N. ROZENAUERS

LATVIJAS UNIVERSITĀTES DOCENTS

MĒCHANIKA

I DAĻA

PUNKTA KINEMATIKA

1930.

TECHNISKĀ INSTITUTA BIEDRĪBAS IZDEVUMS

N. ROZENAUERS
Latvijas Universitātes docents.

MECHANIKA

Lekcijas lasītas Latvijas Universitātē
un Privātā Rīgas Techniskā Institutā.

I daļa.

PUNKTA KINEMATIKA

1930.
Techniskā instituta biedrības izdevums.

P r i e k š v ā r d s .

Kā pie šo lekciju materiāla izvēles, tā arī pie viņa iekārtošanas autors pa lielākai daļai pieturējās pie sava a.g. priekšgājēja Universitatē Dr.Ing. Docenta E.Cizareviča izcilus lekcijām, kuŗas par nožēlošanu netika izdotas, papildinot dažus jautājumus un pārstrādājot analitiskos izvedumus - vektores tur, kur tas pēc autora pārliecības deva atvieglojumu; dažās vietās pat ir pievesti paraleli analitiskais un vektorielais pierādijums.

Bez tam vistuvāk šīm lekcijām stāvoša literatura ir: <u>Punkta kinematikai</u> - Prof. N. Buchholca kinematikas kurss krievu valodā. <u>Ķermeņa kinematikai</u>: tas pats un Prof. J.Meščerska mechanikas kurss krievu valodā, Prof. N. Žukovska mechanikas kurss krievu valodā, Prof. Dr.Ing. M. Grüblera: "Technische Mechanik" vācu valodā.

Dažos jautājumos, kā piem. Eulera formulā ķermeņa griezes kustībā ap punktu un griezes kustību salikšanā ap šķērsojošām asīm autors ir devis savus pierādijumus.

<u>Punkta Dinamikai</u> vistuvāk stāvoša literatura ir minētais Prof. J. Meščerska kurss un Prof. E. Nikolai: Lekcijas teoretiskā mechanikā krievu valodā.

<u>Punktu zistemas un ķermeņa Dinamikai</u>

Prof. J. Meščerska kurss un Prof. E. Nikolai: Lekcijas teoretiskā mechanikā.

--------- O ---------

I E V A D S

Mechanikas priekšmets un viņa iedalīšana.

Apskatot ķermeņa stāvokli citu ķermeņu starpā, mēs varam atšķirt divus gadijumus.
1/ķermeņa punktu attālumi no citu ķermeņu punktiem nemainās: šādu stāvokli mēs definēsim kā miera stāvokli.
2/ķermeņa punktu attālumi no citu ķermeņu punktiem mainās: tādu stāvokli mēs definēsim kā kustības stāvokli.
Dabā mēs varam novērot ļoti dažādas kustības: akmens krīt uz leju, dūmi kāp augšā un lietus līst gan vertikāli,gan slīpi.
Kustības dabā var nevien novērot, bet arī atkārtot, pie kam neatkarīgi no novērotāja personas, no vietas, no laika tanīs pašos apstākļos atkārtojās tās pašas kustības; šis apstāklis aizrāda, ka kustības ir padotas zinamiem likumiem.
Zinatni, kuŗa nodarbojās ar kustības pētīšanu, klasificēšanu, kustības cēloņa pētīšanu un likumu izvešanu sauc par Mechaniku.
Tā tad Mechanika ir eksperimentala zinība, viņu sākumā arī uzskatija kā fizikas daļu un tāpat kā citās fizikas nozarēs, katrai atsevišķai parādību klasei tika izvesti likumi /piem. sviras likums, spēku paralelograma likums, brīva kritiena likums u.t.t./. Šos likumus uzskatija kā Mechanikas pamatlikumus un šie likumi sastāda pirmo zinātnisku Mechanikas zistemu, kuŗu mēs tagad saucam par Elementaro mechaniku un kuŗa ietilpst elementaros fizikas kursos. Elementarā mechanika ir stiprā mērā eksperimentala zinība.
Bet zinatne neaprobežojās ar elementaras mechanikas liela speciālo likumu skaitu, tika izpētīts vai nav starp viņiem kāda sakara un faktiski arī izrādijās, ka visi elementarās eksperimentalās mechanikas likumi ir pamatoti uz nedaudziem pamata principiem, no kuŗiem viņi visi loģiskā racionalā ceļā tiek izvesti. Ar šo bija dibināta: Augstākā jeb Racionalā Mechanika.
Mechanika, kuŗa,izejot no pamata principiem, izved visus citus, komplicētākus,ir: Augstākā jeb Racionalā Mechanika.

Augstākās Mechanikas dibinātājs ir Isaac's Newton's, kuŗš savā slavenā darbā: "Philosophiae naturalis principia matematica" 1687.gadā, izejot no 3 pamata principiem, ir uzbūvējis sintetiskā ceļā Racionalās mechanikas zistemu. Bet viņa sintetiskie izvedumi bija ļoti mākslīgi, kamdēļ nākošo soli uz priekšu bija spēris Euler's un vēlāk Lagrange, kuŗiem nāca prātā pielietot Mechanikā differencial- un integralrēķinu, t.i. matematisko analizi, ar ko bija dibināta tā sauktā. Analitiskā mechanika. Nosaukums - analitiskā, šeit nenozīmē, ka analitiskai metodei ir priekšroka pret sintezi, bet tikai pastrīpo lielākā mērā šīs mechanikas teoretiskāku raksturu, salīdzinot ar Racionalo mechaniku.
Mechanikā visas parādības tiek idealizētas: statika apskata ideali cietu ķermeni, kādu dabā nav. Stiprības mācība,turpretīm, apskata ideali elastīgus ķermeņus /tādus,kuŗi pilnīgi atgriežās iepriekšējā stāvoklī/, kādu dabā arī nav.
Mechaniku, kuŗa neapskata fizisku ķermeņu kustības, bet nodarbojās ar tīri hipotetiski izdomātiem ķermeņiem un viņu kustībām, sauc par Teoretisko Mechaniku.
Turpretīm Mechaniku, kuŗa seko praktiskai dzīvei, sauc par Technisko Mechaniku.
Kā teoretisko, tā arī technisko mechaniku mēs varam iedalīt elementārā un augstākā mechanikā pēc aprakstītām pazīmēm.
Newtona augstākā mechanika tiek saukta vēl par klasisko mechaniku tamdēļ, ka nesen Einšteins ir uzstādijis jaunlaiku mechaniku, tā saukto relatīvo mechaniku jeb Einšteina mechaniku, kuŗa ir daudz pilnīgākā un komplicētāka. Bet technikai pilnīgi pietiek klasiskā mechanika,

kuŗa ir Einšteina mechanikas speciels gadijums un tamdēļ mēs arī apskatīsim tikai klasisko mechaniku.

Par masu, kā jau zinams no fizikas, sauc vielas daudzumu ķermenī. Izdalot no fizikalā ķermeņa bezgalīgi mazu daļu, mēs nonākam pie materiela punkta, kuŗa var uzskatīt kā bezgalīgi mazu materielu ķermeni, t.i. materielu ķermeni, kuŗam nav dimenzijas nevienā virzienā, tad šī ķermeņa masa arī būs bezgalīgi maza.

Bet ir vēl otra materiala punkta definicija, proti: viņu var uzskatīt kā matematisku punktu ar galīgu masu, piemēram, ja mēs sakam, ka lielgabala lode apraksta paraboli jeb zemes lode ap sauli - elipsi, mēs ķermeņa dimenzijas ignorējam, jo liniju var aprakstīt tikai punkts un šinī punktā mēs tad skaitam koncentrētu visu ķermeņa masu.

Ja kāds ķermenis kustās, tad vispārīgi viņa dažādu punktu kustības var nebūt vienādas, kamdēļ ir lietderīgi dalīt mechaniku: Punkta mechanikā un Punktu zistemas mechanikā, pie kam punktu zistemas vēl var dalīt pēc agregatstāvokļa, kā parādīts sekojošā šemā:

MECHANIKA

- Materiela punkta mechanika
  - Statika
  - Kinematika
  - Dinamika
- Materielu punktu zistemas mechanika
  - Cietu ķermeņu mechanika jeb Geomechanika
    - Statika
    - Kinematika
    - Dinamika
  - Šķidru ķermeņu mechanika jeb Hidromechanika
    - Hidrostatika
    - Hidrodinamika
  - Gāzu mechanika jeb Aeromechanika
    - Aerostatika
    - Aerodinamika

Šeit statikā tiek apskatīts miera stāvoklis un kinematikā, kā arī Dinamikā kustības stāvoklis, pie kam kinematikā kustības stāvoklis neatkarīgi no tiem iemesliem, kuŗi kustību izsauc, bet dinamikā - kustība sakarā ar minētiem iemesliem.

Pēc pēdējās pazīmes daži autori dala visu mechaniku divās daļās: kinematikā un kinetikā.

Kinematika nodarbojās ar kustību pašu par sevi, neatkarīgi no cēloņiem, kuŗi šo kustību izsauc un sadalās vēl divās daļās: analitiskā kinematikā jeb Foronomijā un Ģeometriskā kustības mācībā, kuŗā kustība tiek apskatīta grafiskā ceļā.

Kinetikā tiek apskatīti kustības cēloņi un kādu iespaidu uz kustību var izdarīt pats ķermenis. Ja pie tam ķermenis atrodās miera stāvoklī, attiecīgus jautājumus apskata statikā, kuŗa dalās īstā statikā jeb cieta ķermeņa statikā un Stipribas mācībā jeb elastīga ķermeņa statikā. Cieta ķermeņa statikā tiek ņemti vērā tikai uz ķermeni darbojošies ārējie spēki, bet stiprības mācībā arī iekšējie elastības spēki.

Kustoša ķermeņa kinetika saucās par Dinamiku un atkal dalās īstā dinamikā un Kineto-Statikā. Pēdējā apskata reakcijas un iekšējos spēkus darbojošās mašinās.

Otro Mechanikas iedalijumu arī var attēlot šematiski:

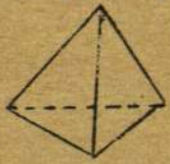
MECHANIKA

- Kinematika
  - Analitiskā kinematika jeb Foronomija
  - Ģeometriskā kustības mācība
- Kinetika
  - Miera stāvokļa kinetika jeb statika
    - Cieta ķermeņa statika
    - Elastīga ķermeņa statika jeb Stiprības mācība
  - Kustoša ķermeņa kinetika jeb Dinamika
    - Īstā Dinamika
    - Kine-to-Statika

Mechanikas I. daļa: Punkta kinematika.

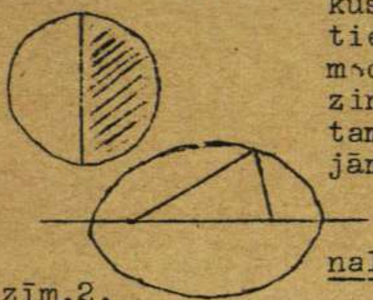
§ 1. PAMATJĒDZIENI.

Kinematikā mēs apskatam kustību pati par sevi. Ķermenis kustās, ja viņš telpā maina savu vietu jeb savu formu. Bet ķermeņa kustība var tikt iespaidota no viņa dažādām īpašībām un tamdēļ mēs atsakamies no visām ķermeņa īpašībām, atstājot tikai vienu: ieņemt telpu. Viņš tad vairs nebūs ķermenis, bet kāds ģeometrisks objekts, kurš ir aprobežots ar liniām un virsmām /zīm.Nr.1./



zīm.1.

Ģeometrijā arī māca priekšā kustība: piem.pusriņķis griežoties ap caurmēru veido lodi jeb punkts kustoties tā, lai viņu attālumu summa no diviem dotiem punktiem būtu constanta, apraksta elipsi. Bet mechanikā kustība, kā katra fizikala parādība,notiek zinamā laikā, kamdēļ kinematikā mēs kustību apskatam atkarībā no laika un pie 3 ģeometrijas dimenzijām, pievienojam kinematikā vēl 4-to dimenziju:laiku.

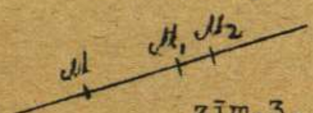


Kinematiku tā tad varam definēt kā 4 dimenzionalu kustības mācību.

zīm.2.

Ģeometrijā: garums, platums, augstums
Kinematikā: " " " un laiks.

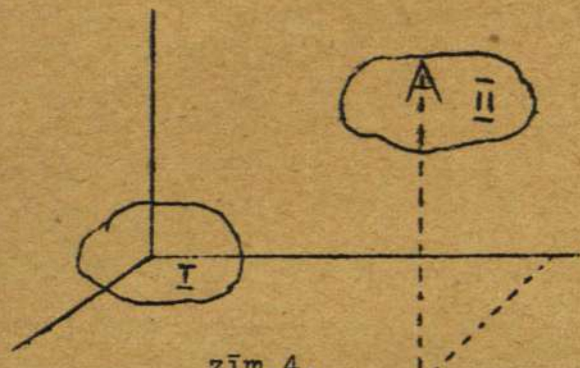
Mēs nenodarbosimies ar telpas un laika jēdzienu filosofisko iztirzāšanu, bet aprobežosimies ar to, ka šos lielumus mērosim.



zīm.3.

Laiks ir viendimenzionals, tas nozīmē, ka laiku var attēlot ar taisnu liniju, laika momentu ar punktu M uz tās taisnes un laika sprīdi ar nogriezni M_1M_2.

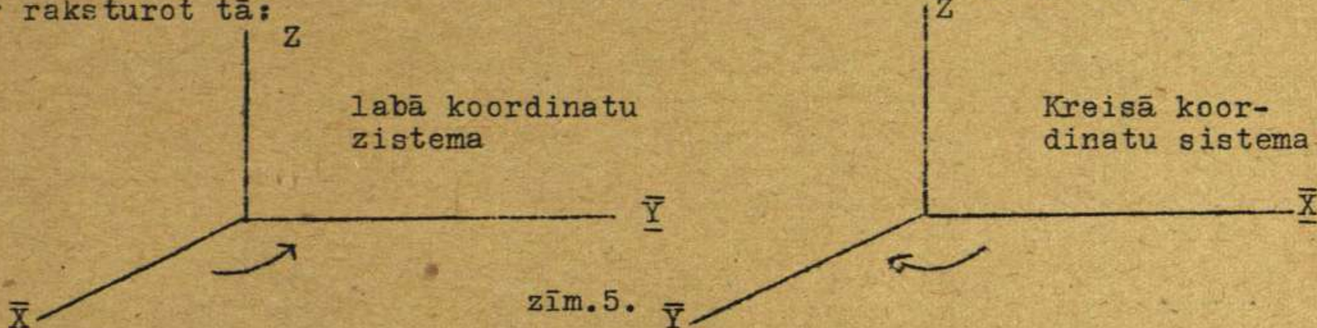
Laika vienība.Laiks ir kinematisks jēdziens, jo par laika vienību ir pieņemts mērīšanai pilnīgi pieietamais lielums: zemes apgriešanās laiks ap savu asi, kurš tiek dalīts 24 stundās, stunda tālāk dalās 60 minutēs un minute - 60 sekundēs. Laiku var mērīt arī citās vienībās, piem. ar sveces izdegšanas laiku, jeb ūdens iztecēšanas laiku no kāda trauka jeb ar smilts pulksteni, bet šādas vienības nav tik ērtas un reti tiek lietotas.



zīm.4.

Ķermeņa kustības stāvoklis bija definēts tā: ķermenis II atrodas kustībā, ja viņa punktu attālumi no cita ķermeņa I punktiem mainās. Tā tad par ķermeņa kustību mēs spriežam pēc viņa atsevišķo punktu kustībām. Tādā kārtā mēs nonākam pie matemātiska punkta A kustības. Ja tagad ķermenis I, attiecībā pret kuŗu mēs novērojām punkta A kustību, atrodas mierā - punkta A kustība saucās par abzolutu kustību, bet ja ķermenis I pats atrodas kādā kustībā - punkta A kustība saucās par relatīvu kustību.

Lai spriestu par punkta A attālumu maiņu no ķermeņa I punktiem,mēs saistīsim ar ķermeni I kādu taisnstūrīgu koordinatu zistemu /sk.zīm.4/. Šeit ir jāatzīmē, kad ir iespējamas divas dažādas taisnstūrīgas koordinatu zistemas, kuŗas nekādā ceļā nevar savietot vienu ar otru, tāpat kā kreiso roku ar labo, bet visas citas taisnstūrīgas koordinatu zistemas var ar pārnešanu savietot ar vienu no viņām. Tādā kārtā visas taisnstūrīgas koordinatu zistemas sadalās divās grupās, kuŗas var raksturot tā:

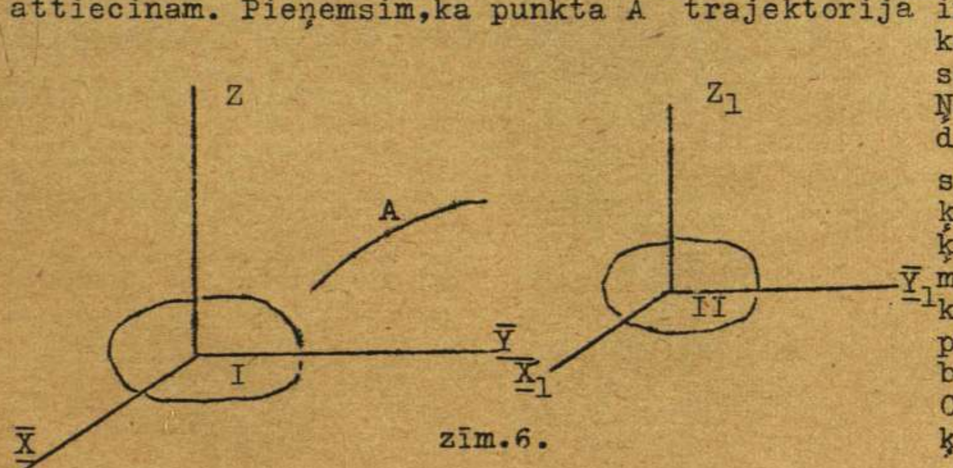


zīm.5.

Ja mēs īkšķa virzienā izvēlēsim $\underline{X}$ asi, rādītāja virzienā - $\underline{Y}$ asi un perpendikulari viņiem virzīto vidējo pirkstu pieņemsim par $\underline{Z}$ asi,tad labā roka reprezentēs vienas grupas koordinatu zistemu un kreisā roka otras grupas koordinatu zistemu. Minētām koordinatu zistemām piešķiram arī attiecīgus nosaukumus - labā un kreisā koordinatu zistema /sk.zīm.5/ un uz priekšu lietosim tikai labo koordinatu zistemu, kuŗa raksturojās vēl ar to, ka labā skrūve pie griešanas tādā virzienā,lai visīsākā ceļā savietot $\underline{X}$ asi ar $\underline{Y}$ asi, pate pārvietojās Z ass virzienā.

Trajektorija: Punktā A stāvokļu geometriskā vieta jeb linija,kuŗa nepārtraukti savieno punkta A stāvokļus kustības gaitā, tiek saukta par punkta A trajektoriju.

Ja trajektorija ir taisna linija, kustība saucās par taisnvirzienisku, ja trajektorija ir līka linija - kustība saucās par līkumainu. Bet trajektorijas forma /t.i. taisna jeb viena vai otra līka/ ir atkarīga no koordinatu zistemas izvēles, uz kuŗu mēs šo trajektoriju attiecinam. Pieņemsim,ka punkta A trajektorija ir attiecināta uz XYZ koordinatu zistemu, saistītu ar ķermeni I. Ņemsim vēl otru koordinatu zistemu $\underline{X}_1\underline{Y}_1Z_1$ saistītu ar kādu citu ķermeni II. Ja jauns ķermenis II pret ķermeni I nekustās,jaunā koordinatu zistemā punkta A trajektorija būs tāda pat linija. Citādi būs, ja otrs ķermenis /jeb arī I/



zīm.6.

ar savu koordinatu zistemu atradīsies kustībā; punkta trajektorija tad attiecībā uz vienu koordinatu zistemu būs cita, nekā uz otru.

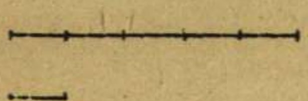
Ilustrēsim sacīto ar klasisko piemēru: Čemodans krīt ejoša vilciena vagonā no plaukta. Ja tagad koordinatu zistemu saistīsim ar vagonu, tad čemodana trajektorija būs vertikala taisne, bet ja koordinatu zistemu saistīsim ar dzelzceļa uzbērumu, tad čemodana trajektorija, novērojot viņu no ārpuses caur logu būs parabola.

Ja ķermenis jeb punkts kustās, tad nepietiek teikt, ka kustības trajektorija ir taisna jeb līka linija, bet jāsaka arī uz kādu koordinatu zistemu viņa ir attiecināta.

§ 2. LIELUMI MECHANIKĀ,VIŅU MĒRĪŠANA UN DIMENZIJAS.

Mechanikā priekšā nākošie nosauktie lielumi ir garums, laiks, ātrums, paātrinājums, spēks, masa un citi. Viņu definicijas un savstarpīgo sakaru dosim vēlāk, tagad apskatīsim tikai viņu mērīšanu. Zem kāda nosaukta lieluma mērīšanas mēs saprotam viņa salīdzināšanu ar kādu citu tās pašas dabas lielumu, izvēlētu par vienību.

Piemēram, ja ir dots lielums nogriežņa veidā un pēc salīdzināšanas ar vienību, par kuŗu ir izvēlēts 1 cm, mērīšanas rezultats ir 5 cm, tad "5" ir mērskaitlis un "cm" ir zimbols, kuŗš noteic, ar kādu vienību mēs mērijām.



zīm.7.

To pašu salīdzināšanu varēja izdarīt arī ar kādu citu vienību, piemēram ar collu.

Vispārīgi kādu gaŗumu ℓ varam izteikt ar mērskaitli χ un pielikt klāt zimbolu $[L]$,kuŗš rāda, ar kādu vienību mēs esam salīdzinājuši mūsu gaŗumu .

Šo apstākli mēs rakstīsim tā:

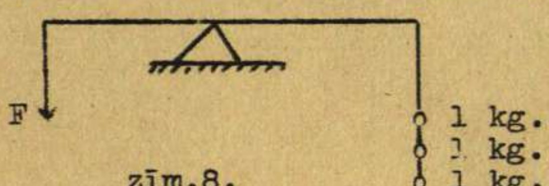
$$\ell = \chi [L]$$

Ņemsim divus laika momentus - plkst. 8 no rīta un 10 no rīta, starp šiem momentiem ir laika sprīdis, lai viņu izmērītu, jāņem otru sprīdi par vienību, piem. 1 st., tad mūsu laika sprīdis līdzinājās 2 st. un atkal rezultatu izsakam ar mērskaitli "2" un zimbolu "st".

Vispārīgi kādu laika sprīdi t mēs varam izteikt ar mērskaitli τ un zimbolu $[T]$,kuŗš rāda ar kādu vienību mēs esam salīdzinājuši mūsu laika sprīdi t.

$$t = \tau [T]$$

Spēku F mēs varam izmērīt ar svaru palīdzību un ja rezultats, piem., ir 3 kg, tad"3"ir mērskaitlis un "kg"ir zimbols. Vispārīgi tā tad kādu spēku F mēs varam izteikt ar mērskaitli φ un zimbolu $[F]$



zīm.8.

$$\mathcal{F} = \varphi [F]$$

Tādā kārtā arī katru citu nosauktu lielumu A varam izteikt ar mērskaitli α un zimbolu $[A]$

$$\mathcal{A} = \alpha [A]$$

Starptautiskas mēru vienības:

1/ Garumvienība: Metris ir platinas stienis, kurš glabājās Parizē, Sevra paviljonā. Sākumā viņš bija noteikts kā $1 : 10^7 \left(\frac{1}{10.000.000}\right)$ daļa no vienas ceturtdaļas zemes lodes meridiana, bet jaunlaiku precizāki mērīšanas paņēmieni pierādija, ka tas nav pilnīgi pareizi, bet šis etalons tomēr palika spēkā, tā tad tagad metris ir tikai platinas stienis Parizē.

2/ Spēka vienība: Kilo-bars jeb Kilogramma-svars ir platinas un iridija bluķa svars Parizē. Mēs sakam Parizē tamdēļ, ka Rīgā viņam būtu cits svars. Kilo-bars bija noteikts kā 1 dcm^3 destilēta ūdens svars pie 4^0 Celsija zem 45^0 geografiskā platuma. Bet atkal jaunlaiku precizāki mērīšanas paņēmieni ir pierādijuši, ka tas nav pilnīgi pareizi,bet neskatoties uz to vecais etalons palika spēkā.

3/ Laika vienības bija jau apskatītas agrāk.

Darbības ar nosauktiem skaitļiem.

Saskaitīt jeb atņemt mēs varam tikai viendabīgus lielumus, t.i.tādus, kuŗiem ir vienāds zimbols. Pieņemsim, ka ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, ir gaŗumi,

tad $$\ell_1 = \lambda_1 [L]; \quad \ell_2 = \lambda_2 [L]; \quad \ell_3 = \lambda_3 [L]$$

Saistīsim šos ar (+) jeb (-) operacijām

$$\ell_1 + \ell_2 - \ell_3 = \lambda_1 [L] + \lambda_2 [L] - \lambda_3 [L] = (\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3) [L]$$

Saskaitīšanu un atņemšanu izdaram tāpat kā algebrā, pie kam rezultatam ir tas pats zimbols.

Reizināšana: reizināsim viendabīgus lielumus ℓ_1 un ℓ_2

$$\ell_1 \cdot \ell_2 = \lambda_1 [L] \cdot \lambda_2 [L] = \lambda_1 \cdot \lambda_2 [L] \cdot [L]$$

mērskaitļus λ_1 un λ_2 varam pareizināt, bet zimbolus reizināt nevaram, tā tad $[L] \cdot [L]$ reprezentēs kādu jaunu zimbolu, kuŗu saīsinātā veidā rakstīsim tā, itkā L būtu otrā pakāpē

$[L] \cdot [L] = [L^2]$ (tas nav reizinājums,bet jauns zimbols)

$$\ell_1 \cdot \ell_2 = \lambda_1 [L] \cdot \lambda_2 [L] = \lambda_1 \lambda_2 [L^2] = \lambda [L^2]$$

un analogiski pareizinot F_1 ar F_2 dabūsim

$$F_1 \cdot F_2 = \varphi_1 [F] \cdot \varphi_2 [F] = \varphi_1 \varphi_2 [F^2] = \varphi [F^2]$$

kur $[F^2]$ nav spēka kvadrats, bet tikai jauns zimbols.

Reizinot neviendabīgus lielumus, piem. ℓ un t dabūsim

$$\ell \cdot t = \lambda [L] \cdot \tau [T] = \lambda \cdot \tau [L] \cdot [T]$$

atkal mērskaitļus varam pareizināt, bet garumu ar laiku reizināt nevaram, tā tad $[L] . [T]$ nebūs garuma reizinājums ar laiku, bet jauns zimbols, kuŗu varam rakstīt arī tā $[L . T]$ un galīgi

$$l . t = \lambda . \tau [L . T] = p [L . T] \quad \text{kur } p = \lambda . \tau$$

Vai tādam zimbolam būs fizikala nozīme, to redzēsim tāļāk. Mechanikā nāks priekšā tikai tādi zimboli, kuŗiem ir fizikala nozīme.

Nosauktu skaitļu reizināšanas operacijas varam izdarīt tāpat kā algebrā, pie kam rezultatam ir jauns zimbols un reizināt var kā viendabīgus, tā arī neviendabīgus lielumus.

Dalīšana: Ņemsim garumu l un izteiksim viņu ar mērskaitli un zimbolu

$$l = \lambda [L]$$

uzrakstītā formula rāda, ka l ir salīdzināts ar $[L]$ un salīdzināšanas rezultats bija λ.

Tā tad garums l bija λ reizes lielāks par vienību $[L]$ jeb

$$\frac{l}{[L]} = \lambda \quad \text{ievietojot} \quad l = \lambda [L]$$

$$\frac{l}{[L]} = \frac{\lambda [L]}{[L]} = \lambda \quad \text{redzam, ka varam itkā } [L]$$

saīsināt.

Izdalīsim tagad divus viendabīgus lielumus l_1 un l_2

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{\lambda_1 [L]}{\lambda_2 [L]} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \lambda \quad \text{jeb arī analoģiski}$$

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\varphi_1 [F]}{\varphi_2 [F]} = \frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \varphi$$

Kā redzam, divu viendabīgu skaitļu dalīšanas rezultāts ir abstrakts skaitlis.

Dalot neviendabīgus lielumus mēs nedabūsim abstraktu skaitli, bet nosauktu lielumu, kuŗam būs jauns zimbols. Izdalīsim l caur t

$$\frac{l}{t} = \frac{\lambda [L]}{\tau [T]} = \left(\frac{\lambda}{\tau}\right) . \frac{[L]}{[T]} = n . \frac{[L]}{[T]}$$

garumu $[L]$ caur laiku $[T]$ dalīt nevar, tā tad izteiksme $\frac{[L]}{[T]}$ reprezentēs jaunu zimbolu, kuŗu var rakstīt arī citādi:

$$\frac{[L]}{[T]} = \left[\frac{L}{T}\right] = [L . T^{-1}]$$

vai šādam zimbolam ir fizikāla nozīme, to redzēsim tāļāk.

Pāreja no vienas vienības uz otru.

Katru nosauktu lielumu, piem., garumu varam izmērīt dažādās mēru vienībās, piem. $[L_1]$ un $[L_2]$, tad $l = \lambda_1 [L_1]$ un $l = \lambda_2 [L_2]$

garums šeit nemainās, bet mainās tikai mērskaitlis un zimbols. Pielīdzinot abas ℓ izteiksmes, dabūsim $\ell = \lambda_1[L_1] = \lambda_2[L_2]$

no kuŗienes seko proporcija $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{[L_2]}{[L_1]}$, kā redzams, mērskaitļi ir pretēji proporcionali izvēlētām vienībām: piem. 2 ass = 14 pēd., tad $\frac{14}{2} = \frac{\text{ass}}{\text{pēd.}}$, no proporcijas $\lambda_2 = \lambda_1 \frac{[L_1]}{[L_2]}$ ieliksim šo izteiksmi formulā $\ell = \lambda_2[L_2] = \left(\lambda_1 \frac{[L_1]}{[L_2]}\right)[L_2]$

Attiecība $\frac{[L_1]}{[L_2]}$ ir abstrakts skaitlis un viņa reizinājums ar λ_1 dos jaunu mērskaitli, kuŗam būs piesavināts jauns zimbols $[L_2]$

Lai pārietu no vienas vienības uz otru, jāņem veco mērskaitli, kuŗu jāreizina ar veco vienību, izteiktu caur jauno un jāpieliek jaunu zimbolu.

Piemērs: $\ell = 2 \text{ ass} = \left(2 \cdot \frac{\text{ass}}{\text{pēd}}\right) \cdot \text{pēd} = 2 \cdot 7 \cdot \text{pēd} = 14$ pēdu.

Pamata vienības. Minētās mēru vienības $[L]$, $[T]$, $[F]$ tiek sauktas par pamata vienībām, tehniskā mēru zistemā /Par mēru sistemām vispārīgi ŧuna būs vēlāk Punkta dinamikā/. No šīm pamata vienībām varam sastādīt visas citas vienības, kuŗas nāk priekšā mechanikā, un kuŗas mēs sauksim par atvasinātām vienībām.

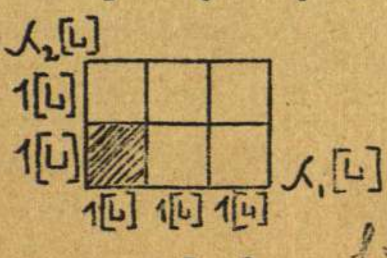
Zimbolu $[L]$, $[T]$, $[F]$ lietošanu lika priekšā Maxwell's un viņi tamdēļ arī tiek saukti par Maxwell'a zimboliem.

Atvasinātās vienības: 1/ Sastādīsim, piem., laukuma vienību $[f]$. Iziesim no matemātiskās formulas $f = \ell_1 \cdot \ell_2$. Apzīmēsim meklēto laukuma vienību ar $[f]$, tad $f = \varphi[f]$ kur φ - ir mērskaitlis.

$$\varphi[f] = \ell_1 \cdot \ell_2 = \lambda_1[L] \cdot \lambda_2[L] = \lambda_1 \cdot \lambda_2 [L^2]$$

pielīdzinot mērskaitļus $\varphi = \lambda_1 \cdot \lambda_2$, paliek $[f] = [L^2]$

To pašu jautājumu var apskatīt arī citādi:



zīm.9.

Lai izmērītu uzzīmēto laukumu /zīm.9/, ņemsim strīpoto kvadratu ▨ $1[L]$, $1[L]$ par laukuma vienību, tad $\varphi = 6$

$$f = \varphi[f] = 6 \; ▨$$

bet no otras puses $f = \ell_1 \cdot \ell_2 = \lambda_1[L] \cdot \lambda_2[L]$

$$f = 3 \cdot [L] \cdot 2[L] = 6[L^2]$$

no kuŗienes $[L^2] = ▨ \; 1[L], 1[L]$

Zimbolu $[L^2]$ var uzskatīt arī kā kvadrata laukumu, kuŗa mala ir viena vienība.

