(x_0), \quad t_0 = t(x_0), \ldots, \quad v_0 = v(x_0), \quad u_0 = u(x_0).$$

Ievērojot ievesto funkciju apzīmējumus, dabū n. kārtas diferenciālvienādojuma (2) Koši integrālu kā šī vienādojuma atrisinājumu, kas apmierina t. s. **sākuma nosacījumus**:

$$(4)\quad y_0=y(x_0),\ y_0'=y'(x_0),\ y_0''=y''(x_0),\dots,y_0^{(n-1)}=y^{(n-1)}(x_0).$$

Košī integrāla noteikšana ir diferenciālvienādojuma **Košī problēma** jeb **sākuma vērtību problēma**.

Kā vispārīgās teorēmas (2. §) speciāls veids ir **eksistences un unitātes teorēma** n**. kārtas diferenciālvienādojumam**: ja vienādojumā (2) funkcija f attiecībā pret mainīgiem $x, y, z = y', \dots, u = y^{(n-1)}$ apmierina vispārīgajā teorēmā (2. §) minētos nosacījumus, tad vienādojumam (2) eksistē viens vienīgs Košī integrāls (4).

Tā tad ar šiem nosacījumiem vienādojuma (2) Košī problēmai ir viens vienigs atrisinājums.

2. Ja n sākuma vērtības (4) uzskata par patvaļīgām, tad Košī integrāls dod n. kārtas diferenciālvienādojuma (2) **vispārīgo integrālu**, kas satur n patvaļīgas konstantes (parametrus) $C_1, C_2, \dots, C_n$. Šo konstantu skaits ir vienāds ar diferenciālvienādojuma kārtu. Ja eksistences teorēmā minētie nosacījumi nav ievēroti, tad diferenciālvienādojumam (2) var būt **singulārie integrāli**, kas neietilpst vispārīgajā integrālā un var saturēt arī patvaļīgas konstantes, bet mazākā skaitā nekā vispārīgais integrāls.

Diferenciālvienādojuma (2) vispārīgais integrāls

$$y = \varphi(x;\ C_1, C_2, \dots, C_n),$$

ievietots vienādojumā, identiski (pret x) to apmierina ar kaut kādām n konstantu $C_1, C_2, \dots, C_n$ nozīmēm. Tas nozīmē, ka ar atvasināšanu pēc x sastādītās funkcijas (kopā ar y):

$$(5)\quad \begin{cases} y = \varphi(x;\ C_1, C_2, \dots, C_n), \\ y' = \varphi'(x;\ C_1, C_2, \dots, C_n), \\ y'' = \varphi''(x;\ C_1, C_2, \dots C_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(n-1)} = \varphi^{(n-1)}(x;C_1 C_2, \dots, C_n), \\ y^{(n)} = \varphi^{(n)}(x;\ C_1, C_2, \dots, C_n) \end{cases}$$

ir tādas, ka der identisks sakars

$$(6)\quad \varphi^{(n)}(x;\, C_1, C_2, \ldots, C_n) = f(x, \varphi, \varphi', \varphi'', \ldots, \varphi^{(n-1)}).$$

Konstatēsim, ka **katrs vienādojuma** (2) **integrāls** $y = \varphi(x;\, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, **ja tas satur** n **neatkarīgas patvaļīgas konstantes** $C_1, C_2, \ldots, C_n$, **ir diferenciālvienādojuma vispārīgais integrāls un šo konstantu izslēgšanas rezultātā no sistēmas** (5) **rodas diferenciālvienādojums** (2).

Nosacījumu par **neatkarīgām** konstantēm (parametriem) izteic tā, ka no sistēmas (5) pirmajiem n vienādojumiem nav iespējams izslēgt visas n konstantes $C_1, C_2, \ldots, C_n$, resp. sastādīt zemāku par n. kārtas diferenciālvienādojumu. Bet gan no minētiem sistēmas (5) vienādojumiem var izslēgt konstantes skaitā $n - 1$, resp. atrisināt pēc konstantēm $C_1, C_2, \ldots, C_n$:

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} C_1 &= \varphi_1(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \\ C_2 &= \varphi_2(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_n &= \varphi_n(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}). \end{aligned}\right.$$

Sastādītās funkcijas $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ ir tādas, ka der identiski sakari

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} y &= \varphi(x, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n), \\ y' &= \varphi'(x, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n), \\ y'' &= \varphi''(x, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n-1)} &= \varphi^{(n-1)}(x, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n). \end{aligned}\right.$$

Ja ievieto $C_1, C_2, \ldots, C_n$ izteiksmes (7) sistēmas (5) pēdējā vienādojumā, tad rodas sakars

$$y^{(n)} = \varphi^{(n)}(x, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n),$$

kas reducējas uz diferenciālvienādojumu

$$(2)\quad y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}),$$

ja ievēro identisko sakaru (6). Tā tad n neatkarīgu konstantu $C_1, C_2, \ldots, C_n$ izslēgšanas rezultātā no $n+1$ vienādojumiem (5) rodas dotais diferenciālvienādojums (2).

Integrāls $y = \varphi(x; C_1, C_2, \ldots, C_n)$ ir vispārīgais tamdēļ, ka katrai nozīmju sistēmai

$$x_0, y_0 = y(x_0), \; y_0' = y'(x_0), \ldots, y_0^{(n-1)} = y^{(n-1)}(x_0)$$

var pēc (7) atrast savu konstantu sistēmu

$$C_1, C_2, \ldots, C_n,$$

kas, ievietota funkcijā

$$y = \varphi(x; C_1, C_2, \ldots, C_n),$$

dod integrāllīniju ar pieprasītiem sākuma nosacījumiem.

Sakarus (7), kas satur katrs vienu patvaļīgu konstanti un atrisinājumu $y(x)$ ar augstāko atvasinājumu $y^{(n-1)}$, sauc par diferenciālvienādojuma (2) p i r m a j i e m (jeb p i r m ā s k ā r t a s) i n t e g r ā l i e m (īsi — pirmintegrāliem). Tie ir arī diferenciālvienādojumam (2) ekvivalentās diferenciālās sistēmas (3) pirmintegrāli. No n neatkarīgiem pirmintegrāliem (7) ir iespējams izslēgt nezināmās funkcijas $n-1$ atvasinājumus $y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ un atrast diferenciālvienādojuma (2) vispārīgo integrālu $y = \varphi(x; C_1, C_2, \ldots, C_n)$.

Ja ir zināms viens pirmintegrāls, piem.,

$$C_1 = \varphi_1(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}),$$

tad to var uzskatīt par $(n-1)$ kārtas diferenciālvienādojumu un sastādīt tā pirmintegrālu

$$C_2 = \psi(x, y, y', \ldots, y^{(n-2)}; C_1)$$

ar divām patvaļīgām konstantēm C_1, un C_2 un augstāko atvasinājumu $y^{(n-2)}$. Pēdējais sakars ir dotā diferenciālvienādojuma (2) o t r a i s (jeb o t r ā s k ā r t a s) integrāls. To var sastādīt no vispārīgā integrāla $y = \varphi(x; C_1, C_2, \ldots, C_n)$, ja no sistēmas (5) pirmajiem $n-1$ vienādojumiem izslēdz $n-2$ konstantes $C_3, C_4, \ldots, C_n$. Tamlīdzīgā kārtā turpinot, var sastādīt 3., 4., . . ., $(n-1)$. kārtas integrālus, kas satur attiecīgi 3, 4, . . ., $n-1$ patvaļīgās konstantes un zemākās kārtas atvasinājumus. Pēdīgi vispārīgo integrālu var uzskatīt par n. kārtas integrālu, kas nesatur funkcijas atvasinājumu. Integrālus ar kārtu, zemāku par n, sauc arī par **starpintegrāliem**.

3. Vispārīgās formas diferenciālvienādojumam

$$\Phi(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

vispārīgo integrālu

$$F(x, y; C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0 \tag{9}$$

un starpintegrālus definē analogā kārtā kā vienādojumam (2).

Ja vienādojumu sistēmā

$$\tag{10} \left\{ \begin{array}{l} F(x, y; C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial y} . y' = 0, \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2 \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} y' + \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} y'^2 + \dfrac{\partial F}{\partial y} \cdot y'' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial^{n-1} F}{\partial x^{n-1}} + \ldots\ldots + \dfrac{\partial F}{\partial y} y^{(n-1)} = 0, \\ \dfrac{\partial^n F}{\partial x^n} + \ldots\ldots + \dfrac{\partial F}{\partial y} y^{(n)} = 0, \end{array} \right.$$

kas sastādīta tās pirmo vienādojumu atvasinot pēc x atkārtoti n reiz, nav iespējams izslēgt no pirmiem n vienādojumiem n konstantes $C_1, C_2, \ldots, C_n$, tad saka, ka šīs konstantes ir **neatkarīgas** (**dažādas**). Ja $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ir **neatkarīgas patvaļīgas konstantes un no sistēmas (10) visiem $n+1$ vienādojumiem šo konstantu izslēgšanas rezultātā rodas n. kārtas diferen-**

ciālvienādojums (1), tad sakars (9) ir šī vienādojuma vispārīgais integrāls. Sakars (9) definē $y = \varphi(x;\ C_1, C_2, \ldots, C_n)$ kā neattīstītu funkciju.

Lietojot mazākā skaitā pirmos sistēmas (10) vienādojumus un izslēdzot mazāk nekā n konstantes, var sastādīt diferenciālvienādojuma (1) starpintegrālus. Ja, piem., no pirmiem n sistēmas (10) vienādojumiem izslēdz $n-1$ konstantes $C_2, C_3, \ldots, C_n$, tad dabūtais sakars

$$\Phi_1(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)};\ C_1) = 0$$

ir vienādojuma (1) pirmais (pirmās kārtas) integrāls. Ja ņem pirmos $n-1$ vienādojumus (10) un izslēdz $n-2$ konstantes $C_3, C_4, \ldots, C_n$, tad rodas diferenciālvienādojuma (1) otrais (otrās kārtas) integrāls

$$\Phi_2(x, y, y', \ldots, y^{(n-2)};\ C_1, C_2) = 0$$

u. t. t. Pēdīgi no pirmiem diviem sistēmas (10) vienādojumiem ar vienas konstantes C_n izslēgšanu rodas $(n-1)$. kārtas integrāls

$$\Phi_{n-1}(x, y, y';\ C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}) = 0.$$

Par n. kārtas integrālu var uzskatīt vispārīgo integrālu (9).

Ja konstantēm $C_1, C_2, \ldots C_n$ izvēlas noteiktas (fiksētas) nozīmes, tad dabū partikulāro integrālu. Kad vispārīgajā integrālā nav konstantu nozīmju, ar kuŗām izteiktu diferenciālvienādojuma atrisinājumu, tad šādu atrisinājumu sauc par singulāru integrālu. Pēdējais var par sevi saturēt patvaļīgas konstantes, bet mazākā skaitā nekā n.

§ 4. Reducējamie gadījumi.

1. Vispārīgās formas diferenciālvienādojuma

$$\Phi(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0 \tag{1}$$

integrācijai nav vispārīgu metožu. Šādus atsevišķus vienādojuma tipus ar piemērotām substitūcijām var reducēt uz zemākas kārtas diferenciālvienādojumiem, vai speciālos gadījumos integrāciju var reducēt uz kvadrātūrām. Piemēram, diferenciālvienādojumu, kas ir **homogens** attiecībā pret $y, y', \ldots, y^{(n)}$ un kam normāla forma ir

$$\Phi\left(x, \frac{y'}{y}, \frac{y''}{y}, \ldots, \frac{y^{(n)}}{y}\right) = 0 \qquad (y \neq 0), \tag{2}$$

reducē uz $(n-1)$. kārtas diferenciālvienādojumu ar substitūciju

$$z(x) = \frac{y'(x)}{y(x)}. \tag{3}$$

No atvasinājumu izteiksmēm

$$y' = yz, \quad y'' = y(z' + z^2), \quad y''' = y(z'' + 3zz' + z^3)$$

uztveram vispārīgo likumu

$$y^{(k)} = y\, f(z, z', z'', \ldots, z^{(k-1)}), \tag{4}$$

kur f ir polinoms attiecībā pret $z, z', \ldots, z^{(k-1)}$. Šis vispārīgās formulas pierādījumam lietojam indukcijas slēdzienu. Ja formulu (4) atvasina pēc x un ievēro (3), tad var izteikt sekojošo augstāko atvasinājumu

$$y^{(k+1)} = y' f(z, z', \ldots, z^{(k-1)}) + y\left[\frac{\partial f}{\partial z} z' + \frac{\partial f}{\partial z'} z'' + \ldots + \frac{\partial f}{\partial z^{(k-1)}} z^{(k)}\right]$$

ar analogu formulu

$$y^{(k+1)} = y\varphi(z, z', \ldots, z^{(k)}),$$

kur

$$\varphi(z, z', \ldots, z^{(k)}) = z f(z, z', \ldots, z^{(k-1)}) + \frac{\partial f}{\partial z} z' + \ldots \frac{\partial f}{\partial z^{(k-1)}} z^{(k)}$$

ir polinoms ar augstāko atvasinājumu $z^{(k)}$. Ja izlieto formulas (3) un (4) ar $k = 1, 2, 3, \ldots, n$, tad diferenciālvienādojums (2) top par $(n-1)$. kārtas diferenciālvienādojumu

$$\Psi(x, z, z', \ldots, z^{(n-1)}) = 0 \tag{5}$$

attiecībā pret funkciju $z = z(x)$. Ja tā vispārīgais integrāls ir

$$z = \psi(x; C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}),$$

tad no formulas (3) ar kvadrātūru

$$y = C_n e^{\int z dx} = C_n e^{\int \psi(x; C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}) dx}$$

izteic homogenā vienādojuma (2) vispārīgo integrālu ar n patvaļīgām integrācijas konstantēm $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Piezīme. Ar lietoto substitūciju (3) var reducēt homogeno līneāro otrās kārtas diferenciālvienādojumu uz Rikāti (*Riccati*) vienādojumu (sk. I d., § 20)*.

Ja vienādojums (1) nesatur atklāti vismaz vienu no mainīgiem x un y vai zemākās kārtas atvasinājumu, tad ir šādi reducējamie pamattipi.

I pamattips: diferenciālvienādojums

$$\Phi(x, y^{(n)}) = 0$$

vai atklātā formā

$$y^{(n)} = f(x) \qquad \left(y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}\right). \tag{6}$$

Atrisināsim šī vienādojuma Koši problēmu: noteikt vienādojuma (6) integrālu $y(x)$, kas nozīmei $x = x_0$ pieņem vērtības:

$$y_0 = y(x_0), \quad y_0' = y'(x_0), \ldots, y_0^{(n-1)} = y^{(n-1)}(x_0). \tag{7}$$

Izteicot vienādojuma kreisajā pusē atvasinājumu

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})',$$

*) Te un turpmākos norādījumos nozīmē autora darbu „Diferenciālvienādojumi un variāciju rēķini," I daļa, Rīgā, 1937.

dabū ar vienu kvadratūru zemākās kārtas atvasinājumu

$$y^{(n-1)} = \int_{x_0}^{x} f(s_1)\, ds_1 + C_1.$$

Integrācijas konstantes C_1 noteikšanai liek $x = x_0$ un ievēro sākuma nosacījumu $y_0^{(n-1)} = y^{(n-1)}(x_0)$. Dabū nozīmi $C_1 = y_0^{(n-1)}$. Ja sastādītajā vienādojumā

$$y^{(n-1)} = \int_{x_0}^{x} f(s_1)\, ds_1 + y_0^{(n-1)}$$

izteic

$$y^{(n-1)} = (y^{(n-2)})',$$

tad ar jaunu kvadrātūru robežās x_0, x rodas

$$y^{(n-2)} = \int_{x_0}^{x} ds_2 \int_{x_0}^{s_2} f(s_1)\, ds_1 + (x - x_0)\, y_0^{(n-1)} + C_2.$$

Te jaunā integrācijas konstante ir $C_2 = y_0^{(n-2)} = y^{(n-2)}(x_0)$. Tādā kārtā turpinot, dabū vienādojuma (6) meklējamo Koši integrālu formā

$$y(x) = F(x) + P_{n-1}(x), \tag{8}$$

kur $P_{n-1}(x)$ ir $(n-1)$ pakāpes polinoms

$$P_{n-1}(x) = y_0 + (x - x_0)\, y_0' + \frac{(x - x_0)^2}{2!}\, y_0'' + \dots + \frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!}\, y_0^{(n-1)}, \tag{9}$$

un funkciju $F(x)$ aprēķina ar n kārtēju kvadrātūru

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} ds_n \int_{x_0}^{s_n} ds_{n-1} \dots \int_{x_0}^{s_3} ds_2 \int_{x_0}^{s_2} f(s_1)\, ds_1. \tag{10}$$

No šīs izteiksmes vai no atrisinājuma formulas (8) atrod, ka funkcija $F(x)$ ir tas vienādojuma (6) Košī integrāls, kas kopā ar atvasinājumiem līdz $(n-1)$. kārtai ir nulle nozīmei $x = x_0$:

$$F(x_0) = F'(x_0) = F''(x_0) = \ldots = F^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad F^{(n)}(x) = f(x).$$

Bet tādu Košī integrālu var izteikt arī formā

$$(11) \qquad \varphi(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-s)^{n-1} f(s)\, ds.$$

Tiešām, šīs funkcijas atvasinājumi ir

$$\varphi'(x) = \frac{1}{(n-2)!}\int_{x_0}^{x}(x-s)^{n-1} f(s)ds, \ldots, \varphi^{(n-1)}(x) = \int_{x_0}^{x} f(s)ds, \varphi^{(n)}(x) = f(x),$$

un nozīmei $x = x_0$ vērtības ir šādas:

$$\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = \ldots = \varphi^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

Ievērojot unitātes teorēmu, ka ar vieniem un tiem pašiem sākuma nosacījumiem diferenciālvienādojumam ir viens vienīgs Košī integrāls, secina:

$$F(x) = \varphi(x).$$

Līdz ar to ir pierādīta integrālrēķinu formula

$$(12) \qquad \int_{x_0}^{x} ds_n \int_{x_0}^{s_n} ds_{n-1} \ldots \int_{x_0}^{s_3} ds_2 \int_{x_0}^{s_2} f(s_1) ds_1 = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-s)^{n-1} f(s) ds,$$

ko var atrast arī citādā veidā, piem., ar parciālo integrāciju.

II **pamattips**: diferenciālvienādojums

$$(13) \qquad \Phi(x, y^{(k)}(x), y^{(k+1)}(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0 \quad (1 \leqslant k \leqslant n-1),$$

kas nesatur direkti nezināmo funkciju $y(x)$ un eventuāli arī tās atvasinājumus līdz kārtai $k-1$ ieskaitot (ja $k > 1$).

Ievedot jauno funkciju

$$z(x) = y^{(k)}(x),$$

izteic

$$z'(x) = y^{(k+1)},\ z''(x) = y^{(k+2)}, \ldots, z^{(n-k)}(x) = y^{(n)}$$

un doto vienādojumu (13) pārveido par

$$\Phi(x, z(x), z', \ldots, z^{(n-k)}) = 0. \tag{14}$$

Sastādītā vienādojuma (14) kārta ir par k vienībām mazāka nekā (13). Ja tā vispārīgais integrāls ir

$$z = f(x;\, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k})$$

ar integrācijas konstantēm $C_1, C_2, \ldots, C_{n-k}$, tad funkcijas $y(x)$ noteikšanai ir jāatrisina I pamattipa diferenciālvienādojums, kam pēc (8), (9), (10), (11) analogām formulām dabū vispārīgo integrālu formā

$$y(x) = \frac{1}{(k-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-s)^{k-1} f(s; C_1\, C_2, \ldots, C_{n-k})ds + P_{k-1}(x) \tag{15}$$

ar $(k-1)$. pakāpes polinomu

$$P_{k-1}(x) = C_{n-k+1} + (x-x_0)C_{n-k+2} + \ldots + \frac{(x-x_0)^{k-1}}{(k-1)!}C_n$$

un jaunām integrācijas konstantēm $C_{n-k+1}, \ldots, C_n$.

III pamattips: diferenciālvienādojums

$$\Phi(y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0, \tag{16}$$

kas nesatur direkti argūmentu x.

Te izdevīgi uztvert y par argūmentu un ievest jaunu funkciju

$$y' = p = p(y).$$

Var izteikt otro atvasinājumu pēc x

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$$

ar funkcijas $p(y)$ pirmo atvasinājumu pēc y. Tamlīdzīgi dabū sekojošo augstāko kārtu atvasinājumu izteiksmes:

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = p \frac{d}{dy}\left(p \frac{dp}{dy}\right) = p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + p^2 \frac{d^2p}{dy^2},$$

$$y^{(4)} = p\left(\frac{dp}{dy}\right)^3 + 4p^2 \frac{dp}{dy} \cdot \frac{d^2p}{dy^2} + p^3 \frac{d^3p}{dy^3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y^{(n)} = p\left(\frac{dp}{dy}\right)^{n-1} + \ldots + p^{n-1} \frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}.$$

Ar atrastām izteiksmēm vienādojums (16) pēc substitūcijas reducējas uz $(n - 1)$. kārtas diferenciālvienādojumu

$$(17) \qquad \Phi_1\left(y, p \frac{dp}{dy}, \ldots, \frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}\right) = 0$$

attiecībā pret funkciju $p(y)$. Tā tad ar minēto substitūciju var reducēt uz diferenciālvienādojumu, kam kārta par vienu vienību ir zemāka nekā dotajam vienādojumam.

Ja vienādojuma (17) vispārīgais integrāls ir

$$p = \varphi(y; C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}),$$

tad no sakara

$$\frac{dy}{dx} = p$$

ar mainīgo separāciju un vienu kvadratūru dabū dotā vienādojuma (16) vispārīgo integrālu

$$x = C_n + \int \frac{dy}{\varphi(y; C_1, C_2 \ldots, C_{n-1})}$$

ar n integrācijas konstantēm $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

3. **Vienādojumu**

$$(18) \qquad \Phi(y^{(k)}(x), y^{(k+1)}(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0 \quad (1 \leqslant k \leqslant n-1),$$

kas nesatur direkti argūmentu x un funkciju $y(x)$, var diskutēt kā II, tā arī III pamattipa vienādojumu.

Ar jaunās funkcijas

$$z(x) = y^{(k)}(x)$$

ievešanu vienādojumu (18) reducē uz $(n-k)$. kārtas diferenciālvienādojumu

$$\Phi(z, z', z'', \ldots, z^{(n-k)}) = 0,$$

kas pieder III pamattipa vienādojumam (16). Ar jauno argūmentu z un funkciju $z' = u(z)$ dabūto vienādojumu savukārt var reducēt uz diferenciālvienādojumu

$$\Phi_1\left(z, u, \frac{du}{dz}, \ldots, \frac{d^{n-k-1}u}{dz^{n-k-1}}\right) = 0,$$

kam kārta ir $n-k-1$. Tā tad ar lietotiem paņēmieniem vienādojuma (18) kārtu var pazemināt par $k+1$ vienībām.

S p e c i ā l ā g a d ī j u m ā, kad $k = n-2$, vienādojumu

$$(19) \qquad \Phi(y^{(n-2)}(x), \; y^{(n-1)}(x), \; y^{(n)}(x)) = 0$$

ar substitūciju $z = y^{(n-2)}$ reducē uz otrās kārtas diferenciālvienādojumu

$$\Phi(z, z', z'') = 0,$$

kas savukārt ar substitūcijām

$$z' = u, \; z'' = u\frac{du}{dz}$$

top par pirmās kārtas diferenciālvienādojumu

$$\Phi\left(z, u, u\frac{du}{dz}\right) = 0.$$

Ja vienādojums (19) nesatur atvasinājumu $y^{(n-1)}$ un var atklātā formā izteikt augstāko atvasinājumu

$$y^{(n)} = \varphi\,(y^{(n-1)}),$$

tad ar minēto substitūciju dabū otrās kārtas diferenciālvienādojumu

$$z'' = \varphi\,(z),$$

kuŗa integrācija reducējas uz divām kvadratūrām (sk. I d., § 18).

Ja vienādojumā (18) ir $k = n - 1$ un var izteikt atklātā formā augstāko atvasinājumu

$$y^{(n)}\,(x) = f(y^{(n-1)}),$$

tad ar jauno funkciju $z = y^{(n-1)}$ dabū pirmās kārtas diferenciālvienādojumu

$$z' = f\,(z),$$

ko integrē ar mainīgo separāciju:

$$x + C_1 = \int \frac{dz}{f(z)}.$$

Ar inverso funkciju $z = \psi\,(x + C_1)$ sastādīto I pamattīpa vienādojumu

$$y^{(n-1)} = \psi\,(x + C_1)$$

integrē ar

$$y(x) = \frac{1}{(n-2)!}\int_{x_0}^{x}(x-s)^{n-2}\psi(s+C_1)ds + C_2 + C_3(x-x_0) + \ldots + C_n\frac{(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!}.$$

Uzdevumi II.

Integrēt šādus vienādojumus:

1. $y''' = xe^x$. *Atb.* $y = (x-3)\,e^x + C_1 + C_2x + C_3x^2$.

2. $y''' = sin^2x$. *Atb.* $y = \frac{x^3}{12} + \frac{sin\,2x}{16} + C_1 + C_2x + C_3x^2$.

3. $x^2y^{(4)} + 1 = 0$. *Atb.* $y = \frac{x^2}{2}\ln x + C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3$

4. $x^2y''' - 4xy'' + 6y' = 4$. *Atb.* $y = \frac{2}{3}x + C_1 + C_2x^3 + C_3x^4$.

5. $2xy'''y'' = y''^2 - 1$. *Atb.* $15C_1^2y = 4(C_1x+1)^{\frac{5}{2}} + C_2 + C_3x$.

6. $y'''y'' = 2$. *Atb.* $15y = 8(x + C_1)^{\frac{5}{2}} + C_2 + C_3x$.

7. $y^{(4)} + a^2y'' = 0$ *Atb.* $y = C_1\sin a\, x + C_2\cos a\, x + C_3 + C_4x$.

8 $x^2y^{(4)} = ay''$. *Atb.* $y = C_1x^{\frac{5+\beta}{2}} + C_2x^{\frac{5-\beta}{2}} + C_3 + C_4x$.
$(\beta = \sqrt{1 + 4a})$.

9. $y^{(5)} - k^2y''' = e^{ax}$ *Atb* $y = \frac{e^{ax}}{a^3(a^2 - k^2)} + C_1e^{kx} + C_2e^{-kx} +$
$+ C_3 + C_4x + C_5x^2$ $(k \neq a)$.

10. $(1 + y'^2)\, y''' = 3y'y''^2$. *Atb.* Visas riņķu līnijas plāksnē.

11. $3y''y^{(4)} = 5y'''^2$. *Atb.* Visas parabolas plāksnē.

12. $9y''^2y^{(5)} - 45y''y'''y^{(4)} + 40y'''^3 = 0$.
Atb. Visas konikas plāksnē.

Piezīme. Pēdējā vienādojuma integrācijai der ievērot, ka palīga diferenciālvienādojumu

$$ayy' + bxy + cx^3 = 0 \qquad (a, b, c - \text{konstantes})$$

atrisina ar substitūciju

$$y = zx^2.$$

III. Lineārie n. kārtas diferenciālvienādojumi.

§ 5. Vienādojumu veidi. Eksistences teorēma.

1. Parasto diferenciālvienādojumu sauc par l ī n e ā r u, ja tas pēc vajadzīgiem pārveidojumiem satur pirmajā pakāpē (līneāri) nezināmo funkciju $y(x)$ un tās atvasinājumus $y'=\frac{dy}{dx}$, $y''=\frac{dy^2}{dx^2}, \ldots$, bet nesatur to reizinājumus. Apskatīsim līneāro n. kārtas diferenciālvienādojumu

$$(1) \quad y^{(n)}+f_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+f_{n-1}(x)y'+f_n(x)y=f(x),$$

kam koeficientos ir dotās intervallā $a \leqslant x \leqslant b$ nepārtrauktas funkcijas $f_1(x), \ldots, f_n(x), f(x)$. Ja vienādojuma (1) brīvais loceklis ir identisks nullei: $f(x) \equiv 0$, tad vienādojumu sauc par h o m o g e n u; pretējā gadījumā — par n e h o m o g e n u.

2. Vienādojumu (1) var reducēt uz ekvivalentu līneāru normālu diferenciālvienādojumu sistēmu

$$(2) \quad \begin{cases} y' = z, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ u' = -f_1(x)u-\ldots-f_{n-1}(x)z-f_n(x)y+f(x) \end{cases}$$

attiecībā pret n funkcijām $y(x)$, $z(x)=y', \ldots, u(x)=y^{(n-1)}$. Izlietojot rezultātus (2. §) par vispārīgās līneārās sistēmas atrisinājuma eksistenci, dabū šādu **eksistences un unitātes teorēmu**: j a d i f e r e n c i ā l v i e n ā d o j u m ā (1) f u n k c i j a s $f_1(x),\ldots,f_n(x), f(x)$ i r n e p ā r t r a u k t a s u n v i e n v ē r t ī g a s i n t e r v a l l ā $a \leqslant x \leqslant b$, t a d t a m e k s i s t ē v i e n s v i e n ī g s a t r i s i n ā j u m s, k a s k o p ā a r a t v a s i n ā j u m i e m l ī d z n. k ā r t a i i r n e p ā r t r a u k t a f u n k c i j a š a j ā i n t e r v a l l ā u n š ī i n t e r v a l l a v i e n ā p u n k t ā $x=x_0$ p i e ņ e m d o t ā s v ē r t ī b a s

$$(3) \quad y_0=y(x_0),\ y_0'=y'(x_0), \ldots, y_0^{(n-1)}=y^{(n-1)}(x_0).$$

Tā tad diferenciālvienādojuma (1) K o š ī i n t e g r ā l s (3) ar minētiem nosacījumiem ir viens vienīgs, resp. K o š ī p r o b l ē m a i ir viens vienīgs atrisinājums.

S p e c i ā l ā g a d ī j u m ā, kad $f(x) \equiv 0$ un sākuma nosacījumi ir

$$(4) \qquad y_0 = y_0' = \ldots = y_0^{(n-1)} = 0,$$

dabū eksistences un unitātes teorēmas **sekas**: h o m o g e n a l ī n e ā r a *n*. k ā r t a s d i f e r e n c i ā l v i e n ā d o j u m a v i e n ī g a i s a t r i s i n ā j u m s, k a s k o p ā a r a t v a s i n ā j u m i e m l ī d z $(n-1)$. k ā r t a i p i e ņ e m n u l l e s v ē r t ī b u v i e n ā i n t e r v a l l a (a, b) p u n k t ā, i r t. s. t r i v i ā l a i s a t r i s i n ā j u m s

$$y(x) \equiv 0.$$

§ 6. Homogenie līneārie diferenciālvienādojumi.

1. L ī n e ā r a m d i f e r e n c i ā l s i m b o l a m

$$(1) \qquad L(y) = y^{(n)} + f_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + f_{n-1}(x) y' + f_n(x) y$$

ir divas p a m a t ī p a š ī b a s, izteiktas ar formulām:

$$(2) \qquad L(y+z) = L(y) + L(z), \quad L(Cy) = CL(y),$$

kur y un z ir kaut kādas funkcijas, bet C — konstante. Izlietojot šīs īpašības, atrod homogenā līneārā diferenciālvienādojuma

$$(3) \qquad L(y) = 0$$

šādas **vispārīgas īpašības**, kas vispārina tādas līneāram otrās kārtas diferenciālvienādojumam (I d. § 20).

I. J a $y_1(x)$ i r h o m o g e n a v i e n ā d o j u m a (3) p a r t i k u l ā r a i s i n t e g r ā l s, t a d a r ī $C_1 y_1(x)$ i r t ā i n t e g r ā l s.

II. J a $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_k(x)$ i r k p a r t i k u l ā r i e v i e n ā d o j u m a (3) i n t e g r ā l i, t a d a r ī s u m m a $y_1(x) + y_2(x) + \ldots + y_k(x)$, resp. $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_k y_k(x)$ a r k p a t v a ļ ī g ā m k o n s t a n t ē m $C_1, C_2, \ldots, C_k$ i r š ī v i e n ā d o j u m a i n t e g r ā l s.

Homogenā vienādojuma vispārīgā integrāla sastādīšanai ir lietojams jēdziens par līneāri neatkarīgiem atrisinājumiem. Apskatīsim vispārīgi funkciju līneāro atkarību, resp. neatkarību.

2. **Definīcija.** Nepārtrauktas funkcijas $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$ intervallā $a \leqslant x \leqslant b$ sauc par līneāri atkarīgām, ja šajā intervallā eksistē identisks sakars

$$(4) \qquad C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + \ldots + C_n\varphi_n(x) \equiv 0$$

ar konstantēm $C_1, C_2, \ldots, C_n$, kas nav reizē nulles. Pretējā gadījumā funkcijas ir līneāri neatkarīgas.

Kad funkcijām $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$ eksistē nepārtraukti atvasinājumi līdz kārtai $n-1$, tad līneārās atkarības gadījumā var sastādīt identiskus sakarus

$$(5) \quad \begin{cases} C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + \ldots + C_n\varphi_n(x) = 0, \\ C_1\varphi_1'(x) + C_2\varphi_2'(x) + \ldots + C_n\varphi_n'(x) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1\varphi_1^{(n-1)}(x) + C_2\varphi_2^{(n-1)}(x) + \ldots + C_n\varphi_n^{(n-1)}(x) = 0, \end{cases}$$

atvasinot pēc x sakaru (4) atkārtoti $n-1$ reizi. Ja uzskata (5) par homogenu līneāru algebrisku vienādojumu sistēmu, tad, lai tai attiecībā pret $C_1, C_2, \ldots, C_n$ būtu atrisinājumi, kas nav reizē nulles, jābūt sistēmas determinantam jeb t. s. funkciju Vronski (*Wronski*) determinantam

$$(6) \qquad W(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = \begin{vmatrix} \varphi_1, & \varphi_2 & \ldots & \varphi_n \\ \varphi_1' & \varphi_2' & \ldots & \varphi_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & \ldots & \varphi_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

identiski vienlīdzīgam ar nulli. Tā tad nosacījums

$$W(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = W(x) \equiv 0$$

ir nepieciešams funkciju līneārai atkarībai.

Vispārīgi*) tas nav pietiekošs, bet top par tādu, kad funkcijas ir homogenā diferenciālvienādojuma (3) n partikulārie integrāli:

$$\varphi_1(x) = y_1(x),\ \varphi_2(x) = y_2(x),\ldots,\ \varphi_n(x) = y_n(x).$$

Tiešām, tādā gadījumā ar hipotezi, ka intervalla (a, b) vienā punktā $x = x_0$ ir $W(x_0) = 0$, konstatē, ka sistemas (5) vienādojumus ar $x = x_0$ var apmierināt ar konstantēm $C_1, C_2, \ldots, C_n$, kas nav reizē nulles. Tas nozīmē, ka diferenciālvienādojuma (3) partikulārais integrāls

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x)$$

apmierina šādus sākuma nosacījumus:

$$y(x_0) = y'(x_0) = \ldots = y^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

Eksistences un unitātes teōrēmas sekas (§ 5) rāda, ka $y(x) \equiv 0$, t. i. funkcijas ir līneāri atkarīgas:

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x) \equiv 0.$$

Ir pierādīta **teōrēma**: Homogenā diferenciālvienādojuma (3) n partikulārie integrāli $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ir līneāri atkarīgi tad un tikai tad, ja to Vronski (*Wronski*) determinants ir identiski vienlīdzīgs ar nulli:

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = W(x) \equiv 0.$$

Tādēļ pretējā gadījumā, kad $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ nav identiski vienlīdzīgs ar nulli, integrāli $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ir līneāri neatkarīgi.

3. Ar t. s. **Liuvila** (*Liouville*) **formulu** konstatēsim, ka Vronski determinants $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ ir vai nu

---

*) Divu funkciju $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ gadījumā jāuzsver hipoteze, ka funkcijas nevienā intervalla (a, b) daļā nav pastāvīgi vienlīdzīgas nullei (sk. I d., § 19.).

identiski nulle, vai nav nulle intervalla (a, b) nevienā punktā $x = x_0$.

Minētās formulas atrašanai sastāda Vronski determinanta

$$
(7) \qquad W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots\ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots\ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \ldots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}
$$

atvasinājumu

$$
(8) \qquad \frac{dW}{dx} = W' = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots\ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots\ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \ldots & y^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \ldots & y_n^{(n)} \end{vmatrix},
$$

izlietojot n. kārtas determinanta atvasināšanas likumu. Te ir jāievēro, ka atvasināšanas formulā ar n determinantu summu paliek viens loceklis (8), jo pārēji ir nulles, kā determinanti ar vienādām rindām. Ja determinanta (8) pēdējās rindas elementiem pieskaita pirmo $n - 1$ rindu elementus, reizinātus attiecīgi ar $f_n(x)$, $f_{n-1}(x), \ldots, f_2(x)$ un ievēro, ka $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ir diferenciālvienādojuma (3) atrisinājumi:

$$
L(y_1) = 0, \quad L(y_2) = 0, \ldots, \quad L(y_n) = 0,
$$

tad pēc pārveidojumiem dabū funkcijas $W(x)$ noteikšanai pirmās kārtas diferenciālvienādojumu

$$
\frac{dW}{dx} = -f_1(x)\, W.
$$

Ar mainīgo separāciju un kvadrātūru dabū Liuvila (*Liouville*) formulu

$$(9) \quad W(x) = W_0 \, e^{-\int\limits_{x_0}^{x} f_1(x)dx} \quad (e - \text{nat. log. baze}),$$

ja apzīmē Vronski determinanta vērtību punktā $x = x_0$ ar

$$W_0 = W(y_1(x_0), y_2(x_0), \ldots, y_n(x_0)).$$

Formula (9) rāda, ka nepārtrauktās funkcijas $f_1(x)$ gadījumā visos intervalla (a, b) punktos (identiski) ir $W(x) = 0$, ja vienā punktā $W_0 = 0$, bet nevienā punktā $W(x) \neq 0$, ja kaut vienā punktā $W_0 \neq 0$. Tādēļ n partikulāro integrālu $y_1, y_2, \ldots, y_n$ līneārai atkarībai pietiek zināt, ka vienā punktā $W_0 = 0$, bet līneārai neatkarībai — ka $W_0 \neq 0$.

4. **Dēfinīcija.** Homogenā līneārā diferenciālvienādojuma (3) n partikulārie, līneāri neatkarīgie (t. i. kuŗu Vronski determinants $W \neq 0$), integrāli veido atrisinājumu fundamentālo sistēmu (*L. Fuchs*).

Ir šāda **pamatteōrēma**, ko devis Lagranžs (*Lagrange*): homogenam līneāram n. kārtas diferenciālvienādojumam (3) eksistē vismaz viena atrisinājumu fundamentāla sistēma

$$\eta_1(x), \eta_2(x), \ldots, \eta_n(x) \qquad (W(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) \neq 0);$$

kaut kuŗu vienādojama (3) atrisinājumu $y(x)$ var izteikt formā

$$(10) \quad y(x) = C_1\eta_1(x) + C_2\eta_2(x) + \ldots + C_n\eta_n(x)$$

ar n konstantēm $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Pierādījums. Pēc eksistences teōrēmas (§ 5) vienādojumam (3) ir šādi Koši integrāli $\eta_1(x), \eta_2(x), \ldots, \eta_n(x)$, kas intervalla (a, b) punktā $x = x_0$ apmierina nosacījumus:

$$
(11) \quad \begin{cases} \eta_1(x_0) = 1, & \eta_1'(x_0) = 0, \ldots, \eta_1^{(n-1)}(x_0) = 0, \\ \eta_2(x_0) = 0, & \eta_2'(x_0) = 1, \ldots, \eta_2^{(n-1)}(x_0) = 0, \\ \ldots & \ldots \\ \eta_n(x_0) = 0, & \eta_n'(x_0) = 0, \ldots, \eta_n^{(n-1)}(x_0) = 1. \end{cases}
$$

Šie integrāli ir lineāri neatkarīgi, jo Vronski determinants

$$
W(\eta_1(x_0), \eta_2(x_0), \ldots, \eta_n(x)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 1,
$$

aprēķināts punktā $x = x_0$, nav nulle. Tā tad tie veido speciālu atrisinājumu fundamentālo sistēmu.

Kaut kuŗu vienādojuma (3) atrisinājumu $y(x)$ nosaka ar sākuma vērtībām:

$$
(12) \qquad y(x_0) = a_1, \quad y'(x_0) = a_2, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = a_n.
$$

Var sastādīt vienādojuma (3) integrālu

$$
\eta(x) = a_1 \eta_1(x) + a_2 \eta_2(x) + \ldots + a_n \eta_n(x),
$$

kas apmierina tos pašus sākuma nosacījumus (12). Tiešām, ir

$$
\begin{aligned}
\eta(x_0) &= a_1\eta_1(x_0) = a_1, \\
\eta'(x_0) &= a_2\eta_2'(x_0) = a_2, \\
&\ldots \\
\eta^{(n-1)}(x_0) &= a_n \eta_n^{(n-1)}(x_0) = a_n,
\end{aligned}
$$

ja ievēro formulas (11). Unitātes teōrēma rāda, ka

$$
y(x) = \eta(x),
$$

t. i. kautkuŗu atrisinājumu var izteikt formā (10) ar konstantu nozīmēm

$$
C_1 = a_1, \quad C_2 = a_2, \ldots, C_n = a_n,
$$

5. Papildinot pamatteorēmu, konstatēsim, ka **atrisinājumu fundamentālo sistēmu ir bezgala daudz.**

Zinot vienu sistēmu $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$, var ar homogenām līneārām transformācijām

$$
(13)\qquad \begin{cases} y_1(x) = a_{11}\eta_1(x) + a_{12}\eta_2(x) + \ldots + a_{1n}\eta_n(x), \\ y_2(x) = a_{21}\eta_1(x) + a_{22}\eta_2(x) + \ldots + a_{2n}\eta_n(x), \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ y_n(x) = a_{n1}\eta_1(x) + a_{n2}\eta_2(x) + \ldots + a_{nn}\eta_n(x) \end{cases}
$$

sastādīt bezgala daudzos veidos funkcijas $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, kas arī veido atrisinājumu fundamentālo sistēmu. Ir jāprasa, lai jauno funkciju Vronski determinants

$$
W(y_1, y_2, \ldots y_n) = W(\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n) \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

nebūtu nulle vismaz vienā punktā. Tā kā

$$
W(\eta_1(x_0), \eta_2(x_0), \ldots, \eta_n(x_0)) = 1,
$$

tad

$$
W(y_1(x_0), y_2(x_0), \ldots y_n(x_0)) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},
$$

un tas nav nulle, kad līneārās transformācijas determinants nav nulle (transformācija ir īsta jeb **nedeģenerēta**). Ar tādu nosacījumu transformācijas vas izvēlēties bezgala daudzos veidos; tādēļ arī atrisinājumu fundamentālo sistēmu ir bezgala daudz.

Katru vienādojuma (3) atrisinājumu fundamentālo sistēmu var izteikt sistēmas (13) veidā, attiecīgi izvēloties konstantes a_{ik} $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$, jo katru atrisinājumu var izteikt kā līneāru homogenu funkciju no $\eta_1(x), \eta_2(x), \ldots, \eta_n(x)$.

6. Ir iespējams apgrieztā kārtā no (13) izteikt funkcijas

$$(14)\quad \begin{cases} \eta_1(x) = b_{11}y_1(x) + b_{12}y_2(x) + \ldots + b_{1n}y_n(x), \\ \eta_2(x) = b_{21}y_1(x) + b_{22}y_2(x) + \ldots + b_{2n}y_n(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \eta_n(x) = b_{n1}y_1(x) + b_{n2}y_2(x) + \ldots + b_{nn}y_n(x) \end{cases}$$

ar $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ un jaunām konstantēm b_{ik} $(i, k = 1, 2 \ldots n)$ Pēc šīm formulām kaut kuŗu atrisinājumu

$$y(x) = a_1\eta_1(x) + a_2\eta_2(x) + \ldots + a_n\eta_n(x),$$

kam der sākuma nosacījumi (12), var izteikt formā

$$(15)\quad y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_ny_n(x)$$

ar jaunām konstantēm:

$$\begin{aligned} C_1 &= a_1b_{11} + a_2b_{21} + \ldots + a_n b_{n1}, \\ C_2 &= a_1b_{12} + a_2b_{22} + \ldots + a_n b_{n2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_n &= a_1b_{1n} + a_2b_{2n} + \ldots + a_n b_{nn}. \end{aligned}$$

Ja sākuma vērtības $a_1, a_1, \ldots, a_n$ uzskata par patvaļīgām, tad arī $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ir patvaļīgas konstantes, un funkcija (15) ir diferenciālvienādojuma (3) vispārīgais integrāls.

Lai konstatētu, ka n. kārtas diferenciālvienādojuma vispārīgā integrāla forma (15) ar $W(y_1, y_2, \ldots, y_n) \neq 0$ ir vienīgi homogenam lineāram vienādojumam, sastādīsim diferenciālvienādojumu, izslēdzot konstantes $C_1, C_2, \ldots, C_n$ no (15). Ja atvasina pēc x atkārtoti n reiz sakaru (15), tad pēc pārveidojumiem dabū vienādojumu sistēmu

$$(16)\quad \begin{cases} -y + C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n = 0, \\ -y' + C_1y_1' + C_2y_2' + \ldots + C_ny_n' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -y^{(n-1)} + C_1y_1^{(n-1)} + C_2y_2^{(n-1)} + \ldots + C_ny_n^{(n-1)} = 0, \\ -y^{(n)} + C_1y_1^{(n)} + C_2y_2^{(n)} + \ldots + C_ny_n^{(n)} = 0, \end{cases}$$

ko var uzskatīt par homogenu algebrisku $n+1$ vienādojumu sistēmu ar $n+1$ nezināmiem $-1, C_1, C_2, \ldots C_n$. Tā kā šie nezināmie nav reizē visi nulles, tad, sistēmas (16) iespējamībai jāprasa, lai sistēmas determinants būtu vienlīdzīgs nullei, t. i.

$$\tag{17} \begin{vmatrix} y & y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y' & y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y^{(n-1)} & y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \\ y^{(n)} & y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \ldots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0.$$

Ja šo determinantu attīsta pēc pirmās kolonnas elementiem un reizina vienādojuma (17) abas puses ar faktoru $(-1)^n$, tad rodas diferenciālvienādojums

$$\tag{18} W(x)\,y^{(n)} - W_1(x)\,y^{(n-1)} + \ldots \pm W_n(x)\,y = 0,$$

kas ir homogens līneārs n. kārtas vienādojums, jo augstākās kārtas atvasinājuma koeficients ir doto līneāri neatkarīgo funkciju Vronski determinants

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = W(x) \neq 0.$$

Ja vienādojuma (18) abas puses dala ar $W(x)$ un ievēro, ka koeficients

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \ldots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \ldots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

pēc (8) formulas ir vienlīdzīgs ar $W' = \frac{dW}{dx}$, tad rodas diferenciālvienādojuma normāla forma

$$y^{(n)} + f_1(x)\,y^{(n-1)} + \ldots + f_n(x)\,y = 0$$

ar

$$f_1 = -\frac{1}{W}\frac{dW}{dx} = -\frac{d\ln W}{dx}, \ldots, f_n(x) = \frac{\pm W_n(x)}{W(x)}.$$

Pirmais no šiem sakariem pēc kvadrātūras dod Liuvila (*Liouville*) formulu (9)

§ 7. Nehomogenie lineārie diferenciālvienādojumi.

Ar lineāro diferenciālsimbolu

$$(1) \qquad L(y) = y^{(n)} + f_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + f_{n-1}(x)y' + f_n(x)y$$

nehomogeno vienādojumu raksta formā

$$(2) \qquad L(y) = f(x) \qquad (f(x) \neq 0).$$

Tā atrisinājumu pamatīpašības ir šādas*).

1. **Atrisinājumu superpozīcija:** ja $f(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots + \varphi_k(x)$ un vienādojumu $L(y) = \varphi_1(x)$, $L(y) = \varphi_2(x), \ldots, L(y) = \varphi_k(x)$, partikulārie atrisinājumi attiecīgi ir $Y_1(x), Y_2(x), \ldots, Y_k(x)$, tad vienādojuma $L(y) = f(x)$ partikulārais atrisinājums ir

$$y_1(x) = Y_1(x) + Y_2(x) + \ldots + Y_k(x).$$

Pierādījumam ir atkārtoti jāizlieto diferenciālsimbola (1) īpašība

$$L(y + z) = L(y) + L(z).$$

2. Nehomogena vienādojuma (2) vispārīgo integrālu $y(x)$ sastāda, ja tā partikulāram integrālam $y_1(x)$ pieskaita atbilstošā homogena vienādojuma

$$(3) \qquad L(\eta) = 0$$

vispārīgo integrālu, t. i.

$$(4) \qquad y(x) = y_1(x) + C_1\eta_1(x) + C_2\eta_2(x) + \ldots + C_n\eta_n(x),$$

*) Otrās kārtas vienādojumam tās apskatītas I d., 21. §-fā.

ja $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ir patvaļīgas konstantes un $\eta_1(x), \eta_2(x), \ldots, \eta_n(x)$ ir atbilstošā homogenā vienāvienādojuma (3) atrisinājumu fundamentālā sistēma:

$$W(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) \neq 0.$$

Tiešām, ja $L(y) = f(x)$ un $L(y_1) = f(x)$, tad diference $y - y_1 = \eta$ der homogenam vienādojumam (3). Tā kā $\eta = C_1\eta_1 + C_2\eta_2 + \ldots + C_n\eta_n$ un $y = y_1 + \eta$, tad ir pareiza formula (4).

Otrādi, ja no sakara (4) ar līneāri neatkarīgām funkcijām $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$, kuŗu Vronski determinants $W \neq 0$, izslēdz patvaļīgas konstantes $C_1, C_2, \ldots, C_n$, tad rodas viens nehomogens līneārs n. kārtas diferenciālvienādojums.

Ar sakara (4) atkārtotu atvasināšanu pēc x sastāda vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} -(y - y_1) + C_1\eta_1 + C_2\eta_2 + \ldots + C_n\eta_n = 0, \\ -(y' - y_1') + C_1\eta_1' + C_2\eta_2' + \ldots + C_n\eta_n' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -(y^{(n-1)} - y_1^{(n-1)}) + C_1\eta_1^{(n-1)} + C_2\eta_2^{(n-1)} + \ldots + C_n\eta_n^{(n-1)} = 0, \\ -(y^{(n)} - y_1^{(n)}) + C_1\eta_1^{(n)} + C_2\eta_2^{(n)} + \ldots + C_n\eta_n^{(n)} = 0, \end{cases}$$

no kuŗas pēc konstantu eliminācijas rodas vienādojums

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} y & -y_1 & \eta_1 & \eta_2 & \ldots & \eta_n \\ y' & -y_1' & \eta_1' & \eta_2' & \ldots & \eta_n' \\ \ldots & & & & & \\ y^{(n-1)} & -y_1^{(n-1)} & \eta_1^{(n-1)} & \eta_2^{(n-1)} & \ldots & \eta_n^{(n-1)} \\ y^{(n)} & -y_1^{(n)} & \eta_1^{(n)} & \eta_2^{(n)} & \ldots & \eta_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0.$$

Atklātā formā (5) ir nehomogens līneārs n. kārtas diferenciālvienādojums, jo determinanta attīstījuma loceklim ar $y^{(n)}$ koeficients $W(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) \neq 0$, un ir arī loceklis, kas neatkarīgs no nezināmās funkcijas $y(x)$

Tā tad vispārīgā integrāla forma (4) ir **raksturīga** nehomogenam līneāram n kārtas diferenciālvienādojumam.

3. **Ja ir zināma atbilstoša homogena vienādojuma atrisinājumu fundamentāla sistēma, tad nehomogena vienādojuma partikulāro atrisinājumu var aprēķināt ar n kvadrātūrām, resp. tā integrāciju var reducēt uz kvadrātūrām.**

Šo redukciju dara ar **Lagranža** (*Lagrange*) **konstantu variācijas metodi.** Ar atbilstošā homogenā vienādojuma $L(\eta) = 0$ atrisinājumu fundamentālās sistēmas funkcijām

$$\eta_1(x),\ \eta_2(x),\ldots,\ \eta_n(x) \qquad (W(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) \neq 0)$$

izteic tā vispārīgo integrālu

$$\eta(x) = C_1\eta_1(x) + C_2\eta_2(x) + \ldots + C_n\eta_n(x),$$

lietojot n **konstantes** $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Pēc Lagranža metodes meklē nehomogenā vienādojuma $L(y) = f(x)$ atrisinājumu analogā formā

$$y(x) = \overline{C}_1(x)\eta_1(x) + \overline{C}_2(x)\eta_2(x) + \ldots + \overline{C}_n(x)\eta_n(x), \tag{6}$$

ievedot n jaunas nezināmas **funkcijas** $\overline{C}_1(x), \overline{C}_2(x), \ldots, \overline{C}_n(x)$. Ja izvēlas $n-1$ piemērotus sakarus

$$\left\{\begin{array}{l}\overline{C}_1'(x)\eta_1 + \overline{C}_2'(x)\eta_2 + \ldots\ldots + \overline{C}_n'(x)\eta_n = 0,\\ \overline{C}_1'(x)\eta_1' + \overline{C}_2'(x)\eta_2' + \ldots\ldots + \overline{C}_n'(x)\eta_n' = 0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \overline{C}_1'(x)\eta_1^{(n-2)} + \overline{C}_2'(x)\eta_2^{(n-2)} + \ldots + \overline{C}_n'(x)\eta_n^{(n-2)} = 0,\end{array}\right. \tag{7}$$

tad funkcijas $y(x)$ atvasinājumus līdz $(n-1)$ kārtai izteic formā

$$\begin{array}{l}y' = \overline{C}_1\eta_1' + \overline{C}_2\eta_2' + \ldots\ldots + \overline{C}_n\eta_n',\\ y'' = \overline{C}_1\eta_1'' + \overline{C}_2\eta_2'' + \ldots\ldots + \overline{C}_n\eta_n'',\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ y^{(n-1)} = \overline{C}_1\eta_1^{(n-1)} + \overline{C}_2\eta_2^{(n-1)} + \ldots + \overline{C}_n\eta_n^{(n-1)},\end{array}$$

bet n. kārtas atvasinājumu ar

$$y^{(n)}=[\overline{C}_1'(x)\eta_1^{(n-1)}+\ldots+\overline{C}_n'(x)\eta_n^{(n-1)}]+[\overline{C}_1\eta_1^{(n)}+\ldots+\overline{C}_n\eta_n^{(n)}].$$

Ar šo atvasinājumu un funkcijas (6) izteiksmju substitūciju dotā nehomogenā vienādojumā $L(y) = f(x)$ rodas sakars

$$[\overline{C}_1'(x)\eta_1^{(n-1)}+\ldots+\overline{C}_n'(x)\eta_n^{(n-1)}]+\overline{C}_1L(\eta_1)+\ldots+\overline{C}_nL(\eta_n)=f(x),$$

kas vienkāršojas par

$$(8)\quad \overline{C}_1'(x)\eta_1^{(n-1)}+\overline{C}_2'(x)\eta_2^{(n-1)}+\ldots+\overline{C}_n'(x)\eta_n^{(n-1)}=f(x),$$

jo $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ ir homogenā vienādojuma $L(\eta) = 0$ atrisinājumi:

$$L(\eta_1) = 0,\ L(\eta_2) = 0, \ldots, L(\eta_n) = 0.$$

Vienādojumi (7) un (8) attiecībā pret n nezināmiem $\overline{C}_1'(x), \overline{C}_2'(x), \ldots, \overline{C}_n'(x)$ veido nehomogenu līneāru algebrisku sistēmu, ko var atrisināt ar K r a m e r a (*Cramer*) formulām

$$(9)\qquad \overline{C}_k'(x) = \frac{W_k}{W} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

jo sistēmas determinants ir funkciju $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ Vronski determinants $W \neq 0$. Vispārīgajā formulā (9) skaitītājs W_k ir determinants, kas rodas Vronski determinantā W apmainot k. kolonnu ar sistēmas brīvajiem locekļiem $0, 0, \ldots, f(x)$. Ar kvadrātūru no (9) dabū funkcijas

$$\overline{C}_k(x) = C_k + \int\frac{W_k}{W}\,dx \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

un ar tām pēc substitūcijas formulā (6) rodas nehomogena vienādojuma $L(y) = f(x)$ vispārīgais integrāls

$$(4)\quad y(x) = y_1(x) + C_1\eta_1(x) + C_2\eta_2(x)+\ldots+C_n\eta_n(x)$$

ar n integrācijas konstantēm $C_1, C_2, \ldots, C_n$ un partikulāro integrālu

$$(10) \qquad y_1(x) = \sum_{k=1}^{n} \eta_k \int \frac{W_k}{W}\, dx.$$

Pēdējo, kā redzams, aprēķina ar n kvadrātūrām. Ar $y_1(x)$ izteiksmes (10) substitūciju vienādojumā $L(y) = f(x)$ var direkti pārbaudīt, ka $y_1(x)$ tiešām ir šī vienādojuma integrāls.

§ 8. Lineāro diferenciālvienādojumu redukcija.

Apskatīsim šādus redukcijas **gadījumus.**

1. Doto nehomogeno lineāro n. kārtas diferenciālvienādojumu

$$(1) \quad L(y) = y^{(n)} + f_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + f_{n-1}(x) y' + f_n(x) y = f(x)$$

var reducēt uz tāda pat tipa $(n-1)$. kārtas vienādojumu, ja ir zināms viens atbilstošā homogenā vienādojuma $L(\eta) = 0$ partikulārs (netriviāls) integrāls $\eta_1(x)$.

Ar substitūciju

$$(2) \qquad y = \eta_1 u$$

izteic atvasinājumus:

$$y' = \eta_1 u' + \eta_1' u,$$
$$y'' = \eta_1 u'' + 2\eta_1' u' + \eta_1'' u,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y^{(n)} = \eta_1 u^{(n)} + \binom{n}{1} \eta_1' u^{(n-1)} + \ldots + \binom{n}{1} \eta_1^{(n-1)} u' + \eta_1^{(n)} u,$$

lietojot vispārīgo Leibnica likumu par reizinājuma atvasināšanu. Ar šīm izteiksmēm vienādojums (1) top par n. kārtas vienādojumu

$$\eta_1(x)\, u^{(n)} + \varphi_1(x) u^{(n-1)} + \ldots + \varphi_{n-1}(x) u' + \varphi_n(x) u = f(x)$$

(arī līneāru) attiecībā pret funkciju $u(x)$. No jaunajiem koeficientiem $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ pēdējais ir

$$\varphi_n(x) = L(\eta_1) = 0.$$

Tādēļ dabūtais vienādojums direkti nesatur u, un to var reducēt attiecībā pret jauno funkciju

$$z = u' \tag{3}$$

uz līneāru $(n-1)$. kārtas diferenciālvienādojumu $(\varphi_0 = \eta_1 \neq 0)$

$$L_1(z) = \varphi_0(x) z^{(n-1)} + \varphi_1(x) z^{(n-2)} + \ldots + \varphi_{n-1}(x) z = f(x). \tag{4}$$

Šo redukciju var izdarīt, apvienojot abas substitūcijas (2) un (3) vienā kopīgā t. s. **Dalambēra** (*D'Alembert*) **substitūcijā**

$$y = \eta_1 \int z dx. \tag{5}$$

Ja vienadojuma (4) vispārīgais integrāls ir

$$z(x) = z_1(x) + C_2\zeta_1(x) + \ldots + C_n \zeta_{n-1}(x) \quad (W(\zeta_1, \zeta_2 \ldots, \zeta_{n-1}) \neq 0),$$

tad ar kvadrātūru (5) var aprēķināt dotā vienādojuma (1) vispārīgo integrālu

$$y(x) = y_1(x) + C_1\eta_1(x) + C_2\eta_2(x) + \ldots + C_n \eta_n(x)$$

ar n konstantēm $C_1, C_2, \ldots, C_n$ un funkcijām

$$y_1(x) = \eta_1 \int z_1 dx, \ \eta_2(x) = \eta_1 \int \zeta_1 dx, \ldots, \eta_n(x) = \eta_1 \int \zeta_{n-1} dx.$$

2. **Ja ir zināmi $k < n$ atbilstošā homogenā vienādojuma $L(\eta) = 0$ partikulārie un līneāri neatkarīgie integrāli $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k$, tad līneāru n. kārtas diferenciālvienādojumu (1) var reducēt uz līneāru $(n-k)$. kārtas diferenciālvienādojumu.**

Izlietojot vienu integrālu, piem η_1, var ar Dalambēra substitūciju reducēt (1) uz $(n-1)$. kārtas vienādojumu (4). Pēdējā vienādojuma atbilstošam homogenam vienādojumam $L_1(\zeta) = 0$ var sastādīt $k - 1$ atrisinājumus

$$(6) \qquad \zeta_1 = \left(\frac{\eta_2}{\eta_1}\right)', \ \zeta_2 = \left(\frac{\eta_3}{\eta_1}\right)', \ldots, \zeta_{k-1} = \left(\frac{\eta_k}{\eta_1}\right)',$$

kas ir savā starpā lineāri neatkarīgi. Tiešām, pretējā gadījumā pieņemtais lineārais sakars

$$C_2\zeta_1 + C_3\zeta_2 + \ldots + C_k\zeta_{k-1} = 0$$

pēc izteiksmju (6) ievietošanas un kvadrātūras dotu lineāru sakaru

$$C_1\eta_1 + C_2\eta_2 + \ldots + C_k\eta_k = 0,$$

kas ir pretrunā ar nosacījumu par lineāri neatkarīgiem atrisinājumiem $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k$.

