Prof. Dr. Ing. Alfrēds Vītols

Mēchanika

I. Koncentrs

Ievads mēchanikā
elementārā apstrādājumā

1929.
LATVIJAS BŪVINŽENIERU BIEDRĪBAS IZDEVUMS.

Prof. Dr. Ing. Alfrēds Vītols

Mēchanika

I. Koncentrs

Ievads mēchanikā
elementārā apstrādājumā

1929.

Grāmatu spiestuves kooperātīvs
„GRĀMATRŪPNIEKS"
Rīgā, L. Pils ielā 14, II. stāvā.

Satura rādītājs.

Ievads. Lpp.

§ 1. **Mēchanikas priekšmets un pamatjēdzieni:**
Mēchanikas priekšmets 7
Jēdziens par kustību 7
Ortogonālās koordinātu sistēmas pielietošana mēchanikā . . . 7
Materiēla ķermeņa stāvotnes noteikšana 11
Materiēlas plāknes un līnijas 11
Punkta mēchanika 12

§ 2. **Kustības pamatveidi:**
Translācija un rotācija 12

§ 3. **Mēchanikas iedalījums:**
Kinēmatika jeb foronomija 14
Kinētika 14
Statika un dinamika 15
Mēchanikas iedalījums uz ķermeņu agregatstāvokļa pamata . . 15
Absolūti cieti un deformējošies ķermeņi 16
Elastīgas un plastiskas deformācijas 16
Gāzu un šķidrumu mēchaniskas īpašības 16
Teorētiska un techniska mēchanika 17
Mēchanikas iedalījuma šēma 18

I. nodaļa.

§ 1. **Lielumi, ar kuŗiem operē mēchanika** 19

§ 2. **Matēmatiskas darbības ar vektoriem:**
A. Ģeometriska jeb vektoru vienādība 20
B. Ģeometriska zuma 21
C. Ģeometriska jeb vektoru starpība 23

II. nodaļa.

§ 1. **Projekciju īpašības:**
A. Projekcijas uz plākni 25
B. Projekcijas uz asi 28

III. nodaļa.

§ 1. **Skalārais vektoru produkts (iekšējais produkts)** 33
§ 2. **Ģeometriskās zumas skaitliskā nozīme** 34

Lpp.

§ 3. **Vektora noteikšana caur projekcijām uz projekciju asīm** . . . 35
§ 4. **Vektoru attēlošana ar vienības vektora palīdzību** 39

§ 5. **Vektoriēlais produkts:**
A. Vektoriēla produkta dēfīnīcija 40
B. Vektoriēla produkta īpašības 41
C. Vektoriēla produkta projektēšana uz projekcijas asīm . . 43

§ 6. **Projekciju metode** 46

IV. nodaļa.

§ 1. **Spēks un Newton'a mēchanikas pamatlikumi jeb principi** . . . 48
§ 2. **Paātrinājuma atkarības princips no spēka** 50
§ 3. **Spēku paralelograma likums. Spēku poligons** 53
§ 4. **Tāļākie Newton'a II likuma secinājumi** 55
§ 5. **Newton'a III pamatprincips** 58

V. nodaļa.

§ 1. **Spēka iedarbes punkts un viņa īpašības statikā** 60

VI. nodaļa.

§ 1. **Mēchanisko lielumu „dimensijas" simbols** 63

VII. nodaļa.

§ 1. **Spēku salīdzināšana, spēku vienība un spēku mērīšana** . . . 66
§ 2. **Svars un smaguma spēks** 70
§ 3. **Jēdziens par darbu** 71
§ 4. **Jēdziens par darba ražīgumu (jaudu)** 76

Priekšvārdam.

Uz Būvinženieru biedrības ierosinājumu, kuŗa spraudusi teicamu mērķi, papildināt un paplašināt latviešu technisko literātūru un veicināt tautā technisko izglītību, esmu sastādījis šo: „Ievadu mēchanikā“. Uzdevums nebija viegls, jo gribēju darīt savu darbu pieejamu plašākām masām, technikumu audzēkņiem, studentiem, kā arī pašmācībai, kādēļ vienmēr bija jārēķinājas ar lasītāju varbūtējo matēmatisku izglītību. Iepazīstoties ar technikumu programmu, nācu pie slēdziena, ka nav neiespējams sastādīt vismaz kopējo „Ievadu studentiem un technikumu audzēkņiem“ — diferenciaciju varēs iesākt vēlāk, sastādot tālākajos mēchanikas koncentrus. Ja technikumu audzēkņiem kaut kas arī, varbūt, izrādītos par smagu, tad šo materiālu var viegli izlaist. Tanī pašā nolūkā — padarīt kursu pēc iespējas pieejamu plašākām masām, kā arī piepaturēdamies pie sakāmā vārda, ka „repetitio est mater studiorum“ — neesmu baidījies no dažu jautājumu sīkākas iztirzāšanas, kuŗā dažs, varbūt, varētu saskatīt kādu atkārtojumu.

Rīgā, aprilī 1929.

A. Vītols.

Ievads.

§ 1. Mēchanikas priekšmets un pamatjēdzieni.

Mēchanikas priekšmets.

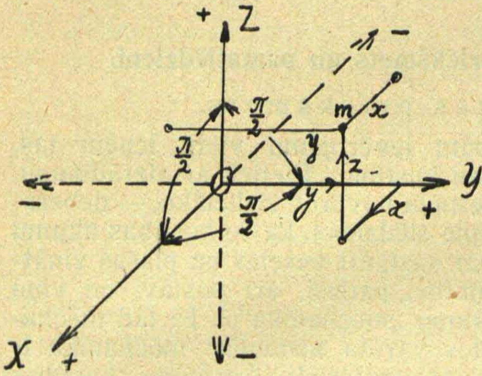
Starp dabas parādībām ievērojamu vietu ieņem tās, kuŗas ir saistītas ar ķermeņu kustību. Pietiek ar aizrādījumu, ka katru dienu cilvēkam ir iespēja novērot vislielāko, — debessķermeņu kustību, lai nāktu pie slēdziena, ka šo kustības likumu un viņas cēloņu pētīšana var sastādīt veselas un plašas zinātnes priekšmetu. Tāda zinātne, patiesi, arī pastāv, un viņu apzīmē ar vispārēju nosaukumu „mēchanika". Tā tad mēchanikas uzdevumu īsos vārdos varētu formulēt: mēchanika ir zinātne, kuŗa nodarbojas ar materiēlu ķermeņu kustības likumu pētīšanu.

Jēdziens par kustību.

Minējuši vārdu „kustība", mēģināsim šo jēdzienu dēfīnēt (noteikt). Ja ķermens kustās, tad viņš maina savu vietu jeb stāvotni (Lage, положение, position). Bet līdz ar ķermeņa kustību kustās arī pulksteņa rādītājs, kuŗš reģistrē (rāda) laiku, pie kam katrai ķermeņa stāvotnei telpā atbilst noteikta pulksteņa rādītāja stāvotne jeb noteikts laika moments. Nupat minētie ķermeņa kustības apstākļi atļauj izteikt sekošu kustības dēfīnējumu: kustība ir ķermeņa stāvotnes maiņa telpā līdz ar laiku; arī ķermeņa formas maiņa (dēformācija) līdz ar laiku ietilpst kustības jēdzienā. Ja līdz ar ķermeņu kustību netiktu novērots arī laiks, tad ķermeņu kustībā nebūtu iespējams atklāt nekādu likumību.

Ortogonālās koordinātu sistēmas pielietošana mēchanikā.

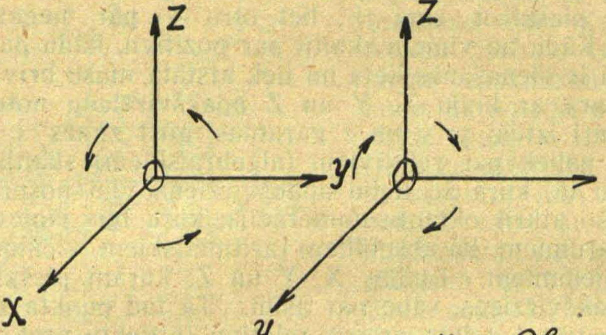
Lai varētu novērot ķermeņa kustību, ir jāsalīdzina viņa stāvotne katrā momentā pret kādu citu ķermeni jeb ķermeņu sistēmu (kopību). Ja šāda salīdzināšana nebūtu iespējama, tad arī nevarētu konstatēt (novērot) ķermeņa kustību. Par ķermeņu sistēmu, ar kuŗu salīdzina (pret kuŗu attiec) kermeņa stāvotni katrā momentā, ļoti ērti ir vēlēt trijū neaprobežotu plākņu sistēmu, kuŗas krustojas savstarpīgi zem taisniem kaktiem (ortogonāla plākņu sistēma). Šīs plāknes sadala telpu 8 oktantēs (neaprobežotās telpas daļās) un šo plākņu krustojuma līnijas ir taisnes, kuŗas iet caur vienu punktu O un kuŗas savā starpā arī veido taisnus leņķus (sk. zīm. 1.).



Zīm. 1.

Paskaidrosim, kā noteikt ķermeņa stāvotni pret šo plākņu sistēmu. Bet vispirms apskatīsim jautājumu, kā noteikt ģeometriska punkta stāvotni. Dotā ģeometriskā punkta m stāvotni mēs varētu noteikt caur šī punkta attāļumiem no min. 3 plāknēm (sk. zīm. 1.). Šādā ceļā, kā redzams, šī stāvotne būtu noteikta caur 3 gaŗumiem x, y un z. Ja būtu jāatrisina pretējais uzdevums, proti, ja būtu jāuzmeklē punkta „m“ stāvotne ar doto gaŗumu x, y un z palīdzību, tad mēs varētu rīkoties šādi, ja iepriekš būtu zināms, kuŗā oktantē punktam m jāatrodas: mēs novilktu plākni, paralelu sistēmas plāknei ZOX, y atstātumā no pēdējās. Novilktā plāknē būtu jāatrodas punktam m. Kā redzams, caur attāļumu no vienas plāknes punkta stāvotni noteikt nevar, jo viens attāļums dod iespēju uziet tikai plākni, kuŗā meklējamam punktam jāatronas. Ja novilksim vēl otru plākni paraleli ZOY plāknei x attāļumā no pēdējās, tad punkta stāvotne paliek jau noteiktāka, proti, viņš jau meklējams uz abu novilkto plākņu krustojuma līnijas, kuŗa ir paralēla z asij. Beidzot, trešā plākne, paralela XOY plāknei, z atstātumā no viņas, dod punkta m stāvotni, kā minētās līnijas krustojuma punktu ar novilkto plākni. Kā redzams, 3 gaŗumu x, y un z pietiktu, lai noteiktu punkta stāvotni, ja bez tam vēl būtu zināma oktante, kuŗā punktam jāatrodas, jeb, — kas tas pats — ja būtu zināmi virzieni, kuŗos gaŗumi x, y un z nospraužami (katru no viņiem var nospraust, kā uz vienu, tā arī uz otru pusi no attiecīgas koordinātu plāknes). Pretējā gadījumā uzdevums ir nenoteikts, jo var būt astoņi atrisinājumi saskaņā ar oktantu skaitu. Ievērojot šo, būtu jāsaka, ka punkta m stāvotne telpā būtu noteikta caur 3 gaŗumiem x, y un z un oktantes Nr. (kādā punktam jāatrodas). Šāds paņēmiens ir neērts un sarežģīts. Aplūkosim, kādā ceļā apiet atsevišķu oktantes noteikšanu. Katrai no līnijām X, Y un Z, kuŗu gaŗums ir nenoteikts, ir noteikts virziens (Richtung) telpā, bet uz šiem virzieniem var vēl atšķirt divus noteiktus apakšvirzienus (Richtungssinn) no punkta O uz vienu un otru pusi. Šos apakšvirzienus uz katras līnijas var atšķirt, skaitot vienu par pozitīvu un visiem gaŗumiem, kuŗi nospraužami šinī apakšvirzienā, piešķirot zīmi +, bet otru — par negatīvu ar zīmi —. Kādu no viņiem skaitīt par pozitīvu, kādu par negatīvu — tā ir vienošanās lieta un tiek atstāta mūsu brīvai izvēlei. Sakarā ar līniju X, Y un Z apakšvirzienu noteikšanu, skaitļi, kuŗi izteic x, y un z gaŗumus, gūst zīmes + jeb —, t. i. viņi paliek par relatīviem (alģebraiskiem) skaitļiem, atkarībā no tā, kuŗā šo līniju apakšvirzienā viņi nospraužami. Līdz ar šo atkrīt oktantu numerācija, kuŗa bija jāpievieno x, y un z gaŗumiem, kā absolūtiem (aritmētiskiem, vienmēr pozitīviem) lielumiem. Līnijas X, Y un Z, kuŗām piešķirts noteikts apakšvirziens, sauc par asīm. Tā tad punkta stāvotne telpā var tikt noteikta ar trīs relatīvu (attiektu pret noteiktu apakšvirzienu) attāļumu x, y un z palīdzību triju ortogonālu taisņu asu (O; X, Y, Z) sistēmā, kuŗa saucas par taisnu ortogonālu (taisnleņķu) koordinātu sistēmu. Punktu O sauc par koordinātu sākumu un skaitļus x, y un z — par punkta koordinātēm. Tā tad punkta stāvotni telpā var noteikt ar 3 viņa koordinātu palīdzību, pie kam punkta m uzmeklēšanu visērtāki var izdarīt sekošā kārtā: nospraužam koordināti x tieši uz X ass, viņas attiecīgā apakšvirzienā, no x gala punkta nospraužam XOY plaknē paralēli Y asij attiecīgā apakšvirzienā koordināti y, no y gala punkta attiecīga Z ass apakšvirzienā nospraužam beidzot z. Pēdējās koordinātes gala punktā atrodas meklējamais punkts m. Koordinātu nospraušanu, saprotams, var izdarīt kaut kuŗā kārtībā, piem. iesākot ar y (sk. zīm. 1.). Tālāk tiks rādīts, kādu lomu spēlē ģeometrisks punkts materiāla ķermeņa stāvotnes noteikšanā.

Vēl atzīmēsim vienu minētās koordinātu sistēmas īpašību. Uz zīm. 2-a un 2-b ir rādītas divas koordinātu sistēmas, kuŗas nav savietojamas ne caur pārbīdīšanu, ne caur griešanu un kuŗas savā starpā attiecas tā, kā apmēram labā roka — pret kreiso. Sakarā ar šo, jāatšķir 2 koordinātu sistēmu grupas, a un b, kuŗas var raksturot sekoši: ja izstieptu rokas īkšķi uzskata par sistēmas X asi, rādītāja pirkstu par Y asi, bet vidējo pirkstu par Z asi (visi trīsi pirksti izstiepti tā, ka viņi apmēram veido taisnus leņķus, tad labā roka reprezentē sistēmu a un kreisā b. Sakarā ar šo pazīmi a sistēmas tiek sauktas par labās rokas sistēmām, b sistēmas — par kreisās rokas sistēmām. Abu sistēmu minētās pamatīpašības var vēl konstatēt sekoši: nostāsimies Z ass virzienā ar kājām punktā O, tad a grupas X ass savienošana ar Y asi visīsākā ceļā (pagriežot X asi tikai par leņķi $\frac{\pi}{2}$) notiek pretēji pulksteņa rādītāja kustības virzienam; tāpat, ja nostājas X ass



Zīm. 2ª. Zīm. 2ᵇ.

virzienā, Y ass savietojas ar Z asi griežot pirmo tajā pašā virzienā. Beidzot, tanī pašā virzienā savietojas Z ass ar X asi, ja nostājas Y ass virzienā. Grupai b piemīt pretēja īpašība. Kamēr lieta grozās ap punkta stāvotnes noteikšanu, abas sistēmas ir vienvērtīgas (ekvivalentas); turpretim, šī vienvērtība zūd, tiklīdz runa būs par zināmu mēchanisku lielumu projektēšanu uz koordinātu asīm, kā to redzēsim vēlāk.

Koordinātu sistēmas ievešana ievērojami paplašina tos ieročus, ar kuŗu palīdzību varam studēt un apskatīt ķermeņu kustības likumus, jo viņu pielietošana dod iespēju saistīt mēchaniskus lielumus caur formulām, uz kuŗām var attiecināt matemātisko analīzi visā viņas plašumā.

Neaizmirsīsim, ka nupat noskaidrojām ģeomētriska punkta stāvotnes noteikšanas paņēmienu, bet mūsu uzdevums bija noskaidrot materiēla ķermeņa stāvotnes noteikšanu. Visvienkāršākais materiēlais ķermenis ir tā saucamais materiēlais punkts. Tas ir tāds materiēls ķermenis, kuŗa tilpuma dimensijas ir niecīgas samērā pret tām visām dimensijām, kuŗas kustības gaitā spēlē kādu lomu. Tas, vai kādu zināmu ķermeni var uzskatīt par materiēlu punktu, atkarājas no apskatāmās kustības veida. Par piem. zemes lode savā kustības gaitā ap sauli var tikt uzskatīta par materiēlu punktu, jo visi viņas punkti apraksta trajektorijas (noietos ceļus), kuŗas galvenos vilcienos neievērojami atšķiras no tās trajektorijas, kuŗu apraksta zemes lodes centrs. Faktiski, pārējie punkti, pateicoties zemes lodes rotācijas (griezes) kustībai, aprakstīs cilpveidīgas trajektorijas, bet šo cilpu dimensijas zudīs pret zemes lodes orbites dimensijām. Turpretīm, citos jautājumos tādu vienkāršojumu ievest nevarēs. Par piem., ja tiek aplūkota zemes lodes griezes kustība ap viņas asi, kā arī vispārīgi — kaut kuŗa cita ķermeņa griezes kustība ap asi, kuŗa iet caur ķermeņa iekšieni, — tad attiecīgo materiēlo ķermeni nekad nevarēs uzskatīt par materiēlu punktu, kā tas noskaidrosies attiecīgās mēchanikas daļās.

Visos gadījumos, kuŗos kādu materiēlu ķermeni varēs uzskatīt, kā materiēlu punktu, ļoti noderīga izrādās fikcija (nereāla, īstenībai neatbilstoša, iedomājama aina): var iedomāties attiecīgā ģeometriskā punktā koncentrētu (sakopotu) par materiēlu punktu uztvertā ķermeņa masu. Līdz ar šo noskaidrojas, kā noteikt materiēla punkta stāvotni, jo ģeometriska punkta stāvotnes noteikšanas jautājumu jau mēs apskatījām.

Materiēla ķermeņa stāvotnes noteikšana.

Ja nu pārejam uz materiēla ķermeņa stāvotnes noteikšanu, ar ko mēs iesākām savu uzdevumu, tad tagad ir redzams, ka šis uzdevums ir vienvērtīgs (ekvivalents) ar to materiēlu punktu sistēmas kopības stāvotnes noteikšanu, no kuŗiem materiēls ķermens vienmēr var tikt uzskatīts, kā sastāvošs. Ja cietā materiēlā ķermenī ņemsim vērā 3 uz vienas taisnes neatrodošos punktus, tad šo punktu stāvotne līdz ar to arī noteiks visa materiēlā ķermeņa stāvotni, jo kaut kuŗā stāvotnē kaut kuŗa ķermeņa punkta attālums no šiem 3 punktiem paliks vienmēr negrozīgs.

Materiēlas plāknes un līnijas.

Atzīmēsim, ka bez nupat kā noskaidrotiem materiēlā punkta un ķermeņa jēdzieniem, vēl var arī definēt materiēlas plāknes un līnijas. Par materiēlām plāknēm sauksim tādus materiēlus ķermeņus, kuŗu viena dimensija samērā ar pārējām ir niecīga, un par līnijām — tādus, kuŗu divas dimensijas samērā ar trešo ir niecīgas. Kā redzams, materiēlas plāknes stāvotne noteicas caur viņas triju punktu un materiēlas līnijas — caur viņas divu punktu stāvotnēm. Abiem šiem materiēla ķermeņa īpatnējiem veidiem noder jau lietotā attiecība uz materiēlo punktu fikcija: materiēla plākne ir ģeometriska plākne, kuŗā iedomājamies koncentrētu materiēlās plāknes masu; materiēla līnija ir ģeometriska līnija, gar kuŗu iedomāta koncentrēta materiēlās līnijas masa.

Punkta mēchanika.

Kā jau tika minēts, vienmēr var iedomāties materiēlu ķermeni sastāvošu no tik mazām daļām, ka katru no viņām var uzskatīt kā materiēlu punktu, un sakarā ar to katru materiēla ķermeņa kustību, lai cik sarežģīta viņa arī nebūtu, var uzskatīt kā materiēlu punktu sistēmas (kopības) kustību. Ievērojot to, mēchanikas studēšanu iesāk ar materiēla punkta kustības likumu noskaidrošanu, lai pēc tam pārietu uz materiēlu punktu sistēmas mēchaniku.

§ 2. Kustības pamatveidi.

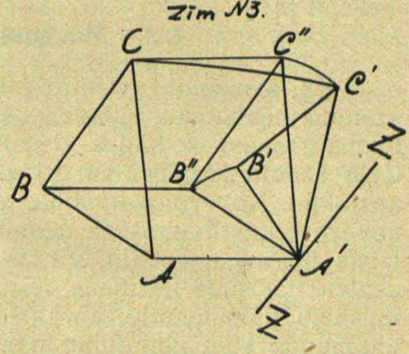
Translācija un rotācija.

Noskaidrojot mēchanikas pamatjēdzienus, mums jau nācās minēt vienu īpatnēju ķermeņu kustības veidu — griezi jeb rotāciju. Tagad noskaidrosim visus iespējamos cieto ķermeņu kustības pamatveidus un viņu raksturīgās īpašības. Pirmkārt, ķermenis var kustēties tā, ka visi viņa punkti veido vienādus un paralēlus (ģeometriski vienādus) pārvietojumus. Šo kustības veidu sauc par virzes jeb translācijas kustību. Pēdējās vairāk ģeometriska pazīme ir tā, ka ķermenī katra brīvi novilkta taisne kustības gaitā vienmēr virzās paralēli sev. Šis noteikums paliek izpildīts, ja ķermenī novilkta kāda plākne līdz ar viņā atrodošos taisni, jeb ja ķermenī novilktas 2 krustojošas vai šķērsojošas taisnes virzas paralēli sev, kad ķermenis kustās.

Ja ķermenī visi 3 punkti, caur kuŗiem noteicas ķermeņa stāvotne telpā, paliek mierā, tad arī visi pārējie punkti paliek mierā, un ķermenis atrodas miera stāvoklī. Ja no šiem 3 punktiem 2 paliek mierā, tad ķermenis var rotēt jeb griesties ap taisni, kuŗa iet caur abiem šiem punktiem un kuŗu tad sauc par rotācijas jeb griezes asi, bet pašu ķermeņa kustību — par griezes jeb rotācijas kustību. Visi punkti kuŗi atrodas uz rotācijas ass, nekustās, bet pārējie ķermeņa punkti apraksta aploces, kuŗu radiusi ir vienādi ar šo punktu attiecīgiem atstatumiem līdz rotācijas asij.

Beidzot, no 3 min. punktiem var palikt mierā tikai viens. Tad kustošs ķermens rotē jeb griežas ap min. punktu, kā rotācijas centru. Šinī gadījumā ķermeņa rotācija notiek ap acumirklīgām (momentānām) rotācijas asīm, kuŗas krusto rotācijas centru un visi ķermeņa punkti pa visu kustības laiku paliek uz attiecīgām sferas virsmām, kuŗu radiusi ir vienādi ar šo punktu atstātumiem līdz rotācijas centram.

Vispārējā ķermeņa kustības gadījumā, cik sarežģīta šī kustība arī nebūtu, pēdējo vienmēr var sadalīt jau min. elementāros translācijas un rotācijas, kustības veidos. Patiesi, ņemsim vērā kāda ķermeņa kautkādu kustību. Min. ķermenī mēs varam izdalīt 3 punktus A, B un C, kuŗi veido trīsstūri un kuŗu sistēma, kā redzējām, noteic ķermeņa stāvotni katrā momentā t (sk. zīm. 3.). Pieņemsim, ka momentā t_1 ķermenis ir ieņēmis jaunu stāvotni, kuŗa ir noteikta caur trīsstūŗa ABC jauno stāvotni (A', B', C'). Savienosim ar taisni A ar A' un piešķirsim visam ķermenim tādu translācijas kustību, lai punkts A noietu pārvietojumu AA'. Tad punkti B un C attiecīgi noies BB" un CC", pie kam: AA' ⋕ BB" ⋕ CC" (⋕ nozīmē: vienāds un paralels). Ķermeņa stāvotne tagad ir noteikta caur A', B" un C", pie kam trīsstūŗa A'B"C" malas ir paralēlas attiecīgām trīsstūŗa ABC malām.



Tā kā, tālāki, trīsstūriem A'B'C' un A'B"C" ir kopēja virsotne A', tad, lai ķermeni no stāvotnes (A', B", C") pārvestu stāvotnē (A', B', C'), atliek trīsstūri A'B"C" līdz ar ķermeni pagriest ap kādu asi ZZ, ejošu caur A', tā, lai trīsstūris A'B"C" sakristu ar trīsstūri A', B', C'. Šādu, caur A' ejošu, asi vienmēr var uziet. Piezīmēsim, ka stāvotnē (A', B', C') mēs varam nonākt arī otrādi, pa priekšu veidojot rotāciju un pēc tam translāciju.

Šinī, sarežģītā, kustībā p. C par piem. tēlo cik- cakveidīgu trajektoriju CC"C'. Ja laika sprīdī $\Delta t = t_1 - t$ saskalda mazākos, — tad cik-cakveidīga p. C (un tāpat arī citu) tratrajektorija CC"C' vairāk tuvosies īstai CC'. Robežā, kad $\Delta t = 0$, cik-cakveidīgā trajektorija sakrīt ar īsto, nepārtraukto, kas pierāda, ka īstā ķermeņa kustība ir saliekama divos, elementāros kustības veidos — translācijā un rotācijā.

Kā redzams, jēdziens par materiēlu ķermeņu kustību aptver sevī trīs elementus: gaŗumu, laiku un to, kas kustās, jeb ķermeņa vielu — materiju. No šiem lielumiem sastādās visi tie lielumi, ar kuŗiem operē mēchanika. Vēl jāmin, ka dabā nāk priekšā arī nemateriēlu ķermeņu kustības, par piem. var runāt par ēnas kustību, un viļņa kustību, spēka līniju kustību magnētiskā laukā un t. t. Visos šinīs gadījumos lieta grozās ap kādas noteiktas īpašības jeb stāvokļa (Zustand, состояние, état) maiņu telpā līdz ar laiku. Atšķirībā no šīs īpašību jeb stāvokļa maiņas telpā, materiēlu ķermeņu kustības mēdz saukt par korpuskularām jeb konvektīvām kustībām. Redzamu lomu ķermeņu kustībā spēlē viņu deformācija. Tā p. p. piem viļņu kustība, kuŗu novērojam uz ūdens rezervuāra (jūŗas, ezera) virsmas, nav nekas cits, kā ūdens īpatnēja veida deformācija, kuŗa neattēlo paša ūdens pārvietojumu.

§ 3. Mēchanikas iedalījums.

