ЛАТВИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Физико-математический факультет

студ. Э. ВИГАНТ

студ. б. № 34425

О РАССЛОЕНИЯХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

ДИПЛОМНАЯ РАБОТА

Руководитель

проф. А.Д. МЫШКИС.

О РАСШИРЕНИЯХ

ТОПОЛОГИЧЕСИХ ПРОСТРАСТВ

О г л а в л е н и е

§ 1. Основные определения и примеры расширений топологических пространств.

В настоящей работе будет подробно рассмотрен один важный способ расширения топологических пространств, основанный на понятии пространства близости (инфинитезимального пространства), введённым советским математиком В.А.Ефремовичем. Однако предварительно мы приведём обзор основных понятий и важнейших способов расширения топологических пространств.

1. Всякое множество M, лежащее в топологическом пространстве R, можно рассматривать как топологическое пространство, причём открытые множества в пространстве M определяются как множества вида $M \cap \Gamma$, где Γ открытые множества в R. При этом аксиомы топологического пространства (см. [1] стр. 288) выполняются. Из этого определения топологии в M следует, что замкнутые множества в M - это множества вида $M \cap F$, где F замкнутые множества в R. Так как окрестности в M какой-либо точки $x \in M$ суть множества вида $M \cap U(x)$, где $U(x)$ - окрестности точки x в R, то точка $x \in M$ тогда и только тогда является точкой прикосновения в пространстве M для данного множества $A \subseteq M$, когда она является точкой прикосновения множества A в R. Другими словами, $M[A] = M \cap R[A]$ *) для любого $A \subseteq M$.

---

*) Под $M[A]$ и $R[A]$ понимаем замыкание множества A, соответственно, в пространстве M и в пространстве R.

Таким образом, пространство R индуцирует "естественную" топологию в любом своём подмножестве.

Топологическое пространство R называется **расширением** топологического пространства M, если оно содержит M в качестве всюду плотного подмножества, причём топология в M, индуцируемая пространством R, совпадает с исходной.

2. Интересен случай, когда R - бикомпакт, т.е. хаусдорфово бикомпактное пространство (определение см. [1] стр.380), и потому, как легко доказать, M вполне регулярно. При этом T_1-пространство M называется вполне регулярным или тихоновским, если для любой точки $x \in M$ и любого замкнутого множества $A \subset M$, не содержащего эту точку, существует действительная непрерывная функция $f(x)$, $0 \leq f(x) \leq 1$, определённая на всём пространстве M, равная нулю в точке x и единице на множестве A.

Теория бикомпактных расширений берёт своё начало из ставших уже классическими исследований советского математика А.Н. Тихонова, который полностью решил вопрос о включении вполне регулярных пространств в бикомпакты того же веса [12]. (Определение веса см., например, [4] стр.).

Вслед за исследованиями А.Н. Тихонова встала естественная задача: исследовать совокупность бикомпактных расширений данного вполне регулярного пространства, не ограничиваясь расширениями данного веса.

Впервые эта задача была решена чешским математиком Чехом [16]. Им было построено бикомпактное расширение

βR, вполне регулярного пространства R, которое можно непрерывно отобразить на всякое бикомпактное расширение пространства R так, чтобы точки R оставались неподвижными. Пространство βR строится следующим образом. Берётся множество экземпляров сегмента $[0,1]$ числовой прямой в таком координальном числе τ, как велика мощность множества Φ всех непрерывных отображений пространсвва R в отрезок $[0,1]$. Берётся топологическое произведение (определение см. [1] стр. 392) R^τ всех таких сегментов и устанавливается следующее отображение q пространства R в R^τ: каждой точке $x \in R$ ставится в соответствие та точка R^τ, координаты которой суть образы точки x при различных отображениях системы Φ. Отображение q - топологическое. Оно ставит в соответствие пространству R некоторое множество $q(R) \subseteq R^\tau$. Замыкание $q(R)$ в R^τ есть бикомпакт βR.

Исследования Чеха были продолжены советским математиком П.С.Александровым. Им построены бикомпактные расширения αR и $\alpha' R$ регулярного и вполне регулярного пространства R, которые могут быть также непрерывно отображены на всякое бикомпактное расширение пространства R так, что точки R при этом остаются на месте, и доказано, что пространство $\alpha' R$ и чеховское расширение βR совпадают с точностью до гомеоморфизма, оставляющего неподвижными все точки R, для всякого вполне регулярного пространства.

Пусть H и H' - два открытых множества в хаусдорфовом пространстве R. H' называется регулярно включённым в H , если замкнутые множества $R \setminus H$ и $R[H']$ не пересекаются. H' называется вполне регулярно включенным в H , если $R \setminus H$ и $R[H']$ функционально отделены, т.е. существует действительная непрерывная функция $f(x)$, $0 \leq f(x) \leq 1$, определённая на всём пространстве R , равная нулю на множестве $R[H']$ и единице на множестве $R \setminus H$. Система $\Sigma = \{H\}$ открытых множеств H пространства R называется регулярной (вполне регулярной), если для каждого элемента H системы Σ имеется $H' \in \Sigma$, регулярно (вполне регулярно) включённый в H . Центрированная *) регулярная (вполне регулярная) система $\{H\}$ открытых множеств пространства R называется регулярным (вполне регулярным) концом пространства R , если она не является подсистемой никакой отличной от неё центрированной регулярной (вполне регулярной) системы открытых множеств пространства R (свойство максимальности). Методом трансфинитной индукции доказывается, что всякая регулярная (вполне регулярная) центрированная система σ открытых множеств содержится по крайней мере в одном регулярном (вполне регулярном) конце. Обозначим через αR (через $\alpha' R$) множество всех регулярных (вполне регулярных) концов данного регулярного (вполне регулярного) пространства R . Топология в множество αR ($\alpha' R$) вводится следующим образом. Обозначим через O_H

---

*) Система множеств называется центрированной, если пересечение любого конечного числа множеств этой системы не пусто.

множество всех регулярных (вполне регулярных) концов, имеющих данное открытое множество H в числе своих элементов. Множества O_H, а также всевозможные суммы таких множеств определяются в качестве открытых множеств пространства αR (пространства $\alpha' R$). Этим путём пространства αR и $\alpha' R$ превращаются в хаусдорфовы пространства (доказательство имеется, например, в [2]). Можно доказать, что система всех окрестностей какой-либо фиксированной точки данного регулярного (вполне регулярного) пространства R является регулярным (вполне регулярным) концом. Таким образом, каждой точке пространства R соответствует некоторый конец, т.е. точка пространства αR ($\alpha' R$). В силу выполненной аксиомы отделимости Хаусдорфа двум различным точкам R соответствуют различные концы. Таким образом, установлено взаимно однозначное отображение пространства R в αR (соответственно, в $\alpha' R$); так как множества O_H образуют базу αR ($\alpha' R$), то это отображение является топологическим. Поэтому можно отождествить каждую точку $x \in R$ с соответствующей ей точкой αR ($\alpha' R$), т.е. считать, что R содержится в αR (в $\alpha' R$) в качестве всюду плотного подмножества. Другими словами: αR и $\alpha' R$ суть расширения пространства R. Доказано, что αR и $\alpha' R$ – бикомпактные расширения (см. [2] стр.).

Приведём пример ещё одного бикомпактного расширения пространства R, так называемого расширения ωR Wallman'a*)

---

*) Wallman, Lattices and topological spaces, Ann. of math 39 (1938) 112-127

Под точками ωR понимаются максимальные центрированные системы замкнутых множеств пространства R. Если $x \in \{A\}$ - такая система, то элементы A этой системы называются координатами точки . Если A - фиксированное замкнутое множество пространства R , то через Φ обозначим множества тех точек $x \in \omega R$, которые имеют данное множество A в числе своих координат. Множества типа Φ_A, а также все множества, являющиеся пересечениями любой совокупности множеств Φ_A , определяются как замкнутые множества пространства ωR. Доказано, что ωR - всегда бикомпактное T_1 - пространство. Далее доказано, что для нормального пространства R пространства αR , $\alpha' R$, βR и ωR совпадают с точностью до гомеоморфизма, оставляющего неподвижными все точки R .

3. Дальнейшее развитие теории расширений топологических пространств связано с так называемыми H-замкнутыми пространствами, введёнными советским математиком П.С.Урысоном.

Пространство называется H-замкнутым, если оно замкнуто во всяком объемлющем пространстве или, другими словами, если оно не имеет никакого не совпадающего с ним расширения.

Американский математик М.Стон доказал для всякого хасдорфова топологического пространства существование H-замкнутого расширения того же веса, что и исходное пространство *). Но в его работе применяется обширный алгебраический аппарат. Полное решение этого вопроса (т.е. построение для каждого хаусдорфова пространства H-замкнутого расширения того же веса) получено, причём чисто топологическими методами, советским математиком С.В. Фоминым [13], [14], [15].

4. В математической физике часто приходится решать так называемые граничные задачи, т.е. строить функцию, определённую на некоторой области G, удовлетворяющую в ней предписанным условиям и некоторым условиям на границе области. При этом очень часто обычное определение границы оказывается недостаточным. С этим связаны различные обобщения понятия границы. Вот пример одного из них, данный советским математиком А.Д.Мышкисом [8]. Пусть имеем непустое хаусдорфово пространство R. Всякую непустую совокупность его открытых множеств будем называть семейством и обозначать M. Пусть дано некоторое множество $\mathfrak{M}$ семейств в R. Введём топологию в множество $R \cup \mathfrak{M}$ следующим образом. Пусть H - открытое множество в R; тогда под H^* будем понимать объединение H с совокупностью всех семейств $M \in \mathfrak{M}$, для которых при некотором $G \in M$ будет $G \subset H$. Будем считать каждое такое H^* окрестностью любого своего элемента. Доказано,

---

*) M. Stone, Applications of the teory of Boolean rings to the general topologi, Trans. Amer. Math. Soc. 41 (3) (1937) 375-481.

что при определённых условиях, налагаемых на семейства $M \in \mathfrak{M}$, множество $R \cup \mathfrak{M}$ является хаусдорфовым пространством, в котором R всюду плотно, и топология пространства R, рассматриваемого как подпространство $R \cup \mathfrak{M}$, совпадает с исходной. Таким образом, пространство $R \cup \mathfrak{M}$ есть расширение пространства R.

Множество $\mathfrak{M}$ называется границей R в широком смысле, а семейства $M \in \mathfrak{M}$ – обобщёнными граничными точками R. Далее доказано, что всякое расширение регулярного пространства R получается присоединением к R некоторой его границы в широком смысле $\mathfrak{M}$, конечно, с точностью до гомеоморфизма, оставляющего все точки R на месте.

В работе [9] А.Д.Мышкисом разобран вопрос эквивалентности некоторых способов введения границы.

5. В настоящей работе будет рассмотрена связь расширений топологических пространств с пространствами близости (инфинитезимальными пространствами), которым посвящается следующий параграф.

§ 2. Инфинитезимальные пространства.

1. В 1936 году В.А.Ефремович ([5], [6], [7]) ввёл новый класс пространств, аналогичных топологическим, которые были названы им инфинитезимальными. В этих пространствах операции вводятся не на основе понятия окрестности или замыкания и т.п., как в топологических, а на основе понятия близости подмножеств. Конечно, при этом

соотношение близости должно удовлетворять определённой системе аксиом.

Мы будем говорить, что непустое множество M является общим инфинитезимальным пространством, если в нём абстрактно задано соотношение близости между подмножествами: именно, для любых $A \subseteq M$ и $B \subseteq M$ дано, будет ли A близко B (в записи $A \delta B$) или нет ($A \bar{\delta} B$). (см.[7]). Причём будем считать это соотношение симметричным: если $A \delta B$, то $B \delta A$.