2/ Sastādīsim vienmērīgas kustības ātruma vienību. Kā zinams no fizikas ātrums vienmērīgā kustībā ir ceļš dalīts caur laiku $v = \frac{l}{t}$, ja apzīmēsim ātruma vienību ar $[V]$ un mērskaitlis būs: ζ_1, tad $v = \zeta_1 [V]$ bet no otras puses $v = \frac{l}{t} = \frac{\lambda [L]}{\tau [T]} = \frac{\lambda}{\tau}\left[\frac{L}{T}\right] = \frac{\lambda}{\tau}\left[L.T^{-1}\right]$

Pielīdzinot $\frac{\lambda}{\tau} = \zeta_1$ dabūsim arī $[V] = \left[\frac{L}{T}\right] = \left[L.T^{-1}\right]$.

Bet ātruma vienību $[V]$ arī var izmērīt dažādi, piemēram; cilvēks ir nogājis 18 klm. 5 stundu laikā, tad vienā stundā viņš ir nogājis 3,6 klm.,t.i. 3,6 reizes 1 klm. stundā un 1 klm/stundā būs vienība, ar kuŗu mēs šo ātrumu izmērojam. Bet no otras puses 18 klm = 18000 mtr. un 5 st. = 18000 sek., tad vienā sekundē būs noiets 1 mtr. un arī 1 mtr/sec būs ātruma vienība.

Uzrakstīsim sacīto:

$$\zeta_1 [V_1] = \frac{\lambda_1 [L_1]}{\tau_1 [T_1]} = \frac{18\,[\text{klm}]}{5\,[\text{st.}]} = \frac{18}{5}\left[\text{klm}/\text{st}\right] = 3{,}6\left[\text{klm}/\text{st}\right] = 3{,}6\left[\text{klm.st}^{-1}\right]$$

$$\zeta_2 [V_2] = \frac{\lambda_2 [L_2]}{\tau_2 [T_2]} = \frac{18000[\text{m}]}{18000[\text{sec}]} = \frac{18000}{18000}\left[\text{m}/\text{sec}\right] = 1\left[\text{m}/\text{sec}\right] = 1\left[\text{m.sec}^{-1}\right]$$

Ātrums ir 3,6 $\left[\text{klm}/\text{st}\right]$ jeb 1 $\left[\text{mtr}/\text{sec}\right]$

Lielumu dimenzijas: Zimbolu sakopojumu, kā piem. $\left[\frac{L}{T}\right]$ jeb $\left[L.T^{-1}\right]$ sauc par lielumu dimenziju. Dimenzija rāda 1/ar kādām vienībām lielums ir mērīts, 2/kā sastādās vienība no pamatvienībām, 3/Dimenzijas ļauj atšķirt vienu apzīmējumu no otra, piem., V un v apzīmē tilpumu, bet $V[m^3]$ un $v\left[\frac{m^3}{kg}\right]$

P un p - apzīmē spiedienu, bet $P[kg]$ un $p\left[\frac{kg}{m^2}\right]$

4/Dimenzijas rāda vai dotus lielumus var summēt jeb atvilkt vienu no otra, jo šādas darbības var izvest tikai ar viendabīgiem lielumiem.

5/Dažos gadījumos var sastādīt jaunu formulu bez iedziļināšanās lielumu būtībā.

Ņemsim no fizikas pazīstamo matematiskā svārsta kustības perioda formulu $t = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$,kur t ir periods, t.i. laiks

l - svārsta garums

g - smaguma spēka paātrinājums

Pieņemsim, ka esam formulas labo pusi aizmirsuši un zinam tikai, ka laiks ir funkcija no garuma l un no g.

$$\text{Lielumu dimenzijas ir} \begin{cases} t & - \text{ dimenzija: } [T] \\ l & - \quad " \quad [L] \\ g & - \quad " \quad [L.T^{-2}] \end{cases}$$

Formulas kreisā pusē ir [T], tā tad arī labā pusē jābūt[T]. Bet lai dabūtu labā pusē [T] skaidri redzams, ka ir jāizdala ℓ caur g un jāizvelk kvadratsakni, tā tad

$$t = k\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

kur k ir kāds koeficients, kuŗu protams tādā ceļā atrast nevar.

§ 3. TRĪS PUNKTA KUSTĪBAS NOTEIKŠANAS PAŅĒMIENI.

Punkta kustības noteikšanai telpā varam lietot dažādus paņēmienus kā analitiskos, tā arī vektorielo. Apskatīsim divus analitiskos kustības noteikšanas paņēmienus un vienu vektorielo.

I. analitiskais jeb naturalais kustības noteikšanas paņēmiens.

Punkta stāvoklis telpā ir pilnīgi noteikts ar: a/trajektoriju un b/punkta vietu uz viņas.

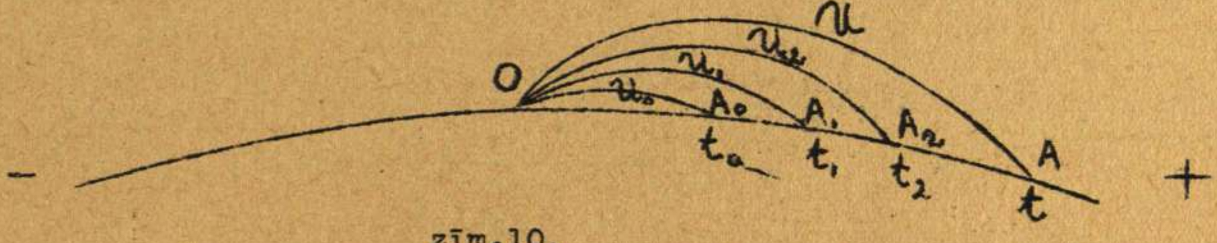
Trajektoriju, kā katru liniju telpā, ka zinams no analitiskās geometrijas, var noteikt trīsejādi:

1/ Ar divām virsmām
$$\begin{cases} f_1(xyz) = 0 \\ f_2(xyz) = 0 \end{cases}$$

2/ Ar diviem projecējošiem cilindriem, kuŗu veidules ir paralelas divām dažādām asīm
$$\begin{cases} F_1(xy) = 0 \\ F_2(xz) = 0 \end{cases} \quad \text{jeb arī} \quad \begin{aligned} y &= f_1(x) \\ z &= f_2(x) \end{aligned}$$

3/ Parametra veidā
$$\begin{cases} x = f_1(q) \\ y = f_2(q) \\ z = f_3(q) \end{cases}$$
kur q ir kāds parametrs.

Punkta stāvoklis uz trajektorijas būs pilnīgi noteikts, ja izvēlēsim uz trajektorijas kādu nekustošu punktu O, kuŗu sauksim par nullpunktu, un dosim katrā laika momentā kustoša punkta attālumu no nullpunkta O.



zīm.10.

Šo attālumu, kuŗu apzīmējam ar u, ir jāskaita gar pašu trajektoriju, bet ne visīsākā ceļā no nullpunkta un ņemot vērā, ka ir iespējams viņu atskaitīt uz vienu jeb otru pusi ir jāizvēl vienu pusi par pozitivu un otra tad būs negativa /zīm.10/

Pieņemsim, ka kustība sākās laika momentā t_0 un kustošs punkts atrodās vietā A_0, tad viņa attālumu no nullpunkta apzīmējam ar u_0

Punktu A_0 sauc par kustības sākuma punktu un u_0 par sākuma attālumu.

Sekojot tālāk punkta kustībai atradīsim:

laika momenta t_0 punkts atrodās vietā A_0 un attālums $OA_0 = u_0$

" " t_1 " " " A_1 " " $OA_1 = u_1$

" " t_2 " " " A_2 " " $OA_2 = u_2$

" " t " " " A " " $OA = u$

Kā redzams, attālums u pie punkta kustības pa trajektoriju ar laiku mainās, tā tad viņš būs kāda funkcija no laika

$u = f(t)$ sauc par <u>punkta kustības likumu</u> uz trajektorijas. Bet lai kustība būtu reala funkcijai $u=f(t)$ ir jāapmierina vairākas prasības

1/ $u = f(t)$ - jābūt <u>vienvērtīgai</u>, jo punkts nevar vienā laikā atrasties divās jeb vairākās vietās,

2/ $u = f(t)$ - jābūt <u>galīgai</u>, t.i. priekš galīgiem t ir jādod arī galīgu U.

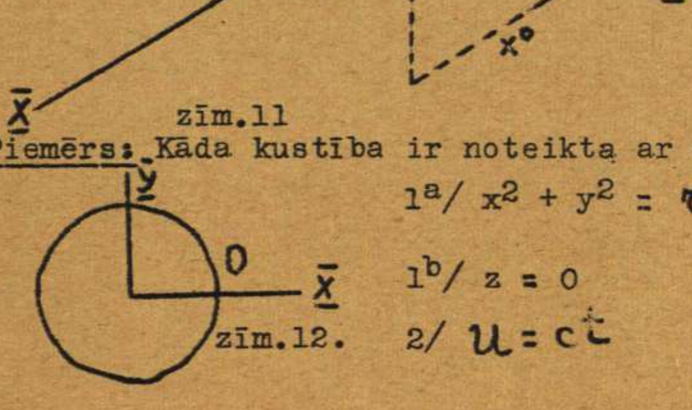
3/ $u = f(t)$ - jābūt <u>realai</u>, t.i. viņai jādod realas vērtības priekš U, jo citādi mēs viņu uz trajektorijas nevaram atlikt.

4/ $u = f(t)$ - jābūt <u>nepārtrauktai</u> funkcijai, jo pretējā gadijumā kustība notiks ar lēcieniem.

5/ $u = f(t)$ - jābūt divreiz diferencējamai /kamdēļ, to redzēsim vēlāk/.

<u>Nullpunkta O un sākuma punkta A_0 koordinates.</u>

Mēs apzīmēsim nullpunkta O koordinates ar x^0, y^0, z^0 un sākuma punkta A_0 koordinates ar x_0, y_0, z_0 lai atšķirtu vienas no otrām.



zīm.11

Savelkot visu augšā sacīto kopā, nākam pie slēdziena, ka kustības noteikšanai pēc naturala paņēmiena ir vajadzīgi:

1/Trajektorija

2/ $u = f(t)$ kustības likums uz trajektorijas

3/ $O(x^0, y^0, z^0)$ Nullpunkta koordinates.

<u>Piemērs:</u> Kāda kustība ir noteikta ar nol-miem

zīm.12.

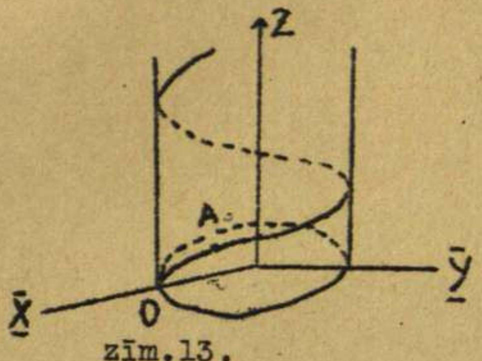
1^a/ $x^2 + y^2 = r^2$ - nol-ms reprezentē cilindri paralelu Z asij

1^b/ $z = 0$ - nol-ms reprezentē $\overline{XY}$ plakni

2/ $u = ct$ - attālums ir proporcionals laikam.

3/ O (r,o,o) - Nullpunkts atrodas uz $\bar{X}$ ass.
Kustība ir: vienmērīga kustība pa riņķi, kuŗa sākas nullpunktā O, jo laikā t = 0 attālums $u_c = 0$.

Piemērs: Kāda kustība ir noteikta ar nol-miem



zīm.13.

1/ $x = a \cos q$
$y = b \sin q$
$z = m q$
— Trajektorija ir skrūves linija uz eliptiska cilindra. Trajektorija dota parametra veidā

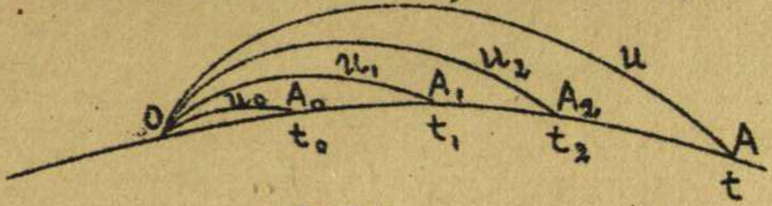
2/ $u = u_0 + ct^2$ - Attālums pieaug proporcionali laika kvadratam

3/ O (a,o,o) - Nullpunkts atrodas uz $\bar{X}$ ass

Kustība ir vienmērīgi paātrināta kustība pa skrūves līniju uz eliptiska celindra.

Noietais ceļš: s /Spatium/.

Ne katrreiz punkta attālums U no nullpunkta pilnīgi raksturo notikušo kustību, tamdēļ ievedīsim jaunu jēdzienu: laika sprīdī noieto ceļu: s

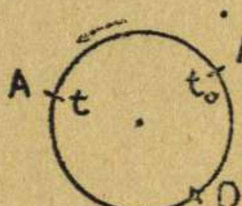


zīm.14.

laika sprīdi $(t_1 - t_0)$ noietais ceļš $s_{10} = u_1 - u_0$
" " $(t_2 - t_0)$ " " $s_{20} = u_2 - u_0$
" " $(t_2 - t_1)$ " " $s_{12} = u_2 - u_1$
" " $(t - t_0)$ " " $s = u - u_0$

Divos piemēros parādīsim starpību starp u un s

Piemērs: Punkts kustās pa aploci, pie kam pirmā gadijumā punkts ir nogājis no A_0 līdz A un otrā gadijumā no A_0 punkts ir apgājis aploci apkārt un atkal nogājis līdz A, tad

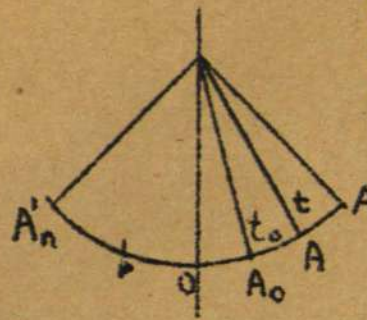


zīm.15.

pirmā gadijumā	otrā gadijumā
$u = OA$	$u = OA$ - tas pats,kas pirmā gadijumā
$s = A_0A$	$s = 2\pi r + A_0A$ ceļš ir cits

Piemērs: Matematiska svārsta kustība.

Apskatīsim viņu atkal divos gadijumos:



pirmā gadijumā svārsts nogāja no A_0 līdz A, tad

$\mathcal{U}$ = OA

$\mathcal{S}$ = A_0 A

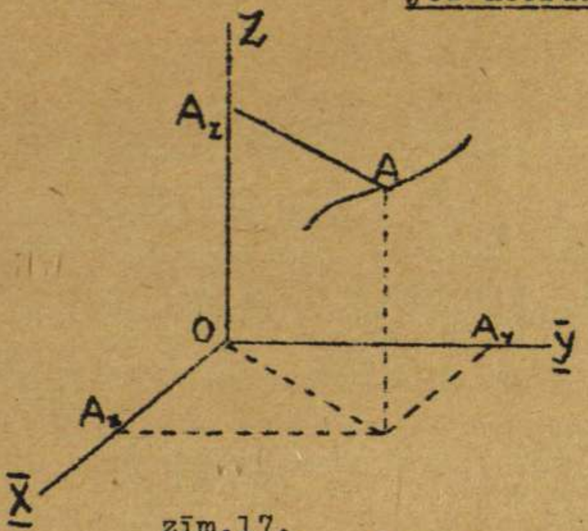
otrā gadijumā svārsts nogāja no A_0 līdz A_n tad atpakaļ līdz A_n' un atkal līdz A

$\mathcal{U}$ = OA attālums tas pats

$\mathcal{S}$ = $A_0A+2A_n A_n'$ - ceļš cits

zīm.16.

II. analitiskais kustības noteikšanas paņēmiens jeb koordinatu paņēmiens.



zīm.17.

Punkta kustība būs pilnīgi noteikta arī tad, ja katrā laikā momentā būs zināmas punkta koordinates,t.i. ja būs doti

1/ $x = f_x(t)$
2/ $y = f_y(t)$
3/ $z = f_z(t)$

Šos nol-mus sauksim par <u>punkta kustības nol-miem.</u>

Ja A_x, A_y, A_z ir punkta A projekcijas uz koordinatu asīm,tad:

1/ nolīdzinājums $x = f_x(t)$ reprezentē punkta A_x kustības likumu gar $\bar{X}$ asi.

2/ nol - ms $y = f_y(t)$ reprezentē punkta A_y kustības likumu gar $\bar{Y}$ asi.

3/ nol - ms $z = f_z(t)$ reprezentē punkta A_z kustības likumu gar Z asi.

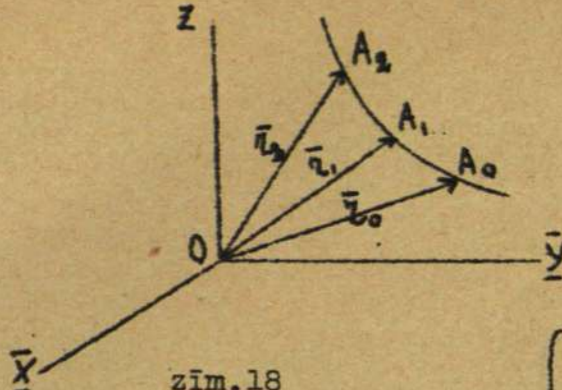
Pēc dotiem 3 kustības nol-miem varam teikt, ka kustība telpā ir sadalīta pa 3 koordinatu asīm un no otras puses, ka minētie trīs nol-mi izsaka arī trajektoriju parametra veidā, pie kam parametra lomu izpilda laiks t.

Ņemot vērā, ka katrs no kustības nol-miem reprezentē punkta projekcijas kustības likumu,funkcijām $f_x(t)$, $f_y(t)$ un $f_z(t)$ jāapmierina tās pašas 5 prasības, kuŗas bija uzstādītas

1/ funkcijām jābūt vienvērtīgām,
2/ " " galīgām,
3/ " " reālām,
4/ " " nepārtrauktām,
5/ " " divreiz diferencējamām.

III. Vektorielais kustības noteikšanas paņēmiens.

Punkta kustība būs pilnīgi noteikta, ja katrā laikā momentā būs zinams vektors $\overline{OA}$, kuŗš savieno koordinatu sākumu O ar kustošu punktu A, šo vektoru apzīmēsim ar $\bar{r}$ un nosauksim par radiusu - vektoru.



zīm.18

Sacīto izteiksim tā:

$$\bar{r} = \overline{f(t)} \qquad \ldots\ldots(1)$$

šeit vektorzīme rāda, ka funkcija ir vektoriela un $\bar{r}$ ir noteikts katrā laika momentā netikai pēc lieluma, bet arī pēc virziena.

Projecējot nol-mu (1) uz koordinatu asīm, dabūsim:

$$\begin{cases} r_x = x = f_x(t) \\ r_y = y = f_y(t) \\ r_z = z = f_z(t) \end{cases}$$

Kā redzams viens vektoriels nol-ms atsver trīs analitiskos nol-mus.

Bet katrs vektors ir geometriska summa no viņa komponentēm, tā tad

$$\left.\begin{aligned} \bar{r} &= \bar{x} + \bar{y} + \bar{z} \qquad \text{jeb arī} \\ \bar{r} &= \overline{f_x(t)} + \overline{f_y(t)} + \overline{f_z(t)} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots(2)$$

apzīmējot vienības vektorus koordinatu ass virzienos ar $\bar{i}_x$; $\bar{i}_y$; $\bar{i}_z$ dabūsim

$$\left.\begin{aligned} \bar{r} &= x.\bar{i}_x + y.\bar{i}_y + z.\bar{i}_z \qquad \text{un arī} \\ \bar{r} &= f_x(t).\bar{i}_x + f_y(t).\bar{i}_y + f_z(t).\bar{i}_z \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots(3)$$

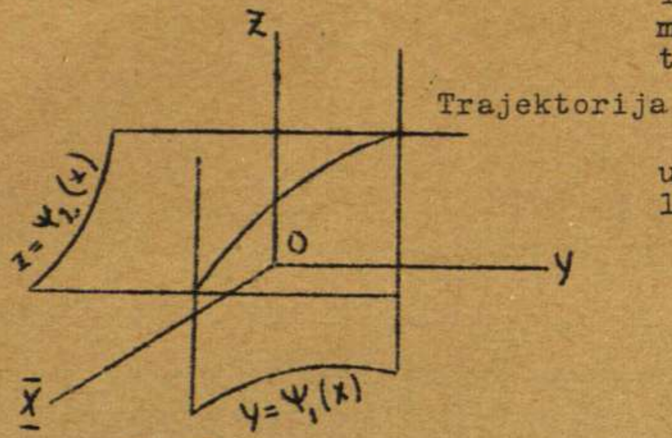
kur tagad $f_x(t)$; $f_y(t)$ un $f_z(t)$ ir analitiskas funkcijas.

Pāreja no I. analitiskā /naturalā/ kustības noteikšanas paņēmiena uz II. /koordinatu/

Ja punkta kustība ir dota pēc I paņēmiena, tad ir doti	Prasīti kustības nol-mi
1/ $f_1(xyz) = 0$, $f_2(xyz) = 0$ Trajektorija ar divām virsmām	1/ $x = \varphi_1(t)$
2/ $u = f(t)$ kustības likums	2/ $y = \varphi_2(t)$
3/ $O(x^0, y^0, z^0)$ Nullpunkts	3/ $z = \varphi_3(t)$
	4/ Sākuma punkta koordinates $A(x_0\, y_0\, z_0)$

Atrisināšanas metode ir:

no diviem nol-miem 1/ izslēdzam vienu koordinati, piemēram z, tad dabūsim $y = \psi_1(x)$, pēc tam izslēdzot y dabūsim $z = \psi_2(x)$.



Iegūtie nol-mi reprezentē $\begin{cases} y=\Psi_1(x) & \text{cilindri } \parallel Z \text{ asij} \\ z=\Psi_2(x) & \text{cilindri } \parallel Y \text{ asij} \end{cases}$

un abu cilindru krustošanās linija ir trajektorija.

zīm.19.

Tāļāk ņemsim loka diferencialu dU

$$dU = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \cdot dx$$

aizvietojam y un z ar atrastām. funkcijām un integrejam

$$u = \int \sqrt{1 + \left[\frac{d\Psi_1(x)}{dx}\right]^2 + \left[\frac{d\Psi_2(x)}{dx}\right]^2} \cdot dx + C$$

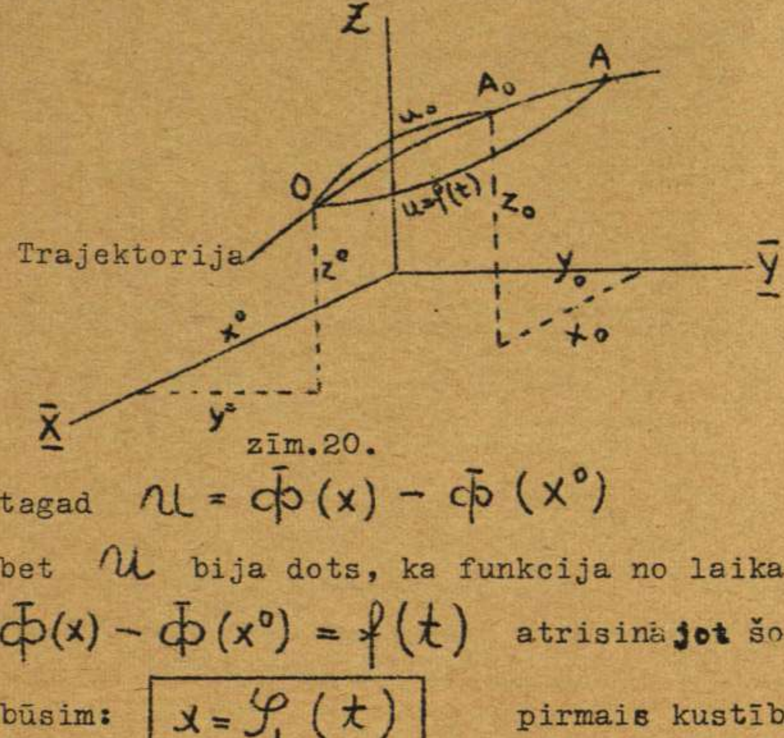
nointegrejot šo izteiksmi, dabūsim

$$u = \Phi(x) + C$$

C - atradīsim liekot $x = x^0$ tad

$$u^0 = 0$$

$$0 = \Phi(x^0) + C \ ; \ C = -\Phi(x);$$



zīm.20.

tagad $u = \Phi(x) - \Phi(x^0)$

bet u bija dots, ka funkcija no laika: $u = f(t)$

$\Phi(x) - \Phi(x^0) = f(t)$ atrisinājot šo nol-mu attiecībā uz x dabūsim: $\boxed{x = \varphi_1(t)}$ pirmais kustības nol-ms.

Aizvietojot x agrāk atrastos nol-mos $\begin{cases} y = \Psi_1(x) \\ z = \Psi_2(x) \end{cases}$

dabūsim arī pārējos kustības nol-mus

$y = \Psi_1[\varphi_1(t)]$ jeb $\boxed{y = \varphi_2(t)}$

$$z = \psi_2\left[\varphi_1(t)\right] \quad \text{jeb} \quad \boxed{z = \varphi_3(t)}$$

Liekot šinīs nol-mos $t = 0$ atradīsim sākuma punkta A_0 koordinātes

$$x_0 = \left[\varphi_1(t)\right]_{t=0} \;;\quad y_0 = \left[\varphi_2(t)\right]_{t=0} \;;\quad z_0 = \left[\varphi_3(t)\right]_{t=0}$$

Piemērs uz pāreju no I paņēmiena uz II.

Doti: 1/Trajektorija: taisne

$$\frac{x - a_1}{b_1} = \frac{y - a_2}{b_2} = \frac{z - a_3}{b_3}$$

2/Kustības likums: $u = ct$

3/Nullpunkts $O(a_1 a_2 a_3)$

Šeit varētu dot tikai vienu no nullpunkta koordinātēm un pārējās atrast no trajektorijas.

Uziet: kustības nol-mus

1/ $x = \varphi_1(t)$

2/ $y = \varphi_2(t)$

3/ $z = \varphi_3(t)$

4/ sākuma p-ktu $A_0(x_0\ y_0\ z_0)$

Pirmkārt uziesim y un z kā funkcijas no x no trajektorijas nol-miem.

$$y = a_2 + \frac{b_2}{b_1}(x - a_1) \quad ; \quad z = a_3 + \frac{b_3}{b_1}(x - a_1) \;.......(1^a)$$

Ņemsim tagad loka diferenciālu

$$du = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,.\,dx = \sqrt{1 + \left(\frac{b_2}{b_1}\right)^2 + \left(\frac{b_3}{b_1}\right)^2}\,.\,dx$$

integrejot dabūsim

$$u = \int \frac{1}{b_1}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}\,.\,dx + C = \frac{1}{b_1}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}\,.\,x + C$$

lai atrastu integrešanas constanti C liksim $u = 0$ un $x = x^0 = a_1$,tad

$$0 = \frac{1}{b_1}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}\,.\,a_1 + C \quad \text{no kurienes} \quad C = -\frac{a_1}{b_1}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$$

ievietojot constanti: $u = \dfrac{x - a_1}{b_1}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$

bet u bija dots kā funkcija no laika $u = ct$

$$\frac{x - a_1}{b_1}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} = ct \quad \text{no kurienes}$$

$$\boxed{x = a_1 + \frac{b_1 c}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}\,.\,t}$$

tā ir mekIejamā funkcija $x = \varphi_1(t)$

ieliekot š. x nol-mos /1ª/ dabūsim arī

$$y = a_2 + \frac{l_2 c}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2}} \cdot t \quad \text{un} \quad z = a_3 + \frac{l_3 c}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2}} \cdot t$$

Ja atrastās formulās ievietosim $t = 0$, tad dabūsim kustības sākuma punkta A_0 koordinates $x_0 = a_1$; $y_0 = a_2$ un $z_0 = a_3$, kā redzams šinī gadijumā kustības sākuma punkts A_0 sakrīt ar nullpunktu 0, tas ir izskaidrojams ar to, ka sākumā $U_0 = c \cdot 0 = 0$

Pāreja no II. analitiskā /koordinatu/ kustības noteikšanas paņēmiena uz I. /naturalo/.

Ja punkta kustība ir dota pēc II.paņēmiena, tad ir doti:

$$\left.\begin{aligned} &1/\ x = f_x(t) \\ &2/\ y = f_y(t) \\ &3/\ z = f_z(t) \end{aligned}\right\} \text{Punkta kustības nol-mi}$$

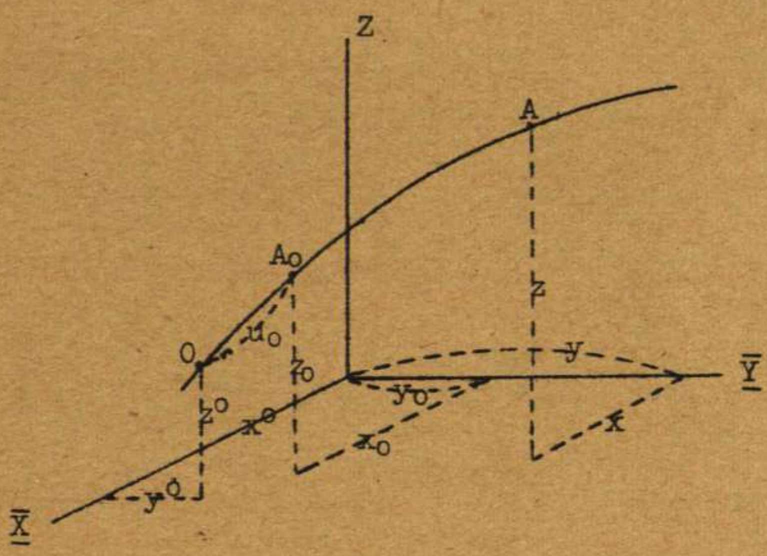
Prasīti ir:

1/kustības sākuma punkta A_0 koordinates x_0, y_0 un z_0

2/Trajektorija

3/ $U = f(t)$ kustības likums

4/Nullpunkta 0 koordinates x^0, y^0 un z^0



zīm.21.

Ieliekot dotos kustības nol-mos t = 0 mēs dabūsim p-kta A_0 koordinates

$$x_0 = f_x(t)_{t=0}$$
$$y_0 = f_y(t)_{t=0}$$
$$z_0 = f_z(t)_{t=0}$$

Trajektorija ar dotiem 3 kustības nol-miem faktiski ir jau dota,bet,ja ir vēlams uziet viņu kā krustošanās rezultatu no diviem cilindriem, no šiem 3 nolmiem ir jāizslēdz laiku t. Šim nolūkam piem. no dotā 1/nol-ma uziesim $t = \varphi(x)$ un ieliksim 2/ un 3/

$$\text{tad: } \left.\begin{aligned} &2/\ y = f_y[\varphi(x)] \\ &3/\ z = f_z[\varphi(x)] \end{aligned}\right\} \text{reprezentēs trajektoriju ar diviem cilindriem.}$$

Tāļak atkal ņemsim loka diferenciālu $dU = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ un izņemsim no saknes dt

$$dU = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \cdot dt = \sqrt{f_x'(t)^2 + f_y'(t)^2 + f_z'(t)^2} \cdot dt$$

integrejot dabūsim

$$U = \int \sqrt{f_x'(t)^2 + f_y'(t)^2 + f_z'(t)^2}\,.\,dt + C$$, pēc integrešanas

$$U = \Phi(t) + C$$

lai noteiktu šo constanti C ir jāzin sākuma attālumu U_0 laika momentā t_0, bet ja viņš nav dots, mēs varam viņu pieņemt patvaļīgu, tad

$$U_0 = \Phi(t_0) + C$$ no kurienes $C = U_0 - \Phi(t_0)$

un prasītais kustības likums iznāk

$$\boxed{U = U_0 + \Phi(t) - \Phi(t_0)}$$

pielīdzinājot tagad U = 0 un atrisinājot nol-mu $U_0 + \Phi(t) - \Phi(t_0) = 0$

attiecībā uz t, uziesim laiku t^0, kurš atbilst nullpunktam, pie kam, ja laiku skaitam no kustības sākuma momenta un $U_0 > 0$, tad šis laiks t^0 būs negativs.

Ievietojot atrasto t^0 dotos kustības nol-mos dabūsim arī nullpunkta koordinates

$$x^0 = f_x(t^0) \quad ; \quad y^0 = f_y(t^0) \quad ; \quad z^0 = f_z(t^0)$$

Piemērs uz pāreju no II. kustības noteikšanas paņēmiena uz I./naturalo/.

