N. ROZENAUERS

LATVIJAS ŪNIVERSITATES
DOCENTS

MĒCHANIKA

II daļa

CIETA ĶERMEŅA KINĒMATIKA

1 9 3 0.

Techniskā institūta biedrības izdevums

N. R O Z E N A U E R S.

Latvijas Ūniversitātes docents.

M Ē C H A N I K A

II. daļa.

CIETA ĶERMEŅA KINEMATIKA.

Lekcijas lasītas Latvijas Ūniversitātē
un Privātā Rīgas Techniskā Institūtā

1930.

Techniskā institūta biedrības izdevums.

P r i e k š v ā r d s.

Izlaižot lekcijas Mēchanikā otro daļu: "Cieta ķermeņa kinematiku", turu par vajadzīgu vēlreiz atkārtot, ka šīm lekcijām pamatā ir liktas L.Ū. Prof. Dr.Ing. E.Cizareviča izcilus lekcijas.

Starp papildinājumiem ir minami: komplanas kustības analitiska aplūkošana. Tāpat ir nācis klāt no autora uzstādītais: "Vairāku virzes un griezes kustību pie vienas skrūves kustības reducēšanas paņēmiens.

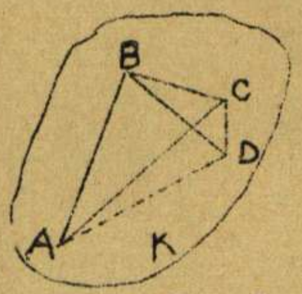
N.R.

———— 0 ————

§ 1. ABSOLUTI CIETA ĶERMEŅA PAMATA KUSTĪBAS.

Absoluti cieta ķermeņa definicija: Absoluti ciets ķermenis ir tāds ģeometrisku punktu sakopojums, kurā atsevišķo punktu savstarpējie attālumi nemainās, kaut arī ķermenis atrodās kustībā.

I. Teorema: Absoluti cieta ķermeņa kustība ir noteikta ar triju punktu, neguļošu vienā taisnē, kustību, jeb ar pamattrijstūra kustību.



Zīm.1.

Pieņemsim, ka absoluti ciets ķermenis ir pārvietojies no stāvokļa K stāvoklī K'. Izvēlēsim ķermenī stāvoklī K trīs punktus A, B un C neguļošus vienā taisnē. Šie punkti veidos trijstūri, kuru mēs nosauksim par pamattrijstūri. Pēc ķermeņa pārvietošanas otrā stāvoklī punkts A pāries punktā A', punkts B pāries punktā B' un punkts C punktā C', pie kam viss pamattrijstūris ABC pāries jaunā stāvoklī A' B' C'.

Bet pēc cieta ķermeņa definicijas attālumi starp atsevišķiem punktiem nevar mainīties, tā tad AB = A' B'; BC = B' C' un AC = A' C', no kurienes seko, ka △ ABC = △ A' B' C'.

Kā redzams viss pamattrijstūris ir pārgājis jaunā stāvoklī, nemainot savu malu garumus, un līdz ar to arī savu lielumu un formu.

Lai pierādītu, ka visa cieta ķermeņa kustība ir noteikta ar pamattrijstūra kustību, izvēlēsim stāvoklī K vēl kādu ceturto punktu D. Savienojot šo punktu ar pamattrijstūra virsotnēm, dabūsim tetraedru. Stāvoklī K' minētā tetraedra pamats ir jau noteikts un, lai dabūtu virsotni, t.i. punktu D', jāvelk trīs lodes virsmas ar radiusiem AD, BD un CD. Šādas virsmas krustojās divos punktos, pie kam šie punkti atrodās △ A' B' C' dažādās pusēs, bet mums no šiem punktiem ir jāizvēl tādu, lai tetraedrs A' B' C' D' būtu kongruents tetraedram ABCD, ar šo noteikumu tad punkta D' stāvoklis būs pilnīgi noteikts.

Tādā pašā kārtā būs noteikti arī visi citi cieta ķermeņa punkti otrā stāvoklī, tā tad arī paša ķermeņa stāvoklis būs noteikts ar pamattrijstūra stāvokli un ja būs zināma pamattrijstūra kustība, tad arī būs zināma visa ķermeņa kustība.

Ķermeņa kustība saucās par galīgu, ja otrs ķermeņa stāvoklis atrodās galīgā attālumā no pirmā.

Ķermeņa kustība saucās par elementāru, ja otrs ķermeņa stāvoklis atrodās bezgalīgi tuvi pirmam stāvoklim.

Ķermeņa kustības iedalīšana: Katru galīgu kustību var sadalīt elementārās kustībās, un katru elementāru kustību var sadalīt divās elementārās pamata kustībās:

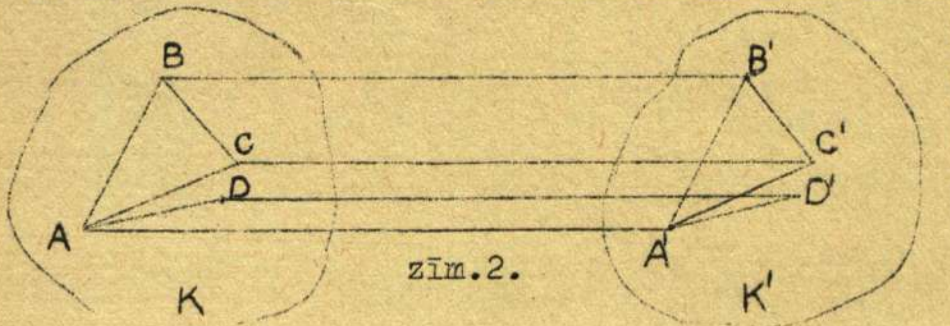
1) virzes kustībā jeb translacijā un
2) griezes kustībā jeb rotacijā.

VIRZES KUSTĪBA jeb TRANSLACIJA.

DEFINICIJA: Cieta ķermeņa virzes kustība ir tāda kustība, pie kuras divas krustojošas taisnes arvienu paliek sev paralelas.

Virzes kustības iedalīšana: Atkarībā no tā, vai punktu trajektorijas virzes kustībā ir taisnes jeb līkas linijas, mēs atšķiram taisnvirzienisku un līkumainu virzes kustību.

I. Teorema: (I. daļa) Taisnvirziena virzes kustībā visiem punktiem noietie, par to pašu laika sprīdi, ceļi ir vienādi un paraleli.



zīm.2.

Pieņemsim, ka ciets ķermenis ir pārgājis no stāvokļa k stāvoklī k_1 taisnvirziena virzes kustībā.

Izvēlēsim ķermenī 3 punktus A, B un C, kuri pāries A', B' un C'

Pēc virzes kustības definicijas divas krustojošas taisnes virzes kustībā pārvietojās sev paraleli,

tā tad $AB \parallel A'B'$ un $AC \parallel A'C'$

Pēc cieta ķermeņa definicijas attālumi starp ķermeņa punktiem nemainās, tā tad

$AB = A'B'$ un $AC = A'C'$

Apvienojot dabūsim $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ un $\overline{AC} = \overline{A'C'}$

Četrstūris $ABB'A'$ ir paralelograms, jo $\overline{AB} = \overline{A'B'}$

no kuŗienes seko: $\overline{AA'} = \overline{BB'}$

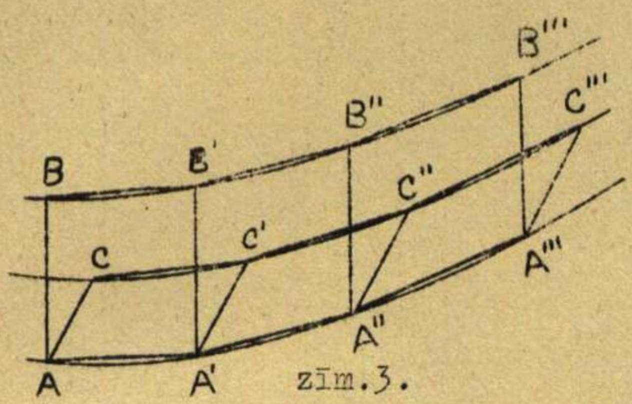
Četrstūris $ACC'A'$ ir paralelograms, jo $\overline{AC} = \overline{A'C'}$, no kurienes seko $\overline{AA'} = \overline{CC'}$

Ja mēs izvēlēsim vēl kādu punktu D, tad tādā pašā kārtā varam pierādīt, ka četrstūris $ADD'A'$ arī ir paralelograms un $\overline{AA'} = \overline{DD'}$

tā tad vispārīgi: $\overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{CC'} = \overline{DD'} = \ldots\ldots$

ar ko teorema ir pierādīta.

I. Teorema: (II daļa) Līkumainā virzes kustībā, visiem punktiem noietie par to pašu laika sprīdi ceļi ir savstarpīgi kongruentas un paraleli gulošas līkas linijas.



zīm.3.

Pieņemsim, ka divas krustojošas taisnes AB un AC atrodas līkumainā virzes kustībā, pie kam punkti A, B un C apraksta līkas trajektorijas. Izvēlēsim vairākus taisnu stāvokļus $AB, A'B', A''B'', A'''B'''$ un $AC, A'C', A''C'', A'''C'''$ un savienosim punktus A ar A', A' ar A'', A'' ar A''', B ar B', B' ar B'', B'' ar B''', C ar C' u.t.t.

Uz šīs teoremas pirmās daļas pamata varam teikt, ka poligonu malas: $\overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{CC'}$

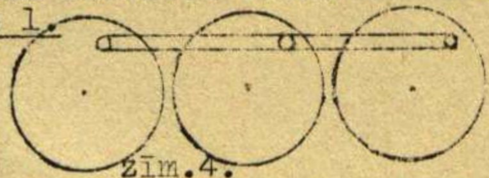
$\overline{A'A''} = \overline{B'B''} = \overline{C'C''}$ un $\overline{A''A'''} = \overline{B''B'''} = \overline{C''C'''}$

no kurienes ir redzams, ka poligoni:

$AA'A''A'''$, $BB'B''B'''$ un $CC'C''C'''$

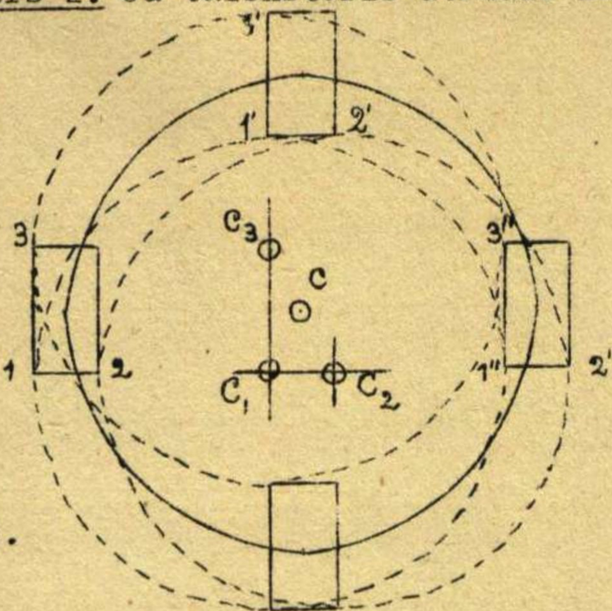
būs pilnīgi kongruenti un vienu mēs varam savietot ar otru caur vienkāršu pabīdīšanu. Ja mēs ņemsim poligona malas arvienu mazākas, tad principā lieta nemainīsies un robežas gadijumā pašas līkas trajektorijas būs pilnīgi kongruentas un paraleli gulošas, tā kā caur vienkāršu pabīdīšanu mēs varam savietot vienu ar otru.

Piemērs 1. Lokomotīves dīsteles atrodas līkumainā virzes kustībā.


zīm.4.

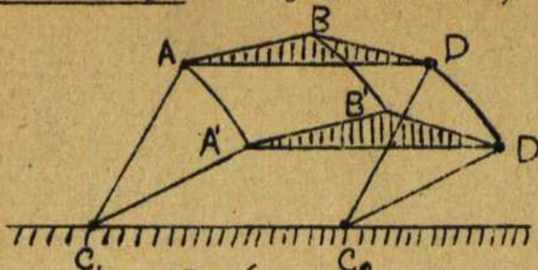
Piemērs 2. Ja taisnstūris atrodas līkumainā virzes kustībā un viņa centrs apraksta piem. aploci ar centru C, tad visi citi punkti, ka piem. virsotnes 1, 2, 3 arī aprakstīs aploces ar to pašu radiusu, bet tikai šo aploču centri būs attiecīgi nobīdīti, kā parādīts zīm.5.

C_1 ir centrs aplocei, pa kuŗu kustās punkts 1, C_2 ir centrs aplocei, pa kuŗu kustās punkts 2, un C_3 ir centrs aplocei, pa kuŗu kustās punkts 3.



Zīm.5.

Piemērs 3. Trijstūris ABD, piestiprināts šarnirveidīgi ar diviem vienādiem, paraleliem stieņiem punktos C_1 un C_2, ja mēs viņu pabīdīsim, atradīsies līkumainā virzes kustībā.



zīm.6.

II.Teorema. Virzes kustībā visiem punktiem ātrumi un paātrinājumi katrā momentā ir vienādi pēc lieluma un virziena

jeb to pašu teoremu varam formulēt arī citādi:

Virzes kustībā ātrums un paātrinājums ir brīvi vektori.

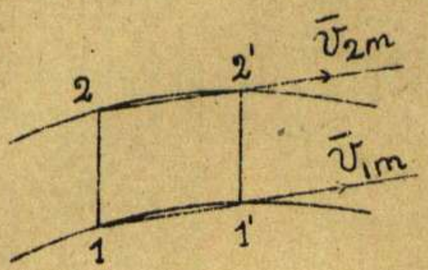
1) Pierādījums taisnvirzieniskai kustībai:

Uz I teoremas pamata visiem ķermeņa punktiem noietie ceļi s ir vienādi un paraleli, bet taisnvirzieniskā kustībā

ātrums $v = \frac{ds}{dt}$ un paātrinājums $j = \frac{d^2s}{dt^2}$ pie kam viņu virziens

sakrīt ar taisnas trajektorijas virzienu, no kurienes seko, ka ātrumi un paātrinājumi būs visiem punktiem vienādi pēc lieluma un virziena.

2) Pierādījums līkumainai kustībai:



zīm.7.

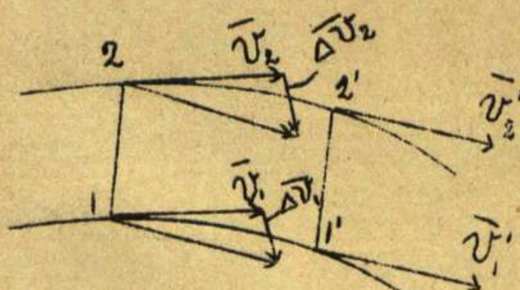
Pirmkārt apskatīsim ātrumus. Ņemsim divu punktu 1 un 2 trajektorijas līkumainā virzes kustībā un apskatīsim ceļus, noietus laika sprīdī Δt. Uz I teoremas pamata šie ceļi būs vienādi un paraleli

$$\overline{11'} = \overline{22'}$$

izdalīsim šo uz Δt, tad $\frac{\overline{11'}}{\Delta t} = \frac{\overline{22'}}{\Delta t}$

bet $\frac{\overline{11'}}{\Delta t} = \bar{v}_{1m}$ ir pirmā punkta vidējais ātrums par laika sprīdi Δt, un $\frac{\overline{22'}}{\Delta t} = \bar{v}_{2m}$ ir otra punkta vidējais ātrums par laika sprīdi Δt,

tā tad iznāk $\bar{v}_{1m} = \bar{v}_{2m}$ un pārejot uz robežu, ja Δt tiecās uz 0, dabujam $\lim\left(\bar{v}_{1m}\right)_{\Delta t \to 0} = \lim\left(\bar{v}_{2m}\right)_{\Delta t \to 0}$ jeb $\bar{v}_1 = \bar{v}_2$



zīm.8.

Tagad pāriesim uz paātrinājumiem. Pēc nupat pierādītā katrā momentā punktu ātrumi ir ģeometriski vienādi

$$\bar{v}_1 = \bar{v}_2 \quad \text{un} \quad \bar{v}_1' = \bar{v}_2'$$

Sastādīsim diferenci

$$\bar{v}_1' - \bar{v}_1 = \bar{v}_2' - \bar{v}_2 \quad \text{jeb} \quad \Delta\bar{v}_1 = \Delta\bar{v}_2$$

attiecināsim pret laika sprīdi Δt:

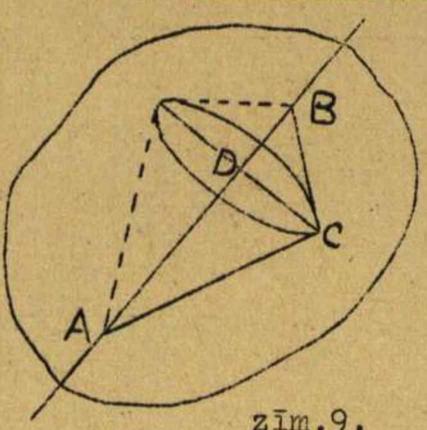
$$\frac{\Delta\bar{v}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta\bar{v}_2}{\Delta t}$$

un pāriesim uz robežām: $\lim\left(\frac{\Delta\bar{v}_1}{\Delta t}\right)_{\Delta t \to 0} = \lim\left(\frac{\Delta\bar{v}_2}{\Delta t}\right)_{\Delta t \to 0}$

$$\lim\left(\bar{j}_{1m}\right)_{\Delta t \to 0} = \lim\left(\bar{j}_{2m}\right)_{\Delta t \to 0} \quad \text{jeb} \quad \bar{j}_1 = \bar{j}_2$$

GRIEZES KUSTĪBA ap nekustošu asi jeb ROTACIJA.

DEFINICIJA: Cieta ķermeņa griezes kustība ap asi ir tāda kustība, pie kuŗas divi ķermeņa punkti atrodas mierā.

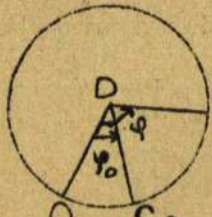


zīm.9.

Šinīs divos punktos A un B izvēlam divas pamattrijstūra virsotnes, tad pie ķermeņa kustības, kustošies tikai trešā virsotne C. Bet pēc cieta ķermeņa definicijas attālumi starp punktiem A un C un starp punktiem B un C nevar mainīties, tamdēļ punktam C no vienas puses jāatrodas uz lodes virsmas ar centru punktā A un radiusu AC un no otras puses jāatrodas uz lodes virsmas ar centru punktā B un radiusu BC.

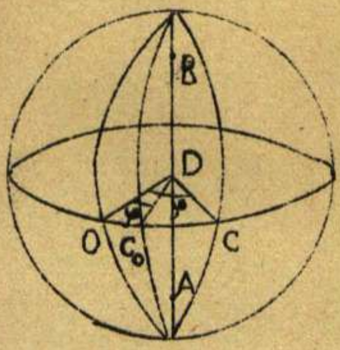
Bet divas lodes virsmas krustojas pa riņķi, tā tad punkts C aprakstīs riņķi un šī riņķa radiuss būs DC: attālums no punkta C līdz taisnei AB.

Taisni AB, kuŗa iet caur diviem nekustošiem punktiem sauc par griezes asi, jo visi punkti, guļoši uz šīs taisnes, atrodas mierā.



zīm.10.

Tādā kārtā ķermeņa griezes kustība ap asi pievedas pie punkta kustības pa riņķi un viss, kas bija teikts par punkta kustību pa riņķi "Punkta Kinematikā", attiecās uz ķermeņa griezes kustību ap asi: tāpat, kā punkta kustība pa riņķi ir noteikta ar $\varphi = f(t)$, pie kam leņķis φ tiek atskaitīts no nullpunkta pret pulksteņa rādītāja virzienu, tāpat arī ķermeņa griezes kustība ap asi tiek noteikta ar $\varphi = f(t)$.



zīm.11.

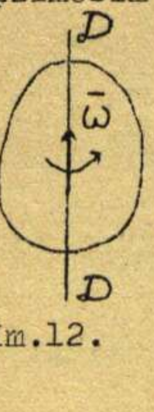
Minēto leņķi φ mēs varam apskatīt arī citādi: velkam ap punktu D ar radiusu DC lodes virsmu uz kuŗas tad punkts C aprakstīs lielo riņķi. Caur izvēlēto uz lielā riņķa nullpunktu O un asi AB velkam nekustošo meridianplakni un caur punktu C un asi AB velkam vēl kustošo meridianplakni. Leņķis starp abām plaknēm, kuŗš raksturo ķermeņa griezes kustību, būs $\angle\varphi$ un ja ķermenis atrodas griezes kustībā - šis leņķis ir funkcija no laika: $\varphi = f(t)$

Ja ķermeņa griezes kustība sākas tanī momentā, kad punkts C atrodas vietā C_o, varam ievilkt arī sākuma meridianplakni, kuŗa veidos ar nekustošo meridianplakni $\angle\varphi_o$.

Varam vēl piezīmēt, ka visiem ķermeņa punktiem, kuŗi atrodas uz vienas meridianplaknes $\angle\varphi$ būs tas pats.

Ātrums ķermeņa griezes kustībā ap nekustošu asi: Tāpat kā punkta kustībā pa riņķi $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$ apzīmēja punkta leņķisko ātrumu, arī ķermeņa griezes kustībā ap asi mēs sauksim $\frac{d\varphi}{dt}$ par ķermeņa griezes ātrumu un apzīmēsim viņu ar ω :

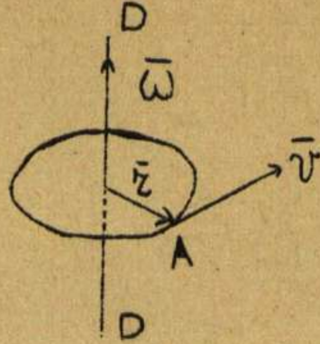
$$\boxed{\omega = \frac{d\varphi}{dt}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$



zīm.12.

Šo ātrumu mēs uzskatīsim kā vektoru, kuŗa virziens sakrīt ar griezes ass virzienu, pie kam no $\overline{\omega}$ gala punktā jāredz kustību pret pulksteņa rādītāja virzienā. Ņemot arī vērā, ka vektora $\overline{\omega}$ fizikalā nozīme nemainās pie pārnešanas citā griezes ass punktā, griezes ātruma vektors būs slīdošs vektors.

<u>Punkta linearais ātrums ķermeņa griezes kustībā.</u> Loks u, kuŗu apraksītīs punkts, ja viņa radiuss – vektors ir r, būs $u = r.\varphi$



bet punkta ātrums $v = \frac{du}{dt} = r\frac{d\varphi}{dt} = r.\omega$

$$v = \omega r$$

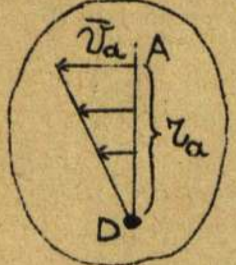
Pie kam ātruma vektors atrodas plaknē perpendikulārā pret griezes asi un bez tam ir arī perpendikulars radiusam-vektoram.

Piešķirot virzienu arī radiusam-vektoram $\bar{r}$ no ass uz punktu, mēs varam pēdējā formulā v uzskatīt netikai kā algebraisku, bet kā vektorproduktu no griezes ātruma $\bar{\omega}$ ar radiusu-vektoru r un tādā kārtā noteikt arī $\bar{v}$ virzienu

zīm.12.

$$\boxed{\bar{v} = [\bar{\omega}.\bar{r}]} \quad \text{.........(2)}$$

Attīstot šo produktu atkal, iznāk $v = \omega.r.\sin 90^\circ = \omega.r$



<u>Sakars starp ātrumu vektoriem punktiem, kuŗi atrodas uz viena radiusa vektora.</u>

Pirmkārt konstatējam, ka ātrumu vektori visi ir perpendikulari radiusam-vektoram, tā tad savstarpīgi paraleli, bez tam, ņemot vērā, ka ātrums $v = \omega.r$ ir proporcionāls radiusam-vektoram, varam teikt, ka ātrumu vektoru galapunkti atrodas vienā taisnē, ejošā caur griezes asi D. (sk.zīm.13)

zīm.13.

<u>Paātrinājums ķermeņa griezes kustībā ap nekustošu asi.</u>

Tā pat, kā punkta kustībā pa riņķi $\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon$ apzīmēja punkta leņķisko paātrinājumu, arī ķermeņa griezes kustībā ap asi mēs sauksim $\frac{d\omega}{dt}$ par ķermeņa <u>griezes kustības paātrinājumu</u> un apzīmēsim viņu ar ε

$$\boxed{\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}} \quad \text{...............(3)}$$

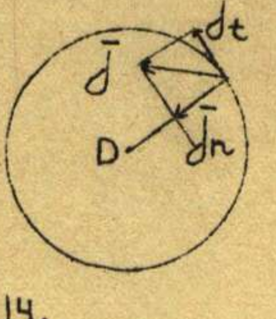
Griezes kustības paātrinājums $\bar{\varepsilon}$, kā vektora $\bar{\omega}$ atvasinātā arī būs vektors, pie kam, ja $d\omega$ ir pozitivs, tad arī ε ir pozitivs, bet ja $d\omega$ ir negativs, tad ari ε ir negativs.

Ņemot vērā, ka abi vektori ω un $\bar{\varepsilon}$ var būt kā pozitivi, tā arī negativi, ir iespējami četri gadījumi, sakopoti sekošā tabelē:

ja ω ir (+) un ε ir (+), tad kustība ir paātrināta pozitivā virzienā
" ω " (–) " ε " (–), " " " " negativā "
" ω " (+) " ε " (–), " " " palēnīnāta pozitivā "
" ω " (–) " ε " (+), " " " " negativā "

<u>Punkta paātrinājums ķermeņa griezes kustībā.</u>

Ķermeņa griezes kustībā ap asi visi ķermeņa punkti apraksta riņķus, tā tad viņu paātrinājumu projekcijas uz tangenti un normali būs:



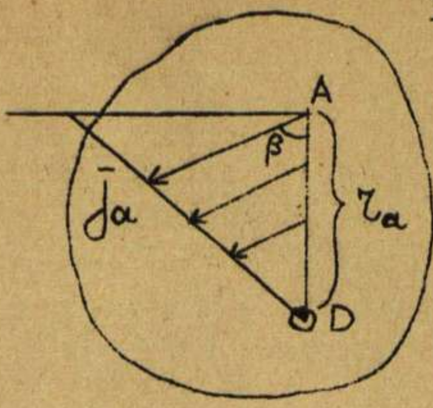
$$j_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega.r) = r\frac{d\omega}{dt} = r\varepsilon \; ; \quad \boxed{j_t = r\varepsilon}$$

$$j_n = \frac{v^2}{r} = \frac{(\omega r)^2}{r} = r\omega^2 \; ; \quad \boxed{j_n = r\omega^2} \quad (4)$$

un paātrinājums $j = \sqrt{j_t^2 + j_n^2}$; $\boxed{j = r\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}}$ (5)

zīm.14.

Sakars starp paātrinājumu vektoriem punktiem, kuri atrodas uz viena radiusa-vektora.



zīm.15.

Leņķis starp paātrinājuma vektoru un radiusu-vektoru ir noteikts ar

$$tg\beta = \frac{j_t}{j_n} = \frac{r\tau}{r\omega^2} = \frac{\tau}{\omega^2}$$

Kā redzams paātrinājuma virziens, t.i. $tg\beta$ nav atkarīgs no punkta radiusa-vektora, tā tad visiem punktiem $tg\beta$ ir tas pats un paātrinājuma vektori būs paraleli. Bez tam paātrinājums j ir proporcionals radiusam-vektoram (formula 5), tā tad paātrinājumu vektoru gala punktiem jāatrodas vienā taisnē, ejošā caur griezes asi D. (zīm.15)

Ķermeņa griezes kustības klasifikacija.

1) Ja griezes ātrums ω ir const. griezes kustība ir vienmērīga.
2) Ja griezes paātrinājums τ ir const., griezes kustība ir vienmērīgi mainīga un ja ω un τ piemīt viena zīme – vienmērīgi paātrināta, bet ja ω un τ zīmes ir dažādas, kustība ir vienmērīgi palēnināta.

Vienmērīgas griezes kustības likums.

Vienmērīga griezes kustība ir raksturota ar $\omega = Const = \omega_0$

bet $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$; $\int d\varphi = \int \omega_0 dt + C$; $\varphi = \omega_0 t + C$

no sākuma apstākļiem: $\varphi_0 = \omega_0 t_0 + C$

no kurienes

$$\boxed{\varphi = \varphi_0 + \omega_0(t - t_0)} \qquad \ldots\ldots\ldots(6)$$

Vienmērīgi mainīgas griezes kustības pamatformulas.

Vienmērīgi mainīga griezes kustība ir raksturota ar $\tau = Const. = \tau_0$ bet $\tau = \frac{d\omega}{dt}$ un integrejot atrodam

$$\int d\omega = \int \tau_0 dt + C_1$$

$\omega = \tau_0 t + C_1$ no sākuma apstākļiem $\omega_0 = \tau_0 t_0 + C_1$ un

$$1) \quad \boxed{\omega = \omega_0 + \tau_0(t - t_0)}$$

Šī formula reprezentē vienmērīgi mainīgas griezes kustības ātruma likumu.

Aizvietojot 1) formulā $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ un integrējot, dabujam

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\tau_0}{2}(t - t_0)^2 + C_2$$

no sākuma apstākļiem

$$\varphi_0 = \omega_0 t_0 + C_2 \quad \text{un}$$

$$2) \quad \boxed{\varphi = \varphi_0 + \omega_0(t - t_0) + \frac{\tau_0}{2}(t - t_0)^2}$$

Otra formula reprezentē vienmērīgi mainīgas griezes kustības likumu.

Izslēdzot no 1) un 2) formulas laiku, atrodam trešo formulu

$$t - t_0 = \frac{\omega - \omega_0}{\tau_0}$$

$$\varphi - \varphi_0 = \omega_0 \frac{\omega - \omega_0}{\tau_0} + \frac{\tau_0}{2} \cdot \frac{(\omega - \omega_0)^2}{\tau_0^2}$$

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{2\omega\omega_0 - 2\omega_0^2 + \omega^2 + \omega_0^2 - 2\omega\omega_0}{2\tau_0}$$

$$3)\quad \boxed{\varphi - \varphi_0 = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\tau_0}}$$

no 3) formulas tieši seko 4) formula

$$4)\quad \boxed{\omega = \pm\sqrt{\omega_0^2 + 2\tau_0(\varphi - \varphi_0)}}$$

Zīme šeit jāņem tāda, kāda sākumā piemīt ω_0 un viņu jāpatur tik ilgi, kamēr ω sasniegs nulli.

Ņemsim 2) formulu $\varphi - \varphi_0 = \left[\omega_0 + \frac{\tau_0}{2}(t - t_0)\right] \cdot (t - t_0)$

un aizvietosim lielās iekavās $t - t_0 = \frac{\omega - \omega_0}{\tau_0}$

$$\varphi - \varphi_0 = \left[\omega_0 + \frac{\tau_0}{2} \cdot \frac{\omega - \omega_0}{\tau_0}\right] \cdot (t - t_0) = \frac{2\omega_0 + \omega - \omega_0}{2}(t - t_0) =$$

$$= \frac{\omega + \omega_0}{2}(t - t_0)$$

$$5)\quad \boxed{\varphi - \varphi_0 = \frac{\omega + \omega_0}{2}(t - t_0)}$$

Griezes kustības grafikas.

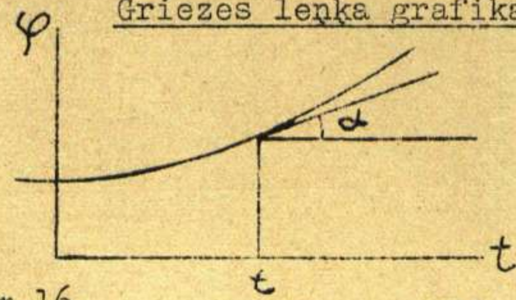
Griezes kustības elementi φ, υ un τ vispārīgi ir kādas $f(t)$ un tāpat kā punkta kinematikā mēs varam tādas funkcijas uzkonstruet grafiski, atliekot horizontalas ass virzienā argumentu laiku t un vertikalās ass virzienā funkcijas vērtības.

$\varphi = f(t)$ attēlotu grafiski mēs sauksim par griezes leņķa grafiku.

$\omega = f(t)$ attēlotu grafiski mēs sauksim par griezes ātruma grafiku.

$\tau = f(t)$ attēlotu grafiski mēs sauksim par griezes paātrinājuma grafiku

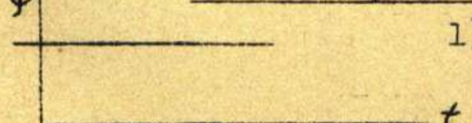
Griezes leņķa grafikas $\varphi = f(t)$ pamatīpašība.



zīm.16.

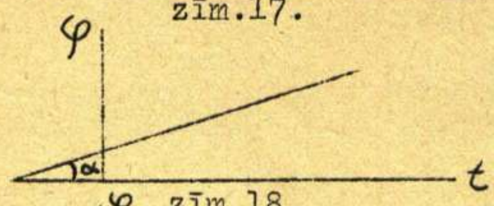
Ja $\varphi = f(t)$, tad no augstākas matemātikas $\frac{d\varphi}{dt} = \operatorname{tg}\alpha$, bet $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$, tātad $\omega = \operatorname{tg}\alpha$ tas nozīmē, ka griezes ātrums laika momentā t reprezentējās ar leņķa tangensu, kuŗu veido tangente attiecīgā grafikas vietā ar t-asi.

Kustības pētīšana pēc (φt) grafikas.

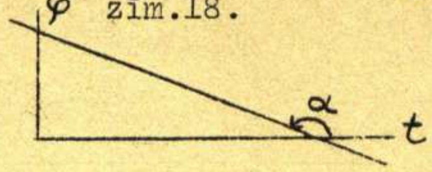


zīm.17.

1) (φt) grafika ir horizontala taisne, bet tad $\angle\varphi$ ar laiku nemainās un ķermenis ap asi negriežās.



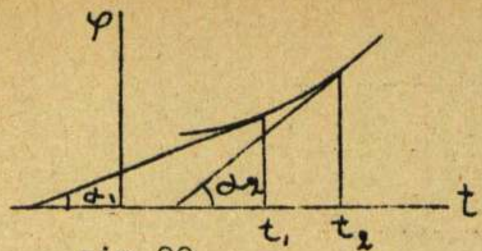
zīm.18.



zīm.19.

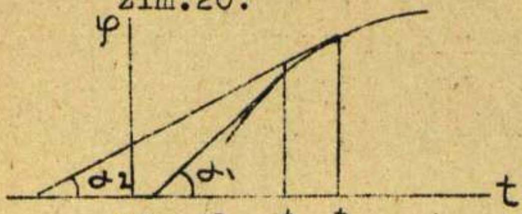
2) (φt) grafika ir taisna linija: Šādā gadijumā katrā laika momentā $\operatorname{tg}\alpha = \frac{d\varphi}{dt} = \omega$ paliek Const., bet tas nozīmē, ka griezes kustība ir vienmērīga, pie kam pirmā gadijumā (zīm.18) viņa notiek pozitivā virzienā un otrā (zīm.19) viņa notiek negativā virzienā.

=



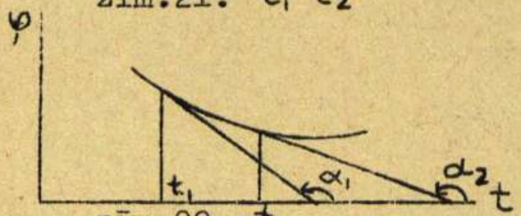
zim.20.

3) (φ t) grafika ir līka ar izliekumu uz leju, pie kam līkas ordinates pieaug. Kā redzams, šeit ar laiku φ un ω pieaug, tā tad kustība ir paātrināta pozitivā virzienā.



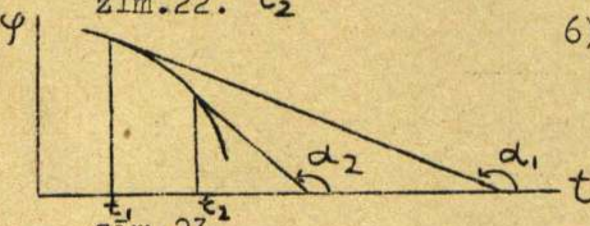
zīm.21. t_1 t_2

4) (φt) grafika ir līka, kuŗas ordinates pieaug, bet izliekums ir uz augšu, tad ar laiku φ pieaug, bet ω samazinājās un kustība ir palēnināta pozitivā virzienā.



zīm.22. t_2

5) (φt) grafika ir līka, kuŗas ordinates samazinājās, un izliekums ir uz leju; tādā gadijumā ar laiku φ samazinājās un ω būdams negativs pēc absoluta lieluma arī samazinājās, tā tad kustība ir palēnināta negativā virzienā.

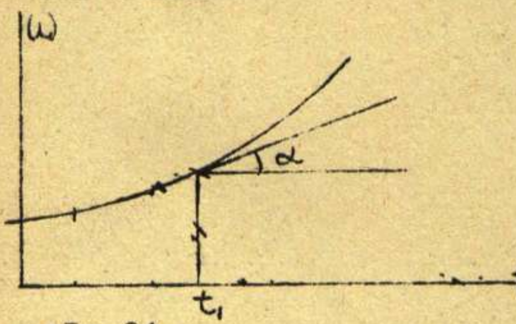


zīm.23.

6) (φt) grafika ir līka, kuŗas ordinates samazinājās un izliekums ir uz augšu; tādā gadijumā ar laiku φ samazinājās un ω, būdams negativs, pēc absoluta lieluma pieaug, tā tad kustība būs paātrināta negativā virzienā.

Griezes ātruma grafikas.

Griezes ātruma (ωt) grafikas pirmā pamatīpašība.



zīm.24.

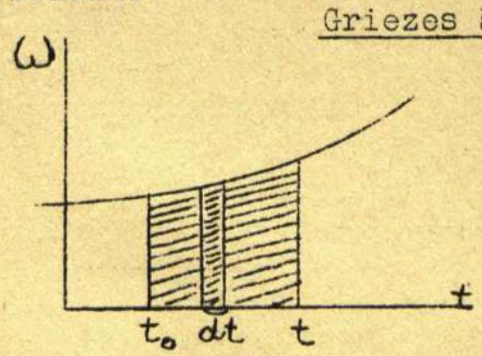
Ja $\omega = f(t)$, tad no augstākas matemātikas

$$\frac{d\omega}{dt} = \mathrm{tg}\,\alpha$$

bet $\frac{d\omega}{dt} = \tau$, tā tad $\tau = \mathrm{tg}\,\alpha$

tas nozīmē, ka griezes paātrinājums laika momentā t reprezentējās ar leņķa tangensu, kuŗu veido tangente attiecīgā grafikas vietā ar t- asi.

Griezes ātruma (ωt) grafikas otra pamatīpašība.



zīm.25.

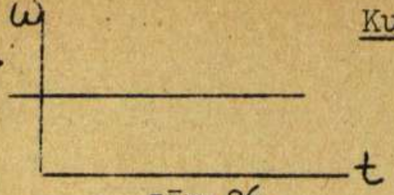
Sastādīsim formulu laukumam, ieslēgtam starp (ωt) grafiku, t-asi un divām ordinatēm, vilktām laika momentos t_0 un t ; šim nolūkam izdalīsim laukuma elementu $d\Omega$ platumā dt, viņa laukums būs $d\Omega = \omega dt$ un integrejot dabūsim

$$\Omega = \int_{t_0}^{t} \omega\, dt \qquad \text{aizvietosim } \omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

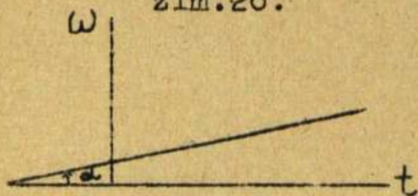
$$\Omega = \int_{t_0}^{t} \frac{d\varphi}{dt} \cdot dt = \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \varphi - \varphi_0 \;;\quad \Omega = \varphi - \varphi_0$$

Laukums, ieslēgts starp (ωt) grafiku un t-asi reprezentē noieto leņķi attiecīgā laika sprīdī.

Kustības pētīšana pēc (ωt) grafikas.


zīm.26.

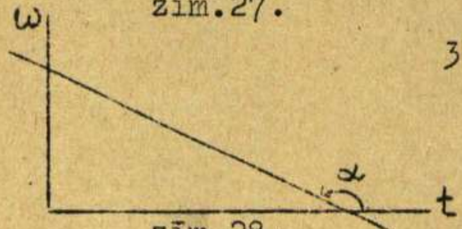
1) (ωt) grafika ir horizontala taisne, tādā gadijumā ω = Const. un griezes kustība ir vienmērīga.


zīm.27.

2) (ωt) grafika ir taisna linija, kuŗas ordinates pieaug: tādā gadijumā katrā laika momentā

$$tg\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \tau \quad \text{paliek Const.}$$

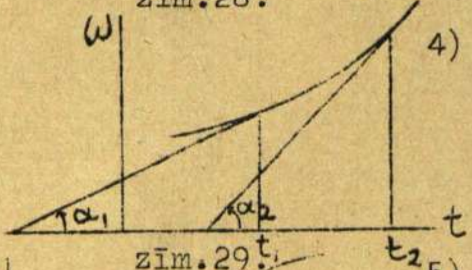
un ir pozitivs, tā tad kustība ir vienmērīgi paātrināta.


zīm.28.

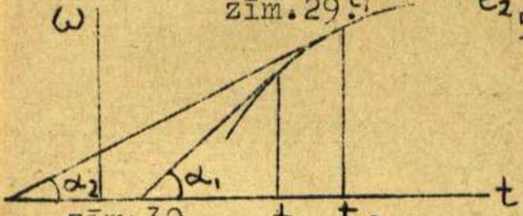
3) (ωt) grafika ir taisna linija, kuŗas ordinates samazinājās: tādā gadijumā katrā laika momentā

$$tg\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \tau \quad \text{paliek Const.}$$

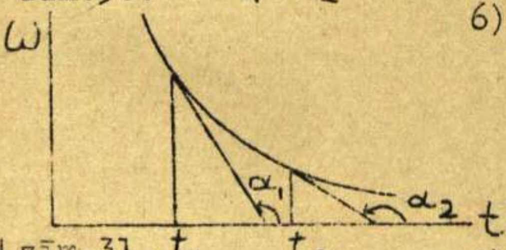
bet negativs, tā tad kustība ir vienmērīgi palēnināta.


zīm.29.

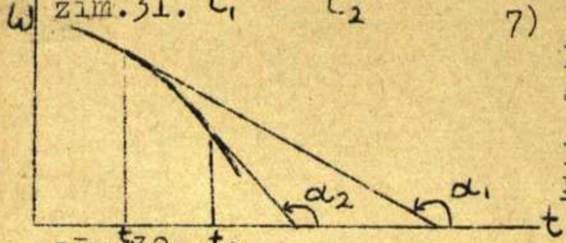
4) (ωt) grafika ir līka, ar izliekumu uz leju, pie kam līkas ordinates pieaug. Kā redzams, griezes ātrums ω un paātrinājums τ ar laiku pieaug un kustība būs nevienmērīgi paātrinātrināta ar augušu paātrinājumu.


zīm.30.

5) (ωt) grafika ir līka ar izliekumu uz augšu, pie kam līkas ordinates pieaug. Kā redzams griezes ātrums ω pieaug, bet paātrinājums τ samazinājās un kustība būs nevienmērīgi paātrināta ar dilstošu paātrinājumu.

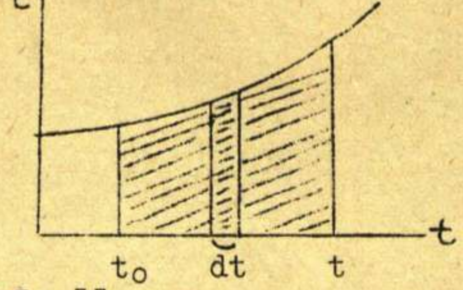

zīm.31.

6) (ωt) grafika ir līka ar izliekumu uz leju, pie kam līkas ordinates samazinājās. Kā redzams griezes ātrums ω samazinājās un paātrinājums τ, būdams negatīvs, pēc absoluta lieluma arī samazinājās, tamdēļ kustība būs nevienmērīgi palēnināta ar dilstošu paātrinājumu.


zīm.32.

7) (ωt) grafika ir līka ar izliekumu uz augšu, pie kam līkas ordinates samazinājās. Kā redzams griezes ātrums ω samazinājās, bet paātrinājums τ, būdams negativs, pēc absoluta lieluma pieaug, tamdēļ kustība būs nevienmērīgi palēnināta ar augošu paātrinājumu.

Griezes paātrinājuma (τt) grafikas pamatīpašība.


zīm.33.

Uziesim laukumu, ieslēgtu starp (τt) grafiku, t-asi un divām ordinatēm, laika momentos t_0 un t; šim nolūkam izdalīsim laukuma elementu $d\Omega$ platumā dt. Elementa laukums būs

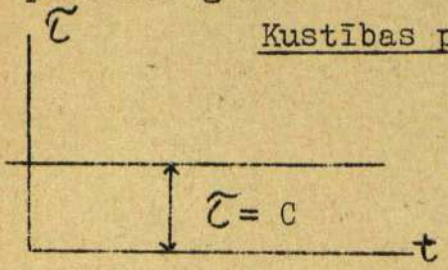
$$d\Omega = \tau dt$$

un integrējot: $\Omega = \int_{t_0}^{t} \tau dt$ bet $\tau = \frac{d\omega}{dt}$

$$\Omega = \int_{t_0}^{t} \frac{d\omega}{dt} \cdot dt = \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \omega - \omega_0 \; ; \; \Omega = \omega - \omega_0$$

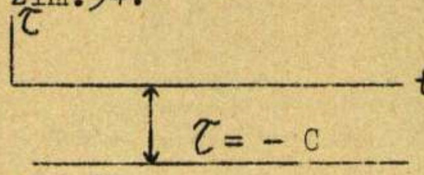
Rezultāts rāda, ka laukums, ieslēgts starp (τt) grafiku un t-asi, reprezentē griezes ātruma pieaugumu āttiecīgā laika sprīdī.

Kustības pētīšana pēc (τt) grafikas.



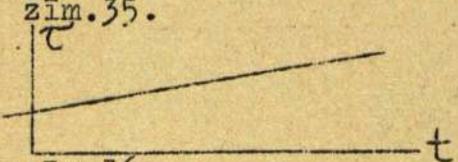
Ja (τt) grafika ir horizontala taisne augšpus t-ass, tad paātrinājums τ ir Const. un pozitivs un kustība vienmērīgi paātrināta.

zīm.34.



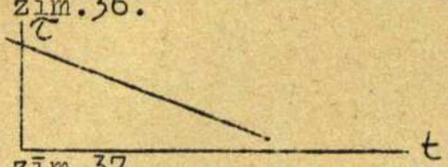
Ja (τt) grafika ir horizontala taisne zem t-ass, tad paātrinājums τ ir Const., bet negativs un kustība vienmērīgi palēnināta.

zīm.35.



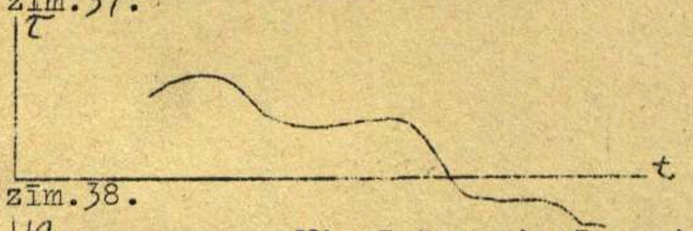
Ja (τt) grafika ir taisna linija, kuŗas ordinates pieaug, tad kustība ir nevienmērīgi paātrināta ar augošu paātrinājumu.

zīm.36.



Ja (τt) grafika ir taisna linija, kuŗas ordinates samazinajās, tad kustība ir nevienmērīgi palēnināta ar dilstošu paātrinājumu.

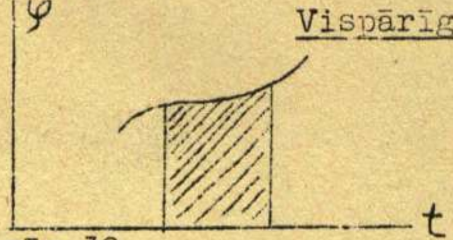
zīm.37.



Vispārīgi, kamēr paātrinājums ir pozitivs, kustība ir paātrināta un kad paātrinājums ir negativs, kustība ir palēnināta.

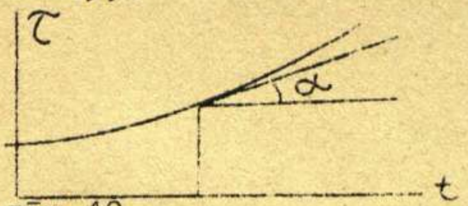
zīm.38.

Vispārīga piezīme pie apskatītām grafikām.



Kā griezes leņka (φt) grafikas laukumam, tā arī griezes paātrinājuma (τt) grafikas tangentes virzienam nav mēchaniskas nozīmes, kādēļ viņas arī netika apskatītas.

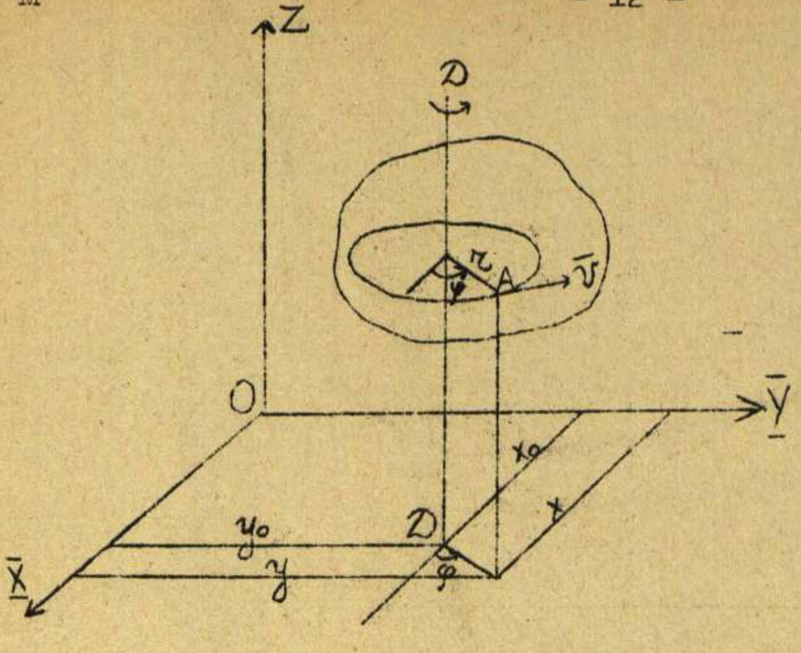
zīm.39.



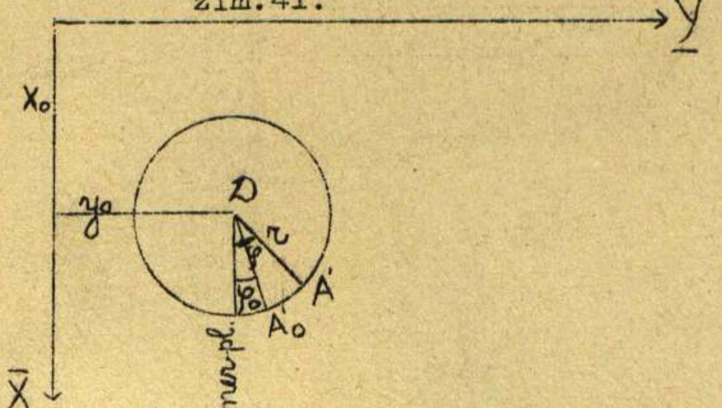
zīm.40.

Griezes kustība koordinātēs.

Šinī nodaļā apskatīsim, ka griezes kustībā ķermeņa punkta ātruma un paātrinājuma projekcijas izteicas caur punkta koordinātēm un ķermeņa griezes kustības elementiem: griezes ātrumu ω un griezes paātrinājumu τ.



zīm.41.



zīm.42.

Analitisks izvedums.
Pieņemsim, ka ķermenis griežās ap nekustošu ass DD un griezes kustība ir dota ar

$\varphi = f(t)$, pie kam φ tiek

atskaitīts no pirmās meridianplāknes. Koordinatu sistemu izvēlēsim tā, lai OZ - ass būtu paralela griezes asij un $O\bar{X}$-ass būtu paralela pirmai meridianplaknei.

Apzīmēsim griezes ass attālumus no koordinatu plaknēm $\bar{Y}OZ$ un $\bar{X}OZ$ ar x_0 un y_0. Kustoša ķermeņa punkta A koordinātes ar x un y.

Griezes ātrums būs: $\omega = \dot{\varphi} = f'(t)$

Griezes paātrinājums:

$$\tau = \ddot{\varphi} = f''(t)$$

Kā redzams zīmējumā

$$x - x_0 = r \operatorname{Cos} \varphi$$

$$y - y_0 = r \operatorname{Sn} \varphi$$

Lai dabūtu ātruma projekcijas atvasinam šīs formulas pēc laika

$$\left.\begin{array}{ll} v_x = \dot{x} = - r \operatorname{Sn}\varphi . \dot{\varphi} \;; & \boxed{v_x = -(y - y_0)\omega} \\ v_y = \dot{y} = r \operatorname{Cos}\varphi . \dot{\varphi} \;; & \boxed{v_y = (x - x_0)\omega} \end{array}\right\} (7)$$

Lai dabūtu paātrinājuma projekcijas, atvasināsim ātruma projekcijas pēc laika

$$\bar{j}_x = \ddot{x} = - \dot{y}\omega - (y - y_0)\tau$$

$$\bar{j}_y = \ddot{y} = \dot{x}\omega + (x - x_0)\tau \quad \text{jeb pārveidojot tāļāk}$$

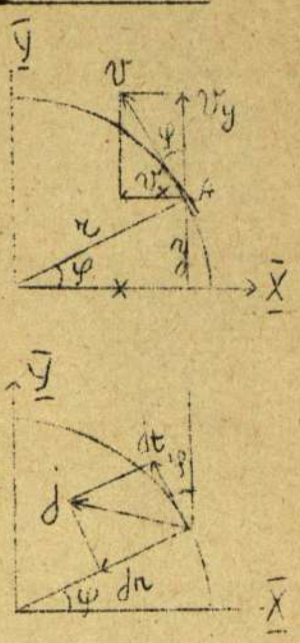
$$\left.\begin{array}{l} \boxed{\bar{j}_x = -(x - x_0)\omega^2 - (y - y_0)\tau} \\ \boxed{\bar{j}_y = -(y - y_0)\omega^2 + (x - x_0)\tau} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (8)$$

Jāpiezīmē, ka formulas (7) un (8) ir pareizas tikai tad, ja griezes ass ir paralela Z asij.