Lai atvieglotu to sarežģīto jautājumu apskatīšanu, kuŗus uzstāda mēchanika, vajadzīgs šo jautājumu klasificējums (sadalījums grupās) uz kādas vispārējas noteiktas pazīmes pamata. Ceļu šādam klasificējumam atklāj sekoši kustības parādības apstākļi. Novērojot kustību, var tūlīt uzstādīt jautājumu par novērotā kustības veida cēloņiem. Smags ķermens, brīvi izlaists no mūsu rokām, virzās taisnā līnijā pret zemes lodes centru; tas pats ķermens, iespaidots caur mūsu rokas zināmu muskuļa piepūlējumu, apraksta telpā kādu līkni. Abos šinīs gadījumos visu jautājumu par ķermeņa kustību var mēģināt saskaldīt divos, papriekšu atdalot jautājumu par cēloņiem, kuŗi radīja pirmā un otrā gadījumā dažādus viena un tā paša ķermeņa kustības veidus.

Kinēmatika jeb foronomija.

Tad, kā izrādās, paliek pāri īpašību grupa (ātrums, paātrinājums, trajektorija u. t. t.), kuŗa var tikt pilnīgi aprakstīta ar gaŗuma un laika jēdzienu palīdzību vien, neņemot vērā ķermeņu masu, t. i., attiecībā uz materiēlu ķermeņu kustību ir izdevīgi radīt fikciju, iedomājoties ģeometrisku ķermeņu un ģeometrisku punktu (bez masas) kustību. Kā redzams, šīs jautājumu grupas objekts ir tas pats, kas ģeometrijas — tikai papildināts ar jēdzienu par laiku. Šī mēchanikas daļa saucas par kinēmatiku jeb foronomiju. Tā tad kinēmatikas jeb foronomijas uzdevums ir ģeometrisku ķermeņu kustības likumu pētīšana. Kā redzams, iepriekšējā, § 2., mēs aizskārām foronomijas jautājumus.

Kinētika.

Kustības cēloņu darbības likumu pētīšana, kuŗi materiēlam ķermenim piešķir vienu jeb otru kustības veidu, atšķirīgu no kāda ideāla kustības veida, par kuŗu runa būs vēlāk, piekrīt otrai galvenai mēchanikas daļai, kuŗu sauc par kinētiku.

Ķermeņu kustības veidu dažādību cēloņus sauc par spēkiem, un sakarā ar šo, kinētikas uzdevums ir noteikt materiēlu ķermeņu kustību zem spēku iespaida.

Statika un dinamika.

Spēku iespaids ne katrreiz izpaužas ķermeņa kustībā jeb viņa kustības veida maiņā; daudzreiz starp spēkiem, kuŗi darbojas uz ķermeni, rodas tāda sakarība, ka viņi neatstāj nekādu iespaidu uz ķermeņa iepriekšējo kustību. Šinī gadījumā mēdz teikt, ka spēki atrodas līdzsvara stāvoklī jeb ka spēki līdzsvarojas. Spēku līdzsvara likumu pētīšana piekrīt kinētikas daļai, kuŗu sauc par statiku. Pārējā jautājumu grupa, saistīta ar spēku darbību, kuŗas sekas ir materiēlu ķermeņu kustības maiņa, piekrīt kinētikas otrai daļai — dinamikai.*)

Mēchanikas iedalījums uz ķermeņu agregatstāvokļa pamata.

Tas apstāklis, ka materiēli ķermeņi dabā ir sastopami trijos agregatstāvokļos: cietā, šķidrā un gāzveidīgā, noteic paņēmienu dažādību, kuŗi tiek lietoti katras šīs ķermeņu grupas kustības likumu pētīšanai. Caur šo rodas mēchanikas sadalījums trijās atsevišķās apakšdaļās, kuŗu nosaukumi atvasināmi no jau minētiem, pievienojot viņu priekšgalā ķermeņa agregatstāvokļa apzīmējumu: šķidrumiem — hidro (ὕδωρ — ūdens) un gāzēm — aero (ἀήρ — gaiss). Tā rodas cieto ķermeņu mēchanika (daži autori lieto arī terminus „stereomēchanika" un „ģeomēchanika"), šķidrumu mēchanika jeb hidromēchanika un gāzu mēchanika jeb aeromēchanika. Saprotams, ka līdz ar to pastāv arī cieto ķermeņu statika un dinamika, hidrostātika un hidrodinamika, aerostatika un aerodinamika. Arī kinēmatika atkarībā no ķermeņu agregatstāvokļa gūst savas īpatnības, un tādēļ tāpat varētu būt runa par attiecīgām kinēmatikām. Parasti gan pēc tam, kad ir apskatīta cietu ķermeņu kinēmatika, kuŗā noskaidroti ķermeņu kustības vispārējie kinēmatiskie jēdzieni (galvenā kārtā ātrums un paātrinājums), šķidru un gāzveidīgu ķermeņu kinēmatika jeb hidrokinēmatika un aerokinēmatika saīsinājas tik tāļu, ka viņas var tikt apskatītas pa ceļam, kopā ar attiecīgu ķermeņu dinamiku.

*) Daži autori nosaukuma „kinētika" vietā lieto vārdu „dinamika" un „dinamika" vietā — „kinētika", kas nav nedibināts, jo „dinamika" ir atvasināts no grieķu vārda δύναμις —spēks, bet „kinētika" — vārda κινεῖν — kustināt. Tādā gadījumā vārds „dinamika" aizrādītu, ka viņai piekrīt spēku darbības likumu pētīšana, kuŗi vienā gadījumā var līdzsvaroties (statika), bet otrā — izsaukt kustības maiņu (kinētika).

Absolūti cieti un deformējošies ķermeņi.

Klusu ciešot, līdz šim zem vārda „materiēls ķermens" mēs sapratām cietu ķermeni, par piem. tādu, kā akmens, dzelzs u. t. t. Dabā nav sastopami pilnīgi absolūti cieti ķermeņi, t. i. tādi, kuŗu atsevišķu daļiņu savstarpējais atstātums ir absolūti negrozīgs un ne zem kādiem apstākļiem nemainās, jeb kuŗu deformācijas spējas (veidmaiņas spējas) ir O; visi dabā sastopamie cietie ķermeņi zem pieliktā spēka iespaida vairāk jeb mazāk deformējas. Daudzreiz šī deformācija ir tik niecīga, ka viņu ar neapbruņotām acīm tikko var saredzēt, bet tomēr viņa ir un viņu var atklāt ar sevišķu jūtīgu instrumentu palīdzību. Neraugoties uz šo, mēchanika zināmu kustības likumu pētīšanai ar sekmēm lieto absolūti cieta ķermeņa ideju, pie kam gūtie rezultāti attiecināmi uz visiem dabiskiem cietiem ķermeņiem. Ar citiem vārdiem sakot, absolūti cieto ķermeņu fikcija netraucē gūt, attiecībā uz zināmu jautājumu grupu, rezultātus, kuŗi tieši attiecināmi uz dabisko (ne absolūti) cieto ķermeņu kustību.

Elastīgas un plastiskas deformācijas.

Tālāk var atzīmēt tās mēchanikas daļas, kuŗas tieši interesē ķermeņu deformācijas īpašības. Šīs ir matēmatiskā elastības teorija un inženieriem tik svarīgā stiprības mācība (Festigkeitslehre, сопротивление материалов, Résistance des Matériaux). Attiecībā uz ķermeņu deformācijām jāizšķir deformācijas elastīgas un plastiskas. Elastīgu deformāciju ārējās pazīmes ir, ka viņas zūd, tiklīdz ķermens atbrīvots no cēloņa, kuŗš deformāciju izsaucis (ārējais spēks). Ķermeņus, kuŗi uzrāda elastīgas deformācijas, sauc par elastīgiem ķermeņiem. Šo ķermeņu grupas spilgts priekšstāvis ir gumija, atspere. Plastiskas deformācijas zem tādiem pašiem apstākļiem nezūd. Plastisku ķermeņu piemēri ir māls un mīksta dzelzs. Kā kopēju visiem cietiem ķermeņiem īpašību var atzīmēt viņu ārējās formas pastāvību.

Gāzu un šķidrumu mēchaniskas īpašības.

Pilnīgs pretstats cietiem ķermeņiem ir gāzes, kuŗām nepiemīt nekādas ārējās formas un kuŗas atšķiras caur savām neaprobežotām deformācijas spējām visos virzienos. Speciēli veidoto cieto ķermeņu (trauku) formas noteic attiecīgā traukā no visām pusēm ieslēgtā gāzveidīgā ķermeņa formas. Ja gāze nav pilnīgi no visām pusēm ieslēgta traukā, viņa izplūst, pateicoties tam, ka gāzes atsevišķas daļiņas tiek viena no otras atsviestas, pārvarot pat daļiņu svaru. Vidējo vietu mēchaniskā ziņā starp cietiem ķermeņiem un gāzēm ieņem šķidrumi, kuŗiem arī piemīt neaprobežotas deformācijas spējas. Šķidrumi ļoti vāji pretojas tangenciāliem un stiepes spēkiem, bet uzrāda ievērojamu pretestību spiedei, pretēji gāzēm, vāji deformējoties zem spiedes iespaida. Visas šīs īpašības noteic šķidrumu neaprobežotu deformācijas spēju ar vienu noteikumu, proti: šķidruma masas tilpums vienmēr paliek praktiski negrozīgs, konstants.

Aerostatikas problēmu apskatīšanas paņēmieni maz atšķiras no tiem, kuŗi tiek lietoti hidrostatikā, kādēļ pa laikam šīs abas daļas mēdz apskatīt kopīgi un tādēļ aerostatika nav guvusi patstāvīgu attīstību. Tā tas nav ar šo ķermeņu dinamiku: hidrodinamiku un aerodinamiku, kuŗas attīstās patstāvīgi, pateicoties lielā mērā technikas prasībām.

Teorētiska un techniska mēchanika.

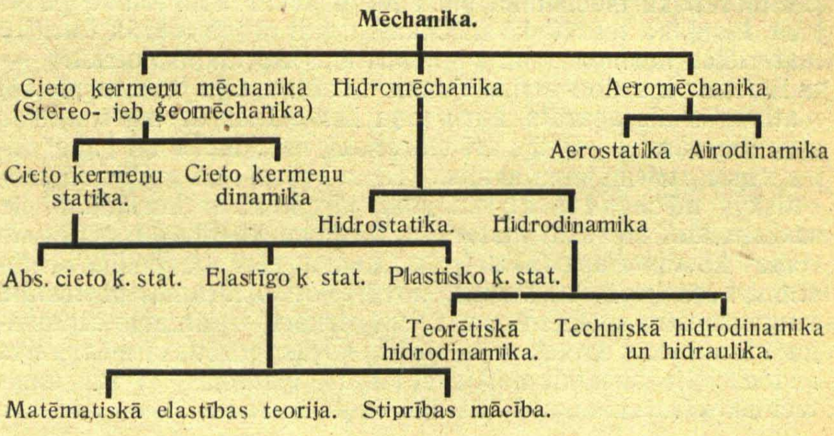
Mēchanikas problemus var apskatīt, pierakstot attiecīgiem ķermeņiem vairāk jeb mazāk ideālas īpašības (absolūts ķermeņa cietums, neaprobežota daļiņu deformācijas spēja šķidrumos bez kādas pretestības tangenciāliem spēkiem u. t. t.) un atbalstoties uz nedaudziem mēchanikas pamatprincipiem, par kuŗiem vēl būs runa priekšā. Gūtie tādā ceļā rezultāti vairāk jeb mazāk atšķiras no patiesiem, dažreiz pat būdami stipri irreāli, nepietiekoši un nelietojami praktiskām vajadzībām (teorētiskā hidromēchanika). Šādā ceļā apstrādātā mēchanika saucas par teorētisku mēchaniku, jeb arī — racionēlu mēchaniku (franču termiņš).

Technikas attīstība un vajadzības uzstāda prasības, kuŗas teorētiskā mēchanika pilnā mērā nevar apmierināt, pirmkārt, tādēļ, ka teorētiskā mēchanika vairāk jeb mazāk idealizē materiēlus ķermeņus un viņu kustības apstākļus, otrkārt, — tādēļ, ka viņa dod atrisinājumus tikai tik tāļu, cik to pieļauj matēmatiskais aparāts, kuŗu viņa lieto. Līdz ar matēmatikas attīstību paraleli atīstās arī teorētiskā mēchanika un palielinājas viņas atrisinājumu skaits. Tā tad vispārējā gadījumā teorētiskās mēchanikas atrisinājumi, pirmkārt, ir koriģējami un saskaņojami ar reālu materiēlu ķermeņu kustības rezultātiem reālos kustības apstākļos (p. p., ņemot vērā tā medija pretestību, kuŗā ķermens kustās, novērtējot šķidrumu pretestību tangenciāliem spēkiem u. t. t.) un otrkārt — jāmeklē atrisinājumi praktiskās dzīves vajadzībām, kuŗus teorētiskā mēchanika nedod. Šie apstākļi noteic sevišķas, īpatnējas, tā saucamās technikas mēchanikas attīstību, kuŗa ir radusies un attīstās, galvenā kārtā, pateicoties inženieŗu un techniķu pūlēm. Šie bija pirmie, kas sajuta teorētiskās mēchanikas nepilnību un viņas trūkumus, jo no viņiem dzīve prasīja kautcik precīzus mēchanikas dabas atrisinājumus, neļaujot gaidīt kamēr, varbūt, teorētiskā mēchanika savā viņai parastā attīstības ceļā nonāks līdz technikai vajadzīgiem atrisinājumiem, kuŗi ar savu precizitāti pārspēs techniskās mēchanikas atrisinājumus. No šī viedokļa sevišķi trūcīga izrādījās teorētiskā hidrodinamika, kuŗa deva praksē maz lietojamus rezultātus. Sakarā ar šo, augšā minētā ceļā radās techniskā hidromēchanika un tā saucamā hidraulika. No otras puses, šāds separātisms ir nācis par ļaunu kā vienai, tā otrai mēchanikai; ir grūti noliegt, ka teorētiska hidromēchanika daudzreiz izvēršas par matēmatikas spekulācijas lauku, bez praktiskiem rezultātiem („Die Hydrodynamik ist zu schön, um treu zu sein" — prof. Köttera izteiciens); tāpat arī hidraulika ir ieslīdējusi rupjā empirismā, kas viņai sola vāju attīstību. Vienīgā izeja no šī stāvokļa ir pēc iespējas cieša abu šo mēchanikas daļu kopdarbība, kas viena otru apaugļo. Šis kopdarbības iespaids jau ir saskatāms tā saucamā techniskā hidromēchanikā (Mises, Pražil, Weyl u. c.).

No matēmatiskās elastības teorijas tādā pašā ceļā radās jau augšā minētā stiprības mācība, kuŗa savā īpatnējā ceļā deva technikai vajadzīgus atrisinājumus tur, kur matēmatiskā elastības teorija atteicās tādus dot matēmatiskā aparāta trūcības dēļ (Uzstādītie diferenciālnolīdzinājumi nevar tikt integrēti).

Zīm Nr. 4.

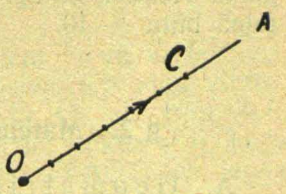
Mēchanikas iedalījuma šēma.



I. nodaļa.

§ 1. Lielumi, ar kuŗiem operē mēchanika.

Šie lielumi var būt tā saucamie skalārie — (Richtungslose Grössen), kuŗi var tikt pilnīgi noteikti caur viņu skaitliskām nozīmēm, kā: gaŗums, tilpums, masa, temperatūra u. t. t. — un tā saucamie vektoriēlie, jeb virziena lielumi, kuŗu dabas pilnīgai noteikšanai, bez viņu skaitliskām nozīmēm (moduļiem), jāņem vērā arī viņu iedarbes virziens un iedarbes punkts. Pie pēdējiem pieder lielākā daļa mēchanisko lielumu, kā: spēks, ātrums, pārvietojums, u. t. t. Par piem., spēka darbības sekas uz materiēlu ķermeni katrā ziņā atkarājas arī no spēka virziena un viņa, tā saucamā iedarbes punkta. Pilnam parādības raksturojumam nav viena alga, uz kuŗu pusi, kādā virzienā ķermens kustēsies. Kā redzams, pilnīgai vektoriēlu lielumu noteikšanai vispārējā gadījumā ir vajadzīgi: 1) viņa skaitliskā vērtība jeb lielums (modulis), 2) darbības līnijas virziens, 3) vektoriēla liel. apakšvirziens (ir atšķirami divi virzieni no dota punkta uz darbības līnijas; vektors var tikt virzīts uz vienu vai otru pusi) un 4) iedarbes punkts. Vektoriēlie lielumi var tikt ļoti ērti attēloti grafiski taisnas līnijas nogriežņa veidā. Mēs novelkam šo nogriezni attiecīgā virzienā no tā materiēlā ķermeņa punkta, uz kuŗu dotais virziena lielums, par piem. spēks, darbojas (no iedarbes punkta). Pieņemsim, ka min. iedarbes punkts ir O (skat. zīm. 5.) un virziens sakrīt ar līniju OA. Uz šās līnijas mēs nospraužam tik daudz kāda gaŗuma vienību un vienību daļu (par piemēru santimetru vai pat nenoteiktu gaŗumu), cik attēlojamā spēkā ir spēka vienību un vienību daļu. Tā tad kāds gaŗuma mērs tiek pielīdzināts zināmai spēka vienībai, t. i. tiek pieņemts zināms spēku mērogs (masštābs). Tā kā bez līnijas galvenā virziena vēl ir no svara, kādā apakšvirzienā uz šīs līnijas spēks darbojas, tad lai šo pazīmi izšķirtu, novieto bultīti spēka darbības virzienā. Līdz ar šo visi spēka elementi tagad ir noteikti pilnīgi, un nevar būt nekāda cita



Zīm. №5.

spēka, kuŗam piemistu tās pašas īpašības; tā tad caur šādu attēlojumu spēks ir noteikts pilnīgi viennozīmīgi (eindeutig). Tādu taisnas līnijas nogriezni, kuŗš grafiski attēlo kādu vektoriēlu lielumu, sauc par vektoru.

Vektori var būt tā saucamie saistītie, — kuŗiem piemīt noteikts iedarbes punkts, kā p. p. punkta ātrums, paātrinājums, kuŗi nospraužami no kustošā punkta, — kā arī tā saucamie slīdošie, — kuŗus var pārnest pēc patikas viņu darbības virzienā (spēki, statikas jautājum.). Bet ir arī vektori, kuŗu brīvība ir vēl lielāka un kuŗus var pārnest ne tikai viņa virzienā, bet arī katrā citā stāvotnē, paralēlā iepriekšējai. Dažos gadījumos viens un tas pats vektors, kuŗa pārnešana viņa darbības virzienā ir pielaižama, attiecībā uz zināmu jautājumu kategoriju (astatiskais līdzsvars) paliek saistīts pie sava iedarbes punkta. Šī vektoru īpašība noskaidrosies turpmāk statikā un pagaidām nav iespējams viņu paskaidrot ar piemēriem. Katra vektora fizikāliskās īpašības izšķir jautājumu par viņa piederību vienai jeb otrai grupai (saistīts, slīdošs, brīvs).

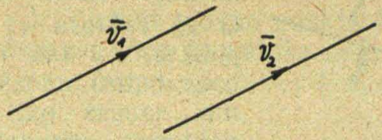
Arī skalāru lielumu grupā var atšķirt zināmas apakšgrupas. Var būt tādi skalāri lielumi, kuŗi var tikt izteikti caur relatīviem (alģebraiskiem) skaitļiem, kā p. p. piem. temperatūra, attālums, kuŗi var būt pozitīvi un negatīvi, — un arī tādi, kuŗi vienmēr izteicami caur absolūtiem skaitļiem, kā p. piem. masa, tilpums, gaŗums, priekšmetu daudzums. Kā relatīvi skaitļi, pēdējie var rasties tikai kā divu tādu skaitļu salīdzināšanas rezultāts caur alģebraisku atvilkšanu: var p. piem. teikt, ka tilpums V_1 ir par tilpumu V_2 par — $(V_2 - V_1)$ tilpuma vienībām lielāks, gadījumā, ja $V_1 < V_2$, bet neērti būtu teikt, ka kāda kubatūra saturētu zināmu skaitu negatīvu tilpuma vienību, kā arī neērti būtu teikt, ka cilvēku skaits kādā telpā būtu — 10.

§ 2. Matēmatiskas darbības ar vektoriem.

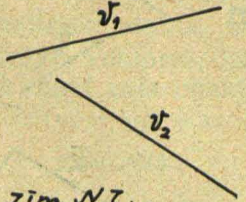
A. Ģeometriska jeb vektoru vienādība.

Lai apzīmētu, ka kāds taisnas līnijas nogrieznis reprezentē vektoru, mēs vienosimies novietot virs burtiem, kuŗi apzīmē vektorus, strīpiņu. Tā $\overline{OC}$ ir (sk. zīm. 6.) vektora OC apzīmējums. Ja vektora gaŗumā ir v gaŗuma vienības, tad vektora apzīmējums ir $\overline{v}$.

1) Divi vektori $\bar{v}_1$ un $\bar{v}_2$ (sk. zīm. 6.), kuŗu gaŗumi vienādi, $v_1 = v_2$, kuŗi paralēli un vienādi virzīti (vienāds apakšvirziens), saucas par vienādiem. Šo apstākli apzīmē ar vienādību: $\bar{v}_1 = \bar{v}_2$, kuŗu sauc par ģeometrisku vienādību atšķi-



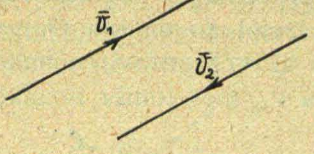
zīm. №6



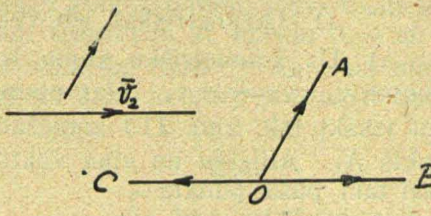
zīm. №7.

rībā no alģebraiskas vienādības, kuŗa izteic tikai lielumu vienādību. Par piem. $\bar{v}_1 = \bar{v}_2$ var tikt rakstīts attiecībā uz diviem taisnas līnijas nogriežņiem (sk. zīm. 7.), bet ne $\bar{v}_1 = \bar{v}_2$.

2) Divi vektori skaitliski vienādi, paralēli, bet pretēji virzīti (antiparalēli) paliek par vienādiem, ja viena vektora virzienu izmaina uz pretējo, ko apzīmē tā: $\bar{v}_1 = \bar{v}_2$ (sk. zīm. 8.). Tā kā vektori attēlo savādas dabas lielumus, kuŗi atšķirami arī caur viņu virzieniem, tad starp diviem vektoriem nekad nevar pastāvēt saistība $\bar{v}_1 > \bar{v}_2$.



zīm №8



zīm. №9.

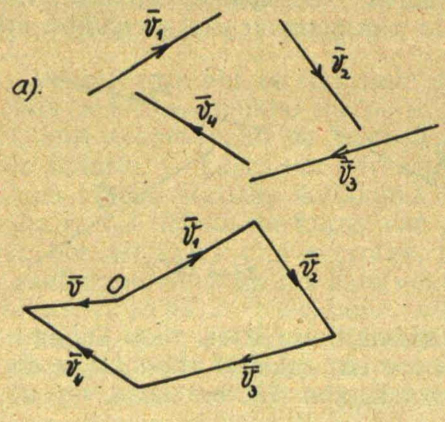
3) Par leņķi starp diviem vektoriem $\bar{v}_1$ un $\bar{v}_2$ $(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$, saucas leņķis ∢AOB starp šiem vektoriem jeb viņu virzieniem, vestiem caur brīvi vēlētu punktu O (sk. zīm. 9.). $(\bar{v}_1 - \bar{v}_2)$ apzīmē leņķi starp vektoru $\bar{v}_1$ un vektoru $\bar{v}_2$, kuŗa virziens ir mainīts uz pretējo, t. i. leņķi ∢AOC jeb leņka ∢AOB papildinājumu līdz π.

B. Ģeometriska zuma.

Pieņemsim, ka plāknē*) ir dota vektoru sistēma $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, $\bar{v}_3$, $\bar{v}_4$ (sk. zīm. 10-a.). Ja no kāda brīvi vēlēta punkta O

*) Vektori, kuŗi guļ vienā plāknē, saucas par komplāniem vektoriem.

novilksim vektoru $\bar{v}_1$, no viņa gala vektoru $\bar{v}_2$, tālāk vektorus $\bar{v}_3$ un $\bar{v}_4$, saskaņā ar zīm. 10-b, tad vektors, kuŗš savieno pirmā vektora $\bar{v}_1$ izejas punktu O ar vektora $\bar{v}_4$ gala punktu un kuŗa virziens iet no O uz vektora $\bar{v}_4$ gala punktu, kā tas rādīts caur bultīti uz zīmējuma, saucas par doto vektoru ģeometrisku zumu, ko apzīmē caur nolīdzinājumu: $\bar{v}=\bar{v}_1+\bar{v}_2+\bar{v}_3+\bar{v}_4$. Pašu tādu darbību sauc par ģeometrisku saskaitīšanu. Mums bija dota 4 vektoru sistēma. Protams,

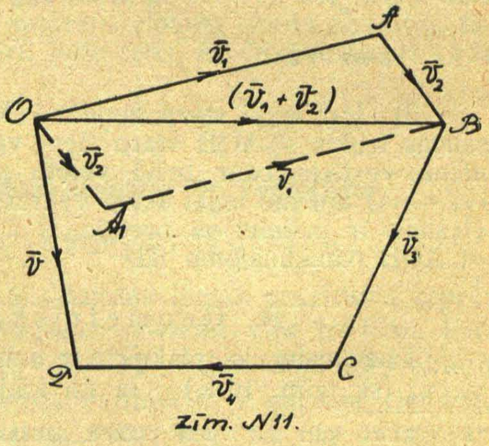


zīm. №10

ja vektoru skaits ir n, tad caur tādu pašu darbību atradīsim vektoru, kuŗš reprezentēs n vektoru ģeometrisko zumu, t. i. $\bar{v}=\bar{v}_1+\bar{v}_2+\ldots+\bar{v}_n$ jeb simboliski: $\bar{v}=\sum_{i=1}^{i=n}\bar{v}_i$.

1) Ģeometriskas jeb vektoru zumas īpašības.

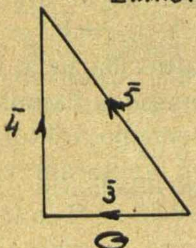
a) Uz ģeometrisko zumu ir attiecināms komutātīvais likums: $\bar{v}_1+\bar{v}_2=\bar{v}_2+\bar{v}_1$. Par piem., izejot no punkta O, varētu iesākt (sk. zīm. 11.) zumēšanu ar vektoru $\bar{v}_2$, nonākot punktā A_1. Atliekot no viņa vektoru $\bar{v}_1$, mēs tomēr nonāktu atkal tanī pašā punktā B, kur nonāktu, iesākot zumēšanu ar vektoru $\bar{v}_1$. Še mēs mainījām divu blakus esošu vektoru zumēšanas kārtību. Nav gŗūti pārliecināties, ka vairāku vektoru zumēšanas gadījumā, mainot viņu zumēšanas kārtību pēc patikas, vienmēr nonāksim punktā D.



