А. Медеръ.

Высшая математика.

Рига, 1922.
Изданіе акц. общ. Вальтерсъ и Рапа
Театральная ул. № 11.

Типографія акц. о-ва Вальтерсъ и Рапа, Рига.

Содержанiе.

Дифференціальное исчисленіе.

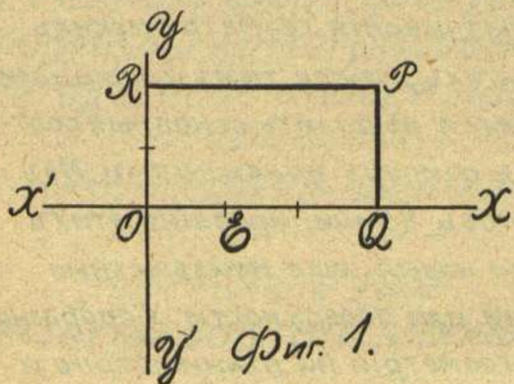
стр. 118 - 254.

Аналитическая геометрія на плоскости.

Разница между элементарною и аналитическою геометріей состоитъ въ томъ, что элементарная геометрія непосредственно изъ разсматриванія геометрическихъ фигуръ выводитъ свойства ихъ, между тѣмъ какъ аналитическая геометрія старается выразить основныя соотношенія геометрическихъ фигуръ уравненіями. Изъ алгебраическихъ результатовъ комбинированія этихъ уравненій узнаются тогда новыя, еще неизвѣстныя свойства изслѣдуемой линіи или поверхности. Сообразно съ раздѣленіемъ низшей геометріи на планиметрію и стереометрію, аналитическая геометрія распадается на двѣ главныя части: На „аналитическую геометрію на плоскости" или „плоскую аналитическую геометрію" и „аналитическую геометрію въ пространствѣ".

Прямолинейныя координаты. Основныя задачи.

Чтобы возможно было замѣнить непосредственное изслѣдованіе геометрическихъ фигуръ алгебраическими дѣйствіями, надо установить связь между точками и числами. Для этого мы, по примѣру Декарта (1596-1650), проводимъ на плоскости двѣ взаимно-перпендикулярныя прямыя неограниченной длины XX' и YY', которыми вся плоскость раздѣляется на четыре безконечно большія части. Горизонтальная прямая называется осью абсциссъ или осью x-овъ, а вертикальная **осью ординатъ** или **осью yовъ**. Обѣ оси носятъ общее названіе **координатныхъ осей** и составляютъ вмѣстѣ **прямоугольную** или **ортогональную прямолинейную координатную систему** на плоскости. Точка пересѣченія координатныхъ осей, т.е. точка O, называется **началомъ координатъ**.



Фиг. 1.

Пусть дана на нашей плоскости нѣкоторая точка P. Опустимъ изъ нея перпендикуляры PQ и PR на координатныя оси XX' и YY'. Отрѣзки этихъ перпендикуляровъ отъ точки P до координатныхъ осей, т.е. отрѣзки RP и QP называются **координатами** точки P, а именно отрѣзокъ RP **абсциссою**, а отрѣзокъ QP - **ординатою**. Такъ какъ $OQPR$ прямоугольникъ, то противолежащія стороны равны и параллельны:

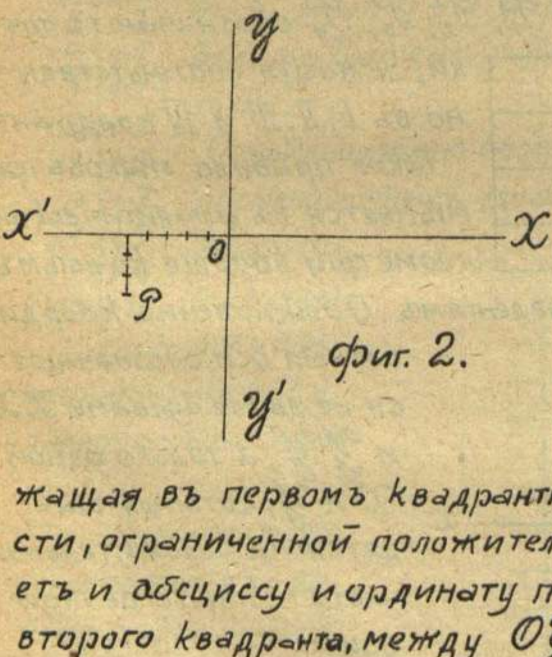
$$RP \# OQ, \quad QP \# OR,$$

поэтому и OQ можно назвать абсциссою, а OR ординатою точки P. Абсциссу обыкновенно обозначаютъ буквою x, ординату буквою y. Очевидно каждой точкѣ P соотвѣтствуютъ вполнѣ опредѣленные отрѣзки OQ и OR. Если мы теперь установимъ масштабъ фигуры, т.е. если мы примемъ отрѣзокъ извѣстной длины за единицу мѣры длины, то мы можемъ опредѣлить численныя значенія координатъ x и y. Пусть OE будетъ единицею мѣры длины и содержится въ OQ три раза, а въ OR два раза, тогда точ ка P имѣетъ абсциссу 3, а ординату 2. Это принято обозначать такъ:

$$P:\ \begin{matrix} x = 3, \\ y = 2; \end{matrix} \qquad \text{или } P(3,2).$$

Такимъ образомъ каждой точкѣ на плоскости соотвѣтствуетъ одна и только одна совершенно опредѣленная пара чиселъ. Чтобы рѣшеніе обратной задачи, по даннымъ координатамъ построить точку, было-бы однозначно, принято считать абсциссы, которыя откладываются влѣво отъ начала координатъ и ординаты откладываемыя внизъ отъ O, отрицательными.

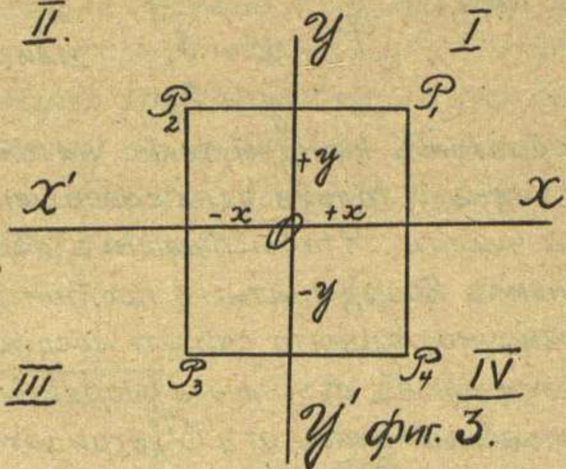
Пусть напримѣръ требуется построить точку съ координатами $x=-5$, $y=-3$.



фиг. 2.

Рѣшеніе задачи ясно изъ чертежа. Части OX и OY называются положительными, а OX' и OY' отрицательными частями координатныхъ осей. Очевидна при такомъ предположеніи, всякая точка, лежащая въ первомъ квадрантѣ, т.е. въ части плоскости, ограниченной положительными полуосями, имѣетъ и абсциссу и ординату положительную; точка второго квадранта, между OY и OX' имѣетъ абсциссу отрицательную, а ординату положительную; точка третьяго квадранта между OX' и OY' и абсциссу и ординату отрицательную; точка четвертаго квадранта, между OY' и OX абсциссу положительную, а ординату отрицательную.

Эти отношенія мы можемъ представлять въ приле-

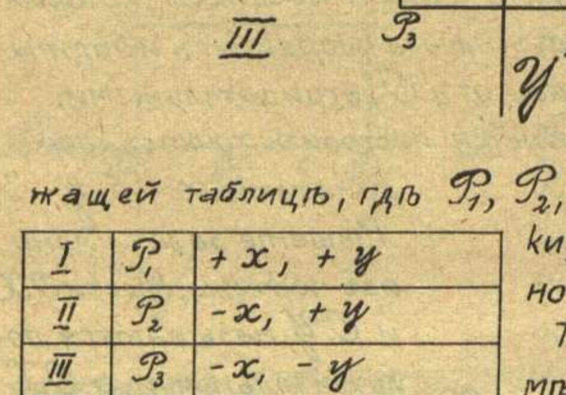


фиг. 3.

жащей таблицѣ, гдѣ P_1, P_2, P_3, P_4 обозначаютъ точки, лежащія соотвѣтственно въ I, II, III и IV квадрантѣ.

I	P_1	$+x$, $+y$
II	P_2	$-x$, $+y$
III	P_3	$-x$, $-y$
IV	P_4	$+x$, $-y$

Такое правило знаковъ примѣняется въ аналитической геометріи вообще ко всѣмъ прямолинейнымъ направленіямъ Обыкновенно координатныя оси обозначаются не двумя буквами XX' и YY', а только одной X и Y, которыя ставятся на положительной части соотвѣтственной оси.

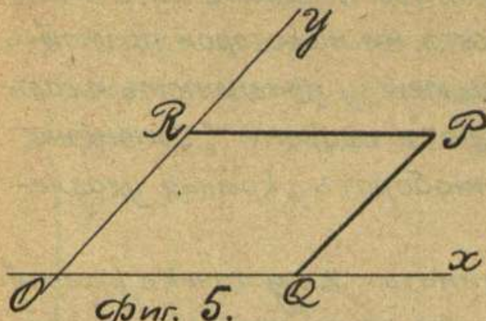


фи. 4.

Иногда употребляется косоугольная координатная система, тогда координатами точки будутъ ея разстоянія отъ осей, измѣряемыя каждое параллельно другой оси:

$$QP \parallel Oy\,,\ RP \parallel Ox.$$

$$P:\ x = OQ, \quad \text{или} \quad P(OQ, OR).$$
$$y = OR;$$



фиг. 5.

Мы будемъ имѣть дѣло однако только съ прямоугольными, прямолинейными координатами.

Посмотримъ теперь что изображаетъ собою одно уравненіе, связывающее пару координатъ точки, напримѣръ:

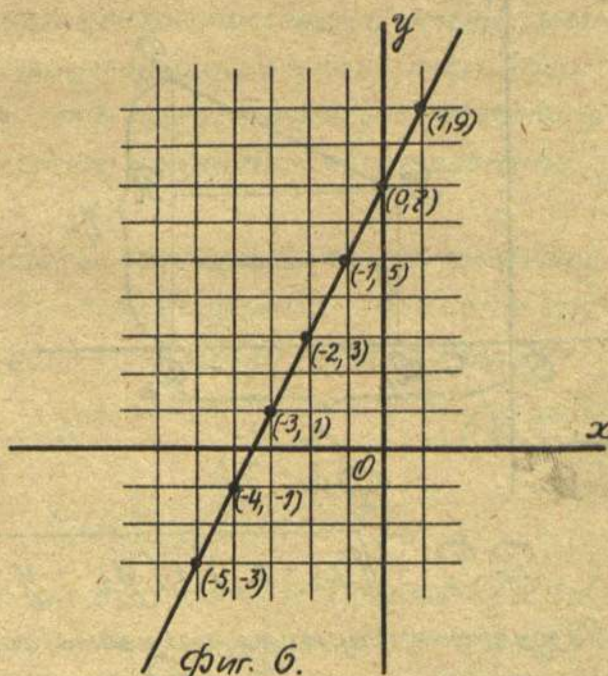
$$y - 2x = 7.$$

Если мы станемъ придавать всевозможныя значенія для x, то y будетъ каждый разъ имѣть опредѣленное значеніе. Такъ, если $x = 5$, то y должно быть равно -3 и т. д. по прилагаемой таблицѣ. Каждая пара чиселъ доставляетъ намъ точку.

x	y
−5	−3
−4	−1
−3	+1
−2	+3
−1	+5
0	+7
+1	+9
+2	+11
+3	+13

Очевидно можно построить еще сколько угодно промежуточныхъ точекъ и совокупность всѣхъ этихъ точекъ составить нѣкоторую линію (въ данномъ случаѣ прямую).

Тѣ-же соображенія примѣняются къ какому угодно уравненію между x и y. Безконечно-многимъ парамъ чиселъ, удовлетворяющимъ данному уравненію соотвѣтствуютъ без-

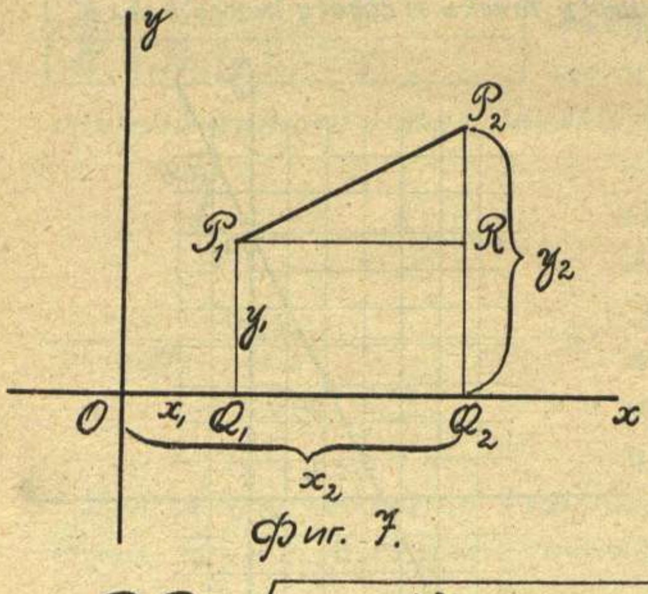


фиг. 6.

конечно много точекъ, координаты которыхъ суть именно эти числа, и которыя лежатъ на нѣкоторой прямой или кривой линіи. Эту связь между уравненіемъ и соотвѣтственною кривою выражаютъ словами: „уравненіе есть уравненіе кривой" и наоборотъ „кривая удовлетворяетъ уравненію."

Надо замѣтить, что координаты x, y точекъ кривой измѣняются при переходѣ отъ одной точки къ другой; онѣ представляютъ собою ПЕРЕМѢННЫЯ величины въ отличіе отъ изслѣдуемыхъ въ элементарной математикѣ ПОСТОЯННЫХЪ. Координаты x, y точекъ линіи называютъ также и СКОЛЬЗЯЩИМИ или ТЕКУЩИМИ координатами линіи.

Задача: Опредѣлить разстояніе двухъ точекъ P_1 и P_2 другъ отъ друга, данныхъ своими прямоугольными координатами: $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$.



Фиг. 7.

Опустивъ перпендикуляръ P_1R на P_2Q_2, изъ прямоугольнаго треугольника P_1P_2R имѣемъ:

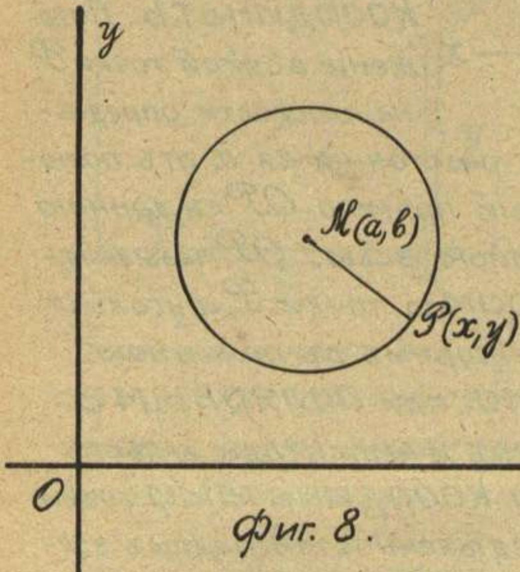
$$P_1P_2^2 = P_1R^2 + RP_2^2 =$$
$$= Q_1Q_2^2 + (Q_2P_2 - Q_2R)^2 =$$
$$= (OQ_2 - OQ_1)^2 + (Q_2P_2 - Q_1P_1)^2 =$$
$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

Отсюда

$$P_1P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1).$$

Полученная формула доказана только для частнаго положенія точекъ P_1 и P_2, но не трудно убѣдиться, что она справедлива и при всякомъ положеніи ихъ, слѣдуетъ только принимать во вниманіе знаки координатъ въ различныхъ квадрантахъ.

Задача: Опредѣлить уравненіе круга. Положимъ данъ кругъ, координаты центра M котораго суть a, b и радіусъ котораго r.



фиг. 8.

Взявъ произвольную точку $P(x, y)$ на кругѣ, имѣемъ для разстоянія MP:

$MP = r = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$, откуда:

$$(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2 \quad \ldots (2).$$

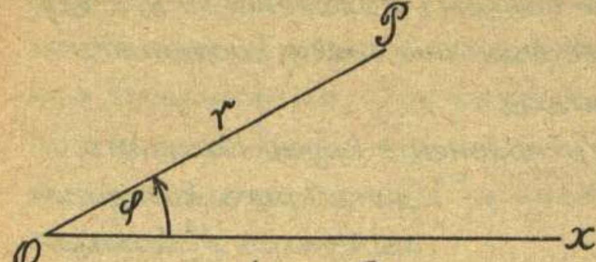
Такъ какъ разстояніе всѣхъ точекъ круга отъ центра постоянно, именно, равно r, то какія бы мы ни брали на немъ точки, координаты каждой изъ нихъ удовлетворятъ выведенному уравненію, т.е. полученное уравненіе есть уравненіе круга.

Если начало координатъ совпадаетъ съ центромъ круга, то $a = 0$ и $b = 0$, и мы получаемъ уравненіе круга, описаннаго радіусомъ r около начала координатъ:

$$x^2+y^2 = r^2 \quad \ldots\ldots (2^a).$$

Полярныя координаты.

Пусть на плоскости дана точка O и прямая Ox неограниченной длины, начинающаяся въ точкѣ O. Точку O назовемъ ПОЛЮСОМЪ, прямую OX поляр-

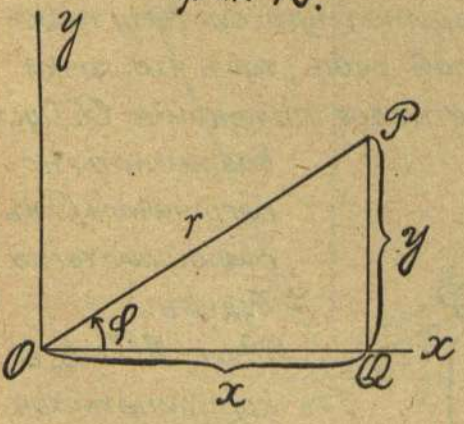


фиг. 9.

ною осью. Полюсъ и полярная ось составляютъ вмѣстѣ полярную систему координатъ. Положеніе всякой точки P на плоскости опредѣлена, коль скоро намъ даны разстояніе ея r отъ полюса O и уголъ φ, образуемый прямою OP съ данною прямою OX, т.е. съ полярною осью. OP называется радіусомъ векторомъ точки P, а уголъ φ, образуемый радіусомъ векторомъ съ полярною осью Ox - амплитудою или полярнымъ угломъ; радіусъ векторъ и амплитуда вмѣстѣ называются полярными координатами точки P. Для устраненія неопредѣленностей радіусъ векторъ r всегда будемъ считать положительнымъ, а подъ амплитудой φ будемъ подразумѣвать уголъ, на который надо вращать полярную ось въ положительномъ смыслѣ, т.е. по направленію обратному движенію часовой стрѣлки, покуда она не совпадетъ съ радіусомъ-векторомъ разсматриваемой точки.

Легко опредѣлить связь между ортогональною прямолинейною и полярною системами. Пусть начало и положительная часть оси абсциссъ прямолинейной системы совпадаютъ съ полюсомъ и полярною осью полярной системы. Тогда ось ординатъ получимъ, возстановивъ въ точкѣ O перпендикуляръ къ OX; изъ точки P опустимъ перпендикуляръ на Ox. Тогда $OQ = x$ и $QP = y$ будутъ координатами точки P въ прямоугольной системѣ, а $OP = r$ и $\angle QOP = \varphi$ - координатами P въ полярной системѣ. Изъ Δ

фиг. 10.



OPQ имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

чтобы наоборотъ по x и y найти r и φ, возвысимъ обѣ части уравненій (3) въ квадратъ и сложимъ ихъ:

$$x^2+y^2=r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=r^2$$

откуда: $r=\sqrt{x^2+y^2}$.

Передъ корнемъ всегда знакъ +, ибо радіусъ векторъ всегда положителенъ.

Чтобы найти амплитуду, раздѣлимъ второе уравненіе (3) на первое, получимъ:

$$\frac{y}{x}=\frac{r\sin\varphi}{r\cos\varphi}, \text{ или } tg\,\varphi=\frac{y}{x}$$

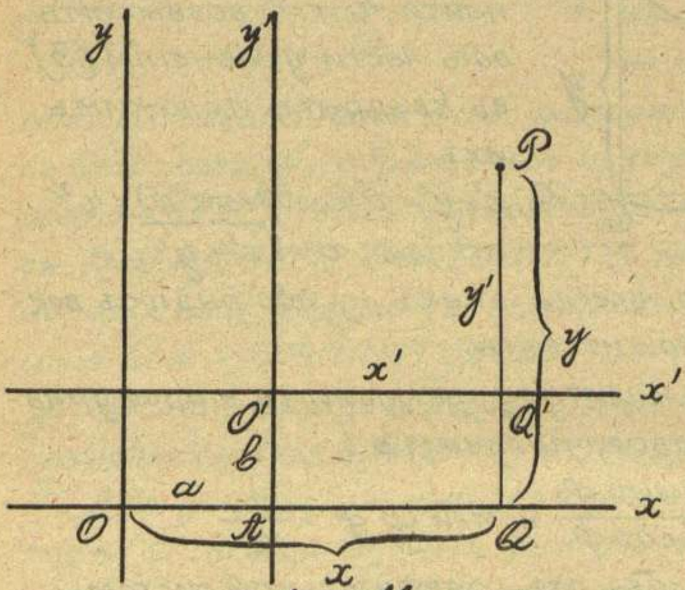
Итакъ для перехода отъ прямоугольной системы къ полярной имѣемъ формулы:

$$\left.\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2} \\ tg\,\varphi &= \frac{y}{x} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (3^a)$$

Преобразованіе или превращеніе координатъ.

Иногда при рѣшеніи задачъ получаются очень сложныя выраженія, для упрощенія которыхъ является полезнымъ отнести ихъ къ новой, прилично выбранной, координатной системѣ. Это дѣйствіе называется **преобразованіемъ** или **превращеніемъ** координатной системы. Является вопросъ, какъ по даннымъ координатамъ точекъ найти координаты тѣхъ же точекъ по отношенію къ новой координатной системѣ. Разсмотримъ сначала два частныхъ случая:

I Перемѣщеніе координатной системы состоитъ въ томъ, что координатную систему передвигаютъ параллельно самой себѣ, такъ что точка O принимаетъ нѣкоторое новое положеніе O'. Пусть координаты новаго начала O' въ старой системѣ будутъ: $OA = a$, $AO' = b$, а координаты точки P въ старой системѣ (x, y), а въ новой (x', y'); тогда ясно изъ чертежа, что



фиг. 11.

$$x' = O'Q' = AQ = OQ - OA = x - a$$
$$y' = Q'P = QP - QQ' = QP - AO' = y - b.$$

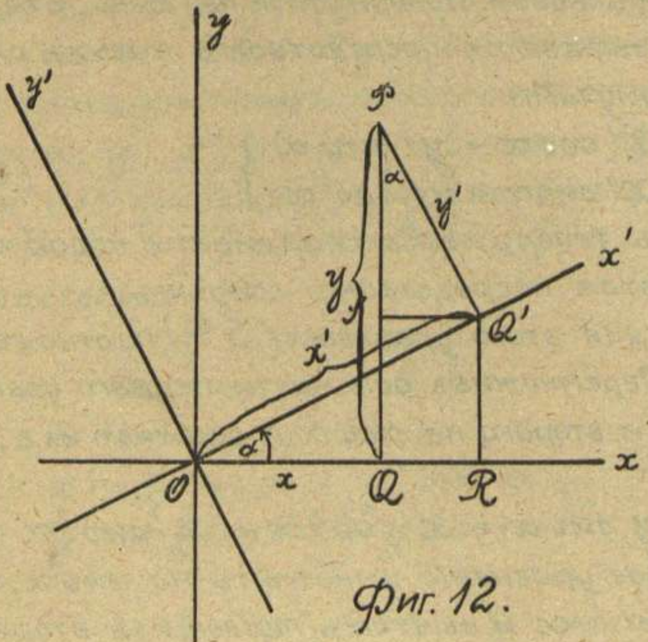
Итакъ мы получаемъ формулы перемѣщенія:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x - a \\ y' &= y - b \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots (4)$$

Чтобы перейти отъ координатъ новой системы къ координатамъ старой, стоитъ только рѣшить формулы (4) по отношенію x и y:

$$\left.\begin{aligned} x &= x' + a \\ y &= y' + b \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots (4a)$$

II. Вращеніе координатной системы состоитъ въ томъ, что координатную систему вращаютъ около начала O на нѣкоторый уголъ α.



Фиг. 12.

Расположенie координатъ точки P въ старой системѣ (x, y) и въ новой (x', y'), ясно изъ чертежа.
Опустимъ перпендикуляры $Q'S$ на PQ и $Q'R$ на Ox; тогда

$$x = OQ = OR - QR = OR - SQ',$$
$$y = QP = QS + SP = RQ' + SP.$$

Такъ какъ $OR = OQ' \cos\alpha = x' \cos\alpha$,

$$SQ' = Q'P \sin\alpha = y' \sin\alpha,$$

то подставивъ эти значенiя въ выраженie для x, получимъ:

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha.$$

Замѣчая далѣе, что

$$RQ' = OQ' \sin\alpha = x' \sin\alpha,$$
$$SP = Q'P \cos\alpha = y' \cos\alpha,$$

и подставляя эти значенiя въ уравненie для y, находимъ:

$$y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha.$$

Итакъ, при переходѣ отъ данной координатной системы къ новой, повернутой на $\angle\alpha$, старыя координаты выразятся посредствомъ новыхъ слѣдующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{aligned}\right\} \dots\dots (5^a).$$

Найдемъ теперь, какъ координаты новой системы выразятся посредствомъ старыхъ.

Рѣшимъ для этого уравненія (5^{a}) по отношенію къ x' и y'. Перемноживъ обѣ части перваго уравненія на $\cos\alpha$ и втораго на $\sin\alpha$ и сложивъ ихъ, получаемъ:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = x'\cos^2\alpha + x'\sin^2\alpha = x';$$

теперь первое уравненіе умножимъ на $\sin\alpha$, а второе на $\cos\alpha$ и вычтемъ первое изъ второго:

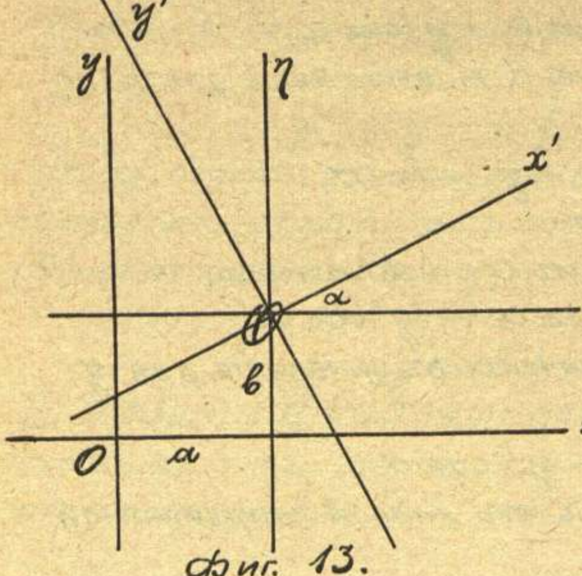
$$y\cos\alpha - x\sin\alpha = y'$$

Итакъ:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ y' &= -x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{aligned}\right\} \dots\dots (5)$$

III. Общій случай преобразованія координатъ

состоитъ въ томъ, что начало перемѣщается и оси поворачиваются на нѣкоторый уголъ. Положеніе новой координатной системы будетъ вполнѣ опредѣлено, если даны координаты a, b новаго начала въ старой системѣ и уголъ α, на который повернуты оси. Введемъ третью, вспомога-



Фиг. 13.

тельную систему (ξ, η) съ началомъ O' и осями параллельными Ox и Oy. Координаты точки P въ этихъ трехъ системахъ обозначимъ соотвѣтственно черезъ x, y; x', y'; ξ, η. Система (ξ, η) получается изъ системы (x, y) перемѣщеніемъ, а система (x', y') изъ системы (ξ, η) вращеніемъ, слѣдовательно:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x - a \\ \eta &= y - b \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (6)$$

$$\left.\begin{aligned} x' &= \xi \cos\alpha + y \sin\alpha \\ y' &= -\xi \sin\alpha + y \cos\alpha \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (7)$$

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x' \cos\alpha - y' \sin\alpha \\ \eta &= x' \sin\alpha + y' \cos\alpha \end{aligned}\right\} \ldots (7^a)$$

Подставивъ значенія ξ и η изъ уравненія (6) въ (7) и (7^a), получимъ искомыя соотношенія:

$$\left.\begin{aligned} x' &= (x - a)\cos\alpha + (y - b)\sin\alpha \\ y' &= -(x - a)\sin\alpha + (y - b)\cos\alpha \end{aligned}\right\} \ldots (8)$$

$$\left.\begin{aligned} x &= a + x' \cos\alpha - y' \sin\alpha \\ y &= b + x' \sin\alpha + y' \cos\alpha \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (8^a)$$

Точки и прямыя линіи.

Задача: Опредѣлить площадь треугольника.

Возьмемъ сначала тотъ частный случай, когда одна изъ вершинъ треугольника совпадаетъ съ началомъ координатъ. Изъ тригонометріи извѣстно, что $\Delta OP_1P_2 = \frac{1}{2} OP_1 \cdot OP_2 \cdot \sin(P_1OP_2)$.

Если система полярная, то:

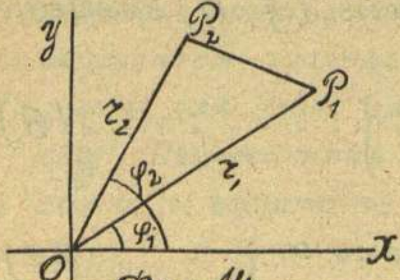
$$OP_1 = r_1, \quad OP_2 = r_2,$$

$$\measuredangle xOP_1 = \varphi_1 \;, \measuredangle xOP_2 = \varphi_2 \;,$$

отсюда : $\measuredangle P_1OP_2 = \varphi_2 - \varphi_1$.

Подставивъ найденныя значенія въ выраженіе площади треугольника, получаемъ :

$$\Delta OP_1P_2 = \tfrac{1}{2} r_1 r_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \cdots \cdots (9)$$



Фиг. 14.

Такъ какъ r всегда положительно, то знакъ выраженія зависитъ отъ знака $\sin(\varphi_2 - \varphi_1)$.

$\sin(\varphi_2 - \varphi_1) > 0$,

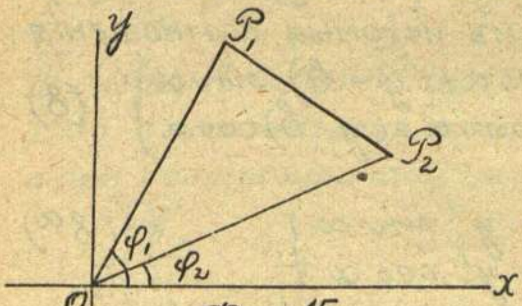
если $\varphi_2 > \varphi_1$;

$\sin(\varphi_2 - \varphi_1) < 0$,

если $\varphi_2 < \varphi_1$.

Случай, когда $\varphi_2 > \varphi_1$ изображенъ на чертежѣ (фиг. 14). Если же $\varphi_1 > \varphi_2$, то треугольникъ будетъ имѣть видъ, изображенный на чертежѣ (фиг. 15).

Если передвигаться по сторонамъ треугольника, начиная отъ точки O и черезъ P_1 и P_2 опять возвращаясь въ O, то въ первомъ случаѣ ($\varphi_2 > \varphi_1$) треугольникъ постоянно находится по лѣвую, во второмъ ($\varphi_2 < \varphi_1$) по правую сторону.



Фиг. 15.

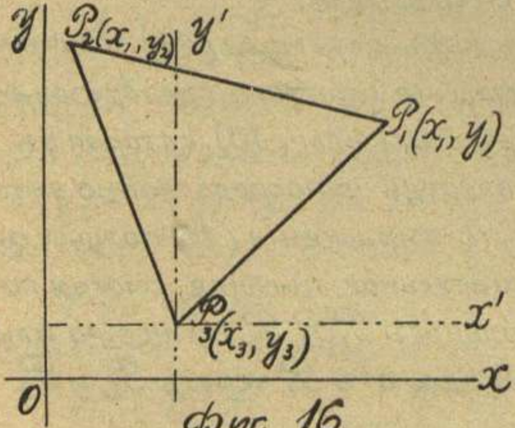
Отсюда для вычисленія площадей плоскихъ фигуръ установлено слѣдующее правило знаковъ : площадь плоской фигуры считается положительною, или отрицательною въ зависимости отъ того, будетъ ли фигура при передвиженіи по контуру ея находиться по лѣвую или по правую сторону.

Чтобы найти выраженіе площади нашего треугольника въ прямоугольной системѣ, выражаемъ $\sin(\varphi_2 - \varphi_1)$

черезъ синусы и косинусы угловъ φ_2 и φ_1 и замѣняетъ полярныя координаты r, φ прямолинейными x, y по формуламъ (3):

$$\Delta OP_1P_2 = \frac{1}{2} r_1 r_2 (\sin\varphi_2 \cos\varphi_1 - \cos\varphi_2 \sin\varphi_1) =$$
$$= \frac{1}{2}(r_1 \cos\varphi_1 \cdot r_2 \sin\varphi_2 - r_2 \cos\varphi_2 \cdot r_1 \sin\varphi_1)$$
$$\Delta OP_1P_2 = \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1) \; . \; . \; . \; . \; . \; (10)$$

Перейдемъ теперь къ общему случаю. Пусть данъ треугольникъ $P_1P_2P_3$ координатами вершинъ $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$. Задачу можно привести къ предыдущей введеніемъ новой координатной системы, оси которой параллельны осямъ данной системы, и начало которой находится въ одной изъ вершинъ треугольника, напр. въ P_3.



фиг. 16.

Обозначимъ координаты точекъ P_1 и P_2 въ новой системѣ черезъ x_1', y_1', и x_2', y_2';
тогда получимъ:

$$\Delta P_1P_2P_3 = \frac{1}{2}(x_1' y_2' - x_2' y_1').$$

Подставивъ теперь по формуламъ (4):

$$x_1' = x_1 - x_3, \qquad x_2' = x_2 - x_3,$$
$$y_1' = y_1 - y_3, \qquad y_2' = y_2 - y_3,$$

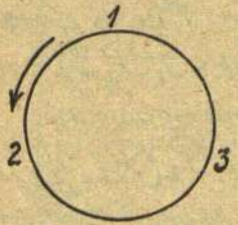
получимъ:

$$\Delta P_1P_2P_3 = \frac{1}{2}[(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)] =$$

$$= \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_3 y_2 - x_1 y_3 + x_3 y_3 - x_2 y_1 + x_3 y_1 + x_2 y_3 - x_3 y_3)$$

$$\Delta P_1P_2P_3 = \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_2 y_3 - x_3 y_2 + x_2 y_1 - x_1 y_3). \; (11)$$

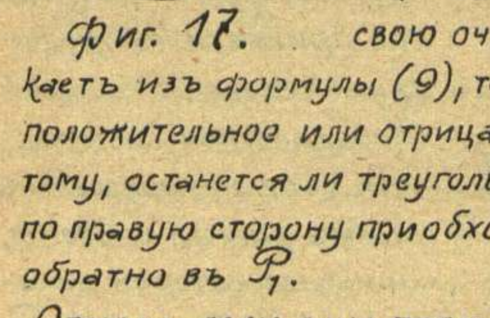
Подробнѣе разсмотрѣвъ послѣднее выраженіе, замѣчаемъ въ немъ нѣкоторую правильность. Именно, разложивъ выраженіе въ скобкахъ на три слагаемыхъ: $x_1 y_2 - x_2 y_1$, $x_2 y_3 - x_3 y_2$, $x_3 y_1 - x_1 y_3$, мы видимъ, что второе и третье слагаемыя можно получить изъ перваго, замѣнивъ указатели 1, 2 черезъ 2, 3 и 3, 1 при помощи прилежащаго символа (фиг. 17). Этотъ способъ носитъ названіе **круговой перестановки.**



Фиг. 17.

Такъ какъ формула (11) получена съ помощью простого преобразованія изъ формулы (10), которая въ свою очередь непосредственно вытекаетъ изъ формулы (9), то выраженіе (11) получаетъ положительное или отрицательное значеніе, смотря по тому, останется ли треугольникъ $P_1 P_2 P_3$ по лѣвую или по правую сторону приобходѣ отъ P_1 черезъ P_2 и P_3 обратно въ P_1.

Отсюда, если дана прямая $P_1 P_2$, то, взявъ третью вершину P_3 треугольника гдѣ нибудь по лѣвую сторону прямой $P_1 P_2$, если смотрѣть отъ точки P_1 къ точкѣ P_2, получимъ, что площадь треугольника $P_1 P_2 P_3$ будетъ положительною. Если же третью вершину P_3' взять гдѣ нибудь по правую сторону, то площадь треугольника $P_1 P_2 P_3$ будетъ отрицательна. - Если взять третью точку на самой прямой $P_1 P_2$, то площадь новаго треугольника будетъ служить переходомъ отъ отрицательныхъ къ положительнымъ значеніямъ и будетъ равняться нулю. Дѣйствительно въ этомъ случаѣ всѣ



фиг. 18.

стороны треугольника сливаются съ прямою P_1P_2, т.е. площадь его равна нулю.

По этому (см. форм. 11) уравненіе

$$x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3 = 0 \ldots (12)$$

выражаетъ условіе того, чтобы три точки $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$ лежали на прямой линіи.

Если предположить точки P_1 и P_2 неподвижными, а точку $P(x, y)$ подвижною на прямой соединяющей P_1P_2, то получимъ **уравненіе прямой, проходящей черезъ двѣ точки** $P_1(x_1, y_1)$ и $P_2(x_2, y_2)$, если въ уравненіи (12) пропустить индексъ 3:

$$x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y - xy_2 + xy_1 - x_1y = 0,$$

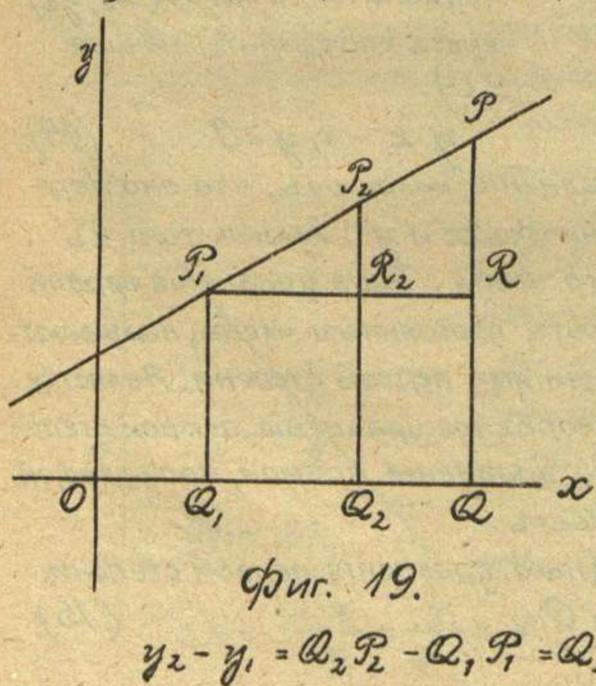
или, если немного преобразовать:

$$(y_2 - y_1)(x - x_1) - (x_2 - x_1)(y - y_1) = 0 \ldots\ldots (13)$$

Уравненіе это можно и написать въ формѣ:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \ldots\ldots\ldots (13^a)$$

допускающей простое геометрическое истолкованіе.



Фиг. 19.

Изъ точекъ P_1, P_2 и P прямой опустимъ перпендикуляры на Ox и изъ P_1 проведемъ параллель къ оси Ox, которая пересѣкаетъ перпендикуляры PQ и P_2Q_2 въ точкахъ R и R_2.

Тогда:

$$y_2 - y_1 = Q_2P_2 - Q_1P_1 = Q_2P_2 - Q_2R_2 = R_2P_2,$$

$$x_2 - x_1 = OQ_2 - OQ_1 = Q_1Q_2 = P_1R_2\,,$$
$$y - y_1 = QP - Q_1P_1 = QP - QR = RP;$$
$$x - x_1 = OQ - OQ_1 = Q_1Q = P_1R\;;$$

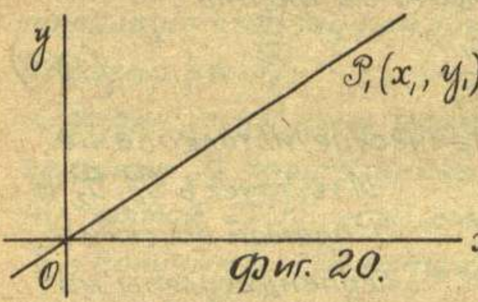
Подставляя въ уравненіе (13^{α}), получаемъ:

$$\frac{RP}{R_2P_2} = \frac{P_1R}{P_1R_2}\,,$$

т. е. извѣстную теорему о пропорціональности сторонъ подобныхъ треугольниковъ.

Наоборотъ, если предположить извѣстною теорему о пропорціональности сторонъ подобныхъ треугольниковъ, то обратными заключеніями можно вывести уравненіе прямой въ видѣ ($13^{\underline{\alpha}}$).

Возьмемъ теперь частный случай прямой: пусть она проходитъ черезъ начало координатъ и точку $P_1(x_1, y_1)$.



Фиг. 20.

Чтобы получить уравненіе этой прямой, стоитъ только въ уравненіи (13) замѣнить координаты точки $P_2(x_2, y_2)$ черезъ координаты начала $(0,0)$:

$$y_1 x - x_1 y = 0 \;\ldots\ldots (14).$$

Разсматривая это уравненіе, находимъ, что оно первой степени по отношенію къ x и y; кромѣ того въ немъ нѣтъ постояннаго члена. Такія уравненія первой степени, въ которыхъ нѣтъ постояннаго члена, называются однородными уравненіями первой степени. Является вопросъ, всякое ли однородное уравненіе первой степени представляетъ собою уравненіе прямой, проходящей черезъ начало координатъ.

Общій видъ однороднаго уравненія первой степени:

$$Ax + By = 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots (15).$$

Если подставить:

$$\mathcal{A} = \frac{y_1}{\lambda}, \quad -\mathcal{B} = \frac{x_1}{\lambda},$$

то уравненіе (15) переходитъ въ:

$$\frac{xy_1}{\lambda} - \frac{yx_1}{\lambda} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (16)$$

или

$$y_1 x - x_1 y = 0,$$

т. е. принимаетъ видъ уравненія (14), такъ что дѣйствительно каждое однородное уравненіе первой степени представляетъ прямую, проходящую черезъ начало координатъ.

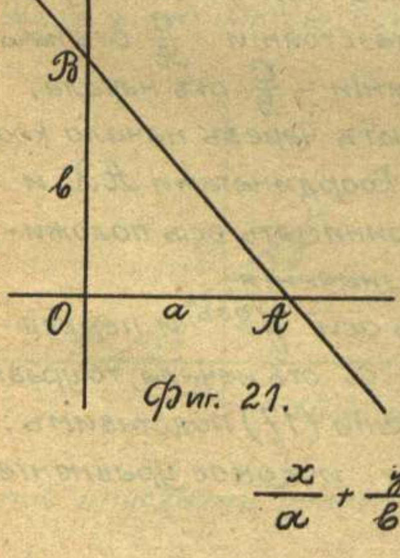
Изъ уравнені для $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ мы имѣемъ:

$$x_1 = -\mathcal{B}\lambda, \quad y_1 = \mathcal{A}\lambda.$$

Если придавать λ всевозможныя значенія отъ $-\infty$ до $+\infty$, то мы получимъ всѣ точки, принадлежащія прямой линіи.

Вернемся къ общему случаю прямой, не проходящей черезъ начало координатъ.

Положимъ дана прямая, пересѣкающая оси въ разстояніяхъ a и b отъ начала. Найдемъ уравненіе этой прямой.



Фиг. 21.

Съ этою цѣлью стоитъ лишь въ уравненіи (13^a) вмѣсто x_1, y_1, x_2, y_2 подставить координаты точекъ $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, т. е. приравнять:

$$x_1 = a, \quad x_2 = 0,$$
$$y_1 = 0, \quad y_2 = b;$$

тогда получаемъ:

$$\frac{x-a}{-a} = \frac{y}{b};$$

или

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (17).$$

Итакъ уравненіе (17) представляетъ уравненіе прямой линіи, отсѣкающей отъ осей отрѣзки a и b.

Это уравненіе также первой степени, но не однородное, ибо въ немъ есть постоянный членъ. Но вообще всякое уравненіе первой степени есть уравненіе прямой, въ чемъ не трудно убѣдиться.

Общій видъ уравненія первой степени есть:

$$Ax + By + C = 0.$$

Будемъ предполагать теперь $C \neq 0$, т.к. случай $C = 0$ уже разобранъ нами.

Перенеся постоянный членъ, получимъ:

$$Ax + By = -C$$

$$-\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y = 1$$

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1$$

Такимъ образомъ уравненіе приведено къ виду (17), причемъ:

$$a = -\frac{C}{A}; \qquad b = -\frac{C}{B} \cdots\cdots (18).$$

Итакъ мы получили, что уравненіе первой степени $Ax + By + C = 0$ изображаетъ прямую линію, пересѣкающую ось абсциссъ на разстояніи $-\frac{C}{A}$ отъ начала, а ось ординатъ на разстояніи $-\frac{C}{B}$ отъ начала.

Если $C = 0$, то прямая проходитъ черезъ начало координатъ и черезъ всѣ точки съ координатами $A\lambda$ и $-B\lambda$, причемъ λ можетъ принимать всѣ положительныя или отрицательныя значенія.

Если прямая параллельна къ оси yовъ и пересѣкаетъ ось xовъ на разстояніи a отъ начала, то уравненіе ея получимъ, если въ уравненіи (17) подставимъ:

$$b = \infty;$$ т.е. искомое уравненіе будетъ:

$$x = a \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (17^a)$$

Такимъ же образомъ получимъ уравненіе прямой параллельной оси $x^{овъ}$ и отстоящей отъ нея на разстояніе b:

$$y = b \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (17^b).$$

Если въ уравненіи (17^a) придать a частное значеніе $a = 0$, то получимъ уравненіе прямой параллельной оси $y^{овъ}$ и пересѣкающей ось $x^{овъ}$ на разстояніи 0 отъ начала, т.е. проходящей черезъ начала, или другими словами мы получаемъ уравненіе оси $y^{овъ}$:

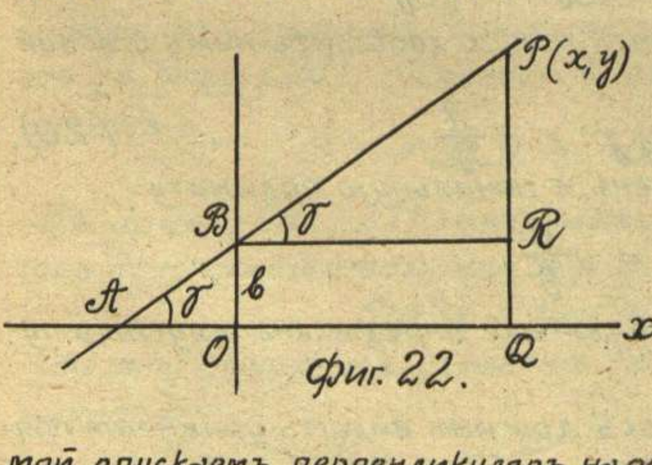
$$x = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (17^c).$$

Такимъ же путемъ находимъ, что уравненіе оси $x^{овъ}$ есть:

$$y = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (17^d).$$

Такъ какъ вообще уравненіе первой степени выражаетъ прямую линію, то такое уравненіе называется **линейнымъ**.

Пусть теперь положеніе прямой линіи опредѣлено разстояніемъ b, на которомъ она пересѣкаетъ ось ординатъ отъ начала и угломъ γ, образуемымъ ею съ положительною частью оси $x^{овъ}$.



Фиг. 22.

Посмотримъ, каково будетъ уравненіе прямой линіи, выраженное посредствомъ этихъ данныхъ.

Изъ произвольной точки $P(x, y)$ на данной прямой опускаемъ перпендикуляръ на ось $x^{овъ}$, а изъ B

ведемъ параллель къ ней, пересѣкающую перпендикуляръ въ точкѣ R. Тогда

$$\angle RBP = \angle OAP = \gamma$$

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{RP}{BR} = \frac{QP-QR}{BR} = \frac{QP-OB}{OQ} = \frac{y-b}{x}.$$

Освобождаемся отъ знаменателя:

$$x\operatorname{tg}\gamma = y-b.$$

Расположивъ члены въ другомъ порядкѣ, получаемъ уравненіе:

$$y = x\operatorname{tg}\gamma + b \, \ldots\ldots \quad (19).$$

b называется **начальною ординатою**, уголъ γ — **угломъ наклоненія**, а $\operatorname{tg}\gamma$ — **угловымъ коэффиціентомъ** прямой. Обозначая послѣдній черезъ m, получимъ:

$$y = mx + b \, \ldots\ldots \quad (19^a).$$

Чтобы изъ уравненія прямой общаго вида $Ax + By + c = 0$ опредѣлить значенія углового коэффиціента и начальной ординаты, слѣдуетъ только привести его къ виду (19), т.е. рѣшить относительно y:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{c}{B};$$

тогда коэффиціентъ при x доставитъ намъ угловой коэффиціентъ

$$m = \operatorname{tg}\gamma = -\frac{A}{B} \, \ldots\ldots \quad (20).$$

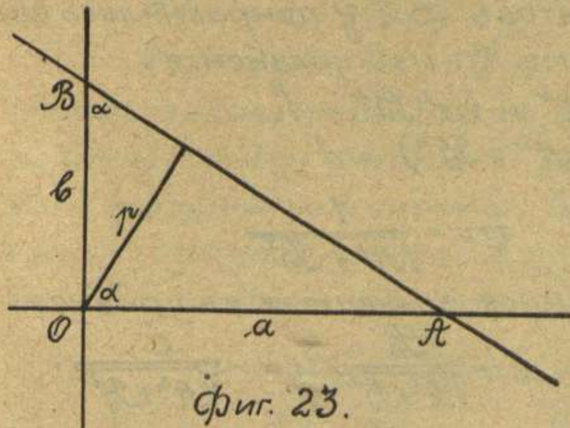
а постоянный членъ — начальную ординату

$$b = -\frac{c}{B},$$

которая была уже раньше опредѣлена другимъ путемъ.

Познакомимся еще съ другимъ видомъ уравненія прямой, когда данными величинами входятъ разстояніе p

прямой отъ начала, и уголъ α, образуемый перпендикуляромъ p съ положительною частью оси x-овъ.



Фиг. 23.

Обозначимъ отрѣзки, отсѣкаемые прямою отъ осей, опять черезъ a и b. Тогда видно изъ чертежа, что

$$a = \frac{p}{\cos\alpha},$$

$$b = \frac{p}{\sin\alpha}.$$

Подставивъ эти значенія въ формулу (17), получаемъ:

$$\frac{x\cos\alpha}{p} + \frac{y\sin\alpha}{p} = 1.$$

Отсюда:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p \quad . \; . \; . \; . \; (21).$$

Уравненіе (21) называется уравненіемъ прямой въ **нормальной формѣ**.

Чтобы изъ общаго уравненія прямой линіи

$$Ax + By + C = 0$$

опредѣлить значенія $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ и p, приведемъ его къ виду (21). Перенеся C въ правую часть, получимъ:

$$Ax + By = -C \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (22).$$

Въ уравненіи (21) замѣчаемъ, что сумма квадратовъ коэффиціентовъ при x и y равна единицѣ:

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

Поэтому умножимъ уравненіе (22) на нѣкоторое число m:

$$mAx + mBy = mC, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (23),$$

и придадимъ m такое значеніе, чтобы сумма квадратовъ коэффиціентовъ x и y приравнялась единицѣ, т.е. опредѣляемъ m изъ уравненія:

$$m^2A^2 + m^2B^2 = 1.$$

$$m^2(A^2+B^2) = 1.$$

$$m^2 = \frac{1}{A^2+B^2} \quad ; \quad m = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Подставивъ полученное значеніе m въ уравненіе (23): $\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y = -\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

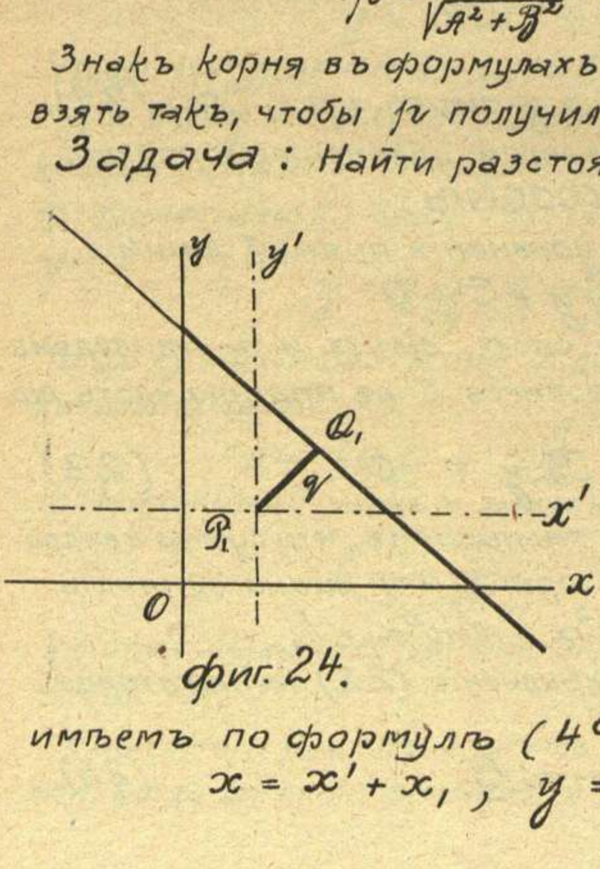
Сравнивая полученное уравненіе съ уравненіемъ (21), находимъ значенія $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ и p.

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} ; \sin\alpha = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \quad \cdots (24)$$

$$p = \frac{-C}{\sqrt{A^2+B^2}} \quad \cdots\cdots (25)$$

Знакъ корня въ формулахъ (24) и (25) слѣдуетъ взять такъ, чтобы p получилось положительное.

Задача: Найти разстояніе данной точки отъ данной прямой.



фиг. 24.

Пусть дана прямая: $Ax + By + C = 0$ и точка $P_1(x_1, y_1)$.

Принявъ новую систему координатъ $x'P_1y'$, начало которой совпадаетъ съ точкой P_1 и оси которой параллельны первоначальнымъ, имѣемъ по формулѣ (4^a):

$$x = x' + x_1 , \quad y = y' + y_1 .$$

Подставимъ въ уравненіе данной прямой:

$$A(x'+x_1)+B(y'+y_1)+C=0,$$

$$Ax'+By'+Ax_1+By_1+C=0.$$

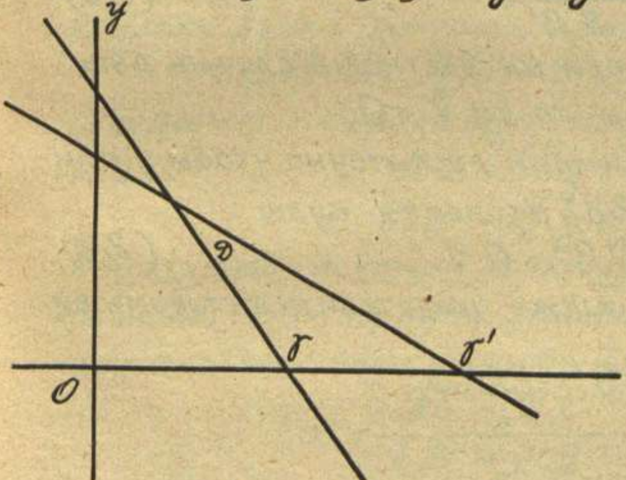
Теперь задача приведена къ только что рѣшенной задачѣ: найти разстояніе данной прямой отъ начала координатной системы. Такъ какъ постояннымъ членомъ теперь служитъ Ax_1+By_1+C, то по формулѣ (25) искомое разстояніе:

$$q=\frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}} \quad \ldots\ldots\ldots (26).$$

Задача. Опредѣлить уголъ ϑ, заключающійся между двумя прямыми. Углы наклоненія данныхъ прямыхъ пусть будутъ γ и γ' (фиг. 25), тогда, по извѣстной изъ планиметріи теоремѣ, что внѣшній уголъ треугольника равенъ суммѣ не смежныхъ съ нимъ внутреннихъ

$$\vartheta=\gamma'-\gamma,$$

слѣдовательно:



Фиг. 25.

$$tg\,\vartheta=tg(\gamma'-\gamma)=\frac{tg\gamma'-tg\gamma}{1+tg\gamma'\cdot tg\gamma}$$

Если прямыя даны уравненіями:

$$y=mx+b,$$

$$y'=m'x+b',$$

то $tg\gamma=m$; $tg\gamma'=m'$;

слѣдовательно

$$tg\,\vartheta = \frac{m' - m}{1 + m'm} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (27)$$

Если же прямыя даны въ общемъ видѣ:

$$Ax + By + C = 0,$$
$$A'x + By + C' = 0,$$

то по формулѣ (20)

$$tg\,\gamma = -\frac{A}{B}, \quad tg\,\gamma' = -\frac{A'}{B'}.$$

отсюда
$$tg\,\vartheta = \frac{-\frac{A'}{B'} + \frac{A}{B}}{1 + \frac{A'}{B'} \cdot \frac{A}{B}}.$$

Умноживъ числителя и знаменателя на BB', получимъ

$$tg\,\vartheta = \frac{-A'B + AB'}{BB' + AA'} \quad \text{или}$$

$$tg\,\vartheta = \frac{AB' - A'B}{AA' + BB'} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (28).$$

Слѣдствіе I. Если въ частномъ случаѣ двѣ прямыхъ параллельны, то $tg\,\vartheta = 0$.

Для этого необходимо и достаточно чтобы числитель въ формулѣ (28) равнялся нулю:

$$AB' - A'B = 0 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (29).$$

Это условіе можно также представить въ такомъ видѣ:

$$AB' = A'B,$$

откуда
$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'},$$

т.е., чтобы прямыя были параллельны, необходимо и достаточно чтобы коэффиціенты при x и y въ ихъ уравненіяхъ были пропорціональны.

Изъ уравненія (29) слѣдуетъ, что

$$B' = \frac{A'B}{A}$$

Подставляя это значеніе въ уравненіе второй прямой, получимъ:

$$A'x + \frac{A'B}{A}y + C' = 0.$$

Умножимъ на $\frac{A}{A'}$;

$$Ax + By + \frac{C'A}{A'} = 0.$$

Если обозначить постоянный членъ черезъ D, то получимъ:

$$Ax + By + D = 0,$$

т. е. уравненія параллельныхъ прямыхъ можно всегда привести къ такому виду, чтобы они отличались лишь постояннымъ членомъ.

Слѣдствіе II. Если прямыя перпендикулярны, то

$$tg\,\vartheta = \pm\infty.$$

Въ такомъ случаѣ знаменатель выраженія (28) равенъ нулю и мы получаемъ условіе перпендикулярности двухъ данныхъ прямыхъ:

$$AA' + BB' = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30).$$

Задача: Опредѣлить точку пересѣченія прямыхъ.

$$\text{I. } Ax + By + C = 0 \text{ и}$$
$$\text{II. } A'x + B'y + C' = 0.$$

Координаты искомой точки удовлетворяютъ одновременно этимъ двумъ уравненіямъ, по этому мы получимъ ихъ, если рѣшимъ систему этихъ уравненій

$$x = \frac{BC' - B'C}{AB' - A'B}, \quad y = \frac{CA' - C'A}{AB' - A'B}.$$

Предположимъ что кромѣ двухъ пересѣкающихся прямыхъ I и II, намъ дана еще прямая III:

$A''x + B''y + C'' = 0$, проходящая черезъ точку пересѣченія первыхъ двухъ. Въ такомъ случаѣ координаты этой точки пересѣченія должны удовлетворять уравненію третьей прямой и мы получаемъ условіе того, чтобы три прямыхъ пересѣкались въ одной точкѣ:

$$A''\frac{BC-B'C}{AB'-A'B}+B''\frac{CA'-C'A}{AB'-A'B}+C''=0,$$

или по уничтоженіи знаменателя:

$$A''(BC'-B'C)+B''(CA'-C'A)+C''(AB'-A'B)=0\ldots(31)$$

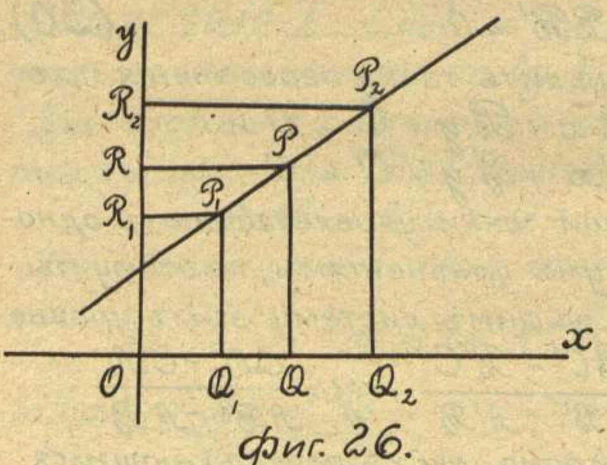
Общій видъ всѣхъ этихъ уравненій есть:

$$Ax+By+C=0.$$

До сихъ поръ у насъ прямая линія выражалась однимъ уравненіемъ. Познакомимся теперь съ методами изображенія ея помощью двухъ уравненій.

Пусть будутъ даны (фиг. 26) двѣ точки P_1 и P_2. Соединивъ эти точки прямою, можемъ сказать, что положеніе каждой точки P на ней будетъ вполнѣ опредѣлено, коль скоро намъ извѣстно отношеніе

$$\frac{P_1P}{PP_2}=\lambda$$



фиг. 26.

Если P приближаясь къ точкѣ P_1 совпадетъ съ нею, то $P_1P=0$, откуда $\lambda=0$. Если же P находится между P_1 и P_2, то принимая во вниманіе, что P_1P и PP_2 измѣряются по тому же направленію, придаемъ λ положительныя значенія, увеличивающіяся по мѣрѣ приближенія P къ P_2. Когда P совпадетъ съ P_2, то $PP_2=0$ и $\lambda=\infty$.

Если P перейдетъ за точку P_2 или P_1 (т.е. будетъ лежать внѣ отрѣзка P_1P_2), то P_1P и PP_2 имѣютъ противоположныя направленія, по этому будемъ придавать λ отрицательныя значенія. Схематически можно это обозначить такъ:

P	$-\infty$	P_1	P_2	$+\infty$
λ	-1	0	$\pm\infty$	-1

Каждому положенію P соотвѣтствуетъ опредѣленное значеніе λ, и, обратно, для каждаго значенія λ точка P занимаетъ опредѣленное положеніе на прямой.

Опустивъ перпендикуляры изъ точекъ P_1, P, P_2 на ось абсциссъ, находимъ:

$$\lambda = \frac{P_1P}{PP_2} = \frac{Q_1Q}{QQ_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x}.$$

Если опустимъ перпендикуляры на ось ординатъ, то получимъ:

$$\lambda = \frac{R_1R}{RR_2} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}.$$

Изъ этихъ уравненій легко опредѣлить x и y.

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x) = \lambda x_2 - \lambda x;$$

$$x + \lambda x = x_1 + \lambda x_2,$$

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda};$$

$$y - y_1 = \lambda(y_2 - y) = \lambda y_2 - \lambda y,$$

$$y + \lambda y = y_1 + \lambda y_2,$$

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Мы видѣли, что положеніе точки P, а слѣдовательно и величина координатъ ея x и y зависитъ отъ λ. Слѣдовательно, придавая всевозможныя значенія для λ, получимъ каждый разъ опредѣленныя значенія для x и y, т.е. опредѣленную точку. Получаемое геометрическое мѣсто этихъ точекъ будетъ, конечно, прямая, проходящая черезъ точки $P_1(x, y_1)$ и $P_2(x_2\ y_2)$. Итакъ прямая линія выразилась совокупностью уравненій:

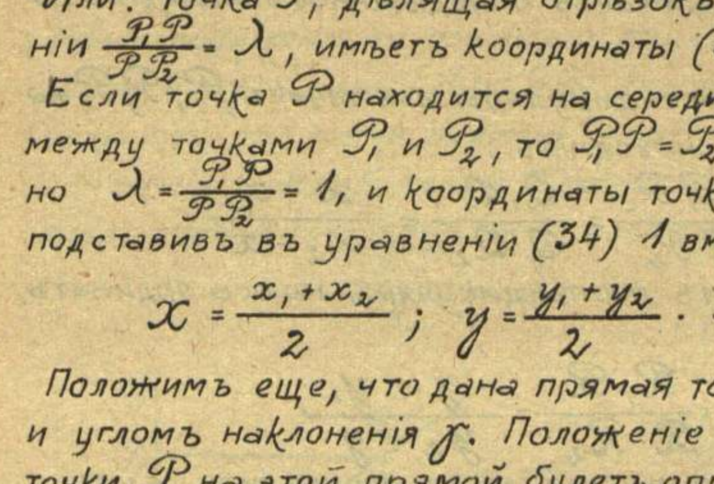
$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} \\ y &= \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (34).$$

Или: точка P_1 дѣлящая отрѣзокъ P_1P_2 въ отношеніи $\frac{P_1P}{PP_2} = \lambda$, имѣетъ координаты (34).

Если точка P находится на серединѣ разстоянія между точками P_1 и P_2, то $P_1P = P_2P$, слѣдовательно $\lambda = \frac{P_1P}{PP_2} = 1$, и координаты точки P мы получимъ подставивъ въ уравненіи (34) 1 вмѣсто λ:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}\ ;\ y = \frac{y_1 + y_2}{2} \ \ldots\ldots (34^a)$$

Положимъ еще, что дана прямая точкою $L(l, m)$ и угломъ наклоненія γ. Положеніе произвольной точки P на этой прямой будетъ опредѣлено, коль скоро намъ будетъ извѣстно ея разстояніе $LP = u$ отъ точки L.



Фиг. 27.

Принявъ L за начало новой системы $x'Ly'$, оси которой параллельны первоначальнымъ осямъ, можемъ написать:

$$\left.\begin{aligned} x' &= u \cos\gamma \\ y' &= u \sin\gamma \end{aligned}\right\} \ \ldots\ldots (35).$$

Замѣчая, что по формулѣ (5):

$$x' = x - l,$$
$$y' = y - m,$$

подставляемъ эти значенія въ уравненіи (35):

$$x - l = u \cos\gamma,$$
$$y - m = u \sin\gamma,$$

откуда:

$$\left.\begin{array}{l} x = l + u\cos\gamma \\ y = m + u\sin\gamma \end{array}\right\} \ldots\ldots (36).$$

Придавая всевозможныя значенія для u, получаемъ соотвѣтственныя значенія для x и y. Точкамъ, лежащимъ по одну сторону отъ $\mathcal{L}$, соотвѣтствуютъ положительныя, а точкамъ по другую сторону отъ $\mathcal{L}$ отрицательныя значенія u.

Изслѣдованіе уравненія $\mathcal{A}x^2 + \mathcal{B}y^2 + 2\mathcal{D}x + 2\mathcal{E}y + \mathcal{F} = 0$.

Уже раньше мы нашли, что уравненіе круга, центръ котораго (a, b), а радіусъ r, есть:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \ldots\ldots (37).$$

Раскроемъ скобки и перенесемъ r^2 влѣво:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0 \ldots (38).$$

Это уравненіе есть частный случай слѣдующаго общаго уравненія:

$$\mathcal{A}x^2 + \mathcal{B}y^2 + 2\mathcal{D}x + 2\mathcal{E}y + \mathcal{F} = 0 \ldots\ldots (39).$$

Является вопросъ, изображаетъ ли уравненіе (39) всегда кругъ. Очевидно, что оно будетъ изображать кругъ, если намъ удастся привести его къ виду (37) или (38), т.е., опредѣлить координаты центра и радіусъ при помощи коэффиціентовъ $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$.

Ясно, что уравненіе (39) можно привести къ виду (38) только въ томъ случаѣ, когда $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, т.е., когда данное уравненіе имѣетъ болѣе специіальный видъ:

$$Ax^2+Ay^2+2Dx+2Ey+F=0 \ldots \ldots (40).$$

Въ уравненіи (38) коэффиціенты при x и y равны единицѣ; поэтому, чтобы привести уравненіе (40) къ виду (38), раздѣлимъ его на A:

$$x^2+y^2+2\frac{D}{A}x+2\frac{E}{A}y+\frac{F}{A}=0.$$

Далѣе замѣчаемъ, что въ уравненіи (37) лѣвая часть состоитъ изъ суммы двухъ квадратовъ. Чтобы уравненію (40) придать подобную форму, разсмотримъ сумму членовъ:

$$x^2+2\frac{D}{A}x$$

какъ первые два члена, получившіеся отъ разложенія:

$$\left(x+\frac{D}{A}\right)^2=x^2+2\frac{D}{A}x+\frac{D^2}{A^2}.$$

Чтобы получить полный квадратъ, слѣдуетъ къ суммѣ $x^2+2\frac{D}{A}x$ прибавить $\frac{D^2}{A^2}$, а чтобы уравненіе не измѣнилось, вычтемъ ту же величину. Также поступаемъ относительно суммы $y^2+2\frac{E}{A}y$. Тогда получимъ:

$$x^2+2\frac{D}{A}x+\frac{D^2}{A^2}+y^2+2\frac{E}{A}y+\frac{E^2}{A^2}+\frac{F}{A}-\frac{D^2}{A^2}-\frac{E^2}{A^2}=0$$

$$\left(x+\frac{D}{A}\right)^2+\left(y+\frac{E}{A}\right)^2=\frac{D^2+E^2-AF}{A^2} \ldots (41).$$

Сравнивая уравненіе (41) съ уравненіемъ (37), видимъ, что уравненіе (41), а, слѣдовательно, и (40) изображаютъ кругъ, координаты центра котораго суть:

$$a=-\frac{D}{A}\ ;\ b=-\frac{E}{A},$$

а радіусъ

$$r=\frac{1}{A}\sqrt{D^2+E^2-AF}.$$

Дѣйствительныя значенія r получаются только для положительныхъ значеній подкоренного количества, т.е. уравненіе (40) изображаетъ въ дѣйствительности кругъ только тогда, когда:

$$D^2 + E^2 > AF.$$

Такимъ образомъ мы получаемъ слѣдующую теорему:

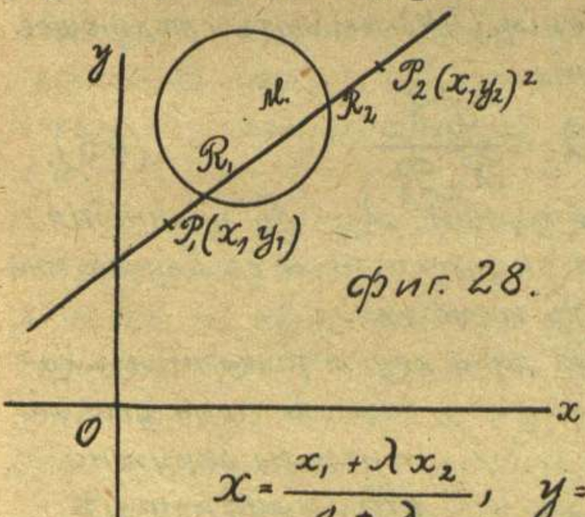
Уравненіе $Ax^2 + Bx^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$, въ случаѣ $A = B$ и $D^2 + E^2 - AF > 0$ представляетъ кругъ, центръ котораго имѣетъ координаты $a = -\frac{D}{A}$, $b = -\frac{E}{A}$, а радіусъ котораго $r = \frac{1}{A}\sqrt{D^2+E^2-AF}$.

Задача: Опредѣлить точки пересѣченія прямой съ окружностью.

Пусть уравненіе круга будетъ:

$$Ax^2 + By^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \quad \dots \quad (42)$$

ибо мы всегда можемъ предположить, что $A = B$. Далѣе пусть прямая дана двумя точками $P_1(x_1, y_1)$ и $P_2(x_2, y_2)$.



фиг. 28.

Точки пересѣченія ея съ окружностью назовемъ R_1 и R_2. Мы знаемъ, что координаты каждой точки, лежащей на прямой P_1P_2, даются слѣдующими формулами:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \quad \dots (43).$$

Такъ какъ значенія x и y зависятъ отъ λ, то вопросъ состоитъ въ томъ, чтобы опредѣлить значенія λ, соотвѣтствующія координатамъ точекъ R_1 и R_2.

Такъ какъ эти точки лежатъ на окружности, то координаты ихъ должны удовлетворять уравненію (42), слѣдовательно, подставивъ значенія (43) вмѣсто x и y въ уравненіе (42), мы получимъ уравненіе, изъ котораго можемъ опредѣлить λ:

$$A\frac{(x_1+\lambda x_2)^2}{(1+\lambda)^2}+B\frac{(y_1+\lambda y_2)^2}{(1+\lambda)^2}+2D\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}+2E\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}+F=0$$

Освобождаемъ отъ знаменателя:

$$A(x_1+\lambda x_2)^2+B(y_1+\lambda y_2)^2+2D(x_1+\lambda x_2)(1+\lambda)+2E(y_1+\lambda y_2)(1+\lambda)+$$
$$+F(1+\lambda)^2=0.$$

Располагаемъ по степенямъ λ:

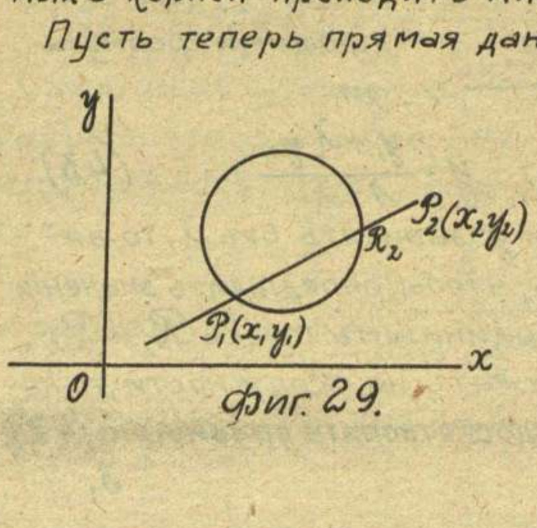
$$\lambda^2(Ax_2^2+By_2^2+2Dx_2+2Ey_2+F)+$$
$$+2\lambda[Ax_1x_2+By_1y_2+D(x_1+x_2)+E(y_1+y_2)+F]+$$
$$+Ax_1^2+By_1^2+2Dx_1+2Ey_1+F=0\ \ldots\ldots(44).$$

Мы получили квадратное уравненіе, изъ котораго можемъ получить два значенія для λ. Подставляя ихъ въ уравненіе (43), получаемъ по два значенія для x и y. Значитъ прямая пересѣкаетъ кругъ въ двухъ точкахъ. Корни уравненія (44) имѣютъ слѣдующее геометрическое значеніе:

$$\lambda_1=\frac{P_1R_1}{R_1P_2};\quad \lambda_2=\frac{P_1R_2}{R_2P_2}\ \ldots\ldots(45).$$

Въ случаѣ равныхъ корней $\lambda_1=\lambda_2$ уравненія (44) прямая касается окружности, а въ случаѣ мнимыхъ корней проходитъ мимо ея.

Пусть теперь прямая дана двумя точками, изъ которыхъ одна уже лежитъ на окружности, напримѣръ точка $P_1(x_1y_1)$.