Ar jaunu Dalambēra substitūciju

$$z = \zeta_1 \int v\,dx$$

vienādojumu (4) var reducēt uz lineāru $(n - 2)$. kārtas diferenciālvienādojumu attiecībā pret funkciju $v(x)$ Atbilstošam homogenam $(n - 2)$. kārtas vienādojumam var sastādīt $k - 2$ lineāri neatkarīgus atrisinājumus

$$\left(\frac{\zeta_2}{\zeta_1}\right)', \ \left(\frac{\zeta_3}{\zeta_1}\right)', \ldots, \left(\frac{\zeta_{k-1}}{\zeta_1}\right)'.$$

Procesu atkārtojot, galīgi dabū vienu lineāru $(n - k)$. kārtas diferenciālvienādojumu. Zinot pēdējā vienādojuma vispārīgo integrālu, var ar kvadrātūrām aprēķināt dotā n. kārtas diferenciālvienādojuma (1) vispārīgo integrālu.

Speciālā gadījumā, kad $k = n - 1$, vienādojumu (1) var reducēt uz vienu lineāru pirmās kārtas diferenciālvienādojumu. Tā kā pēdējā vienādojuma integrācija reducējas uz divām kvadrātūrām, tad arī dotā vienādojuma (1) integrācija šinī gadījumā ir reducējama uz kvadrātūrām.

3. Redukcija kanoniskā formā.

Šai redukcijai ir analoga *n*. pakāpes algebriskā vienādojuma

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0 \quad (a_1, a_2, \ldots, a_n \text{ — konstantes})$$

redukcija kanoniskā formā

$$\xi^n + a_2 \xi^{n-2} + \ldots + a_n = 0 \quad (a_2, \ldots, a_n \text{ — konstantes}),$$

ja lieto līneāru transformāciju

$$x = \xi - \frac{a_1}{n}.$$

Līneārā *n*. kārtas diferenciālvienādojuma (1) gadījumā izdaram substitūciju

$$(7) \qquad y = uv,$$

izvēloties vienu funkciju, piem, $v(x)$, tā, lai dabūtais līneārais diferenciālvienādojums ar otru funkciju $u(x)$ nesaturētu locekli ar $u^{(n-1)}$. Ja ievēro pēc Leibnica formulas aprēķināto atvasinājumu izteiksmes

$$y^{(n)} = u^{(n)}v + n u^{(n-1)}v' + \ldots + n u' v^{(n-1)} + u v^{(n)},$$
$$y^{(n-1)} = u^{(n-1)} v + (n-1) u^{(n-2)} v' + \ldots + (n-1) u' v^{(n-2)} + u v^{(n-1)},$$

tad līneārais diferenciālsimbols

$$L(y) = L(uv) = v u^{(n)} + [n v' + f_1(x) v]\, u^{(n-1)} + \ldots$$

satur koeficientu $nv' + f_1(x)v$ locekli ar $u^{(n-1)}$. Ja šo koeficientu pielīdzina nullei, tad sastāda pirmās kārtas diferenciālvienādojumu

$$nv' + f_1(x)v = 0,$$

un noteic funkciju

$$v(x) = e^{-\frac{1}{n}\int f_1(x)dx} \qquad (e \text{ — nat. log. baze}).$$

Integrācijas konstanti var ieskaitīt reizinājuma uv pirmajā faktorā $u(x)$.

Tā tad ar substitūciju

$$(8) \qquad y = u\, e^{-\frac{1}{n}\int f_1(x)dx}$$

vienādojums (1) top par kanoniskās formas vienādojumu

$$(9) \qquad u^{(n)} + \varphi_2(x)u^{(n-2)} + \ldots + \varphi_{n-1}(x)u' + \varphi_n(x)u = \varphi(x)$$

ar viegli aprēķināmiem koeficientiem $\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n, \varphi$.

Tā kā kanoniskā formā nav locekļa ar atvasinājumu $u^{(n-1)}$, t. i. tā koeficients $\varphi_1(x) \equiv 0$, tad Liuvila (*Liouville*) formula

$$W = W_0 e^{-\int\limits_{x_0}^{x} \varphi_1(x)dx}$$

šinī gadījumā rāda, ka Vronski determinants ir

$$W = W_0 = const.$$

Piezīme. Bez minētās ir vēl daudz citu analoģiju lineāro diferenciālvienādojumu un algebrisko vienādojumu starpā.

§ 9. Lineārie diferenciālvienādojumi ar konstantiem koeficientiem.

1. Atradīsim lineārā diferenciālsimbola

$$(1) \qquad L(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y$$

($a_1, a_2, \ldots, a_n$ — konstantes) izteiksmi, kad izvēlas

$$y = e^{kx}, \text{ resp. } y = ze^{kx}$$

ar konstanti k un jaunu funkciju $z(x)$.

Tā kā atvasinājumi

$$(e^{kx})' = ke^{kx}, \ (e^{kx})'' = k^2 e^{kx}, \ldots, (e^{kx})^{(n)} = k^n e^{kx},$$

tad dabū formulu

$$(2) \qquad L(e^{kx}) = \varphi(k)e^{kx},$$

kurā $\varphi(k)$ ir t. s. raksturīgais polinoms

$$(3) \qquad \varphi(k) = k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1}k + a_n .$$

Ar funkciju $y = ze^{kx}$ un tās atvasinājumiem

$$y' = (z' + kz)e^{kx},$$
$$y'' = (z'' + 2kz' + k^2 z)e^{kx},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y^{(n)} = [z^{(n)} + nkz^{(n-1)} + \ldots + nk^{n-1}z' + k^n z]e^{kx}$$

izteic diferenciālsimbolu

$$L(ze^{kx}) = [z^{(n)} + b_1 z^{(n-1)} + \ldots + b_{n-1}z' + b_n z]e^{kx}$$

ar koeficientiem $b_1, \ldots, b_{n-1}, b_n$, kas nav atkarīgi no funkcijas $z(x)$ veida, bet gan no $a_1, a_2, \ldots, a_n$ un k. Tāpēc, ja izvēlas speciālu funkciju

$$z(x) = e^{\varkappa x} \qquad (\varkappa \neq k)$$

iepriekšējā formulā un ievēro (2), tad pēc dalīšanas ar $e^{(k+\varkappa)x}$ rodas sakars

$$\varphi(k + \varkappa) = \varkappa^n + b_1 \varkappa^{n-1} + \ldots + b_{n-1}\varkappa + b_n .$$

Ja te ar Teilora (*Taylor*) formulu attīsta n. pakāpes polinomu

$$\varphi(k + \varkappa) = \varphi(k) + \frac{\varphi'(k)}{1!}\varkappa + \ldots + \frac{\varphi^{(n-1)}(k)}{(n-1)!}\varkappa^{n-1} + \frac{\varphi^{(n)}(k)}{n!}\varkappa^n$$

un salīdzina abās pusēs locekļus ar vienādām $\varkappa$ pakāpēm, tad dabū koeficientu nozīmes

$$b_1 = \frac{\varphi^{(n-1)}(k)}{(n-1)!}, \ldots, b_{n-1} = \frac{\varphi'(k)}{1!}, \; b_n = \varphi(k).$$

Ar šim nozīmēm un $\frac{\varphi^{(n)}(k)}{n!} = 1$ dabū formulu

$$(4)\quad L(ze^{kx}) = \left[z\varphi(k) + z' \frac{\varphi'(k)}{1!} + \ldots + z^{(n-1)} \frac{\varphi^{(n-1)}(k)}{(n-1)!} + z^{(n)} \frac{\varphi^{(n)}(k)}{n!} \right] e^{kx}$$

2. **Homogena** līneārā diferenciālvienādojuma

$$(5)\quad L(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n = 0$$

integrācijā pēc Eulera metodes meklē atrisinājumus formā

$$(6)\quad y = e^{kx}.$$

Izlietojot formulu (2), atrod, ka tādi atrisinājumi ir tad, ja k ir t. s. raksturīgā (karakteristiskā) vienādojuma

$$(7)\quad \varphi(k) = k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1} k + a_n = 0$$

saknes. Ir jāatšķir sekojoši divi pamatgadījumi, kad vai nu visas šī vienādojuma saknes $k_1, k_2, \ldots, k_n$ ir dažādas, vai dažas saknes ir savā starpā vienlīdzīgas (vienādojumam ir vairākkārtējas saknes).

I pamatgadījums: $k_1 \neq k_2 \neq \ldots \neq k_n$.

Tad ar Eulera substitūciju dabū n partikulāros integrālus

$$(8)\quad y_1 = e^{k_1 x},\ y_2 = e^{k_2 x},\ \ldots,\ y_n = e^{k_n x},$$

kas ir savā starpā līneāri neatkarīgi. Tiešām, šo funkciju Vronski (*Wronski*) determinants

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

nav nulle, jo tas ir izteicams formā

$$W = Ve^{(k_1 + k_2 + \ldots + k_n)x}$$

ar t. s. Vandermonda determinantu

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \dots & k_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Pēdējo var izteikt*) ar sakņu $k_1, k_2, \dots, k_n$ diferenču produktu

$$V = \prod_{i>j}^{1,\, n} (k_i - k_j),$$

kas atšķiŗas no nulles, jo saknes ir dažādas. Ir sastādīta diferenciālvienādojuma (5) atrisinājumu fundamentālā sistēma $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, ar kuŗu var izteikt šī vienādojuma vispārīgo integrālu ($C_1, C_2, \dots, C_n$ — patvaļīgas konstantes)

$$(9) \qquad y(x) = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \dots + C_n e^{k_n x}.$$

Gadījumā, kad saknes $k_1, k_2, \dots, k_n$ ir kompleksas, tās ir pa pāriem saistīti kompleksas, ja algebriskā vienādojuma (7) koeficienti $a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ ir reāli skaitļi. Piemēram, saknei

$$k_1 = \alpha + \beta i$$

atbilst saistīti kompleksā sakne

$$k_2 = \alpha - \beta i$$

ar reālām konstantēm α, β un $i = \sqrt{-1}$. Ar partikulāriem integrāliem

$$y_1 = e^{(\alpha+\beta i)x}, \quad y_2 = e^{(\alpha-\beta i)x}$$

var sastādīt divus citus integrālus

---

*) Skat., piem., prof. Lejnieka darbu „Augstākā algebra" lpp. 18, Rīgā, 1935.

$$\eta_1=\frac{y_1+y_2}{2}=e^{\alpha x}\cdot\frac{e^{i\beta x}+e^{-i\beta x}}{2},\quad \eta_2=\frac{y_1-y_2}{2i}=e^{\alpha x}\cdot\frac{e^{i\beta x}-e^{-i\beta x}}{2i},$$

ko var izteikt r e ā l ā f o r m ā

$$(10)\qquad \eta_1=e^{\alpha x}\cos\beta x,\quad \eta_2=e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

ja izlieto kosinus un sinus funkcijas Eulera sakarību ar eksponentfunkciju.

II pamatgadījums: r a k s t u r ī g a m v i e n ā d o j u m a m (7) i r v a i r ā k ā r t ē j a s s a k n e s.

Pieņemsim, ka vienādojumam (7) ir d a ž ā d a s saknes $k_1, k_2, \ldots, k_m$ ar attiecīgām kārtām $p_1, p_2, \ldots, p_m$, kuŗu summa

$$p_1+p_2+\ldots+p_m=n.$$

Kā zināms, lai, piem., sakne k_1 būtu ar kārtu p_1, ir nepieciešami un pietiekoši, ka

$$(11)\qquad \varphi(k_1)=0,\ \varphi'(k_1)=0,\ldots,\ \varphi^{(p_1-1)}(k_1)=0,\ \varphi^{(p_1)}(k_1)\neq 0.$$

To ievērojot un izlietojot lineārā diferenciālsimbola īpašību (4), atrod, ka saknei k_1 atbilst šādi partikulārie integrāli

$$(12)\qquad y_1=e^{k_1x},\ y_2=xe^{k_1x},\ y_3=x^2e^{k_1x},\ldots,y_{p_1}=x^{p_1-1}e^{k_1x}$$

un vispārīgā integrāla sastāvdaļa

$$F_1(x)e^{k_1x}$$

ar polinomu

$$F_1(x)=C_1+C_2x+C_3x^2+\ldots+C_{p_1}x^{p_1-1},$$

kas satur p_1 patvaļīgas konstantes $C_1, C_2, \ldots, C_{p_1}$. Tamlīdzīgi sastāda integrālus citām saknēm $k_2, \ldots, k_m$. Konstatēsim, ka formula

$$(13)\qquad y(x)=F_1(x)e^{k_1x}+F_2(x)e^{k_2x}+\ldots+F_m(x)e^{k_mx}$$

izteic diferenciālvienādojuma v i s p ā r ī g o i n t e g r ā l u, ja

$F_i(x)$ ir polinoms ar pakāpi $p_i - 1$ un patvaļīgām konstantēm skaitā p_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ Ir jāpierāda, ka funkcijas

$$e^{k_i x}, \; xe^{k_i x}, \ldots, x^{p_i - 1} e^{k_i x} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

ir lineāri neatkarīgas. Pretējā gadījumā būtu lineārs sakars

$$(14) \qquad f_1(x)\, e^{k_1 x} + f_2(x) e^{k_2 x} + \ldots + f_m(x) e^{k_m x} = 0,$$

kurā polinomi $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)$ ir attiecīgi ar pakāpēm

$$r_1 \leqslant p_1 - 1, \quad r_2 \leqslant p_2 - 1, \ldots, r_m \leqslant p_m - 1.$$

Ja vienlīdzības (14) abas puses reizina ar $e^{-k_1 x}$ un dabūto vienādojumu

$$f_1(x) + f_2(x) e^{(k_2 - k_1)x} + \ldots + f_m(x) e^{(k_m - k_1)x} = 0$$

atvasina pēc x atkārtoti $r_1 + 1$ reiz, tad rodas sakars

$$g_2(x) e^{(k_2 - k_1)x} + \ldots + g_m(x) e^{(k_m - k_1)x} = 0,$$

kurā $g_2(x), \ldots, g_m(x)$ arī ir polinomi ar pakāpēm $r_2, \ldots, r_m$. Tādā kārtā turpinot, dabūtu neiespējamu vienlīdzību

$$h(x) e^{\varkappa x} = 0,$$

kurā $h(x)$ ir polinoms, kas nav identisks nullei, un $\varkappa \neq 0$ ir konstante. Šī pretruna norāda, ka funkcija (13) tiešām ir vispārīgais integrāls.

G a d ī j u m ā, kad raksturīgā vienādojuma (7) koeficienti ir reāli skaitļi un sakne k_1 ar kārtu p_1 ir kompleksa

$$k_1 = \alpha + \beta i \qquad (i = \sqrt{-1}),$$

tad šim vienādojumam ir arī saistīti kompleksa sakne

$$k_2 = \alpha - \beta i$$

ar kārtu $p_2 = p_1 = p$. No atbilstošiem partikulāriem integrāliem

$$e^{(\alpha+\beta i)x},\ xe^{(\alpha+\beta i)x},\ldots,\ x^{p-1}e^{(\alpha+\beta i)x}$$

un

$$e^{(\alpha-\beta i)x},\ xe^{(\alpha-\beta i)x},\ldots,\ x^{p-1}e^{(\alpha-\beta i)x}$$

var sastādīt citus partikulāros integrālus reālā formā:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ldots,\ x^{p-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$$

un

$$e^{\alpha x}\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ldots,\ x^{p-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Tādēļ divām saistīti kompleksām saknēm k_1 un k_2 ar kārtu p atbilst vispārīgā integrāla sastāvdaļa

$$[F_1(x)\cos\beta x + F_2(x)\sin\beta x]e^{\alpha x},$$

kuŗā $F_1(x)$ un $F_2(x)$ ir divi $(p-1)$. pakāpes polinomi ar $2p$ patvaļīgām konstantēm (katrs satur p konstantes). — Diskusija par citām kompleksām saknēm (ja tadas ir) ir analoga iepriekšējai.

3. **Nehomogeno** lineāro diferenciālvienādojumu $L(y)=f(x)$ ar konstantiem koeficientiem un doto funkciju $f(x)$ var ar vispārīgo Lagranža konstantu variācijas metodi integrēt, reducējot uz kvadrātūrām, jo atbilstošā homogena vienādojuma $L(\eta)=0$ atrisinājumu fundamentālā sistēma ir atrodama.

Ar atsevišķu metodi noteiksim nehomogenā vienādojuma partikulāro integrālu gadījumā, kad

$$f(x) = P_m(x)e^{\alpha x},$$

ja

$$P_m(x) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_m$$

ir m. pakāpes polinoms un α — konstante.

Diferenciālvienādojuma

$$L(y)=y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=P_m(x)e^{\alpha x} \tag{15}$$

integrācijai izdara substitūciju

$$y = ze^{\alpha x}, \tag{16}$$

ievedot jaunu funkciju $z(x)$. Lietojot formulu (4) ar $k = a$, dabū funkcijas $z(x)$ noteikšanai līneāru n. kārtas diferenciālvienādojumu

$$z\varphi(a) + z' \frac{\varphi'(a)}{1!} + \ldots + z^{(n)} \frac{\varphi^{(n)}(a)}{n!} = P_m(x), \tag{17}$$

kam labajā pusē ir polinoms un koeficienti arī konstanti. Atšķirsim šādus divus gadījumus.

I gadījums: a nav raksturīgā vienādojuma sakne, t. i.

$$\varphi(a) \neq 0.$$

Tad diferenciālvienādojuma (17) viens partikulārais integrāls $z_1(x)$ ir m pakāpes polinoms

$$Q_m(x) = B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \ldots + B_m,$$

kuŗa koeficientus $B_0, B_1, \ldots, B_m$ var pakāpeniski aprēķināt no formulām:

$$\varphi(a) B_0 = A_0,$$
$$\varphi(a) B_1 + m\varphi'(a) B_0 = A_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Pēdējās formulas sastāda, ieliekot vienādojumā (17) $z_1 = Q_m(x)$ un salīdzinot dabūtās identitātes abās pusēs vienādu pakāpju x^m, $x^{m-1}, \ldots$, koeficientus.

Ar formulu (16) atrod diferenciālvienādojuma (15) partikulāro integrālu

$$y_1(x) = z_1(x) e^{ax} = Q_m(x) e^{ax}.$$

II gadījums: a ir raksturīgā vienādojuma sakne ar kārtu p.

Tādā gadījumā ir

$$\varphi(a) = 0, \quad \varphi'(a) = 0, \ldots, \varphi^{(p-1)}(a) = 0, \quad \varphi^{(p)}(a) \neq 0,$$

un diferenciālvienādojums (17) top par

$$z^{(p)} \frac{\varphi^{(p)}(a)}{p!} + z^{(p+1)} \frac{\varphi^{(p+1)}(a)}{(p+1)!} + \ldots + z^{(n)} \frac{\varphi^{(n)}(a)}{n!} = P_m(x) \tag{18}$$

Attiecībā pret jauno funkciju $u = z^{(p)}$ rodas $(n - p)$. kārtas diferenciālvienādojums

$$u\frac{\varphi^{(p)}(a)}{p!} + u'\frac{\varphi^{(p+1)}(a)}{(p+1)!} + \ldots + u^{(n-p)}\frac{\varphi^{(n)}(a)}{n!} = P_m'(x).$$

Tā partikulārais integrāls (kā I gadījumā) ir m pakāpes polinoms

$$u_1 = B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \ldots + B_m,$$

kuŗa koeficientus aprēķina no formulām:

$$\frac{\varphi^{(p)}(a)}{p!}B_0 = A_0$$

$$\frac{\varphi^{(p)}(a)}{p!}B_1 + \frac{\varphi^{(p+1)}(a)}{(p+1)!}mB_0 = A_1,$$

. . . .

Ar p kvadrātūrām sastāda vienādojuma (18) partikulāro integrālu

$$z_1(x) = \frac{B_0}{(m+1)(m+2)\ldots(m+p)}x^{m+p} +$$

$$+ \frac{B_1}{m(m+1)\ldots(m+p-1)}x^{m+p-1} + \ldots + \frac{B_m}{1 . 2 . 3 \ldots p}x^p,$$

un tā tad vienādojuma (15) partikulārais integrāls šinī gadījumā ir formā

$$y_1(x) = z_1(x)e^{ax} = Q_{m+p}(x)e^{ax},$$

kur $Q_{m+p}(x)$ ir minētais polinoms ar pakāpi $m + p$.

§ 10. Eulera lineārais diferenciālvienādojums.

1. Vispārīgās formas Eulera vienādojumu

(1) $(ax+b)^n y^{(n)} + A_1(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + A_{n-1}(ax+b)y' + A_n y = f(x)$

($a \neq 0$, b, A_1, A_2, . . ., A_n konstantes, $f(x)$ dotā funkcija) ar argūmenta transformāciju

$$\xi = ax + b$$

reducē uz kanonisko formu

$$(2) \quad \xi^n \frac{d^n y}{d\xi^n} + a_1 \xi^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{d\xi^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \xi \frac{dy}{d\xi} + a_n y = F(\xi)$$

ar viegli noteicamām konstantēm $a_1, a_2, \ldots, a_n$ un funkciju $F(\xi)$. Kad $\xi > 0$, tad ar substitūciju

$$\xi = e^t$$

Eulera vienādojums (2) reducējas uz nehomogenu līneāru n. kārtas diferenciālvienādojumu ar konstantiem koeficientiem. Lai atrisinātu atbilstošo homogeno vienādojumu

$$(3) \quad \xi^n \frac{d^n \eta}{d\xi^n} + a_1 \xi^{n-1} \frac{d^{n-1} \eta}{d\xi^n} + \ldots + a_{n-1} \xi \frac{d\eta}{d\xi} + a_n \eta = 0,$$

tad divas šādas substitūcijas

$$(4) \quad \xi = e^t, \quad \eta = e^{kt}$$

apvieno vienā substitūcijā

$$(5) \quad \eta = \xi^k,$$

ar kuŗu direkti no (3) atrod kāpinātāja k nozīmes. Ja ievēro, ka $\xi > 0$ un

$$\frac{d\eta}{d\xi} = k\xi^{k-1}, \quad \frac{d^2\eta}{d\xi^2} = k(k-1)\xi^{k-2}, \ldots, \frac{d^n \eta}{d\xi^n} = k(k-1) \ldots (k-n+1)\xi^{k-n},$$

tad pēc dalīšanas ar kopīgo faktoru ξ^k rodas k noteikšanai n. pakāpes algebrisks vienādojums, t. s. determinējošais vienādojums

$$(6) \quad k(k-1) \ldots (k-n+1) + a_1 k(k-1) \ldots (k-n+2) + \ldots + a_{n-1} k + a_n = 0.$$

2. Turpmākā diskusijā atšķirsim šādus gadījumus.

I gadījums: determinējošam vienādojumam (6) nav vairākkārtēju sakņu, t. i. tā visas saknes $k_1, k_2, \ldots, k_n$ ir dažādas (reālas vai kompleksas).

Tad ar formulu (5) noteic n partikulāros integrālus

$$\eta_1 = \xi^{k_1}, \quad \eta_2 = \xi^{k_2}, \ldots, \quad \eta_n = \xi^{k_n},$$

kas veido homogenā vienādojuma (3) atrisinājumu fundāmentālo sistēmu. Šī vienādojuma vispārīgāis integrāls ir

$$(12) \qquad \eta(\xi) = C_1 \xi^{k_1} + C_2 \xi^{k_2} + \ldots + C_n \xi_{kn}$$

ar n patvaļīgām konstantēm $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

II **gadījums**: determinējošam vienādojumam (6) ir vairākkārtējas saknes.

Pieņemsim, ka šī vienādojuma dažādām saknēm $k_1, k_2, \ldots, k_m$, kārtas ir attiecīgi $p_1, p_2, \ldots, p_m$ un

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_m = n.$$

Ar tādām pat saknēm ir raksturīgais vienādojums, kas sastādīts Eulera vienādojuma (3) transformētam vienādojumam ar substitūciju $\xi = e^t$. Tā kā, piem., saknei k_1 ar kārtu p_1 ir piederīgie partikulārie integrāli

$$e^{k_1 t}, \quad t\, e^{k_1 t}, \ldots, \quad t^{p_1 - 1} e^{k_1 t},$$

tad tai pašai saknei Eulera vienādojuma integrāli ir

$$\xi^{k_1}, \quad \xi^{k_1} \ln \xi, \quad \ldots, \quad \xi^{k_1} (\ln \xi)^{p_1 - 1} \qquad (\xi > 0),$$

jo $t = \ln \xi$. Tamlīdzīgā kārtā sameklējot citām saknēm atbilstošus integrālus, sastāda Eulera vienādojuma vispārīgo integralu

$$\eta(\xi) = \xi^{k_1} F_1(\ln \xi) + \xi^{k_2} F_2(\ln \xi) + \ldots + \xi^{k_m} F_m(\ln \xi),$$

kur $F_r(\ln \xi)$ ir $(r - 1)$. pakāpes polinoms attiecībā pret $\ln \xi$ ar patvaļīgiem koeficientiem skaitā r.

Uzdevumi III.

Integrēt šādus vienādojumus.

1. $y''' = y$. *Atb.* $y = C_1 e^x + \left(C_2 \cos\frac{x\sqrt{3}}{2} + C_3 \sin\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) e^{-\frac{1}{2}x}$.

2. $y''' - y'' - 6y' = 0$. *Atb.* $y = C_1 + C_2 e^{3x} + C_3 e^{-2x}$.

3. $y^{(4)} = y$. *Atb.* $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 \operatorname{ch} x + C_4 \operatorname{sh} x$.

4. $y^{(4)} + y = 0$. *Atb.* $y = e^{\frac{x\sqrt{2}}{2}}\left(C_1 \cos \frac{x\sqrt{2}}{2} + C_2 \sin \frac{x\sqrt{2}}{2}\right) +$

$$+ e^{-\frac{x\sqrt{2}}{2}}\left(C_3 \cos \frac{x\sqrt{2}}{2} + C_4 \sin \frac{x\sqrt{2}}{2}\right).$$

5. $y''' - 3y'' + 4y = 0$. *Atb.* $y = C_1 e^{-x} + (C_2 + C_3 x)e^{2x}$.

6. $y^{(4)} - y''' - 9y'' - 11y' - 4y = 0$.

Atb. $y = C_1 e^{4x} + (C_2 + C_3 x + C_4 x^2)\, e^{-x}$.

7. $y^{(4)} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 4y = 0$.

Atb. $y = e^x (C_1 + C_2 x) \cos x + e^x (C_3 + C_4 x) \sin x$.

8. $y''' + y' = x^4$.

Atb. $y = \frac{1}{5}x^5 - 4x^3 + 24x + C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x$.

9. $y''' + 2y'' + y' = e^{2x} + x^2 + x$.

Atb. $y = \frac{e^{2x}}{18} + \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 4x + C_1 + e^{-x}(C_2 + C_3 x)$.

10. $y''' + y'' - y' - y = \cos 2x$.

Atb. $y = -\frac{\cos 2x + 2 \sin 2x}{25} + C_1 e^x + e^{-x}(C_2 + C_3 x)$.

11. $y''' + 3y'' + 3y' + y = 5e^x \sin x$.

Atb. $y = \frac{1}{25} e^x (2 \sin x - 11 \cos x) + e^{-x}(C_1 + C_2 + C_3 x^2)$.

12. $y''' - 3y'' + 3y' - y = (x + 1)\, e^x$.

Atb. $y = e^x \cdot \left(\frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{24} x^4 + C_1 + C_2 x + C_3 x^2\right)$.

13. $y^{(4)} + 2y'' + y = x^2 \cos x$.

Atb. $y = \frac{x^3 \sin x}{12} + \frac{9x^2 - x^4}{48} \cos x + (C_1 + C_2 x) \cos x + (C_3 + C_4 x) \sin x$.

14. $x^3 y''' + 3x^2 y'' + xy' + y = 0$.

Atb. $y = \frac{C_1}{x} + \left[C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{3} \ln x\right) + C_3 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right)\right]\sqrt{x}$.

15. $x^3y''' + x^2y'' + 3xy' - 8y = 0.$

Atb. $y = C_1x^2 + C_2 \cos(2 \ln x) + C_3 \sin(2 \ln x).$

16. $x^3y''' - 3x^2y'' + 7xy' - 8y = 0.$

Atb. $y = x^2 [C_1 + C_2 \ln x + C_3 (\ln x)^2].$

17. $x^4y^{(4)} + 6x^3y''' + 9x^2y'' + 3xy' + y = 0.$

Atb. $y = (C_1 + C_2 \ln x) \sin \ln x + (C_3 + C_4 \ln x) \cos \ln x.$

18. $(2x - 1)^3y''' + (2x - 1)\, y' - 2y = 0.$

Atb. $y = C_1(2x-1) + C_2(2x-1)^{1+\frac{\sqrt{3}}{2}} + C_3(2x-1)^{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}$

19. $x^3y''' + 2x^2y'' + 2y = 10\,(x + x^{-1}).$

Atb. $y = 5x + 2x^{-1}\ln x + x\,(C_1 \cos \ln x + C_2 \sin \ln x) + C_3x^{-1}.$

20. $x^4y''' + 2x^3y'' - x^2y' + xy = 1.$

Atb. $y = \frac{1}{4}x^{-1} \ln x + x\,(C_1 + C_2 \ln x) + C_3\, x^{-1}.$

IV. Simultānie diferenciālvienādojumi.

§ 11. Diferenciālu sistēmu veidi un redukcija.

1. Vispārīgā diferenciālā sistēma ar divām nezināmām funkcijām $y(x)$ un $z(x)$ ir šāda

$$(1)\quad \begin{cases} \Phi_1(x;\, y, y', \ldots, y^{(n)};\, z, z', \ldots, z^{(m)}) = 0, \\ \Phi_2(x;\, y, y', \ldots, y^{(n_1)};\, z, z', \ldots, z^{(m_1)}) = 0. \end{cases}$$

Gadījumā, ja augstāko atvasinājumu kārtas ir vienādas: $n = n_1$, $m = m_1$ un ja var izteikt funkciju augstākos atvasinājumus $y^{(n)}$ un $z^{(m)}$ atklāti ar pārējiem mainīgiem, tad šādu sistēmu

$$(2)\quad \begin{cases} y^{(n)} = f_1(x;\, y, y', \ldots, y^{(n-1)};\, z, z', \ldots, z^{(m-1)}), \\ z^{(m)} = f_2(x;\, y, y', \ldots, y^{(n-1)};\, z, z', \ldots, z^{(m-1)}) \end{cases}$$

sauc par **kanonisku.**

2. Apskatīsim kanoniskās sistēmas (2) šādus r e d u k c i j a s v e i d u s.

I veids: r e d u k c i j a u z a u g s t ā k ā s k ā r t a s d i f e r e n c i ā l v i e n ā d o j u m u a r v i e n u n e z i n ā m o f u n k c i j u (r e s o l v e n t i).

Šajā redukcijā izslēdz no sistēmas (2) vienu funkciju, piem., $z(x)$. Sastāda palīga vienādojumus, atvasinot pēc x sistēmas (2) pirmo vienādojumu atkārtoti m reiz un izteicot atvasināšanas rezultātos $y^{(n)}$, resp. $z^{(m)}$ ar f_1, resp. f_2. Piemēram, ar pirmo atvasināšanu dabū sakaru

$$y^{(n+1)} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} y' + \frac{\partial f_1}{\partial y'} y'' + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n)} +$$
$$+ \frac{\partial f_1}{\partial z} z' + \frac{\partial f_1}{\partial z'} z'' + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial z^{(m-1)}} z^{(m)};$$

pēc substitūcijas $y^{(n)} = f_1$, $z^{(m)} = f_2$ sastāda labajā pusē zināmu funkciju

$$f_{11}(x;\, y, y', \ldots, y^{(n-1)};\, z, z', \ldots, z^{(m-1)}).$$

Tamlīdzīgā kārtā turpinot, dabū vienādojumu sistēmu

$$
(3) \quad \begin{cases}
y^{(n)} = f_1(x;\, y,\, y',\, \ldots,\, y^{(n-1)};\, z,\, z',\, \ldots,\, z^{(m-1)}), \\
y^{(n+1)} = f_{11}(x;\, y,\, y',\, \ldots,\, y^{(n-1)};\, z,\, z',\, \ldots,\, z^{(m-1)}), \\
y^{(n+2)} = f_{12}(x;\, y,\, y',\, \ldots,\, y^{(n-1)};\, z,\, z',\, \ldots,\, z^{(m-1)}), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y^{(n+m)} = f_{1m}(x;\, y,\, y',\, \ldots,\, y^{(n-1)};\, z,\, z',\, \ldots,\, z^{(m-1)})
\end{cases}
$$

ar zināmām funkcijām $f_1, f_{11}, f_{12}, \ldots, f_{1m}$. Sistēmā (3) ir $m + 1$ vienādojumi, no kuŗiem vispārīgi ir iespējams izslēgt m mainīgos $z, z', \ldots, z^{(m-1)}$. Izslēgšanas rezultātā rodas $(n + m)$. kārtas diferenciālvienādojums

$$
(4) \qquad y^{(n+m)} = f(x,\, y,\, y',\, y'',\, \ldots,\, y^{(n+m-1)})
$$

ar vienu funkciju $y(x)$. Vienādojumu (4) sauc par dotās diferenciālās sistēmas (2) r e s o l v e n t i. Resolventes kārta $n + m$ ir arī diferenciālās sistēmas (2) kārta. Zinot resolventes vispārīgo integrālu

$$
y = y(x;\, C_1,\, C_2,\, \ldots,\, C_{m+n})
$$

ar integrācijas konstantēm $C_1, C_2, \ldots, C_{m+n}$, var no palīga sistēmas (3) pirmajiem m vienādojumiem aprēķināt

$$
z = z(x;\, C_1,\, C_2,\, \ldots,\, C_{m+n}),
$$

izslēdzot $m - 1$ atvasinājumus $z', z'', \ldots, z^{(m-1)}$. Tā tad kanoniskās sistēmas (2) integrācija ir reducēta uz resolventes (4) integrāciju un palīga lielumu elimināciju no sistēmas (3). Sistēmas (2) vispārīgais integrāls

$$
(5) \qquad \begin{cases}
y = y(x;\, C_1,\, C_2,\, \ldots,\, C_{m+n}), \\
z = z(x;\, C_1,\, C_2,\, \ldots,\, C_{m+n})
\end{cases}
$$

satur patvaļīgas konstantes skaitā $m + n$.

P i e z ī m e. Tamlīdzīgu redukciju var darīt ar vispārīgo sistēmu (1).

II veids: redukcija uz ekvivalentu **normālu sistēmu.** Te ieved $n + m - 2$ jaunas nezināmas funkcijas:

$$y' = y_1,\ y'' = y_2, \ldots, y^{(n-1)} = y_{n-1},$$
$$z' = z_1,\ z'' = z_2, \ldots, z^{(m-1)} = z_{m-1}.$$

Rodas simultāni pirmās kārtas diferenciālvienādojumi, **kas veido** speciālu **normālu sistēmu**

$$(6)\quad \begin{cases} y' = y_1,\ y_1' = y_2, \ldots, y_{n-2}' = y_{n-1}, \\ z' = z_1,\ z_1' = z_2, \ldots, z_{m-2}' = z_{m-1}, \\ y_{n-1}' = f_1(x;\ y, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1};\ z, z_1, z_2, \ldots, z_{m-1}), \\ z_{m-1}' = f_2(x;\ y, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1};\ z, z_1, z_2, \ldots, z_{m-1}) \end{cases}$$

ar $n+m$ nezināmām funkcijām: $y, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, z, z_1, z_2, \ldots, z_{m-1}$.

Sistēma (6) ir ekvivalenta ar doto, jo apgrieztā **kārtā, no** palīga funkciju izslēgšanas rodas sistēma (2). **Ekvivalentās normālās sistēmas** (6) **kārta** ir $n + m$, **kas atbilst resolventes (4) kārtai.**

Vispārīgai normālai sistēmai

$$(7)\quad \begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases}$$

ar n nezināmām funkcijām $y_1, y_2, \ldots, y_n$ kārta ir n, jo šīs sistēmas resolvente ir n. kārtas diferenciālvienādojums ar vienu nezināmu funkciju. Ja funkcijas $f_1, f_2, \ldots, f_n$ ir lineāras attiecībā pret $y_1, y_2, \ldots, y_n$, tad sistēmu (7) sauc par **lineāru. Apskatīsim** lineāru sistēmu īpašības, kas ir analogas ar lineāru diferenciālvienādojumu īpašībām.

§ 12. Lineāras sistēmas.

1. Lineāru sistēmu

$$
(1)\quad \begin{cases}
L_1(y_1, y_2, \ldots, y_n) = y_1' + f_{11}(x)y_1 + f_{12}(x)y_2 + \ldots + f_{1n}(x)y_n = f_1(x), \\
L_2(y_1, y_2, \ldots, y_n) = y_2' + f_{21}(x)y_1 + f_{22}(x)y_2 + \ldots + f_{2n}(x)y_n = f_2(x), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
L_n(y_1, y_2, \ldots, y_n) = y_n' + f_{n1}(x)y_1 + f_{n2}(x)y_2 + \ldots + f_{nn}(x)y_n = f_n(x)
\end{cases}
$$

jeb

$$
(1')\quad L_k(y_1, \ldots, y_k, \ldots y_n) = y_k' + f_{k1}(x)y_1 + \ldots + f_{kk}(x)y_k + \ldots + f_{kn}(x)\, y_n = f_k(x)
$$
$$
(k = 1, 2, \ldots, n)
$$

sauc par homogenu, ja brīvie locekļi $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots, f_n(x)$ ir identiski nulles; pretējā gadījumā — par nehomogenu. Dotās funkcijas

$$
f_k(x),\quad f_{ik}(x) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)
$$

pieņemam par nepārtrauktām un vienvērtīgām intervallā $a \leqslant x \leqslant b$.

Ar 11. §-fā apskatīto pirmo redukcijas veidu sastāda resolventi, kas ir n. kārtas lineārs diferenciālvienādojums. Tādēļ lineārās sistēmas (1) vispārīgais integrāls ($k = 1, 2, \ldots, n$)

$$
(2)\quad y_k = \varphi_k(x) + C_1\varphi_{k1}(x) + \ldots + C_k\varphi_{kk}(x) + \ldots + C_n\varphi_{kn}(x)
$$

satur lineārā atkarībā n integrācijas konstantes $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Turpmāk dosim vispārīgā integrālā funkcijām $\varphi_k(x), \varphi_{k1}(x), \ldots, \varphi_{kn}(x)$ noteiktas interpretācijas.

2. Homogenās sistēmas

$$
(3)\quad L_k(y_1, \ldots, y_k, \ldots, y_n) = y_k' + f_{k1}(x)y_1 + \ldots + f_{kk}(x)y_k + \ldots + f_{kn}(x)y_n = 0
$$
$$
(k = 1, 2, \ldots, n)
$$

šādas **vispārīgās īpašības** atbilst homogenam lineāram diferenciālvienādojumam ar vienu funkciju (§ 6); šo īpašību pamatā ir diferenciālsimbolu $L_1, \ldots, L_k, \ldots, L_n$ lineāritāte izteikta ar formulām ($k = 1, 2, \ldots, n$):

$$(4)\quad L_k(y_1+z_1, \ldots, y_k+z_k, \ldots y_n+z_n) = L_k(y_1, \ldots, y_k \ldots y_n) + L_k(z_1, \ldots, z_k \ldots z_n)$$

un

$$(5)\quad L_k(Cy_1, \ldots, Cy_k, \ldots, Cy_n) = C L_k(y_1, \ldots, y_k, \ldots, y_n),$$

kuŗās $y_1, \ldots, y_n$ un $z_1, \ldots, z_n$ ir kautkādas divas funkciju kopas un C — konstante.

I. Ja funkciju kopa $y_{11}(x), \ldots, y_{k1}(x), \ldots, y_{n1}(x)$ ir homogenās sistēmas (3) partikulārais integrāls, tad arī $C_1 y_1(x), \ldots, C_1 y_{k1}(x), \ldots, C_1 y_{n1}(x)$ ir tās integrāls (C_1 — patvaļīga konstante)

II. Ja n funkciju kopas

$$(6)\quad \begin{cases} y_{11}(x), \ldots, y_{k1}(x), \ldots, y_{n1}(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{1k}(x), \ldots, y_{kk}(x), \ldots, y_{nk}(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{1n}(x), \ldots, y_{kn}(x), \ldots, y_{nn}(x) \end{cases}$$

ir homogenās sistēmas (3) partikulārie atrisinājumi, tad arī funkcijas

$$(7)\quad \begin{cases} y_1(x) = C_1 y_{11}(x) + \ldots + C_k y_{1k}(x) + \ldots + C_n y_{1n}(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_k(x) = C_1 y_{k1}(x) + \ldots + C_k y_{kk}(x) + \ldots + C_n y_{kn}(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n(x) = C_1 y_{n1}(x) + \ldots + C_k y_{nk}(x) + \ldots + C_n y_{nn}(x) \end{cases}$$

ir šīs sistēmas integrāls ($C_1, \ldots, C_k, \ldots, C_n$ — patvaļīgas konstantes).

Lai ar formulām (7) noteiktu kaut kuŗu atrisinājumu, kas pieņem vērtības $y_1(x_0), \ldots, y_k(x_0) \ldots, y_n(x_0)$, kad $x = x_0$, ir jāprasa, ka sistēma (7) ar $x = x_0$ ir atrisināma attiecībā pret $C_1, \ldots, C_k, \ldots, C_n$. Tādēļ sistēmas determinantam

$$(8)\qquad \Delta(x) = \begin{vmatrix} y_{11}(x) & \ldots & y_{1k}(x) & \ldots & y_{1n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{k1}(x) & \ldots & y_{kk}(x) & \ldots & y_{kn}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{n1}(x) & \ldots & y_{nk}(x) & \ldots & y_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

ar $x = x_0$ nav jābūt nullei. Partikulāros integrālus (6), kuŗiem determinants $\Delta \neq 0$ visā intervallā, sauc par līneāri neatkarīgiem, un tie veido atrisinājumu fundamentālo sistēmu. Tā tad formulas (7) izteic homogenas līneāras sistēmas (3) vispārīgo integrālu tad, ja atrisinājumi $y_{11}(x), \ldots, y_{nn}(x)$ veido fundamentālo sistēmu, resp. ir līneāri neatkarīgi ($\Delta \neq 0$).

Nosacījums $\Delta \neq 0$ ir līdzvērtīgs ar to, ka līneāri sakari

$$\begin{cases} C_1 y_{11}(x) + \ldots + C_n\, y_{1n}(x) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1\, y_{n1}(x) + \ldots + C_n\, y_{nn}(x) = 0 \end{cases}$$

iespējami tikai tad, ja reizē $C_1 = C_2 = \ldots = C_n = 0$. Pretējā gadījumā atrisinājumus sauc par līneāri atkarīgiem. Tādu atrisinājumu determinants ir $\Delta = 0$ vismaz vienai nozīmei $x = x_0$. Ar sekojošo formulu konstatēs, ka tad identiski $\Delta = 0$.

III. Atrisinājumu determinantam (8) der formula (e — nat. log. baze)

$$(9)\qquad \Delta(x) = \Delta(x_0)\, e^{-\int\limits_{x_0}^{x} (f_{11} + f_{22} + \ldots + f_{nn})\, dx},$$

kas atbilst Liuvila (*Liouville*) formulai (§ 6) ar Vronski determinantu.

Pierādījumam atvasina pēc x determinantu (8), lietojot tā rindas. Dabūtās n determinantu summas katrā loceklī izteic funkciju atvasinājumus ($k, p = 1, 2, \ldots, n$)

$$y'_{kp} = -f_{k1}(x)\, y_{1p} - \ldots - f_{kk}(x)\, y_{kp} - \ldots - f_{kn}(x)\, y_{np},$$

ja ievēro sistēmas (3) vienādojumus. Pēc pārveidojumiem dabū funkcijas $\Delta(x)$ noteikšanai pirmās kārtas diferenciālvienādojumu

$$\frac{d\Delta(x)}{dx} = -(f_{11} + f_{22} + \ldots + f_{nn})\,\Delta x,$$

kas ar mainīgo separāciju un kvadrātūru dod meklējamo sakaru (9).

Formula (9) rāda, ka identiski $\Delta(x) = 0$, ja $\Delta(x_0) = 0$, bet visā intervallā $\Delta(x) \neq 0$, ja kaut vienā punktā $\Delta(x_0) \neq 0$.

3. **Nehomogenās lineāras sistēmas** (1) integrācija reducējas uz kvadrātūrām, ja ir zināma atbilstošās homogenās sistēmas

$$(10)\quad \begin{cases} L_1(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) = \eta_1' + \sum_{i=1}^{n} f_{1i}(x)\eta_i = 0, \\ L_2(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) = \eta_2' + \sum_{i=1}^{n} f_{2i}(x)\eta_i = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ L_n(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) = \eta_n' + \sum_{i=1}^{n} f_{ni}(x)\eta_i = 0 \end{cases}$$

atrisinājumu fundamentālā sistēma

$$(11)\quad \begin{cases} \eta_{11}, \eta_{21}, \ldots, \eta_{n1}, \\ \eta_{12}, \eta_{22}, \ldots, \eta_{n2}, \\ \ldots\ldots\ldots \\ \eta_{1n}, \eta_{2n}, \ldots, \eta_{nn}. \end{cases}$$

Te ir lietojama Lagranža **konstantu variācijas metode**. Homogenās sistēmas (10) vispārīgais integrāls

$$\eta_k = \sum_{p=1}^{n} C_p \eta_{kp} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n$$

satur n integrācijas konstantes $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Pēc Lagranža metodes meklē nehomogenās sistēmas (1) atrisinājumu formā

$$(12)\qquad y_k = \sum_{p=1}^{n} \overline{C}_p(x)\,\eta_{kp},$$

kuŗā $\overline{C}_1(x), \ldots, \overline{C}_p(x), \ldots, \overline{C}_n(x)$ ir x funkcijas. Šo funkciju noteikšanai sastāda atvasinājumus

$$y'_k = \sum_{p=1}^{n} \overline{C}'_p(x)\,\eta_{kp} + \sum_{p=1}^{n} \overline{C}_p\,\eta'_{kp} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

un ieliek sistēmā (1). Pēc pārveidojumiem rodas vienādojumi

$$\sum_{p=1}^{n} \overline{C}'_p(x)\,\eta_{kp} + \sum_{p=1}^{n} \overline{C}_p\left(\eta'_{kp} + \sum_{i=1}^{n} f_{ki}\,\eta_{ip}\right) = f_k(x)$$

$(k = 1, 2, \ldots, n)$, kas vienkāršojas par

$$\text{(13)} \qquad \sum_{p=1}^{n} \overline{C}'_p(x)\,\eta_{kp} = f_k(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

jo funkcijas (11) ir homogenās sistēmas (10) atrisinājumi. Atklātā veidā (13) ir vienādojumu sistēma

$$\begin{cases} \overline{C}'_1(x)\,\eta_{11} + \ldots + \overline{C}'_n(x)\,\eta_{1n} = f_1(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \overline{C}'_1(x)\,\eta_{n1} + \ldots + \overline{C}'_n(x)\,\eta_{nn} = f_n(x), \end{cases}$$

kuŗas determinants ir homogenās sistēmas (10) atrisinājumu fundamentālas sistēmas determinants $\Delta(x)$. Tā kā $\Delta \neq 0$, tad var atrisināt sastādīto sistēmu (13) pēc Kramera formulām

$$\overline{C}'_p(x) = \frac{\Delta_p(x)}{\Delta(x)} \qquad (p = 1, 2, \ldots, n),$$

kuŗās $\Delta_p(x)$ apzīmē determinantu, izveidotu no Δ ar p. kolonnas elementu apmaiņu pret $f_1, \ldots, f_n$:

$$\Delta_p(x) = \begin{vmatrix} \eta_{11} & \ldots & \eta_{1\,p-1} & f_1 & \eta_{1\,p+1} & \ldots & \eta_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \eta_{n1} & \ldots & \eta_{n\,p-1} & f_n & \eta_{n\,p+1} & \ldots & \eta_{nn} \end{vmatrix}.$$

Ar kvadrātūrām dabū funkcijas

$$\overline{C}_p(x) = C_p + \int \frac{\Delta_p(x)}{\Delta(x)} dx \qquad (p = 1, 2, \ldots, n),$$

un nehomogenās sistēmas vispārīgo integrālu pēc (12) formulas izteic ar

$$y_k(x) = \sum_{p=1}^{n} \eta_{kp} \int \frac{\Delta_p(x)}{\Delta(x)} dx + \sum_{p=1}^{n} C_p \eta_{kp} \qquad (k=1, 2, \ldots, n).$$

Te $\eta_k = \sum\limits_{p=1}^{n} C_p \eta_{kp}$ ir atbilstošās homogenās sistemas vispārīgais integrāls ar n konstantēm $C_1, C_2, \ldots, C_n$, bet

$$\overline{y}_k(x) = \sum_{p=1}^{n} \eta_{kp} \int \frac{\Delta_p(x)}{\Delta(x)} dx$$

ir nehomogenās sistēmas partikulārais integrāls, ko aprēķina ar n kvadratūrām. Salīdzinājumā ar formulu (2) konstatē, ka

$$\varphi_k(x) = \overline{y}_k(x), \quad \varphi_{kp}(x) = \eta_{kp}(x) \qquad (k, p = 1, 2, \ldots, n).$$

Tā tad der formulas

$$(14) \qquad y_k(x) = \overline{y}_k(x) + \eta_k(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

kas izteic šādu īpašību: nehomogenās lineārās sistēmas vispārīgo integrālu sastāda ar tās partikulārā integrāla un atbilstošās homogenās sistēmas vispārīgā integrāla summu.

4. **Gadijumā,** kad ir zināms tikai viens atbilstošās homogenās sistēmas (10) partikulārais integrāls $\eta_{11}, \eta_{21}, \ldots, \eta_{n1}$, doto n. kārtas nehomogeno sistēmu (1) var reducēt uz $(n-1)$. kārtas sistēmu.

Šai redukcijai lieto Dalambēra substitūciju

$$(15) \quad y_1 = \eta_{11} Y_1, \; y_2 = \eta_{21} Y_1 + Y_2, \ldots, y_n = \eta_{n1} Y_1 + Y_n \quad (\eta_{11} \neq 0),$$

ievedot jaunas funkcijas $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$. Ar funkciju (15) un to atvasinājumu izteiksmju

$$\begin{aligned} y_1' &= \eta_{11} Y_1' + \eta_{11}' Y_1, \\ y_2' &= \eta_{21} Y_1' + \eta_{21}' Y_1 + Y_2', \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' &= \eta_{n1} Y_1' + \eta_{n1}' Y_1 + Y_n' \end{aligned}$$

ievietošanu vienādojumos (1) sistēma vienkāršojas par

$$(16)\quad \begin{cases} \eta_{11} Y_1' + f_{12} Y_2 + \ldots + f_{1n} Y_n = f_1(x), \\ \eta_{21} Y_1' + Y_2' + f_{22} Y_2 + \ldots + f_{2n} Y_n = f_2(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \eta_{n1} Y_1' + Y_n' + f_{n2} Y_2 + \ldots + f_{nn} Y_n = f_n(x), \end{cases}$$

ja ievēro, ka $\eta_{11}, \eta_{21}, \ldots, \eta_{n1}$ ir homogenās sistēmas (10) atrisinājums. Sastādītajā sistēmā (16) atklāti nav funkcijas Y_1, un ir iespējams izslēgt arī Y_1', ja no sistēmas pirmā vienādojuma izteic ($\eta_{11} \neq 0$) atvasinājumu Y_1' atkarībā no $Y_2, \ldots, Y_n$ un ievieto atlikušos vienādojumos. Tad rodas $(n - 1)$. kārtas lineārā sistēma

$$(17)\quad \begin{cases} Y_2' + \varphi_{22} Y_2 + \ldots + \varphi_{2n} Y_n = \varphi_2(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Y_n' + \varphi_{n2} Y_2 + \ldots + \varphi_{nn} Y_n = \varphi_n(x) \end{cases}$$

ar viegli aprēķināmām funkcijām $\varphi_2, \ldots, \varphi_n$ un $\varphi_{22}, \ldots, \varphi_{nn}$. Zinot sistēmas (17) vispārīgo integrālu, var ar vienu kvadratūru aprēķināt Y_1 un ar Dalambēra substitūciju (15) sastādīt arī dotās sistēmas vispārīgo integrālu.

5. Gadījumā, kad ir zināmi divi lineāri neatkarīgi atrisinājumi $\eta_{11}, \eta_{21}, \ldots, \eta_{n1}$ un $\eta_{12}, \eta_{22}, \ldots, \eta_{n2}$ ar

$$\begin{vmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} \\ \eta_{21} & \eta_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

redukcijai lieto šādu substitūciju

$$
(18)\quad \begin{cases} y_1 = \eta_{11}Y_1 + \eta_{12}Y_2, \\ y_2 = \eta_{21}Y_1 + \eta_{22}Y_2, \\ y_3 = \eta_{31}Y_1 + \eta_{32}Y_2 + Y_3, \\ \dots\dots\dots\dots \\ y_n = \eta_{n1}Y_1 + \eta_{n2}Y_2 + Y_n . \end{cases}
$$

Pēc substitūcijas un vienkāršošanas sistēma (1) top par

$$
(19)\quad \begin{cases} \eta_{11}Y_1' + \eta_{12}Y_2' + f_{13}Y_3 + \dots + f_{1n}Y_n = f_1(x), \\ \eta_{21}Y_1' + \eta_{22}Y_2' + f_{23}Y_3 + \dots + f_{2n}Y_n = f_2(x), \\ \eta_{31}Y_1' + \eta_{32}Y_2' + Y_3' + f_{33}Y_3 + \dots + f_{3n}Y_n = f_3(x), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \eta_{n1}Y_1' + \eta_{n2}Y_2' + Y_n' + f_{n3}Y_3 + \dots + f_{nn}Y_n = f_n(x). \end{cases}
$$

Ar pieņemto hipotēzi ir iespējams izteikt atvasinājums Y_1', Y_2' no sistēmas (19) pirmajiem diviem vienādojumiem atkarībā no $Y_3, \dots, Y_n$. Ja šīs izteiksmes ievieto atlikušajos vienādojumos, tad rodas $(n - 2)$. kārtas lineāra sistēma

$$
(20)\quad \begin{cases} Y_3' + \psi_{33}Y_3 + \dots + \psi_{3n}Y_n = \psi_3(x), \\ \dots\dots\dots\dots \\ Y_n' + \psi_{n3}Y_3 + \dots + \psi_{nn}Y_n = \psi_n(x) \end{cases}
$$

ar viegli sastādāmām funkcijām „ψ". Zinot pēdējās sistēmas vispārīgo integrālu, ir iespējams ar divām kvadratūrām noteikt atlikušās divas funkcijas Y_1, Y_2, un tā tad ar substitūciju (18) — sistēmas (1) vispārīgo integrālu.

6. Ar (18) analogu substitūciju konstatē, ka gadījumā, kad atbilstošai homogenai sistēmai ir zināmi $m < n$ lineāri neatkarīgi partikulāri integrāli, iespējams reducēt dotās n. kārtas lineāru sistēmu uz $(n - m)$ kārtas lineāru sistēmu un m kvadratūrām.

Speciālā gadījumā, kad $m = n - 1$, rodas pirmās kārtas lineārs diferenciālvienādojums, ko var integrēt ar kvadratūrām. Tā tad šinī gadījumā lineāras sistēmas integrācija arī reducējas uz kvadratūrām.

§ 13. Lineāras sistēmas ar konstantiem koeficientiem.

1. Homogenai lineārai sistēmai

$$
(1) \quad \begin{cases}
L_1(y_1, y_2, \ldots, y_n) = y_1' + a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \ldots + a_{1n} y_n = 0, \\
L_2(y_1, y_2, \ldots, y_n) = y_2' + a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + \ldots + a_{2n} y_n = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
L_n(y_1, y_2, \ldots, y_n) = y_n' + a_{n1} y_1 + a_{n2} y_2 + \ldots + a_{nn} y_n = 0
\end{cases}
$$

ar konstantiem koeficientiem $a_{11}, \ldots, a_{nn}$ resolvente ir lineārs n. kārtas diferenciālvienādojums arī ar konstantiem koeficientiem. Tādēļ šīs resolventes atrisinājumus pēc **Eulera metodes** meklē formā e^{kx}. Vispārinot šo metodi direkti sistēmai, prasa sistēmas (1) atrisinājumu ar formu

$$
(2) \qquad y_1 = \alpha_1 e^{kx}, \; y_2 = \alpha_2 e^{kx}, \; \ldots, \; y_n = \alpha_n e^{kx},
$$

kuŗā $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ un k ir nezināmās konstantes. To noteikšanai ieliek funkciju (2) un atvasinājumu izteiksmes

$$
y_1' = k\alpha_1 e^{kx}, \; y_2' = k\alpha_2 e^{kx}, \; \ldots, \; y_n' = k\alpha_n e^{kx}
$$

sistēmā (1). Pēc dalīšanas ar kopīgo faktoru e^{kx} rodas algebrisko vienādojumu sistēma

$$
(3) \quad \begin{cases}
\alpha_1 (a_{11} + k) + \alpha_2 a_{12} + \ldots + \alpha_n a_{1n} = 0, \\
\alpha_1 a_{21} + \alpha_2 (a_{22} + k) + \ldots + \alpha_n a_{2n} = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\alpha_1 a_{n1} + \alpha_2 a_{n2} + \ldots + \alpha_n (a_{nn} + k) = 0.
\end{cases}
$$

Lai atrisinājums (2) būtu netriviāls, ir jāprasa, ka $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ nav reizē nulles, un tā tad sistēmas (3) determinantam

$$
(4) \qquad \varphi(k) = \begin{vmatrix}
a_{11} + k & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} + k & \ldots & a_{2n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} + k
\end{vmatrix}
$$

jābūt vienlīdzīgam ar nulli. Sastādīto n. pakāpes algebrisko vienādojumu

$$(5) \qquad \varphi(k) = 0$$

sauc par raksturīgo (karakteristisko) vienādojumu.

2. Atkarībā no šī vienādojuma saknēm $k_1, k_2, \ldots, k_n$ atšķirsim turpmākā diskusijā šādus gadījumus.

I gadījums: raksturīgā vienādojuma (5) visas saknes ir dažādas, t. i.

$$k_1 \neq k_2 \neq \ldots \neq k_n.$$

Tad katrai saknei var atrast no tistēmas (3) noteiktu koeficientu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ attiecību. Tiešām, tā kā raksturīgā polinoma (4) atvasinājumu pēc k

$$\varphi'(k) = A_{11}(k) + A_{22}(k) + \ldots + A_{nn}(k)$$

var izteikt ar determinanta galveno locekļu $a_{11} + k, \ldots, a_{nn} + k$ minoriem $A_{11}(k), \ldots, A_{nn}(k)$ un raksturīgajam vienādojumam (5) nav vairākkārtēju sakņu, tad nosacījumi

$$\varphi'(k_1) \neq 0, \ldots, \varphi'(k_n) \neq 0$$

rāda, ka vismaz viens no minoriem $A_{11}(k), \ldots, A_{nn}(k)$ ar $k = k_1$ nav nulle, vismaz viens no tiem ar $k = k_2$ nav nulle u. t. t. Ja, piem., $A_{11}(k_i) \neq 0$ ($i = 1$, vai 2, ... vai n), tad sistēmā (3) pirmo vienādojumu var uzskatīt par pārējo secinājumu, un to var atmest. No atlikušo $n-1$ vienādojumu sistēmas var koeficientu $a_2, \ldots, a_n$ nozīmes izteikt ar a_1, resp. dabūt noteiktas koeficientu attiecības $a_2 : a_1, \ldots, a_n : a_1$. Ja sistēmā (3) liek $k = k_1, k_2, \ldots, k_n$, tad var atrast attiecīgās koeficientu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nozīmes:

$$\begin{array}{ll} a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1} & (k = k_1), \\ a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{n2} & (k = k_2), \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{nn} & (k = k_n), \end{array}$$

kuŗu attiecības $a_{11} : a_{21} : \ldots : a_{n1}, \ldots, a_{1n} : a_{2n} : \ldots : a_{nn}$ ir noteiktas. Nenoteiktas paliek n konstantes, piem. $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}$.