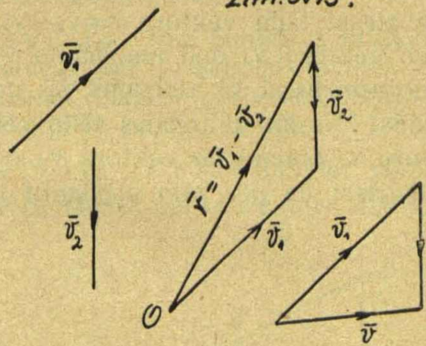
zīm. №11.

b) Uz ģeometrisko zumēšanu ir attiecināms asociatīvais likums: $\bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3 + \bar{v}_4 = (\bar{v}_1 + \bar{v}_2) + \bar{v}_3 + \bar{v}_4$. Uzejot ģeometrisko zumu, var papriekšu uziet atsevišķu vektoru grupas zumu, kuŗai pēc tam var pieskaitīt pakāpeniski pārējos vektorus atsevišķi jeb atkal savienotus grupās. (Sk. zīm. 11.). Nokļūt punktā B var, ejot pa vektoru diagonāli $\overline{OB}$, kuŗa ir divu vektoru $\bar{v}_1$ un $\bar{v}_2$ ģeometriskā zuma, $\overline{OB} = (\bar{v}_1 + \bar{v}_2)$. Velkot tad no punkta B pārējos vektorus, kā tas ir darāms pie viņu saskaitīšanas, nonāk tāpat gala punktā D, t. i. ir pierādīts, ka $\bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3 + \bar{v}_4 = (\bar{v}_1 + \bar{v}_2) + \bar{v}_3 + \bar{v}_4$.

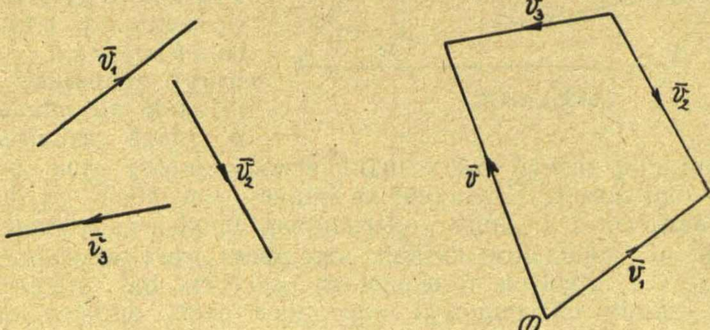
zīm. №12.



zīm. №13.



Lai ilustrētu ģeometriskās zumas būtību, pievedīsim sekošu piemēru: taisnleņķiskam trīsstūrim ar malām 3, 4 un 5 (sk. zīm. 12.), var uzrakstīt sakarību $\bar{5} = \bar{3} + \bar{4}$, kuŗa uz malu skaitliskām nozīmēm nav attiecināma, jo starp tām pastāv pazīstamā sakarība $5^2 = 3^2 + 4^2$.



zīm. №14.

C) Ģeometriska jeb vektoru starpība.

Par ģeometrisko starpību starp diviem vektoriem $\bar{v}_1$ un $\bar{v}_2$, kuŗu apzīmēsim $\bar{r} = \bar{v}_1 - \bar{v}_2$, vienosimies saukt viņu sekošu zumu: $\bar{r} = \bar{v}_1 - \bar{v}_2 = \bar{v}_1 + (-\bar{v}_2)$. No kāda brīvi vēlēta punkta O nosprauž „mazināmo" vektoru $\bar{v}_1$, tad no viņa gala vektoru $(-\bar{v}_2)$, t. i., pieskaita „atņemamo" vektoru $\bar{v}_2$ ar pretējo zīmi. Turpat uz zīm. 13. ir arī rādīts $\bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2$.

Piemērs. Uziet vektoru: $\bar{v} = \bar{v}_1 - \bar{v}_2 + \bar{v}_3$. (Skat. zīm. 14.)

Ģeometriskas jeb vektoru starpības (vektoru atņemšanas) dēfīnējums tā tad formas pēc ir patapināts no alģebras un viņu var izteikt arī tā: atņemt vektoru $\bar{v}_2$ no vektora $\bar{v}_1$ nozīmē atrast tādu vektoru $\bar{r} = \bar{v}_1 - \bar{v}_2$, kuŗš saskaitīts ar atņemamo vektoru $\bar{v}_2$ dod mazināmo vektoru $\bar{v}_1$, t. i. $\bar{r} + \bar{v}_2 = \bar{v}_1$. Kā no zīmējuma 13. redzams, šis noteikums attiecībā uz $\bar{r}$ ir izpildīts. No šīs dēfīnīcijas seko vektoru atņemšanas likums: vektoru $\bar{v}_2$ atņemt no vektora $\bar{v}_1$, nozīmē, atņemamo vektoru $\bar{v}_2$ apgriest un pēc tam pieskaitīt mazināmam vektoram $\bar{v}_1$.

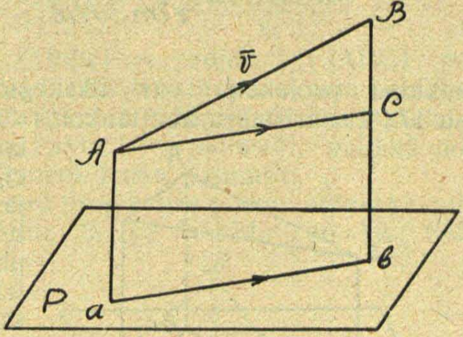
II. nodaļa.

§ 1. Projekciju īpašības.

A. Projekcijas uz plākni.

1) Punkta projekcija. Par punkta A projekciju uz kādu plākni P, kuŗa saucas par projekcijas plākni, mēs vienosimies skaitīt stāteniskas līnijas (perpendikulāra), novilktas no punkta A pret plākni P, pamatu a (zīm. 15.).

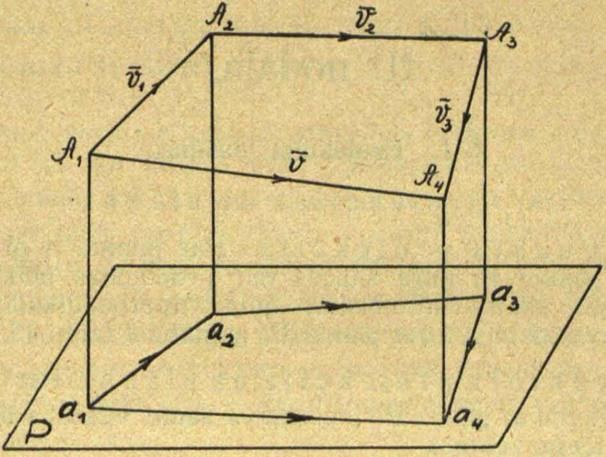
2) Vektora projekcija uz plākni. Par vektora $\overline{AB}$ projekciju uz plākni P vienosimies saukt vektoru $\overline{ab}$, kuŗš plāknē P iet no vektora $\overline{AB}$ sākuma projekcijas a virzienā uz viņa gala punkta projekciju b. No zīm. 15. redzams, ka $AC = \overline{AB} \cos (BAC) = \overline{v} . \cos (\overline{v}, \overline{ab})$, kur vienmēr jāņem asa leņķa cos.



zīm. №15.

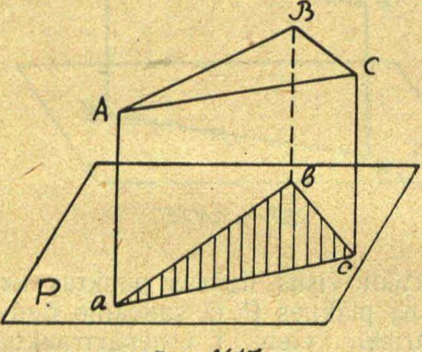
3) Figūras elementu projekcijas uz plākni. Par kautkādas figūras projekciju uz plākni P vienosimies saukt to figūru, kuŗu gūstam, noprojektēot visus figūras punktus uz plākni P. Tādā ceļā gūstam uz plāknes P tā saucamo figūras punktu projekciju ģeometrisko vietu, t. i. nepārtrauktu punktu rindu, kuŗa veido min. figūras projekciju. Ja figūra ir noslēgta, tad arī viņas projekcija ir noslēgta. Ja figūra attēlo saistību starp vektoriem (ģeometrisku zumu, ģeometrisku starpību), tad arī figūras projekcija attēlo to pašu saistību starp vektoru projekcijām uz plākni P, pie kam figūras projektēšana reducējas pie vektoru projektēšanas, kuŗa jau tika noskaidrota zem p. 2. Tā par piem., ja $\overline{A_1A_4} = \overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \overline{A_3A_4}$, tad arī $\overline{a_1a_4} = \overline{a_1a_2} + \overline{a_2a_3} + \overline{a_3a_4}$.

4) Figūru laukumu projekcija uz plākni. Vienkāršākā plakanā figūra ir trīsstūris, kuŗa figūras



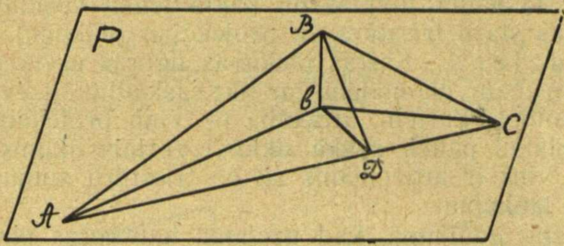
zīm. №16.

laukuma projekcija var tikt gūta saskaņā ar zīmējumu 17., kur trīsstūŗa abc laukums △(abc) ir trīsstūŗa ABC laukuma, △(ABC), projekcija. Pārvietosim projekcijas plākni P paralēli (līdztekus) sev līdz kamēr šī plākne atdursies pret kādu trīsstūŗa ABC virsotni. Ir skaidri redzams, ka pie šīs operācijas trīsstūŗa ABC laukuma, △(ABC), projekcija, △(abc), nemainīsies. Pie projekcijas plāknes atduršanās pret trīsstūri ABC var būt divi gadījieni: a) atduras pret plākni P tikai viena virsotne, b) uzreiz, vienā laikā, ar plākni P sakrīt 2 trīsstūŗa virsotnes, tā kā projekcijas plāknē nokļūst vesela trīsstūŗa mala. Ar šo gadījumu iesāksim sakara meklēšanu starp trīsstūŗa ABC laukumu, △(ABC), un viņa projekcijas laukumu △(abc). No zīm. 18. ir redzams, ka △(abc) = proj. △(ABC). Vedīsim caur punktiem B un b plākni perpendikulāri pret trīsstūŗa malu AC. D būs šīs plāknes krusto-



zīm. №17.

šanās punkts ar trīsstūŗa malu AC, pie kam viņas krustošanās līnija ar trīsstūŗa ABC plākni būs līnija BD, bet ar trīs-

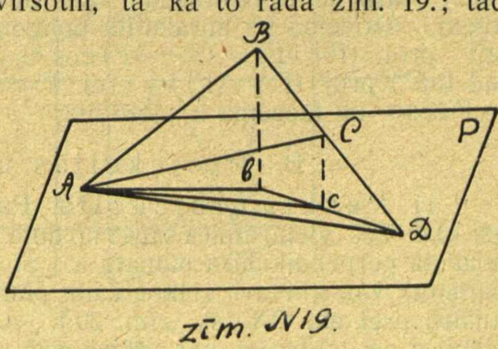


zīm. N18.

stūŗa abc (jeb projekcijas plākni P) būs līnija bd. Gūtais trīsstūris BDb ir taisnleņķisks, pie kam $bD = BD \cos \alpha$, kur α ir $\measuredangle BDb$.

Trīsstūŗa ABC laukums, $\triangle(ABC) = \frac{AC \,.\, BD}{2}$, trīsstūŗa abc laukums, $\triangle(abc) = \frac{AC \,.\, Db}{2} = \frac{AC \,.\, DB \cos\alpha}{2} = \triangle(ABC) \cos\alpha$, kādēļ $\triangle(abc) =$ projek. $\triangle(ABC) = \triangle(ABC) \cos\alpha$ t. i. šinī gadījumā trīsstūŗa laukuma projekcija uz plākni var tikt gūta caur trīsstūŗa laukuma pareizināšanu ar šaurā divplākšņa kakta (двугранный), veidotā no trīsstūŗa un projekcijas plāksnēm, leņķa cosinus'u.

Pieņemsim gadījumu, kad projekcijas plākne atduras tikai pret vienu trīsstūŗa virsotni, tā kā to rāda zīm. 19.; tad $\triangle(Abc) =$ projek. $\triangle(ABC)$. Turpinājam malu BC līdz krustošanai ar plākni P, caur ko rodas trīsstūris ABD, kuŗa laukuma, $\triangle(ABD)$, projekcija uz plākni P ir $\triangle AbD$. Saskaņā ar pirmo gadījumu ir:



zīm. N19.

$$(I) \quad \triangle(AbD) = \text{proj.}\, \triangle(ABD) = \triangle(ABD) \cos\alpha$$
$$(II) \quad -\triangle(AcD) = -\,\text{proj.}\, \triangle(ACD) = -\triangle(ACD) \cos\alpha$$

$\triangle(Abc) = \text{proj.}\, \triangle(ABC) = [\triangle(ABD) - \triangle(ACD)] \cos\alpha = \triangle(ABC) \cos\alpha$., kuŗu gūstam atvelkot nolīdzinājumu (II) no nolīdzinājuma (I). Tā tad gūtais pirmam gadījumam likums arī tagad ir pareizs, t. i. ka vienmēr trīsstūŗa laukuma projekcija uz plākni gūstama caur šī trīsstūŗa laukuma pareizināšanu ar tā šaurā divplākšņa kakta leņķa cosinus'u, kuŗš, kakts, rodas starp trīsstūŗa un projekcijas plāknēm.

S l ē d z i e n s. Katras plakanas figūras ar taisnām malām laukums caur digonālēm var tikt saskaldīts atsevišķu trīsstūŗu laukumos, kuŗiem, attiecībā uz viņu projekciju gūšanu uz kādu plākni paliek spēkā tikko izvestais likums. Ja tas ir tā, tad viņš ir attiecināms uz šo trīsstūŗu zumu, t. i. arī uz figūras laukumu.

Beidzot, gadījumā, kad uzejama kautkuŗas plakanas ar līkumumainu kontūru figūras laukuma projekcija, šīs figūras laukumu var uzskatīt, kā robežu no dotā figūrā ierakstītiem un ap viņu aprakstītiem poligonu laukumiem, kad šo poligonu malu skaits bezgalīgi palielinājas, pie kam viņu laukumi nepārtraukti tuvojas dotās figūras laukumam, kā robežai. Šo poligonu laukumu projekcijas tajā pašā laikā tuvosies dotās figūras laukuma projekcijai, kā robežai. Bet tā kā attiecībā uz šiem poligoniem viņu laukumu projekcijas tiek gūtas kā attietīgu laukumu produkts ar šaurā divplākšņa kakta leņķa cosinus'u, kuŗš — kakts — rodas starp poligonu un projekcijas plāknēm, tad arī šo poligonu laukumu robežas — dotās, ar līkumainu kontūru, figūras laukuma projekcija tiks gūta tādā pašā ceļā, pareizinot dotās figūras laukumu ar minētā leņķa cosinus'u.

Pieņemsim, ka dotās figūras laukums ir F. Tad aprakstītā poligona laukumu var izteikt kā $F + \Delta F$, kur ΔF ir difference starp dotās figūras un viņai aprakstītā poligona laukumiem. Attiecībā uz aprakstītā poligona laukumu varam rakstīt: proj. $(F+\Delta F) = (F+\Delta F)\cos\alpha$. Pāriesim uz robežu; tad lim*) proj. $(F+\Delta F) =$ proj. $F = \lim. (F+\Delta F)\cos\alpha = F\cos\alpha$ un teorēma ir pierādīta.

B. P r o j e k c i j a s u z a s i.

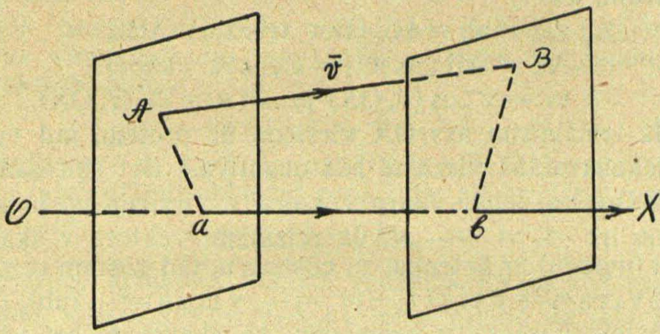
1) P u n k t a p r o j e k c i j a. Par punkta A projekciju uz asi OX mēs vienosimies saukt no dotā punkta A uz doto asi OX nolaista perpendikulāra pamatu a. Šo punktu (perpendikulāra pamatu) var gūt arī velkot caur punktu A plākni perpendikulāru pret asi OX (sk. zīm. *20*.). Ass OX saucas par projekcijas asi. Vispāri, par projekcijas asi sauksim taisni, kuŗai piešķirts zināms apakšvirziens (Richtungssinn), ko parasti parāda bultīte (šautriņa), jeb noteic šo taisni apzīmējošo burtu kartība un uz kuŗu projektē dažādus lielumus. Tā, OX nozīmē, ka ass virziens ir pieņemts no O uz galu X. Kamēr

*) lim ir saīsināts latīņu vārds, kas nozīmē limes = robeža.

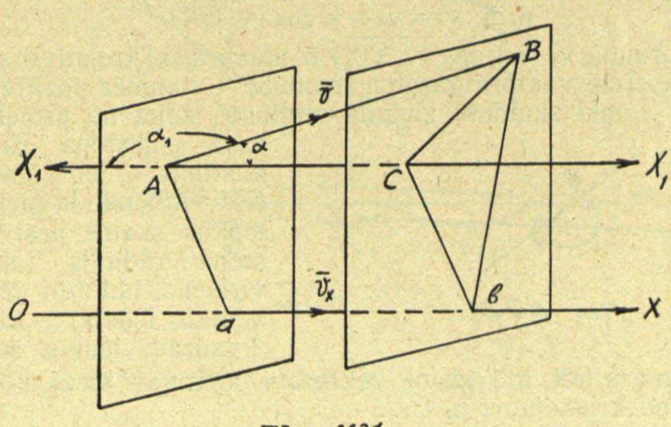
lieta grozās ap punkta projekciju, tikmēr ass virziens nav no svara. Viņš tik krīt svarā tad, kad pārējam uz vektora projekciju uz asi.

2) Vektora projekcija. Par vektora $\bar{v}$ projekciju uz doto asi OX (sk. zīm. 20.) sauksim vektoru, kuŗš vieno vektora $\bar{v}$ sākuma A un gala punkta B projekcijas a un b uz

zīm. №20.



ass OX. Šī vektora $\overline{ab}$ virziens skaitāms no vektora $\bar{v}$ sākuma punkta A projekcijas a uz viņa gala punkta B proprojekcijas b pusi. Caur to, ka mēs piešķiram projekcijas asij



Zīm. №21.

zināmu apakšvirzienu, ir iespējams atšķirt vektora projekcijas ab virzienu attiecībā pret ass virzienu. Ja vektora projekcijas virziens sakrīt ar ass virzienu, tad šādu projekciju skaita par pozitīvu, bet pretējā gadījumā — par negatīvu.

Vienojušies par projekcijas lieluma jēdzienu un zīmi, rādīsim, kā viņas lielumu aprēķināt.

Ņemsim (sk. zīm. 21.) kādu vektoru $\overline{AB} = \bar{v}$, kuŗš projektējams uz kādu asi OX. Šī vektora projekcijas virziens sakrīt ar projekcijas ass virzienu un tādēļ projekcija v_x ir pozitīvā. Vedīsim iz punkta A līniju AX, paralēlu asij OX ar vienādu ar OX apakšvirzienu. Ņēmuši vērā līnijas AX krustošanās punktu C ar projektējošo plākni, kuŗa iet caur punktu B, redzam, ka:

$v_x = ab = AC$. Bet trīsstūrī ABC:

$AC = AB \cos \alpha = v \cos \alpha$, kādēļ:

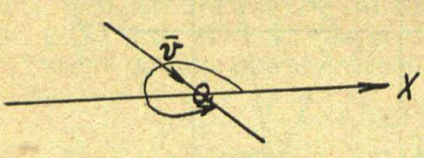
$v_x = v \cos (\bar{v}, \overline{OX})$ jo $\measuredangle \alpha = \measuredangle (\bar{v}, \overline{OX})$.

Ja izmainīsim ass OX virzienu uz pretējo, tad vektora $\bar{v}$ projekcija uz šo virzienu būs negatīva. Bet šinī gadījumā, no otras puses, leņķis starp vektora v virzienu un jauno ass virzienu ir: $\alpha_1 = \pi - \alpha$. Ja reizinām vektora $\bar{v}$ skaitlisko nozīmi (moduli) ar šī leņka α_1 cosinus'u, tad gūstam rezultātu:

$v_x = v \cos \alpha_1 = v \cos (\pi - \alpha) = - v \cos \alpha = -(ab)$, kuŗš atkal izteic vektora v projekciju, kā skaitļa tā arī virziena ziņā. Tā tad, vispāri, katrā gadījumā, vektora $\bar{v}$ projekcija v_x uz kādu asi OX, vienmēr var tikt aprēķināta saskaņā ar formulu:

$$\text{proj. } \bar{v} = v_x = v \cos (\bar{v}, \overline{OX}).$$

Šinī formulā v_x un $\cos (\bar{v}, \overline{OX})$ ir alģebraiski (relatīvi) skaitļi un v apzīmē vektora gaŗumu (moduli) — vienmēr pozitīvu lielumu. Leņķi skaitāmi zināmā virzienā, izejot no projekcijas ass: pulksteņa rādītāja kustības — jeb viņai pretējā virzienā. Ja pieņemts leņkus skaitīt pret pulksteņa rādītāja kustības virzienu, tad zīm. 22. pievestais leņķis ir ceturtā kvadrata leņķis, jo, izejot no ass OX, ir jāsastop vektora $\bar{v}$ pozitīvais virziens, skaitams no krustojuma p. O_1.



Zīm. №22.

Atsevišķi gadījumi:

a) Vektora virziens sakrīt ar ass OX virzienu. Tad $v_x = v$, jo $v_x = v \cos (\bar{v}, \overline{OX}) = v \cos 0^0 = v$.

b) Šie virzieni ir viens otram pretēji; tad $v_x = - v$, jo $v \cos (v, OX) = v_x = v \cos \pi = - v$.

c) Vektora virziens ir perpendikulārs pret ass virzienu; tad

$$v_x = 0, \text{ jo } v_x = v \cos(\bar{v}, \overline{OX}) = v \cos 90^0 = 0.$$

No augšā izvestās projekcijas aprēķina formulas seko: $\cos(\bar{v}, \overline{OX}) = \frac{v_x}{v}$. Šī formula dod $\cos(\bar{v}, \overline{OX})$ skaitļa un zīmes ziņā, jo v_x ir alģebraisks lielums, v — aritmētisks (vienmēr pozitīvs).

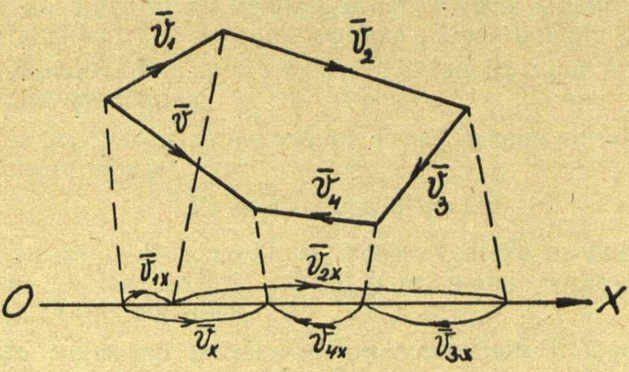
3) Ņemot vērā tikko pierādīto projekcijas īpašību attiecībā uz vienu vektoru, nav grūti pierādīt, ka ģeometriskas jeb vektoru zumas

$$\bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \ldots \bar{v}_n$$

projekcija v_x uz kautkuru asi OX ir vienāda ar vektoru sumandu (saskaitāmo vektoru) projekciju alģebraisko zumu, t. i.

$$v_x = v_{1x} + v_{2x} + \ldots v_{nx}.$$

Patiesi, aplūkojot zīm. 23., redzams, ka ģeometriskai vienādībai $\bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3 + \bar{v}_4$ telpā atbilst uz ass OX šo



Zīm. N23.

vektoru projekciju, kā vektoru vienādība uz ass $\bar{v}_x = \bar{v}_{1x} + \bar{v}_{2x} + \bar{v}_{3x}\ \bar{v}_{4x}$.

Starp vektoru $\bar{v}_x$ un $\bar{v}_{1x}$, $\bar{v}_{2x}$, $\bar{v}_{3x}$, $\bar{v}_{4x}$ garumiem pastāv sakarība: $|v_x| = |v_{1x}| + |v_{2x}| - |v_{3x}| - |v_{4x}|$, kā redzams no zīmējuma, kur iekavās ieslēgtie apzīmējumi ir skaitļu absolūtās nozīmes (jeb moduļi). Šo vienādību var pārrakstīt:

$$|v_x| = |v_{1x}| + |v_{2x}| + (-|v_{3x}|) + (-|v_{4x}|).$$

Bet: $\lvert v_x \rvert$	ir vektora	$\bar{v}$	projekcija uz	OX	asi,	$\lvert v_x \rvert = v_x$
$\lvert v_{1x} \rvert$	„ „	$\bar{v}_1$	„ „	OX	„	$\lvert v_{1x} \rvert = v_{1x}$
$\lvert v_{2x} \rvert$	„ „	$\bar{v}_2$	„ „	OX	„	$\lvert v_{2x} \rvert = v_{2x}$
$\lvert v_{3x} \rvert$	„ „	$\bar{v}_3$	„ „	OX	„	$-\lvert v_{3x} \rvert = v_{3x}$
$\lvert v_{4x} \rvert$	„ „	$\bar{v}_4$	„ „	OX	„	$-\lvert v_{4x} \rvert = v_{4x}$

Kādēļ: $v_x = v_{1x} + v_{2x} + v_{3x} + v_{4x}$.

Šī ģeometriskās zumas īpašība tika pierādīta attiecībā uz 4 positīvu vektoru zumu. Skaidri redzams, ka šī īpašība neatkarājās no vektoru skaita un viņu zīmēm un ka viņai piemīt vispārēja nozīme, kādēļ $v_x = \sum_{i=1}^{i=n} v_{ix}$.

III. nodaļa.

§ 1. Skalārais vektoru produkts (iekšējais produkts).

Vienosimies saukt par divu vektoru $\overline{V}$ un $\overline{v}$ skalāro produktu, kuŗu apzīmēsim ar $\overline{V}\overline{v}$, šo vektoru akbsolūto nozīmju (moduļu) produktu, pareizinātu uz leņķa cosinus'u starp šo vektoru virzieniem, t. i.

$$\overline{V}\overline{v} = Vv \cos(\overline{V}, \overline{v}).$$

Kā redzams, divu vektoru skalārais produkts nav vairs vektoriēls, bet skalārs, alģebraisks lielums, ar kuŗu var izdarīt visas alģebraiskām operācijas. Šīs ērtības dēļ viņam piekrīt sevišķa nozīme mēchanikā.

No skalārā produkta dēfīnīcijas ir redzams, ka uz produktu, kā alģebraisku lielumu, attiecās visas alģebraiska produkta īpašības, t. i. var pēc patikas mainīt lielumu pareizināšanas kārtību, t. i. $\overline{V}\overline{v} = \overline{v} . \overline{V}$. Tā tad uz viņu attiecināms komutātīvais likums.

Ja divi pareizināmie vektori ir savstarpīgi perpendikulāri, tad viņu produkts:

$$\overline{V}\overline{v} = V . v \cos 90^0 = O.$$

Otrādi, ja divu, no O atšķirošos, vektoru produkts ir vienāds ar O, tas nozīmē, ka abi pareizināmie vektori ir savstarpīgi perpendikulāri.