Будем вводить в M топологию следующим образом: при $A \subset M$ $[A]$ (где $[A]$ замыкание множества A в пространстве M) состоит из тех и только тех элементов $a \in M$, для которых $\{a\} \delta A$. Тогда, для того чтобы M было топологическим пространством необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись условия:

1° если $A \bar{\delta} \{a\}$, $B \bar{\delta} \{a\}$, то $(A \cup B) \bar{\delta} \{a\}$;

2° если $a \in A$, то $\{a\} \delta A$;

3° если $\{a\} \delta [A]$, то $\{a\} \delta A$;

4° для любой точки $a \in M$, $\{a\} \bar{\delta} \Lambda$;

5° если $B \bar{\delta} A, \supset A$, то $B \bar{\delta} A$

<u>Необходимость.</u> Пусть имеем топологическое пространство M. В нём выполняются аксиомы:

1) $[A \cup B] = [A] \cup [B]$

2) $A \subseteq [A]$

3) $[[A]] = [A]$

4) $[\Lambda] = \Lambda$

Условие 1^0 следует из равенства 1). Действительно, если $\{a\}\bar{\delta}A$ и $\{a\}\bar{\delta}B$, то $a\bar{\in}[A]\cup[B]=[A\cup B]$ и, следовательно, $\{a\}\bar{\delta}(A\cup B)$.

Предположим, что условие 2^0 не выполняется, т.е. имеется точка $a\in A\subset M$, для которой $\{a\}\bar{\delta}A$. Но тогда $a\bar{\in}[A]$ и, в силу аксиомы 2), $a\bar{\in}A$.

Пусть $[[A]]=[A]$. Это означает, что если $a\in[[A]]$ то $a\in[A]$ или, если $\{a\}\delta[A]$, то $\{a\}\delta A$. Условие 3^0 также выполнено.

И, наконец, условие 4) означает, что в M нет ни одной точки a, для которой было бы $\{a\}\delta\Lambda$.

<u>Достаточность.</u> Покажем, что из условий 1^0-5^0 следует выполнение условий 1) - 4).

Докажем равенство 1) по точкам. Пусть $a\bar{\in}[A]\cup[B]$, т.е. $\{a\}\bar{\delta}A$ и $\{a\}\bar{\delta}B$. Но тогда $\{a\}\bar{\delta}(A\cup B)$ и, следовательно, $a\bar{\in}[A\cup B]$. Обратно, пусть $a\bar{\in}[A\cup B]$, т.е. $\{a\}\bar{\delta}(A\cup B)\geq A$, $\{a\}\bar{\delta}(A\cup B)\geq B$. Откуда в силу условия 5^0 $\{a\}\bar{\delta}A$, $\{a\}\bar{\delta}B$ и, следовательно, $a\bar{\in}[A]\cup[B]$. Включение 2) сразу следует из условия 2^0. Действительно, если $a\in A\subset M$ и $\{a\}\delta A$, то $a\in[A]$. Равенство 3) следует из условия 3^0. Если $a\in[[A]]$, то $\{a\}\delta[A]$ и, следовательно, $\{a\}\delta A$, т.е. $[[A]]\geq[A]$. Пусть имеется точка $a\in[[A]]$ такая, что $a\bar{\in}[A]$. Тогда $\{a\}\delta[A]$ и $\{a\}\bar{\delta}A$, что противоречит условию 3^0. Наконец, т.к. для любой точки $a\in M$, $\{a\}\bar{\delta}\Lambda$, имеем $[\Lambda]=\Lambda$. Достаточность доказана.

Если в M выполняются аксиомы $1^0 - 5^0$, мы будем называть его инфинитезимальным пространством.

Для того чтобы M стало T_1-пространством необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:

6^0 $\{a\}\delta\{b\}$ тогда и только тогда, когда $a=b$.

Будем использовать первую аксиому отделимости в формулировке: каждое множество, состоящее из одной точки, замкнуто, т.е. $[\{a\}]=\{a\}$ (см. [1] стр. 301).

Необходимость. Пусть $[\{a\}]=a$ и $\{a\}\delta\{b\}$. Тогда $a\in[\{b\}]=b$, т.е. $a=b$.

Достаточность. Пусть выполняется условие 6^0, но $[\{a\}]\neq a$. Тогда имеется точка $b\neq a$ такая, что $b\in[\{a\}]$, т.е. $\{b\}\delta\{a\}$, откуда $b=a$.

При выполнении 6^0 аксиомы 2^0 и 4^0 становятся следствием из остальных. Действительно, пусть $a\in A$. Из аксиомы 6^0 следует, что $\{a\}\delta\{a\}$. Тогда в силу аксиомы 5^0 $\{a\}\delta A\supset\{a\}$. Для доказательства условия 4^0 достаточно взять $b\neq a$. Тогда $\{a\}\bar\delta\{b\}$ и, следовательно, $\{a\}\bar\delta\Lambda$. Это доказательство неприемлемо в случае, когда M состоит из одной точки. Легко проверить, что тогда все аксиомы будут выполнены лишь при одном определении близости в $M=\{a\}$. Именно, если обьявить: $\{a\}\delta M$, $\{a\}\bar\delta\Lambda$ и $M\bar\delta\Lambda$. В остальных случаях введения близости в $M=\{a\}$ не выполняется по крайней мере одна из аксиом $1^0 - 6^0$.

Топологию в общее инфинитезимальное пространство можно ввести ещё несколько иначе. Назовём множество U_A δ-окрестностью множества A, если $(M\setminus U_A)\bar\delta A$. Будем считать, что точка $a \in M$ принадлежит замыканию $[A]$ множества $A \subset M$, если любая её δ-окрестность содержит по крайней мере одну точку множества A. Оба способа введения топологии в M равносильны. Действительно, пусть $\{a\} \delta A$, но найдётся δ-окрестность U_a точки a такая, что $(M \setminus U_a) \bar{\delta} \{a\}$ и $U_a \cap A = \Lambda$. Это означает, что $A \subset M \setminus U_a$ и, следовательно, $A \bar{\delta} \{a\}$, что невозможно. Обратно, пусть для любой δ-окрестности U_a точки a будет $U_a \cap A \neq \Lambda$, но $\{a\} \bar{\delta} A$. Тогда $M \setminus A$ есть δ-окрестность точки a $(\{M \setminus (M \setminus A)\} = A \bar{\delta} \{a\}$, но $M \setminus A \cap A = \Lambda$.

2. В.А.Ефремовичем в работах [6], [7] была предложена другая система аксиом. Именно:

1^* $A \bar{\delta} C$, $B \bar{\delta} C$ равносильно $(A \cup B) \bar{\delta} C$

2^* $\{a\} \delta \{b\}$ равносильно $a = b$

3 если при любом разбиении пространства на конечное число слагаемых найдётся хотя бы одно слагаемое бесконечно близкое и к A, и к B, то $A \delta B$.

Из последней аксиомы следует:

$3^{*\prime}$ если $A \bar{\delta} B$, то имеется δ-окрестность U_A множества A такая, что $U_A \bar{\delta} B$.

Действительно, если $A \bar{\delta} B$, то имеется разбиение пространства на два слагаемых U_A и U_B таких, что $A \subset U_A$, $B \subset U_B$, $U_A \bar{\delta} B$ и $U_B \bar{\delta} A$.

Однако из системы аксиом В.А. Ефремовича следует выполнение аксиом $1^0 - 6^0$. В самом деле, достаточно только проверить выполнении условий 3^0 и 5^0. Докажем сначала, что из условия 1^* сразу следет 5^0. Действительно, пусть

$B\bar\delta A_1 \supset A$. Мы можем написать: $B\bar\delta A_1 = A_1 \cup A$, откуда, в силу 1^*, $B\bar\delta A$. Теперь покажем, что выполняется условие: $3^{0\prime}$ если $A\delta[B]$, то $A\delta B$, из которого, очевидно, следует условие 3^0. Для доказательства $3^{0\prime}$ предположим противное, т.е. что $A\delta[B]$, но $A\bar\delta B$. Тогда имеется разбиение пространства $M = A_1 \cup B_1$ такое, что $A \subset A_1$, $B \subset B_1$, $A\bar\delta B_1$ и $B\bar\delta A_1$. При этом $[B] \subset B_1$. Пусть $a \in B_1$, тогда $a \in A_1 \bar\delta B$, откуда $\{a\}\bar\delta B$ и $a \bar\in [B]$. Далее, так как $[B] \subset B_1 \bar\delta A$, будет $[B]\bar\delta A$, что противоречит условию.

Инфинитезимальное пространство, удовлетворяющее аксиомам 1^* - 3^*, будучи рассматриваемо как топологическое, является вполне регулярным пространством. В самом деле, достаточно проверить только выполнение тихоновской аксиомы отделимости (т.е. для любой точки $a \in M$ и любого замкнутого множества $A \subset M$, не содержащего точку a, построить действительную непрерывную функцию $f(x)$, $0 \le f(x) \le 1$, определённую на всём M, равную нулю в точке a и единице на множестве A).

Так как A замкнуто и $a \bar\in A$, то $\{a\}\bar\delta A$. Следовательно, имеется δ-окрестность U_a точки a такая, что $U_a \bar\delta A$. Обозначим $\{a\} = \Gamma_0$, $U_a = \Gamma_{\frac{1}{2}}$ и $M \setminus A = \Gamma_1$. Тогда имеем $\Gamma_0 \bar\delta (M \setminus \Gamma_{\frac{1}{2}})$ и $\Gamma_{\frac{1}{2}} \bar\delta (M \setminus \Gamma_1)$. Причём $[\Gamma_0] \subseteq \Gamma_{\frac{1}{2}}$, а так как $\Gamma_{\frac{1}{2}} \bar\delta A$, то $[\Gamma_{\frac{1}{2}}]\bar\delta A$ и, следовательно, $[\Gamma_{\frac{1}{2}}] \subseteq M \setminus A = \Gamma_1$. Итак,

$$[\Gamma_0] \subseteq \Gamma_{\frac{1}{2}} \subseteq [\Gamma_{\frac{1}{2}}] \subseteq \Gamma_1$$

Предположим, что уже построены множества $\Gamma_{\frac{p}{2^n}}$ (для данного натурального n и $p = 0, 1, \dots, 2^n$) так, что при $p < p'$

будет $\Gamma_{\frac{p}{2^n}} \bar{\delta}(M \setminus \Gamma_{\frac{p'}{2^n}})$ или $[\Gamma_{\frac{p}{2^n}}] \subseteq \Gamma_{\frac{p'}{2^n}}$. Для $n=1$ это действительно сделано. Возьмём $\Gamma_{\frac{p}{2^n}} \bar{\delta}(M \setminus \Gamma_{\frac{p+1}{2^n}})$. В силу аксиомы 3$\delta'$ имеется множество $\Gamma_{\frac{2p+1}{2^{n+1}}}$ такое, что

$\Gamma_{\frac{2p+1}{2^{n+1}}} \bar{\delta}(M \setminus \Gamma_{\frac{p+1}{2^n}})$ и $\Gamma_{\frac{p}{2^n}} \bar{\delta}(M \setminus \Gamma_{\frac{2p+1}{2^{n+1}}})$ или

$$[\Gamma_{\frac{2p}{2^{n+1}}}] = [\Gamma_{\frac{p}{2^n}}] \subseteq \Gamma_{\frac{2p+1}{2^{n+1}}} \subseteq [\Gamma_{\frac{2p+1}{2^{n+1}}}] \subseteq \Gamma_{\frac{p+1}{2^n}} = \Gamma_{\frac{2p+2}{2^{n+1}}}$$

Отсюда следует, что для всех двоично-рациональных чисел $r = \frac{p}{2^n}$, $0 \leq r \leq 1$, можно построить в M множества Γ_r так, что $\{a\} = \Gamma_0$ и при всех $r < r'$, $[\Gamma_r] \subseteq \Gamma_{r'}$. Положим теперь для всех остальных t, $0 < t < 1$, $\Gamma_t = \bigcup\limits_{r<t} \Gamma_r$. Докажем, что всегда при $t < t'$, будет $[\Gamma_t] \subseteq \Gamma_{t'}$. В самом деле, беря двоично-рациональные числа r и r' так, чтобы $t < r < r' < t'$, имеем $\Gamma_t \subseteq \Gamma_r$, значит, $[\Gamma_t] \subseteq [\Gamma_r] \subseteq \Gamma_{r'} \subseteq \Gamma_{t'}$, что и требовалось. Наконец, положим $\Gamma_t = \Lambda$, для $t < 0$, и $\Gamma_t = M$, для $t > 1$. Построим теперь для каждой точки $x \in M$ некоторое сечение (A^x, B^x) в множестве всех действительных чисел: именно, отнесём число t к нижнему классу A^x, если x не содержится в Γ_t, и к верхнему классу B^x, если $x \in \Gamma_t$. Это сечение определяет некоторое число τ_x, причём, очевидно, $0 \leq \tau_x \leq 1$. Другими словами, определена функция $f_{0,1}(x) = \tau_x$ во всём пространстве M. При этом $f_{0,1}(a) = 0$ и $f_{0,1}(x) = 1$ при $x \in A$. Докажем теперь непрерывность функции $f(x)$ в каждой точке $x \in M$. Взяв произвольное $\varepsilon > 0$, рассмотрим множество $U(x) = \Gamma_{\tau_x+\varepsilon} \setminus [\Gamma_{\tau_x-\varepsilon}]$. $x \in U_x$. Тогда для всех точек $x' \in U(x)$ имеем $\tau_x - \varepsilon \leq \tau_{x'} \leq \tau_x + \varepsilon$, т.е. $|f_{0,1}(x) - f_{0,1}(x')| \leq \varepsilon$, что и требовалось. Таким образом полная регулярность пространства M доказана.