Speciāls gadijums: Griezes ass sakrīt ar Z-asi. Tādā gadijumā $x_0 = 0$; $y_0 = 0$ un formulas iznāk

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{v_x = - y\omega} \\ \boxed{v_y = x\omega} \end{array}\right. \ldots\ldots (9) \qquad \left.\begin{array}{l} \boxed{j_x = - x\omega^2 - y\tau} \\ \boxed{j_y = - y\omega^2 + x\tau} \end{array}\right. \ldots (10)$$

Tās pašas formulas, ja griezes ass sakrīt ar Z - asi, varam izvest arī ģeometriski.



zīm.43.

$$v = r\omega \qquad v_x = -v\,\mathrm{Sn}\varphi \qquad v_y = v\,\mathrm{Cos}\varphi$$

bet $\mathrm{Sn}\varphi = \frac{y}{r}$, $\mathrm{Cos}\varphi = \frac{x}{r}$

$$v_x = -r\omega\cdot\frac{y}{r}; \quad \boxed{v_x = -y\omega}$$

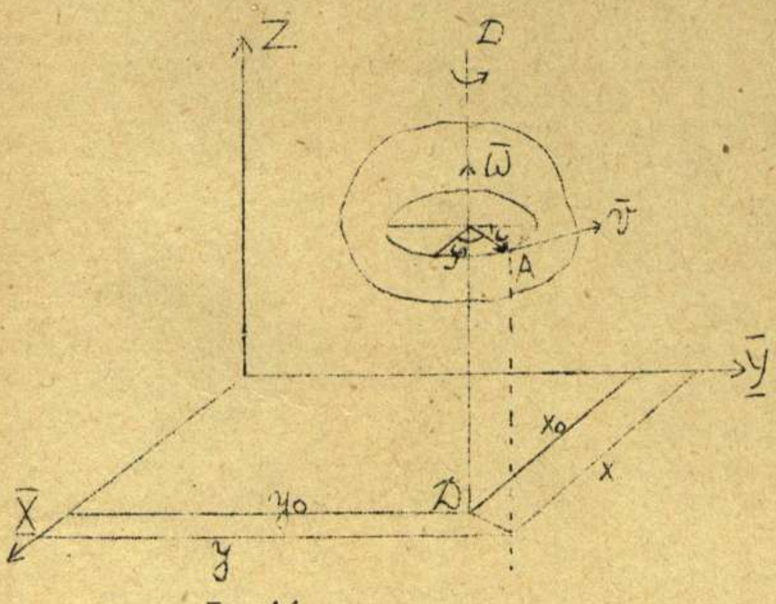
$$v_y = r\omega\cdot\frac{x}{r}; \quad \boxed{v_y = x\omega}$$

$$j_t = r\tau \begin{cases} j_{tx} = -j_t\,\mathrm{Sn}\varphi = -r\tau\cdot\frac{y}{r} = -y\tau \\ j_{ty} = j_t\,\mathrm{Cos}\varphi = r\tau\cdot\frac{x}{r} = x\tau \end{cases}$$

$$j_n = r\omega^2 \begin{cases} j_{nx} = -j_n\,\mathrm{Cos}\varphi = -r\omega^2\cdot\frac{x}{r} = -x\omega^2 \\ j_{ny} = -j_n\,\mathrm{Sn}\varphi = -r\omega^2\cdot\frac{y}{r} = -y\omega^2 \end{cases}$$

$$j_x = j_{nx} + j_{tx} \qquad \boxed{j_x = -x\omega^2 - y\tau}$$

$$j_y = j_{ny} + j_{ty} \qquad \boxed{j_y = -y\omega^2 + x\tau}$$



zīm.44.

Vektorialais izvedums.

Griezes kustība dota ar $\varphi = f(t)$, tad $\omega = \dot{\varphi} = f'(t)$ un

$$\tau = \ddot{\varphi} = f''(t).$$

Koordinatu sistemu atkal izvēlam tā, lai Z-ass būtu paralela griezes asij un $\bar{X}$-ass paralela pirmai meridianplaknei. Tāpat apzīmējam ar x_o un y_o griezes ass attālumus no koordinatu plaknēm YOZ un XOZ. Kustoša punkta A koordinātes ar x un y. Punkta A lineārais ātrums

$$v = [\bar{\omega}\cdot\bar{r}]$$

Rakstīsim vektorproduktu determinantes formā un attīstīsim viņu:

$$v = \begin{vmatrix} \bar{i}_x & \bar{i}_y & \bar{i}_z \\ 0 & 0 & \\ (x-x_o) & (y-y_o) & 0 \end{vmatrix} = -(y-y_o)\omega\,\bar{i}_x + (x-x_o)\omega\,\bar{i}_y + 0\,\bar{i}_z$$

no kurienes:

$$\boxed{v_x = -(y-y_o)\omega}$$

$$\boxed{v_y = (x-x_o)\omega}$$

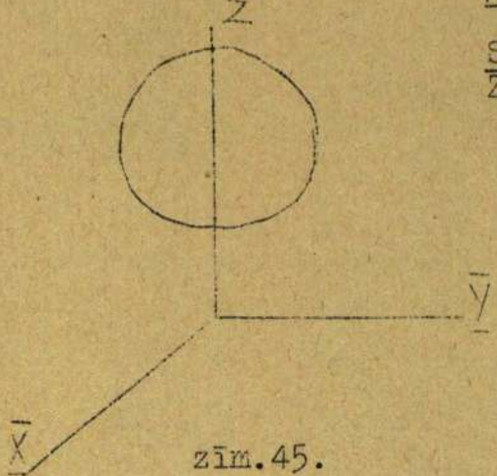
$$\boxed{v_z = 0}$$

dabujam ātruma projekcijām tās pašas izteiksmes, kā analitiskā ceļā.

Paātrinājuma projekcijas atrodam, atvasinot pēc laika ātruma projekcijas:

$j_x = -\dot{y}\omega - (y - y_0)\varepsilon$; $\boxed{j_x = -(x - x_0)\omega^2 - (y - y_0)\varepsilon}$

$j_y = \dot{x}\omega + (x - x_0)\varepsilon$; $\boxed{j_y = -(y - y_0)\omega^2 + (x - x_0)\varepsilon}$


zīm.45.

Speciāls gadijums: Griezes ass sakrīt ar Z-asi.

Tad $x_0 = 0$ un $y_0 = 0$

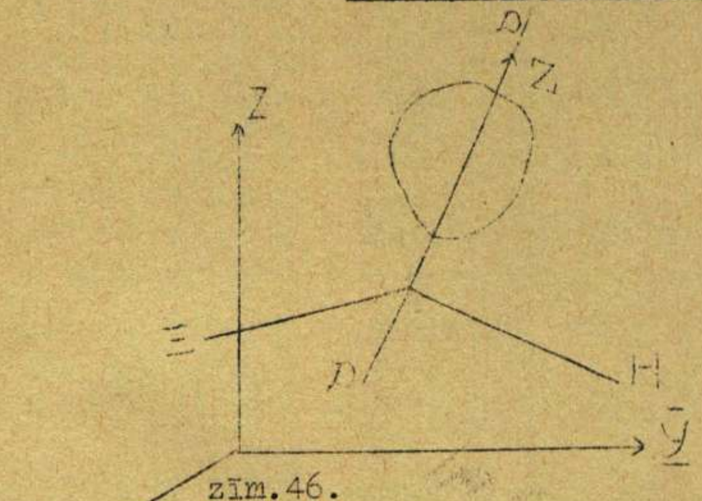
$$\boxed{v_x = -y\omega}$$

$$\boxed{v_y = x\omega}$$

$$\boxed{j_x = -x\omega^2 - y\varepsilon}$$

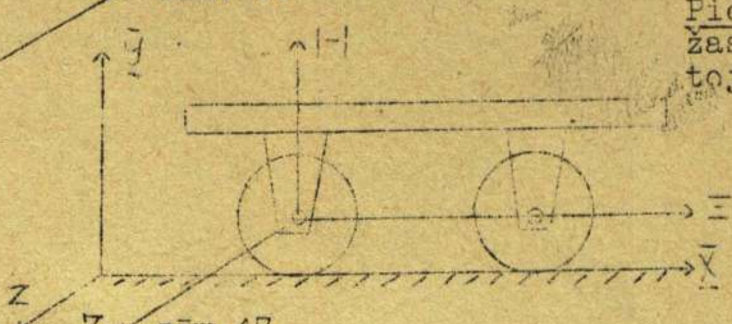
$$\boxed{j_y = -y\omega^2 + x\varepsilon}$$

Ķermeņa griezes kustība ap kustošu asi.

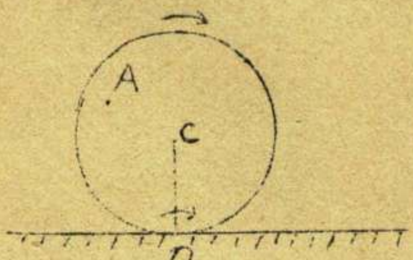

zīm.46.

Gadijumā, kad ķermeņa grieze notiek ap asi, kuŗa pate atrodas kustībā, jāņem divas koordinatu sistemas: vienu nekustošu XYZ un otru saistītu ar ķermeni $\Xi H Z$, pie kam pēdējo jāizvēl tā, lai Z ass sakristu ar griezes asi DD.

Piemērs: Platformas ritenis griežas Z-asī, bet Z -ass pate pārvietojas taisnā virzienā.


zīm.47.

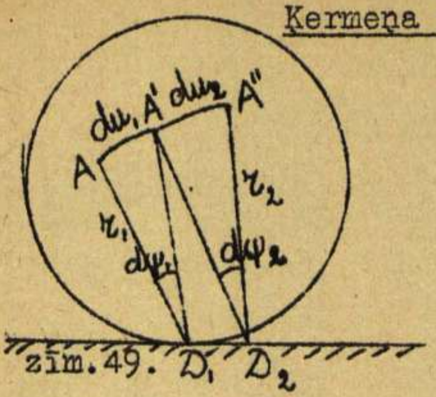
Griezes kustība ap momentano asi.


zīm.48.

Lai iepazītos ar griezi ap momentano asi, apskatīsim cilindri, kuŗš veļās pa plakni. Ja šo kustību mēs uzskatīsim kā griezi ap savu geometrisko asi C, tad cilindris paturēs šo griezes kustību tik ilgi, kamēr viņš veļās un griezes kustība būs galīga.

Bet to pašu kustību var uzskatīt arī kā griezi ap asi D, kuŗa iet caur pieskares punktu, tikai grieze ap šo asi turpināsies bezgalīgi īsu laiku, t.i. momentu, jo nākošā momentā pieskares punkts un arī griezes ass atradīsies citā vietā. Tamdēļ šādu kustību mēs sauksim par momentano griezes kustību un attiecīgo asi par momentano griezes asi.

Ķermeņa punkta trajektorija momentanā kustībā.



zīm.49.

Izvēlēsim ķermenī kādu punktu A un sadalīsim viņu galīgo kustību elementārās kustībās laika elementos dt_1 dt_2 dt_3 u.t.t.

Pirmā laika elementā dt_1 kustība būs momentana grieze ap asi, kuŗa iet caur pieskares punktu D_1 un punkta A trajektorija AA' būs loka elements du_1, kuŗa garums, ja radiuss vektors ir r_1 un centrāls leņķis $d\psi_1$

būs $du_1 = r_1\, d\psi_1$

bet par pirmo laika elementu dt_1 pieskares punkts D_1 ir pārgājis citā vietā D_2, tā tad tālāka kustība būs atkal momentana griezes kustība, bet ap citu asi, kuŗa tagad iet caur punktu D_2 un var arī nebūt paralela pirmai griezes asij. Tālāka punkta trajektorija tā tad būs loks A'A", bet ar citu radiusu $D_2A' = r_2$ un citu centralo leņķi $d\psi_2$. Loka garums $du_2 = r_2\, d\psi_2$ u.t.t.

Turpinot šādus prātojumus tālāk, atrodam, ka ķermeņa punkta trajektorija sastāv no lokiem ar dažādiem radiusiem, kuŗi vispārīgi var negulēt vienā plaknē, pie kam griezes ass pārvietojās lēcieniem, bet ja atsevišķus laika elementus mēs samazināsim līdz nullei, tad robežas gadijumā varam teikt, ka lēcienu nebūs, griezes ass pārvietojās nepārtraukti un punkta trajektorija arī būs nepārtraukta telpas līka linija ar mainīgu līcības radiusu.

Ķermeņa punkta ātrums momentanā kustībā.

Ņemsim agrāk atrastas loku izteiksmes:

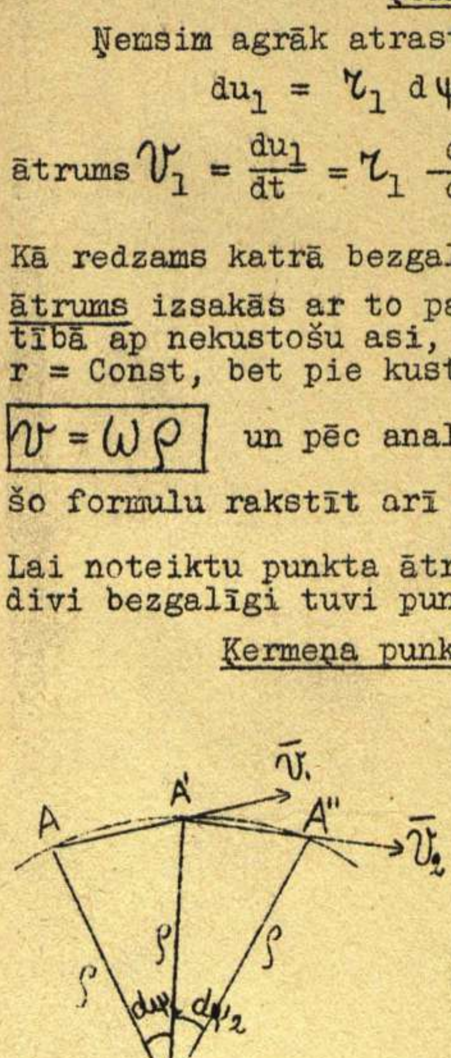
$du_1 = r_1\, d\psi_1$	$du_2 = r_2\, d\psi_2$
ātrums $v_1 = \frac{du_1}{dt} = r_1 \frac{d\psi_1}{dt} = r_1\omega_1$	ātrums $v_2 = \frac{du_2}{dt} = r_2 \frac{d\psi_2}{dt} = r_2\omega_2$

Kā redzams katrā bezgalīgi mazā laika sprīdī dt_1 dt_2 ķermeņa punkta ātrums izsakās ar to pašu formulu, ar kuŗu viņš izsacijies griezes kustībā ap nekustošu asi, starpība ir tikai tā, ka pie nekustošas ass $r = Const$, bet pie kustošas ass r mainās ar laiku un tiek apzīmēts ar ρ

$\boxed{v = \omega\rho}$ un pēc analogijas ar griezes kustību ap nekustošu asi varam šo formulu rakstīt arī tā: $\boxed{\bar{v} = [\bar{\omega} \cdot \bar{\rho}]}$

Lai noteiktu punkta ātrumu momentanā kustībā, geometriski ir vajadzīgi divi bezgalīgi tuvi punkti uz trajektorijas.

Ķermeņa punkta paātrinājums momentanā kustībā.



zīm.50.

Pie paātrinājuma noteikšanas momentanā griezes kustībā ir jāņem vērā, ka ρ ar laiku mainās, tā tad tangenciālais paātrinājums

$j_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega \cdot \rho)$; $\boxed{j_t = \omega\frac{d\rho}{dt} + \rho \cdot \tau}$

un normalais paātrinājums

$j_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(\omega\rho)^2}{\rho} = \rho\omega^2$; $\boxed{j_n = \rho\omega^2}$

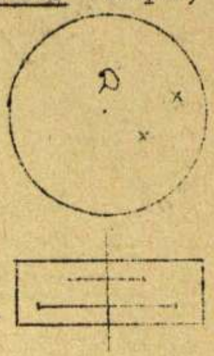
Lai noteiktu momentanā kustībā paātrinājumu ir vajadzīgi uz trajektorijas trīs bezgalīgi tuvi punkti, jo paātrinājumu atrodam salīdzinot bezgalīgi tuvus ātruma vektorus.

Plakne caur šiem 3 bezgalīgi tuviem punktiem būs pieslejas plakne un riņķis ievilkts caur šiem trīs bezgalīgi tuviem punktiem būs līcības riņķis, kuŗa radiuss būs līcības radiuss ρ.

§ 2. ABSOLUTI CIETA ĶERMEŅA KOMPLANA KUSTĪBA.

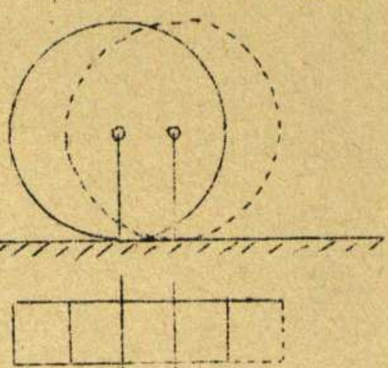
Plaknes kustības definicija: Ķermeņa kustību, kurā visi punkti apraksta trajektorijas, gulošas paralelās plaknēs, sauc par plaknes kustību.

Piemērs 1. Ripa, kuŗa griežas ap nekustošu asi, atrodas plaknes kustībā, jo visi ripas punkti apraksta aploces, kuŗas guļ paralelās plaknēs.



zīm.51.

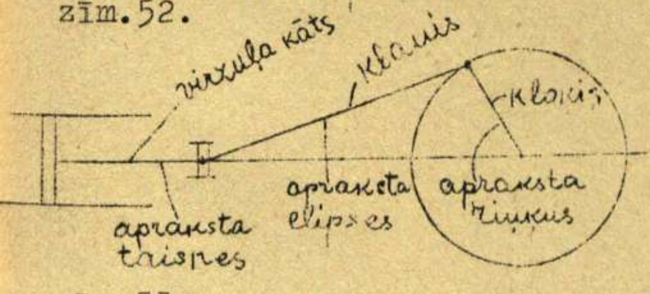
Piemērs 2. Ripa, kuŗa veļās pa plakni, arī atrodas plaknes kustībā, jo visu punktu trajektorijas atrodas paralelās plaknēs.



zīm.52.

Piemērs 3. Tvaika mašinas mēchanisms.

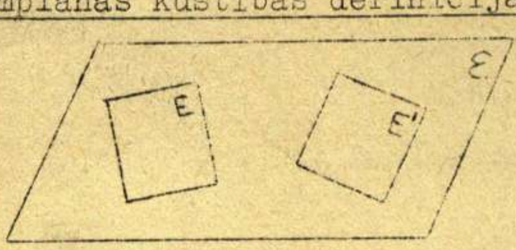
Dažādas tvaika mašīnas mēchanisma daļas apraksta dažādas trajektorijas, piem. virzuļa kāta punkti apraksta taisnes, klaņa punkti apraksta elipses, kloķa punkti apraksta riņķus, bet visas šīs kustības ir plaknes kustības, jo trajektorijas guļ paralelās plaknēs.



zīm.53.

Komplanas kustības definicija: Ja viena plakne E kustās tā, ka viņa neiziet no otras nekustošas plaknes ε, tad tādu kustību sauc par komplanu kustību.

Komplanā kustībā kustošas plaknes (jeb figuras) grieze notiek ap asi, kuŗa stāv perpendikulāri pašai plaknei, jeb ap punktu, kurā krustojās minētā ass ar nekustošu plakni.

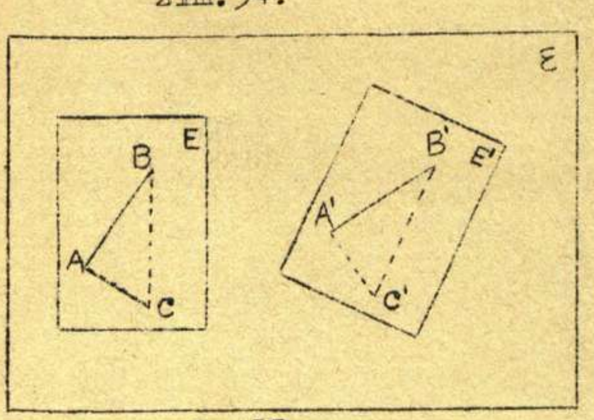


zīm.54.

Teorema: Komplanā kustībā kustošas plaknes kustība ir noteikta ar divu punktu A un B kustību jeb ar nogriežņa AB kustību..

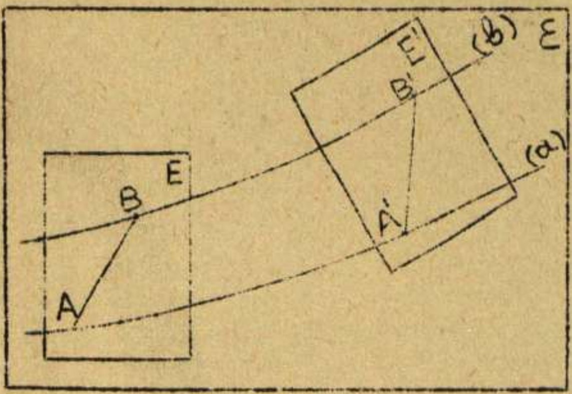
Pieņemsim, ka kustoša plakne E ir pārgājuse komplanā kustībā no viena stāvokļa otrā. Izvēlēsim pirmā stāvoklī divus punktus A un B, kuŗi otrā stāvoklī atradīsies vietās A' un B'. Uz cieta ķermeņa definicijas pamata varam teikt, ka A'B' = AB.

Lai pierādītu, ka visas plaknes kustība ir noteikta ar nogriežņa AB kustību, ņemsim pirmā stāvoklī E vēl kādu punktu C. Lai noteiktu šo punktu otrā stāvoklī E', jāvelk vienu loku ar radiusu AC no centra A' un otru loku ar radiusu BC no



zīm.55.

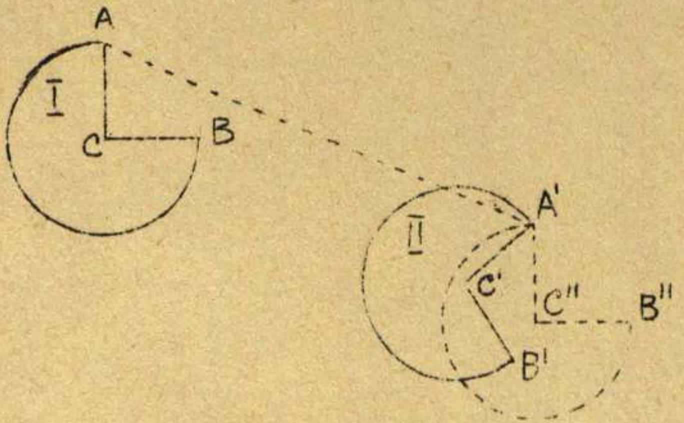
centra B',šie loki krustojās divos punktos, no kuŗiem jāizvēl punkts C' tā, lai Δ A'B'C' būtu kongruents ar Δ ABC. Tādā pašā kārtā var noteikt arī katru citu plaknes punktu, tā tad visas plaknes stāvoklis būs noteikts ar divu punktu A un B stāvŏkli un ja būs zinama punktu A un B kustība, būs noteikta arī visas plaknes kustība. Punkta kustību plaknē var dot arī geometriski ar viņa trajektoriju, tā tad ar divu punktu trajektoriju (a) un (b) zīm.56, kustošas plaknes E kustība būs pilnīgi noteikta. Izvēlot piem. punkta A stāvokli A',varam,velkot loku ar radiusu A'B' = AB atrast arī punktu B' un tāļāk arī visas plaknes stāvokli E'. Uz priekšu nekustošu plakni $\mathcal{E}$ mēs nezīmēsim un skaitīsim, ka viņa sakrīt ar zīmējuma plakni, tāpat arī kustošu plakini E nezīmēsim un skaitīsim, ka viņa ir dota ar nogriezni AB.



zīm.56.

Definicija: Visi pārvietojumi, kuŗi ir iespējami starp diviem ķermeņa stāvokļiem tiek saukti par ekvivalentiem.

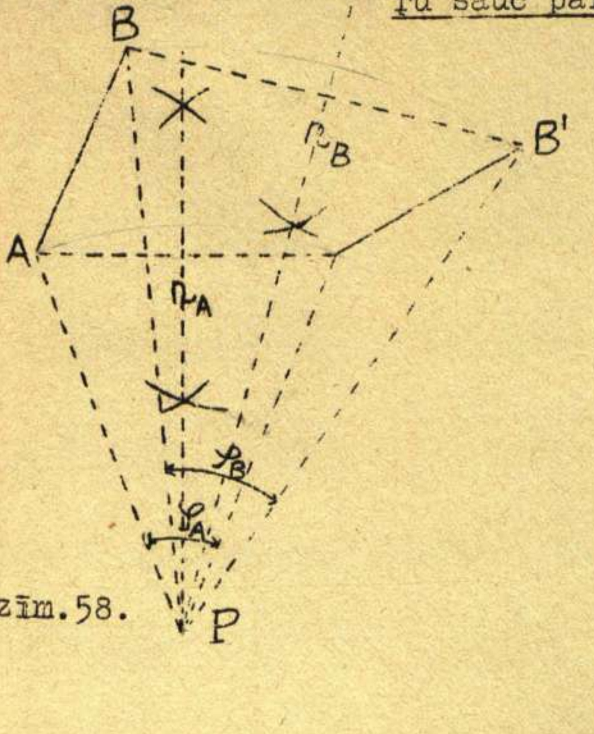
I Chasles teorema: Katrs kustošas plaknes pārvietojums ir ekvivalents virzes kustībai plus griezes kustība ap kaut kādu asi.



zīm.57.

Ioti divi kustošas plaknes stāvokļi I un II. Pārnesīsim ABC virzes kustībā jaunā stāvoklī A'B"C" tā,lai punkts A sakrīt ar A' un pēc tam pagriezīsim ap asi punktā A' kamēr kustoša plakne nonāks stāvoklī II. Tādā kārtā kustoša plakne ir pārvesta no I stāvokļa II ar vienu virzes kustību un vienu griezes kustību. Bet tādu pārvietojumu mēs varam izdarīt bezgalīgi daudzās kombinacijās, piem., varam kustošu plakni pārnest virzes kustībā arī tā, lai punkts B sakrīt ar B' un pēc tam pagriezt ap asi punktā B',jeb arī tā, lai punkts C sakrīt ar C' un pagriezt ap asi punktā C'.Tā tad vispārīgi katrs pārvietojums ir ekvivalents vienai virzes kustībai plus griezes kustība ap kaut kādu asi.

II.Chasles teorema: Katrs kustošas plaknes pārvietojums ir ekvivalents vienai vien griezes kustībai,bet ap noteiktu asi,kuŗu sauc par Chasles asi.



zīm.58.

Ņemsim divus nogriežņa AB,ar kuŗu ir noteikta kustošas plaknes kustība, stāvokļus AB un A'B'.Savienosim punktu A ar A' un ievilksim AA' viduspunktā normali: n_A ; tad punktu A varam pārvest punktā A' pagriežot viņu ap kaut kādu, normalei n_A piederošu punktu.Analogiski uzkonstruejam taisnei BB' viduspunktā normali: n_B. Tādā pašā kārtā tad punktu B varam pārvest B' pagriežot viņu ap kaut kādu normalei n_B piederošu punktu. Acimredzot abu normalu n_A un n_B krustošanas punkts P būs tāds punkts,ap kuŗu griežot var pārvest kā punktu A,tā arī punktu B jaunā stāvoklī.

Pierādīsim vēl, ka griezes leņķis abos gadijumos būs tas pats:

$$\triangle PAB = \triangle PA'B' \quad \text{jo} \quad \begin{cases} AB = A'B' & \text{pēc cieta ķermeņa definicijas} \\ PA = PA' & \text{tamdēļ, ka } n_A \perp AA' \text{ vidū} \\ PB = PB' & \text{" " } n_B \perp BB' \text{ "} \end{cases}$$

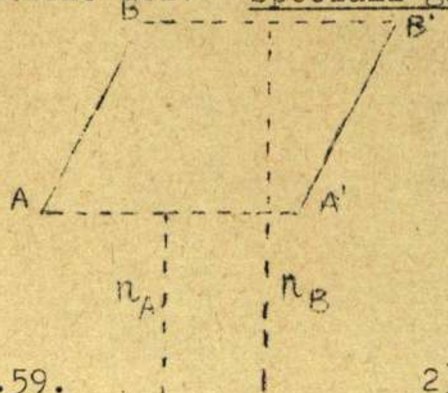
no kurienes $\angle APB = \angle A'PB'$

pieskaitīsim abās pusēs $\angle BPA'$

$$\angle APB + \angle BPA' = \angle A'PB' + \angle BPA'$$
$$\angle APA' = \angle BPB'$$
$$\angle \varphi_A = \angle \varphi_B$$

Tā tad visu nogriezni AB varam pārvest jaunā stāvoklī A'B' pagriežot uz $\angle \varphi$ ap punktu P.

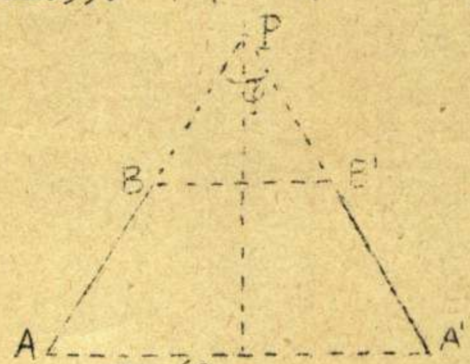
Šo punktu P mēs sauksim par <u>griezes polu</u> jeb <u>griezes centru</u> komplanā kustībā. Griezes asi dabūsim velkot p-ktā P perpend. plaknei. Šo asi sauc par Chasle asi. <u>Speciāli gadijumi griezes pola konstrukcijai.</u>



zīm.59.

1) <u>AB ir paralels A'B'</u> : $\overline{AB} = \overline{A'B'}$
Šādā gadijumā abas normales n_A un n_B ir paralelas un griezes pols atrodas bezgalībā. Bet no otras puses pie pārejas no AB uz A'B' ir notikuse virzes kustība, tā tad varam teikt, ka <u>virzes kustība ir grieze ap bezgalīgi tālu polu.</u>

2) <u>Abas normales n_A un n_B sakrīt.</u>
Šādā gadijumā ne katrs kopējas normales punkts būs griezes pols, bet tikai tāds punkts, attiecībā pret kuru griezes leņķi būs vienādi.
Pagarinot zīm.60. AB un A'B' līdz krustošanai atrodam meklējamo griezes polu P.



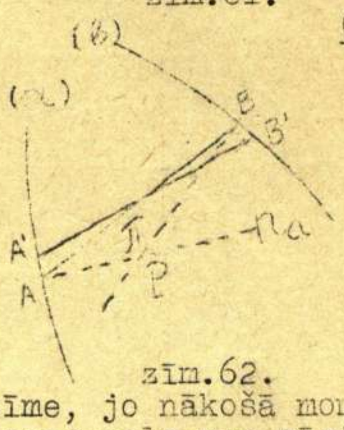
zīm.60.

3) <u>AB ir paralels A'B' bet $\overline{AB} = -\overline{A'B'}$</u>
Šeit abi viduspunkti, kuros jāvelk normales sakrīt, tā tad šis punkts būs meklējamais griezes pols P. Griezes leņķis šeit iznāks

$$\varphi = 180^0$$

zīm.61.

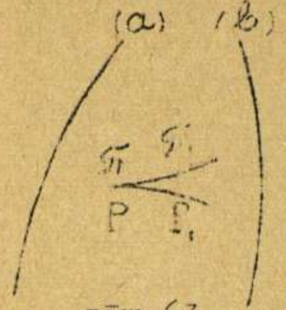
<u>Griezes pols elementarā komplanā kustībā.</u>



zīm.62.

Ja abu punktu A un B trajektorijas ir dotas un nogrieznis AB ir dabujis elementaru pārvietojumu, t.i. punkts A ir pārgājis bezgalīgi tuvā punktā A' un punkts B tādā pat punktā B', tad ņemot vērā, ka AA' ir bezgalīgi mazs, mēs viņu uz pusi dalīt nevaram, bet normali n_a velkam vienkārši punktā A pret trajektoriju (a) un normali n_b velkam punktā B pret trajektoriju (b). Abu normalu krustošanās punkts P būs griezes pols, bet viņam būs tagad tikai momentana nozīme, jo nākošā momentā normalu krustošanas punkts un līdz ar to arī griezes pols var pāriet citā vietā. Sādā gadijumā griezes polu sauc par <u>momentano griezes centru</u> jeb <u>momentano griezes polu.</u>

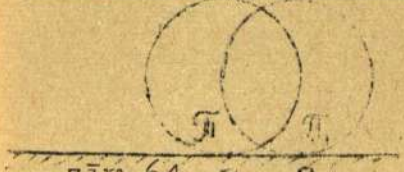
Ņemot vērā, ka kustošā plaknē katru momentu sakrīt ar nekustošu plakni, momentanam polam, kuŗš pieder kā nekustošai, tā arī kustošai plaknei, dosim divejādu apzīmējumu: uz nekustošas plaknes ar "P", bet uz kustošas plaknes ar "π".



zīm.63.

Nekustoša un kustoša poloida.

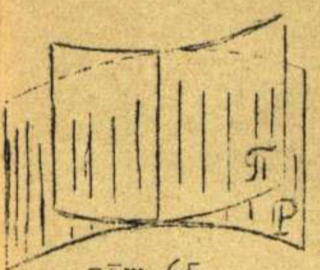
Vispārīgi pie kustošas plaknes kustības momentanais pols jeb centrs var ar laiku mainīt savu vietu kā nekustošā, tā arī kustošā plaknē. Sakarā ar ko: momentana pola jeb centra ģeometrisko vietu (jeb trajektoriju) nekustošā plaknē sauc par nekustošo poloidu jeb centroidu (P-līnija) un momentana pola jeb centra ģeometrisko vietu kustošā plaknē sauc par kustošo poloidu jeb centroidu (π - līnija). Katrā momentā abas poloidas kustošā un nekustošā savstarpīgi pieskarās, tā tad varam teikt, ka ja kustoša plakne atrodas komplanā kustībā, tad kustoša poloida bez slīdēšanas veļās pa nekustošu.



zīm.64.

Piemērs: Ripa veļās pa taisni. Momentanais pols būs pieskares punkts. Nekustoša poloida būs pate taisne. Kustoša poloida būs ripas aploce.

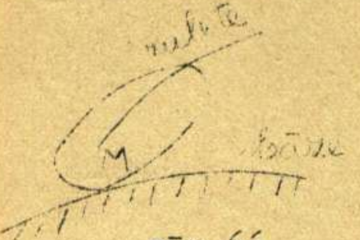
A k s o i d a s .



zīm.65.

Kā jau bija teikts agrāk, komplanā kustībā grieze notiek ap asi, kuŗa stāv perpendikulāri kustības plaknei momentanā polā. Minētās ass ģeometriskā vieta attiecībā uz nekustošo plakni būs cilindriska virsma, kuŗu sauc par nekustošo aksoidu. Tās pašas ass ģeometriskā vieta attiecībā uz kustošo plakni būs arī cilindriska virsma, kuŗu sauc par kustošo aksoidu. Kustības gadijumā abas aksoidas veļās viena pa otru bez slīdēšanas; katrā momentā aksoidas pieskarās un kopējā veidule būs momentana ass.

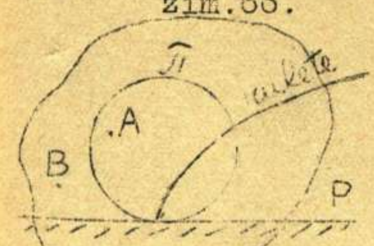
R u l e t e s .



zīm.66.

Ja kāda figura veļās pa līku liniju, tad katra veļošās figuras punkta M trajektorija saucās par ruleti un attiecīga līka linija par viņas bāzi.

Tādā kārtā katra kustošas plaknes punkta trajektorija nekustošā plaknē būs rulete attiecībā uz nekustošo poloidu.



zīm.67.

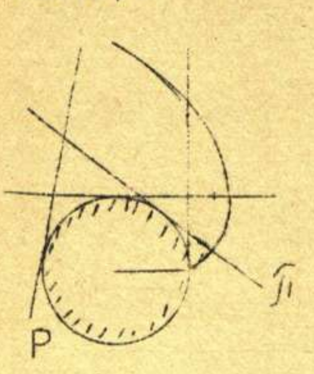
Piemērs 1) Ripa veļās pa taisni.

Pate taisne būs nekustoša poloida P. Ripas aploce būs kustoša poloida . Ruletes šeit būs cikloidas, pie kam katra aploces punkta rulete ir vienkārša cikloida. Katra kustošas plaknes punkta iekšpus aploces, piem. A rulete ir saīsināta cikloida. Katra kustošas plaknes punkta ārpus aploces, piem. B rulete ir pagarināta cikloida.

Piemērs 2) Taisne veļās pa riņķi.

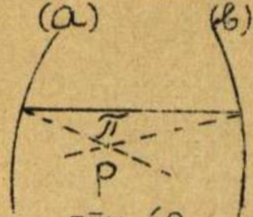
Riņķis būs nekustoša poloida. Taisne būs kustoša poloida.

Katra taisnes punkta rulete būs evolvente.



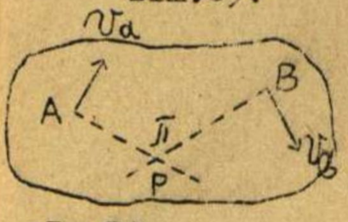
zīm.68.

Momentana pola P,π konstrukcija dažādos gadijumos.



zīm.69.

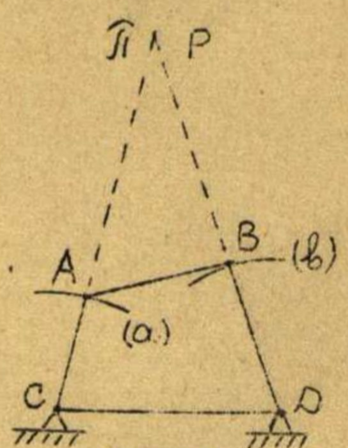
1) Gadijums: Dotas nogriežņa AB gala punktu trajektorijas un momentanais stāvoklis. Punktā A jāvelk normali trajektorijai (a) un punktā B jāvelk normali trajektorijai (b). Abu normalu krustošanas punkts ir momentanais griezes pols P,π.



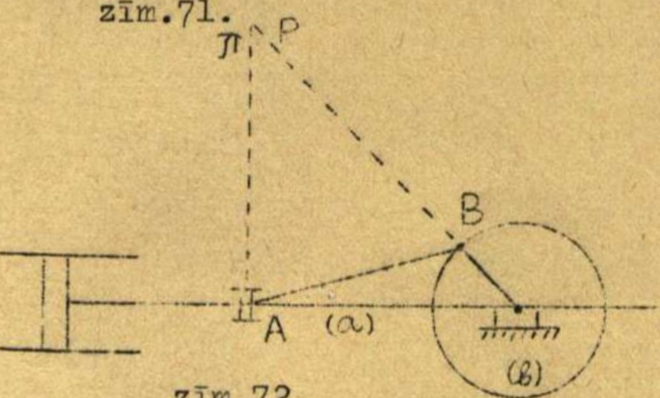
zīm.70.

2) Gadijums: Doti kustošas plaknes divu punktu A un B momentano ātrumu virzieni.
Ņemot vērā, ka ātrums arvienu iet tangenciāl trajektorijai, dabūsim, tās pašas normales velkot perpendikulārus ātrumiem. Abu perpendikulāru krustošanas punkts būs momentanais pols P,π

Piemērs: Šarnīru četrstūris. Virsotnes C un D ir nekustošas. Uziet malas AB kustības momentano polu. Ņemot vērā, ka punkta A trajektorija ir loks ar centru punktā C un radiusu CA un tāpat punkta B trajektorija ir loks ar centru punktā D un radiusu DB, dabūsim momentano polu velkot abām trajektorijām normales, t.i. pagarinot CA un DB līdz krustošanai.



zīm.71.



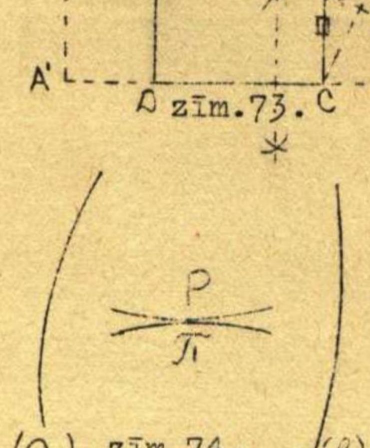
zīm.72.

Piemērs: Tvaika mašīnas mēchanisms
Uziet klaņa AB kustības momentano polu.
Punkta A trajektorija (a) ir taisne. Punkta B trajektorija (b) ir riņķis. Velkot normales abām trajektorijām atrodam krustošanas punktā momentano polu P,π

zīm.73.

Piemērs: Kāršu galdiņš. Ap kādu punktu jāgriež galdiņu, lai viņš no stāvokļa ABCD pārietu stāvoklī A'B'C'D', t.i. kādā punktā galdniekam jāievieto tapu.
Velkot perpendikularus CC' un DD' vidus-punktos līdz krustošanai atrodam attiecīgo polu P.

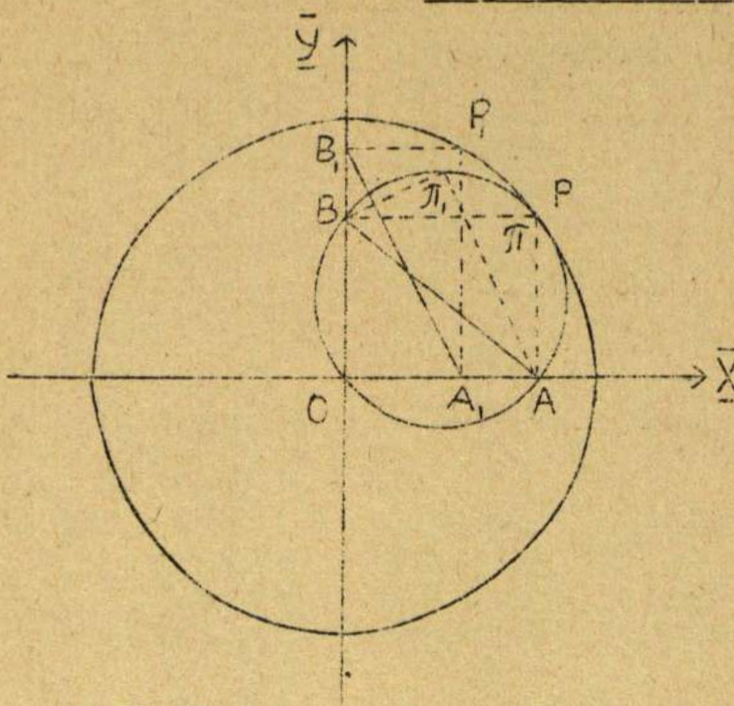
Kustības apgriešanas princips.



zīm.74.

Komplanā kustībā ir divas plaknes: viena kustoša un otra nekustoša. Momentanā pola ģeometriskā vieta uz kustošas plaknes ir kustoša poloida un uz nekustošas plaknes ir nekustoša poloida. Bet ja kustību apgriezīsim, t.i. skaitīsim, ka kustoša plakne nekustās, bet kustās nekustošā, tad acimredzot abas poloidas apmainīs savas vietas.
Šis paņēmiens ir ļoti izdevīgs pie dažādu problemu atrisināšanas un tiek saukts par: kustības apgriešanas principu. Zemāk elipsografa kustībā mēs šo principu izlietosim.

Elipsografa kustība geometriski.



zīm.75.

Taisnes nogrieznis AB, ar kuru ir saistīta kustoša plakne, pārvietojās tā, ka viņa gala punkti slīd uz divām savstarpīgi perpendikulārām taisnēm $O\bar{X}$ un $O\bar{Y}$.

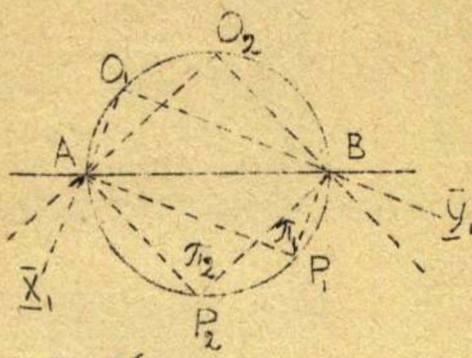
Uziet abas poloidas: P un π linijas.

Krustojošās taisnes $O\bar{X}$ un $O\bar{Y}$ pieder nekustošai plaknei, viņas ir AB galu punktu trajektorijas, tā tad lai dabūtu polu ir jāvelk punktos A un B perpendikulārus pret $O\bar{X}$ un $O\bar{Y}$. Šo perpendikulāru krustošanās punktā atradīsim polu P, pie kam ar viņu arī sakrīt kustošas plaknes pols π.

Iezīmēsim to pašu nogriezni kaut kādā citā stāvoklī A_1B_1 un uziesim atkal polu P_1. Punkti P un P_1 pieder nekustošai poloidai. Zīmējumā redzam, ka P un P_1 atrodas attālumā $OP = AB$ un $OP_1 = A_1B_1$ no koordinātu sākuma O, bet $AB = A_1B_1$, tātad arī $OP = OP_1$, tas nozīmē, ka visi momentanie poli nekustošā plaknē guļ vienādā attālumā no punkta O jeb atrodas uz riņķa. Šis riņķis ar centru punktā O un radiusu AB būs nekustoša poloida.

Lai atrastu kustošu poloidu uzkonstruēsim kustošā plaknē polu π_1 tanī momentā, kad taisnes nogrieznis atrodas stāvoklī AB. Šim nolūkam apraksīsim loku no punkta A ar radiusu A_1P_1 un otru loku no punkta B ar radiusu B_1P_1. Abu loku krustošanas punkts būs π_1. Tādā kārtā $\triangle A_1B_1P_1$ pirmā momentā kustošā plaknē ieņēma stāvokli $AB\pi_1$. Uzkonstruējot analogiski vēl vairākus tādus trijstūrus konstatējam, pirmkārt, ka visi viņi ir taisnstūrīgi ar hipotenuzi AB, tamdēļ viņu virsotnes atradīsies uz riņķa, kuŗa caurmērs ir AB un kustoša poloida ir minētais riņķis. Pie kustošas plaknes kustības π riņķis veļās iekšpus P riņķa.

Kustošas poloidas noteikšana lietojot kustības apgriešanas principu.

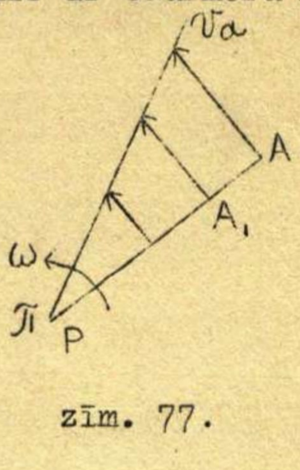


zīm.76.

Apgriezīsim kustību, t.i. skaitīsim, ka AB nekustās, bet kustās nekustoša plakne ar divām asīm $O\bar{X}$ un $O\bar{Y}$, kuŗas slīd punktos A un B.

Acimredzot punkts O šādā kustībā apraksta riņķi, kuŗa caurmērs ir AB. Lai dabūtu momentano polu jāvelk punktos A un B perpendikulārus pret $O\bar{X}$ un $O\bar{Y}$, bet šādi perpendikulāri arī krustojās uz tā paša riņķa ar caurmēru AB. Tā tad nekustoša poloida apgrieztā kustībā un kustoša poloida īstenā kustībā ir riņķis ar caurmēru AB un centru viņa viduspunktā.

Ātrumi komplanā kustībā.



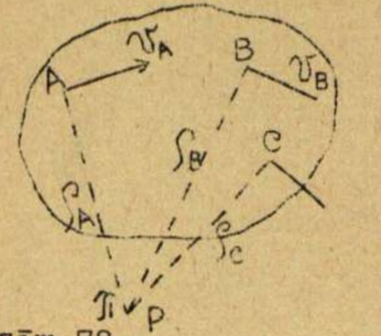
zīm. 77.

Ja ir zināms momentanais griezes pols P,π, momentanais griezes ātrums ω un punkta radiuss-vektors ρ_A, tad punkta momentanais ātrums $v_A = \omega \cdot \rho_A$. Šeit mēs redzam pilnīgu analogiju attiecībā uz ātrumiem starp momentano polu P,π komplanā kustībā un nekustošu centru ķermeņa griezes kustībā ap asi.

Turpretīm paātrinājumam nav nekāda vienkārša sakara ar momentano griezes polu P,π. Viņu nevar uzkonstruēt tā, kā mēs uzkonstruējām paātrinājumu nekustošas ass gadijumā, jo viņš nav proporcionāls radiusam-vektoram ρ.

Paātrināļuma projekcijas momentanā kustībā: $j_t = \rho\tau + \omega\frac{d\rho}{dt}$ un $j_n = \rho\omega^2$

Momentanam polam $\rho = 0$, bet paātrinājums $j \neq 0$.



zīm.78.

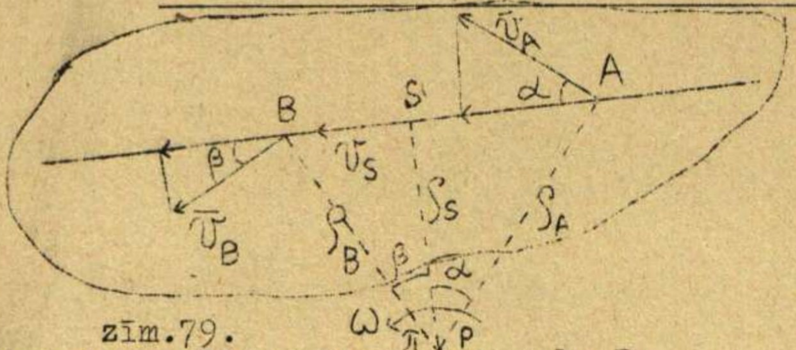
Ātruma kontrukcija katram kustošas plaknes punktam pēc viena punkta A ātruma v_A un otra punkts B ātruma virziena.

Pirmkārt atrodam momentano polu P, π velkot perpendikularus ātrumiem un tad

$$\left.\begin{aligned} v_A &= \omega\cdot\rho_A \\ v_B &= \omega\cdot\rho_B \end{aligned}\right\} : v_B = \frac{\rho_B}{\rho_A}\cdot v_A;$$

Analogiski arī katram citam punkta C: $v_C = \omega\cdot\rho_C$ bet $\omega = \frac{v_A}{\rho_A}$ un $v_C = \frac{\rho_C}{\rho_A}\cdot v_A$

Teorema: Ja kāda taisne pieder kustošai plaknei, tad visu taisnes punktu momentano ātrumu projekcijas uz taisnes virzienu ir vienādas un līdzinājās tā saucamam slīdes ātrumam v_s



zīm.79.

Doti: momentanais pols P, π momentanais griezes ātrums ω

Velkot PS ⊥ taisnei AB, dabūsim punktu S, kuŗu sauc par taisnes momentano slīdpunktu. Viņa ātrums v_s tad sakrīt ar taisnes virzienu un saucās par taisnes momentano slīdes ātrumu ap polu P.

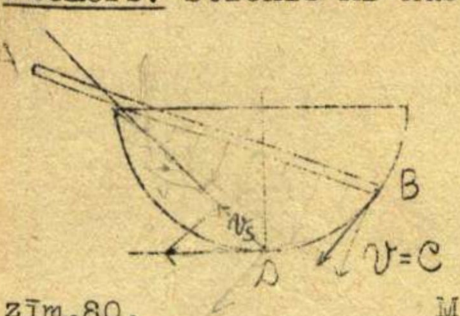
$$\left.\begin{aligned} v_A &= \omega\cdot\rho_A \\ v_B &= \omega\cdot\rho_B \end{aligned}\right\}$$

Sastādīsim ātrumu projekcijas uz taisni, ņemot vērā, ka

$$\cos\alpha = \frac{\rho_S}{\rho_A} \quad \text{un} \quad \cos\beta = \frac{\rho_S}{\rho_B}$$

$$\left.\begin{aligned} v_A\cos\alpha &= \omega\cdot\rho_A\cdot\frac{\rho_S}{\rho_A} = \omega\cdot\rho_S = v_S \\ v_B\cos\beta &= \omega\cdot\rho_B\cdot\frac{\rho_S}{\rho_B} = \omega\cdot\rho_S = v_S \end{aligned}\right\} \boxed{v_A\cos\alpha = v_B\cos\beta = v_S}$$

Piemērs: Stienis AB kustās pusriņķī tā, ka punktam B ir Const. ātrums V = C. Uzíet slīdes ātrumu v_S tanī momentā, kad stieņa gals B iet caur punktu D.

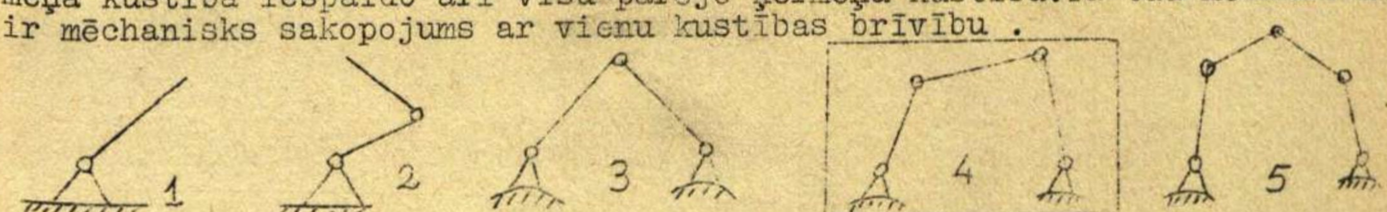


$$v_S = C\cos 45^\circ = \frac{C\sqrt{2}}{2} = 0{,}707\ C$$

zīm.80.