Ar formulām (2) sastāda n partikulāros integrālus

$$(6)\quad \begin{cases} y_{11} = a_{11} e^{k_1 x},\ y_{21} = a_{21} e^{k_1 x}, \ldots, y_{n1} = a_{n1} e^{k_1 x}, \\ y_{12} = a_{12} e^{k_2 x}, y_{22} = a_{22} e^{k_2 x}, \ldots, y_{n2} = a_{n2} e^{k_2 x}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{1n} = a_{1n} e^{k_n x}, y_{2n} = a_{2n} e^{k_n x}, \ldots, y_{nn} = a_{nn} e^{k_n x}, \end{cases}$$

kas veido atrisinājumu fundāmentālo sistēmu. Tiešām, līneārs sakars starp šiem integrāliem reducētos uz neiespējamu sakaru

$$C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \ldots + C_n e^{k_n x} = 0$$

ar konstantēm $C_1, C_2, \ldots, C_n$, kas nav reizē nulles. Tā tad sistēmas (1) vispārīgais integrāls ir

$$(7)\quad y_k(x) = C_1 a_{k_1} e^{k_1 x} + C_2 a_{k_2} e^{k_2 x} + \ldots + C_n a_{k_n} e^{k_n x} \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

ar n patvaļīgām konstantēm $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

II gadījums: raksturīgam vienādojumam (5) ir vairākkārtējas saknes.

Diskusijā par sakni k_1 ar kārtu p ievērojam, ka raksturīgo polinomu

$$\varphi(k) = (k - k_1)^p \psi(k)$$

var izteikt ar polinomu $\psi(k)$, kas nav nulle nozīmei $k = k_1$:

$$\psi(k_1) \neq 0.$$

Ar substitūcijām

$$(8)\quad y_1 = \eta_1 e^{k_1 x},\ y_2 = \eta_2 e^{k_1 x}, \ldots, y_n = \eta_n e^{k_1 x}$$

sistēmā (1) sastāda palīga līneāru sistēmu

$$
(9) \quad \begin{cases} \eta_1' + (a_{11} + k_1)\eta_1 + a_{12}\eta_2 + \ldots + a_{1n}\eta_n = 0, \\ \eta_2' + a_{21}\eta_1 + (a_{22} + k_1)\eta_2 + \ldots + a_{2n}\eta_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \eta_n' + a_{n1}\eta_1 + a_{n2}\eta_2 + \ldots + (a_{nn} + k_1)\eta_n = 0 \end{cases}
$$

ar jaunām funkcijām $\eta_1(x), \eta_2(x), \ldots, \eta_n(x)$. Ja šīs sistēmas atrisināšanai lieto Eulera substitūcijas

$$
(10) \quad \eta_1 = \beta_1 e^{kx}, \ \eta_2 = \beta_2 e^{kx}, \ldots, \eta_n = \beta_n e^{kx},
$$

tad sastāda raksturīgo vienādojumu $\varphi_1(k) = 0$ ar raksturīgo polinomu

$$
\varphi_1(k) = \varphi(k + k_1),
$$

ko savukārt var izteikt formā

$$
\varphi_1(k) = k^p \psi_1(k),
$$

ja $\psi_1(k) = \psi(k + k_1)$. Tā kā $\psi(k_1) \neq 0$, tad iepriekšējais sakars norāda, ka $k = 0$ ir jaunā raksturīgā vienādojuma $\varphi_1(k) = 0$ sakne ar kārtu p. Tas nozīmē, ka pēc formulām (10) sistemai (9) ir atrisinājums

$$
\eta_1 = \beta_1, \ \eta_2 = \beta_2, \ldots, \eta_n = \beta_n
$$

ar konstantēm $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$. Tās noteic ar vienādojumu sistēmu

$$
(11) \quad \begin{cases} b_{11}\beta_1 + b_{12}\beta_2 + \ldots + b_{1n}\beta_n = 0, \\ b_{21}\beta_1 + b_{22}\beta_2 + \ldots + b_{2n}\beta_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{n1}\beta_1 + b_{n2}\beta_2 + \ldots + b_{nn}\beta_n = 0, \end{cases}
$$

kurā apzīmē

$$
b_{ii} = a_{ii} + k_1, \quad b_{ij} = a_{ij} \quad (i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, n).
$$

Tā kā homogenās sistēmas (11) determinants

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

ir vienlīdzīgs ar $\varphi(k_1)$ un

$$\varphi(k_1) = 0,$$

tad eksistē tās atrisinājumi $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, kas nav reizē nulles, piem., $\beta_1 \neq 0$.

Ar lietotiem apzīmējumiem sistēmu (9) raksta formā

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta_1' + b_{11}\eta_1 + b_{12}\eta_2 + \ldots + b_{1n}\eta_n = 0, \\ \eta_2' + b_{21}\eta_1 + b_{22}\eta_2 + \ldots + b_{2n}\eta_n = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \eta_n' + b_{n1}\eta_1 + b_{n2}\eta_2 + \ldots + b_{nn}\eta_n = 0. \end{array} \right.$$

Tā kā tai ir viens netriviāls partikulārais integrāls

$$\eta_{11} = \beta_1 \neq 0,\ \eta_{21} = \beta_2, \ldots, \eta_{n1} = \beta_n,$$

tad ar Dalambēra substitūciju

$$(13) \quad \eta_1 = \beta_1 Y_1,\ \eta_2 = \beta_2 Y_1 + Y_2, \ldots, \eta_n = \beta_n Y_1 + Y_n$$

rodas (§ 12) lineārā sistēma

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_1 Y_1' + \qquad\quad b_{12}Y_2 + \ldots + b_{1n}Y_n = 0, \\ \beta_2 Y_1' + Y_2' + b_{22}Y_2 + \ldots + b_{2n}Y_n = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \beta_n Y_1' + Y_n' + b_{n2}Y_2 + \ldots + b_{nn}Y_n = 0 \end{array} \right.$$

ar jaunām funkcijām $Y_1(x), Y_2(x), \ldots, Y_n(x)$. Dabūto sistēmu ar atvasinājuma Y_1' izslēgšanu no sistēmas pēdējiem $n-1$ vienādojumiem var pārveidot ekvivalentā sistēmā

$$(14)\quad \begin{cases} Y_1' + B_{12}\, Y_2 + \ldots + B_{1n}\, Y_n = 0, \\ Y_2' + B_{22}\, Y_2 + \ldots + B_{2n}\, Y_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Y_n' + B_{n2}\, Y_2 + \ldots + B_{nn}\, Y_n = 0 \end{cases}$$

ar koeficientu nozīmēm

$$B_{12} = \frac{b_{12}}{\beta_1}, \ldots, B_{1n} = \frac{b_{1n}}{\beta_1}$$

un

$$B_{i2} = b_{i2} - \frac{\beta_i}{\beta_1} b_{12}, \ldots, B_{in} = b_{in} - \frac{\beta_i}{\beta_1} b_{1n} \qquad (i=2,3,\ldots,n)$$

Konstatēsim, ka **lineārās sistēmas** (14) **raksturīgais polinoms**

$$(15)\quad \Phi_1(k) = \begin{vmatrix} k & B_{12} & \ldots & B_{1n} \\ 0 & B_{22}+k & \ldots & B_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & B_{n2} & \ldots & B_{nn}+k \end{vmatrix}$$

ir identisks ar sistēmas (9) **jeb** (12) **raksturīgo polinomu** $\varphi_1(k)$.

Tiešām, ja determinanta (15) otrai, trešai, ... n-tai **rindai** pieskaita pirmās rindas elementus, pareizinātus attiecīgi ar $\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n$ un ievēro koeficientu „B" nozīmes, tad pēc pārveidojuma izteic $\Phi_1(k)$ ar determinantu

$$(16)\quad \frac{1}{\beta_1} \cdot \begin{vmatrix} \beta_1 k & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ \beta_2 k & b_{22}+k & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_n k & b_{n2} & \ldots & b_{nn}+k \end{vmatrix},$$

kas top par

$$\begin{vmatrix} b_{11}+k\,b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} \quad b_{22}+k & \dots & b_{2n} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot \\ b_{n1} \quad b_{n2} & \dots & b_{nn}+k \end{vmatrix} = \varphi_1(k),$$

kad determinantā (16) no pirmās kolonnas elementiem atņem otrās, . . ., n-tās kolonnas elementus, reizinātus attiecīgi ar $\beta_2, \dots, \beta_n$, un ievēro sakarus (11).

No formulas (15) izteic

$$\Phi_1(k) = k\,\Phi_2(k)$$

ar funkciju

$$(17)\quad \Phi_2(k) = \begin{vmatrix} B_{22}+k & \dots & B_{2n} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot & \cdot \\ B_{n2} & \dots & B_{nn}+k \end{vmatrix},$$

kas ir lineārās (n — 1). kārtas sistēmas

$$(18)\quad \begin{cases} Y_2' + B_{22}Y_2 + \dots + B_{2n}Y_n = 0, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ Y_n' + B_{n2}Y_2 + \dots + B_{nn}Y_n = 0 \end{cases}$$

raksturīgais polinoms. Tā kā

$$\Phi_1(k) = \varphi_1(k) = k^p\,\psi_1(k),$$

tad

$$\Phi_2(k) = k^{p-1}\psi_1(k) \qquad (\psi_1(0) \neq 0),$$

t. i. sistēmas (18) raksturīgam vienādojumam $\Phi_2(k) = 0$ ir sakne $k = 0$ ar kārtu p — 1.

3. Izlietojot iepriekšējos rezultātus, pierādīsim **teorēmu**: ja lineārās n. kārtas sistēmas (1) raksturīgam vienādojumam (5) ir sakne k_1 ar kārtu p, tad sistēmas vispārīgajā integrālā ir sastāvdaļa

$$(19)\quad y_1 = e^{k_1x}P_1(x),\ y_2 = e^{k_1x}P_2(x), \dots, y_n = e^{k_1x}P_n(x)$$

ar polinomiem $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_n(x)$, kuŗu pakāpes nav lielākas par $p - 1$ un koeficienti satur p patvaļīgas konstantes.

Pierādījumam lieto pilnīgās indukcijas slēdzienu. Teorēma ir pareiza, ja $p = 1$. Ja pieņem, ka tā ir pareiza ar $p - 1$, un pierāda tās pareizību ar p, tad tā ir vispār pareiza. Iepriekšējie rezultāti norāda, ka pietiek pieņemt saknei $k = 0$ ar kārtu $p - 1$ sistēmas (18) atrisinājumus formā

$$Y_2 = Q_2(x), \ldots, Y_n = Q_n(x),$$

kur polinomu $Q_2(x), \ldots, Q_n(x)$ pakāpes nav augstākas par $p - 2$ un koeficienti satur $p - 1$ patvaļīgas konstantes. Tad no sistēmas (14) pirmā vienādojuma pēc substitūcijas un kvadrātūras atrod funkciju

$$Y_1 = C - B_{12}\int Q_2(x)\,dx - \ldots - B_{1n}\int Q_n(x)\,dx = Q_1(x)$$

kā polinomu $Q_1(x)$ ar pakāpi ne augstāku par $p - 1$ un vēl vienu patvaļīgu konstanti C. Ar Dalambēra substitūciju (13) izteic atrisinājumus

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \beta_1 Q_1(x) = P_1(x), \\ \eta_2 &= \beta_2 Q_1(x) + Q_2(x) = P_2(x), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \eta_n &= \beta_n Q_1(x) + Q_n(x) = P_n(x) \end{aligned}$$

kā polinomus $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_n(x)$ ar pakāpēm ne augstākām par $p - 1$, un koeficientiem, kas satur p patvaļīgas konstantes. Transformācijas formulas (8) rāda, ka funkcijām $y_1, y_2, \ldots, y_n$ tiešām ir meklējamā forma (19).

Diskusija par citām vairākkārtējām raksturīgā vienādojuma saknēm ir analoga. Tā kā katrai saknei atbilst patvaļīgas konstantes skaitā, vienlīdzīgā ar saknes kārtu, tad vispārīgajā integrālā rodas tieši n patvaļīgas konstantes, ja dotās lineārās sistēmas kārta ir n.

Piezīme. 1. Praktikā iepriekšējie pārveidojumi vairākkārtējas saknes gadījumā nav jādara. Bet gan direkti ar funkciju formu (19) pēc ievietošanas dotā sistēmā (1) un koeficientu salīdzināšanas var sastādīt pietiekošā skaitā vienādojumus, kas saista polinomu $P_1(x), \ldots, P_n(x)$ koeficientus.

2. Nehomogenas sistēmas integrācija reducējas uz kvadratūrām, jo atbilstošai homogenai sistēmai ar konstantiem koeficientiem, kā pierādīts, var atrast vienmēr atrisinājumu fundamentālo sistēmu. Arī te praktikā var sameklēt direkti partikulāro integrālu ar metodēm, kas analogas 9. §-fā apskatītām viena nehomogena lineāra diferenciālvienādojuma gadījumā ar speciālu brīvā locekļa formu.

§ 14. Vispārīgas (nelineāras) sistēmas.

1. Normālo sistēmu

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{aligned}\right.$$

ar n nezināmām funkcijām*) $y_1, y_2, \ldots, y_n$ var rakstīt diferenciālā formā

$$(1')\qquad \frac{dx}{1} = \frac{dy_1}{f_1} = \frac{dy_2}{f_2} = \ldots = \frac{dy_n}{f_n}.$$

Ar doto funkciju izteiksmēm

$$f_1 = \frac{Y_1}{X},\ f_2 = \frac{Y_2}{X}, \ldots, f_n = \frac{Y_n}{X},$$

kurās apzīmē

$$X = X(x, y_1, y_2, \ldots, y_n),\ Y_k = Y_k(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)\qquad (k=1,2,\ldots,n),$$

*) Sistēmas ar divām funkcijām apskatītas kursa I daļas 29. §-fā.

dabūto sistēmu pārveido reducētā formā

$$\frac{dx}{X}=\frac{dy_1}{Y_1}=\frac{dy_2}{Y_2}=\ldots=\frac{dy_n}{Y_n}. \tag{2}$$

Galīgi rodas simmetriskā reducētā forma

$$\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\ldots=\frac{dx_{n+1}}{X_{n+1}}, \tag{3}$$

ja ieved mainīgajiem simmetriskus apzīmējumus:

$$x_1=x,\ x_2=y_1,\ldots,x_{n+1}=y_n;\ X_1=X,\ X_2=Y_1,\ldots,X_{n+1}=Y_n.$$

Reducētās formas (2) vai (3) sistēmas ar n vienādojumiem un $n+1$ mainīgajiem ir tanī ziņā izdevīgas, ka par argūmentu var izvēlēties kaut kuŗu vienu mainīgo, bet pārējos mainīgos uzskatīt kā šī mainīgā funkcijas.

2. No sistēmas (1) vai (2) vispārīgā integrāla

$$\left\{\begin{array}{l} y_1 = \varphi_1(x;\ C_1, C_2, \ldots, C_n),\\ y_2 = \varphi_2(x;\ C_1, C_2, \ldots, C_n),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ y_n = \varphi_n(x;\ C_1, C_2, \ldots, C_n) \end{array}\right. \tag{4}$$

ar n patvaļīgām konstantēm $C_1, C_2, \ldots, C_n$ var sastādīt n sakarus

$$\left\{\begin{array}{l} \omega_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = C_1,\\ \omega_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = C_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \omega_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = C_n \end{array}\right. \tag{5}$$

starp argūmentu x un sistēmas atrisinājumiem $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Katrā sakarā ir viena patvaļīga konstante. Šos sakarus sauc par normālās sistēmas (1) vai (2) pirmintegrāliem. Simmetriskās formas (3) sistēmas pirmintegrāls

$$\omega(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = C$$

ir sakars starp mainīgajiem $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, kas der sistēmai (3), un vienu patvaļīgu konstanti C. Ekvivalentā veidā, nelietojot patvaļīgo konstanti, nosacījumu par pirmintegrālu izteic ar

$$d\omega = 0.$$

Pirmintegrālu atrašanai tieši no diferenciālās sistēmas dažos gadījumos var lietot šādas metodes.

I metode. No sistēmas simmetriskās formas (3) kā no vienlīdzīgām attiecībām var sastādīt jaunu sakaru

$$\frac{dx_k}{X_k} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n+1} a_i\, dx_i}{\sum\limits_{i=1}^{n+1} a_i\, X_i} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n+1), \tag{6}$$

lietojot $n+1$ faktorus $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$, kas nav reizē nulles un kas vispārīgi var būt mainīgo $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ funkcijas.

Ja var izvēlēties šos faktorus tā, ka

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i\, X_i = 0,$$

un

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i\, dx_i = d\,\omega$$

ir vienas funkcijas $\omega\,(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ totāls diferenciāls, tad sakars

$$\omega\,(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = C$$

ir sistēmas (3) pirmintegrāls.

Tiešām, no formulas (6) secina

$$d\,\omega = 0, \quad \text{resp.} \quad \omega = const.,$$

jo var pieņemt, ka funkcijas $X_1, X_2, \ldots, X_{n+1}$ nav reizē identiskas nullei.

II metode. Ar divām dažādām faktoru kopām

$$\alpha_i = \alpha_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}), \beta_i = \beta_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \quad (i=1,2,\ldots,n+1)$$

no sistēmas (3) sastāda sakaru

$$\text{(7)} \qquad \frac{\sum\limits_{i=1}^{n+1} \alpha_i \, dx_i}{\sum\limits_{i=1}^{n+1} \alpha_i X_i} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n+1} \beta_i \, dx_i}{\sum\limits_{i=1}^{n+1} \beta_i X_i}.$$

Ja ir ievēroti šādi nosacījumi:

1. $\sum\limits_{i=1}^{n+1} \alpha_i \, dx_i = dP,$ 2. $\sum\limits_{i=1}^{n+1} \beta_i \, dx_i = dQ,$

3. $\sum\limits_{i=1}^{n+1} \alpha_i X_i = \psi \, \varphi_1(P, Q),$ 4. $\sum\limits_{i=1}^{n+1} \beta_i X_i = \psi \, \varphi_2(P, Q)$

ar funkcijām

$$P=P(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}), Q=Q(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}), \psi=\psi(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}),$$

tad sastādītais sakars (7) pēc vienkāršošanas dod pirmās kārtas diferenciālvienādojumu

$$\frac{dP}{\varphi_1(P, Q)} = \frac{dQ}{\varphi_2(P, Q)}$$

attiecībā pret palīga mainīgajiem P un Q. Ja šī diferenciālvienādojuma vispārīgais integrāls ir

$$F(P, Q) = C,$$

tad, ar mainīgo $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ ievešanu, no tā rodas sistēmas (3) pirmintegrāls

$$F[P(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}), Q(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})] = \omega(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = C.$$

3. Normālas sistēmas pirmintegrāliem ir šādas **vispārīgas īpašības.**

1. **Sistēmas (3) pirmintegrāla $\omega = const.$ funkcija $\omega = \omega(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ apmierina lineāro parciālo diferenciālvienādojumu**

$$(8) \qquad X_1 \frac{\partial \omega}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \omega}{\partial x_2} + \ldots + X_{n+1} \frac{\partial \omega}{\partial x_{n+1}} = 0.$$

Ir ērti ievest palīga mainīgo (parametru) t, apzīmējot sistēmā (3)

$$\frac{dx_i}{X_i} = dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1)$$

un uztverot mainīgos x_i kā šī parametra funkcijas

$$x_i = x_i(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Ja no pirmintegrāla $\omega = const.$ ar atvasināšanu pēc t atrastā sakarā

$$\frac{d\omega}{dt} = 0$$

izteic

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial \omega}{\partial x_{n+1}} \cdot \frac{dx_{n+1}}{dt}$$

un ievieto atvasinājumu nozīmes

$$\frac{dx_1}{dt} = X_1, \ \frac{dx_2}{dt} = X_2, \ldots, \ \frac{dx_{n+1}}{dt} = X_{n+1},$$

tad tiešām rodas parciālais diferenciālvienādojums (8) Normālai sistēmai (1) jeb (1′) šis vienādojums top par

$$(8') \qquad \frac{\partial \omega}{\partial x} + f_1 \frac{\partial \omega}{\partial y_1} + \ldots + f_n \frac{\partial \omega}{\partial y_n} = 0.$$

II. **Sistēmai (3) pirmintegrālu ir bezgala lielā skaitā.**

Tiešām, ja $\omega = const.$ ir sistēmas pirmintegrāls, tad ar patvaļīgu funkciju φ sastādītais sakars

$$\varphi(\omega) = const.$$

arī ir pirmintegrāls, jo atvasinājums pēc t ir nulle:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{d\omega} \cdot \frac{d\omega}{dt} = 0.$$

Tamlīdzīgā kārtā konstatē, ka arī no k pirmintegrāliem

$$\omega_1 = C_1, \ \omega_2 = C_2, \ldots, \omega_k = C_k$$

var sastādīt pirmintegrālu

$$\varphi(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k) = const.$$

III. S i s t ē m a s (3) k a t r i $n + 1$ p i r m i n t e g r ā l i

$$\begin{aligned} \omega(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) &= C, \\ \omega_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) &= C_1, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ \omega_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) &= C_n \end{aligned}$$

i r s a v s t a r p ī g i a t k a r ī g i, r e s p. t o f u n k c i j a s $\omega, \omega_1, \ldots, \omega_n$ i r a t k a r ī g a s.

Šīs īpašības konstatēšanai izlieto parciālo diferenciālvienādojumu (8). Tā kā šim vienādojumam der arī funkcijas $\omega_1, \ldots, \omega_n$, tad var dabūt sakarus

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} & X_1 \frac{\partial \omega}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \omega}{\partial x_2} + \ldots + X_{n+1} \frac{\partial \omega}{\partial x_{n+1}} = 0, \\ & X_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} + \ldots + X_{n+1} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_{n+1}} = 0, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & X_1 \frac{\partial \omega_n}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \omega_n}{\partial x_2} + \ldots + X_{n+1} \frac{\partial \omega_n}{\partial x_{n+1}} = 0, \end{aligned} \right.$$

kas veido $n + 1$ homogenu līneāru vienādojumu sistēmu attiecībā pret $n + 1$ lielumiem $X_1, X_2, \ldots, X_{n+1}$. Tā kā pēdējie nav reizē nulles, tad sistēmas (9) determinantam

$$(10)\quad J = \frac{\partial(\omega, \omega_1, \ldots, \omega_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \omega}{\partial x_1} & \frac{\partial \omega}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial \omega}{\partial x_{n+1}} \\ \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial \omega_1}{\partial x_{n+1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \omega_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \omega_n}{\partial x_n} & \ldots & \frac{\partial \omega_n}{\partial x_{n+1}} \end{vmatrix}$$

jābūt vienlīdzīgam nullei. Bet (10) ir funkciju $\omega, \omega_1, \ldots, \omega_n$ Jakobi (*Jacobi*) determinants jeb funkcionāldeterminants. Tādēļ nosacījums $J = 0$ rāda, ka funkcijas ir savstarpīgi atkarīgas. No pieņemtā vispārīgā sakara

$$\Phi\ (\omega, \omega_1, \ldots, \omega_n) = 0$$

var atklāti izteikt

$$\omega = \varphi\ (\omega_1, \ldots, \omega_n).$$

Tā tad sistēmai (3) ir augstākais n neatkarīgu pirmintegrālu.

IV. Ja ir zināmi sistēmas (3) $k < n$ neatkarīgi pirmintegrāli

$$\omega_1\ (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = C_1, \ldots, \omega_k\ (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = C_k,$$

tad sistēmas integrāciju var reducēt uz vienas citas normālas sistēmas integrāciju, kuŗai vienādojumi ir skaitā $n - k$.

Tiešām, no zināmiem pirmintegrāliem tad var izteikt, piem.,

$$x_1 = f_1\ (x_{k+1}, \ldots, x_{n+1}), \ldots, x_k = f_k\ (x_{k+1}, \ldots, x_{n+1}),$$

un ar substitūciju sistēmas (3) pēdējos $n - k$ vienādojumos

$$\frac{dx_{k+1}}{X_{k+1}} = \ldots = \frac{dx_{n+1}}{X_{n+1}}$$

var sastādīt normālu sistēmu

$$\frac{dx_{k+1}}{\overline{X}_{k+1}} = \ldots = \frac{dx_{n+1}}{\overline{X}_{n+1}}$$

ar mainīgiem $x_{k+1}, \ldots, x_{n+1}$ un funkcijām

$$\overline{X}_{k+1}(x_{k+1},\ldots,x_{n+1}) = X_{k+1}(f_1, \ldots, f_k, x_{k+1}, \ldots, x_{n+1}), \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\overline{X}_{n+1}(x_{k+1}, \ldots, x_{n+1}) = X_{n+1}(f_1, \ldots f_k, x_{k+1}, \ldots x_{n+1}).$$

V. Ja ir zināmi sistēmas (3) n neatkarīgi pirmintegrāli

$$\omega_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = C_1, \ldots, \omega_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = C_n,$$

tad to kopa sastāda sistēmas (3) vispārīgo integrālu.

Ja pieņem par argūmentu, piem., x_1, tad n funkcijas $x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}$ no pirmintegrālu sistēmas var izteikt ar formulām

$$\begin{cases} x_2 = \varphi_1(x_1; C_1, \ldots, C_n), \\ x_3 = \varphi_2(x_1; C_1, \ldots, C_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n+1} = \varphi_n(x_1; C_1, \ldots C_n) \end{cases}$$

Šīs formulas sakrīt ar sistēmas (1) vispārīgā integrāla formulām (4), kad apzīmē

$$x_1 = x, \quad x_2 = y_1, \ldots, \quad x_{n+1} = y_n.$$

4. Apskatīsim $n - 1$ vienādojumu sistēmas

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n}$$

speciālu veidu, kad $X_1, X_2, \ldots X_n$ ir **lineāras** n mainīgo $x_1, x_2, \ldots, x_n$ funkcijas. Tāda sistēma

$$(11) \quad \frac{dx_1}{a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + b_1} = \ldots = \frac{dx_n}{a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n + b_n}$$

ir nelīneāra, bet to var reducēt uz ekvivalentu līneāru sistēmu

$$
(12) \quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11} x_1 + \ldots + a_{1n} x_n + b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1} x_1 + \ldots + a_{nn} x_n + b_n \end{cases}
$$

ar konstantiem koeficientiem

$$
a_{ij}, \; b_i \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n),
$$

ievedot palīga mainīgo t ar kopīgās attiecību (11) vērtības pielīdzināšanu dt. Šī līneārā sistēma vispārīgi nav homogena, bet top par tādu, ja $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$.

Sistēmas (11) pirmintegrālus var atrast šādā veidā, modificējot apskatīto pirmo metodi. Ar n faktoriem $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ no sistēmas (11) attiecībām (kam kopīgā vērtība pielīdzināta dt) sastāda sakaru

$$
(13) \quad \frac{\alpha_1 dx_1 + \ldots + \alpha_n dx_n}{x_1 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_{i1} + \ldots + x_n \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_{in} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i} = dt
$$

Te pieprasam, lai $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ būtu konstantes un lai tās apmierinātu sakarus

$$
(14) \qquad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_{i1} = k\alpha_1, \ldots, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_{in} = k\alpha_n
$$

ar proporcionālitātes koeficientu k. Ja šādas konstantes eksistē, tad sakars (13) pārveidojas pirmās kārtas diferenciālvienādojumā

$$
\frac{dP}{kP} = dt \qquad (k \neq 0)
$$

ar palīga mainīgo P, kas ir līneārā funkcija

$$
(15) \qquad P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i \qquad (k \neq 0).
$$

Sastādīto diferenciālvienādojumu viegli integrē ar kvadrātūru:

$$(16)\qquad P = Ce^{kt},$$

kur C — integrācijas konstante.

Ir jādiskutē par ievestiem nosacījumiem (14). Atklātā veidā tie dod homogenu līneāru sistēmu

$$(17)\qquad \begin{cases} (a_{11}-k)\,\alpha_1 + \ldots + a_{n1}\,\alpha_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}\,\alpha_1 + \quad \ldots + (a_{nn}-k)\,\alpha_n = 0 \end{cases}$$

attiecībā pret $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Tā kā šīs konstantes nav reizē nulles, tad sistēmas determinantam jābūt nullei:

$$(18)\qquad \begin{vmatrix} a_{11}-k & \ldots & a_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & \ldots & a_{nn}-k \end{vmatrix} = 0.$$

Rodas k noteikšanai līneārās diferenciālās sistēmas (12) r a k s t u r ī g a i s v i e n ā d o j u m s (§ 13)*).

V i s p ā r ī g a j ā g a d ī j u m ā, kad šī vienādojuma saknes ir dažādas un nav nulles

$$k_1 \neq k_2 \neq \ldots \neq k_n \neq 0,$$

katrai saknei k_m no homogenās sistēmas (17) var atrast koeficientu α_i vērtību α_{im} attiecību (§ 13) un ar formulu (15) sastādīt n polinomus

$$(19)\qquad P_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{im} x_i + \frac{1}{k_m} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{im} b_i \qquad (m = 1, 2, \ldots, n).$$

Ar šiem polinomiem un formulu (16) dabū šinī gadījumā līneārās diferenciālās sistēmas (12) neatkarīgus pirmintegrālus skaitā n:

---

*) Lai (18) pilnīgi atbilstu 13. §-fa vienādojumam (5), ir jāapmaina a_{ij} ar $-a_{ij}$ (apzīmējumi tādā veidā atšķiŗas abos §-fos).

$$(20) \quad \begin{cases} P_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_1 e^{k_1 t}, \\ P_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_2 e^{k_2 t}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_n e^{k_n t}, \end{cases}$$

ar kuŗiem viegli atrast $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kā parametra t un patvaļīgu konstantu $C_1, C_2, \ldots, C_n$ funkcijas.

Lai sistēmai (11) sastādītu pirmintegrālus, ir jāizslēdz t no vienādojumiem (20). Ar kāpināšanu piemērotās pakāpēs un dalīšanu rodas $n - 1$ sakari ($c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ — jaunas konstantes)

$$(21) \quad P_1^{-k_2} \cdot P_2^{k_1} = c_1, \; P_1^{-k_3} \cdot P_3^{k_1} = c_2, \ldots, P_1^{-k_n} \cdot P_n^{k_1} = c_{n-1},$$

kas sastāda prasīto neatkarīgo pirmintegrālu sistēmu.

G a d ī j u m ā, kad raksturīgam vienādojumam (18) ir vairākkārtējas saknes un kad dažādās (ne nulles) saknes ir

$$k_1 \neq k_2 \neq \ldots \neq k_r \neq 0 \qquad (r < n),$$

ar iepriekšējo metodi lineārai sistēmai (12) atrod tikai r, bet sistēmai (11) $r - 1$ neatkarīgus pirmintegrālus. Izlietojot tos, var sistēmas kārtas attiecīgi samazināt par r, resp. $r - 1$ vienībām.

P i e z ī m e. I. Izņēmuma gadījumā, kad $k = 0$ ir raksturīgā vienādojuma (18) sakne, diferenciālvienādojumu (13) tad var direkti integrēt šādā veidā:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = C + t \sum_{i=n}^{n} a_i b_i .$$

II. Ja lineārā diferenciālā sistēma (12) ir homogena, t. i.

$$b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0,$$

tad tās iepriekšējā integrācijas metode ir **Dalambēra** (*D'Alembert*) **metode**, kas divu funkciju gadījumā apskatīta kursa I d. 28. §-fā

5. **Piemērs.** Integrēt divu homogenu vienādojumu sistēmu

$$(22)\quad \frac{dx_1}{a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3}=\frac{dx_2}{a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3}=\frac{dx_3}{a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3}$$

ar trim mainīgiem x_1, x_2, x_3.

Šo sistēmu var reducēt uz trīs līneāru homogenu vienādojumu sistēmu

$$(23)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ \dfrac{dx_3}{dt} = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3, \end{cases}$$

ievedot palīga mainīgo t. Lietotos faktorus α_1, α_2, α_3 nosaka ar homogenu līneāru vienādojumu sistēmu

$$(24)\quad \begin{cases} (a_{11} - k)\alpha_1 + a_{21}\alpha_2 + a_{31}\alpha_3 = 0, \\ a_{12}\alpha_1 + (a_{22} - k)\alpha_2 + a_{32}\alpha_3 = 0, \\ a_{13}\alpha_1 + a_{23}\alpha_2 + (a_{33} - k)\alpha_3 = 0, \end{cases}$$

ja k ir raksturīgā vienādojuma

$$(25)\quad \begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} - k & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - k \end{vmatrix} = 0$$

sakne. Gadījumā, kad šīs saknes ir dažādas $k_1 \neq k_2 \neq k_3$, sistēmas (24) determinanta vismaz viens galvenais minors nav nulle, piem.,

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} - k \end{vmatrix} \neq 0,$$

ja $k = k_1$, vai $k = k_2$, vai $k = k_3$. Tad šīs sistēmas trešais vienādojums ir pārējo divu secinājums.

Pirmos divus sistēmas vienādojumus var apmierināt ar šādām α_1, α_2, α_3 nozīmēm:

$$\alpha_1 = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{22}-k & a_{32} \end{vmatrix},\ \alpha_2 = \begin{vmatrix} a_{31} & a_{11} & k \\ a_{32} & a_{12} & \end{vmatrix},\ \alpha_3 = \begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{21} \\ a_{12} & a_{22}-k \end{vmatrix}.$$

Ar šo determinantu vērtībām, kad $k = k_1, k_2, k_3$ dabū atbilstošās α_1, α_2, α_3 nozīmes

$$\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{31};\quad \alpha_{12}, \alpha_{22}, \alpha_{32};\quad \alpha_{13}, \alpha_{23}, \alpha_{33}.$$

Līneāras diferenciālās sistēmas (23) trīs neatkarīgos pirmintegrālos

$$(26)\qquad P_1(x_1,x_2,x_3)=C_1e^{k_1t},\ P_2(x_1,x_2,x_3)=C_2e^{k_2t},\ P_3(x_1,x_2,x_3)=C_3e^{k_3t}$$

ir lietoti homogenie polinomi

$$(27)\qquad P_m(x_1,x_2,x_3)=\alpha_{1m}x_1+\alpha_{2m}x_2+\alpha_{3m}x_3 \qquad (m=1,2,3).$$

Ar parametra t elimināciju sastāda sistēmas (22) divus neatkarīgos pirmintegrālus

$$(28)\qquad P_1^{-k_2}\,.\,P_2^{k_1}=c_1,\quad P_1^{-k_3}\,.\,P_3^{k_1}=c_2,$$

kuŗos jaunas integrācijas konstantes ir

$$c_1 = C_1^{-k_2}\,.\,C_2^{k_1},\quad c_2 = C_1^{-k_3}\,.\,C_3^{k_1}.$$

Atrastiem rezultātiem var dot šādu ģ e o m e t r i s k u i n t e r p r e t ā c i j u. Ja x_1, x_2, x_3 uzskata par plāksnes punkta homogenām koordinātām, tad līneārā diferenciālā sistēma, resp. tās vispārīgais integrāls (26) noteic plāksnes līnijas ar parametriskiem vienādojumiem

$$x_1 = x_1(t),\quad x_2 = x_2(t),\quad x_3 = x_3(t)$$

Lai sastādītu šo līniju diferenciālvienādojumu Dekarta (nehomogenās) koordinātās

$$x = \frac{x_1}{x_3},\quad y = \frac{x_2}{x_3},$$

ievietojam sistēmā (23) izteiksmes

$$x_1 = x_3 x, \quad x_2 = x_3 y$$

un izslēdzām mainīgos t un x_3. Pēc minētās substitūcijas rodas diferenciālā sistēma

$$\begin{cases} x_3 \dfrac{dx}{dt} + x\dfrac{dx_3}{dt} = (a_{11}x + a_{12}y + a_{13})x_3, \\ x_3 \dfrac{dy}{dt} + y\dfrac{dx_3}{dt} = (a_{21}x + a_{22}y + a_{23})x_3, \\ \dfrac{dx_3}{dt} = (a_{31}x + a_{32}y + a_{33})x_3, \end{cases}$$

kas pēc x_3 eliminācijas top par

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y + a_{13} - x(a_{31}x + a_{32}y + a_{33}), \\ \dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y + a_{23} - y\,a_{31}x + a_{32}y + a_{33}). \end{cases}$$

Ja te izslēdz t, tad rodas pirmās kārtas diferenciālvienādojums

$$\frac{dx}{a_{11}x+a_{12}y+a_{13}-x(a_{31}x+a_{32}y+a_{33})} = \frac{dy}{a_{21}x+a_{22}y+a_{23}-y(a_{31}x+a_{32}y+a_{33})}$$

jeb ar atvasinājuma $y' = \dfrac{dy}{dx}$ ievešanu —

$$(29) \quad (a_{11}x+a_{12}y+a_{13})y'=a_{21}x + a_{22}y+a_{23} +(xy'-y)(a_{31}x+a_{32}y+a_{33}),$$

ko sauc par **Jakobi** (*Jacobi*) **vienādojumu**. Tā integrācija ir reducējama uz sistēmas (22), resp. ekvivalentās lineārās sistēmas (23) integrāciju. Ar sistēmas (23) pirmintegrāliem (26), kad $k_1 \neq k_2 \neq k_3$, var sastādīt homogenu sakaru

$$(30) \qquad P_1^{k_3-k_2} \cdot P_2^{k_1-k_3} \cdot P_3^{k_2-k_1} = C,$$

izslēdzot parametru t un apzīmējot ar

$$C = C_1^{k_3-k_2}\ C_2^{k_1-k_3} \cdot C_3^{k_2-k_1}.$$

Ja sakarā (30) ievieto $x_1 = x_3 x$, $x_2 = x_3 y$, tad dabū Jakobi vienādojuma (29) vispārīgo integrālu

$$F(x, y) = C.$$

P i e z ī m e. Jakobi vienādojumam (29) ir svarīga nozīme homografisko (projektīvo) transformāciju teōrijā*). Šī vienādojuma integrācija, kā redzējām, reducējas uz kvadrātūrām un viena trešās pakāpes algebriskā vienādojuma (25) atrisināšanu. Direkti ar substitūciju

$$x = \xi + \alpha, \quad y = \eta + \beta$$

(piemēroti izvēloties konstantes α un β) Jakobi vienādojumu var reducēt uz speciālu M i n d i n g a v i e n ā d o j u m u

$$\xi\eta' - \eta = f_1(\xi, \eta)\,\eta' + f_2(\xi, \eta) \qquad \left(\eta' = \frac{d\eta}{d\xi}\right),$$

kuŗā $f_1(\xi, \eta)$ un $f_2(\xi, \eta)$ ir homogenas funkcijas. Pēdējo vienādojumu, kā zināms (I d. § 6), var atrisināt ar kvadrātūrām.

Uzdevumi IV.

I n t e g r ē t š ā d a s (1.—8.) s i s t ē m a s.

1. $\begin{cases} y_1' + y_2 - y_3 = 0, \\ y_2' + y_3 - y_1 = 0, \\ y_3' + y_1 - y_2 = 0. \end{cases}$ *Atb.* $y_1 = C_1 \cos x\sqrt{3} + C_2 \sin x\sqrt{3} + C_3$,

$$y_2 = \frac{C_1}{2}(\sqrt{3}\sin x\sqrt{3} - \cos x\sqrt{3}) - $$
$$-\frac{C_2}{2}(\sin x\sqrt{3} + \sqrt{3}\cos x\sqrt{3}) + C_3,$$
$$y_3 = -\frac{C_1}{2}(\cos x\sqrt{3} + \sqrt{3}\sin x\sqrt{3}) -$$
$$-\frac{C_2}{2}(\sin x\sqrt{3} - \sqrt{3}\cos x\sqrt{3}) + C_3.$$

*) Sk. piem., *Serret-Scheffers* — „Differential- und Integralrechnung", Bd. III.

2. $\begin{cases} y_1' = y_2 + y_3, \\ y_2' = y_1 + y_2 - y_3, \\ y_3' = y_2 + y_3 \end{cases}$ *Atb.* $\begin{aligned} y_1 &= 2C_1 + C_2 e^x + C_3 e^x (2 - x), \\ y_2 &= -C_1 - C_3 e^x, \\ y_3 &= C_1 + C_2 e^x + C_3 e^x (2 - x). \end{aligned}$

3. $\begin{cases} y_1' + y_2 + y_3 = 0, \\ y_2' + y_3 + y_1 = 0, \\ y_3' + y_1 + y_2 = 0. \end{cases}$ *Atb.* $\begin{aligned} y &= 2C_1 e^x - C_2 e^x + C_3 e^{-2x}, \\ y_2 &= -C_1 e^x + 2C_2 e^x + C_3 e^{-2x}, \\ y_3 &= -C_1 e^x - C_2 e^x + C_3 e^{-2x}. \end{aligned}$

4. $\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3 + y_1, \\ y_3' + y_1 + y_2 + y_3 = 0. \end{cases}$ *Atb.* $\begin{aligned} y_1 &= C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x}, \\ y_2 &= C_2 - C_3 e^{-x}, \\ y_3 &= -C - C_2 x. \end{aligned}$

5. $\begin{cases} y_1' = y_2 + y_3 + e^x, \\ y_2' = y_3 + y_1 + e^x, \\ y_3' = y_1 + y_2 - e^x. \end{cases}$ *Atb.* $\begin{aligned} y_1 &= C_1 e^{2x} \cdot C_2 e^{-x} \quad C_3 e^{-x}, \\ y_2 &= C_1 e^{2x} + 2C_2 e^{-x} - C_3 e^{-x}, \\ y_3 &= C_1 e^{2x} - C_2 e^{-x} + 2C_3 e^{-x} - e^x. \end{aligned}$

6. $\begin{cases} a_{11} y_1'' + a_{12} y_2'' + b_{11} y_1 + b_{12} y_2 = 0, \\ a_{21} y_1'' + a_{22} y_2'' + b_{21} y_1 + b_{22} y_2 = 0. \end{cases}$

Piezīme. Šo sistēmu ar konstantiem koeficientiem $a_{11}, \ldots, b_{22}$ var integrēt ar Eulera substitūciju, kā 3. §-fā

7. $\begin{cases} y_1'' + y_2'' - y_1 - y_2 = 0, \\ y_2'' - y_2' + y_1 + y_2 = 0. \end{cases}$ *Atb.* $\begin{aligned} y_1 &= C_1 + 3C_2 e^{-x} + (C_3 x + C_4) e^x, \\ y_2 &= -C_1 - C_2 e^{-x} + [C_3(1 - x) - C_4] e^x. \end{aligned}$

8. $\begin{cases} y'' + z = 0, \\ z'' - y = 0. \end{cases}$

$$\textit{Atb.}\ y = \left(C_1 \cos\frac{x}{\sqrt{2}} + C_2 \sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right) e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} + \left(C_3 \cos\frac{x}{\sqrt{2}} + C_4\ \text{in}\frac{x}{\sqrt{2}}\right) e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}},$$

$$z = \left(C_1 \sin\frac{x}{\sqrt{2}} - C_2 \cos\frac{x}{\sqrt{2}}\right) e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} + \left(-C_3 \sin\frac{x}{\sqrt{2}} + C_4 \cos\frac{x}{\sqrt{2}}\right) e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}.$$

9. Noteikt sistēmas

$$\begin{cases} y'' - 6z' + 16y = 0 \\ z'' + 6y' + 16z = 0 \end{cases}$$

to integrālu, kas apmierina sākuma nosacījumus:

$x = 0, \quad y = y_0, \quad z = 0, \quad y' = 0, \quad z' = 0.$

$$Atb. \quad \begin{cases} y = \frac{y_0}{10}(8\cos 2x + 2\cos 8x), \\ z = \frac{y_0}{10}(8\sin 2x - 2\sin 8x), \end{cases}$$

10. Integrēt sistēmu

$$\frac{dx}{2x + 7y + z} = \frac{-dy}{3x + 8y + z} = \frac{dz}{7x + 13y}.$$

$$Atb. \quad \begin{cases} (x + y)^3 = C_1(x + 4y + z), \\ (x - y - z)^3 = C_2(x + 4y + z)^2. \end{cases}$$

11. Integrēt Jakobi vienādojumu:

$(x + 1)(x + y)y' = (x + 1)(y + 1) + y^2.$

$$Atb. \quad \frac{1}{x + y + 1} + \ln\frac{x + y + 1}{x + 1} = C.$$

VIENĀDOJUMI AR PARCIĀLIEM ATVASINĀJUMIEM.

V. Lineārie pirmās kārtas vienādojumi ar parciāliem atvasinājumiem.

§ 15. Vienādojumi ar divu argūmentu funkciju un to sastādīšana.

1. Vispārīgais pirmās kārtas vienādojums ar parciāliem atvasinājumiem jeb parciālais diferenciālvienādojums

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \tag{1}$$

satur nezināmās funkcijas $z = z(x, y)$ tikai pirmās kārtas parciālos atvasinājumus

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Šādus vienādojumus sastāda, izslēdzot vai nu patvaļīgas konstantes, vai patvaļīgas funkcijas.

2. **Patvaļīgu konstantu eliminācija.**

Vienādojums

$$f(x, y, z; \alpha, \beta) = 0 \tag{2}$$

apslēptu

nosaka neattīstītu funkciju $z = z(x, y; \alpha, \beta)$ ar divām patvaļīgām konstantēm (parametriem) α un β. Ģeometriskā interpretācijā tas izteic xyz-koordinātu sistēmā virsu saimi ar diviem parametriem. Šo parametru izslēgšanai sastāda ar (2) atvasināšanu pēc x un y vienādojumus

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

Tad no trīs vienādojumu sistēmas

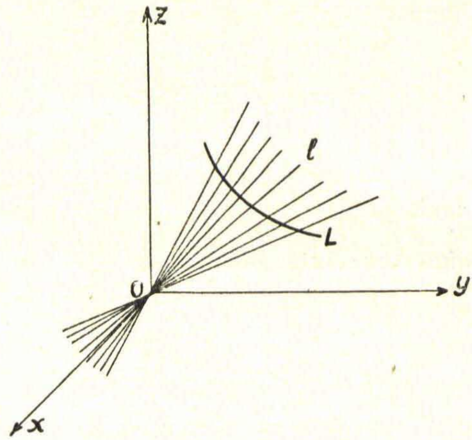
$$\begin{cases} f(x, y, z; \alpha, \beta) = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial z} p = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial z} q = 0 \end{cases}$$

pēc divu lielumu α un β eliminācijas rodas viens pirmās kārtas parciālais diferenciālvienādojums (1).

3. **Patvaļīgu funkciju eliminācija.**

Te apskatīsim šādas ģ e o m e t r i j a s p r o b l ē m a s, kuŗās virsas raksturo ar parciāliem diferenciālvienādojumiem.

I. K ō n i s k ā s v i r s a s. Kōnisko virsu (īsi — kōnu) veido taisne l, kas grozās ap tās vienu punktu O un krusto pastāvīgi doto līniju L. Taisne l ir virsas veidotāja, līnija L — vadītāja un punkts O — virsotne.



Zīm. 3.

Ja O ir koordinātu sistēmas sākuma punkts (zīm. 3), tad veidotājas l vienādojumi ir

$$\begin{cases} y = \alpha x, \\ z = \beta x. \end{cases}$$

Ar patvaļīgām konstantēm α un β (parametriem) šie vienādojumi izteic taišņu kūli (∞^2 taisnes). Lai noteiktu kōnisko virsu, ir jāsastāda viens sakars starp šiem parametriem. Pēdējo atrod, izteicot analitiski to faktu, ka taisnei l ir jākrusto vadītāja L. Atrisinot kopīgi taisnes l un vadītājas L vienādojumus

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = 0, \\ f_2(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

dabū divu vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} f_1(x, \alpha x, \beta x) = 0, \\ f_2(x, \alpha x, \beta x) = 0, \end{cases}$$

no kuŗas var izslēgt vienu mainīgo x. Izslēgšanas rezultātā rodas meklējamais sakars

$$\Phi(\alpha, \beta) = 0 \quad \text{jeb} \quad \beta = \varphi(\alpha)$$

starp parametriem α un β. Ja te izteic $\alpha = \frac{y}{x}$, $\beta = \frac{z}{x}$, tad rodas kōniskās virsas vienādojums galīgā formā

$$(3) \qquad \Phi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = 0 \quad \text{jeb} \quad z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Patvaļīgai vadītājai atbilst patvaļīgās formas kōniskā virsa, resp. patvaļīgā funkcija Φ vai φ. Šādu kōnisku virsu (ar virsotni sākuma punktā O) raksturojumam var sastādīt parciālo diferenciālvienādojumu, izslēdzot patvaļīgo funkciju sekojošā veidā. Ar atvasināšanu pēc x, resp. y rodas sakari

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x}\varphi', \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \varphi',$$

kuŗos φ' apzīmē funkcijas $\varphi(u)$ atvasinājumu pēc palīga mainīgā $u = \frac{y}{x}$. No trīs vienādojumu sistēmas

$$\begin{cases} z = x\varphi, \\ p = \dfrac{\partial z}{\partial x} = \varphi - \dfrac{y}{x}\varphi', \\ q = \dfrac{\partial z}{\partial y} = \varphi' \end{cases}$$

ir iespējams izslēgt divus lielumus φ un φ'; pēc izslēgšanas rodas k o n i s k o v i r s u p a r c i ā l a i s d i f e r e n c i ā l v i e n ā d o j u m s

$$(4) \qquad xp + yq = z,$$

kad virsotne ir koordinātu sākuma punkts. Tādu pat rezultātu atrod, izlietojot eliminācijai neattīstītās formas vienādojumu

$$\Phi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = 0$$

Ja kōna virsotne ir punkts (x_0, y_0, z_0), tad tā vienādojums galīgā formā ir

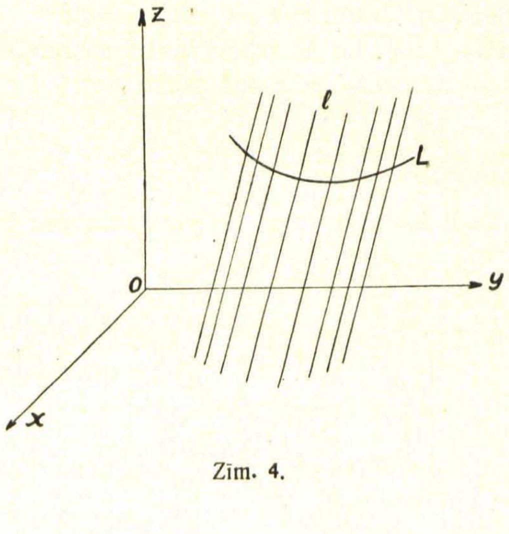
$$(3') \quad \Phi\left(\frac{y-y_0}{x-x_0}, \frac{z-z_0}{x-x_0}\right) = 0 \text{ jeb } z = z_0 + (x-x_0)\varphi\left(\frac{y-y_0}{x-x_0}\right),$$

un tā parciālais diferenciālvienādojums ir

$$(4') \qquad (x-x_0)p + (y-y_0)q = z - z_0.$$

Abi vienādojumi (4) un (4') ir pirmās kārtas un l ī n e ā r i: atvasinājumi p un q ir pirmajā pakāpē.

II. C i l i n d r i s k ā s v i r s a s. Cilindrisko virsu (īsi — cilindru) veido taisne l, kas pārvietojas sev paralēli (translācijā) un krusto pastāvīgi doto līniju L (zīm. 4).



Zīm. 4.

Taisne l ir virsas veidotāja, noteikta ar vienādojumiem

$$\begin{cases} x = az + a, \\ y = bz + \beta, \end{cases}$$

bet L ir vadītāja, ko noteic divas krustojošas virsas

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = 0, \\ f_2(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Tā kā taisne kustas translācijā, tad $a = const$, $b = const.$, bet α un β ir mainīgie parametri. Cilindrisko virsu noteic sakars

$$\Phi(\alpha, \beta) = 0 \text{ jeb } \beta = \varphi(\alpha),$$

kas rodas izslēdzot trīs lielumus x, y, z no četru vienādojumu sistēmas

$$\begin{cases} x = az + \alpha, \\ y = bz + \beta, \\ f_1(x, y, z) = 0, \\ f_2(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Tā kā $\alpha = x - az$, $\beta = y - bz$, tad dabūtais sakars dod cilindrisko virsu vienādojumu galīgā formā

$$(5) \quad \Phi(x - az, y - bz) = 0 \quad \text{jeb} \quad y - bz = \varphi(x - az).$$

Patvaļīgai cilindriskai virsai, ko veido taisne l ar pastāvīgu virzienu, atbilst patvaļīgā funkcija Φ, resp. φ. Lai izslēgtu patvaļīgo funkciju, sastāda, piem., no neattīstītā sakara ar atvasināšanu pēc x nu y jaunus vienādojumus

$$\begin{cases} (1 - ap) \dfrac{\partial \Phi}{\partial u} - bp \dfrac{\partial \Phi}{\partial v} = 0, \\ - aq \dfrac{\partial \Phi}{\partial u} + (1 - bq) \dfrac{\partial \Phi}{\partial v} = 0, \end{cases}$$

kuŗos u un v apzīmē palīga mainīgos:

$$u = x - az, \quad v = y - bz.$$

Tā kā $\frac{\partial \Phi}{\partial u}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial v}$ nav reizē nulles, tad ir jāprasa, lai sastādītās līneārās sistēmas determinants būtu nulle, t. i.

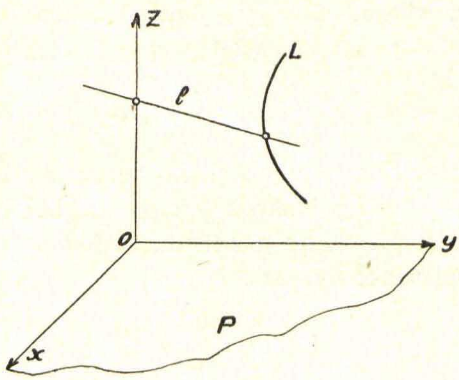
$$\begin{vmatrix} 1 - ap & - bp \\ - aq & 1 - bq \end{vmatrix} = 0.$$

Pēc pārveidojumiem atklātā formā dabū cilindrisko virsu parciālo diferencialvienādojumu

$$ap + bq = 1. \tag{6}$$

III. Konoīdi. Par konoīdu sauc virsu, ko veido taisne l, pārvietodamās paralleli dotai plāksnei P un krustodama pastāvīgi doto taisni un doto līniju L. Kustošo taisni l sauc par veidotāju un līniju L par vadītāju. Konoīds, tāpat kā kōns un cilindrs, pieder t. s. līnijainām virsām, kas veidojas no taisnes kustības. Speciālā gadījumā, kad vadītāja L ir taisne, kas paral·lēla vai krusto doto taisni, rodas plāksne, bet, ja šīs taisnes šķērsojas, tad — hiperboliskais paraboloīds.

Ja izvēlas (zīm. 5) doto taisni par z-asi un doto plāksni P par xy-plāksni,



Zīm. 5.

tad veidotājas l vienādojumi ir

$$\begin{cases} y = \alpha x, \\ z = \beta. \end{cases}$$

Patvaļīgi izvēlētai vadītājai L atbilst, kā iepriekš, patvaļīgs sakars

$$\Phi(\alpha, \beta) = 0 \quad \text{jeb} \quad \beta = \varphi(\alpha)$$

starp parametriem α un β. Ja no veidotājas vienādojumiem izteic $\alpha = \frac{y}{x}$, $\beta = z$ un ievieto šajā sakarā, tad rodas konoīdu vienādojums galīgā formā

$$(7) \qquad \Phi\left(\frac{y}{x}, z\right) = 0 \quad \text{jeb} \quad z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

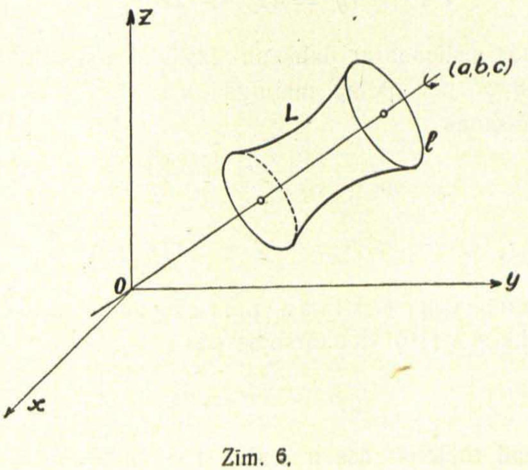
Ar atvasināšanu pēc x, resp. y, atrastie sakari

$$p = -\frac{y}{x^2}\varphi', \quad \text{resp.} \quad q = \frac{1}{x}\varphi'$$

pēc dalīšanas un pārveidojumiem dod konoīdu parciālo diferenciālvienādojumu

$$(8) \qquad xp + yq = 0,$$

IV. Rotācijas virsas. Šādu virsu veido līnija L griežoties ap doto taisni — rotācijas asi (zīm. 6). Tā kā virsas šķēlumi ar plāksnēm, perpendikulārām rotācijas asij, ir riņķu līnijas l, tad rotācijas virsu var iedomāties veidotu no šādām riņķu līnijām, kam mainās radijs, un vadītāja ir dotā līnija L.



Zīm. 6.

Ja rotācijas ass iet caur koordinātu sākuma punktu un tās virziena koeficienti ir a, b, c, tad tās vienādojumi ir

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}.$$

Veidotāja riņķa līnija l atrodas uz sfēras virsas

$$x^2 + y^2 + z^2 = \alpha$$

un uz plāksnes

$$ax + by + cz = \beta,$$

kas ir perpendikulāra rotācijas asij. Patvaļīgi izvēlētai vadītājai L atbilst patvaļīgs sakars

$$\Phi(\alpha, \beta) = 0 \quad \text{jeb} \quad \beta = \varphi(\alpha)$$

starp parametriem α un β. Izteicot šos parametrus ar koordinātām no veidotājas vienādojumiem, dabū rotācijas virsu vienādojumu galīgā formā

(9) $\Phi(x^2+y^2+z^2, ax+by+cz)=0$ jeb $ax+by+cz=\varphi(x^2+y^2+z^2)$.

Patvaļīgās funkcijas, piem. φ, izslēgšanai atvasina (9) pēc x, resp. y:

$$\begin{cases} a + cp = (2x + 2zp)\varphi', \\ b + cq = (2y + 2zq)\varphi'. \end{cases}$$

Ja no dabūtās sistēmas ar dalīšanu izslēdz patvaļīgās funkcijas atvasinājumu φ' pēc palīga mainīgā $u = x^2 + y^2 + z^2$, tad rodas vienādojums

$$\frac{a + cp}{b + cq} = \frac{x + zp}{y + zq}$$

jeb

(10) $$(cy - bz)p + (az - cx)q = bx - ay.$$

Sastādītais **r o t ā c i j a s v i r s u p a r c i ā l a i s d i f e r e n c i ā l v i e n ā d o j u m s** (10) vienkāršojas par

(10′) $$yp - xq = 0$$

gadījumā, kad rotācijas ass ir z-ass, t. i. $a = b = 0$, $c \neq 0$.

V. Virsas, ko veido līniju kongruences. Par līniju kongruenci sauc līniju saimi

$$(11) \qquad \begin{cases} f(x, y, z) = \alpha, \\ g(x, y, z) = \beta \end{cases}$$

ar diviem parametriem α un β. Caur katru telpas punktu iet viena vienīga šīs saimes līnija, ja funkcijas f un g ir vienvērtīgas. Lai no saimes (11) līnijām l izveidotos virsa, vajadzētu vilkt no kaut kuŗas līnijas L (kas nepieder saimei) punktiem saimes līnijas. Ja minētās līnijas L jeb virsas vadītājas vienādojumi ir

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = 0, \\ f_2(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

tad krustošanās gadījumā ar saimes (11) līnijām jāatrisina kopīgi četri vienādojumi

$$\begin{cases} f\,(x, y, z) = \alpha, \\ g\,(x, y, z) = \beta, \\ f_1\,(x, y, z) = 0, \\ f_2\,(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

no kuŗiem var izslēgt trīs mainīgos x, y, z. Pēc izslēgšanas rodas sakars

$$\Phi\,(\alpha, \beta) = 0 \text{ jeb } \beta = \varphi\,(\alpha)$$

starp parametriem α un β. Tā tad, lai no līniju kongruences (11) izveidotu virsu, ir jāsastāda viens sakars starp parametriem, resp. jāizvēlas viena parametra (∞^1) līniju saime no dotās divu parametru (∞^2) saimes. Veidotās virsas vienādojums galīgā formā ir

$$(12) \quad \Phi\,\big(f(x,y,z), g(x,y,z)\big) = 0 \text{ jeb } g\,(x, y, z) = \varphi\big(f\,(x, y, z)\big).$$

Ja vadītāju L izvēlas patvaļīgu, tad arī šīs virsas forma ir patvaļīga, resp. funkcija Φ vai φ ir patvaļīga. Visām šādām virsām var sastādīt parciālo diferenciālvienādojumu, izslēdzot patvaļīgo funkciju sekojošā veidā. Ar (12) atvasināšanu pēc x un y dabū vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial f}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial z} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial \Phi}{\partial g}\left(\dfrac{\partial g}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial z} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x}\right) = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial f}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial z} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y}\right) + \dfrac{\partial \Phi}{\partial g}\left(\dfrac{\partial g}{\partial y} + \dfrac{\partial g}{\partial z} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y}\right) = 0 \end{cases}$$

Tā kā parciālie atvasinājumi $\dfrac{\partial \Phi}{\partial f}$, $\dfrac{\partial \Phi}{\partial g}$ nav reizē nulles, tad dabūtā lineārā sistēma ir iespējama vienīgi tad, ja sistēmas determinants ir nulle, t. i.

$$\begin{vmatrix} f'_x + pf'_z & g'_x + pg'_z \\ f'_y + qf'_z & g'_y + qg'_z \end{vmatrix} = 0.$$

Te ir lietoti parastie apzīmējumi atvasinājumiem

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad f'_x = \frac{\partial f}{\partial x}, \ldots$$

Pēc pārveidojumiem dabū šādu parciālo diferenciālvienādojumu

$$(13) \quad \left(f'_y g'_z - f'_z g'_y\right) p + \left(f'_z g'_x - f'_x g'_z\right) q = f'_x g'_y - f'_y g'_x,$$

ko ar Jakobi funkcionāldeterminantu simboliem, piem..