Doti: kustības nol-mi

1/ $x = a \operatorname{Cos} Kt$

2/ $y = a \operatorname{Sn} Kt$

3/ $z = m t$

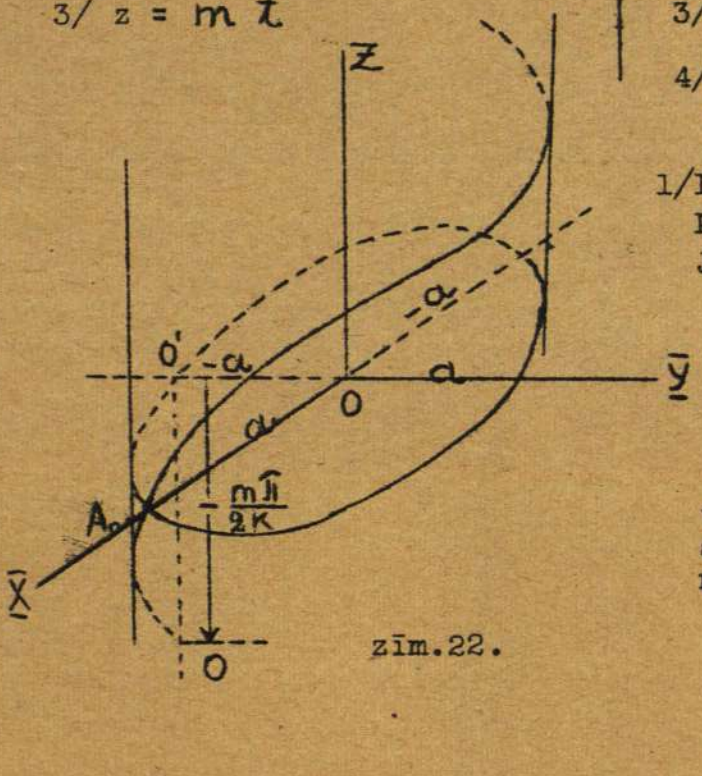
Prasīti:

1/Sākuma punkta koordinates x_0 y_0 un z_0

2/Trajektorija

3/ $U = f(t)$ kustības likums

4/Nullpunkta koordinates x^0 y^0 z^0



zīm.22.

1/Lai noteiktu kustības sākuma punkta A koordinates, ievietojam kustības nol-mos t = 0, tad

$x_0 = a \operatorname{Cos} 0 = a$

$y_0 = a \operatorname{Sn} 0 = 0$

$z_0 = m \,.\, 0 = 0$

tā tad kustība sākas uz $\underline{X}$ ass attālumā a no koordinatu sākuma.

2/Izslēdzot no pirmā un otrā kustības nol-ma laiku, mēs dabūsim trajektorijas projecējošo cilindri paralelu Z asij: $x^2 + y^2 = a^2$ cilindra pamats,kā redzams,ir riņķis ar radiusu: a. Uziesim no trešā kustības nol-ma $t = \frac{z}{m}$ un ievietosim otrā, tad $y = a\,Sn\,\frac{kz}{m}$, tā tad trajektorijas projecējošā cilindra $\parallel \bar{X}$ asij pamats ir sinusoida un pate trajektorija būs skrūves linija uz apaļa cilindra, kuŗa ass ir Z ass.

3/Ņemsim loka diferenciālu

$$du = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

$$du = \sqrt{a^2\,k^2\,Sn^2kt + a^2\,k^2\,Cos^2kt + m^2}\;.\;dt = \sqrt{a^2\,k^2 + m^2}\;.\;dt$$

integrejot $u = \int\sqrt{a^2k^2+m^2}\,.\,dt + c = \sqrt{a^2k^2+m^2}\,.\,t + c$

u_0 nav dots, pieņemsim viņu patvaļīgi: $u_0 = \frac{\pi}{2K}\sqrt{a^2k^2+m^2}$

Izlietojot sākuma apstākļus: pie $t = 0$; $u = u_0$, dabūsim

$$u_0 = 0 + c\;; \qquad c = \frac{\pi}{2K}\sqrt{a^2k^2+m^2}$$

un kustības likums: $u = \sqrt{a^2k^2+m^2}\,.\,t + \frac{\pi}{2K}\sqrt{a^2k^2+m^2}$

$$\boxed{u = \sqrt{a^2k^2+m^2}\left(t + \frac{\pi}{2K}\right)}$$

4/Lai noteiktu nullpunkta koordinates, ievērosim ka nullpunkta $u = 0$ un uziesim attiecīgo laiku $0 = \sqrt{a^2k^2+m^2}\left(t^0 + \frac{\pi}{2K}\right)$

no kurienes $t^0 = -\frac{\pi}{2K}$; ievietojot šo vērtību dotos kustības nol-mos uziesim nullpunkta koordinates

$$x^0 = a\,Cos\,Kt^0 = a\,Cos\left(-K\frac{\pi}{2K}\right) = 0$$

$$y^0 = a\,Sn\,Kt^0 = a\,Sn\left(-K\frac{\pi}{2K}\right) = -a$$

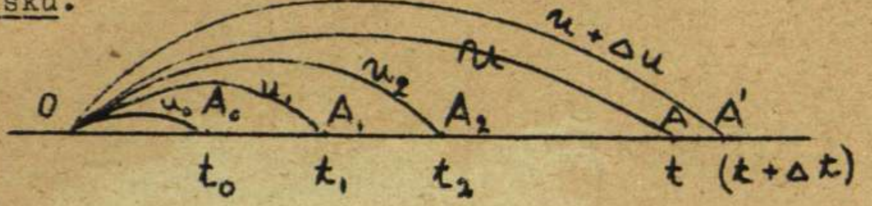
$$z^0 = mt^0 = -\frac{m\pi}{2K}$$

Kā redzams nullpunkts guļ ZY plakne pie kam abas koordinates $y^0 = -a$ un $z^0 = -\frac{m\pi}{2K}$ ir negativas.

§ 4. ĀTRUMS.

I. Ātrums taisnvirzieniskā vienmērīgā kustībā.

Ja punkta trajektorija ir taisna, kustību sauksim par taisnvirzienisku.



zīm.23.

Pieņemsim, ka punkts savā kustībā pa taisnu trajektoriju

laika momentā	t_0	atrodas vietā	A_0
" "	t_1	" "	A_1
" "	t_2	" "	A_2
" "	t	" "	A
" "	$t+\Delta t$	" "	A'

un sastādīsim noieto ceļu attiecības pret attiecīgiem laika sprīžiem:

$$\frac{u_1-u_0}{t_1-t_0}=\frac{u_2-u_1}{t_2-t_1}=\frac{u-u_2}{t-t_2}=\frac{u-u_0}{t-t_0}=\frac{\Delta u}{\Delta t}=\text{Const}=C$$

Ja izrādīsies, ka neatkarīgi no izvēlētā ceļa gabala arvienu šīs attiecības ir Const. un = c ,tad kustība tiek saukta par vienmērīgu kustību.

No sacītā seko, ka vienmērīgā kustībā katrā laika vienībā tiek noieti vienādi ceļa gabali.

Minēta constanta attiecība: c raksturo kustības straujumu un tiek saukta par vienmērīgas kustības ātrumu.

Sakarā ar šo: vienmērīgas kustības ātrumu varam definēt divejādi: 1/vienmērīgā kustībā ātrums līdzinājās noietam ceļam dalītam caur patērēto laiku, jeb arī 2/ vienmērīgas kustības ātrums līdzinājās ceļam noietam laika vienībā.

Ātrums kā vektors: Noieto ceļu mēs sastādam kā $u-u_0$,bet šī izteiksme var būt pozitiva, ja punkts attālinājās no nullpunkta jeb negativa, ja punkts tuvojās nullpunktam, turpretīm $t - t_0$ ir arvienu pozitivs, tā tad arī ātrums būs pozitivs jeb negativs, tas nozīmē,ka ātrumu varam uzskatīt kā vektoru, kurš arvienu sakrīt ar kustības virzienu pa taisni.

Ātruma dimenzija: Ņemot c formulu un pārveidojot viņu

$$C=\frac{u-u_0}{t-t_0}=\frac{\lambda[L]}{\tau[T]}=\frac{\lambda}{\tau}\left[\frac{L}{T}\right]=\alpha\left[L.T^{-1}\right]$$

redzam,ka ātruma dimenzija ir $[LT^{-1}]$,parasti: $mtr.sec^{-1}$ jeb $klm.st^{-1}$.

Vienmērīgas kustības likums: Ņemot formulu $\frac{s - s_0}{t - t_0} = c$ varam uziet šinī gadijumā $s = f(t)$

$$\boxed{s = s_0 + c(t - t_0)} \qquad \ldots\ldots\ldots (4)$$

Ja A_0 sakrīt ar nullpunktu 0, tad $s_0 = 0$; $s = s$ un mēs dabujam kustības likumu vienkāršākā formā

$$\boxed{s = s = c(t - t_0)} \qquad \ldots\ldots\ldots (4a)$$

Ja bez tam vēl laiku skaitam no kustības sākuma momenta, tad arī $t_0 = 0$ un

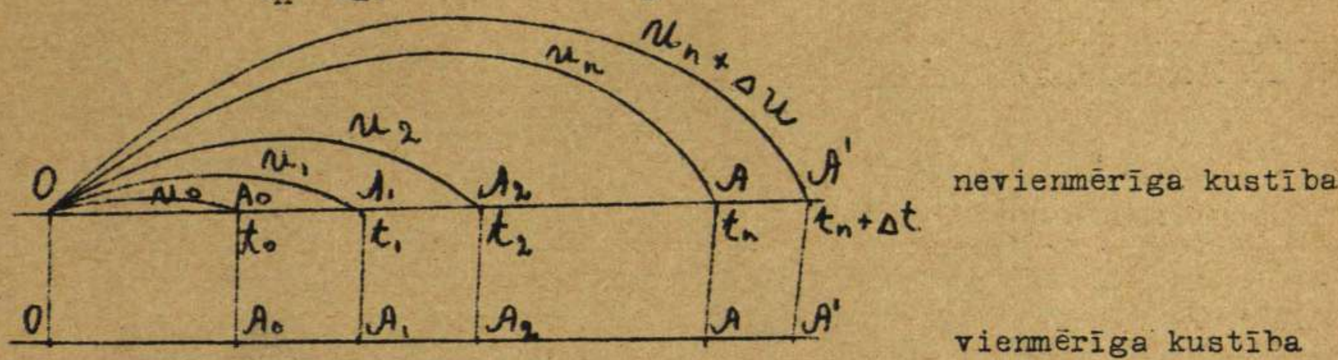
$$\boxed{s = s = ct} \qquad \ldots\ldots\ldots (4b)$$

II. Ātrums taisnvirzieniskā nevienmērīgā kustībā.

Ja atsevišķās laika vienībās noietie ceļi nebūs vienādi, kustība saucās par nevienmērīgu.

Pieņemsim, ka punkts savā kustībā pa taisnu trajektoriju

laika momenta		t_0	atrodās vietā		A_0
"	"	t_1	"	"	A_1
"	"	t_2	"	"	A_2
"	"	t_n	"	"	A
"	"	$t_n + \Delta t$	"	"	A'



zīm.24.

Nevienmērīgā kustībā attiecābas:

$$\frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0} \neq \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} \neq \frac{s_n - s_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} \neq \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Vispārīgi var nebūt vienādas un lai noteiktu ātrumu šinī kustībā ņemsim otru trajektoriju paraleli pirmai /zīm.24./ un pa šo trajektoriju liksim kustēties otram /fiktivam/ punktam tā, lai viņš izietu no punkta A_0

savā trajektorijā tanī paša laika momentā t_0 un pienāktu punktos A_1 ; A_2, A ; A' arī tanīs pašos laika momentos kā pirmais punkts, un bez tam atsevišķus ceļa gabalus noietu vienmērīgā kustībā. Otra punkta ātrumi tad būs:

$$C_{m_1} = \frac{u_1 - u_0}{t_1 - t_0}; \quad C_{m_2} = \frac{u_2 - u_1}{t_2 - t_1}; \quad C_{m_n} = \frac{u_n - u_{n-1}}{t_n - t_{n-1}}; \quad C_m' = \frac{\Delta u}{\Delta t}$$

Šos constantus ātrumus C_{m_1}, C_{m_2}, C_m, C_m' mēs sauksim par <u>vidējiem ātrumiem nevienmērīgā kustībā.</u>

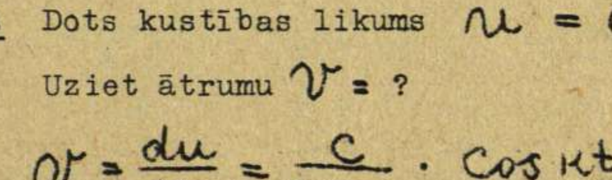
Jo vairākos punktos mēs sadalīsim trajektoriju, jo vairākas reizes fiktiva punkta kustība /ar vienmērīgiem ātrumiem/ sakritīs ar īsteno kustību un robežas gadijumā ja mēs šos punktus ņemsim ļoti bieži un laika sprīdi ļoti mazu, īstenais ātrums sakritīs ar fiktivo. Tā tad <u>īstenais ātrums nevienmērīgā kustībā</u> ir <u>vidēja ātruma robeža</u>, ja laika sprīdis tiecas uz 0. Apzīmēsim īsteno ātrumu ar v, tad

$$v = \lim C_m' = \lim \left(\frac{\Delta u}{\Delta t}\right)_{\Delta t \to 0}$$

Bet, ņemot vērā, ka $u = f(t)$, izteiksme: $\lim \left(\frac{\Delta u}{\Delta t}\right)_{\Delta t \to 0}$ ir funkcijas pieauguma attiecības pret argumenta pieaugumu robeža, kuŗa ja argumenta pieaugums tiecas uz 0 nav nekas cits, kā : $\frac{du}{dt}$

tā tad $\boxed{v = \frac{du}{dt}}$ jeb arī $\boxed{v = f'(t)}$ .....(4)

Galīgi: <u>ātrums nevienmērīgā taisnvirzieniskā kustībā ir kustības likuma $u = f(t)$ pirmais atvasinājums pēc laika.</u>



zīm.25.

Kā redzams no divām šemām /zīm.25/ du var būt pozitīvs jeb negatīvs, sakarā ar ko arī ātrums būs pozitivs jeb negatīvs un būs <u>vektors, kurš sakrīt ar taisnu trajektoriju un iet kustības virzienā.</u>

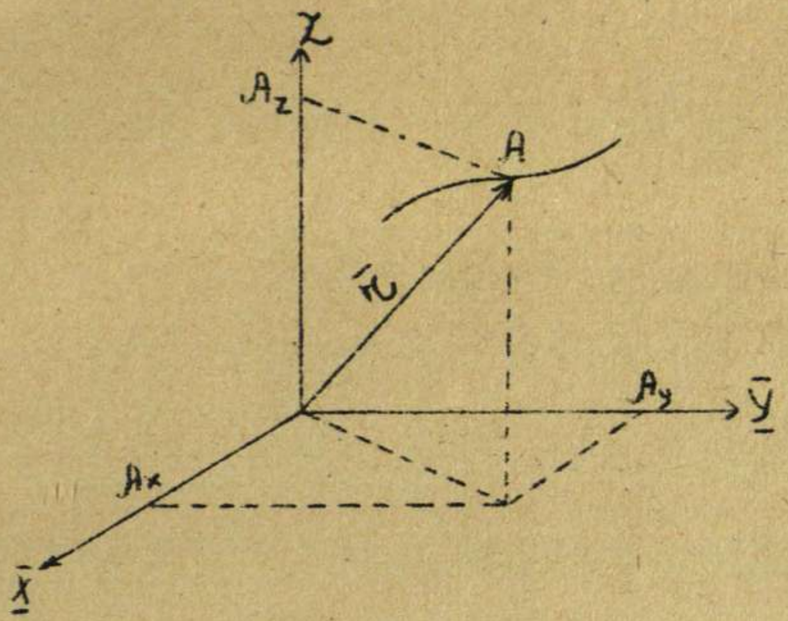
<u>Piemērs:</u> Dots kustības likums $u = c \lg Sn\, kt$

Uziet ātrumu $v = ?$

$$v = \frac{du}{dt} = \frac{c}{Sn\, kt} \cdot Cos\, kt \cdot k = ck \cdot Ctg\, kt$$

III. Punkta ātrums līkumainā kustībā.

Kustība saucās par līkumainu tad, ja punkta trajektorija ir līka linija.



zīm.26.

Izvēlēsim trešo kustības noteikšanas paņēmienu, pēc kura ir dots kustoša punkta radiuss-vektors kā vektoriela laika funkcija

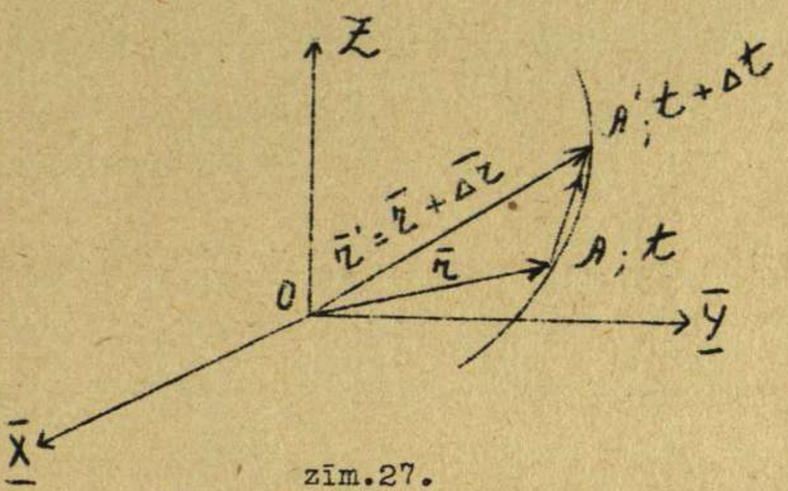
$$\bar{r} = \bar{f}(t)$$

Šis nol-ms, kā jau agrāk bija aizrādīts, ir vienvērtīgs 3 skalariem nol-miem, tā sauktiem kustības nol-miem

$$x = f_x(t);$$
$$y = f_y(t) \quad \text{un}$$
$$z = f_z(t) \quad ,$$

kuri reprezentē punkta projekciju uz koordinatu asīm kustības likumus gar tām pašām asīm.

Tie paši 3 nol-mi dod arī trajektorijas nol-mu parametra veidā.



zīm.27.

Ja punkta kustība ir dota ar radiusu vektoru $\bar{r}$, tad laika momentā t šī radiusa vektora gala punkts dos kustoša punkta stāvokli telpā A.

Dosim argumentam, t.i. laikam mazu pieaugumu Δt, tad arī radiuss-vektors dabūs zināmu geometrisku pieaugumu $\overline{\Delta r}$, viņa vērtība būs $\bar{r} + \overline{\Delta r} = \bar{r}'$ un gala punkts dos jaunu punkta stāvokli telpā A'. Punkta pārvietojums, kuru, ja laika elements Δt ir mazs, varam skaitīt chordas virzienā, būs $\overline{AA'}$,

un $\overline{AA'} = \bar{r}' - \bar{r} = \overline{\Delta r}$

attiecību $\dfrac{\overline{AA'}}{\Delta t} = \dfrac{\bar{r}' - \bar{r}}{\Delta t} = \dfrac{\overline{\Delta r}}{\Delta t}$ mēs sauksim par <u>līkumainas kustības vidējo ātrumu</u> mazā laika sprīdī Δt, tā tad vidējais ātrums līkumainā kustībā $\bar{v}_m$ ir fiktivs taisnvirzienisks ātrums pa chordu $\overline{AA'}$ tas būs vektors, kurš sakrīt ar chordu un iet kustības virzienā no A uz A'

$$\bar{v}_m = \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}$$

Tādā kārtā mēs pievedam līkumainas kustības vidējo ātrumu pie taisnvirzieniskas kustības ātruma pa chordu.

Tāļāk līkumainas kustības īsteno ātrumu dotā momentā mēs definēsim kā augšminētā vidējā ātruma pa chordu robežu, ja Δt samazināsim līdz 0.

$$\bar{v} = \lim(\bar{v}_m)_{\Delta t \to 0} = \lim\left(\frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}\right)_{\Delta t \to 0} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \overline{f'(t)}$$

Rezultatu $\boxed{\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}}$ ....(5) formulēsim tā:

Ātrums līkumainā kustībā ir radiusa vektora ģeometriskais atvasinājums pēc laika.

Ņemot vērā, ka vidējais ātrums $\bar{v}_m$, kuŗa robeža ir $\bar{v}$ sakrīt ar chordu, bet chordas robeža, ja $\Delta t \to 0$ būs trajektorijas tangente, varam teikt, ka: līkumainā kustībā ātruma vektors arvienu sakrīt ar trajektorijas tangenti.

Tagad izejot no formulas /5/ izvedīsim ātruma formulas, kuŗas būs lietojamas, ja kustība ir dota pēc I un II kustības noteikšanas paņēmiena.

Agrāk bija: $\Delta\bar{r} = \overline{AA'}$, bet $\overline{AA'}$ ja Δt ir mazs, ir arī trajektorijas loka elements $\Delta \bar{u}$

tā tad $\bar{v} = \lim\left(\frac{\Delta \bar{u}}{\Delta t}\right)_{\Delta t \to 0} = \frac{du}{dt} \cdot \bar{i}_t$ kur $\bar{i}_t$ ir vienības

vektors tangentes virzienā. Un pēc absoluta lieluma

$\boxed{v = \frac{du}{dt}}$ ....(6) So formulu lietosim ātruma

noteikšanai ja kustība dota pēc pirmā kustības noteikšanas paņēmiena, paturot prātā, ka ātruma virziens arvienu sakrīt ar trajektorijas tangenti.

Ņemot vērā, ka $s = u - u_0$ dabūsim $ds = du$

un $\boxed{v = \frac{ds}{dt}}$ .... (6a)

Iziesim atkal no /5/ formulas $v = \frac{d\bar{r}}{dt}$

Ņemsim $\bar{r}$ izteiksmi $\bar{r} = \bar{x} + \bar{y} + \bar{z} = x.\bar{i}_x + y.\bar{i}_y + z.\bar{i}_z$

un diferencēsim viņu pēc laika, ievērojot, ka vienības vektori koordinatu ass virzienos ir const.,

tad $v = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\cdot\bar{i}_x + \frac{dy}{dt}\cdot\bar{i}_y + \frac{dz}{dt}\cdot\bar{i}_z$

bet ātrums $\bar{v} = \bar{v}_x + \bar{v}_y + \bar{v}_z$

Salīdzinot abas $\bar{v}$ izteiksmes varam teikt,

ka $\bar{v}_x = \frac{dx}{dt}\cdot\bar{i}_x\,;\quad \bar{v}_y = \frac{dy}{dt}\cdot\bar{i}_y\,;\quad \bar{v}_z = \frac{dz}{dt}\cdot\bar{i}_z$

atmetot šeit virzienus, dabūsim ātruma projekciju uz koordinatu asīm analitiskās izteiksmēs:

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}} \\ \boxed{v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}} \\ \boxed{v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (7)$$

Šīs formulas lieto tad, kad kustība ir dota pēc otra kustības noteikšanas /koordinatu/ paņēmiena.

Viņas izsaka arī ka: <u>punkta ātruma projekcija uz kaut kādu virzienu ir vienāda ar punkta projekcijas ātrumu šinī virzienā.</u>

Atvasinājumiem pēc laika lietosim Lagrang'a apzīmējumus ar punktu virsu, lai atšķirtu viņus no atvasinājumiem pēc koordinātēm, piem.: $\frac{dy}{dx} = y'$

Ātruma projekcijas dod iespēju noteikt arī leņķus, kuŗus veido ātruma vektors ar koordinatu asīm:

$$v_x = v\cos(\bar{x}\,\bar{v})\,;\quad v_y = v\cos(\bar{y}\,\bar{v})\,;\quad v_z = v\cos(\bar{z}\,\bar{v})$$

no kurienes $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$

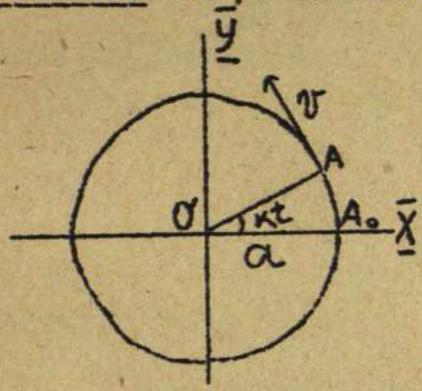
ātruma formulās saknēm priekšā ņemsim tikai /+/ zīmes un virzienu noteiksim pēc cosinus-iem.

$$\cos(\bar{x}\,v) = \frac{v_x}{v} = \frac{\frac{dx}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}$$

$$\cos(\bar{y}\bar{v}) = \frac{v_y}{v} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}$$

$$\cos(\bar{z}\bar{v}) = \frac{v_z}{v} = \frac{\frac{dz}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}} = \frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}$$

Piemērs: uz ātruma noteikšanu pēc dotiem kustības nol-miem.



zīm.28.

Doti:

$x = a\cos kt$

$y = a\,Sn\,kt$

$z = 0$

Uziet:

1/ Trajektorija

2/ Ātrumu

3/ Kustības sākuma punktu

Izslēdzot laiku no kustības nol-miem

uziesim trajektoriju $\quad x^2 + y^2 = a^2$, $\quad z = 0$

Šie nol-mi reprezentē riņķa aploci $\underline{XY}$ plaknē ar radiusa a un centru koordinatu sākumā.

Ātruma projekcijas dabūsim diferencējot kustības nol-mus pēc

laika $\quad v_x = v\cos(xv) = \frac{dx}{dt} = -a\,k\,Sn\,kt$

$$v_y = v\cos(yv) = \frac{dy}{dt} = ak\cos kt$$

pats ātrums $\quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{a^2k^2} = ak$

un viņa virziens būs noteikts ar: $\cos(xv) = \frac{v_x}{v} = -\frac{ak\,Sn\,kt}{ak} = -Sn\,kt$

$$\cos(yv) = \frac{v_y}{v} = \frac{ak\cos kt}{ak} = \cos kt$$

Kustības sākuma punkta A_0 koordinates dabūsim liekot $t_0 = 0$ kustības nol-mos, tad $x_0 = a$; $y_0 = 0$

Ja arguments $kt < \frac{\pi}{2}$, pats punkts atrodas pirmā kvadrantā, viņa ātruma vektors iet tangentes virzienā, bet ātruma projekcija v_x ir negativa un v_y ir pozitiva, tas nozīmē, ka ātruma vektors ies zīm.28. uzrādītā virzienā un punkta kustība notiks pret pulksteņrādītāja virzienā.

Kustības likuma noteikšana pēc ātruma.

Ātrumu pēc dotā kustības likuma mēs atrodam lietojot formulu /6/ $v = \frac{du}{dt}$, bet ja ir dots $v = \varphi(t)$ un ir jāatrod $u = f(t)$ jālieto integrēšanu

$$du = v\,dt;\quad u = \int v\,dt + C = \int \varphi(t).dt + C$$

kur C ir atrodams no sākuma apstākļiem, t.i. no lieluma u_0 noteiktā laika momentā t_0.

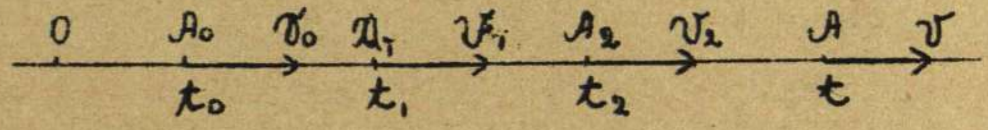
Piemērs: uz kustības likumu noteikšanu pēc dota ātruma $v = a + bt$ un u_0 laikā $t_0 = 0$.

$$u = \int v\,dt + C = \int (a + bt)\,dt = at + \frac{bt^2}{2} + C$$

bet pie $t = 0$; $u = u_0$ un $C = u_0$ un galīgi $u = u_0 + at + \frac{bt^2}{2}$

Paātrinājums.

I Paātrinājums taisnvirzieniskā vienmērīgi mainīgā /paātrinātā jeb palēninātā/kustībā



zīm.29.

Ja punktam neatkarīgi no stāvokļa uz taisnas trajektorijas ātrums ir const. lielums, t.i.

$$v_0 = v_1 = v_2 = v = \text{Const.} = C \qquad \text{tad}$$

pēc agrākās definicijas kustība ir vienmērīga.

Bet ja ātrumi vispārīgi nav vienādi

$$v_0 \neq v_1 \neq v_2 \neq v$$

kustība saucās par nevienmērīgu.

Ja ātrumi nav vienādi, tad sastādīsim tāļāk ātruma pieauguma attiecības pret attiecīgo laika sprīdi:

$$\frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0}; \quad \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}; \quad \frac{v - v_2}{t - t_2} \quad \text{u.t.t.}$$

un atšķirsim divus gadijumus:

I gadijums: visas attiecības $\frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{v - v_2}{t - t_2} = Const = j_0$

ir vienādas, tādu kustību sauksim par vienmērīgi mainīgu kustību.

II.gadijums: attiecības vispārīgi nav vienādas

$$\frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0} \neq \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \neq \frac{v - v_2}{t - t_2}$$

kustība tādā gadijumā saucās par nevienmērīgi mainīgu.

Apskatīsim tuvāk pirmo vienmērīgi mainīgas kustības gadijumu, viņš raksturojas ar

$$\frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{v - v_2}{t - t_2} = Const = j_0$$

Šīs constantas attiecības apzīmēsim ar j_0 un sauksim par paātrinājumu.

Paātrinājumu vienmērīgi mainīgā kustībā varam definēt divējādi: kā ātruma pieauguma attiecību pret attiecīgo laika sprīdi, jeb arī kā ātruma pieaugumu laika vienībā.

Paātrinājuma dimenzija ir redzama no formulas

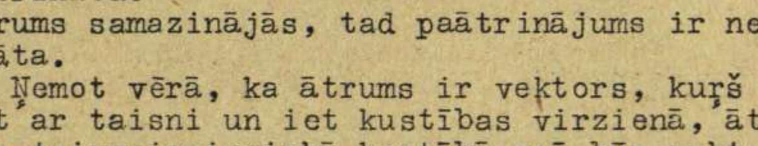
$$j_0 = \frac{v - v_0}{t - t_0} \quad \text{un būs} \quad \frac{[LT^{-1}]}{[T]} = [LT^{-2}]$$

Ja ātrums pieaug $v > v_0$ tad paātrinājums ir pozitivs un kustība - paātrināta.

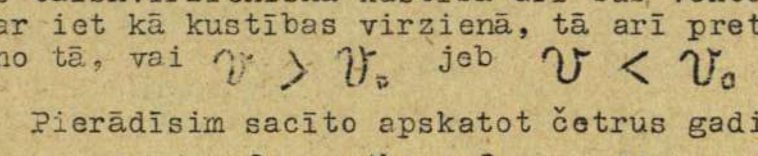
Ja ātrums samazinājās, tad paātrinājums ir negativs un kustība - palēnināta.

Ņemot vērā, ka ātrums ir vektors, kurš taisnvirzieniskā kustībā sakrīt ar taisni un iet kustības virzienā, ātruma pieaugums un paātrinājums taisnvirzieniskā kustībā arī būs vektors, kurš sakrīt ar taisni, bet var iet kā kustības virzienā, tā arī pret kustības virzienu, atkarībā no tā, vai $v > v_0$ jeb $v < v_0$

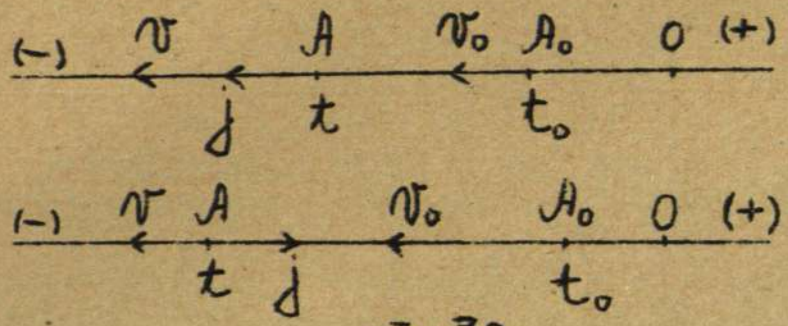
Pierādīsim sacīto apskatot četrus gadijumus.



1/Kustība notiek pozitivā virzienā un $v > v_0$, acimredzot j ies ātruma virzienā.



2/Kustība notiek pozitivā virzienā, bet $v < v_0$ acimredzot j ies pret ātruma virzienu.



zīm 30.

3/Kustība notiek negatīvā virzienā un $|v|>|v_0|$ tad j ies ātruma virzienā.

4/Kustība notiek negatīvā virzienā, bet $|v|<|v_0|$ tad j ies pret ātruma virzienu.

Savelkot visu kopā varam formulēt sekošus likumus:

1/ Ja $\bar{v}$ un $\bar{j}$ abi iet vienā virzienā, kustība ir paātrināta, pie kam ja abi pozitivi, kustība ir paātrināta pozitivā virzienā un ja abi ir negativi, kustība ir paātrināta negativā virzienā.

2/ Ja $\bar{v}$ un $\bar{j}$ iet pretējos virzienos, kustība ir palēnināta pie pozitiva ātruma - pozitivā virzienā un pie negativa ātruma - negativā virzienā.

Piecas pamatformulas vienmērīgi mainīgā kustībā.

Ņemsim paātrinājuma izteiksmi : $\frac{v-v_0}{t-t_0}=j_0$ no viņas tieši dabujam pirmo formulu 1/ $\boxed{v=v_0+j_0(t-t_0)}$ kuŗa dod ātruma likumu vienmērīgi mainīgā kustībā.

Atvietojot pirmā formulā $v=\frac{du}{dt}$ un integrējot

$$\frac{du}{dt}=v_0+j_0(t-t_0)$$

$$u=\int v_0dt+\int j_0(t-t_0)dt+c$$

$$u=v_0t+\frac{j_0}{2}(t-t_0)^2+c$$

bet sākumā pie $t=t_0;\ u=u_0$

$$u_0=v_0t_0+C$$ no kurienes

$$C=u_0-v_0t_0$$ un galīgi

2/ $$\boxed{u=u_0+v_0(t-t_0)+\frac{j_0}{2}(t-t_0)^2}$$

otra formula dod attāluma likumu vienmērīgi mainīgā kustībā un viņa ir otras kāpes attiecībā uz laiku.