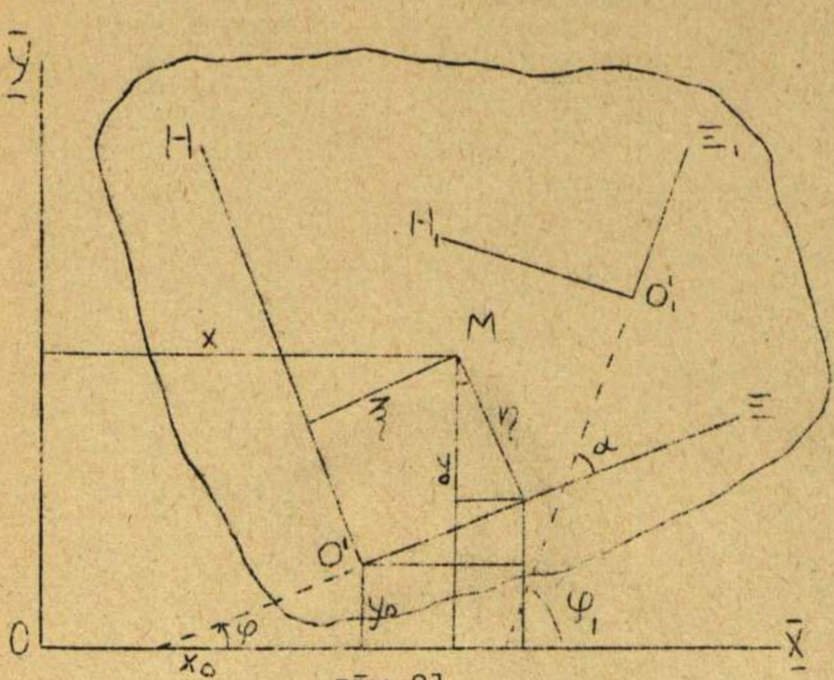
M ē c h a n i s m i.

Par mēchanismu sauc tādu cietu ķermeņu sakopojumu, kuŗā katra ķermeņa kustība iespaido arī visu pārējo ķermeņu kustību. Tā tad mēchanisms ir mēchanisks sakopojums ar vienu kustības brīvību.



Uz definicijas pamata no uzzīmētiem mēchaniskiem sakopojumiem tikai 4 ir mēchanisms.

Cieta ķermeņa plaknes kustība jeb figuras komplana kustība analitiski.



zīm.81.

Koordinatu sistemu XOY saistītu ar nekustošu plakni sauksim par absolutu. Ar kustošu plakni saistīsim jaunu koordinatu sistemu $\Xi O' H$ un nosauksim viņu par relatīvo.

Sakarā ar šo punktam M būs absolutas koordinates x un y un relativas " ξ un η

No absoluti cieta ķermena definicijas, par kādu mēs uzskatam arī kustošo figuru, seko, ka katra punkta M relativas koordinātes ξ un η pie figuras kustības nemainās, bet mainās tikai absolutas koordinates x un y.

Apzīmējot relativa koordinatu sākuma O' koordinates ar x_0 un y_0, varam figuras kustību dot ar nol-miem

$x_0 = f_1(t)$, $y_0 = f_2(t)$ } Figuras virzes kustības nol-mi pret nekustošām asīm OX un OY

$\varphi = \mathcal{F}(t)$ Griezes kustības nol-ms ap punktu O'

} visi nol-mi kopā reprezentē kustošas figuras kustības nol-mus ....(11)

Ja izvēlēsim par relatīvo koordinatu sākumu kādu citu punktu O_1' un relatīvo asi $O_1'\Xi$, ņemsim arī citā virzienā, kuŗš ar $O'\Xi$ ieslēgs $\angle\alpha$ tad priekš dotas kustības punkta O_1' koordinates izteiksies ar citām laika funkcijām, bet leņķis φ_1 atšķirsies no leņķa φ tikai uz $\angle\alpha$

$$\varphi_1 = \varphi + \alpha = \mathcal{F}(t) + \alpha$$

un ievērojot, ka $\omega_1 = \frac{d\varphi}{dt} = \omega$ varam teikt, ka figuras leņķiskais ātrums ap kustošu koordinatu sākumu atkarīgs no viņa izvēles.

Formulas, kuŗas saista absolutas koordinates ar relatīvām jeb figuras punkta kustības nol-mi būs

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + \xi \operatorname{Cos}\varphi - \eta \operatorname{Sn}\varphi \\ y &= y_0 + \xi \operatorname{Sn}\varphi + \eta \operatorname{Cos}\varphi \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(12)$$

Lai dabūtu kāda figuras punkta M trajektoriju nekustošas plaknes formulās (12) jāliek x_0 y_0 un φ vietā viņu vērtības no nol-miem (11) kā funkcijas no t un pēc tam jāizslēdz t. Rezultāts būs:

$$\mathcal{F}(x\, y\, \xi\, \eta) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots(13)$$

kur x un y būs mainīgi, bet ξ un η priekš dota punkta Cónst.

Kustošas figuras punktu ātrumi.

Kustošas plaknes punkta ātruma projekcijas uz nekustošām asīm dabūsim differencējot nol-mus (12) pēc laika

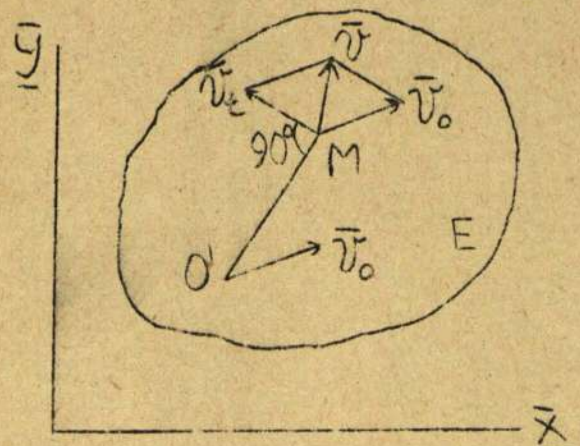
$$v_x = \dot{x} = \dot{x}_0 - (\xi \operatorname{Sn}\varphi + \eta \operatorname{Cos}\varphi)\dot{\varphi}$$

$$v_y = \dot{y} = \dot{y}_0 + (\xi \operatorname{Cos}\varphi - \eta \operatorname{Sn}\varphi)\dot{\varphi}$$

bet ievērojot, ka $\begin{cases} \xi \operatorname{Sn}\varphi + \eta \operatorname{Cos}\varphi = y - y_0 \\ \xi \operatorname{Cos}\varphi - \eta \operatorname{Sn}\varphi = x - x_0 \end{cases}$

$$\boxed{v_x = \dot{x}_o - (y - y_o)\,\dot{\varphi}}$$
$$\boxed{v_y = \dot{y}_o + (x - x_o)\,\dot{\varphi}} \quad \ldots\ldots(14)$$

Šinīs formulās pirmie locekļi reprezentē punkta O' ātruma projekcijas un otrie griezes ātruma ap to pašu punktu O' projekcijas, tā tad figuras punkta ātrums līdzinājās geometriskai summai no kust.koordinatu sākuma O' ātruma un griezes ātruma ap kust. koordinatu sākumu.



zīm.82.

ja V_o - punkta O' ātrums
un V_t - punkta M griezes ātrums ap punktu O'

tad $\boxed{\bar{V} = \bar{V}_o + \bar{V}_t}$

Momentanais ātruma centrs jeb griezes pols.

Nosauksim tādu punktu P, kuŗam dotā momentā ātrums $V_p = 0$ par ātruma centru un meklēsim viņa koordinates x_p un y_p.

No Nol-miem (14) liekot $V_x = 0$ un $V_y = 0$ un $y = y_p$; $x = x_p$

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_o - (y_p - y_o)\,\dot{\varphi} = 0 \\ \dot{y}_o + (x_p - x_o)\,\dot{\varphi} = 0 \end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots(15)$$ no kurienes

$$\left.\begin{aligned} \boxed{x_p = x_o - \frac{\dot{y}_o}{\dot{\varphi}}} \\ \boxed{y_p = y_o + \frac{\dot{x}_o}{\dot{\varphi}}} \end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots(16)$$

Momentana ātruma centra nekustošas koordinates ir zinamas funkcijas no laika, tā tad katrā laikā eksistē tāds punkts, kuŗa ātrums = 0.

Atvelkot nol-mus (15) no nol-miem (14) dabūsim

$$\left.\begin{aligned} V_x &= -(y - y_p)\,\dot{\varphi} \\ V_y &= (x - x_p)\,\dot{\varphi} \end{aligned}\right\}$$

Šīs formulas rāda, ka punkta ātrums ir griezes ātrums ap momentano ātruma centru $(x_p\ y_p)$, tā tad momentanais ātruma centrs nav nekas cits, kā pazīstamais momentanais griezes centrs jeb pols P, π

Līka, kuŗa reprezentē momentano ātruma centra geometrisko vietu uz nekustošas plaknes ir nekustoša poloida un viņas analitisko nol-mu dabūsim izslēdzot t no nol-miem (16)

$$\boxed{\Phi(x_p\ y_p) = 0}$$ Nekustoša poloida.

Bet momentanam ātruma centram ir arī relativas koordinates, uziesim viņas atrisinājot kustības nol-mus attiecībā uz ξ un η

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \xi \cos\varphi - \eta \sin\varphi \\ y &= y_0 + \xi \sin\varphi + \eta \cos\varphi \end{aligned}$$

pārrakstīsim

$$\left.\begin{aligned} \xi \cos\varphi - \eta \sin\varphi &= x - x_0 \\ \xi \sin\varphi + \eta \cos\varphi &= y - y_0 \end{aligned}\right| \begin{matrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{matrix} \Big| +$$

$$\left.\begin{aligned} \xi &= (x - x_0)\cos\varphi + (y - y_0)\sin\varphi \\ \eta &= -(x - x_0)\sin\varphi + (y - y_0)\cos\varphi \end{aligned}\right\} (17)$$

Šis abas formulas izsaka relatīvas koordinates caur absolūtām.

Liekot nolīdzinājumos (17) x vietā x_p un y vietā y_p dabūsim kreisā pusē ξ_π un η_π

Ņemot vērā, ka $x_p - x_0 = -\frac{\dot y_0}{\dot\varphi}$ un $y_p - y_0 = \frac{\dot x_0}{\dot\varphi}$

$$\left.\begin{aligned} \xi_\pi &= -\frac{\dot y_0}{\dot\varphi}\cos\varphi + \frac{\dot x_0}{\dot\varphi}\sin\varphi \\ \eta_\pi &= \frac{\dot y_0}{\dot\varphi}\sin\varphi + \frac{\dot x_0}{\dot\varphi}\cos\varphi \end{aligned}\right\}$$

jeb pārveidojot tāļāk

$$\left.\begin{aligned} &\boxed{\xi_\pi = (\dot x_0 \sin\varphi - \dot y_0 \cos\varphi)\frac{1}{\dot\varphi}} \\ &\boxed{\eta_\pi = (\dot x_0 \cos\varphi + \dot y_0 \sin\varphi)\frac{1}{\dot\varphi}} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots(18)$$

Momentana ātruma centra π kustošas koordinātes, kuŗas arī ir kādas laika funkcijas.

Izslēdzot no nolīdzinājumiem (18) laiku, dabūsim

$$\boxed{\Psi(\xi_\pi\ \eta_\pi) = 0}$$

π - linijas, t.i. kustošas poloidas nol-mu.

Kustošas figuras punktu paātrinājumi.

Kustošas plaknes punkta paātrinājuma projekcijas dabūsim diferencējot pēc laika ātruma projekcijas, t.i. nolīdzinājumus (14)

$$\left.\begin{aligned} \dot x &= \dot x_0 - (y - y_0)\dot\varphi \\ \dot y &= \dot y_0 + (x - x_0)\dot\varphi \end{aligned}\right\} \ldots\ldots(14)$$

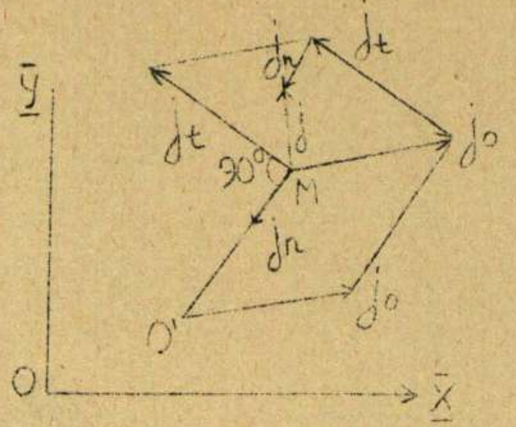
$$\begin{aligned} j_x &= \ddot x_0 - (y - y_0)\ddot\varphi - (\dot y - \dot y_0)\dot\varphi \\ j_y &= \ddot y_0 + (x - x_0)\ddot\varphi + (\dot x - \dot x_0)\dot\varphi \end{aligned}$$

bet

$$\begin{aligned} \dot y - \dot y_0 &= (x - x_0)\dot\varphi \\ \dot x - \dot x_0 &= -(y - y_0)\dot\varphi \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} &\boxed{j_x = \ddot x_0 - (y - y_0)\ddot\varphi - (x - x_0)\dot\varphi^2} \\ &\boxed{j_y = \ddot y_0 + (x - x_0)\ddot\varphi - (y - y_0)\dot\varphi^2} \end{aligned}\right\} \ldots(19)$$

Kustošas plaknes punktu paātrinājuma projekcijas uz nekustošām asīm.



zīm.83.

No formulām ir redzams, ka punkta paātrinājums ir ģeometriska summa no 3 paātrinājumiem:

1) Kust.koordinātu sākuma paātrinājuma: j_o

2) Griezes paātrinājuma ap kustošu koordinātu sākumu: j_t

3) Centripetala uz kust.koordinātu sākuma paātrinājumu: j_n

$$\boxed{\bar{j} = \bar{j}_o + \bar{j}_t + \bar{j}_n}$$

Momentanais paātrinājuma centrs,

ir tāds punkts, kuram dotā momentā $j = 0$; apzīmēsim viņu ar Γ un viņa absolūtas koordinātes ar x_γ un y_γ un relatīvās ar ξ_γ un η_γ

tad $0 = \ddot{x}_o - (y_\gamma - y_o)\ddot{\varphi} - (x_\gamma - x_o)\dot{\varphi}^2$

$$0 = \ddot{y}_o + (x_\gamma - x_o)\ddot{\varphi} - (y_\gamma - y_o)\dot{\varphi}^2$$

$$\begin{array}{l|c|c|c} x_\gamma\dot{\varphi}^2 + y_\gamma\ddot{\varphi} = \ddot{x}_o + y_o\ddot{\varphi} + x_o\dot{\varphi}^2 & \dot{\varphi}^2 & - \ \ddot{\varphi} & + \\ -x_\gamma\ddot{\varphi} + y_\gamma\dot{\varphi}^2 = \ddot{y}_o - x_o\ddot{\varphi} + y_o\dot{\varphi}^2 & \ddot{\varphi} & \dot{\varphi}^2 & \end{array}$$

$$x_\gamma(\dot{\varphi}^4 + \ddot{\varphi}^2) = \ddot{x}_o\dot{\varphi}^2 - \ddot{y}_o\ddot{\varphi} + x_o(\dot{\varphi}^4 + \ddot{\varphi}^2)$$

$$\boxed{x_\gamma = x_o + \frac{\ddot{x}_o\dot{\varphi}^2 - \ddot{y}_o\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}^4 + \ddot{\varphi}^2}}$$

Momentana paātrinājuma centra Γ absolutas koordinātes. . . . .(22)

$$y_\gamma(\dot{\varphi}^4 + \ddot{\varphi}^2) = \ddot{x}_o\ddot{\varphi} + \ddot{y}_o\dot{\varphi}^2 + y_o(\dot{\varphi}^4 + \ddot{\varphi}^2)$$

$$\boxed{y_\gamma = y_o + \frac{\ddot{x}_o\ddot{\varphi} + \ddot{y}_o\dot{\varphi}^2}{\dot{\varphi}^4 + \ddot{\varphi}^2}} \quad \text{. . . . .(22)}$$

Izslēdzot no šiem nolīdzinājumiem laiku, dabūsim līku, kuru apraksta Γ nekustošā plaknē

$$\boxed{\Phi(x_\gamma, y_\gamma) = 0}$$

Ņemot tagad formulas (17), kuŗas dod relativas koordinātes caur absolūtām

$$\xi = (x - x_0)\mathrm{Cos}\,\varphi + (y - y_0)\mathrm{Sn}\,\varphi$$
$$\eta = -(x - x_0)\mathrm{Sn}\,\varphi + (y - y_0)\mathrm{Cos}\,\varphi$$

un liekot $\begin{cases} x & \text{vietā } x_\gamma \\ y & \text{vietā } y_\gamma \end{cases}$ dabūsim kreisā pusē ξ_γ un η_γ

$$\boxed{\xi_\gamma = \frac{(\ddot{x}_0\,\dot{\varphi}^2 - \ddot{y}_0\,\ddot{\varphi})\mathrm{Cos}\,\varphi + (\ddot{x}_0\,\ddot{\varphi} + \ddot{y}_0\,\dot{\varphi}^2)\mathrm{Sn}\,\varphi}{\dot{\varphi}^4 + \ddot{\varphi}^2}}$$

$$\boxed{\eta_\gamma = \frac{(\ddot{x}_0\,\ddot{\varphi} + \ddot{y}_0\,\dot{\varphi}^2)\mathrm{Cos}\,\varphi - (\ddot{x}_0\,\dot{\varphi}^2 - \ddot{y}_0\,\ddot{\varphi})\mathrm{Sn}\,\varphi}{\dot{\varphi}^4 + \ddot{\varphi}^2}}$$

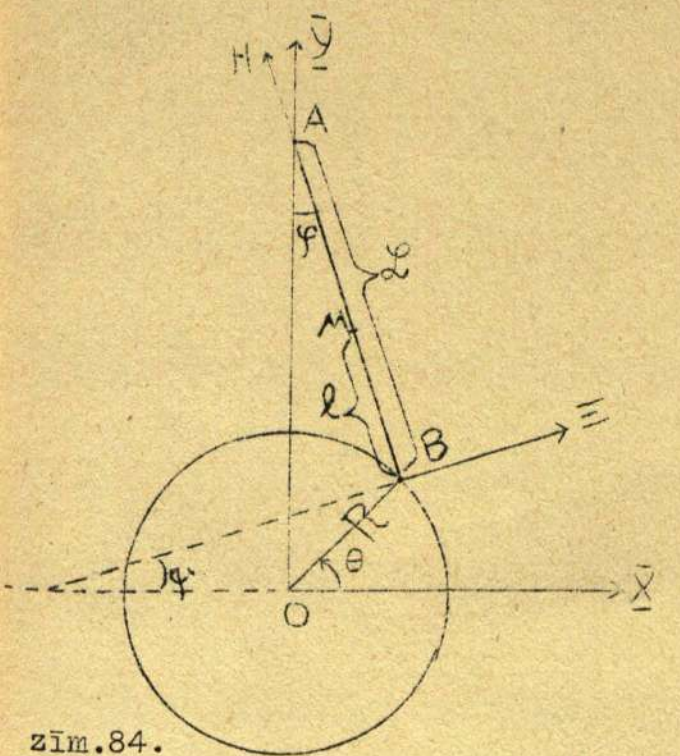
Momentana paātrinājuma centra Γ relatīvas koordinātes. ....(23)

Izslēdzot no šiem nolīdzinājumiem laiku, dabūsim līku, kuŗu aprakstīs Γ kustošā plaknē

$$\boxed{\Psi(\xi_\gamma\ \eta_\gamma) = 0}$$

Kā redzams no formulām, vispārīgi punkti Γ un (P,π) ir pavisam dažādi un tamdēļ nevar paātrinājuma konstrukciju izvest no (P,π).

Piemērs I.: Klaņa kustība analitiski.



zīm.84.

Apskatīsim analitiski tvaika mašīnas jeb iekšdegu motora klaņa AB kustību.

Nekustošas koordinatu sistemas sākumu izvēlēsim punkta B trajektorijas centrā O, un $\bar{Y}$-asi ņemsim taisnes virzienā pa kuŗu slīd punkts A.

Kustošas koordinatu sistemas sākumu izvēlēsim punktā B un H -asi ņemsim caur punktu A.

Kloķa garumu OB apzīmēsim ar R

Klaņa garumu AB apzīmēsim ar $\mathcal{L}$

Pieņemsim, ka vārpsta griežas vienmērīgi, tad leņķiskais ātrums būs Const.

$\omega = k$ un

$$\theta = \omega t = kt$$

Vispārīgi θ var būt arī kāda cita laika funkcija. Lai atrastu leņķi $\varphi = \mathcal{F}(t)$ ņemsim kustošas figuras punkta kustības nol-mus (12)

$$x = x_0 + \xi\,\mathrm{Cos}\,\varphi - \eta\,\mathrm{Sn}\,\varphi$$

un pielietosim viņu punktam A, kuŗa absoluta koordinate x = 0 un relative $\xi = 0$ un $\eta = \mathcal{L}$; x_0 tanī pašā nolīdzinājumā ir punkta B koordinate

$$x_0 = R\,\mathrm{Cos}\,\theta$$

$$0 = R\,\mathrm{Cos}\,\theta + 0 - \mathcal{L}\,\mathrm{Sn}\,\varphi$$

$$\mathrm{Sn}\,\varphi = \frac{R}{\mathcal{L}}\mathrm{Cos}\,\theta \quad \text{un} \quad \varphi = \mathrm{arc\ Sn}\left(\frac{R}{\mathcal{L}}\mathrm{Cos}\,\theta\right)$$

Tagad komplanas kustības nolīdzinājumi šinī gadijumā:

$$\boxed{x_0 = R \operatorname{Cos} kt}$$
$$\boxed{y_0 = R \operatorname{Cos} kt}$$
$$\boxed{\varphi = \operatorname{arc} \operatorname{Sn} \left(\frac{R}{\mathcal{L}} \cdot \operatorname{Cos} kt \right)}$$

Izvēlēsim vēl kādu klaņa punktu M ar relatīvām koordinātēm: $\xi = 0$; $\eta = \ell$ un sastādīsim viņa kustības nol-mus pēc formulām (12)

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + \xi \operatorname{Cos}\varphi - \eta \operatorname{Sn}\varphi \\ y &= y_0 + \xi \operatorname{Sn}\varphi + \eta \operatorname{Cos}\varphi \end{aligned}\right\} \quad ......(12)$$

$$\left.\begin{aligned} x &= R \operatorname{Cos} kt + 0 - \ell \operatorname{Sn}\varphi \\ y &= R \operatorname{Sn} kt + 0 + \ell \operatorname{Cos}\varphi \end{aligned}\right\} \quad \text{bet} \quad \operatorname{Sn}\varphi = \frac{R}{\mathcal{L}} \operatorname{Cos} kt$$

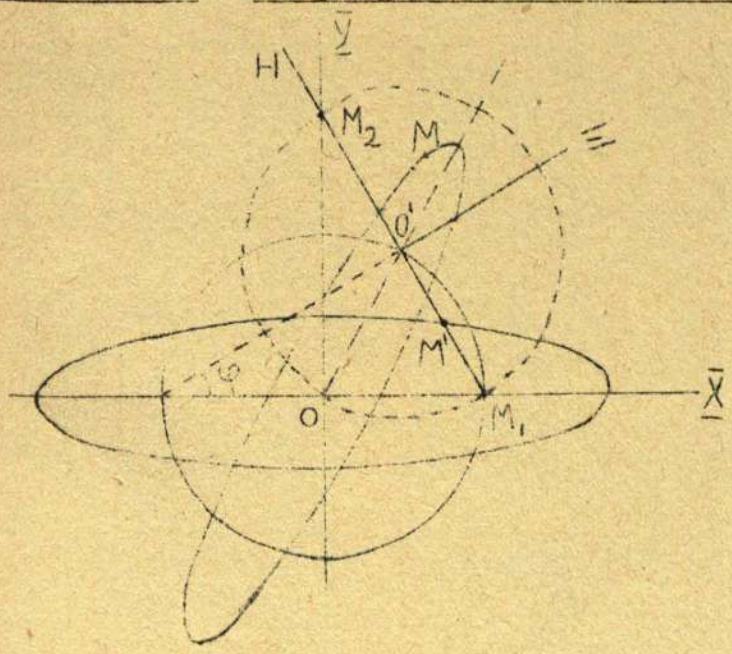
$$x = R \operatorname{Cos} kt - \ell \cdot \frac{R}{\mathcal{L}} \operatorname{Cos} kt$$

$$y = R \operatorname{Sn} kt + \ell \cdot \sqrt{1 - \frac{R^2}{\mathcal{L}^2} \operatorname{Cos}^2 kt}$$

galīgi:
$$\left\{\begin{aligned} &\boxed{x = R \left(1 - \frac{\ell}{\mathcal{L}}\right) \operatorname{Cos} kt} \\ &\boxed{y = R \operatorname{Sn} kt + \frac{\ell}{\mathcal{L}} \sqrt{\mathcal{L}^2 - R^2 \operatorname{Cos}^2 kt}} \end{aligned}\right.$$

Izslēdzot no šiem nol-miem laiku, dabūsim punkta M trajektoriju, kuŗa būs tuva elipsei.

Piemērs II : Elipsografa kustība analitiski.



zīm.85.

Kustoša plakne pārvietojas attiecībā pret nekustošu tā, ka divi punkti M_1 un M_2 slīd pa divām savstarpīgi perpendikulārām taisnēm, kuŗas mēs izvēlēsim par nekustošām koordinātu asīm. $O\bar{X}$ un $O\bar{Y}$. Kustošas koordinātu sistemas sākumu ņemsim taisnes M_1M_2 viduspunktā O' un O'H asi ņemsim taisnes M_1M_2 virzienā. O'Ξ asi protams ņemsim perpendikulāri taisnei M_1M_2 .Taisnes M_1M_2 garumu apzīmēsim ar $2\mathcal{L}$.

Ja kustoša plakne kustās attiecībā pret nekustošu, tad leņķis φ ar laiku mainās. Neierobežosim šo funkciju un skaitīsim, ka $\varphi = \mathcal{F}(t)$

Lai sastādītu komplanas kustības nol-mus ņemsim kustošas plaknes punkta kustības nol-mus formulas(12)

$$x = x_0 + \xi \operatorname{Cos}\varphi - \eta \operatorname{Sn}\varphi$$
$$y = y_0 + \xi \operatorname{Sn}\varphi + \eta \operatorname{Cos}\varphi$$

un pielietosim viņus punktiem M_2 un M_1

Punktam M_2 : $x = 0$; $\xi = 0$ un $\eta = \mathcal{L}$
punktam M_1 : $y = 0$; $\xi = 0$ un $\eta = -\mathcal{L}$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= x_0 + 0 - \mathcal{L}\,\mathrm{Sn}\,\varphi \\ 0 &= y_0 - 0 - \mathcal{L}\,\mathrm{Cos}\,\varphi \end{aligned}\right\} \text{ no kurienes } \left\{\begin{aligned} x_0 &= \mathcal{L}\,\mathrm{Sn}\,\varphi \\ y_0 &= \mathcal{L}\,\mathrm{Cos}\,\varphi \end{aligned}\right.$$

Komplanas kustības nolīdzinājumi būs:

$$\left\{\begin{aligned} &\boxed{x_0 = \mathcal{L}\,\mathrm{Sn}\,\varphi} \\ &\boxed{y_0 = \mathcal{L}\,\mathrm{Cos}\,\varphi} \\ &\boxed{\varphi = \mathcal{F}(t)} \end{aligned}\right.$$

Tāļāk ņemsim kaut kādu kustošas plaknes punktu $M(\xi\,\eta)$ un meklēsim viņa trajektoriju absolutās koordinātēs.

Punkta kustības nol-mi (12) :
$$x = x_0 + \xi\,\mathrm{Cos}\,\varphi - \eta\,\mathrm{Sn}\,\varphi$$
$$y = y_0 + \xi\,\mathrm{Sn}\,\varphi + \eta\,\mathrm{Cos}\,\varphi$$

Liksim šeit iekšā x_0 un y_0 ,tad

$$\begin{aligned} x &= (\mathcal{L}-\eta)\,\mathrm{Sn}\,\varphi + \xi\,\mathrm{Cos}\,\varphi \\ y &= \xi\,\mathrm{Sn}\,\varphi + (\mathcal{L}-\eta)\,\mathrm{Cos}\,\varphi \end{aligned} \left|\begin{matrix} \mathcal{L}+\eta \\ \xi \end{matrix}\right| - \left|\begin{matrix} \xi \\ \mathcal{L}-\eta \end{matrix}\right| - \text{)}$$

$$\left.\begin{aligned} (\mathcal{L}+\eta)x - \xi.y &= \left[(\mathcal{L}^2-\eta^2)-\xi^2\right]\mathrm{Sn}\,\varphi \\ (\mathcal{L}-\eta)y - \xi.x &= \left[(\mathcal{L}^2-\eta^2)-\xi^2\right]\mathrm{Cos}\,\varphi \end{aligned}\right\}$$ Lai izslēgtu $\varphi = \mathcal{F}(t)$ celsim kvadratā un saskaitīsim

$$\boxed{\left[(\mathcal{L}+\eta)x - \xi.y\right]^2 + \left[(\mathcal{L}-\eta)y - \xi.x\right]^2 = \left[\mathcal{L}^2 - \xi^2 - \eta^2\right]^2} \quad \ldots(20)$$

Šis nol-ms, kuŗš ir punkta M-trajektorija,vispārīgi reprezentē elipsi, jo šeit mainīgie būs x un y ,bet ξ un η jāuzskata par Const.

Ievērojot tāļāk, ka nol-mā loceķļu ar x un y pirmā pakāpē nav, varam teikt, ka elipses centrs atrodas koordinātu sākumā, bet galvenās ass vispārīgi nesakrīt ar koordinātu asīm, skat.zīm.85.

Jāpiezīmē, ka punktu trajektorijas nav atkarīgas no φ laika funkcijas veida, tā tad nav atkarīgas arī no ātruma, ar kuŗu kustās figura (jeb punkti M_1 un M_2).

Apskatīsim tāļāk atsevišķo punktu trajektorijas.

I.Taisnes M_1M_2 punktu trajektorijas:

Visiem šādiem punktiem: $\xi = 0$ un trajektorijas nol-ms pārvēršās:
$$(\mathcal{L}+\eta)^2 \,.\, x^2 + (\mathcal{L}-\eta)^2 \,.\, y^2 = (\mathcal{L}^2 - \eta^2)^2$$

jeb
$$\boxed{\frac{x^2}{(\mathcal{L}-\eta)^2} + \frac{y^2}{(\mathcal{L}+\eta)^2} = 1} \quad \ldots\ldots\ldots(21)$$

Atrastais nol-ms reprezentē elipsi ar centru koordinātu sākumā,kuŗas galvenās ass sakrīt ar koordinātu asīm.

Atrasto īpašību mēs varam izlietot elipsu zīmēšanai: salīdzināsim elipses nol-mu kanoniskā veidā: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ar formulu(21)

tad $\left.\begin{aligned} a &= \mathcal{L} - \eta \\ b &= \mathcal{L} + \eta \end{aligned}\right\}$ no kurienes
$$2\mathcal{L} = a + b$$
$$\eta = -\tfrac{1}{2}(a - b)$$

Tā tad, ja mēs gribam uzzīmēt elipsi ar dotām pusasīm a un b, ir jāņem lineālī garumā $M_1M_2 = a + b$ un no viduspunkta O' jāatliek uz le..ı $O'M' = \eta = -\frac{1}{2}(a - b)$. Atrastā punktā M' jānovieto zīmuli un pie lineāla punktu M_1 un M_2 slīdēšanas pa divām savstarpīgi perpendikulārām asīm, zīmulis aprakstīs prasīto elipsi ar pusasīm a un b.

Ņemot vērā augšā minēto, aprakstītā ierīce, t.i. ar pārvietojamo zīmuli apgādāts lineals, kuŗš var slīdēt pa divām savstarpīgi perpendikulārām asīm, saucās par elipsografu.

II. Riņķu aprakstošu punktu noteikšana.

Ņemsim nol--mu (20) un atklāsim kvadratus

$$(\mathcal{L}+\eta)^2 x^2 + \xi^2 y^2 - 2(\mathcal{L}+\eta)\xi.xy + (\mathcal{L}-\eta)^2y^2 + \xi^2x^2 - 2(\mathcal{L}-\eta)\xi.xy =$$
$$= (\mathcal{L}^2 - \xi^2 - \eta^2)^2$$

$$\left[(\mathcal{L}+\eta)^2 + \xi^2\right] x^2 + \left[(\mathcal{L}-\eta)^2 + \xi^2\right] y^2 - 4\mathcal{L}\xi xy = (\mathcal{L}^2-\xi^2-\eta^2)^2$$

Lai šis nol-ms reprezentētu riņķi, pirmkārt koeficientam pie xy jābūt 0, bet tas ir iespējams tikai tad, ja $\xi = 0$ un tas nozīmē, ka meklējamie punkti atrodas uz taisnes M_1M_2. Otrais noteikums ir, ka koeficientiem pie x^2 un y^2 jābūt vienādiem $(\mathcal{L}+\eta)^2 + \xi^2 = (\mathcal{L}-\eta)^2 + \xi^2$ bet

ξ jau = 0, tā tad $\mathcal{L}+\eta = \mathcal{L}-\eta$ no kurienes arī: $\eta = 0$

Abi noteikumi nosaka punktu O' un riņķi aprakstīs vienīgi taisnes M_1M_2 viduspunkts.

III. Taisnes aprakstošu punktu noteikšana.

Nol-ms (20) $\left[(\mathcal{L}+\eta)x - \xi y\right]^2 + \left[(\mathcal{L}-\eta)y - \xi x\right]^2 = (\mathcal{L}^2 - \xi^2 - \eta^2)^2$

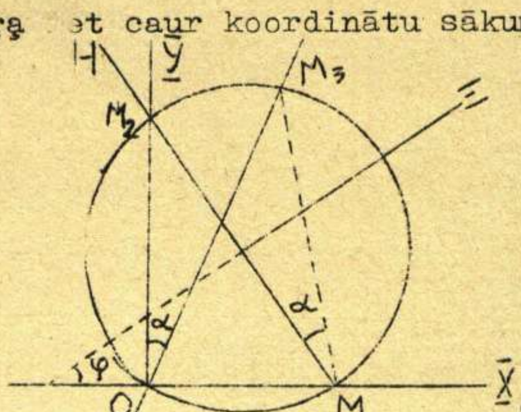
var reprezentēt taisni tikai tad, ja $\mathcal{L}^2 - \xi^2 - \eta^2 = 0$

bet tas prasa tāļāk, lai
$$\begin{cases} (\mathcal{L}+\eta)x - \xi y = 0 \\ (\mathcal{L}-\eta)y - \xi x = 0 \end{cases}$$

pārveidojot šos nolīdzinājumus, gūsim divus lineārus nol-mus:
$$\begin{cases} y = \dfrac{\mathcal{L}+\eta}{\xi}\cdot x \\ y = \dfrac{\xi}{\mathcal{L}-\eta}\cdot x \end{cases} \qquad \text{......(24)}$$

bet $\mathcal{L}^2 - \eta^2 = \xi^2$ jeb $(\mathcal{L}+\eta)(\mathcal{L}-\eta) = \xi^2$ un $\dfrac{\mathcal{L}+\eta}{\xi} = \dfrac{\xi}{\mathcal{L}-\eta}$

Kā redzams, abi iegūtie nol-mi (24) reprezentē vienu un to pašu taisni, kuŗa ..et caur koordinātu sākumu un kuŗas virziena koeficients: $m = \dfrac{\mathcal{L}+\eta}{\xi}$



zīm.86.

Tagad noskaidrosim, kādi kustošas plaknes punkti aprakstīs taisnes: acimredzot šādu punktu koordinātēm ξ un η jāapmierina nolīdzinājumu

$$\mathcal{L}^2 - \xi^2 - \eta^2 = 0$$

Bet šis nol-ms, kuŗu varam pārrakstīt: $\xi^2 + \eta^2 = \mathcal{L}^2$ izsaka riņķi, vilktu kustošā plaknē caur punktiem M_1 M_2 un O.

Katra minēta riņķa punkta M_3 trajektorija būs taisne, kuŗa savieno šo punktu ar koordinātu sākumu O. Pierādīsim sacīto: Zīmējumā 86 ir redzams: $\angle M_3M_1M_2 = \angle M_3OY = \alpha$, taisnes OM_3 nol-ms: $y = x\,\mathrm{Ctg}(M_3OY) = x\,\mathrm{Ctg}\,\alpha$

bet $\mathrm{Ctg}\,\alpha = \mathrm{Ctg}\,M_2M_1M_3 = \dfrac{\mathcal{L}+\eta}{\xi}$

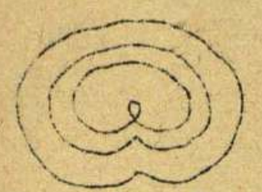
no kurienes $y = \dfrac{\mathcal{L}+\eta}{\xi}\cdot x$ Šis nol-ms pilnīgi sakrīt ar vienu no trajektorijas nol-miem (24), kādēļ varam teikt, ka: katrs riņķa, vilkta caur M_1, M_2, O, punkts aprakstīs taisnas linijas, kuŗas iet caur koordinātu sākumu O.

Punkta trajektorijas uz kustošas plaknes.

Ja mēs kustību apgriezīsim, t.i. skaitīsim, ka kustoša plakne nekustas, bet nekustoša kustās, tad analogiski katrs nekustošas plaknes punkts aprakstīs zināmu liniju, uz kustošas plaknes.

Lai atrastu šo trajektoriju analitiski varam lietot to pašu nolīdzinājumu (20)

$$[(\mathcal{L}+\eta)x - \xi . y]^2 + [(\mathcal{L}-\eta)y - \xi . x]^2 = [\mathcal{L}^2 - \xi^2 - \eta^2]^2$$


zīm.87.

bet tikai tagad koordinates x un y jāuzskata par Const. un ξ un η par mainīgiem.

Bet kā redzams nol-ms (2) attiecībā uz ξ un η ir ceturtās kāpes, kādēļ trajektorijas uz kustošās plaknes vairs nebūs elipses, bet tā saucamās epitrochoidas (zīm.87).

Elipsografa poloidas.

Nekustoša poloida. Elipsografam bija atrasts: $x_o = \mathcal{L}\,\mathrm{Sn}\,\varphi$; $y_o = \mathcal{L}\,\mathrm{Cos}\,\varphi$

Sastādīsim $\dot{x}_o = \mathcal{L}\,\mathrm{Cos}\,\varphi . \dot{\varphi}$ un $\dot{y}_o = -\mathcal{L}\,\mathrm{Sn}\,\varphi . \dot{\varphi}$

Ievietosim šo formulās (16), kuŗas dod momentana pola nekustošas koordinātes

$$x_p = x_o - \frac{\dot{y}_o}{\dot{\varphi}} = \mathcal{L}\,\mathrm{Sn}\,\varphi + \frac{\mathcal{L}\,\mathrm{Sn}\,\varphi . \dot{\varphi}}{\dot{\varphi}} = 2\,\mathcal{L}\,\mathrm{Sn}\,\varphi$$

$$y_p = y_o + \frac{\dot{x}_o}{\dot{\varphi}} = \mathcal{L}\,\mathrm{Cos}\,\varphi + \frac{\mathcal{L}\,\mathrm{Cos}\,\varphi . \dot{\varphi}}{\dot{\varphi}} = 2\,\mathcal{L}\,\mathrm{Cos}\,\varphi$$

Izslēdzot no šiem nol-miem φ, kuŗš ir laika funkcija, dabūsim nekustošu poloidu:

$$\boxed{x_p^2 + y_p^2 = 4\mathcal{L}^2}$$

Nekustoša poloida ir riņķis ar radiusu $2\mathcal{L}$ un centru nekustošā koordinātu sākumā O.

Kustoša poloida: Tagad ņemsim momentana pola kustošas koordinātes: formulas (18)

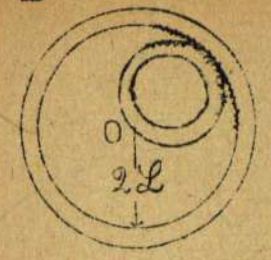
$$\xi_\pi = (\dot{x}_o\mathrm{Sn}\,\varphi - \dot{y}_o\mathrm{Cos}\,\varphi)\frac{1}{\dot{\varphi}} = (\mathcal{L}\,\mathrm{Cos}\,\varphi . \dot{\varphi} . \mathrm{Sn}\,\varphi + \mathcal{L}\,\mathrm{Sn}\,\varphi . \dot{\varphi}\,\mathrm{Cos}\,\varphi)\frac{1}{\dot{\varphi}} = \mathcal{L}\,\mathrm{Sn}\,2\varphi$$

$$\eta_\pi = (\dot{x}_o\mathrm{Cos}\,\varphi + \dot{y}_o\mathrm{Sn}\,\varphi)\frac{1}{\dot{\varphi}} = (\mathcal{L}\,\mathrm{Cos}\,\varphi . \dot{\varphi} . \mathrm{Cos}\,\varphi - \mathcal{L}\,\mathrm{Sn}\,\varphi . \dot{\varphi}\,\mathrm{Sn}\,\varphi)\frac{1}{\dot{\varphi}} = \mathcal{L}\,\mathrm{Cos}\,2\varphi$$

Izslēdzot atkal leņķi φ dabūsim kustošu poloidu

$$\boxed{\xi_\pi^2 + \eta_\pi^2 = \mathcal{L}^2}$$

kuŗa arī būs riņķis, bet ar radiusu $\mathcal{L}$ un centru kustošā koordinātu sākumā O'.



zīm.88.

Pie elipsografa kustības kustoša poloida veļās pa nekustošu iekšpus pēdējās, tā tad eliptisko cirķeli var konstruēt arī ņemot vienu zobratu ar radiusu $2\mathcal{L}$ un zobiem iekšpusē un liekot velties iekšā otram zobratam ar radiusu $\mathcal{L}$ un zobiem ārpusē (zīm.88). Tad saistot zīmuli ar iekšējo zobratu, zīmulis vispārīgi apraksts elipses, tikai ja viņš atradīsies punktā O', zīmulis aprakstīs riņķi un ja viņš atradīsies uz zobrata aploces, viņš aprakstīs taisnes.

Elipsografa momentanais paātrinājuma centrs Γ.

Aprobežosimies ar gadijumu, kad $\varphi = kt$

$x_0 = \mathcal{L}\,Sn\,\varphi$		$\dot{x}_0 = \mathcal{L}k\,Cos\,kt$	$\ddot{x}_0 = -\mathcal{L}k^2\,Sn\,kt$
$y_0 = \mathcal{L}\,Cos\,\varphi$	sastādīsim	$\dot{y}_0 = -\mathcal{L}k\,Sn\,kt$	$\ddot{y}_0 = -\mathcal{L}k^2\,Cos\,kt$
$\varphi = kt$		$\dot{\varphi} = k$	$\ddot{\varphi} = 0$

Ņemot agrāk atrastas formulas (22)

$$x_\gamma = x_0 + \frac{\ddot{x}_0\dot{\varphi}^2 - \ddot{y}_0\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}^4 + \ddot{\varphi}^2} = \mathcal{L}\,Sn\,kt + \frac{-\mathcal{L}k^2\,Sn\,kt.k^2}{k^4} = \mathcal{L}\,Sn\,kt - \mathcal{L}\,Sn\,kt = 0$$

$$y_\gamma = y_0 + \frac{\ddot{y}_0\dot{\varphi}^2 + \ddot{x}_0\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}^4 + \ddot{\varphi}^2} = \mathcal{L}\,Cos\,kt + \frac{-\mathcal{L}k^2\,Cos\,kt.k^2}{k^4} = \mathcal{L}\,Cos\,kt - \mathcal{L}\,Coskt = 0$$

iznāk, ka momentanais paātrinājuma centrs Γ šinī gadijumā sakrīt ar koordinatu sākumu O.

Uziesim tā paša centra Γ relatīvās koordinātes, ņemot formulas (23)

$$\left.\begin{aligned} \xi_\gamma &= \frac{(\ddot{x}_0\dot{\varphi}^2 - \ddot{y}_0\ddot{\varphi})\,Cos\,\varphi + (\ddot{y}_0\dot{\varphi}^2 + \ddot{x}_0\ddot{\varphi})\,Sn\,\varphi}{\dot{\varphi}^4 + \ddot{\varphi}^2} \\ \eta_\gamma &= \frac{(\ddot{y}_0\dot{\varphi}^2 + \ddot{x}_0\ddot{\varphi})\,Cos\,\varphi - (\ddot{x}_0\dot{\varphi}^2 - \ddot{y}_0\ddot{\varphi})\,Sn\,\varphi}{\dot{\varphi}^4 + \ddot{\varphi}^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(23)$$

$$\xi_\gamma = \frac{-\mathcal{L}k^2\,Sn\,kt.k^2\,Cos\,kt - \mathcal{L}k^2\,Cos\,kt.k^2\,Sn\,kt}{k^4} = -\mathcal{L}\,Sn\,2kt$$

$$\eta_\gamma = \frac{-\mathcal{L}k^2\,Cos\,kt.k^2\,Cos\,kt - \mathcal{L}k^2\,Sn\,kt.k^2\,Sn\,kt}{k^4} = -\mathcal{L}\,Cos\,2\,kt$$

Izslēdzot laiku dabūsim: $\xi_\gamma^2 + \eta_\gamma^2 = \mathcal{L}^2$ tas nozīmē, ka linija, kuŗu apraksta momentanais paātrinājuma centrs Γ uz kustošas plaknes sakrīt ar kustošu poloidu.

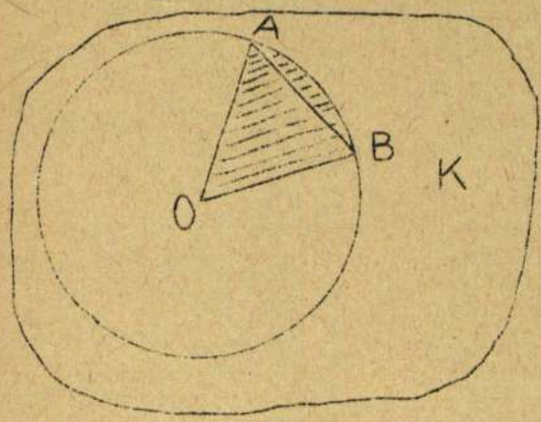
Piemērs: Riņķis veļās vienmērīgi pa taisnu liniju.

zīm.89.

Acimredzot arvienu riņķa centra paātrinājums līdzinājās 0, jo pie. $r = 0$ $J_t = r\tau = 0$ un arī $J_n = r\omega^2 = 0$

Tā tad paātrinājuma centra Γ geometriska vieta būs taisne $\Gamma\Gamma'$. Turpretīm momentanais ātruma centrs būs C un viņa geometriska vieta uz nekustošas plaknes: taisne CC'. Kā redzams paātrinājuma centrs Γ sakrīt ar ātruma centru C.

§ 3. CIETA ĶERMEŅA KUSTĪBA AP NEKUSTOŠU PUNKTU.



zīm.90.

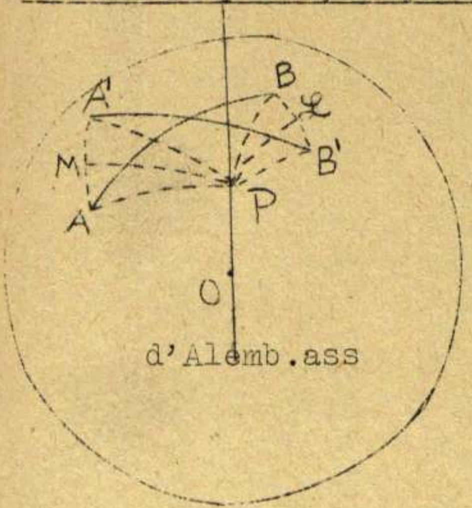
Lai noteiktu ķermeņa K kustību ap nekustošu punktu O, mēs ap punktu O aprakstam ar radiusu $r = 1$ divas lodes virsmas, no kuŗām vienu saistam ar nekustošu koordinātu sistemu un otru ar ķermeni K.

Tad pie ķermeņa kustības ap O viena virsma slīdēs pa otru un kustošas virsmas punkti aprakstīs kādas trajektorijas uz nekustošas virsmas. Šādu kustību sauksim par sferisko.

Pamattrijstūru, ar kuŗu vispārīgi tiek noteikta ķermeņa kustība, mēs tagad izvēlam tā, lai viena virsotne atrodas nekustošā punktā O un divas pārējās virsotnes A un B uz lodes virsmas, bet trešās trijstūra malas AB vietā mēs ņemsim lielā riņķa loku $\smile AB$. Tad pie visām ķermeņa kustībām ap nekustošu punktu šis loks $\smile AB$ no lodes virsmas laukā neizies un mēs varam trijstūra vietā apskatīt tikai loka kustību.

d'Alembert'a teorema.

Ķermeņa griezes kustība ap nekustošu punktu ir ekvivalenta griezes kustībai ap asi, kuŗa iet caur to punktu.



zīm.91

Pieņemsim, ka AB pie ķermeņa kustības ir pārvietojies stāvoklī A'B'
Vilksim caur A un A' lielā riņķa loku,
tāpat " B un B' " " "

Lokus AA' un BB' dalam uz pusēm

$$\smile AM = \smile MA' \text{ un } \smile B\mathcal{L} = \smile \mathcal{L}B'$$

Caur punktiem M un $\mathcal{L}$ velkam atkal lielo riņķu lokus perpendikulāri $\smile AA'$ un $\smile BB'$, kuŗi krustojās punktā P. Pierādīsim tagad, ka minētā griezes ass iet caur punktu P.

Sferiskos trijstūros APM un A'PM

(kopēja mala PM ir (malas $\smile AM = \smile A'M_0$ ($\angle PMA = \angle PMA' = 90^0$	tā tad viņi ir vienādi un guļ simmetriski viens pret otru, no kurienes seko $\smile PA = \smile PA'$

Analogiski no sferiskiem $\triangle BP\mathcal{L}$ un $\triangle B'PL$ dabujam, ka $\smile PB = \smile PB'$

Tagad sferiskie $\triangle PAB = \triangle PA'B'$ jo visas malas vienādas:

$$\left.\begin{array}{l} \smile AB = \smile A'B' \\ \smile PA = \smile PA' \\ \smile PB = \smile PB' \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{no kurienes seko } \angle APB = \angle A'PB' \\ \text{un atvelkot abās pusēs } \angle A'PB \text{ paliek} \end{array}$$

$$\angle APB - \angle A'PB = \angle A'PB' - \angle A'PB$$

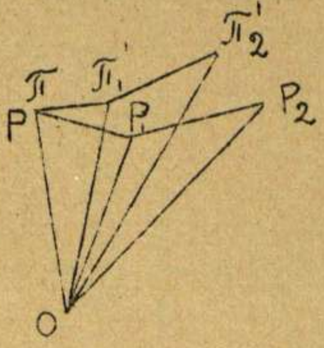
$$\angle APA' = \angle BPB' = \angle \varphi$$

Tas nozīmē, ka punkta A pārvešanai stāvoklī A', kā arī punkta B pārvešanai stāvoklī B' viņus jāpagriež ap punktu P, pie kam griezes leņķis ir viens un tas pats: $\angle \varphi$

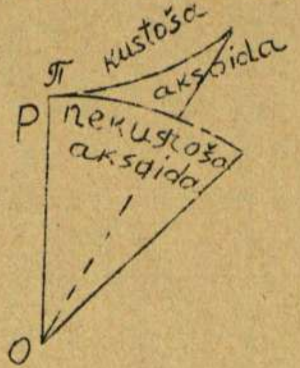
Griežot loku AB ap punktu P mēs pārvietojam visu pamattrijstūri, bet punkts O arī paliek nekustošs, tā tad varam teikt, ka grieze notiek ap asi OP, kuŗa iet caur punktiem O un P, un tiek saukta par d'Alembert'a asi (zīm.91.)

Momentana kustība un aksoidas.

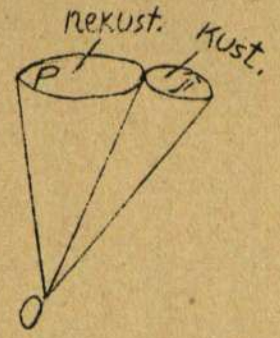
Ja ķermenis griežās ap punktu, viņa kustību varam sadalīt elementārās daļās un katru daļu aizvietot ar griezes kustību ap asi, kuŗai tagad būs momentana nozīme. Nākošā momentā griezes ass atradīsies citā vietā ka nekustošā koordinatu sistemā, tā arī pašā ķermenī (skat. zīm.92).



zīm.92.

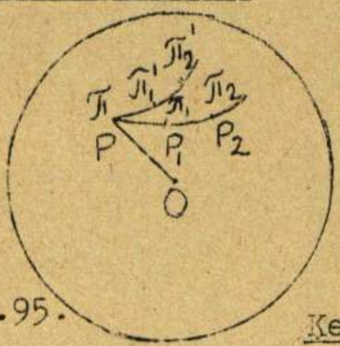


zīm.93.



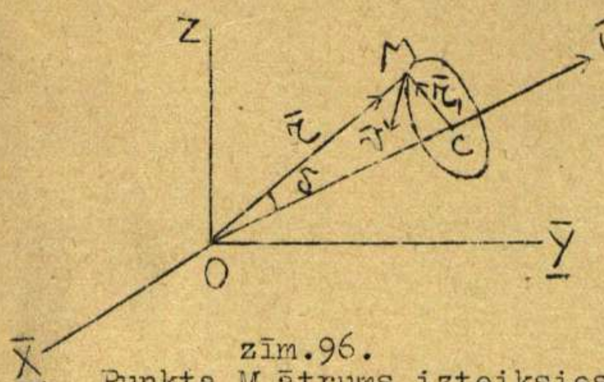
zīm.94.

Griezes ass geometrisko vietu nekustošās koordinātēs mēs sauksim par nekustošo aksoidu. Tās pašas ass geometrisko vietu ķermenī sauksim par kustošu aksoidu. Šīs aksoidas būs koniskas virsmas ar virsotni lodes centrā O, kuŗas katrā laika momentā savstarpīgi pieskarās un kustoša veļās pa nekustošu bez slīdēšanas. Virsmas var būt noslēgtas, bet var arī nenoslēgties (zīm.94, 95 un 93).



zīm.95.

Ķermeņa punkta momentanais ātrums.



zīm.96.

Nekustošā punktā O, ap kuŗu kustās ķermenis, izvēlam koordinātu sākumu. Caur šo punktu ies pēc d'Alembert'a teoremas momentana griezes ass, kuŗas virzienā ies arī momentana griezes ātruma vektors $\bar{\omega}$

Kaut kāds cieta ķermeņa punkts M apraksts rinķi ar centru punktā C un radiusu $\bar{r}_1$, kuŗu dabūsim velkot caur M perpendikularu pret $\bar{\omega}$ asi.