фиг. 29.

Въ такомъ случаѣ координаты точки P_1 удовлетворяютъ уравненію (42):

$$Ax_1^2+By_1^2+2Dx_1+2Ey_1+F=0 \quad \ldots\ldots (46).$$

Отсюда уравненіе (44) принимаетъ видъ:

$$\alpha\lambda^2+2\beta\lambda=0 \quad \ldots\ldots\ldots (47)$$

причемъ

$$\alpha=Ax_2^2+By_2^2+2Dx_2+2Ey_2+F,$$

$$\beta=Ax_1x_2+By_1y_2+D(x_1+x_2)+E(y_1+y_2)+F.$$

Корни уравненія (47) въ этомъ случаѣ будутъ:

$$\lambda_1=0,\ \lambda_2=-\frac{2\beta}{\alpha}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, одинъ изъ корней долженъ быть равенъ нулю, такъ какъ по первой формулѣ (45)

$$\lambda_1=\frac{P_1R_1}{R_1R_2}.$$

А въ нашемъ случаѣ точки P_1 и R_1 сливаются, т.е. $\lambda_1=0$.

Положимъ теперь, что прямая P_1P_2 вращается около точки P_1. Тогда соотвѣтственное значеніе λ_2 все уменьшается и, когда прямая переходитъ въ положеніе касательной къ кругу, то λ_2 дѣлается равнымъ нулю. Но чтобы λ_2 равнялось нулю, необходимо имѣть: $\beta=0$, т.е.

$$Ax_1x_2+By_1y_2+D(x_1+x_2)+E(y_1+y_2)+F=0.$$

Это выраженіе всегда равно нулю, если точка P_1 лежитъ на окружности, а P_2 гдѣ-нибудь на касательной къ кругу въ точкѣ P_1. Замѣнимъ обозначеніе x_2, y_2 черезъ x и y, тогда получимъ уравненіе касательной къ данному кругу въ точкѣ (x_1y_1):

$$Ax_1x+By_1y+D(x_1+x)+E(y_1+y)+F=0 \quad \ldots (48)$$

или отдѣливъ члены съ x и y:

$$x(Ax_1+D)+y(By_1+E)+Dx_1+Ey_1+F=0 \quad \ldots (49).$$

Сравнивая уравненіе (38) съ уравненіемъ (42) имѣемъ:

$$A=1;\ B=1;\ D=-a;\ E=-b;\ F=a^2+b^2-r^2.$$

Подставляя эти значенія въ уравненіи (49) получаемъ уравненіе касательной къ кругу (38)

$$x(x_1-a)+y(y_1-b)-ax_1-by_1+a^2+b^2-r^2=0$$

$$x(x_1-a)+y(y_1-b)-a(x_1-a)-b(y_1-b)=r^2;$$

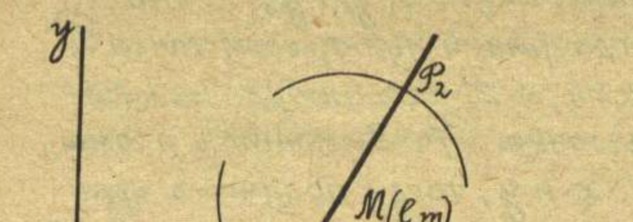
$$(x-a)(x_1-a)+(y-b)(y_1-b)=r^2;$$

т.е. прямая, касающаяся круга $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ въ точкѣ (x_1,y_1) имѣетъ уравненіемъ:

$$(x-a)(x_1-a)+(y-b)(y_1-b)=r^2 \dots (50).$$

Все изложенное остается справедливымъ и въ томъ случаѣ, если A не равно B. Мы нашли, что кривая, выраженная уравненіемъ (42) пересѣкается прямою въ двухъ точкахъ. Такая кривая называется кривою второго порядка. Уравненіе ея касательной есть уравненіе (49).

Мы знаемъ, что въ центрѣ круга каждый діаметръ дѣлится пополамъ. Посмотримъ, не имѣется ли у кривой (42) точки, играющей по отношенію къ ней подобную же роль, т.е. такой точки, въ которой всѣ хорды, проходящія черезъ нее, дѣлились бы ею пополамъ.



Фиг. 30.

Всѣ точки, лежащія на прямой, проходящей черезъ точку $M(l,m)$ и составляющей съ осью $x^{\text{овъ}}$ уголъ ϑ даются формулами (36):

$$x=l+u\cos\vartheta,$$
$$y=m+u\sin\vartheta.$$

Чтобы найти точки пересѣченія этой линіи съ кривой (42), подставляемъ эти выраженія въ уравненіе кривой:

$$\mathcal{A}(l+u\cos\vartheta)^2+\mathcal{B}(m+u\sin\vartheta)^2+2\mathcal{D}(l+u\cos\vartheta)+$$
$$+2\mathcal{E}(m+u\sin\vartheta)+\mathcal{F}=0.$$

Располагаемъ члены по степенямъ u:

$$u^2(\mathcal{A}\cos^2\vartheta+\mathcal{B}\sin^2\vartheta)+2u(\mathcal{A}l\cos\vartheta+\mathcal{B}m\sin\vartheta+$$
$$+\mathcal{D}\cos\vartheta+\mathcal{E}\sin\vartheta)+\mathcal{A}l^2+\mathcal{B}m^2+2\mathcal{D}l+2\mathcal{E}m+\mathcal{F}=0 \ldots (51).$$

Мы получили квадратное уравненіе, имѣющее два рѣшенія, т.е. данная кривая пересѣкается прямою въ двухъ точкахъ, что уже было найдено нами другимъ путемъ. Если точка M дѣлитъ пополамъ прямую P_1P_2, то корни уравненія (51) должны различаться только знаками, ибо точки P_1 и P_2 лежатъ по различныя стороны отъ точки M на одинаковыхъ разстояніяхъ.

Если вообще дано квадратное уравненіе:

$$\alpha u^2+2\beta u+\gamma=0,$$

то рѣшеніе его представляется въ видѣ:

$$u=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-\alpha\gamma}}{\alpha}.$$

Эти рѣшенія только тогда равны по абсолютной величинѣ и различаются знакомъ, когда $\beta=0$, т.е. центръ нашей кривой (42) существуетъ только тогда, когда коэффиціентъ при u въ уравненіи (51) равенъ нулю:

$$\mathcal{A}l\cos\vartheta+\mathcal{B}m\sin\vartheta+\mathcal{D}\cos\vartheta+\mathcal{E}\sin\vartheta=0 \ldots\ldots (52)$$

Такъ какъ всѣ хорды проходящія черезъ точку M по предположенію должны дѣлиться ею пополамъ, то уголъ ϑ можетъ принимать произвольныя значенія; напримѣръ: $\vartheta=0$;

тогда $\sin\vartheta=0$, $\cos\vartheta=1$.

Подставляя эти значенія въ уравненіе (52), получаемъ:

$$\mathfrak{A}l + \mathfrak{D} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (53).$$

Если $\vartheta = 90^\circ$ то

$$\sin\vartheta = 1, \; \cos\vartheta = 0.$$

По подстановкѣ уравненіе (52) принимаетъ видъ:

$$\mathfrak{B}m + \mathfrak{E} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (54).$$

Изъ уравненій (53) и (54) мы можемъ получить координаты точки $\mathfrak{M}$:

$$l = -\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{A}}\;; \quad m = -\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{B}} \quad \ldots\ldots (55).$$

Такимъ образомъ мы нашли координаты той точки, въ которой всѣ хорды кривой дѣлятся пополамъ. Такая точка, по аналогіи съ соотвѣтственною точкою круга, называется **центромъ кривой**.

Если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ не равны нулю, то кривая всегда имѣетъ центръ. Это вытекаетъ изъ формулъ (55). Разсмотримъ тотъ случай, когда кривая не имѣетъ центра, т. е. когда $\mathfrak{A}$ или $\mathfrak{B}$ равняется нулю. Если бы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ оба равнялись нулю, то мы имѣли бы дѣло не съ кривою, а съ прямою линіею:

$$2\mathfrak{D}x + 2\mathfrak{E}y + \mathfrak{F} = 0.$$

Положимъ, что въ уравненіи

$$\mathfrak{A}x^2 + \mathfrak{B}y^2 + 2\mathfrak{D}x + 2\mathfrak{E}y + \mathfrak{F} = 0$$

коэффиціентъ $\mathfrak{A} = 0$, т. е. пусть дано уравненіе:

$$\mathfrak{B}y^2 + 2\mathfrak{D}x + 2\mathfrak{E}y + \mathfrak{F} = 0 \quad \ldots\ldots (56).$$

Чтобы получить уравненіе въ болѣе простомъ видѣ, перемѣщаемъ координатную систему, параллельно самой себѣ, такимъ образомъ, что координаты новаго начала будутъ α и b, которыя пока будемъ считать неизвѣстными. Формулы перемѣщенія суть (4^a):

$$x = x' + \alpha,$$

$$y = y' + b.$$

Подставляемъ эти значенія въ уравненіе (56)

$$B(y'+b)^2 + 2D(x'+a) + 2E(y'+b) + F = 0.$$

Располагаемъ по степенямъ x' и y':

$$By'^2 + 2Dx' + 2(Bb+E)y' + Bb^2 + 2Da + 2Eb + F = 0 \ldots (57).$$

Чтобы уравненіе приняло болѣе простой видъ, придадимъ теперь для a и b такія значенія, чтобы постоянный членъ и коэффиціентъ при y' обратились въ нули.

$$\left.\begin{aligned} Bb + E &= 0 \\ Bb^2 + 2Da + 2Eb + F &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots (58).$$

Рѣшая эти уравненія мы опредѣляемъ координаты a и b новаго начала, сперва

$$b = -\frac{E}{B},$$

и подставивъ это значеніе во второе изъ уравненій (58), получаемъ:

$$\frac{E^2}{B} + 2Da - 2\frac{E^2}{B} + F = 0$$

$$2BDa = E^2 - BF$$

и если $D \neq 0$:

$$a = \frac{E^2 - BF}{2BD}.$$

Итакъ это суть тѣ значенія для a и b, при которыхъ постоянный членъ и коэффиціентъ при y' обращаются въ нули.

Слѣдовательно, подставляя эти значенія въ уравненіе (57) получаемъ:

$$By'^2 + 2Dx' = 0,$$

$$y'^2 = -2\frac{D}{B}x'.$$

Обозначаемъ $-\frac{D}{B}$ черезъ p:

$$y'^2 = 2px' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (59).$$

Кривая, выраженная этимъ уравненіемъ, называется **параболою**, а p **параметромъ** ея.

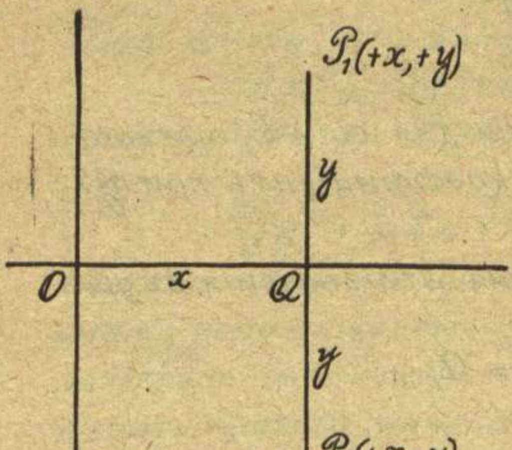
При дальнѣйшемъ изслѣдованіи, для простоты, пропустимъ верхніе указатели въ уравненіи (59) т.е. пусть уравненіе параболы будетъ

$$y^2 = 2px.$$

Рѣшая уравненіе относительно y, получаемъ:

$$y = \pm\sqrt{2px} \quad \ldots\ldots (60).$$

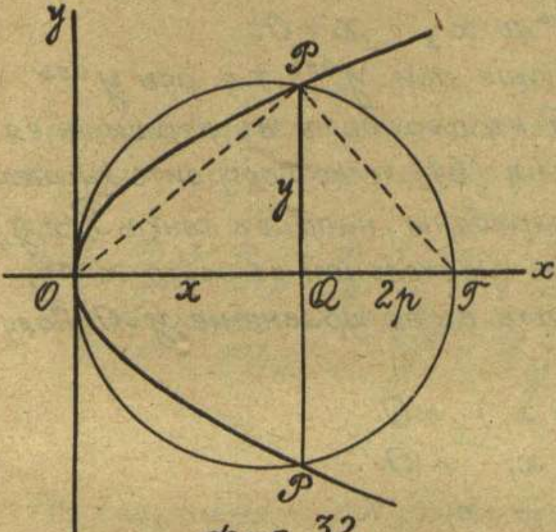
Если p положительно, то для y получаемъ дѣйствительное значеніе при положительныхъ значеніяхъ x. Если же $p < 0$, то, чтобы получить для y дѣйствительныя значенія, надо положить, что и x отрицательно. Изъ этого мы заключаемъ, что вся кривая расположена по одну сторону оси $y^{овъ}$. Изъ уравненія (60) видно, что каждому значенію x соотвѣтствуютъ два значенія для y, равныхъ по величинѣ, но разныхъ по знаку. Значитъ, если имѣемъ, что $P_1(+x_1, +y_1)$ принадлежитъ параболѣ, то непремѣнно существуетъ еще точка параболы P_2 съ координатами $(+x\ -y)$, т.е. парабола симметрична относительно оси $x^{овъ}$, которая называется **главною осью параболы**.



Фиг. 31.

Для $x = 0$ находимъ, что и $y = 0$, т.е. наша кривая проходитъ черезъ начало координатъ, такъ называемую **вершину** параболы.

По формулѣ (60) можно построить сколько угодно точекъ параболы. Съ этою цѣлью отъ произвольной точки Г на оси x овъ откладываемъ влѣво $2p$ и изъ полученной точки Q возставляемъ перпендикуляръ къ оси x овъ. На ОГ, какъ на діаметрѣ, описываемъ окружность. Точки пересѣченія ея съ построеннымъ перпендикуляромъ принадлежатъ параболѣ.



фиг. 32.

Дѣйствительно, соединивъ P съ Г и съ O прямыми линіями, имѣемъ изъ прямоугольнаго треугольника ОРГ:

$$QP^2 = QГ \cdot OQ \text{ т.е.}$$

$$y^2 = 2px.$$

Избирая все новыя точки $Г_1$, $Г_2$, $Г_3$ и т. д., получаемъ сколько угодно точекъ параболы.

Мы видѣли, что уравненіе касательной есть (49):

$$x(Ax_1 + D) + y(By_1 + E) + Dx_1 + Ey_1 + F = 0,$$

если кривая дана уравненіемъ:

$$Ax^2 + By^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Если же кривая задана уравненіемъ:

$$y^2 - 2px = 0,$$

то $A = 0$, $B = 1$; $D = -p$; $E = 0$; $F = 0$,

и уравненіе касательной принимаетъ видъ.

$$-px + y_1 y - px_1 = 0$$

$$y_1 y = p(x + x_1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (61).$$

Мы доказали что парабола проходитъ черезъ начало координатъ — опредѣлимъ касательную къ параболѣ въ этой точкѣ. Для этого въ уравненіе касательной подставляемъ:

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 0.$$

Получаемъ:

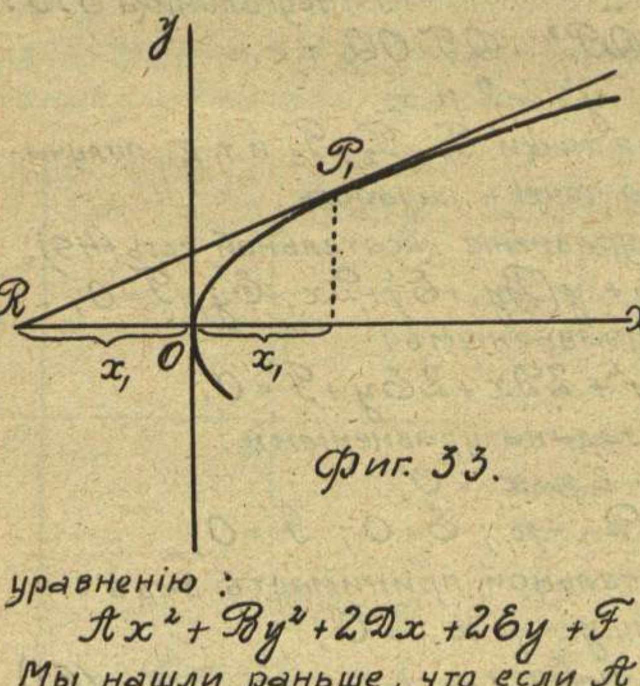
$$0 = px, \quad x = 0.$$

Мы получили уравненіе оси $y^{овъ}$ т.е. ось $y^{овъ}$ служитъ касательной къ параболѣ въ вершинѣ ея.

При помощи уравненія (61) легко построить касательную въ любой точкѣ параболы, напр. въ точкѣ $P_1(x_1 y_1)$.

Найдемъ пересѣченіе касательной съ осью $x^{овъ}$, для чего и подставляемъ въ ея уравненіе $y=0$. Получаемъ:

$$p(x + x_1) = 0$$
$$x + x_1 = 0$$
$$x = -x_1.$$



Фиг. 33.

Т.е. чтобы построить касательную въ точкѣ $P_1(x_1 y_1)$, откладываемъ влѣво отъ начала длину x_1 и соединяемъ полученную точку R съ точкою P_1.

Вернемся опять къ болѣе общему уравненію:

$$Ax^2 + By^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad \ldots\ldots \quad (62).$$

Мы нашли раньше, что если A и B различны отъ нуля, то кривая имѣетъ центръ, координаты котораго суть:

$$e = -\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{A}}, \quad m = -\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{B}}.$$

Наше уравненіе приметъ особенно простой видъ, если перенесемъ начало координатъ въ центръ кривой. Формулы перемѣщенія будутъ (4^{α}):

$$\left.\begin{aligned} x &= x' + e = x' - \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{A}} \\ y &= y' + m = y' - \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{B}} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (63).$$

Подставляя эти формулы въ общее уравненіе (62) получаемъ уравненіе нашей кривой въ новой системѣ:

$$\mathcal{A}\left(x' - \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{A}}\right)^2 + \mathcal{B}\left(y' - \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{B}}\right)^2 + 2\mathcal{D}\left(x' - \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{A}}\right) + 2\mathcal{E}\left(y' - \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{B}}\right) + \mathcal{F} = 0$$

Раскрываемъ скобки:

$$\mathcal{A}x'^2 - 2\mathcal{D}x' + \frac{\mathcal{D}^2}{\mathcal{A}} + \mathcal{B}y'^2 - 2\mathcal{E}y' + \frac{\mathcal{E}^2}{\mathcal{B}} +$$
$$+ 2\mathcal{D}x' - 2\frac{\mathcal{D}^2}{\mathcal{A}} + \quad 2\mathcal{E}y' - 2\frac{\mathcal{E}^2}{\mathcal{B}} + \mathcal{F} = 0.$$

По сокращеніи получаемъ:

$$\mathcal{A}x'^2 - \frac{\mathcal{D}^2}{\mathcal{A}} + \mathcal{B}y'^2 - \frac{\mathcal{E}^2}{\mathcal{B}} + \mathcal{F} = 0.$$

Отдѣляемъ члены съ x'^2 и y'^2:

$$\mathcal{A}x'^2 + \mathcal{B}y'^2 = \frac{\mathcal{D}^2}{\mathcal{A}} + \frac{\mathcal{E}^2}{\mathcal{B}} - \mathcal{F},$$

$$\mathcal{A}x'^2 + \mathcal{B}y'^2 = \frac{\mathcal{B}\mathcal{D}^2 + \mathcal{A}\mathcal{E}^2 - \mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{F}}{\mathcal{A}\mathcal{B}}.$$

Вводя новое обозначеніе:

$$\mathcal{B}\mathcal{D}^2 + \mathcal{A}\mathcal{E}^2 - \mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{F} = \delta \ldots\ldots\ldots (64)$$

получаемъ:

$$\mathcal{A}x'^2 + \mathcal{B}y'^2 = \frac{\delta}{\mathcal{A}\mathcal{B}} \ldots\ldots\ldots (65).$$

I. Если $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ имѣютъ одинаковые знаки, что можно выразить неравенствомъ:

$$\mathcal{A}\mathcal{B} > 0,$$

и если $\delta = 0$, то получаемъ:

$$\mathcal{A}x'^2 + \mathcal{B}y'^2 = 0.$$

Сумма двухъ слагаемыхъ, имѣющихъ тотъ-же знакъ равна нулю только тогда, если оба слагаемыя равны нулю,

т.е. $\mathcal{A} x'^2 = 0$, $\mathcal{B} y'^2 = 0$.

По условію $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ того же знака , т.е. отличны отъ нуля, такъ что

$$x' = 0 \,, \quad y' = 0.$$

Подставляя эти значенія въ формулы (63) получимъ:

$$x = -\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{A}} \,, \quad y = -\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{B}} ,$$

т.е. кривая сжимается въ точку $\left(-\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{A}}, -\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{B}}\right)$.

II Положимъ опять, что $\mathcal{A}\mathcal{B} > 0$, т.е. $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ имѣютъ одинаковые знаки, но δ неравно нулю, а имѣетъ знакъ, отличный отъ знака $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$.

Раздѣляя уравненіе (65) на $\frac{\delta}{\mathcal{A}\mathcal{B}}$, получаемъ:

$$\frac{\mathcal{A}^2 \mathcal{B}}{\delta} x'^2 + \frac{\mathcal{A}\mathcal{B}^2}{\delta} y'^2 = 1.$$

Такъ какъ δ имѣетъ знакъ отличный отъ $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, то оба члена лѣвой части отрицательны. Сумма же двухъ отрицательныхъ величинъ не можетъ равняться положительной единицѣ; значитъ полученное уравненіе совсѣмъ не выражаетъ дѣйствительной кривой.

III. Наконецъ, можемъ предположить, что $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и δ имѣютъ тотъ-же знакъ. Уравненіе (65) можно представить въ видѣ:

$$\frac{x'^2}{\delta/\mathcal{A}^2\mathcal{B}} + \frac{y'^2}{\delta/\mathcal{A}\mathcal{B}^2} = 1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (66).$$

Такъ какъ знаменатели обоихъ членовъ положительны, ибо $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и δ имѣютъ одинаковые знаки, то можемъ принять: $\frac{\delta}{\mathcal{A}^2\mathcal{B}} = a^2$, $\frac{\delta}{\mathcal{A}\mathcal{B}^2} = b^2$.

Подставляя эти значенія въ уравненіе (66), получаемъ:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

Кривая, изображенная этимъ уравненіемъ, называется ЭЛЛИПСОМЪ.

Итакъ кривая, изображенная уравненіемъ:

$$Ax^2 + By^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

есть эллипсъ, когда A, B и $\delta = BD^2 + AE^2 - ABF$ имѣютъ одинаковые знаки.

Уравненіе эллипса относительно новой координатной системы, начало которой совпадаетъ съ центромъ эллипса $\left(-\frac{D}{A}, -\frac{E}{B}\right)$ имѣетъ видъ:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \quad \dots\dots\dots (67)$$

причемъ: $a^2 = \frac{\delta}{A^2B}$, $\quad b^2 = \frac{\delta}{AB^2}$.

Предположимъ, что кривая уже въ первоначальной системѣ имѣла видъ (67). Такимъ образомъ при дальнѣйшемъ изслѣдованіи будемъ опускать верхніе указатели при x и y:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \dots\dots\dots\dots (68).$$

Рѣшимъ эта уравненіе относительно x и y:

$$y = \pm b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \quad \dots\dots\dots\dots (69).$$

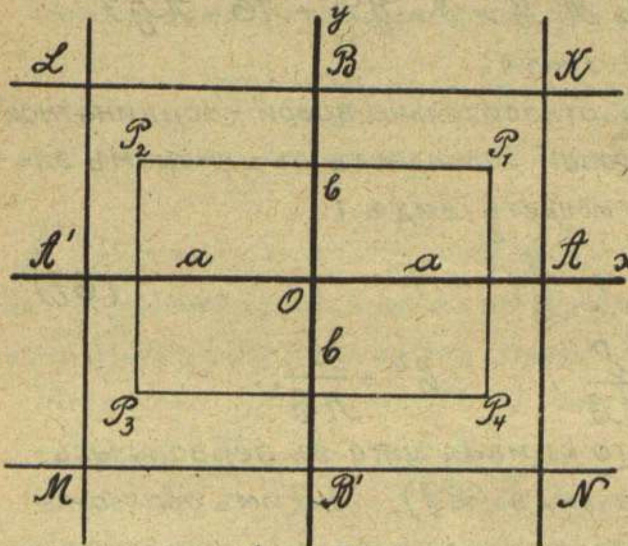
$$x = \pm a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} \quad \dots\dots\dots\dots (70).$$

Если $x^2 > a^2$, то $\frac{x^2}{a^2} > 1$; тогда подкоренное количество въ уравненіи (69) отрицательно, и для y получается мнимое значеніе. Чтобы y имѣло дѣйствительное значеніе, необходимо условіе:

$$x^2 \leqq a^2;$$

т. е. ни одна точка эллипса не можетъ имѣть абсциссу больше $+a$ и меньше $-a$; иначе говоря, вся кривая заключается между двумя линіями, параллельными оси yовъ и отстоящими отъ нея на разстояніи a..

Изъ уравненія (70) видимъ также, что кривая заключена между двумя линіями, параллельными оси xовъ и отстоящими отъ нея на разстояніи b; такъ что вся кривая заключается внутри прямоугольника $KLMN$. Если $x = a$, то $y = 0$; значитъ, кривая проходитъ черезъ точку A. Такимъ же образомъ находимъ, что кривая проходитъ черезъ точки A', B и B'. Точки A, A', B и B' называются **вершинами эллипса**.

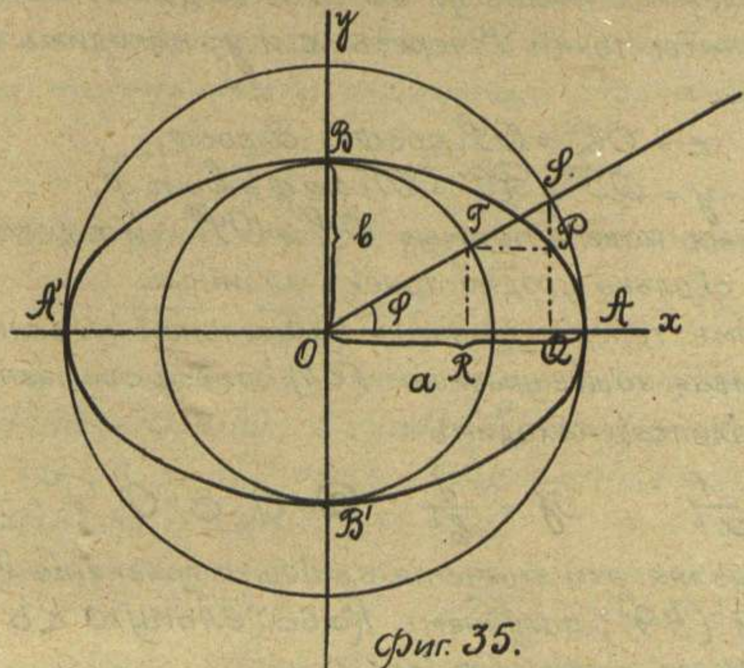


Фиг. 34.

Каждому значенію x соотвѣтствуютъ два значенія y, равныхъ по абсолютной величинѣ и различныхъ по знаку. Значитъ, кривая симметрична относительно оси xовъ. Такъ же находимъ, что кривая симметрична относительно оси yовъ.

Отрѣзки AA' и BB' называются **главными осями** эллипса. Такимъ образомъ каждой точкѣ P_1 соотвѣтствуютъ три точки P_2, P_3 и P_4, симметричныя относительно главныхъ осей.

Воспользуемся для построенія точекъ эллипса спо-



Фиг. 35.

собомъ изображенія его посредствомъ такъ называемаго перемѣннаго параметра. Положимъ что:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos\varphi \\ y &= b\sin\varphi \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots (71).$$

Подставимъ эти выраженія въ лѣвую часть уравненія (68):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{a^2\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{b^2\sin^2\varphi}{b^2}=\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1,$$

т.е. точки, соотвѣтствующія различнымъ значеніямъ φ въ формулахъ (71) лежатъ на эллипсѣ. Опишемъ теперь около начала координатной системы окружности радіусовъ a и b. Черезъ начало проведемъ произвольную прямую и уголъ наклоненія ея къ оси $x^{овъ}$ назовемъ черезъ φ. Точки пересѣченія прямой съ окружностями назовемъ T и S. Изъ S опустимъ перпендикуляръ SQ на ось $x^{овъ}$, а изъ T перпендикуляръ на SQ. Полученная точка пересѣченія P

принадлежитъ эллипсу. Въ самомъ дѣлѣ, называя координаты точки P черезъ x и y, находимъ изъ чертежа:

$$x = OQ = OS \cdot \cos\varphi = a\cos\varphi,$$
$$y = QP = RT = OT \cdot \sin\varphi = b\sin\varphi.$$

Избирая новыя прямыя OS' и OS'' и т. д. получаемъ сколько угодно точекъ эллипса.

Найдемъ теперь уравненіе касательной къ эллипсу. Сравнивая общее уравненіе (62) кривой съ уравненіемъ (68) эллипса, находимъ:

$$A = \frac{1}{a^2}, \quad B = \frac{1}{b^2}, \quad D = 0, \quad E = 0, \quad F = -1.$$

Подставляя эти значенія въ общее уравненіе касательной (49), получаемъ **касательную къ эллипсу** въ точкѣ (x_1, y_1):

$$\frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} = 1 \quad \ldots\ldots (72).$$

Помощью этого уравненія легко доказать, что касательныя въ вершинахъ эллипса перпендикулярны къ осямъ. Возьмемъ напр. вершину A. Ея координаты суть $x_1 = a$, $y_1 = 0$. Подставляя въ уравненіе (72), получаемъ:

$$\frac{x}{a} = 1$$

отсюда:

$$x = a.$$

Мы получили уравненіе прямой параллельной оси $y^{овъ}$, т. е. перпендикулярной къ оси $x^{овъ}$.

IV. Разсмотримъ теперь случай, когда въ уравненіи $Ax^2 + By^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$, коэфиціенты A и B имѣютъ различные знаки, что выражается условіемъ:

$$AB < 0,$$

и пусть δ имѣетъ тотъ же знакъ, что B. Тогда въ уравненіи (66) знаменатель перваго члена положителенъ, а втораго отрицателенъ. На этомъ основаніи мы можемъ ввести слѣдующія обозначенія:

$$a^2 = \frac{\delta}{A^2B}\ ;\quad b^2 = \frac{-\delta}{AB^2}.$$

Тогда уравненіе кривой принимаетъ видъ:

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1 \ldots\ldots\ldots (73).$$

Кривая, выражаемая этимъ уравненіемъ, называется **гиперболою**. Еслибъ δ имѣлъ тотъ же знакъ, что A, то отъ этого координатныя оси перемѣнились бы ролями.

Итакъ кривая, изображаемая уравненіемъ:

$$Ax^2+By^2+2Dx+2Ey+F=0,$$

есть гипербола, когда A и B имѣютъ различные знаки, а $\delta = BD^2+AE^2-ABF$ отлично отъ нуля.

Въ новой системѣ, оси которой параллельны даннымъ и начало которой совпадаетъ съ центромъ, координаты котораго суть

$$l = -\frac{D}{A}, \quad m = -\frac{E}{B},$$

уравненіе гиперболы принимаетъ видъ:

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1,$$

при чемъ

$$a^2 = \frac{\delta}{A^2B}\ ;\quad b^2 = -\frac{\delta}{AB^2}.$$

Чтобы представить себѣ форму гиперболы, изслѣдуемъ ея уравненіе, при чемъ опять опустимъ указатели:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ldots\ldots\ldots (74).$$

Рѣшимъ это уравненіе относительно x и y:

$$x = \pm a\sqrt{1+\frac{y^2}{b^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (75)$$

$$y = \pm b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (76).$$

Кривая симметрична относительно оси $y^{овъ}$, ибо каждому значенію y соотвѣтствуетъ два значенія для x, равныхъ по величинѣ, но различныхъ по знаку. Такъ-же находимъ, что кривая симметрична относительно оси $x^{овъ}$.

Такъ какъ подкоренное количество въ уравненіи (75) всегда положительно, то всевозможнымъ значеніямъ y соотвѣтствуютъ всегда дѣйствительныя значенія для x. Но y будетъ имѣть дѣйствительное значеніе только тогда, когда

$$\frac{x^2}{a^2} \geqq 1,$$

или $x^2 \geqq a^2$.

Значитъ всѣ точки кривой лежатъ внѣ полосы, образуемой двумя линіями, проведенными параллельно оси $y^{овъ}$, на разстояніи a и $-a$ отъ нея.

Если $x = a$, то $y = 0$; при $x = -a$, y опять равно нулю. Значитъ кривая пересѣкаетъ ось $x^{овъ}$ въ двухъ точкахъ A и A', отстоящихъ по обѣ стороны отъ начала на разстояніи a.

Точки A и A_1 называются **вершинами**, а координатныя оси **главными осями** гиперболы, именно ось $x^{овъ}$ **дѣйствительною**, а ось $y^{овъ}$ **мнимою**. Длина главныхъ осей соотвѣтственно равна $2a$ и $2b$.

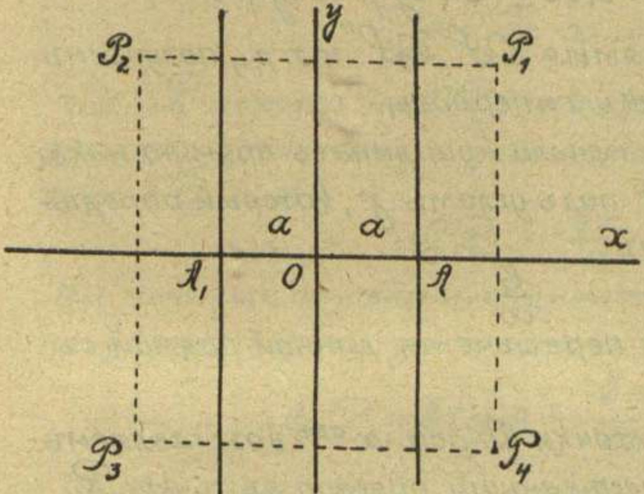
Чтобы построить любое число точекъ нашей кривой, воспользуемся опять способомъ ея изображенія помощію перемѣннаго параметра.

Положимъ, что
$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{a}{\cos\varphi} \\ y &= b\,\mathrm{tg}\,\varphi \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (77).$$

Подставляя эти значенія въ уравненіе (74) гиперболы, получаемъ:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{1}{\cos^2\varphi}-tg^2\varphi=\frac{1}{\cos^2\varphi}-\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}=$$

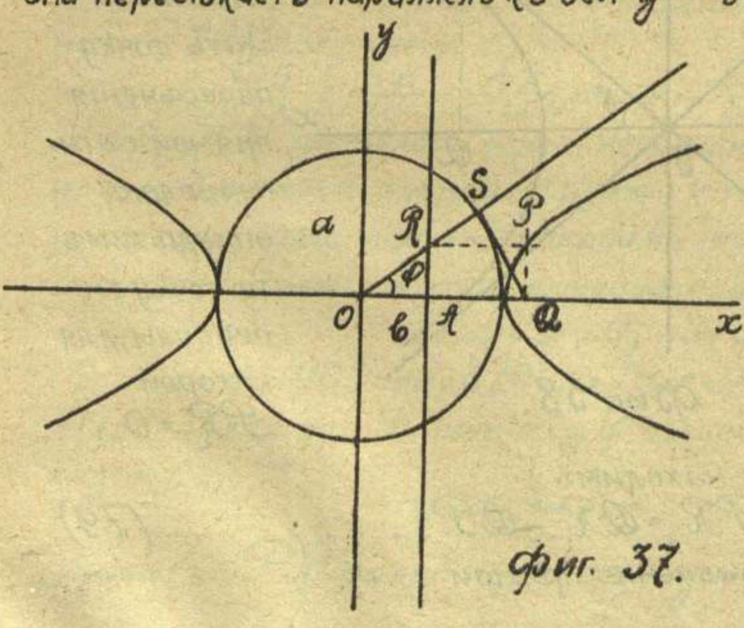
$$=\frac{1-\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}=\frac{\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi}=1.$$



Фиг. 36.

Т. е. дѣйствительно точки (x, y), при условіи (77) принадлежатъ гиперболѣ.

Опишемъ теперь изъ начала окружность радіуса a. На разстояніи b проводимъ линію параллельную оси $y^{овъ}$. Черезъ начало проводимъ прямую, наклоненную къ оси $x^{овъ}$ подъ угломъ φ. Пусть она пересѣкаетъ параллель къ оси $y^{овъ}$ въ точкѣ R, а



фиг. 37.

окружность въ точкѣ S. Изъ S возставляемъ перпендикуляръ къ OS, который пересѣкаетъ ось $x^{овъ}$ въ точкѣ Q. Теперь черезъ Q проводимъ прямую, параллельную къ оси yовъ, а черезъ R прямую, параллельную оси xовъ и пересѣченіе этихъ прямыхъ назовемъ черезъ P. Точка P принадлежитъ гиперболѣ, ибо ея координаты суть:

$$\left.\begin{aligned} x &= OQ = \frac{OS}{\cos\varphi} = \frac{a}{\cos\varphi}, \\ y &= QP = AR = OA\,tg\,\varphi = b\,tg\,\varphi \end{aligned}\right\} \dots (78).$$

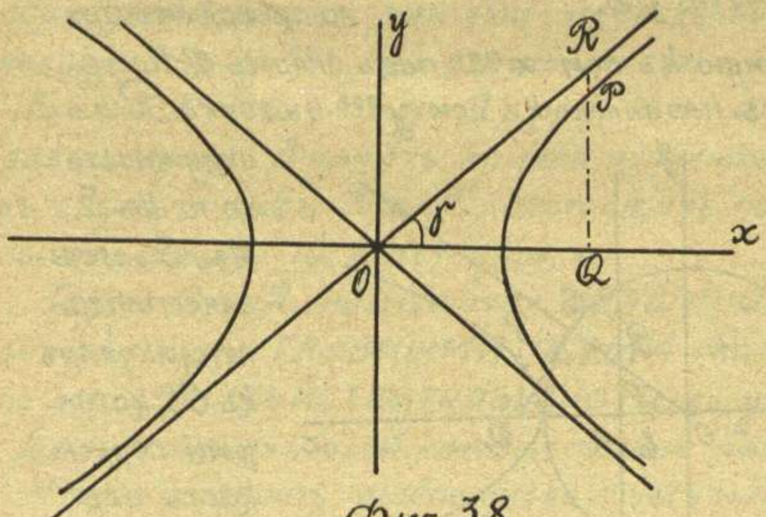
Проводя новыя прямыя OS', OS'' и т. д., получаемъ сколько угодно точекъ гиперболы.

Проведемъ черезъ начало координатъ прямую, наклоненную къ оси xовъ подъ угломъ γ, который опредѣляется требованіемъ

$$tg\,\gamma = \frac{b}{a}.$$

Опредѣлимъ точку пересѣченія данной прямой съ гиперболою.

Изъ произвольной точки Q оси xовъ возставляемъ перпендикуляръ, пересѣкающій прямую въ точкѣ R, а гиперболу въ точкѣ P. Чтобы отыскать точку пересѣченія прямой съ гиперболою, опредѣлимъ ту точку гиперболы, для которой $PR = 0$.



Фиг. 38.

Изъ чертежа находимъ:

$$PR = QR - QP \dots\dots\dots (79).$$

Возьмемъ уравненіе прямой:

$$y = x\,tg\,\gamma + y_0.$$

Для прямой OR начальная ордината y_0 равна нулю, ибо прямая проходитъ черезъ начало, а $tg\,\gamma$ по условію равенъ $\frac{b}{a}$.

Подставляя эти значенія въ уравненіе прямой, получаемъ уравненіе прямой OR,

$$y = \frac{b}{a}x.$$

т. к. R лежитъ на OR, то координаты этой точки должны удовлетворять уравненію прямой OR; отсюда, если $OQ = x$:

$$QR = \frac{bx}{a}.$$

На томъ же основаніи ордината QP точки P должна удовлетворять уравненіямъ (77):

$$QP = b\,tg\,\varphi = \frac{b\sin\varphi}{\cos\varphi}.$$

Но изъ уравненій (77) имѣемъ, что $\cos\varphi = \frac{a}{x}$, поэтому

$$QP = \frac{bx}{a}\cdot\sin\varphi.$$

Подставляя полученныя значенія для QR и QP въ уравненіе (79) получаемъ:

$$PR = \frac{bx}{a} - \frac{bx}{a}\sin\varphi = \frac{bx}{a}(1-\sin\varphi).$$

Чтобы PR равнялось нулю, необходимо чтобы одинъ изъ множителей равнялся нулю; но x не можетъ равняться нулю, ибо въ гиперболѣ нѣтъ точки, абсцисса которой равна нулю; слѣдовательно:

$$1-\sin\varphi = 0;\ \sin\varphi = 1.$$

Отсюда $\varphi = 90°$ или $270°$, а $tg\,\varphi = \pm\infty$.

Подставляя это значеніе $tg\,\varphi$ въ уравненіе (77) находимъ:

$$y = \pm\infty,$$

значитъ PR равно нулю, если $y = \infty$, т.е. прямая

OR пересѣкаетъ гиперболу въ нѣкоторой точкѣ, которой ордината равна безконечности или, какъ говорятъ, въ безконечно удаленной точкѣ. Прямая OR называется **асимтотаю** гиперболы. Изъ симметріи гиперболы заключаемъ, что имѣется еще вторая асимптота, уравненіе которой есть:

$$y = -\frac{b}{a}x \quad \ldots\ldots\ldots (80).$$

Остается опредѣлить уравненіе касательной къ гиперболѣ. Возьмемъ опять общее уравненіе касательной:

$$x(Ax_1 + D) + y(By_1 + E) + Dx_1 + Ey_1 + F = 0.$$

Сравнивая уравненіе гиперболы съ общимъ уравненіемъ (62) кривой второго порядка, находимъ:

$$A = \frac{1}{a^2},\ B = -\frac{1}{b^2};\ D = 0,\ E = 0;\ F = -1.$$

Подставляя эти значенія въ общее уравненіе касательной, получаемъ **уравненіе касательной** къ гиперболѣ (74) въ точкѣ (x_1, y_1):

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy'}{b^2} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots (81).$$

Разсмотрѣнныя нами кривыя эллипсъ, гипербола и парабола получаются при сѣченіи конуса плоскостью и поэтому называются **коническими сѣченіями**. Доказательствомъ этой теоремы мы займемся въ аналитической геометріи въ пространствѣ.

V. Намъ остается еще разсмотрѣть тотъ случай, когда A и B имѣютъ различные знаки, а $\delta = 0$:

$$AB < 0,\ \delta = 0.$$

Въ этомъ случаѣ уравненіе (65) принимаетъ видъ:

$$Ax'^2+By'^2=0,$$

откуда $y'^2+\frac{A}{B}x'^2=0,$

$$y'^2-\left(-\frac{A}{B}\right)x'^2=0.$$

Лѣвую часть уравненія можно разложить на два множителя:

$$\left(y'-\sqrt{-\frac{A}{B}}\cdot x'\right)\left(y'+\sqrt{-\frac{A}{B}}\cdot x'\right)=0.$$

Чтобы произведеніе равнялось нулю, необходимо, чтобы одинъ изъ множителей равнялся нулю:

$$\left.\begin{array}{l} y'-\sqrt{-\frac{A}{B}}\,x'=0 \\ \text{или} \quad y'+\sqrt{-\frac{A}{B}}\,x'=0 \end{array}\right\}\quad\ldots\ldots(82).$$

Т. к. A и B имѣютъ различные знаки, то подкоренныя величины всегда положительны. Значитъ полученныя выраженія всегда дѣйствительны. Уравненія (82) суть первой степени, т.е. изображаютъ прямыя линіи. Отсюда заключаемъ, что въ данномъ случаѣ кривая распадается на двѣ прямыя.

Замѣчая далѣе, что уравненія (82) однородны, находимъ, что прямыя эти проходятъ черезъ начало координат системы (x', y').

Сопоставляя уравненіе (82) съ уравненіемъ прямой линіи

$$y=x\,tg\,\gamma+y_0,$$

видимъ, что (82) суть уравненіе прямыхъ, составляющихъ съ осью $x^{овъ}$ уголъ:

$$tg\,\gamma=\pm\sqrt{-\frac{A}{B}}$$

Итакъ, линія изображаемая уравненіемъ

$$Ax^2+By^2+2Dx+2Ey+F=0$$

въ случаѣ, когда A и B имѣютъ различные знаки и $\delta = 0$, распадается на двѣ прямыя, проходящія через точку $\left(-\frac{D}{A}, -\frac{E}{B}\right)$ и составляющія съ осью $x^{овъ}$ углы γ, опредѣленные уравненіемъ

$$tg\,\gamma = \pm\sqrt{-\frac{A}{B}}.$$

Изслѣдованіе уравненія $Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0$.

Уравненіе

$$Ax^2 + By^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad \ldots\ldots (83)$$

еще не есть самое общее уравненіе кривой второго порядка.

Общимъ уравненіемъ второго порядка служитъ:

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad \ldots (84).$$

Изслѣдуемъ, изображаются ли этимъ уравненіемъ извѣстныя намъ уже кривыя, или же оно выражаетъ какую нибудь новую линію. Намъ станетъ ясно, что кривыя (84) и (83) суть тѣ же самыя, коль скоро намъ удастся доказать, что соотвѣтственно избирая новую координатную систему, мы всегда можемъ въ уравненіи (84) уничтожить членъ, содержащій произведеніе xy.

Для доказательства повернемъ координатную систему на нѣкоторый уголъ α. Тогда имѣемъ по формуламъ (5^a)

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha$$
$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha.$$

Подставляемъ эти значенія x и y въ уравненіе (84):

$$A(x'^2\cos^2\alpha + y'^2\sin^2\alpha - 2x'y'\sin\alpha\cos\alpha) +$$
$$+ B(x'^2\sin^2\alpha + y'^2\cos^2\alpha + 2x'y'\sin\alpha\cos\alpha) +$$
$$+ 2C[(x'^2 - y'^2)\sin\alpha\cos\alpha + x'y'(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)] +$$
$$+ 2D(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha) + 2E(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) + F = 0.$$

Если теперь введемъ обозначенія:

$$\left.\begin{aligned} A' &= A\cos^2\alpha + B\sin^2\alpha + C\sin 2\alpha \\ B' &= A\sin^2\alpha + B\cos^2\alpha - C\sin 2\alpha \end{aligned}\right\} \dots (85)$$

$$C' = -\frac{A+B}{2}\sin 2\alpha + C\cos 2\alpha,$$

$$D' = D\cos\alpha + E\sin\alpha,$$

$$E' = -D\sin\alpha + E\cos\alpha,$$

$$F' = F,$$

то полученное уравненіе можно представить въ видѣ:

$$A'x'^2 + B'y'^2 + 2C'x'y' + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0.$$

Теперь надо опредѣлить α такимъ условіемъ, чтобы членъ $C'x'y'$ сдѣлался равнымъ нулю. Для этого достаточно чтобы C' равнялось нулю, или:

$$(-A+B)\cdot\sin 2\alpha + 2C\cos 2\alpha = 0.$$

Отсюда $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2C}{A-B}$ . . . . (86)

т.к. tg можетъ принимать всевозможныя значенія отъ $+\infty$ до $-\infty$, то α всегда будетъ имѣть дѣйствительное значеніе, т.е. всегда можно найти такой уголъ, поворачивая на который координатную систему, мы можемъ уничтожить членъ Cxy, т.е. уравненіе (84) привести къ виду (83); слѣдовательно уравненіе (84) всегда изображаетъ какую нибудь изъ извѣстныхъ намъ линій.

Опредѣлимъ при помощи уравненія (86) $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$:

$$\cos^2 2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 2\alpha} = \frac{1}{1+\frac{4c^2}{(A-B)^2}} = \frac{(A-B)^2}{(A-B)^2+4c^2}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos 2\alpha &= \frac{A-B}{\sqrt{(A-B)^2+4c^2}} \\ \sin 2\alpha &= \frac{2C}{\sqrt{(A-B)^2+4c^2}} \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots (87).$$

Складывая уравненія (85) получаемъ:

$$A' + B' = A + B \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (88)$$

ибо $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

т. е. при вращеніи сумма коэффиціентовъ при x^2 и y^2 не измѣняется. Если теперь вычтемъ второе изъ этихъ уравненій изъ перваго, то получимъ:

$$A' - B' = A(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + $$
$$+ 2C\sin 2\alpha = A\cos 2\alpha - B\cos 2\alpha + 2C\sin 2\alpha =$$
$$= (A - B)\cos 2\alpha + 2C\sin 2\alpha.$$

Теперь подставляемъ значенія $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$ изъ уравненій (87):

$$A' - B' = \frac{(A-B)^2}{\sqrt{(A-B)^2 + 4c^2}} + \frac{4c^2}{\sqrt{(A-B)^2 + 4c^2}} =$$
$$= \frac{(A-B)^2 + 4c^2}{\sqrt{(A-B)^2 + 4c^2}};$$

$$A' - B' = \sqrt{(A-B)^2 + 4c^2} \quad \ldots\ldots (89).$$

Сложимъ между собою и вычтемъ уравненія (88) и (89):

$$A' = \frac{1}{2}\left[A + B + \sqrt{(A-B)^2 + 4c^2}\right],$$

$$B' = \frac{1}{2}\left[A + B - \sqrt{(A-B)^2 + 4c^2}\right].$$

Перемножая получаемыя выраженія, находимъ:

$$A'B' = \frac{1}{4}\left\{(A+B)^2 - \left[(A-B)^2 + 4c^2\right]\right\} =$$
$$= \frac{1}{4}(A^2 + 2AB + B^2 - A^2 + 2AB - B^2 - 4c^2) =$$
$$= \frac{1}{4}(4AB - 4C^2) = AB - C^2.$$

$$A'B' = AB - C^2 \quad \ldots\ldots\ldots (90).$$

Мы раньше нашли, что уравненіе (83) изображаетъ эллипсъ, параболу или гиперболу, въ зависимости отъ того, будетъ ли AB больше нуля, равно нулю или меньше нуля. Отсюда, принимая во вниманіе уравненіе (90), можемъ сказать, что общее уравненіе вида (84) изобразитъ

эллипсъ, если $AB - C^2 > 0$,
параболу — $AB - C^2 = 0$,
гиперболу — $AB - C^2 < 0$.

Для изслѣдованія вопроса, дѣйствительно ли получается эллипсъ или парабола, или же соотвѣтственная кривая линія мнимая, т.е. не существуетъ или, наконецъ, получаемыя гиперболы или парабола распадаются на прямыя линіи, слѣдуетъ еще опредѣлить знакъ величины, соотвѣтствующей величинѣ δ при уравненіи (83). Не трудно опредѣлить эту величину Δ, называемую **дискриминантомъ** коническаго сѣченія. Она получается въ видѣ:

$$\Delta = AE^2 + BD^2 - 2CDE - F(AB - C^2).$$

Фокусы коническихъ сѣченій. Равносторонняя гипербола.

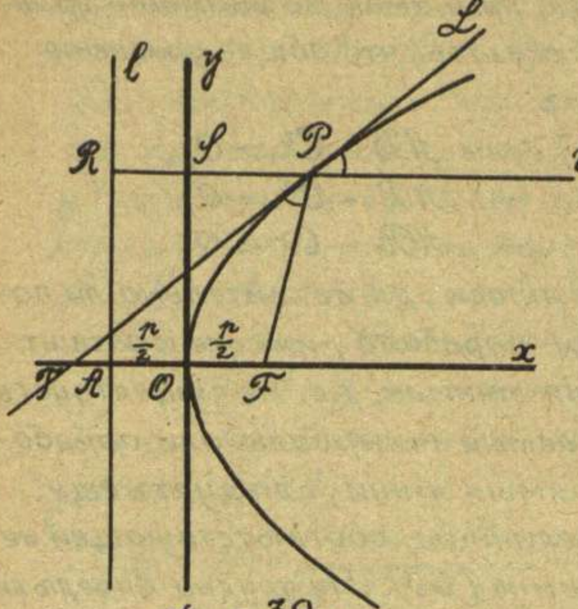
Задача: Опредѣлить геометрическое мѣсто точекъ, равно отстоящихъ отъ данной точки и данной прямой.

Пусть даны точка F и прямая l. Примемъ середину O разстоянія точки F отъ прямой l за начало координатъ а ось yовъ возьмемъ параллельно прямой l. Пусть данное разстояніе $AF = p$. Наконецъ $P(x,y)$ пусть будетъ произвольная точка искомаго геометрическаго мѣста.

Опускаемъ перпендикуляръ PR на данную прямую и соединяемъ P съ F.

Намъ надо значитъ найти геометрическое мѣсто точекъ, для которыхъ $FP = RP$. . . . . (91)

Мы имѣемъ: $FP = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$, $RP = x + \frac{p}{2}$.



фиг. 39.

Сопоставляя эти формулы съ условіемъ (91), получаемъ:

$$u \sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=x+\frac{p}{2}.$$

Это и есть уравненіе искомаго геометрическаго мѣста. Возвысивъ обѣ части въ квадратъ получимъ:

$$x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+px+\frac{p^2}{4},$$

$$y^2=2px. \quad (92)$$

т.е. искомое геометрическое мѣсто есть Парабола.

Точка $\mathscr{F}$ обладаетъ нѣкоторымъ интереснымъ свойствомъ. Проведемъ черезъ точку $\mathscr{P}$ касательную къ параболѣ до встрѣчи съ осью xовъ въ точкѣ $\mathscr{T}$. Тогда по стр. 42:

$$\mathscr{T}O=x,\ \mathscr{T}\mathscr{F}=\mathscr{T}O+O\mathscr{F}=x+\frac{p}{2}=\mathscr{R}\mathscr{P},$$

и по этому (форм. 91):

$$\mathscr{T}\mathscr{F}=\mathscr{F}\mathscr{P},$$

т.е. треугольникъ $\mathscr{T}\mathscr{F}\mathscr{P}$ равнобедренный. Изъ этого слѣдуетъ равенство угловъ при основаніи:

$$\measuredangle \mathscr{F}\mathscr{T}\mathscr{P}=\measuredangle \mathscr{F}\mathscr{P}\mathscr{T}.$$

Т. к. кромѣ того

$$\measuredangle \mathscr{F}\mathscr{T}\mathscr{P}=\measuredangle U\mathscr{P}\mathscr{L},$$

то и

$$\measuredangle \mathscr{F}\mathscr{P}\mathscr{T}=\measuredangle U\mathscr{P}\mathscr{L} \ldots\ldots (93).$$

Извѣстно, что свѣтовой лучъ отражается прямою линіею, такъ что уголъ паденія равенъ углу отраженія. Отраженіе свѣта на кривой линіи слѣдуетъ тому же закону, при чемъ угломъ паденія или отраженія наз. уголъ, составленный падающимъ или отраженнымъ лучемъ съ касательною къ кривой въ той точкѣ, на которую лучъ падаетъ.

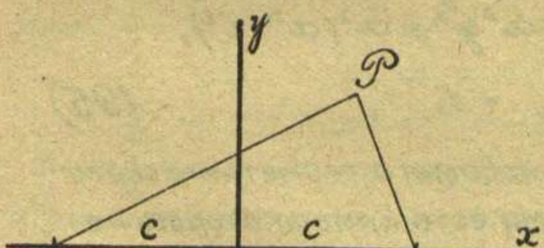
Основываясь на формулѣ (93) мы можемъ сказать, что всѣ лучи параллельные главной оси параболы, по отраженіи на параболѣ проходитъ черезъ точку F, поэтому точка F наз. **фокусомъ** параболы. Обратно, если въ F помѣстить свѣтящую точку, то лучи ея, послѣ отраженія, станутъ параллельны оси параболы.

Если въ уравненіи параболы $y^2 = 2px$ подставить абсциссу фокуса $x = \frac{p}{2}$,

то мы получаемъ $y = \pm p$,

т. е. параметръ параболы есть половина хорды, проведенной черезъ фокусъ перпендикулярно къ главной оси.

Задача. Опредѣлить геометрическое мѣсто точекъ, сумма разстояній которыхъ отъ двухъ данныхъ точекъ постоянна, и геометрическое мѣсто точекъ, разность разстояній которыхъ отъ двухъ данныхъ точекъ постоянна.



Фиг. 40.

Пусть данныя точки суть F_1 и F_2. Проведемъ черезъ эти точки прямую, которую примемъ за ось $x^{овъ}$, а середину разстоянія F_1F_2 примемъ за начало координатъ, такъ что,

$$OF_1 = F_2O = c.$$

Пусть точка $P(x, y)$ принадлежитъ искомому геометрическому мѣсту. Если соединить P съ F_1 и F_2, то для перваго геометрическаго мѣста имѣемъ условіе

$$PF_2 + PF_1 = 2a,$$

а для второго:

$$PF_2 - PF_1 = 2a.$$

Вспомнивъ формулу (1) разстоянія между двумя точками, мы можемъ написать

$$PF_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \quad PF_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \quad \ldots\ldots (94).$$

Соединяемъ условія обоихъ геометрическихъ мѣстъ въ одно:

$$PF_2 \pm PF_1 = 2a,$$

и подставляемъ сюда значенія (94):

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \pm \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Рядъ простыхъ преобразованій даетъ:

$$\pm\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2,$$

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2;$$

$$4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 4a^2 + 4cx,$$

$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx,$$

$$a^2[(x+c)^2 + y^2] = (a^2 + cx)^2,$$

$$a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2;$$

$$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2,$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2),$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots (95)$$

Мы получили уравненіе искомаго геометрическаго мѣста, которое повидимому есть кривая второго порядка, а именно эллипсъ, когда $a^2 - c^2 > 0$, и гипербола, когда $a^2 - c^2 < 0$.

I. Разсмотримъ то геометрическое мѣсто, условіемъ котораго является

$$PF_2 + PF_1 = 2a.$$

Т.к. сумма двухъ сторонъ треугольника больше третьей стороны, то

$$\mathcal{P}\mathcal{F}_2 + \mathcal{P}\mathcal{F}_1 > \mathcal{F}_2\mathcal{F}_1,$$

или
$$2a > 2c,$$
$$a > c,$$
$$a^2 - c^2 > 0.$$

Видя, что въ этомъ случаѣ $a^2 - c^2$ положительно, можемъ обозначить

$$a^2 - c^2 = b^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (96).$$

Тогда уравненіе (95) принимаетъ видъ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

т.е. мы получаемъ уравненіе эллипса. Итакъ эллипсъ обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что сумма разстояній каждой его точки отъ двухъ опредѣленныхъ точекъ есть величина постоянная.

II. Теперь обратимъ вниманіе на ту кривую, для которой

$$\mathcal{P}\mathcal{F}_2 - \mathcal{P}\mathcal{F}_1 = 2a.$$

Разность двухъ сторонъ треугольника всегда меньше третьей стороны; по этому

$$\mathcal{P}\mathcal{F}_2 - \mathcal{P}\mathcal{F}_1 < \mathcal{F}_2\mathcal{F}_1,$$

или
$$2a < 2c,$$
$$a < c,$$
$$a^2 - c^2 < 0.$$

Значитъ въ этомъ случаѣ $a^2 - c^2$ есть величина отрицательная и мы можемъ обозначить:

$$a^2 - c^2 = -b^2 \quad \ldots\ldots (97).$$

Тогда изъ уравненія (95) получаемъ уравненіе гиперболы

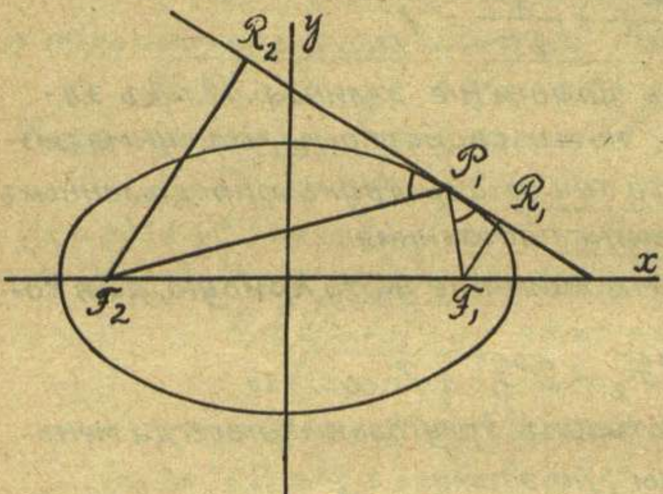
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Итакъ гипербола обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что разность разстояній каждой ея точки отъ двухъ опредѣленныхъ точекъ есть величина постоянная.

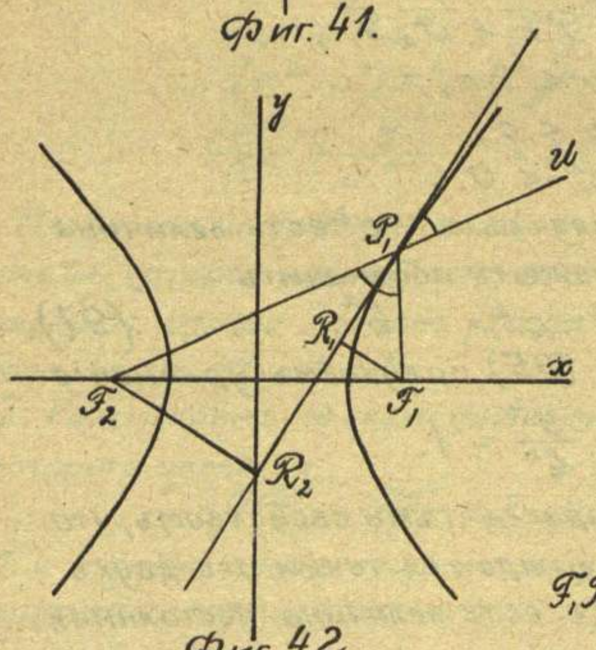
Точки $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ обладаютъ подобнымъ свойствомъ какъ фокусъ параболы и поэтому такъ же называются **фокусами** эллипса и гиперболы. Для вывода этого свойства беремъ уравненіе (95):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1,$$

изображающее эллипсъ или гиперболу смотря по знаку a^2-c^2.



Фиг. 41.



Фиг. 42.

Напишемъ уравненіе касательной, проведенной черезъ точку $\mathcal{P}_1(x_1,y_1)$ кривой; по стр. 48 и 54 она имѣетъ видъ

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{a^2-c^2}=1.$$

Найдемъ разстоянія точекъ $\mathcal{F}_1(c,0)$ и $\mathcal{F}_2(-c,0)$ отъ этой касательной. По стр. 25 разстояніе q точки $\mathcal{P}_0(x_0,y_0)$ отъ прямой $Ax+By+C=0$ выражается формулой

$$q=\frac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

По этому будемъ имѣть

$$\mathcal{F}_1\mathcal{R}_1=\frac{\frac{cx_1}{a^2}-1}{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^4}+\frac{y_1^2}{(a^2-c^2)^2}}},$$

$$\mathcal{F}_2\mathcal{R}_2 = \frac{-\frac{cx_1}{a^2}-1}{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^4}+\frac{y_1^2}{(a^2-c^2)^2}}},$$

откуда

$$\frac{\mathcal{F}_1\mathcal{R}_1}{\mathcal{F}_2\mathcal{R}_2} = \frac{\frac{cx_1}{a^2}-1}{-\frac{cx_1}{a^2}-1} = \frac{cx_1-a^2}{-cx_1-a^2} = \frac{a^2-cx_1}{a^2+cx_1} \dots (98)$$

Найдемъ еще отношение

$$\frac{\mathcal{P}_1\mathcal{F}_1}{\mathcal{P}_1\mathcal{F}_2} = \frac{\sqrt{(x_1-c)^2+y_1^2}}{\sqrt{(x_1+c)^2+y_1^2}}$$

Т. к. точка $\mathcal{P}_1$ лежитъ на данной кривой, то ея координаты x_1, y_1 связаны уравненіемъ

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{a^2-c^2}=1,$$

откуда

$$y_1^2=(a^2-c^2)\left(1-\frac{x_1^2}{a^2}\right);$$

искомое отношеніе принимаетъ видъ

$$\frac{\mathcal{P}_1\mathcal{F}_1}{\mathcal{P}_1\mathcal{F}_2} = \sqrt{\frac{(x_1-c)^2+(a^2-c^2)\left(1-\frac{x_1^2}{a^2}\right)}{(x_1+c)^2+(a^2-c^2)\left(1-\frac{x_1^2}{a^2}\right)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{x_1^2-2cx_1+c^2+a^2-c^2-x_1^2+\frac{c^2x_1^2}{a^2}}{x_1^2+2cx_1+c^2+a^2-c^2-x_1^2+\frac{c^2x_1^2}{a^2}}} = \sqrt{\frac{-2cx_1+a^2+\frac{c^2x_1^2}{a^2}}{2cx_1+a^2+\frac{c^2x_1^2}{a^2}}};$$

умножимъ числителя и знаменателя подкоренного количества на a^2:

$$\frac{\mathcal{P}_1\mathcal{F}_1}{\mathcal{P}_1\mathcal{F}_2} = \sqrt{\frac{a^4-2a^2cx_1+c^2x_1^2}{a^4+2a^2cx_1+c^2x_1^2}} = \frac{a^2-cx_1}{a^2+cx_1}.$$

Сравнивая эту формулу съ формулою (98), мы замѣчаемъ, что

$$\frac{\mathcal{F}_1\mathcal{R}_1}{\mathcal{F}_2\mathcal{R}_2} = \frac{\mathcal{P}_1\mathcal{F}_1}{\mathcal{P}_1\mathcal{F}_2},$$

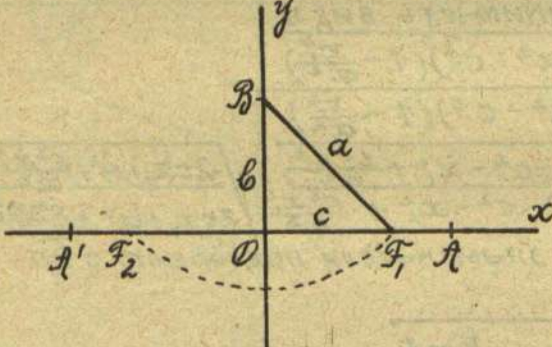
т.е. что прямоугольные треугольники $\mathcal{F}_1\mathcal{P}_1\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{F}_2\mathcal{P}_1\mathcal{R}_2$ подобны, а изъ подобія треугольниковъ слѣдуетъ, что

$$\measuredangle \mathcal{F}_1\mathcal{P}_1\mathcal{R}_1 = \measuredangle \mathcal{F}_2\mathcal{P}_1\mathcal{R}_2.$$

Изъ равенства этихъ угловъ слѣдуетъ во первыхъ простое построеніе касательной въ точкѣ P_1, а во вторыхъ, что свѣтовой лучъ $F_1 P_1$ по отраженіи на эллипсѣ принимаетъ направленіе $P_1 F_2$, а на гиперболѣ $P_1 U$. Если въ одномъ изъ фокусовъ эллипса помѣстить источникъ свѣта, то свѣтовые лучи по отраженіи на эллипсѣ проходятъ черезъ другой фокусъ; если же въ одномъ изъ фокусовъ гиперболы помѣстить источникъ свѣта, то свѣтовые лучи по отраженіи на гиперболѣ принимаютъ направленіе, будто бы источникъ свѣта находится въ другомъ фокусѣ.

По даннымъ главнымъ осямъ легко можно построить фокусы. Для эллипса мы имѣемъ изъ уравненія (96)

$$c^2 = a^2 - b^2.$$



Фиг. 43.

Поэтому для построенія фокусовъ стоитъ только изъ конца B малой оси описать дугу окружности радіусомъ a. Точки пересѣченія ея съ большою осью суть точки F_1 и F_2, ибо изъ чертежа видно, что $a^2 - b^2 = c^2$. Если для эллипса $a = b$, то $c = 0$, фокусы сливаются съ центромъ, эллипсъ переходитъ въ кругъ радіуса a; въ самомъ дѣлѣ уравненіе эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

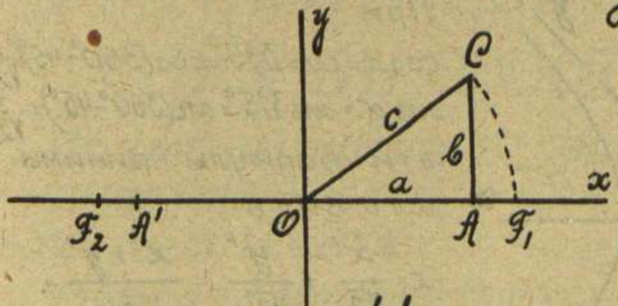
при $a = b$ переходитъ въ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

или

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Для гиперболы по формулѣ (97)



Фиг. 44.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

и c оказывается гипатенузою прямоугольнаго треугольника съ катетами a и b.

При $a = b$ гипербола называется равностороннею. Уравненіе ея получается изъ

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

въ видѣ

$$x^2 - y^2 = a^2 \quad \ldots \ldots (99).$$

Уголъ γ, составляемый асимптотами съ осью $x^{овъ}$ выражается (стр. 52-54)

$$tg\,\gamma = \pm \frac{b}{a}.$$

Въ случаѣ равносторонней гиперболы получаемъ

$$tg\,\gamma = \pm \frac{a}{a} = \pm 1,$$

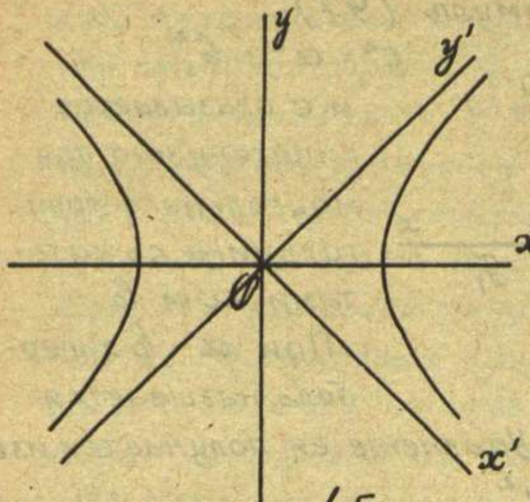
откуда

$$\gamma = 45^\circ \text{ или } 135^\circ;$$

асимптоты получаются какъ бисектрисы угловъ между координатными осями, онѣ перпендикулярны между собой.

Интересно найти уравненіе равносторонней гиперболы, относя ее къ системѣ $x'Oy'$, образуемой асимптотами. Для этого стоитъ только повернуть старую систему на уголъ $\alpha = 315^\circ$, для чего пользуемся формулами (5^a):

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha,$$



фиг. 45.

$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha.$$

При

$$\cos\alpha = \cos 315^\circ = \cos(360^\circ - 45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\alpha = \sin 315^\circ = \sin(360^\circ - 45^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

эти формулы принимають видъ

$$x = \frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}} = \frac{x'+y'}{\sqrt{2}},$$

$$y = -\frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}} = \frac{-x'+y'}{\sqrt{2}}.$$

Подставляя эти значенія въ уравненіе (99) равносторонней гиперболы, получаемъ

$$\frac{(x'+y')^2}{2} - \frac{(y'-x')^2}{2} = a^2,$$

$$x'^2 + 2x'y' + y'^2 - y'^2 + 2x'y' - x'^2 = 2a^2;$$

$$4x'y' = 2a^2$$

$$x'y' = \frac{a^2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (100).$$

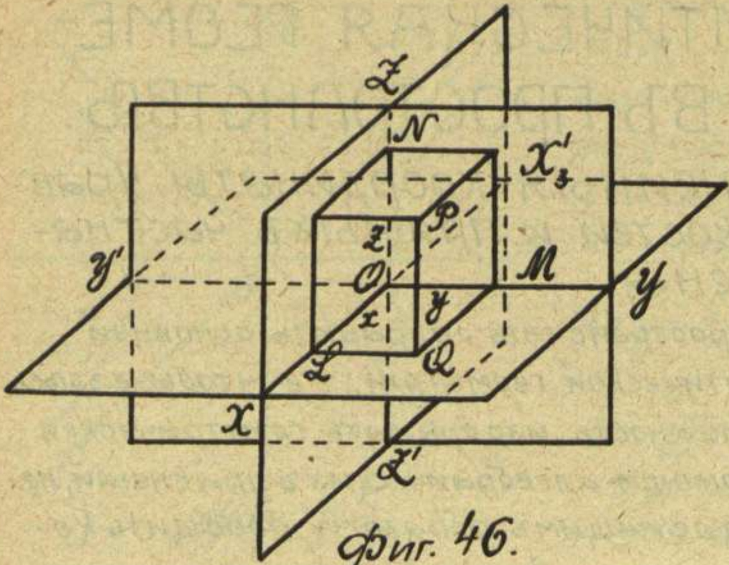
Такимъ образомъ мы получили уравненіе равносторонней гиперболы, отнесенной къ системѣ своихъ асимптотъ.

Аналитическая геометрія въ пространствѣ.

Прямолинейныя координаты. Уравненія плоскостей и прямыхъ частнаго положенія.

Чтобы и въ пространствѣ сохранить основной смыслъ аналитической геометріи, т. е. чтобы и здѣсь сохранить возможность изображать геметрическія фигуры при помощи алгебраическихъ уравненій, необходимо надлежащимъ образомъ обобщить координатную систему. Для этого тремя взаимно перпендикулярными плоскостями дѣлимъ пространство на восемь безконечно-большихъ частей. Эти плоскости называются **координатными плоскостями**. Онѣ пересѣкаются по тремъ взаимно-перпендикулярнымъ прямымъ, называемымъ **координатными осями**. Эти оси обозначаемъ буквами XX', YY' и ZZ'. Точка O пересѣченія трехъ плоскостей называется **Началомъ** координатной системы. Чтобы различить координатныя плоскости, ихъ называютъ: плоскость (xy) **горизонтальною**, (yz) - **заднею вертикальною**, а (zx) - **боковою вертикальною**.

Пусть дана гдѣ нибудь въ пространствѣ точка P. Проведемъ черезъ нее плоскости, параллельныя плоскостямъ координатъ. Эти три плоскости отсѣкаютъ отъ осей отрѣзки OL, OM и ON, которые называются **координатами** точки P, что обозначается черезъ $P(OL, OM, ON)$, или



Фиг. 46.

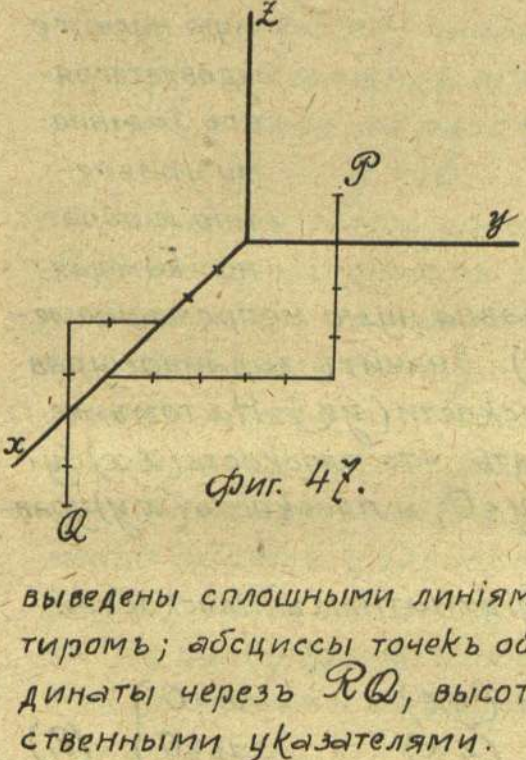
$P: x = OL,$
$y = OM,$
$z = ON.$

Вмѣсто отрѣзковъ OL, OM и ON можно разсматривать, какъ координаты точки P, другія ребра параллелопипеда соотвѣтственно равныя и параллельныя этимъ тремъ отрѣзкамъ, напр.:

$$x = OL, \quad y = LQ, \quad z = QP.$$

x наз. абсциссою, y - ординатою, z высотою точки.