Если M заранее задано как топологическое пространство и одновременно ка инфинитезимальное, причём топология введённая в M по заданному соотношению близости, совпадает с исходной, то мы будем говорить: топологическое пространство M превращено в инфинитезимальное. В следующем параграфе будет показано, что одно и то же топологическое пространство может быть превращено в различные инфинитезимальные.

§ 3. Связь инфинитезимальных пространств с расширениями топологических пространств.

1. Пусть дано T_1-пространство M и его T_1-расширение R. Таким образом, M является всюду плотным подмножеством R. Мы введём в M соотношение близости следующим образом: будем считать, что при $A \subseteq M$ и $B \subseteq M$, $A \delta B$ тогда и только тогда, когда $R[A] \cap R[B] \neq \Lambda$ (где под $R[A]$ понимается замыкание множества A в пространстве R). Так введённое соотношение близости будет удовлетворять всем аксиомам инфинитезимального пространства. Действительно.

0^0 Если $A \delta B$, т.е. $R[A] \cap R[B] \neq \Lambda$, то и $R[B] \cap R[A] \neq \Lambda$. Следовательно, $B \delta A$.

1^0 Отметим сначала, что так как R есть T_1-пространство, то $R[\{a\}] = a$.

Если $A \bar{\delta} \{a\}$ и $B \bar{\delta} \{a\}$, т.е. $a \bar{\in} R[A]$ и $a \bar{\in} R[B]$, то $a \bar{\in} R[A] \cup R[B] = R[A \cup B]$. Следовательно, $\{a\} \bar{\delta} (A \cup B)$.

2^0 Если $a \in A$, то $a \in R[A]$ и, следовательно, $\{a\}\delta A$.

3^0 Если $\{a\}\delta M[A]$, то $a \in R[M[A]] = R[A]$. Значит, $\{a\}\delta A$.

4^0 Для любой точки $a \in M$ $R[\{a\}] \cap R[\Lambda] = \Lambda$, т.е. $\{a\}\bar{\delta}\Lambda$

5^0 Если $B\bar{\delta}A_1 \supset A$, то $R[B] \cap R[A] \subseteq R[B] \cap R[A_1] = \Lambda$ и $B\bar{\delta}A$.

6^0 Если $a \neq b$, то $R[\{a\}] \cap R[\{b\}] = \Lambda$, т.е. $\{a\}\bar{\delta}\{b\}$

Если $\{a\}\bar{\delta}\{b\}$, то $R[\{a\}] \cap R[\{b\}] = \Lambda$. А так как $R[\{a\}] = a$ и $R[\{b\}] = b$, то $a \neq b$.

Кроме того, при таком способе введения близости в M выполняется условие:

7^0 Если $A\delta\{a\}$ и $B\delta\{a\}$, то $A\delta B$

Действительно, пусть $A\delta\{a\}$ и $B\delta\{a\}$, т.е. $a \in R[A]$ и $a \in R[B]$. Значит, $a \in R[A] \cap R[B] \neq \Lambda$, т.е. $A\delta B$.

При этом топология в M, индуцируемая данным соотношением близости ($a \in M[A]$ тогда и только тогда, когда $\{a\}\delta A$), совпадает с исходной. Действительно, пусть $a \in M$, $a \in M[A]$, тогда $a \in R[A]$ и, следовательно, $\{a\}\delta A$. Обратно, пусть $\{a\}\delta A$, т.е. $a \in R[A]$. Так как $a \in M$, имеем $a \in M[A]$, что и требовалось.

Ясно, что эквивалентные расширения (между которыми возможен гомеоморфизм, оставляющий точки M на месте) индуцируют одинаковое соотношение близости между подмножествами M.

2. Как видно из предыдущего пункта, теория инфинитезимальных пространств тесно связана с теорией расширений топологических пространств. А.Д.Мышкис в одном важном частном случае показал полную двойственность этих теорий [9]

В работе [9] рассматривается непустое регулярное топологическое пространство M и его регулярное топологическое расширение R, удовлетворяющее условию:

А) каждая точка $R \setminus M$ является пределом некоторой последовательности (счётной) точек M.

При помощи расширения R, M превращается описанным выше способом в инфинитезимальное пространство. Далее для пространства M, превращённого в инфинитезимальное, определённым образом строится расширение $\tilde{R}$ и доказывается, что при некоторых условиях, налагаемых на инфинитезимальное пространство M, расширения R и $\tilde{R}$ эквивалентны, и $\tilde{R}$ индуцирует в M соотношение близости, полностью совпадающее с исходным.

Удалось несколько расширить класс расширений, при которых упомянутая двойственность имеет место. Именно, двойственность не нарушится, если условие А) в определении расширений заменить условием:

Б) для каждой точки $a \in R \setminus M$ существует множество $A_a \subset M$, имеющее точку a единственной предельной.

Ясно, что расширения, удовлетворяющие условию А), удовлетворяют также условию Б). Однако обратное неверно.

Пример. Рассмотрим множество M всех трансфинитных чисел, меньших ω_1 (см. [1] стр. 89), как топологическое пространство с дискретной топологией. (Топология называется дискретной, если замыкание любого множества совпадает с самим множеством, см. [2] стр.). Легко видеть, что M регулярное топологическое пространство. Добавим к M точку ω_1. Окрестностями точки ω_1 будем считать сегменты $[\alpha, \omega_1]$, где α любое трансфинитное число $< \omega_1$. Легко видеть, что пространство $R = M \cup \omega_1$ регулярно. Кроме того, пространство R удовлетворяет условию Б). Действительно, любое множество вида $[\alpha, \omega_1)$ имеет ω_1 единственной предельной точкой. Однако, R не удовлетворяет условию А): в M нет никакой счётной последовательности, сходящейся к точке ω_1.

3. Пусть имеем непустое фиксированное регулярное топологическое пространство M; под р а с ш и р е н и е м его (на протяжении настоящего и следующего пунктов) будем понимать регулярное топологическое пространство R, в котором M всюду плотно, и выполняется условие Б). Буквой Q, быть может, с индексами будем обозначать множества, открытые в M. Будем считать, что M уже превращено в инфинитезимальное пространство, и удовлетворяются условия $1^o - 7^o$.

Непустую совокупность $\mathfrak{A}$ бесконечных подмножеств пространства M назовём к о н ц о м этого пространства, если удовлетворяются условия:

α) если $A \in \mathfrak{A}$ и $B \in \mathfrak{A}$, то $A \delta B$;

β) если $a \in A \in \mathfrak{A}$, то $(A \setminus \{a\}) \in \mathfrak{A}$;

γ) если $A \bar{\in} \mathfrak{A}$, то существует $Q \subseteq M$ такое, что $A \cap Q = \Lambda$, а для любого $B \in \mathfrak{A}$ будет $(B \cap Q) \in \mathfrak{A}$;

δ) $\mathfrak{A}$ имеет по крайней мере один элемент $L_{\mathfrak{A}}$, обладающий свойствами:

если $A\bar{\in}\mathfrak{A}$, то $L_{\mathfrak{A}}$ имеет подмножество S, не имеющее предельных точек в R, такое, что $A\bar{\delta}(L_{\mathfrak{A}}\setminus S)$,

$L_{\mathfrak{A}}\setminus S\in\mathfrak{A}$, где S любое подмножество $L_{\mathfrak{A}}$, не имеющее в R предельных точек.

Отметим, что из условия γ) сразу следует, что если $M\supseteq A\supset B\in\mathfrak{A}$, то $A\in\mathfrak{A}$. Действительно, пусть $A\bar{\in}\mathfrak{A}$, тогда существует $q\subseteq M$, для которого $A\cap q=\Lambda$, но для любого $B\in\mathfrak{A}$ будет $(B\cap q)\in\mathfrak{A}$ т.е. $B\cap q\neq\Lambda$, что невозможно, так как $B\subset A$.

Рассмотрим множество $\tilde{R}$, состоящее из всех точек M и всех концов M. В $\tilde{R}$ введём топологию следующим образом. Если $q\subseteq M$, то под q^* мы будем совокупность всех точек q и всех концов $\mathfrak{A}$ пространства M, для которых при $A\in\mathfrak{A}$ всегда $(A\cap q)\in\mathfrak{A}$. Будем считать каждое такое q^* окрестностью любого своего элемента.

Нетрудно проверить, что выполняется равенство:

$$(q_1\cap q_2)^*=q_1^*\cap q_2^* \qquad (1)$$

Действительно, точки M в обеих частях равенства одни и те же. Пусть $\mathfrak{A}\in(q_1\cap q_2)^*$. Тогда для любого $A\in\mathfrak{A}$ будет $(A\cap q_1\cap q_2)\in\mathfrak{A}$. Так как $A\cap q_1\supseteq A\cap q_1\cap q_2\in\mathfrak{A}$, то $A\cap q_1\in\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}\in q_1^*$. Аналогично доказывается, что $\mathfrak{A}\in q_2^*$. Обратно, пусть $\mathfrak{A}\in q_1^*$ и $\mathfrak{A}\in q_2^*$. Так как $\mathfrak{A}\in q_1^*$, то при любом $A\in\mathfrak{A}$ будет $(A\cap q_1)\in\mathfrak{A}$, а так как $\mathfrak{A}\in q_2^*$, то $(A\cap q_1\cap q_2)\in\mathfrak{A}$, т.е. $\mathfrak{A}\in(q_1\cap q_2)^*$.

Из соотношения (1) следует, что аксиомы системы окрестностей в $\tilde{R}$ (см. [1] стр. 298) выполняются. Действительно, во-первых, любая точка из $\tilde{R}$ содержится по крайней мере в одной окрестности. Если это точка $a\in M$, то $a\in g$ и, следовательно, $a\in g^*$. Если это конец $\mathfrak{a}\in\tilde{R}\setminus M$, то при любом $A\in\mathfrak{a}$ имеем $A\cap M\in\mathfrak{a}$, т.е. $\mathfrak{a}\in M^*$. Во-вторых, пересечение любых двух окрестностей любой точки из $\tilde{R}$ есть, как это следует из (1), окрестность той же точки.

Таким образом, $\tilde{R}$ является топологическим пространством, в котром M, очевидно, всюду плотно; при этом топология в M, индуцированная из $\tilde{R}$, совпадает с исходной. Это следует из того, что окрестности в пространстве M и в M как подмножестве $\tilde{R}$ совпадают.