Punkta M ātrums izteiksies ar vektorproduktu

$\bar{v} = [\bar{\omega} . \bar{r}_1]$ attīstot $V = \omega . r_1 . Sn\, 90^0 = \omega . r_1$

bet $r_1 = r\, Sn\, \delta$, tā tad $V = \omega . r . Sn\, \delta$ jeb

$$\boxed{\bar{v} = [\bar{\omega}\, \bar{r}]}$$ Eulera formula......(25)

Ķermeņa punkta momentanais ātrums pie ķermeņa kustības ap kādu punktu ir vektorprodukts no momentana griezes ātruma vektora $\bar{\omega}$ ar punkta radiusu vektoru $\bar{r}$.

rakstot vektorproduktu determinantes formā $\bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i}_x & \bar{i}_y & \bar{i}_z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix}$ varam sastādīt ātruma projekcijas uz koordinatu asīm

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{v_x = \omega_y z - \omega_z y} \\ \boxed{v_y = \omega_z x - \omega_x z} \\ \boxed{v_z = \omega_x y - \omega_y x} \end{array}\right\} \quad \text{........(26)}$$

Speciāli gadijumi: 1) Ja $\bar{\omega}$ = Const. pēc lieluma un virziena mēs dabujam vienmērīgu griezi ap nekustošu asi.

2) Ja $\bar{\omega}$ ir Const. tikai pēc virziena mēs dabujam griezi ap nekustošu asi, bet grieze ir kāda f(t)

<u>Momentanas griezes ass nol-ms telpā.</u>

Ņemot vērā, ka punktiem uz griezes ass ātrumi ir 0, mēs varam šiem punktiem ātruma projekcijas pielīdzināt 0

$$\left.\begin{array}{l} \omega_y z - \omega_z y = 0 \\ \omega_z x - \omega_x y = 0 \\ \omega_x y - \omega_y x = 0 \end{array}\right\}$$

Šie nol-mi der katram griezes ass punktam, tā tad reprezentē pašas griezes ass nol-mu.

Pārveidosim šos nolīdzinājumus: $\frac{y}{\omega_y} = \frac{z}{\omega_z}$

$$\frac{x}{\omega_x} = \frac{z}{\omega_z}$$

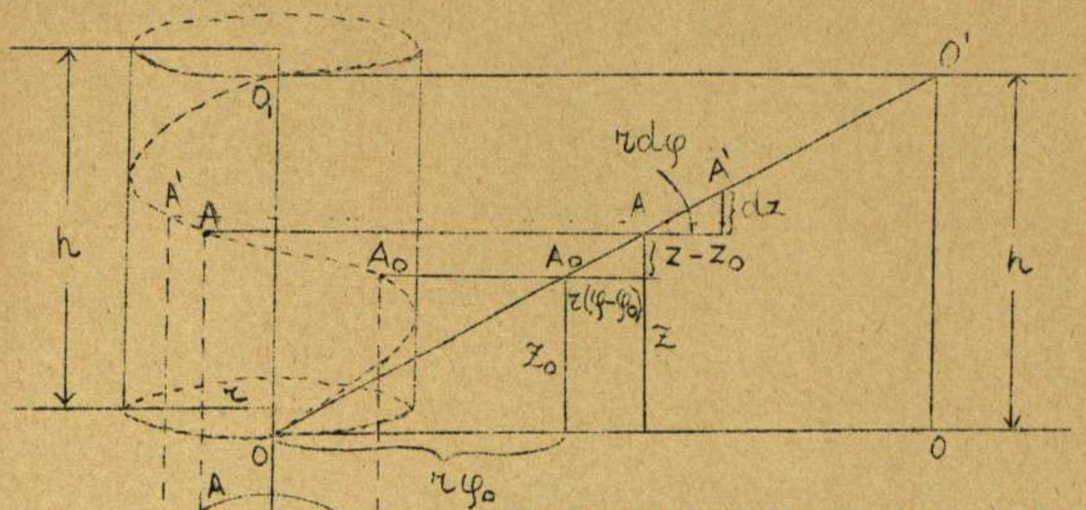
un pārrakstīsim viņus tā:

$$\boxed{\frac{x}{\omega_x} = \frac{y}{\omega_y} = \frac{z}{\omega_z}} \quad \text{............(27)}$$

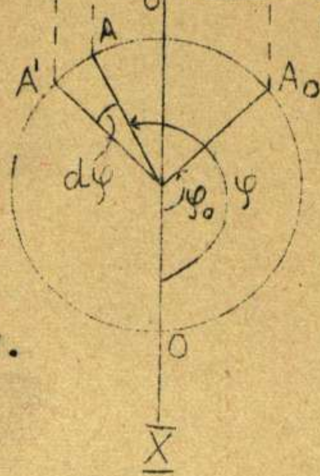
nolīdzinājumi (27) ir <u>momentanas griezes ass nolīdzinājumi telpā</u>, izslēdzot no viņiem laiku, dabūsim virsmu, kuŗa būs momentanas ass geometriska vieta jeb <u>nekustoša aksoida</u>.

§ 4. CIETA ĶERMEŅA SKRŪVES KUSTĪBA.

Pirmkārt parādīsim kā dabūt vienkāršo skrūves liniju.



Ņemsim cilindru augstumā h ur radiusu r. Notinot viņa virsmu dabūsim taisnstūri. Ievelkot taisnstūrī diagonali OO' un uztinot viņu atpakaļ dabūsim tā saucamās vienkāršas skrūves linijas uz cilindra vienu vītni. h - sauc par vītnes augstumu jeb skrūves gājienu.



zīm.97.

Punkta stāvokļa uz skrūves linijas noteikšanai izvēlam nullpunktu O un ja kustība sākās punktā A_0, tad viņš būs noteikts ar leņķi φ_0 un koordināti z_0 un vispārīgi katrs cits punkta stāvokli A būs noteikts ar φ un z.

No zīmējuma 97. ir redzamas attiecības:

$$\frac{z_0}{r\varphi_0} = \frac{h}{2\pi r}\ ; \quad \text{jeb} \quad \frac{z_0}{\varphi_0} = \frac{h}{2\pi}$$

$$\frac{z-z_0}{r(\varphi-\varphi_0)} = \frac{h}{2\pi r}\ ; \quad \frac{z-z_0}{\varphi-\varphi_0} = \frac{h}{2\pi}$$

$$\frac{dz}{rd\varphi} = \frac{h}{2\pi r}\ ; \quad \frac{dz}{d\varphi} = \frac{h}{2\pi}$$

Lielumu $\frac{h}{2\pi} = p$ apzīmēsim ar p un nosauksim par <u>skrūves linijas parametru</u> pie kam $\frac{h}{2\pi}$ ir parametra geometriskā izteiksme. Ievedot parametru, dabūsim $z_0 = p\varphi_0$; $z - z_0 = p(\varphi - \varphi_0)$; $dz = pd\varphi$

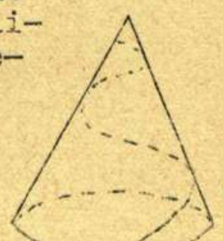
Bez tam no no zīm. 97. ir redzams, ka vienkārša skrūves linija krustojās ar katru cilindra veiduli zem viena un tā paša leņķa.

Skrūves linijas iedalīšana vienkāršā un vispārīgā.

Skrūves linijas nol-mi paralēl-koordinātēs un parametra veidā
$$\begin{cases} x = r\,\mathrm{Cos}\,\varphi \\ y = r\,\mathrm{Sn}\,\varphi \\ z = p\varphi \end{cases}$$

Ja šinīs nol-mos r = Const. un p = Const., tad skrūves linija saucas par <u>vienkāršo</u> skrūves liniju. Ja viens no šiem noteikumiem nav izpildīts, tad skrūves linija saucas par <u>vispārīgo</u> skrūves liniju.

Vispārīgas skrūves linijas piemēri:



zīm.98

r nav Const.

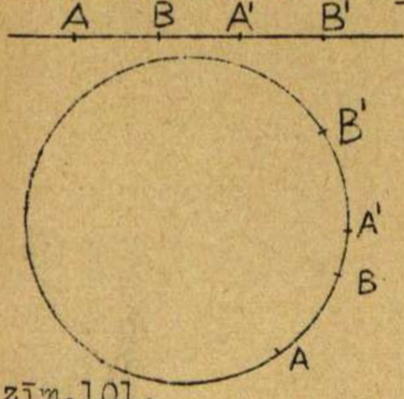
zīm.99.

p nav Const.

zīm.100.

Skrūves liniju varam dot arī cilindra koordinātēs: r, φ, z pie kam ja $r = Const.$; $\varphi = kt$; $z = k_1 t$ skrūves linija ir vienkārša, bet ja kaut viens no šiem noteikumiem nav izpildīts vai nu r nav Const.jeb $\varphi = f_1(t)$ jeb $z = f_2(t)$ skrūves linija būs vispārīga.

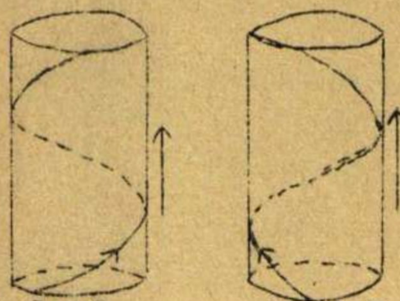
Aizrādīsim uz vienu vienkāršas skrūves linijas īpašību.



zīm.101.

Nogriezni AB guļošu uz taisnes jeb loku AB guļošu uz aploces varam pārvietot citā stāvoklī A'B' ,tā lai viņš neiznāktu ārā no taisnes jeb no riņķa aploces (zīm.101).To pašu varam teikt attiecībā uz vienkāršo skrūves liniju: skrūves linijas loku AB varam pārvietot citā stāvoklī A'B'.

Skrūves linijas iedalīšana labā un kreisā.

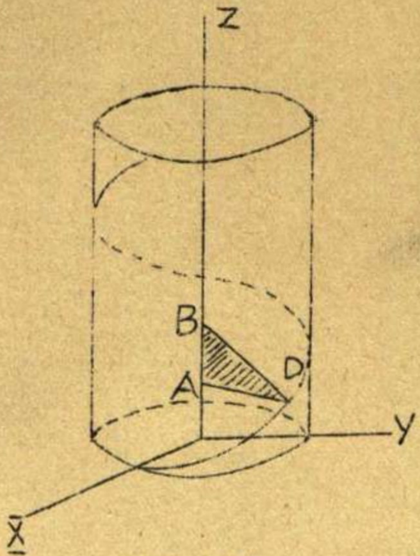

labā kreisā

p ir (+) p ir (-) jo $\angle \varphi$ pieaug pulksteņrādītāja virzienā.

zīm.102.

Mēs atšķirsim labo skrūvi no kreisās tā: Ja mēs nostāsimies pa cilindra asi ar galvu uz augšu un skatīsimies uz skrūves liniju, tad labā skrūve kāps uz augšu pret pulksteņrādītāju, bet kreisā skrūve kāps uz augšu pulksteņrādītāju, ..

Cieta ķermeņa skrūves kustība.



zīm.103.

Definicija: Ciets ķermenis atrodās skrūves kustībā, ja divas pamattrijstūra ABD virsotnes A un B slīd pa skrūves asi, bet trešā virsotne D pārvietojās pa skrūves liniju.

Kā redzams, faktiski skrūves kustība ir noteikta ar viena punkta kustību, tā tad skrūves kustības analitiskie nol-mi būs

$$\left.\begin{aligned} x &= r \cos\varphi \\ y &= r \sin\varphi \\ z &= p\varphi \end{aligned}\right\} \text{Skrūves kustības nol-mi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (28)$$

Skrūves kustības iedalīšana vienkāršā un vispārīgā.

Skrūves kustība būs vienkārša, ja $\varphi = kt$ un trešā pamattrijstūra virsotne pārvietojās pa vienkāršo skrūves liniju, tā tad

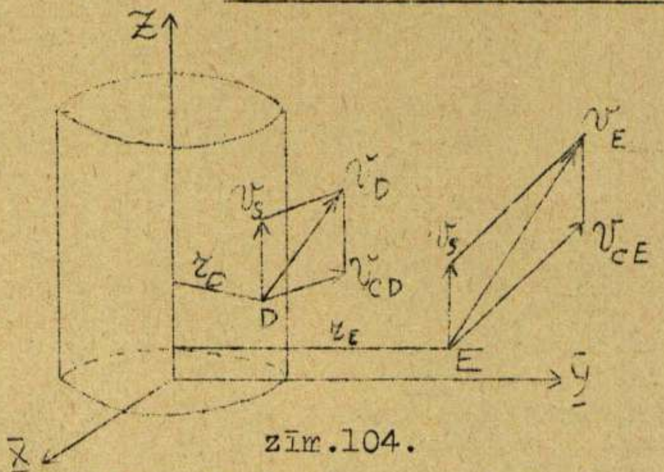
$r = Const.$; $p = Const.$ un $\varphi = kt$ ir trīs vienkāršas skrūves kustības noteikumi.

Bet ja kaut viens no viņiem nav izpildīts, t.i. vai no $r \neq Const.$ jeb $p \neq Const.$ jeb $\varphi = f(t)$,tad skrūves kustība ir vispārīga.

Speciāli gadijumi: 1) Ja parametrs $p = 0$ tad ķermenis atrodas griezes kustībā ap asi.

2) Ja parametrs $p = \infty$,tad ķermenis atrodas virzes kustībā pa skrūves asi. Tā tad kā griezes kustība,tā arī virzes kustība ir skrūves kustības speciāli gadijumi.

Vienkāršas skrūves kustības ātrums.


zīm.104.

Ķermeņa punkta ātrumu skrūves kustībā varam atrast pēc viņa projekcijām, atvasinot kustības nolmus pēc laika.
Ātruma komponenti Z ass virzienā apzīmēsim ar V_s un nosauksim par slīdos ātrumu. Vienkāršā skrūves kustībā p = Const. un

$$V_s = \frac{dz}{dt} = p\frac{d\varphi}{dt} \text{ bet } \frac{d\varphi}{dt} = \omega \quad , \text{ tā}$$

tad $$\boxed{V_s = p\omega} \quad ....(29)$$

Slīdos ātrums V_s ir Const. visiem ķermeņa punktiem.
No formulas (29) atrodam vēl vienu parametra izteiksmi, tā saucamo kinematisko parametra izteiksmi

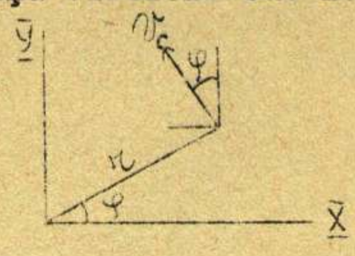
$$\boxed{p = \frac{V_s}{\omega}} \quad ....(30)$$

Ātruma komponentes $\overline{X}$ un $\overline{Y}$ ass virzienos apvienosim vienā, kuŗa atrodas $\overline{XY}$ plaknē un saucās par cirkulāro ātrumu skrūves kustībā. Apzīmēsim viņu ar V_c ,tad $\overline{V}_c = \overline{V}_x + \overline{V}_y$ jeb

$$V_c = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2} = \sqrt{(-r\mathrm{Sn}\varphi\frac{d\varphi}{dt})^2 + (r\mathrm{Cos}\varphi\frac{d\varphi}{dt})^2} = r\frac{d\varphi}{dt}$$

jeb $$\boxed{V_c = r\omega} \quad ....(31)$$

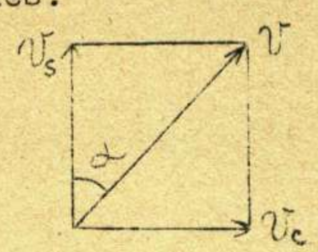
Viņa virziens būs noteikts ar
$$\begin{cases} \mathrm{Cos}(\overline{X}V_c) = \frac{V_x}{V_c} = \frac{-r\mathrm{Sn}\varphi.\omega}{r\omega} = -\mathrm{Sn}\varphi \\ \mathrm{Cos}(YV_c) = \frac{V_y}{V_c} = \frac{r\mathrm{Cos}\varphi.\omega}{r\omega} = \mathrm{Cos}\varphi \end{cases}$$


zīm.105.

Virziena Cos rāda, ka $V_c \perp r$ (zīm.105)
Cirkulārais ātrums vispārīgi ir dažādiem ķermeņa punktiem dažāds, ja viņiem nav vienādi radiusi vektori

$$\left.\begin{matrix} V_{cD} = r_D.\omega \\ V_{cE} = r_E.\omega \end{matrix}\right| \quad \text{ja } r_D \neq r_E \quad \text{tad arī } V_{cD} \neq V_{cE}$$

Pēc lieluma V_c ir vienāds visiem ķermeņa punktiem, kuŗi atrodas uz viena cilindra virsmas, bet vektoriāli vienāds tikai punktiem, uz vienas veidules.


zīm.106.

Saskaitot V_s un V_c dabūsim punkta ātrumu skrūves kustībā

$$\overline{V} = \overline{V}_s + \overline{V}_c \ ;$$

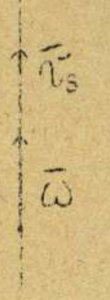
$$V = \sqrt{V_s^2 + V_c^2} = \sqrt{p^2\omega^2 + r^2\omega^2} = \omega\sqrt{p^2 + r^2}$$

$$\boxed{V = \omega\sqrt{p^2 + r^2}} \quad ....(31)$$

Apzīmējot ar α leņķi starp V un veiduli, dabūsim (sk.zīm.106)

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{V_c}{V_s} = \frac{r\omega}{p\omega} = \frac{r}{p} \quad \text{Leņķis } \alpha = \text{Const., ja } r = \text{Const.}$$

No zīm. 106. ir redzama svarīga skrūves kustības ātruma īpašība: Visiem ķermeņa punktiem ātruma projekcijas uz skrūves asi ir vienādas un līdzinājās slīdes ātrumam V_s

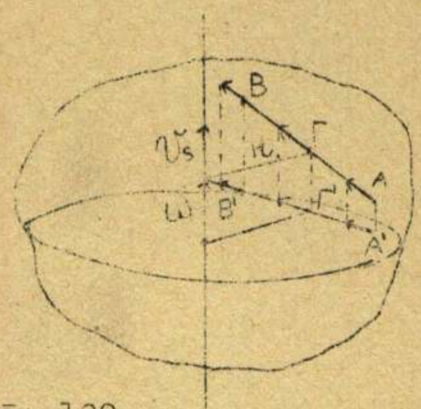


Vienkāršā skrūves kustībā ω = Const. un skrūves kustība ir pilnīgi noteikta ar diviem vektoriem $\bar{V}_s$ un $\bar{\omega}$, kuŗi iet vienā taisnē, pie kam, ja viņu virzieni sakrīt, skrūves kustība ir labā (zīm.107) un pretējā gadijumā kreisā (zīm.108. Šeit ir redzama pilnīga analogija starp skrūves kustību un Dinamu statikā. Beidzot skrūves kustībai var dot vēl vienu definiciju: ķermenis atrodās skrūves kustībā, ja viņš griežās ap asi un slīd virzes kustībā gar

zīm. 107. zīm.108.

to pašu asi, pie kam, ja griezes ātrums un virzes ātrums ir Const., skrūves kustība ir vienkārša, pretējā gadijumā-vispārīgā

Teorema: Ja ķermenis atrodas skrūves kustībā, tad visu kaut kādas taisnes AB punktu ātrumu projekcijas uz taisnes virzienu ir const.lielums



zīm.109.

Ja mēs apskatīsim taisnes AB, kuŗa ir ņemta ķermenī patvaļīgi, punktu A un B ātrumus, tad
1) viņu slīdes ātrumi ir vienādi un
2) velkot kaut kādu plakni $\perp$ skrūves asij un projecējot taisni AB uz šo plakni, varam teikt, ka punktiem A un A' kā arī B un B' ir ātrumi vektoriāli vienādi, jo viņi atrodās uz vienas veidules, bet agrāk bija pierādīts, ka komplanā kustībā, par kuŗu var uzskatīt A'B' kustību, punktu A' un B' ātrumu projekcijas uz A'B' ir vienādas un līdzinājās punkta Γ' ātrumam. Ja mēs šīs projekcijas uzzīmēsim vektoriāli, tad no proporcijām varam teikt, ka arī punktu A un B cirkulāra ātruma projekcijas uz AB virzienu ir vienādas un līdzinājas punkta Γ ātruma projekcijai. Tā tad, ja V_s projekcijas un V_c projekcijas punktiem A un B uz AB virzienu ir vienādas, būs arī V_A projekc. un V_B projekc. uz taisni AB vienādas.

Skrūves kustības paātrinājums.

Pirmkārt apskatīsim paātrinājumu vispārīgā skrūves kustībā, kur $\varphi = f(t)$, bet p = Const., r = Const.

$$j_s = \frac{dv_s}{dt} = p\,\frac{d\omega}{dt} = p\tau \quad \text{– slīdes paātrinājums}$$

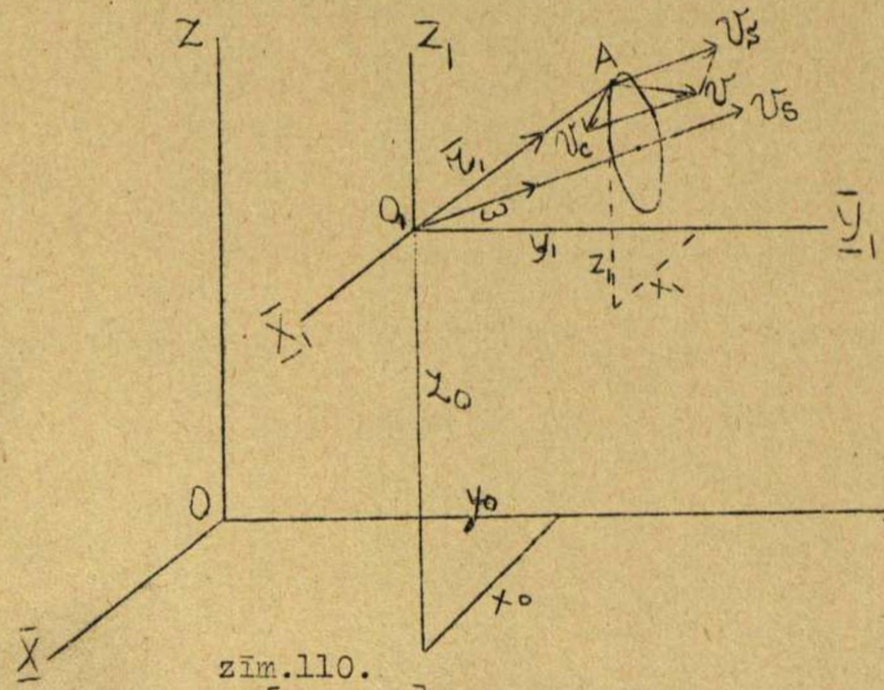
$$\left.\begin{aligned} j_t &= \frac{dv_c}{dt} = r\,\frac{d\omega}{dt} = r\tau && \text{tangenciālais} \\ j_n &= \frac{v_c^2}{r} = \frac{r^2\omega^2}{r} = r\omega^2 && \text{normalais} \end{aligned}\right\}$$

$$j = \sqrt{j_s^2 + j_t^2 + j_n^2}$$

bet vienkāršā skrūves kustībā: ω = Const.; p = Const.

$$\left.\begin{aligned} j_s &= 0 \\ j_t &= 0 \end{aligned}\right\} \boxed{j = j_n = r\omega^2} \quad \text{un ir virzīts } \perp \text{ pret skrūves asi.}$$

Ķermeņa punkta momentana ātruma projekcijas uz koordinātu asīm skrūves kustībā.



zīm.110.

Lai noteiktu skrūves kustību katrā momentā ir jādod skrūves asi, t.i. kādu punktu $O_1(x_0\ y_0\ z_0)$ caur kuru iet skrūves ass un viņas virzienu. Bez tam jāzin arī skrūves kustības elementi $\bar{V}_s$ un $\bar{\omega}$

Ņemsim kādu punktu $A(xyz)$ un izteiksim viņa ātruma projekcijas $V_x\ V_y\ V_z$. Caur punktu O_1 izvēlam jaunu koordinātu sistemu $\bar{X}, \bar{Y}, Z$, tad

pēc Eulera $\bar{V}_c = [\bar{\omega}\cdot\bar{r}_1]$ jeb viņa projekcijas

$V_{cx} = \omega_y\cdot z_1 - \omega_z\cdot y_1$	$x_1 = x - x_0$	$V_{cx} = \omega_y(z - z_0) - \omega_z(y - y_0)$
$V_{cy} = \omega_z\cdot x_1 - \omega_x\cdot z_1$	bet $y_1 = y - y_0$	$V_{cy} = \omega_z(x - x_0) - \omega_x(z - z_0)$
$V_{cz} = \omega_x\cdot y_1 - \omega_y\, x_1$	$z_1 = z - z_0$	$V_{cz} = \omega_x(y - y_0) - \omega_y(x - x_0)$

bet $\bar{V} = \bar{V}_s + \bar{V}_c$ jeb $\bar{V} = \bar{V}_s + [\bar{\omega}\cdot\bar{r}_1]$

$$\left.\begin{aligned} V_x &= V_{sx} + V_{cx} = V_{sx} + \omega_y(z - z_0) - \omega_z(y - y_0) \\ V_y &= V_{sy} + V_{cy} = V_{sy} + \omega_z(x - x_0) - \omega_x(z - z_0) \\ V_z &= V_{sz} + V_{cz} = V_{sz} + \omega_x(y - y_0) - \omega_y(x - x_0) \end{aligned}\right\}$$

punktu ātruma projekcijas uz koordinatu asīm ....(32)

Skrūves ass nol-ms telpā.

Punktiem, kuŗi atrodas uz skrūves ass cirkulārais ātrums ir 0, tā tad lai dabūtu skrūves ass nol-mu ir jāpielīdzina $V_{cx} = V_{cy} = V_{cz} = 0$

$V_{cx} = 0$	$\omega_y(z - z_0) = \omega_z(y - y_0)$	$\dfrac{z - z_0}{\omega_z} = \dfrac{y - y_0}{\omega_y}$
$V_{cy} = 0$	$\omega_z(x - x_0) = \omega_x(z - z_0)$	
$V_{cz} = 0$	$\omega_x(y - y_0) = \omega_y(x - x_0)$	$\dfrac{x - x_0}{\omega_x} = \dfrac{z - z_0}{\omega_z}$

apvienojot: $\boxed{\dfrac{x - x_0}{\omega_x} = \dfrac{y - y_0}{\omega_y} = \dfrac{z - z_0}{\omega_z}}$ ....(33) dabujam

skrūves ass nolīdzinājumu telpā.

Vienkāršā skrūves kustībā $\omega = Const.$ un viņa projekcijas $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ arī būs Const.
Vispārīgā skrūves kustībā, ja $\omega = f(t)$ viņa projekcijas ar laika mainīsies un formulas (33) reprezentēs momentanas skrūves ass nol-mus.

Vienkāršā skrūves kustībā $\omega = Const.$ un arī $p = Const.$, bet $V_s = p\omega = Const.$ un viņa projekcijas V_{sx}, V_{sy}, V_{sz} visas būs Const.
Projecējot nol-mu $V_s = p\omega$ uz koordinatu asīm, dabūsim arī citas skrūves kustības parametra izteiksmes

$$\frac{V_s}{\omega} = p = \frac{V_{sx}}{\omega_x} = \frac{V_{sy}}{\omega_y} = \frac{V_{sz}}{\omega_z}$$

Speciāls gadijums: Skrūves ass sakrīt ar Z asi un $0'$ sakrīt ar 0, bet $\omega = f(t)$

tad $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, $\omega_x = \omega_y = 0$, $\omega_z = \omega$ | $V_{sx} = V_{sy} = 0$, $V_{sz} = V_s$

no kurienes seko

$$\left.\begin{aligned} V_x &= -y\omega_z = -y\omega \\ V_y &= x\omega_z = +x\omega \end{aligned}\right\}$$ tās pašas formulas kā griezes kustībā

$$V_z = V_s = p\omega$$

atvasinot pēc laika, dabujam paātrinājuma projekcijas

$$j_x = -\dot{y}\omega - y\tau \qquad j_y = \dot{x}\omega + x\tau \qquad j_z = p\frac{d\omega}{dt} = p\tau$$

bet $\dot{y} = V_y = x\omega$, $\dot{x} = V_x = -y\omega$

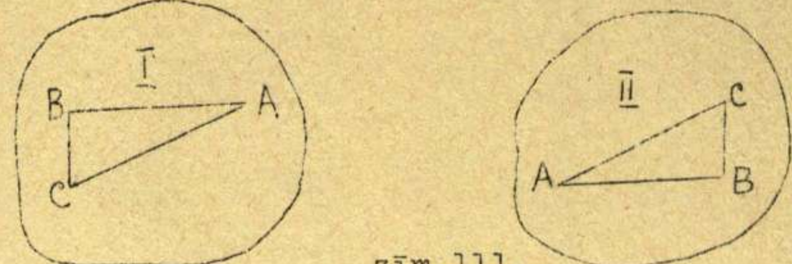
$$\left.\begin{aligned} j_x &= -x\omega^2 - y\tau \\ j_y &= -y\omega^2 + x\tau \end{aligned}\right\}$$ Tās pašas formulas kā griezes kustībā

$$j_z = p\tau$$

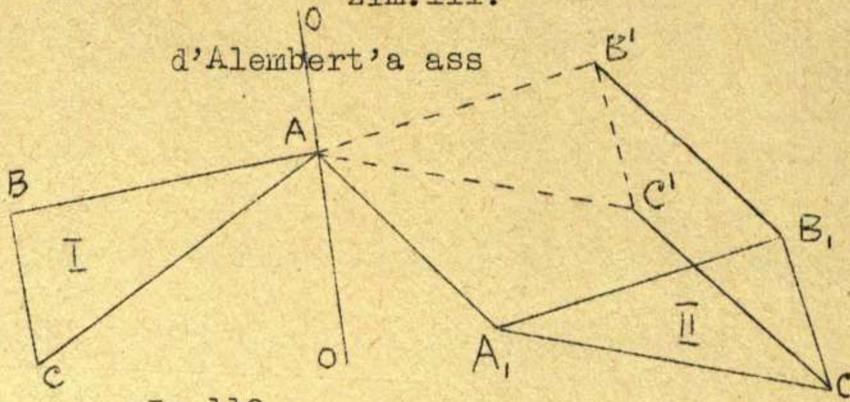
§ 5. ABSOLUTI CIETA ĶERMEŅA VISPĀRĪGĀ JEB BRĪVĀ KUSTĪBA.

Brīvā kustībā pamattrijstūru varam izvēlēt ķermenī patvaļīgi un lai noteiktu ķermeņa kustību pēc pārejas no I stāvokļa II, pietiek apskatīt pamattrijstūra kustību.

Tālāk pašu ķermeni nezīmēsim, bet aprobežosimies ar pamattrijstūru ABC.



zīm.111.



zīm.112.

Teorema: Katrs ķermeņa pārvietojums ir ekvivalents vienai virzes kustībai un griezes kustībai ap asi.

Pieņemsim, ka mums ir divi $\triangle ABC$ Stāvokli I un II.

Vilksim $\overline{AB'} = \overline{A_1B_1}$

$\overline{AC'} = \overline{A_1C_1}$

$\overline{B'C'} = \overline{B_1C_1}$

no šejienes seko:

$\overline{AA_1} = \overline{B'B_1} = \overline{C'C_1}$

visām trijstūra virsotnēm ir vienādi un paraleli ceļi, tā tad mēs $\triangle A_1B_1C_1$ varam pārvest stāvoklī $AB'C'$ ar virzes kustību.

Bet tālāk $\triangle AB'C'$ un $\triangle ABC$ ir kopēja virsotne A ,tā tad $\triangle AB'C'$ var pārvest I stāvoklī griežot viņu ap punktu A ,pēc d'Alembert'a teoremas šāda kustība ir ekvivalenta griezes kustībai ap asi, kuŗu arī iezīmēsim: OO. Teorema ar šo ir pierādīta un minēto asi sauksim par d'Alemberta asi.

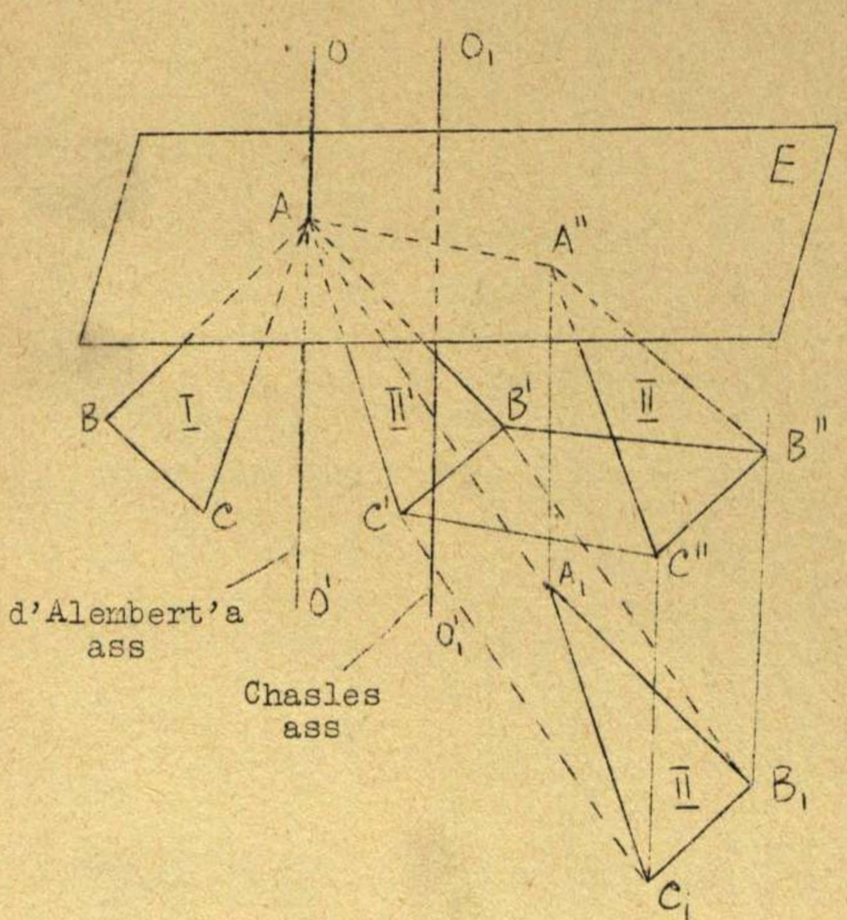
Pierādot teoremu, mēs virzes kustību izdarijām tādu, lai kopēja virsotne pēc virzes pārvietojuma $\overline{A_1A}$ būtu A ,bet analogiski mēs varam, ņemot citu virzes pārvietojumu, piem. $\overline{B_1B}$ jeb $\overline{C_1C}$ dabūt kopējo virsotni punktā B jeb C ,tad arī griezes kustības notiks ap citām d'Alembert'a asīm, kuŗas ies caur punktiem B jeb C.

Tā tad ir redzams, ka pārvietojumu no I stāvokļa II ar vienu virzes kustību un griezes kustību var izdarīt bezgalīgi daudzās kombinācijās.

Augšminētā teorema ir analogiska pirmai Chasles teoremai komplanā kustībā.

Chasles teorema.

Katrs ķermeņa pārvietojums ir ekvivalents griezes kustībai ap asi(Chasles asi) un virzes kustībai paraleli tai pašai asij.



zīm.113.

Pieņemsim, ka $\triangle ABC$ un $\triangle A_1B_1C_1$ ir divi pamattrijstūra stāvokļi. Pārvedīsim $\triangle A_1B_1C_1$ stāvoklī $\triangle AB'C'$ ar virzes kustību, tad mēs varam atrast d'Alembert'a asi OO' ap kuŗu būs jāgriež $\triangle AB'C'$ lai viņš nonāktu stāvoklī $\triangle ABC$.

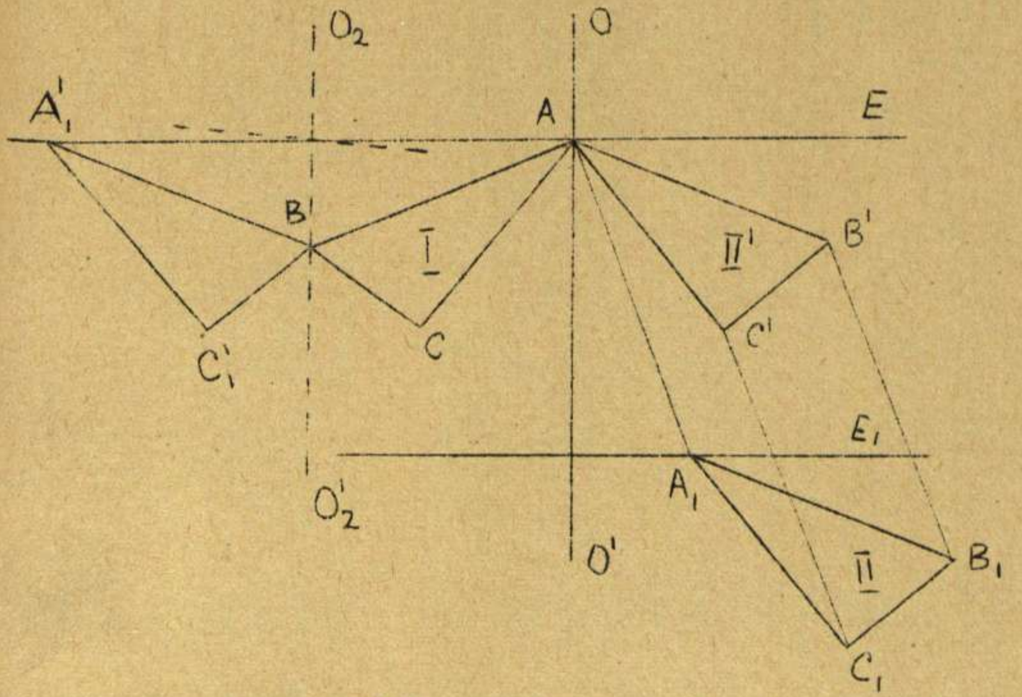
Vilksim plakni $E \perp OO'$ un pārvietosim tagad $\triangle A_1B_1C_1$ virzes kustībā paraleli asij OO' tik tāli, kamēr punkts A_1 nonāks plaknē E vietā $A"$. Tad $\triangle A_1B_1C_1$ ieņems stāvokli $\triangle A"B"C"$.

$\triangle A"B"C"$ mēs varam pārvest $\triangle AB'C'$ arī ar virzes kustību paraleli plaknei E , pie kam šī virzes kustība būs komplana ar griezes kustību ap asi OO' jo visu punktu trajektorijas griezes kustībā būs $\perp OO'$,t.i. $\parallel E$. Tā tad no stāvokļa $\triangle A"B"C"$ mēs varam pāriet komplanā kustībā uz $\triangle ABC$ un tādu kustību pēc Chasles teoremas (komplanai kustībai) var izvest ar vienu griezes kustību ap noteiktu asi O_1O_1' ,kuŗa būs Chasles ass un ies perpendikulāri plaknei E polā P ,tas nozīmē, ka $O_1O' \parallel OO'$ .Ar šo teorema ir pierādīta: mēs pārvedam $\triangle A_1BC_1$ stāvoklī $\triangle ABC$ ar virzes kustību paraleli asij O_1O_1' un ar vienu griezes kustību ap to pašu asi.

Chasles kustības invarianti.

Par invariantiem sauc tādas īpašības, lielumus jeb apstākļus, kuŗi nemainās pie kustības maiņas.

I Invariants: Visas d'Alembert'a griezes asis ir paralelas.

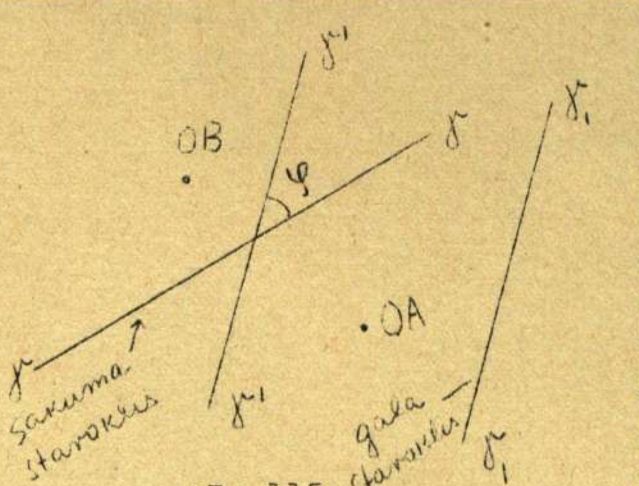


zīm.114.

Pieņemsim, ka mums viena d'Alembert'a ass OO' ir atrasta, uzzīmēta un viņai $\perp$ ir vilkta plakne E. Pārvietojumu mēs tagad varam iedomāties izdarītu sekošā kārtībā: $\triangle ABC$ mēs pagriezām ap asi OO' un pēc tam virzes kustībā savietojām ar $\triangle A_1B_1C_1$ pie kam plakni E arī pārvietojām un viņa ieņems stāvokli E_1.

Tālāk pieņemsim, ka mēs esam atraduši kādu citu griezes asi caur punktu B $O_2O'_2$, kuŗa nestāv $\perp$ E. Ja mēs tad pagriezīsim $\triangle ABC$ ap asi $O_2O'_2$ tad plakne E ieņems citu stāvokli, kuŗš nebūs paralels plaknei E_1 un ja mēs tagad virzes kustībā pārvietosim $\triangle BC'_1A'_1$ uz $\triangle A_1B_1C_1$, tad iznāktu, ka $\triangle$ nonāktu gala stāvoklī, bet plakne E nē, bet tas nevar notikt, jo E ir vilkta cietā ķermenī. Tamdēļ asīm $O_2O'_2$ un OO' jābūt paralelām.

II Invariants: Pie visām d'Alembert'a asīm griezes leņķi ir vienādi.

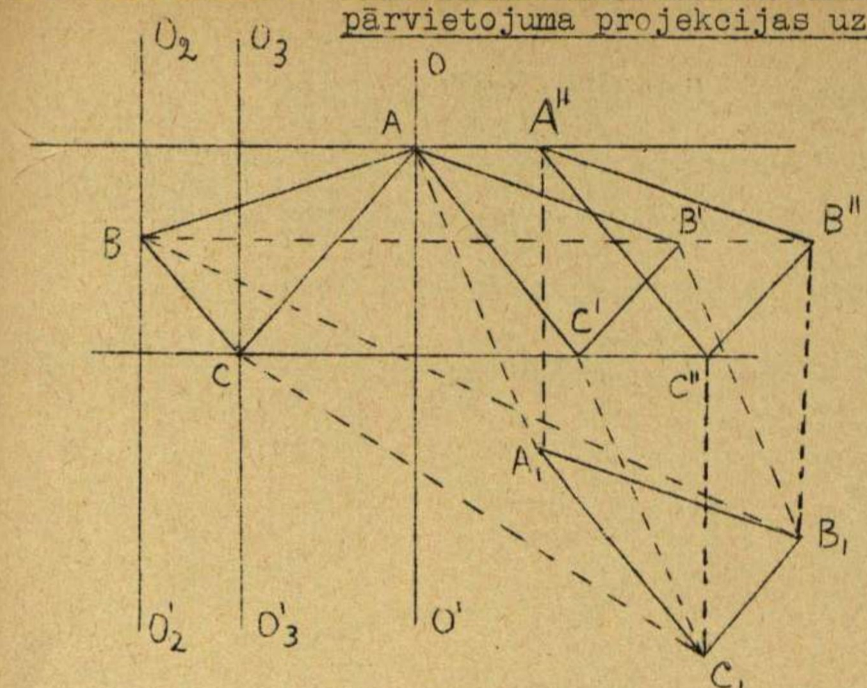


zīm.115.

Pagriezīsim visu sistemu tā, lai d'Alembert'a ass OA projecējās punktā, tad plakne E sakritīs jeb būs paralela zīmējuma plaknei. Kad ķermenis jeb $\triangle ABC$ no stāvokļa I pārvietosies stāvoklī II kāda taisne, guļoša plaknē E pāries no stāvokļa $\gamma\gamma$ stāvoklī $\gamma_1\gamma_1$. Griezīsim ķermeni I ap d'Alembert'a asi tā, lai $\triangle ABC$ būtu II $\triangle A_1B_1C_1$, tad taisne $\gamma\gamma$ pagriezīsies uz leņķi φ un ieņems stāvokli $\gamma'\gamma'$. Pēc tam, ja virzes kustībā pārvietosim ķermeni I stāvoklī II, tad $\gamma'\gamma'$ pāries $\gamma_1\gamma_1$.

Ja tagad mēs izvēlēsim kādu citu d'Alembert'a asi OB, tad $\gamma\gamma$ ir jāpagriež uz to pašu leņķi $\angle\varphi$, ja tas leņķis nebūtu $= \angle\varphi$, tad pie virzes kustības $\gamma'\gamma'$ nesakritīs ar gala stāvokli $\gamma_1\gamma_1$.

III Invariants: Neatkarīgi no d'Alembert'a ases izvēles visas virzes pārvietojuma projekcijas uz d'Alembert'a asi ir vienādas.



zīm.116.

Ja mēs izvēlam d'Alembert'a asi caur punktu A ,t.i. OO' visiem punktiem virzes pārvietojums būs vienāds ar $\overline{AA_1}$. Ja izvēlēsim asi O_2O_2' caur B visiem punktiem virzes pārvietojums būs $\overline{BB_1}$ un ja izvēlam asi O_3O_3' caur C ,visiem punktiem virzes pārvietojums būs $\overline{CC_1}$

No minētā redzam, ka atkarībā no d'Alembert'a ass izvēles, mēs dabujam dažādus virzes pārvietojumus: $\overline{AA_1}$; $\overline{BB_1}$; $\overline{CC_1}$ .Pierādīsim, ka viņu projekcijas uz asi OO' ir vienādas.

No zīmējuma redzam, ka

$\overline{AA_1} = \overline{AA"} + \overline{A"A_1}$ bet $AA" \perp OO'$,tā tad AA_1 projekcija uz OO' virzienu ir $A"A_1$.

Ņemsim vektoru BB_1 $\overline{BB_1} = \overline{BB'} + \overline{B'B"} + \overline{B"B_1}$ (piezīme: BB' un B'B" var negulēt vienā plaknē ar asi O_2O_2')

bet $BB' \perp OO'$ un $BB" \perp OO'$ tā tad BB_1 projekcija uz OO' virzienu ir $B"B_1$.

Tāpat varētu pierādīt, ka CC_1 projekcija uz asi OO' ir $C"C_1$

bet $\overline{A"A_1} = \overline{B"B_1} = \overline{C"C_1}$ (kā virzes pārvietojumi)

no kurienes seko: $pr.AA_1 = pr.BB_1 = pr.CC_1$

Visas virzes pārvietojuma projekcijas ir vienādas neatkarīgi no tā, kādā punktā izvēlam d'Alembert'a asi.

Mozzi - Teorema: Katra brīva cieta ķermeņa kustība ir ekvivalenta pilnīgi noteiktai skrūves kustībai.

No iepriekšējā varam vilkt sekošus slēdzienus: pēc pirmā invarianta visas d'Alembert'a ass ir paralelas, ar citiem vārdiem sakot viņu virziens ir noteikts, bet Chasles ass ir viņiem $\parallel$,tā tad

Chasles ass virziens ir pilnīgi noteikts.

No otra invarianta visām griezes kustībām ap d'Alembert'a asīm griezes leņķis φ ir vienāds, bet griezes kustībai ap Chasles asi φ būs tas pats, tā tad: griezes kustībā ap Chasles asi leņķis φ ir pilnīgi noteikts.

No trešā invarianta visām d'Alemberta asīm, neatkarīgi no viņu izvēles, virzes pārvietojums ir tas pats, tā tad arī virzes pārvietojums $\parallel$ Chasles asij ir pilnīgi noteikts.

Bet griezes kustība ap kādu asi kopā ar virzes kustību paraleli asij ir ekvivalenta skrūves kustībai, pie kam skrūves kustība ir pilnīgi noteikta, jo ir noteikts skrūves ass virziens, skrūves leņķis un virzes kustība pa asi.

Skrūves kustības elementu noteikšana.

Augšā jau bija parādīts kā atrast:
1)virzes pārvietojumu: $A"A_1$
2)leņķi φ skrūves kustībā
tad skrūves kustības parametrs: $p = \frac{h}{2\pi} = \frac{A"A_1}{\varphi}$

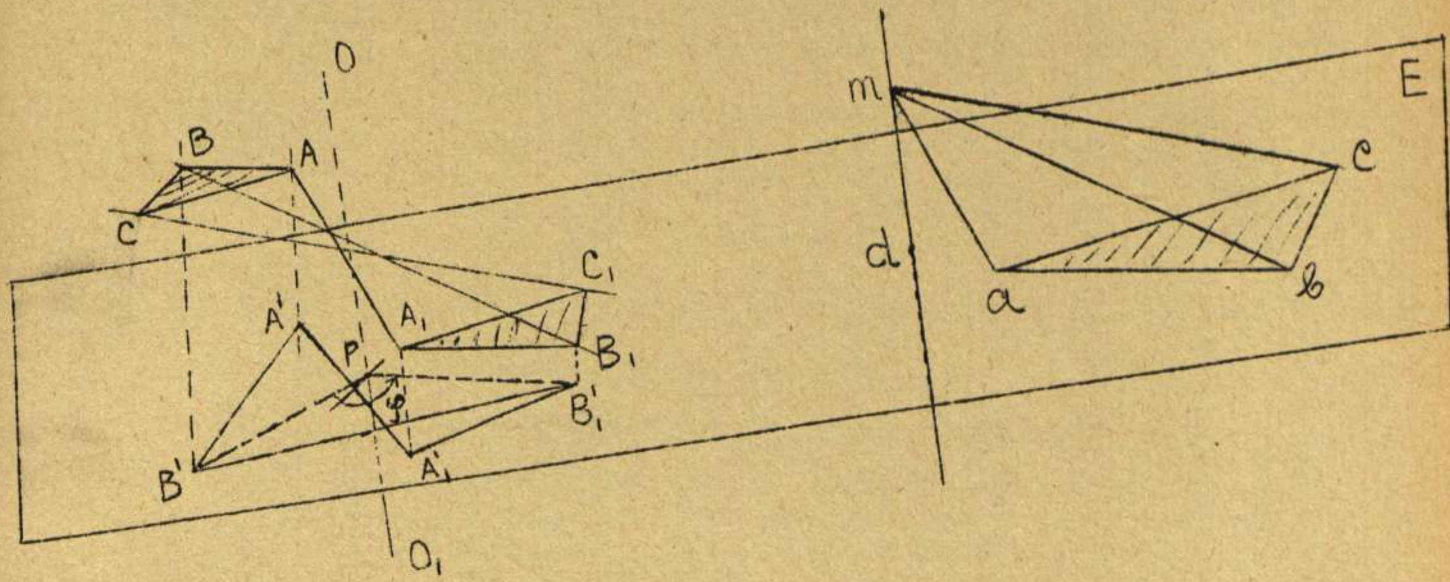
Skrūves kustības elementu geometriska konstrukcija.

Skrūves kustības elementu geometrisko konstrukciju apskatīsim divos gadijumos:

I Ja ir doti divi pamattrijstūra stāvokļi ABC un $A_1B_1C_1$

II Ja ir doti 3 ķermeņa punktu momentanie ātrumi.

I Gadijums: Doti divi pamattrijstūra stāvokļi sākumā ABC un galā $A_1B_1C_1$



zīm.117.

Ievilksim trīs virzes pārvietojumus AA_1 ; BB_1 un CC_1 un atliksim patvaļīgā punktā m

$$\overline{ma} = \overline{AA_1} \; ; \; \overline{mb} = \overline{BB_1} \text{ un } \overline{mc} = \overline{CC_1}$$

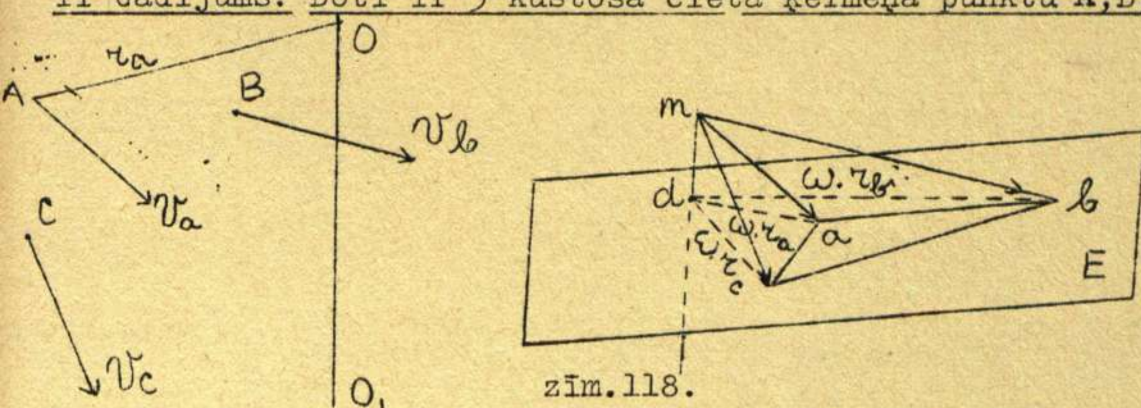
Pēc trešā invarianta visu šo pārvietojumu projekcijas uz skrūves asi ir vienādas. Meklējamais skrūves ass virziens acimredzot būs paralels tetraedra mabc augstuma linijai md vilktai caur punktu m pret plakni abc. Vilksim caur a,b,c plakni E ,tad skrūves ass būs perpendikulara plaknei E.

Lai uzietu punktu P šinī plaknē, caur kuŗu ies skrūves ass, mēs noprojecēsim vienu no malām, piem. AB uz plakni E ,dabujot A'B' ; tās pašas malas gala stāvokli A_1B_1 noprojecēsim un dabūsim $A_1'B_1'$,tad paliek tikai plaknē E uziet polu P pēc Chasles paņēmiena, t.i. vilkt nogriežņiem $A'A_1'$ un $B'B_1'$ vidus perpendikularus. Šo perpendikularu krustošanās punktā atradīsies plaknē E griezes pols P. Meklējamā skrūves ass tad būs PO ⊥ E.

Leņķi φ atradīsim plaknē E: $\varphi = \angle B'PB_1' = \angle A'PA_1'$

Virzes pārvietojums skrūves ass virzienā būs tetraedra augstuma linijas garums md. Skrūves parametrs: $p = \dfrac{md}{\varphi}$

II Gadijums: Doti ir 3 kustoša cieta ķermeņa punktu A,B,C momentanie ātrumi pēc virziena un lieluma. Noteikt momentāno skrūves asi.