Ja viens no pareizināmiem vektoriem ir ģeometriska zuma no kādiem citiem vektoriem, par piem. $\overline{V} = \overline{V}_1 + \overline{V}_2 + \ldots \overline{V}_n$ tad:

$$\overline{V}\overline{v} = (\overline{V}_1 + \overline{V}_2 + \ldots \overline{V}_n)\,\overline{v} = \overline{V}_1\overline{v} + \overline{V}_2\overline{v} + \ldots \overline{V}_n\overline{v}$$

jo uz skalāra produkta dēfīnīcijas pamata: $\overline{V}\overline{v} = Vv \cos(\overline{V}_1 v) = v . [V \cos(\overline{V}, \overline{v})]$, kur $V \cos(\overline{V}, \overline{v})$ reprezentē vektora $\overline{V}$ projekciju uz $\overline{v}$ virzienu. Bet ja $\overline{V}$ ir ģeometriska zuma, tad saskaņā ar augstāki pierādīto ģeometriskās zumas īpašību, proti, ka ģeometriskās zumas projekcija uz kādu asi ir vienāda ar vektoru sumandu projekciju uz to pašu asi alģebraisko zumu, var rakstīt:

$$V\cos(\bar{V},\bar{v}) = V_{1x} + V_{2x} + V_{3x} + \dots V_{nx} = V_1\cos(\bar{V}_1,\bar{v}) +$$
$$+ V_2\cos(\bar{V}_2,\bar{v}) + \dots V_n\cos(\bar{V}_n,\bar{v}) \text{ — kādēļ:}$$
$$\bar{V}\bar{v} = (\bar{V}_1+\bar{V}_2+\dots\bar{V}_n)\,\bar{v} = v\,[V_1\cos(\bar{V}_1,\bar{v}) + V_2\cos(\bar{V}_2,\bar{v}) +$$
$$\dots V_n\cos(\bar{V}_n,\bar{v})] = vV_1\cos(\bar{V}_1,\bar{v}) + vV_2\cos(\bar{V}_2,\bar{v}) + \dots$$
$$v\,.\,V_n\cos(\bar{V}_n,\bar{v}).$$

Bet saskaņā ar dēfīnīcaju, katrs no šiem produktiem ir attiecīgu vektoru skalārais produkts; kādēļ:

$$\bar{V}\bar{v} = (\bar{V}_1 + \bar{V}_2 + \dots \bar{V}_n)\,\bar{v} = \bar{V}_1\bar{v} + \bar{V}_2\bar{v} + \dots \bar{V}_n\,\bar{v}.$$

Ja arī otrs reizinātājs, ir ģeometriska zuma no kādiem vektoriem $\bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \dots \bar{v}_m$, tad ievietojot formulas labā pusē $\bar{v}$ vietā attiecīgo viņa nozīmi un prātojot tāpat, kā attiecībā uz $\bar{V}$, nonāksim pie slēdziena, ka $\bar{V}_1, \bar{V}_2 \dots \bar{V}_n$ tiks katrs pareizināti uz katru no $\bar{v}_1, \bar{v}_2 \dots \bar{v}_m$ un šie produkti tiek zumēti ar attiecīgām zīmēm, tāpat kā alģebrā, kādēļ ģeometrisku polinomu gadījumā, pēc ārējās formas reizināšanas darbība neatšķirsies no alģebraiskas tādas pašas darbības un par piem., ja $\bar{V} = \bar{V}_1 + \bar{V}_2$ un $\bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2$, tad

$$\bar{V}\bar{v} = (\bar{V}_1 + \bar{V}_2)(\bar{v}_1 + \bar{v}_2) = \bar{V}_1\bar{v}_1 + \bar{V}_1\bar{v}_2 + \bar{V}_2\bar{v}_1 + \bar{V}_2\bar{v}_2.$$

§ 2. Ģeometriskās zumas skaitliskā nozīme.

Ar skalārā produkta jēdziena palīdzību var tieši gūt ģeomeetriskas zumas skaitlisku nozīmi (moduli) šādā ceļā.

Pieņemsim, ka ir dota telpā vektoru sistēma $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3 \dots v$ kuŗas ģeometriskā zuma ir uzejama.

Grafiski var uziet ģeometrisku zumu, kā vektoru, kuŗš noslēdz poligonu ar malām, sastāvošām no vektoriem $v_1 \dots \bar{v}_n$ tādā kārtā, kā tas tika rādīts pie ģeometriskas zumas uziešanas. Analitiskais (caur alģebraiskiem nolīdzinājumiem) ceļš ir sekošais.

Ņemsim gadījumu $\bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3$.

Paceļot šo nolīdzinājumu otrā pakāpē, gūstam:

$$(\bar{v})^2 = (\bar{v}_1 + \bar{v}_2 + .\ \bar{v}_3)^2,$$

kas ir tas pats, kas:

$$\bar{v}\,.\,\bar{v} = (\bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3)(\bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3).$$

Uz skalārā produkta dēfīnīcijas pamata šī nolīdzinājuma vietā gūstam:

$$v \,.\, v \cos(\bar{v}, \bar{v}) = v_1 v_1 \cos(\bar{v}_1, \bar{v}_1) + v_2 v_2 \cos(\bar{v}_2, \bar{v}_2) +$$
$$+ v_3 v_3 \cos(\bar{v}_3, \bar{v}_3) + 2\, v_1 v_2 \cos(\bar{v}_1, \bar{v}_2) + 2\, v_1 v_3 \cos(\bar{v}_1, \bar{v}_3) +$$
$$+ 2\, v_2 v_3 \cos(\bar{v}_2, \bar{v}_3).$$

Tā kā $\cos(\bar{v}_i, \bar{v}_i) = \cos 0^0 = + 1$ (leņķis starp kaut kuŗa vektora virzienu un viņa paša virzienu, kas nāk priekšā, kad vektoru reizina pašu uz sevi jeb paceļ otrā pakāpē, ir 0), tad galīgi min. ģeometriskās zumas pacelšana otrā pakāpē dod:

$$v^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + 2\, v_1 v_2 \cos(v_1, \bar{v}_2) + 2\, v_1 v_3 \cos(\bar{v}^1, \bar{v}_3) +$$
$$+ 2\, v_2 v_3 \cos(\bar{v}_2, \bar{v}_3),$$

no kurienes zumas vektora skaitliskā nozīme ir:

$$v = + \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + 2\, v_1 v_2 \cos(\bar{v}_1, \bar{v}_2) + 2\, v_1 v_3 \cos(\bar{v}_1, \bar{v}_3) + 2\, v_2 v_3 \cos(\bar{v}_2, \bar{v}_3)}.$$

No šīs formulas ir redzams, kā gūt vektora $\bar{v}$ moduli vispārējā gadījumā, kad $\bar{v} = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{v}_i$

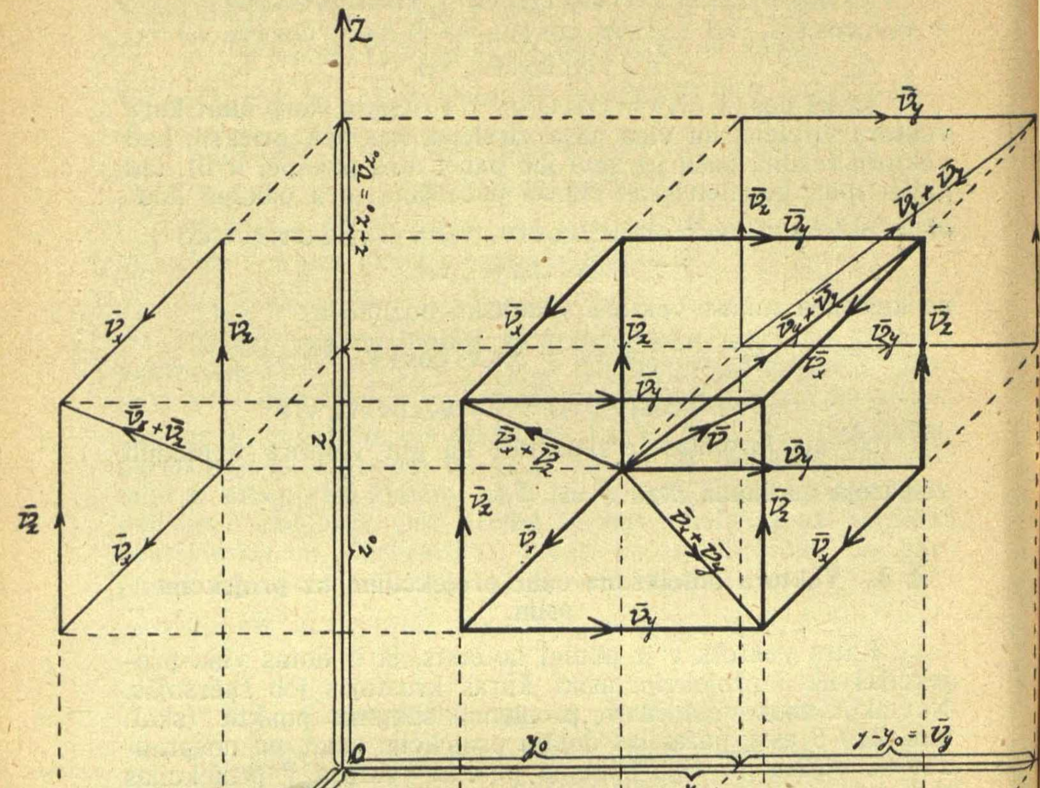
§ 3. Vektora noteikšana caur projekcijām uz projekciju asīm.

Katrs vektors $\bar{v}$ ir pilnīgi noteikts, ja ir dotas viņa projekcijas uz 3 projekciju asīm, kuŗas krustojās jeb šķērsojās. Novelkot caur vektora $\bar{v}$, p. piem., sākuma punktu (skat. zīm. 24.) 3 asis, paralelas dotām projekciju asīm, un nospraužot uz viņām no viņu sākuma punkta vektora $\bar{v}$ projekcijas v_x, v_y un v_z redzam, ka uz šīm projekcijām var uzbūvēt paralelepipedu ar malām v_x, v_y un v_z, kuŗa diagonāle ir vektors $\bar{v}$, pie kam, kā rāda zīm. 24., sakars starp $\bar{v}$ un min. projekcijām ir: $\bar{v} = \bar{v}_x + \bar{v}_y + \bar{v}_z$ t. i. katrs vektors var tikt uzskatīts kā ģeometriska zuma no 3 vektoriem, sastādītiem no šī vektora projekcijām uz 3 sastarpīgi krustojošām jeb šķērsojošām asīm. Šos vektorus sauc par vektora $\bar{v}$ komponentēm.

Kas attiecās uz projekciju asīm, tad viņām liek krustoties kopējā punktā, caur ko viņas veido koordinātu sistēmu, kas dod iespēju saistīt vektora projekcijas ar viņa gala punktu koordinātēm sekošā kārtā:

$$v_x = x_1 - x_0$$
$$v_y = y_1 - y_0$$
$$v_z = z_1 - z_0$$

Sakarība starp $\bar{v}$ no vienas puses un viņa komponentēm resp. projekcijām no otras puses ir tālāki:



Zīm. N24.

$$(\bar{v})^2 = v^2 = (\bar{v}_x + \bar{v}_y + \bar{v}_z)^2 = v^2_x + v^2_y + v^2_z +$$
$$+ 2\, v_x v_y \cos(\bar{v}_x, \bar{v}_y) + 2\, \bar{v}_x \bar{v}_z \cos(\bar{v}_x, \bar{v}_z) + 2\, v_y v_z \cos(\bar{v}_y, \bar{v}_z).$$

Ja projekcijas asis veido savā starpā taisnus leņķus, tad visi vektori, kuŗiem ir dažādi indeksi, ir virzīti zem 90° viens pret otru, un šo leņķu $\cos 90° = 0$.

Tādā kārtā pazūd locekļi, kuŗos ieiet leņķa cos, un galīgi: $v^2 = v^2_x + v^2_y + v^2_z$, no kuŗienes: $v = + \sqrt{v^2_x + v^2_y + v^2_z}$.

Ja apzīmēsim vektora virziena leņķus pret koordinātu asīm ar α (pret X asi), β (Y-asi) un γ (Z-asi), tad:

$$\cos \alpha = \frac{v_x}{|v|} = \frac{v_x}{\sqrt{v^2_x + v^2_y + v^2_z}}$$

$$\cos \beta = \frac{v_y}{|v|} = \frac{v_y}{\sqrt{v^2_x + v^2_y + v^2_z}}$$

$$\cos \gamma = \frac{v_z}{|v|} = \frac{v_z}{\sqrt{v^2_x + v^2_y + v^2_z}}$$

kur v_x, v_y un v_z ir alģebraiski lielumi, bet v ir vektora absolūtā skaitliskā nozīme jeb viņa modulis. Paceļot šos nolīdzinājumus otrā pakāpē, gūstam:

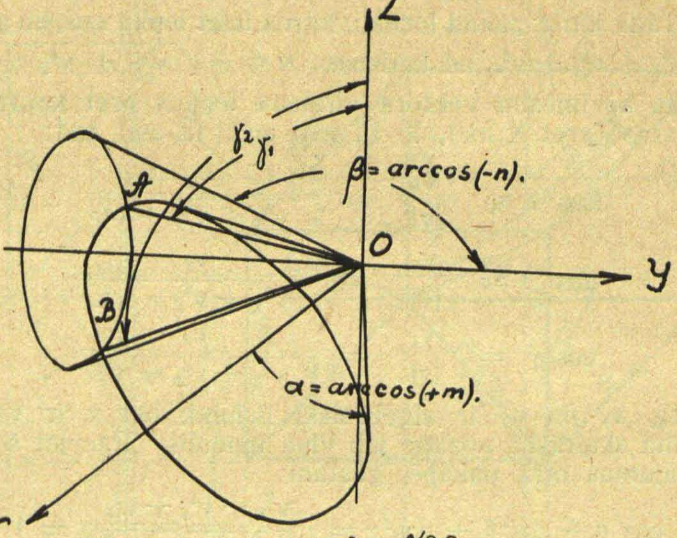
$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{v^2_x + v^2_y + v^2_z}{(\sqrt{v^2_x + v^2_y + v^2_z})^2} = 1,$$

kas aizrāda, ka no visiem trīsiem leņķiem brīvi var vēlēt tik divus, trešais uzejams no nobeidzamās sakarības.

Un patiesi, pie šāda slēdziena mēs varam nonākt arī ģeometriskā ceļā. Ja leņķis starp X ass virzienu un vektora $\bar{v}$ virzienu ir α, tad, kamēr otrs leņķis nav vērā ņemts, vektora $\bar{v}$ virzienam jābūt paralelam, kona veidulei, kuŗš aprakstīts ap OX zem leņķa α. Tā kā vektora virziens ar Y-asi sastāda leņķi β tad $\bar{v}$ virzienam jāsakrīt arī ar otra kona veidules virzienu, kuŗš aprakstīts ap OY zem leņķa β Vektora $\bar{v}$ virziens sakritīs ar abu konu virsmu krustojumu līniju virzieniem, kuŗu būs divi. Jautājumu izšķiŗ zīmes, kuŗas ietilpst augšā pievestās cosinus'u izteiksmēs: $\frac{v_x}{|v|}$, $\frac{v_y}{|v|}$ un $\frac{v_2}{|v|}$. Ja divu leņķu $\cos^2 > 1$, tad atrisinājums neiespējams.

P i e m ē r s. Vektora gaŗums ir v, $\cos \alpha = + m$, $\cos \beta = - n$, $\cos \gamma$ ir negatīvs lielums. Uziet vektora $\bar{v}$

virzienu. Tā kā $\cos\alpha = +m$, tad α ir šaurais leņķis, kuŗu veido kona veidule ar pozitīvo X ass virzienu (sk. zīm. 25.) un tā kā $\cos\beta = -n$, tad leņķis β ir platleņķis. Sakarā ar šo, ap negatīvo Y asi jāapraksta kons, kuŗa veidules sastāda leņķi $(\pi - \beta)$ ar negatīvo Y-ass virzienu.



zīm. №25.

Abi koni (X) un (—Y) krustojās gar divām veidulēm AO un BO. Šīs veidules sastāda ar Z-asi divus leņkus γ_1 un γ_2, no kuriem γ_1 ir šaurais leņķis, bet γ_2 — platleņķis. Cos γ_1 ir pozitīvs, bet cos γ_2 — negatīvs. Ja nu nebūtu dota cos γ zīme, tad būtu divi atrisinājumi, kas ienestu uzdevumā nenoteiktību. Līnija OB noteic vektora $\overline{v}$ virzienu, kā arī viņa apakšvirzienu, kuŗš iet no p. O pret p. B.

Ar skalārā produkta palīdzību var atrisināt saīsinātā ceļā arī daudzus analītiskas ģeometrijas jautājumus, kuŗi nāk priekšā mēchanikā. Par piem. jautājumu par leņķa uziešanu starp diviem vektoriem $\overline{V}$ un $\overline{v}$ var atrisināt sekoši:

Apzīmēsim meklējamo leņķi ar λ, tad:

$$\overline{V}\,\overline{v} = Vv\cos\lambda = (\overline{V}_x + \overline{V}_y + \overline{V}_z)(\overline{v}_x + \overline{v}_y + \overline{v}_z) = \overline{V}_x\overline{v}_x + \\ + \overline{V}_y\overline{v}_y + \overline{V}_z\overline{v}_z + \overline{V}_x\overline{v}_y + \overline{V}_x\overline{v}_z + \overline{V}_y\overline{v}_x + \overline{V}_y\overline{v}_z + \overline{V}_z\overline{v}_y + \\ + \overline{V}_z\overline{v}_x = V_x v_x + V_y v_y + V_z v_z$$

jo visi pārējie locekļi $= O$, kā vektoru komponentu produkti, kuŗu virzieni ir perpendikulāri ortogonālā koordinātu sistēmā.

Bet $V_x = V\cos\alpha_1$, $V_y = V\cos\beta_1$, $V_z = V\cos\gamma_1$ un $v_x = v\cos\alpha_2$, $v_y = v\cos\beta_2$, $v_z = v\cos\gamma_2$, kur $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ un α_2, β_2, un γ_2 ir attiecīgie abu vektoru virzienu leņķi pret koordinatu asīm, tā tad $Vv\cos\lambda = Vv\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + Vv\cos\beta_1\cos\beta_2 + Vv\cos\gamma_1\cos\gamma_2$, no kurienes, saīsinot uz Vv, gūstam: $\cos\lambda = \cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2$ — pazīstamo analitiskā geometrijā formulu

Ja prasam, lai abi vektori būtu savā starpā stateniski, t. i. virzīti zem 90^0, tad $\lambda = 90^0$ un $\cos\lambda = \cos 90^0 = 0$ un $\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2 = 0$.

Pie paralēliem un vienādi virzītiem vektoriem $\cos\lambda = \cos 0^0 = +1$ un pretēji virzītiem (antiparalēliem) $\cos\lambda = \cos\pi = -1$ un tā tad: $\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2 = \pm 1$.

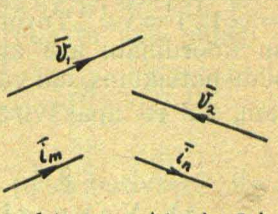
P i e m ē r s. Uziet leņķi starp diviem vektoriem $\bar{v}_1$ un $\bar{v}_2$, kuŗu projekcijas ir $v_{1x} = \frac{\sqrt{3}}{6}$, $v_{1y} = \frac{1}{2}$; $v_{2x} = -\frac{1}{2}$, $v_{2y} = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

A t r i s i n ā j u m s: $v_1 v_2 \cos\lambda = v_{1x} v_{2x} + v_{1y} v_{2y} = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} = 0$, $\cos\lambda = 0, \lambda = \frac{\pi}{2}$.

§ 4. Vektoru attēlošana ar vienības vektora palīdzību.

Iedomāsimies divus vektorus, kuŗu moduļi ir vienādi, bet kuŗu virzieni dažādi. Tad, saskaņā ar līdz šim pieņemto vektoru apzīmējumu, viņus varētu apzīmēt $\bar{v}_1$ un $\bar{v}_2$ (skat. zīm. 26.). Šinīs apzīmējumos pavisam neizpaužās šo vektoru moduļu vienādība, un tādēļ viņi ir diezgan primitīvi. Vektoru attēlošanu turpretim var rafinēt (pasmalcināt), ievedot tā saucamā vienības vektora jēdzienu. Vienības vektors ir vektors, kuŗa virziens sakrīt ar dotā vektora virzienu, bet kuŗa momuls 1. Pēc vienības vektora ievešanas katru vektoru var attēlot, kā pēdējā moduļa reizinājumu ar vienības vektoru. Atgriezīsimies pie mūsu piemēra. Ja vienības vektori ir $\bar{i}_m$ un $\bar{i}_n$ (sk. zīm. 26.), tad vektorus $\bar{v}_1$ un $\bar{v}_2$ tagad var attēlot: $\bar{v}_1 =$

Zīm. №26



$= v\bar{i}_m$ un $\bar{v}_2 = -v\bar{i}_n$, jo vienības vektora $\bar{i}_m$ apakšvirziens sakrīt ar vektora $\bar{v}_1$ apakšvirzienu, bet $\bar{v}_2$ apakšvirziens ir pretējs vienības vektora $\bar{i}_n$ apakšvirzienam.

Doto vektoru zuma ir: $\bar{v}_1 + \bar{v}_2 = v\bar{i}_m + (-v\bar{i}_n) = v\bar{i}_m - v\bar{i}_n = v(\bar{i}_m - \bar{i}_n)$; viņu starpība: $\bar{v}_1 - \bar{v}_2 = v(\bar{i}_m + \bar{i}_n)$. Ja vienības vektori ortogonālā koordinātu asu positīvos virzienos attiecīgi ir $\bar{i}_x$, $\bar{i}_y$ un $\bar{i}_z$ tad vektoru $\bar{v}$ (sk. iepr. § 3.) var izteikt: $\bar{v} = v_x \bar{i}_x + v_y \bar{i}_y + v_z \bar{i}_z$, kur v_x, v_y un v_z šinī apzīmējumā ir vektora projekcijas uz vienības vektoru apakšvirzieniem, un, kā katra projekcija, viņi ir alģebraiski lielumi, pie kam: $v_x = v \cos(\bar{i}_x, \bar{v})$, $v_y = v(\bar{i}_y, \bar{v})$ un $v_z = v(\bar{i}_z, \bar{v})$, kur leņķi skaitāmi starp vienības vektoru un $\bar{v}$ positīviem virzieniem (sk. II, § 1., B. 2). Vienības vektoriem $\bar{i}_z$, $\bar{i}_y$ un $\bar{i}_z$ piemīt īpašības: $\bar{i}^2_x = \bar{i}^2_y = \bar{i}^2_z = 1$, $\bar{i}_z \cdot \bar{i}_y = \bar{i}_x \cdot \bar{i}_z = \bar{i}_y \cdot \bar{i}_z = 0$, jo virziena leņķis starp vienības vektoriem ar vienādiem indeksiem ir 0: $\cos(\bar{i}_z, \bar{i}_z) = \cos(\bar{i}_y, \bar{i}_y) = \cos(\bar{i}_z, \bar{i}_z) = \cos 0 = 1$, bet starp min. vien. vektoriem ar dažādiem indeksiem šis leņķis ir $\pi/_2$: $\cos(\bar{i}_x, \bar{i}_y) = \cos(\bar{i}_x, \bar{i}_z) = \cos(\bar{i}_y, \bar{i}_z) = \cos \pi/_2 = 0$. Šo vien. vektoru $\bar{i}_x$, $\bar{i}_y$ un $\bar{i}_y$ īpašību jāņem vērā pie v^2 izteiksmes sastādīšanas, ar ko nodarbojas iepriekšējais, § 3.

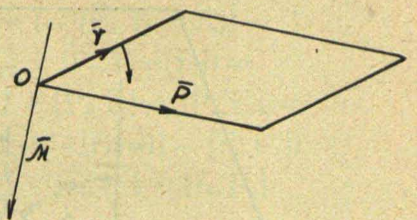
Apskatīsim vēl jautājumu, kā izteicas vektora projekcijas uz asīm, kurš reprezentēts, kā viņa komponentu ģeom. zuma. Par piem. $\bar{v} = v_x \bar{i}_x + v_y \bar{i}_y + v_z \bar{i}_z$. Lai gūtu $\bar{v}$ projekciju uz X asi, min. vektoru zumu jānoprojektē uz X asi. Šinī operācijā $v_y \bar{i}_y$ un $v_z \bar{i}_z$ izkrīt, kā vektori perpendikulāri pret X asi; paliek tikai $v_x \bar{i}_x$ kuŗa virziens sakrīt ar X asi. Atliek tikai jautājums par apakšvirzienu resp. par proj. no $\bar{v}_x$ zīmi. Šo jautājumu izšķir $\cos(X, \bar{i}_x)$, kurš pie pieņemto vienības vektoru un pozitīvo koordinātu asu vienādiem apakšvirzieniem vienmēr būs $+1$. Kādēļ proj. no $\bar{v}_x = v_x 1 . \cos(X, \bar{i}_x) = v_x 1 . 1 = v_x$. Turpretim, ja attiecībā uz vienības vektoru un koordinātu asu apakšvirzieniem nebūtu ievests min. papildu noteikums, tad varētu būt proj. no $\bar{v}_x = \pm v_x$, atkarībā no tam, vai $\bar{i}_x$ apakšvirziens sakrīt ar X, jeb ne.

§ 5. Vektoriēlais produkts.

A) Vektoriēla produkta dēfīnīcija.

Divu vektoru $\bar{r}$ un $\bar{P}$ vektoriēlais produkts $[\bar{r}, \bar{P}]$ ir jauns vektors $\bar{M} = [\bar{r}, \bar{P}]$, kuŗa elementi noteicas tā: 1) viņa modulis (garums) satur sevī tik daudz garuma vienību, cik ir laukuma vienību paralelogramā, kuŗa malas ir $\bar{r}$ un $\bar{P}$ un kuŗa laukums tā tad ir $r\,P \sin(\bar{r}, \bar{P}) = M$; 2) viņa virziens ir stātenisks pret min. paralelograma laukumu; 3) viņa apakšvirziens tiek noteikts tā, ka nostājoties šinī apakšvirzienā jāredz vienu no dotiem vektoriem caur rotāciju ap. p. O visīsākā ceļā savienojoties ar otru pulksteņa rādītāja kustības jeb pretējā virzienā. Tūlīt ir saprotams, ka vektora $\bar{M}$ apakšvirziens paliek nenoteikts: a) kamēr nav nosaukts vektors, kuŗam caur rotāciju visīsākā ceļā ir jāsavietojas ar otru un b) kamēr nav izvēlēts virziens, kuŗā vektoram visīsākā ceļā jāsavietojas ar otru — pulksteņa rādītāja kustības virzienā jeb pretējā. Vēlēsim pēdējo par orientācijas virzienu un vektoru produktā apzīmējumā rakstīsim pirmā vietā vektoru reizināmo, kuŗš caur rotāciju savietojams ar otru, reizinātāju; 4) vektora $\bar{M}$ stāvotne, noteikta caur kādu punktu, caur kuŗu M jāiet, atkarājas no vektora $\bar{M}$ īpatnējām mēchaniskām īpašībām. Dažreiz šī stāvotne ir noteikta caur noteiktu punktu, dažreiz nē. Pagaidām noteiksim $\bar{M}$ stāvotni caur punktu O (sk. zīm. 27.). Pie augšā min. vektora $\bar{M}$ noteikšanas paņēmiena, viņa noteiktība un viennozīmība ir nodrošināta. No zīm. 27. ir redzams, ka $\bar{r}$ savietojas ar $\bar{P}$ pret pulksteņa rādītāja kustības virzienu, ja nostājas ar kājām p. O un ar galvu $\bar{M}$ virzienā.