Докажем, что в $\tilde{R}$ выполняются соотношения:

$$\tilde{R}[g^*]=\tilde{R}[g] \tag{2}$$

$\mathfrak{a}\in\tilde{R}[g^*]$ тогда и только тогда, когда $g\in\mathfrak{a}$. (3)

1) Включение $\tilde{R}[g^*]\supseteq\tilde{R}[g]$ очевидно. Обратно, пусть $x\in\tilde{R}[g^*]$, т.е. любая окрестность $\mathcal{U}_x$ в $\tilde{R}$ содержит точки множества g^*, а следовательно, и точки множества g. Значит, $x\in\tilde{R}[g]$, что и требовалось.

2) Пусть $\mathfrak{a}\in\tilde{R}[g^*]$, т.е. любая окрестность $\mathcal{U}_{\mathfrak{a}}$ конца $\mathfrak{a}$ в $\tilde{R}$ пересекается с множеством g^*. Предположим, что $g\bar{\in}\mathfrak{a}$. Тогда найдётся открытое множество $U\subseteq M$ такое, что $U\cap g=\Lambda$, а для любого $B\in\mathfrak{a}$ будет $(U\cap B)\in\mathfrak{a}$. Это означает, что U^* есть окрестность конца $\mathfrak{a}$. Однако, $U^*\cap g^*=(U\cap g)^*=\Lambda$. Обратно, пусть $g\in\mathfrak{a}$, но $\mathfrak{a}\bar{\in}\tilde{R}[g^*]$. Тогда найдётся окрестность $\mathcal{U}^*_{\mathfrak{a}}$, не содержащая точек множества g^*, т.е. $\mathcal{U}_{\mathfrak{a}}\cap g=\Lambda$, что невозможно, так как $g\in\mathfrak{a}$. Следовательно, $\mathfrak{a}\in\tilde{R}[g^*]$.

4. В этом пункте установим условия, при которых описанные выше переходы (переход от расширения топологического пространства к инфинитезимальному и переход от пространства, превращённого в инфинитезимальное, к топологическому пространству, содержащему его в качестве всюду плотного подмножества) обратны друг другу. Об этом говорят следующие теоремы.

<u>Т е о р е м а 1.</u> Расширение R пространства M индуцирует соотношение близости между подмножествами M, удовлетворяющее следующим условиям:

1) если $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ - два различных конца M, то существует g такое, что $\mathfrak{A}_1 \in g^*$, $\mathfrak{A}_2 \in g^*$;

2) если $a \in g$, то существует g_1 такое, что $a \in g_1$ и $\mathfrak{A} \in g^*$ для любого конца $\mathfrak{A}$, содержащего g_1;

3) если $\mathfrak{A} \in g^*$, то существует g_1 такое, что $M[g_1] \subseteq g$, $\mathfrak{A} \in g_1^*$ и $\mathfrak{A}_1 \in g^*$ для любого конца $\mathfrak{A}_1$, содержащего g_1;

4) если $A \delta B$ и $M[A] \cap M[B] = \Lambda$, то существует конец $\mathfrak{A}$ такой, что $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{A}$.

При этом пространство $\tilde{R}$, индуцируемое полученным соотношением близости в M, является расширением M, топологически эквивалентным R. Эта эквивалентность задаётся так: каждому элементу $\alpha \in R \setminus M$ надо поставить в соответствие совокупность всех множеств $A \subseteq M$, для которых $\alpha \in R[A]$.

<u>Доказательство</u>. Прежде всего, если $\alpha \in R \setminus M$, то совокупность $\mathfrak{A}_\alpha$ подмножеств $A \subseteq M$, для которых $\alpha \in R[A]$, образует конец. Действительно, проверим выполнение усло-

вий, входящих в определение конца:

α) Если $A\in\mathfrak{A}_\alpha$ и $B\in\mathfrak{A}_\alpha$, то $\alpha\in R[A]$ и $\alpha\in R[B]$. Значит, $\alpha\in R[A]\cap R[B]\neq\Lambda$ и $A\delta B$.

β) Если $a\in A\in\mathfrak{A}_\alpha$, т.е. $\alpha\in R[A]$, то $\alpha\in R[A\setminus\{a\}]$ и, следовательно, $(A\setminus\{a\})\in\mathfrak{A}_\alpha$.

γ) Если $A\bar{\in}\mathfrak{A}_\alpha$, т.е. $\alpha\bar{\in} R[A]$, то имеется окрестность H точки α такая, что $R[H]\subseteq R\setminus R[A]$. Утверждается, что множество $Q=H\cap M$ будет искомым. Действительно, $Q\cap A=$ $=M\cap H\cap A=\Lambda$, а для любого $B\in\mathfrak{A}_\alpha$, $\alpha\in R[B\cap H\cap M]=R[B\cap Q]$. В самом деле, так как $B\cap M=B$, достаточно показать, что $\alpha\in R[B\cap H]$. Мы можем написать: $R=H\cup(R\setminus H)$, тогда $B=$ $=(B\cap H)\cup(B\cap(R\setminus H))$, откуда $R[B]=R[B\cap H]\cup R[B\cap(R\setminus H)]$; α принадлежит левой части равенства, следовательно, и правой. Однако, $R[B\cap(R\setminus H)]\subset R\setminus H\bar{\ni}\alpha$. Значит, $\alpha\in R[B\cap H]=$ $=R[B\cap H\cap M]=R[B\cap Q]$, т.е. $(B\cap Q)\in\mathfrak{A}_\alpha$, что и требовалось.

δ) Элементом $L_{\mathfrak{A}_\alpha}$ будет множество, имеющее точку α единственной предельной (такое имеется по определению R). Действительно, пусть $A\bar{\in}\mathfrak{A}_\alpha$, т.е. $\alpha\bar{\in} R[A]$. Возьмём окрестность U точки α такую, что $R[U]\subseteq R\setminus R[A]$. Тогда множество $S=L_{\mathfrak{A}_\alpha}\setminus U$ не будет иметь предельных точек в R, и $R[L_{\mathfrak{A}_\alpha}\setminus S]\cap R[A]=R[U]\cap R[A]=\Lambda$, т.е. $(L_{\mathfrak{A}_\alpha}\setminus S)\bar{\delta}A$. Далее, для любого $S\subset L_{\mathfrak{A}}$, не имеющего предельных точек в R, $\alpha\in R[L_{\mathfrak{A}_\alpha}\setminus S]$, т.е. $(L_{\mathfrak{A}_\alpha}\setminus S)\in\mathfrak{A}_\alpha$.

Таким образом, возникает естественное отображение R в $\tilde{R}$: каждой точке M соответствует она сама, а каждой точке $\alpha\in R\setminus M$ соответствует $\mathfrak{A}_\alpha\in\tilde{R}\setminus M$. Проверим, что это - отображение на всё $\tilde{R}$. Для этого возьмём произвольный конец $\mathfrak{M}$ и докажем, что найдётся точка $\alpha \in R \setminus M$, для которой $\mathfrak{M}_\alpha = \mathfrak{M}$.

Множество $L_{\mathfrak{M}}$ не может иметь предельных точек в M. Действительно, пусть $a \in M$ - такая точка. Тогда, поскольку $\{a\} \bar{\in} \mathfrak{M}$, то, по опредеоению, $L_{\mathfrak{M}}$ имеет подмножество S, не имеющее предельных точек в R, такое, что $\{a\} \bar{\delta} (L_{\mathfrak{M}} \setminus S)$. Следовательно, $a \bar{\in} R[L_{\mathfrak{M}} \setminus S] \supseteq M[L_{\mathfrak{M}} \setminus S]$, что и требовалось.

Однако, $L_{\mathfrak{M}}$ имеет предельные точки в R. Предположим противное, т.е. что $L_{\mathfrak{M}}$ не имеет предельных точек в R. Тогда мы можем положить $L_{\mathfrak{M}} = S$. Множество $L_{\mathfrak{M}} \setminus S$ должно, по определению, принадлежать $\mathfrak{M}$. Однако, $L_{\mathfrak{M}} \setminus S = \Lambda \bar{\in} \mathfrak{M}$.

Множество $L_{\mathfrak{M}}$ имеет единственную предельную точку. Предположим, что имеются две предельные точки α и β. Возьмём окрестности U_α и U_β этих точек так, чтобы было $R[U_\alpha] \cap R[U_\beta] = \Lambda$. Утверждается, что $L_{\mathfrak{M}} \cap U_\alpha \in \mathfrak{M}$ и $L_{\mathfrak{M}} \cap U_\beta \in \mathfrak{M}$. В самом деле, пусть $L_{\mathfrak{M}} \cap U_\alpha \bar{\in} \mathfrak{M}$. Тогда в $L_{\mathfrak{M}}$ существует подмножество S, не имеющее в R предельных точек, такое, что $(L_{\mathfrak{M}} \setminus S) \bar{\delta} (L_{\mathfrak{M}} \cap U_\alpha)$, т.е. $R[L_{\mathfrak{M}} \setminus S] \cap$ $\cap R[L_{\mathfrak{M}} \cap U_\alpha] = \Lambda$. Однако, $\alpha \in R[L_{\mathfrak{M}} \setminus S]$ и $\alpha \in R[L_{\mathfrak{M}} \cap U_\alpha]$. Действительно, $\alpha \in R[L_{\mathfrak{M}}] = R[L_{\mathfrak{M}} \setminus S] \cup R[S]$, $\alpha \bar{\in} R[S]$, т.е. $\alpha \in R[L_{\mathfrak{M}} \setminus S]$. Далее, $R = U_\alpha \cup (R \setminus U_\alpha)$; $L_{\mathfrak{M}} = (L_{\mathfrak{M}} \cap U_\alpha) \cup (L_{\mathfrak{M}} \cap (R \setminus U_\alpha))$ откуда $\alpha \in R[L_{\mathfrak{M}}] = R[L_{\mathfrak{M}} \cap U_\alpha] \cup R[L_{\mathfrak{M}} \cap (R \setminus U_\alpha)]$, но $R[L_{\mathfrak{M}} \cap (R \setminus U_\alpha)] \subseteq R \setminus U_\alpha \not\ni \alpha$. Значит, $\alpha \in R[L_{\mathfrak{M}} \cap U_\alpha]$. Полученное противоречие доказывает, что $L_{\mathfrak{M}} \cap U_\alpha \in \mathfrak{M}$. Аналогично доказываем, что $L_{\mathfrak{M}} \cap U_\beta \in \mathfrak{M}$. Отсюда $(L_{\mathfrak{M}} \cap U_\alpha) \delta$ $\delta (L_{\mathfrak{M}} \cap U_\beta)$, т.е. $R[L_{\mathfrak{M}} \cap U_\alpha] \cap R[L_{\mathfrak{M}} \cap U_\beta] \neq \Lambda$. Но

$R[L_{\mathfrak{A}} \cap U_\alpha] \subseteq R[U_\alpha]$ и $R[L_{\mathfrak{A}} \cap U_\beta] \subseteq R[U_\beta]$, а $R[U_\alpha] \cap R[U_\beta] = \Lambda$.

Итак, $L_{\mathfrak{A}}$ имеет единственную предельную точку. Обозначим её буквой α $(\alpha \in R \setminus M)$.

Проверим теперь, что $\mathfrak{A}_\alpha = \mathfrak{A}$. Действительно, пусть $A \in \mathfrak{A}$ $(A \subset M)$. Тогда в $L_{\mathfrak{A}}$ существует подмножество S, не имеющее предельных точек в R, такое, что $A \bar{\delta} \bar{\delta}(L_{\mathfrak{A}} \setminus S)$, т.е. $R[A] \cap R[L_{\mathfrak{A}} \setminus S] = \Lambda$, откуда $\alpha \bar{\in} R[A]$ и $A \bar{\in} \mathfrak{A}_\alpha$. Обратно, пусть $A \bar{\in} \mathfrak{A}_\alpha$ $(A \subseteq M)$. Тогда для некоторого $H \subset R$, открытого в R, будет $\alpha \in H$, $R[H] \subseteq R \setminus R[A]$. Множество $S = L_{\mathfrak{A}} \setminus H$, не имеет предельных точек в R. Отсюда, $(L_{\mathfrak{A}} \cap H) = (L_{\mathfrak{A}} \setminus S) \in \mathfrak{A}$. А так как $L_{\mathfrak{A}} \cap H$ имеет единственную предельную точку α и $\alpha \bar{\in} R[A]$, то $R[L_{\mathfrak{A}} \cap H] \cap R[A] = \Lambda$, т.е. $(L_{\mathfrak{A}} \cap H) \bar{\delta} A$ и, следовательно, $A \bar{\in} \mathfrak{A}$, что и требовалось.