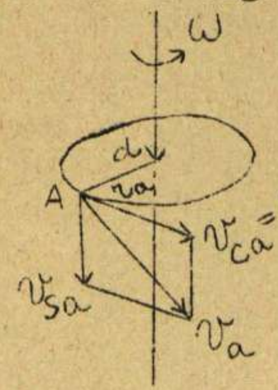
zīm.118.

Pēc Mozzi teoremas katra ķermeņa kustība ir ekvivalenta skrūves kustībai,bet skrūves kustībā visu punktu ātrumu projekcijas uz skrūves asi ir vienādas un līdzinājās slīdes ātrumam V_s.

Šo apstākli izlietojam skrūves ass virziena noteikšanai.

Caur patvaļīgu punktu m velkam $\overline{ma} = \overline{V}_a$; $\overline{mb} = \overline{V}_b$ un $\overline{mc} = \overline{V}_c$. Tad dabūta tetraedra mabc augstuma linija dos mums skrūves ass virzienu, jo tikai uz šo virzienu tetraedra šķautnu projekcijas būs vienādas.

Tetraedra augstums $\overline{md} = \overline{V}_S$ slīdes ātrumam



Bet ātrumu vektoriem ir vēl otras cirkularas projekcijas, kuŗas ir || plaknei E un līdzinājās punkta radiusa vektora (t.i.attāluma no skrūves ass) reizinājumam ar griezes ātrumu ω. Komponentes $ω.r_a$; $ω.r_b$; $ω.r_c$ mēs varam dabūt tanī pašā tetraedrā savienojot punktus a,b,c ar punktu d.

Liekot caur punktu A plakni ⊥ da (t.i. $ω.r_a$) mēs dabūsim plakni, kuŗā būs ieslēgta skrūves ass.

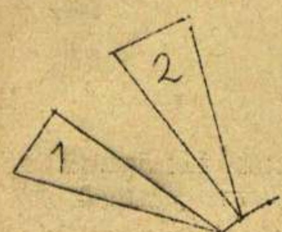
Analogiski liekot caur punktu B plakni ⊥ db mēs dabūsim otru plakni, kuŗā būs ieslēgta skrūves

zīm.119.

ass. Abu plakņu krustošanās linija dos mums tieši skrūves ass stāvokli telpā.

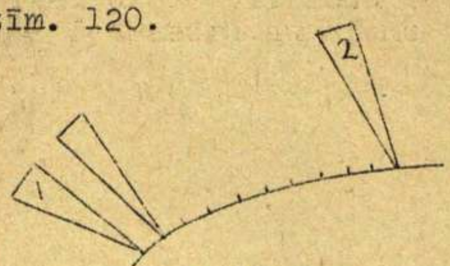
Ņemot griezes ass attālumu no punkta A ,dabūsim r_a un tad varam noteikt arī $ω = \frac{V_{ca}}{r_a}$ griezes ātrumu skrūves kustībā.

Momentana skrūves ass un aksoidas.



Ja otrs pamattrijstūra stāvoklis ir bezgalīgi tuvs pirmajam (zīm.120), tad pārejot no 1 uz 2 dabūsim elementāru skrūves kustību ap kādu noteiktu momentanu asi.

zīm. 120.



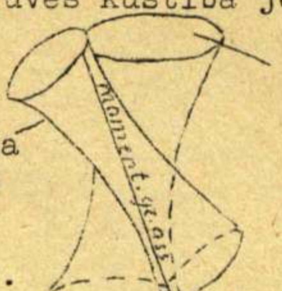
Bet ja divi pamattrijstūra stāvokļi 1 un 2 galīgi atšķirās (zīm.121), tad varam šo galīgu pārvietojumu sadalīt bezgalīgi daudzi elementāros pārvietojumos un katram elementaram pārvietojumam tad atbildēs zināma noteikta momentana skrūves ass.

Šo momentano skrūves ass ģeometrisko vietu telpā, saistītu ar nekustošām koordinātu asīm, sauc par nekustošu aksoidu.

zīm.121.

Momentanas skrūves ass ģeometrisko vietu ķermenī sauc par kustošu aksoidu.

Skrūves kustībā jeb brīva cieta ķermeņa kustībā aksoidas būs linearas virsmas,no kuŗām kustošā veļās un tanī pašā laikā slīd pa nekustošo.



nekustoša aksoida

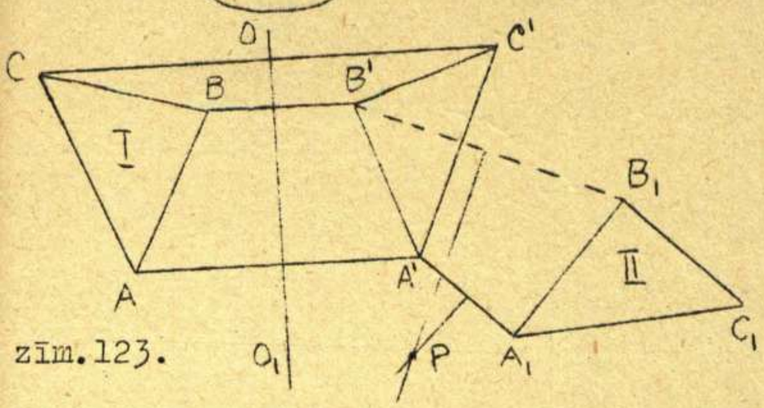
kustoša aksoida

Vispārīgi šīs aksoidas būs vienteļpu hiperboloidi.

Speciālos gadījumos viņas var būt konusi (kustībā ap punktu) un arī cilindri(komplanā kustībā).

zīm.122.

Cita brīva cieta ķermeņa kustības interpretacija.



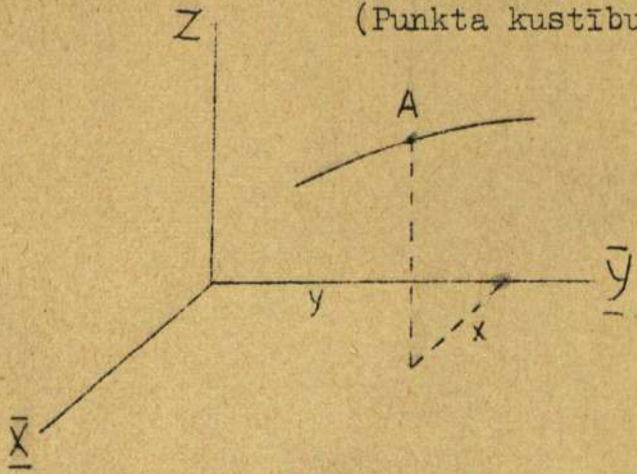
Ņemsim divus pamattrijstūra ABC stāvokļus I un II. Caur △-ru I liekam plakni E_1 ,caur △-ru II liekam plakni E_2 .Pieņemsim,ka šīs plaknes krustojās pa taisni OO_1.Ap šo asi varam griezt △ I kamēr viņš nonāk plaknē E_2 stāvoklī A'B'C' ,no kuŗa atkal mēs varam komplanā griezes kustībā ap asi,kuŗa iet ⊥ plaknei E_2 caur punktu P viņu pārvest

zīm.123.

gala stāvoklī $\triangle A_1B_1C_1$. No sacītā seko, ka skrūves kustība ir ekvivalenta divām griezes kustībām ap šķēršojošām asīm.

§ 6. PUNKTA ABSOLUTA KUSTĪBA.

(Punkta kustību salikšana)



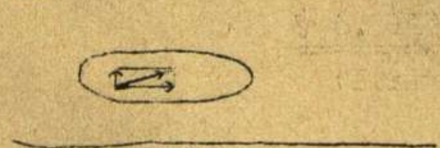
zīm.124.

Punkta kustības noteikšanai mēs lietojam divus paņēmienus:
1) Trajektorija un $U = f(t)$, jeb
2) $x = f_x(t)$
$y = f_y(t)$
$z = f_z(t)$

Otrā gadijumā mēs līkumainas kustības vietā apskatam 3 taisnvirziena kustības, kuŗas ņemot kopā dabujam pilnu līkumainu kustību. Tā tad iznāk, ka mēs itkā sadalam līkumaino kustību trijās taisnvirziena kustībās, bet šī sadalīšana ir fiktīva, jo fizikalā ziņā kustība nav sadalīta.

Ja ķermenis pārvietojās telpā, mēs izšķiram griezes un virzes kustību. Atkal mēs ķermeņa vispārīgo kustību sadalam divās kustībās - virzes un griezes kustībā, bet šāda sadalīšana arī ir fiktīva, mēs tikai iedomājamies, ka viņa notiek, lai būtu vieglāki kustību izpētīt.

Bet dabā nāk priekšā gadijumi, kad kustība ir fizikalā ziņā sadalīta divās jeb arī vairākās kustībās, piem. ja mēs apskatīsim uz kustoša kuģa staigājoša pasažiera kustību attiecībā pret krastu, tad šeit ir tiešam divas kustības.


viena: kuģa kustība attiecībā pret krastu

otra: pasažiera kustība pret kuģi

zīm.125.

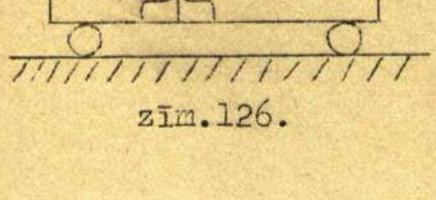
Ja abas kustības apskatīsim kopīgi, tad dabūsim pasažiera kustību pret krastu.

Tālāk izvedīsim jaunus jēdzienus:

Pārnesama kustība: kuŗu izdara kāds kustošs ķermenis attiecībā pret nekustošu ķermeni.
Relatīva kustība: kuŗu izdara kāds cits ķermenis attiecībā pret kustošu ķermeni.
Absoluta kustība: kuŗu izdara tas pats ķermenis attiecībā pret nekustošu ķermeni.

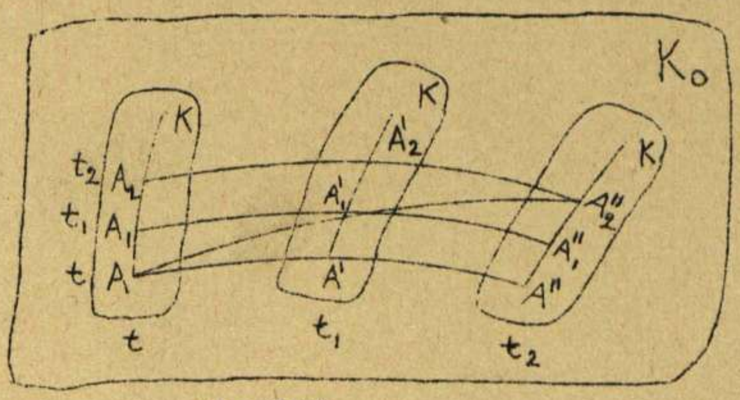
Saskaņā ar nupat ievestām definicijām, kuģa kustība pret krastu būs - pārnesama, pasažiera kustība pret kuģi - relatīva un pasažiera kustība pret krastu - absoluta.

Otrs piemērs: Pa dzelzceļu kustās vagons ar pasažieriem un bagažu. No plaukta krīt čemodans.


zīm.126.

Vagona kustība pret uzbērumu būs - pārnesama. Čemodana kustība vagonā būs - relativa. Čemodana kustība pret uzbērumu, kuŗu varam novērot, piem., caur logu - absoluta.

Absoluta kustība geometriski. Absoluta trajektorija.



zīm.127.

Pieņemsim, ka ķermenis K_o atrodās mierā un ķermenis K kustās pret K_o ,bet punkts A kustās attiecībā pret ķermeni K.

Ķermeņa K kustība pret K_o ir pārnesama, punkta A kustība pret K ir relatīva, punkta A kustība pret K_o ir absoluta.

Laika momentā t ķermenis K atrodas uzzīmētā stāvoklī un uz viņa atrodās punkts A.

Pieņemsim tagad, ka ķermenis K kustās un ka punkts A uz ķermeņa K kustās tāpat, kā viņš kustētos, ja K stāvētu mierā.

Punkts A tad ķermenī K aprakstīs kādu trajektoriju AA_1A_2 ,kuŗu sauksim par relativo trajektoriju. Laika momentā t_1 punkts atrodās vietā A_1 un laika momentā t_2 - vietā A_2

Bet tanī pašā laikā pats ķermenis K arī kustās vispārīgā kustībā, t.i. virzes un griezes kustībā un laika momentos t_1 un t_2 atradīsies zīmējumā uzrādītos stāvokļos, pie kam katrs viņa punkts A; A_1;A_2 aprakstīs trajektorijas, kuŗas sauksim par pārnesamām trajektorijām.

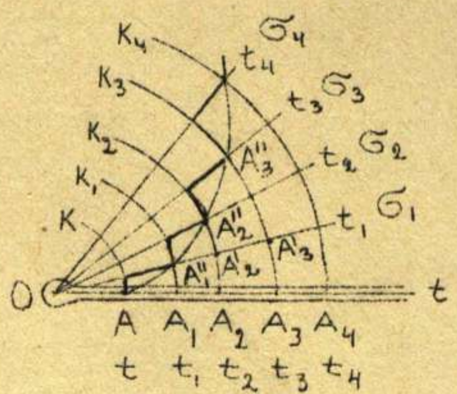
Punkts A aprakstīs pārnesamo trajektoriju $AA'A''$

" A_1 " " " $A_1A_1'A_1''$

" A_2 " " " $A_2A_2'A_2''$

Ja laika momenti t t_1 t_2 u.t.t. ir ņemti pietiekoši tuvi un mēs atradīsim kustoša punkta īstos stāvokļus attiecībā pret nekustošu ķermeni A; A_1' ; A_2'' un caur šiem punktiem vilksim liniju - mēs ar zināmo noteiktību dabūsim punkta absoluto trajektoriju $AA_1'A_2''$

Piemērs: Caurulīte griežās ap asi perpendikulari zīmējumam punktā O un caurulītē kustās bumbiņa.



zīm.128.

Pieņemsim, ka abas kustības ir vienmērīgas, t.i. ar Const.ātrumiem. Ja tagad caurule paliktu mierā,bumbiņas trajektorija būtu taisne,uz kuŗas atzīmējam bumbiņas stāvokļus A A_1 A_2 A_3 A_4 atbilstošus izvēlētiem laika momentiem t t_1 t_2 t_3 t_4 kuŗus vienkāršības dēļ izvēlēsim tā, lai visi laika sprīži būtu vienādi.

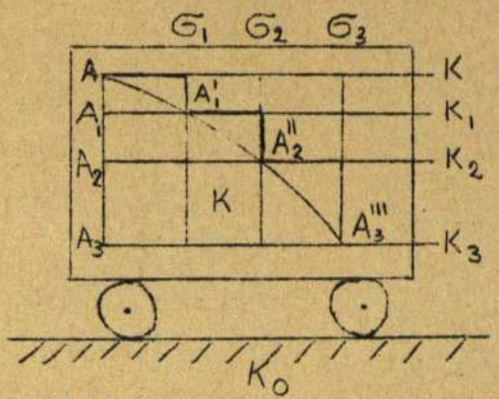
Relativas trajektorijas būs centralas taisnes, kuŗas savā starpā veidos vienādus leņķus, viņas apzīmēsim ar σ_1 σ_2 σ_3 σ_4

Pārnesamas trajektorijas būs koncentriskas aploces, kuŗas atradīsies vienādos savstarpīgos attāļumos, viņas apzīmēsim ar k k_1 k_2 k_3 k_4 pie kam jāatzīmē, ka šeit dažādu punktu noietie ceļi vienādos laika sprīžos būs dažādi

$$A_1A_1' \neq A_2A_2' \neq A_3A_3'$$

Savienojot īstenos bumbiņas stāvokļus A A_1' A_2'' A_3''' .... laika momentos t t_1 t_2 t_3 ... ar liniju, dabūsim absoluto trajektoriju, kuŗa šinī gadijumā būs Archimeda spirale.

Piemērs: Čemodana krišana kustošā dzelzceļa vagonā.



K_0 - dzelzceļa uzbērums
K - ķermenis, pret kuŗu krīt čemodans ir vagons.

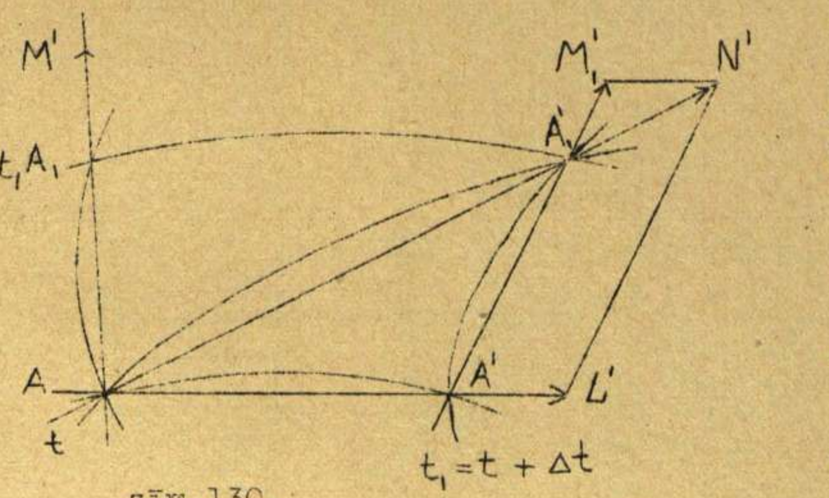
Ja vagons stāvētu mierā, tad A kristu taisnā virzienā uz zemi, pie kam noietie ceļa gabali būs proporcionali laiku kvadratiem. Ņemot vērā, ka vagons kustās virzes kustībā, visas pārnesamas trajektorijas būs horicontalas linijas, pie kam, ja laika sprīži ir izvēlēti vienādi, attālumi ejot uz leju pieaugs proporcionāli laika kvadratiem.

zīm.129.

Ja vagons kustās vienmērīgi, relatīvas trajektorijas būs vertikalas taisnes vienādos attālumos viena no otras. Absoluta trajektorija būs - parabola.

Absolutais ātrums geometriski.

Somov'a teorema: Absolutais ātrums dotā momentā ir geometriska summa no pārnesamā un relatīvā ātruma.



zīm.130.

Izdalam no absolutas kustības šemas, parādītas zīm.127., vienu elementu $AA_1A_1'A'$ atbilstošu laika momentiem t un $t_1 = t+\Delta t$

Pēc absolutas kustības definicijas: $\cup AA_1 = \cup A'A_1'$

Savienosim A ar A_1 un A' ar A_1' un atliksim

$$AM' = \frac{AA_1}{\Delta t}$$ šī attiecība

reprezentēs vidējo relatīvo ātrumu.

Tāpat savienojot A ar A' un A ar A_1' dabūsim un atliksim

$$AL' = \frac{AA'_1}{\Delta t}$$ - vidējo pārnesamo ātrumu

$$AN' = \frac{AA_1'}{\Delta t}$$ - vidējo absoluto ātrumu

Apskatīsim $\triangle AN'L'$ un $\triangle AA_1'A'$

$\triangle AN'L' \backsim \triangle AA_1'A'$ (kopējs leņķis un 2 proporcionālas malas),

no kurienes seko $L'N' \parallel A'A_1'$ un $L'N' = \dfrac{A'A_1'}{\Delta t}$

Atliksim pēdējo attiecību: $A'M_1' = \dfrac{A'A_1'}{\Delta t}$

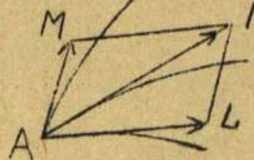
tad $\overline{L'N'} = \overline{A'M_1'}$ un $A'M_1'N'L'$ būs paralelograms.

Sastādīsim geometrisko summu: $\overline{AN'} = \overline{AL'} + \overline{L'N'}$ un aizvietosim $\overline{L'N'}$ ar $\overline{A'M_1'}$

$$\overline{AN'} = \overline{AL'} + \overline{A'M_1'}$$

Pāriesim uz robežām pie $\Delta t = 0$

$$\lim(\overline{AN'})_{\Delta t \to 0} = \lim(\overline{AL'})_{\Delta t \to 0} + \lim(\overline{A'M_1'})_{\Delta t \to 0}$$



zīm. 131.

Robežas gadijumā, ja $\Delta t = 0$ punkts A_1' sakritīs ar A un AN' ar absolutas trajektorijas tangenti AN, punkts A' - sakritīs ar A un AL' ar pārnesamas trajektorijas tangenti AL

Tāpat arī $A'M_1'$ sakritīs ar AM' un līdz ar to arī ar tangenti AM pie ralativas trajektorijas,

$$\text{tā tad } \overline{AN} = \overline{AL} + \overline{AM}$$

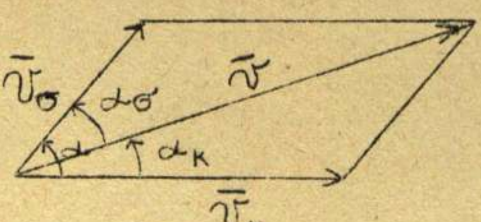
pie kam $AN = \lim(\frac{AA_1'}{\Delta t})_{\Delta t \to 0} = V$ būs īstenais absolutais ātrums.

$AL = \lim(\frac{AA'}{\Delta t})_{\Delta t \to 0} = V_k$ būs īstenais pārnesamais ātrums

$AM = \lim(\frac{AA_1}{\Delta t})_{\Delta t \to 0} = V_\sigma$ būs īstenais relativais ātrums.

$$\text{jeb} \quad \boxed{\overline{V} = \overline{V}_k + \overline{V}_\sigma} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(34)$$

<u>Absolutā ātruma analitiskā izteiksme.</u>



zīm.132.

Ja absolutais ātrums ir geometriska summa no pārnesamā un relativā ātruma, tad analitiski viņa lielumu varam atrast, ja ir zinams $\angle\alpha$ starp $\overline{V}_k$ un $\overline{V}_\sigma$

$$\boxed{V = \sqrt{V_k^2 + V_\sigma^2 + 2V_\sigma V_k \operatorname{Cos}\alpha}} \quad \ldots(35)$$

Šo sakni mēs ņemam ar (+) zīmi, jo formula (35) dod tikai absoluta ātruma lielumu, bet virziens būs noteikts ar $\angle\alpha_k = (\overline{V}_k \overline{V})$ jeb $\angle\alpha_\sigma = (\overline{V}_\sigma \overline{V})$,kuŗus varam atrast no sinusu teorēmas

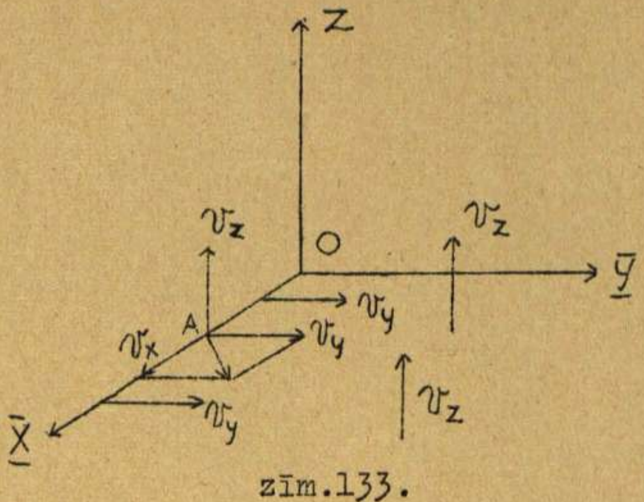
$$\frac{V}{\operatorname{Sn}(\pi - \alpha)} = \frac{V_k}{\operatorname{Sn}\alpha_\sigma} = \frac{V_\sigma}{\operatorname{Sn}\alpha_k} \quad \text{no kurienes}$$

$$\boxed{\operatorname{Sn}\alpha_k = \frac{V_\sigma}{V}\operatorname{Sn}\alpha} \quad ; \quad \boxed{\operatorname{Sn}\alpha_\sigma = \frac{V_k}{V}\operatorname{Sn}\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots(36)$$

<u>Gadijumi, kad punktam ir divas jeb vairākas pārnesamas kustības.</u>

Gadijumā, ja punktam būtu vēl kāda pārnesama kustība V_k' ,tad atrastais V nebūtu absolutais ātrums, bet viņu būtu vēl jāsaskaita ar V_k' , t.i.

$$\overline{V} = \overline{V}_k + \overline{V}_k' + \overline{V}_\sigma$$



zīm.133.

Piemēram punkts A kustās pa $\overline{OX}$ asi ar ātrumu V_x
$\overline{X}$ ase kustās $\overline{XY}$ plaknē virzes kustībā ar ātrumu V_y
un $\overline{XY}$ plakne kustās paliekot sevi paralēli ar ātrumu V_z
Tad mēs varam uzskatīt punkta A kustību pa $\overline{X}$ asi kā relatīvu un $\overline{X}$ ass, kā arī $\overline{XY}$ plaknes kustības kā pārnesamas.

Saskaitot V_x ar V_y dabūsim punkta ātrumu $\overline{XY}$ plaknē, kuŗu apzīmēsim ar

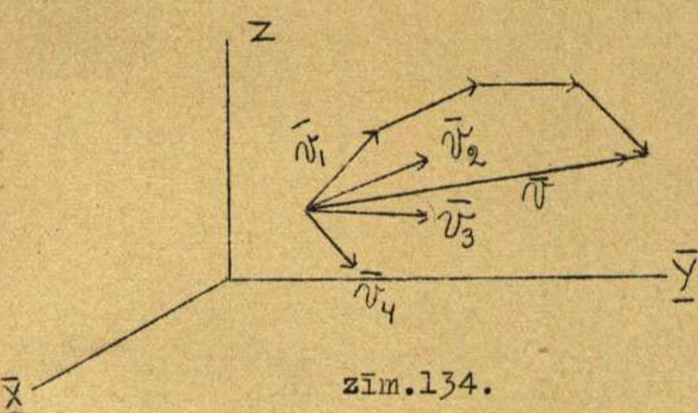
$$\overline{V}_{xy} = \overline{V}_x + \overline{V}_y \quad \text{jeb} \quad V_{xy} = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$$

Saskaitot tālāk V_{xy} ar V_z dabūsim absoluto ātrumu

$$\overline{V} = \overline{V}_x + \overline{V}_y + \overline{V}_z \quad \text{jeb} \quad V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$

Jāpiezīmē, ka šeit analitiskas formulas iznāca tik vienkāršas tikai tādēļ, ka V_x, V_y un V_z ir savstarpīgi perpendikulari.

Vispārīgais gadijums.



zīm.134.

Ja punktam ir vairākas pārnesamas kustības V_1 V_2 V_3 V_4 ... tad pirmo var uzskatīt kā relatīvo un citas kā pārnesamas un absoluto ātrumu atradīsim kā ģeometrisko summu no ātrumu poligona

$$\overline{V} = \overline{V}_1 + \overline{V}_2 + \overline{V}_3 + \overline{V}_4 + \ldots\ldots \text{ jeb}$$

viņa projekcijas uz koordinātu asīm.

$$V_x = V\cos\alpha = V_1\cos\alpha_1 + V_2\cos\alpha_2 + V_3\cos\alpha_3 + \ldots\ldots = \sum_1^n V_i\cos\alpha_i$$

$$V_y = V\cos\beta = V_1\cos\beta_1 + V_2\cos\beta_2 + V_3\cos\beta_3 + \ldots\ldots = \sum_1^n V_i\cos\beta_i$$

$$V_z = V\cos\gamma = V_1\cos\gamma_1 + V_2\cos\gamma_2 + V_3\cos\gamma_3 + \ldots\ldots = \sum_1^n V_i\cos\gamma_i$$

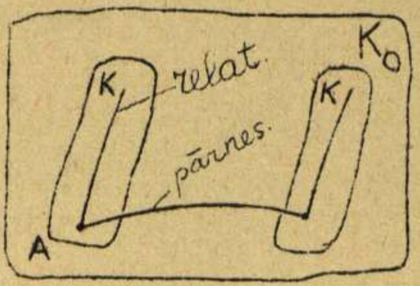
un $$\boxed{V = \sqrt{\left(\sum_1^n V_i\cos\alpha_i\right)^2 + \left(\sum_1^n V_i\cos\beta_i\right)^2 + \left(\sum_1^n V_i\cos\gamma_i\right)^2}} \quad .(37)$$

$$\left.\begin{aligned}
\cos(\overline{X}V) &= \cos\alpha = \frac{\sum_1^n V_i \cos\alpha_i}{V} \\
\cos(\overline{Y}V) &= \cos\beta = \frac{\sum_1^n V_i \cos\beta_i}{V} \\
\cos(ZV) &= \cos\gamma = \frac{\sum_1^n V_i \cos\gamma_i}{V}
\end{aligned}\right\}$$

kur $\alpha; \alpha_1; \alpha_2$ ...leņķi, veidoti ar $\overline{X}$ asi
$\beta; \beta_1; \beta_2$ ...leņķi, veidoti ar $\overline{Y}$ asi
...............(38)
$\gamma; \gamma_1; \gamma_2$ ....leņķi, veidoti ar Z asi

Absolutais paātrinājums geometriski.

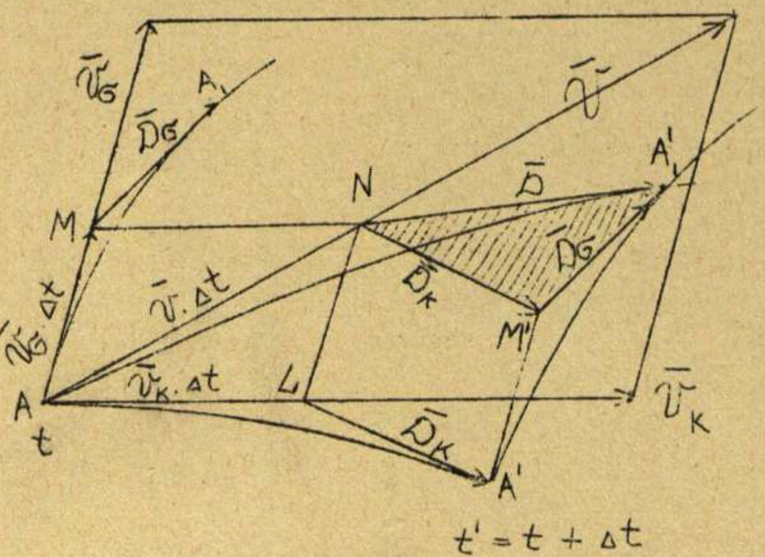
I. Pārnesama kustība ir tīra virzes kustība.



zīm.135.

Pirmkārt apskatīsim tādu gadijumu, kad pārnesama kustība ir tīra virzes kustība bez griezes, bet saprotams viņai nav jābūt taisnvirzieniskai, viņa var būt arī līkumaina virzes kustība.

Lai vienkāršotu zīmējumu mēs tālāk zīmēsim tikai trajektorijas relativo, pārnesamo un absoluto, bet pašus ķermeņus K_o un K nezīmēsim.



zīm.136.

Apskatīsim kustību no laika momenta t līdz $t' = t + \Delta t$.

Iezīmēsim trajektorijas: relativo, pārnesamo un absoluto. Ātrumi ies tangentes virzienā pie attiecīgas trajektorijas un veidos relatīv. un pārnesam. paralelogramma malas un absolutais-paralelogramma diagonali.

Pieņemsim, ka laika sprīdī $t'-t = \Delta t$ punkts A relatīvā kustībā noiet punktā A_1, pārnesamā punktā A', bet absolutā punktā A_1'

Ja punktam nebūtu paātrinājuma, tad viņš būtu laika sprīdī tangentes virzienā nogājis ceļus $\overline{AM} = V_\sigma \Delta t$; $\overline{AL} = V_k \Delta t$ un $\overline{AN} = V \Delta t$, kuŗi arī veidos paralelogramma malas un diagonāli, un būtu nonācis attiecīgi punktos M, L un N , bet faktiski viņš nogājis līdz A_1 , A' un A_1' , tā tad vektori MA_1 , LA' un NA_1' būs punkta deviacijas relativā, pārnesamā un absolutā kustībā

$$\overline{MA_1} = \bar{D}_\sigma \quad ; \quad \overline{LA'} = \bar{D}_k \quad \text{un} \quad \overline{NA_1'} = \bar{D}$$

Četrstūris AMNL ir paralelogramms, tā tad

$$\bar{V}_\sigma \Delta t = \overline{AM} = \overline{LN}$$

bet arī $\overline{A'M'} = \bar{V}_\sigma \Delta t$, jo pārnesamā kustībā griezes nebija, tā tad

$\overline{LN} = \overline{A'M'}$ un LNM'A' arī ir paralelogramms, bet tad $\overline{NM'} = \overline{LA'} = \bar{D}_k$

Kā redzams no Δ - ra $NA_1'M'$

$$\overline{NA_1'} = \overline{NM'} + \overline{M'A_1'} \quad \text{jeb}$$

$$\bar{D} = \bar{D}_k + \bar{D}_\sigma \qquad \text{bet} \qquad \begin{cases} \bar{D} = \bar{j}\,\dfrac{\Delta t^2}{2} \\ \bar{D}_k = \bar{j}_k\,\dfrac{\Delta t^2}{2} \\ \bar{D}_\sigma = \bar{j}_\sigma\,\dfrac{\Delta t^2}{2} \end{cases}$$

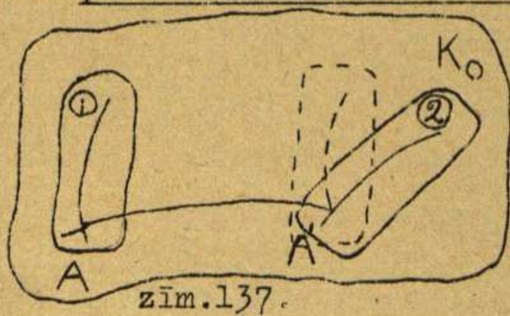
tā tad $\bar{j}\frac{\Delta t^2}{2} = \bar{j}_k\frac{\Delta t^2}{2} + \bar{j}_\sigma\frac{\Delta t^2}{2}$ jeb saīsinot $\frac{\Delta t^2}{2}$

$$\boxed{\bar{j} = \bar{j}_k + \bar{j}_\sigma} \quad \ldots\ldots\ldots(39)$$

Absolutais paātrinājums ir geometriskā summa no pārnesamā un relatītā paātrinājuma,
bet šeit vēl reiz jāpiezīmē, ka tas ir tikai tad, ja pārnesamā kustība ir tīra virzes kustība.

II. Vispārīgais gadijums,

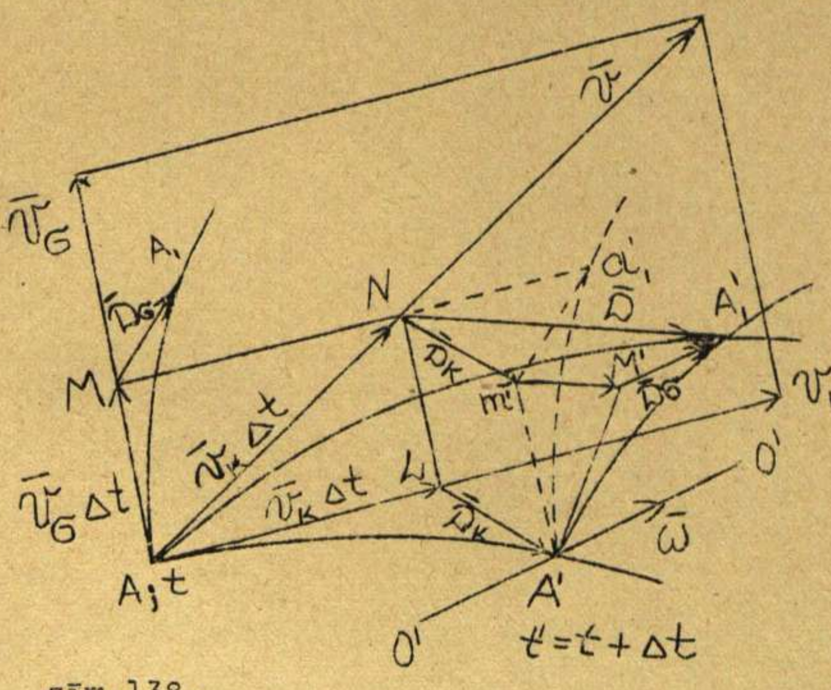
t.i. pārnesamā kustībā ir ne tikai virzes, bet arī griezes kustība.



zīm.137.

Tādu kustību mēs varam apskatīt sekoši: pieņemt, ka pirmkārt ķermenis ir pārvietojies virzes kustībā, kamēr punkts A nonāk stāvoklī A' un tad ķermenis ir pagriezies ap punktu A'

Tāļāk nekustošu ķermeni K_o un kustošu K nezīmēsim, bet zīmēsim tikai trajektorijas relatīvo, pārnesamo un absoluto.



zīm.138.

Pieņemsim,ka punkts laika momentā t atrodās punktā A un relatīvā kustībā laika sprīdī $t' - t = \Delta t$ pārgāja punktā A_1.

Tanī pašā laikā ķermenis pārnesamā kustībā pārgāja tā, ka punkts A nokļuva p-ktā A' un punkts A, punktā A_1'.

No iepriekšējā ir zinams, ka absoluta ātruma vektors punktā A – $\bar{V}$ ir paralelogramma diagonale, kuŗa malas ir realtīvais ātrums $\bar{V}_\sigma$ un pārnesamais $\bar{V}_k$.

Punktā A' uzzīmēsim ar punktiru kādu vietu būtu ieņēmuse relatīvā trajektorija, ja pārnesamā kustība būtu tīra virzes kustība un uz attiecīgas trajektorijas atzīmēsim punktu a_1', kuŗā būtu pārgājis punkts A_1.

Atliksim

$$\left.\begin{aligned} \overline{AM} &= \bar{V}_\sigma \Delta t \\ \overline{AL} &= \bar{V}_k \Delta t \\ \overline{AN} &= \bar{V} \cdot \Delta t \end{aligned}\right\}$$ Šie lielumi arī veidos paralelogramma malas un diagonāli.

Pēc analogijas ar pirmo gadijumu

Savienojot punktu M ar A_1 dabūsim $\bar{D}_\sigma$ (devijacija relatīvā kustībā)

" " L " A' " $\bar{D}_k$ (" pārnesamā ")

" " N " A_1' " $\bar{D}$ (" absolutā ")

Ievilksim tangenti punktētai relatīvai trajektorijai un atliksim

$$\left.\begin{aligned}\overline{A'm'} &= \overline{AM}\\ \text{bet arī } \overline{LN} &= \overline{AM}\end{aligned}\right\} \text{ no kurienes } \overline{A'm'} = \overline{LN}$$

un LNm'A' ir paralelogramms, no kurienes $\overline{Nm'} = \overline{LA'} = \bar{D}_k$

Ievilksim tangenti relatīvai trajektorijai $A'A_1'$ un uz viņas atliksim: $A'M' = V_\sigma \Delta t$ bet tikai pēc lieluma, tad arī $M'A_1' = D_\sigma$ pēc lieluma. Savienojot punktus m' un M' redzam no četrstūra $Nm'M'A_1'$, ka

$$\overline{NA_1'} = \overline{Nm'} + \overline{m'M'} + \overline{M'A_1'} \text{ jeb}$$

$$\bar{D} = \bar{D}_k + \overline{m'M'} + \bar{D}_\sigma$$

Kā redzams absolutā deviacija ir geometriska summa no 3 vektoriem: pārnesamās, relatīvās deviacijām un $\overline{m'M'}$, kuŗu tagad noteiksim.

Punkts m' ir pārgājis punktā M' griezes kustībā ap punktu A', bet šī kustība ir ekvivalenta griezes kustībai ap momentano asi: d'Alembert'a asi O'O', kuŗu arī iezīmēsim (zīm.138.)

Bet ātrums griezes kustībā ap momentano asi pēc Eulera formulas ir $[\bar{\omega}.\bar{r}]$, kur $\bar{\omega}$ būs griezes ātrums pārnesamā kustībā un

$\bar{r} = \overline{A'm'} = \bar{V}_\sigma \Delta t$ būs punkta m' radiuss-vektors.

Lai dabūtu punkta m' noieto ceļu, t.i. $\overline{m'M'}$, jāreizina ātrumu ar laika sprīdi Δt

$$\overline{m'M'} = [\bar{\omega}.\bar{V}_\sigma \Delta t]\,\Delta t = [\bar{\omega}.\bar{V}_\sigma]\,\Delta t^2$$ liekot iekšā

dabūsim $\bar{D} = \bar{D}_k + \bar{D}_\sigma + [\bar{\omega}.\bar{V}_\sigma]\,\Delta t^2$ aizvietojot deviacijas atradīsim

$$\bar{j}\,\frac{\Delta t^2}{2} = \bar{j}_k\,\frac{\Delta t^2}{2} + \bar{j}_\sigma\,\frac{\Delta t^2}{2} + [\bar{\omega}.\bar{V}_\sigma]\,\Delta t^2$$ saīsinot ar Δt^2 un

pareizinot ar 2 iznāk

$$\bar{j} = \bar{j}_k + \bar{j}_\sigma + 2[\bar{\omega}.\bar{V}_\sigma]$$

papildu loceklis tiek apzīmēts ar j_γ un tiek saukts par Coriolisa paātrinājumu: $$\boxed{\bar{j}_\gamma = 2[\bar{\omega}.\bar{V}_\sigma]} \quad ..(40)$$

Absoluto paātrinājumu dabujam galīgi: $$\boxed{\bar{j} = \bar{j}_k + \bar{j}_\sigma + \bar{j}_\gamma} \quad ..(41)$$

Šī formula izsaka Coriolisa teoremu: Absolutais paātrinājums vispārīgā gadijumā ir geometriska summa no 3 paātrinājumiem: pārnesamā, relatīvā un Coriolisa.

Coriolisa paātrinājums $\bar{j}_\gamma = 2[\bar{\omega}.\bar{V}_\sigma] = 2\omega V_\sigma \operatorname{Sn}\delta$ ir divkāršots vektorprodukts no griezes ātruma vektora pārnesamā kustībā un relatīvā ātruma.

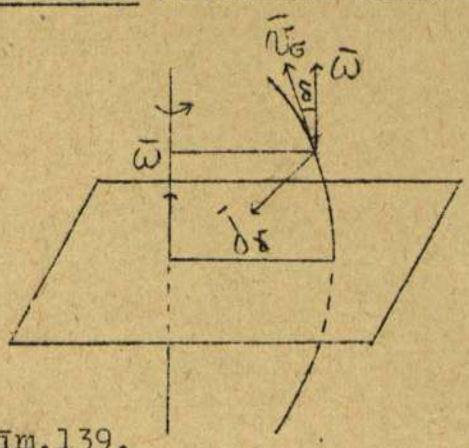
Coriolisa paātrinājums $j_\gamma = 0$ trijos gadijumos:

1) ja $V_\sigma = 0$ t.i. relatīvās kustības nav,

2) ja $\omega = 0$ t.i. pārnesamā kustībā nav griezes,

3) ja $\operatorname{Sn}\delta = 0$ t.i. $\bar{V}_\sigma \parallel \bar{\omega}$ relatīvais ātrums ir paralels griezes asij.

Piemērs: Noteiksim Coriolisa paātrinājumu j_γ, ja ķermenis griežās pret pulksteņa rādītāju ar ātrumu ω un p-kts ķermenī kustās uz augšu ar relatīvo ātrumu $\bar{V}_\sigma$



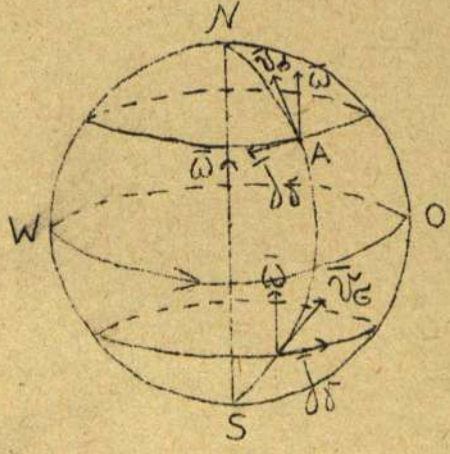
zīm.139.

$$\bar{j}_\gamma = 2\left[\bar{\omega}.\bar{V}_\sigma\right] = 2\,\omega.V_\sigma.\mathrm{Sn}\,\delta$$

Lai vieglāk būtu noteikt virzienu, iedomāsimies ω fiktīvi (tamdēļ fiktivi, ka viņš ir slīdošs vektors) pārnestu uz punktu, kuŗa paātrinājumu j_γ gribam noteikt.

Ja mēs tagad savietosim visīsākā ceļā $\bar{\omega}$ ar $\bar{V}_\sigma$, tad labās skrūves pārvietošanās virziens dos j_γ virzienu.

Coriolisa paātrinājums punktiem (jeb ķermeņiem), kuŗi kustās uz zemes lodes.



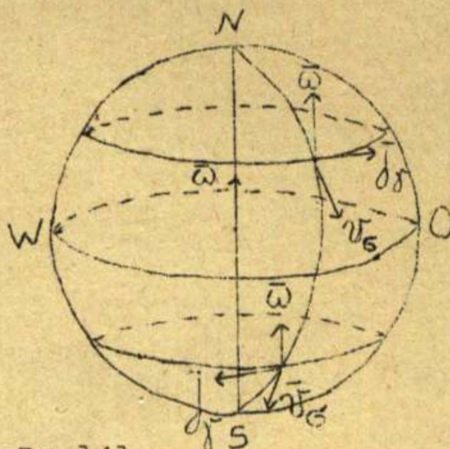
zīm.140.

Pieņemsim, ka uz zemes lodes kustās meridiana virzienā uz ziemeļiem kāds ķermenis ar relatīvo ātrumu $\bar{V}_\sigma$. Ja kāds ķermenis kustās zemes virsū, tad šo kustību var uzskatīt par relatīvo un pašas zemes lodes griezes kustību par pārnesamo, tad ķermeņa kustība būs absoluta attiecībā uz koordinātu sistemu, kuŗa ir saistīta ar sauli. (Šādu koordinātu sistemu sauc par inercialu) Zemes lode griežās, skatoties uz ziemeļpolu, no augšas, pret pulksteņa rādītāju, tā tad $\bar{\omega}$ vektors ies zemes lodes asī no dienvidiem uz ziemeļiem.

Viņa skaitliskā vērtība būs

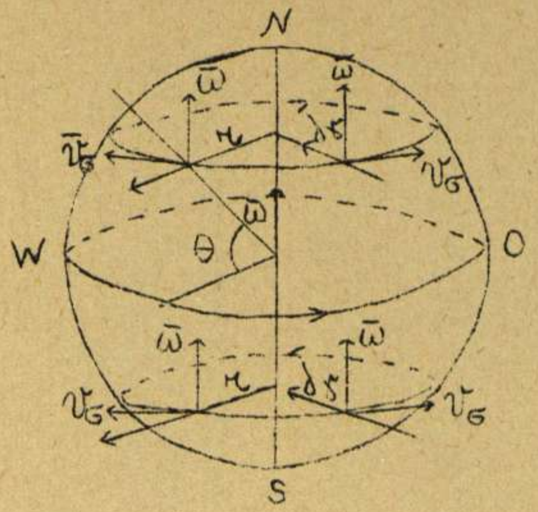
$$\omega = \frac{2\pi}{24.60.60} = 0{,}0000727\ \mathrm{Sec}^{-1}$$

No vektorprodukta konstrukcijas skaidri redzams, ka 1) ja punkts kustās pa meridianu no dienvidiem uz ziemeļiem - tad ziemeļpuslodē j_γ iet uz rietrumiem pa zemeslodes paraleles tangenti, dienvidpuslodē j_γ iet uz austrumiem (zīm. 140), 2) ja punkts kustās pa meridianu no ziemeļiem uz dienvidiem, parādība notiek otrādi: ziemeļpuslodē j_γ iet uz austrumiem un dienvidpuslodē j_γ iet uz rietrumiem zemes lodes paraleles tangentē (zīm.141).



zīm.141.

Kad ķermenis kustoties pa meridianu krusto ekvatoru - Coriolisa paātrinājums $j_\gamma = 0$, jo $\bar{V}_\sigma \parallel \bar{\omega}$

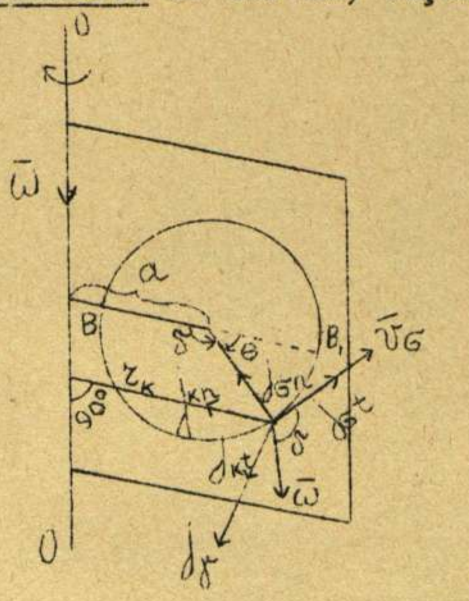


Ja ķermenis kustās pa zemes lodes paraleli, tad neatkarīgi no tā, kādā puslodē viņš atrodās, ja viņš kustās tādā pašā virzienā, kā kustās zemes lode – Coriolisa paātrinājums j_γ būs virzīts pa paraleles radiusu r uz zemes lodes asi.

Ja ķermenis kustās pret zemes lodes kustības virzienu – Coriolisa paātrinājums j_γ ies pa to pašu radiusu r – no zemes lodes laukā.

zīm.142.

Piemērs: Uz durvīm, kuŗas griežās ap vertikalu asi ar leņķisko ātrumu ω kustās, pa aploci radiusā r pret pulksteņrādītāju, punkts ar mainīgo ātrumu V_σ. Uziet punkta absoluto paātrinājumu tanī momentā, kad viņš atrodās vietā A, attiecībā uz koordinatu asīm, kuŗas ir saistītas ar istabu.



Punkta kustība pa aploci ir relativa. Durvju kustība ir pārnesamā.

Doti: $\bar{\omega}$; $\bar{V}_\sigma$; r ; θ ; a

Relatīvā paātrinājuma projekcijas

$$\left.\begin{aligned} j_{\sigma t} &= \frac{dV_\sigma}{dt} \\ j_{\sigma n} &= \frac{V_\sigma^2}{r} \end{aligned}\right\} \qquad \bar{j}_\sigma = \bar{j}_{\sigma t} + \bar{j}_{\sigma n}$$

zīm.143.

Pārnesamā paātrinājuma projekcijas

$$\left.\begin{aligned} j_{kt} &= r_k \cdot \tau = r_k \cdot \frac{d\omega}{dt} \\ j_{kn} &= r_k \cdot \omega^2 \end{aligned}\right\} \qquad \bar{j}_k = \bar{j}_{kt} + \bar{j}_{kn}$$

kur r_k attālums no griezes ass 00 līdz A ; $r_k = a + r \cos\theta$

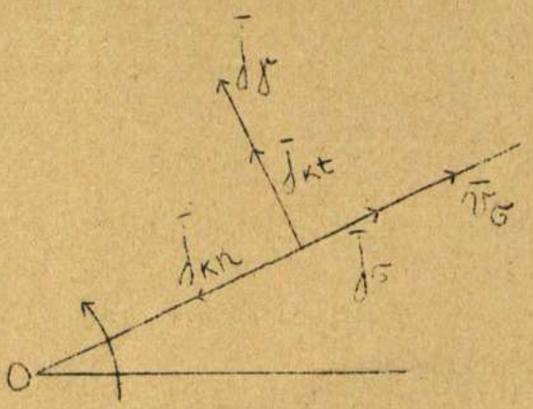
$\bar{V}_\sigma$ atrodās durvju plaknē, bet j_γ ir perpendikulārs pret plakni, kuŗa iet caur $\bar{\omega}$ un $\bar{V}_\sigma$, tā tad perpendikulārs pret durvju plakni, t.i. j_γ virziens sakritīs ar j_{kt} virzienu

$$\bar{j}_\gamma = 2\,\bar{\omega} \cdot \bar{V}_\sigma \quad ; \quad j_\gamma = 2\,\omega \cdot V_\sigma \cdot \sin\delta = 2\,\omega\, V_\sigma \sin\theta$$

$$\bar{j} = \bar{j}_k + \bar{j}_\sigma + \bar{j}_\gamma = \bar{j}_{kt} + \bar{j}_{kn} + \bar{j}_{\sigma t} + \bar{j}_{\sigma n} + \bar{j}_\gamma$$

kad punkts nonāk vietās B un B_1 – Coriolisa paātrinājums $j_\gamma = 0$, jo tur $\bar{V}_\sigma \parallel \bar{\omega}$

Paātrinājums polarkoordinātēs uz Coriolisa teoremas pamata.



zīm.144.

Kad mēs apskatam punkta kustību polarkoordinātēs, mēs varam viņu uzskatīt kā sastādītu no punkta kustības pa radiusu vektoru un paša radiusa vektora griezes kustību ap polu. Kustību pa radiusu vektoru uzskatam kā relatīvo un radiusa vektora kustību kā pārnesamo.

Kustības nolīdzinājumi:

$r = f_r(t)$ – ar šo nol-mu ir dota punkta kustība pa radiusu-vektoru.

$\varphi = f_\varphi(t)$ – ar šo nol-mu dota rad.-vekt.griezes kustība ap polu.