Zīm. № 27.



B) Vektoriēla produkta īpašības.

1) No vekt. prod. dēfinīcijas seko, ka $[\bar{r}, \bar{P}] = -[\bar{P}, \bar{r}]$, t. i. komutātīvais likums uz vektoriēlu produktu nav pilnīgi attiecināms.

2) $[-\bar{r}, \bar{P}] = [\bar{r}, -\bar{P}] = -[\bar{r}, \bar{P}]$; $[-\bar{r}, -\bar{P}] = [\bar{r}, \bar{P}]$.

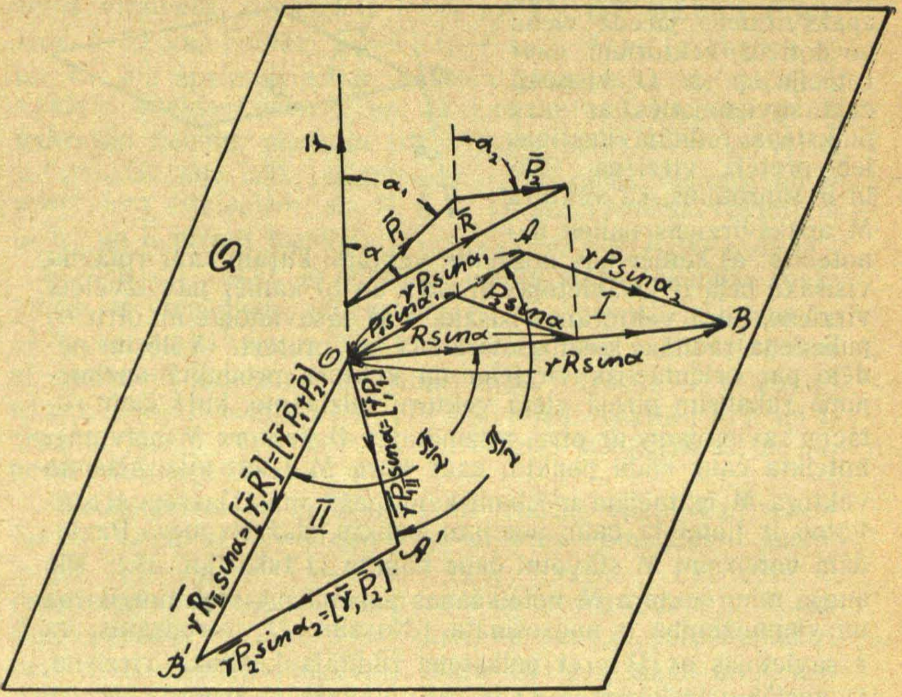
3) $[\bar{r}, \bar{r}] = 0$, jo $r^2 \sin(\bar{r}, \bar{r}) = 0$.

4) $[\bar{r}, \bar{P}_1 + \bar{P}_2] = [\bar{r}, \bar{P}_1] + [\bar{r}, \bar{P}_2]$ (distributīvais likums).

Patiesi (sk. zīm. 28.): noprojektēsim zumu $\bar{R} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2$ uz plākni perpendikulāru pret $\bar{r}$, tad ir: $R \sin \alpha = P_1 \sin \alpha_1 +$

$+ P_2 \sin\alpha_2$ (sk. II., § 1., A p. 3.). Pareizināsim šo sakarību uz skalāro r: $r\bar{R}\sin\alpha = r\bar{P}_1\sin\alpha_1 + r\bar{P}_2\sin\alpha_2$ jeb $r\bar{R}\sin(\bar{r},\bar{R}) = r\bar{P}_1\sin(\bar{r},\bar{P}_1) + r\bar{P}_2\sin(\bar{r},\bar{P}_2)$, pie kam šinī sakarībā ietilpstošie vektori reprezentē trīsstūŗa AOB malas. Trīsstūri

Zīm. №28.



AOB, beidzot, pagriezīsim stāvotnē A'OB', kur viņa malas veidos ar attiecīgām trīsstūŗa AOB malām leņkus $\pi/_2$. Tā kā $\bar{r}$ ir perpendikulārs pret plākni Q, tad attiecīgās trīsstūŗa A'OB' malas arī ir perpendikulāras pret attiecīgām paralelogramu $r R \sin\alpha$, $r P_1 \sin\alpha_1$ un $r P_2 \sin\alpha_2$ plāknēm, būdamas tanī pašā laikā skaitliski vienādas ar šo paralelogramu laukumiem, kādēļ, saskaņā ar vektoriēla produkta dēfinīciju $r\bar{R}_{\parallel}\sin\alpha = -[\bar{r},\bar{R}]$, $r\bar{P}_{1\parallel}\sin\alpha_1 = -[\bar{r},\bar{P}_1]$ un $r\bar{P}_{2\parallel}\sin\alpha_2 = -[\bar{r},\bar{P}_2]$.

Bet tā kā $r\bar{R}_{\parallel}\sin\alpha = r\bar{P}_{1\parallel}\sin\alpha_1 + r\bar{P}_{2\parallel}\sin\alpha_2$, tad: $[\bar{r},\bar{R}] = [\bar{r},\bar{P}_1 + \bar{P}_2] = [\bar{r},\bar{P}_1] + [\bar{r},\bar{P}_2]$, t. i. sastādot vektoriēlu produktu no vektora $\bar{r}$, ar vektoru $\bar{P}_1$ un $\bar{P}_2$ zumu, jāsastāda vektoriēlus produktus $[\overline{r}, \overline{P}_1]$ un $[\overline{r}, \overline{P}_2]$, kuŗus tad ģeometriski jāsaskaita.

Pieņemsim tagad, ka arī $\overline{r}$ ir zuma $\overline{r} = \overline{r}_1 + \overline{r}_2$. Tad:

$$[\overline{r}_1 + \overline{r}_2, \overline{P}_1 + \overline{P}_2] = [\overline{r}, \overline{P}_1] + [\overline{r}, \overline{P}_2] =$$
$$= [\overline{r}_1 + \overline{r}_2, \overline{P}_1] + [\overline{r}_1 + \overline{r}_2, \overline{P}_2] =$$
$$= -[\overline{P}_1, \overline{r}_1 + \overline{r}_2] + (-[\overline{P}_2, \overline{r}_1 + \overline{r}_2]) =$$
$$= -([\overline{P}_1, \overline{r}_1 + \overline{r}_2] + [\overline{P}_2, \overline{r}_1 + \overline{r}_2]) =$$
$$= -([\overline{P}_1 \overline{r}_1] + [\overline{P}_1, \overline{r}_2] + [\overline{P}_2, \overline{r}_1] + [\overline{P}_2, \overline{r}_2]) =$$
$$= -(-[\overline{r}_1, \overline{P}_1] - [r_2, \overline{P}_1] - [\overline{r}_1, \overline{P}_2] - [\overline{r}_2, \overline{P}_2]) =$$
$$= [\overline{r}_1, \overline{P}_1] + [\overline{r}_2, \overline{P}_1] + [\overline{r}_1, \overline{P}_2] + [\overline{r}_2, \overline{P}_2].$$

Apskatīsim gadījumu:

$$[\overline{r}_1 - \overline{r}_2, -\overline{P}_1 + \overline{P}_2] = [r_1 + (-\overline{r}_2), (-\overline{P}_1) + \overline{P}_2] =$$
$$= [r_1, (-\overline{P}_1)] + [\overline{r}_1, \overline{P}_2] + [(-\overline{r}_2), (-\overline{P}_1)] + [(-\overline{r}_2), \overline{P}_2] = -$$
$$= -[\overline{r}_1, \overline{P}_1] + [\overline{r}_1, \overline{P}_2] + [\overline{r}_2, \overline{P}_1] - [r_2, \overline{P}_2].$$

Augšā izvestās formulās ir arī saskatāms vispārējais vektoriēla produkta sastādīšanas likums, kad jāpareizina vektoru polinomu uz vektoru polinomu: formēli šī operācija izvedama tāpat kā polinomu reizināšana alģebrā, neizslēdzot arī alģebras zīmju likumu.

C) Vektoriēla produkta projektēšana uz projekcijas asīm.

Ņemsim atkal vērā mums jau pazīstamos vienības vektorus ortogonālu koordinātu asu pozitīvos virzienos: $\overline{i}_x$, $\overline{i}_y$, $\overline{i}_z$.

Šiem vienības vektoriem piemīt īpašības:

$$[\overline{i}_x, \overline{i}_x] = [\overline{i}_y, \overline{i}_y] = [\overline{i}_z, \overline{i}_z] = 0$$
$$[\overline{i}_x, \overline{i}_y] = \overline{i}_z, \ [\overline{i}_z, \overline{i}_x] = \overline{i}_y, \ [\overline{i}_y, \overline{i}_z] = \overline{i}_x,$$

kā tas ir viegli saprotams, izejot no vektoriēla produkta dēfīnīcijas.

Vektoru $\overline{M} = [\overline{r}, \overline{P}]$ var tagad reprezentēt, ņemot vērā, ka $r = r_x \overline{i}_x + r_y \overline{i}_y + r_z \overline{i}_z = x \overline{i}_x + y \overline{i}_y + z \overline{i}_z$,

$$\overline{P} = X \overline{i}_x + Y \overline{i}_y + Z \overline{i}_z$$

kur x, y un z un X, Y un Z ir vektoru $\overline{r}$ un $\overline{P}$ attiecīgas projekcijas — alģebraiski lielumi

$$\bar{M} = [x\bar{i}_x + y\bar{i}_y + z\bar{i}_z,\ X\bar{i}_x + Y\bar{i}_y + Z\bar{i}_z] = xX[\bar{i}_x, \bar{i}_x] + xY[\bar{i}_x, \bar{i}_y] + xZ[\bar{i}_x, \bar{i}_z] + yX[\bar{i}_y, \bar{i}_x] + yY[\bar{i}_y, \bar{i}_y] + yZ[\bar{i}_y, \bar{i}_z] + zX[\bar{i}_z, \bar{i}_x] + zY[\bar{i}_z, \bar{i}_y]\ zZ[\bar{i}_z, \bar{i}_z],$$

bet ņemot vērā vienības vektoru vektoriēla produkta īpašības:

$$M = +(yZ - zY)\bar{i}_x + (zX - xZ)\bar{i}_y + (xY - yX)\bar{i}_z = \bar{M}_x + \bar{M}_y + \bar{M}_z = [\bar{r}, \bar{P}]_x + [\bar{r}, \bar{P}]_y + [\bar{r}, \bar{P}]_z.$$

Rezultāts rāda, ka arī vektoriēlais produkts sadalās trijās komponentēs pa trim ortogonālām koordinātu asīm, pie kam:

$$\bar{M}_x = (yZ - zY)\bar{i}_x = [\bar{r}, \bar{P}]_x,$$
$$\bar{M}_y = (zX - xZ)\bar{i}_y = [\bar{r}, \bar{P}]_y,$$
$$\bar{M}_z = (xY - yX)\bar{i}_z = [\bar{r}, \bar{P}]_z.$$

Tagad projektēsim vektoru $\bar{M}$ uz ortogonālām koordinātu asīm. Ir saprotams, ka skaitliski $\bar{M}$ projekcijas būs vienādas ar viņa komponentu $\bar{M}_x$ $\bar{M}_y$ un $\bar{M}_z$ garumiem, un ka jautājums grozīsies vienīgi ap projekciju zīmēm. Te nu izrādās, ka svarā kritīs zistēmas asu īpašības, kuras tika apskatītas Ievadā § 1. un illustrētas caur zīm. 2-a un zīm. 2-b. Ja vēlam zistēmu 2-a, tad:

$$M_x = yZ - zY,$$
$$M_y = zX - xZ, \quad (1)$$
$$M_z = xY - yX.$$

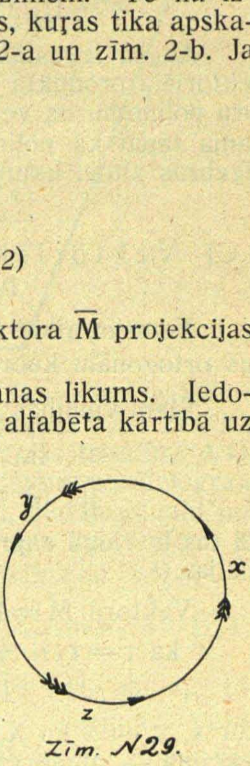
Ja — 2-b, tad:

$$M_x = -(yZ - zY),$$
$$M_y = -(zX - xZ), \quad (2)$$
$$M_z = -(xY - yX).$$

Vienosimies lietot sistēmu 2a, tad vektora $\bar{M}$ projekcijas ir izteiktas caur formulu grupu (1).

Mneumoniskais formulu (1) sastādīšanas likums. Iedomāsimies burtus x, y un z novietotus viņu alfabēta kārtībā uz kādas aploces pretēji pulksteņa rādītāja kustības virzienam, tad varam konstatēt, ka formulu grupas (1) kreisās un pirmos viņu labās puses locekļos burti x, y un z iet vienmēr aizrādītā kārtībā:

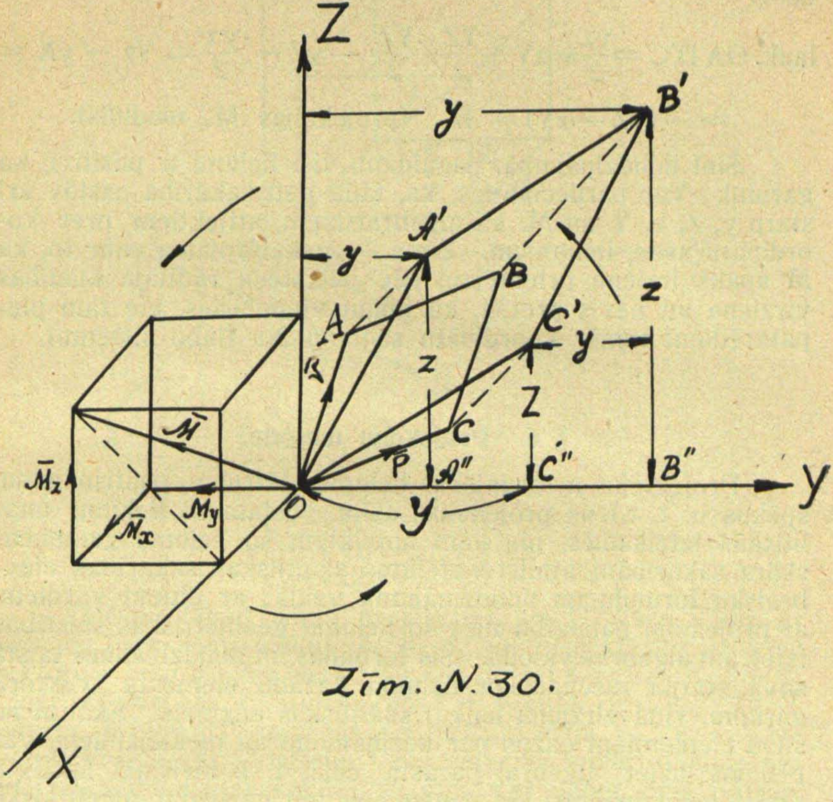
x, y, z;
y, z, x;
z, x, y.



Zīm. №29.

Turpretim, beidzamos labās puses locekļos atkārtojas viņas pirmo locekļu burti pretējā kārtībā.

Apskatīsim jautājumu par vektoriēla produkta projekcijām no ģeometriska viedokļa. Meklēsim, par piem. $\overline{M}$ projekciju uz X, kuŗu apzīmējam ar M_x; tad $M_x = M\cos(\overline{X}, \overline{M})$ (3). Bet leņķis $(\overline{X}, \overline{M})$ ir vienāds ar divplākšņa kakta leņķi, kuŗu



Zīm. N. 30.

veido plākne OABC ar koordinātu sistēmas plākni YOZ. Tā kā nol. $\overline{M} = [\overline{r}, \overline{P}]$ M skaitliski ir vienāds ar paralelograma OABC laukumu, tad $M\cos(\overline{X}, \overline{M})$ ir šī paralelograma laukuma projekcija uz koordinātu sistēmas plākni YOZ, kuŗa ir paralelograma OA′B′C′ laukums. Pēdējo gūstam, noprojektējot paralelograma OABC stūŗa punktus A′, B′ un C′ uz plākni YOZ. Uziesim paralelograma OA′B′C′ laukumu, kuŗš =

$$= \text{lauk. } OA'B'B'' - \text{lauk. } OC'B'B'', \text{ lauk. } OA'BB''' =$$

$$= \text{lauk. } OA'A'' + \text{lauk. } A'A''B'B'' = \frac{yz}{2} + \frac{(z + z + Z)}{2}\, Y =$$

$=\frac{yz}{2}+zY+\frac{ZY}{2}$; lauk. $OC'B'B''=$ lauk. $C'C''B'B''=$ lauk. $OC'C''+$

$=\frac{YZ}{2}+yZ+\frac{yz}{2}$ un paralelograma $OA'B'C'$ laukums, beidzot:

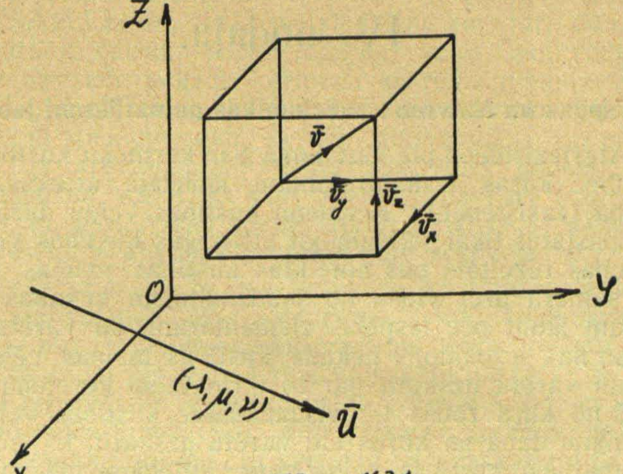
$$\text{lauk. } OA'B'C'=\frac{yz}{2}+zY+\frac{YZ}{2}-\frac{YZ}{2}-yZ-\frac{yz}{2}=Yz-yX=$$

$$=-(yZ-zY)=M_x \text{ (projekcijas } M_x \text{ modulis).}$$

Šinī nolīdzinājumā, pagaidām, visi lielumi ir positīvi, kā garumi. Var pārliecināties, ka, tāda pati sakarība pastāv arī starp y, Z, z, Y un M_x kā alģebraiskiem, attiektiem pret koordinātu asīm, lielumiem. Zīme — izskaidrojama caur to, ka M apakšvirzienu orientējam pēc pulksteņa rādītāja kustības virziena un nevis pretēji, kā bijām vienojušies, pie tam piepaturēdami tomēr koordinātu sistēmu 2-a (labo sistēmu).

§ 6. Projekciju metode.

Projektējot mēchaniskus lielumus (ātrumu, paātrinājumu, spēkus u. t. t.) uz projekcijas asīm, gūstam šo lielumu analitiskās izteiksmes, pie kam noteiktām šo lielumu ģeometriskām sakarībām atbilst noteiktas skaitliskas sakarības alģebraisku formulu un nolīdzinājumu veidā; ar citiem vārdiem, ar projekciju palīdzību mēs šo lielumu ģeometriskas saistības izteicam alģebras valodā. Šīs formulas un nolīdzinājumi saista savā starpā mēchanisku lielumu dažādu elementu (vektoru garumu, viņu virzienu leņķu) skaitliskās nozīmes. Skaitot no šiem elementiem dažus par nezināmiem un meklējamiem, var pēdējos uziet alģebrai parastā ceļā, t. i. atrisināt noteiktu skaitu nolīdzinājumu. Šo paņēmienu, gūt vajadzīgo alģebraisko nolīdzinājumu skaitu ar projekciju palīdzību, sauc par projekciju metodi. Viņa ieņem mēchanikā redzamu vietu, kā spēcīgs līdzeklis visādu veidu mēchanikas dabas problēmu atrisināšanai. Kā jau tika rādīts šīs nodaļas § 3., katru vektoru telpā var pilnīgi noteikt caur trim viņa projekcijām ortogonālā koordinātu sistēmā, jo ar šo triju projekciju palīdzību var konstruēt paralelpipedu, kuŗa diagonāle ir dotais vektors. No minētā var slēgt, ka ar trīs projekciju nolīdzinājumiem vajaga pietikt, lai analītiskā ceļā uzietu vektora nezināmos elementus, viņa gaŗumu un viņa virzienu leņķus α, β un γ pret koordinātu asīm. Katrs jauns projekciju nolīdzinājums uz katru jaunu projekcijas asi nav vairs neatkarīgs nolīdzinājums, bet gan secinājums no pirmiem jau iegūtiem. Patiesi, vēlēsim ortogonālu koordinātu sistēmu (O, X, Y, Z) vektora $\bar{v}$ projektēšanai (sk. zīm. 31.). Šinī sistēmā:



Zīm. № 31

$$v_x = v \cos \alpha \ldots (1),$$
$$v_y = v \cos \beta \ldots (2) \text{ un}$$
$$v_z = v \cos \gamma \ldots (3).$$

Vēlēsim tagad jaunu projekcijas asi $\bar{U}$, kuŗa veido ar pirmām trim asīm leņķus λ, μ, ν, un projektēsim uz viņu vektoru $\bar{v}$; tad $v_u = v \cos(\bar{u}, \bar{v}) \ldots (4)$. Bet $\bar{v} = v_x + \bar{v}_y + \bar{v}_z$, kādēļ $v_u = v \cos(\bar{u}, \bar{v}) = v_x \cos\lambda + v_y \cos\mu + v_z \cos\nu$, t. i. ceturtā projekcija sastādās no pirmām trim v_x, v_y un v_z, ņemot vērā $\bar{U}$ ass virzienu. Šis ceturtais nolīdzinājums nedod nekādu jaunu sakarību, jo viņu var dabūt tieši no pirmiem trim tādā kārtā, ka (1) pareizina uz $\cos\lambda$ (2) — uz $\cos\mu$ un (3) — uz $\cos\nu$, pēc kam šos nolīdzinājumus saskaita, t. i. (4) ir secinājums no (1), (2) un (3), viņš nav neatkarīgs.

IV. nodaļa.

§ 1. Spēks un Newton'a mēchanikas pamatlikumi jeb principi.

Atgriezīsimies pie jautājuma par ķermeņu kustības veidu dažādību, kuŗas izskaidrojumam jāpielaiž attiecīga cēloņa esamība (eksistence). Ķermeņu kustības veidu dažādibu varam konstatēt tikai salīdzinājot attiecīgus kustības veidus. Šīs operācijas rezultāts būs noteiktas kustības maiņas konstatējums samērā pret vienu no salīdzināmiem kustības veidiem. Pēdējam jābūt pēc iespējas elementāram, lai varētu pielaist, ka viņu nav iespaidojis nekāds kustības maiņas cēlonis, t. i., lai viņu varētu uzskatīt par to pirmatnējo ķermeņu kustības veidu, no kuŗa rodās tie visdažādākie kustības veidi, kuŗus novērojam dabā un kuŗus tad varētu uzskatīt, kā cēlušos no šī pirmatnējā kustības veida caur attiecīgu cēloņu iedarbi. Par šo pirmātnējo kustības veidu jeb kustības prototīpu Newton's pieņem taisnvirzienisku kustību ar vienmērīgu ātrumu v_0 (bez kāda paātrinājuma), pie kam ātrumam v_0 var būt kaut kuŗa nozīme, arī $v_0 = 0$, kas atbilst ķermeņa miera stāvoklim. Cēloni, kuŗš pārveido šo elementāro kustības veidu visdažādākos iespējamos kustības veidos, sauc par spēku. Pēc šī termiņa ievešanas var teikt, ka ķermens, uz kuŗu nedarbojās nekāds spēks, kustās mūžīgi taisnā virzienā ar vienmērīgu ātrumu jeb viņš atrodās mūžīgā miera stāvoklī. Lai taisnvirzienisku vienmērīgu ķermeņa kustību pārvērstu kaut kādā citā, jeb miera stāvoklī, jeb, ja ķermens atrodās miera stāvoklī, — to izkustinātu no miera stāvokļa, ir vajadzīga spēka jeb vairāku spēku iedarbe. Šo mēchanikas likumu, proti, ka ķermens, atbrīvots no kautkuŗa spēka iespaida, kustās mūžīgi taisnā virzienā ar vienādu ātrumu jeb atrodās mūžīgā miera stāvoklī, sauc par ķermeņu inerces jeb kūtrības principu, un viņš ir pirmais no Newton'a mēchanikas pamatlikumiem jeb Newton'a aksiomām. (Newton'a aksiomāta sive leges motus). Par inerces jeb kūtrības principu viņu sauc tāpēc, ka viņš pieraksta materēlam ķermenim itkā kādu iekšēju īpašību pretoties katrai spēka iedarbei, ko mēs varam arī paši ļoti labi sajust, iespaidojot kāda ķermeņa kustību caur mūsu rokas muskuļu piepūli: mūsu jūtu orgāni uzņem noteiktu spiedes sajūtu no iespaidojamā ķermeņa puses.

Visi dabā sastopamie ķermeņi ir padoti dažādu spēku iedarbei; tādēļ, saskaņā ar Newton'a I likumu, šo Newton'a kustības prototīpu, liekās, arī nebūtu iespējams dabā novērot. Tomēr, mēs viņu novērojam un sevišķi bieži šī kustības prototopīja atsevišķu veidu, kad $v_0 = 0$, t. i. ķermeņu miera stāvokli. Sakarā ar šo, jānāk pie slēdziena ka, starp citu, pastāv kāds īpatnējs vairāku spēku iedarbes veids, kad viņu kopējā darbība neizsauc nekādu ķermeņa kustības maiņu. Šo īpatnējo spēku darbības veidu sauc par viņu līdzsvara stāvokli un par pašiem spēkiem saka, ka viņi līdzsvarojās. Šo pašu terminu mēdz attiecināt arī uz ķermeni, kurš padots vairāku spēku iedarbei, sakot, ka viņš atrodās līdzsvara stāvoklī. Saprotams, ka tikai viena spēka, atkarīga no 0, iedarbes gadījumā, Newton'a kustības prototīps nav realizējams.

Neraugoties uz to, ka Newton'a kustības prototīps bez spēku iedarbes dabā nav sastopams, tomēr aplūkosim jautājumu, vai nav realizējams eksperiments, kurš novestu pie slēdziena, ka šādai kustības šēmai vajadzētu pastāvēt, ja izdotos ķermeni atbrīvot no spēka iespaida. Visos ķermeņu kustības gadījumos mēs konstatējam citu ķermeņu tuvumu, no kā var nākt uz domām, vai šie citi ķermeņi nav uzskatāmi par spēka avotiem. Tā par piem. ķermeņa brīvā krišanas gadījumā šo avotu mēs varam iedomāties zemes lodes centrā; palēninātas plakanu ķermeņu kustības gadījumā palēninātāja lomu var piešķirt gaisam; jo bezgaisa telpās šī kustības palēnināšana nav konstatējama u. t. t.

Izolēsim kustību no visu šo materiēlu ķermeņu tuvuma. Tā kā materija nav iznīcināma, tad jāiedomājās, ka kustošais ķermenis atrodās bezgalīgā attāļumā no zemes lodes centra, lai pēdējā iespaids zustu.