Если установить масштабъ и измѣрить координаты, то каждой точкѣ будутъ соотвѣтствовать три числа. Пользуясь этимъ, можно будетъ изображать геометрическія фигуры уравненіями какъ въ плоской аналитической геометріи, гдѣ каждой точкѣ соотвѣтствовали 2 числа. Обратная задача состоитъ въ томъ, что надо построить по даннымъ тремъ координатамъ точку, т.е. опредѣлить ея положеніе въ пространствѣ. Изъ плоской аналитической геометріи мы знаемъ, что тутъ существуетъ неопредѣленность, состоящая въ томъ, что мы не знаемъ въ какую сторону отъ начала требуется отложить данныя координаты. Для устраненія этой неопредѣленности мы опять введемъ правило знаковъ, причемъ разъ навсегда условимся, какія части осей будемъ принимать положительными, какія отрицательными. Такъ мы установимъ, что если положительная часть оси $X^{овъ}$ показываетъ на югъ, оси $Y^{овъ}$ на востокъ, тогда положительная часть оси $Z^{овъ}$ должна быть направлена вверхъ. И въ аналитической геометріи въ пространствѣ обыкновенно обозначаютъ координатныя оси только одною буквою, которая ставится на положительной части ея. Теперь если намъ даны координаты P (5, 5, 4), то можно построить ее однозначно.



фиг. 47.

Построеніе ясно изъ чертежа, на которомъ построена еще точка Q (3, −2, −4).

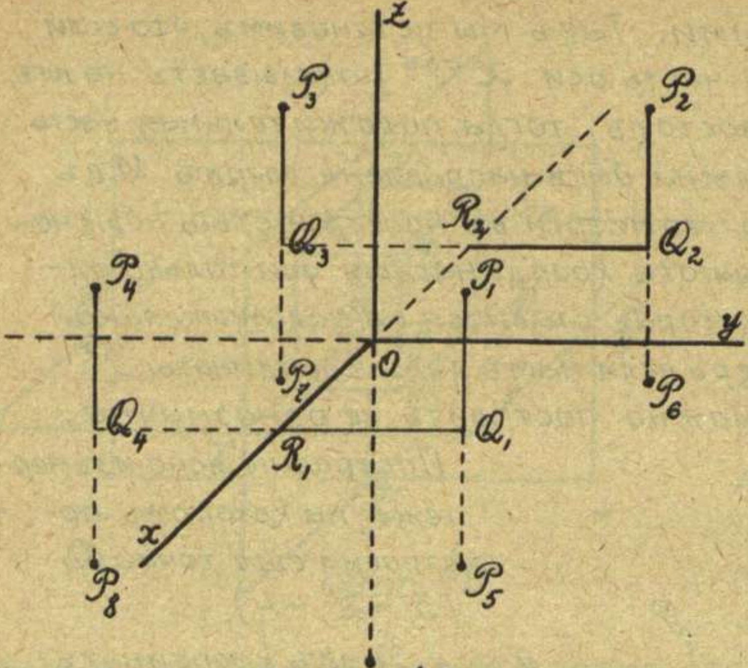
Знакъ координатъ въ каждомъ изъ 8 трегранныхъ угловъ, опредѣляемыхъ координатными плоскостями, объясняется чертежемъ (фиг. 48), на которомъ положительные отрѣзки выведены сплошными линіями, отрицательные же пунктиромъ; абсциссы точекъ обозначены черезъ OR, ординаты черезъ RQ, высоты черезъ QP съ соотвѣтственными указателями.

Знаки координатъ въ различныхъ углахъ можно показать также слѣдующей таблицей

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
x	+	−	−	+	+	−	−	+
y	+	+	−	−	+	+	−	−
z	+	+	+	+	−	−	−	−

Т. к. точка O лежитъ одновременно во всѣхъ трехъ координатныхъ плоскостяхъ, то координаты ея суть:

$$x = 0,\ y = 0,\ z = 0 \ldots (1).$$



Фиг. 48.

Пусть будетъ дано уравненіе:

$$x = 0.$$

Всякая точка, лежащая на плоскости (yz) имѣетъ абсциссу, равную нулю, т.е. удовлетворяетъ заданному уравненію и обратно: каждая точка, абсцисса которой равна нулю непремѣнно лежитъ на плоскости (yz). Значитъ заданное уравненіе есть уравненіе плоскости (yz). На томъ же основаніи можемъ сказать, что плоскость (zx) будетъ имѣть уравненіе $y = 0$, а плоскость (xy) уравненіе $z = 0$.

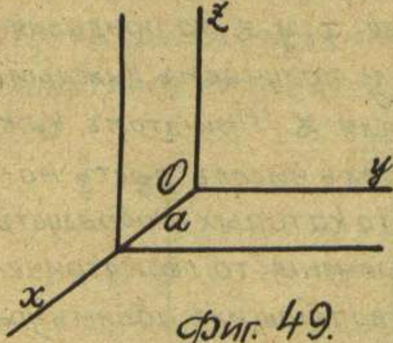
Итакъ уравненія координатныхъ плоскостей суть:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{уравненіе плоскости } (yz) & \ldots & x = 0 \\ \quad\text{"} \qquad\quad \text{"} \qquad (zx) & \ldots & y = 0 \\ \quad\text{"} \qquad\quad \text{"} \qquad (xy) & \ldots & z = 0 \end{array}\right\} \cdot\cdot (2).$$

Вообразимъ теперь плоскость параллельную плоскости (yz) и на разстояніи a отъ нея.

Какую бы теперь точку мы ни взяли на данной плоскости, всегда ея разстояніе отъ (yz) будетъ a, т.е. всегда абсцисса ея равна a:

$$x = a \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3).$$



фиг. 49.

Если обратно задать какую нибудь точку, имѣющую абсциссу a, то она непремѣнно будетъ лежать на данной плоскости. Поэтому уравненіе этой плоскости и есть $x = a$.

На томъ же основаніи можемъ сказать, что уравненіями плоскостей, параллельныхъ плоскостямъ (zx) и (xy) и отстоящихъ отъ нихъ первая на разстояніи b, вторая на разстояніи c, будутъ:

$$y = b \quad \text{и} \quad z = c \quad . \; . \; . \; . \; (4).$$

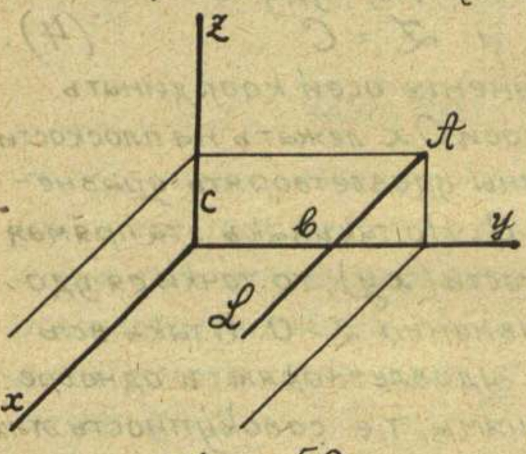
Найдемъ теперь уравненія осей координатъ. Всѣ точки напримѣръ оси Ox лежатъ на плоскости (zx), значитъ онѣ должны удовлетворять уравненію этой плоскости: $y = 0$. Но такъ какъ эта прямая лежитъ также и на плоскости (xy), то точки ея удовлетворяютъ также уравненію $z = 0$. Итакъ всѣ точки лежащія на Ox удовлетворяютъ одновременно обоимъ уравненіямъ, т.е. совокупность этихъ двухъ уравненій выражаетъ ось $x^{овъ}$. Повторяя тѣ же разсужденія относительно остальныхъ двухъ осей, получаемъ слѣдующія уравненія координатныхъ осей:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{уравненія оси} & x^{овъ} \; . \; . \; . \; . & \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \\ \quad " \quad\quad " & y^{овъ} \; . \; . \; . \; . & \begin{cases} z = 0 \\ x = 0 \end{cases} \\ \quad " \quad\quad " & z^{овъ} \; . \; . \; . & \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \end{array}\right\} \; . \; . \; . \; (5)$$

Вообще въ аналитической геометріи въ пространствѣ однимъ уравненіемъ выражается поверхность, а двумя уравненіями линія. Въ самомъ дѣлѣ, если дано уравненіе, связывающее x, y, z, то придавая всевозможныя значенія для x и y, получаемъ каждый разъ соотвѣтственное значеніе для z. При этомъ каждый разъ совокупность этихъ трехъ чиселъ даетъ новую точку, геометрическое мѣсто которыхъ образуетъ поверхность. Если даны два уравненія, то геометрическимъ мѣстомъ точекъ, удовлетворяющихъ обоимъ уравненіямъ будетъ пересѣченіе двухъ поверхностей, т.е. линія.

Пусть намъ дана прямая параллельная оси Ox. Она пересѣчетъ плоскость (yz) въ какой нибудь точкѣ $A(b, c)$. Чтобы опредѣлить уравненія прямой AL, проведемъ черезъ нее двѣ плоскости соотвѣтственно параллельныхъ плоскостямъ (xy) и (zx). Тогда уравненія этихъ плоскостей суть:

$$y = b, \quad z = c.$$



фиг. 50.

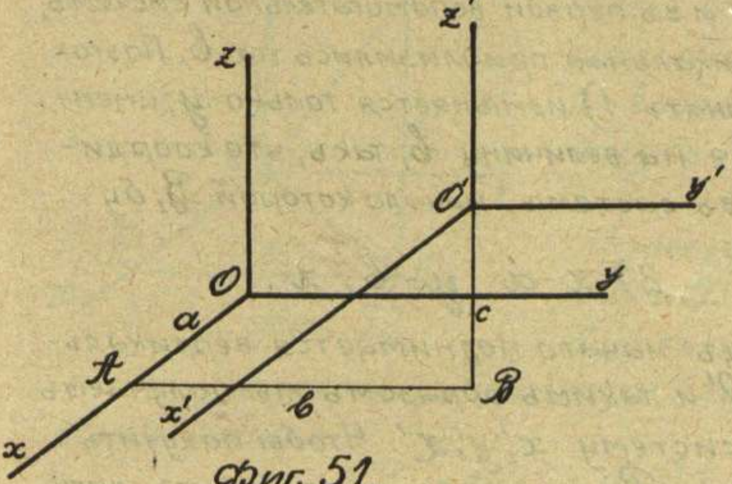
Всѣ точки прямой AL удовлетворяютъ какъ тому, такъ и другому уравненію, слѣдовательно эти уравненія служатъ уравненіями AL.

Такимъ же образомъ получаютъ уравненія прямыхъ параллельныхъ двумъ другимъ осямъ.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Уравненія прямой параллельной оси } x^{\text{овъ}}: & \begin{cases} y = b, \\ z = c; \end{cases} \\ \quad " \qquad " \qquad " \qquad " \quad y^{\text{овъ}}: & \begin{cases} z = c, \\ x = a; \end{cases} \\ \quad " \qquad " \qquad " \qquad " \quad z^{\text{овъ}} & \begin{cases} x = a, \\ y = b. \end{cases} \end{array}\right\} \cdot (6).$$

Перемѣщеніе координатъ.

Пусть дана координатная система (x, y, z). Перемѣстимъ ее такъ, чтобы оси оставались параллельны самимъ себѣ, и назовемъ координаты новаго начала O' черезъ a, b, c. Пусть дана точка P, координаты которой въ старой системѣ суть x, y, z, въ новой x', y', z'; требуется вывести зависимость между координатами новой и старой системы. Вообразимъ для этого, что перемѣщеніе совершилось не сразу, а послѣдовательно, такимъ образомъ, что:



Фиг. 51.

1) сначала мы передвинули систему такъ, что начало O передвинулось по оси $x^{овъ}$ на разстояніе $OA = a$, а оси оставались параллельны самимъ себѣ; ось $x^{овъ}$ при этомъ оставалась та же. Понятно, что при этомъ высота z точки P не измѣнилась, ибо плоскость (xy) не измѣнила положенія; плоскость (zx) также осталась прежняя, поэтому и ордината y остается безъ измѣненія. Абсцисса же x, вслѣдствіе того, что плоскость (y,z) приблизилась къ точкѣ P на величину a, уменьшилась на a. Такъ что если старыя координаты точки P были x, y, z, то теперь онѣ будутъ

$$1)\ x - a,\ y,\ z.$$

2) Теперь начало $\mathcal{A}$ перемѣщается параллельно оси y овъ до точки $\mathcal{B}$, причемъ $\mathcal{AB} = b$. Здѣсь горизонтальная плоскость и задняя вертикальная остались тѣ же, что и въ первой вспомогательной системѣ, а боковая вертикальная приблизилась на b. Поэтому изъ координатъ 1) измѣняется только y, именно уменьшается на величину b, такъ, что координаты точки $\mathcal{P}$ въ системѣ, начало которой $\mathcal{B}$, будутъ:

$$2)\ x-a,\ y-b,\ z.$$

3) Наконецъ начало поднимается вертикально вверхъ до O' и такимъ образомъ мы получаемъ нашу новую систему x', y', z'. Чтобы получить координаты точки $\mathcal{P}$ въ этой системѣ, стоитъ лишь замѣнить въ координатахъ 2) z черезъ $z-c$.

$$3)\ x-a,\ y-b,\ z-c.$$

Итакъ если перемѣстить координатную систему параллельно самой себѣ, такъ что координаты новаго начала въ старой системѣ суть a, b, c, то координаты точки $\mathcal{P}$ будутъ въ новой системѣ:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x-a \\ y' &= y-b \\ z' &= z-c \end{aligned}\right\} \dots\dots (7)$$

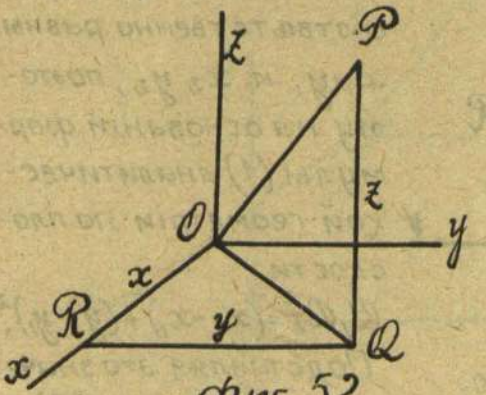
и наоборотъ

$$\left.\begin{aligned} x &= x'+a \\ y &= y'+b \\ z &= z'+c \end{aligned}\right\} \dots\dots (7^a).$$

Основныя задачи.

Задача I. Опредѣлить разстояніе точки отъ начала координатной системы.

Пусть дана точка $P(x, y, z)$. Опускаемъ изъ P перпендикуляръ на плоскость (x, y), пересѣченіе его съ плоскостью обозначимъ черезъ Q; изъ Q проводимъ параллель къ оси Oy. Тогда координаты точки P будутъ: $x = OR$, $y = RQ$, $z = QP$.



фиг. 52.

Проведемъ теперь линіи OQ и OP. Тогда $\angle OQP$ будетъ прямой, ибо PQ перпендикулярна къ плоскасти (xy). Поэтому можемъ написать

$$OP^2 = OQ^2 + QP^2.$$

Изъ прямоугольнаго же треугольника ORQ имѣетъ:

$$OQ^2 = OR^2 + RQ^2$$

отсюда

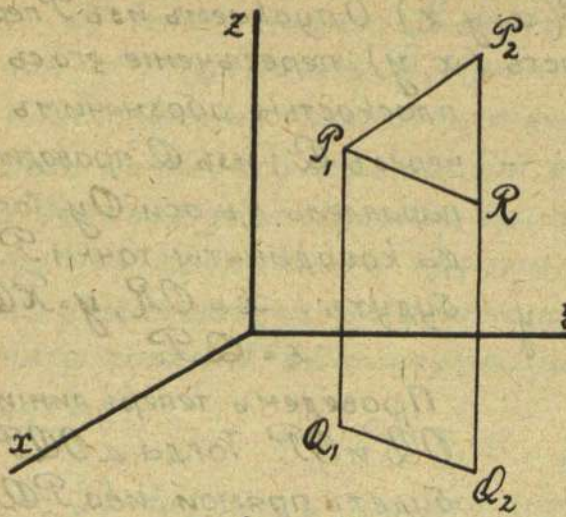
$$OP^2 = OR^2 + RQ^2 + QP^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$OP = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \ldots\ldots (8)$$

Задача II. Опредѣлить разстояніе между двумя точками, изъ которыхъ ни одна не совпадаетъ съ началомъ.

Пусть данныя точки суть $P_1(x_1, y_1, z_1)$ и $P_2(x_2, y_2, z_2)$. Изъ обѣихъ точекъ опускаемъ перпендикуляры P_1Q_1 и P_2Q_2 на плоскость (xy). Соединяемъ Q_1 съ Q_2. Черезъ P_1 проводимъ параллель къ Q_1Q_2. Углы $Q_1Q_2P_2$ и P_1RP_2 суть прямые; отсюда:

$$P_1P_2^2 = P_1R^2 + RP_2^2 = Q_1Q_2^2 + (Q_2P_2 - Q_2R)^2 =$$
$$= Q_1Q_2^2 + (Q_2P_2 - Q_1P_1)^2 \ldots\ldots (9).$$



Фиг. 53.

Абсциссы и ординаты точекъ Q_1 и Q_2 соотвѣтственно равны $x_1\, y_1$ и $x_2\, y_2$, поэтому на основанiи формулы (1) аналитической геометрiи по плоскости

$$Q_1Q_2^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2.$$

Подставляя это значенiе въ формулу (9) и замѣчая, что $Q_1P_1 = z_1$ и $Q_2P_2 = z_2$, получаемъ

$$P_1P_2^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2 \quad . \ . \ . \ . \ (10)$$

такъ что искомое разстоянiе P_1P_2 будетъ

$$P_1P_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \quad . \ . \ . \ . \ (11).$$

Можно было привести рѣшенiе этой задачи къ предыдущей. Для этого переносимъ начало въ P_1, такъ чтобы оси оставались параллельны сами себѣ (фиг. 54). Координаты точки P_2 въ старой системѣ были x_2, y_2, z_2, а въ новой пусть будутъ x_2', y_2', z_2'. Тогда изъ формулы (8) имѣемъ:

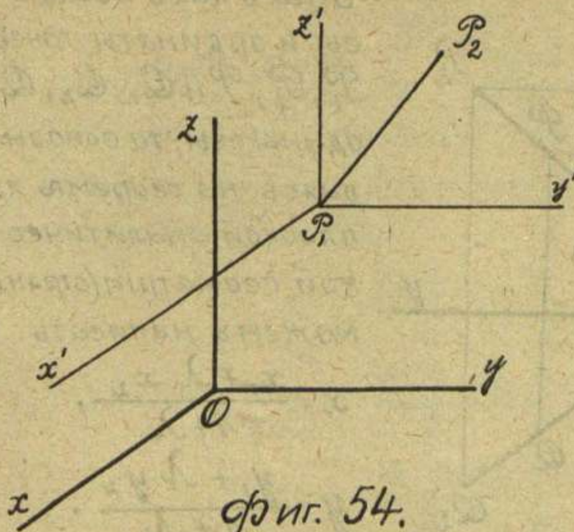
$$P_1P_2=\sqrt{x_2'^2+y_2'^2+z_2'^2} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (12).$$

Координаты точки P_2 въ новой системѣ по формуламъ (7) выражаются

$$x_2' = x_2 - x_1,$$
$$y_2' = y_2 - y_1,$$
$$z_2' = z_2 - z_1.$$

Подставляя эти значенiя въ уравненiе (12) получаемъ:

$$P_1P_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$



фиг. 54.

Задача III. Опредѣлить уравненіе шара. Поверхность шара есть геометрическое мѣсто точекъ, равно отстоящихъ отъ данной точки, - центра шара. Пусть центръ имѣетъ координаты a, b, c, а радіусъ равенъ r; тогда по формулѣ (10) имѣемъ:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13),$$

что и есть искомое уравненіе шара.

Задача IV. Найти координаты точки $P(x, y, z)$, лежащей на прямой, соединяющей данныя точки $P_1(x_1, y_1, z_1)$ и $P_2(x_2, y_2, z_2)$, если извѣстно, что отношеніе $\frac{P_1P}{PP_2}=\lambda$.

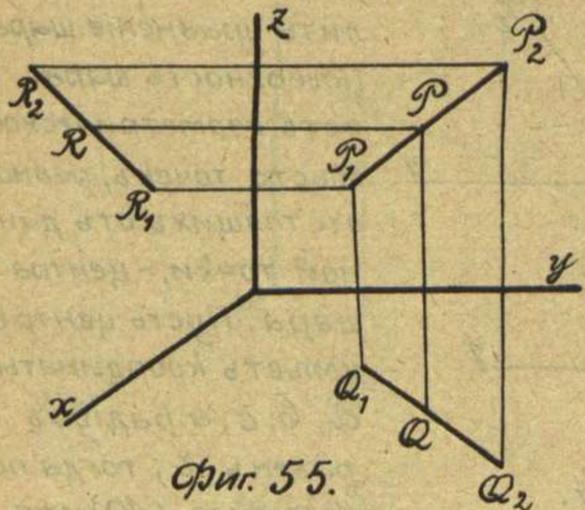
По страницѣ 29 мы знаемъ, что положеніе точки P опредѣлено однозначно, коль скоро намъ извѣстно отношеніе:

$$\frac{P_1P}{PP_2}=\lambda.$$

Требуется опредѣлить координаты точки P въ зависимости отъ координатъ $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ и λ. Опускаемъ на плоскость (xy) перпендикуляры P_1Q_1, P_2Q_2 и PQ (фиг. 55).

Тогда прямыя P_1P_2 и Q_1Q_2 лежатъ въ одной плоскости, и слѣдовательно дѣлятся параллельными прямыми на части пропорціональныя. Отсюда

$$\frac{Q_1Q}{QQ_2}=\frac{P_1P}{PP_2}=\lambda$$



Фиг. 55.

а такъ какъ абсциссы и ординаты точекъ P_1, P_2, P и Q_1, Q_2, Q одинаковы, то основываясь на теоремѣ изъ плоской аналитической геометрiи (стран. 30) можемъ написать:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},$$

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}.$$

Остается найти выраженiе для z.

Для этого опускаемъ перпендикуляры изъ точекъ P_1, P_2 и P на плоскость (zx) и строимъ ихъ пересѣченiя R_1, R_2 и R съ этою плоскостью. Высоты z_1, z_2 и z точекъ R_1, R_2 и R равны высотамъ точекъ $P_1 P_2$ и P. Кромѣ того, замѣчая, что прямыя $P_1 P_2$ и $R_1 R_2$ лежатъ въ одной плоскости, находимъ:

$$\frac{R_1 R}{R R_2} = \frac{P_1 P}{P P_2} = \lambda.$$

Отсюда слѣдуетъ

$$z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

Итакъ любая точка P, лежащая на прямой $P_1 P_2$ имѣетъ координаты:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} \\ y &= \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} \\ z &= \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (14)$$

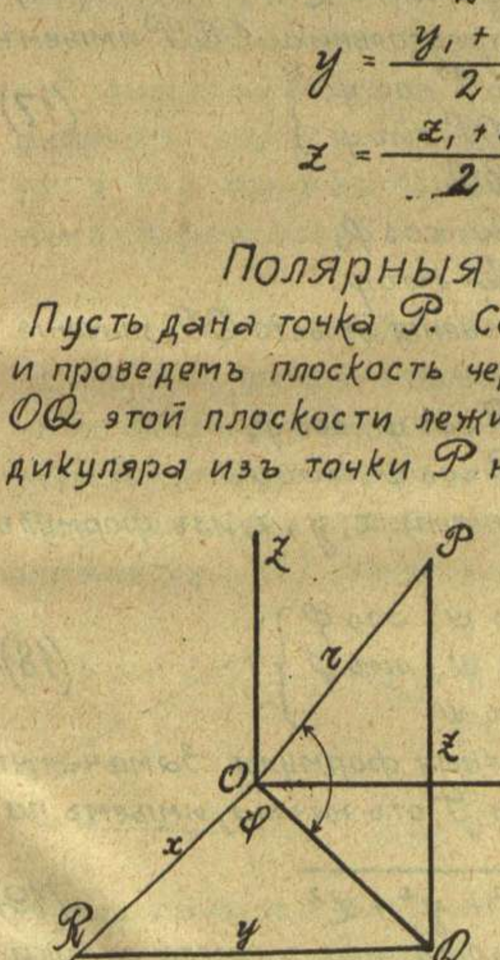
гдѣ
$$\lambda = \frac{P_1 P}{P P_2}.$$

Если $P_1P = PP_2$, то $\frac{P_1P}{PP_2} = \lambda = 1$. Подставляя это значеніе въ уравненія (14), получаемъ формулы, опредѣляющія середину разстоянія между двумя точками P_1 и P_2:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y &= \frac{y_1 + y_2}{2} \\ z &= \frac{z_1 + z_2}{2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (15).$$

Полярныя координаты.

Пусть дана точка P. Соединимъ ее съ началомъ и проведемъ плоскость черезъ OP и Oz. На слѣдѣ OQ этой плоскости лежитъ основаніе Q перпендикуляра изъ точки P на плоскость (xy) причемъ



фиг. 56.

$\angle OQP = 90°$.
Пусть $\angle QOP = \psi$,
$\angle xOQ = \varphi$,
$OP = r$.
Это суть полярныя или сферическія координаты точки P; r наз. радіусомъ векторомъ, φ долготой а ψ широтой точки P.

Для однозначности r всегда положительно; ψ измѣняется отъ $-90°$ до $+90°$, а φ отъ $0°$ до

360°.

$$r \geqq 0,$$
$$-90° \leqq \psi \leqq +90°,$$
$$0° \leqq \varphi < 360°.$$

Опредѣлимъ связь между полярными и прямоугольными координатами. Прямоугольныя координаты точки P суть:

$$OR = x,\ RQ = y,\ QP = z \quad \ldots\ldots (16).$$

Изъ прямоугольнаго треугольника OQP имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} OQ &= OP \cos\psi \\ QP &= OP \sin\psi \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (17)$$

а изъ треугольника ORQ:

$$OR = OQ \cdot \cos\varphi,$$
$$RQ = OQ \cdot \sin\varphi.$$

Подставляя въ эти уравненія вмѣсто OQ значеніе (17), получаемъ

$$OR = OP \cdot \cos\psi \cdot \cos\varphi,$$
$$RQ = OP \cdot \cos\psi \cdot \sin\varphi.$$

а сопоставляя съ значеніями x, y, z изъ формулъ (16) находимъ:

$$\left.\begin{aligned} x &= r \cos\psi \cdot \cos\varphi \\ y &= r \cos\psi \cdot \sin\varphi \\ z &= r \sin\psi. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (18)$$

Выведемъ теперь обратныя формулы. Замѣчая, что r есть разстояніе точки P отъ начала, имѣемъ по уравненію (8):

$$r = +\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \ldots\ldots (19).$$

Корень берется съ плюсомъ, ибо r всегда положительно. Эту формулу могли бы также получить, складывая уравненія (18), возвысивъ ихъ предварительно въ квадратъ:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2\cos^2\psi \cdot \cos^2\varphi + r^2\cos^2\psi \cdot \sin^2\varphi + r^2\sin^2\varphi =$$

$$= r^2[(\cos^2\psi(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + \sin^2\psi] =$$
$$= r^2(\cos^2\psi + \sin^2\psi) = r^2.$$

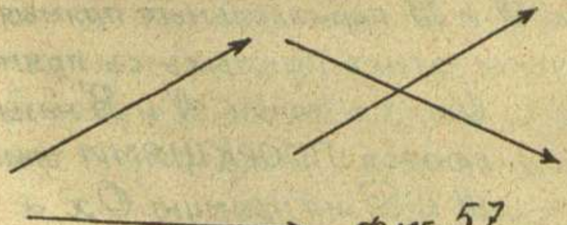
Легко было бы также выразить синусъ и косинусь угловъ ψ и φ помощью x, y, z. Но если даны численныя значенія этихъ координатъ, то лучше не пользоваться этими общими формулами, а опредѣливъ r изъ формулы (19), подставить значеніе его въ третье изъ уравненій (18). Тогда получаемъ

$$\sin\psi = \frac{z}{r}.$$

Отсюда мы можемъ опредѣлить $\cos\psi$ помощію формулы $\cos\psi = \sqrt{1-\sin^2\psi}$, а подставляя эти значенія r и $\cos\psi$ въ первыя два уравненія (18), получимъ также $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$.

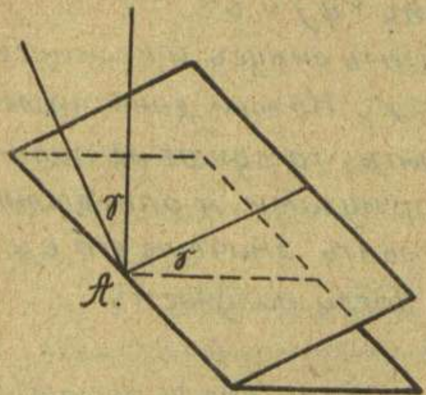
Объ углахъ въ пространствѣ.

Если двѣ прямыя не пересѣкаются, то угломъ между ними называется уголъ, составляемый прямыми, параллельными даннымъ и проходящими черезъ одну точку. При этомъ для устраненія неопредѣленности условливаются 1) считать одно изъ двухъ направленій на данныхъ прямыхъ положительнымъ, и 2) угломъ между двумя прямыми считается всегда тотъ уголъ, заключенный между положительными ихъ направленіями, который меньше двухъ прямыхъ.



фиг. 57.

Уголъ между двумя плоскостями, какъ извѣстно, опредѣляется линейнымъ угломъ, который получается если пересѣчь данныя плоскости плоскостью перпендикулярною къ прямой пересѣченія ихъ. Если изъ точки A возставимъ перпендикуляры къ обѣимъ плоскостямъ, то составленный ими уголъ равенъ углу γ между плоскостями. На этомъ основанiи можно сказать, что угломъ между двумя плоскостями называется уголъ составляемый перпендикулярами къ даннымъ плоскостямъ.



фиг. 58.

Во избѣжанiи неопредѣленности можно различать у каждой плоскости двѣ стороны (верхнюю и нижнюю) изъ которыхъ одну можно принимать за положительную, другую за отрицательную. Тогда угломъ между двумя плоскостями слѣдуетъ считать уголъ, составляемый перпендикулярами, возставленными къ положительнымъ сторонамъ плоскостей.

Ортогональныя проекцiи.

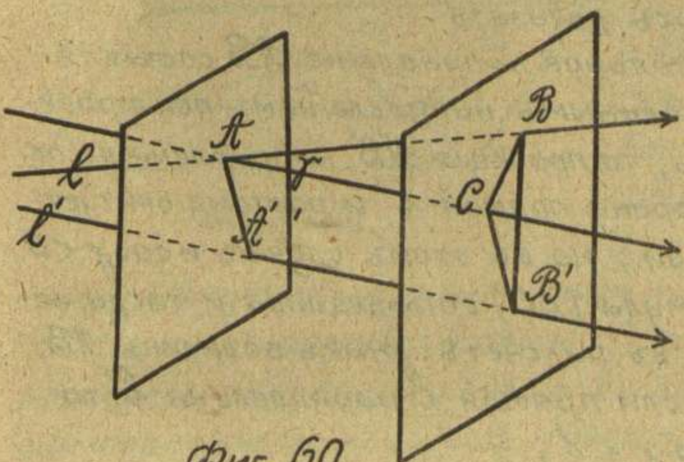
Пусть на плоскости дана прямая Ox. Проведемъ черезъ данныя точки A и B параллельныя прямыя. Тогда точки пересѣченiя этихъ прямыхъ съ прямою Ox, т.е. точки A' и B' называются **проекцiями** точекъ A и B на прямую Ox, а прямая Ox - **осью проекцiи**, прямыя AA' и BB' **проектирующими лучами**, а направленiе прямыхъ AA' и BB' **направленiемъ проекцiи**.

фиг. 59.

Если въ частномъ случаѣ проектирующiе лучи перпендикулярны къ оси проекцiи, то проекцiя называется **орто-**

гональною. Мы разсмотримъ только ортогональныя проекціи.

Пусть въ пространствѣ даны прямая l' и точка A внѣ ея. Если черезъ A провести плоскость, перпендикулярную къ l' и пересѣкающую ее въ точкѣ A', то A' будетъ ортогональною проекціею точки A на прямую l', ось проекціи. Пусть дана еще точка



Фиг. 60.

B. Чтобы найти ея проекцію, проводимъ черезъ нее плоскость перпендикулярную къ l' и опредѣляемъ ея пересѣченіе B' съ прямою l'. Тогда $A'B'$ есть ортогональная проекція отрѣзка AB. Такъ какъ мы разсматриваемъ только ортогональныя проекціи, то въ слѣдующемъ подъ проекціею будемъ подразумѣвать всегда ортогональную проекцію.

Докажемъ, что между отрѣзками и ихъ проекціями существуетъ связь выражаемая формулою:

$$A'B' = AB \cdot \cos\gamma, \quad \dots\dots\dots \quad (20)$$

гдѣ γ есть уголъ, составленный прямою l съ осью проекцій l'.

Для доказательства проведемъ черезъ A параллель къ l'. Тогда по стр. 83.

$$\angle BAC = \angle \gamma.$$

Отрѣзки параллельныхъ между параллельными равны, поэтому

$$AC = A'B'.$$

Такъ какъ $\angle ACB$ прямой, то отсюда слѣдуетъ

$$AC = AB \cdot \cos\gamma,$$

или
$$A'B' = AB \cdot \cos\gamma,$$

что и требовалось доказать.

Если положительное направленіе AB составляетъ съ положительнымъ направленіемъ оси проекцій тупой уголъ, то проекція $A'B'$ направлена въ отрицательную сторону прямой l' и поэтому считается отрицательной; но въ этомъ случаѣ и $\cos\gamma < 0$, такъ что формула (20) справедлива и тогда, если принимать въ разсчетъ знакъ величинъ AB, $A'B'$ и $\cos\gamma$. Если прямая l параллельна l', то $\measuredangle\gamma = 0$, а $\cos\gamma = 1$;

тогда

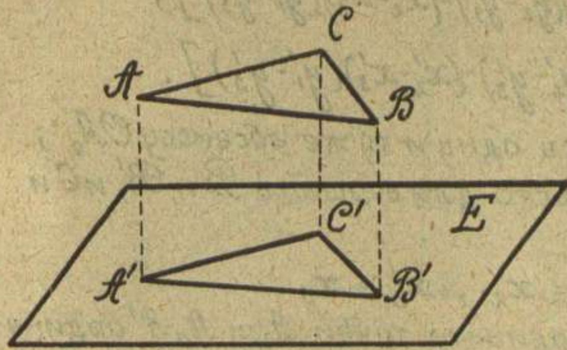
$$A'B' = AB;$$

если же прямая l перпендикулярна къ l' то $\measuredangle\gamma = 90^\circ$, $\cos\gamma = 0$, поэтому

$$A'B' = 0,$$

т. е. проекція представляетъ точку.

Теперь разсмотримъ проекціи на плоскость. Пусть дана плоскость E и внѣ ея точка A. Изъ A опускаемъ перпендикуляръ на плоскость E и обозначимъ его основаніе черезъ A'. Тогда A' есть ортогональная проекція точки A' на плоскость E. Мы и здѣсь займемся лищь ортогональными проекціями. Если дана еще точка B съ своею проекціею B' то $A'B'$ есть проекція отрѣзка AB на плоскость E. Пусть дана еще третья точка C и ея проекція C'. Соединивъ между собою точки ABC а также $A'B'C'$ мы говоримъ, что проекція $\Delta A'B'C'$ есть проекція ΔABC на плоскость E.

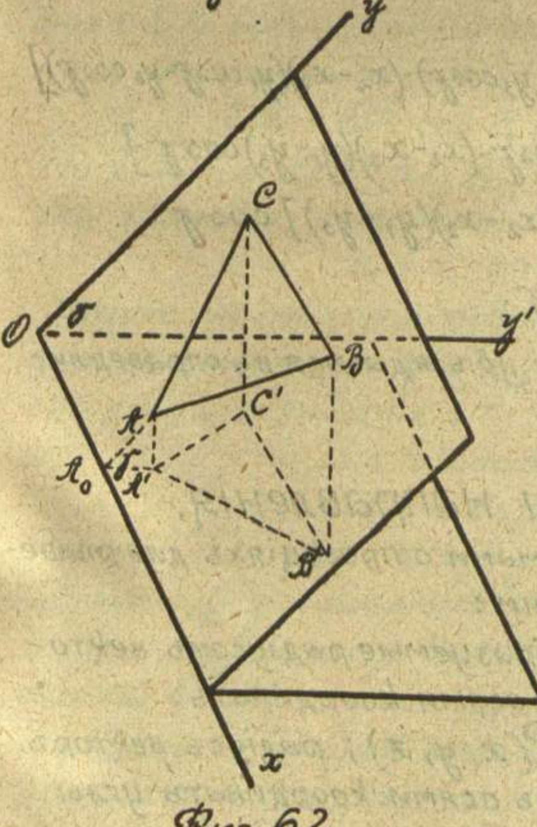


Фиг. 61.

Между площадями этихъ треугольниковъ существуетъ связь, выражаемая формулой:

$$\Delta A'B'C' = \Delta ABC \cos\gamma, \quad (21)$$

гдѣ γ есть уголъ наклоненія плоскости треугольника ABC къ плоскости E. Примемъ прямую пересѣченія этихъ плоскостей за ось $x^{овъ}$ координатной системы. Проведемъ любую плоскость перпендикулярно къ ребру Ox. Пусть она пересѣчетъ плоскость треугольника ABC по прямой Oy, а плоскость треугольника $A'B'C'$ по Oy'.



Фиг. 62.

Тогда $\measuredangle y'Oy = \gamma$ измѣряетъ наклоненіе обѣихъ плоскостей. Обозначивъ координаты вершинъ треугольниковъ:

$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3),$
$A'(x_1', y_1'), B'(x_2', y_2'), C'(x_3', y_3'),$

можемъ написать ихъ площади (стр. 15):

$$\Delta ABC = \frac{1}{2}\left[(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)\right],$$

$$\Delta A'B'C' = \frac{1}{2}\left[(x_1' - x_3')(y_2' - y_3') - (x_2' - x_3')(y_1' - y_3')\right].$$

Точки A и A' имѣютъ одну и ту же абсциссу OA_0; подобное имѣетъ мѣсто для вершинъ B и B', и C и C'. Поэтому

$$x_1' = x_1,\ x_2' = x_2,\ x_3' = x_3.$$

Далѣе A_0A есть ордината точки A, и A_0A' ордината точки A'. Но A_0A' есть проекція отрѣзка A_0A на плоскость (xy'), поэтому

$$y_1' = y_1 \cos\gamma,$$

а также

$$y_2' = y_2 \cos\gamma,$$

$$y_3 = y_3 \cos\gamma.$$

Подставляемъ полученныя значенія въ формулу площади треугольника $A'B'C'$:

$$\Delta A'B'C' = \frac{1}{2}\left[(x_1 - x_3)(y_2\cos\gamma - y_3\cos\gamma) - (x_2 - x_3)(y_1\cos\gamma - y_3\cos\gamma)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[(x_1 - x_3)(y_2 - y_3)\cos\gamma - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)\cos\gamma\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)\right]\cos\gamma$$

$$= \Delta ABC \cdot \cos\gamma.$$

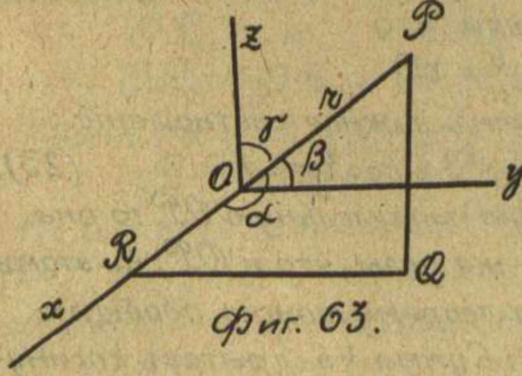
Такимъ образомъ мы убѣждаемся въ справедливости формулы (21).

Косинусы направленія.

Воспользуемся теоремами о проекціяхъ для рѣшенія слѣдующей задачи:

Опредѣлить углы, образуемые радіусомъ векторомъ данной точки съ осями координатъ.

Пусть дана точка $P(x, y, z)$; радіусъ векторъ ея $OP = r$ образуетъ съ осями координатъ углы



Фиг. 63.

$$\alpha = \measuredangle(OP, Ox),$$
$$\beta = \measuredangle(OP, Oy),$$
$$\gamma = \measuredangle(OP, Oz).$$

Требуется найти соотношеніе между этими углами и координатами точки P. Опускаемъ изъ P перпендикуляръ PQ на плоскость (xy), изъ Q опускаемъ перпендикуляръ QR на ось Ox. Но PQ также перпендикулярна къ Ox, ибо она перпендикулярна къ плоскости (xy), отсюда плоскость PQR перпендикулярна къ оси Ox, значитъ R есть проекція P на прямую Ox. Проекція точки O на Ox есть сама точка O; отсюда OR есть проекція отрѣзка OP на Ox. Значитъ, по формулѣ (20)

$$OR = OP \cdot \cos \measuredangle(OP, Ox).$$

Но $OR = x$, $OP = r$, $\measuredangle(OP, Ox) = \alpha$; подставляя эти значенія, получаемъ

$$x = r \cos\alpha.$$

Такимъ же образомъ можно вывести соотвѣтственныя уравненія для y и z; такъ что мы получаемъ слѣдующія значенія:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\alpha, \\ y &= r\cos\beta, \\ z &= r\cos\gamma. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ (22).$$

Углы α, β, γ называются **углами направленія**, а $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ **косинусами направленія** прямой OP. Между последними существуетъ связь, для опредѣленія которой возвышаемъ уравненія (22) въ квадратъ и складываемъ:

$$x^2+y^2+z^2 = r^2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma).$$

На стран. 77 мы нашли, что

$$x^2+y^2+z^2 = r^2.$$

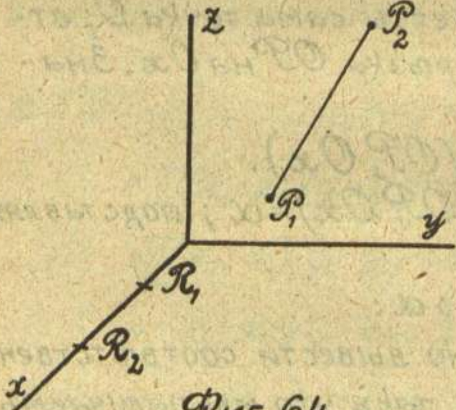
По подстановкѣ получаемъ важное соотношеніе:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma = 1 \quad \dots\dots (23).$$

Если вообразимъ прямую параллельную OP, то она образуетъ съ осями тѣ-же углы, что и OP; на этомъ основаніи предыдущую теорему можно обобщить слѣдующимъ образомъ: Сумма квадратовъ косинусовъ направленія всякой прямой съ осями координатъ равна единицѣ.

Задача: Опредѣлить косинусы направленія прямой, проходящей черезъ двѣ данныя точки.

Пусть даны точки $P_1(x_1 y_1 z_1)$ и $P_2(x_2 y_2 z_2)$.



Фиг. 64.

Введемъ обозначенія:

$$\alpha = \measuredangle(P_1P_2,\ Ox),$$
$$\beta = \measuredangle(P_1P_2,\ Oy),$$
$$\gamma = \measuredangle(P_1P_2,\ Oz).$$

Если черезъ P_1 и P_2 проложимъ плоскости перпендикулярныя къ Ox, то въ пересѣченіи ихъ съ Ox получимъ проекціи точекъ P_1 и P_2. Пусть первая пересѣкаетъ Ox въ точкѣ R_1, вторая въ точкѣ R_2. Тогда R_1R_2 есть проекція отрѣзка P_1P_2 на ось Ox. Отсюда, по формулѣ (20):

$$R_1R_2 = P_1P_2 \cos\alpha.$$

$$\cos\alpha = \frac{R_1R_2}{P_1P_2} \quad \dots\dots (24).$$

Такъ какъ плоскости, перпендикулярныя къ Ox, параллельны плоскости (yz), то OR_1 и OR_2 суть абсциссы точекъ P_1 и P_2.

$$OR_1 = x_1, \quad OR_2 = x_2,$$

$$OR_2 - OR_1 = R_1R_2 = x_2 - x_1.$$

Кромѣ того по формулѣ (11)

$$P_1P_2 = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

Подставляя значенія R_1R_2 и P_1P_2 въ уравненіе (24), получаемъ выраженіе для $\cos\alpha$. Такимъ же образомъ находимъ выраженія для $\cos\beta$ и $\cos\gamma$:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{x_2-x_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}} \\ \cos\beta &= \frac{y_2-y_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}} \\ \cos\gamma &= \frac{z_2-z_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}} \end{aligned}\right\} \cdot\cdot (25).$$

Сумма квадратовъ этихъ выраженій также равна единицѣ, чѣмъ подтверждается справедливость предыдущей теоремы.

Прямая линія.

Только что выведенными формулами мы воспользуемся для вывода уравненій прямой линіи.

Пусть прямая задана лежащею на ней точкою $P_1(x_1, y_1, z_1)$ и направленіемъ. Возьмемъ на прямой еще любую точку $P(x, y, z)$, тогда, какъ мы только что вывели, косинусъ угла прямой съ осью $x^{овъ}$ равенъ разности абсциссъ точекъ P и P_1, дѣленной на разстояніе PP_1. Обозначая разстояніе PP_1 черезъ u, получаемъ:

$$\cos\alpha = \frac{x - x_1}{u};$$

отсюда

$$x - x_1 = u \cos\alpha.$$

Такимъ же образомъ находимъ выраженія для разности остальныхъ координатъ точекъ P и P_1, и перенеся координаты точки P_1 на правую сторону, получаемъ:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 + u\cos\alpha \\ y &= y_1 + u\cos\beta \\ z &= z_1 + u\cos\gamma \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (26).$$

Такъ какъ P было взято произвольно, то координаты всѣхъ точекъ прямой удовлетворяютъ уравненіямъ (26). Такимъ образомъ мы получили уравненія прямой. По стр. 74 линія выражается двумя уравненіями, у насъ же получились три вслѣдствіи того, что въ нихъ входитъ еще перемѣнный параметръ u.

Для исключенія его рѣшимъ уравненія относительно u:

$$u = \frac{x - x_1}{\cos\alpha}, \quad u = \frac{y - y_1}{\cos\beta}, \quad u = \frac{z - z_1}{\cos\gamma}.$$

Отсюда

$$\frac{x - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y - y_1}{\cos\beta} = \frac{z - z_1}{\cos\gamma} \cdots\cdots (27).$$

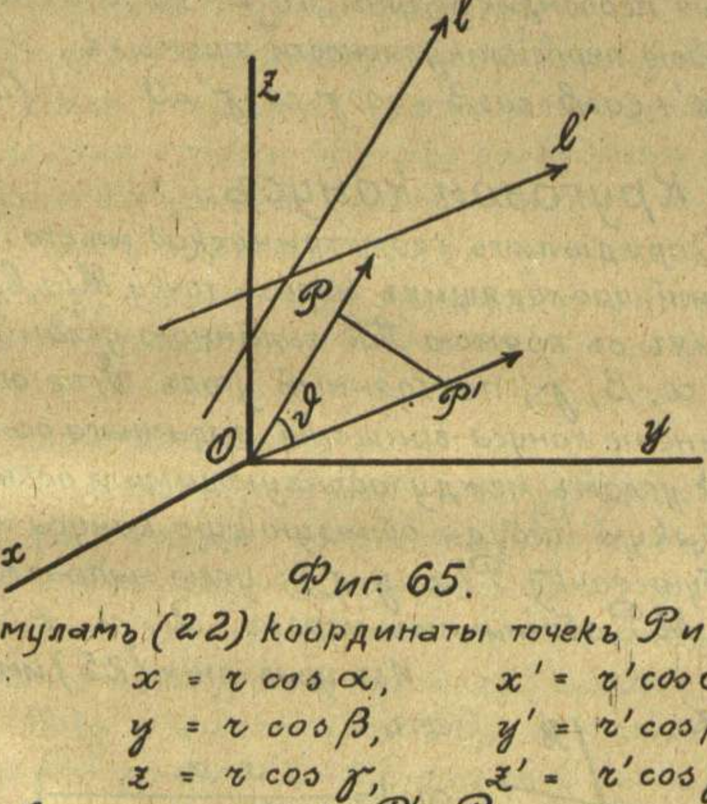
Очевидно эти равенства замѣняютъ два уравненія, слѣдовательно мы получили систему двухъ уравненій, выражающихъ прямую линію, заданную точкою, лежащею на ней, и направленіемъ.

Опредѣлимъ теперь уравненія прямой заданной двумя точками напримѣръ P_1 и P_2. Для этого стоитъ только въ уравненіяхъ (27) замѣнить $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ выраженіями (25). Тогда искомыя уравненія получаются въ видѣ:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}\ldots\ldots\ldots(28).$$

Задача. Опредѣлить уголъ ϑ, образуемый двумя прямыми.

Пусть направленіе прямой l опредѣлено углами направленія α, β, γ, а направленіе прямой l' углами α', β', γ'. Проведемъ черезъ начало координатъ прямыя, соотвѣтственно параллельныя прямымъ l и l'.



Фиг. 65.

Эти прямыя образуютъ уголъ ϑ и понятно, что углы направленія ихъ будутъ тѣ же, что и у прямыхъ l и l'. Откладываемъ на нихъ отъ начала отрѣзки $OP=r$, $OP'=r'$. Тогда по формуламъ (22) координаты точекъ P и P' будутъ:

$$\left.\begin{array}{ll} x=r\cos\alpha, & x'=r'\cos\alpha', \\ y=r\cos\beta, & y'=r'\cos\beta', \\ z=r\cos\gamma, & z'=r'\cos\gamma'. \end{array}\right\}\ldots(29).$$

Соединивъ точку P' и P, получаемъ треугольникъ OPP'. Изъ тригонометріи извѣстно, что

$$PP'^2=OP^2+OP'^2-2OP\cdot OP'\cos\vartheta.$$

Выразимъ въ этой формулѣ отрѣзки PP', OP, OP' черезъ координаты точекъ P и P' и черезъ r:

$$(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2=r^2+r'^2-2rr'\cos\vartheta,$$

$$x^2+y^2+z^2+x'^2+y'^2+z'^2-2(xx'+yy'+zz')=r^2+r'^2-2rr'\cos\vartheta.$$

Но по формулѣ (8)

$$x^2+y^2+z^2 = r^2,$$

$$x'^2+y'^2+z'^2 = r'^2.$$

Отсюда $r^2+r'^2-2(xx'+yy'+zz')=r^2+r'^2-2rr'\cos\vartheta$

$$rr'\cos\vartheta = xx'+yy'+zz'.$$

Подставляемъ значенія x, y, z и x', y', z' изъ уравненій (29) и сокращаемъ на rr':

$$\cos\vartheta = \cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cdot\cos\beta'+\cos\gamma\cdot\cos\gamma' \ldots (30).$$

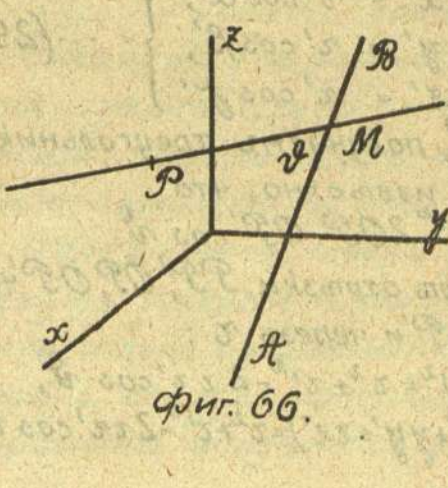
Если прямыя перпендикулярны, то $\vartheta = 90^\circ$, $\cos\vartheta = 0$. Отсюда условіе перпендикулярности прямыхъ:

$$\cos\alpha.\cos\alpha'+\cos\beta\cdot\cos\beta'+\cos\gamma\cdot\cos\gamma' = 0 \; \ldots \; (31).$$

Круговой конусъ.

Задача. Опредѣлить геометрическое мѣсто прямыхъ линій, проходящихъ черезъ точку $M(a,b,c)$ и образующихъ съ прямою AB заданною углами направленія α, β, γ, постоянный уголъ ϑ, т. е. опредѣлить уравненіе конуса вращенія, заданнаго осью, вершиною и угломъ между образующими и осью. Возьмемъ какую-нибудь образующую конуса и на ней любую точку $P(x, y, z)$; углы направленія прямой MP обозначимъ черезъ: λ, μ, ν.

Изъ уравненія (25) имѣемъ



Фиг. 66.

$$\left.\begin{aligned}\cos\lambda &= \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}\\ \cos\mu &= \frac{y-b}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}\\ \cos\nu &= \frac{z-c}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}\end{aligned}\right\} (32).$$

Изъ уравненія (30) получаемъ:

$$\cos\vartheta = \cos\lambda\cdot\cos\alpha + \cos\mu\cos\beta + \cos\nu\cos\gamma.$$

Подставляя значенія $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ изъ формулъ (32) находимъ:

$$\cos\vartheta = \frac{(x-a)\cos\alpha + (y-b)\cos\beta + (z-c)\cos\gamma}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}.$$

Освобождая уравненіе отъ корня и знаменателя, получаемъ искомое уравненіе:

$$[(x-a)\cos\alpha + (y-b)\cos\beta + (z-c)\cos\gamma]^2 = [(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]\cos^2\vartheta. \quad (33).$$

Зная это уравненіе, намъ легко будетъ доказать, что кривыя второго порядка получаются посредствомъ сѣченія конуса плоскостью.

Чтобы пересѣчь конусъ напримѣръ плоскостью (xy), стоитъ лишь подставить въ найденное уравненіе конуса

$$z = 0,$$

тогда получаемъ:

$$[(x-a)\cos\alpha + (y-b)\cos\beta - c\cdot\cos\gamma]^2 = [(x-a)^2 + (y-b)^2 + c^2]\cos^2\vartheta. (34).$$

Какъ видимъ получается уравненіе второго порядка и этимъ теорема доказана. Остается опредѣлить въ какомъ случаѣ мы получимъ эллипсъ, въ какомъ случаѣ гиперболу или, наконецъ, параболу.

Какъ извѣстно (стр. 59), это сводится къ опредѣленію знака $AB - C^2$, причемъ въ нашемъ случаѣ

$$A = \cos^2\alpha - \cos^2\vartheta,$$
$$B = \cos^2\beta - \cos^2\vartheta,$$
$$C = \cos\alpha\cos\beta.$$

Отсюда

$$AB - C^2 = (\cos^2\alpha - \cos^2\vartheta)(\cos^2\beta - \cos^2\vartheta) - \cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta =$$
$$= \cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta - \cos^2\vartheta\cdot\cos^2\beta - \cos^2\vartheta\cos^2\vartheta + \cos^4\vartheta - \cos^2\alpha\cos^2\beta =$$
$$= \cos^2\vartheta(\cos^2\vartheta - \cos^2\alpha - \cos^2\beta).$$

Зная по формулѣ (23), что $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, находимъ:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1 - \cos^2\gamma = \sin^2\gamma.$$

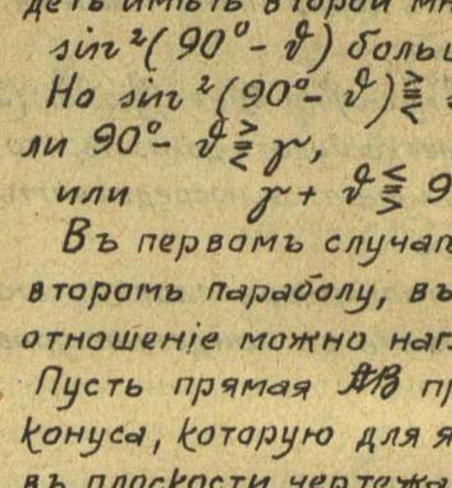
Подставляя это значеніе, получаемъ:

$$AB - C^2 = \cos^2\vartheta[\sin^2(90^\circ - \vartheta) - \sin^2\gamma].$$

$\cos^2\vartheta$ всегда положителенъ, поэтому знакъ выраженія $AB - C^2$ зависитъ отъ того, какой знакъ будетъ имѣть второй множитель, т.е. будетъ ли $\sin^2(90^\circ - \vartheta)$ больше, меньше или равно $\sin^2\gamma$. Но $\sin^2(90^\circ - \vartheta) \gtreqless \sin^2\gamma$ смотря по тому, будетъ ли $90^\circ - \vartheta \gtreqless \gamma$,

или $\gamma + \vartheta \lesseqgtr 90^\circ$.

Въ первомъ случаѣ мы получаемъ эллипсъ, во второмъ параболу, въ третьемъ гиперболу. Это соотношеніе можно наглядно пояснить чертежомъ. Пусть прямая AB представляетъ ось кругового конуса, которую для ясности полагаемъ лежащую въ плоскости чертежа, а точка M вершину его. Если

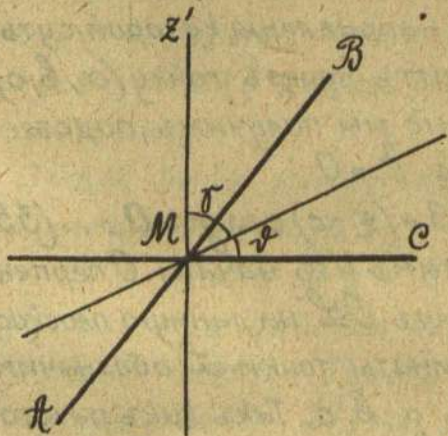


Фиг. 67.

черезъ вершину провести прямую Mz' параллельно оси $z^{\text{овъ}}$ то уголъ BMz' равенъ углу, составляемому осью AB конуса съ осью $z^{\text{овъ}}$; т.е. углу γ. Если теперь проложить плоскость черезъ AB и Mz' (въ нашемъ случаѣ это будетъ плоскость чертежа), то она пересѣчетъ конусъ по двумъ образующимъ, которыя составляютъ съ осью AB уголъ ϑ.

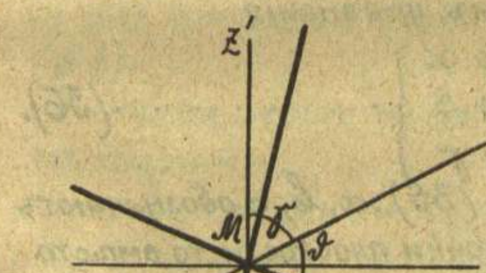
Пусть $\gamma + \vartheta < 90^\circ$ (фиг. 67). Если проведемъ теперь черезъ вершину M плоскость параллельную съкущей, т.е. перпендикулярную къ Mz' (ибо съкущая плоскость есть плоскость (xy) перпендикулярная къ оси $z^{овъ}$), то ясно, что эта плоскость будетъ имѣть съ конусомъ лишь одну общую точку M. Въ этомъ случаѣ, отъ сѣченія конуса плоскостью (xy) получимъ эллипсъ.

Въ случаѣ параболы $\gamma+\vartheta=90°$ (фиг. 68). Изъ чертежа ясно, что въ этомъ случаѣ плоскость, проведенная черезъ вершину M параллельно съкущей плоскости, пройдетъ черезъ образующую MC и соприкасается съ конусомъ вдоль этой образующей.



Фиг. 68.

Наконецъ въ случаѣ гиперболы имѣемъ $\gamma+\vartheta>90°$ (фиг. 69). Здѣсь плоскость, проведенная параллельно съкущей черезъ M, пересѣчетъ конусъ по двумъ образующимъ.



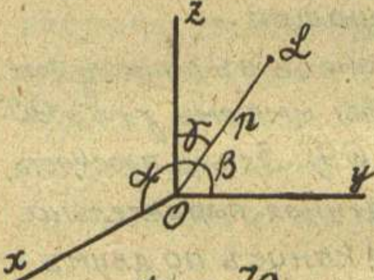
Фиг. 69.

Итакъ кривая, получаемая при сѣченіи кругового конуса, плоскостью будетъ гиперболою, параболою или эллипсомъ, въ зависимости отъ того, пересѣкаетъ ли плоскость, проведенная черезъ вершину конуса параллельно съкущей плоскости, данный конусъ по двумъ образующимъ, касается ли она конуса вдоль одной образующей или не имѣетъ съ нимъ ни одной общей образующей.

Плоскость.

Если въ уравненіи (33) придать ϑ частное значеніе $\vartheta = 90^\circ$, то это уравненіе будетъ изображать геометрическое мѣсто прямыхъ линій, пересѣкающихъ прямую AB въ точкѣ M подъ прямымъ угломъ. Это геометрическое мѣсто, очевидно будетъ плоскостью, перпендикулярною къ прямой, углы направленія которой суть α, β, γ и которая проходитъ черезъ точку (a, b, c). Слѣдовательно ея уравненіе мы получимъ, подставляя въ уравненіе (33) $\cos\vartheta = 0$:

$$(x - a)\cos\alpha + (y - b)\cos\beta + (z - c)\cos\gamma = 0 \ldots (35).$$



фиг. 70.

Опустимъ изъ начала O перпендикуляръ OL на данную плоскость. Координаты точки L обозначимъ черезъ a, b, c. Такъ какъ разстояніе $OL = p$ есть радіусъ векторъ точки L, то по формуламъ (22) имѣемъ уравненія

$$\left.\begin{aligned} a &= p\cos\alpha \\ b &= p\cos\beta \\ c &= p\cos\gamma \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (36).$$

Такъ какъ въ уравненіи (35) a, b, c обозначаютъ координаты произвольной точки плоскости, то вмѣсто нихъ можно подставить частныя значенія (36); тогда получаемъ:

$$(x - p\cos\alpha)\cos\alpha + (y - p\cos\beta)\cos\beta + (z - p\cos\gamma)\cos\gamma = 0.$$

Раскрывъ скобки, получимъ:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) = 0.$$

Но по формулѣ (23)

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Отсюда

$$x \cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\; (37)$$

Это есть такъ называемое уравненіе плоскости въ нормальной формѣ, гдѣ положеніе плоскости опредѣлено разстояніемъ p отъ начала и углами направленія α, β, γ перпендикуляра на плоскость. Мы получили два вида уравненія плоскости, причемъ оба уравненія первой степени. Можно ожидать, что всякое уравненіе первой степени изображаетъ плоскость. Легко доказать справедливость этого предположенія.

Общій видъ уравненія первой степени съ тремя перемѣнными есть:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (38).$$

Если намъ удастся привести это уравненіе къ виду (37), то теорема будетъ доказана:

Въ уравненіе (37) мы замѣчаемъ, что сумма квадратовъ коэффиціентовъ при x, y, z равна единицѣ (форм. 23). Этимъ мы можемъ воспользоваться для приведенія уравненія (38) къ виду уравненія (37).

Умножая первое на неопредѣленнаго множителя m получимъ:

$$mAx + mBy + mCz + mD = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (39).$$

Предположимъ, что полученное уравненіе тождественно съ уравненіемъ (37); тогда

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= mA \\ \cos\beta &= mB \\ \cos\gamma &= mC \\ -p &= mD \end{aligned}\right\} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (40)$$

Если теперь намъ удается выразить m посредствомъ A, B, C, то тождественность взятыхъ уравненій будетъ очевидна. Возведя первыя три равенства (40) въ квадратъ и складывая ихъ получаемъ:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = m^2A^2 + m^2B^2 + m^2C^2$$

или $1 = m^2(A^2 + B^2 + C^2)$,

отсюда

$$m = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Подставляя это значеніе въ уравненія (40), получаемъ:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \\ \cos\beta &= \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \\ \cos\gamma &= \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (41)$$

$$p = \frac{-D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \quad \ldots\ldots\ldots (42).$$

Посредствомъ этихъ формулъ мы всегда можемъ изъ общаго уравненія (38) опредѣлить косинусы угловъ направленія перпендикуляра къ данной плоскости и разстояніе ея отъ начала; т.е. это уравненіе дѣйствительно всегда выражаетъ плоскость. Знакъ плюсъ или минусъ передъ корнемъ выбирается такъ, чтобы для p получилось выраженіе положительнае.

Примѣръ: Пусть дана плоскость

$$3x + 4y + 12z - 6 = 0.$$

Требуется найти длину перпендикуляра опущеннаго изъ начала на плоскость, и его углы направленія.

Сравнивая данное уравненіе съ общимъ, находимъ:

$$A=3,\ B=4,\ C=12,\ D=-6.$$

Слѣдовательно

$$p=\frac{6}{\sqrt{3^2+4^2+12^2}}=\frac{6}{\sqrt{9+16+144}}=\frac{6}{\sqrt{169}}=\frac{6}{13};$$

$$\cos\alpha=\frac{3}{13},\ \cos\beta=\frac{4}{3},\ \cos\gamma=\frac{12}{13}.$$

При помощи уравненій (41) и (42) легко опредѣлить положеніе плоскости въ различныхъ частныхъ случаяхъ. Положимъ $A=0$. Тогда

$$\cos\alpha=0;$$

въ этомъ случаѣ плоскость параллельна оси $x^{овъ}$.

Такимъ же образомъ убѣждаемся, что если $B=0$, то плоскость параллельна оси $y^{овъ}$, и если $C=0$, то она параллельна оси $z^{овъ}$. Если $D=0$, то $p=0$, т.е. плоскость проходитъ черезъ начало системы.

Если $A=0$ и $B=0$, то плоскость параллельна какъ оси $x^{овъ}$, такъ и оси $y^{овъ}$, слѣдовательно она параллельна координатной плоскости (xy). Уравненіе плоскости въ этомъ случаѣ принимаетъ видъ:

$$Cz+D=0$$

или

$$z=-\frac{D}{C}.$$

Сравнивая это уравненіе съ уравненіемъ (4) находимъ:

$$-\frac{D}{C}=c,$$

т.е. $-\frac{D}{C}$ есть разстояніе нашей плоскости отъ плоскости (xy).

Если теперь положимъ $A=0$, и $D=0$, то плоскость параллельна оси $x^{овъ}$ и проходитъ черезъ начало, т.е. она проходитъ черезъ ось $x^{овъ}$ и т.д.

Прямыя пересѣченія плоскости съ координатными плоскостями называются **СЛѢДАМИ** ея. Пусть требуется опредѣлить слѣдъ плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

на плоскости (xy). Для этого стоитъ только подставить въ это уравненіе $z=0$, тогда получаемъ уравненіе искомаго слѣда:

$$Ax + By + D = 0.$$

Такимъ же образомъ, подставляя $x=0$ или $y=0$, находимъ:

слѣдъ плоскости на плоскости (yz): $By+Cz+D=0$,

" " " " (zx): $Ax+Cz+D=0$.

Также легко опредѣлить пересѣченіе данной плоскости съ осями координатъ, напр. съ осью $x^{овъ}$. Для этого стоитъ лишь подставить

$$y=0,\ z=0,$$

ибо совокупность этихъ двухъ уравненій изображаетъ ось $x^{овъ}$, тогда получаемъ:

$$x = -\frac{D}{A}.$$

$-\frac{D}{A}$ есть отрѣзокъ, отсѣченный отъ оси $x^{овъ}$. Обозначая отрѣзки, отсѣкаемые отъ осей данною плоскостью черезъ a, b, c, получаемъ:

$$\left.\begin{aligned} a &= -\frac{D}{A} \\ b &= -\frac{D}{B} \\ c &= -\frac{D}{C} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots (43).$$

Уравненіе (38) $Ax + By + Cz + D = 0$ мы можемъ представить въ видѣ:

$$\frac{A}{D}x + \frac{B}{D}y + \frac{C}{D}z = -1,$$

или $$\frac{x}{-\frac{D}{A}} + \frac{y}{-\frac{D}{B}} + \frac{z}{-\frac{D}{C}} = 1.$$

Подставляя сюда значенія (43), получаемъ:

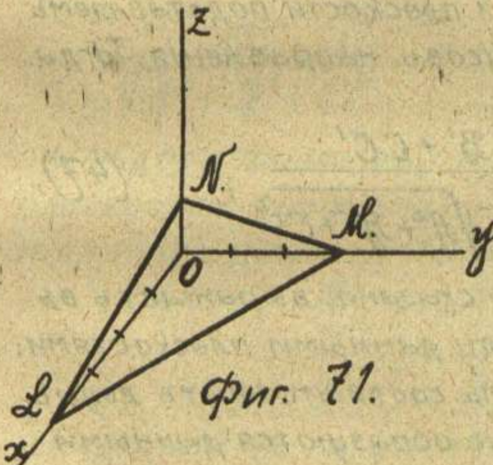
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots (44).$$

Найденное уравненіе изображаетъ плоскость, отсѣкающую на осяхъ отрѣзки a, b, c отъ начала координатной системы.

Примѣръ: Пусть требуется опредѣлить разстоянія отъ начала, на которыхъ плоскость

$$3x + 4y + 12z = 6$$

пересѣкаетъ координатныя оси. Приводимъ данное уравненіе къ виду (44), дѣля его на 6:



Фиг. 71.

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3/2} + \frac{z}{1/2} = 1.$$

Слѣдовательно $a = 2$, $b = \frac{3}{2}$, $c = \frac{1}{2}$:

Если отложимъ полученныя разстоянія на осяхъ, то очевидно слѣды плоскости пройдутъ черезъ полученныя точки L, M, N.

Задача. Опредѣлить уголъ между двумя плоскостями.

Пусть даны плоскости:

$$1)\ Ax + By + Cz + D = 0,$$
$$2)\ A'x + B'y + C'z + D' = 0.$$

Уголъ образуемый этими плоскостями равенъ углу заключающемуся между перпендикулярами на эти плоскости. Мы уже видѣли (41), что косинусы направленія перпендикуляра на плоскость 1) выражаются

$$\cos\alpha=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};\ \cos\beta=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};\ \cos\gamma=\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\ (45).$$

Соотвѣтственно этому косинусы направленія перпендикуляра на плоскость 2) суть:

$$\cos\alpha=\frac{A'}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}};\ \cos\beta=\frac{B'}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}};\ \cos\gamma=\frac{C'}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}\ (46)$$

Извѣстно также (стр. 94), что уголъ между двумя прямыми опредѣляется изъ формулы

$$\cos\vartheta=\cos\alpha\cdot\cos\alpha'+\cos\beta\cdot\cos\beta'+\cos\gamma\cdot\cos\gamma'.$$

Слѣдовательно, желая получить уголъ между перпендикулярами на наши плоскости подставляемъ сюда значенія ихъ косинусовъ направленія. Тогда получаемъ:

$$\cos\vartheta=\frac{AA'+BB'+CC'}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}\ \ldots\ (47).$$

Этотъ уголъ, какъ выше сказано, выражаетъ въ то же время и уголъ между данными плоскостями. Неопредѣленность въ знакѣ соотвѣтствуетъ двумъ смежнымъ угламъ, которые образуются данными плоскостями.

Если двѣ плоскости перпендикулярны между собою, то $\vartheta=90^\circ$, $\cos\vartheta=0$. Чтобы въ выраженіи (47) $\cos\vartheta$ былъ равенъ нулю, необходимо и достаточно, чтобы числитель равнялся нулю. Отсюда находимъ, что условіемъ перпендикулярности двухъ плоскостей является

$$AA'+BB'+CC'=0\ \ldots\ldots\ (48)$$

Для того, чтобы плоскости были параллельны между собой, надо, чтобы перпендикуляры на эти плоскости имѣли косинусы направленія равные между собою или противоположно равные:

$$\cos\alpha = \pm\cos\alpha',$$
$$\cos\beta = \pm\cos\beta',$$
$$\cos\gamma = \pm\cos\gamma'.$$

Подставляемъ сюда соотвѣтственныя значенія изъ уравненій (45) и (46):

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \pm\frac{A'}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}},$$

$$\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \pm\frac{B'}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}},$$

$$\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \pm\frac{C'}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}.$$

Слѣдовательно въ случаѣ параллельности двухъ плоскостей коэффиціенты при x, y, z, въ уравненіяхъ ихъ должны быть пропорціональны:

$$\left.\begin{aligned} A' &= \mu A \\ B' &= \mu B \\ C' &= \mu C \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (49).$$

Подставимъ въ уравненіе второй плоскости значенія (49)

$$\mu Ax + \mu By + \mu Cz + D' = 0.$$

Раздѣлимъ на μ, получаемъ:

$$Ax + By + Cz + \frac{D'}{\mu} = 0.$$

Отсюда мы видимъ, что уравненія параллельныхъ плоскостей можно всегда привести къ такому виду, чтобы они различались только постояннымъ членомъ.

Коническія и цилиндрическія поверхности.

Коническими поверхностями называются такія поверхности, которыя получаются, если прямая, проходящая черезъ данную точку M скользитъ по данной кривой. Эта прямая называется образующею, точка M вершиною, а кривая, по которой образующая скользитъ, направляющею конической поверхности. Круговой конусъ есть частный видъ конической поверхности, когда направляющею служитъ окружность, а вершина лежитъ на перпендикулярѣ, возставленномъ изъ центра круга къ плоскости его.

Если коническая поверхность отнесена къ координатной системѣ, начало которой совпадаетъ съ вершиною, то она каждою плоскостью переходящею черезъ начало, пересѣчется по одной или нѣсколькимъ прямымъ, проходящимъ черезъ начало. Слѣдовательно уравненіе конической поверхности всегда можно привести къ такому виду, что если изъ него и общаго уравненія $Ax+By+Cz=0$ исключить одну изъ величинъ x, y, z (т.е. найти сѣченіе конической поверхности плоскостью, проходящею черезъ начало), то въ результатѣ получится уравненіе, которое можно разложить на множителей первой степени.

Если прямая линія, скользя по данной кривой, все время остается параллельна самой себѣ, то получается цилиндрическая поверхность. Прямая называется образующею, а кривая направляющею цилиндрической поверхности. Если образующія цилиндрической поверхности перпендикулярны къ одной изъ координатныхъ плоскостей, напр. къ плоскости (xy), то поверхность совершенно опредѣлена своимъ слѣдомъ на этой плоскости. Слѣдъ этотъ опредѣляется уравненіемъ, въ которое входятъ только двѣ координаты x, y; слѣдовательно уравненія цилиндрической поверхности можно всегда привести къ такому виду, чтобы оно содержало обозначенія только двухъ координатъ.

Поверхности второго порядка.

Поверхностями второго порядка называются такія поверхности, которыя изображаются уравненіями второй степени.

Мы будемъ изслѣдовать только частные виды уравненій этихъ поверхностей, которыя получаются, если отнести поверхность къ спеціально выбранной координатной системѣ.

Поверхности второго порядка раздѣляются на двѣ группы: поверхности, имѣющія центръ и поверхности, не имѣющія центра. Къ первой группѣ принадлежатъ:

Элипсоидъ: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ . . . . . (50).

Рѣшимъ это уравненіе относительно z:

$$z = \pm\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}.$$

Каждой парѣ значеній x и y соотвѣтствуютъ два значенія для z; равныхъ по абсолютной величинѣ и различныхъ по знаку. Это служитъ доказательствомъ того, что наша поверхность симметрична относительно плоскости (xy). Рѣшая уравненіе относительно другихъ перемѣнныхъ x и y, найдемъ, что разсматриваемая поверхность симметрична также относительно другихъ плоскостей координатъ.