Relatīvais paātrinājums

$$j_\sigma = \frac{d^2r}{dt^2} = \ddot{r}$$

Pārnesamā paātrinājuma projekcijas

$$j_{kt} = r\varepsilon = r\frac{d^2\varphi}{dt^2} = r\ddot{\varphi}$$

$$j_{kn} = \frac{V^2}{r} = r\omega^2 = r\dot{\varphi}^2$$

Coriolisa paātrinājums ir perpendikulārs pret plakni, kuŗa ieslēdz $\bar{V}_\sigma$ un $\bar{\omega}$, bet V_σ iet radiusa vektora virzienā un $\bar{\omega}$ iet perpendikulari pret zīmējuma plakni uz augšu, tā tad j_γ virziens atrodās zīmējuma plaknē un ir perpendikulārs radiusam vektoram $\bar{j} \perp \bar{r}$, t.i. sakrīt ar j_{kt} virzienu

$$\bar{j}_\gamma = 2\left[\bar{\omega}\cdot\bar{V}_\sigma\right]; \quad j_\gamma = 2\omega.V_\sigma \sin 90^\circ = 2\frac{d\varphi}{dt}\cdot\frac{dr}{dt} = 2\dot{\varphi}\dot{r}$$

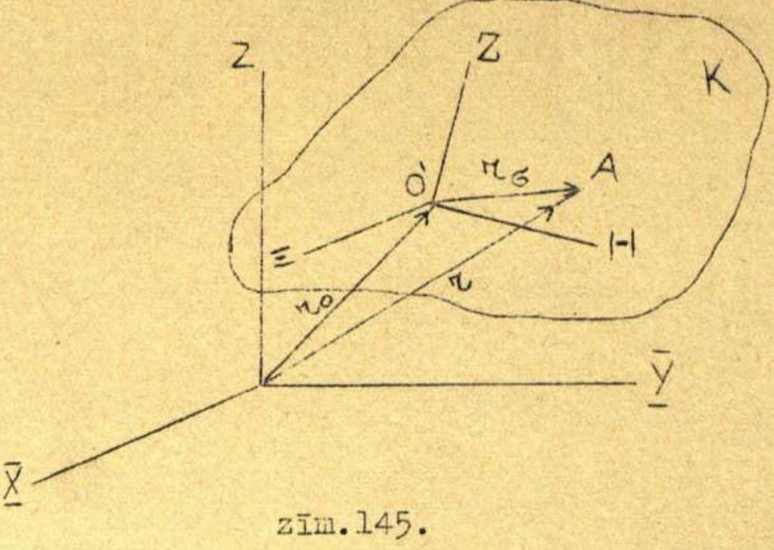
Absolutais paātrinājums $\bar{j} = \bar{j}_\sigma + \bar{j}_{kn} + \bar{j}_{kt} + \bar{j}_\gamma$ jeb projecējot šo nol-mu uz r un virzienu perpendikulāru r

iznāk

$$\begin{cases} j_r = j_\sigma - j_{kn} = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \\ j_c = j_\gamma + j_{kt} = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} \end{cases}$$

tās pašas formulas, kuŗas bija izvestas apskatot p-kta kustību polarkoordinātēs.

Vēl viena absolutā ātruma interpretacija un viņa projekcijas uz nekustošām asīm.



zīm.145.

Iedomāsimies ar kustošu ķermeni K, attiecībā pret kuŗu relativi kustās punkts A, saistītu ar kādu koordinātu sistemu $O'\Xi H Z$ ar sākumu punktā O'.

Pēc Somova teoremas

$$\bar{V} = \bar{V}_k + \bar{V}_\sigma$$

Pārnesamā kustība šeit būs ķermeņa K brīva kustība, bet ņemot vērā, ka brīva kustība ir ekvivalenta skrūves kustībai un pēdējās ātrums ir geometriska summa no kustošā koordinatu sākuma O' ātruma $\bar V_0$ un momentana griezes ātruma ap viņu, kuŗš pēc Eulera = $[\bar\omega . r_\sigma]$

dabujam $\bar V_k = \bar V_0 + [\bar\omega . r_\sigma]$ un tad

$$\boxed{\bar V = \bar V_0 + [\bar\omega . \bar r_\sigma] + \bar V_\sigma} \quad ....(42)$$

kur V_0 – kāda ķermeņa punkta, izvēlēta kustošā koordinātu sākumā, ātrums

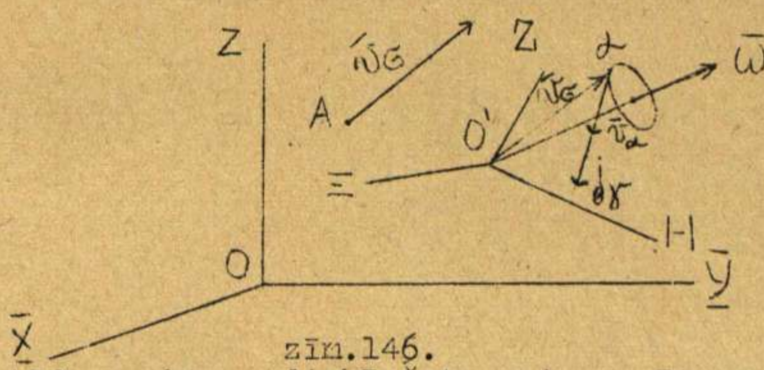
$[\bar\omega . \bar r_\sigma]$ – momentanais griezes ātrums ap to pašu punktu

V_σ – kustoša punkta A relatīvais ātrums

Projecējot minēto formulu uz nekustošām koordinatu asīm, gūsim:

$$\left.\begin{aligned} V_x &= V_{ox} + (\omega_y r_{\sigma z} - \omega_z r_{\sigma y}) + V_{\sigma x} \\ V_y &= V_{oy} + (\omega_z r_{\sigma x} - \omega_x r_{\sigma z}) + V_{\sigma y} \\ V_z &= V_{oz} + (\omega_x r_{\sigma y} - \omega_y r_{\sigma z}) + V_{\sigma z} \end{aligned}\right\} \quad ....(43)$$

Vēl viena Coriolisa paātrinājuma interpretacija un viņa projekcijas uz nekustošām koordinatu asīm.



zīm.146.

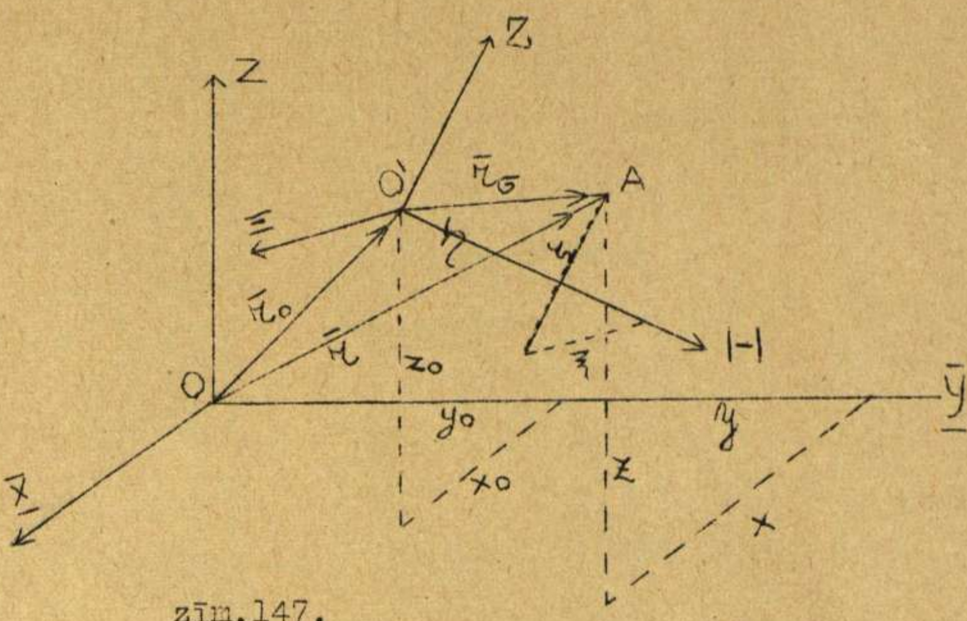
Ja mēs salīdzināsim Eulera formulu griezes ātrumam: $\bar V = [\bar\omega . \bar r]$ ar Coriolisa paātrinājumu $j_\gamma = 2[\bar\omega . \bar v_\sigma]$ redzam šeit zināmu analogiju, uz kuŗas pamata Coriolisa paātrinājumu varam uzskatīt kā tāda punkta divkāršotu griezes ātrumu, kuŗam kustošā koordinātu sistemā radiuss vektors ir $\bar V_\sigma$.

Tā tad, ja mums ir punkts A, kuŗa relativais ātrums ir $\bar V_\sigma$ un mēs atliksim no kustoša koordinatu sākumā O' šo vektoru $\bar V_\sigma$, tad viņa gala punkta "α" divkāršots griezes ātrums izteiks punkta A Coriolisa paātrinājumu j_γ absolutā kustībā.

Pamatojoties uz vektorprodukta projekciju izteiksmēm un ņemot vērā, ka $\bar V_\sigma$ projekcijas uz kustošām koordinātu asīm būs $\dot\xi$, $\dot\eta$ un $\dot\zeta$ varam sastādīt Coriolisa paātrinājuma projekcijas uz kustošām koordinātu asīm

$$\left.\begin{aligned} j_{\gamma\xi} &= 2(\omega_\eta \cdot \dot\zeta - \omega_\zeta \cdot \dot\eta) \\ j_{\gamma\eta} &= 2(\omega_\zeta \cdot \dot\xi - \omega_\xi \cdot \dot\zeta) \\ j_{\gamma\zeta} &= 2(\omega_\xi \cdot \dot\eta - \omega_\eta \cdot \dot\xi) \end{aligned}\right\} \quad ....(44)$$

Punkta absolutā kustība analitiski.



zīm.147.

Ar nekustošu ķermeni K_o saistīsim koordinātu sistemu $O\bar{X}YZ$

Ar kustošu ķermeni K saistīsim koordinātu sistemu $O'\Xi H Z$

Absoluta kustība sastādās no relatīvās un pārnesamās.

Lai noteiktu punkta relatīvo kustību, jādod relativas koordinātes kā funkcijas no laika

$$\left.\begin{aligned} \xi &= f_\xi(t) \\ \eta &= f_\eta(t) \\ \zeta &= f_\zeta(t) \end{aligned}\right\} \text{ Relatīvās kustības nol-mi } \ldots\ldots\ldots (45)$$

Relativo trajektoriju dabūsim izslēdzot t no minētiem nol-miem (45).

Lai noteiktu pārnesamo kustību, jāņem vērā, ka viņu, kā katru vispārīgo kustību, var sadalīt virzes kustībā un griezes kustībā.

Bet ķermeņa virzes kustība ir noteikta ar vienu punkta kustību un par šo punktu izvēlēsim kustošo koordinātu sākumu: O' ,kuŗa koordinātes dosim kā laika funkcijas

$$\begin{aligned} x_o &= \varphi_x(t) \\ y_o &= \varphi_y(t) \quad \ldots\ldots (46) \\ z_o &= \varphi_z(t) \end{aligned}$$

Pārnesamās virzes kustības nol-mi jeb kustoša koordinātu sākuma kustības nol-mi.

Izslēdzot no šiem nol-miem laiku, dabūsim punkta O' trajektoriju nekustošās koordinātēs.

Pārnesamo griezes kustību zināsim, ja katrā momentā būs noteikti 9 leņķi, kuŗus veido kustošās koordinātu asis ar nekustošām (jo katra ass veido 3 leņķus ar $\bar{X}$, $\bar{Y}$ un Z asīm).

Apzīmēsim leņķus

$(\bar{X},\Xi) = \alpha_1$	$(\bar{X},H) = \beta_1$	$(\bar{X},Z) = \gamma_1$
$(Y,\Xi) = \alpha_2$	$(Y,H) = \beta_2$	$(Y,Z) = \gamma_2$
$(Z,\Xi) = \alpha_3$	$(Z,H) = \beta_3$	$(Z,Z) = \gamma_3$

bet ņemot vērā, ka formulās ieies šo leņķu Cosin., apzīmēsim

$\cos\alpha_1 = a_1$	$\cos\beta_1 = b_1$	$\cos\gamma_1 = c_1$
$\cos\alpha_2 = a_2$	$\cos\beta_2 = b_2$	$\cos\gamma_2 = c_2$
$\cos\alpha_3 = a_3$	$\cos\beta_3 = b_3$	$\cos\gamma_3 = c_3$

	X	Y	Z
Ξ	a_1	a_2	a_3
H	b_1	b_2	b_3
Z	c_1	c_2	c_3

un apvienosim šos 9 lielumus vienā tabelē.

No analitiskās geometrijas ir zinams, ka starp šiem 9 lielumiem ir 6 neatkarīgas sakarības

$$
\begin{array}{l|l}
a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1 & a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0 \\
b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1 & a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3 = 0 \\
c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1 & a_1a_3 + b_1b_3 + c_1c_3 = 0
\end{array}
\left.\vphantom{\begin{array}{l}a\\b\\c\end{array}}\right\}
$$

jo $\Xi H Z$ un XYZ savstarpīgi perpendīkulari

Šos 6 nol-mus var uzrakstīt arī citādi, bet viņi tad būs identiski ar pirmiem sešiem

$$
\begin{array}{l|l}
a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1 & a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0 \\
a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 1 & b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 = 0 \\
a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 = 1 & a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 = 0
\end{array}
$$

Tā tad īstenībā lai noteiktu 9 lielumus ir jādod tikai 3 un citus varēs atrast no minētiem 6 nol-miem, Dosim piemēram:

$$
\left.\begin{array}{l}
a_1 = \psi_1(t) \\
a_2 = \psi_2(t) \\
a_3 = \psi_3(t)
\end{array}\right\} \text{Pārnesamā griezes kustība} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (47)
$$

Ja apzīmēsim $\bar{r}_0$ – radiusvektoru, kurš savieno 0 ar 0'

$\bar{r}_\sigma$ – " " " 0' " A

$\bar{r}$ – " " " 0 " A

tad no zīmējuma redzam, ka

$\bar{r} = \bar{r}_0 + \bar{r}_\sigma$

bet $\bar{r} = \bar{\xi} + \bar{\eta} + \bar{\zeta}$ tā tad $\boxed{\bar{r} = \bar{r}_0 + \bar{\xi} + \bar{\eta} + \bar{\zeta}}$ ....(48)

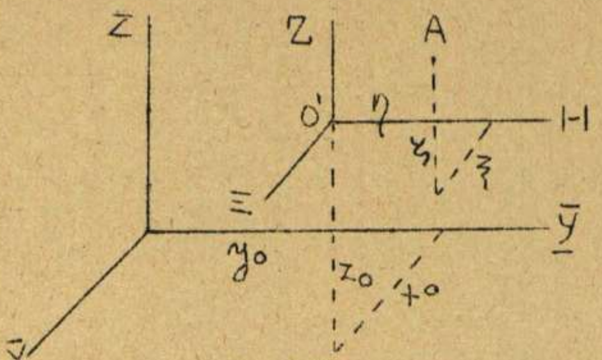
projecējot pēdējo nol-mu uz X Y un Z asīm, dabūsim:

$$
\left.\begin{array}{l}
\boxed{x = x_0 + \xi a_1 + \eta b_1 + \zeta c_1 = f_x(t)} \\
\boxed{y = y_0 + \xi a_2 + \eta b_2 + \zeta c_2 = f_y(t)} \\
\boxed{z = z_0 + \xi a_3 + \eta b_3 + \zeta c_3 = f_z(t)}
\end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (49)
$$

Absolutās kustības nol-mi, jeb arī absolutās trajektorijas nol-mi parametra veidā.

Izslēdzot no šiem nolīdzinājumiem laiku, dabūsim tieši absoluto trajektoriju koordinātes.

Speciāls gadijums: Pārnesamā kustība ir tīra virzes kustība.



zīm.148.

Šādā gadijumā ir izdevīgi izvēlēt kustošas koordinātu asis paraleli nekustošām, tad Cos. lielumi būs:

.	X	Y	Z
Ξ	1	0	0
H	0	1	0
Z	0	0	1

un absolutas kustības nol-mi:

$$\boxed{x = x_0 + \xi}$$

$$\boxed{y = y_0 + \eta}$$

$$\boxed{z = z_0 + \zeta}$$

Ātrums absolutā kustībā analitiski.

Sastādot atvasinājumus no absolutās kustības nol-miem (49) pēc laika, dabūsim absoluta ātruma projekcijas

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx_0}{dt} + (\xi\frac{da_1}{dt} + \eta\frac{db_1}{dt} + \zeta\frac{dc_1}{dt}) + (a_1\frac{d\xi}{dt} + b_1\frac{d\eta}{dt} + c_1\frac{d\zeta}{dt})$$

jeb lietojot Lagrang'a apzīmējumus

$$\left.\begin{aligned} &\boxed{V_x = \dot{x}_0 + (\xi\dot{a}_1 + \eta\dot{b}_1 + \zeta\dot{c}_1) + (a_1\dot{\xi} + b_1\dot{\eta} + c_1\dot{\zeta})} \\ &\boxed{V_y = \dot{y}_0 + (\xi\dot{a}_2 + \eta\dot{b}_2 + \zeta\dot{c}_2) + (a_2\dot{\xi} + b_2\dot{\eta} + c_2\dot{\zeta})} \\ &\boxed{V_z = \dot{z}_0 + (\xi\dot{a}_3 + \eta\dot{b}_3 + \zeta\dot{c}_3) + (a_3\dot{\xi} + b_3\dot{\eta} + c_3\dot{\zeta})} \end{aligned}\right\}\ldots(50)$$

pārnesama virzes ātr. projekc. — pārnesama griezes ātruma projekcijas — relatīvā ātruma projekcijas

pārnesamā ātruma projekcijas

Speciāli gadijumi.

I. Pārnesamā kustība ir tīra virzes kustība.

Tad leņķu Cosinusi ir visi Const. un viņu atvasinājumi ir 0 ,kādēļ pārnesamās griezes ātruma projekcijas izkrīt

$$V_x = \dot{x} = \dot{x}_0 + 0 + (a_1\dot{\xi} + b_1\dot{\eta} + c_1\dot{\zeta})$$

$$V_y = \dot{y} = \dot{y}_0 + 0 + (a_2\dot{\xi} + b_2\dot{\eta} + c_2\dot{\zeta})$$

$$V_z = \dot{z} = \dot{z}_0 + 0 + (a_3\dot{\xi} + b_3\dot{\eta} + c_3\dot{\zeta})$$

izvēlot tālāk kustošas asis paraleli nekustošām, Cosinusi

būs

	X	Y	Z
Ξ	1	0	0
H	0	1	0
Z	0	0	1

un

$$\boxed{V_x = \dot{x}_0 + \dot{\xi}}$$

$$\boxed{V_y = \dot{y}_0 + \dot{\eta}}$$

$$\boxed{V_z = \dot{z}_0 + \dot{\zeta}}$$

II. Pārnesamā kustība ir tīra griezes kustība.

Tādā gadijumā x_0 ; y_0 ; z_0 ir Const. un $\dot{x}_0 = \dot{y}_0 = \dot{z}_0 = 0$ un

$$
\begin{aligned}
V_x &= \dot{x} = 0 + (\xi\dot{a}_1 + \eta\dot{b}_1 + \zeta\dot{c}_1) + (a_1\dot{\xi} + b_1\dot{\eta} + c_1\dot{\zeta}) \\
V_y &= \dot{y} = 0 + (\xi\dot{a}_2 + \eta\dot{b}_2 + \zeta\dot{c}_2) + (a_2\dot{\xi} + b_2\dot{\eta} + c_2\dot{\zeta}) \\
V_z &= \dot{z} = 0 + \underbrace{(\xi\dot{a}_3 + \eta\dot{b}_3 + \zeta\dot{c}_3)}_{\text{pārnesamā griezes ātruma projekcijas}} + \underbrace{(a_3\dot{\xi} + b_3\dot{\eta} + c_3\dot{\zeta})}_{\text{relatīvā ātruma projekcijas}}
\end{aligned}
$$

Salīdzinot šīs formulas ar formulām (43) varam teikt, ka

$$
\begin{aligned}
\omega_y r_{\sigma z} - \omega_z r_{\sigma y} &= \xi\dot{a}_1 + \eta\dot{b}_1 + \zeta\dot{c}_1 \\
\omega_z r_{\sigma x} - \omega_x r_{\sigma z} &= \xi\dot{a}_2 + \eta\dot{b}_2 + \zeta\dot{c}_2 \\
\omega_x r_{\sigma y} - \omega_y r_{\sigma x} &= \xi\dot{a}_3 + \eta\dot{b}_3 + \zeta\dot{c}_3
\end{aligned}
$$

Paātrinājums absolutā kustībā analitiski.

Atvasinājot otro reizi pēc laika absolutas kustības nol-mus (49) dabūsim absoluta paātrinājuma projekcijas uz nekustošām asīm

$$
\boxed{j_x = \ddot{x} = \ddot{x}_0 + (\xi\ddot{a}_1 + \eta\ddot{b}_1 + \zeta\ddot{c}_1) + (a_1\ddot{\xi} + b_1\ddot{\eta} + c_1\ddot{\zeta}) + 2(\dot{\xi}\dot{a}_1 + \dot{\eta}\dot{b}_1 + \dot{\zeta}\dot{c}_1)}
$$

$$
\boxed{j_y = \ddot{y} = \ddot{y}_0 + (\xi\ddot{a}_2 + \eta\ddot{b}_2 + \zeta\ddot{c}_2) + (a_2\ddot{\xi} + b_2\ddot{\eta} + c_2\ddot{\zeta}) + 2(\dot{\xi}\dot{a}_2 + \dot{\eta}\dot{b}_2 + \dot{\zeta}\dot{c}_2)} \quad 51
$$

$$
\boxed{j_z = \ddot{z} = \underbrace{\underbrace{\ddot{z}_0}_{\substack{\text{pārnesama}\\\text{virzes}\\\text{paātr.}\\\text{proj.}}} + \underbrace{(\xi\ddot{a}_3 + \eta\ddot{b}_3 + \zeta\ddot{c}_3)}_{\substack{\text{pārnesama grie-}\\\text{zes paātrināju-}\\\text{ma projekcijas}}}}_{\substack{\text{pārnesama paātrinājuma}\\ j_k \text{ projekc.}}} + \underbrace{(a_3\ddot{\xi} + b_3\ddot{\eta} + c_3\ddot{\zeta})}_{\substack{\text{relatīva paātr.}\\\text{projekcijas}\\ j_\sigma \text{ - projekc.}}} + \underbrace{2(\dot{\xi}\dot{a}_3 + \dot{\eta}\dot{b}_3 + \dot{\zeta}\dot{c}_3)}_{\substack{\text{Coriolisa pa-}\\\text{ātrinājuma pro-}\\\text{jekcijas}\\ j_\gamma \text{ - projekc.}}}}
$$

Speciāli gadijumi.

I. Pārnesama kustība ir tīra virzes kustība.

Šis gadijums raksturojās ar to, ka visi 9 Cosin. ir Const. un viņu atvasinājumi tad = 0, tā tad
pārnesamā griezes paātrinājuma projekcijas = 0
un arī Coriolisa paātrinājuma projekcijas = 0

$$
\begin{aligned}
j_x &= \ddot{x} = \ddot{x}_0 + 0 + (\ddot{\xi} a_1 + \ddot{\eta} b_1 + \ddot{\zeta} c_1) + 0 \\
j_y &= \ddot{y} = \ddot{y}_0 + 0 + (\ddot{\xi} a_2 + \ddot{\eta} b_2 + \ddot{\zeta} c_2) + 0 \\
j_z &= \ddot{z} = \ddot{z}_0 + 0 + (\ddot{\xi} a_3 + \ddot{\eta} b_3 + \ddot{\zeta} c_3) + 0
\end{aligned}
$$

Izvēlot tāļāk kustošas asis paraleli nekustošām, dabūsim

	X	Y	Z
Ξ	1	0	0
H	0	1	0
Z	0	0	1

un tad
$$\ddot{x} = \ddot{x}_0 + \ddot{\xi}$$
$$\ddot{y} = \ddot{y}_0 + \ddot{\eta}$$
$$\ddot{z} = \ddot{z}_0 + \ddot{\zeta}$$

a) Apakšgadijums: Pārnesamā kustība ir vienmērīga virzes kustība, tad $\ddot{x}_0 = 0$; $\ddot{y}_0 = 0$; $\ddot{z}_0 = 0$

$$\ddot{x} = \ddot{\xi} a_1 + \ddot{\eta} b_1 + \ddot{\zeta} c_1$$
$$\ddot{y} = \ddot{\xi} a_2 + \ddot{\eta} b_2 + \ddot{\zeta} c_2$$
$$\ddot{z} = \ddot{\xi} a_3 + \ddot{\eta} b_3 + \ddot{\zeta} c_3$$

un ja kustošas asis ir paralelas nekustošām

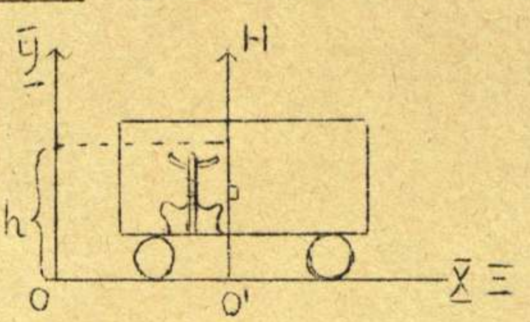
$$\ddot{x} = \ddot{\xi}$$
$$\ddot{y} = \ddot{\eta}$$
$$\ddot{z} = \ddot{\zeta}$$

II. Pārnesamā kustība ir tīra griezes kustība,

tādā gadijumā x_0 ; y_0 ; z_0 = Const. un viņu atvasinājumi = 0 ; tā tad pārnesamās virzes paātrinājuma projekcijas = 0 ,bet Coriolisa paātrinājuma projekcijas ≠ 0

$$\ddot{x} = 0 + (\xi\ddot{a}_1 + \eta\ddot{b}_1 + \zeta\ddot{c}_1) + (\ddot{\xi}a_1 + \ddot{\eta}b_1 + \ddot{\zeta}c_1) + 2(\dot{\xi}\dot{a}_1 + \dot{\eta}\dot{b}_1 + \dot{\zeta}\dot{c}_1)$$
$$\ddot{y} = 0 + (\xi\ddot{a}_2 + \eta\ddot{b}_2 + \zeta\ddot{c}_2) + (\ddot{\xi}a_2 + \ddot{\eta}b_2 + \ddot{\zeta}c_2) + 2(\dot{\xi}\dot{a}_2 + \dot{\eta}\dot{b}_2 + \dot{\zeta}\dot{c}_2)$$
$$\ddot{z} = 0 + (\xi\ddot{a}_3 + \eta\ddot{b}_3 + \zeta\ddot{c}_3) + (\ddot{\xi}a_3 + \ddot{\eta}b_3 + \ddot{\zeta}c_3) + 2(\dot{\xi}\dot{a}_3 + \dot{\eta}\dot{b}_3 + \dot{\zeta}\dot{c}_3)$$

Piemērs: Apskatīsim analitiski to pašu piemēru ar čemodanu, kurš krīt no plaukta ejošā vienmērīgi ar ātrumu C dz-ceļa vagonā.



Izvēlēsim nekustošu koordinātu sistemu tā, lai viņa sākuma momentā sakrīt ar kustošu koordinātu sistemu, tad

$$x_0 = ct \qquad \xi = 0$$
$$y_0 = 0 \qquad \eta = h - \frac{1}{2} gt^2$$

zīm.149.

Kad pārnesamā kustība ir tīra virzes kustība un koordinātu asis ir savstarpīgi paralelas, tad

$$x = x_0 + \xi \qquad \boxed{x = ct}$$
$$y = y_0 + \eta \qquad \boxed{y = h - \frac{1}{2} gt^2}$$

absolutas kustības nol-mi, izslēdzot no viņiem t , dabūsim trajektoriju: $\boxed{y = h - \frac{g}{2c^2} x^2}$ trajektorija parabola.

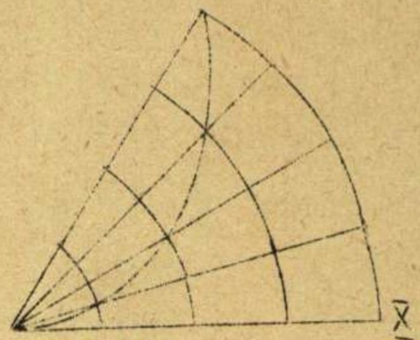
Sastādot atvasinājumus $V_x = \frac{dx}{dt} = c$, $V_y = \frac{dy}{dt} = -gt$

$$\boxed{V = \sqrt{c^2 + g^2t^2}}$$ absolutais ātrums

$$Cos(XV) = \frac{V_x}{V} = \frac{c}{\sqrt{c^2 + g^2t^2}}$$

atvasinājot otro reizi $j_x = 0$, $j_y = -g$ $\boxed{j = g}$ absolutais paātrinājums $Cos(Hj) = -1$, $(Hj) = \pi$

Piemērs. Apskatīsim analitiski arī otru piemēru ar bumbiņu, kuŗa vienmērīgi kustās vienmērīgi griezošos caurulītē.



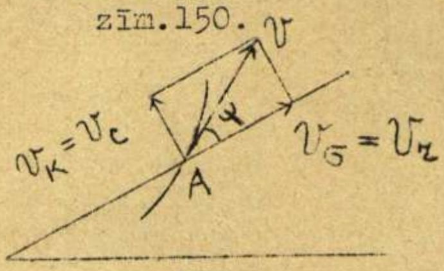
zīm.150.

Pārnesamā kustība $\varphi = kt$

Relatīvā kustība $r = ct$

Izslēdzot laiku, dabūsim absoluto trajektoriju: $\boxed{r = \frac{c}{k}\varphi}$ Archimeda spirale.

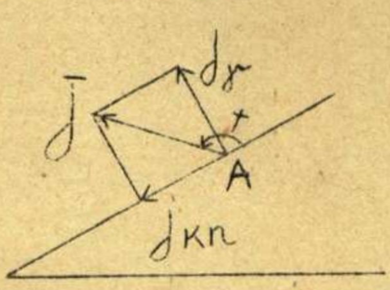
$$\left.\begin{aligned} V_\sigma &= V_r = \dot{r} = c \\ V_k &= V_c = \dot{r}\dot{\varphi} = kct \end{aligned}\right\} \quad \bar{V} = \bar{V}_k + \bar{V}_\sigma$$



zīm.151.

$$\boxed{V = c\sqrt{1 + k^2t^2}}$$ Absolutais ātrums.

$$tg\psi = \frac{V_c}{V_r} = \frac{kct}{c} = kt$$



$$j_\sigma = \ddot{r} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} j_{kt} &= r\varepsilon = r\ddot{\varphi} = 0 \\ j_{kn} &= r\omega^2 = r\dot{\varphi}^2 = ct.k^2 \end{aligned}\right\} \quad j_k = ck^2t$$

$$j_\gamma = 2\omega v_\sigma \, Sn\, 90^\circ = 2\dot{\varphi} v_\sigma = 2\,k.c$$

zīm.152.

$$\bar{j} = \bar{j}_k + \bar{j}_\sigma + \bar{j}_\gamma \; ; \quad \boxed{j = kc\sqrt{4 + k^2t^2}}$$ absolutais paātrin.

$$tg\chi = \frac{j_\gamma}{j_{kn}} = \frac{2kc}{ck^2t} = \frac{2}{kt}$$

§ 7. PUNKTA RELATIVA KUSTĪBA.

(kustības sadalīšana)

Saskaitot relativo kustību ar pārnesamo, mēs arvienu dabujam absoluto kustību. Apgrieztais jautājums, t.i. absolutās kustības sadalīšana relatīvā un pārnesamā paliek nenoteikts, jo šādu sadalīšanu var izdarīt bezgalīgi daudzās kombinacijās. Minētais jautājums kļūst noteikts tikai tad, ja bez absolutās kustības būs zinama vēl pārnesamā jeb relatīvā kustība.

Apskatīsim kā atrast ķermeņa punkta A relativo kustību, ja ir dota absoluta un pārnesama kustība.

Ja absoluta kustība ir dota, tad ir zināmi

$$\left.\begin{aligned} x &= f_x(t) \\ y &= f_y(t) \\ z &= f_z(t) \end{aligned}\right\} \text{ ķermeņa punkta A absolutas kustības nol-mi.}$$

Ja pārnesamā kustība ir dota, tad ir zinami

$$\left.\begin{aligned} x_o &= \varphi_x(t) \\ y_o &= \varphi_y(t) \\ z_o &= \varphi_z(t) \end{aligned}\right\} \text{ ķermeņa pārnesamās virzes kustības nol-mi } \ldots\ldots\ldots(46)$$

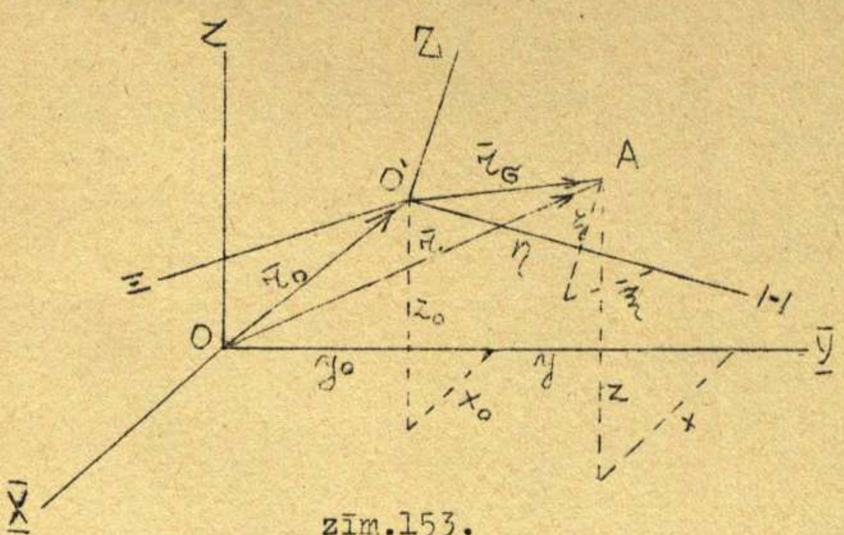
un arī

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \psi_1(t) \\ a_2 &= \psi_2(t) \\ a_3 &= \psi_3(t) \end{aligned}\right\} \text{ ķermeņa pārnesamas griezes kustības nol-mi } \ldots\ldots\ldots\ldots(47)$$

Meklēti tiek:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \chi_\xi(t) \\ \eta &= \chi_\eta(t) \\ \zeta &= \chi_\zeta(t) \end{aligned}\right\} \text{ Punkta A relatīvas kustības nol-mi.}$$

Pieņemsim, ka nekustoša koordinatu sistema ir $\overline{OXYZ}$ un kustoša koordinatu sistema ir $O'\Xi H Z$ (zīm.153.



zīm.153.

Deviņus Cosin.leņķus, kuŗus veido kustošas ass ar nekustošām, sakārtosim tabelē:

	$\overline{X}$	$\overline{Y}$	$\overline{Z}$
Ξ	a_1	a_2	a_3
H	b_1	b_2	b_3
Z	c_1	c_2	c_3

un piezīmēsim, ka visi viņi būs zināmi, ja ir doti 3 no viņiem, jo starpviņiem pastāv seši sakari (no analitiskās ģeometrijas)

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1 \qquad a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1 = 0$$

$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1 \qquad \text{un} \qquad b_1b_2 + b_2b_3 + b_3b_1 = 0$$

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1 \qquad c_1c_2 + c_2c_3 + c_3c_1 = 0$$

Ievilksim radiuss-vektorus $\overline{OO'} = \bar{r}_o$; $\overline{O'A} = \bar{r}_\sigma$ un $\overline{OA} = \bar{r}$

Radiusu-vektoru projekcijas būs:

$$\bar{r}_o \begin{Bmatrix} x_o \\ y_o \\ z_o \end{Bmatrix} \text{uz nekustošām asīm} \qquad \bar{r} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \text{uz nekustošām asīm}$$

$$r_\sigma \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix} \text{uz kustošām asīm} \qquad \bar{r}_\sigma \begin{Bmatrix} x - x_o \\ y - y_o \\ z - z_o \end{Bmatrix} \text{uz nekustošām asīm}$$

zīmējumā 153. redzam, ka $\bar{r} = \bar{r}_o + \bar{r}_\sigma$ jeb $\bar{r}_\sigma = \bar{r} - \bar{r}_o$,pārveidojot tālāk $\bar{r}_\sigma = (x - x_o)\bar{i}_x + (y - y_o)\bar{i}_y + (z - z_o)\bar{i}_z$

projecējot šo nolīdzinājumu uz kustošām asīm atrodam, ņemot vērā, ka vienības vektora projekcijas ir viņa virziena Cosin.

$$\left.\begin{aligned} &\boxed{\xi = (x - x_o)a_1 + (y - y_o)a_2 + (z - z_o)a_3} \\ &\boxed{\eta = (x - x_o)b_1 + (y - y_o)b_2 + (z - z_o)b_3} \\ &\boxed{\zeta = (x - x_o)c_1 + (y - y_o)c_2 + (z - z_o)c_3} \end{aligned}\right\} \text{Relatīvas kustības nol-mi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(52)$$

Speciāls gadijums: Pārnesama kustība ir tīras virzes kustība.

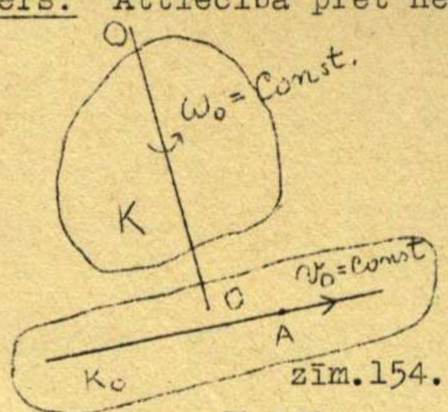
Visi deviņi Cosin. šādā gadijumā būs Const. un izvēlot kustošās ass paraleli nekustošām, dabūsim Cosin. vērtības, parādītas tabelē.

	$\bar{X}$	$\bar{Y}$	$\bar{Z}$
Ξ	1	0	0
H	0	1	0
Z	0	0	1

Relatīvās kustības nol-mi (52) arī vienkāršosies

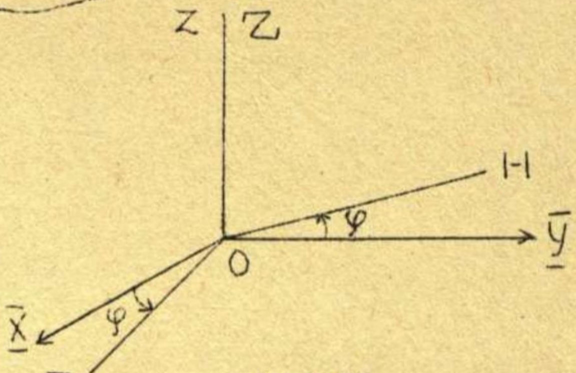
$$\left.\begin{aligned} \xi &= x - x_o \\ \eta &= y - y_o \\ \zeta &= z - z_o \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots(53)$$

Piemērs: Attiecībā pret nekustošu ķermeni K_o kustās punkts A ar Const. ātrumu ${}^oV_o$.Ķermenis K griežās ap asi OO,saistītu ar nekustošu ķermeni,ar Const. ātrumu ω_o .Uziet punkta A relatīvas kustības nol-mus pret kustošu ķermeni K.



zīm.154.

Absoluta kustība šeit būs punkta A taisnvirziena vienmērīga kustība pret ķermeni K_o un pārnesama kustība būs ķermeņa K tīra griezes kustība pret ķermeni K_o.



zīm.155.

Saistīsim tagad nekustošu koordinatu sistemu $\overline{XYZ}$ ar nekustošu ķermeni K_o un kustošu koordinatu sistemu ΞHZ ar kustošu ķermeni K tā, lai,pirmkārt, viņiem būtu kopīgs koordinatu sākums un,otrkārt, lai abas ass OZ un OZ sakrīt ar griezes asi. Tad kustošais koordinatu sākums paliek mierā un

$$x_o = y_o = z_o = 0$$

Punkta A absoluta taisnvirziena kustība izteiksies formā:

$$\left.\begin{aligned} x &= c_1t + k_1 \\ y &= c_2t + k_2 \\ z &= c_3t + k_3 \end{aligned}\right\}$$

kur $c_1k_1c_2k_2$ ...... ir Const. koeficienti atkarīgi no sākuma apstākļiem.

Ka šie nol-mi tieši izsaka taisnvirziena vienmērīgu kustību, varam viegli pārbaudīt atrodot trajektoriju, kuŗa būs

$$\frac{x - k_1}{c_1} = \frac{y - k_2}{c_2} = \frac{z - k_3}{c_3} \quad \text{(taisna linija)}$$

un ātrumu, kurš būs:

$$V = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2} = \text{Const} = V_o$$

Pārnesama vienmērīga griezes kustība būs noteikta ar nol-mu

$$\varphi = \omega_o t$$

Ņemsim Cosin.tabeli un uziesim visus Cosin.

	X	Y	Z
Ξ	a_1	a_2	a_3
Η	b_1	b_2	b_3
Z	c_1	c_2	c_3

$a_1 = \text{Cos}\,\varphi$

$b_1 = \text{Cos}(90^o + \varphi) = -\text{Sn}\,\varphi$

$c_1 = \text{Cos}\,90^o = 0$

$a_2 = \text{Cos}(90^o - \varphi) = \text{Sn}\,\varphi$

$b_2 = \text{Cos}\,\varphi$

$c_2 = \text{Cos}\,90^o = 0$

$a_3 = \text{Cos}\,90^o = 0$

$b_3 = \text{Cos}\,90^o = 0$

$c_3 = \text{Cos}\,0^o = 1$

Pārrakstīsim tabeli šim gadijumam:

	X	Y	Z
Ξ	$\text{Cos}\,\varphi$	$\text{Sn}\,\varphi$	0
Η	$-\text{Sn}\,\varphi$	$\text{Cos}\,\varphi$	0
Z	0	0	1

Ņemsim tālāk formulas (52)

$$\xi = (x - x_o)a_1 + (y - y_o)a_2 + (z - z_o)a_3$$

$$\eta = (x - x_o)b_1 + (y - y_o)b_2 + (z - z_o)b_3$$

$$\zeta = (x - x_o)c_1 + (y - y_o)c_2 + (z - z_o)c_3$$

un ievietosim visus uz šo gadijumu attiecinātus lielumus:

$$\xi = x\,\text{Cos}\,\varphi + y\,\text{Sn}\,\varphi + 0$$

$$\eta = -x\,\text{Sn}\,\varphi + y\,\text{Cos}\,\varphi + 0$$

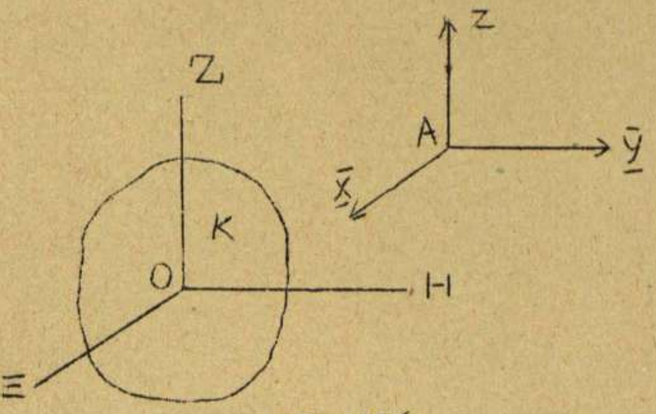
$$\zeta = 0 + 0 + z$$

jeb kā laika funkcijas:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= (c_1t + k_1)\text{Cos}\,\omega_o t + (c_2t + k_2)\text{Sn}\,\omega_o t \\ \eta &= -(c_1t + k_1)\text{Sn}\,\omega_o t + (c_2t + k_2)\text{Cos}\,\omega_o t \\ \zeta &= c_3t + k_3 \end{aligned}\right\}$$

Relatīvās kustības nol-mi

Mierā esošā punkta relatīva kustība pret ķermeni, kurš kustās virzes kustībā.



zīm.156.

Pieņemsim, ka punkts A atrodas mierā, bet ķermenis K kustās taisnvirziena virzes kustībā. Saistīsim nekustošu koordinatu sistemu ar punktu A un kustošu ar ķermeni K. Ja pārnesama kustība ir tīra virzes kustība, mēs ass varam izvēlēt savstarpīgi paralelas un relatīvas kustības nol-mus ņemt pēc formulas (53)

$$\xi = x - x_0, \quad \eta = y - y_0, \quad \zeta = z - z_0$$

(bet absolutā kustībā punkts A atrodas mierā) $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

no kurienes:

$$\boxed{\xi = -x_0}$$
$$\boxed{\eta = -y_0}$$
$$\boxed{\zeta = -z_0}$$

Tas nozīmē, ka novērotājam, kurš atradīsies punktā O izliksies, ka punkts A itkā kustās viņam pretīm ar to pašu ātrumu, ar kuru viņš kustās pats.

Šādu ainu mēs varam novērot caur dz-ceļa vagona logu, ja vagons atrodās kustībā.

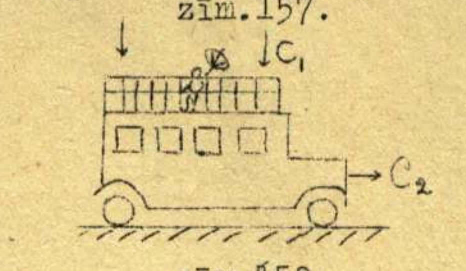
Relatīvais ātrums.

Relatīvo ātrumu analitiski var atrast atvasinot pēc laika relatīvas kustības nol-mus: formulas (52)

$$\left.\begin{aligned} \xi &= (x - x_0)a_1 + (y - y_0)a_2 + (z - z_0)a_3 \\ \eta &= (x - x_0)b_1 + (y - y_0)b_2 + (z - z_0)b_3 \\ \zeta &= (x - x_0)c_1 + (y - y_0)c_2 + (z - z_0)c_3 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots(52)$$

Bet ja šeit visi lielumi būs funkcijas no laika, šis ceļš būs pārāk garš. Meklēsim vienkāršāku ceļu, apskatot ātrumu pēc ģeometriskas metodes.

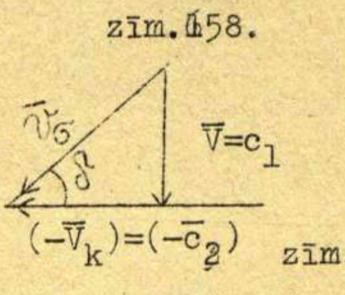
Pēc Somova teoremas: $\bar{V} = \bar{V}_k + \bar{V}_\sigma$ no kurienes $\bar{V}_\sigma = \bar{V} - \bar{V}_k$



zīm.157.

jeb arī $\boxed{\bar{V}_\sigma = \bar{V} + (-\bar{V}_k)}$ ....(54)

Šī formula dod iespēju uzkonstruēt relatīvo ātrumu kā ģeometrisko summu no absoluta ātruma un pretējā virzienā ņemta pārnesama ātruma (zīm.157).



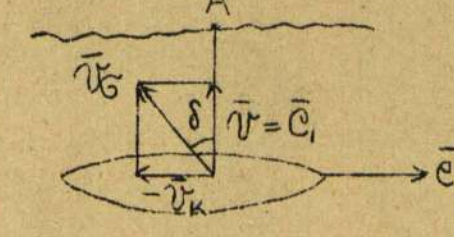
zīm.158.

Piemērs: Ņemsim autobusu, kuram pasažieri sēž arī uz jumta. Pieņemsim, ka līst lietus vertikalā virzienā ar ātrumu c_1 un autobusa ātrums ir c_2. Uziet kādā virzienā jātur lietussargu, lai aizsargātos pret lietu.

Lietus pilienu vertikalā kustība ir absoluta; autobusa kustība pārnesama un lietus pilienu kustība pret autobusu relatīva. Uzkonstruējot ģeometrisko summu: $\bar{V}_\sigma = \bar{V} + (-\bar{V}_k)$ jeb $\bar{V}_\sigma = \bar{c}_1 + (-\bar{c}_2)$, dabūsim lietus pilienu relatīvo ātrumu, tā tad arī kustības virzienu pret autobusu. Slīpuma leņķi δ uziesim no $tg\delta = \frac{c_1}{c_2}$

zīm.159.

Piemērs: Uz kaŗa kuģa atrodas lielgabals, kuŗa lodes ātrums ir c_1, pats kuģis kustās ar ātrumu c_2. Uziet kādā virzienā jāšauj, ja kuģis atrodas taisni pretīm mērķim A.



zīm.160.

Atkal saskaitot grafiski $\bar{V} = \bar{c}_1$ ar $(-\bar{V}_k) = (-\bar{c}_2)$ dabūsim $\bar{V}_\sigma = \bar{c}_1 + (-\bar{c}_2)$ no kurienes atrodam leņķi starp lielgabala virzienu un mērķa virzienu

$$tg\,\delta = \frac{c_2}{c_1}$$

Relatīvais paātrinājums.

Atkal relatīvo paātrinājumu analitiski varētu atrast, atvasinot divreiz pēc laika relatīvās kustības nol-mus (52)

$$\left.\begin{aligned} \xi &= (x - x_0)a_1 + (y - y_0)a_2 + (z - z_0)a_3 \\ \eta &= (x - x_0)b_1 + (y - y_0)b_2 + (z - z_0)b_3 \\ \zeta &= (x - x_0)c_1 + (y - y_0)c_1 + (z - z_0)c_3 \end{aligned}\right\} \quad ....(52)$$

bet šīs analitiskās izteiksmes iznāks ļoti garas, kādēļ griezīsimies arī šeit pie ģeometriskas metodes. Ņemsim agrāk atrasto ģeometriskā ceļā absoluta paātrinājuma formulu (41)

$$\bar{j} = \bar{j}_k + \bar{j}_\sigma + \bar{j}_\gamma \quad ....(41)$$

un uziesim šeit relatīvo paātrinājumu j_σ

$$\bar{j}_\sigma = \bar{j} - \bar{j}_k - \bar{j}_\gamma$$

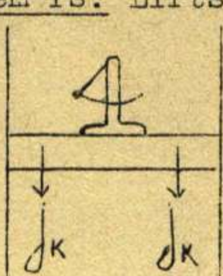
Pārveidojot šo formulu dabūjam:

$$\boxed{\bar{j}_\sigma = \bar{j} + (-\bar{j}_k) + (-\bar{j}_\gamma)} \quad ....(55)$$

Formula (55) rāda, ka relatīvo paātrinājumu varam dabūt pieskaitot ģeometriski absolutam paātrinājumam pārnesamo un Coriolisa paātrinājumus ar pretējām zīmēm.

Daži autori, kā piem. Prof. M.Grüblers, tamdēļ nosauc par Coriolisa paātrinājumu: $(-j_\gamma)$

Piemērs: Lifts, kurā ir uzstādīts svārsts, kustās uz leju paātrināti ar paātrinājumu: j_k. Liksim svārstam svārstīties un noteiksim viņa periodu pa kustības laiku: T_σ



zīm.161.

Ja lifts stāvētu mierā, svārsta kustība būtu absoluta ar paātrinājumu g un periodu

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Lifta kustības gadijumā svārsta kustība pret liftu būs relativa un viņas paātrinājums:

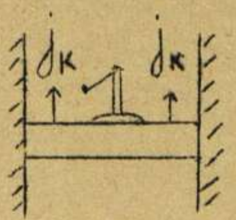
$$\bar{j}_\sigma = \bar{j} + (-\bar{j}_k) + (-\bar{j}_\gamma)$$

bet $j_\gamma = 0$, jo pārnesamā kustībā nav griezes un bez tam vektoru zīmes varam atmest, jo kustība ir taisnvirziena, tā tad relatīvais paātrinājums

$$j_\sigma = g - j_k$$

Liekot perioda formulā g vietā j_σ dabūsim $T_\sigma = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g - j_k}}$ periodu kustības gadijumā.

Kā redzams no formulām, kustības gadijumā, ja paātrinājums j_k iet uz leju, svārstīšanās notiks lēnāki: $T_\sigma > T$ un ja $j_k = g$, pat $T_\sigma = \infty$ tas nozīmē, ka svārsts paliks slīpi svāvot.



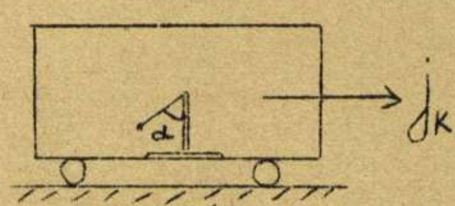
zīm.162.

Gadijumā, ja lifta paātrinājums ir virzīts uz augšu pēc analogijas ar iepriekšējo

$$T'_\sigma = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g + j_k}}$$

un svārsts svārstīsies ātrāk, jo $T'_\sigma < T$

Piemērs: Dinamometriskais svārsts jeb Desdouits vilciena paātrinājuma mērotājs principā sastāv no svārsta, uzstādīta dz-ceļa vagonā. Svārsta absolutais paātrinājums: g Jāatrod vilciena paātrinājumu, kuŗš būs pārnesamais paātrinājums: j_k



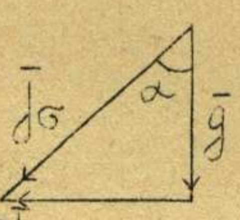
zīm.163.

Ja vilciens atradīsies kustībā un paātrinājums j_k ies piem. uz priekšu, tad svārsts novirzīsies atpakaļ, jo relatīvā paātrinājuma formulā j_k nāk iekšā ar (-) zīmi.

$$\bar{j}_\sigma = \bar{j} + (-\bar{j}_k) + (-\bar{j}_\gamma) \quad \text{bet} \quad \bar{j}_\gamma = 0$$

ja pārnesamā kustība ir virzes kustība un paliek

$$\bar{j}_\sigma = \bar{g} - \bar{j}_k$$



zīm.164.

Uzkonstruējot šai formulai atbilstošu poligonu un ņemot vērā, ka relatīvā līdzsvarā svārsts būs tad, ja j_σ ies pavediena virzienā, redzam, ka novirzīšanās leņķa $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{j_k}{g}$ no kuŗienes meklētais vilciena paātrinājums $\boxed{j_k = g\,\operatorname{tg}\alpha}$

Tā tad, lai atrastu vilciena paātrinājumu dotā momentā jānovēro svārsta novirzīšanās leņķi α un tad jāreizina $\operatorname{tg}\alpha$ ar g.

Kustība pa zemes lodi.

Zemes lode atrodas griezes kustībā ap savu asi un arī kustās ap sauli pa elipsi. Visas šīs kustības kādam ķermenim, kuŗš kustās pa zemes lodi, būs pārnesamas kustības un paša ķermeņa kustība pa zemes lodi relatīvā kustība. Kā redzams no relatīva paātrinājuma formulas

$$\bar{j}_\sigma = \bar{j} + (-\bar{j}_k) + (-\bar{j}_\gamma)$$

uz relatīvo paātrinājumu kā pārnesamais paātrinājums, tā arī Coriolisa paātrinājums atstāj savu iespaidu, bet šīs iespaids būs pretējā virzienā attiecīgam pārnesamam jeb Coriolisa paātrinājumam.