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)} = f'_x g'_y - f'_y g'_x,$$

raksta formā

$$(14) \quad \frac{\partial(f, g)}{\partial(y, z)} p + \frac{\partial(f, g)}{\partial(z, x)} q = \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)}.$$

Sastādītais vienādojums pieder lineārām pirmās kārtas vienādojumam

$$(15) \quad P(x, y, z)\, p + Q(x, y, z)\, q = R(x, y, z), \; = 0$$

kur funkcijas

$$P(x, y, z) = \frac{\partial(f, g)}{\partial(y, z)}, \quad Q(x, y, z) = \frac{\partial(f, g)}{\partial(z, x)}, \quad R(x, y, z) = \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)}.$$

Šī vienādojuma atsevišķie veidi ir apskatīto virsu parciālie diferenciālvienādojumi (4), (6), (8) un (10). Līneāritāte ir vienīgi attiecībā pret atvasinājumiem p un q, bet ne pret nezināmo funkciju z (pretēji tam, kā līneram parastam diferenciālvienādojumam).

Līniju kongruenci (11), no kuras izveidota virsa, sauc par raksturīgo kongruenci, un šīs kongruences līnijas — par virsas parciālā diferenciālvienādojuma (14) karakteristikām. Ir konstatējams (I d. § 29), ka šo karakteristiku parasto diferenciālvienādojumu sistēmā

$$(16)\qquad \frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}$$

ir tās pašas funkcijas P, Q, R, kas parciālā diferenciālvienādojumā (15). Minētās diferenciālās sistēmas un līneāra parciālā diferenciālvienādojuma sakaru tuvāk noskaidrosim šī vienādojuma integrācijas metodē.

§ 16. Ģeometriskā integrācijas metode. Koši (Cauchy) problēma.

1. Līneārā pirmās kārtas parciālā diferenciālvienādojuma

$$(1)\qquad P(x, y, z)p+Q(x, y, z)q=R(x, y, z) \quad \left(p=\frac{\partial z}{\partial x},\ q=\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

integrāciju var reducēt uz parasto diferenciālvienādojumu sistēmas

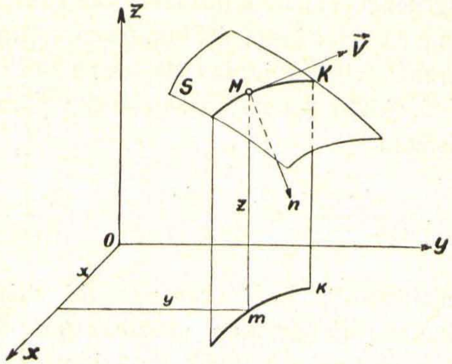
$$(2)\qquad \frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}$$

integrāciju ar šādu ģeometrisko metodi, ko devuši Košī un Monžs (*Monge*). Diferenciālvienādojuma (1) atrisinājumu jeb integrālu

$$(3)\qquad z=f(x, y)$$

ģeometriski interpretē kā integrālvirsu, diferenciālās sistēmas (2) integrāllīnijas sauc par karakteristikām. Minētās redukcijas pamatā ir šādas teōrēmas.

2. **Teorēma.** D i f e r e n c i ā l v i e n ā d o j u m a (1) i n t e g r ā l v i r s a s p u n k t ā v i l k t ā k a r a k t e r i s t i k a (2) a t r o d a s u z š ī s i n t e g r ā l v i r s a s.



Zīm. 7.

P i e r ā d ī j u m a m noteiksim (zīm. 7) karakteristiku K ar tās projekciju k uz xy plāksni. Pieņemot, ka funkcijas $P(x, y, z)$ un $Q(x, y, z)$ nav reizē identiski nulles, piem. $P \neq 0$, ar parasto diferenciālvienādojumu

$$(4) \qquad \frac{dx}{\overline{P}(x, y)} = \frac{dy}{\overline{Q}(x, y)},$$

kuŗā funkcijas

$$\overline{P}(x, y) = P(x, y, f(x, y)), \quad \overline{Q}(x, y) = Q(x, y, f(x, y))$$

sastādāmas ar integrālvirsas vienādojumu (3), var noteikt xy-plāksnē līniju k caur virsas punkta $M(x, y, z)$ projekciju m $(x, y, 0)$. Zinot līnijas k vienādojumu $y = y(x)$ un integrālvirsas vienādojumu (3), var sastādīt integrālvirsas līnijas vienādojumus

$$(5) \qquad \begin{cases} y = y(x) \\ z = f(x, y(x)) = z(x). \end{cases}$$

Konstatēsim, ka l ī n i j a (5) i r k a r a k t e r i s t i k a, k a s i e t c a u r v i r s a s p u n k t u M. Ir jāpārliecinās, ka šī līnija ir diferenciālās sistēmas (2) integrāllīnija. Sastādot atvasinājumu

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

kā saliktai funkcijai, var pārveidot to, izteicot no (4) atvasinājumu

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\overline{Q}(x, y)}{\overline{P}(x, y)}. \qquad (\overline{P} \neq 0).$$

Tādēļ atvasinājums

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\overline{P}\dfrac{\partial f}{\partial x} + \overline{Q}\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\overline{P}}.$$

Tā kā $z = f(x, y)$ ir parciālā diferenciālvienādojuma (1) integrāls, tad šī funkcija identiski apmierina šo vienādojumu, t. i. der identisks sakars

$$\overline{P}\frac{\partial f}{\partial x} + \overline{Q}\frac{\partial f}{\partial y} = \overline{R},$$

kurā funkcija

$$\overline{R} = R(x, y, f(x, y)).$$

Tā tad

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\overline{Q}}{\overline{P}}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{\overline{R}}{\overline{P}}$$

jeb

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R},$$

t. i. integrālvirsas līnija (5) ir karakteristika K.

3. **Apgrieztā teorēma.** Katra virsa, ko veido karakteristikas (2) un kam tangentplāksne nav paralēla z-asij, ir parciālā diferenciālvienādojuma (1) integrālvirsa.

Šīs teorēmas pareizība izriet no parciālā diferenciālvienādojuma (1) un diferenciālās sistēmas sekojošās ģeometriskās interpretācijas. Ja P, Q, R uztver par vektora $\vec{V}$ komponentēm

$$V_x = P(x, y, z), \quad V_y = Q(x, y, z), \quad V_z = R(x, y, z),$$

tad ar šīm funkcijām ir definēts vektoru lauks. Šajā laukā diferenciālās sistēmas (2) integrāllīnijas ir vektoru līnijas, t. i. līnijas, kuŗām tangentes virziens sakrīt ar vektoru virzienu (sk. I d, § 29). Tādēļ šo integrāllīniju jeb karakteristiku veidotai virsai tangentplāksnē atrodas vektors $\vec{V}$. No otras puses, var konstatēt, ka šāda īpašība ir raksturīga parciālā diferenciālvienādojuma (1) integrālvirsai. Par to pārliecinās, konstatējot, ka par integrālvirsu noder tikai tāda virsa, kuŗai vektora $\vec{V}$ projekcija V_n uz virsas normāli n ir nulle.

Kā zināms, vispārīgi virsas

$$F(x, y, z) = 0$$

normāles n virzienu kosinu attiecība ir

$$\cos(n, x) : \cos(n, y) : \cos(n, z) = \frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial z}.$$

Virsai $z = f(x, y)$ vienādojumu var rakstīt formā

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0,$$

un tā tad tai

$$\cos(n, x) : \cos(n, y) : \cos(n, z) = p : q : -1.$$

Ja normāli n orientē tā, ka leņķis (n, z) ir plats, tad izteic

$$\cos(n, x) = \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+1}}, \quad \cos(n, y) = \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+1}}, \quad \cos(n, z) = \frac{-1}{\sqrt{p^2+q^2+1}}.$$

Pēdējā formula norāda, ka galīgām p un q nozīmēm virsas tangentplāksne nav paralēla z-asij.

Izlietojot virzienu kosinu izteiksmes vektora projekcijas formulā

$$V_n = V_x \cos(n, x) + V_y \cos(n, y) + V_z \cos(n, z),$$

atrod

$$V_n = \frac{Pp + Qq - R}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}.$$

No šejienes secina, ka

$$V_n = 0$$

ir tad un tikai tad, ja $z = f(x, y)$ ir parciālā diferenciālvienādojuma (1) integrālvirsa.

Tiešā un apgrieztā teōrēma norāda, ka vienādojuma (1) integrālvirsa ir karakteristiku (2) ģeometriskā vieta.

Karakteristikas ir noteiktas galīgā formā ar sistēmas (2) diviem neatkarīgiem pirmintegrāliem

$$(6) \qquad \omega_1(x, y, z) = C_1, \quad \omega_2(x, y, z) = C_2,$$

kas satur divas patvaļīgas konstantes C_1 un C_2. Uztveŗot C_1 un C_2 kā parametrus, dabū divu parametru līniju saimi jeb līniju kongruenci. No iepriekšējā §-fa ir zināms, ka šīs kongruences līnijas veido ģeometrisko vietu — virsu, ja starp parametriem izvēlas vienu patvaļīgu sakaru

$$\Phi(C_1, C_2) = 0 \text{ jeb } C_2 = \varphi(C_1).$$

Tādēļ karakteristiku (2) ģeometriskas vietas ir bezgala daudz virsas

$$(7) \quad \Phi(\omega_1(x, y, z), \omega_2(x, y, z)) = 0 \text{ jeb } \omega_2(x, y, z) = \varphi(\omega_1(x, y, z))$$

ar vienu patvaļīgu funkciju Φ vai φ. Tā kā šīs ģeometriskās vietas ir arī parciālā diferenciālvienādojuma (1) integrālvirsas, tad tā vispārīgais integrāls ir sakars (7) ar vienu patvaļīgu funkciju Φ vai φ.

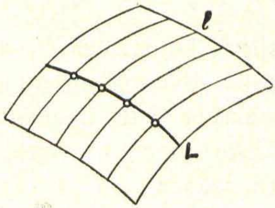
Integrācijas kārtula. Lai integrētu lineāro pirmās kārtas parciālo diferenciālvienādojumu (1), sastāda parasto diferenciālvienādojumu sistēmu (2) un atrod pēdējai divus neatkarīgo's pirmintegrālus (6); ar šo pirmintegrālu funkcijām ω_1, ω_2 sastādītais sakars (7), kas satur vienu patvaļīgu funkciju, ir vienādojuma (1) vispārīgais integrāls.

Piezīme. No diskusijas izriet, ka vispārīgā integrālā neietilpst eventuāli tādi atrisinājumi $z = z(x, y)$, kas reizē dod funkcijām P, Q, R nulles vērtību:

$$P(x, y, z) = Q(x, y, z) = R(x, y, z) = 0.$$

Šādus atrisinājumus sauc par singulāriem.

5. Vispārīgajā integrālā (7) funkcija Φ, resp φ būs noteikta ar t. s. sākuma nosacījumu. Ģeometriskā interpretācijā šis nosacījums izteic, ka meklējamai integrālvirsai jāiet caur doto līniju L. Partikulāro integrālu, kas apmierina sākuma nosacījumu, sauc par Koši (*Cauchy*) integrālu, un tā noteikšana ir parciālā diferenciālvienādojuma Koši problēma. Ģeometriskā integrācijas metode dod norādījumu uz Koši problēmas sekojošo atrisināšanas veidu.



Zīm. 8.

Caur dotās līnijas L punktiem velk karakteriskas l (zīm. 8). Lai rastos integrālvirsa, tad ir jāprasa, ka līnija L nav karakteristika. Analitiski šo konstrukciju izteic šādi. Karakteristiku (6) krustojumu punktiem ar doto līniju

$$(8) \qquad f_1(x, y, z) = 0, \quad f_2(x, y, z) = 0$$

koordinātas (x, y, z) apmierina četru vienādojumu sistēmu

$$(9) \qquad \begin{cases} \omega_1(x, y, z) = C_1, \\ \omega_2(x, y, z) = C_2, \\ f_1(x, y, z) = 0, \\ f_2(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Ja no šīs sistēmas izslēdz trīs lielumus x, y, z, tad rodas gadījumā, kad līnija L nav karakteristika, noteikts sakars

$$\Phi_1(C_1, C_2) = 0 \quad \text{jeb} \quad C_2 = \varphi_1(C_1)$$

starp parametriem C_1, C_2. Meklējamais Koši integrāls tad ir

$$(10) \qquad \Phi_1(\omega_1, \omega_2) = 0 \quad \text{jeb} \quad \omega_2 = \varphi_1(\omega_1).$$

Koši problēma nav iespējama, ja dotā līnija L ir karakteristika.

Speciālā gadījumā, kad dotā līnija L atrodas plāksnē, parallēlā koordinātu plāksnei, piem xy-plāksnei, tās vienādojumi (8) ir

$$y = f(x), \quad z = z_0 = const.,$$

un sistēmu (9) reducē uz divu vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} \omega_1 \left(x, f(x), z_0\right) = C_1, \\ \omega_2 \left(x, f(x), z_0\right) = C_2. \end{cases}$$

Pēc mainīgā x izslēgšanas no pēdējās sistēmas vienādojumiem rodas meklējamais sakars

$$\Phi_1 (C_1, C_2) = 0 \quad \text{jeb} \quad C_2 = \varphi_1 (C_1),$$

ar kuŗu var sastādīt Košī integrālu.

Arī gadījumā, kad līnija L dota ar parametriskiem vienādojumiem

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \qquad (t - \text{parametrs}),$$

sistēma (9) reducējas uz divu vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} \omega_1 \left(x(t), y(t), z(t)\right) = \bar{\omega}_1 (t) = C_1, \\ \omega_2 \left(x(t), y(t), z(t)\right) = \bar{\omega}_2 (t) = C_2, \end{cases}$$

no kuŗas pēc parametra t izslēgšanas rodas vajadzīgais sakars starp C_1 un C_2.

6 Košī problēmas atrisināšanai var lietot otru metodi, kuŗā vispirms no sistēmas (9) izslēdz konstantes C_1 un C_2 Lietojot dotās līnijas L punktu koordinātām citus apzīmējumus ar ξ, η, ζ, izteicam ar sakariem

$$\omega_1 (x, y, z) = \omega_1 (\xi, \eta, \zeta), \quad \omega_2 (x, y, z) = \omega_2 (\xi, \eta, \zeta)$$

nosacījumu, ka karakteristika krusto doto līniju L. No četru vienādojumu sistēmas

$$(11) \qquad \begin{cases} \omega_1 (x, y, z) = \omega_1 (\xi, \eta, \zeta), \\ \omega_2 (x, y, z) = \omega_2 (\xi, \eta, \zeta), \\ f_1 (\xi, \eta, \zeta) = 0, \\ f_2 (\xi, \eta, \zeta) = 0 \end{cases}$$

pēc trīs mainīgo ξ, η, ζ izslēgšanas sastādītais vienādojums

$$F(x, y, z) = 0 \tag{12}$$

attēlo diferenciālvienādojuma (1) integrālvirsu, kas iet caur doto līniju L. Tā tad dabū Koši integrālu.

Sistēmu (11) var vienkāršot speciālā gadījumā, kad dotā līnija L noteikta parametriski

$$\xi = \xi(t), \quad \eta = \eta(t), \quad \zeta = \zeta(t) \qquad (t \text{ — parametrs}).$$

Tad funkcijas

$$\omega_1(\xi(t), \eta(t), \zeta(t)) = \overline{\omega}_1(t), \qquad \omega_2(\xi(t), \eta(t), \zeta(t)) = \overline{\omega}_2(t),$$

un dabū integrālvirsas vienādojumu (12), izslēdzot parametru t no divu vienādojumu sistēmas

$$\begin{cases} \omega_1(x, y, z) = \overline{\omega}_1(t), \\ \omega_2(x, y, z) = \overline{\omega}_2(t). \end{cases}$$

Tamlīdzīgi diskutē gadījumu, kad līnija L ir plāksnē, parallēlā vienai koordinātu plāksnei.

7. Sekojošos **piemēros** jāintegrē dotie lineārie vienādojumi ar parciāliem atvasinājumiem.

I. $$xp + yq = z.$$

Karakteristiku diferenciālvienādojumu sistēma ir

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z};$$

tās neatkarīgie pirmintegrāli

$$\omega_1 = \frac{y}{x} = C_1, \quad \omega_2 = \frac{z}{x} = C_2$$

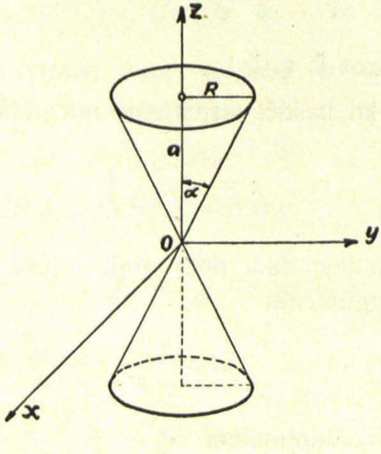
noteic karakteristikas kā taisnes, kas veido taišņu kūli ar virsotni sākuma punktā (0, 0, 0). Parciālā diferenciālvienādojuma vispārīgais integrāls

$$\Phi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = 0 \quad \text{jeb} \quad z = x\,\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

attēlo kōnisko virsu, kam virsotne ir sākuma punkts (0, 0, 0).

Atrisināsim Koši problēmu: noteikt to integrālvirsu (kōnu), kas iet caur riņķa līniju

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2, \\ z = a. \end{cases}$$



Zīm. 9.

Pēc pirmās metodes izslēdz no četriem vienādojumiem

$$\frac{y}{x} = C_1, \quad \frac{z}{x} = C_2, \quad x^2 + y^2 = R^2, \quad z = a$$

trīs mainīgos x, y, z. Rodas sakars

$$a^2 (1 + C_1^2) = R^2 C_2^2,$$

no kuŗa pēc substitūcijām

$$C_1 = \frac{y}{x}, \quad C_2 = \frac{z}{x}$$

un pārveidojumiem dabū vienādojumu

$$x^2 + y^2 = \frac{R^2}{a^2} z^2.$$

Šis vienādojums attēlo rotācijas kōnu, kas iet caur riņķi ar radiju R augstumā a virs koordinātu sākuma punkta. Ja ieved leņķi α starp kōna veiduli un asi, tad vienādojums top par

$$x^2 + y^2 = z^2 \operatorname{tg}^2 \alpha$$

To pašu rezultātu atrod pēc otrās metodes, kad no četru vienādojumu sistēmas

$$\frac{y}{x} = \frac{\eta}{\xi}, \quad \frac{z}{x} = \frac{\zeta}{\xi}, \quad \xi^2 + \eta^2 = R^2, \quad \zeta = a$$

izslēdz trīs mainīgos ξ, η, ζ.

Var arī direkti meklēt vispārīgajā integrālā

$$z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

funkciju φ, kas noteic caur doto riņķi ejošu virsu. Ievedam funkcijai palīga argūmentu

$$u = \frac{y}{x}.$$

Tad no četriem vienādojumiem

$$y = ux, \; z = x\varphi(u), \; x^2 + y^2 = R^2, \; z = a$$

pēc trīs mainīgo x, y, z izslēgšanas rodas sakars

$$R^2\varphi^2 = a^2(1 + u^2),$$

no kuŗa izteic

$$\varphi(u) = \pm \frac{a}{R}\sqrt{1 + u^2}.$$

Ar substitūciju vispārīgajā integrālā un pārveidojumiem dabū iepriekšējo Košī integrālu

$$x^2 + y^2 = \frac{R^2}{a^2}z^2.$$

II. $$ap + bq = 1 \qquad (a, b - \text{konstantes}).$$

No diferenciālās sistēmas

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{1}$$

noteiktas karakteristikas

$$x - az = C_1, \quad y - bz = C_2$$

ir parallēlas taisnes. Diferenciālvienādojuma vispārīgais integrāls

$$\Phi(x - az, y - bz) = 0 \text{ jeb } y - bz = \varphi(x - az)$$

attēlo cilindriskās virsas, kam veidules ir parallēlas minētām taisnēm.

III. $$xp + yq = 0.$$

Karakteristiku diferenciālai sistēmai

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{0}$$

ir neatkarīgi pirmintegrāli

$$\frac{y}{x} = C_1, \quad z = C_2,$$

kas attēlo speciālu taišņu kongruenci (taisnes atrodas plāksnēs, parallēlas xy-plāksnei). Diferenciālvienādojuma vispārīgais integrāls

$$\Phi\left(\frac{y}{x}, z\right) = 0 \text{ jeb } z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

izteic konoīdus.

IV. $$yp - xq = 0.$$

Diferenciālās sistēmas

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} = \frac{dz}{0}$$

neatkarīgie pirmintegrāli

$$x^2 + y^2 = C_1, \quad z = C_2$$

izteic karakteristikas kā riņķu līnijas ar centriem uz z-ass, un šo riņķu plāksnes ir perpendikulāras z-asij. Dotā diferenciālvienādojuma vispārīgais integrāls

$$\Phi(x^2 + y^2, z) = 0 \quad \text{jeb} \quad z = \varphi(x^2 + y^2)$$

attēlo rotācijas virsas, kam rotācijas ass ir z-ass.

Piezīme. 1) Iepriekšējos piemēros atrisināto parciālo diferenciālvienādojumu vispārīgie integrāli attēlo virsas, kam 15. §-fā ir sastādīti atbilstošie diferenciālvienādojumi. Tādā kārtā šie parciālie diferenciālvienādojumi raksturo minētās virsas.

2) Pēdējos divos (III un IV) piemēros dotie diferenciālvienādojumi pieder t. s. homogenam līneāram pirmās kārtas vienādojumam ar parciāliem atvasinājumiem

$$P(x, y)p + Q(x, y)q = 0. \tag{13}$$

Salīdzinot to ar vispārīgo (nehomogeno) vienādojumu (1), jāuzsver tas apstāklis, ka atvasinājumu p un q koeficienti $P(x, y)$ un $Q(x, y)$ ir neatkarīgi no nezināmās funkcijas z. Vienādojuma (13) karakteristiku diferenciālā sistēma

$$\frac{dx}{P(x, y)} = \frac{dy}{Q(x, y)} = \frac{dz}{0}$$

sadalās atsevišķos divos vienādojumos

$$\frac{dx}{P(x, y)} = \frac{dy}{Q(x, y)}, \qquad dz = 0,$$

kam attiecīgie integrāli ir

$$f(x, y) = C_1, \quad z = C_2.$$

Tā tad karakteristikas šinī gadījumā ir līnijas, kas atrodas plāksnēs, paralēlās xy-plāksnei. Homogenā vienādojuma (13) vispārīgo integrālu izteic ar

$$\Phi(z, f(x, y)) = 0 \quad \text{jeb} \quad z = \varphi(f(x, y)).$$

§ 17. Analitiskā integrācijas metode.

1. Šo metodi ir devis Lagranžs (*Lagrange*). Te nehomogeno lineāro vienādojumu ar parciāliem atvasinājumiem

$$(1)\quad P(x,y,z)p+Q(x,y,z)q=R(x,y,z)\quad \left(p=\frac{\partial z}{\partial x},\ q=\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

reducē uz ekvivalentu homogenu vienādojumu, noteicot nezināmo funkciju $z = z(x, y)$ no vispārīgā sakara

$$f(x, y, z) = 0.$$

Atvasinot pēc x, resp. y, dabū formulas

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}p=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}q=0,$$

no kuŗām izteic atvasinājumus

$$p=-\frac{\partial f}{\partial x}:\frac{\partial f}{\partial z},\quad q=-\frac{\partial f}{\partial y}:\frac{\partial f}{\partial z}\qquad \left(\frac{\partial f}{\partial z}\neq 0\right)$$

Ar pēdējo izteiksmju substitūciju vienādojumā (1) un pārveidojumiem rodas homogens lineārs pirmās kārtas vienādojums ar parciāliem atvasinājumiem

$$(2)\quad P(x,y,z)\frac{\partial f}{\partial x}+Q(x,y,z)\frac{\partial f}{\partial y}+R(x,y,z)\frac{\partial f}{\partial z}=0$$

attiecībā pret nezināmo funkciju $f(x, y, z)$. Koeficienti P, Q, R nesatur šo nezināmo funkciju.

Otrādi, dalot vienādojuma (2) abas puses ar $\frac{\partial f}{\partial z}\neq 0$ un ievērojot atvasinājumu p un q izteiksmes, dabū doto vienādojumu (1). Tā tad vienādojumi (1) un (2) ir ekvivalenti. Ar homogeno parciālo diferenciālvienādojumu (2) saistās (I d., § 29) parasto diferenciālvienādojumu sistēmas

$$(3)\quad \frac{dx}{P(x,y,z)}=\frac{dy}{Q(x,y,z)}=\frac{dz}{R(x,y,z)}$$

pirmintegrālu noteikšana. Šīs sistēmas pirmintegrālu funkcijas ir vienādojuma (2) atrisinājumi. Ja

$$(4) \qquad \omega_1(x, y, z) = C_1, \; \omega_2(x, y, z) = C_2$$

ir sistēmas (3) neatkarīgie (dažādie) pirmintegrāli, tad no vienādojuma (2) un

$$(5) \qquad \begin{cases} P\frac{\partial \omega_1}{\partial x} + Q\frac{\partial \omega_1}{\partial y} + R\frac{\partial \omega_1}{\partial z} = 0, \\ P\frac{\partial \omega_2}{\partial x} + Q\frac{\partial \omega_2}{\partial y} + R\frac{\partial \omega_2}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

secina, ka funkcija f ir atkarīga no ω_1 un ω_2, t. i.

$$(6) \qquad f = \Phi(\omega_1, \omega_2).$$

Otrādi, ar patvaļīgu funkciju Φ no ω_1 un ω_2 sastādītā funkcija $f\,(x, y, z)$ der parciālam diferenciālvienadojumam (2). Tiešām, ja izteic atvasinājumus

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial \omega_1} \cdot \frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial \omega_2} \cdot \frac{\partial \omega_2}{\partial x},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial \omega_1} \cdot \frac{\partial \omega_1}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial \omega_2} \cdot \frac{\partial \omega_2}{\partial y},$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial \omega_1} \cdot \frac{\partial \omega_1}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial \omega_2} \cdot \frac{\partial \omega_2}{\partial z},$$

reizina tos attiecīgi ar P, Q, R un saskaita, tad atrod, ievērojot sakarus (5), ka izteiksme vienlīdzības (2) kreisajā pusē ir identiski nulle.

Tā tad homogenā vienādojuma (2) vispārīgais integrāls ir sakars (6), kas satur vienu patvaļīgu funkciju Φ. Nehomogenā vienādojuma (1) vispārīgais integrāls ir sakars

$$(7) \qquad \Phi\big(\omega_1\,(x, y, z), \omega_2\,(x, y, z)\big) = 0 \text{ jeb } \omega_2\,(x\; y, z) = \varphi\,\big(\omega_1(x,y,z)\big),$$

no kuŗa neatklātā formā definē funkciju $z = z\,(x, y)$. Līneārā parciālā diferenciālvienādojuma integrācijas kārtula ir tāda pat kā iepriekšējā 16. §-fā

2. **Piemērs.** Integrēt vienādojumu

(8) $$xp + yq = mz \qquad (m \text{ — konstante}).$$

Sastāda Lagranža diferenciālo sistēmu

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{mz},$$

un atrod tās neatkarīgos pirmintegrālus

$$\omega_1 = \frac{y}{x} = C_1, \quad \omega_2 = \frac{z}{x^m} = C_2.$$

Vienādojuma (8) vispārīgais integrāls

(9) $$z = x^m \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

ir homogena m. pakāpes (dimensijas) funkcija. Tiešām, ja x, resp. y vietā izvēlas tx, resp. ty, tad funkcija

$$F(x, y) = x^m \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

top par $t^m F(x, y)$. Pēdējais nosacījums atbilst homogenās funkcijas definīcijai

Kā zināms, Eulera teōrēma par homogenām funkcijām (I d., § 10) izteic, ka m. pakāpes homogenā funkcija $F(x, y)$ apmierina sakaru

$$x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} = mF,$$

kas atbilst diferenciālvienādojumam (8). Pēdējā vienādojuma integrācija rāda, ka pareiza ir apgrieztā Eulera teōrēma. Tā tad m. pakāpes homogenās funkcijas raksturo parciālais diferenciālvienādojums (8).

Vienādojuma (8) speciāli veidi ir konoīdu vienādojums ($m = 0$) un kōnisko virsu vienādojums ($m = 1$), kas apskatīti 16. § fā

§ 18. Vispārinājums ar n argūmentu funkciju.

1. Lagranža analitisko integracijas metodi var vispārināt vispārīgam līneāram parciālam diferenciālvienādojumam

$$(1)\quad P_1(x_1,x_2,\ldots,x_n;z)p_1+P_2(x_1,x_2,\ldots,x_n;z)p_2+\ldots+P_n(x_1,x_2,\ldots,x_n;z)p_n= \\ = R(x_1,x_2,\ldots,x_n;z)$$

ar n argūmentu nezināmo funkciju $z = z(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Vienādojumā (1) apzīmēti parciālie atvasinājumi ar

$$p_1 = \frac{\partial z}{\partial x_1},\quad p_2 = \frac{\partial z}{\partial x_2},\ \ldots,\ p_n = \frac{\partial z}{\partial x_n},$$

un dotās $n+1$ argūmentu funkcijas $P_1, P_2, \ldots, P_n, R$ satur arī nezināmo fnukciju z.

Pēc Lagranža metodes funkciju $z = z(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nosaka no neatklāta sakara

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n; z) = 0,$$

un sastāda sekojošā veidā funkcijai f homogenu parciālu diferenciālvienādojumu. Ar parciālu atvasināšanu dabū formulas

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial z}p_1 = 0,\quad \frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial z}p_2 = 0,\ \ldots,\quad \frac{\partial f}{\partial x_n} + \frac{\partial f}{\partial z}p_n = 0,$$

no kuŗām izteic $\left(\frac{\partial f}{\partial z} \neq 0\right)$ atvasinājumus

$$p_1 = -\frac{\partial f}{\partial x_1} : \frac{\partial f}{\partial z},\quad p_2 = -\frac{\partial f}{\partial x_2} : \frac{\partial f}{\partial z},\ \ldots,\ p_n = -\frac{\partial f}{\partial x_n} : \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Ievietojot šīs izteiksmes vienādojumā (1) un pārveidojot, dabū homogenu līneāru vienādojumu ar parciāliem atvasinājumiem

$$(2)\quad P_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + P_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + P_n\frac{\partial f}{\partial x_n} + R\frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

kas ir ekvivalents nehomogenam vienādojumam (1). Vienādojuma (2) integrāciju var savukārt reducēt uz Lagranža (karakteristiku) diferenciālās sistēmas

$$(3) \quad \frac{dx_1}{P_1(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ z)} = \frac{dx_2}{P_2(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ z)} =$$
$$\ldots = \frac{dx_n}{P_n(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ z)} = \frac{dz}{R(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ z)}$$

integrāciju. Šīs sistēmas pirmintegrālu funkcijas der (sk. § 14) homogenam vienādojumam (2). Sistēmai (3) ir n neatkarīgi pirmintegrāli

$$(4) \quad \omega_1(x_1, x_2, \ldots, x_n; z) = C_1, \omega_2(x_1, x_2, \ldots, x_n; z) = C_2, \ldots, \omega_n(x_1, x_2, \ldots, x_n; z) = C_n,$$

un katri $n+1$ pirmintegrāli ir atkarīgi. Tādēļ pastāv identisks sakars

$$(5) \quad f = \Phi(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n).$$

Otrādi, viegli pārbaudīt, ka ar patvaļīgu funkcionāloperatoru Φ sastādītā funkcija (5) der homogenam vienādojumam (2). Tā tad ar vienu patvaļīgu funkciju Φ izteic šī vienādojuma vispārīgo integrālu (5). Nehomogenā vienādojuma (1) vispārīgais integrāls

$$(6) \quad \Phi(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) = 0 \text{ jeb } \omega_n = \varphi(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1})$$

neatklātā formā definē atrisinājumu $z = z(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

2. Der **vispārīgā integrācijas kārtula**: lai integrētu vispārīgo līneāro pirmās kārtas vienādojumu (1) ar parciāliem atvasinājumiem, sastāda parasto diferenciālvienādojumu (Lagranža) sistēmu (3) un atrod pēdējai pilnīgu pirmintegrālu sistēmu (4); ar šo pirmintegrālu funkcijām $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ sastādītais sakars (6), kas satur vienu patvaļīgu funkciju Φ vai φ, ir vienādojuma (1) vispārīgais integrāls.

Uzdevumi V.

1. Sastādīt diferenciālvienādojumu, izslēdzot patvaļīgas konstantes α un β no vienādojumiem:

a) $z = \alpha x + \beta y + \alpha\beta$. *Atb* $z = px + qy + pq$.
b) $z = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2$. *Atb.* $4z = p^2 + q^2$.
c) $z = (x + \alpha)(y + \beta)$. *Atb.* $z = pq$.
d) $z = \alpha(x + y) + \beta$. *Atb* $p - q = 0$

2. Sastādīt diferenciālvienādojumu, izslēdzot patvaļīgo funkciju φ no vienādojumiem:

a) $z = e^{ky}\varphi(x - y)$. *Atb.* $p + q = kz$ (k — konstante)

b) $z = y^2 + 2\varphi\left(\frac{1}{x} + \ln y\right)$. *Atb.* $x^2 p + yq = 2y^2$.

3. Sastādīt diferenciālvienādojumu sfērām ar doto radiju R ja to centri atrodas vienā plāksnē.
Atb. $z^2(p^2+q^2+1)=R^2$ (minētā plāksne ir xy - plāksne).

4. Sastādīt diferenciālvienādojumu virsām, kas ortogonālas ar dotās viena parametra saimes $f(x, y, z) = C$ virsām.
Atb. $\frac{\partial f}{\partial x}p + \frac{\partial f}{\partial y}q = \frac{\partial f}{\partial z}$.

5. Noteikt ortogonālas virsas ar rotācijas paraboloīdiem
$$x^2 + y^2 = Cz.$$
Atb. $x^2 + y^2 + 2z^2 = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

6. Noteikt ortogonālas virsas ar sfērām, kas pieskaŗas dotai plāksnei dotajā punktā.
Atb $x^2 + y^2 + z^2 = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, ja dotā plāksne ir xy-plāksne un dotais punkts — sākuma punkts.

7. Noteikt virsas, kam tangentplāksnes iet pastāvīgi caur vienu punktu. *Atb.* Kōniskās virsas.

8. Noteikt virsas, kam tangentplāksnes ir parallēlas vienai taisnei.
Atb. Cilindriskās virsas.

9. Noteikt virsas, kam normāles krusto vienu taisni.
Atb. Rotācijas virsas.

10. Noteikt diferenciālvienādojuma $p + q = 1$ integrālvirsu, kas iet caur ellīpsi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = 0.$$

Atb. $\frac{(x - z)^2}{a^2} + \frac{(y - z)^2}{b^2} = 1.$

11. Noteikt diferenciālvienādojuma $yp - xq = 0$ integrālvirsu, kas iet caur sekojošo līniju:

α) ellīpsi: $x = a, \ \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$

Atb. $\frac{x^2 + y^2 - a^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$

β) hiperbolu: $x = a, \ \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$

Atb. $\frac{x^2 + y^2 - a^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$

γ) parabolu: $x = a, \ y^2 = 2pz.$ *Atb.* $x^2 + y^2 - a^2 = 2pz.$

12. Ar tādām pat kā 11. uzdevumā dotām līnijām noteikt diferenciālvienādojuma $px + qy = 0$ integrālvirsu.

Atb. α) $\frac{a^2 y^2}{b^2} + \frac{x^2 z^2}{c^2} - x^2 = 0,$

β) $\frac{a^2 y^2}{b^2} - \frac{x^2 z^2}{c^2} - x^2 = 0,$ $\quad \gamma$) $z = \frac{a^2 y^2}{2px^2}.$

13. Integrēt vienādojumu

$$2yzp - xzq + xy = 0,$$

un noteikt to integrālvirsu, kas iet caur riņķa līniju

$$x^2 + y^2 - y = 0, \quad z = 0.$$

Atb. $x^2 + 2y^2 = \varphi(y^2 - z^2); \ (x^2 + y^2 + z^2)^2 = y^2 - z^2.$

Integrēt sekojošos lineāros parciālos diferenciālvienādojumus.

14. $(cy - bz)p + (az - cx)q = bx - ay$ $\quad (a, b, c$ — konstantes)

Atb. $ax + by + cz = \varphi(x^2 + y^2 + z^2).$

15. $x^2 p + y^2 q = z^2.$ *Atb.* $z = \frac{x}{1 - x\varphi\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)}.$

16. $y^2 p + xyq = xz.$ *Atb.* $z = y\varphi(y^2 - x^2).$

17. $p \sin x + q \cos x = 1$. *Atb.* $z = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \varphi(y - \ln \sin x)$.

18. $x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 = x_1 x_2 x_3$.

Atb. $z = \frac{1}{3} x_1 x_2 x_3 + \varphi\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}\right)$.

19. $p_1 + p_2 + p_3 = x_1 x_2 x_3$.

Atb. $z = \frac{x_1^2 x_2 x_3}{2} - \frac{x_1^3 (x_2 + x_3)}{6} + \frac{x_1^4}{12} + \varphi(x_2 - x_1, x_3 - x_1)$.

20. $x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + x_3^2 p_3 = z$.

Atb. $z = e^{-\frac{1}{x_1}} \cdot \varphi\left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_3} - \frac{1}{x_1}\right)$.

21. $x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n = mz$ (m — konstante).

Atb. Homogenā m. pakāpes (dimensijas) funkcija ar n argūmentiem $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

VI. Totālie diferenciālvienādojumi.

§ 19. Vienādojumu veidi. Integrābilitātes nosacījums.

1. Vienādojumu, kas saista mainīgos un to diferenciālus, sauc par t o t ā l u d i f e r e n c i ā l v i e n ā d o j u m u.

Par **Pfaffa vienādojumu** sauc totālo diferenciālvienādojumu

$$P_1(x_1,x_2,..,x_n)dx_1+P_2(x_1,x_2,..,x_n)dx_2+...+P_n(x_1x_{,2},...,x_n)dx_n=0,$$

kas satur l ī n e ā r ā sakarībā n mainīgo pirmos diferenciālus dx_1, dx_2, . . ., dx_n un koeficientos P_1, P_2, . . ., P_n dotās šo mainīgo funkcijas. Te apskatīsim Pfaffa vienādojumu ar mainīgajiem skaitā $n = 3$, lietojot parastos apzīmējumus:

$$(1) \quad P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz = 0$$

2. Šāda veida vienādojums ir jāatrisina sekojošā ģeometrijas problēmā. Kā zināms (I d., § 29.) viena parametra virsu saimei

$$f(x, y, z) = C \qquad (C - \text{parametrs})$$

vienmēr var noteikt ortogonālās trajektorijas, kā speciālu līniju kongruenci. Konstatēsim, ka tā nav a p g r i e z t ā p r o b l ē m ā, kur dotai līniju kongruencei

$$(2) \quad \frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}$$

jāatrod ortogonālās virsas $z = z(x, y)$ Tā kā virsas normāles n virzienu kosinu attiecība ir

$$\cos(n, x) : \cos(n, y) : \cos(n, z) = \frac{\partial z}{\partial x} : \frac{\partial z}{\partial y} : (-1)$$

un kongruences (2) līnijas tangentes virziena kosinu attiecība

$$\frac{dx}{ds} : \frac{dy}{ds} : \frac{dz}{ds} = P : Q : R,$$

tad līnijas un virsas ortogonālitātes gadījumā jābūt

$$\frac{\partial z}{\partial x} : \frac{\partial z}{\partial y} : (-1) = P : Q : R$$

jeb

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{P}{R}, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{Q}{R}. \end{cases}$$

Ievedot apzīmējumus

$$A(x, y, z) = -\frac{P(x, y, z)}{R(x, y, z)}, \quad B(x, y, z) = -\frac{Q(x, y, z)}{R(x, y, z)},$$

sastādīto parciālo diferenciālvienādojumu sistēmu (3) izteic ar

$$(4) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = A(x, y, z), \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = B(x, y, z). \end{cases}$$

Izlietojot totālā diferenciāla formulu

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy,$$

sistēmu (3), resp. (4) var reducēt uz ekvivalentu totālu diferenciālvienādojumu (1), resp.

$$(5) \qquad dz = A(x, y, z)\, dx + B(x, y, z)\, dy$$

Tā kā sistēmā (3), resp. (4) ir vairāk vienādojumu nekā nezināmo, tad ar kaut kādām dotajām funkcijām šīs sistēmas vienādojumi vispārīgi nav saderīgi. Līdz ar to uzstādītā ģeometrijas problēma vispārīgi nav iespējama. Lai šī problēma vai sistēma būtu iespējama, dotām funkcijām jāapmierina t. s. integrābilitātes nosacījums.

3. Pēdējo sastāda no sakarības formulas

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x},$$

izteicot diferenciālvienādojuma (5) gadījumā no sistēmas (4) vienādojumiem atvasinājumus

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial A}{\partial y} + B \cdot \frac{\partial A}{\partial z},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial B}{\partial x} + A \cdot \frac{\partial B}{\partial z}.$$

Ar substitūciju minētajā sakarības formulā un pārveidojumu dabū meklējamo integrābilitātes nosacījumu

$$(6) \qquad \frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x} + B \frac{\partial A}{\partial z} - A \frac{\partial B}{\partial z} = 0,$$

kas ir nepieciešams sistēmas (4), resp. diferenciālvienādojuma (5) atrisinājuma eksistencei.

Jautājumā, vai nosacījums (6) ir arī pietiekošs, apskatīsim šādas iespējas.

I. Sakars (6) nav identitāte, bet vienādojums

$$\Phi\ (x, y, z) = 0,$$

no kuŗa atrastā funkcija $z = z\ (x, y)$ neapmierina doto sistēmu (4), resp. totālo diferenciālvienādojumu (5). Šādu gadījumu, resp. diferenciālvienādojumu sauc par neintegrējamu.

Piemērs.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = xy, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = zx, \quad \text{resp. } dz = x\ (ydx + zdy).$$

Te $A = xy$, $B = zx$, un nosacījums (6) dod vienādojumu

$$x - z - x^2 y = 0,$$

no kuŗa izteic

$$z = x - x^2 y.$$

Tā kā šai funkcijai atvasinājumi ir

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 - 2xy, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\ x^2,$$

kas neatbilst dotās sistēmas vienādojumiem, tad dotā sistēma, resp. totālais diferenciālvienādojums nav integrējami.

II. Sakars (6) nav identitāte, bet vienādojums $\Phi(x, y, z) = 0$, kuŗa atrisinājums der arī dotai sistēmai, resp. diferenciālvienādojumam. Šinī gadījumā ir t. s. nepilnīgā integrābilitāte.

Piemērs.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = zx, \quad \text{resp. } dz = z\,(dx + x dy).$$

Tā kā te $A = z$, $B = zx$ un nosacījums (6) dod vienādojumu $z = 0$ virsai, kas der diferenciālvienādojumiem, tad ir nepilnīgās integrābilitātes gadījums.

III. Sakars (6) ir identitāte: $\Phi(x, y, z) \equiv 0$. Konstatēsim, ka tad eksistē viena parametra virsu saime, kas attēlo diferenciālvienādojuma vispārīgo integrālu. Šai gadījumā ir t. s. pilnīgā integrābilitāte.

Piemērs.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = zx, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = zy, \quad \text{resp. } dz = z\,(xdx + ydy).$$

Te ar funkcijām $A = zx$, $B = zy$ pārbauda, ka nosacījums (6) ir identiski izpildīts. Diferenciālvienādojumu viegli atrisināt, izdarot mainīgo separāciju

$$\frac{dz}{z} = xdx + ydy$$

un kvadrātūru:

$$z = Ce^{\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

Var atrisināt ekvivalento sistēmu arī šādā veidā. No sistēmas pirmā vienādojuma

$$\frac{\partial z}{\partial x} = zx,$$

kur y uzskata par parametru, ar kvadrātūru dabū formulu

$$\ln z = \frac{x^2}{2} + \varphi(y).$$

Nezināmās funkcijas $\varphi(y)$ noteikšanai ievēro sistēmas otro vienādojumu

$$\frac{\partial z}{\partial y} = zy,$$

no kuŗa pēc substitūcijas dabū

$$\frac{d\varphi}{dy} = y.$$

Tā tad

$$\varphi(y) = \frac{y^2}{2} + \ln C,$$

un no formulas

$$\ln z = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \ln C$$

dabū iepriekš atrasto integrālvirsu saimes vienādojumu.

4. Pierādīsim vispārīgā gadījumā, kad integrābilitātes nosacījums (6) ir identiski izpildīts, sistēmas (4), resp. diferenciālvienādojuma (5) atrisinājuma eksistenci, t. i. ka šinī gadījumā nosacījums (6) ir arī pietiekošs. Pierādījuma gaita dod arī faktiskās integrācijas metodi, kas lietota iepriekšējā piemērā.

Uzskatot sistēmas (4), piem., pirmā vienādojumā

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A(x, y, z)$$

mainīgo y par parametru, integrē šo vienādojumu kā pirmās kārtas parasto diferenciālvienādojumu. Tā vispārīgā integrālā

$$z = f(x, y, \varphi(y)) \tag{7}$$

patvaļīgā konstante ir uztveŗama kā parametra y funkcija $\varphi(y)$. Šīs funkcijas noteikšanai ir jāievēro sistēmas (4) otrs vienādojums

$$\frac{\partial z}{\partial y} = B(x, y, z),$$

kas pēc substitūcijas top par

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dy} = B(x, y, f(x, y, \varphi)).$$

Tā kā $\frac{\partial f}{\partial \varphi} \neq 0$, tad atklāti var izteikt atvasinājumu

$$(8) \quad \frac{d\varphi}{dy} = \left[B(x, y, f(x, y, \varphi)) - \frac{\partial f}{\partial y}\right] : \frac{\partial f}{\partial \varphi}.$$

Konstatēsim, ka sakars (8) ir iespējams, t. i. ka formulas labās puses funkcija

$$(9) \quad F(x, y, \varphi) = \left[B(x, y, f(x, y, \varphi)) - \frac{\partial f}{\partial y}\right] : \frac{\partial f}{\partial \varphi}$$

faktiski ir no x neatkarīga, ja ir izpildīts identiski integrābilitātes nosacījums (6). Ir jāpārbauda, ka šīs funkcijas parciālais atvasinājums pēc x ir nulle:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

So atvasinājumu izteic, izlietojot atvasināšanas likumus, atklātā veidā sekojoši:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \left[\left(\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial f} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi} - \left(B - \frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi \partial x}\right] : \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)^2.$$

Tā kā funkcija (7) ir sistēmas (4) pirmā vienādojuma atrisinājums, tad der identiskā vienlīdzība

$$\frac{\partial f}{\partial x} = A(x, y, f),$$

no kuŗas ar atvasināšanu pēc y, resp. φ sastāda otros atvasinājumus

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial f} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi \partial x} = \frac{\partial A}{\partial f} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi}$$

Pēc šīm formulām izslēdzot otros atvasinājumus un pārveidojot, dabū funkcijas (9) atvasinājumu pēc x formā

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \left[\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial f} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} - B\frac{\partial A}{\partial f}\right] : \frac{\partial f}{\partial \varphi}.$$

Tā kā $\frac{\partial f}{\partial x} = A$ un pēc hipotēzes nosacījums (6) ar $z = f$ ir identiski izpildīts, tad identiski

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0,$$

t. i. F ir tikai y un φ funkcija

$$F = F_0\,(y, \varphi).$$

Tā tad funkciju $\varphi\,(y)$ ar minēto nosacījumu var atrast no viena pirmās kārtas parastā diferenciālvienādojuma

$$\frac{d\varphi}{dy} = F_0\,(y, \varphi).$$

Tā vispārīgais integrāls

$$\varphi = \psi\,(y;\, C)$$

satur vienu patvaļīgu konstanti C. Ar substitūciju formulā (7) atrod dotās sistēmas (4), resp. diferenciālvienādojuma (5) vispārīgo integrālu

$$z = f\big(x, y, \psi\,(y;\, C)\big),$$

kas ģeometriskā interpretācijā attēlo viena parametra virsu saimi. Atklātā veidā attiecībā pret parametru C šīs saimes vienādojumu raksta

$$G\,(x, y, z) = C. \tag{10}$$

Tā tad tikai pilnīgās integrābilitātes gadījumā eksistē dotai līniju kongruencei ortogonālās virsas, kas veido viena parametra saimi. Kā redzējām, šinī gadījumā parciālo diferenciālvienādojumu sistēmas (4) vai tai ekvivalentā totālā diferenciālvienādojuma (5) integrācija ir iespējama un reducējama uz divu parasto diferenciālvienādojumu integrāciju.

5. Citos gadījumos, kad ir nepilnīgā integrābilitāte vai totālais (Pfaffa) diferenciālvienādojums neintegrējams, eksistē viena parametra integrāllīniju saime uz patvaļīgi izvēlētas virsas

$$\varphi(x, y, z) = 0.$$

Izlietojot šīs virsas vienādojumu un sastādot pilnīgo diferenciālu

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = 0,$$

totālā diferenciālvienādojumā (1), resp. (5) var izslēgt vienu mainīgo, piem., z. Izslēgšanas rezultātā rodas totāls diferenciālvienādojums

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0$$

ar diviem mainīgiem x, y. Pēdējais ir ekvivalents pirmās kārtas parastajam diferenciālvienādojumam

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)},$$

ja y uzskata par x funkciju. Atrodot tā vispārīgo integrālu

$$F(x, y; C) = 0$$

un ņemot to kopā ar virsas vienādojumu, sastāda meklējamo līniju saimes vienādojumus

$$(11) \qquad F(x, y; C) = 0, \quad \varphi(x, y, z) = 0.$$

Piemērs.

$$dz = x\,(y\, dx + z\, dy).$$

Atradām šī §-fa sākumā, ka šis totālais diferenciālvienādojums ir neintegrējams. Bet, piem., uz plāksnes

$$z = x$$

eksistē bezgala daudz (∞^1) integrāllīniju. Tiešām, izslēdzot z, dabū totālo diferenciālvienādojumu

$$dx = x\,(y\,dx + x\,dy) \quad \text{jeb} \quad \frac{dx}{x} = d\,(x\,y) \qquad (x \neq 0),$$

ko viegli integrē ar kvadrātūru

$$C + \ln x = xy.$$

Integrāllīniju vienādojumi ir

$$\begin{cases} y = \dfrac{C + \ln x}{x} \\ z = x. \end{cases} \qquad (x \neq 0),$$

§ 20. Simmetriskās formas Pfaffa vienādojums.

1. Pfaffa vienādojuma simmetrisko formu

$$(1) \quad P\,(x, y, z)\,dx + Q\,(x, y, z)\,dy + R\,(x, y, z)\,dz = 0$$

reducē uz nesimmetrisko formu

$$dz = A\,(x, y, z)\,dx + B\,(x, y, z)\,dy$$

ar funkcijām

$$A = -\frac{P}{R}, \quad B = -\frac{Q}{R}$$

gadījumā, ja $R \neq 0$. Iepriekšējā §-fā atrasto integrābilitātes nosacījumu

$$\frac{\partial A}{\partial y} + B\,\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial B}{\partial x} + A\,\frac{\partial B}{\partial z}$$

transformē simmetriskai formai, ievērojot funkciju $A\,(x, y, z)$, $B\,(x, y, z)$ izteiksmes un to atvasinājumus:

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{P\,\dfrac{\partial R}{\partial y} - R\,\dfrac{\partial P}{\partial y}}{R^2}, \quad \frac{\partial A}{\partial z} = \frac{P\,\dfrac{\partial R}{\partial z} - R\,\dfrac{\partial P}{\partial z}}{R^2},$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{Q\frac{\partial R}{\partial x} - R\frac{\partial Q}{\partial x}}{R^2}, \quad \frac{\partial B}{\partial z} = \frac{Q\frac{\partial R}{\partial z} - R\frac{\partial Q}{\partial z}}{R^2}.$$

Pēc substitūcijas un pārveidojumiem dabū integrābilitātes nosacījumu formā

$$(2) \quad P\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + Q\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + R\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0.$$

2. Šo nosacījumu interpretē vektoriāli sekojošā veidā. Ar funkcijām P, Q, R ir definēts vektoru lauks $\vec{V}\,(P, Q, R)$, ja

$$V_x = P\,(x, y, z), \quad V_y = Q\,(x, y, z), \quad V_z = R\,(x, y, z).$$

Lauka vektoram $\vec{V}$ var piekārtot vienu citu vektoru $\vec{a}$ ar komponentēm:

$$a_x = \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z},$$
$$a_y = \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x},$$
$$a_z = \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Šo vektoru $\vec{a}$ sauc par lauka rotāciju (rotoru, „kērlu") un apzīmē ar

$$\vec{a} = \operatorname{rot} \vec{V} \quad \text{jeb} \quad \vec{a} = \operatorname{curl} \vec{V}.$$

Ievedot nosacījumā (2) abu vektoru komponentes, dabū formulu

$$a_x V_x + a_y V_y + a_z V_z = 0,$$

kas norāda uz vektoru perpendikulāritāti. Ar vektoru simboliku formulas kreisajā pusē var ievest vektoru skalāro produktu:

$$\vec{a} \cdot \vec{V} = a_x V_x + a_y V_y + a_z V_z.$$

Ievērojot 19. §-fā teikto, secinām, ka **vektoru laukā** $\vec{V}(P, Q, R)$ **vektoru līnijas**

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \tag{3}$$

ir viena parametra virsu saimes ortogonālās trajektorijas tad un tikai tad, kad lauka vektors ir perpendikulārs ar savu rotāciju katrā lauka punktā.

3. Integrābilitātes nosacījums (2) norāda arī uz t. s. **integrējošā faktora** $\mu(x, y, z)$ eksistenci diferenciālai izteiksmei

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

Pierādīsim **teōrēmu**: **ja integrābilitātes nosacījums (2) ir izpildīts identiski, tad eksistē tāds faktors** μ, **ka izteiksme** $\mu(P\,dx + Q\,dy + R\,dz)$ **ir vienas funkcijas pilnīgs (totāls) diferenciāls.** Tādu faktoru μ sauc par integrējošo faktoru.

Tiešām, ar teōrēmā minēto nosacījumu Pfaffa diferenciālvienādojums (1) ir pilnīgi integrējams, t. i. eksistē tā integrālvirsu saime

$$F(x, y, z) = C$$

ar vienu parametru C. Kaut kuŗas integrālvirsas normāles n virziena kosinu attiecība ir

$$\cos(n, x) : \cos(n, y) : \cos(n, z) = \frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial z}.$$

Tā kā šīs integrālvirsas krusto vektoru līnijas (3) taisnā leņķī, tad arī

$$\cos(n, x) : \cos(n, y) : \cos(n, z) = P : Q : R.$$

Salīdzinot secina:

$$\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial z} = P : Q : R$$

jeb

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \mu P, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \mu Q, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = \mu R.$$

Tā tad tiešām izteiksme

$$\mu (P\,dx + Q\,dy + R\,dz) = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = dF$$

ir vienas funkcijas $F(x, y, z)$ pilnīgs diferenciāls.

Pareiza ir arī **apgrieztā teorēma**: ja diferenciālai izteiksmei $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ eksistē integrējošais faktors $\mu \neq 0$, tad pastāv identiski integrābilitātes nosacījums (2).

Tiešām, no dotā nosacījuma

$$\mu (Pdx + Qdy + Rdz) = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = dF$$

secina sakarus

$$\mu P = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \mu Q = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \mu R = \frac{\partial F}{\partial z}.$$

Izlietojot otro atvasinājumu īpašības

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y\, \partial x}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial z} = \frac{\partial^2 F}{\partial z\, \partial x}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y\, \partial z} = \frac{\partial^2 F}{\partial z\, \partial y},$$

no dabūtajiem sakariem ar atvasināšanu un salīdzināšanu atrod jaunus sakarus:

$$\frac{\partial}{\partial y} (\mu P) = \frac{\partial}{\partial x} (\mu Q), \quad \frac{\partial}{\partial z} (\mu P) = \frac{\partial}{\partial x} (\mu R), \quad \frac{\partial}{\partial z} (\mu Q) = \frac{\partial}{\partial y} (\mu R).$$

Atklātā formā pēdējos sakarus pēc pārveidojumiem izteic ar

$$\mu \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = P \frac{\partial \mu}{\partial y} - Q \frac{\partial \mu}{\partial x},$$

$$\mu \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) = R \frac{\partial \mu}{\partial x} - P \frac{\partial \mu}{\partial z},$$

$$\mu \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) = Q \frac{\partial \mu}{\partial z} - R \frac{\partial \mu}{\partial y}.$$

Ja šo trīs formulu abas puses reizina attiecīgi ar R, Q, P un saskaita, tad labajā pusē dabū nulli, un pēc dalīšanas ar faktoru $\mu \neq 0$ rodas integrābilitātes nosacījuma formula (2).

Abas teorēmas norāda, ka *integrābilitātes nosacījums (2) ir nepieciešams un pietiekošs diferenciālās izteiksmes $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ integrējošā faktora eksistencei.*

Viegli pierādīt, ka *integrējošo faktoru ir bezgala daudz, ja eksistē viens tāds faktors.*

Pierādījums ir analogs divu mainīgo funkciju gadījumam (I d., § 10.).

4. Simmetriskās formas Pfaffa vienādojumu

$$(1)\qquad P\,(x,\,y,\,z)\,dx + Q\,(x,\,y,\,z) + R\,(x,\,y,\,z)\,dz = 0$$

sauc par **homogenu**, ja P, Q, R ir vienādas pakāpes (dimensijas) homogenās funkcijas. Kad šī pakāpe (dimensija) ir n, tad var izteikt funkcijas

$$P(x,y,z)=x^n P\left(1,\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right), Q(x,y,z)=x^n Q\left(1,\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right), R(x,y,z)=x^n R\left(1,\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right),$$

un vienādojums (1) pēc dalīšanas ar x^n top par

$$P\left(1,\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)dx + Q\left(1,\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)dy + R\left(1,\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)dz = 0.$$

Homogenā Pfaffa vienādojuma integrācijai lieto substitūcijas

$$(4)\qquad \frac{y}{x} = u,\quad \frac{z}{x} = v,$$

ievedot jaunos mainīgos u un v. Ar tām izteic

$$y = ux,\quad z = vx$$

un

$$dy = u\,dx + x\,du,\quad dz = v\,dx + x\,dv.$$

Izlietojot šīs formulas, homogeno vienādojumu pēc pārveidojumiem dabū formā

$$(5)\ [P(1,u,v)+uQ(1,u,v)+vR(1,u,v)]dx+x\cdot[Q(1,u,v)du+R(1,u,v)dv]=0$$

Ir atšķiŗami divi šādi gadījumi, atkarībā no tam, vai funkcija

$$\varphi(u, v) = P(1, u, v) + uQ(1, u, v) + vR(1, u, v)$$

ir nulle vai nav.

I gadījums:

$$\varphi(u, v) = 0.$$

Tad vienādojums (5) reducējas ($x \neq 0$) uz totālo diferenciālvienādojumu

$$Q(1, u, v)\, du + R(1, u, v)\, dv = 0$$

ar diviem mainīgiem u, v. Ja tā vispārīgais integrāls ir

$$F(u, v) = C,$$

tad ar substitūciju (4) dabū dotā homogenā Pfaffa vienādojuma (1) vispārīgo integrālu

$$F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = C$$

ar vienu integrācijas konstanti C.