Šādu eksperimentu mēs realizēt nevaram un tāpēc Newton'a kustības prototīps pavisam bez kāda spēka iedarbes ir tikai iedomājama īpašība. Tomēr mūsu varā ir izdarīt veselu virkni eksperimentu tādā kārtā, ka ar katru nākamo eksperimentu ķermeņa kustības maiņas cēloņa — spēka iespaids mazinās.

Tādā ceļā, kurš atgādina robežas meklēšanu matēmatikā, daudzreiz būs iespēja gūt kustību veidu rindu, kuras locekļi izrādīs tieksmi tuvināties, cik patīk, kādam ideālam kustības veidam kā robežai, kad visu kustības maiņu cēloņu-spēku iespaids pilnīgi atkristu. Par piem. šādu eksperimentu varētu izvest sekoši. Spiežam kādu materiēlu ķermeni ideālas bumbas veidā kustēties pa kādu plākni. Lai pilnīgi paralizētu lielā materiēlā ķermeņa — zemes lodes iespaidu, plākni uzstādam pilnīgi horizontāli, jo, novērojot brīvi krītošā ķermeņa kustības virzienu, varējām nākt uz domām, ka, ja šinī kustības veidā zemes lodei kāda loma varēja piekrist, tad cēloņa darbības virziens varēja būt tāds pats, kā kustības virziens. Novietojot starp ķermeni un zemes lodi ideāli horizontālu plākni, novēršam zemes lodes iespaidu. Bumba, sviesta uz šīs plāknes, kā izrādās, kustās taisnā virzienā ar ātrumu, kuŗš arvienu pamazinājās, līdz bumba pilnīgi apstājās. Piešķirot šādai horizontālai plāknei dažādas fizikālas īpašības, nomanam, ka šis apstāklis kustības virzienu neiespaido — viņš paliek vienmēr taisns, bet ātrums samazinājās dažādi, atkarībā no plāknes virsmas fizikālām īpašībām. Aplūkojot tuvāki jautājumu par virsmas dažādu fizikālu īpašību iespaidu uz kustības ātruma mazināšanos, nākam pie slēdziena ka šeit spēlē lomu virsmas gludums. Jo gludāka virsma, jo ilgāki kustēsies bumba un ātrums samazināsies gausāki. Ievērojot šos apstākļus, nonākam pie slēdziena, ka robežā, kad virsmas asums būs O un līdz ar to visi kustību nolēninošie iemesli būtu zuduši (arī gaisa pretestība), ķermens mūžīgi kustēsies taisnā virzienā bez mazākās ātruma maiņas.

§ 2. Paātrinājuma atkarības princips no spēka.
(Otrais Newton'a pamatlikums).

Formulējuši I Newton'a mēchanikas principu, noteiksim konkretāki kustības maiņas elementus, izejot no Njutona I pamatlikuma.

Kustības maiņu un spēka iedarbi uz ķermeni ir jāpieņem, ja:

1) taisna virziena kustība bez virziena maiņas pārgājusi paātrinātā jeb nolēninātā (ātrums kļuvis nevienmērīgs);

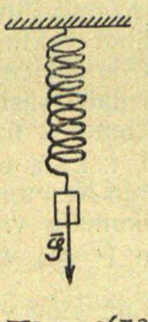
2) ātruma lielums palicis negrozīgs, bet kustības virziens mainījies (par piem., kustība ar vienmērīgu ātrumu gar aploci), un

3) abi elementi, ātrums un virziens, mainījušies (p. p., nevienmērīga kustība gar aploci).

Kinētika prot šos trīs gadījumus apvienot, ievedot tādu paātrinājuma (ātruma maiņas laika vienībā) jēdzienu, ka visos trijos minētos gadījumos jautājums vienmēr reducējās pie paātrinājuma noteikšanas, jo pēdējā atspoguļojās visi kustības maiņas elementi (arī gadīumā, kad ķermens kustās vienmērīgi gar aploci, kad paātrinājums tomēr darbojās radiusa virzienā pret aploces centru).

Dēfīnējuši mēchanisko jēdzienu par spēku, aplūkosim viņu kā lielumu un noskaidrosim viņa, kā tāda, īpašības. Katra ķermeņa īpašība, kuŗa var mainīties, palielinājoties jeb pamazinājoties, un bez tam, kuŗa var tikt salīdzināta (mērīta) ar attiecīgu vienību, ir lielums. Spēku mēs varam mērīt vienīgi, mērot spēka iedarbes sekas uz ķermeņa kustību: mūsu muskuļu piepūlējuma sajūta ir tik subjektīvs iespaidojums, ka viņu nevar izlietot, kā spēka mēru un bez tam arī katra spēka iedarbi nemaz nav iespējams pārbaudīt ar mūsu muskuļu piekūlējuma sajūtu. No augšā minētā jau noskaidrojās spēka mērīšanas iespējamība caur ķermeņa kinētisko lielumu — paātrinājumu, kā spēka iedarbes rezultātu, jo paātrinājums ir ķermeņa kustības maiņas mērs, bet spēks ir kustības maiņas cēlons. Nu rodās jautājums par tās funkcijas veidu, kuŗa saista spēku no vienas — ar viņa iedarbes sekām — paātrinājumu — no otras puses. Newton'am ir izdevies šo funkcijas veidu uziet, kā vienkāršu proporcionalitāti, liekot $\overline{P}$ (spēks) $= k\overline{j}$... (1), kur $\overline{j}$ — minētā kustības maiņa-paātrinājums ir vektoriēls lielums, kādēļ arī spēkam jābūt vektoriēlam lielumam, bet k — šīs proporcionalitātes koeficients, īpatnējs katram atsevišķam ķermenim, kuŗu mēs dabā sastopam. Noskaidrosim šī proporcionalitātes koeficienta k fizikālo nozīmi. No nol-juma (1) seko, ka, ja $\overline{j} = 0$, t. i., ja paātrinājuma nav, tad spēks $P = 0$, un ķermens veido Newton'a I likuma kustības prototīpu. Tā tad I Newton'a likums ir viņa II likuma atsevišķs gadījums. Bet, ja $\overline{j} = 0$ un $\overline{P} = 0$, tad $k = \frac{\overline{P}}{\overline{j}} = \frac{0}{0}$, t. i. koeficients k paliek nenoteikts un viņu var mērīt tikai tad, ja uz ķermeni darbojās kāds spēks un tādēļ Newton'a kustības prototīpā k ir vienmēr nenoteikts. Šī ir viena k īpašība, kuŗu mēs varam uz II likuma pamata noskaidrot. Ņemsim vērā to spēku, kuŗam katrs ķermens dabā ir padots, t. i. ķermeņu smaguma spēku $\overline{G}$. Smaguma spēka paātrinājums ir tāds lielums, kuŗu mēs tieši varam novērot un mērīt. Šo paātrinājumu mēchanikā mēdz apzīmēt ar $\overline{g}$. $\overline{g}$ nav pastāvīgs lielums. Viņš ir atkarīgs jeb, kā mēdz teikt, viņš ir funkcija no ģeografiskā platuma grāda un punkta augstuma virs jūŗas līmeņa. Šī $\overline{g}$ atkarība no platuma grāda nav sevišķi liela un viņa svārstās jūŗas līmeņa augstumā no 978 ctm./sec.^{2} uz ekvatora līdz 983,2 ctm./sec.^{2} pie zemes lodes poliem. Parasti pieņem vidējo $\overline{g}$ nozīmi $\overline{g} = 981$ ctm./sec.^{2} Ja nu mēs visu spēku mērīšanai par spēku vienību gribam vēlēt smaguma spēku, kuŗa paātrinājums $\overline{g}$ ir constants un zināms, tad spēka vienības izvēle būtu bijusi ekvivalenta (vienvērtīga) kāda noteikta ķermeņa, raksturota caur noteiktu koeficientu k, izvēlei dabā. Uzrakstot smaguma spēkam $\overline{G}$

Newton'a nolīdzinājumu $\overline{G} = k\overline{g}$, redzam, ka divu vienādu spēku gadījumā pie vienāda paātrinājuma abiem viņiem vajadzētu tikt raksturotiem caur vienādiem k. Noskaidrosim jautājumu, kādus spēkus saukt par vienādiem. Speciēli ar šo jautājumu mēs nodarbosimies atsevišķā nodaļā, kur ies runa par spēku mērīšanu. Šeit tikai izlietosim spēku īpašību deformēt (mainīt veidu) cietus ķermeņus. Par vienādiem mēs varam skaitīt divus tādus spēkus, kuŗi vienādi deformē kādu cietu ķermeni. Spēku salīdzināšanai izvēlēsimies tādu ķermeni, kuŗa deformācijas pēc iespējas ir lielākas un kuŗas pie tam, kad ķermens atbrīvots no spēka iespaida, arī zūd, t. i. izvēlēsimies ķermeni ar tā saucamām elastīgām dēformācijām. Šāds ķermens, pa piem., ir elastīga metāla spirale, kuŗas viens gals (sk. zīm. 32.) cieši piestiprināts, bet otrā galā pielikts spēks smaga ķermeņa veidā, kuŗš radīs zināmu spirales izstiepi. Garām ejot minēsim, ka šāda spirale parasti ir mums visiem pazīstamo atsperu svaru jeb dinamometra sastāvdaļa. Tagad izvēlēsimies par to ķermeni, kuŗš ietilps spēka vienības noteikšanā, noteiktu tilpumu tā šķidruma, kuŗš visvairāk dabā izplatīts — ūdens pie noteiktas temperatūras un viņa tīra ķimiska sastāva. Tad viegli konstatējams, ka spēka efekts (spirales izstiepe) un līdz ar to arī k paliek proporcionāls ūdens tilpumam. Bet kāda noteikta ķermeņu īpašība arī mainās proporcionēli tilpumam? Šāda īpašība ir vienīgi homogēnu ķermeņu, kuŗu priekšstāvis ir ūdens, materijas (vielas) daudzums jeb masa. Tā tad Newton'a nolīdzinājuma proporcionalitātes koeficients k mēra ķermeņa masu.



Zīm. №32.

Mēs varam vēl izdarīt vienu eksperimentu, kuŗš pierāda, ka k ir masas mērs. Noslodzēsim spirāli ar kādu plastisku ķermeni, p. piem., ar mālu piku. Spirāle gūs zināmu izstiepi. Tagad sāksim mainīt mālu pikas visdažādākās īpašības, kā: temperatūru, formu, tilpumu u. t. t., neaizskarot vienīgi vielas daudzumu. Tad izrādīsies, ka ne viena no šo īpašību maiņām negrozīs spirāles izstiepi, bet pēdējā mainīsies tikai tad, ja no mālu pikas noņemsim kādu daļu jeb pieliksim tai klāt. Pieliekot jeb noņemot kādu tā paša ķermeņa daļu, mēs palielinam jeb samazinam šī ķermeņa materijas daudzumu jeb masu, pie kam Newton'a nolīdzinājums tanī pašā laikā reģistrē k maiņu. Slēdziens no šī eksperimenta: k ir ķermeņa masas noteicējs. Sakarā ar šo, k vietā tagad lietosim apzīmējumu m un Newton'a nolīdzinājumu rakstīsim zem veida $\overline{P} = m\overline{j}$.

Sakarā ar Newton'a nolīdzinājumu $P = m\bar{j}$, masas m vērtība ir atkarīga no spēka vienības izvēles. Ar šo jautājumu nodarbosimies sīkāki jau minētā mēchanikas daļā, kuŗa apskata spēka mērīšanas metodes jeb tā saucamā dinamometrijā.

Newton'a nolīdzinājums nav tiešs eksperimenta iemiesojums. Ja tas tā būtu, tad varētu rasties šaubas par viņa vispārējo nozīmi un vērtību. Bet mēs varam gan izvest dažu labu eksperimentu, kuŗš varētu dot, tā sakot, ierosinājumu šī nolīdzinājuma uzstādīšanai.

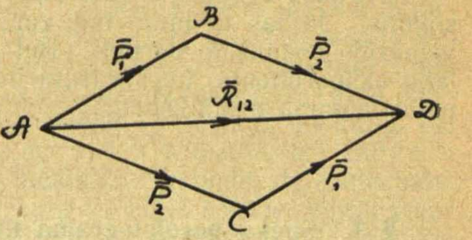
§ 3. Spēku paralelograma likums. Spēku poligons.

Pieņemsim, ka mēs jau pilnīgi esam atrisinājuši dinamomentrijas jautājumu, kā atšķirt vienu spēku no otra jeb kā viņus mērīt, t. i. salīdzināt ar kādu noteiktu spēku, kuŗu esam pieņēmuši par spēka vienību. Garām ejot, šo jautājumu mēs jau drusku aizskārām, aplūkojot Newton'a formulas koeficienta k fizikālo nozīmi. Pagaidām apmierināsimies ar to mērīšanas metodi, kuŗu mēs tur uzstādījām.

Newton'a formula dod viena spēka izteiksmi, kuŗš darbojās uz noteiktu ķermeņa punktu, jeb materiēlu punktu. Bet uz vienu un to pašu punktu var iedarboties vairāki spēki, pie kam viņu kopējais efekts (iespaids) izteiksies caur ķermeņa vienu vienīgo paātrinājumu $\bar{j}$, kuŗu arī radītu viens vienīgs, zināms, tā saucamais šo atsevišķo spēku kopspēks jeb rezultante $\bar{R}$. Rodās jautājums, kā uziet šo doto spēku $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2 \ldots \bar{P}_n$ kopspēku $\bar{R}$, kuŗš pilnīgi atvietotu viņu kopdarbību, būtu ekvivalents dotai spēku sistēmai, lai pēc viņa uziešanas varētu iedomāties dotos spēkus pavisam atmestus, ņemot viņu vietā spēku $\bar{R}$. Šī spēka uziešanai Newton's papildina savu II pamatlikumu. Šo papildinājumu var formulēt tā: paātrinājums, kuŗu ķermenim piešķir kāds spēks, nav atkarīgs ne ne no citu spēku darbības, kuŗi iedarbojās tanī pašā punktā, ne arī no ķermeņa ātruma, jeb: katra spēka darbības rezultāts ir neatkarīgs kā no pārējo, uz to pašu punktu iedarbojošos spēku darbības rezultātiem, tā arī no ķermeņa ātruma. (Spēku darbības neatkaramības princips). Šī papildinājuma sekas ir tā saucamais spēku paralelograma likums, kuŗu tūliņ noskaidrosim.

Vispirms pieņemsim, ka doti tikai divi spēki $\bar{P}_1$ un $\bar{P}_2$, kuŗu kopspēks jeb rezultante $\bar{R}_{12}$ ir uzejama. Ja abu spēku

$\overline{P}_1$ un $\overline{P}_2$ darbība ir neatkarīga viena no otras, tad viņu kopspēks jeb rezultante $\overline{R}_{12}$ ir uzejama, kā paralelograma ABCD diagonāle AD, kuŗš būvēts uz dotiem spēkiem $\overline{P}_1$ un $\overline{P}_2$ (sk. zīm. 33.). Ja ieskatāmies zīmējumā, tad redzam, ka trīsstūris ABD ir veidots tā, ka $\overline{AB}=\overline{P}_1$, $\overline{BD}=\overline{P}_2$ un $\overline{R}_{12}=\overline{AD}$. Bet, ja tas ir tā, tad, saskaņā ar ģeometriskas (vektoru) zumas īpašību: $\overline{R}_{12}=\overline{P}_1+\overline{P}_2$, divu spēku $\overline{P}_1$ un $\overline{P}_2$ kopspēks jeb rezultante $\overline{R}_{12}$ ir uzejams, kā doto spēku vektoru $\overline{P}_1$ un $\overline{P}_2$ ģeometriskā zuma.

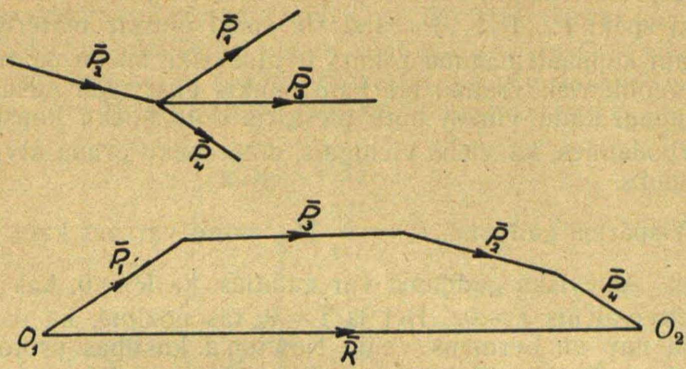


Zīm. №33

Pieņemsim tagad, ka uz punktu A darbojās vēl trešais spēks $\overline{P}_3$. Tad, saskaņā ar to pašu, jau minēto, II likuma papildinājumu, papriekšu, jau zināmā kārtībā, var uziet $\overline{R}_{12}$, kuŗam tad pievieno klāt $\overline{P}_3$. Spēku $\overline{R}_{12}$ un $\overline{P}_3$ rezultante ir $\overline{R}_{123}=\overline{R}_{12}+\overline{P}_3$. Bet, tā kā $\overline{R}_{12}=\overline{P}_1+\overline{P}_2$, tad $\overline{R}_{123}=\overline{P}_1+\overline{P}_2+\overline{P}_3$ un vispāri, ja dots n spēku, tad $\overline{R}=\sum_{i=1}^{i=n}\overline{P}_i$ — ar vienu vārdu sakot, doto n spēku kopspēks jeb rezultante ir šo spēku ģeometriskā jeb vektoru zuma. No sacītā arī izriet kopspēka vispārējais uziešanas paņēmiens: lai uzietu doto n spēku kopspēku $\overline{R}$, ir jāuzbūvē no dotiem spēkiem tā saucamais spēku poligons, kuŗa noslēdzošā mala ar pretējo dotiem spēkiem apakšvirzienu ir meklējamā rezultante $\overline{R}$.

Par piem., ja ir doti spēki $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$ un $\overline{P}_4$, tad viņu rezultante $\overline{R}$ ir uzejama, ņemot kaut kādu brīvu punktu O_1 (sk. zīm. 34.), izejot no kuŗa nospraužam visus dotos spēkus kaut kuŗā kārtībā, paraleli viņu dotiem virzieniem. Savienojot izejas punktu O_1 un poligona gala punktu O_2 ar taisni O_1O_2, kuŗai piešķirot apakšvirzienu, pretēju vektoru zumandu (komponentu) apakšvirzieniem, gūstam kopspēka vektoru $\overline{R}$, kuŗš pilnīgi, kā virziena ziņā, tā arī skaitliski reprezentē doto spēku $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$ un $\overline{P}_4$ kopspēku. Šis kopspēks iet caur punktu, uz kuŗu darbojās dotie spēki.

Mēchanikā lietojamais paralelograma likums nav tāds likums, kuŗš tikai dibināts uz eksperimenta (Erfahrungs gesetz), kā tas daudzos mēchanikas kursos tiek apgalvots, bet viņš ir likums — patiesība, ar kuŗu neviens eksperimenta re-

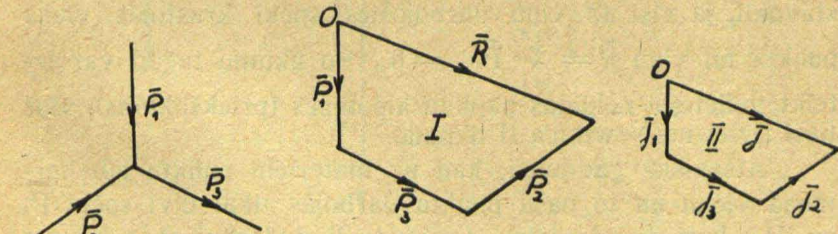


Zīm. №34.

zultāts nedrīkst būt pretrunā. Izejot no dažām aksiomām, šo likumu var izvest pilnīgi teorētiski (deduktīvā ceļā).

§ 4. Tāļākie Newton'a II likuma secinājumi.

Spēku līdzsvars. Piegriezīsimies jautājumam par koppaātrinājumu $\overline{j}$, kuŗš rodas vairāku spēku iedarbes gadījumā uz materiēlu punktu (jeb kādu materiēla ķermeņa punktu, kuŗā



Zīm. №35.

varam iedomāties koncentrētu visa ķermeņa masu). Tā kā $\overline{P} = m\overline{j}$, tad ir iespējams uzbūvēt divus poligonus: spēku un paātrinājumu (sk. zīm. 35.). Starp šo poligonu malām pastāv sakarība: $\frac{P_1}{j_1} = \frac{P_2}{j_2} = \frac{P_3}{j_3} = \frac{R}{j} = m$, jo abi poligoni ir līdzīgi, no kurienes $\overline{R} = m\overline{j}$. Šis ir dinamikas pamatnolīdzinājums. Vispārējā veidā viņu var uzrakstīt tā:

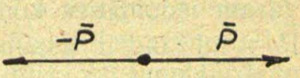
$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{P}_i = \sum_{i=1}^{i=n} m\bar{j}_i = m\bar{j} \quad \ldots\ldots \quad (1\cdot a)$$

un interpretēt (tulkot) sekoši: ja uz materiēlu punktu darbojās vairāki spēki $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2 \ldots \bar{P}_n$ tad šie spēki piešķir materiēlam punktam koppaātrinājumu $\bar{j}$, kuŗš ir atsevišķu spēku paātrinājumu ģeometriskā zuma, pie kam punkts gūst tādu pašu paātrinājumu, kādu viņam būtu piešķīris doto spēku kopspēks $\bar{R}$, darbodamies, kā viens vienīgais, doto spēku grupu atvietojošs, spēks.

Vispārējā gadījumā $\bar{R} = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{P}_i = m\bar{j}$ var gūt kaut kuŗu nozīmi. Atsevišķā gadījumā var gadīties, ka $\bar{R} = 0$, kas būtu bijis ekvivalents $j = 0$. Bet ja $j = 0$, tas nozīmē, ka paātrinājuma nav un ķermens veido Newton'a kustības prototīpu, t. i. jeb nu ķermens kustās taisnā virzienā ar vienmērīgu ātrumu v_0 jeb arī atrodās miera stāvoklī, $v_0 = 0$, atrodoties tomēr zem spēku īpatnēja iespaida $\bar{R} = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{P}_i = 0$. Še nu noskaidrojās tā īpatnējā spēku sakarība, kad viņi rada ķermeņa līdzsvara stāvokli un paši līdzsvarojās, par ko jau tika minēts, runājot par Newton'a inerces likumu. Tagad šo sakarību var formulēt tā: materiēls punkts atrodās līdzsvara stāvoklī resp. miera stāvoklī, ja viņā iedarbojošos spēku zuma $\bar{R} = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{P}_i = 0$, jeb materiēls ķermens atrodas līdzsvara stāvoklī, ja visi uz viņu darbojošies spēki krustojās vienā punktā un viņu $\bar{R} = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{P}_i = 0$. Šo likumu tagad var izteikt, nelietojot nekādas papildu hipotēzes (priekšlikums), viņš tieši izriet no Newton'a II likuma.

Atsevišķā gadījumā, kad uz materiēlu punktu jeb ķermeņa vienu un to pašu punktu darbojās tikai divi spēki $\bar{P}_1$ un $\bar{P}_2$, kuŗi ir vienīgie (citi nekādi nedarbojās), seko, ka $\bar{P}_1 = -\bar{P}_2$, t. i. šiem spēkiem jābūt vienādiem, pretēji virzītiem ar kopējo darbības līniju.

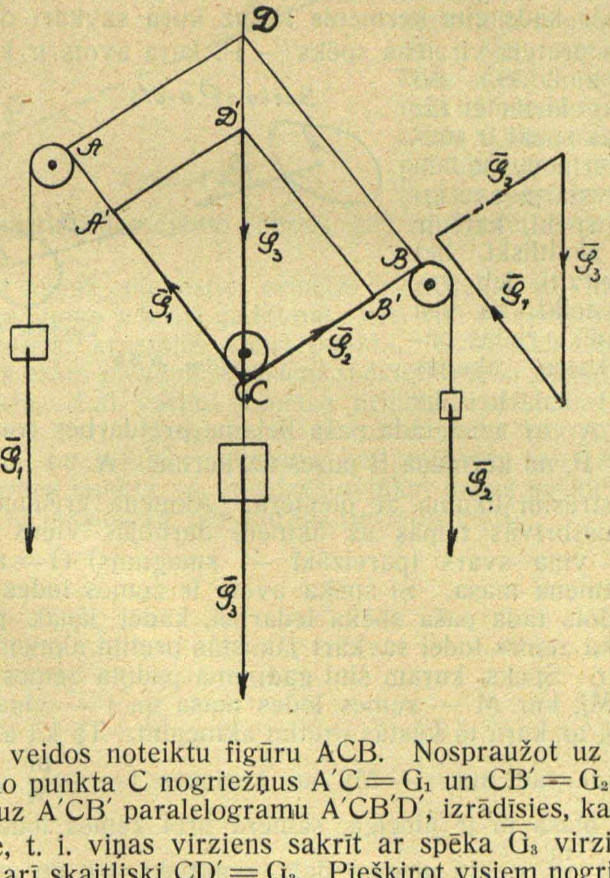
Attiecībā uz trīs spēkiem $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$ un $\bar{P}_3$ līdzsvara likumu var ilustrēt ar jau no fizikas pazīstamo eksperimentu (sk. zīm. 37.). Skritulīši A un B ir cieši (negrozīgi) nostiprināti un pār viņiem ir pārmesta auklīņa, kuŗas galos pielikti spēki $\bar{G}_1$ un $\bar{G}_2$ smagu ķermeņu veidā. Ja



zīm. №36

uz šādu divu spēku sistēmu neiedarbosimies vēl ar kādu trešo spēku, tad viņas līdzsvars nebūtu panākams, jo lielākais spēks norautu no skritulīšiem mazāko. Lai tas nenotiktu, novietosim uz auklīņas trešo skritulīti C tā, lai viņš varētu gar auklīņu slīdēt, un piekārsim viņam kaut kādu svaru $\overline{G}_3$. Izlaiduši visus trīs svarus no rokām, redzēsim, ka pēc dažām svārstībām šo triju spēku sistēma nonāks līdzsvara stāvoklī, pie kam

zīm. №37.

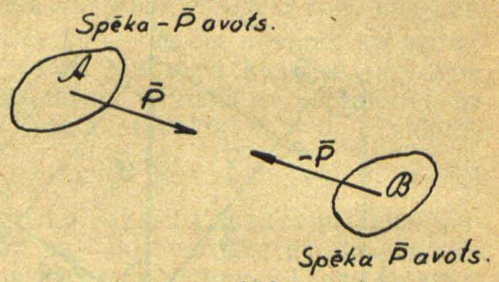


auklīņas veidos noteiktu figūru ACB. Nospraužot uz figūras malām no punkta C nogriežņus $A'C = G_1$ un $CB' = G_2$ un uzbūvējot uz $A'CB'$ paralelogramu $A'CB'D'$, izrādīsies, ka CD' ir vertikāle, t. i. viņas virziens sakrīt ar spēka $\overline{G}_3$ virzienu un bez tam arī skaitliski $CD' = G_3$. Piešķirot visiem nogriežņiem $A'C$, CB' un CD' apakšvirzienus attiecīgo spēku darbības virzienos, gūsim sakarību: $\overline{G}_1 + \overline{G}_2 + \overline{G}_3 = 0$, t. i., ka līdzsvara gadījumā spēku ģeometriskā zuma $\overline{R} = \overline{G}_1 + \overline{G}_2 + \overline{G}_3 = 0$. Ja $\overline{G}_3$ vietā ņemtu — $\overline{G}_1$, tad $\overline{G}_1 + \overline{G}_2 + (-\overline{G}_3) = 0$, no kurienes $\bar{G}_3 = \bar{G}_1 + \bar{G}_2$, t. i., ja spēkam, kuŗš līdzsvaro pārējos divus, pārmainām zīmi, tad gūstam šo divu spēku rezultanti $\bar{R}$.

