

**N. ROZENAUTERS**  
LATVIJAS ŪNIVERSITĀTES DOCENTS

# MĒCHANIKA

III DAĻA

**PUNKTA DINAMIKA**

1 9 3 2

LATVIJAS ŪNIVERSITĀTES STUDENTU PADOMES GRĀMATNĪCAS IZDEVUMS

N. ROZENAUTERS  
Latvijas universitātes docents.

M Ē C H A N I K A

III daļa.

PUNKTA DINAMIKA.

Lekcijas lasītas Latvijas universitātes  
Mēchanikas fakultātē.

1932.

Latvijas universitātes studentu padomes  
grāmatnīcas izdevums.

## P r i e k š v ā r d s .

Tāpat kā mēchanikas pirmai daļai: "Punkta kinēmatika" un otrai daļai "Ķermeņa kinēmatika", arī šeit, trešai daļai: "Punkta dinamika" - pamatā ir liktas Profesora Dr. ing. E.Cizareviča lekcijas mēchanikā; bet ar laiku daži jautājumi tika pārstrādāti un ir nākuši iekšā arī daži papildinājumi, kā piemēram, slīpais sviediens ar pretestību, proporcionālu ~~ātr~~ ātrīzumam augstākā pakāpē, cikloidlais svārsts, saistīta punkta kustības noteikšana polārkoordinātēs un cilindra koordinātēs, saistīta punkta kustība uz rheonomām saitēm, punkta trieciens pret kustošu virsmu u.c.

Pie izlietotās literatūras saraksta, ievietota pirmā daļā, jāpievieno vēl Bobiļev'a teorētiskās mēchanikas kursu krievu valodā.

N.R.

## S a t u r s .

§ 1.	<u>Dinamikas pamatprincipi</u> .....	1p. 1.
§ 2.	<u>Lielumi dinamikā. Mēru vienības. Mēru sistēmas: absolūtā un tehniskā</u> .....	" 6.
§ 3.	<u>Brīva materiāla punkta taisnvirziena kustība</u> .....	" 9.
	Spēka noteikšana pēc dotās kustības. Kustības noteikšana pēc dotā spēka gadījumos:	
	I. Spēks $\mathcal{K} = 0$	
	II. " $\mathcal{K} = \text{Const.}$	
	III. " $\mathcal{K} = f(t)$	
	IV. " $\mathcal{K} = f(\dot{x})$	
	V. " $\mathcal{K} = f(x)$ Harmoniska svārstīšanās kustība	
	VI. " $\mathcal{K} = f(\ddot{x})$ Dziestosa svārstīšanās kustība	
	VII. " $\mathcal{K} = f(x\dot{x})$ Uzspiesta svārstīšanās kustība	
	VIII. " $\mathcal{K} = f(x\ddot{x})$ Uzspiesta svārstīšanās kustība ar pretestību.	
§ 4.	<u>Brīva materiāla punkta likumaina kustība plaknē</u> .....	" 34.
	Slīpais sviediens vacuumā. Slīpais sviediens mediumā ar pretestību, proporcionālu ātrumam. Slīpais sviediens mediumā ar pretestību, proporcionālu ātrumam augstākā pakāpē. Brīva materiāla punkta kustība zem centrāla pievilksanas spēka, proporcionāla attālumam.	
§ 5.	<u>Brīva materiāla punkta kustība telpā</u> .....	" 49.
§ 6.	<u>Brīva materiāla punkta kustība polārkoordinātēs plaknē. Brīva materiāla punkta kustība cilindra koordinātēs telpā</u> ....	" 53.
§ 7.	<u>Integrējošas teorēmas</u> .....	" 58.
	Kustības daudzuma jeb impulsa teorēma. Kustības daudzuma momenta teorēma. Spara jeb kinētiskās enerģijas teorēma.	
§ 8.	<u>Spēka funkcija jeb potenciāls</u> .....	" 74.
	<sup>r</sup> Līmeņa virsmas. Spēka līnijas. Potenciāla enerģija. Mēchaniskās enerģijas pastāvības princips.	
§ 9.	<u>Binet formulas</u> .....	" 87.
	Newton'a gravitācijas likuma izvešana no 3 Keplera likumiem un otrādi. Smaguma spēka paātrinājuma g skaitliskas vērtības noteikšana.	
§ 10.	<u>Saistīta punkta dinamika</u> .....	" 92.
	Saites un to klasifikācija. Ātrums, ja saite ir ideāla un skleronoma. Paātrinājums, ja saite ir ideāla un skleronoma. Saistīta punkta kustības diferenciālnolīdzinājumi pēc Lagrang'a I formā, ja saite ir ideāla skleronoma virsma. Punkta miera stāvoklis uz saites. Spara teorēma saistītam punktam. Kustības daudzuma momenta teorēma saistītam punktam. Saistīta punkta kustības no-	

teikšana ar spara un kustības daudzuma momenta teorēmu. Saistīta punkta diferenciālnolīdzinājumi, ja saite ir negluda virsma. Miera stāvoklis uz negludas virsmas. Saistīta punkta kustība, ja saite ir skleronoma līkne telpā. Atrisinājums, ja saite dota ar divām virsmām un parametra veidā. Saistīta punkta diferenciālnolīmi pēc Lagrang'a I formā, ja saite ir ideāla skleronoma līkne. Speciāli atrisinājumi. Smaga materiāla punkta kustība uz ideālas skrūves līnijas. Saistīta punkta noteikšana uz skleronomas saites polārkoordinātēs plaknē. Saistīta punkta noteikšana uz skleronomas saites cilindra koordinātēs telpā. Saistīta punkta kustība, ja saite ir ideāla skleronoma plakana līkne. Speciāli atrisinājumi. Izochronas nolīma uzstādīšana. Matematisks svārsts. Atrisinājums ar eliptisko integrālu un aproximatīvā veidā. Tautochronas nolīma uzstādīšana. Cikloidālais svārsts. Saistīta punkta kustība uz negludas līknes telpā. Punkta kustība uz ideālām rheonomām saitēm. Ātrums, paātrinājums un kustības diferenciālnolīdzinājumi, ja saite ir rheonoma.

- § 11. D'Alembert'a princips materiālam punktam..... lp. 134.  
 D'Alembert'a princips brīvam punktam. D'Alembert'a princips saistītam punktam. Piemēri.
- § 12. Materiāla punkta relatīvas kustības dinamika..... " 138.  
 Relatīvas kustības difnolīmi, ja pārnesama kustība ir tīra griezes kustība un citos gadījumos. Punkta kustība attiecībā pret zemes lodi. Smaga materiāla punkta novirzīšanās brīvā kritienā, ņemot vērā zemes lodes griezes kustību.
- § 13. Materiāla punkta trieciena teorija ..... " 146.  
 Trieciens pret nekustošu virsmu. Spara zaudējums šīnī gadījumā. Trieciens pret kustosu (rheonomu) virsmu. Spara zaudējums.

Punkta dinamika

jeb

Materiāla punkta kustība.

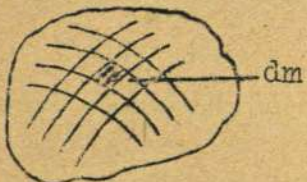
§ 1. Dinamikas pamatprincipi.

Dinamika tāpat kā kinematika apskata kustību, bet tikai sakarā ar tiem iemesliem, kuŗi šo kustību izsauc.

Katru fizikālo ķermeni, lai atšķirtu to no matematiska ķermeņa (jeb geometriskā objekta), sauc par materiālu ķermeni, pie kam zem materijas saprot fizikāla ķermeņa vielu.

Kā rāda eksperimenti, materijs ir spējīgs iespaidot kustību un šinī apstākļi izpaužas galvenā starpība starp matematisko un materiālo ķermeni.

Materiāla punkta dēfinīcijas: kinematikā bija noskaidrots, ka ķermeņa brīva kustība telpā ir noteikta ar trīs punktu kustību, komplāna kustība ar divu punktu kustību un virzes kustība pat ar viena punkta kustību. Tādā kārtā mēs nonākam pie materiāla punkta, kā materiāla ķermeņa elementāras daļas. Pēc šīs dēfinīcijas materijs daudzums materiālā punktā būs bezgalīgi mazs:dm.



Zīm.1.

Ir vēl otra materiāla punkta dēfinīcija, viņu lieto tad, kad materiāla ķermeņa dimenzijas ir nesalīdzināmi mazas, samērā ar viņa trajektorijas dimenzijām un ķermeņa dimenzijas var ignorēt, t.i. uzskatīt viņu kā materiālu punktu. Tādā gadījumā šim punktam, ar kuŗu mēs aizvietojam ķermeni, jāpiesavina visu ķermeņa materijs daudzumu: M. (Piem. šautenes lodes kustība, zemes lodes kustība ap sauli).

Kā zināms no statikas, ķermenī ir tāds punkts, kuŗā var skaitīt koncentrētu visu ķermeņa svaru, un arī materijs daudzumu, t.i. ķermeņa smaguma centrs. Tā tad ķermeņa smaguma centrs ir tāds punkts, kuŗam piesavināts galīgs materijs daudzums.

Kustības cēloņi. Pēc Lagrang'a dēfinīcijas visi iemesli, kas izsauc jeb maina ķermeņa kustību, saucās par spēkiem. Noskaidrosim tagad, kur šie iemesli var atrasties. Ja mēs pielaidīsim, ka šie iemesli atrodās pašā ķermenī, mums jāatzīst, ka ķermens ir dzīvs un var kustēties pats pēc savas gribas, bet tas runā pretīm novērojumiem, tā tad šo hipotēzi jāatmet un jāpieņem, ka iemesli, kuŗi izsauc ķermeņa kustību, atrodās ārpus viņa un iziet no citiem ķermeņiem.

Materijas, kā fizikāla ķermeņa vielas, dēfinīcija neprasa nekādus paskaidrojumus, bet saprast, kas ir spēks pēc savas būtības, ir grūtāki. Var sajust spēku ar muskuļu palīdzību, ceļot augšā kādu smagu priekšmetu, var redzēt spēka sekas, piem. strādājošā tvaikmašīnā, jeb braucošā automobilī, bet pašu spēku redzēt nevar.

Noteikti noskaidrot kas ir spēks, ir filosofijas jautājums, tehnikā mēs aprobežosimies ar to, ka spēku mērīsim.

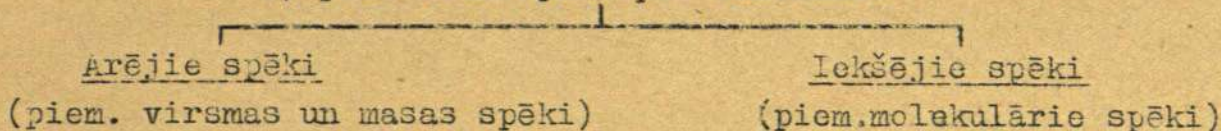
Neiedziļinājoties spēka būtībā mēs tomēr varam spēkus iedalīt dažādās grupās pēc viņu raksturojošām pazīmēm.

1) Spēku iedalījums pēc darbības.

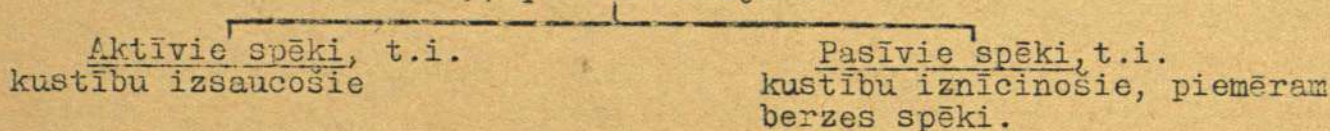
Virsmas spēki, kuŗi ir citu ķermeņu darbības rezultāts (piem. tvaika spiediens katlā)

Masas spēki, kuŗi izplatīti pa visu ķermeni un ir spēka lauka darbības rezultāts (piem. smaguma spēks, magneta spēks.)

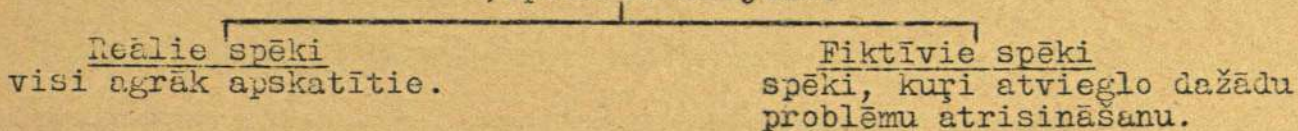
2) Spēku iedalījums pēc sistēmas.



3) Spēku iedalījums.



4) Spēku iedalījums.



Dinamikas pamatprincipi. Dinamikā ir nākuši klāt vēl divi jēdzieni: materija un spēks, kurus jāievieš kinēmatikā, bet šo ieviešanu nevar izdarīt deduktīvā ceļā uz prātojumu pamata vien, viņu jāaskaidro ar eksperimentāliem novērojumiem, jāpārbauda, vai nebūs pretrunas loģikai un dabūtiem likumiem jābūt pēc iespējas vienkāršiem.

Sos pamatlikumus, pamatprincipus jeb aksiomas, uz kuŗām ir dibināta klasiskā mēchanika (dinamika) uzstādījis 1687.g. slavenais zinātnieks I. Newton's savā darbā: "Philosophiae naturalis principia mathematica". Tamdēļ viņi arī saucās par Newton'a pamatprincipiem.

Pamatprincipi, uz kuŗiem ir dibināta Einšteina mēchanika atšķiras no Newtona pamatprincipiem, bet šai starpībai ir nozīme tikai pie lieliem ātrumiem, tuviem gaismas ātrumam, t.i. 300.000 klm/sek. Technikā tādi ātrumi nav sastopami, piem. lielgabala lodes ātrums nepārsniedz 3 klm/sek, kādēļ mēs varam palikt pie Newtona principiem.

Newton'a darbā mēs atrodam 4 principus:

- I. Inercijas princips,
- II. Dinamikas pamatprincips,
- III. Superpozīcijas jeb spēku darbības neatkarības princips,
- IV. Akcijas un reakcijas princips jeb darbības un pret darbības princips.

I. Newtona princips jeb inercijas princips.

Katrs, no spēkiem izolēts, materiāls punkts patura savu miera jeb vienmērīgas taisnvirziena kustības stāvokli.

No spēkiem izolēts nozīmē no citu ķermeņu iespaida izolēts, jo spēki ir citu ķermeņu darbības rezultāts. Kaut gan nav iespējams materiālu punktu pilnīgi izolēt no citu ķermeņu iespaida un tādā kārtā eksperimentāli pārbaudīt inercijas principu, tomēr jo tuvāk mēs nostādām materiālu punktu minētos ideālos apstākļos, jo vairāk viņš seko inercijas principam.

I Newtona princips ir ļoti loģisks, jo nevar pielaist, ka materiāls punkts būtu spējīgs pats no sevis bez kāda ārēja spēka mainīt savu kustību.

Sakarā ar šo principu materiāla punkta īpašību atrasties vienmērīgā taisnvirziena kustībā sauc par inerci.

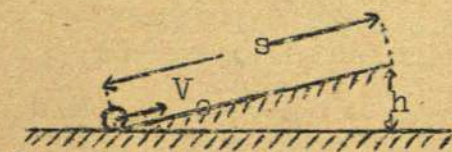
To pašu principu var formulēt arī citādi: katram izolētam materiālam punktam paātrinājums līdzinājās nullei.

$\vec{j} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 0$	.....(1)
-------------------------------------	----------

Inercijas princips bija zināms jau Galilejam, kurš pamatoja viņu uz sekoša eksperimenta: bumbiņa, sviesta pa slīpo plāknī uz augšu, ar ātrumu  $V_0$  noies ceļu

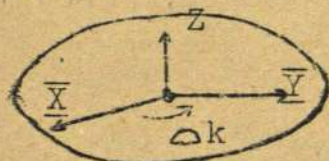
$$s = \frac{h}{\sin \alpha}$$

bet samazinot  $\alpha$  noietais ceļš pieaugs un teorētiski pie  $\alpha = 0$ ;  $s = \frac{h}{0} = \infty$ . Tas nozīmē, ka bumbiņai, lai kustētos bezgalīgi, pietiek sākuma ātruma  $V_0$ , ja, saprotams, nav berzes.



Zīm.2.

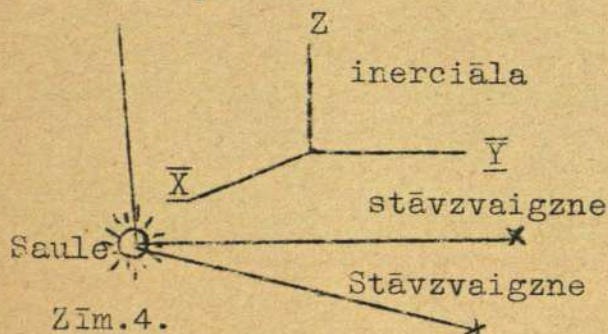
Inercijas princips saka: katrs izolēts ķermenis kustās vienmērīgi taisnā virzienā, bet rodas jautājums, attiecībā uz kādu koordinātu sistēmu? Kamēr nav noteikta koordinātu sistēma, izteiktam principam nav nekādas nozīmes. Nedrīkst aizmirst, ka zemes lode atrodas griezes kustībā un visas kustības uz zemes lodes ir relatīvas. Tāpat kā nevar, uzliekot ķermeni uz kādu platformu, kurā atrodas griezes kustībā un saistot koordinātu sistēmu ar šo platformu, apgalvot, ka ķermenis paturēs miera stāvokli; tā arī nevar apgalvot, ka inercijas princips paliks spēkā, ja koordinātu sistēma būs saistīta ar zemes lodi.



Zīm.3.

Turpretīm, salīdzinot parādības, attiecinātas uz koordinātu asīm, saistīsim ar zemes lodi un otrreiz ar dzelzceļa vagonu, kurš atrodas vienmērīgā taisnvirziena kustībā, mēs redzēsim pilnīgu analogiju: ķermenis, kurš atrodas mierā arī paliek mierā, un ķermenis, kurš atrodas kustībā, patur viņu (ja nav berzes).

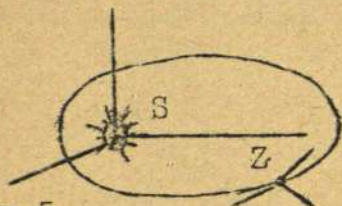
Newtona principus varam skaitīt par absolūti pareiziem tādai koordinātu sistēmai, kurā, ja arī neatrodas absolūtā mierā; tad tomēr mainās ļoti lēni. Tādu koordinātu sistēmu sauc par fundamentālo.



Zīm.4.

Viņas sākums atrodas saules sistēmas smaiguma centrā (kurš atrodas netāli no saules centrs) un divas asis ir virzītas uz stāzvvaigznēm. Trešo asi var ņemt perpendikulāri divām izvēlētām. Pēc analogijas ar augšā pievesto piemēru, Newtona principi der arī katrai koordinātu sistēmai, kurā kustās attiecībā pret fundamentālo sistēmu vienmērīgi taisnā virzienā. Šādu koordinātu sistēmu ir daudz un viņas sauc par inerciālām (Zīm.4.).

Koordinātu sistēma, kurā ir saistīta ar zemes lodi un kurā sākums atrodas zemes lodes centrā, nav inerciāla, jo šis centrs kustās attiecībā pret fundamentālo sistēmu pa elipsi un bez tam arī zemes lode atrodas griezes kustībā ap savu asi. Bet eksperimentus, kas nevelkās ilgu laiku un, priekš kuriem attiecīgo loku var uzskatīt par taisnes nogriezni, varam attiecināt arī uz koordinātu asīm, saistītām ar zemes lodi, pie kam rezultāti sekos Newtona principiem. Turpretīm eksperimentiem, kuri velkās ilgu laiku, kā piemēram Foucault svārstam, ir jālieto fundamentālo koordinātu sistēmu, jo citādi Newtona principi neder.



Zīm.5.

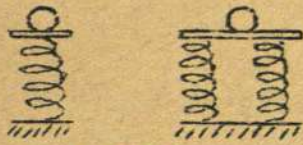


II Newtona princips jeb dinamikas pamatprincips,

formulējās šādi: spēks ir proporcionāls paātrinājumam

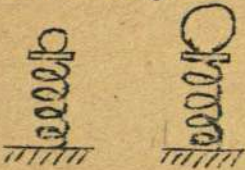
$F = k j$  .....(2)

Izteikto principu var pārbaudīt eksperimentālā ceļā. Uzliksim materiālu punktu bumbiņas veidā uz sasietu ar diegu atsperi. Pēc diega pārgriešanas novērosim bumbiņas paātrinājumu:  $j$ , sākot no viņas miera stāvokļa līdz tam momentam, kad bumbiņa atstāj atsperi. Lietojot vienas atsperes vietā tādas pašas divas jeb trīs, mēs novērosim, ka paātrinājums arī būs attiecīgi divreiz jeb trīsreiz lielāks. Tādā kārtā būs pierādīts, ka iegūtais paātrinājums ir proporcionāls spēkam. Apzīmēsim proporcionālītātes koeficientu ar  $k$ . Izvedot šādus eksperimentus ar vienāda lieluma, bet dažāda materiāla bumbiņām, mēs novērosim dažādus proporcionālītātes koeficientus  $k$ , tā tad varam teikt, ka koeficients  $k$  ir raksturīgs katram materiālam.



Zīm.6.

Lai pieietu tuvāk pie koeficienta  $k$  nozīmes, izteiksim viņu no nolīdzinājuma (2):  $k = \frac{F}{j}$  un atkārtosim to pašu eksperimentu ar divām vienāda materiāla bumbiņām, no kurām otrās bumbiņas tilpums ir  $n$  reizes lielāks, nekā pirmās. Ja pirmajai bumbiņai koeficientu apzīmējam ar  $k_1$  un paātrinājumu ar  $j_1$ , un otrai bumbiņai koeficientu ar  $k_2$  un paātrinājumu ar  $j_2$ , tad izrādīsies, ka



zīm.6-bis.

$j_2 = \frac{1}{n} j_1$ , bet  $k_1 = \frac{F}{j_1}$  un  $k_2 = \frac{F}{j_2} = \frac{F}{\frac{1}{n} j_1} = n \cdot \frac{F}{j_1} = n k_1$

tas nozīmē, ka vienāda materiāla ķermeņiem proporcionālītātes koeficients  $k$  mainās līdz ar tilpumu jeb vielas daudzumu ķermenī.

Newtonš lika priekšā šo proporcionālītātes koeficientu starp spēku un iegūto paātrinājumu nosaukt par ķermeņa masu. Apzīmējot masu ar  $m$  pārrakstīsim nol-mu (2):  $m j = F$  .....(2-bis)

Kā mēs redzējam, ķermeņa masa mainās līdz ar materiāla daudzumu vienāda materiāla ķermeņiem, kādēļ daži autori identificē masu ar materiāla daudzumu. Masas noteikšanai visērtāk izlietot nol-mu (2-bis) smaguma spēkam. Smaguma spēka paātrinājumu  $g$  var viegli noteikt eksperimentālā ceļā, laižot smagu ķermeni brīvi krist vakuumā un novērojot paātrinājumu. Var lietot arī empirisko formulu:

$g = 980,6056 - 2,5028 \cos 2\varphi - 3 \cdot 10^{-6} \cdot h$

kur  $\varphi$  - ir geografiskais platums  
 $h$  - ir augstums virs jūras līmeņa.

Kā redzams no šīs formulas,  $g$  ir mainīgs lielums, atkarīgs no geografiskā platuma un augstuma virs jūras līmeņa.

Apzīmējot ķermeņa svaru ar  $Q$ , dabūsim:

$Q = mg$  un  $m = \frac{Q}{g}$

Galīgi tā tad masu varam dēfinēt divejādi: ķermeņa masa ir proporcionālītātes koeficients starp spēku un iegūto paātrinājumu jeb arī ķermeņa masa ir attiecība starp viņa svaru  $Q$  un smaguma spēka paātrinājumu  $g$ .

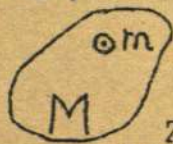
Ņemot divus dažāda materiāla ķermeņus, ar svāriem  $Q_1$  un  $Q_2$ , varam rakstīt:  $Q_1 = m_1 g$  )  
 $Q_2 = m_2 g$  ) no kurienes  $\frac{m_1}{m_2} = \frac{Q_1}{Q_2}$ , tas nozīmē, ka ķermeņu masas

attiecas tāpat, kā viņu svāri.

Masa ir skalārs lielums, bet paātrinājums ir vektors un, ja spēks pēc pirmā Newtona principa ir iemesls ātruma maiņai, tad šai maiņai, t.i. paātrinājumam jāiet spēka virzienā un mēs nonākam pie dinamikas pamatnol-  
ma

$$m\vec{j} = \vec{F} \dots \dots \dots (3)$$

Blīvums. Materija ķermenī var sadalīties vienmērīgi jeb arī nevienmērīgi, sakarā ar ko sauksim visa ķermeņa masas  $M$  attiecību pret viņa tilpumu  $V$  par vidējo blīvumu, kurū apzīmēsīm ar  $\delta_m$



$$\delta_m = \frac{M}{V} \dots \dots \dots (4)$$

Zīm.7.

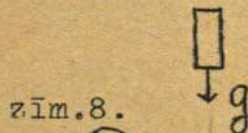
Vidējais blīvums ir arī tilpuma vienības masa. Par īsteno blīvumu kādā ķermeņa punktā  $A$  sauksim masas  $m$  ļoti mazā tilpuma  $v$  ap šo punktu, attiecības robežu pret pašu tilpumu, ja  $v$  tiecas uz 0.

$$\delta = \lim_{v \rightarrow 0} \left( \frac{m}{v} \right) \dots \dots \dots (4^1)$$

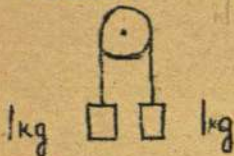
Ja blīvums visos materiāla ķermeņa punktos ir vienāds, ķermenis saucās par homogenu. Pretējā gadījumā par heterogenu.

Apskatīto dinamikas pamatprincipu var pārbaudīt eksperimentālā ceļā arī ar Atwood'a mašīnas palīdzību.

- 1) eksperiments: brīvais kritiens vakuumā, t.i. bez gaisa pretestības, notiek ar paātrinājumu  $g$ .
- 2) eksperiments: līdzsvars, paātrinājuma nav.



zīm.8.



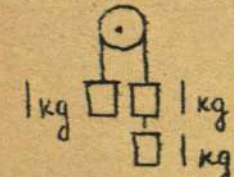
zīm.9.

- 3) eksperiments: pārsvars vienā pusē 1 kg, bet visa kustoša masa ir 3 kg. Novērojamais paātrinājums būs  $\frac{g}{3}$ , kas saskan ar nol-mu.

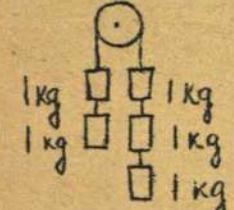
$$1 \text{ kg} = 3 m \cdot \frac{g}{3}, \text{ kur } m \text{ ir } 1 \text{ kg masa.}$$

- 4) eksperiments: atkal pārsvars vienā pusē 1 kg, bet visa kustoša masa ir 5 kg. Novērojamais paātrinājums būs  $\frac{g}{5}$ , kas saskan ar nol-mu.

$$1 \text{ kg} = 5 m \cdot \frac{g}{5}, \text{ kur } m \text{ ir } 1 \text{ kg masa.}$$



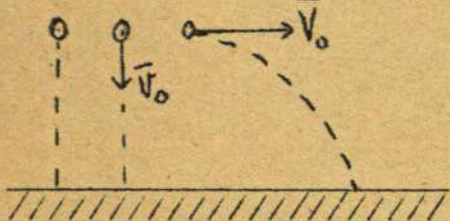
zīm.10.



zīm.11.

III Newtona princips jeb superpozīcijas princips.

jeb spēku darbības neatkarības princips, formulējās šādi: ja uz mierā jeb kustībā esoša materiālo punktu darbojas vairāki spēki, tad punkta paātrinājums līdzinājās geometriskai summai no tiem paātrinājumiem, kurus punkts iegūtu, ja viņš atrastos mierā un katrs spēks viņu iespaidotu atsevišķi.



zīm.12.

Eksperimenti rāda, ka smaga materiāla punkta paātrinājums ir vienāds un līdzinājās "g" neatkarīgi no tā, vai punktam ir sākuma ātrums jeb nav, un ja sākuma ātrums ir, tad neatkarīgi no viņa virziena.

Augšā formulēto principu varam pierādīt arī analitiski: pieņemsim, ka uz materiālo punktu iedarbojās spēki:  $F_1 \ F_2 \ F_3 \ \dots$ , kurī atsevišķi iedarbojoties dod paātrinājumus:  $j_1 \ j_2 \ j_3 \ \dots$ . Saskaitot spēkus geome-

triski dabūsim kopspēku

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots$$

bet, izdalot šo vektorialo nol-mu caur masu m, dabūsim

$$\frac{\vec{F}}{m} = \frac{\vec{F}_1}{m} + \frac{\vec{F}_2}{m} + \frac{\vec{F}_3}{m} + \dots$$

jeb

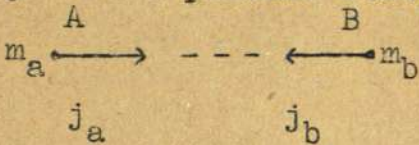
$$\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2 + \vec{J}_3 + \dots$$

tas nozīmē, ka rezultējošais paātrinājums ir geometriskā summa no atsevišķiem paātrinājumiem.

#### IV Newtona princips: akcijas un reakcijas princips

##### jeb darbības un pret darbības princips

jau nāca priekšā statikā. Sis princips aizrāda uz to, ka dabā nav vien-



pusīgas spēka darbības: ja viena materiāla punkta eksistence izsauca otra materiāla punkta paātrinājumu, tad arī šis otrs punkts izsauks pirmā materiālā punkta paātrinājumu; tas nozīmē, ka, ja viens punkts iedarbojas uz otru ar kādu spēku, tad otrs punkts iedarbojās uz pirmo ar tikpat lielu spēku, bet pretējā virzienā

$$F_a = F_b$$

bet

$$\left. \begin{aligned} F_a &= m_a j_a \\ F_b &= m_b j_b \end{aligned} \right\} \text{pielīdzinot, atrodam} \quad \frac{j_a}{j_b} = \frac{m_b}{m_a}$$

Pēdējā formula dod sakaru starp iegūtiem paātrinājumiem, kuri ir pretēji proporcionāli materiālo punktu masām.

Jēdziens par vienusīgo spēka darbību. Lai vienkāršotu materiāla punkta kustības pētīšanu dažādos laika momentos, jeb vairāku punktu kustību salīdzināšanu, mēs atmetam citus punktus, atstājot tikai viņu iespaidu rezultātus, t.i. spēkus, ar kuriem viņi iedarbojās un tādā kārtā nonākam conditioneli pie vienusīgas spēku darbības.

§ 2. Lielumi dinamikā.

Mēru vienības. Mēru sistēmas.

Atrastā dinamikas pamatnolīdzinājumā

$$m \cdot \ddot{j} = \bar{F}$$

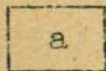
ieiet 3 lielumi: masa  $m$ , paātrinājums  $j$  un spēks  $F$ . Viena no šiem lielumiem, proti paātrinājuma  $j$  dimenzija ir jau zināma no kinēmatikas, un

$$j = \ddot{\xi} [ j ] = \ddot{\xi} [ L \cdot T^{-2} ]$$

Lai noteiktu masas " $m$ " un spēka " $F$ " vienības, jāpieņem pamatvienību vienam no šiem lielumiem un jāizrēķina no dinamikas pamatnolīdzinājuma dimenziju otram lielumam. Sakarā ar šo mēs atšķirsim divas mēru sistēmas. Vienu dibinātu uz masas vienības, kā pamatvienības, to sauc par absolūto mēru sistēmu un otru dibinātu uz spēka vienības, kā pamatvienības, sauc par technisko mēru sistēmu.

Absolūtā mēru sistēma.

Absolūtā mēru sistēmā tā tad par pamatvienību ir pieņemta masas " $m$ " vienība, kuŗu simboliski apzīmēsim ar  $[ M ]_a$ , tad kāda ķermeņa masa



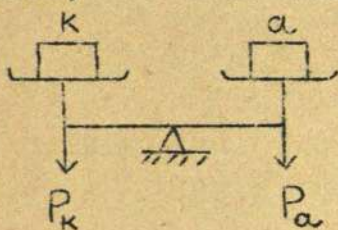
$$m = \mu [ M ]_a \quad \text{kur } \mu \text{ ir mērskaitlis.}$$

zīm.14.

Ja ķermeni, kuŗa masu mēs izvēlējam par masas vienību, apzīmēsim ar " $a$ ", tad viņa masa

$$m_a = 1 \cdot [ M ]_a$$

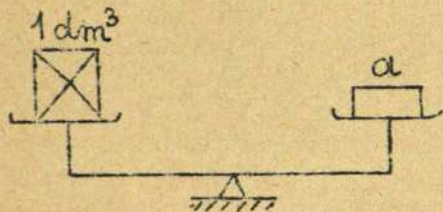
Par starptautisko masas vienību ir izvēlēta Parizē, mēru un svaru paviljonā glabājošā platīnas un iridija bluķa masa. Šī masas vienība saucās par kilogrammasu. Bet Amerikā, Anglijā un kolonijās ar šo masas vienību nerēķinājās, tur ir izvēlēta cita masas vienība: mārciņa masa, tā ir tāda bluķa masa, kas sver vienu mārciņu.



zīm.15.

Ķermeņu masu salīdzināšanu var izdarīt ar sviras svariem. Uzliksim vienā pusē bluķi " $a$ ", kuŗa masa bija izvēlēta par vienību un otrā pusē kādu citu ķermeni " $k$ ", kuŗu velesim tik ilgi, kāmēr iestāsies līdzsvars. Līdzsvara gadījumā spēki  $P_k$  un  $P_a$ , kas darbojās sviras galos, būs vienādi.

$$\left. \begin{aligned} P_k &= P_a, \text{ bet } P_k = m_k \cdot g \\ P_a &= m_a \cdot g \end{aligned} \right\} \text{ no kurienes } m_k = m_a$$



zīm.16.

Massas vienības bluķis bija izvēlēts tādā lielumā, lai tas līdzsvarotu  $1 \text{ dm}^3$  tīra ūdens pie  $4^\circ \text{ C}$  un zem  $45^\circ$  ģeogrāfiskā platuma. Jaunlaiku precizākie mērīšanas paņēmieni pierādīja, ka tas nav pilnīgi pareizi, bet tomēr izvēlēta kilogrammasas vienība palika spēkā.

Uziesim tagad attiecīgo spēka vienību no dinamikas pamatnolīdzinājuma  $F = m \cdot \ddot{j}$ . Apzīmēsim absolūtā mēru sistēmā spēka vienību simboliski ar  $[ F ]_a$ , tad spēks  $F$  izteiksies ar formulu  $F = \varphi [ F ]_a$ , kur  $\varphi$  ir kāds mērskaitlis. Ņemsim vēl  $m = \mu [ M ]_a$  un  $j = \ddot{\xi} [ L \cdot T^{-2} ]$  un ievietosim visus lielumus dinamikas pamatnolīdzinājumā

$$\varphi [ F ]_a = \mu [ M ]_a \cdot \ddot{\xi} [ L \cdot T^{-2} ] \quad \text{apvienojot simbolus}$$

$$\varphi [ F ]_a = \mu \ddot{\xi} [ M_a \cdot L \cdot T^{-2} ] \quad \text{pielīdzinot mērskaitļus } \varphi = \mu \ddot{\xi}$$

atrodam spēka dimenziju

$$[ F ]_a = [ M_a L T^{-2} ] \dots \dots \dots (5)$$

Fizikāli spēka vienība ir tāds spēks, kas dod 1. masas vienībai paātrinājumu 1. garumvienību laika vienībā.

Visas tās mēru sistēmas, kurās pamatvienības ir garums, masa, laiks, ir absolūtas mēru sistēmas. Bet, ņemot vērā, ka garuma, masas un laika mērīšanai var lietot dažādas vienības, ir arī dažādas absolūtas sistēmas.

Viena no pazīstamākām absolūtām mēru sistēmām ir fizikāli lietojamā | C.G.S | sistēma. Garuma vienība šeit ir centimetrs, masas vienība ir grammasa un laika vienība sekunde. Spēks šinī sistēmā ir dina, tas ir spēks, kas dod 1. grammasai paātrinājumu 1. cm. sekundē. Šis spēks ir ļoti mazs, kādēļ lieto lielāku vienību - megadīnu

$$10^6 \text{ dinu} = 1 \text{ megadīnai.}$$

Pārveidosim megadīnu

$$1 \text{ megadīna} = 10^6 \text{ din.} = 1.000.000 \text{ gr.cm.sec}^{-2} = 1 \text{ kg.10 m.sec}^{-2}$$

Kā redzams 1 megadīna jeb 1 miljons dinu ir tāds spēks, kas dod 1 kg. masai paātrinājumu 10 mtr.sec<sup>-2</sup>.

Vēl viena absolūta mēru sistēma ir [ M.T.S ] sistēma, kurā pamata vienības ir metrs, tonnas masa un sekundē. Spēka vienību šinī sistēmā sauc Vis, t.i. spēks, kas dod vienai tonnas masai paātrinājumu 1 mtr. sec<sup>-2</sup>. Salīdzināsim viņu ar megadīnu.

$$1 \text{ Vis} = 1 \text{ Ton. 1 mtr. sec}^{-2} = 10^6 \text{ Gr. 10}^2 \text{ cm. sec}^{-2} = 10^2(10^6 \text{ Gr. cm. sec}^{-2}) = 100 \text{ megadīnu.}$$

Techniskā mēru sistēma.

Kā jau agrāk bija teikt, techniskā mēru sistēmā par pamatvienību ir izvēlēta spēka vienība, bet masas vienība tiek atvasināta no pamatvienībām. Spēka vienību techniskā mēru sistēmā simboliski apzīmēsim ar [ F ]<sub>t</sub> un izvēlēsim augšminētā Parīzes blūka svaru par šo spēka vienību, kuru tagad sauksim par 1 kilogramsvaru jeb 1 kilobaru

$$[ F ]_t = 1 \text{ kgsv} = 1 \text{ kilobars un } F = \varphi [ F ]_t$$

Vispārīgi kāda ķermeņa svars jeb smaguma spēks, kas darbojās uz viņu

$$Q = mg$$

Ķermeņa masa (materijas daudzums) mainīties nevar, bet smaguma spēka paātrinājums, kā zināms, mainās atkarībā no augstuma virs jūras līmeņa un ģeogrāfiska platuma, tā tad arī ķermeņa svars ir mainīgs lielums. Pārvedot minēto kilobaru no Parīzes citā vietā, piem. Rīgā, viņam būs cits svars, tamdēļ par kilobaru sauc minētā Parīzes blūka svaru uz vietas un viņam bija jālīdzinās 1 dm<sup>3</sup> tīra ūdens svaram pie 4°C un zem 45° ģeogrāfiska platuma.

Empiriska formula priekš g

$$g = 980,6056 - 2,5028 \text{ Cos } 2\varphi - 3.10^{-6}.h$$

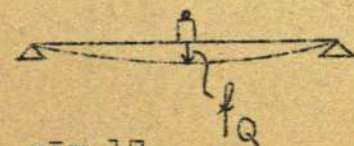
kur  $\varphi$  ir ģeogrāfiskais platums un h ir augstums virs jūras līmeņa.

Salīdzināsim pēc šīs formulas g vērtības Rīgā ( $\varphi = 57^\circ$ , h = 0) un Quito(Mexico) ( $\varphi = 0^\circ$ , h = 2850 mt)

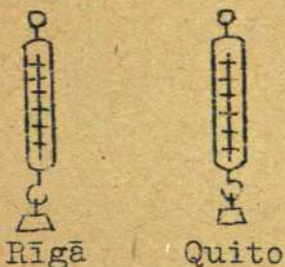
$$g_R = 9,816 \text{ m.sec}^{-2} \quad g_Q = 9,772 \text{ m.sec}^{-2}$$

Apskatīsim kādas sekas izsauc šis apstākļis.

- 1) Ja ņemsim siju, noslodzītu ar zināmu svara bumbu Rīgā un novērosim izlieci  $f_R$ , tad, tā pati sija, pārvesta ar visu slogu uz Quito, dos tu mazāku izlieci  $f_Q$ . Tāpat arī atsperes svāri Quito rādīs mazāk, nekā



zīm.17.



zīm.18.

Rīgā, kādēļ ar atsperes svariem, graduētiem Rīgā, precēs pīkt Quito ir izdevīgāki.

Vispārīgi salīdzināt svarus, t.i. atklāt svāra diferenci vienā vietā un otrā var tikai ar atsperes svariem. Pie svāras svariem, ja vienā pusē ķermenis mainā savu svaru, tad otrā pusē svaru bumbas arī mainā savu svaru tādā pat mērā. Ar svāras svariem var salīdzināt tikai masas.

2) Izrēķināsim Rīgas kilobāra svaru Quito.

$$\left. \begin{aligned} 1 \text{ kg sv} &= m \cdot 9,816 \\ x &= m \cdot 9,772 \end{aligned} \right\} x = \frac{9,772}{9,816} 1 \text{ kg sv} = 0,9955 \text{ kgsv.}$$

Starpība ir 0,45%.

Noteiksim tagad masas vienību tehniskā mēru sistēmā no dinamikas pamatnol-ma  $F = m \cdot j$ . Apzīmēsim tehniskā mēru sistēmā masas vienību simboliski ar  $[M]_t$  tad masa "m" izteiksies ar formulu  $m = \mu [M]_t$ , kur

$\mu$  ir kāds mērskaitlis.

Nemsim vēl  $F = \varphi [F]_t$ ,  $j = \xi [LT^{-2}]$  un ieliksīm visus

lielumus dinamikas pamatnol-mā

$$\varphi [F]_t = \mu [M]_t \cdot \xi [LT^{-2}]$$

$$\mu [M]_t = \frac{\varphi}{\xi} \frac{[F]_t}{[LT^{-2}]} \quad \text{pielīdzinot mērskaitļus} \quad \mu = \frac{\varphi}{\xi} \quad \text{atrodām}$$

$$\boxed{[M]_t = \frac{[F]_t}{[LT^{-2}]} = [F \cdot L^{-1} \cdot T^2]} \quad \dots\dots\dots(6)$$

Šai masas vienībai tehniskā mēru sistēmā nosaukuma vēl nav, bet nesen ir likts priekšā nosaukt viņu par 1 Newton'u.

Ja spēka vienība  $[F]_t = 1 \text{ kg sv}$

un paātrinājuma vienība  $[LT^{-2}] = 1 \text{ m} \cdot \text{sec}^{-2}$

tad masas vienība  $[M]_t = 1 [\text{kg sv} \cdot \text{mtr}^{-1} \cdot \text{sec}^2]$  ir tāda masa, kurai spēks 1 kgsv dod paātrinājumu 1 mtr.sec<sup>-2</sup>.

Sakars starp  $[M]_a$  un  $[M]_t$ .

Ja viena kilogrammasa (Parizes blūķis) brīvi krīt, tad uz viņu darbojošais spēks ir viens kilobars un paātrinājums ir  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{sec}^{-2}$ . No dinamikas pamatnol-ma  $F = m \cdot j$  gūsim

$$1 \text{ kg} \cdot \text{sv} = 1 \text{ kg} \cdot \text{mas} \cdot 9,81 \text{ m} \cdot \text{sec}^{-2}$$

Kā redzams 1 kg.sv dod savai masai, t.i. 1 kg masai jeb  $[M]_a$  paātrinājumu 9,81 m.sec<sup>-2</sup>, bet par masas vienību  $[M]_t$  tehniskā mēru sistēmā, kā augstāk aizrādīts, jāpieņem tādu masu, kurā iegūtu paātrinājumu tikai 1 m.sec<sup>-2</sup>. Uz II Newton'a likuma pamata tādai masai jābūt 9,81 reizi lielākai.

$$\boxed{[M]_t = 9,81 [M]_a} \quad \dots\dots\dots(7)$$

Ja tehniskā mēru sistēmā nāk priekšā masa "m", tad viņu parasti aizvieto ar  $\frac{Q}{g}$ , jo  $Q = mg$ .

Sakars starp absolūtas un tehniskas mēru sistēmas vienībām.

$$1 \text{ kg sv} = 1 \text{ kg mas.} \cdot 9,81 \text{ m. sec}^{-2} = 1000 \text{ gr. mas.} \cdot 9,81 \cdot 100 \text{ cm. sec}^{-2} = 981000 \text{ grm. cm. sec}^{-2} = 981000 \text{ Dinu} = 0,981 \text{ Megadinu.}$$

$$1 \text{ Megadina} = \frac{1}{0,981} \text{ kg sv} = 1,019 \text{ kg sv.}$$

$$1 \text{ Vis} = 100 \text{ Megadinu} = 101,9 \text{ kg. sv.}$$

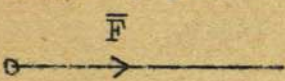
Abu mēru sistēmu salīdzinājums.

<u>Absolūtā mēru sistēma</u> (C.G.S)	<u>Techniskā mēru sistēma</u>
Pamatvienības [M] [L] [T]	Pamatvienības [F] [L] [T]
Atvasinātā vienība [F] Dina	Atvasinātā vienība [M] Newton's

§3. Brīva materiāla punkta taisnvirziena kustība.

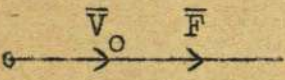
Pie materiāla punkta kustības mēs nonākam, kā jau agrāk bija aizrādīts apskatot materiāla ķermeņa elementāras daļas kustību jeb arī apskatot tāda ķermeņa punta kustību, kurā mēs varam skaitīt koncentrētu visu ķermeņa masu.

Pirmkārt apskatīsim materiāla punkta taisnvirziena kustību un noskaidrosim, pie kādiem apstākļiem viņa notiek.



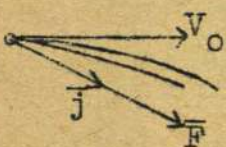
zīm.19.

1) Ja materiāls punkts atrodās mierā un uz viņu sāk darboties kāds spēks  $\vec{F}$  ar const. virzienu, tad punkta kustība acimredzot notiks taisnā virzienā.



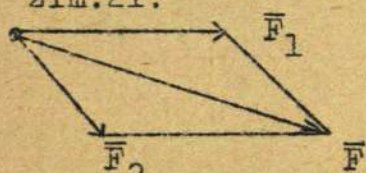
zīm.20.

2) Ja materiālam punktam piemīt kāds sākuma ātrums  $V_0$  un uz viņu vēl sāk darboties spēks  $\vec{F}$  tanī pat virzienā jeb arī pretējā, tad punktam nav nekāda iemesla izvirzīties no taisnas līnijas, kurā viņš kustējās agrāk.



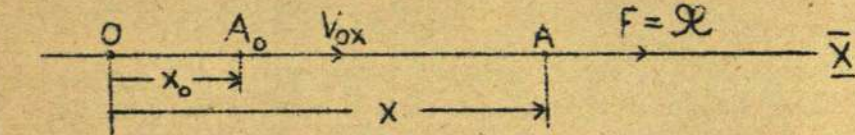
zīm.21.

3) Ja uz materiālu punktu, kuram piemīt ātrums  $\vec{V}_0$  zināmā virzienā, sāk darboties spēks  $\vec{F}$  citā virzienā, tad punkta paātrinājums  $\vec{j}$  arī ies spēka virzienā un kustība būs līkumaina.



zīm.22.

4) Ja uz mierā esošu punktu darbojās divi spēki, kustība būs taisna un notiks kopspēka virzienā.



zīm.23.

$\vec{X}$  ass virzienā varam apzīmēt ar  $\mathcal{L}$ . Dinamikas pamatnol-umu  $m\vec{j} = \vec{F}$  rakstīsim bez vektoru zīmēm tā

$$\boxed{m \frac{d^2x}{dt^2} = \mathcal{L}} \dots\dots\dots (8)$$

jeb arī  $\boxed{m\ddot{x} = \mathcal{L}}$  un sauksim viņu par taisnvirziena kustības diferenciālnolidzinājumu.

Šinī nol-mē nāk priekšā, neskaitot masu, divi lielumi: paātrinājums  $\frac{d^2x}{dt^2}$  un spēks  $\mathcal{R}$ .

Sakarā ar šo visus jautājumus, saistītus ar materiāla punkta taisnvirziena kustību, iedalīsim divās grupās

- I jautājumu grupa - pēc dotās kustības uziet spēku,
- II " " - pēc dotā spēka uziet kustību.

Apskatīsim katru atsevišķi.

I grupa. Pēc dotās kustības uziet spēku.

Dots taisnvirziena kustības nol-ms  $x = f(t)$ . Uziet spēku  $\mathcal{R}$ . Pēc kustības diferenciālnol-ma spēks  $\mathcal{R} = m\ddot{x}$ , tā tad lai dabūtu spēku, kustības nolīdzinājumu divas reizes jāatvasina pēc laika un jāreizina ar masu

$$\mathcal{R} = m f''(x)$$

Piemērs 1. Dots kustības nol-ms:  $x = x_0 + at + \frac{gt^2}{2}$ . Uziet spēku  $\mathcal{R}$ .

$$\left. \begin{array}{l} \text{Sastādam } \dot{x} = a + gt \\ \text{un } \ddot{x} = g \end{array} \right\} \text{spēks } \mathcal{R} = m\ddot{x} = mg$$

Augšā doto kustību tā tad izsauc smaguma spēks.

Piemērs 2. Dots kustības nol-ms  $x = a \sin kt$ . Uziet spēku  $\mathcal{R} = ?$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Sastādam } \dot{x} = ak \cos kt \\ \text{un } \ddot{x} = -ak^2 \sin kt \end{array} \right\} \text{Spēks } \mathcal{R} = m\ddot{x} = -mak^2 \sin kt, \text{ ka } f(t)$$

aizvietojojot  $a \sin kt = x$ , atrodam arī  $\mathcal{R} = -mk^2x$ , ka  $f(x)$

Kā redzams, doto kustību izsauc pievilkšanas spēks, proporcionāls attālumam.

Piemērs 3. Dots kustības nol-ms  $x = c \ln \sin kt$ . Uziet spēku  $\mathcal{R} = f(t)$  un  $\mathcal{R} = \varphi(x)$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Sastādam } \dot{x} = c \frac{k \cos kt}{\sin kt} = ck \operatorname{Ctg} kt \\ \text{un } \ddot{x} = ck \frac{k}{\sin^2 kt} = -\frac{ck^2}{\sin^2 kt} \end{array} \right\} \mathcal{R} = m\ddot{x} = -\frac{mck^2}{\sin^2 kt} \text{ ka } f(t)$$

Lai uzietu spēku kā koordinātu funkciju, uziesim  $\sin kt$  no dotā kustības nol-ma  $\ln \sin kt = \frac{x}{c}$

$$\left. \begin{array}{l} \ln \sin kt = \frac{x}{c} \\ \sin kt = e^{\frac{x}{c}} \end{array} \right\} \mathcal{R} = -\frac{mck^2}{e^{\frac{2x}{c}}} = -mck^2 e^{-\frac{2x}{c}} \text{ ka } \varphi(x)$$

Kā nupat bija redzams pēdējā piemērā, spēks var izteikties kā  $f(t)$  jeb  $\varphi(x)$ , tā pat viņu var izteikt arī kā funkciju no ātruma  $\dot{x}$ .

II grupa. Pēc dotā spēka uziet kustību.

Dots spēks  $\mathcal{R}$ . Uziet kustības nol-mu  $x = f_x(t)$ .

Šīs grupas jautājumi ir sarežģītāki, jo ņemot kustības dif-nol-mu  $m \frac{d^2x}{dt^2} = \mathcal{R}$ , mēs redzam, ka  $x$  noteikšanai viņu būs divreiz jāintegrē.

Integrēšana būs atkarīga no spēka izteiksmes un, kā augšā bija noskaidrots, spēks var būt funkcija no koordinātes  $x$ , no ātruma  $\dot{x}$  un no laika  $t$ . Vispārīgi spēks var arī būt funkcija no visiem trim lielumiem

$$\mathcal{R} = f(x, \dot{x}, t)$$

jeb no tiem pašiem lielumiem pa divi:  $(x\dot{x}), (xt), (\dot{x}t)$ .



Ņemsim kustības dif-nol-mu vispārīgā veidā, kad spēks ir funkcija no visiem trim lielumiem

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = f(x, \dot{x}, t)$$

un pieņemsim, ka mums ir izdevies viņu vienreiz nointegrēt. Rezultāts tad būs kāda funkcija no sekošiem lielumiem

$$f_I(x, \dot{x}, t, C_1) = 0 \dots\dots\dots(I \text{ integrāls})$$

kur  $C_1$  ir integrēšanas konstante. Atrasto funkciju sauksim par kustības dif-nol-ma pirmo integrālu.

Integrējot vēlreiz pirmo integrālu, dabūsim funkciju no  $x, t, C_1$  un vēl vienu const.  $C_2$

$$f_{II}(x, t, C_1, C_2) = 0 \dots\dots\dots(II \text{ integrāls})$$

Šo funkciju sauksim par kustības dif-nol-ma otro integrālu. Atrisinot to attiecībā uz  $x$  dabūsim meklējamo kustības nol-mu  $x = f(t)$ .

Ķits paņēmiens kustības nol-ma noteikšanai ar diviem pirmiem integrāliem:

Pieņemsim, ka kustības dif-nol-ms ir pirmo reizi nointegrēti un ir at-rasts pirmais integrāls  $f_I(x, \dot{x}, t, C_1) = 0$ . Ja izdosies to pašu dif-nol-mu nointegrēt citā ceļā, tad mēs dabūsim citu funkciju no tiem pašiem lielumiem ar citu const.  $C'_1$

$$\varphi_I(x, \dot{x}, t, C'_1) = 0$$

kuŗa būs pirmais integrāls. Piemēram, vienreiz var integrēt pēc laika un otrreiz pēc koordinātas.

Izslēdzot no abiem pirmiem integrāliem

$$f_I(x, \dot{x}, t, C_1) = 0 \text{ un } \varphi_I(x, \dot{x}, t, C'_1) = 0$$

alģebrāiskā ceļā ātrumu  $\dot{x}$ , dabūsim sakaru starp  $x, t, C_1$  un  $C'_1$ . Atrisinot to tālāk pēc  $x$ , uziesim kustības nol-mu  $x = f_x(t)$ .

Vispārīgā veidā nevar dot aizrādījumuš kā integrēt kustības dif-nol-mu, tamdēļ apskatīsim kustības dif-nol-ma integrēšanu astoņos atsevišķos gadījumos.

I	gadījums	-	Spēks	$\mathcal{H} = 0$	
II	"	-	"	$\mathcal{H} = \text{Const.}$	
III	"	-	"	$\mathcal{H} = f(t)$	funkcija no laika
IV	"	-	"	$\mathcal{H} = f(\dot{x})$	funkcija no ātruma
V	"	-	"	$\mathcal{H} = f(x)$	funkcija no koordinātas
VI	"	-	"	$\mathcal{H} = f(\dot{x}\dot{x})$	funkcija no koordinātas un ātruma
VII	"	-	"	$\mathcal{H} = f(xt)$	funkcija no koordinātas un laika
VIII	"	-	"	$\mathcal{H} = f(x\dot{x}t)$	funkcija no visiem trim elementiem.

I gadījums.

Dots spēks  $\mathcal{H} = 0$ . Uziet kustību  $x = f_x(t)$ .

Ņemsim diferenciālnolīdzinājumu

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = \mathcal{H} = 0$$

saīsināsim  $m$  un pārveidosim

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = 0$$

tagad integrēsim

$$\dot{x} = C_1 \quad (I \text{ integrāls})$$

$\dot{x}$  - ir ātrums un I integrāls rāda, ka meklējamā kustībā ātrums ir Const. un ja punktam bija kāds sākuma ātrums  $\dot{x}_0$ , tad punkts paturēs viņu un

$$C_1 = \dot{x}_0 = v_0$$

aizvietojot  $\dot{x}$  ar  $\frac{dx}{dt}$  mēs varam integrēt tālāk

$$\frac{dx}{dt} = V_0$$

$$x = V_0 t + C_2$$

ja pie  $t_0 = 0$  koordināte  $x = x_0$ , tad  $C_2 = x_0$  un galīgi punkta kustības nolīdzinājums

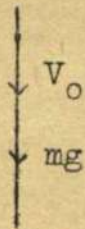
$$\boxed{x = x_0 + V_0 t} \dots \dots \dots (9)$$

Atrastais rezultāts rāda, ka punkta kustība būs vienmērīga. To pašu varēja paredzēt pēc I Newton'a principa, kas saka, ka punkts atrodas vienmērīgā kustībā, ja uz viņu nedarbojās spēks.

II. gadījums.

Dots spēks  $\mathcal{L} = \text{Const}$ . Uziat kustību  $x = f_x(t)$ .

Kā konkrētu piemēru izvēlēsim brīvo kritienu vacuumā. Darbojošais spēks ir smaguma spēks  $mg$ , kas ir  $\text{Const}$ ., ja mēs neņemam vērā "g" maiņas likumu.



zīm.24.

Ņemsim kustības diferenciālnolīdzinājumu

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = mg$$

saīsināsim "m" un pārveidosim

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = g$$

tagad integrēsim

$$\dot{x} = gt + C_1$$

laiku skaitīsim no kustības sākuma momenta, tad  $t_0 = 0$  un ja sākuma momentā ātrums ir  $\dot{x}_0$ , tad

$$C_1 = \dot{x}_0$$

$$\boxed{\dot{x} = \dot{x}_0 + gt} \dots \dots \dots \text{(I integrāls)} \dots \dots \dots (10)$$

To pašu var uzrakstīt arī tā

$$\boxed{V_x = V_{0x} + gt}$$

Aizvietosim  $\dot{x}$  ar  $\frac{dx}{dt}$

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}_0 + gt$$

un integrējot tālāk

$$x = \dot{x}_0 t + \frac{gt^2}{2} + C_2$$

$C_2$  noteikšanai izlietēsim sākuma koordināti, t.i.  $x_0$  pie  $t_0 = 0$ , tad

$$x_0 = 0 + 0 + C_2$$

un galīgi punkta kustības nol-ms

$$\boxed{x = x_0 + \dot{x}_0 t + \frac{gt^2}{2}} \dots \dots \dots \text{(II integrāls)} \dots \dots \dots (11)$$

Kā rāda atrastais nol-ms punkta kustība ir vienmērīgi paātrināta.

III. gadījums.

Spēks funkcija no laika  $\mathcal{L} = f(t)$ . Uziat kustību  $x = f_x(t)$ .

Kā konkrētu piemēru ņemsim periodisku spēku, kas nāk priekšā elektrotehnikā  $\mathcal{L} = m b \text{Cos pt}$ . Šeit koeficienta "b" fizikalā nozīme ir - maksimālais spēks, kas darbojās uz katru masas vienību, jo pie  $m = 1$  un  $\text{Cos pt} = 1$  iznāk  $b = \mathcal{L}$ .

Ņemsim kustības diferenciālnolīdzinājumu

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = m \cdot b \cdot \cos pt$$

saīsināsim "m" un pārveidosim

$$\frac{dV_x}{dt} = b \cos pt$$

tālāk integrēsim

$$V_x = b \int \cos pt \cdot dt + C_1$$

$$V_x = \frac{b}{p} \sin pt + C_1$$

$C_1$  meklēsim no sākuma apstākļiem, pie  $t_0 = 0$ ,  $V_x = V_{ox}$ , tad  $C_1 = V_{ox}$

$$\boxed{V_x = V_{ox} + \frac{b}{p} \sin pt} \dots \text{(I integrāls)} \dots (12)$$

Aizvietosim  $V_x$  ar  $\frac{dx}{dt}$

$$\frac{dx}{dt} = V_{ox} + \frac{b}{p} \sin pt$$

un integrēsim

$$x = V_{ox}t + \frac{b}{p} \int \sin pt \cdot dt + C_2$$

$$x = V_{ox}t - \frac{b}{p^2} \cos pt + C_2$$

izlietosim sākuma apstākļus, pie  $t_0 = 0$ ,  $x = x_0$

$$x_0 = 0 - \frac{b}{p^2} \cdot 1 + C_2 \quad ; \quad C_2 = x_0 + \frac{b}{p^2}$$

un galīgi punkta kustības nol-ms

$$\boxed{x = x_0 + V_{ox}t + \frac{b}{p^2} (1 - \cos pt)} \dots \text{(II integrāls)} \dots (13)$$

#### IV. gadījums.

Spēks funkcija no ātruma  $\mathcal{R} = f(V)$ . Uziat kustību  $x = f_x(t)$ .

Šādi spēki ir pretestības spēki kustībai mediūmā jeb apvidē un vispārīgi tie ir proporcionāli ātrumam pakāpē "n" un ir virzīti arvien pret kustību



$$W = mkV^n$$

zīm. 25.

Pakāpes rādītājs "n" ir atkarīgs no ātruma V un no mediūma īpašībām, šo sakaru var izteikt grāfiski.

Koeficienta k fizikālā nozīme ir sekoša: tas ir pretestības spēks uz ktru masas vienību pie ātruma viena vienība, jo pie  $m = 1$  un  $V = 1$  iznāk  $k = W$ .

Divas metodes I integrāla iegūšanai.

Kad spēks  $\mathcal{R} = f(V_x)$ , attiecīgo diferenciālnolīdzinājumu  $m \frac{d^2x}{dt^2} = f(V_x)$  var nointegrēt divejādi, pēc laika un pēc koordinātas.

a) Integrēšana pēc laika.

Pārveidosim kreiso pusi  $m \frac{dV_x}{dt} = f(V_x)$ , šķirsim mainīgus  $\frac{m dV_x}{f(V_x)} = dt$  un integrēsim

$$\int \frac{m dV_x}{f(V_x)} = t + C_1$$

Rezultāts ir pirmais integrāls, no kura varam atrast ātrumu  $V_x$  kā funkciju no laika  $V_x = \varphi_1(t)$  un, aizvietojot  $V_x = \frac{dx}{dt}$ , integrēt otru reizi.

b) Integrēšana pēc koordinātas.

Nemsim to pašu nol-mu ar  $dx$   $m \frac{dV_x}{dt} = f(V_x)$ , pareizināsim un izdalīsim kreiso pusī

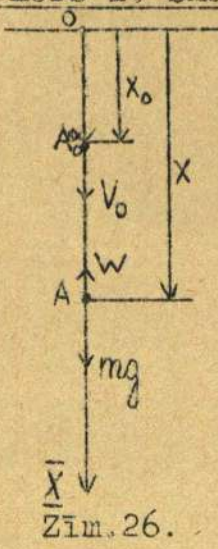
$$m \frac{dV_x}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = f(V_x), \text{ bet } \frac{dx}{dt} = V$$

$$\frac{m V_x dV_x}{dx} = f(V_x) \quad \text{šķirsim mainīgus} \quad \frac{m V_x dV_x}{f(V_x)} = dx \quad \text{un integrēsim}$$

$$\int \frac{m V_x dV_x}{f(V_x)} = x + C_1$$

Rezultāts ir pirmais integrāls, no kura varam atrast ātrumu  $V_x$  kā funkciju no koordinātes  $V_x = \varphi_2(x)$  un aizvietojojot  $V_x = \frac{dx}{dt}$ , varam integrēt tālāk. Piezīme. Gadījumā, ja otro reizi nointegrēt neizdodas, tad pielīdzinot abas  $V_x$  izteiksmes pēc laika  $V_x = \varphi_1(t)$  un pēc koordinātas  $V_x = \varphi_2(x)$ , varam dabūt sakaru starp  $x$  un  $t$  un algebrāiskā ceļā atrast  $x = f_x(t)$ .

Piemērs 1. Smaga materiāla punkta krišana gaisā, ja pretestība  $W$  ir proporcionāla ātruma pirmaj pakāpei  $W = m k V_x$ . Punktam ir dots sākuma ātrums  $V_0$  un sākuma koordināte:  $x_0$ .  $\bar{X}$  asi izvēlēsim vertikāli uz leju. Uz punktu tagad darbosies divi spēki - smaguma spēks  $mg$  pozitīvā virzienā uz leju un pretestības spēks  $W = mkV_x$  negatīvā virzienā pret kustību. Koeficienta "k" fizikālā nozīme, kā jau agrāk bija minēts, ir pretestības spēks uz katru masas vienību, pie ātruma  $V_x = 1$ .



Kustības diferenciālnol-ms

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = mg - mk V_x$$

saīsināsim ar  $m$

$$\frac{dV_x}{dt} = g - k V_x$$

šķirsim mainīgus un integrēsim

$$\int \frac{dV_x}{g - kV_x} = t + C_1$$

$$-\frac{1}{k} \int \frac{d(g - kV_x)}{g - kV_x} = t + C_1 \quad ; \quad -\frac{1}{k} \ln(g - kV_x) = t + C_1$$

Lai noteiktu Const.  $C_1$ , liksim pie  $t_0 = 0$  ātrumu  $V = V_0$

$$-\frac{1}{k} \ln(g - kV_0) = 0 + C_1$$

ievietojot  $C_1$  atrodam

$$\frac{1}{k} \ln(g - kV_0) - \frac{1}{k} \ln(g - kV_x) = t$$

$$\ln \frac{g - kV_0}{g - kV_x} = kt$$

$$\frac{g - kV_0}{g - kV_x} = e^{kt}$$

$$g - kV_x = (g - kV_0) \cdot e^{-kt}$$

$$kV_x = g - (g - kV_0) \cdot e^{-kt}$$

Zīm. 26.

$$V_x = \frac{g}{k} - \frac{g - kV_0}{k} \cdot e^{-kt} \quad \dots \text{I integrāls} \dots (14)$$

Atrastais I integrāls dod ātrumu kā funkciju no laika. Kā redzams no formulas, ja laiks pieaug, ātrums tiecās uz zināmu robežu, kuru dabūsim, liekot  $t = \infty$ . Šo ātruma robežu saucsim par kritisko ātrumu un apzīmēsim ar  $V_{kr}$

$$V_{kr} = \frac{g}{k} \quad \dots \text{kritiskais ātrums} \dots (15)$$

Kritiskam ātrumam ir vēl viena fizikāla nozīme, kuru dabūsim, liekot spēka  $W = mkV_x$  izteiksmē koeficientu

$$k = \frac{g}{V_{kr}} \quad \text{tad} \quad W = mg \frac{V_x}{V_{kr}}$$

Ja tagad punkts kustās ar kritisko ātrumu  $V_x = V_{kr}$ , tad pretestība  $W = mg$ , un mēs varam dēfinēt kritisko ātrumu kā tādu, pie kura pretestība  $W$  līdzinājas paša ķermeņa svaram. Ja punkts, kustoties zem smaguma spēka iespaida, ir sasniedzis kritisko ātrumu, tad tālāk viņš kustēsies vienmērīgi ar to pašu kritisko ātrumu.

Aizvietosim I integrālā  $V_x$  ar  $\frac{dx}{dt}$  un integrēsim otro reizi

$$\frac{dx}{dt} = \frac{g}{k} - \frac{g - kV_0}{k} \cdot e^{-kt}$$

$$x = \frac{gt}{k} - \frac{g - kV_0}{k} \int e^{-kt} \cdot dt + C_2$$

$$x = \frac{gt}{k} + \frac{g - kV_0}{k^2} \cdot e^{-kt} + C_2$$

no sākuma apstākļiem pie  $t_0 = 0$ ,  $x = x_0$

$$x_0 = 0 + \frac{g - kV_0}{k^2} \cdot 1 + C_2 \quad ; \quad C_2 = x_0 - \frac{g - kV_0}{k^2}$$

ieliekot  $C_2$  atrodam kustības nolīdzinājumu galīgā veidā

$$x = x_0 + \frac{gt}{k} - \frac{g - kV_0}{k^2} (1 - e^{-kt}) \quad \dots \text{II integrāls} \dots (16)$$

No atrastām ātruma un koordinātas formulām kritienam gaisā ir jādabū attiecīgas formulas brīvam kritienam vacuumā, kas bija apskatīts otrā gadījumā, ja liksim  $k = 0$ . Pārbaudot sacīto, redzam, ka liekot tieši  $k = 0$  formulās, mēs dabūjam nenoteiktības. Lai uzietu šo nenoteiktību īsto vērtību, izvirsīsim  $e^{-kt}$  rindā

$$e^{-kt} = 1 - \frac{kt}{1!} + \frac{(kt)^2}{2!} - \frac{(kt)^3}{3!} + \dots$$

tad

$$V_x = \frac{g}{k} - (V_0 - \frac{g}{k}) \left( 1 - \frac{kt}{1} + \frac{k^2 t^2}{1.2} - \frac{k^3 t^3}{1.2.3} + \dots \right)$$

$$V_x = \frac{g}{k} - \frac{g}{k} + V_0 + gt - V_0 kt - \frac{gkt^2}{2} + \frac{V_0 k^2 t^2}{1.2} + \dots$$

$$V_x = V_0 + gt - V_0 kt - \frac{gkt^2}{2} + \frac{V_0 k^2 t^2}{1.2} + \dots$$

pielīdzinot tagad  $k = 0$ , atrodam ātrumam to pašu formulu, kā II gadījumā

$$V_x = V_0 + gt \quad \dots (10)$$

$$\text{un } x = x_0 + \frac{gt}{k} - \left(\frac{g}{k^2} - \frac{V_0}{k}\right) \left(kt - \frac{k^2 t^2}{2} + \frac{k^3 t^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \dots\right)$$

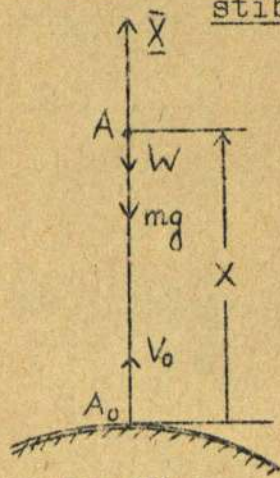
$$x = x_0 + \frac{gt}{k} - \frac{gt}{k} + V_0 t + \frac{gt^2}{2} - \frac{V_0 k t^2}{2} - \frac{g^2 t^3}{6} + \frac{V_0 k^2 t^3}{6} + \dots$$

$$x = x_0 + V_0 t + \frac{gt^2}{2} - \frac{V_0 k t^2}{2} - \frac{g k t^3}{6} + \frac{V_0 k^2 t^3}{6} + \dots$$

pielīdzinot tagad  $k = 0$ , atrodam to pašu kustības nol-mu, kā II gadījumā

$$x = x_0 + V_0 t + \frac{gt^2}{2} \dots (11)$$

Piemērs 2. Smaga materiāla punkta vertikālais sviediens medijā, kura pretestība  $W$  ir proporcionāla ātruma kvadrātam  $W = AV_x^2$



zīm. 27.

Punktam ir dots sākuma ātrums  $V_0$ , bet  $x_0 = 0$ .  $\bar{X}$  asi

nemsim kustības virzienā uz augšu. Dots ir kritiskais ātrums  $V_{kr}$ , bet koeficients  $A$  nav zinams.

- Uziet 1) celšanas laiku  $t_1$   
 2) celšanas augstumu  $h$   
 3) krišanas ātrumu  $V_2$   
 4) krišanas laiku  $t_2$

Ar kritiskā ātruma palīdzību varam izslēgt koeficientu  $A$ , ņemot vērā, ka pie kritiska ātruma, medija pretestība  $W$  līdzinājās ķermeņa svaram.

$$\left. \begin{aligned} W &= AV_x^2 \\ mg &= AV_{kr}^2 \end{aligned} \right\} \text{no kurienes } W = \frac{V_x^2}{V_{kr}^2}$$

1) Celšanās laiks.

Kustības diferenciālnolīdzinājums

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -mg - W$$

$$m \frac{dV_x}{dt} = -mg - mg \frac{V_x^2}{V_{kr}^2}$$

$$\frac{dV_x}{dt} = -g \left( 1 + \frac{V_x^2}{V_{kr}^2} \right)$$

$$\int \frac{dV_x}{1 + \frac{V_x^2}{V_{kr}^2}} = -gt + C_1$$

$$V_{kr} \cdot \arctg \frac{V_x}{V_{kr}} = -gt + C_1$$

No sākuma apstākļiem pie  $t_0 = 0$ ,  $V_x = V_0$

$$V_{kr} \cdot \arctg \frac{V_0}{V_{kr}} = 0 + C_1$$

$$V_{kr} \left( \arctg \frac{V_o}{V_{kr}} - \arctg \frac{V_x}{V_{kr}} \right) = gt$$

$$t = \frac{V_{kr}}{g} \left( \arctg \frac{V_o}{V_{kr}} - \arctg \frac{V_x}{V_{kr}} \right)$$

Laiks šeit ir atrasts kā funkcija no ātruma un pilnu celšanās laiku dabūsim, liekot  $V_x = 0$

$$t_1 = \frac{V_{kr}}{g} \arctg \frac{V_o}{V_{kr}} \dots\dots\dots(17)$$

Laika dimenziju šeit satur koeficients  $\frac{V_{kr}}{g}$ , jo arctg ir abstrakts skaitlis.

2) Celšanās augstums.

Ņemsim to pašu diferenciālnolīdzinājumu

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -mg - W$$

$$\frac{dV_x}{dt} = -g \left( 1 + \frac{V_x^2}{V_{kr}^2} \right)$$

bet integrēsim viņu pēc koordinātas

$$\frac{dV_x}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = - \frac{g}{V_{kr}^2} (V_{kr}^2 + V_x^2)$$

$$\int \frac{V_x dV_x}{V_{kr}^2 + V_x^2} = - \int \frac{g}{V_{kr}^2} dx + C_2$$

$$\frac{1}{2} \ln(V_{kr}^2 + V_x^2) = - \frac{g}{V_{kr}^2} x + C_2$$

no sākuma apstākļiem pie  $x = 0, V_x = V_o$

$$\frac{1}{2} \ln(V_{kr}^2 + V_o^2) = 0 + C_2$$

$$x = \frac{V_{kr}^2}{2g} \ln \frac{V_{kr}^2 + V_o^2}{V_{kr}^2 + V_x^2}$$

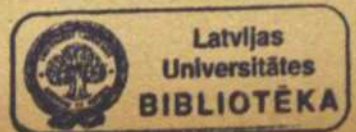
koordināta ir atrasta kā funkcija no ātruma un lai dabūtu pilnu celšanās augstumu, jāliek  $V_x = 0$

$$h = \frac{V_{kr}^2}{2g} \ln \left( 1 + \frac{V_o^2}{V_{kr}^2} \right) \dots\dots\dots(18)$$

Garuma dimenziju satur koeficients  $\frac{V_{kr}^2}{2g}$ , jo ln ir abstrakts skaitlis.

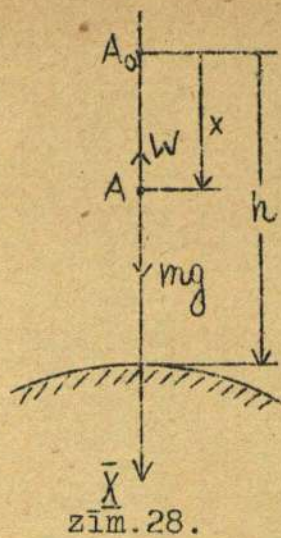
Pie krišanas jautājumiem mainīsim ass virzienu, t.i. ņemsim  $\bar{X}$  asi uz leju.

Sākuma apstākļi būs pie  $t_o = 0, x_o = 0, V_o = 0$ .



3) Krišanas ātrums.

Kustības diferenciālnolīdzinājums



$$m \frac{d^2x}{dt^2} = mg - W$$

$$m \frac{dV_x}{dt} = mg - mg \frac{V_x^2}{V_{kr}^2}$$

$$\frac{dV_x}{dt} = g \left( 1 - \frac{V_x^2}{V_{kr}^2} \right)$$

tālāk jāintegrē pēc koordinātas

$$\frac{dV_x}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{g}{V_{kr}^2} (V_{kr}^2 - V_x^2)$$

$$\int \frac{V_x dV_x}{V_{kr}^2 - V_x^2} = \int \frac{g}{V_{kr}^2} \cdot dx + C_3$$

$$-\frac{1}{2} \ln(V_{kr}^2 - V_x^2) = \frac{g}{V_{kr}^2} \cdot x + C_3$$

no sākuma apstākļiem pie  $x = 0, V_0 = 0$ .

$$-\frac{1}{2} \ln V_{kr}^2 = 0 + C_3$$

$$-\frac{1}{2} \ln(V_{kr}^2 - V_x^2) + \frac{1}{2} \ln V_{kr}^2 = \frac{g}{V_{kr}^2} \cdot x$$

$$x = -\frac{V_{kr}^2}{2g} \ln \frac{V_{kr}^2 - V_x^2}{V_{kr}^2}$$

$$x = -\frac{V_{kr}^2}{2g} \ln \left( 1 - \frac{V_x^2}{V_{kr}^2} \right)$$

pielīdzinot  $x = h$ , jāliek  $V_x = V_2$

$$h = -\frac{V_{kr}^2}{2g} \ln \left( 1 - \frac{V_2^2}{V_{kr}^2} \right)$$

$$\ln \left( 1 - \frac{V_2^2}{V_{kr}^2} \right) = -\frac{2gh}{V_{kr}^2}$$

$$1 - \frac{V_2^2}{V_{kr}^2} = e^{-\frac{2gh}{V_{kr}^2}}$$

$$V_2 = V_{kr} \sqrt{1 - e^{-\frac{2gh}{V_{kr}^2}}}$$

.....(19)



Šeit  $V_2$  ir atrasts kā  $f(h)$ , bet lai dabūtu  $V_2$  kā funkciju no  $V_0$ , pielīdzināsim abas  $h$  - izteiksmes

$$\frac{V_{kr}^2}{2g} \ln\left(1 + \frac{V_0^2}{V_{kr}^2}\right) = -\frac{V_{kr}^2}{2g} \ln\left(1 - \frac{V_2^2}{V_{kr}^2}\right)$$

$$\ln\left(1 + \frac{V_0^2}{V_{kr}^2}\right) = -\ln\left(1 - \frac{V_2^2}{V_{kr}^2}\right)$$

$$1 - \frac{V_2^2}{V_{kr}^2} = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{V_{kr}^2}}$$

$$\frac{V_2^2}{V_{kr}^2} = \frac{1 + \frac{V_0^2}{V_{kr}^2} - 1}{1 + \frac{V_0^2}{V_{kr}^2}} = \frac{\frac{V_0^2}{V_{kr}^2}}{1 + \frac{V_0^2}{V_{kr}^2}}$$

$$V_2 = \frac{V_0}{\sqrt{1 + \frac{V_0^2}{V_{kr}^2}}}$$

.....(20)

4) Krišanas laiks.

Ņemsim to pašu diferenciālnolīdzinājumu

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = mg - W$$

$$\frac{dV_x}{dt} = \frac{g}{V_{kr}^2} (V_{kr}^2 - V_x^2)$$

$$\frac{V_{kr}^2}{g} \int \frac{dV_x}{V_{kr}^2 - V_x^2} = \int dt + C_4$$

$$\frac{V_{kr}}{2g} \int \frac{[(V_{kr} - V_x) + (V_{kr} + V_x)] \cdot dV_x}{(V_{kr} + V_x)(V_{kr} - V_x)} = t + C_4$$

$$\frac{V_{kr}}{2g} \left[ \ln(V_{kr} + V_x) - \ln(V_{kr} - V_x) \right] = t + C_4$$

$$t = \frac{V_{kr}}{2g} \ln \frac{V_{kr} + V_x}{V_{kr} - V_x} - C_4$$

pie  $t_0 = 0$ ,  $V_0 = 0$  un  $C_4 = 0$

$$t = \frac{V_{kr}}{2g} \ln \frac{V_{kr} + V_x}{V_{kr} - V_x}$$

Krišanas laiku dabūsim liekot  $V_x = V_2$

$$t_2 = \frac{V_{kr}}{2g} \ln \frac{V_{kr} + V_2}{V_{kr} - V_2} \dots\dots\dots(21)$$

Lai dabūtu  $t_2$  kā funkciju no  $V_0$ , pārveidosim izteiksmi

$$\frac{V_{kr} + V_2}{V_{kr} - V_2} = \frac{V_{kr} + \frac{V_0}{\sqrt{1 + \frac{V_0^2}{V_{kr}^2}}}}{V_{kr} - \frac{V_0}{\sqrt{1 + \frac{V_0^2}{V_{kr}^2}}}} = \frac{\sqrt{V_{kr}^2 + V_0^2} + V_0}{\sqrt{V_{kr}^2 + V_0^2} - V_0} = \frac{(\sqrt{V_{kr}^2 + V_0^2} + V_0)^2}{V_{kr}^2 + V_0^2 - V_0^2} =$$

$$\left( \frac{V_0 + \sqrt{V_{kr}^2 + V_0^2}}{V_{kr}} \right)^2$$

$$t_2 = \frac{V_{kr}}{g} \cdot \frac{1}{2} \ln \left( \frac{V_0 + \sqrt{V_{kr}^2 + V_0^2}}{V_{kr}} \right)^2 ;$$

$$t_2 = \frac{V_{kr}}{g} \ln \left[ \frac{V_0}{V_{kr}} + \sqrt{1 + \left( \frac{V_0}{V_{kr}} \right)^2} \right] \dots\dots\dots(22)$$

V gadījums. Spēks funkcija no koordinātes:  $X = f(x)$ .

Uziet kustību:  $x = f_x(t)$ .

Diferenciālnolīdzinājumu šim gadījumam jāintegrē pēc otras (b) metodes, kas apskatīta IV-a gadījumā.

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = f(x)$$

$$m \frac{dV_x}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = f(x)$$

$$mV_x dV_x = f(x) \cdot dx$$

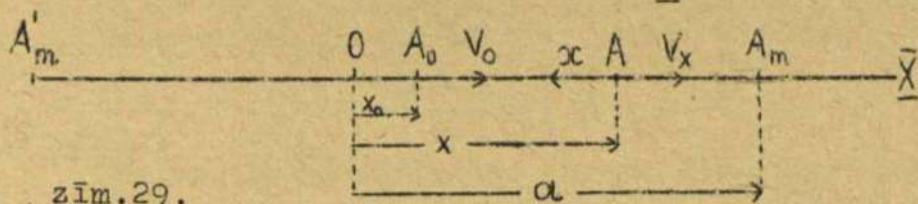
integrējot dabūjam

$$\frac{mV_x^2}{2} = \int f(x) \cdot dx + C_1 \dots\dots\dots (I \text{ integrāls})$$

no I integrāla atrodam  $V_x$  kā funkciju no  $x$  un aizvietojojam  $V_x$  ar  $\frac{dx}{dt}$ , varam integrēt otru reizi.

Piemērs: Spēks  $X = -mk^2x$ . Vienkārša harmoniska kustība.