Желая найти сѣченіе поверхности плоскостью, параллельною одной изъ координатныхъ плоскостей, напр. плоскостью (yz); стоитъ лишь въ уравненіе (50) подставить

$$x = d$$

тогда получимъ

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{d^2}{a^2}.$$

Это и есть уравненіе искомаго сѣченія. Оно второй степени, слѣдовательно изображаетъ коническое сѣченіе. Видя, что коэффиціенты при y^2 и z^2 имѣютъ одинаковыя знаки, мы заключаемъ, что полученное сѣченіе будетъ эллипсъ, если только правая часть больше нуля $(d^2 < a^2)$.

Если же правая часть уравненія плоскаго сѣченія меньше нуля $(d^2 > a^2)$ то мы не получаемъ дѣйствительной кривой, т.е. поверхность не пересѣкается такою плоскостью. Значитъ эллипсоидъ лежитъ весь между двумя плоскостями, параллельными плоскости (yz) и отстоящими отъ нея по обѣ стороны на разстояніи a. Если плоскость, параллельная плоскости (yz), пересѣкаетъ эллипсоидъ, то мы можемъ сказать, что это сѣченіе будетъ эллипсъ.

Если вмѣсто d подставить $-d$, то получимъ эллипсъ, равный первому; т.е. если пересѣкать эллипсоидъ плоскостями, параллельными плоскости (yz) и равно отстоящими по обѣ стороны отъ этой плоскости, то получаемъ одинаковыя сѣченія. Это указываетъ на то, что, какъ мы уже раньше нашли, поверхность симметрична относительно плоскости (yz). Если въ уравненіе (50) подставить $y=\pm e$, или $z=\pm f$, то получаются пересѣченія эллипсоида плоскостями, параллельными плоскости (zx) или (xy):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{e^2}{b^2}, \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{f^2}{c^2}.$$

Изъ этихъ уравненій разсужденіями, подобными предыдущимъ, найдемъ, что эллипсоидъ и этими плоскостями пересѣкается по эллипсамъ и что онъ весь заключается внутри двухъ плоскостей, параллельныхъ плоскости (zx) и отстоящихъ отъ нея на разстояніи $\pm b$, и еще внутри двухъ другихъ плоскостей, которыя отстоятъ отъ плоскости (xy) по обѣ стороны на $\pm c$.

Такимъ образомъ вся наша поверхность заключается внутри прямоугольнаго параллелепипеда со сторонами, равными $2a$, $2b$ и $2c$.

Однополый гиперболоидъ:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (51)$$

Рѣшая это уравненіе относительно z, получимъ:

$$z=\pm c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}.$$

Придавая всевозможныя значенія для x и y, получимъ для каждой пары такихъ значеній два значенія для z, различныя лишь по знаку; значитъ разсматриваемая поверхность симметрична относительно плоскости (xy). Рѣшая затѣмъ наше уравненіе относительно y и x убѣждаемся, что поверхность симметрична также относительно плоскостей (zx) и (yz).

Чтобы получить сѣченіе плоскостью параллельною къ плоскости (yz); подставляемъ

$$x=\pm d: \quad -\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{d^2}{a^2}.$$

Полученное уравненіе второй степени, слѣдовательно представляетъ коническое сѣченіе; коэффиціенты при y^2 и z^2 съ обратными знаками, слѣдовательно мы получили гиперболу. Такъ какъ при $+d$ и $-d$ получаемъ равныя гиперболы, то наша поверхность симметрична относительно плоскости (yz). Въ сѣченіи $x=\pm a$ мы вмѣсто гиперболы получаемъ пару прямыхъ линій.

Пересѣчемъ теперь поверхность плоскостью, параллельною плоскости (zx)

$$y=\pm e: \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1+\frac{e^2}{b^2}.$$

Полученное уравненіе изображаетъ эллипсъ. Такъ какъ правая часть всегда положительна, то послѣднимъ уравненіемъ всегда изображается эллипсъ, значитъ всякая плоскость параллельная плоскости (zx) пересѣкаетъ нашу поверхность.

Наконецъ подставляемъ $z=\pm f$:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{f^2}{c^2}.$$

Получаемъ опять гиперболу. Въ сѣченіи $f=\pm c$ мы вмѣсто гиперболы получаемъ пару прямыхъ линій.

Такъ какъ гипербола продолжается до безконечности, то отсюда слѣдуетъ, что и наша поверхность должна простираться до безконечности.

Однополый гиперболоидъ замѣчателенъ тѣмъ, что онъ принадлежитъ къ такъ называемымъ ЛИНЕЙЧАТЫМЪ поверхностямъ, состоящимъ изъ системы прямыхъ линій.

Уравненіе гиперболоида можно представить въ такой формѣ:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{z^2}{c^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (52)$$

Разлагая обѣ части на множителей, получаемъ:

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = \left(1 - \frac{z}{c}\right)\left(1 + \frac{z}{c}\right) \quad \ldots\ldots (53).$$

Этому уравненію можно также удовлетворять, если вмѣсто него взять слѣдующія два уравненія:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} &= \left(1 - \frac{z}{c}\right)\lambda \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} &= \frac{1 + \frac{z}{c}}{\lambda} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (54).$$

Дѣйствительно, если опредѣлить въ одномъ изъ нихъ λ и подставить въ другое, то мы получимъ уравненіе (53). Уравненія (54) суть первой степени, слѣдовательно изображаютъ плоскости. Всѣ точки, удовлетворяющія этимъ обоимъ уравненіямъ, должны также удовлетворять уравненію нашей поверхности. Но точки, лежащія одновременно на двухъ плоскостяхъ, образуютъ прямую пересѣченія этихъ плоскостей, т.е. совокупность уравненій (54) изображаетъ прямую линію, лежащую на поверхности гиперболоида. Придавая всевозможныя значенія для λ, получаемъ цѣлую систему такихъ прямыхъ, называемыхъ **образующими** однополаго гиперболоида.

Уравненіе (53) можно также замѣнить слѣдующими двумя:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} &= \left(1 + \frac{z}{c}\right)\mu \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} &= \frac{1 - \frac{z}{c}}{\mu} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (55).$$

Уравненія эти опять изображают плоскости, но уже не тѣ, которыя выражались уравненіями (54). Значитъ, существуетъ еще другая система образующихъ однополаго гиперболоида, который слѣдовательно состоитъ изъ двухъ системъ, прямолинейныхъ образующихъ. Можно доказать, что каждая образующая пересѣкается не съ ·бразующими своей системы, а встрѣчается съ каждою образующею другой системы.

Конусъ: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$ . . . . (56).

Поступая по предыдущему, легко убѣдиться что и эта поверхность симметрична относительно всѣхъ трехъ координатныхъ плоскостей.

Чтобы найти сѣченіе конуса плоскостью (yz), подставляемъ $x = 0$:

$$-\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Разлагая на два уравненія первой степени, получаемъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{z}{c} - \frac{y}{b} = 0 \\ \frac{z}{c} + \frac{y}{b} = 0 \end{aligned}\right\}$$

т. е. плоскость (yz) пересѣкаетъ конусъ по двумъ прямымъ.

Подставляя въ уравненіе (56) $z = 0$ находимъ:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

или $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = c$,

т. е. плоскость (xy) также пересѣкаетъ конусъ по двумъ прямымъ.

Не трудно убѣдиться въ томъ, что если бы мы пересѣкли конусъ плоскостью, параллельною плоскости (yz) или (xy), то въ обоихъ случаяхъ получили бы гиперболы.

Пересѣчемъ теперь конусъ плоскостью (zx), для чего подставляемъ $y=0$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Такъ какъ невозможно, чтобы сумма двухъ положительныхъ величинъ равнялась нулю, то мы должны положить $x=0$ и $z=0$.

Но по условію и $y=0$; слѣдовательно наше сѣченіе представляетъ точку, именно вершину конуса.

Пересѣкая конусъ плоскостью параллельною (zx), получаемъ эллипсъ.

Пусть однополый гиперболоидъ:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \cdots\cdots\cdots (57)$$

и конусъ $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0 \cdots\cdots\cdots (58)$$

отнесены къ одной и той же координатной системѣ. Если обѣ поверхности пересѣчь плоскостью $z=0$, то мы получимъ сѣченія:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{для гиперболоида}$$

и $$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0 \quad \text{или} \quad \frac{x}{a}-\frac{y}{b}&=0\\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}&=0\end{aligned}\right\} \text{для конуса.}$$

Но по стр. 54 послѣднія два уравненія представляютъ асимптоты гиперболы получившейся отъ сѣченія гиперболоида. Такимъ же образомъ можно найти, что и всякая другая плоскость, проходящая черезъ начало и пересѣкающая гиперболоидъ по гиперболѣ, вырѣзываетъ изъ конуса пару образующихъ, служащихъ асимптотами этой гиперболы. Поэтому конусъ (56) называется асимптотнымъ конусомъ гиперболоида (57).

Двуполый гиперболоидъ: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ . . (59).

Рѣшая это уравненіе относительно каждой изъ координатъ x, y, z, видимъ, что поверхность симметрична относительно трехъ координатныхъ плоскостей. Опредѣлимъ сѣченіе поверхности плоскостями, параллельными координатнымъ плоскостямъ.

$$x=\pm d: \quad \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{d^2}{a^2}-1.$$

Если $\frac{d^2}{a^2}>1$, то правая часть положительна, и мы получаемъ эллипсъ. Если $\frac{d^2}{a^2}=1$, то правая часть равна нулю. Тогда необходимо $y=0, z=0$, т. е. сѣченіе представляетъ точку. Если $\frac{d^2}{a^2}<1$, то правая часть отрицательна, тогда какъ лѣвая положительна. Въ этомъ случаѣ, значитъ, плоскость не пересѣкаетъ поверхности, такъ что двуполый гиперболоидъ состоитъ изъ двухъ отдѣльныхъ частей, лежащихъ внѣ пространства, ограниченнаго двумя плоскостями, параллельными плоскости (yz) и находящимися на разстояніи a по обѣ стороны отъ нея.

Подставляя въ уравненіе (59) $y=\pm e$ и затѣмъ $z=\pm f$, получаемъ:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1+\frac{e^2}{b^2} \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{f^2}{c^2}.$$

Слѣдовательно сѣченія, параллельныя двумъ другимъ координатнымъ плоскостямъ, суть гиперболы. Если въ уравненіи (59) на правой части вмѣсто единицы нуль, то получается уравненіе асимптотнаго конуса двуполаго гиперболоида.

Къ поверхностямъ второго порядка безъ центра принадлежатъ:

Эллиптическій параболоидъ: $x^2+\alpha^2y^2+2pz=0$ . . (60).

Найдемъ сѣченіе поверхности плоскостью, параллельною плоскости (yz), для чего подставляемъ $x=d$.

$$\alpha^2y^2+2pz+d^2=0.$$

Какъ видно, полученное сѣченіе есть парабола (стр. 38). Такъ какъ для $x=-d$ мы получаемъ то же самое сѣченіе, то поверхность симметрична относительно плоскости (yz). Она также симметрична относительно плоскости (zx), ибо подставляя $y=\pm e$, мы находимъ: $x^2+2pz+\alpha^2e^2=0$.

И эта система сѣченій состоитъ изъ параболъ. Сѣченія параллельныя плоскости (xy), мы получаемъ, подставивъ въ уравненіе (60) $z=f$:

$$x^2+\alpha^2y^2+2pf=0.$$

Эти сѣченія суть эллипсы. Первые два члена послѣдняго уравненія положительны; слѣдовательно, плоскость $z=f$ только въ томъ случаѣ пересѣкаетъ нашу поверхность, когда $2pf<0$, т.е. когда f имѣетъ знакъ отличный отъ знака p. Значитъ поверхность не симметрична относительно плоскости (xy) и вся расположена по одну сторону отъ нея.

Если положимъ $z=0$, то получимъ:

$$x^2+\alpha^2y^2=0$$

откуда, необходимо $x=0$, $y=0$. Итакъ мы видимъ, что плоскость (xy) касается нашей поверхности въ началѣ координатъ.

Гиперболическій параболоидъ: $x^2-\alpha^2y^2+2pz=0$. (61).

Сѣченіе поверхности плоскостью, параллельною (yz) будетъ парабола и кромѣ того поверхность симметрична относительно плоскости (yz), ибо, подставивъ $x = \pm d$ получаемъ:

$$\alpha^2 y^2 - 2pz - d^2 = 0.$$

Пересѣкая поверхность плоскостью $y = \pm e$, получаемъ также параболу:

$$x^2 + 2pz - \alpha^2 e^2 = 0$$

и видимъ, что поверхность симметрична относительно плоскости (zx). Наконецъ подставляя $z = f$ получаемъ гиперболу

$$x^2 - \alpha^2 y^2 + 2pf = 0.$$

Уравненіе гиперболоическаго параболоида (61) можно представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$(x - \alpha y)(x + \alpha y) = -2pz \quad \ldots\ldots (62).$$

Этому уравненію можно также удовлетворить если замѣнить его слѣдующими двумя уравненіями:

$$\left.\begin{aligned} x - \alpha y &= -\frac{2pz}{\lambda} \\ x + \alpha y &= \lambda \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (63).$$

Такъ какъ эти уравненія первой степени, то они изображаютъ плоскости. Точки, соотвѣтствующія тѣмъ значеніямъ координатъ, которыя удовлетворяютъ обоимъ уравненіямъ (63), должны находиться на поверхности (61). Геометрическое мѣсто этихъ точекъ будетъ пересѣченіе этихъ плоскостей, т.е. прямая. Итакъ мы получаемъ прямую, лежащую всѣми точками на нашей поверхности. Придавая всевозможныя значенія для λ, получимъ цѣлую систему такихъ прямыхъ. Слѣдовательно гиперболическій параболоидъ принадлежитъ къ линейчатымъ поверхностямъ и уравненія (63) представляютъ уравненія его образующихъ. Если придавать λ всевозможныя значенія, то плоскости $x + \alpha y = \lambda$ будутъ отличаться только постояннымъ членомъ, т.е. будутъ параллельны.

Такъ какъ въ уравненія ихъ не входитъ величина z, то онѣ (стр. 101) параллельны оси $z^{овъ}$, такъ что всѣ получаемыя образующія будутъ лежать въ плоскостяхъ, параллельныхъ оси $z^{овъ}$ и параллельныхъ между собою.

Замѣчая, что уравненію (61) можно удовлетворить также и слѣдующими двумя уравненіями

$$\left.\begin{aligned} x + \alpha y &= -\frac{2pz}{\mu} \\ x - \alpha y &= \mu \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (64)$$

заключаемъ, что гиперболическій параболоидъ имѣетъ еще вторую систему образующихъ, лежащихъ также въ плоскостяхъ, параллельныхъ оси $z^{овъ}$ и параллельныхъ между собою.

Можно было бы еще доказать, что каждая образующая не встрѣчается съ образующими той системы, къ которой она принадлежитъ, но пересѣкается съ каждою образующею другой системы.

Къ поверхностямъ второго порядка принадлежатъ еще цилиндрическія поверхности, имѣющія направляющею кривую второго порядка. Если образующія параллельны оси $z^{овъ}$, то уравненія ихъ можно привести къ одному изъ слѣдующихъ видовъ:

$y^2 = 2px$: параболическій цилиндръ,

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$: эллиптическій цилиндръ,

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$: гиперболическій цилиндръ.

Дифференціальное исчисленіе.

Понятіе о функціяхъ и классификація ихъ.

Величины, разсматриваемыя въ математикѣ, бываютъ двухъ родовъ: ПОСТОЯННЫЯ и ПЕРЕМѢННЫЯ. Постоянною величиною называется такая, которая при данномъ изслѣдованіи имѣетъ лишь одно или нѣсколько опредѣленныхъ значеній. Напр. отношеніе окружности къ діаметру есть величина постоянная, которое имѣетъ одно только значеніе 3,1415926...; $\sqrt{1}$ имѣетъ два опредѣленныхъ значенія: ± 1; $\sqrt[3]{1}$ имѣетъ три опредѣленныхъ значенія: $1, \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}, \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$. Примѣромъ постоянныхъ величинъ могутъ служить вообще всѣ цѣлыя и дробныя числа, изучаемыя ариѳметикою.

Если величина въ данномъ изслѣдованіи можетъ принимать безчисленное множество значеній, то такая величина называется перемѣнною. Съ перемѣнными величинами мы познакомились въ аналитической геометріи, при изученіи кривыхъ. Мы видѣли, что при движеніи точки по какой-нибудь линіи абсцисса и ордината ея измѣняются; слѣдовательно текущія координаты линіи суть величины перемѣнныя.

Другой примѣръ перемѣнныхъ величинъ даетъ формула площади f квадрата, сторона котораго равна a:

$$f=a^2.$$

a и f могутъ имѣть безчисленное множество значеній, значитъ онѣ перемѣнныя величины. Если $a=1$, то $f=1$, если $a=2$, то $f=4$ и т. д., слѣдовательно a и f не независимы другъ отъ друга. Коль скоро мы придаемъ a нѣкоторое значеніе, то f получаетъ соотвѣтственное опредѣленное значеніе. Такія перемѣнныя величины, которымъ можно придавать произвольныя значенія, называются **независимыми** перемѣнными; перемѣнныя же, которыя послѣ приданія независимой перемѣнной нѣкотораго численнаго значенія, уже не произвольны, а имѣютъ нѣкоторое произвольное значеніе, называются **зависимыми** перемѣнными или **функціями** независимой перемѣнной, так наз. **аргумента** ихъ. Такъ въ нашемъ примѣрѣ, придавая a всевозможныя значенія, мы каждый разъ получаемъ опредѣленное значеніе для f, значитъ f есть функція отъ a, площадь квадрата есть функція его стороны.

По закону Маріотта объемъ данной массы газа обратно пропорціоналенъ давленію, что высказывается формулою

$$v = \frac{a}{p}.$$

Всякое измѣненіе давленія вызываетъ соотвѣтственное измѣненіе объема. Слѣдовательно, объемъ газа есть функція давленія.

Если дано уравненіе кривой, то ордината точки кривой есть функція ея абсциссы. Напр. изъ уравненія параболы $y^2 = 2px$ мы находимъ

$$y = \pm\sqrt{2px}.$$

Здѣсь къ каждому значенію x принадлежатъ не одно, а два значенія y. Если одному значенію аргумента соотвѣтствуютъ не одно, а два или нѣсколько значеній функціи, то такая функція называется двухъ- или многозначною.

Общее опредѣленіе функціи слѣдующее: Если двѣ перемѣнныхъ величины x, y такъ связаны другъ съ другомъ, что каждому возможному значенію x соотвѣтствуетъ одно или нѣсколько значеній y, то y называется одно- или многозначною функціею аргумента x.

На этомъ основаніи мы можемъ назвать функціею и такую перемѣнную, закона зависимости которой отъ аргумента мы не знаемъ, но знаемъ только, что съ измѣненіемъ одной изъ перемѣнныхъ измѣняется и другая, и кромѣ того можемъ опредѣлить сколько угодно соотвѣтственныхъ паръ числовыхъ значеній обѣихъ перемѣнныхъ. Напр. намъ извѣстно, что въ различное время дня температура измѣняется, но намъ неизвѣстенъ законъ, по которому измѣняется температура въ зависимости отъ времени, хотя мы и можемъ помощью термометра наблюдать температуру въ каждый моментъ. Мы говоримъ и въ этомъ случаѣ, что температура есть функція времени. Такія функціи называются **эмпирическими**.

Если же законъ зависимости функціи отъ аргумента, мы можемъ выразить математическою формулою, то подобныя функціи мы называемъ **математическими**.

Математическая функція, которая получается изъ аргумента посредствомъ конечнаго числа слѣдующихъ дѣйствій: сложенія, вычитанія, умноженія, дѣленія, возвышенія въ степень и извлеченія корня, называется **алгебраическою**.

Алгебраическія функціи дѣлятся на раціональныя и ирраціональныя. Алгебраическая функція называется раціональною, если съ аргументомъ или членомъ, его содержащимъ, не производится дѣйствіе извлеченія корня; въ противномъ случаѣ функція называется ирраціональною. Напр.

$$y = \frac{ax^2 + b}{cx + d}$$ есть функція раціональная, а $y = \frac{\sqrt{1-x^2} + x}{a + x}$ функція ирраціональная.

Раціональныя функціи въ свою очередь дѣлятся на цѣлыя и дробныя. Если въ выраженіи функціи аргументъ не входитъ дѣлителемъ, то функція называется цѣлою, въ противномъ случаѣ дробною.

Цѣлую раціональную функцію можно всегда привести къ виду

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n,$$

а дробную раціональную функцію къ виду

$$y = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \ldots + b_{m-1} x + b_m},$$

гдѣ $a_0, \ldots a_n, b_0, \ldots b_m$ обозначаютъ какія нибудь положительныя или отрицательныя постоянныя, а n и m цѣлыя положительныя числа.

Если y есть функція x, то это обозначаютъ символически уравненіемъ

$$y = f(x).$$

Кромѣ буквы f, функцію преимущественно принято обозначать буквами φ, ψ, χ, а также большими буквами F, Φ, Ψ, X, хотя допускается употребленіе и другихъ буквъ.

Если зависимость между двумя перемѣнными выражается уравненіемъ, не рѣшеннымъ относительно одной изъ нихъ, напр.:

$$3x^2 - 7x - y^2 - 5 = 0,$$

то всетаки одну изъ перемѣнныхъ называютъ функціей отъ другой. Такая функція называется НЕЯВНОЮ и символически эта выражается уравненіемъ:

$$f(x, y) = 0.$$

Если рѣшить уравненіе относительно y, то мы получаемъ ЯВНУЮ функцію, въ нашемъ случаѣ

$$y = \pm\sqrt{3x^2 - 7x - 5}.$$

Это даетъ намъ возможность обобщить понятіе объ алгебраической функціи: если $f_0, f_1, f_2 \ldots$ суть алгебраическія функціи по прежнему опредѣленію то уравненіе

$$f_0(x)y^n + f_1(x)y^{n-1} + f_2(x)y^{n-2} + \ldots + f_{n-1}(x)y + f_n(x) = 0 \ldots\ldots (1),$$

опредѣляетъ неявную алгебраическую функцію y отъ x.

Такую неявную алгебраическую функцію можно представить болѣе простымъ уравненіемъ:

$$G_0(x)y^m + G_1(x)y^{m-1} + G_2(x)y^{m-2} + \ldots + G_{m-1}(x)y + G_m(x) = 0, (2)$$

гдѣ $G_0, \ldots G_m$ обозначаютъ цѣлыя раціональныя функціи.

Лучше всего убѣдиться въ этомъ на частномъ примѣрѣ. Пусть дана неявная функція:

$$\sqrt{x-1}\cdot y^2 - \frac{y}{\sqrt{x+1}} - \sqrt{x+1} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Очевидно имѣемъ уравненіе вида (1), ибо коэффиціентами степеней y служатъ ирраціональныя алгебраическія функціи. Попробуемъ привести его къ виду (2). Для этого помножимъ его на $\sqrt{x+1}$; тогда получаемъ:

$$\sqrt{x^2-1}\cdot y^2 - y - (x+1) = 0,$$

$$\sqrt{x^2-1}\cdot y^2 = y + (x+1).$$

Возвысимъ въ квадратъ:

$$(x^2-1)y^4 = y^2+2(x+1)y+(x+1)^2.$$

Перенося всѣ члены въ лѣвую часть, получимъ:

$$(x^2-1)y^4-y^2-2(x+1)y-(x+1)^2=0.$$

Въ полученномъ уравненіи всѣ члены суть цѣлыя раціональныя функціи, т.е. намъ дѣйствительно удалось привести уравненіе (3) къ виду (2).

Всѣ функціи, не принадлежащія по послѣднему опредѣленію къ алгебраическимъ, называются ТРАНСЦЕНДЕНТНЫМИ. Примѣромъ трансцендентныхъ функцій могутъ служить функціи

логариѳмическая : $y = \log x$,

показательная : $y = a^x$,

тригонометрическія : $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$,

циклометрическія : $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

Такимъ образомъ мы получили слѣдующую классификацію математическихъ функцій:

Математическія функціи

алгебраическія трансцендентныя

раціональныя ирраціональныя

цѣлыя дробныя.

Если y есть функція отъ x

$$y = f(x),$$

то мы наоборотъ и x можемъ разсматривать какъ функцію отъ y:

$$x = \varphi(y);$$

эта новая функція по отношенію къ первоначальной называется ОБРАТНОЮ, и дѣйствіе опредѣленія ея - ОБРАЩЕНІЕМЪ данной функціи.

Такъ, если дана функція

$$y = \sqrt{x+1},$$

то обратная функцiя выразится:

$$x = y^2 - 1.$$

Для функцiи

$$y = x^4 - 2$$

обратная будетъ

$$x = \sqrt[4]{y+2}.$$

Такимъ же образомъ функцiя

$$y = \sin x$$

имѣетъ абратную

$$x = \operatorname{Arc\,sin} y.$$

Изъ приведенныхъ примѣровъ мы видимъ, что при обращенiи функцiи иррацiональная функцiя можетъ измѣниться въ рацiональную и наоборотъ, но при этомъ алгебраическая функцiя всегда переходитъ въ алгебраическую, трансцедентная въ трансцедентную.

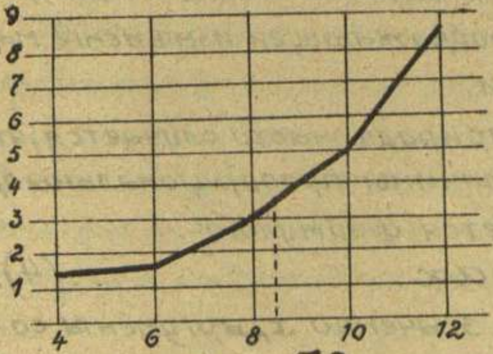
Изображенiе функцiй.

Для графическаго изображенiя функцiй лучше всего пользоваться способомъ, извѣстнымъ изъ аналитической геометрiи, т.е. Декартовой координатной системой. При этомъ всевожможныя значенiя аргумента откладываемъ по одной оси, а по направленiю другой соотвѣтственныя значенiя функцiи.

Пусть въ теченiе дня наблюдалось слѣдующее измѣненiе температуры, гдѣ h обозначаетъ время, t - температуру.

h	t
4	+1'5
6	+1'7
8	+3'0
10	+5'2
12	+9'0

На горизонтальной прямой откладываемъ на равныхъ разстоянiяхъ точки, соотвѣтствующiе часамъ дня, а на перпендикулярахъ, возставленныхъ изъ этихъ точекъ, откладываемъ отрѣзки, соотвѣтствующіе температурѣ, причемъ высота каждой клѣтки соотвѣтствуетъ одному градусу. Соединяя полученныя точки прямыми линіями, получаемъ ломаную линію, которая даетъ намъ болѣе или менѣе ясное изображеніе измѣненія температуры.



Фиг. 72.

Если бы мы наблюдали температуру не каждые два часа, а каждый часъ, то получили бы ломаную, болѣе подходящую къ истинному измѣненію температуры.

Если мы желаемъ опредѣлить температуру, соотвѣтствующую $8\frac{1}{2}$ часамъ, по истеченіи этого момента, то на горизонтальной оси откладываемъ отрѣзокъ соотвѣтствующій $8\frac{1}{2}$ часамъ и изъ полученной точки возставляемъ перпендикуляръ до пересѣченія съ ломаной линіей. Длина этого перпендикуляра даетъ намъ искомую температуру.

Такъ какъ мы знаемъ, что изображеніе измѣненія температуры будетъ не ломаная, но кривая линія, то лучше на глазъ проводимъ кривую, проходящую черезъ точки, соотвѣтствующія наблюденнымъ температурамъ.

Соотвѣтственное рѣшеніе этой задачи съ помощью вычисленія называется **интерполяціею**.

Мы разсмотрѣли изображеніе эмпирической функціи; теперь разсмотримъ изображеніе математическихъ функцій.

Аналитическая геометрія даетъ намъ методы для опредѣленія кривой, изображающей измѣненіе математической функціи.

Примѣръ I. Въ природѣ часто случается, что двѣ перемѣнныхъ величины пропорціональны одна другой, что выражается формулою:

$$y = ax \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4).$$

Если какому нибудь значенію x_1 аргумента соотвѣтствуетъ значеніе y_1 функціи, а значенію x_2 соотвѣтствуетъ y_2, то можемъ написать:

$$y_1 = ax_1,$$
$$y_2 = ax_2.$$

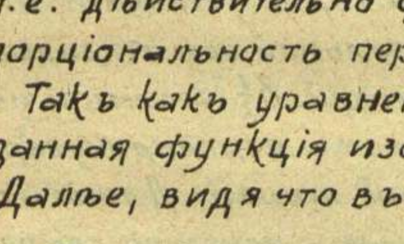
Раздѣливъ первое равенство на второе получаемъ:

$$y_1 : y_2 = x_1 : x_2$$

т. е. дѣйствительно формула (4) выражаетъ пропорціональность перемѣнныхъ x и y.

Такъ какъ уравненіе (4) первой степени, то данная функція изображается прямою линіею. Далѣе, видя что въ уравненіи нѣтъ постояннаго члена, заключаемъ, что прямая проходитъ черезъ начало. Наклоненіе ея γ къ оси $x^{овъ}$ опредѣляется изъ уравненія

$$tg\,\gamma = a.$$



фиг. 73.

Если намъ надо опредѣлить значеніе y, соотвѣтствующее какому нибудь значенію x, то, отложивъ на оси $x^{овъ}$ отрѣзокъ OQ, изображающій величину x, возставляемъ изъ Q перпендикулярь до пересѣченія P съ прямою. Тогда отрѣзокъ QP дастъ намъ искомое значеніе y.

Примѣръ II. Очень часто случается, что двѣ перемѣнныхъ величины обратно пропорціональны одна другой. Такой случай мы видѣли въ законѣ Маріотта, гдѣ объемъ газа обратно пропорціоналенъ давленію. Функціональная зависимость такого рода выражается уравненіемъ

$$xy = a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Въ самомъ дѣлѣ, пусть $x_1 y_1$ и $x_2 y_2$ обозначаютъ двѣ пары значеній перемѣнныхъ, удовлетворяющихъ уравненію (5); тогда

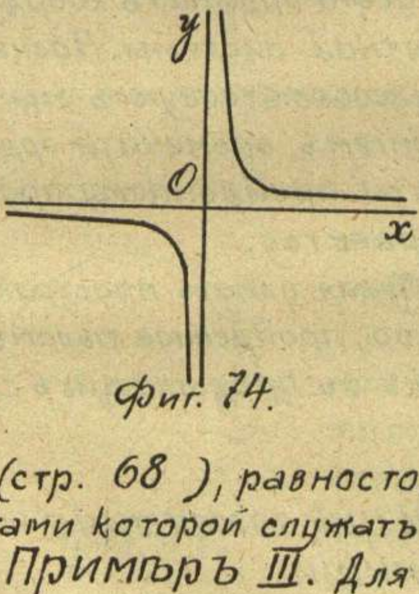
$$x_1 y_1 = a,$$
$$x_2 y_2 = a;$$

слѣдовательно

$$x_1 y_1 = x_2 y_2$$

или

$$y_1 : y_2 = x_2 : x_1.$$



Фиг. 74.

Кривая соотвѣтствующая этой зависимости, какъ намъ извѣстно изъ аналитической геометріи (стр. 68), равносторонная гипербола, асимптотами которой служатъ оси координатной системы.

Примѣръ III. Для тѣла, падающаго въ безвоздушномъ пространствѣ зависимость между временемъ t и пройденнымъ пространствомъ s выражается формулой:

$$s = \frac{gt^2}{2},$$

гдѣ g есть постоянная величина, именно ускореніе тяжести.

Обозначая перемѣнныя t и s черезъ x и y, получаемъ:

$$y = \frac{gx^2}{2}.$$

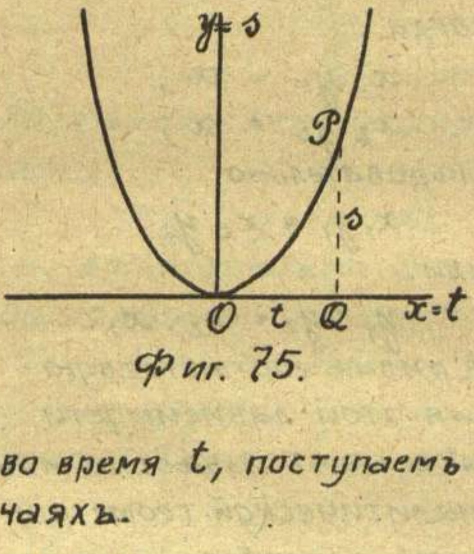
Это уравненіе второй степени слѣдовательно изображаетъ коническое сѣченіе. Рѣшаемъ его относительно x^2

$$x^2 = \frac{2}{g}\,y;$$

Обозначая постоянную $\frac{1}{g}$ черезъ p, получаемъ уравненіе

$$x^2 = 2py,$$

которое, очевидно, изображаетъ параболу, вершина и главная ось которой совпадаютъ съ началомъ и осью ординатъ координатной системы. Абсциссы соотвѣтствуютъ значеніямъ времени, а ординаты пройденному пространству.

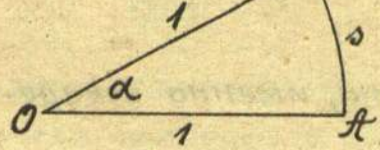


Фиг. 75.

Желая узнать пространство, пройденное тѣломъ во время t, поступаемъ какъ въ предыдущихъ случаяхъ.

Тригонометрическія и циклометрическія функціи.

Въ высшемъ анализѣ углы измѣряются въ дуговой мѣрѣ. Дуговая мѣра s угла AOB есть длина круговой дуги AB, на которую уголъ AOB опирается, при чемъ радіусъ круга равенъ единицѣ.



Фиг. 76.

Для перехода отъ градусной мѣры къ дуговой мы пользуемся извѣстною теоремою, по которой центральные углы относятся между собою какъ дуги, на которыя они опираются. Сравнивая $\angle AOB$, который пусть равняется α градусамъ, съ угломъ въ 180°, опирающимся на полуокружность, длина которой равна $\pi r = \pi \cdot 1 = \pi$, мы имѣемъ

$$\frac{s}{\pi} = \frac{\alpha}{180},$$

$$s = \frac{\pi}{180}\alpha, \quad \alpha = \frac{180}{\pi}s.$$

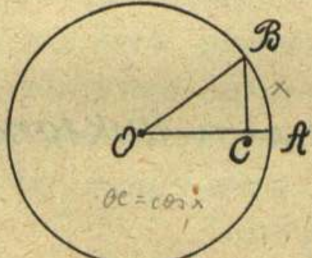
Градусная мѣра	0°	30°	45°	60°	90°	120°	180°	270°	360°
Дуговая мѣра	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Для изслѣдованія функціи

$$y = \sin x$$

мы беремъ окружность радіуса 1 и центральный уголъ AOB, въ дуговой мѣрѣ равный x. Тогда

$$AB = x, \quad CB = \sin x,$$



Фиг. 77.

при чемъ $\sin x$ считается положительнымъ или отрицательнымъ смотря по тому, находится ли точка B на верхней или нижней полуокружности. Представляя себѣ радіусъ OB подвижнымъ, мы можемъ прослѣдить на чертежѣ измѣненіе синуса, причемъ будемъ считать x положительнымъ, если OB получается вращеніемъ радіуса OA въ положительномъ смыслѣ, въ противномъ случаѣ отрицательнымъ. Чертежъ показываетъ намъ, что

$$\sin(-x) = -\sin x,$$

и что по совершеніи полнаго оборота повторяются прежнія значенія $\sin x$:

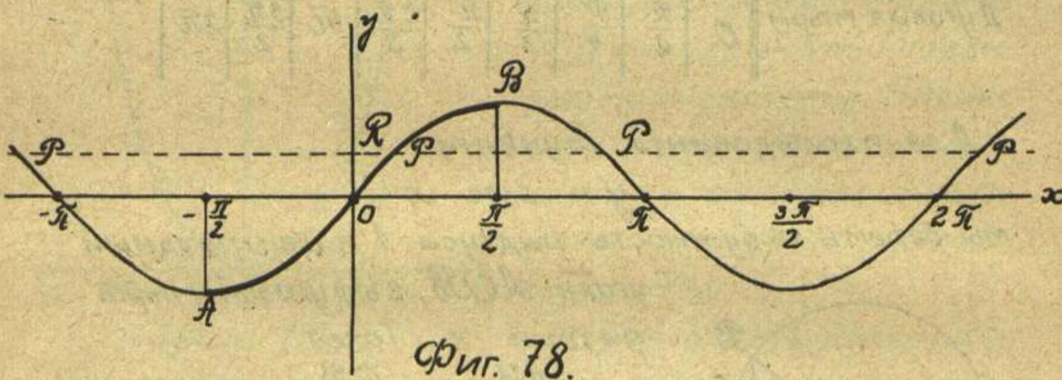
$$\sin(x + 2\pi) = \sin x,$$

или вообще:

$$\sin(x + 2K\pi) = \sin x,$$

гдѣ K цѣлое число, положительное или отрицательное.

Откладывая значенія x, y, получаемыя изъ фиг. 77, въ координатной системѣ, мы получаемъ графическое изображеніе функціи $y = \sin x$. (На чертежѣ все показано въ уменьшенномъ размѣрѣ.



Фиг. 78.

Обращеніе уравненія $y = \sin x$ даетъ циклометрическую функцію

$$x = \operatorname{Arc} \sin y,$$

измѣненіе которой въ зависимости отъ аргумента y можно прослѣдить на той же фиг. 78. Чтобы графически получить значеніе $\operatorname{Arc} \sin$ для даннаго y, мы откладываемъ y отъ точки O на оси $y^{\text{овъ}}$ и проводимъ черезъ полученную точку R прямую параллельную оси $x^{\text{овъ}}$ до пересѣченія съ кривою въ точкѣ P, тогда абсцисса RP этой точки будетъ равняться $\operatorname{Arc} \sin y$. Такъ какъ такихъ точекъ P имѣется безчисленное множество, то данному значенію y соотвѣтствуетъ безчисленное множество арксинусовъ, т.е. функція $\mathrm{Arc\,sin}\, y$ есть функція безконечно-значная. Тѣ значенія ея, которыя соотвѣтствуютъ точкамъ дуги AB называются главными и пишутся $\arcsin y$. Они опредѣляются неравенствомъ

$$-\frac{\pi}{2} \leqq \arcsin y \leqq +\frac{\pi}{2}.$$

Тогда всѣ остальныя значенія содержатся въ формулѣ

$$\mathrm{Arc\,sin}\, y = \begin{cases} \arcsin y + 2K\pi \\ -\arcsin y + (2K+1)\pi, \end{cases}$$

гдѣ K цѣлое положительное или отрицательное число или нуль.

Для изслѣдованія функціи

$$y = \cos x$$

мы пользуемся опять фиг. 77, въ которой теперь будемъ имѣть

$$AB = x, \quad OC = \cos x,$$

причемъ $\cos x$ считается положительнымъ или отрицательнымъ смотря по тому, находится ли точка C по правую или лѣвую сторону отъ O. Мы получаемъ

$$\cos(-x) = \cos x,$$
$$\cos(x + 2K\pi) = \cos x,$$

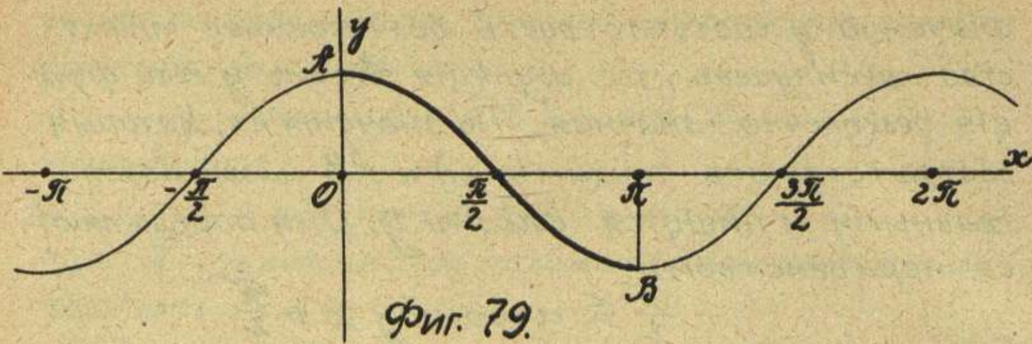
гдѣ K имѣетъ прежнее значеніе.

Въ координатной системѣ (x, y) изображеніе функціи $y = \cos x$ имѣетъ видъ, показанный на фиг. 79.

Обращеніе уравненія $y = \cos x$ даетъ цикломѣтрическую функцію

$$x = \mathrm{Arc\,cos}\, y.$$

Фиг. 79 показываетъ, что и эта функція безко-



Фиг. 79.

нечно-значная. Главными значеніями $\arccos y$ выбираютъ тѣ, которыя соотвѣтствуютъ дугѣ AB и такимъ образомъ удовлетворяютъ неравенствамъ

$$0 \leqq \arccos y \leqq \pi;$$

тогда

$$\operatorname{Arccos} y = \pm \arccos y + 2K\pi.$$

Между главными значеніями $\arcsin y$ и $\arccos y$ имѣется соотношеніе

$$\arcsin y + \arccos y = \frac{\pi}{2}, \quad \ldots \ldots (6)$$

которое можно доказать слѣдующимъ образомъ.

Пусть

$$\arcsin y = x;$$

тогда

$$y = \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad \ldots \ldots (7)$$

въ силу чего

$$\frac{\pi}{2} - x = \operatorname{Arccos} y,$$

т.е. равняется одному изъ значеній $\operatorname{Arccos} y$.

Такъ какъ x есть главное значеніе $\arcsin y$, то

$$-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq +\frac{\pi}{2},$$

такъ что

$$0 \leqq \frac{\pi}{2} - x \leqq \pi,$$

и $\operatorname{Arccos} y$ въ формулѣ (7) слѣдуетъ замѣнить главнымъ значенiемъ $\arccos y$. Подставляя еще въ лѣвой части $\arcsin y$ вмѣсто x, мы получаемъ

$$\frac{\pi}{2} - \arcsin y = \arccos y,$$

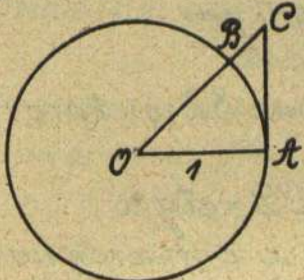
откуда вытекаетъ искомая формула (6).

Измѣненiе функцiи

$$y = \operatorname{tg} x$$

усматривается изъ фиг. 80, въ которой

$$AB = x, \quad AC = \operatorname{tg} x,$$



Фиг. 80.

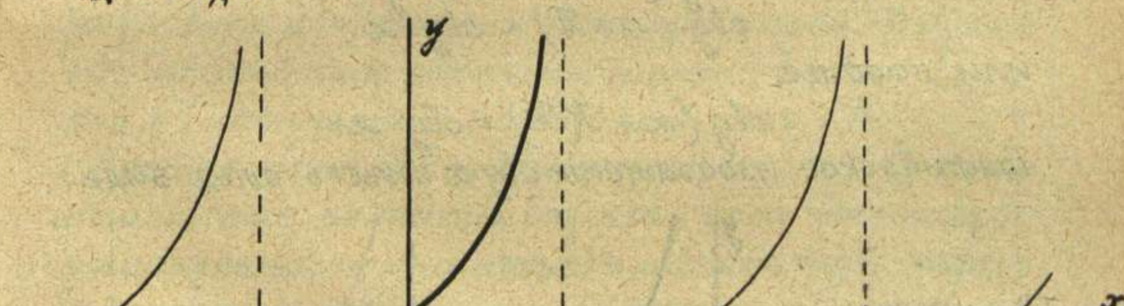
причемъ $\operatorname{tg} x$ считается положительнымъ или отрицательнымъ смотря по тому, лежитъ ли C выше или ниже A. Мы имѣемъ

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x,$$
$$\operatorname{tg}(x+\pi) = \operatorname{tg} x,$$

и поэтому

$$\operatorname{tg}(x + K\pi) = \operatorname{tg} x.$$

Графическое изображенiе $\operatorname{tg} x$ имѣетъ слѣдующiй видъ:



Фиг. 81.

Обратная функція

$$x = \operatorname{Arctg} y$$

опять функція безконечно-значная, при чемъ главныя значенія опредѣляются неравенствомъ

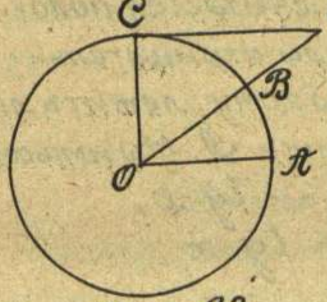
$$-\frac{\pi}{2} \leqq \operatorname{arctg} y \leqq +\frac{\pi}{2}$$

и

$$\operatorname{Arctg} y = \operatorname{arctg} y + K\pi.$$

Наконецъ для изслѣдованія функціи

$$y = \operatorname{ctg} x$$



Фиг. 82.

пользуемся фиг. 82, въ которой

$$AB = x,\ CD = \operatorname{ctg} x,$$

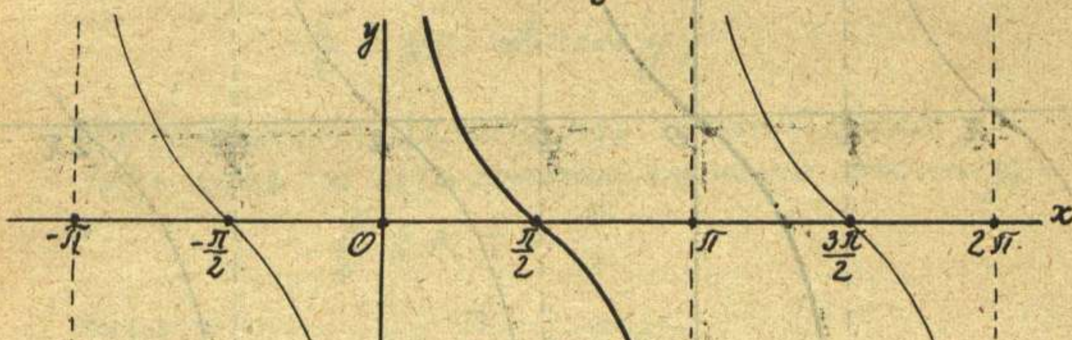
при чемъ $\operatorname{ctg} x$ считается положительнымъ или отрицательнымъ смотря по тому, лежитъ ли D по правую или лѣвую сторону отъ C. Мы имѣемъ

$$\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x,$$
$$\operatorname{ctg}(x+\pi) = \operatorname{ctg} x,$$

или вообще

$$\operatorname{ctg}(x + K\pi) = \operatorname{ctg} x.$$

Графическое изображеніе $\operatorname{ctg} x$ имѣетъ слѣд. видъ:



фиг. 83.

Обратная функція
$$x = \mathrm{Arcctg}\, y$$
опять функція безконечно-значная, причемъ главныя значенія опредѣляются неравенствомъ
$$0 \leqq \mathrm{arcctg}\, y \leqq \pi$$
и
$$\mathrm{Arcctg}\, y = \mathrm{arcctg}\, y + k\pi.$$
Между главными значеніями $\mathrm{arctg}\, x$ и $\mathrm{arcctg}\, x$ имѣется соотношеніе
$$\mathrm{arctg}\, y + \mathrm{arcctg}\, y = \frac{\pi}{2}, \quad . \; . \; . \; . \; (8)$$
которое доказывается такимъ же образомъ какъ уравненіе (6).

Предѣлъ.

Если мы отвлекаемся отъ знака числа a и принимаемъ въ разсчетъ только величину его, то мы говоримъ объ абсолютной величинѣ числа a и обозначаемъ это тѣмъ, что a ставимъ между двумя вертикальными чертами: $|a|$. Такъ абсолютная величина числа -3 будетъ $+3$; абсолютная величина числа -7 есть $+7$; для $+7$ абсолютная величина будетъ $+7$.

Вообще, если число положительно: $a > 0$, то его абсолютная величина $|a| = a$; если же число отрицательно, то оно имѣетъ абсолютную величину $|a| = -a$.

Пусть данъ рядъ величинъ, который по опредѣленному закону можно продолжать сколько угодно далеко, т.е. такъ наз. послѣдовательность
$$x_1, x_2, x_3, \ldots \ldots x_n, \ldots$$
и пусть существуетъ такое число a, что разность

$x_n - a$, начиная съ нѣкотораго мѣста, т.е. для всѣхъ значеній индекса n, превышающихъ нѣкоторое число m, по абсолютной величинѣ меньше всякой произвольно малой положительной величинѣ ε:

$$|x_n - a| < \varepsilon ;$$

тогда говорятъ что послѣдовательность $x_1, x_2, x_3, \ldots$ стремится къ предѣлу a и пишутъ:

$$\lim x_n = a.$$

lim. т.е. предѣлъ произносится limes или limite. Или: Если послѣдовательныя значенія перемѣнной величины x такъ приближаются къ нѣкоторому постоянному числу a, что абсолютная величина разности $|x - a|$ въ концѣ концовъ дѣлается и остается меньше всякой произвольно малой положительной величины ε, то говорятъ, что перемѣнная x стремится къ предѣлу a:

$$\lim x = a.$$

Примѣры I и II. Если вписать въ кругъ правильный треугольникъ, то разность между площадью треугольника и площадью круга равна нѣкоторой величинѣ.

Если теперь въ тотъ же кругъ вписать квадратъ, то разность между его площадью и площадью круга будетъ уже меньше. Такимъ образомъ если увеличивается число сторонъ вписаннаго правильнаго многоугольника, то эта разность дѣлается все меньше и наконецъ при достаточномъ увеличеніи числа сторонъ многоугольника, становится меньше всякой произвольно малой величины. Поэтому площадь круга есть предѣлъ площадей вписанныхъ правильныхъ многоугольниковъ при неограниченномъ увеличенiи числа сторонъ.

Если описать около круга правильный многоугольникъ, и увеличивать число его сторонъ, то опять увидимъ, что площадь круга будетъ предѣломъ площадей описанныхъ правильныхъ многоугольниковъ, при неограниченномъ увеличенiи числа сторонъ ихъ.

Примѣръ III. Дробь 0,7777... можно представить въ видѣ суммы:

$$0{,}7777\ldots = \left(\frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + \frac{7}{10000} + \ldots\right)$$

Можно доказать что $\frac{7}{9}$ есть предѣлъ этой суммы, при неограниченномъ увеличенiи числа слагаемыхъ:

$$\lim\left(\frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + \frac{7}{10000} + \ldots\right) = \frac{7}{9}.$$

Для этого стоитъ только разсмотрѣть разности:

$$\frac{7}{9} - \frac{7}{10} = \frac{7}{90},$$

$$\frac{7}{9} - \left(\frac{7}{10} + \frac{7}{100}\right) = \frac{7}{90} - \frac{7}{100} = \frac{7}{900} = \frac{7}{9 \cdot 10^2},$$

$$\frac{7}{9} - \left(\frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000}\right) = \frac{7}{9 \cdot 10^2} - \frac{7}{10^3} = \frac{7}{9 \cdot 10^3}.$$

Мы видимъ, что эти разности все уменьшаются и при достаточномъ числѣ слагаемыхъ разность можетъ быть сдѣлана меньше произвольно малой величины. Слѣдовательно $\frac{7}{9}$ есть предѣлъ разсматриваемой суммы, если число слагаемыхъ неограниченно увеличивать.

Положимъ что перемѣнная x приближается къ нѣкоторому предѣлу a, такъ что разность $|x-a|$ дѣлается меньше произвольно малой величины ε:

$$|x-a| < \varepsilon.$$

Пусть въ то же время другая величина y, которая есть функцiя отъ x, $y = f(x)$, приближается къ нѣкоторому предѣлу b; т. е., если

$$|x-a| < \varepsilon, \text{ то}$$

$$|y-b|<\delta;$$

Тогда говорятъ, что y стремится къ предѣлу b, при x стремящимся къ a и пишутъ

$$\lim_{x=a} y = b.$$

Безконечно малыя величины.

Если предѣломъ нѣкоторой перемѣнной служитъ нуль, то говорятъ, что эта перемѣнная дѣлается безконечно-малою. Иначе говоря, величину называютъ безконечно малою, если она принимаетъ значенія, которыя по абсолютной величинѣ меньше всякаго, хотя бы и произвольно малаго числа ε.

Если перемѣнная все растетъ, такъ что абсолютная величина ея дѣлается больше всякаго, хотя бы и произвольно большого числа a, то величину называютъ безконечно большою и пишутъ

$$\lim x = \infty.$$

Надъ безконечно малыми величинами можно производить тѣ же дѣйствія, какія производятся надъ конечными величинами. Относительно этихъ дѣйствій можно доказать слѣдующія теоремы:

I Сумма конечнаго числа безконечно малыхъ величинъ есть величина безконечно малая.

Пусть дано конечное число n безконечно малыхъ величинъ

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots\ldots \varepsilon_n.$$

Требуется доказать, что сумма ихъ

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\ldots\ldots+\varepsilon_n,$$

будетъ величина безконечно малая.

Каждое изъ нашихъ слагаемыхъ принимаетъ

значенія, которыя по абсолютной величинѣ меньше всякой произвольно малой величины, по этому и меньше $\frac{\varepsilon}{n}$, гдѣ ε произвольно малое число:

$$|\varepsilon_1| < \frac{\varepsilon}{n},$$

$$|\varepsilon_2| < \frac{\varepsilon}{n},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$|\varepsilon_n| < \frac{\varepsilon}{n}.$$

Складывая эти неравенства, мы получаемъ

$$|\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| + \ldots + |\varepsilon_n| < \varepsilon,$$

и такъ какъ

$$|\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n| \leqq |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| + \ldots + |\varepsilon_n|,$$

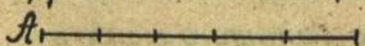
то и

$$|\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n| < \varepsilon,$$

т. е. наша сумма по абсолютной величинѣ меньше произвольно малой величины ε, чѣмъ теорема доказана.

Если же намъ дано безконечное число безконечно малыхъ величинъ, то сумма ихъ можетъ быть величиною безконечно малою, конечною, или даже безконечно-большою.

Дѣйствительно, если раздѣлить отрѣзокъ AB



на какое нибудь число частей,

Фиг. 84.

затѣмъ каждую часть опять раздѣлить и такимъ образомъ продолжать, то, наконецъ, дойдемъ до частей безконечно малыхъ, а число ихъ будетъ безконечно велико, сумма же ихъ, т. е. сумма безконечнаго числа безконечно малыхъ отрѣзковъ равно конечному отрѣзку AB. Если представить себѣ, что отрѣзокъ AB сжимается и стремится къ предѣлу 0, причемъ сохраняются раздѣленія на части, мы замѣчаемъ, что сумма безконечно большого числа слагаемыхъ въ самомъ дѣлѣ можетъ быть и величиной безконечно малой. А если представить себѣ прямую неограниченной длины съ отрѣзками всё болѣе и болѣе приближающимися къ нулю, мы приходимъ къ безконечно большой суммѣ.

II. Произведенiе безконечно малой величины $\mathcal{E}$ на конечную α равно безконечно малой величинѣ.

Дѣйствительно, такъ какъ $\mathcal{E}$ величина безконечно малая, то ее по абсолютной величинѣ можно выбрать меньше всякаго числа:

$$|\mathcal{E}| < \frac{\mathcal{E}_1}{|\alpha|},$$

гдѣ $\mathcal{E}_1$ произвольно малая величина, изъ чего слѣдуетъ желаемое неравенство $|\mathcal{E}\alpha| < \mathcal{E}_1$.

Произведенiе двухъ безконечно малыхъ величинъ тоже будетъ величина безконечно малая, что доказывается подобнымъ образомъ. Такая безконечно малая величина, полученная какъ произведенiе двухъ безконечно малыхъ величинъ, называется безконечно малой величиной высшаго порядка.

На основанiи фиг. 84. мы приходимъ такимъ же путемъ, какъ при сложенiи безконечнаго числа слагаемыхъ, къ заключенiю, что произведенiе безконечно малой величины на безконечно большую можетъ быть величиною безконечно малою, конечною, или даже безконечно большою.

III. Въ силу того, что дѣленiе есть дѣйствiе обратное умноженiю, мы приходимъ къ заключенiю, что отъ дѣленiя безконечно малой величины на конечную или безконечно большую получается величина безконечно малая, а отъ дѣленiя безконечно малой величины на другую безконечно малую можно получить величину безконечно малую, конечную, или даже безконечно большую.

Предѣлъ суммы и предѣлъ произведенія.

Послѣдними теоремами мы воспользуемся для вывода двухъ важныхъ формулъ относительно предѣла суммы и произведенія нѣсколькихъ величинъ.

Теорема I. Предѣлъ суммы двухъ перемѣнныхъ величинъ равенъ суммѣ предѣловъ этихъ величинъ.

$$\lim (x+y) = \lim x + \lim y \quad \ldots (9).$$

Пусть

$$\left.\begin{array}{l} \lim x = a \\ \lim y = b \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (10).$$

Это значитъ, что разность между x и a, а также между y и b можно сдѣлать меньше произвольно-малой величины:

$$\left.\begin{array}{l} x - a = \varepsilon_1 \\ y - b = \varepsilon_2 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (11),$$

гдѣ ε_1 и ε_2 дѣлаются безконечно малыми съ приближеніемъ x къ a, и y къ b. Сложивъ уравненія получимъ

$$(x+y)-(a+b) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 .$$

Такъ какъ сумма двухъ безконечно малыхъ величинъ даетъ величину безконечно малую, то отсюда слѣдуетъ

$$(x+y)-(a+b) = \varepsilon ,$$

т. е. эта разность будетъ также меньше всякой сколь угодно малой величины, или, по опредѣленію предѣла:

$$\lim (x+y) = a + b.$$

Подставивъ значенія a и b изъ уравненій (10), получаемъ

$$\lim(x+y)=\lim x+\lim y$$

что и требовалось доказать.

Эта теорема дѣйствительна также относительно разности двухъ перемѣнныхъ, въ чемъ легко убѣдиться, вычитая второе изъ уравненій (11) изъ перваго.

Можно распространить эту теорему на произвольное конечное число перемѣнныхъ. Пусть дано

$$\begin{aligned}
&\lim x=a, \quad x-a=\varepsilon_1\\
&\lim y=b, \quad y-b=\varepsilon_2\\
&\lim z=c, \quad z-c=\varepsilon_3\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\lim u=n, \quad u-n=\varepsilon_\lambda.
\end{aligned}$$

Сложивъ послѣднія равенства получаемъ

$$(x+y+z+\ldots+u)-(a+b+c+\ldots+n)=$$
$$=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\ldots+\varepsilon_\lambda=\varepsilon \;.\;. \quad (12),$$

т. е. разность между суммою перемѣнныхъ величинъ и суммою предѣловъ ихъ можетъ быть сдѣлана произвольно малою, откуда

$$\lim(x+y+z+\ldots+u)=a+b+c+\ldots+n.$$

Подставляя вмѣсто a, b, c, ... n ихъ значенія получимъ:

$$\lim(x+y+z+\ldots+u)=\lim x+\lim y+\ldots+\lim u.$$

Теорема теряетъ силу въ случаѣ безконечнаго числа перемѣнныхъ, ибо въ такомъ случаѣ мы получили бы въ правой части уравненія (12) сумму безконечнаго числа безконечно малыхъ величинъ, которая можетъ и не быть величиною безконечно малою.

Теорема II. Предѣлъ произведенія двухъ перемѣнныхъ равенъ произведенію предѣловъ этихъ перемѣнныхъ.

$$\lim (xy) = \lim x . \lim y$$

Пусть дано

$$\left.\begin{array}{l} \lim x = a \\ \lim y = b \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (13).$$

Отсюда

$$x - a = \varepsilon_1 \text{ или } x = a + \varepsilon_1$$
$$x - b = \varepsilon_2 \qquad y = b + \varepsilon_2 .$$

Перемноживъ почленно, получаемъ:

$$xy = ab + a\varepsilon_2 + b\varepsilon_1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 .$$

Произведенія $a\varepsilon_2$, $b\varepsilon_1$; $\varepsilon_1 \varepsilon_2$ суть величины безконечно малыя, слѣдовательно и сумма ихъ есть безконечно малая величина ε; отсюда

$$xy = ab + \varepsilon ,$$

т. е. величина xy разнится отъ величины ab на безконечно малую величину; поэтому ab есть предѣлъ xy:

$$\lim (xy) = ab .$$

Сопоставляя съ уравненіями (13) получаемъ

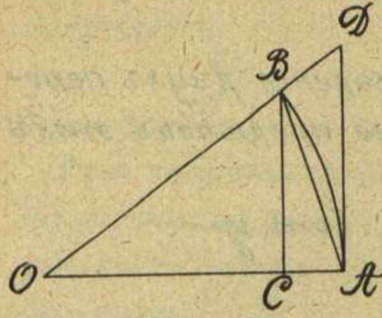
$$\lim (xy) = \lim x . \lim y .$$

Ясно, что и эту теорему можно распространить на произвольное, но конечное число множителей:

$$\lim (x . y . z \ldots\ldots u) = \lim x . \lim y . \lim z \ldots \lim u .$$

Опредѣленіе $\lim\limits_{x=0} \dfrac{\sin x}{x}$.

Возьмемъ уголъ больше нуля и меньше 90°. Радіусомъ, равнымъ единицѣ, опишемъ дугу $\cancel{AB} = x$.



Фиг. 85.

Изъ B опускаемъ перпендикуляръ BC на OA; изъ A возставляемъ перпендикуляръ къ OA. Тогда

$$BC = \sin x,$$
$$DA = tg\, x.$$

Соединимъ B съ A прямою и разсмотримъ $\triangle OAB$, секторъ OAB и $\triangle OAD$. Относительно ихъ площадей замѣчаемъ:

$$\triangle OAB < \text{сект. } OAB < \triangle OAD,$$

или $$\frac{OA.BC}{2} < \frac{OA.\overset{\frown}{AB}}{2} < \frac{OA\cdot DA}{2}.$$

Сокращая на $\frac{OA}{2}$, получаемъ:

$$CB < \overset{\frown}{AB} < AD.$$

Подставляемъ сюда $CB = \sin x$, $\overset{\frown}{AB} = x$, $AD = tg\, x$:

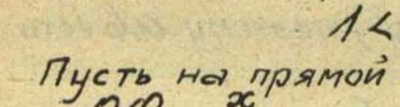
$$\sin x < x < tg\, x.$$

Раздѣляя неравенство на $\sin x$, получаемъ:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Пусть на прямой линіи:

$OQ = \frac{x}{\sin x}$, а $OP = \frac{1}{\cos x}$; тогда по послѣднему неравенству точка Q должна всегда находиться между 1 и P. Если теперь перейти къ предѣлу, т.е. если x приближается къ нулю, то неравенство принимаетъ видъ:



Фиг. 86.

$$1 \leqq \lim_{x=0} \frac{x}{\sin x} \leqq \lim_{x=0} \frac{1}{\cos x};$$

но

$$\lim_{x=0} \frac{1}{\cos x} = 1,$$

откуда $1 \leqq \lim_{x=0} \frac{x}{\sin x} \leqq 1.$

Т.е. если x стремится къ нулю, то $\mathcal{P}$ приближается къ точкѣ 1. Въ предѣлѣ $\mathcal{P}$ совпадаетъ съ 1, но такъ какъ точка Q остается всегда между 1 и $\mathcal{P}$, то и она также совпадаетъ съ 1, т.е. согласно послѣднему неравенству,

$$\lim_{x=0} \frac{x}{\sin x} = 1 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (14).$$

Если приближаться къ нулю со стороны отрицательныхъ x, то вслѣдствіе уравненія $\sin(-x) = -\sin x$, получается тотъ же предѣлъ (14).

Изъ уравненія (14) слѣдуетъ, что и

$$\lim_{x=0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Опредѣленіе $\lim_{x=\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

Докажемъ сначала, что, если x есть цѣлое положительное число n, то съ увеличеніемъ n изслѣдуемое выраженіе все увеличивается, но вмѣстѣ съ тѣмъ, остается всегда меньше 4. Для этого воспользуемся извѣстною формулою:

$$\frac{a^{m+1} - b^{m+1}}{a - b} = a^m + a^{m-1}b + a^{m-2}b^2 + \cdots + ab^{m-1} + b^m, \quad (15)$$

гдѣ m число цѣлое и положительное.

Положимъ, что a и b суть положительныя числа и что $a > b$; тогда получимъ слѣдующую систему неравенствъ:

$$a^m = a^m$$
$$a^{m-1}b < a^m$$
$$a^{m-2}b^2 < a^m$$
$$\vdots$$
$$ab^{m-1} < a^m$$
$$b^m < a^m.$$

Сложивъ неравенства почленно получаемъ

$$a^m+a^{m-1}b+a^{m-2}b^2+\ldots+ab^{m-1}+b^m<(m+1)a^m \quad (16).$$

Если теперь вмѣсто лѣвой части неравенства (16) подставимъ лѣвую часть уравненія (15) то получимъ:

$$\frac{a^{m+1}-b^{m+1}}{a-b}<(m+1)a^m.$$

Умножимъ обѣ части на $a-b$.

$$a^{m+1}-b^{m+1}<(m+1)(a-b)a,^m$$

$$a^{m+1}-(m+1)(a-b)a^m<b^{m+1}.$$

Взявъ за скобки a^m, получимъ:

$$a^m[a-(m+1)(a-b)]<b^{m+1} \ldots\ldots (17).$$

Итакъ мы получаемъ неравенство (17), но только при условіи

$$a>b>0 \ldots\ldots\ldots (18).$$

Придадимъ для a и b слѣдующія частныя значенія:

$$a=1+\frac{1}{m},\ b=1+\frac{1}{m+1},\ \ldots\ldots\ldots (19),$$

гдѣ m цѣлое положительное число. Легко убѣдиться, что эти значенія вполнѣ удовлетворяютъ условію (18). Подставимъ ихъ въ неравенство (17); при этомъ сначала найдемъ, чему будетъ равняться выраженіе въ скобкахъ:

$$a-(m+1)(a-b)=1+\frac{1}{m}-(m+1)\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}\right)$$

$$=1+\frac{1}{m}-(m+1)\cdot\frac{1}{m(m+1)}=1.$$

Такимъ образомъ, по подстановкѣ значеній a и b изъ (19), получимъ:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m<\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+1} \ldots\ldots (20).$$

Сравнивая это неравенство съ выраженіемъ $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, видимъ, что лѣвая и правая части представляютъ тотъ же видъ и что слѣдовательно выраженіе $(1+\frac{1}{n})^n$ увеличивается, если значеніе n увеличивается. Если придадимъ n частное значеніе $n=1$, то получимъ

$$\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]_{n=1} = 2 \ldots\ldots\ldots\ldots (21).$$

Увеличивая значеніе n найдемъ, что и все выраженіе увеличивается и такимъ образомъ всегда будетъ больше 2, т.е.

$$2 \leqq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Докажемъ теперь, что при увеличеніи n наше выраженіе всегда остается меньше 4.

Придадимъ a и b въ неравенствѣ (17) значенія:

$$a = 1+\frac{1}{2m}, \quad b = 1, \ldots\ldots\ldots\ldots (22),$$

что вполнѣ возможно, ибо при этихъ значеніяхъ не нарушается условіе

$$a > b > 0.$$

Найдемъ опять, чему будетъ равняться выраженіе въ скобкахъ:

$$a-(m+1)(a-b) = 1+\frac{1}{2m} - (m+1)\frac{1}{2m} = \frac{2m+1-m-1}{2m} = \frac{1}{2}$$

По подстановкѣ значеній (22) a и b въ неравенство (17) получаемъ:

$$\left(1+\frac{1}{2m}\right)^m \frac{1}{2} < 1.$$

Умножимъ обѣ части на 2:

$$\left(1+\frac{1}{2m}\right)^m < 2.$$

Возвысивъ въ квадратъ получаемъ:

$$\left(1+\frac{1}{2m}\right)^{2m} < 4 \ldots\ldots\ldots\ldots (23).$$

Въ лѣвой части полученнаго неравенства имѣемъ выраженіе вида $(1+\frac{1}{n})^n$, гдѣ $n = 2m$. Но ввиду неравенства (20) выраженіе

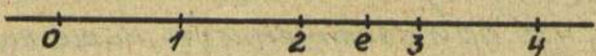
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 4$$

и при нечетныхъ значеніяхъ n, такъ что

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

при увеличенiи цѣлаго числа возрастаетъ но все-таки остается меньше 4.

Изъ этого мы заключаемъ, что выраженiе при неограниченномъ увеличенiи n стремится къ предѣлу, и что этотъ предѣлъ не можетъ быть больше 4. Выяснимъ себѣ это геометрически. Всевозможнымъ значенiямъ выраженiя (24) соотвѣтствуютъ точки на прямой линiи.



Фиг. 25.

При $n=1$ мы получаемъ точку 2, съ увеличенiемъ n - рядъ точекъ, изъ которыхъ каждая слѣдующая будетъ лежать по правую сторону отъ предыдущей а вмѣстѣ съ тѣмъ лѣвѣе точки 4. Мы заключаемъ, что точки должны сгущаться вблизи нѣкоторой точки e, лежащей между 2 и 4, такъ, что по мѣрѣ возрастанiя n эти точки все болѣе и болѣе приближаются къ e и разность

$$e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

при неограниченномъ увеличенiи n становится меньше всякаго сколь угодно малаго числа, т.е. выраженiе (24) стремится къ предѣлу и этотъ предѣлъ

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25).$$

Впослѣдствiи, въ теорiи безконечныхъ рядовъ мы познакомимся со способомъ вычисленiя этой величины e и увидимъ, что

$$e = 2{,}7182818\ldots$$

Предыдущее доказательство относится къ тому случаю, когда n цѣлое положительное число. Теперь спрашивается, приближается ли наша функція и тогда къ предѣлу e, когда аргументъ, неограниченно возрастая, принимаетъ и всѣ промежуточныя значенія.

Если x не равно цѣлому числу, но заключается между цѣлыми числами n и $n+1$, то

$$n < x < n+1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (26).$$

Отсюда

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{x} > \frac{1}{n+1}.$$

Придавая къ каждой части по единицѣ, получаемъ

$$1+\frac{1}{n} > 1+\frac{1}{x} > 1+\frac{1}{n+1}.$$

Возвышаемъ эти неравенства соотвѣтственно въ степени $n+1$, x, n; тогда имѣемъ въ силу неравенствъ (26)

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}.$$

Крайніе члены стремятся къ предѣлу e. Въ самомъ дѣлѣ

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n=\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] = e.1 = e,$$

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} = \lim_{n=\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n+1}}\right] = e.1 = e.$$

По этому и средняя часть должна стремиться къ тому же самому предѣлу и мы получаемъ

$$\lim_{x=\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e \quad \ldots\ldots \quad (27)$$

Непрерывность функцій.

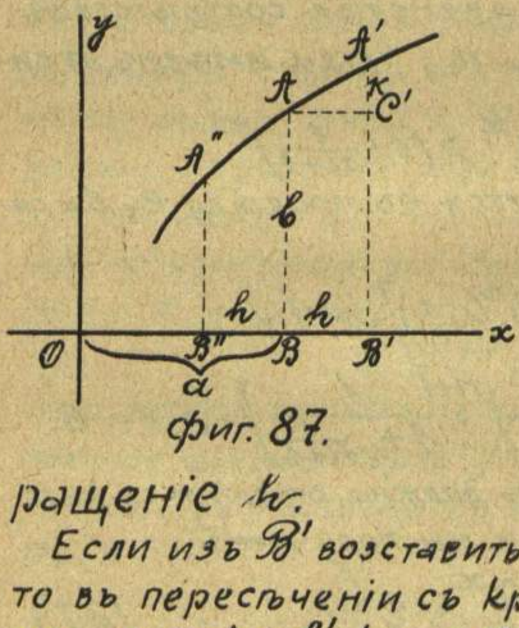
Прежде чѣмъ говорить о непрерывныхъ функціяхъ, скажемъ нѣсколько словъ о непрерывности независимой перемѣнной. Пусть какая нибудь независимая перемѣнная x отъ значенія a переходитъ къ значенію b. Если этотъ переходъ совершается такъ, что x все время возрастая или все время убывая принимаетъ всѣ промежуточныя значенія отъ a до b, то говорятъ, что x переходитъ непрерывно отъ a до b. Во всякомъ другомъ случаѣ имѣемъ прерывное измѣненіе x.

Теперь спрашивается, въ какомъ случаѣ функція называется прерывною или непрерывною.

Пусть дана функція

$$y = f(x), \dots \dots \dots (28)$$

изображеніемъ которой служитъ нѣкоторая кривая. Возьмемъ на этой кривой точку A,



фиг. 87.

координаты которой суть a и b. Тогда имѣемъ

$$b = f(a) \dots (29),$$

т. е. если x въ уравненіи (28) придадимъ значеніе a, то y будетъ равенъ b. Увеличимъ x на $BB' = h$, или, какъ обыкновенно говорятъ, придадимъ $x = a$ приращеніе h.

Если изъ B' возставить перпендикуляръ къ Ox, то въ пересѣченіи съ кривой получимъ нѣкоторую точку A', которой абсцисса будетъ $a+h$, а ордината $B'A'$; поэтому можно написать

$$B'A' = f(a+h) \dots \dots \dots (30).$$

Если провести черезъ A параллель къ Ox, то въ пересѣченіи съ $B'A'$ получимъ точку C', и если отрѣзокъ $C'A'$ назовемъ черезъ k, то получимъ

$$B'A' = B'C' + C'A' = b + k.$$

κ есть количество, на которое измѣняется значеніе ординаты, если абсцисса a измѣнилась на h; иначе — κ есть приращеніе ординаты при увеличеніи абсциссы на величину h. Подставляя въ уравненіе (30) значеніе $B'A'$, получаемъ

$$b + \kappa = f(a + h) \ldots\ldots\ldots (31)$$

Вычитая уравненіе (24) изъ уравненія (31), получаемъ:

$$\kappa = f(a + h) - f(a) \ldots\ldots (32).$$

При помощи этой формулы, мы всегда можемъ найти приращеніе ординаты, соотвѣтствующее любому приращенію абсциссы; притомъ h и κ могутъ быть и положительными или отрицательными.

Пусть напр. $y = f(x) = x^2$; $a = 2$;
тогда $b = f(a) = f(2) = 2^2 = 4$;
если придать абсциссѣ $a = 2$ приращеніе $h = 1$, то

$$b + \kappa = f(a + h) = 3^2 = 9.$$

Слѣдовательно $\kappa = f(a+h) - f(a) = 9 - 4 = 5$. Т. е. если въ нашемъ примѣрѣ придать абсциссѣ 2 приращеніе, равное 1, то получимъ, что соотвѣтственное приращеніе ординаты равно 5.

Вмѣсто увеличенія, можно было-бы уменьшить значеніе абсциссѣ на величину h; если соотвѣтственное положительное или отрицательное приращеніе b обозначить черезъ κ', то

$$b + \kappa' = f(a - h).$$

Вычитая (29) изъ этого уравненія, получаемъ

$$\kappa' = f(a - h) - f(a).$$

Итакъ, каждому положительному или отрицательному приращенію абсциссы соотвѣтствуетъ нѣкоторое приращеніе ординаты, которое опредѣляется формулами:

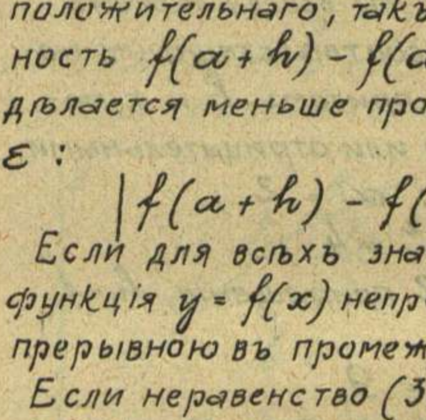
$$k = f(a+h) - f(a);$$
$$k' = f(a-h) - f(a).$$

Положимъ теперь, что B'' и B' приближаются къ точкѣ B. Если тогда $A'B'$ и $A''B''$ приближаются къ одному и тому же предѣлу AB, то говорятъ, что функція непрерывна въ точкѣ $x = a$. Иначе говоря, функція $y = f(x)$ называется непрерывною въ точкѣ $x = a$, если для достаточно малаго, какъ положительнаго, такъ и отрицательнаго h, разность $f(a+h) - f(a)$ по абсолютной величинѣ дѣлается меньше произвольно-малой величины ε:

$$|f(a+h) - f(a)| < \varepsilon \quad . \ . \ . \ . \ . \ (33).$$

Если для всѣхъ значеній аргумента x отъ a до b функція $y = f(x)$ непрерывна, то она называется непрерывною въ промежуткѣ отъ (a, b).