II gadījums:

$$\varphi(u, v) \neq 0.$$

Šinī gadījumā var izdarīt mainīgo separāciju

$$\frac{dx}{x} + \frac{Q(1, u, v)\, du + R(1, u, v)\, dv}{\varphi(u, v)} = 0.$$

Ja dotais vienādojums (1) ir pilnīgi integrējams, tad diferenciālā izteiksme

$$\frac{Q(1, u, v)\, du + R(1, u, v)\, dv}{\varphi(u, v)} = dU$$

ir vienas funkcijas $U(u, v)$ totāls diferenciāls. Tādēļ sastādīto vienādojumu var integrēt ar kvadrātūrām:

$$\ln x + U(u, v) = C.$$

Ar substitūciju (4) dabū dotā homogenā Pfaffa vienādojuma (1) vispārīgo integrālu

$$\ln x + U\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = C.$$

Uzdevumi VI.

Integrēt šādus (1.—6) totālos diferenciālvienādojumus.

1. $(y + z)\,dx + dy + dz = 0.$ *Atb.* $(y + z)\,e^{x} = C.$

2. $(2x^2 + 2xy + 2xz^2 + 1)\,dx + dy + 2zdz = 0.$

Atb. $(x + y + z^2)\,e^{x^2} = C.$

3. $(y + z)\,dx + (z + x)\,dy + (x + y)\,dz = 0.$

Atb. $xy + yz + zx = C.$

4. $zydx = zxdy + y^2dz.$ *Atb.* $x - y \ln z = Cy.$

5. $(y^2 + yz)\,dx + (xz + z^2)\,dy + (y^2 - xy)\,dz = 0.$

Atb. $y\,(x + z) = C\,(y + z).$

6. $(y^2 + z^2 + yz)\,dx + (z^2 + x^2 + zx)\,dy + (x^2 + y^2 + xy)dz = 0.$

Atb. $xy + yz + zx = C\,(x + y + z).$

7. Noteikt vienādojuma

$$ydx + (z - y)\,dy + xdz = 0$$

integrāllīnijas, kas atrodas plāksnē

$$2x - y - z = 1$$

Atb. Krust. līnijas ar virsām: $xy + x^2 - y^2 - y = C.$

8. Noteikt vienādojuma

$$dz = 2ydx + xdy$$

integrāllīnijas, kas atrodas plāksnē

$$z = x + y.$$

Atb. Krust. līnijas ar virsām: $(x - 1)^2 (2y - 1) = C.$

9. Noteikt vienādojuma

$$xdx + ydy + c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,dz = 0$$

integrāllīnijas, kas atrodas uz ellīpsoīda

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Atb. Krust. līnijas ar sferām: $x^2 + y^2 + z^2 = C.$

VII. Nelineārie pirmās kārtas vienādojumi ar parciāliem atvasinājumiem.

§ 21. Pilnīgais integrāls. Tā noteikšanas Lagranža (Lagrange) un Šarpi (Charpit) metode.

1. Pirmās kārtas vienādojums ar parciāliem atvasinājumiem

$$(1) \qquad F(x, y, z, p, q) = 0 \qquad \left(p = \frac{\partial z}{\partial x},\ q = \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

rodas, izslēdzot no trim sakariem

$$(2) \qquad \begin{cases} f(x, y, z; \alpha, \beta) = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial z} p = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial z} q = 0 \end{cases}$$

divas patvaļīgas konstantes α un β. Pirmo sakaru $f(x, y, z; \alpha, \beta) = 0$, tad sauc par parciālā diferenciālvienādojuma (1) pilnīgo integrālu; ģeometriskā interpretācijā tas attēlo divu parametru virsu saimi.

2. Pilnīgā integrāla noteikšanai Lagranžs (*Lagrange*) ir devis metodi, ko papildinājis Šarpi (*Charpit*). Pēc Lagranža un Šarpi metodes šo integrālu atrod no viena totālā (Pfaffa) diferenciālvienādojuma

$$(3) \qquad dz = p\,dx + q\,dy,$$

ja iepriekš uzmeklē vienu sakaru

$$\Phi(x, y, z, p, q) = a$$

starp argūmentiem x, y, nezināmo funkciju z, tās atvasinājumiem p, q un vienu patvaļīgu konstanti a. Tiešām, ja no vienādojumu sistēmas

$$(4) \qquad \begin{cases} F(x, y, z, p, q) = 0, \\ \Phi(x, y, z, p, q) = a \end{cases}$$

iedomājas izteiktas funkcijas

$$(5)\qquad p = A(x, y, z; a), \quad q = B(x, y, z; a)$$

un ievietotas totālā diferenciālvienādojumā (3), tad, ievērojot integrābilitātes nosacījumu

$$(6)\qquad \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial z}B = \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial z}A,$$

dabū Pfaffa vienādojuma (3) integrālu

$$\varphi(x, y, z; a) = \beta$$

ar divām integrācijas konstantēm a un β. Pēdējais ietilpst parciālā diferenciālvienādojuma pilnīgajā integrālā

$$f(x, y, z; a, \beta) = \varphi(x, y, z; a) - \beta = 0.$$

Lietotais palīga sakars $\Phi(x, y, z, p, q) = a$ ir uztveŗams par vienas parasto diferenciālvienādojumu (Lagranža un Šarpī) sistēmas pirmintegrālu, resp. funkcija $\Phi(x, y, z, p, q)$ ir viena homogena lineāra parciālā diferenciālvienādojuma atrisinājums.

Sastādīsim šo vienādojumu, izlietojot integrābilitātes nosacījumu (6), kuŗā var ievest funkcijas (5). Dabūtajā sakarā

$$(6')\qquad \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z}q = \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial z}p$$

izteic atvasinājumus $\frac{\partial q}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}, \frac{\partial q}{\partial z}$ no sistēmas (4) šādā veidā, lietojot parastos apzīmējumus funkciju F un Φ parciāliem atvasinājumiem pēc to argūmentiem x, y, z, p, q.

1) Ar sistēmas (4) vienādojumu atvasināšanu pēc x rodas sistēma

$$\begin{cases} F'_x + F'_p \dfrac{\partial p}{\partial x} + F'_q \dfrac{\partial q}{\partial x} = 0, \\ \Phi'_x + \Phi'_p \dfrac{\partial p}{\partial x} + \Phi'_q \dfrac{\partial q}{\partial x} = 0, \end{cases}$$

no kuŗas pēc Kramera formulas atrod

$$\frac{\partial q}{\partial x} = - \frac{\begin{vmatrix} F'_p & F'_x \\ \Phi'_p & \Phi'_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F'_p & F'_q \\ \Phi'_p & \Phi'_q \end{vmatrix}}.$$

Ar Jakobi (*Jacobi*) funkcionāldeterminantu simboliem

$$J = \frac{\partial (F, \Phi)}{\partial (p, q)} = \begin{vmatrix} F'_p & F'_q \\ \Phi'_p & \Phi'_q \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial (F, \Phi)}{\partial (p, x)} = \begin{vmatrix} F'_p & F'_x \\ \Phi'_p & \Phi'_x \end{vmatrix}$$

izteic atvasinājumu

$$(7) \qquad \frac{\partial q}{\partial x} = - \frac{1}{J} \cdot \frac{\partial (F, \Phi)}{\partial (p, x)} \qquad (J \neq 0).$$

2) Tamlīdzīgā kārtā ar atvasināšanu pēc y dabū sistēmu

$$\begin{cases} F'_y + F'_p \dfrac{\partial p}{\partial y} + F'_q \dfrac{\partial q}{\partial y} = 0, \\ \Phi'_y + \Phi'_p \dfrac{\partial p}{\partial y} + \Phi'_q \dfrac{\partial q}{\partial y} = 0, \end{cases}$$

no kuŗas aprēķina atvasinājumu

$$(8) \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = + \frac{1}{J} \, \frac{\partial (F, \Phi)}{\partial (q, y)}.$$

3) Atvasinājumu $\frac{\partial p}{\partial z}$, $\frac{\partial q}{\partial z}$ izteiksmju atrašanai atvasina pēc z sistēmas (4) vienādojumus. No dabūtās sistēmas

$$\begin{cases} F'_z + F'_p \dfrac{\partial p}{\partial z} + F'_q \dfrac{\partial q}{\partial z} = 0, \\ \Phi'_z + \Phi'_p \dfrac{\partial p}{\partial z} + \Phi'_q \dfrac{\partial q}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

pēc Kramera formulām atrod

$$(9)\qquad \frac{\partial p}{\partial z}=\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,\Phi)}{\partial(q,z)},\quad \frac{\partial q}{\partial z}=-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,\Phi)}{\partial(p,z)}.$$

Ja ievieto no formulām (7), (8), (9) atvasinājumu izteiksmes integrābilitātes sakarā (6′) jeb

$$\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial q}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial z}q-\frac{\partial q}{\partial z}p=0,$$

tad pēc reizināšanas ar $J\neq 0$ rodas sakars

$$(10)\qquad [F,\Phi]=\frac{\partial(F,\Phi)}{\partial(p,x)}+\frac{\partial(F,\Phi)}{\partial(q,y)}+\frac{\partial(F,\Phi)}{\partial(p,z)}p+\frac{\partial(F,\Phi)}{\partial(q,z)}q=0.$$

Izteicot atklātā veidā Jakobi funkcionāldeterminantus un sakārtojot pēc funkcijas Φ atvasinājumiem, dabū ar **kvadrātiekavām** apzīmēto izteiksmi formā

$$[F,\Phi]=F'_p\Phi'_x+F'_q\Phi'_y+\left(pF'_p+qF'_q\right)\Phi'_z-\left(F'_x+pF'_z\right)\Phi'_p-$$
$$-\left(F'_y+qF'_z\right)\Phi'_y.$$

Ar tradicionāliem apzīmējumiem

$$(11)\qquad \begin{cases} F'_x=\dfrac{\partial F}{\partial x}=X,\ F'_y=\dfrac{\partial F}{\partial y}=Y,\ F'_z=\dfrac{\partial F}{\partial z}=Z,\\ F'_p=\dfrac{\partial F}{\partial p}=P,\ F'_q=\dfrac{\partial F}{\partial q}=Q \end{cases}$$

simbolisko kvadrātiekavu, resp. nosacījumu (10) izteic sekojošā veidā

$$(12)\qquad [F,\Phi]=P\frac{\partial\Phi}{\partial x}+Q\frac{\partial\Phi}{\partial y}+(pP+qQ)\frac{\partial\Phi}{\partial z}-(X+pZ)\frac{\partial\Phi}{\partial p}-$$
$$-(Y+qZ)\frac{\partial\Phi}{\partial q}=0.$$

Attiecībā pret funkciju $\Phi(x,y,z,p,q)$ ir sastādīts **homogens** lineārs parciāls diferenciālvienādojums (12), kam karakteristiku diferenciālā sistēma jeb t. s. Lagranža un Šarpī sistēma ir

$$(13)\quad \frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{pP+qQ}=\frac{-dp}{X+pZ}=\frac{-dq}{Y+qZ}.$$

3. Šai sistēmai viena pirmintegrāla funkcija ir $F(x, y, z, p, q)$. Tiešām, ja reizina vienlīdzīgu attiecību (13) locekļus attiecīgi ar $X, Y, Z, -P, -Q$ un sastāda jaunu attiecību saskaitot, tad dabū skaitītājā

$$Xdx + Ydy + Zdz + Pdp + Qdq = dF,$$

bet saucējā

$$XP + YQ + Z(pP + qQ) - P(X + pZ) - Q(Y + qZ) = 0.$$

Tādēļ $F = const.$ ir diferenciālās sistēmas (13) pirmintegrāls, kurā ietilpst dotais sakars $F = 0$.

Lai no sistēmas (4) varētu izteikt p, q ar x, y, z, a un pilnīgā integrāla noteikšanas problēmu reducētu uz Pfaffa vienādojuma (3) integrāciju, pietiek atrast Lagranža un Šarpī sistēmas (13) pirmintegrālu $\Phi = a$, kas ir neatkarīgs no $F = const.$:

$$J = \frac{\partial(F, \Phi)}{\partial(p, q)} \neq 0$$

Der šāda **kārtula**: nelīneārā pirmās kārtas parciālā diferenciālvienādojuma $F(x, y, z, p, q) = 0$ pilnīgā integrāla noteikšanai atrod Lagranža un Šarpī sistēmas (13) vienu pirmintegrālu $\Phi(x, y, z, p, q) = a$, kas neatkarīgs no $F = const.$, un sastāda totālo (Pfaffa) diferenciālvienādojumu

$$dz = pdx + qdy,$$

izteicot p un q no vienādojumu sistēmas (4); pēc šī Pfaffa vienādojuma integrācijas dabū dotā parciālā diferenciālvienādojuma pilnīgo integrālu.

Piezīme. Lagranža un Šarpī sistēmai (13) ir 4 vienādojumi ar 5 mainīgiem x, y, z, p, q. Tā kā der viens sakars $F(x, y, z, p, q) = 0$, tad var izslēgt no sistēmas (13) vienu mainīgo, resp. reducēt sistēmu (13) uz sistēmu no 3 vienādojumiem ar 4 mainīgiem. Praktikā, meklējot vienu pirmintegrālu, lai noteiktu parciālā diferenciālvienādojuma pilnīgo integrālu, vispār šo redukciju nedara.

§ 22. Vispārīgais un singulārais integrāls. Vienādojumu speciālie tipi.

1. Sakars $f(x, y, z; \alpha, \beta) = 0$ ar divām patvaļīgām konstantēm α un β ir pilnīgais integrāls, ja no sistēmas

$$(1)\qquad \begin{cases} f(x, y, z; \alpha, \beta) = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial z} p = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} + \dfrac{\partial f}{\partial z} q = 0 \end{cases}$$

pēc konstantu α un β izslēgšanas rodas dotais diferenciālvienādojums

$$(2)\qquad F(x, y, z, p, q) = 0 \qquad \left(p = \frac{\partial z}{\partial x},\ q = \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

Lagranžs ir devis metodi kā no pilnīgā integrāla sastādīt t. s. vispārīgo integrālu un singulāro integrālu.

Viņš vadās no konstantu variācijas metodes, prasot, vai ir iespējamas vispār tādas x un y funkcijas $\alpha = \alpha(x, y)$, $\beta = \beta(x, y)$, ar kuŗām no sakara $f(x, y, z, \alpha(x, y), \beta(x, y)) = 0$ aprēķinātā funkcija $z = z(x, y)$ der diferenciālvienādojumam (2). Ja sakaru

$$f(x, y, z, \alpha(x, y), \beta(x, y)) = 0$$

atvasina pēc x, resp. y, tad dabū vienādojumus

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} p + \left[\frac{\partial f}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial x}\right] = 0,$$

resp.

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} q + \left[\frac{\partial f}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial y}\right] = 0.$$

Salīdzinot ar sistēmas (1) pēdējiem diviem vienādojumiem, redzam, ka rastos iepriekšējie vienādojumi, ja

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial \alpha} \cdot \dfrac{\partial \alpha}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial \beta} \cdot \dfrac{\partial \beta}{\partial x} = 0, \\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial \alpha} \cdot \dfrac{\partial \alpha}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial \beta} \cdot \dfrac{\partial \beta}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Tad dabūtu tadu pat sistēmu kā (1), un no lielumu α un β eliminācijas rastos dotais diferenciālvienādojums (2). Funkcija $z = z(x, y)$, kas aprēķināta no sakara

$$f(x, y, z, \alpha(x, y), \beta(x, y)) = 0,$$

apmierinātu doto diferenciālvienādojumu.

Ievestie sakari (3) veido attiecībā pret atvasinājumiem $\frac{\partial f}{\partial \alpha}, \frac{\partial f}{\partial \beta}$ homogenu lineāru algebrisku sistēmu, kam determinants ir

$$(4) \qquad J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \alpha}{\partial x} & \dfrac{\partial \beta}{\partial x} \\[2mm] \dfrac{\partial \alpha}{\partial y} & \dfrac{\partial \beta}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial (\alpha, \beta)}{\partial (x, y)}.$$

2. Atšķirsim divus šādus gadījumus, atkarībā no tam, vai $J = 0$, vai $J \neq 0$.

I gadījums: $J = 0$.

Nosacījums $J = 0$ ir izpildīts arī tad, ja $\alpha = const.$, $\beta = const$; tad sakars $f(x, y, z; \alpha, \beta) = 0$ ir pilnīgais integrāls. Kad $\alpha \neq const.$, $\beta \neq const.$, tad nosacījums $J = 0$ norāda, ka ir viens sakars

$$\Phi(\alpha, \beta) = 0, \quad \text{resp.} \quad \beta = \varphi(\alpha)$$

funkciju $\alpha(x, y)$, $\beta(x, y)$ starpā. To ievērojot, var izteikt vienādojumu sistēmu (3) formā

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} \cdot \left[\frac{\partial f}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \beta} \cdot \frac{d\beta}{d\alpha}\right] = 0,$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y} \cdot \left[\frac{\partial f}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \beta} \cdot \frac{d\beta}{d\alpha}\right] = 0.$$

Ja izteiksme kvadrātiekavās nebūtu nulle, tad

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0.$$

Tā tad šinī gadījumā

$$\alpha = const., \quad \beta = \varphi(\alpha) = const.,$$

un dabūtu pilnīgo integrālu $f(x, y, z; \alpha, \beta) = 0$.

Tāpēc ir jāprasa, lai

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \beta} \cdot \frac{d\beta}{d\alpha} = 0.$$

No vienādojumu sistēmas

$$(5) \quad \begin{cases} f(x, y, z; \alpha, \beta) = 0, \\ \beta = \varphi(\alpha), \\ \dfrac{\partial f}{\partial \alpha} + \dfrac{\partial f}{\partial \beta} \cdot \dfrac{d\beta}{d\alpha} = 0 \end{cases}$$

jeb

$$(6) \quad \begin{cases} f(x, y, z; \alpha, \varphi(\alpha)) = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial \alpha} + \dfrac{\partial f}{\partial \varphi} \cdot \dfrac{d\varphi}{d\alpha} = 0 \end{cases}$$

pēc parametru α un β izslēgšanas rodas sakars, kas noteic funkciju $z = z(x, y)$ kā diferenciālvienādojuma (2) atrisinājumu Uzskatot funkciju $\varphi(\alpha)$ par patvaļīgu, dabū ar sistēmu (5), resp. (6) definētu diferenciālvienādojuma (2) vispārīgo integrālu.

Ģeometriskā interpretācijā pilnīgais integrāls $f(x, y, z; \alpha, \beta) = 0$ attēlo divu parametru virsu saimi. Lai sastādītu vispārīgo integrālu, tad no šīs virsu saimes izvēlas patvaļīgā veidā viena parametra virsu saimi (atbilst vienam patvaļīgi izvēlētam sakaram $\beta = \varphi(\alpha)$), un noteic pēdējai apliecēju virsu, izslēdzot parametru α no diviem vienādojumiem (6). Šī apliecēja virsa ir vispārīgā integrāla ģeometrisks attēls.

II gadījums: $J \neq 0$.

Šinī gadījumā sistēmai (3) eksistē vienīgie atrisinājumi:

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \beta} = 0.$$

Ja no trīs vienādojumu sistēmas

$$(7) \qquad \begin{cases} f(x, y, z; \alpha, \beta) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial \alpha} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial \beta} = 0 \end{cases}$$

izslēdz divus mainīgos α un β, tad rodas pilnīgi noteikts sakars

$$\Psi(x, y, z) = 0,$$

kas definē diferenciālvienādojuma t. s. singulāro integrālu. Nosaukums „singulārs" izskaidrojams tā, ka sastādītais integrāls nesatur patvaļīgu funkciju un vispār neietilpst vispārīgajā integrālā.

Singulāra integrāla sastādīšanas process norāda, ka ģeometriskā interpretācijā singulārais integrāls attēlo pilnīgā integrāla divu parametru virsu saimes apliecēju virsu

3. Apskatīsim šādus speciālus parciālo diferenciālvienādojumu **tipus**, kuŗiem ar Lagranža un Šarpī (*Charpit*) metodi viegli atrod pilnīgo integrālu, resp. viegli izdara integrāciju.

I tips: vispārinātais Klērō (*Clairaut*) vienādojums

$$(8) \qquad z = px + qy + f(p, q) \qquad \left(p = \frac{\partial z}{\partial x}, \ q = \frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Šis vienādojums ir jāsastāda ģeometrijas problēmās, kur jānoteic virsas ar tangentplāksnes īpašību, neatkarīgu no kontakta punkta koordinātām; tas vispārina parasto Klērō vienādojumu (sk. I d., § 13).

Rakstot vienādojumu (8) formā

$$F(x, y, z, p, q) = px + qy - z + f(p, q) = 0,$$

izteic Lagranža un Šarpī sistēmā

$$(9) \quad \frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{pP + qQ} = \frac{-dp}{X + pZ} = \frac{-dq}{Y + qZ}$$

funkcijas

$$X = \frac{\partial F}{\partial x} = p, \quad Y = \frac{\partial F}{\partial y} = q, \quad Z = \frac{\partial F}{\partial z} = -1.$$

Tā kā ar šīm izteiksmēm ir

$$X + pZ = 0, \qquad Y + qZ = 0,$$

tad sistēmai (9) ir pirmintegrāli

$$p = \alpha = const., \qquad q = \beta = const.$$

Tādēļ Klērō vienādojuma (8) pilnīgais integrāls

$$(10) \qquad z = \alpha x + \beta y + f(\alpha, \beta)$$

ir sastādāms, ja vienādojumā (8) atvasinājumu p un q vietā liek patvaļīgas konstantes α un β. Tā ģeometriskais attēls ir divu parametru plākšņu saime. Vispārīgo integrālu ar patvaļīgu funkciju φ dabū, izslēdzot α no vienādojumu sistēmas

$$\begin{cases} z = \alpha x + \varphi(\alpha) y + f(\alpha, \varphi(\alpha)), \\ 0 = x + \varphi'(\alpha) y + \dfrac{\partial f}{\partial \alpha} + \dfrac{\partial f}{\partial \varphi} \varphi'(\alpha) \end{cases} \qquad \left(\varphi'(\alpha) = \frac{d\varphi}{d\alpha}\right).$$

Singulārais integrāls sastādams ar α un β elimināciju no vienādojumu sistēmas

$$\begin{cases} z = \alpha x + \beta y + f(\alpha, \beta), \\ 0 = x + \dfrac{\partial f}{\partial \alpha}, \\ 0 = y + \dfrac{\partial f}{\partial \beta}. \end{cases}$$

Tas reprezentē pilnīgā integrāla (10) plākšņu saimes apliecēju virsu. Šai virsai minētās plāksnes ir tangentplāksnes.

Piemērs:

$$z = px + qy + pq.$$

Pilnīgais integrāls ir plākšņu saime

$$z = \alpha x + \beta y + \alpha\beta,$$

kam apliecējas virsas — hiperboliskā paraboloīda — vienādojumu

$$z = -xy$$

dabū, ja no sistēmas

$$\begin{cases} z = \alpha x + \beta y + \alpha\beta, \\ 0 = x + \beta, \\ 0 = y + \alpha \end{cases}$$

izslēdz α un β. Šī virsa attēlo singulāro integrālu.

No sistēmas

$$\begin{cases} z = \alpha x + \varphi(\alpha) y + \alpha\, \varphi(\alpha) \\ 0 = x + \varphi'(\alpha) y + \varphi(\alpha) + \alpha\, \varphi'(\alpha) \end{cases}$$

ar α elimināciju dabū vispārīgo integrālu. Šo elimināciju var faktiski izdarīt, ja funkcijas φ forma ir izvēlēta. Tad dabū partikulāro integrālu. Piem., kad $\varphi(\alpha) = \alpha$, tad $\varphi'(\alpha) = 1$, un no sistēmas

$$\begin{cases} z = \alpha x + \alpha y + \alpha^2, \\ 0 = x + y + 2\alpha \end{cases}$$

pēc α eliminācijas dabū integrālvirsas vienādojumu

$$z = -\frac{1}{4}(x + y)^2.$$

II tips: vienādojums satur tikai vienu parciālo atvasinājumu, piem.

$$F(x, y, z, p) = 0 \qquad \left(p = \frac{\partial z}{\partial x}\right). \tag{11}$$

Šinī gadījumā $Q = 0$, un tādēļ Lagranža-Šarpī sistēmai (9) ir pirmintegrāls

$$y = a = const.$$

To ievērojot, var integrēt doto parciālo diferenciālvienādojumu kā parasto diferenciālvienādojumu

$$F\left(x, a, z, \frac{dz}{dx}\right) = 0,$$

kam vispārīgais integrāls

$$f(x, z, a, \beta) = 0$$

ar jauno integrācijas konstanti β izteiks parciālā diferenciālvienādojuma pilnīgo integrālu. Liekot $a = y$ un $\beta = \varphi(y)$, var sastādīt tā vispārīgo integrālu.

Tamlīdzīgi atrisina vienādojuma tipu

$$(11') \qquad F(x, y, z, q) = 0 \qquad \left(q = \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

III tips: vienādojums nesatur direkti nezināmo funkciju z:

$$(12) \qquad F(x, y, p, q) = 0.$$

Te $Z = \frac{\partial F}{\partial z} = 0$, un Lagranža-Šarpī sistēmu (9) var reducēt uz trim vienādojumiem ar četriem mainīgiem x, y, p, q:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{-dp}{X} = \frac{-dq}{Y}.$$

Tā kā P, Q, X, Y ir šinī gadījumā tikai x, y, p, q funkcijas, tad eksistē reducētās sistēmas pirmintegrāls

$$\Phi(x, y, p, q) = a.$$

No vienādojumu sistēmas

$$\begin{cases} F(x, y, p, q) = 0, \\ \Phi(x, y, p, q) = a \end{cases}$$

ir iespējams izteikt atvasinājumus formā

$$p = A(x, y; \alpha), \quad q = B(x, y; \alpha).$$

Tādēļ Pfaffa vienādojumam

$$dz = A(x, y; \alpha)\,dx + B(x, y; \alpha)\,dy = d\,U(x, y; \alpha)$$

ir vispārīgais integrāls

$$z = U(x, y; \alpha) + \beta$$

ar jaunu integrācijas konstanti β un sastādāmo funkciju $U(x, y; \alpha)$. Parciālā diferenciālvienādojuma (12) pilnīgo integrālu var rakstīt formā

$$f(x, y, z; \alpha, \beta) = U(x, y; \alpha) + \beta - z = 0.$$

Tā vispārīgo integrālu sastāda, no sistēmas

$$\begin{cases} z = U(x, y; \alpha) + \varphi(\alpha), \\ 0 = \dfrac{\partial U}{\partial \alpha} + \varphi'(\alpha) \end{cases}$$

izslēdzot parametru α. Singulārais integrāls neeksistē, jo sistēmas

$$\begin{cases} z = U(x, y; \alpha) + \beta, \\ 0 = \dfrac{\partial U}{\partial \alpha}, \\ 0 = 1 \end{cases}$$

pēdējā vienlīdzība ir pretrunīga.

S p e c i ā l ā g a d ī j u m ā, kad vienādojums (12) ir formā

(13) $\quad f_1(x, p) = f_2(y, q)$ jeb $f_1(x, p) - f_2(y, q) = 0,$

saka, ka m a i n ī g i e i r s e p a r ē t i. Tad ir

$$X = \frac{\partial f_1}{\partial x}, \quad P = \frac{\partial f_1}{\partial p},$$

un reducētās Lagranža-Šarpī sistēmas vienādojums

$$\frac{dx}{P} = \frac{-dp}{X}$$

dod eksaktu diferenciālvienādojumu

$$X dx + P dp = \frac{\partial f_1}{\partial x} dx + \frac{\partial f_1}{\partial p} dp = df_1 = 0.$$

Tā tad šīs sistēmas viens pirmintegrāls ir

$$f_1(x, p) = a,$$

no kuŗa var izteikt

$$p = A(x; a).$$

Tā kā

$$f_1(x, p) = f_2(y, q),$$

tad arī

$$f_2(y, q) = a, \quad \text{resp.} \quad q = B(y; a).$$

No Pfaffa vienādojuma

$$dz = A(x; a)\, dx + B(y; a)\, dy$$

ar kvadrātūrām sastāda vienādojuma (13) pilnīgo integrālu

$$z = \int A(x; a)\, dx + \int B(y; a)\, dy + \beta.$$

IV tips: vienādojums nesatur direkti vienu argūmentu, piem.

(17) $$F(x, z, p, q) = 0 \qquad \left(p = \frac{\partial z}{\partial x},\ q = \frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Te

$X = X(x, z, p, q)$, $Y = 0$, $Z = Z(x, z, p, q)$, $P = P(x, z, p, q)$, $Q = Q(x, z, p, q)$

ir četru mainīgo funkcijas, un Lagranža-Šarpī sistēmu reducē uz trīs vienādojumu sistēmu

$$\frac{dx}{P} = \frac{dz}{pP + qQ} = \frac{-dp}{X + pZ} = \frac{-dq}{qZ}.$$

No tās pirmintegrāla

$$\Phi(x, z, p, q) = a$$

un dotā vienādojuma (14) aprēķinātas funkcijas

$$p = A(x, z; a), \quad q = B(x, z; a)$$

pēc substitūcijas Pfaffa vienādojumā

$$dz = p dx + q dy$$

dod vienādojumu

$$dz = A(x, z; a)\, dx + B(x, z; a)\, dy.$$

Kad $B \neq 0$, var izteikt

$$dy = -\frac{A}{B}\, dx + \frac{1}{B}\, dz = d\, U(x, z; a),$$

un ar kvadrātūru dabū dotā diferenciālvienādojuma pilnīgo integrālu

$$y = U(x, z; a) + \beta.$$

Tamlīdzīgi diskutē vienādojumu

$$(14') \qquad F(y, z, p, q) = 0.$$

V tips: v i e n ā d o j u m s n e s a t u r d i r e k t i a b u s a r g ū m e n t u s:

$$(15) \qquad F(z, p, q) = 0 \qquad \left(p = \frac{\partial z}{\partial x},\ q = \frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Šinī gadījumā ir

$$X = 0, \quad Y = 0,$$

un Lagranža-Šarpī sistēmas vienādojums

$$\frac{-\,dp}{X + pZ} = \frac{-\,dq}{Y + qZ}$$

reducējas uz vienādojumu

$$\frac{dp}{p} = \frac{dq}{q},$$

ko integrē ar

$$q = ap.$$

Ja pēdējo izteiksmi ievieto dotā vienādojumā (15), tad no dabūtā vienādojuma

$$F(z, p, a p) = 0$$

var aprēķināt

$$p = A(z; a), \quad \text{resp.} \quad q = a A(z; a).$$

Vajadzīgo Pfaffa vienādojumu

$$dz = A(z; a)\, dx + a A(z; a)\, dy$$

integrē ar mainīgo separāciju un kvadratūru (ja $A \neq 0$):

$$\int \frac{dz}{A(z; a)} = x + ay + \beta.$$

Pēdējais sakars ar divām patvaļīgām konstantēm a un β ir dotā vienādojuma pilnīgais integrāls. Viegli konstatēt, ka vienādojumam (15) nav singulārā integrāla.

VI tips: v i e n ā d o j u m s s a t u r t i k a i a t v a s i n ā j u m u s

$$(16) \qquad F(p, q) = 0 \qquad \left(p = \frac{\partial z}{\partial x}, \; q = \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

Te ir

$$X = Y = Z = 0, \quad X + pZ = 0, \quad Y + qZ = 0.$$

Tādēļ Lagranža-Šarpī sistēmai (9) ir pirmintegrāls

$$p = a = const.$$

Ja no dotā vienādojuma izteic

$$q = f(p),$$

tad Pfaffa vienādojums

$$dz = p dx + q dy$$

top par

$$dz = a dx + f(a)\, dy.$$

Ar kvadrātūru dabū dotā vienādojuma pilnīgo integrālu

$$z = ax + f(a)y + \beta,$$

kas attēlo divu parametru plākšņu saimi. Tā vispārīgo integrālu sastāda, izslēdzot no sistēmas

$$\begin{cases} z = ax + f(a)y + \varphi(a), \\ 0 = x + f'(a)y + \varphi'(a) \end{cases}$$

parametru a. Te nav singulārā integrāla, jo sistēma

$$\begin{cases} z = ax + f(a)y + \beta, \\ 0 = x + f'(a)y, \\ 0 = 1 \end{cases}$$

satur sevī pretrunu.

§ 23. Koši (Cauchy) problēma.

1. Parciālā diferenciālvienādojuma

$$(1) \qquad F(x, y, z, p, q) = 0 \qquad \left(p = \frac{\partial z}{\partial x},\ q = \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

integrālvirsu $z = z(x, y)$, kas iet caur doto līniju L, sauc par Koši integrālu. Koši integrāla noteikšana ir t. s. Koši problēma. Parciālo diferenciālvienādojumu eksistences un unitātes teorēmās*) precizē nosacījumus, ar kādiem eksistē parciālā diferenciālvienādojuma Koši integrāls. Šo teorēmu pirmos pierādījumus ir devuši XIX gadusimtenī Koši (*Cauchy*) un S. Kovalevska (С. Ковалевская).

2. Te apskatīsim vispārīgo metodi Koši problēmas atrisināšanai, izlietojot parciālā diferenciālvienādojuma (1) pilnīgo integrālu

$$(2) \qquad f(x, y, z;\ a, \beta) = 0$$

---

*) Sk. piem., *Goursat* „Cours d'Analyse", t. II.

ar divām patvaļīgām konstantēm a un β. Vispārīgajā integrālā ir jāizvēlas

$$(3)\qquad \begin{cases} f(x, y, z; a, \varphi(a)) = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial a} + \dfrac{\partial f}{\partial \varphi} \cdot \varphi'(a) = 0 \end{cases} \qquad \left(\varphi'(a) = \frac{d\varphi}{da}\right)$$

funkcija $\varphi(a)$ tā, lai integrālvirsa $z = z(x, y)$ ietu caur doto līniju L (kas nav t. s. karakteristika), noteiktu parametriskā formā

$$(4)\qquad x = x(u), \quad y = y(u), \quad z = z(u)$$

ar parametru u. Meklējot līnijas L un integrālvirsas krustošanos, atrisina kopīgi to vienādojumus (3) un (4). Pēc funkciju (4) substitūcijas vienādojumu (3) kreisajā pusē sastāda funkciju

$$\bar{f}(u; a, \varphi(a)) = f(x(u), y(u), z(u); a, \varphi(a))$$

un vienādojumu sistēmu

$$(5)\qquad \begin{cases} \bar{f}(u; a, \varphi(a)) = 0, \\ \dfrac{\partial \bar{f}}{\partial a} + \dfrac{\partial \bar{f}}{\partial \varphi} \cdot \varphi'(a) = 0. \end{cases}$$

Ja no sistēmas (5) vienādojumiem izslēgtu parametru u, tad rastos sakars starp a, funkciju $\varphi(a)$ un tās atvasinājumu $\varphi'(a)$. Bet var sastādīt sekojošā veidā citu sakaru, kas nesatur $\varphi'(a)$. Līnijas L punktos lielums a arī ir parametra u funkcija

$$a = a(u).$$

Tāpēc no sistēmas (5) pirmā vienādojuma atvasināšanas pēc u dabū vienādojumu

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial u} + \left[\frac{\partial \bar{f}}{\partial a} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \varphi}\varphi'(a)\right] \cdot \frac{da}{du} = 0,$$

kas reducējas uz

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial u} = 0,$$

ja ievēro sistēmas (5) otro vienādojumu. Tā tad rodas sistēmai (5) ekvivalenta sistēma

$$
(6) \qquad \begin{cases} \bar{f}(u;\, \alpha,\ \varphi(\alpha)) = 0, \\ \dfrac{\partial \bar{f}}{\partial u} = 0, \end{cases}
$$

no kuŗas pēc parametra u izslēgšanas dabū funkcijas $\varphi(\alpha)$ formu. Ar šādu funkciju $\varphi(\alpha)$, no vispārīgā integrāla (3) sistēmas vienādojumiem izslēdzot α, sastāda meklējamo Koši integrālu.

Var arī lietot tieši pilnīgo integrālu (2), un ar funkciju

$$
\bar{f}(u;\, \alpha,\ \beta) = f(x(u),\ y(u),\ z(u);\, \alpha,\ \beta)
$$

var sastādīt vienādojumu sistēmu

$$
(6') \qquad \begin{cases} \bar{f}(u;\, \alpha,\ \beta) = 0, \\ \dfrac{\partial \bar{f}}{\partial u} = 0. \end{cases}
$$

Pēc parametra u izslēgšanas no (6′) rodas sakars

$$
\Phi(\alpha,\ \beta) = 0 \quad \text{vai} \quad \beta = \varphi(\alpha),
$$

kas ir jāizvēlas pilnīgajā integrālā starp konstantēm α un β, lai dabūtu meklējamo Koši integrālu.

3. Nosacījumam $\dfrac{\partial \bar{f}}{\partial u} = 0$ ir šāda ģeometriskā interpretācija. Tā kā atvasinājums

$$
\frac{\partial \bar{f}}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{du} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{du} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{dz}{du}
$$

un integrālvirsas normāles n virziena kosinu attiecība ir

$$
\cos\,(n,\ x) : \cos\,(n,\ y) : \cos\,(n,\ z) = \frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y} : \frac{\partial f}{\partial z},
$$

bet līnijas L tangentes s virziena kosinu attiecība

$$
\cos\,(s,\ x) : \cos\,(s,\ y) : \cos\,(s,\ z) = \frac{dx}{du} : \frac{dy}{du} : \frac{dz}{du},
$$

tad nosacījums $\frac{\partial \bar{f}}{\partial u} = 0$ ir līdzvērtīgs ar

$$\cos(n, x)\cos(s, x) + \cos(n, y)\cos(s, y) + \cos(n, z)\cos(s, z) = 0.$$

Pēdējais sakars norāda, ka līnijas L tangente un pilnīgā integrāla virsas normāle ir savstarpīgi perpendikulāras, resp. šī tangente atrodas integrālvirsas tangentplāksnē. Tā tad, lai noteiktu Košī integrālu, ir jāizvēlas no pilnīgā integrāla divu parametru virsu saimes (2) virsas, kas pieskaras dotai līnijai (4), un jāatrod šīs viena parametra virsu saimes apliecēja virsa.

Piezīme. 1) Ir iespējams, ka dotā līnija L atrodas uz vienas pilnīgā integrāla virsas. Tad vienādojumu sistēmu (6′) apmierina noteiktas α un β nozīmes $\alpha = \alpha_0$, un $\beta = \beta_0$, neatkarīgas no u.

2) Gadījumā, kad līnija L dota ar vienādojumiem

$$y = y(x), \quad z = z(x), \tag{7}$$

parametrs $u = x$, un vienādojumu sistēma (6′) top par

$$\begin{cases} \bar{f}(x;\, \alpha, \beta) = 0, \\ \dfrac{\partial \bar{f}}{\partial x} = 0, \end{cases} \tag{8}$$

ja ar $\bar{f}$ apzīmē funkciju

$$\bar{f}(x;\, \alpha, \beta) = f(x, y(x), z(x);\, \alpha, \beta).$$

4. **Piemērs.** Noteikt diferenciālvienādojuma

$$pq = 1 \qquad \left(p = \frac{\partial z}{\partial x},\ q = \frac{\partial z}{\partial y}\right) \tag{9}$$

integrālvirsu, kas iet caur parabolu (xz-plāksnē):

$$y = 0, \quad z = x^2. \tag{10}$$

Diferenciālvienādojumā (9) var izdarīt mainīgo separāciju (§22.):

$$p = \frac{1}{q}.$$

Pielīdzinot konstantei a, izteic

$$p = a, \quad q = \frac{1}{a},$$

un no Pfaffa vienādojuma

$$dz = p\,dx + q\,dy = a\,dx + \frac{1}{a}\,dy$$

ar kvadrātūru dabū vienādojuma (9) pilnīgo integrālu

$$z = ax + \frac{1}{a}y + \beta. \tag{11}$$

Koši integrāla noteikšanai atrisina kopīgi vienādojumus (10) un (11). No tiem atrod sakaru

$$x^2 = ax + \beta,$$

kas ar atvasināšanu pēc x dod

$$2x = a.$$

Ja no vienādojumu sistēmas

$$\begin{cases} x^2 = ax + \beta, \\ 2x = a \end{cases}$$

izslēdz x, tad rodas sakars

$$\beta = -\frac{a^2}{4}.$$

Tā tad no pilnīgā integrāla (11) ir jāizvēlas viena parametra virsu saime

$$z = ax + \frac{1}{a}y - \frac{a^2}{4},$$

kam ar vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} z = ax + \frac{1}{a}y - \frac{a^2}{4}, \\ 0 = x - \frac{1}{a^2}y - \frac{a}{2} \end{cases} \tag{12}$$

noteic apliecēju virsu — meklējamo Koši integrālvirsu. Šīs virsas vienādojumu Dekarta koordinātās dabū, izslēdzot parametru a no sistēmas (12) vienādojumiem.

Ērtāki ir ievest virsas parametrus (Gausa koordinātas) u un v, pieņemot piem.,

$$v = a \quad \text{un} \quad y = uv^2.$$

Tad no sistēmas (12) otrā vienādojuma izteic

$$x = u + \frac{v}{2},$$

bet no pirmā vienādojuma pēc pārveidojumiem dabū

$$z = 2uv + \frac{v^2}{4}.$$

Tā tad meklējamās Koši integrālvirsas parametriskie vienādojumi ir

$$(13) \quad x = u + \frac{v}{2}, \quad y = uv^2, \quad z = 2uv + \frac{v^2}{4}.$$

Kontrolei šādā veidā viegli pārbauda, ka šī virsa iet caur doto parabolu (8). Ja ievēro pirmo vienādojumu (10), tad no (13) dabū nosacījumu

$$uv^2 = 0,$$

kas ir izpildīts, ja $u = 0$ $(v = a \neq 0)$. No atlikušajiem vienādojumiem rodas sakari

$$x = \frac{v}{2}, \quad z = \frac{v^2}{4},$$

no kuŗiem pēc parametra v izslēgšanas dabū parabolas vienādojumu $z = x^2$.

Ja prasām pēc integrālvirsas, kas iet caur taisni

$$(14) \qquad y = 0, \quad z = x,$$

tad vajadzīgā vienādojumu sistēma (8) top par

$$\begin{cases} x = ax + \beta, \\ 1 = a. \end{cases}$$

Pēdējo sistēmu apmierina noteiktas a un β nozīmes:

$$a = 1, \quad \beta = 0.$$

Meklējamā Koši integrālvirsa ir plāksne

$$z = x + y,$$

kas ietilpst pilnīgā integrāla plākšņu saimē (11). Dotā taisne atrodas uz vienas pilnīgā integrāla virsas (plāksnes).

§ 24. Karakteristikas. To noteikšana ar pilnīgo integrālu.

1. Parciālā diferenciālvienādojuma

$$\text{(1)} \qquad F(x, y, z, p, q) = 0 \qquad \left(p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

pilnīgais integrāls

$$\text{(2)} \qquad f(x, y, z; a, \beta) = 0$$

noteic neatklātā formā vienu funkciju $z = g(x, y; a, \beta)$, kas apmierina vienādojumu, t. i. der identitāte

$$\text{(3)} \quad F\left(x, y, g(x, y; \beta), \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}\right) = 0$$

kā attiecībā pret x, y, tā arī pret a un β.

Vispārīgā integrāla vienādojumu sistēmā

$$\begin{cases} f(x, y, z; a, \varphi(a)) = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial a} + \dfrac{\partial f}{\partial \varphi} \cdot \varphi'(a) = 0 \end{cases}$$

katrs vienādojums attēlo vienu virsu, ja uzskata $\alpha = const.$, un abi vienādojumi — līniju kā abu virsu krustošanos vietu. Šīs līnijas ietilpst šādā t r ī s p a r a m e t r u s a i m ē jeb l ī n i j u k o m p l e k s ā

$$(5) \qquad \begin{cases} f(x, y, z; \alpha, \beta) = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial \alpha} + \dfrac{\partial f}{\partial \beta} \cdot \gamma = 0, \end{cases}$$

ja parametrus α, β, γ saista sādā veidā:

$$\beta = \varphi(\alpha), \quad \gamma = \varphi'(\alpha).$$

Vispārīgo līniju kompleksu (5) veido t. s. k a r a k t e r i s t i k a s.

Lietojot pilnīgā integrāla atklāto formu

$$z = g\,(x, y; \alpha, \beta),$$

var izteikt karakteristiku galīgās formas vienādojumus (5) ar

$$(6) \qquad \begin{cases} z = g\,(x, y; \alpha, \beta), \\ \dfrac{\partial g}{\partial \alpha} + \dfrac{\partial g}{\partial \beta} \cdot \gamma = 0. \end{cases}$$

Atklātā veidā karakteristikas (6) var noteikt parametriskā formā

$$(7) \quad x = x\,(u; \alpha, \beta, \gamma), \quad y = y\,(u; \alpha, \beta, \gamma), \quad z = z\,(u; \alpha, \beta, \gamma)$$

ar līnijas parametru u un saimes trīs parametriem α, β, γ. Karakteristikas punktos arī atvasinājumi p un q ir šo parametru funkcijas

$$(8) \qquad p = p\,(u; \alpha, \beta, \gamma), \quad q = q\,(u; \alpha, \beta, \gamma).$$

2. Sastādīsim karakteristiku diferenciālvienādojumus, izslēdzot parametrus α, β, γ un atrodot diferenciālus sakarus starp mainīgajiem x, y, z, p, q.

Ar sistēmas (6) otrā vienādojuma

$$\frac{\partial g}{\partial \alpha} + \frac{\partial g}{\partial \beta} \gamma = 0$$

atvasināšanu pēc u rodas sakars

$$\left[\frac{\partial^2 g}{\partial\alpha\partial x}+\gamma\frac{\partial^2 g}{\partial\beta\partial x}\right]\cdot\frac{dx}{du}+\left[\frac{\partial^2 g}{\partial\alpha\partial y}+\gamma\frac{\partial^2 g}{\partial\beta\partial y}\right]\cdot\frac{dy}{du}=0,$$

kas top par

$$(9)\quad \left[\frac{\partial^2 g}{\partial\alpha\partial x}\cdot\frac{\partial g}{\partial\beta}-\frac{\partial^2 g}{\partial\beta\partial x}\cdot\frac{\partial g}{\partial\alpha}\right]\cdot\frac{dx}{du}+\left[\frac{\partial^2 g}{\partial\alpha\partial y}\cdot\frac{\partial g}{\partial\beta}-\frac{\partial^2 g}{\partial\beta\partial y}\cdot\frac{\partial g}{\partial\alpha}\right]\frac{dy}{du}=0,$$

ja izslēdz γ ar formulu

$$\gamma=-\frac{\partial g}{\partial\alpha}:\frac{\partial g}{\partial\beta}.$$

Atvasinot identitāti (3) pēc α, resp. β, dabū sakarus

$$Z\frac{\partial g}{\partial\alpha}+P\frac{\partial^2 g}{\partial\alpha\partial x}+Q\frac{\partial^2 g}{\partial\alpha\partial y}=0,$$

resp

$$Z\frac{\partial g}{\partial\beta}+P\frac{\partial^2 g}{\partial\beta\partial x}+Q\frac{\partial^2 g}{\partial\beta\partial y}=0,$$

kuŗos apzīmē

$$Z=\frac{\partial F}{\partial z},\qquad P=\frac{\partial F}{\partial p},\qquad Q=\frac{\partial F}{\partial q}.$$

Ja no atrastiem sakariem izslēdz Z, reizinot pirmo sakaru ar $\frac{\partial g}{\partial\beta}$, otro ar $-\frac{\partial g}{\partial\alpha}$ un saskaitot, tad rodas formula

$$(10)\quad \left[\frac{\partial^2 g}{\partial\alpha\partial x}\cdot\frac{\partial g}{\partial\beta}-\frac{\partial^2 g}{\partial\beta\partial x}\cdot\frac{\partial g}{\partial\alpha}\right]\cdot P+\left[\frac{\partial^2 g}{\partial\alpha\partial y}\cdot\frac{\partial g}{\partial\beta}-\frac{\partial^2 g}{\partial\beta\partial y}\cdot\frac{\partial g}{\partial\alpha}\right]\cdot Q=0.$$

Salīdzinot abas vienlīdzības (9) un (10), secinam proporciju

$$(11)\qquad \frac{dx}{du}:\frac{dy}{du}=P:Q.$$

Tā kā integrālvirsai ir

$$dz=p\,dx+q\,dy,$$

tad karakteristikai der formula

$$\frac{dz}{du} = p\frac{dx}{du} + q\frac{dy}{du}.$$

Ievērojot (11), dabū karakteristiku tangentes virziena kosinu attiecību

$$(12) \qquad \frac{dx}{du} : \frac{dy}{du} : \frac{dz}{du} = P : Q : (pP + qQ).$$

Atlikušo funkciju

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial y}$$

atvasinājumos

$$\frac{dp}{du} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\cdot\frac{dx}{du} + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}\cdot\frac{dy}{du}, \quad \frac{dq}{du} = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}\cdot\frac{dx}{du} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\cdot\frac{dy}{du}$$

var ievest tradicionālos otro atvasinājumu apzīmējumus

$$r = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}, \quad t = \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$$

un izteikt no formulas (11), piem.,

$$\frac{dy}{du} = \frac{Q}{P}\cdot\frac{dx}{du}.$$

Tad pēc pārveidojumiem rodas formulas

$$\frac{dp}{du} = \frac{Pr + Qs}{P}\cdot\frac{dx}{du}, \quad \frac{dq}{du} = \frac{Ps + Qt}{P}\cdot\frac{dx}{du}.$$

No otrās puses var sameklēt izteiksmēm $Pr + Qs$ un $Ps + Qt$ citu veidu, atvasinot identitāti (3) pēc x, resp. y. No dabūtām vienlīdzībām

$$X + pZ + Pr + Qs = 0, \qquad Y + qZ + Ps + Qt = 0,$$

kur X un Y apzīmē atvasinājumus

$$X = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial F}{\partial y},$$

var izteikt

$$Pr + Qs = -(X + pZ), \quad Ps + Qt = -(Y + qZ)$$

Tā tad der formulas

$$\frac{dp}{du} = -\frac{X + pZ}{P}\cdot\frac{dx}{du}, \quad \frac{dq}{du} = -\frac{Y + qZ}{P}\cdot\frac{dx}{du}$$

un

$$(13) \quad \frac{dx}{du} : \frac{dy}{du} : \frac{dz}{du} : \frac{dp}{du} : \frac{dq}{du} = P : Q : (pP + qQ) : -(X + pZ) : -(Y + qZ).$$

Rakstot pēdējos sakarus diferenciālā formā, dabū karakteristiku diferenciālo sistēmu

$$(14) \quad \frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{pP + qQ} = \frac{-dp}{X + pZ} = \frac{-dq}{Y + qZ},$$

kas identificējas ar Lagranža un Šarpī sistēmu.

§ 25. Parciālā diferenciālvienādojuma ģeometriskā interpretācija. Koši (Cauchy) integrācijas metode.

1. Pirmās kārtas parciālā diferenciālvienādojuma

$$(1) \quad F(x, y, z, p, q) = 0 \quad \left(p = \frac{\partial z}{\partial x}, \; q = \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

atrisinājumu $z = f(x, y)$ attēlo pret xyz-koordinātu sistēmu kā integrālvirsu. Caur doto punktu $M_0(x_0, y_0, z_0)$ iet bezgala daudz šādu integrālvirsu, bet ir viens sakars

$$(2) \quad F(x_0, y_0, z_0, p, q) = 0,$$

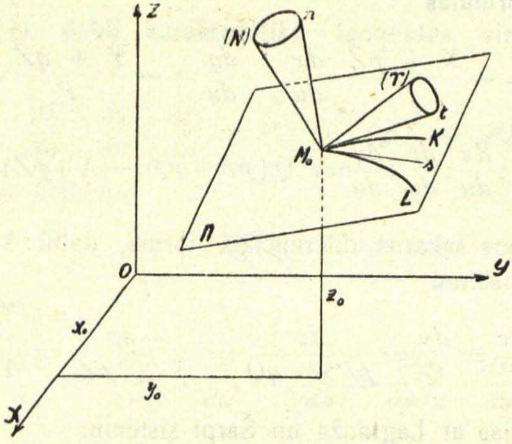
kas saista parciālo atvasinājumu p un q nozīmes šajā punktā. Tā kā ar p un q nosaka (zīm. 10) virsas normāles n

$$(3) \quad \frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{-1}$$

virzienu un tangentplāksnes Π

$$(4) \quad z - z_0 = p(x - x_0) + q(y - y_0)$$

stāvokli, tad nosacījums (2) rāda, ka integrālvirsām punktā $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nevar patvaļīgi izvēlēties normāli, resp. tangentplāksni. Visu integrālvirsu normāles punktā $M_0(x_0, y_0, z_0)$ veido



Zīm. 10.

t. s. n o r m ā l k ō n u (N), kuŗa vienādojumu

$$(5) \qquad F\left(x_0, y_0, z_0, \frac{x - x_0}{z - z_0}, \frac{y - y_0}{z - z_0}\right) = 0$$

atrod, izslēdzot p un q no vienādojumiem (2) un (3).

2. Integrālvirsu tangentplāksnes (4) punktā $M_0(x_0, y_0, z_0)$ veido viena parametra saimi, jo starp parametriem p un q pastāv viens sakars (2). Var sameklēt šādā veidā šīs plākšņu saimes apliecēju virsu, kas ir t. s. t a n g e n t k ō n s (T) jeb M o n ž a (*Monge*) k ō n s (arī e l e m e n t ā r k ō n s). Uzskatot, piem., p par neatkarīgo parametru un q par šī parametra funkciju

$$q = q(p),$$

atvasina pēc p tangentplākšņu saimes (4) vienādojumu:

$$x - x_0 + q'(p)(y - y_0) = 0.$$

Atvasinājumu $q'(p) = \dfrac{dq}{dp}$ atrod no sakara (2) ar atvasināšanu pēc p:

$$P_0 + q'(p) \cdot Q_0 = 0.$$

Te P_0 un Q_0 apzīmē funkcijas $F(x, y, z; p, q)$ parciālo atvasinājumu

$$P = \frac{\partial F}{\partial p}, \quad Q = \frac{\partial F}{\partial q}$$

nozīmes punktā (x_0, y_0, z_0). Ja atvasinājuma izteiksmi

$$q'(p) = -\frac{P_0}{Q_0}$$

ievieto sastādītā vienādojumā, tad kopā ar (4) dabū vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} z - z_0 = p(x - x_0) + q(y - y_0), \\ Q_0(x - x_0) - P_0(y - y_0) = 0, \end{cases}$$

jeb ekvivalentu sistēmu

$$(6) \qquad \frac{x - x_0}{P_0} = \frac{y - y_0}{Q_0} = \frac{z - z_0}{pP_0 + qQ_0}.$$

Izslēdzot no sistēmas (6) un vienādojuma (2) divus lielumus p un q, dabū meklējamā tangentkōna jeb Monža kōna vienādojumu formā

$$(7) \qquad \Phi\left(x_0, y_0, z_0, \frac{y - y_0}{x - x_0}, \frac{z - z_0}{x - x_0}\right) = 0.$$

Monža kōns pieskaŗas integrālvirsas tangentplāksnei pa veiduli (6), kam virziena koeficienti ir

$$P_0 \quad Q_0 \quad p_0P_0 + q_0Q_0.$$

Te p_0 un q_0 ir p un q vērtības punktā (x_0, y_0, z_0).

Tā tad **pirmās kārtas parciālā diferenciālvienādojuma** (1) **integrācijas problēmā ir jānoteic virsas, kas dotajā punktā** (x_0, y_0, z_0) **pieskaŗas Monža kōnam** (7).

3. **Gadījumā, ja parciālais diferenciālvienādojums ir lineārs**

$$(8) \qquad A(x, y, z)p + B(x, y, z)q - C(x, y, z) = 0,$$

lietotās funkcijas ir šādas:

$$F = Ap + Bq - C, \quad P = A, \quad Q = B, \quad pP + qQ = C,$$

un normālkōns (5) deģenerējas par plāksni

$$(9)\quad A(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + B(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + C(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0,$$

bet tangentkōns jeb Monža kōns (7) — par taisni

$$(10)\quad \frac{x - x_0}{A(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{B(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{C(x_0, y_0, z_0)}.$$

Visām līneārā vienādojuma (8) integrālvirsām tangentplāksnes, vilktas punktā (x_0, y_0, z_0), iet caur taisni (10) jeb veido plākšņu šķipsnu; šo virsu normāles atrodas plāksnē (9), kas perpendikulāra taisnei (10).

Kā zināms (§ 16.) līneārā vienādojuma (8) integrācijai lieto k a r a k t e r i s t i k a s

$$(11)\quad \frac{dx}{A(x, y, z)} = \frac{dy}{B(x, y, z)} = \frac{dz}{C(x, y, z)},$$

t. i. līnijas, kuŗu virziens kaut kuŗā punktā (x_0, y_0, z_0) sakrīt ar taisnes (10) virzienu. Šīs līnijas veido divu parametru saimi jeb līniju kongruenci.

4. Nelīneārā vienādojuma (1) gadījumā ir īsts Monža kōns (7), un vispār līnijas $y = y(x)$, $z = z(x)$, kas pieskaŗas punktā (x, y, z) šī kōna veidulēm, atrod no vienādojuma

$$(12)\quad \Phi\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}\right) = 0,$$

ko dabū, izslēdzot p, q no vienādojuma (1) un

$$(13)\quad \frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{pP + qQ}.$$

Tā kā vienādojums (12) satur divas nezināmās funkcijas $y(x)$, $z(x)$, tad vienu no tām, piem. $y(x)$ var uzskatīt par patvaļīgu funkciju $\varphi(x)$; otro funkciju $z(x)$ noteic ar sastādīto pirmās kārtas parasto diferenciālvienādojumu. Tā tad nelīneārā parciālā diferenciālvienādojuma (1) gadījumā minētās līnijas veido kopu, kas atkarājas no **vienas patvaļīgas funkcijas**.

Integrālvirsas $z = f(x, y)$ līnijas sauc par **regulārām**, ja tās punktos eksistē nepārtraukti otrie atvasinājumi

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Regulāro integrālvirsas $z = f(x, y)$ līniju, kas katrā punktā pieskaras konstruētā Monža kōna (7) kopīgai veidulei ar virsas tangentplāksni, sauc par **nelīneārā vienādojuma (1) karakteristiku.** Karakteristikas pieder līnijām (12), bet neaptveŗ visu šo līniju kopu. Līnijas kas pieskaŗas Monža kōna (7) veidulēm, bet nav karakteristikas, sauc par nelīneārā vienādojuma (1) **Monža integrāllīnijām***).

Karakteristiku nosaka tās punkta koordinātas x, y, z un lielumi p, q, kas ir tangentplāksnes virziena koeficienti. Vispār telpas punktu (x, y, z) kopā ar plāksni, kas iet caur šo punktu un kam virziena koeficienti ir p un q, sauc par **virsas kontakta elementu** (x, y, z, p, q). Ja kontakta elements der diferenciālvienādojumam, t. i. pastāv sakars

$$(1) \qquad F(x, y, z, p, q) = 0,$$

tad to sauc par **integrālo kontakta elementu.** Karakteristika ir uzskatāma par tādu integrālo kontakta elementu nepārtrauktu virkni jeb **svītru**, kuŗā lielumi x, y, z, p, q ir viena parametra u funkcijas

$$(14) \quad x = x(u), \quad y = y(u), \quad z = z(u), \quad p = p(u), \quad q = q(u).$$

5. Sastādīsim **karakteristiku diferenciālvienā-vienādojumu sistēmu.** Tā kā karakteristika katrā punktā

*) Daži autori par Monža integrāllīnijām sauc vispār līnijas (12), kas pieskaŗas Monža kōna veidulēm. Tad karakteristikas jāuzskata par speciālām Monža integrāllīnijām.

pieskaŗas Monža 'kōna veidulei, tad tai der vienādojumi (13). Ja te apzīmē

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{pP + qQ} = du,$$

tad ieved parametru u tā, ka rodas normālā diferenciālā sistēma

$$(15) \qquad \frac{dx}{du} = P, \quad \frac{dy}{du} = Q, \quad \frac{dz}{du} = pP + qQ.$$

Karakteristika atrodas uz integrālvirsas $z = f(x, y)$ un ir rēgulāra līnija. Tādēļ der formulas

$$\frac{dp}{du} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{dx}{du} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \frac{dy}{du}, \quad \frac{dq}{du} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \cdot \frac{dx}{du} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \frac{dy}{du}.$$

Ja te ieved otro atvasinājumu parastos apzīmējumus:

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

un ievēro pirmos divus vienādojumus (15), tad dabū

$$\frac{dp}{du} = rP + sQ, \quad \frac{dq}{du} = sP + tQ.$$

Tā kā funkcija $z = f(x, y)$ der dotajam diferenciālvienādojumam (1), tad pastāv identisks sakars

$$F\left(x, y, f(x, y), \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0.$$

Ja pēdējo sakaru atvasina pēc x, resp. y, tad dabū divus jaunus sakarus

$$X + pZ + rP + sQ = 0, \text{ resp. } Y + qZ + sP + tQ = 0,$$

no kuŗiem izteic

$$rP + sQ = -(X + pZ), \text{ resp. } sP + tQ = -(Y + qZ).$$

Tā tad var sastādīt divus vienādojumus

$$\frac{dp}{du} = -(X + pZ), \quad \frac{dq}{du} = -(Y + qZ),$$

kas kopā ar (15) veido **karakteristiku normālo diferenciālvienādojumu sistēmu**

$$(16) \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{du} = P, \quad \dfrac{dy}{du} = Q, \quad \dfrac{dz}{du} = pP + qQ, \\[2mm] \dfrac{dp}{du} = -(X + pZ), \quad \dfrac{dq}{du} = -(Y + qZ). \end{cases}$$

Ja no (16) izslēdz parametru u, tad rodas pazīstamā Lagranža un Šarpī sistēma

$$(17) \quad \frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{pP + qQ} = \frac{-dp}{X + pZ} = \frac{-dq}{Y + qZ}.$$

6. Šīs diferenciālās sistēmas viens pirmintegrāls ir

$$F(x, y, z, p, q) = const.$$

Ja līnijai ir viens sākuma integrālais kontakta elements $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$, t. i.

$$F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0,$$

tad arī $F(x, y, z, p, q) = 0$, t. i. tad kautkuŗš tās kontakta elements (x, y, z, p, q) ir integrālais elements.