§ 5. Newton'a III pamatprincips.

Spēku akcijas un reakcijas princips (Принцип взаимодействия сил. Das Prinzip der Gleichheit von Aktion und Reaktion oder von Wirkung und Gegenwirkung).

Avots, no kuŗa rodās darbojošais uz ķermeni A spēks $\bar{P}$, ir vienmēr kāds cits ķermenis B, uz kuŗu savkārt darbojas tāds pats pretējā virziena spēks — $\bar{P}$, kuŗa avots ir ķermens A. (Sk. zīm. 38.). Šo faktu var formulēt tā: visi dabas spēki ir materiēlu ķermeņu sadarbes (savstarpīgas iedarbes), spēki, kuŗi ir vienādi skaitliski, bet pretēji virzīti, jeb varam arī teikt, ka visi dabas spēki rodās pāriem: katra akcijas spēka $\bar{P}$ iedarbei uz ķermeni A var uziet tāda paša lieluma pretdarbes (reakcijas) spēku — $\bar{P}$, no ķermeņa B puses uz ķermeni A.

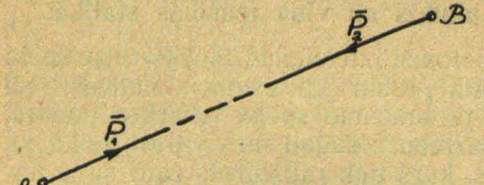


Zīm. №38.

Ilustrēsim likumu ar piemēru. Akmeņa krišanas gadījumā gaissbrīvās telpās uz akmeni darbojās viens vienīgs spēks — viņa svars (pareizāki — smagums) $G = mg$, kur m — akmeņa masa. Šī spēka avots ir zemes lodes centrs, kuŗš padots tāda paša spēka iedarbei, kādēļ jānāk pie slēdziena, ka zemes lodei savkārt jākustās pretim akmenim. Tā tas arī ir. Spēks, kuŗam šinī gadījumā padota zemes lode ir $-G = Mj$, kur M — zemes lodes masa un j — viņas paātrinājums, ar kuŗu tā kustās pretim akmenim. Tā kā abi spēki ir vienādi, tad $mg = -Mj$, no kurienes $j = -\frac{m}{M} g$. Bet akmeņa masa m ir niecīga, samērā pret zemes lodes masu M, kādēļ $\frac{m}{M}$ ir ļoti niecīga daļa, praktiski $= 0$ un arī $j = 0$.

Ja Newton's nebūtu uzstādījis savu III mēchanikas pamatlikumu, tad trūktu izskaidrojuma parādībai, kādēļ smagi ķermeņi, padoti smaguma spēkam, nākdami kontaktā ar citiem ķermeņiem (smags ķermens dinamometra spirāles galā, smags ķermens uz horizontālas plāknes u. t. t.) gūst zem šī spēka iespaida līdzsvara stāvokli. Izskaidrojumu dod III Newton'a pamatlikums: akcija $\bar{A}$ izsauc reakciju $\bar{N}$ no atbalsta ķermeņa puses, pie kam sakarība starp $\bar{A}$ un $\bar{N}$ ir: $\bar{A} + \bar{N} = 0$.

Arī vēl citi mēchaniskas dabas fakti prasa šāda likuma uzstādīšanu. Pieņemsim, ka divi ķermeņi A un B, kuŗi vēl nav nākuši kontaktā (sk. zīm. 39.), padoti diviem nevienādiem spēkiem $\bar{P}_1$ un $\bar{P}_2$. Iedomāsimies abus materiēlos ķermeņus savienotus caur cietu, materiēlu iesmu. Ja nu abi šie spēki nebūtu vienādi, tad sistēma no diviem materiēliem ķermeņiem gūtu paātrinājumu, pie kam ātrums beidzot pārsniegtu katru iedomājamo robežu, kas runā pretim dabas parādībām.



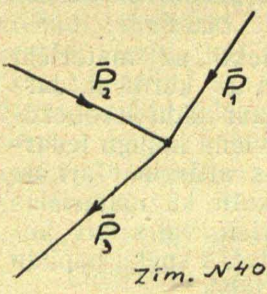
Zīm. №39.

Visi augšā pievestie principi ir attiekti uz materiēla punkta gadījumu jeb arī gadījumu, kad visi uz ķermeni darbojošies spēki krustojās vienā punktā. Caur tādu ierobežojumu mēs esam pieņēmuši visiem spēkiem vienu kopīgu iedarbes punktu. Lai varētu minētos principus attiecināt arī uz materiēliem ķermeņiem, kuŗus nevar uzskatīt kā materiēlus punktus — un tas būs gadījums, kad spēkiem vairs nav kopēja iedarbes punkta, — vajadzēs aplūkot dažas spēku papildu īpašības un aksiomas, par kuŗām runāsim tāļāk.

V. nodaļa.

§ 1. Spēka iedarbes punkts un viņa īpašības statikā.

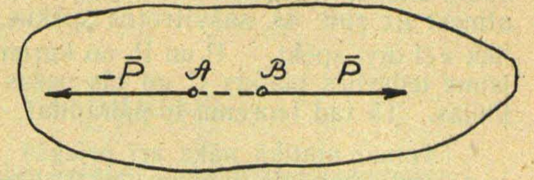
Līdz šim mēs esam lietojuši izteicienu: „spēks resp. spēki iedarbojās ķermeņa punktā“, caur ko esam atzīmējuši vēl vienu spēka elementu — tā saucamo spēka iedarbes punktu, kurš arī raksturo spēka darbību. Tagad mēs varam teikt, ka spēks ir vektoriēls lielums, kurš tiek raksturots caur savu lielumu jeb skaitlisko nozīmi (moduli), virzienu un noteiktu iedarbes punktu. Kas attiecās uz grafisko (caur zīmējumu) spēka attēlojumu, tad, pieliekot viņu noteiktā ķermeņa punktā, mēs šo pielikšanu līdz šim attēlojām tā, ka iedarbes punktu savietojām gan ar vektora gala punktu, gan ar viņa sākuma punktu. (Sk. zīm. 40.). Visi, uz zīm. 40. rādītie spēki iedarbojas vienā un tajā pašā ķermeņa punktā un no statikas viedokļa nekādas izšķirības starp šiem attēlojumiem nav. Starpība radīsies tikai tad, kad sāksim nodarboties ar jautājumu par šo spēku iespaidu uz cieta ķermeņa dēformācijām (veidmaiņām) un ķermeņa stiprumu. Tad mēs izšķirsim īpatnējas īpašības, kuras raksturo „spiede“ un „stiepe“ Spiedi tad raksturos $\bar{P}_1$ un $\bar{P}_2$, bet stiepi — $\bar{P}_3$.



Zīm. №40.

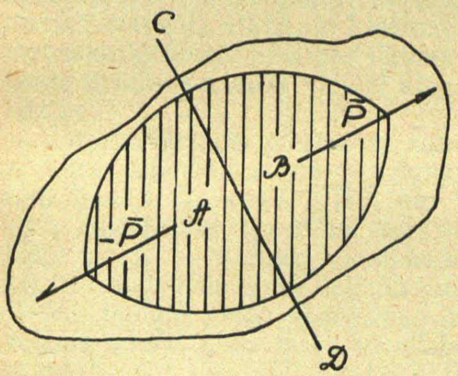
Kad spēku grupa $\bar{P}_1 \ldots \bar{P}_n$ iedarbojas uz materiēlu punktu jeb ķermeņa noteiktu punktu (un pēdējā gadījumā, kā vienīgie uz visu ķermeni), tad līdzsvara gadījumā dotā spēku grupa reducējās, kā jau tika rādīts, pie diviem vienādiem, bet pretēji virzītiem, spēkiem, kuri iedarbojās tanī pašā punktā. Līdzsvara šēma ir dota caur zīm. 36.

Attiecībā uz tādiem pašiem diviem spēkiem, kuri neiedarbojās vienā kopējā punktā, bet dažādos divos punktos A un B uz kopējās šo spēku darbības līnijas, tiek pieņemts kā aksioma, kā arī šie spēki līdzsvarojās (sk. zīm. 41.). Šis līdzsvars ir acīm redzams, ja lietosim sekošu prātojumu. Pieņemsim, ka divi spēki $\overline{P}$ un — $\overline{P}$ vienāda lieluma, bet pretēja virziena iedarbojas punktos A un B uz kopējās taisnes.



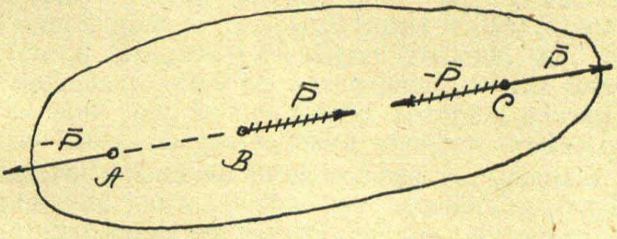
Zīm. №41

Izdalīsim dotā ķermeņa masā ķermeni, simetrisku kā attiecībā uz spēku darbības līniju, kuŗa paliek par izdalītā ķermeņa centrālo simetrijas asi (sk. zīm. 42.), tā arī attiecībā uz plākni CD, kuŗu iedomājamies ejošu perpendikulāri pret simetrijas asi — abu spēku darbības līniju. Nav šaubu, ka šī simetriskā ķermeņa daļa atradīsies miera stāvoklī zem abu spēku $\overline{P}$ un — $\overline{P}$ darbības iespaida, jo mēs nevaram izšķirt nevienu virzienu, kuŗā šī daļa varētu sākt kustēties. Šis stāvoklis nevar tikt traucēts caur to, ka pēc tam izdalītam ķermenim pievienosim pārējo masu, uz kuŗu nekāds spēks nedarbojas.



Zīm. №42.

Secinājums no iepriekšējās aksiomas ir tas, ka statikā spēkam var neizšķirt noteiktu iedarbes punktu, bet gan tikai noteiktu darbības līniju, kuŗas virzienā spēks pēc patikas var tikt pārnests. Patiesi, iedomāsimes divus spēkus, kuŗi



Zīm. №43.

līdzsvarojās, pieliktus divos punktos A un B (sk. zīm. 43.) un pieliksim punktā C vēl divus tāda paša lieluma, kā pirmie, spēkus, bet arī viens otram pretēji virzītus. Caur šādu divu spēku pielikšanu, kuŗi paši līdzsvarojas, esošais ķermeņa līdzsvars netiek traucēts. Bet tagad uz aksiomas pamata var atmest uz zīm. 43. sašvītrotos spēkus, kuŗi līdzsvarojas; paliek vēl divi spēki — $\bar{P}$ un $\bar{P}$, no kuŗiem pēdējam tagad piemīt jauns iedarbes punkts C un tās pašas agrākās viņa darbības līnijas. Tā tad teorēma ir pierādīta.

Tomēr statikā nāks arī priekšā tādi speciēli līdzsvara jautājumi (stabilais, labilais, astatiskais jeb indiferentais līdzsvars), kur tāda spēku iedarbes punkta pārņemšana nebūs pielaujama, jo caur to parādības aplūkojamā īpašība zustu. Visos šādos gadījumos tomēr spēku iedarbes punkta pastāvība un noteiktība būs viegli konstatējama.

VI. nodaļa.

§ 1. Mēchanisko lielumu „dimensijas" simbols.

Lai stātos pie kaut kāda mēchaniskas dabas lieluma mērīšanas, mums vispirms jāizvēlas attiecīga mēra vienība un jānoskaidro, kādā ceļā mainīsies mēramā mēchaniskā lieluma skaitliskā nozīme atkarībā no mēra vienības izvēles. Mēchanisko pamatjēdzienu dēfīnīcija vispārējā gadījumā viegli ir saskatāmi trīs pamatlielumi: garums, laiks un materija. Kinēmatikā materija atkrīt, jo kinēmatika nodarbojās tikai ar ģeometrisku ķermeņu kustības likumu pētīšanu, kādēļ arī kinēmatiskie lielumi sastādās vienīgi ar garuma un laika jēdzienu palīdzību.

Katra lieluma mērīšanas rezultāts ir nenosaukts skaitlis, ar kuŗa palīdzību mēramo lielumu, par piem. garumu s, varētu izteikt tā: $s = (s) . [L]$, kur s apzīmē mēramo lielumu, (s) — mērīšanas rezultātu, kuŗš ir nenosaukts skaitlis (reine Zahl) un [L] — garuma vienības apzīmējums (nosaukts skaitlis), t. i. katru mēramo lielumu varam izteikt, kā produktu no diviem minētā veida skaitļiem. Ja nu mēramo lielumu būtu vēlams izteikt citās mēru vienībās, par piem. vienībās $[L] = (k) [l]$, tad $s = (s) [L] = (s . k) [l]$. Še ievestā lieluma izteiksmes apzīmējuma priekšrocības ir skaidri redzamas.

Par piem., ja kāds garums s, mērīts metros, dotu rezultātu 0,5, tad varētu rakstīt, ka $s = (0,5)$ [mtr.]. Ja to pašu garumu mēs gribētu izteikt ctm., tad, tā kā [mtr.] = =(100) [ctm.], gūstam: $s = (0,5)$ [mtr.] = (0,5) . (100) [ctm] = = (50) [ctm.]. Iekavās [ ] ieslēgto izteiksmi sauc par Maxwell'a simbolu, jo viņš šo apzīmējumu ievedis matēmatiskā fizikā, lai caur viņu, kā mēdz teikt, apzīmētu mērāmā lieluma „dimensiju", t. i. pieņemtās mēra vienības sastāvu.

Maxwell'a simbola priekšrocības vēl spilgtāki izpaužās gadījumos, kad mēra vienība nav elementāra, bet kad viņā ietilpst divi no minētiem pamatlielumiem: garums un laiks (kinēmatikā) un beidzot — visi trīs: garums, laiks un materija (dinamikā).

Par piem., ātrums ir ķermeņa pārvietojums laika vienībā. Ja laika momentā t_1 ķermens atrodās uz savas trajektorijas,

s_1 atstatumā nokāda sākuma punkta A, bet momentā t — atstatumā s no tā paša punkta, tad ķermeņa pārvietojums ir $s_1 - s = \Delta s$, bet attiecīgais laika sprīdis ir $t_1 - t = \Delta t$ un vidējais ātrums $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$. Tā kā s ir garums, tad Δs mēram garuma vienībās [L], bet Δt — laika vienībās [T], kādēļ $v = \frac{(\Delta s)}{(\Delta t)} \cdot \frac{[L]}{[T]} = \left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right) [LT^{-1}]$. Šis pārveidojums, kā redzams, izdarīts saskaņā ar alģebraisku formulu: $\frac{ab}{cd} = \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d}$. Še $[LT^{-1}]$ ir ātruma dimensijas simbols, kurš rāda, no kādām vienībām un kādā sakarībā sastādīta ātruma vienība.

Pieņemsim, ka L = 1 mtr., T = 1 sec. un prasīsim, kā tas pats ātrums izteiksies jaunā mēra vienībā, kura tiks sastādīta no ctm. un min. Tad, tā kā [mtr.] = (100) [ctm.] un [sec.] = $= \left(\frac{1}{60}\right)$[min.], gūstam: $v = (v)$ [mtr., sec.$^{-1}$] =

= (v) (100) (60) [ctm. min.$^{-1}$] = (6000 v) [ctm. min.$^{-1}$].

Tāpat kinēmatikā noskaidrojās paātrinājuma dimensija, kura ir $j = (j) [LT^{-2}]$. Tā kā spēks $P = mj$, tad $P = (mj) [M] [LT^{-2}] = (mj) [MLT^{-2}]$, kur [M] — masas vienība.

Par garuma mēra vienību fizikā pieņem 1 ctm., bet technikā — 1 mtr.; laika vienība parasti ir - sec. = $^1/_{86400}$ daļai no vidējās saules diennakts. Pie metra prototīpa izgatavošanas vadījās no domas, vēlēt šo vienību tā, lai viņa sastādītu kādu noteiktu daļu no kāda dabiska garuma. Par tādu izvēlējās $^1/_4$ daļu no Parīzes meridiāna, kura 0,00000001 = 10^{-8} daļai vajadzēja sastādīt 1 mtr. Vēlāki izdarītie mērījumi tomēr pierādīja, ka izgatavotais metra prototīps pilnīgi neatbilst šim dabiskam garumam un tādēļ viņa uzglabāšana prasa sevišķu uzmanību un rūpes.

Doma, mērīt laiku ar noteiktu daļu no vidējā saules diennakts ilguma, cilvēkā ir radusies, novērojot noteiktas dabas parādības — saules parādīšanās debessapvārkšņa noteiktā vietā periodiskumu, t. i. šīs parādības regulāru atkārtošanos. Tā kā šāda atkārtošanās stāv sakarā ar zemes lodes pilnu apgriešanos ap savu asi jeb pilna centrālā leņķa $\varphi = 2\pi$ veidošanu, tad faktiski laika sprīžu mērīšana starp diviem momentiem reducējās pie zināmu leņķu jeb aploču mērīšanas, un tādēļ laiks, kurš atbilst debess velves pagriezienam uz n^0, sastāda $\frac{n^0}{360}$ no diennakts ilguma jeb $86400 \cdot \frac{n^0}{360}$ sec. Tā kā laika mērīšana atbalstās uz zināmu, dabā notiekošu, rotācijas kustību, tad arī visiem laika mērīšanas instrumentiem, kā: chronometriem un pulksteņiem ir jābūt aparātiem, kuŗi kopē šo dabisko kustību, pie kam tā saucamie rādītāji apraksta ar vienmērīgu ātrumu vienādus ar debessvelvi leņķus un viņiem atbilstošās aploces.

F o r m u l u h o m o g e n i t ā t e. Visām formulām, kuŗas saista mēchaniskus lielumus, jābūt homogenām, t. i. visu viņu locēkļu dimensijām jābūt vienāda veida, vienādi sastādītām no pamatlielumiem, jo pretējā gadījumā, mainot pamatlielumus jeb pārejot no vienas mēru sistēmas uz otru, par piem. no [mtr. sec.$^{-1}$] uz [ctm. min.$^{-1}$], mēs konstatētu, ka vienādības zīme $=$ starp abām formulas daļām vairs nepastāv. Šāda dimensiju īpašība sniedz mums skaistu formulu uzbūves pareizības kontroles paņēmienu. Par piem., nevar starp gaŗumu lielumiem pastāvēt saistība: $x = a - b^2$, jo, ja arī pie kādas nebūt gaŗuma vienības, par piem., metra, šāda formula pastāvētu, tad pie pārejas uz ctm. viegli varētu konstatēt viņas nepareizību, jo tad būtu: $(x . 100)$ [ctm.] $= (a . 100)$ [ctm.] $-$ $(b^2 . 100^2)$]ctm.^{2}], kas nav vairs pareiza.

VII. nodaļa.

§ 1. Spēku salīdzināšana, spēku vienība un spēku mērīšana. (Dinamometrija.)

Iekams mēs vēl nebijām vienojušies, kādus spēkus skaitīt par vienādiem, un kā viņus mērīt, patiesību sakot, spēku neatkarības principa uzstādīšana un paralelograma likuma pārbaudīšana nebija iespējama, jo bija jādod spēku izšķiršanas paņēmieni. Loģiskā ceļā, pēc $\overline{P} = m\overline{j}$ uzstādīšanas, vajadzēja tūlīt pāriet uz dinamometrijas jautājumiem, pēc kam tad būtu iespēja papildināt Newton'a II principu ar spēku darbības neatkarības likumu.

Tā kā spēku izteiksmei mēs vēlējām kustības elementu (ātruma skaitliskās nozīmes un virziena maiņas) funkciju $\overline{P} = m\overline{j}$, kuŗa pie dotiem m un $\overline{j}$ ir viennozīmīga (однозначная, eindeutig), tad dotā ķermeņa zināmu kustības maiņu — paātrinājumu noteiks tikai viens vienīgs spēks skaitļa un virziena ziņā (vektors); otrs, jeb vairāki spēki, kuŗi varētu atšķirties no pirmā, nevar pastāvēt. Garāmejot minēsim, ka visām mechaniskām funkcijām jābūt reālām, vienozīmīgām un nepārtraktām, kāda arī ir Newton'a spēka funkcija.

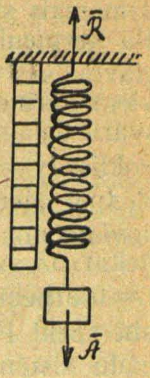
Sauksim tagad par vienādiem spēkiem tādus divus spēkus $\overline{P}_1$ un $\overline{P}_2$, kuŗi, neatkarīgi no viņu izcelšanās avotiem un dabas (elektrības, magnētisma, zemes pievilkšanas u. t. t.), pielikti viens pēc otra vienā un tai pašā materiēla ķermeņa punktā (jeb pielikti pie materiēla punkta) izsauc vienu un to pašu kustības maiņu — paātrinājumu. Šādiem diviem spēkiem jābūt skaitliski vienādiem un vienādi virzītiem, ņemot vērā tikko kā izteikto piezīmi par spēka funkcijas viennozīmīgumu. Ja tas ir tā, tad starp šiem diviem spēkiem $\overline{P}_1$ un $\overline{P}_2$ jāpastāv vienādībai $\overline{P}_1 = \overline{P}_2$, t. i. šie spēki ir saistīti caur ģeometrisku vienādību.

Spēku salīdzināšana var notikt, novērojot ķermeņa kustības maiņu dinamiskā stāvoklī, kad ķermens kustās, jeb statiskā stāvoklī, kad ķermens atrodās miera stāvoklī. Pirmā gadījumā ir darīšana ar acumirklīgiem iespaidiem, kuŗi ir grūtāki uztverami. Otrā gadījumā, kad $\bar{v} = 0$ un $\bar{j} = 0$, (šeit tāpat ir kustības maiņa, bet tikai speciēla, $\bar{j} = 0$) mēs gūstam ilgstošus iespaidus, kādēļ statiska spēka salīdzināšanas metode ir visērtākā. Beidzamās metodes šēma būtu apmēram sekoša. Materiēls ķermens, uz kuŗu darbojās zināms salīdzināmais spēks $\bar{P}_1$, tiek savienots ar kaut kuŗu otru materiēlu ķermeni, caur materiēlu ķermeņu sistēmu tā, lai rastos stāvoklis $\bar{v} = 0$, $\bar{j} = 0$ attiecībā uz visu sistēmu [svari ar diviem ķermeņiem uz svaru kausiem, kuŗi ir savienoti caur svaru daļām, nesenēm (коромысло) un saitēm]. Kad tāds stāvoklis ($\bar{v} = 0$, $\bar{j} = 0$) ir panākts, noņem salīdzināmo spēku $\bar{P}_1$ (par piem. noņemot attiecīgo ķermeni no svaru kausa) un novieto noņemtā spēka $\bar{P}_1$ vietā otru spēku $\bar{P}_2$ (konkrēti, uzliekot uz svaru kausiem otru ķermeni). Ja stāvoklis $\bar{v} = 0$, $\bar{j} = 0$ attiecībā uz mūsu sistēmu arī tagad netiek traucēts, tad abi spēki $\bar{P}_1$ un $\bar{P}_2$ ir vienādi, jo viņi abi ir izsaukuši vienādu sistēmas kustības maiņu $\bar{j} = 0$ un arī dinamiskā stāvoklī viņi būtu spējīgi izsaukt dotā ķermeņa vienu un to pašu kustības maiņu — paātrinājumu.

Var vēl piezīmēt, ka nupat aprakstītais paņēmiens, patiesi, dod iespēju pārkontrolēt ģeometrisku spēku vektoru $\bar{P}_1$ un $\bar{P}_2$ vienādību pilnīgi. Ja, par piemēru, viens no salīdzināmiem spēkiem grozītu savu virzienu, tikai skaitliski palikdams vienāds ar otru, tad šis apstāklis tūdīt atsauktos uz sistēmas stāvokli, kuŗš pārietu dinamiskā, pierādīdams, ka spēku vienādības pieņemtā nozīmē vairs nav.

Svari dod iespēju radīt tik delikātu un jūtelīgu līdzsvara stāvokli, ka mazākā salīdzināmo spēku nevienādība būs tūlīt konstatējama caur šī līdzsvara izjukšanu. Ar spēku salīdzināšanu vien svaru loma neaprobežojās: viņus lieto arī spēku mērīšanai ar pieņemto spēka vienību. Tomēr svaru princips nav tik vienkāršs, lai še varētu pilnīgi iztirzāt spēku mērīšanas metodi ar svariem. Daudz elementārāks ir jau augšā minētais dinamometrs. Dinamometra princips ir dibināts uz divu spēku līdzsvara parādību: $\bar{R} + \bar{A} = 0$, kur $\bar{A}$ ir pieliktais dinamometra galā mēramais spēks, bet $\bar{R}$ — spēks, kuŗu mēramais spēks katrā momentā līdzsvaro un kuŗu uz kopējās ar $\bar{A}$ darbības līnijas var iedomāt pieliktu dinamometra spirāles piestiprinājuma vietā (augšgalā) (sk. zīm. 44.). Ja nu $\bar{R}$ būtu zināms, tad mēramais spēks būtu $\bar{A} = \bar{R}$. Tomēr šeit šī attiecība tieši netiek izmantota. Izmantota tiek spēka $\bar{A}$ iedarbes blakusparādība — izstiept cieto ķermeni — spirāli. Ja ņu spēka vienība ir izvēlēta, tad reģistrē spēku vienību skaitu, kuŗš atbilst zināmai spirāles izstiepei. Attiecīgos spēku vienību skaitļus atzīmē uz metāla škalos, gar kuŗu kustās ar spirāli cieši savienotais rādītājs. Mērīšanas paņēmiens ir ļoti elementārs un saprotams.

Tagad visa lieta grozās ap spēka vienības uzstādīšanu. Šinī jautājumā mēs pavisam neesam saistīti. Spēka vienība ir kautkāds zināms spēks, kuŗu mēs vienojamies skaitīt par spēka vienību.



Zīm. N44

Tā kā spēks vienmēr ir saistīts ar ķermeņa masu, tad vispirms būtu jāvēl spēka vienībai zināma masa un tad — paātrinājums j.

Kas attiecās uz masu, tad var tikt pieņemta kāda dabā izplatīta ķermeņa masa. Ja homogēns ķermens ir vēlēts, tad viņa tilpums un temperatūra noteic masu. Par tādu ķermeni ir vēlēts dabā ļoti izplatītais ūdens, kuŗš ļoti ērti pieņem kautkuŗa ģeometriska ķermeņa, kā viņu ieslēdzošā trauka, formas. Pie vēlētā tilpuma temperatūra tiek pieņemta 4^0 C, kad ūdens ir visblīvāks. Pie tādas temperatūras 1 kub. ctm. destilēta ūdeņa masa tiek skaitīta par masas vienību un saukta „grams-masa". Šī ir tā saucamās absolūtās mēru sistēmas masas vienība, kuŗa tiek lietota fizikā. Kā jau tika minēts, visi lielumi, kuŗi tiek lietoti mēchanikā un fizikā, var sastāvēt tikai no 3 pamatlielumiem: gaŗuma, laika un masas. Absolūtā mēru sistēmā visas vienības tiek sastādītas caur vienībām: gaŗuma — santim., laika — sekunde un masas — grams. Šo mēru sistēmu sauc arī par „centimetrs-grams-sekunde" (C. G. S.) sistēmu.