Ясно, что двум различным точкам $\alpha \in R \setminus M$ и $\beta \in R \setminus M$ соответствуют различные концы $\mathfrak{A}_\alpha$ и $\mathfrak{A}_\beta$.

Итак, построенное отображение f пространства R на $\tilde{R}$ - взаимно однозначно. Проверим далее, что если H открыто в R и $R \setminus H \subseteq R[M \setminus H]$, то

$$f(H) = (H \cap M)^* \tag{4}$$

В самом деле, точки M, входящие в обе части этого равенства, одни и те же. Пусть $\mathfrak{A}_\alpha \in f(H)$, т.е. $\alpha \in H \setminus M$. Тогда при $A \in \mathfrak{A}_\alpha$, т.е. $\alpha \in R[A]$, будет $\alpha \in R[A \cap H \cap M]$. Отсюда $(A \cap H \cap M) \in \mathfrak{A}_\alpha$ и, следовательно, $\mathfrak{A}_\alpha \in (H \cap M)^*$. Обратно, пусть $\mathfrak{A}_\alpha \bar{\in} f(H)$, т.е. $\alpha \in R \setminus (M \cup H)$. Тогда $\alpha \in R[M \setminus H]$ и $(M \setminus H) \in \mathfrak{A}_\alpha$. Но $(M \setminus H) \cap (H \cap M) = \Lambda \bar{\in} \mathfrak{A}_\alpha$. Значит, $\mathfrak{A}_\alpha \bar{\in} (H \cap M)^*$, что и требовалось.

Докажем теперь, что отображение f является гомеоморфизмом. Для этого надо проверить, что H открыто в R тогда и только тогда, когда $f(H)$ открыто в $\tilde{R}$. Пусть H открыто в R и $a\in H$. Тогда имеется окрестность H_1 точки a такая, что $R[H_1]\subseteq H$. Но тогда $f(a)\in(H_1\cap M)^*\subseteq f(H)$. Действительно, для точек M это включение справедливо. Пусть $f(a)=\mathfrak{A}_a$ – есть конец пространства M. Так же, как при проверке условия γ) на стр. 22, убеждаемся, что при любом $A\in\mathfrak{A}_a$, $a\in R[A]$, будет $a\in R[A\cap H_1\cap M]$, т.е. $(A\cap H_1\cap M)\in\mathfrak{A}_a$ и $\mathfrak{A}_a\in(H_1\cap M)^*$. Далее покажем, что $(H_1\cap M)^*\subseteq \tilde{R}[(H_1\cap M)^*]\subseteq f(H)$. Пусть $\mathfrak{A}_\alpha\in\tilde{R}[(H_1\cap M)^*]$. Тогда в силу условия (3) $(H_1\cap M)\in\mathfrak{A}$, т.е. $\alpha\in R[H_1\cap M]\subseteq R[H_1]\subseteq H$. Следовательно, $\mathfrak{A}_\alpha\in f(H)$. Итак, доказано, что $f(a)\in(H_1\cap M)^*\subseteq f(H)$, т.е. $f(H)$ открыто в $\tilde{R}$. Пусть, обратно $f(H)$ открыто в $\tilde{R}$ и $a\in H$. Тогда для некоторого $\mathcal{G}$ будет $f(a)\in\mathcal{G}^*\subseteq f(H)$. Обозначим через H_1 множество, полученное присоединением к $\mathcal{G}$ всех точек $R\setminus M$, непредельных для $M\setminus\mathcal{G}$. Тогда H_1 открыто в R и $R\setminus H_1\subseteq R[M\setminus H_1]$. В самом деле, пусть $a\in H_1$ и $a\in\mathcal{G}$. Тогда, так как $\mathcal{G}$ открытое множество в M, существует $\mathcal{G}_1\subset M$ такое, что $a\in\mathcal{G}_1\subset\mathcal{G}$. Пусть теперь $a\in H_1$ и $a\bar{\in}\mathcal{G}$, т.е. a есть точка, непредельная для $M\setminus\mathcal{G}$, и, следовательно, имеется окрестность U_a точки a, целиком состоящая из точек H_1. Итак, H_1 открыто в R. Пусть теперь $a\in R\setminus H_1$. Это означает, что либо $a\in M\setminus\mathcal{G}$, либо a – предельная точка для $M\setminus\mathcal{G}$, т.е. $a\in R[M\setminus\mathcal{G}]\subseteq R[M\setminus H_1]$. Значит, $R\setminus H_1\subseteq R[M\setminus H_1]$ и, согласно (4), $f(H_1)=(H_1\cap M)^*=\mathcal{G}^*$.

Следовательно, $f(a)\in f(H_1)\subseteq f(H)$, т.е. $a\in H_1\subseteq H$ и H открыто в R. Таким образом гомеоморфность отображения f доказана.

Теперь проверим выполнение условий 1)–4).

1) Пусть $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ – два различных конца M. В R им соответствуют две различные точки α_1 и α_2. Возьмём окрестности U_1 и U_2 этих точек так, чтобы было $R[U_1]\cap\cap R[U_2]=\Lambda$. Утверждается, что $Q=M\cap U_1$ – искомое множество. Действительно, при $A\in\mathfrak{A}_1$, $\alpha_1\in R[A]$, будет $\alpha_1\in R[A\cap U_1\cap M]==R[A\cap Q]$, т.е. $(A\cap Q)\in\mathfrak{A}_1$ и, следовательно, $\mathfrak{A}_1\in Q^*$. С другой стороны, $(M\cap U_2)\in\mathfrak{A}_2$, но $(M\cap U_2)\cap Q=(M\cap U_2)\cap(M\cap U_1)==\Lambda\bar{\in}\mathfrak{A}_2$, т.е. $\mathfrak{A}_2\bar{\in}Q^*$.

2) Пусть $a\in Q\subset Q^*$. Q^* есть окрестность точки a в $\tilde{R}$. В R ей соответствует окрестность $f^{-1}(Q^*)$. Возьмём окрестность H_1 точки a в R так, чтобы $a\in R[H_1]\subseteq f^{-1}(Q^*)$. Утверждается, что $Q_1=H_1\cap M$ – искомое множество. Действительно, так как $a\in M$, то $a\in Q_1$. Пусть $Q_1\in\mathfrak{A}_\alpha$. Тогда $\mathfrak{A}_\alpha\in\tilde{R}[Q_1^*]=\tilde{R}[Q_1]$. Точка $\alpha\in R\setminus M$, соответствующая концу $\mathfrak{A}_\alpha$, в силу гомеоморфности отображения f, должна принадлежать тогда замыканию множества Q_1 в R. То есть имеем $\alpha\in R[Q_1]\subseteq R[H_1]\subseteq f^{-1}(Q^*)$. Откуда заключаем, что $\mathfrak{A}\in\in f(f^{-1}(Q^*))=Q^*$, что и требовалось.

3) Пусть $\mathfrak{A}_\alpha\in Q^*$. В R им соответствуют точка α и её окрестность $f^{-1}(Q^*)$. Возьмём окрестность H_1 точки α так, чтобы $\alpha\in R[H_1]\subseteq f^{-1}(Q^*)$. Утверждается, что $Q_1=H_1\cap M$ – искомое множество. Пусть, во-первых, $a\in M[Q_1]=R[Q_1]\cap M\subseteq\subseteq R[H_1]\cap M\subseteq f^{-1}(Q^*)\cap M=Q$, т.е. $M[Q_1]\subseteq Q$. Во-вторых,

$\sigma_\alpha \in \mathcal{G}^*$. Действительно, для любого $A \in \sigma_\alpha$, $\alpha \in R[A]$, будет $\alpha \in R[A \cap H_1 \cap M] = R[A \cap g_1]$, т.е. $(A \cap g_1) \in \sigma_\alpha$ и, следовательно, $\sigma_\alpha \in \mathcal{G}^*$. В третьих, пусть $g_1 \in \sigma_{\alpha_1}$, тогда $\sigma_{\alpha_1} \in \tilde{R}[g_1^*] = \tilde{R}[g_1]$. Точка $\alpha_1 \in R \setminus M$, соответствующая $\sigma_{\alpha_1} \in \tilde{R} \setminus M$, должна, в силу гомеоморфности отображения f, принадлежать замыканию g_1 в R, т.е. имеем $\alpha_1 \in R[g_1] \subseteq R[H_1] \subseteq f^{-1}(g^*)$. Откуда $\sigma_{\alpha_1} \in \mathcal{G}^*$, что и требовалось.

4) Пусть $A \delta B$ $(A \subset M, B \subset M)$ и $M[A] \cap M[B] = \Lambda$, надо показать, что найдётся конец σ такой, что $A \in \sigma$ и $B \in \sigma$. Возьмём точку $\alpha \in R[A] \cap R[B]$. Совокупность σ_α множеств, имеющих точку α предельной, образует конец, причём $\alpha \in R[A]$ и $\alpha \in R[B]$, т.е. $A \in \sigma_\alpha$ и $B \in \sigma_\alpha$.

Теорема 1, таким образом, доказана.

<u>Т е о р е м а 2.</u> Пусть пространство M превращено в инфинитезимальное, причём выполняются требования 1)-4). Тогда пространство $\tilde{R}$, индуцируемое данным соотношением близости, является расширением M, индуцирующим в свою очередь, соотношение близости в M, полностью тождественное исходному.

<u>Доказательство</u>. Мы уже указывали, что $\tilde{R}$ является топологическим пространством, в котором M всюду плотно. Из определения конца следует, что для каждой точки $\sigma \in \tilde{R} \setminus M$ существует множество, имеющее эту точку единственной предельной (достаточно взять элемент L_σ). Проверим, что в $\tilde{R}$ имеет место первая аксиома отделимости. Действительно, возможность отделения точек M очевидна, а точек $\tilde{R} \setminus M$ - следует из требования 1). Пусть теперь даны $a \in M$

и $\mathfrak{a}\in\tilde{R}\setminus M$. Тогда $\mathfrak{a}\in(M\setminus\{a\})^{*}\ni a$. Действительно, $(A\cap(M\setminus\{a\}))=((A\cap M)\setminus\{a\})=(A\setminus\{a\})$. Если $a\in A$, то $(A\setminus\{a\})\in\mathfrak{a}$ в силу условия β). Если $a\bar{\in}A$, то $(A\setminus\{a\})=A\in\mathfrak{a}$. Итак, при любом $A\in\mathfrak{a}$, $(A\cap(M\setminus\{a\})\in\mathfrak{a}$, т.е. $\mathfrak{a}\in(M\setminus\{a\})^{*}$. С другой стороны, так как $\{a\}\bar{\in}\mathfrak{a}$, то в $L_{\mathfrak{a}}$ существует подмножество S, не имеющее предельных точек, такое, что $\{a\}\bar{\delta}(L_{\mathfrak{a}}\setminus S)$, т.е. $a\bar{\in}M[L_{\mathfrak{a}}\setminus S]$, откуда $a\in(M\setminus M[L_{\mathfrak{a}}\setminus S]])^{*}$. Причём, так как $(L_{\mathfrak{a}}\setminus S)\in\mathfrak{a}$, но $(L_{\mathfrak{a}}\setminus S)\cap(M\setminus M[L_{\mathfrak{a}}\setminus S])=\Lambda\bar{\in}\mathfrak{a}$, то $\mathfrak{a}\bar{\in}(M\setminus M[L_{\mathfrak{a}}\setminus S])^{*}$, что и требовалось.