Pastāv šāda integrālvirsu īpašība. **Ja divām integrālvirsām ir kopīgs kontakta elements** (t. i. **kopīgs viens punkts un šajā punkta kopīga tangentplāksne**), **tad tām ir arī kopīga līnija — karakteristika, kas konstruēta ar šo kopīgo kontakta elementu.**

Karakteristiku diferenciālai sistēmai (17) atrisinājumus galīgā formā noteic ar četriem pirmintegrāliem

$$(18)\quad \begin{cases} F(x, y, z, p, q) = 0. \\ \omega_1(x, y, z, p, q) = C_1, \\ \omega_2(x, y, z, p, q) = C_2, \\ \omega_3(x, y, z, p, q) = C_3, \end{cases}$$

kas satur trīs patvaļīgas konstantes C_1, C_2, C_3. Tā tad nelīneāra diferenciālvienādojuma karakteristikas veido trīs parametru līniju saimi jeb — līniju kompleksu. Patvaļīgas konstantes C_1, C_2, C_3 nosaka, zinot sākuma kontakta elementu $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$.

7. Lietojot karakteristikas (17) vai (16), Košī (*Cauchy*) ir devis nelīneārā parciālā diferenciālvienādojuma

$$(1)\quad F(x, y, z, p, q) = 0 \quad \left(p = \frac{\partial z}{\partial x}, \ q = \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

šādu integrācijas metodi. Ievedot parametru u un ievērojot sākuma kontakta elementa $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$ vērtību, kas atbilst, piem. $u = 0$, no (18) var izteikt karakteristikas galīgās formas vienādojumus ar

$$(19)\quad \begin{cases} x = f_1(u;\ x_0, y_0, z_0, p_0, q_0), \\ y = f_2(u;\ x_0, y_0, z_0, p_0, q_0), \\ z = f_3(u;\ x_0, y_0, z_0, p_0, q_0), \end{cases}$$

un

$$(20)\quad \begin{cases} p = f_4(u;\ x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) \\ q = f_5(u;\ x_0, y_0, z_0, p_0, q_0). \end{cases}$$

Pēc eksistences un unitātes teorēmas (§ 2) šīs parametra u funkcijas f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 ir normālās sistēmas (16) vienīgais atrisinājums, kas apmierina sākuma nosacījumus. Bez tam izslēdzam t. s. singulāro gadījumu, kad reizē vienādojumu (16) labās puses ir nulles. Vienādojumi (19) un (20) rāda, ka dotam sākuma kontakta elementam jeb punktam $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un plāksnei II (zīm. 10) ar virziena koeficientiem p_0, q_0, atbilst viena vienīga karakteristika K, kas pieskaras Monža kōna T veidulei t.

Karakteristikas K veidos vispār virsu, kas ies caur doto punktu M_0, ja caur šo punktu velk citu līniju L un tās punktos karakteristikas. Analitiski līniju L nosaka parametriskās formas vienādojumi

$$(21) \qquad x_0 = x_0(v), \quad y_0 = y_0(v), \quad z_0 = z_0(v)$$

ar parametru v. Ar šīm un vēl divām kautkādām funkcijām

$$(22) \qquad p_0 = p_0(v), \quad q_0 = q_0(v)$$

no vienādojumiem (19) sastāda karakteristiku veidotās virsas vienādojumus parametriskā formā (u, v — parametri)

$$(23) \qquad \begin{cases} x = f_1(u;\ x_0(v),\ y_0(v),\ z_0(v),\ p_0(v),\ q_0(v)) = \varphi_1(u,v), \\ y = f_2(u;\ x_0(v),\ y_0(v),\ z_0(v),\ p_0(v),\ q_0(v)) = \varphi_2(u,v), \\ z = f_3(u;\ x_0(v),\ y_0(v),\ z_0(v),\ p_0(v),\ q_0(v)) = \varphi_3(u,v), \end{cases}$$

un no (20) — divas funkcijas

$$(24) \qquad \begin{cases} p = f_4(u;\ x_0(v),\ y_0(v),\ z_0(v),\ p_0(v)\ q_0(v)) = \varphi_4(u,v), \\ q = f_5(u;\ x_0(v),\ y_0(v),\ z_0(v),\ p_0(v)\ q_0(v)) = \varphi_5(u,v). \end{cases}$$

Lai karakteristikas veidotu diferenciālvienādojuma

$$(1) \qquad F(x, y, z, p, q) = 0$$

integrālvirsu $z = f(x, y)$, ir nepieciešami un pietiekoši, ka tiktu apmierināti divi šādi nosacījumi. Šie nosacījumi dos iespēju atrast nezināmās funkcijas $p_0(v)$ un $q_0(v)$.

I. Ir jāprasa, lai vienādojumi (23) tiešām izteiktu virsu ar kontakta elementiem (x, y, z, p, q), t. i. lai pēc formulām (23) aprēķinātie atvasinājumi $\frac{\partial z}{\partial x}$ un $\frac{\partial z}{\partial y}$ tiešām būtu attiecīgi identiski formulās (24) izteiktiem lielumiem p un q.

II. Ir jāprasa, lai virsas (23) kontakta elementi (x, y, z, p, q) būtu diferenciālvienādojuma (1) kontakta elementi, t. i., lai būtu $F(x, y, z, p, q) = 0$. Tā kā

$$F(x, y, z, p, q) = F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$$

ir karakteristiku diferenciālās sistēmas pirmintegrāls, tad minētais otrais nosacījums ir izpildīts tad un tikai tad, ja

$$(25) \qquad F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0.$$

Pirmā nosacījuma izpildīšanu raksturo identiski sakari

$$(26) \qquad \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = p\frac{\partial x}{\partial u} + q\frac{\partial y}{\partial u}$$

un

$$(27) \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = p\frac{\partial x}{\partial v} + q\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Bet sakars (26) ir jau izpildīts. Tiešām, ievērojot, ka virsas (23) līnijas $v = const.$ ir karakteristikas un pēdējām der diferenciālvienādojumi (16), secinam no sistēmas (16) pirmajiem trīs vienādojumiem sakaru (26).

8. Atliek vēl pieprasīt nosacījuma (27) izpildīšanu. Lai to veiktu, ievedīsim funkciju

$$\Phi(u, v) = \frac{\partial z}{\partial v} - p\frac{\partial x}{\partial v} - q\frac{\partial y}{\partial v},$$

un pierādīsim tās īpašību

$$(28) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial u} = -Z\Phi.$$

Ja atvasinājuma formulā

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} - p\frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u} - q\frac{\partial^2 y}{\partial v \partial u} - \frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}$$

izteic ar formulas (26) atvasināšanu pēc v atrasto otrās kārtas atvasinājumu

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} = \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = p\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + q\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial p}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial q}{\partial v},$$

tad pēc līdzīgo locekļu savilkšanas rodas formula

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial p}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial q}{\partial v} - \frac{\partial p}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Ievietojot te labajā pusē atvasinājumu izteiksmes

$$\frac{\partial x}{\partial u} = P, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = Q, \quad \frac{\partial p}{\partial u} = -(X + pZ), \quad \frac{\partial q}{\partial u} = -(Y + qZ),$$

dabū

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = P\frac{\partial p}{\partial v} + Q\frac{\partial q}{\partial v} + (X + pZ)\frac{\partial x}{\partial v} + (Y + qZ)\frac{\partial y}{\partial v}.$$

No identiskā sakara $F(x, y, z, p, q) = 0$ atvasināšanas pēc v rodas jauns sakars

$$X\frac{\partial x}{\partial v} + Y\frac{\partial y}{\partial v} + Z\frac{\partial z}{\partial v} + P\frac{\partial p}{\partial v} + Q\frac{\partial q}{\partial v} = 0,$$

ar kuŗu izteic atvasinājumu

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = -Z\left(\frac{\partial z}{\partial v} - p\frac{\partial x}{\partial v} - q\frac{\partial y}{\partial v}\right)$$

Ievērojot funkcijas Φ izteiksmi, dabū tiešām formulu (28), no kuŗas ar kvadrātūru atrod

$$\Phi = \Phi_0 e^{-\int_0^u Z\,du} \quad (e \text{ — nat. log. baze}), \tag{29}$$

ja apzīmē

$$\Phi_0 = \Phi(0, v) = \frac{dz_0}{dv} - p_0\frac{dx_0}{dv} - q_0\frac{dy_0}{dv}.$$

Formula (29) rāda, ka lielumi Φ un Φ_0 abi reizē ir vai reizē nav nulles. Tāpēc nosacījums (27) ir izpildīts tad un tikai tad, ja pastāv sakars

$$\frac{dz_0}{dv} = p_0\frac{dx_0}{dv} + q_0\frac{dy_0}{dv}. \tag{30}$$

Tā tad **karakteristikas, vilktas no līnijas (21) punktiem, veidos parciālā diferenciālvienādojuma (1) integrālvirsu (23) tad un tikai tad, ja funkcijas $p_0(v)$, $q_0(v)$ apmierina divus sakarus (25) un (30).**

9. Nosacījumam (30) ir šāda ģeometriskā nozīme. Līnijas L (zīm. 10) tangentes s virziena kosinu attiecība ir

$$\cos(s, x) : \cos(s, y) : \cos(s, z) = \frac{dx_0}{dv} : \frac{dy_0}{dv} : \frac{dz_0}{dv},$$

bet integrālvirsas normālei n punktā $M_0(x_0, y_0, z_0)$ to attiecība ir

$$\cos(n, x) : \cos(n, y) : \cos(n, z) = p_0 : q_0 : -1.$$

Tā kā sakaru (30) var izteikt ekvivalentā formā

$$\cos(s, x)\cos(n, x) + \cos(s, y)\cos(n, y) + \cos(s, z)\cos(n, z) = 0,$$

tad secinam, ka līnijas L tangente ir perpendikulāra integrālvirsas normālei, jeb tā atrodas integrālvirsas tangentplāksnē. Šai tangentplāksnei punktā (x_0, y_0, z_0) ir jāpieskaras arī konstruētam Monža kōnam (T), jo $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$ ir integrālais kontakta elements.

Tā tad, lai noteiktu Košī integrālvirsu, kas iet caur doto līniju L, ir jākonstruē plāksne, kas iet caur dotās līnijas tangenti un izvēlētā punktā pieskaras Monža kōnam; ar šīs plāksnes virziena koeficientiem p_0, q_0 un punkta koordinātām x_0, y_0, z_0 ir noteikts līnijas sākuma kontakta elements $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$, un ar tādu sākuma elementu velk karakteristiku. Atkārtojot šo konstrukciju katrā līnijas L punktā, dabū meklējamo Košī integrālvirsu.

Konstrukcija norāda, ka Košī problēmai ir noteikts (rēgulārs) atrisinājums, ja līnija L nepieskaras Monža kōnam, t. i. tā nav karakteristika vai Monža integrāllīnija.

Gadījumā, ja līnija L ir pati karakteristika, Košī problēma ir nenoteikta. Tādā gadījumā caur doto līniju-karakteristiku var vilkt bezgala daudz integrālvirsas. Var izvēlēties caur līnijas punktu, piem. M_0, kaut kuru citu līniju L', kas nav karakteristika. Ja no šīs līnijas L' punktiem ar norādīto metodi velk karakteristikas, tad tās veidos integrālvirsu. Tā kā līnijas L' izvēle ir brīva, tad integrālvirsas, kas iet caur karakteristiku, ir bezgala daudz.

Gadījumā, kad dotā līnija L ir Monža integrāllīnija, karakteristikas, vilktas šīs līnijas punktos, pieskaras šai līnijai pa Monža kōna veiduli. No karakteristikām izveidojas integrālvirsa, kuŗai dotā līnija ir tamlīdzīgā stāvoklī kā asumu šķautne izklājamai virsai*). Dotā Monža līnija ir karakteristiku saimes apliecēja līnija; tā ir veidotās integrālvirsas singulārā līnija.

10. Parciālā diferenciālvienādojuma

$$(1) \qquad F(x, y, z, p, q) = 0 \quad \left(p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

Koši (*Cauchy*) problēmu analitiski atrisina pēc šādas kārtulas. Sastāda karakteristiku normālo diferenciālvienādojumu sistēmu (16) vai (17) un atrod tās galīgās formas vienādojumus (19) un (20); ar dotās līnijas parametriskās formas vienādojumiem

$$(21) \qquad x_0 = x_0(v), \quad y_0 = y_0(v), \quad z_0 = z_0(v)$$

un funkcijām $p_0(v)$, $q_0(v)$, ko atrod no vienādojumu sistēmas

$$(31) \qquad \begin{cases} F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0, \\ \dfrac{dz_0}{dv} = p_0 \dfrac{dx_0}{dv} + q_0 \dfrac{dy_0}{dv}, \end{cases}$$

sastāda pēc (23) formulām meklējamās integrālvirsas parametriskos vienādojumus. Ja izslēdz no vienādojumiem (23) virsas parametrus u un v, tad dabū Koši integrālvirsas vienādojumu Dekarta koordinātās

$$\varphi(x, y, z) = 0 \quad \text{vai} \quad z = f(x, y).$$

Koši problēmai ir noteikts (rēgulārs) atrisinājums, ja dotā līnija nav karakteristika vai Monža integrāllīnija.

---

*) *Arête de rebroussement de la surface développable* (Rückkehrkante der abwickelbaren Fläche).

Piezīme. 1) Ar Koši karakteristiku metodi var sastādīt arī dotā diferenciālvienādojuma (1) pilnīgo integrālu šādā veidā. Integrālvirsas nosacījumus (31) var apmierināt ar

$$x_0 = const., \quad y_0 = const., \quad z_0 = const.$$

un sakaru

$$F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0.$$

Ja no četru vienādojumu sistēmas

$$(32)\quad \begin{cases} x = f_1(u;\, x_0, y_0, z_0, p_0, q_0), \\ y = f_2(u;\, x_0, y_0, z_0, p_0, q_0), \\ z = f_3(u;\, x_0, y_0, z_0, p_0, q_0), \\ F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0 \end{cases}$$

izslēdz trīs lielumus u, p_0, q_0, tad dabū vienādojumu

$$f(x, y, z;\, x_0, y_0, z_0) = 0$$

integrālvirsai, ko veido karakteristikas, vilktas no punkta (x_0, y_0, z_0). Tas izteic diferenciālvienādojuma (1) pilnīgo integrālu, ja viena lieluma nozīmi fiksē, piem. liekot $z_0 = 0$, un pārējos divus x_0, y_0 uzskata par patvaļīgām konstantēm α un β.

2) Koši metodi var vispārinat nelīneāram parciālam diferenciālvienādojumam

$$(33)\quad F(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0$$

ar n argūmentu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nezināmo funkciju z un tās parciāliem atvasinājumiem

$$p_1 = \frac{\partial z}{\partial x_1},\ p_2 = \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots, p_n = \frac{\partial z}{\partial x_n}.$$

Vispārīgā karakteristiku diferenciālā sistēma ir

$$(34)\quad \frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \ldots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{dz}{p_1P_1 + p_2P_2 + \ldots + p_nP_n} =$$
$$= \frac{-dp_1}{X_1 + p_1 Z} = \ldots = \frac{-dp_n}{X_n + p_n Z}$$

ar funkcijām

$$Z = \frac{\partial F}{\partial z}, \quad X_k = \frac{\partial F}{\partial x_k}, \quad P_k = \frac{\partial F}{\partial p_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

11. **Piemērs** (sk. 24. §-fu): noteikt diferenciālvienādojuma

$$(35) \qquad pq = 1$$

integrālvirsu, kas iet caur parabolu

$$(36) \qquad y = 0, \quad z = x^2.$$

Karakteristiku diferenciālai sistēmai

$$\frac{dx}{q} = \frac{dy}{p} = \frac{dz}{2pq} = \frac{-dp}{0} = \frac{-dq}{0}$$

ir divi integrāli

$$p = p_0, \quad q = q_0,$$

kas apmierina sākuma nosacījumus. Šo diferenciālo sistēmu var reducēt uz divu vienādojumu sistēmu

$$\frac{dx}{q_0} = \frac{dy}{p_0} = \frac{dz}{2p_0 q_0},$$

ko viegli integrē ar

$$y - y_0 = \frac{p_0}{q_0}(x - x_0), \quad z - z_0 = 2p_0(x - x_0),$$

ievērojot sākuma nosacījumus. Redzam, ka karakteristikas ir taisnes

$$(37) \quad x = u, \ y = y_0 + \frac{p_0}{q_0}(u - x_0), \ z = z_0 + 2p_0(u - x_0), \ p = p_0, \ q = q_0.$$

Tā tad to veidotā virsa pieder līnijainām virsām.

Ar vispārīgi lietotiem apzīmējumiem doto līniju — parabolu (36) — noteic vienādojumi

$$x_0 = v, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = v^2,$$

ja par līnijas parametru v uzskata koordinātu x_0. Vajadzīgo vienādojumu sistēmu (31), no kuŗas aprēķina p_0 un q_0, šinī piemērā izteic ar

$$\begin{cases} p_0\, q_0 = 1, \\ 2v = p_0. \end{cases}$$

No tās atrod

$$p_0 = 2v, \quad q_0 = \frac{1}{2v} \qquad (v \neq 0),$$

un ar substitūciju vienādojumos (37) pēc pārveidojumiem rodas integrālvirsas parametriskie vienādojumi

$$(38) \qquad x = u, \quad y = 4uv^2 - 4v^3, \quad z = 4uv - 3v^2.$$

Var viegli pārbaudīt, ka šī virsa iet caur doto parabolu (36) un der dotajam vienādojumam (35).

Iepriekšējā 24. §-fā atrastie šīs integrālvirsas vienādojumi reducējami uz (38), ja ieved citus virsas parametrus u un v.

Karakteristikas, kas iet caur punktu (x_0, y_0, z_0), veido integrālvirsu, kuŗas vienādojumu

$$(39) \qquad (z - z_0)^2 = 4(x - x_0)(y - y_0)$$

dabū, izslēdzot p_0, q_0 no vienādojumu sistēmas

$$\begin{cases} y = y_0 + \dfrac{p_0}{q_0}(x - x_0), \\ z = z_0 + 2p_0(x - x_0), \\ p_0\, q_0 = 1. \end{cases}$$

Ja pieņem $z_0 = 0$, bet x_0 un y_0 par patvaļīgām konstantēm α un β, tad no (39) sastāda pilnīgo integrālu

$$(40) \qquad z^2 = 4(x - \alpha)(y - \beta).$$

Var pārbaudīt, ka konstantu α un β izslēgšanas rezultātā no vienādojumu sistēmas

$$\begin{cases} z^2 = 4(x - \alpha)(y - \beta), \\ 2zp = 4(y - \beta), \\ 2zq = 4(x - \alpha) \end{cases}$$

tiešām dabū doto parciālo diferenciālvienādojumu

$$pq = 1.$$

Uzdevumi VII.

Integrēt šādus (1.—15.) vienādojumus $\left(p = \frac{\partial z}{\partial x},\ q = \frac{\partial z}{\partial y};\ \alpha, \beta \text{ — patvaļīgas konstantes}\right)$.

1. $z = px + qy - 2\sqrt{pq}$ *Atb.* $z = \alpha x + \beta y - 2\sqrt{\alpha\beta}$.

2. $p = xz + yz$. *Atb.* $\ln z = \frac{x^2}{2} + xy + \varphi(y)$ (visp int.).

3. $3p^2 - 2q^2 = 4pq$. *Atb.* $z = \alpha\left(x + \frac{\sqrt{10} - 2}{2} y\right) + \beta$.

4. $pq = px + qy$. *Atb.* $z = \frac{1}{2}\left(\alpha x + \frac{y}{\alpha}\right)^2 + \beta$.

5. $(p + q)(px + qy) = 1$, *Atb.* $z = 2\sqrt{\frac{x + \alpha y}{1 + \alpha}} + \beta$.

6. $p - q = x - y$. *Atb.* $2z = (x + \alpha)^2 + (y + \alpha)^2 + \beta$.

7. $\sqrt{p} + \sqrt{q} = 2x$. *Atb.* $z = \frac{1}{6}(2x - \alpha)^3 + \alpha^2 y + \beta$.

8. $p^2 + q^2 = x + y$. *Atb.* $z = \frac{2}{3}(x + \alpha)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}(y - \alpha)^{\frac{3}{2}} + \beta$.

9. $z^2(1 + p^2 + q^2) = a^2$. *Atb.* $(1 + \alpha^2)(a^2 - z^2) = (x + \alpha y + \beta)^2$.
Sing. int.: $z = \pm a$.

10. $p(1 + q^2) = q(z - a)$. *Atb.* $4\alpha(z - a) = (x + \alpha y + \beta)^2 + 4$.

11. $9(p^2 z + q^2) = 4$. *Atb.* $(z + \alpha^2)^3 = (x + \alpha y + \beta)^2$.

12. $z(p^2 - q^2) = x - y$. *Atb.* $z^{\frac{3}{2}} = (x + \alpha)^{\frac{3}{2}} + (y + \alpha)^{\frac{3}{2}} + \beta$.

13. $y(p^2 + q^2) = qz$. *Atb.* $z^2 = \alpha^2 y^2 + (\alpha x + \beta)^2$.

14. $z^2(p^2 + q^2) = x^2 + y^2$. *Atb.* $z^2 = x\sqrt{x^2 + \alpha} + y\sqrt{y^2 - \alpha} + \alpha \ln \frac{x + \sqrt{x^2 + \alpha}}{y + \sqrt{y^2 - \alpha}} + \beta$.

15. $xypq = z^2$. *Atb.* $z = \beta x^{\alpha} y^{\frac{1}{\alpha}}$.

16. Noteikt virsu, kam tangentplāksne no koordinātu kakta atšķeļ tetraedru ar pastāvīgu tilpumu ($= a^3$).

Atb. $27\,xyz = a^3$.

17. Noteikt vienādojuma $p = q^2$ integrālvirsu, kas iet caur līniju:

1) $x = 1,\ z = y$. *Atb.* 1) $z = x + y - 1$.
2) $x = 1,\ z = y^2$. 2) $z(5 - 4x) = y^2$.

18. Noteikt vienādojuma $pq = z^2$ integrālvirsu, kas iet caur hiperbolu: $x = 1,\ yz = 1$.

Atb. $x = u + 1,\ y = uv^2 + v,$
$\ln z = -2uv - \ln v.$

19. Noteikt vienādojuma $p^2 - q^2 = 2z$ integrālvirsu, kas iet caur līniju: $x = 0,\ z = (y + 1)^2$.

Atb. $z = \left(\frac{x\sqrt{6}}{2} + y + 1\right)^2$.

20. Ar Košī (*Cauchy*) metodi integrēt šādus vienādojumus:
a) $p^2 + q^2 = 1$, b) $z = pq$, c) $xy = pq$.

Atb. Karakteristikas ar sākuma elementu $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$ ir:

a) $y - y_0 = \frac{q_0}{p_0}(x - x_0),\quad z - z_0 = \frac{1}{p_0}(x - x_0),$

b) $y - y_0 = \frac{p_0}{q_0}(x - x_0),\quad z - z_0 = \frac{p_0}{q_0}(x - x_0 + q_0)^2,$

c) $z - z_0 = \frac{p_0}{x_0}(x^2 - x_0^2) = \frac{q_0}{y_0}(y^2 - y_0^2).$

VIII. Otrās kārtas vienādojumi ar parciāliem atvasinājumiem.

§ 26. Vienādojumu veidi un sastādīšana.

1. Pirmās kārtas parciāla diferenciālvienādojuma vispārīgais integrāls satur **vienu** patvaļīgu funkciju (§ 22). Otrādi, no sakara, kas satur vienu patvaļīgu funkciju, ar šīs funkcijas izslēgšanu var sastādīt vienu pirmās kārtas parciālo diferenciālvienādojumu (§ 15). Konstatēsim, ka tamlīdzīga īpašība ar **divām** patvaļīgām funkcijām vispār nepastāv otrās kārtas vienādojumam

$$(1) \qquad F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

ar parciāliem atvasinājumiem

$$(2) \quad p = \frac{\partial z}{\partial x}, \; q = \frac{\partial z}{\partial y}, \; r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \; s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \; t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Diskutēsim problēmu par divu patvaļīgu funkciju $\varphi(u)$ un $\psi(v)$ izslēgšanu no dotā galīgās formas vienādojuma

$$(3) \qquad f(x, y, z, \varphi(u), \psi(v)) = 0$$

Te u un v ir dotās x, y, z funkcijas

$$u = u(x, y, z), \quad v = v(x, y, z).$$

Vienādojums (3) neatklātā formā definē funkciju $z = z(x, y)$. Tādēļ ar (3) atvasināšanu pēc x un y rodas divi sakari

$$(4) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial z} p + \dfrac{\partial f}{\partial \varphi} \cdot \varphi'(u) \cdot \left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z} p \right) + \dfrac{\partial f}{\partial \psi} \cdot \psi'(v) \cdot \left(\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial z} p \right) = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial z} q + \dfrac{\partial f}{\partial \varphi} \cdot \varphi'(u) \cdot \left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial z} q \right) + \dfrac{\partial f}{\partial \psi} \cdot \psi'(v) \cdot \left(\dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z} q \right) = 0. \end{cases}$$

No trim sakariem (3) un (4) nav iespējams izslēgt 4 lielumus

$$\varphi(u), \quad \varphi'(u) = \frac{d\varphi}{du}, \quad \psi(v), \quad \psi'(v) = \frac{d\psi}{dv}.$$

Atvasinot abus sakarus (4) pēc x, resp. y dabū tikai trīs jaunus neatkarīgus sakarus, kas satur bez minētiem patvaļīgiem lielumiem vēl

$$\varphi''(u) = \frac{d^2\varphi}{du^2}, \quad \psi''(v) = \frac{d^2\psi}{dv^2}$$

un arī otrās kārtas atvasinājumus r, s, t. Tā tad rodas 6 vienādojumu sistēma, no kuŗas vispār nav iespējams izslēgt 6 minētos patvaļīgos lielumus, resp. nav iespējams sastādīt otrās kārtas parciālo diferenciālvienādojumu, kam vispārīgais integrāls būtu sakars (3). Ja atvasināšanu pēc x un y izdarītu vēl reiz, tad rastos 4 jauni sakari, kas saista divus jaunus patvaļīgus lielumus

$$\varphi'''(u) = \frac{d^3\varphi}{du^3}, \quad \psi'''(v) = \frac{d^3\psi}{dv^3}$$

un arī funkcijas z trešās kārtas atvasinājumus. Kopā ar iepriekšējiem sakariem būtu 10 vienādojumu sistēma, no kuŗiem 8 patvaļīgus lielumus var izslēgt, sastādot d i v u s trešās kārtas parciālos diferenciālvienādojumus.

2. Šādos g a d ī j u m o s ar patvaļīgu funkciju elimināciju var sastādīt otrās kārtas parciālos diferenciālvienādojumus.

I gadījums. S a k a r a m (3) i r f o r m a

$$\varphi(u) + \psi(v) + w = 0 \tag{5}$$

ar dotām funkcijām

$$u = u(x, y, z), \quad v = v(x, y, z), \quad w = w(x, y, z).$$

Šinī gadījumā sistēma (4) top par

$$\tag{6} \left\{ \begin{aligned} &\varphi'(u)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}p\right) + \psi'(v)\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z}p\right) + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}p = 0, \\ &\varphi'(u)\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}q\right) + \psi'(v)\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}q\right) + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}q = 0. \end{aligned} \right.$$

Ja vēl reiz atvasina pēc x, resp. y, tad rodas 3 jauni vienādojumi, kas satur 4 patvaļīgus lielumus

$$\varphi'(u), \quad \varphi''(u), \quad \psi'(v), \quad \psi''(v)$$

un funkcijas z parciālos atvasinājumus līdz otrai kārtai ieskaitot. Kopā ar diviem vienādojumiem (5) ir 5 vienādojumu sistēma, no kuŗas ir iespējams izslēgt 4 patvaļīgos lielumus. Izslēgšanas rezultātā rodas noteikts otrās kārtas vienādojums (1).

Šo parciālo diferenciālvienādojumu var sastādīt arī tā, ka iepriekš no sistēmas (6) izslēdz vienu funkciju, piem. $\psi'(v)$, un pēc tam dabūto funkciju

$$(7)\quad \varphi'(u) = -\begin{vmatrix} \frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}p & \frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial z}p \\ \frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}q & \frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}q \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}p & \frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial z}p \\ \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}q & \frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}q \end{vmatrix}$$

atvasina pēc x, resp. y. Pirmās kārtas parciālais diferenciālvienādojums (7) ar vienu patvaļīgu funkciju $\varphi'(u)$ ir sastādāmā otrās kārtas parciālā diferenciālvienādojuma (1) t. s. **starpintegrāls**. Tas ietilpst vispārīgā formulā

$$(8)\qquad \Phi(f, g) = 0,$$

kuŗā f, g ir mainīgo x, y, z, p, q funkcijas

$$f = f(x, y, z, p, q), \quad g = g(x, y, z, p, q).$$

Patvaļīgās funkcijas Φ izslēgšanai atvasina sakaru (8) pēc x un y. Tad dabūtā vienādojumu sistēma

$$(9)\quad \begin{cases} \frac{\partial\Phi}{\partial f}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}p+\frac{\partial f}{\partial p}r+\frac{\partial f}{\partial q}s\right)+\frac{\partial\Phi}{\partial g}\left(\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial z}p+\frac{\partial g}{\partial p}r+\frac{\partial g}{\partial q}s\right) = 0, \\ \frac{\partial\Phi}{\partial f}\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}q+\frac{\partial f}{\partial p}s+\frac{\partial f}{\partial q}t\right)+\frac{\partial\Phi}{\partial g}\left(\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial z}q+\frac{\partial g}{\partial p}s+\frac{\partial g}{\partial q}t\right) = 0 \end{cases}$$

ir uzskatāma par homogenu lineāru algebrisku sistēmu attiecībā pret atvasinājumiem $\frac{\partial\Phi}{\partial f}$ un $\frac{\partial\Phi}{\partial g}$. Tā kā pēdējie lielumi nav reizē nulles, tad ir jāprasa, lai sistēmas (9) determinants būtu nulle. Tā tad eliminācijas rezultātā rodas vienādojums

$$(10)\quad \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}p+\frac{\partial f}{\partial p}r+\frac{\partial f}{\partial q}s & \frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial z}p+\frac{\partial g}{\partial p}r+\frac{\partial g}{\partial q}s \\ \frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}q+\frac{\partial f}{\partial p}s+\frac{\partial f}{\partial q}t & \frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial z}q+\frac{\partial g}{\partial p}s+\frac{\partial g}{\partial q}t \end{vmatrix}=0,$$

ko atklātā veidā izteic ar t. s. Monža (*Monge*) un Ampēra (*Ampère*) otrās kārtas parciālo diferenciālvienādojumu

$$(11)\qquad Rr+2Ss+Tt+U(rt-s^2)=V.$$

Te R, S, T, U, V ir viegli sastādāmas mainīgo x, y, z, p, q funkcijas, un proti

$$(12)\qquad U=\frac{\partial f}{\partial p}\cdot\frac{\partial g}{\partial q}-\frac{\partial f}{\partial q}\cdot\frac{\partial g}{\partial p}=\frac{\partial(f,g)}{\partial(p,q)}.$$

Speciālā gadījumā, kad $U=0$, Monža-Ampēra vienādojums (11) top par t. s. lineāro otrās kārtas vienādojumu ar parciāliem atvasinājumiem

$$(13)\qquad Rr+2Ss+Tt=V.$$

Te lineāritāte ir vienīgi attiecībā pret otrajiem atvasinājumiem r, s, t. Viegli atrod, ka lineāro vienādojumu (13) sastāda, izslēdzot no sakara (5) divas patvaļīgas funkcijas φ un ψ.

Iepriekšējie aprēķini rāda, ka no starpintegrāla (8) ar patvaļīgas funkcijas φ izslēgšanu sastāda Monža-Ampēra otrās kārtas vienādojumu (11) vai speciālā gadījumā — lineāro otrās kārtas vienādojumu (13).

II gadījums. Ir zināms (§ 15), ka no līniju kongruences var patvaļīgā veidā izvēlēties viena parametra saimi, un šīs saimes veidotās virsas var noteikt ar vienu lineāru pirmās kārtas parciālu diferenciālvienādojumu. Problēmu vispārināsim trīs parametru α, β, γ līniju saimei

$$(14)\qquad \begin{cases} f(x, y, z;\, \alpha, \beta, \gamma)=0, \\ g(x, y, z;\, \alpha, \beta, \gamma)=0. \end{cases}$$

Ja izvēlas patvaļīgā sakarībā divus parametrus

$$\beta = \varphi(\alpha), \quad \gamma = \psi(\alpha),$$

tad vienādojumu sistēma

$$\begin{cases} f(x, y, z;\, \alpha, \varphi(\alpha), \psi(\alpha)) = 0, \\ g(x, y, z;\, \alpha, \varphi(\alpha), \psi(\alpha)) = 0 \end{cases}$$

noteic virsu $z = z(x, y)$, kuŗai sastādīsim šādā veidā parciālo diferenciālvienādojumu.

Minētā sistēma definē arī α kā x, y funkciju $\alpha = \alpha(x, y)$, ko iedomājamies ievietotu vienādojumos (14). Ar vienādojuma $f(x, y, z;\, \alpha, \beta, \gamma) = 0$ parciālo atvasināšanu pēc x, resp. y, ievērojot minētās hipotēzes, dabū

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial z} p + \left[\dfrac{\partial f}{\partial \alpha} + \dfrac{\partial f}{\partial \beta} \cdot \dfrac{d\beta}{d\alpha} + \dfrac{\partial f}{\partial \gamma} \cdot \dfrac{d\gamma}{d\alpha}\right] \cdot \dfrac{\partial \alpha}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial z} q + \left[\dfrac{\partial f}{\partial \alpha} + \dfrac{\partial f}{\partial \beta} \cdot \dfrac{d\beta}{d\alpha} + \dfrac{\partial f}{\partial \gamma} \cdot \dfrac{d\gamma}{d\alpha}\right] \cdot \dfrac{\partial \alpha}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Salīdzinot pēdējās vienlīdzības, atrod proporciju

$$(15) \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial x} : \frac{\partial \alpha}{\partial y} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} p\right) : \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} q\right)$$

Tamlīdzīgā kārtā no sistēmas (14) otrā vienādojuma dabū

$$(16) \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial x} : \frac{\partial \alpha}{\partial y} = \left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial z} p\right) : \left(\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} q\right).$$

No formulām (15) un (16) secina sakaru

$$(17) \qquad f_1(x, y, z, p, q;\, \alpha, \beta, \gamma) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} p\right) : \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} q\right) - \\ - \left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial z} p\right) : \left(\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} q\right) = 0.$$

Ja pēdējo savukārt atvasina pēc x, resp. y, tad rodas divas vienlīdzības

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}+\dfrac{\partial f_1}{\partial z}p+\dfrac{\partial f_1}{\partial p}r+\dfrac{\partial f_1}{\partial q}s+\left[\dfrac{\partial f_1}{\partial \alpha}+\dfrac{\partial f_1}{\partial \beta}\cdot\dfrac{d\beta}{d\alpha}+\dfrac{\partial f_1}{\partial \gamma}\cdot\dfrac{d\gamma}{d\alpha}\right]\cdot\dfrac{\partial \alpha}{\partial x}=0, \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial y}+\dfrac{\partial f_1}{\partial z}q+\dfrac{\partial f_1}{\partial p}s+\dfrac{\partial f_1}{\partial q}t+\left[\dfrac{\partial f_1}{\partial \alpha}+\dfrac{\partial f_1}{\partial \beta}\cdot\dfrac{d\beta}{d\alpha}+\dfrac{\partial f_1}{\partial \gamma}\cdot\dfrac{d\gamma}{d\alpha}\right]\cdot\dfrac{\partial \alpha}{\partial y}=0, \end{cases}$$

no kuŗām var izteikt attiecību

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x}:\frac{\partial \alpha}{\partial y}.$$

Ja to salīdzina ar (15) un (16), tad sastāda divus vienādojumus

$$(18)\quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}p\right):\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}q\right)=\left(\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial z}p\right):\left(\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial z}q\right)=$$
$$=\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial z}p+\frac{\partial f_1}{\partial p}r+\frac{\partial f_1}{\partial q}s\right):\left(\frac{\partial f_1}{\partial y}+\frac{\partial f_1}{\partial z}q+\frac{\partial f_1}{\partial p}s+\frac{\partial f_1}{\partial g}t\right)$$

Uztveŗot tos kopīgi ar vienādojumiem (14), dabū četru vienādojumu sistēmu, no kuŗas var izslēgt trīs lielumus α, β, γ. Eliminācijas rezultātā rodas viens l i n e ā r s otrās kārtas parciāls diferenciālvienādojums

$$Rr+2Ss+Tt=V,$$

kas raksturo līniju saimes veidoto virsu neatkarīgi no izvēlētām funkcijām

$$\beta=\varphi(\alpha),\quad \gamma=\psi(\alpha).$$

Piemērs. Taisnes, kas parallēlas xy-plāksnei, veido trīs parametru līniju saimi

$$y=ax+\beta,\quad z=\gamma.$$

Lai tās veidotu virsu (t. s. l ī n i j a i n u v i r s u), ir jāuzskata divi parametri kā patvaļīgas otra parametra funkcijas, piemēram,

$$\beta=\varphi(\alpha),\quad \gamma=\psi(\alpha).$$

Patvaļīgo funkciju φ, ψ izslēgšanai, atvasina dotās saimes vienādojumus pēc x, resp. y. No dabūtajiem vienādojumiem

$$0=a+[x+\varphi'(\alpha)]\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial x},\quad p=\psi'(\alpha)\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial x},$$

resp.

$$1 = [x + \varphi'(a)] \cdot \frac{\partial a}{\partial y}, \quad q = \psi'(a) \cdot \frac{\partial a}{\partial y}$$

atrod proporcijas

$$\frac{\partial a}{\partial x} : \frac{\partial a}{\partial y} = p : q = -a : 1.$$

Tā tad ir sakars

$$p + qa = 0,$$

no kuŗa ar atvasināšanu pēc x, resp. y dabū divus jaunus sakarus

$$r + sa + q\frac{\partial a}{\partial x} = 0, \quad s + ta + q\frac{\partial a}{\partial y} = 0.$$

Ja no pēdējiem izteic attiecību $\frac{\partial a}{\partial x} : \frac{\partial a}{\partial y}$ un salīdzina ar atrasto, tad dabū formulu

$$\frac{r + sa}{s + ta} = \frac{p}{q}$$

Ievietojot te $a = -\frac{p}{q}$, dabū pēc pārveidojumiem meklējamās līnijainās virsas parciālo diferenciālvienādojumu

$$q^2r - 2pqs + p^2t = 0,$$

kā speciālā tipa līneāro otrās kārtas vienādojumu.

III gadījums. Pirmās kārtas parciālā diferenciālvienādojuma vispārīgo integrālu dabū (§ 22), noteicot aploceēju virsu viena parametra virsu saimei, ko patvaļīgi izvēlas no pilnīgā integrāla divu parametru virsu saimes.

Apskatīsim tamlīdzīgo problēmu par trīs parametru a, β, γ virsu saimi

(19) $$f(x, y, z; a, \beta, \gamma) = 0.$$

Liekot te patvaļīgus sakarus

$$\beta = \varphi(a), \quad \gamma = \psi(a),$$

dabū viena parametra virsu saimi

$$f\big(x, y, z;\ a, \varphi(a), \psi(a)\big) = 0,$$

kuŗai apliecēju virsu sastāda ar parametra a elimināciju no vienādojumu sistēmas

$$(20)\qquad \begin{cases} f\big(x, y, z;\ a, \varphi(a), \psi(a)\big) = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial a} + \dfrac{\partial f}{\partial \varphi}\cdot\varphi'(a) + \dfrac{\partial f}{\partial \psi}\cdot\psi'(a) = 0. \end{cases}$$

Var arī uztvert tā, ka sistēma (20) definē funkcijas

$$z = z(x, y), \quad a = a(x, y).$$

Tā tad arī β un γ vienādojumā (19) uzskatamas par x, y funkcijām. Ar šīs vienlīdzības (19) atvasināšanu pēc x, resp. y rodas sakari

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}p + \left[\frac{\partial f}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial \beta}\cdot\frac{d\beta}{da} + \frac{\partial f}{\partial \gamma}\cdot\frac{d\gamma}{da}\right]\cdot\frac{\partial a}{\partial x} = 0,$$

resp.

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}q + \left[\frac{\partial f}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial \beta}\cdot\frac{d\beta}{da} + \frac{\partial f}{\partial \gamma}\cdot\frac{d\gamma}{da}\right]\cdot\frac{\partial a}{\partial y} = 0,$$

kas vienkāršojas par

$$(21)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial z}p = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial z}q = 0, \end{cases}$$

ja ievēro formulas (20). Tamlīdzīgi kā ar sistēmu (14), atvasinot vienādojumus (21) pēc x, resp., y un salīdzinot atvasinājumu attiecību $\dfrac{\partial a}{\partial x} : \dfrac{\partial a}{\partial y}$, var sastādīt jaunu sakaru

$$(22)\qquad g(x, y, z, p, q, r, s, t;\ a, \beta, \gamma) = 0$$

ar otriem atvasinājumiem r, s, t. Ja no četriem vienādojumiem (19), (21), (22) izslēdz trīs parametrus a, β, γ, tad rodas meklējamās apliecējas virsas otrās kārtas parciālais diferenciālvienādojums formā

$$(1) \qquad F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0.$$

Piemērs. T e l p ā p l ā k s n e s

$$z = ax + \beta y + \gamma$$

veido trīs parametru virsu saimi. Ja liek patvaļīgus sakarus

$$\beta = \varphi(a), \quad \gamma = \psi(a),$$

tad rodas viena parametra plākšņu saime

$$z = ax + \varphi(a)\, y + \psi(a),$$

kuŗai apliecēja virsa ir t. s. i z k l ā j a m ā v i r s a. Lai noteiktu šīs virsas parciālo diferenciālvienādojumu, jāsastāda vienādojumi (21) un (22). Ar dotās plākšņu saimes vienādojumu atvasināšanu pēc x, resp. y dabū vienādojumus

$$p = a, \quad q = \beta = \varphi(a).$$

Ar vēlreizēju atvasināšanu rodas formulas

$$r = \frac{\partial a}{\partial x}, \quad s = \frac{\partial a}{\partial y}, \quad \text{resp.} \quad s = \varphi'(a) . \frac{\partial a}{\partial x}, \quad t = \varphi'(a) . \frac{\partial a}{\partial y}.$$

Ja no tām izslēdz $\frac{\partial a}{\partial x}$, $\frac{\partial a}{\partial y}$, $\varphi'(a)$, tad dabū i z k l ā j a m o v i r s u parciālo diferenciālvienādojumu

$$(23) \qquad rt - s^2 = 0,$$

kā speciālu Monža-Ampēra diferenciālvienādojumu (11).

Var arī sastādīt vienādojumu (23), izslēdzot šādā veidā patvaļīgu funkciju $\psi(p)$ no starpintegrāla

$$z = px + qy + \psi(p).$$

Ar starpintegrāla atvasināšanu pēc x, resp. y dabū formulas

$$p = p + rx + sy + \psi'(p) . r, \quad \text{resp.} \quad q = sx + ty + q + \psi'(p) . s$$

jeb

$$rx + sy = -\psi'(p) . r, \quad \text{resp.} \quad sx + ty = -\psi'(p) . s.$$

Ar šo formulu dalīšanu izslēdz $\psi'(p)$, un no proporcijas

$$\frac{rx + sy}{sx + ty} = \frac{r}{s}$$

pēc pārveidojumiem tiešām dabū vienādojumu (23).

§ 27. Lineāro otrās kārtas vienādojumu normālie tipi un to karakteristikas.

1. Apskatīsim lineārā otrās kārtas vienādojuma

$$(1) \quad Rr + 2Ss + Tt = V \quad \left(r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \; s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \; t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$$

veidu, kurā R, S, T ir vienīgi x, y funkcijas

$$R = a(x, y), \quad S = b(x, y), \quad T = c(x, y),$$

bet V ir arī atvasinājumu $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ funkcija

$$V = f(x, y, z, p, q).$$

Tādu lineāru vienādojumu

$$(2) \quad a(x, y)\, r + 2b(x, y)\, s + c(x, y)\, t = f(x, y, z, p, q)$$

var reducēt uz vienu no šādiem **normāliem tipiem**, lietojot argūmentu transformāciju

$$(3) \quad \begin{cases} x = x(\xi, \eta), \\ y = y(\xi, \eta). \end{cases}$$

Pieņemsim, ka funkcionāldeterminants

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix}$$

nav nulle; tādā gadījumā eksistē inversā transformācija

$$(4) \qquad \begin{cases} \xi = \xi(x, y), \\ \eta = \eta(x, y). \end{cases}$$

Ar transformāciju formulām (3) sastādītai funkcijai

$$z = z(x, y) = \bar{z}(\xi, \eta)$$

ir parciālie atvasinājumi

$$\bar{p} = \frac{\partial \bar{z}}{\partial \xi}, \quad \bar{q} = \frac{\partial \bar{z}}{\partial \eta}, \quad \bar{r} = \frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial \xi^2}, \quad \bar{s} = \frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial \xi \partial \eta}, \quad \bar{t} = \frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial \eta^2}.$$

Pastāv šādi sakari starp atvasinājumiem:

$$(5) \quad \begin{cases} p = \bar{p}\dfrac{\partial \xi}{\partial x} + \bar{q}\dfrac{\partial \eta}{\partial x}, \quad q = \bar{p}\dfrac{\partial \xi}{\partial y} + \bar{q}\dfrac{\partial \eta}{\partial y}, \\ r = \bar{r}\left(\dfrac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2\bar{s}\dfrac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial \eta}{\partial x} + \bar{t}\left(\dfrac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \bar{p}\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \bar{q}\dfrac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}, \\ s = \bar{r}\dfrac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial \xi}{\partial y} + \bar{s}\left(\dfrac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial \eta}{\partial y} + \dfrac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial \xi}{\partial y}\right) + \bar{t}\dfrac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial \eta}{\partial y} + \bar{p}\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \bar{q}\dfrac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}, \\ t = \bar{r}\left(\dfrac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + 2\bar{s}\dfrac{\partial \xi}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial \eta}{\partial y} + \bar{t}\left(\dfrac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + \bar{p}\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \bar{q}\dfrac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}. \end{cases}$$

Ar šīm formulām vienādojums (2) pēc substitūcijas top arī par lineāru otrās kārtas vienādojumu

$$(6) \qquad a_1 \bar{r} + 2b_1 \bar{s} + c_1 \bar{t} = f_1(\xi, \eta, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q}),$$

kuŗā apzīmē

$$f_1 = f(x, y, z, p, q) - \bar{p}\left(a\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}\right) -$$

$$- \bar{q} \cdot \left(a\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}\right)$$

un

$$(7)\quad \begin{cases} a_1 = a\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 + 2b\,\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial\xi}{\partial y} + c\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2, \\ b_1 = a\,\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial\eta}{\partial x} + b\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial\eta}{\partial y} + \dfrac{\partial\eta}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial\xi}{\partial y}\right) + c\,\dfrac{\partial\xi}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial\eta}{\partial y}, \\ c_1 = a\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + 2b\,\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial\eta}{\partial y} + c\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2 \end{cases}$$

2. Prasām, vai ir tādas transformācijas (4), ar kuŗām būtu $a_1 = c_1 = 0$? Tad transformētais vienādojums (6) reducētos uz normālo tipu

$$(8)\qquad \bar{s} = \bar{f}(\xi, \eta, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q}),$$

kuŗā funkcija

$$\bar{f} = \frac{1}{2b_1} f_1 \qquad (b_1 \neq 0).$$

Minētos nosacījumus $a_1 = c_1 = 0$ izpilda, ja funkcijas $\zeta = \xi$ un $\zeta = \eta$ ir nelineārā pirmās kārtas parciālā diferenciālvienādojuma

$$(9)\qquad ap_1^2 + 2bp_1 q_1 + cq_1^2 = 0 \qquad \left(p_1 = \frac{\partial\zeta}{\partial x},\ q_1 = \frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)$$

atrisinājumi. Sastādām šī vienādojuma Lagranža-Šarpī karakteristiku diferenciālo sistēmu

$$(10)\qquad \frac{dx}{P_1} = \frac{dy}{Q_1} = \frac{d\zeta}{p_1P_1 + q_1Q_1} = \frac{-\,dp_1}{X_1 + p_1Z_1} = \frac{-\,dq_1}{Y_1 + q_1Z_1}$$

Tā kā

$$P_1 = 2ap_1 + 2bq_1, \quad Q_1 = 2bp_1 + 2cq_1,$$

tad

$$p_1 P_1 + q_1 Q_1 = 2(ap_1^2 + 2bp_1q_1 + cq_1^2) = 0.$$

Tādēļ karakteristiku diferenciālai sistēmai (10) ir pirmintegrāls

$$(11)\qquad \zeta(x, y) = const.,$$

kas rāda, ka Lagranža-Šarpī karakteristikas ir plāksnēs, parallēlās xy-plāksnei. Šo karakteristiku projekcijas uz xy-plāksni, resp.

xy-plāksnes līnijas $\zeta(x, y) = const.$ sauc par **lineārā otrās kārtas vienādojuma (2) karakteristikām.**

Sastādīsim šo karakteristiku parasto diferenciālvienādojumu. No galīgās formas vienādojuma (11) ar atvasināšanu pēc x atrod sakaru

$$\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\zeta}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} = 0 \text{ jeb } p_1 + q_1\cdot\frac{dy}{dx} = 0.$$

Karakteristiku diferenciālā sistēma (10) ar lietotām P_1 un Q_1 izteiksmēm dod diferenciālvienādojumu

$$\frac{dx}{ap_1 + bq_1} = \frac{dy}{bp_1 + cq_1} \text{ jeb } \frac{dy}{dx} = \frac{bp_1 + cq_1}{ap_1 + bq_1}.$$

Ja te ievieto

$$p_1 = -q_1\frac{dy}{dx}$$

un pārveido, tad dabū vienādojuma (2) karakteristiku diferenciālvienādojumu

$$(12)\quad a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2b\frac{dy}{dx} + c = 0 \text{ jeb } ady^2 - 2bdxdy + cdx^2 = 0.$$

To pašu rezultātu atrod direkti no parciālā diferenciālvienādojuma (9), ja tajā izdara substitūciju

$$p_1 = -q_1\frac{dy}{dx}.$$

Karakteristikas tangentes leņķa koeficientu $k = \dfrac{dy}{dx}$ atrod no kvadrātvienādojuma

$$(13)\qquad ak^2 - 2bk + c = 0,$$

kam ir divas saknes

$$k_1 = \frac{b + \sqrt{b^2 - ac}}{a}, \quad k_2 = \frac{b - \sqrt{b^2 - ac}}{a} \qquad (a \neq 0)$$

ar zināmiem sakariem

$$k_1 + k_2 = \frac{2b}{a}, \quad k_2 = \frac{c}{a}$$

jeb

$$a(k_1 + k_2) = 2b, \quad ak_1k_2 = c.$$

Gadījumā, kad kvadrātvienādojuma (13) saknes ir d a ž ā d a s, t. i. kad tā diskriminants

$$b^2 - ac \neq 0,$$

diferenciālvienādojums (12) sadalās divos dažādos normālās formas diferenciālvienādojumos

$$(14) \qquad \frac{dy}{dx} = k_1\,(x, y), \quad \frac{dy}{dx} = k_2\,(x, y).$$

Šo diferenciālvienādojumu vispārīgajos integrālos

$$\varphi(x, y) = const., \quad \psi(x, y) = const.$$

funkcijas φ, ψ apmierina sakarus

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

jeb

$$(15) \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x} + k_1 \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial x} + k_2 \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0$$

Pēdējos sakarus var atrast direkti no parciālā diferenciālvienādojuma (9), ja tur izteic koeficientus

$$2b = a(k_1 + k_2), \quad c = a\,k_1k_2$$

Tad pēc dalīšanas ar $a \neq 0$ vienādojuma (9) kreiso pusi var sadalīt lineāros faktoros:

$$(p_1 + k_1q_1)(p_1 + k_2q_1) = 0;$$

pielīdzinot katru no tiem nullei, dabū lineārus pirmās kārtas diferenciālvienādojumus

$$p_1 + k_1 q_1 = 0, \quad p_1 + k_2 q_1 = 0 \qquad \left(p_1 = \frac{\partial \zeta}{\partial x},\ q_1 = \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right),$$

kas izteic sakarus (15), ja

$$\zeta = \varphi(x, y), \quad \text{resp.} \quad \zeta = \psi(x, y).$$

Lai reducētu otrās kārtas vienādojumu (2) uz normālo formu (8), transformācijas formulās (4) izvēlas funkcijas

$$(16) \qquad \xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y).$$

Tad ir tiešām koeficienti $a_1 = c_1 = 0$, bet $b_1 \neq 0$. Koeficientu b_1 pēc otrās formulas grupā (7) izteic ar formulu

$$b_1 = a \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} + b\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) + c \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y}.$$

Ja te izteic no sakariem (15) atrastos atvasinājumus

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -k_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -k_2 \frac{\partial \psi}{\partial y},$$

tad pēc pārveidojumiem dabū

$$b_1 = [a k_1 k_2 - b(k_1 + k_2) + c] \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y}.$$

Ievērojot sakņu k_1 un k_2 sakarības ar kvadrātvienādojuma (13) koeficientiem, atrod galīgi

$$b_1 = \frac{2}{a}(ac - b^2) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad (a \neq 0).$$

Tā kā saknes ir dažādas

$$k_1 \neq k_2,$$

tad

$$ac - b^2 \neq 0, \quad \text{resp.} \quad b_1 \neq 0.$$

3. Atšķirsim šādus gadījumus atkarībā no diskriminanta vērtības.

I **gadījums:**

$$b^2 - ac > 0 \text{ jeb } \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} < 0.$$

Šinī gadījumā saknes $k_1(x, y)$, $k_2(x, y)$ ir reālas funkcijas (ja a, b, c ir reālas funkcijas), un lietotā transformācija reducē doto vienādojumu (2) ar reālām dažādām karakteristikām uz normālu tipu

$$(17) \qquad \frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial \xi \partial \eta} = \bar{f}\left(\xi, \eta, \bar{z}, \frac{\partial \bar{z}}{\partial \xi}, \frac{\partial \bar{z}}{\partial \eta}\right).$$

Tāda veida vienādojumu sauc par h i p e r b o l i s k u (pēc analoģijas ar kōniku klasifikāciju).

II **gadījums:**

$$b^2 - ac < \text{ jeb } \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} > 0.$$

Te saknēm k_1 un k_2 un arī funkcijām ξ, η ir saistīti kompleksas vērtības. Tādēļ karakteristikas ir imāgināras. Lai ievestu reālus mainīgos X un Y, lieto transformāciju

$$(18) \qquad \xi = \frac{1}{2}(X + iY), \quad \eta = \frac{1}{2}(X - iY) \quad (i = \sqrt{-1}).$$

Tai inversā transformācija ir

$$X = \xi + \eta, \quad Y = \frac{1}{i}(\xi - \eta).$$

Lai reducētu reālā formā normālo vienādojumu (8), izteicam ar transformācijas formulām pirmās kārtas atvasinājumus

$$\bar{p} = \frac{\partial \bar{z}}{\partial \xi} = \frac{\partial Z}{\partial X} \cdot \frac{\partial X}{\partial \xi} + \frac{\partial Z}{\partial Y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial \xi} = \frac{\partial Z}{\partial X} + \frac{1}{i} \frac{\partial Z}{\partial Y}$$

un

$$\bar{q} = \frac{\partial \bar{z}}{\partial \eta} = \frac{\partial Z}{\partial X} \cdot \frac{\partial X}{\partial \eta} + \frac{\partial Z}{\partial Y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial \eta} = \frac{\partial Z}{\partial X} - \frac{1}{i} \frac{\partial Z}{\partial Y}.$$

Savukārt atvasinot $\bar{p}$ pēc η (vai $\bar{q}$ pēc ξ), atrod otrās kārtas atvasinājumu

$$\bar{s} = \frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial\xi\partial\eta} = \frac{\partial\bar{p}}{\partial\eta} = \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right) - i\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial Z}{\partial Y}\right)$$

jeb galīgi pēc pārveidojumiem

$$\bar{s} = \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}.$$

Šajās formulās Z ir jauno argūmentu X, Y funkcija, kas rodas izdarot funkcijā $\bar{z}(\xi, \eta)$ transformāciju (18). Normālā tipa vienādojums (8) šinī gadījumā galīgi reducējas uz otrās kārtas vienādojumu

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} = f\left(X, Y, Z, \frac{\partial Z}{\partial X}, \frac{\partial Z}{\partial Y}\right), \tag{19}$$

ko sauc par e l l ī p t i s k ā tipa vienādojumu.

III gadījums:

$$b^2 - ac = 0 \text{ jeb } \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = 0.$$

Šinī gadījumā saknes k_1 un k_2 ir vienlīdzīgas:

$$k_1 = k_2 = k_0 = \frac{b}{a}.$$

Karakteristiku (reālu) saimes sakrīt, un to diferenciālvienādojumam

$$\frac{dy}{dx} = k_0(x, y)$$

ir vispārīgais integrāls $\psi(x, y) = const.$, no kuŗa ar atvasināšanu pēc x atrod sakaru

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}k_0 = 0$$

Lai reducētu vienādojumu (2) normālā formā, lieto, piemēram, transformāciju

$$\xi = x, \quad \eta = \psi(x, y). \tag{20}$$

Tad pēc sakarības formulām (7) atrod jauno koeficientu nozīmes

$$a_1 = a, \quad b_1 = 0, \quad c_1 = 0,$$

ja ievēro funkcijas $\psi(x, y)$ konstatēto īpašību un saknes k_0 vērtību. Tā tad vienādojums (6) reducējas uz t. s. paraboliskā tipa vienādojumu

$$\frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial \xi^2} = \bar{f}\left(\xi, \eta, \bar{z}, \frac{\partial \bar{z}}{\partial \xi}, \frac{\partial \bar{z}}{\partial \eta}\right) \tag{21}$$

ar funkciju

$$\bar{f} = \frac{1}{a} f_1.$$

4. Ar parastiem apzīmējumiem raksta: elliptiskā tipa vienādojumu

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) \text{ jeb } r + t = f(x, y, z, p, q), \tag{19'}$$

hiperboliskā tipa vienādojumu

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) \quad \text{jeb} \quad s = f(x, y, z, p, q) \tag{17'}$$

un paraboliskā tipa vienādojumu

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) \quad \text{jeb} \quad r = f(x, y, z, p, q). \tag{21'}$$

Normālo (kanonisko) formu vienādojumiem karakteristikas ir šādas: ellīptiskajam tipam (19′) imāginārās taisnes

$$x + iy = const., \quad x - iy = const.,$$

hiperboliskam tipam (17′) reālās taisnes

$$x = const., \quad y = const.$$

un paraboliskajam tipam (21′) sakritušās divas taišņu sistēmas vienā

$$y = const.,$$

jo šo karakteristiku diferenciālvienādojumi attiecīgi ir

$$dy^2 + dx^2 = 0, \quad dxdy = 0, \quad dy^2 = 0.$$

Pazīstamākie otrās kārtas vienādojumu **piemēri** ir šādi.

1) Laplasa (*Laplace*) potenciālvienādojums

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{22}$$

ko apmierina, piem., logaritmiska potenciāla funkcija $u(x, y)$, pieder ellīptiskajam tipam.