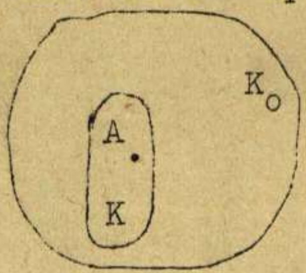
Ar Coriolisa paātrinājuma iespaidu ir izskaidrojamas vairākas parādības uz zemes lodes, kā piem. Baer'a likums attiecībā uz upēm, kuŗš skan tā: "upēs, kuŗas apmēram seko meridiana virzienam ziemeļu puslodē, tiek noskaloti labie krasti un dienvidus puslodē tiek noskaloti kreisie krasti". Šis likums ir izskaidrojams ar Coriolisa paātrinājuma iespaidu, jo, kā mēs redzējam agrāk, absolutā kustībā ķermenim, kuŗš kustās pa meridianu ziemeļu puslodē Coriolisa paātrinājums iet uz kreiso pusi skatoties kustības virzienā, bet relatīvā kustībā viņa iespaids ir pretējā virzienā, kādēļ tiks noskalots labais krasts.

Arī passātu izcelšanās ir izskaidrojama ar Coriolisa paātrinājuma iespaidu, jo katram ziemeļu vējam būs tendence novirzīties uz austr strumiem.

Uz dzelzceļiem, ja kustība notiek katrā virzienā pa atsevišķām sliedēm un dzelzceļa virziens apmēram pieturās pie meridiana, ir novērots, ka stiprāk tiek nolietotas labās sliedes. Arī šai parādībai pamatā ir Coriolisa paātrinājuma iespaids.

§ 8. CIETU ĶERMEŅU KUSTĪBU SALIKŠANA UN SADALĪŠANA

Līdz šim mēs apskatijām sistemu, sastāvošu no kustoša ķermeņa K_o nekustoša ķermeņa K_o un kustoša punkta A (kuŗš kustās uz ķermenī K)



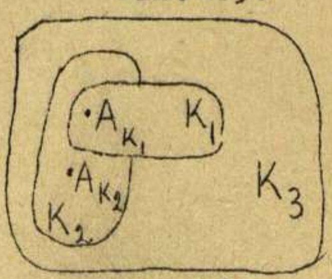
zīm.165.

Tālāk punkta A vietā apskatīsim veselu ķermeni, kuŗš atrodas kustībā pret ķermeni K un meklēsim šī ķermeņa kustību pret ķermeni K_o

Bet lai noteiktu ķermeņa kustību ir jānosaka 3 punktu, kuŗi neatrodas vienā taisnē, kustību, tā tad atkal nonākam pie punkta kustības noteikšanas, bet tālākas apzīmējumus mainīsim sekošā kārtā:

ja punkts pieder ķermenim K_1 apzīmēsim viņu ar A_{k_1}

" " " K_2 " " " A_{k_2}



zīm.166.

P-kta A_{k_1} ātrumu pret ķermeni K_2 apzīmēsim ar V_{12}

" A_{k_1} " " " K_3 " " V_{13}

" A_{k_2} " " " K_3 " " V_{23}

Ja punkta A_{k_1} kustība pret ķermeni K_3 būs atrasta un analogiskā ceļā vēl divu punktu kustība, tad arī visa ķermeņa K_1 kustība pret K_3 būs noteikta.

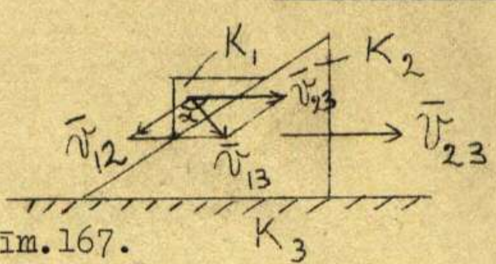
Divu virzes kustību salikšana.

Virzes kustībā, kā zinams, visiem punktiem ātrumi ir vienādi pēc lieluma un virziena, tā tad varam aprobežoties ar viena punkta kustības noteikšanu. Uz iepriekšējā pamata šim punktam varam uzrakstīt

$$\boxed{\bar{V}_{13} = \bar{V}_{12} + \bar{V}_{23}} \quad \text{......(56)}$$

absol. relat. pārnes.

Piemērs uz virzes kustību salikšanu.



zīm.167.

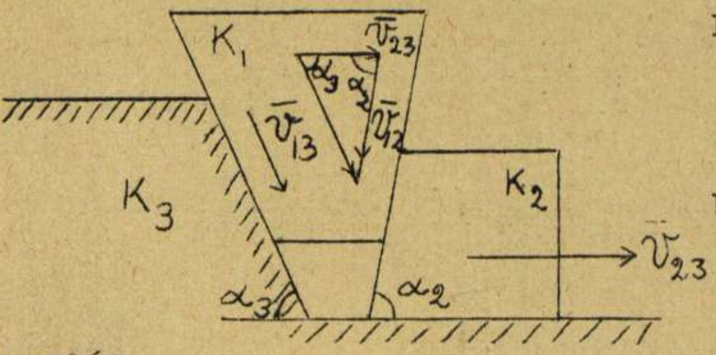
Ķermenis K_1 atrodas virzes kustībā pret slīpo plakni K_2 ar ātrumu $\bar{V}_{12}$. Ķermenis K_2 atrodas virzes kustībā pret K_3 ar ātrumu $\bar{V}_{23}$. Lai dabūtu $\bar{V}_{13}$ konstruējam $\bar{V}_{13} = \bar{V}_{12} + \bar{V}_{23}$ pie kam visiem ķermeņa K_1 punktiem šie ātrumi būs vienādi pēc lieluma un virziena, tā tad K_1 pret K_3 atradīsies virzes kustībā.

Ja vēl $\bar{V}_{12}$ un $\bar{V}_{23}$ savu lielumu nemainīs, virzes kustība būs taisnvirziena.

Bet ja $\bar{V}_{12}$ un $\bar{V}_{23}$ mainīs lielumu, virzes kustība būs līkumaina.

Algebraiski: $$\boxed{V_{13} = \sqrt{V_{12}^2 + V_{23}^2 + 2V_{12}V_{23}\cos\alpha}}$$

Piemērs uz virzes kustības sadalīšanu.



Doti: ķīļa K_1 ātrums pret nekustošu ķermeni K_3 : V_{13} leņķi $\angle\alpha_2$ un $\angle\alpha_3$

Uziet: ķermeņa K_2 ātrumu pret K_3 : V_{23} un ķīļa K_1 ātrumu pret ķermeni K_2 : V_{12}

zīm.168.

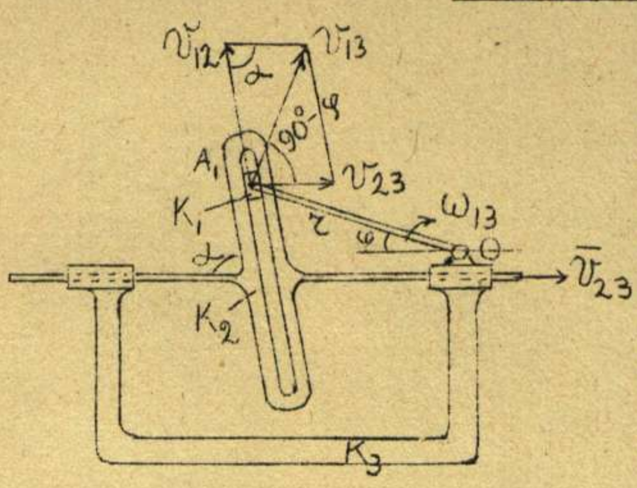
Atbildi uz uzstādītiem jautājumiem dabūsim sadalot $\bar{V}_{13}$ komponentēs (K_1K_2) un (K_2K_3) kustības virzienos, jo $\bar{V}_{13} = \bar{V}_{12} + \bar{V}_{23}$. Sadalīšana izdarīta zīm.168. un meklējamos ātrumus varam atrast pielietojot sinusu teorēmu iezīmētam trijstūrim

$$\frac{V_{12}}{Sn\alpha_3} = \frac{V_{23}}{Sn\,(180^\circ - \alpha_2 - \alpha_3)} = \frac{V_{13}}{Sn\alpha_2}$$

no kurienes

$$\boxed{V_{12} = \frac{Sn\alpha_3}{Sn\alpha_2}\cdot V_{13}} \quad \text{un} \quad \boxed{V_{23} = \frac{Sn(\alpha_2+\alpha_3)}{Sn\alpha_2}\cdot V_{13}}$$

Piemērs : Kulisses mēchanisms.



zīm.169.

Kulisses mēchanisms sastāv no pamata rāmja, attiecībā pret kuŗu var pārvietoties virzes kustībā kustošais rāmis. Kustošā rāmī var slīdēt kulisses akmenis.

Pie kulisses akmeņa piestiprināts ar šarniru stienis OA_1, kuŗam ir savs šarnirs punktā O. Saskaņā ar agrāko ievedīsim apzīmējumus:

Pamata rāmis ir ķermenis K_3
Kustošs rāmis " K_2
Kulisses akmenis " K_1

Doti: $OA_1 = r$; ω_{13} - ātrums, ar kuŗu OA_1 griežās ap šarniru un $\angle\alpha$

Uziet: uzrādītā stāvoklī noteiktu ar $\angle\varphi$ ātrumu V_{12} ar kuŗu pārvietojās akmenis pret kustošo rāmi; ātrumu V_{23} ar kuŗu pārvietojās kustošais rāmis pret nekustošo.

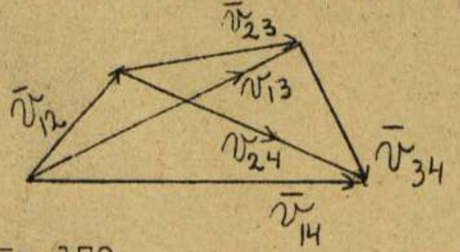
Ņemot vērā, ka punkts A_1 var pārvietoties tikai pa riņķi ar radiusu r viņa ātrums pret K_3 būs: $V_{13} = r\omega$

Vispārīgi sakars starp ātrumiem: $\bar{V}_{13} = \bar{V}_{12} + \bar{V}_{23}$ uzzīmēsim šo un

tad pēc sinusu teoremas: $$\frac{V_{13}}{Sn\,\alpha} = \frac{V_{12}}{Sn(90^\circ - \varphi)} = \frac{V_{23}}{Sn(90^\circ - \alpha + \varphi)}$$

no kurienes $$\boxed{V_{12} = \frac{Cos\,\varphi}{Sn\,\alpha}\cdot r\omega} \quad \text{un} \quad \boxed{V_{23} = \frac{Cos(\alpha - \varphi)}{Sn\,\alpha}\cdot r\omega}$$

Gadijums ar 4 un vairāk ķermeņiem,



zīm.170.

kuŗi atrodas virzes kustībā viens pret otru. Šādā gadijumā trijstūra jeb paralelograma vietā ātrums būs jāsaskaita ar poligona palīdzību, pie kam mēs varam neaprobežoties ar plakanu poligonu, bet varam viņu konstruēt arī telpā. Starp virzes ātrumiem pastāvēs tad sekošas attiecības:

$\bar{V}_{12} + \bar{V}_{23} + \bar{V}_{34} = \bar{V}_{14}$ | $\bar{V}_{12} + \bar{V}_{23} = \bar{V}_{13}$

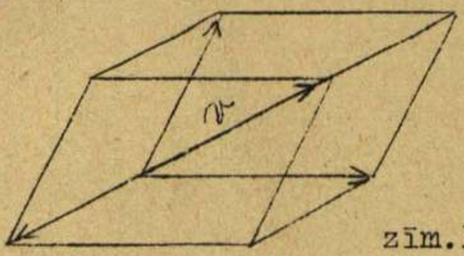
un arī vēl | $\bar{V}_{23} + \bar{V}_{34} = \bar{V}_{24}$

$\bar{V}_{12} + \bar{V}_{24} = \bar{V}_{14}$

$\bar{V}_{13} + \bar{V}_{34} = \bar{V}_{14}$

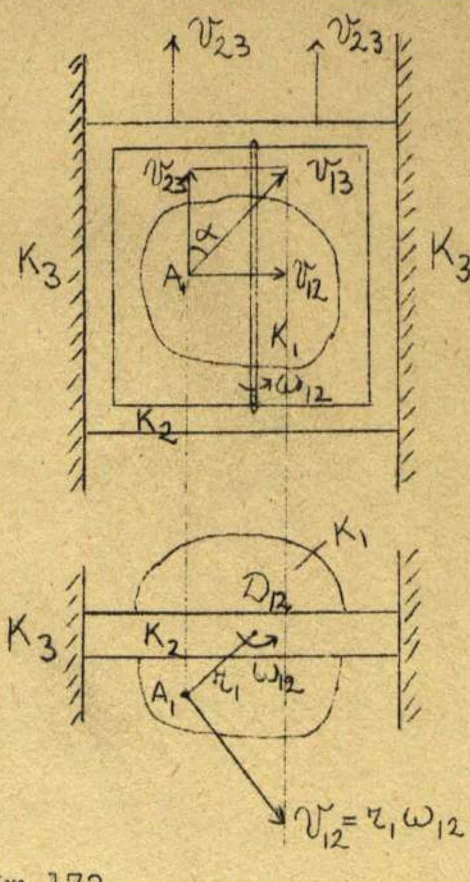
Virzes kustības sadalīšana telpā.

Šādam jautājumam vispārīgi ir bezgali daudzi atrisinājumi, tikai ja gribam sadalīt 3-os virzienos, kuŗi pie tam neguļ vienā plaknē, atrisinājums kļūst jau noteikts un komponentes būs paralelopipeda (viņam nav jābūt taisnstūrīgam) šķautnes, kuŗa diagonale ir $\bar{V}$.



zīm.171.

Griezes kustības salikšana ar virzes kustību paraleli griezes ass virzienam.



Šādu gadijumu var realizēt ar rāmi K_2, kuŗš atrodas virzes kustībā ar ātrumu V_{23} pret šachtu K_3 un kuŗā ap asi $D_{12} \parallel V_{23}$ griežās ķermenis K_1 ar griezes ātrumu ω_{12}

Izvēlot ķermenī K_1 punktu A_1, redzam, ka šim punktam ir divi ātrumi:

$V_{12} = r_1 \omega_{12}$ kuŗš piemīt griezes kustībai, un

V_{23} - kuŗš piemīt virzes kustībai.

Saskaitot abus ātrumus geometriski, dabūsim V_{13}, t.i. punkta ātrumu pret K_3

$\bar{V}_{13} = \bar{V}_{12} + \bar{V}_{23}$ jeb $V_{13} = \sqrt{V_{12}^2 + V_{23}^2}$

$$\boxed{V_{13} = \sqrt{V_{23}^2 + r_1^2\omega_{12}^2}} \quad ..(57)$$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{V_{12}}{V_{23}}$;

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{r_1\,\omega_{12}}{V_{23}}} \quad ..(58)$$

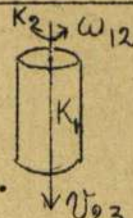
zīm.172.

Bet vispārīgi griezes kustība ap asi ar virzes kustību paraleli asij dod skrūves kustību. Šīs skrūves kustības elementi ir: griezes ātrums skrūves kustībā $\omega = \omega_{12}$

un slīdes ātrums $V_s = V_{23}$

Ja ω_{12} un V_{23} abi Const., mēs dabūsim vienkāršu skrūves kustību, jo pārējās 2 pamattrijstūra virsotnes varam paņemt uz ass D_{12}.

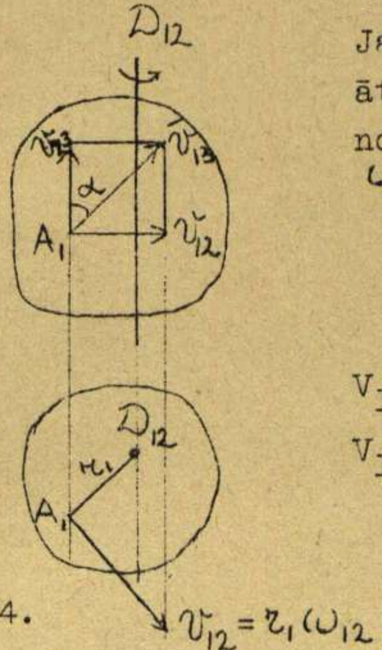
Bet ja V_{23} nebūs Const. jeb ω_{12} nebūs Const. – kustība būs <u>vispārīgā skrūves kustība</u>.



Zīm.173.

Piemērs: Šādu gadījumu varam realizēt, ja piem. kādu ķermeni, kuŗš atrodas vienmērīgā griezes kustībā laidīsim brīvi krist vacuumā, tad ω_{12} = Const., bet $V_{23} = gt$ nebūs Const., tā tad šāds ķermenis atradīsies vispārīgā skrūves kustībā.

Skrūves kustības sadalīšana griezes un virzes kustībās.



zīm.174.

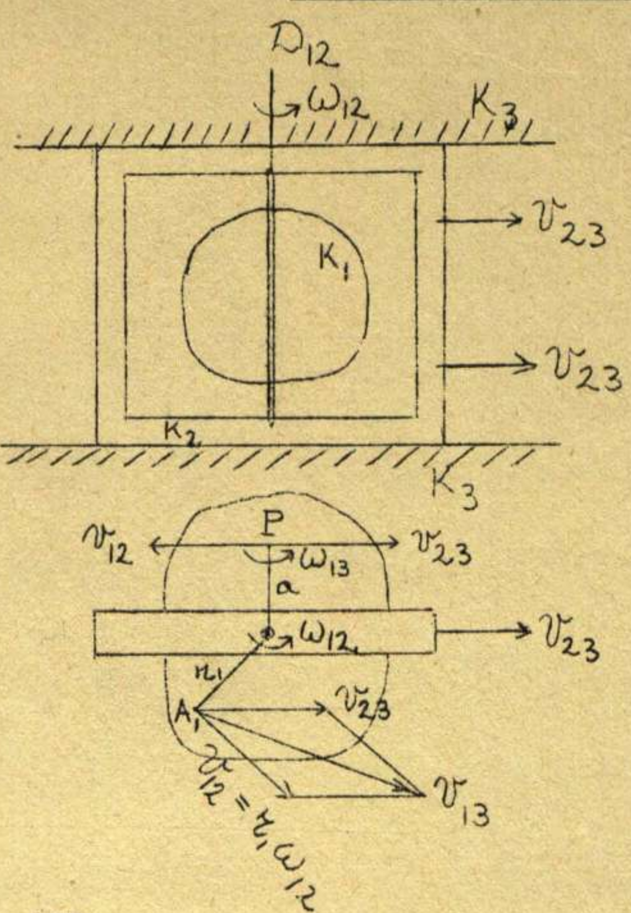
Ja ir zinams kāda ķermeņa K_1 punkta A_1 ātrums $\bar{V}_{13}$, viņa virziens $\angle\alpha$ un attālums r_1 no skrūves ass, var atrast griezes ātrumu ω_{12} un slīdes ātrumu V_{23}

$$\boxed{V_{23} = V_{13}\cos\alpha}$$

$$\left.\begin{array}{l} V_{12} = V_{13}\,\mathrm{Sn}\,\alpha \\ V_{12} = r_1\,\omega_{12} \end{array}\right\} \quad \omega_{12} = \frac{V_{12}}{r_1}$$

$$\boxed{\omega_{12} = \frac{V_{13}\,\mathrm{Sn}\,\alpha}{r_1}}$$

Griezes kustības salikšana ar virzes kustību, perpendikulāru pret griezes asi.



zīm.175.

Šādu gadījumu var realizēt ar rāmi K_2 kuŗā ap asi D_{12} griežās ķermenis K_1, pie kam pats rāmis atrodas virzes kustībā ar ātrumu $V_{23} \perp D_{12}$.

Izvēlēsim ķermenī K_1 kādu punktu A_1 attālumā r_1 no D_{12}, viņa relatīvais ātrums $V_{12} \perp r_1$ un $V_{12} = r_1\,\omega_{12}$

Bet punkts ņem dalību arī pārnesamā kustībā ar ātrumu V_{23}.

Tā tad punkta A_1 absolūtais ātrums būs:

$$\bar{V}_{13} = \bar{V}_{12} + \bar{V}_{23}$$

Meklēsim tagad tādu punktu P (kuŗš var atrasties kā ķermenī, tā arī ārpus tā), kuŗam $V_{13} = 0$

Šim punktam ātrumiem V_{12} un V_{23} jābūt vienādiem un jāiet pretējos virzienos.

Acimredzot meklējamais punkts atradīsies uz perpendikulāra, vilkta pret D_{12} un V_{23}, apzīmēsim viņa rediusu vektoru ar "a". Pēc noteikuma jābūt $V_{12} = V_{23}$, bet $V_{12} = a.\omega_{12}$, tā tad $a\omega_{12} = V_{23}$, no kurienes

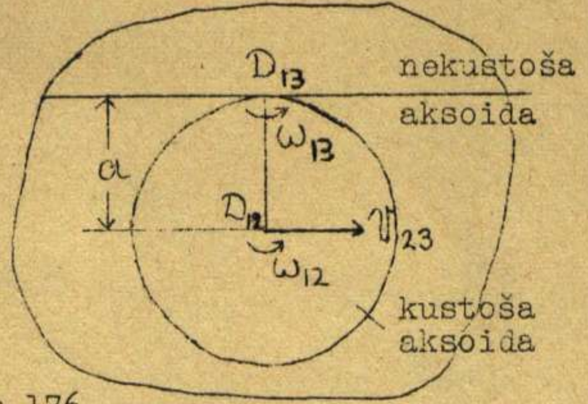
$$\boxed{a = \frac{V_{23}}{\omega_{12}}} \quad \text{.........(59)}$$

Ja mēs caur punktu P vilksim asi perpendikulāri zīmējumam, tad ķermenis ap šo asi atradīsies tīrā griezes kustībā. Uziesim šīs griezes kustības ātrumu ω_{13}

$$\omega_{13} = \frac{V_{23}}{a} = \frac{V_{23}\cdot\omega_{12}}{V_{23}} \; ; \quad \boxed{\bar{\omega}_{13} = \bar{\omega}_{12}} \quad \text{........(60)}$$

Kā redzams, griezes kustība ap kādu asi ar ātrumu ω_{12}, saskaitīta ar virzes kustību V_{23} perpendikulāru tai asij, dod vienu vien griezes kustību ar to pašu ātrumu, bet ap jaunu asi, kuŗa iet paraleli vecai, guļ plaknē, vilktai caur veco griezes asi perpendikulāri virzes kustībai un atrodās attālumā $a = \frac{V_{23}}{\omega_{12}}$ no vecās ass.

Kustības aksoidas apskatītā gadijumā.



zīm.176.

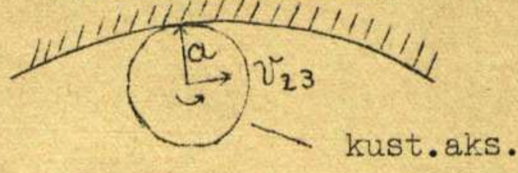
Visu augšā apskatīto parādību mēs varam attiecināt tikai uz momentu. Nākošā laika momentā griezes ass pāries citā vietā, bet paliks sev paralela. Noteiksim viņas ģeometrisko vietu attiecībā uz ķermeni K_3.

Ass D_{12} kustās uz priekšu virzes kustībā, tā tad arī D_{13} kustēsies uz priekšu pret K_3 virzes kustībā.

Tālāk varam atšķirt vairākus gadijumus:

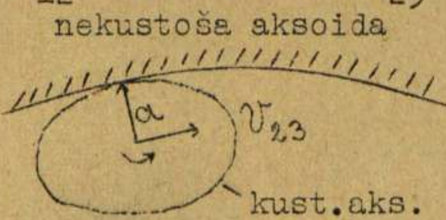
1) $\bar{\omega}_{12}$ = Const. un $\bar{V}_{23}$ = Const. (t.i. virzes kustība Const. pēc lieluma un virziena), tad $a = \frac{V_{23}}{\omega_{12}}$ = Const. un nekustoša aksoida būs plakne, bet kustoša – cilindrs, kuŗa pamats ir riņķis ar radiusu a.

2) $\bar{\omega}_{12}$ = Const. un V_{23} = Const. (virzes kustība Const. tikai pēc lieluma), tad V_{23} var mainīt virzienu un nekustoša aksoida nebūs vairs plakne, bet kaut kāda cilindriska virsma, pa kuŗu velsies kustoša aksoida, kuŗ būs riņķa cilindris, jo $a = \frac{V_{23}}{\omega_{12}}$ = Const.



zīm.177.

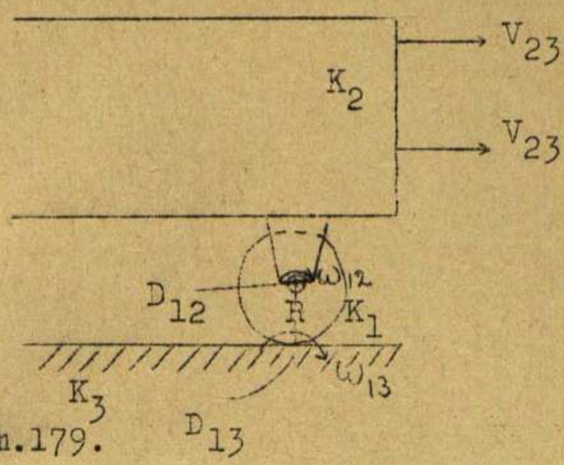
3) $\bar{\omega}_{12}$ = Const., bet V_{23} maina kā virzienu, tā arī lielumu. Nekustoša aksoida būs arī kāda cilindriska virsma un kustoša – cilindrs, kuŗa pamats būs kāda cita līka linija, jo a mainīs savu lielumu.



zīm.178.

<u>Piemērs:</u> Dots vagons, kuŗš kustās uz sliedēm ar ātrumu V_{23}. Vagonu apzīmēsim ar K_2. Uzbērumu, kuŗš nekustās, ar K_3 un riteni ar K_1, viņa radiusu : R.

Uziet: riteņa griezes ātrumu ap savu asi D_{12} un ap momentano asi D_{13}



zīm.179.

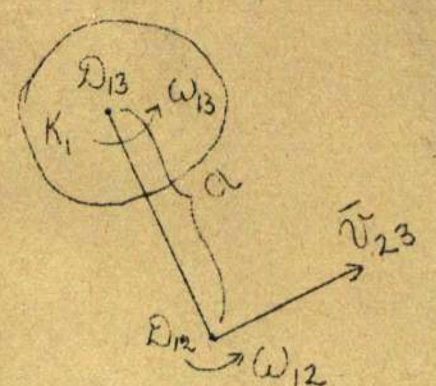
$$\omega_{12} = \omega_{13} = \frac{V_{23}}{R}$$ un abas griezes notiek pulksteņa rādītāja virzienā

<u>Griezes kustības pārnešana uz paralelo asi.</u>

Dota ass D_{13}, ap kuŗu ķermenis griežās ar ātrumu ω_{13}. Šo griezi jāpārnes uz citu asi $D_{12} \parallel D_{13}$ attālumā a.

Mēs pierādijām, ka grieze + virze perpendikulāri griezes asij dod tīro griezes kustību, tā tad, otrādi, tīro griezi varam sadalīt griezē ap citu asi, pieliekot klāt vēl virzes kustību.

No iepriekšējā varam teikt, ka



zīm.180.

$$\boxed{\bar{\omega}_{12} = \bar{\omega}_{13}} \quad \text{un} \quad \boxed{V_{23} = \omega_{13} \cdot a} \quad ..(61)$$

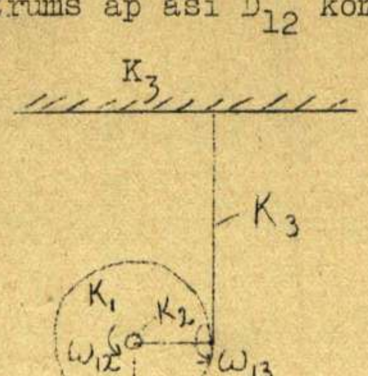
pie kam kustību V_{23} ir jāņem perpendikulāri "a", kuŗš savieno veco griezes asi ar jauno un tādā virzienā, lai punkta D_{13} lineārais ātrums ap asi D_{12} kompensējās ar V_{23}.

<u>Piemērs</u> uz griezes kustības pārnešanu.

Ripai, radiusā r, ir uztīts pavediens, kuŗa gals piesiets pie nekustoša ķermeņa K_3.

Ir zinams, momentanais griezes ātrums ap pieskares punktu ω_{13}, ja ripa tiek palaista vaļā.

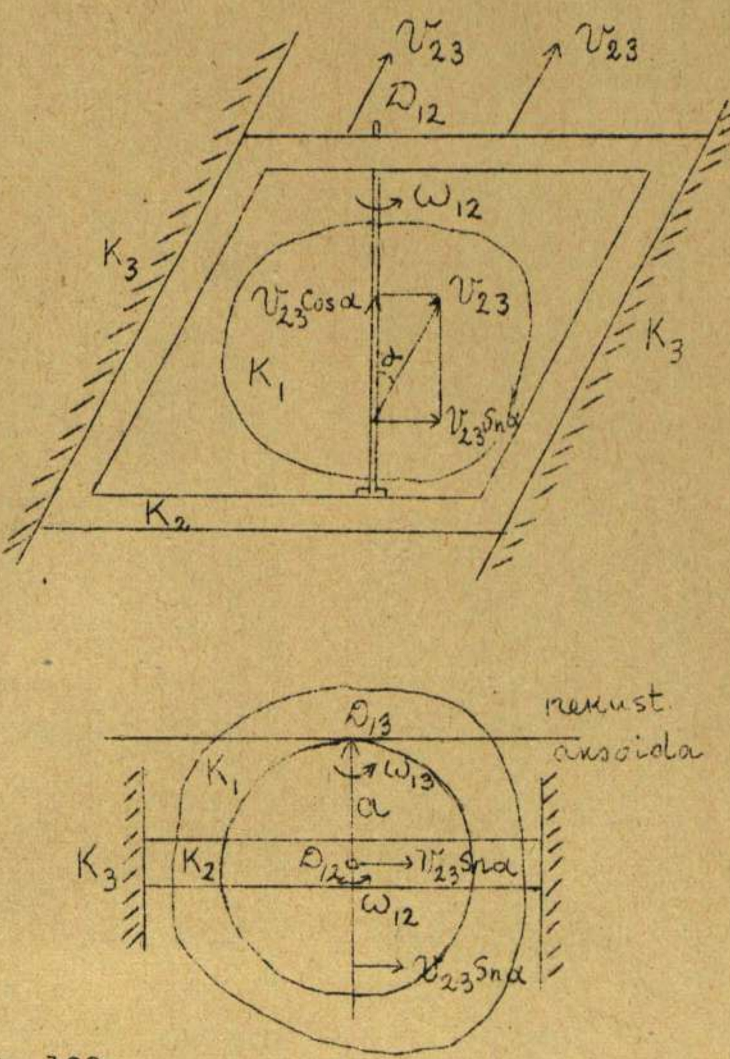
Uziet, ar kādu ātrumu V_{23} ripa ies uz leju un kāds būs viņas griezes ātrums ap savu asi ω_{12}



zīm.181.

$$\boxed{\bar{\omega}_{12} = \bar{\omega}_{13}} \quad \text{un} \quad \boxed{V_{23} = \omega_{13} \cdot r}$$

Griezes kustības salikšana ar virzes kustību slīpi pret griezes asi.



Zīm.182.

Mēchanisms, ar kuŗu šādu gadījumu varētu realizēt, pastāv no rāmja K_2, attiecībā pret kuŗu griežās ķermenis K_1, ap asi D_{12} ar ātrumu ω_{12}, pie kam pats rāmis atrodas virzes kustībā zem leņķa α pret asi D_{12} ar ātrumu V_{23}

Sadalam virzes kustību komponentēs virzienos D_{12} un perpendikulāri pret viņu:

$V_{23}\ \mathrm{Cos}\,\alpha$ un $V_{23}\ \mathrm{Sn}\,\alpha$

Pēc iepriekšējā gadījuma varam $V_{23}\ \mathrm{Sn}\,\alpha$ un ω_{12} saskaitīt, pie kam rezultātā mēs dabūsim tīro griezes kustību ap jauno asi D_{13} attālumā a no vecās un paraleli viņai.

Saskaitot šo griezes kustību ar pāri palikušo virzes kustības komponenti $V_{23}\ \mathrm{Cos}\,\alpha$, kuŗa tagad sakrīt ar griezes asi, dabūsim kā rezultējošo kustību <u>skrūves kustību</u>.

Noteiksim tagad skrūves kustības elementus un skrūves ass stāvokli:

Griezes ātrums: $\boxed{\bar{\omega}_{13} = \bar{\omega}_{12}}$ ......(62)

Slīdes ātrums: $\boxed{V_s = V_{13} = V_{23}\ \mathrm{Cos}\,\alpha}$ ...(63)

Skrūves ass būs paralela D_{12} un atradīsies attālumā "a" no viņas, pie kam

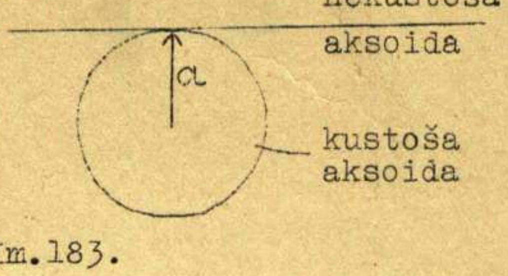
$$\boxed{a = \frac{V_{23}\ \mathrm{Sn}\,\alpha}{\omega_{12}}} \quad \text{........(64)}$$

Kustības aksoidas

Gadijumā, ja $\bar{\omega}_{12}$ = Const. un V_{23} = Const. tāpat kā iepriekšējā gadijumā nekustoša aksoida būs plakne un kustoša aksoida būs cilindrs ar radiusu

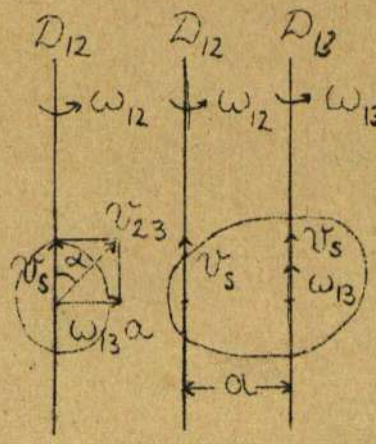
$a = \frac{V_{23}\ \mathrm{Sn}\,\alpha}{\omega_{12}}$, bet tagad cilindris netikai velsies pa plakni, bet arī slīdēs uz augšu paraleli savai asij ar ātrumu

$V_{23}\ \mathrm{Cos}\,\alpha$



zīm.183.

Skrūves kustības sadalīšana griezes kustībā ap jaunu asi D_{12} attālumā a un slīpu virzes kustību.



zīm.184.

Doti: V_s ; ω_{13} ; a . Uziet: V_{23} un $\angle\alpha$
Skrūves kustības slīdes ātrumu V_s varam pārnest uz jaunu asi D_{12} bez pārmaiņas.

Pārnesot skrūves kustības griezes ātrumu ω_{13} mums ir jāpieliek vēl perpendikulāri zīmējumam virzes kustību ar ātrumu $\omega_{13} \cdot a$, šo virzes kustību varam ģeometriski saskaitīt ar V_s ,pie kam rezultāts tad būs slīpa virzes kustība ar ātrumu V_{23}.

Lai saskaitīšana būtu labāk redzama (zīm.184) blakus pa kreisi uzzīmēta ass D_{12} otra projekcija.

Ņemsim formulas:

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{V_{23}\,\mathrm{Sn}\alpha}{\omega_{13}} \quad \ldots\ldots\ldots(64) \\ V_s &= V_{23}\,\mathrm{Cos}\alpha \quad \ldots\ldots\ldots(63) \end{aligned}\right\}$$

un pārrakstīsim viņas:

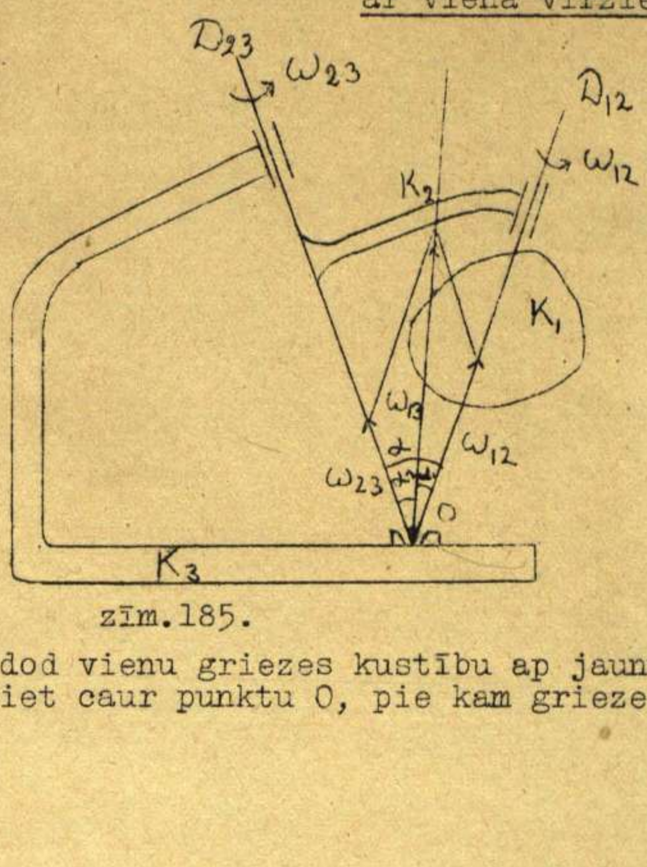
$$\left.\begin{aligned} V_{23}\,\mathrm{Sn}\alpha &= a\,\omega_{13} \\ V_{23}\,\mathrm{Cos}\alpha &= V_s \end{aligned}\right\}$$

tagad vienu reizi izdalīsim un otru reizi celsim kvadratā un saskaitīsim, tad

$$\boxed{\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a\,\omega_{13}}{V_s}} \quad \ldots\ldots(65)$$

$$\boxed{V_{23} = \sqrt{V_s^2 + a^2\omega_{13}^2}} \quad \ldots\ldots(66)$$

Griezes kustību salikšana ap krustojošām asīm ar viena virziena griezes ātrumiem.

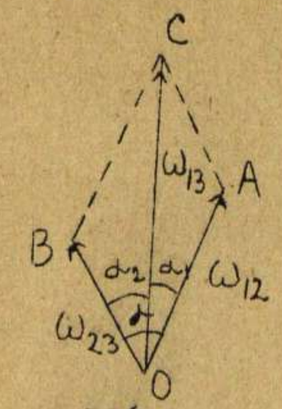


zīm.185.

Mēchanisms, ar kuŗu var realizēt kustību ap divām krustojošām asīm D_{12} un D_{23} ir parādīts zīm.185. Ķermenis K_1 griežās ap asi D_{12} ar ātrumu ω_{12} attiecībā pret K_2 un K_2 savukārt griežās ap asi D_{23} ar ātrumu ω_{23} pret pamatrāmi K_3. Apzīmēsim ar O abu asu krustošanās punktu.

Ja mēs ņemsim vērā, ka griezes ātrumi attēlojās ar vektoriem ω griezes ass virzienā un ka ar šādiem vektoriem varam izdarīt visas vektoranalizes operacijas, varam teikt, ka divas griezes kustības vienā virzienā ap krustojošā asīm dod vienu griezes kustību ap jaunu asi, kuŗa guļ tanī pašā plaknē un iet caur punktu O, pie kam grieze notiek tanī pašā virzienā un

$\bar{\omega}_{13} = \bar{\omega}_{12} + \bar{\omega}_{23}$ jeb analitiski rezultējošas griezes kustības



zīm.186.

ātrums: $\omega_{13} = \sqrt{\omega_{12}^2 + \omega_{23}^2 - 2\,\omega_1\omega_2 Cos(180^\circ - \alpha)}$

$$\boxed{\omega_{13} = \sqrt{\omega_{12}^2 + \omega_{23}^2 + 2\,\omega_1\omega_2 Cos\alpha}} \quad \ldots(67)$$

Meklēsim rezultējošas griezes kustības ass virzienu

no Δ-ra OAC $\frac{\omega_{12}}{Sn\alpha_2} = \frac{\omega_{23}}{Sn\alpha_1}$ jeb $Sn\alpha_2 = Sn\alpha_1 \cdot \frac{\omega_{12}}{\omega_{23}}$

$\alpha_2 = \alpha - \alpha_1$

$Sn\alpha_2 = Sn\alpha Cos\alpha_1 - Cos\alpha Sn\alpha_1$

ieliksim $Sn\alpha_2$

$Sn\alpha_1 \cdot \frac{\omega_{12}}{\omega_{23}} = Sn\alpha Cos\alpha_1 - Cos\alpha Sn\alpha_1$

izdalām ar $Cos\alpha_1$

$tg\alpha_1 (Cos\alpha + \frac{\omega_{12}}{\omega_{23}}) = Sn\alpha$

$$\boxed{tg\alpha_1 = \frac{Sn\,\alpha}{Cos\alpha + \frac{\omega_{12}}{\omega_{23}}}}$$

un pēc analogijas $\ldots(68)$

$$\boxed{tg\alpha_2 = \frac{Sn\,\alpha}{Cos\alpha + \frac{\omega_{23}}{\omega_{12}}}}$$

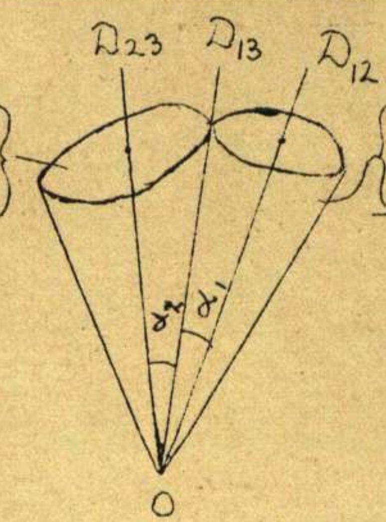
no Δ - ra OAC:

$$\frac{\omega_{13}}{Sn(180^\circ - \alpha)} = \frac{\omega_{12}}{Sn\alpha_2} = \frac{\omega_{23}}{Sn\alpha_1}$$

no kurienes

$$\boxed{Sn\alpha_1 = \frac{\omega_{23}}{\omega_{13}} \cdot Sn\,\alpha}$$
$$\boxed{Sn\alpha_2 = \frac{\omega_{12}}{\omega_{13}} \cdot Sn\,\alpha} \quad \ldots\ldots(69)$$

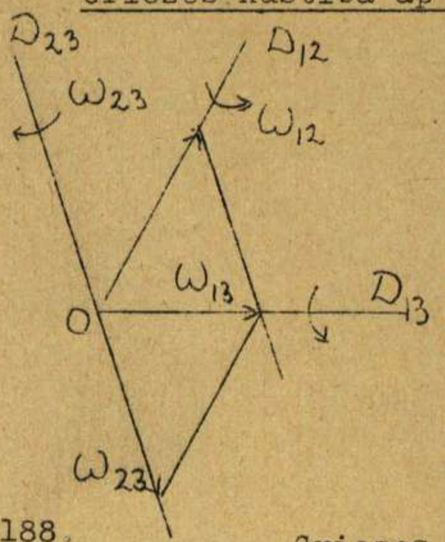
Aksoidas pie griezes kustības ap divām krustojošām asīm.



zīm.187.

Ja ω_{23} un ω_{12} ir Const un $\angle\alpha$ = Const., tad arī $\angle\alpha_1$ un $\angle\alpha_2$ būs Const., t.i. griezes ass apraksts divus smaiļus ar kopīgu virsotni punktā O vienu nekustošu pret K_3 ar $\angle\alpha_2$ pie virsotnes un otru kustošu pret K_3 ar $\angle\alpha_1$ pie virsotnes. Pie kustības minētie smaiļi velsies viens pa otru bez slīdēšanas

Griezes kustība ap krustojošām asīm pretējos virzienos.

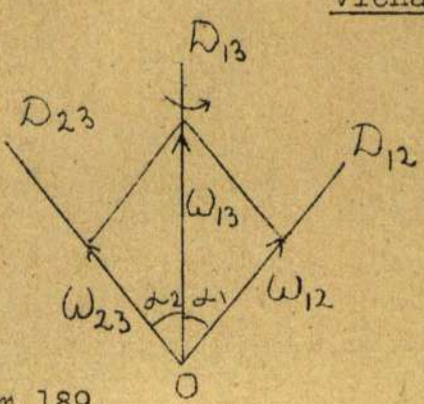


zīm.188.

Ja divas griezes ass D_{12} un D_{23} krustojās punktā O un griezes kustība ap vienu no viņām, piem. D_{23} notiek pretējā, t.i. pulksteņrādītāja virzienā, tad starpība būs tikai tā, ka ω_{23} vektoru jāatliek uz leju un jāņem ω_{13} kā geometrisku summu, t.i. paralelograma diagonali.

Jauna griezes ass D_{13} gulēs plaknē, kuŗa ieslēdz ass D_{23} un D_{12}, ies caur to pašu punktu O, bet gulēs ārpus asīm D_{23} un D_{12}

Griezes kustības sadalīšana uz divām asīm vienā plaknē un caur vienu punktu.



zīm.189.

Griezi ap asi D_{13} varam sadalīt divās griezes kustībās ap asīm, kuŗas guļ vienā plaknē ar D_{13} un iet ar viņu caur vienu punktu O.

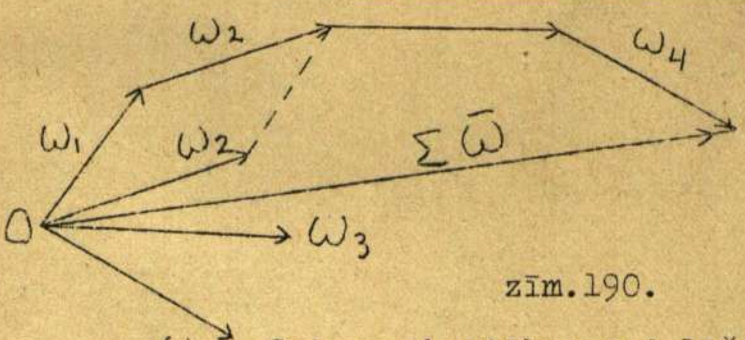
Doti: D_{13} ; ω_{13} ; $\angle\alpha_1$; $\angle\alpha_2$.

Uziet: ω_{12} ; ω_{23} No sinusu teorēmas

$$\frac{\omega_{12}}{Sn\,\alpha_2} = \frac{\omega_{13}}{Sn\,\alpha} = \frac{\omega_{23}}{Sn\,\alpha_1} ;$$

$$\omega_{23} = \omega_{13}\,\frac{Sn\,\alpha_2}{Sn\,\alpha} ; \quad \omega_{12} = \omega_{13} \cdot \frac{Sn\,\alpha_2}{Sn\,\alpha}$$

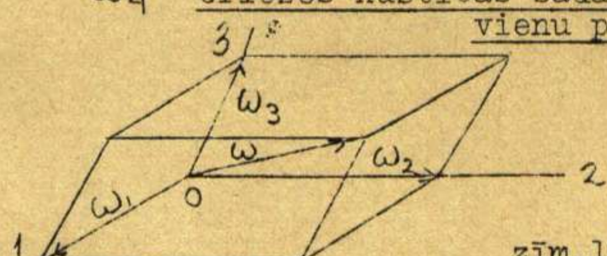
Vairāku griezes kustību saskaitīšana, ja visas griezes ass iet caur vienu punktu O.



Var izdarīt sastādot vektoru ω geometrisko summu, pie kam saprotams atsevišķiem vektoriem nav jāguļ vienā plaknē, t.i. poligons var būt konstruēts arī telpā

zīm.190.

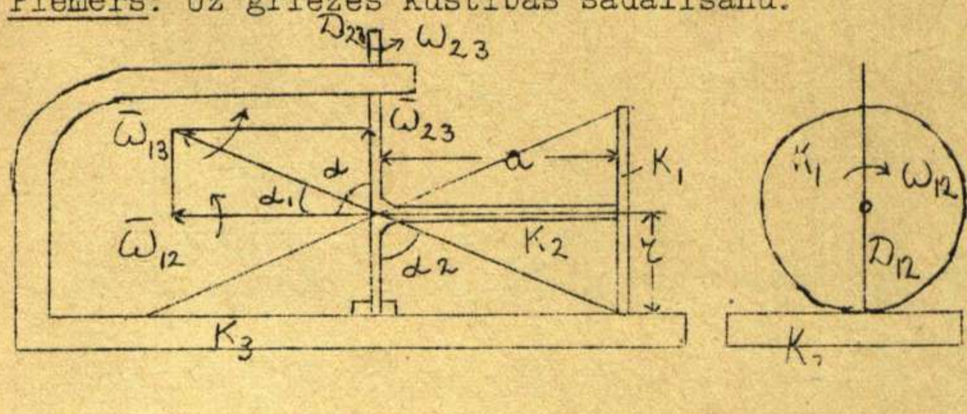
Griezes kustības sadalīšana uz trim asīm caur vienu punktu.



Jautājumam ir noteikts atrisinājums tikai tad, ja trīs griezes ass neguļ vienā plaknē

zīm.191.

Piemērs: Uz griezes kustības sadalīšanu.



Ap asi D_{23} attiecībā pret nekustīšu rāmi K_3 griežās K_2 ar ātrumu ω_{23}, pret pulksteņrādītāja virzienā. Ap asi D_{12} attiecībā pret K_2 var griezties ripa K_1 , zīm.192.

kuŗa pie ķermeņa K_2 kustības veļās pa pamatrāmi K_3 bez slīdēšanas.

Doti: ω_{23} ; pirksta garums: a un ripas radiuss: r

Uziet: 1)ripas griezes ātrumu ap savu asi ω_{12}

2)ripas griezes ātrumu pret K_3 ω_{13}

Ja grieze ap asi D_{23} notiek pret pulksteņrādītāju,tad ripa griežās ap pirkstu D_{12} pa pulksteņrādītāju. $\bar{\omega}_{23}$ vektors ies uz augšu un $\bar{\omega}_{12}$ uz kreiso pusi, bet viņu geometriskā summa $\bar{\omega}_{13} = \bar{\omega}_{12} + \bar{\omega}_{23}$ ies caur ripas K_1 pieskares punktu pie pamatrāmja K_3 ,jo šis punkts momentani atrodās mierā. Šis apstāklis dod iespēju uzzīmēt paralelogramu (šinī gadijumā taisnstūri), kuŗa diagonale būs $\bar{\omega}_{13}$.

$$\bar{\omega}_{13} = \bar{\omega}_{12} + \bar{\omega}_{23}$$

un analitiski:

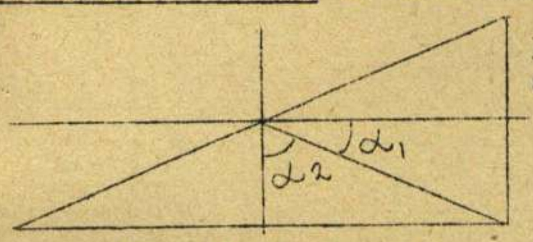
$$\omega_{13} = \sqrt{\omega_{12}^2 + \omega_{23}^2 + 2\,\omega_{12}\,\omega_{23}\cos\alpha}$$

bet šeit $\alpha = 90^\circ$, tā tad $\omega_{13} = \sqrt{\omega_{12}^2 + \omega_{23}^2}$

Tāļāk $\frac{\omega_{23}}{\omega_{12}} = \mathrm{tg}\,\alpha_1 = \frac{r}{a}$ un $\boxed{\omega_{12} = \omega_{23} \cdot \frac{a}{r}}$ ....(70)

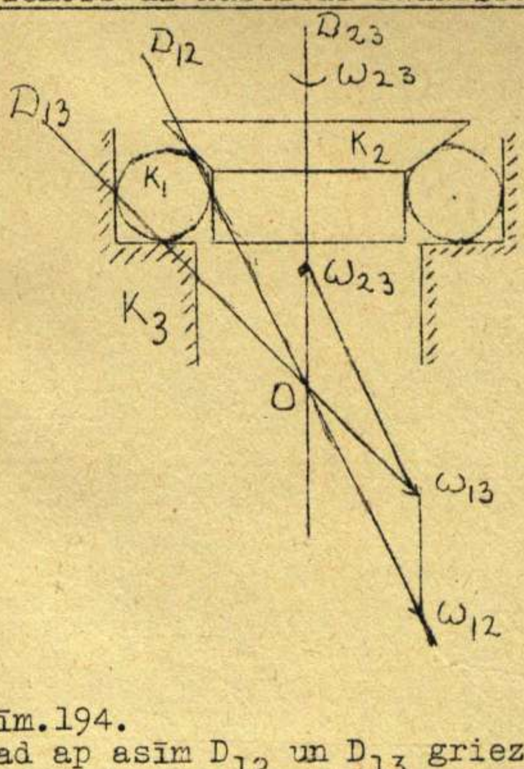
$$\boxed{\omega_{13} = \omega_{23}\sqrt{1 + \frac{a^2}{r^2}}} \quad ....(71)$$

Kustības aksoidas ir divi konusi, kuŗi veļās vien pa otru. Nekustošā pret rāmi K_3 ar $\angle\alpha_2$ pie virsotnes un kustošā pret rāmi K_3 ar $\angle\alpha_1$ pie virsotnes



zīm.193.

Piemērs uz kustības sadalīšanu: Bumbiņu gultnc.



Dots ω_{23} un visas dimenzijas.

Noteikt: ω_{13} un ω_{12}

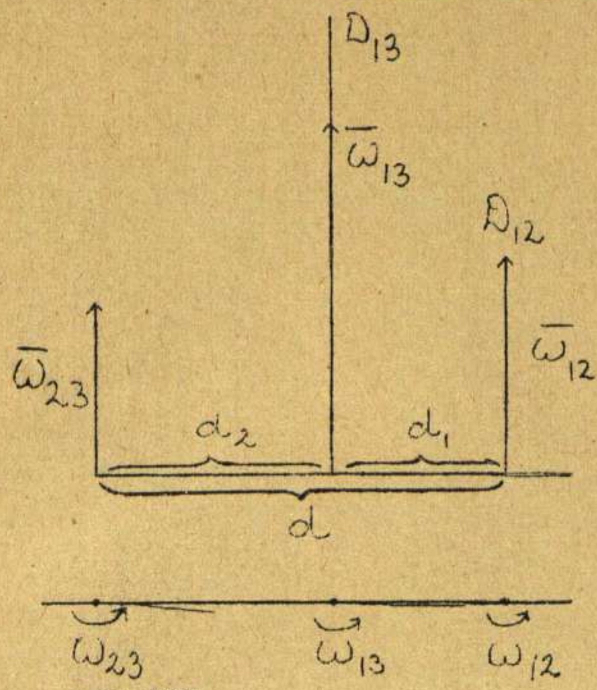
Bumbiņa pieskarās pie gultnes K_3 divos punktos. Vilksim caur šiem punktiem taisni. Bumbiņas divi punkti uz tās taisnes ir mierā, tā tad taisne būs ass D_{13} ap kuŗu bumbiņa griežās pret K_3.