Kā raksturīgu piemēru šim gadījumam izvēlēsim kustību zem pievilkšanas spēka, proporcionāla attālumam, no kaut kāda centra. Šinī centrā 0 izvēlēsim koordinātu sākumu un  $\bar{X}$  asi virzīsim tā, lai  $x_0$  būtu pozitīvs



$x_0 > 0$ , pie tam sākuma ātrums var būt kā pozitīvs, tā arī negatīvs jeb līdzināties 0:

$$V_0 \leq 0$$

zīm.29.

Koeficienta  $k^2$  fizikālā nozīme ir pievilkšanas spēks uz katru, masas vienību attālumā viena vienība, jo pie  $m = 1$  un  $x = 1$  iznāk  $k^2 = X$ . Ņemsim kustības diferenciālnolīdzinājumu

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -mk^2x$$

$$\frac{dV_x}{dt} = -k^2x$$

integrēsim pēc koordinātes

$$\frac{dV_x}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = -k^2x$$

$$\int V_x dV_x = - \int k^2x dx + C_1$$

$$\frac{V_x^2}{2} = - \frac{k^2x^2}{2} + C_1$$

sākumā pie  $t_0 = 0$ ;  $x = x_0$  un  $V = V_0$

$$\frac{V_0^2}{2} = - \frac{k^2x_0^2}{2} + C_1 ; C_1 = \frac{V_0^2}{2} + \frac{k^2x_0^2}{2}$$

ievietojot Const.  $C_1$ , atrodam

$$V_x^2 = V_0^2 + k^2x_0^2 - k^2x^2$$

ņemsim aiz iekavām  $k^2$

$$V_x^2 = k^2(x_0^2 + \frac{V_0^2}{k^2} - x^2)$$

$$V_x = \pm k \sqrt{x_0^2 + \frac{V_0^2}{k^2} - x^2}$$

zīmi saknei priekšā jāizvēl tādu, kāda bija sākuma ātrumam  $V_0$  un ja  $V_0 = 0$ , tad jāņem (-) zīmi, jo spēks pievelk punktu pie koordinātu sākuma.

Ievēdīsim apzīmējumu:  $x_0^2 + \frac{V_0^2}{k^2} = a^2$

$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{V_0^2}{k^2}}$  un pieņemsim  $V_0 > 0$ ,

tad  $V_x = k \sqrt{a^2 - x^2}$  ..... I integrāls .....(23)

Lai kustība būtu reāla, zem saknes jābūt pozitīvam lielumam, jeb nullei,

tas nozīmē, ka  $x \leq a$  un  $x_{\max} = \frac{1}{2} a$ , bet šādā gadījumā  $V_x = 0$ . Otrādi, ja  $x = 0$ , tad iznāk  $\max.V_x = ka$ . Pēc iegūtiem datiem izpētīsim kustību. Punkts, ka  $V_0 > 0$ , attālinājās no nullpunkta 0, noiet attālumā  $a$  un apstājās punktā  $A_m$ . Pēc tam zem pievilkšanas spēka iespaida punkts nāk atpakaļ, viņa ātrums pieaug un caurejot nullpunktu ātrums būs maksimāls. Tālāk viņš atkal apstājās otrā pusē attālumā ( $-a$ ), punktā  $A'_m$  un atkal maina kustības virzienu. Kā redzams, punkta kustība būs svārstīšanās kustība (oscilācija) starp punktiem  $A_m$  un  $A'_m$ , kuŗu sauc arī par vienkāršo harmonisko kustību.

Lielums "a" saucās par harmoniskās kustības amplitudu.

Aizvietosim I integrālā  $V_x = \frac{dx}{dt}$

$$\frac{dx}{dt} = k \sqrt{a^2 - x^2}, \text{ šķirsim nezināmos un integrēsim}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = kt + C_2$$

Nemot vērā, ka kreisā pusē iznāk arc-sin, Const.  $C_2$  izteiksim leņķa veidā un apzīmēsim ar  $\alpha$

$$\text{arc sin } \frac{x}{a} = kt + \alpha$$

$$\frac{x}{a} = \text{Sin}(kt + \alpha)$$

$$\boxed{x = a \text{ Sin}(kt + \alpha)} \quad \dots \text{II integrāls} \dots (24)$$

$\alpha$  - uziesim no sākuma apstākļiem, pie  $t_0 = 0$ ;  $x = x_0$

$$\boxed{\alpha = \text{arc sin } \frac{x_0}{a}} \quad \dots (25)$$

Amplituda  $a$  jau bija atrasta agrāk

$$\boxed{a = \sqrt{x_0^2 + \frac{V_0^2}{k^2}}} \quad \dots (26)$$

Atrasto kustības nolūdzinājumu (24) mēs vēl varam pārveidot:

$$x = a \text{ sin} \alpha \text{ cos } kt + a \text{ cos} \alpha \text{ sin } kt$$

ievedot apzīmējumus:  $a \text{ sin } \alpha = A$  un  $a \text{ cos} \alpha = B$  dabūsim

$$\boxed{x = A \text{ cos } kt + B \text{ sin } kt} \quad \dots (27)$$

Atrums augšā bija atrasts kā funkcija no  $x$ , lai dabūtu viņu kā funkciju no laika visizdevīgāk būs atvasināt formulu (24) pēc laika

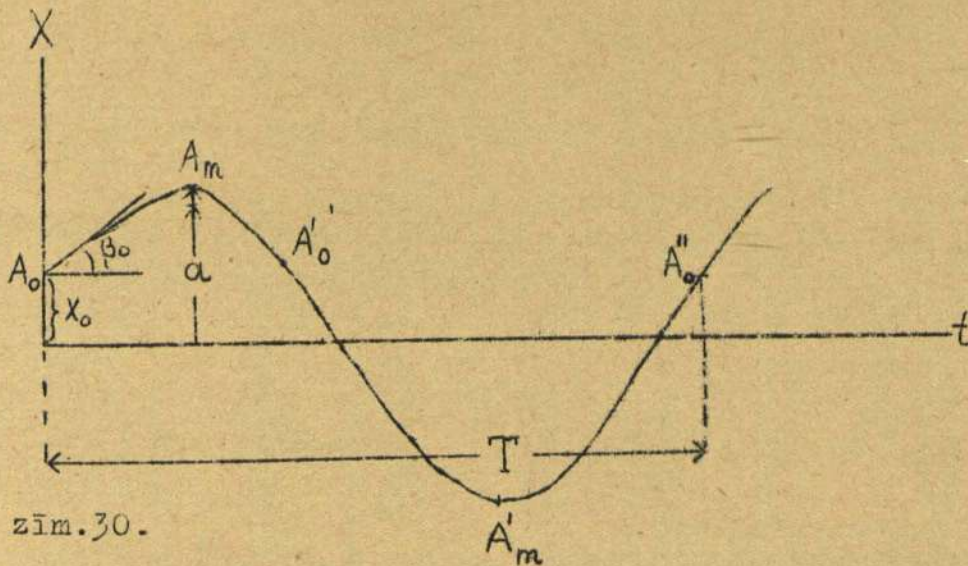
$$\boxed{V_x = ak \text{ cos}(kt + \alpha)} \quad \dots (28)$$

Sakarā ar šo varam atrast vēl vienu  $\alpha$  izteiksmi

pie  $t_0 = 0$   $\left\{ \begin{array}{l} x_0 = a \text{ sin } \alpha \\ V_0 = ak \text{ cos } \alpha \end{array} \right\}$  no kurienes  $\boxed{\text{tg } \alpha = \frac{kx_0}{V_0}}$  ....(25 bis)

Lai dabūtu labāku pārskatu par atrasto kustību, uzkonstruēsim attāluma ( $xt$ ) grafiku, kuŗa, kā rāda nolūdzinājums (24), būs sinusoida. Sinusoida

krustojās ar X - asi punktā  $A_0$  attālumā  $x_0$  no koordinātu sākuma. Sinusoidas tangente punktā  $A_0$  veido ar t-asi tādu leņķi  $\beta_0$ , ka  $\text{tg} \beta_0 = \dot{V}_0$ .



zīm.30.

Laiku, kurā p- kts izejot no kādas vietas noiet abos gala punktos  $A_m$  un  $A'_m$  un atgriežas atpakaļ, mēs sauksim par kustības periodu un apzīmēsim ar  $T$ . Lai dabūtu periodu  $T$ , pielīdzināsim abas  $x$  izteiksmes sākuma momentā, kurš atbilst punkta stāvoklim  $A_0$ .

ta stāvoklim  $A_0$ , un laika momenta  $T$ , kurš atbilst punkta stāvoklim  $A'_0$  (sk.zīm.30).

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= a \sin(0 + \alpha) \\ x_0 &= a \sin(kT + \alpha) \end{aligned} \right\} \quad \sin(kT + \alpha) = \sin(0 + \alpha)$$

Bet argumentiem tad jāatšķirās par  $2\pi$ , jo viens punkts  $A'_0$  ir vēl izlaists.

$$(kT + \alpha) - (0 + \alpha) = 2\pi \quad \text{no kurienes } T = \frac{2\pi}{k} \quad \dots \text{Periods} \dots (29)$$

Ļoti svarīgs ir apstākļi, ka kustības periods  $T$  nav nemaz atkarīgs no sākuma apstākļiem, t.i. no sākuma koordinātes, sākuma ātruma un arī no amplitūdes, bet tikai no lieluma  $k$ , kurš raksturo spēka intensitāti.

Lielumu  $\frac{1}{T}$ , kurš rāda, cik svārstīšanas notiek laika vienībā, sauc par frekvenci un apzīmē ar  $n$

$$n = \frac{1}{T} \quad \dots \dots \dots (30)$$

Kustoša punkta attāluma "x" grāfiska konstrukcija.

Ievilksim riņķi ar radiusu  $a$ . Atlikšim no horizontāla radiusa  $CO$  leņķi  $\alpha$ . No dabūtā radiusa  $CA_0$  atlikšim  $\angle A_0CA = kt$ .

Tagad viegli redzams, ka radiusa  $CA$  projekcija uz vertikālu radiusu  $CA_m$  ir

$$a \cos(90^\circ - \alpha - kt) = a \sin(kt + \alpha) = x$$

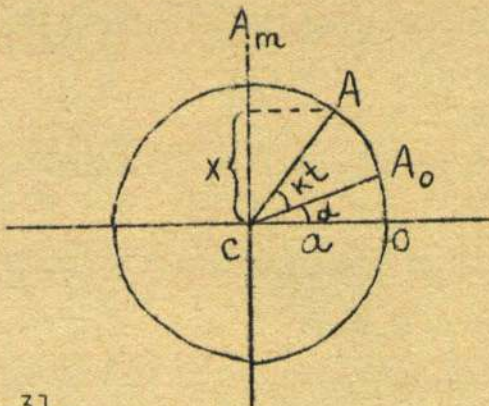
Atsperes elastības spēks.

Parādīsim, kā realizēt spēku, proporcionālu attālumam. Piekārsim pie atsperes materiālu punktu ar svaru  $mg$ . Zem minētā svara atsperē izstiepsies uz garumu  $l$ .

Vispārīgi atsperes izstiepšanās ir proporcionāla spēkam un ja proporcionalitātes koeficients ir  $k'$ , tad  $mg = k'l$ . Aizvietosim šo koeficientu  $k'$  ar citu:  $k' = mk^2$ , tad  $mg = mk^2l$ .

Tagad novilksim piekārtu ķermeni uz leju gabalu  $x$  līdz  $A$  un uziesim, kāds spēks darbosies uz viņu. Spēks  $X$  būs kopspeks no smaguma spēka  $mg$  un atsperes elastības spēkā, proporcionāla izstiepumam.

zīm.31.



$$X = mg - mk^2(\ell + x) = mg - mk^2\ell - mk^2x = -mk^2x$$

$X = -mk^2x$ . Kā redzams spēks ir pievilksšanas spēks, proporcionāls attālumam no punkta 0 un ir virzīts uz augšu.

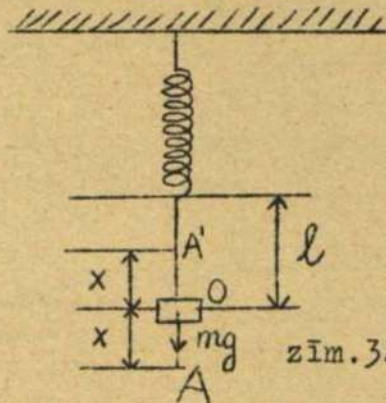
Analogiski, ja pacelsim ķermeni uz augšgabalu  $x$  līdz  $A'$ , spēks

$$X = mg - mk^2(\ell - x) = mg - mk^2\ell + mk^2x$$

$$X = mk^2x$$

Arī šinī gadījumā spēks ir proporcionāls attālumam, bet tikai virzīts uz leju.

Kā zinams, punkts, uz kuŗu darbojās tāds spēks, atradīsies vienkāršā svārstīšanās kustībā. Uziesim šīs kustības periodu, ņemot formulu(29).



$$T = \frac{2\pi}{k}, \text{ bet } k \text{ varam uziet no formulas}$$

$$mg = mk^2\ell$$

$$k = \sqrt{\frac{g}{\ell}}, \text{ tā tad } \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}} \dots(31)$$

Svārstīšanās perioda formula šinī gadījumā iznāk identiska ar matemātiskā svārstā, garumā  $\ell$ , periodu.

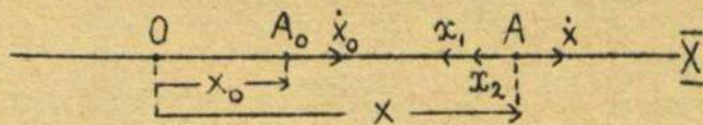
VI gadījums. Spēks funkcija no koordinātes un ātruma

$$X = f(x, \dot{x}).$$

Uziet kustību:  $x = f_x(t)$ .

Piemērs. Dziestoša svārstīšanās kustība.

Par dziestošu svārstīšanās kustību mēs sauksim svārstīšanās kustību ar pretestību, tad, bez spēka, proporcionāla attālumam, uz materiālu punktu darbosies vēl pretestības spēks. Mēs varam arī iedomāties, ka svārstīšanās kustība notiek medijumā, kuŗš uzrāda pretestību. Pieņemsim, ka sākumā pie  $t_0 = 0$  punkta koordināte ir  $x_0$  un ātrums  $\dot{x}_0$ .



zīm.33.

pirmai pakāpei, ar proporcionālītātes koeficientu  $2mh$ :

$$X_2 = 2mh\dot{x}$$

$$X = -mk^2x - 2mh\dot{x}$$

Koeficienta  $2h$  fizikalā nozīme ir pretestības spēks uz katru masas vienību pie ātruma viena vienība, jo pie  $m = 1$  un  $\dot{x} = 1$  iznāk  $2h = X_2$ .  $\bar{X}$  asi izvēlēsim tāpat, kā harmoniskā kustībā, t.i. tā, lai  $x_0 > 0$ .

Kustības diferenciālnolīdzinājums:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -mk^2x - 2mh\dot{x}$$

Saīsinot masu nonākam pie otras kārtības homogēna lineāra diferenciālnolīdzinājuma ar const. koeficientiem

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2x - 2h\dot{x}$$

Izlietosim substitūciju:  $x = e^{ct}$ , kur  $c$  ir pagaidam nenoteikts faktors.

Sastādīsim  $\dot{x} = e^{ct} \cdot \ddot{z} + ce^{ct} \cdot \dot{z} = e^{ct} (\ddot{z} + c\dot{z})$

$\ddot{x} = c^{ct} (\ddot{\ddot{z}} + c\dot{\ddot{z}}) + ce^{ct} (\ddot{\dot{z}} + c\dot{\dot{z}}) = e^{ct} (\ddot{\ddot{z}} + 2c\dot{\ddot{z}} + c^2\ddot{z})$

aizvietosim diferenciālnolīdzinājumā x ar z

$e^{ct} (\ddot{\ddot{z}} + 2c\dot{\ddot{z}} + c^2\ddot{z}) = -k^2 e^{ct} \cdot \ddot{z} - 2he^{ct} (\dot{\ddot{z}} + c\ddot{z})$

Saīsināsim  $e^{ct}$ , jo viņš nullei nelīdzinājās

$\ddot{\ddot{z}} + 2c\dot{\ddot{z}} + c^2\ddot{z} = -k^2\ddot{z} - 2h\dot{\ddot{z}} - 2ch\ddot{z}$

Tagad izvēlēsim  $c = -h$ , lai saīsinātos locekļi ar  $\dot{\ddot{z}}$

$\ddot{\ddot{z}} - 2h\dot{\ddot{z}} + h^2\ddot{z} = -k^2\ddot{z} - 2h\dot{\ddot{z}} + 2h^2\ddot{z}$

tad diferenciālnolīdzinājums galīgā veidā iznāk

$\ddot{\ddot{z}} = - (k^2 - h^2)\ddot{z} \dots\dots\dots(32)$

Pie atrastā diferenciālnolīdzinājuma integrēšanas var nākt priekšā 3 gadījumi:

- 1)  $h < k$       vāja pretestība
- 2)  $h = k$       vidēja pretestība
- 3)  $h > k$       liela pretestība

1.gadījums:  $h < k$ . Tad diferenciālnolīdzinājumā iekavās ir pozitīvs lielums, kurū varam pielīdzināt kādam  $\omega_0^2$

$k^2 - h^2 = \omega_0^2$

Diferenciālnolīdzinājums:  $\ddot{\ddot{z}} = -\omega_0^2\ddot{z}$ . Bet šāds diferenciālnolīdzinājums bija jau nointegrēts V gadījumā, pie kam integrāls pēc formulas (24) iznāca

$\ddot{z} = a \text{ Sin}(\omega_0 t + \alpha)$

kur a pēc formulas (26):

$a = \sqrt{\ddot{z}_0^2 + \frac{\dot{\ddot{z}}_0^2}{\omega_0^2}}$

un  $\alpha$  pēc formulām (25)

$\alpha = \text{arc Sin } \frac{\ddot{z}_0}{a}$  jeb  $\text{tg } \alpha = \frac{\omega_0 \dot{\ddot{z}}_0}{\ddot{z}_0}$

No substitūcijas  $x = e^{ct} \cdot \ddot{z} = e^{-ht} \cdot \ddot{z}$  galīgi kustības nolīdzinājums:

$x = a e^{-ht} \text{ Sin}(\omega_0 t + \alpha) \dots\dots\dots(33)$

kur a un  $\alpha$  kaut gan ir atrasti, bet izteikti caur  $\ddot{z}_0$  un  $\dot{\ddot{z}}_0$ ; izteiksim viņus caur sākuma apstākļiem  $x_0$  un  $\dot{x}_0$ . Šim nolūkam ņemsim  $x = e^{-ht} \cdot \ddot{z}$  un izlietosim viņu sākuma momentā  $t_0 = 0$ , tad  $x_0 = 1 \cdot \ddot{z}_0$

Analogiski atvasinot to pašu pēc laika

$\dot{x} = e^{-ht} (\dot{\ddot{z}} - h\ddot{z})$

un atkal izlietojot sākuma momentā  $t_0 = 0$ , atrodam  $\dot{x}_0 = \dot{\ddot{z}}_0 - h\ddot{z}_0$ , no

kurienes  $\dot{\ddot{z}}_0 = \dot{x}_0 + hx_0$

Tagad galīgā veidā

$$a = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{x_0 + hx_0}{\omega_0}\right)^2} \dots\dots\dots(34)$$

un  $\alpha = \arcsin \frac{x_0}{a} \dots(35)$  jeb  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{x_0 \omega_0}{x_0 + hx_0} \dots(35\text{bis})$

Šinīs formulās  $\omega_0 = \sqrt{k^2 - h^2}$ .

Apskatamās kustības ātrumu visērtāk dabūsim atvasinot pēc laika formulu (33)

$$\dot{x} = ae^{-ht} \cdot \omega_0 \cos(\omega_0 t + \alpha) - ahe^{-ht} \cdot \sin(\omega_0 t + \alpha)$$

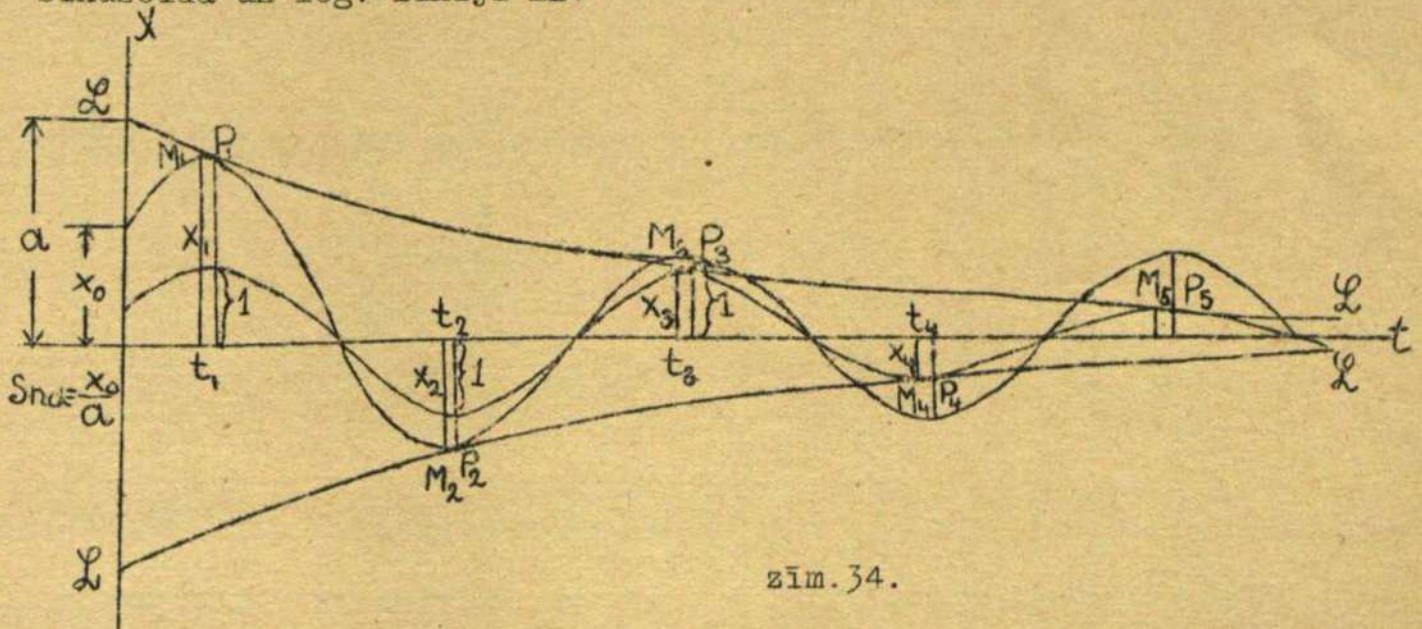
$$\dot{x} = ae^{-ht} \left[ \omega_0 \cos(\omega_0 t + \alpha) - h \sin(\omega_0 t + \alpha) \right] \dots\dots\dots(36)$$

Izpētīsim atrasto formulā (33) kustību. Pirmkārt konstatējam, ka tā ir svārstīšanās kustība, jo formulā ietilpst sinusa funkcija, bet otrkārt, faktors  $e^{-ht}$  aizrāda uz to, ka  $x$  ar laiku samazinās un  $x$  tiecas uz nulli. Tā tad svārstīšanās kustības amplitūdas samazinās un var teikt, ka svārstīšanās kustība nodziest. Tādēļ šis gadījums arī tiek saukts par dziestošu svārstīšanās kustību.

Lai attēlotu  $(xt)$  funkciju grafiski, uzskatīsim  $x$  kā reizinājumu no divām funkcijām:

- $ae^{-ht}$  - kura reprezentē logaritmisku līniju, un
- $\sin(\omega_0 t + \alpha)$  - sinusoidu.

Uzkonstruēsim katru līniju atsevišķi. Zīmējumā 34. ir parādīta sinusoida un log. līnija LL.



zīm. 34.

Logaritmiskās līnijas sākuma ordināte pie  $t_0 = 0$  iznāk  $a$ . Sinusoidas sākuma ordināte pie  $t_0 = 0$  iznāk  $\sin \alpha = \frac{x_0}{a}$ .  $(xt)$  līnijas ordinātas dabūjam pareizinoš logaritmiskās līnijas ordinātas ar sinusoidas ordinātām, no kurienes seko, pirmkārt: tur, kur sinusoida krustojās ar  $t$ -asi, arī  $(xt)$  līnija krustojās ar  $t$ -asi. Otrkārt, tur, kur sinusoi-



das ordinate ir 1, tur (xt) līnijas ordinate līdzinājās logaritmiskās līnijas ordinātēm, bet citās vietās (xt) līnija ies iekšpus logaritmiskās. Tā tad vispārīgi (xt) līnija ir ierakstīta logaritmiskā līnijā un pieskarās pie viņas zem sinusoidas maksimālām ordinātām punktos P<sub>1</sub>, P<sub>2</sub>, P<sub>3</sub>, P<sub>4</sub> un P<sub>5</sub>.

Kas attiecas uz x-līnijas maksimumiem, tad tie nesakrītīs ar sinusoidas maksimumiem, bet atradīsies viņiem priekšā punktos M<sub>1</sub>, M<sub>2</sub>, M<sub>3</sub>, M<sub>4</sub> un M<sub>5</sub>. Uziesim tagad kur atrodas x-līnijas maksimumi, šim nolūkam pielīdzināsim  $\frac{dx}{dt} = 0$ . Formula (36) tā tad dod

$$\omega_0 \cos(\omega_0 t + \alpha) - h \sin(\omega_0 t + \alpha) = 0 \quad \text{jeb} \quad \text{tg}(\omega_0 t + \alpha) = \frac{\omega_0}{h}$$

Atrisinot šo nol-mu attiecībā uz t dabūsim visus laika momentus, kuriem atbilst max.x. Apzīmēsim vismazāko ar t<sub>1</sub>, tad identiski

$$\text{tg}(\omega_0 t_1 + \alpha) = \frac{\omega_0}{h}, \quad t_1 = \frac{1}{\omega_0} \left[ \text{arc tg} \frac{\omega_0}{h} - \alpha \right]$$

Nākošo sakni t<sub>2</sub> uziesim no nol-ma  $\omega_0 t_2 + \alpha = \pi + \omega_0 t_1 + \alpha$ , no kurienes

$$t_2 = t_1 + \frac{\pi}{\omega_0}$$

pēc analogijas

$$t_3 = t_2 + \frac{\pi}{\omega_0} = t_1 + 2 \frac{\pi}{\omega_0}$$

$$t_4 = t_3 + \frac{\pi}{\omega_0} = t_1 + 3 \frac{\pi}{\omega_0}$$

Kā redzams, laika sprīži starp diviem maksimumiem ir visi vienādi:

$$t_4 - t_3 = t_3 - t_2 = t_2 - t_1 = \frac{\pi}{\omega_0}$$

Bet kustības periods ir laiks, kurā punkts noiet no viena maksimuma līdz otram un atpakaļ, tā tad viņš būs divreiz lielāks

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0}} \dots \dots \dots (37)$$

Meklēsim tagad pašus maksimumus jeb amplitudas. Liekot kustības nol-mā  $x = ae^{-ht} \cdot \sin(\omega_0 t + \alpha)$ , t = t<sub>1</sub> dabūsim pirmo amplitudu x<sub>1</sub>

$$x_1 = ae^{-ht_1} \sin(\omega_0 t_1 + \alpha), \quad \text{bet} \quad \text{tg}(\omega_0 t_1 + \alpha) = \frac{\omega_0}{h}$$

$$\sin(\omega_0 t_1 + \alpha) = \frac{\text{tg}(\omega_0 t_1 + \alpha)}{\sqrt{1 + \text{tg}^2(\omega_0 t_1 + \alpha)}} = \frac{\omega_0}{h \sqrt{1 + \frac{\omega_0^2}{h^2}}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{h^2 + \omega_0^2}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{h^2 + k^2 + h^2}} = \frac{\omega_0}{k}$$

pirmā amplitude

$$\boxed{x_1 = \frac{a\omega_0}{k} e^{-ht_1}} \dots \dots \dots (38)$$

Otro amplitudu x<sub>2</sub> dabūsim, liekot t = t<sub>2</sub> = t<sub>1</sub> +  $\frac{\pi}{\omega_0}$  formulā (33)

$$x = ae^{-ht} \sin(\omega_0 t + \alpha)$$

$$x_2 = ae^{-h(t_1 + \frac{\pi}{\omega_0})} \cdot \sin\left[\omega_0\left(t_1 + \frac{\pi}{\omega_0}\right) + \alpha\right] = ae^{-ht_1} \cdot e^{-\frac{\pi h}{\omega_0}} \cdot \sin\left[\pi + (\omega_0 t_1 + \alpha)\right]$$

$$x_2 = -ae^{-ht_1} \cdot \sin(\omega_0 t_1 + \alpha) \cdot e^{-\frac{\pi h}{\omega_0}} = -ae^{-ht_1} \cdot \frac{\omega_0}{k} \cdot e^{-\frac{\pi h}{\omega_0}}$$

galīgi  $x_2 = -x_1 \cdot e^{-\frac{\pi h}{\omega_0}}$

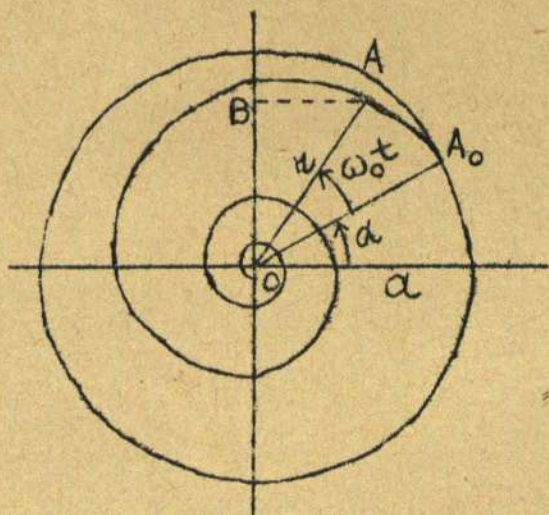
Analogiski  $x_3 = -x_2 \cdot e^{-\frac{\pi h}{\omega_0}} = +x_1 \cdot e^{-2\frac{\pi h}{\omega_0}}$

$x_4 = -x_3 \cdot e^{-\frac{\pi h}{\omega_0}} = -x_1 \cdot e^{-3\frac{\pi h}{\omega_0}}$

Salīdzinot atrastos rezultātus redzam, ka amplitudas samazinājās pēc geometriskas progresijas likuma, kurai

$$q = -e^{-\frac{\pi h}{\omega_0}} \dots \dots \dots (39)$$

Kustoša punkta attāluma x grafiska konstrukcija.



zīm.35.

Ņemsim formulu (18)  $x = ae^{-ht} \cdot \sin(\omega_0 t + \alpha)$

un ievēdīsim apzīmējumus  $\begin{cases} ae^{-ht} = r \\ \omega_0 t + \alpha = \varphi \end{cases}$

tad  $x = r \sin \varphi$ , bet izslēdzot laiku  $t = \frac{\varphi - \alpha}{\omega_0}$  no r un  $\varphi$

dabūsim  $r = ae^{-\frac{h}{\omega_0}(\varphi - \alpha)}$  logaritmiskās spirāles nol-mu.

Uzkonstruēsim viņu: sākumā pie  $t_0 = 0$ ,  $r_0 = a$  un  $\varphi_0 = \alpha$ . Ievilksim riņķi ar radiusu a. Spirāle tad sāksies punktā  $A_0$ , kurū dabūjam uz riņķa atliekot no horicontāla virziena centrālo lenķi  $\alpha$ . Kad spirāle būs uzkonstruēta pēc atrastā nol-ma, atliksim no sākuma radiusa-vektora  $OA_0$  lenķi  $\omega_0 t$ . Ņemot radiusa-vektora  $OA = r$

projekciju uz vertikālu virzienu, dabūsim x, jo projekcija

$$OB = r \cdot \sin(\omega_0 t + \alpha) = ae^{-ht} \sin(\omega_0 t + \alpha) = x$$

Punkts taisnvirzieniski kustās tā, ka viņa attālumi x no null-punkta līdzinājās log. spirāles radiusa-vektora projekcijai uz vertikālo virzienu.

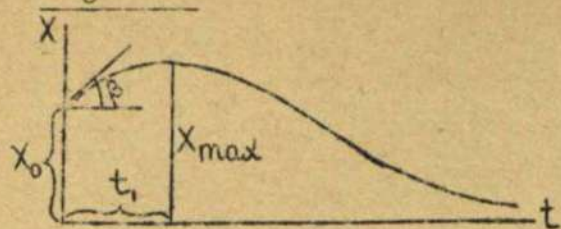
2)gadijums: h = k. Atgriežoties pie kustības diff-ncl-ma (32)

$\ddot{x} = -(k^2 - h^2)x$  redzam, ka viņš stipri vienkāršojās, pieņemot formu  $\ddot{x} = 0$  un integrējot to atrodam  $\dot{x} = A$  un  $x = At + B$ . Noteiksim integrēšanas konstantes A un B. Sākumā pie  $t_0 = 0$ ,  $\dot{x} = \dot{x}_0$  un  $x = x_0$ , no kurienes  $A = \dot{x}_0$  un  $B = x_0$ , integrāls:  $x = \dot{x}_0 t + x_0$ . Bet no izlietotās substitūcijas  $x = e^{-ht} \cdot \dot{x}$ , tā tad  $x = e^{-ht} [\dot{x}_0 t + x_0]$ . Agrāk vēl bija atrasts  $\dot{x}_0 = \dot{x}_0$  un  $\dot{x}_0 = \dot{x}_0 + hx_0$ , no kurienes galīgi

$$x = e^{-ht} [x_0 + (\dot{x}_0 + hx_0)t] \dots \dots \dots (40)$$

Šī formula rāda, ka 2)gadijumā punkta kustība vairs nebūs svārstīšanās kustība, jo kustības nol-mā nenāk iekšā Sin jeb Cos funkcijas. Izpētot atrasto kustību, atšķirsim 3 apakšgadijumus.

a)  $\dot{x}_0 > 0$ . Uzzīmēsim  $(xt)$  grafiku, ņemot vērā sekojošus apstākļus: sākuma ordinate  $x_0 > 0$ , sākuma tangente veido ar t-asi tādu leņķi, ka  $tg\beta = \dot{x}_0$ , visi locekļi formulā (26) iekavās ir pozitīvi, tas nozīmē, ka x-līnija arvienu paliek virs t-ase, bet reizinātājs  $e^{-ht}$  priekšā, samazina x vērtību, kura tiecas uz 0. Tā tad  $(xt)$  līnija paliekot pozitīvā pusē, asimptotiski tuvojas t-asiņ. Tādā gadījumā  $(xt)$  līnijai jābūt maksimums. Lai uzietu, kādā vietā šis maksimums būs, sastādīsim  $\frac{dx}{dt} = 0$



zīm. 36.

Sastādīsim  $\frac{dx}{dt} = 0$

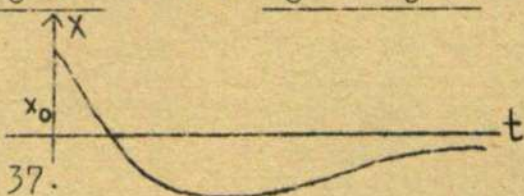
$$\frac{dx}{dt} = e^{-ht} (\dot{x}_0 + hx_0) - he^{-ht} [x_0 + (\dot{x}_0 + hx_0)t] = 0$$

Saisinām  $e^{-ht}$ , tad  $\dot{x}_0 + hx_0 - h[x_0 + (\dot{x}_0 + hx_0)t] = 0$ , apzīmējot attiecīgo sakni ar  $t_1$  atrodam  $t_1 = \frac{\dot{x}_0}{h(\dot{x}_0 + hx_0)}$

$$t_1 = \frac{\dot{x}_0}{h(\dot{x}_0 + hx_0)}$$

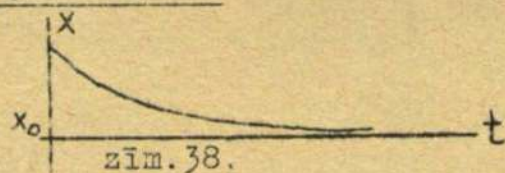
$$x_{max} = e^{-\frac{\dot{x}_0}{\dot{x}_0 + hx_0}} \cdot (x_0 + \frac{\dot{x}_0}{h})$$

b)  $\dot{x}_0 < 0$  un arī  $\dot{x}_0 + hx_0 < 0$ . Sākuma ordinate  $x_0 > 0$ , bet sākuma tangente ir virzīta uz leju un, ievērojot to, ka otrs loceklis kvadrātikavās ir negatīvs, pietiekoši lielā laikā otrs loceklis kļūs lielāks par pirmo un visa funkcija būs negatīva, līnija pāries zem t-asi un tur asimptotiski tuvosies pēdējai.



zīm. 37.

c)  $\dot{x}_0 + hx_0 = 0$ . Tad  $x = x_0 \cdot e^{-ht}$  un  $(xt)$  līnija būs vienkārši logaritmiska līnija, ar sākuma ordināti  $x_0$ , kura asimptotiski tuvojas t-asiņ.



zīm. 38.

3) gadījums:  $h > k$ . Tad diff-nol-mā (18)

$$\ddot{\xi} = -(k^2 - h^2)\xi \text{ labā pusē ir pozitīvs lielums, kuru varam apzīmēt ar } r^2, \quad -(k^2 - h^2) = r^2; \quad \ddot{\xi} = r^2\xi$$

$$\frac{d\xi}{dt} = r^2\xi \text{ pārveidosim kreiso pusi } \frac{d\xi}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dt} = r^2\xi; \quad \xi d\xi = r^2\xi dt \text{ integrējot}$$

$$\frac{\xi^2}{2} = r^2 \frac{t^2}{2} + C_1 \dots \dots \text{I integrāls. } \xi = \sqrt{r^2 t^2 + 2C_1};$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{r^2 t}{\sqrt{r^2 t^2 + 2C_1}}; \quad \frac{d\xi}{\sqrt{r^2 t^2 + 2C_1}} = dt \text{ reizināsim ar } r \text{ un integrēsim}$$

$$\int \frac{rd\xi}{\sqrt{r^2 \xi^2 + 2C_1}} = rt + C_2$$

$$\ln(r\xi + \sqrt{r^2 \xi^2 + 2C_1}) = rt + C_2, \text{ atsvabinoties no } \ln$$

$$r\xi + \sqrt{r^2 \xi^2 + 2C_1} = e^{rt + C_2}, \text{ ievēdīsim apzīmē-$$

$$\begin{aligned} \text{jumu } e^{C_2} = A ; r \xi + \sqrt{r^2 \xi^2 + 2C_1} &= Ae^{rt} ; \sqrt{r^2 \xi^2 + 2C_1} = Ae^{rt - r\xi} \\ r^2 \xi^2 + 2C_1 &= A^2 e^{2rt} - 2Ar \xi e^{rt} + r^2 \xi^2 \\ 2Ar \xi e^{rt} &= A^2 e^{2rt} - 2C_1 \\ \xi &= \frac{A}{2r} \cdot e^{rt} - \frac{C_1}{Ar} \cdot e^{-rt} \end{aligned}$$

Apzīmēsim  $\frac{A}{2r} = C$  un  $-\frac{C_1}{Ar} = D$ , un ievērojot, ka  $x = e^{-ht} \cdot \xi$ , dabūsim  
 $x = e^{-ht} [ C \cdot e^{rt} + D \cdot e^{-rt} ]$  un galīgi kustības nolīdzinājums

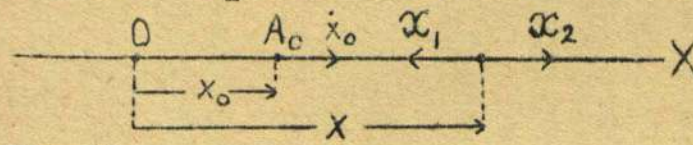
$$\boxed{x = C \cdot e^{(r-h)t} + D \cdot e^{-(r+h)t}} \dots\dots\dots (41)$$

Šinī gadījumā pie lielas pretestības  $h > k$  punkta kustība arī nebūs svārstīšanās kustība.

VII gadījums. Spēks funkcija no koordinātes un laika  $X = f(xt)$ .

Uziet  $x = f_x(t)$ .

Piemērs. Uzspiesta svārstīšanās kustība. Par uzspiestu svārstīšanās kustību mēs sauksim gadījumu, kad uz punktu bez jau pazīstamā pievilksanas spēka, proporcionāla attālumam  $X_1 = -mk^2x$ , darbojās vēl periodisks spēks, kuru pieņemsim sekošā veidā:  $X_2 = mb \cdot \text{Sin } pt$ . Šo spēku sauc arī par ierosinājošo spēku. Koeficienta  $k^2$  fizikalā nozīme bija jau noskaidrota V. gadījumā. Koeficienta  $b$  fizikalā nozīme ir maksimālais ierosinājušais spēks uz masas vienību, jo pie  $m = 1$  un  $\text{Sin } pt = 1$  iznāk  $b = X_2$ . Pieņemsim, ka sākumā pie  $t_0 = 0$  koordināte ir  $x_0$  un



ātrums  $\dot{x}_0$ . Uz punktu iedarbojošais spēks  $X = X_1 + X_2$ . Punkta kustības diff-nol-ms:  $m \frac{d^2x}{dt^2} = -mk^2x + mb \text{Sin } pt$

Zīm. 39.

Saīsinot masu dabūsim  $\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = b \text{Sin } pt \dots\dots\dots (42)$

Atrastais nol-ms ir otrās kārtības linears diff-nol-ms ar const. koeficientiem un ar labo daļu.

Fēc diferenciālnolīdzinājumu teorijas minētā diff-nol-ma integrāls ir summa no kreisās daļas pilna integrāla un kāda partikulāra integrāla visam nol-mam.

Apzīmēsim ar  $x_1$  integrālu diff-nol-mam  $\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0$  un ar  $x_2$  partikulāro integrālu visam nol-mam. Tad  $x = x_1 + x_2$ .

Kā zinams no V gadījuma kreisās puses integrāls

$$x_1 = a \text{Sin}(kt + \alpha)$$

Partikulāro integrālu visam diff-nol-mam meklēsim formā  $x_2 = C \text{Sin } pt$

Noskaidrosim, pie kāda  $C$  šis integrāls apmierinās diff-nol-mu. Šim nolūkam sastādīsim  $\dot{x}_2 = cp \text{Cos } pt$  un  $\ddot{x}_2 = -cp^2 \text{Sin } pt$

ieliksim šīs vērtības diff-nol-mā (42)

$$-cp^2 \text{Sin } pt + k^2c \text{Sin } pt = b \text{Sin } pt$$

$$c(k^2 - p^2) \cdot \text{Sin } pt = b \text{Sin } pt$$

Kā redzams diff-nol-ms būs apmierināts, ja koeficienti pie  $\text{Sin } pt$  abās

pusēs būs vienādi  $c(k^2 - p^2) = b$ , no kurienes  $c = \frac{b}{k^2 - p^2}$ , tad  $x_2 = \frac{b}{k^2 - p^2} \sin pt$  un pilns integrāls jeb punkta kustības nol-ms

$$x = a \sin(kt + \alpha) + \frac{b}{k^2 - p^2} \sin pt \dots\dots\dots(43)$$

Atrastā formulā ir redzami divi locekļi, no kuriem pirmais reprezentē punkta pašsvārstības, kuras izsauc spēks  $X_1$  un otrs loceklis reprezentē uzspiestas svārstības, kuras izsauc ierosinājošais spēks  $X_2$ . Šeit vēl jāpiezīmē, ka nol-mā (43) lielumus "a" un "α" nevar ņemt pēc agrāk atrastām V-a gadījumā formulām (25) un (26), bet ir jāatrod tieši pēc nol-ma (43) no sākuma apstākļiem.

Ja sākumā pie  $t_0 = 0$  koordināte ir  $x_0$  un ātrums  $\dot{x}_0$ , tad nol-ma (43) dod  $x_0 = a \sin \alpha$ . Diferencējot nol-mu (43) pēc laika, atrodam ātrumu

$$\dot{x} = ak \cos(kt + \alpha) + \frac{bp}{k^2 - p^2} \cos pt \dots\dots\dots(44)$$

un ievietojot  $t_0 = 0$  un  $\dot{x}_0$  dabūsim  $\dot{x}_0 = ak \cos \alpha + \frac{bp}{k^2 - p^2}$

$$a \sin \alpha = x_0 \quad ; \quad a \cos \alpha = \frac{1}{k} \left( \dot{x}_0 - \frac{bp}{k^2 - p^2} \right)$$

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{1}{k^2} \left( \dot{x}_0 - \frac{bp}{k^2 - p^2} \right)^2} \quad ; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{kx_0}{\dot{x}_0 - \frac{bp}{k^2 - p^2}} \text{ jeb arī } \alpha = \operatorname{arcsin} \frac{x_0}{a}$$

Rezonanses gadījums.

Apskatot formulu (43) redzam, ka uzspiestās kustības amplitude ir  $\frac{b}{k^2 - p^2}$  kur "b" bija maksimālais ierosinājošais spēks uz masas vienību. Šī izteiksme arī pie maza b var pieņemt lielas vērtības, ja difference starp k un p ir maza. Gadījumu, kad  $k = p$  sauc par rezonanses gadījumu. Šinī gadījumā

$$\frac{b}{k^2 - p^2} = \infty, \text{ bet tas aizrāda, ka rezonanses}$$

gadījumā atrastais integrāls (43) neder, jo  $x_2$  nevar tūlīt sasniegt bezgalīgi lielu vērtību, bet varētu pielāst, ka  $x_2$  pieaug proporcionāli laikam. Tādēļ, atstājot diff-nol-ma (42) kreisās puses integrālu to pašu  $x_1 = a \sin(kt + \alpha)$ , meklēsim diff-nol-ma partikulāro integrālu citā formā:  $x_2 = ct \cos pt$ , pie kam koeficientu c noteiksim tā, lai diff-nol-ms būtu apmierināts.

$$\dot{x}_2 = c \cos pt - cpt \sin pt$$

$$\ddot{x}_2 = -cp \sin pt - cp \sin pt - cp^2 t \cos pt = -2cp \sin pt - cp^2 t \cos pt$$

ievietosim šo diff-nol-mā (42)

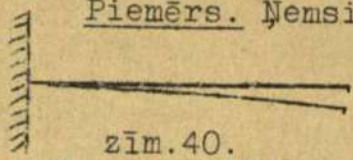
$$-2cp \sin pt - cp^2 t \cos pt + k^2 ct \cos pt = b \sin pt$$

bet  $k = p$ , tā tad paliek  $-2cp \sin pt = b \sin pt$ . Acimredzot, lai nol-ms būtu apmierināts:  $c = -\frac{b}{2p}$ . Tad partikulārais integrāls  $x_2 = -\frac{b}{2p} t \cos pt$  un pilns integrāls rezonanses gadījumā

$$x = a \sin(kt + \alpha) - \frac{b}{2p} t \cos pt \dots\dots\dots(45)$$

Kā redzams, uzspiestās kustības amplitude rezonanses gadījumā aug proporcionāli laikam.

Cita rezonanses pazīme. Rezonanses noteikums bija  $k = p$ . Pašsvārstības periods izteicās ar formulu (29)  $T_1 = \frac{2\pi}{k}$ . Ierosinājošā spēka periodu, ņemot vērā, ka  $X_2 = mb \sin pt$ , mēs dabūsim, pielīdzinot  $pT_2 = 2\pi$ , tad  $T_2 = \frac{2\pi}{p}$ . Bet ja  $p = k$ , tad  $T_1 = T_2$ . Tā ir vēl viena rezonanses pazīme: rezonanse iestājas tad, ja ierosinājošā spēka periods ir vienāds ar pašsvārstību periodu. Pašsvārstības periods, kā jau agrāk bija minēts, ir atkarīgs tikai no koeficienta  $k^2$  spēka formulā  $X_1 = -mk^2x$ , bet nav atkarīgs no sākuma koordinātes un ātruma.



zīm.40.

Piemērs. Ņemsim plakanu atsperi, iestiprinātu vienā galā, izvedīsim viņu no līdzsvara stāvokļa un palaidīsim vaļā. Atspere tad zem elastības spēku iespaida nonāks svārstīšanās kustībā, kuŗas periods būs atkarīgs no atsperes elastīgām īpašībām, bet nebūs atkarīgs no sākuma izlieces. Ja dosim atsperai vēl periodiskus triecienus ar roku, tad dabūsim bez pašsvārstībām vēl uzspiestas svārstības, pie kam ja abi periodi sakrītīs, uzspiesto svārstību amplitudas augs un ar samērā nelielu ierosinājošo spēku atsperi var saļauzt.

Rezonanses parādība var novērot tvaika mašīnu vārpstās, kuŗu ķermeņos, dzelzkonstrukcijās, uz kuŗām ir uzstādītas periodiski darbojošās mašīnas, ja šo mašīnu darbības periods sakrīt ar pašsvārstību periodu. Pats par sevi saprotams, ka rezonanses parādība ir kaitīga konstrukciju stiprībai un novērsama caur mašīnu darbības perioda maiņu.

VIII gadījums. Spēks funkcija no koordinātes, ātruma un laika:  $X = f(x \dot{x} t)$ .

Uziet kustību  $x = f_x(t)$ .

Kā piemēru apskatīsim gadījumu, kuŗā būtu apvienoti VI un VII, t.i. uzspiesta svārstīšanās kustība ar pretestību. Pieņemsim, ka uz punktu darbojošais spēks ir summa no 3 atsevišķiem spēkiem:  $X = X_1 + X_2 + X_3$

- kur  $X_1 = -mk^2x$  jau pazīstamais pievilkšanas spēks, proporcionāls attālumam,
- $X_2 = -2mh\dot{x}$  arī pazīstamais pretestības spēks, proporcionāls ātrumam.
- $X_3 = mb \sin pt$  arī pazīstamais periodiskais ierosinājošais spēks.

Punkta kustības diff-nol-ms:  $m\ddot{x} = -mk^2x - 2mh\dot{x} + mb\sin pt$

Saīsinot masu dabūsim:  $\ddot{x} + 2h\dot{x} + k^2x = b \sin pt$ . Otrās kārtības lineāru diff-nol-mu ar const. koeficientiem un ar labo daļu. Pirms integrēšanas, ierobežosimies ar vājas pretestības gadījumu, t.i.  $h < k$ .

Pēc diff-nol-mu teorijas pilns integrāls ir summa no kreisās pusēs integrāla  $x_1$  un kaut-kāda partikulāra integrāla visam diff-nol-mam  $x_2$ . Kreisās daļās integrālu dabūsim pielīdzinot viņu nullei:

$\ddot{x} + 2h\dot{x} + k^2x = 0$  un integrējot šo diff-nol-mu. Attiecīgais integrāls pie  $h < k$  bija jau atrasts VI gadījumā formulā (33)

$x_1 = ae^{-ht} \cdot \sin(\omega_0 t + \alpha)$ , kur  $\omega_0 = \sqrt{k^2 - h^2}$ , bet a un  $\alpha$  būs jāatrod vēlāk no pilna integrāla, izlietojot sākuma apstākļus.

Partikulāram integrālam izvēlēsim formu

$x_2 = A \cos pt + B \sin pt$

un noteiksim koeficientus A un B tā, lai viņi apmierinātu diff-nol-mu. Sastādīsim  $\ddot{x}_2 = -A p^2 \sin pt + B p^2 \cos pt$

$\ddot{x}_2 = -A p^2 \cos pt - B p^2 \sin pt$  un ieliksīm viņus diff-nol-mā

$-A p^2 \cos pt - B p^2 \sin pt - 2hA p \sin pt + 2hB p \cos pt + k^2 A \cos pt + k^2 B \sin pt = b \sin pt$

$(-A p^2 + 2hB p + k^2 A) \cos pt + (-B p^2 - 2hA p + k^2 B) \sin pt = b \sin pt$

Nol-ms acimredzot būs apmierināts, ja kreisā un labā pusē koeficienti pie Cos pt un Sin pt būs vienādi

$$\begin{cases} (k^2 - p^2)A + 2hpE_p = 0 \\ (k^2 - p^2)B - 2hAp = b \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} 2hp \\ k^2 - p^2 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} k^2 - p^2 \\ 2hp \end{array} \right\} -$$

Atrisinot šo nol-mu sistēmu, atrodam

$$B = \frac{b(k^2 - p^2)}{(k^2 - p^2)^2 + 4h^2p^2}, \quad A = -\frac{2phb}{(k^2 - p^2)^2 + 4h^2p^2}$$

Iekams mēs liksim pilna integrāla izteiksmē partikulāro integrālu  $x_2 = A \cos pt + B \sin pt$ , pārveidosim vēl pēdējo, ņemot aiz iekavām  $\sqrt{A^2 + B^2}$ .

$$x_2 = \sqrt{A^2 + B^2} \left( \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos pt + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin pt \right)$$

bet lielums  $\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} < 1$  un arī  $\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} < 1$ , kādēļ varam

pielīdzināt  $\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \sin \delta$  un  $\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \cos \delta$

$$\text{Tad } x_2 = \sqrt{A^2 + B^2} (\sin \delta \cos pt + \cos \delta \sin pt) = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(pt + \delta)$$

$$\text{Uziesim vēl } \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{\frac{b^2(k^2 - p^2)^2 + 4p^2h^2b^2}{[(k^2 - p^2)^2 + 4p^2h^2]^2}} = \frac{b}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4p^2h^2}}$$

$$\text{Galīgi } x_2 = \frac{b}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4p^2h^2}} \cdot \sin(pt + \delta)$$

Visi lielumi, kuri ieiet šinī formulā b, k, p, h ir doti, paliek tikai at-  
rast  $\delta$ , kuŗa tang. dabūsim, izdalot  $\sin \delta$  caur  $\cos \delta$

$$\text{tg } \delta = \frac{A}{B}, \quad \boxed{\text{tg } \delta = -\frac{2ph}{k^2 - p^2}} \dots \dots \dots (46)$$

Pilns integrāls jeb punkta kustības nol-ms iznāk

$$\boxed{x = ae^{-ht} \cdot \sin(\omega_0 t + \alpha) + \frac{b}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4p^2h^2}} \cdot \sin(pt + \delta)} \quad (47)$$

Vēlreiz jāpastrīpo, ka a un  $\alpha$  šinī nol-mā nevar ņemt pēc formulām (34) un (35), bet ir jāatrod tieši no sākuma apstākļiem.

Atrastā nol-mā (47) kustība sastādas no dziestošas svārstīšanās kustības, reprezentētas ar pirmo locekli un uzspiestas svārstīšanās kustības, reprezentētas ar otro locekli. Kā redzams no formulas (47), ar laiku pirmā daļa izdzisis un paliks tikai otrā.

Uzspiestās svārstīšanās kustības amplitude būs otra locekļa koeficients  $a_2 = \frac{b}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4p^2h^2}}$ . Rezonanses gadījumā, t.i. kad  $p=k$ ,

minētā amplitude iznāk  $a_2 = \frac{b}{2ph}$ , kur "b" raksturo ierosinājošo spēku.

Kā redzams amplitude <sup>ne</sup>iznāk bezgalīgi liela pateicoties pretestības spēkam, kuŗš ir raksturots ar koeficientu h. Bet ja pretestība ir vāja, t. i. h ir mazs, tad amplitude  $a_2$  var rezonanses gadījumā iznākt diezgan liela.

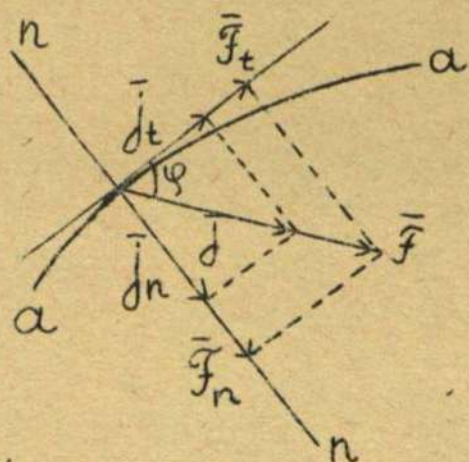
§ 4. Brīva materiāla punkta likumaina kustība plaknē.

No kinēmatikas ir zināms, ka punkta ātruma un paātrinājuma vektori atrodas trajektorijas pieslejas plaknē, kurā guļ arī galvenā normāle. Dināmas pamatnolīdzinājums:  $m\vec{j} = \vec{F}$ .

Ja paātrinājums  $\vec{j}$  jeb spēks  $\vec{F}$  neizies no minētās plaknes, tad arī trajektorija paliks šinī plaknē un mēs varam formulēt: materiāla punkta kustība notiks plaknē tad, ja uz viņu darbojošais spēks paliks tajā plaknē.

Punkta kustības diferenciālnol-mi pēc Eulera.

Projecēsim dināmas pamatnolīdzinājumu  $m\vec{j} = \vec{F}$  uz trajektorijas (a-a) tangenti un galveno normali.



$$mj_t = F_t \quad \left| \quad \begin{array}{l} j_t = \frac{dv}{dt} \\ j_n = \frac{v^2}{\rho} = v \frac{d\varepsilon}{dt} \end{array} \right. \text{bet}$$

$F_t = F \cdot \cos\varphi$  - sauc par tangenciālo spēku  
 $F_n = F \cdot \sin\varphi$  - sauc par normālo spēku.

$$1) \quad m \frac{dv}{dt} = F_t \quad \dots (48)$$

$$2) \quad m \frac{v^2}{\rho} = F_n \quad \text{jeb} \quad mV \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} = F_n$$

zīm.41.

Pievienojot šiem nol-miem vēl 3)  $F_b = 0$ , jo ārvienu  $j_b = 0$ , varam viņus lietot arī kustībai telpā, jo tad katrā momentā kustība notiek pieslajas plaknē.

Izpētīsim kādu iespaidu uz punkta kustību atstāj spēka tangenciāla un normāla komponente.

No 1) nol-ma atrodam:  $dv = \frac{F_t}{m} \cdot dt$

Kā redzams, punkta ātrums būs lielāks, jo lielāks būs tangenciālais spēks  $F_t$ .

No 2) nol-ma atrodam  $d\varepsilon = \frac{F_n}{mV} \cdot dt$  jeb arī  $\frac{1}{\rho} = \frac{F_n}{mV^2}$

Pirmā formula rāda, ka kontingences lenķis jeb trajektorijas līcība  $k$  būs lielāka, jo lielāks ir normālais spēks  $F_n$ , bet otra formula rāda, ka  $\rho$  ir mazāks, jo lielāks normālais spēks  $F_n$ .

Speciāls gadījums: 1) Lenķis  $\varphi = 0$  jeb  $\varphi = \pi$

tad  $F_n = F \cdot \sin\varphi = 0$  | bet ja  $F_n = 0$ , tad  $\frac{1}{\rho} = 0$   
 $F_t = F \cdot \cos\varphi = \pm F$  | un  $\rho = \infty$ , tas aizrāda, ka trajektorija būs taisna līnija.

Speciāls gadījums: 2) Lenķis  $\varphi = \frac{\pi}{2}$

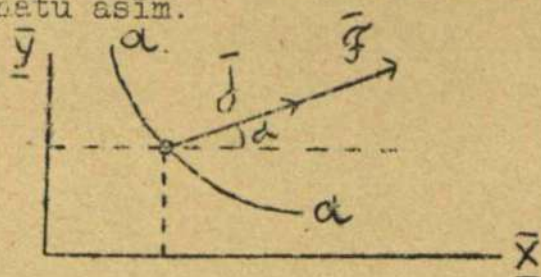
tad  $F_t = F \cdot \cos\varphi = 0$  | bet ja  $F_t = 0$ , tad  $\frac{dV}{dt} = 0$  un  $V = \text{Const.}$ ,  
 $F_n = F \cdot \sin\varphi = F$  | tas nozīmē, ka kustības ātrums būs Const.

Apakšgadījumā, ja bez tam vēl  $F = \text{Const.}$ , tad  $\frac{1}{\rho} = \frac{F}{mV_0^2} = \text{Const.}$  un trajektorija būs riņķis.



Punkta kustības dif-nol-mi pēc Mac-Laurina.

Projecēsīm dināmasikas pamatnolīdzinājumu  $m\vec{j} = \vec{F}$  uz nekustošām koordinātu asīm.



$$\begin{aligned} m j_x &= F \cdot \text{Cosa} \\ m j_y &= F \cdot \text{Sina} \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} \text{jeb } \boxed{m\ddot{x} = X} \\ \boxed{m\ddot{y} = Y} \end{array} \right. \dots\dots\dots(49)$$

Jautājumi likumainā kustībā plaknē.

Tāpat kā taisnvirziena kustībā visus jautājumu attiecībā uz punkta likumaino kustību plaknē, var iedalīt divās grupās:

zīm.42.

I. grupa: Pēc dotas kustības uziet spēku.

II. grupa: Pēc dota spēka uziet punkta kustību.

Apskatīsim katru atsevišķi.

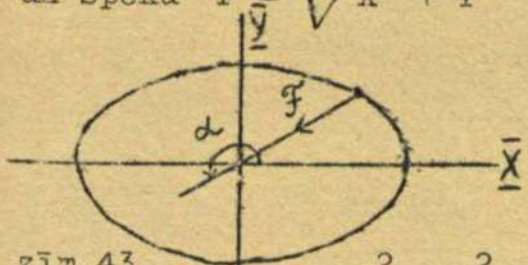
I. grupa. Pēc dotas kustības uziet spēku.

Doti punkta kustības nol-mi plaknē  $\begin{cases} x = f_x(t) \\ y = f_y(t) \end{cases}$

Uziet spēku F un viņa virzienu  $\angle\alpha$ , kuru viņš veido ar  $\bar{X}$  - asi.

Sastādam  $\dot{x} = f'_x(t) \quad | \quad \ddot{x} = f''_x(t) \quad | \quad X = m\ddot{x} = mf''_x(t)$   
 atvasinātas  $\dot{y} = f'_y(t) \quad | \quad \ddot{y} = f''_y(t) \quad | \quad Y = m\ddot{y} = mf''_y(t)$

un spēku  $F = \sqrt{X^2 + Y^2}$ ,  $\text{Cosa} = \frac{X}{F}$



Piemērs uz I.grupu

Doti  $x = a \text{Cos} kt \quad | \quad \text{Uziet spēku F un virzienu } \alpha.$   
 $y = b \text{Sin} kt$

Izslēdzot laiku noskaidrojam, ka punkta

zīm.43. trajektorija ir  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ellipse.

Sastādam  $\dot{x} = -ak \text{Sin} kt \quad | \quad \ddot{x} = -ak^2 \text{Cos} kt = -k^2 x$   
 atvasinātas  $\dot{y} = bk \text{Cos} kt \quad | \quad \ddot{y} = -bk^2 \text{Sin} kt = -k^2 y$

$X = -mak^2 \text{Cos} kt = -mk^2 x$   
 $Y = -mbk^2 \text{Sin} kt = -mk^2 y$  } Spēka projekcijas kā f(t) un kā f(xy)

$F = \pm \sqrt{X^2 + Y^2} = \pm mk^2 \sqrt{x^2 + y^2} = \pm mk^2 r$

$F = \pm mk^2 r$  spēks ir proporcionāls attālumam

$\text{Cosa} = \frac{X}{F} = \frac{-mk^2 x}{mk^2 r} = -\frac{x}{r}$ ,  $\angle\alpha$  atrodas III kvadrantā,

Spēks F ir pievilkšanas spēks un viņu jāraksta ar negatīvu zīmi

$\boxed{F = -mk^2 r}$

II grupa. Pēc dotā spēka uziet punkta kustību.

Dotas spēka komponentes X un Y jeb spēks F un viņa virziens  $\angle\alpha$ . Uziet kustības nol-mus:  $x = f_x(t)$  un  $y = f_y(t)$ .

Tāpat kā taisnvirziena kustībā, šīs grupas jautājumi ir sarežģītāki, jo attiecīgos dif-nol-mus būs divreiz jāintegrē, lai dabūtu kustības nol-mus.

Ņemot vērā, ka vispārīgi spēka projekcijas X un Y var būt funkcijas no  $x, y, \dot{x}, \dot{y}$  un  $t$

$$X = f_1(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t) \quad , \quad Y = f_2(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t)$$

kustības diff-nol-mi būs

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= f_1(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t) \\ m\ddot{y} &= f_2(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t) \end{aligned} \right\} \text{Simultāni diff-nol-mi}$$

Katrs diff-nol-me ir otras kārtas, bet viņus vispārīgi atsevišķi neintegrēt nevar, jo diff-nol-mā priekš  $x$  nāk arī iekšā  $y$  un  $\dot{y}$ , tāpat nol-mā priekš  $y$  nāk iekšā  $x$  un  $\dot{x}$ . Šādus nol-mus ir jāintegrē kopā un viņi reprezentē tā saukto simultāno diff-nol-mu sistēmu, kuru var neintegrēt tikai speciālos gadījumos. Katru nol-mu ir jāintegrē 2 reizes un tad nāks iekšā 4 integrēšanas konstantes, atrodamas no sākuma apstākļiem, kuriem jābūt dotiem:  $x_0, y_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0$ .

Noskaidrosim, kādi spēki dos brīvam punktam kustību plaknē.

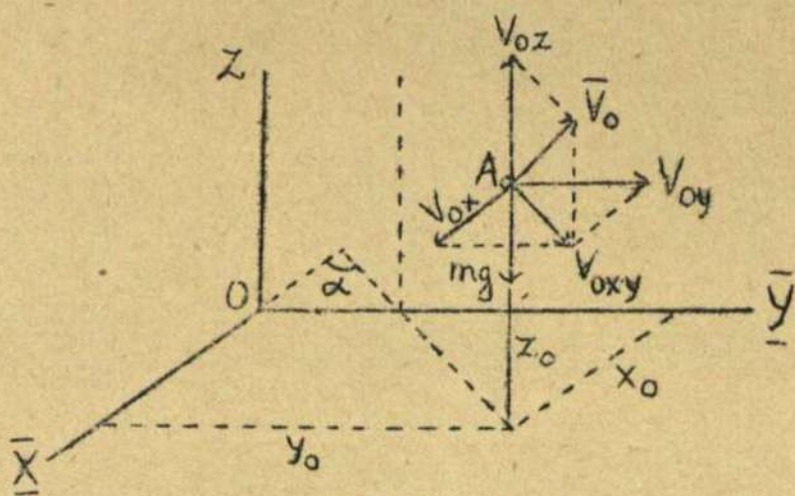
Teorēma I. Kustība zem smaguma spēka iespaida arvienu notiks vertikālā plaknē, vilktā caur sākuma ātruma vektoru  $\bar{V}_0$ . Pierādīsim sa-

cīto.

Gadījumā, kad smagam materiālam punktam dots sākuma ātrums slīpi pret horizontu, sauc par slīpo sviedrienu.

Apskatīsim, pirmkārt, slīpo sviedrienu bez gaisa pretestības (t.i. vacuumā).

Z-asi izvēlēsim vertikāli uz augšu. Apzīmēsim kustības sākuma punkta  $A_0$  koordinātes ar  $(x_0, y_0, z_0)$  un sākuma ātruma vektora  $\bar{V}_0$  pro-



zīm.44.

jekcijas uz izvēlētām asīm ar  $V_{ox}, V_{oy}, V_{oz}$ .

Vienīgais, uz punktu darbojossais, spēks ir smaguma spēks  $F = mg$  un viņa projekcijas uz asīm

$$F_x = 0 \quad , \quad F_y = 0 \quad , \quad F_z = -mg$$

Izlietosim kustības diff-nol-mus pēc Mac-Laurina  $O\bar{X}$  un  $O\bar{Y}$  ass virzienos. Saīsinot masu varam rakstīt

$$\begin{aligned} j_x &= 0 \\ \frac{dV_x}{dt} &= 0 \quad \text{integrējot atrodam} \\ V_x &= C_1 \\ \text{no sākuma apstākļiem pie } t_0 = 0 \\ V_{ox} &= C_1 \\ V_x &= V_{ox} \\ \frac{dx}{dt} &= V_{ox} \quad \text{integrējot atrodam} \\ x &= V_{ox}t + C_2 \\ \text{no sākuma apstākļiem pie } t_0 = 0; x = x_0 \\ x_0 &= C_2 \\ \boxed{x = x_0 + V_{ox} \cdot t} & \dots (50) \end{aligned}$$

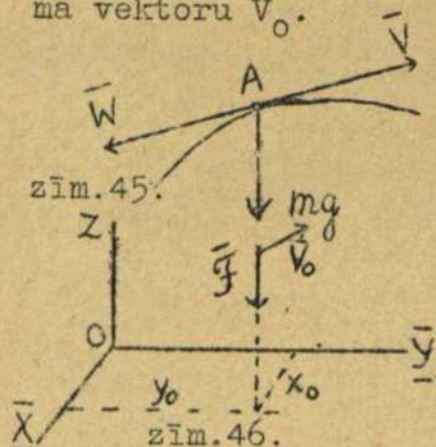
$$\begin{aligned} j_y &= 0 \\ \frac{dV_y}{dt} &= 0 \quad \text{integrējot atrodam} \\ V_y &= C_3 \\ \text{no sākuma apstākļiem pie } t_0 = 0 \\ V_{oy} &= C_3 \\ V_y &= V_{oy} \\ \frac{dy}{dt} &= V_{oy} \quad \text{integrējot atrodam} \\ y &= V_{oy}t + C_4 \\ \text{no sākuma apstākļiem pie } t_0 = 0; y = y_0 \\ y_0 &= C_4 \\ \boxed{y = y_0 + V_{oy} \cdot t} & \dots (50^a) \end{aligned}$$

Izslēdzot laiku  $t$  no nol-miem (50),  $t = \frac{x - x_0}{V_{ox}}$ , atrodam

$$y - y_0 = \frac{V_{oy}}{V_{ox}} (x - x_0) \dots\dots\dots (51)$$

Kustoša punkta koordinātes  $x$  un  $y$  ir saistītas ar lineāru nol-mu, kurš nesatur  $z$ , bet tas nozīmē, ka trajektorija atrodas vertikālā plāknē. Bez tam šī plākne veidos ar  $\overline{XZ}$  plākni tādu leņķi  $\alpha$ , kuram

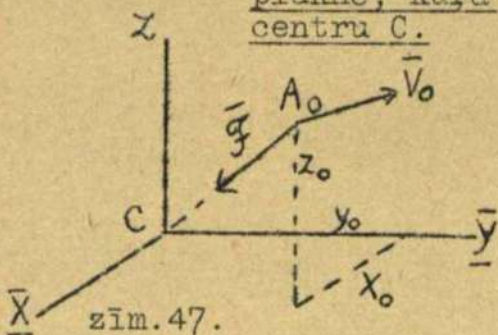
$\text{tga} = \frac{V_{oy}}{V_{ox}}$ , bet sākuma ātruma projekcija uz  $\overline{XY}$  plākni:  $V_{oxy}$  veidos ar  $\overline{X}$  asi to pašu leņķi  $\alpha$  ar  $\text{tga} = \frac{V_{oy}}{V_{ox}}$ , kādēļ nākam pie slēdziena, ka minētā vertikālā plākne, kurā atrodas trajektorija, ies caur sākuma ātruma vektoru  $\overline{V}_0$ .



Piezīme 1) Pierādītā teorēma nezaudē savu nozīmi arī tad, ja kustība notiek mediumā, kurš uzrāda pretestību un bez smaguma spēka uz punktu darbojās vēl pretestības spēks  $\overline{W}$ , jo šis pretestības spēks  $\overline{W}$  ir arvienu virzīts pret ātruma vektoru  $\overline{V}$  un darbojas tanī pašā vertikālā plāknē, caur sākuma ātrumu  $\overline{V}_0$ .

Piezīme 2) Pierādīto teorēmu var attiecināt ne tikai uz smaguma spēku, bet arī uz katru spēku  $\overline{F}$ , kurš arvienu paliek perpendikulārs kādai plāknei  $\overline{XY}$ , bet pats var būt mainīgs. Trajektorija tad atradīsies plāknē paralēli  $OZ$  asij.

Teorēma II. Zem centrāla spēka iespaida brīva punkta kustība notiek plāknē, kura iet caur sākuma ātruma vektoru  $\overline{V}_0$  un spēka centru  $C$ .



Par centrālo spēku sauc tādu spēku  $\overline{F}$ , kurš arvienu iet caur noteiktu punktu  $C$ , spēka centru. No dinamikas pamatnol-ma  $m\dot{\mathbf{j}} = \overline{F}$  redzam, ka arī paātrinājuma vektors  $\mathbf{j}$  ies caur to pašu punktu  $C$  un materiāla punkta kustība būs centrāla. Šinī centrā  $C$  izvēlam koordinātu sākumu. Kā zinams no kinēmatikas, centrālā kustībā sektoriāls ātrums  $\overline{G}$  ir  $\text{const.}$  un visas viņa 3 projekcijas uz asīm arī. Apzīmē-

sim  $G_x = \frac{A}{2}$ ,  $G_y = \frac{B}{2}$  un  $G_z = \frac{C}{2}$ . Uzrakstīsim sektoriāla ātruma projekcijas

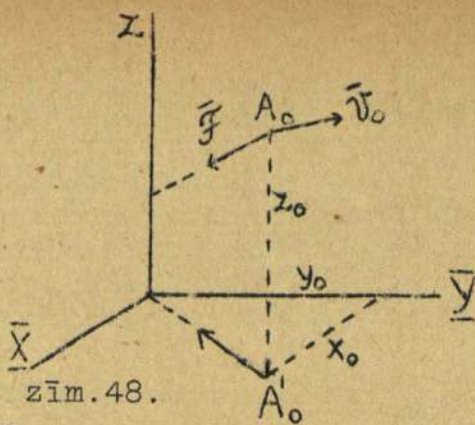
$$\left. \begin{aligned} G_x &= \frac{1}{2}(yz - zy) \\ G_y &= \frac{1}{2}(zx - xz) \\ G_z &= \frac{1}{2}(xy - yx) \end{aligned} \right\} \text{ tad } \begin{cases} yz - zy = A \\ zx - xz = B \\ xy - yx = C \end{cases} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} +$$

Reizināsim pirmo ar punkta koordināti  $x$ , otro ar  $y$ , trešo ar  $z$  un saskaitīsim kopā, tad kreisā pusē iznāk nulle un

$$Ax + By + Cz = 0$$

Centrālā kustībā kustošā punkta koordinātes  $x, y, z$  arvienu paliek saistītas ar lineāru nol-mu, bet šāds nol-ms geometriski reprezentē plākni un tas nozīmē, ka punkta trajektorija atradīsies šinī plāknē, kura, kā rāda pats nol-ms, iet caur spēka centru  $C$ .

Piezīme.1) Ja uz punktu iedarbojošais spēks  $\overline{F}$  arvienu krustojās ar vienu no asīm, piem. ar  $Z$  asi, tad punkta projekcijas uz  $\overline{XY}$  plākni

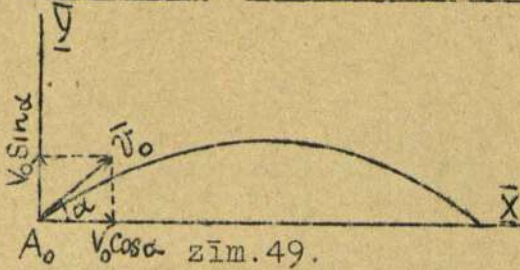


zīm.48.

kustība gan būs centrāla, bet paša punkta kustība vispārīgi vairs nebūs plakana (sk. tālāk piemēru § 5).

Piezīme 2) Ja mēs ņemsim vērā, ka smaguma spēks ir arī centrāls spēks, tikai spēka centrs atrodas zemes lodes centrā, t.i. pietiekosi tāli, lai bez lielas kļūdas varētu viņu skaitīt arvienu perpendikulāru  $\overline{XY}$  plāknei, tad teorēma I tieši seko no teorēmas II.

Piemērs 1. Brīva smaga punkta slīpais sviēdiens vacuumā.



zīm.49.

1) Kustības nol-mi plāknē. Pēc I teorēmas kustība notiek vertikālā plāknē, kādēļ aprobežosimies ar divām asīm  $\overline{X}$  un  $\overline{Y}$  kustības plāknē, pie kam ņemsim  $\overline{X}$  asi horizontāli un  $\overline{Y}$  asi vertikāli uz augšu un pārnesīsim koordinātu sākumu punktā  $A_0$ . Sākuma apstākļi pie  $t_0=0$ ,  $x_0=y_0=0$  un  $V_{0x}=V_0 \cos \alpha$ ,  $V_{0y}=V_0 \sin \alpha$

$$m \cdot j_x = 0$$

$$\frac{dV_x}{dt} = 0$$

$$V_x = C_1, \text{ bet } C_1 = V_0 \cos \alpha$$

$$\boxed{V_x = V_0 \cos \alpha} \dots \text{I integrāls}$$

$$\frac{dx}{dt} = V_0 \cos \alpha$$

$$x = V_0 t \cdot \cos \alpha + C_2$$

no sākuma apstākļiem  $C_2 = 0$

$$\boxed{x = V_0 t \cdot \cos \alpha} \dots (52)$$

$\overline{X}$  ass virzienā kustība ir vienmērīga.

$$m j_y = -mg$$

$$\frac{dV_y}{dt} = -g$$

$$V_y = -gt + C_3 \text{ no sākuma apstākļiem } t_0=0$$

$$V_{0y} = V_0 \sin \alpha$$

$$V_0 \sin \alpha = 0 + C_3$$

$$\boxed{V_y = V_0 \sin \alpha - gt} \dots \text{I integrāls}$$

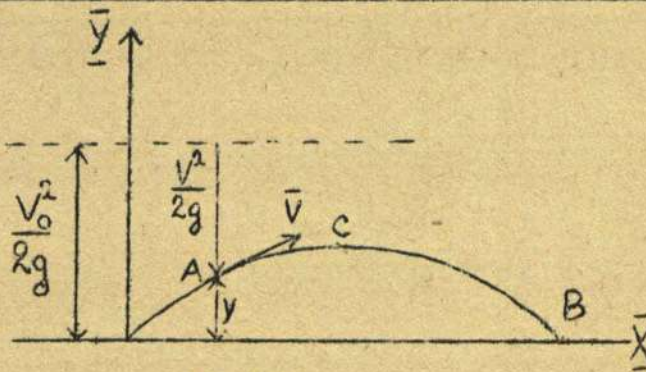
$$\frac{dy}{dt} = V_0 \sin \alpha - gt$$

$$y = V_0 t \cdot \sin \alpha - \frac{gt^2}{2} + C_4, \text{ bet } C_4 = 0$$

$$\boxed{y = V_0 t \cdot \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}} \dots (52^a)$$

$\overline{Y}$  ass virzienā kustība ir vienmērīgi palēnināta.

2) Ātruma izteiksme un šīs izteiksmes pētīšana.



zīm.50

Ņemsim I integrāļus, kuŗi reprezentē ātruma projekcijas

$$V_x = V_0 \cos \alpha$$

$$V_y = V_0 \sin \alpha - gt$$

Celsim kvadrātā un saskaitīsim  $V^2 = V_0^2 \cos^2 \alpha + V_0^2 \sin^2 \alpha - 2V_0 gt \sin \alpha + g^2 t^2$

$$V^2 = V_0^2 - 2g(V_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}), \text{ bet izteiksme iekavās ir } y$$

$$\boxed{V = \sqrt{V_0^2 - 2gy}} \dots (53) \text{ ātrums kā funkcija no koordinātes.}$$

Izdalot  $V^2$  uz  $2g$ , dabūsim  $\frac{V^2}{2g} = \frac{V_0^2}{2g} - y$  jeb  $\frac{V^2}{2g} + y = \frac{V_0^2}{2g} = \text{Const.}$

Šī formula rāda, ka punkta koordinātes  $y$  summa ar ātruma kvadrātu  $V^2$  ir Const. lielums, tā tad materiāls punkts nokritīs uz  $\bar{X}$  asi punktā B ar to pašu sākuma ātrumu  $V_0$  un visaugstākā punktā C viņa ātrums būs minimāls.

Ātruma virzienu var noteikt pēc formulām:

$$\cos(XV) = \frac{V_x}{V} = \frac{V_0 \cos \alpha}{\sqrt{V_0^2 - 2gy}}$$

$$\cos(YV) = \frac{V_y}{V} = \frac{V_0 \sin \alpha - gt}{\sqrt{V_0^2 - 2gy}}$$

No šīm formulām otrā nav ērta, jo viņā ieiet arī  $t$ .

3) Trajektorija. Izslēdzot no kustības nol-miem (52) laiku  $t$ , dabūsim trajektoriju

$$x = V_0 t \cdot \cos \alpha$$

$$y = V_0 t \cdot \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}$$

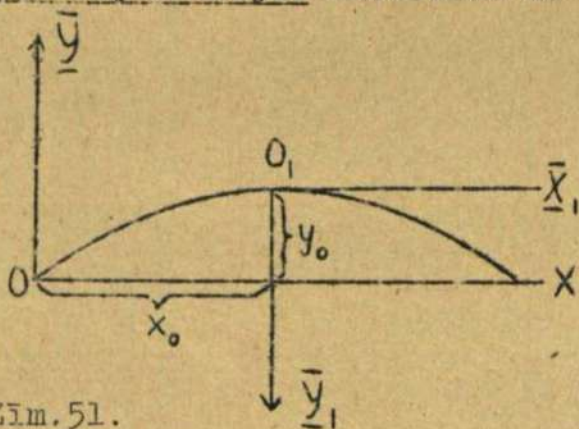
$$t = \frac{x}{V_0 \cos \alpha}$$

$$y = x \cdot \operatorname{tga} - \frac{gx^2}{2V_0^2 \cos^2 \alpha} \dots \dots (54)$$

Pārveidosim atrasto trajektorijas nolīdzinājumu, liekot  $\operatorname{tga} = a$  un

$$\frac{g}{2V_0^2 \cos^2 \alpha} = b$$

Zīm. 51.



tad  $y = ax - bx^2$

$$x^2 - \frac{a}{b}x = -\frac{1}{b}y$$

$$x^2 - \frac{a}{b}x + \frac{a^2}{4b} = -\frac{1}{b}y + \frac{a^2}{4b^2}$$

$$\left(x - \frac{a}{2b}\right)^2 = \frac{1}{b}\left(-y + \frac{a^2}{4b}\right)$$

ievedīsim apzīmējumus

$$x - \frac{a}{2b} = x_1 \quad ; \quad \frac{a^2}{4b} - y = y_1$$

$$x_1^2 = \frac{1}{b} \cdot y_1$$

liekot vēl  $\frac{1}{b} = 2p$ , iznāk

$$x_1^2 = 2py_1$$
 Trajektorija ir parabola kanoniskā veidā,

bet attiecināta uz citām asīm  $\bar{X}_1$  un  $\bar{Y}_1$

Lai uzietu jaunu koordinātu sākumu  $O_1$ , pielīdzinām  $x_1$  un  $y_1$  nullei, aizvietojo  $x$  ar  $x_0$  un  $y$  ar  $y_0$

$$x_0 = \frac{a}{2b} = \frac{\operatorname{tga} \cdot 2V_0^2 \cos^2 \alpha}{2g} = \frac{V_0^2}{2g} \sin 2\alpha$$

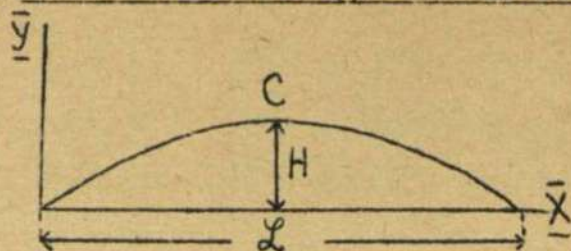
$$y_0 = \frac{a^2}{4b} = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha \cdot 2V_0^2 \cos^2 \alpha}{4g} = \frac{V_0^2}{2g} \cdot \sin^2 \alpha$$

Parabolas pusparametrs  $p = \frac{1}{2b}$ ,

$$p = \frac{V_0^2 \cos^2 \alpha}{g} \dots \dots \dots (55)$$

4) Max. celšanas augstums un max. sviediena tālums.