Tā tad jautājumu par masas vienību var izšķirt, kā redzējām, diezgan viegli. Kas attiecās uz paātrinājumu, tad absolūtā mēru sistēmā par tādu vienību pieņem ātruma pieaugumu par 1 sant. sekundē, caur ko rodās spēka vienība absolūtā mēru sistēmā, kuŗu sauc par dinu. Tā tad dina ir tas spēks, kuŗš masas vienībai, 1 gramam, piešķir paātrinājumu 1 sant. sekundē. Dinas dimensija ir (1) [dina] = = (1) [gr. ctm. sec.$^{-2}$], jo spēks $\bar{P} = m\bar{j}$, j = (j) [ctm. sec.^{2}]. Šī spēka vienība ir ļoti niecīga un, kā tāda, noder tikai tiem delikātiem spēku mērījumiem, kuŗi nāk priekšā fizikā. Tādēļ sastādīsim prāvāku spēka vienību, ņemot, kā masas vienību 1 kub. decmtr. tāda paša ūdens, kuŗu sauc par kilogramu — masa, un 10 mtr. par gaŗuma vienību. Šādu vienību sauc par megadinu: (1) [megadina] = (1) [kgr. masa 10 mtr. sec.$^{-2}$]. Tā kā kgr. = 1000 gr. un 10 mtr.=1000 ctm., tad (1) [megadina]= = (10^6) gr.-masa ctm. sec.$^{-2}$] = (10^6) [dina]. Ja par garuma vienību vēl decimetru (dm.), par masas vienību kgr. masu un laika vienību to pašu sekundi, tad gūstam kgr.-dm.-sec. sistēmu (K. D. S.), kurā 1 spēka vienība

$$P_1 = (1)\,[\text{kgr. masa dm. sec.}^{2}] = (10^4)\,[\text{gr. cm. sec.}^{-2}] = = 10^4 \text{ dinam.} = 0{,}01 \text{ megadinas.}$$

Tā kā šī spēka vienība arī vēl ir diezgan maza, tad techniskām vajadzībām var sastādīt jaunu spēka vienību, tā saucamo „vis“ (latiniski „spēks“) sistēmā: tonna-mtr.-sec.$^{-2}$ (T. M. S.), pie kam (1) [vīs] = (1) [tonna metr. sec.$^{-2}$] = = (10^8) [gr. ctm. sec.$^{-2}$] = (10^8) [dinam.] = (100) [megadinam].

Ja pēc spēka vienības sastādīšanas, kā paātrinājumu, vēlēsim lielumu, kurš dabā visbiežāk nāk priekšā un, tā sakot, katru acumirkli atrodās zem rokas, tad mērīt ar tādu vienību būs visērtāki. Tāds paātrinājums ir dabā uz katra soļa novērojams smaguma spēka paātrinājuma g veidā. Viņa skaitliskā nozīme, kā zināms, nav visur vienāda, bet atkarājās no novērojuma vietas augstuma pār jūras spoguli un ģeografiskā vietas platuma grāda. Šis sakars tukšumā ir:

$$g = (980{,}6056 - 2{,}5028 \cos 2\varphi - 0\,000003\ h)\ \text{sant./sec.}^{-2}.$$

Uz platuma grāda $\varphi = 45^0$ un pie jūras spoguļa $(\cos 2\varphi)_{\varphi=45} = = 0$, h = 0, g = 980,6056. Ar relatīvu kļūdu ap:

$$\frac{(981{,}0 - 980{,}6)}{981{,}0}\ 100\,\% \cong 0{,}04\,\%$$

g skaitlisko nozīmi varētu pieņemt g = 981 sant.

Tāda g praktiska pastāvība vēl vairāk runā par labu šīs nozīmes pieņemšanai spēka vienības sastādīšanai. Atstājot par masas vienību to pašu gramu, kā absolūtā mēru sistēmā, mēs gūtu jaunu spēku vienību, kura katrā laikā ir zem rokas. Šādas spēka vienības priekšrocība ir vēl tā, ka šinī gadījumā, izdarot spēku mērīšanu, mēs neesam spiesti mākslīgi iepriekš izolēt masu no zemes pievilkšanas spēka, kas būtu darāms katrā citā paātrinājuma pieņemšanas gadījumā.

Tā tad par spēka vienību būtu vēlēta zināma smaguma spēka vienība, proti, viņa būtu tas spēks, ar kādu 1 grams masas tiek pievilkts no zemes lodes smaguma centra, jeb spēks, kurš masas vienībai — gramam piešķir paātrinājumu 981 sant. vienā sekundē. Šo vienību sauc par svāra gramu atšķirībā no masas grama — masas vienības. Sakars starp šo jauno vienību un iepriekšējo — dinu, ir:

$$(1)\ [\text{smag. grams}] = (981)\ [\text{dinai}].$$

Šī vienība, lai gan lielāka, ir vēl diezgan sīka priekš tehniskām vajadzībām, kur darīšana ar lieliem spēkiem. Tādēļ rodās vajadzība uzstādīt šim nolūkam kādu vairāk praktiskāku technisku spēka vienību. Atstājot, kā paātrinājumu to pašu smaguma spēka paātrinājumu, jāpalielina masa, kuŗa ietilps spēka vienībā. Par tādu masu pieņem 1 kub. decim. tāda paša ūdens masu, caur ko rodās jauna, techniska, spēka vienība — svara kilograms atšķirībā no masas kilograma = = 1000 masas gramiem = 1 kub. dec. destilēta ūdens masai pie 4^0 C, 1000 klgr. = 1 kub. m. ūdens sv. = tonnai.

Mēs sastādījām technisku spēka vienību, kuŗu nosaucam par 1 kgr. — spēks jeb vienkārši kgr., pieņemdami šī spēka paātrinājumu $g = (981)\ [\text{ctm. sec.}^{-2}] = (9{,}81)\ [\text{mtr. sec.}^{-2}]$. Šinī jaunā techniskā spēku sistēmā tā masa, kuŗu mēs absolūtā mēru sistēmā izteicām caur skaitli 1 kgr. — masa, nebūs vairs 1, jo $(1)\ [\text{kgr.} - \text{spēks}] = (m)\ [M]\ (g)\ [\text{ctm. sec.}^{-2}]$; kur m apzīmē masas vienību skaitli; $(m)\ [M] = \left(\frac{1}{g}\right) [\text{kgr.} - \text{sp.} - \text{ctm.}^{-1}\ \text{sec.}^{-2}]$. Kā no šī simbola redzams, skaitlis, kas izteic masu, tagad ir atkarīgs no spēka, gaŗuma un laika vienībām.

No šī piemēra ir redzams, ka kāda fizikāla lieluma dimensija nav nekas absolūts, bet gan pilnīgi konvenciēls lielums, atkarīgs no mēru sistēmas izvēles. Masa gūtu nozīmi 1, ja mēs pašu spēku pieņemtu (981) [kgr. — sp.], bet mēs viņu pieņēmām (1) [kgr. — sp.].

§ 2. Svars un smaguma spēks.

Svars un smaguma spēks nav identiski jēdzieni. Svars vienmēr izteic ķermeņa masu, kuŗa visos apstākļos ir pastāvīgs lielums, kā polu, tā ekvatora rajonā, tā arī visos augstumos virs jūŗas līmeņa. Svaru gūstam ķermeni „sverot", t. i. salīdzinājot dotā ķermeņa masu ar svaru bumbu masu. Saprotama lieta, ka šāda masas salīdzināšana nevar notikt bez spēka starpniecības, jo, kā jau redzējām, ja spēka nav, tad masa nav noteicama, tikai spēka — smaguma maiņa nevar atsaukties uz svaru, jo par cik, p. piem., kādā augstākā vietā ekvatora rajonā sveramais ķermens paliek „vieglāks", par tik pat paliek arī vieglākas svara bumbas. No šī viedokļa būtu bijis vienalga pirkt kādu daudzumu sveramu preču Rīgā zem platuma grāda $\varphi = 57^0$ un $h = 0$ virs jūŗas līmeņa, vai Centrālās Amerikas pilsētā Quito, kur $\varphi = 0$ un $h = 2850$ mtr.

virs jūŗal līmeņa, ja prece tiktu svērta ar svariem, bet ne — ar dinamometru. Turpretim smaguma spēki Rīgā un Quito ir džādi. Piemērojot augšā pievesto g izteiksmes empirisko formulu, gūsim ka Quito

$$g = (980{,}6056 - 2{,}5028 \cos. 2\varphi + - 3 . 10^{-6} h)_{\substack{\varphi = 0 \\ h = 285 . 10^{3}}} [\text{ctm. sec.}^{-2}] =$$

$$= 980{,}6056 - 2{,}5028 - 0{,}855 = 980{,}6056 - 3{,}3578 =$$

$= 977{,}2478$, bet Rīgā: $g = 980{,}6056 - 2{,}5028 \cos 114^{0} =$

$$= 980{,}6056 + 2{,}5028 \sin 24^{0} = 980{,}6056 + 2{,}5028 . 0{,}40674 =$$

$$= 980{,}6065 + 1{,}017 = 981{,}6073 \text{ ctm./sec.}^{-2}.$$

Nu ir redzams, ka pirkt preci Quito uz svara ar dinamometru, normētu Rīgā, būtu izdevīgāki, nekā ar parastiem svariem, jo prece Quito ir „vieglāka" un lai tur dinamometrs rādītu to pašu svara vienību skaitu, ko Rīgā, vajadzētu Quito dinamometru noslodzīt stiprāki (pareizāki sakot — pievienot vairāk masas) par $\frac{981{,}6073 - 977{,}2478}{981{,}6073} . 100 \cong 0{,}45\%$.

No minētā redzams, ka būtu pareizāki technikā neidentificēt ķermeņu svaru ar viņu smagumu jeb smaguma spēku, lietojot pirmo termiņu ķermeņu masas, — bet otro — spēka mēram; tāpat ir arī saprotams, ka svaru lomai būtu jāaprobežojās tikai ar ķermeņu masu mērīšanu un ne vis ar dinamometriju šī vārda tiešā nozīmē. Svari ir guvuši dinamometra tiesības, pateicoties hipotēzei, ka $g =$ konstans, kas ir tikai praktisks tuvinājums.

Ar šķidru vielu, ūdeni, rīkoties ir neērti, bet te ir izeja spēku darbības vienādībā mēchaniskā ziņā (ekvavilentībā): cieti ķermeņi ar tādu pašu masu (svaru bumbas) pēc iespējas „smagāki", t. i. vienā tilpuma vienībā saturoši pēc iespējas vairāk masas, noder, kā ūdens masas ekvivalenti, un minētā neērtība zūd.

Vēl var celties viens jautājums. Spēki, kuŗus jāmēr, var iet visdažādos virzienos, kuŗi nesakrīt ar smaguma spēka virzienu; kā izdarīt mērījumu tādā gadījumā? Caur vienkāršiem mašīnu elementiem, par piem., caur trīzi (bloku) ir iespējams mainīt smaguma spēka darbības virzienu, un tad jautājums ir izšķirts.

§ 3. Jēdziens par darbu.

Spēka redzamās sekas ir materiēlu ķermeņu pārvietojums, pie kam mēdz teikt, ka spēks rada darbu jeb, noteiktāki, mēchanisku darbu. Kā redzams, jēdzienā par darbu ietilpst divi elementi: spēks un pārvietojums, no kuŗiem jāsastāda darba matēmatiskā izteiksme, kā funkcija no šiem abiem. Tā tad, ja apzīmēsim darbu ar D, tad $D = f(\bar{P}, \bar{s})$ kur $\bar{P}$ — spēks, $\bar{s}$ — pārvietojums. Tā kā, kā $\bar{P}$, tā arī $\bar{s}$ ir vektori, tad funkcijas izteiksmē jāietilpst arī virziena elementam — kādam leņķim, lai nezustu šī katra vektora īpašība. Bez tam skaitīsim, ka apskatāmā īpašība — darbs — būs positīvāks (labāks) līdz ar spēka un pārvietojuma skaitlisko nozīmju pieaugšanu, kas atbilst tam jēdzienam par šo īpašību, kāds pastāv ikdienišķā dzīvē, kur mēs darbu skaitam vērtīgāku līdz ar abu minēto nozīmju pieaugšanu. Ja tas ir tā, tad visvienkāršākā vektoru $\bar{P}$ un $\bar{s}$ funkcija D būs šo vektoru skalāraīs produkts. $D = P\,s \,.\, \cos(\bar{P}, \bar{s})$. Tā tad D varam reprezentēt, kā skalāru lielumu. Pēc spēka un pārvietojuma vienības ievešanas, darba vienība varēs tikt noteikta sekoši: Darba vienība ir darbs, kuŗu izdara spēka vienība, ja viņas iedarbes punkts pārvietojās spēka virzienā par vienu gaŗuma vienību. Tad formula $D = P\,s\cos(\bar{P}, \bar{s}) = 1 \,.\, 1 \,.\cos 0 = 1$. spēka vien. $\times$ gaŗuma vien. Ja par spēka vienību pieņemsim 1 kg. un gaŗuma vienību 1 mtr., tad gūsim darba vienību 1 kgr. mtr., kuŗu mēs varam sev stādīties priekšā, kā smaguma spēka darbu, kuŗu veic ķermens, sverošs 1 kg., pārvietodamies vertikālā virzienā uz leju par 1 mtr., jeb kuŗu izdaram mēs ar mūsu muskuļu spēku, paceldami 1 kg. smagu ķermeni 1 mtr. augstumā. Ja spēks ir $P = n$ kg., tad:

$$D = (n)\ [\text{kg. mtr.}].$$

Ja bez tam pārvietojums ir $s = (m)$ [mtr.], tad:

$$D = (m \,.\, n)\ [\text{kg. mtr.}].$$

Kā redzams, darba izteiksme gūst nozīmi:

$$D = (1)\ [\text{kg. mtr.}],\ \text{arī kad}\ m \,.\, n = 1.$$

Tā tad smaguma spēks izdara darba vienību arī tad, kad, par piem., $^1/_2$ kg. smags ķermens pārvietojās vertikālā virzienā uz 2 mtr.

Pieņemsim tagad, ka par spēka vienību gribam pieņemt ne 1 kg., bet dinu un par gaŗuma vienību 1 santim., tad, ņemot vērā, ka 1 kg. = 1000 svara gram. = 981.1000 dinam. = $= 981 \,.\, 10^3$ dinam. un 1 mtr. = 100 santim., gūsim:

$$D = (n \,.\, m \,.\, 981 \,.\, 10^3 \,.\, 10^2)\ [\text{dina} \times \text{sant.}].$$

Jaunā darba vienībā, sastādīta absolūtās sistēmas vienībās (dina $\times$ sant.), saucās par ergu un tiek lietota fizikā. Tā tad, ja darbs bija mērīts techniskās darba vienībās, kgr. mtr., pie kam viņā bija tādu vienību mn kgr. mtr., tad ergos šis darbs būs (D) [erg.] = (mn 981 . 10^5) [erg.].

Ja spēka vektors maina savu nozīmi katrā acumirklī, tad ir iespējams sastādīt tikai tāda acumirklīga — elementāra, darba izteiksmi, kuŗa gūst veidu: $dD = Pds . \cos(\bar{P}, \bar{ds})$ kur $\bar{ds}$ ir bezgalīgi mazs pārvietojums, jeb pārvietojuma diferenciāls. Tā kā $\bar{ds}$ var salikt 3 komponentēs uz 3 savstarpīgi ortogonālām asim. $\bar{dx}$, $\bar{dy}$ un $\bar{dz}$, tad $\bar{ds} = \bar{dx} + \bar{dy} + \bar{dz}$, tāpat arī $\bar{P} = \bar{X} + \bar{Y} + \bar{Z}$, kādēļ

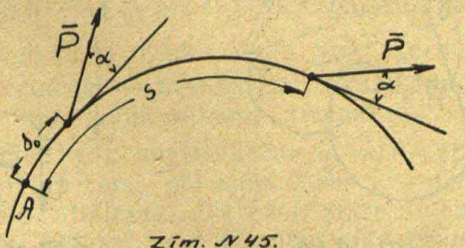
$dD = \bar{P} . \bar{ds} = (\bar{X} + \bar{Y} + \bar{Z}) (\bar{dx} + \bar{dy} + \bar{dz}) = Xdx + Ydy + Zdz$, t. i. darba izteiksme, kad ir dotas minētās spēka un pārvietojuma projekcijas. Viss darbs, ko spēks šinī gadījumā veic būs zuma no atsevišķiem elmentāriem darbiem uz atsevišķiem ds_i, tā kā pilns darbs $D = P_1 ds_1 \cos(\bar{P}_1, \bar{ds}_1) + P_2 ds_2 \cos(\bar{P}_2, \bar{ds}_2) + \ldots P_n ds_n \cos(\bar{P}_n, \bar{ds}_n) =$

$$= \sum_{n=1}^{n=\infty} P_i ds_i \cos(\bar{P}_i, \bar{ds}_i).$$

Tā kā katram pārvietojuma elementam ir jābūt ļoti mazam, tad saskaitāmo $P_i \; ds_i \cos(P_i \; ds_i)$ skaits ir bezgalīgi liels. Šīs zumas nozīmes uzmeklēšana piekrīt tā saucamiem integrālrēķiniem, un šo zumu reprezentē simbols:

$$D = \int_{s_0}^{s} Pds \cos(\bar{P}, \bar{ds}) = \int_{x_0, y_0, z_0}^{x, y, z} (Xdx + Ydy + Zdz).$$

kur s un s_0 apzīmē robežas, starp kuŗām notiek pārvietojums.



Zīm. № 45.

Atsevišķi gadījumi:

1) Ja ne $\cos(\bar{P}_i \bar{ds}_i)$, nedz arī $\bar{P}_i$ skaitliskās nozīmes nemainās palikdamas vienmēr $\cos(\bar{P}_i, \bar{ds}_i) = \cos(\bar{P}, \bar{ds})$ un $\bar{P}_i = \bar{P}$, tad $D = P \cos(\bar{P}, \bar{ds}) \sum ds_i = P \cos(\bar{P}_i \; \bar{ds}) (s - s_0)$, ja pārvietojums noticis no s_0 līdz s, skaitītiem no kāda pārvietojuma izejas (sākuma) punkts A.

Tādu gadījumu var stādīties priekšā saskaņā ar zīm. 45., kur P virziens vienmēr sastāda leņķi α ar tangenti visos pārvietojuma punktos.

1) Piemērs: Uziet darbu, kuŗu veic pastāvīgs spēks P, ar iedarbes punktu, kas pārvietojas gar aploci ar radiusu r, ja šī spēka virziens vienmēr sakrīt ar viņa acumirklīgā iedarbes punkta tangentes virzienu.

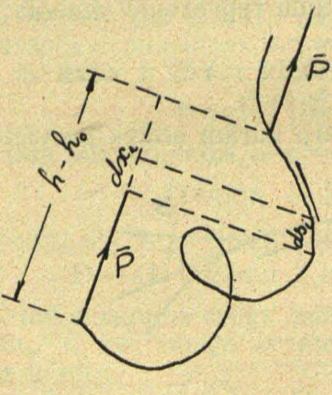
Atbilde: Ja iedarbes punkts ir aprakstījis vienu pilnu aploci, tad $D = P \cdot 2\pi r$.

2) Ja spēks nemaina savu nozīmi un virzienu telpā, kamēr viņa iedarbes punkts pārvietojās pa kautkādu trajektoriju, tad (sk. zīm. 46.) $D = P \cdot \sum_{n=1}^{n=\infty} ds_i \cos(\overline{P}_i \overline{ds}_i) = P \sum_{n=1}^{n=\infty} dx_i$,

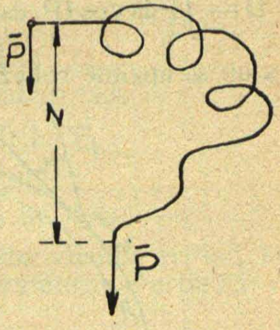
kur $dx_i = ds_i \cos(\overline{P}_i \overline{ds}_i)$ — pārvietojuma elementa projekcija uz spēka virzienu, un tad

$$D = P \sum_{n=1}^{n=\infty} dx_i = P(h - h_0)$$

kur $h - h_0$ ir spēka iedarbes punkta pārvietojuma projekcija uz spēka virzienu, pie kam h un h_0 skaitīti no kāda sākuma punkta.



Zīm. № 46.



Zīm. № 47.

Kā redzams, šinī gadījumā spēka darbs pavisam neatkarājas no trajekcijas (ceļa), kādu apraksta iedarbes punkts, bet gan tikai no spēka iedarbes punkta pārvietojuma spēka virzienā.

Tādi spēki saucas par konservatīviem spēkiem; pie viņiem, starp citiem, pieder smaguma spēks. Tā tad darbs, kuŗu izdara smaguma spēks, atkarājas tikai no iedarbes punkta pārvietojuma vertikālā virzienā un ir pilnīgi neatkarīgs no pārvietojuma horicontālā virzienā.

Zīmējuma 47. gadījumā $D = Pz$. Ja pārvietojums notiktu pretējā virzienā, tad darba izteiksme gūst negatīvu nozīmi. Šinī gadījumā mēdz teikt, ka smaguma spēks patērē darbu, kamēr darbu izdara spēks, kuŗš virza ķermeni uz augšu, par piemēru, mūsu muskuļu spēks.

3) P i e m ē r s: Kādu darbu veic mainīgs spēks $\bar{P}$, kuŗa iedarbes punkts slīd gar riņķi, veidotu ar radiusu r, ja spēka virziens vienmēr pie tam sakrīt ar min. radiusu.

A t b i l d e: Neatkarīgi no riņķa aploces gaŗuma, kuŗu noiet spēka $\bar{P}$ iedarbes punkts, $D = O$ vienmēr, jo katrā punktā $dD = Pds \cos(\bar{P}, \bar{ds}) = O$, tadēļ, ka leņķis $(\bar{P}, \bar{ds})$ ir leņķis starp radiusa virzienu un tangenti, kuŗš ir 90^0.

4) P i e m ē r s: Smags homogens iesms (Stab, стерженъ), kuŗa gaŗums ir l, guļ uz horizontālas plāknes. Kādu darbu veic iesma smagums (svars), ja iesms tiek sasliets stāvus uz minētās plāknes.

A t b i l d e: Iesma smaguma spēks $\bar{G}$ ir pielikts viņa smaguma centrā, kuŗš atrodas iesma vidū, $^1/_2 l$ atstatumā no kautkuŗa viņa gala. Kādu trajektoriju arī neaprakstītu pie sasliešanas konservatīva spēka $\bar{G}$ iedarbes punkts, šī spēka veiktais darbs galīgā stāvotnē ir produkts no G, ar viņa iedarbes punkta augstumu $h = {}^1/_2 l$ virs min. horizontālas plāknes, $D = -G h = -G\, {}^1/_2 l$, t. i. tiek patērēts darbs $G\, {}^1/_2 l$.

5) P i e m ē r s: Kādu darbu veic ķermeņa smagums G, kuŗš — ķermenis — sviests zem kaut kāda leņķa α pret horizontu, ar kaut kādu sākuma ātrumu $\bar{v}_0$.

A t b i l d e: Cik augsti ķermens arī nepaceltos, viņš, beidzot, nokrīt uz zemi, pie kam darbs $D = G \cdot h$, kur h nozīmē vertikālo attālumu diferenci starp G spēka iedarbes punktiem pašā sākumā, kad ķermens tika izlaists no rokām, un galējā stāvotnē uz zemes v i r s m a s, ar citiem vārdiem, h ir sviedēja rokas augstums virz zemes virsmas momentā, kad ķermens izslīdēja no rokām.

6) P i e m ē r s: Uz galda atrodas smags homogens taisnleņķisks, paralelepipēds ar malām a, b un c. Šis paralelepipēds tiek vairāk reizu noņemts un pie tam atkaļ atlikts atpakaļ. Kādu darbu veic paralelepipēda smagums $\bar{G}$.

Atbilde: Ja paralelepipēds tiek atlikts atpakaļ tā, ka smaguma centra stāvotne nemainās, tad $D = O$, pārējos gadījumos var būt: $D = \pm G \frac{(a-b)}{2}$, $D = \pm G \frac{(a-c)}{2}$, $D = \pm G \frac{(b-c)}{2}$. Ja $a = b = c$ (kubs), tad vienmēr $D = O$.

7) Piemērs: Kādu darbu veic bumbas smagums, kuŗa veļas pa horizontālu plākni.

Atbilde: $D = O$, jo $\overline{G}$ virziens ir perpendikulārs pret viņa iedarbes punkta — bumbas smaguma centra pārvietojumu.

§ 4. Jēdziens par darba ražīgumu (jaudu).

Vēl viens elements noteic darba pozitīvo īpašību, proti laiks. Tas darbs būs labāks jeb vērtīgāks, kuŗš tiek izdarīts īsākā laikā. Tā tad darba vērtība aug pretēji (обратно proporcionēli laikam, patērētam darba veikšanai. Kamēr divi darbi, izdarīti dažādā laikā, nebūs attiekti uz laika vienību, nav iespējams teikt, kuŗš no viņiem ir vērtīgāks un labāks. Tādēļ ir derīgs jēdziens par darba ražīgumu, kuŗš nozīmē darbu, attiektu uz laika vienību. Ja darbs D ir izdarīts t laika vienībās, pie kam vienādos laika sprīžos spēks ir izdarījis vienādus darbus, jeb, kas tas pats, darbs ir pieaudzis proporcionēli laikam, tad ražīgums $R = \frac{D}{t}$. Ja tas tā nav, tad var būt runa tikai par darba ražīgumu zināmā momentā, kuŗu gūstam, uzejot attiecības robežu $\frac{dD}{dt}$, kur dD bezgalīgi mazs darbs jeb darba elements, bet dt bezgalīgi mazs laika sprīdis, kuŗā darbs dD ir izdarīts. Kā tiek pierādīts diferencialrēķinos, tāda robeža ir atrodama, ka noteikts galīgs skaitlis, kuŗš mūsu gadījumā izteikts darba ražīgumu tanī laika momentā, kuŗam tieši laika elements dt pieslējās.

Ražīgums gūst nozīmi 1, ja darba vienība tiek veikta laika vienībā, kā tas redzams no formulas: $R = \frac{D}{t}$, kur liekot $D = 1$ un $t = 1$, gūstam $R = 1$. Tā tad ražīguma vienība ir darba vienība, veikta laika vienībā. Techniskā ražīguma vienība ir $(1)\left[\frac{\text{kgr. mtr.}}{\text{sec.}}\right]$ — 75 tādu vienību sastāda tā saucamo

1 zirga spēku HP, t. i. $1HP = (75)\left[\frac{kgr.\ mtr.}{sec.}\right]$.

Piemērs: Uziet spēka darba jaudu HP vienībās, kurš ar vienmērīgu ātrumu t stundas pacēlis G (tn) h (mtr) augstumā.

Atbilde: $(N)\left[\frac{kgr.\ mtr.}{sec.}\right] = \left(\frac{G\ 1000\ h}{t\ 60^2}\right)\left[\frac{kgr.\ mtr.}{sec.}\right]$.

(1) $[HP] = (75)\left[\frac{kgr.\ mtr.}{sec.}\right]$ no kurienes seko, ka

$$(N)\left[\frac{kgr.\ mtr.}{sec.}\right] = \left(\frac{G\ 1000\ h}{75\ t\ 60^2}\right)[H\ P].$$