Izslēgsim tagad no pirmām divām formulām laiku, uzejot $t-t_0$ no pirmās un ievietojot otrā

$$t-t_0=\frac{v-v_0}{j_0}$$ un $$u-u_0=v_0(t-t_0)+\frac{j_0}{2}(t-t_0)^2$$

$$u-u_0=v_0\,\frac{v-v_0}{j_0}+\frac{j_0}{2}\cdot\frac{(v-v_0)^2}{j_0^2}$$

$$u - u_0 = \frac{\cancel{2vv_0} - 2v_0^2 + v^2 - \cancel{2vv_0} + v_0^2}{2j_0}$$ bet $u - u_0 = s$

3/ $$\boxed{s = u - u_0 = \frac{v^2 - v_0^2}{2j_0}}$$ Trešā formula dod noieto ceļu.

No <u>trešās formulas uziesim ātrumu</u>

4/ $$\boxed{v = \pm\sqrt{v_0^2 + 2j_0(u - u_0)}}$$ Zīmi ceturtā formulā jāizvēl tādu, kāda bija v_0, jo kustība sākumā notiek v_0 - virzienā un var mainīt savu virzienu tikai pēc tam, kad v ir pārgājis caur 0.

Piekto formulu dabūsim arī no otrās

$$u - u_0 = \left[v_0 + \frac{j_0}{2}(t - t_0)\right](t - t_0)$$ aizvietojot vienu $t - t_0$ iekavās caur viņa agrāk atraste izteiksmi $t - t_0 = \frac{v - v_0}{j_0}$

tad $$u - u_0 = \left[v_0 + \frac{j_0}{2} \cdot \frac{v - v_0}{j_0}\right](t - t_0)$$

$$s = u - u_0 = \frac{2v_0 + v - v_0}{2}(t - t_0)$$ no kurienes

5/ $$\boxed{s = u - u_0 = \frac{v + v_0}{2}(t - t_0)}$$

Salīdzinot piekto formulu ar <u>vienmērīgas kustības</u> likumu

$u - u_0 = c(t - t_0)$ redzam, ka vienmērīgi mainīgā kustībā punkts noiet to pašu ceļu, kuru noiet punkts vienmērīgā kustībā, ja vienmērīgas kustības ātrums ir: $c = \frac{v + v_0}{2}$

Šo ātruma pussummu $\frac{v+v_0}{2}$ tamdēļ sauc par <u>vidējo ātrumu</u> vienmērīgi mainīgā kustībā.

<u>Piemērs</u>: Vertikalais sviediens vacuumā.

zīm.31.

Doti: v_0 un paātrinājums g

Uziet: a/Celšanas augstumu h
b/Celšanas laiku T_1
c/Krišanas laiku T_2
d/Krišanas ātrumu v_2

Kustība ir vienmērīgi palēnināta, jo sākuma ātrums v_0 ir virzīts uz augšu, bet const. paātrinājums uz leju.

Ņemsim pirmās 3 pamatformulas

1/ $v = v_0 - gt$

2/ $u = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$

3/ $v = +\sqrt{v_0^2 - 2gu}$

pieņemot nullpunktu kustības sākuma punktā un atskaitot laiku no kustības sākuma momentā, tad $u_0 = 0$ un $t_0 = 0$

a/ Celšanas augstumu h atradīsim no 3/ formulas liekot $v = 0$, tad $u = h$ un $v_0^2 - 2gh = 0$ no kurienes $h = \frac{v_0^2}{2g}$

b/ Celšanas laiku dabūsim no 1/ liekot $v = 0$, tad $v_0 - gT_1 = 0$ no kurienes $T_1 = \frac{v_0}{g}$

b/ Lai dabūtu krišanas laiku, ņemsim 2/ formulu un pielietosim viņu krišanas momentam, tad $u = 0$ un $t = T_1 + T_2$

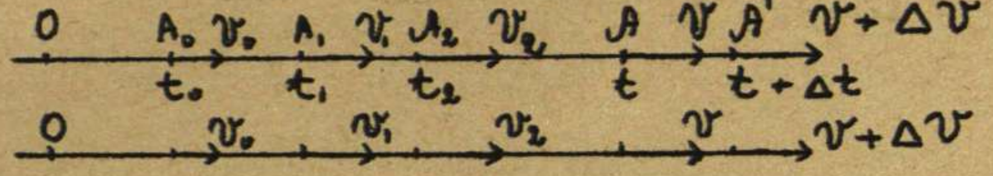
$$0 = v_0 t - \frac{gt^2}{2} \; ; \; t = T_1 + T_2 = \frac{2v_0}{g} \text{ bet } T_1 = \frac{v_0}{g}$$

tā tad arī $T_2 = \frac{v_0}{g}$

d/ Lai dabūtu v_2 varam ņemt 1/ formulu un likt $t = T_1 + T_2$

$$\text{tad } v_2 = v_0 - g(T_1 + T_2) = v_0 - g \cdot \frac{2v_0}{g} = -v_0 \; ; \; v_2 = -v_0$$

II Paātrinājums taisnvirzieniskā nevienmērīgi. mainīgā kustībā.



Nevienmērīgā kustība raksturojas ar noteikumu

$$v_0 \neq v_1 \neq v_2 \neq v \neq v+\Delta v$$

Ja bez tam vēl ātruma pieauguma attiecības pret notecējušo laika sprīdi vispārīgi arī nav vienādas

$$\frac{v_1-v_0}{t_1-t_0} \neq \frac{v_2-v_1}{t_2-t_1} \neq \frac{v-v_2}{t-t_2} \neq \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

tad kustība būs nevienmērīgi mainīga.

Lai noteiktu paātrinājumu šinī kustībā, laidīsim otru fiktīvu punktu paraleli īstenāš trajektorijai vienmērīgi mainīgā kustībā tā, lai izvēlētos laika momentos t_0; t_1; t_2 u.t.t. fiktīvas kustības ātrumi būtu vienādi ar īstenās kustības ātrumiem v_0, v_1, v_2 u.t.t.

Tad fiktīvas kustības paātrinājumas

$$\frac{v_1-v_0}{t_1-t_0} = \dot{j}_{m_1}; \quad \frac{v_2-v_1}{t_2-t_1} = \dot{j}_{m_2} \quad \text{un} \quad \frac{v+\Delta v-v}{t+\Delta t-t} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \dot{j}_m$$

sauksim par nevienmērīgi mainīgas kustības vidējiem paātrinājumiem.

Jo vairāk ņemsim momentu, kuŗos ātrumi fiktīvā un īstenā kustībā būs vienādi, jo vairāk fiktīvā kustība tuvosies īstenai un par īsteno paātrinājumu kāda laika momentā sauksim: maza laika sprīdi, kuŗš sākas šinī laika momentā, vidēja paātrinājuma robežu, ja laika sprīdis Δt tiecas uz 0.

Tā tad $$\dot{j} = \lim \dot{j}_m = \lim \left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)_{\Delta t \to 0}$$

bet ja $u = f(t)$ tad $v = \frac{du}{dt} = f'(t)$ un $\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{f'(t+\Delta t) - f'(t)}{\Delta t}$

$$\lim \left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)_{\Delta t \to 0} = \lim \frac{f'(t+\Delta t)-f'(t)}{\Delta t} = f''(t)$$ bet arī $$\lim \left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)_{\Delta t \to 0} = \frac{dv}{dt}$$

un galīgi $$\boxed{\dot{j} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2u}{dt^2} = f''(t)} \quad \text{..........} (8)$$

Jautājumi attiecībā uz paātrinājumu var būt divējādi

I Dots: $u = f(t)$ Uziet $j = ?$

Sastādam $v = \frac{du}{dt} = f'(t)$

$$j = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2u}{dt^2} = f''(t)$$ vispārīgi arī kādafunkcija no laika $\varphi(t)$

II Dots $j = \varphi(t)$ Uziet $u = f(t)$

$$j = \frac{dv}{dt};\quad \frac{dv}{dt} = \varphi(t)$$

$$dv = \varphi(t).\,dt$$

$$v = \int \varphi(t).\,dt + C_1$$

Const C, jāatrod no sākuma apstākļiem

bet $v = \frac{du}{dt}$; $\frac{du}{dt} = \int \varphi(t).dt + C_1$

$$du = \left[\int \varphi(t).\,dt + C_1\right] dt$$

$$u = \int \left[\int \varphi(t).dt + C\right] dt + C_2$$

Const C_2 arī jāatrod no sākuma apstākļiem.

Par sākuma apstākļiem sauc dotus attālumu~~s~~ un ātrumu kādā noteiktā laika momentā /netikai sākumā/. Apskatīsim Const. noteikšanu pēc šādiem apstākļiem

piemērā: Dots taisnvirzieniskā kustībā $j = -12\,t$ m/sec^2

un laika momentā $t_2 = 2$ sec., ātrums $v_2 = 6$ m/sec.

" " $t_3 = 3$ sec., " $u_3 = 50$ mtr.

Uziet: Punkta kustības likumu $u = f(t)$

$$j = \frac{dv}{dt} = -12t$$

$$v = -\int 12t\,dt + C_1$$

$$v = -6t^2 + C_1$$

pielietojot šo nol-mu laika momentam t_2

$$v_2 = -6t_2^2 + C_1$$

$$C_1 = 6 + 6.4 = 30$$

$$v = 30 - 6t^2$$

Tālāk aizvietojot $v = \frac{du}{dt}$ un integrējot

$$\frac{du}{dt} = 30 - 6t^2$$

$$u = \int (30 - 6t^2)\,dt + C_2$$

$$u = 30t - 2t^3 + C_2$$

pielietosim šo nol-mu laika momentam t_3

$$u_3 = 30t_3 - 2t_3^3 + C_2$$

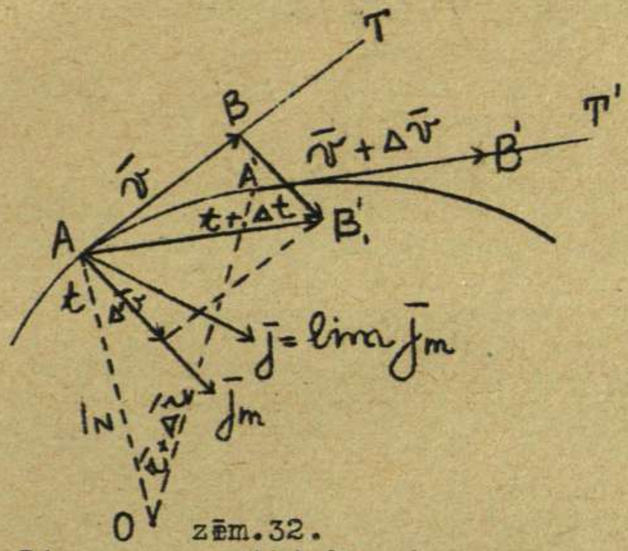
$$50 = 30.3 - 2.3^3 + C_2$$

$$C_2 = 50 - 90 + 54 = 14$$

$$u = 14 + 30t - 2t^3$$

Sākuma ātrums $v_0 = 30$ m/sec. un sākuma attālums $u_0 = 14$ mtr.

Paātrinājums līkumainā kustībā.



zēm.32.

Pieņemsim, ka līkumaina kustība ir dota ar nolmu $\bar{r} = \overline{f(t)}$

Apskatīsim punkta stāvokli tuvos laika momentos t un $t + \Delta t$. Punkta stāvokli pieņemsim ir A un A', radiusi vektori: $\bar{r} = \overline{OA}$ un $\bar{r} + \Delta\bar{r} = \overline{OA'}$

ātrumi $\bar{v} = \overline{AB}$ un $\bar{v} + \overline{\Delta v} = \overline{A'B'}$

Sastādīsim ātruma geometrisko pieaugumu

$$(\bar{v} + \overline{\Delta v}) - \bar{v} = \overline{A'B'} - \overline{AB} = \overline{AB_1'} - \overline{AB} = \overline{BB_1'}$$

$\overline{\Delta v} = \overline{BB_1'}$ šo vektoru $\overline{\Delta v}$ atliksim no punkta A, viņš guļ plaknē, kuŗa iet caur tangenti T un ir paralela tangentei T'.

Par vidējo paātrinājumu laika elementā Δt mēs sauksim ātruma geometriska pieauguma, šinī laika elementā, attiecību pret Δt

$\bar{j}_m = \dfrac{\overline{\Delta v}}{\Delta t}$ kā redzams $\bar{j}_m$ ir vektors $\parallel \overline{BB_1'}$, bet saistīts ar punktu A.

Par īsteno paātrinājumu laika momentā t mēs sauksim vidēja paātrinājuma par laika elementu Δt, kuŗš sākas momentā t, robežu, ja Δt tiecas uz 0.

$$\bar{j} = \lim (\bar{j}_m)_{\Delta t \to 0} = \lim \left(\frac{\overline{\Delta v}}{\Delta t}\right)_{\Delta t \to 0} = \frac{d\bar{v}}{dt}$$

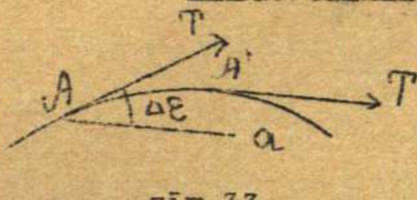
Izteiksme $\dfrac{d\bar{v}}{dt}$ ir ātruma vektora geometriskais atvasinājums, kuŗu nedrīkst sajaukt ar analitisko $\dfrac{dv}{dt}$ un kuŗš atšķiras no pēdējā caur to, ka ātruma pieaugums tiek ņemts netikai pēc lieluma, bet arī pēc virziena.

Ņemot vērā, ka $\bar{v} = \dfrac{d\bar{r}}{dt}$, varam uzrakstīt vēl vienu paātrinājuma izteiksmi:

$$\boxed{\bar{j} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

Paātrinājums tā tad ir vektors, kuŗš iet uz līkas konvekso pusi un kuŗa virziens ir $\overline{BB'}$ robeža, ja punkts A' sakrīt ar A.

Dažas nepieciešamas ziņas no diferencialas ģeometrijas.



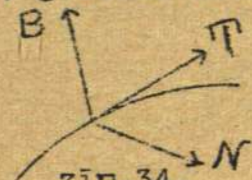
zīm.33.

Ņemsim kādu līku liniju telpā. Līkas punktā A novilksim tangenti T un punktā A' novilksim tangenti T' .Caur tangenti T vilksim plakni, kuŗa būtu paralela T' ,tam nolūkam jāvelk caur A liniju Aa ‖ T' un tad plakne ejoša caur AT un Aa būs meklējamā.

Tuvosim tagad punktu A' punktam A, tad minētā plakne mainīs savu stāvokli telpā un tuvosies zināmai robežai. Šo robežu, kad punkts A' sakritīs ar A sauc par pieslejas plakni.

Visas taisnes, vilktas caur punktu A perpendikulari tangentei T ir līkas "Normales", bet tā normale,kuŗa guļ pieslejas plaknē, saucās par "Galveno normali". Normale, kuŗa ir perpendikulara pieslejas plaknei saucās par "Binormali"

No pieslejas plaknes definicijas ir redzams, ka pieslejas plaknē guļ tangente, galvenā normale un paātrinājuma vektors.



zīm.34.

Tangente, galvenā normale un binormale veido taisnstūrīgu koordinatu sistemu telpā, kuŗu sauc par kustošo jeb naturalo triedru un uz kuŗa šķautnēm mēs vēlāk projecēsim paātrinājuma vektoru.

Vienības vektorus triedra šķautņu virzienos mēs apzīmēsim ar $\bar{i}_n$; $\bar{i}_t$ un $\bar{i}_b$

Ja līka ir plakana, tad pieslejas plakne protams sakrīt ar līkas plakni un zem galvenās normales ir jāsaprot normali, kuŗa guļ šinī plaknē.

Apzīmēsim ar $\Delta\varepsilon$ leņķi, kuŗu veido tangentes T un T' un ar Δu loka AA' garumu, tad attiecību $\frac{\Delta\varepsilon}{\Delta u}$ sauc par līkas vīdējo līcību, bet šīs attiecības robežu, ja Δu tiecas uz 0 sauksim par līkas līcību punktā A un apzīmēsim ar K

$$\lim\left(\frac{\Delta\varepsilon}{\Delta u}\right)_{\Delta u \to 0} = \frac{d\varepsilon}{du} = K$$

leņķis $d\varepsilon$ šeit tiek saukts par līkas contingences leņķi. Tālāk vēl apzīmēsim lielumu $\frac{1}{K}$ ar ρ un nosauksim viņu par līcības radiusu

$$\boxed{\rho = \frac{1}{K} = \frac{du}{d\varepsilon}} \quad \ldots\ldots\ldots (10)$$

Atliekot no punkta A galvenās normales virzienā lielumu ρ dabūsim līcības centru,kuŗš atbilst punktam A.

Taisnai linija $d\varepsilon = 0$ un $\rho = \infty$

No augstākās matematikas līcības radiusa izteiksme plakanām līkām, dotām ar nol-mu $y = f(x)$,

ir $\boxed{\rho = \dfrac{\left[1 + y'^2\right]^{3/2}}{y''}}$ ...... (11) bet ja līka ir

dota parametra veidā ar kustības nol-miem $x = f_1(t)$; $y = f_2(t)$

tad $\boxed{\rho = \dfrac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}}$ ...... (11')

Cita pieslejas plaknes un līcības radiusa definicija.

zīm.35.

Pieslejas plakni var definēt arī kā plakni vilktu caur 3 bezgalīgi tuvi guļošiem punktiem. Riņķi, kurš iet caur šiem 3 punktiem sauc par līcības riņķi. Viņa radiuss būs līcības radiuss un centrs būs līcības centrs C.

Līkumainās kustības paātrinājuma projekcijas pēc Eulera uz kustīga triedra šķautnēm.

Iziesim no formulas /9/: $\bar{j} = \dfrac{d\bar{v}}{dt}$

kur $\dfrac{d\bar{v}}{dt}$ ir ātruma vektora ģeometriska atvasināta pēc skalara argumenta. Bet ātruma vektoru $\bar{v}$ varam uzskatīt kā analitiska lieluma v reizinājumu ar vienības vektoru $\bar{i}_t$ tangentes virzienā: $\bar{v} = v \cdot \bar{i}_t$

Diferencēsim šo reizinājumu pēc t, ņemot vērā, ka netikai v ir funkcija no t, bet arī $\bar{i}_t$ ir funkcija no t, jo tangente ar laiku maina savu virzienu,

$$\bar{j} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v \cdot \bar{i}_t\right) = \frac{dv}{dt} \cdot \bar{i}_t + v\,\frac{d\bar{i}_t}{dt}$$

Kā redzams paātrinājuma vektors sadalās divās komponentēs. 1/pirmā pēc lieluma ir $\frac{dv}{dt}$ un iet tangentes virzienā, kādēļ viņa arī tiek saukta par <u>tangenciālo paātrinājumu</u> un apzīmēta ar $\dot{j}_t$

$$\boxed{\bar{j}_t = \frac{dv}{dt}\cdot \bar{i}_t} \quad \text{jeb} \quad \boxed{\dot{j}_t = \frac{dv}{dt}} \quad \ldots\ldots (12)$$

2/Otra komponente ir: $v.\frac{d\bar{i}_t}{dt}$;

viņas virziens sakrīt ar vienības vektora $\bar{i}_t$ ģeometrisko atvasinājumu. Lai noskaidrotu minētā ģeometriskā atvasinājuma virzienu, pareizināsim skalari $\bar{i}_t$ ar $\bar{i}_t$

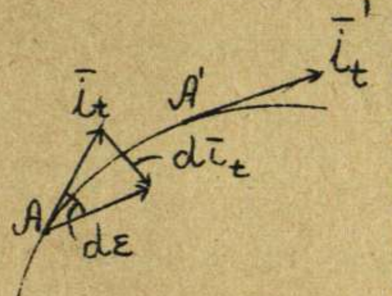
$$(\bar{i}_t\cdot \bar{i}_t) = 1.1.\cos 0 = 1$$

un diferencēsim šo skalaro produktu pēc laika

$$\frac{d}{dt}(\bar{i}_t\cdot \bar{i}_t) = 0 \quad \text{jeb} \quad 2\left(\bar{i}_t\cdot \frac{d\bar{i}_t}{dt}\right) = 0$$

bet lai šāds produkts būtu 0, ja paši vektori nelīdzinājās 0, vektoriem jābūt perpendikulāriem, t.i.

vektors $\frac{d\bar{i}_t}{dt} \perp \bar{i}_t$ tā tad $\frac{d\bar{i}_t}{dt}$ ir jauns vektors, kuŗa virziens ir perpendikulars tangentei, t.i. sakrīt ar galvenās normales virzienu. Lai tagad atrastu $\frac{d\bar{i}_t}{dt}$ lielumu, uzkonstruēsim divos bezgalīgi tuvos trajektorijas punktos A un A' vienības vektorus $\bar{i}_t$ un $\bar{i}'_t$ un sastādīsim vienības vektora ģeometrisko pieaugumu $d\bar{i}_t$. Leņķis $d\varepsilon$, kuŗš ir līkas contingences leņķis nav liels, kādēļ $d\bar{i}_t$ varam uzskatīt kā loku, aprakstītu ar vienības vektoru. Loka garums tad:



zīm.36.

$$d\bar{i}_t = 1.d\varepsilon.\bar{i}_n \quad \text{un} \quad \frac{d\bar{i}_t}{dt} = \frac{d\varepsilon}{dt}\cdot \bar{i}_n$$

kur $\bar{i}_n$ ir vienības vektors galvenās normales virzienā. Ņemot agrāk atrasto formulu /10/ $\rho = \frac{du}{d\varepsilon}$ varam atrast $d\varepsilon = \frac{du}{\rho}$ un

$$\frac{d\bar{i}_t}{dt} = \frac{d\varepsilon}{dt}\bar{i}_n = \frac{du}{\rho\, dt}\cdot\bar{i}_n = \frac{v}{\rho}\bar{i}_n$$ ievietosim

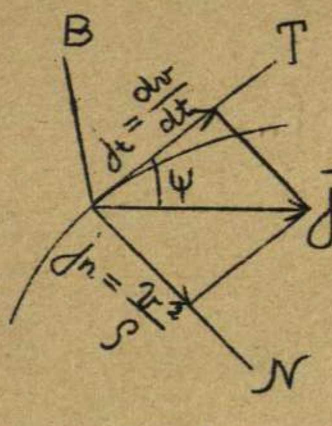
šo otras paātrinājuma komponentes izteiksmē:

$$v\frac{d\bar{i}_t}{dt} = v\cdot\frac{d\varepsilon}{dt}\cdot\bar{i}_n = v\frac{v}{\rho}\bar{i}_n = \frac{v^2}{\rho}\bar{i}_n$$

Kā redzams otra paātrinājuma komponente iet galvenās normales virzienā, kādēļ viņa arī tiek saukta par <u>normalo</u> jeb <u>centripetalo paātrinājumu</u> un tiek apzīmēta ar j_n

$$\boxed{\bar{j}_n = \frac{v^2}{\rho}\bar{i}_n} \quad \text{jeb} \quad \boxed{j_n = \frac{v^2}{\rho}} \quad \ldots\ldots (13)$$

Ņemot vērā, ka paātrinājuma vektors guļ pieslejas plaknē konstatējam, ka paātrinājuma projekcija uz binormali $j_b = 0$



zīm.37.

Projecējot paātrinājuma vektoru uz kustoša triedra šķautnēm, dabūsim ģeometriski

$$\boxed{\bar{j} = \bar{j}_t + \bar{j}_n + \bar{j}_b} \quad \text{jeb}$$

$$\boxed{\bar{j} = \frac{dv}{dt}\cdot\bar{i}_t + \frac{v^2}{\rho}\cdot\bar{i}_n} \quad \ldots (14)$$

<u>un algebraiska paātrinājuma izteiksme</u>

$$\boxed{j = \sqrt{j_t^2 + j_n^2}} \quad \boxed{j = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}} \quad \ldots\ldots (14^a)$$

Ja ar ψ apzīmējam leņķi starp trajektorijas tangenti un paātrinājuvektoru $\bar{j}$, tad šī leņķa funkcijas: $\sin\psi = \frac{j_n}{j}$ un $\cos\psi = \frac{j_t}{j}$

Apskatot tangenciālo paātrinājumu līkumainā kustībā $j_t = \frac{dv}{dt}$ redzams, ka viņš reprezentē pilnu paātrinājumu taisnvirzieniskā kustībā. No j_t formulas seko: $dv = j_t\cdot dt$ šis rezultāts aizrāda, ka tangenciālais paātrinājums iespaido punkta <u>ātruma lieluma</u> maiņu pa līku trajektoriju.

No $\dot{j}_n$ formulas $\dot{j}_n = v \cdot \frac{d\varepsilon}{dt}$ seko: $d\varepsilon = \dot{j}_n \frac{dt}{v}$ kas aizrāda, ka $\dot{j}_n$ iespaido ātruma virziena maiņu

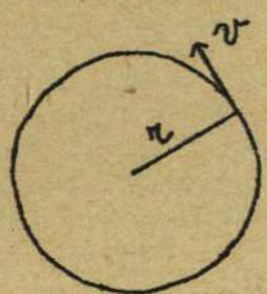
-------- o --------

Taisnvirzienisko kustību varam uzskatīt kā līkumainas kustības speciālo gadijumu, ja liksim $\rho = \infty$ tad $\dot{j}_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{v^2}{\infty} = 0$

un $\dot{j} = \sqrt{\dot{j}_t^2 + \dot{j}_n^2} = \dot{j}_t = \frac{dv}{dt}$

-------- o --------

Kustība pa aploci ar Const. ātrumu



zīm.38.

$v = c$ = Const.

$$\dot{j}_t = \frac{dv}{dt} = \frac{dc}{dt} = 0 \;;\; \dot{j}_n = \frac{c^2}{r} = \text{Const.};$$

$$\dot{j} = \dot{j}_n = \text{Const}$$

Ja punkts kustas pa aploci ar Const.ātrumu,paātrinājums arī ir Const. un ir virzīts uz centru.

-------- o --------

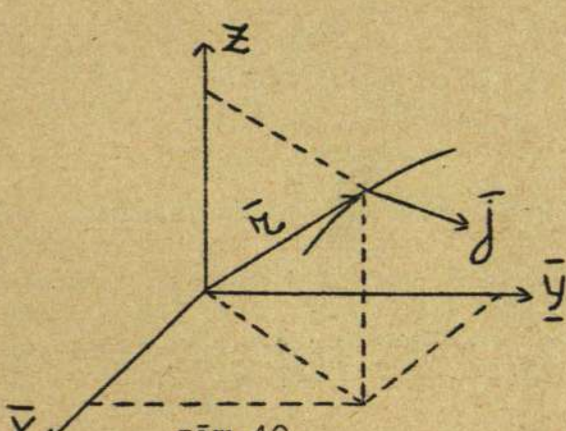
Līkumaina kustība ar Const.ātrumu $v = c = \text{Const.}$

$$\dot{j}_t = \frac{dv}{dt} = \frac{dc}{dt} = 0 \;;\; \dot{j}_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{c^2}{\rho} \;;\; \dot{j} = \dot{j}_n = \frac{c^2}{\rho}$$

zīm.39.

Ja punkts kustas pa līku trajektoriju ar Const. ātrumu, paātrinājums nebūs Const., jo ρ ir mainīgs.

Līkumainas kustības paātrinājuma projekcijas uz nekustošām ortogonalām asīm pēc Mac-Laurin'a



zīm.40.

Iziesim no formulas /9/

$$\bar{j} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$$

bet radiuss-vektors:

$$\bar{r} = \bar{x} + \bar{y} + \bar{z} = x.\bar{i}_x + y.\bar{i}_y + z.\bar{i}_z$$

diferencējot šo divreiz pēc laika un ievērojot, ka

$\bar{i}_x, \bar{i}_y, \bar{i}_z$ ir Const., dabūsim

$$\bar{j} = \frac{d^2x}{dt^2}\cdot\bar{i}_x + \frac{d^2y}{dt^2}\cdot\bar{i}_y + \frac{d^2z}{dt^2}\cdot\bar{i}_z$$

bet no otras puses paātrinājuma vektors ir ģeometriska summa no savām komponentēm koordinatu asu virzienos

$$\bar{j} = \bar{j}_x + \bar{j}_y + \bar{j}_z$$

salīdzinot abas izteiksmes redzam,

ka

$$\left.\begin{aligned} \bar{j}_x &= \frac{d^2x}{dt^2}\cdot\bar{i}_x \\ \bar{j}_y &= \frac{d^2y}{dt^2}\cdot\bar{i}_y \\ \bar{j}_z &= \frac{d^2z}{dt^2}\cdot\bar{i}_z \end{aligned}\right\} \text{jeb} \quad \begin{aligned} &\boxed{j_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = f_x''(t) = \frac{dv_x}{dt}} \\ &\boxed{j_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y} = f_y''(t) = \frac{dv_y}{dt}} \\ &\boxed{j_z = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z} = f_z''(t) = \frac{dv_z}{dt}} \end{aligned} \quad (15)$$

Formulas /15/ tiek lietotas tad, ja kustība ir noteikta pēc II paņēmiena ar kustības nol-miem

$$x = f_x(t); \quad y = f_y(t) \quad \text{un} \quad z = f_z(t)$$

No formulām /15/ ir arī redzams, ka: <u>punkta paātrinājuma projekcijas uz koordinatu asīm ir vienādas ar punkta projekciju paātrinājumiem gar attiecīgām asīm.</u>

<u>Pats paātrinājums caur projekcijām izteicās ar formulām:</u>

$$\boxed{j = \sqrt{j_x^2 + j_y^2 + j_z^2} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}} \quad (16)$$

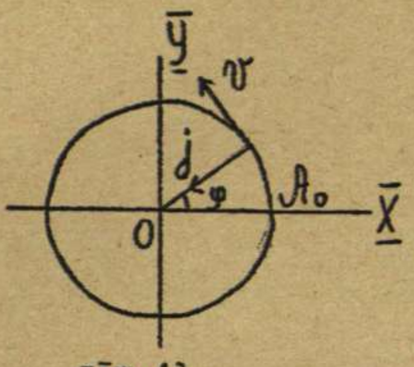
un viņa virziens, ievērojot ka $j_x = j\,\mathrm{Cos}(\bar{x}j)$ u.t.t., būs noteikts ar Cosin.

$$\mathrm{Cos}(\bar{x}\bar{j}) = \frac{j_x}{\sqrt{j_x^2 + j_y^2 + j_z^2}}; \quad \mathrm{Cos}(\bar{y}\bar{j}) = \frac{j_y}{\sqrt{j_x^2 + j_y^2 + j_z^2}}; \quad \mathrm{Cos}(\bar{z}\bar{j}) = \frac{j_z}{\sqrt{j_x^2 + j_y^2 + j_z^2}}$$

Jautājumi attiecībā uz paātrinājumu var būt divējādi: 1/ Pēc dotas kustības atrast paātrinājumu. Šinī gadijumā jālieto Eulera jeb Mac-Laurin'a metodi, t.i. formulas /14/ jeb /16/. 2/Pēc dota paātrinājuma atrast kustību. Šādā gadijumā ir jālieto integrēšanu,pie kam integrēšanas Const. noteikšanai ir jāzin arī sākuma apstākļi.

Abus šos gadijumus apskatīsim piemēros.

Piemērs uz paātrinājuma noteikšanu pēc dotas kustības.



zīm.41.

Doti kustības nol-mi

1/ $x = a\cos kt$

2/ $y = a\sin kt$

3/ $z = 0$

Uziet: paātrinājumu: j un viņa virzienu.

Izslēdzot laiku dabūsim trajektoriju

$x^2 + y^2 = a^2$,kuŗa ir aploce ar radiusu a.

Meklēsim ātruma projekcijas: $v_x = \frac{dx}{dt} = -ak\sin kt$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = ak\cos kt$$

$$v_z = 0$$

Pats ātrums caur projekcijām $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = ak$ ir const.

Viņa virziens noteikts ar $\cos(\bar{x}\bar{v}) = \frac{v_x}{v} = -\sin kt = -\sin\varphi$

$$\cos(\bar{y}\bar{v}) = \frac{v_y}{v} = \cos kt = \cos\varphi$$

$$\cos(zv) = 0$$

Paātrinājuma projekcijas pēc Eulera:

$$j_t = \frac{dv}{dt} = 0 \ ; \quad j_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{a^2k^2}{a} = ak^2$$

Paātrinājums $j = \sqrt{j_t^2 + j_n^2} = j_n = ak^2$ arī iznāk Const.

Ņemot vērā, ka tangenciālais paātrinājums $j_t = 0$, varam konstatēt, ka pilns paātrinājums iet normales virzienā, t.i. uz aploces centru.