Apzīmēsim: maksimālo augstumu ar  $H$   
maksimālo attālumu ar  $L$



$$H = y_0 = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha \quad \dots\dots(56)$$

max  $H$  dabūsim pie  $\sin \alpha = 1$ ,  $\alpha = 90^\circ$

, max  $H = \frac{v_0^2}{2g}$  pie vertikāla sviediena

zīm.52.  
uz augšu.

$$L = 2x_0 = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha \quad \dots\dots\dots(57)$$

max  $L$  dabūsim pie  $\sin 2\alpha = 1$ ,  $\alpha = 45^\circ$ .  
zem  $45^\circ$  pret horicontu.

max  $L = \frac{v_0^2}{g}$  pie sviediena

5) Tas pats, izejot no mēchaniskiem lielumiem. Punkts sasniedz maksimālo augstumu  $H$  tad, ja  $v_y = 0$ ; apzīmēsim attiecīgo laika momentu ar  $t_1$ , tad

$$v_y = v_0 \sin \alpha - g t_1 = 0 \quad ; \quad t_1 = \frac{v_0}{g} \sin \alpha$$

$$H = y_{\max} = v_0 t_1 \sin \alpha - \frac{g t_1^2}{2} = \frac{v_0^2}{g} \sin^2 \alpha - \frac{g v_0^2}{g^2 \cdot 2} \sin^2 \alpha = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha$$

$$H = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha \quad \dots\dots\dots(56 \text{ bis})$$

Attiecīga abscise  $\frac{1}{2}L = v_0 t_1 \cos \alpha = v_0 \frac{v_0}{g} \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{v_0^2}{g} \sin \alpha \cdot \cos \alpha$

$$L = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha \quad \dots\dots\dots(57 \text{ bis})$$

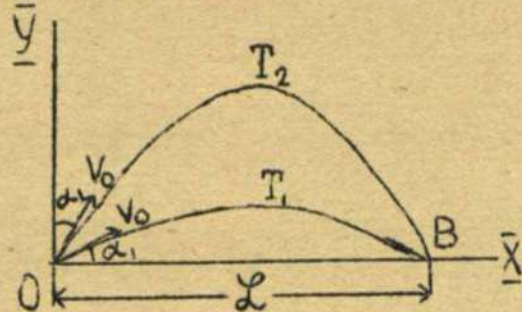
no kurienes

6) Punkta ātrums visaugstākā vietā C. Liksim formulā (53)  $y$  vietā  $y_0$

$$v_c = \sqrt{v_0^2 - 2g \cdot y_0} = \sqrt{v_0^2 - v_0^2 \sin^2 \alpha} \quad ; \quad \boxed{v_c = v_0 \cos \alpha} \quad \dots\dots(58)$$

Punkta ātrums visaugstākā vietā, kā jau varēja paredzēt, līdzinājās  $v_x = v_0 \cos \alpha$ , jo tur  $v_y = 0$ .

7) Artillerijas problēma: Zem kāda leņķa  $\alpha$  jāizšauj, lai lādiņš nokristu noteiktā attālumā  $OB = L$ .



ņemsim formulu(57)  $L = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$ , tad

$\sin 2\alpha = \frac{g}{v_0^2} L$ , bet šim nol-mam ir vairākas

saknes  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots$  Sakars starp divām mazākām saknēm ir  $2\alpha_2 = 180 - 2\alpha_1$ , jo

$$\sin 2\alpha_2 = \sin(180^\circ - 2\alpha_1), \text{ tā tad } \alpha_2 = 90^\circ - \alpha_1$$

zīm.53.

Tas nozīmē, ka  $\angle \alpha_1$  var atskaitīt kā no horicontālas  $O\bar{x}$  ass, tā arī no vertikālas  $O\bar{y}$  ass, pie kam abos gadījumos punkts, aprakstot parabolu, nokritis attālumā  $L$ .



mēsīm sākuma ātrumu ar  $V_0$  un viņa virzienu ar  $\angle \alpha$ . Sākuma ātruma projekcijas ir  $\dot{x}_0$  un  $\dot{y}_0$ . Sastādīsim  $W$  projekcijas uz koordinātu asīm, ņemot vērā, ka  $W$  iet pret kustību, t.i. pretīm ātruma vektoram  $\bar{V}$ .

$$W_x = W \cos(\bar{XW}) = -W \cos(\bar{XV}) = -mkV \cdot \frac{\dot{x}}{V} = -mk\dot{x}$$

$$W_y = W \cos(\bar{YW}) = -W \cos(\bar{YV}) = -mkV \cdot \frac{\dot{y}}{V} = -mk\dot{y}$$

Izlietosim tagad kustības dif-nol-mus pēc Mac-Laurin'a

$$1) m\ddot{x} = W_x = -mk\dot{x}$$

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = -k\dot{x}$$

$$\int \frac{d\dot{x}}{\dot{x}} = -\int k dt + C_1$$

$$\ln \dot{x} = -kt + C_1$$

pie  $t_0 = 0$ ,  $\dot{x} = \dot{x}_0$

$$\ln \dot{x}_0 = 0 + C_1$$

$$\ln \dot{x} - \ln \dot{x}_0 = -kt$$

$$\ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0} = -kt$$

$$\frac{\dot{x}}{\dot{x}_0} = e^{-kt}$$

$$\boxed{\dot{x} = \dot{x}_0 e^{-kt}} \quad \dots(60) \text{ I intēgr.}$$

Šī formula rāda, ka pie  $t = \infty$  iznāk  $\dot{x} = 0$ , tas nozīmē, ka ātrumam nebūs horicontālas komponentes jeb trajektorijas tangente būs vertikāla.

Integrēsim tālāk

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}_0 e^{-kt}$$

$$x = \int \dot{x}_0 e^{-kt} dt + C_2$$

$$x = -\frac{\dot{x}_0}{k} \cdot e^{-kt} + C_2$$

pie  $t_0 = 0$ ,  $x_0 = 0$

$$0 = -\frac{\dot{x}_0}{k} + C_2$$

$$\boxed{x = \frac{\dot{x}_0}{k}(1 - e^{-kt})} \quad \dots(61)$$

II integrāls.

Kā redzams, ja laiks pieaug, tad  $x$  tiecas uz robežu, kuru dabūsim pie  $t = \infty$

$$\lim [x]_{t=\infty} = \frac{\dot{x}_0}{k}$$

$$2) m\ddot{y} = -mg + W_y = -mg - mk\dot{y}$$

$$\frac{d\dot{y}}{dt} = -(g + k\dot{y})$$

$$\int \frac{d\dot{y}}{g + k\dot{y}} = \int -dt + C_3$$

$$\frac{1}{k} \ln(g + k\dot{y}) = -t + C_3$$

pie  $t_0 = 0$ ,  $\dot{y} = \dot{y}_0$

$$\frac{1}{k} \ln(g + k\dot{y}_0) = 0 + C_3$$

$$\frac{1}{k} \ln \frac{g + k\dot{y}}{g + k\dot{y}_0} = -t$$

$$\frac{g + k\dot{y}}{g + k\dot{y}_0} = e^{-kt}$$

$$g + k\dot{y} = (g + k\dot{y}_0) \cdot e^{-kt}$$

$$\boxed{\dot{y} = -\frac{g}{k} + \frac{g + k\dot{y}_0}{k} \cdot e^{-kt}} \quad \dots(62)$$

I integrāls.

pie  $t = \infty$  iznāk  $\dot{y} = -\frac{g}{k}$ , t.i. jau pazīstamais kritiskais ātrums, jo tanī pašā laikā  $\dot{x} = 0$  un tad  $\dot{y} = V$  bet  $W = -mk \frac{g}{k} = -mg$

pretestība līdzinājās punkta svaram. Integrēsim tālāk

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{g}{k} + \frac{g + k\dot{y}_0}{k} \cdot e^{-kt}$$

$$y = -\frac{g}{k}t + \frac{g + k\dot{y}_0}{k} \int e^{-kt} dt + C_4$$

$$y = -\frac{g}{k}t - \frac{g + k\dot{y}_0}{k^2} e^{-kt} + C_4$$

pie  $t_0 = 0$ ,  $\dot{y}_0 = 0$

$$0 = 0 - \frac{g + k\dot{y}_0}{k^2} + C_4$$

$$\boxed{y = -\frac{g}{k}t + \frac{g + k\dot{y}_0}{k^2}(1 - e^{-kt})} \quad (63)$$

II integrāls.



Punkta trajektorijas noteikšana: ņemsim laiku  $t$  no  $x$  formulas

$$\frac{kx}{x_0} = 1 - e^{-kt}, \quad -kt = \ln(1 - \frac{kx}{x_0}), \quad t = -\frac{1}{k} \ln(1 - \frac{kx}{x_0}) \text{ un liksim}$$

$$y \text{ formulā } y = \frac{g}{k^2} \ln(1 - \frac{kx}{x_0}) + \frac{g + ky_0}{k^2} \cdot \frac{kx}{x_0}$$

$$y = \frac{g}{k^2} \ln(1 - \frac{kx}{x_0}) + \frac{g + ky_0}{kx_0} x \quad \dots (64) \text{ Trajektorija.}$$

Visas atrastās formulas varam pārrakstīt arī citādi, ņemot vērā, ka  $x_0 = V_0 \cos \alpha$  un  $y_0 = V_0 \sin \alpha$

$$x = \frac{V_0 \cos \alpha}{k} (1 - e^{-kt}) \quad \dots (61^a)$$

$$y = -\frac{gt}{k} + \frac{g + kV_0 \sin \alpha}{k^2} (1 - e^{-kt}) \quad \dots (63^a)$$

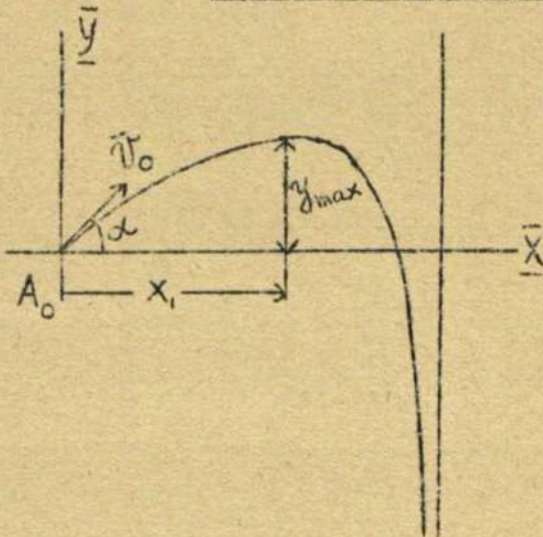
kustības nolīdzinājumi.

$$y = \frac{g}{k^2} \ln(1 - \frac{kx}{V_0 \cos \alpha}) + \frac{g + kV_0 \sin \alpha}{kV_0 \cos \alpha} \cdot x$$

$$y = \frac{g}{k^2} \ln(1 - \frac{kx}{V_0 \cos \alpha}) + (\operatorname{tg} \alpha + \frac{g}{kV_0 \cos \alpha}) \cdot x \quad \dots (64^a) \text{ Trajektorija.}$$

Kā redzams no iepriekšējā, trajektorijai būs vertikāla asimptote attālumā  $\frac{x_0}{k}$  no koordinātu sākuma.

Trajektorijas virsotnes noteikšana.



zīm. 57.

Ņemsim agrāk atrasto ātruma projekciju

$$V_y = \dot{y} = -\frac{g}{k} + \frac{g + ky_0}{k} e^{-kt}$$

$y_{\max}$  dabūsim tad, ja  $V_y = 0$ . Apzīmēsim attiecīgo laiku ar  $t_1$ , tad

$$-\frac{g}{k} + \frac{g + ky_0}{k} \cdot e^{-kt_1} = 0$$

$$e^{-kt_1} = \frac{g}{g + ky_0}; \quad -kt_1 = \ln \frac{g}{g + ky_0}$$

$$t_1 = -\frac{1}{k} \ln \frac{g}{g + ky_0} \quad \text{liksim atrasto}$$

$$\text{laiku } y \text{ formulā; } y_{\max} = \frac{g}{k^2} \ln \frac{g}{g + ky_0} + \frac{g + ky_0}{k^2} (1 - \frac{g}{g + ky_0})$$

$$y_{\max} = -\frac{g}{k^2} \ln \frac{g + ky_0}{g} + \frac{g + ky_0}{k^2} \cdot \frac{ky_0}{g + ky_0}; \quad y_{\max} = \frac{y_0}{k} - \frac{g}{k^2} \ln(1 + \frac{ky_0}{g}) \quad (65)$$

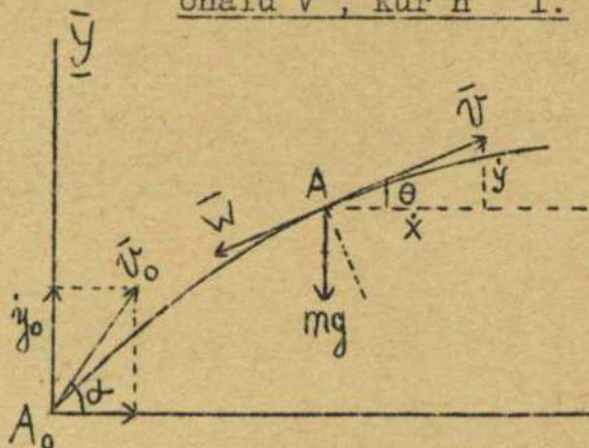
jeb, ievērojot, ka  $y_0 = V_0 \sin \alpha$ , varam rakstīt

$$y_{\max} = \frac{V_0 \sin \alpha}{k} - \frac{g}{k^2} \ln(1 + \frac{k}{g} V_0 \sin \alpha)$$

Attiecīgo abscisu  $x_1$  dabūsim, liekot  $t_1$   $x$ -formulā

$$x_1 = \frac{x_0}{k} \left( 1 - \frac{g}{g + ky_0} \right) = \frac{x_0}{k} \cdot \frac{ky_0}{g + ky_0}; \quad \boxed{x_1 = \frac{x_0 y_0}{g + ky_0}} \quad \dots (66) \quad \boxed{x_1 = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{2(g + kV_0 \sin \alpha)}}$$

Piemērs 3. Smaga punkta slīpais sviediens mediumā ar pretestību, proporci-  
onālu  $V^n$ , kur  $n > 1$ .



zīm.58.

Pretestības spēku rakstīsim

$$W = mkV^n$$

Koeficienta  $k$  fizikalā nozīme ir pretestības spēks uz katru masas vienību, pie ātruma  $V = 1$ . Arī šeit pēc teorēmas I kustība notiks vertikālā plāknē, kādēļ aprobežosimies ar divām asīm. Izvēlēsim koordinātu sākumu kustības sākuma punktā, apzīmēsim sākuma ātrumu ar  $V_0$  un viņa virzienu ar  $\alpha$ . Sākuma ātruma projekcijas uz koordinātu asīm ir  $\dot{x}_0$  un  $\dot{y}_0$ . Sastādīsim  $W$  projekcijas

uz koordinātu asīm, ņemot vērā, ka  $\bar{W}$  iet pret kustību, t.i. pretīm ātruma vektoram  $\bar{V}$

$$W_x = W \cos(\bar{X}\bar{W}) = -W \cos(\bar{X}\bar{V}) = -mkV^n \cdot \frac{\dot{x}}{V} = -mkV^{n-1} \cdot \dot{x}$$

$$W_y = W \cos(\bar{Y}\bar{W}) = -W \cos(\bar{Y}\bar{V}) = -mkV^n \cdot \frac{\dot{y}}{V} = -mkV^{n-1} \cdot \dot{y}$$

Punkta kustības diff-nol-mi pēc Mac-Laurin'a būs

$$m\ddot{x} = -mkV^{n-1} \cdot \dot{x} \quad \left| \quad \ddot{x} = -kV^{n-1} \cdot \dot{x} \right.$$

$$m\ddot{y} = -mg - mkV^{n-1} \cdot \dot{y} \quad \left| \quad \ddot{y} = -g - kV^{n-1} \cdot \dot{y} \right.$$

jeb saīsinot masu

Atrastos nol-mus, ņemot vērā, ka  $V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ , atsevišķi integrēt nevar. Viņi reprezentē simultānu diff-nol-mu sistēmu, kuŗa vispārīgi ir grūti integrējama. Pārejām tendēļ uz citu atrisināšanas metodi un proti uz diff-nol-miem pēc Eulera, t.i. tangentes un normales virzienā. Apzīmēsim lenķi, kuŗu veido tangente ar horicontālu asi ar  $\theta$ .

$$\left. \begin{aligned} 1) \quad m j_t &= -mg \sin \theta - W \\ 2) \quad m j_n &= mg \cos \theta \end{aligned} \right\} \text{Kustības diff-nol-mi pēc Eulera.}$$

$$1) \quad m \frac{dV}{dt} = -mg \sin \theta - mkV^n$$

$$2) \quad mV \frac{d\theta}{dt} = mg \cos \theta$$

bet  $\frac{d\epsilon}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}$ , jo  $\theta$  ar laiku samazinājās un kontingences lenķis ir  $\angle \theta$  pieaugums.

Diff-nol-mi galīgā veidā

$$\left. \begin{aligned} 1) \quad \frac{dV}{dt} &= -g \sin \theta - kV^n \\ 2) \quad \frac{V d\theta}{dt} &= -g \cos \theta \end{aligned} \right\} \text{Izdalīsim 1) uz 2)}$$

$$\frac{dV}{V d\theta} = \frac{g \sin \theta + kV^n}{g \cos \theta} \quad ; \quad \frac{\cos \theta \cdot dV}{V \cdot d\theta} = \sin \theta + \frac{k}{g} V^n$$

bet ņemot vērā, ka  $d(V \cdot \cos \theta) = \cos \theta \cdot dV - V \cdot \sin \theta \cdot d\theta$ , varam izteikt

$\text{Cos}\theta \cdot dV = d(V\text{Cos}\theta) + V \text{Sin}\theta \cdot d\theta$  un ielikot augšā

$$\frac{d(V\text{Cos}\theta) + V\text{Sin}\theta \cdot d\theta}{V \cdot d\theta} = \text{Sin}\theta + \frac{k}{g} V^n$$

$$\frac{d(V\text{Cos}\theta)}{V \cdot d\theta} + \text{Sin}\theta = \text{Sin}\theta + \frac{k}{g} V^n$$

$$\frac{d(V\text{Cos}\theta)}{V^{n+1}} = \frac{k}{g} d\theta$$

nointegrēsim šo nol-mu no sākuma punkta A<sub>0</sub> līdz punktam A, pareizi-not viņu iepriekš vēl ar  $\frac{1}{\text{Cos}^{n+1}\theta}$

$$\int_{V_0 \text{Cos}\alpha}^{V\text{Cos}\theta} \frac{d(V\text{Cos}\theta)}{(V\text{Cos}\theta)^{n+1}} = \frac{k}{g} \int_{\alpha}^{\theta} \frac{d\theta}{\text{Cos}^{n+1}\theta}$$

$$-\frac{1}{n} \left[ \frac{1}{V^n \text{Cos}^n\theta} \right]_{V_0 \text{Cos}\alpha}^{V\text{Cos}\theta} = \frac{k}{g} \int_{\alpha}^{\theta} \frac{d\theta}{\text{Cos}^{n+1}\theta}$$

$$\frac{1}{V_0^n \text{Cos}\alpha} - \frac{1}{V^n \text{Cos}\theta} = \frac{kn}{g} \int_{\alpha}^{\theta} \frac{d\theta}{\text{Cos}^{n+1}\theta} \quad (67)$$

Pēc redukcijas formulas

$$\int \frac{dx}{\text{Cos}^m x} = \frac{\text{Sin}x}{(m-1)\text{Cos}^{m-1}x} + \frac{m-2}{m-1} \int \frac{dx}{\text{Cos}^{m-2}x}$$

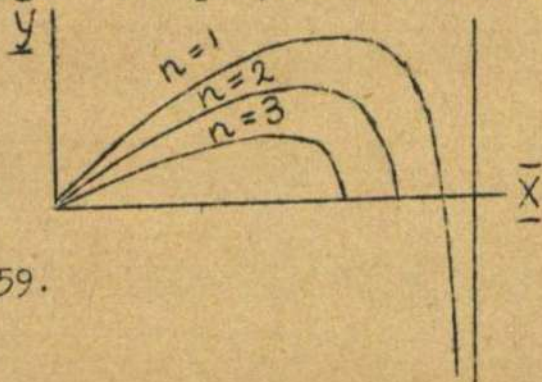
Varam pazemināt Cos pakāpi zem integrāļa

$$\int \frac{d\theta}{\text{Cos}^{n+1}\theta} = \frac{\text{Sin}\theta}{n\text{Cos}^n\theta} + \frac{n-1}{n} \int \frac{d\theta}{\text{Cos}^{n-1}\theta}$$

turpinot šo tik ilgi, kamēr mēs no-nāksim pie

$$\int \frac{d\theta}{\text{Cos}\theta} = \ln \text{tg}(45^\circ + \frac{\theta}{2})$$

Tādā kārtā var aprēķināt V, t, x, y kā



zīm.59.

Pēc tam varam atrast galīgā veidā

$$V = f(\theta)$$

Tālāk liksim viņu iekšā nol-mā 2)

$$\frac{Vd\theta}{dt} = -g\text{Cos}\theta \text{ un uziesim}$$

$$dt = -\frac{1}{g} \cdot \frac{f(\theta) \cdot d\theta}{\text{Cos}\theta}$$

integrējot viņu no A<sub>0</sub> līdz A, atrodam

$$t = -\frac{1}{g} \int_{\alpha}^{\theta} \frac{f(\theta) \cdot d\theta}{\text{Cos}\theta} \quad \dots\dots(68)$$

No šīs formulas pēc integrēšanas at-rodam

$$\theta = \varphi(t)$$

Tālāk pārejam uz koordinātēm

$$V\text{Cos}\theta = \dot{x} = \frac{dx}{dt}, \text{ ņemsim}$$

$$V\text{Cos}\theta \cdot dt = dx \quad \left. \vphantom{\frac{dx}{dt}} \right\} \text{pareizināsim}$$

$$2) \frac{Vd\theta}{dt} = -g\text{Cos}\theta$$

$$V^2 \text{Cos}\theta \cdot d\theta = -g\text{Cos}\theta \cdot dx; \quad x = -\frac{1}{g} \int_{\alpha}^{\theta} V^2 d\theta$$

$$x = -\frac{1}{g} \int_{\alpha}^{\theta} f^2(\theta) \cdot d\theta \quad \dots\dots(69)$$

Analogiski  $V\text{Sin}\theta = \dot{y} = \frac{dy}{dt}$

$$V\text{Sin}\theta \cdot dt = dy$$

ņem-sim 2)  $\frac{Vd\theta}{dt} = -g\text{Cos}\theta$  } pareizināsim

$$V^2 \text{Sin}\theta \cdot d\theta = -g\text{Cos}\theta \cdot dy$$

$$y = -\frac{1}{g} \int_{\alpha}^{\theta} V^2 \text{tg}\theta \cdot d\theta,$$

$$y = -\frac{1}{g} \int_{\alpha}^{\theta} f^2(\theta) \cdot \text{tg}\theta \cdot d\theta \quad \dots\dots(70)$$

funkcijas no  $\theta$  un sastādīt tabeles priekš katra n.

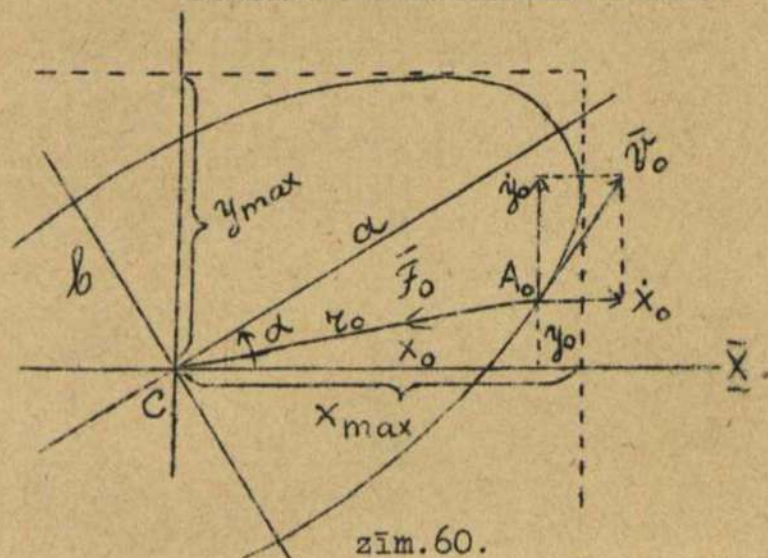
Pēc tabelēm atkal var uzkonstruēt attiecīgās trajektorijas (zīm.54). Kā agrāk bija pierādīts pie n = 1 trajektorija asimptotiski tuvojās vertikālajai taisnei.

Ņemot vērā vēl ka "n" ir atkarīgs no sākuma ātruma, minētās ta-beles sastāda arī atkarībā no sākuma ātruma V<sub>0</sub>. Kā skaitlisku illustrā-ciju pievedīsim tabeli, sastādītu priekš V<sub>0</sub> = 625 m/sec.

Tabele priekš  $V_0 = 625$  m/sec.

	Vac.	Gaisā
Leņķis $\alpha$ , kas dod max L	$45^\circ$	$32^\circ$
Maksimālais attālums L	40 klm	4 klm
Maksimālais augstums H pie tiem pašiem apstākļiem	10 klm	0,5 klm
Trajektorijas virsotnes abscisa	20 klm	2,2 klm

Piemērs 4. Brīva materiāla punkta kustība zem centrāla pievilkšanas spēka proporcionāla attālumam.



zīm.60.

Pēc teorēmas II kustība notiks plaknē, kādēļ aprobežosimies ar divām asīm, izvēlēsim koordinātu sākumu pievilkšanas centrā C un pieņemsim vispārīgā gadījumā, ka kustība sākas kādā punktā  $A_0(x_0, y_0)$  šīnī plaknē, sākuma ātrums ir  $\vec{V}_0$  ar projekcijām  $\dot{x}_0$  un  $\dot{y}_0$ .  
Dots spēks:  $F = -mk^2r$   
Uziet kustību:  $x=f_x(t)$  un  $y=f_y(t)$   
Koeficienta  $k^2$  fizikalā nozīme ir pievilkšanas spēks uz katru masas vienību, attālumā  $r = 1$ . Sastādīsim spēka F projekcijas uz koordinātu asīm.

$$F_x = F \cdot \cos(\overline{XF}) = -F \cdot \frac{x}{r} = -mk^2r \cdot \frac{x}{r} = -mk^2x$$

$$F_y = F \cdot \cos(\overline{YF}) = -F \cdot \frac{y}{r} = -mk^2r \cdot \frac{y}{r} = -mk^2y$$

Ņemsim kustības diff-nol-mus pēc Mac-Laurin'a

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x \\ m\ddot{y} &= F_y \end{aligned} \right\} \text{ aizvietojot atrastās spēka projekcijas, dabūsim mūsu gadījumā}$$

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= -mk^2x \\ m\ddot{y} &= -mk^2y \end{aligned} \right\} \text{ katrs no šiem diff-nol-miem ir vienkāršas harmoniskas kustības diff-nol-mi un viņus var integrēt atsevišķi.}$$

Integrāli vispārīgā formā :  $x = A \cos kt + B \sin kt$   
 $y = C \cos kt + D \sin kt$

Koeficientus A, B, C, D noteiksim no sākuma apstākļiem, pie kam A un C dabūsim, liekot pie  $t_0 = 0$ ,  $x = x_0$  un  $y = y_0$ , tad  $A = x_0$  un  $C = y_0$ .

Lai dabūtu B un D, ņemsim ātruma projekcijas, diferencējot x un y pēc laika

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -Ak \sin kt + Bk \cos kt \\ \dot{y} &= -Ck \sin kt + Dk \cos kt \end{aligned}$$

un atkal ieliksīm pie  $t_0 = 0$ ,  $\dot{x} = \dot{x}_0$  un  $\dot{y} = \dot{y}_0$ ,

$$\text{tad } \begin{cases} \dot{x}_0 = Bk \\ \dot{y}_0 = Dk \end{cases} \left| \text{no kurienes } B = \frac{\dot{x}_0}{k} \text{ un } D = \frac{\dot{y}_0}{k} \right.$$

Aizvietojot atrastos koeficientus, dabūsim punkta kustības nol-mus galīgā veidā

$$\boxed{x = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt} \quad \boxed{y = y_0 \cos kt + \frac{\dot{y}_0}{k} \sin kt} \quad \dots\dots\dots(71)$$



Taisnes, ievilkta attālumā  $x_{\max}$  paralēli  $\bar{Y}$  asi un attālumā  $y_{\max}$  paralēli  $\bar{X}$  asi, būs ellipses  $\checkmark_{\max}$  tangentes.

Ellipses pusasis  $a$  un  $b$  varam atrast, ņemot ellipses ass nol-mus  $y = xtga$  un  $y = -xctga$  un atrisinājot viņus kopīgi ar trajektorijas nol-mu. Dabūtie rezultāti reprezentēs ellipses krustošanās punktu ar asīm koordinātes, kuŗas apzīmēsim ar  $(x_a, y_a)$  un  $(x_b, y_b)$ .

Tad 
$$a = \sqrt{x_a^2 + y_a^2}, \quad b = \sqrt{x_b^2 + y_b^2}$$

Mēs noskaidrojām, ka abas kustošā punkta  $A$  projekcijas uz koordinātu asīm  $A_x$  un  $A_y$  atrodās vienkāršā harmoniskā kustībā. Vēl varam piezīmēt, ka abi periodi būs vienādi, jo abiem diff-nol-miem ir viens un tas pats koeficients  $k$ . Apzīmēsim periodus  $T_x$  un  $T_y$

$$T_x = T_y = \frac{2\pi}{k}$$

Speciāls gadījums. Kustības periodi nav vienādi  $T_x \neq T_y$ . Tas acimredzot izsauc arī koeficientu nevienādību  $k_1 \neq k_2$

$$\left. \begin{aligned} X &= -mk_1^2 x \\ Y &= -mk_2^2 y \end{aligned} \right\} \text{un spēks } F = \pm \sqrt{X^2 + Y^2} = -m \sqrt{k_1^4 x^2 + k_2^4 y^2}$$

Trajektorijas šādā gadījumā būs tā sauktās Lissajous līkas, līdzīgas astotniekam, pie kam ja

$\frac{k_1}{k_2}$  ir racionāls, tad līkas ir noslēgtas un ja  $\frac{k_1}{k_2}$  ir irracionāls, tad

līkas nenoslēdzās.

Piezīme. Ja mēs apskatītā kustībā ievēdīsim arī gaisa pretestības spēku, tad katras ass virzienā kustība būs dziestoša svārstīšanās kustība un trajektorija būs spirāle, kuŗa tuvojās centram.

Speciāls gadījums. Pie kādiem sākuma apstākļiem trajektorija būs riņķis. Pierādīsim, ka tas notiks, ja  $V_0 \perp r_0$  un  $V_0 = kr_0$ . Ņemsim atrastos kustības nolīdzinājumus

$$x = x_0 \cos kt + \frac{x_0}{k} \sin kt$$

$$y = y_0 \cos kt + \frac{y_0}{k} \sin kt$$

Pagriezīsim koordinātu ass tā, lai  $\bar{X}$  ass sakristo ar  $r_0$  un pieņemsim, ka  $V_0 \perp r_0$  un  $V_0 = kr_0$ , tad

zīm.61. 
$$\left. \begin{aligned} x_0 &= r_0 \\ y_0 &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \dot{x}_0 &= 0 \\ \dot{y}_0 &= V_0 = kr_0 \end{aligned} \left. \begin{aligned} & \\ & \end{aligned} \right\} \text{Ieliekot visu šo kustības nol-mā, dabūsim}$$

$$\left. \begin{aligned} x &= r_0 \cos kt \\ y &= \frac{V_0}{k} \sin kt = r_0 \sin kt \end{aligned} \right\} \text{Izslēdzot laiku, dabūsim riņķa nolīdzinājumu} \quad x^2 + y^2 = r^2$$

Piemērs 5. Brīva materiāla punkta kustība zem Newtona gravitācijas spēka iespaida.

Pieņemsim, ka uz punktu, kuŗam sākumā koordinātes ir  $x_0, y_0$  un sākuma ātrums  $V_0$ , darbojās centrāls pievilksanas spēks

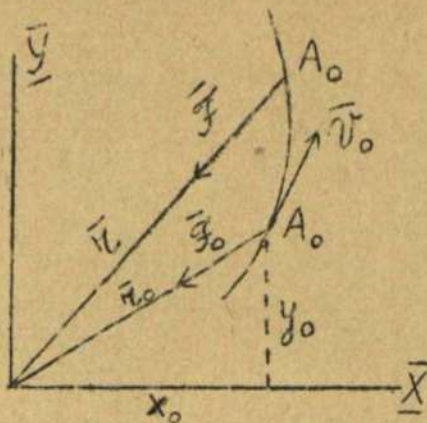
ji proporcionāls attāluma kvadrātam.

$$F = -\frac{mk^2}{r^2} \text{ pretē-}$$

Jāuziet punkta kustību.

Punkta kustība notiks plaknē, kuŗa ieslēdz abus vektorus:  $F_0$  un  $V_0$ .

Sastādīsim spēka projekcijas uz koordinātu asīm



$$F_x = F \cdot \cos(\overline{XF}) = -\frac{mk^2}{r^2} \cdot \frac{x}{r} = -\frac{mk^2 x}{r^3}$$

$$F_y = F \cdot \cos(\overline{YF}) = -\frac{mk^2}{r^2} \cdot \frac{y}{r} = -\frac{mk^2 y}{r^3}$$

Ņemsim kustības diff-nol-mus pēc Mac-Laurin'a

$$m\ddot{x} = -\frac{mk^2 x}{r^3}$$

$$m\ddot{y} = -\frac{mk^2 y}{r^3}$$

bet  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  un tad galīgi

zīm.62.

$$\ddot{x} = -\frac{k^2 x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

$$\ddot{y} = -\frac{k^2 y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

Šos diff-nol-mus atsevišķi integrēt nevar un viņi reprezentē simultānu diff-nol-mu sistēmu, kuŗa ir grūti integrējama.

Šādus uzdevumus būs vieglāk atrisināt, lietojot polārkoordinātes, kuŗas apskatīsim vēlāk.

### § 5. Brīva materiāla punkta kustība telpā.

Dināmikas pamatnolīdzinājums ir  $m\vec{j} = \vec{F}$ . Dažādu jautājumu atrisināšanai mēs varam lietot kustības diff-nol-mus pēc Eulera, kuŗi bija atrasti agrāk

$$m \frac{dV}{dt} = F_t \quad \text{un} \quad m \frac{V^2}{\rho} = F_n \quad \dots\dots(48),$$

jo viņi der arī telpā, jeb arī kustības diff-nol-mus pēc Mac-Laurin'a, kuŗus dabūsim projecējot dinamikas pamatnol-mu uz nekustošām koordinātu asīm

$$\boxed{m\ddot{x} = X} \quad , \quad \boxed{m\ddot{y} = Y} \quad , \quad \boxed{m\ddot{z} = Z} \quad \dots\dots\dots(74)$$

Visus jautājumus attiecībā uz punkta kustību telpā mēs varam iedalīt divās grupās.

I jautājumu grupa - pēc dotās kustības uziet spēku

II " " " - pēc dotā spēka uziet kustību.

Apskatīsim katru atsevišķi.

I grupa. Pēc dotās kustības uziet spēku. Doti punkta kustības nol-mi telpā:  $x = f_x(t)$ ,  $y = f_y(t)$ ,  $z = f_z(t)$ . Uziet spēku  $F$  un viņa virzienu.

Spēka projekcijas visvienkāršāk dabūsim atvasinot divreiz pēc laika kustības nol-mus un lietojot formulas (74).

$$\left. \begin{aligned} X &= mf''_x(t) \\ Y &= mf''_y(t) \\ Z &= mf''_z(t) \end{aligned} \right\} \text{Spēks tad būs } F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \text{ un viņa virzienu noteiksim pēc}$$

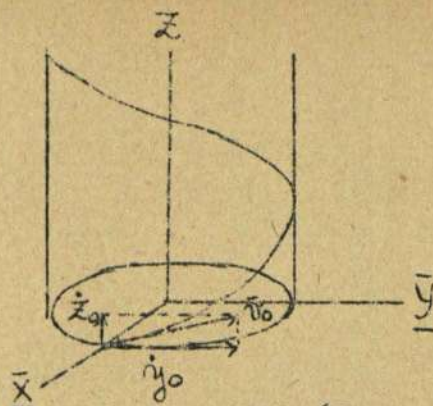
$$\left. \begin{aligned} X &= mf''_x(t) \\ Y &= mf''_y(t) \\ Z &= mf''_z(t) \end{aligned} \right\} \text{Cos}(\overline{XF}) = \frac{X}{F} \quad , \quad \text{Cos}(\overline{YF}) = \frac{Y}{F} \quad , \quad \text{Cos}(ZF) = \frac{Z}{F}$$

Piemērs. Kustība dota ar nol-miem:

$$\begin{cases} x = a \cos kt \\ y = a \sin kt \\ z = ht \end{cases}$$

Uziet: kāds spēks šo kustību izsauc.

Kustības nol-mi reprezentē skrūves līniju parametra veidā, tā tad trajektorija ir skrūves līnija. Atvasināsim kustības nol-mus pēc laika



$$\begin{array}{l|l} \dot{x} = -ak \sin kt & \text{sākumā } \dot{x}_0 = 0 \\ \dot{y} = ak \cos kt & \dot{y}_0 = ak \\ \dot{z} = h & \dot{z}_0 = h \end{array}$$

Sastādam ātrumu  $V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{a^2 k^2 + h^2}$   
 Kā redzams ātrums iznāk Const. un punkta kustība pa skrūves līniju būs vienmērīga. bez tam sākuma ātrums  $V_0 \parallel \underline{ZY}$  plaknei, jo  $\dot{x}_0 = 0$  un arī  $V_0 = \sqrt{a^2 k^2 + h^2}$  \*

Atvasināsim kustības nol-mus vēlreiz pēc laika

$$\left. \begin{array}{l} \ddot{x} = -ak^2 \cos kt \\ \ddot{y} = -ak^2 \sin kt \\ \ddot{z} = 0 \end{array} \right\} \text{Spēka komponentes dabūsim pareizinot ar masu } m$$

$$\left. \begin{array}{l} X = m\ddot{x} = -mak^2 \cos kt \\ Y = m\ddot{y} = -mak^2 \sin kt \\ Z = m\ddot{z} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Šīs formulas pārveidosim, izlieto-} \\ \text{jot dotos kustības nol-mus} \\ a \cos kt = x \text{ un } a \sin kt = y \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} X = -mk^2 x \\ Y = -mk^2 y \\ Z = 0 \end{array} \right\} \text{Spēks } F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = mk^2 \sqrt{x^2 + y^2} = mk^2 a$$

Spriežot pēc projekcijām, spēks  $F$  ir pievilksanas spēks pie  $Z$  ass, tam dēļ viņu jāraksta  $F = -mk^2 a$ , bez tam viņš ir arvienu perpendikulārs  $Z$  asij, jo viņa projekcija  $Z = 0$ . Otrādi, lai pie šāda spēka punkta trajektorija būtu skrūves līnija, ir nepieciešams, lai sākuma ātrumam būtu projekcija  $Z$  ass virzienā  $\dot{z}_0$ .

II grupa. Pēc dotā spēka uziet kustību.

Dotas spēka komponentes  $X, Y$  un  $Z$ . Uziet punkta kustības nol-mus

$$x = f_x(t), \quad y = f_y(t) \quad \text{un} \quad z = f_z(t).$$

Tāpat kā kustībā plaknē šīs grupas jautājumi ir sarežģītāki, jo attiecīgos diff-nol-mus ir divreiz jāintegrē, lai dabūtu kustības nol-mus. Ņemot vērā, ka vispārīgi spēka projekcijas  $X, Y$  un  $Z$  var būt funkcijas no  $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  un  $t$

$$X = f_1(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$$

$$Y = f_2(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$$

$$Z = f_3(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$$

Kustības diff-nol-mi būs

$$\left. \begin{array}{l} m\ddot{x} = f_1(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ m\ddot{y} = f_2(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ m\ddot{z} = f_3(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \end{array} \right\} \text{Simultāni diff-nol-mi.}$$

Katrs diff-nol-ms ir otrās kārtas, bet viņus vispārīgi atsevišķi nointegrēt nevar, jo diff-nol-mā priekš  $x$  nāk iekšā arī  $y, z, \dot{y}, \dot{z}$   
 " " " " " "  $x, z, \dot{x}, \dot{z}$   
 " " " " " "  $x, y, \dot{x}, \dot{y}$

Šādus nol-mus ir jāintegrē kopā un viņi reprezentē tā saukto simultānu diff-nol-mu sistēmu, ko var nointegrēt tikai speciālos gadījumos. Katru nol-mu ir jāintegrē divas reizes un tad nāks iekšā 6 integrēšanas konstantes, atrodamas no sākuma apstākļiem, kuriem jābūt dotiem:

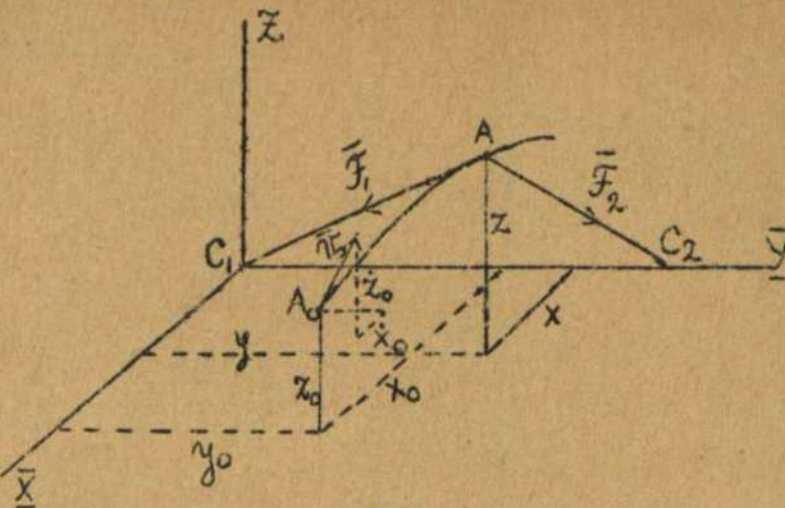
$$x_0, y_0, z_0; \quad \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0.$$



Piemērs. Materiālu punktu pievelk divi centri  $C_1$  un  $C_2$  ar spēkiem, proporcionāliem attālumiem  $F_1 = mk_1^2 r_1$  un  $F_2 = mk_2^2 r_2$ .

Firmais centrs  $C_1$  nekustās un sakrīt ar koordinātu sākumu, bet otrs centrs kustās pa  $Y$  asi pēc likuma  $y_2 = a + bt$ . Doti vēl punkta sākuma koordinātes  $A_0(x_0, y_0, z_0)$  un sākuma ātrums  $V_0$  ar projekcijām  $\dot{x}_0, \dot{y}_0$  un  $\dot{z}_0$ . Uziat kustības nol-mus  $x=f_x(t)$ ,  $y=f_y(t)$ ,  $z=f_z(t)$ .

Pievilkšanas centra  $C_1$  koordinātes  $x_1=0, y_1=0, z_1=0$ .



zīm.64.

Pievilkšanas centra  $C_2$  koordinātes  $x_2=0, y_2=a+bt, z_2=0$ .

Sastādīsim atsevišķi katra pievilkšanas spēka projekcijas

$$X_1 = F_{1x} = F_1 \cos(\overline{XF}_1) = mk_1^2 r_1 \cdot \frac{x_1 - x}{r_1} = -mk_1^2 x$$

$$Y_1 = F_{1y} = F_1 \cos(\overline{YF}_1) = mk_1^2 r_1 \cdot \frac{y_1 - y}{r_1} = -mk_1^2 y$$

$$Z_1 = F_{1z} = F_1 \cos(ZF_1) = mk_1^2 r_1 \cdot \frac{z_1 - z}{r_1} = -mk_1^2 z$$

$$X_2 = F_{2x} = F_2 \cos(\overline{XF}_2) = mk_2^2 r_2 \cdot \frac{x_2 - x}{r_2} = -mk_2^2 x$$

$$Y_2 = F_{2y} = F_2 \cos(\overline{YF}_2) = mk_2^2 r_2 \cdot \frac{y_2 - y}{r_2} = mk_2^2(a + bt) - mk_2^2 y$$

$$Z_2 = F_{2z} = F_2 \cos(ZF_2) = mk_2^2 r_2 \cdot \frac{z_2 - z}{r_2} = -mk_2^2 z$$

Kustības dif-nol-mi pēc Mac-Laurin'a būs

$$\begin{array}{l|l} m\ddot{x} = X_1 + X_2 & m\ddot{x} = -m(k_1^2 + k_2^2)x \\ m\ddot{y} = Y_1 + Y_2 & \text{jeb } m\ddot{y} = -m(k_1^2 + k_2^2)y + mk_2^2(a + bt) \\ m\ddot{z} = Z_1 + Z_2 & m\ddot{z} = -m(k_1^2 + k_2^2)z \end{array}$$

Sāsinot masu dabūsim

$$\left. \begin{array}{l} 1) \ddot{x} = -(k_1^2 + k_2^2)x \\ 2) \ddot{y} = -(k_1^2 + k_2^2)y + k_2^2(a + bt) \\ 3) \ddot{z} = -(k_1^2 + k_2^2)z \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Šos 3 dif-nol-mus varam integrēt katru atsevišķi.} \\ \text{Kā redzams } \overline{X} \text{ un } Z \text{ ass virzienos iznāk vienkāršas harmoniskas kustības dif-nol-mi,} \end{array}$$

kuŗu integrālus varam uzrakstīt pēc formulas (24)

$$\boxed{x = A_1 \sin(\sqrt{k_1^2 + k_2^2} \cdot t + a_1)} \dots \dots \dots (75)$$

$$\boxed{z = A_3 \sin(\sqrt{k_1^2 + k_2^2} \cdot t + a_3)}$$

Amplitudes  $A_1$  un  $A_3$  uzrakstīsim pēc formulas (26)

$$A_1 = \sqrt{x_0^2 + \frac{x_0^2}{k_1^2 + k_2^2}} ; A_3 = \sqrt{z_0^2 + \frac{z_0^2}{k_1^2 + k_2^2}}$$

Constantes  $\alpha_1$  un  $\alpha_3$  uzrakstīsim pēc formulas (25) jeb (25bis)

$$\alpha_1 = \arcsin \frac{x_0}{A_1} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{jeb arī} \\ \text{tg } \alpha_1 = \frac{x_0}{V_0} \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \end{array} \right.$$

$$\alpha_2 = \arcsin \frac{z_0}{A_3} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{jeb arī} \\ \text{tg } \alpha_2 = \frac{z_0}{V_0} \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \end{array} \right.$$

Periodi tanīs pašās kustībās pēc formulas (29) iznāk vienādi:

$$T_1 = T_3 = \frac{2\pi}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}$$

Ievērojot, ka periodi  $\bar{X}$  un  $Z$  ass virzienā ir vienādi, punkta trajektorija atradīsies uz eliptiska cilindra, kuŗa ass ir  $\bar{Y}$  ass. Ellipses pusasis būs  $A_1$  un  $A_3$ .

Tagad pāriesim uz 2) nol-ma integrēšanu. Pārveidosim viņu:

$$\ddot{y} = - (k_1^2 + k_2^2) \left[ y - \frac{k_2^2}{k_1^2 + k_2^2} (a + bt) \right]$$

un apzīmēsim  $y - \frac{k_2^2}{k_1^2 + k_2^2} (a + bt) = \eta$

Diferencējot divreiz pēc laika, atrodam  $\ddot{y} = \ddot{\eta}$ . Aizvietojot diff-nol-mā  $y$  ar  $\eta$ , dabūsim

$$\ddot{\eta} = -(k_1^2 + k_2^2)\eta$$

Atrastā diff-nol-ma integrālu varam uzrakstīt pēc tā paša parauga

$$\eta = A_2 \sin(\sqrt{k_1^2 + k_2^2} \cdot t + \alpha_2)$$

un tad  $y - \frac{k_2^2}{k_1^2 + k_2^2} (a + bt) = A_2 \sin(\sqrt{k_1^2 + k_2^2} \cdot t + \alpha_2)$ , bet galīgi

$$y = \frac{k_2^2}{k_1^2 + k_2^2} (a + bt) + A_2 \sin(\sqrt{k_1^2 + k_2^2} \cdot t + \alpha_2) \quad \dots\dots (75^a)$$

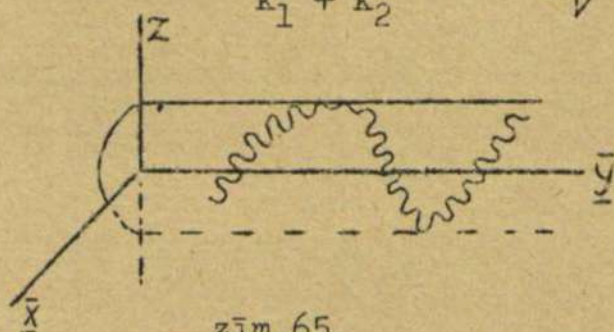
Šīs kustības nol-ms rāda, ka kustība  $\bar{Y}$  ass virzienā sastādās no divām daļām 1) no vienmērīgas kustības:  $\frac{k_2^2}{k_1^2 + k_2^2} (a + bt)$  un no vienkāršas harmoniskas kustības:  $A_2 \sin(\sqrt{k_1^2 + k_2^2} \cdot t + \alpha_2)$ .

Šīs kustības amplitudu  $A_2$  un Const.  $\alpha_2$  nevar ņemt pēc formulām (25) un (26), bet ir jāatrod tieši no kustības nol-ma izlietojot sākuma apstākļus, t.i. liekot  $t = 0$ ,  $y = y_0$  un  $\dot{y} = \dot{y}_0$  kustības nol-mā un pirmā atvasinātā

$$y_0 = \frac{k_2^2}{k_1^2 + k_2^2} \cdot a + A_2 \sin \alpha_2$$

$$y = \frac{k_2^2}{k_1^2 + k_2^2} \cdot b + A_2 \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \cos(\sqrt{k_1^2 + k_2^2} \cdot t + a_2)$$

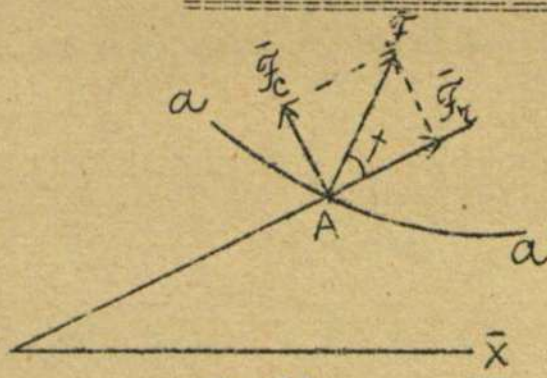
pie  $t=0$   $y_0 = \frac{k_2^2}{k_1^2 + k_2^2} \cdot b + A_2 \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \cdot \cos a_2$



zīm.65.

Apskatot visus 3 kustības nol-mus nākam pie slēdziena, ka punkta trajektorija ir vispārīga skrūves līnija uz eliptiska cilindra, kura ass ir Y ass, pie kam Y ass virzienā notiek svārstīšanās kustība un vienmērīga virzes kustība.

§ 6. Brīva materiāla punkta kustība polārkoordinātēs  
plaknē.



zīm.66.

Projecējot dināmasikas pamatnol-mu  $m\vec{j} = \vec{F}$  uz punkta radiusu vektoru un uz virzienā, perpendikulāru viņam, dabūsim punkta kustības diff-nol-mus polārkoordinātēs.

$$mj_r = F \cdot \cos \alpha$$

$$mj_c = F \cdot \sin \alpha$$

nosauksim par  $F \cdot \cos \alpha = F_r$  un nosauksim par radiālo spēku, apzīmēsim  $F \cdot \sin \alpha = F_c$  un nosauksim par cirkulāro spēku, tad punkta kustības diff-nol-mi polārkoordinātēs būs:

$$\left. \begin{aligned} m \left[ \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] &= F_r \\ \frac{m}{r} \cdot \frac{d}{dt} \left[ r^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt} \right] &= F_c \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (76)$$

Visus jautājumu attiecībā uz punkta kustību polārkoordinātēs var iedalīt divās grupās:

- I grupa: Pēc dotās kustības uziet spēku,
  - II grupa: Pēc dotā spēka uziet kustību.
- Apskatīsim katru grupu atsevišķi.

I jautājumu grupa: Pēc dotās kustības uziet spēku.

Doti punkta kustības nolīdzinājumi polārkoordinātēs

$$r = f_r(t) \quad \text{un} \quad \varphi = f_\varphi(t)$$

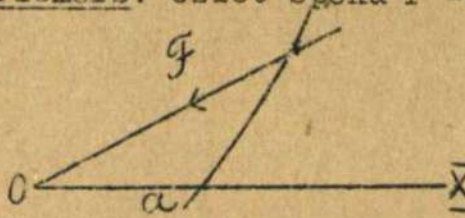
Uziet: spēku  $F$  un viņa virzienu  $\angle \alpha$ .

Sastādīsim  $\frac{dr}{dt}$  ;  $\frac{d\varphi}{dt}$  un  $\frac{d^2 r}{dt^2}$  un tad

$$\left. \begin{aligned} F_r &= m \left[ \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] \\ F_c &= \frac{m}{r} \cdot \frac{d}{dt} \left[ r^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt} \right] \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} \vec{F} &= \vec{F}_r + \vec{F}_c \quad \text{jeb} \\ F &= \sqrt{F_r^2 + F_c^2} \end{aligned}$$

Spēka virziens būs noteikts ar  $\text{tg } \chi = \frac{F_c}{F_r}$

Piemērs. Uziet spēku  $F = f(r)$  pēc dotās trajektorijas  $r = a \cdot e^{k\varphi}$ , kura reprezentē log. spirāli, un sektoriāla ātruma  $\mathcal{G} = \frac{C}{2} \text{ Const.}$  Šis uzdevums gan pilnīgi nepieder pie I grupas, jo kustības nol-mi nav doti, bet arī šinī gadījumā var atrast spēku. Ja sektoriāls ātrums  $\mathcal{G}$  ir const., tad kustība ir centrāla un  $F_c = 0$ , bet tad  $F = F_r$



zīm. 67.

$$\begin{aligned} F_c = \frac{m}{r} \cdot \frac{d}{dt} \left[ r^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt} \right] &= 0 & \left| \quad r^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \text{Const.} = 2\mathcal{G} \right. \\ \frac{d}{dt} \left[ r^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt} \right] &= 0 & \left| \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{C}{r^2} \right. \end{aligned}$$

$$F = F_r = m \left[ \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right]$$

Izteiksim lielumus, kuŗi šeit ieiet:  $\frac{d\varphi}{dt}$  un  $\frac{d^2 r}{dt^2}$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{C}{r^2} ; \quad r \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = r \cdot \frac{C^2}{r^4} = \frac{C^2}{r^3}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = a k e^{k\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = k r \cdot \frac{C}{r^2} = \frac{kC}{r}$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dr}{dt} \right) = \frac{d}{dr} \left( \frac{dr}{dt} \right) \cdot \frac{dr}{dt} = - \frac{kC}{r^2} \cdot \frac{kC}{r} = - \frac{k^2 C^2}{r^3}$$

$$F = F_r = m \left[ - \frac{k^2 C^2}{r^3} - \frac{C^2}{r^3} \right] = - \frac{mC^2(k^2 + 1)}{r^3}$$

$$\boxed{F = - \frac{mC^2(k^2 + 1)}{r^3}} \dots \dots \dots (77)$$

(-) zīme priekšā rāda, ka spēka projekcija uz radiusu vektoru ir negatīva un spēks būs pievilkšanas spēka.

II jautājumu grupa: Pēc dotā spēka uziet kustību.

Dotas spēka komponentes:  $F_r$  un  $F_c$ .

Uziet punkta kustības nolīdzinājumus:  $r = f_r(t)$   
 $\varphi = f_\varphi(t)$

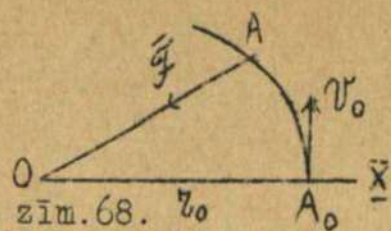
Tāpat kā paral koordinātēs, šīs grupas jautājumi ir sarežģītāki, jo attiecīgos diff-nol-mus būs divreiz jāintegrē, lai dabūtu kustības nol-mus.

Ievērojot, ka vispārīgi spēka projekcijas:  $F_r$  un  $F_c$  var būt funkcijas no  $r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}$  un  $t$ , kustības diff-nol-mi būs:

$$\left. \begin{aligned} m \left[ \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] &= f_r(r, \varphi, \frac{dr}{dt}, \frac{d\varphi}{dt}, t) \\ \frac{m}{r} \cdot \frac{d}{dt} \left[ r^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt} \right] &= f_c(r, \varphi, \frac{dr}{dt}, \frac{d\varphi}{dt}, t) \end{aligned} \right\} \text{Simultāni diff-nol-mi.}$$

Katrs diff-nol-ma ir otrās kārtas, bet viņus vispārīgi atsevišķi integrēt nevar un viņi reprezentē tā saukto simultāno diff-nol-mu sistēmu, kuŗu var nointegrēt tikai speciālos gadījumos: viens no sādiem gadījumiem ir centrālās kustības gadījums. Apskatīsim piemēru centrālajai kustībai.

Piemērs. Uz materiālu punktu darbojās pievilksanas spēks pie koordinā-



tu sākuma:  $F = -\frac{mk^2}{r^5}$ . Kustība ir centrāla un  $G = \frac{c}{2}$ . Sākuma apstākļi: pie  $\varphi_0 = 0; r_0 = a = \frac{k}{c\sqrt{2}}$ ;  $V_0 \perp r_0$ . Uziat trajektoriju:  $r = f(\varphi)$ .

zīm. 68. Ja kustība ir centrāla, tad trajektorija ir plakana līka līnija, kādēļ var aprobežoties ar polārkoordinātēm plaknē. Uzrakstīsim kustības diff-nol-mus:

$$1) m \left[ \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] = F_r \quad 2) \frac{m}{r} \cdot \frac{d}{dt} \left[ r^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt} \right] = F_c$$

Bet ja kustība ir centrāla  $F_c = 0$  un  $r^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt} = 2G = C$ , no kurienes

$$\boxed{\frac{d\varphi}{dt} = \frac{C}{r^2}} \dots\dots\dots (78)$$

Ievietosim šo nol-mā 1):

$$m \left[ \frac{d^2 r}{dt^2} - r \frac{c^2}{r^4} \right] = -\frac{mk^2}{r^5}$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{c^2}{r^3} - \frac{k^2}{r^5} \text{ aizvietosim } \frac{d^2 r}{dt^2} \text{ ar } \frac{dr}{dt} \text{ un pārveidosim } \frac{dr}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = \frac{c^2}{r^3} - \frac{k^2}{r^5},$$

tālāk, šķirot nezināmos, integrēsim

$$\int \dot{r} \, dr = \int \left( \frac{c^2}{r^3} - \frac{k^2}{r^5} \right) dr + C_1$$

$$\frac{\dot{r}^2}{2} = -\frac{c^2}{2r^2} + \frac{k^2}{4r^4} + C_1 \text{ pareizināsim ar 2}$$

$$\dot{r}^2 = \frac{k^2}{2r^4} - \frac{c^2}{r^2} + C_1, \text{ bet ja } V_0 \perp r_0, \text{ tad } V_{r0} = \dot{r}_0 = 0$$

$$0 = \frac{k^2}{2r_0^4} - \frac{c^2}{r_0^2} + C_1; \quad 0 = \frac{k^2 \cdot 4c^4}{2k^4} - \frac{c^2 \cdot 2c^2}{k^2} + C_1 = 0; \quad C_1 = 0.$$

$\dot{r} = \pm \frac{1}{r^2} \sqrt{\frac{k^2}{2} - c^2 r^2}$  no divām zīmēm jāizvēl šeit (-), jo kustības sākumā  $V_0 \perp r_0$  un tālāk spēks pievelk punktu pie koordinātu sākuma.

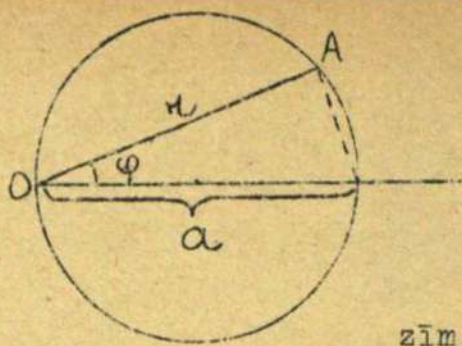
$$\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{r^2} \sqrt{\frac{k^2}{2} - c^2 r^2} \text{ pārveidosim kreiso pusi } \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{r^2} \sqrt{\frac{k^2}{2} - c^2 r^2}$$

$$\text{aizvietosim } \frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{r^2}; \quad \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{c}{r^2} = -\frac{c}{r^2} \sqrt{\frac{k^2}{2c^2} - r^2} \text{ šķirot nezināmos,}$$

$$\text{integrēsim } - \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{k^2}{2c^2} - r^2}} = \int d\varphi + C_2; \quad \arccos \frac{rc\sqrt{2}}{k} = \varphi + C_2$$

no sākuma apstākļiem  $\arccos 1 = 0 + C_2; \quad C_2 = 0$

$$\arccos \frac{r}{a} = \varphi; \quad \boxed{r = a \cos \varphi} \dots\dots\dots (79)$$



Trajektorija iznāk riņķis ar caurmēru a, kuŗš iet caur koordinātu sākumu un kuŗa centrs guļ uz  $\bar{X}$  - ass.

Ja būtu vajadzīgi vēl kustības nol-mi, varam, izejot no formulas (78), integrēt tālāk

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{r^2} \dots\dots\dots(78)$$

zīm.69.

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{a^2 \cos^2 \varphi}$$

šķirot nezināmos un integrējot

$$\int \cos^2 \varphi \cdot d\varphi = \frac{c}{a^2} t + C_3$$

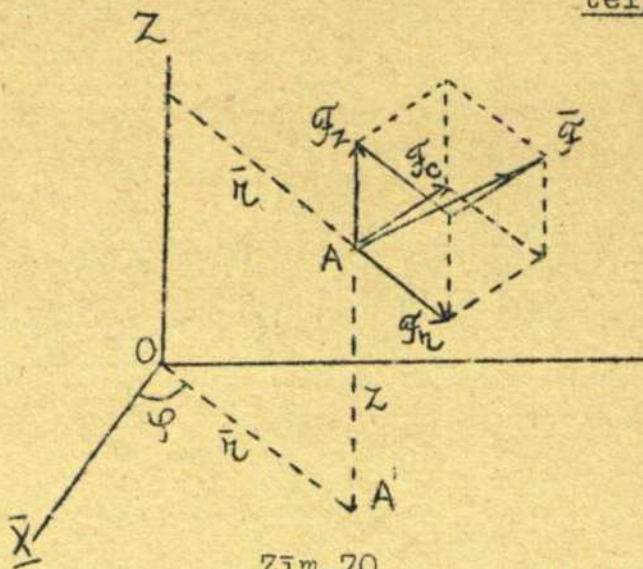
$$\frac{1}{2}(\varphi + \sin\varphi \cos\varphi) = \frac{c}{a^2} t + C_3$$

ja sākumā pie  $t_0 = 0$  arī  $\varphi_0 = 0$ , tad  $C_3 = 0$

$$\boxed{\varphi + \sin\varphi \cos\varphi = \frac{2c}{a^2} \cdot t} \dots\dots\dots(80)$$

sakars starp  $\varphi$  un  $t$ , kaut gan  $\varphi$  iznāk slēptā formā.

Brīva materiāla punkta kustība cilindra koordinātēs telpā.



Zīm.70

Projecējot dināmiķas pamatnol-mu  $m\bar{j} = \bar{F}$  uz radiālo, cirkulāro un Z - ass virzieniem, dabūsim:

- 1)  $m j_r = F_r$
- 2)  $m j_c = F_c$
- 3)  $m j_z = F_z$

un aizvietojojot paātrinājuma projekcijas ar viņu diferenciālām izteiksmēm, dabūsim punkta kustības dif-nol-mus cilindra koordinātēs:

$$\left. \begin{array}{l} 1) \quad m \left[ \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] = F_r \\ 2) \quad \frac{m}{r} \cdot \frac{d}{dt} \left[ r^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt} \right] = F_c \\ 3) \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = F_z \end{array} \right\} \dots\dots\dots(81)$$

Visus jautājumus attiecībā uz punkta kustību cilindra koordinātēs var iedalīt divās grupās:

I grupa: pēc dotās kustības uziet spēku,

II grupa: pēc dotā spēka uziet kustību.

Apskatīsim katru atsevišķi.

I jautājumu grupa: pēc dotās kustības uziet spēku.

Doti punkta kustības nol-mi cilindra koordinātēs:  $\left\{ \begin{array}{l} r = f_r(t) \\ \varphi = f_\varphi(t) \\ Z = f_z(t) \end{array} \right.$

Uziet: spēku F un viņa virzienu.

Sastādīsim  $\frac{dr}{dt}$  ;  $\frac{d\varphi}{dt}$  ;  $\frac{d^2r}{dt^2}$  un  $\frac{d^2z}{dt^2}$  , tad

$$\left. \begin{aligned} \underline{F}_r &= m \left[ \frac{d^2r}{dt^2} - r \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] \\ \underline{F}_c &= \frac{m}{r} \cdot \frac{d}{dt} \left[ r^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt} \right] \\ \underline{F}_z &= m \frac{d^2z}{dt^2} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \bar{F} &= \bar{F}_r + \bar{F}_c + \bar{F}_z \\ F &= \sqrt{F_r^2 + F_c^2 + F_z^2} \end{aligned}$$

Spēka virzienu noteiksim ar trīs Cosin.

$$\text{Cos}(\bar{r}, \bar{F}) = \frac{F_r}{F} \quad ; \quad \text{Cos}(\bar{F}_c, \bar{F}) = \frac{F_c}{F} \quad ; \quad \text{Cos}(\bar{z}, \bar{F}) = \frac{F_z}{F}$$

II jautājumu grupa: Pēc dotā spēka uziet kustību.

Dotas spēka komponentes:  $F_r$  ,  $F_c$  un  $F_z$

Uziet punkta kustības nolīdzinājumus:

$$\begin{cases} r = f_r(t) \\ \varphi = f_\varphi(t) \\ z = f_z(t) \end{cases}$$

Tāpat kā citos, augšā apskatītos gadījumos, šīs grupas jautājumi ir sarežģītāki, jo attiecīgos dif-nol-mus būs divreiz jāintegrē, kustības nol-mu iegūšanai.

Ievērojot, ka vispārīgi spēka projekcijas:  $F_r$  ,  $F_c$  un  $F_z$  var būt funkcijas no  $r, \varphi, z, \dot{r}, \dot{\varphi}, \dot{z}$  un  $t$ , kustības dif-nol-mi būs:

$$\begin{aligned} m [\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2] &= f_r(r, \varphi, z, \dot{r}, \dot{\varphi}, \dot{z}, t) \\ \frac{m}{r} \cdot \frac{d}{dt} [r^2 \cdot \dot{\varphi}] &= f_c(r, \varphi, z, \dot{r}, \dot{\varphi}, \dot{z}, t) \\ m\ddot{z} &= f_z(r, \varphi, z, \dot{r}, \dot{\varphi}, \dot{z}, t) \end{aligned}$$

Katrs dif-nol-ms ir otrās kārtas, bet viņus vispārīgā atsevišķi integrēt nevar un viņi reprezentē tā saukto simultāno dif-nol-mu sistēmu, kuru var nointegrēt tikai speciālos gadījumos.

Piemērs. Spēks  $\bar{F}$  arvienu šķērsojās ar Z asi zem taisna leņķa un veido ar radiusu vektoru  $\angle \delta = \text{Const}$ . Pēc liuma  $F = \frac{km}{r}$  . Doti arī sākuma apstākļi:  $r_0, \varphi_0, z_0, \dot{r}_0, \dot{\varphi}_0, \dot{z}_0$  . Uziet: kustību  $r = f_r(t)$ ,  $\varphi = f_\varphi(t)$ ,  $z = f_z(t)$  . Spēka projekcijas:

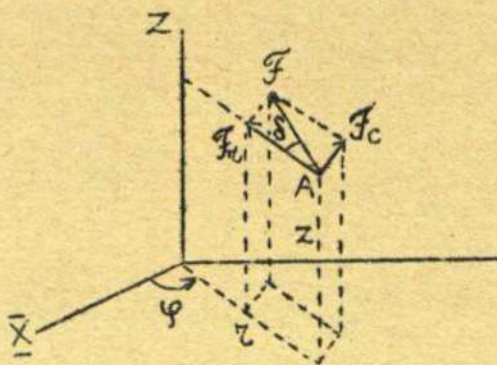
$$\begin{aligned} F_r &= -F \cdot \text{Cos} \delta = -\frac{km \text{Cos} \delta}{r} \\ F_c &= F \cdot \text{Sin} \delta = \frac{km \text{Sin} \delta}{r} \\ F_z &= 0 \end{aligned}$$

Trīs kustības dif-nol-mi šinī gadījumā būs:

$$\begin{aligned} 1) \quad m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) &= -\frac{km \text{Cos} \delta}{r} \\ 2) \quad \frac{m}{r} \cdot \frac{d}{dt} [r^2 \cdot \dot{\varphi}] &= \frac{km \text{Sin} \delta}{r} \\ 3) \quad m\ddot{z} &= 0 \end{aligned}$$

Integrējot divreiz nol-mu 3) dabūsim:  $z = z_0 + \dot{z}_0 t$  vienmērīgu kustību Z ass virzienā. Ņemsim tālāk nol-mu 2) un saīsināsim  $m$  un  $r$  , tad

$$\frac{d}{dt} [r^2 \cdot \dot{\varphi}] = k \text{Sin} \delta , \text{ bet } \delta = \text{Const.}, \text{ tā tad integrējot atrodam}$$



zīm. 71.

$r^2 \cdot \dot{\phi} = kt \sin \delta + C_1$ , no kurienes  $\dot{\phi} = \frac{kt \sin \delta + C_1}{r^2}$ . Šo nol-mu tālāk integrēt nevar un jāgriežas pie 1) nol-ma, kurā ievietojam atrasto  $\dot{\phi}$

$$m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) = -\frac{km \cos \delta}{r}$$

$$\ddot{r} - r\left(\frac{kt \sin \delta + C_1}{r^2}\right)^2 = -\frac{k \cos \delta}{r}$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{(kt \sin \delta + C_1)^2}{r^3} - \frac{k \cos \delta}{r}$$

Tālāka integrēšana ir apgrūtināta caur to, ka labā puse ir funkcija no abiem mainīgiem  $r$  un  $t$ , kādēļ mēs viņu tālāk neintegrēsim.

### § 7. Integrējošas teorēmas.

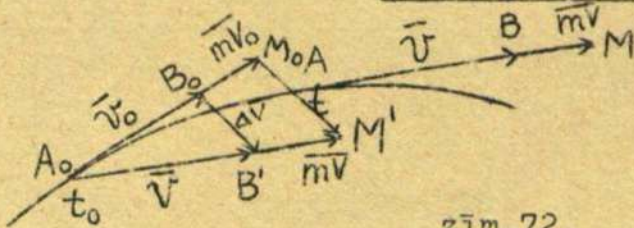
Vispārīgi, lai iegūtu kustības nol-ma pirmo integrālu, ir jāintegrē kustības dif-nol-mu, bet to pašu pirmo integrālu var dabūt, izlietojot tā sauktās integrējošas teorēmas, kuras tagad izvedīsim.

Integrējošas teorēmas ir pavisam trīs:

- I. Kustības daudzuma teorēma jeb impulsa teorēma.
- II. Kustības daudzuma momenta teorēma.
- III. Spara teorēma jeb kinētiskās enerģijas teorēma.

Visas šīs teorēmas var pierādīt neatkarīgi vienu no otras, bet mēs apskatīsim viņas uzrādītā kārtībā.

#### I integrējošā teorēma jeb kustības daudzuma teorēma jeb impulsa teorēma.



zīm.72.

Pirmkārt apskatīsim visus lielumus, kuri šinī teorēmā nāk priekšā, t.i. kustības daudzumu un spēka impulsu.

Par punkta kustības daudzumu  $\overline{mV}$  sauksim punkta ātruma vektora reizinājumu ar viņa masu  $m$ . No

dēfīnicijas seko, ka kustības daudzums ir vektoriāls lielums, kura virziens sakrīt ar ātruma virzienu. Ja punkts laika momentā  $t_0$  atrodas punktā  $A_0$  un viņa ātrums ir  $\overline{A_0 B_0} = \overline{V_0}$ , tad kustības daudzums būs  $\overline{A_0 M_0} = \overline{mV_0}$ , tāpat, ja laikā  $t$  ātrums ir  $\overline{AB} = \overline{V}$ , tad kustības daudzums  $\overline{AM} = \overline{mV}$ . Atliekot punktā  $A_0$  vektoru  $\overline{A_0 B'} = \overline{V}$  un vektoru  $\overline{A_0 M'} = \overline{mV}$ , dabūsīm ātruma pieaugumu laika sprīdī  $t - t_0$ :  $\overline{B_0 B'} = \overline{\Delta V} = \overline{V} - \overline{V_0}$  un kustības daudzuma pieaugumu  $\overline{M_0 M'} = \overline{\Delta mV} = \overline{mV} - \overline{mV_0}$ , pie kam  $\overline{\Delta mV} \parallel \overline{\Delta V}$ .

Kā katru vektoru, arī kustības daudzumu un viņa pieaugumu var projēt uz koordinātu asīm.

$\overline{mV}$ - kustības daudzums	$\overline{mV} - \overline{mV_0}$	- kustības daudzuma pieaugums
$\left. \begin{matrix} m\dot{x} \\ m\dot{y} \\ m\dot{z} \end{matrix} \right\}$ Viņa projekcijas uz asīm	$\left. \begin{matrix} m\dot{x} - m\dot{x}_0 \\ m\dot{y} - m\dot{y}_0 \\ m\dot{z} - m\dot{z}_0 \end{matrix} \right\}$	Viņa projekcijas uz asīm

Nemot kustības daudzuma pieaugumu bezgalīgi mazā laika sprīdī  $dt$ , dabūsīm vektoru  $d\overline{mV}$ .

$d\overline{mV}$  - kustības daudzuma pieaugums bezgalīgi mazā laika sprīdī jeb kustības daudzuma diferenciāls.

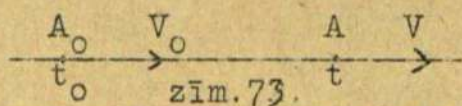
$\left. \begin{matrix} dm\dot{x} \\ dm\dot{y} \\ dm\dot{z} \end{matrix} \right\}$  - viņa projekcijas uz koordinātu asīm.

Kustības daudzuma dimenziju dabūsīm, ievietojot katra lieluma dimenziju un apvienojot simbolus



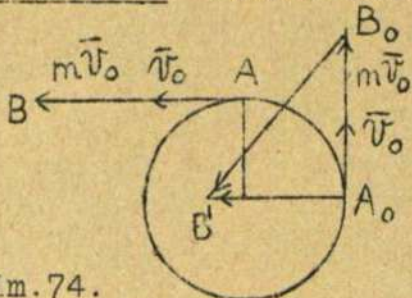
$$m \left[ \frac{F}{j} \right] \cdot V [LT^{-1}] = mV \left[ \frac{F \cdot L \cdot T^{-1}}{L \cdot T^{-2}} \right] = mV [F \cdot T]$$

Piemērs 1. Punkts kustās taisnā virzienā ar Const. ātrumu  $V = V_0$ .



Uziet kustības daudzuma pieaugumu laika sprīdī  $t-t_0$ . Atbilde:  $m\bar{V} - m\bar{V}_0 = 0$

Piemērs 2. Punkts kustās pa riņķi ar Const. ātrumu  $V = V_0$  un laika sprīdī  $t-t_0$  ir nogājis riņķa kvadrantu no punkta  $A_0$  līdz  $A$ . Uziet kustības daudzuma pieaugumu šī laika sprīdī.



Uzkonstruējot geometrisko pieaugumu, atrodam:  $m\bar{V} - m\bar{V}_0 = B_0B'$ , viņa lielums būs  $B_0B' = mV_0\sqrt{2}$

zīm.74.

Spēka impulss.

Par spēka elementāro impulsu sauksim spēka vektora  $\vec{F}$  reizinājumu ar laika elementu  $dt$ , kurš ir skalārs lielums. Spēka elementārais impulss:  $\vec{F} \cdot dt$  ir vektoriāls lielums, kuŗa virziens sakrīt ar spēka virzienu. Kā katru vektoru, arī viņu var projecēt uz koordinātu asīm.

$\vec{F} \cdot dt$  - spēka elementārais impulss  
 $X \cdot dt$   
 $Y \cdot dt$  } viņa projekcijas uz koordinātu asīm.  
 $Z \cdot dt$

Teorēma I. Kopspēka elementārais impulss ir geometriska summa no komponentu elementāriem impulsiem.

Ja  $F$  ir kopspēks un viņa komponentes:  $F_1, F_2, F_3, \dots$ , tad  $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots$  pareizinot šo ar  $dt$ , dabūsim

$$\vec{F} \cdot dt = \vec{F}_1 \cdot dt + \vec{F}_2 \cdot dt + \vec{F}_3 \cdot dt + \dots$$

ar ko teorēma ir pierādīta.

Spēka impulss galīgā laika sprīdī:  $t-t_0$ . Lai noteiktu viņu, sadalīsim laika sprīdī  $t-t_0$   $n$ -vienādos mazos laika elementos  $\Delta t$ , tad

$t - t_0 = n \cdot \Delta t$ , pie kam  $\Delta t_1 = \Delta t_2 = \Delta t_3 = \dots = \Delta t$ . Spēks vispārīgi ir  $F = f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$ , bet, ja punkta kustība ir zināma, tad  $\begin{cases} x=f_x(t) \\ y=f_y(t) \\ z=f_z(t) \end{cases}$  un spēks arī iznāks  $\vec{F} = \vec{F}(t)$

Apzīmēsim spēku pirmā laika sprīdī ar  $\vec{F}_1$ , tad viņa impulss  $\vec{F}_1 \Delta t$   
 " otrā " "  $\vec{F}_2 \Delta t$   
 " trešā " "  $\vec{F}_3 \Delta t$   
 u.t.t.

Zem spēka impulsa galīgā laika sprīdī  $t-t_0$  mēs sapratīsim atsevišķo impulsu geometriskās summas robežu, ja  $\Delta t \rightarrow 0$  un  $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\vec{F}_1 \cdot \Delta t + \vec{F}_2 \cdot \Delta t + \vec{F}_3 \cdot \Delta t + \dots)_{n \rightarrow \infty} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \Delta t = \int_{t_0}^t \vec{F} \cdot dt$$

Apzīmējot impulsu galīgā laika sprīdī simboliski ar  $\vec{I}$ , dabūsim

$$\boxed{\vec{I} = \int_{t_0}^t \vec{F} \cdot dt} \dots \dots \dots (82)$$

un viņa projekcijas uz koordinātu asīm:

$$I_x = \int_{t_0}^t X \cdot dt \quad ; \quad I_y = \int_{t_0}^t Y \cdot dt \quad ; \quad I_z = \int_{t_0}^t Z \cdot dt$$

Teorēma II. Kopspēka galīgais impulss kādā laika sprīdī ir geometriska summa no komponentu galīgiem impulsiem.

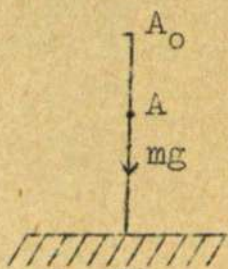
Ja  $\vec{F}$  ir kopspēks un viņa komponentes  $F_1, F_2, F_3, \dots$ , tad  $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots$  pareizinot pēdējo ar  $dt$  un integrējot robežās no  $t_0$  līdz  $t$ , dabūsim

$$\int_{t_0}^t \vec{F}.dt = \int_{t_0}^t \vec{F}_1.dt + \int_{t_0}^t \vec{F}_2.dt + \int_{t_0}^t \vec{F}_3.dt + \dots \text{ jeb } \vec{I} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \vec{I}_3 + \dots$$

ar ko teorēma ir pierādīta.

Spēka impulsa noteikšana atsevišķos gadījumos.

I gadījums:  $\vec{F} = \text{Const.}$  Spēks ir const. pēc lieluma un virziena. Tādā gadījumā vektora zīme atkrīt un integrēšana viegli izvedāma



zīm.75.

$$I = \int_{t_0}^t F.dt = F(t - t_0)$$

Piemērs. Noteikt spēka impulsu brīvā kritienā.

$$F = mg.$$

$$I = \int_{t_0}^t mg.dt = mg(t - t_0)$$

II gadījums:  $F = f(t)$ . Spēka lielums ir laika funkcija, bet viņa virziens nemainās.

Šādā gadījumā arī vektora zīme atkrīt un paliek vienkāršs integrāls,

$$I = \int_{t_0}^t F.dt = \int_{t_0}^t f(t).dt, \text{ kuru sauc par laika integrālu.}$$

III gadījums:  $\vec{F} = f(t)$ . Spēks maina lielumu un virzienu. Impulsa formulā  $\vec{I} = \int_{t_0}^t \vec{F}.dt$  vektora zīmi atņemt nevar, bet impulsa lielumu un viņa virzienu var atrast pēc projekcijām uz koordinātu asīm.