Выполнение в $\tilde{R}$ третьей аксиомы отделимости следует из требований 2) и 3). Действительно, пусть $a\in g$ и g_1 - множество, удовлетворяющее условию 2). Возьмём g_2 так, чтобы было $a\in g_2$ и $M[g_2]\subseteq g_1\cap g$. Тогда $\tilde{R}[g_2^{*}]\subseteq g$. В самом деле, для точек M включение, очевидно, справедливо. Пусть $\mathfrak{a}\in\tilde{R}[g_2^{*}]$, тогда $g_2\in\mathfrak{a}$, а так как $g_1\supset g_2\in\mathfrak{a}$, то и $g_1\in\mathfrak{a}$, т.е., в силу условия 2), $\mathfrak{a}\in g^{*}$. Далее, пусть $U_{\mathfrak{a}}$ любая окрестность конца $\mathfrak{a}$ в R. Она содержит элемент g^{*} базы пространства R такой, что $\mathfrak{a}\in g^{*}$. Возьмём g_1, удовлетворяющее условию 3). Тогда $\mathfrak{a}\in g_1^{*}$ и $\tilde{R}[g_1^{*}]\subseteq g$. Действительно, пусть $a\in M$ и $a\in\tilde{R}[g_1^{*}]=\tilde{R}[g_1]$. Тогда $a\in M[g_1]\subseteq g\subset g^{*}$. Пусть теперь $\mathfrak{a}\in\tilde{R}[g_1^{*}]$, т.е. $g_1\in\mathfrak{a}$ и, в силу условия 3), $\mathfrak{a}\in g^{*}$, что и требовалось.

Итак, $\tilde{R}$ является расширением M. Докажем, наконец, что $\tilde{R}$ индуцирует в M соотношение близости, совпадающее с исходным. Для этого надо убедиться в том, что $A\delta B$ $(A\subseteq M, B\subseteq M)$ тогда и только тогда, когда $\tilde{R}[A]\cap\tilde{R}[B]\neq\Lambda$. Если $A\delta B$ и $M[A]\cap M[B]\neq\Lambda$, то ~~все~~ в одну сторону доказано. Пусть

$A\delta B$ и $M[A]\cap M[B]=\Lambda$. Тогда по требованию 4) для некотфрого $\sigma\in\tilde{R}\setminus M$ будет $A\in\sigma$ и $B\in\sigma$. Но тогда $\sigma\in\tilde{R}[A]\cap$ $\cap\tilde{R}[B]$. Предположим, что $\sigma\bar{\in}\tilde{R}[A]$. Тогда имеется окрестность U_σ конца σ такая, что $U_\sigma\cap A=\Lambda$. U_σ содержит элемент q^* базы пространства $\tilde{R}$. $\sigma\in q^*\subseteq U_\sigma$. Но тогда для любого $C\in\sigma$ будет $(C\cap q)\in\sigma$. Однако, $A\in\sigma$, но $A\cap q=A\cap q^*=$ $=\Lambda\bar{\in}\sigma$. Аналогично доказываем, что $\sigma\in\tilde{R}[B]$. Таким образом, $\sigma\in\tilde{R}[A]\cap\tilde{R}[B]\neq\Lambda$. Обратно, пусть $\tilde{R}[A]\cap\tilde{R}[B]\neq$ $\neq\Lambda$. Если это пересечение содержит точки M, то $A\delta B$ по аксиоме 7^0 близости. Действительно, если $a\in M[A]$ и $a\in M[B]$, то $A\delta\{a\}$ и $B\delta\{a\}$ (M превращено в инфинитезимальное пространство - означает, что топология в M, индуцируемая данным соотношением близости, совпадает с исходной, т.е. $a\in M[A]$ равносильно $\{a\}\delta A$.). Следовательно, $A\delta B$. Если же это пересечение содержит конец σ, но $A\bar{\delta}B$, то не может быть одновременно $A\in\sigma$ и $B\in\sigma$. Пусть для определённости $A\bar{\in}\sigma$. Тогда найдётся $q\in M$ такое, что $\sigma\in q^*$, а $A\cap q=\Lambda$. Отсюда, так как $A\subset M$, будет $A\cap q^*=\Lambda$, т.е. $\sigma\bar{\in}\tilde{R}[A]$, что невозможно. Теорема 2 доказана.

5. Таким образом, установлена полная двойственность между всевозможными расширениями пространства M, удовлетворяющими условию Б), и всевозможными способами превращения его в инфинитезимальные пространства, удовлетворяющие требованиям 1)- 4).

§ 4. Максимальное δ-расширение Ю.М.Смирнова

В [11] советский математик Ю.М.Смирнов изложил другой способ получения близости из расширений топологических пространств. Он исходит от инфинитезимальных пространств, удовлетворяющих аксиомам 1^*- 3^* В.А.Ефремовича. Эти пространства он называет для краткости δ-пространствами. Далее, δ-расширением δ-пространства P Ю.М.Смирнов называет всякое такое δ-пространство $\tilde{P}$, в котором P содержится в качестве всюду плотного подпространства, причём близость в δ-пространстве P, индуцируемая из $\tilde{P}$, совпадает с исходной. δ-пространство P называет максимальным, если P является единственным своим δ-расширением.

Несколько усложняя способ П.С.Александрова построения максимальных бикомпактных расширений, описанный в §1, Ю.М.Смирнов строит для каждого δ-пространства P его максимальное δ-расширение uP. Это делается следующим образом.

Система ξ множеств A данного δ-пространства P называется δ-системой, если каждое множество $A \in \xi$ является δ-окрестностью некоторого $B \in \xi$. Концом δ-пространства P называется такая центрированная δ-система ξ, которую нельзя вложить ни в какую центрированную δ-систему, отличную от неё самой (свойство максимальности). Такими концами являются системы ξ_x всех δ-окрестностей каждой точки $x \in P$. Действительно, пусть x любая точка из P.

Возьмём систему ξ_x всех её δ-окрестностей, т.е. множеств $A \subset P$, для которых $(P \setminus A)\bar{\delta}\{x\}$. Система ξ_x будет, во-первых, δ-системой. В самом деле, пусть $A \subset P$ есть δ-окрестность точки x, т.е. $(P \setminus A)\bar{\delta}\{x\}$. В силу аксиомы 3*' В.А.Ефремовича, найдётся δ-окрестность U_x точки x такая, что $(P \setminus A)\bar{\delta}U_x$, т.е. A есть δ-окрестность множества $U_x \in \xi_x$. Во-вторых, система ξ_x будет центрированной. Предположим противное. Тогда существует конечное число множеств $A_1, \dots, A_s$ таких, что $(P \setminus A_i)\bar{\delta}\{x\}$ и $\bigcap_i A_i = \Lambda$ $(i=1, \dots, s)$. Из аксиомы 1* В.А.Ефремовича имеем $(P \setminus \bigcap_i A_i) = \bigcup_i (P \setminus A_i)\bar{\delta}\{x\}$. Откуда, так как $\bigcap_i A_i = \Lambda$, получаем $P\bar{\delta}\{x\}$, что невозможно. И, наконец, δ-система ξ_x будет максимальной. Пусть систему ξ_x можно дополнить ещё одним множеством $A \bar{\in} \xi_x$ так, что получим центрированную δ-систему ξ. Тогда либо A есть δ-окрестность некоторого $B \in \xi_x \subset \xi$, либо A есть своя собственная δ-окрестность. В первом случае имеем: $(P \setminus A)\bar{\delta}B \supset \{x\}$, откуда $(P \setminus A)\bar{\delta}\{x\}$ и, следовательно, $A \bar{\in} \xi_x$. Во втором - $(P \setminus A)\bar{\delta}\{x\}$ и $x \bar{\in} A$, т.е. $x \in (P \setminus A)\bar{\delta}A$, откуда $\{x\}\bar{\delta}A$. Значит, $P \setminus A \in \xi_x$. Однако, $P \setminus A \cap A = \Lambda$, что противоречит центрированности системы ξ. Полученные противоречия доказывают максимальность δ-системы ξ_x.

Методом трансфинитной индукции можно доказать, что всякая центрированная δ-система ξ_1 содержится по крайней мере в одной максимальной центрированной δ-системе ξ.

Элементами δ-расширения ωP δ-пространства P являются все концы δ-пространства P. Для того, чтобы ввести близость в uP, определим отображение O системы всех подмножеств δ-пространства P в систему подмножеств uP, как отображение, ставящее в соответствие каждому $A \subseteq P$ совокупность $O(A)$ всех концов ξ, содержащих A в качестве своего элемента. Теперь объявим подмножества C и D множества uP далёкими (т.е. не близкими), если в P существуют далёкие множества A и B такие, что $C \subseteq O(A)$, а $D \subseteq O(B)$. Полученная близость удовлетворяет всем аксиомам В.А.Ефремовича.

1* Пусть $A \bar{\delta} C$ и $B \bar{\delta} C$ $(A \subseteq uP, B \subseteq uP, C \subseteq uP)$, тогда в P существуют множества A_1, B_1, C_1 такие, что $A_1 \bar{\delta} C_1$, $B_1 \bar{\delta} C_1$ и $A \subseteq O(A_1)$, $B \subseteq O(B_1)$, $C \subseteq O(C_1)$. Так как P есть δ-пространство, то $(A_1 \cup B_1) \bar{\delta} C_1$. Утверждается, что $A \cup B \subseteq O(A_1) \cup O(B_1) \subseteq O(A_1 \cup B_1)$. Действительно, пусть $\xi \in O(A_1) \cup O(B_1)$. Тогда ξ принадлежит, пусть, $O(A_1)$, т.е. $A_1 \in \xi$ и, следовательно есть δ-окрестность некоторого $M \in \xi$. Но тогда $A_1 \cup B$ будет δ-окрестностью M и, следовательно, принадлежит ξ, Отсюда $\xi \in O(A_1 \cup B_1)$. Итак, в P имеются далёкие множества $(A_1 \cup B_1) \bar{\delta} C_1$ такие, что $A \cup B \subseteq O(A_1 \cup B_1)$ и $C \subseteq O(C_1)$, т.е. $A \cup B \bar{\delta} C$, что и требовалось.

2* Пусть имеем два конца ξ_1 и ξ_2 из uP такие, что $\xi_1 \bar{\delta} \xi_2$. Тогда в P существуют множества A и B, такие, что $A \bar{\delta} B$, $\xi_1 \in O(A)$ и $\xi_2 \in O(B)$. Отсюда $A \in \xi_1$ и $B \in \xi_2$, причём $A \bar{\in} \xi_2$, так как в противном случае, в силу центрированности системы ξ_2, было бы $A \cap B \neq \Lambda$, что невозможно, так как $A \bar{\delta} B$. Следовательно, $\xi_1 \neq \xi_2$.

3* Пусть $A\bar{\delta}B$, докажем, что тогда существует δ-окрестность $\mathcal{U}_A$ множества A в uP такая, что $\mathcal{U}_A\bar{\delta}B$. Так как $A\bar{\delta}B$, то в P имеются далёкие множества $A_1\bar{\delta}B_1$, для которых $A\subseteq O(A_1)$ и $B\subseteq O(B_1)$. Тогда имеется δ-окрестность $\mathcal{U}_{A_1}$ множества A_1 в P такая, что $(P\setminus\mathcal{U}_{A_1})\bar{\delta}A_1$ и $\mathcal{U}_{A_1}\bar{\delta}B_1$. Утверждается, что $\mathcal{U}_A=O(\mathcal{U}_{A_1})$ является искомой δ-окрестностью множества A в uP. Докажем сначала, что $(uP\setminus\mathcal{U}_A)\subseteq O(P\setminus\mathcal{U}_{A_1})$. Действительно, пусть $\xi\bar{\in}\mathcal{U}_A=O(\mathcal{U}_{A_1})$, т.е. $\mathcal{U}_{A_1}\bar{\in}\xi$. Но тогда имеется множество $M\in\xi$ такое, что $\mathcal{U}_{A_1}\cap M=\Lambda$. M является δ-окрестностью некоторого $M_1\in\xi$. Отсюда $(P\setminus(P\setminus\mathcal{U}_{A_1}))=\mathcal{U}_{A_1}\subseteq(P\setminus M)\bar{\delta}M_1$, т.е. $(P\setminus\mathcal{U}_{A_1})\in\xi$ и $\xi\in O(P\setminus\mathcal{U}_{A_1})$. Итак, имеем в P далёкие множества $(P\setminus\mathcal{U}_{A_1})\bar{\delta}$ $\bar{\delta}A_1$, для которых $A\subseteq O(A_1)$, а $uP\setminus\mathcal{U}_A\subseteq O(P\setminus\mathcal{U}_{A_1})$. Следовательно, $(uP\setminus\mathcal{U}_A)\bar{\delta}A$ и $\mathcal{U}_A=O(\mathcal{U}_{A_1})$ есть δ-окрестность множества A в uP. Кроме того, $\mathcal{U}_{A_1}\bar{\delta}B_1$, $\mathcal{U}_A=O(\mathcal{U}_{A_1})$ и $B\subseteq O(B_1)$, т.е. $\mathcal{U}_A\bar{\delta}B$, что и требовалось.