Lai noteiktu paātrinājumu pēc Mac-Laurin'a metodes sastādīsim

$$\left.\begin{aligned} j_x &= \frac{dv_x}{dt} = -ak^2\cos kt \\ j_y &= \frac{dv_y}{dt} = -ak^2\sin kt \\ j_z &= 0 \end{aligned}\right\} \text{no kurienes } j = \sqrt{j_x^2 + j_y^2 + j_z^2} = ak^2$$

Paātrinājuma virziens ir noteikts ar Cosin.

$$\left.\begin{aligned} Cos(\bar{x}j) &= -Cos\,Kt = -cos\,\varphi \\ Cos(yj) &= -Sn\,Kt = -Sn\,\varphi \\ Cos(zj) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Šie leņķi rāda, ka paātrinājums ir virzīts pa radiusu uz centru.

<u>Piemērs</u> uz kustības noteikšanu pēc dotā paātrinājuma.

Doti:	Uziet:
$j_x = 2a$ vienmērīgi paātrināta kustība	1/Paātrinājumu: j
$j_y = 2a$ " " "	2/Ātrumu: v
$j_z = 12bt^2$ nevienmērīgi " "	3/Kustības nol-mus
Sākuma apstākli: pie $t_0 = 0$;	$x = f_x(t)$
$v_0 = 0$; $x_0 = y_0 = z_0 = 0$	$y = f_y(t)$
	$z = f_z(t)$
	4/Trajektoriju

1/ $$j = \sqrt{j_x^2 + j_y^2 + j_z^2} = \sqrt{8a^2 + (12bt^2)^2} = 2\sqrt{2a^2 + 36b^2t^4}$$

$$Cos(\bar{x}j) = \frac{j_x}{j} = \frac{a}{\sqrt{2a^2+36b^2t^4}};\ Cos(yj) = \frac{a}{\sqrt{2a^2+36b^2t^4}};\ Cos(zj) = \frac{6bt^2}{\sqrt{2a^2+36b^2t^4}}$$

2/ Ņemsim

$j_x = 2a$	$j_y = 2a$	$j_z = 12bt^2$
$\frac{dv_x}{dt} = 2a$	$\frac{dv_y}{dt} = 2a$	$\frac{dv_z}{dt} = 12bt^2$
$v_x = \int 2a\,dt + C_1$	$v_y = \int 2a\,dt + C_2$	$v_z = \int 12bt^2dt + C_3$
$v_x = 2at + C_1$	$v_y = 2at + C_2$	$v_z = 4bt^3 + C_3$
$v_{x0} = 0 + C_1$; $C_1 = 0$	$v_{y0} = 0 + C_2$; $C_2 = 0$	$v_{z0} = 0 + C_3$; $C_3 = 0$
$v_x = 2at$	$v_y = 2at$	$v_z = 4bt^3$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{8a^2t^2 + 16b^2t^6} = 2t\sqrt{2a^2 + 4b^2t^4}$$

$$\cos(\bar{x}\bar{v}) = \frac{a}{\sqrt{2a^2+4b^2t^4}}\ ;\ \cos(\bar{y}\bar{v}) = \frac{a}{\sqrt{2a^2+4b^2t^4}}\ ;\ \cos(\bar{z}\bar{v}) = \frac{2bt^2}{\sqrt{2a^2+4b^2t^4}}$$

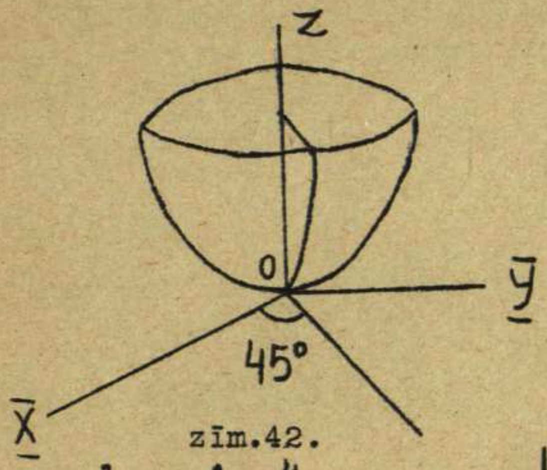
3/Ņemsim

$v_x = 2at$	$v_y = 2at$	$v_z = 4bt^3$
$\frac{dx}{dt} = 2at$	$\frac{dy}{dt} = 2at$	$\frac{dz}{dt} = 4bt^3$
$x = \int 2at\,dt + C_4$	$y = \int 2at\,dt + C_5$	$z = \int 4bt^3 dt + C_6$
$x = at^2 + C_4$	$y = at^2 + C_5$	$z = bt^4 + C_6$
$x_0 = 0 + C_4\ ;\ C_4 = 0$	$y_0 = 0 + C_5\ ;\ C_5 = 0$	$z_0 = 0 + C_6\ ;\ C_6 = 0$
$x = at^2$	$y = at^2$	$z = bt^4$

4/Trajektorija ar atrastiem kustības nol-miem

$$x = at^2\ ;\ y = at^2\ ;\ z = bt^4$$

ir atrasta parametra veidā, lai izteiktu viņu caur divām virsmām, izslēgsim t.



zīm.42.

$$\begin{array}{l} x^2 = a^2 t^4 \\ y^2 = a^2 t^4 \\ \hline x^2 + y^2 = 2a^2 t^4 \\ z = bt^4 \end{array}$$

$$x^2 + y^2 = \frac{2a^2}{b}\cdot z$$

Viena virsma rotacijas parabaloids ap Z asi ar virsotni koordinatu sākumā.

$$y = x$$

Otra virsma plakne caur $\underline{Z}$ asi zem 45° pret $\bar{X}$ un Y asīm.

Trajektorija būs abu virsmu krustošanas linija /zīm.42/

<u>Trajektorijas līcības radiusa izteikšana caur mechaniškiem lielumiem,</u>

Ņemsim paātrinājuma izteiksmi pēc Eulera un Mac-Laurin'a un pielīdzināsim vienu otrai

$$\left.\begin{array}{l} j^2 = j_t^2 + j_n^2 \\ j^2 = j_x^2 + j_y^2 + j_z^2 \end{array}\right\}\ j_t^2 + j_n^2 = j_x^2 + j_y^2 + j_z^2$$

bet $j_n = \frac{v^2}{\rho}$

$$\frac{v^2}{\rho} = \sqrt{\dot{j}_x^2 + \dot{j}_y^2 + \dot{j}_z^2 - \dot{j}_t^2}$$ no kurienes $$\boxed{\rho = \frac{v^2}{\sqrt{\dot{j}_x^2 + \dot{j}_y^2 + \dot{j}_z^2 - \dot{j}_t^2}}} \quad (17)$$

Piemērs: Uziet līcības radiusu ρ ja punkta kustība ir dota ar nol-miem:

$$x = x_0 + at$$
$$y = y_0 + bt$$
$$z = z_0 + ct - \frac{gt^2}{2}$$

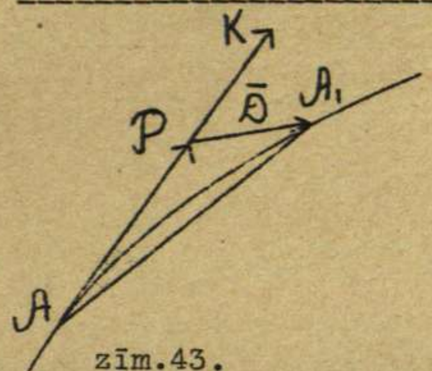
$$\left.\begin{aligned} v_x &= \dot{x} = a \\ v_y &= \dot{y} = b \\ v_z &= \dot{z} = c - gt \end{aligned}\right\} v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + (c-gt)^2}$$

$$\begin{aligned} \dot{j}_x &= \ddot{x} = 0 \\ \dot{j}_y &= \ddot{y} = 0 \\ \dot{j}_z &= \ddot{z} = -g \end{aligned} \quad \Bigg| \quad \dot{j}_t = \frac{dv}{dt} = \frac{2(c-gt).(-g)}{2\sqrt{a^2+b^2+(c-gt)^2}} = -\frac{g(c-gt)}{\sqrt{a^2+b^2+(c-gt)^2}}$$

$$\rho = \frac{v^2}{\sqrt{\dot{j}_x^2 + \dot{j}_y^2 + \dot{j}_z^2 - \dot{j}_t^2}} = \frac{a^2 + b^2 + (c-gt)^2}{\sqrt{g^2 - \frac{g^2(c-gt)^2}{a^2+b^2+(c-gt)^2}}} =$$

$$= \frac{\left[a^2 + b^2 + (c-gt)^2\right]^{3/2}}{g\sqrt{a^2+b^2}}$$

Punkta deviacija līkumainā kustībā.



zīm.43.

Pieņemsim, ka punkta stāvoklis uz līkas trajektorijas laika momentā t ir A un ātrums ir vektors $\bar{v} = \overline{AK}$ Apskatīsim punkta tālāko kustību elementārā laika sprīdī Δt.

Ja punkts tālāk būtu kustējies taisnvirzieniski un vienmērīgi, viņš būtu nogājis tangentes virzienā ceļu $\overline{AP} = \bar{v}.\,\Delta t$ Bet faktiski punkts iedams pa līko trajektoriju ir nonācis punktā A_1 .

Vektoru $\overline{PA_1}$ virzītu no punkta P uz A_1 sauksim par punkta deviaciju jeb novirzīšanos līkumainā kustībā par laika elementu Δt un apzīmēsim ar $\bar{D}$

No zīmējuma /43/ redzam $\overline{AA_1} = \overline{AP} + \overline{PA_1}$

jeb $\overline{AA_1} = \bar{v}.\Delta t + \bar{D}$

Projecēsim šo vektorielo nol-mu uz koordinatu asīm

$$\begin{cases} x_1 - x = v_x \cdot \Delta t + D \cos(\bar{x}\bar{D}) \\ y_1 - y = v_y . \Delta t + D \cos(\bar{y}\bar{D}) \\ z_1 - z = v_z \cdot \Delta t + D \cos(\bar{z}\bar{D}) \end{cases}$$

kur x y z ir punkta A koordinates

$x_1 y_1 z_1$ " " A_1 "

Bet ja punkts atrodas kustībā, tad vispārīgi koordinates ir funkcijas no laika.

$$\begin{cases} x = f_x(t) \text{ un } x_1 = f_x(t+\Delta t) \\ y = f_y(t) \text{ un } y_1 = f_y(t+\Delta t) \\ z = f_z(t) \text{ un } z_1 = f_z(t+\Delta t) \end{cases}$$

Saliksim $f_x(t+\Delta t)$ rindā pēc Taylora

$$f_x(t+\Delta t) = f_x(t) + \frac{\Delta t}{1} \cdot f_x'(t) + \frac{(\Delta t)^2}{1.2} \cdot f_x''(t) + \frac{(\Delta t)^3}{1.2.3} \cdot f_x'''(t) + \ldots$$

pie pietiekoši maza Δt locekļus, kuŗi satur $(\Delta t)^3$ un augstākā pakāpē ignorēsim, tad

$$f_x(t+\Delta t) - f_x(t) = f'_x(t).\Delta t + \frac{\Delta t^2}{1.2} f''_x(t) \qquad \text{jeb}$$

$$\left.\begin{aligned} x - x_1 &= v_x.\Delta t + \frac{\Delta t^2}{2}.j_x \\ y - y_1 &= v_y.\Delta t + \frac{\Delta t^2}{2}.j_y \\ z - z_1 &= v_z.\Delta t + \frac{\Delta t^2}{2}.j_z \end{aligned}\right\}$$

pēc analoģijas

Salīdzinot šīs formulas ar agrāk izvestām, dabūsim

$$\left.\begin{aligned} D\cos(\bar{x}\bar{D}) &= \frac{\Delta t^2}{2}.j_x \\ D\cos(yD) &= \frac{\Delta t^2}{2}.j_y \\ D\cos(zD) &= \frac{\Delta t^2}{2}.j_z \end{aligned}\right\}$$

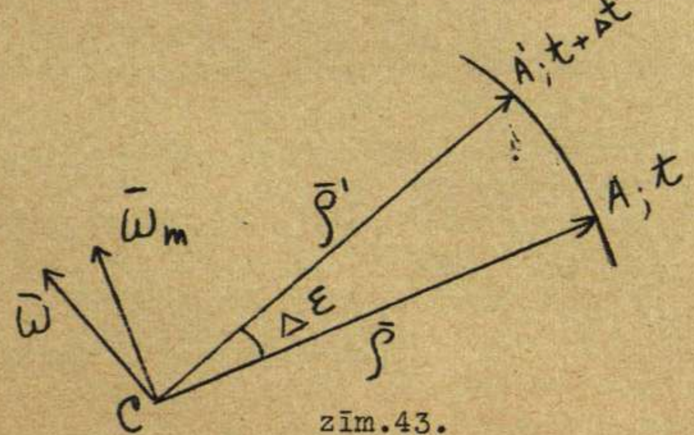
celsim šos nol-mus kvadratā, saskaitīsim un izvilksim kvadratsakni

$$\boxed{\bar{D} = \frac{\Delta t^2}{2}\bar{j}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

<u>Pietiekoši mazā laika sprīdī Δt,kurš sākas laika momentā t, punkta deviacija pēc virziena sakrīt ar paātrinājuma virzienu šinī momentā un pēc lieluma līdzinājās punkta ceļam, kuŗu viņš būtu nogājis vienmērīgi paātrinātā taisnvirzieniskā kustībā ar paātrinājumu j bez sākuma ātruma.</u>

§ 5. LENĶISKĀ KUSTĪBA.

Lenķiskais ātrums.



zīm.43.

Ja punkts kustas pa līku trajektoriju telpā un laika momentā t atrodas punktā A un bezgalīgi tuvā laika momentā t + Δ t atrodas punktā A',tad punktiem A un A' būs kopīgais līcības centrs punktā C,kuŗu dabūsim atliekot galvenās normales virzienā līcības radiusu ρ

Apzīmēsim centrālo leņķi ar $\Delta\varepsilon$. Centrālā leņķa $\Delta\varepsilon$ attiecību pret laika sprīdi Δt apzīmēsim ar ω_m un sauksim par vidējo leņķisko ātrumu laika sprīdī Δt.

$$\frac{\Delta\varepsilon}{\Delta t} = \omega_m$$

Šo vidējo leņķisko ātrumu uzskatīsim kā vektoru, kura virziens ir perpendikulārs pret plakni vilktu caur līcības radiusiem $\bar{\rho}$ un $\bar{\rho}'$, pie kam apakšvirzienu vienosimies pieņemt tādu, lai skatoties no vektora $\bar{\omega}_m$ gala punkta, punkta kustība būtu redzama pret pulksteņrādītāja virzienā.

Par īsteno leņķisko ātrumu $\bar{\omega}$ apskatamā laika momentā t mēs sauksim vidēja leņķiska ātruma $\bar{\omega}_m$ robežu, ja laika sprīdis Δt tiecas uz 0

Pēc liēluma tad $\omega = \lim (\omega_m)_{\Delta t \to 0} = \frac{d\varepsilon}{dt}$

kur $d\varepsilon$ ir contingences leņķis, un pēc virziena $\bar{\omega}$ sakritīs ar binormales virzienu, tā tad

$$\bar{\omega} = \frac{d\varepsilon}{dt} \cdot \bar{i}_b$$

Kā katru vektoru, arī $\bar{\omega}$ mēs varam projecēt uz koordinatu asīm,pie kam katra atsevišķa projekcija tad reprezentēs punkta projekcijas uz perpendikulāro plakni leņķisko ātrumu.

Piemēram ω_x būs punkta projekcijas uz YZ plakni leņķiskais ātrums

ω_y būs punkta projekcijas uz XZ plakni leņķiskais ātrums

ω_z " " " " XY " " "

Ievērojot, ka $\rho = \frac{du}{d\varepsilon}$ varam pārveidot ω izteiksmi

$$\omega = \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon}{du} \cdot \frac{du}{dt} = \frac{1}{\rho} \cdot v \qquad \text{jeb} \quad \boxed{v = \omega \cdot \rho} \quad \ldots (19)$$

Atrastā formula dod sakaru starp punkta lineāro ātrumu un leņķisko ātrumu.

Dimenzija: $\omega = \frac{v}{\rho} \; \frac{[LT^{-1}]}{[L]} = \frac{v}{\rho}\left[T^{-1}\right]$ parasti ω sec^{-1}

Lineārais ātrums kā vektoriels produkts: Lineārais ātrums $\bar{v}$ ir vektors, $\bar{\rho}$ ir vektors un kā nupat bija teikts arī $\bar{\omega}$ mēs uzskatam kā vektorielu lielumu, kuru varam pārnest uz kustošu punktu. Tagad visi šie 3 vektori būs savstarpīgi perpendikulāri, kādēļ varam rakstīt agrāk atrasto formulu vektorielā veidā

$$\bar{v} = [\bar{\omega} \cdot \bar{\rho}] \quad \ldots\ldots\ldots (19')$$

jo attīstot šo produktu dabūsim

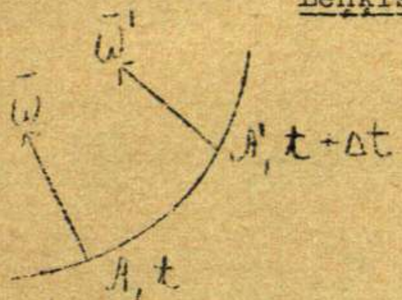
$$v = \omega \cdot \rho \; \text{Sn}\, 90^\circ = \omega \cdot \rho$$

Šis apstāklis dod mums iespēju rakstīt $\bar{v}$ kā determinanti

$$\bar{v}=\begin{vmatrix} \bar{i}_x & \bar{i}_y & \bar{i}_z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ \rho_x & \rho_y & \rho_z \end{vmatrix}=(\omega_y\rho_z-\omega_z\rho_y)\bar{i}_x+(\omega_z\rho_x+\omega_x\rho_z)\bar{i}_y+(\omega_x\rho_y-\omega_y\rho_x)\bar{i}_z$$

un attīstot determinanti atrast ātruma projekcijas uz asīm caur līcības radiusa $\bar{\rho}$ projekcijām un leņķiskā ātruma $\bar{\omega}$ vektora projekcijām.

Leņķiskais paātrinājums.



zīm.44.

Pieņemsim, ka punkts kustēdamies pa līku trajektoriju telpā, laika momentā t atrodas vietā A un bezgalīgi tuvā laika momentā $t+\Delta t$ atrodas vietā A', pie kam attiecīgie leņķiskie ātrumi $\bar{\omega}$ un $\bar{\omega}'$ būs vektori, kuri sakrīt ar binormales virzienu attiecīgā vietā.

Šo vektoru ģeometriskā pieauguma attiecību pret laika sprīdi mēs nosauksim par vidējo leņķisko paātrinājumu laika sprīdī Δt un apzīmēsim ar $\bar{\tau}_m$

$$\frac{\bar{\omega}'-\bar{\omega}}{\Delta t}=\frac{\Delta\bar{\omega}}{\Delta t}=\bar{\tau}_m$$

Par īsteno leņķisko paātrinājumu mēs sauksim vidējā paātrinājuma robežu, ja laika sprīdis Δt tiecas uz nulli

$$\bar{\tau}=\lim\left(\frac{\bar{\omega}'-\bar{\omega}}{\Delta t}\right)_{\Delta t\to 0}=\lim\left(\frac{\Delta\bar{\omega}}{\Delta t}\right)_{\Delta t\to 0}=\frac{d\bar{\omega}}{dt}$$

$$\boxed{\bar{\tau}=\frac{d\bar{\omega}}{dt}} \quad \ldots\ldots\ldots (20)$$

Dimenzija: $\bar{\tau}=\frac{d\bar{\omega}}{dt}\cdot\frac{[T^{-1}]}{[T]}=\frac{d\bar{\omega}}{dt}[T^{-2}]$ parasti: sec^{-2}

Leņķiskais paātrinājums ir ģeometriskais atvasinājums no leņķiskā ātruma vektora pēc laika.

Plakana kustība: Ja kustība ir plakana, tad $\bar{\omega}$ savu virzienu nemainīs un formulu (20) varam rakstīt bez vektora zīmēm

Ievērojot, ka $\omega=\frac{d\varepsilon}{dt}$ dabūsim $\tau=\frac{d\omega}{dt}=\frac{d^2\varepsilon}{dt^2}$

jeb arī $\tau = \frac{d}{dt}\left(\frac{v}{\rho}\right) = \frac{\rho\frac{dv}{dt} - v\frac{d\rho}{dt}}{\rho^2} = \frac{j_t}{\rho} - \frac{v}{\rho^2}\cdot\frac{d\rho}{dt}$

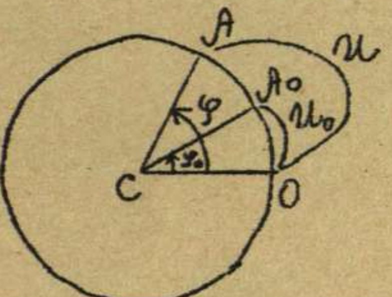
Sakars starp lineāra paātrinājuma projekcijām un leņķiskiem ātrumu un paātrinājumu plakanā kustībā

$$j_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega\rho)}{dt} = \rho\frac{d\omega}{dt} + \frac{d\rho}{dt} = \rho\cdot\tau + \omega\frac{d\rho}{dt}$$

$$j_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(\omega\rho)^2}{\rho} = \rho\omega^2$$

Leņķiskā kustība pa riņķi.

Leņķiskais ātrums.



zīm.45.

Ļoti svarīgs ir leņķiskās kustības gadījums, kad punkta trajektorija ir riņķis. Tādā gadījumā līcības radiusa ρ vietā nāk const.lielums: r. Apzīmējot centrālo leņķi ar φ resp. φ_0, izteiksim attālumus: $u_0 = r\varphi_0$

$u = r\varphi$

un ja $u = f(t)$, tad $\varphi = \frac{1}{r}\cdot u = \frac{1}{r}\cdot f(t)$ arī laika funkcija

ātrums $v = \frac{du}{dt} = \frac{d(r\varphi)}{dt} = r\frac{d\varphi}{dt}$, bet $\boxed{\frac{d\varphi}{dt} = \omega}$ ....(21)

jo φ ir centrāls leņķis un $\boxed{v = r\,\omega}$ ....(22)

Vienmērīga kustība pa riņķi.

Ja v ir Const. $v = v_0 = K$, tad arī ω ir Const. $\omega = \omega_0 = \frac{v}{r} = \frac{K}{r}$

Šāda kustība ir vienmērīga leņķiska kustība pa riņķi. Uziesim viņai φ, ja $\omega = \omega_0$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 ; \quad d\varphi = \omega_0 dt \; ; \quad \varphi = \omega_0 t + C$$

C noteiksim no sākuma apstākļiem $\varphi_0 = \omega_0 t_0 + C$

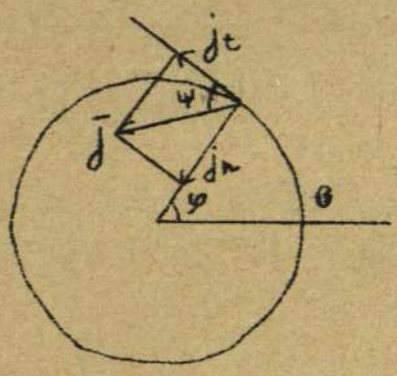
no kurienes $\boxed{\varphi = \varphi_0 + \omega_0 (t - t_0)}$ ......(23) Vienmērīgas leņķiskas kustības likums

pārnesot φ_0 kreisā pusē dabūsim $\varphi - \varphi_0 = \omega_0 (t - t_0)$ tas nozīmē, ka leņķis noiets vienmērīgā leņķiskā kustībā aug proporcionāli laikam.

Periods: Laiku, kurā punkts apiet vienu reizi aploci, sauc par periodu un apzīmē ar T

$$\left.\begin{aligned} \varphi - \varphi_0 &= 2\pi \\ \varphi - \varphi_0 &= \omega_0 T \end{aligned}\right\} \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Leņķiskais paātrinājums kustībā pa riņķi.



zīm.46.

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$ leņķiskais ātrums

$$\tau = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$ leņķiskais paātrinājums

Sakars starp lineāru paātrinājumu j un leņķiskās kustības elementiem

$$j_t = \frac{dv}{dt} \cdot \text{ bet } v = \omega \cdot r$$

$$j_t = \frac{d}{dt}(\omega \cdot r) = r\frac{d\omega}{dt} = r\tau$$

$$\boxed{j_t = r\tau} \quad (24)$$

$$j_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{\omega^2 r^2}{r} = r\omega^2$$

$$\boxed{j_n = r\omega^2} \quad \text{....} (25)$$

$$j = \sqrt{j_t^2 + j_n^2} = \sqrt{r^2\tau^2 + r^2\omega^4}$$

$$\boxed{j = r\sqrt{\tau^2 + \omega^4}} \quad \text{...}(26)$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{j_n}{j_t} = \frac{r\omega^2}{r\tau} = \frac{\omega^2}{\tau} ;$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega^2}{\tau}} \quad \text{---}(27)$$

Piecas pamatformulas vienmērīgi mainīgā leņķiskā kustībā.

Viņa raksturojās ar $\tau = \tau_0 = \text{Const.}$

$$\frac{d\omega}{dt} = \tau_0$$

$$d\omega = \tau_0 dt$$

$$\left.\begin{aligned} \omega &= \tau_0 t + C_1 \\ \omega_0 &= \tau_0 t_0 + C_1 \end{aligned}\right\} -$$

$$\omega - \omega_0 = \tau_0 (t - t_0) \text{ jeb}$$

$$1) \quad \boxed{\omega = \omega_0 + \tau_0 (t - t_0)}$$

vienmērīgi mainīgas leņķiskas kustības ātruma likums.

aizvietosim 1/ formulā $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 + \tau_0 (t - t_0) \text{ integrējot}$$

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\tau_0}{2}(t - t_0)^2 + C_2$$

$\varphi_0 = \omega_0 t_0 + C_2$ no kurienes $C_2 = \varphi_0 - \omega_0 t_0$

$$2/ \quad \boxed{\varphi = \varphi_0 + \omega_0 (t - t_0) + \frac{\tau_0}{2}(t - t_0)^2}$$

Šis ir vienmērīgi mainīgas leņķiskas kustības pa riņķi kustības likums.

Lai dabūtu trešo formulu, izslēgsim laiku no 1/ un 2/.

no 1/ $t - t_0 = \frac{\omega - \omega_0}{\tau}$ ievietosim šo 2/

$$\varphi - \varphi_0 = \omega \frac{\omega - \omega_0}{\tau_0} + \tau_0 \frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\tau_0^2}$$

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{2\omega_0 \omega - 2\omega_0^2 + \omega^2 + \omega_0^2 - 2\omega\omega_0}{2\tau_0} = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\tau_0}$$

$$3/ \quad \boxed{\varphi - \varphi_0 = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\tau_0}}$$

no šīs formulas seko

$$4/ \quad \boxed{\omega = \pm\sqrt{\omega_0^2 + 2\tau_0(\varphi - \varphi_0)}}$$

zīmi šeit jāņem tādu, kāda sākumā bija ω_0 un viņu jāpatur tik ilgi, kamēr ω sasniegs nulli, pēc tam zīme atkal mainās.

Ņemsim 2/ $\varphi - \varphi_0 = \left[\omega_0 + \frac{\tau_0}{2}(t - t_0)\right](t - t_0)$

t - t_0 lielās iekavās aizvietosim ar $t - t_0 = \frac{\omega - \omega_0}{\tau_0}$

$$\varphi - \varphi_0 = \left[\omega_0 + \frac{\tau_0}{2} \cdot \frac{\omega - \omega_0}{\tau_0}\right](t - t_0)$$

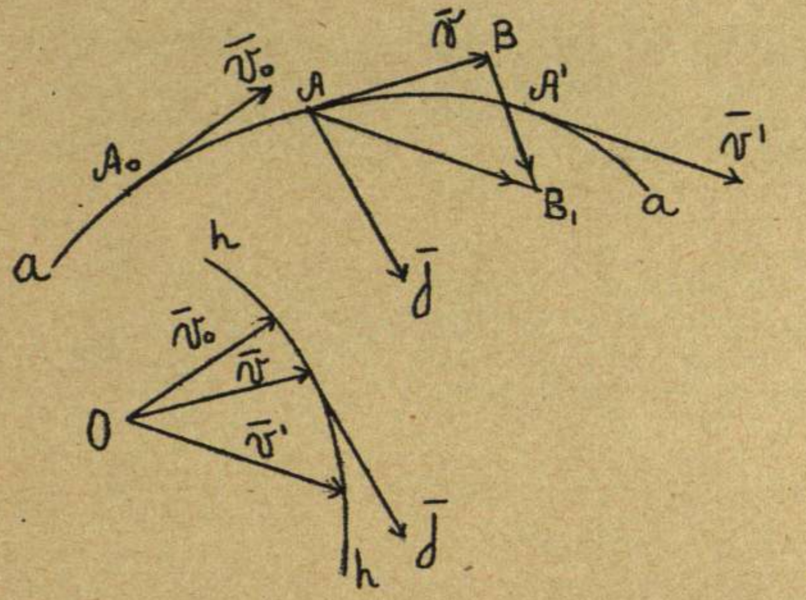
$$\varphi - \varphi_0 = \frac{2\omega_0 + \omega - \omega_0}{2} \cdot (t - t_0) = \frac{\omega + \omega_0}{2}(t - t_0)$$

5/ $$\boxed{\varphi - \varphi_0 = \frac{\omega + \omega_0}{2}(t - t_0)}$$

Lielumu $\frac{\omega + \omega_0}{2}$ šeit sauc par vienmērīgi mainīgās lenķiskās kustības vidējo ātrumu, jo viņš reizināts ar notecējošo laiku dod lenķa pieaugumu.

§ 6. ĀTRUMA HODOGRAFS.

Līkumainā kustībā ātrums mainās pēc lieluma un virziena. Ātruma maiņas likuma pētīšanu un līdz ar to arī paātrinājuma noteikšanu grafiski varam izdarīt ar Hodografa palīdzību. Šis paņēmiens bija ievests no angļu zinātnieka Hamiltona, kādēļ hodografu sauc arī par Hamiltona hodografu.



zīm.47.

Hodografa definicija: Par hodografu sauc ātrumu vektoru gala punktu ģeometrisko vietu, ja šie vektori tiek visi konstruēti vienā patvaļīgi izvēlētā punktā O. Šo punktu O sauc par hodografa polu, a-a ir trajektorija un h-h ir hodografs.

Pirmā hodografa pamatīpašība ir: Punkta paātrinājuma vektors j uz trajektorijas ir paralels hodografa tangentei atiecīgā vietā.

Lai pierādītu sacīto, apskatīsim ātruma ģeometrisko pieaugumu uz trajektorijas un uz hodografa.

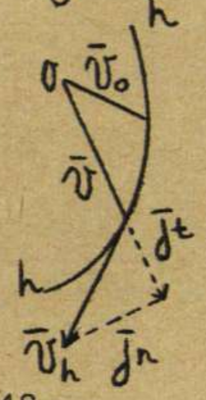
Ātruma pieaugums uz trajektorijas $\Delta\bar{v}$ ir vektors $\overline{BB_1}$ un $\frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t}$ ir vidējais paātrinājums $\bar{j}_m$, kuŗa robeža ir paātrinājums uz trajektorijas .

Tas pats ātruma pieaugums $\Delta\bar{v}$ uz hodografa ir hodografa chorda, kuŗa robežas gadijumā pāriet tangentē. No šejienes redzam, ka punkta paātrinājumam uz trajektorijas jābūt paralelam hodografa tangentei.

Otrā hodografa pamatīpašība formulējās tā: <u>ātrums, ar kuŗu tiek aprakstīts hodografs ir geometriski vienāds ar paātrinājumu uz trajektorijas.</u> Pierādīsim šo: vidējais ātrums uz hodografa ir chordas garums $\Delta\bar{v}$ izdalīts uz laika sprīdi Δt un šīs attiecības $\frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t}$ robeža pie $\Delta t \to 0$ acimredzot būs punkta ātrums uz hodografa, kuŗu apzīmēsim ar $\bar{v}_h$

tā tad $\bar{v}_h = \lim\left(\frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t}\right)_{\Delta t \to 0} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{j}$

Projecējot $\bar{j}$ uz trajektorijas $\bar{v}$ virzienu un perpendikulāri viņam



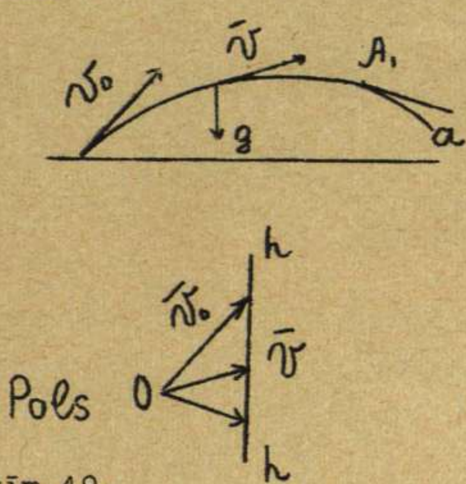
dabūsim $\bar{j}_t = v_h \cos(\bar{v}\,\bar{v}_h)$

un $\bar{j}_n = v_h \cdot \mathrm{Sn}(\bar{v}, \bar{v}_h)$

Šo projecēšanu varam izdarīt uz hodografa h - h.

zīm.48.