Apzīmēsim spēka  $F$  projekcijas ar  $X, Y$  un  $Z$ , tad

$$I_x = \int_{t_0}^t X.dt$$

$$I_y = \int_{t_0}^t Y.dt$$

$$I_z = \int_{t_0}^t Z.dt$$

no kurienu impulss

$$\vec{I} = \vec{I}_x + \vec{I}_y + \vec{I}_z$$

$$I = \sqrt{I_x^2 + I_y^2 + I_z^2}$$

un viņa virziens:

$$\cos(\vec{X}|\vec{I}) = \frac{I_x}{I}$$

$$\cos(\vec{Y}|\vec{I}) = \frac{I_y}{I}$$

$$\cos(\vec{Z}|\vec{I}) = \frac{I_z}{I}$$

Spēka impulsa dimenzija: spriežot pēc formulas  $\vec{I} = \int_{t_0}^t \vec{F}.dt$  būs  $[F.T]$ . Kā redzams, kustības daudzuma dimenzija un spēka impulsa dimenzijas ir vienādas.

Kustības daudzuma jeb impulsa teorēmas pierādījums.

Iziesim no dināmiķas pamatnol-ma  $m\vec{j} = \vec{F}$ , aizvietosim  $\vec{j} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ ,

$$\frac{m d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \text{ jeb } \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F} \text{ pareizināsim ar } dt \quad \boxed{d(m\vec{v}) = \vec{F}.dt} \dots\dots(83)$$

Atrastā formula (83) reprezentē kustības daudzuma teorēmu diferenciālā veidā, kuru formulēsim tā: kustības daudzuma diferenciāls ir vienāds ar spēka elementāro impulsu.

Projecējot nol-mu (83) uz koordinātu asīm, dabūsim to pašu teorēmu koordinātēs.

Kustības daudzuma teorēma koordinātēs diferenciālā veidā:

$$\left. \begin{aligned} \boxed{d(m\dot{x}) = X \cdot dt} \\ \boxed{d(m\dot{y}) = Y \cdot dt} \\ \boxed{d(m\dot{z}) = Z \cdot dt} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(84)$$

Nointegrējot nol-mu (83) robežās no  $t_0$  līdz  $t$ , dabūsim kustības daudzuma teorēmu galīgā veidā:

$$\boxed{m\bar{V} - m\bar{V}_0 = \int_{t_0}^t \bar{F} \cdot dt} \dots\dots\dots(85)$$

kuŗu formulēsīm tā: kustības daudzuma pieaugums kādā laika sprīdī ģeometriski līdzinājās spēka impulsam tam pašā laika sprīdī. Nol-mu (85) arī varam projecēt uz koordinātu asīm. Kustības daudzuma teorēma koordinātēs galīgā veidā:

$$\left. \begin{aligned} \boxed{m\dot{x} - m\dot{x}_0 = \int_{t_0}^t X \cdot dt} \\ \boxed{m\dot{y} - m\dot{y}_0 = \int_{t_0}^t Y \cdot dt} \\ \boxed{m\dot{z} - m\dot{z}_0 = \int_{t_0}^t Z \cdot dt} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(86)$$

Speciāli gadījumi.

I) Spēks  $F = 0$ . Ņemot nol-mu (85), atrodam  $m\bar{V} - m\bar{V}_0 = 0$  jeb  $m\bar{V} = m\bar{V}_0$ , tas nozīmē, ka kustības daudzums paliek Const., kādēļ šo gadījumu sauc par kustības daudzuma pastāvības principu.

Ja tikai kāda no spēka projekcijām, piem.  $X = 0$ , tad arī kustības daudzuma projekcija uz to pašu asi patur Const. vērtību:  
 $m\dot{x} - m\dot{x}_0 = 0$  un  $m\dot{x} = m\dot{x}_0$ .

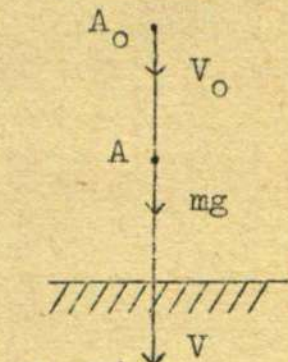
II) Spēks  $\bar{F} = \text{Const.}$ , mēs dabūjam pirmo integrālu  $m\bar{V} - m\bar{V}_0 = \bar{F}(t - t_0)$

Piemērs. Uziēt krišanas ātrumu smaga materiāla punkta brīvā kritienā, ja krišanas laiks ir  $t$  un sākuma ātrums  $V_0$  sakrīt ar smaguma spēka  $mg$  virzienu. Vektora zīmes var atnest un rakstīt

$$mV - mV_0 = \int_0^t mg \cdot dt$$

$$mV - mV_0 = mgt$$

$$V = V_0 + gt$$



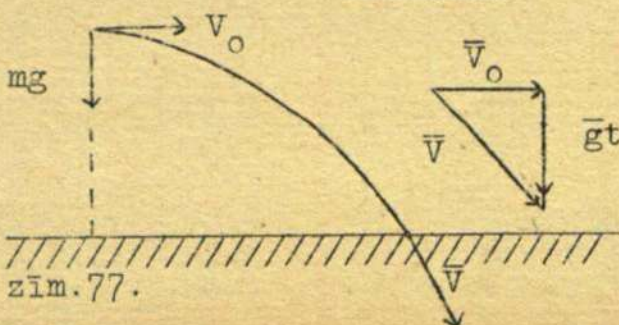
zīm.76.

Piemērs. Uziēt krišanas ātrumu smaga materiāla punkta brīvā kritienā, ja krišanas laiks ir  $t$ , bet sākuma ātrums nesakrīt ar smaguma spēka virzienu.

Vektora zīmes nevar atnest un

$$m\bar{V} - m\bar{V}_0 = \int_0^t m\bar{g} \cdot dt$$

$$\bar{V} - \bar{V}_0 = \bar{g}t ; \bar{V} = \bar{V}_0 + \bar{g}t$$



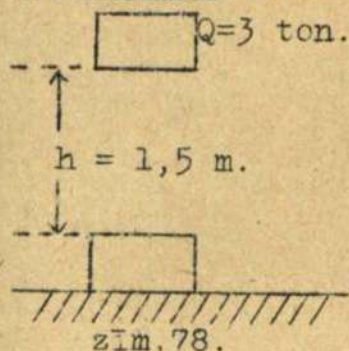
zīm.77.

III) Spēks  $\vec{F} = \vec{F}(t)$  un viņa projekcijas  $X = f_x(t)$ ;  $Y = f_y(t)$ ;  $Z = f_z(t)$ . Šādā gadījumā visizdevīgāki ir pāriet uz projekcijām, izlie-  
tojot formulas (86):

$$m\dot{x} - m\dot{x}_0 = \int_{t_0}^t f_x(t) \cdot dt ; m\dot{y} - m\dot{y}_0 = \int_{t_0}^t f_y(t) \cdot dt ; m\dot{z} - m\dot{z}_0 = \int_{t_0}^t f_z(t) \cdot dt$$

Trieciena jautājumi. Ir vēl viena jautājumu grupa, kuru atrisināšanai ar sekmēm var lietot kustības daudzuma teorēmu, - tie ir trieciena jau-  
tājumi. Par triecienu mēs sauksim ļoti lielu spēku iedarbību ļoti īsā  
laikā. Trieciena spēks, bez saubām, ar laiku mainās, bet šo  $f(t)$  mēs ne-  
zinām un, pieņemot viņu kaut kādā veidā, varam ar kustības daudzuma te-  
orēmas palīdzību atrast trieciena spēku.

Piemērs 1. Tvaika vesers ar svaru  $Q = 3$  ton. krīt no augstuma  $h = 1,5$  m,



bez sākuma ātruma ( $V_0 = 0$ ) uz dzelzs blūķi. Blūķa  
dēformācijas laiks  $\tau = 0,01$  sec. Uziat vesera spie-  
dienu  $S$  uz blūķi, trieciena laikā. Pēc darbības un  
pret darbības principa uz nokritušo veseri darbo-  
sies blūķa reakcija, kura līdzināsies vesera spie-  
dienam uz blūķi  $S$ , bet ies pretējā virzienā uz aug-  
šu. Šī reakcija par trieciena laiku mainās, bet  
vienkāršības dēļ mēs skaitīsim viņu par Const. Pie-  
lietosim veserim kustības daudzuma teorēmu no kri-  
šanas sākuma momenta līdz dēformācijas beigām. Ņe-  
mot vērā, ka uz veseri darbojās divi spēki  $Q$  un

$(-S)$ , jāņem labā pusē impulsu summu.

$$m\vec{V} - m\vec{V}_0 = \sum \int_0^{t+\tau} \vec{F} \cdot dt, \text{ atmetot vektoru zīmes, dabūsim } mV - mV_0 = \int_0^{t+\tau} Q dt - \int_t^{t+\tau} S dt$$

kur  $t$  - apzīmē krišanas laiku

$\tau$  - apzīmē dēformācijas laiku.

Bet kā sākuma ātrums  $V_0 = 0$ , tā arī gala ātrums dēformācijas beigās  
 $V = 0$ . Integrējot dabūsim tālāk pie Const.  $S$

$$0 - 0 = [Qt]_0^{t+\tau} - [S \cdot t]_t^{t+\tau} ; Q(t + \tau) = S\tau ; S = Q(1 + \frac{t}{\tau})$$

tālāk meklēsim  $t$  brīvā kritienā, no augstuma  $h$ , pēc formulas  $h = \frac{gt^2}{2}$   
pie  $V_0 = 0$ , no kurienes  $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

$$S = Q(1 + \frac{1}{\tau} \sqrt{\frac{2h}{g}})$$

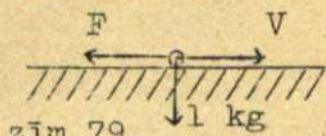
Skaitliski:  $S = 3(1 + \frac{1}{0,01} \sqrt{\frac{2 \cdot 1,5}{9,81}}) = 168,9$  ton.

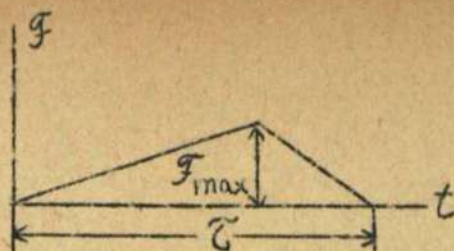
Trieciena spēks iznāk diezgan liels, salīdzinot ar vesera svaru  $Q$ . At-  
rasto rezultātu jāskaita par trieciena spēka vidējo vērtību, jo mēs  
pieņemām, ka  $S$  ir Const.

Piemērs 2. Materiāls punkts bumbiņas veidā, ar svaru  $1$  kg, gul uz ab-  
solūti gludas horizontālas plaknes. Punktam dots  
trieciens, pēc kura viņš sāk kustēties ar ātrumu

$V = \frac{1}{5}$  m/sec. Trieciena laiks  $\tau = 0,001$  sec. Uziat  
trieciena spēku  $F = ?$

Neskaitīsim tagad trieciena spēku par Const., bet izvēlēsim viņam  
maiņas likumu, prātojot tā: trieciena sākumā spēks līdzinājās nullei,  
tālāk pieņemsim, ka viņš lineāri pieaug līdz  $F_{max}$  un atkal uz trieciena





zīm.80.

bet integrāls labā pusē nav nekas cits, kā trijstūra (zīm.80)laukums ar pamatu  $\tau$  un augstumu  $F_{max}$ , tā tad

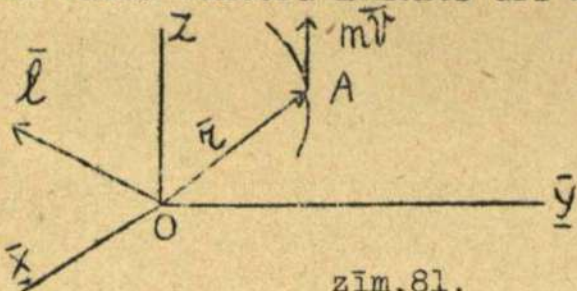
$$\int_0^{\tau} F \cdot dt = \frac{1}{2} \tau \cdot F_{max}$$

Bez tam sākumā bumbiņas ātrums  $V_0 = 0$ ,  $mV = \frac{1}{2} \tau \cdot F_{max}$ , no kurienes

$$F_{max} = \frac{2mV}{\tau}, \text{ bet } m = \frac{Q}{g}; F_{max} = \frac{2QV}{g \cdot \tau} \text{ .Skaitliski } F_{max} = \frac{2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}}{9,81 \cdot 0,001} = 40,8 \text{ kg.}$$

II integrējošā teorēma jeb kustības daudzuma momenta teorēma.

Pirmkārt apskatīsim dažādas kustības daudzuma momenta izteiksmes. Kā katra vektora moments arī kustības daudzuma vektora moments attiecībā uz kādu punktu O ir vektorprodukts



zīm.81.

no punkta radiusa vektora  $r$  un kustības daudzuma vektora  $mV$ . Apzīmēsim kustības daudzuma momentu, kurš ir vektorciāls lielums, ar  $\bar{l}$ , tad

$$\bar{l} = [\bar{r}, m\bar{V}] \dots\dots(87)$$

Rakstot vektorproduktu determinantes formā un attīstot viņu, dabūsim  $\bar{l}$  vektora projekcijas uz koordinātu asīm, jeb arī kustības daudzuma vektora momentus attiecībā uz koordinātu asīm.

$$\bar{l} = [\bar{r}, m\bar{v}] = \begin{vmatrix} \bar{i}_x & \bar{i}_y & \bar{i}_z \\ x & y & z \\ m\dot{x} & m\dot{y} & m\dot{z} \end{vmatrix}$$

$$\bar{l} = (y \cdot m\dot{z} - z \cdot m\dot{y})\bar{i}_x + (z \cdot m\dot{x} - x \cdot m\dot{z})\bar{i}_y + (x \cdot m\dot{y} - y \cdot m\dot{x})\bar{i}_z$$

$$\bar{l} = m(y\dot{z} - z\dot{y})\bar{i}_x + m(z\dot{x} - x\dot{z})\bar{i}_y + m(x\dot{y} - y\dot{x})\bar{i}_z$$

Bet katrs vektors ir ģeometriskā summa no savām komponentēm:

$\bar{l} = \bar{l}_x + \bar{l}_y + \bar{l}_z = l_x \cdot \bar{i}_x + l_y \cdot \bar{i}_y + l_z \cdot \bar{i}_z$ , no kurienes tad seko: kustības daudzuma momentu attiecībā uz koordinātu asīm

$$\left. \begin{aligned} l_x &= m(y\dot{z} - z\dot{y}) \\ l_y &= m(z\dot{x} - x\dot{z}) \\ l_z &= m(x\dot{y} - y\dot{x}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(88)$$

Salīdzinot formulās (88) labās puses ar sektoriāla ātruma izteiksmēm koordinātu plaknēs:

$$\begin{aligned} \sigma_{yz} &= \frac{1}{2}(y\dot{z} - z\dot{y}) \\ \sigma_{zx} &= \frac{1}{2}(z\dot{x} - x\dot{z}) \\ \sigma_{xy} &= \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}) \end{aligned}$$

atrodam vēl citas izteiksmes kustības daudzuma momentiem attiecībā uz koordinātu asīm.

Citas kustības daudzuma momenta izteiksmes caur sektoriālu ātrumu:

$$\left. \begin{aligned} l_x &= 2m\sigma_{yz} \\ l_y &= 2m\sigma_{zx} \\ l_z &= 2m\sigma_{xy} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(88^a)$$

Formulas (88<sup>a</sup>) izsaka, ka kustības daudzuma moments ap kādu no asīm ir vienāds ar punkta masas divkārsotu reizinājumu ar sektoriālu ātrumu plaknē, kuŗa ir perpendikulāra asij.

Kustības daudzuma momenta dimenzijas:

Ņemot formulu (87):  $l = [\bar{r}, \bar{mv}]$ , redzam, ka kustības daudzuma dimenzija būs

$$[L] \cdot \left[ \frac{F}{L.T^{-2}} \right] \cdot [L.T^{-1}] = [F.L.T]$$

Kustības daudzuma momenta teorēmas pierādījums.

Ņemsim kustības daudzuma momentu ap kādu no asīm un diferencēsim viņu pēc laika

$$l_x = m(y\dot{z} - z\dot{y})$$

$$\frac{dl_x}{dt} = m \frac{d}{dt}(y\dot{z} - z\dot{y}) = m(y\ddot{z} + \dot{y}\dot{z} - \dot{z}\dot{y} - z\ddot{y}) = ym\ddot{z} - zm\ddot{y}$$

bet  $m\ddot{z} = Z$  un  $m\ddot{y} = Y$ ;  $\frac{dl_x}{dt} = yZ - zY = L_x$ , kur  $L_x$  ir spēka moments attiecībā uz  $\bar{X}$  asi.

Analogiski var atrast arī  $\frac{dl_y}{dt} = L_y$  un  $\frac{dl_z}{dt} = L_z$

Šīs formulas reprezentē kustības daudzuma momenta teorēmu, kuŗu formulēsim tā:  
Filna atvasinātā pēc laika no kustības daudzuma momenta attiecībā uz kādu asi līdzinājas spēka momentam attiecībā uz to pašu asi.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dl_x}{dt} &= L_x \\ \frac{dl_y}{dt} &= L_y \\ \frac{dl_z}{dt} &= L_z \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(89)$$

Formulas (89) var arī apvienot vienā, saskaitot viņas ģeometriski

$$\frac{d\bar{l}}{dt} = \bar{L} \dots\dots\dots(89^a)$$

Aizvietojot formulās (89) kreisā pusē kustības daudzuma momentu ar viņa izteiksmēm no formulām (38), dabūsim

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d}{dt}(y\dot{z} - z\dot{y}) &= L_x \\ m \frac{d}{dt}(z\dot{x} - x\dot{z}) &= L_y \\ m \frac{d}{dt}(x\dot{y} - y\dot{x}) &= L_z \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(90)$$

kustības daudzuma momenta teorēma paralēlkoordinātēs

Aizvietojot formulās (89) kreisā pusē kustības daudzuma momentu ar viņa izteiksmēm no formulām (88-a), dabūsim tā saukto "laukuma teorēmu"

Kustības daudzuma momenta teorēmas izteiksme caur sektoriālu ātrumu jeb laukuma teorēma

$$\left. \begin{aligned} 2m \frac{d\sigma_{yz}}{dt} &= L_x \\ 2m \frac{d\sigma_{xz}}{dt} &= L_y \\ 2m \frac{d\sigma_{xy}}{dt} &= L_z \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(91)$$

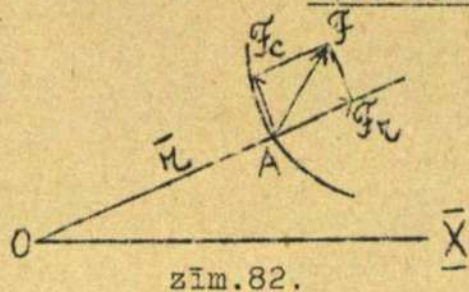
To pašu teorēmu varam izteikt polārkoordinātēs, aizvietojot  $\sigma = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt}$

Kustības daudzuma momenta teorēma polārkoordinātēs

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d}{dt}(r_{yz}^2 \cdot \frac{d\varphi_{yz}}{dt}) &= L_x \\ m \frac{d}{dt}(r_{xz}^2 \cdot \frac{d\varphi_{xz}}{dt}) &= L_y \\ m \frac{d}{dt}(r_{xy}^2 \cdot \frac{d\varphi_{xy}}{dt}) &= L_z \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(92)$$

Šeit  $r_{xy}$  ir radiusa vektora projekcija  $\overline{XY}$  plaknē un  $\varphi_{xy}$  leņķis, kuru šī projekcija apraksta  $\overline{XY}$  plaknē u.t.t.

Cits laukuma teorēmas pierādījums.



Ņemsim otru kustības dif-nol-mu polārkoordinātēs  $m \cdot \frac{d}{dt}(r^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt}) = F'_c$  pareizināsim ar r

$m \cdot \frac{d}{dt}(r^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt}) = F'_c \cdot r$ , bet  $r^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt} = 2\sigma_{xy}$  un  $F'_c \cdot r = L_z$ , no kurienes

$$\boxed{2m \frac{d\sigma_{xy}}{dt} = L_z}$$

Kustības daudzuma momenta teorēmas speciālie gadījumi.

I gadījums. Ja viens no momentiem, piem.  $L_z = 0$ , t.i. spēks arvienu paliek vienā plaknē ar asi OZ un krusto viņu jeb ir paralēls viņai, tad  $\frac{dL_z}{dt} = 0$  un  $L_z = \text{Const.}$ , ievērojot tālāk dažādas kustības daudzuma momenta izteiksmes, varam rakstīt pēc analogijas:

ja  $L_x = 0$ , tad  $L_x = C_1$  jeb  $m(y\dot{z} - z\dot{y}) = C_1$  jeb arī  $\sigma_{yz} = \frac{C_1}{2m}$

ja  $L_y = 0$ , tad  $L_y = C_2$  jeb  $m(z\dot{x} - x\dot{z}) = C_2$  jeb arī  $\sigma_{zx} = \frac{C_2}{2m}$

ja  $L_z = 0$ , tad  $L_z = C_3$  jeb  $m(x\dot{y} - y\dot{x}) = C_3$  jeb arī  $\sigma_{xy} = \frac{C_3}{2m}$

Šeit Const.  $C_1, C_2$  un  $C_3$  vērtības ir jāatrod no sākuma apstākļiem, kuriem jābūt dotiem.

Izteiksmes veidā:  $m(x\dot{y} - y\dot{x}) = C_3$  reprezentē pirmos integrāļus, jo viņas satur tikai koordinātes un pirmās atvasinātās.

Izteiksmes veidā:  $\sigma_{xy} = \frac{C_3}{m}$  reprezentē aprakstīta laukuma pastāvības likumu laika vienībā  $\overline{XY}$  plaknē un saucās par laukuma integrālu šinī plaknē.

Apakšgadījums. Ja visi 3 momenti  $L_x = L_y = L_z = 0$ , t.i. spēks arvienu iet caur koordinātu sākumu, tad kustība būs centrāla un

$$\vec{L} = \vec{L}_x + \vec{L}_y + \vec{L}_z = \text{Const.}$$

Sektorciāls ātrums  $\vec{G}$  katrā plaknē tad būs Const., mēs dabūsim trīs laukuma integrāļus trijās koordinātu plaknēs un laukums, kuru aprakstīs punkta radiuss-vektors telpā laika vienībā patur Const. vērtību. Šinī pēdējā gadījumā, kā tas bija pierādīts § 4-a, punkta trajektorija būs plakana.

II gadījums. Ja viens no momentiem, piem  $L_z = \text{Const.} = k_3$ , tad

$$m \frac{d}{dt}(x\dot{y} - y\dot{x}) = k_3. \text{ Nointegrējot šo izteiksmi, dabūsim}$$

$$m(x\dot{y} - y\dot{x}) = k_3 t + C_3 \dots \text{I integrālu } \overline{XY} \text{ plaknē.}$$

Analogiski, ja  $L_x = k_1$ , tad  $m(y\dot{z} - z\dot{y}) = k_1 t + C_1 \dots$  I int.  $\overline{YZ}$  plaknē.

ja  $L_y = k_2$ , tad  $m(z\dot{x} - x\dot{z}) = k_2 t + C_2 \dots$  I int.  $\overline{XZ}$  plaknē.

Constantes  $C_1, C_2$  un  $C_3$  jāatrod no sākuma apstākļiem, kuriem jābūt dotiem.

III gadījums. Ja viens no momentiem, piem  $L_z = f_z(t)$ , tad  $m \frac{d}{dt}(x\dot{y} - y\dot{x}) = f_z(t)$

Nointegrējot šo izteiksmi, dabūsim  $m(x\dot{y} - y\dot{x}) = \int f_z(t).dt + C_3 \dots$  I integrāls  $\overline{XY}$  plaknē. Analogiski,

ja  $L_x = f_x(t)$ , tad  $m(y\dot{z} - z\dot{y}) = \int f_x(t).dt + C_1 \dots$  I int.  $\overline{YZ}$  plaknē

ja  $L_y = f_y(t)$ , tad  $m(z\dot{x} - x\dot{z}) = \int f_y(t).dt + C_2 \dots$  I int.  $\overline{XZ}$  plaknē.

III integrējoša teorēma jeb spara teorēma jeb kinētiskās enerģijas teorēma.

Pirmkārt dēfinēsīm lielumus, kuri šinī teorēmā nāk priekšā.

Par punkta sparu jeb kinētisko enerģiju (daži autori sauc viņu arī par dzīvo spēku) mēs sauksim pusi no punkta masas reizinājuma ar ātruma kvadrātu. Apzīmēsīm viņu ar  $K$  (grieķu burts: lielais kappā), tad

$$K = \frac{mV^2}{2} \dots \dots \dots (93)$$

Punkta ātrums  $\vec{V}$  ir vektors, bet lai dabūtu viņa kvadrātu, jāpareizina skalāri  $(\vec{V}, \vec{V}) = V^2 \cdot \text{Cos} 0^\circ = V^2$ , jo reizinot vektoriāli, dabūsim

$|\vec{V}, \vec{V}| = V^2 \cdot \text{Sin} 0^\circ = 0$ . Tā tad spars jeb kinētiskā enerģija ir skalārs lielums, kuram nekāds virziens nepiemīt.

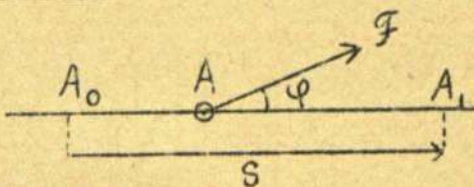
Aizvietojot  $V^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$ , dabūsim spara izteiksmi koordinātēs

$$K = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \dots \dots \dots (93^a)$$

Spara dimenzija. Ievietojot formulā (93) masas un ātruma dimenzijas, dabūsim spara dimenziju

$$\left[ \frac{F}{L \cdot T^{-2}} \right] \left[ L^2 \cdot T^{-2} \right] = [F \cdot L]$$

Darbs. Otrs lielums, kurš nāk priekšā spara teorēmā ir darbs. Dēfinēsīm darbu pirmkārt vienkāršotā gadījumā, kad spēks  $\vec{F}$ , kurš iedarbojās uz punktu A patur Const. lielumu un virzienu un punkta A pārvietojums notiek taisnā virzienā. Par spēka  $\vec{F}$  darbu, ja punkts ir pārvietojies no  $A_0$  līdz  $A_1$



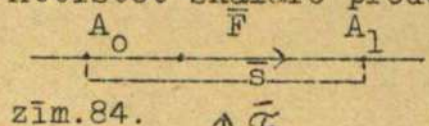
zīm.83.



sauksim skalāro produktu no spēka  $\vec{F}$  un pārvietojuma  $\vec{s}$ . Apzīmējot darbu ar  $\mathcal{A}$ , rakstīsim

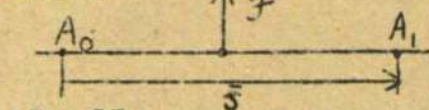
$$\mathcal{A} = (\vec{F} \cdot \vec{s}) \dots \dots \dots (94)$$

Attīstot skalāro produktu, dabūsim  $\mathcal{A} = F \cdot s \cdot \cos \varphi$ .



zīm.84.

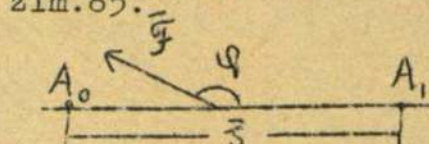
Speciālā gadījumā, kad spēka  $\vec{F}$  virziens sakrīt ar pārvietojuma  $\vec{s}$  virzienu darbs būs:  $\mathcal{A} = F \cdot s$  (zīm.84).



zīm.85.

Speciālā gadījumā, kad spēks  $\vec{F} \perp \vec{s}$ , tad spēka  $\vec{F}$  darbs uz pārvietojuma  $\vec{s}$

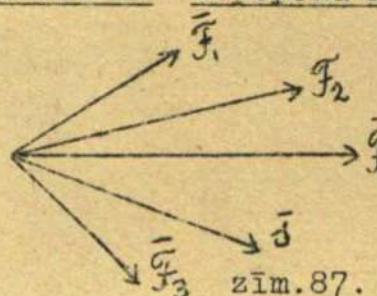
$$\mathcal{A} = (\vec{F} \cdot \vec{s}) = F \cdot s \cdot \cos 90^\circ = 0 \quad (\text{zīm.85})$$



zīm.86.

Gadījumā, ja  $\frac{3\pi}{2} > \varphi > \frac{\pi}{2}$  spēka  $\vec{F}$  darbs, pastrādātais uz pārvietojuma  $\vec{s}$ , būs negatīvs.

Teorēma I. Kopspēka  $\vec{F}$  darbs uz kāda taisnvirziena pārvietojuma  $\vec{s}$  ir summa no komponentu darbiem uz tā paša pārvietojuma  $\vec{s}$ .



zīm.87.

Ja  $\vec{F}$  ir kopspēks, tad  $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots$

Noprojēcīsim šo nol-mu uz pārvietojuma  $\vec{s}$  virzienu

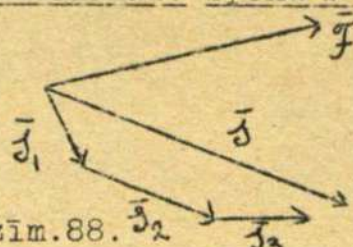
$$F \cos(\vec{F}, \vec{s}) = F_1 \cos(\vec{F}_1, \vec{s}) + F_2 \cos(\vec{F}_2, \vec{s}) + F_3 \cos(\vec{F}_3, \vec{s}) + \dots$$

tālāk reizināsim ar pārvietojumu  $\vec{s}$

$$F \cdot s \cdot \cos(\vec{F}, \vec{s}) = F_1 \cdot s \cdot \cos(\vec{F}_1, \vec{s}) + F_2 \cdot s \cdot \cos(\vec{F}_2, \vec{s}) + F_3 \cdot s \cdot \cos(\vec{F}_3, \vec{s}) + \dots$$

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 + \dots$$

Teorēma II. Spēka  $\vec{F}$  darbs uz taisnvirziena pārvietojuma  $\vec{s}$  līdzinājās spēka darbu summai uz pārvietojuma komponentēm.



zīm.88.

$$\vec{s} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3 + \dots$$

Projecēsim uz spēka  $\vec{F}$  virzienu

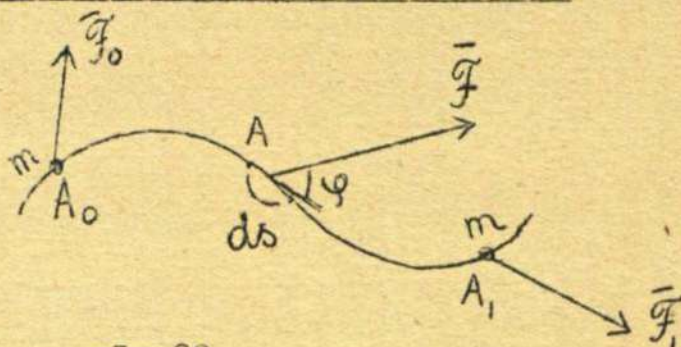
$$s \cos(\vec{F}, \vec{s}) = s_1 \cos(\vec{F}, \vec{s}_1) + s_2 \cos(\vec{F}, \vec{s}_2) + s_3 \cos(\vec{F}, \vec{s}_3) + \dots$$

reizināsim ar spēku  $\vec{F}$

$$F \cdot s \cdot \cos(\vec{F}, \vec{s}) = F \cdot s_1 \cdot \cos(\vec{F}, \vec{s}_1) + F \cdot s_2 \cdot \cos(\vec{F}, \vec{s}_2) + F \cdot s_3 \cdot \cos(\vec{F}, \vec{s}_3) + \dots$$

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 + \dots$$

Darbs vispārīgā gadījumā, t.i. kad spēks mainās (pēc lieluma un virziena) un pārvietojums ir līkumains.



zīm.89.

Pieņemsim, ka materiāls punkts  $m$  pārvietojās no  $A_0$  uz  $A_1$ , pie kam uz viņu darbojošais spēks punktā  $A_0$  ir  $\vec{F}_0$  un punktā  $A_1$  ir  $\vec{F}_1$  un vispārīgi  $\vec{F} = f(\vec{s})$ .

Laikā atrastu spēka  $\vec{F}$  darbu uz pārvietojuma  $A_0 A_1$ , sadalīsim  $A_0 A_1$  bezgalīgi daudz bezgalīgi mazos elementos  $ds$ . Šādu bezgalīgi mazu elementu  $ds$  pirmkārt varam uzskatīt

tīt par taisnu un otrkārt viņa robežās varam pieņemt, ka spēks  $F$  nemaina savu lielumu un virzienu. Tad pēc iepriekšējās definīcijas uz elementāra pārvietojuma pastrādātais darbs, kuru apzīmēsim ar  $d\mathcal{U}$ , līdzināsies

$$d\mathcal{U} = (\vec{F} \cdot d\vec{s}) \dots \dots \dots (95)$$

Summējot elementārus darbus, dabūsim pilnu darbu integrāla veidā

$$\mathcal{U} = \int_{A_0}^{A_1} (\vec{F} \cdot d\vec{s}) \dots \dots \dots (96)$$

Formulā (96) uzrakstīto integrālu sauc par ceļa integrālu. Viņu var pārveidot, attīstot produktu

$$\mathcal{U} = \int_{A_0}^{A_1} F \cdot ds \cdot \cos(\vec{F} \cdot d\vec{s}) = \int_{A_0}^{A_1} F_t \cdot ds, \text{ kur } F_t \text{ ir tangenciālais spēks.}$$

Aizvietojot formulās (95) un (96)  $\vec{F} = \vec{X} + \vec{Y} + \vec{Z}$  un  $d\vec{s} = d\vec{x} + d\vec{y} + d\vec{z}$  un attīstot produktu, dabūsim darba izteiksmes koordinātēs

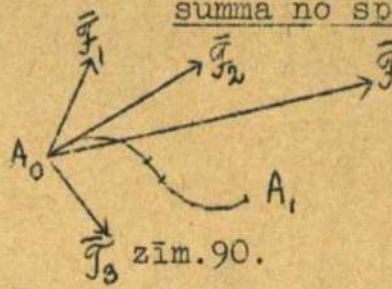
Elementārais darbs  $d\mathcal{U} = Xdx + Ydy + Zdz \dots \dots \dots (95^a)$

Pilna darba izteiksme  $\mathcal{U} = \int_{x_0 y_0 z_0}^{x_1 y_1 z_1} Xdx + Ydy + Zdz \dots \dots \dots (96^a)$

kur  $x_0 y_0 z_0$  ir sākuma punkta koordinātes un  $x_1 y_1 z_1$  ir gala punkta koordinātes.

Kā aprēķināt ceļa integrālu, apskatīsim tālāk atsevišķos piemēros; tagad pierādīsim teorēmu.

Teorēma. Spēka  $\vec{F}$  darbs uz katra (arī likumaina) pārvietojuma  $s$  ir summa no spēka komponentu darbiem uz tā paša pārvietojuma  $s$ .



$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots$$

Reizināsim šo skalāri ar pārvietojuma elementu  $d\vec{s}$

$$(\vec{F} \cdot d\vec{s}) = (\vec{F}_1 \cdot d\vec{s}) + (\vec{F}_2 \cdot d\vec{s}) + (\vec{F}_3 \cdot d\vec{s}) + \dots$$

Integrēsim robežās no  $A_0$  līdz  $A_1$

$$\int_{A_0}^{A_1} (\vec{F} \cdot d\vec{s}) = \int_{A_0}^{A_1} (\vec{F}_1 \cdot d\vec{s}) + \int_{A_0}^{A_1} (\vec{F}_2 \cdot d\vec{s}) + \int_{A_0}^{A_1} (\vec{F}_3 \cdot d\vec{s}) + \dots$$

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 + \mathcal{U}_3 + \dots \text{ teorēma pierādīta.}$$

Darba integrāla noteikšanas iespējas.

$$\mathcal{U} = \int_{x_0 y_0 z_0}^{x_1 y_1 z_1} Xdx + Ydy + Zdz \dots \dots \dots (96^a)$$

- 1) gadījums: diferenciālizteiksme zem integrāla ir pilns diferenciāls. Acīmredzot šinī gadījumā ir pilnīgi iespējams ņemt integrālu (96-a). Pie šī gadījuma mēs atgriezīsimies vēlāk.
- 2) vispārīgais gadījums: Spēks un viņa projekcijas ir funkcijas no koordinātēm, ātrumiem un laika.

$$F = f(x \ y \ z \ \dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z} \ t) \quad \text{un arī}$$

$$X = f_x(x \ y \ z \ \dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z} \ t)$$

$$Y = f_y(x \ y \ z \ \dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z} \ t)$$

$$Z = f_z(x \ y \ z \ \dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z} \ t)$$

Ja zem integrāla stāvoša izteiksme nav pilns diferenciāls, tad, lai varētu ņemt darba integrālu, jāizteic visu zemintegrāļa izteiksmi caur vienu mainīgu, kas ir iespējams, ja būs doti

$$x = \varphi_x(t), \quad y = \varphi_y(t) \quad \text{un} \quad z = \varphi_z(t).$$

Tas nozīmē, ka šādā gadījumā ir jābūt dotai punkta kustībai. Pie kam integrālu (96-a) tad pēc aizvietošanas dabūsim sekojošā veidā

$$\mathcal{A} = \int_{t_0}^{t_1} \bar{\Phi}(t) \cdot dt$$

3) vienkāršākais gadījums: spēks  $F$  un viņa projekcijas ir tikai koordinātu funkcijas.

$$F = (xyz) \quad \text{un} \quad \text{arī} \quad \begin{cases} X = f_x(xyz) \\ Y = f_y(xyz) \\ Z = f_z(xyz) \end{cases}$$

Lai tagad būtu iespējams izteikt visu zemintegrāļa izteiksmi caur vienu lielumu, ir jāzin punkta trajektorija ar divām virsmām jeb parametra veidā.

Pirmā gadījumā, t.i., ja trajektorija dota ar divām virsmām

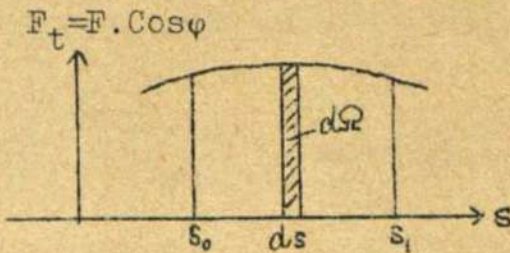
$$\begin{cases} f_1(xyz) = 0 \\ f_2(xyz) = 0 \end{cases} \quad x_1$$

varam atrast  $y = \varphi_1(x)$  un  $z = \varphi_2(x)$  un dabūt  $\mathcal{A} = \int_{x_0}^{x_1} \bar{\Phi}(x) \cdot dx$

Otrā gadījumā, ja trajektorija dota parametra veidā:

$$\begin{cases} x = \varphi_x(q) \\ y = \varphi_y(q) \\ z = \varphi_z(q) \end{cases} \quad \text{dabūsim} \quad \mathcal{A} = \int_{q_0}^{q_1} \Psi(q) \cdot dq$$

Darba grāfiskā attēlošana.



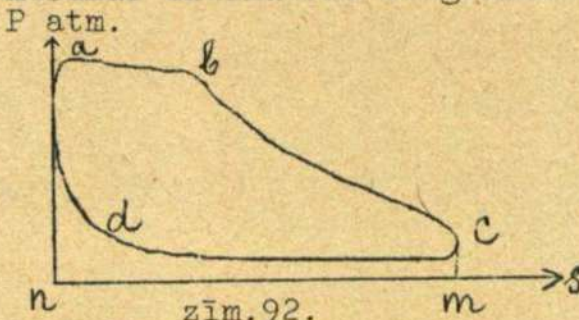
zīm.91.

Ja tangenciālais spēks  $F_t = F \cdot \text{Cos} \varphi$  ir zināms, kā funkcija no  $s$ , mēs varam viņu attēlot grāfiski, atliekot  $s$  kā argumentu uz horizontālās ass un  $F_t$  kā funkciju uz vertikālās ass. Uziesim laukumu, ieslēgtu starp atrasto grafiku, divām ordinātēm un  $s$  asi. Laukuma elements:  $d\Omega = F \cdot \text{Cos} \varphi \cdot ds$  un laukums

$$\Omega = \int_{s_0}^{s_1} F \cdot \text{Cos} \varphi \cdot ds = \mathcal{A}$$

Kā redzams, laukums aprobežots ar grafiku, divām ordinātēm un  $s$  asi reprezentē ceļa gabalā  $s_0 s_1$  pastrādāto darbu.

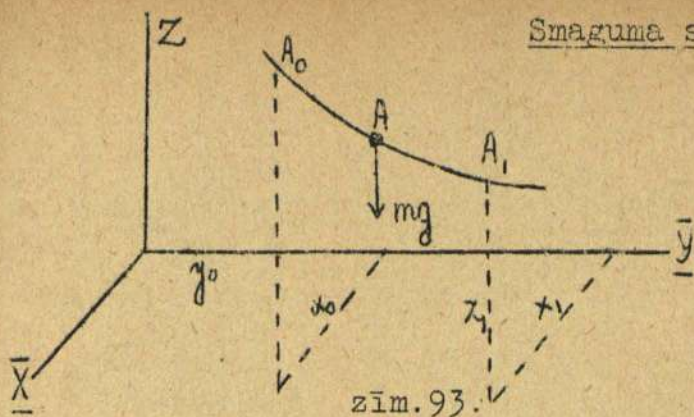
Šādus grafikus bieži lieto praksē, kā piemēru aizrādīsim uz tvaika mašīnas indikatora diagrammu. Šinī diagrammā (zīm.92) grafiski attēlojās tvaika spiediens cilindri, atkarībā no virzuļa pārvietojuma  $s$ .



zīm.92.

Diagrammas laukums abcda reprezentē indikatora darbu (uz katru virzuļa laukuma vienību) pie tvaika izplēšanās, bet laukums adcmn negatīvu darbu pie virzuļa gājiena atpakaļ. Abu minēto laukumu diference, t.i. laukums abcda reprezentē tvaika darbu par diviem virzuļa gājieniem turp un atpakaļ.

Smaguma spēka darbs.



Uz materiālu punktu ar masu  $m$  darbojas vienīgi smaguma spēks, kas līdzinājas  $mg$  un ir virzīts vertikāli uz leju. Punkts ir nogājis no  $A_0(x_0, y_0, z_0)$  līdz  $A_1(x_1, y_1, z_1)$ . Lai uzietu kādu darbu ir pastrādājis smaguma spēks, ņemsim formulu (96-a)

$$\mathcal{A} = \int_{A_0}^{A_1} Xdx + Ydy + Zdz$$

bet smaguma spēka projekcijas  $X = 0, Y = 0, Z = -mg$ , tad

$$\mathcal{A} = \int_{z_0}^{z_1} -mg \cdot dz = [-mg \cdot z]_{z_0}^{z_1} = mg(z_0 - z_1)$$

Kā redzams pastrādātais darbs nav atkarīgs no trajektorijas, bet tikai no sākuma un gala punkta koordinātēm, pie kam viņš iznāk pozitīvs, ja  $z_0 > z_1$  un negatīvs pretējā gadījumā, ja  $z_1 > z_0$ .

Centrāla spēka darbs.

Uz materiālu punktu darbojas centrāls spēks, kura centrs atrodas punktā  $C$  un kura lielums ir funkcija no radiusa vektora  $F = f(r)$ , pie kam vienosimies skaitīt atgrūšanas spēku par pozitīvu (+) un pievilksanas spēku par negatīvu (-). Materiāls punkts ir nogājis no  $A_0$  līdz  $A_1$ . Lai atrastu centrālā spēka darbu, ņemsim formulas (95):  $d\mathcal{A} = (\vec{F} \cdot d\vec{s})$  un (96):

$$\mathcal{A} = \int_{A_0}^{A_1} (\vec{F} \cdot d\vec{s})$$

Attīstīsim skalāro produktu:

$$(\vec{F} \cdot d\vec{s}) = F \cdot ds \cdot \cos\varphi$$

bet  $ds \cdot \cos\varphi$  nav nekas cits, kā radiusa vektora elements  $dr$ .

$ds \cdot \cos\varphi = \pm dr$  ievietojot šo formulās (95) un (96) dabūsim centrāla spēka elementāro darbu

$$d\mathcal{A} = \pm F \cdot dr \dots \dots \dots (97)$$

un centrāla spēka pilnu darbu

$$\mathcal{A} = \pm \int_{r_0}^{r_1} F \cdot dr \dots \dots \dots (97^a)$$

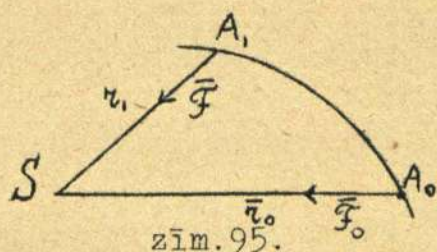
kur atgrūšanas spēkam jāņem (-) zīmi un pievilksanas spēkam (+) zīmi. Pirms integrēšanas vēl jāievieto  $F = f(r)$ , un tad

$$\mathcal{A} = \pm \int_{r_0}^{r_1} f(r) \cdot dr \dots \dots \dots (97^b)$$

Kā redzams, arī centrāla spēka darbs nav atkarīgs no trajektorijas, bet tikai no radiusa vektora robežvērtībām  $r_0$  un  $r_1$ .

Piemērs. Newtona gravitācijas spēka darbs. Saules sistēmā darbojošais spēks ir Newtona gravitācijas spēks, kas arī ir viens no centrālajiem spēkiem. Viņš ir pievilksanas spēks, proporcionāls masām un pretēji proporcionāls attāluma kvadrātam.

Ar šo spēku saule pievelk zemes lodi  
 $F = - \frac{k'mM}{r^2}$  kur  $m$  - zemes lodes masa  
 $M$  - saules masa



Uziesim kādu darbu viņš pastrādās, ja zemes lode pāries no  $A_0$  līdz  $A_1$ .

Nemsim formulu (97)  $\mathcal{A} = \int_{A_0}^{A_1} F \cdot dr$  un ievietosim  $F = - \frac{k'm M}{r^2}$

$$\mathcal{A} = \int_{r_0}^{r_1} - \frac{k'm M}{r^2} \cdot dr = \left[ \frac{k'm M}{r} \right]_{r_0}^{r_1} = k'm M \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right)$$

Atrastais darbs būs pozitīvs, ja kustībā radiuss vektors samazinās, t.i.  $r_0 > r_1$ .

Atsperes elastības spēka darbs.

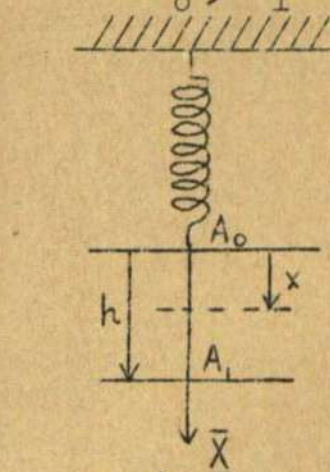
Nemsim atsperi neizstieptā stāvoklī, novilksim vienas gala punktu  $A_0$  līdz punktam  $A_1$  par gabalu  $h$  uz leju un uziesim, cik lielu darbu pie tam pastrādās atsperes elastības spēks.

Nemot  $\bar{X}$  asi pārvietojuma virzienā uz leju jākonstatē, ka elastības spēks būs negatīvs, jo viņš ir virzīts uz augšu, pie kam pēc lieluma viņš ir proporcionāls pagarinājumam  $x$ . Elastības spēka projekcijas uz koordinātu asīm būs  $X = -kx$ ;  $Y = 0$  un  $Z = 0$ . Darbs pēc formulas (96-a)  $\mathcal{A} = \int_{A_0}^{A_1} X dx + Y dy + Z dz$  iznāk

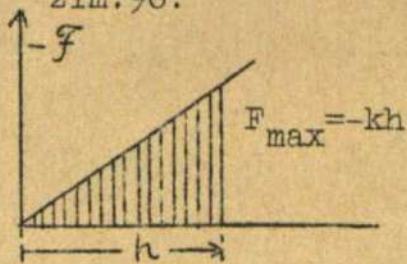
$$\mathcal{A} = \int_{A_0}^{A_1} X dx = \int_0^h -kx dx = \left[ -\frac{kx^2}{2} \right]_0^h = -\frac{kh^2}{2}$$

To pašu varētu dabūt arī grafiski, uzkonstruējot  $(F, s)$  grafiku, kuŗa būs taisna līnija, ņemot vērā elastības spēka proporcionālītāti pagarinājumam. Pastrādātais darbs reprezentēsies ar grafika laukumu, t.i. ar trijstūra laukumu, kuŗa pamats ir  $h$  un augstums  $F_{\max} = -kh$

$$\mathcal{A} = -\frac{1}{2} kh \cdot h = -\frac{kh^2}{2}$$



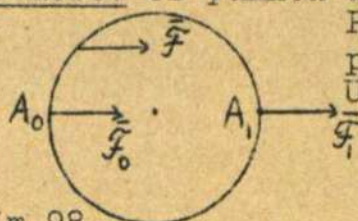
zīm.96.



zīm.97.

Darbs iznāk negatīvs, jo elastības spēks pretojas atsperes izstiepšanai.

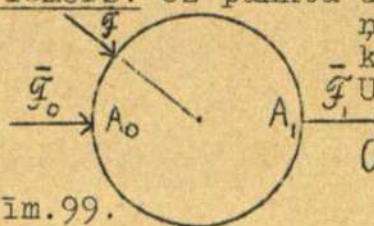
Piemērs. Uz punktu darbojās spēks  $\bar{F} = \text{Const.}$  pēc lieluma un virziena. Punkts apiet pusriņķi ar radiusu  $R$  no  $A_0$  līdz  $A_1$ , pie kam sākuma spēks  $F_0$  ir virzīts uz centru. Uziat pastrādāto darbu.



$$\mathcal{A} = \int_{A_0}^{A_1} (\bar{F} \cdot d\bar{s}) = F \cdot 2R$$

zīm.98.

Piemērs. Uz punktu darbojās spēks  $F = \text{Const.}$  tikai pēc lieluma, bet viņa virziens arvienu paliek normāls pret pusriņķi, kuŗu apraksta punkts no  $A_0$  līdz  $A_1$ . Uziat pastrādāto darbu.



$$\mathcal{A} = \int_{A_0}^{A_1} (\bar{F} \cdot d\bar{s}) = 0, \text{ jo } (\bar{F} \cdot d\bar{s}) = F \cdot ds \cdot \cos 90^\circ = 0$$

zīm.99.

Darba dimenzija.

Kā redzams no darba izteiksmes bus  $[\mathcal{A}] = [F \cdot L]$

$$\mathcal{A} = \int_{A_0}^{A_1} (\bar{F} \cdot d\bar{s}) \text{ un darba dimenzija}$$

Darba vienības absolūtā un tehniskā mēru sistēmā.

1) Darba vienības absolūtā C.G.S. sistēmā. Spēka vienība šinī sistēmā ir dina, garuma vienība 1 cm. un par darba vienību ir pieņemts darbs, kuŗu pastrādā 1 dina uz 1 cm. pārvietojuma, ja spēka un pārvietojuma virzieni sakrīt.

Šo darba vienību sauc par 1 ergu.

$$1 \text{ ergs} = 1 \text{ dina} \times 1 \text{ cm.}$$

Nemot vērā, ka šī darba vienība ir ļoti maza, lieto arī citu  $10^7$  reizes lielāku, kuru sauc par 1 Joulu (džoulu).

$$1 \text{ Jouls} = 10^7 \text{ ergu.}$$

2) Darba vienība tehniskā mēru sistēmā. Spēka vienība šinī sistēmā ir 1 kgr, garuma vienība 1 m. un par darba vienību pieņemts darbs, kuru pastrādā 1 kg uz 1 m pārvietojuma, ja spēka un pārvietojuma virzieni sakrīt. Šo darba vienību sauc par 1 kilogrammetru.

$$1 \text{ kg.m} = 1 \text{ kg} \times 1 \text{ m.}$$

Sakars starp apskatītām darba vienībām.

$$1 \text{ kg.m} = 1000 \text{ gr.} \cdot 100 \text{ cm} = 981.1000.100 \text{ dinu} \times \text{cm} = 9,81.10^7 \text{ Erg.} = 9,81 \text{ Joul.}$$

Darba ražīgums jeb jauda.

Darbu var ražot intensīvi un lēni, kādēļ ir no svara zināt ne tikai visu pastrādāto darba daudzumu, bet arī kādā laikā viņš ir pastrādāts. Darba daudzuma attiecību pret notecējušo laiku sauc par vidējo jaudu.

$$\text{Vidējā jauda} = \frac{\alpha}{t}$$

Vidējo jaudu var dēfinēt kā laika vienībā pastrādāto darbu. Bet jauda ar laiku var mainīties un lai dabūtu jaudas vērtību dotā momentā, jāastāda  $\frac{d\alpha}{dt}$ . Bet  $d\alpha = (\vec{F} \cdot d\vec{s}) = F \cdot ds \cdot \cos\phi$  un tad momentāna jauda iznāk

$$\frac{d\alpha}{dt} = F \cdot \cos\phi \cdot \frac{ds}{dt} = F_t \cdot V \quad ; \quad \boxed{\frac{d\alpha}{dt} = F_t \cdot V}$$

tas nozīmē, ka momentāna jauda ir reizinājums no tangenciāla spēka un ātruma.

1) Jaudas vienības absolūtā mēru sistēmā.

Ja 1 Jouls tiek pastrādāts 1 sec., tad attiecīgo jaudu sauc par 1 Wattu

$$1 \text{ Watts} = 1 \text{ Jouls/sec.}$$

Lieto arī 1000 reizes lielāku vienību, kuru sauc par 1 kilowattu

$$1 \text{ KW} = 1000 \text{ Wattu} = 1000 \text{ Jouls/sec.}$$

2) Jaudas vienības tehniskā mēru sistēmā.

Darba vienība šinī sistēmā ir 1 kgmtr. un par jaudas vienību vajadzētu pieņemt 1 kgmtr/sec., bet praksē lieto 75 reizes lielāku vienību, kuru sauc par zirga spēku un apzīmē ar 1 P.S.

$$1 \text{ P.S.} = 75 \text{ kgmtr/sec.}$$

Sakars starp apskatītām jaudas vienībām.

$$1 \text{ P.S.} = 75.9,81 \text{ Jouls/sec.} = 736 \text{ watt.}$$

$$1 \text{ P.S.} = 0,736 \text{ KW}$$

$$1 \text{ KW} = 1,36 \text{ P.S.}$$

Anglijas zirga spēks. Anglijā lieto citu zirga spēku

1 H.P = 550 feet.lbs/sec, kurš iznāk mazliet lielāks: 1 H.P. = 1,014 P.S.

Spara, dzīvā spēka jeb kinētiskās enerģijas teorēmas pierādījums.

Nemot vērā šīs teorēmas lielo nozīmi, dosim divus pierādījumus, izejot no kustības dif-nol-miem pēc Eulera un Mac-Laurina.

I pierādījums. Materiāls punkts ar masu m kustās virzienā no  $A_0$  uz A

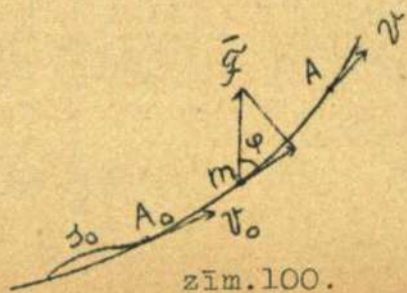
pa līku trajektoriju, pie kam punktā  $A_0$  viņa ātrums ir  $V_0$  un punktā A ir V.

Nemsim kustības dif-nol-mu pēc Eulera tangentes virzienā

$$mj_t = F_t$$

$$m \frac{dV}{dt} = F \cdot \cos\phi, \text{ reizināsim ar } ds$$

$$m \frac{ds}{dt} \cdot dV = F \cdot \cos\phi \cdot ds, \text{ bet } \frac{ds}{dt} = V$$



zīm. 100.

$m \cdot V \cdot dV = F \cdot \cos\phi \cdot ds$

$d \frac{mV^2}{2} = (\vec{F} \cdot d\vec{s}) \dots \dots \dots (98)$

Atrastā formula reprezentē spara teorēmu diferenciālā veidā, kuru formulēsīm tā: spara (jeb dzīvā spēka) diferenciāls līdzinājās elementāram darbam.

Izlietojot elementāram darbamformulu (95<sup>a</sup>) dabūsim to pašu citā veidā

$d \frac{mV^2}{2} = Xdx + Ydy + Zdz \dots \dots \dots (98^a)$

Integrējot formulas (98) robežās no A<sub>0</sub> līdz A dabūsim spara teorēmu galīgā veidā

$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \int_{s_0}^s (\vec{F} \cdot d\vec{s}) \dots \dots \dots (99)$

$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \int_{x_0 y_0 z_0}^{xyz} Xdx + Ydy + Zdz \dots \dots \dots (99^a)$

kuru formulēsīm tā: spara pieaugums zināmā ceļa gabalā līdzinājās pastrādātam darbam tanī pašā ceļa gabalā.

Centrālām spēkam dabūsim spara teorēmu, lietojot darbam formulas (97):

elementārā veidā  $d \frac{mV^2}{2} = \pm F \cdot dr \dots \dots \dots (98^b)$

un galīgā veidā

$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \pm \int_{r_0}^r F \cdot dr \dots \dots \dots (99^b)$

Formulas (99) varam rakstīt arī saīsinātā veidā

$K - K_0 = \mathcal{O}L \dots \dots \dots (100)$

Formulas (99) rāda, ka pie  $V > V_0$  ceļā bija pastrādāts darbs  
pie  $V = V_0$  darba ceļā nebija  
pie  $V < V_0$  ceļā ir bijusi pretestība, jo darbs iznāk negatīvs.

II pierādījums. Tagad ņemsim punkta kustības nol-mus pēc Mac-Laurina

$\left. \begin{matrix} m\ddot{x} = X \\ m\ddot{y} = Y \\ m\ddot{z} = Z \end{matrix} \right\} \text{ pārveidosim viņus } \left\{ \begin{matrix} m \frac{d\dot{x}}{dt} = X \\ m \frac{d\dot{y}}{dt} = Y \\ m \frac{d\dot{z}}{dt} = Z \end{matrix} \right.$

reizināsim pirmo ar dx, otro ar dy un trešo ar dz

$\begin{matrix} m \frac{dx}{dt} \cdot d\dot{x} = Xdx & | & m\dot{x} d\dot{x} = Xdx \\ m \frac{dy}{dt} \cdot d\dot{y} = Ydy & | & m\dot{y} d\dot{y} = Ydy \\ m \frac{dz}{dt} \cdot d\dot{z} = Zdz & | & m\dot{z} d\dot{z} = Zdz \end{matrix}$

pārveidojot tālāk:  $\dot{x}d\dot{x} = d \frac{\dot{x}^2}{2}$  un saskaitot visus trīs, atrodam

$d \frac{m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}{2} = Xdx + Ydy + Zdz$ , bet  $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = V^2$  un

tad nonākam pie pazīstamās formulas

$d \frac{mV^2}{2} = Xdx + Ydy + Zdz \dots \dots \dots (98^a)$

kura reprezentē spara teorēmu diferenciāla formā.

Integrējot viņu no punkta  $A_0(x_0, y_0, z_0)$  līdz  $A(xyz)$ , atrodam arī

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \int_{x_0, y_0, z_0}^{xyz} Xdx + Ydy + Zdz \quad \dots\dots (99^a)$$

Ņemot vērā agrāk apskatīto darba integrāla noteikšanu trijos gadījumos varam teikt, ka spara teorēma dos I integrālu

- 1) ja  $Xdx + Ydy + Zdz$  ir pilns diferenciāls,
- 2) pie  $F = f(xyz)$ , ja būs dota kustība, un
- 3) pie  $F = f(xyz)$ , ja būs dota trajektorija vai nu ar divām virsmām jeb arī parametra veidā.

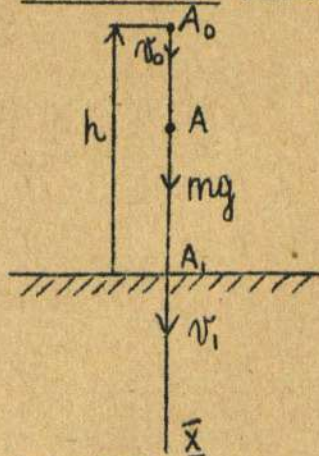
Piemērs 1. Uziet smaga materiāla punkta krišanas ātrumu no augstuma  $h$ , ja sākuma ātrums ir  $V_0$  vertikāli uz leju un darbojās tikai smaguma spēks.

Ņemot  $\bar{x}$  asi vertikāli uz leju, dabūsim spēka projekcijas:  $X = mg, Y = 0, Z = 0$ . Pēc spara teorēmas:

$$\frac{mV_1^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \int_{x_0, y_0, z_0}^{xyz} Xdx + Ydy + Zdz \quad , \text{ iznāk}$$

$$\frac{mV_1^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \int_0^h mgdx \quad ; \quad \frac{mV_1^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = mg(h - 0)$$

$$V_1 = \sqrt{V_0^2 + 2gh}$$



Zīm.101.

Piemērs 2. Kādā attālumā var apturēt lokomotīvi, kuŗa atrodās kustībā ar ātrumu  $V_0$ , pieņemot bremzes spēku  $\frac{1}{n}$  daļu no lokomotīves svara.

zīm.102. Idealizēsim kustību, uzskatot visu lokomotīvi kā materiālu punktu, kuŗam piesavināta visa lokomotīves masa. Apzīmēsim pretestības spēku ar  $W$ , tad  $W = \frac{1}{n} Q$  un ir virzīts pret kustību. Ņemsim spara teorēmu:

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \int_0^x W \cdot \cos(W \cdot dx) \cdot dx$$

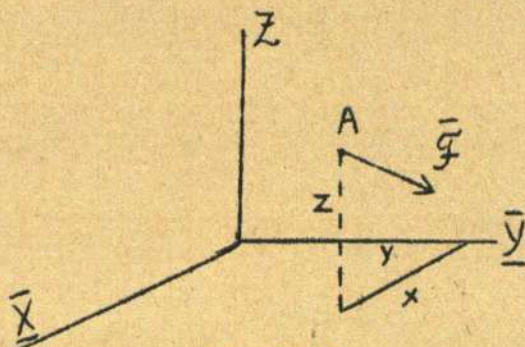
Bet ja lokomotive apstājas, viņas ātrums  $V = 0$  ;  $0 - \frac{mV_0^2}{2} = \int_0^x \frac{Q}{n} \cdot \cos(180^\circ) dx$

$$-\frac{mV_0^2}{2} = -\frac{mg}{n} \cdot x \quad \text{no kurienes} \quad x = \frac{n \cdot V_0^2}{2g}$$

Skaitliski: pieņemot  $V_0 = 72 \text{ klm/st}$  un  $n = 10$  dabūsim, ievērojot, ka  $72 \text{ klm/st} = 20 \text{ mtr/sec}$

$$x = \frac{10 \cdot 20^2}{2 \cdot 9,81} = 204 \text{ mtr.}$$

### § 8. Spēka funkcija jeb potenciāls.



zīm.103.

Telpu, kuŗā katrā punktā darbojās kāds spēks, sauc par šī spēka lauku. Tā piem. istaba ir smaguma spēka lauks, ap magnetu ir novērojams magnetiskais lauks u.t.t.

Iedomāsimies spēka laukā ievietotu materiālu punktu  $A$ , uz šo punktu darboies spēks  $\bar{F}$ . Spēku  $\bar{F}$  mēs sauksim par konservatīvu, ja būs izpildītas divas prasības: 1) spēka lielums un virziens ir atkarīgs tikai no punkta  $A$  koordinātēm un nav atkarīgs no laika,



2) darbs, kuru pastrādās spēks  $\vec{F}$ , punktam A pārvietojoties nav atkarīgs no ceļa, bet tikai no sākuma un gala stāvokļa.

Otrā šeit formulētā spēka konservatīvuma pazīme ir mehāniska, pameklēsim tālāk matemātisku pazīmi konservatīvam spēkam. Pēc pirmās pazīmes konservatīvais spēks ir  $F = f(xyz)$ , bet tad arī viņa projekcijas

$$\begin{matrix} X = f_x(xyz) \\ Y = f_y(xyz) \\ Z = f_z(xyz) \end{matrix} \quad \left| \begin{matrix} dx \\ dy \\ dz \end{matrix} \right| +$$

Reizināsim pirmo ar dx, otro ar dy, trešo ar dz un saskaitīsim visus

$$Xdx + Ydy + Zdz = f_x(xyz).dx + f_y(xyz).dy + f_z(xyz).dz$$

Kreisā pusē dabūjam elementāro darbu, bet labā pusē var būt pilns diferenciāls, var arī nebūt.

Apstāsimies pie gaģijuma, kad labā puse reprezentē pilnu diferenciālu no kādas koordinātu funkcijas  $U = \Phi(xyz)$ , tad

$$Xdx + Ydy + Zdz = dU$$

Integrējot dabūsim  $\int Xdx + Ydy + Zdz = U + C$

Šo funkciju  $U = \Phi(xyz)$  sauc par spēka funkciju jeb potenciālu. Pielietosim nol-mam (101) sākuma apstākļus

$$\int_{x_0 y_0 z_0}^{xyz} Xdx + Ydy + Zdz = U_0 + C$$

atvelkot šo nol-ma (101) dabūsim

$$\int_{x_0 y_0 z_0}^{xyz} Xdx + Ydy + Zdz = U - U_0 \dots\dots\dots(101)$$

Bet kreisā puse reprezentē pēc formulas (96-a) pastrādāto darbu, tā tad formula (101) izsaka, ka: pastrādātais darbs līdzinājās spēka funkcijas pieaugumam

$$\mathcal{A} = U - U_0 \dots\dots\dots(101^a)$$

Bez tam, ņemot vērā, ka, ja  $U = \Phi(xyz)$  ir vienvērtīga funkcija, viņas pieaugums:  $U - U_0 = \Phi(xyz) - \Phi(x_0 y_0 z_0)$  ir atkarīgs tikai no sākuma un gala punkta koordinātēm, bet nav atkarīgs no ceļa, atrodam, ka arī darbs ir neatkarīgs no ceļa, bet šī īpašība ir otrā konservatīva spēka pazīme, tā tad ja spēkam, kas ir atkarīgs tikai no punkta koordinātēm, piemīt vienvērtīga funkcija, tad viņš ir konservatīvs.

Noteiksim tagad sakaru starp spēka projekcijām un spēka funkciju. Šim nolūkam uzrakstīsim spēka funkcijas diferenciālu

$$dU = Xdx + Ydy + Zdz$$

bet no otras puses pilns diferenciāls no kādas koordinātu funkcijas  $U = \Phi(xyz)$  būs

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot dz$$

pielīdzinot abas izteiksmes un pārnesot visus locekļus vienā pusē, dabūsim

$$(X - \frac{\partial U}{\partial x})dx + (Y - \frac{\partial U}{\partial y})dy + (Z - \frac{\partial U}{\partial z})dz = 0$$

bet dx, dy, dz ir neatkarīgi lielumi un lai šī izteiksme varētu līdzināties 0, jābūt

$$\begin{matrix} X - \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \\ Y - \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \\ Z - \frac{\partial U}{\partial z} = 0 \end{matrix} \quad \left| \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \right. \quad \text{jeb} \quad \left. \begin{matrix} X = \frac{\partial U}{\partial x} \\ Y = \frac{\partial U}{\partial y} \\ Z = \frac{\partial U}{\partial z} \end{matrix} \right\} \dots\dots\dots(102)$$

Formulas (102)rāda, ka spēka projekcijas uz koordinātu asīm līdzinājās spēka funkcijas parciālām atvasinātēm pēc attiecīgām koordinātēm, kādēļ spēka funkciju varam dēfinēt kā tādu funkciju, kuras parciālās

atvasinātās pēc koordinātēm dod spēka projekcijas uz attiecīgām asīm. Piezīme. Šeit jāpiezīmē, ka spēka funkcija  $U$  nemaina savu nozīmi no Const. lieluma  $C$  pieskaitīšanas, jo  $dU = d(U + C)$  un arī

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial(U + C)}{\partial x} ; \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial(U + C)}{\partial y} ; \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial(U + C)}{\partial z}$$

Lai dotu tagad matematisks pazīmes spēka konservatīvam jeb spēka funkcijas eksistencei, sastādīsim  $\frac{\partial X}{\partial y}$ , bet ja spēka funkcija eksistē, tad pats  $X = \frac{\partial U}{\partial x}$ , no kurienes

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$$

Tāpat sastādot  $\frac{\partial Y}{\partial x}$  un ievērojot, ka  $Y = \frac{\partial U}{\partial y}$ , dabūjam  $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$ , pielīdzinot labās puses, atrodam

Matematisks pazīmes spēka konservatīvam

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} \\ \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y} \\ \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z} \end{array} \right. \quad \text{un pēc analogijas arī} \quad \dots \dots \dots (103)$$

Formulas (103) reprezentē spēka, kurš ir atkarīgs tikai no punkta koordinātēm, konservatīva pazīmes matematisks formā.

Pēc analogijas konservatīva spēka lauku arī sauc par konservatīvo lauku jeb potenciālo lauku.

Teorēma. Vairāku konservatīvu spēku kopspēks arī ir konservatīvs un kopspēka funkcija ir algebraisks summa no atsevišķu spēku funkcijām.

Doti spēki  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3 \dots$  un viņiem atbilstošas funkcijas  $U_1, U_2, U_3 \dots$

Ja apzīmēsim spēka  $\vec{F}_1$  komponentes ar  $X_1, Y_1, Z_1$ , tad

$$X_1 = \frac{\partial U_1}{\partial x} \quad , \quad Y_1 = \frac{\partial U_1}{\partial y} \quad , \quad Z_1 = \frac{\partial U_1}{\partial z}$$

Tāpat spēka  $\vec{F}_2$  komponentes

$$X_2 = \frac{\partial U_2}{\partial x} \quad , \quad Y_2 = \frac{\partial U_2}{\partial y} \quad , \quad Z_2 = \frac{\partial U_2}{\partial z}$$

Bet ja  $\vec{F}$  ir kopspēks, tad  $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots$  un viņa projekcija uz  $\vec{X}$  asi

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + \dots = \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial x} + \frac{\partial U_3}{\partial x} + \dots$$

jeb  $X = \frac{\partial}{\partial x} (U_1 + U_2 + U_3 + \dots) = \frac{\partial U}{\partial x}$ , pēc analogijas

arī  $Y = \frac{\partial}{\partial y} (U_1 + U_2 + U_3 + \dots) = \frac{\partial U}{\partial y}$

un  $Z = \frac{\partial}{\partial z} (U_1 + U_2 + U_3 + \dots) = \frac{\partial U}{\partial z}$

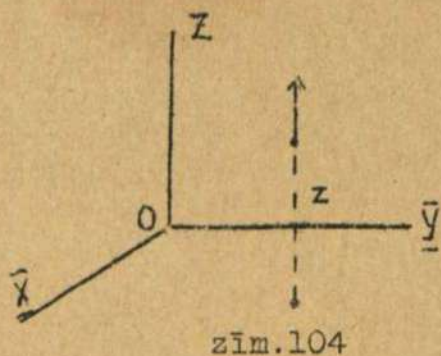
Šīs formulas norāda, ka kopspēku varām atvasināt no kādas funkcijas, tā tad viņš ir konservatīvs, pie kam šī funkcija ir atsevišķo funkciju summa

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + \dots$$

Šai teorēmai ir praktiska nozīme, jo vieglāk ir operēt algebraiski ar spēku funkcijām, nekā geometriski ar pašiem spēkiem.

Dažu spēku konservatīvas pārbaude un funkcijas noteikšana.

I gadījums. Spēks arvienu paliek perpendikulārs  $\overline{XOY}$  plaknei un ir funkcija attāluma no vienas



$\vec{F} \perp \overline{XOY}$  un  $F = f(z)$

Sastādīsim spēka projekcijas  
 $X = 0$  ,  $Y = 0$  ,  $Z = f(z)$

Pārbaudot spēka konservatīvu pēc formulām (103), atrodam

$\frac{\partial X}{\partial Y} = 0 = \frac{\partial Y}{\partial X}$  jo abi  $X = 0$  un  $Y = 0$

$\frac{\partial Y}{\partial Z} = 0 = \frac{\partial Z}{\partial Y}$  jo  $Y=0$  un  $Z=f(z)$  nav atkarīgs no y

$\frac{\partial Z}{\partial X} = 0 = \frac{\partial X}{\partial Z}$  jo  $X=0$  un  $Z=f(z)$  nav atkarīgs no x

Tā tad minētais spēks ir konservatīvs. Spēka funkcija:

$U = \int Xdx + Ydy + Zdz$

Pamatojoties uz agrāk pievestās piezīmes, ka spēka funkcija U nemaina savu nozīmi no Const. lieluma pieskaitīšanas, varam integrēšanas Const. nerakstīt

$U = \int Z.dz = \int f(z).dz = \Phi(z)$

Pastrādātais darbs līdzinājās spēka funkcijas pieaugumam:

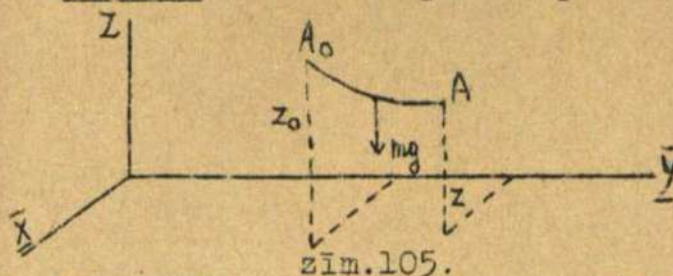
$\mathcal{A} = U - U_0 = \Phi(z) - \Phi(z_0)$

Piemērs. Pie šiem spēkiem pieder arī smaguma spēks  $F = mg$  un viņa projekcijas  $X = 0$ ,  $Y = 0$ ,  $Z = -mg$ .

Viņa funkcija  $U = \int -mg.dz = -mgz$

Pastrādātais darbs, ja punkts ir pārvietojies no  $A_0$  līdz A

$\mathcal{A} = -mgz - (-mgz_0) = mg(z_0 - z)$



II gadījums. Centrāls spēks F, kurš ir f(r). Izvēlēsim koordinātu sākumu spēka centrā C, tad spēka projekcijas

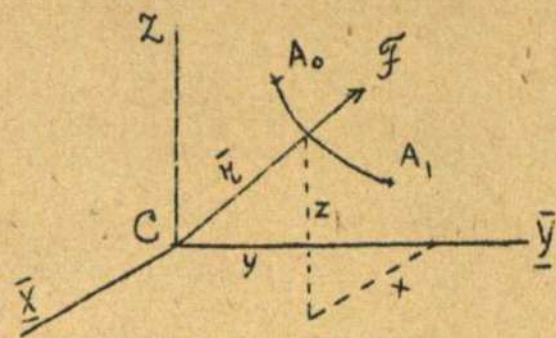
$X = F \cdot \cos(\overline{XF}) = f(r) \cdot \frac{x}{r}$

$Y = F \cdot \cos(\overline{YF}) = f(r) \cdot \frac{y}{r}$

$Z = F \cdot \cos(\overline{ZF}) = f(r) \cdot \frac{z}{r}$

kur  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Ņemsim  $\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{d}{dr} \left[ \frac{f(r)}{r} \right] \cdot x \cdot \frac{\partial r}{\partial y}$  un piezīmēsim, ka diferencējot parciāli pēc y,



jāuzskata x par Const.

Tāpat  $\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{d}{dr} \left[ \frac{f(r)}{r} \right] \cdot y \cdot \frac{\partial r}{\partial x}$  pie parciālas diferencēšanas pēc x jāuzskata y par const. Tālāk uziesim

$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{y}{r}$  un  $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}$

un tad  $\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{d}{dr} \left[ \frac{f(r)}{r} \right] \cdot \frac{xy}{r}$  ;  $\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{d}{dr} \left[ \frac{f(r)}{r} \right] \cdot \frac{xy}{r}$

Konstatējam, ka labās puses ir vienādas, tā tad arī  $\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$

Pilnīgi analogiski varam pierādīt arī ka  $\frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}$  un  $\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z}$ , no kurienes seko, ka centrālie spēki ir konservatīvi, ja viņi ir  $f(r)$ .

Uziesim centrālā spēka funkciju  $U = \int Xdx + Ydy + Zdz$ ; ievietosim šeit spēka projekcijas

$$U = \int \frac{f(r)}{r} (x dx + y dy + z dz) = \int \frac{f(r)}{r} \cdot \frac{dr^2}{2} = \int \frac{f(r)}{r} \cdot \frac{2r dr}{2}$$

Spēka funkcija centrālam spēkam:

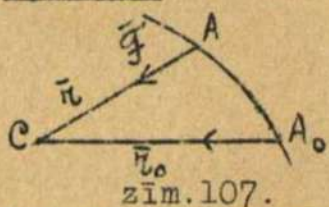
$$\boxed{U = \int f(r) \cdot dr} \quad \text{jeb arī} \quad \boxed{U = \int F \cdot dr} \quad \dots \dots \dots (104)$$

Pastrādāto darbu, ja punkts noies no  $A_0$  līdz  $A_1$ , dabūsim kā spēka funkcijas pieaugumu

$$\mathcal{A} = U_1 - U_0 = \int_{r_0}^{r_1} f(r) \cdot dr$$

Šī formula pilnīgi sakrīt ar agrāk atrasto formulu (97<sup>a</sup>).

Piemērs. Pie centrāliem spēkiem pieder arī Newton'a gravitācijas spēks



$$F = -\frac{mk}{r^2} \quad \text{jeb arī} \quad F = -\frac{k'mM}{r^2}$$

Uziesim viņa funkciju

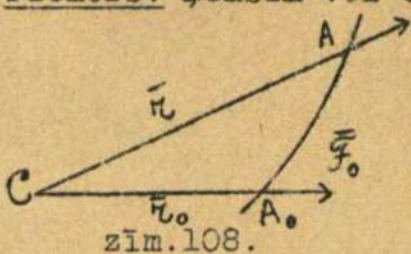
$$U = \int F \cdot dr = \int -\frac{mk}{r^2} \cdot dr = -mk \int \frac{dr}{r^2} = \frac{mk}{r}$$

zīm.107.

Lai dabūtu pastrādāto darbu, punktam pārvietojoties no  $A_0$  līdz  $A$ , ņemsim spēka funkcijas pieaugumu šinīs robežās

$$\mathcal{A} = U - U_0 = \frac{mk}{r} - \frac{mk}{r_0} = mk \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)$$

Piemērs. Ņemsim vēl citu centrālu spēku: atgrūšanas spēku proporcionālu attālumam  $F = mk^2 r$  un uziesim viņa funkciju



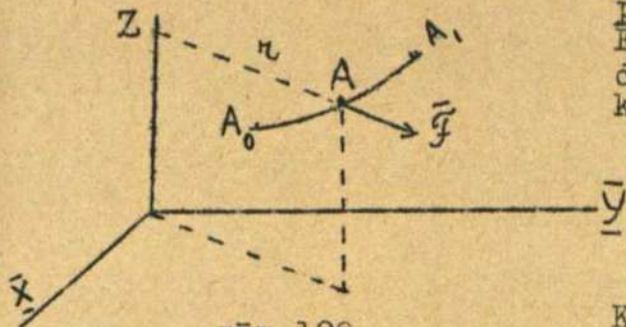
$$U = \int F \cdot dr = \int mk^2 r \cdot dr = \frac{mk^2 r^2}{2}$$

Pastrādātais darbs, punktam pārvietojoties no  $A_0$  līdz  $A$

$$\mathcal{A} = \frac{mk^2 r^2}{2} - \frac{mk^2 r_0^2}{2} = \frac{mk^2}{2} (r^2 - r_0^2)$$

zīm.108.

III gadījums. Spēks, krustodamies ar Z-asi, arvienu paliek viņai perpendikulārs un ir attāluma funkcija



zīm.109.

$\vec{F} \perp \vec{OZ}$  un  $F = f(r)$ . Šeit  $r$  nav punkta rāduss vektors, bet attālums no Z-ass. Spēka projekcijas

$$X = F \cdot \text{Cos}(\overline{XF}) = f(r) \cdot \frac{X}{r}$$

$$Y = F \cdot \text{Cos}(\overline{YF}) = f(r) \cdot \frac{Y}{r}$$

$$Z = 0$$

$$\text{Kur tagad } r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{Sastādam: } \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{r} \quad \text{un} \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{r}$$

Tālāk tāpat kā centrālam spēkam

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{d}{dr} \left[ \frac{f(r)}{r} \right] x \cdot \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{d}{dr} \left[ \frac{f(r)}{r} \right] \cdot \frac{xy}{r}$$

$$\text{un} \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{d}{dr} \left[ \frac{f(r)}{r} \right] y \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{d}{dr} \left[ \frac{f(r)}{r} \right] \cdot \frac{xy}{r}$$

$$\text{atrōdam, salīdzinot labās puses: } \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$$

Bet pārējos noteikumu atrodam citādi.

$\frac{\partial Y}{\partial z} = 0$ , tādēļ, ka Y nesatura z koordinātes un  $\frac{\partial Z}{\partial y} = 0$  tādēļ, ka Z=0, tā tad  $\frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}$ . Analogiski:  $\frac{\partial Z}{\partial x} = 0$  jo Z=0 un  $\frac{\partial X}{\partial z} = 0$  jo X nesatur z koordinātes, tā tad  $\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z}$

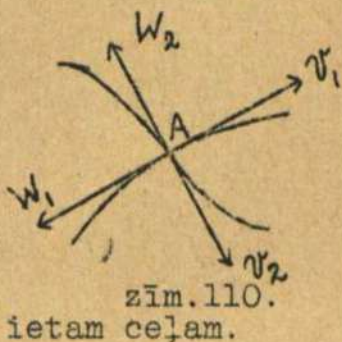
Visi trīs noteikumi ir izpildīti un apskatītais spēks ir konservatīvs. Uziesim viņa funkciju  $U = \int Xdx + Ydy + Zdz$  ievietosim šeit spēka projekcijas

$$U = \int \frac{f(r)}{r} \cdot (xdx + ydy) = \int \frac{f(r)}{r} \cdot \frac{dr^2}{2} = \int \frac{f(r)}{r} \cdot \frac{2rdr}{2}$$

$$U = \int f(r) \cdot dr \quad \text{jeb} \quad U = \int F \cdot dr$$

Pastrādāto darbu, ja punkts noies no  $A_0$  līdz  $A_1$ , dabūsim, kā spēka funkcijas pieaugumu

$$\mathcal{A} = U_1 - U_0 = \int_{r_0}^{r_1} f(r) \cdot dr$$



zīm.110.

ietam ceļam.