Analogiski ķermenis K_2 pieskarās divos punktos pie bumbiņas K_1 un velkot caur šiem punktiem taisni, dabujam asi D_{12} ap kuŗu bumbiņa griežās pret K_2. Lai būtu tikai velšanās visām 3 asīm jākrustojās vienā punktā O, pie kam, ja ap asi D_{23} grieze notiek pret pulksteņrādītāju,

zīm.194.

tad ap asīm D_{12} un D_{13} grieze būs punlkstenrādītāja virzienā.- Konstruējot paralelogramu tā,lai ω_{13} būtu diagonale,atrodam ω_{13} un ω_{12} grafiski

Griezes kustību saliksana ap paralelām asīm ar viena virziena griezes ātrumu.



zīm.195.

Ja griezes ass ir paralelas, tad varam caur viņam vilkt plakni. Šinī plaknē atradīsies vektoru summa $\bar\omega_{12} + \bar\omega_{23} = \bar\omega_{13}$ kuŗa būs vektors paralels dotiem un tādēļ varam vektoru zīmes atmest $\omega_{13} = \omega_{12} + \omega_{23}$
Jaunā griezes ass D_{13} atradīsies starp dotām un būs noteikta ar

$$\left.\begin{aligned} &\boxed{d_1 = d\,\frac{\omega_{23}}{\omega_{12} + \omega_{23}}} \\ \text{un}\quad &\boxed{d_2 = d\,\frac{\omega_{12}}{\omega_{12} + \omega_{23}}} \end{aligned}\right\} \quad (72)$$

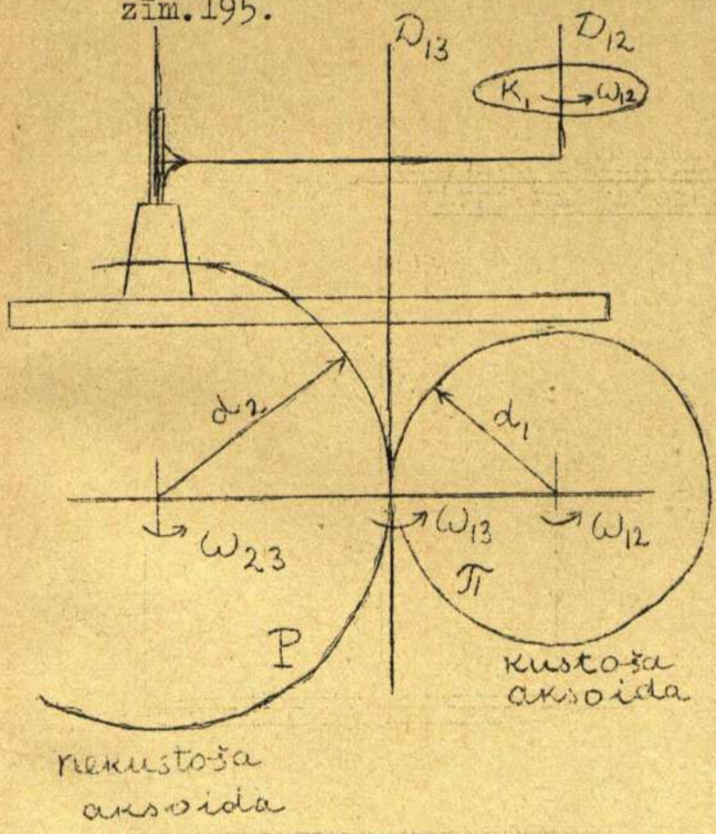
Mēchanisms minētās kustības realizēšanai un kustības aksoidas ir parādītas zīm.196.

Aksoidas ir cilindri ar radiusiem:

$$d_2 = d \cdot \frac{\omega_{12}}{\omega_{12} + \omega_{23}}$$

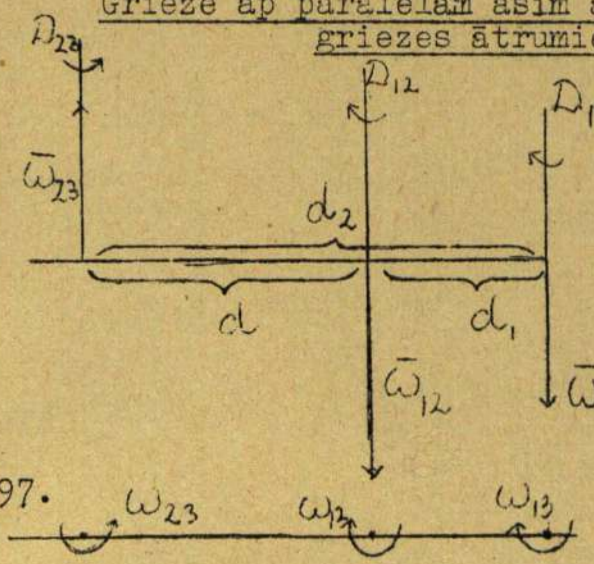
$$\text{un } d_1 = d \cdot \frac{\omega_{23}}{\omega_{12} + \omega_{23}}$$

no kuŗiem d_1 ir kustoša, kuŗa veļās pa nekustošu d_2



zīm.196.

Grieze ap paralelām asīm ar pretēja virziena griezes ātrumiem.



zīm.197.

Doti $\omega_{12} > \omega_{23}$ pretējos virzienos.

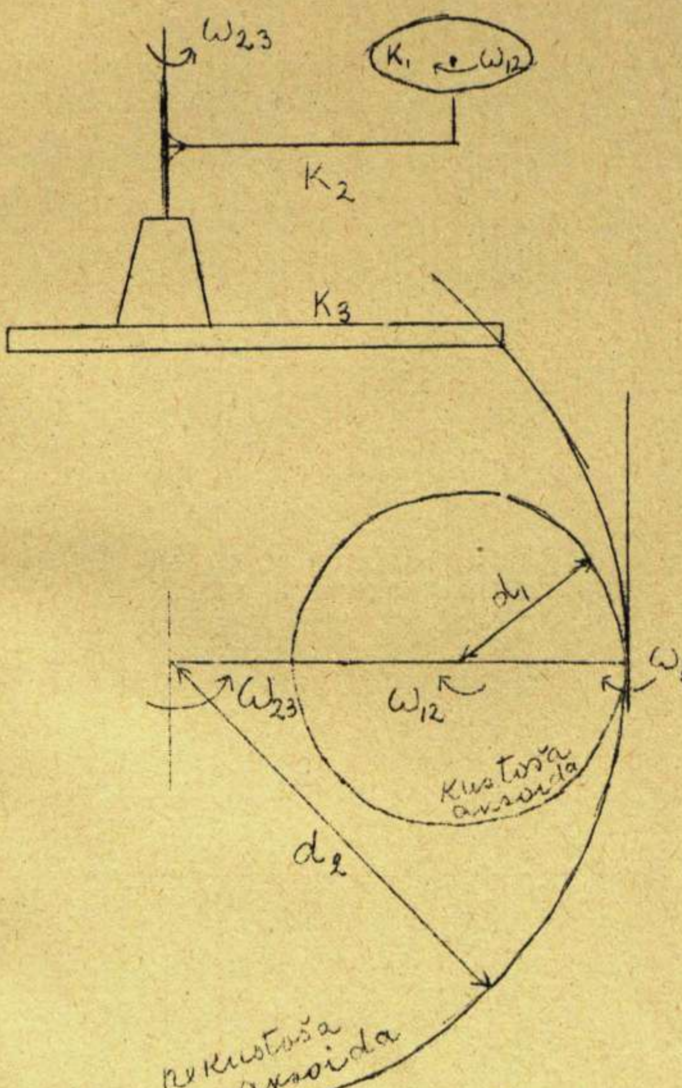
Summējot geometriski griezes ātrumus atrodam, ka $\omega_{13} = \omega_{12} - \omega_{23}$ un ir virzīts lielākā griezes ātruma virzienā.

Jaunā griezes ass guļ tanī pašā plaknē, kuŗa ieslēdz dotās asis, bet ārpus viņu un atrodās tanī pusē, kur ω ir lielāks

$$\left.\begin{aligned} & d_1 \cdot \omega_{13} = d \cdot \omega_{23}; \\ & \boxed{d_1 = d\,\frac{\omega_{23}}{\omega_{12} - \omega_{23}}} \\ & d_2 \cdot \omega_{13} = d \cdot \omega_{12}; \\ & \boxed{d_2 = d\,\frac{\omega_{12}}{\omega_{12} - \omega_{23}}} \end{aligned}\right\} \quad (73)$$

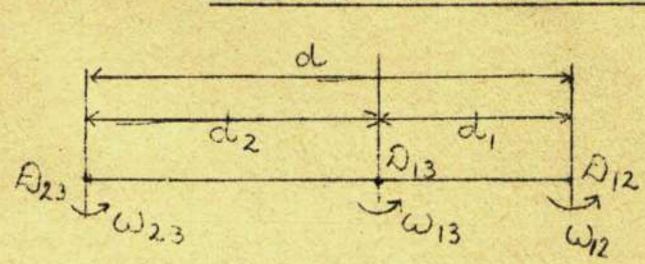
Mēchanisms, ar kuŗu šādu kustību var realizēt, ir tas pats, kas augšā un parādīts zīm.198.

Aksoidas arī būs divi cilindri, bet tagad tikai kustošā ar radiusu d_1 velsies iekšpus nekustošas ar radiusu d_2



zīm.198.

Griezes kustības sadalīšana ap paralelām asīm vienā plaknē.



zīm.199.

I.Gadijums: Vecā ass guļ starp jaunām.

Dots: ω_{13}, d_1 d_2 .Uziet ω_{12}; ω_{23}

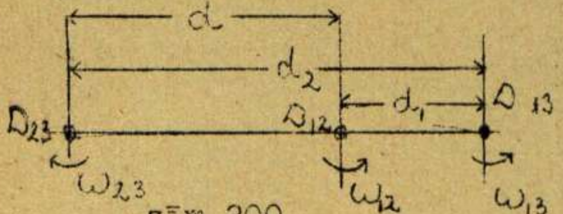
Divām asīm, ap kuŗām gribam sadalīt griezi jābūt vienā plaknē ar doto. Griešanas virzieni ap jaunām asīm, ja vecā atrodas strpā, sakrīt ar ω_{13} virzienu.

Meklējamie griezes ātrumi:

$$\left.\begin{array}{l}\boxed{\omega_{12} = \omega_{13}\,\dfrac{d_2}{d}} \\ \boxed{\omega_{23} = \omega_{13}\,\dfrac{d_1}{d}}\end{array}\right\}\ldots\ldots(74)$$

$$\omega_{12} + \omega_{23} = \omega_{13}$$

II.Gadijums: Vecā ass guļ ārpus jaunām.



zīm.200.

Dots: ω_{13} ; d_1 un d_2

Uziet: ω_{12} ; ω_{23}

$$\left.\begin{array}{l}\omega_{12}\cdot d = \omega_{13}\cdot d_2 \\ \boxed{\omega_{12} = \omega_{13}\,\dfrac{d_2}{d}} \\ \omega_{23}\cdot d = \omega_{13}\cdot d_1 \\ \boxed{\omega_{23} = \omega_{13}\,\dfrac{d_1}{d}}\end{array}\right\}\ldots\ldots(75)$$

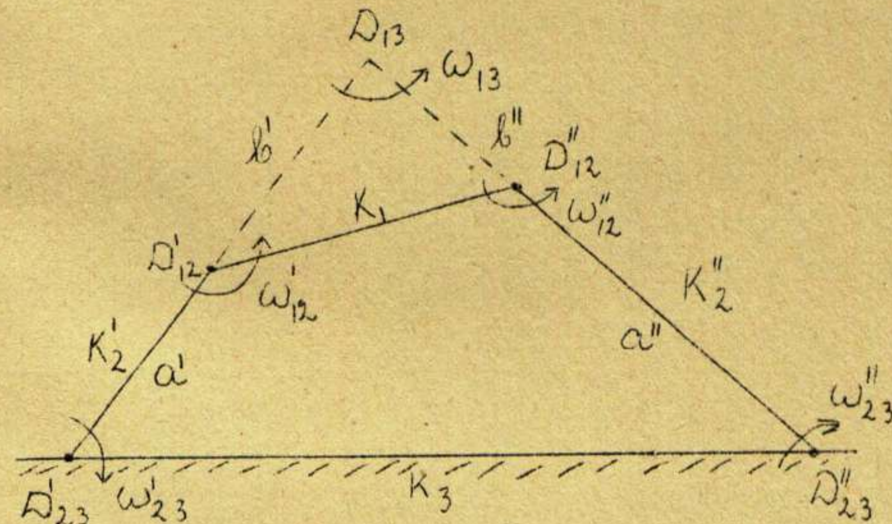
Formulas paliek tās pašas, tikai attiecībā uz virzieniem būs sekošs likums: tuvākas komponentes ω_{12} virziens sakrīt ar ω_{13} virzienu un otras komponentes ω_{23} virziens ir pretējs un $\omega_{12} - \omega_{23} = \omega_{13}$,pie kam $\omega_{12} > \omega_{13}$ (I.Piemēru skat. 86. l.p.)

II.Piemērs: Uz griezes kustības sadalīšanu ap paralelām asīm.

Šarniru četrstūris.

Dotas visas dimenzijas un ω'_{23} punktā D'_{23}

Uziet: griezes ātrumus punktos D'_{12}; D''_{12} un D''_{23}



zīm.203

Kā zināms no komplanas kustības ķermeņa K_1 momentanais griezes centrs atrodas četrstūra sānu malu k krustošanas punktā. Ar šo tad ir noteikts ass D_{13} stāvoklis, bez tam mēs zinam, ka: $\bar{\omega}_{13} = \bar{\omega}_{23} + \bar{\omega}_{12}$ .Tas nozīmē, ka ω_{13} jābūt sadalītam divās griezes kustībā ap D'_{23} un D'_{12} ,tā tad ω_{13} virziens būs pret ω'_{23} un ω'_{12} ies tanī pašā virzienā, kā ω_{13} .

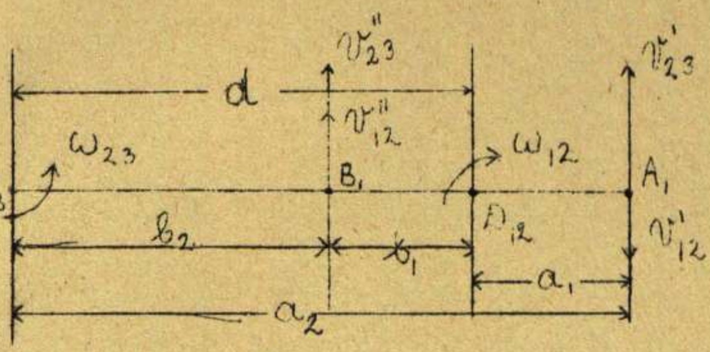
lielumu būs: $\boxed{\omega_{13} = \omega'_{23}\cdot\dfrac{a'}{b'}}$ $\boxed{\omega'_{12} = \omega'_{23}\,\dfrac{a' + b'}{b'}}$

Sadalot otrā pusē ω_{13} divās griezēs ap asīm D''_{12} D''_{23} dabūsim ω''_{12} tanī pašā virzienā, kā ω_{13} un ω''_{23} pretējā .

lielumi būs: $\omega''_{12} = \omega_{13} \cdot \frac{a'' + b''}{a''}$ jeb $\boxed{\omega''_{12} = \omega'_{23} \cdot \frac{a'(a'' + b'')}{b' \; a''}}$

$\omega''_{23} = \omega_{13} \frac{b''}{a''}$ jeb $\boxed{\omega''_{23} = \omega'_{23} \cdot \frac{a'b''}{b'a''}}$

Grieze ap paralelām asīm pretējot virzienos ar vienādiem ātrumiem $\omega_{12} = \omega_{23}$



zīm.204.

Dots:

$\begin{cases} \bar{\omega}_{23} = -\bar{\omega}_{12} \text{ geometriki, bet} \\ \omega_{23} = \omega_{12} \text{ algebraiski} \end{cases}$

$\omega_{13} = \omega_{12} - \omega_{23} = 0$

$d_1 = \frac{\omega_{23}}{\omega_{12} - \omega_{23}} d = \infty$

Attālums līdz rezultējošas griezes kustības asij iznāk ∞, bet grieze ap bezgali tālu asi ir virzes kustība. To pašu varam pierādīt arī citādi:

Ņemsim punktu A_1 piederošu ķermenim K_1 un uziesim viņa ātrumu

$\bar{V}'_{13} = \bar{V}'_{12} + \bar{V}'_{23}$; atmetot vektoru zīmes jāraksta $V'_{13} = V'_{23} - V'_{12}$

$V'_{13} = \omega_{23} \cdot a_2 - \omega_{12} \cdot a_1 = \omega_{12}(a_2 - a_1) = \omega_{12} \cdot d$

$$\boxed{V'_{13} = \omega_{12}\, d}$$

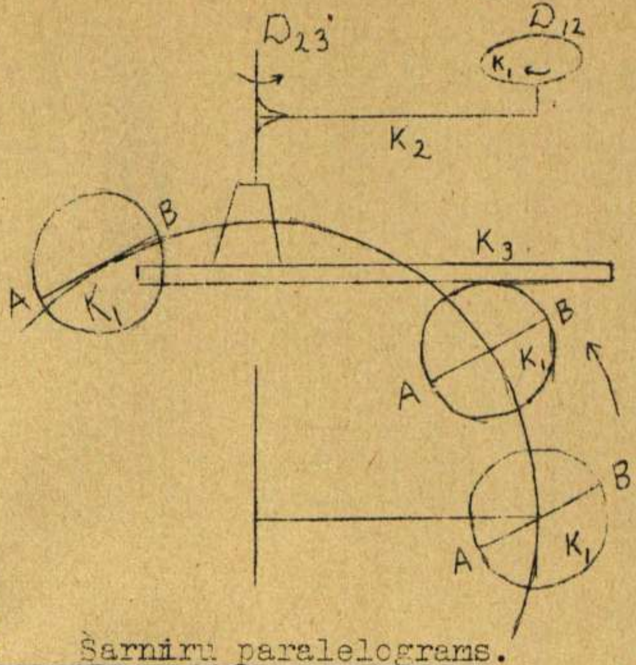
Ņemsim punktu B_1 starp asīm arī piederošu ķermenim K_1 un atkal uziesim viņa ātrumu: $\bar{V}''_{13} = \bar{V}''_{12} + \bar{V}''_{23}$ un atmetot vektoru zīmes

$V''_{13} = V''_{12} \pm V''_{23}$ bet $V''_{12} = \omega_{12} \cdot b_1$

un $V''_{23} = \omega_{23} \cdot b_2$;

$V''_{13} = \omega_{12} \cdot b_1 + \omega_{23} \cdot b_2 = \omega_{12}(b_1 + b_2) = \omega_{12}\, d$; $\boxed{v''_{13} = \omega_{12} \cdot d}$

tā tad visiem punktiem ātrumi ir vienādi, tas nozīmē, ka K_1 kustība pret K_3 ir virzes kustība. Virzes kustība ir perpendikulara plaknei, vilktai caur D_{12} D_{23}, pie kam notiek virzienā uz kuŗu rāda griezes virziena bultiņas iezīmētas iekšpusē.

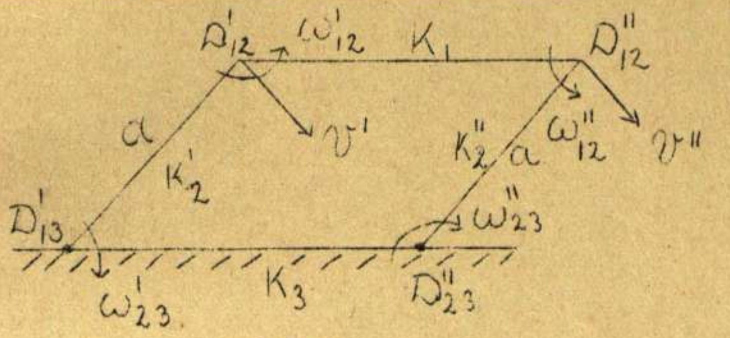


Mēchanisms, ar kuŗu var realizēt 2 griezes kustības ar vienādiem griezes ātrumiem pretējos virzienos parādīts zīm.203.

Ķermeņa K_1 rezultējoša kustība pret ķermeni K_3 būs līkumaina virzes kustība pa aplocēm, kuŗu centrs atrodās uz ass D_{23} . Bet virzes ātrums būs arvienu perpendikulaŗs pret plakni, kuŗā ieslēdz griezes asis.

zīm.205.

Piemērs: Šarnīru paralelograms.



zīm.206.

Dots: ω'_{23} un mala K_3 ir nekustoša.

Uziet malas K_1 kustību.

$\omega'_{12} = \omega'_{23}$ bet $\bar{\omega}'_{12} = -\bar{\omega}'_{23}$

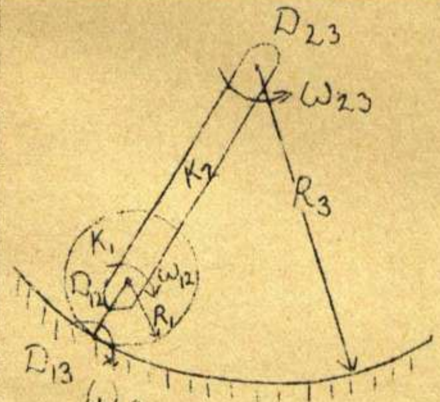
vispārīgi visi

$\omega'_{12} = \omega''_{12} = \omega'_{23} = \omega''_{23}$

$V' = V''$; $V' = \omega'_{23} \cdot a$

Ķermeņa K_1 kustība pret ķermeni K_3 ir līkumaina virzes kustība, pie kam momentanais ātrums V arvienu būs perpendikulārs a.

I. Piemērs: Uz griezes kustības sadalīšanu ap paralelām asīm.



zīm.201.

Dots riņķis radiusā R_3 pa kuŗu veļās bez slīdes riņķis K_1 ar radiusu R_1. Abi riņķu centri savienoti ar ķermeni K_2.

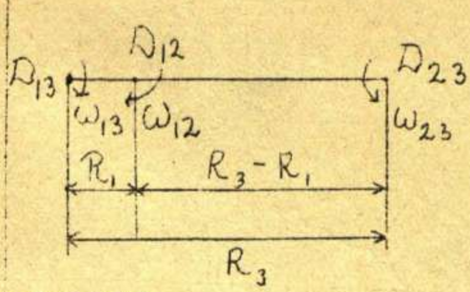
Dots: ω_{13} ; R_1 ; R_3.Uziet: ω_{12} ; ω_{23}

Uzzīmējot šemu (zīm.202) redzam, ka mums vienkārši griezes kustību ω_{13} jāsadala ap divām paralelām asīm D_{12} un D_{23} ,pie kam D_{13} atrodās ārpus D_{12} un D_{23},tā tad pēc formulām (75):

$$\boxed{\omega_{12} = \frac{R_3}{R_3 - R_1} \cdot \omega_{13}}$$ un ies tanī pašā virzienā

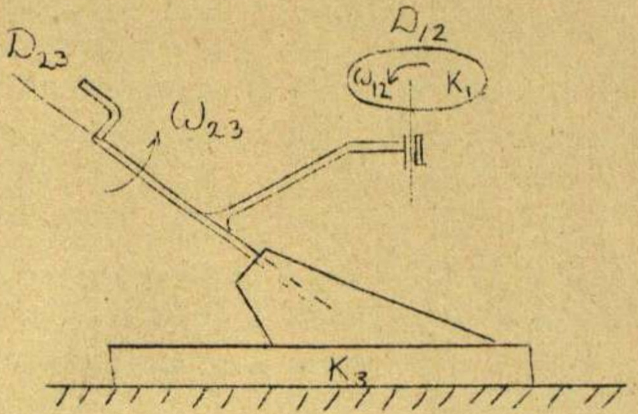
un $$\boxed{\omega_{23} = \frac{R_1}{R_3 - R_1} \cdot \omega_{13}}$$ un ies virzienā pretējā ar ω_{13}

Pie 84. lapas puses k. I. piemērs



zīm.202.

Divu griezes kustību salikšana ap šķērsojošām asīm.



zīm.207.

Mēchanisms, ar kuŗu var realizēt divas griezes kustības ap šķērsojošām asīm parādīts zīm.(207). Abas griezes ass D_{12} un D_{23} šeit neguļ vienā plaknē, bet ir sagrozītas viena pret otru.

Tālāk apskatīsim šo jautājumu šematiski.

Griezes kustības ap divām šķērsojošām asīm D_{12} un D_{23} ir dotas ar griezes ātrumu vektoriem $\bar{\omega}_{12}$ un $\bar{\omega}_{23}$.

Visīsākais attālums starp šīm asīm pieņemsim ir $AB = d$. Leņķis, kuŗu veido vektori $\bar{\omega}_{12}$ un $\bar{\omega}_{23}$ ir $\angle\alpha$

Pārnesīsim vienu no griezes kustībām, piem. $\bar{\omega}_{23}$ no ass D_{23} uz viņai paralelo asi punktā A. Apzīmēsim pārnestās griezes ātruma vektoru ar $\bar{\omega}'_{23}$,

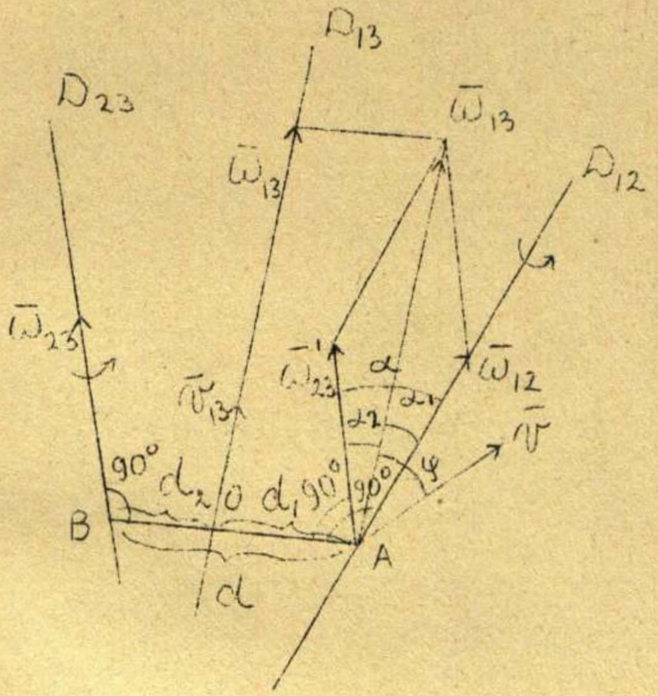
tad $\bar{\omega}'_{23} = \bar{\omega}_{23}$

Bet tādā gadijumā, kā zinams, ir jāpieliek vēl virzes kustību ar ātrumu $V = \omega_{23} \cdot d$

virzienā perpendikularā pret $\bar{\omega}_{23}$ un pret $\bar{d}$, pie kam apakšvirzienu virzes ātrumam $\bar{V}$ jāņem tādu, lai p-kta B lineārais ātrums no griezes $\bar{\omega}'_{23}$ kompensējās ar $\bar{V}$.

Pārnesto griezes kustību $\bar{\omega}'_{23}$ varam tagad geometriski saskaitīt ar $\bar{\omega}_{12}$ un iegūt $\bar{\omega}_{13} = \bar{\omega}_{12} + \bar{\omega}'_{23}$

bet ņemot vērā, ka $\bar{\omega}'_{23} = \bar{\omega}_{23}$ da-



zīm.208.

būsim arī $\bar{\omega}_{13} = \bar{\omega}_{12} + \bar{\omega}_{23}$

un analitiski $$\boxed{\omega_{13} = \sqrt{\omega_{12}^2 + \omega_{23}^2 + 2\,\omega_{12} \cdot \omega_{23} \cos\alpha}} \quad \ldots\ldots(76)$$

Apzīmējot leņķus, kuŗus veido vektors $\bar{\omega}_{13}$ ar vektoriem $\bar{\omega}_{12}$ un $\bar{\omega}_{23}$ ar α_1 un α_2 dabūsim šos leņķus no sinusa teoremas

$$\frac{\omega_{23}}{\mathrm{Sn}\,\alpha_1} = \frac{\omega_{12}}{\mathrm{Sn}\,\alpha_2} = \frac{\omega_{13}}{\mathrm{Sn}\,\alpha}$$ no kurienes

$$\boxed{\mathrm{Sn}\,\alpha_1 = \frac{\omega_{23}}{\omega_{13}}\,\mathrm{Sn}\,\alpha} \quad \text{un} \quad \boxed{\mathrm{Sn}\,\alpha_2 = \frac{\omega_{12}}{\omega_{13}}\,\mathrm{Sn}\,\alpha} \quad \ldots\ldots(77)$$

Vektors $\bar{V}$ iznāca perpendikulars d, bet arī $\bar{\omega}'_{23} \perp d$ un $\bar{\omega}_{12} \perp d$, tā tad visi trīs vektori $\bar{V}$, $\bar{\omega}_{12}$, $\bar{\omega}_{23}$ atrodās vienā plaknē un apzīmējot leņķi, kuŗu veido $\bar{\omega}_{13}$ un $\bar{V}$ ar φ dabūsim, ka $\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha_2$

Tādā kārtā mēs esam nonākuši pie vienas griezes kustības $\bar{\omega}_{13}$ un slīpas pret griezes asi virzes kustības $\bar{V}$.

Bet tāda kombinacija, kā zinams, nav nekas cits, kā viena vien skrūves kustība ar to pašu griezes ātrumu ω_{13} un slīdes ātrumu $V_S = V \cos\varphi$ kur φ ir leņķis ($\bar{\omega}_{13}$ $\bar{V}$). Skrūves ass ir paralela $\bar{\omega}_{13}$ un atrodās attālumā $x = \dfrac{V \operatorname{Sn}\varphi}{\omega_{13}}$

Lai dabūtu punktu O, caur kuŗu ies minētā skrūves ass, ir jāvelk perpendikularu pret plakni, kuŗa ieslēdz $\bar{V}$ un $\bar{\omega}_{13}$ un uz perpendikulara jāatliek no punkta A nogriezni AO = x. Bet šis perpendikulars ir "d", tā tad punkts O atradīsies uz d attālumā x no punkta A. Attālumu x tālāk apzīmēsim ar d_1, tad $d_1 = \dfrac{V \operatorname{Sn}\varphi}{\omega_{13}}$

Pārveidosim dabūtās formulas:

$$V_S = V \cos\varphi \quad ,\text{bet} \quad \begin{cases} \varphi = 90^0 - \alpha_2 & \text{un} \\ V = \omega_{23} \cdot d \end{cases}$$

$$\text{tā tad } V_S = \omega_{23}\, d \cdot \operatorname{Sn}\alpha_2$$

No sinusu teoremas $\dfrac{\omega_{12}}{\operatorname{Sn}\alpha_2} = \dfrac{\omega_{13}}{\operatorname{Sn}\alpha}$ atrodam $\operatorname{Sn}\alpha_2 = \operatorname{Sn}\alpha \cdot \dfrac{\omega_{12}}{\omega_{13}}$

$$V_S = \frac{\omega_{23} \cdot d \cdot \operatorname{Sn}\alpha \cdot \omega_{12}}{\omega_{13}} \quad \text{jeb} \quad \boxed{V_S = \frac{\omega_{12} \cdot \omega_{23} \cdot \operatorname{Sn}\alpha \cdot d}{\omega_{13}}} \quad \ldots.(78)$$

Šis slīdes ātrums iet D_{13} virzienā, tā tad varam apzīmēt viņu ar V_{13}

$$\boxed{V_{13} = \frac{\omega_{12} \cdot \omega_{23} \cdot \operatorname{Sn}\alpha \cdot d}{\omega_{13}}} \quad \ldots\ldots.(78)$$

Tagad noteiksim vēl d_1

$$d_1 = \frac{V \operatorname{Sn}\varphi}{\omega_{13}} = \frac{\omega_{23} \cdot d \cdot \operatorname{Sn}(90^0 - \alpha_2)}{\omega_{13}} = \frac{\omega_{23}\, d \cdot \cos\alpha_2}{\omega_{13}}$$

$$d_1 = \frac{\omega_{23}}{\omega_{13}}\, d \sqrt{1 - \operatorname{Sn}^2\alpha_2} = \frac{\omega_{23}}{\omega_{13}} \cdot d \sqrt{1 - \operatorname{Sn}^2\alpha \frac{\omega_{12}^2}{\omega_{13}^2}} =$$

$$= \frac{\omega_{23} \cdot d \sqrt{\omega_{13}^2 - \operatorname{Sn}^2\alpha\, \omega_{12}^2}}{\omega_{13}^2} = \frac{\omega_{23} \cdot d \sqrt{\omega_{12}^2 + \omega_{23}^2 + 2\omega_{12}\omega_{23}\cos\alpha - \operatorname{Sn}^2\alpha\, \omega_{12}^2}}{\omega_{13}^2}$$

$$d_1 = \frac{\omega_{23}\, d \sqrt{\omega_{12}^2(1 - \operatorname{Sn}^2\alpha) + \omega_{23}^2 + 2\omega_{12}\,\omega_{23}\cos\alpha}}{\omega_{13}^2}$$

$$d_1 = \frac{\omega_{23} \cdot d \sqrt{\omega_{12}^2 \cos^2\alpha + \omega_{23}^2 + 2\omega_{12}\,\omega_{23}\cos\alpha}}{\omega_{13}^2}$$

$$\boxed{d_1 = \frac{\omega_{23}(\omega_{23} + \omega_{12}\cos\alpha)}{\omega_{13}^2} \cdot d} \quad \text{pēc analog. arī} \quad \boxed{d_2 = \frac{\omega_{12}(\omega_{12} + \omega_{23}\cos\alpha)}{\omega_{13}^2}} \quad ..(79)$$

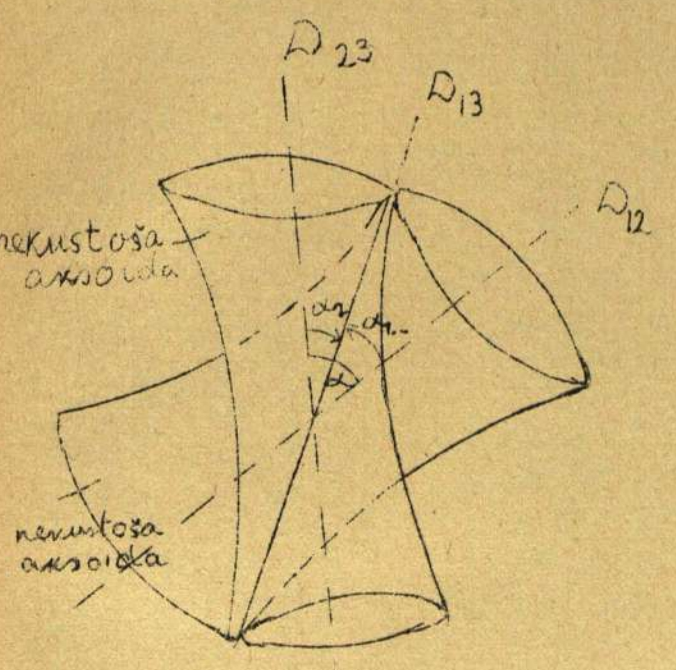
Jaunā skrūves ass D_{13} veido ar vecām griezes asīm D_{12} un D_{23} leņķus α_1 un α_2, kuŗi ir noteikti ar jau agrāk atrastām formulām

$$\left.\begin{array}{|l|}\hline Sn\,\alpha_1 = \dfrac{\omega_{23}}{\omega_{13}}\,Sn\,\alpha \\ \hline Sn\,\alpha_2 = \dfrac{\omega_{12}}{\omega_{13}}\,Sn\,\alpha \\ \hline \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots(77)$$

Aksoidas, Skrūves asij D_{13}, kuŗas stāvokļa noteikšana bija augšā aprakstīta ir tikai momentana nozīme, jo pie griezes ap asi D_{23} pate ass D_{12} un līdz ar viņu arī vektors $\overline{\omega}_{12}$ maina savu stāvokli telpā. Nākošā momentā skrūves ass D_{13} atradīsies citā vietā. Skrūves ass D_{13} ģeometrisko vietu attiecībā uz nekustošu ķermeni K_3 mēs sauksim par nekustošu aksoidu.

Tās pašas ass ģeometrisko vietu attiecībā uz kustošu ķermeni K_1 sauksim par kustošu aksoidu. Šinī gadijumā aksoidas būs vientelpu hiperboloidi ar asīm D_{23} un D_{12}, no kuriem kustoša aksoida veļās pa nekustošo un slīd gar viņu ar ātrumu V_S.

Linija, pa kuŗu abi hiperboloidi pieskarās ir momentana skrūves ass D_{13}.

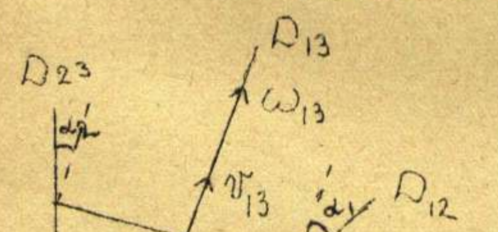


zīm.209.

Skrūves kustības sadalīšana divās griezes kustībās telpā.

Pieņemsim, ka ir dota skrūves kustība ar griezes ātrumu $\overline{\omega}_{13}$ un slīdes ātrumu $\overline{v}_{13}$ un skrūves ass ir D_{13}, kuŗu jāsadala divās griezes kustībās. Bet šāda sadalīšana ir iespējama bezgalīgi daudzās kombinacijās, tikai jaunām griezes asīm D_{12} un D_{23} jābūt perpendikulārām kādai taisnei d, kuŗa savukārt ir perpendikulara skrūves asij D_{13}.

Katras ass stāvoklis būs noteikts ar attālumu no skrūves ass un ar leņķi, tā tad vispārīgi būs četri elementi, kuŗi nosaka jauno asu stāvokļus



zīm.210.

$$d_1 \quad d_2 \quad \alpha_1 \quad \alpha_2$$

Bet šie četri elementi ir saistīti ar diviem nol-miem, kuŗus dabūsim, izdalot d_1 uz V_{13} (pie kam jāņem viņus nepārveidotā formā)

$$\left.\begin{array}{l} d_1 = \dfrac{V\,Cos\,\varphi}{\omega_{13}} = \dfrac{V\,Cos\,\alpha_2}{\omega_{13}} \\ \\ V_{13} = V\,Cos\,\varphi = V\,Sn\,\alpha_2 \end{array}\right\} \text{izdalot dabujam} \quad \frac{d_1}{V_{13}} = \frac{V\,Cos\,\alpha_2}{\omega_{13}\,V\,Sn\,\alpha_2}$$

jeb $\boxed{d_1 = \frac{V_{13}}{\omega_{13}} Ctg\alpha_2}$ un pēc analogijas $\boxed{d_2 \frac{V_{13}}{\omega_{13}} Ctg\alpha_1}$ .....(80)

Ja starp 4 elementiem pastāv divi nol-mi, tad divus mēs no viņiem varam vēlēt brīvi un proti:

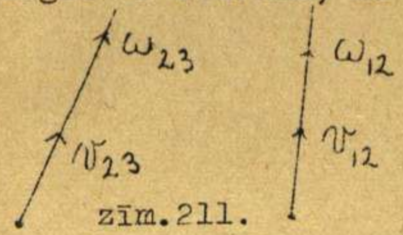
1) d_1 un d_2 t.i. abu asu attālumus
jeb 2) α_1 un α_2 t.i. abu asu virzienus
jeb 3) d_1 un α_1 t.i. vienas ass attālumu un virzienu
jeb 4) d_2 un α_2 t.i. otras " " " "

d_1 un α_2 kā arī d_2 un α_1 mēs brīvi vēlēt nevaram, jo starp viņiem ir noteikts sakars, izteikts ar formulām (80).

Ja viena no griezes asīm, uz kuŗām gribam sadalīt skrūves kustību būs izvēlēta, t.i. būs izvēlēti d_1 un α_1, tad otrā griezes ass būs pilnīgi noteikta un tādas griezes ass sauc par <u>saistītām</u> griezes asīm.

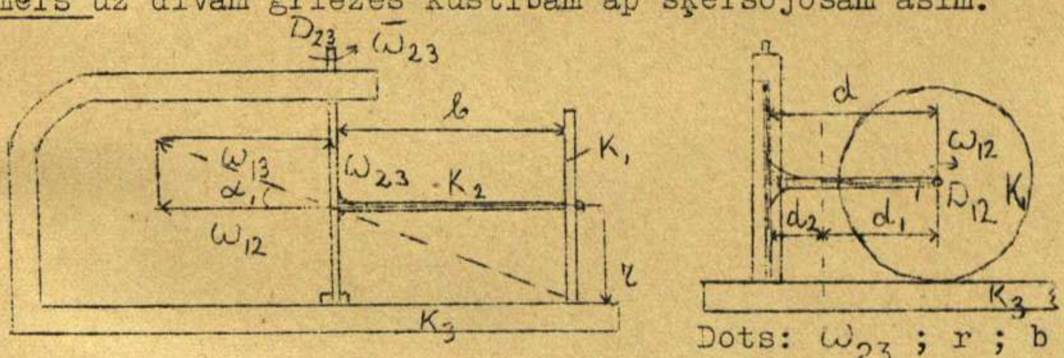
<u>Skrūves kustību saskaitīšana.</u>

Viegli ... redzams, ka saskaitot divas jeb vairākas skrūves kustības ap kaut kādām asīm mēs dabūsim arī tikai vienu skrūves kustību, jo saskaitot ω_{12} un ω_{23} mēs dabūsim vispārīgi skrūves kustību. Saskaitot atsevišķi V_{12} ar V_{23} dabūsim virzes kustību, kuŗa ar atrasto skrūves kustību dos arī tikai skrūves kustību, bet ap citu asi.



zīm.211.

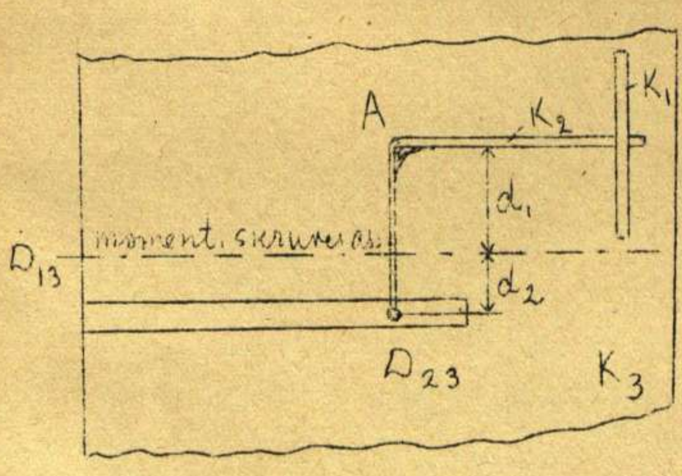
<u>Piemērs</u> uz divām griezes kustībām ap šķērsojošām asīm.



Mēchanisms ir skaidri redzams 3 projekcijās zīm.(212)

Dots: ω_{23} ; r ; b ; d

Uziet: ω_{12} ; un skrūves kustības elementus ω_{13} ; V_s ; d_1



zīm.212.

Ja ķermeni K_2 griezīsim pret K_3 ap asi D_{23} pret pulksteņrādītāju, tad ķermenis K_1 griezīsies ap asi D_{12} pa pulksteņrādītāju. Bet abas šīs ass šķērsojās zem $\angle\alpha = 90^o$, tā tad K_1 atradīsies pret K_3 skrūves kustībā. Meklēsim šīs skrūves kustības elementus. Lai atrastu ω_{13} pārnesam griezi ω_{23} uz punktu A, tad

$$\frac{\omega_{23}}{\omega_{12}} = tg\alpha_1 = \frac{r}{b} \text{ no kurienes } \boxed{\omega_{12} = \frac{b}{r}\omega_{23}} \quad (80)$$

bet $\bar{\omega}_{13} = \bar{\omega}_{12} + \bar{\omega}_{23}$ analitiski šinī gad. $\omega_{13} = \sqrt{\omega_{12}^2 + \omega_{23}^2}$;

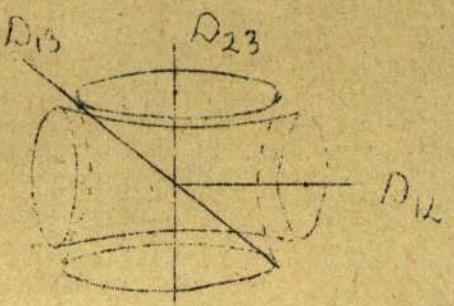
$$\boxed{\omega_{13} = \omega_{23} \cdot \frac{\sqrt{b^2 + r^2}}{r}} \quad \ldots\ldots(81)$$

$$V_{13} = V_S = \frac{\omega_{12}\,\omega_{23}\,\mathrm{Sn}\,\alpha\, d}{\omega_{13}} = \frac{b\,\omega_{23}^2\,\mathrm{Sn}\,90^\circ . d . r}{r . \omega_{23}\sqrt{b^2 + r^2}} \; ; \quad \boxed{V_S = \frac{b\, d\, \omega_{23}}{\sqrt{b^2 + r^2}}} \quad ..(82)$$

$$d_1 = \frac{\omega_{23}(\omega_{23} + \omega_{12}\mathrm{Cos}\,\alpha)}{\omega_{13}^2} . d = \frac{\omega_{23}(\omega_{23} + \omega_{12} . \mathrm{Cos}\,90^\circ)}{\omega_{13}^2} . d = \frac{\omega_{23}^2}{\omega_{13}^2} . d$$

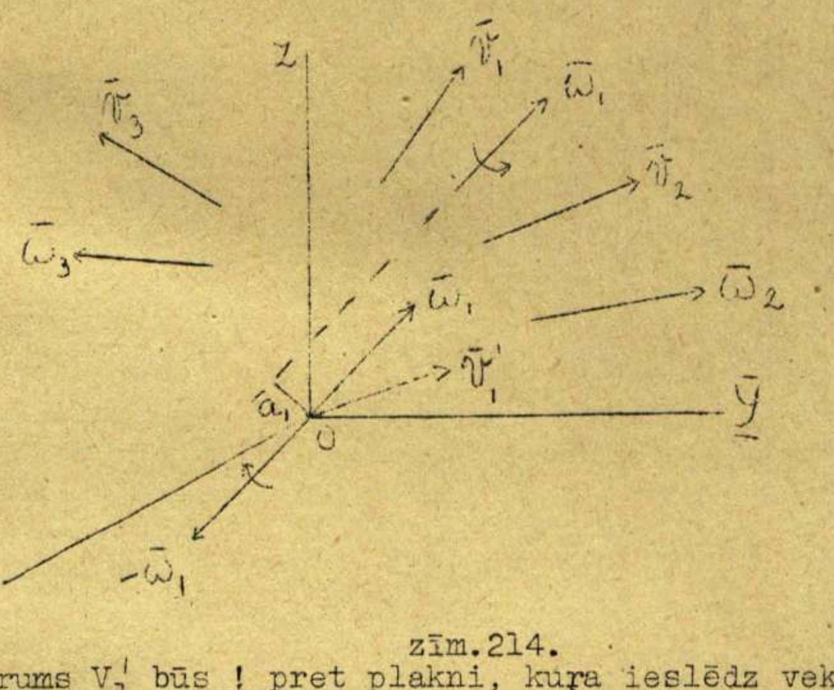
$$d_1 = \frac{\omega_{23}^2 . r^2}{\omega_{23}^2 (b^2 + r^2)} . d \; ; \quad \boxed{d_1 = \frac{r^2}{b^2 + r^2} . d} \; ; \quad d_2 = d - d_1 \; ; \quad \boxed{d_2 = \frac{b^2}{b^2 + r^2} . d} \quad (83)$$

Aksoidas: ir divi vientelpu hiperboloidi, kuŗu ass būs savstarpīgi perpendikularas un kuŗi velsies un slīdēs viens pa otru. Pēc šī principa ierīkotas dzirnavas ir vislabākās, jo akmeņi netikai veļās, bet arī slīd viens pa otru un malšana iznāk labāka



zīm.213.

Vairāku virzes un griezes kustību reducēšana pie vienas skrūves kustības.

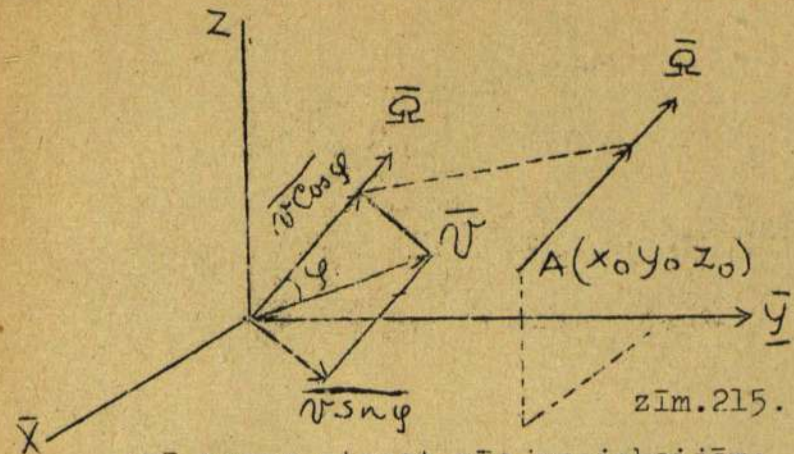


zīm.214.

Ja ir dotas vairākas virzes un griezes kustības, noteiktas ar vektoriem $\bar{V}_1$; $\bar{V}_2$; $\bar{V}_3$ u.t.t. $\bar{\omega}_1$; $\bar{\omega}_2$; $\bar{\omega}_3$ u.t.t. varam visas griezes kustības pārnest uz koordinatu sākumu, pieliekot klāt virzes kustības $V_1' = \omega_1 . a_1$; $V_2' = \omega_2 . a_2$ u.t.t. kur a_1 ; a_2 ir attālumi no koordinatu sākuma līdz attiecīgam $\bar{\omega}$ vektoram. Virzes ātrums V_1' būs ⊥ pret plakni, kuŗa ieslēdz vektorus $\bar{\omega}_1$ un $-\bar{\omega}_1$ un iet tanī virzienā, uz kuŗu rādīs bultiņas iekšpusē.

Pēc tam, kad kādā kārtā visas griezes kustības būs pārnestas uz koordinatu sākumu, mēs varam viņas saskaitīt ar poligona palīdzību un dabūt vienu rezultējošo griezes kustību ar ātrumu $\bar{\Omega}$. Analitiski Ω varam atrast no viņa projekcijām: $\Omega_x = \sum_1^n \omega_{ix}$; $\Omega_y = \sum_1^n \omega_{iy}$; $\Omega_z = \sum_1^n \omega_{iz}$

$$\boxed{\Omega = \sqrt{\Omega_x^2 + \Omega_y^2 + \Omega_z^2}}$$



zīm.215.

Visas dotās virzes kustības $\bar V_1$ $\bar V_2$ $\bar V_3$ u.t.t. ar dabūtām no griezes kustību pārnešanas virzes kustībām $\bar V'_1$; $\bar V'_2$; $\bar V'_3$ u.t.t. ņemot vērā, ka virzes kustības vektori ir brīvi vektori varam arī pārnest uz koordinatu sākumu un saskaitīt geometriski dabūt vienu vektoru $\bar V$, kuŗu analitiski arī varam atrast pēc projekcijām: $V = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2$

Tagad visas virzes kustības un griezes kustības ir reducētas pie griezes kustības ar vektoru $\bar\Omega$ un virzes kustības ar vektoru $\bar V$. Šie vektori savā starpā veidos leņķi φ kuŗa Cos varam atrast sastādot skalaro produktu

$$(\bar V.\bar\Omega) = V.\Omega.\cos\varphi \quad \text{no kurienes} \quad \cos\varphi = \frac{(\bar V.\bar\Omega)}{V.\Omega}$$

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{V_x\Omega_x + V_y\Omega_y + V_z\Omega_z}{V.\Omega}} \quad ....(84)$$

Tāļāk virzes kustību ar ātrumu $\bar V$ sadalām divās: vienu pa griezes asi Ω lielumā $V \cos\varphi$ un otru perpendikulāri Ω vektoram: $V \sin\varphi$

Saskaitot tagad griezes kustību ar ātrumu Ω un virzes kustību perpendikulāru griezes asij $V \sin\varphi$ dabūsim tīru griezes kustību ar to pašu ātrumu Ω, bet ap jaunu asi attālumā

$$a = \frac{V \sin\varphi}{\Omega}$$

pārnesot uz nupat atrasto jauno asi arī virzes kustību $\overline{V.\cos\varphi}$, kuŗas vektors ir brīvs, dabūsim rezultējošo skrūves kustību.

Rezultējošas skrūves kustības elementi $\begin{cases} \text{Griezes ātrums: } \bar\Omega \\ \text{Slides ātrums: } V_s = V\cos\varphi \end{cases}$

Rezultējošas skrūves ass virziens ir noteikts ar:

$$\cos(X\Omega) = \frac{\Omega_x}{\Omega}; \quad \cos(Y\Omega) = \frac{\Omega_y}{\Omega}; \quad \cos(Z\Omega) = \frac{\Omega_z}{\Omega}$$

Tāļāk meklēsim rezultējošas skrūves ass nol-mu telpā. Ņemsim formulu

$$a = \frac{V \sin\varphi}{\Omega}; \quad a\Omega^2 = \Omega V \sin\varphi; \text{ jeb } \bar a.\Omega^2 = [\bar\Omega.\bar V]$$

projecējot šo vektoru nol-mu uz koordinatu asīm, mēs kreisā pusē dabūsim punkta A, caur kuŗu iet skrūves ass, koordinates: x_0 y_0 z_0 pareizinātas ar Ω^2 kuŗš ir skalars. Labā pusē vektoru produkta projekcijas varam viegli sastādīt uzrakstot viņu determinantes formā

$$[\bar\Omega \bar V] = \begin{vmatrix} i_x & i_y & i_z \\ \Omega_x & \Omega_y & \Omega_z \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}$$

$$x_0 = \frac{\Omega_y V_z - \Omega_z V_y}{\Omega^2}; \quad y_0 = \frac{\Omega_z V_x - \Omega_x V_z}{\Omega^2} \quad z_0 = \frac{\Omega_x V_y - \Omega_y V_x}{\Omega}$$

Skrūves kustības ass iet caur punktu A un viņas virziena koeficienti ir tie paši, kādi vektoram Ω, tā tad skrūves ass nol-ms būs

$$\frac{x - x_0}{\Omega_x} = \frac{y - y_0}{\Omega_y} = \frac{z - z_0}{\Omega_z} \quad ......(86)$$