Если неравенство (33) не имѣетъ мѣста, какъ для положительныхъ, такъ и отрицательныхъ приращеній h, то функція прерывна въ точкѣ $x = a$. Примѣръ такого перерыва изображенъ на фиг. 88, гдѣ ордината $B'A'$ стремится къ предѣлу BA_1, а ордината $B''A''$ къ предѣлу BA_2.



Фиг. 88.

Примѣръ I. Пусть дана функція

$$y = f(x) = x^2 \ . \ . \ (34).$$

Если x разсматриваемъ какъ нѣкоторое опредѣленное значеніе аргумента и сообщимъ ему приращеніе h, то для y соотвѣтственное приращеніе k будетъ опредѣляться изъ формулы

$$y + k = f(x+h) = (x+h)^2,$$
$$y + k = x^2 + 2xh + h^2.$$

Вычитая изъ этого уравненія уравненіе (34) получаемъ:

$$k = 2xh + h^2.$$

Пусть h по абсолютной величинѣ дѣлается меньше произвольно малой величины δ:

$$|h| < \delta.$$

Въ такомъ случаѣ, абсолютная величина соотвѣтственнаго приращенія y, т.е. k всегда будетъ меньше другой произвольно малой величины ε:

$$|k| < \varepsilon,$$

т.е. функція $y = x^2$ непрерывна для всѣхъ значеній аргумента x.

Примѣръ II. $y = f(x) = \frac{1}{x}$.

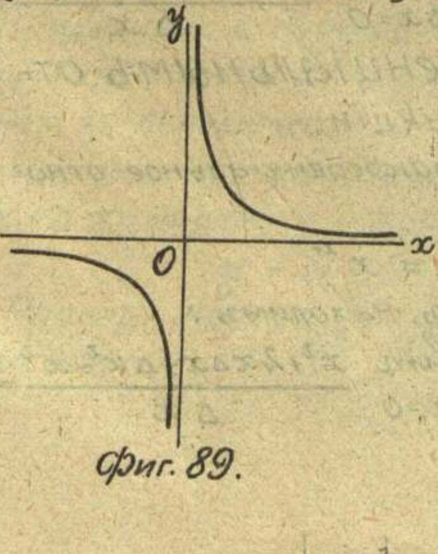
Если умножить эту функцію на x, то получимъ неявную:

$$xy = 1,$$

которая представляетъ равностороннюю гиперболу, оси которой совпадаютъ съ осями координатъ (стр. 68). Изъ этого уже видно, что въ точкѣ $x=0$ происходитъ перерывъ непрерывности. Во всѣхъ другихъ точкахъ функція наша непрерывна. Въ самомъ дѣлѣ при $x \neq 0$

$$k = f(x+h) - f(x) = \frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} =$$
$$= \frac{x-x-h}{x(x+h)} = \frac{-h}{x^2+xh},$$

и когда h стремится къ



Фиг. 89.

предѣлу 0, то и k стремится къ 0, что указываетъ на непрерывность функціи.

Производная.

Приращенія h и k обозначаютъ символически:

$$h = \Delta x \ , \ k = \Delta y.$$

Такимъ образомъ если дана функція

$$y = f(x)$$

то уравненіе (32) принимаетъ видъ

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \ldots\ldots (35).$$

Если приращеніе Δx дѣлается безконечно-малымъ, то оно обозначается черезъ dx и называется **дифференціаломъ** x.

Въ случаѣ непрерывной функціи безконечно малому Δx соотвѣтствуетъ безконечно малое Δy, которое обозначаютъ черезъ dy.

Раздѣлимъ уравненіе (35) на Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Если это отношеніе при безконечномъ уменьшеніи Δx стремится къ нѣкоторому предѣлу, то этотъ предѣлъ пишется $\frac{dy}{dx}$, такъ что

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

и называется **дифференціальнымъ отношеніемъ** данной функціи.

Примѣръ. Найдемъ дифференціальное отношеніе функціи

$$y = f(x) = x^2.$$

По предыдущей формулѣ находимъ:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x = 0} (2x + \Delta x).$$

При безконечномъ уменьшеніи Δx, предѣлъ этотъ равенъ $2x$:

$$\frac{dy}{dx} = 2x.$$

Мы видимъ, что дифференціальное отношеніе есть также функція отъ x, поэтому оно называется еще иначе ПРОИЗВОДНОЮ данной функціи. Эту производную обозначаютъ различными символами:

$$\frac{dy}{dx}, \frac{df(x)}{dx}, \frac{d}{dx} f(x), f'(x), y'.$$

Существуютъ еще другія обозначенія, но эта самыя употребительныя. Такъ какъ всѣ эти выраженія обозначаютъ одно и то же, то можно написать:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x),$$

откуда $dy = f'(x)\,dx$ . . . . (36).

Это выраженіе позволяетъ перейти отъ производной къ дифференціалу функціи и наоборотъ.

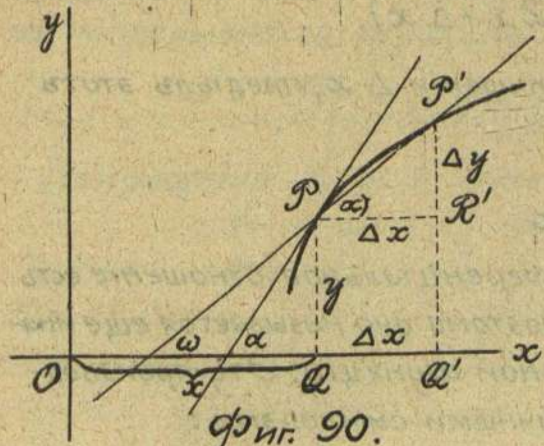
Разсмотримъ геометрическое значеніе производной. Пусть изображеніемъ функціи $y = f(x)$ служитъ нѣкоторая кривая. Возьмемъ на ней точку $P(x, y)$. Придадимъ x приращеніе Δx. Возставивъ изъ полученной точки Q' перпендикуляръ къ Ox, получаемъ въ пересѣченіи съ кривою точку P'. Если обозначимъ ординату, соотвѣтствующую абсциссѣ $x + \Delta x$, черезъ $y + \Delta y$, то имѣемъ:

$$y + \Delta y = Q'P' = f(x + \Delta x).$$

Проведя черезъ P параллель PR' къ оси Ox, замѣчаемъ:

$$R'P' = \Delta y,$$

$$PR' = QQ' = \Delta x.$$



Фиг. 90.

Соединимъ теперь $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}'$ прямою линіей, и пусть она образуетъ съ положительною частью оси $x^{\text{овъ}}$ уголъ ω; тогда

$$tg\,\omega = \frac{\mathcal{R}'\mathcal{P}'}{\mathcal{P}\mathcal{R}'} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (37).$$

Намъ извѣстно, что каждое измѣненіе Δx вызываетъ соотвѣтственное измѣненіе Δy. Положимъ, что Δx все уменьшается, т.е. точка Q' приближается къ точкѣ Q; тогда $\mathcal{P}'$ приближается къ $\mathcal{P}$ и когда Δx дѣлается безконечно-малымъ, то точки $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}'$ становятся безконечно близкими. Въ этомъ случаѣ сѣкущая $\mathcal{P}\mathcal{P}'$ переходитъ въ касательную точки $\mathcal{P}$. Пусть эта касательная заключаетъ съ Ox уголъ α. Этотъ уголъ α есть предѣлъ угла ω при переходѣ сѣкущей $\mathcal{P}\mathcal{P}'$ въ касательную:

$$\alpha = \lim \omega .$$

Отсюда $tg\,\alpha = \lim tg\,\omega$,

или принимая во вниманіе уравненіе (37)

$$tg\alpha = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

т.е. $tg\,\alpha$ есть предѣлъ къ которому стремится $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при приближеніи Δx къ нулю; а этотъ предѣлъ есть ни что иное, какъ дифференціальное отношеніе:

$$tg\alpha = \frac{dy}{dx}.$$

Чтобы указать, что функція $y = f(x)$ при $x = a$ имѣетъ частное значеніе b, а производная $y' = f'(x)$

частное значеніе c, пишутъ

$$b = f(a),\ c = f'(a).$$

Примѣръ I. Мы уже нашли (стр. 155), что функція

$$y = x^2,$$

имѣетъ производную

$$\frac{dy}{dx} = 2x.$$

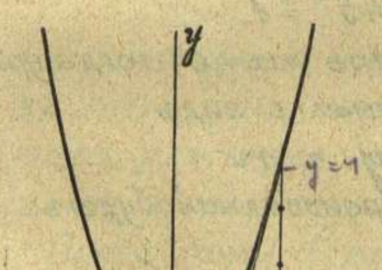
Придавая x частное значеніе $x = 2$, мы получаемъ

$$y_{x=2} = 2^2 = 4,$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=2} = 2.2 = 4.$$

Намъ извѣстно, что уравненіе $y = x^2$ изображаетъ параболу, ось которой совпадаетъ осью $y^{овъ}$. Точка съ абсциссою $x = 2$ имѣетъ ординату $y = 4$. Если въ точкѣ $(2, 4)$ провести касательную, то она составитъ съ осью $x^{овъ}$ уголъ α, причемъ $tg\,\alpha$ равенъ производной данной функціи въ точкѣ $(2, 4)$ т.е.:

$$tg\,\alpha = 4.$$



Фиг. 91.

Такимъ образомъ, для каждой точки можно опредѣлить уголъ, образуемый ея касательною съ осью $x^{овъ}$.

Примѣръ II. Пусть дано уравненіе прямой

$$y = mx + n.$$

Каждая касательная прямой совпадаетъ съ нею самой, поэтому производная данной функціи должна равняться m, ибо m есть tg угла, составляемаго прямой съ осью $x^{овъ}$.

Дѣйствительно

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{m(x+\Delta x)+n-(mx+n)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x=0} \frac{mx+m.\Delta x+n-mx-n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x=0} \frac{m\cdot\Delta x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x=0} m = m.$$

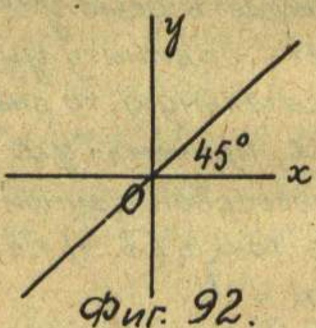
Если $m = 1$, а $n = 0$ то уравненіе прямой принимаетъ видъ

$$y = x.$$

Производная этой функціи:

$$\frac{dy}{dx} = m = 1,$$

т.е. производная аргумента равна единицѣ.



Фиг. 92.

Прямая $y = x$ проходитъ черезъ начало координатъ и составляетъ съ осью $x^{овъ}$ уголъ въ 45°; мы имѣемъ въ самомъ дѣлѣ

$$tg\ 45^\circ = 1.$$

Пусть теперь $m = 0$; тогда уравненіе принимаетъ видъ

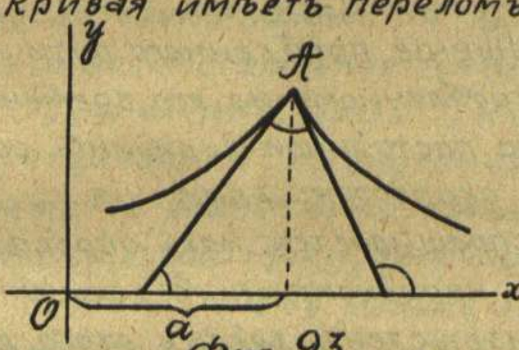
$$y = n.$$

Соотвѣтственное значеніе производной будетъ

$$\frac{dy}{dx} = 0,$$

т.е. производная постоянной величины равна нулю. Извѣстно, что уравненіе $y = n$ изображаетъ прямую, параллельную оси $x^{овъ}$ на разстояніи n отъ нея. Уголъ прямой съ осью $x^{овъ}$ равенъ нулю, что вполнѣ соотвѣтствуетъ нашему результату, ибо $tg\ 0^\circ = 0$.

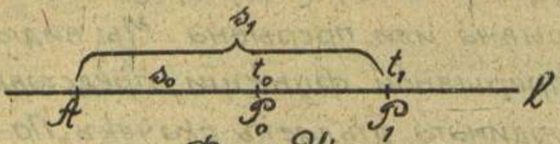
Мы раньше нашли, что дифференціальное отношеніе есть также функція отъ x, которая конечно можетъ быть непрерывна или прерывна. Мы видѣли также примѣръ прерывной функціи, представляющій кривую, гдѣ ордината дѣлаетъ скачекъ. Посмотримъ теперь, какой видъ можетъ имѣть кривая, если изображаемая ею функція непрерывна, но производная этой функціи прерывна въ нѣкоторой точкѣ A, т.е. измѣняется на конечную величину при переходѣ x черезъ значеніе a. Въ такомъ случаѣ, уголъ между касательною и Ox измѣняется также на конечную величину, вслѣдствіе чего кривая имѣетъ переломъ (фиг. 93).



Фиг. 93.

Производная имѣетъ важное значеніе не только въ геометріи, но также и въ механикѣ, напримѣръ для опредѣленія скорости неравномѣрно движущагося тѣла въ каждый данный моментъ.

Пусть точка P движется равномѣрно по прямой l и пусть эта точка начинаетъ своё движеніе въ точкѣ A, т.е. называя промежутки времени черезъ t, а соотвѣтственные пути черезъ s, при $t=0$ наша точка находится въ A. Такъ какъ разсматриваемое движеніе равномѣрное, то если въ единицу времени точка прошла разстояніе a, то при $t=2$ она пройдетъ $s=2a$, при $t=3$ — $s=3a$ и т. д., наконецъ въ моментъ t_0 пройденный путь



Фиг. 94.

s_0 будетъ:

$$s_0 = at_0.$$

Пусть въ промежутокъ времени t_1 точка прошла пространство s_1, тогда

$$s_1 = at_1.$$

Вычитая первое уравненіе изъ второго, получимъ

$$s_1 - s_0 = a(t_1 - t_0).$$

Отсюда $$\frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0} = a.$$

Т. е. отношеніе пройденнаго пути - отъ P_0 до P_1 - къ употребленному на это времени - отъ t_0 до t_1 - равно постоянной величинѣ a, которая называется скоростью движенія.

Теперь спрашивается, какъ опредѣлить скорость въ случаѣ неравномѣрнаго движенія. Пусть однако намъ извѣстенъ законъ этого движенія, выражаемый какимъ нибудь уравненіемъ:

$$s = f(t).$$

Тогда для каждаго значенія t можно найти соотвѣтственное значеніе s. Положимъ, что при движеніи нашей точки отъ P_0 до P_1 отношеніе этого пути къ потраченному времени равно нѣкоторой величинѣ $v_{0,1}$:

$$\frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0} = v_{0,1} \quad \ldots\ldots \quad (38).$$

Тогда въ другомъ промежуткѣ это отношеніе будетъ уже иное. Пусть нѣкоторая другая точка Q движется равномѣрно по той же прямой l со скоростью $v_{0,1}$ и въ моментъ t_0 находится въ точкѣ Q_0; совпадающей съ P_0. Въ промежутокъ времени отъ t_0 до t_1 она пройдетъ пространство

$$Q_0Q_1 = v_{0,1}(t_1 - t_0),$$

но по уравненію (38) эта величина равна $s_1 - s_0 = P_0P_1$, т.е. если Q_0 совпадаетъ съ P_0, то Q_1 совпадаетъ съ P_1. Скорость этой равномѣрно движущейся точки Q называется средней скоростью точки P въ промежуткѣ P_0P_1. Но намъ нужно опредѣлить скорость точки P въ данный моментъ.

Пусть точка P двигаясь по прямой l, занимаетъ на ней послѣдовательно положенія $P_0, P_1, P_2, P_3, \ldots$ Допустимъ, что вспомогательная точка Q проходитъ черезъ P_0, а также и черезъ P_1 и т.д. въ тѣ же моменты, что и точка P, но внутри означенныхъ отрѣзковъ движется равномѣрно, причемъ движеніе этой вспомогательной точки, конечно, разнится отъ движенія точки P. Чѣмъ меньше отрѣзки P_0P_1, P_1P_2 и т.д., тѣмъ эта разница дѣлается незначительнѣе, а когда эти отрѣзки дѣлаются безконечно малыми, то разница для насъ дѣлается незамѣтною. Если обозначимъ отрѣзокъ P_0P_1 черезъ Δs, а соотвѣтственный ему промежутокъ времени черезъ Δt, то $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ будетъ средней скоростью точки P въ промежуткѣ отъ P_0 до P_1. Предѣлъ, къ которому приближается эта средняя скорость, при неограниченномъ уменьшеніи отрѣзковъ, называется скоростью v точки P въ данный моментъ:

$$v = \lim_{\Delta t = 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}.$$

Итакъ, если движеніе выражается формулою

$$s = f(t),$$

то скорость этого движенія будетъ производная пути по времени:

$$v = f'(t).$$

Такъ, напр. при паденіи тѣла въ безвоздушномъ пространствѣ

$$s = \frac{gt^2}{2}.$$

Чтобы найти скорость падающаго тѣла въ моментъ t, стоитъ лишь найти производную этой функціи.

$$v = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t = 0} \frac{\frac{g}{2}(t+\Delta t)^2 - \frac{gt^2}{2}}{\Delta t} =$$

$$= \frac{g}{2} \lim_{\Delta t = 0} \cdot \frac{(t+\Delta t)^2 - t^2}{\Delta t} = \frac{g}{2} \cdot 2t = gt.$$

Итакъ скорость падающаго тѣла въ данный моментъ t есть

$$v = gt.$$

Общія теоремы о производныхъ. Производная степени.

Дѣйствіе, съ помощью котораго по данной функціи находится ея производная, называется **дифференцированіемъ** и составляетъ основную задачу дифференціальнаго исчисленія.

Мы раньше нашли (стр. 158), что производная постоянной величины равна нулю; это выражается формулою:

$$\frac{dc}{dx} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{I}.$$

Кромѣ того мы доказали (стр. 158), что производная аргумента равна единицѣ, или

$$\frac{dx}{dx} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{II}.$$

Найдемъ теперь производную, суммы и разности двухъ функцій. Пусть нѣкоторая функція разложена на сумму или разность двухъ функцій.

$$f(x) = u(x) \pm v(x).$$

На стр. 154 мы нашли, что, если $y = f(x)$, то

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x = 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \ldots (39)$$

На основаніи этого уравненія легко найти производную нашей функціи:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x = 0} \frac{[u(x+\Delta x) \pm v(x+\Delta x)] - [u(x) \pm v(x)]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x = 0} \left\{ \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} \pm \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} \right\}.$$

Но предѣлъ суммы или разности равенъ суммѣ или разности предѣловъ, слѣдовательно:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x = 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x = 0} \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}.$$

Первое слагаемое есть ничто иное, какъ производная функціи $u(x)$, второе же функціи $v(x)$. Значитъ

$$f'(x) = u'(x) \pm v'(x),$$

т. е. производная суммы или разности двухъ функцій равняется суммѣ или разности производныхъ этихъ функцій. Опуская обозначеніе аргумента, это можно выразить такъ:

$$\frac{d(u \pm v)}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}.$$

Эту теорему можно распространить на произвольное но конечное число слагаемыхъ; тогда теорема выразится такъ:

Производная алгебраической суммы функцій равна алгебраической суммѣ производныхъ этихъ функцій. Соотвѣтственная формула будетъ:

$$\frac{d(u \pm v \pm \ldots \pm t)}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx} \pm \ldots \pm \frac{dt}{dx} \quad \text{III}.$$

Найдемъ теперь производную произведенія двухъ функцій. Пусть данная функція равна произведенію двухъ другихъ функцій того же аргумента:

$$y = u(x) \cdot v(x).$$

Для нахожденія производной воспользуемся уравненіемъ (39):

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{u(x+\Delta x) \cdot v(x+\Delta x) - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x}.$$

Значеніе числителя не измѣнится, если въ немъ прибавить и вычесть одно и то же количество $u(x) \cdot v(x+\Delta x)$:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{u(x+\Delta x) \cdot v(x+\Delta x) - u(x) v(x+\Delta x) + u(x) v(x+\Delta x) - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x}$$

Полученную дробь можно разложить на два слагаемыхъ; но предѣлъ суммы равенъ суммѣ предѣловъ слагаемыхъ, вынеся кромѣ того за скобки въ первомъ слагаемомъ $v(x+\Delta x)$, во второмъ $u(x)$ получаемъ:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \left\{ v(x+\Delta x) \left[\frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} \right] \right\} + \lim_{\Delta x = 0} \left\{ u x \left[\frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} \right] \right\}$$

Предѣлъ произведенія равенъ произведенію предѣловъ множителей, но въ первомъ слагаемомъ предѣлъ перваго множителя равенъ $v(x)$, а предѣлъ второго множителя есть производная функціи $u(x)$; во второмъ слагаемомъ предѣлъ второго множителя есть производная отъ $v(x)$. Слѣдовательно

$$\frac{dy}{dx} = v(x) \frac{du(x)}{dx} + u(x) \frac{dv(x)}{dx},$$

т.е. производная произведенія равна второму множителю, умноженному на производную перваго, плюсъ первый множитель, умноженный на производную второго.

$$\frac{d(uv)}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx} \qquad \text{IV}.$$

Эту формулу можно обобщить для случая произвольнаго числа множителей. Пусть сначала y равняется произведенію трехъ множителей:

$$y = uts.$$

Такъ какъ u, t, s суть функціи отъ x, то и произведеніе $ts = v$ также есть функція отъ x; поэтому можемъ написать

$$y = uv.$$

Какъ найти производную этого произведенія, мы знаемъ:

$$\frac{dy}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}.$$

Подставляя вмѣсто v его значеніе, получаемъ:

$$\frac{dy}{dx} = ts\frac{du}{dx} + u\frac{d(ts)}{dx},$$

но $\frac{d(ts)}{dx}$ есть опять производная произведенія двухъ множителей; поэтому

$$\frac{dy}{dx} = ts\frac{du}{dx} + u\left(s\frac{dt}{dx} + t\frac{ds}{dx}\right) = ts\frac{du}{dx} + us\frac{dt}{dx} + ut\frac{ds}{dx}.$$

Эта формула уже показываетъ намъ законъ для отысканія производной произведенія любого числа множителей: Производная получится, если производную каждаго множителя умножить на остальныхъ множителей и сложить полученныя такимъ образомъ произведенія:

$$\frac{d(u_1u_2u_3\ldots u_n)}{dx} = u_2u_3\ldots u_n\frac{du_1}{dx} + u_1u_3u_4\ldots u_n\frac{du_2}{dx} + \cdots$$

$$\cdots + u_1u_2\ldots u_{n-1}\frac{du_n}{dx} \qquad \text{V}.$$

Формула эта впослѣдствіи еще будетъ строго доказана. Формулою V можно воспользоваться для вычисленія производной степени съ цѣлымъ положительнымъ показателемъ.

Пусть дана функція, которая равна другой функціи возвышенной въ нѣкоторую степень:

$$y = u^n;$$

гдѣ n цѣлое положительное число. Эту функцію можно представить въ видѣ:

$$y = u.u.u.\ldots.u \text{ [всего } n \text{ множителей]}.$$

По формулѣ V находимъ:

$$\frac{d(u^n)}{dx} = u^{n-1}\frac{du}{dx} + \cdots + u^{n-1}\frac{du}{dx} = n.u^{n-1}\frac{du}{dx}.$$

Т. е. чтобы получить производную степени, надо показателя степени умножить на основаніе съ показателемъ уменьшеннымъ на единицу, да еще на производную основанія степени.

$$\frac{d(u^n)}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx}\ldots\ldots\ldots\underline{VI}.$$

Если $u = x$, то $\frac{du}{dx} = 1$, такъ что

$$\frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}\ldots\ldots\ldots\underline{VII}.$$

Формулою IV можно воспользоваться для вычисленія производной и въ томъ случаѣ, если одинъ изъ множителей есть величина постоянная. Пусть данная функція равна другой, умноженной на нѣкоторое постоянное количество:

$$y = cu.$$

По формулѣ IV имѣемъ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(cu)}{dx} = c\frac{du}{dx} + u\frac{dc}{dx}.$$

Но по формулѣ I $\frac{dc}{dx} = 0$, такъ что

$$\frac{d(cu)}{dx} = c\frac{du}{dx} \ldots\ldots\ldots \text{VIII}$$

т. е. постояннаго множителя можно вынести за знакъ дифференцированія.

Съ помощью этихъ восьми формулъ мы въ состояніи опредѣлить производную всякой цѣлой раціональной функціи.

Примѣръ I.

$$y = \frac{x^5}{5} + 4x^3 - 6x^2 + 7.$$

Такъ какъ по формулѣ III производная суммы функцій равна суммѣ производныхъ этихъ функцій, то мы имѣемъ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\frac{x^5}{5})}{dx} + \frac{d(4x^3)}{dx} - \frac{d(6x^2)}{dx} + \frac{d7}{dx}.$$

Вынося постоянныхъ множителей за знакъ дифференцированія и замѣчая, что по формулѣ I производная постояннаго количества равна нулю, получимъ: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{5}\frac{d(x^5)}{dx} + 4\frac{d(x^3)}{dx} - 6\frac{d(x^2)}{dx}.$

Наконецъ, на основаніи формулы VII, находимъ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{5}\cdot 5x^4 + 4\cdot 3x^2 - 6.2x = x^4 + 12x^2 - 12x.$$

Примѣръ II.

$$y = (a-x)(a+x)(a^2+x^2).$$

Изъ формулы V находимъ:

$$\frac{dy}{dx} = (a+x)(a^2+x^2)\frac{d(a-x)}{dx} + (a-x)(a^2+x^2)\frac{d(a+x)}{dx} +$$

$$+ (a-x)(a+x)\frac{d(a^2+x^2)}{dx} = (a^3+a^2x+ax^2+x^3)\cdot\left(\frac{da}{dx} - \frac{dx}{dx}\right) +$$

$$+ (a^3-a^2x+ax^2-x^3)\left(\frac{da}{dx} + \frac{dx}{dx}\right) + (a^2-x^2)\left(\frac{d(a^2)}{dx} + \frac{d(x^2)}{dx}\right).$$

Но $\frac{da}{dx} = 0$ и $\frac{d(a^2)}{dx} = 0$, какъ производныя постоянныхъ величинъ; $\frac{dx}{dx} = 1$, какъ производная аргумента; $\frac{d(x^2)}{dx}=2x$, по формулѣ VII. Поэтому

$$\frac{dy}{dx}=-a^3-a^2x-ax^2-x^3+a^3-a^2x+ax^2-x^3+(a^2-x^2)\cdot 2x=$$

$$=-2a^2x-2x^3+2a^2x-2x^3=-4x^3.$$

Можно было бы сначала раскрыть скобки и потомъ дифференцировать:

$$y=(a^2-x^2)(a^2+x^2)=a^4-x^4;$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d(a^4)}{dx}-\frac{d(x^4)}{dx},$$

но $\frac{d(a^4)}{dx}=0$, слѣдовательно

$$\frac{dy}{dx}=-4x^3.$$

Найдемъ теперь производную частнаго двухъ функцій. Пусть дана

$$y=\frac{u(x)}{v(x)}.$$

Для отысканія производной воспользуемся формулою (39):

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x=0}\frac{\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\frac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x=0}\frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x)-v(x+\Delta x)\cdot u(x)}{v(x+\Delta x)\cdot v(x)\cdot\Delta x}$$

Вычтемъ и прибавимъ въ числителѣ $u(x)\cdot v(x)$:

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x=0}\left\{\frac{1}{v(x+\Delta x)\cdot v(x)}\cdot\frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v(x)-v(x+\Delta x)\cdot u(x)+u(x)\cdot v(x)}{\Delta x}\right\}$$

Предѣлъ $v(x+\Delta x)$ равенъ $v(x)$; кромѣ того вторую дробь мы можемъ представить въ видѣ двухъ дробей.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{(v(x))^2}\left\{\lim_{\Delta x=0}\left[v(x)\cdot\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\right]-\lim_{\Delta x=0}\left[u(x)\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\right]\right\}=$$

$$=\frac{1}{(v(x))^2}\left[v(x)\frac{du(x)}{dx}-u(x)\frac{dv(x)}{dx}\right]$$

Отсюда получаемъ формулу

$$\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2} \quad \dots\dots\dots \quad \underline{IX}.$$

Если намъ дана функція $y = u^n$, гдѣ u есть функція отъ x, то мы можетъ сказать, что y есть функція отъ функціи отъ x. Относительно такихъ функцій существуетъ нѣкоторая общая теорема. Пусть

$$y = f(u), \text{ гдѣ } u = \varphi(x).$$

Подставляя значеніе u въ первое уравненіе, получаемъ:

$$y = f[\varphi(x)].$$

Опредѣлимъ производную для такой функціи. Дифференцируя ее по формулѣ (39) получимъ:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{f[\varphi(x+\Delta x)] - f[\varphi(x)]}{\Delta x}.$$

Умножимъ числителя и знаменателя на $\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)$:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \left\{ \frac{f[\varphi(x+\Delta x)] - f[\varphi(x)]}{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)} \cdot \frac{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} \right\}$$

Если $\varphi(x) = u$, то $\varphi(x+\Delta x) = u + \Delta u$, и $\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x) = \Delta u$.
По подстановкѣ этихъ значеній, получимъ:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \left\{ \frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \frac{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} \right\}$$

Предѣлъ произведенія равенъ произведенію предѣловъ сомножителей. Предѣлъ перваго множителя равенъ производной функціи $f(u)$, а предѣлъ второго равенъ производной $\varphi(x)$; слѣдовательно

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(u)}{du} \cdot \frac{d\varphi(x)}{dx}.$$

Подставляя въ первомъ множителѣ $\varphi(x)$ вмѣсто u, или во второмъ u вмѣсто $\varphi(x)$, получаемъ слѣдующіе два вида этой важной теоремы:

$$\left.\begin{aligned} \frac{df[\varphi(x)]}{dx} &= \frac{df[\varphi(x)]}{d\varphi(x)} \cdot \frac{d\varphi(x)}{dx} \\ \frac{df(u)}{dx} &= \frac{df(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad \underline{X}$$

Т. е. при дифференцированіи функціи f отъ функціи u отъ x, слѣдуетъ дифференцировать функцію f по внутренней функціи u, и эту производную умножить на производную внутренней функціи u по x.

Пусть дана функція

$$y = f(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

и пусть функція

$$x = \varphi(y) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41).$$

будетъ обратная функціи (40).

Подставляя значеніе y изъ уравненія (40) въ уравненіе (41) мы получаемъ тождество

$$x = \varphi(f(x)).$$

Продифференцируемъ его по формулѣ $\overline{X}$:

$$\frac{dx}{dx} = \frac{d\varphi(f(x))}{df(x)} \cdot \frac{df(x)}{dx}.$$

Лѣвая часть равна единицѣ; въ первомъ множителѣ правой части замѣнимъ $f(x)$ черезъ y по формулѣ (40):

$$1 = \frac{d\varphi(y)}{dy} \cdot \frac{df(x)}{dx},$$

откуда

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{\frac{d\varphi(y)}{dy}},$$

или, въ другомъ видѣ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \underline{XI}$$

Если $y = f(x)$, то производная этой функціи по x равняется единицѣ, раздѣленной на производную обратной функціи по y.

Примѣръ: $y = \sqrt{x}$.

Обратная функція будетъ

$$x = y^2,$$

такъ что $\frac{dx}{dy} = \frac{dy^2}{dy} = 2y$,

откуда по формулѣ XI:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Мы замѣчаемъ, что тотъ же самый результатъ получился бы, если въ формулѣ VII приравнять $n = \frac{1}{2}$.

Производныя показательныхъ и логариѳмическихъ функцій.

Пусть требуется найти производную показательной функціи

$$y = a^x.$$

По формулѣ (39) получимъ:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{a^x a^{\Delta x} - a^x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x = 0} a^x \left(\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \right) = a^x \lim_{\Delta x = 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

Введемъ новое обозначеніе:

$$a^{\Delta x} - 1 = \varepsilon \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (42)$$

Тогда $a^{\Delta x} = 1 + \varepsilon$ или $\Delta x = \log_a (1 + \varepsilon)$.

Изъ уравненія (42) видно, что если Δx приближается къ нулю, то и ε стремится къ нулю, такъ какъ $a^{\Delta x}$ приближается къ единицѣ.

Подставляя наше новое обозначеніе и принимая во вниманіе послѣдній выводъ, можемъ написать:

$$\frac{dy}{dx}=a^x\lim_{\varepsilon=0}\frac{\varepsilon}{\log_a(1+\varepsilon)}=a^x\lim_{\varepsilon=0}\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}\log_a(1+\varepsilon)}=$$

$$=a^x\lim_{\varepsilon=0}\frac{1}{\log_a(1+\varepsilon)^{1/\varepsilon}}.$$

Обозначимъ $\frac{1}{\varepsilon}=\omega$. Если ε безконечно уменьшается, то ω безконечно увеличивается, и

$$\frac{dy}{dx}=a^x\lim_{\omega=\infty}\frac{1}{\log_a\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^\omega}.$$

Но по стр. 149

$$\lim_{\omega=\infty}\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^\omega=e,$$

гдѣ $e=2{,}7182818$; отсюда

$$\frac{dy}{dx}=a^x\cdot\frac{1}{\log_a e}.$$

Такимъ образомъ

$$\frac{d\,a^x}{dx}=\frac{a^x}{\log_a e}\,\ldots\ldots\ldots\ldots(43).$$

Преобразуемъ теперь эту формулу такъ, чтобы въ ней вмѣсто логариѳма при основаніи a получился логариѳмъ при основаніи e. Эти послѣдніе логариѳмы называются Неперовыми или Натуральными и обозначаются черезъ $\log nat$, ln или l. Съ этою цѣлью опредѣлимъ связь между логариѳмами съ основаніями e и a.

Пусть

$$\left.\begin{aligned}z&=\log_a t\\ z_1&=ln t\end{aligned}\right\}\ldots(44).$$

Изъ этихъ уравненій имѣемъ:

$$a^z=t,\quad e^{z_1}=t,$$

$$a^z=e^{z_1}.$$

Если теперь логариѳмировать это уравненіе по основанію a, то получимъ:

$$z\, lg_a a = z_1\, lg_a e.$$

Подставляя z и z_1 изъ формулъ (44) и замѣчая, что $\log_a a = 1$, получимъ:

$$\log_a t = \ln t \cdot \log_a e \; . \; . \; . \; . \; . \; (45).$$

Значитъ, чтобы отъ Неперова логариѳма перейти къ логариѳму при основаніи a, слѣдуетъ помножить первый на $lg_a e$.

И наоборотъ

$$\ln t = \log_a t \cdot \frac{1}{\log_a e},$$

т.е. если логариѳмъ какого-нибудь числа при основаніи a раздѣлить на $\log_a e$ при томъ же основаніи a, то получимъ Неперовъ логариѳмъ этого числа. Такимъ образомъ для перехода отъ логариѳма съ какимъ-либо основаніемъ къ логариѳмамъ Неперовымъ, намъ служитъ всегда $\log_a e$, который называется модулемъ.

Обыкновенно употребляютъ логариѳмическія таблицы, въ которыхъ за основаніе принято число 10. Для этихъ таблицъ $\frac{1}{\log_{10} e} = 2{,}3025851$.

Если въ уравненіи (45) придать t частное значеніе $t = a$, то лѣвая часть обращается въ 1:

$$1 = \ln a \cdot \log_a e, \quad \log_a e = \frac{1}{\ln a} \; . \; . \; . \; (46).$$

Если подставить это значеніе въ формулу (43), то получимъ:

$$\frac{da^x}{dx} = a^x \ln a \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \underline{XII}.$$

Опредѣлимъ теперь производную логариѳмической функціи

$$y = \log_a x.$$

Для этого воспользуемся формулою $\underline{XI}$ для производной обратной функцiи.

$$x = a^y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d(a^y)}{dy}} = \frac{1}{a^y \ln a}.$$

Подставляя x вмѣсто a^y, получимъ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln a},$$

такъ что окончательная формула будетъ:

$$\frac{d \log_a x}{dx} = \frac{1}{x \ln a} \quad \underline{XIII}.$$

Если въ формулахъ $\underline{XII}$ и $\underline{XIII}$ придать a частное значенiе $a = e$, то получимъ:

$$\frac{d e^x}{dx} = e^x \ldots\ldots\ldots \underline{XIV}.$$

$$\frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x} \ldots\ldots\ldots \underline{XV}.$$

Производная логариѳма нѣкоторой функцiи u отъ x называется логариѳмической производной u. Для такой логариѳмической производной мы получаемъ, соединяя формулы $\underline{XV}$ и $\underline{X}$,

$$\frac{d \ln u}{dx} = \frac{d \ln u}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx} \ldots (47).$$

Пусть дано произведенiе функцiй $u_1, u_2 \ldots$ $\ldots u_n$. Прологариѳмируемъ его:

$$\ln(u_1 u_2 \cdots u_n) = \ln u_1 + \ln u_2 + \ldots + \ln u_n.$$

Затѣмъ продифференцируемъ по формулѣ (47):

$$\frac{1}{u_1 u_2 \ldots u_n} \cdot \frac{d(u_1 u_2 \ldots u_n)}{dx} = \frac{1}{u_1} \cdot \frac{du_1}{dx} + \frac{1}{u_2} \cdot \frac{du_2}{dx} + \ldots + \frac{1}{u_n} \cdot \frac{du_n}{dx} \quad (48)$$

т.е. логариѳмическая производная произведенiя равняется суммѣ логариѳмическихъ производныхъ сомножителей.

Если умножить уравненіе (48) на $u_1 u_2 \ldots u_n$, то получаемъ формулу $\overline{V}$

$$\frac{d(u_1 u_2 \ldots u_n)}{dx} = u_2 u_3 \ldots u_n \frac{du_1}{dx} + u_1 u_3 \ldots u_n \frac{du_2}{dx} + \cdots +$$

$$\cdots + u_1 u_2 \ldots u_{n-1} \frac{du_n}{dx};$$

которая такимъ образомъ теперь строго доказана. Пусть теперь

$$y = u^v,$$

гдѣ u и v обозначаютъ функціи отъ x. Чтобы можно было ее дифференцировать, мы представляемъ ее въ видѣ

$$u^v = e^w.$$

Логариѳмируя это уравненіе, мы получаемъ

$$v \ln u = w \ln e;$$

но такъ какъ $\ln e = 1$, то имѣемъ просто

$$v \ln u = w.$$

Такимъ образомъ мы можемъ написать

$$y = e^w,$$

причемъ

$$w = v \ln u.$$

Формула $\overline{XIV}$ въ связи съ $\overline{X}$ даетъ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{de^w}{dw} \cdot \frac{dw}{dx} = e^w \cdot \frac{dw}{dx} \quad \ldots \ldots (49)$$

а формула $\overline{IV}$ въ связи съ (47)

$$\frac{dw}{dx} = \frac{d(v \ln u)}{dx} = v \frac{d \ln u}{dx} + \ln u \frac{dv}{dx} = \frac{v}{u} \cdot \frac{du}{dx} + \ln v \frac{dv}{dx}.$$

Подставимъ это выраженіе въ (49), замѣняя одновременно e^w черезъ u^v:

$$\frac{dy}{dx} = u^v \left(\frac{v}{u} \cdot \frac{du}{dx} + \ln v \cdot \frac{dv}{dx} \right)$$

или окончательно

$$\frac{d(u^v)}{dx}=vu^{v-1}\frac{du}{dx}+u^v \ln v\frac{dv}{dx}\cdots \underline{XVI}.$$

Если въ этой формулѣ замѣнить v постояннымъ числомъ n, мы получаемъ ввиду того, что $\frac{dn}{dx}=0$,

$$\frac{d(u^n)}{dx}=nu^{n-1}\frac{du}{dx}+u^n \ln v\frac{dn}{dx}=nu^{n-1}\frac{du}{dx},$$

такъ что формула $\underline{VI}$, и вмѣстѣ съ тѣмъ формула $\underline{VII}$, справедлива при всякомъ постоянномъ значенiи n.

Производныя тригонометрическихъ функцiй.

Пусть

$$y=\sin x.$$

Для вычисленiя опять воспользуемся формулою (39).

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x=0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}.$$

Числителя можно преобразовать, имѣя въ виду, что $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$, и полагая $\alpha=x+\Delta x$, $\beta=x$.

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x=0}\cdot\frac{2\cos\frac{2x+\Delta x}{2}\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x=0}\left\{\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\right\}.$$

Предѣлъ перваго множителя для $\Delta x=0$ есть $\cos x$. Найдемъ предѣлъ второго множителя. Обозначая $\frac{\Delta x}{2}$ черезъ z, получимъ:

$$\lim_{\Delta x=0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=\lim_{z=0}\frac{\sin z}{z}=1.$$

Отсюда $\frac{dy}{dx}=\cos x$. Такимъ образомъ получимъ формулу

$$\frac{d\sin x}{dx}=\cos x\ \ldots\ldots\ldots\ \overline{XVII}.$$

Такимъ же путемъ можно опредѣлить производную функціи

$$y=\cos x.$$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x=0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}.$$

Замѣчая, что

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

находимъ при $\alpha=x+\Delta x$, $\beta=x$:

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x=0}\frac{-2\sin\frac{2x+\Delta x}{2}\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x=0}\left\{\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\right\}.$$

Предѣлъ перваго множителя есть $\sin x$, предѣлъ второго равенъ единицѣ; отсюда

$$\frac{dy}{dx}=-\sin x,$$

$$\frac{d\cos x}{dx}=-\sin x\ \ldots\ldots\ldots\ \overline{XVIII}.$$

Эту формулу можно было вывести и другимъ путемъ. Извѣстно, что

$$y=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right).$$

Дифференцируя по формуламъ $\underline{XVII}$ и $\underline{X}$, получаемъ

$$\frac{dy}{dx}=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\frac{d\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{dx}=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x.$$

Найдемъ теперь производную функціи $y=tgx$.

Очевидно $\frac{dy}{dx} = \frac{d\,tg\,x}{dx} = \frac{d\frac{\sin x}{\cos x}}{dx} \cdot \left(d\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{dx}\right)$.

Производная частнаго находится по формулѣ $\underline{IX}$; такимъ образомъ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x\frac{d\sin x}{dx} - \sin x\frac{d\cos x}{dx}}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$\frac{d\,tg\,x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} \dots\dots \overline{\underline{XIX}}$$

Остается опредѣлить производную функціи $y = ctg\,x$:

$$\frac{d\,ctg\,x}{dx} = \frac{d\frac{\cos x}{\sin x}}{dx} = \frac{\sin x\frac{d\cos x}{dx} - \cos x\frac{d\sin x}{dx}}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$\frac{d\,ctg\,x}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x} \dots\dots \overline{\underline{XX}}.$$

Производныя циклометрическихъ функцій.

Найдемъ производную функціи

$$y = arc\sin x.$$

Мы знаемъ, что въ такомъ случаѣ $x = \sin y$. Какъ найти производную такой функціи, намъ извѣстно ($\underline{XVII}$), а вспомнивъ, что производная каждой функціи равна единицѣ, дѣленной на производную обратной функціи, находимъ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d\sin y}{dy}} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\frac{d\,arc\sin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \dots\dots \overline{\underline{XXI}}.$$

Подобнымъ же образомъ находится производная функцiи $y=\operatorname{arccos} x$.

Тогда $x=\cos y$,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\frac{d\cos y}{dy}}=\frac{1}{-\sin y}=\frac{1}{-\sqrt{1-\cos^2 y}}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\frac{d \operatorname{arccos} x}{dx}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \dots \quad \underline{\overline{XXII}}.$$

Пусть теперь

$$y=\operatorname{arctg} x,$$

такъ что $x=\operatorname{tg} y$. Мы получаемъ аналогично предыдущему

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\frac{d\operatorname{tg} y}{dy}}=\frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}}=\cos^2 y=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y}=\frac{1}{1+x^2}.$$

$$\frac{d \operatorname{arctg} x}{dx}=\frac{1}{1+x^2} \quad \dots \quad \underline{\overline{XXIII}}.$$

Остается найти производную функцiи

$$y=\operatorname{arcctg} x.$$

Функцiя обратная данной есть $x=\operatorname{ctg} y$, такъ что

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\frac{d\operatorname{ctg} y}{dy}}=\frac{1}{-\frac{1}{\sin^2 y}}=-\sin^2 y=$$

$$=-\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 y}=-\frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d \operatorname{arcctg} x}{dx}=-\frac{1}{1+x^2} \quad \dots \quad \underline{\overline{XXIV}}.$$

Съ помощью формулы (36) на стр. 155 можно всегда отъ производныхъ переходить къ дифференцiаламъ и наоборотъ

Функція.	Производная.	Дифференціалъ.
$y=u_1+u_2+\ldots+u_n$	$y'=u_1'+u_2'+\ldots+u_n'$	$dy=du_1+du_2+\ldots+du_n$
$y=uv$	$y'=u'v+uv'$	$dy=vdu+udv$
$y=\frac{u}{v}$	$y'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$	$dy=\frac{vdu-udv}{v^2}$
$y=cu$	$y'=cu'$	$dy=cdu$
$y=x^n$	$y'=nx^{n-1}$	$dy=nx^{n-1}dx$
$y=a^x$	$y'=a^x\ln a$	$dy=a^x\ln a\,dx$
$y=e^x$	$y'=e^x$	$dy=e^x dx$
$y=\lg_a x$	$y'=\frac{1}{x\ln a}$	$dy=\frac{dx}{x\ln a}$
$y=\ln x$	$y'=\frac{1}{x}$	$dy=\frac{dx}{x}$
$y=\sin x$	$y'=\cos x$	$dy=\cos x\,dx$
$y=\cos x$	$y'=-\sin x$	$dy=-\sin x\,dx$
$y=\operatorname{tg} x$	$y'=\frac{1}{\cos^2 x}$	$dy=\frac{dx}{\cos^2 x}$
$y=\operatorname{ctg} x$	$y'=-\frac{1}{\sin^2 x}$	$dy=-\frac{dx}{\sin^2 x}$
$y=\arcsin x$	$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$dy=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
$y=\arccos x$	$y'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$dy=-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
$y=\operatorname{arctg} x$	$y'=\frac{1}{1+x^2}$	$dy=\frac{dx}{1+x^2}$
$y=\operatorname{arcctg} x$	$y'=-\frac{1}{1+x^2}$	$dy=-\frac{dx}{1+x^2}$

Производныя высшихъ порядковъ.

Если намъ была дана функція

$$y=f(x),$$

то производную ея мы обозначали однимъ изъ слѣдующихъ символовъ

$$\frac{dy}{dx}=y'=f'(x).$$

Мы видѣли, что эта производная также есть нѣкоторая функція отъ x. Понятно, что эту функцію можно также дифференцировать по формулѣ:

$$\frac{df'(x)}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}.$$

Функція, которая опредѣляется по этому закону, называется производною второго порядка или второю производною данной функціи. Ее обозначаютъ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = f''(x).$$

Если х дифференцировать и эту функцію и т.д., то получимъ производную $n^{го}$ порядка:

$$\frac{d^ny}{dx^n} = y^{(n)} = f^{(n)}(x).$$

Мы раньше нашли, что если движеніе точки выражается уравненіемъ

$$s = f(t),$$

то первая производная этой функціи даетъ намъ скорость точки въ моментъ t:

$$v = \frac{ds}{dt} = f'(t).$$

При неравномѣрномъ движеніи скорость не есть величина постоянная. Предѣлъ отношенія приращенія скорости къ потраченному времени.

$$p = \lim_{\Delta t = 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

называется ускореніемъ движенія. Ясно, что это будетъ производная v по t, т.е. $p = \frac{dv}{dt}$. Но такъ какъ v есть первая производная данной функціи, то p будетъ ея второю производною:

$$p = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = f''(t).$$

Въ частномъ случаѣ при паденіи тѣла въ безвоздушномъ пространствѣ, имѣемъ:

$$s = \frac{gt^2}{2}.$$

Скорость паденія

$$v = \frac{ds}{dt} = gt,$$

а ускореніе

$$p = \frac{dv}{dt} = g.$$

Производныя высшихъ порядковъ играютъ важную роль въ теоріи рядовъ.

Примѣръ I. $y = (a + bx)^m$.

Дифференцируя два раза, получаемъ:

$$\frac{dy}{dx} = m(a+bx)^{m-1} b,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = m(m-1)(a+bx)^{m-2} b^2.$$

Если продолжать такимъ образомъ, то дойдемъ, наконецъ, до производной $n^{го}$ порядка:

$$\frac{d^ny}{dx^n} = m(m-1)\ldots(m-n+1)(a+bx)^{m-n} b^n \ldots (50).$$

Примѣръ II. $y = a^x$.

Первая и вторая производныя этой функціи суть

$$\frac{dy}{dx} = a^x \ln a, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = a^x (\ln a)^2.$$

Продолжая такимъ образомъ, дойдемъ до производной $n^{го}$ порядка:

$$\frac{d^ny}{dx^n} = a^x (\ln a)^n \ldots\ldots (51).$$

Положимъ $y = e^x$.

Производная $n^{го}$ порядка этой функціи получится, если въ формулѣ (51) вмѣсто a подставимъ e.

$$\frac{d^ny}{dx^n} = e^x (\ln e)^n;$$

но $\ln e = 1$, слѣдовательно

$$\frac{d^n y}{dx^n} = e^x,$$

т.е. функція e^x обладаетъ свойствомъ, что всѣ ея производныя равны самой функціи.

Примѣръ III. $y = \ln x$.

Первая производная есть

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} = x^{-1}.$$

Производную $n^{\text{го}}$ порядка мы получимъ, продифференцировавъ еще $n-1$ разъ:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^{n-1}(x^{-1})}{dx^{n-1}}.$$

Для опредѣленія этой производной можно пользоваться уравненіемъ (50), если положить:

$$a = 0,\ b = 1,\ m = -1.$$

Но намъ надо опредѣлить производную не $n^{\text{го}}$, а $n-1^{\text{го}}$ порядка отъ x^{-1}, поэтому въ формулѣ (50) надо замѣнить n на $n-1$. Тогда получаемъ:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (-1)(-2)(-3)\ldots[-(n-1)]x^{-n}.$$

Если -1 вынести за скобки, то

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{(-1)^{n-1}1.2.3\ldots(n-1)}{x^n} \quad \ldots\ldots (52).$$

Произведеніе n первыхъ цѣлыхъ положительныхъ чиселъ символически обозначается такъ:

$$1.2.3.\ldots\ldots n = n!$$

и читается: факторіалъ n. Пользуясь этимъ символомъ, формулу (52) можно выразить такимъ образомъ:

$$\frac{d^n(\ln x)}{dx^n} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n} \quad \ldots\ldots (53).$$

Примѣръ IV. $y = \sin x$.

Найдемъ послѣдовательныя производныя:

$$\frac{dy}{dx} = \cos x,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\cos x$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \sin x,$$

т. е. 4<u>ая</u> производная равна самой функціи; пятая производная будетъ равна первой производной и т. д. Значенія производныхъ чередуются. Легко также соединить всѣ эти производныя въ общей формулѣ. Для это замѣтимъ, что такъ какъ $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, то

$$\frac{dy}{dx} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Т. е. отъ дифференцированія функціи $\sin x$ аргументъ увеличивается на $\frac{\pi}{2}$. Послѣ n-кратнаго дифференцированія, мы получимъ

$$\frac{d^n \sin x}{dx^n} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \quad \ldots \ldots (54).$$

Примѣръ V. $y = \cos x$.

Поступая такъ же, какъ въ предыдущемъ случаѣ находимъ:

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\cos x$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \sin x$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \cos x$$

Значенія производныхъ опять чередуются. Вмѣсто $y=\cos x$ можно написать:

$$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right).$$

Сравнивая эту функцію съ предыдущею $y=\sin x$, заключаемъ, что формулу для $n^{\text{ой}}$ производной получимъ, если въ формулѣ (54) прибавимъ къ аргументу $\frac{\pi}{2}$:

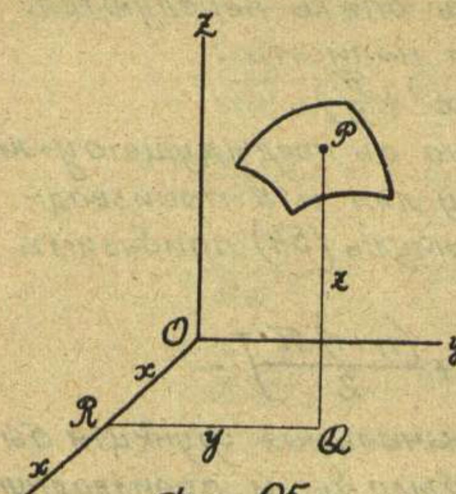
$$\frac{d^n y}{dx^n}=\sin\left[x+\frac{(n+1)\pi}{2}\right].$$

Такъ какъ наша первоначальная функція была $y=\cos x$, то можно было бы и производную выразить помощью косинуса:

$$\frac{d^n \cos x}{dx^n}=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\ldots\ldots(55)$$

Функціи двухъ перемѣнныхъ.

До сихъ поръ мы разсматривали только функціи одной перемѣнной; но, конечно все то, что мы говорили относительно этихъ функцій можно распространить и на функціи нѣсколькихъ перемѣнныхъ величинъ. Примѣръ функціи двухъ перемѣнныхъ намъ извѣстенъ изъ аналитической геометріи въ пространствѣ, а именно уравненіе поверхности. Если въ плоскости (xy) возьмемъ какую-нибудь точку Q, то соотвѣтственную точку P поверхности найдемъ, возставивъ въ Q перпендикуляръ къ плоскости (xy) до пересѣченія P съ данною поверхностью. Различнымъ положеніямъ точки Q на плоскости (xy) соотвѣтствуютъ различныя точки поверхности, а слѣдовательно и различныя значенія z. Но положеніе точки Q, опредѣляется двумя коорди-



Фиг. 95.

натами x, y, слѣдовательно z зависитъ отъ двухъ независимыхъ перемѣнныхъ, т.е. z есть функція x и y. Символически функція одвухъ перемѣнныхъ изображается такъ:

$$z = f(x, y).$$

Объемъ v данной массы газа зависитъ, какъ извѣстно, отъ давленія p и отъ температуры t по формулѣ

$$v = \frac{a}{p}(1 + kt),$$

гдѣ a и k постоянныя величины.

Если изслѣдовать измѣненіе объема при постоянной температурѣ, то t постоянная величина, слѣдовательно и

$$a(1 + kt) = A$$

будетъ постоянной величиной.

Тогда

$$v = \frac{A}{p},$$

т.е. мы получаемъ законъ Маріотта.

Если же изслѣдовать газъ при постоянномъ давленіи p, то

$$\frac{a}{p} = B$$

будетъ постоянной величиной и мы получаемъ

$$v = B(1 + kt)$$

т.е. законъ Гэ - Люссака.

Пусть намъ дана функція двухъ независимыхъ перемѣнныхъ

$$z = f(x,y) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56).$$

Если въ ней y предположимъ постояннымъ, то z является функціей одной только перемѣнной x; эту функцію можно дифференцировать по x согласно формулѣ (39). Тогда получается такъ называемая ЧАСТНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ ея по x:

$$f'_x(x,y) = \lim_{\Delta x = 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} \quad . \quad . \quad (57).$$

Подобнымъ образомъ частная производная по y будетъ $f'_y(x,y) = \lim\limits_{\Delta y = 0} \dfrac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} \quad . \quad . \quad (58).$

Пусть x, y въ формулѣ (56) теперь обозначаютъ опредѣленную пару значеній аргументовъ, а z соотвѣтственное числовое значеніе функціи. Придадимъ x и y приращенія Δx и Δy, тогда z получаетъ соотвѣтственное приращеніе Δz согласно формулѣ (56):

$$z + \Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (59).$$

Вычтемъ уравненіе (56) изъ уравненія (59):

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y).$$

Рядъ простыхъ преобразованій даетъ

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) + f(x, y+\Delta y) - f(x,y),$$

$$\Delta z = \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)}{\Delta x} \cdot \Delta x + \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} \cdot \Delta y \quad . \quad (60).$$

Посмотримъ, во что обратятся множители при Δx и Δy, когда эти приращенія стремятся къ нулю, причемъ будемъ предполагать непрерывность функціи (56) относительно обоихъ аргументовъ. Сперва имѣемъ по формулѣ (57)

$$\lim_{\substack{\Delta x = 0 \\ \Delta y = 0}} \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta y = 0} \left\{ \lim_{\Delta x = 0} \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)}{\Delta x} \right\}$$

$$= \lim_{\Delta y = 0} f'_x(x, y+\Delta y) = f'_x(x, y),$$

если и частная производная по x непрерывна въ изслѣдуемой точкѣ. Множитель при Δy въ формулѣ (60) при Δy стремящемся къ нулю по уравненію (58) прямо равенъ $f'_y(x, y)$. Если еще вмѣсто безконечно малыхъ приращеній $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ ввести знаки дифференціаловъ dx, dy, dz, то уравненіе (60) переходитъ въ

$$dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy, \quad \ldots \quad (61)$$

въ такъ наз. формулу для полнаго дифференціала функціи двухъ перемѣнныхъ.

Частныя производныя и обозначаются такъ:

$$f'_x(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \quad f'_y(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}.$$

Пользуясь этимъ обозначеніемъ, формулу (61) можемъ написать:

$$dz = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy \quad \ldots \quad (61^a)$$

или

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \quad \ldots \quad (61^b).$$

Формулы (61), (61^a) (61^b) слѣдуетъ понять такъ, что онѣ при конечныхъ но малыхъ значеніяхъ dx, dy даютъ приближенное значеніе для соотвѣтственнаго приращенія dz, которое будетъ тѣмъ точнѣе, чѣмъ меньше будутъ dx и dy по абсолютной величинѣ.

Примѣръ. Опредѣлить полный дифференціалъ функціи

$$z = x^2 + y^2.$$

Чтобы найти частную производную по x, мыразсматриваемъ y какъ величину постоянную, такъ что производная отъ y^2, какъ производная постояннаго количества, будетъ равна нулю и

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x;$$

подобнымъ образомъ

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y.$$

Подставляя эти значенія въ формулу ($61^в$) мы получаемъ

$$dz = 2x\,dx + 2y\,dy.$$

Дифференцированіе неявныхъ функцій.

Пусть теперь въ уравненіи

$$z = f(x, y) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (62)$$

y есть функція отъ x. Тогда z въ сущности будетъ функціею одной только независимой перемѣнной x и мы получимъ производную этой функціи, если уравненіе (60) раздѣлить на Δx и перейти къ предѣлу $\Delta x = 0$. Тогда мы получаемъ совершенно такъ же, какъ было выведено уравненіе ($61^а$):

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} \quad \ldots \quad (63).$$

Предположимъ теперь, что z сохраняетъ постоянное значеніе 0. Тогда уравненіе (62) переходитъ въ

$$0 = f(x, y),$$

чѣмъ y опредѣляется какъ неявная функція x-а. Производную этой неявной функціи даетъ намъ формула (63), въ которой лѣвая часть

$$\frac{dz}{dx} = 0$$

какъ производная постояннаго количества:

$$0 = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Если это уравненіе рѣшить относительно $\frac{dy}{dx}$, то мы получимъ производную этой неявной функціи, опредѣленной уравненіемъ

$$f(x,y) = 0, \quad \ldots\ldots\ldots (64)$$

въ видѣ:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}} \quad \ldots\ldots\ldots (65)$$

Примѣръ I. Пусть дана неявная функція уравненіемъ

$$y - x^2 = 0.$$

Сравнивая съ уравненіемъ (64) можно написать:

$$f(x,y) = y - x^2.$$

Чтобы опредѣлить производную по формулѣ (65), слѣдуетъ найти частныя производныя по x и по y.

Предполагая y постояннымъ, получаемъ:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -2x.$$

Частную производную по y найдемъ, предполагая x постояннымъ:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 1.$$

По формулѣ (65), имѣемъ:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{-2x}{1} = 2x.$$

Можно было бы рѣшить наше уравненіе относительно y:

$$y = x^2;$$

и дифференцировать полученную явную функцію:

$$\frac{dy}{dx} = 2x.$$

При этомъ мы приходимъ къ тому же выводу.

Примѣръ II. $e^{x+y} - x^y = 0$ . . . . . . (66)

или $f(x, y) = e^{x+y} - x^y$.

Тогда

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = e^{x+y} - yx^{y-1}$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = e^{x+y} - x^y \ln x.$$

По формулѣ (65) имѣемъ:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{e^{x+y} - yx^{y-1}}{e^{x+y} - x^y \ln x} \quad \ldots\ldots (67)$$

Это выраженіе можно значительно упростить. Изъ уравненія (66) имѣемъ:

$$e^{x+y} = x^y.$$

Подставляя это значеніе въ формулу (67), получаемъ:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^y - yx^{y-1}}{x^y - x^y \ln x}.$$

Сокращая на x^y

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1 - \frac{y}{x}}{1 - \ln x} \quad \ldots\ldots (68).$$

Кромѣ того, мы можемъ выразить y черезъ x, коль скоро замѣтимъ, что изъ формулы (66) слѣдуетъ

$$x + y = y \ln x$$

или

$$y = -\frac{x}{1 - \ln x}.$$

Подставляя значеніе y въ уравненіе (68), получаемъ:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1+\frac{1}{1-\ln x}}{1-\ln x} = \frac{\ln x - 2}{(1-\ln x)^2}.$$

Производную функціи, опредѣленной уравненіемъ (66), можно было бы найти, рѣшая уравненіе относительно y:

$$y = -\frac{x}{1-\ln x},$$

и затѣмъ дифференцируя:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(1-\ln x) - x\left(-\frac{1}{x}\right)}{(1-\ln x)^2} = \frac{\ln x - 2}{(1-\ln x)^2}$$

Примѣръ III. $1 + xe^y - y = 0 \ldots\ldots$ (69)

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = e^y, \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = xe^y - 1.$$

Слѣдовательно по формулѣ (65):

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{e^y}{xe^y - 1}.$$

Но изъ уравненія (69), имѣемъ

$$xe^y = y - 1,$$

отсюда

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{e^y}{y-2} = \frac{e^y}{2-y}$$

Найдемъ производную еще другимъ способомъ, для чего рѣшимъ уравненіе (69) относительно x:

$$x = \frac{y-1}{e^y}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{e^y - (y-1)e^y}{e^{2y}} = \frac{1-y+1}{e^y} = \frac{2-y}{e^y},$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^y}{2-y}.$$

Примѣръ IV. Иногда уравненіе $f(x,y)=0$ невозможно рѣшить относительно какой бы то ни было перемѣнной; тогда производную можно найти только при помощи частныхъ производныхъ. Пусть напр. дана функція:

$$x \sin y - y \cos x = 0.$$

Уравненіе нельзя рѣшить ни относительно x, ни относительно y. Но по формулѣ (65) находимъ:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sin y + y \sin x}{x \cos y - \cos x} = \frac{\sin y + y \sin x}{\cos x - x \cos y}.$$

Функціи трехъ и болѣе перемѣнныхъ.

И для функцій трехъ и болѣе перемѣнныхъ мы получаемъ частныя производныя, если всѣ аргументы за исключеніемъ одного предположить постоянными и дифференцировать по оставшемуся перемѣнному аргументу. Повтореніе соображеній, сдѣланныхъ по поводу дифференцированія функціи двухъ перемѣнныхъ, даетъ и при большемъ числѣ аргументовъ аналогичные результаты. Такъ мы получаемъ для функціи трехъ перемѣнныхъ

$$u = f(x,y,z) \qquad \ldots\ldots \qquad (70)$$

полный дифференціалъ

$$du = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz,$$

если ради краткости пропустить обозначеніе аргументовъ; или въ другомъ видѣ

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz.$$

Если въ формулѣ (70) y и z суть функціи x, то и u будетъ функціей одной только независимой перемѣнной x, производную которой можно найти по формулѣ

$$\frac{du}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx}\;\ldots\ldots\;(71)$$

Примѣръ: $u=x^{(x^x)}$ . . . . (72)

Производную можно опредѣлить, пользуясь уравненіемъ (71). Мы полагаемъ:

$$u=x^{(y^z)},\ \text{гдѣ}\quad y=x,\ z=x\;\ldots\ldots(73)$$

$$\frac{du}{dx}=y^z x^{y^z-1}+x^{(y^z)}\ln x.zy^{z-1}\frac{dy}{dx}+x^{(y^z)}\ln x.y^z\ln y\frac{dz}{dx}.$$

Подставляя теперь x вмѣсто y и z, по уравненіямъ (73), получимъ:

$$\frac{du}{dx}=x^x.x^{x^x-1}+x^{(x^x)}\ln x.x.x^{x-1}+x^{(x^x)}\ln x.x^x\ln x=$$

$$=x^x x^{(x^x-1)}+x^{(x^x)}x^x\ln x+x^{(x^x)}x(\ln x)^2=$$

$$=x^{(x^x)}x^x\left(\frac{1}{x}+\ln x+(\ln x)^2\right).$$

Можно было бы опредѣлить производную, логариѳмируя два раза первоначальное уравненіе (72)

$$\ln u=x^x\ln x,$$

$$\ln(\ln u)=x\ln x+\ln(\ln x)$$

$$\ln(\ln u)-x\ln x-\ln(\ln x)=0.$$

Полученное уравненіе опредѣляетъ u какъ неявную функцію x. Если лѣвую часть обозначаютъ черезъ $f(x,u)$, то

$$\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}=-\ln x-x\cdot\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}=-\ln x-1-\frac{1}{x\ln x},$$

$$\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}=\frac{1}{u\ln u}=\frac{1}{x^{(x^x)}\,x^x\ln x}.$$

Отсюда, по формулѣ (65):

$$\frac{du}{dx}=\left(\ln x+1+\frac{1}{x\ln x}\right)x^{(x^x)}x^x\ln x=x^{(x^x)}x^x\left((\ln x)^2+\ln x+\frac{1}{x}\right).$$

Частныя производныя второго порядка.

Пусть $z = f(x, y)$.

Мы знаемъ, что если дифференцировать эту функцію, полагая постояннымъ сначала y, потомъ x, то получимъ частныя производныя по x и по y:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}.$$

Эти два выраженія въ свою очередь представляютъ нѣкоторыя функціи двухъ перемѣнныхъ x и y, слѣдовательно ихъ также можно дифференцировать по x и по y. Полученныя такимъ образомъ производныя наз. вторыми частными производными, или частными производными второго порядка. Такъ если первую частную производную дифференцировать по x, то полученная производная обозначается:

$$\frac{\partial \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}}{\partial x} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}.$$

Если же дифференцировать ту же производную по y, то получимъ:

$$\frac{\partial \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}}{\partial y} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x . \partial y}.$$

Теперь дифференцируемъ другую частную производную сначала по x, потомъ по y:

$$\frac{\partial \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}}{\partial x} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y . \partial x}; \quad \frac{\partial \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}}{\partial y} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}.$$

Такимъ образомъ мы получаемъ четыре частныя производныя второго порядка.

Примѣръ I. $f(x, y) = y^x$.

Частныя производныя будутъ:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=y^x\ln y;\quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=xy^{x-1}.$$

Производныя второго порядка получаются въ формѣ:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}=y^x(\ln y)^2,\quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\cdot\partial y}=xy^{x-1}\ln y+y^{x-1};$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x}=y^{x-1}+xy^{x-1}\ln y,\quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}=x(x-1)y^{x-2}.$$

Примѣръ II. $f(x,y)=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

Находимъ сперва частныя производныя перваго порядка

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot y\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{y}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

Вторыя частныя производныя будутъ:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2};\quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\cdot\partial y}=\frac{-(x^2+y^2)+2y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\cdot\partial x}=\frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)}.$$

Мы въ обоихъ примѣрахъ имѣемъ:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\cdot\partial y}=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\cdot\partial x}.$$

т.е. мы собственно получаемъ не четыре, а три частныхъ производныхъ второго порядка. По опредѣленію производной мы можемъ написать:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x.\partial y}=\frac{\partial\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)}{\partial y}=\lim_{\Delta y=0}\frac{\frac{\partial f(x,y+\Delta y)}{\partial x}-\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}}{\Delta y}=$$

$$=\lim_{\Delta y=0}\left\{\frac{\lim\limits_{\Delta x=0}\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)}{\Delta x}-\lim\limits_{\Delta x=0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}}{\Delta y}\right\}$$

$$=\lim_{\Delta y=0}\left\{\lim_{\Delta x=0}\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)-f(x+\Delta x,y)+f(x,y)}{\Delta x.\Delta y}\right\}\ldots(74)$$

Это выраженіе совершенно симметрично по отношенію къ x и y т.е. если переставить x и y, то оно не измѣнится. Изъ этого слѣдуетъ, что мы для $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y . \partial x}$ получимъ такое же самое выраженіе. На основаніи этого уже можно заключить, что при частныхъ примѣрахъ мы не случайно получили

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x . \partial y} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y . \partial x} \quad \ldots\ldots \quad (75)$$

но что эта теорема болѣе общая.

Слѣдуетъ впрочемъ замѣтить, что разница при вычисленіи этихъ производныхъ по формулѣ (74) состоитъ въ томъ, что при опредѣленіи $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \cdot \partial y}$ сначала опредѣляется предѣлъ при $\Delta x = 0$, а потомъ предѣлъ при $\Delta y = 0$; при нахожденіи же $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \cdot \partial x}$ опредѣленіе предѣловъ производится въ обратномъ порядкѣ. Дѣйствительно, вслѣдствіе этого обстоятельства уравненіе (75) въ нѣкоторыхъ случаяхъ, изслѣдованіемъ которыхъ мы не займемся, теряетъ свою силу.

Безконечные ряды.

Пусть намъ данъ рядъ величинъ, который по нѣкоторому закону можно продолжать сколь угодно далеко

$$u_1, u_2, u_3, \ldots\ldots$$

Складывая эти величины, получимъ выраженіе, называемое **безконечнымъ рядомъ**:

$$\sum_{r=1}^{\infty} u_r = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (76)$$

Слагаемыя этой суммы называются его членами.

Примѣръ разложенія функціи въ безконечный рядъ мы получимъ, если раздѣлимъ 1 на $1-x$; тогда

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+ \ldots \ldots \ldots \quad (77).$$

Если принять $x = \frac{2}{5}$, то $\frac{1}{1-x} = \frac{5}{3}$.

Подставляя теперь значеніе x въ правую часть уравненія (77), получимъ слѣдующія значенія для отдѣльныхъ членовъ:

$$
\begin{aligned}
1 &= 1{,}0000 \\
x &= 0{,}4000 \\
x^2 &= 0{,}1600 \\
x^3 &= 0{,}0640 \\
x^4 &= 0{,}0256 \\
x^5 &= 0{,}0102 \\
x^6 &= 0{,}0041 \\
x^7 &= 0{,}0016 \\
x^8 &= 0{,}0006 \\
x^9 &= 0{,}0002 \\
x^{10} &= 0{,}0001.
\end{aligned}
$$

Складывая, получимъ: $1+x+x^2+\ldots = 1{,}6666$, т.е. получимъ выраженіе, которое съ точностью 0,0001 даетъ намъ численное значеніе лѣвой части равенства (77).

Пусть теперь $x = 2$; если опять подставить это значеніе въ уравненіе (77), то получимъ

$$-1 = 1+2+4+8+ \ldots = \infty.$$

Очевидно, мы получаемъ парадоксъ, ибо -1 не можетъ равняться ∞.

Полагая $x = -1$, получаемъ:

$$\frac{1}{2} = 1-1+1-1+1- \ldots$$

т.е. опять безсмыслицу, ибо правая часть равна 1 или 0, въ зависимости отъ того, беремъ мы нечетное или четное число членовъ. Чтобы объяснить полученные парадоксы, необходимо установить понятіе о СХОДИМОСТИ РЯДОВЪ. Ряды бываютъ двоякаго рода: СХОДЯЩІЕСЯ и РАСХОДЯЩІЕСЯ. Безконечный рядъ называется сходящимся, если сумма n первыхъ членовъ его, при безконечномъ увеличеніи n, стремится къ опредѣленному конечному предѣлу. Въ противномъ случаѣ онъ называется расходящимся.

Обозначимъ сумму безконечнаго ряда (76) черезъ S, сумму n первыхъ членовъ черезъ S_n, такъ что

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots + u_n .$$

Если назовемъ сумму остальныхъ членовъ черезъ R_n, то

$$R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (78)$$

и $S = S_n + R_n$.

R_n называется ОСТАТОЧНЫМЪ ЧЛЕНОМЪ ряда.

По опредѣленію рядъ будетъ сходиться, если

$$\lim_{n=\infty} S_n = A,$$

гдѣ A имѣетъ опредѣленное конечное значеніе, которое впрочемъ, будетъ равняться S.

Если сумма n первыхъ членовъ стремится къ предѣлу, то остаточный членъ стремится къ нулю:

$$\lim_{n=\infty} R_n = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (79).$$

Ясно также, что условіе (79) не только необходимо, но и достаточно, чтобы рядъ былъ сходящимся.

Примѣръ. Пусть дана геометрическая прогрессія

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (80)$$

Рядъ будетъ сходиться, если сумма

$$S_n = 1 + x + x^2 + \ldots\ldots + x^{n-1}$$

стремится къ предѣлу при безконечномъ увеличеніи n.

По извѣстной формулѣ элементарной математики

$$S_n = \frac{x^n-1}{x-1} = \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x} \ . \ . \ . \ . \ . (81)$$

отсюда

$$\lim_{n=\infty} S_n = \frac{1}{1-x} - \lim_{n=\infty} \frac{x^n}{1-x} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . (82).$$

Очевидно S_n только тогда будетъ имѣть опредѣленный конечный предѣлъ, если вычитаемое $\frac{x^n}{1-x}$ имѣетъ такой предѣлъ; но послѣднее возможно только при $|x| < 1$, ибо тогда числитель дроби $\frac{x^n}{1-x}$ будетъ безпредѣльно уменьшаться при увеличенiи n; такъ что

$$\lim_{n=\infty} \frac{x^n}{1-x} = 0.$$

Итакъ, если $|x| < 1$, то рядъ (80) сходится и сумма его, по формулѣ (82), равняется первоначальной функцiи $\frac{1}{1-x}$.

Если же $|x| > 1$, то $|x^n|$ безконечно увеличивается и предѣла не существуетъ, т.е. рядъ расходится.

Пусть теперь $x = +1$, тогда знаменатель выраженiя $\frac{x^n}{1-x}$ равенъ нулю и выраженiе безконечно велико, т.е. S_n не имѣетъ опредѣленнаго предѣла; слѣдовательно рядъ (80) будетъ расходиться.

Если $x = -1$, то

$$S_n = 1-1+1-1+ \ . \ . \ . \pm 1,$$

и сумма S_n будетъ равна единицѣ или нулю, смотря по тому, ограничимся ли мы нечетнымъ или четнымъ числомъ членовъ. Такой рядъ называется **колебательнымъ**. Такъ какъ въ этомъ случаѣ не существуетъ опредѣленнаго предѣла, то колебательный рядъ разсматриваютъ, какъ частный случай расходящагося ряда. Такимъ образомъ мы видимъ, что рядъ (80), смотря по значенiю x, можетъ быть сходящимся или расходящимся и можно сказать, что для того, чтобы разложеніе дало вѣрный результатъ, необходимо, чтобы рядъ былъ сходящимся.