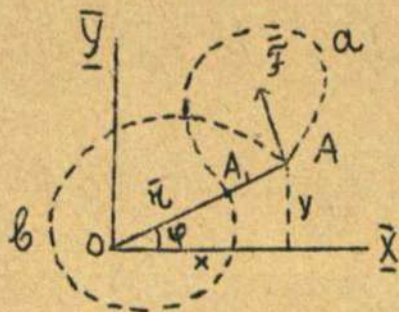
#### IV gadījums: berzes spēks.

Apskatot berzes spēku W, jānāk pie slēdziena, ka viņš nav konservatīvs, jo tas neizpilda konservatīva pamatprasības. Pirmkārt tas ir virzīts arvienu pret ātruma vektoru, t.i. trajektorijas tangētē, tā tad ir atkarīgs netikai no punkta koordinātēm, bet arī no trajektorijas, uz kuŗas punkts kustās. Bez tam arī berzes spēka pastrādātais darbs ir atkarīgs no ceļa, jo viņš būs tieši proporcionāls no-

#### Daudzvārtīgās funkcijas.

Var nākt priekšā gadījumi, kad spēkam atbilstoša funkcija būs daudzvārtīga. Tādā gadījumā spēks vairs nebūs konservatīvs, jo darbs būs atkarīgs no ceļa, pa kuŗu punkts pārvietojās. Šāda spēka lauku arī sauc par potenciālo lauku, bet ar daudzvārtīgu potenciālu.

Kā piemēru varam aizrādīt uz telpu ap elektriskās strāvas taisnvirziena vadu. Ja iedomāsimies, ka elektriskās strāvas vads iet Z-ass virzienā, tad spēks F, kuŗš iedarbojās uz magneta polu A arvienu būs perpendikulārs radiusam vektoram r un pēc lieluma būs pretēji proporcionāls r.



zīm.111.

$$\vec{F} \perp \vec{r} \quad \text{un} \quad F = \frac{k}{r}$$

Spēka projekcijas:

$$X = -F \cdot \cos(\overline{XF}) = -\frac{k}{r} \cdot \frac{y}{r} = -\frac{ky}{r^2}$$

$$Y = F \cdot \cos(\overline{YF}) = \frac{k}{r} \cdot \frac{x}{r} = \frac{kx}{r^2}$$

$$Z = 0$$

Spēka funkcija  $U = \int Xdx + Ydy + Zdz$

$$U = \int \frac{k}{r^2} (xdy - ydx) = \int \frac{k \cdot x^2 \cdot d(\frac{y}{x})}{x^2 + y^2} = k \int \frac{d(\frac{y}{x})}{1 + (\frac{y}{x})^2}$$

$$U = k \cdot \arctg\left(\frac{y}{x}\right) = k \cdot \arctg \cdot \text{tg}\varphi = k\varphi$$

Šī funkcija ir daudzvārtīga un U vērtības priekš viena un tā paša punkta stāvokļa var atšķirties par  $2kn\pi$ , ku n ir kāds vesels skaitlis. Tādēļ funkcijas pieauguma un arī darba neatkarības no ceļa vairs nevar būt. Tā, piemēram, ja punkts izejot no punkta A un aprakstot trajektoriju AaA1 nonāks punktā A1, kuŗš atrodās uz taisnes OA, tad funkcijas pieaugums, kā arī pastrādātais darbs būs nulle. Bet ja punkts izejot no punkta A ap-

rakstīs trajektoriju  $AbA_1$  apejot polam apkārt vienu reizi, atkal nonāks punktā  $A_1$ , tad funkcijas pieaugums kā arī pastrādātais darbs būs  $2\pi$ .

Līmeņa virsmas.

Par līmeņa virsmu sauc tādu punktu geometrisko vietu konservatīvā spēka laukā, kur spēka funkcijai ir Const. vērtība.

Piezīme. Ja kustība notiek plaknē, tad šīs geometriskās vietas būs līnijas tānī pašā plaknē.

Pielīdzinot spēka funkciju  $U$ , kuŗa ir kādā koordinātu funkcija  $U = \phi(xyz)$  Constantam lielumam  $C$ , dabūsim geometriski zināmu virsmu

$$\boxed{U = C} \text{ jeb } \boxed{\phi(xyz) = C} \dots\dots\dots (105)$$

kuŗa arī būs līmeņa virsma.

Līmeņa virsmu  $\phi(xyz) = C$  sauc arī par ekvipotenciālu virsmu/

Piezīme. Plakanā kustībā funkcija  $\phi(xyz) = C$  reprezentēs ekvipotenciālas līnijas. Piešķirot konstantam lielumam  $C$  citas vērtības uz vienu



zīm.112.

pusi:  $C + C_1$ ,  $C + C_2$  u.t.t. un uz otru pusi  $C - C'$ ,  $C - C''$  u.t.t., dabūsim veselu virsmu sistēmu, kuŗa sadalīs spēka lauku atsevišķās daļās.

Ļoti svarīga līmeņa virsmas īpašība ir tā, ka pie punkta pārvietošanas uz līmeņa virsmas, spēka darbs  $\mathcal{A} = 0$ , jo spēka funkcija tur patur const. vērtību.

Līmeņa virsmas pozitīvā un negatīvā puse.

Pārrakstīsim līmeņa virsmas nol-mu tā  $\phi(xyz) - C = 0$  un ievietosim šeit kāda punkta  $A$ , kas atrodās ārpus virsmas, koordinātes. Tad var nākt priekšā divi gadījumi

$\phi(x_1 y_1 z_1) - C > 0$  t.i. funkcija pieaug, jeb  $\phi(x' y' z') - C > 0$  funkcija samazinājās.

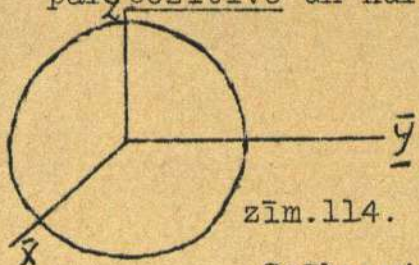
To pusi, kur funkcija pieaug, sauksim par pozitīvo un kur funkcija krīt par negatīvo. Jāpiezīmē, ka virsmas pozitīvā un negatīvā puse ir atkarīga no tā, kā mēs uzrakstīsim virsmas nol-mu. Piemēram, ja uzrakstīsim lodes nol-mu:  $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$ , tad pozitīvā puse būs ārpus viņas, bet ja to pašu virsmu rakstīsim  $r^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$ , tad pozitīvā puse atradīsies iekšpus lodes.

$A_1(x_1, y_1, z_1)$   
 pozitīvā puse  
 negatīvā puse  
 $\phi(xyz) - C = 0$

$A'(x' y' z')$

zīm.113.

par pozitīvo un kur funkcija krīt par negatīvo.



zīm.114.

Spēka virziens attiecībā pret virsmu.

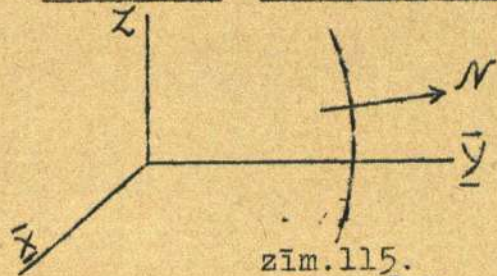
Teorēma I. Spēks arvienu iet normāli līmeņa virsmai, uz pozitīvo pusi, (t.i. kur funkcija pieaug).

Ja mums ir kāda virsma  $f(xyz) = 0$ , tad, kā zināms no augstākās matemātikas, virsmas normāles  $N$  virziens ir noteikts ar sekošiem Cos.

$$\text{Cos}(\overline{XN}) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2 + (\frac{\partial f}{\partial z})^2}}$$

$$\text{Cos}(\overline{YN}) = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2 + (\frac{\partial f}{\partial z})^2}} ; \text{Cos}(\overline{ZN}) = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2 + (\frac{\partial f}{\partial z})^2}}$$

zīm.115.



pie kam, ja saknei priekšā stāv (+) zīme, tad normāle iet uz to pusi, kur funkcija pieaug.

Uziesim tagad spēka F virziena Cos, ņemot vērā, ka spēka projekcijas ir  $X = \frac{\partial U}{\partial x}$ ,  $Y = \frac{\partial U}{\partial y}$ ,  $Z = \frac{\partial U}{\partial z}$  un pats spēks caur projekcijām izteicās šādi:

$$F = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}$$

$$\cos(\overline{XF}) = \frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}}; \cos(\overline{YF}) = \frac{\frac{\partial U}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}}$$

$$\cos(\overline{ZF}) = \frac{\frac{\partial U}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}}$$

Salīdzinot attiecīgos cos., redzam starp viņiem pilnīgu analogiju, tā tad tieši spēks F sakrīt ar līmeņa virsmas pozitīvas normāles virzienu. Uziesim vēl citu izteiksmi spēka lielumam. Apzīmēsim normāles elementu ar dn un viņa projekcijas ar dx, dy un dz, tad leņķu kosinusi

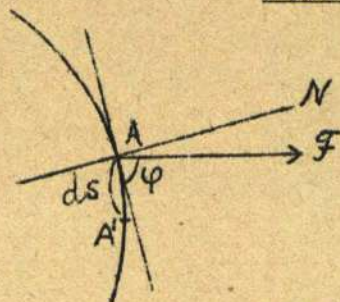
$$\cos(\overline{XN}) = \frac{dx}{dn}, \cos(\overline{YN}) = \frac{dy}{dn}, \cos(\overline{ZN}) = \frac{dz}{dn}$$

Reizināsim šos Cosin. ar tiem pašiem augšā pa divi un saskaitīsim kopā

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dn} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dn} + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dn}}{\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}} = \cos^2(\overline{XN}) + \cos^2(\overline{YN}) + \cos^2(\overline{ZN})$$
  
$$\frac{dU}{dn} = 1 \quad \text{un} \quad \boxed{F = \frac{dU}{dn}} \dots\dots\dots (106)$$

Tas nozīmē, ka spēks līdzinājās funkcijas atvasinājumam pēc normales elementa (jeb spēka funkcijas pieauguma robežai normas virzienā).

Cits pierādījums spēka virzienam (geometriski).



zīm.116.

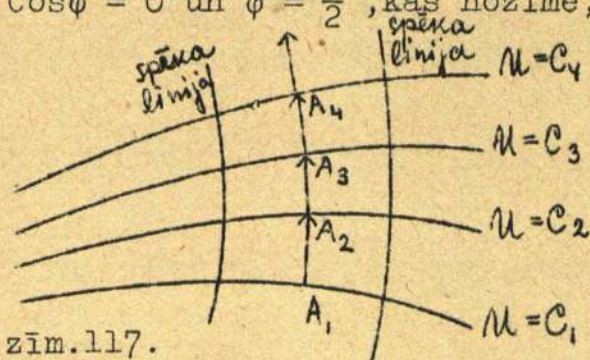
Lai pierādītu, ka spēks F iet normāles N virzienā, pieņemsim, ka spēks F nesakrīt ar normāli, bet veido kādu leņķi phi ar tangenti. Pieņemsim tālāk, ka punkts uz līmeņa virsmas ir izdarījis elementāru pārvietojumu ds. Pēc agrāk aizrādītās līmeņa virsmas īpašības, spēka F pastrādātais darbs uz šāda pārvietojuma ir nulle, jo spēka funkcijas pieauguma nebūs.

$$\alpha_{AA'} = 0$$

Bet no otras puses tas pats darbs izteiksies

$$\alpha = (\overline{F \cdot ds}) = F \cdot ds \cdot \cos \varphi$$

Salīdzinot abus atrodam, ka  $F \cdot ds \cdot \cos \varphi = 0$ , bet  $F \neq 0$ ,  $ds \neq 0$ , tā tad  $\cos \varphi = 0$  un  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , kas nozīmē, ka spēkam F ir jāiet normas virzienā.



zīm.117.

Spēka līnijas.

Ņemsim, vienai funkcijai U atbilstošas, vairākas virsmas  $U=C_1; U=C_2; U=C_3; U=C_4$  u.t.t. ļoti tuvi vienu pēc otras, šim nolūkam konstantēm dosim mazus pieaugumus  $C_2=C_1+\Delta C; C_3=C_1+2\Delta C; C_4=C_1+3\Delta C$ , tad  $C_1 < C_2 < C_3 < C_4$  u.t.t. Izvēlēsim uz pirmās virsmas kādu

punktu  $A_1$ . Šinī punktā spēks ies normāli pret virsmu uz to pusi, kur funkcija pieaug, t.i. uz virsmas  $U = C_2$  pusi. Pagarināsim šo normāli līdz krustošanai ar virsmu  $U = C_2$  punktā  $A_2$ , bet punktā  $A_2$  spēks jau būs normāls pret virsmu  $U = C_2$  un ies uz virsmas  $U = C_3$  pusi; ievilksim šo normāli un pagarināsim viņu atkal līdz virsmai  $U = C_3$  punktā  $A_3$ . Turpinot to pašu tālāk, dabūsim poligonu  $A_1A_2A_3A_4$ , kura malas rada spēka virzienus. Iezīmējot šinī poligonā līķu līniju, dabūsim tā saukto spēka līniju. Spēka līnijām ir divas īpašības: 1) spēka līnijas krustojās ar līmeņa virsmām normāli un 2) spēks arvienu iet tangenciālā virzienā spēka līnijai (zīm.117. ir parādītas spēka līnijas attiecībā pret līmeņa virsmām).

Uziesim spēka līnijas analitisko nol-mu. Šim nolūkam izlietosim apstākli, ka spēkam  $F$  ir jāsakrīt ar spēka līnijas elementu  $ds$ . Spēka projekcijas:

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

Spēka līnijas elementa projekcijas:  $dx, dy, dz$ . Bet ja divu vektoru virzieni sakrīt, tad viņu projekcijas ir proporcionālas

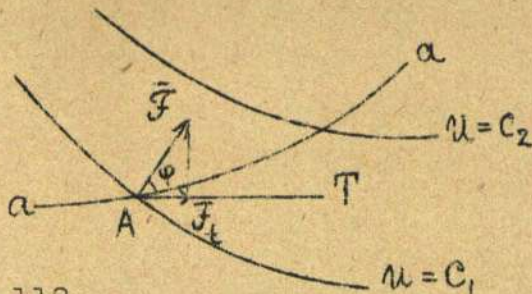
$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{X} &= \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} \\ \frac{dx}{\frac{\partial U}{\partial x}} &= \frac{dy}{\frac{\partial U}{\partial y}} = \frac{dz}{\frac{\partial U}{\partial z}} \end{aligned} \right\}$$

jeb arī

Spēka līniju nol-ma diferenciālā formā .....(107)

Nol-mi (107) reprezentē diferenciālā formā spēka līniju nol-mus.

Teorēma II. Spēka funkcijas atvasinātā pēc kaut kādas līķas elementa līdzinājās spēka  $F$  projekcijai uz līķas tangenti.



zīm.118.

kurā pastrādās spēks  $\vec{F}$  uz trajektorijas elementa  $ds$ .

$$d\alpha = (\vec{F} \cdot d\vec{s}) = F \cdot ds \cdot \cos\varphi = F_t \cdot ds$$

bet  $(\vec{F} \cdot d\vec{s}) = Xdx + Ydy + Zdz = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot dz$ , pielīdzināsim abas

izteiksmes  $F_t \cdot ds = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot dz$ , indalīsim ar  $ds$

$$F_t = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \frac{dz}{ds}$$

$$\boxed{F_t = \frac{dU}{ds}} \quad \dots \dots \dots (108)$$

To pašu teorēmu var formulēt arī tā: spēka projekcija zināmā virzienā līdzinājās atvasinātai no spēka funkcijas pēc tā paša virziena.

Piezīme. Lai būtu iespējams sastādīt atvasināto  $\frac{dU}{ds}$  ir jāizsaka punkta koordinātes  $x = f_1(s)$ ,  $y = f_2(s)$  un  $z = f_3(s)$  un jāliek viņas iekšā  $U = \Phi(xyz)$ , tad dabūsim  $U = \Phi(s)$  un  $F_t = \frac{dU}{ds}$ , bet tad arī  $\frac{dU}{ds} = \frac{\partial U}{\partial s}$  un

$$\boxed{F_t = \frac{\partial U}{\partial s}}$$
 , kas saskan ar formulām (102).

Speciālais gadījums. Ja līķa  $a-a$  sakrīt ar pašu līmeņa virsmu, tad tur  $U = \text{Const.}$  un  $\frac{dU}{ds} = 0$  un līdz ar to  $F \cdot \cos\varphi = 0$ ,  $\cos\varphi = 0$  jeb  $\varphi = \frac{\pi}{2}$

Ar šo ir vēlreiz pierādīts, ka spēks iet līmeņa virsmas normāles virzienā.

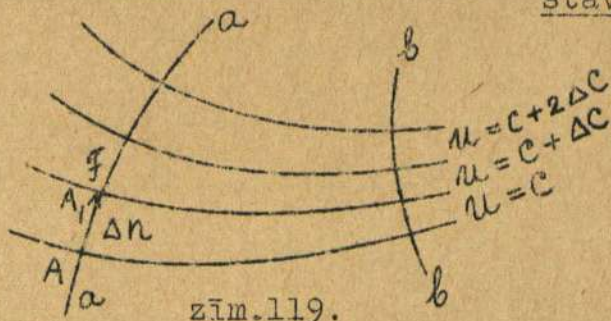


Speciālais gadījums. Ja līnija a-a sakrīt ar normāles virzienu, tad

$$F_t = F \text{ un formula (108) dod } F = \frac{dU}{dn} \dots (106)$$

Ar šo ir vēlreiz pierādīta formula (106) citā ceļā.

Attiecības starp spēku un līmeņa virsmu savstarpējo stāvokli.



zīm.119.

Nemsim līmeņa virsmas tā, lai katrā nākošā virsmā spēka funkcija dabūtu Const.pieaugumu  $\Delta C$  un pieņemsim, ka punkta trajektorija a-a sakrīt ar spēka līniju. Spēka līnija ir normāla visām līmeņa virsmām, kādēļ apzīmēsīm spēka līnijas elementu starp divām virsmām ar  $\Delta n$ .

Ja punkti pāries no vienas virsmas uz otru pa spēka līniju, tad no vienas puses pastrādātais darbs līdzinājās spēka funkcijas pieaugumam

$$W_{A-A_1} = \Delta U = \Delta C, \text{ bet no otras puses darbs } W_{A-A_1} = (\vec{F} \cdot \Delta n) = F \cdot \Delta n$$

Pielīdzinot abas izteiksmes dabūsim  $F \cdot \Delta n = \Delta C = \text{Const.}$  Bet ja reizinājums  $F \cdot \Delta n = \text{Const.}$ , tad tur, kur  $\Delta n$  ir mazāks, t.i. virsmas sanāk ciešāk kopā, tur spēkam  $F$  jābūt lielākam un otrādi. Zīmējumā 119 uz spēka līnijas b-b spēkam būs lielākas vērtības, nekā uz līnijas a-a.

To pašu varētu dabūt arī no formulas (108), ņemot līniju a-a spēka līnijas virzienā un rakstot formulu (106) šādā veidā

$$F = \frac{\Delta U}{\Delta n}, \text{ kur } \Delta n = \text{Const.}$$

Sakars starp spēku  $\vec{F}$  un viņa funkciju  $U$  ar vektoru analīzes simbolu palīdzību.

Sakaru starp spēku  $\vec{F}$  un viņa funkciju  $U$  var izteikt vēl vienkāršāki, lietojot vektoru teorijas simbolus.

Ja  $\phi$  ir skalara nepārtraukta koordinātu funkcija, tad vektors  $\vec{G}$ , kas ir virzīts visātrākā funkcijas pieauguma virzienā, un kuŗa modulis ir vienāds ar funkcijas pieaugumu uz bezgalīgi maza ceļa šinī virzienā saucās par funkcijas gradientu un tiek apzīmēts

$$\vec{G} = \text{grad } \phi$$

Pēc minētās dēfinīcijas ir redzams, ka spēka funkcijas  $U$  gradients ir taisni spēks  $\vec{F}$ , tā tad

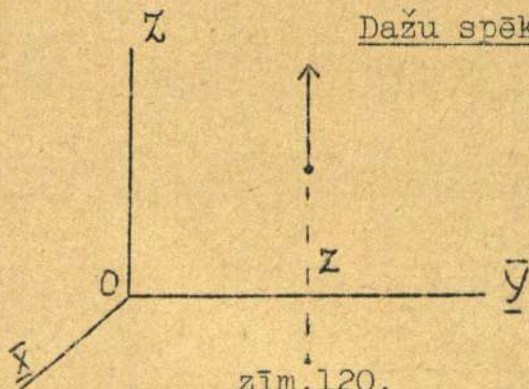
$$\vec{F} = \text{grad } U$$

Literatūrā ir sastopams ar cits apzīmējums gradienta vietā:  $\nabla$  (nabla), kuŗu sauc arī par Hamiltona operatoru

$$\vec{F} = \nabla U$$

Ja  $U$  ir koordinātu funkcija  $U = \phi(xyz)$ , tad  $F = \frac{\partial U}{\partial n}$  un  $X = \frac{\partial U}{\partial x}; Y = \frac{\partial U}{\partial y}; Z = \frac{\partial U}{\partial z}$

Dažu spēku līmeņa virsmu un spēku līniju noteikšana.



zīm.120.

I gadījums: spēks arvienu paliek perpendikulārs  $XOY$  plaknei un ir funkcija attālumā no viņas  $\vec{F} \perp XOY$  un  $F = f(z)$

Spēka projekcijas  $X=0, Y=0, Z=f(z)$

Spēka funkcija  $U = \int X dx + Y dy + Z dz$

$$U = \int f(z) \cdot dz = \phi(z)$$

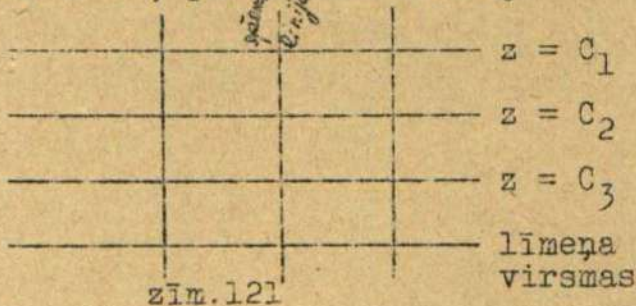
Pielīdzinot  $U = C$ , atrodam līmeņa virsmas

$$\phi(z) = C, \text{ bet tad arī } z = \text{Const.}$$

Pēdējais rezultāts rāda, ka līmeņa virsmas ir plaknes, parallēlas  $\bar{X}\bar{O}\bar{Y}$  plaknei. Lai dabūtu spēka līnijas, ņemsim nol-mus (107)

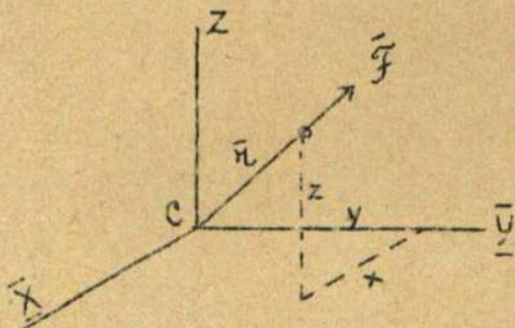
$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}$$

kuŗi mūsu gadījumā iznāk  $\frac{dx}{0} = \frac{dy}{0} = \frac{dz}{f(z)}$ , bet tad  $dx = 0$  un pēc integrēšanas  $\left\{ \begin{array}{l} x = a \\ y = b \end{array} \right.$ . Atroastie nol-mi dod spēka līnijas, kuŗas iznāk taisnes, parallēlas Z-asij.



Fiezīme. Pie šādiem spēkiem pieder arī smaguma spēks, kādēļ smaguma spēkam līmeņa virsmas ir horicontālas plaknes un spēka līnijas - vertikālas taisnes.

II gadījums. Centrāla spēka F, kuŗš ir f(r) līmeņa virsmas un spēka līnijas.



Spēka funkcija centrālam spēkam bija at-rasta agrāk (form.105)

$$U = \int F \cdot dr = \int f(r) \cdot dr$$

pēc integrēšanas dabūsim  $U = \phi(r)$ .

Pielīdzinot  $U = C$ , atrodam:  $\phi(r) = C$ , bet tad arī

$$r = \text{Const.} \quad \text{jeb} \quad x^2 + y^2 + z^2 = \text{Const.}$$

Šīs formulas reprezentē līmeņa virsmas, kuŗas būs koncentriskas lodes.

Lai dabūtu spēka līnijas, ņemsim nol-mus (107)

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}$$

bet spēka projekcijas:

$$X = F \cdot \cos(\bar{X}\bar{F}) = f(r) \cdot \frac{X}{r}$$

$$Y = F \cdot \cos(\bar{Y}\bar{F}) = f(r) \cdot \frac{Y}{r}$$

$$Z = F \cdot \cos(\bar{Z}\bar{F}) = f(r) \cdot \frac{Z}{r}$$

Ievietojot šo spēka līniju nol-mos, dabūsim

$$\frac{dx}{f(r) \cdot \frac{X}{r}} = \frac{dy}{f(r) \cdot \frac{Y}{r}} = \frac{dz}{f(r) \cdot \frac{Z}{r}} \quad \text{un pēc saī-$$

zīm.123.

sināšanas

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

Šeit ir divi nol-mi. Integrēsim viņus, rakstot integrēšanas Const. lo-garitma veidā

$$\ln x = \ln y + \ln a$$

$$\ln x = \ln z + \ln b$$

jeb atsvabinoties no logaritmiem, nonākam pie

$$x = ay$$

$$x = bz$$

Atrastie nol-mi dod spēka līnijas, kuŗas būs radiālas taisnes koncentriskām līmeņa virsmām.

Piezīme. Newton'a gravitācijas spēks arī ir centrāls, kādēļ Newton'a spēkam līmeņa virsmas ir koncentriskas lodes un spēka līnijas radiālas taisnes.

III.gadījums. Līmeņa virsmas un spēka līnijas spēkam, kuŗš arvienu krustojās ar Z-asi, iet viņai perpendikulāri un ir attāluma funkcija

$$\vec{F} \perp OZ \text{ un } F = f(r)$$

Spēka projekcijas uz asīm

$$X = F \cdot \cos(XF) = f(r) \cdot \frac{x}{r}$$

$$Y = F \cdot \cos(YF) = f(r) \cdot \frac{y}{r}$$

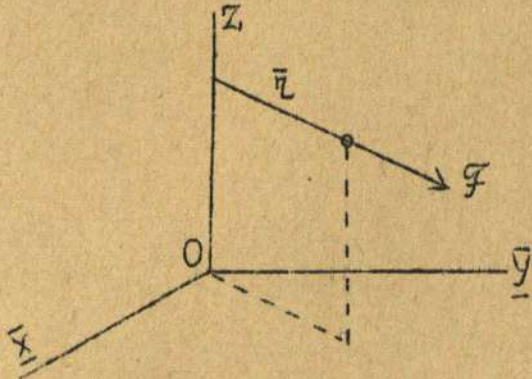
$$Z = 0$$

Spēka funkcija agrāk jau bija atrasta un  $U = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int f(r) \cdot dr$  un pēc integrēšanas  $U = \Phi(r)$

Pielīdzinot  $U = C$ , atrodam

$$\Phi(r) = C, \text{ bet tad arī}$$

$$r = \text{Const. jeb } x^2 + y^2 = \text{Const.}$$



zīm.124.

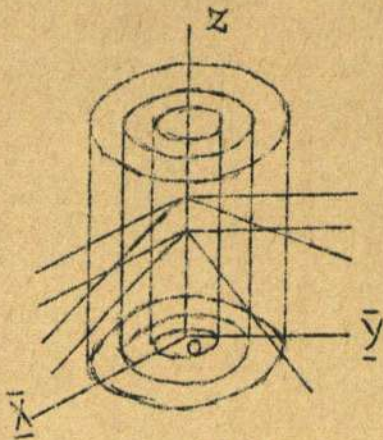
Šie nol-mi representē līmeņa virsmas, kuŗas tagad būs cilindri ap Z-asi. Lai dabūtu spēka līnijas, ņemsim nol-mus (107)

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

Ievietojot šeit spēka projekcijas, dabūsim

$$\frac{dx}{f(r) \cdot \frac{x}{r}} = \frac{dy}{f(r) \cdot \frac{y}{r}} = \frac{dz}{0} \text{ un pēc saīsināšanas}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{0}$$



zīm.125.

Integrējot pirmo nol-mu, atrodam  $\ln x = \ln y + \ln a$  jeb  $x = ay$

otrs nolīdzinājums:

$$dz = 0$$

$$\text{dod } z = b$$

Abi nol-mi kopā dod spēka līnijas, viņas ir taisnes, kuŗas krustojās ar Z-asi un ir paralēlas  $\underline{XOY}$  plaknei.

### S p a r a p r i n c i p s .

Vispārīgi spara teorēma ir:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_{x_0 y_0 z_0}^{xyz} Xdx + Ydy + Zdz$$

Bet konservatīvam spēkam pastrādātais darbs nav atkarīgs no ceļa un līdzinājās spēka funkcijas pieaugumam.

$$\int_{x_0 y_0 z_0}^{xyz} Xdx + Ydy + Zdz = U - U_0$$

Ievietojot šo spara teorēmā, dabūsim

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = U - U_0 \dots \dots \dots (109)$$

jeb rakstot saīsinātā veidā:  $K - K_0 = U - U_0 \dots \dots \dots (109^a)$

Formulas (109) reprezentē tā saukto spāra principu, kurš der tikai konservatīviem spēkiem. Viņu formulēsīm tā konservatīvā spēka laukā kinētiskās enerģijas pieaugums līdzinājās spēka funkcijas pieaugumam.

Spāra principa sekas.

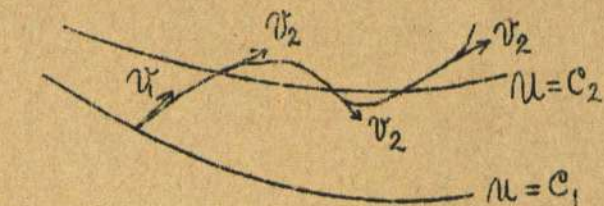
$$\frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2} = U_2 - U_1$$

1) Ja punkts izejot no vienas līmeņa virsmas, krusto vairākas reizes otru līmeņa virsmu, tad, kā redzams no spāra principa, visos krustošanas punktos ātruma lielumi būs vienādi. Sk.zīm.126.

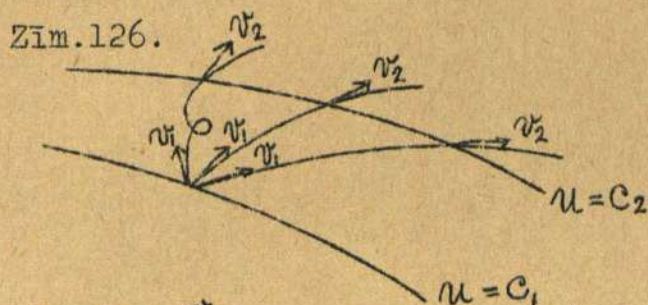
2) Ja punkts iziet no vienas virsmas ar kādu ātrumu  $V_1$ , tad, neatkarīgi no viņa trajektorijas, viņš pienāks otrā virsmā ar vienādu pēc lieluma ātrumu. Skzīm.127.

3) Ja arī kustība sākās uz vienas virsmas dažādos punktos, bet ar vienādiem ātrumiem  $V_1$ , tad atkal punkts pienāks otrā virsmā ar vienādiem ātrumiem  $V_2$

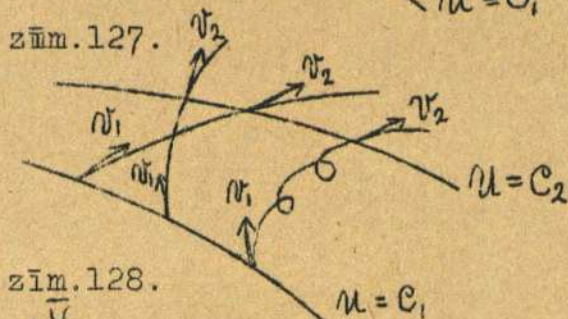
Piemērs. Pielietojot sacīto smaga materiāla punkta slīpam sviedienam bez pretestības, konstatējam, ka līmeņa virsmas ir horicontālas plaknes un ka punkta ātrumi vienā augstumā virs horicontālas ass pēc lieluma būs vienādi.



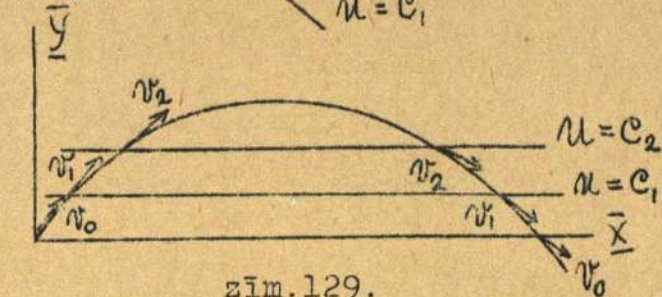
Zīm.126.



zīm.127.



zīm.128.



zīm.129.

Potenciāla enerģija.

Iedomāsimies divas, vienai funkcijai  $U = \Phi(xyz)$  piederošas virsmas  $U = C$  un  $U' = C'$  un Const.  $C'$  izvēlēsim tā, lai funkcijas vērtība  $U' = 0$ .

Ja punkts noslīdēs no virsmas  $U = C$  līdz virsmai  $U' = 0$ , tad spēka darbs būs vienāds ar funkcijas pieaugumu

$$\alpha = U' - U$$

zīm.130.

Bet  $U' = 0$ , tā tad  $\alpha = -U$

Tālāk (-U) apzīmēsim ar  $\Pi$  un nosauksim par potenciālo enerģiju:

$$-U = \Pi \quad \dots \dots \dots (110)$$

Potenciālā enerģija līdzinājas darbam, kuru pastrādās spēks, ja punkts noslidēs no līmeņa virsmas  $U = C$  līdz virsmai  $U' = 0$ .

Mēchaniskas enerģijas pastāvības princips.

Nemsim spara principu form.109

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = U - U_0$$

jeb

$$K - K_0 = U - U_0$$

Bet  $U = -\Pi$  un analogiski  $U_0 = -\Pi_0$

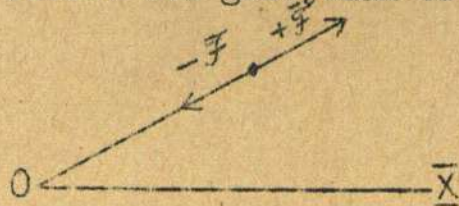
$$K - K_0 = -\Pi + \Pi_0$$

$$\boxed{K + \Pi = K_0 + \Pi_0 = \text{Const.}} \quad \dots \dots \dots (111)$$

Konservatīvā spēka lauka summa no kinētiskas un potenciālas enerģijas ir Const. lielums.

§ 9. Binet formulas centrālai kustībai.

Centrālā kustībā punkta trajektorija ir plakana līnija un ja spēks ir  $F = f(r)$ , tad ir izdevīgi lietot polārkoordinātes plaknē. Taisni šim gadījumam ir izvestas Binet formulas.



Vienosimies pievilkšanas spēku skaitīt par negatīvu (-F), un atgrūšanas spēku par pozitīvu (+F). Nesķirsim vienu gadījumu no otra, rakstot vispārīgi:  $\mp F$ .

Ņemot otru kustības diferenciālnol-mu polārkoordinātēs, dabūsim

Zīm.131.

$$\frac{m}{r} \cdot \frac{d}{dt}(r^2 \cdot \frac{d\phi}{dt}) = F_c = 0$$

no kurienes  $r^2 \cdot \frac{d\phi}{dt} = C$ , kur  $C = 2\mathcal{C}$ , jo  $\mathcal{C} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\phi}$  un tad  $\frac{d\phi}{dt} = \frac{C}{r^2}$

Tālāk izlietosim spara teorēmu centrālam spēkam elementārā veidā: formula (98-b)

$$d \frac{mV^2}{2} = \mp F \cdot dr$$

kur (-F) atbilst pievilkšanas spēkam, un (+F) atbilst atgrūšanas spēkam,

bet polārkoordinātēs:  $V^2 = v_r^2 + v_c^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\phi})^2$

$$\frac{m}{2} d(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) = \mp F \cdot dr$$

aizvietosim agrāk atrasto  $\dot{\phi} = \frac{C}{r^2}$  un izdalīsim ar dt

$$\frac{m}{2} \frac{d}{dt}(\dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2}) = \mp F \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{m}{2}(2r\ddot{r} - \frac{C^2 \cdot 2r\dot{r}}{r^4}) = \mp F \cdot \dot{r} \quad \text{saīsināsim } \dot{r}$$

$$m\ddot{r} - \frac{mC^2}{r^3} = \mp F$$

jeb

$$\boxed{m\ddot{r} = -F + \frac{mC^2}{r^3}} \quad \text{I Binet formula... (112)}$$

Atrastā formula reprezentē I Binet formulu, viņa dod sakaru starp r un t. Binet formulu var lietot:

1) spēka F noteikšanai pēc dotas kustības ar divreizēju diferencēšanu, un

2) kustības noteikšanai pēc dotā spēka  $F = f(r)$  ar divreizējo integrēšanu. Pie kam  $\phi$  atrodams, integrējot  $\dot{\phi} = \frac{C}{r^2}$

Lai dabūtu otro Binet formulu atkal iziesim no spara teorēmas centrālam spēkam

$$d \frac{mV^2}{2} = \mp F \cdot dr$$

tāpat aizvietosim  $V^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\phi})^2$  un  $\dot{\phi} = \frac{C}{r^2}$

$$\frac{m}{2} d\left(\dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2}\right) = \mp F \cdot dr$$

bet tālāk izdalīsim abas puses ar  $d\phi$

$$\frac{m}{2} \frac{d}{d\phi} \left(\dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2}\right) = \mp F \cdot \frac{dr}{d\phi} \quad \text{un izdarot diferencēšanu}$$

$$\frac{m}{2} \left(2r \frac{d\dot{r}}{d\phi} - \frac{C^2 \cdot 2r}{r^4} \frac{dr}{d\phi}\right) = \mp F \cdot \frac{dr}{d\phi}$$

tagad pārveidosim  $\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\phi} \cdot \frac{d\phi}{dt} = \frac{dr}{d\phi} \cdot \frac{C}{r^2}$  un lai varētu vēl diferen-

cēt pēc  $\phi$ , pārrakstīsim tā  $r = -C \frac{d(\frac{1}{r})}{d\phi}$ , tad tālāk  $\frac{dr}{d\phi} = -C \frac{d^2(\frac{1}{r})}{d\phi^2}$

un ievietojot atrastos lielumus, dabūsim

$$m \left[ \frac{dr}{d\phi} \cdot \frac{C}{r^2} \cdot \left(-C \frac{d^2(\frac{1}{r})}{d\phi^2}\right) - \frac{C^2}{r^3} \cdot \frac{dr}{d\phi} \right] = \mp F \cdot \frac{dr}{d\phi}$$

Saīsināsim  $\frac{dr}{d\phi}$  un izņemsim aiz iekavām  $\frac{C^2}{r^2}$

$$- \frac{mC^2}{r^2} \left[ \frac{d^2(\frac{1}{r})}{d\phi^2} + \frac{1}{r} \right] = \mp F \quad \text{pārrakstīsim zīmes}$$

$$\boxed{F = \frac{mC^2}{r^2} \left[ \frac{d^2(\frac{1}{r})}{d\phi^2} + \frac{1}{r} \right]} \quad \dots \dots \text{II. Binet formula} \dots \dots (113)$$

Šī ir otrā Binet formula, kuŗa dod sakaru starp r un  $\phi$ . Viņa dod iespēju pēc trajektorijas  $r = \hat{r}(\phi)$  atrast spēku, tikai šeit ir jāievēro, ka pozitīvais rezultāts atbilst pievilkšanas, un negatīvais atgrūšanas spēkam, jo formulā bija mainītas zīmes. To pašu formulu var lietot arī trajektorijas noteikšanai, ja spēks ir  $F = f(r)$ .

Binet formulas visbiežāk lieto astronomijā, jo planētas var uzskatīt par materiāliem punktiem, kuŗu kustība notiek zem centrālā Newtona gravitācijas spēka iespaida.

Newtona gravitācijas likuma izvešana no 3 Keplera likumiem.

Keplers bija uzstādījis 3 likumus planētu kustībai.

1) Visas planētas un citi debess ķermeņi kustās pa konusa šķēlieniem (ellipse) parabola vai hiperbola), pie kam Saule atrodas vienā no fokusiem.

2) Šinī kustībā sektoriāls ātrums ir Constants  

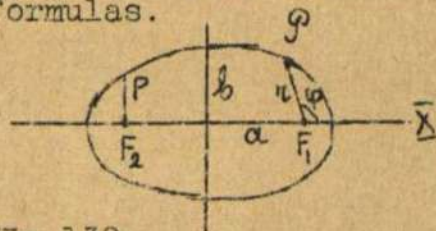
$$\dot{\phi} = \text{Const.}$$

3) Planētu apgrieziena laika kvadrata attiecība pret eliptiskas orbītas lielās pusass kubu arī ir Constants lielums visām planētām

$$\frac{T^2}{a^3} = \delta$$

Vienkāršības dēļ pie kustības pētīšanas mēs ievērojam tikai Saules iespaidu uz planētām, bet savstarpīgu iespaidu ignorējam, jo tas ir ļoti mazs salīdzinot ar pirmo.

Jautājumu apskatīsim polārkoordinātēs, lai varētu izlietot Binet formulas.



Konusa šķēliena noloms polārkoordinātēs attiecināts uz vienu no fokusiem ir

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \phi}$$

kur p ir pusparametrs un  $\epsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$  ir skaitliska ekcentricitāte.

Zīm.132.

Ja  $\dot{\phi} = \text{Const.}$ , tad  $r^2 \dot{\phi} = C$  un spēks ir centrāls. Ņemsim otro Binet formulu

$$F = \frac{mC^2}{r^2} \left[ \frac{d^2(\frac{1}{r})}{d\phi^2} + \frac{1}{r} \right]$$

Mūsu gadījumā  $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{\epsilon}{p} \cos \phi$

Sastādīsim  $\frac{d(\frac{1}{r})}{d\phi} = -\frac{\epsilon}{p} \sin \phi$  un  $\frac{d^2(\frac{1}{r})}{d\phi^2} = -\frac{\epsilon}{p} \cos \phi$

ievietosim šo Binet formulā, atrodam

$$F = \frac{mC^2}{r^2} \left[ -\frac{\epsilon}{p} \cos \phi + \frac{1}{p} + \frac{\epsilon}{p} \cos \phi \right]$$

$$F = \frac{mC^2}{p} \cdot \frac{1}{r^2}$$

rezultāts pēc otras Binet formulas ir pozitīvs, tas norāda, ka spēks F ir pievilksanas spēks.

Atrastā formulā ieieta C un p, kuri ir Const., bet dažādām planētām ir dažādi; pierādīsim, ka  $\frac{C^2}{p}$  ir vienāds visām planētām

$$C = 2\dot{\phi} = 2 \frac{\pi ab}{T} \quad \text{un} \quad p = \frac{b^2}{a}$$

$$\frac{C^2}{p} = \frac{4\pi^2 a^2 b^2 a}{T^2 b^2} = \frac{4\pi^2 \cdot a^3}{T^2}$$

bet pēc 3) Keplera likuma  $\frac{T^2}{a^3} = \delta$ , apzīmēsim  $\frac{4\pi^2}{\delta} = k$ , tad

$$\boxed{\frac{C^2}{p} = \frac{4\pi^2}{\delta} = k} \dots \dots \dots (114)$$

un spēks

$$F = \frac{km}{r^2} \dots \dots \dots (115)$$

Ar šo Newtona gravitācijas likums ir pierādīts. Newtona gravitācijas spēks ir pievilksšanas spēks proporcionāls masai un pretēji proporcionāls attāluma kvadrātam.

Pēc IV Newtona pamatprincipa vienpusīgās spēka darbības dabā nav, tā tad faktiski spēka formulu būtu jāraksta

$$F = \frac{k'mM}{r^2}$$

kur m ir viena ķermeņa masa un M otra ķermeņa masa, bet mēs arvienu varam iedomāties centrālā ķermeņa masu M ieslēgtu koeficientā tā, ka

$$k'M = k \text{ un tad iznāk } F = \frac{km}{r^2}.$$

Koeficientu k saules sistēmai ir izrēķinājis pazīstamais matemātiķis Gauss, kādēļ viņu arī sauc par Gauss'a skaitli, viņa dimenzija ir

$$\text{redzama no formulas } k = \frac{4\pi^2}{\delta} = \frac{4\pi^2 \cdot a^3}{T^2} \text{ un iznāk } k[L^3T^{-2}]$$

Skaitliski

$$k = 668 \cdot 10^{-8} \text{ mtr}^3/\text{sec}^2 \dots \dots \dots (116)$$

Keplera likumu pierādīšana izejot no Newtona gravitācijas likuma.

Iziesim no Newtona gravitācijas spēka izteiksmes  $F = -\frac{km}{r^2}$ . Pirmkārt konstatējam, ka Newtona gravitācijas spēks ir centrāls, bet centrālā kustībā sektoriāls ātrums ir Const.:  $\zeta = \frac{C}{2}$  jeb  $r^2\dot{\phi} = C$ . Ar šo ir pierādīts otrs Keplera likums. Tālāk ņemsim otro Binet formulu:

$$F = \frac{mC^2}{r^2} \left[ \frac{d^2(\frac{1}{r})}{d\phi^2} + \frac{1}{r} \right]$$

Šinī formulā pievilksšanas spēka gadījumā jāraksta viņu pozitīvu, jo pie formulas izveduma bija mainītas zīmes.

$$-\frac{km}{r^2} = \frac{mC^2}{r^2} \left[ \frac{d^2(\frac{1}{r})}{d\phi^2} + \frac{1}{r} \right]$$

Sāksim  $\frac{m}{r^2}$  un ērtības dēļ ievēsim apzīmējumu  $\frac{1}{r} = z$

$$k = C^2 \left( \frac{d^2z}{d\phi^2} + z \right) \text{ jeb}$$

$$\frac{d^2z}{d\phi^2} = \frac{k}{C^2} - z \text{ pārveidosim kreiso pusi } \frac{d(\frac{dz}{d\phi})}{dz} \cdot \frac{dz}{d\phi} = \frac{k}{C^2} - z \text{ reizināsim}$$

ar dz un integrēsim  $\int \frac{dz}{d\phi} d(\frac{dz}{d\phi}) = \int (\frac{k}{C^2} - z) dz + \frac{C}{2}$  pēc integrēšanas reizi-

nāsim ar 2:  $(\frac{dz}{d\phi})^2 = 2\frac{k}{C^2}z - z^2 + C_1$  izvilksim kvadratsakni

$$\frac{dz}{d\phi} = \pm \sqrt{C_1 + 2\frac{k}{C^2}z - z^2} \text{ zīmi jāizvēl (-), jo } z = \frac{1}{r} \text{ un dz būs negatīvs}$$

$$-\int \frac{dz}{\sqrt{C_1 + 2\frac{k}{C^2}z - z^2}} = \phi + \alpha \text{ rakstam šeit integrēšanas Const. leņ-}$$

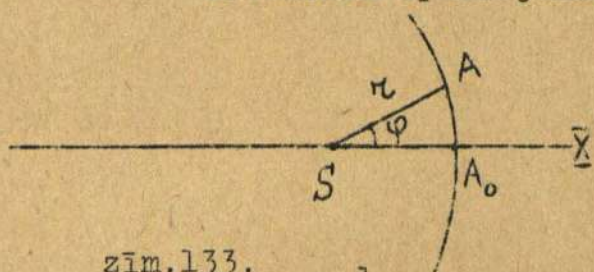
ķa veidā



$$\text{arc Cos } \frac{z - \frac{k}{c^2}}{\sqrt{c_1 + \frac{k^2}{c^4}}} = \varphi + \alpha \quad \text{no kurienes} \quad \frac{z - \frac{k}{c^2}}{\sqrt{c_1 + \frac{k^2}{c^4}}} = \text{Cos}(\varphi + \alpha)$$

$$z = \frac{k}{c^2} + \sqrt{c_1 + \frac{k^2}{c^4}} \text{Cos}(\varphi + \alpha)$$

ievedīsim apzīmējumus



$$\left\{ \begin{aligned} \frac{k}{c^2} &= \frac{1}{p} \\ \sqrt{c_1 + \frac{k^2}{c^4}} &= \frac{\varepsilon}{p} \end{aligned} \right.$$

un aizvietojojot atpakaļ  $z = \frac{1}{r}$ ,  
dabūsim  $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{\varepsilon}{p} \text{Cos}(\varphi + \alpha)$

zīm.133.

pie min.r, bet tad  $\frac{1}{r}$  būs maksimāls, šim momentam tad atbilst  $\varphi_0 = 0$ .  
Bet  $\frac{1}{r}$  būs maksimāls, ja  $\text{Cos}(\varphi_0 + \alpha) = 1$ ;  $\text{Cos} \alpha = 1$ ;  $\alpha = 0$ .  
Tā tad galīgi  $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{\varepsilon}{p} \text{Cos} \varphi$ , jeb trajektorija iznāk

$$\boxed{r = \frac{p}{1 + \varepsilon \text{Cos} \varphi}}$$

Šis nol-ms nav nekas cits kā konusa šķēliens, pie kam līnija būs ellip-se, ja  $\varepsilon < 1$ , parabola, ja  $\varepsilon = 1$ , un hiperbola  $\varepsilon > 1$ .  
Pārveidosim tālāk šos kriterijus ievērojot ka

$$\varepsilon = p \sqrt{c_1 + \frac{k^2}{c^4}} = \frac{c^2}{k} \sqrt{c_1 + \frac{k^2}{c^4}} = \sqrt{\frac{c_1 c^4}{k^2} + 1} \quad \text{un} \quad \varepsilon^2 = \frac{c_1 c^4}{k^2} + 1$$

1) Ellipsi dabūjam, ja  $\varepsilon < 1$ , bet tad arī  $\varepsilon^2 < 1$  un  $\frac{c_1 c^4}{k^2} + 1 < 1$ , jeb  $\frac{c_1 c^4}{k^2} < 0$ , bet  $c^4$  un  $k^2$  nevar būt  $< 0$ , vienīgi paliek  $\boxed{c_1 < 0}$

2) Paraboli dabūjam, ja  $\varepsilon = 1$ , bet tad arī  $\varepsilon^2 = 1$ , jeb  $\frac{c_1 c^4}{k^2} + 1 = 1$   
 $\frac{c_1 c^4}{k^2} = 0$ , bet  $c^4 \neq 0$  vienīgi var būt  $\boxed{c_1 = 0}$

3) Hiperboli dabūjam, ja  $\varepsilon > 1$ , bet tad arī  $\varepsilon^2 > 1$  un  $\frac{c_1 c^4}{k^2} + 1 > 1$   
jeb  $\frac{c_1 c^4}{k^2} > 0$ , tas nozīmē, ka jābūt  $\boxed{c_1 > 0}$  jo  $c^4 > 0$  un  $k^2 > 0$

Kā redzams kriterijs trajektorijas veida noteikšanai ir integrēšanas Const.  $c_1$ .

Lai pierādītu III Keplera likumu iziesim no formulas  $\mathcal{G} = \frac{C}{2}$  jeb  $2\mathcal{G} = C$ .

$$\frac{2\pi ab}{T} = C \quad \text{celsim šo kvadrātā}$$

$$\frac{4\pi^2 a^2 b^2}{T^2} = C^2 \quad \text{bet agrāk bija apzīmēts } \frac{C^2}{p} = k \quad \text{jeb } C^2 = pk$$

$$\frac{4\pi^2 a^2 b^2}{T^2} = pk \text{ aizvietosim } p = \frac{b^2}{a}$$

$$\frac{4\pi^2 a^2 b^2}{T^2} = \frac{b^2}{a} k \text{ saīsināsim } b^2 \text{ un pārveidosim}$$

$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{k}$  bet tas ir Const. lielums, kuru varam apzīmēt ar  $\delta$  un tad iznāk

$$\boxed{\frac{T^2}{a^3} = \delta} \text{ III Keplera likums.}$$

Smaguma spēka paātrinājuma "g" skaitliskas vērtības noteikšana, izejot no mēness apgriešanas laika ap zemes lodi un viņa trajektorijas rādus.

Doti: mēness apgriešanas laiks  $T = 27^d 7^h 43^m = 236 \cdot 10^4 \text{ sec.}$

mēness trajektorijas rādus  $a = 60,1 R$

kur  $R = 6375 \text{ klm.}$  ir zemes lodes rādus.

Ņemsim Newtona gravitācijas spēka formulu  $F = \frac{km}{r^2}$  un pielietosim viņu ķermenim, kas atrodas uz zemes lodes virsmas;  $r^2$  attālums tad būs  $R$  un spēks  $F = mg$

$$mg = \frac{km}{R^2} \text{ no kurienes } g = \frac{k}{R^2}$$

$k$  - šeit ir Gaussa skaitlis, kas pēc III Keplera likuma  $\frac{T^2}{a^3} = \delta$ , ievērojot ka  $k = \frac{4\pi^2}{\delta}$  (form.114), iznāk  $k = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}$ , ieliksīm viņu  $g$  izteiksmē

$$\boxed{g = \frac{4\pi^2 \cdot a^3}{T^2 \cdot R^2}}$$

tagad paliek tikai ielikt skaitļus

$$g = \frac{4\pi^2 \cdot (60,1 R)^3}{T^2 \cdot R^2} = \frac{4 \cdot 3,14^2 \cdot 60,1^3 \cdot 6375000}{236^2 \cdot 10^8} = 9,81 \text{ m.sec}^{-2}$$

### § 10. SAISTĪTA PUNKTA DINAMIKA.

#### Dēfinīcijas. Saītes un viņu klasifikācija.

Ja kustošā punkta koordinātes arvienu ir saistītas ar kādu funkciju  $f(xyz) = 0$ , mēs sakām, ka kustībai ir uzlikta saīte.

Bet nol-ms  $f(xyz) = 0$  geometriski reprezentē kādu virsmu un ja punkta koordinātes arvienu apmierina virsmas nol-mu, tad punkts kustas uz šīs virsmas jeb ar citiem vārdiem sakot saīte ir dota virsmas veidā

Brīvam punktam telpā ir 3 kustības brīvības, bet ar saīti virsmas veidā viena kustības brīvība tiek atņemta un punktam uz virsmas paliek tikai 2 kustības brīvības.

Gadījumā, ja kustošā punkta koordinātes arvienu ir saistītas ar diviem nol-miem

$$f_1(xyz) = 0 \text{ un } f_2(xyz) = 0$$

punkta kustība arī ir saistīta, bet ievērojot, ka divas virsmas telpā reprezentē līkni, saīte būs līkne dota ar divām virsmām. Šinī gadījumā punktam paliek tikai viena kustības brīvība un tālāk saītes punktam vairs uzlikt nevar, jo viņam tad būs atņemta pēdējā kustības brīvība.

Nol-mi  $f_1(xyz) = 0, f_2(xyz) = 0, f_3(xyz) = 0$

reprezentē nekustošu punktu.

Saišu klasifikācija.

Pēc savām īpašībām saites var iedalīt vairākās grupās.

- I iedalījums - 1) Reālas jeb fizikālas saites.  
 2) Fiktīvas jeb ģeometriskas saites.
- II iedalījums - 1) Vienpusīgas jeb unilaterālas saites.  
 2) Divpusīgas jeb bilaterālas saites.
- III iedalījums - 1) Ideālas saites.  
 pēc fizikalām 2) Saites ar berzi.  
 īpašībām
- IV iedalījums - 1) Skleronomas saites.  
 pēc nol-ma 2) Rheonomas saites.
- V iedalījums - 1) Holonomas saites.  
 arī pēc nol-ma 2) Anholonomas saites.

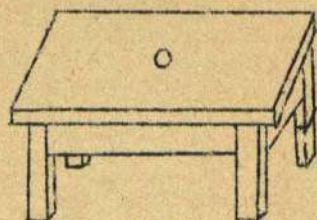
Dēfinēsim katru grupu atsevišķi.

Reālas jeb fizikālas saites jēdziens ir saprotams no paša nosaukuma, piemēram slīpa plakne, uz kuŗas kustas punkts, ir fizikāla saite. Fiktīvas jeb ģeometriskas saites ir tādas, kuŗu eksistenci mums ir jā-iedomājās, bet kuŗu faktiski nav. Tā, piemēram, lodes virsma, uz kuŗas kustas punkts piestiprināts pie nekustoša centra ar stienīti, ir ģeome- triska saite.

Vienpusīgas jeb unilaterālas saites ir tādas, no kuŗām punkts var uz vienu pusi noiet. (sk. zīm. 134). Vienpusīgas sai- tes arī var būt fizikālas un ģeometriskas. Tā, piemēram, galda plakne, uz kuŗas kustas punkts, ir vienpusīga fizikāla saite (zīm. 135). Bet punktam piesietam pie nekustoša centra C ar pavedienu, saite lodes virsmas veidā būs vienpusīga ģeometriska saite (zīm. 136).



zīm. 134.



zīm. 135.



zīm. 136.

Vienpusīgas saites nol-mu vienosimies rakstīt arvienu tā, lai tā puse, uz kuŗu punkts var noiet būtu pozitīva, t. i.

$$f(xyz) \geq 0 \text{ bet nevis } f(xyz) \leq 0$$

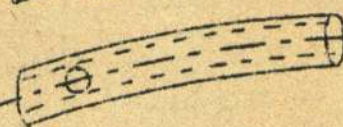
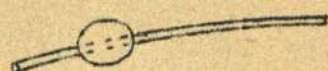
piemēram minētās lodes virsmu jāraksta

$$l^2 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0, \text{ bet nevis}$$

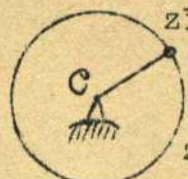
$$x^2 + y^2 + z^2 - l^2 \leq 0, \text{ kaut gan algebrais-}$$

ki starpības nav.

Divpusīgas jeb bilaterālas saites ir tādas, no kuŗām punkts noiet nevar.



zīm. 137.

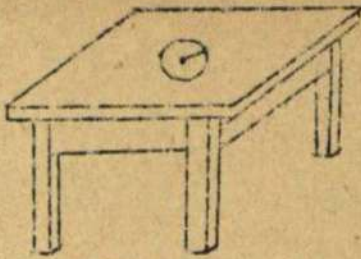


zīm. 138.

Viņas arī var būt fizikālas un ģeometriskas un var nākt priekšā kā virsmas tā arī līknes veidā. Piemēram stiepuļes līnija ar uzmaiktu caururbtu bumbiņu būs fizikāla divpusīga saite. Tāpat izliek- tā caurule ar iekšējo caurmēru vienādu ar kusto- šas bumbiņas caurmēru arī būs fizikāla divpusīga saite, tikai par saiti tad skaitīsim caurules ģeometrisko asi.

Ģeometriskas divpusīgas saites piemērs ir lodes virsma, pa kuŗu kustas punkts, piestipri- nāts šarnīrveidīgi ar stienīti pie nekustoša centra C.

Saišu skaits. Kā agrāk bija aizrādīts divpusīgo saišu skaits ir apro- bezots ar 2. Turpretīm vienpusīgo saišu skaits punktam nav aprobezots, ja tikai viens nol-ms nerunā otram pretīm un punktam paliek zināma brīvība kustēties. Piemēram, ja punkts ir piesiets ar pavedienu pie naglas,



zīm.139.

iesistas galdā, tad galda plakne ir viena saite, puslodes virsma ir otra vienkopusīga saite un istabas sienas arī var uzskatīt par saitēm, jo mēs arvienu varam uzrakstīt viņu nol-mus tā, lai kreisā puse butu  $> 0$ .

Pēc fizikālām īpašībām saites bija iedalītas:

Ideālās saitēs, t.i. ideāli gludās saitēs un Saitēs ar berzi jeb negludās saitēs.

Pēc nol-ma veida saites bija iedalītas 1) Skleronomās un 2) Rheonomās. Skleronomās saites ir tādas, kuru nol-mā ietil tikai koordinātes, bet laika nav, tā tad

$f(xyz) = 0$  ir skleronoma saite virsmas veidā un

$f_1(xyz) = 0$  } ir skleronoma saite, dota ar divām virsmām, t.i. lini-  
 $f_2(xyz) = 0$  } jas veidā.

Rheonomas saites ir tādas, kuru nol-ma ietil atklātā veidā laiks.

$f(xyzt) = 0$  ir rheonoma saite virsmas veidā.

$f_1(xyzt) = 0$  } ir rheonoma saite, dota ar divām virsmām, t.i. lini-  
 $f_2(xyzt) = 0$  } jas veid.

Rheonomas saites analitiskā pazīme ir laika atrašanās saites nol-mā, bet fizikāli tas nozīmē, ka saite vai nu pate atrodas kustībā, jeb viņa ar laiku deformējas. Piemēram punkta saite ir lodes virsma, bet pati lode veļas uz galdā; jeb punkta saite ir ellipsoīda virsma, bet viena ellipsoīda ass ar laiku pieaug, t.i. ellipsoīds vienā virzienā izstiepjas.

Arī pēc nol-ma veida saites bija vēl iedalītas 1) Holonomās un 2) Anholonomās saitēs.

Holonomas saites ir tādas, kuru nol-mā nav diferenciālu, t.i. saites nol-ms ir dots galīgā veidā. Saite arī skaitas par holonomu, ja viņa satur diferenciālus, bet ir nointegrējama.

Piemērs: saites nol-ms  $xdx + ydy + zdz = 0$ , bet pēc integrēšanas iznāk  $x^2 + y^2 + z^2 = 2C = r^2$  lodes virsma.

Anholomonas saites ir tādas, kuras satur diferenciālus, bet pašas nav pilns diferenciāls un nav nointegrējamas. Viņas var būt kā skleronomas, tā arī rheonomas.

Piemērs: saites nol-ms  $ax + by + c \frac{dy}{dx} = C$ .

Šis nol-ms nav pilns diferenciāls, viņu nevar nointegrēt un tamdēļ viņš reprezentē anholonomu saiti.

Punkta ātrums, ja saite ir ideāla skleronoma virsma jeb līkne.

Ja saite ir dota virsmas veidā  $f(xyz) = 0$ , tad katrā laika momentā šis nol-ms identiski līdzinājās nullei, ja viņā ieliksīm kustošā punkta koordinātes. Tāpat arī visas funkcijas atvasinātas identiski = 0.

$$\frac{df}{dt} = 0 \quad \text{un} \quad \frac{d^2f}{dt^2} = 0 \quad \text{u.t.t.}$$

Tālākām atvasinātām nav mēchaniskas nozīmes, tamdēļ mēs viņas neapskatīsim.

Sastādīsim  $\frac{df}{dt} = 0$  pēc augstākās matemātikas likumiem

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \dot{z} = 0$$

Izdalīsim šo nol-mu ar saites diferenciālo parametru  $\Delta$ , par kuru

nosauksim izteiksmi

$$\Delta = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}, \text{ tad}$$

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\Delta} \dot{x} + \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\Delta} \dot{y} + \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\Delta} \dot{z} = 0$$

Bet no augstākās matemātikas ir zināms, ka  $\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}} = \text{Cos}(\overline{XN})$

kur N apzīmē pozitīvas normāles virzienu, tā tad:

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\Delta} = \text{Cos}(\overline{XN}) \text{ un analogiski } \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\Delta} = \text{Cos}(\overline{YN}); \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\Delta} = \text{Cos}(\overline{ZN}), \text{ ievēro-$$

jot šo dabūsim  $\dot{x} \cdot \text{Cos}(\overline{XN}) + \dot{y} \cdot \text{Cos}(\overline{YN}) + \dot{z} \cdot \text{Cos}(\overline{ZN}) = 0$ ,

bet  $\dot{x} = V_x$ ,  $\dot{y} = V_y$ ,  $\dot{z} = V_z$

$$V_x \text{Cos}(\overline{XN}) + V_y \text{Cos}(\overline{YN}) + V_z \text{Cos}(\overline{ZN}) = 0$$

jeb 
$$V \cdot \text{Cos}(\overline{VN}) = 0 \dots \dots \dots (116)$$

bet, ja punkts uz saites kustās, tad ātrums  $V \neq 0$  un jābūt  $\text{Cos}(\overline{VN}) = 0$  jeb  $\overline{V} \perp \overline{N}$ , tas nozīmē, ka saistītam punktam, ja saite ir virsma, ātruma vektors arvienu atrodas tangenciālā plaknē.

Ja saite ir līkne, dota ar divām virsmām, ātruma vektoram jāatrodas divās tangenciālās plaknēs, t.i. viņu krustojumā, jeb vienkārši saites tangētē.

Punkta paātrinājums, ja saite ir ideāla skleronoma virsma jeb līkne.

Sastādīsim  $\frac{d^2 f}{dt^2}$ , atvasinot vēl reizi

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \dot{z} = 0 \text{ pēc laika}$$

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = \frac{\partial f}{\partial x} \ddot{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \ddot{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \ddot{z} + f^{(2)} = 0$$

kur zem  $f^{(2)}$  saprotam pārējo locekļu summu

$$f^{(2)} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \dot{x}^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \dot{y}^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \dot{z}^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \dot{x} \dot{y} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \dot{y} \dot{z} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \dot{z} \dot{x}$$

izdalot  $\frac{d^2 f}{dt^2}$  izteiksmi ar  $\Delta = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}$

un ievērojot, ka  $\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\Delta} = \text{Cos}(\overline{XN})$ ,  $\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\Delta} = \text{Cos}(\overline{YN})$ ,  $\frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\Delta} = \text{Cos}(\overline{ZN})$

$$\text{dabūsim } \text{Cos}(\overline{XN}) \cdot \ddot{x} + \text{Cos}(\overline{YN}) \cdot \ddot{y} + \text{Cos}(\overline{ZN}) \cdot \ddot{z} + \frac{f^{(2)}}{\Delta} = 0$$

$$j_x \text{Cos}(\overline{XN}) + j_y \text{Cos}(\overline{YN}) + j_z \text{Cos}(\overline{ZN}) = - \frac{f^{(2)}}{\Delta}$$

jeb 
$$j \text{Cos}(Nj) = - \frac{f^{(2)}}{\Delta} \dots \dots \dots (117)$$

Formula (117) rāda, ka paātrinājuma projekcijai uz virsmas normāli jālīdzinājas noteiktai koordinātu funkcijai:

-  $\frac{f^{(2)}}{\Delta}$  .Reizināsim nol-mu (117) ar punkta masu m

$$mj_n = - \frac{mf^{(2)}}{\Delta}$$

Bet pēc Newtona principa masa reizināta ar paātrinājumu geometriski līdzinājās visu spēku kopspēkam, kuŗu tagad apzīmēsim ar R.

$m\vec{j} = \vec{R}$  projecēsim šo uz normāli

$$mj_n = R_n, \text{ salīdzinot ar pirmo } mj_n \text{ izteiksmi atrodam } R_n = - \frac{mf^{(2)}}{\Delta}$$

Kā redzams kopspēka projekcijai uz normāli jālīdzinājās noteiktai koordinātu funkcijai, bet vispārīgi spēki, kas darbojas uz punktu, var būt ņemti patvaļīgi, tā tad, lai kopspēks apmierinātu minēto prasību, dotiem spēkiem jāpievieno vēl vienu spēku, kuŗu izsauc saites eksistence un kuŗu mēs sauksim par saites reakciju un apzīmēsim ar S. Iēc tam doto punktu var uzskatīt kā brīvu un pielietot visu, kas agrāk bija izvests brīvam punktam.

Kopspēks  $\vec{R} = \vec{F} + \vec{S}$  un  $m\vec{j} = \vec{F} + \vec{S}$  Dinamikas pamatnol-ms saistītam punktam .....(118)

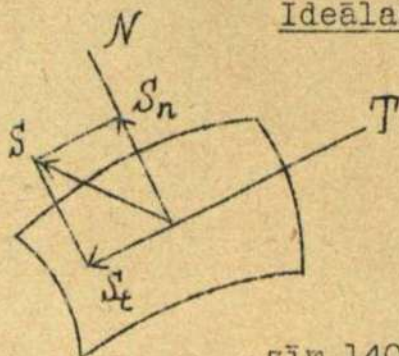
Projecējot uz normāli, dabūsim

$$mj_n = F_n + S_n \text{ bet } mj_n = - \frac{mf^{(2)}}{\Delta}$$

$$S_n = - F_n - \frac{mf^{(2)}}{\Delta} \text{ Normāla reakcija....(119)}$$

Šī formula dod iespēju atrast saites normālo reakciju, bet viņa nav visai izdevīga, jo  $f^{(2)}$  ir sarežģīta funkcija. Tālāk dosim vēl citas metodes reakcijas noteikšanai.

Ideālas saites analitiskas pazīmes.



Saites reakciju S vispārīgivar sadalīt komponentēs tangentes un normales virzienā

$$S_n = S \cdot \text{Cos}(\overline{NS}) \text{ un } S_t = S \cdot \text{Cos}(\overline{TS})$$

bet nol-mā (119) ieiēt tikai  $S_n$ , tā tad saites eksistence izsauc tikai normālu reakciju, un tangenciāla reakcija  $S_t$  atkarājās tikai no virsmas īpašībām un nav nekas cits, kā berzes spēks. Sacīto formulēsim tā

zīm.140.

Ja  $S_t = 0$  saite ir absolūti gluda jeb ideāla.

Ja  $S_t > 0$  saite ir negluda.

Saistīta punkta kustības diff-nol-mi pēc Lagrang'a I formā, ja saite ir ideāla skleronoma virsma.

Pieņemsim, ka saites nol-ms ir  $f(xyz) = 0$ . Projecējot nolīdzinājumu  $m\vec{j} = \vec{F} + \vec{S}$  ....(118) uz koordinātu asīm dabūsim

$$m\ddot{x} = X + S_x$$

$$m\ddot{y} = Y + S_y$$

$$m\ddot{z} = Z + S_z$$

bet ja virsma ir ideāla, saites reakcija  $S = S_n$  un

$$S_x = S \cdot \text{Cos}(\overline{XS}) = S_n \text{Cos}(\overline{XN}) = S_n \frac{\partial f}{\partial x}$$

Ievēdīsim tālāk apzīmējumu  $\frac{S_n}{\Delta} = \lambda$ , tad  $S_x = \lambda \frac{\partial f}{\partial x}$  un analogiski  $S_y = \lambda \frac{\partial f}{\partial y}$ ,  $S_z = \lambda \frac{\partial f}{\partial z}$ . Ievēdot šo kustības diff-nol-mā, dabūsim

$$\begin{array}{l}
 1) \quad \boxed{m\ddot{x} = X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}} \\
 2) \quad \boxed{m\ddot{y} = Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}} \\
 3) \quad \boxed{m\ddot{z} = Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z}} \\
 4) \quad \boxed{f(xyz) = 0}
 \end{array}
 \quad \dots\dots\dots
 \begin{array}{l}
 \text{Saistīta punkta kus-} \\
 \text{tības diff-nol-mi} \\
 \text{pēc Lagrang'a I for-} \\
 \text{mā} \dots\dots(120)
 \end{array}$$

Pirmos trīs nol-mos (120) ir 4 nezināmie lielumi: 3 koordinātes un  $\lambda$ , tā tad viņiem jāpievieno vēl vienu nol-mu un proti saites nol-mu, tad mēs dabūsim sistēmu no 4 nol-miem ar 4 nezināmiem.

Nol-mu (120) atrāsināšanas metode ir sekojoša: no pirmiem 3 nol-miem izslēdzam  $\lambda$ :

$$\frac{m\ddot{x} - X}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{m\ddot{y} - Y}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{m\ddot{z} - Z}{\frac{\partial f}{\partial z}} = \lambda \dots\dots\dots(121)$$

Pēc tam no saites nol-ma  $f(xyz) = 0$  atrodam, piemēram,  $z = \varphi(xy)$  un diferencējot atrodam arī  $\dot{z}$  un  $\ddot{z}$  caur  $x, y, \dot{x}, \dot{y}, \ddot{x}, \ddot{y}$ , ievietojam viņus nol-mos (121) un dabūjam divas otras kartas diff-nol-mus ar diviem mainīgiem, kuri pēc integrēšanas dos mums

$$x = f_x(t) \quad \text{un} \quad y = f_y(t)$$

Trešo kustības nol-mu  $z = f_z(t)$  dabūsim no saites pēc formulas  $z = \varphi(xy)$

Raksturīgs šim gadījumam, ka saite ir dota ar vienu virsmu, ir tas apstāklis, ka kustības noteikšanai ir jāintegrē divas diff-nol-mus. Tas ir izskaidrojams ar to, ka punktam uz virsmas ir divas kustības brīvības.

Reakcijas noteikšana: kad ir atrasts viens no kustības nol-miem  $x, y$  jeb  $z$  kā  $f(t)$ , tad ar nol-mu (121) varam atrast arī  $\lambda$  kā funkciju no laika un ņemot vērā, ka ideālām saitēm  $S = S_n$ , dabūt

$$\boxed{S = \lambda \cdot \Delta} \dots\dots\dots(122)$$

Šī ir otra metode reakcijas noteikšanai. Ja saite ir divpusīga, reakcija un līdz ar to arī  $\lambda$  var iznākt kā pozitīvs tā arī negatīvs.

Bet ja saite ir vienpusīga, viņa neļauj punktam noiet uz negatīvo pusi, kur  $f(xyz) < 0$ , kādēļ reakcija, kamēr punkts kustās uz saites, būs arvienu virzīta pa pozitīvo normāli un ja  $S_n = 0$ , kas prasa arī  $\lambda = \frac{S_n}{\Delta} = 0$ , tad punkts no saites noies un kustēsies tālāk kā brīvs punkts, līdz tam laikam, kad  $\lambda$  atkal, pārejot caur 0 kļūs pozitīvs.

Lai noteiktu laika momentu, kurā punkts noies no saites, jāpielīdzina  $\lambda = f(t) = 0$  un jāņem šī nol-ma mazāko sakni  $t_1$ . Ja  $t_1 > t_0$  (sākuma momentu), tad momentā  $t_1$  punkts noies no saites.

Miera stāvoklis. Ja saite ir ideāla skleronoma virsma un punkts uz virsmas atrodas mierā, tad viņa koordinātes  $x, y$  un  $z$  ir Const. un  $\ddot{x} = \ddot{y} = \ddot{z} = 0$ ; ievērojot šo kustības diff-nol-mos (120), dabūsim

$$\begin{array}{l}
 1) \quad \boxed{X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 0} \\
 2) \quad \boxed{Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 0} \\
 3) \quad \boxed{Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} = 0} \\
 4) \quad \boxed{f(xyz) = 0}
 \end{array}
 \quad \dots\dots\dots
 \begin{array}{l}
 \text{Saistīta punkta} \\
 \text{miera stāvokļa} \\
 \text{nol-mi uz virs-} \\
 \text{mas.} \dots\dots\dots(123)
 \end{array}$$

Šie statikas nol-mi dod iespēju noteikt kādā vietā uz dotas virsmas punkts atradīsies mierā.

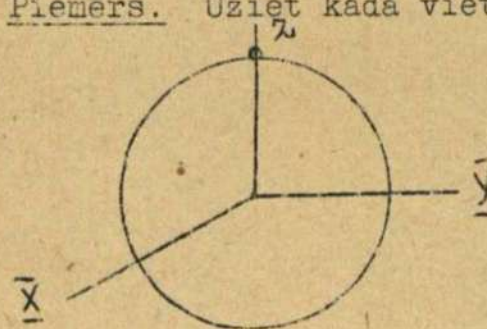
Pirmos 3 nol-mus varam pārveidot, izslēdzot no tiem  $\lambda$  :

$$\boxed{\frac{X}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{Y}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{Z}{\frac{\partial f}{\partial z}} = -\lambda} \dots\dots\dots(124)$$

Ja saite ir vienusīga, tad miera stāvoklī jābūt  $\lambda > 0$ , jo pie  $\lambda \leq 0$  punkts uz saites nevar būt mierā. Saites reakcijas noteikšanai izlie- tojam formulu (122)

$$S_n = \lambda \cdot \Delta$$

Piemērs. Uziet kādā vietā smags materiāls punkts atrodas mierā uz lo- des virsmas ārpusē.



Vienusīgas virsmas nol-mu jāraksta  $f(xyz) \geq 0$ . Tā tad šinī gadījumā

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 \geq 0$$

Uz punktu iedarbojās tikai smaguma spēks, kura projekcijas uz asīm

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -mg$$

Tālāk sastādam:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z$$

zīm.141.

Saites diferenciālais parametrs

$$\Delta = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2} = 2 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2R$$

Miera stāvokļa noteikšanai ņemsim nol-mus (124):

$$\frac{X}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{Y}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{Z}{\frac{\partial f}{\partial z}} = -\lambda \quad \text{kurš šinī gadījumā} \quad \frac{0}{2x} = \frac{0}{2y} = \frac{-mg}{2z} = -\lambda.$$

Šeit ir divi nol-mi un ņemot  $\frac{0}{2x} = \frac{-mg}{2z}$ , atrodam  $x = 0$ . Tāpat arī

no  $\frac{0}{2y} = \frac{-mg}{2z}$  dabūjam  $y = 0$ .

Miera stāvoklī koordinātes  $x = 0$  un  $y = 0$ , trešo dabūjam no saites

$$\text{nol-ma} \quad z = \mp \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} = \mp R$$

No abām saknēm  $z = \mp R$  jāņem tādu, pie kuras  $\lambda > 0$ . Bet  $\lambda = \frac{mg}{2z}$ , tā tad der tikai  $z = +R$ .

Tas nozīmē, ka punkts atrodas mierā uz lodes virsmas tur, kur viņa krustojās ar Z-asi.

$$\text{Saites reakcija} \quad S = S_n = \lambda \cdot \Delta = \frac{mg}{2R} \cdot 2R = mg.$$

Spara teorēma saistītam punktam, ja saite ir skleronoma ideāla virsma.

Brīvam punktam spara teorēma diferenciālā formā

$$d \frac{mV^2}{2} = Xdx + Ydy + Zdz$$

Saistītam punktam spēka projekcijām jāpieskaita vēl reakcijas projek- cijas

$$d \frac{mV^2}{2} = (X + S_x)dx + (Y + S_y)dy + (Z + S_z)dz$$

$$d \frac{mV^2}{2} = Xdx + Ydy + Zdz + (S_x dx + S_y dy + S_z dz)$$

bet  $S_x dx + S_y dy + S_z dz = (\vec{S} \cdot d\vec{s}) = 0$ , jo  $\vec{S} \perp d\vec{s}$  un saistītam punktam



$$\boxed{d \frac{mV^2}{2} = Xdx + Ydy + ZdZ} \dots\dots\dots(125)$$

Saistītam punktam, ja saite ir ideāla un skleronoma, spara teorēma izteicās tāpat, kā brīvam punktam. Šis apstāklis ir ļoti svarīgs, jo tas dod iespēju lietot spara teorēmu, neievēdot saites reakcijas, kuŗas parasti ir vēl nezināmas laika funkcijas.

Ja spēkam, kas darbojas uz saistīto punktu, piemērt funkcija  $U = \phi(xyz)$ , tad

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

un 
$$d \frac{mV^2}{2} = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = dU$$

Rheonomām saitēm saites reakcija  $\bar{S}$  nav  $\perp d\bar{s}$ , tādēļ saites reakcijas darbs nebūs 0 un spara teorēmu tādā veidā ka brīvam punktam, lietot nevar, bet darba izteiksmē jāievēd arī reakcijas darbu, kādēļ spara teorēmas lietošana rheonomām saitēm nav izdevīga, jo parasti saites reakcija, kamēr kustība nav noteikta, arī nav vēl zināma.

Kustības daudzuma momenta teorēma, ja saite ir skleronoma ideāla virsma.

Brīvam punktam kustības daudzuma momenta teorēma bija

$$\frac{dL_x}{dt} = L_x, \quad \frac{dL_y}{dt} = L_y, \quad \frac{dL_z}{dt} = L_z$$

jeb  $m \frac{d}{dt} (x\dot{y} - y\dot{x}) = L_z, \quad m \frac{d}{dt} (x\dot{y} - y\dot{x}) = xY - yX \quad \text{u.t.t.}$

Saistītam punktam būs

$$m \frac{d}{dt} (x\dot{y} - y\dot{x}) = x(Y + S_y) - y(X + S_x) \quad \text{jeb pārveidojot}$$

$$\boxed{m \frac{d}{dt} (x\dot{y} - y\dot{x}) = (xY - yX) + (xS_y + yS_x)} \quad \text{u.t.t.} \dots\dots(126)$$

pie kam, ja uz punktu darbojas vairāki spēki, labā pusē jāņem summas.

Otrais loceklis labā pusē izteic reakcijas momentu ap Z-asi un lai šis moments līdzinātos nullei, saites reakcijai, t.i. virsmas normālei jākrustojās ar Z-asi jeb jābūt viņai paralēlai. Bet tas notiks tad, ja saite būs rotācijas virsma ap Z-asi.

Tādā gadījumā  $xS_y - yS_x = 0$  un kustības daudzuma momenta teorēma saistītam punktam iznāk tāpat kā brīvam

$$\boxed{m \frac{d}{dt} (x\dot{y} - y\dot{x}) = xY - yX = L_z} \quad \dots\dots\dots(126^a)$$

Šis apstāklis dod iespēju lietot kustības daudzuma momenta teorēmu attiecībā uz kādu asi saistītam punktam neievēdot saites reakciju, ja saite ir rotācijas virsma ap to pašu asi.

Minētā teorēma dos pirmo integrālu trijos gadījumos

- 1) ja moments labā pusē = 0
- 2) " " " " = Const.
- 3) ja moments labā pusē ir funkcija no laika.

Piezīme. Kustības daudzuma momenta teorēmu ap visām 3 asīm var lietot tikai tad, ja saite ir lodes virsma.

Saistīta punkta kustības noteikšana ar spara un kustības daudzuma momenta teorēmu palīdzību, ja saite ir skleronoma ideāla rotācijas virsma ap asi.

Pie ideālas saites spara teorēma saistītam punktam ir identiska ar to pašu teorēmu brīvam punktam

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \int_{x_0 y_0 z_0}^{xyz} Xdx + Ydy + Zdz$$

Vienkāršības dēļ apzīmēsim labo pusi ar  $\mathcal{O}$  un ātruma kvadrātu izteiksim koordinātēs, tad pēc pārveidošanas iznāk

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = V_0^2 + \frac{2\mathcal{O}}{m}$$

Ja saite ir rotācijas virsma ap Z-asi, tad kustības daudzuma momenta teorēma ap šo asi

$$m \frac{d}{dt} (xy - yx) = L_z$$

Sevišķi izdevīgs šis paņēmieni ir tad, ja aktīvo spēku moments ap to pašu asi  $L_z = 0$ , jo tad integrējot dabūjam  $xy - yx = C$  kur  $C = 2\mathcal{O}_{xy}$  ir divkāršots sektoriāls ātrums  $\overline{XV}$  plaknē.