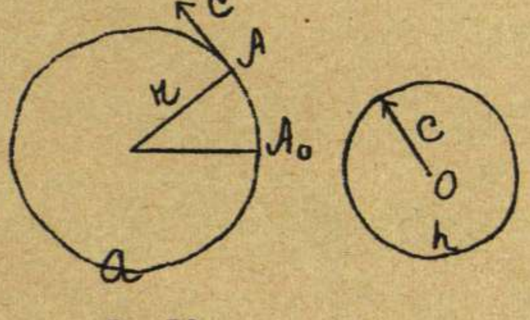
<u>Piemērs:</u> 1/ Apskatīsim smaga punkta slīpo sviedienu ar sākuma ātrumu v_0 vacuumā. Neatkarīgi no punkta stāvokļa uz trajektorijas punkta paātrinājums ies vertikali uz leju, tad visām hodografa tangentēm arī jābūt vertikalām, un pats hodografs arī būs vertikala taisne, vilkta caur vektora v_0, uzkonstruēta patvaļīgā punktā O, gala punktu. Kā redzams no zīmējuma, visas ātrumu vektoru horizontalas projekcijas ir vienādas. Lai dabūtu ātrumu punktā A_1 velkam tangenti un caur punktu O liniju, paralelu tangentei līdz krustošanai ar hodografa liniju.



zīm.49.

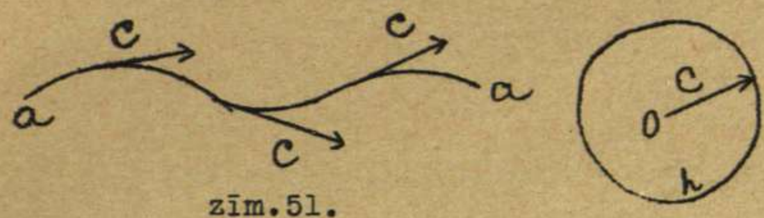
<u>Piemērs:</u> 2/ Noteikt ātruma hodografu, ja punkts kustās pa riņķi ar const. ātrumu $v = c$

Acimredzot hodografs ir arī riņķis, bet ar radiusu C.



zīm.50.

Piemērs: 3/ Noteikt ātruma hodografu, ja punkts kustās pa līku trajektoriju telpā ar const. ātrumu $v = c$.



zīm.51.

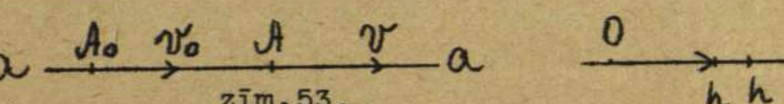
Visi hodografa punkti tādā gadijumā atradīsies vienādā attālumā , C no izvēlētā pola 0 un hodografs būs kāda linija uz lodes,ar radiusu C, virsmas.

Piemērs: 4/ Uziet hodografu taisnvirzieniskai vienmērīgai kustībai.

Acimredzot hodografs būs punkts.

zīm.52.

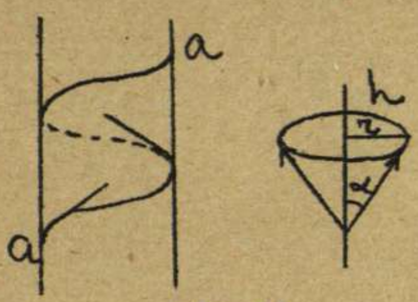
Piemērs: 5/ Uziet hodografu taisnvirzieniskai nevienmērīgai kustībai.



zīm.53.

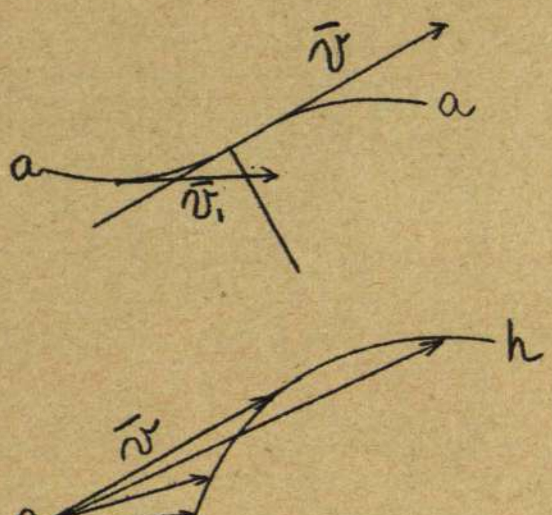
Acimredzot hodografs ir taisnes nogrieznis.

Piemērs: 6/Uziet hodografu, ja punkts kustās uz vienkāršas skrūves linijas ar const.ātrumu $v = C$.
Ja skrūves linija ir vienkārša, tad visas tangentes un līdz ar to arī visi ātrumu vektori ar cilindra asi veido const. leņķi α un hodografs būs riņķis ar radiusu $r = C\, \sin\alpha$



zīm.54.

Daži sakari starp hodografu un trajektoriju.

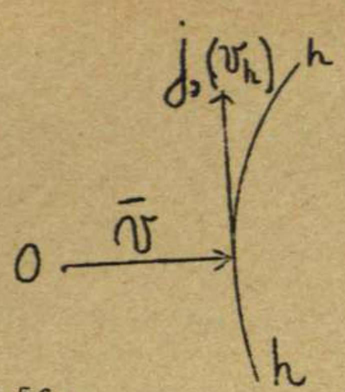


zīm.55.

I. Ja kāds no hodografa stariem pieskaras pie hodografa, tad šinī momentā pilna paātrinājuma virziens sakrīt ar ātruma virzienu, jo hodografa tangente ir paralela $\bar{j}$ un stars ir paralels $\bar{v}$.

Tādā gadijumā $\bar{j}_t = \bar{j}$ un $j_n = 0$ jeb $\frac{v^2}{\rho} = 0$,bet $v \neq 0$, tā tad $\rho = \infty$ un attiecīgā vietā trajektorija būs inflekcijas jeb pārlieces punkts.

II. Ja kāds no hodografa stariem ir $\perp$ tangentei, t.i. iet normales virzienā pret hodografu, tad paātrinājuma virziens ir perpendiku-



zīm.56.

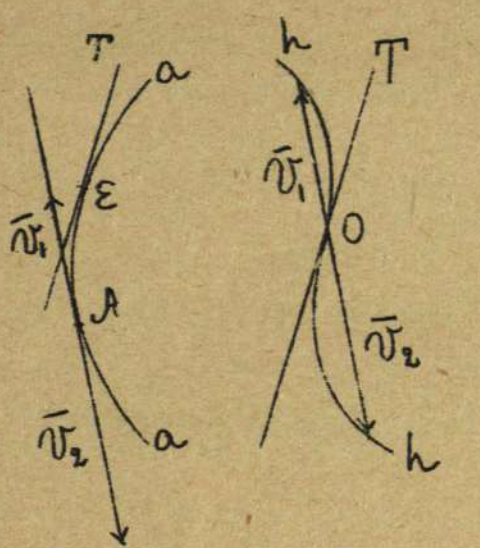
lars ātruma virzienam un iet normales virzienā

$$\dot{j} = \dot{j}_n \quad \text{un} \quad \dot{j}_t = 0$$

jeb $\frac{dv}{dt} = 0$ bet tas nozīmē, ka attiecīgā vietā būs Max v jeb min v.

III. Ja pols atrodas uz paša hodografa, jeb otrādi, hodografs iet caur polu, tad šinī momentā $v = 0$, tas nozīmē, ka punkts apstājas un groza savu kustības virzienu. Tālāk var nākt priekšā divi apakšgadijumi

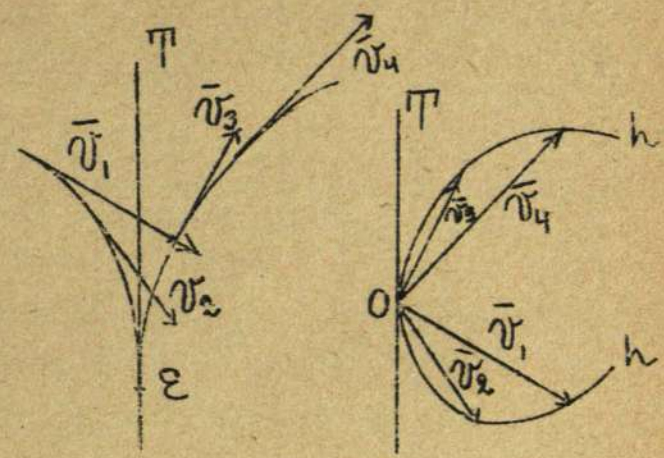
1/Punkts iet atpakaļ uz tās pašas trajektorijas a - a, apstājoties punktā ε, tad



zīm.57.

hodografam polā būs infleksijas punkts un tangente šinī punktā T būs paralela trajektorijas tangentei punktā ε

2/Trajektorijai ir atgriešanās punkts un trajektorijas zari atrodas dažādās tangentes pusēs.



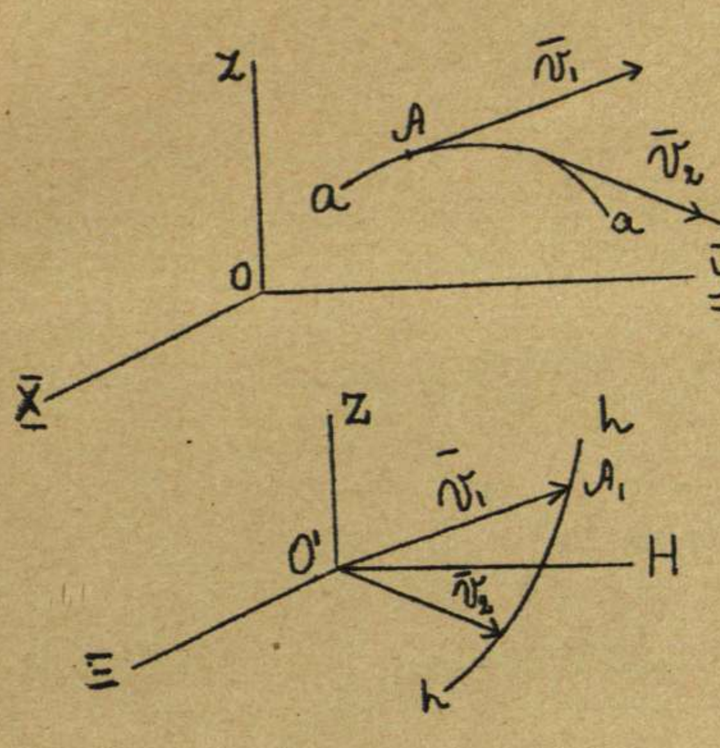
zīm.58.

Tādā gadijumā tangentes trajektorijas atgriešanās punktā ε un hodografa polā O ir paralelas.

Hodografa nolīdzinājuma analitiskā izteiksme.

Pieņemsim, ka ir doti punkta kustības nol-mi:

$$x = f_x(t) \;; \quad y = f_y(t) \;; \quad z = f_z(t)$$



Lai atrastu hodografa nol-mu ņemsim patvaļīgi izvēlētā punktā O' jaunu koordinatu sistemu O'ΞHZ ar asīm, paralelām koordinatu sistemai $O\bar{X}YZ$, uz kuŗu ir attiecināta trajektorija.

Hodografa punktā A_1, kuŗš atbilst trajektorijas punktam A koordinates būs

$A(\xi\ \eta\ \zeta)$ kuŗas izteicās tā

$$\left.\begin{aligned} \xi &= v_x = \dot{x} = f'_x(t) \\ \eta &= v_y = \dot{y} = f'_y(t) \\ \zeta &= v_z = \dot{z} = f'_z(t) \end{aligned}\right\}$$

zīm.59.

Šie nol-mi reprezentē hodografa nol-mu parametra veidā. Izslēdzot no šiem nol-miem laiku, dabūsim hodografa nol-mu ar divām virsmām.

§ 7. KUSTĪBAS GRAFIKAS /DIAGRAMMAS/

Elementi, kuŗi raksturo kustību u, v, j vispārīgi ir kādas $f(t)$, bet katru funkciju mēs varam attēlot grafiski, atliekot vienas ass virzienā /parasti horizontalās ass virzienā/ argumentu un otras ass virzienā funkcijas vērtību.

$u = f(t)$ attēlota grafiski saucās par attāluma grafiku

$v = \varphi(t)$ " " " " ātruma "

$j = \chi(t)$ " " " " paātrinājuma grafiku

Bez minētām grafikām, kur arguments ir laiks, var būt arī citi, piem. ar argumentu S /ceļš/.

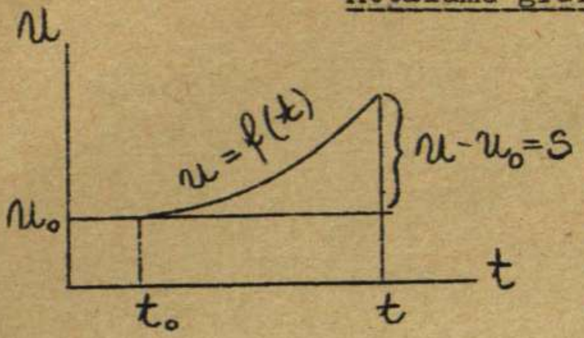
Tā piem. $v = \psi(S)$ attēlota grafiski saucās par (vS) ātruma ceļa grafiku,

Tā pat arī $j = \Psi(S)$ attēlota grafiski saucās par (jS) paātrinājuma ceļa grafiku,

pie kam pēdējās divas grafikas parasti konstruē tā, lai S - ase būtu horicontala.

Ar minētām grafikām visas iespējamības attēlot kustības elementus grafiski nav izsmeltas, piem. var sastādīt arī $\left(\frac{v^2}{2}\ S\right)$ grafiku u.t.t., bet vislielākā nozīme ir augšā minētiem.

Attāluma grafika $(u\,t)$

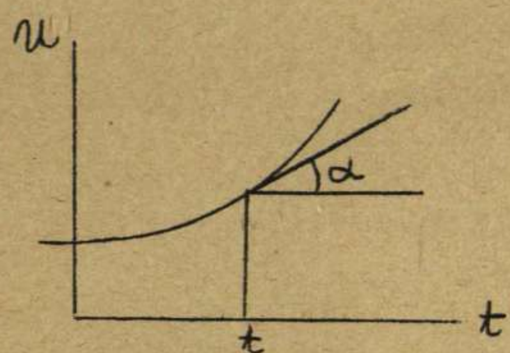


zīm.60.

Ja $u = f(t)$, tad uznesot uz abscisu ass laiku t un uz ordinatu ass attiecīgu $u = f(t)$ mēs dabūsim attāluma grafiku, pie kam šādā ceļā dabūto līku nedrīkst sajaukt ar punkta trajektoriju.

Punkta trajektorija var būt taisna linija un $(u\,t)$ grafika, kuŗa katra līka linija un otrādi, trajektorija var būt līka un $(u\,t)$ grafika taisna. Vispārīgi starp trajektoriju un $(u\,t)$ grafiku nekāda sakara nav.

Ātruma noteikšana pēc $(u\,t)$ grafikas.



zīm.61.

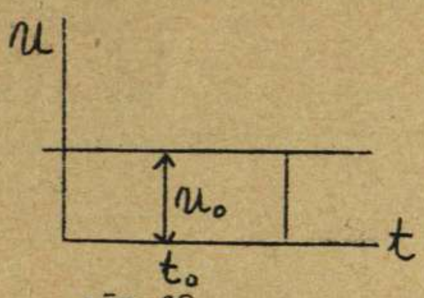
Ja $u = f(t)$ tad no augstākās matematikas ir zinams, ka

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{du}{dt} \quad \text{bet} \quad \frac{du}{dt} = v$$

tā tad $v = \operatorname{tg}\alpha$

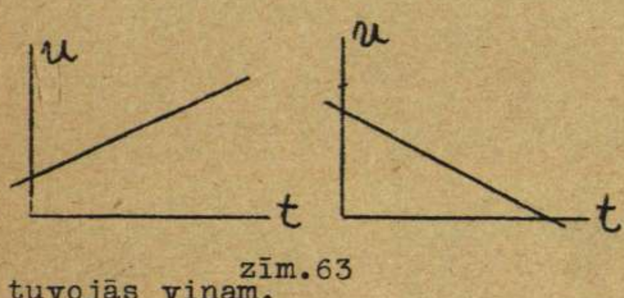
Punkta ātrums uz trajektorijas laika momentā t izteicās ar leņķa tangensu starp tangenti, vilktai grafikai punktā atbilstošā laika momentam t, un t asi.

Kustības pētīšana pēc $(u\,t)$ grafikas.



zīm.62.

1/ $(u\,t)$ grafika ir horizontala linija, tad $u = u_0$ punkta attālums nemainās, t.i. punkts atrodas mierā

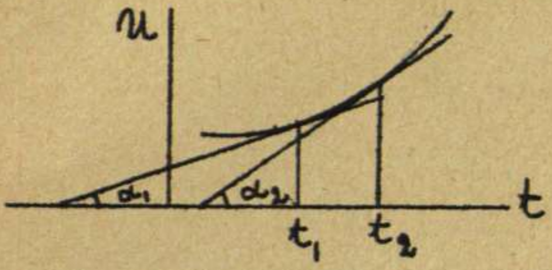


zīm.63

2/ $(u\,t)$ grafika ir taisna linija, šādā gadijumā katrā laika momentā

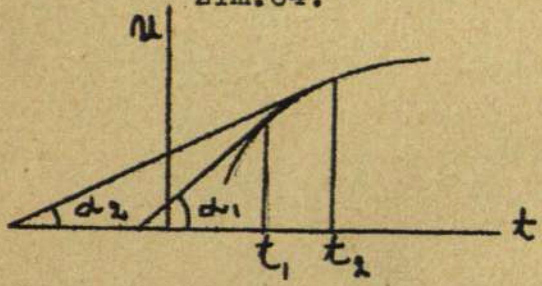
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{du}{dt} = v \quad \text{paliek const.,}$$

t,i. punkta ātrums uz trajektorijas ir const. un kustība ir vienmērīga, pie kam pirmā gadijumā punkts attālinājās no nullpunkta, bet otrā - tuvojās viņam.



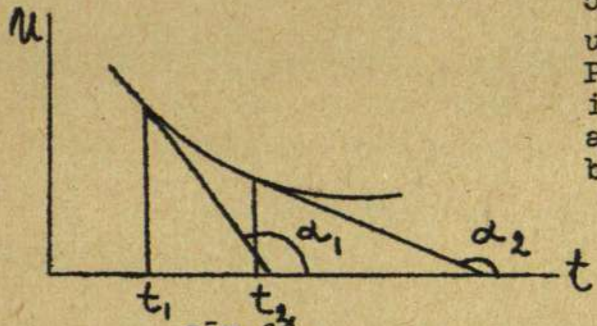
zīm.64.

3/ (ut) grafika: līka ar izliekumu uz leju, pie kam ordinatas pieaug. Kā redzams, punkts attālinājās no nullpunkta un ātrums ar laiku pieaug, tā tad kustība ir <u>paātrināta.</u>



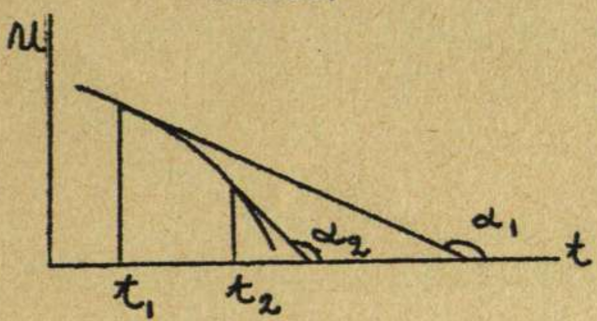
zīm.65.

4/ (ut) grafika: līka, kuŗas ordinatas pieaug, bet izliekums ir uz augšu, tad punkts attālinājās no nullpunkta, bet ātrums ar laiku samazinājās, tā tad kustība ir <u>palēnināta</u>.



zīm.66.

5/Ordinatas samazinājās un izliekums uz leju.
Punkts tuvojās nullpunktam, ātrums ir negativs un pēc absoluta lieluma ar laiku samazinājās, tā tad kustība ir <u>palēnināta.</u>

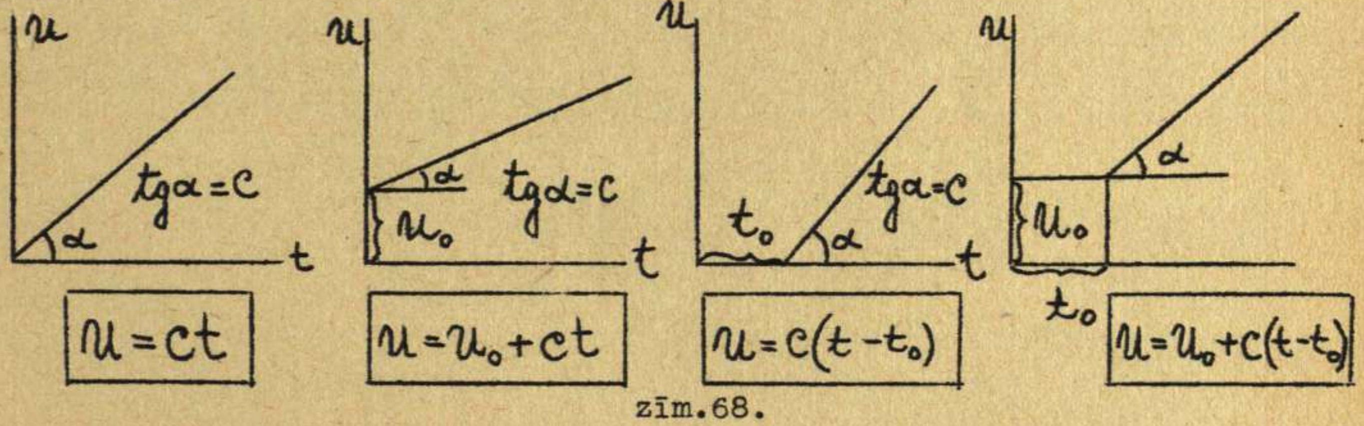


zīm.67.

6/Ordinatas samazinājās, bet izliekums ir uz augšu.
Punkts tuvojās nullpunktam, ātrums ir negativs, jo $\angle\alpha$ ir otrā kvadrantā un pēc absoluta lieluma ātrums pieaug ar laiku, tā tad kustība būs <u>paātrināta.</u>

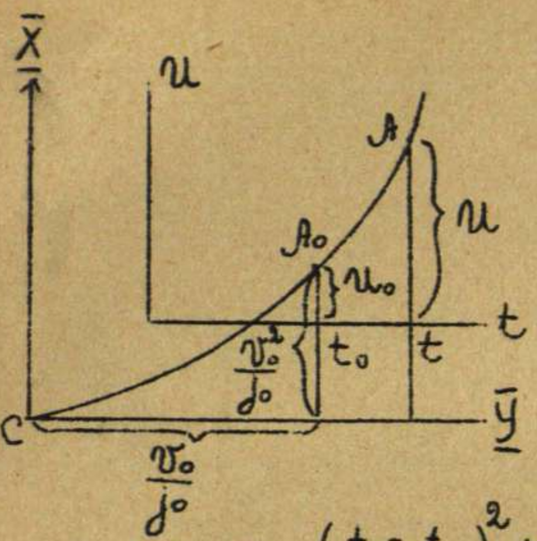
<u>(ut) grafikas konstruēšana elementaros gadijumos.</u>

<u>Vienmērīgai kustībai.</u>



zīm.68.

Vienmērīgi paātrinātai /resp.palēninātai/ kustībai.



Kā zinams, šādas kustības nol-ms:

$$u = u_0 + v_0(t - t_0) + \frac{j^0}{2}(t - t_0)^2$$

Nol-ms rāda, ka linija būs parabola ar vertikalu asi. Zinot $u_0\ v_0\ j_0$ varam, liekot nol-mā dažādus t uzkonstrūēt parabolu pēc punktiem.

Noskaidrosim tagad kur atradīsies parabolas virsotne un cik liels būs parametrs p.

Pārveidosim nol-mu:

zīm.69.

$$(t - t_0)^2 + 2\frac{v_0}{j^0}(t - t_0) + \left(\frac{v_0}{j^0}\right)^2 = \frac{2}{j^0}(u - u_0) + \left(\frac{v_0}{j^0}\right)^2$$

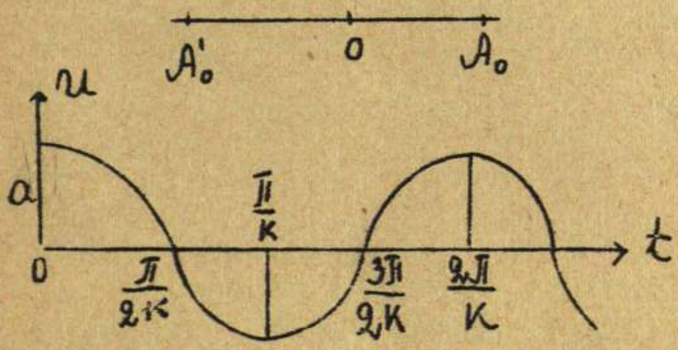
$$\underbrace{\left[(t - t_0) + \frac{v_0}{j^0}\right]^2}_{y^2} = 2 \cdot \underbrace{\frac{1}{j^0}}_{p} \underbrace{\left[(u - u_0) + \frac{v_0^2}{2j^0}\right]}_{x} ;$$

$y^2 = 2px$ parabolas nol-ms kanoniskā veidā, parabolas parametrs $p = \frac{1}{j^0}$. Meklēsim parabolas virsotnes koordinates, apzīmējot viņas ar t_c un u_c

$y = t - t_0 + \frac{v_0}{j^0} = 0$	$x = u_c - u_0 + \frac{v_0^2}{2j^0} = 0$
$t_c = t_0 - \frac{v_0}{j^0}$	$u_c = u_0 - \frac{v_0^2}{2j^0}$

Piemērs: Uzzīmēt attāluma grafiku taisnvirzieniskai kustībai:

$u = a\cos Kt$ /svārstīšanas kustībai/



pie $t = 0$ $\quad u = a$

pie $t = \frac{\pi}{2K}$ $\quad u = 0$

$t = \frac{\pi}{K}$ $\quad u = -a$

$t = \frac{3\pi}{2K}$ $\quad u = 0$

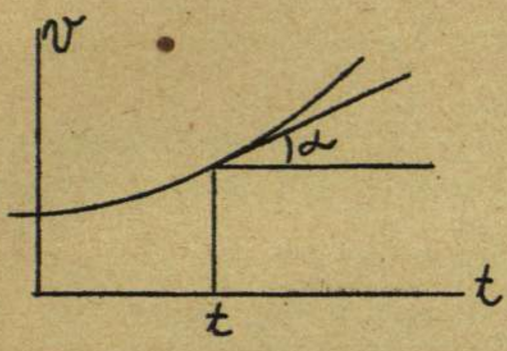
$t = \frac{2\pi}{K}$ $\quad u = a$

zīm.70.

attāluma grafika ir sinusoida.

Ātruma grafikas (vt)

(vt) grafikas pirmā pamatīpašība.



zīm.71.

Ja $v = \varphi(t)$, tad no augstākās matematikas ir zinams, ka $tg\alpha = \frac{dv}{dt} = j$ /jeb resp. j_t ja kustība ir līkumaina/.

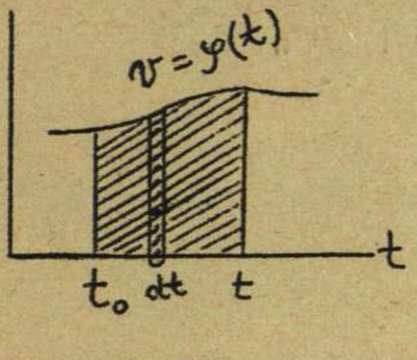
Ja punkta kustība ir taisnvirzieniska, tad leņķa tangens starp tangenti, vilktu (vt) grafikai attiecīgā laika momentā un t asi līdzinājās punkta paātrinājumam $tg\alpha = j$

Ja punkta kustība ir līkumaina, tas pats lielums dod tikai tangenciālo paātrinājumu

$$tg\alpha = j_t$$

tas ir skaidri saprotams, ja mēs ievērosim kad grafikā ātrums tiek attēlots tikai pēc lieluma un ne pēc virziena.

(vt) grafikas otra pamatīpašība.



zīm.72.

Sastādīsim formulu laukumam, ieslēgtam starp (vt) grafiku un t asi.

Izdalīsim elementaru strēmeli platumā dt, viņa laukums tad būs

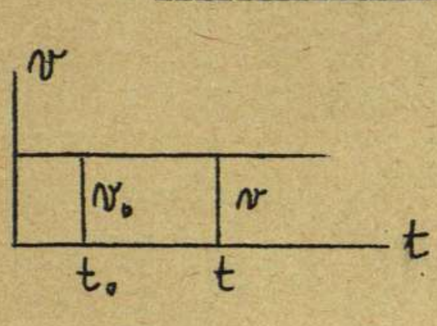
$$d\Omega = v\,dt$$

un viss laukums $\Omega = \int_{t_0}^{t} v\,dt$

aizvietojot $v = \frac{du}{dt}$ dabūsim $\Omega = \int_{t_0}^{t} \frac{du}{dt} \cdot dt = \int_{u_0}^{u} du = u - u_0 = s$

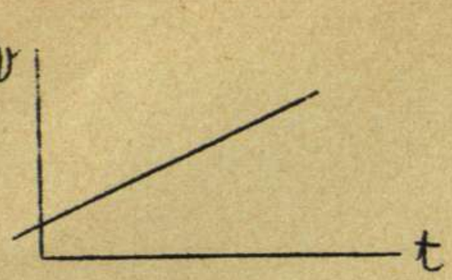
$\Omega = u - u_0 = s$ Laukums, ieslēgts starp (vt) grafiku un t asi reprezentē noieto ceļu S attiecīgā laika sprīdī.

Kustības pētīšana pēc (vt) grafikas.



zīm.73.

1/ (vt) grafika ir horizontala linija. Kā redzams ātrums $v =$ const., tā tad punkta kustība uz trajektorijas būs vienmērīga.

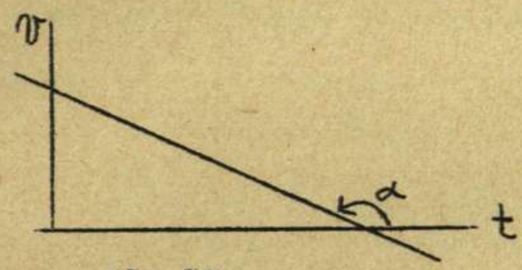


zīm.74.

2/ (vt) grafika ir taisna linija, kuŗa kāpj.
Šādā gadijumā katrā laika momentā

$tg\alpha = \frac{dv}{dt} = j$ /jeb resp. j_t/

paliek const. un ir pozitīvs, tā tad kustība būs vienmērīgi paātrināta.

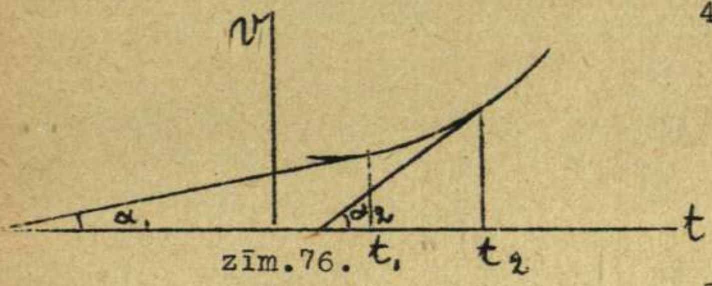


zīm.75.

3/ (vt) grafika ir taisna linija, kuŗa krīt.

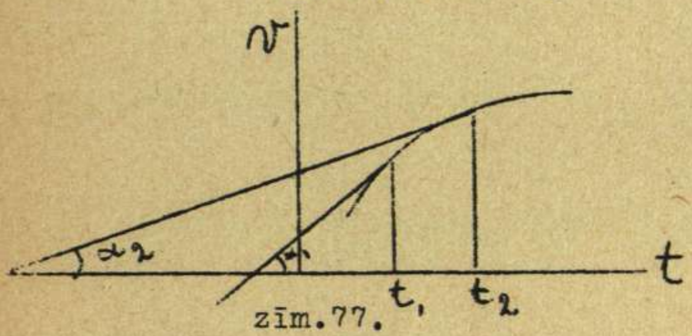
$tg\alpha = \frac{dv}{dt} = j$ /resp. j_t/ =

= const. bet negativs. Kustība būs vienmērīgi palēnināta.



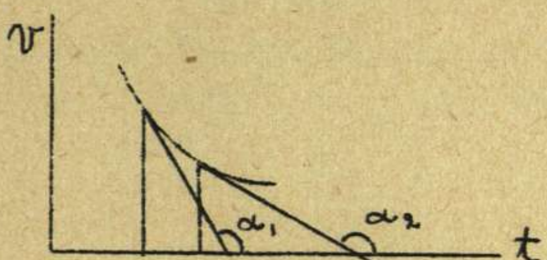
zīm.76.

4/ (vt) grafika ir līka, kuŗas ordinatas pieaug, bet izliekums ir uz leju:
Kā redzams ātrums pieaug un paātrinājums pieaug, tā tad kustība ir nevienmērīgi paātrināta ar augošu paātrinājumu.