Мы нашли, что въ случаѣ сходящагося ряда

$$\lim_{n=\infty} R_n = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (83).$$

Для этого необходимо, чтобы члены его u_n при безконечномъ увеличеніи n стремились къ нулю:

$$\lim_{n=\infty} u_n = 0.$$

Но этого условія еще недостаточно, для того, чтобы рядъ былъ сходящійся, въ чемъ легко убѣдиться на примѣрѣ гармоническаго ряда

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\ldots.$$

Хотя здѣсь члены безпредѣльно уменьшаются, однако рядъ этотъ не будетъ сходящимся. Для доказательства разложимъ рядъ на безконечное число слагаемыхъ слѣдующимъ образомъ:

$$1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{9}\ldots+\frac{1}{15}\right)+\ldots$$

Каждое изъ этихъ слагаемыхъ, больше $\frac{1}{2}$:

$$1 > \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3} > \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7} > \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{15} > \frac{1}{2},$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

Такъ какъ число этихъ слагаемыхъ безконечно-велико, то, складывая ихъ, получимъ величину безконечно-большую, т.е. сумма n первыхъ членовъ, при безконечномъ увеличеніи n, не имѣетъ конечнаго предѣла, вслѣдствіе чего рядъ расходится, хотя члены безконечно уменьшаются.

Это условіе будетъ достаточно, если члены ряда попеременно положительны и отрицательны, по абсолютной величине убываютъ и стремятся къ нулю.

Докажемъ эту теорему. Данный рядъ пусть будетъ

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots,$$

причемъ всѣ u_r положительны и, по крайней мѣрѣ начиная съ нѣкотораго мѣста,

$$u_{n+1} > u_{n+2} > u_{n+3} > \ldots \quad \ldots \qquad (84).$$

Можно положить, что первый членъ остаточнаго члена R_n положителенъ, ибо, если бы онъ былъ отрицателенъ, то мы могли бы всѣ члены ряда умножить на -1 и изслѣдовать сходимость полученнаго такимъ образомъ новаго ряда.

$$R_n = u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - \ldots$$

Остаточный членъ мы можемъ представить и въ такихъ видахъ:

$$R_n = (u_{n+1} - u_{n+2}) + (u_{n+3} - u_{n+4}) + \ldots$$

$$R_n = u_{n+1} - (u_{n+2} - u_{n+3}) - (u_{n+4} - u_{n+5}) - \ldots$$

Вслѣдствіе неравенствъ (84) всѣ слагаемыя въ скобкахъ отрицательны и поэтому съ одной стороны

$$R_n > 0,$$

а съ другой

$$R_n < u_{n+1},$$

такъ что R_n лежитъ между 0 и u_{n+1}:

$$0 < R_n < u_{n+1}.$$

Но по нашему предположенію общій членъ u_{n+1} при неограниченномъ увеличеніи числа n стремится къ нулю, поэтому и

$$\lim_{n=\infty} R_n = 0,$$

изъ чего слѣдуетъ сходимость даннаго ряда.

Часто для опредѣленія сходимости ряда сравниваютъ его съ другимъ рядомъ, сходимость котораго извѣстна.

Пусть даны два ряда:

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots,$$
$$T = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots\ldots,$$

положимъ, что, начиная съ нѣкотораго мѣста, члены ихъ положительны и каждый членъ v_r больше соотвѣтственнаго u_r или въ крайнемъ случаѣ равенъ ему

$$v_r \geqq u_r \quad \ldots\ldots\ldots \quad (85).$$

Пусть, кромѣ того дано, что рядъ T сходится. Докажемъ, что въ такомъ случаю и рядъ S также сходится.

Съ этою цѣлью разложимъ каждый рядъ на сумму n первыхъ членовъ и остаточный членъ:

$$S = S_n + R_n,$$
$$T = T_n + U_n,$$

при чемъ $R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots.$

$$U_n = v_{n+1} + v_{n+2} + v_{n+3} + \ldots.$$

На основаніи условія (85), если n выбирается только достаточно большимъ, можемъ написать слѣдующій рядъ неравенствъ

$$u_{n+1} \leqq v_{n+1}$$
$$u_{n+2} \leqq v_{n+2}$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

Складывая ихъ получимъ

$$R_n \leqq U_n.$$

Предѣлъ U_n, вслѣдствіе сходимости ряда T, равенъ нулю, слѣдовательно, такъ какъ R_n заключается между нулемъ и U_n, то и

$$\lim_{n=\infty} R_n = 0.$$

Итакъ предѣлъ остаточнаго члена ряда S равенъ нулю, слѣдовательно рядъ $u_1+u_2+u_3+\ldots$ долженъ сходиться. Съ другой стороны, если второй рядъ расходящійся, и члены его меньше членовъ перваго ряда, то и первый рядъ будетъ расходиться, такъ какъ въ противномъ случаѣ мы получили бы противорѣчіе только что доказанной теоремѣ.

На послѣдней теоремѣ основывается теорема Коши (Cauchy), которая часто и называется теоремою Даламбера (D'Alembert): Если въ безконечномъ рядѣ, состоящемъ изъ положительныхъ членовъ, начиная съ нѣкотораго мѣста, отношеніе каждаго члена къ своему предыдущему не превышаетъ нѣкотораго количества, меньшаго единицы, то рядъ сходится.

Пусть данный рядъ:

$$u_1+u_2+u_3+\ldots\ldots;$$

тогда, начиная съ нѣкотораго мѣста, всегда

$$\frac{u_{m+1}}{u_m}\leqq k<1.$$

Изъ этого неравенства слѣдуетъ

$$u_{m+1}\leqq k\,u_m,$$

или, придавая m значенія $n, n+1, n+2, \ldots,$

$$\begin{aligned} &u_{n+1}\leqq k\,u_n\\ &u_{n+2}\leqq k\,u_{n+1}\leqq k^2u_n\\ &u_{n+3}\leqq k\,u_{n+2}\leqq k^3u_n\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Сравнивая теперь данный рядъ

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+u_{n+1}+u_{n+2}+u_{n+3}+\ldots \qquad (86)$$

съ рядомъ

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+k\,u_n+k^2u_n+k^3u_n+\ldots, \qquad (87)$$

мы замѣчаемъ, что, начиная съ нѣкотораго мѣста, члены ряда (86) меньше соотвѣтственныхъ членовъ ряда (87) или въ крайнемъ случаѣ равны имъ. Кромѣ того рядъ (87) сходится какъ геометрическая прогрессія, знаменатель которой меньше единицы (первые члены, не принадлежащіе къ прогрессіи, не мѣшаютъ), и имѣетъ сумму

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + \frac{u_n}{1-k}.$$

По этому, по теоремѣ на стр. 203 и данный рядъ (86) сходится.

Если же, начиная съ нѣкотораго мѣста, всегда

$$\frac{u_{m+1}}{u_m} \geqq 1,$$

то рядъ изъ положительныхъ членовъ $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ расходится, ибо члены его тогда увеличиваются и по этому не стремятся къ нулю.

Докажемъ еще теорему относительно знакоперемѣннаго ряда, т.е. ряда, члены котораго не имѣютъ всѣ одинъ и тотъ же знакъ:

Знакоперемѣнный рядъ сходится, если рядъ абсолютныхъ значеній его членовъ сходится.

Пусть данъ знакоперемѣнный рядъ

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots \quad \ldots \quad (88).$$

По предположенію рядъ

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots \quad \ldots \quad (89)$$

сходится, по этому его остаточный членъ

$$U_n = |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + |u_{n+3}| + \ldots$$

стремится къ нулю. Сравнимъ съ нимъ остаточный членъ ряда (88)

$$R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots$$

Мы имѣемъ неравенства

$$0 < |R_n| = |u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots| < |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \ldots = U_n,$$

т.е. $|R_n|$ содержится между 0 и U_n:

$$0 < |R_n| < U_n$$

Въ виду сходимости ряда (89)

$$\lim_{n=\infty} U_n = 0,$$

по этому и

$$\lim_{n=\infty} |R_n| = 0$$

и вмѣстѣ съ тѣмъ

$$\lim_{n=\infty} R_n = 0,$$

изъ чего слѣдуетъ сходимость даннаго ряда (88).

Не слѣдуетъ однако думать, что изъ расходимости ряда (89) всегда слѣдуетъ расходимость ряда (88).

Послѣдняя теорема даетъ намъ возможность распространить теорему Коши на знакоперемѣнный рядъ. По послѣдней теоремѣ знакоперемѣнный рядъ (88) будетъ сходиться, если рядъ (89) сходится. Примѣняя къ этому послѣднему ряду теорему Коши, мы можемъ сказать, что онъ будетъ сходиться, если можно найти такое положительное число k меньше 1, чтобы для всѣхъ членовъ, начиная съ нѣкотораго мѣста, было исполнено неравенство

$$\frac{|u_{m+1}|}{|u_m|} \leqq k < 1,$$

вмѣсто чего и можно написать

$$\left|\frac{u_{m+1}}{u_m}\right| \leqq k < 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (90).$$

Если же для всѣхъ членовъ, начиная съ нѣкотораго мѣста,

$$\left|\frac{u_{m+1}}{u_m}\right| \geqq 1, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (91)$$

то общій членъ u_m не стремится къ нулю, т.е. рядъ

(88) расходится.

Такимъ образомъ мы получили обобщенную теорему Коши: Если въ безконечномъ рядѣ, начиная съ нѣкотораго мѣста, отношенiе каждаго члена къ своему предыдущему, по абсолютной величинѣ, не превышаетъ нѣкотораго количества, меньшаго единицы, то рядъ сходится. Если же это отношенiе, начиная съ нѣкотораго мѣста, по абсолютной величинѣ всегда $\geqq 1$, то рядъ расходится.

Проще всего примѣненiе этой теоремы, когда указанное отношенiе стремится къ предѣлу:

$$\lim_{n=\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \alpha .$$

Такъ какъ въ такомъ случаѣ при достаточно большихъ значенiяхъ n, дробь $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ произвольно мало будетъ отличаться отъ α, то при $\alpha < 1$, будетъ исполнено неравенство (90), а при $\alpha > 1$ неравенство (91) для всѣхъ значенiй начиная съ нѣкотораго мѣста. Изъ этого мы получаемъ теорему: Если для безконечнаго ряда $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$

$$\lim_{n=\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \alpha ,$$

то при $\alpha < 1$ рядъ сходится, при $\alpha > 1$ онъ расходится, а при $\alpha = 1$ вопросъ остается открытымъ.

Теорема Ролле (Rolle) и теорема о среднемъ значенiи функцiи.

Теорема Ролле: Пусть дана функцiя $f(x)$, однозначная непрерывная и конечная въ промежуткѣ (a, b) имѣющая въ этомъ промежуткѣ производную

$\varphi'(x)$ однозначную и непрерывную. Если тогда $\varphi(a)=\varphi(b)$, то въ этомъ промежуткѣ имѣется такое значеніе $x=c$, для котораго производная равна нулю: $\varphi'(c)=0$.

Какъ извѣстно,

$$\varphi'(x)=\lim_{\Delta x=0}\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(92).$$

Если функція возрастаетъ, то каждое слѣдующее значеніе ея больше предыдущаго, т.е.

$$\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)>0,\ \text{при}\ \Delta x>0$$

или также:

$$\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}>0,$$

что справедливо при всякомъ положительномъ Δx. Если перейти къ предѣлу $\Delta x=0$, то на основаніи уравненія (92), въ случаѣ возрастанія функціи, первая производная ея положительна или въ крайнемъ случаѣ нуль. Подобными же разсужденіями мы находимъ, что въ случаѣ убыванія функціи ея первая производная отрицательна или въ крайнемъ случаѣ нуль.

Если функція $\varphi(x)$ во всемъ промежуткѣ (a,b) постоянна, то ея производная во всѣхъ точкахъ этого промежутка равна нулю и наша теорема справедлива. Если же $\varphi(x)$ принимаетъ различныя значенія напр. такія, которыя больше чѣмъ $\varphi(a)$, то она внутри промежутка должна сперва возрастать, но такъ какъ $\varphi(a)=\varphi(b)$, то она потомъ должна опять убывать. Должна, значитъ, существовать такая точка $x=c$, лежащая между a и b, въ которой наша функція изъ возрастающей переходитъ въ убывающую. По вышеизложенному тогда производная $\varphi'(x)$ отъ положительныхъ значеній переходитъ къ отрицательнымъ, что ввиду непрерывности ея возможно только такъ, что $\varphi'(c)=0$. Подобнымъ образомъ мы получаемъ $\varphi'(c)=0$ тогда, когда $\varphi(x)$ въ данномъ промежуткѣ сперва убываетъ.

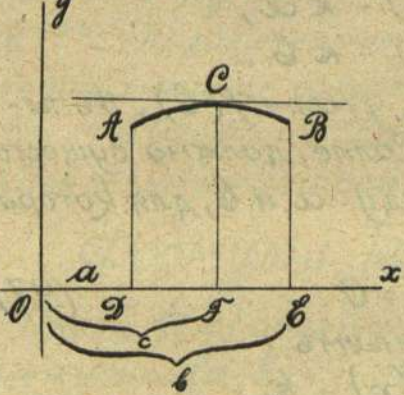
Такимъ образомъ, если $\varphi(a)=\varphi(b)$, и исполнены еще другія предположенія теоремы Ролле, то для x всегда можно найти такое значеніе между a и b

$$x = a + \vartheta(b-a),$$

гдѣ ϑ положительная правильная дробь, что

$$\varphi'(a+\vartheta(b-a)) = 0.$$

Какъ извѣстно, $\varphi'(x)$ выражаетъ tg угла наклоненія касательной кривой $y=\varphi(x)$ въ точкѣ (x,y).



Фиг. 96.

По теоремѣ Ролле, если $\varphi(x)$ и $\varphi'(x)$ обладаютъ указанными свойствами, то существуетъ всегда касательная въ промежуткѣ (a,b), параллельная оси $x^{овъ}$. На теоремѣ Ролле основана болѣе общая теорема, — такъ называемая теорема о среднемъ значеніи функціи.

Если дана функція $f(x)$, однозначная, непрерывная и конечная въ промежуткѣ (a,b) и имѣющая въ этомъ промежуткѣ производную однозначную и непрерывную, то

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'[a+\vartheta(b-a)] \cdots (93)$$

причемъ ϑ положительная, правильная дробь: $0<\vartheta<1$.

Если функція въ данномъ промежуткѣ непрерывна конечна и однозначна, то ясно, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = k, \quad \ldots\ldots (94)$$

т.е. равняется нѣкоторому опредѣленному количеству k. Найдемъ значеніе этой величины k. Уничтожая знаменателя въ уравненіи (94) получимъ:

$$f(b)-f(a) = kb - ka$$

или

$$f(b) - kb = f(a) - ka \quad \ldots (95).$$

Теперь разсмотримъ слѣдующую функцію:

$$\varphi(x) = f(x) - kx \quad \ldots (96).$$

Если подставить частныя значенія $x=a$ и $x=b$, то получимъ

$$\varphi(a) = f(a) - ka,$$

$$\varphi(b) = f(b) - kb.$$

Тогда, по уравненію (95), $\varphi(a)=\varphi(b)$. Въ такомъ случаѣ, по теоремѣ Ролле, должно существовать такое значеніе x между a и b, для котораго $\varphi'(x)=0$:

$$\varphi'[a+\vartheta(b-a)] = 0 \quad \ldots\ldots (97).$$

Но изъ уравненія (96) имѣемъ:

$$\varphi'(x) = f'(x) - k.$$

Сопоставляя это уравненіе съ уравненіемъ (97), находимъ:

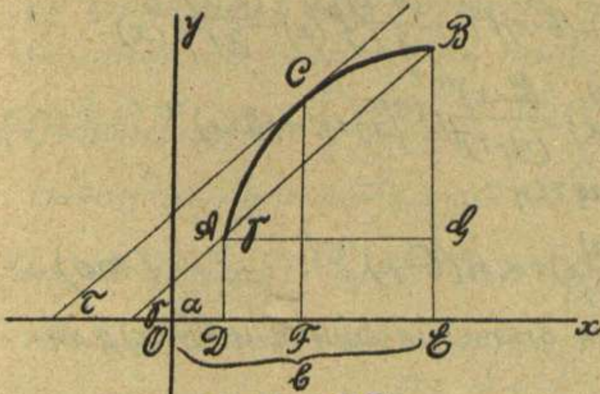
$$f'[a+\vartheta(b-a)] - k = 0,$$

отсюда

$$k = f'[a+\vartheta(b-a)].$$

Если это значеніе k подставить въ уравненіе (94), то мы получимъ уравненіе, которое требовалось доказать.

Опредѣлимъ геометрическое значеніе этого уравненія (93). Пусть AB будетъ кривая, изображающая данную функцію $f(x)$.



Фиг. 97.

Тогда
$$\mathcal{DA} = f(a),$$
$$\mathcal{EB} = f(b).$$
Проведя затѣмъ через A параллель къ оси $x^{овъ}$, находимъ
$$GB = EB - EG = EB - DA = f(b) - f(a),$$
отсюда
$$\frac{BG}{AG} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = tg\,\gamma.$$

Мы знаемъ, что геометрическое значеніе производной есть tg угла τ наклоненія касательной къ оси $x^{овъ}$. По доказанной теоремѣ, существуетъ нѣкоторое значеніе x между a и b для котораго $tg\,\tau = tg\,\gamma$, т.е. существуетъ точка между A и B, касательная которой параллельна хордѣ AB.

Формулы Тайлора и Маклорена.

Пусть $f(x)$ обозначаетъ функцію, которая въ промежуткѣ (a, b) однозначна, конечна и непрерывна вмѣстѣ со своими производными до $n^{го}$ порядка включительно. Тогда выраженіе
$$\frac{f(b)-f(a)-(b-a)f'(a)-\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)-\cdots-\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)}{(b-a)^n}$$
имѣетъ нѣкоторое опредѣленное конечное значеніе k, такъ что
$$f(b)-f(a)-(b-a)f'(a)-\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)-\cdots-\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)-k(b-a)^n=0.$$

Введемъ вспомогательную функцію
$$\Phi(x)=f(b)-f(x)-(b-x)f'(x)-\frac{(b-x)^2}{2!}f''(x)-\cdots-\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)-k(b-x)^n \ldots (99)$$

и вычислимъ производную ея:

$$\Phi'(x) = -f'(x) + f'(x) - (b-x)f''(x) + (b-x)f''(x) - \frac{(b-x)^2}{2!}f'''(x) + \frac{(b-x)^2}{2!}f'''(x) - \cdots$$

$$\cdots + \frac{(b-x)^{n-2}}{(n-2)!}f^{(n-1)}(x) - \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x) + kn(b-x)^{n-1}.$$

По сокращенiи остается:

$$\Phi'(x) = -\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x) + kn(b-x)^{n-1} \quad \ldots\ldots (100).$$

Вычислимъ частныя значенiя функцiи $\Phi(x)$ для $x=a$ и $x=b$.

$$\Phi(a) = f(b) - f(a) - (b-a)f'(a) - \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) - \cdots - \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) - k(b-a)^n;$$

сравнивая это выраженiе съ уравненiемъ (98), мы замѣчаемъ, что

$$\Phi(a) = 0.$$

Подставляя въ уравненiе (99) $x=b$, мы получаемъ

$$\Phi(b) = 0.$$

Отсюда слѣдуетъ

$$\Phi(a) = \Phi(b).$$

Подробное изслѣдованiе функцiй (99) и (100) показываетъ, что и другiя предположенiя теоремы Ролле исполнены, такъ что

$$\Phi'(c) = 0 \text{ при } a < c < b.$$

Придавая поэтому x въ уравненiи (100) частное значенiе c, мы получаемъ

$$0 = -\frac{(b-c)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(c) + kn(b-c)^{n-1};$$

откуда

$$k = \frac{f^{(n)}(c)}{n!},$$

или

$$k = \frac{f^{(n)}[a+\vartheta(b-a)]}{n!},$$

гдѣ

$$0 < \vartheta < 1.$$

Подставимъ вмѣсто k найденное выраженіе въ формулу (98), причемъ перенесемъ всѣ члены, начиная со второго, въ правую часть уравненія:

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}[a+\vartheta(b-a)].$$

Наконецъ напишемъ еще $a+x$ вмѣсто b:

$$f(a+x)=f(a)+xf'(a)+\frac{x^2}{2!}f''(a)+\frac{x^3}{3!}f'''(a)+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(a+\vartheta x),\ldots(101)$$

причемъ ϑ обозначаетъ положительную правильную дробь:

$$0<\vartheta<1.$$

Формула (101) носитъ названіе формулы Тайлора, а послѣдній членъ ея

$$R_n=\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(a+\vartheta x)\quad\ldots\ldots\ldots(102)$$

— остаточнаго члена въ формѣ Лагранжа.

Если мы въ формулахъ (101) и (102) придаемъ a частное значеніе 0, то получимъ формулу Маклорена

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f'''(0)+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\vartheta x)\ldots(103)$$

съ остаточнымъ членомъ

$$R_n=\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\vartheta x)\quad\ldots\ldots\ldots(104)$$

Ряды Тайлора и Маклорена. Разложеніе e^x въ безконечный рядъ.

Если изслѣдуемая функція $f(x)$ имѣетъ производныя всѣхъ порядковъ и если кромѣ того остаточный членъ (102) при неограниченномъ увеличеніи индекса n стремится къ нулю, то мы получаемъ разложеніе $f(a+x)$ въ безконечный рядъ, такъ наз. рядъ Тайлора

$$f(a+x)=f(a)+xf'(a)+\frac{x^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(a)+\ldots\ldots(105).$$

Подобнымъ образомъ мы находимъ рядъ Маклорена:

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\ldots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\ldots\ldots\ldots(106).$$

Для примѣра разложимъ e^x въ безконечный рядъ. Для этого мы полагаемъ

$$f(x)=e^x.$$

Производныя всѣхъ порядковъ равны первоначальной функціи:

$$f'(x)=f''(x)=f'''(x)=\ldots\ldots=e^x.$$

Придадимъ x частное значеніе 0:

$$f(0)=f'(0)=f''(0)=\ldots\ldots=e^0=1.$$

Замѣнимъ въ формулѣ (106) $f(x), f(0), f'(0), \ldots$ ихъ частными значеніями e^x и 1, тогда получимъ разложеніе e^x въ безконечный рядъ:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\quad(107).$$

Для изслѣдованія сходимости мы опредѣляемъ предѣлъ двухъ смежныхъ членовъ

$$\lim_{n=\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}\right|=\lim_{n=\infty}\left|\frac{x^{n+1}\cdot 1.2.3\cdots n}{1.2.3\ldots n.(n+1)x^n}\right|=\lim_{n=\infty}\left|\frac{x}{n+1}\right|=0$$

По послѣдней теоремѣ о сходимости безконечныхъ рядовъ, стр. 207, рядъ (107) сходится при всѣхъ значеніяхъ x.

Придадимъ въ формулѣ (107) x частное значеніе $x=1$, тогда получимъ

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots$$

и посредствомъ этого разложенія можемъ легко найти числовое значеніе e.

$$
\begin{aligned}
1+1 &= 2\\
\frac{1}{2!} &= 0,5\\
\frac{1}{3!} &= 0,1666667\\
\frac{1}{4!} &= 0,0416667\\
\frac{1}{5!} &= 0,0083333\\
\frac{1}{6!} &= 0,0013889\\
\frac{1}{7!} &= 0,0001984\\
\frac{1}{8!} &= 0,0000248\\
\frac{1}{9!} &= 0,0000027\\
\frac{1}{10!} &= \underline{0,0000003}\\
e &= 2,7182818
\end{aligned}
$$

Для оцѣнки погрѣшности, получаемой вслѣдствіе того, что мы беремъ только конечное число членовъ и притомъ каждый членъ только съ извѣстною точностью, мы пользуемся остаточнымъ членомъ (104). Такъ какъ $f^{(n)}(x) = e^x$, то $f^{(n)}(\vartheta x) = e^{\vartheta x}$ и

$$R_n = \frac{x^n e^{\vartheta x}}{n!}.$$

На стр. 148 мы нашли, что $e < 4$. Пользуясь кромѣ того тѣмъ, что $0 < \vartheta < 1$, и полагая, согласно нашей задачѣ, $x = 1$, $n = 11$, мы получаемъ

$$R_n = \frac{e^\vartheta}{11!} < \frac{4^\vartheta}{11!} < \frac{4}{11!} < 0,0000001,$$

такъ что погрѣшность въ нашемъ опредѣленіи числа e меньше $0,0000001$.

Разложеніе функцій $\sin x$ и $\cos x$.

Чтобы разложить $\sin x$ въ безконечный рядъ мы полагаемъ $f(x) = \sin x$ и находимъ послѣдовательно

$$\begin{array}{lll} f(x) = \sin x & \text{при } x=0: & f(0) = 0 \\ f'(x) = \cos x & & f'(0) = 1 \\ f''(x) = -\sin x & & f''(0) = 0 \\ f'''(x) = -\cos x & & f'''(0) = -1 \\ f^{IV}(x) = \sin x & & f^{IV}(0) = 0 \\ \ldots\ldots & & \ldots \\ \ldots\ldots & & \ldots \end{array}$$

Если подставимъ эти значенія въ рядъ Маклорена (106), то получимъ

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \qquad (108)$$

Для изслѣдованія сходимости мы замѣчаемъ, что общій и слѣдующій за нимъ члены имѣютъ видъ

$$\pm\frac{x^n}{n!}\ , \quad \mp\frac{x^{n+2}}{(n+2)!}.$$

По этому опредѣляемъ

$$\lim_{n=\infty}\left|\frac{\mp\frac{x^{n+2}}{(n+2)!}}{\pm\ \frac{x^n}{n!}}\right| = \lim_{n=\infty}\left|\frac{x^{n+2}\,1.2.3\ldots n}{1.2.3\ldots n.(n+1)(n+2)x^n}\right| =$$

$$= \lim_{n=\infty}\frac{x^2}{(n+1)(n+2)} = 0,$$

такъ что по теоремѣ стр. 207 рядъ (108) сходится при всѣхъ значеніяхъ x.

Придадимъ x въ формулѣ (108) частное значеніе $x=1$; тогда мы получимъ $\sin 57^\circ 17' 44,''8$, такъ какъ 1 есть дуговая мѣра угла $57^\circ 17' 44,''8$.

$$\begin{array}{ll} x = 1 & \frac{x^3}{3!} = 0,166\,6667 \\ \frac{x^5}{5!} = 0,008\,3333 & \frac{x^7}{7!} = \underline{0,000\,1984} \\ \frac{x^9}{9!} = \underline{0,0000027} & \quad\ \ 0,166\,8651 \\ \quad 1,0083360 & \\ \quad \underline{0,1668651} & \\ \quad 0,8414709 & \end{array}$$

Такимъ образомъ $\sin 57°17'44'',8 = 0,8414709$.

Для оцѣнки точности мы опять пользуемся остаточнымъ членомъ (104). По стр. 184 $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$. По этому

$$R_n = \frac{x^n}{n!} \sin\left(\vartheta x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

Но всякій синусъ лежитъ между -1 и $+1$; отсюда

$$|R_n| < \left|\frac{x^n}{n!}\right|,$$

и для нашего примѣра

$$|R_{10}| < \frac{1}{10!} = 0,0000003.$$

Такъ же легко опредѣлить разложеніе $\cos x$.

$$\begin{array}{ll} f(x) = \cos x & f(0) = 1 \\ f'(x) = -\sin x & f'(0) = 0 \\ f''(x) = -\cos x & f''(0) = -1 \\ f'''(x) = \sin x & f'''(0) = 0 \\ f^{IV}(x) = \cos x & f^{IV}(0) = 1 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \end{array}$$

Подставляя эти значенія въ рядъ Маклорена (106), получаемъ

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \qquad (109)$$

Такимъ же образомъ какъ для $\sin x$ мы находимъ, что рядъ (109) сходится при всѣхъ значеніяхъ x, и что

$$R_n = \frac{x^n}{n!} \cos\left(\vartheta x + \frac{n\pi}{2}\right),$$

такъ что

$$|R_n| < \left|\frac{x^n}{n!}\right|.$$

Разложеніе логариѳмической функціи.

Разложимъ $\ln(1+x)$ въ безконечный рядъ. Для этого мы полагаемъ $f(x)=\ln x$ и находимъ послѣдовательно

$$\begin{array}{lll} f(x)=\ln x & \text{при } x=1 & f(1)=0 \\ f'(x)=\frac{1}{x} & & f'(1)=1 \\ f''(x)=-\frac{1}{x^2} & & f''(1)=-1 \\ f'''(x)=\frac{2!}{x^3} & & f'''(1)=2! \\ f^{IV}(x)=-\frac{3!}{x^4} & & f^{IV}(1)=-3! \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots \\ f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} & & f^{(n)}(1)=(-1)^{n-1}(n-1)! \end{array}$$

Эти значенія мы подставляемъ въ рядъ Тайлора (105), въ которомъ мы полагаемъ $a=1$:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\cdots \quad (110).$$

Для рѣшенія вопроса о сходимости мы опредѣляемъ предѣлъ отношенія двухъ смежныхъ членовъ

$$\pm\frac{x^n}{n}, \quad \mp\frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

$$\lim_{n=\infty}\left|\frac{\mp\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\pm\frac{x^n}{n}}\right|=\lim_{n=\infty}\left|\frac{nx}{n+1}\right|=\lim_{n=\infty}\left|\frac{x}{1+\frac{1}{n}}\right|=|x|.$$

По послѣдней теоремѣ сходимости на стр. 207 рядъ (110) сходится, когда $|x|<1$, или $-1<x<1$, такъ что съ помощью его можно вычислить только логариѳмы положительныхъ чиселъ, которыя меньше 2. Чтобы найти натуральные логариѳмы другихъ чиселъ, мы замѣняемъ въ формулѣ (110) x на $-x$ и вычитаемъ полученное такимъ образомъ уравненіе

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \cdots$$

изъ уравненія (110).

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \cdots,$$

откуда $\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right) \cdots\cdots (111).$

И этотъ рядъ сходится при $-1 < x < 1$. Такъ какъ при $x = -1$ и $x = +1$, дробь $\frac{1+x}{1-x}$ соотвѣтственно равняется 0 и ∞, то формула даетъ возможность вычисленія логариѳма всякаго числа. Чтобы напр. найти $\ln 3$, мы полагаемъ

$$\frac{1+x}{1-x} = 3,$$

откуда находимъ $x = \frac{1}{2}$, такъ что

$$\begin{aligned}
x &= 0,500\,0000 \\
\frac{x^3}{3} &= 0,041\,6667 \\
\frac{x^5}{5} &= 0,006\,2500 \\
\frac{x^7}{7} &= 0,001\,1161 \\
\frac{x^9}{9} &= 0,000\,2170 \\
\frac{x^{11}}{11} &= 0,000\,0444 \\
\frac{x^{13}}{13} &= 0,000\,0094 \\
\frac{x^{15}}{15} &= 0,000\,0021 \\
\frac{x^{17}}{17} &= 0,000\,0004 \\
\hline
\tfrac{1}{2}\ln 3 &= 0,5493061 \\
\ln 3 &= 1,0986122.
\end{aligned}$$

Биномъ Ньютона.

Положимъ теперь, что $f(x) = x^m$, такъ что

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^m & f(1) &= 1 \\
f'(x) &= m x^{m-1} & f'(1) &= m \\
f^2(x) &= m(m-1)x^{m-2} & f''(1) &= m(m-1) \\
&\cdots\cdots & &\cdots\cdots \\
f^{(n)}(x) &= m(m-1)\ldots(m-n+1)x^{m-n} & f^{(n)}(1) &= m(m-1)\ldots(m-n+1).
\end{aligned}$$

Эти значенія мы подставляемъ въ рядъ Тайлора (105), въ которомъ мы полагаемъ $a=1$:

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\ldots n}x^n + \ldots \quad (112).$$

Если m цѣлое положительное число, то всѣ производныя данной функціи $f(x)=x^m$, начиная съ $(m+1)^{ой}$ равны нулю и рядъ (112) состоитъ только изъ конечнаго числа членовъ; мы получаемъ извѣстный уже изъ элементарной алгебры биномъ Ньютона.

Если же m не цѣлое положительное число, то рядъ (112) содержитъ безконечно много членовъ и возникаетъ вопросъ о сходимости. Аналогично предыдущимъ разложеніямъ мы опредѣляемъ членъ, слѣдующій за общимъ членомъ разложенія (112)

$$\frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-n)}{1\cdot 2\ldots\ldots(n+1)}x^{n+1}$$

и вычисляемъ

$$\lim_{n=\infty}\left|\frac{\frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{1\cdot 2\ldots\ldots(n+1)}x^{n+1}}{\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1\cdot 2\ldots\ldots n}x^n}\right| = \lim_{n=\infty}\left|\frac{m-n}{n+1}x\right| = \lim_{n=\infty}\left|\frac{\frac{m}{n}-1}{1+\frac{1}{n}}x\right| = |x|.$$

По послѣдней теоремѣ сходимости рядъ (112) будетъ сходиться, когда $|x|<1$ или $-1<x<1$.

Воспользуемся разложеніемъ (112), чтобы найти $\sqrt[3]{130}$.

$$\sqrt[3]{130} = 130^{\frac{1}{3}} = (125+5)^{\frac{1}{3}} = \left[125\left(1+\frac{5}{125}\right)\right]^{\frac{1}{3}} = 5\cdot(1+0{,}04)^{\frac{1}{3}}.$$

По формулѣ (112):

$$(1+0{,}04)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}\cdot 0{,}04 + \frac{\frac{1}{3}\cdot -\frac{2}{3}}{1\cdot 2}\cdot 0{,}04^2 + \frac{\frac{1}{3}\cdot -\frac{2}{3}\cdot -\frac{5}{3}}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 0{,}04^3 + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{3}\cdot 0{,}04 - \frac{1}{9}\cdot 0{,}04^2 + \frac{5}{81}\cdot 0{,}04^3 + \cdots$$

$$= 1 + 0{,}0133333 - 0{,}0001778 + 0{,}0000040$$

$$= 1{,}0131595.$$

Такимъ образомъ

$$\sqrt[3]{130} = 5 \cdot 1{,}0131595 = 5{,}0657975.$$

Выраженія неопредѣленнаго вида.

Пусть намъ дана функція, имѣющая видъ частнаго двухъ другихъ функцій:

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (113).$$

Если существуетъ такое частное значеніе аргумента $x = a$, что одновременно

$$\varphi(a) = 0, \quad \psi(a) = 0, \quad \ldots \ldots (114)$$

то подставляя это значеніе въ уравненіе (113) получимъ:

$$f(a) = \frac{0}{0},$$

выраженіе неопредѣленное.

Если x, измѣняясь непрерывно, приближается къ значенію $x = a$, то дробь $\frac{\varphi(x)}{\psi(x}$ можетъ стремиться къ нѣкоторому предѣлу. Тогда этотъ предѣлъ называется истиннымъ значеніемъ функціи $f(x)$ въ точкѣ a.

Для отысканія этаго предѣла, придадимъ аргументу a нѣкоторое приращеніе h, тогда имѣемъ:

$$f(a+h) = \frac{\varphi(a+h)}{\psi(a+h)}.$$

Такъ какъ $\varphi(a)$ и $\psi(a)$ равны нулю, то частное не измѣнится, если вычесть эти величины изъ числителя и знаменателя:

$$f(a+h) = \frac{\varphi(a+h) - \varphi(a)}{\psi(a+h) - \psi(a)} = \frac{\frac{\varphi(a+h) - \varphi(a)}{h}}{\frac{\psi(a+h) - \psi(a)}{h}}.$$

Переходя къ предѣлу $h = 0$, въ лѣвой части получимъ искомое истинное значеніе, которое обозначимъ черезъ $f(x)_{x \to a}$, предѣлъ же правой части равенъ частному предѣловъ числителя и знаменателя. Послѣднiе суть очевидно, производныя разсматриваемыхъ функцiй:

$$\lim_{h=0} \frac{\varphi(a+h)-\varphi(a)}{h} = \varphi'(a) = \varphi'(x)_{x\to a}$$

$$\lim_{h=0} \frac{\psi(a+h)-\psi(a)}{h} = \psi'(a) = \psi'(x)_{x\to a}$$

Итакъ $f(x)_{x\to a} = \left[\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}\right]_{x\to a}$ . . . . (115),

т.е. предѣлъ частнаго $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ въ томъ случаѣ, когда $\varphi(a)=0$ и $\psi(a)=0$, опредѣляется какъ частное производныхъ числителя и знаменателя для значенiя $x=a$.

Примѣръ. Пусть требуется опредѣлить истинное значенiе частнаго:

$$f(x)=\frac{3x^2-7x+4}{x^2+x-2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (116)$$

для $x=1$. Мы получаемъ неопредѣленный видъ $\frac{0}{0}$. По этому, дифференцируя числителя и знаменателя, находимъ по формулѣ (115):

$$\left[\frac{3x^2-7x+4}{x^2+x-2}\right]_{x\to 1} = \left[\frac{6x-7}{2x+1}\right]_{x\to 1} = -\frac{1}{3}.$$

Разлагая числителя и знаменателя дроби (116) на множителей:

$$f(x)=\frac{(x-1)(3x-4)}{(x-1)(x+2)},$$

мы замѣчаемъ, что неопредѣленность происходитъ вслѣдствiе того, что числитель и знаменатель содержатъ одного и того же множителя $x-1$, который при $x=1$ обращается въ 0. Если предварительно сократить дробь на этого множителя:

$$f(x)=\frac{3x-4}{x+2},$$

то въ точкѣ $x=1$ не встрѣчается никакой неопредѣленности, и мы прямо получаемъ:

$$f(1) = -\frac{1}{3}.$$

Можетъ случиться, что первыя производныя разсматриваемыхъ функцій равны порознь нулю; тогда опять получаемъ неопредѣленное выраженіе $\frac{0}{0}$. Въ такомъ случаѣ примѣняемъ вторично наше правило, т.е. находимъ вторыя производныя данныхъ функцій:

$$f(x)_{x \to a} = \left[\frac{\varphi''(x)}{\psi''(x)}\right]_{x \to a}.$$

Если и въ этомъ случаѣ получается выраженіе $\frac{0}{0}$, то для опредѣленія истиннаго значенія $f(x)$ дифференцируемъ еще разъ и т.д., пока не дойдемъ до производныхъ одинаковаго порядка, которыя одновременно не равны нулю. Это можно доказать и при помощи ряда Тайлора.

Пусть функціи $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ и производныя ихъ до $(n-1)^{\text{го}}$ порядка включительно при $x=a$ равны нулю:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(a) = \varphi'(a) = \varphi''(a) = \cdots\cdots = \varphi^{(n-1)}(a) = 0 \\ \psi(a) = \psi'(a) = \psi''(a) = \cdots\cdots = \psi^{(n-1)}(a) = 0 \end{aligned}\right\} \cdots (117).$$

Кромѣ того положимъ, что обѣ функціи имѣютъ еще въ точкѣ $x=a$ непрерывныя производныя $n^{\text{го}}$ порядка, тогда ихъ можно разложить въ рядъ Тайлора:

$$f(a+h) = \frac{\varphi(a+h)}{\psi(a+h)} = \frac{\varphi(a) + h\varphi'(a) + \frac{h^2}{2!}\varphi''(a) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n!}\varphi^{(n)}(a+\vartheta h)}{\psi(a) + h\psi'(a) + \frac{h^2}{2!}\psi''(a) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}\psi^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n!}\psi^{(n)}(a+\vartheta_1 h)}$$

Но вслѣдствіе условія (117) всѣ члены разложеній равны нулю за исключеніемъ послѣднихъ. Отсюда слѣдуетъ что

$$f(a+h) = \frac{\frac{h^n}{n}\varphi^{(n)}(a+\vartheta h)}{\frac{h^n}{n!}\psi^{(n)}(a+\vartheta_1 h)} = \frac{\varphi^{(n)}(a+\vartheta h)}{\psi^{(n)}(a+\vartheta_1 h)} \cdots (118).$$

Если при непрерывномъ измѣненіи x, h приближается къ нулю, то получимъ:

$$f(x)_{x \to a} = \lim_{h=0} \frac{\varphi^{(n)}(a+\vartheta h)}{\psi^{(n)}(x+\vartheta_1 h)} = \frac{\varphi^{(n)}(a)}{\psi^{(n)}(a)}.$$

Такимъ образомъ, если въ нѣкоторой точкѣ $x=a$ $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ и производныя ихъ до $(n-1)^{го}$ порядка включительно равны нулю, то $\left[\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right]_{x\to a}$ равно частному $n^{хъ}$ производныхъ при $x=a$.

Мы нашли, что въ нашемъ частномъ случаѣ причиною неопредѣленности является общій множитель, который обращаетъ въ нуль числителя и знаменателя. Изъ ур-ія (118) вытекаетъ, что вообще всѣ неопредѣленности разсматриваемаго ряда получаются отъ такого множителя, который слѣдуетъ исключать. Въ общемъ случаѣ онъ получился въ видѣ $\frac{h^n}{n!}$.

Пусть требуется найти истинное значеніе выраженія:

$$f(x) = \frac{x - \sin x}{x^3} \quad \text{при } x=0.$$

Если бы мы подставили въ это выраженіе значеніе x, то, очевидно, получили бы выраженіе $\frac{0}{0}$.

Поэтому дифференцируемъ числителя и знаменателя:

$$\left[\frac{x - \sin x}{x^3}\right]_{x\to 0} = \left[\frac{1-\cos x}{3x^2}\right]_{x\to 0}.$$

Подставляя сюда $x=0$, получимъ опять $\frac{0}{0}$, вслѣдствіе чего дифференцируемъ еще разъ:

$$\left[\frac{1-\cos x}{3x^2}\right]_{x\to 0} = \left[\frac{\sin x}{6x}\right]_{x\to 0}.$$

Наконецъ находимъ третью производную числителя и знаменателя:

$$\left[\frac{\cos x}{6}\right]_{x\to 0} = \frac{1}{6}.$$

Слѣдовательно истинное значеніе нашей дроби есть $\frac{1}{6}$.

Если при частномъ значеніи $x=a$ объ функціи $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ въ выраженіи (113) дѣлаются безконечно-большими:

$$\varphi(a)=\infty \quad \psi(a)=\infty,$$

то получаемъ другой видъ неопредѣленнаго выраженія:

$$f(a)=\frac{\varphi(a)}{\psi(a)}=\frac{\infty}{\infty}.$$

Для раскрытія неопредѣленности представимъ данную функцію въ другомъ видѣ:

$$f(x)_{x\to a}=\left[\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right]_{x\to a}=\left[\frac{\frac{1}{\psi(x)}}{\frac{1}{\varphi(x)}}\right]_{x\to a}$$

Теперь выраженіе имѣетъ видъ $\frac{0}{0}$, поэтому диффиренцируемъ числителя и знаменателя:

$$f(x)_{x\to a}=\left[\frac{-\frac{\psi'(x)}{(\psi(x))^2}}{-\frac{\varphi'(x)}{(\varphi(x))^2}}\right]_{x\to a}=\left[\frac{\psi'(x)}{(\psi(x))^2}\cdot\frac{(\varphi(x))^2}{\varphi'(x)}\right]_{x\to a}=\left[\left(\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right)^2\cdot\frac{\psi'(x)}{\varphi'(x)}\right]_{x\to a}.$$

Такимъ образомъ

$$\left[\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right]_{x\to a}=\left\{\left[\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right]_{x\to a}\right\}^2\cdot\left[\frac{\psi'(x)}{\varphi'(x)}\right]_{x\to a}.$$

Сокращая обѣ части на $\left[\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right]_{x\to a}$ получимъ:

$$1=\left[\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right]_{x\to a}\cdot\left[\frac{\psi'(x)}{\varphi'(x)}\right]_{x\to a};$$

отсюда

$$\left[\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right]_{x\to a}=\left[\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}\right]_{x\to a},$$

т. е. для опредѣленія истиннаго значенія данной функціи надо, какъ и въ предыдущемъ случаѣ, найти производную числителя и раздѣлить ее на производную знаменателя.

Примѣръ I. $\left[\frac{\ln x}{x}\right]_{x\to\infty}$.

При $x=\infty$ мы получаемъ

$$\left[\frac{\ln x}{x}\right]_{x=\infty}=\frac{\infty}{\infty}.$$

По этому мы дифференцируемъ числителя и знаменателя:

$$\left[\frac{\ln x}{x}\right]_{x\to\infty}=\left[\frac{\frac{1}{x}}{1}\right]_{x\to\infty}=\left[\frac{1}{x}\right]_{x\to\infty}=0.$$

Примѣръ II.

$$\left[\frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}\right]_{x\to 0}=\left[\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}}\right]_{x\to 0}=-\left[\frac{\sin^2 x}{x}\right]_{x\to 0}=$$

$$=-\left[\frac{2\sin x\cdot\cos x}{1}\right]_{x\to 0}=0.$$

Пусть дана функція, имѣющая видъ произведенія двухъ другихъ функцій:

$$f(x)=\varphi(x)\cdot\psi(x),$$

и положимъ, что для частнаго значенія $x=a$ функціи получаютъ значенія:

$$\varphi(a)=0\ ;\ \psi(a)=\infty.$$

Тогда функція $f(x)$ получаетъ неопредѣленный видъ

$$f(a)=0\cdot\infty.$$

Для вычисленія истиннаго значенія $f(x)_{x\to a}$ можно привести эту неопредѣленность къ виду $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ слѣдующимъ образомъ:

$$f(a)=\varphi(a)\cdot\psi(a)=\frac{\varphi(a)}{\frac{1}{\psi(a)}}=\frac{0}{0},$$

$$f(a)=\frac{\psi(a)}{\frac{1}{\varphi(a)}}=\frac{\infty}{\infty}.$$

Какъ раскрываются обѣ, этого вида, неопредѣленности, намъ извѣстно.

Примѣръ. $\left[x^{\alpha}\ln x\right]_{x=0}=0\cdot\infty$, если $\alpha>0$.

Данную функцію можно преобразовать слѣдующимъ образомъ: $\left[x^{\alpha}\ln x\right]_{x\to 0}=\left[\frac{\ln x}{x^{-\alpha}}\right]_{x\to 0}=\left[\frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}}\right]_{x\to 0}=\left[\frac{x^{\alpha+1}}{-\alpha x}\right]_{x\to 0}=\left[-\frac{x^{\alpha}}{\alpha}\right]_{x\to 0}=0.$

Разсмотримъ теперь раскрытіе неопредѣленности, если данная функція равна разности двухъ другихъ, изъ которыхъ каждая при $x = a$ обращается въ безконечность

$$f(x) = \varphi(x) - \psi(x).$$

Если $\varphi(a) = \infty$ и $\psi(a) = \infty$, то

$$f(a) = \infty - \infty.$$

Преобразуя данную функцію, приводимъ ее опять къ виду $\frac{0}{0}$.

$$f(a) = \varphi(a) - \psi(a) = \frac{\frac{1}{\psi(a)} - \frac{1}{\varphi(a)}}{\frac{1}{\varphi(a)\cdot\psi(a)}} = \frac{0}{0}.$$

Примѣръ. $\left[\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}\right]_{x\to 0} = \left[\frac{x - \ln(1+x)}{x\ln(1+x)}\right]_{x\to 0} =$

$$= \left[\frac{1 - \frac{1}{1+x}}{\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}}\right]_{x\to 0} = \left[\frac{x}{(1+x)\ln(1+x) + x}\right]_{x\to 0} = \left[\frac{1}{\ln(1+x) + \frac{1+x}{1+x} + 1}\right]_{x\to 0} =$$

$$= \left[\frac{1}{\ln(1+x) + 2}\right]_{x\to 0} = \frac{1}{2}.$$

Положимъ теперь, что

$$f(x) = \varphi(x)^{\psi(x)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (119).$$

Логариѳмируя это выраженіе, получимъ:

$$\ln f(x) = \psi(x) \cdot \ln \varphi(x).$$

Отсюда

$$e^{\ln f(x)} = e^{\psi(x)\ln\varphi(x)},$$

но

$$e^{\ln f(x)} = f(x),$$

слѣдовательно

$$f(x) = e^{\psi(x)\ln\varphi(x)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (120).$$

Отсюда ясно, что $f(x)$ будетъ имѣть неопредѣленный видъ, когда показатель выраженія (120) получитъ неопредѣленный видъ. Послѣднее произойдетъ въ томъ случаѣ, если одинъ изъ множителей равенъ 0, а другой ∞.

Мы можемъ имѣть слѣдующіе три случая:

1) $\ln \varphi(a) = +\infty$, $\psi(a) = 0$, тогда $\varphi(a) = \infty$, $f(a) = \infty^0$.

2) $\ln \varphi(a) = -\infty$, $\psi(a) = 0$, $\varphi(a) = 0$, $f(a) = 0^0$

3) $\ln \varphi(a) = 0$, $\psi(a) = \infty$, $\varphi(a) = 1$, $f(a) = 1^\infty$.

Итакъ мы видимъ, что выраженіе (119) будетъ неопредѣленнымъ, когда оно имѣетъ одинъ изъ трехъ видовъ: ∞^0, 0^0, 1^∞, и что раскрытіе этой неопредѣленности сводится къ раскрытію неопредѣленности въ показатель выраженія (120).

Примѣръ I. $\left[\left(\frac{1}{x}\right)^{tg\,x}\right] = \left[e^{tg\,x \cdot \ln\frac{1}{x}}\right] =$

$= e^{[tg\,x(\ln 1 - \ln x)]_{x\to 0}} = e^{\left[\frac{-\ln x}{ctg\,x}\right]_{x\to 0}} = e^{\left[\frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}}\right]_{x\to 0}} =$

$= e^{\left[\frac{\sin^2 x}{x}\right]_{x\to 0}} = e^{[2\sin x\cos x]_{x\to 0}} = e^0 = 1.$

Примѣръ II. $[x^x]_{x\to 0} = [e^{x\ln x}]_{x\to 0} = e^{\left[\frac{\ln x}{x^{-1}}\right]_{x\to 0}} =$

$= e^{\left[\frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}}\right]_{x\to 0}} = e^{[-x]_{x\to 0}} = e^0 = 1.$

Примѣръ III. $\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]_{x\to 0} = \left[e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}\right]_{x\to 0} =$

$= e^{\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]_{x\to 0}} = e^{\left[\frac{1}{1+x}\right]_{x\to 0}} = e^1 = e.$

Характеръ функціи.

(Возрастаніе, убываніе, maximum и minimum).

Пусть дана функція $y = f(x)$. Разсмотримъ ее въ точкѣ $x = a$, полагая что вблизи этой точки ее можно разложить по формулѣ Тайлора.

Намъ извѣстно (стр. 208), что если $f'(a) > 0$, то функція возрастаетъ если $f'(a) < 0$, то она убываетъ въ точкѣ $x = a$.

Положимъ теперь, что $f'(a) = 0$, и разсмотримъ сейчасъ общій случай, когда производныя до $(n-1)^{\text{аго}}$ порядка включительно равны нулю, а производная

$n^{\text{ой}}$ порядка отлична отъ нуля

$$f'(a)=f''(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0,\ f^{(n)}(a)\neq 0 \quad \ldots \quad (121).$$

Разложимъ функцію по формулѣ Тайлора (101):

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\cdots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a+\vartheta h)$$

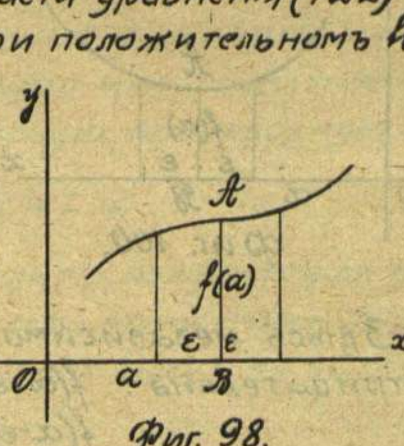
Вслѣдствіе условія (121) всѣ производныя за исключеніемъ $n^{\text{ой}}$, уничтожаются:

$$f(a+h)-f(a)=\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a+\vartheta h) \quad \ldots\ldots \quad (122).$$

Опредѣлимъ знакъ правой части уравненія. Если $n^{\text{ая}}$ производная непрерывна вблизи точки $x=a$, то при достаточно маломъ h, $f^{(n)}(a+\vartheta h)$ произвольно-мало отличается отъ $f^{(n)}(a)$ и слѣдовательно имѣетъ тотъ же знакъ. Вслѣдствіе этого, при достаточно-маломъ h, второй множитель правой части будетъ положителенъ, если $f^{(n)}(a)>0$ и отрицателенъ, если $f^{(n)}(a)<0$. Для опредѣленія же знака перваго множителя надо различать два случая: n число нечетное и n число четное. Въ первомъ случаѣ знакъ $\frac{h^n}{n!}$ зависитъ отъ знака h, а во второмъ этотъ множитель всегда положителенъ. Такимъ образомъ мы получаемъ слѣдующіе 4 случая:

I. Пусть n нечетное число и $f^{(n)}(a)>0$. Тогда знакъ всей правой части уравненія (122) зависитъ отъ знака h. При положительномъ h правая часть больше, при отрицательномъ меньше нуля. Такъ что, если ε обозначаетъ число достаточно малое и положительное, то

$$f(a+\varepsilon)-f(a)>0,$$
$$f(x-\varepsilon)-f(a)<0.$$



Фиг. 98.

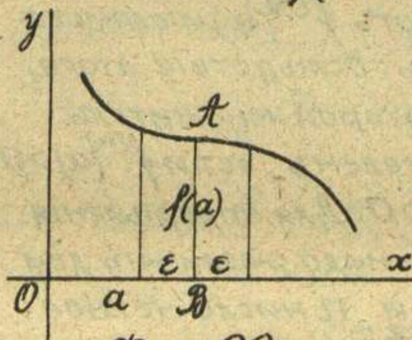
Изъ обѣихъ неравенствъ имѣемъ:

$$f(a-\varepsilon)<f(a)<f(a+\varepsilon),$$

т. е. $f(a)$ меньше послѣдующаго и больше предыдущаго значенія $f(x)$. Значитъ функція въ точкѣ a возрастаетъ.

II. Пусть n опять нечетное число, но $f^{(n)}(a)<0$. Теперь, если h положительно, то правая часть отрицательна и наоборотъ. Отсюда:

$$f(a+\varepsilon)-f(a)<0,$$
$$f(a-\varepsilon)-f(a)>0.$$



Фиг. 99.

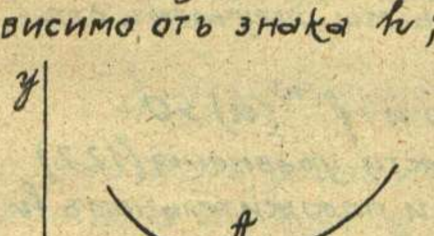
Слѣдовательно

$$f(a-\varepsilon)>f(a)>f(a+\varepsilon),$$

т. е. $f(a)$ меньше предыдущаго и больше послѣдующаго значенія $f(x)$. Значитъ функція въ точкѣ a убываетъ.

III. Положимъ теперь, n четное число и $f^{(n)}(a)>0$. Въ этомъ случаѣ правая часть положительна, независимо отъ знака h; откуда имѣемъ:

$$f(a+\varepsilon)-f(a)>0 \quad \Big| \quad f(a)<f(a+\varepsilon)$$
$$f(a-\varepsilon)-f(a)>0 \quad \Big| \quad f(a)<f(a-\varepsilon);$$



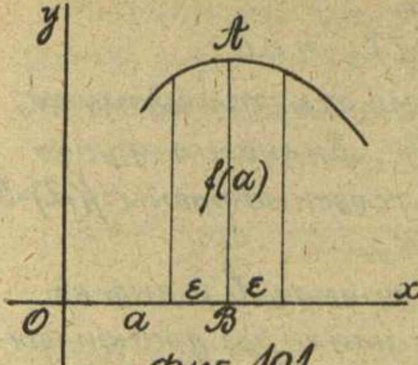
фиг. 100.

$f(a)$ меньше предыдущаго и меньше послѣдующаго значенія $f(x)$, тогда говорятъ, что $f(x)$ имѣетъ minimum въ точкѣ a.

IV. Пусть наконецъ n четное число и $f^{(n)}(a)<0$.

Здѣсь независимо отъ знака h, правая часть отрицательна.

$$f(a+\varepsilon)-f(a)<0 \quad \Big| \quad f(a)>f(a+\varepsilon)$$
$$f(a-\varepsilon)-f(a)<0 \quad \Big| \quad f(a)>f(a-\varepsilon);$$



фиг. 101.

$f(\alpha)$ больше предыдущаго и больше послѣдующаго значенія $f(x)$, $f(x)$ въ точкѣ α имѣетъ maximum.

Итакъ, если дана функція $y=f(x)$ и если для точки $x=\alpha$ первая неуничтожающаяся производная нечетнаго порядка, то въ этой точкѣ функція или возрастаетъ или убываетъ; она возрастаетъ, если упомянутая производная больше нуля и убываетъ, если эта производная меньше нуля. Если же первая неуничтожающаяся производная четнаго порядка, то функція имѣетъ или maximum или minimum; она имѣетъ maximum, если названная производная меньше нуля и minimum, если она больше нуля.

Примѣръ I. Найти maximum и minimum функціи

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 4x + 9.$$

Опредѣлимъ первую производную данной функціи:

$$f(x) = x^2 - 4.$$

Чтобы получить тѣ значенія x, въ которыхъ функція имѣетъ maximum или minimum, слѣдуетъ приравнять первую производную нулю:

$$x^2 - 4 = 0, \quad x = \pm 2.$$

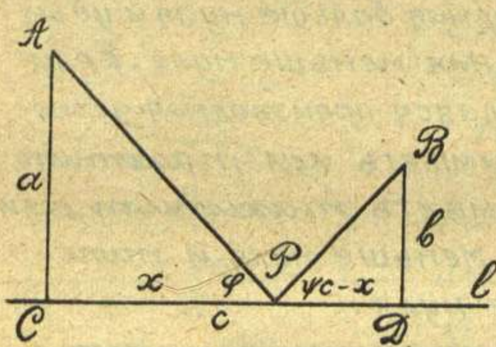
Наконецъ, чтобы опредѣлить, получится ли въ самомъ дѣлѣ maximum или minimum опредѣлимъ вторую производную и знакъ ея въ точкахъ $+2$ и -2.

$$f''(x) = 2x$$

$$f''(+2) = 4 > 0, \quad f''(-2) = -4 < 0,$$

т. е. въ точкѣ $+2$ функція имѣетъ minimum, а въ точкѣ (-2) maximum. Значенія функціи въ этихъ точкахъ соотвѣтственно равны: $f(+2) = 3\frac{2}{3}$, $f''(-2) = 14\,^1/_3$.

Примѣръ II. Пусть дана прямая l и внѣ ея двѣ точки A и B. Требуется найти на данной прямой такую точку P, чтобы сумма разстояній ея отъ данныхъ точекъ была наименьшая, т. е. чтобы $AP + BP$ сдѣлалось minimum'омъ. Опустимъ изъ A и B перпендикуляры $AC = a$, $BD = b$ на l. Разстояніе CD назовемъ черезъ c. Положеніе точки P будетъ опредѣлено, если найдемъ разстояніе $CP = x$.



фиг. 102.

Изъ прямоугольныхъ треугольниковъ ACP и BDP имѣемъ:

$$AP = \sqrt{x^2 + a^2}, \quad BP = \sqrt{(c-x)^2 + b^2}.$$

Отсюда сумма разстояній AP и PB будетъ:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{(c-x)^2 + b^2}.$$

Для опредѣленія minimum'а этой функціи приравняемъ первую производную ея нулю:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{c-x}{\sqrt{(c-x)^2 + b^2}} = 0,$$

т. е. для того, чтобы упомянутая сумма была наименьшая, необходимо условіе:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{c-x}{\sqrt{(c-x)^2 + b^2}} \quad \ldots (123)$$

Рѣшая это уравненіе относительно x, найдемъ разстояніе CP. Но еще удобнѣе найти геометрическое значеніе найденнаго условія. Изъ чертежа видимъ, что

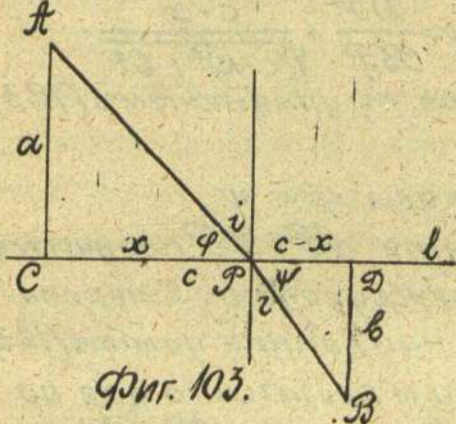
$$\cos\varphi = \frac{CP}{AP} = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}, \quad \cos\psi = \frac{DP}{BP} = \frac{c-x}{\sqrt{(c-x)^2+b^2}}.$$

Сопоставляя эти выраженія съ уравненіемъ (123), находимъ:

$$\cos\varphi = \cos\psi, \text{ откуда } \varphi = \psi,$$

т. е. minimum разстоянія $AP+BP$ получится, если углы φ и ψ равны между собою. Слѣдовало бы еще доказать, что найденное условіе (123) не только необходимо, но и достаточно для полученія minimum'а разстоянія $AP+PB$. Но maximum исключается условіемъ задачи, между тѣмъ какъ изъ этихъ условій вытекаетъ, что существуетъ нѣкоторый minimum. А такъ какъ мы получили только одно условіе, то оно и будетъ условіемъ не только необходимымъ, но и достаточнымъ для minimum'а. Если примемъ A за источникъ свѣта, а b за отражающую прямую, то уголъ паденія луча равенъ углу отраженія. Изъ нашего примѣра мы видимъ, что лучи отражаются такимъ образомъ чтобы пространство, проходимое ими, было наименьшее. Такъ какъ въ однородной средѣ лучи распространяются съ постоянною скоростью, то упомянутый законъ можно выразить такимъ образомъ: свѣтъ, доходящій по отраженіи на прямой b, изъ A въ B, отражается такъ, что время, потраченное имъ на прохожденіе этого пути, есть minimum.

Примѣръ III. Пусть опять дана прямая b и двѣ точки A и B, лежащія по обѣ стороны прямой l, и пусть нѣкоторая точка движется выше прямой l съ постоянною скоростью α, а ниже l съ постоянною скоростью β. Требуется найти на прямой l такую точку P, чтобы время для прохожденія разстоянія $AP+PB$ было наименьшее. По формулѣ $s=vt$, время, необходимое для прохожденія AP будетъ $\frac{AP}{\alpha}$, а для прохожденія PB — $\frac{PB}{\beta}$ слѣдовательно надо опредѣлить такую точку P, чтобы сумма $\frac{AP}{\alpha}+\frac{PB}{\beta}$ сдѣлалась наименьшею. Опустивъ изъ A и B перпендикуляры на l, изъ прямоугольныхъ треугольниковъ ACP и BDP имѣемъ



Фиг. 103.

$$AP=\sqrt{x^2+a^2}\;;\quad PB=\sqrt{(c-x)^2+b^2}.$$

Отсюда $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+a^2}}{\alpha}+\dfrac{\sqrt{(c-x)^2+b^2}}{\beta}$ должно имѣть наименьшее значеніе. Приравняемъ первую производную этой функціи нулю:

$$\frac{x}{\alpha\sqrt{x^2+a^2}}-\frac{c-x}{\beta\sqrt{(c-x)^2+b^2}}=0.$$

Т.е. для выполненія требуемаго условія необходимо:

$$\frac{x}{\alpha\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{c-x}{\beta\sqrt{(c-x)^2+b^2}}\quad\ldots\quad(124)$$

или

$$\frac{\cos\varphi}{\alpha}=\frac{\cos\psi}{\beta}.$$

Если возставить изъ P перпендикуляръ къ l, то очевидно $\cos\varphi=\sin i$, $\cos\psi=\sin r$, отсюда

$$\frac{\sin i}{\alpha}=\frac{\sin r}{\beta}$$

или
$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Если A есть источникъ свѣта, а b прямая, раздѣляющая двѣ разнородныя среды, то отношеніе синуса угла паденія къ синусу угла преломленія есть величина постоянная. Отсюда мы заключаемъ, что лучи преломляются такъ, чтобы время, употребляемое на прохожденіе пути отъ A до B, лежащихъ въ разнородныхъ срединахъ, было наименьшее.

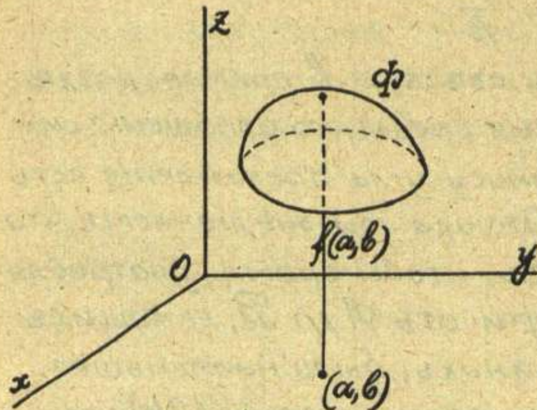
Относительно достаточности, условія (124) слѣдуетъ сдѣлать тѣ же замѣчанія, что и въ предыдущей задачѣ.

Maximum и minimum функціи двухъ перемѣнныхъ.

Пусть дана функція
$$z = f(x, y) \quad \ldots\ldots \quad (125).$$

Требуется опредѣлить, въ какомъ случаѣ она имѣетъ maximum или minimum въ точкѣ $x = a$, $y = b$.

Опредѣлимъ сначала, что вообще называется maximum или minimum функціи двухъ перемѣнныхъ. Пусть поверхность Φ служитъ изображеніемъ данной функціи. Взявъ точку (a, b) на плоскости (x, y) и возставивъ изъ нея перпендикуляръ до пересѣченія съ поверхностью, находимъ, что длина этого перпендикуляра равна $f(a, b)$. Данная функція имѣетъ maximum въ точкѣ (a, b) если значеніе $f(a, b)$ будетъ больше значенія ВСѢХЪ перпендикуляровъ, возставленныхъ изъ сосѣднихъ точекъ до пересѣченія съ поверхностью. Если же длина этого перпенди-



Фиг. 104.

куляра будетъ меньше ВСѢХЪ сосѣднихъ перпендикуляровъ, то функція въ данной точкѣ имѣетъ min. Чтобы опредѣлить условія $max.$ и min, введемъ новыя обозначенія:

$$\left.\begin{aligned} x &= a + \alpha t \\ y &= b + \beta t \end{aligned}\right\} \dots (126).$$

Если подставить ихъ въ уравненіе (125), то функція отъ x и y перейдетъ въ функцію F отъ t:

$$F(t) = f(a+\alpha t,\ b+\beta t) \quad . \ . \ . \ . \quad (127).$$

Если t приближается къ нулю, то значеніе этой функціи приближается къ значенію $f(a, b)$ а придавая, при произвольно-маломъ t, всевозможныя значенія для α и β, получимъ всевозможныя точки, произвольно-близкія къ точкѣ (a, b).

Изъ опредѣленія $max.$ и $min.$ слѣдуетъ, что въ случаѣ $max.$ мы должны имѣть

$$f(a+\alpha t,\ b+\beta t) - f(a, b) < 0.$$

Причемъ эта разность должна быть меньше нуля для всевозможныхъ значеній α и β при достаточно-маломъ t. Наоборотъ эта разность будетъ больше нуля, коль скоро функція имѣетъ $min.$ въ точкѣ (a, b).

Намъ извѣстно, что для существованія $max.$ или $min.$ первая производная функціи должна равняться нулю. Найдемъ первую производную функціи (127) по формулѣ (71)(стр. 194):

$$\mathcal{F}'(t)=\frac{\partial f(a+\alpha t,\, b+\beta t)}{\partial (a+\alpha t)}\cdot\frac{d(a+\alpha t)}{dt}+$$
$$+\frac{\partial f(a+\alpha t,\, b+\beta t)}{\partial (b+\beta t)}\cdot\frac{d(b+\beta t)}{dt},$$

$$\mathcal{F}'(t)=\frac{\partial f(a+\alpha t,\, b+\beta t)}{\partial (a+\alpha t)}\alpha+\frac{\partial f(a+\alpha t,\, b+\beta t)}{\partial (b+\beta t)}\beta \quad \ldots (128)$$

Эта производная должна равняться нулю въ точкѣ $t=0$:

$$\mathcal{F}'(0)=\frac{\partial f(a,b)}{\partial a}\alpha+\frac{\partial f(a,b)}{\partial b}\beta=0$$

Но такъ какъ α и β могутъ имѣть всевозможныя значенія, то эта сумма можетъ равняться нулю при всѣхъ значеніяхъ α и β только, если одновременно:

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial a}=0\,,\quad \frac{\partial f(a,b)}{\partial b}=0 \quad \ldots (129)$$

Такимъ образомъ мы опредѣлили необходимое условіе для существованія max. или min. Далѣе мы знаемъ, что функція имѣетъ max. или min. въ точкѣ (a, b), если первая неуничтожающаяся производная будетъ четнаго порядка. Мы разсмотримъ только тотъ случай, когда уже вторая производная не уничтожается.

Чтобы получить вторую производную, дифференцируемъ выраженіе (128):

$$\mathcal{F}''(t)=\left[\frac{\partial^2 f(a+\alpha t,\, b+\beta t)}{\partial (a+\alpha t)^2}\cdot\frac{d(a+\alpha t)}{dt}+\frac{\partial^2 f(a+\alpha t,\, b+\beta t)}{\partial (a+\alpha t)\,\partial (b+\beta t)}\cdot\frac{d(b+\beta t)}{dt}\right]\cdot\alpha+$$
$$+\left[\frac{\partial^2 f(a+\alpha t,\, b+\beta t)}{\partial (\beta+\beta t)\,\partial (\alpha+\alpha t)}\cdot\frac{d(a+\alpha t)}{dt}+\frac{\partial^2 f(a+\alpha t;\, b+\beta t)}{\partial (b+\beta t)^2}\cdot\frac{d(b+\beta t)}{dt}\right]\cdot\beta.$$

Пользуясь формулою (75) (стр. 197), вмѣсто этого можемъ написать:

$$F''(t)=\frac{\partial^2 f(a+\alpha t,\, b+\beta t)}{\partial(a+\alpha t)^2}\alpha^2+2\frac{\partial^2 f(a+\alpha t,\, b+\beta t)}{\partial(a+\alpha t)\partial(b+\beta t)}\alpha\beta+$$
$$\frac{\partial^2 f(a+\alpha t,\; b+\beta t)}{\partial(b+\beta t)^2}\beta^2.$$

Вставляя сюда значенiе $t=0$, получаемъ:

$$F''(0)=\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial a^2}\alpha^2+2\frac{\partial^2 f(ab)}{\partial a.\partial b}\alpha\beta+\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial b^2}\beta^2.$$

Въ случаѣ max. эта вторая производная должна быть меньше нуля, а въ случаѣ min больше нуля. Обозначая вторыя частныя производныя соотвѣтственно черезъ A, B, C, получаемъ:

$$F(0)=A\alpha^2+2B\alpha\beta+C\beta^2.$$

Спрашивается, когда это выраженiе имѣетъ постоянный знакъ, для всевозможныхъ значенiй α и β? Это выраженiе можно представить въ такомъ видѣ:

$$F''(0)=\frac{1}{A}\left(A^2\alpha^2+2AB\alpha\beta+AC\beta^2\right)=$$
$$=\frac{1}{A}\left(A^2\alpha^2+2AB\alpha\beta+B^2\beta^2+AC\beta^2-B^2\beta^2\right)=$$
$$=\frac{1}{A}\left\{(A\alpha+B\beta)^2+(AC-B^2)\beta^2\right\}\quad\ldots(130).$$

Первое слагаемое выраженiя въ скобкахъ всегда положительно или нуль; второе имѣетъ множителя β^2, который также всегда положителенъ или нуль. Если-бъ $AC-B^2$ было меньше нуля, то для каждаго значенiя α, при достаточно малыхъ значенiяхъ β выраженiе въ скобкахъ было бы положительно, при достаточно большихъ — отрицательно. Если $AC-B^2$ равняется нулю, то можно опредѣлить безконечно много паръ значенiй α и β, именно $\frac{\alpha}{\beta}=-\frac{B}{A}$, для которыхъ $F''(0)$ обращается въ 0. Итакъ для того чтобы

$F''(0)$ имѣло постоянный знакъ при всѣхъ значеніяхъ α и β, мы должны имѣть

$$AC - B^2 > 0.$$

Подставляя вмѣсто A, B, C ихъ значенія, получимъ второе необходимое условіе существованія max. и min.:

$$\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial a^2}\cdot\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial b^2} - \left[\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial a\,\partial b}\right]^2 > 0 \quad .(131).$$

Въ случаѣ max. $F''(0)$ должно быть отрицательно, въ случаѣ min. положительно. Но изъ формулы (130) видимъ, что это зависитъ отъ знака A, такъ какъ выраженіе въ скобкахъ положительно. Такимъ образомъ, если $\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial a^2} < 0$, то получимъ max., если $\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial a^2} > 0$, — min.

Примѣръ. Опредѣлить max. и min. функціи

$$z = x^2 + y^2.$$

Частныя производныя суть:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2.$$

Необходимое условіе для существованія max. или min., чтобы первыя частныя производныя равнялись нулю:

$$2x = 0, \qquad x = 0,$$
$$2y = 0, \quad \text{отсюда} \quad y = 0,$$

т. е. если вообще получается max. и min. то только для точки $x = 0$, $y = 0$. Кромѣ того необходимо условіе (131); въ самомъ дѣлѣ, если вмѣсто производныхъ подставимъ ихъ частныя значенія то получимъ

$$2.2 - 0 = 4 > 0.$$

Остается рѣшить вопросъ, получимъ ли мы max. или min. Но вторая производная

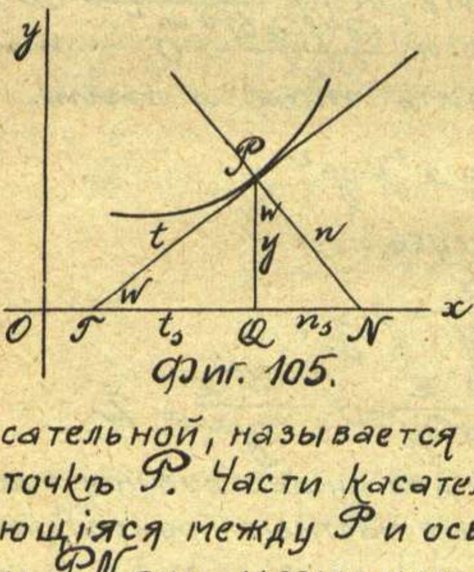
$$\frac{d^2z}{dx^2} = 2 > 0,$$

слѣдовательно мы получаемъ minimum.

Длина подкасательной и поднормали, касательной и нормали.

Пусть дана кривая

$$y = f(x).$$



Фиг. 105.

Возьмемъ на ней нѣкоторую точку P, касательная которой пусть составляетъ съ осью x-овъ уголъ W. Тогда (стр. 156)

$$\operatorname{tg} W = \frac{dy}{dx}.$$

Перпендикуляръ, возставленный въ точкѣ P къ касательной, называется **нормалью** кривой въ точкѣ P. Части касательной и нормали заключающіяся между P и осью x-овъ, т.е. отрѣзки $PT = t$ и $PN = n$, называются длинами касательной и нормали, проекціи же t_s и n_s этихъ отрѣзковъ на ось x-овъ — подкасательною и поднормалью.