2) Vibrejošās stīgas vienādojums (*D'Alembert*)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (a \text{ — konstante}) \tag{23}$$

saista stīgas elongāciju $u = u(x, t)$ ar vibrācijas laiku t, un tas ietilpst hiperboliskajā tipā.

3) Siltuma vadīšanas (lineārais) vienādojums (*Fourier*)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (a \text{ — konstante}) \tag{24}$$

izteic sakarību starp temperātūru $u(x, t)$ un laiku t. Šis vienādojums pieder paraboliskajam tipam.

Tuvāki minētos piemērus diskutē potenciālu teorijā un matēmatiskajā fizikā.

5. Lineāru homogenu vienādojumu

$$ar + 2bs + ct = 0 \qquad \left(r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},\ t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) \tag{25}$$

ar konstantiem koeficientiem a, b, c sauc par Eulera diferenciālvienādojumu. Tā karakteristiku

$$a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2b \cdot \frac{dy}{dx} + c = 0$$

tangentes leņķa koeficients $k = \frac{dy}{dx}$ ir konstants, un ir divas dažādas nozīmes

$$k_1 = \frac{b + \sqrt{b^2 - ac}}{a}, \quad k_2 = \frac{b - \sqrt{b^2 - ac}}{a}$$

ellīptiskā un hiperboliskā gadījumā, t. i. kad $b^2 - ac \neq 0$. No diferenciālvienādojumiem

$$\frac{dy}{dx} = k_1, \quad \frac{dy}{dx} = k_2$$

ar kvadrātūru dabū karakteristikas kā taisnes

$$(26) \qquad y - k_1 x = const., \quad y - k_2 x = const.$$

Tādēļ šinī gadījumā transformācija (16) top līneāra

$$\xi = y - k_1 x, \quad \eta = y - k_2 x,$$

un normālās formas vienādojums (8) ir

$$\bar{s} = \frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Pēdējā vienādojuma vispārīgais integrāls

$$\bar{z} = \varphi_1(\xi) + \varphi_2(\eta)$$

satur d i v a s patvaļīgas funkcijas φ_1 un φ_2. Tādēļ Eulera diferenciālvienādojuma (25) vispārīgais integrāls ir

$$(27) \qquad z = \varphi_1(y - k_1 x) + \varphi_2(y - k_2 x).$$

P a r a b o l i s k ā vienādojuma gadījumā, kad $b^2 - ac = 0$, saknes k_1 un k_2 ir vienlīdzīgas

$$k_1 = k_2 = k_0 = \frac{b}{a} \qquad (a \neq 0),$$

un karakteristikas ir divas taišņu saimes, kas sakrīt vienā

$$(28) \qquad y - k_0 x = const. \text{ jeb } ay - bx = const.$$

Te ar lineāru transformāciju

$$\xi = x, \quad \eta = ay - bx$$

reducē vienādojumu (25) uz normālu formu

$$\frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial \xi^2} = 0,$$

kam vispārīgais integrāls

$$\bar{z} = \xi \varphi_1(\eta) + \varphi_2(\eta)$$

satur divas patvaļīgas funkcijas φ_1 un φ_2. Tādēļ paraboliskā tipa Eulera diferenciālvienādojumam (25) ir vispārīgais integrāls

$$z = x\varphi_1(ay - bx) + \varphi_2(ay - bx). \tag{29}$$

Piemēri. 1. Laplasa potenciālvienādojuma (22) karakteristikas ir imāginārās taisnes

$$x + iy = const., \quad x - iy = const.$$

Tādēļ tā vispārīgais integrāls ir

$$u = \varphi_1(x + iy) + \varphi_2(x - iy) \qquad (i = \sqrt{-1}).$$

2. Vibrejošās stīgas vienādojumam (23) karakteristiku tangentes leņķa koeficientu k aprēķina no kvadrātvienādojuma

$$a^2k^2 = 1,$$

kam ir saknes

$$k_1 = \frac{1}{a}, \quad k_2 = -\frac{1}{a}.$$

Karakteristikas ir reālās taisnes

$$t - \frac{1}{a}x = const., \quad t + \frac{1}{a}x = const.$$

jeb

$$x - at = const., \quad x + at = const.$$

Tā tad stīgas vienādojuma (23) vispārīgais integrāls ir

$$u = \varphi_1(x - at) + \varphi_2(x + at).$$

6. Apskatīsim vispārīgā līneārā vienādojuma (1) šādus **speciālus tipus** ko viegli var integrēt.

I tips:

$$(30) \qquad s = f(x, y) \qquad \left(s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right).$$

Ievedot funkciju $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, izteic $s = \frac{\partial p}{\partial y}$, un otrās kārtas vienādojumu (30) reducē uz pirmās kārtas vienādojumu

$$\frac{\partial p}{\partial y} = f(x, y),$$

kam vispārīgais integrāls

$$p = \int f(x, y)\, dy + \varphi_1'(x)$$

satur vienu patvaļīgu funkciju $\varphi_1' = \frac{d\varphi_1}{dx}$. Ar integrāciju pēc x no dabūtā sakara atrod vienādojuma (30) vispārīgo integrālu

$$(31) \qquad z = \int\int f(x, y) dx dy + \varphi_1(x) + \varphi_2(y),$$

kas satur divas patvaļīgas funkcijas φ_1 un φ_2.

II tips:

$$(32) \qquad r = f(x, y) \qquad \left(r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)$$

vai

$$(32') \qquad t = f(x, y) \qquad \left(t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right).$$

Šos vienādojumus atrisina tamlīdzīgā kārtā kā I tipa vienādojumu; vispārīgie integrāli ir attiecīgi

$$(33) \qquad z = \int dx \int f(x, y)\, dx + x\,\varphi_1(y) + \varphi_2(y)$$

vai

$$(33') \quad z = \int dy \int f(x, y)\, dy + y\,\varphi_1(x) + \varphi_2(x).$$

III tips:

$$(34) \quad f_1(x,y,p)r+f_2(x,y,p)s=f_3(x,y,p) \quad \left(p=\frac{\partial z}{\partial x},\ r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ s=\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)$$

vai

$$(34') \quad f_1(x,y,q)s+f_2(x,y,q)t=f_3(x,y\ q) \quad \left(q=\frac{\partial z}{\partial y},\ s=\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},\ t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right).$$

Atrisināšanas metode abiem vienādojumiem ir analoga. Piemēram, lai integrētu pirmo vienādojumu, izteic

$$r = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad s = \frac{\partial p}{\partial y},$$

un reducē to uz lineāru pirmās kārtas diferenciālvienādojumu

$$f_1(x, y, p)\frac{\partial p}{\partial x} + f_2(x, y, p)\frac{\partial p}{\partial y} = f_3(x, y, p),$$

kam karakteristiku diferenciālā sistēma ir

$$\frac{dx}{f_1(x, y, p)} = \frac{dy}{f_2(x, y, p)} = \frac{dp}{f_3(x, y, p)}.$$

Ar šīs sistēmas divu neatkarīgu pirmintegrālu

$$\omega_1(x, y, p) = const., \quad \omega_2(x, y, p) = const.$$

funkcijām ω_1 un ω_2 sastādītais patvaļīgais sakars

$$\Phi(\omega_1, \omega_2) = 0$$

definē neatklātā veidā funkciju

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \varphi_1(x, y).$$

Ar kvadrātūru dabū vienādojuma (34) vispārīgo integrālu

$$z = \int \varphi_1(x, y)\, dx + \varphi_2(y).$$

IV tips:

$$(35)\quad f_1(p)r + f_2(q)s = 0 \quad \left(p = \frac{\partial z}{\partial x},\ q = \frac{\partial z}{\partial y},\ r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right).$$

Ievērojot sakarības formulas

$$r = \frac{\partial p}{\partial x},\quad s = \frac{\partial q}{\partial x},$$

var vienādojumu (35) izteikt formā

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\int f_1(p)\,dp + \int f_2(q)\,dq\right] = 0,$$

no kuŗas pēc kvadrātūras dabū sakaru

$$\int f_1(p)\,dp + \int f_2(q)\,dq = \varphi_1(y)$$

ar vienu patvaļīgu funkciju $\varphi_1(y)$. Šis sakars ir vienādojuma (35) starpintegrāls, un to var uztvert par pirmās kārtas diferenciālvienādojumu attiecībā pret z. Var izdarīt mainīgo separāciju

$$F_1(p) = F_2(q) + \varphi_1(y),$$

ja ieved funkcijas

$$F_1(p) = \int f_1(p)\,dp,\quad F_2(q) = -\int f_2(q)\,dq.$$

Integrācijā radīsies vēl viena patvaļīga funkcija, un otrās kārtas vienādojuma (35) vispārīgais integrāls saturēs pavisam divas patvaļīgas funkcijas.

Uzdevumi VIII.

Integrēt šādus (1.—6.) vienādojumus

$$\left(p = \frac{\partial z}{\partial x},\ q = \frac{\partial z}{\partial y},\ r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},\ t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2};\right.$$

φ_1 un φ_2 — patvaļīgas funkcijas).

1. $ys = x$. *Atb.* $z = \frac{x^2}{2}\ln y + \varphi_1(x) + \varphi_2(y)$.

2 $r = xy$. *Atb.* $z = \frac{1}{6} x^3 y + x\varphi_1(y) + \varphi_2(y)$.

3 $xr = np$. *Atb.* $z = x^{n+1} \varphi_1(y) + \varphi_2(y)$.

4. $xr = p + xy$. *Atb.* $z = \frac{1}{2} x^2 y \ln x + x^2 \varphi_1(y) + \varphi_2(y)$.

5. $ps - qr = 0$. *Atb.* $x = \varphi_1(z) + \varphi_2(y)$.

6 $r + (a + b)s + abt = xy$. *Atb.* $z = -\frac{a+b}{24} x^4 + \frac{x^3 y}{6} +$
$+\varphi_1(y - bx) + \varphi_2(y - ax)$.

7. Noteikt vienādojuma $xr + 2p = 0$ integrālvirsu, kas iet caur dotajām parabolām

$$z = 0, \; y^2 = 4ax \quad \text{un} \quad z = 1, \; y^2 = -4ax.$$

Atb. Kōniskā virsa $8axz = 4ax - y^2$.

8. Ja sfērām ar pastāvīgu radiju R centri atrodas uz kaut kādas līnijas telpā, tad šo sfēru saimes apliecēja virsa ir t. s. kanālvirsa. Sastādīt kanālvirsu parciālo diferenciālvienādojumu.

Atb. $R^2(rt - s^2) + R[(1 + p^2)t + (1 + q^2)r - 2pqs]\sqrt{1 + p^2 + q^2} +$
$+ (1 + p^2 + q^2)^2 = 0$.

VARIĀCIJU RĒĶINU PAPILDINĀJUMI.

IX. Brīvā ekstrēma problēmas.

§ 28. Problēmas ar divām un vairāk funkcijām. Kanoniskie vienādojumi.

1. Variāciju rēķinu vienkāršāko vispārīgo problēmu (I d., § 30): „noteikt intervallā (x_0, x_1) funkciju $y(x)$, kas pieņem dotās nozīmes $y_0 = y(x_0)$, $y_1 = y(x_1)$ intervalla galos un dod noteiktajam integrālam

$$(1) \qquad I = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')dx \qquad \left(y' = \frac{dy}{dx}\right)$$

ekstrēmu" var paplašināt šādos veidos. 1) Var meklēt divas vai vairāk nezināmās funkcijas. 2) Dotā zemintegrāla funkcija f var saturēt nezināmās funkcijas $y(x)$ augstākās kārtas atvasinājumus. 3) Nezināmo funkciju, resp. līniju $y = y(x)$ var noteikt parametriskā formā $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$. 4) Var apskatīt dubultintegrāla ekstrēma problēmu ar nezināmo divu mainīgo funkciju. 5) Konstanto integrācijas robežu x_0, x_1 vietā var ievest mainīgas robežas.

2. Apskatīsim vispirms pirmo paplašinājumu, kad jānoteic intervallā (x_0, x_1) divas funkcijas $y = y(x)$, $z = z(x)$, kas pieņem intervalla galos dotās nozīmes

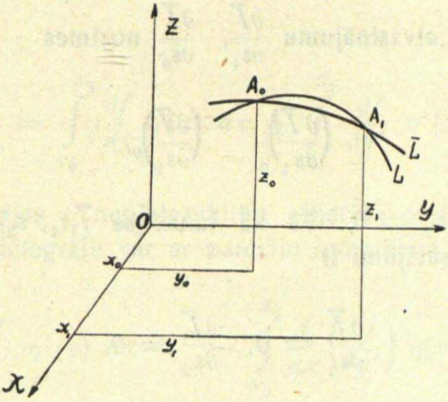
$$(2) \qquad y_0 = y(x_0), \ z_0 = z(x_0); \quad y_1 = y(x_1), \ z_1 = z(x_1)$$

un pārvērš noteikto integrālu

$$(3) \qquad I = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, z, y', z')dx \qquad \left(y' = \frac{dy}{dx}, \ z' = \frac{dz}{dx}\right)$$

ar konstantām robežām ekstrēmā I_{extr}.

Meklējamās funkcijas attēlo (zīm. 11) pret xyz-koordinātu sistēmu kā līniju L, kas iet caur dotajiem punktiem $A_0(x_0, y_0, z_0)$ un $A_1(x_1, y_1, z_1)$.



Zīm. 11.

Pieņemsim, ka tāda līnija eksistē. Tā ietilpinama līniju saimē

$$(4) \qquad \bar{y}(x\,;\,\varepsilon_1) = y(x) + \varepsilon_1 \eta(x), \quad \bar{z}(x\,;\,\varepsilon_2) = z(x) + \varepsilon_2 \zeta(x),$$

kad saimes parametru ε_1, ε_2 nozīmes ir $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 0$. Lai varietā līnija $\bar{L}$ ietu caur dotajiem punktiem A_0 un A_1, ir jāprasa, ka patvaļīgas funkcijas $\eta(x)$ un $\zeta(x)$ apmierina nosacījumus

$$\eta(x_0) = \eta(x_1) = \zeta(x_0) = \zeta(x_1) = 0.$$

Pieņemam, ka lietotām funkcijām eksistē vajadzīgie nepārtraukti atvasinājumi un ka varietā līnija $\bar{L}$ ir meklējamās līnijas pietiekoši tuvā apkārtnē, t. i. lai būtu

$$|\, y - \bar{y} \,| < \sigma, \quad |\, z - \bar{z} \,| < \sigma$$

ar pietiekoši mazu pozitīvu skaitli σ.

Vispārinot variāciju procesu, kas lietots problēmai ar vienu nezināmo funkciju (I d, § 31.), ar varieto līniju (4) sastādam parametru ε_1, ε_2 funkciju

$$(5)\qquad \bar{I}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \int_{x_0}^{x_1} f\left(x, \bar{y}(x;\varepsilon_1), \bar{z}(x;\varepsilon_2), \bar{y}'(x;\varepsilon_1), \bar{z}'(x;\varepsilon_2)\right)dx$$

un tās parciālo atvasinājumu $\frac{\partial \bar{I}}{\partial \varepsilon_1}$, $\frac{\partial \bar{I}}{\partial \varepsilon_2}$ nozīmes

$$\left(\frac{\partial \bar{I}}{\partial \varepsilon_1}\right)_0, \quad \left(\frac{\partial \bar{I}}{\partial \varepsilon_2}\right)_0,$$

kad $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 0$. Tā kā funkcijas $\bar{I}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ ekstrēma nepieciešamie nosacījumi ir

$$\frac{\partial \bar{I}}{\partial \varepsilon_1} = 0, \quad \frac{\partial \bar{I}}{\partial \varepsilon_2} = 0$$

un dotais integrāls (3) ietilpst sastādītajā (5) ar $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, tad meklējamām funkcijām $y(x)$, $z(x)$ ir jāapmierina **n e p i e c i e š a m i e** nosacījumi

$$(6)\qquad \left(\frac{\partial \bar{I}}{\partial \varepsilon_1}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial \bar{I}}{\partial \varepsilon_2}\right)_0 = 0.$$

Abus šos nosacījumus var apvienot vienā, sistēmai (6) ekvivalentā, nosacījumā par integrāla I **p i r m o v a r i ā c i j u**

$$(7)\qquad \delta I = \varepsilon_1 \left(\frac{\partial \bar{I}}{\partial \varepsilon_1}\right)_0 + \varepsilon_2 \left(\frac{\partial \bar{I}}{\partial \varepsilon_2}\right)_0 = 0,$$

ja par pirmo variāciju nosauc pilnās variācijas attīstījuma

$$\bar{I}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) - I = \varepsilon_1 \left(\frac{\partial \bar{I}}{\partial \varepsilon_1}\right)_0 + \varepsilon_2 \left(\frac{\partial \bar{I}}{\partial \varepsilon_2}\right)_0 + \ldots.$$

lineāro (attiecībā pret ε_1 un ε_2) sastāvdaļu.

Atvasinot integrālu (5), piem., pēc parametra ε_1 un izteicot

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial \varepsilon_1} = \eta(x), \quad \frac{\partial \bar{y}'}{\partial \varepsilon_1} = \eta'(x),$$

dabū formulu

$$\frac{\partial \bar{I}}{\partial \varepsilon_1} = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \eta(x) + \frac{\partial f}{\partial \bar{y}'} \eta'(x) \right] dx,$$

un tā tad ir

$$\left(\frac{\partial \bar{I}}{\partial \varepsilon_1}\right)_0 = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial f}{\partial y} \eta(x)\, dx + \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial f}{\partial y'} \eta'(x)\, dx,$$

ja ievēro funkcijas f nepārtrauktību attiecībā pret tās argūmentiem. Pēdējo integrālu var ar parciālo integrāciju izteikt ar

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial f}{\partial y'} \eta'(x)\, dx = - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) \eta(x)\, dx,$$

jo funkcija $\eta(x)$ intervalla gala punktos ir nulle. Tādēļ ar funkcijas f variācijas atvasinājumu pēc y

(8) $$[f]_y = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)$$

izteicams lielums

(9) $$\left(\frac{\partial \bar{I}}{\partial \varepsilon_1}\right)_0 = \int_{x_0}^{x_1} [f]_y\, \eta(x)\, dx.$$

Tamlīdzīgā kārtā atrod formulu

(9′) $$\left(\frac{\partial \bar{I}}{\partial \varepsilon_2}\right)_0 = \int_{x_0}^{x_1} [f]_z\, \zeta(x)\, dx$$

ar funkcijas f variācijas atvasinājumu pēc z:

(8′) $$[f]_z = \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z'}\right).$$

Lietojot formulas (9), (9′) un funkciju variācijas

$$\delta y = \bar{y} - y = \varepsilon_1 \eta(x), \quad \delta z = \bar{z} - z = \varepsilon_2 \zeta(x),$$

izteic integrāla I pirmo variāciju δI formā

$$(10) \qquad \delta I = \int_{x_0}^{x_1} \{[f]_y\, \delta y + [f]_z\, \delta z\}\, dx.$$

No integrāla (3) ekstrēma nepieciešamiem nosacījumiem (6), resp. (7) pēc variāciju rēķinu pamatlemmas (I d., § 31.) secina

$$[f]_y = 0, \quad [f]_z = 0$$

jeb

$$(11) \quad \begin{cases} -[f]_y = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y'}\right) - \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 & \left(y' = \dfrac{dy}{dx}\right), \\ -[f]_z = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z'}\right) - \dfrac{\partial f}{\partial z} = 0 & \left(z' = \dfrac{dz}{dx}\right). \end{cases}$$

2. Atklātā veidā izteic šos Eulera diferenciālvienādojumus ar

$$(12) \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial y'^2} y'' + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y' \partial z'} z'' + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y' \partial y} y' + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y' \partial z} z' + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y' \partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z' \partial y'} y'' + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z'^2} z'' + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z' \partial y} y' + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z' \partial z} z' + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z' \partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Ja determinants

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial y'^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y' \partial z'} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z' \partial y'} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z'^2} \end{vmatrix}$$

nav nulle, tad no diferenciālvienādojumu sistēmas (12) atklātā formā var izteikt otros atvasinājumus

$$(13) \qquad \begin{cases} y'' = f_1(x, y, z, y', z'), \\ z'' = f_2(x, y, z, y', z'). \end{cases}$$

Diferenciālā sistēma (12) vai (13) ir ceturtās kārtas sistēma, un tās vispārīgais integrāls

$$y = y(x; C_1, C_2, C_3, C_4), \quad z = z(x; C_1, C_2, C_3, C_4)$$

satur četras patvaļīgas integrācijas konstantes C_1, C_2, C_3, C_4. Šīs konstantes nosaka, ievērojot četrus dotos robežnosacījumus

$$(2) \quad y_0 = y(x_0),\ z_0 = z(x_0);\quad y_1 = y(x_1),\ z_1 = z(x_1).$$

Eulera diferenciālvienādojumu sistēmas (11) atrisinājumus sauc par ekstrēmalām funkcijām, resp. ģeometriskā interpretācijā par ekstrēmālēm. Ar tām atrod vienīgi integrāla I stacionāras vērtības I_{stat}, kuŗās eventuāli var būt arī ekstrēmalās vērtības I_{extr}, t. i. I_{min} vai I_{max}. Ekstrēma eksistence ir sevišķi jākonstatē.

3. **Piemērs.** Brachistochronas problēmai (I d., § 30) hipotēze, ka materiālais punkts kustas vertikālā plāksnē, nav jāpostulē, bet gan tā ir secinama ar sekojošiem aprēķiniem. Ja izvēlas xyz-koordinātu sistēmu tā, ka x-ass iet vertikāli lejup, tad no krišanas ātruma formulas

$$v = \sqrt{2gx}$$

izteic krišanas laiku

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1 + y'^2 + z'^2}{x}}\, dx,$$

lietojot trajektorijas $y = y(x)$, $z = z(x)$ loka s sakarību ar laiku t un ātrumu

$$v = \frac{ds}{dt}$$

un loka atvasinājuma formulu

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} \qquad \left(y' = \frac{dy}{dx},\ z' = \frac{dz}{dx}\right)$$

Brachistochronas problēmai telpā ir jādiskutē integrāla

$$I = \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1 + y'^2 + z'^2}{x}}\, dx$$

minims. Tā kā šinī gadījumā funkcija f nav atkarīga no y un z, tad

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

un Eulera diferenciālvienādojumu sistēmai (11) ir divi pirmintegrāli

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = C_1, \quad \frac{\partial f}{\partial z'} = C_2,$$

ko atklātā veidā izteic ar

$$\frac{y'}{\sqrt{x(1 + y'^2 + z'^2)}} = C_1, \quad \frac{z'}{\sqrt{x(1 + y'^2 + z'^2)}} = C_2.$$

No šiem sakariem var sastādīt jaunu sakaru

$$C_2\, y' - C_1\, z' = 0,$$

kas integrālformā

$$C_2\, y - C_1\, z = const.,$$

izteic vertikalās plāksnes (parallēlas x-asij). Ja izlieto problēmas robežnosacījumus

$$y(0) = 0, \quad z(0) = 0, \quad y(x_1) = y_1, \quad z(x_1) = z_1,$$

tad integrācijas konstantu nozīmes var pilnīgi noteikt, un atrod vienu vertikalu plāksni, kas iet caur sākuma stāvokli $O(0, 0, 0)$ un beigu stāvokli $A_1(x_1, y_1, z_1)$.

Brachistochrona ir šīs plāksnes līnija. Ja izvēlas minēto plāksni par xy-plāksni, tad brachistochronas problēmas diskusija ir izdarāma tāpat, kā I daļas 34. §-fā.

4. Sistēmu (11) var reducēt uz t. s. **kanonisko vienādojumu** sistēmu, ievedot jaunos mainīgos

$$(14) \qquad p_1 = \frac{\partial f}{\partial y'}, \quad p_2 = \frac{\partial f}{\partial z'}.$$

Tā kā šie atvasinājumi ir funkcijas

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \varphi_1(x, y, z, y', z'), \quad \frac{\partial f}{\partial z'} = \varphi_2(x, y, z, y', z'),$$

tad no vienādojumiem (14) apgrieztā veidā var izteikt atvasinājumus

$$(15)\quad y' = \psi_1(x, y, z, p_1, p_2), \quad z' = \psi_2(x, y, z, p_1, p_2),$$

kad funkcionāldeterminants

$$\frac{\partial(p_1, p_2)}{\partial(y', z')} = \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial z'^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial z'}\right)^2 = \Delta$$

nav nulle. Transformāciju (15) sauc par kanonisko jeb par Ležandra (*Legendre*) transformāciju. Ar to var izteikt t. s. Hamiltona funkciju

$$(16)\quad H = p_1 y' + p_2 z' - f(x, y, z, y', z')$$

atkarībā no kanoniskajiem mainīgiem y, z, p_1, p_2 šādā veidā:

$$(16')\quad H = p_1 \psi_1 + p_2 \psi_2 - f(x, y, z, \psi_1, \psi_2) = H(x, y, z, p_1, p_2).$$

Transformēsim Eulera vienādojumu sistēmu (11), ievedot tajā kanoniskos mainīgos un Hamiltona funkciju H. Ar mainīgiem (14) sistēma (11) top par

$$\frac{dp_1}{dx} = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{dp_2}{dx} = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Lai izteiktu lielumus $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ un y', z' ar Hamiltona funkciju un kanoniskajiem mainīgiem, sastādam funkcijas H totālo diferenciālu sekojošos divos veidos. Pēc formulas (16) dabū

$$dH = p_1 dy' + y' dp_1 + p_2 dz' + z' dp_2 - $$
$$- \left[\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + p_1 dy' + p_2 dz'\right]$$

jeb

$$dH = -\frac{\partial f}{\partial x} dx - \frac{\partial f}{\partial y} dy - \frac{\partial f}{\partial z} dz + y' dp_1 + z' dp_2,$$

bet pēc formulas (16') ir

$$dH = \frac{\partial H}{\partial x} dx + \frac{\partial H}{\partial y} dy + \frac{\partial H}{\partial z} dz + \frac{\partial H}{\partial p_1} dp_1 + \frac{\partial H}{\partial p_2} dp_2.$$

Salīdzinot abas diferenciāla izteiksmes, secinam šādus sakarus

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{\partial H}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{\partial H}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial z}=-\frac{\partial H}{\partial z},\ y'=\frac{\partial H}{\partial p_1},\ z'=\frac{\partial H}{\partial p_2}.$$

Tā tad sistēma (11) ir ekvivalenta ar četru kanonisko (*Hamilton*) vienādojumu sistēmu

$$(17)\quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\partial H}{\partial p_1}, & \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{\partial H}{\partial p_2}, \\ \dfrac{dp_1}{dx}=-\dfrac{\partial H}{\partial y}, & \dfrac{dp_2}{dx}=-\dfrac{\partial H}{\partial z}, \end{cases}$$

kuŗā katrs vienādojums ir normālās formas (pirmās kārtas) diferenciālvienādojums.

Tādā veidā izteic analitiskā dinamikā kustības vienādojumus, ja materiālā sistēma ir holonoma un tai ir divas brīvības pakāpes.

5. Variāciju rēķinu vispārīgai problēmai

$$(18)\quad I=\int_{x_0}^{x_1} f\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n'\right)dx = extr.$$

ar n nezināmām funkcijām $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x)$, kas apmierina robežnosacījumus

$$(19)\quad \begin{cases} y_1(x_0)=y_{10}, & y_2(x_0)=y_{20}, \ldots, & y_n(x_0)=y_{n0}, \\ y_1(x_1)=y_{11}, & y_2(x_1)=y_{21}, \ldots, & y_n(x_1)=y_{n1}, \end{cases}$$

var tamlīdzīgā kārtā kā iepriekš sastādīt Eulera diferenciālvienādojumu sistēmu

$$(20)\quad \begin{cases} -[f]_{y_1}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y_1'}\right)-\dfrac{\partial f}{\partial y_1}=0, \\ -[f]_{y_2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y_2'}\right)-\dfrac{\partial f}{\partial y_2}=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ -[f]_{y_n}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y_n'}\right)-\dfrac{\partial f}{\partial y_n}=0. \end{cases}$$

Ar kanoniskajiem mainīgiem

$$y_1, y_2, \ldots, y_n, \quad p_1 = \frac{\partial f}{\partial y_1'}, \; p_2 = \frac{\partial f}{\partial y_2'}, \ldots, p_n = \frac{\partial f}{\partial y_n'}$$

un Hamiltona funkciju

$$(21) \quad H = p_1 y_1' + p_2 y_2' + \ldots + p_n y_n' - f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n'),$$

izteiktu formā

$$H = H(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, p_1, p_2, \ldots, p_n),$$

n vienādojumus (20) reducē uz $2n$ kanoniskajiem vienādojumiem

$$(22) \quad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = \dfrac{\partial H}{\partial p_1}, & \dfrac{dy_2}{dx} = \dfrac{\partial H}{\partial p_2}, \ldots, \dfrac{dy_n}{dx} = \dfrac{\partial H}{\partial p_n}, \\[2ex] \dfrac{dp_1}{dx} = -\dfrac{\partial H}{\partial y_1}, & \dfrac{dp_2}{dx} = -\dfrac{\partial H}{\partial y_2}, \ldots, \dfrac{dp_n}{dx} = -\dfrac{\partial H}{\partial y_n}. \end{cases}$$

§ 29. Problēmas ar augstākās kārtas atvasinājumiem.

1. Variāciju rēķinu problēmai: noteikt funkciju $y(x)$, kas dod noteiktajam integrālam

$$(1) \quad I = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) dx$$

ekstrēmu un apmierina $2n$ robežnosacījumus

$$(2) \quad \begin{cases} y_0 = y(x_0), \; y_0' = y'(x_0), \; y_0'' = y''(x_0), \ldots, y_0^{(n-1)} = y^{(n-1)}(x_0), \\ y_1 = y(x_1), \; y_1' = y'(x_1), \; y_1'' = y''(x_1), \ldots, y_1^{(n-1)} = y^{(n-1)}(x_1), \end{cases}$$

sastāda vispārināto Eulera diferenciālvienādojumu šādā veidā. Meklējamās līnijas pietiekoši tuvā apkārtnē varieto līniju nosaka ar vienādojumu

$$\bar{y}(x; \varepsilon) = y(x) + \varepsilon\eta(x),$$

kuŗā ε parametrs un $\eta(x)$ kautkāda funkcija, kas ir nepārtraukta kopā ar tās pirmajiem n atvasinājumiem un izvēlēta ar nosacījumiem

$$(3)\quad \begin{cases} \eta(x_0) = \eta'(x_0) = \eta''(x_0) = \ldots = \eta^{(n-1)}(x_0) = 0, \\ \eta(x_1) = \eta'(x_1) = \eta''(x_1) = \ldots = \eta^{(n-1)}(x_1) = 0. \end{cases}$$

Sastādam parametra ε funkciju

$$\bar{I}(\varepsilon) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, \bar{y}, \bar{y}', \bar{y}'', \ldots, \bar{y}^{(n)})\, dx$$

un atrodam tās atvasinājuma $\frac{d\bar{I}}{d\varepsilon}$ vērtību

$$(4)\quad \left(\frac{d\bar{I}}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial f}{\partial y}\eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y'}\eta'(x) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\eta^{(n)}(x)\right] dx.$$

Sadalot summas integrālu labajā pusē $n + 1$ integrālu summā un izdarot parciālo integrāciju locekļiem, kas satur $\eta(x)$ atvasinājumus, pēc vispārīgās formulas

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial f}{\partial y^{(k)}}\eta^{(k)}(x)dx = \left[\frac{\partial f}{\partial y^{(k)}}\eta^{(k-1)}(x) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y^{(k)}}\right)\eta^{(k-2)}(x) + \ldots + \right.$$

$$\left. + (-1)^{k-1}\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}\left(\frac{\partial f}{\partial y^{(k)}}\right)\eta(x)\right]_{x=x_0}^{x=x_1} + (-1)^k \int_{x_0}^{x_1} \frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{\partial f}{\partial y^{(k)}}\right)\eta(x)\, dx,$$

var izteikt lielumu (4) pēc nosacījumiem (3) formā

$$(5)\quad \left(\frac{d\bar{I}}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \int_{x_0}^{x_1} [f]_y\, \eta(x)\, dx,$$

Te $[f]_y$ apzīmē vispārināto funkcijas variācijas atvasinājumu pēc y

$$(6)\quad [f]_y = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) + \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right).$$

Ar formulu (5) dabū integrāla I pirmo variāciju

$$(7) \qquad \delta I = \varepsilon \left(\frac{\partial \bar{I}}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \int_{x_0}^{x_1} [f]_y \delta y \, dx.$$

Variāciju rēķinu pamatlemmu (I d., § 31) var paplašināt arī funkcijai $\eta(x)$, kas ir nepārtraukta kopā ar tās pirmajiem n atvasinājumiem un apmierina nosacījumus (3). Minētās lemmas pierādījumam lietotā funkcija vispārīgā gadījumā būtu jāizvēlas parciālos intervallos šādā veidā:

$$\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{ja } x_0 \leqslant x \leqslant \xi_1, \\ (x - \xi_1)^{n+1} (\xi_2 - x)^{n+1}, & \text{ja } \xi_1 \leqslant x \leqslant \xi_2, \\ 0, & \text{ja } \xi_2 \leqslant x \leqslant x_1. \end{cases}$$

No ekstrēma nepieciešamā nosacījuma

$$\left(\frac{d\bar{I}}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = 0 \quad \text{vai} \quad \delta I = 0$$

pēc vispārinātās pamatlemmas atrod sakaru

$$(8) \qquad [f]_y = 0,$$

kas ir Eulera diferenciālvienādojums. Atklātā veidā to izteic ar variācijas atvasinājuma simbola $[f]_y$ pārveidoto formu kā $(2n)$. kārtas diferenciālvienādojumu, kam vispārīgajā integrālā

$$y = y(x; C_1, C_2, \ldots, C_{2n})$$

integrācijas konstantes $C_1, C_2, \ldots, C_{2n}$ nosaka ar $2n$ robežnosacījumiem (2).

2. Vispārīgai variaciju rēķinu problēmai ar vairāk nezināmām funkcijām un to augstākās kārtas atvasinājumiem sastāda Eulera diferenciālvienādojumu sistēmu tamlīdzīgā veidā kā te un iepriekšējā §-fā. Piemēram, kad ir jānoteic divas funkcijas $y(x)$, $z(x)$, kas dod integrālam

$$(9) \quad I = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, z, y', z', \ldots, y^{(n)}, z^{(n)})\, dx$$

ekstrēmu un apmierina vajadzīgos robežnosacījumus intervalla gala punktos, tad sastāda šādu diferenciālvienādojumu sistēmu

$$(10) \quad \begin{cases} [f]_y = \dfrac{\partial f}{\partial y} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y'}\right) + \ldots + (-1)^n \dfrac{d^n}{dx^n}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right) = 0, \\ [f]_z = \dfrac{\partial f}{\partial z} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z'}\right) + \ldots + (-1)^n \dfrac{d^n}{dx^n}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z^{(n)}}\right) = 0. \end{cases}$$

§ 30. Problēmas parametriskā formā.

1. Vienkāršakā variāciju rēķinu problēmā

$$(1) \quad I = \int_{x_0}^{x_1} f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) dx = extr., \; y_0 = y(x_0), \; y_1 = y(x_1)$$

meklējamai funkcijai $y(x)$ jābūt, starp citu, vienvērtīgai un ar galīgu pirmo atvasinājumu $y'(x) = \dfrac{dy}{dx}$. Ģeometriskā interpretacijā nosacījumi izteic, ka meklējamā līnija L krustojas ar taisni, parallēlu y-asij, tikai vienā punktā, un tās tangente nav parallēla y-asij. Piemēram, līnija L nevar būt taisne $x = const.$ Šos ierobežojumus novērš, lietojot meklējamās līnijas L parametriskos vienādojumus

$$(2) \quad x = x(t), \quad y = y(t),$$

kuŗos parametrs t mainas noteiktās robežās

$$t_0 \leqslant t \leqslant t_1,$$

kas atbilst doto punktu $A_0(x_0, y_0)$, $A_1(x_1, y_1)$ koordinātu vērtībām

$$x_0 = x(t_0), \quad y_0 = y(t_0); \quad x_1 = x(t_1), \quad y_1 = y(t_1).$$

Variāciju rēķinu problēmas parametriskā formā sistēmatiski ir pētījis V e i e r š t r a s s (*Weierstrass*) pag. (XIX) gadusimteņa otrajā pusē. Te apskatīsim Veierštrasa teōrijas elementus.

Par funkcijām (2) pieņemam hipotēzes, ka tās ir nepārtrauktas funkcijas kopā ar pirmiem atvasinājumiem*)

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt},$$

kas nav reizē nulles. Pēdējo nosacījumu var izteikt ar nevienlīdzību

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \neq 0,$$

un ģeometriski tas norāda, ka līnijai L nav dubultpunktu (vispār nav singulāru punktu). Tā kā pastāv sakarības formulas

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}, \quad dx = \dot{x}\, dt,$$

tad ar parametrisko transformāciju (2) izteic noteikto integrālu (1) formā

$$(3) \qquad I = \int_{t_0}^{t_1} F(x, y, \dot{x}, \dot{y})\, dt,$$

kurā funkcija

$$F(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \dot{x}\, f\left(x, y, \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)$$

ir pirmās pakāpes (dimensijas) pozitīvi-homogenā funkcija attiecībā pret atvasinājumiem $\dot{x}$, $\dot{y}$. Tiešām, ar pozitīvu proporcionālitātes koeficientu λ pastāv raksturīgais sakars

$$(4) \qquad F(x, y, \lambda\dot{x}, \lambda\dot{y}) = \lambda F(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \qquad (\lambda > 0).$$

Otrādi, ja $F(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ ir pirmās pakāpes pozitīvi-homogena funkcija attiecībā pret $\dot{x}$, $\dot{y}$, tad integrāla (3) variāciju problēmā meklējamā līnija (2) nav atkarīga no parametra t izvēles. Tiešām, ja jauno parametru τ saista ar parametru t formā

$$t = \varphi(\tau) \qquad (\varphi'(\tau) > 0)$$

*) Šādu apzīmējumu atvasinājumiem lieto teorētiskā mēchanikā, ja t — kustības laiks.

un maiņas intervallam $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ atbilst intervalls $\tau_0 \leqslant \tau \leqslant \tau_1$, tad integrālu

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} F\left(x, y, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}\right) d\tau$$

var izteikt ar

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} F\left(x, y, \dot{x}\frac{d\varphi}{d\tau}, \dot{y}\frac{d\varphi}{d\tau}\right) d\tau,$$

ko pēc formulas (4) ar $\lambda = \frac{d\varphi}{d\tau}$ var pārveidot par

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} F\left(x, y, \dot{x}, \dot{y}\right) \cdot \frac{d\varphi}{d\tau}\, d\tau \quad \text{jeb} \quad \int_{t_0}^{t_1} F(x, y, \dot{x}, \dot{y})\, dt.$$

Tāpēc meklējamā līnija dod ekstrēmu reizē abiem integrāliem

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} F\left(x, y, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}\right) d\tau \quad \text{un} \quad \int_{t_0}^{t_1} F(x, y, \dot{x}, \dot{y})\, dt.$$

Turpmākā variācijas problēmas diskusijā pieņemsim, ka homogenitātes nosacījums (3) par funkciju F ir izpildīts. Tad Eulera teorēma par homogenām funkcijām dod sakaru

$$F = \dot{x}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} + \dot{y}\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}, \tag{5}$$

no kuŗa ar atvasināšanu pēc x, y, resp. $\dot{x}$, $\dot{y}$ attiecīgi dabū

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \dot{x}\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}} + \dot{y}\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial \dot{x}}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \dot{x}\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x} \partial y} + \dot{y}\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{y} \partial y}, \tag{6}$$

resp.

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} + \dot{x}\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2} + \dot{y}\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{y} \partial \dot{x}}, \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} = \dot{x}\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x} \partial \dot{y}} + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} + \dot{y}\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{y}^2}$$

jeb

$$(7) \quad \dot{x}\,\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2} = -\dot{y}\,\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}\partial \dot{y}}, \quad \dot{y}\,\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{y}^2} = -\dot{x}\,\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}\partial \dot{y}}.$$

No pēdējiem diviem sakariem (7) var sastādīt proporciju

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2} : \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}\partial \dot{y}} : \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{y}^2} = \dot{y}^2 : (-\dot{x}\dot{y}) : \dot{x}^2,$$

kuŗā var ievest funkciju

$$(8) \quad F_1(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2} : \dot{y}^2 = \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}\partial \dot{y}} : (-\dot{x}\dot{y}) = \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{y}^2} : \dot{x}^2$$

2. Homogenās formas variāciju rēķinu problēmai

$$(9) \quad I = \int_{t_0}^{t_1} F(x, y, \dot{x}, \dot{y})\, dt = extr.$$

ar robežnosacījumiem

$$(10) \quad x_0 = x(t_0), \quad y_0 = y(t_0); \quad x_1 = x(t_1), \quad y_1 = y(t_1)$$

varieto līniju $\overline{L}$ noteic ar vienādojumiem

$$(11) \quad \overline{x}(t;\, \varepsilon_1) = x(t) + \varepsilon_1\, \xi(t), \quad \overline{y}(t;\, \varepsilon_2) = y(t) + \varepsilon_2\, \eta(t),$$

kuŗos $\xi(t)$, $\eta(t)$ ir patvaļīgas (nepārtrauktas kopā ar pirmiem atvasinājumiem) funkcijas ar nozīmēm intervalla gala punktos

$$\xi(t_0) = \xi(t_1) = \eta(t_0) = \eta(t_1) = 0.$$

Ja līniju saimes parametru ε_1 un ε_2 absolūtas nozīmes ir pietiekoši mazas, tad varietā līnija $\overline{L}$ atrodas meklējamās līnijas L pietiekoši tuvā apkārtnē. Šinī gadījumā līnijas L pietiekoši tuvo apkārtni nosaka punkti, kas atrodas plāksnes daļā ap līniju L, ja no tās punktiem ar pietiekoši mazu radiju velk riņķus.

Tamlīdzīgi kā 28. §-fā sastāda divus Eulera diferenciālvienādojumus

$$(12)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial y} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right) = 0, \end{cases}$$

kas atklātā formā ir

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} - \dfrac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial \dot{x}}\dot{x} - \dfrac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}\partial\, y}\dot{y} - \dfrac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2}\ddot{x} - \dfrac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}\,\partial \dot{y}}\ddot{y} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial y} - \dfrac{\partial^2 F}{\partial \dot{y}\,\partial x}\dot{x} - \dfrac{\partial^2 F}{\partial \dot{y}\partial x}\dot{y} - \dfrac{\partial^2 F}{\partial \dot{y}\partial \dot{x}}\ddot{x} - \dfrac{\partial^2 F}{\partial \dot{y}^2}\ddot{y} = 0. \end{cases}$$

Ja te no formulām (6) un (8) izteic atvasinājumus

$$\frac{\partial F}{\partial x},\ \frac{\partial F}{\partial y},\ \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2},\ \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}\partial \dot{y}} = \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{y}\partial \dot{x}},\ \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{y}^2}$$

un pārveido, tad dabū vienādojumus

$$\begin{cases} \dot{y}\left[(\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})F_1(x, y, \dot{x}, \dot{y}) + \dfrac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial \dot{y}} - \dfrac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}\partial\, y}\right] = 0, \\[2ex] -\dot{x}\left[(\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y})F_1(x, y, \dot{x}, \dot{y}) + \dfrac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial \dot{y}} - \dfrac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}\,\partial y}\right] = 0. \end{cases}$$

Tā kā $\dot{x}$ un $\dot{y}$ nav reizē nulles, tad no dabūtajiem vienādojumiem secinam jaunu vienādojumu

$$(13)\qquad (\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y})\,F_1(x, y, \dot{x}, \dot{y}) + \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial \dot{y}} - \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}\,\partial y} = 0,$$

kas ir Eulera diferenciālvienādojuma V e i e r š t r a s a (*Weierstrass*) f o r m a.

Ar šo vienādojumu ir izteikts v i e n s sakars starp divām funkcijām

$$(2)\qquad x = x(t),\quad y = y(t).$$

Otru sakaru var izvēlēties patvaļīgi, jo meklējamā līnija nav atkarīga no parametra t izvēles. Piemēram, ja izvēlas $t = x$, tad $\dot{x} = 1$, un vienādojums (13) pāriet parastajā Eulera diferenciālvienādojumā. Kad par līnijas parametru t izvēlas loku s, tad ir jālieto sakars

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 1. \tag{14}$$

Kopā ar (13) veidojas divu diferenciālvienādojumu sistēma, no kuŗas atrod noteiktās funkcijas

$$x = x(s), \quad y = y(s),$$

ievērojot problēmas robežnosacījumus.

§ 31. Dubultintegrāla ekstrēms.

1. Variāciju rēķinu **pamatlemma** dubultintegrālam: ja $F(x,y)$ ir nepārtraukta funkcija xy-plāksnes daļas laukumā S, arī $\eta(x, y)$ nepārtraukta funkcija kopā ar tās pirmajiem parciāliem atvasinājumiem šajā laukumā un laukuma kontūras l punktos ir nulle, tad sakars

$$\iint\limits_{(S)} F(x, y)\, \eta(x, y)\, dx\, dy = 0 \tag{1}$$

var pastāvēt tad un tikai tad, kad identiski $F(x, y) = 0$.

Pierādījumam pieņemsim pretējo, ka laukuma S vienā punktā (x_0, y_0) funkcijas vērtība $F(x_0, y_0)$ nav nulle, piemēram

$$F(x_0, y_0) > 0$$

Tā kā $F(x, y)$ ir nepārtraukta funkcija, tad eksistē pietiekoši mazs (galīgs) riņķis

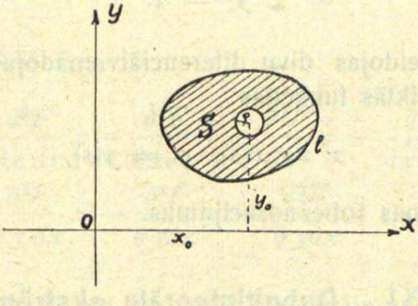
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - \rho^2 = 0 \qquad (\rho \text{ — radijs}),$$

kuŗa visos punktos funkcija $F(x, y) > 0$.

Sastādīsim funkciju $\eta(x, y)$ šādā veidā: ārpus minētā riņķa (12. zīm.) nosvītrotā daļā $\eta = 0$, bet iekšpus tā

$$\eta(x, y) = [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - \rho^2]^2.$$

Šī funkcija apmierina lemmas nosacījumus: 1) tā ir nepārtraukta



Zīm. 12.

funkcija visā laukumā S, jo uz riņķa līnijas arī $\eta = 0$, 2) tai eksistē nepārtraukti pirmās kārtas parciālie atvasinājumi pēc x un y visā laukumā, 3) kontūras l punktos tā ir nulle. Bet ar sastādīto funkciju dubultintegrāla vērtība ir

$$\iint\limits_{(S)} F(x, y)\, \eta(x, y)\, dx\, dy > 0,$$

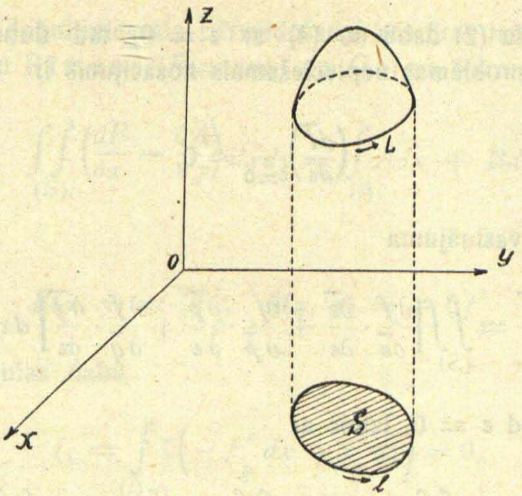
kas runā pretīm dotajam nosacījumam. Tā tad pieņēmums, ka $F(x_0, y_0) > 0$, ir nepareizs. Tamlīdzīgi veidā konstatē, ka nevar būt arī $F(x_0, y_0) < 0$. Tā tad identiski ir $F(x, y) = 0$.

2. Dubultintegrāla ekstrēma problēmā ir j ā n o t e i c l a u k u m a S p u n k t o s d e f i n ē t a f u n k c i j a $z = z(x, y)$, k a s š ī l a u k u m a k o n t ū r a s l p u n k t o s p i e ņ e m d o t ā s v ē r t ī b a s u n d o d n o t e i k t a j a m i n t e g r ā l a m

$$(2) \quad I = \iint\limits_{(S)} F(x, y, z, p, q)\, dx\, dy \qquad \left(p = \frac{\partial z}{\partial x},\ q = \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

e k s t r ē m u. Ģeometriski interpretējot (zīm. 13.), problēmā ir jānoteic virsa $z = z(x, y)$, kas iet caur doto telpas kontūru L (ar projekciju l uz xy-plāksni) un integrālam (2) dod ekstrēmu.

Sastādīsim šīs virsas parciālo diferenciālvienādojumu, izlietojot ekstrēma nepieciešamos nosacījumus un vispārinot vienkāršā integrāla ekstrēma problēmas variācijas procesu.



Zīm. 13.

Meklējamo virsu, kuŗas eksistenci pieņem, ietilpina viena parametra ε virsu saimē

$$(3) \qquad \bar{z}(x, y; \varepsilon) = z(x, y) + \varepsilon\, \zeta(x, y).$$

Lai katra šīs saimes virsa jeb t. s. varietā virsa ietu caur līniju L, ir jāprasa, ka funkcija $\zeta(x, y)$ konturas l punktos būtu nulle. Bez tam funkcijai $\zeta(x, y)$ ir jābūt nepārtrauktai kopā ar saviem parciāliem atvasinājumiem definīcijas laukuma S punktos. Ar varieto virsu sastāda parametra ε funkciju

$$(4) \qquad \bar{I}(\varepsilon) = \iint\limits_{(S)} f(x, y, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q})\, dx\, dy,$$

kuŗā apzīmē

$$\bar{p} = p + \varepsilon \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad \bar{q} = q + \varepsilon \frac{\partial \zeta}{\partial y}.$$

Tā kā šīs funkcijas ekstrēma nepieciešamais nosacījums ir

$$\frac{d\bar{I}}{d\varepsilon} = 0$$

un integrālu (2) dabū no (4) ar $\varepsilon = 0$, tad dubultintegrāla I variācijas problēmas nepieciešamais nosacījums ir

$$\left(\frac{d\bar{I}}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = 0. \tag{5}$$

Parciālā atvasinājuma

$$\frac{d\bar{I}}{d\varepsilon} = \iint\limits_{(S)} \left[\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \cdot \frac{\partial \bar{z}}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial \bar{p}} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial \bar{q}} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \varepsilon}\right] dxdy$$

nozīmi, kad $\varepsilon = 0$, izteic ar

$$\left(\frac{d\bar{I}}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \iint\limits_{(S)} f'_z \zeta dxdy + \iint\limits_{(S)} f'_p \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x} dxdy + \iint\limits_{(S)} f'_q \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial y} dxdy, \tag{6}$$

ja ievēro sakarības

$$\frac{\partial \bar{z}}{\partial \varepsilon} = \zeta(x, y), \quad \frac{\partial \bar{p}}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad \frac{\partial \bar{q}}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial \zeta}{\partial y}$$

un funkcijas f parciālo atvasinājumu f'_z, f'_p, f'_q nepārtrauktību. Formulas (6) labajā pusē pēdējos divus integrālus pārveido, izlietojot sekojošās identitātes (vajadzīgas parciālā integrācijā):

$$f'_p \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta f'_p\right) - \zeta \frac{\partial}{\partial x} f'_p, \quad f'_q \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\zeta f'_q\right) - \zeta \frac{\partial}{\partial y} f'_q.$$

Tad rodas formula

$$\left(\frac{d\bar{I}}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \iint\limits_{(S)} \left[f'_z - \frac{\partial}{\partial x} f'_p - \frac{\partial}{\partial y} f'_q\right] \zeta \, dxdy + I_1, \tag{7}$$

ja apzīmē

$$I_1 = \iint\limits_{(S)} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta f'_p\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\zeta f'_q\right)\right] dxdy.$$

Pēdējā dubultintegrāla pārveidošanai kontūras integrālā lieto integrālrēķinu Rīmana (*Riemann*) un Grīna (*Green*) formulu

$$(8) \qquad \iint\limits_{(S)} \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right) dxdy = \int\limits_{(l)} Adx + Bdy.$$

Ar funkcijām

$$B(x, y) = \zeta f'_p, \quad A(x, y) = -\zeta f'_q$$

pēc (8) formulas dabū

$$I_1 = \int\limits_{(l)} \zeta\left(-f'_q\, dx + f'_p\, dy\right) = 0,$$

jo pēc nosacījuma funkcija $\zeta(x, y)$ kontūras l punktos ir nulle. Tā tad formula (7) vienkāršojas par

$$(9) \qquad \left(\frac{d\bar{I}}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \iint\limits_{(S)} [f]_z\, \zeta dxdy,$$

kur $[f]_z$ apzīmē funkcijas f t. s. variācijas atvasinājumu

$$(10) \qquad [f]_z = f'_z - \frac{\partial}{\partial x} f'_p - \frac{\partial}{\partial y} f'_q.$$

Var sastādīt pēc formulas (9) dubultintegrāla I pirmo variāciju formā

$$(11) \qquad \delta I = \varepsilon\left(\frac{\partial \bar{I}}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \iint\limits_{(S)} [f]_z\, \delta z\, dx\, dy,$$

ja ar δz apzīmē funkcijas z variāciju

$$\delta z = \bar{z} - z = \varepsilon\zeta(x, y).$$

No variācijas problēmas nepieciešamā nosacījuma (5) vai no $\delta I = 0$ pēc pierādītās pamatlemmas secināms sakars

$$[f]_z = 0,$$

ko atklātā veidā izteic ar Eulera parciālo diferenciālvienādojumu

$$(12) \quad -[f]_z = rf''_{p^2} + 2sf''_{pq} + tf''_{q^2} + pf''_{pz} + qf''_{qz} + f''_{px} + f''_{qy} - f'_z = 0.$$

Te ir lineāritāte attiecībā pret nezināmās funkcijas $z = z(x, y)$ otrās kārtas atvasinājumiem

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

bet koeficienti ir vispār atkarīgi no x, y, z, p, q.

Ir jāatrod vienādojuma (12) integrālvirsa, kas iet caur doto telpas līniju L. Tādu problēmu sauc par parciālā diferenciālvienādojuma robežproblēmu jeb Dirichlē (*Dirichlet*) problēmu. Starp atrastajiem atrisinājumiem iespējami tādi, kas dod dubultintegrāla I ekstrēmu I_{extr}. Šīs ekstremālās vērtības eksistence sevišķi jākonstatē. Visi vienādojuma (12) atrisinājumi dod integrālam I stacionārās vērtības I_{stat}.

3. **Piemēri.** 1. Variāciju problēma dubultintegrālam

$$(13) \quad I = \frac{1}{2} \iint\limits_{(S)} (p^2 + q^2)\, dx\, dy \qquad \left(p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

Tā kā te

$$f = \frac{1}{2}(p^2 + q^2), \; f'_p = p, \; f'_q = q, \; f''_{p^2} = 1, \; f''_{q^2} = 1,$$

bet pārejie vajadzīgie atvasinājumi ir nulles, tad Eulera diferenciālvienādojums (12) top par Laplasa (*Laplace*) potenciālvienādojumu

$$(14) \qquad r + t = 0 \quad \text{jeb} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Dubultintegrāla (13) variāciju problēmā ir jāatrisina Laplasa vienādojuma (14) robežproblēma jeb pirmā potenciālteōrijas robežproblēma (Dirichlē problēma).

2) Platō (*Plateau*) **problēma** (jeb minimālās virsas problēma): noteikt virsu, kas iet caur slēgtu kontūru L telpā un kam ar šo kontūru ierobežotais laukums ir minimālais.

Tā kā līkās virsas $z = z(x, y)$ laukumu aprēķina pēc formulas

$$(15) \quad I = \iint\limits_{(S)} \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dxdy \quad \left(p = \frac{\partial z}{\partial x},\ q = \frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

tad Platō problēma ir dubultintegrāla I variāciju problēma:

$$I = I_{min}.$$

Šinī gadījumā funkcija

$$f = \sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

un tās atvasinājumi ir

$$f'_p = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad f'_q = \frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

$$f''_{p^2} = \frac{1 + q^2}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad f''_{pq} = \frac{-pq}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad f''_{q^2} = \frac{1 + p^2}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}},$$

bet pārējie — nulles. Tā tad Eulera diferenciālvienādojums (12) pēc pārveidojumiem reducējas uz

$$(16) \quad (1 + q^2)\, r - 2pqs + (1 + p^2)\, t = 0.$$

Vispārigajā virsu teōrijā ar vienādojumu (16) konstatē, ka minimālām virsām visos punktos vidējais liekums ir nulle.

Uzdevumi IX.

1. Noteikt integrāla

$$\int_0^1 \frac{z^2 y'}{z'}\,dx \qquad \left(y' = \frac{dy}{dx},\ z' = \frac{dz}{dx}\right)$$

ekstrēmāli, kas iet caur punktiem (0, 0, 1) un (1, 1, 2).

Atb. $y = x,\ z = \dfrac{2}{2-x}.$

2. Noteikt integrāla

$$\int_0^1 \frac{y'z'}{y+z}\,dx \qquad \left(y' = \frac{dy}{dx},\ z' = \frac{dz}{dx}\right)$$

ekstremāles.

Atb. $$\begin{cases} y = C_1 e^{C_2 x} + C_3 x + C_4, \\ z = \dfrac{C_3^2}{C_1 C_2^2} e^{-C_2 x} - C_3 x + \left(\dfrac{2C_3}{C_2} - C_4\right). \end{cases}$$

X. Saistītā ekstrēma problēmas.

§ 32. Problēmas ar galīgās formas blakusnosacījumu.

1. Vienkāršakā tāda veida problēma ir šāda: noteikt divas funkcijas $y = y(x)$, $z = z(x)$, kas dod integrālam

$$(1) \qquad I = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, z, y', z')\, dx \quad \left(y' = \frac{dy}{dx}, \quad z' = \frac{dz}{dx}\right)$$

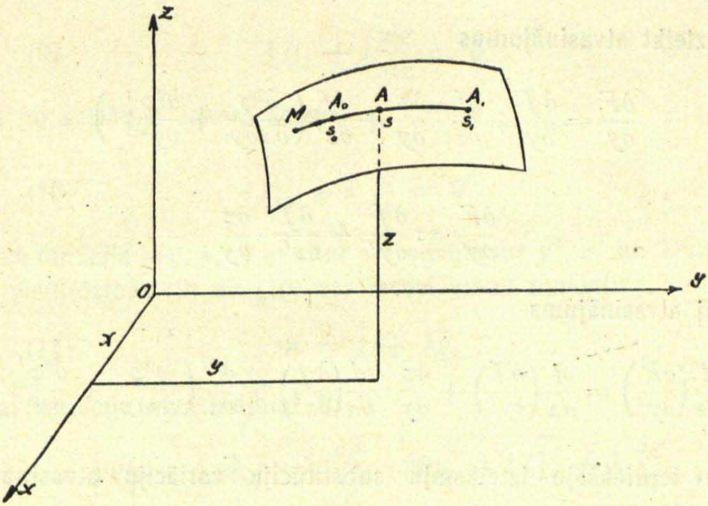
ekstrēmu un apmierina sakarus

$$(2) \qquad g(x, y, z) = 0$$

un

$$(3) \qquad y_0 = y(x_0),\ z_0 = z(x_0);\quad y_1 = y(x_1),\ z_1 = z(x_1).$$

Nosacījumu (2) sauc par galīgās formas blakusnosacījumu jeb pēc analoģijas ar mēchanikas terminu — par holonomu saiti, bet (3) — par problēmas robežnosacījumiem. Ģeometriski interpretējot, var teikt, ka problēmā jānoteic (zīm. 14)



Zīm. 14.

virsas (2) līnija, kas iet caur šīs virsas diviem punktiem $A_0(x_0, y_0, z_0)$, $A_1(x_1, y_1, z_1)$ un dod integrālam (1) ekstrēmu.