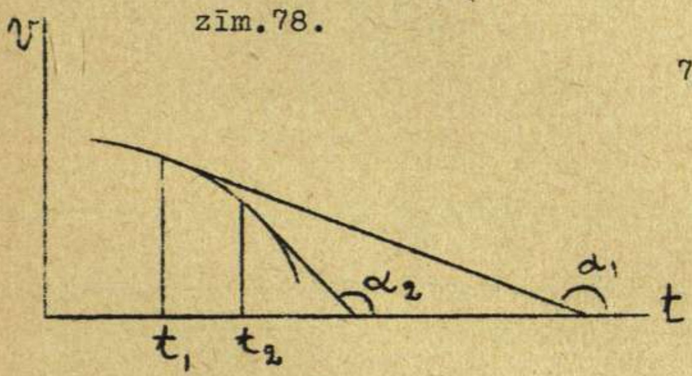
zīm.77.

5/ (vt) grafika ir līka, kuŗas ordinates pieaug, bet izliekums ir uz augšu, tad ātrums pieaug, bet paātrinājums samazinājās un kustība ir nevienmērīgi paātrināta ar dilstošu paātrinājuma.



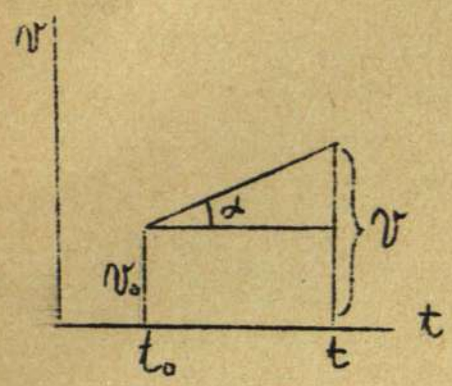
zīm.78.

6/ (vt) grafika ir līka, kuŗas ordinates samazinājās un izliekums ir uz leju, tad ātrums samazinājās un paātrinājums ir negatīvs un arī samazinājās pēc absolutā lieluma. Kustība ir nevienmērīgi palēnināta ar dilstošu paātrinājumu.



zīm.79.

7/ (vt) grafika ir līka, kuŗas ordinates samazinājās un izliekums ir uz augšu, tad ātrums samazinājās un paātrinājums ir negativs, bet pieaug pēc absolutā lieluma. Kustība ir nevienmērīgi palēnināta ar augošu paātrinājumu.



zīm.80.

Vienmērīgi paātrinātas taisnvirzieniskas kustības nol-ma izvešana no (vt) grafikas.

Kā zinams šāda grafika ir taisna linija. Trapecijas laukums ir noietais ceļš S

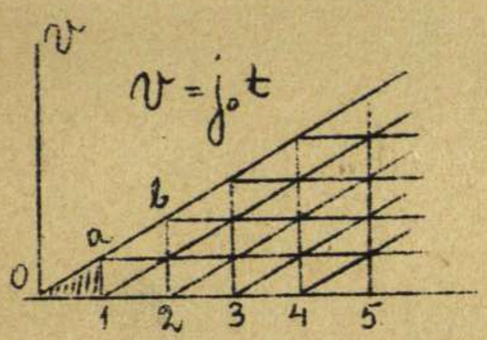
$$\boxed{S = u - u_0 = \frac{v_0 + v}{2}(t - t_0)}$$

tā ir 5/ formula. Saliekot trapecijas laukumu taisnstūrī un trijstūrī,dabūsim

$$S = u - u_0 = v_0(t - t_0) + (t - t_0)\cdot\frac{(t - t_0)tg\alpha}{2}$$

jeb $\boxed{S = u - u_0 = v_0(t - t_0) + \frac{j_0}{2}(t - t_0)^2}$ tā ir 2/ formula.

Izpētīsim vienmērīgi paātrinātu kustību ar (vt) grafiku.



zīm.81.

Ņemsim visvienkāršāku gadijumu, kad $v_0 = 0$ un $t_0 = 0$, tas būs brīva kritiena vacuuma gadijums

$v_1 : v_2 : v_3 : \ldots = 1 : 2 : 3 : \ldots$

Ātrumi ir proporcionāli notecējošam laikam.

Nosauksim ceļu, kurš ir noiets pirmā sekundē un attēlots ar strīpotu trijstūri $Oa1$ ar S_1'

Otrā sekundē noietais ceļš tad izteiksies ar trapeces $1ab2$ laukumu un viņu apzīmēsim ar S'_2

tad $S_1' : S_2' : S_3' : \ldots = 1 : 3 : 5 : \ldots$ no šejienes.

katrā atsevišķā sekundē noietie ceļi attiecās kā nepāru skaitļi.

Tālāk apzīmējot ar S_1 ceļu, noieto pirmā sekundē

" " S_2 " " pirmās divās sekundēs

" " S_3 " " pirmās trīs sekundēs

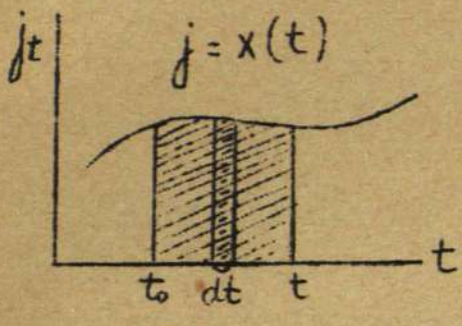
dabūsim $S_1 : S_2 : S_3 \ldots = 1 : 4 : 9 : \ldots = 1^2 : 2^2 : 3^2 : \ldots$

noietie ceļi, skaitot no sākuma, attiecās kā sekundu skaitu kvadrati.

Paātrinājuma grafikas (jt) resp $(j_t t)$,

(jt) grafikas pamata īpašība.

Sastādīsim formulu laukumam, ieslēgtam starp (jt) grafiku un t asi. Izdalīsim elementaru strēmeli platumā dt, viņa laukums tad būs



zīm.82.

$$d\Omega = j_t\,dt$$

un viss laukums $\Omega = \int_{t_0}^{t} j_t\,dt$

aizvietojot $j_t = \frac{dv}{dt}$

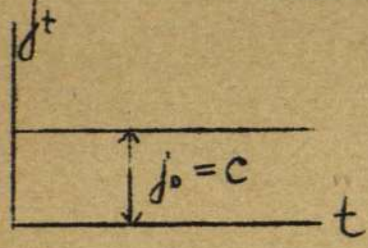
dabūsim $\Omega = \int_{t_0}^{t} \frac{dv}{dt}\cdot dt = \int_{v_0}^{v} dv = v - v_0$

t.i.

$$\Omega = v - v_0$$

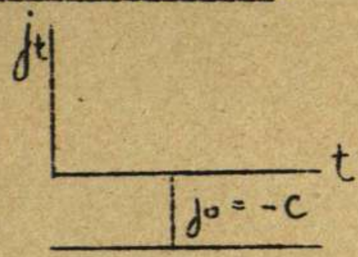
<u>Laukums, ieslēgts starp $(j_t t)$ grafiku un t asi reprezentē punkta ātru-ma pieaugumu attiecīgā laika sprīdī.</u>

<u>Kustības pētīšana pēc $(j_t t)$ grafikas.</u>



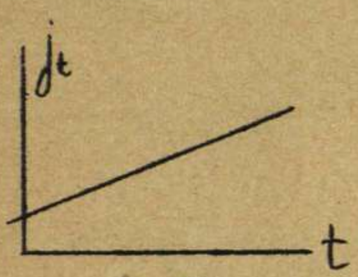
Vienmērīgi paātrināta kustība

zīm.83.



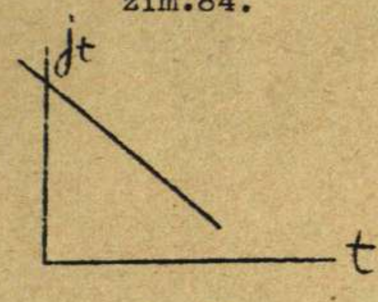
Vienmērīgi palēnināta kustība

zīm.84.



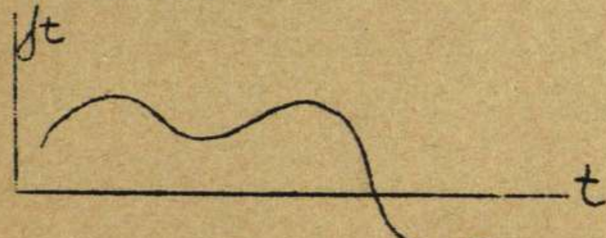
nevienmērīgi paātrināta kustība ar augošu paātrinājumu

zīm.85.



nevienmērīgi paātrināta kustība ar dilstošu paātrinājumu.

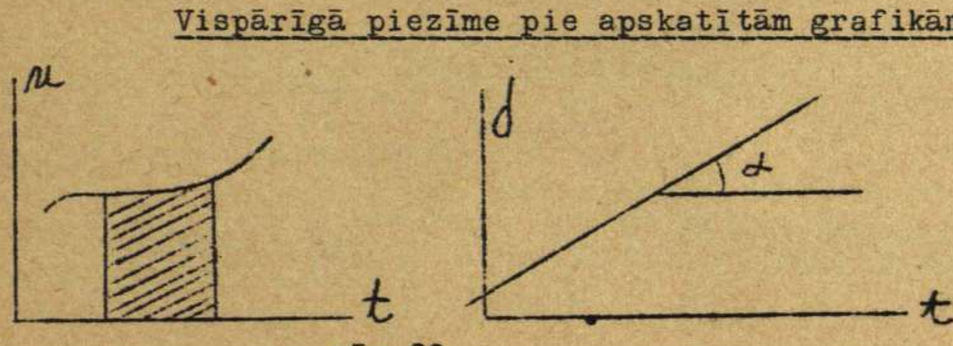
zīm.86.



zīm.87.

Vispārīgi kamēr paatrinājums ~~ātrums~~ ir pozitivs, kustība ir paātrināta un kad paātrinājums ir negativs, kustība palēnināta.

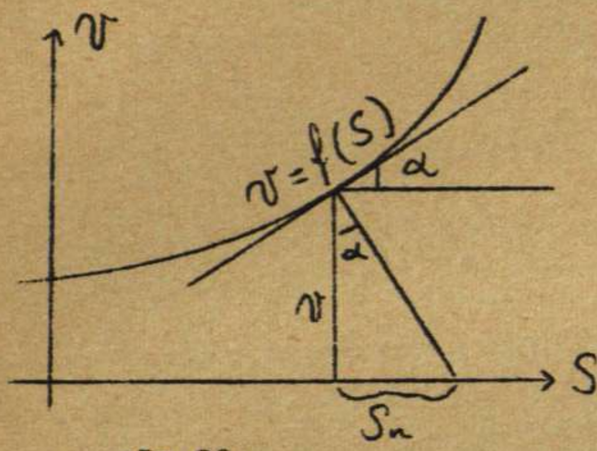
<u>Vispārīgā piezīme pie apskatītām grafikām.</u>



zīm.88.

Kā (ut) grafikas laukumam, tā arī (jt) grafikas tangentei, fizikalas nozīmes nav un tādēļ viņus neapskatam.

(vS) ātruma ceļa grafika.



zīm.89.

Ja ir zināms $v=f(S)$ šo funkciju var uzkonstruēt grafiski atliekot uz horizontalas ass S vērtības un uz vertikalas $v=f(S)$ vērtības.

Tad, kā zināms $tg\alpha = \frac{dv}{ds}$

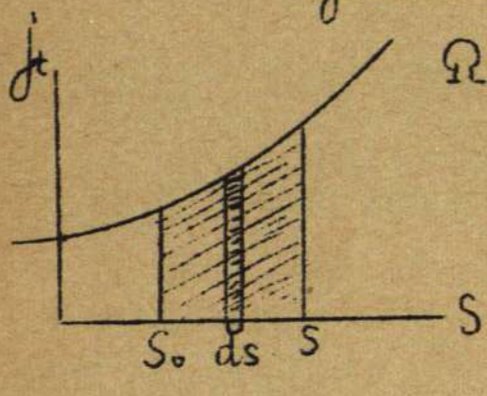
bet no otras puses arī

$tg\alpha = \frac{S_n}{v}$ kur S_n ir subnormales garums; pielīdzinot abas izteiksmes

$$\frac{S_n}{v} = \frac{dv}{ds}\ ;\ S_n = v\cdot\frac{dv}{ds} = v\cdot\frac{dv}{dt}\cdot\frac{dt}{ds} = \frac{dv}{dt} = j_t$$

jeb $\boxed{S_n = j_t}$ (vS) grafikā punkta paātrinājums uz trajektorijas reprezentējās ar subnormales garumu.

(j_tS) Paātrinājuma ceļa grafika.



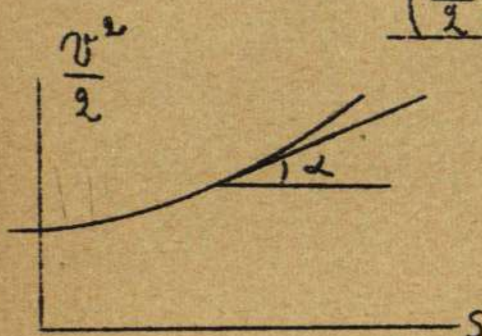
zīm.90.

$$\Omega = \int_{S_0}^{S} j_t\,ds = \int_{S_0}^{S}\frac{dv}{dt}\cdot ds = \int_{v_0}^{v}\frac{ds}{dt}\cdot dv = \int_{v_0}^{v} v\,dv = \frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2}$$

$$\boxed{\Omega = \frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2}}$$

Laukums ieslēgts starp (j_tS) grafiku un S asi dod pusi no ātruma kvadrata pieauguma

$\left(\frac{v^2}{2}S\right)$ Grafika.



$$\boxed{tg\alpha = j_t}$$

zīm.91.

Ja ir zināms $v=f(S)$ mēs varam uzkonstruēt arī $\left(\frac{v^2}{2}S\right)$ grafiku. Izpētīsim šinī grafikā tangentes virzienu

$$tg\alpha = \frac{d\frac{v^2}{2}}{ds} = \frac{v\,dv}{ds} = \frac{ds}{dt}\cdot\frac{dv}{ds} = \frac{dv}{dt} = j$$

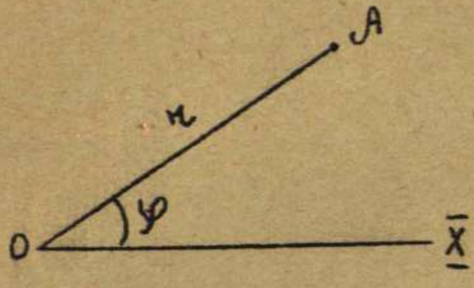
resp. j_t

$\left(\frac{v^2}{2}S\right)$ grafikā

$tg\alpha$ dod punkta paātrinājumu taisnvirzieniskā kustībā jeb tangenciālo paātrinājumu līkumainā.

§ 8. PUNKTA KUSTĪBAS NOTEIKŠANA CITĀS KOORDINATU SISTEMĀS.

I. Polara koordinatu sistema plaknē.



zīm.92.

Izvēlot plaknē kādu asi OX ar punktu O uz viņas, kustoša punkta A stāvokli plaknē var noteikt ar radiusa vektora garumu r un $\angle \varphi$, kuŗu radiuss vektors veido ar asi $O\bar{X}$.

Ja punkts kustās, t.i. maina savu stāvokli ar laiku, tad:

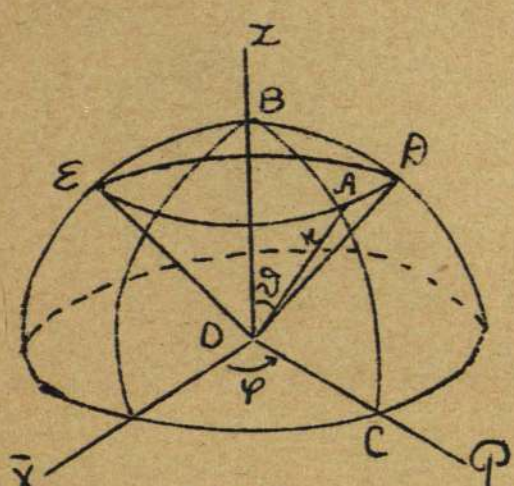
$$r = f_1(t) \quad \text{un} \quad \varphi = f_\varphi(t) \quad \text{jeb} \quad \bar{r} = \overline{f(t)}$$

ir punkta kustības nol-mi polarkoordinātēs plaknē analitiskā jeb vektorielā formā.

Dekarta koordinātes caur polarām izteicās ar formulām:

$$x = r \cos\varphi$$
$$y = r \sin\varphi$$

II. Sferiskās koordinātes jeb polārās koordinātes telpā.



zīm.93.

Izvēlot telpā punktu O un caur viņu divas savstarpīgi perpendikulāras asis $O\bar{X}$ un OZ, kustoša punkta A stāvokli varam noteikt ar 3 lielumiem:

1/radiusa vektora OA garumu r

2/divplakņu kaktu φ, kuŗu veido pirmā meridiana plakne $\bar{X}OZ$ ar meridiana plakni ZOP, vilktu caur asi OZ un radiusu vektoru OA.

3/ar leņķi ϑ, kuŗu veido paša meridiana plaknē radiuss-vektors OA ar asi OZ.

Ja pielīdzināsim katru no sferiskām koordinātēm kādam const. lielumam, tad iegūtie nol-mi reprezentēs kādas virsmas, kuŗas sauc par koordinātu virsmām un kuŗas raksturo attiecīgo koordinatu sistemu.

Nol - ms $r = R$ Const.reprezentē sferas virsmu

" $\varphi = \Phi$ " " meridiana plakni ZOP

" $\vartheta = \Theta$ " " konusa virsmu ar $\angle \vartheta$ pie virsotnes.

Šo virsmu krustošanās linijas saucās par <u>koordinatu linijām</u>, kuŗas šeit iznāk:

sferas virsmas ar meridiana plakni būs loks BAC

sferas virsmas ar konusa virsmu būs riņķis ADE

konusa virsmas ar meridiana plakni būs taisne OA

Šīs koordinatu linijas krustojās savstarpīgi zem taisniem leņķiem, kādēļ apskatamā koordinātu sistema ir <u>ortogonala.</u>

Ja punkts atrodas kustībā, tad viņa koordinātes ar laiku mainās un nol-mi

$$r = f_r(t) \; ; \; \varphi = f_\varphi(t) \; ; \; \vartheta = f_\vartheta(t)$$

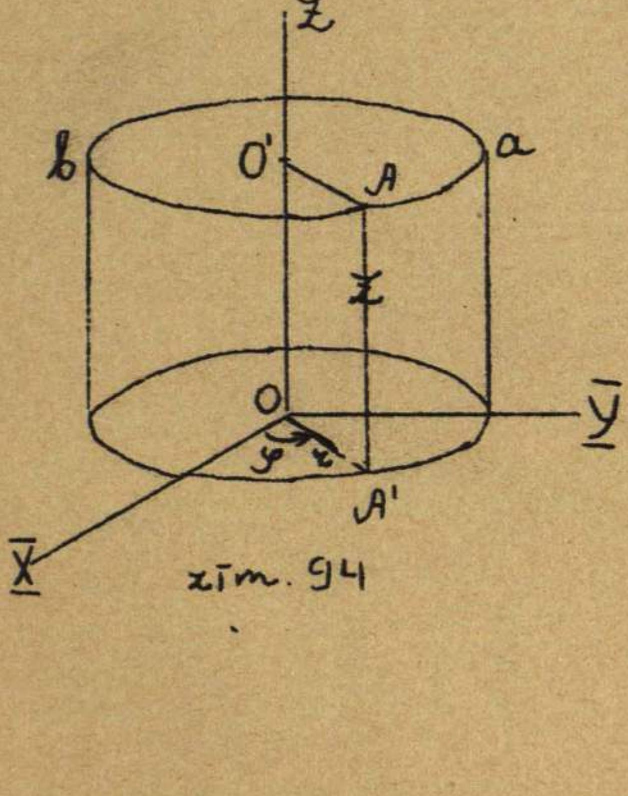
punkta kustības nol-mi sferiskās koordinātēs.

Dekarta koordinātes caur sferiskām izteicās šādi:

$$x = r \sin\vartheta \cdot \cos\varphi \; ; \; y = r \sin\vartheta \cdot \sin\varphi \text{ un } z = r \cos\vartheta$$

Sferiskās koordinātes tiek lietotas astronomijā un tuvāk šinīs lekcijās netiks apskatītas.

III. <u>Puspolara jeb cilindra koordinatu sistema.</u>



zīm. 94

Puspolarā jeb cilindra koordinatu sistemā telpā punkta stāvoklis telpā tiek noteikts ar viņa projekcijas uz $\overline{XOY}$ plaknī polarkoordinātēm (r un φ) un ar attālumu no $\overline{XOY}$ plaknes, t.i. ar koordinati z.

Sferiskās koordinātēs r bija punkta attālums līdz koordinatu sākumam, bet cilindra koordinatēs r ir attālums līdz OZ asij.

<u>Koordinatu virsmas</u> šinī sistemā dabūsim pielīdzinot koordinates const.lielumam.

$r = R$ = const. ir cilindra virsma ar asi OZ

$\varphi = \Phi$ = const. ir plakne OO'AA', kuŗa iet caur OZ asi un veido ar $\bar{X}OZ \angle \Phi$

un z = const. ir plakne paralela $\bar{X}O\bar{Y}$ plaknei.

Koordinatu linijas ir koordinatu virsmu krustošanās linijas, kuŗas cilindra koordinatēs būs:

1/ cilindra ar plakni OO'AA' ir taisne AA'

2/ cilindra ar plakni A ab ir aploce A ab

3/ plaknes OO'AA' ar plakni Aab ir taisne O'A

Visas šīs 3 koordinātu linijas krustojās zem $\angle 90^0$, kādēļ arī cilindra koordinātes ir ortogonalas.

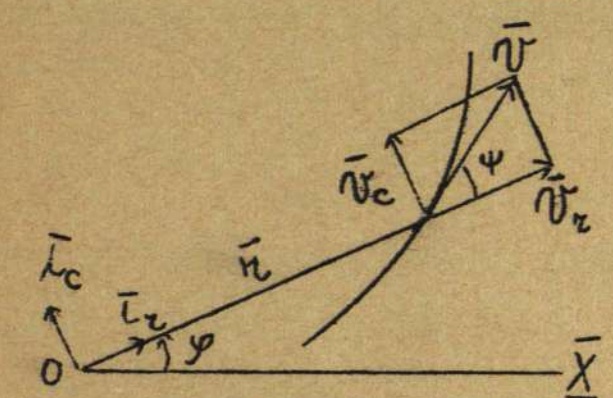
Ja punkts atrodas kustībā, tad viņa cilindra koordinates ar laiku mainās, t.i. viņas būs funkcijas no laika

$$r = f_r(t) \; ; \; \varphi = f_\varphi(t) \quad un \quad z = f_z(t)$$

kuŗas reprezentēs punkta kustības nol-mus cilindra koordinātēs.

Punkta kustība polarkoordinātes plaknē.

Ātrums polarkoordinatēs.



zīm.95.

Analitiskie kustības nol-mi polarkoordinates plaknē ir

$$r = f_r(t) \text{ un } \varphi = f_\varphi(t)$$

Aizvietosim viņus ar vienu vienvērtīgu vektorielu nol-mu

$$\bar{r} = \overline{f(t)}$$

kuŗu pārrakstīsim tā:

$$\bar{r} = r \cdot \bar{i}_r$$

kur r ir analitiska funkcija no laika un $\bar{i}_r$ ir vienības vektors radiusa-vektora virzienā.

Kā jau zināms līkumainā kustībā ātrums ir radiusa vektora geometriskais atvasinājums

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} \qquad \text{formula } (5)$$

Sastādīsim viņu ņemot vērā, ka arī $\bar{i}_r$ ir funkcija no laika.

$$\bar{v} = \frac{d}{dt}(r.\bar{i}_r) = \frac{dr}{dt}.\bar{i}_r + r\frac{d\bar{i}_r}{dt}$$ /pēc Leibnica formulas/

Pēc analoģijas ar $d\bar{i}_t$ apskatītu agrāk, arī $d\bar{i}_r$ būs jauns vektors, kura lielums ir 1. $d\varphi$ un virziens ir perpendikulārs pret $\bar{i}_r$ virzienu.

Apzīmēsim šo jaunu virzienu ar vienības vektoru $\bar{i}_c$

$$d\bar{i}_r = d\varphi.\bar{i}_c$$ un izdalot ar dt

$$\frac{d\bar{i}_r}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}.\bar{i}_c$$ ievietosim šo ātruma formulā

$$\bar{v} = \frac{dr}{dt}.\bar{i}_r + r.\frac{d\varphi}{dt}.\bar{i}_c$$ jeb lietojot Lagranža apzīmējumus

$$\boxed{\bar{v} = \dot{r}.\bar{i}_r + r\dot{\varphi}.\bar{i}_c} \quad \text{.........} (28)$$

Kā redzams no šīs formulas, ātruma vektors sadalās divās komponentēs paša radiusa-vektora virzienā un virzienā perpendikulārā pret radiusuvektoru. Pirmo komponenti nosauksim par <u>radiālo ātrumu</u> un apzīmēsim: v_r otru nosauksim par <u>cirkulāro ātrumu</u> un apzīmēsim a v_c

tad $\bar{v}_r = \dot{r}\,\bar{i}_r$; $\bar{v}_c = r\dot{\varphi}\,\bar{i}_c$ un $\bar{v} = \bar{v}_r + \bar{v}_c$

jeb atmetot vektora zīmes, dabūsim analitiski

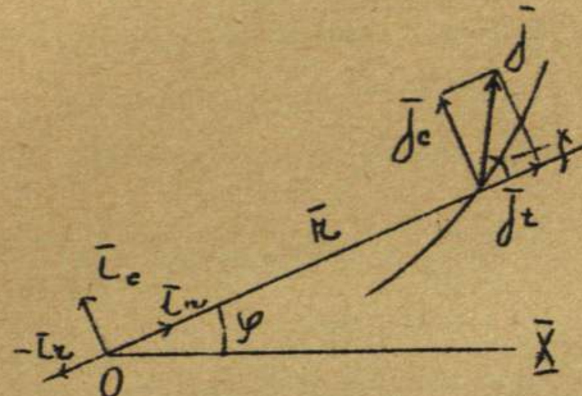
$$\boxed{v_r = \frac{dr}{dt} = \dot{r}} \quad \text{un} \quad \boxed{v_c = r\frac{d\varphi}{dt} = r\dot{\varphi}} \quad \text{.......} (29)$$

$$\boxed{v = \sqrt{v_r^2 + v_c^2} = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\frac{d\varphi}{dt}\right)^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}} \quad \text{.......} (30)$$

ātruma virziens būs noteikts ar leņķi ψ ,kuŗa funkcijas

$$\boxed{\sin\psi = \frac{v_c}{v}} \; ; \; \boxed{\cos\psi = \frac{v_r}{v}} \quad \text{un} \quad \boxed{\operatorname{tg}\psi = \frac{v_c}{v_r}} \quad \text{...} (31)$$

Paātrinājums polarkoordinātēs.



zīm.96.

Paātrinājums līkumainā kustībā ir ātruma ģeometriskais atvasinājums /formula 9/

$$\bar{j} = \frac{d\bar{v}}{dt} \qquad \ldots\ldots(9)$$

Ātrumam ņemsim nupat atrasto izteiksmi formulu /28/:

$$\bar{v} = \dot{r}\bar{i}_r + r\dot{\varphi}\bar{i}_c$$

un atvasināsim viņu pēc laika

$$\bar{j} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{r}\bar{i}_r + r\dot{\varphi}\bar{i}_c\right) = \ddot{r}\bar{i}_r + \dot{r}\frac{d\bar{i}_r}{dt} + \dot{r}\dot{\varphi}\bar{i}_c + r\ddot{\varphi}\bar{i}_c + r\dot{\varphi}\frac{d\bar{i}_c}{dt}$$

bet $d\bar{i}_r = d\varphi \cdot \bar{i}_c$ un tā kā $d\bar{i}_c$ ir $\perp$ $\bar{i}_c$ un kā redzams no zīmējuma virzīts pret $\bar{r}$ virzienu, tad $d\bar{i}_c = d\varphi \cdot 1(-\bar{i}_r) = -d\varphi \cdot \bar{i}_r$

$$\bar{j} = \ddot{r}\bar{i}_r + \dot{r}\frac{d\varphi}{dt}\cdot\bar{i}_c + \dot{r}\dot{\varphi}\bar{i}_c + r\ddot{\varphi}\bar{i}_c - r\dot{\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt}\cdot\bar{i}_r$$

apvienojot locekļus ar tiem pašiem vienības vektoriem

$$\boxed{\bar{j} = \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\bar{i}_r + \left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right)\bar{i}_c} \qquad \ldots\ldots\ldots(32)$$

Kā redzams no šīs formulas paātrinājuma vektors sadalās divās komponentēs, pašā radiusa-vektora virzienā un virzienā perpendikulārā pret radiusu-vektoru. Pirmo komponenti nosauksim par radiālo paātrinājumu un apzīmēsim ar: j_r ,otru nosauksim par cirkulāro paātrinājumu un apzīmēsim: j_c

tad $\bar{j}_r = \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\bar{i}_r$; $\bar{j}_c = \left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right)\bar{i}_c$ un $\bar{j} = \bar{j}_r + \bar{j}_c$

jeb atmetot vektora zīmes, dabūsim analitiski

$$\boxed{j_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2} \qquad \boxed{j_c = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}} \qquad \ldots\ldots(33)$$

$$\boxed{j = \sqrt{j_r^2 + j_c^2} = \sqrt{\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)^2 + \left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right)^2}} \qquad \ldots\ldots(34)$$

Atsevišķu paātrinājuma izteiksmes locekļu nozīmes:

$\ddot{r}$ punkta paātrinājums no slīdes gar radiusu-vektoru

$r\dot{\varphi}^2$ punkta centripetalais paātrinājums no radiusa-vektora griezes ap polu.

$r\ddot{\varphi}$ tangencialais paātrinājums aiz tā paša iemesla.

$2\dot{r}\dot{\varphi}$ ir Coriolisa paātrinājums, par kuŗu runa būs vēlāk.

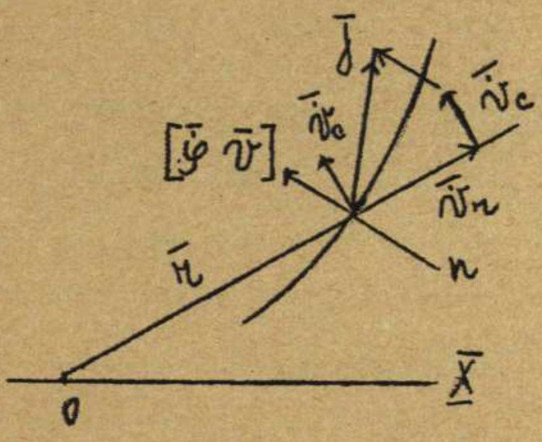
Ņemot vērā, ka $2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi})$ varam cirkulāro paātrinājumu rakstīt vēl citā formā

$$\boxed{j_c = \frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dt}(r^2\cdot\dot{\varphi})} \quad \ldots\ldots\ldots (33^a)$$

Apzīmējot leņķi, kuŗu veido paātrinājuma vektors $\bar{j}$ ar radiusu-vektoru caur χ, varam sastādīt viņa funkcijas

$$\boxed{\sin\chi = \frac{j_c}{j}} \; ; \; \boxed{\cos\chi = \frac{j_r}{j}} \; ; \; \boxed{\operatorname{tg}\chi = \frac{j_c}{j_r}} \quad \ldots\ldots (35)$$

Cita paātrinājuma vektora interpretacija.



zīm.97.

Iziesim no formulas: $\bar{v} = \bar{v}_r + \bar{v}_c$

un pārveidosim viņu ar vienības vektoru palīdzību

$$\bar{v} = v_r\cdot\bar{i}_r + v_c\cdot\bar{i}_c$$

kur v_r un v_c ir analitiskas funkcijas.