Опредѣлимъ длину подкасательной и поднормали. Изъ ΔPQT имѣемъ:

$$\operatorname{tg} W = \frac{QP}{TQ}.$$

Подставляя сюда

$$\operatorname{tg} W = \frac{dy}{dx},\ QP = y,\ TQ = t_s,$$

получаемъ: $$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{t_s}.$$

Рѣшаемъ уравненіе относительно t_s, причемъ обозначаемъ $\frac{dy}{dx}$ черезъ y':

$$t_s = \frac{y}{y'}.$$

Изъ $\Delta\, PQN$, замѣчая, что $\measuredangle\, QPN = W$ имѣемъ:

$$\operatorname{tg} W = \frac{QN}{PQ}.$$

Подставляя соотвѣтственныя значенія, находимъ

$$y' = \frac{n_s}{y},$$

отсюда

$$n_s = yy'.$$

Длину касательной и нормали находимъ по Пиѳагоровой теоремѣ:

$$t^2 = y^2 + t_s^2 = y^2 + \frac{y^2}{y'^2} = \frac{y^2 + y^2 y'^2}{y'^2} = \frac{y^2}{y'^2}(1 + y'^2),$$

$$t = \frac{y}{y'}\sqrt{1 + y'^2}.$$

$$n^2 = y^2 + n_s^2 = y^2 + y^2 y'^2 = y^2(1 + y'^2),$$

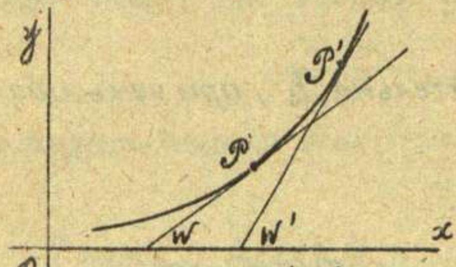
$$n = y\sqrt{1 + y'^2}.$$

Выпуклость кривой.

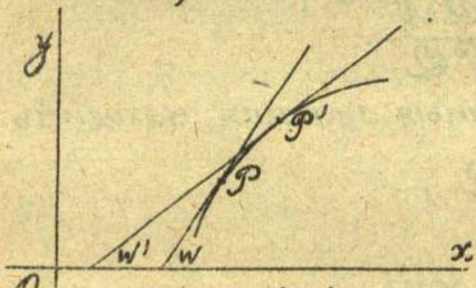
Вторая производная функціи имѣетъ также геометрическое значеніе, именно она опредѣляетъ, куда обращена выпуклость кривой. Положимъ, что кривая отнесена посредствомъ уравненія

$$y = f(x)$$

къ координатной системѣ. Тогда возможны два случая: она лежитъ вблизи изслѣдуемой точки P выше (фиг. 106) или ниже (фиг. 107) касательной. Въ первомъ случаѣ говорятъ, что выпуклость кривой обращена въ отрицательную, во второмъ — въ положительную сторону оси $y^{овъ}$.



Фиг. 106.

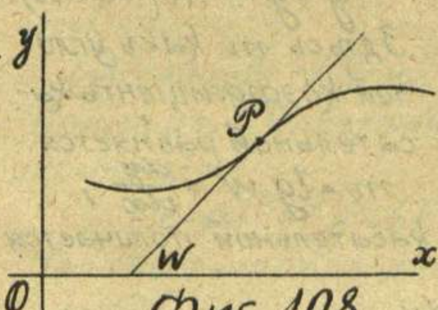


Фиг. 107.

Разберемъ подробнѣе первый случай. Уголъ наклоненія касательной кривой, проведенной черезъ P, пусть будетъ w. Придадимъ абсциссѣ точки P положительное приращеніе. Тогда мы получимъ новую точку P' и новый уголъ наклоненія касательной w'. Чертежъ показываетъ, что $w' > w$, т.е. уголъ наклоненія увеличивается съ возрастаніемъ x. Вмѣстѣ съ тѣмъ увеличивается и $tg\, w$, или такъ какъ $tg\, w = f'(x)$, также и $f'(x)$. По этому, если производная отъ $f'(x)$, т.е. $f''(x)$, не равна нулю, то она должна быть положительна. Такимъ образомъ, если въ изслѣдуемой точкѣ P кривой линіи $y = f(x)$ вторая производная $f''(x)$ положительна, то въ этой точкѣ выпуклость кривой обращена въ отрицательную сторону оси $y^{овъ}$.

Подобными разсужденіями мы находимъ, что въ случаѣ отрицательной второй производной $f''(x)$ выпуклость кривой обращена въ положительную сторону оси y -овъ.

Положимъ теперь, что въ изслѣдуемой точкѣ $f''(x) = 0$, а $f'''(x) \neq 0$. Такъ какъ эти производныя по отношенію къ $f'(x)$ представляютъ производныя перваго и второго порядковъ, то въ такомъ случаѣ $f'(x)$ имѣетъ max. или min., т.е. ввиду $\operatorname{tg} w = f'(x)$, тогда $\operatorname{tg} w$ и вмѣстѣ съ тѣмъ уголъ w отъ возрастающихъ значеній переходитъ къ убывающимъ, кривая до точки P лежитъ выше, послѣ точки P ниже касательной, или наоборотъ; кривая такимъ образомъ въ точкѣ P переходитъ съ одной стороны касательной на другую, точка P есть особая точка кривой, такъ наз. точка перегиба (фиг. 108).



Фиг. 108.

Нетрудно распространить разсужденія этой главы на тотъ случай, когда не только вторая, но и рядъ слѣдующихъ за ней производныхъ въ изслѣдуемой точкѣ равны нулю.

Уравненія касательной и нормали.

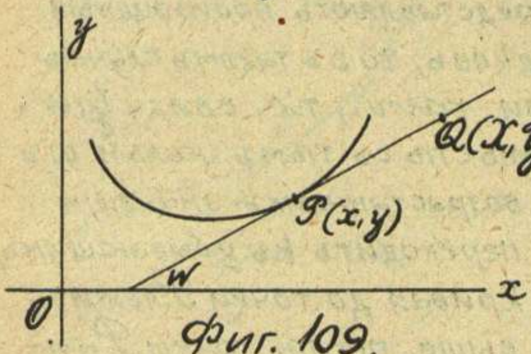
Опредѣлимъ уравненіе касательной къ кривой

$$y = f(x)$$

въ точкѣ $P(x, y)$ этой кривой. Если текущія координаты касательной обозначить черезъ X, Y, то уравненіе будетъ первой степени относительно ихъ:

$$Y = mX + n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (132).$$

Такъ какъ касательная проходитъ черезъ точку касанія $P(x, y)$, то координаты ея удовлетворяютъ уравненію (132):



Фиг. 109.

$$y = mx + n.$$

Вычтемъ это уравненіе изъ уравненія (132):

$$Y - y = m(X - x).$$

Здѣсь m какъ угловой коэффиціентъ касательной равняется

$$m = tg\, w = \frac{dy}{dx},$$

такъ что искомое уравненіе касательной получается въ видѣ

$$Y - y = (X - x)\frac{dy}{dx} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (132).$$

Положимъ теперь, что кривая дана въ формѣ

$$f(x, y) = 0.$$

Въ такомъ случаѣ (стр. 190):

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}},$$

и уравненіе касательной принимаетъ видъ

$$Y - y = -(X - x)\frac{\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}},$$

или

$$(X - x)\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + (Y - y)\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (133).$$

Изъ аналитической геометріи мы знаемъ, что кривая линія можетъ быть задана также и двумя уравненіями вида

$$x = \varphi(t),$$
$$y = \psi(t).$$

Въ такомъ случаѣ

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta t = 0} \frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

и уравненіе касательной будетъ

$$Y - y = (X - x)\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}},$$

или

$$(X - x)\frac{dy}{dt} - (Y - y)\frac{dx}{dt} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (134).$$

Примѣръ. Опредѣлить уравненіе касательной окружности

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 = 0.$$

Частныя производныя будутъ

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2(x-a), \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2(y-b).$$

Подставимъ эти значенія въ уравненіе (133) и сократимъ на 2:

$$(X - x)(x-a) + (Y - y)(y - b) = 0.$$

Это уравненіе можно еще преобразовать:

$$[(X-a)-(x-a)](x-a) + [(Y-b)-(y-b)](y-b) = 0,$$
$$(X-a)(x-a) + (Y-b)(y-b) - (x-a)^2 - (y-b)^2 = 0,$$
$$(X-a)(x-a) + (Y-b)(y-b) = r^2.$$

Мы получили въ самомъ дѣлѣ уравненіе, извѣстное уже изъ аналитической геометріи (стр. 36).

Найдемъ теперь уравненіе НОРМАЛИ кривой

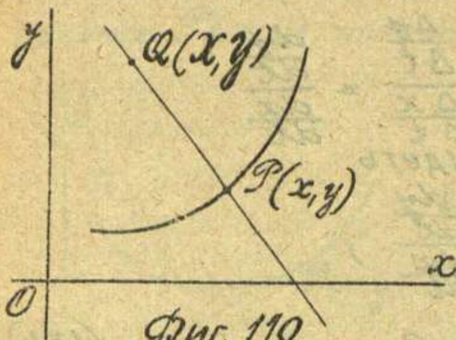
$$y = f(x),$$

проходящей черезъ точку $P(x, y)$ кривой. Обозначимъ текущія координаты нормали черезъ X, Y, тогда искомое уравненіе можно написать въ видѣ

$$Y = m'X + n.$$

Такъ какъ нормаль проходитъ черезъ точку $P(x, y)$, то

$$y = m'x + n'.$$


Фиг. 110.

Вычтемъ это уравненіе изъ предыдущаго:

$$Y - y = m'(X - x) \ldots. (135).$$

На стр. 26 мы нашли формулу для угла ϑ между двумя прямыми въ зависимости отъ угловыхъ коэффиціентовъ m, m' этихъ прямыхъ:

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{m' - m}{1 + m'm}.$$

Изъ этой формулы слѣдуетъ для двухъ взаимно-перпендикулярныхъ прямыхъ

$$\vartheta = 90^\circ, \quad \operatorname{tg} \vartheta = \infty, \quad 1 + m'm = 0.$$

Касательная и нормаль взаимно-перпендикулярны, поэтому ихъ угловые коэффиціенты m и m' связаны соотношеніемъ

$$m' = -\frac{1}{m}.$$

Угловой коэффиціентъ касательной

$$m = \frac{dy}{dx},$$

отсюда слѣдуетъ для углового коэффиціента нормали:

$$m' = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

Подставимъ это выраженіе въ уравненіе (135):

$$Y - y = -\frac{X - x}{\frac{dy}{dx}}.$$

Перенесемъ еще всѣ члены въ одну сторону и освободимся отъ знаменателя, тогда мы получимъ искомое уравненіе нормали:

$$X - x + (Y - y)\frac{dy}{dx} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (136).$$

Когда кривая дана въ видѣ

$$f(x, y) = 0,$$

то

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x}}{\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}},$$

и уравненіе нормали принимаетъ видъ:

$$(X - x)\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} - (Y - y)\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (137).$$

Наконецъ, для кривой

$$x = \varphi(t),$$
$$y = \psi(t)$$

мы имѣемъ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}},$$

такъ что уравненіе нормали тогда будетъ

$$(X - x)\frac{dx}{dt} + (Y - y)\frac{dy}{dt} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (138).$$

Примѣръ. Опредѣлить уравненіе нормали окружности

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0.$$

Частныя производныя будутъ

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 2(x - a), \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 2(y - b).$$

Подставимъ эти значенія въ уравненіе (137) и сократимъ на 2, тогда получимъ искомое уравненіе нормали нашей окружности:

$$(X - x)(y - b) - (Y - y)(x - a) = 0.$$

Уравненіе превращается въ тождество при $X = a$, $Y = b$, что указываетъ на то, что нормаль проходитъ черезъ центръ круга.

Асимптоты.

Положимъ, что кривая $y = f(x)$ простирается до безконечности и представимъ себѣ, что точка $\mathcal{P}(x, y)$, двигаясь по кривой, удаляется въ безконечность. Тогда можетъ случиться, что принадлежащая ей касательная стремится къ нѣкоторому предѣльному положенію. Такое предѣльное положеніе касательной называется **асимптотою** кривой. Можетъ однако также случиться, что кривая простирается до безконечности и всетаки не имѣетъ асимптоты, напр. при параболѣ касательная вмѣстѣ съ точкою касанія вся удаляется въ безконечность, или при синусоидѣ (фиг. 78.) она съ удаленіемъ точки касанія все колеблется и не стремится къ предѣльному положенію.

Чтобы найти уравненіе асимптоты, мы представляемъ уравненіе (132) касательной

$$\mathcal{Y} - y = (\mathcal{X} - x)\frac{dy}{dx}$$

въ видѣ

$$\mathcal{Y} = \mathcal{X}\frac{dy}{dx} + \left(y - x\frac{dy}{dx}\right)$$

и замѣняемъ

$$\frac{dy}{dx} \text{ и } y - x\frac{dy}{dx},$$

т. е. угловой коэффиціентъ и начальную ординату касательной, ихъ предѣльными значеніями

$$\lim \frac{dy}{dx} \text{ и } \lim\left(y - x\frac{dy}{dx}\right)$$

соотвѣтственно безконечно удаленной точкѣ.

Такимъ образомъ мы получаемъ уравненіе асимптоты: $$\mathcal{Y} = \lim\frac{dy}{dx}\cdot\mathcal{X} + \lim\left(y - x\frac{dy}{dx}\right) \quad \cdots (139).$$

Этотъ способъ только тогда непримѣнимъ, когда асимптота параллельна оси $y^{овъ}$, такъ какъ въ такомъ случаѣ $\lim \frac{dy}{dx} = \infty$. Тогда представляютъ уравненіе асимптоты въ видѣ аналогичномъ (139), только рѣшенномъ относительно X и поступаютъ подобно предыдущему.

Примѣръ. Найти уравненія асимптотъ гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots (140).$$

По стр. 54 уравненіе касательной съ нашими теперешними обозначеніями будетъ

$$\frac{xX}{a^2} - \frac{yY}{b^2} = 1$$

или, рѣшая относительно Y,

$$Y = \frac{b^2x}{a^2y}X - \frac{b^2}{y}.$$

Изъ этого уравненія мы получимъ уравненіе асимптоты, если вмѣсто $\frac{b^2x}{a^2y}$ и $\frac{b^2}{y}$ подставимъ ихъ предѣльныя значенія для $x = \infty$, $y = \infty$:

$$Y = \lim_{\substack{x=\infty \\ y=\infty}} \frac{b^2x}{a^2y} \cdot X - \lim_{y=\infty} \frac{b^2}{y} \quad \ldots (141)$$

Изъ уравненія (140) гиперболы имѣемъ

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2,$$

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{a^2}{b^2}\left(1 + \frac{b^2}{y^2}\right),$$

$$\frac{x}{y} = \pm \frac{a}{b}\sqrt{1 + \frac{b^2}{y^2}},$$

$$\lim_{\substack{x=\infty \\ y=\infty}} \frac{x}{y} = \pm \lim_{y=\infty} \frac{a}{b}\sqrt{1 + \frac{b^2}{y^2}} = \pm \frac{a}{b}.$$

Слѣдовательно $\lim\limits_{\substack{x=\infty \\ y=\infty}} \frac{b^2x}{a^2y} = \frac{b^2}{a^2} \lim\limits_{\substack{x=\infty \\ y=\infty}} \frac{x}{y} = \pm \frac{b}{a}$;

кромѣ того

$$\lim_{y=\infty} \frac{b^2}{y} = 0,$$

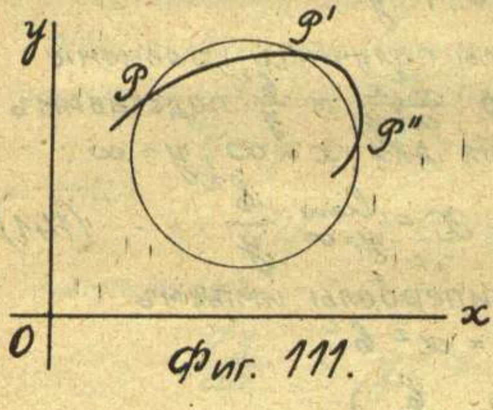
и уравненіе (141) принимаетъ видъ

$$y = \pm \frac{b}{a} x.$$

Въ аналитической геометріи мы познакомились съ асимптотами, какъ прямыми, все болѣе и болѣе приближающимися къ гиперболѣ, теперь мы нашли, что ихъ можно разсматривать какъ касательныя въ безконечно-удаленныхъ точкахъ гиперболы.

Кривизна кривыхъ линій.

Пусть на кривой даны три точки. Мы знаемъ, что тремя точками опредѣляется окружность. Если точки P' и P'' все приближаются къ точкѣ P, такъ что разстоянія PP' и PP'' дѣлаются безконечно-малыми, то окружность можетъ принять нѣкоторое предѣльное положеніе, которое называется **кругомъ кривизны** кривой въ точкѣ P.



Фиг. 111.

Если радіусъ окружности равенъ ρ, то

$$k = \frac{1}{\rho}$$

называется **кривизною** кривой въ точкѣ P, ρ – **радіусомъ кривизны**, а центръ круга кривизны – **центромъ кривизны**.

Если черезъ X и Y обозначить текущія координаты круга, а через α, β и ρ координаты центра и радіусъ его, то уравненіемъ его будетъ

$$(X-\alpha)^2+(Y-\beta)^2=\rho^2 \quad . \; . \; . \; (142).$$

Положимъ, что кругъ проходитъ черезъ точку P; тогда координаты (x, y) этой точки удовлетворяютъ уравненію (142):

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\rho^2 \quad . \; . \; . \; . \; (143).$$

Положимъ, что кругъ (142) проходитъ еще черезъ нѣкоторую точку P' данной кривой, имѣющую координаты $x+\Delta x$, $y+\Delta y$; тогда и эти координаты должны удовлетворять уравненію (142):

$$(x+\Delta x-\alpha)^2+(y+\Delta y-\beta)^2=\rho^2 \; . \; . \; . \; (144).$$

Вычитая уравненіе (143) изъ (144) получимъ:

$$(2x-2\alpha+\Delta x)\Delta x+(2y-2\beta+\Delta y)\Delta y=0.$$

Раздѣлимъ полученное уравненіе на Δx:

$$2x-2\alpha+\Delta x+(2y-2\beta+\Delta y)\frac{\Delta y}{\Delta x}=0.$$

Если теперь точка P', приближаясь къ P, совпадаетъ съ нею, то Δx и Δy дѣлаются безконечно-малыми, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ переходитъ въ $\frac{dy}{dx}$ и послѣднее уравненіе переходитъ въ

$$2x-2\alpha+(2y-2\beta)\frac{dy}{dx}=0$$

или

$$x-\alpha+(y-\beta)f'(x)=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; (145).$$

Послѣднее уравненіе выражаетъ, что кругъ проходитъ не только черезъ точку P, но и черезъ точку, безконечно-близкую къ P. Если въ этомъ уравненіи вмѣсто x, y подставить $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, то мы получимъ условіе, что кругъ проходитъ черезъ точку безконечно-близкую къ $P'(x+\Delta x, y+\Delta y)$:

$$x+\Delta x-\alpha+(y+\Delta y-\beta)\cdot f'(x+\Delta x)=0 \; . \; . \; . \; (146).$$

Совокупность уравненій (143), (145) и (146) опредѣляетъ окружность, проходящую черезъ точку P и точки безконечно-близкія къ P и P'. Если Δx и Δy дѣлаются безконечно-малыми, то точка безконечно-близкая къ P' переходитъ въ точку безконечно-близкую къ точкѣ P, и мы получимъ окружность, проходящую черезъ точку $P(x, y)$ и двѣ безконечно-близкія къ ней точки, т.е. получимъ кругъ кривизны. Чтобы совершить упомянутый переходъ, вычтемъ уравненіе (145) изъ уравненія (146):

$$\Delta x + (y-\beta)\left[f'(x+\Delta x) - f'(x)\right] + \Delta y\, f'(x+\Delta x) = 0$$

Раздѣлимъ на Δx:

$$1 + (y-\beta)\frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x} + \frac{\Delta y}{\Delta x} f'(x+\Delta x) = 0$$

Перейдемъ къ предѣлу $\Delta x = 0$:

$$1 + (y-\beta) f''(x) + (f'(x))^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (147).$$

Изъ уравненій (143), (145) и (147) мы можемъ теперь опредѣлить α, β, ρ. Такъ рѣшая уравненіе (147) относительно β, получимъ

$$(\beta - y) f''(x) = 1 + (f'(x))^2$$

$$\beta = y + \frac{1+(f'(x))^2}{f''(x)}.$$

Подставляя значеніе β въ уравненіе (145), находимъ:

$$x - \alpha = \frac{[1+(f'(x))^2]\, f'(x)}{f''(x)},$$

$$\alpha = x - \frac{[1+(f'(x))^2]\, f'(x)}{f''(x)}$$

или, если $f'(x)$, $f''(x)$ замѣнить черезъ y', y''

$$\alpha = x - \frac{(1+y'^2)\, y'}{y''}, \quad \beta = y + \frac{1+y'^2}{y''} \quad . \quad . \quad (148)$$

Чтобы получить радіусъ ρ, стоитъ только подставить значенія α и β въ уравненіе (143):

$$\rho^2 = \frac{(1+y'^2)^2 y'^2}{y''^2} + \frac{(1+y'^2)^2}{y''^2} = \frac{(1+y'^2)^2}{y''^2}\cdot(y'^2+1) = \frac{(1+y'^2)^3}{y''^2}$$

$$\varrho = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (149)$$

ϱ имѣетъ двоякій знакъ, но принято считать радіусъ кривизны всегда положительнымъ.

Разсмотримъ подробнѣе уравненіе (145). Сравнивая его съ уравненіемъ нормали (136), проходящей черезъ точку $P(x, y)$ кривой $y = f(x)$

$$X - x + (Y - y) f'(x) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (150)$$

замѣчаемъ, что уравненіе (145) получается изъ (150), если X и Y замѣнить черезъ α и β, т.е. α и β удовлетворяютъ уравненію (150). Отсюда мы заключаемъ, что точка съ координатами α и β лежитъ на нормали точки $P(x, y)$. Такимъ же образомъ изъ уравненія (146) найдемъ, что точка (α, β) лежитъ также на нормали точки $P'(x+\Delta x, y+\Delta y)$, т.е. она лежитъ на пересѣченіи обѣихъ нормалей.

Если теперь P и P' сближаются, то точка (α, β) становится центромъ кривизны.

На этомъ основаніи мы можемъ вывести слѣдующее новое опредѣленіе центра кривизны:

Центромъ кривизны называется предѣльное положеніе точки пересѣченія двухъ нормалей при безконечномъ сближеніи ихъ.

Каждой точкѣ кривой принадлежитъ опредѣленный центръ кривизны. Если точка движется по кривой, то центръ кривизны ея также описываетъ нѣкоторую кривую, называемую **эволютою, развертывающеюся** или **развертываемою** данной кривой. Данная кривая, по отношенію къ своей эволютѣ, называется эвольвентою или разверткою.

Если обозначимъ координаты точекъ эволюты черезъ X и Y, то, по опредѣленію эволюты, мы получимъ ея уравненіе, если замѣнимъ въ уравненіяхъ (148) α и β черезъ X и Y и изъ этихъ двухъ уравненій и уравненія кривой $y=f(x)$ исключимъ x и y.

Интегральное исчисленіе.

Неопредѣленный и опредѣленный интегралъ.

Пусть производная функціи $F(x)$ равна $f(x)$:

$$\frac{dF(x)}{dx}=f(x).$$

Если по данной функціи $F(x)$ требуется найти ея производную, то такое дѣйствіе мы называли дифференцированіемъ функціи $F(x)$; если же дана производная $f(x)$ и требуется найти функцію $F(x)$, то это дѣйствіе называется **интегрированіемъ** функціи $f(x)$, а функція $F(x)$ **интеграломъ** данной $f(x)$. Если напр., $f(x)=e^x$, то интеграломъ этой функціи будетъ $F(x)=e^x$, ибо $\frac{de^x}{dx}=e^x$. Если $f(x)=\cos x$, то интеграломъ будетъ такая функція, производная которой равна $\cos x$; такая функція, какъ извѣстно, есть $\sin x$, т.е. $F(x)=\sin x$.

Мы знаемъ, что если къ функціи придать нѣкоторое произвольное постоянное количество, то значеніе ея производной не измѣняется; слѣдовательно, если $\mathcal{F}(x)$ есть интегралъ функціи $f(x)$, то $\mathcal{F}(x)+C$ будетъ также интегралъ $f(x)$; дѣйствительно

$$\frac{d[\mathcal{F}(x)+C]}{dx}=\frac{d\mathcal{F}(x)}{dx}=f(x).$$

Такимъ образомъ мы видимъ, что интегралъ опредѣленъ только до нѣкотораго произвольнаго постояннаго количества и вслѣдствіе этого такой интегралъ называется НЕОПРЕДѢЛЕННЫМЪ интеграломъ. Произвольное постоянное количество называется ПОСТОЯННЫМЪ интегрированія.

Познакомимся съ двумя вспомогательными теоремами:

Теорема I. Функція, имѣющая во всѣхъ точкахъ даннаго промежутка производную, равную нулю, есть величина постоянная. Геометрически легко убѣдиться въ справедливости этой теоремы. Если $tg\, w=0$, то и $w=0$; значитъ, если во всѣхъ точкахъ даннаго промежутка $\varphi'(x)=0$, то для всѣхъ этихъ точекъ уголъ наклоненія касательной линіи $y=\varphi(x)$ къ оси $x^{овъ}$ равняется нулю, т.е. функція $\varphi(x)$ изображаетъ прямую линію, параллельную оси $y^{овъ}$, а уравненіе такой прямой есть $y=\varphi(x)=const.$

Докажемъ теперь эту теорему аналитическимъ путемъ.

Данная функція $\varphi(x)$ какъ функція, имѣющая производную, непрерывна въ промежуткѣ (a, b). Тогда по теоремѣ о среднемъ значеніи функціи (стр. 209)

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a}=\varphi'(a+\vartheta(x-a))\ldots(1)$$

гдѣ $0<\vartheta<1$,

для всякаго значенія x между a и b. Такъ какъ ϑ положительная правильная дробь, то $a+\vartheta(x-a)$ заключается между a и x, т.е. лежитъ также въ данномъ промежуткѣ (a, b). По предположенію, для всякой точки внутри этого промежутка $\varphi'(x)=0$, слѣдовательно

$$\varphi'[a+\vartheta(x-a)]=0.$$

Такъ какъ правая часть уравненія (1) равна нулю, то и лѣвая часть должна равняться нулю, для чего необходимо и достаточно:

$$\varphi(x)-\varphi(a)=0$$

или

$$\varphi(x)=\varphi(a).$$

Значитъ $\varphi(x)$ для всѣхъ значеній x даннаго промежутка равняется $\varphi(a)$, т.е. $\varphi(x)$ есть величина постоянная.

Теорема II. Если двѣ функціи во всѣхъ точкахъ нѣкотораго промежутка имѣютъ одинаковыя производныя, то онѣ различаются въ этомъ промежуткѣ только постоянною величиною.

Пусть функціи $F(x)$ и $\Phi(x)$ имѣютъ одинаковыя производныя

$$\frac{dF(x)}{dx}=f(x);$$

$$\frac{d\Phi(x)}{dx}=f(x).$$

и пусть $\varphi(x)=F(x)-\Phi(x)$. . . . . (2).

Тогда производная функціи $\varphi(x)$ будетъ

$$\frac{d\varphi(x)}{dx}=\frac{dF(x)}{dx}-\frac{d\Phi(x)}{dx}=f(x)-f(x)=0.$$

Но если производная функціи $\varphi(x)$ во всѣхъ точкахъ равна нулю, то по предыдущей теоремѣ, эта функція есть постоянная величина

$$\varphi(x) = C.$$

Подставивъ въ уравненіе (2), получимъ

$$F(x) - \Phi(x) = C$$

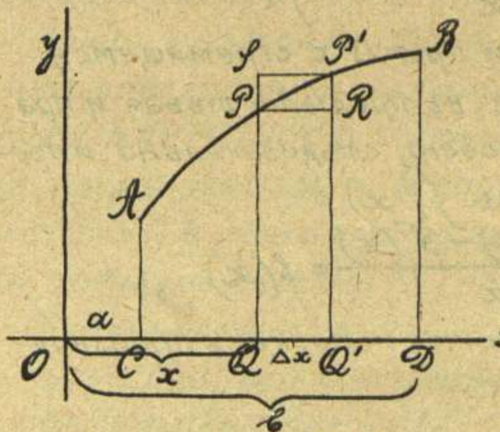
т.е. дѣйствительно обѣ функціи различаются только постоянною величиною.

По этой теоремѣ, если $\Phi(x)$ есть нѣкоторый интегралъ функціи $f(x)$, то самый общій видъ интеграла функціи $f(x)$ будетъ:

$$F(x) = \Phi(x) + C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Положимъ, что дана кривая линія

$$y = f(x).$$



Фиг. 112.

Требуется найти площадь $ACDB$, ограниченную этою кривою, осью $x^{\text{овъ}}$ и двумя ординатами CA и DB.

Возьмемъ на кривой еще точку $P(x, y)$ и проведемъ ординату QP, тогда площадь фигуры $ACQP$ измѣняется съ измѣненіемъ положенія точки P на кривой, она зависитъ отъ абсциссы x этой точки, т.е. она есть функція отъ x:

$$ACQP = F(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Чему равняется эта функція?

Придадимъ x приращеніе $\Delta x = QQ'$ а изъ точки Q' возставимъ перпендикуляръ къ Ox. Тогда

$$ACQ'P' = F(x + \Delta x) \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Если выраженіе (4) вычесть изъ (5), то получимъ приращеніе площади:

$$PQQ'P' = F(x + \Delta x) - F(x)$$

Проведемъ черезъ P и P' параллели къ оси $x^{овъ}$ до пересѣченія съ ординатами $Q'P'$ и QP въ точкахъ R и S. Если функція возрастающая, то

$$PQQ'R < PQQ'P' < SQQ'P'$$

или, такъ какъ площадь параллелограмма равна произведенію основанія на высоту:

$$QP \cdot \Delta x < PQQ'P' < Q'P' \cdot \Delta x\ ,$$

$$f(x) \cdot \Delta x < F(x+\Delta x) - F(x) < f(x+\Delta x) \cdot \Delta x .$$

Раздѣливъ на Δx, имѣемъ:

$$f(x) < \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} < f(x+\Delta x) .$$

Предѣлъ правой части при Δx стремящемся къ нулю равенъ $f(x)$, т. е. въ предѣлѣ лѣвая и правая части равны между собою, слѣдовательно и предѣлъ средняго члена равенъ $f(x)$:

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x) .$$

Но этотъ предѣлъ есть ничто иное, какъ производная функція $F(x)$:

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) ,$$

т. е. искомая площадь $F(x)$ выражается интеграломъ функціи $f(x)$.

Но мы знаемъ, что $F(x)$ опредѣлено лишь до нѣкотораго постояннаго количества:

$$F(x) = \Phi(x) + C \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (6).$$

Слѣдовательно для опредѣленія нашей площади надо найти еще величину C. Мы знаемъ, что для точки $x = a$, т. е. если P совпадаетъ съ A, площадь $F(a) = 0$:

$$F(a) = \Phi(a) + C = 0\ ,$$

откуда

$$C = -\Phi(a).$$

Подставляя это значеніе въ уравненіе (6), получаемъ:

$$F(x) = \Phi(x) - \Phi(a) \quad \ldots \ldots (7).$$

На основаніи уравненія (7) легко опредѣлить площадь $ACDB$. Такъ, если $OC = a$, $OD = b$, то подставляя въ уравненіе (7) вмѣсто x, имѣемъ:

$$ACDB = F(b) = \Phi(b) - \Phi(a), \quad \ldots \ldots (8)$$

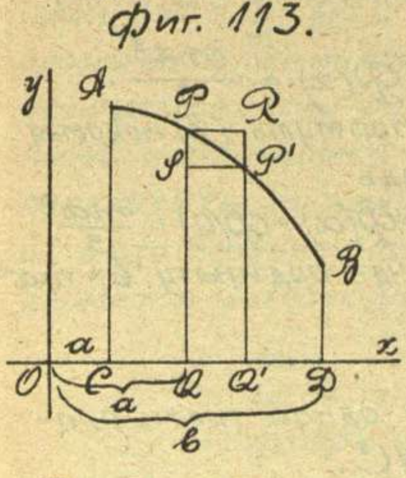
т. е. для опредѣленія искомой площади беремъ разность числовыхъ значеній интеграла для крайнихъ значеній $x = a$, $x = b$.

Разность такихъ двухъ числовыхъ значеній неопредѣленнаго интеграла функціи $f(x)$ является совершенно опредѣленною величиною и называется **опредѣленнымъ** интеграломъ функціи $f(x)$ между предѣлами a и b, причемъ a называется нижнимъ, b верхнимъ предѣломъ.

Мы доказали теорему (8) только для того случая, когда функція возрастаетъ въ промежуткѣ (a, b). Положимъ теперь, что она убываетъ во всѣхъ точкахъ этого промежутка (фиг. 113).

Тогда очевидно:

фиг. 113.



$$PQQ'R > PQQ'P' > SQQ'P'.$$

Разсуждая по предыдущему, придемъ опять къ тому же результату:

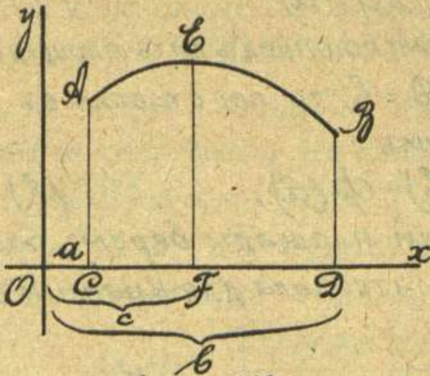
$$ACDB = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Наконецъ эту теорему можно доказать и для того случая, когда функція въ данномъ промежуткѣ имѣетъ *maximum* или *minimum*.

Такъ при *maximum*'ѣ въ точкѣ F ордината FE

дѣлить нашу площадь на двѣ части:

$$ACDB = ACFE + EFDB.$$



Фиг. 114.

До $x=c$ функція возрастаетъ, а послѣ $x=c$ она убываетъ, слѣдовательно мы можемъ для $ACFE$ и $EFDB$ отдѣльно примѣнить формулу (8):

$$ACFE = \Phi(c) - \Phi(a)$$
$$EFDB = \Phi(b) - \Phi(c).$$

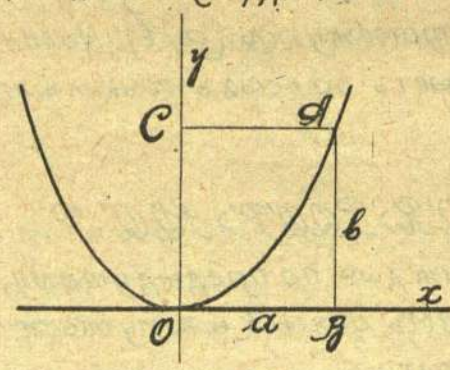
По сложеніи получимъ

$$ACDB = \Phi(b) - \Phi(a),$$

т.е. и въ этомъ случаѣ наша теорема сохраняетъ свою силу.

Примѣръ. $y = mx^2$.

Какъ извѣстно эта функція изображаетъ параболу, ось которой совпадаетъ съ осью $y^{\text{овъ}}$, а вершина съ началомъ координатъ.



Фиг. 115.

Чтобы опредѣлить площадь OBA, надо найти $\Phi(x)$. Функція, производная которой равна mx^2, есть

$$\Phi(x) = \frac{mx^3}{3}.$$

По формулѣ (8) искомая площадь

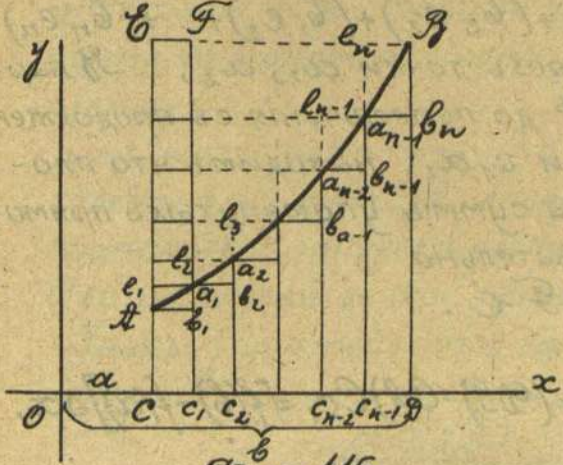
$$OBA = \Phi(a) - \Phi(0) = \frac{ma^3}{3}.$$

Введемъ въ этой формулѣ еще ординату $b = ma^2$ точки A, тогда

$$OBA = \frac{ab}{3},$$

т.е. площадь OBA равняется одной трети площади прямоугольника $OBAC$.

Рѣшимъ теперь ту же задачу съ другой точки зрѣнія. Раздѣлимъ разстояніе CD на n равныхъ частей и изъ полученныхъ точекъ дѣленія $c_1, c_2, c_3, \ldots c_{n-1}$ возставимъ перпендикуляры до пересѣченія съ кривою въ точкахъ $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$, черезъ которыя проведемъ параллели къ Ox. Тогда площадь $J = ACDB$ равна суммѣ площадей полученныхъ прямоугольниковъ и площадей фигуръ $Ab_1a_1, a_1b_2a_2, \ldots a_{n-1}b_nB$.



фиг. 116.

$$J = ACc_1b_1 + a_1c_1c_2b_2 + \ldots + a_{n-1}c_{n-1}Db_n + D$$

гдѣ

$$D = Ab_1a_1 + a_1b_2a_2 + \ldots + a_{n-1}b_nB \ldots (9)$$

Если обозначимъ $Cc_1 = c_1c_2 = c_2c_3 = \ldots = c_{n-1}D = \Delta x$, то J можно выразить такимъ образомъ:

$$J = f(a)\Delta x + f(a+\Delta x)\Delta x + f(a+2\Delta x)\Delta x + \ldots + f(b-\Delta x) + D,$$

или $J = \mathop{S}\limits_a^{b-\Delta x} f(x)\Delta x + D$, гдѣ символъ $\mathop{S}\limits_a^{b-\Delta x} f(x)\Delta x$ обозначаетъ сумму слагаемыхъ вида $f(x)\Delta x$, которыя получаются, если аргументъ функціи $f(x)$, прерывнымъ измѣненіемъ равнымъ Δx, отъ значенія a переходитъ къ значенію $b - \Delta x$. Если увеличивать до безконечности число отрѣзковъ, то Δx дѣлается безконечно малымъ. Тогда получаемъ:

$$J = \lim_{\Delta x = 0} \mathop{S}\limits_a^{b-\Delta x} f(x)\Delta x + \lim_{\Delta x = 0} D \ldots (10).$$

Если теперь дополнимъ слагаемыя суммы (9) до прямоугольниковъ, то сумма этихъ прямоугольниковъ будетъ больше суммы (9), т.е. если $(b_1 e_1)$ обозначаетъ прямоугольникъ $Ab_1a_1e_1$ и т.д.

$$D<(b_1 e_1)+(b_2 e_2)+(b_3 e_3)+\ldots+(b_n e_n).$$

Проведя затѣмъ через точки $a_1, a_2, \ldots B$ параллели къ оси $x^{\text{овъ}}$ до пересѣченія съ продолженными прямыми CA и c_1a_1, находимъ что площадь Ab_1FE равна суммѣ упомянутыхъ прямоугольниковъ. Слѣдовательно

$$D<Ab_1FE.$$

Но

$$Ab_1FE=AE.Ab_1=(DB-CA)Cc_1=[f(b)-f(a)]\Delta x,$$

откуда

$$D<[f(b)-f(a)]\Delta x.$$

Переходя къ предѣлу имѣемъ:

$$0\leqq \lim_{\Delta x=0} D \leqq \lim_{\Delta x=0}[f(b)-f(a)]\Delta x.$$

Правая часть неравенства ввиду послѣдняго множителя стремится къ нулю; отсюда

$$\lim_{\Delta x=0} D=0.$$

Подставляя въ формулу (10), получимъ:

$$J=\lim_{\Delta x=0}\sum_{a}^{b-\Delta x} f(x)\Delta x.$$

При Δx стремящемся къ нулю J переходитъ въ сумму безконечно-большаго числа безконечно-малыхъ слагаемыхъ вида $f(x)\,dx$. Такого рода сумма обозначается черезъ $\int$:

$$J=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Раньше мы нашли, что

$$J=\Phi(b)-\Phi(a),$$

гдѣ $\Phi(x)$ есть интегралъ функціи $f(x)$, отсюда

$$\Phi(b)-\Phi(a)=\int_a^b f(x)\,dx \quad \ldots\ldots(11).$$

Разность $\Phi(b)-\Phi(a)$ мы называли опредѣленнымъ интеграломъ функціи $f(x)$ между предѣлами a и b. Такимъ образомъ опредѣленный интегралъ есть предѣлъ нѣкоторой суммы, или сумма безконечнаго числа безконечно-малыхъ слагаемыхъ.

Слѣдуетъ замѣтить, что эта теорема доказана только для функцій, возрастающихъ въ данномъ промежуткѣ, но легко распространить это доказательство на случай всякой непрерывной функціи.

Знакъ $\int$ употребляютъ также для обозначенія неопредѣленнаго интеграла, такъ что, если

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} = f(x), \quad . \; . \; . \; . \; (12),$$

то

$$\Phi(x) = \int f(x)\,dx, \quad . \; . \; . \; . \; (13)$$

гдѣ подъ знакомъ $\int$ пишется дифференціалъ, а не производная функціи $\Phi(x)$.

$f(x)$ въ формулѣ (13) называется **подъинтегральною функціею**, а $f(x)\,dx$ назовемъ **подъинтегральнымъ выраженіемъ**.

Соединяя формулы (12) и (13), мы можемъ написать

$$\frac{d\int f(x)\,dx}{dx} = f(x), \quad \int \frac{d\Phi(x)}{dx}\,dx = \Phi(x),$$

т.е. производная неопредѣленнаго интеграла равняется подъинтегральной функціи, и неопредѣленный интегралъ производной нѣкоторой функціи равняется этой функціи.

Предпослѣднее уравненіе можно также и написать

$$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx,$$

т.е. дифференціалъ неопредѣленнаго интеграла равняется подъинтегральному выраженію.

Пользуясь нашимъ новымъ обозначеніемъ уравненіе (11) можно представить въ видѣ:

$$\int_a^b f(x)dx = \left[\int f(x)dx\right]_{x=b} - \left[\int f(x)dx\right]_{x=b} \quad . \ . \ . \ . \ (14)$$

На этомъ основаніи мы получаемъ двѣ формулы:

$$1) \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (15).$$

Дѣйствительно

$$\int_b^a f(x)\,dx = \left[\int f(x)\,dx\right]_{x=a} - \left[\int f(x)\,dx\right]_{x=b}.$$

Сравнивая это выраженіе съ (14) убѣждаемся въ справедливости уравненія (15)

$$2) \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \quad . \ . \ . \ (16).$$

По формулѣ (14) имѣемъ:

$$\int_a^c f(x)\,dx = \left[\int f(x)\,dx\right]_{x=c} - \left[\int f(x)\,dx\right]_{x=a}$$

$$\int_c^b f(x)\,dx = \left[\int f(x)\,dx\right]_{x=b} - \left[\int f(x)\,dx\right]_{x=c}.$$

Складывая два послѣднія уравненія и пользуясь уравненіемъ (14) получимъ уравненіе (16).

Основныя формулы интегрированія.

Пусть требуется опредѣлить интегралъ функціи x^m. Изъ дифференціальнаго исчисленія мы знаемъ, что

$$\frac{d\,\dfrac{x^{m+1}}{m+1}}{dx} = x^m,$$

т. е. $\frac{x^{m+1}}{m+1}$ есть функція, производная которой равна x^m. По этому наоборотъ

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (17).$$

Это уравненіе вѣрна, если $m \neq -1$. Для случая $m = -1$ мы пользуемся формулою

$$\frac{d\ln x}{dx} = \frac{1}{x},$$

откуда $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x.$

Зная, что $\frac{d\left(\frac{a^x}{\ln a}\right)}{dx} = a^x$, находимъ:

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}.$$

Если вмѣсто a подставить частное значеніе e, то получимъ:

$$\int e^x dx = e^x.$$

Чтобы найти интегралъ тригонометрической функціи $\sin x$, замѣчаемъ, что

$$\frac{d(-\cos x)}{dx} = \sin x;$$

отсюда $\int \sin x \cdot dx = -\cos x$.

Такъ же находимъ

$$\frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x; \quad \int \cos x \cdot dx = \sin x$$

$$\frac{d\,tg\,x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tg\,x$$

$$\frac{d(-ctg\,x)}{dx} = \frac{1}{\sin^2 x}; \quad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctg\,x.$$

Далѣе мы имѣемъ формулу:

$$\frac{d \arcsin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

значитъ $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x$.

Но съ другой стороны

$$\frac{d(-\arccos x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\arccos x$$

По теоремѣ II на стр. 256 мы должны тогда имѣть, что функціи $\arcsin x$ и $-\arccos x$ различаются только на постоянную величину.

Въ самомъ дѣлѣ, мы нашли (стр. 132), что

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

Также изъ формулъ

$$\frac{d\,arc\,tg\,x}{dx} = \frac{1}{1+x^2}, \quad \frac{d(-arc\,ctg\,x)}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

находимъ

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x, \quad \int \frac{1}{1+x^2} dx = -\operatorname{arcctg} x$$

По стр. 135

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$$

Таблица.

$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \quad (m \neq -1)$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$
$\int \frac{dx}{x} = \ln x$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x$
$\int a^x \cdot dx = \frac{a^x}{\ln a}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$
$\int e^x \cdot dx = e^x$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x$
$\int \cos x \, dx = \sin x$	
$\int \sin x \, dx = -\cos x$	

Теорема I. Интегралъ суммы функцій равенъ суммѣ интеграловъ слагаемыхъ:

$$\int \{f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)\} dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx + \ldots + \int f_n(x) dx.$$

Чтобы убѣдиться въ справедливости этой теоремы, стоитъ только доказать, что производныя лѣвой и правой части равны между собою. Дифференцируя лѣвую часть, мы получаемъ непосредственно $f_1(x) + f_2(x) + \ldots$ $\ldots + f_n(x)$. При дифференцированіи правой части мы пользуемся теоремою, что производная суммы функцій равна суммѣ производныхъ слагаемыхъ, и тогда, въ самомъ дѣлѣ, получаемъ то же выраженіе $f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$.

Теорема II. Постояннаго множителя можно вынести за знакъ интеграла:

$$\int C f(x)\,dx = C\int f(x)\,dx.$$

Эту формулу также можно провѣрить путемъ дифференцированія. Производная лѣвой части равна $Cf(x)$, производная же правой части будетъ $\frac{d}{dx}C\int f(x)\,dx$; постоянный множитель C по извѣстной теоремѣ дифференціальнаго исчисленія можетъ быть вынесенъ за знакъ дифференцированія и мы получимъ также

$$\frac{d}{dx}C\int f(x)\,dx = C\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = Cf(x).$$

Примѣръ I. $\int(x^4+12x^3+3x^2+x+7)\,dx$.

По теоремѣ I имѣемъ:

$$J=\int(x^4+12x^3+3x^2+x+7)\,dx =$$
$$=\int x^4dx+\int 12x^3dx+\int 3x^2dx+\int x\,dx+\int 7\,dx.$$

Затѣмъ на основаніи теоремы II:

$$J=\int x^4\,dx+12\int x^3dx+3\int x^2dx+\int x\,dx+7\int dx.$$

Пользуясь формулою (17) находимъ:

$$J=\frac{x^5}{5}+12\frac{x^4}{4}+3\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+7x=\frac{x^5}{5}+3x^4+x^3+\frac{x^2}{2}+7x.$$

Примѣръ II. $\int[(x-1)^2+(x+2)^3]\,dx$.

Раскрывая скобки получимъ:

$$J=\int[(x-1)^2+(x+2)^3]\,dx=\int(x^2-2x+1+x^3+6x^2+12x+8)\,dx=$$
$$=\int(x^3+7x^2+10x+9),dx.$$

Далѣе поступаемъ, какъ въ прежнемъ примѣрѣ:

$$J=\int x^3dx+7\int x^2dx+10\int x\,dx+9\int dx=\frac{x^4}{4}+\frac{7}{3}x^3+5x^2+9x.$$

Примѣръ III. $\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x^3}+\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[5]{x^2}}-\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}\right)dx$

$$=\int\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-3}+\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{2/5}}-x^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{x}\right)dx$$

$$=\int x^{\frac{1}{2}}dx+\int x^{-3}dx+\int x^{-\frac{1}{15}}dx-\int x^{-\frac{1}{2}}dx-\int\frac{1}{x}\,dx.$$

$$=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\frac{x^{-2}}{-2}+\frac{x^{\frac{14}{15}}}{\frac{14}{15}}-\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}-\ln x$$

$$=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{15}{14}\sqrt[15]{x^{14}}-2\sqrt{x}-\ln x.$$

Формула интегрированія по частямъ.

Изъ формулы

$$\frac{d(uv)}{dx}=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$$

получаемъ посредствомъ интегрированія

$$uv=\int u\frac{dv}{dx}dx+\int\frac{du}{dx}\cdot v\,dx.$$

Отсюда $\int u\frac{dv}{dx}\cdot dx=uv-\int\frac{du}{dx}\cdot v\,dx \; . \; . \; . \; . \; (18).$

Введемъ обозначенія

$$u=\varphi(x),\ \frac{dv}{dx}=\psi(x),$$

тогда $\frac{du}{dx}=\varphi'(x)\ ;\ v=\int\psi(x)\cdot dx.$

Подставляя эти значенія въ формулу (18), получаемъ:

$$\int\varphi(x)\psi(x)\,dx=\varphi(x)\int\psi(x)\,dx-\int\left[\varphi'(x)\int\psi(x)\,dx\right]dx.\ (19).$$

Эта формула носитъ названіе формулы интегрированія по частямъ.

Примѣръ I.. $\int xe^x\,dx.$

Предположимъ въ формулѣ (19)

$$\varphi(x)=x,\ \ \psi(x)=e^x;$$

тогда

$$\int xe^x dx=x\int e^x dx-\int\left[\frac{dx}{dx}\int e^x dx\right]dx$$

$$=xe^x-\int e^x dx=xe^x-e^x=e^x(x-1).$$

Примѣръ II. $\int \ln x\,dx.$

Предположимъ $\varphi(x) = \ln x$, $\psi(x) = 1$,
тогда
$$\int \ln x\, dx = \ln x \int dx - \int \left[\frac{1}{x}\int dx\right] dx$$
$$= \ln x \cdot x - \int dx = x \ln x - x = x(\ln x - 1).$$

Методъ подстановки новой перемѣнной.

Пусть $f(x)$ есть производная функціи $\mathcal{F}(x)$:
$$\frac{d\mathcal{F}(x)}{dx} = f(x) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20)$$
Тогда
$$\mathcal{F}(x) = \int f(x)\,dx \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21).$$

Спрашивается, что произойдетъ, если вмѣсто x подъ знакомъ интеграла ввести другую перемѣнную t, причемъ
$$x = \varphi(t) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22).$$
По формулѣ дифференцированія функціи отъ функціи имѣемъ:
$$\frac{d\mathcal{F}(x)}{dt} = \frac{d\mathcal{F}(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt},$$
ввиду формулъ (20) и (22):
$$\frac{d\mathcal{F}(\varphi(t))}{dt} = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$
Интегрируя, получимъ:
$$\mathcal{F}(\varphi(t)) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt \quad \ldots\ldots \quad (23)$$
$\mathcal{F}(\varphi(t))$ есть функція отъ t, которая получается, если въ $\mathcal{F}(x)$ замѣнить x черезъ $\varphi(t)$. Значитъ правая часть уравненія (23) есть выраженіе, въ которое переходитъ правая часть уравненія (21) при замѣнѣ x на $\varphi(t)$ и мы получаемъ слѣдующую формулу для подстановки новой перемѣнной подъ знакомъ интеграла:
$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt \quad \ldots\ldots \quad (24)$$

Наоборотъ, если требуется вычислить интегралъ, имѣющій видъ правой части уравненія (24), то помощію введенія новой перемѣнной можно его представить въ видѣ лѣвой части. Чтобы обозначить, что правая часть уравненія (24) есть первоначально данный интегралъ, напишемъ x вмѣсто t и u вмѣсто x; тогда:

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int f(u)\,du \quad \ldots \quad (25)$$

причемъ $u = \varphi(x)$.

Смотря по удобству, примѣняется или формула (24) или же формула (25).

Примѣръ I. $\int (a+bx)^n dx$.

Введемъ новую перемѣнную

$$a + bx = t,$$

тогда $x = \frac{t-a}{b}$; $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{b}$, и по формулѣ (24):

$$\int (a+bx)^n dx = \int \frac{t^n}{b} dt = \frac{1}{b}\int t^n dt = \frac{1}{b}\cdot\frac{t^{n+1}}{n+1}.$$

Подставляя опять $a+bx$ вмѣсто t, получимъ:

$$\int (a+bx)^n dx = \frac{(a+bx)^{n+1}}{b(n+1)}.$$

Можно также воспользоваться формулою (25). Выраженіе не измѣнится, если его умножить и раздѣлить на b:

$$\int (a+bx)^n dx = \frac{1}{b}\int (a+bx)^n d(bx).$$

Кромѣ того дифференціалъ не измѣняется, если придать къ нему постоянное количество:

$$\int (a+bx)^n dx = \frac{1}{b}\int (a+bx)^n d(a+bx).$$

Если теперь вмѣсто $a+bx$ написать t, то получимъ опять тотъ же интегралъ, что и при предыдущемъ рѣшеніи.

Примѣръ II. $\int \frac{x\,dx}{a+bx^2}$.

Раздѣлимъ и умножимъ на $2b$:

$$J = \int \frac{x\,dx}{a+bx^2} = \frac{1}{2b}\int \frac{2bx\,dx}{a+bx^2} = \frac{1}{2b}\cdot\int \frac{d(bx^2)}{a+bx^2}.$$

Дифференціалъ не измѣнится, если придать къ нему постоянное количество a:

$$J = \frac{1}{2b}\int\frac{d(a+bx^2)}{a+bx^2}.$$

Вводя $a+bx^2 = u$, получаемъ:

$$J = \frac{1}{2b}\int\frac{du}{u} = \frac{1}{2b}\ln u.$$

Замѣняемъ опять u на $a+bx^2$:

$$\int\frac{x\,dx}{a+bx^2} = \frac{1}{2b}\ln(a+bx^2).$$

Примѣръ III. $\int tg\,x.dx$.

$$J = \int tg\,x\,dx = \int\frac{\sin x}{\cos x}dx.$$

Но $d\cos x = -\sin x\,dx$, отсюда

$$J = -\int\frac{-\sin x\,dx}{\cos x} = -\int\frac{d\cos x}{\cos x}.$$

Подставляемъ новую перемѣнную $\cos x = u$:

$$J = -\int\frac{du}{u} = -\ln u = -\ln\cos x$$

$$\int tg\,x\,dx = -\ln\cos x.$$

Примѣръ IV. $\int ctg\,x\,dx$.

$$J = \int ctg\,x\,dx = \int\frac{\cos x}{\sin x}dx.$$

Такъ какъ $d\sin x = \cos x\,dx$, то

$$J = \int\frac{d\sin x}{\sin x}.$$

Вводя новую перемѣнную $\sin x = u$, получаемъ:

$$J = \int\frac{du}{u} = \ln u = \ln\sin x$$

$$\int ctg\,x\,dx = \ln\sin x.$$

Примѣръ V. $\int \arcsin x\,dx$.

Для вычисленія этого интеграла пользуемся формулою интегрированія по частямъ, причемъ принимаемъ $\varphi(x) = \arcsin x$, $\psi(x) = 1$.

Подставляя эти значенія въ формулу (19) получаемъ:

$$J = \arcsin x \int dx - \int\left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \int dx\right] dx = x \arcsin x - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Найдемъ значеніе второго слагаемаго:

$$J' = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Введемъ новую перемѣнную $1-x^2 = u$:

$$J' = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}} du = -\frac{1}{2}\,\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{1-x^2}.$$

Подставляя значеніе J' въ выраженіе J находимъ:

$$\int \arcsin x\,dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}.$$

Примѣръ VI. $\int \operatorname{arctg} x\,dx$.

Подставляя въ формулу (19): $\varphi(x) = \operatorname{arctg} x$, $\psi(x) = 1$, находимъ:

$$J = \int \operatorname{arctg} x\,dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{1}{1+x^2}\,x\,dx.$$

$$J' = \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln u = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

отсюда

$$\int \operatorname{arctg} x\,dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

Интегрированіе раціональныхъ функцій.

Общій видъ цѣлой раціональной функціи есть:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n,$$

гдѣ a_0 a_1 ... a_n постоянныя величины. Для опредѣленія интеграла этой функціи пользуемся теоремами объ интегралѣ суммы, о вынесеніи постояннаго множителя и интегралѣ степени:

$$\int f(x)\,dx = a_0\int x^n dx + a_1\int x^{n-1}dx + a_2\int x^{n-2}dx + \ldots$$
$$\ldots + a_{n-1}\int x\,dx + a_n\int dx = \frac{a_0}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_1}{n}x^n + \frac{a_2}{n-1}x^{n-1} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{a_{n-1}}{2}x^2 + a_n x.$$

Итакъ, мы видимъ, что интегралъ всякой цѣлой раціональной функціи есть цѣлая раціональная функція.

Разсмотримъ теперь интегрированіе дробныхъ раціональныхъ функцій. Общій видъ такой функціи есть:

$$\mathfrak{F}(x) = \frac{\varphi(x)}{f(x)},$$

гдѣ $\varphi(x)$ и $f(x)$ обозначаютъ цѣлыя раціональныя функціи. Положимъ, что первая изъ нихъ есть многочленъ $m^{ой}$ степени, а вторая многочленъ $n^{ой}$ степени:

$$\mathfrak{F}(x) = \frac{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m}{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}.$$

При этомъ надо различать два случая:
1) степень числителя больше или равна степени знаменателя, 2) степень числителя меньше степени знаменателя:

$$1)\ m \geqq n\ ,\quad 2)\ m < n.$$

Первый случай, помощью непосредственнаго дѣленія можно всегда свести ко второму. Дѣйствительно, раздѣливъ числителя на знаменателя, мы можемъ представить данную дробную функцію въ видѣ двухъ слагаемыхъ, изъ которыхъ первое будетъ цѣлая функція, а второе дробная, причемъ степень числителя дробной функціи будетъ меньше степени знаменателя.

Слѣдовательно, намъ остается разсмотрѣть только интегрированіе дробныхъ раціональныхъ функцій въ которыхъ степень числителя меньше степени знаменателя.

Докажемъ сначала вспомогательную теорему. Пусть данъ многочленъ $n^{ой}$ степени

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n \ldots (26).$$

Коэффиціентъ при x^n мы предполагаемъ равнымъ единицѣ, ибо, взявъ его за скобки, можно изслѣдованіе всякаго многочлена привести къ изслѣдованію многочлена (26).

Пусть при частномъ значеніи $x=c_1$ функція $f(x)$ обращается въ нуль, т.е. c_1 есть корень уравненія $f(x)=0$. Тогда, подставляя это значеніе въ уравненіе (26), получаемъ:

$$0=c_1^n+a_1c_1^{n-1}+a_2c_1^{n-2}+\ldots+a_{n-1}c_1+a_n.$$

Вычитая это уравненіе изъ уравненія (26) имѣемъ:

$$f(x)=x^n-c_1^n+a_1(x^{n-1}-c_1^{n-1})+a_2(x^{n-2}-c_1^{n-2})+\ldots+a_{n-1}(x-c_1).$$

Изъ алгебры мы знаемъ, что разность одинаковыхъ степеней дѣлится безъ остатка на разность ихъ основаній, слѣдовательно всѣ члены послѣдняго многочлена дѣлятся безъ остатка на $x-c_1$.

Отсюда, взявъ $x-c_1$ за скобки, получаемъ:

$$f(x)=(x-c_1)[(x^{n-1}+x^{n-2}c_1+\cdots+c_1^{n-1})+a_1(x^{n-2}+x^{n-3}c_1+\ldots+c_1^{n-2})+\ldots+a_{n-1}].$$

Разсматривая выраженіе въ скобкахъ, замѣчаемъ, что самая высшая степень x есть $n-1$. Такимъ образомъ функція $f(x)$ приняла видъ

$$f(x)=(x-c_1)f_1(x), \ldots\ldots\ldots (27)$$

гдѣ $f_1(x)$ есть многочленъ степени $n-1$.

Итакъ если многочленъ $n^{ой}$ степени при нѣкоторомъ значеніи $x=c_1$ обращается въ нуль, то его можно разложить на два множителя, изъ которыхъ одинъ будетъ $x-c_1$, а другой - многочленъ, степень котораго на единицу меньше степени первоначальнаго многочлена.

Такимъ образомъ если $f(x)$ изображаетъ многочленъ $n^{ой}$ степени, то

$$f_1(x) = x^{n-1} + e_1 x^{n-2} + e_2 x^{n-3} + \dots + e_{n-1}.$$

Положимъ теперь, что c_2 есть такое значеніе x, при которомъ функція $f_1(x)$ обращается въ нуль. Въ такомъ случаѣ $f_1(x)$ можно представить въ видѣ произведенія:

$$f_1(x) = (x - e_2)\, f_2(x),$$

гдѣ $f_2(x)$ есть многочленъ степени $n-2$. Подставляя значеніе $f_1(x)$ въ уравненіе (27), получимъ:

$$f(x) = (x - c_1)(x - c_2)\, f_2(x) \dots (28)$$

Если $f_1(x)$ обращается въ нуль при значеніи $x = c_2$, то по формулѣ (28) и $f(x)$ обратится въ нуль при этомъ значеніи x, то есть c_2 есть корень не только уравненія $f_1(x) = 0$, но также и уравненія $f(x) = 0$.

Продолжая подобное разсужденіе, мы можемъ представить нашу функцію въ видѣ:

$$f(x) = (x - c_1)(x - c_2)(x - c_3) \cdots (x - c_n) \dots (29),$$

гдѣ $c_1, c_2, c_3, \dots c_n$ суть корни уравненія $f(x) = 0$.

Конечно, если между корнями этого уравненія встрѣчаются равные, то и нѣкоторые изъ множителей разложенія сдѣлаются равными между собою.

Пользуясь доказанной теоремою, данную дробную функцію

$$F(x) = \frac{\varphi(x)}{f(x)}, \dots \dots (30)$$

гдѣ степень числителя меньше степени знаменателя, можно разложить на сумму **простѣйшихъ дробей**, интегрированіе которыхъ не представитъ никакого затрудненія.

Положимъ, что уравненіе $f(x) = 0$ имѣетъ α-кратный корень a, такъ что знаменателя можно представить въ видѣ произведенія двухъ множителей:

$$f(x) = (x-a)^{\alpha} f_1(x) \quad \ldots \ldots (31).$$

Въ такомъ случаѣ функцію (30) можно разложить на два слагаемыхъ:

$$\mathcal{F}(x) = \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{\varphi_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1} f_1(x)}, \quad \ldots (32)$$

причемъ во второй дроби степень числителя опять меньше степени знаменателя.

Докажемъ, что такое разложеніе всегда возможно. Подставляя въ уравненіе (30) значеніе $f(x)$ изъ уравненія (31), получимъ:

$$\mathcal{F}(x) = \frac{\varphi(x)}{(x-a)^{\alpha} f_1(x)}.$$

Прибавимъ и вычтемъ въ числителѣ $A_1 f_1(x)$:

$$\mathcal{F}(x) = \frac{\varphi(x) + A_1 f_1(x) - A_1 f_1(x)}{(x-a)^{\alpha} f_1(x)}.$$

Эту дробь можно разложить на два слагаемыхъ:

$$\mathcal{F}(x) = \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{\varphi(x) - A_1 f_1(x)}{(x-a)^{\alpha} f_1(x)} \quad \ldots (33)$$

Это выраженіе справедливо для всякаго значенія A_1. Положимъ теперь, что A_1 есть постоянная величина, именно

$$A_1 = \frac{\varphi(a)}{f_1(a)},$$

откуда $\varphi(a) - A_1 f_1(a) = 0$.

Сравнивая это выраженіе съ числителемъ второго слагаемаго въ уравненіи (33), видимъ, что $x=a$ обращаетъ въ нуль этого числителя. Слѣдовательно, мы можемъ его разложить на два множителя:

$$\varphi(x) - A_1 f_1(x) = (x-a)\varphi_1(x), \quad \ldots (34)$$

причемъ степень $\varphi_1(x)$ на единицу меньше степени многочлена $\varphi(x) - A_1 f_1(x)$. Такъ какъ степень

$\varphi(x)$ по предположенію меньше степени $f(x)$, и $f(x)=(x-\alpha)^\alpha f_1(x)$, причемъ α цѣлое положительное число, то и степень $\varphi_1(x)$ меньше степени $(x-\alpha)^{\alpha-1}f_1(x)$.

Подставляя найденное значеніе (34) въ уравненіе (33) и сокращая на $x-\alpha$, получаемъ уравненіе (32), которое требовалось доказать:

$$\mathcal{F}(x)=\frac{A_1}{(x-\alpha)^\alpha}+\frac{\varphi_1(x)}{(x-\alpha)^{\alpha-1}f_1(x)}.$$

Вторую дробь можно разложить такимъ же образомъ, тогда получимъ:

$$\mathcal{F}(x)=\frac{A_1}{(x-\alpha)^\alpha}+\frac{A_2}{(x-\alpha)^{\alpha-1}}+\frac{\varphi_2(x)}{(x-\alpha)^{\alpha-2}f_1(x)}.$$

Продолжая такимъ образомъ, можемъ разложить дробную функцію $\mathcal{F}(x)$ на сумму дробей вида:

$$\mathcal{F}(x)=\frac{A_1}{(x-\alpha)^\alpha}+\frac{A_2}{(x-\alpha)^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{A_\alpha}{x-\alpha}+\frac{\varphi_\alpha(x)}{f_1(x)}, \quad \ldots\ldots (35)$$

причемъ $A_1, A_2, \ldots A_\alpha$ постоянныя величины, степень многочлена $\varphi_\alpha(x)$ меньше степени $f_1(x)$, и $f_1(x)$ не содержитъ множителя $x-\alpha$. Эту послѣднюю дробь $\frac{\varphi_\alpha(x)}{f_1(x)}$ можно разложить подобнымъ же образомъ и т. д.

Особенно просто получается подобное разложеніе, если знаменатель имѣетъ лишь различныхъ множителей первой степени:

$$f(x)=(x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)\ldots(x-c_n).$$

Пользуясь уравненіемъ (35), находимъ:

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\frac{A_1}{x-c_1}+\frac{\varphi(x)}{(x-c_2)(x-c_3)\ldots(x-c_n)}=$$

$$=\frac{A_1}{x-c_1}+\frac{A_2}{x-c_2}+\frac{A_3}{x-c_3}+\ldots+\frac{A_n}{x-c_n}$$

Помощью этой формулы легко найти интегралъ дробныхъ функцій такого вида:

$$\int\frac{\varphi(x)}{f(x)}dx=A_1\int\frac{dx}{x-c_1}+A_2\int\frac{dx}{x-c_2}+\cdots+A_n\int\frac{dx}{x-c_n}.$$

Мы знаемъ, что дифференціалъ функціи не измѣнится, если изъ нея вычесть постоянную величину; отсюда:

$$\int\frac{\varphi(x)}{f(x)}dx=A_1\int\frac{d(x-c_1)}{x-c_1}+A_2\int\frac{d(x-c_2)}{x-c_2}+\cdots+A_n\int\frac{d(x-c_n)}{x-c_n}.$$

По второй формулѣ таблицы на стр.266 находимъ:

$$\int\frac{\varphi(x)}{f(x)}dx=A_1\ln(x-c_1)+A_2\ln(x-c_2)+\cdots+A_n\ln(x-c_n).$$

Примѣръ I. Пусть требуется интегрировать дробную функцію:

$$F(x)=\frac{x^6+3x^5-4x^4-10x^3+9x^2+8x-2}{x^3+6x^2+11x+6}.$$

Дѣлимъ числителя на знаменателя:

$$\begin{array}{l|l}
x^6+3x^5-4x^4-10x^3+9x^2+8x-2 & x^3+6x^2+11x+6 \\ \cline{2-2}
\underline{x^6+6x^5+11x^4+6x^3} & x^3-3x^2+3x-1=(x-1)^3 \\
\quad -3x^5-15x^4-16x^3+9x^2+8x-2 & \\
\quad \underline{-3x^5-18x^4-33x^3-18x^2} & \\
\qquad +3x^4+17x^3+27x^2+8x-2 & \\
\qquad \underline{3x^4+18x^3+33x^2+18x} & \\
\qquad\quad -x^3-6x^2-10x-2 & \\
\qquad\quad \underline{-x^3-6x^2-11x-6} & \\
\qquad\qquad\quad x+4 &
\end{array}$$

Отсюда наша дробная функція можетъ быть представлена въ видѣ

$$F(x)=(x-1)^3+\frac{x+4}{x^3+6x^2+11x+6}$$

гдѣ степень числителя второго слагаемаго меньше степени знаменателя. Разлагая теперь знаменателя на множителей, имѣемъ для дробной части

$$F_1(x)=\frac{x+4}{(x+1)(x+2)(x+3)}.$$

Отсюда эту дробь можно разложить на три простѣйшія слѣдующаго вида:

$$\frac{x+4}{(x+1)(x+2)(x+3)}=\frac{A_1}{x+1}+\frac{A_2}{x+2}+\frac{A_3}{x+3} \quad \ldots\ldots (36)$$

Для вычисленія A_1, A_2, A_3, освобождаемъ уравненіе (36) отъ знаменателя.

$$x+4=A_1(x+2)(x+3)+A_2(x+1)(x+3)+A_3(x+1)(x+2).$$

Подставимъ сюда вмѣсто x тѣ значенія его, которыя обращаютъ въ нуль знаменателя дроби $F(x)$. Тогда получаемъ:

$$x=-1, \qquad 3=2A_1, \quad A_1=\tfrac{3}{2},$$
$$x=-2, \qquad 2=-A_2, \quad A_2=-2$$
$$x=-3, \qquad 1=2A_3, \quad A_3=\tfrac{1}{2}.$$

Теперь замѣняемъ A_1, A_2, A_3 въ уравненіи (36) ихъ значеніями:

$$\frac{x+4}{(x+1)(x+2)(x+3)}=\frac{3/2}{x+1}-\frac{2}{x+2}+\frac{\frac{1}{2}}{x+3}.$$

Слѣдовательно

$$F(x)=(x-1)^3+\frac{3/2}{x+1}-\frac{2}{x+2}+\frac{\frac{1}{2}}{x+3}.$$

Теперь легко найти интегралъ функціи $F(x)$

$$\int F(x)\,dx=\int(x-1)^3dx+3/2\int\frac{dx}{x+1}-2\int\frac{dx}{x+2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+3}=$$

$$=\frac{(x-1)^4}{4}+\frac{3}{2}\ln(x+1)-2\ln(x+2)+\frac{1}{2}\ln(x+3).$$

Примѣръ II. $\qquad F(x)=\dfrac{x^3+2}{(x+1)(x-1)^3}.$

По общей формулѣ (35) намъ извѣстно, что $F(x)$ разлагается на простѣйшія дроби слѣдующаго вида:

$$\frac{x^3+2}{(x+1)(x-1)^3}=\frac{A_1}{(x-1)^3}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{A_3}{x-1}+\frac{B}{x+1}.$$

Для опредѣленія постоянныхъ A_1, A_2, A_3, B, освобождаемъ это равенство отъ знаменателей:

$$x^3+2=A_1(x+1)+A_2(x-1)(x+1)+A_3(x-1)^2(x+1)+B(x-1)^3.$$

Раскрываемъ скобки и располагаемъ по степенямъ x:

$$x^3+2=(A_3+B)x^3+(A_2-A_3-3B)x^2+(A_1-A_3+3B)x+A_1-A_2+A_3-B=0.$$

Последнее равенство справедливо для всѣхъ значенiй x, т.е. правая часть есть только другой видъ лѣвой; значитъ коэффицiенты соотвѣтственныхъ степеней x лѣвой и правой части равны между собою. Приравнявъ ихъ, мы получаемъ систему 4^хъ^ уравненiй, изъ которыхъ опредѣляемъ искомыя значенiя A_1, A_2, A_3, B:

$$\begin{aligned} 1 &= A_3+B & \qquad A_1 &= \tfrac{3}{2} \\ 0 &= A_2-A_3-3B & A_2 &= \tfrac{3}{4} \\ 0 &= A_1-A_3+3B & A_3 &= \tfrac{9}{8} \\ 2 &= A_1-A_2+A_3-B & B &= -\tfrac{1}{8}. \end{aligned}$$

Этотъ способъ опредѣленiя A_1, A_2, A_3, B носитъ названiе способа сравненiя коэффицiентовъ.

Такимъ образомъ нашу дробную функцiю можно разложить на простѣйшiя дроби:

$$\frac{x^3+2}{(x+1)(x-1)^3}=\frac{\frac{3}{2}}{(x-1)^3}+\frac{\frac{3}{2}}{(x-1)^2}+\frac{\frac{9}{8}}{x-1}-\frac{\frac{1}{8}}{x+1}.$$

Теперь интегрированiе этой функцiи не представляетъ никакого затрудненiя.

$$\int\frac{(x^3+2)dx}{(x+1)(x-1)^3}=\frac{3}{2}\int\frac{dx}{(x-1)^3}+\frac{3}{4}\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\frac{9}{8}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{8}\int\frac{dx}{x+1}$$

$$=\frac{3}{2}\int(x-1)^{-3}d(x-1)+\frac{3}{4}\int(x-1)^{-2}d(x-2)+\frac{9}{8}\int\frac{d(x-1)}{x-1}-\frac{1}{8}\int\frac{d(x+1)}{x+1}.$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{(x-1)^{-2}}{-2}+\frac{3}{4}\cdot\frac{(x-1)^{-1}}{-1}+\frac{9}{8}\ln(x-1)-\frac{1}{8}\ln(x+1)$$

$$=-\frac{3}{4(x-1)^2}-\frac{3}{4(x-1)}+\frac{9}{8}\ln(x-1)-\frac{1}{8}\ln(x+1)$$

$$= -\frac{3x}{4(x-1)^2} + \frac{9}{8}\ln(x-1) - \frac{1}{8}\ln(x+1).$$

Разложеніе дробной раціональной функціи $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ на простѣйшія дроби было основано на разложеніи знаменателя $f(x)$ на множителей вида $x-\alpha$, гдѣ α означаетъ корень уравненія $f(x)=0$. Если между корнями этого уравненія встрѣчаются мнимые, то разложеніе дроби $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$, хотя возможно, но получается въ мнимомъ видѣ. Чтобы и въ этомъ случаѣ получить результатъ въ вещественномъ видѣ, мы примѣняемъ другого рода разложеніе.

Въ алгебрѣ доказывается, что если уравненіе съ вещественными коэффиціентами $f(x)=0$ имѣетъ мнимый корень

$$\alpha + \beta\sqrt{-1},$$

гдѣ α и β величины вещественныя, то непремѣнно существуетъ другой корень вида

$$\alpha - \beta\sqrt{-1}.$$

Такія двѣ мнимыя величины, различающіяся только знакомъ при мнимомъ слагаемомъ, называются СОПРЯЖЕННО-МНИМЫМИ.

Соотвѣтственно этимъ двумъ корнямъ, при разложеніи функціи $f(x)$ встрѣчаются множители $x-(\alpha+\beta\sqrt{-1})$ и $x-(\alpha-\beta\sqrt{-1})$. Перемножая ихъ, получаемъ:

$$[x-(\alpha+\beta\sqrt{-1})][x-(\alpha-\beta\sqrt{-1})] = [(x-\alpha)-\beta\sqrt{-1}][(x-\alpha)+\beta\sqrt{-1}] =$$
$$= (x-\alpha)^2+\beta^2,$$

т.е. величину вещественную.