Рассмотрим далее отображение ξ δ-пространства P в uP, ставящее в соответствие каждой точке $x\in P$ конец ξ_x. Двум различным точкам x и y δ-пространства P соответствуют различные концы ξ_x и ξ_y δ-пространства uP. Действительно, пусть $x\neq y$, $\{x\}\bar{\delta}\{y\}$, тогда найдутся δ-окрестность $\mathcal{U}_x$ точки x такая, что $\mathcal{U}_x\bar{\delta}\{y\}$ и δ-окрестность $\mathcal{U}_y$ точки y такая, что $\mathcal{U}_x\bar{\delta}\,\mathcal{U}_y$. Причём, так как $\mathcal{U}_x\in\xi_x$ и $\mathcal{U}_y\in\xi_y$, будет $\xi_x\in O(\mathcal{U}_x)$ и $\xi_y\in O(\mathcal{U}_y)$. Значит, $\xi_x\bar{\delta}\xi_y$ или $\xi_x\neq\xi_y$. Таким образом, отображение ξ взаимно однозначно.

Кроме того, отображение ξ, также и обратное отображение ξ^{-1} являются δ-отображениями (так мы будем называть отображения, сохраняющие близость). Действительно, пусть $A\bar{\delta}B$ в P, тогда A и B имеют неблизкие δ-окрестности $U_A \bar{\delta} U_B$. U_A, являясь δ-окрестностью множества A, есть δ-окрестность любой точки $x\in A$ и, следовательно, любой конец $\xi_x \in \xi(A)$ содержит U_A. Аналогично, U_B есть δ-окрестность любой точки $y\in B$, и любой конец $\xi_y \in \xi(B)$ содержит U_B. Отсюда, $\xi_x \in O(U_A)$ и $\xi_y \in O(U_B)$, для любого $\xi_x \in \xi(A)$ и любого $\xi_y \in \xi(B)$, т.е. $\xi(A) \subseteq O(U_A)$ и $\xi(B) \subseteq O(U_B)$ или $\xi(A)\bar{\delta}\xi(B)$. Обратно, пусть $A\bar{\delta}B$ $(A\subseteq\xi(P), B\subseteq\xi(P))$ в uP, тогда в P имеются множества M и N такие, что $M\bar{\delta}N$ в P, $A\subseteq O(M)$ и $B\subseteq O(N)$. Пусть $\xi_x \in A$, тогда $\xi_x \in O(M)$, т.е. $M\in\xi_x$ и есть δ-окрестность любой точки $x\in\xi^{-1}(A)$. Значит, $\xi^{-1}(A)\subseteq M$ и любая δ-окрестность множества M есть δ-окрестность для $\xi^{-1}(A)$. Аналогично, любая δ-окрестность множества N есть δ-окрестность для $\xi^{-1}(B)$. Так как $M\bar{\delta}N$, то они имеют неблизкие δ-окрестности $U_M \bar{\delta} U_N$, ~~которые~~ являются δ-окрестностями множеств $\xi^{-1}(A)$ и $\xi^{-1}(B)$, следовательно, $\xi^{-1}(A)\bar{\delta}\xi^{-1}(B)$.

Таким образом, отображение ξ есть эквиморфизм (см. [7]).

Докажем, что образ $\xi(P)$ δ-пространства P всюду плотен в uP. Пусть U_ξ - любая δ-окрестность некоторого конца $\xi\in uP$. Тогда $O^{-1}(U_\xi)\in\xi$ и есть δ-окрестность некоторого $M\in\xi$ и, следовательно, δ-окрестность любой точки $x \in M$. Значит, $O^{-1}(U_\xi) \in \xi_x$ и $\xi_x \in U_\xi$, что и требовалось.

Отождествляя точки δ-пространства P с концами ξ_x, получим искомое δ-вложение δ-пространства P в uP, в качестве всюду плотного подпространства. Если мы введём в uP топологию, как это делалось в § 2, то легко видеть, что далёкими в P будут те и только те множества, замыкания которых в uP, рассматриваемом как топологическое пространство, не пересекаются.

Для доказательства максимальности δ-пространства нам потребуется

Т е о р е м а 1. δ-пространство P максимально тогда и только тогда, если всякая центрированная δ-система имеет непустое пересечение.

Действительно, в случае, когда P не максимально, к нему можно добавить ещё одну точку ξ; взяв пересечения всех δ-окрестностей точки ξ в δ-пространстве $P \cup \xi$ с подпространством P, получим центрированную δ-систему δ-пространства P с пустым пересечением. Обратно, если δ-пространство P имеет центрированную δ-систему с пустым пересечением, то мы можем дополнить её до конца ξ, пересечение всех элементов которого также будет пусто. Значит, $\xi \in uP \setminus P$, а потому P не максимально.

Т е о р е м а 2. δ-пространство P максимально тогда и только тогда, когда его топология бикомпактна.

В самом деле, нужно только показать, что всякое максимальное δ-пространство P бикомпактно. Для этого возьмём в P произвольную центрированную систему φ замкнутых множеств Φ и покажем, что её пересечение не пусто. Сначала убедимся, что для любого замкнутого множества $\Phi \subseteq P$ система ξ_Φ всех δ-окрестностей является δ-системой, пересечение которой равно Φ. Действительно, для любого $A \in \xi_\Phi$, $P \setminus A \bar{\delta} \Phi$, и имеется δ-окрестность B множества Φ ($B \in \xi_\Phi$), для которой $(P \setminus A) \bar{\delta} B$. Равенство $\bigcap_\alpha U_\alpha = \Phi$, где U_α – любая δ-окрестность множества Φ, легко проверяется по точкам. Пусть $x \in \Phi$, следовательно, $x \in U_\alpha$ при любом α и, значит, $x \in \bigcap_\alpha U_\alpha$. Обратно, пусть $x \bar{\in} \Phi$, тогда, так как Φ замкнутое множество, будет $\{x\} \bar{\delta} \Phi$ и, следовательно, найдётся δ-окрестность U_Φ множества Φ такая, что $\{x\} \bar{\delta} U_\Phi$, т.е. $x \bar{\in} U_\Phi$. Отсюда $x \bar{\in} \bigcap_\alpha U_\alpha$. Берём далее обьединение $\xi = \bigcup \xi_\Phi$ всех δ-систем ξ_Φ (где Φ пробегает всё φ) Система ξ оказывается центрированной δ-системой. Последнее следует из того, каждое ξ_Φ есть δ-система. Действительно, пусть $A \in \xi$, тогда A принадлежит некоторой δ-системе ξ_Φ, и является δ-окрестностью некоторого $B \in \xi_\Phi \subset \xi$. Теперь возьмём любое конечное число множеств $A_1, \dots, A_s$ из ξ. Если ~~все~~ A_i $(i = 1, \dots, s)$ принадлежат одному ξ_Φ, то пересечение их не пусто в силу центрированности ξ_Φ. Если A_i принадлежат различным ξ_Φ, то каждое содержит некоторое множество Φ из системы φ. Пересечение таких Φ не пусто в силу центрированности системы φ.

Значит, и пересечение $\bigcap_i A_i$ не пусто. Так пересечение всех множеств, входящих в ξ_Φ равно Φ, то пересечение системы ξ равно пересечению системы φ. Следовательно, в силу максимальности P пересечение системы φ не пусто. Откуда заключаем, что пространство P бикомпактно (см. [1] стр. 383).

<u>Теорема 3</u> Всякое δ-пространство P имеет единственное максимальное δ-расширение, а именно δ-расширение uP.

Допустим, что существует δ-пространство P с двумя различными максимальными δ-расширениями uP и vP. Обозначим через R топологию δ-пространства P. Так как uP и vP - различные бикомпактные расширения пространства R, то в R имеются множества A и B, замыкания которых в одном расширении, пусть в uP, пересекаются, а в vP - не пересекаются. Отсюда получаем, что A и B близки в uP, но не близки в vP, чего не может быть, так как и uP и vP являются δ-расширениями одного и того же δ-пространства P.

Из всего изложенного вытекает:

<u>Теорема 4</u>. Отображение u, ставящее в соответствие каждому δ-пространству P, порождающему данное вполне регулярное пространство R, максимальное δ-расширение uP (являющееся бикомпактным расширением R) есть взаимно однозначное отображение

на множество всех бикомпактных расширений пространства R.

Заметим, что при этом максимальному бикомпактному расширению βR соответствует δ-пространство P, в котором далеки всякие два функционально отделимые множества пространства R. Это вытекает из следующего предложения, доказанного Чехом; если A_0 и A_1 суть функционально отделённые замкнутые множества вполне регулярного пространства R, то замыкания A_0 и A_1 в βR не пересекаются; при этом среди всех бикомпактных расширений пространства R пространство βR - единственное, обладающее этим свойством. (Доказательство имеется, например, в [2] стр.)

Итак, теория δ-пространств может быть сведена к теории бикомпактных расширений.

§ 5. Связь между двумя способами расширения топологических пространств.

В заключение работы установим связь между разобранными выше двумя способами расширения топологических пространств, основанными на понятии близости. Для этого из всей совокупности расширений $\tilde{R}$ (см. § 3) будем рассматривать лишь те, которые являются нормальными топологическими пространствами и удовлетворяют условиям:

Б) для каждой точки $\alpha \in \tilde{R} \setminus M$ существует множество $A_\alpha \subset M$, имеющее точку α единственной предельной в $\tilde{R}$

В) каждое множество, имеющее точку $\alpha\in\widetilde{R}\setminus M$ предельной, можно разбить на два непересекающихся подмножества, каждое из которых имеет точку α предельной точкой.

Пусть теперь имеем δ-пространство M, удовлетворяющее условиям 1) - 4) (см. § 3). Построим для него расширение $\widetilde{R}$. (Пусть $\widetilde{R}$ - нормальное топологическое пространство, удовлетворяющее условиям Б) и В)). Введём в $\widetilde{R}$ близость следующим образом: будем считать множества $A\subseteq\widetilde{R}$ и $B\subseteq\widetilde{R}$ близкими тогда и только тогда, когда $\widetilde{R}[A]\cap\widetilde{R}[B]\neq\Lambda$. Это соотношение близости в $\widetilde{R}$ удовлетворяет аксиомам 1^* - 3^* В.А.Ефремовича. Действительно, достаточно проверить выполнение аксиомы 3^*, Но она, как легко видеть, сразу следует из нормальности пространства $\widetilde{R}$. Кроме того, $\widetilde{R}$ содержит M в качестве всюду плотного подмножества, и соотношение близости в M, индуцируемое из $\widetilde{R}$, совпадает с исходным ($A\delta B$ в M ($A\subseteq M, B\subseteq M$) тогда и только тогда, когда $\widetilde{R}[A]\cap\widetilde{R}[B]\neq\Lambda$). Таким образом, $\widetilde{R}$ являетя δ-расширением δ-пространства M. Построим далее максимальное δ-расширение $u\widetilde{R}$ Ю.М.Смирнова для δ-пространства $\widetilde{R}$. $u\widetilde{R}$ содержит $\widetilde{R}$, а, следовательно, и M, в качестве всюду плотного подмножества, и соотношение близости в $\widetilde{R}$, следовательно, и в M, индуцируемое из $u\widetilde{R}$, совпадает с исходным. Таким образом, $u\widetilde{R}$ является также максимальным δ-расширением для δ-пространства M.