Ja no blakus nosacījuma (2) iedomājas izteiktu funkciju $z = \varphi(x, y)$ un arī ar

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

sastādītu funkciju

$$(4) \qquad f\left(x, y, \varphi(x, y), y', \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} y'\right) = F(x, y, y'),$$

tad doto saistītā ekstrēma problēmu reducē uz brīvā ekstrēma problēmu

$$(5) \qquad I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx = extr.$$

ar vienu nezināmu funkciju $y(x)$. Pēdējās problēmas Eulera diferenciālvienādojumā

$$(6) \qquad [F]_y = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

var izteikt atvasinājumus

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z'}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} y'\right)$$

un

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{\partial f}{\partial z'} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial y}.$$

Tādēļ atvasinājums

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z'}\right) + \frac{\partial f}{\partial z'}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} y'\right),$$

un ar iepriekšējo izteiksmju substitūciju variāciju atvasinājums $[F]_y$ top par

$$[F]_y = \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right] + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \cdot \left[\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z'}\right)\right]$$

jeb

$$[F]_y = [f]_y + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot [f]_z .$$

Eulera vienādojums (6) dod vienu sakaru

$$(7) \qquad [f]_y + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot [f]_z = 0,$$

bet otru sakaru

$$(8) \qquad \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

atrod, atvasinot pēc y formulu (2) ar $z = \varphi(x, y)$. Lai no pēdējiem diviem sakariem izslēgtu lielumu $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, reizina, piem., sakaru (8) ar pagaidām nenoteiktu Lagranža (*Lagrange*) faktoru $\lambda = \lambda(x)$ un saskaita ar sakaru (7). Rodas jauns sakars

$$[f]_y + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} + \left\{[f]_z + \lambda \frac{\partial g}{\partial z}\right\} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0,$$

kuŗā izvēlas λ tā, lai izteiksme figuriekavās būtu nulle, t. i.

$$(9) \qquad [f]_z + \lambda \frac{\partial g}{\partial z} = 0.$$

Tad no sastādītā sakara secina

$$(10) \qquad [f]_y + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0.$$

Tā kā funkcija $g(x, y, z)$ nesatur atvasinājumus y', z' un $\lambda = \lambda(x)$, tad vienlīdzībās (9) un (10) var ievest vienu funkciju

$$(11) \qquad \Phi = f + \lambda g,$$

kuŗai variāciju atvasinājumi ir

$$[\Phi]_y = [f]_y + \lambda \frac{\partial g}{\partial y}, \quad [\Phi]_z = [f]_z + \lambda \frac{\partial g}{\partial z}.$$

Tā tad, lai atrisinātu variāciju problēmu integrālam (1) ar blaku nosacījumu (2), sastāda funkciju (11) un Eulera diferenciālvienādojumu sistēmu

$$(12)\qquad \begin{cases} [\Phi]_y = \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial y'}\right) = 0, \\ [\Phi]_z = \dfrac{\partial \Phi}{\partial z} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial z'}\right) = 0. \end{cases}$$

No šīs vienādojumu sistēmas un blakusnosacījuma (2) var atrast trīs nezināmās funkcijas

$$y = y(x), \quad z = z(x), \quad \lambda = \lambda(x),$$

resp. var izslēgt Lagranža faktoru λ un sastādīt divu diferenciālvienādojumu sistēmu ar divām nezināmām funkcijām $y(x)$, $z(x)$. Vispārīgajos integrālos integrācijas konstantes nosaka, ievērojot problēmas robežnosacījumus (3).

2. Iepriekšējo metodi var vispārināt integrāla

$$(13)\qquad I = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')\, dx$$

variāciju problēmai ar n nezināmām funkcijām $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$, ja ir $m < n$ galīgās formas blakusnosacījumi

$$(14)\qquad g_i\,(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

un vajadzīgie robežnosacījumi. Tad sastāda funkciju

$$(15)\qquad \Phi = f + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i$$

ar m nenoteiktiem faktoriem $\lambda_1(x)$, $\lambda_2(x)$, ..., $\lambda_m(x)$ un Eulera diferenciālvienādojumu sistēmu

$$(16)\qquad \begin{cases} [\Phi]_{y_1} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial y_1} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial y_1'}\right) = 0, \\ [\Phi]_{y_2} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial y_2} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial y_2'}\right) = 0, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ [\Phi]_{y_n} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial y_n} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial y_n'}\right) = 0. \end{cases}$$

Sistēmai (16) kopā ar (14) ir $m + n$ vienādojumu, no kuŗiem var noteikt $m + n$ nezināmās funkcijas:

$$y_1(x),\ y_2(x), \ldots, y_n(x);\ \lambda_1(x),\ \lambda_2(x), \ldots, \lambda_m(x).$$

3. **Piemērs:** problēma par ģeodeziskām līnijām. Problēmu var reducēt uz brīvā ekstrēma problēmu, ja virsu noteic ar parametriskās formas vienādojumiem (sk. I d., § 35.). Kad virsa ir dota ar neatklātās formas vienādojumu

$$g(x, y, z) = 0, \tag{2}$$

tad ir saistītā ekstrēma problēma. Te ir jānoteic virsas (2) līnija (zīm. 14), kas iet caur virsas diviem punktiem A_0, A_1 un dod loka gaŗuma integrālam

$$I = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, dx \qquad \left(y' = \frac{dy}{dx}, z' = \frac{dz}{dx}\right) \tag{17}$$

minimu. Ir jālieto funkcijas

$$f = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2},\ \Phi = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} + \lambda(x) g(x, y, z),$$

ar kuŗām sistēma (12) top par

$$\left\{\begin{aligned} [\Phi]_y &= \lambda \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}\right) = 0, \\ [\Phi]_z &= \lambda \frac{\partial g}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}\right) = 0. \end{aligned}\right. \tag{18}$$

Šo vienādojumu pēdējos locekļos var ievest līnijas tangentes virziena kosinus

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dx} : \frac{ds}{dx} = y' : \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}$$

un

$$\frac{dz}{ds} = \frac{dz}{dx} : \frac{ds}{dx} = z' : \sqrt{1 + y'^2 + z'^2},$$

ja līniju nosaka parametriskā formā

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s)$$

ar loku s kā parametru. Tā kā atvasinājumi

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{ds}\right) = \frac{d^2y}{ds^2} \cdot \frac{ds}{dx}, \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{dz}{ds}\right) = \frac{d^2z}{ds^2} \cdot \frac{ds}{dx},$$

tad vienādojumus (18) var pārveidot sekojoši:

$$\lambda \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{d^2y}{ds^2} \cdot \frac{ds}{dx}, \quad \lambda \frac{\partial g}{\partial z} = \frac{d^2z}{ds^2} \cdot \frac{ds}{dx}$$

jeb

$$(19) \qquad \frac{d^2y}{ds^2} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \cdot \frac{dx}{ds}, \quad \frac{d^2z}{ds^2} = \lambda \frac{\partial g}{\partial z} \cdot \frac{dx}{ds}.$$

Konstatēsim, ka analoga formula pastāv ar

$$(20) \qquad \frac{d^2x}{ds^2} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds}.$$

Tiešām, ja līnijas tangentes virziena kosinu sakaru

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1$$

atvasina pēc s, tad no dabūtā sakara

$$\frac{dx}{ds} \cdot \frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds} \cdot \frac{d^2y}{ds^2} + \frac{dz}{ds} \cdot \frac{d^2z}{ds^2} = 0$$

pēc otro atvasinājumu (19) izslēgšanas un pārveidojumiem rodas formula

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -\lambda\left(\frac{\partial g}{\partial y} \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{\partial g}{\partial z} \cdot \frac{dz}{ds}\right),$$

ko reducē uz (20), ievērojot no virsas vienādojuma $g(x, y, z) = 0$ ar atvasināšanu pēc s atrasto sakaru

$$\frac{\partial g}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\partial g}{\partial y} \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{\partial g}{\partial z} \cdot \frac{dz}{ds} = 0.$$

Salīdzinot formulas (19) un (20), secina proporciju

$$(21)\qquad \frac{d^2x}{ds^2}:\frac{d^2y}{ds^2}:\frac{d^2z}{ds^2}=\frac{\partial g}{\partial x}:\frac{\partial g}{\partial y}:\frac{\partial g}{\partial z}.$$

Tā kā l ī n i j a s g a l v e n ā s n o r m ā l e s n virziena kosinu attiecība ir

$$\cos(n, x):\cos(n, y):\cos(n, z)=\frac{d^2x}{ds^2}:\frac{d^2y}{ds^2}:\frac{d^2z}{ds^2}$$

un v i r s a s normāles ν virziena kosinu attiecība

$$\cos(\nu, x):\cos(\nu, y):\cos(\nu, z)=\frac{\partial g}{\partial x}:\frac{\partial g}{\partial y}:\frac{\partial g}{\partial z},$$

tad formula (21) rāda, ka

$$\cos(n, x):\cos(n, y):\cos(n, z)=\cos(\nu, x):\cos(\nu, y):\cos(\nu, z).$$

Tā tad ģ e o d e z i s k o l ī n i j u g a l v e n ā n o r m ā l e s a k r ī t a r v i r s a s n o r m ā l i

Šī ģeometriskā īpašība ir raksturīga ģeodeziskām līnijām. Ievērojot šo īpašību, top saprotams, ka, piem., uz sfēras virsas ģeodeziskās līnijas ir lielo riņķu loki.

§ 33. Izoperimetriskā problēma.

1. Otrs saistītā ekstrēma problēmu veids ir **izoperimetriskā problēma** (plašākā uztverē): n o t e i k t i n t e r v a l l ā (x_0, x_1) f u n k c i j u $y=y(x)$, k a s d o d n o t e i k t a j a m i n t e g r ā l a m

$$(1)\qquad I=\int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')\,dx \qquad \left(y'=\frac{dy}{dx}\right)$$

e k s t r ē m u u n a p m i e r i n a k ā b l a k u s n o s a c ī j u m u

$$(2)\qquad I_1=\int_{x_0}^{x_1} f_1(x, y, y')\,dx=k=const.,$$

t ā a r ī r o b e ž n o s a c ī j u m u s

$$(3)\qquad y_0=y(x_0),\quad y_1=y(x_1).$$

Problēmas diferenciālvienādojumu sastādīšanai piemēroti izveido variācijas procesu, lai reducētu integrāla ekstrēma problēmu uz parasto ekstrēma problēmu ar blakusnosacījumu.

Meklējamo līniju $y = y(x)$ ietilpina d i v u parametru ε_1, ε_2 līniju saimē

$$\text{(4)} \quad \bar{y}(x;\, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = y(x) + \varepsilon_1\, \eta_1(x) + \varepsilon_2\, \eta_2(x).$$

Te $\eta_1(x)$, $\eta_2(x)$ ir tādas divas patvaļīgas funkcijas, nepārtrauktas kopā ar to atvasinājumiem, kas intervalla galos ir nulles:

$$\eta_1(x_0) = \eta_1(x_1) = \eta_2(x_0) = \eta_2(x_1) = 0.$$

Tādēļ katra varietā līnija (4) iet caur dotajiem punktiem (x_0, y_0), (x_1, y_1). Ar varieto līniju sastādām funkciju

$$\text{(5)} \quad \bar{I}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, \bar{y}, \bar{y}')\, dx,$$

un pieprasām, lai ar šo līniju būtu izpildīts arī blakusnosacījums (2), t. i. lai pastāvetu sakars

$$\text{(6)} \quad \bar{I}_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \int_{x_0}^{x_1} f_1(x, \bar{y}, \bar{y}')\, dx = k.$$

Redzams, ka ir jāatrod f u n k c i j a s $\bar{I}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ ekstrēms ar blakusnosacījumu

$$\varphi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \bar{I}_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2) - k = 0.$$

Šīs parastā ekstrēma problēmas atrisināšanai lieto diferenciālrēķinu Lagranža metodi, sastādot funkciju

$$F(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \lambda_0\, \bar{I}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + \lambda_1\, \varphi(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$$

ar k o n s t a n t i e m (Lagranža) faktoriem λ_0, λ_1 (kas nav reizē nulles) un pielīdzinot šīs funkcijas parciālos atvasinājumus nullei:

$$\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_2} = 0.$$

Tā kā

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_1} = \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \varepsilon_1}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_2} = \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \varepsilon_2},$$

tad minētos parastā ekstrēma nepieciešamos nosacījumus izteic ar vienādojumu sistēmu

$$(7) \qquad \begin{cases} \lambda_0 \dfrac{\partial \bar{I}}{\partial \varepsilon_1} + \lambda_1 \dfrac{\partial \bar{I}_1}{\partial \varepsilon_1} = 0, \\ \lambda_0 \dfrac{\partial \bar{I}}{\partial \varepsilon_2} + \lambda_1 \dfrac{\partial \bar{I}_1}{\partial \varepsilon_2} = 0. \end{cases}$$

Kad $\lambda_0 \neq 0$, vienādojumos (7) var ievest vienu faktoru $\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_0}$, un aprēķināt trīs nezināmos ε_1, ε_2; λ, lietojot arī vienādojumu (6).

I z ņ ē m u m a g a d ī j u m ā, kad $\lambda_0 = 0$, sistēma dod divus vienādojumus

$$\frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \varepsilon_1} = 0, \quad \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \varepsilon_2} = 0,$$

kas izteic funkcijas (6) ekstrēma nepieciešamos nosacījumus.

Integrāla (1) ekstrēma problēmai atrod nepieciešamos nosacījumus par nezināmo funkciju $y = y(x)$ no sistēmas (7), liekot $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ un norādot ar nulles indeku attiecīgās atvasinājumu vērtības. Rodas vienādojumu sistēma

$$(8) \qquad \begin{cases} \lambda_0 \left(\dfrac{d\bar{I}}{d\varepsilon_1}\right)_0 + \lambda_1 \left(\dfrac{\partial \bar{I}_1}{\partial \varepsilon_1}\right)_0 = 0, \\ \lambda_0 \left(\dfrac{\partial \bar{I}}{\partial \varepsilon_2}\right)_0 + \lambda_1 \left(\dfrac{\partial \bar{I}_1}{\partial \varepsilon_2}\right)_0 = 0, \end{cases}$$

ko var pārveidot sekojošā formā. Piemēram, no atvasinājuma formulas

$$\frac{\partial \bar{I}}{\partial \varepsilon_1} = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \eta_1 + \frac{\partial f}{\partial \bar{y}'} \eta_1' \right) dx,$$

kad $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, dabū formulu

$$\left(\frac{\partial \bar{I}}{\partial \varepsilon_1}\right)_0 = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial f}{\partial y} \eta_1 \, dx + \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial f}{\partial y'} \eta_1' \, dx.$$

Ja pēdējā integrālā izdara parciālu integrāciju un ievēro nosacījumus par patvaļīgu funkciju η_1, tad rodas formula

$$\left(\frac{\partial \bar{I}}{\partial \varepsilon_1}\right)_0 = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right] \eta_1 \, dx.$$

Lietojot funkciju variāciju atvasinājumu simbolus

$$[f]_y = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right), \quad [f_1]_y = \frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f_1}{\partial y'}\right)$$

izteic atrasto un pārējo atvasinājumu vērtības analogā veidā:

$$\left(\frac{\partial \bar{I}}{\partial \varepsilon_1}\right)_0 = \int_{x_0}^{x_1} [f]_y \, \eta_1(x) \, dx, \quad \left(\frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \varepsilon_1}\right)_0 = \int_{x_0}^{x_1} [f_1]_y \, \eta_1(x) \, dx$$

un

$$\left(\frac{d\bar{I}}{\partial \varepsilon_2}\right)_0 = \int_{x_0}^{x_1} [f]_y \, \eta_2(x) \, dx, \quad \left(\frac{d\bar{I}_1}{d\varepsilon_2}\right)_0 = \int_{x_0}^{x_1} [f_1]_y \, \eta_2(x) \, dx.$$

Ar šīm izteiksmēm vienādojumu sistēma (8) top par sistēmu

$$\left\{\begin{aligned} &\int_{x_0}^{x_1} \{\lambda_0 [f]_y + \lambda_1 [f_1]_y\} \, \eta_1(x) \, dx = 0, \\ &\int_{x_0}^{x_1} \{\lambda_0 [f]_y + \lambda_1 [f_1]_y\} \, \eta_2(x) \, dx = 0, \end{aligned}\right.$$

no kuŗas pēc variāciju rēķinu pamatlemmas secina vienu sakaru

$$\lambda_0 [f]_y + \lambda_1 [f_1]_y = 0.$$

Tā kā λ_0 un λ_1 ir konstantes, tad šajā sakarā var ievest funkciju

$$F = \lambda_0 f + \lambda_1 f_1, \tag{9}$$

kuŗas variācijas atvasinājums ir

$$[F]_y = \lambda_0 [f]_y + \lambda_1 [f_1]_y.$$

Tā tad izoperimetriskā problēmā ir jāatrisina Eulera diferenciālvienādojums

$$[F]_y = \frac{\partial(\lambda_0 f + \lambda_1 f_1)}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial(\lambda_0 f + \lambda_1 f_1)}{\partial y'}\right] = 0 \tag{10}$$

ar divām konstantēm λ_0 un λ_1, kas nav reizē nulles.

Gadījumā, kad $\lambda_0 \neq 0$, var ievest vienu konstanti

$$\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_0}$$

un ar funkciju

$$\Phi = \frac{F}{\lambda_0} = f + \lambda f_1 \tag{11}$$

sastādīt Eulera diferenciālvienādojumu

$$[\Phi]_y = \frac{\partial(f + \lambda f_1)}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial(f + \lambda f_1)}{\partial y'}\right] = 0. \tag{12}$$

Tā vispārīgais integrāls

$$y = y(x; C_1, C_2, \lambda)$$

satur divas integrācijas konstantes C_1, C_2 un Lagranža faktoru λ. Šo trīs lielumu noteikšanai sastāda trīs vienādojumu sistēmu, lietojot divus robežnosacījumus (3) un vienu blakusnosacījumu (2).

Izņēmuma gadījumā, kad $\lambda_0 = 0$, vienādojums (10) reducējas uz

$$[f_1]_y = \frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f_1}{\partial y'}\right) = 0.$$

Tā tad šinī gadījumā meklējamā līnija $y = y(x)$ ir dotā integrāla I_1 ekstremāle, un konstante k tā ekstrēmālā (stacionārā) vērtība. Problēma prasa speciālu diskusiju.

Ekstrēmāļu vienādojums (10) paliek ekvivalents sev, ja apmaina savā starpā funkcijas f un f_1. No šīs īpašības seko izoperimetriskās problēmas t. s. **reciprocitātes likums**: ekstrēmāles variāciju problēmai

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')\, dx = extr.$$

ar blakusnosacījumu

$$I_1 = \int_{x_0}^{x_1} f_1(x, y, y')\, dx = const.$$

ir arī reizē ekstrēmāles variāciju problēmai

$$I_1 = \int_{x_0}^{x_1} f_1(x, y, y')\, dx = extr.$$

ar blakusnosacījumu

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')\, dx = const.$$

2. Apskatīto izoperimetrisko problēmu var paplašināt, ievedot vai nu viena argūmenta vairāk funkcijas, vai vairāk argūmentu funkciju. Pirmā paplašinājumā ir jānoteic n funkcijas

$$y_1 = y_1(x),\ y_2 = y_2(x), \ldots, y_n = y_n(x),$$

kas dod noteiktajam integrālam

$$(13) \quad I = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')\, dx$$

ekstrēmu, apmierina m blakusnosacījumus

$$(14)\quad \begin{cases} I_1 = \int\limits_{x_0}^{x_1} f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)\, dx = k_1, \\ I_2 = \int\limits_{x_0}^{x_1} f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)\, dx = k_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ I_m = \int\limits_{x_0}^{x_1} f_m(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)\, dx = k_m \end{cases}$$

($k_1, k_2, \ldots, k_m$ — konstantes) un $2n$ robežnosacījumus

$$(15)\quad \begin{cases} y_{10} = y_1(x_0), & y_{20} = y_2(x_0), \ldots, y_{n0} = y_n(x_0), \\ y_{11} = y_1(x_1), & y_{21} = y_2(x_1), \ldots, y_{n1} = y_n(x_1). \end{cases}$$

Šīs problēmas nezināmās funkcijas (ekstrēmāles) atrod no Eulera diferenciālvienādojumu sistēmas

$$(16)\quad \begin{cases} [F]_{y_1} = \dfrac{\partial F}{\partial y_1} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'_1}\right) = 0, \\ [F]_{y_2} = \dfrac{\partial F}{\partial y_2} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'_2}\right) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ [F]_{y_n} = \dfrac{\partial F}{\partial y_n} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'_n}\right) = 0, \end{cases}$$

kurā ir ievesta funkcija

$$(17)\quad F = \lambda_0 f + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_m f_m$$

ar Lagranža faktoriem — konstantēm $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$.

Vispārīgā gadījumā, kad $\lambda_0 \neq 0$, var vienādojumā (16) homogenitātes dēļ pieņemt $\lambda_0 = 1$. Tad sistēmas (16) vispārīgais integrāls saturēs pavisam $2n + m$ konstantes: integrācijas konstantes skaitā $2n$ un Lagranža faktorus $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ — skaitā m. Šo konstantu noteikšanai sastāda $2n + m$ vienādojumu sistēmu, lietojot m blakusnosacījumus (14) un $2n$ robežnosacījumus (15).

Izoperimetriskās problēmas minētajā otrā paplašinājumā var apskatīt, piem. šādu **dubultintegrāla izoperimetrisko problēmu**: noteikt tādu divu argūmentu funkciju $z = z(x, y)$ xy-plāksnes laukumā S, kas dod dubultintegrālam

$$(18) \qquad \iint\limits_{(S)} f(x, y, z, p, q)\, dx\, dy \qquad \left(p = \frac{\partial z}{\partial x},\; q = \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

ekstrēmu, apmierina blakusnosacījumu

$$(19) \qquad I_1 = \iint\limits_{(S)} f_1(x, y, z, p, q)\, dx\, dy = k = const.$$

un robežnosacījumu, ka funkcija $z(x, y)$ pieņem dotās vērtības definīcijas laukuma S kontūras l punktos.

Šajā problēmā ir jāatrisina Eulera parciālā diferenciālvienādojuma

$$(20) \qquad [F]_z = F'_z - \frac{\partial}{\partial x} F'_p - \frac{\partial}{\partial y} F'_q = 0$$

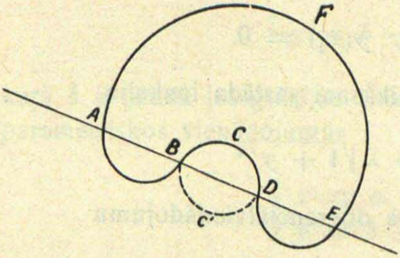
robežproblēma jeb Dirichlē problēma, ja funkcija F ir sastādītā sekojošā veidā

$$F = \lambda_0 f + \lambda_1 f_1$$

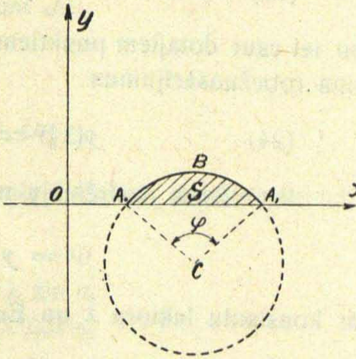
ar divām konstantēm λ_0, λ_1, kas nav reizē nulles.

3. **Piemērs. Izoperimetriskā problēma šaurākā uztverē**: no slēgtām plāksnes līnijām ar pastāvīgu garumu (perimetru) noteikt tādu līniju, kas ierobežo figūru ar maksimālu laukumu.

Ar ģeometrisku konstrukciju konstatēsim, ka meklējamai līnijai jābūt konveksai. Pieņemot pretējo, ka tās loks (zīm. 15), piemēram, BCD nav konvekss, var ar simmetriju (atspoguļošanu) pret taisni AE dabūt slēgtu līniju $ABC'DEFA$, kam garums tāds pats kā iepriekšējai līnijai $ABCDEFA$, bet kas



Zīm. 15.



Zīm. 16.

acīmredzot ieslēdz figūru ar lielāku laukumu. Tā tad šis pieņēmums reducējas uz pretrunu, un problēmā ir jādiskutē vienīgi konveksās līnijas.

Izlietojot tādu pašu ģeometrisku konstrukciju, viegli konstatē, ka katra līnijas chorda, kas dala līniju uz pusēm, dala arī ar līniju ierobežotas figūras laukumu uz pusēm. Ievērojot konstatētās īpašības, var reducēt iepriekšējo problēmu uz šādu **modificētu problēmu**: noteikt pastāvīga garuma līniju, kas iet caur dotajiem punktiem A_0, A_1 un kopā ar chordu A_0A_1, ierobežo figūru ar maksimālo laukumu.

Problēmas analitiskajam formulejumam izvēlamies x-asi pa chordu A_0A_1 (zīm. 16). Tad minētas figūras laukumu S izteic ar integrālu

$$I = \int_{x_0}^{x_1} y\,dx, \tag{21}$$

bet līnijas loka A_0BA_1 garumu l ar

$$I_1 = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\,dx \qquad \left(y' = \frac{dy}{dx}\right). \tag{22}$$

Problēmā ir jānoteic līnija $y = y(x)$, kas dod integrālam (21) maksimu, apmierina blakusnosacījumu

$$(23) \qquad I_1 = l = const.$$

un iet caur dotajiem punktiem $A_0(x_0, 0)$, $A_1(x_1, 0)$, resp. apmierina robežnosacījumus

$$(24) \qquad y(x_0) = 0, \quad y(x_1) = 0.$$

Problēmas ekstrēmāļu noteikšanai sastāda funkciju

$$\Phi = y + \lambda \sqrt{1 + y'^2}$$

ar konstantu faktoru λ un Eulera diferenciālvienādojumu

$$[\Phi]_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y'}\right) = 0.$$

Tā kā šinī problēmā atvasinājumi

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y'} = \lambda \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

tad Eulera diferenciālvienādojumam var atrast pirmintegrālu

$$\frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = x - a$$

ar vienu integrācijas konstanti a. Ekstrēmāles noteikšanai parametriskā formā ir ērti ievest parametru α, kas ir šīs ekstrēmāles tangentes slīpuma leņķis pret x-asi. Tā kā

$$y' = \frac{dy}{dx} = tg\,\alpha, \quad \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} = \cos\alpha, \quad \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \sin\alpha,$$

tad atrastais pirmintegrāls dod

$$x = a + \lambda \sin\alpha.$$

Lai izteiktu arī y parametriski, izlietojam diferenciālo sakaru

$$dy = tg\,\alpha\,dx,$$

kas pēc substitūcijas

$$dx = \lambda \cos \alpha \, d\alpha$$

top par

$$dy = \lambda \sin \alpha \, d\alpha.$$

Pēc kvadrātūras rodas formula

$$y = b - \lambda \cos \alpha,$$

kuŗā b ir jaunā integrācijas konstante. Galīgi dabū ekstrēmāles parametriskos vienādojumus

$$\begin{cases} x = a + \lambda \sin \alpha, \\ y = b - \lambda \cos \alpha, \end{cases}$$

vai pēc parametra α izslēgšanas — vienādojumu Dekarta koordinātās

$$(25) \qquad (x - a)^2 + (y - b)^2 = \lambda^2.$$

Tā tad ekstrēmāle ir riņķa loks, kuŗa centrs ir punkts $C(a, b)$ un radijs $CA_0 = CA_1 = \lambda$, ja pieņem $\lambda > 0$.

Lietojot blakusnosacījumu (23) un divus robežnosacījumus (24), sastāda vienādojumu sistēmu

$$(26) \qquad \begin{cases} (x_0 - a)^2 + b^2 = \lambda^2, \\ (x_1 - a)^2 + b^2 = \lambda^2, \\ \int\limits_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, dx = l, \end{cases}$$

no kuŗas aprēķina trīs konstantu a, b, λ vērtības. No šīs sistēmas pirmiem diviem vienādojumiem viegli atrod centra abscisu

$$a = \frac{x_0 + x_1}{2}.$$

Ordinātu b varētu aprēķināt, piemēram, no sistēmas (26) pirmā vienādojuma, ja zinātu riņķa radiju λ. Šo radiju varētu aprēķināt no sistēmas (26) pēdējā vienādojuma. Riņķa loka A_0BA_1 gaŗumu l

ir ērtāki izteikt atkarībā no atbilstošā centra leņķa $\varphi = \sphericalangle A_0CA_1$ un radija λ šādā veidā:

$$l = \lambda\varphi.$$

Tā kā no $\triangle A_0A_1C$ var aprēķināt chordu $A_0A_1 = x_1 - x_0$ pēc formulas

$$x_1 - x_0 = 2\lambda \sin \frac{\varphi}{2},$$

tad kopā ar iepriekšējo sakaru ir sastādāma divu vienādojumu sistēma

$$\begin{cases} l = \lambda\varphi, \\ x_1 - x_0 = 2\lambda \sin\dfrac{\varphi}{2}, \end{cases}$$

no kuŗas pēc λ izslēgšanas dabū centra leņķa φ, resp. tā puses

$$\theta = \frac{\varphi}{2}$$

noteikšanai vienādojumu

$$(27) \qquad \frac{\sin\theta}{\theta} = k \qquad \left(k = \frac{x_1 - x_0}{l}\right).$$

Konstatēsim, ka transcendentam vienādojumam (27) intervallā $0 < \theta < \pi$ ir viena vienīga sakne θ_0, ja $0 < k < 1$. Vienādojumu (27) var uzrakstīt ekvivalentā formā

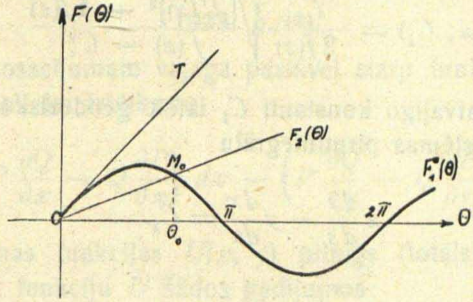
$$\sin\theta = k\theta,$$

kuŗā ievedam divas funkcijas

$$F_1(\theta) = \sin\theta, \quad F_2(\theta) = k\theta.$$

Šo funkciju grafikas (zīm. 17) ir sinusoīda un taisne, kas iet caur sākuma punktu. Ir uzskatāmi skaidrs, ka abām grafikām bez sākuma punkta ir viens un tikai viens krustpunkts M_0, kam atbilst nozīme θ_0, ja minētās taisnes slīpuma leņķis ir mazāks par sinusoīdas sākuma punktā konstruētās tangentes T slīpuma leņķi. Tā kā sinusoīdas tangente sākuma punktā veido 45^0 lielu leņķi ar x-asi un taisnes slīpuma leņķa α tangents ir

$$\operatorname{tg} \alpha = k,$$



Zīm. 17.

tad vienādojuma (27) saknes eksistences nosacījumu tiešām izteic tā, ka k ir īsts pozitīvs daļskaitlis, t. i.

$$0 < k < 1.$$

Ģeometriskā interpretācijā šis nosacījums rāda, ka riņķa (zīm. 16) chordai A_0A_1 jābūt īsākai par tā loku A_0BA_1. Tā tad problēmai ir atrodama noteikta ekstrēmāle — riņķa loks, kas iet caur dotajiem punktiem.

Ir vēl sevišķi jāpierāda, ka ar šo ekstrēmāli laukuma S nozīme ir maksimālā.

Minētais reciprocitātes likums norāda uz šādu **teōrēmu**: no slēgtām plāksnes līnijām, kas ierobežo figūru ar pastāvīgu laukumu, riņķa līnijai ir ekstrēmālais (minimālais) garums.

Uzdevumi X.

1. Atrast galīgās formas vienādojumus ģeodeziskām līnijām uz rotācijas virsas

$$x^2 + y^2 = f(z).$$

Atb. Dotās virsas krustošanas līnijas ar virsām

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} = \int F(z; C_1)\,dz + C_2,$$

ja funkcija

$$F(z; C_1) = \frac{C_1}{2f(z)}\sqrt{\frac{[f'(z)]^2 + 4f(z)}{f(z) - C_1^2}}$$

un ja ar patvaļīgo konstanti C_1 izteic ģeodezisko līniju diferenciālās sistēmas pirmintegrālu

$$x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds} = C_1.$$

2. Integrālam

$$\int_0^1 y'^2\,dx \qquad \left(y' = \frac{dy}{dx}\right)$$

noteikt ekstrēmāles, kas iet caur punktiem (0, 0), $\left(1, \frac{1}{4}\right)$ un apmierina blakusnosacījumu

$$\int_0^1 (y - y'^2)\,dx = \frac{1}{16}.$$

Atb. $y = \frac{1}{4}(3x - 2x^2)$.

3. Noteikt homogena smaga diega līdzsvara figūru, ja diega garums l un tas piestiprinats divos dotajos punktos A_0, A_1.

P i e z ī m e. Diega līdzsvara gadījumā tā smaguma centrs ir viszemākā stāvoklī*).

Atb. Ķēdes līnija.

*) Šī uzdevuma robežproblēmas diskusiju var atrast, piemēram, autora hektografētās lekcijās „T e o r ē t i s k ā m ē c h a n i k a", III d., Rīgā, 1936.

PIELIKUMS.

Akadēmisko gala pārbaudījumu uzdevumi.

1923. g./I*).

1. Kādam nosacījumam vajaga pastāvet starp funkcijām $P(x, y)$ un $Q(x, y)$, lai izteiksme

$$\left(P\frac{\partial Q}{\partial x} - Q\frac{\partial P}{\partial x}\right)dx - \left(P\frac{\partial Q}{\partial y} - Q\frac{\partial P}{\partial y}\right)dy$$

būtu vienas funkcijas $U(x, y)$ pilnīgs (totāls) diferenciāls? Aprēķināt funkciju U šādos gadījumos:

a) $P = x^2 + y^2$, $Q = y$, b) $P = x$, $Q = x^2 + y^2$, c) $P = y$, $Q = x$.

Atb. $P\dfrac{\partial^2 Q}{\partial x\partial y} = Q\dfrac{\partial^2 P}{\partial x\partial y}$. a) $U = -x^2y + \dfrac{y^3}{3} + C$,

b) $U = \dfrac{x^3}{3} - xy^2 + C$, c) $U = xy + C$.

2. Integrēt diferenciālvienādojumu

$$\frac{\partial z}{\partial x} + (1 + x - y - z)\frac{\partial z}{\partial y} + x - y + 3z = 0.$$

Atb. Vispārīgais integrāls

$$\Phi\left[(y - x - z)e^{2x},\ (y - x - z)e^{\frac{2z}{y-x-z}}\right] = 0$$

(ar patvaļīgas funkcijas simbolu Φ).

1926. g./I.

1. Sastādīt virsas vienādojumu, ja virsas ikkatrā punktā M vilktā tangentplāksne ir paralēla taisnei, kas savieno punkta M projekciju uz xy-plāksni ar tā projekciju uz z-asi.

Atb. $yz = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ (φ-patvaļīga funkcija).

---

*) I, resp. II norāda pavasara, resp. rudens sesiju, kad notikuši gala pārbaudījumi un kad Mat. un dabas zinātņu fakultātes matēmatikas grupai ir doti šādi diferenciālvienādojumu uzdevumi.

2. Integrēt diferenciālvienādojumu

$$x(cz - by)\frac{\partial z}{\partial x} + y(ax - cz)\frac{\partial z}{\partial y} = z(by - ax)$$

(a, b, c — konstantes), un atrast to integrālvirsu, kas iet caur taisni

$$ax = by = cz.$$

Atb. $ax + by + cz = \varphi(xyz)$; $(ax + by + cz)^3 = 27\,abcxyz.$

3. Integrēt diferenciālvienādojumu

$$(x + 1)\,y'' - 2y' - (x - 1)\,y = 2xe^{-x},$$

ja zināms, ka atbilstošam homogenam vienādojumam ir integrāls formā

$$e^{kx} \qquad (k \text{ — konstante}).$$

Atb. Atrisinājumu fundamentālā sistēma:

$$\eta_1 = e^x, \quad \eta_2 = \left(x^2 + 3x + \frac{5}{2}\right)e^{-x}.$$

Partikulārais integrāls:

$$y_1 = \eta_1\int\frac{xe^{-x}\,\eta_2 dx}{(x + 1)^2} - \eta_2\int\frac{xe^{-x}\,\eta_1 dx}{(x + 1)^2}.$$

1926. g./II.

1. Integrēt diferenciālvienādojumu

$$y'(x^2 - 1) - 2xy + \frac{2x^3 + 3x^2 - 1}{x^2} = 0 \quad \left(y' = \frac{dy}{dx}\right),$$

un noteikt to integrāllīniju, kas iet caur punktu (2, 0).

Atb. $y = C(x^2 - 1) + \dfrac{x + 1}{x}$; $y = \dfrac{-x^3 + 3x + 2}{2x}$.

2. Integrēt diferenciālvienādojumu

$$2y^3\frac{\partial z}{\partial x} + 3x^2y^2\frac{\partial z}{\partial y} + 9x^2yz + 12x^2 = 0,$$

un noteikt to integrālvirsu, kas iet caur līniju

$$\begin{cases} x = y, \\ yz + 3y = 1. \end{cases}$$

Atb. $zy^3 + 2y^2 = \varphi(x^3 - y^2)$; $zy^3 + 3x^3 - y^2 = 0$.

3. Ortogonālo koordinātu sistēmā noteikt līniju ar šādām īpašībām: četrstūris, ko veido līnijas kautkuŗa punkta P ordināta, ordinātu ass, abscisu ass un tangente punktā P, un trijstūris, ko veido līnijas normāle punktā P, abscisu ass un ordināta, ir ar vienāda lieluma laukumiem.

Atb. $y^2 - x^2 = Cy$.

1927. g./I.

1. Noteikt divu argūmentu x, y funkciju $z = f(x, y)$, lai izteiksme

$$\frac{z\,dx - dy}{zy - x}$$

būtu pilnīgs (totāls) diferenciāls.

No dabūtiem bezgala daudziem atrisinājumiem izvēlēties to funkciju z, kas ar $y = 0$ pieņem nozīmi

$$\frac{1 + x^2}{1 - x^2}.$$

Atb. $(x + y)^2(z - 1) = (z + 1)\varphi(x^2 - y^2)$; $z = \dfrac{1+(x-y)^2}{1-(x-y)^2}$.

2. Integrēt diferenciālvienādojumu

$$(p^2 + q^2)x - pz = 0 \qquad \left(p = \frac{\partial z}{\partial x},\quad q = \frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

un noteikt integrālvirsu, kas iet caur parabolu

$$\begin{cases} y = 0, \\ z^2 = 2x. \end{cases}$$

Atb. Pilnīgais integrāls $\alpha z^2 = x^2 + (y + \beta)^2$; $z^2\left(\dfrac{z^2}{4} \mp y\right) = x^2$.

3. Integrēt diferenciālvienādojumu

$$x(1+x)\frac{d^2y}{dx^2}+(x+2)\frac{dy}{dx}-y=(ax^2+bx+c)e^x,$$

ja ir zināms, ka atbilstošam homogenam vienādojumam eksistē atrisinājums formā x^n.

Atb. $y=\frac{C_1}{x}+C_2(x+2)+\frac{x+2}{2}\int\frac{xf(x)}{1+x}dx-\frac{1}{2x}\int\frac{(x+2)x^2f(x)}{1+x}dx,$
ja $f(x)=(ax^2+bx+c)e^x$.

1927. g./II.

1. Atrast tādu funkciju $\lambda(x, y)$, lai varētu kopīgi pastāvet šādi trīs vienādojumi:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=(2x^2-1)\lambda,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2xy\lambda,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(2y^2-1)\lambda.$$

Tādā gadījumā aprēķināt arī funkciju $z=f(x, y)$.

Atb. $\lambda=Ce^{-(x^2+y^2)}$; $z=Ax+By+D+\frac{C}{2}e^{-(x^2+y^2)}$.

2. Integrēt diferenciālvienādojumu

$$y''-6y'+9y=\frac{9x^2+6x+2}{x^3}\quad\left(y'=\frac{dy}{dx},\ y''=\frac{d^2y}{dx^2}\right).$$

Atb. $y=\frac{1}{x}+C_1e^{3x}+C_2xe^{3x}$.

3. Integrēt diferenciālvienādojumu

$$p(q^2+1)+(a-z)q=0\quad\left(p=\frac{\partial z}{\partial x},\ q=\frac{\partial z}{\partial y},\ a\ \text{— konstante}\right).$$

Atb. $4[(z-a)\alpha-\alpha^2]=(y+\alpha x+\beta)^2$; $z=a$ (sing. int.).

1928. g./I.

1. Noteikt divu argūmentu x, y funkciju $z=f(x, y)$ tā, lai

$$\mu=\frac{1}{y\sqrt{z^2+1}}$$

būtu diferenciālvienādojuma

$$dx + z dy = 0$$

integrējošais faktors. No bezgala daudziem atrisinājumiem z izvēlēties to, kas ar $x = 1$ top par

$$z = \frac{y^2 - 1}{2y},$$

un interpretēt ģeometriski diferenciālvienādojuma vispārīgo atrisinājumu.

Atb. $y^2(z^2+1) = \varphi(x+yz)$; $z = \dfrac{y^2-x^2}{2xy}$; $x^2 + y^2 + Cy = 0$.

2. Integrēt diferenciālvienādojumu

$$y'' - 2y' + y = \frac{x^4 - x^2 - 4x - 6}{x^4} \quad \left(y' = \frac{dy}{dx},\ y'' = \frac{d^2y}{dx^2}\right),$$

ja zināms, ka tā partikulāram integrālam ir forma

$$y_1 = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2}.$$

Atb. $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2} + (C_1 + C_2 x)e^x$.

1928. g./II.

1. Noteikt funkciju $z = f(x, y)$ tā, lai izteiksme

$$z dx + z^2 dy$$

būtu pilnīgs (totāls) diferenciāls. No tādām funkcijām z izvēlēties to, kas ar $y = 0$ top par $\sqrt{x}$, un tad integrēt diferenciālvienādojumu

$$z dx + z^2 dy = 0.$$

Atb. $xy + \dfrac{2}{3}y^3 \pm \dfrac{2}{3}(y^2 + x)^{\frac{3}{2}} = const.$

2. Kuŗām a, b, c nozīmēm diferenciālvienādojumam

$$y^2p^2 + 2xyp + ay^2 + 2bx + c = 0 \qquad \left(p = \frac{dy}{dx}\right)$$

eksistē singulārais integrāls?

Atb. $a = -1$; $b = 0$. Sing. integrāls: $x^2 + y^2 = c$.

3 Integrēt diferenciālvienādojumu

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 1 + x^2.$$

Atb. $y = (C_1 + C_2x + C_3x^2)\,e^x - (x^2 + 6x + 13)$.

1929. g./I.

1. Diferenciālvienādojuma

$$xy' - y = \frac{y^2 - x^2}{ax^2 + bx + c} \qquad \left(y' = \frac{dy}{dx}\right)$$

integrācijā atrast: I) divus partikulāros integrālus, kas nav atkarīgi no konstantēm a, b, c, un ar šiem integrāliem sastādīt vispārīgo integrālu, apskatot gadījumus, kad $b^2 - 4ac > 0$, $b^2 - 4ac = 0$, $b^2 - 4ac < 0$, II) sakaru starp a, b, c tā, lai vispārīgais integrāls būtu racionāla algebriskā funkcija.

Atb. I) $y = \pm x$, $\ln C \dfrac{y - x}{y + x} = 2 \displaystyle\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$

(C — integrācijas konstante).

II) Izteiksmei $\dfrac{4}{b^2 - 4ac}$ jābūt vesela skaitļa kvadrātam.

2. Integrēt diferenciālvienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} 2\dfrac{dx}{dt} + 3\dfrac{dy}{dt} - 16x - 3y = 0, \\ 7\dfrac{dx}{dt} - 2x - 3y = 0. \end{cases}$$

Atb. $x = C_1e^{-t} + C_2e^{2t}$, $y = -3C_1e^{-t} + 4C_2e^{2t}$.

1929. g./II.

1. Integrēt diferenciālvienādojumu

$$(x^2 - y^2 - z^2)p + 2xyq = 2x(z+1) \quad \left(p = \frac{\partial z}{\partial x},\ q = \frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

un noteikt integrālvirsu, kas iet caur riņķa līniju

$$\begin{cases} y = 1, \\ x^2 + z^2 = 1. \end{cases}$$

Atb. $x^2 + y^2 + z^2 + 2z - 2(z+1)\ln y = y\varphi\left(\frac{z+1}{y}\right)$;

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2(z+1)\ln y - 2 = 0.$$

2. Integrēt diferenciālvienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + x - y = e^t, \\ \frac{dy}{dt} + x - z = \cos t, \\ \frac{dz}{dt} + x = 0. \end{cases}$$

Atb. $x = \frac{1}{4}\left[e^t + C_1 e^{-t} + (t + C_2)\cos t + (t + C_3)\sin t\right]$,

$$y = \frac{1}{4}\left[-2e^t + (2t + 1 + C_2 + C_3)\cos t + (C_3 - C_2 + 1)\sin t\right],$$

$$z = \frac{1}{4}\left[-e^t + C_1 e^{-t} + (t - 1 + C_3)\cos t - (t + 1 + C_2)\sin t\right].$$

1930. g./I.

1. Konstatēt, ka diferenciālvienādojumu sistēma

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = u(x + yz), \\ \frac{\partial u}{\partial y} = u(y + xz), \\ \frac{\partial u}{\partial z} = u(z + xy) \end{cases}$$

ir saderīga, un aprēķināt tādu atrisinājumu $u(x, y, z)$, kas pieņemtu nozīmi 1, ja $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Atb. $\ln u = xyz + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}$.

2. Kādam sakaram jāpastāv starp diferenciālvienādojuma

$$y'' + py' + q = 0$$

koeficientiem $p = p(x)$, $q = q(x)$, ja eksistē divi šī vienādojuma partikulārie integrāli

$$y_1(x), \quad y_2(x) = xy_1(x)?$$

Integrēt doto vienādojumu gadījumā, kad

$$q = -a^2 = const.$$

Atb. $p^2 + 2\frac{dp}{dx} - 4q = 0$, $p = 2a \operatorname{tg}(\alpha - ax)$,

$$y = \frac{C_1 + C_2 x}{\cos(\alpha - ax)} \quad (\alpha \text{ — konstante}).$$

1930. g /II.

1. Virsas punkta M projekcijas uz x- un y-asi ir punkti P un Q, bet A un B ir punktā M vilktās tangentplāksnes krustošanas punkti ar tām pašām asīm. Sastādīt virsas vienādojumu, ja pastāv sakars

$$\frac{OP}{OA} + \frac{OQ}{OB} = 2,$$

un noteikt to virsu, kas iet caur līniju

$$\begin{cases} y = 1, \\ z = x^3. \end{cases}$$

Atb. $z = x^2 \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$; $z = \frac{x^3}{y}$.

2. Integrēt diferenciālvienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} y' + y + 2u = 0, \\ z' - \frac{y}{2} + z = 0, \\ u' + \frac{y}{2} + z + 2u = 0, \end{cases}$$

un noteikt tādus atrisinājumus $y(x)$, $z(x)$, $u(x)$, kas top katrs 1, ja $x = 0$.

Atb.

$$\begin{cases} y = C_2 + \left(\frac{1}{2}C_1 + C_3 - C_1x\right)e^{-2x}, \\ z = \frac{1}{2}C_2 + \left(\frac{1}{4}C_1 - \frac{1}{2}C_3 + \frac{1}{2}C_1x\right)e^{-2x}, \\ u = -\frac{1}{2}C_2 + \left(\frac{3}{4}C_1 + \frac{1}{2}C_3 - \frac{1}{2}C_1x\right)e^{-2x}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - 2x\right)e^{-2x}, \\ z = \frac{1}{4} + \left(\frac{3}{4} + x\right)e^{-2x}, \\ u = -\frac{1}{4} + \left(\frac{5}{4} - x\right)e^{-2x}. \end{cases}$$

1931. g./I.

1. Kā jāizvēlas funkcija $P(x)$, lai diferenciālvienādojumam

$$y'' + 2y' + Py = 0 \qquad \left(y' = \frac{dy}{dx},\ y'' = \frac{d^2y}{dx^2}\right)$$

būtu divi partikulāri integrāli y_1, y_2 ar sakaru

$$y_2 = y_1^2 e^x,$$

P i e z ī m e. Ir lietojama transformācija $\frac{y'}{y} = u$.

Atb. $P = 1 + \frac{2}{(3x + C_1)^2}$.

2. Integrēt diferenciālvienādojumu

$$pq = p + q \qquad \left(p = \frac{\partial z}{\partial x},\ q = \frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Atb. $z = ax + \frac{a}{a-1}y + \beta$ (pilnīgais integrāls).

1931. g./II.

1. Reducēt uz kvadratūrām integrāla

$$\int_{x_0}^{x_1} y^n \sqrt{1 + y'^2}\, dx \qquad \left(y' = \frac{dy}{dx},\ n \text{ — konstante}\right)$$

ekstrēmāļu aprēķināšanu.

Gadījumā, kad $n = \frac{1}{2}$, noteikt ekstrēmāļu saimes vienādojumu galīgā formā un atrast to saimes līniju, kas iet caur punktiem $A(0, 1)$ un $B(1, 1)$.

Atb. $\pm \int \frac{dy}{\sqrt{y^{2n} - a^2}} = \frac{x}{a} + b;\ 4(y - a^2) = \left(\frac{x}{a} + b\right)^2;$

$$b = -\frac{1}{2a};\quad a = \pm\frac{\sqrt{6} \pm \sqrt{2}}{4}.$$

1932. g./I.

1. Noteikt virsu, kas iet caur taisni

$$\begin{cases} x = a, \\ y = z, \end{cases}$$

ja šīs virsas ikkatra punkta M projekcija uz xy-plāksni, koordinātu sākuma punkts un taisnes

$$\begin{cases} z = 0, \\ y = a \end{cases}$$

krustojuma punkts ar tangentplāksni punktā M atrodas uz kopīgās taisnes.

Atb. $z = \frac{y(y-a)}{y-x}.$

2. Noteikt diferenciālvienādojuma

$$\frac{d^4y}{dx^4} - 4\frac{d^3y}{dx^3} + 5\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 12\cos 2x + 4$$

integrāllīniju, kas pieskaŗas x-asij punktos $(\pi, 0)$ un $\left(\frac{3}{2}\pi, 0\right)$, un aprakstīt tās ģeometrisko formu.

Atb. $y = 1 + \frac{1}{2}\sin 2x + (C_1 + C_2x)e^{2x} + C_3\cos x + C_4\sin x$;

$$y = 1 + \frac{1}{2}\sin 2x + \sin x + \cos x.$$

1932. g./II.

1. Integrēt diferenciālvienādojumu

$$ny^2xp - myx^2q = z(ny^2 - mx^2)$$

$\left(p = \frac{\partial z}{\partial x}, \ q = \frac{\partial z}{\partial y}, \ m, n \text{ — konstantes}\right)$, un atrast to integrālvirsu, kas iet caur ortogonālo hiperbolu, ja šī hiperbola atrodas plāksnē $z = b$ un tās asimptotas rodas koordinātu kaktu bisektoriālām plāksnēm krustojoties ar plāksni $z = b$. Minetās hiperbolas reālās pusass gaŗums ir a.

Atb. $z = xy\varphi(mx^2 + ny^2)$; $z = \dfrac{b(m+n)\,xy}{\sqrt{(mx^2+ny^2+na^2)(mx^2+ny^2-ma^2)}}$.

2. Atrast diferenciālvienādojumā

$$y' + y^2 + 2y + \varphi(x) = 0$$

funkciju $\varphi(x)$ tā, lai šī vienādojuma diviem partikulāriem atrisinājumiem y_1, y_2 būtu sakars

$$y_2 = 2y_1 + 1.$$

Atb. $\varphi(x) = 1 + \dfrac{2}{9x^2}$; $\dfrac{y - \frac{1}{3x} + 1}{y - \frac{2}{3x} + 1} = C\sqrt[3]{x}$ (vispārīgais integrāls).

1933. g./I.

1. Noteikt plāksnes līniju, kam liekuma radija projekcija uz doto plāksnes taisni būtu pastāvīgā lielumā a.

Atb. $\sin\left(\frac{y}{a} - a\right) = \beta e^{\frac{x}{a}}$ (a, β — konstantes).

2. Integrēt diferenciālvienādojumu

$$y'' + y' - 6y = x^2 + \cos 2x \qquad \left(y' = \frac{dy}{dx},\ y'' = \frac{d^2y}{dx^2}\right)$$

Atb. $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x} - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{18}x - \frac{7}{108} - \frac{5}{52}\cos 2x + \frac{1}{52}\sin 2x.$

1933. g./II.

1. Noteikt diferenciālvienādojuma

$$x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = z$$

integrālvirsu, kas iet caur līniju

$$\begin{cases} x = y, \\ z = x^3, \end{cases}$$

un šīs virsas asimptotiskās līnijas.

Atb. $z = x^2 y;\ x = C_1,\ xy^2 = C_2.$

1934. g./I.

1. Sastādīt pirmās kārtas vienādojumu ar parciāliem atvasinājumiem, ja tā pilnīgais integrāls ar patvaļīgām konstantēm a un b ir

$$y^2(x^2 + a) = (z + b)^2.$$

Integrēt sastādīto diferenciālvienādojumu.

Atb. $pq = xy.$

2. Noteikt plāksnes līniju, kam ikvienā punktā vilkta tangente un normāle ar koordinātu asīm veido četrstūri ar savstarpīgi perpendikulārām diagonālēm.

Atb. Riņķu līnijas: $x^2 + y^2 + Cx = 0.$

1934. g./II.

1. Diferenciālvienādojuma

$$2z^4p + 5xyq = 5zx \qquad \left(p = \frac{\partial z}{\partial x},\ q = \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

integrācijā noteikt sekojošo: a) atrast tā vispārīgo integrālu, b) atrast xyz-koordinātu sistēmā integrālvirsu S, kas iet caur līniju

$$\begin{cases} x = 0, \\ 4y + z^5 = 0, \end{cases}$$

c) izteikt integrālvirsas S punkta koordinātas x, y, z ar diviem parametriem u un v, starp kuŗiem pastāv sakari

$$\begin{cases} u + v = z, \\ u^2 + v^2 = x. \end{cases}$$

Atb. a) $z = y\varphi(5x^2 - z^4)$, b) $4y = 5x^2z - z^5$,
c) $x = u^2 + v^2$, $y = u^5 + v^5$, $z = u + v$.

2. Noteikt ortogonālas trajektorijas līniju saimei, kas polārās koordinātās noteikta ar vienādojumu

$$r^2 = a^2 \ln \frac{\operatorname{tg}\varphi}{C} \qquad (C \text{ — parametrs, } a \text{ — konstante}).$$

Atb. $r^2 (\cos 2\varphi + C) + a^2 = 0$.

1935. g./I.

1. Līniju saimei

$$y^2 - x^2 + 4xy + Cx = 0 \qquad (C \text{ — parametrs})$$

noteikt ortogonālās trajektorijas un konstruēt abu saimju līnijas.

Atb. $y^3 + 3x^2y + 4x^3 = C$.

2. Integrēt diferenciālvienādojumu

$$2yz \frac{\partial z}{\partial x} - xz \frac{\partial z}{\partial y} + xy = 0,$$

un noteikt integrālvirsu, kas iet caur riņķa līniju

$$\begin{cases} z = 0, \\ x^2 + y^2 = y. \end{cases}$$

Atb. a) Vispārīgais integrāls: $x^2 + 2y^2 = \varphi(y^2 - z^2)$.

b) Integrālvirsa: $(x^2 + y^2 + z^2)^2 - y^2 + z^2 = 0$.

1936. g./I.

1. Integrēt diferenciālvienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} - 3y - z = e^{2x} \\ \dfrac{dz}{dx} + (1 - a^2)y - z = 0, \end{cases}$$

un noteikt to integrāllīniju, kas iet caur koordinātu sākuma punktu gadījumā, kad $a \neq 0$. Atrast šīs integrāllīnijas robežstāvokli, kad $a \longrightarrow 0$.

Atb. I)
$$\begin{cases} y = e^{2x}\left(\dfrac{1}{a^2}\operatorname{ch} ax + \dfrac{1}{a}\operatorname{sh} ax - \dfrac{1}{a^2}\right), \\ z = e^{2x}\left(1 - \dfrac{1}{a^2}\right)(\operatorname{ch} ax - 1), \end{cases}$$

II)
$$\begin{cases} y = \dfrac{e^{2x}}{x}(x^2 + 2x), \\ z = -\dfrac{x^2}{2}e^{2x}. \end{cases}$$

2. Noteikt diferenciālvienādojuma

$$z^2(p^2 + q^2 + 4) - 16 = 0 \qquad \left(p = \frac{\partial z}{\partial x},\ q = \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

pilnīgo integrālu un to integrālvirsu, kas iet caur riņķa līniju

$$\begin{cases} z = 1, \\ 4(x^2 + y^2) = 3. \end{cases}$$

Atb $(\alpha x + y + \beta)^2 = \dfrac{\alpha^2+1}{4}(4 - z^2)$ (α, β—patvaļīgas konstantes);

$$(\sqrt{x^2 + y^2} \pm \sqrt{3})^2 = 1 - \frac{z^2}{4} \text{ vai } x^2 + y^2 = 1 - \frac{z^2}{4}.$$

1936. g./II.

1. Noteikt diferenciālvienādojuma

$$z + px + qy + \frac{p^2}{q^2} = 0 \qquad \left(p = \frac{\partial z}{\partial x},\ q = \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

pilnīgo integrālu un to integrālvirsu, kas iet caur taisni

$$\begin{cases} z = 0, \\ y = x. \end{cases}$$

Atb. $(z + a^2)(ax + y) = \beta;\quad z = 0$ un $y = x.$

2. Noteikt integrāla

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y} dx \qquad \left(y' = \frac{dy}{dx}\right)$$

ekstrēmali, kas iet caur sākuma punktu un punktu (1, 1).

Atb. $x^2 + y^2 = 2x.$

1937. g./I.

1. Noteikt diferenciālvienādojuma

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 2z$$

pilnīgo integrālu, karakteristikas un to integrālvirsu, kas iet caur parabolu

$$x = 0,\ z = y^2.$$

Atb. $2(a^2 - 1)z = (ax + y + \beta)^2;\quad z = \left(x\sqrt{\frac{3}{2}} + y\right)^2.$

2. Atrast diferenciālvienādojuma

$$xp^2 - 2yp + x + 2y = 0 \qquad \left(p = \frac{dy}{dx}\right)$$

vispārīgo un singulāro integrālu. Grafika.

Atb. $C^2x^2 + 2C(x - y) + 2 = 0$ (parabolas);
$y^2 - 2xy - x^2 = 0$ (taisnes).

1937. g./II.

1. Noteikt parciālā diferenciālvienādojuma

$$px = qy + q^2 + 2z \qquad \left(p = \frac{\partial z}{\partial x},\ q = \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

pilnīgo integrālu, singulāro integrālu un to integrālvirsu, kas iet caur līniju

$$\begin{cases} y = x^3 \\ z = x^2. \end{cases}$$

Atb. $z=x^2\left(axy+\frac{a^2}{4}x^4+\beta\right); x=0; z=x^2$ un $z=x^2(4x^4 - 4xy+1)$.

2. Noteikt parastā diferenciālvienādojuma

$$(1 + y'^2)y''' = 3y' y''^2$$

integrāllīniju, kas iet caur punktiem (0, 0), (0, +1), (+1, 0)

Atb. $x^2 + y^2 - x - y = 0$.

1938. g./I.

1. Pierādīt, ka divu parametru α un β līniju saimei

$$x^2 + y^2 + 6z^2 = \alpha, \quad 2x^2 + 5y^2 + z^2 + 4xy = \beta$$

eksistē virsas, kas krusto saimes līnijas taisnā leņķī. Atrast šo virsu galīgās formas vienādojumu un noteikt to virsu, kas iet caur punktu (1, 1, 1).

Atb. $z(x + 2y) = C(2x - y)^7$; $C = 3$.

2. Atrast diferenciālvienādojuma

$$2(p - 1)y = p^2x \qquad \left(p = \frac{dy}{dx}\right)$$

vispārīgo un singulāro integrālu. Grafika.

Atb. $2Cy = (x + C)^2$; $y = 0$, $y = 2x$.

Pamanitās iespieduma kļūdas.

Lap.p.:	Rinda:	Iespiests:	Jābūt:
25	11. no augšas	$\Phi x,$	$\Phi(x,$
34	4. „ „	$y^{(n-1)}$	$y^{(n-2)}$
64	6. „ „	(12) ξ_{kn}	(7) ξ^{k_n}
65	1. no apakšas	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
96	5. „ „	$\sum_{i=n}^{n} a_i\ b_i$	$\sum_{i=1}^{n} a_i\ b_i$
99	12. „ „	$ya_{31}x$	$y(a_{31}x$
152	9. „ „	Φ'_y	Φ'_q
154	12. „ „	$\frac{\partial f}{\partial z} +$	$\frac{\partial f}{\partial y} +$
162	8. „ „	(17)	(14)
170	10. „ „	(8)	(10)
195	3. no augšas	(5)	(6)
197	4. no apakšas	$\frac{\partial g}{\partial z}$	$\frac{\partial f}{\partial z}$
198	8. no augšas	$\frac{\partial f_1}{\partial g}$	$\frac{\partial f_1}{\partial q}$
206	3. „ „	$k_2 = \frac{c}{a}$	$k_1 k_2 = \frac{c}{a}$
232	7. no apakšas	(3)	(4)
238	8. no augšas	$\frac{\partial f}{\partial \bar{q}} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \varepsilon}$	$\frac{\partial f}{\partial \bar{q}} \cdot \frac{\partial \bar{q}}{\partial \varepsilon}$