Такимъ образомъ видимъ, что если $f(x)=0$ имѣетъ мнимые корни, то $f(x)$ можно разложить на вещественныхъ множителей первой и второй степени.

Конечно, и эти мнимые корни могутъ получиться нѣсколько разъ, такъ что въ общемъ случаѣ

$$f(x) = [(x-\alpha)^2 + \beta^2]^n f_1(x),$$

гдѣ многочленъ $f_1(x)$ не содержитъ множителя $(x-\alpha)^2 + \beta^2$.

Значитъ дробную функцію можно представлять въ видѣ:

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{\varphi(x)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n f_1(x)}.$$

Можно доказать, что въ такомъ случаѣ эта функція можетъ быть разложена на два слагаемыхъ вида:

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{p_1 x + q_1}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n} + \frac{\varphi_1(x)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1} f_1(x)}.$$

Разлагая и правую дробь подобнымъ образомъ и т. д., мы получаемъ наконецъ формулу

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{p_1 x + q_1}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n} + \frac{p_2 x + q_2}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1}} + \ldots + \frac{p_n x + q_n}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + \frac{\varphi_n(x)}{f_1(x)} \quad \ldots (37)$$

гдѣ $p_1, q_2, p_2, q_2, \ldots p_n, q_n$ постоянные коэффиціенты, а $\varphi_n(x)$ многочленъ, степень котораго меньше степени $f_1(x)$.

Такимъ образомъ интегрированіе данной функціи сводится къ отыскиванію интеграловъ вида

$$\mathcal{J} = \int \frac{px+q}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n} dx.$$

Для вычисленія такого интеграла введемъ сперва новую перемѣнную

$$x - \alpha = y,$$

откуда

$$x = y + \alpha, \quad dx = dy,$$

такъ что интегралъ $\mathcal{J}$ переходитъ въ слѣдующій

$$\mathcal{J} = \int \frac{py + p\alpha + q}{(y^2+\beta^2)^n} dy = p\int \frac{y\,dy}{(y^2+\beta^2)^n} + (p\alpha + q)\int \frac{dy}{(y^2+\beta^2)^n}.$$

Вычислимъ каждый интегралъ отдѣльно.

$$\mathcal{J}_1=\int\frac{y\,dy}{(y^2+\beta^2)^n}=\frac{1}{2}\int\frac{2y\,dy}{(y^2+\beta^2)^n}=\frac{1}{2}\int\frac{d(y^2)}{(y^2+\beta^2)^n}=\frac{1}{2}\int\frac{d(y^2+\beta^2)}{(y^2+\beta^2)^n}.$$

Подставляемъ $y^2+\beta^2=t$. Если $n>1$, то

$$\mathcal{J}_1=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^n}=\frac{1}{2}\int t^{-n}dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{-n+1}}{-n+1}=-\frac{1}{2(n-1)t^{n-1}}=-\frac{1}{2(n-1)(y^2+\beta^2)^{n-1}},$$

Если же $n=1$, то

$$\mathcal{J}_1=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\ln t=\frac{1}{2}\ln(y^2+\beta^2).$$

Второй интегралъ въ формулѣ (38) можно преобразовать такимъ образомъ:

$$\mathcal{J}_2=\int\frac{dy}{(y^2+\beta^2)^n}.$$

Сперва вводимъ новую перемѣнную u, опредѣленную уравненіемъ

$$y=\beta u,$$

откуда

$$dy=\beta\,du.$$

$$\mathcal{J}_2=\int\frac{\beta\,du}{(\beta^2u^2+\beta^2)^n}=\int\frac{\beta\,du}{\beta^{2n}(u^2+1)^n}=\frac{1}{\beta^{2n-1}}\int\frac{du}{(u^2+1)^n}.$$

Такимъ образомъ опредѣленіе интеграла $\mathcal{J}_2$ сводится къ опредѣленію интеграла вида

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^n},$$

который при $n=1$ равняется $\operatorname{arctg} x$, а при $n>1$ вычисляется слѣдующимъ образомъ.

Такъ какъ $1=x^2+1-x^2$, то можемъ написать:

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^n}=\int\frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^n}dx=\int\frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}}-\int\frac{x^2}{(x^2+1)^n}dx \quad (39)$$

Для преобразованія второго слагаемаго, пользуемся формулою интегрированія по частямъ (стр 268), въ которой полагаемъ

$$\varphi(x)=x,\quad \psi(x)=\frac{x}{(x^2+1)^n}.$$

Тогда

$$\int\psi(x)dx=\int\frac{x\,dx}{(x^2+1)^n}=\frac{1}{2}\int\frac{2x\,dx}{(x^2+1)^n}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^n}.$$

Вводимъ новую перемѣнную $x^2+1=z$

$$\int\psi(x)dx=\frac{1}{2}\int z^{-n}dz=\frac{1}{2}\,\frac{z^{-n+1}}{-n+1}=-\frac{1}{2(n-1)z^{n-1}}=-\frac{1}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}}.$$

Отсюда, по формулѣ интегрированія по частямъ, имѣемъ:

$$\int\frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^n}=-\frac{x}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}}+\frac{1}{2(n-1)}\int\frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}}.$$

Подставляя это выраженіе въ формулу (39) и замѣчая, что $1-\dfrac{1}{2(n-1)}=\dfrac{2n-3}{2n-2}$,

получаемъ:

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^n}=\frac{x}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2n-2}\int\frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}}\quad\ldots(40).$$

Итакъ, интегрированіе нашей функціи сводится къ вычисленію интеграла функціи того же вида, но показатель которой уменьшенъ на единицу.

При $n=2$ формула (40) даетъ

$$\int\frac{dx}{(x+1)^2}=\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x^2},$$

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x\quad\ldots\ (41).$$

При $n=3$ мы имѣемъ

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^3}=\frac{x}{4(x^2+1)^2}+\frac{3}{4}\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

Подставляя сюда значеніе второго слагаемаго изъ предыдущей формулы, получаемъ

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^3}=\frac{x}{4(x^2+1)^2}+\frac{3x}{8(x^2+1)}+\frac{3}{8}\operatorname{arctg}x$$

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^3}=\frac{3x^3+5x}{8(x^2+1)^2}+\frac{3}{8}\operatorname{arctg} x.$$

Примѣръ. Какъ примѣръ всего пройденнаго на послѣднихъ страницахъ вычислимъ интегралъ

$$\mathcal{J}=\int\frac{x^4}{(x^2+1)^2(x+1)}dx.$$

Разложимъ сперва подъинтегральную функцію согласно формулѣ (37).

$$\frac{x^4}{(x^2+1)^2(x+1)}=\frac{p_1x+q_1}{(x^2+1)^2}+\frac{p_2x+q_2}{x^2+1}+\frac{A}{x+1}\quad\ldots(42)$$

Освободимся отъ знаменателя:

$$x^4=(p_1x+q_1)(x+1)+(p_2x+q_2)(x^2+1)(x+1)+A(x^2+1)^2.$$

Раскроемъ скобки, при чемъ напишемъ другъ подъ другомъ одинаковыя степени x:

$$\begin{aligned}x^4= & && && p_1x^2 && +p_1x && \\ & && && && +q_1x && +q_1\\ & +p_2x^4 && +p_2x^3 && +p_2x^2 && +p_2x && \\ & && +q_2x^3 && +q_2x^2 && +q_2x && +q_2\\ & +Ax^4 && && +2Ax^2 && && +A.\end{aligned}$$

Сравненіе коэффиціентовъ даетъ уравненія

$$\begin{aligned}p_2+A&=1,\\ p_2+q_2&=0,\\ p_1+p_2+q_2+2A&=0,\\ p_1+q_1+p_2+q_2&=0,\\ q_1+q_2+A&=0,\end{aligned}$$

изъ которыхъ

$$p_1=-\frac{1}{2},\ q_1=\frac{1}{2},\ p_2=\frac{3}{4},\ q_2=-\frac{3}{4},\ A=\frac{1}{4}.$$

Эти значенія мы подставляемъ въ уравненіе (42).

$$\frac{x^4}{(x^2+1)^2(x+1)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{-x+1}{(x^2+1)^2}+\frac{3}{4}\cdot\frac{x-1}{x^2+1}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+1}.$$

Такимъ образомъ искомый интегралъ $\mathcal{J}$ разлагается на слѣдующіе болѣе простые интегралы:

$$\mathcal{J}=\frac{1}{2}\int\frac{-x+1}{(x^2+1)^2}dx+\frac{3}{4}\int\frac{x-1}{x^2+1}dx+\frac{1}{4}\int\frac{1}{x+1}dx,$$

$$\mathcal{J}=-\frac{1}{2}\int\frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}+\frac{3}{4}\int\frac{x\,dx}{x^2+1}-\frac{3}{4}\int\frac{dx}{x^2+1}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+1}.$$

Изъ этихъ интеграловъ первый и третій получаются съ помощью подстановки

$$x^2+1=y.$$

Въ самомъ дѣлѣ

$$\int\frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{2x\,dx}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{dy}{y^2}=\frac{1}{2}\int y^{-2}dy$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{y^{-1}}{-1}=-\frac{1}{2y}=-\frac{1}{2(x^2+1)};$$

$$\int\frac{x\,dx}{x^2+1}=\frac{1}{2}\int\frac{2x\,dx}{x^2+1}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}=\frac{1}{2}\int\frac{dy}{y}=\frac{1}{2}\ln y=\frac{1}{2}\ln(x^2+1).$$

Второй интегралъ мы уже нашли (форм. (41)), четвертый равенъ $\operatorname{arctg} x$, а пятый

$$\int\frac{dx}{x+1}=\int\frac{d(x+1)}{x+1}=\ln(x+1).$$

Такимъ образомъ мы получаемъ наконецъ

$$\mathcal{J}=\frac{1}{4(x^2+1)}+\frac{x}{4(x^2+1)}+\frac{1}{4}\operatorname{arctg}x+\frac{3}{8}\ln(x^2+1)-\frac{3}{4}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{4}\ln(x+1),$$

$$\mathcal{J}=\frac{x+1}{4(x^2+1)}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{3}{8}\ln(x^2+1)+\frac{1}{4}\ln(x+1).$$

Интегрированіе ирраціональныхъ функцій.

Самый простой случай ирраціональной функціи есть тотъ, когда извлекаемый корень квадратный и подъ корнемъ находится многочленъ первой степени. Общій видъ такой функціи есть

$$f(x,\sqrt{a+bx}).$$

Интегралъ такой функціи легко опредѣлить помощью подстановки новой перемѣнной

$$\sqrt{a+bx}=t,$$

откуда $\qquad x=\frac{t^2-a}{b},\ \frac{dx}{dt}=\frac{2t}{b}.$

Подставляя эти значенія, получаемъ:

$$\int f(x,\sqrt{a+bx})\,dx=\int f\left(\frac{t^2-a}{b},t\right)\cdot\frac{2t}{b}dt=\int R(t)dt,$$

гдѣ $R(t)$ есть раціональная функція отъ t, такъ что мы привели интегрированіе ирраціональной функціи къ интегрированію раціональной.

Примѣръ. $\int x\sqrt{a+x}\,dx$.

Введемъ новую перемѣнную

$$\sqrt{a+x}=t,\ x=t^2-a,\ \frac{dx}{dt}=2t.$$

По подстановкѣ этихъ значеній въ первоначально данный интегралъ получаемъ

$$\int x\sqrt{a+x}\,dx=\int(t^2-a)t.2t\,dt=\int(2t^4-2at^2)dt=$$

$$=2\int t^4dt-2a\int t^2dt=\frac{2}{5}t^5-\frac{2}{3}at^3.$$

Подставляя сюда опять значеніе t, получаемъ

$$\int x\sqrt{a+x}\,dx=\frac{2}{5}(a+x)^2\sqrt{a+x}-\frac{2}{3}a(a+x)\sqrt{a+x}=$$

$$=\frac{2}{15}(3x^2+ax-2a^2)\sqrt{a+x}.$$

Если степень извлекаемаго корня выше второй, а подъ корень опять находится многочленъ первой степени, то интегрированіе такой функціи производится совершенно такимъ же образомъ. По этому перейдемъ теперь къ интегрированію такихъ выраженій, въ которыхъ подъ корнемъ квадратнымъ находится многочленъ второй степени.

Разсмотримъ нѣсколько частныхъ случаевъ:

Примѣръ I. $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

Этотъ интегралъ имѣетъ нѣкоторое сходство съ интеграломъ

$$\int\frac{dt}{\sqrt{1-t}}=\arcsin t,$$

по этому постараемся привести его къ такому виду. Введемъ новую перемѣнную:

$$x=at,\ \frac{dx}{dt}=a,$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int\frac{a\,dt}{\sqrt{a^2-a^2t^2}}=\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\arcsin t=\arcsin\frac{x}{a};$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ (43).$$

Примѣръ II. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}}$.

Мы вводимъ новую перемѣнную t посредствомъ уравненія

$$\sqrt{x^2+\alpha}=t-x\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ (44)$$

и опредѣляемъ изъ нея x въ зависимости отъ t.

$$x^2+\alpha=t^2-2tx+x^2$$

$$2tx=t^2-\alpha$$

$$x=\frac{t^2-\alpha}{2t}\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ (45)$$

Это значеніе x мы подставляемъ въ уравненіе (44):

$$\sqrt{x^2+\alpha}=t-\frac{t^2-\alpha}{2t}=\frac{t^2+\alpha}{2t}\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ (46).$$

Затѣмъ дифференцируемъ уравненіе (45)

$$\frac{dx}{dt}=\frac{2t\cdot 2t-2(t^2-\alpha)}{4t^2}=\frac{t^2+\alpha}{2t^2}\ \cdot\ \cdot\ (47).$$

Пользуясь формулами (46) и (47), находимъ

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}}=\int\frac{2t}{t^2+\alpha}\cdot\frac{t^2+\alpha}{2t^2}dt=\int\frac{1}{t}dt=\ln t.$$

Наконецъ опредѣляемъ t изъ уравненія (44):

$$t = x + \sqrt{x^2 + \alpha},$$

такъ что искомый интегралъ будетъ

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2+\alpha}\right) \cdot \cdot \cdot (48).$$

Докажемъ теперь формулу

$$\int \frac{f(x)}{\sqrt{Ax^2+2B+C}}dx = \varphi(x)\sqrt{Ax^2+2Bx+C} + K\int\frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} \quad (49)$$

въ которой $f(x)$ означаетъ цѣлый многочленъ $n^{\text{ой}}$ степени, $\varphi(x)$ цѣлый многочленъ $(n-1)^{\text{ой}}$ степени, а K постоянное количество.

Подставляя вмѣсто $f(x)$ и $\varphi(x)$ общій видъ многочленовъ $n^{\text{ой}}$ и $(n-1)^{\text{ой}}$ степени, получаемъ:

$$\int \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}dx =$$

$$= (b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + b_2x^{n-3} + \dots + b_{n-2}x + b_{n-1})\sqrt{Ax^2+2Bx+C} +$$

$$+ K\int\frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}.$$

Наша теорема будетъ доказана, если намъ удастся доказать, что всегда можно найти постоянные коэффиціенты $b_0, b_1, \dots b_{n-1}, K$.

Если наша формула справедлива, то выраженіе правой части представляетъ только другой видъ функціи лѣвой части. Но если обѣ функціи тождественны, то и производныя ихъ должны быть тождественны. Поэтому продифференцировавъ обѣ части равенства получимъ:

$$\frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} =$$

$$= (b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + b_2x^{n-3} + \dots + b_{n-2}x + b_{n-1}) \cdot \frac{Ax+B}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} +$$

$$+\left[(n-1)b_0x^{n-2}+(n-2)b_1x^{n-3}+\ldots+2b_{n-3}x+b_{n-2}\right]\sqrt{Ax^2+2Bx+C}+$$

$$+\frac{k}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}.$$

Освобождаемъ уравненіе отъ знаменателя:

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=(b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+$$

$$+b_2x^{n-3}+\ldots+b_{n-2}x+b_{n-1})(Ax+B)+\left[(n-1)b_0x^{n-2}+(n-2)b_1x^{n-3}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+2b_{n-3}x+b_{n-2}\right](Ax^2+2Bx+C)+k.$$

Раскрываемъ скобки:

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=$$

$$=b_0Ax^n+b_1Ax^{n-1}+b_2Ax^{n-2}+\ldots+b_{n-2}Ax^2+b_{n-1}Ax+$$

$$+b_0Bx^{n-1}+b_1Bx^{n-2}+\ldots+b_{n-3}Bx^2+b_{n-2}Bx+b_{n-1}B+$$

$$+(n-1)b_0Ax^n+(n-2)b_1Ax^{n-1}+(n-3)b_2Ax^{n-2}+\ldots+b_{n-2}Ax^2+$$

$$+2(n-1)b_0Bx^{n-1}+2(n-2)b_1Bx^{n-2}+\ldots+4b_{n-3}Bx^2+2b_{n-2}Bx+$$

$$+(n-1)b_0Cx^{n-2}+\ldots+3b_{n-4}Cx^2+2b_{n-3}Cx+b_{n-2}C+k,$$

Если функція лѣвой части тождественна съ функціей правой части, то коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ аргумента должны быть равны.

$$a_0=nb_0A$$

$$a_1=(n-1)b_1A+(2n-1)b_0B$$

$$a_2=(n-2)b_2A+(2n-3)b_1B+(n-1)b_0C$$

$$a_3=(n-3)b_3A+(2n-5)b_2B+(n-2)b_1C.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{n-2}=2b_{n-2}A+5b_{n-3}B+3b_{n-4}C$$

$$a_{n-1} = b_{n-1}A + 3b_{n-2}B + 2b_{n-3}C$$

$$a_n = b_{n-1}B + b_{n-2}C + k.$$

Мы получили систему $n+1$ уравненій первой степени относительно неизвѣстныхъ $b_0, b_1, \dots b_{n-1}, k$, изъ которой всегда можно опредѣлить значенія коэффиціентовъ, чѣмъ наша теорема доказана.

Примѣръ I. $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

Для опредѣленія интеграла, представимъ подъинтегральное выраженіе въ видѣ дроби, числитель которой раціоналенъ, а знаменатель ирраціоналенъ:

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int\frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx.$$

Тогда по формулѣ (49)

$$\int\frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = (b_0x+b_1)\sqrt{a^2-x^2} + k\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad (50)$$

Для опредѣленія коэффиціентовъ b_0, b_1, k дифференцируемъ обѣ части уравненія

$$\frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} = -(b_0x+b_1)\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} + b_0\sqrt{a^2-x^2} + \frac{k}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

Освобождаемъ отъ знаменателя:

$$a^2-x^2 = -b_0x^2 - b_1x + b_0a^2 - b_0x^2 + k.$$

Коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ аргумента лѣвой и правой части равны между собою, поэтому

$$-1 = -2b_0 \qquad b_0 = \frac{1}{2}$$

$$0 = -b_1 \qquad b_1 = 0$$

$$a^2 = b_0a^2 + k \qquad k = \frac{a^2}{2}.$$

Подставляя эти значенія въ уравненіе (50) получимъ:

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Замѣняемъ еще значеніе послѣдняго интеграла по формулѣ (43):

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} \quad \cdots (51)$$

Примѣръ II. $\int\sqrt{x^2+\alpha}\;dx$.

Чтобы опредѣлить интегралъ по формулѣ (49), приведемъ выраженія къ такому виду, чтобы въ числителѣ былъ раціональный многочленъ, а въ знаменателѣ ирраціональное выраженіе.

$$\int\sqrt{x^2+\alpha}\;dx = \int\frac{x^2+\alpha}{\sqrt{x^2+\alpha}}dx.$$

Пользуясь формулой (49) находимъ:

$$\int\frac{x^2+\alpha}{\sqrt{x^2+\alpha}}\,dx = (b_0x+b_1)\sqrt{x^2+\alpha}+k\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} \quad \cdots (52)$$

Чтобы опредѣлить коэффиціенты b_0, b_1, k, дифференцируемъ обѣ части:

$$\frac{x^2+\alpha}{\sqrt{x^2+\alpha}} = b_0\sqrt{x^2+\alpha}+(b_0x+b_1)\frac{x}{\sqrt{x^2+\alpha}}+\frac{k}{\sqrt{x^2+\alpha}},$$

$$x^2+\alpha = b_0x^2+b_0\alpha+b_0x^2+b_1x+k.$$

Коэффиціенты одинаковыхъ степеней аргумента лѣвой и правой части должны быть равны между собою; отсюда

$$1 = 2b_0 \qquad b_0 = \frac{1}{2}$$
$$0 = b_1 \qquad b_1 = 0$$
$$\alpha = b_0\alpha+k \qquad k = \frac{\alpha}{2}.$$

Подставляемъ эти значенія въ уравненіе (52)

$$\int\sqrt{x^2+\alpha}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+\alpha}+\frac{\alpha}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}}.$$

Послѣдній интегралъ опредѣленъ уравненіемъ (48). Подставляя сюда его значенія, получаемъ

$$\int\sqrt{x^2+\alpha} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+\alpha}+\frac{\alpha}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+\alpha}) \quad \cdots (53).$$

Докажемъ теперь, что опредѣленіе интеграла, вида

$$\mathcal{J}=\int\frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}},$$

къ которому по формулѣ (49) сводится каждый интегралъ, имѣющій форму

$$\int\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}},$$

гдѣ $f(x)$ цѣлый многочленъ, всегда возможно.

Положимъ сначала, что $A>0$. Тогда въ подкоренномъ выраженіи беремъ за скобки A:

$$\mathcal{J}=\int\frac{dx}{\sqrt{A\left(x^2+2\frac{B}{A}x+\frac{C}{A}\right)}}$$

$\sqrt{A}$ будетъ вещественный, и мы можемъ вынести его, какъ постояннаго множителя за знакъ интеграла:

$$\mathcal{J}=\frac{1}{\sqrt{A}}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2\frac{B}{A}x+\frac{C}{A}}}.$$

Теперь дополнимъ два первые члена подъ корнемъ до полнаго квадрата:

$$\mathcal{J}=\frac{1}{\sqrt{A}}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2\frac{B}{A}x+\frac{B^2}{A^2}+\frac{C}{A}-\frac{B^2}{A^2}}}=\frac{1}{\sqrt{A}}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{B}{A}\right)^2+\frac{AC-B^2}{A^2}}}$$

Введемъ теперь новую перемѣнную: $x+\frac{B}{A}=y$, откуда $dx=dy$, а второе слагаемое подъ корнемъ, которое можетъ быть больше или меньше нуля, обозначимъ черезъ α. Подставляя эти значенія въ предыдущее выраженіе, получимъ

$$\mathcal{J}=\frac{1}{\sqrt{A}}\int\frac{dy}{\sqrt{y^2+\alpha}}.$$

Мы видимъ, что если $A>0$, то вычисленіе интеграла сводится къ опредѣленію извѣстнаго уже намъ интеграла (48).

Допустимъ теперь, что $A<0$. Тогда $\sqrt{A}$ будетъ выраженіе мнимое. Чтобы получить результатъ въ дѣйствительномъ видѣ, подставляемъ: $A = -A_1$:

$$J = \int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-A_1 x^2 + 2Bx + C}}.$$

Беремъ A_1 за скобки.

$$J = \int \frac{dx}{\sqrt{A_1\left(\frac{C}{A_1} - x^2 + 2\frac{B}{A_1}x\right)}}.$$

Такъ какъ $A_1 > 0$, то $\sqrt{A_1}$ величина вещественная, которую можно вынести за знакъ интеграла:

$$J = \frac{1}{\sqrt{A_1}} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{C}{A_1} - \left(x^2 - 2\frac{B}{A_1}x\right)}}$$

Дополняемъ выраженіе въ скобкахъ до полнаго квадрата:

$$J = \frac{1}{\sqrt{A_1}} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{C}{A_1} + \frac{B^2}{A_1^2} - \left(x^2 - 2\frac{B}{A_1}x + \frac{B^2}{A_1^2}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{A_1}} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{A_1 C + B^2}{A_1^2} - \left(x - \frac{B}{A_1}\right)^2}}.$$

Если первое слагаемое подъ корнемъ величина отрицательная, то подкоренное выраженіе мнимое, но такъ какъ мы занимаемся лишь вещественными величинами, то положимъ что

$$\frac{A_1 C + B^2}{A_1^2} = a^2$$

величина положительная. Введемъ новую перемѣнную: $x - \frac{B}{A_1} = y$, откуда $dx = dy$. По подстановкѣ этихъ значеній въ нашъ интегралъ получаемъ:

$$J = \frac{1}{\sqrt{A_1}} \int \frac{dy}{\sqrt{a^2 - y^2}}$$

т. е. въ томъ случаѣ, когда $A < 0$, опредѣленіе искомаго интеграла сводится къ опредѣленію извѣстнаго намъ интеграла (43).

Примѣръ I. $J = \int \frac{dx}{\sqrt{5x^2 - 20x + 65}}.$

$$\mathcal{J}=\int\frac{dx}{\sqrt{5(x^2-4x+13)}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+13}}.$$

$$\mathcal{J}=\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+4+9}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2+9}}.$$

Вводимъ новую перемѣнную $x-2=y$, $dx=dy$:

$$\mathcal{J}=\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{dy}{\sqrt{y^2+9}}$$

Тогда по формулѣ (48):

$$\mathcal{J}=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left(y+\sqrt{y^2+9}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left(x-2+\sqrt{x^2-4x+13}\right).$$

Примѣръ II. $\mathcal{J}=\int\frac{dx}{\sqrt{20-16x-4x^2}}.$

$$\mathcal{J}=\int\frac{dx}{\sqrt{4(5-x^2+4x)}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{5-(x^2-4x)}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{9-(x^2-4x+4)}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{9-(x-2)^2}}.$$

Вводимъ новую перемѣнную: $x-2=y$, $dx=dy$:

$$\mathcal{J}=\frac{1}{2}\int\frac{dy}{\sqrt{3^2-y^2}}.$$

Тогда по формулѣ (43):

$$\mathcal{J}=\frac{1}{2}\arcsin\frac{y}{3}=\frac{1}{2}\arcsin\frac{x-2}{3}.$$

Пусть требуется вычислить интегралъ ирраціональной функціи, причемъ ирраціональность состоитъ въ томъ, что функція содержитъ нѣкоторый квадратный корень изъ многочлена второй степени и пусть, кромѣ того, нельзя привести интегралъ къ виду лѣвой части уравненія (49).

По только что изложенному, можно данный интеграль преобразовать такимъ образомъ, что онъ принимаетъ одну изъ слѣдующихъ формъ:

$$\int f(x, \sqrt{x^2+\alpha})\, dx$$

или

$$\int f(x, \sqrt{a^2-x^2})\, dx,$$

причемъ f обозначаетъ раціональную функцію обоихъ аргументовъ.

Интегрированіе такихъ функцій приводятъ къ интегрированію раціональныхъ выраженій, посредствомъ подстановки новыхъ перемѣнныхъ. Такъ, чтобы опредѣлить интегралъ перваго выраженія, подставляемъ:

$$\sqrt{x^2+\alpha} = t - x,$$

откуда по стр. 288:

$$x = \frac{t^2-\alpha}{2t}, \ \sqrt{x^2+\alpha} = \frac{t^2+\alpha}{2t}, \ \frac{dx}{dt} = \frac{t^2+\alpha}{2t^2}.$$

Тогда

$$\int f(x, \sqrt{x^2+\alpha})\, dx = \int f\left(\frac{t^2-\alpha}{2t}, \frac{t^2+\alpha}{2t}\right) \cdot \frac{t^2+\alpha}{2t^2}\, dt,$$

т. е. данный интегралъ переходитъ въ интегралъ раціональной функціи отъ t.

Примѣромъ такой подстановки служитъ примѣръ II на стр. 288.

Остается разсмотрѣть случай второго интеграла.

$$\int f(x, \sqrt{a^2-x^2})\, dx.$$

Здѣсь вводимъ новую перемѣнную

$$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} = t,$$

откуда

$$a + x = (a - x)t^2,$$

$$x + xt^2 = at^2 - a,$$

$$x = \frac{at^2 - a}{t^2+1}.$$

Найдемъ теперь $\sqrt{a^2-x^2}$ въ зависимости отъ t:

$$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{(a+x)(a-x)}=\sqrt{\frac{(a+x)(a-x)^2}{a-x}}=(a-x)\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}=$$

$$=\left(a-\frac{at^2-a}{t^2+1}\right)\cdot t=\frac{2at}{t^2+1}.$$

Дифференцируемъ полученное для x выраженіе:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{(t^2+1)2at-(at^2-a)2t}{(t^2+1)^2}=\frac{2at^3+2at-2at^3+2at}{(t^2+1)^2}=\frac{4at}{(t^2+1)^2}.$$

Подстановка найденныхъ выраженій превращаетъ данный интегралъ въ

$$\int f(x,\sqrt{a^2-x^2})\,dx=\int f\left(\frac{at^2-a}{t^2+1},\frac{2at}{t^2+1}\right)\cdot\frac{4at}{(t^2+1)^2}\,dt,$$

т.е. въ интегралъ раціональной функціи отъ t.

Примѣръ. $\mathcal{J}=\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

Предыдущія подстановки даютъ:

$$\mathcal{J}=\int\frac{t^2+1}{2at}\cdot\frac{4at}{(t^2+1)^2}\,dt=\int\frac{2dt}{t^2+1}=2\int\frac{dt}{t^2+1}=2\,\mathrm{arctg}\,t=2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}.$$

Послѣднія двѣ подстановки представляютъ частные случаи такъ называемыхъ Эйлеровыхъ (Euler) подстановокъ, которыя даютъ возможность, всякій интегралъ раціональной функціи отъ x и $\sqrt{Ax^2+Bx+C}$

$$\int f(x,\sqrt{Ax^2+Bx+C})\,dx$$

превратить въ интегралъ раціональной функціи новой перемѣнной t. Такихъ подстановокъ всего три.

I. подстановка примѣнима, когда $A>0$; тогда полагаютъ

$$\sqrt{Ax^2+Bx+C}=t-\sqrt{A}\cdot x.$$

II. подстановка примѣнима, когда $C>0$; тогда полагаютъ

$$\sqrt{Ax^2+Bx+C}=\sqrt{C}-tx.$$

III. подстановка примѣнима, когда подкоренное количество разлагается на дѣйствительныхъ множителей первой степени :

$$Ax^2+Bx+C=A(x-\alpha)(x-\beta);$$

тогда полагаютъ

$$\sqrt{\frac{x-\alpha}{x-\beta}}=t.$$

При всѣхъ трехъ подстановкахъ надо, какъ это было сдѣлано въ предыдущихъ частныхъ примѣрахъ, вычислить $x, \sqrt{Ax^2+Bx+C}$ и $\frac{dx}{dt}$ въ зависимости отъ t и тѣмъ превратить данный интегралъ въ интегралъ функціи отъ t.

Интегрированіе тригонометрическихъ функцій.

Во многихъ случаяхъ можно помощью практическихъ пріемовъ интегрировать тригонометрическія функціи. Разсмотримъ теперь общій способъ приведенія интеграла тригонометрической функціи къ опредѣленію интеграла раціональной.

Положимъ, требуется опредѣлить интегралъ

$$\int f(\sin x\cdot\cos x)\,dx,$$

гдѣ f обозначаетъ раціональную функцію аргументовъ. Вводимъ новую перемѣнную :

$$tg\frac{x}{2}=u.$$

Тогда

$$\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\frac{x}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}},$$

$$\sin\frac{x}{2}=tg\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}=\frac{u}{\sqrt{1+u^2}},$$

отсюда

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}=\frac{2u}{1+u^2},$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-u^2}{1+u^2};$$

наконецъ

$$\frac{x}{2} = \mathrm{Arctg}\, u,\quad x = 2\,\mathrm{Arctg}\, u,\quad \frac{dx}{du} = \frac{2}{1+u^2}.$$

Подставляя эти значенія въ данный интегралъ, находимъ

$$\int f(\sin x, \cos x)\,dx = \int f\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\cdot\frac{2}{1+u^2}\,du,$$

такъ что въ самомъ дѣлѣ получился интегралъ раціональной функціи отъ u.

Примѣръ. $\int\frac{dx}{\sin x}$.

$$\int\frac{dx}{\sin x} = \int\frac{1+u^2}{2u}\cdot\frac{2}{1+u^2}\,du = \int\frac{du}{u} = \ln u = \ln \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}.$$

Разложеніе циклометрическихъ функцій въ безконечные ряды.

Изъ уравненія

$$\frac{d\,\mathrm{arctg}\,x}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

слѣдуетъ

$$\mathrm{arctg}\,x = \int\frac{1}{1+x^2}\,dx.$$

Подъинтегральную функцію можно представить въ видѣ геометрическаго ряда

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots,$$

сходящагося при $x^2 < 1$, т. е. когда

$$-1 < x < 1.$$

Такимъ образомъ

$$\mathrm{arctg}\,x = \int(1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots)\,dx \quad \dots\dots (54).$$

Хотя теорема, что интегралъ суммы равенъ суммѣ интеграловъ слагаемыхъ, можетъ потерять силу въ случаѣ безконечно-многихъ слагаемыхъ, но можно доказать, что она остается справедливой для такъ наз. СТЕПЕННОГО ряда, т.е. ряда, расположеннаго по цѣлымъ степенямъ x, съ сохраненіемъ сходимости для тѣхъ же значеній x, для которыхъ первоначальный рядъ сходится. На основаніи этого можно интегрировать рядъ (54) почленно, причемъ однако непремѣнно слѣдуетъ прибавить постоянное интегрированія, которое затѣмъ опредѣляется такимъ образомъ, что x придается нѣкоторое частное значеніе. Интегрируя почленно, мы получаемъ изъ уравненія (54):

$$\operatorname{arctg} x = C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

Для опредѣленія C мы придаемъ x частное значеніе 0, тогда лѣвая часть превращается въ $\operatorname{arctg} 0 = 0$, а въ правой пропадаютъ всѣ слагаемыя за исключеніемъ перваго. Такимъ образомъ мы получаемъ

$$0 = C$$

и искомое разложеніе будетъ

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \cdots (55).$$

Подобнымъ образомъ мы находимъ разложеніе для $\operatorname{arcctg} x$.

$$\frac{d \operatorname{arcctg} x}{dx} = -\frac{1}{1+x^2},$$

$$\operatorname{arcctg} x = \int\left(-\frac{1}{1+x^2}\right)dx = \int(-1+x^2-x^4+x^6-\cdots)\,dx,$$

$$\operatorname{arcctg} x = C - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} - \cdots$$

Придавая x значеніе 0, получаемъ

$$\frac{\pi}{2} = C,$$

такъ что имѣемъ разложеніе

$$\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} - \cdots$$

Мы могли бы также получить этотъ рядъ изъ ряда (55) на основаніи соотношенія

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} \cdot \text{(стр. 135)}.$$

Для разложенія $\arcsin x$ мы пользуемся формулою

$$\frac{d \arcsin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

изъ которой слѣдуетъ

$$\arcsin x = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (56).$$

Подъинтегральную функцію мы разлагаемъ по биному Ньютона:

$$(1+y)^m = 1 + my + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} y^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} y^3 + \cdots,$$

сходящемуся для $-1 < y < 1$.

Такъ какъ $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$,

мы полагаемъ въ биномъ Ньютона

$$y = -x^2, \quad m = -\frac{1}{2}$$

и получаемъ

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 - \frac{1}{2} \cdot (-x^2) + \frac{-\frac{1}{2} \cdot -\frac{3}{2}}{1 \cdot 2} (-x^2)^2 + \frac{-\frac{1}{2} \cdot -\frac{3}{2} \cdot -\frac{5}{2}}{1 \cdot 2 \cdot 3} (-x^2)^3 + \cdots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^6 + \cdots, \cdot \cdot \cdot (57)$$

причемъ рядъ сходится для

$$-1 < x < 1.$$

Подставимъ рядъ (57) въ формулу (56):

$$\arcsin x = \int \left(1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^6 + \cdots\right) dx,$$

$$\arcsin x = C + x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \cdots$$

Придадимъ x частное значенiе $x=0$:

$$0=C;$$

искомое разложенiе будетъ

$$\arcsin x = x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1.3.}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7}+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{x^9}{9}+\cdots$$

Подобнымъ образомъ, какъ мы изъ разложенiя $\operatorname{arctg} x$ нашли разложенiе $\operatorname{arcctg} x$, мы получаемъ изъ послѣдней формулы:

$$\arccos x = \frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}-\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5}-\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7}-\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{x^9}{9}-\cdots$$

Опредѣленiе площадей плоскихъ фигуръ.

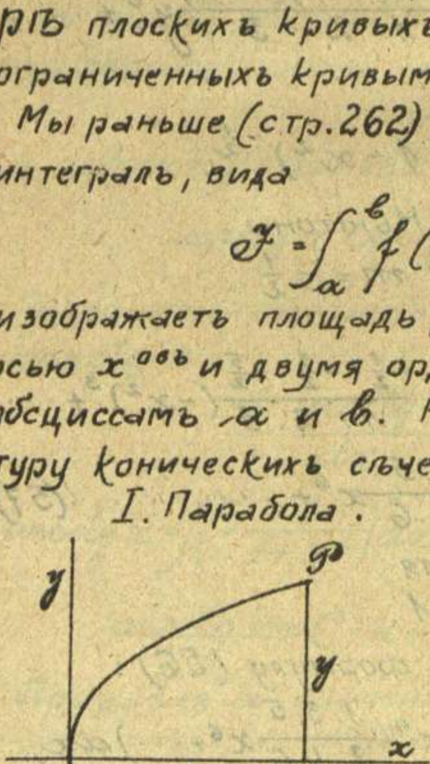
Одно изъ самыхъ важныхъ приложенiй интегральнаго исчисленiя есть примѣненiе его къ квадратурѣ плоскихъ кривыхъ, т.е. нахожденiе площадей, ограниченныхъ кривыми или прямыми линiями.

Мы раньше (стр. 262) видѣли, что опредѣленный интегралъ, вида

$$\mathcal{J}=\int_a^b f(x)\,dx \quad \cdots\cdots\cdots \quad (58)$$

изображаетъ площадь, ограниченную кривой $y=f(x)$, осью $x^{\text{овъ}}$ и двумя ординатами, соотвѣтствующими абсциссамъ a и b. Разсмотримъ теперь квадратуру коническихъ сѣченiй.

I. Парабола. $y^2=2px$.



Фиг. 117.

По общей формулѣ (58) площадь

$$OQP=\int_0^x\sqrt{2px}\,dx.$$

Чтобы вычислить этотъ опредѣленный интегралъ, найдемъ соотвѣтственный неопредѣленный:

$$\int\sqrt{2px}\,dx=\sqrt{2p}\int x^{\frac{1}{2}}\,dx=\sqrt{2p}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}x\sqrt{2px}.$$

Переходя къ опредѣленному интегралу,

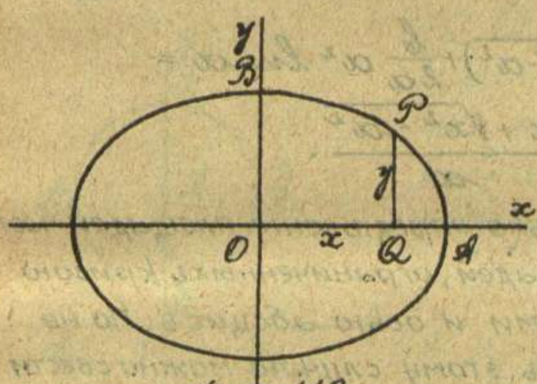
$$\int_0^x\sqrt{2px}\,dx=\left[\frac{2}{3}x\sqrt{2px}\right]_0^x=\frac{2}{3}x\sqrt{2px}.$$

Вводя ординату y, соотвѣтствующую абсциссѣ x, получаемъ:

$$OQP=\frac{2}{3}xy.$$

II. Эллипсъ. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$

Опредѣлимъ сначала площадь $OQPB$, для чего въ общую формулу подставляемъ



Фиг. 118.

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},$$

причемъ предѣлами будутъ 0 и x:

$$OQPB=\int_0^x\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

Неопредѣленный интегралъ этого выраженія намъ извѣстенъ по формулѣ (51) на стр. 292, отсюда, подставляя его значеніе, получимъ:

$$OQPB=\frac{b}{a}\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right]_0^x=\frac{b}{2a}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}\right).$$

Подставляя сюда a вмѣсто x, получимъ площадь четверти эллипса

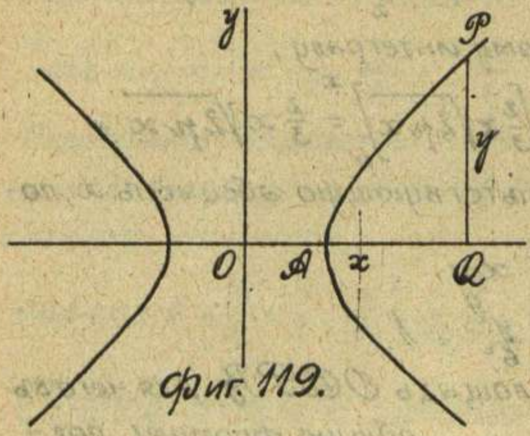
$$OAPB=\frac{ab}{2}\arcsin 1=\frac{ab\pi}{4}$$

отсюда площадь всего эллипса будетъ $ab\pi$.

III. Гипербола. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}.$$

Если подставить въ общую формулу (58) значеніе y, и взять опредѣленный интегралъ между предѣлами a и x, то получимъ площадь AQP.



фиг. 119.

$$AQP = \int_a^x \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\,dx.$$

По формулѣ (53) на стр. 292

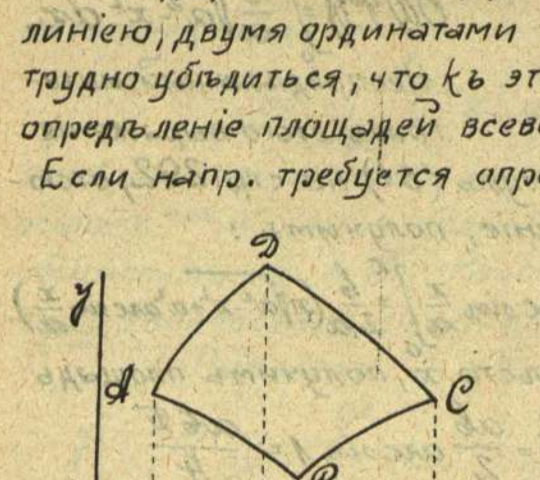
$$AQP = \frac{b}{a}\left[\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)\right]_a^x =$$

$$= \frac{b}{2a}\left(x\sqrt{x^2-a^2} - a^2\ln(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) + \frac{b}{2a}a^2\ln a =$$

$$= \frac{bx}{2a}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{ab}{2}\ln\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}.$$

Мы разсматривали только опредѣленіе площадей частнаго вида, именно площадей, ограниченныхъ кривою линіею, двумя ординатами и осью абсцисъ. Но не трудно убѣдиться, что къ этому случаю можно свести опредѣленіе площадей всевозможныхъ формъ.

Если напр. требуется опредѣлить площадь $ABCD$ (фиг. 120), то такую площадь можно представить въ видѣ:

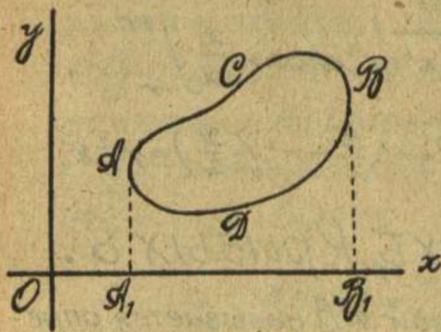


фиг. 120.

$$ABCD = AA_1D_1D + DD_1C_1C - AA_1B_1B - BB_1C_1C,$$

причемъ каждую изъ площадей правой стороны можно вычислить помощью извѣстнаго намъ пріема.

Если же требуется вычислить площадь, ограниченную замкнутою кривою, $ADBCA$, то стоитъ лишь провести касательныя къ этой кривой, параллельныя оси y-овъ; тогда $ADBCA = AA_1B_1BCA - AA_1B_1BDA$.



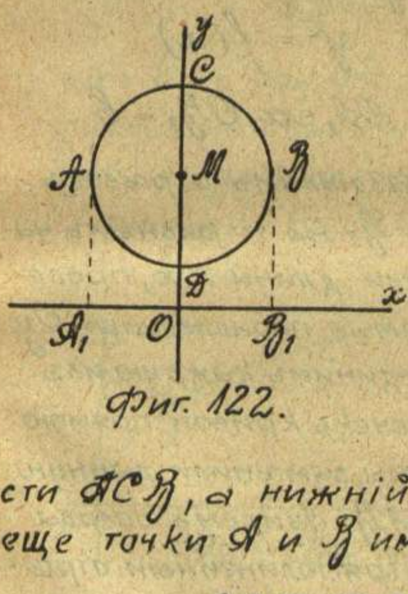
Фиг. 121.

Примѣръ. Вычислить площадь круга

$$x^2+(y-b)^2=r^2 \quad . \ . \ . \ (59).$$

Мы знаемъ что центръ круга имѣетъ координаты $(0, b)$. Чтобы опредѣлить площадь по методамъ интегральнаго исчисленія, мы проводимъ касательныя AA_1 и BB_1, параллельныя Oy. Если рѣшить уравненіе (59) относительно y:

$$y=b\pm\sqrt{r^2-x^2},$$



Фиг. 122.

то верхній знакъ передъ корнемъ соотвѣтствуетъ части ACB, а нижній части ADB круга. Такъ какъ еще точки A и B имѣютъ абсциссы $-r$ и $+r$, то

$$AA_1B_1BCA=\int_{-r}^{+r}\left(b+\sqrt{r^2-x^2}\right)dx,$$

$$AA_1B_1BDA=\int_{-r}^{+r}\left(b-\sqrt{r^2-x^2}\right)dx,$$

откуда площадь круга

$$F=AA_1B_1BCA-AA_1B_1BDA$$
$$=\int_{-r}^{+r}\left(b+\sqrt{r^2-x^2}\right)dx-\int_{-r}^{+r}\left(b-\sqrt{r^2-x^2}\right)dx$$

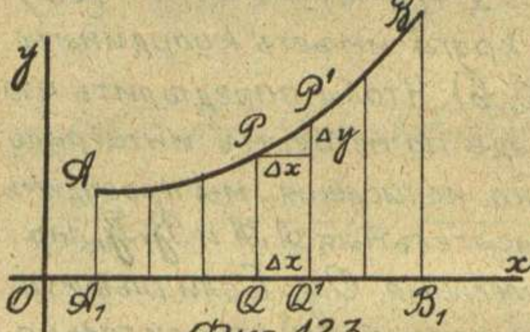
$$=\int_{-r}^{+r} b\,dx+\int_{-r}^{+r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx-\int_{-r}^{+r} b\,dx+\int_{-r}^{+r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx$$

$$=2\int_{-r}^{+r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx=\left[x\sqrt{r^2-x^2}+r^2\arcsin\frac{x}{a}\right]_{-r}^{+r}$$

$$=r^2\arcsin 1-r^2\arcsin(-1)=r^2\cdot\frac{\pi}{2}-r^2\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)=r^2\pi.$$

Выпрямленіе плоскихъ кривыхъ.

Выпрямленіемъ плоской кривой AB называется опредѣленіе длины дуги AB.



Фиг. 123.

Пусть уравненіе кривой AB:

$$y=f(x)$$

и $OA_1=a$, $OB_1=b$.

Раздѣлимъ отрѣзокъ A_1B_1 на n равныхъ частей длины Δx, проведемъ черезъ точки дѣленія прямыя параллельныя Oy до пересѣченія съ кривой и соединимъ каждую изъ полученныхъ такимъ образомъ точекъ кривой прямою линіею со слѣдующею. Этимъ мы замѣнили данную кривую AB ломаною линіею AB. Найдемъ сперва длину этой ломаной линіи. Прямолинейный отрѣзокъ

$$PP'=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\cdot\Delta x \quad . \quad . \quad . \quad (60).$$

Длину ломаной линіи какъ сумму прямолинейныхъ отрѣзковъ PP' мы можемъ символически обозначить черезъ

$$\mathop{S}_{a}^{b-\Delta x}\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\cdot\Delta x,$$

при чемъ мы этимъ, какъ на стр. 261, обозначаемъ сумму слагаемыхъ вида (60), въ которыхъ x слѣдуетъ придать по очереди значенія $a, a+\Delta x, a+2\Delta x, \ldots . b-\Delta x$. Чѣмъ больше число частей, на которое дѣлится отрѣзокъ A_1B_1, тѣмъ ближе ломаная линія AB подходитъ къ данной кривой, такъ что кривую можно разсматривать какъ предѣлъ ломаной при Δx стремящемся къ нулю. По этому длина AB ломаной линіи будетъ

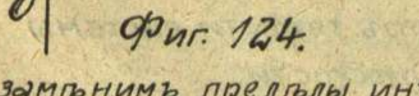
$$AB = \lim_{\Delta x = 0} \sum_{a}^{b-\Delta x} \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \cdot \Delta x,$$

но этотъ предѣлъ, по стр. 262, ничто иное какъ определенный интегралъ

$$AB = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx, \quad \ldots \ldots (61)$$

такъ какъ при неограниченномъ увеличеніи числа точекъ дѣленія на отрѣзкѣ A_1B_1, приращенія Δx, Δy переходятъ въ дифференціалы dx, dy.

Примѣръ. Опредѣлить длину дуги OP параболы $y^2 = 2px$.



Фиг. 124.

Изъ уравненія параболы мы получаемъ

$$y = \sqrt{2px}, \quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{p}{2x}}.$$

Подставимъ послѣднее выраженіе въ формулу (61), причемъ замѣнимъ предѣлы интеграла a, b абсциссами $0, x$ точекъ O и P.

$$OP = \int_0^x \sqrt{1+\frac{p}{2x}}\, dx \quad \ldots \ldots (62).$$

Вычислимъ сначала соотвѣтственный неопредѣленный интегралъ введеніемъ новой перемѣнной

$$2x = u^2, \quad \frac{dx}{du} = u.$$

$$\int\sqrt{1+\frac{p}{2x}}\,dx=\int\sqrt{1+\frac{p}{u^2}}\,u\,du=\int\sqrt{u^2+p}\,du=$$

$$=\frac{u}{2}\sqrt{u^2+p}+\frac{p}{2}\ln\left(u+\sqrt{u^2+p}\right)=$$ (форм. (53) на стр. 292)

$$=\frac{\sqrt{2x}}{2}\sqrt{2x+p}+\frac{p}{2}\ln\left(\sqrt{2x}+\sqrt{2x+p}\right)=$$

$$=\sqrt{x^2+\frac{px}{2}}+\frac{p}{2}\ln\left(\sqrt{2x}+\sqrt{2x+p}\right).$$

Подставимъ эту величину въ формулу (62)

$$OP=\left[\sqrt{x^2+\frac{px}{2}}+\frac{p}{2}\ln\left(\sqrt{2x}+\sqrt{2x+p}\right)\right]_0^x=$$

$$=\sqrt{x^2+\frac{px}{2}}+\frac{p}{2}\ln\left(\sqrt{2x}+\sqrt{2x+p}\right)-\frac{p}{2}\ln\sqrt{p}=$$

$$=\sqrt{x^2+\frac{px}{2}}+\frac{p}{2}\ln\frac{\sqrt{2x}+\sqrt{2x+p}}{\sqrt{p}}=$$

$$=\sqrt{x^2+\frac{px}{2}}+\frac{p}{2}\ln\frac{\sqrt{2px}+\sqrt{2px+p^2}}{p},$$

или ввиду $y^2=2px$:

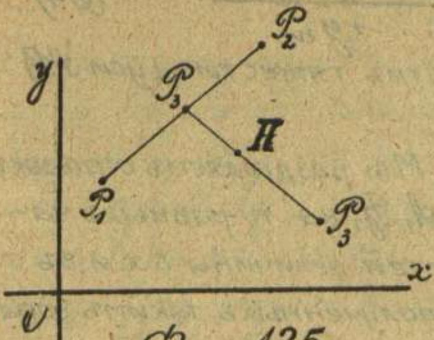
$$OP=\sqrt{x^2+\frac{y^2}{4}}+\frac{p}{2}\ln\frac{y+\sqrt{y^2+p^2}}{p}.$$

Опредѣленіе центра тяжести.

Задача 1. Опредѣлить центръ тяжести системы точекъ, лежащихъ въ одной плоскости.

Положимъ сначала, что даны двѣ точки $P_1(x,y)$ и $P_2(x_2\,y_2)$ и что въ точкѣ P_1 сосредоточена масса вѣса g_1, въ точкѣ P_2 масса вѣса g_2. По извѣстному закону физики центръ тяжести P этихъ двухъ точекъ лежитъ на прямой, соединяющей ихъ, такъ что

$$\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{g_2}{g_1}.$$



Фиг. 125.

Если отношеніе $\frac{P_1P}{PP_2}$ обозначить черезъ λ, то по формулѣ аналитической геометріи (стр. 30), координаты x, y точки P опредѣляются изъ уравненій

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}.$$

Подставивъ сюда $\lambda = \frac{g_2}{g_1}$, получимъ координаты центра тяжести точекъ P_1 и P_2:

$$x = \frac{x_1 + \frac{g_2}{g_1} x_2}{1 + \frac{g_2}{g_1}}, \quad y = \frac{y_1 + \frac{g_2}{g_1} y_2}{1 + \frac{g_2}{g_1}},$$

или умножая числителей и знаменателей на g_1:

$$x = \frac{g_1 x_1 + g_2 x_2}{g_1 + g_2}, \quad y = \frac{g_1 y_1 + g_2 y_2}{g_1 + g_2} \quad . (63).$$

Если еще дана третья точка $P_3 (x_3 y_3)$ вѣса g_3, то центръ тяжести $\Pi (\xi, \eta)$ всѣхъ трехъ точекъ получится, если сначала опредѣлить центръ тяжести P точекъ P_1 и P_2 и потомъ центръ тяжести P и P_3. Такъ какъ въ точкѣ P сосредоточенъ вѣсъ точекъ P_1 и P_2, то точка P имѣетъ вѣсъ $g_1 + g_2$. Поэтому по формулѣ (63)

$$\xi = \frac{(g_1 + g_2) x + g_3 x_3}{(g_1 + g_2) + g_3}, \quad y = \frac{(g_1 + g_2) \eta + g_3 y_3}{(g_1 + g_2) + g_3},$$

или замѣняя x и y ихъ значеніями (63):

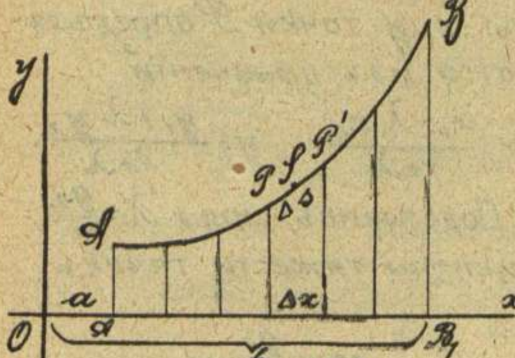
$$\xi = \frac{g_1 x_1 + g_2 x_2 + g_3 x_3}{g_1 + g_2 + g_3}, \quad \eta = \frac{g_1 y_1 + g_2 y_2 + g_3 y_3}{g_1 + g_2 + g_3}.$$

Изъ этого мы уже видимъ, что центръ тяжести n точекъ $P_1, P_2, \ldots P_n$ вѣсовъ $g_1, g_2, \ldots g_n$ имѣетъ координаты

$$\xi = \frac{g_1 x_1 + g_2 x_2 + \ldots + g_n x_n}{g_1 + g_2 + \ldots + g_n},$$

$$\eta = \frac{g_1 y_1 + g_2 y_2 + \ldots + g_n y_n}{g_1 + g_2 + \ldots + g_n} \quad \ldots \quad (64).$$

Задача 2. Опредѣлить центръ тяжести дуги AB плоской кривой $y = f(x)$.



фиг. 126.

Мы раздѣляемъ отрѣзокъ $A_1 B_1$ на n равныхъ частей величины Δx и въ полученныхъ такимъ образомъ точкахъ возставляемъ перпендикуляры до пересѣченія съ кривою AB.

Эти точки мы соединяемъ прямыми линіями и такимъ образомъ замѣняемъ данную кривую AB ломаною линіею. Для каждаго прямолинейнаго отрѣзка этой ломаной линіи центръ тяжести $S(x, y)$ будетъ находиться въ серединѣ его и вѣсъ его g будетъ пропорціоналенъ длинѣ Δs этого отрѣзка, т.е. равенъ $m \cdot \Delta s$.

По формуламъ (64) координаты ξ, η центра тяжести ломаной линіи получатся, если для каждаго отрѣзка составить произведенія

$$gx = x \cdot m\Delta s, \quad gy = y \cdot m\Delta s,$$

сложить всѣ произведенія gx, а также и всѣ произведенія gy и затѣмъ раздѣлить полученныя суммы на сумму всѣхъ вѣсовъ g. Окончательный результатъ можно символически написать такъ:

$$\xi = \frac{S\, x m\Delta s}{S\, m\Delta s} = \frac{m\, S\, x\Delta s}{m S\, \Delta s} = \frac{S\, x\Delta s}{S\, \Delta s},$$

$$\eta = \frac{S\, y m\Delta s}{S\, m\Delta s} = \frac{m\, S\, y\Delta s}{m S\, \Delta s} = \frac{S\, y\Delta s}{S\, \Delta s},$$

причемъ по стр. 306

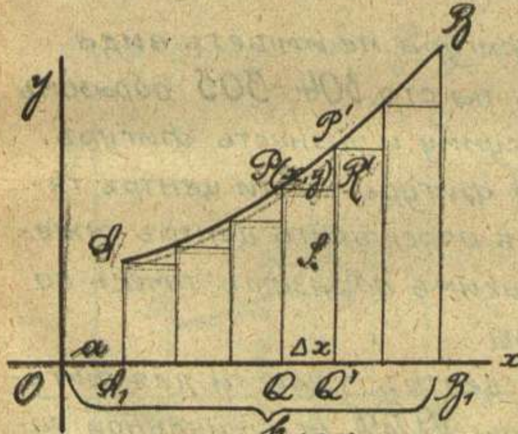
$$\Delta s = \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\cdot \Delta x .$$

Если теперь перейти къ предѣлу $\Delta x = 0$, то n дѣлается безконечно-большимъ, ломаная линія переходитъ въ кривую AB, Δx и Δy переходятъ въ дифференціалы dx и dy, а суммы въ опредѣленные интегралы, такъ что центръ тяжести дуги AB кривой линіи $y=f(x)$ имѣетъ координаты

$$\xi = \frac{\int_a^b x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx}{\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx}, \quad \eta = \frac{\int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx}{\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx} \quad \dots (65).$$

Задача 3. Опредѣлить центръ тяжести плоской фигуры.

Разсмотримъ сначала тотъ частный случай, когда плоская фигура ограничена кривою $y=f(x)$, двумя ординатами и осью $x^{овъ}$. Мы опять раздѣляемъ отрѣзокъ A_1B_1 на n равныхъ частей величины Δx, возставляемъ въ полученныхъ такимъ образомъ точкахъ перпендикуляра до пересѣченія съ кривою и черезъ эти точки пересѣченія проводимъ параллели къ оси $x^{овъ}$ до пересѣченія со слѣдующимъ перпендикуляромъ. Такимъ образомъ получается система прямоугольниковъ, совокупность которыхъ при достаточно-маломъ Δx произвольно мало отличается отъ фигуры AA_1B_1B. Центръ тяжести S каждаго такого прямоугольника, напр. $PQQ'R$ лежитъ въ серединѣ его, т.е. имѣетъ координаты



Фиг. 127.

$$x+\frac{\Delta x}{2} \text{ и } \frac{y}{2},$$

а масса, сосредоточенная въ центрѣ тяжести S имѣетъ вѣсъ всего прямоугольника, который пропорціоналенъ площади $y\Delta x$ его, т.е. равенъ $my\Delta x$.

По формуламъ (64) координаты центра тяжести системы прямоугольниковъ можно написать въ символическомъ видѣ

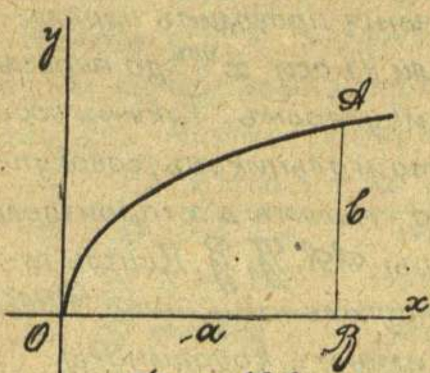
$$\xi=\frac{S\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)my\Delta x}{S\,y\Delta x},\quad \eta=\frac{S\,\frac{y}{2}\cdot my\Delta x}{S\,y\Delta x},$$

откуда, если перейти къ предѣлу $\Delta x=0$, мы получимъ центръ тяжести фигуры AA_1B_1B:

$$\xi=\frac{\int_a^b xy\,dx}{\int_a^b y\,dx},\qquad \eta=\frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2dx}{\int_a^b y\,dx}\ \ldots\ (66)$$

Если данная плоская фигура не имѣетъ вида AA_1B_1B то указаннымъ на стр. 304-305 образомъ можно ее разложить на сумму и разность фигуръ вида AA_1B_1B, для всякой фигуры найти центръ тяжести и вѣсъ, и, наконецъ опредѣлить центръ тяжести всѣхъ полученныхъ такимъ образомъ точекъ по первой задачѣ этой главы.

Примѣръ. Опредѣлить центръ тяжести для фигуры OBA, ограниченной параболою $y^2=2px$, осью $x^{овъ}$ и ординатою BA.



Фиг. 128.

По формуламъ (66) надо опредѣлить

$$\int_0^a y\,dx=\frac{2}{3}ab.$$

$$\int_0^a xy\,dx=$$

$$=\int_0^a x\sqrt{2px}\,dx=\sqrt{2p}\int_0^a x^{3/2}\,dx=$$

$$=\sqrt{2p}\left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_0^a=\frac{2}{5}\sqrt{2pa^5}=\frac{2}{5}a^2\sqrt{2pa}=\frac{2}{5}a^2 b.$$

$$\frac{1}{2}\int_0^a y^2dx=\frac{1}{2}\int_0^a 2px\,dx=p\int_0^a x\,dx=p\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a=$$

$$=\frac{pa^2}{2}=\frac{ab^2}{4}.$$

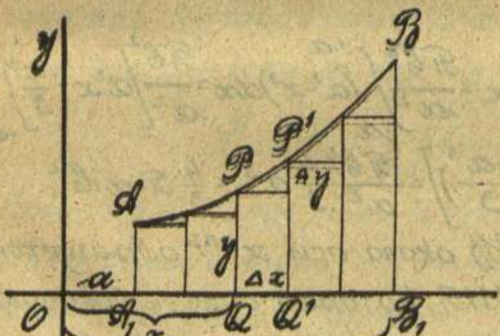
Подставимъ эти значенія въ формулы (66):

$$\xi=\frac{3}{5}a,\quad \eta=\frac{3}{8}b.$$

Объемы и боковыя поверхности тѣлъ вращенія.

Если фигура AA_1B_1B вращается вокругъ оси $x^{овъ}$, то этимъ образуется нѣкоторое тѣло, называемое

тѣломъ вращенія.



Фиг. 129.

Положимъ, что уравненіе кривой AB

$$y=f(x)$$

и что крайнія точки A и B имѣютъ абсциссы a и b. Требуется найти объемъ указаннаго тѣла.

Мы замѣняемъ извѣстнымъ образомъ фигуру AA_1B_1B системою прямоугольниковъ и вращаемъ эту систему вокругъ оси $x^{овъ}$. Тогда мы получаемъ тѣло, состоящее изъ ряда цилиндровъ одинаковой высоты Δx, между тѣмъ какъ радіусы основаній равны различнымъ значеніямъ ординатъ y. Объемъ этого вспомогательнаго тѣла будетъ въ символическомъ видѣ

$$\mathop{S}_{a}^{b-\Delta x} \pi y^2 \Delta x,$$

откуда мы получаемъ объемъ даннаго тѣла вращенія переходя къ предѣлу $\Delta x = 0$:

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (67).$$

Примѣръ. Опредѣлить объемъ эллипсоида вращенія, происходящ,аго отъ вращенія эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

около оси $x^{\text{овъ}}$.

Такъ какъ крайнія значенія x равны $-a$ и $+a$, то эти значенія будутъ предѣлами интеграла (67), и такъ какъ изъ уравненія эллипса

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2),$$

то мы имѣемъ

$$V = \pi \int_{-a}^{+a} \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)dx = \frac{\pi b^2}{a^2}\int_{-a}^{+a}(a^2 - x^2)dx = \frac{\pi b^2}{a^2}\left[a^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{+a} =$$

$$= \frac{\pi b^2}{a^2}\left[\left(a^3 - \frac{a^3}{3}\right) - \left(-a^3 + \frac{a^3}{3}\right)\right] = \frac{\pi b^2}{a^2}\cdot\frac{4}{3}a^3 = \frac{4}{3}\pi a b^2.$$

Отъ вращенія кривой AB около оси $x^{\text{овъ}}$ образуется **поверхность вращенія**, которая будетъ боковою поверхностью предыдущаго тѣла вращенія. Чтобы найти величину этой поверхности, мы замѣняемъ кривую линію AB извѣстнымъ образомъ ломаною и вращаемъ эту ломаную линію около оси $x^{\text{овъ}}$. Тогда образуется вспомогательная поверхность, состоящая изъ ряда боковыхъ поверхностей усѣченныхъ конусовъ.

Если радіусы основаній и длина образующей усѣченнаго конуса соотвѣтственно равны r, R и

l, то по формулѣ стереометріи боковая поверхность равна

$$\pi(r+R)l.$$

Поэтому величина поверхности, происходящей отъ вращенія прямолинейнаго отрѣзка PP', вслѣдствіе

$$QP=y,\ Q'P'=y+\Delta y,\ PP'=\Delta s,$$

будетъ

$$\pi(2y+\Delta y)\Delta s$$

или

$$\pi(2y+\Delta y)\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\cdot\Delta x,\ \dots\ (68)$$

если вмѣсто Δs подставить его значеніе (60)

$$\Delta s=\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\cdot\Delta x.$$

Сложивъ всѣ поверхности (68), мы получимъ величину вспомогательной поверхности

$$\sum_a^{b-\Delta x}\pi(2y+\Delta y)\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\cdot\Delta x,$$

предѣлъ которой при $\Delta x=0$ даетъ искомую величину поверхности вращенія

$$S=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx\ \dots\ (69).$$

Примѣръ. Опредѣлить поверхность шара.

Поверхность шара мы можемъ представить себѣ происшедшей отъ вращенія полуокружности

$$x^2+y^2=a^2\ \dots\ (70)$$

около оси $x^{овъ}$.

Изъ уравненія (70) имѣемъ

$$y=\sqrt{a^2-x^2},\ \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}},\ 1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{a^2}{a^2-x^2};$$

по этому по формулѣ (69)

$$S=2\pi\int_{-a}^{+a}\sqrt{a^2-x^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=2\pi\int_{-a}^{+a}a\,dx=2\pi a\Big[x\Big]_{-a}^{+a}=4\pi a^2.$$

Приближенное вычисленіе опредѣленныхъ интеграловъ и площадей плоскихъ фигуръ.

Эти двѣ задачи въ сущности не различаются другъ отъ друга, потому что, какъ мы видѣли, опредѣленіе площади плоской фигуры сводится къ вычисленію нѣкотораго опредѣленнаго интеграла и наоборотъ величину опредѣленнаго интеграла можно представить въ видѣ площади плоской фигуры.

Одинъ изъ способовъ приближеннаго интегрированія состоитъ въ разложеніи подъинтегральной функціи въ безконечный рядъ, расположенный по степенямъ x, и основывается на томъ, что такой степенной рядъ можно интегрировать почленно.

Примѣръ: $\int_{-1}^{+1} \frac{e^x - 1}{x} dx$.

По формулѣ (107) на стр. 214

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots,$$

и это разложеніе сходится при всякомъ значеніи x. Поэтому

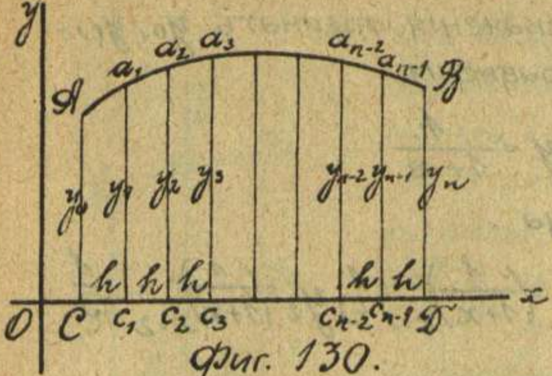
$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots}{x} = 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \cdots$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{e^x - 1}{x} dx = \int_{-1}^{+1} \left(1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \cdots\right) dx$$

$$= \left[x + \frac{x^2}{2!2} + \frac{x^3}{3!3} + \frac{x^4}{4!4} + \cdots\right]_{-1}^{+1},$$

$$= 2\left(1 + \frac{1}{3!3} + \frac{1}{5!5} + \frac{1}{7!7} + \cdots\right)$$

Разсмотримъ еще два способа приближеннаго опредѣленія площади плоской фигуры. Первый изъ нихъ,



Фиг. 130.

называемый **способомъ трапецій** состоитъ въ слѣдующемъ.

Пусть требуется опредѣлить площадь ACDB.

Мы раздѣляемъ отрѣзокъ CD на n равныхъ частей величины h, въ полученныхъ такимъ образомъ точкахъ $c_1, c_2, c_3, \ldots c_{n-1}$ возставляемъ перпендикуляры до пересѣченія съ кривою AB въ точкахъ $a_1, a_2, a_3, \ldots a_{n-1}$ и наконецъ замѣняемъ кривую линію AB ломаною $Aa_1a_2a_3\ldots a_{n-1}B$. Площадь, ограниченная этою ломаною линіею, крайними ординатами y_0 и y_n и осью $x^{\text{овъ}}$ можетъ служить приближеннымъ значеніемъ искомой площади ACDB. Она равняется суммѣ площадей трапецій

$$Acc_1a_1 = \frac{h}{2}(y_0 + y_1)$$
$$a_1c_1c_2a_2 = \frac{h}{2}(y_1 + y_2)$$
$$a_2c_2c_3a_3 = \frac{h}{2}(y_2 + y_3)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{n-1}c_{n-1}DB = \frac{h}{2}(y_{n-1} + y_n).$$

Складывая эти уравненія, мы получаемъ искомую формулу трапецій

$$F = h\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right)\ldots (71).$$

Примѣръ. Опредѣлить приближенную величину $\ln 3$.

$$\ln 3 = \ln(1+2) - \ln(1+0) = \Big[\ln(1+x)\Big]_0^2 = \int_0^2 \frac{1}{1+x}\,dx.$$

Въ этомъ случаѣ значенія ординатъ $y_0, y_1, \ldots$ опредѣляется изъ уравненія

$$y = \frac{1}{1+x}.$$

Беремъ $h = 1$ тогда

$$y_0 = \left(\frac{1}{1+x}\right)_{x=0} = 1,\ y_1 = \left(\frac{1}{1+x}\right)_{x=1} = \frac{1}{2};\ y_2 = \left(\frac{1}{1+x}\right)_{x=2} = \frac{1}{3},$$

и по формулѣ (71)

$$F = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 1'1666\ldots$$

Большее приближеніе мы уже получаемъ при $h = \frac{1}{2}$, тогда

$$y_0 = 1,\ y_1 = \frac{2}{3},\ y_2 = \frac{1}{2},\ y_3 = \frac{2}{5},\ y_4 = \frac{1}{3}.$$

$$F = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{1}{6}\right) = \frac{67}{60} = 1,11666\ldots$$

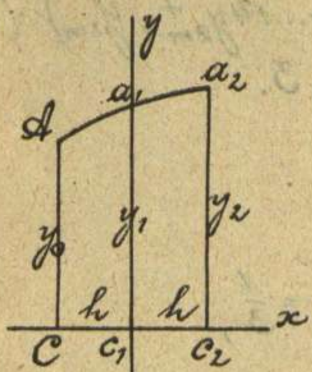
Истинная величина $\ln 3$ равна $1'0986$.

Болѣе точные результаты, чѣмъ способъ трапецій, даетъ формула Симпсона. Мы и здѣсь раздѣляемъ нашу площадь $ACDB$ на узкія полосы ширины h, причемъ число n этихъ полосъ теперь должно быть четнымъ.

$$n = 2m.$$

Но вмѣсто того, чтобы соединить точки $A a_1 a_2 \ldots B$, прямыми линіями, ихъ соединяютъ кривыми. Черезъ каждыя три послѣдующія другъ за другомъ точки прокладываемъ дугу параболы, главная ось которой параллельна оси $y^{овъ}$. Тогда приближенную площадь F фигуры $ACDB$ получимъ, если сложимъ площади всѣхъ этихъ фигуръ, ограниченныхъ дугой параболы, двумя ординатами и осью $x^{овъ}$.

Опредѣлимъ сначала площадь $\omega_1 = ACc_2\, a_2\, a_1 A$,



фиг. 131.

гдѣ $A a_1 a_2$ замѣнено дугой параболы. Перенесемъ для этого начало координатъ въ точку c_1. Въ этой системѣ уравненіе параболы будетъ имѣть видъ (стр. 38 и слѣд.)

$$y = ax^2 + bx + c \quad \ldots (72)$$

слѣдовательно

$$\omega_1 = \int_{-h}^{+h} y\,dx = \int_{-h}^{+h} (ax^2 + bx + c)\,dx = \left[\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx\right]_{-h}^{+h} =$$

$$= \frac{ah^3}{3} + \frac{bh^2}{2} + ch + \frac{ah^3}{3} - \frac{bh^2}{2} + ch = \frac{h}{3}(2ah^3 + 6c) \ldots (73)$$

Такъ какъ точки $A(-h, y_0)$, $a_1(0, y_1)$, $a_2(h, y_2)$ лежатъ на параболѣ, то координаты ихъ удовлетворяютъ уравненію (72):

$$y_0 = ah^2 - bh + c$$
$$y_1 = c$$
$$y_2 = ah^2 + bh + c.$$

Умножимъ второе уравненіе на 4 и сложимъ его съ первымъ и третьимъ:

$$y_0 + 4y_1 + y_2 = 2ah^3 + 6c.$$

Подставимъ это значеніе въ уравненіе (73), тогда

$$\omega_1 = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Такимъ же образомъ найдемъ

$$\omega_2 = \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4)$$

и т. д. Если сложить всѣ эти уравненія, мы получаемъ формулу Симпсона для приближенной величины искомой площади:

$$F = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots + 4y_{2m-1} + y_{2m}\right) \cdot \quad (74).$$

Примѣръ. Опредѣлить $\ln 3$.

Мы имѣли
$$\ln 3 = \int_0^2 \frac{dx}{1+x}.$$
и при $h = 1$

$$y_0 = 1,\ y_1 = \frac{1}{2},\ y_2 = \frac{1}{3},$$

тогда по формулѣ (74)

$$F = \frac{1}{3}\left(1 + 4\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{10}{9} = 1{,}11111\ldots.$$

Если же примемъ $h = \frac{1}{2}$, то

$$y_0 = 1,\ y_1 = \frac{2}{3},\ y_2 = \frac{1}{2},\ y_3 = \frac{2}{5},\ y_4 = \frac{1}{3},$$

и $F = \frac{1}{6}\left(1 + 4\cdot\frac{2}{3} + 2\cdot\frac{1}{2} + 4\cdot\frac{2}{5} + \frac{1}{3}\right) = \frac{99}{90} = 1{,}1.$

МО
1/II 55