С другой стороны, если имеем максимальное δ-расширение uM δ-пространства M, то имеется только одно расширение $\tilde{R}$ такое, что $M \subset \tilde{R} \subset uM$, причём близкими в M будут те только те множества, замыкания которых в $\tilde{R}$ ~~не~~ пересекаются.

Предположим, что существуют два различных (в том смысле, что имеются различные точки) расширения $\tilde{R}_1$ и $\tilde{R}_2$ такие, как было описано в предыдущем абзаце. Возьмём точку $\alpha \in \tilde{R}_1$ такую, что $\alpha \bar{\in} \tilde{R}_2$. В M существует мномножество A_α, имеющее точку α единственной предельной. Его по условию В) можно разбить на два непересекающихся подмножества A' и A'' так, чтобы $\alpha \in \tilde{R}_1[A']$ и $\alpha \in \tilde{R}_1[A'']$. Тогда $\tilde{R}_1[A'] \cap \tilde{R}_1[A''] = \alpha \neq \Lambda$, т.е. $A' \delta A''$ в M. Значит, $\tilde{R}_2[A'] \cap \tilde{R}_2[A''] \neq \Lambda$. Пусть $\beta \in \tilde{R}_2[A']$ и $\beta \in \tilde{R}_2[A'']$. При этом $\beta \bar{\in} \tilde{R}_1$, так как в противном случае множество имело бы две предельные точки. Возьмём окрестность H точки β так, чтобы было $\alpha \bar{\in} uM[H]$ и разобьём множество $A_\alpha \cap uM[H]$ на два непересекающихся подмножества B' и B'', для которых $\beta \in \tilde{R}_2[B]$ и $\beta \in \tilde{R}_2[B'']$. Значит, $B' \delta B''$ в M, причём $\beta \bar{\in} M$. Но $\tilde{R}_1[B'] \cap \tilde{R}_1[B''] = \Lambda$, так как $\alpha \bar{\in} uM[H] \supseteq uM[B'] \supseteq \tilde{R}_1[B']$ и $\alpha \bar{\in} uM[H] \supseteq uM[B''] \supseteq \tilde{R}_1[B'']$, а другой предельной точки в $\tilde{R}_1$ множество A_α не имеет. Полученное противоречие доказывает утверждение.

Таким образом, для всякого δ-пространства M, удовлетворяющего условиям 1) - 4), расширение $\tilde{R}$ при естественном введении в нём самом близости совпадает с множеством точек, достижимых в смысле условий Б) и В), максимального δ-расширения и M Ю.М.Смирнова.

Цитированная литература.

[1] П.С.Александров, Введение в общую теорию множеств и функций, ОГИЗ, М-Л. 1948г.

[2] П.С.Александров, О понятии пространства в топологии, УМН, П, 1(17) (1947), 5-57.

[3] П.С.Александров, О бикомпактных расширениях топологических пространств, М. сб. 5(47) (1939), 403-423.

[4] П.С.Александров и П.С.Урысон, О компактных топологических пространствах, Труды Мат.Инст.им.Стеклова, XXX1, (1950).

[5] В.А.Ефремович, Инфинитезимальные пространства, УМН, 1У:2(30),(1949),178.

[6] В.А.Ефремович, Инфинитезимальные пространства, УМН, У1:4(44),(1951), 203.

[7] В.А.Ефремович, Инфинитезимальные пространства, ДАН, 76, № 3, (1951), 341.

[8] А.Д.Мышкис, К понятию границы, М.сб. 25(67):3 (1949) 387-431.

[9] А.Д.Мышкис, Об эквивалентности некоторых способов введения границы, М.сб. 26(68) (1950)

[10] А.Д.Мышкис, Инфинитезимальные пространства, (не напечатана)

[11] Ю.М.Смирнов, О пространствах близости в смысле В.А. Ефремовича, (не напечатана)

[12] А.Н.Тихонов, Über die topologische Erweiterung von Räumen, Math. Ann. 102:4 (1929) 544-561

[13] С.В.Фомин, К теории расширений топологических пространств, М.сб. 8(50) (1940), 285-293.

[14] С.В.Фомин, Расширения топологических пространств, ДАН, 32 (1941)

[15] С.В.Фомин, Extension of topological spaces, Ann. of math. 44 (1943) 471-481

[16] E.Čech, On bicompact spaces, Ann. of math. 38 (1937) 823-845.

I рецензия

4Б-мат.

Р е ц е н з и я

на работу Э. И. ВИГАНТ

"О расширениях топологических пространств".

Работа Э. И. ВИГАНТ представляет собой систематическое изложение теории инфинитезимальных пространств с точки зрения теории расширений топологических пространств. Эта работа выходит за пределы обычной компиляции, так как содержит ряд самостоятельных результатов, представляющих научный интерес. К таким результатам относятся, например, подробный анализ связи аксиом близости с аксиомами топологического пространства; введение класса расширений топологических пространств, когда точки расширенного пространства достигаются не обязательно счетными множествами из расширяемого пространства, и некоторые другие.

Работа Э.И. ВИГАНТ, выполненная на основе глубокого изучения всей имеющейся литературы по пространствам близости, представляет известный интерес для теоретико-множественной топологии.

Ст. преподователь ЛСХА

М. Гольдман /М. Гольдман./

28 У 52.

О Т З Ы В
о дипломной работе Эры Ивановны В и г а н т .

Дипломная работа Э.И. Вигант посвящена изучению так называемых пространств близости (инфинитезимальных пространств), введенных советским учёным В.А. Ефремовичем. Эти пространства важны в одном из н наиболее абстрактных отделов, современной математики - в теоретико-множественной топологии, созданной в основном трудами советских математиков чл.-корр. АН СССР П.С. Александрова, П.С. Урысона, чл.корр АН СССР А.Н. Тихонова и других, и существенной при анализе основных математических операций. Теория пространств близости начала разрабатываться только в последнее время и систематически еще не рассматривалась. Таким образом, систематическое изложение основ теории пространств близости и дальнейшее её развитие, несомненно, актуально для терретикомножественной топологии.

Автор использовал всю имеющуюся литературу по пространствам близости, включая две ещё неопубликованные статьи, а также основную литературу по теории так называемых расширений топологических пространств, тесно связанной с теорией пространств близости.

Вся работа, за исключением § 1, имеющей обзорный характер, оригинальная. Правда, § 4 представляет собой только более подробное изложение ещё не опубликованной работы Ю.М. Смирнова; однако и при этом автору пришлось проявить достаточные знания и навык к самостоятельной работе. § 2 включает, в частности, результаты, полученные автором ещё на 4-ом курсе, однако содержит и ряд новых фактов. § 3 представляет собой обобщение результатов, полученных мной в ещё не опубликованной работе. Наконец, в § 5 выяснена связь между исследованиями, проведенными в § 3, и теорией Ю.М. Смирнова. На важность установления этой связи указывал академик А.Н. Колмогоров в частном письме.

Выдвинутые положения обоснованы достаточно, всё изложение систематично и ~~практические~~ план работы ясен для читателя. Оформлена работа с внешней стороны хорошо и имеет все необходимые части (тезисы в работах по математике не приняты).

г. Рига, 9-го мая 1952 г.

А. Мышкис.

проф.д-р /А.Мышкис/

Отзыв руководителя о дипломной работе Э. И. Вигант

Работа Э. И. Вигант посвящена изучению пространств близости (инфинитезимальных пространств), введенных В. А. Ефремовичем. Это важное понятие теоретикомножественной топологии непосредственно связано с теорией расширений топологических пространств и в некоторых случаях дает новую характеристику этих пространств.

Основная идея понятия пространства близости состоит в следующем. Известно, что пара подмножеств метрического пространства может быть или близкой (если расстояние между этими подмножествами равно нулю) или нет (в противном случае). В пространствах же близости мы исходим из заранее заданного в абстрактном множестве соотношения близости, в котором находится или не находится каждая пара подмножеств. На основе этого соотношения, при удовлетворении определенной системы аксиом, в данное множество (пространство близости) может быть введена топология. Тем самым представляется возможность перенести в топологические пространства часть аппарата, развитого ранее для метрических пространств.

Теория пространств близости была до последнего времени почти не разработана. В. А. Ефремович, давший определение этих пространств, указал только некоторые их простейшие свойства. В последнее время появились работы Ю. М. Смирнова и моя, в которых рассматриваются пространства близости с точки зрения теории расширений топологических пространств.

Работа Э. И. Вигант начинается с обзора основных способов расширения топологических пространств, причем приводятся все основные определения и необходимые конструкции. В дальнейшем специально рассматривается теория пространств близости. Автор подробно анализирует аксиомы близости и изучает их связь с аксиомами топологического пространства. В этой части дипломница использует свои результаты, полученные еще на 4-м курсе. Обосновываются утверждения В. А. Ефремовича, приведенные им без доказательства, например, о полной регулярности пространств близости.

Наибольший интерес представляет обобщение ~~обобщение~~ результатов руководителя о двойственности различных способов расширения топологического пространства М и различных способов превращения этого пространства в пространства близости (при соответственных предположениях). При этом дипломница рассматривает расширения $R \supset M$, обладающие тем свойством, что каждая точка $A \in R-M$ достижима в некотором смысле множеством T_A из М; ей удалось отказаться от требования счетности этих множеств T_A, которое предполагалось в моей работе. Примеры, приводимые в дипломной работе, показывают, что новый класс расширений действительно шире рассматривавшегося ранее. Достоинством дипломной работы в этой части является также весьма подробное проведение рассуждений с полным проведением доказательств, в то время как моя работа написана очень конспективно. Недостатком этой части (как и моей работы) является трудная проверяемость выставленных условий двойственности.

Далее рассмотрена связь предыдущих исследований с теорией Ю. М. Смирнова максимальных пространств близости. При этом удается установить такую связь для расширений старого типа. Работа над этим вопросом должна быть продолжена.

В целом работа Э. И. Вигант показывает, что дипломница достаточно овладела методами теоретикомножественной топологии (в рассматриваемых областях), умеет их применять и знает основные результаты, полученные в этих областях. Самостоятельные результаты представляют научный интерес и после обработки заслуживают опубликования.

Считаю, что работа Э. И. Вигант заслуживает отличной оценки.

Профессор доктор физико-математических наук А. Мышкис

2. 5. 1952 г. (А. Д. Мышкис)

О Т З Ы В

рецензента о дипломной работе Э. И. Вигант.

В рецензируемой работе подробно рассмотрен один важный способ расширения топологических пространств, основанный на понятии инфинитезимального пространства, введённом В.А. Ефремовичем.

Предварительно (§ 1) приводится обзор важнейших способов расширений топологических пространств.

В § 2 развивается теория инфинитезимальных пространств, причём доказывается, что если на основе сформулированных автором аксиом близости ввести понятие о замыкании множества, то пространство делается топологическим. Кроме того в § 2 доказывается, что основанная на аксиомах В. А. Ефремовича топологизация приводит к вполне регулярному пространству.

В § 3 дается способ получения близости посредством расширения топологических пространств.

Этот параграф является обобщением работы А.Д. Мышкиса о двойственности различных способов расширения топологического пространства и различных способов превращения этого пространства в пространства близости.

Далее в § 4 дается развёрнутое изложение результатов Ю.М. Смирнова о получении близости из расширений топологических пространств.

В заключении работы устанавливается связь между описанными в §§ 3 и 4 двумя способами расширения топологических пространств.

В целом работа представляет собой оригинальное исследование автора и показывает хорошее владение методами теоретико-множественной топологии.

Считаю работу заслуживающей отличной оценки.

5-го мая 1952 года.

Доцент, канд. физ-мат. наук
/С.Н. Крачковский/ С.Н. Крачков