Paātrinājums ir $\bar{j} = \frac{d\bar{v}}{dt}$ ...(9)

$$\bar{j} = \frac{d}{dt}(v_r\cdot\bar{i}_r + v_c\cdot\bar{i}_c) = \frac{dv_r}{dt}\cdot\bar{i}_r + v_r\frac{d\bar{i}_r}{dt} + \frac{dv_c}{dt}\cdot\bar{i}_c + v_c\frac{d\bar{i}_c}{dt}$$

lietojot Lagrang'a apzīmējumus, rakstīsim

$$\frac{dv_r}{dt} = \dot{v}_r \; ; \; \frac{dv_c}{dt} = \dot{v}_c$$

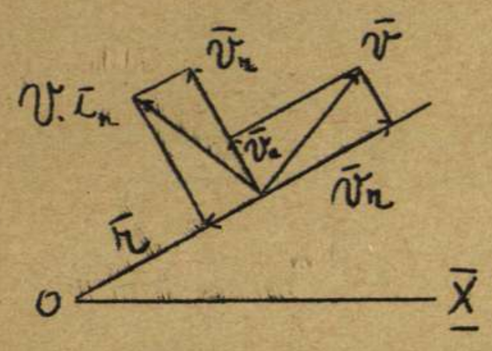
Vienības vektoru atvasinājumi būs

$$\frac{d\bar{i}_r}{dt}=\frac{d\varphi}{dt}\cdot\bar{i}_c=\dot{\varphi}\bar{i}_c;\quad \frac{d\bar{i}_c}{dt}=\frac{d\varphi}{dt}(-\bar{i}_r)=-\dot{\varphi}\bar{i}_r$$

tad $\bar{j}=\dot{v}_r\cdot\bar{i}_r+\dot{v}_c\cdot\bar{i}_c+v_r\dot{\varphi}\cdot\bar{i}_c-v_c\dot{\varphi}\bar{i}_r$

$$\bar{j}=\dot{v}_r\bar{i}_r+\dot{v}_c\bar{i}_c+\dot{\varphi}(v_r\bar{i}_c-v_c\bar{i}_r)$$

Uzkonstruēsim izteiksmi iekavās $v_r\bar{i}_c-v_c\bar{i}_r$ šim nolūkam atliksim v_r virzienā perpendikulārā radiusam vektoram un v_c virzienā pretējā radiusam vektoram. Kā redzams no zīm.98 meklējamā izteiksme ir vektors, kuŗa lielums ir v, bet virziens ir perpendikulars ātrumam, t.i. iet galvenās normales virzienā.



zīm.98.

$$\dot{\varphi}(v_r\bar{i}_c-v_c\bar{i}_r)=\dot{\varphi}v.\bar{i}_n=[\bar{\dot{\varphi}}.\bar{v}]$$

$$\boxed{\bar{j}=\dot{v}_r\cdot\bar{i}_r+\dot{v}_c\cdot\bar{i}_c+\dot{\varphi}v.\bar{i}_n}$$ jeb arī

$$\boxed{\bar{j}=\bar{\dot{v}}_r+\bar{\dot{v}}_c+[\bar{\dot{\varphi}}.\bar{v}]} \quad \ldots.(36)$$

Paātrinājums tagad sadalās trīs komponentēs. zīm.97

1/radiusa-vektora virzienā pēc lieluma $\dot{v}_r$

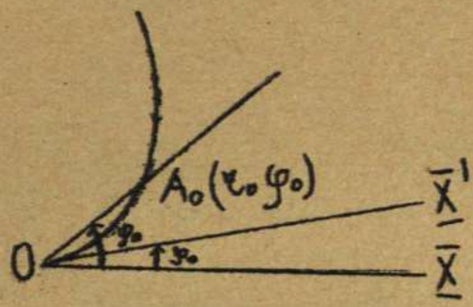
2/cirkulāra virzienā pēc lieluma $\dot{v}_c$ un

3/galvenās normales virzienā pēc lieluma $\dot{\varphi}\cdot v$

Šo trešo komponenti: $[\bar{\dot{\varphi}}.\bar{v}]$ sauc par <u>papildu paātrinājumu</u> un ja mēs papildu paātrinājumu arī sadalīsim radialā un cirkularā virzienā un saskaitīsim šīs komponentes ar $\dot{v}_r$ un $\dot{v}_c$, tad rezultatā jādabon $\dot{j}_r$ un $\dot{j}_c$

Papildu paātrinājumu, kaut gan viņš iet galvenās normales virzienā nedrīkst sajaukt ar normalo paātrinājumu j_n jo papildu paātrinājums nav paātrinājuma projekcija uz normales virzienu.

Piemērs: Punkta kustība plaknē dota ar nol-miem:



zīm.99.

1/ $r = r_0 + c(t - t_0)$

2/ $\varphi = \varphi_0 + K(t - t_0)$

Uziet: 1/ Trajektoriju
2/ Ātrumu un virzienu
3/ Paātrinājumu un virzienu

1/Trajektorija: Lai dabūtu trajektoriju izslēgsim laiku, šim nolūkam ņemsim no

2/ $t - t_0 = \frac{\varphi - \varphi_0}{K}$ un ieliksim 1/ $\boxed{r = r_0 + \frac{c}{K}(\varphi - \varphi_0)}$..trajektorija.

Lai noskaidrotu kāda linija ir izteikta ar šo nol-mu uziesim φ^0, kuŗš atbilst $r = 0$.

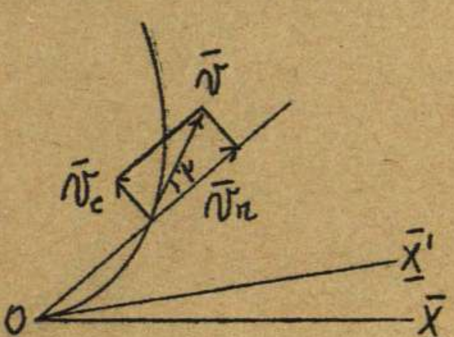
$0 = r_0 + \frac{c}{K}(\varphi^0 - \varphi_0)$ no kurienes $\varphi^0 = \varphi_0 - \frac{K}{c} r_0$

novilksim šim leņķim atbilstošu asi $O\bar{X}'$ un tāļāk liksim $\varphi = \varphi' + \varphi^0$

un ievietojot šo trajektorijas nol-mā apzīmēsim attiecīgo r ar r'

$$r' = r_0 + \frac{c}{K}(\varphi' + \cancel{\varphi_0} - \frac{K}{c} r_0 - \cancel{\varphi_0}) = r_0 + \frac{c}{K}\varphi' - r_0 = \frac{c}{K}\varphi'$$

$\boxed{r' = \frac{c}{K}\varphi'}$ pēc pārveidošanas redzam, ka trajektorija ir Archimeda spirale ar asi $O\bar{X}'$



zīm.100.

2/ Ātrums: $\bar{v} = \bar{v}_r + \bar{v}_c$

jeb $v = \sqrt{v_r^2 + v_c^2}$

$v_r = \frac{dr}{dt} = c$

$v_c = r \cdot \frac{d\varphi}{dt} = rK$

$\boxed{v = \sqrt{c^2 + r^2 \cdot K^2}}$

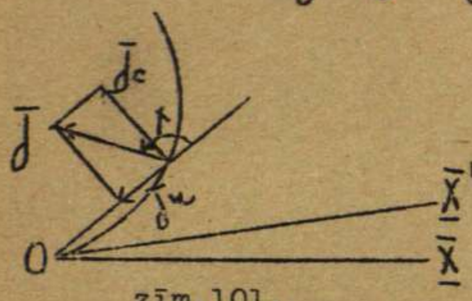
virziens ir noteikts ar $\angle \psi$, kuŗa tangens $tg\psi = \frac{v_c}{v_r} = \frac{K}{c} \cdot r$

ka redzams $tg\psi$ mainās proporcionāli radiusam-vektoram un, ja K un c ir pozitivi, $0 < tg\psi < \infty$ un pats leņķis

$0 < \psi < \frac{\pi}{2}$. Leņķa ψ robeža ir $\frac{\pi}{2}$ pie $r = \infty$

un tad $\bar{v} \perp \bar{r}$

3/ Paātrinājums: $\bar{j} = \bar{j}_r + \bar{j}_c$; $j = \sqrt{j_r^2 + j_c^2}$



zīm.101.

$$j_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = 0 - rK^2 = -K^2 r$$

$$j_c = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 2cK + 0 = 2cK$$

$$\boxed{j = K\sqrt{K^2 r^2 + 4c^2}}$$

virziens ir noteikts ar $\angle \chi$, kuŗa tangens $tg\,\chi = \frac{j_c}{j_r} = -\frac{2cK}{K^2 r}$

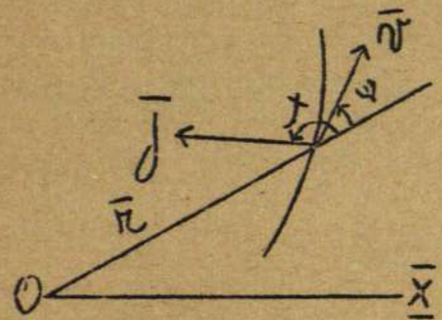
$$\boxed{tg\,\chi = -\frac{2c}{Kr}}$$

tg χ ir pretēji proporcionāls radiusam-vektoram un ja c un K ir pozitivi, tad $\frac{\pi}{2} < \chi < \pi$

un pie $r = \infty$; $tg\,\chi = 0$ un $\chi = \pi$

------- o -------

Teorema par ātruma un paātrinājuma momentu.



zīm.102.

Paātrinājuma moments attiecībā uz kādu punktu līdzinājās pilnai atvasinātai no ātruma momenta attiecībā uz to pašu punktu.

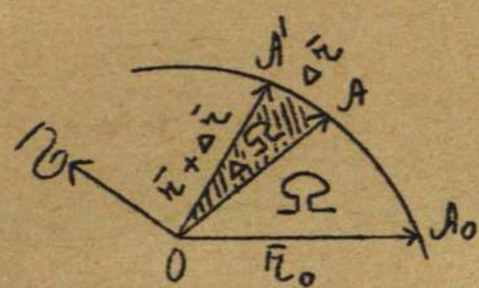
Ātrums un paātrinājums ir vektori, tā tad viņu momenti attiecībā uz punktu O ir vektorprodukti

mom $\bar{v} = [\bar{r}.\bar{v}] = r.v\,Sn\,\psi = r.v_c = r.r.\dot{\varphi} = r^2\dot{\varphi}$

mom $\bar{j} = [\bar{r}.\bar{j}] = r\,j\,Sn\,\chi = r.j_c = r\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi})$

ar šo teorema ir pierādīta: mom $\bar{v} = \frac{d}{dt}$ (mom $\bar{j}$)

Sektoriels ātrums.



zīm.103.

Pieņemsim, ka punkts kustās telpā, tad viņa kustības nol-mi

$$x = f_x(t); \; y = f_y(t); \; z = f_z(t)$$

jeb vektorielā formā $\bar{r} = \overline{f(t)}$

Radiuss-vektors kustoties telpā aprakstīs konisku virsmu, kuŗas veidule būs punkta trajektorija.

Apzīmēsim virsmas sektora laukumu ieslēgtu starp radiusiem-vektoriem $\bar{r}_0$ un $\bar{r}$ ar Ω

Minētā laukuma elementāro pieaugumu $\Delta\Omega$ uzskatīsim kā vektoru attēlojošo laukumu OAA' pēc lieluma un virzītu perpendikulāri pašam laukumam.

Mazo loka elementu AA', kuŗš līdzinājās $\bar{r} + \overline{\Delta r} - \bar{r} = \Delta\bar{r}$ uzskatīsim kā taisnu. Tad, ņemot vērā, ka divu vektoru produkts reprezentē pēc lieluma paralelogramma laukumu, konstruētu uz šiem vektoriem, trijstūra OAA' laukums būs puse no vektorprodukta

$$\Delta\bar{\Omega} = \frac{1}{2}\left[\bar{r} . \overline{\Delta r}\right]$$

Minētā laukuma pieauguma $\Delta\bar{\Omega}$ attiecības pret atbilstošu laika sprīdi Δt robežu, ja Δt tiecās uz nulli, mēs definēsim kā sektorielu ātrumu un apzīmēsim ar $\bar{\sigma}$;

$$\bar{\sigma} = \lim\left(\frac{\Delta\bar{\Omega}}{\Delta t}\right)_{\Delta t \to 0} = \frac{d\bar{\Omega}}{dt}\,; \quad \boxed{\bar{\sigma} = \frac{d\bar{\Omega}}{dt}}$$

$$\bar{\sigma} = \lim\left(\frac{\Delta\bar{\Omega}}{\Delta t}\right)_{\Delta t \to 0} = \lim \frac{1}{2}\left[\bar{r} . \frac{\overline{\Delta r}}{\Delta t}\right]_{\Delta t \to 0} = \frac{1}{2}\left[\bar{r} . \bar{v}\right]$$

$$\boxed{\bar{\sigma} = \frac{1}{2}\left[\bar{r}\;\bar{v}\right]} \qquad \text{............(37)}$$

No formulas /37/ redzam, ka: sektoriels ātrums līdzinājās pusei no no ātruma momenta attiecībā pret sektora virsotni.

Šī teorema ir spēkā netikai plaknē, bet arī telpā.

Sektoriela ātruma izteiksme polarkoordinātēs plaknē.

Attīstot vektorproduktu formulā /37/, dabūsim sektoriela ātruma lielumu

$$\sigma = \frac{1}{2} r v . \sin\psi = \frac{1}{2} r\, v_c = \frac{1}{2} r . r \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\boxed{\sigma = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt}} \quad \text{jeb} \quad \boxed{\sigma = \frac{1}{2} r^2 . \dot{\varphi}} \quad \ldots\ldots (38)$$

pēc virziena viņš ir vektors perpendikulars polarkoordinatu plaknei.

Sektoriela ātruma izteiksme paralelkoordinātēs telpā.

Kā katru vektorproduktu arī sektorielu ātrumu varam rakstīt determinantes formā

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{2}[\bar{r} . \bar{v}] = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \bar{i}_x & \bar{i}_y & \bar{i}_z \\ x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix}$$ un attīstot dabūsim

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x})\bar{i}_z + \frac{1}{2}(y\dot{z} - z\dot{y})\bar{i}_x + \frac{1}{2}(z\dot{x} - x\dot{z})\bar{i}_y$$

Šinī formulā mēs dabujam sektoriela ātruma vektora projekcijas uz koordinatu asīm, no kurām katra raksturo punkta projekcijas kustību plaknē perpendikularā pret attiecīgo asi.

$$\boxed{\sigma_x = \cancel{\ldots}} \quad \sigma_x = \frac{1}{2}(y\dot{z} - z\dot{y})$$

$$\boxed{\sigma_y = \frac{1}{2}(z\dot{x} - x\dot{z})} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (39)$$

$$\boxed{\sigma_z = \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x})}$$

Dažreiz ir sastopami apzīmējumi

σ_x vietā σ_{yz} jo tas ir sektoriels ātrums YZ pāaknē

σ_y " σ_{xz} " XZ "

σ_z " σ_{xy} " XY "

Sektoriels paātrinājums.

Par sektorielo paātrinājumu sauksim sektoriela ātruma pieauguma $\Delta\bar{\sigma}$ attiecības pret laika sprīdi Δt robežu, ja laika sprīdis Δt tiecas uz nulli.

Sektorielo paātrinājumu rakstīsim: $\frac{d\bar{\sigma}}{dt}$

bet $\bar{\sigma} = \frac{d\bar{\Omega}}{dt}$ tā tad $\boxed{\frac{d\bar{\sigma}}{dt} = \frac{d^2\bar{\Omega}}{dt^2}}$ ....(40^a)

citādi vēl

$$\frac{d\bar{\sigma}}{dt} = \frac{d}{dt}\cdot\frac{1}{2}\left[\bar{r}.\bar{v}\right] = \frac{1}{2}\underbrace{\left[\frac{d\bar{r}}{dt}.\bar{v}\right]}_{0} + \frac{1}{2}\left[\bar{r}.\frac{d\bar{v}}{dt}\right] = \frac{1}{2}\left[\bar{r}.\bar{j}\right]$$

$$\boxed{\frac{d\bar{\sigma}}{dt} = \frac{1}{2}\left[\bar{r}.\bar{j}\right]} \qquad ....(40)$$

Sektoriels paātrinājums līdzinājās pusei no paātrinājuma momenta attiecībā pret sektora virsotni.

To pašu varēja pateikt arī uz ātruma un paātrinājuma momenta teoremas pamata.

Sektoriela paātrinājuma analitiska izteiksme polarkoordinātēs plaknē.

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{2} r . j \sin\chi = \frac{1}{2} r j_c = \frac{1}{2} r \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi})$$

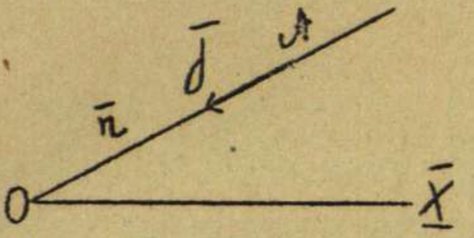
cits pierādijums: $\sigma = \frac{1}{2}(r^2.\dot{\varphi});$

$$\boxed{\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(r^2.\dot{\varphi})} \qquad ....(41)$$

Centrāla kustība.

Par centrālo kustību sauksim tādu kustību, kurā paātrinājums arvienu iet caur noteiktu punktu.

Ja mēs šo punktu pieņemsim par koordinatu sākumu 0, tad radiusa-vektora r virziens ar paātrinājuma virzienu sakritīs vienā taisnē un vektorprodukts



zīm.104.

$$[\bar{r}.\bar{j}] = r.j\,Sn(\bar{r}.\bar{j})\,\bar{i}_\ell = 0$$

un tad $\frac{d\bar{\sigma}}{dt} = \frac{d^2\bar{\Omega}}{dt^2} = \frac{1}{2}[\bar{r}.\bar{j}] = 0$

integrējot dabūsim $\sigma = \frac{d\Omega}{dt} = C = Const$ un integrējot otru reizi

$$\left.\begin{aligned} \Omega &= Ct + D \\ 0 &= Ct_0 + D \end{aligned}\right\} -$$

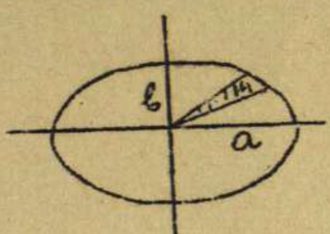
pieņemsim ka sākumā $t = t_0$ un $\Omega_0 = 0$

$$\Omega = C(t - t_0)$$

Iznāk, ka centrālā kustībā laukums, kuru apraksta radiuss-vektors ir proporcionals notecējušam laikam.

Šis rezultāts nav nekas cits kā pazīstamais Keplera likums.

Piemērs: Punkta kustības nol-mi ir $\begin{cases} x = a\,Cos\,kt \\ y = b\,Sn\,kt \end{cases}$



zīm.105.

Uziet: sektorielo ātrumu $\sigma = ?$

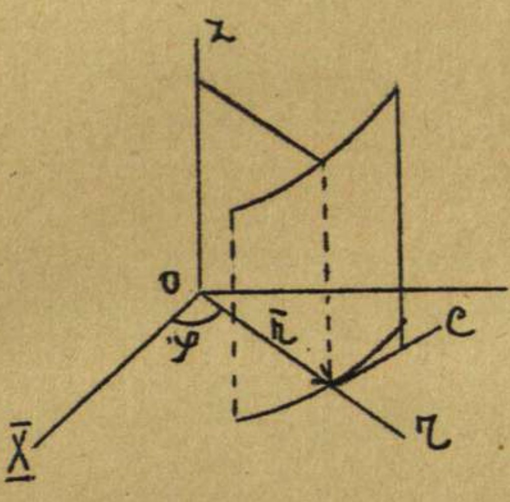
Trajektorija būs $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipse.

Sastādīsim
$$\dot{x} = -ak\,Sn\,kt$$
$$\dot{y} = bk\,Cos\,kt$$

$$\sigma = \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}) = \frac{1}{2}(abk\,Cos^2kt + abk\,Sn^2kt) = \frac{1}{2}abk$$

$\sigma = \frac{1}{2}abk$ ir const. lielums, tā tad kustība ir centrāla.

Kustība cilindra koordinātēs.



zīm.106.

Kustības nol-mi cilindra koordinātēs bija:

1/ $r = f_r(t)$

2/ $\varphi = f_\varphi(t)$

3/ $z = f_z(t)$

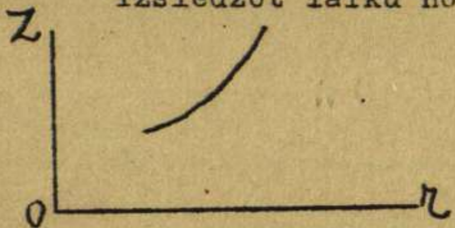
Minētie nol-mi reprezentē trajektoriju parametra veidā, pie kam parametrs ir laiks.

Lai atrastu trajektoriju ar divām virsmām, izslēdzam laiku no

$$\left.\begin{array}{l} 1/\ r = f_r(t) \\ 2/\ \varphi = f_\varphi(t) \end{array}\right\}$$

rezultāts $r = \psi_r(\varphi)$ būs trajektorijas projekcija uz $\overline{XY}$ plakni jeb arī cilindriska virsma ar veidulēm paralelām OZ asij, uz kuŗas tad atrodas trajektorija.

Izslēdzot laiku no nol-miem



zīm.107.

$$\left.\begin{array}{l} 1/\ r = f_r(t) \\ 3/\ z = f_z(t) \end{array}\right\}$$

dabūsim nol-mu $z = \psi_z(r)$ kuŗš reprezentēs trajektorijas projekciju uz kustošu ZOr plakni.

Pie plaknes kustības šī linija arī apraksīs zinamu virsmu, kuŗa krustojoties ar augšā minēto cilindrisku virsmu dos punkta trajektoriju telpā.

Abi šie nol-mi
$$\left.\begin{array}{l} r = \psi_r(\varphi) \\ z = \psi_z(r) \end{array}\right\}$$
tad reprezentē trajektoriju telpā.

Ātrums cilindra koordinātēs.

Ņemot vērā, ka cilindra koordinātes ir kombinācija no polarkoordinātēm plaknē un paralelkoordinātēm, ātruma vektoru projecējam uz r virzienu, uz tā saukto C virzienu, perpendikulāri pret r un uz OZ asi. Tad projekcijām varam lietot agrāk atrastās formulas

$$\left.\begin{array}{ll} \boxed{v_r = \dfrac{dr}{dt} = \dot{r}} & \text{saucās par radiālo ātrumu} \\ \boxed{v_c = r\dfrac{d\varphi}{dt} = r\dot{\varphi}} & \text{" " cirkulāro "} \\ \boxed{v_z = \dfrac{dz}{dt} = \dot{z}} & \text{" " aksiālo "} \end{array}\right\} \ldots\ldots.(42)$$

$$\boxed{\bar{v} = \bar{v}_r + \bar{v}_c + \bar{v}_z}$$ ...(43) pilna ātruma ģeometriska izteiksme

$$\boxed{v = \sqrt{v_r^2 + v_c^2 + v_z^2}}$$ ...(44) pilna ātruma analitiska izteiksme

Ātruma virziens būs noteikts ar leņķu cosin., kuŗus tagad atskaitam no r virziena, C virziena un OZ ass

$$\cos(\bar{r}\,\bar{v}) = \frac{v_r}{v}\;;\quad \cos(\bar{v}_c\,\bar{v}) = \frac{v_c}{v}\;;\quad \cos(\bar{z}\,\bar{v}) = \frac{v_z}{v} \quad ...(45)$$

Ja ir vajadzīgs noteikt ātruma projekciju uz $\overline{XY}$ plakni, tad

$$\boxed{\bar{v}_{xy} = \bar{v}_r + \bar{v}_c}$$ jeb analitiski $$\boxed{v_{xy} = \sqrt{v_r^2 + v_c^2}}$$ ...(46)

Paātrinājums cilindra koordinātēs.

Projecējot paātrinājumu uz tiem pašiem virzieniem, varam arī šeit lietot jau pazīstamās formulas

$$j_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2$$ saucās par radiālo paātrinājumu

$$j_c = 2\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{dt} + r\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}$$ saucās par cirkulāro paātrinājumu ...(47)

$$j_z = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}$$ saucās par aksiālo paātrinājumu

$$\boxed{\bar{j} = \bar{j}_r + \bar{j}_c + \bar{j}_z}$$ .....(48) pilna paātrinājuma ģeometriska izteiksme

$$\boxed{j = \sqrt{j_r^2 + j_c^2 + j_z^2}}$$ .....(49) pilna paātrinājuma analitiska izteiksme

Paātrinājuma virziens arī būs noteikts ar leņķu cosin., kuŗus atskaitam no r virziena, C virziena un OZ ass.

$$\cos(\bar{r}\,\bar{j}) = \frac{j_r}{j}\;;\quad \cos(j_c\,\bar{j}) = \frac{j_c}{j}\;;\quad \cos z j = \frac{j_z}{j} \quad ....(50)$$

Piemērs uz kustību cilindra koordinātēs.

Doti kustības nol-mi	Dots sakars	Uziet
1/ $r = r_0 + at$	$K = \frac{a}{r_0}$	1/Trajektoriju
2/ $\varphi = \varphi_0 + b\ln(1+Kt)$	un ir redzams, ka pie t=0 p-kts atrodas	2/Ātrumu, viņa virzienu
3/ $z = z_0 + ct$	$A_0(r_0 \mid \varphi_0 \mid z_0)$	3/Hodografu
		4/Paātrinājumu un virzienu
		5/Līcības radiusu: ρ

Jaut. 1/ Trajektorija.

Meklēsim trajektorijas projekciju uz XY plakni

1/ $r = r_0 + at$

2/ $\varphi = \varphi_0 + b. \ln(1+Kt)$

$$\frac{\varphi-\varphi_0}{b} = \ln(1+Kt)$$

$$1+Kt = e^{\frac{\varphi-\varphi_0}{b}}$$

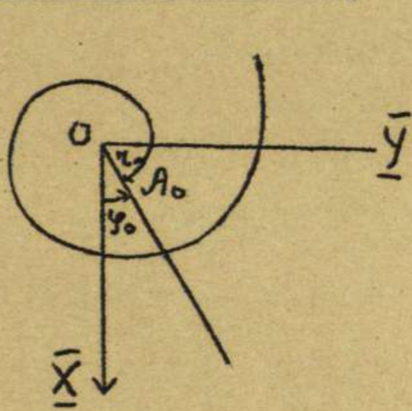
$$t = \frac{1}{K}\left(e^{\frac{\varphi-\varphi_0}{b}} - 1\right) \quad \text{ieliksim } 1)$$

$$r = r_0 + \frac{a}{K}\left(e^{\frac{\varphi-\varphi_0}{b}} - 1\right)$$

$$\text{bet } \frac{a}{K} = r_0$$

$$\therefore \quad r = r_0 + r_0\left(e^{\frac{\varphi-\varphi_0}{b}} - 1\right)$$

$$\boxed{r = r_0 \cdot e^{\frac{\varphi-\varphi_0}{b}}}$$



Meklēsim trajektorijas projekciju uz kustošu plakni caur OZ asi un radiusu vektoru

1/ $r = r_0 + at$

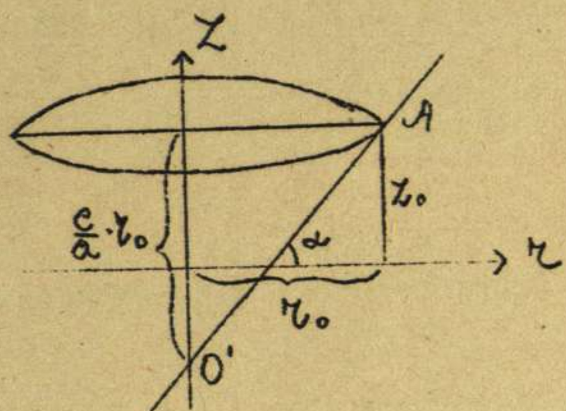
3/ $z = z_0 + ct$

$$t = \frac{r - r_0}{a}$$

$$z = z_0 + \frac{c}{a}(r - r_0)$$

$$\boxed{z = \frac{c}{a} r + \left(z_0 - \frac{c}{a} r_0\right)}$$

Trajektorijas projekcija Zr plaknē ir taisna linija ar virziena koeficientu $\operatorname{tg}\alpha = \frac{c}{a}$ const.



un sākuma ordinati $\left(z_0 - \frac{c}{a} r_0\right)$

Šī taisne /Z r/ plaknē savu virzienu nemaina un griežās kopā ar viņu aprakstot taisnu konusu, kuŗa ass ir Z ass un virsotne atrodas punkta O' ar ordinati:

$$z_0 - \frac{c}{a} r_0$$

Trajektorijas projekcija uz $\overline{XY}$ plakni ir logaritm.spirale. Uz šīs spirales uzbūvētas cil.virsmas atrodas pate trajektorija

Abu virsmu,t.i. 1/cilindra,kuŗa vadule ir log.spirale
2/konusa,kuŗa veidule ir augšminētā taisne
krustošanās linija būs punkta trajektorija, viņa būs <u>log.spirale uztīta uz konusa.</u>

Jaut. 2/ <u>Ātrums</u>.

$$v_r = \frac{dr}{dt} = a \quad \text{const.}$$

$$v_c = r\cdot\frac{d\varphi}{dt} = r\cdot\frac{bk}{1+kt} = r\cdot\frac{b\cdot\frac{a}{r_0}}{1+\frac{a}{r_0}t} = r\cdot\frac{ab}{r_0+at} = ab \ \text{Const.}$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = c \quad \text{const}$$

$$v = \sqrt{v_r^2+v_c^2+v_z^2} = \sqrt{a^2+a^2b^2+c^2} \quad \text{const.}$$

Punkta ātrums ir const.
Uziesim ātruma projekciju uz $\overline{XY}$ plakni.

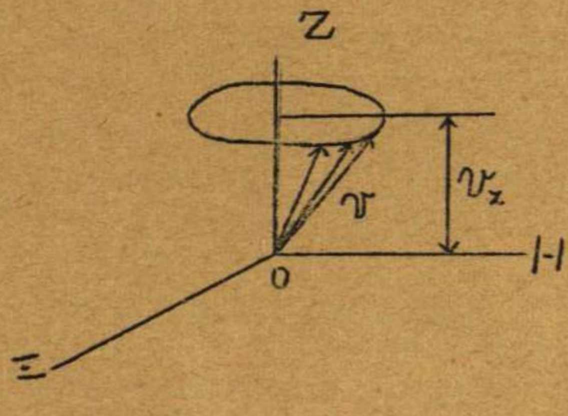
$$v_{xy} = \sqrt{v_r^2+v_c^2} = \sqrt{a^2+a^2b^2} = a\sqrt{1+b^2}$$

aprēķināsim leņķi starp v un v_{xy}

$$tg(v\,v_{xy}) = \frac{v_z}{v_{xy}} = \frac{c}{a\sqrt{1+b^2}} \quad \text{const.}$$

Ja leņķis veidots no ātruma vektora un horicontalu plakni ir const., tad trajektorija ir <u>skrūves linija</u>

Jaut. 3/ <u>Hodografs</u>.



Lai uzzīmētu hodografu ņemsim patvaļīgā polā O koordinātu asis $O\Xi H Z$ paraleli $O\overline{XYZ}$. Ņemot vērā, ka v ir const. un leņķis $v_z\, v$ arī ir const. hodografs būs riņķis $\parallel \Xi H$ plaknei attālumā v_z no viņas.

Jaut. 4/ Paātrinājums.

$$j_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = 0 - r\cdot\frac{b^2 k^2}{(1+kt)^2} \quad \text{bet} \quad k = \frac{a}{r_0}$$

$$j_r = -r\cdot\frac{b^2\frac{a^2}{r_0^2}}{\left(1+\frac{a}{r_0}t\right)^2} = -r\cdot\frac{b^2 a^2}{(r_0+at)^2} = -r\cdot\frac{a^2 b^2}{r^2};$$

$$\boxed{j_r = -\frac{a^2 b^2}{r}}$$

$$j_c = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 2a\cdot\frac{bk}{1+kt} - r\cdot\frac{bk^2}{(1+kt)^2} \quad \text{bet } k = \frac{a}{r_0}$$

$$j_c = 2a\cdot\frac{b\frac{a}{r_0}}{1+\frac{a}{r_0}t} - r\cdot\frac{b\cdot\frac{a^2}{r_0^2}}{\left(1+\frac{a}{r_0}t\right)^2} = \frac{2a^2 b}{r_0+at} - r\frac{a^2 b}{(r_0+at)^2}; \quad \boxed{j_c = \frac{a^2 b}{r}}$$

$$j_z = \ddot{z} = \dot{v}_z = 0$$

$$j = \sqrt{j_r^2 + j_c^2 + j_z^2} = \sqrt{\frac{a^4 b^4}{r^2} + \frac{a^4 b^2}{r^2}}; \quad \boxed{j = \frac{a^2 b}{r}\sqrt{1+b^2}}$$

ar radiusa-vektora r pieaugumu paātrinājums samazinājās

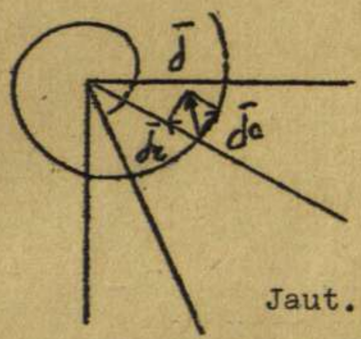
$$\cos(rj) = \frac{j_r}{j} = -\frac{a^2 b^2\cdot r}{r a^2 b\sqrt{1+b^2}} = -\frac{b}{\sqrt{1+b^2}} \quad \text{Const}$$

$$\cos(cj) = \frac{j_c}{j} = \frac{a^2 b\cdot r}{r\cdot a^2 b\sqrt{1+b^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} \quad \text{const}$$

$$\cos(zj) = \frac{j_z}{j} = 0; \quad (jz) = 90^\circ$$

paātrinājums arvienu $\parallel$ $\overline{XY}$ pl. un šķērsojās ar OZ asi zem 90°

Ievērojot, ka $\dot{j}_r < 0$ un $\dot{j}_c > 0$ varam uzzīmēt $\dot{j}$ virzienu uz iekšējo pusi trajektorijai.



$\dot{j}$ šinī gadijumā maina punkta ātruma virzienu, jo v ir const.un ja nebūtu paātrinājuma, kustība būtu taisnvirzieniska.

Jaut. 5/ Līcības radiuss ρ

v = const

$$j_t = \frac{dv}{dt} = 0$$

un tad $j_n = j = \frac{a^2 b}{r}\sqrt{1+b^2}$

bet $j_n = \frac{v^2}{\rho}$; $\boxed{\rho = \frac{v^2}{j_n} = \frac{a^2+a^2b^2+c^2}{a^2 b\sqrt{1+b^2}}\cdot r}$

Līcības radiuss ir mainīgs un aug proporcionāli radiusam vektoram.