Tādā ceļā nonākam pie pirmās kārtas diff-nol-miem

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = V_0^2 + \frac{2\mathcal{O}}{m}$$

$$xy - yx = C$$

kurām galīgai atrisināšanai jāpievieno vēl trešo nol-mu saiti

$$f(xyz) = 0$$

Piezīme. Dažreiz ir izdevīgi tālāk pāriet uz cilindra koordinātēm, kurās tie paši nol-mi izsakās tā

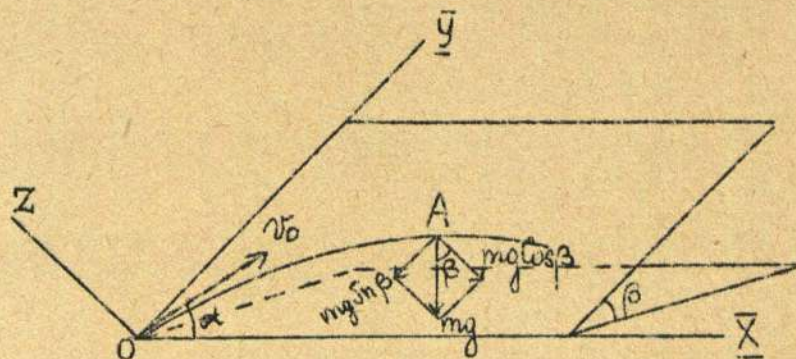
$$\dot{r}^2 + (r\dot{\phi})^2 + \dot{z}^2 = V_0^2 + \frac{2\mathcal{O}}{m}$$

$$r^2\dot{\phi} = C$$

un saiti

$$f(rz) = 0$$

Piemērs. Smaga materiāla punkta slīpais sviediens ideālā slīpā plaknē.



zīm.142.

riāls punkts ir sviests slīpā plaknē zem  $\angle\alpha$  pret  $O\overline{X}$  asi ar sākuma ātrumu  $V_0$ .

Doti:  $\angle\alpha$ ,  $\angle\beta$  un sākuma ātrums  $V_0$

Uziet: punkta kustības nol-mus, skaitot saiti vienpusīgu.

Pieņemsim, ka slīpa plakne veido  $\angle\beta$  ar horizontu un izvēlēsim koordinātu sistēmu tā, lai koordinātu sākums  $O$  sakristu ar kustības sākuma punktu un  $O\overline{X}$  ass būtu pašā slīpā plaknē horizontāla, asi  $O\overline{Y}$  ņemsim perpendikulāri  $O\overline{X}$  asij arī slīpā plaknē, bet  $O\overline{Z}$  asi perpendikulāri slīpai plaknei. Mate-

Ja saite ir vienpusīga un punkts var noiet uz augšu, tad viņas nol-mu izvēlētajā koordinātu sistēmā jāraksta

$$z \geq 0, \text{ sastādīsim } \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 1 \text{ un } \Delta = 1$$

Uz punktu darbojās tikai smaguma spēks  $mg$ , un viņa projekcijas uz asīm  $X = 0, Y = -mg \sin \beta, Z = -mg \cos \beta$ .

Sākuma apstākļi  $x_0 = y_0 = z_0 = 0$  un  $\dot{x}_0 = V_0 \cos \alpha; \dot{y}_0 = V_0 \sin \alpha; \dot{z}_0 = 0$ .

Ņemsim kustības dif-nol-mus saistītam punktam:

$$1) m\ddot{x} = X + \mathcal{A} \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$2) m\ddot{y} = Y + \mathcal{A} \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$3) m\ddot{z} = Z + \mathcal{A} \frac{\partial f}{\partial z}$$

un pievienojam vēl ceturto nol-mu, saiti

$$4) f(xyz) = 0$$

Mūsu gadījumā šie četri nol-mi, ievērojot augšā atrasto, iznāk

$$\begin{array}{l} 1) m\ddot{x} = 0 \\ 2) m\ddot{y} = -mg \sin \beta \\ 3) m\ddot{z} = -mg \cos \beta + \mathcal{A} \\ 4) z \geq 0 \end{array}$$

Ņemsim nol-mu 1)  $m\ddot{x} = 0$  un integrēsim viņu.  $\dot{x} = C_1$ , bet no sākuma apstākļiem  $C_1 = \dot{x}_0 = V_0 \cos \alpha$ , integrējot tālāk atrodam  $x = V_0 t \cos \alpha + C_2$ , bet  $C_2 = 0$  un galīgi kustības nol-ms  $\bar{X}$  ass virzienā iznāk tāds pats, kā brīvam punktam slīpā sviedienā vertikālā plaknē.

$$\boxed{x = V_0 t \cos \alpha}$$

Ņemsim nol-mu 2)  $m\ddot{y} = -mg \sin \beta$  un integrēsim viņu

$$\dot{y} = -gt \sin \beta + C_3, \text{ bet no sākuma apstākļiem } C_3 = V_0 \sin \alpha$$

$$\dot{y} = V_0 \sin \alpha - gt \sin \beta \text{ integrēsim otru reizi}$$

$$y = V_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2} \sin \beta + C_4 \text{ no sākuma apstākļiem } C_4 = 0 \text{ un}$$

galīgi

$$\boxed{y = V_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2} \sin \beta}$$

No 3) nol-ma uziesim saites reakciju

$$m\ddot{z} = -mg \cos \beta + \mathcal{A}$$

bet saite bija  $z \geq 0$ , tā tad  $\dot{z} = 0$  un arī  $\ddot{z} = 0$ .

$$0 = -mg \cos \beta + \mathcal{A} \quad \text{no kurienes} \quad \mathcal{A} = mg \cos \beta$$

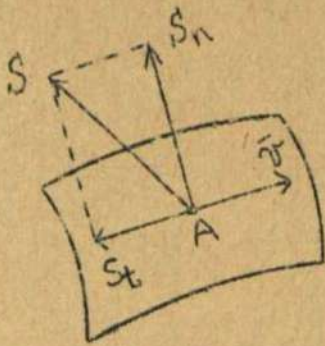
$\mathcal{A}$  iznāk pozitīvs, tas nozīmē, ka punkts no saites nenoies un saites reakciju dabūsim izlietojot formulu (122)

$$S = S_n = \mathcal{A} \cdot \Delta, \text{ mūsu gadījumā} \quad S = mg \cos \beta$$

Reakcija iznāk Constanta pēc lieluma un virziena.

Saistīta materiāla punkta dif-nol-mi, ja saite ir negluda virsma.

Ja punkts A kustas uz negludas virsmas, saites reakcijai ir vēl otra komponente tangenciālā virzienā pret kustību, t.i. pretīm ātruma vektoram  $\vec{V}$ . Kā rāda novērojumi, šī komponente  $S_t$  ir proporcionāla normālai reakcijai  $S_n$



$$S_t = \mu S_n$$

pie kam proporcionālītātes koeficientu " $\mu$ " pēc analogijas ar statiku sauksim par dinamisko berzes koeficientu. Šis koeficients ir maz atkarīgs no ātruma un pieskares virsmas lieluma, tā tad sevišķi materiālam punktam viņu var uzskatīt par Const., kura lielums ir raksturīgs katram materiālam un atkarīgs no

virsmas apstrādāšanas, bet sevišķi no smērvielu lietošanas. Tā piemēram, kokam uz koka  $\mu = 0,37$ , bet ar eļļu  $\mu = 0,17$  metalam uz metālu  $\mu = 0,18$ , bet ar eļļu  $\mu = 0,09$ . Meklēsim tālāk berzes spēka projekcijas uz asīm. Berzes spēks  $S_t = \mu S_n$  un ievērojot formulu (122)

$$S_t = \mu \cdot \lambda \cdot \Delta \dots \dots \dots (127)$$

Projecēsīm šo uz koordinātu asīm, ievērojot, ka berzes spēks ir virzīts pretīm ātruma vektoram  $\vec{V}$ .

$$S_{tx} = -\mu \sqrt{\lambda^2} \cdot \Delta \cos(\overline{XV}) = -\mu \sqrt{\lambda^2} \cdot \Delta \frac{\dot{x}}{V}$$

$$S_{ty} = -\mu \sqrt{\lambda^2} \cdot \Delta \cos(\overline{YV}) = -\mu \sqrt{\lambda^2} \cdot \Delta \frac{\dot{y}}{V}$$

$$S_{tz} = -\mu \sqrt{\lambda^2} \cdot \Delta \cos(\overline{ZV}) = -\mu \sqrt{\lambda^2} \cdot \Delta \frac{\dot{z}}{V}$$

Šeit mēs rakstam  $\sqrt{\lambda^2}$  tamdēļ, lai neatkarīgi no  $\lambda$  zīmes, berzes spēka un ātruma projekcijas būtu ar pretējām zīmēm, jo  $\mu$  un  $\Delta$  ir arvienu pozitīvi.

Pievienojot kustības dif-nol-mos (120) spēku projekcijām vēl atrastās spēka projekcijas, dabūsim saistīta materiāla punkta dif-nol-mus uz negludas virsmas

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= X + \lambda \left( \frac{\partial f}{\partial x} \mp \mu \Delta \frac{\dot{x}}{V} \right) \\ m\ddot{y} &= Y + \lambda \left( \frac{\partial f}{\partial y} \mp \mu \Delta \frac{\dot{y}}{V} \right) \\ m\ddot{z} &= Z + \lambda \left( \frac{\partial f}{\partial z} \mp \mu \Delta \frac{\dot{z}}{V} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (128)$$

1. Piezīme. Ja saite ir divpusīga, iekavās jāņem (-) zīmi pie  $\lambda > 0$  un (+) zīmi pie  $\lambda < 0$ .
2. Piezīme. Ja saite ir vienpusīga, tad  $\lambda < 0$  nevar būt un iekavās paliks tikai (-) zīme.

Nolmēm (128) vēl jāpievieno saites nol-mu  $f(xyz) = 0$  un integrēšanai jāizslēdz  $\lambda$  tāpat kā ideālām saitēm.

$$\frac{m\ddot{x} - X}{\frac{\partial f}{\partial x} - \mu \Delta \frac{\dot{x}}{V}} = \frac{m\ddot{y} - Y}{\frac{\partial f}{\partial y} - \mu \Delta \frac{\dot{y}}{V}} = \frac{m\ddot{z} - Z}{\frac{\partial f}{\partial z} - \mu \Delta \frac{\dot{z}}{V}} =$$

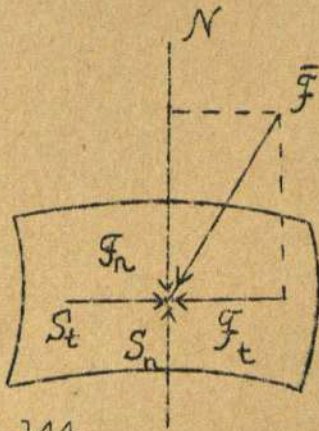
pēc tam no saites nol-ma izsakam vienu koordināti, piemēram  $z, \dot{z}, \ddot{z}$  caur divām pārējām  $x, \dot{x}, \ddot{x}$ ,  $y, \dot{y}, \ddot{y}$  un ievāētojot dabūjam 2 dif-nol-mus tāpat, kā plakanā kustībā.

Berzes spēks arvienu atrodas tangenciālā plaknē, viņa projekcija uz normali līdzinās 0, tā tad arī pie negludas virsmas normala reakcija izteicas tāpat kā pie ideālās virsmas

$$\boxed{S_n = \mathcal{N} \cdot \Delta}$$

Punkta miera stāvoklis uz negludas saites.

Berzes spēks attīstas ne tikai tad, ja materiāls punkts kustas uz negludas virsmas, bet arī tad, ja punkts atrodas uz negludas virsmas miera stāvoklī un bez tam vēl aktīva spēka tangenciāla projekcija  $F_t \neq 0$ .



Sadālisim aktīvo spēku  $F$  divās komponentēs normāles virzienā  $F_n$  un tangentes virzienā  $F_t$ . Normāla reakcija  $S_n$  tad līdzināsies  $F_n$ , bet ies pretējā virzienā. Tangenciāla reakcija jeb berzes spēks  $S_t$  miera stāvoklī attīstās tikai tādā lielumā, lai līdzsvarotu  $F_t$

$$\bar{S}_n = -\bar{F}_n \quad \text{un} \quad \bar{S}_t = -\bar{F}_t$$

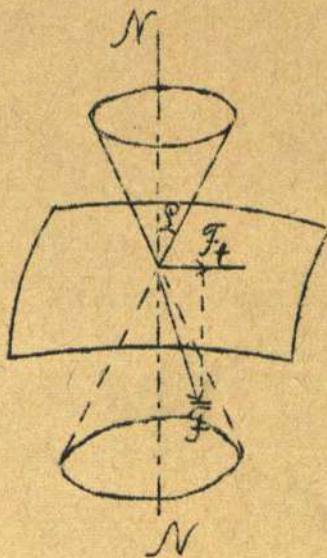
Tangenciālās komponentes attiecība pret normālo komponenti var mainīties no 0 līdz kādai robežvērtībai  $\mu$ , kuru saucim par statisko berzes koeficientu.

zīm.144.

$$\frac{S_t}{S_n} = \frac{F_t}{F_n} \leq \mu$$

Šis koeficients dotam punktam un virsmai ir Const. lielums, mazliet lielāks par dinamisko berzes koeficientu  $\mu_1 > \mu$ . Tā piemēram kokam uz koka  $\mu = 0,37$ , bet  $\mu_1 = 0,50$ , metalam uz metala  $\mu = 0,18$  un  $\mu_1 = 0,19$ .

Bet vispārīgi  $\frac{F_t}{F_n} = \text{tg}(\overline{NF})$  un, kā zināms no statikas, berzes leņķis  $\rho$  ir tāds leņķis, kuram  $\text{tg} \rho = \mu$ ,



Miera stāvokļa noteikums uz virsmas tad būs

$$\text{tg}(\overline{NF}) \leq \text{tg} \rho \quad \text{jeb} \quad \angle(\overline{NF}) \leq \rho$$

tas nozīme, ka leņķim, kuru veido spēks ar normali, jābūt mazākam par berzes leņķi  $\rho$ . Aprakstīsim ap normali konusu, ar leņķi pie virsotnes  $\rho$ , tādu konusu sauc par berzes konusu un miera stāvokļa noteikumu uz negludas virsmas varam formulēt tā: materiāls punkts uz negludas virsmas atrodas mierā tad, ja visu iedarbojošo spēku kopspeks neiziet laukā no berzes konusa.

Piemērs. Smaga punkta kustība uz negludas virsmas.

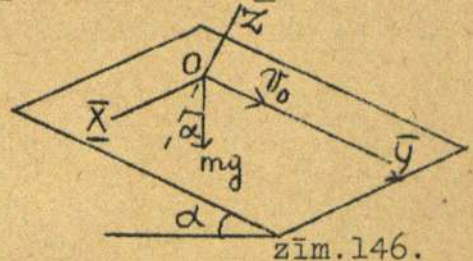
Pieņemsim, ka negluda virsma ir slīpa plakne, kura veido ar horizontu  $\angle \alpha$ . Izvēlēsim koordinātu sākumu kustības sākuma punktā  $O$ , asi  $O\bar{X}$  ņemsim slīpā plaknē horizontāli, asi  $O\bar{Y}$  slīpā plaknē perpendikulāri  $O\bar{X}$  un asi  $O\bar{Z}$

zīm.145.

perpendikulāri slīpai plaknei.

Uz punktu darbojas tikai smaguma spēks. Berzes koeficients ir  $\mu$ . Izšķirsim tālāk divus gadījumus: vienu ar sākuma ātrumu  $O\bar{Y}$ -ass virzienā un otru ar sākuma ātrumu pretējā virzienā.

I.gadījums. Sākuma ātrums virzīts uz leju  $O\bar{Y}$ -ass virzienā.



zīm.146.

Doti: smaguma spēks  $mg$ , berzes koeficients:  $\mu$

sākuma apstākļi  $t_0 = 0$   $\begin{cases} x_0 = y_0 = z_0 = 0 \\ \dot{x}_0 = 0, \dot{y}_0 = v_0, \dot{z}_0 = 0 \end{cases}$   
 saites nol-mas  $z \geq 0$

Uziet: punkta kustības nol-mas.

Ņemsim saistīta punkta kustības dif-nol-mus uz negludas virsmas (128)

$$\begin{aligned} 1) \quad m\ddot{x} &= X + \mathcal{L}\left(\frac{\partial f}{\partial x} \mp \mu \Delta \frac{\dot{x}}{V}\right) \\ 2) \quad m\ddot{y} &= Y + \mathcal{L}\left(\frac{\partial f}{\partial y} \mp \mu \Delta \frac{\dot{y}}{V}\right) \\ 3) \quad m\ddot{z} &= Z + \mathcal{L}\left(\frac{\partial f}{\partial z} \mp \mu \Delta \frac{\dot{z}}{V}\right) \end{aligned}$$

Mūsu gadījumā  $X = 0, Y = mg \sin \alpha, Z = -mg \cos \alpha$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \frac{\partial f}{\partial z} = 1 \text{ un } \Delta = 1$$

diferencējot saiti, dabūsim vēl  $\dot{z} = 0$  un  $\ddot{z} = 0$ . Ievietosim visu šo dif-nol-mos ievērojot, ka pie vienaspusīgas saites zīmes iekavās jāņem negatīvas

$$\begin{aligned} 1) \quad m\ddot{x} &= 0 + \mathcal{L}\left(0 - \mu \Delta \frac{\dot{x}}{V}\right) \\ 2) \quad m\ddot{y} &= mg \sin \alpha + \mathcal{L}\left(0 - \mu \Delta \frac{\dot{y}}{V}\right) \\ 3) \quad 0 &= -mg \cos \alpha + \mathcal{L}(1 - 0) \end{aligned}$$

Pirmkārt konstatējam, ka  $\bar{X}$  ass virzienā aktīva spēka nav, sākuma ātruma arī nav, tā tad  $\bar{X}$  ass virzienā nebūs arī pasīva spēka (berzes spēka) un kustība nevar notikt:  $\ddot{x} = 0, \dot{x} = 0$  un arī  $x = 0$ .

Nol-mas 3) dod mums tieši  $\mathcal{L} = mg \cos \alpha$  un saites reakcija  $S = \mathcal{L} \Delta$

$$\boxed{S = mg \cos \alpha}$$

Lielums  $\mathcal{L}$  iznāk pozitīvs, tas nozīmē, ka punkts no saites nevar neizslīdēt. Integrēsim tālāk nol-mu 2), ievērojot, ka pie  $\dot{z} = 0$  un  $\dot{x} = 0$  iznāk

$$V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}, \quad V = \dot{y}$$

$$m\ddot{y} = mg \sin \alpha - \mathcal{L} \cdot \mu \cdot \Delta \text{ bet } \Delta = 1 \text{ un } \mathcal{L} = mg \cos \alpha$$

$$m\ddot{y} = mg \sin \alpha - mg \cos \alpha \cdot \mu \text{ ņemsim } mg \cos \alpha \text{ aiz iekavām}$$

$$\ddot{y} = g \cos \alpha (tga - \mu) \text{ un integrēsim } \dot{y} = gt \cos \alpha (tga - \mu) + C_1$$

bet no sākuma apstākļiem  $C_1 = V_0$

$$\boxed{\dot{y} = V_0 + gt \cos \alpha (tga - \mu)} \text{ Punkta ātruma likums.}$$

Integrējot tālāk otro reizi, dabūsim

$$y = V_0 t + \frac{gt^2}{2} \cos \alpha (tga - \mu) + C_2 \text{ bet no sākuma apstākļiem } C_2 = 0$$

un punkta kustības nol-mas

$$\boxed{y = V_0 t + \frac{gt^2}{2} \cos \alpha (tga - \mu)}$$

Izpētīsim atrasto kustību: no ātruma likuma redzam, ka 1) pie  $tga > \mu$  ātrums arvienu pieaug,

2) pie  $tga = \mu$  ātrums  $\dot{y} = V_0 = \text{Const.}$  kustība ir vienmērīga.

3) pie  $tga < \mu$  ātrums samazinājas un punkts apstājas

$$\text{laika momentā, kad } \dot{y} = 0, \quad t_1 = \frac{V_0}{g \cos \alpha (\mu - tga)}$$

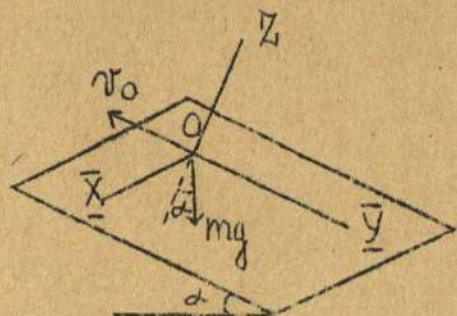
II. gadījums. Punktam sākuma ātrums dots negatīvas Y-ass virzienā uz augšu.

Doti: smaguma spēks  $mg$ , berzes koeficients  $\mu$ .

Sākuma apstākļi:  $t_0 = 0$

$x_0 = y_0 = z_0 = 0$ ;  $\dot{x}_0 = 0, \dot{y}_0 = -V_0, \dot{z}_0 = 0$

saites nol-ms  $z \geq 0$



Uziet: punkta kustības nol-mus.  
Atkal ņemsim saistīta punkta kustības dif-nol-mus uz negludas virsmas (128)

$$m\ddot{x} = X + \lambda \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \mu \Delta \frac{\dot{x}}{V} \right)$$

$$m\ddot{y} = Y + \lambda \left( \frac{\partial f}{\partial y} + \mu \Delta \frac{\dot{y}}{V} \right)$$

$$m\ddot{z} = Z + \lambda \left( \frac{\partial f}{\partial z} + \mu \Delta \frac{\dot{z}}{V} \right)$$

zīm.147.

Arī šinī gadījumā  $X = 0, Y = mg \sin \alpha, Z = -mg \cos \alpha$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \frac{\partial f}{\partial z} = 1 \text{ un } \Delta = 1$$

Saites diferencēšana dod  $\dot{z} = 0, \ddot{z} = 0$ .

Tā tad dabūjam tos pašus nol-mus

$$1) m\ddot{x} = 0 + \lambda (0 - \mu \Delta \frac{\dot{x}}{V})$$

$$2) m\ddot{y} = mg \sin \alpha + \lambda (0 - \mu \Delta \frac{\dot{y}}{V})$$

$$3) 0 = -mg \cos \alpha + \lambda (1 - 0)$$

Tādā pašā kārtā 1) nol-ms dod  $\ddot{x} = 0, \dot{x} = 0$  un  $x = 0$

Arī nol-ms 3) dod to pašu  $\lambda = mg \cos \alpha$  un saites reakcija  $S = \lambda \Delta$

$$\boxed{S = mg \cos \alpha}$$

Tikai nol-mā 2), ņemot vērā, ka sākuma ātrums  $\dot{y}_0 = -V_0$  ir negatīvs,

$V = \pm \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = -\dot{y}$  un nol-ms 2) iznāk  $m\ddot{y} = mg \sin \alpha - \lambda \mu \Delta \frac{\dot{y}}{-\dot{y}}$

un pēc pārveidošanas  $m\ddot{y} = mg \sin \alpha + mg \cos \alpha \mu$ . ņemsim  $mg \cos \alpha$  aiz iekavām  $\ddot{y} = g \cos(\text{tga} + \mu)$  un integrēsim  $\dot{y} = g t \cos \alpha (\text{tga} + \mu) + C_1$ .

No sākuma apstākļiem  $C_1 = -V_0$

$$\boxed{\dot{y} = -V_0 + g t \cos \alpha (\text{tga} + \mu)}$$
 ātruma likums

Integrējot vēlreiz, atrodam arī kustības nol-mu

$$y = -V_0 t + \frac{g t^2}{2} (\text{tga} + \mu) + C_2 \text{ bet no sākuma apstākļiem } C_2 = 0$$

$$\boxed{y = -V_0 t + \frac{g t^2}{2} (\text{tga} + \mu)}$$
 Kustības nol-ms.

Kā redzams no ātruma likuma šinī gadījumā neatkarīgi no  $\angle \alpha$  punkts katrā ziņā apstāsies laika momentā, kurā  $\dot{y} = 0$ , t.i.

$$t_2 = \frac{V_0}{g \cos \alpha (\text{tga} + \mu)} \text{ un pēc tam paliek mierā, ja } \text{tga} \leq \mu, \text{ jeb}$$

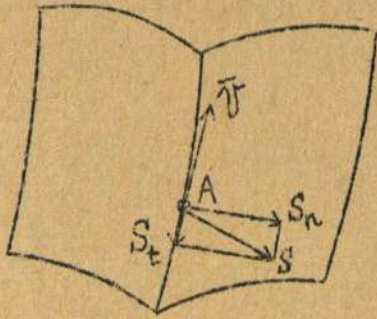
nāks atpakaļ, ja  $\text{tga} > \mu$ , kur  $\mu$ , ir statiskais berzes koeficients.

Piezīme. Slīpo plakni ērti var izlietot kā dinamisku berzes koeficienta  $\mu$ , tā arī statiska berzes koeficienta  $\mu_s$  noteikšanai.

Lai atrastu dinamisku berzes koeficientu, laižam materiālu punktu slīdēt no slīpas plaknes ar lielu slīpumu un samazinām slīpuma leņķi līdz tādai vērtībai  $\alpha$ , pie kuras punkta kustība būtu vienmērīga.

Attiecīga lenka  $\text{tg} \alpha = \mu$  būs dinamiskais berzes koeficients. Noliekot materiālo punktu uz slīpo plakni un palielinot slīpumu līdz  $\angle \alpha_1$ , pie kura punkts sāks slīdēt, dabūsim  $\text{tg} \alpha_1 = \mu_1$  statisko berzes koeficientu.

Saistīta punkta kustība, ja saite ir skleronoma līkne telpā.



zīm.148.

Vispārīgie aizrādījumi. Uzskatot doto saiti kā divu virsmu krustošanas līniju  $f_1(xyz) = 0$  un  $f_2(xyz) = 0$

mēs varam tāpat kā agrāk pierādīt, ka katras virsmas eksistence prasa:

1) lai punkta ātruma vektors gulētu virsmas tangenciālā plaknē un ja šī prasība būs izpildīta abām virsmām, ātruma vektors ies tangenciālo plakņu krustošanas līnijā, t.i. saites tangentes virzienā.

2) Otrā prasība dod paātrinājuma projekciju uz normāli un aizrāda uz nepieciešamību ievest saites reakciju, pēc kā punktu var uzskatīt par brīvu.

Ja saites reakcija veido ar tangenti kādu lenķi, atšķirīgu no  $90^\circ$ , saite nebūs ideāla un viņas reakciju varam sadalīt komponentēs, t.i. normālā reakcijā  $S_n$  un berzes spēkā  $S_t$ .

Ja  $S_t = 0$ , saite būs ideāla un šo gadījumu tagad apskātīsim tuvāki.

Saistīta punkta kustības noteikšana, ja saite ir ideāla skleronoma līkne telpā, dota ar divām virsmām.

Ņemsim saistīta punkta dif-nol-mu (118)

$$m\vec{j} = \vec{F} + \vec{S}$$

un projecēsim viņu uz koordinātu asīm

- 1)  $m\ddot{x} = X + S_x$
- 2)  $m\ddot{y} = Y + S_y$
- 3)  $m\ddot{z} = Z + S_z$

- Šiem kustības dif-nol-miem pievienosim saites nol-mus
- 4)  $f_1(xyz) = 0$
- 5)  $f_2(xyz) = 0$

Bet iegūtā 5 nol-mu sistēmā ir 6 nezināmie

3 koordinātes  $x = f_x(t)$ ,  $y = f_y(t)$ ,  $z = f_z(t)$

un 3 reakcijas projekcijas  $S_x$ ,  $S_y$ ,  $S_z$

tā tad trūkst vēl viens nol-ms, kuru dabūsim ievērojot, ka ideālai saitei reakcija iet normālā virzienā  $\vec{S} \perp \vec{ds}$  un saites reakcijas darbs uz elementāra pārvietojuma līdzināsies nullei

$$(\vec{S} \cdot d\vec{s}) = 0 \text{ jeb } 6) S_x dx + S_y dy + S_z dz = 0$$

Izdalīsim šo nol-mu ar  $dx$

$$S_x + S_y \cdot y' + S_z \cdot z' = 0$$

tālāk aizvietosim reakcijas projekcijas no nol-miem 1), 2), 3)

$$(m\ddot{x} - X) + (m\ddot{y} - Y) \cdot y' + (m\ddot{z} - Z) \cdot z' = 0 \dots\dots\dots (129)$$

No diviem saites nol-miem

- 4)  $f_1(xyz) = 0$
- 5)  $f_2(xyz) = 0$

atrodam

$$\begin{cases} y = \varphi_1(x) \\ z = \varphi_2(x) \end{cases}$$

atvasinot viņus pēc x, dabūjam

$$\begin{cases} y' = \varphi_1'(x) \\ z' = \varphi_2'(x) \end{cases}$$

atvasinot pēc laika, dabūjam

$$\begin{cases} \dot{y} = \varphi_1'(x) \cdot \dot{x} \\ \dot{z} = \varphi_2'(x) \cdot \dot{x} \end{cases}$$



un atvasinot vēlreiz pēc laika, dabūjam

$$\begin{cases} \ddot{y} = \varphi_1''(x) \cdot \dot{x}^2 + \varphi_1'(x) \cdot \ddot{x} \\ \ddot{z} = \varphi_2''(x) \cdot \dot{x}^2 + \varphi_2'(x) \cdot \ddot{x} \end{cases}$$

Ievietojot visus šos lielumus nol-mā (129), dabūsim otrās kārtas dif-nol-mu priekš  $x$  un nointegrējot viņu divas reizes, dabūsim kustības nol-mu

$$\boxed{x = f_x(t)} \text{ pēc tam no } \begin{cases} y = \varphi_1(x) \\ z = \varphi_2(x) \end{cases} \text{ dabūjam arī } \begin{cases} \boxed{y = f_y(t)} \\ \boxed{z = f_z(t)} \end{cases}$$

Reakcijas noteikšana. Reakcijas projekcijas dabūsim no kustības dif-nol-miem 1), 2), 3)

$$\left. \begin{aligned} S_x &= m\ddot{x} - X \\ S_y &= m\ddot{y} - Y \\ S_z &= m\ddot{z} - Z \end{aligned} \right\} \text{ un paša reakcija } S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}$$

Kā redzams atrisinājums šinī gadījumā, ja saite ir dota ar divām virsmām, ir vienkāršāks, nekā pie vienas virsmas un tas ir izskaidrojams ar to, ka šeit punktam ir tikai viena kustības brīvība.

Miera stāvoklis punktam uz līknes būs noteikts ar to pašu nol-mu (129), ja viņā liksim  $\dot{x} = 0, \dot{y} = 0, \dot{z} = 0$  un saites nol-miem 4), 5)

$$\begin{aligned} X + Y \cdot \varphi_1'(x) + Z \cdot \varphi_2'(x) &= 0 \\ f_1(xyz) &= 0 \\ f_2(xyz) &= 0 \end{aligned}$$

Šeit ir trīs nol-mi, no kuriem dabūsim trīs miera stāvokļa koordinātes.

Saistīta punkta kustības noteikšana, ja saite ir ideāla skleronoma līkne telpā, dota parametra veidā.

Atkal ņemsim saistīta punkta dif-nol-mu (118)

$$m\vec{j} = \vec{F} + \vec{S}$$

Un projecēsīm viņu uz koordinātu asīm

$$\begin{aligned} 1) m\ddot{x} &= X + S_x & \left. \begin{aligned} \text{šiem kustības dif-nol-miem pievienojam trīs saites nol-mus} \end{aligned} \right\} & \text{ saites nol-mi} \\ 2) m\ddot{y} &= Y + S_y & \left. \begin{aligned} 4) x &= f_1(q) \\ 5) y &= f_2(q) \\ 6) z &= f_3(q) \end{aligned} \right\} \\ 3) m\ddot{z} &= Z + S_z \end{aligned}$$

Uzrakstītie trīs saites nol-mi faktiski ir ekvivalenti tikai diviem nol-miem, jo ir nācis klat vēl viens nezināmais lielums  $q = f(t)$ . Tagad sešos nol-mos iznāk septiņi nezināmie

$$\left. \begin{aligned} x &= f_x(t) & y &= f_y(t) & z &= f_z(t) \\ S_x & & S_y & & S_z & \end{aligned} \right\} \text{ un } q = f(t)$$

Atkal trūkst viens nol-ms, kuru tāpat kā agrāk, ievērojot, ka saites reakcija iet normāli pret saiti un reakcijas darbs uz elementāra pārvietojuma līdzinājās nullei ( $\vec{S} \cdot d\vec{s} = 0$ )

$$7) S_x dx + S_y dy + S_z dz = 0$$

Izdalīsim 7) nol-mu ar dt un aizvietosim saites reakcijas projekcijas no nol-miem 1), 2), 3)

$$(m\ddot{x} - X) \cdot \dot{x} + (m\ddot{y} - Y) \cdot \dot{y} + (m\ddot{z} - Z) \cdot \dot{z} = 0 \dots \dots \dots (130)$$

Tālāk atvasināsim saites nol-mus 4), 5), 6) pēc laika

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1'(q) \cdot \dot{q} \\ \dot{y} = f_2'(q) \cdot \dot{q} \\ \dot{z} = f_3'(q) \cdot \dot{q} \end{cases} \quad \left| \quad \begin{cases} \ddot{x} = f_1''(q) \cdot \dot{q}^2 + f_1'(q) \cdot \ddot{q} \\ \ddot{y} = f_2''(q) \cdot \dot{q}^2 + f_2'(q) \cdot \ddot{q} \\ \ddot{z} = f_3''(q) \cdot \dot{q}^2 + f_3'(q) \cdot \ddot{q} \end{cases}$$

Ievietojot visus šos lielumus nol-mā (130) un nointegrējot viņu divas reizes, atradīsim

$$\boxed{q = f(t)}$$

un tieši no saites nol-miem 4), 5), 6) dabūsim kustības nol-mus

$$\boxed{x = f_x(t)} \quad \boxed{y = f_y(t)} \quad \boxed{z = f_z(t)}$$

Reakcijas noteikšana. Reakcijas projekcijas dabūsim no kustības dif-nol-miem 1), 2), 3)

$$\left. \begin{cases} S_x = m\ddot{x} - X \\ S_y = m\ddot{y} - Y \\ S_z = m\ddot{z} - Z \end{cases} \right\} \text{ un paša reakcija } S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}$$

Miera stāvoklis punktam uz līknes, dotas parametra veidā, būs noteikts ar to pašu nol-mu (130), ja viņā liksim  $\ddot{x} = 0$ ,  $\ddot{y} = 0$ ,  $\ddot{z} = 0$  un saites nol-miem 4), 5), 6)

$$\begin{aligned} X \cdot f_1'(q) + Y \cdot f_2'(q) + Z \cdot f_3'(q) &= 0 \\ x &= f_1(q) \\ y &= f_2(q) \\ z &= f_3(q) \end{aligned}$$

Šeit ir 4 nol-mi, no kuriem dabūsim 3 punkta miera stāvokļa koordinātes un q vērtību, atbilstošu miera stāvoklim.

Saistīta punkta kustības dif-nol-mi pēc Lagrang'a I formā, ja saite ir ideāla skleronoma līkne telpā, dota ar divām virsmām.

Saites nol-mi ir  $f_1(xyz) = 0$  un  $f_2(xyz) = 0$ .

Ņemsim atkal saistīta punkta kustības dif-nol-mu (118), bet rakstīsim saites reakcijas no katras virsmas atgeviski

$$m\ddot{\mathbf{j}} = \mathbf{F} + \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$$

un projecēsīm viņu uz koordinātu asīm

$$1) m\ddot{x} = X + S_{1x} + S_{2x}$$

$$2) m\ddot{y} = Y + S_{1y} + S_{2y}$$

$$3) m\ddot{z} = Z + S_{1z} + S_{2z}$$

Tāpat kā agrāk, kad saite bija dota ar vienu virsmu, katras virsmas saites reakcijas projekciju aizvietosim ar  $\mathcal{L}$  pareizinātu ar saites parciālo atvasinājumu. Pie kam, ja saite ir dota ar divām virsmām, katrai virsmai būs savs  $\mathcal{L}$ .

$$1) \boxed{m\ddot{x} = X + \mathcal{L}_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \mathcal{L}_2 \frac{\partial f_2}{\partial x}}$$

$$2) \boxed{m\ddot{y} = Y + \mathcal{L}_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \mathcal{L}_2 \frac{\partial f_2}{\partial y}}$$

$$3) \boxed{m\ddot{z} = Z + \mathcal{L}_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \mathcal{L}_2 \frac{\partial f_2}{\partial z}}$$

Kustības dif-nol-mi pēc Lagrang'a I formā, ja saite dota ar .... (131) divām virsmām

Šiem nol-miem vēl jāpievieno divus saites nol-mus

$$4) \quad f_1(xyz) = 0$$

$$5) \quad f_2(xyz) = 0$$

un tad mēs nonākam pie 5 nol-mu sistēmas ar pieciem nezināmiem:  $x = f_x(t)$ ,  $y = f_y(t)$ ,  $z = f_z(t)$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ .

Šo nol-mu atrisināšanas metode ir sekojoša: no 3 dif-nol-miem izslēdzam  $\lambda_1$  un  $\lambda_2$  un dabūjam vienu otrās kārtas dif-nol-mu ar visiem 3 mainīgiem. Tālāk izteicam ar saites nol-mu palīdzību divus mainīgus caur trešo, piemēram  $y$  un  $z$  caur  $x$  un ievieojam dabūtā dif-nol-mā. Tādā kārtā iegūtais dif-nol-mu ar vienu nezināmo  $x$  būs otrās kārtas un nointegrējot viņu divas reizes, atradīsim

$$\bar{x} = f_x(t)$$

Pēc tam no saites nol-miem uziesim arī

$$\bar{y} = f_y(t) \quad \text{un} \quad \bar{z} = f_z(t)$$

Reakcijas noteikšana. Saites reakciju varam atrast divējādi: 1) No diviem dif-nol-miem atrodam  $\lambda_1$  un  $\lambda_2$ , pēc tam no saites nol-miem atrodam parametrus  $\Delta_1$  un  $\Delta_2$  un tad katras virsmas reakciju atsevišķi

$$S_1 = \lambda_1 \Delta_1, \quad S_2 = \lambda_2 \Delta_2 \quad \text{un pilna reakcija} \quad \bar{S} = \bar{S}_1 + \bar{S}_2 \quad \text{jeb al-$$

ģebrāiski

$$S = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + 2S_1 S_2 \cdot \text{Cos}(\bar{S}_1 \bar{S}_2)}$$

2) Reakciju var atrast arī pēc projekcijām uz asīm

$$\begin{array}{l|l|l} S_{1x} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} & S_{2x} = \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} & S_x = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} \\ S_{1y} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} & S_{2y} = \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} & S_y = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ S_{1z} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} & S_{2z} = \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} & S_z = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{array}$$

un pilna reakcija

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}$$

Miera stāvoklis. Ja saite ir ideāla skleronoma līkne, dota ar divām virsmām un punkts uz saites atrodas mierā, tad viņa koordinātes  $x, y$  un  $z$  ir Const. un  $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$ .

Ievieojot šo kustības dif-nol-mos (131), dabūsim

$$\left. \begin{array}{l} x + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0 \\ y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} = 0 \\ z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} = 0 \end{array} \right\}$$

Saistīta punkta miera stāvokļa nol-mi, ja saite dota ar divām virsmām ..... (132)

Šiem nol-miem vēl jāpievieno divus saites nol-mus  $f_1(xyz) = 0$  un  $f_2(xyz) = 0$ .

Nol-mu atrisināšanas metode ir šāda: pirmkārt, no nol-miem (132) jāizslēdz abus  $\lambda_1$  un  $\lambda_2$ , ko visvienkāršāk var izdarīt attīstot determinantu

$$\begin{vmatrix} x & \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial x} \\ y & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ z & \frac{\partial f_1}{\partial z} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{vmatrix} = 0$$

un tad, ieskaitot saites nol-mus, mums būs trīs nol-mi ar trīs nezināmām koordinātēm.

Saistīta punkta kustības noteikšana ar spara teorēmas palīdzību, ja saite dota ar divām ideālām skleronomām virsmām

$$f_1(xyz) = 0 \text{ un } f_2(xyz) = 0$$

Ja saite ir ideāla, tad saites reakcija  $S \perp ds$ , viņas darbs uz elementāra pārvietojuma  $(S \cdot d\vec{s}) = 0$  un, kā jau agrāk bija aizrādīts, spara teorēma saistītam punktam ir pilnīgi identiska ar to pašu teorēmu brīvam punktam

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \int_{x_0 y_0 z_0}^{xyz} Xdx + Ydy + Zdz$$

apzīmēsim vienkāršības dēļ labo pusi, kuŗa reprezentē darbu, ar  $\mathcal{A}$ , pie kam  $\mathcal{A}$  aprēķināt ir iespējams ne tikai tad, kad spēkam piemīt funkcija (tad  $\mathcal{A} = U - U_0$ ), bet arī tad, kad spēks  $F$  ir koordinātu funkcija  $F = \Phi(xyz)$ .

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \mathcal{A}$$

$$V^2 = V_0^2 + \frac{2\mathcal{A}}{m}$$

Aizvietosim ātruma kvadrātu caur koordinātēm

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = V_0^2 + \frac{2\mathcal{A}}{m}$$

Bet šinī nol-mā ir 3 nezināmie un lai dabūtu vēl divus nol-mus ar tiem pašiem nezināmiem, diferencēsim saites pēc laika

$$\frac{df_1}{dt} = \frac{\partial f_1}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial f_1}{\partial z} \dot{z} = 0$$

$$\frac{df_2}{dt} = \frac{\partial f_2}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial f_2}{\partial z} \dot{z} = 0$$

Atrisinot dabūto nol-mu sistēmu algebrāiski, varam atrast, piemēram,  $\dot{x} = f(xyz)$  un tādā ceļā nonākt pie pirmās kārtas dif-nol-ma. Viņu gan tādā veidā vēl nevar integrēt, bet, pirmkārt, ar saites nol-miem jāaizvieto  $y$  un  $z$  caur  $x$  un tad nointegrējot viņu vienu reizi uziesim kustības nol-mu

$\boxed{\dot{x} = f_x(t)}$  un no saitēm arī pārējos  $\boxed{\dot{y} = f_y(t)}$  un  $\boxed{\dot{z} = f_z(t)}$

Speciāli atrisināšanas gadījumi punkta kustībai uz ideālas skleronomas līknes telpā.

I gadījums:  $F_t = f(v)$ . Tangenciālais spēks ir ātruma funkcija.

Ņemsim kustības dif-nol-mu pēc Eulera brīvam punktam

$$m j_t = F_t \quad \text{jeb} \quad m \frac{dV}{dt} = F_t$$

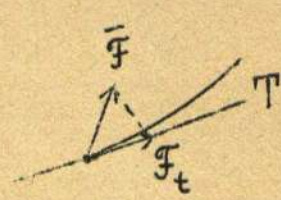
Lai dabūtu to pašu nol-mu saistītam punktam, pievienosim labai pusei saites reakcijas projekciju.

$$m \frac{dV}{dt} = F_t + S_t$$

zīm.149. Bet ja saite ir ideāla, tad  $S_t = 0$  un mēs nonākam atkal pie  $m \frac{dV}{dt} = F_t$  un ja vēl spēks  $F_t = f(V)$ , varam viegli nointegrēt

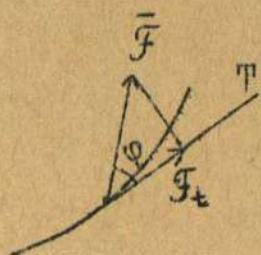
$$m \int \frac{dV}{f(V)} = t + C_1 \dots \dots \dots \text{I integrāls}$$

Šis integrāls dos mums  $V = \Phi(t)$  un tālāk atrisinājumu ar saites nol-mu palīdzību jāved pēc nupat apskatītā paņēmiena.



II. gadījums  $F_t = f(s)$ . Tangenciālais spēks ir ceļa funkcija.

Šinī gadījumā jāņem spara teorēmu



$$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \int_{s_0}^s (\vec{F} \cdot d\vec{s}) = \int_{s_0}^s F \cdot \cos\phi \cdot ds = \int_{s_0}^s F_t \cdot ds$$

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \int_{s_0}^s f(s) \cdot ds$$

zīm.150.

no kurienes atrodam V kā funkciju no s

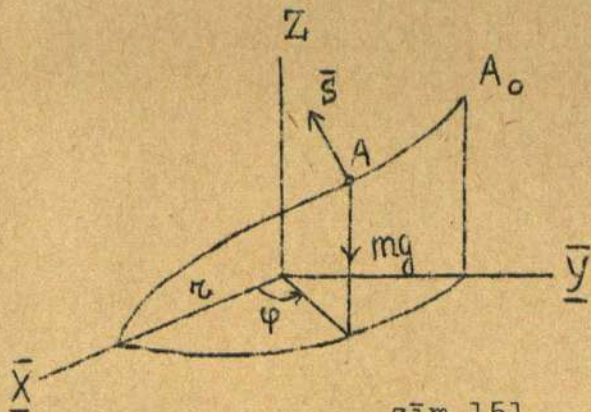
$$V = \Phi(s)$$

bet  $V = \frac{ds}{dt}$  jeb  $\frac{ds}{dt} = \Phi(s)$  un  $\int \frac{ds}{\Phi(s)} = t + C$ , pēc integrēšanas

dabūsim  $s = \Psi(t)$  un tālāk varam pāriet uz koordinātēm, liekot

$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$  un ņemot palīgā saites nol-mus  $f_1(xyz) = 0$  un  $f_2(xyz) = 0$ .

Piemērs. Noteikt smaga materiāla punkta kustību zem smaguma spēka ievērošanas uz ideālas skrūves līnijas.



zīm.151.

Saites (t.i.skrūves līnijas) nol-mi parametra veidā ir

$$\begin{aligned} x &= r \cos\phi \\ y &= r \sin\phi \\ z &= kr\phi \end{aligned}$$

kur  $r = \text{Const.}$  lielums.

Aktīvais spēks ir  $mg$  un viņa projekcijas uz asīm  $X=0, Y=0, Z=-mg$   
Sākuma apstākļi: pie  $t_0=0, x_0=0, y_0=r, z=z_0$  un  $V_0=0$ .

- Uziet: a) punkta kustības nol-mus kā  $f(t)$ ,  
b) saites reakciju  $S$  arī kā funkciju no laika,  
c) kādā laikā  $T$  punkts noslī-

dēs līdz  $\bar{X}$  asij.

Šeit saite ir dota parametra veidā, tamdēļ lietosim agrāk teorētiski apskatīto papēmienu.

a) Kustības dif-nol-mi ir

1) $m\ddot{x} = X + S_x$	kuri mūsu gadījumā pāriet, ievērojot, ka $X=0, Y=0$ un $Z=-mg$	1) $m\ddot{x} = S_x$
2) $m\ddot{y} = Y + S_y$		2) $m\ddot{y} = S_y$
3) $m\ddot{z} = Z + S_z$		3) $m\ddot{z} = -mg + S_z$

pievienojot vēl 3 saites nol-mus, dabūsim 6 nol-mus, bet 7 nezināmus:  $x, y, z, S_x, S_y, S_z$  un  $\phi$ . Trūkstošo nol-mu pie ideālās saites dos saites reakcijas elementāra darba izteiksme  $(\vec{S} \cdot d\vec{s}) = 0$ . Attīstot viņu, dabūjam

$$7) S_x \cdot dx + S_y \cdot dy + S_z \cdot dz = 0$$

Ievietosim šinī nol-mā reakciju projekcijas no 1), 2) un 3)

$$m\ddot{x} \cdot dx + m\ddot{y} \cdot dy + (m\ddot{z} + mg) \cdot dz = 0$$

Saīsināsim  $m$  un izdalīsim ar  $dt$

$$\ddot{x} \cdot \dot{x} + \ddot{y} \cdot \dot{y} + (\ddot{z} + g) \cdot \dot{z} = 0 \dots\dots\dots(133)$$

Tagad diferencēsim saites pēc  $t$ , ievērojot, ka  $r$  ir Const.

$$\begin{array}{l} \dot{x} = -r \sin\varphi \cdot \dot{\varphi} \\ \dot{y} = r \cos\varphi \cdot \dot{\varphi} \\ \dot{z} = kr \dot{\varphi} \end{array} \quad \left| \quad \text{un otro reizi} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \ddot{x} = -r \cos\varphi \cdot \dot{\varphi}^2 - r \sin\varphi \cdot \ddot{\varphi} \\ \ddot{y} = -r \sin\varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + r \cos\varphi \cdot \ddot{\varphi} \\ \ddot{z} = kr \ddot{\varphi} \end{array} \right. \right.$$

Ievietosim atrastās vērtības dif-nol-mā (133)

$$r^2 \sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot \dot{\varphi}^3 + r^2 \sin^2\varphi \cdot \dot{\varphi} \ddot{\varphi} - r^2 \sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot \dot{\varphi}^3 + r^2 \cos^2\varphi \cdot \dot{\varphi} \ddot{\varphi} + (kr\dot{\varphi} + g) \cdot kr\dot{\varphi} = 0$$

$$r^2 (\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) \cdot \dot{\varphi} \ddot{\varphi} + (kr\dot{\varphi} + g) \cdot kr\dot{\varphi} = 0$$

Saīsinot  $r\dot{\varphi}$ , dabūsim  $r\ddot{\varphi} + k^2 r\dot{\varphi} + kg = 0$  un nonākam pie dif-nol-ma

$$\ddot{\varphi} = -\frac{k}{1+k^2} \cdot \frac{g}{r} \quad \text{integrējot pirmo reizi} \quad \dot{\varphi} = -\frac{k}{1+k^2} \cdot \frac{gt}{r} + C_1$$

pie  $t_0=0, V_0=0$ , bet  $V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{r^2 \sin^2\varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + r^2 \cos^2\varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + k^2 r^2 \dot{\varphi}^2}$

$V = r\dot{\varphi} \sqrt{1+k^2}$ , tā tad  $V_0 = r\dot{\varphi}_0 \sqrt{1+k^2} = 0$  un  $\dot{\varphi}_0 = 0$ . Izlietojot

šo apstākli atrodam, ka arī  $C_1 = 0$  un  $\dot{\varphi} = -\frac{k}{1+k^2} \cdot \frac{gt}{r}$  I integrāls.

Integrēsim tālāk  $\varphi = -\frac{k}{1+k^2} \cdot \frac{gt^2}{2r} + C_2$  no sākuma apstākļiem  $C_2 = \frac{\pi}{2}$

un  $\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{k}{1+k^2} \cdot \frac{gt^2}{2r}$  ..... II integrāls

Ievietojot šo  $\varphi$  saites nol-mos, atrodam kustības nol-mus

$x = r \cos\varphi$  ,  $x = r \sin\left(\frac{k}{1+k^2} \cdot \frac{gt^2}{2r}\right)$

$y = r \sin\varphi$  ,  $y = r \cos\left(\frac{k}{1+k^2} \cdot \frac{gt^2}{2r}\right)$

$z = kr\varphi$  ,  $z = kr \frac{\pi}{2} - \frac{k^2}{1+k^2} \cdot \frac{gt^2}{2}$  ,  $z = z_0 - \frac{k^2}{1+k^2} \cdot \frac{gt^2}{2}$

b) Saites reakcijas S noteikšana. Saites reakcijas projekcijas dabūsim no dif-nol-miem 1), 2) un 3)

$S_x = m\ddot{x}$  ,  $S_y = m\ddot{y}$  , un  $S_z = mg + m\ddot{z}$   
ņemsim  $\ddot{x}, \ddot{y}$  un  $\ddot{z}$  izteiksmes caur  $\varphi$

$S_x = -mr(\cos\varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + \sin\varphi \cdot \ddot{\varphi})$

$S_y = -mr(\sin\varphi \cdot \dot{\varphi}^2 - \cos\varphi \cdot \ddot{\varphi})$

$S_z = mg + mkr\left(-\frac{k}{1+k^2} \cdot \frac{g}{r}\right) = mg - \frac{mk^2 g}{1+k^2} = \frac{mg + mk^2 g - mk^2 g}{1+k^2}$

$S_z = \frac{mg}{1+k^2}$  Saites reakcijas projekcija uz Z-asi iznāk Const.

Aizvietojot  $\dot{\varphi}$  un  $\ddot{\varphi}$  ar viņa laika funkcijām, varētu atrast  $S_x$  un  $S_y$ , bet iepriekš vēl sastādīsim

$S_x^2 + S_y^2 = m^2 r^2 (\dot{\varphi}^4 + \ddot{\varphi}^2)$ , tagad ievietosim  $\dot{\varphi}$  un  $\ddot{\varphi}$

$$S_x^2 + S_y^2 = m^2 r^2 \left[ \left( \frac{k}{1+k^2} \cdot \frac{gt}{r} \right)^4 + \left( \frac{k}{1+k^2} \cdot \frac{g}{r} \right)^2 \right]$$

$$S_x^2 + S_y^2 = m^2 \frac{k^2}{(1+k^2)^2} \cdot g^2 \left[ \frac{k^2}{(1+k^2)^2} \cdot \frac{g^2 t^4}{r^2} + 1 \right] \text{ tagad pilna}$$

$$\text{reakcija } S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2} = \frac{mg}{1+k^2} \sqrt{k^2 \left[ \frac{k^2}{(1+k^2)^2} \cdot \frac{g^2 t^4}{r^2} + 1 \right] + 1}$$

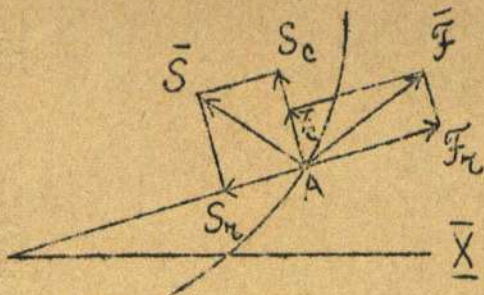
$$S = \frac{mg}{1+k^2} \sqrt{\left( \frac{k^2}{1+k^2} \cdot \frac{gt^2}{r} \right)^2 + k^2 + 1}$$

Sākumā pie  $t_0 = 0$  iznāk  $S_0 = \frac{mg}{\sqrt{1+k^2}}$  pēc tam reakcija ar laiku pieaug.

c) Lai dabūtu laiku  $T$ , kurā punkts noslīdēs līdz  $\bar{X}$  asij, pielīdzināsim  $z = 0$

$$z_0 - \frac{k^2}{1+k^2} \cdot \frac{gT^2}{2} = 0 ; \quad T = \frac{1}{k} \sqrt{2(1+k^2) \frac{z_0}{g}}$$

Saistīta punkta kustības noteikšana uz skleronomas ideālas saites polārkoordinātēs plaknē.



zīm.152.

Ja punkta saite ir dota polārkoordinātēs plaknē, tad dabīgi vest atrisinājumu arī polārkoordinātēs.

Saites nol-ms  $r = f(\varphi)$   
Kustības dif-nol-mus varam viegli uzstādīt, ņemot tos pašus nol-mus brīvam punktam un pievienojot spēka projekcijām vēl reakcijas projekcijas

$$\left. \begin{aligned} m j_r &= F_r + S_r \\ m j_c &= F_c + S_c \end{aligned} \right\} \text{jeb arī } \begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) &= F_r + S_r \\ \frac{m}{r} \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\varphi}) &= F_c + S_c \end{aligned}$$

Bet integrēt šos dif-nol-mus, kamēr reakcija vēl nav zināma, nevar. Vajaga vai nu atsvabināties no reakcijas, kā mēs to darījam Dekarta koordinātēs izslēdzot  $\lambda$ , jeb ļoti izdevīgi pie ideālām skleronomām saitēm ir lietot spara teorēmu

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \mathcal{O}$$

Darbu  $\mathcal{O}$  centrālam spēkam var aprēķināt pēc formulas  $\mathcal{O} = \int_{r_0}^r F \cdot dr$ , bet ja spēks nav centrāls, tad pēc vispārīgas formulas:

$$\mathcal{O} = \int_{x_0 y_0}^{xy} X dx + Y dy \quad \text{un tad } V^2 = V_0^2 + \frac{2\mathcal{O}}{m}; \text{ aizvietojot tālāk } V^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2$$

$$\text{dabūsim } \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 = V_0^2 + \frac{2\mathcal{O}}{m}$$

Tālāk no saites nol-ma  $r = f(\varphi)$ , aizvietojam  $\varphi$  caur  $r$  jeb arī otrādi  $r$  caur  $\varphi$  un nonākam pie pirmās kārtas dif-nol-ma, kuru nointegrējot, atrodam vienu kustības nol-mu

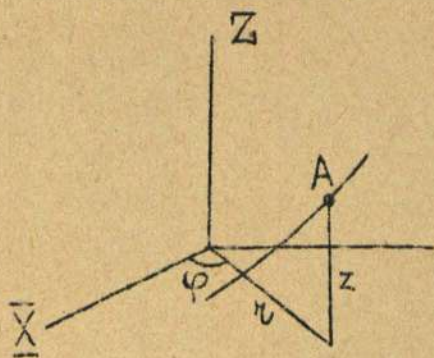
$$r = f_r(t) \quad \text{jeb} \quad \varphi = f_\varphi(t)$$

Otru kustības nol-mu dabūsim no saites.

Saites reakcijas projekcijas pēc tam uziesim no kustības dif-nol-miem

$$\left. \begin{aligned} S_r &= m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) - F_r \\ S_c &= \frac{m}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\phi}) - F_c \end{aligned} \right\} \text{ un } S = \sqrt{S_r^2 + S_c^2}$$

Saistīta punkta kustības noteikšana uz skleronomas ideālas saites, dotas cilindra koordinātēs telpā.



zīm.153.

Atrisinājumu cilindra koordinātēs mēs lietojam ne tikai tad, kad saite ir dota cilindra koordinātēs, bet dažreiz, ja arī saite dota Dekarta koordinātēs, tomēr ir izdevīgi pāriet uz cilindra koordinātēm, lai dabūtu vienkāršāku atrisinājumu.

Dif-nol-mi saistītam punktam cilindra koordinātēs

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{r} &= F_r + S_r \\ m\ddot{\phi} &= F_c + S_c \\ m\ddot{z} &= F_z + S_z \end{aligned} \right| \text{ jeb arī } \left. \begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) &= F_r + S_r \\ \frac{m}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\phi}) &= F_c + S_c \\ m\ddot{z} &= F_z + S_z \end{aligned} \right.$$

Tieši integrēt šos dif-nol-mus, kamēr reakcija nav zināma, nevar. Lai būtu iespējams viņus integrēt ir jāizslēdz saites reakciju un ja tas neizdodās, tad jāmeklē citu ceļu, lietojot spara teorēmu. Spara teorēmas izteiksmē, ja saite ir ideāla, reakcija nenāk priekšā.

Spāra teorēma  $\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \mathcal{A}$ , no kurienes  $V^2 = V_0^2 + \frac{2\mathcal{A}}{m}$ .

Tagad aizvietosim  $V^2$  ar viņa izteiksmi cilindra koordinātēs  $V^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\phi})^2 + \dot{z}^2$ , tad  $\dot{r}^2 + (r\dot{\phi})^2 + \dot{z}^2 = V_0^2 + \frac{2\mathcal{A}}{m}$  .....(134)

Tālāk apskatīsim divus gadījumus:

- 1) Ja saite ir dota ar divām virsmām  $r = f_1(\phi)$  un  $r = f_2(z)$

mēs varam viegli aizvietot divas koordinātes, piemēram  $\phi$  un  $z$  caur  $r$  un dabūt vienu pirmās kārtas dif-nol-mu ar vienu nezināmo. Nointegrējot viņu, uziesim punkta kustību.

2) Ja saite ir dota ar vienu virsmu, būtu jāintegrē divus dif-nol-mus, bet vēl vienkāršāku atrisinājumu dabūsim, ja šī virsma ir rotācijas virsma ap Z-asi,  $r = f_z(z)$ . Tad reakcija arvienu krustojās ar Z-asi un, ja spēks arī krustojās jeb ir paralēls Z-asi, tad sektoriāls ātrums  $\overline{XY}$ -plaknē ir Const.

$$\sigma_{xy} = \frac{C}{z^2} \text{ un } r^2 \cdot \dot{\phi} = C, \quad \dot{\phi} = \frac{C}{r^2}$$

Aizvietojot nol-mā (134)  $\dot{\phi} = \frac{C}{r^2}$  un  $z$  caur  $r$  no saites nol-ma, dabūsim vienu pirmās kārtas dif-nol-mu ar nezināmo  $r$  un pēc integrēšanas uziesim

$$r = f_r(t)$$

Tālāk ņemot  $\frac{d\phi}{dt} = \frac{C}{f_r^2(t)}$  dabūsim  $\phi = \int \frac{cdt}{f_r^2(t)} + C_1 = f_\phi(t)$  un beidzot

$z = f_z(t)$  uziesim no saites nol-ma.

Saites reakcijas projekcijas atradīsim pēc tam, kad kustība būs noteikta no kustības dif-nol-miem cilindra koordinātēs

$$\begin{aligned} S_r &= m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) - F_r \\ S_c &= \frac{m}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\phi}) - F_c \\ S_z &= m\ddot{z} - F_z \end{aligned}$$



Saistīta punkta kustība, ja saite ir ideāla skleronoma plakana līkne.

Technikā kustība pa telpu līknēm notiek retāk; biežāk nāk priekšā kustības pa plakanām līknēm, tamdēļ šo gadījumu apskatīsim atsevišķi.

Ja saite ir plakana līkne, mēs varam vienkāršot atrisinājumu, izvēlot saites plakni par  $\overline{XY}$  plakni, tad saites nol-mi būs

$$f_1(xy) = 0 \quad \text{un} \quad f_2 = z = 0$$

un dif-nol-mos (131)

$$\begin{aligned} 1) \quad m\ddot{x} &= X - \mathcal{A}_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \mathcal{A}_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} \\ 2) \quad m\ddot{y} &= Y + \mathcal{A}_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \mathcal{A}_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ 3) \quad m\ddot{z} &= Z + \mathcal{A}_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \mathcal{A}_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{aligned}$$

varam ievest šādus vienkāršojumus

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial z} = 1, \quad \frac{\partial f_1}{\partial z} = 0 \quad \text{un} \quad \ddot{z} = 0$$

Dif-nol-mi (131) tad pāriet:

$$\left. \begin{aligned} 1) \quad m\ddot{x} &= X + \mathcal{A}_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} \\ 2) \quad m\ddot{y} &= Y + \mathcal{A}_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ 3) \quad 0 &= Z + \mathcal{A}_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(135)$$

Izslēdzot no 1) un 2) lielumu  $\mathcal{A}_1$ , dabūsim vienu dif-nol-mu

$$\frac{m\ddot{x} - X}{\frac{\partial f_1}{\partial x}} = \frac{m\ddot{y} - Y}{\frac{\partial f_1}{\partial y}} = \mathcal{A}_1$$

bet šis dif-nol-ms satur abas mainīgas koordinātes  $x$  un  $y$ , bez tam spēka projekcijas arī var saturēt  $x, y, \dot{x}, \dot{y}, t$ , tā tad tieši viņu integrēt nevar, bet iepriekš ar saites nol-ma palīdzību vienu no mainīgām jāizslēdz. Tad paliek otrās kārtas dif-nol-ma vai nu ar  $x$  jeb ar  $y$ . Nointegrējot viņu divreiz, dabūsim  $x$  jeb  $y$  kā funkcijas no  $t$  un no saites nol-ma arī otru koordināti kā  $f(t)$ .

No sākuma noteikumiem jādod tikai viena koordināte un viena ātruma komponente, jo otru arvienu var atrast no saites un tad varēs noteikt arī integrēšanas Constantes.

Saites reakcija. Saites reakciju var atrast, ņemot  $\mathcal{A}_1 = \frac{m\ddot{x} - X}{\frac{\partial f_1}{\partial x}}$  un  $\mathcal{A}_2 = -Z$ . Tad saites reakcijas projekcijas būs

$S_1 = \mathcal{A}_1 \Delta_1$  - reakcija pašas saites plaknē, un

$S_2 = \mathcal{A}_2 \Delta_2 = -Z$  - reakcija perpendikulāri saites plaknei.

Filna reakcija geometriski  $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$  un algebrāiski  $S = \sqrt{\mathcal{A}_1^2 \Delta_1^2 + Z^2}$

Miera stāvoklis. Ja saite ir plakana līkne un punkts uz viņas atrodas mierā, tad viņa koordinātes  $x$  un  $y$  ir Const. lielumi un  $\ddot{x} = \ddot{y} = 0$ .

Ievietojot šo nol-mos (135) un pievienojot saites nol-mu, dabūsim miera stāvokļa nol-mus

$$\left. \begin{aligned} X + \mathcal{A}_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} &= 0 \\ Y + \mathcal{A}_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} &= 0 \\ f_1 = (xy) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(136)$$

Cits atrisinājums, ar spara teorēmas palīdzību, saistītam punktam, ja saite ir ideāla skleronoma plakana līkne.

Tāpat kā pie līknes telpā pirmo integrālu var iegūt ar spara teorēmas palīdzību

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \int_{x_0 y_0 z_0}^{xyz} Xdx + Ydy + Zdz, \text{ bet } dz = 0$$

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \int_{x_0 y_0}^{xy} Xdx + Ydy$$

Apzīmējot vienkāršības dēļ labo pusi ar  $\mathcal{A}$ , dabūsim  $V^2 = V_0^2 + \frac{2\mathcal{A}}{m}$  pie kam darbu  $\mathcal{A}$  varam aprēķināt ne tikai tad, ja spēkam piemīt funkcija (tad  $\mathcal{A} = U - U_0$ ), bet arī tad, kad spēks  $F$  ir koordinātu funkcija  $F = f(xy)$ .

Tālāk aizvietosim ātruma kvadrātu caur koordinātēm

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = V_0^2 + \frac{2\mathcal{A}}{m}$$

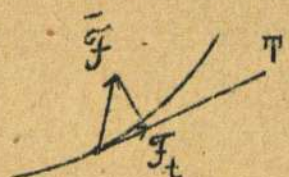
un diferencēsīm saites nol-mu pēc laika

$$\frac{df_1}{dt} = \frac{\partial f_1}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \dot{y} = 0$$

Atrisinot pēdējos divus nol-mus, varam uziet, piemēram,  $\dot{x} = f(xy)$  un ar saites nol-ma palīdzību izslēgt  $y$  un nointegrējot vienu reizi, at-  
rast  $\boxed{x = f_x(t)}$ . Pēc tam no saites arī  $\boxed{y = f_x(t)}$

Speciāli atrisinājumi punkta kustībai uz ideālas skleronomas plakanas līknes.

I. gadījums  $F_t = f(V)$ . Tangenciālais spēks ir ātruma funkcija. Kustības dif-nol-mā pēc Eulera brīvam punktam



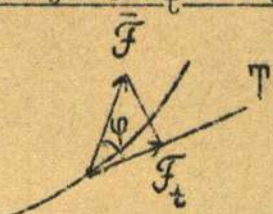
ir  $m \frac{dV}{dt} = F_t$ , saistītam būs  $m \frac{dV}{dt} = F_t + S_t$ . Bet ideālai saitei  $S_t = 0$  un atkal paliek tikai  $m \frac{dV}{dt} = F_t$  un ja spēks  $F_t = f(V)$ , varam viegli

zīm.154.

nointegrēt  $m \int \frac{dV}{f(V)} = t + C_1 \dots$  I. integrāls

Šis integrāls dos  $V = \phi(t)$  un tālāk atrisinājumu ar saites nol-ma palīdzību jāved pēc nupat apskatītas metodes.

II. gadījums  $F_t = f(s)$ . Tangenciālais spēks ir ceļa funkcija.



Šādā gadījumā jālieto spara teorēma

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \int_{s_0}^s (\bar{F} \cdot d\bar{s}) = \int_{s_0}^s F \cdot \cos\phi \cdot ds = \int_{s_0}^s F_t \cdot ds$$

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \int_{s_0}^s f(s) \cdot ds \text{ no kurienes atrodam}$$

zīm.155.

$V$  kā funkciju no  $s$   $V = \phi(s)$

Bet  $V = \frac{ds}{dt}$  jeb tad  $\frac{ds}{dt} = \phi(s)$  un  $\int \frac{ds}{\phi(s)} = t + C$ . Pēc integrēšanas dabūsim  $s = \psi(t)$  un tālāk varam pāriet uz koordinātēm, liekot

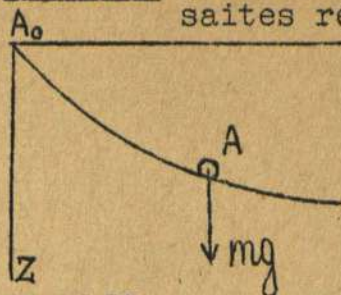
$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \text{ un ņemot palīgā saites nol-mu } f(xy) = 0$$

Uzdevumu veidi saistīta punkta kustībā.

Uzdevumi uz saistīta punkta kustību neatkarīgi no tā, vai saite ir virsma jeb līkne, var nākt priekšā dažādā veidā: 1) var pēc dotās saites un spēkiem meklēt kustību, 2) pēc dotās saites un kustības me-

klēt spēku, kas viņu izsauc un 3) pēc dotā spēka un kustības meklēt saiti. Apskatīsim tālāk vienu piemēru uz saites noteikšanu līknes veidā.

Piemērs. Uzstādīt izochronas nol-mu smagam materiālam punktam un uziet saites reakciju.



Tas nozīmē uziet viņpusīgas ideālas saites nol-mu tā, lai smags punkts zem pašsvara iespaida vienādos laika sprīžos noietu vienādus ceļus vertikālā virzienā, jeb tā, lai ātruma vertikālā komponente būtu Const.

Šo uzdevumu 1687.gadā uzstādīja un izsludināja Leibnics; bez viņa atrisinājumu bija devuši vēl sintētiski Huyghens un analītiski Jekabs Bernoulli.

zīm.155.

Koordinātu sākumu izvēlēsim kustības sākuma punktā. Z-asi virzīsim vertikāli uz leju un X-asi horicontāli, tad  $x_0 = 0, z_0 = 0$ . Pamata noteikums kustībai  $\dot{z} = k$  un  $\dot{x}_0 = 0$ .

Spēka projekcijas  $X = 0, Z = mg$  un berzes nav.

Uziet: saites nol-mu  $f(xz) = 0$ .

Ņemsim kustības dif-nol-mus (135)

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= X + \mathcal{L} \frac{\partial f}{\partial x} \\ m\ddot{z} &= Z + \mathcal{L} \frac{\partial f}{\partial z} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{kuŗi mūsu gadījumā, ievērojot vēl, ka } \dot{z} = k \text{ un} \\ &\dot{z} = 0, \text{ pāriet} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= 0 + \mathcal{L} \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 &= mg + \mathcal{L} \frac{\partial f}{\partial z} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{izslēdzot šeit } \frac{m\ddot{x}}{\frac{\partial f}{\partial x}} = - \frac{mg}{\frac{\partial f}{\partial z}} \\ &\mathcal{L}, \text{ dabūsim} \end{aligned}$$

Ņemsim tālāk saites diferenciālu

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial z} \dot{z} = 0$$

un pārnesot vienu locekli otrā pusē, dabūsim  $\frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} = - \frac{\partial f}{\partial z} \dot{z}$ , pareizināsim šo ar dif-nol-mu:  $m\ddot{x} = mg\dot{z}$ , bet  $\dot{z} = k$  un  $m$  saīsinājās  $\dot{x} \frac{d\dot{x}}{dt} = gk$

pareizināsim ar dt un integrēsim  $\int \dot{x} d\dot{x} = \int gk \cdot dt + C_1$   
 $\frac{1}{2} \dot{x}^2 = gkt + C_1$  no sākuma apstākļiem  $C_1 = 0$ , jo  $\dot{x}_0 = 0$

$\dot{x}^2 = 2gkt$ , izvilksim kvadratsakni, ņemot vērā, ka  $\dot{x}$  ir pozitīvs

$\dot{x} = \sqrt{2gk} \cdot t^{\frac{1}{2}}$  aizvietosim  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$  un integrēsim  $x = \int \sqrt{2gk} \cdot t^{\frac{1}{2}} \cdot dt + C_2$

$x = \frac{2}{3} \sqrt{2gk} \cdot t^{\frac{3}{2}} + C_2$ , bet no sākuma apstākļiem  $C_2 = 0$

$$\boxed{x = \frac{2}{3} \sqrt{2gk} \cdot t^{\frac{3}{2}}} \quad \text{t.i. viens kustības nol-ms}$$

Otru dabūsim, ņemot  $\dot{z} = k$  un integrējot viņu,  $\frac{dz}{dt} = k, z = kt + C_3$ , bet no sākuma apstākļiem  $C_3 = 0$  un galīgi  $\boxed{z = kt}$  ir otrs kustības nol-ms.

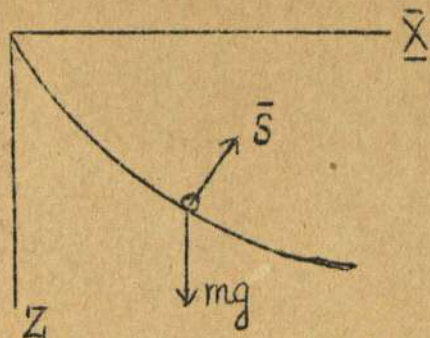
Izslēdzot no abiem nol-miem laiku, dabūsim meklējamo  $f(xz) = 0$ , t.i. saites nol-mu

$$\left. \begin{aligned} x^2 &= \frac{8}{9} gkt^3 \\ z &= kt \end{aligned} \right\} \boxed{x^2 = \frac{8}{9} \cdot \frac{g}{k^2} z^3} \quad \text{saites nol-ms, jeb arī } \boxed{x = \frac{2}{3k} \sqrt{2g} \cdot z^{\frac{3}{2}}}$$

Atrastais saites nol-ms reprezentē Neill'a jeb puskubisko paraboli.

Salīdzināšanas dēļ pievedīsim arī citas parabolas:

- $x = az^{\frac{3}{2}}$  ir kubiska parabola
- $x = az^2$  ir parastā parabola
- $x = az^{\frac{3}{2}}$  ir puskubiskā parabola.

Saites reakcijas noteikšana.

zīm.156.

Ideālai saitei reakcija iet normāles virzienā un atrast mēs viņu varam pēc formulas  $S = S_n = \mathcal{L} \cdot \Delta$

$$\mathcal{L} = \frac{m\ddot{z} - Z}{\frac{\partial f}{\partial z}} \quad \text{un} \quad \Delta = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}$$

Ja saite ir viļņveidīga, tad viņas nol-mu jāraksta

$$x^2 - \frac{8}{9} \cdot \frac{g}{k^2} \cdot z^3 \geq 0$$

no kurienes  $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$  un  $\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{8}{3} \cdot \frac{g}{k^2} z^2$

$$\mathcal{L} = \frac{0 - mg}{-\frac{8}{3} \frac{g}{k^2} z^2} = \frac{3}{8} \frac{mk^2}{z^2} \quad \text{jeb aizvietojot } z = kt, \quad \mathcal{L} = \frac{3}{8} \frac{m}{t^2}$$

$\mathcal{L}$  iznāk pozitīvs, tā tad punkts nevar noiet no saites.

$$\Delta = \sqrt{(2x)^2 + \left(-\frac{8}{3} \frac{g}{k^2} z^2\right)^2} = \sqrt{4 \frac{8}{9} gkt^3 + \frac{64}{9} \frac{g^2}{k^4} k^4 t^4} = \frac{8}{3} gt^2 \sqrt{1 + \frac{k}{2gt}}$$

$$S_n = \mathcal{L} \cdot \Delta = \frac{3}{8} \frac{m}{t^2} \frac{8}{3} gt^2 \sqrt{1 + \frac{k}{2gt}} = mg \sqrt{1 + \frac{k}{2gt}}$$

$$S = mg \sqrt{1 + \frac{k}{2gt}}$$

Saites reakcija kā laika funkcija.

Kā rāda atrastā formula, saites reakcija arvienu ir lielāka par punkta svaru  $mg$ , tikai pie  $t = \infty$  iznāk  $S = mg$ .

Reakciju var uziet arī kā koordinātu funkciju, ja aizvietosim  $t = \frac{z}{k}$ , tad

$$S = mg \sqrt{1 + \frac{k^2}{2gz}}$$

Saites reakcija kā koordinātu funkcija.

Matematisks svārsts.

Par matematisko svārstu saucsm smagu materiālu punktu, piekārtu ar bezsvara stieni pie šarnīra  $O$ , pie kam sākuma ātrums ir dots vertikālā plaknē, kurā iet caur  $O$ . Apzīmēsim stieņa garumu ar  $\ell$  un saucsm to per svārsta garumu. Pēc definīcijas punkta kustība būs saistīta un ja sākuma ātrums  $V_0$  ir dots vertikālā plaknē caur piekāres punktu  $O$ , tad kustība arī notiks vertikālā plaknē un saite būs riņķis ar radiusu  $\ell$  šinī plaknē.

Pieņemsim, ka kustība sākās punktā  $A_0$  un izvēlēsim caur punktu  $O$  kustības plaknē divas asis, vienu  $O\bar{X}$  vertikāli un otru  $O\bar{Y}$  horizontāli.

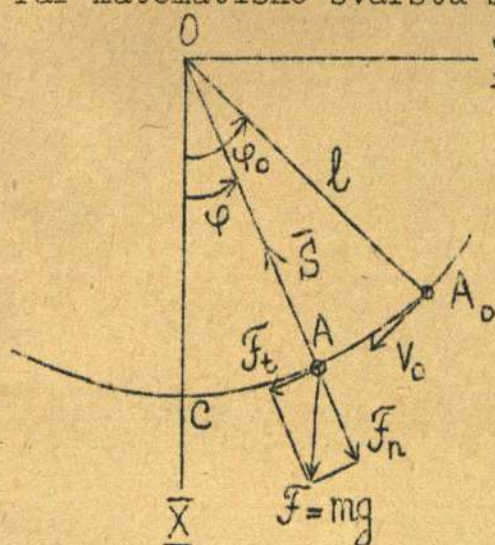
Kustības noteikšanai izlietosim kustības dif-nol-mus pēc Eulera saistītam punktam

1)  $m j_t = F_t + S_t$  bet ideālām saitēm  $S_t = 0$

2)  $m j_n = F_n + S_n$

Apzīmēsim leņķi, kuru veido svārsts  $OA$  ar  $O\bar{X}$ -asi ar  $\varphi$ . Šo leņķi pie labas koordinātu sistēmas jāatskaita no  $O\bar{X}$  ass pret pulksteņa rādītāju. Sākumā šis leņķis ir  $\varphi_0$ . Sakarā ar šo  $F_t = mg \sin \varphi$  un  $F_n = -mg \cos \varphi$ , jo pozitīva

zīm.157.



normale šinī gadījumā ir virzīta uz augšu. Kustības dif-nol-mi

$$1) m \frac{dV}{dt} = mg \sin\varphi$$

$$2) \frac{mV^2}{\rho} = -mg \cos\varphi + S_n$$

Otrs nol-ms dos iespēju noteikt reakciju pēc tam, kad būs atrasts ātrums

$$S_n = \frac{mV^2}{\rho} + mg \cos\varphi$$

Bet kustība noteiksim no pirmā nol-ma

$$1) m \frac{dV}{dt} = mg \sin\varphi$$

Pārveidosim viņu, ievēdot noiето ceļu  $s = A_0A$

$$s = A_0A = A_0C - AC = l\varphi_0 - l\varphi = l(\varphi_0 - \varphi)$$

Ātrums  $V = \frac{ds}{dt} = -l\dot{\varphi}$  un  $\frac{dV}{dt} = -l\ddot{\varphi}$ . Tad dif-nol-ms 1)  $-ml\ddot{\varphi} = mg \sin\varphi$

jeb galīgi  $\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \sin\varphi$  Matemātiskā svārsta kustības dif-nol-ms .....(137)

Nol-mu (137) sauc par matemātiskā svārsta kustības dif-nol-mu. Sāksim viņu integrēt.

$$\frac{d\dot{\varphi}}{dt} = -\frac{g}{l} \sin\varphi \quad \text{pareizināsim nolīdzinājumu ar } d\varphi$$

$$d\varphi \frac{d\dot{\varphi}}{dt} = -\frac{g}{l} \sin\varphi \cdot d\varphi, \text{ aizvietosim } \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \text{ un integrēsim}$$

$$\int \dot{\varphi} d\dot{\varphi} = -\frac{g}{l} \int \sin\varphi d\varphi + C_1$$

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{g}{l} \cos\varphi + C_1 \text{ no sākuma apstākļiem pie } t_0=0; \varphi=\varphi_0 \text{ un } \dot{\varphi}=\dot{\varphi}_0$$

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{g}{l} \cos\varphi_0 + C_1 \quad \text{atvilksim no iepriekšējā}$$

$$\boxed{\frac{\dot{\varphi}^2}{2} - \frac{\dot{\varphi}_0^2}{2} = \frac{g}{l} (\cos\varphi - \cos\varphi_0)} \quad \text{I integrāls....(138)}$$

To pašu pirmo integrālu var iegūt arī ar spara teorēmas palīdzību

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \int_{s_0}^s (\vec{F} \cdot d\vec{s}) = \int_{s_0}^s F_t \cdot ds$$

aizvietosim  $F_t = mg \sin\varphi$ ,  $ds = -l d\varphi$  un  $V = -l\dot{\varphi}$ ,  $V_0 = -l\dot{\varphi}_0$ , tad

$$\frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} - \frac{ml^2\dot{\varphi}_0^2}{2} = - \int_{\varphi_0}^{\varphi} mg \sin\varphi \cdot l d\varphi$$

$$\boxed{\frac{\dot{\varphi}^2}{2} - \frac{\dot{\varphi}_0^2}{2} = \frac{g}{l} (\cos\varphi - \cos\varphi_0)} \quad \text{.....(138)}$$

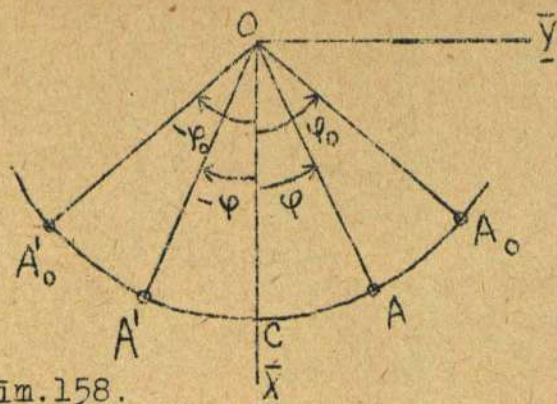
I integrāls. Formula iegūta citā ceļā.

Izpētīsim kustību uz I integrāla pamata.

Pirmais integrāls nemaz nemainās, ja pārmainām  $\angle\varphi$  un  $\dot{\varphi}$  zīmes, tas nozīmē, ka kustība ir simmetriskā attiecībā uz  $\bar{X}$  asi un varētu sākties arī otrā pusē punktā  $A'_0$ . Sk.zīm.158.

Tālāk noteiksim, cik augsti punkts uzkāps, tai. uziesim, pie kāda  $\varphi$  būs  $V = 0$

$$0 - \frac{\dot{\varphi}_0^2}{2} = \frac{g}{l} (\cos\varphi - \cos\varphi_0) \text{ no kurienes}$$



zīm.158.

laika mērīšanai, tad tādām svārstām sākuma ātruma nedod  $V_0=0$  un līdz ar to arī nol-mā (138) jāliek  $\dot{\varphi}_0 = 0$ .

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{g}{l} (\cos\varphi - \cos\varphi_0), \text{ izvilksim kvadratsakni}$$

$$\dot{\varphi} = \pm \sqrt{\frac{g}{l}} \sqrt{2(\cos\varphi - \cos\varphi_0)} \quad \text{zīmi jāizvēl (-), jo } \varphi \text{ ar laiku samazinājas}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = - \sqrt{\frac{g}{l}} \sqrt{2(\cos\varphi - \cos\varphi_0)} \quad \text{šķirot nezināmos, integrēsim no } A_0 \text{ līdz } A$$

$$t - t_0 = - \sqrt{\frac{g}{l}} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\varphi_0)}} \quad \text{bet skaitot laiku no } A_0 \text{ iznāk } t_0=0$$

$$\text{un pārlietot robežas} \quad t = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\varphi}^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\varphi_0)}} \quad \dots\dots\dots(139)$$

$$\text{Aizvietosim } \cos\varphi = 1 - 2\sin^2 \frac{\varphi}{2} \text{ un } \cos\varphi_0 = 1 - 2\sin^2 \frac{\varphi_0}{2}$$

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\varphi}^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{2\sqrt{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}$$

Tālāk ievēdīsim substitūciju  $\frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2}} = \sin \theta$ , jo  $\varphi < \varphi_0$  un apzīmēsim

$\sin \frac{\varphi_0}{2} = k$ , tad  $\sin \frac{\varphi}{2} = k \sin \theta$  un  $\frac{\varphi}{2} = \arcsin(k \sin \theta)$ ; diferencēsim

$$\frac{d\varphi}{2} = \frac{d(k \sin \theta)}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} = \frac{k \cos \theta \cdot d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}, \text{ bez tam, ja } \varphi = \varphi_0, \text{ tad } \sin \theta = 1, \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \frac{k \cos \theta \cdot d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} \sqrt{k^2 - k^2 \sin^2 \theta}} = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}$$

Ar šo integrālu izteicās laiks, kādā punkts noiet no  $A_0$  līdz  $A$ , bet ja mēs gribam atrast svārstīšanās periodu, tad meklēsim laiku, kurā punkts nonāks līdz  $C$ .

Attiecīgais laiks būs  $\frac{T}{4}$  un apakšējā integrēšanas robeža pēc  $\varphi$  būtu  $0$ , bet ja  $\varphi = 0$ , tad arī  $\theta = 0$  un

$$\boxed{\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \dots \dots \dots (140)}$$

Tas ir pirmās kārtas elliptiskais integrāls, kas nav atrodamas galīgā veidā, bet no tabelēm, jeb ar rindu palīdzību.

Izvirzīsim  $\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} = (1 - k^2 \sin^2 \theta)^{-\frac{1}{2}}$  pēc binoma formulas

$$(1 - x)^n = 1 - \frac{n}{1} x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots$$

$$(1 - k^2 \sin^2 \theta)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{(-\frac{1}{2})}{1} k^2 \sin^2 \theta + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{1 \cdot 2} k^4 \sin^4 \theta - \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{1 \cdot 2 \cdot 3} k^6 \sin^6 \theta + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \theta + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} k^4 \sin^4 \theta + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} k^6 \sin^6 \theta + \dots$$

jeb lietojot matemātisku saīsinājumu

$$(1 - k^2 \sin^2 \theta)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} k^{2n} \sin^{2n} \theta$$

Noskaidrosim, vai šāda rinda ir savirzama pēc kritērija  $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$

$$\left. \begin{aligned} U_{n+1} &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)(2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n(2n+2)} k^{2(n+1)} \sin^{2(n+1)} \theta \\ U_n &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} k^{2n} \sin^{2n} \theta \end{aligned} \right\} \text{izdalot dabūjam}$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{2n+1}{2n+2} k^2 \sin^2 \theta, \text{ kas acimredzot ir } < 1, \text{ tā tad}$$

rinda ir savirzama un integrālu varēs ņemt

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} k^{2n} \sin^{2n} \theta \right] d\theta$$

Bet no augstākās matemātikas

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \theta \cdot d\theta = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \cdot \frac{\pi}{2}$$

Ievērojot šo formulu, dabūsim perioda izteiksmi

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \left[ \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \right)^2 k^{2n} \frac{\pi}{2} \right]$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \right)^2 k^{2n} \right]$$

Attīstot summu iekavās un aizvietojojot  $k = \sin \frac{\varphi_0}{2}$ , atrodam

$$\boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4 \frac{\varphi_0}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \sin^6 \frac{\varphi_0}{2} + \dots \right] (141)}$$

Šī formula dod iespēju atrast T ar katru vajadzīgu noteiktību, bet tagad noskaidrosim, cik locekļiem ir praktiska nozīme.

Pieņemsim, ka  $\varphi_0 = 8^\circ$ , tad  $\sin \frac{\varphi_0}{2} = \sin 4^\circ = 0,06976 \approx 0,07$ ;

$\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} = 0,0049$  un otrais loceklis  $(\frac{1}{2})^2 \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} = 0,0012$ . Tā tad, ja pietiek ar divām decimālvietām, varam otru locekli atņemt, un tad

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \text{Perioda formula, ja } \varphi_0 \leq 8^\circ \dots\dots\dots(142)$$

Noteiktāku formulu dabūsim, atstājot otru locekli, bet pielīdzinot  $\sin \varphi_0 = \varphi_0$  maziem leņķiem

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[ 1 + \frac{\varphi_0^2}{16} \right] \dots\dots\dots(143)$$

Matematiskā svārsta periods nav atkarīgs no  $\varphi_0$  tikai maziem leņķiem  $\varphi_0 \leq 8^\circ$ .

Approximativa II integrāla iegūšana.

Ņemsim I integrālu, izteiktu ar formulu (139)

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\varphi}^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\varphi_0)}}$$

un izvirzīsim rindā  $\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \dots$

tāpat arī  $\cos\varphi_0 = 1 - \frac{\varphi_0^2}{2!} + \frac{\varphi_0^4}{4!} - \frac{\varphi_0^6}{6!} + \dots$

pie maziem leņķiem  $\varphi_0 \leq 8^\circ$ , varam aprobežoties ar pirmiem diviem locekļiem, atmetot pārējos, tad

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\varphi}^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{2(1 - \frac{\varphi^2}{2} - 1 + \frac{\varphi_0^2}{2})}} = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\varphi}^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}}$$

tālāk formula viegli integrējās un ja meklējam periodu, tad robežas jāņem no 0 līdz  $\varphi_0$

$$\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\varphi}^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}} = \sqrt{\frac{l}{g}} \left[ \arcsin \frac{\varphi}{\varphi_0} \right]_0^{\varphi_0} = \sqrt{\frac{l}{g}} (\arcsin 1 - \arcsin 0)$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \dots\dots\dots(142)$$

Mēs dabūjam to pašu rezultātu citā ceļā.

Tuvenais atrisinājums maziem leņķiem.

Iziesim no dif-nol-ma (137)

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \sin\varphi$$

Ja leņķis  $\varphi$  ir mazs, mēs varam pielīdzināt  $\sin\varphi = \varphi$  un tad  $\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \varphi$

Tas ir pazīstams dif-nol-ms veidā  $\ddot{x} = -k^2 x$ , kura integrāls bija formula (24)  $x = a \sin(kt + \alpha)$  un periods pēc formulas (29)  $T = \frac{2\pi}{k}$

Mūsu gadījumā  $k^2 = \frac{g}{l}$ ,  $k = \sqrt{\frac{g}{l}}$  un periods iznāk

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \dots\dots\dots(142)$$

Atkal dabūjam to pašu rezultātu, bet tikai maziem leņķiem.



Matemātiskāisvārsta reakciju varētu atrast no dif-nol-ma pēc Eulera normales virzienā, bet mēs viņu apskatīsim vēlāk ar d'Alembert'a principa palīdzību.

Sekundes svārsta garums.

Par sekundes svārstu sauc tādu, kuram pusperiods  $\frac{T}{2} = 1$  sec. Ja viņa garumu apzīmēsim ar  $l_s$ , tad

$$\pi \sqrt{\frac{l_s}{g}} = 1 \text{ un } l_s = \frac{g}{\pi^2} = 0,994 \text{ mtr.} \approx 1 \text{ mtr.}$$

Tautochronas nolīdzinājuma uzstādīšana.

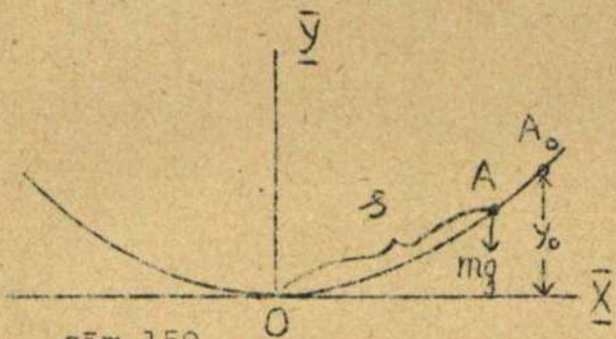
Cikloidālais svārsts.

Kā mēs nupat redzējam, matemātiskam svārstam kustības periods vispārīgi ir atkarīgs no sākuma stāvokļa, t.i. no  $\varphi_0$ , bet tikai maziem leņķiem līdz  $\varphi_0 \leq 8^\circ$  var skaitīt periodu par Const. lielumu.

Meklēsim tagad tādu līniju, uz kuras smagam materiālam punktam svārstīšanas periods nemaz nebūtu atkarīgs no sākuma stāvokļa. Šādu līniju sauc par tautochronu. Kā mēs redzēsim zemāk, tautochrona ir cikloida.

Meklējamā līnija acimredzot būs simmetriskā attiecībā uz vertikālu asi, kuru izvēlēsim par Y-asi un kuras viszemākā punktā O ņemsim OX asi horizontālā virzienā. Pieņemsim, ka kustība sākas punktā  $A_0$  ar ordināti  $y_0$  bez sākuma ātruma, t.i.  $V_0 = 0$ . Darbojās tikai smaguma spēks  $mg$ , kura projekcijas uz izvēlētajām asīm  $X = 0$  un  $Y = -mg$ .

Uziet saites nol-mu  $f(xy) = 0$  tā, lai  $T = \text{Const.}$  pie katra  $y_0$ .



zīm.159.

Ņemsim kustības dif-nol-mus saistītam punktam plāknē.

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} \\ m\ddot{y} &= Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned} \right\}$$

ievietojot spēka projekcijas un izslēdzot  $\lambda$ , dabūjam

$\frac{m\ddot{x}}{\partial f / \partial x} = \frac{m\ddot{y} + mg}{\partial f / \partial y}$ , ņemsim klāt nol-ma diferenciālu  $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0$ , no

kurienes  $\frac{\partial f}{\partial x} dx = - \frac{\partial f}{\partial y} dy$  un pareizināsim šo ar dif-nol-mu

$m\ddot{x} \cdot dx = -(m\ddot{y} + mg)dy$ , saīsināsim  $m$  un pārveidosim  $\frac{dx}{dt} dx + \frac{dy}{dt} dy = -gdy$

bet  $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$  un  $\frac{dy}{dt} = \dot{y}$ , tad iznāk  $\dot{x}dx + \dot{y}dy = -gdy$

jeb  $d \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} = -gdy$ , bet  $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = V^2$ ;  $d \frac{V^2}{2} = -gdy$ , tagad integrēsim

$\frac{V^2}{2} = -gy + C$  un no sākuma apstākļiem  $0 = -gy_0 + C$ , atvelkot šo no pirmā, atrodam  $V^2 = 2g(y_0 - y)$ .

Šo formulu varētu dabūt arī no spara teorēmas

$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \int_{x_0 y_0 z_0}^{xyz} Xdx + Ydy + Zdz$ , bet  $V_0 = 0$ ,  $X = 0$ ,  $Y = -mg$ ,  $Z = 0$   
 $\frac{mV^2}{2} = -mg(y - y_0)$  un  $V^2 = 2g(y_0 - y)$

Tālāk izvilksim kvadrātsakni  $V = \sqrt{2g(y_0 - y)}$

Apzīmēsim ar  $s$  loka garumu, pie kam atskaitīsim viņu virzienā pret kustību no  $O$  uz  $A_0$ , tad  $v = - \frac{ds}{dt}$  un  $\frac{ds}{dt} = - \sqrt{2g(y_0 - y)}$

Meklēsim no šīs formulas laiku, ņemot  $dt = - \frac{ds}{\sqrt{2g(y_0 - y)}}$  un integrējot no  $A_0$  līdz  $A$

$$t = - \int_{s_0}^s \frac{ds}{\sqrt{2g(y_0 - y)}} = \int_s^{s_0} \frac{ds}{\sqrt{2g(y_0 - y)}}$$

Lai dabūtu laiku, kurā punkts noies līdz koordinātu sākumam  $O$ , integrēšanas robežas jāņem no  $O$  līdz  $s_0$ , bet šis laiks ir  $\frac{T}{4}$ , kuram pēc noteikuma jābūt neatkarīgam no sākuma stāvokļa,  $t, i. no y_0$ .

$$\frac{T}{4} = \int_0^{s_0} \frac{ds}{\sqrt{2g(y_0 - y)}} \dots\dots\dots(144)$$

Lai noskaidrotu, pie kādiem apstākļiem integrāls labā pusē nebūs atkarīgs no  $y_0$  un arī no  $s_0$ , uzrakstīsim viņu tā

$$\frac{T}{4} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{s_0} (y_0 - y)^{-\frac{1}{2}} ds \text{ un saliksim rindā}$$

$$(y_0 - y)^{-\frac{1}{2}} = y_0^{-\frac{1}{2}} - (-\frac{1}{2})y_0^{-\frac{3}{2}} \cdot y + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{1 \cdot 2} y_0^{-\frac{5}{2}} \cdot y^2 - \dots$$

$$\text{tad } \frac{T}{4} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{s_0} \left[ \frac{1}{y_0^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{y_0^{\frac{3}{2}}} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{y^2}{y_0^{\frac{5}{2}}} + \dots \right] ds$$

$$\frac{T}{4} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \left[ \int_0^{s_0} \frac{ds}{y_0^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2} \int_0^{s_0} \frac{y ds}{y_0^{\frac{3}{2}}} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \int_0^{s_0} \frac{y^2 ds}{y_0^{\frac{5}{2}}} + \dots \right]$$

Acimredzot, lai pirmais loceklis  $\int_0^{s_0} \frac{ds}{y_0^{\frac{1}{2}}} = \frac{s_0}{y_0^{\frac{1}{2}}}$  nebūtu atkarīgs no sākuma stāvokļa jālīdzinājās  $\frac{s_0}{y_0^{\frac{1}{2}}} = k$ , bet šim noteikumam jābūt izpildītam priekš katra  $y_0$ , tā tad vispārīgi  $\frac{s}{y^{\frac{1}{2}}} = k$  jeb  $s^2 = k^2 y$  .....(145)

Pārbaudot citus locekļus redzam, ka arī viņi pie tā paša noteikuma nebūs atkarīgi no sākuma atāvokļa un

$$\frac{T}{4} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \left[ k + \frac{1}{2} \int_0^{s_0} \frac{s^2 ds}{k^2 y_0^{\frac{3}{2}}} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \int_0^{s_0} \frac{s^4 ds}{k^4 y_0^{\frac{5}{2}}} + \dots \right]$$

$$\frac{T}{4} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \left[ k + \frac{1}{2} \cdot \frac{s_0^3}{3k^2 y_0^{\frac{3}{2}}} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{s_0^5}{5k^4 y_0^{\frac{5}{2}}} + \dots \right]$$

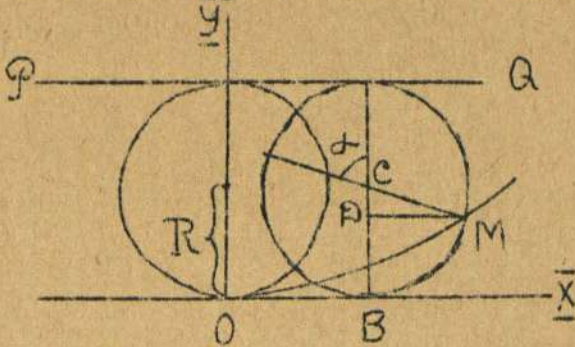
$$\frac{T}{4} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \left[ k + \frac{1}{2} \cdot \frac{k^3 y_0^{\frac{3}{2}}}{3k^2 y_0^{\frac{3}{2}}} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{k^5 y_0^{\frac{5}{2}}}{5k^4 y_0^{\frac{5}{2}}} + \dots \right]$$

$$\frac{T}{4} = \frac{k}{\sqrt{2g}} \left[ 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7} + \dots \right] \dots\dots\dots(146)$$

Tā tad atrastais formulā (145) noteikums  $s^2 = k^2 y$  dod sakaru starp  $s$  un  $y$ , pie kuŗa kustības periods nebūs atkarīgs no sākuma apstākļiem, jeb ar citiem vārdiem sakot tas ir meklējamās saites nol-ms

$$\boxed{s^2 = k^2 y} \quad \text{saites nol-ms}$$

Pierādīsim tagad, ka šis nol-ms nav nekas cits kā cikloidas nol-ms.



Lai dabūtu cikloīdu ar izliekumu uz leju, liksim riņķim ar rādīusu  $R$  velties nevis uz  $\bar{x}$  ass, bet uz taisnes  $PQ$ , kuŗa ir paralēla  $\bar{x}$  asij, un atrodas attālumā  $2R$  no viņas. Punkts, kuŗš sākumā sakrīt ar koordinātu sākumu  $O$ , aprakstīs cikloīdu, kuŗas nol-mu mēs tagad izvedīsim. Pieņemsim, ka riņķis ir pārgājis jaunā vietā tā, ka viņa centrs atrodas punktā  $C$ . Punkts, kuŗš apraksta cikloīdu, atrodas punktā  $M$ , viņa koordinātes apzīmēsīm ar  $x$  un  $y$ . Ap-

zīm.160.

zīmējot vēl lenķi, par kuŗu riņķis ir pagriezies ar  $\alpha$ , izteiksim punkta koordinātes

$$x = OB + MD = R\alpha + R\sin\alpha$$

$$\boxed{x = R(\alpha + \sin\alpha)}$$

$$y = CB - CD = R - R\cos\alpha$$

$$\boxed{y = R(1 - \cos\alpha)}$$

Mēs atradam cikloidas nol-mus parametra veidā, pierādīsim, ka viņi ir vienvērtīgi nol-mam (145)

$$s^2 = k^2 y$$

$$\text{Ņemsim loka elementu } ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Sastādīsim

$$dx = R(1 + \cos\alpha) \cdot d\alpha$$

$$dy = R\sin\alpha \cdot d\alpha$$

$$ds = R \cdot d\alpha \cdot \sqrt{1 + \cos^2\alpha + 2\cos\alpha + \sin^2\alpha} = R d\alpha \cdot \sqrt{2(1 + \cos\alpha)}$$

$$ds = 2R \cos \frac{\alpha}{2} d\alpha \quad \text{un integrējot}$$

$$s = 2R \int \cos \frac{\alpha}{2} d\alpha + C = 4R \sin \frac{\alpha}{2} + C$$

bet sākumā  $s_0 = 0$  un  $\alpha_0 = 0$ , tā tad arī  $C = 0$

$$s = 4R \sin \frac{\alpha}{2}$$

Tagad no otra cikloidas nol-ma  $y = 2R \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ , no kurienes  $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{y}{2R}}$  un ievietojot šo  $s$  formulā, dabūsim  $s = 4R \sqrt{\frac{y}{2R}}$  un ceļot kvadrātā, atrodam

cikloidas nol-mu

$$\boxed{s^2 = 8R \cdot y}$$

Kā redzams mēs dabūjam cikloidas nol-mu tanī pašā veidā  $s^2 = k^2 y$  un pielīdzinot koeficientus, atrodam  $k^2 = 8R$  jeb  $k = 2\sqrt{2R}$ .

Cikloīdala svārsta perioda noteikšana: Lai noteiktu periodu atkarībā no cikloīdu veidojošā riņķa rādīusa  $R$ , varētu paņemt formulu (146) un ielik  $k = 2\sqrt{2R}$

$$\frac{T}{4} = \frac{2\sqrt{2R}}{\sqrt{2g}} \left[ 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7} + \dots \right]$$

Bezgalīgas rindas iekavās summas robeža ir  $\frac{\pi}{2}$ , no kurienes  $T = 8\sqrt{\frac{R}{g}} \cdot \frac{\pi}{2}$ ,

$$\boxed{T = 4\pi \sqrt{\frac{R}{g}}} \dots \dots \dots (147)$$

To pašu var dabūt arī citādi: izejot no spara teorēmas tāpat kā agrāk mēs nonāksim pie formulas (144)

$$\frac{T}{4} = \int_0^{s_0} \frac{ds}{\sqrt{2g(y_0 - y)}}, \text{ tālāk aizvietosim viņā } y = \frac{s^2}{k^2} \text{ un } y_0 = \frac{s_0^2}{k^2} \text{ no formu-}$$

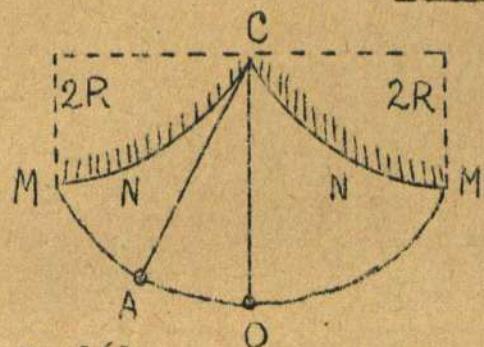
las (145), tad

$$T = \frac{4k}{\sqrt{2g}} \int_0^{s_0} \frac{ds}{\sqrt{s_0^2 + s^2}} = \frac{4k}{\sqrt{2g}} \left[ \arcsin \frac{s}{s_0} \right]_0^{s_0} = \frac{4k}{\sqrt{2g}} \left[ \arcsin 1 - \arcsin 0 \right]$$

liekot atkal  $k = 2\sqrt{2R}$ , dabūsim galīgi  $T = \frac{8\sqrt{2R}}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{\pi}{2}$

$$T = 4\pi \sqrt{\frac{R}{g}} \dots \dots \dots (147)$$

Cikloidāla svārsta konstrukcija.



Lai realizētu cikloidālu svārstu, var izlietot cikloidālas īpašību, ka viņas evolvente arī ir cikloida un tik pat liela.

Fiekārsim materiālu punktu ar pavedienu garumā  $OC = 4R$  punktā C un novietosim divas cikloidālas virsmas MNC simmetriski kā parādīts zīm.161 tā, lai pavediens pie punkta svārstīšanās uzstīnās uz šīm virsmām. Tad materiāls punkts aprakstīs cikloīdu MOM un viņa svārstīšanās kustībai periods būs Const. lielums, neatkarīgs no sākuma stāvokļa.

Saistīta punkta kustība uz negludas līknes telpā.

Pieņemsim, ka līkne ir dota ar divām virsmām

- 1)  $f_1(xyz) = 0$
- 2)  $f_2(xyz) = 0$

Tāpat kā pie kustības uz negludas virsmas berzes spēks ir virzīts pretīm ātruma vektoram un ir proporcionāls normālai reakcijai

$$S_t = \mu S_n$$

Proporcionālītātes koeficients ir jau agrāk minētais dinamiskais berzes koeficients. Vispārīgi saistītā punkta dif-nol-ms ir  $m\vec{j} = \vec{F} + \vec{S}$ . Tālāk

zīm.162. atrisinājumu var vest divējādi: I projicējot šo

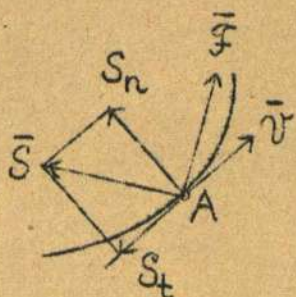
nol-mu uz tangenti un normāli pēc Eulera, jeb II uz nekustosām asīm. I kustības noteikšanas metode. Projicējot dif-nol-mu uz tangenti jāņem vērā, ka  $S_t$  ir arvienu virzīts pret kustības viņš ir pasīvs spēks un viņa projekcija uz tangenti jāskaita par negatīvu

$$\left. \begin{array}{l} 1) m j_t = F_t - S_t \\ 2) m j_n = F_n + S_n \end{array} \right\} \text{ jeb } \left\{ \begin{array}{l} 1) m \frac{dV}{dt} = F_t - \mu S_n \\ 2) m \frac{V^2}{\rho} = F_n + S_n \end{array} \right\} \dots \dots \dots (148)$$

no šiem nol-miem viegli var izslēgt reakciju

$$m \frac{dV}{dt} = F_t - \mu \left( m \frac{V^2}{\rho} - F_n \right)$$

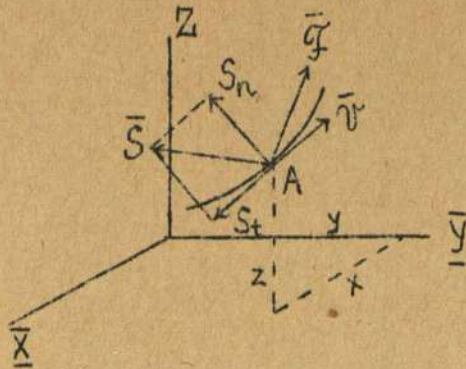
un ja izdosies viņu nointegrēt, dabūsim pirmo integrālu  $V = \Phi(t)$ . Pēc tam var aizvietot  $V = \frac{ds}{dt}$ , integrēt otru reizi  $s = \int \Phi(t).dt + C$  un beidzot ar saites nol-mu palīdzību pāriet uz koordinātēm un noteikt kustību.



II kustības noteikšanas metode. Ņemsim to pašu kustības dif-nol-mu saistītam punktam, bet rakstīsim reakciju no katras virsmas atsevišķi

$$m\vec{j} = \vec{F} + \vec{S}_1 + \vec{S}_2$$

projecējot viņu uz nekustošām asīm un izdarot tos pašus pārveidojumus kā vienas virsmas gadījumā, dabūsim pēc analogijas ar nol-miem (128)



zīm.163.

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= X + \lambda_1 \left( \frac{\partial f_1}{\partial x} + \mu \Delta_1 \frac{\dot{x}}{V} \right) + \lambda_2 \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} + \mu \Delta_2 \frac{\dot{x}}{V} \right) \\ m\ddot{y} &= Y + \lambda_1 \left( \frac{\partial f_1}{\partial y} + \mu \Delta_1 \frac{\dot{y}}{V} \right) + \lambda_2 \left( \frac{\partial f_2}{\partial y} + \mu \Delta_2 \frac{\dot{y}}{V} \right) \\ m\ddot{z} &= Z + \lambda_1 \left( \frac{\partial f_1}{\partial z} + \mu \Delta_1 \frac{\dot{z}}{V} \right) + \lambda_2 \left( \frac{\partial f_2}{\partial z} + \mu \Delta_2 \frac{\dot{z}}{V} \right) \end{aligned} \right\} (149)$$

kur (-) zīmes jāņem, ja attiecīgais  $\lambda > 0$   
un (+) zīmes jāņem, ja attiecīgais  $\lambda < 0$

Šo nol-mu atrisināšanas metode ir šāda: pirmkārt no 3 nol-miem jāizslēdz  $\lambda_1$  un  $\lambda_2$ , tad mēs dabūsim vienu otrās kārtas dif-nol-mu, bet ar visiem 3 mainīgiem. Pēc tam no saites nol-miem

$$f_1(xyz) = 0 \quad \text{un} \quad f_2(xyz) = 0$$

jāizsaka divus mainīgos caur trešo, piemēram y un z caur x un jāievieto minētā dif-nol-mā. Tādā kārtā nonāksim pie viena otrās kārtas dif-nol-ma ar vienu mainīgo x un integrējot viņu divas reizes, dabūsim vienu kustības nol-mu  $x = f_x(t)$ . Divus pārējos kustības nol-mus uziesim no saitēm. Saites normālās reakcijas dabūsim pēc formulām

$$S_{1n} = \lambda_1 \Delta_1 \quad \text{un} \quad S_{2n} = \lambda_2 \Delta_2$$

un tangenciālās reakcijas:  $S_{1t} = \mu \lambda_1 \Delta_1$ ;  $S_{2t} = \mu \lambda_2 \Delta_2$ .

Miera stāvoklis. Materiāls punkts uz negludas līknes atradīsies mierā

tad, ja tangenss leņķa starp iedarbojošo spēku kopspēku F un līknes normālo plakni dotā punktā būs mazāks par statisko berzes koeficientu

$$\text{tg } \delta < \mu_1$$

Jeb ņemot vērā, ka  $\mu_1 = \text{tg } \varphi$ , kur  $\varphi$  ir berzes leņķis, jābūt  $\text{tg } \delta < \text{tg } \varphi$ , bet tad arī  $\delta < \varphi$ , bet  $\delta = \frac{\pi}{2} - \angle(\vec{F}\vec{V})$ , tā tad

$$\angle(\vec{F}\vec{V}) > \frac{\pi}{2} - \varphi$$

Ja tagad mēs aprakstīsim ap līknes tangenti konusu ar leņķi pie virsotnes

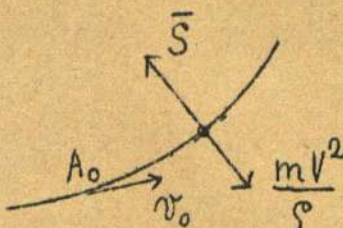
$(\frac{\pi}{2} - \varphi)$ , tad, lai punkts uz līknes atrastos mierā, iedarbojošos spēku kopspēkam F ir jāatrodas ārpus šī konusa.

Piemērs. Izpētīt punkta kustību uz līknēm telpā, ja punktam ir dots sākuma ātrums un aktīvo spēku nav.

I gadījums. Saite ir ideāla. Dots  $U_0$  un  $V_0$ . Uziet  $U = f(t)$  un S.

Ņemsim saistīta punkta kustības dif-nol-mus pēc Eulera tangentes un normales virzienā (148)

$$\left. \begin{aligned} 1) m j_t &= F_t - S_t \\ 2) m j_n &= F_n + S_n \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{bet spēks } F = 0 \text{ un ja sai-} \\ \text{te ir ideāla, arī } S_t = 0. \end{array}$$



zīm.165.

1)  $m \frac{dV}{dt} = 0$ , integrējot atrodam  $V = C_1$  un no sākuma apstākļiem  $C_1 = V_0$ .  $\frac{dU}{dt} = V_0$ , integrējot otro reizi atrodam  $U = V_0 t + C_2$  un no sākuma apstākļiem

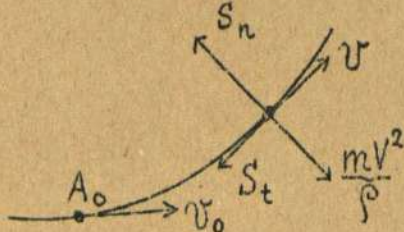
$$C_2 = U_0. \quad \text{Galīgi} \quad \boxed{U = U_0 + V_0 t}$$

Kā redzams punkts kustās uz saites vienmērīgi. Nol-mu 2)  $m j_n = S_n$  izlie-  
tojam saites reakcijas noteikšanai, no kura

$$S_n = m \frac{v^2}{\rho}, \text{ bet } v = v_0 \text{ un}$$

$$S_n = \frac{m v_0^2}{\rho}$$

II gadījums. Saite ir ar berzi. Doti  $U_0, v_0, \mu$ . Uziet  $U = f(t)$  un  $S$ .  
Atkal ņemsim tos pašus dif-nol-mus (148)



$$\begin{aligned} 1) m j_t &= F_t - S_t & \text{Bet spēks } F &= 0 \text{ un} \\ 2) m j_n &= F_n + S_n & \text{berzes spēks } S_t &= \mu S_n \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} 1) m \frac{dv}{dt} &= -\mu S_n \\ 2) m \frac{v^2}{\rho} &= S_n \end{aligned} \right\} \text{izslēgsim } S_n, \text{ tad } \frac{dv}{dt} = -\mu \frac{v^2}{\rho}$$

zīm.166.

pārveidosim kreiso pusi

$$\frac{dv}{dt} \cdot \frac{dU}{dt} = -\mu \frac{v^2}{\rho}$$

$$v dv = -\mu \frac{v^2}{\rho} dU$$

$$\frac{dv}{v} = -\mu \frac{dU}{\rho}$$

tagad integrēsim, ievērojot, ka vis-  
pārīgi  $\rho = f(U)$

$$\ln v = -\mu \int \frac{dU}{\rho} + C_1$$

no sākuma apstākļiem

$$\ln v_0 = -\mu \int_{U_0}^{U_0} \frac{dU}{\rho} + C_1$$

un atvelkot otru no pirmā

$$\begin{aligned} \ln v - \ln v_0 &= -\mu \int_{U_0}^U \frac{dU}{\rho} \\ \ln \frac{v}{v_0} &= -\mu \int_{U_0}^U \frac{dU}{\rho} \end{aligned}$$

$$v = v_0 e^{-\mu \int_{U_0}^U \frac{dU}{\rho}}$$

ātrums kā attāluma funkcija.

Tālāk apskatīsim apakšgadīju-  
mu, kad  $\rho = r = \text{Const}$ . Tad kustī-  
ba notiek pa riņķi un var inte-  
grēt

$$v = v_0 e^{-\frac{\mu}{r}(U-U_0)}$$

ātrums kā attāluma funkcija, ja saite riņķis.

$$\text{Aizvietosim tagad } v = \frac{dU}{dt}$$

$$\frac{dU}{dt} = v_0 e^{-\frac{\mu}{r}(U-U_0)}$$

un šķirot mainīgus, integrēsim otro reizi

$$\int e^{\frac{\mu}{r}(U-U_0)} \cdot dU = \int v_0 dt + C_2$$

$$\frac{r}{\mu} e^{\frac{\mu}{r}(U-U_0)} = v_0 t + C_2, \text{ pie } t = 0, U = U_0 \text{ un } C_2 = \frac{r}{\mu}$$

$$\frac{r}{\mu} e^{\frac{\mu}{r}(U-U_0)} = v_0 t + \frac{r}{\mu} \text{ izdalīsim uz } r \text{ un pareizināsim ar } \mu$$

$$e^{\frac{\mu}{r}(U-U_0)} = \frac{\mu}{r} v_0 t + 1 \text{ logaritmēsim naturāli}$$

$$\frac{\mu}{r} (U - U_0) = \ln(1 + \frac{\mu}{r} V_0 t) \quad \text{un atrisināsim attiecībā uz } U$$

$$U = U_0 + \frac{r}{\mu} \ln(1 + \frac{\mu}{r} V_0 t)$$

kustības likums pa riņķi ar berzi.

Tagad varam izteikt arī ātrumu kā laika funkciju, ievērojot, ka

$$e^{-\frac{\mu}{r}(U-U_0)} = (1 + \frac{\mu}{r} V_0 t)^{-1}$$

$$V = \frac{V_0}{1 + \frac{\mu}{r} V_0 t}$$

ātrums kā laika funkcija, ja saite ir riņķis.

Kā redzams ātrums ar laiku samazinājās.

Saites reakcijas. Normālo reakciju uziesim no nol-ma 2)  $S_n = \frac{mV^2}{r}$  un, ja saite ir riņķis,  $S_n = \frac{mV_0^2}{r}$ , ievietojot atrasto  $V$ , dabūsim

$$S_n = \frac{mV_0^2}{r(1 + \frac{\mu}{r} V_0 t)^2}$$

Tangenciāla reakcija

$$S_t = \mu S_n,$$

$$S_t = \frac{\mu m V_0^2}{r(1 + \frac{\mu}{r} V_0 t)^2}$$

Punkta kustība uz ideālām rheonomām saitēm.

Rheonomas saites nol-ms raksturojās ar to, ka viņā atklātā veidā ieiet laiks. Fizikāli tas nozīmē, ka saite vai nu pate atrodās kustībā jeb deformējās. Rheonomas saites var būt divpusīgas un vienusīgas. Vienosimies divpusīgas rheonomas saites nol-mu rakstīt tā, lai labā pusē būtu nulle.

$f(xyzt) = 0$  ir rheonomas divpusīgas virsmas nol-ms.

Vienpusīgas rheonomas saites nol-mu rakstīsīm tā, lai  $f(xyzt)$  būtu  $> 0$ , ja dodam koordinātēm pieaugumu uz to pusi, kur punkts no saites var noiet, tā tad  $f(xyzt) \geq 0$  ir rheonomas vienusīgas virsmas nol-ms.

Rheonoma saite līknes veidā būs izteikta ar divām virsmām

$$f_1(xyzt) = 0 \quad \text{un} \quad f_2(xyzt) = 0.$$

Arī rheonomas virsmas pozitīva normale veido ar koordinātu asīm leņķus, kuru cosinusi

$$\cos(\overline{XN}) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\Delta} \quad ; \quad \cos(\overline{YN}) = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\Delta} \quad ; \quad \cos(\overline{ZN}) = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\Delta}$$

$$\text{kur } \Delta = + \sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2 + (\frac{\partial f}{\partial z})^2}$$

Šeit parciālos atvasinājumos jāievieto tāda punkta koordinātes, kādā mēs velkam normāli, bet  $t$  vietā to laika momentu, kādā mēs apskatām normas stāvokli.

Punkta ātrums, ja viņam ir rheonoma saite.

Rheonoma saite virsmas veidā ir  $f(x,y,z,t) = 0$ . Diferencēsim, saites nol-mu pēc laika

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

Izdalīsim visu nol-mu ar augšā minēto saites diferenciālo parametru

$$\Delta = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}, \text{ tad}$$

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\Delta} V_x + \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\Delta} V_y + \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\Delta} V_z + \frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{\Delta} = 0$$

$$\text{Cos}(\overline{XN}) \cdot V \text{Cos}(\overline{XV}) + \text{Cos}(\overline{YN}) \cdot V \text{Cos}(\overline{YV}) + \text{Cos}(\overline{ZN}) \cdot V \text{Cos}(\overline{ZV}) + \frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{\Delta} = 0$$

Nemsim pirmos trīs locekļos V aiz iekavām

$$V \text{Cos}(\overline{VN}) + \frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{\Delta} = 0 \text{ jeb}$$

$$V \text{Cos}(\overline{VN}) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}} \dots\dots\dots(150)$$

Formula (150) izsaka noteikumu, kādu uzliek rheonomas saites eksisten- ce punktam, ja tas kustās uz saites: punkta ātruma projekcijai uz nor- mali jālīdzinājas noteiktai vērtībai, kura atkarās no rheonomas virs- mas veida un viņas kustības.

Lai izskaidrotu šīs formulas nozīmi, apskatīsim piemēru.

Piemērs. Punkta saite ir  $x \text{Cos} \omega_0 t + y \text{Sin} \omega_0 t - \ell = 0$ . Ar šo nol-mu ir izteikta plakne paralēla Z-asiņ, kura vienmērīgi griežas ap viņu nemai- not attālumu  $\ell$  no pēdējās.

Sastādīsim  $\frac{\partial f}{\partial x} = \text{Cos} \omega_0 t$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = \text{Sin} \omega_0 t$ ,  $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ , tā tad  $\Delta = 1$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -x \omega_0 \text{Sin} \omega_0 t + y \omega_0 \text{Cos} \omega_0 t$$

Formula (150) dod

$$V \text{Cos}(\overline{VN}) = x \omega_0 \text{Sin} \omega_0 t - y \omega_0 \text{Cos} \omega_0 t$$

Bet punkta A(xy) griezes kustības ātrums

$V_c = r \omega_0$  un viņa projekcijas

$$V_{cx} = V_c \text{Cos}(\overline{XV}_c) = r \omega_0 \left(-\frac{y}{r}\right) = -y \omega_0$$

$$V_{cy} = V_c \text{Cos}(\overline{YV}_c) = r \omega_0 \frac{x}{r} = x \omega_0$$

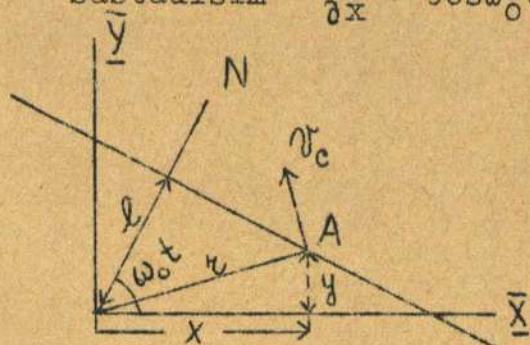
$$V \text{Cos}(\overline{VN}) = V_{cy} \text{Sin} \omega_0 t + V_{cx} \text{Cos} \omega_0 t$$

Ievērojot, ka  $\omega_0 t$  ir leņķis, kuru veido normale N ar  $\overline{X}$  asi, dabūsim

$$V \text{Cos}(\overline{VN}) = V_c \text{Cos}(\overline{YV}_c) \cdot \text{Cos}(\overline{YN}) + V_c \text{Cos}(\overline{XV}_c) \cdot \text{Cos}(\overline{NV}_c)$$

$$V \text{Cos}(\overline{VN}) = V_c \text{Cos}(V_c N)$$

Tas nozīmē, ka kustošā punkta ātruma projekcijai uz normali jālīdzinā- jās tāda punkta griezes ātruma projekcijai uz to pašu virzienu, ar kādu sakrīt dotā momentā kustošais punkts.



zīm.



Ja kustoša punkta saite ir dota līknes veidā ar divām virsmām  $f_1(x,y,z,t)=0$  un  $f_2(x,y,z,t)=0$ , tad acīmredzot sacīto var attiecināt uz katru virsmu atsevišķi un mēs dabūsim divus noteikumus

$$VCos(\overline{VN}_1) = \frac{-\frac{\partial f_1}{\partial t}}{\sqrt{(\frac{\partial f_1}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f_1}{\partial y})^2 + (\frac{\partial f_1}{\partial z})^2}} \quad \text{un} \quad VCos(\overline{VN}_2) = \frac{-\frac{\partial f_2}{\partial t}}{\sqrt{(\frac{\partial f_2}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f_2}{\partial y})^2 + (\frac{\partial f_2}{\partial z})^2}}$$

Punkta paātrinājums, ja saite ir rheonoma.

Rheonomas saites  $f(x,y,z,t)=0$  pirmais diferenciāls pēc laika bija

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

Sastādīsim otro diferenciālu pēc t

$$\begin{aligned} \frac{d^2f}{dt^2} &= \frac{\partial f}{\partial x} \ddot{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \ddot{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \ddot{z} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \dot{x}^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \dot{y}^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \dot{z}^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \dot{x}\dot{y} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \dot{y}\dot{z} + \\ &+ 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \dot{x}\dot{z} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} \dot{x} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial t} \dot{y} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial t} \dot{z} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \end{aligned}$$

Atstāsim pirmos 3 locekļus un pārējo locekļu summu simboliski apzīmēsim ar  $f^{(2)}$ , tad

$$\frac{\partial f}{\partial x} \ddot{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \ddot{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \ddot{z} + f^{(2)} = 0$$

izdalīsim šo ar saites diferenciālo parametru  $\Delta$

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\Delta} j_x + \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\Delta} j_y + \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\Delta} j_z + \frac{f^{(2)}}{\Delta} = 0$$

$$Cos(\overline{XN}).j \quad Cos(\overline{Xj}) + Cos(\overline{YN}).j \quad Cos(\overline{Yj}) + Cos(\overline{ZN}).j \quad Cos(\overline{Zj}) + \frac{f^{(2)}}{\Delta} = 0$$

$j \quad Cos(\overline{Nj}) + \frac{f^{(2)}}{\Delta} = 0$  pareizināsim ar masu m:  $m j_n = -\frac{m f^{(2)}}{\Delta}$ , bet  $m j_n = R \quad Cos(\overline{NR})$ , kur zem R ir jāsaprot visu spēku kopspēku. Tagad iznāk, ka  $R_n = -\frac{m f^{(2)}}{\Delta}$  visu spēku kopspēka projekcijai uz normali arvienu jāliedzinājās noteiktai koordinātu funkcijai, kas ir iespējams tikai tad, ja aktīviem spēkiem  $\overline{F}$ , kurus varam izvēlēties patvaļīgi, pievienosim vēl kādu spēku  $\overline{S}$  tā, ka  $\overline{R} = \overline{F} + \overline{S}$ . Šo spēku  $\overline{S}$  izsauc saites eksistence un viņu sauc par rheonomās saites reakciju.

Tādā kārtā mēs nonākam pie tās pašas formulas saites reakcijai

$$F_n + S_n = -\frac{m f^{(2)}}{\Delta}, \quad \boxed{S_n = -F_n - \frac{m f^{(2)}}{\Delta}} \quad \dots\dots\dots(151)$$

kādu mēs dabūjam agrāk skleronomām saitēm, (sk.formulu 119), ar to starpību, ka šeit ar  $f^{(2)}$  ir apzīmēta cita koordinātu funkcija.

Kustības dif-nol-ms saistītam punktam ar rheonomu saiti būs pilnīgi identisks ar to pašu nol-mu skleronomām saitēm

$$\boxed{m\ddot{j} = \overline{F} + \overline{S}} \quad \dots\dots\dots(152)$$

Projecējot šo vektorālo nol-mu uz asīm dažādās koordinātu sistēmās, mēs dabūsim rheonomām saitēm tos pašus dif-nol-mus kā skleronomām.

Tā piemēram, Dekarta koordinātēs kustības dif-nol-mi būs

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= X + \mathcal{A} \frac{\partial f}{\partial x} \\ m\ddot{y} &= Y + \mathcal{A} \frac{\partial f}{\partial y} \\ m\ddot{z} &= Z + \mathcal{A} \frac{\partial f}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{pie saites virsmas} \\ \text{veidā} \dots\dots\dots(153) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{un} \quad m\ddot{x} &= X + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} \\ m\ddot{y} &= Y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ m\ddot{z} &= Z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} m\ddot{x} \\ m\ddot{y} \\ m\ddot{z} \end{aligned}} \right\} \begin{array}{l} \text{pie saites l\u00edk-} \\ \text{nes veid\u00e1 .....} \end{array} (154)$$

\u0160o kust\u00edbas dif-nol-mu atrisin\u00e1\u0161anas metode ar\u00ed rheonom\u00e1m sait\u00e9m neat\u0161kir\u00e1s no agr\u00e1k apskat\u00edt\u00e1s metodes skleronom\u00e1m sait\u00e9m, tikai j\u00e1piez\u00edm\u00e9, ka pie  $\lambda$  un  $\Delta$  noteik\u0161anas dot\u00e1 moment\u00e1 var uzskat\u00edt laiku  $t$  par Const., bet pie t\u00e1l\u00e1k\u00e1m oper\u00e1cij\u00e1m, piem\u00e9ram, sast\u00e1dot saites pilnu atvasin\u00e1jumu p\u00e9c laika, j\u00e1ska\u00edta laiku  $t$  par main\u00edgu lielumu.

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

Kust\u00edbas s\u00e1kuma apst\u00e1k\u0137\u00edem  $x_0, y_0, z_0$  j\u00e1b\u00fct izv\u00e9l\u00e9tiem t\u00e1, lai vi\u00f1i pie  $t = t_0$  apmierin\u00e1tu saites nol-mu. T\u00e1pat ar\u00ed s\u00e1kuma \u00e1truma projekcij\u00e1m  $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$  j\u00e1apmierina pie  $t = t_0$  aug\u0161\u00e1 uzrakst\u00edto nol-mu  $\frac{df}{dt} = 0$ .

T\u00e1d\u00e1 pa\u0161\u00e1 k\u00e1rt\u00e1 k\u00e1 skleronom\u00e1m sait\u00e9m varam uzst\u00e1d\u00edt ar\u00ed kust\u00edbas dif-nol-mus rheonom\u00e1m sait\u00e9m cit\u00e1s koordin\u00e1tu sist\u00e9m\u00e1s:

- 1) p\u00e9c Eulera tangentes un normales virzien\u00e1,
- 2) pol\u00e1rkoordin\u00e1t\u00e9s plakn\u00e9,
- 3) cilindra koordin\u00e1t\u00e9s telp\u00e1.

Atrisin\u00e1\u0161anas metodes ar\u00ed ir t\u00e1s pa\u0161as jau agr\u00e1k apskat\u00edt\u00e1s.

Reakcijas noteik\u0161ana. Kas attiecas uz saites reakcijas noteik\u0161anu, tad m\u00e9s varam lietot t\u00e1s pa\u0161as metodes un formulas k\u00e1 skleronom\u00e1m sait\u00e9m, t.i. p\u00e9c projekcij\u00e1m jeb lietojot formulu  $S = \lambda \cdot \Delta$ , iz\u00f1emot tikai

formulu (119):  $S_n = -F_n - \frac{mf^{(2)}}{\Delta}$  jo \u0161in\u00ed formul\u00e1  $f^{(2)}$  ir tagad cita funkcija.

Spara teor\u00e9ma rheonom\u00e1m sait\u00e9m. Ja saite ir rheonoma, tad vi\u00f1a ar laiku kust\u00e1s jeb d\u00e9form\u00e1cijas. Pie\u00f1emsim, ka par laika spr\u00eddi  $dt$  saite ir p\u00e1rg\u00e1jusi no (1) st\u00e1vok\u0137\u00e1 (2), un punkts uz saites ir p\u00e1rg\u00e1jis no  $A$  l\u00eddz  $A_1$ , bet \u0113mot v\u00e9r\u00e1 ar\u00ed saites kust\u00edbu, punkts ir non\u00e1cis punkt\u00e1  $A_1'$ . Pie \u0161\u00e1da p\u00e1rvietoju\u0113a, k\u00e1 redzams, reakcija  $S_n$  vairs neb\u00fas perpendikul\u00e1ra  $ds$  un element\u00e1rais darbs  $(\vec{S} \cdot d\vec{s}) \neq 0$ .

Tas noz\u00edm\u00e9, ka spara teor\u00e9ma t\u00e1d\u00e1 veid\u00e1, k\u00e1d\u00e1 m\u00e9s vi\u00f1u lietojam br\u00edvam punktam un ar\u00ed skleronom\u00e1m sait\u00e9m, \u0161eit neder.

z\u00edm. 167.

To pa\u0161u varam pier\u00e1d\u00edt ar\u00ed analitiski: \u0113msim spara teor\u00e9mu saist\u00edtam punktam

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \int_{x_0 y_0 z_0}^{xyz} (X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}) dx + (Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}) dy + (Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z}) dz$$

un p\u00e1rveidosim labo pusi

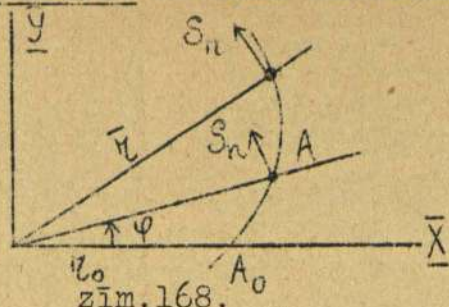
$$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \int_{x_0 y_0 z_0}^{xyz} X dx + Y dy + Z dz + \lambda \int_{x_0 y_0 z_0}^{xyz} \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

Pie skleronom\u00e1m sait\u00e9m otrs integr\u00e1ls l\u00eddzin\u00e1j\u00e1s nullei, jo vi\u00f1\u0161 reprezent\u00e9 pilnu diferenci\u00e1lu no  $f(xyz) = 0$ , bet ja saite ir rheonoma, tad vi\u00f1as nol-ms b\u00fas  $f(xyzt) = 0$  un pilns diferenci\u00e1ls izn\u00e1k

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0$$

K\u00e1 redzams, tad  $\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = -\frac{\partial f}{\partial t} dt \neq 0$  un spara teor\u00e9ma parast\u00e1 veid\u00e1 neder, bet tur n\u00e1k kl\u00e1t v\u00e9l otrs loceklis.

Piemērs. Noteikt materiāla punkta kustību plānē, ja viņa saite ir ideāla taisne, kurā iet caur koordinātu sākumu un vienmērīgi griežās ap pēdējo ar ātrumu  $\omega = k$ . Pieņemsim, ka nekādi spēki uz punktu nedarbojas:  $F = 0$ .



zīm.168.

Sākuma apstākļi:  $r_0 = a$ ,  $\varphi_0 = 0$  un sākuma ātrums uz saites  $\dot{r}_0 = 0$ .

Uziet: 1) kustības nol-mus,  
2) trajektoriju,  
3) ātrumu  $V = f(t)$ .

Atrisinājumu izdarīsim polārkoordinātēs.

Dif-nol-mi ir

$$1) m j_r = F_r + S_r$$

$$2) m j_c = F_c + S_c$$

bet mūsu gadījumā  $F_r = 0$ ,  $F_c = 0$  un ja saite ir ideāla  $S_r = 0$

$$1) m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = 0$$

$$2) m(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) = S$$

Firmais nol-ms, ievērojot ka  $\dot{\varphi} = \omega = k$ , pāriet nol-mā  $\ddot{r} = k^2 r$ , kura integrāls vispārīgā veidā ir  $r = Ae^{kt} + Be^{-kt}$ . Sastādīsim tālāk

$\dot{r} = Ake^{kt} - Bke^{-kt}$  un meklēsim koeficientus no sākuma apstākļiem:

pie  $t_0 = 0$ ,  $\begin{cases} A + B = a \\ Ak + Bk = 0 \end{cases}$  no kurienes  $A = B = \frac{a}{2}$  un kustības nol-ms

$$r = \frac{a}{2} (e^{kt} + e^{-kt})$$

Otru kustības nol-mu dabūsim integrējot  $\omega = \dot{\varphi} = k$ ,  $\varphi = kt + C_1$ , bet no sākuma apstākļiem  $C_1 = 0$  un  $\varphi = kt$ . Izslēdzot laiku, uziesim trajektoriju

$$r = \frac{a}{2} (e^{\varphi} + e^{-\varphi})$$

Ātrumu uziesim pēc projekcijām  $V_r = \dot{r} = \frac{ak}{2}(e^{kt} - e^{-kt})$  un

$V_c = r\dot{\varphi} = \frac{ak}{2}(e^{kt} + e^{-kt})$ . Pilns ātrums  $V = \sqrt{V_r^2 + V_c^2}$ ,

$$V = \frac{ak}{2} \sqrt{2(e^{2kt} + e^{-2kt})}$$

Kā redzams no ātruma formulas, ātrums ar laiku pieaug, līdz ar to arī punkta spars pieaug. Bet tagad rodas jautājums, kā punkta spars var pieaugt, ja uz viņu nekādi spēki nedarbojas. Šis jautājums izskaidrojams ar to, ka griežot saiti ir jāpastrādā zinamu darbu un šis darbs pāriet punkta kinētiskā enerģijā.

Reakciju dabūsim no otra dif-nol-ma  $S = m(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})$ , bet ja  $\dot{\varphi} = k$ ,

tad  $\ddot{\varphi} = 0$  un  $S = m 2 \frac{ak}{2}(e^{kt} - e^{-kt}) \cdot k$ ;  $S = mak^2(e^{kt} - e^{-kt})$

Kā redzams, arī saites reakcija ar laiku pieaug.

§ 11. D'Alembert'a princips materiālam punktam.

D'Alembert'a princips ir ļoti svarīgs mehānikas princips, kas dod iespēju visos dināmikas jautājumos pielietot statikas likumus.

D'Alembert'a princips brīvam punktam.

Ņemsim brīva punkta kustības dif-nol-mu  $m\vec{j} = \vec{F}$  un pārnesīsim visus locekļus vienā pusē, rakstot nol-mu summas veidā

$$\vec{F} + (-m\vec{j}) = 0$$

Tagad nosauksim izteiksmi iekavās par "Inerces spēku" un apzīmēsim  $\vec{J}$ , tad

$$\boxed{\vec{F} + \vec{J} = 0} \dots\dots\dots (155)$$

Ar šo ir izteikts d'Alembert'a princips, kuru formulēsīm tā: brīva punkta kustībā visi iedarbojošie spēki līdzsvarojās ar inerces spēku. Pie tam inerces spēks ir tāds fiktīvs spēks, kas ir virzīts pretīm paātrinājuma vektoram un pēc lieluma līdzinājās punkta masas reizinājumam ar viņa paātrinājumu.

D'Alembert'a principu var interpretēt arī citādi: ņemot vērā, ka brīva punkta statikas, t.i. līdzsvara nol-ms ir  $\vec{F} = 0$  un dinamikas, t.i. kustības nol-me ir  $\vec{F} + \vec{J} = 0$ , mēs varam formulēt d'Alembert'a principu arī tā: lai dabūtu brīva punkta dinamikas nol-mu, jāpieskaita statikas nol-mām inerces spēku.

Inerces spēks ir fiktīvs spēks, jo viņš faktiski uz punktu neiedarbojās, bet ir mākslīgi ievests, lai novestu dinamikas nol-mu pie statikas nol-ma.

Inerces spēka eksistenci mēs varam atklāt ar šādu eksperimentu. Ņemsim rokā akmeni, pēc I Newtona principa viņš cenšas paturēt savu miera stāvokli un ja mēs viņu sviedīsim, tad sajūtīsim rokā pretestību, pie kam šī pretestība būs jo lielāka, jo lielāka būs akmeņa masa un ar jo lielāku ātrumu un īsākā laikā mēs viņu sviedīsim. Šī pretestība ir inerces spēks, viņš iedarbojās uz ģemeslu, kas izšauc kustības maiņu, tā tad tur viņš ir reāls, kaut gan pašam punktam viņš ir fiktīvs.

Tāpat kā mēs rakstījām brīva punkta pamata dif-nol-mu  $m\vec{j} = \vec{F}$ , projekcijās uz dažādiem virzieniem, mēs varam izteikt arī d'Alemberta principu dažādās projekcijās.

Projekcijās uz nekustošām asīm:

$$\left. \begin{matrix} m\ddot{x} = X \\ m\ddot{y} = Y \\ m\ddot{z} = Z \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \text{Kustības dif-} \\ \text{nol-mi} \end{matrix} \quad \left. \begin{matrix} X + (-m\ddot{x}) = 0 \\ Y + (-m\ddot{y}) = 0 \\ Z + (-m\ddot{z}) = 0 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \boxed{X + \mathcal{J}_x = 0} \\ \boxed{Y + \mathcal{J}_y = 0} \\ \boxed{Z + \mathcal{J}_z = 0} \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} m\ddot{x} = X \\ m\ddot{y} = Y \\ m\ddot{z} = Z \end{matrix}} \right\} \begin{matrix} \text{d'Alemberta} \\ \text{princips} \end{matrix}$$

Projekcijās uz tangenti un normāli pēc Eulera:

$$\left. \begin{matrix} m j_t = F_t \\ m j_n = F_n \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \text{Kustības} \\ \text{dif-nol-mi} \end{matrix} \quad \left. \begin{matrix} F_t + (-m \frac{dV}{dt}) = 0 \\ F_n + (-m \frac{V^2}{\rho}) = 0 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \boxed{F_t + \mathcal{J}_t = 0} \\ \boxed{F_n + \mathcal{J}_n = 0} \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} m j_t = F_t \\ m j_n = F_n \end{matrix}} \right\} \begin{matrix} \text{d'Alemberta} \\ \text{princips} \end{matrix}$$

Polārkoordinātēs plaknē:

$$\left. \begin{matrix} m j_r = F_r \\ m j_c = F_c \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \text{jeb} \\ \frac{m}{r} \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\phi}) = F_c \end{matrix} \left. \begin{matrix} m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) = F_r \\ \frac{m}{r} \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\phi}) = F_c \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \text{Kustības} \\ \text{dif-nol-} \\ \text{mi} \end{matrix} \quad \left. \begin{matrix} F_r + (-m j_r) = 0 \\ F_c + (-m j_c) = 0 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \boxed{F_r + \mathcal{J}_r = 0} \\ \boxed{F_c + \mathcal{J}_c = 0} \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} m j_r = F_r \\ m j_c = F_c \end{matrix}} \right\} \begin{matrix} \text{d'Alemberta} \\ \text{princips} \end{matrix}$$

Cilindra koordinātēs:

$$\left. \begin{matrix} m j_r = F_r \\ m j_c = F_c \\ m j_z = F_z \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \text{jeb} \\ \frac{m}{r} \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\phi}) = F_c \\ m\ddot{z} = F_z \end{matrix} \left. \begin{matrix} m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) = F_r \\ \frac{m}{r} \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\phi}) = F_c \\ m\ddot{z} = F_z \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \text{kustības} \\ \text{dif-nol-} \\ \text{mi} \end{matrix} \quad \left. \begin{matrix} F_r + (-m j_r) = 0 \\ F_c + (-m j_c) = 0 \\ F_z + (-m j_z) = 0 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \boxed{F_r + \mathcal{J}_r = 0} \\ \boxed{F_c + \mathcal{J}_c = 0} \\ \boxed{F_z + \mathcal{J}_z = 0} \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} m j_r = F_r \\ m j_c = F_c \\ m j_z = F_z \end{matrix}} \right\} \begin{matrix} \text{d'Alemberta} \\ \text{princips} \end{matrix}$$

No visām apskatītām inerciē spēka projekcijām atzīmēsim vienu:

$T_n = -\frac{mV^2}{\rho}$  šo inerciē spēku sauc par centrifugālo spēku, viņš nāk priekšā arī tad, ja punkta ātrums ir Const. un ja  $\rho \neq \infty$ , t.i. ja trajektorija ir līka līnija. Centrifugālo spēka virziens, kā rāda viņa nosaukums, iet no līcības centra, t.i. sakrīt ar ārējās normāles virzienu.

D'Alembert'a princips saistītam punktam.

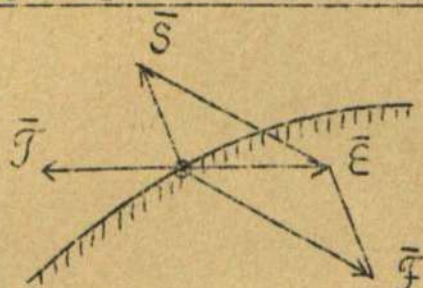
Saistīta punkta kustības dif-nol-ma bija  $m\ddot{j} = \bar{F} + \bar{S}$ . Pārnesīsim  $m\ddot{j}$  labā pusē, rakstot visu summas veidā

$$\bar{F} + \bar{S} + (-m\ddot{j}) = 0$$

Bet  $(-m\ddot{j})$  ir jau pazīstamais inerciē spēks, ievēdot viņu dabūsim

$$\boxed{\bar{F} + \bar{S} + \bar{J} = 0} \dots \dots \dots (156)$$

Ar šo ir izteikts d'Alembert'a princips saistītam punktam, kuru formulēsīm tā: saistīta punkta kustībā visi iedarbojošie spēki, saites reakcijas un inerciē spēks atrodas līdzsvarā.



Lai uzkonstruētu inerciē spēku, saskaitīsim geometriski aktīvo spēku  $\bar{F}$  ar pasīvo spēku  $\bar{S}$ , rezultātu apzīmēsim ar  $\bar{E}$  un nosauksim par efektīvo spēku

$$\bar{F} + \bar{S} = \bar{E}$$

Tagad inerciē spēks pēc lieluma līdzināsies efektīvam spēkam, bet ies pretējā virzienā.

Piezīme. Ja saite ir līka līnija, tad arī vienu inerciē spēka projekcijai uz saites

zīm.169. normali  $J_n$  jābūt virzītai no līcības centra.

Arī saistītam punktam var uzrakstīt d'Alemberta principu projekcijās uz dažādiem virzieniem, pārveidojot attiecīgus kustības nol-mus, jeb arī projecējot nol-mu (156).

Projekcijās uz nekustošām asīm

$m\ddot{x} = X + S_x$	} kustības dif-nol-mi	$X + S_x + (-m\ddot{x}) = 0$	$X + S_x + J_x = 0$
$m\ddot{y} = Y + S_y$		$Y + S_y + (-m\ddot{y}) = 0$	$Y + S_y + J_y = 0$
$m\ddot{z} = Z + S_z$		$Z + S_z + (-m\ddot{z}) = 0$	$Z + S_z + J_z = 0$

Projekcijas uz tangenti un normali pēc Eulera

$mj_t = F_t + S_t$	} kustības dif-nol-mi	$F_t + S_t + (-m \frac{dV}{dt}) = 0$	$F_t + S_t + J_t = 0$
$mj_n = F_n + S_n$		$F_n + S_n + (-\frac{mV^2}{\rho}) = 0$	$F_n + S_n + J_n = 0$

Polārkoordinātēs plaknē

$mj_r = F_r + S_r$	} jeb	$m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) = F_r + S_r$	} Kustības dif-nol-mi	$F_r + S_r + (-mj_r) = 0$	$F_r + S_r + J_r = 0$
$mj_c = F_c + S_c$				$\frac{m}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\phi}) = F_c + S_c$	$F_c + S_c + (-mj_c) = 0$

Cilindra koordinātēs

$mj_r = F_r + S_r$	} jeb	$m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) = F_r + S_r$	} Kustības dif-nol-mi	$F_r + S_r + (-mj_r) = 0$	$F_r + S_r + J_r = 0$	
$mj_c = F_c + S_c$				$\frac{m}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\phi}) = F_c + S_c$	$F_c + S_c + (-mj_c) = 0$	$F_c + S_c + J_c = 0$
$mj_z = F_z + S_z$				$m\ddot{z} = F_z + S_z$	$F_z + S_z + (-mj_z) = 0$	$F_z + S_z + J_z = 0$

Salīdzinot saistīta punkta statikas nol-mu geometriskā veidā:

$\bar{F} + \bar{S} = 0$  jeb arī dažādās koordinātu sistēmās

$$\left. \begin{array}{l} X+S_x=0 \\ Y+S_y=0 \\ Z+S_z=0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Dekarta} \\ \text{koordinā-} \\ \text{nātēs} \end{array} \left. \begin{array}{l} F_t+S_t=0 \\ F_n+S_n=0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Pēc} \\ \text{Eu-} \\ \text{lera} \end{array} \left. \begin{array}{l} F_r+S_r=0 \\ F_c+S_c=0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Polārko-} \\ \text{ordina-} \\ \text{tēs plak-} \\ \text{nē} \end{array} \left. \begin{array}{l} F_r+S_r=0 \\ F_c+S_c=0 \\ F_z+S_z=0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Cilindra} \\ \text{koordin.} \end{array}$$

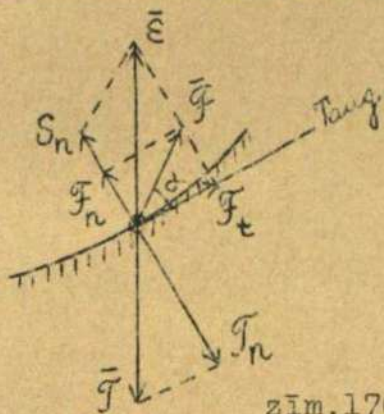
ar dinamikas nol-miem, konstatējam, ka no statikas nol-miem var pāriet uz dinamikas nol-miem, pieskaitot statikas nol-miem inerces spēku. Šī ir vēl viena d'Alembert'a principa interpretācija.

Kā jau agrāk bija aizradīts, brīvam punktam, arī saistītam punktam, inerces spēks ir fiktīvs spēks, uz pašu punktu viņš nedarbojās, bet iedarbojās uz ieneslu, kas izsauc kustības maiņu, t.i. uz saiti. Uz saiti inerces spēks iedarbojās reāli, viņš pat var laužt saiti, ko varam pārbaudīt ar sekojošu eksperimentu: piesiesim smagu bumbiņu pie pavediena gala punkta un sāksim viņu griezt tā, lai bumbiņa apraksta riņķus. Pie pietiekoši liela ātruma, pavediens, t.i. saite pārtrūks.

D'Alembert'a princips netikai dod iespēju pāriet no statikas nol-miem uz dinamikas nol-miem, viņu plaši pielieto arī reakcijas noteikšanai kā divpusīgām, tā arī vienpusīgām saitēm. Ar d'Alemberta principa palīdzību var arī noteikt, kad punkts noies no vienpusīgas saites.

Izpētīsim kustību ar d'Alembert'a principu, ja saite vienpusīga ideāla līkne.

I gadījums. Punkts kustās iekšpusē. Ja saite ir ideāla, tad reakcija iet normalā virzienā uz pozitīvo pusi.



zīm.170.

Pēc d'Alembert'a principa

$$\bar{F} + \bar{S} + \bar{J} = 0$$

Projecēsim šo nol-mu uz normali

$$F_n + S_n - J_n = 0$$

Apzīmēsim ar  $\alpha$  leņķi, kuru veido spēks  $F$  ar tangenti, atrisināsim nol-mu attiecībā uz  $S_n$

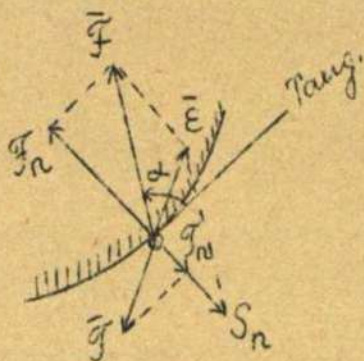
un aizvietosim  $J_n = \frac{mV^2}{\rho}$

$$S_n = \frac{mV^2}{\rho} - F \cdot \sin \alpha \quad \dots \dots \dots (157)$$

Lai punkts neietu nost no saites, jābūt  $S = S_n > 0$ . Tālāk izšķirsim divus apakšgadījumus:

- 1)  $\pi < \alpha < 2\pi$ , tad  $S_n$  ir arvienu pozitīvs un punkts no saites nevar noiet.
- 2)  $0 < \alpha < \pi$ , tad, lai punkts paliktu uz saites, jābūt  $\frac{mV^2}{\rho} > F \cdot \sin \alpha$

II. gadījums. Punkts kustās uz līknes ārpusē. Ja punkts kustās ārpusē un saite ir ideāla, tad reakcija iet arī ārējās normāles virzienā.



zīm.171.

Pēc d'Alembert'a principa

$$\bar{F} + \bar{S} + \bar{J} = 0$$

Atkal projecēsim šo nol-mu uz normāli

$$F_n - S_n - J_n = 0$$

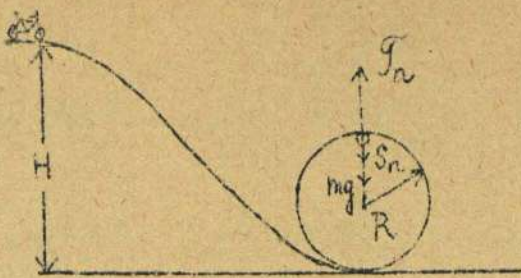
Apzīmējot ar  $\alpha$  leņķi starp spēku  $F$  un tangenti

un aizvietojojt  $J_n = \frac{mV^2}{\rho}$ , dabūsim

$$S_n = F \cdot \sin \alpha - \frac{mV^2}{\rho} \quad \dots \dots \dots (158)$$

Lai šinī gadījumā punkts neietu nost no saites, katrā ziņā jābūt  $F \cdot \sin \alpha > 0$  un  $0 < \alpha < \pi$ .

Piemērs: Uz punkta kustību iekšpus saites.



Kādā augstumā H ritenbraucējam jāpak savu kustību, lai nāves cilpes augstākā punktā A viņš nenokrīstu, pie kam kustība notiek tikai zem smaguma spēka iespaida bez sākuma ātruma un berzes nav.

Pielietojot d'Alembert'a principu punktā A normāles virzienā dabūsim

$$S_n + mg - F_n = 0 \text{ kur } F_n = \frac{mV^2}{R}$$

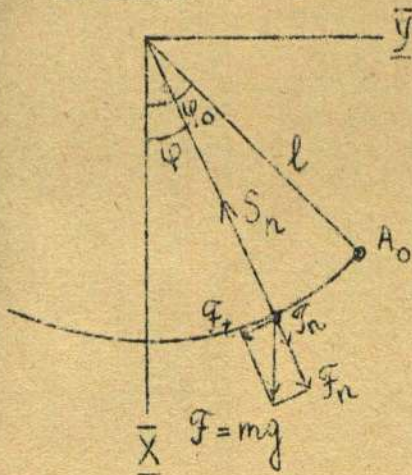
zīm.172.

$$S_n = \frac{mV^2}{R} - mg, \text{ bet } S_n \geq 0 ; \frac{mV^2}{R} - mg \geq 0$$

Uziesim  $mV^2$  no spara teorēmas  $\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = mg(H - 2R)$ , no kurienes  $mV^2 = 2mg(H - 2R)$ , jo  $V_0 = 0$ ;  $\frac{2mg}{R}(H - 2R) - mg \geq 0 ; 2H - 4R \geq R ;$

$$H \geq \frac{5}{2} R$$

Piemērs: Uz punkta kustību iekšpus saites. Uziat matemātiska svārsta reakciju.



Pēc d'Alembert'a principa

$$\vec{F} + \vec{S} + \vec{F} = 0$$

Projecēsim šo nol-mu uz normali

$$mg \cos \varphi - S_n + F_n = 0, \text{ no kurienes}$$

$$S_n = mg \cos \varphi + \frac{mV^2}{l}$$

Uziesim  $mV^2$  no spara teorēmas

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = mg(l \cos \varphi - l \cos \varphi_0), \text{ bet } V_0 = 0$$

$mV^2 = 2mg l (\cos \varphi - \cos \varphi_0)$  un ievietojot šo reakcijas formulā

zīm.173.

$$S_n = 2mg(\cos \varphi - \cos \varphi_0) + mg \cos \varphi, \text{ bet } S = S_n$$

$$S = mg(3 \cos \varphi - 2 \cos \varphi_0) \text{ Svārsta reakcija.....(159)}$$

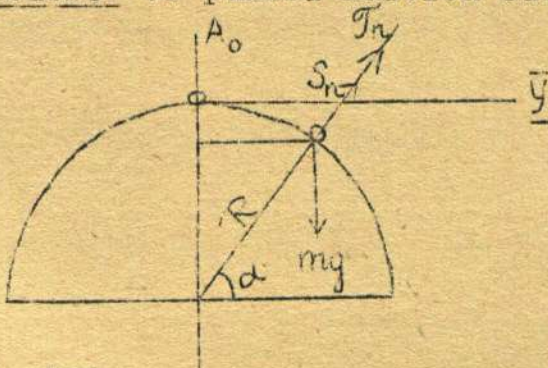
Pie dotā  $\varphi_0$  vislielāku vērtību S iegūsim pie  $\varphi = 0$ , t.i. kad svārsts ies caur vertikāli. Šinī gadījumā

$$S_{\max} = mg(3 - 2 \cos \varphi_0) \text{ .....(159}^a)$$

Mainot  $\varphi_0$  mēs varam dabūt vēl lielākas vērtības un Maximum maximorum būs pie  $\varphi_0 = \pi$

$$\max S_{\max} = 5mg \text{ .....(159}^b)$$

Piemērs: Uz punkta kustību saites ārpusē.



zīm.174.

Smags materiāls punkts zem pašsvara iespaidā slīd uz ideālas puslodes virsmas bez sākuma ātruma uz leju no visaugstākā punkta  $A_0$ .

Lodes radiuss ir R. Uziat kur punkts atstās virsmu.

Pēc d'Alembert'a principa:  $\vec{F} + \vec{S} + \vec{F} = 0$

Projecēsim šo vektoriālo nol-mu uz normali:

$$mg \sin \alpha - S_n - F_n = 0, \text{ tad}$$

$$S_n = mg \sin \alpha - \frac{mV^2}{R}$$

Uziesim  $mV^2$  no spara teorēmas  $\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = mg(R - R \sin \alpha)$ , bet

$$V_0 = 0 \text{ un } mV^2 = 2mgR(1 - \sin \alpha)$$

$$S_n = mg \sin \alpha - 2mg(1 - \sin \alpha); \quad S_n = mg(3 \sin \alpha - 2)$$

Ja punkts noiet no saites, tad  $S_n = 0; \quad mg(3 \sin \alpha - 2) = 0;$

$$\sin \alpha = \frac{2}{3} \quad \alpha = 41^\circ 50'$$

Uziesim cik liela ir attiecīga x koordināte

$$\sin \alpha = \frac{R - x}{R}, \quad \frac{R - x}{R} = \frac{2}{3}, \quad \boxed{x = \frac{1}{3} R}$$

§ 12. Materiāla punkta relatīvas kustības dinamika.

Aprobežosimies ar materiāla punkta relatīvo kustību pret kustošu ķermeni (ķermeņa kustību pret ķermeni neapskatīsim).

Visas parādības, kuŗas notiek uz zemes lodes ir relatīvas, jo zemes lode atrodas griezes kustībā ap savu asi un arī kustās ap sauli, tamdēļ mums ir no svāra noskaidrot relatīvas kustības likumus.

Dinamikas pamata dif-nol-ms  $m\vec{j} = \vec{F}$  der tikai inerciālām koordinātu sistēmām, bet koordinātu sistēmas, saistītas ar zemes lodi nav inerciālas, kādēļ lietojot nol-mu  $m\vec{j} = \vec{F}$  uz zemes lodes mēs pielaižam zināmu kļūdu. Noskaidrosim, cik liela būs šī kļūda dažādos gadījumos.

Ņemsim absolūta paātrinājuma izteiksmi no ķermeņa kinēmatikas

$$\vec{j} = \vec{j}_k + \vec{j}_\sigma + \vec{j}_\gamma$$

kur j apzīmē absolūto paātrinājumu

- $\vec{j}_k$  " pārneseamo "
- $\vec{j}_\sigma$  " relatīvo "
- $\vec{j}_\gamma$  " Coriolisa "

Uziesim no šī nol-ma:  $\vec{j}_\sigma = \vec{j} - \vec{j}_k - \vec{j}_\gamma$ , un pareizināsim ar punkta masu: m

$$m\vec{j}_\sigma = m\vec{j} + (-m\vec{j}_k) + (-m\vec{j}_\gamma)$$

Šeit atsevišķu locekļu nozīme būs:

- $m\vec{j}$  - ir fizikālais spēks, kas punktam absolūtā kustībā dod paātrinājumu j.
- $m\vec{j}_\sigma$  - ir spēks, kuŗu novēros novērotājs uz kustošas koordinātu sistēmas
- $-m\vec{j}_k$  - ir pārneseamais inerces spēks.
- $-m\vec{j}_\gamma$  - ir Coriolisa inerces spēks.

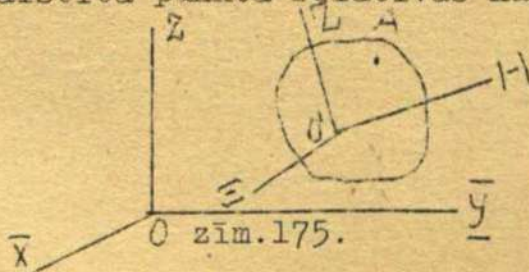
Tā tad atrodoties uz kustošas koordinātu sistēmas un gribot noteikt kustību, var lietot nol-mu  $m\vec{j} = \vec{F}$ , ja fizikāliem spēkiem pieskaitīsim divus fiktīvos inerces spēkus. Sakarā ar šo

$$\boxed{m\vec{j}_\sigma = \vec{F} + \vec{F}_k + \vec{F}_\gamma} \dots\dots\dots(160)$$

ir brīva punkta relatīvas kustības dif-nol-ms vektoriālā veidā;

$$\boxed{m\vec{j}_\sigma = \vec{F} + \vec{S} + \vec{F}_k + \vec{F}_\gamma} \dots\dots\dots(161)$$

ir saistīta punkta relatīvas kustības dif-nol-ms vektoriālā veidā.



Dažādu jautājumu atrisināšanai šos vektoriālos dif-nol-mus jāprojecē uz asīm, pie kam pats par savi saprotams, ka meklējot relatīvo kustību ir jāprojecē uz kustošām asīm  $\Xi, H, Z$

Apzīmējot fizikāla spēka F projekcijas uz kustošām asīm ar  $\Xi, H$  un  $Z$  dabūsim



$$\left. \begin{aligned} m\ddot{\xi} &= \Xi + \mathcal{F}_{k\xi} + \mathcal{F}_{Y\xi} \\ m\ddot{\eta} &= |\cdot| + \mathcal{F}_{k\eta} + \mathcal{F}_{Y\eta} \\ m\ddot{\zeta} &= Z + \mathcal{F}_{k\zeta} + \mathcal{F}_{Y\zeta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(162)$$

brīva punkta relatīvas kustības dif-nol-mi projekcijās uz kustošām asīm.

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{\xi} &= \Xi + S_{\xi} + \mathcal{F}_{k\xi} + \mathcal{F}_{Y\xi} \\ m\ddot{\eta} &= |\cdot| + S_{\eta} + \mathcal{F}_{k\eta} + \mathcal{F}_{Y\eta} \\ m\ddot{\zeta} &= Z + S_{\zeta} + \mathcal{F}_{k\zeta} + \mathcal{F}_{Y\zeta} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Saistīta punkta} \\ \text{relatīvas kustī-} \\ \dots\dots\dots(163) \\ \text{bas difnol-mi} \end{array}$$

Piezīme attiecībā uz saitēm. Ja saite virsmas jeb liknes veidā absolūtā koordinātu sistēmā bija nekustoša, skleronoma (t.i. viņas nol-mā atklātā veidā nenāca iekšā laiks t), tad kustošā koordinātu sistēmā šī pate saite būs kustoša, rheonoma un viņas nol-mā nāks iekšā t atklātā veidā.

Arī otrādā, ja kustošā koordinātu sistēmā saite ir skleronoma, tad absolūtā koordinātu sistēmā šī saite būs rheonoma un viņas nol-mā atklātā veidā ieies laiks. Piemēram zemes lode fundamentālā koordinātu sistēmā saistīta ar sauli, ir rheonoma saite.

Neatkarīgi no tā, vai saite kustošā koordinātu sistēmā ir skleronoma  $f(\xi \eta \zeta) = 0$  jeb rheonoma  $f(\xi \eta \zeta t) = 0$  saites reakcijas projekcijas uz kustošām asīm izteiksies

$$S_{\xi} = S \cdot \text{Cos}(\Xi \bar{N}) = S \frac{\frac{\partial f}{\partial \xi}}{\sqrt{(\frac{\partial f}{\partial \xi})^2 + (\frac{\partial f}{\partial \eta})^2 + (\frac{\partial f}{\partial \zeta})^2}} = \frac{S}{\Delta} \frac{\partial f}{\partial \xi} \text{ un apzīmējot } \frac{S}{\Delta} = \mathcal{A}$$

$$\boxed{S_{\xi} = \mathcal{A} \frac{\partial f}{\partial \xi}}; \quad \boxed{S_{\eta} = \mathcal{A} \frac{\partial f}{\partial \eta}} \text{ un } \boxed{S_{\zeta} = \frac{\partial f}{\partial \zeta}} \dots\dots\dots(164)$$

Tālāk apskatīsim kustības dif-nol-mu (162) un (163) speciālus gadījumus atkarībā no pārnesamas kustības veida.

I gadījums. Pārnesama kustība ir tīra virzes kustība.

Ja pārnesama kustība ir tīra virzes kustība, tad punkta A paštrinājums  $j_k$  nebūs atkarīgs no relatīvām koordinātēm  $\xi \eta \zeta$ , jo virzes kustībā visiem punktiem  $j_k$  geometriski būs vienāds, un starp citiem  $j_k$  būs vienāds ar koordinātu sākuma  $O'$  pārnesamo paštrinājumu.

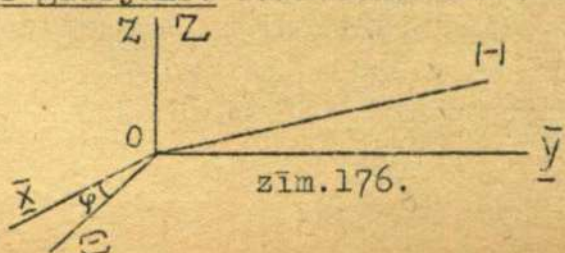
Ja kustoša koordinātu sākuma virzes kustība ir likumaina, tad lietderīgi sadalīt  $j_k$  divās komponentēs:  $j_{kt}$  un  $j_{kn}$  un katru atsevišķi projicēt uz kustošām asīm.

Coriolisa paštrinājums  $j_Y = 0$  līdz ar to arī inerces spēks  $\mathcal{F}_Y = 0$ , tamdēļ, ka pārnesamā kustībā griezes nav un  $\bar{J}_Y = 2[\bar{\omega} \bar{V}_G] = 0$  pie  $\omega = 0$ .

1) apakšgadījums: pārnesamā kustība ir vienmērīgi paštrināta taisnvirziena kustība. Tad inerces spēks  $\mathcal{F}_k = \text{Const}$ .

2) apakšgadījums: pārnesama kustība ir vienmērīga taisnvirziena kustība. Tad  $\mathcal{F}_k = 0$  un ņemot vērā, ka arī  $\mathcal{F}_Y = 0$ , konstatējam, ka relatīvā kustībā dif-nol-ms ir tas pats kā absolūtā, jo kustoša koordinātu sistēma tad ir inerciāla.

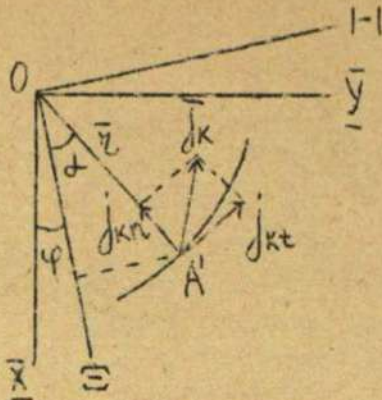
II gadījums. Pārnesama kustība ir tīra griezes kustība ap asi.



Izvēlēsim nekustošu un kustošu koordinātu sistēmas tā, lai Z un  $\bar{Z}$  ass sakristu ar griezes asi un abām koordinātu sistēmām būtu kopīgs koordinātu sākums  $O$ . Pieņemsim, ka  $\varphi = f(t)$  ir dots, tad diferencējot viņu pēc laika dabūsim

$\omega = \dot{\varphi} = f'(t)$  un  $\tau = \ddot{\varphi} = f''(t)$ .

Pārnesamā paātrinājuma projekcijas uz kustošām asīm. Uzņēmēsim atsevišķi  $\bar{X}O\bar{Y}$  un  $\bar{E}O\bar{I}$  koordinātu plaknes, kuras sakrīt. Noprojicēsim punktu A uz šo plakni un tālāk varam projicēt uz asīm punkta A' paātrinājumu. Punkta A un A' pārnesamas kustības trajektorijas būs riņķi.



zīm.177.

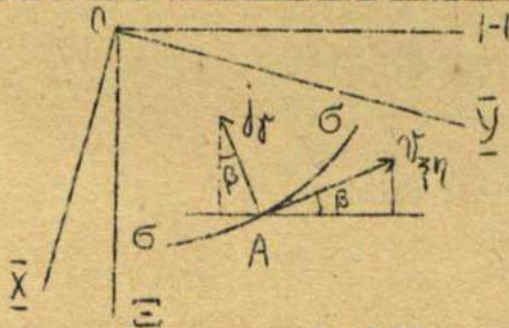
Sadalīsim pārnesamo paātrinājumu  $j_k$  divās komponentēs tangentes virzienā  $j_{kt}$  un normas virzienā  $j_{kn}$  un projicēsim katru atsevišķi uz koordinātu asīm.

$$j_{kn} = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 \begin{cases} j_{knz} = -r\omega^2 \cos\alpha = -r\omega^2 \frac{z}{r} = -z\omega^2 \\ j_{kn\eta} = -r\omega^2 \sin\alpha = -r\omega^2 \frac{\eta}{r} = -\eta\omega^2 \\ j_{kn\xi} = 0 \end{cases}$$

un viņa projekcijas

$$j_{kt} = \frac{dv}{dt} = r\tau \begin{cases} j_{ktz} = -r\tau \sin\alpha = -r\tau \frac{\eta}{r} = -\eta\tau \\ j_{kt\eta} = r\tau \cos\alpha = r\tau \frac{z}{r} = z\tau \\ j_{kte} = 0 \end{cases}$$

Coriolisa paātrinājuma projekcijas.



zīm.178.

Pieņemsim, ka  $\sigma - \sigma$  ir relatīva trajektorija telpā; ātrums  $V_\sigma$  iet tangenciāli pret šo trajektoriju un  $\bar{\omega}$  ir perpendikulārs zīmējumam. Sastādīsim Coriolisa paātrinājumu

$$\bar{j}_\gamma = 2[\bar{\omega} \cdot \bar{V}_\sigma] = 2\omega \cdot V_\sigma \cdot \sin\delta \cdot \bar{i}_\gamma$$

Tas ies  $\perp$  griezes asi, tā tad sakrītīs ar zīmējuma plakni un  $V_\sigma \cdot \sin\delta = V_{z\eta}$  būs relatīva ātruma projekcija šinī plaknē. Tā tad galīgi  $j_\gamma = 2\omega \cdot V_{z\eta}$ . Tagad projicēsim viņu uz

kustošām asīm

$$\begin{aligned} j_{\gamma z} &= -j_\gamma \cos\beta = -2\omega \cdot V_{z\eta} \cdot \cos\beta, \text{ bet } V_{z\eta} \cdot \cos\beta = \dot{\eta} \text{ un } j_{\gamma z} = -2\dot{\eta}\omega \\ j_{\gamma \eta} &= -j_\gamma \sin\beta = -2\omega \cdot V_{z\eta} \cdot \sin\beta, \text{ bet } V_{z\eta} \cdot \sin\beta = -\dot{z} \text{ un } j_{\gamma \eta} = 2\dot{z}\omega \\ j_{\gamma \xi} &= 0 \end{aligned}$$

Ierīzinot ātrastās paātrinājuma projekcijas ar punkta masu  $m$  un pārmaiņot zīmi, dabūsim attiecīgos inerces spēkus

$$\begin{array}{l|l|l} \mathcal{F}_{knz} = m z \omega^2 & \mathcal{F}_{ktz} = m \eta \tau & \mathcal{F}_{\gamma z} = 2m \dot{\eta} \omega \\ \mathcal{F}_{kn\eta} = m \eta \omega^2 & \mathcal{F}_{kt\eta} = -m z \tau & \mathcal{F}_{\gamma \eta} = -2m \dot{z} \omega \\ \mathcal{F}_{kn\xi} = 0 & \mathcal{F}_{kte} = 0 & \mathcal{F}_{\gamma \xi} = 0 \end{array}$$

Ievietojot šos inerces spēkus nol-mos (162) un (163) dabūsim brīvam punktam

$$\left. \begin{array}{l} m\ddot{z} = \Xi + m z \omega^2 + m \eta \tau + 2m \dot{\eta} \omega \\ m\ddot{\eta} = \bar{I} + m \eta \omega^2 - m z \tau - 2m \dot{z} \omega \\ m\ddot{\xi} = Z \end{array} \right\} \dots\dots\dots(165)$$

brīva punkta relatīvas kustības dif-nol-mi, un ievērojot vēl formulas (164) saistītam punktam:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{\zeta} &= \Xi + \mathcal{A} \frac{\partial f}{\partial \zeta} + m\zeta\omega^2 + m\eta\tau + 2m\dot{\eta}\omega \\ m\ddot{\eta} &= |\cdot| + \mathcal{A} \frac{\partial f}{\partial \eta} + m\eta\omega^2 - m\zeta\tau - 2m\dot{\zeta}\omega \\ m\ddot{\xi} &= Z + \mathcal{A} \frac{\partial f}{\partial \xi} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(166)$$

saistīta punkta relatīvas kustības dif-nol-mi, ja saīte ir  $f(\zeta\eta\xi) = 0$  jeb arī  $f(\zeta\eta\xi t) = 0$ .

Ja saīte ir dota līknes veidā ar divām virsmām  $f_1(\zeta\eta\xi) = 0$  un  $f_2(\zeta\eta\xi) = 0$  varētu ņemt nol-mus

$$\begin{aligned} m\ddot{\zeta} &= \Xi + \mathcal{A}_1 \frac{\partial f_1}{\partial \zeta} + \mathcal{A}_2 \frac{\partial f_2}{\partial \zeta} + m\zeta\omega^2 + m\eta\tau + 2m\dot{\eta}\omega \\ m\ddot{\eta} &= |\cdot| + \mathcal{A}_1 \frac{\partial f_1}{\partial \eta} + \mathcal{A}_2 \frac{\partial f_2}{\partial \eta} + m\eta\omega^2 - m\zeta\tau - 2m\dot{\zeta}\omega \\ m\ddot{\xi} &= Z + \mathcal{A}_1 \frac{\partial f_1}{\partial \xi} + \mathcal{A}_2 \frac{\partial f_2}{\partial \xi} \end{aligned}$$

bet viņu atrisināšana iznāks pārāk komplicēta, tamdēļ šādā gadījumā ir izdevīgāk projecēt nol-mu  $m\vec{j}_G = \vec{F} + \vec{S} + \vec{\mathcal{F}}_k + \vec{\mathcal{F}}_\gamma \dots\dots(161)$  nevis uz kustošām asiņ, bet tieši uz saītes tangenti, tad, pirmkārt, pie ideālas saītes izkritīs S un arī Coriolisa inerces spēks  $\vec{\mathcal{F}}_\gamma$ , jo  $\vec{j}_\gamma \perp \vec{V}_G$  un izkritīs arī  $\vec{\mathcal{F}}_{kn}$ , bet paliks tikai  $\vec{\mathcal{F}}_{kt}$ .

Rezultatā paliek  $m\vec{j}_{Gt} = \vec{F}_t + \vec{\mathcal{F}}_{kt}$  jeb  $m \frac{d\vec{V}_G}{dt} = \vec{F}_t + \vec{\mathcal{F}}_{kt}$ . Nointegrējot šo nol-mu, uziesim  $\vec{V}_G$  un aizvietojojot  $\vec{V}_G = \frac{ds}{dt}$  un integrējot otro reizi, dabūsim beidzot kustību šādā veidā

$$s = \Phi(t)$$

III gadījums. Pārnesamā kustība ir komplana kustība.

Šādā gadījumā pārnesamo kustību var uzskatīt kā griezes kustību ap OZ asi, kuru jāizvēl perpendikulāri kustības plaknei un pašas ass OZ virzes kustību.

Nol-miem (165) un (166) tad nāks klāt vēl inercijas spēks  $\vec{\mathcal{F}}_{ko} = -m\vec{j}_{ko}$ , kura projekcijas uz kustošām asiņ būs:  $\mathcal{F}_{ko\zeta}$ ,  $\mathcal{F}_{ko\eta}$  un  $\mathcal{F}_{kp\xi} = 0$

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{\zeta} &= \Xi + m\zeta\omega^2 + m\eta\tau + 2m\dot{\eta}\omega - m\mathcal{F}_{ko\zeta} \\ m\ddot{\eta} &= |\cdot| + m\eta\omega^2 - m\zeta\tau - 2m\dot{\zeta}\omega - m\mathcal{F}_{ko\eta} \\ m\ddot{\xi} &= Z \end{aligned} \right\} \text{brīvam punktam}$$

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{\zeta} &= \Xi + S_\zeta + m\zeta\omega^2 + m\eta\tau + 2m\dot{\eta}\omega - m\mathcal{F}_{ko\zeta} \\ m\ddot{\eta} &= |\cdot| + S_\eta + m\eta\omega^2 - m\zeta\tau - 2m\dot{\zeta}\omega - m\mathcal{F}_{ko\eta} \\ m\ddot{\xi} &= Z + S_\xi \end{aligned} \right\} \text{saistītam punktam}$$

Pārējos gadījumos, t.i. ja pārnesamā kustība ir kustība ap punktu jeb brīva kustība, dif-nol-mi relatīvai kustībai iznāks diezgan komplicēti, tamdēļ viņus šeit neapskatīsim.

Pie relatīvas kustības dif-nol-mu integrēšanas varam lietot tās pašas metodes kā pie absolūtas kustības dif-nol-mu integrēšanas. Starp citu var lietot arī kustības daudzuma momenta teorēmu un spara teorēmu. Spara teorēmas pielietošana atvieglojās ar to, ka Coriolisa inerces spēka darbs = 0, jo Coriolisa paātrinājums  $\vec{j}_\gamma \perp \vec{V}_G$ .

Relatīvais miera stāvoklis. Ja punkts atrodas relatīvā mierā, tad  $j_G = 0$  un arī  $V_G = 0$ , līdz ar to tad  $\mathcal{F}_\gamma = 0$  un nol-mos (160) un (161) paliek:

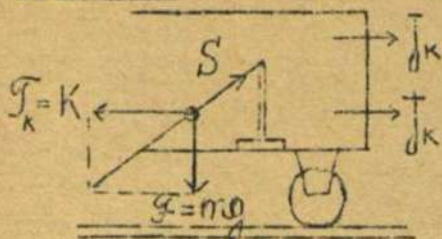
$$\begin{aligned} \vec{F} + \vec{\mathcal{F}}_k &= 0 \quad \text{brīvam punktam} \\ \vec{F} + \vec{S} + \vec{\mathcal{F}}_k &= 0 \quad \text{saistītam punktam} \end{aligned}$$

Tā tad, lai punkts varētu atrasties relatīvā miera, aktīvam spēkam jā-  
līdzsvarojās ar pārnesamo inerces spēku, ja punkts ir brīvs, un vēl ar  
saites reakciju, ja punkts ir saistīts.

1) Apakšgadījums. Ja pārnesamā kustība ir taisnvirziena vienmērīga kustī-  
ba, arī  $\mathcal{J}_k = 0$  un relatīva miera noteikums ir tas pats kā absolūtā mie-  
ra noteikums:  $\bar{F} = 0$  brīvam punktam  
 $\bar{F} + \bar{S} = 0$  saistītam punktam.

2) Apakšgadījums. Ja pārnesamā kustība ir taisnvirziena vienmērīgi paātri-  
nāta kustība, tad  $\mathcal{J}_k = \text{Const.} = \bar{K}$  un miera noteikums ir brīvam punktam:  
 $\bar{F} + \bar{K} = 0$  un saistītam punktam  $\bar{F} + \bar{S} + \bar{K} = 0$

Piemērs. Ja vagonā atrodas vienmērīgi paātrinātā kustībā, tad vagonā no-  
stādītais svārsts atradīsies relatīvā miera tad, ja smaguma spēka  $mg$  un inerci-  
jas spēka  $\bar{K}$  kopspēks līdzsvarosies ar svārsta reakciju. Šādu ierīci  
lieto vilciena paātrinājuma noteikšanai un sauc  
par dinamometrisko svārstu



zīm.179.

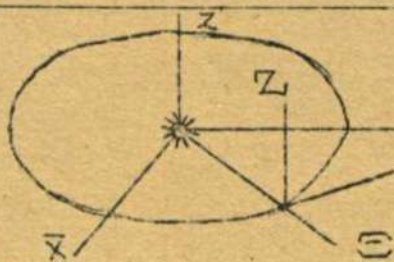
3) Apakšgadījums. Ja pārnesamā kustība ir vienmē-  
rīga griezes kustība, tad  $\mathcal{J}_k = \bar{C}$  būs tikai vie-  
na komponente: centrifugālais spēks un relatīvā

miera aktīvam spēkam jālīdzsvaro centrifugālo spēku, ja punkts ir brīvs  
 $\bar{F} + \bar{C} = 0$ , bet ja punkts ir saistīts, tad relatīvā miera aktīvais spēks  
un reakcija līdzsvarojās ar centrifugālo spēku:  $\bar{F} + \bar{S} + \bar{C} = 0$

Punkta kustība attiecībā pret zemes lodi.

Visas kustības uz zemes lodes ir relatīvas, jo zemes lode kustās ap  
sauli un vēl atrodas griezes kustībā ap savu asi, tamdēļ kustības uz zemes  
lodes noteikšanai, stingri ņemot, būtu jālieto relatīvas kustības dif-  
ferenciāls. Apskatīsim, cik lielas kļūdas būs pielaistas, ja skaitīsim koor-  
dinātu sistēmas saistītas ar zemes lodi par inerciālām, t.i. ja ignorēsim  
inerces spēkus  $\mathcal{J}_k = -mj_k$  un  $\mathcal{J}_y = -mj_y$ . Katru no zemes lodes kustībām  
apskatīsim atsevišķi.

1) Pārnesamais paātrinājums  $j_k$ , no zemes lodes kustības ap sauli.



zīm.180.

Pirmkārt ievēdīsim sekošus vienkāršojumus:  
pieņemsim, ka zemes lodes trajektorija ap  
sauli ir riņķis, kaut gan viņa ir ellipse  
ar mazu ekscentricitāti, līdz ar to arī  
skaitīsim, ka zemes lodes ātrums ap sauli  
ir const., tad  $j_{kt} = 0$  un paliek tikai  
 $j_{kn} = R\omega^2$ , kur

$R = 149 \cdot 10^9$  mtr. ir zemes lodes trajektorijas radiuss

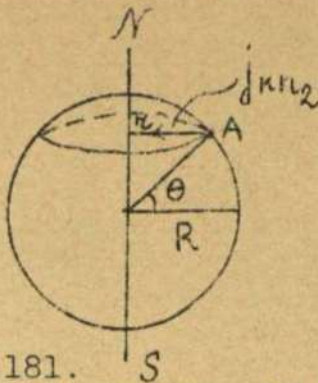
$\omega = \frac{2\pi}{T}$  sec<sup>-1</sup> ir zemes lodes leņķiskais ātrums ap sauli

ja  $T = 365.86400$  sec ir 1 gads izteikts sekundēs.

$$\text{Tad } j_{kn} = \frac{149 \cdot 10^9 \cdot 4\pi^2}{(365.86400)^2} = 0,00596 \text{ m} \cdot \text{sec}^{-2}$$

Attiecīgais inerces spēks  $\mathcal{J}_{kn} = -mj_{kn}$ , ir virzīts no saules, bet uz to  
pašu punktu ar masu  $m$  iedarbojās smaguma spēks, kas līdzinājās  $mg$ . Salīdzī-  
not ar šo pēdējo, inerces spēks ir tikai  $\frac{1}{20}\%$ , t.i. pietiekoši mazs, lai vi-  
ņū varētu ignorēt. Kļūda pie tam nepārsniegs  $\frac{1}{20}\%$ , bet faktiski viņa būs  
vēl mazāka, ja mēs ievērosim, ka punktam, ja viņš kustās ar zemes lodi,  
arī ir paātrinājums  $j_{kn}$ , kas ieies uz zemes lodes novērojamā spēkā, t.i.  
punkta svarā  $Q$ , bet no otras puses nol-mā (160) viņš nāk iekšā inerci-  
jas spēkā  $\mathcal{J}_k$  ar (-) zīmi.

2) Pārnesamais paātrinājums  $j_{kn_2}$  no zemes lodes griezes ap savu asi.



Zemes lodes griezes kustība ap savu asi ir vienmērīga, tādēļ atkal  $j_{kt_2} = r\ddot{\varphi} = 0$  un paliek tikai  $j_{kn_2} = r\omega^2$ , kur

$r = R \cos\theta$  ir zemes lodes šķēliena radiuss  
 $R = 6360000$  mtr. ir zemes lodes radiuss

$\omega = \frac{2\pi}{24.60.60} = \frac{2\pi}{86400} = 0,0000729 \text{ sec}^{-1}$  zemes lodes griezes ātrums.

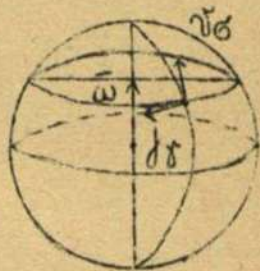
max  $j_{kn_2}$  dabūsim pie  $\theta = 0^\circ$  un  $r = R$

max  $j_{kn_2} = R\omega^2 = 6360000 \cdot 0,0000729^2 = 0,0339 \text{ m} \cdot \text{sec}^{-2}$

zīm.181. Šis paātrinājums tā tad nepārsniedz  $\frac{1}{3}\%$  g

Atmetot attiecīgo inerces spēku, būtu pielaista kļūda  $\frac{1}{3}\%$  g, bet arī šī kļūda kompensējas, ja ievērosim, ka, ņemot punkta svaru, zemes gravitācijas spēka vietā, mēs jau automatiski ievēdam m $j_{kn_2}$  fizikalā spēkā, bet tas pats nāk arī inerciālas spēkā ar (-) zīmi.

3) Coriolisa paātrinājums  $j_Y$  no zemes lodes griezes.



Coriolisa paātrinājums:  $\vec{j}_Y = 2[\vec{\omega} \cdot \vec{V}_G]$

$j_Y = 2\omega \cdot V_G \cdot \sin\theta$

bet teknikā varam pieņemt, ka max  $V = 500 \text{ m/sec}$ .

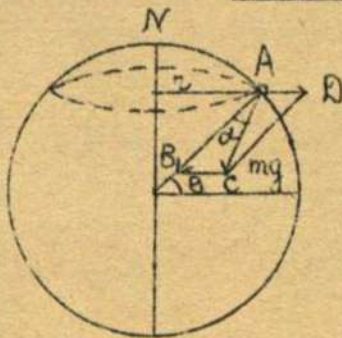
$\sin\theta$  maksimālā vērtība ir 1, tā tad

max  $j_Y = 2 \cdot 0,0000729 \cdot 500 \cdot 1 = 0,07 \text{ m} \cdot \text{sec}^{-2}$

Salīdzinot ar g redzams, ka kļūda no Coriolisa inerces spēka ignorēšanas nepārsniedz 0,7% g.

zīm.182. Visi atrastie rezultāti rāda, ka apskatot materiāla punkta kustību uz zemes lodes vispārīgi varam ignorēt pārnesamo un Coriolisa inerciālas spēkus, t.i. skaitīt, ka koordinātu sistēma saistīta ar zemes lodi ir inerciāla. Izņēmumi ir gadījumi, kad kustība notiek ar ļoti lieliem ātrumiem jeb arī ja eksperiments velkās ilgu laiku (Fuko svārsts).

Smaguma spēka novirzīšanās no zemes lodes radiusa.



Pieņemsim, ka materiāls punkts atrodas uz zemes lodes punktā A. Zemes lodes gravitācijas spēks AB un centrifugālais spēks AD dod kopspēku AC, kuru mēs varam novērot un kurš būs tā sauktais "smaguma spēks": mg.

Pēc sinusa teorēmas no  $\Delta ABC$  atrodam

$\frac{\sin\alpha}{BC} = \frac{\sin\theta}{mg}$ , bet  $BC = AD = mr\omega^2$ , kur  $r = R\cos\theta$

$\sin\alpha = \frac{mR\cos\theta \omega^2}{mg} \cdot \sin\theta = \frac{R\omega^2}{2g} \sin 2\theta$

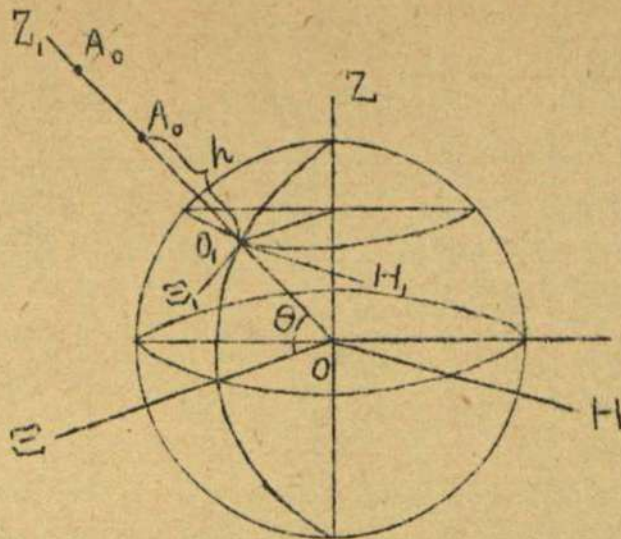
zīm.183. Maksimālo novirzīšanas leņķi dabūsim pie  $\sin 2\theta = 1$ ,  $\theta = 45^\circ$  un  $\max \sin\alpha = \frac{R\omega^2}{2g}$  kur  $R = 6360000$  mtr.

$\omega = 0,0000729 \text{ sec}^{-1}$

max  $\sin\alpha = \frac{6360000 \cdot 0,0000729^2}{2g} = 0,0017$

max  $\alpha = 0^\circ 6'$

Smaga materiāla punkta novirzīšanās brīvā kritienā, ņemot vērā zemes lodes griezes kustību.



zīm.184.

sim locekļus ar  $\omega^2$ , jo  $\omega = 0,0000729 \text{ sec}^{-1}$  ir diezgan mazs lielums, kuŗa kvadratu varam ignorēt. Tāpat arī ignorēsīm smaguma spēka novirzīšanos no zemes lodes radiusa un skaitīsīm, ka  $mg$  iet caur zemes lodes centru O. Tad fizikālā spēka projekcijas uz relatīvām asīm būs

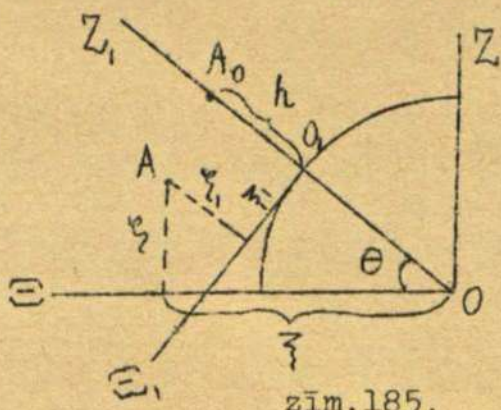
$$\Xi = -mg \text{ Cos}\theta, \quad H = 0 \quad \text{un} \quad Z = -mg \text{ Sin}\theta$$

Ievērojot visu augšminēto un saīsīnot masu, dabūsīm

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\xi} &= -g \text{ Cos}\theta + 2\dot{\eta}\omega \\ \ddot{\eta} &= -2\dot{\xi}\omega \\ \ddot{\zeta} &= -g \text{ Sin}\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(167)$$

Šos dif-nol-mus varētu nointegrēt un atrast relatīvo kustību izvēlētajā koordinātu sistēmā caur zemes lodes centru, bet mums ir interesanti noskaidrot punkta trajektorijas novirzīšanos no zemes lodes radiusa, tandēļ pāriesīm uz jaunu koordinātu sistēmu  $O_1 \Xi_1 H_1 Z_1$  arī saistītu ar zemes lodi, bet ar koordinātu sākumu radiusa  $OA_0$  krustošānās punktā  $O_1$  ar zemes lodes virsmu. Asi  $O_1 Z_1$  izvēlēsim radiusa  $OA_0$  virzienā caur kustības sākuma punktu, asi  $O_1 \Xi_1$  perpendikulāri pret  $O_1 Z_1$  plaknē  $\Xi O Z$  un  $O_1 H_1 \parallel O_1 O$ .

Lai dabūtu pārējās formulas izzīmēsīm atsevišķi  $\Xi O Z$  plakni.



zīm.185.

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= \xi \text{ Sin}\theta - \zeta \text{ Cos}\theta \\ \eta_1 &= \eta \\ \zeta_1 &= \xi \text{ Cos}\theta + \zeta \text{ Sin}\theta - R \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(168)$$

Diferencēsīm šīs formulas divreiz pēc laika, ievērojot, ka  $\theta$  ir Const.lielums

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\xi}_1 &= \ddot{\xi} \text{ Sin}\theta - \ddot{\zeta} \text{ Cos}\theta \\ \ddot{\eta}_1 &= \ddot{\eta} \\ \ddot{\zeta}_1 &= \ddot{\xi} \text{ Cos}\theta + \ddot{\zeta} \text{ Sin}\theta \end{aligned} \right\}$$

Ievietosīm šeit formulas (167), tad

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\xi}_1 &= -g \text{ Cos}\theta \text{ Sin}\theta + 2\dot{\eta}\omega \text{ Sin}\theta + g \text{ Sin}\theta \text{ Cos}\theta = 2\dot{\eta}\omega \text{ Sin}\theta \\ \ddot{\eta}_1 &= -2\dot{\xi}\omega \\ \ddot{\zeta}_1 &= -g \text{ Cos}^2\theta + 2\dot{\eta}\omega \text{ Cos}\theta - g \text{ Sin}^2\theta = 2\dot{\eta}\omega \text{ Cos}\theta - g \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(169)$$

Tagad vēl labā pusē vecās koordinātes jāaizvieto ar jaunām, šim nolūkam atrisināsim nol-mus (168) attiecīgā uz  $\xi$

$$\begin{cases} \xi_1 = \xi \sin\theta - \varphi \cos\theta \\ \varphi_1 = \xi \cos\theta + \varphi \sin\theta - R \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \sin\theta \\ \cos\theta \end{array} \right| +$$

$$\xi_1 \sin\theta + \varphi_1 \cos\theta = \xi(\sin^2\theta + \cos^2\theta) - R \cos\theta$$

$$\xi = \xi_1 \sin\theta + \varphi_1 \cos\theta + R \cos\theta \quad \text{diferencēsim šo pēc laika}$$

$$\dot{\xi} = \dot{\xi}_1 \sin\theta + \dot{\varphi}_1 \cos\theta \quad \text{ievietosim šo formulās (169) un aizvietosim}$$

arī  $\dot{\eta} = \dot{\eta}_1$ , tad dif-nol-mi jaunās koordinātēs

$$\ddot{\xi}_1 = 2 \dot{\eta}_1 \omega \sin\theta$$

$$\ddot{\eta}_1 = -2(\dot{\xi}_1 \sin\theta + \dot{\varphi}_1 \cos\theta) \cdot \omega$$

$$\ddot{\varphi}_1 = 2 \dot{\eta}_1 \omega \cos\theta - g$$

Integrēsim pirmo un trešo:  $\dot{\xi}_1 = 2 \eta_1 \omega \sin\theta + C_1$ , bet  $C_1 = 0$

$$\dot{\varphi}_1 = 2 \eta_1 \omega \cos\theta - gt + C_2, \text{ bet no sākuma apstākļiem } C_2 = 0.$$

Ieliksīm atrastos  $\dot{\xi}_1$  un  $\dot{\varphi}_1$  otrā nol-mā

$$\ddot{\eta}_1 = -2(2 \eta_1 \omega \sin^2\theta + 2 \eta_1 \omega \cos^2\theta - gt \cos\theta) \omega$$

$$\ddot{\eta}_1 = -4 \eta_1 \omega^2 + 2gt\omega \cos\theta \quad \text{atmetīsim locekli ar } \omega^2 \text{ un integrēsim}$$

$$\dot{\eta}_1 = gt^2 \omega \cos\theta + C_3, \text{ bet } C_3 = 0; \text{ integrēsim otro reizi}$$

$$\eta_1 = \frac{1}{3} gt^3 \omega \cos\theta + C_4, \text{ bet } C_4 = 0 \text{ un galīgi}$$

$$\boxed{\eta_1 = \frac{1}{3} gt^3 \omega \cos\theta} \quad \dots\dots\dots(170)$$

Ieliekot šo vērtību  $\dot{\xi}_1$  un  $\dot{\varphi}_1$  formulās, dabūsim

$$\left. \begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \frac{2}{3} gt^3 \omega^2 \sin\theta \cos\theta \\ \dot{\varphi}_1 &= \frac{2}{3} gt^3 \omega^2 \cos^2\theta - gt \end{aligned} \right\} \text{atmetīsim atkal locekļus ar } \omega^2$$

$$\text{tad } \left. \begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= 0 \\ \dot{\varphi}_1 &= -gt \end{aligned} \right\} \text{integrējot, dabūsim } \begin{aligned} \xi_1 &= C_5 \\ \varphi_1 &= -\frac{gt^2}{2} + C_6 \end{aligned}$$

no sākuma apstākļiem  $C_5 = 0$  un  $C_6 = \varphi_{10} = h$ , un galīgi

$$\boxed{\xi_1 = 0} \quad \boxed{\varphi_1 = h - \frac{gt^2}{2}} \quad \dots\dots\dots(170^a)$$

Atrastie kustības nol-mi rāda, ka brīvi krītošs punkts novirzās uz austrumiem, aprakstot tresās kāpes līkni plaknē  $H_1 O_1 Z_1$

No formulas (170<sup>a</sup>) redzam, ka krišanas laiks, liekot  $\varphi_1 = 0$  iznāk

$T = \sqrt{\frac{2h}{g}}$  un ir tāds pats, kā gadījumā, kad zemes lodes griezes kustība netiek ievērota.

Ieliekot  $T = \sqrt{\frac{2h}{g}}$  formulā (170) uziesim punkta novirzīšanos, kad tas pienāk zemes lodes virsmai

$$\eta_1 = \frac{1}{3} g \frac{2h}{g} \sqrt{\frac{2h}{g}} \cdot \omega \cdot \cos\theta \quad \text{jeb} \quad \boxed{\eta_1 = \frac{2}{3} \omega \sqrt{\frac{2h^3}{g}} \cdot \cos\theta} \quad \dots\dots\dots(171)$$

Daudzkārtīgi izdarītie eksperimenti pastiprina šo formulu. Rīgā, ņemot  $\theta = 57^\circ$  pie krišanas no  $h = 100$  mtr. augstuma iznāk

$$\eta_1 = \frac{2}{3} \cdot 0,0000729 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 100^3}{9,81}} \cdot \cos 57^\circ = 0,012 \text{ mtr.}$$

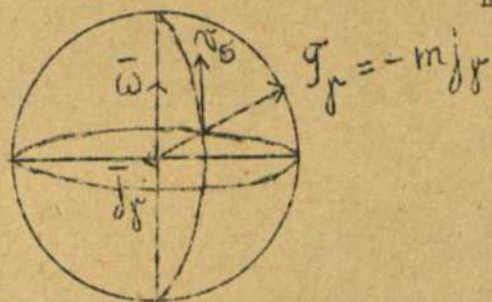
jeb  $\eta_1 = 12 \text{ m/m}$

Piezīmēsim vēl, ka paturot dif-nol-mos arī locekļus ar  $\omega^2$ , dabūsim novirzīšanos arī uz dienvidiem, bet ārkārtīgi mazu.

Coriolisa inerces spēka iespaids ķermeņiem, kuŗi kustās uz zemes lodes.

Vairākas parādības uz zemes lodes ir izskaidrojamas ar Coriolisa inerces spēka iespaidu. Piemēram

Baera likums, kuŗš skan tā: Ziemeļu puslodē visām upēm, kuŗas tek apmēram meridiana virzienā, labie krasti tiek noskaloti.



Kā redzams zīm.186, punktam, kas kustās ziemeļpuslodē meridiana virzienā, piemāt Coriolisa paātrinājums  $\bar{j}_Y$  uz kreiso pusi skatoties kustības virzienā.

Bet inerces spēks relatīvā kustībā  $\bar{F}_Y = -m \bar{j}_Y$  iet uz labo pusi un iedarbojās uz saiti, t.i. uz upes labo krastu un noskalo viņu.

zīm.186.

Passati. Aiz tā paša iemesla katram ziemeļvējam ziemeļu puslodē ir tendence novirzīties uz austrumiem.

Dz-cēlu sliežu nolietošānās. Aiz tā paša iemesla uz dz-cēļiem, kuŗi apmēram seko meridiana virzienam, un uz kuŗiem kustība katrā virzienā notiek uz atsevišķām sliedēm, arvienu vairāk nolietojās labās sliedes. Coriolisa inerces spēks iedarbojās uz saiti, t.i. uz sliedēm un izsauc viņu nolietošānos.

Piemērs. Ilustrācijas dēļ aprēķināsim cik liels ir skaitliski Coriolisa inerces spēks vilcienam ar svaru  $Q = 100 \text{ ton.}$ , ātrumu  $V_G = 200 \text{ klm/st.}$ , kuŗš kustās meridiana virzienā zem  $\theta = 45^\circ$  geografiska platuma.

$$\bar{F}_Y = -m \bar{j}_Y ; \bar{j}_Y = 2 [\bar{\omega} \cdot \bar{v}_G]$$

$$\omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60} = \frac{2\pi}{86400} = 0,0000729 \text{ sec}^{-1}$$

$$V_G = 200 \text{ klm/st} = \frac{200000}{3600} = 55,5 \text{ m.sec}^{-1}$$

$$j_Y = 2\omega \cdot V_G \cdot \sin 45^\circ = 2 \cdot 0,0000729 \cdot 55,5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,0057 \text{ m.sec}^{-2}$$

$$F_Y = m j_Y = \frac{100000}{9,81} \cdot 0,0057 = 58 \text{ kgr.}$$

### § 13. Materiāla punkta trieciena teorija.

Ir spēki, kuŗi darbojās ļoti īsu laiku, bet sasniedz ļoti lielas vērtības; viņā attīstās pie ķermeņu triecieniem, sprādzieniem u.t.t. Saucām viņus par trieciena spēkiem un apzīmēsim ar  $F_{tr}$ .

Trieciena spēki, neskatoties uz savu īso darbības laiku, izsauc ievērojamas ātruma maiņas tanīs ķermeņos jeb punktos, uz kuŗiem viņi iedarbojās, turpe tīm šo ķermeņu jeb punktu pārvietojumi par trieciena laiku irniecīgi. Piee dīsim pēdējo apgalvojumu.

Trieciena laiku apzīmēsim ar  $\tau$  un minētā laika sprīža lielumu mēs noteiksim tā, lai visus garumus:  $V \cdot \tau$  varētu atnest, salīdzinot ar tiem garumiem, kuŗus mēs ņemam vērā, pie kam  $V$  apzīmē katru galīgu ātrumu. Trieciena spēka iespaids uz punktu izpauzās kustības daudzuma un punkta stāvckļa maiņā par trieciena laiku  $\tau$ . Pieņemsim, ka trieciena spēka impulss var būt ļoti liels, bet galīgs un nebūs bezgalīgi liels.



Ievedīsim šādus apzīmējumus:

ar  $t_1$  apzīmēsīm trieciena sākuma momentu,

ar  $x_1 y_1 z_1$  " - punkta koordinātes šinī momentā,

ar  $V_1, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1$  - punkta ātruma un viņa projekcijas šinī momentā,

ar  $F^{tr}$  - trieciena spēku un ar  $X^{tr}, Y^{tr}, Z^{tr}$  viņa projekcijas,

ar  $x_2 y_2 z_2$  - punkta koordinātes trieciena beigās.

Tad punkta pārvietojuma projekcijas par trieciena laiku būs:

$$x_2 - x_1 = \dot{x}_1 \tau + \frac{1}{m} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{t_1}^{t_2} X^{tr} . dt \quad \text{kur } t_2 = t_1 + \tau$$

$$y_2 - y_1 = \dot{y}_1 \tau + \frac{1}{m} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{t_1}^{t_2} Y^{tr} . dt$$

$$z_2 - z_1 = \dot{z}_1 \tau + \frac{1}{m} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{t_1}^{t_2} Z^{tr} . dt$$

Labā pusē pirmos locekļus varam atņemt, jo  $\tau$  ir tik mazs laika sprīdis, ka  $V_1 \tau$  var ignorēt, bet otrie locekļi katrā ziņā būs mazāki par

$\frac{I^{tr}}{m} \cdot \tau$  kur ar  $I^{tr}$  ir apzīmēts trieciena spēka impulss.

Tagad atkal reizinājumu  $\frac{I^{tr}}{m} \cdot \tau$  var atņemt, ja tikai  $I^{tr}$  nav bezgalīgi liels, bet ir galīgs lielums, kaut arī liels.

Kā redzams, ja trieciena spēka impulss ir galīgs, mēs varam ignorēt visus punkta pārvietojumus par trieciena laiku. Tāpat arī, ja uz punktu darbojas vēl kādi spēki, izņemot trieciena spēku  $F^{tr}$ , piemēram smaguma spēks, tad šādu spēku impulsus par trieciena laiku arī varam atņemt, salīdzinot ar trieciena spēka impulsu; jo  $\bar{I} = \int_{t_1}^{t_2} \bar{F} . dt$  un, pieņemot ļoti mazā

laika sprīdī  $\tau$  kā  $F = \text{Const.}$ , dabūsim  $\bar{I} = \bar{F} \cdot \tau$ , ko var atņemt.

#### Materiāla punkta trieciens pret nekustošu virsmu.

Pieņemsim, ka materiāls punkts  $m$  zem kāda spēka  $\bar{F}$  iespaida atrodas kustībā, pie kam viņa kustības nol-mi ir

$$x = f_x(t), \quad y = f_y(t) \quad \text{un} \quad z = f_z(t)$$

Bez tam ir dota kāda nekustoša virsma  $f(xyz) = 0$ . Materiāls punkts kustās brīvi, kamēr viņš nesastop minēto virsmu, šinī momentā punkta koordinātēm jāapmierina virsmas nol-mu. Apzīmējot trieciena sākuma momentu ar  $t_1$ , mēs dabūsim viņu kā nol-ma  $f[f_x(t_1), f_y(t_1), f_z(t_1)] = 0$  mazāko reālo pozitīvo sakni.

Punkta koordinātes trieciena momentā būs

$$x_1 = f_x(t_1), \quad y_1 = f_y(t_1), \quad z = f_z(t_1)$$

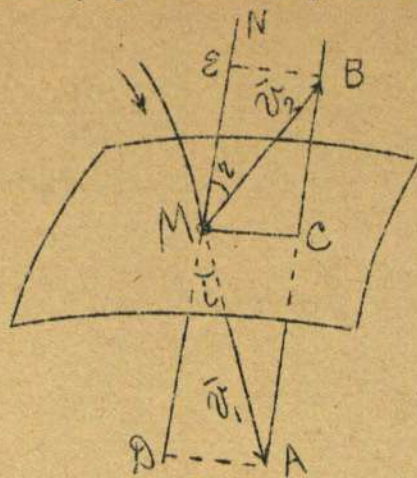
un ātruma projekcijas tanī pašā momentā

$$\dot{x}_1 = f'_x(t_1), \quad \dot{y}_1 = f'_y(t_1), \quad \dot{z}_1 = f'_z(t_1)$$

pats ātrums  $V_1 = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2}$  saucās par krišanas ātrumu

Vilksim punkta  $M$ , kur notiek trieciens, normali  $MN$  pret virsmu uz to pusi, no, kuŗas tuvojās punkts  $m$ . Trieciens notiks tikai tad, ja krišanas ātrums  $V_1$  veidos ar šo normali platleņķi. Tāļāka punkta kustība pēc trie-

ciena, ja virsma punktam ir necaurejoša, var notikt tikai tādā virzienā, ka punkta ātrums pēc trieciena veido ar to pašu normali šaurleņķi jeb robežas gadījumā taisnu leņķi. Ātrumu pēc trieciena apzīmēsim ar  $V_2$  un nosauksim par refleksijas ātrumu.



Laiks, kādā notiek šī ātruma maiņa, ir atkarīgs no virsmas un materiāla punkta elastīgām īpašībām un ir ļoti mazs. Piemēram pie tērauda bumbiņas krišanas uz tērauda virsmu trieciena laiks  $\tau = 0,00007$  sec.

Spēks, kas panāk ātruma maiņu, ir virsmas reakcija, kura trieciena sākumā un galā = 0, bet starpā sasniedz ļoti lielas vērtības.

Pie trieciena rezultāta noteikšanas jāievēro sekojošus apstākļus: 1) materiāla punkta koordinātes par trieciena laiku nemainās, 2) visu citu spēku impulsus par trieciena laiku var ignorēt, 3) trieciena spēka, t.i. reakcijas virziens sakrīt ar virsmas normali.

zīm.187.

Trieciena parādības pētīšanai mēs nelietosim dinamikas pamatnol-mu  $m\bar{j} = \bar{F}$ , jo trieciena spēks ir ļoti liels, trieciena laiks  $\tau$  ir arkatīgāis un mērīšanai viņi grūti pieejami. Visizdevīgāki būs izlietot šeit kustības daudzuma teorēmu.

$$m\bar{V}_2 - m\bar{V}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \bar{F}^{tr} . dt, \text{ kur } t_2 = t_1 + \tau . \text{ Apzīmējot vienkārši-}$$

bas dēļ  $\int_{t_1}^{t_2} \bar{F}^{tr} . dt = \bar{I}^{tr}$  un izdalot nol-mu ar  $m$ , atrodam  $\bar{V}_2 - \bar{V}_1 = \frac{\bar{I}^{tr}}{m}$

Zīmējumā 187. ir iezīmēts krišanas ātrums  $\bar{V}_1 = \bar{MA}$  un refleksijas ātrums  $\bar{V}_2 = \bar{MB}$ , turpretē . redzams, ka  $\bar{V}_2 - \bar{V}_1 = \bar{AB}$ , tā tad

$$\bar{AB} = \frac{1}{m} \bar{I}^{tr}$$

bet ja trieciena spēks iet normas virzienā, tad arī viņa impulss  $\bar{I}^{tr}$  ies normas virzienā un vektors  $\bar{AB}$  būs paralēls virsmas normālei, no kurienes seko, ka krišanas ātruma un refleksijas ātruma projekcijas uz tangenciālo plakni ir vienādas un līdzinājās  $MC$ . To pašu slēdzienu var attiecināt arī uz katru trieciena laika daļu, tā tad par trieciena laiku punkta ātruma vektors mainās tā, ka viņa gala punkts apraksta taisni  $AB$  peralēlu normālei.

Tādā kārtā kustības daudzuma teorēma noved mūs pie sekojoša slēdziena: Punkta trieciena laikā pret nekustošu virsmu ātruma projekcija uz virsmas tangenciālo plakni paliek bez pārmaiņas.

Apzīmēsim leņķi starp krišanas ātrumu  $\bar{V}_1$  un negatīvo normali ar  $i$  un nosauksim viņu par krišanas leņķi; tāpat apzīmēsim leņķi starp refleksijas ātrumu  $\bar{V}_2$  un pozitīvo normali  $MN$  ar  $r$  un nosauksim par refleksijas leņķi, tad to pašu slēdzienu varam izteikt šādā formulā

$$V_1 \sin i = V_2 \sin r \dots \dots \dots (172)$$

Bet ja ātruma tangenciālā projekcija par trieciena laiku nevar mainīties, tad jāmainās otrai ātruma projekcijai uz normali, pie kam ātruma projekcija uz normali maina kā savu virzienu, tā arī savu lielumu.

Par trieciena parādību raksturojošo lielumu pēc Newtona priekšlikuma ir pieņemta refleksijas ātruma projekcijas uz normali  $ME$  attiecībā pret krišanas ātruma projekciju uz negatīvo normali  $MD$ . Šo attiecību apzīmēsim ar  $\mathcal{K}$  un nosauksim par trieciena koeficientu

$$\mathcal{K} = \frac{ME}{MD}$$

Ievedot atkal leņķus  $i$  un  $r$ , dabūsim:

$$\mathcal{K} = \frac{V_2 \cos r}{V_1 \cos i} \dots \dots \dots (173)$$

Trieciena koeficienta vērtība pēc Newtona pētījumiem ir neatkarīga no

ātruma lieluma un virziena, bet tikai no materiāla punkta un virsmas elastīgām īpašībām un atrodās robežās  $0 \leq \mathcal{K} \leq 1$ , pie kam

$\mathcal{K} = 1$  - atbilst absolūti elastīgiem materiāliem, un  
 $\mathcal{K} = 0$  - atbilst absolūti neelastīgiem materiāliem.

Izņemot ideālu gadījumu, tā tad arvienu refleksijas ātrums ir mazāks par krišanas ātrumu.

Uziesim vēl citu izteiksmi trieciena koeficientam

$$\left. \begin{aligned} \text{Ņemam formulu (172)} \quad & V_1 \sin i = V_2 \sin r \\ \text{un no formulas (173)} \quad & \mathcal{K} \cdot V_1 \cos i = V_2 \cos r \end{aligned} \right\}$$

Izdalot pirmo caur otro, dabūsim  $\frac{\text{tg } i}{\mathcal{K}} = \text{tg } r$ , no kurienes  $\mathcal{K} = \frac{\text{tgi}}{\text{tgr}}$  ..(174)

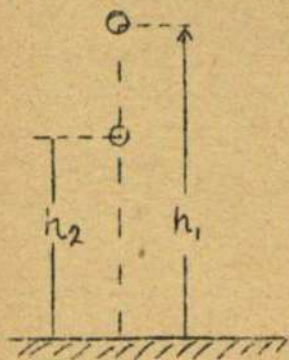
Trieciena koeficients līdzinājās arī krišanas leņķa tangensa attiecībai pret refleksijas leņķa tangensu.

Tagad apskatīsim kā noteikt trieciena koeficientu eksperimentālā ceļā. Laidīsim punktu brīvi krist pret horizontālu virsmu, tad krišanas leņķis  $i = 0$  un no formulas (172) atrodam, ka  $\sin r = 0$  un arī refleksijas leņķis  $r = 0$ . Bet tad no formulas (173)

$$\mathcal{K} = \frac{V_2 \cos 0}{V_1 \cos 0} = \frac{V_2}{V_1}$$

Šinī formulā varam aizvietot  $V_1 = \sqrt{2gh_1}$ , kur  $h_1$  ir krišanas augstums un  $V_2 = \sqrt{2gh_2}$ , kur  $h_2$  ir celšanas augstums pēc trieciena, tad

$$\mathcal{K} = \frac{\sqrt{2gh_2}}{\sqrt{2gh_1}} \quad \text{jeb} \quad \mathcal{K} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}} \quad \dots\dots\dots(175)$$



zīm.188.

Šādā ceļā mēs viegli varam eksperimentāli atrast trieciena koeficientu, tikai jāpiezīmē, ka punkta triecienā pret virsmu materiāli ieiet pāros un mēs varam viņus ņemt vienādus, jeb arī dažādus, t.i. mēs varam atrast trieciena koeficientu, piemēram, tēraudam pret tēraudu, stiklam pret stiklu u.t.t. jeb arī stiklam pret tēraudu.

Dažas trieciena koeficienta vērtības ir vienādiem materiāliem

Tērauds	-	0,90	Stikls	- -	0,94
Dzelzs	-	0,8 - 0,5	Zilona kauls	-	0,90
Varš	-	0,4 - 0,3	Korķis	-	0,55
Svins	-	gandrīz 0			

Spara zaudējums no punkta trieciena pret virsmu.

Ņemot spara pieaugumu par trieciena laiku, un ievērojot, ka refleksijas ātrums  $V_2 = \mathcal{K} V_1 \frac{\cos i}{\cos r}$ , dabūsim

$$\frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2} = \frac{m}{2} \left( \mathcal{K}^2 V_1^2 \frac{\cos^2 i}{\cos^2 r} - V_1^2 \right) = - \frac{mV_1^2}{2} \left( 1 - \mathcal{K}^2 \frac{\cos^2 i}{\cos^2 r} \right)$$

pārveidosim tālāk labo pusi

$$\frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2} = - \frac{mV_1^2}{2} \left( 1 - \mathcal{K}^2 \frac{1 + \text{tg}^2 r}{1 + \text{tg}^2 i} \right), \text{ bet } \text{tg } r = \frac{\text{tg } i}{\mathcal{K}}$$

$$\frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2} = - \frac{mV_1^2}{2} \left( 1 - \mathcal{K}^2 \frac{1 + \frac{\text{tg}^2 i}{\mathcal{K}^2}}{1 + \text{tg}^2 i} \right) = - \frac{mV_1^2}{2} \left( \frac{1 + \text{tg}^2 i - \mathcal{K}^2 - \text{tg}^2 i}{1 + \text{tg}^2 i} \right)$$

un galīgi

$$\frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2} = -\frac{mV_1^2}{2}(1 - \mathcal{K}^2) \cdot \text{Cos}^2 i \dots\dots\dots(176)$$

Absolūti elastīgiem materiāliem  $\mathcal{K} = 1$  un spara zaudējums par trieciena laiku = 0, bet parasti  $\mathcal{K} < 1$ , tā tad iznāks spara zaudējums, kurš būs jo lielāks, jo  $\mathcal{K}$  būs mazāks un jo vairāk krišanas leņķis  $i$  tuvojās 0. Speciālā gadījumā, kad punkts krīt brīvi uz horizontālu virsmu  $\text{Cos } i = 1$  un spara zaudējums

$$\frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2} = -\frac{mV_1^2}{2}(1 - \mathcal{K}^2)$$

Materiāla punkta trieciens pret kustošu virsmu.

Atkal pieņemsim, ka punkts kustās zem kāda spēks  $\vec{F}$  iespaida un viņa kustības nol-mi  $x = f_x(t)$ ,  $y = f_y(t)$ ,  $z = f_z(t)$

Bez tam ir dota kustošā (rheonoma) virsma:  $f(x,y,z,t) = 0$ . Materiāls punkts kustās brīvi, kamēr viņš nesastop minēto virsmu, šinī momentā punkta koordinātēm jāapmierina virsmas nol-mu un apzīmējot trieciena sākuma momentu ar  $t_1$ , mēs dabūsim viņu kā nol-ma

$$f[f_x(t_1), f_y(t_1), f_z(t_1), t_1] = 0 \text{ mazāko reālo pozitīvo sakni.}$$

Kustoša punkta koordinātes trieciena momentā būs

$$x_1 = f_x(t_1), y_1 = f_y(t_1), z_1 = f_z(t_1)$$

un ātruma projekcijas tanī pašā momentā

$$\dot{x}_1 = f'_x(t_1), \dot{y}_1 = f'_y(t_1), \dot{z}_1 = f'_z(t_1)$$

apzīmējot kustoša punkta absolūto ātrumu trieciena momentā ar  $V_1$ , dabūsim

$$V_1 = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2}, \text{ t.i. krišanas ātrums}$$

Apzīmēsim tālāk vēl ar  $\vec{V}_k$  tāda virsmas punkta  $M(x_1, y_1, z_1)$  ātrumu, kurā notiek trieciens un ar  $\vec{V}_G$  - kustoša punkta relatīvo ātrumu pret kustošu virsmu trieciena sākumā.

Sakars starp šiem ātrumu vektoriem, kā jau parasti, ir

$$\vec{V}_1 = \vec{V}_k + \vec{V}_G \text{ jeb } \vec{V}_G = \vec{V}_1 - \vec{V}_k$$

Tālāka punkta kustība ir atkarīga no tā, vai relatīvais ātrums  $\vec{V}_G$  veido ar virsmas pozitīvo normāli platleņķi jeb šaurleņķi, pie kam trieciens notiks tikai pirmā gadījumā.

Ņemot vērā, ka punkts  $M$  pieder virsmai un kustās kopā ar viņu, šī punkta ātruma projekcija uz normali pēc formulas (150) izteicās

$$V_k \text{Cos}(\vec{V}_k, \vec{N}) = -\frac{1}{\Delta} \frac{\partial f}{\partial t} \dots\dots\dots(177)$$

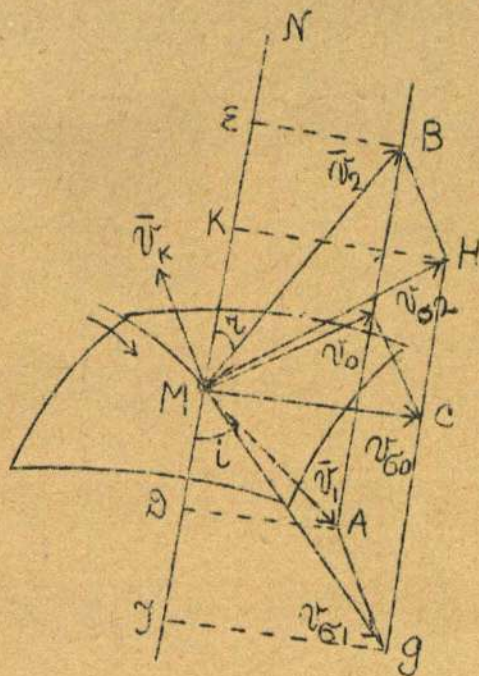
kur  $\Delta = \sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2 + (\frac{\partial f}{\partial z})^2}$  ir virsmas diferenciālais parametrs.

Ja punkts kustās uz saites, tad mo-

$$\frac{\partial f}{\partial x} \dot{x}_1 + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y}_1 + \frac{\partial f}{\partial z} \dot{z}_1 + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

zīm.189.  
mentā  $t_1$ .

bet mūsu gadījumā šī izteiksme būs  $> 0$  jeb  $< 0$ , apskatīsim katru gadījumu atsevišķi.



1) Gadījumā, ja

$$\frac{\partial f}{\partial x} \dot{x}_1 + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y}_1 + \frac{\partial f}{\partial z} \dot{z}_1 + \frac{\partial f}{\partial t} > 0$$

tad izdalot ar  $\Delta$ , dabūsim

$$V_1 \cos(\overline{NV}_1) + \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{\partial f}{\partial t} > 0$$

Aizvietosim otro locekli no formulas (177)

$$V_1 \cos(\overline{NV}_1) - V_k \cos(\overline{NV}_k) > 0$$

Bet kreisā puse reprezentēs relatīva ātruma projekciju uz normali trieciēna sākumā, tā tad  $V_{G_1} \cos(\overline{NV}_{G_1}) > 0$ , šāds rezultāts nozīmē, ka virsma neuzrāda punktam nekādu pretestību un viņš turpinās tālāk savu kustību.

2) Gadījumā, ja  $\frac{\partial f}{\partial x} \dot{x}_1 + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y}_1 + \frac{\partial f}{\partial z} \dot{z}_1 + \frac{\partial f}{\partial t} < 0$

tad izdalot ar  $\Delta$ , dabūsim

$$V_1 \cos(\overline{NV}_1) + \frac{1}{\Delta} \frac{\partial f}{\partial t} < 0 \dots\dots\dots (178)$$

jeb tālāk  $V_1 \cos(\overline{NV}_1) - V_k \cos(\overline{NV}_k) < 0$ . Kreisā pusē atkal reprezentē relatīva ātruma projekciju uz normali trieciēna sākumā, tā tad

$$V_{G_1} \cos(\overline{NV}_{G_1}) < 0$$

Bet šī nevienādība nav apvienojama ar virsmas eksistenci, punkts cenšas ieiet virsmā un izsauc trieciēna laikā reakciju, kuŗa dod punktam tādu impulsu, kas maina viņa ātrumu no  $V_1$  līdz kādam  $V_2$  tā, lai

$$V_2 \cos(\overline{NV}_2) + \frac{1}{\Delta} \frac{\partial f}{\partial t} \geq 0 \dots\dots\dots (179)$$

Ņemot vērā, ka trieciēna laiks  $\tau$  ir ļoti mazs, mēs varam 1) pieņemt, ka punkta koordinātes  $x_1, y_1, z_1$  par trieciēna laiku nemainās, 2) Visu citu spēku, izņemot trieciēna spēka impulsus atņemt, 3) Kustošas virsmas pārvietojumus par trieciēna laiku ignorēt, 4) Skaitīt, ka kustošas virsmas pārnēsamais ātrums  $V_k$  par trieciēna laiku nemainās.

Ja arī virsma kustās, tad tomēr viņas reakcijas jeb trieciēna spēka virziens sakrīt ar normali un trieciēna spēka projekcijas uz koordinātu asīm būs

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \lambda \frac{\partial f}{\partial y}, \lambda \frac{\partial f}{\partial z}$$

kur  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$  par trieciēna laiku jāskaita Const., bet  $\lambda$  ir laika funkcija, kuŗa par trieciēna laiku iegūst lielu pieaugumu.

Pielietojot punktam kustības daudzuma teorēmu par trieciēna laiku, dabūsim

$$m\dot{x}_2 - m\dot{x}_1 = \frac{\partial f}{\partial x} \int_{t_1}^{t_2} \lambda \cdot dt \quad \text{kur } t_2 = t_1 + \tau$$

$$m\dot{y}_2 - m\dot{y}_1 = \frac{\partial f}{\partial y} \int_{t_1}^{t_2} \lambda \cdot dt$$

$$m\dot{z}_2 - m\dot{z}_1 = \frac{\partial f}{\partial z} \int_{t_1}^{t_2} \lambda \cdot dt$$

izdalīsim un pareizināsim labās puses ar  $\Delta$  un pārveidosim

$$\frac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{\cos(\overline{XN})} = \frac{\dot{y}_2 - \dot{y}_1}{\cos(\overline{YN})} = \frac{\dot{z}_2 - \dot{z}_1}{\cos(\overline{ZN})} = \frac{\Delta}{m} \int_{t_1}^{t_2} \lambda \cdot dt$$

Šīs formulas aizrāda uz to, ka ātruma geometriskais pieaugums ir virzīts paralēli virsmas normālei un tāpat, kā pie nekustošas virsmas, ātruma vek-

tora gala punkts par trieciena laiku apraksta taisni AB parallēli virsmas normālei. Bet, ņemot vērā, ka par trieciena laiku pārnesamais ātrums  $V_k$  nemainās; varam teikt, ka arī punkta relatīvais ātrums par trieciena laiku aprakstīs taisni GH parallēli normālei, sk.zīm.189.

Krišanas ātrums  $V_1$  momentā  $t_1$  apmierina nol-mu (178)

$$V_1 \cos(\overline{NV}_1) + \frac{1}{\Delta} \frac{\partial f}{\partial t} < 0$$

Bet refleksijas ātrums  $V_2$  momentā  $t_2$  apmierina nol-mu (179)

$$V_2 \cos(\overline{NV}_2) + \frac{1}{\Delta} \frac{\partial f}{\partial t} \geq 0$$

Starp šiem momentiem mēs varam atrest tādu momentu  $t_0$ , kurā ātrums apzīmēts ar  $V_0$  apmierinās nol-mu

$$V_0 \cos(\overline{NV}_0) + \frac{1}{\Delta} \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \dots\dots\dots(180)$$

(Piezīmēsim, ka nekustošai virsmai  $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$  un ātrums  $V_0$  atradīsies virsmas tangenciālā palknē).

Ar šo laika momentu  $t_0$  viss trieciena laiks  $\tau$  būs sadalīts divās daļās, kuras apzīmēsim ar  $\tau_1$  un  $\tau_2$ .

Laika sprīdī  $\tau_1$  punkta ātruma maiņa būs

$$V_0 \cos(\overline{NV}_0) - V_1 \cos(\overline{NV}_1)$$

jeb ievērojot formulu (180)

$$- \frac{1}{\Delta} \frac{\partial f}{\partial t} - V_1 \cos(\overline{NV}_1), \text{ bet tas nav nekas cits, ka } - V_{G1} \cos(\overline{NV}_{G1}) \text{ relatīva krišanas ātruma projekcija uz normali.}$$

Laika sprīdī  $\tau_1$  punkts zaudē ātrumu, uziesim par to pašu laika sprīdī trieciena spēka impulsu, apzīmējot viņu ar  $I_1^{tr}$ .  
Pēc kustības daudzuma teorēmas

$$- \frac{m}{\Delta} \frac{\partial f}{\partial t} - m V_1 \cos(\overline{NV}_1) = I_1^{tr} \dots\dots\dots(181)$$

jeb arī  $- m V_{G1} \cos(\overline{NV}_{G1}) = I_1^{tr}$

Ja krišanas ātruma projekcija uz normali nav dota, varam izteikt  $I_1^{tr}$  caur virsmas elementiem un ātruma projekcijām, pārveidojot formulu (181)

$$I_1^{tr} = - \frac{m}{\Delta} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x}_1 + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y}_1 + \frac{\partial f}{\partial z} \dot{z}_1 + \frac{\partial f}{\partial t} \right) \dots\dots\dots(181^a)$$

Laika sprīdī  $\tau_2$  punkts atkal iegūst ātrumu ātruma pieaugums par šo laika sprīdī būs

$$V_2 \cos(\overline{NV}_2) - V_0 \cos(\overline{NV}_0) \text{ jeb}$$

$$V_2 \cos(\overline{NV}_2) + \frac{1}{\Delta} \frac{\partial f}{\partial t}$$

un tas līdzinājās  $V_{G2} \cos(\overline{NV}_{G2})$ .

Trieciena spēka impulsu par to pašu laika sprīdī  $\tau_2$  apzīmēsim ar  $I_2^{tr}$  un uziesim, izlietojot atkal kustības daudzuma teorēmu

$$I_2^{tr} = m V_2 \cos(\overline{NV}_2) + \frac{m}{\Delta} \frac{\partial f}{\partial t} \dots\dots\dots(182)$$

jeb vienkāršāk  $I_2^{tr} = m V_{G2} \cos(\overline{NV}_{G2})$

Sastādot abu impulsu attiecību, redzam, ka

$$\frac{I_2^{tr}}{I_1^{tr}} = \frac{V_{G2} \cos(\overline{NV}_{G2})}{-V_{G1} \cos(\overline{NV}_{G1})}$$

Trieciena impulss  $I_2^{tr}$  ātruma atgūšanas sprīdī  $\tau_2$  attiecas pret impulsu  $I_1^{tr}$  ātruma zaudēšanas sprīdī  $\tau_1$  tāpat, kā relatīva atgūta ātruma projekcija uz

normāli attiecās pret relatīva pataudēta ātruma projekciju. Bet ja pie nekustošas virsmas refleksijas ātruma projekcijas uz normāli attiecība pret krišanas ātruma projekciju bija pazīstamais trieciena koeficients  $\mathcal{K}$ , tad šīnī gadījumā to pasu varam attiecināt uz relatīviem ātrumiem, tā tad

$$\frac{I_2^{tr}}{I_1^{tr}} = \frac{V_{G2} \cdot \text{Cos}(\overline{NV}_{G2})}{-V_{G1} \cdot \text{Cos}(\overline{NV}_{G1})} = \mathcal{K} \dots\dots\dots (183)$$

no kurienes seko:  $I_2^{tr} = \mathcal{K} I_1^{tr}$  un  $V_{G2} \text{Cos}(\overline{NV}_{G2}) = \mathcal{K} V_{G1} \text{Cos}(\overline{NV}_{G1})$

Kā redzams zīm.189. punkta triecienā pret kustōšu virsmu trieciena koeficients  $\mathcal{K}$  vairs nelīdzinājās krišanas un refleksijas leņķu tangensu attiecībai

$$\mathcal{K} \neq \frac{\text{tg } i}{\text{tg } r}$$

Pašu refleksijas ātrumu uziesim, izlietojot kustības daudzuma momenta sēo- rēmu visam trieciena laikam

$$m\overline{V}_2 - m\overline{V}_1 = \overline{I}_1^{tr} + \overline{I}_2^{tr}$$

bet abu impulsu virzieni sakrīt, tā tad varam rakstīt:  $m\overline{V}_2 - m\overline{V}_1 = \overline{I}_1^{tr}(1+\mathcal{K})$

Projecējot šo formulu uz koordinātu asīm, dabūsim refleksijas ātruma pro- jekcijas

$m\dot{x}_2 = m\dot{x}_1 + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot I_1^{tr} \cdot \frac{1 + \mathcal{K}}{\Delta}$	}	.....(184)
$m\dot{y}_2 = m\dot{y}_1 + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot I_1^{tr} \cdot \frac{1 + \mathcal{K}}{\Delta}$		
$m\dot{z}_2 = m\dot{z}_1 + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot I_1^{tr} \cdot \frac{1 + \mathcal{K}}{\Delta}$		

kur  $I_1^{tr}$  jāņem pēc formulas (181<sup>a</sup>) un  $\Delta = \sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2 + (\frac{\partial f}{\partial z})^2}$ .

Var dabūt refleksijas ātrumu arī citā ceļā, izlietojot formulu (183)

$$\frac{V_{G2} \text{Cos}(\overline{NV}_{G2})}{-V_{G1} \text{Cos}(\overline{NV}_{G1})} = \mathcal{K} \quad \text{aizvietosim šeit relatīvos ātrumus}$$

$$\frac{V_2 \text{Cos}(\overline{NV}_2) - V_k \text{Cos}(\overline{NV}_k)}{-[V_1 \text{Cos}(\overline{NV}_1) - V_k \text{Cos}(\overline{NV}_k)]} = \mathcal{K}$$

$$V_2 \text{Cos}(\overline{NV}_2) = V_k \text{Cos}(\overline{NV}_k) - \mathcal{K} [V_1 \text{Cos}(\overline{NV}_1) - V_k \text{Cos}(\overline{NV}_k)]$$

$$\boxed{V_2 \text{Cos}(\overline{NV}_2) = -\mathcal{K} V_1 \text{Cos}(\overline{NV}_1) + (1 + \mathcal{K}) V_k \text{Cos}(\overline{NV}_k)} \quad \dots\dots\dots (185)$$

Ja nav dots  $V_k$ , bet tikai kustōšas virsmas nol- ms, tad var aizvietot no for- mulas (177)  $V_k \text{Cos}(\overline{NV}_k) = -\frac{1}{\Delta} \frac{\partial f}{\partial t}$  un tad

$$\boxed{V_2 \text{Cos}(\overline{NV}_2) = -\mathcal{K} V_1 \text{Cos}(\overline{NV}_1) - \frac{1 + \mathcal{K}}{\Delta} \cdot \frac{\partial f}{\partial t}} \quad \dots\dots\dots (185^a)$$

Ja punkta trieciens notiek pret kustōšu virsmu, refleksijas ātrums, kā re- dzams pēc formulām (184) un (185-a), var iznākt arī lielāks par krišanas ātrumu.

Ja virsma ir nekustōša, tad  $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$  un no formulas (185<sup>a</sup>), mēs dabūjam pazīstamo attiecību starp refleksijas un krišanas ātruma projekcijām.

Spara zaudējums punkta triecienā pret kustošu virsmu.

Ņemsim pirmo no formulām (184) un pareizināsim viņu vienreiz ar  $\dot{x}_2$  un otru reizi ar  $\dot{x}_1$

$$\left. \begin{aligned} m\dot{x}_2^2 &= m\dot{x}_1\dot{x}_2 + \dot{x}_2 \frac{\partial f}{\partial x} I_1^{\text{tr}} \frac{1+\mathcal{K}}{\Delta} \\ m\dot{x}_2\dot{x}_1 &= m\dot{x}_1^2 + \dot{x}_1 \frac{\partial f}{\partial x} I_1^{\text{tr}} \frac{1+\mathcal{K}}{\Delta} \end{aligned} \right\} \text{ un ņemsim viņu pus-} \\ \text{summu}$$

$$\frac{m\dot{x}_2^2}{2} - \frac{m\dot{x}_1^2}{2} = \frac{1}{2}(\dot{x}_2 + \dot{x}_1) \frac{\partial f}{\partial x} I_1^{\text{tr}} \frac{1+\mathcal{K}}{\Delta}$$

pēc analogijas uzrakstīsim

$$\frac{m\dot{y}_2^2}{2} - \frac{m\dot{y}_1^2}{2} = \frac{1}{2}(\dot{y}_2 + \dot{y}_1) \frac{\partial f}{\partial y} I_1^{\text{tr}} \frac{1+\mathcal{K}}{\Delta}$$

$$\frac{m\dot{z}_2^2}{2} - \frac{m\dot{z}_1^2}{2} = \frac{1}{2}(\dot{z}_2 + \dot{z}_1) \frac{\partial f}{\partial z} I_1^{\text{tr}} \frac{1+\mathcal{K}}{\Delta}$$

un saskaitīsim visas 3 formulas

$$\frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2} = \frac{1}{2} \left[ \dot{x}_2 \frac{\partial f}{\partial x} + \dot{y}_2 \frac{\partial f}{\partial y} + \dot{z}_2 \frac{\partial f}{\partial z} + \dot{x}_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \dot{y}_1 \frac{\partial f}{\partial y} + \dot{z}_1 \frac{\partial f}{\partial z} \right] I_1^{\text{tr}} \frac{1+\mathcal{K}}{\Delta}$$

$$\frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2} = \left[ V_2 \text{Cos}(\overline{NV}_2) + V_1 \text{Cos}(\overline{NV}_1) \right] I_1^{\text{tr}} \frac{1+\mathcal{K}}{\Delta}$$

Šo rezultātu var vēl pārveidot, aizvietojojot no formulas (182):

$$V_2 \text{Cos}(\overline{NV}_2) = \frac{1}{m} I_1^{\text{tr}} - \frac{1}{\Delta} \frac{\partial f}{\partial t}, \text{ bet } I_2^{\text{tr}} = \mathcal{K} I_1^{\text{tr}}$$

$$V_2 \text{Cos}(\overline{NV}_2) = \frac{\mathcal{K}}{m} I_1^{\text{tr}} - \frac{1}{\Delta} \frac{\partial f}{\partial t}$$

un no formulas (181):

$$V_1 \text{Cos}(\overline{NV}_1) = -\frac{1}{m} I_1^{\text{tr}} - \frac{1}{\Delta} \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2} = \left[ \frac{\mathcal{K}}{m} I_1^{\text{tr}} - \frac{1}{\Delta} \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{m} I_1^{\text{tr}} - \frac{1}{\Delta} \frac{\partial f}{\partial t} \right] I_1^{\text{tr}} \frac{1+\mathcal{K}}{\Delta}$$

$$\frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2} = \left[ \frac{\mathcal{K}-1}{m} I_1^{\text{tr}} - \frac{2}{\Delta} \frac{\partial f}{\partial t} \right] I_1^{\text{tr}} \frac{1+\mathcal{K}}{\Delta}$$

$$\boxed{\frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2} = -\frac{(1-\mathcal{K}^2)}{2m} (I_1^{\text{tr}})^2 - \frac{1+\mathcal{K}}{\Delta} \frac{\partial f}{\partial t} I_1^{\text{tr}}} \dots\dots\dots(186)$$

Vispārīgi jāpiezīmē, ka punkta triecienā pret kustošu virsmu var notikt netikai spara zaudējums, bet arī spara pieaugums, atkarībā no tā, vai  $V_2$  iznāk lielāks jeb mazāks par  $V_1$ .

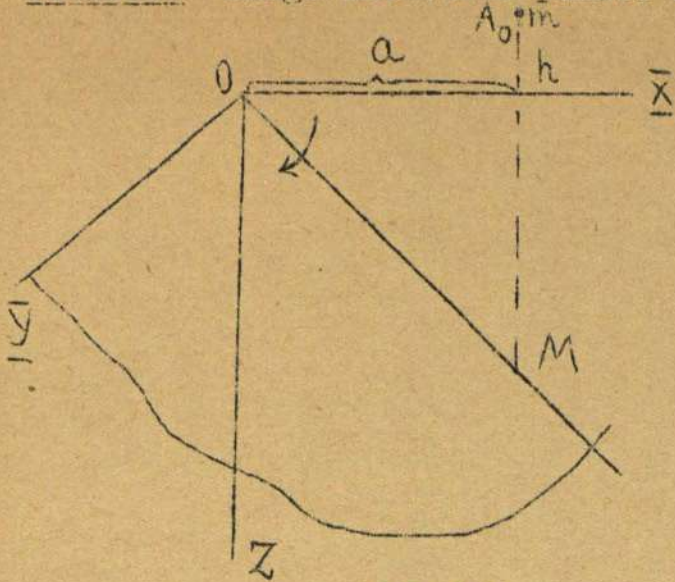
Speciālā gadījumā, ja virsmā ir nekustoša,  $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$  un formula (186) pārīet formulā (176), jo tad

$$I_1^{\text{tr}} = -mV_1 \text{Cos}(\overline{NV}_1) = mV_1 \text{Cos } i$$

un 
$$\frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2} = -\frac{(1-\mathcal{K}^2)}{2m} m^2 V_1^2 \text{Cos}^2 i = -\frac{mV_1^2}{2} (1-\mathcal{K}^2) \text{Cos}^2 i$$



Piemērs. Smags materiāls punkts ar masu  $m$  palaists brīvi krist laika momentā  $t = 0$  no punkta  $A_0(a, 0, -h)$ . Noteikt viņa triecienu rezultātu pret plakni



zīm.190.

$$\frac{xt}{a} \sqrt{\frac{2}{3} gh} - z = 0$$

kura griežas pulkstenrādītāja virzienā ap  $\bar{y}$  asi.

Punkta kustības nol-mi brīvā kustībā līdz triecienam ir

$$x = a, y = 0, z = \frac{gt^2}{2} - h$$

Triecienu momentu uziesim, ievietojot virsmas nol-mā koordinātes kā laika funkcijas

$$t \sqrt{\frac{2}{3} gh} - \frac{gt^2}{2} + h = 0 \quad \text{jeb}$$

$$t^2 - 2t \sqrt{\frac{2h}{3g}} - \frac{2h}{g} = 0$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{3g}} \pm \sqrt{\frac{2h}{3g} + \frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2h}{3g}} \pm 2 \sqrt{\frac{2h}{3g}}; t_1 = 3 \sqrt{\frac{2h}{3g}}; t_2 = -\sqrt{\frac{2h}{3g}}$$

vienīga reāla pozitīva sakne ir  $t_1 = 3 \sqrt{\frac{2h}{3g}}$  un šinī momentā notiek punkta trieciens pret plakni. Uziesim triecienu punkta  $M$  koordinātes

$$x_1 = a, y_1 = 0 \quad \text{un} \quad z_1 = \frac{g}{2} \cdot 9 \frac{2h}{3g} - h = 2h$$

Krišanas ātruma projekcijas būs

$$\dot{x}_1 = 0, \quad \dot{y}_1 = 0, \quad \dot{z}_1 = gt_1 = g \cdot 3 \sqrt{\frac{2h}{3g}} = \sqrt{6gh}$$

Lai dabūtu refleksijas ātruma projekcijas, uziesim pēc formulas (181<sup>a</sup>)

$$I_1^{tr} = - \frac{m}{\Delta} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x}_1 + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y}_1 + \frac{\partial f}{\partial z} \dot{z}_1 + \frac{\partial f}{\partial t} \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{t_1}{a} \sqrt{\frac{2}{3} gh} = \frac{3}{a} \sqrt{\frac{2h}{3g}} \sqrt{\frac{2}{3} gh} = \frac{2h}{a}; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -1$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{x}{a} \sqrt{\frac{2}{3} gh} = \sqrt{\frac{2}{3} gh}; \quad \Delta = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2} = \sqrt{\frac{4h^2}{a^2} + 1}$$

$$I_1^{tr} = - \frac{ma}{\sqrt{a^2 + 4h^2}} \left( \frac{2h}{a} \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 1 \cdot \sqrt{6gh} + \sqrt{\frac{2}{3} gh} \right) = \frac{2ma}{\sqrt{a^2 + 4h^2}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3} gh}$$

refleksijas ātruma projekcijas pēc formulām (184)

$$m\dot{x}_2 = m\dot{x}_1 + \frac{\partial f}{\partial x} I_1^{tr} \frac{1 + \mathcal{R}}{\Delta}$$

$$m\dot{x}_2 = 0 + \frac{2h}{a} \cdot \frac{2ma}{\sqrt{a^2 + 4h^2}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3} gh} \cdot \frac{(1 + \mathcal{R})a}{\sqrt{a^2 + 4h^2}}$$

$$\boxed{\dot{x}_2 = \frac{4ah}{a^2 + 4h^2} (1 + \mathcal{R}) \sqrt{\frac{2}{3} gh}}$$

$$m\dot{y}_2 = m\dot{y}_1 + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot I_1^{\text{tr}} \frac{1 + \mathcal{K}}{\Delta}$$

$$m\dot{y}_2 = 0 + 0, \quad \boxed{\dot{y}_2 = 0}$$

$$m\dot{z}_2 = m\dot{z}_1 + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot I_1^{\text{tr}} \frac{1 + \mathcal{K}}{\Delta}$$

$$m\dot{z}_2 = m\sqrt{6gh} - 1 \cdot \frac{2ma}{\sqrt{a^2 + 4h^2}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}gh} \cdot \frac{(1 + \mathcal{K}) \cdot a}{\sqrt{a^2 + 4h^2}}$$

$$\boxed{\dot{z}_2 = \sqrt{6gh} - \frac{2a^2}{a^2 + 4h^2} (1 + \mathcal{K}) \sqrt{\frac{2}{3}gh}}$$

Spara zaudējuma uziesim pēc formulas (186)

$$\frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2} = - \frac{(1 - \mathcal{K}^2)}{2m} (I_1^{\text{tr}})^2 - \frac{1 + \mathcal{K}}{\Delta} \frac{\partial f}{\partial t} I_1^{\text{tr}}$$

$$\frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2} = - \frac{1 - \mathcal{K}^2}{2m} \cdot \frac{4m^2 a^2}{a^2 + 4h^2} \cdot \frac{2}{3} gh - \frac{(1 + \mathcal{K})a}{\sqrt{a^2 + 4h^2}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}gh} \cdot \frac{2ma}{\sqrt{a^2 + 4h^2}} \sqrt{\frac{2}{3}gh}$$

$$\frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2} = - \frac{2ma^2}{a^2 + 4h^2} \cdot \frac{2}{3} gh (1 - \mathcal{K}^2 + 1 + \mathcal{K})$$

un galīgi 
$$\frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2} = - \frac{2ma^2}{a^2 + 4h^2} \cdot \frac{2}{3} gh (1 + \mathcal{K})(2 - \mathcal{K})$$

Šinī gadījumā, ja arī trieciena koeficients būtu  $\mathcal{K} = 1$ , tomēr iznāks spara zaudējums lielumā:

$$\frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2} = - \frac{4ma^2}{a^2 + 4h^2} \cdot \frac{2}{3} gh$$